ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

<u>Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α</u>

Η διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μέσα από την ανάλυση δραστηριοτήτων σε σχολικά εγχειρίδια

Μπιλίνη Ελένη
ΑΜ Δ201404

Επιβλέπουσα καθηγήτρια : Δέσποινα Πόταρη

`

Αθήνα, Ιανουάριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Ιανουαρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪	Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή
▪	Χ. Τριανταφύλλου	Επικ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪	Χ. Τριανταφύλλου	Επικ. Καθηγήτρια
▪	Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω

- Την επιβλέπουσα καθηγήτρια κα. Πόταρη Δέσποινα για όλα όσα με δίδαξε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό αλλά και προπτυχιακό πρόγραμμα. Οι πολύτιμες συμβουλές της, η έμπρακτη υποστήριξη της και η ενθάρρυνση της κατά τη διάρκεια της συγγραφής μου έδωσαν τη δύναμη να συνεχίσω.

- Τον κ. Ψυχάρη Γεώργιο και την κα. Τριανταφύλλου Χρυσαυγή για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή της εργασίας μου.

- Τον κ. Λάππα Διονύσιο για τη συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή

- Όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τους νέους ορίζοντες που μας άνοιξαν.

- Τους συμφοιτητές μου που αποτέλεσαν τους ιδανικούς συνοδοιπόρους σε αυτή την υπέροχη διαδρομή γνώσης και εμπειρίας.

- Την κα. Κλη Ελένη για την αμέριστη βοήθεια και την προθυμία της να μας λύσει οποιαδήποτε απορία.

- Τους γονείς μου και τον αδελφό μου που με αγάπη και κατανόηση στηρίζουν κάθε μου προσπάθεια.

- Τον Παναγιώτη για την ειλικρινή του διάθεση να ακούει κάθε μου σκέψη και προβληματισμό.

- Και τέλος τις αγαπημένες μου συναδέλφους Ιωάννα, Φωτεινή και Αντωνία για την καθημερινή τους συμπαράσταση

Περιεχόμενα

Περίληψη

Τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της σχολικής πραγματικότητας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση παρέχοντας ένα διδακτικό εργαλείο που καθορίζει το τι, σε ποιον, πότε και πως θα διδαχθεί η μαθηματική γνώση. Στην έρευνα για τη Διδακτική των Μαθηματικά τα εγχειρίδια Μαθηματικών σχετίζονται δυναμικά με τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών ενώ διαπιστώνεται ο άλλοτε ενθαρρυντικός και ο άλλοτε αποθαρρυντικός ρόλος τους για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται η διερεύνηση των παρεχόμενων ευκαιριών μάθησης σε μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ε' και Στ' Δημοτικού) αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και συγκεκριμένα τις ισομετρίες (παράλληλη μεταφορά, στροφή, ανάκλαση). Συγκεκριμένα θα διερευνήσω τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές μέσα από την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων από τις χώρες Μ. Βρετανία, Καναδά και Κύπρο. Η ανάλυση θα αφορά στις προτεινόμενες δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών οι οποίες θα μελετηθούν με άξονες το είδος των γνωστικών τους απαιτήσεων, τα είδη μαθηματικού συλλογισμού που ενθαρρύνονται ,το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται καθώς και τη διδακτική τους διαχείριση. Ας σημειωθεί ότι η μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον όχι μόνο από μαθηματικής άποψης αλλά περισσότερο λόγω της κυρίαρχης θέσης που έχουν κερδίσει στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών. Παράλληλα η επιλογή των σχολικών εγχειριδίων από τις συγκεκριμένες χώρες έγινε με κριτήρια την ποικιλομορφία ως προς τις υιοθετούμενες διδακτικές προσεγγίσεις και την ανομοιογένεια ως προς τους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων στα οποία έχουν στηριχθεί κατά την συγγραφή τους. Μεθοδολογικά για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων υιοθετείται ως μονάδα ανάλυσης η μαθηματική δραστηριότητα (task) που αξιοποιείται κατά την εισαγωγή, την διερεύνηση, την εφαρμογή ή τον εμπλουτισμό-επέκταση του μαθηματικού περιεχομένου που διδάσκεται.

Λέξεις κλειδιά: γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, ευκαιρίες μάθησης, σχολικά εγχειρίδια, μαθηματική δραστηριότητα, γνωστικές απαιτήσεις,

ABSTRACT

Mathematics textbooks are an integral part of school reality in primary and secondary education by providing a teaching tool that determines what, when, when, and how to teach mathematical knowledge. In Mathematics Education Research, textbooks are dynamically related to the learning opportunities of students. In this study, I attempt to investigate the provided learning opportunities for elementary students, in terms of geometric transformations and especially isometries (translation, reflection and rotation). In particular, I will explore the learning opportunities offered to students through the analysis of school textbooks from the UK, Canada and Cyprus. The analysis will refer to the geometric transformations tasks, which will be studied on the basis of their cognitive demands, the encouraged mathematical reasoning skills and finally the type of context in which they are integrated. It should be noted that the study of geometric transformations is of research interest not only from a mathematical point of view, but also due to the dominant position they have gained in modern curricula. At the same time, the selection of textbooks was made on the basis of the diversity of the adopted teaching approaches and the heterogeneity of the objectives of the curricula on which they were based during their writing. Methodologically for the analysis of the school manuals, the mathematical activity (tasks) used in the introduction, exploration, application or enrichment-extension of the mathematical content taught, is adopted as the analysis unit.

Keywords: geometric transformations, learning opportunities, textbooks, mathematical tasks, cognitive demands

1.Εισαγωγή

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο απώτερος σκοπός της εκπαιδευτικής έρευνας είναι η παραγωγή νέας γνώσης με σκοπό την βελτίωση της εκπαίδευσης και της κοινωνίας γενικότερα. Ο γενικότερος αυτός σκοπός κατακερματίζεται στα επιμέρους γνωστικά αντικείμενα, μεταφράζεται σε συγκεκριμένους στόχους οι οποίοι με τη σειρά τους τροφοδοτούν τα αναλυτικά προγράμματα των χωρών και κινούν τα νήματα στην συγγραφή σχολικών εγχειριδίων.

Φυσικό επακόλουθο αυτής της συλλογιστικής είναι ότι τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν ένα σημαντικό μέρος της σχολικής πραγματικότητας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε μάλιστα ότι παρέχουν ένα πλαίσιο προβληματισμού για το τι , σε ποιον ,πότε και πως θα διδαχθεί κάτι. Το επιδιωκόμενο και το τρέχων αναλυτικό πρόγραμμα καθορίζει και καθορίζεται σε πολλές χώρες και σχολεία από εγχειρίδια ειδικά διαμορφωμένα για το εκάστοτε επίπεδο, ενώ τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές αφιερώνουν σημαντικό μέρος του χρόνου τους στην σχολική τάξη αλλά και επιπρόσθετο χρόνο πριν και μετά την διδακτική πράξη δουλεύοντας με το εκπαιδευτικό υλικό. Μάλιστα οι ερευνητές στο πλαίσιο της Third International Math and Science Study (TIMSS) θέλοντας ν' αναφερθούν στον εξέχοντα ρόλο των σχολικών εγχειριδίων τα συμπεριέλαβαν ως ένα τέταρτο επίπεδο, αυτό του εν δυνάμει αναλυτικού προγράμματος.

Μελετώντας την υπάρχουσα βιβλιογραφία παρατηρούμε ότι σε πολλές περιπτώσεις ,επιχειρείται μια δυναμική συσχέτιση των σχολικών εγχειριδίων με τις ευκαιρίες μάθησης (opportunities to learn) ώστε να διασαφηνιστούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες τα μαθηματικά εγχειρίδια λειτουργούν άλλοτε ως ενθαρρυντικός και άλλοτε ως αποθαρρυντικός παράγοντας για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Σε άλλες έρευνες το ενδιαφέρον εστιάζεται στην διαρκή αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών με το σχολικό εγχειρίδιο αφού αυτό αποτελεί έναν δίαυλο παιδαγωγικών ιδεών. Πιο αναλυτικά υποστηρίζεται ότι οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν, παρεμβαίνουν και προσδίδουν νέο περιεχόμενο στο εκπαιδευτικό υλικό. Από τα παραπάνω γίνεται φανερός ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων ως ένας από τους παράγοντας που ρυθμίζει σε σημαντικό βαθμό το πολυπαραγοντικό φαινόμενο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Έχει επομένως ιδιαίτερη αξία μια ενδελεχής μελέτη προκειμένου να διερευνηθούν και να τεθούν σε αντιπαραβολή διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις όπως αυτές παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Στην παρούσα εργασία επέλεξα να χρησιμοποιήσω εκπαιδευτικό υλικό για τα Μαθηματικά του Δημοτικού σχολείου από την Ελλάδα, την Κύπρο και τον Καναδά καθώς και δυο άλλες σειρές που υιοθετούν το διεθνές πρόγραμμα σπουδών του Cambridge.

Συγκεκριμένα, το αντικείμενο μελέτης που πρόκειται να διερευνηθεί είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο (παράλληλη μεταφορά, στροφή, ανάκλαση). Η επιλογή αυτή αιτιολογείται ποικιλοτρόπως.

Αρχικά, τα σχολικά βιβλία που επιλέχθηκαν για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης ικανοποιούν το κριτήριο της ποικιλομορφίας των αναλυτικών προγραμμάτων που υιοθετήθηκαν για την συγγραφή τους. Παράλληλα αποτελούν ιδανικά παραδείγματα για την μελέτη της διδακτικής κουλτούρας που καθένα από αυτά πρεσβεύει. Πράγματι τα σχολικά εγχειρίδια που μπαίνουν στο μικροσκόπιο αυτής της έρευνας διαφέρουν ριζικά. Από τη μια πλευρά έχουμε μια τη νεοσύστατη σειρά Μαθηματικών βιβλίων της Κύπρου και το αναδιαμορφωμένο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τη Δημοτική εκπαίδευση στην Ελλάδα καθώς και ενδεικτικές δραστηριότητες που το συνοδεύουν. Από την άλλη πλευρά έχουμε δυο «εμπορικές» σειρές μαθηματικών εγχειριδίων, μια εκ των οποίων έχει την σφραγίδα του πανεπιστημίου του Cambridge, ενώ η δεύτερη ακολουθεί το Α.Π.Σ του Καναδά. Αναφορικά με το αντικείμενο μελέτης δηλαδή τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς η επιλογή στηρίχθηκε κυρίως στο ενδιαφέρον που παρουσιάζει η μελέτη τους από μαθηματικής και από διδακτικής πλευράς. Κάτι τέτοιο ενισχύεται τόσο από τη κυρίαρχη θέση που έχουν κερδίσει σταδιακά στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών ανά τον κόσμο όσο και στην συμβολή τους στην ανάπτυξη χωρικού συλλογισμού.

Υιοθετώντας τον ορισμό που δίνεται στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση: «Ο χωρικός συλλογισμός είναι η διαδικασία με τη βοήθεια της οποίας σχηματίζουμε ιδέες για τις ιδιότητες και σχέσεις στο χώρο, τις αποδίδουμε με πραγματικές και νοερές εικόνες, τις διαχειριζόμαστε για την αντιμετώπιση καταστάσεων.

Πιο συγκεκριμένα ο χωρικός συλλογισμός περιλαμβάνει: την αντίληψη, κατανόηση και παράσταση θέσεων, αμοιβαίων σχέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών μέσα στο χώρο όπως και γενικότερα τη διαχείριση κάθε χωρικής πληροφορίας και των μετασχηματισμών της». Μάλιστα τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών έχουν ήδη στραφεί προς την ανάπτυξη αυτού, επιτρέποντας την πιο ουσιαστική και σε βάθος κατανόηση γεωμετρικών εννοιών που θα θεμελιωθούν τυπικά σε επόμενη βαθμίδα εκπαίδευσης.

Υπό το πρίσμα αυτό θα επιχειρήσω να διερευνήσω και ν' αντιπαραβάλω τις διδακτικές προσεγγίσεις για την έννοια των μετασχηματισμών που προτείνονται σε σχολικά εγχειρίδια της πέμπτης και έκτης δημοτικού.

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται προς εξέταση στην παρούσα μελέτη μου είναι:

1. Ποιες οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές μέσω των δραστηριοτήτων που εντοπίζονται στα σχολικά εγχειρίδια αναφορικά με την έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών και πως αυτές σχετίζονται με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος;

2. Ποιες μαθηματικές διεργασίες και πιο είδος μαθηματικού συλλογισμού εγείρονται μέσα από τις επιλεγόμενες από τα σχολικά εγχειρίδια δραστηριότητες;
3. Τι είδους συνδέσεις επιτυγχάνονται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών;
Μεθοδολογικά, η μονάδα ανάλυσης στην οποία θα στηριχθώ για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων είναι η δραστηριότητα (task) που αξιοποιείται είτε ως αντικείμενο αφόρμησης της διδασκαλίας είτε ως αντικείμενο διερεύνησης της μαθηματικής έννοιας είτε ως αντικείμενο αξιολόγησης της κατανόησης της μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές. Συνοψίζοντας την πορεία της εργασίας μου, εκθέτω επιγραμματικά τα κύρια σημεία της. Αρχικά, στο θεωρητικό μέρος επιχειρείται μια αναλυτική ανασκόπηση της έρευνας η οποία θα στηριχθεί σε δυο κεντρικούς άξονες. Ο πρώτος άξονας θ' αναφέρεται στο αναλυτικό πρόγραμμα και το εκπαιδευτικό υλικό. Στον δεύτερο άξονα το ενδιαφέρον μας θα εστιάζεται στην διερεύνηση του όρου «μαθηματική δραστηριότητα». Στον τρίτο άξονα θα γίνει εκτενής αναφορά στο αντικείμενο μελέτης δηλαδή στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς .Στον τέταρτο και τελευταίο άξονα θα περιγραφούν οι επιμέρους στόχοι για την διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών όπως εμφανίζονται στα αναλυτικά προγράμματα στα οποία θα επικεντρωθεί η μελέτη μας. Θα ακολουθήσει επεξήγηση της μεθοδολογίας που υιοθετήθηκε για την παρούσα έρευνα καθώς και παρουσίαση των αποτελεσμάτων από την συγκριτική μελέτη των εγχειριδίων .Τέλος θα γίνει έκθεση των συμπερασμάτων , με επίκεντρο τις διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές κατά την μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

2.1 Μαθηματική εκπαίδευση και εκπαιδευτικό υλικό.

2.1.1 Η φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών, και της φιλοσοφίας της εκπαίδευσης η αναζήτηση για το τι συνιστά διδακτέα γνώση και τι όχι παραμένει ένα από τα κυρίαρχα ζητήματα όταν έρχεται στο προσκήνιο η συζήτηση για τον σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων και την χάραξη εκπαιδευτικής πολιτικής.
Η Valero, 2007 υιοθετώντας μια κοινωνικοπολιτική προσέγγιση δίνει αρχικά τον δικό της ορισμό για την μαθηματική εκπαίδευση. Έτσι, «η μαθηματική εκπαίδευση αναφέρεται στο σύνολο των πρακτικών με τις οποίες νοηματοδοτείται η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών».

Όπως επισημαίνει, αυτές οι πρακτικές δεν ενυπάρχουν μόνο στην τάξη αλλά επεκτείνονται και σε χώρους όπου λαμβάνονται αποφάσεις αναφορικά με την μάθηση και την διδασκαλία των Μαθηματικών. Κατά συνέπεια, τέτοιες πρακτικές συναντώνται κυρίως σε χώρους που αφορούν τη χάραξη εθνικής ή διεθνούς εκπαιδευτικής πολιτικής για τα Μαθηματικά, την επιμόρφωση εκπαιδευτικών, την παραγωγή σχολικών εγχειριδίων κ.α. οι οποίοι συναποτελούν το δίκτυο των πρακτικών για τη μαθηματική εκπαίδευση (Valero, 2002).

Ποια είναι όμως η σημασία της κοινωνικοπολιτικής χροιάς που αποδίδεται στις πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης;

Σύμφωνα με την Valero, 2007 οι πρακτικές αυτές χαρακτηρίζονται ως κοινωνικές όχι μόνο εξαιτίας της θεώρησης της μάθησης ως μιας κατεξοχήν κοινωνικής διαδικασίας ή του συλλογικού χαρακτήρα με τον οποίο δομείται η μαθηματική γνώση αλλά πολύ περισσότερο εξαιτίας των δυναμικών που αναπτύσσονται μέσα στο δίκτυο πρακτικών στις οποίες εντάσσεται η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Ταυτόχρονα όμως χαρακτηρίζονται και πολιτικές καθώς εμπλέκονται στον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί και διαχέεται η δύναμη στις κοινωνικές σχέσεις. Μάλιστα στο πνεύμα της προσέγγισης του Foucault, διερευνάται η κατανομή της δύναμης στον μικρόκοσμο της μαθηματικής εκπαίδευσης μεταξύ των συντελεστών που εμπλέκονται στο λεγόμενο δίκτυο πρακτικών και γίνεται αντιληπτός ο διαφορετικός βαθμός συμμετοχής στην άσκηση εξουσίας.

Στο ίδιο κλίμα ,ο Popkewitz, 1988 επισημαίνει ότι αυτό που σήμερα καλούμε σχολικά μαθηματικά έχει διαμορφωθεί μέσα από κοινωνικές και ιστορικές ζυμώσεις και σχετίζεται ελάχιστα με το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών. Αναλύοντας την προηγούμενη άποψη υπογραμμίζει ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν έχει καθιερωθεί ως a priori αλλά είναι απόλυτα συνυφασμένη με την πρόοδο και τις κατακτήσεις της ανθρωπότητας. Είναι ,όπως ο ίδιος αναφέρει, «μια επιχείρηση στον πυρήνα της κοινωνίας , το προφίλ και οι επιλογές της οποίας πηγάζουν από την λειτουργία του σχολείου ως ο πλέον κατάλληλος θεσμός για την γαλούχηση και τον επαγγελματικό προσανατολισμό».

Επομένως, το ζητούμενο κατά τον Popkewitz είναι ν ’αντιληφθούμε τον τρόπο θεώρησης των Μαθηματικών μέσα στο ήδη οργανωμένο και δομημένο εκπαιδευτικό σύστημα. Με αυτόν τον τρόπο όπως αναφέρει θα καταφέρουμε να αναδιαμορφώσουμε τις αντιλήψεις μας για τι συνιστά σχολική επίδοση, και να δώσουμε νέο νόημα στους όρους σχολική επιτυχία ή αποτυχία.

Όπως επισημαίνεται οι νόρμες που επιβάλλουν την διδασκαλία των Μαθηματικών ως γνωστικό αντικείμενο συνοψίζονται σε τρία σημεία, την συνεισφορά τους στην τυποποίηση της επιστήμης μέσω της συμβολικής αναπαράστασης, την υπεροχή που προσφέρουν σε αυτούς που κατέχουν την μαθηματική γνώση και τέλος την υιοθέτηση μιας πρωτότυπης συλλογιστικής -που δεν συναντάται σε κανένα άλλο επιστημονικό πεδίο- ως εργαλείο κατανόησης, ερμηνείας και κατασκευής της σύνθετης πραγματικότητας.

Η ίδια θέση προβάλλεται από το NCTM, όπου υπογραμμίζεται η αδήριτη ανάγκη για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης ως ένα απαραίτητο εφόδιο που προορίζεται για όλους. Βασική αφετηρία είναι η παραδοχή ότι όλοι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εργαστούν με μαθηματικά προβλήματα και έννοιες που αποτελούν πρόκληση για αυτούς. Θέτει μάλιστα τις αρχές πάνω στις οποίες θα βασίζεται η μαθηματική εκπαίδευση.

1. **Η αρχή της ισότητας**, σύμφωνα με την οποία όλοι οι μαθητές είναι σε θέση και πρέπει να μάθουν μαθηματικά με την προϋπόθεση ότι έχουν πρόσβαση σε υψηλού επιπέδου διδασκαλία.

2. **Η αρχή της συνοχής του αναλυτικού προγράμματος**, σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές ιδέες πρέπει να δομούνται προοδευτικά, με έμφαση στα σημαντικά και να διαρθρώνονται καλά σε όλα τα επίπεδα.

3. **Η αρχή της αποτελεσματικής διδασκαλίας ,**σύμφωνα με την οποία απαιτείται καλή γνώση του αντικειμένου διδασκαλίας ,της επιδιωκόμενης και της προηγούμενης γνώσης των μαθητών, πρόκληση του ενδιαφέροντος και υποστήριξη σε κάθε στάδιο της μάθησης.
4. **Η αρχή της μάθησης**, σύμφωνα με την οποία η γνώση χτίζεται ενεργητικά πάνω στις εμπειρίες και την πρότερη γνώση των μαθητών

5. **Η αρχή της αξιολόγησης**, σύμφωνα με την οποία η αξιολόγηση ανατροφοδοτεί τον εκπαιδευτικό προσανατολίζοντας τον στην λήψη διδακτικών αποφάσεων και προσφέρει στον μαθητή την δυνατότητα να έχει ο ίδιος εποπτεία για το τι και πως αξιολογείται.

6. **Η αρχή της συνεισφοράς της τεχνολογίας**, σύμφωνα με την οποία η τεχνολογία υπεισέρχεται στην διδασκαλία των Μαθηματικών ,υποστηρίζει και ενισχύει την διερευνητική μάθηση.

Μάλιστα, έχει τεκμηριωθεί ερευνητικά ότι η μάθηση των Μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της αναλυτικής ικανότητας του ατόμου και στη βελτίωση της αυτοεικόνας του ώστε να οργανώνει και να ελέγχει με επάρκεια την κοινωνική του ζωή (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Επιπρόσθετα, υπογραμμίζεται ότι η κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και μεθόδων είναι απαραίτητη προϋπόθεση, για να μπορεί το άτομο να λειτουργήσει ικανοποιητικά σε μια δημοκρατική κοινωνία.

2.1.2 Το αναλυτικό πρόγραμμα στην έρευνα για τη ΔτΜ.

Ο όρος αναλυτικό πρόγραμμα χρησιμοποιήθηκε και χρησιμοποιείται ποικιλοτρόπως ανά τον κόσμο. Οι Behm &Lloyd, 2009 υπογραμμίζουν τον σημαίνοντα ρόλο του αναλυτικού προγράμματος υποστηρίζοντας ότι « Το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών έχει σκοπό να διασφαλίσει ότι κάθε άτομο θα αποκτήσει τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες που θα του επιτρέψουν να δράσει ως αυτόνομο και παραγωγικό μέλος μιας σύγχρονης δημοκρατικής κοινωνίας».

Οι Remillard &Heck, 2014 ορίζουν το αναλυτικό πρόγραμμα για τα Μαθηματικά ως «ένα πλάνο που περιλαμβάνει εμπειρίες που πρόκειται να βιώσουν ή βιώνουν ήδη στην πραγματικότητα οι μαθητές, διαμορφωμένο έτσι ώστε να συνδράμει στην κατάκτηση συγκεκριμένων μαθηματικών στόχων». Η χρήση του όρου «εμπειρία» στον παραπάνω ορισμό σηματοδοτεί ότι το αναλυτικό πρόγραμμα είναι κάτι περισσότερο από μια απλή καταγραφή των θεμάτων που πρέπει να καλυφθούν ή στόχων που πρέπει να επιτευχθούν. Περιλαμβάνει οτιδήποτε επιδιώκεται ή πρόκειται πραγματικά να συναντήσουν οι μαθητές με σκοπό να υποστηρίξει την μαθησιακή τους πορεία ενώ έχει στοιχεία από την ευρύτερη έρευνα για το αναλυτικό πρόγραμμα εν γένει και όχι αποκλειστικά και μόνο από το γνωστικό πεδίο των Μαθηματικών. Λαμβάνοντας μάλιστα υπόψιν μας το σχολικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται, γίνεται αντιληπτό ότι ακόμη και όταν το αναλυτικό πρόγραμμα εστιάζει στα Μαθηματικά, δεν περιλαμβάνει αποκλειστικά και μόνο τους γνωστικούς στόχους του αντικειμένου αλλά και στόχους που εξυπηρετούν τον ρόλο του ως κοινωνικό θεσμό.

Αν εστιάσουμε στην έρευνα σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα θα παρατηρήσουμε ένα εύρος θεωρήσεων οι οποίες αναδεικνύουν αφενός τον πολυδιάστατο χαρακτήρα του και αφετέρου τον συστημικό του ρόλο . Έτσι, σύμφωνα με το τριπλό μοντέλο αναλυτικού προγράμματος τα εκπαιδευτικά συστήματα εκδηλώνουν τρία αλληλοσχετιζόμενα επίπεδα: το επιδιωκόμενο, το εν δράσει και το επιτευχθέν. Το επιδιωκόμενο πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται στο ήδη υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα της εκάστοτε εκπαιδευτικής βαθμίδας και καλύπτει τους σκοπούς και στόχους που τέθηκαν από την επίσημη αρχή. Το εν δράση αναλυτικό πρόγραμμα αναφέρεται στην διδακτική πράξη αυτή καθαυτή , τις διδακτικές πρακτικές και τις στρατηγικές που ακολουθούνται από τον εκπαιδευτικό και λαμβάνουν χώρα μέσα στη σχολική τάξη. Τέλος, το επιτευχθέν αναλυτικό πρόγραμμα περικλείει τα μαθησιακά αποτελέσματα δηλαδή την γνώση που αποκομίζουν τελικά οι μαθητές ως το αποτέλεσμα της διδακτικής πράξης. Στο επίπεδο αυτό εμπεριέχεται όχι μόνο η γνώση και οι δεξιότητες που οι μαθητές έχουν αποκομίσει στο σχολείο αλλά και οι γενικότερες στάσεις και συμπεριφορές αναφορικά με την μελέτη των Μαθηματικών (Mullis et al., 2003; Robitaille, Schmidt, Raizen, McNight, Britton, & Nicol, 1993).

Μια αντίστοιχη προσέγγιση δίνεται από τους Remillard & Heck, 2014 οι οποίοι διέκριναν δυο εκφάνσεις του αναλυτικού προγράμματος, το επίσημο και το λειτουργικό. Έτσι στο επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα εντοπίζεται οτιδήποτε έχει καθιερωθεί από την επίσημη αρχή, σε αντιστοιχία με το επιδιωκόμενο αναλυτικό πρόγραμμα που περιγράψαμε προηγουμένως, ενώ στο λειτουργικό αναλυτικό πρόγραμμα υπάγεται οτιδήποτε έχει καθιερωθεί μέσω της πρακτικής. Όπως μάλιστα διασαφηνίζεται, ο ρόλος του επίσημου αναλυτικού προγράμματος περιλαμβάνει τον καθορισμό των αναμενόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων , την παροχή προτεινόμενου υλικού για τη διδασκαλία καθώς και «μονοπάτια» μάθησης χρήσιμα για την οργάνωση των βασικών συστατικών μάθησης. Από την αντίπερα όχθη το λειτουργικό αναλυτικό πρόγραμμα συνίσταται σε αυτό που πραγματικά συμβαίνει κατά την διδακτική πράξη. Με λίγα λόγια, περιλαμβάνει το επιδιωκόμενο από τον εκπαιδευτικό αναλυτικό πρόγραμμα, το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα καθώς και το επιτευχθέν που αναφέρεται όπως είδαμε στις επιδόσεις των μαθητών.

Μια άλλη παράμετρος του αναλυτικού προγράμματος που θα πρέπει να διασαφηνιστεί αφορά στην θέσπιση σκοπών και στόχων, μια διαδικασία που αντανακλά μεταξύ άλλων την λεγόμενη πολιτική της εκπαίδευσης καθώς και στοιχεία της εκάστοτε εκπαιδευτικής κουλτούρας. Οι Remillard & Heck, 2014 επιδιώκοντας να ορίσουν τους σκοπούς και στόχους του αναλυτικού προγράμματος, αναφέρονται σε «συγκεκριμένες μαθησιακές προσδοκίες και αποτελέσματα που κατά κύριο λόγο τίθενται ή υιοθετούνται από ένα εθνικό σύστημα, πολιτεία , περιοχή ή σχολικό σύστημα. Αποτελούν δηλώσεις για το τι ιδανικά θα έπρεπε να επιτύχουν οι μαθητές, ως απόρροια της διδασκαλίας, μαζί με επιχειρήματα γι’ αυτές.». Μάλιστα όπως αναφέρουν με την χρήση των όρων «σκοποί και στόχοι» υπονοείται ο καθορισμός των επιθυμητών αποτελεσμάτων, που ποικίλει ως προς τον τρόπο που προσεγγίζεται καθώς μπορεί να κυμαίνεται από ακριβείς περιγραφές που περιλαμβάνουν την εκτενή διατύπωση νοητικών ή μαθηματικών κατακτήσεων μέχρι απευθείας δηλώσεις της επιδιωκόμενης επίδοσης. Μάλιστα όπως επισημαίνεται οι σκοποί και στόχοι στοχεύουν στην διαμόρφωση του αναλυτικού προγράμματος άλλα δεν αντιπροσωπεύουν την ολότητα του, κάτι το οποίο έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τον ορισμό του αναλυτικού προγράμματος που δόθηκε αρχικά.

2.1.3 Ευκαιρίες μάθησης στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών παρατηρείται μια στροφή προς τη μελέτη των ευκαιριών μάθησης γεγονός που ενισχύεται από παγκοσμίου κλίμακας έρευνες ,όπως αυτή που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της TIMSS όπου οι ευκαιρίες μάθησης συνδέθηκαν άρρηκτα με τις σχολικές επιδόσεις των μαθητών.

Ας δούμε όμως αναλυτικά τι εννοούμε με τον όρο «ευκαιρίες μάθησης». Ένας από τους ευρύτερα γνωστούς ορισμούς δόθηκε από τον Husén, 1967 στα πλαίσια της FIMS (First International Mathematics Studies) και εισήχθη με σκοπό να επεξηγήσει τις διαφοροποιήσεις στην επίδοση των μαθητών ως αποτέλεσμα του βαθμού εμπλοκής τους σε μια σειρά από μαθηματικά θέματα. Στον ευθέως διατυπωμένο ορισμό που δίνει ο ίδιος, υπογραμμίζει ότι : «Ένας από τους παράγοντες που ίσως να επηρεάζει την επίδοση των μαθητών είναι το εάν οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να μελετήσουν ένα συγκεκριμένο θέμα ή να μάθουν να λύνουν έναν συγκεκριμένο τύπο προβλήματος…».

Από την εισαγωγή του όρου και μετέπειτα, ο όρος ευκαιρίες μάθησης έχει νοηματοδοτηθεί και ποσοτικοποιηθεί με διάφορους τρόπους (Gamoran, Porter, Smithson, & White, 1997; Hook, Bishop, & Hook, 2006; Törnroos, 2005). Μερικές από αυτές τις αναλύσεις εστίαζαν στο περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος (με έμφαση στο μαθηματικό περιεχόμενο) και άλλες εξέταζαν μετρήσιμες προεκτάσεις των εν δράσει αναλυτικών προγραμμάτων, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο αξιοποιούσαν οι εκπαιδευτικοί το εκπαιδευτικό υλικό. Αυτές οι διαφορετικές ερμηνείες είναι πάρα ταύτα συνεπείς με την κεντρική ιδέα του όρου ευκαιρίες μάθησης ως ένας δείκτης της εμπλοκής των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, κατά τον Floden, ο όρος «ευκαιρίες μάθησης» , επιδέχεται ποικίλες ερμηνείες , όλες τους συνεπείς με την νοηματοδότηση του Husén. Κάνοντας μια ανασκόπηση στις ερευνητικές του εργασίες σχετικά με τις ευκαιρίες μάθησης, ο Floden παρουσιάζει διάφορες ερμηνείες που διαφέρουν αισθητά στην τρόπο προσέγγισης της ποσοτικοποίησης των ευκαιριών μάθησης. Μερικές από αυτές αξιολογούν τις ευκαιρίες μάθησης με κριτήριο την έμφαση που δίνεται σ' ένα μαθηματικό θέμα ,κάτι το οποίο προκύπτει από τη μελέτη εκπαιδευτικού υλικού (προγράμματα σπουδών ή σχολικά εγχειρίδια) την ίδια στιγμή που άλλες αξιολογούν το χρόνο που αφιερώνεται στη διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα μιας τέτοιας προσέγγισης επιχειρήθηκε από τους Brewer & Stasz, (1996) οι οποίοι διέκριναν τρεις κατηγορίες ενδιαφέροντος ως προς την αξιολόγηση των ευκαιριών μάθησης. Η πρώτη κατηγορία αφορά στο περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος, και εξετάζει εάν οι μαθητές έχουν διδαχθεί τα θέματα και τους τομείς που είναι απαραίτητα για την επίτευξη των στάνταρντ. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις στρατηγικές διδασκαλίας αξιολογώντας εάν οι μαθητές έχουν εμπειρία με συγκεκριμένα είδη δραστηριοτήτων και διαδικασιών επίλυσης. Η τρίτη κατηγορία αναφέρεται στο υλικό διδασκαλίας. Εδώ αξιολογούνται π.χ. θέματα που αφορούν το επίπεδο προετοιμασίας του δασκάλου και την ποιότητα του εκπαιδευτικού υλικού.

Στην ίδια κατεύθυνση ,η Liu, 2009 εισήγαγε τέσσερις μεταβλητές με τις οποίες αξιολογεί τις ευκαιρίες μάθησης.

(α) κάλυψη του περιεχόμενου: αναφέρεται στην αντιστοιχία μεταξύ του αναλυτικού προγράμματος που πρόκειται να διδαχθεί και του περιεχομένου που εξετάζεται.

(β) έκθεση του περιεχομένου: αναφέρεται στον χρόνο που αφιερώνεται στο περιεχόμενο που εξετάζεται.

(γ) έμφαση στο περιεχόμενο: αναφέρεται στην έμφαση που δίνεται από τους εκπαιδευτικούς στο περιεχόμενο που εξετάζεται.

(δ) ποιότητα της διδασκαλίας του περιεχομένου: αναφέρεται στην αρτιότητα της διδασκαλίας του περιεχομένου.

Μια άλλη διάσταση των ευκαιριών μάθησης που αξίζει να σημειωθεί είναι η σύνδεση τους με το αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο σύμφωνα με τον Bruner, 1977 , προορίζεται για τον εκπαιδευτικό με σκοπό να δράσει καταλυτικά στον τρόπο που διδάσκει, οργανώνει και αποτιμά την διδασκαλία του. Με λίγα λόγια επιδιώκει να διαμορφώσει συνολικά τη στάση και τις αντιλήψεις του εκπαιδευτικού ως προς την λήψη των διδακτικών αποφάσεων και κατά συνέπεια να έχει αντίκτυπο στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Μάλιστα ο απλουστευμένος ορισμός του όρου που δόθηκε προηγουμένως, διευκολύνει τη σύνδεση του με το τριπλό μοντέλο αναλυτικού προγράμματος το οποίο περιγράψαμε σε προηγούμενη ενότητα. Από την προσεκτική μελέτη αυτού του μοντέλου γίνεται εμφανές ότι το επιδιωκόμενο αναλυτικό πρόγραμμα επηρεάζει ισχυρά το εν δράση αναλυτικό πρόγραμμα και κατ’ επέκταση τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Κατά συνέπεια μια πρώτη εντύπωση που δημιουργείται είναι η ισχυρή συσχέτιση των ευκαιριών μάθησης με το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα. Πράγματι αν περιοριστούμε στο σχολικό περιβάλλον οι ευκαιρίες μάθησης αναφέρονται στην ίδια την διδακτική πράξη δηλαδή πραγματοποιούνται στα πλαίσια του εν δράσει αναλυτικού προγράμματος. Ωστόσο είναι σημαντικό ν’ αντιληφθούμε ότι οι ευκαιρίες μάθησης δεν παρέχονται αποκλειστικά και μόνο εντός σχολείου (Floden, 2002) αλλά αποτελούν μια ευρύτερη έννοια που επεκτείνεται και πέρα από το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα συμπεριλαμβάνοντας και ευκαιρίες μάθησης που παρέχονται ανεξάρτητα και εκτός του σχολικού πλαισίου.

2.1.4 Ο όρος εκπαιδευτικό υλικό στην έρευνα για τη ΔτΜ.

Τις τελευταίες δεκαετίες καταγράφεται σημαντικό ενδιαφέρον σχετικά με την σημασία του εκπαιδευτικού υλικού και συγκεκριμένα των σχολικών εγχειριδίων, στη διδασκαλία και την μάθηση των Μαθηματικών .

Τα εγχειρίδια Μαθηματικών, ως υποστηρικτικά εργαλεία για την διδασκαλία και την μάθηση των Μαθηματικών, εμφανίζονται ήδη από την αρχαία εποχή. Συγκεκριμένα το έργο του Ευκλείδη «Στοιχεία» (περίπου το 300 π.Χ.) θεωρείται όπως αναφέρουν οι Merzbach and Boyer, 2011 ως «το πιο επιτυχημένο εγχειρίδιο Μαθηματικών που είχε γραφτεί έως τότε στον Δυτικό πολιτισμό».

Συγκριτικά με την μακρά ύπαρξη των μαθηματικών εγχειριδίων, η σχετική έρευνα ξεκίνησε πολύ πιο πρόσφατα. Όπως επισήμανε ο Cronbach, 1955 , παρόλο που τα σχολικά εγχειρίδια είχαν κυρίαρχη θέση στις σχολικές αίθουσες, η έρευνα που επικεντρώνονταν στα σχολικά εγχειρίδια ήταν «συγκεχυμένη και επουσιώδης». Τη δεκαετία του 80, το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια παρέμεναν έναν ανεξερεύνητο πεδίο σε συνδυασμό με την ανάδειξη της αναγκαιότητας για έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση πυροδότησε μεγάλο όγκο σχετικών δημοσιεύσεων όπως αυτές των Freeman and Porter 1989; Graybeal & Stodolsky 1986; Sosniak & Stodolsky 1993.

Ας δούμε όμως αρχικά πως ερμηνεύεται στη διεθνή βιβλιογραφία ο όρος εκπαιδευτικό υλικό. Σύμφωνα με τους Remillard &Kim , 2017 το εκπαιδευτικό υλικό αποτελεί έναν όρο «ομπρέλα» και αναφέρεται σ' ένα ευρύ σετ εργαλείων που περιλαμβάνει: τον οδηγό του εκπαιδευτικού, το βιβλίο του μαθητή, περιγραφές για τις προτεινόμενες μαθηματικές δραστηριότητες και υποστηρικτικό υλικό συχνά με τη μορφή λογισμικού, σχεδιασμένο ώστε να καθοδηγεί και να υποστηρίζει την διδασκαλία διαχρονικά. Μάλιστα αποτελεί όπως θα δούμε τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στο επιδιωκόμενο αναλυτικό πρόγραμμα και τον πολύ διαφορετικό κόσμο της τάξης. Οι Remillard& Heck, 2014 αναφέρουν ότι το εκπαιδευτικό υλικό δεν είναι απλά μια συλλογή από δραστηριότητες Μαθηματικών και οδηγίες για τη διδασκαλία. Μάλιστα υιοθετούν την διάκριση του Otte, 1986 ανάμεσα στις «αντικειμενικές δομές πληροφορίας» που εντοπίζονται στα σχολικά εγχειρίδια και στα «υποκειμενικά σχήματα» που αντιπροσωπεύουν. Το πρώτο αναφέρεται στην εξωτερική μορφή του κειμένου καθώς και στο περιεχόμενο του, ενώ το δεύτερο επεκτείνεται στον τρόπο με τον οποίο αυτές οι μορφές γίνονται αντιληπτές και ερμηνεύονται με γνώμονα τις πολιτιστικές παραδόσεις, αξίες και προσδοκίες.

Σ' αυτό το σημείο όμως αξίζει να εστιάσουμε στον ρόλο των σχολικών εγχειριδίων. Μελετώντας την βιβλιογραφία θα παρατηρήσουμε ότι κάποιοι ερευνητές (Kuhn, Dorfler, &McLone) εστιάζουν στο ρόλο των εγχειριδίων σε γενικό πλαίσιο υπογραμμίζοντας ότι «καθορίζουν το σώμα της αποδεκτής γνώσης» ή ότι «καθορίζουν το τι συνιστά σχολικά μαθηματικά» ενώ άλλοι όπως οι Sosniak και Perlman(1990) εξειδικεύουν τον ρόλο των σχολικών εγχειριδίων αναφέροντας ότι η δύναμη τους εδράζεται στον ρόλο τους να εισάγουν τους μαθητές σε κόσμους που δεν μπορούν να αντιληφθούν ή να βιώσουν άμεσα μέσω των αισθήσεων. Παρέχουν δηλαδή μια οργανωμένη αλληλουχία ιδεών και πληροφοριών στοχεύοντας σε μια δομημένη διδασκαλία και μάθηση η οποία με τη σειρά της καθοδηγεί το επίπεδο κατανόησης, σκέψης και εν συναίσθησης του μαθητή . Παράλληλα του δίνουν τη δυνατότητα να έχει πρόσβαση στην γνώση, γεγονός που ενισχύει την αυτοεικόνα του και τον οδηγεί στην αυτοπραγμάτωση τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο. Ειδικότερα για το ρόλο των μαθηματικών εγχειριδίων οι Robitaille & Travers (2012) επισημαίνουν ότι στα Μαθηματικά είναι χαρακτηριστική η σχέση εξάρτησης από το διδακτικό εγχειρίδιο , ίσως πιο ισχυρή από οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο διδασκαλίας, ενώ η Κολέζα, 2007 αναφέρει χαρακτηριστικά για τα σχολικά εγχειρίδια ότι «εκτός από παιδαγωγικά εργαλεία, είναι συγχρόνως ένα μέσο πρόσβασης στην ακαδημαϊκή γνώση και φορείς ιδεολογικών και πολιτιστικών μηνυμάτων. Απεικονίζουν τις κοινά παραδεκτές κοινωνικές πεποιθήσεις».

2.1.5 Σχολικά εγχειρίδια και αναλυτικό πρόγραμμα.

Ένα κεντρικό σημείο ενδιαφέροντος για την παρούσα εργασία είναι ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων σε συνάρτηση με το αναλυτικό πρόγραμμα για τα Μαθηματικά. Στην έρευνα για τη ΔτΜ εντοπίζουμε διαφορετικές τοποθετήσεις αναφορικά με την συσχέτιση αναλυτικού προγράμματος και σχολικών εγχειριδίων.

Οι Goodlad et al, (1979) αναγνωρίζουν το εκπαιδευτικό υλικό ως κομμάτι του επίσημου αναλυτικού προγράμματος καθώς όπως υπογραμμίζουν αποτελεί μια καταγεγραμμένη έκφραση των επιδιωκόμενων στόχων. Οι Schmidt et al. (1996) ορίζουν το επιδιωκόμενο αναλυτικό πρόγραμμα πιο περιοριστικά με τη μορφή σκοπών και στόχων θεωρώντας το εκπαιδευτικό υλικό ως μεσολαβητή ανάμεσα στο επιδιωκόμενο και το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτός ο τρόπος θεώρησης ενισχύει τον ερμηνευτικό ρόλο που έχει το εκπαιδευτικό υλικό προσφέροντας ερμηνεία των επιδιωκόμενων στόχων μέσα από δραστηριότητες για το μάθημα και σχέδια μαθήματος διαμορφωμένα για την τάξη. Ο Howson (1995) στο βιβλίο του υπογράμμισε ότι τα σχολικά εγχειρίδια είναι πάντα ένα βήμα πιο κοντά στην σχολική πραγματικότητα συγκριτικά με το αντίστοιχο εθνικό αναλυτικό πρόγραμμα. Επιπρόσθετα τα σχολικά εγχειρίδια συνήθως αντικατοπτρίζουν τους στόχους που διατυπώνονται στα εκάστοτε εθνικά αναλυτικά προγράμματα και χρησιμοποιούνται κατά κόρον στις αίθουσες Μαθηματικών ανά τον κόσμο, ακόμη και αν η ταύτιση ανάμεσα στο αναλυτικό πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια ποικίλει στα διάφορα εκπαιδευτικά συστήματα (Haggarty & Pepin, 2002; Schmidt, McKnight, Raizen, 1997). Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών που διδάσκονται στην τάξη είναι με όποιον τρόπο κι αν το δούμε, ανάμεσα στους κυριότερους παράγοντες που επηρεάζουν τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να μάθουν Μαθηματικά.

Αναφερόμενοι στον ρόλο των σχολικών εγχειριδίων ερευνητές στο πλαίσιο της Third International Math and Science Study (TIMSS) τα συμπεριέλαβαν ως ένα τέταρτο επίπεδο, αυτό του εν δυνάμει δράσει αναλυτικού προγράμματος .Με τον τρόπο αυτό συμπληρώνουν το τριπλό εννοιολογικό μοντέλο αναλυτικού προγράμματος το οποίο περιλαμβάνει τις μορφές που περιγράψαμε προηγουμένως. Δεδομένα από την TIMSS επιβεβαίωσαν τον κρίσιμο ρόλο των διδακτικών εγχειριδίων ως ο συνδετικός κρίκος μεταξύ του επιδιωκόμενου αναλυτικού προγράμματος και του επιτευχθέντος. Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με τους Thompson et al. (2012) ο ρόλος των εγχειριδίων διδασκαλίας είναι να προσανατολίσουν τον εκπαιδευτικό ως προς το περιεχόμενο που καλείται να διδάξει , τις προβλεπόμενες στρατηγικές διδασκαλίας για το ηλικιακό επίπεδο των μαθητών, αλλά και προτάσεις για εμπλουτισμό των δραστηριοτήτων στην τάξη. Οι Valverde et al, (2002) σημειώνουν ότι τα σχολικά εγχειρίδια είναι σχεδιασμένα ώστε να μεταφράσουν τις ασάφειες που χαρακτηρίζουν τις προτάσεις των αναλυτικών προγραμμάτων σε ενέργειες που τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές θα μπορούν να φέρουν εις πέρας. Με λίγα λόγια διαμεσολαβούν μεταξύ των εμπνευστών της εκπαιδευτικής πολιτικής για το αναλυτικό πρόγραμμα και των διδασκόντων. Αυτό μπορεί να συμβεί προσθέτοντας ένα ακόμη επίπεδο, αυτό του δυνητικά εφαρμοζόμενου αναλυτικού προγράμματος, ως ένα ενδιάμεσο στάδιο ανάμεσα στο επιδιωκόμενο και το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα. Το δυνητικά εφαρμοζόμενο αναλυτικό πρόγραμμα εμπεριέχει τα σχολικά εγχειρίδια και επιπλέον εκπαιδευτικό υλικό που προορίζεται για σχολική χρήση. Αντικατοπτρίζει αφενός το επιδιωκόμενο αναλυτικό πρόγραμμα όπως ήδη αναφέρθηκε και αφετέρου επηρεάζει το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα, ορίζοντας για παράδειγμα το περιεχόμενο που θα συζητηθεί κατά τη διάρκεια των μαθημάτων (Schmidt, McKnight, Valverde, et al., 1997). Σε μια έρευνα τους για τα σχολικά εγχειρίδια από την Κίνα, την Σιγκαπούρη και τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής , οι Fan & Zhu (2007) σημειώνουν ότι " υπάρχουν αξιόλογα χάσματα μεταξύ των στόχων που προβλέπονται από τα εθνικά αναλυτικά προγραμμάτων και των σχολικών εγχειριδίων που αναπτύχθηκαν βασισμένα σε αυτά". Οι Vincent & Stacey υποστήριξαν ότι τα σχολικά εγχειρίδια θα πρέπει να παρουσιάζουν ένα εύρος προβλημάτων ώστε να βοηθούν τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις και ν' αναγνωρίσουν μαθηματικές έννοιες, καθώς επίσης και να ενθαρρύνουν τον μαθηματικό συλλογισμό και τον αναστοχασμό. Μάλιστα διαπίστωσαν ότι σε μερικά από τα πιο εμπορικά βιβλία "η ζυγαριά γέρνει περισσότερο προς προβλήματα που ολοένα επαναλαμβάνονται , είναι χαμηλής πολυπλοκότητας, κυρίως διαδικαστικού χαρακτήρα και απαιτούν ελάχιστα παραπάνω από μια απλή χρήση διαδικασιών". Επιπλέον τονίζουν ότι κάτι τέτοιο χρήζει ιδιαίτερης προσοχής ειδικά όταν οι εκπαιδευτικοί βασίζονται αποκλειστικά στο σχολικό εγχειρίδιο, όπως γίνεται για παράδειγμα με τους νέους εκπαιδευτικούς ή με άλλους που δεν διαθέτουν ένα ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο.

Αναλύοντας βρετανικά, γαλλικά και γερμανικά εγχειρίδια για τα Μαθηματικά, οι Haggarty και Pepin (2002) ανακάλυψαν ότι υπήρχαν ξεκάθαρες διαφορές στα σχολικά εγχειρίδια και συγκεκριμένα στον χειρισμό θεμάτων που σχετίζονταν με την μέτρηση γωνίας. Οι διαφορές είχαν να κάνουν σαφώς με το επίπεδο της κάθε χώρας όμως εντούτοις στην Μ. Βρετανία και στην Γερμανία εντοπίστηκαν διαφορές ακόμη και σε εθνικό επίπεδο. Οι Haggarty και Pepin συμπέραναν ότι τόσο σε διεθνές όσο και σε επίπεδο χώρας , οι μαθητές έχουν κυμαινόμενες ευκαιρίες μάθησης που εξαρτώνται κυρίως από το σχολικό εγχειρίδιο που χρησιμοποιούν και από τον εκπαιδευτικό που λειτουργεί ως διαμεσολαβητής του περιεχομένου του. Σ αυτό το σημείο ας υπογραμμίσουμε ότι τ’ αποτελέσματα των Schmidt, McKnight, Valverde, et al. , (1997) ήταν παρόμοια , δείχνοντας σαφώς ότι η σχετική επικέντρωση που δίνεται και ο χρονισμός διαφορετικών μαθηματικών θεμάτων στα σχολικά εγχειρίδια και στα αναλυτικά προγράμματα διαφέρουν αξιοσημείωτα από χώρα σε χώρα.

2.1.6 Η γνώση του εκπαιδευτικού και το εκπαιδευτικό υλικό.

Κατά γενική ομολογία, η διδασκαλία είναι μια περίπλοκη δραστηριότητα που απαιτεί γνώση, περίσκεψη, και εξειδικευμένη πράξη (Shulman, 1987).Αυτό οδήγησε από πολύ νωρίς στον καθορισμό του απαραίτητου υπόβαθρου για την διδασκαλία που περιλάμβανε την γνώση του αντικειμένου , την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου και τέλος τη γνώση του αναλυτικού προγράμματος. Κι ενώ η γνώση του αντικειμένου αναφέρεται στην γνώση του περιεχομένου, την οργάνωση του και την ανάπτυξη του, η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου αφορά στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αυτή η γνώση οργανώνεται με σκοπό να παρουσιαστεί και να ερμηνευθεί υποστηρίζοντας την μάθηση. Τέλος η γνώση του αναλυτικού προγράμματος όπως αναφέρει ο Shulman αφορά στον τρόπο με τον οποίο το γνωστικό αντικειμένου μπορεί να οργανωθεί σε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας, δίνοντας την απαραίτητη προσοχή στους εσωτερικούς (μέσα στο ίδιο επίπεδο) και κατακόρυφους (διαχρονικά στα διάφορα επίπεδα) συνδέσμους του αναλυτικού προγράμματος. Το εκπαιδευτικό υλικό ως μέρος αυτού του πολύπλοκου συστήματος γνώσης, αποτελεί έναν ρυθμιστικό παράγοντα που επηρεάζει την διδακτική πράξη, με τον εκπαιδευτικό να αποτελεί τον διαμεσολαβητή ανάμεσα σε αυτό και τους μαθητές του. Μάλιστα όπως καταγράφεται στην έρευνα για τη ΔτΜ οι εκπαιδευτικοί έχουν την τάση να παρεμβαίνουν και να ερμηνεύουν το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου καθώς το χρησιμοποιούν για τη διδασκαλία τους (Collopy, 2003). Όπως αναφέρουν οι Stouraitis, Potari, Skott, 2017 οι εκπαιδευτικοί αποτελούν τους κατεξοχήν συνδέσμους ανάμεσα στις επιδιώξεις του αναλυτικού προγράμματος και τις πρακτικές που εξελίσσονται αέναα στο περιβάλλον της σχολικής τάξης. Κάτι τέτοιο τοποθετεί τον εκπαιδευτικό στο κέντρο της εφαρμογής του αναλυτικού προγράμματος ενώ μια άλλη εναλλακτική θεώρηση εστιάζει περισσότερο στις ευκαιρίες μάθησης που δημιουργούνται στην τάξη (Brown, 2009; Remillard, 2005).Οι εκπαιδευτικοί δεν θεωρούνται ως διαβιβαστές ενός αναλυτικού προγράμματος που σχεδιάζεται εκτός τάξης. Αντίθετα, έχουν τον ρόλο του ενεργού διαμεσολαβητή και του σχεδιαστή, οι διδακτικές δράσεις των οποίων πιθανόν να δεχτούν επιρροές από το εκπαιδευτικό υλικό ενώ παράλληλα διαμορφώνονται σε αλληλεπίδραση με τους μαθητές ή και άλλους παράγοντες σε στενό ή διευρυμένο πλαίσιο. Όπως αναφέρει η Remillard, 2005 μέσω της συμμετοχικής προσέγγισης που επιχειρεί « τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και το εκπαιδευτικό υλικό εμπλέκονται σε μια δυναμική αλληλοσυσχέτιση που περιλαμβάνει την έννοια της από κοινού συμμετοχής του εκπαιδευτικού και του κειμένου ».

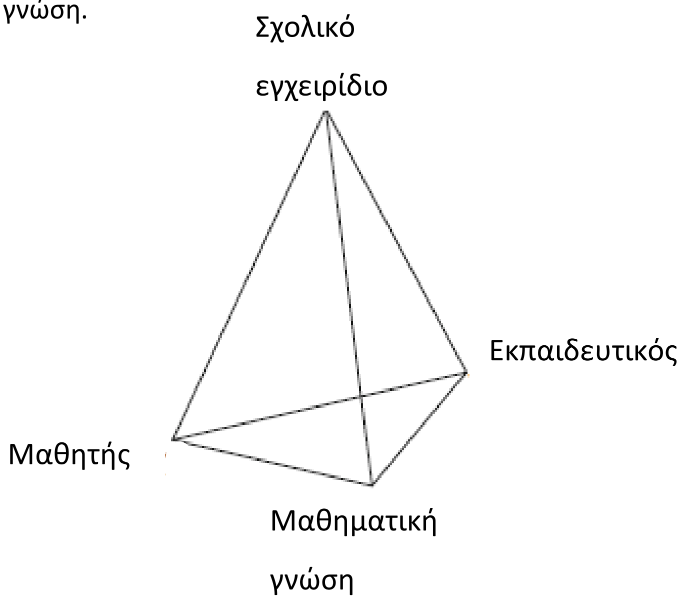
Επιπλέον τα τελευταία χρόνια παρατηρείται ένα ενδιαφέρον για την μελέτη του τρόπο με τον οποίο η γνώση του εκπαιδευτικού υποστηρίζει την σωστή χρήση αυτού του υλικού (Chick, 2009; Kim, 2007).Οι Remillard & Kim ,2017,αναγνωρίζουν το εκπαιδευτικό υλικό ως έναν ειδικό τύπο εργαλείου με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αλληλοεπιδρούν. Όπως επισημαίνουν είναι σχεδιασμένο ώστε να υποστηρίζει τη λήψη αποφάσεων αναφορικά με το αναλυτικό πρόγραμμα και να μεταφέρει τη γνώση και τις πεποιθήσεις των δημιουργών του. Παράλληλα αναπαριστά αλληλοσχετιζόμενες έννοιες που πρόκειται να διδαχθούν , δραστηριότητες για την εμπλοκή των μαθητών και παιδαγωγικές προσεγγίσεις που ίσως χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί. Μάλιστα εισήγαγαν τον όρο KCEM που ερμηνεύεται ως «γνώση των μαθηματικών που υπεισέρχονται στο αναλυτικό πρόγραμμα» αναφερόμενοι στην μαθηματική γνώση που ενεργοποιείται από τους εκπαιδευτικούς κατά τη μελέτη και ερμηνεία μαθηματικών δραστηριοτήτων , σχεδίων μαθήματος και αναπαραστάσεων που εντοπίζονται στο εκπαιδευτικό υλικό των Μαθηματικών. Ο όρος αυτός συμπληρώνει την υπάρχουσα έρευνα αναφορικά με την ειδική γνώση του περιεχομένου από τον εκπαιδευτικό. Μελετώντας μια σειρά οδηγών του εκπαιδευτικού για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση αναγνώρισαν στοιχεία του αναλυτικού προγράμματος στα οποία εστιάζουν οι εκπαιδευτικοί και μέσα από τη ανάλυση τους κατέληξαν σε τέσσερις αλληλεπικαλυπτόμενες εκφάνσεις του όρου KCEM. Αυτές είναι: α) οι θεμελιώδεις μαθηματικές ιδέες, β)οι αναπαραστάσεις και οι συνδέσεις μεταξύ των ιδεών, γ) η πολυπλοκότητα των προβλημάτων και δ) τα μονοπάτια μάθησης των Μαθηματικών.

Η ανάλυση των Remillard & Kim, 2017 υιοθετεί μια συμμετοχική οπτική για τη χρήση του εκπαιδευτικού υλικού από τους δασκάλους, επισημαίνοντας ότι οι εκπαιδευτικοί αλληλοεπιδρούν ενεργητικά με το υλικό για να σχεδιάσουν την διδασκαλία τους. (Ben-Peretz, 1990; Remillard, 2005). Η ανάγνωση, η ερμηνεία και ο σχεδιασμός με τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού προϋποθέτει μια δυναμική σχέση αλληλεπίδρασης όπου τόσο ο εκπαιδευτικός όσο και το εργαλείο συνεισφέρουν.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα, κατά την Remillard, 2005 «το εκπαιδευτικό υλικό «διαμορφώνει αλλά και διαμορφώνεται από την ανθρώπινη δράση μέσα από τις δυνατότητες και τους περιορισμούς.». Αυτή η οπτική επικεντρώνεται στους τρόπους με τους οποίους οι ατομικές και κοινωνικές συνιστώσες έρχονται να επηρεάσουν την διδακτική πράξη και την εξέλιξη της.

Η δυναμική αυτή προσέγγιση υποστηρίζεται και από τους Stouraitis,Potari,Scott, 2017 αναφέρουν ότι κατά την διδακτική πράξη η επιδίωξη των εκπαιδευτικών να προωθήσουν την μάθηση των Μαθηματικών από τους μαθητές συνυφαίνεται με τις υπόλοιπες επαγγελματικές τους υποχρεώσεις. Συγκεκριμένα οι ενέργειες τους διαμεσολαβούνται από εργαλεία όπως είναι το αναλυτικό πρόγραμμα, τα σχολικά εγχειρίδια και επιπρόσθετο υλικό μάθησης και διδασκαλίας, την ίδια στιγμή που η δράση τους οριοθετείται από τους περιορισμούς και τις αναγκαιότητες που επιβάλλει το εκάστοτε εκπαιδευτικό σύστημα (εξετάσεις, χρονικοί περιορισμοί και σχολικό πρόγραμμα). Σε όλα τα παραπάνω δεν πρέπει να παραλείψει κανείς τις νόρμες του σχολείου και της τάξης αναφορικά με τον ρόλο και την θέση του εκπαιδευτικού.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και ο Rezat (2009) ο οποίος επισημαίνει ότι «Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών δεν θα έπρεπε να αποτελούν αντικείμενα ανάλυσης αποκομμένα από τη χρήση τους», άποψη η οποία αντανακλά συνολικά την σύγχρονη αντίληψη για την έρευνα αναφορικά με τα σχολικά εγχειρίδια. Συγκεκριμένα προτείνει ένα μοντέλο τετραέδρου (σχήμα 1) για ν' αναπαραστήσει την αλληλεπίδραση ανάμεσα στο σχολικό εγχειρίδιο, τον μαθητή, τον εκπαιδευτικό και την μαθηματική γνώση.



Σχήμα 1-Μοντέλο τετραέδρου για τη χρήση σχολικών εγχειριδίων (Rezat,2009)

Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο ο Rezat περιέγραψε την χρήση του διδακτικού εγχειριδίου από τους εκπαιδευτικούς όπως περιγράφεται παρακάτω: «Το βιβλίο των Μαθηματικών δρα ως εργαλείο σε καθεμία από τις τρεις πλευρές του τριγώνου: Αρχικά οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο στη διδασκαλία τους αλλά και πιο πριν, στο πλαίσιο της προετοιμασίας του μαθήματος. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, οι εκπαιδευτικοί γίνονται οι διαμεσολαβητές της χρήσης των σχολικών εγχειριδίων στους μαθητές οι οποίοι με τη σειρά τους τα χρησιμοποιούν για να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς της μάθησης». Επιπλέον στην ίδια έρευνα, διερευνήθηκε η χρήση των μαθηματικών εγχειριδίων απο τους μαθητές και διαπιστώθηκε ότι οι ενέργειες των μαθητών περιορίζονται κατά κύριο λόγο στον εντοπισμό των κατάλληλων παραδειγμάτων για την ολοκλήρωση των ασκήσεων και των δραστηριοτήτων που τους είχαν δοθεί ενώ βρέθηκε ότι οι μαθητές κατέφευγαν στο κείμενο για να πληροφορηθούν σχετικά με τα επερχόμενα θέματα μελέτης.

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού ενέχει το στοιχείο της υποκειμενικότητας. Πράγματι, η Remillard (2000) αναλύοντας την χρήση ενός εγχειριδίου από δυο εκπαιδευτικούς κατά την διδασκαλία και την προετοιμασία του μαθήματος υπογράμμισε ότι «η ανάγνωση τους ήταν επιλεκτική και ερμηνευτική. Εστίαζαν σε διαφορετικά αποσπάσματα του κειμένου και βασίζονταν στη δική τους οπτική για να νοηματοδοτήσουν αυτό το οποίο διάβαζαν». Παρόμοια ευρήματα απορρέουν και από τα ερευνητικά δεδομένα των Fan & Kaeley (2000) οι οποίοι επικεντρώθηκαν στη μελέτη εκπαιδευτικών που χρησιμοποιούσαν μια σειρά από διαφορετικά σχολικά εγχειρίδια. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν είναι ότι τα σχολικά εγχειρίδια κατέχουν εξέχουσα θέση στην διδακτική των εκπαιδευτικών ως δίαυλοι παιδαγωγικών ιδεών. Μάλιστα όπως επισημαίνεται παρέχουν άλλοτε ένα ενθαρρυντικό και άλλοτε ένα αποθαρρυντικό περιβάλλον για την εφαρμογή καινοτόμων διδακτικών στρατηγικών.

Σ' αυτό το σημείο όμως αξίζει να εκθέσουμε την οπτική των δημιουργών-συγγραφέων σχολικών εγχειριδίων . Αρχικά αποτελεί κοινή θέση το γεγονός ότι οι συγγραφείς, ως σχεδιαστές της διδασκαλίας, προσδοκούν δυνητικές χρήσεις για το σχολικό εγχειρίδιο. Ενιαίος στόχος αυτών είναι η υποστήριξη της δουλειάς των εκπαιδευτικών ενώ επισημαίνεται ότι η χρήση των σχολικών εγχειριδίων δύναται να κυμαίνεται από ολοκληρωτική, σε μερική ή μηδαμινή. Ζητούμενο είναι η ανάδειξη ενός «εργαλείου» πέρα από το σχολικό εγχειρίδιο που θα εξυπηρετεί τις ανάγκες του χρήστη (εκπαιδευτικός ή μαθητής) σε συνάρτηση πάντα με το γενικότερο πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτήν την θεώρηση ο μετασχηματισμός του σχολικού εγχειριδίου από έτοιμο δημιούργημα σε λειτουργικό εργαλείο αποτελεί ένα εγγενές χαρακτηριστικό της ανθρώπινης δραστηριότητας. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι δυνητικά μπορούν να προκύψουν πολλά σχήματα χρήσης, απρόβλεπτης κάποιες φορές από τους δημιουργούς του εκπαιδευτικού υλικού, τα οποία προκύπτουν από την αλληλεπίδραση του χρήστη με αυτό.

2.1.7 Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων.

Στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι Remillard (2005), Rezat (2006) , McNaught et al. (2010) διατύπωσαν τους προβληματισμούς τους και συνεισέφεραν αξιοσημείωτα σε μεθοδολογικά ζητήματα, καθώς ο καθένας τους είχε εστιάσει κυρίως σ' έναν τομέα της έρευνας των σχολικών εγχειριδίων. Αρχικά είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτό το εύρος του όρου «ανάλυση εγχειριδίων». Σύμφωνα με τους Fan et al. (2013) ο όρος αυτός περιλαμβάνει:

1. Την ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου ή μιας σειράς σχολικών εγχειριδίων με έμφαση στο πως επιλέγει να παρουσιάσει ένα ή περισσότερα μαθηματικά θέματα, ή στο πως καθρεφτίζεται μια ιδέα ή ένα στοιχείο ιδιαίτερου διδακτικού ενδιαφέροντος μέσα από την προσέγγιση που επιχειρείται.
2. Την ανάλυση διαφορετικών σειρών σχολικών εγχειριδίων από την ίδια χώρα ή συχνότερα από διαφορετικές χώρες, με έμφαση στην αναγνώριση των ομοιοτήτων και των διαφορών τους. Το τελευταίο συνιστά αυτό που καλούμε «σύγκριση σχολικών εγχειριδίων».

Παραθέτοντας διαφορετικές εννοιολογήσεις για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, παραθέτουμε τον ορισμό του Johnsen, 1993 ο οποίος την χαρακτηρίζει ως «μια προσέγγιση προσανατολισμένη στο προϊόν». Ας μελετήσουμε όμως τώρα σε τι εστιάζει και τι περιλαμβάνει ο πυρήνας της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων. Αν πάρουμε ως παράδειγμα την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων που διεξήχθη στα πλαίσια της TIMSS θα δούμε ότι επιδιώκει να ερευνήσει το προφίλ του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων βασιζόμενη σε πέντε μέτρα. Το πρώτο αφορά τις δραστηριότητες για την τάξη που προτείνονταν στο σχολικό βιβλίο, το δεύτερο αντιστοιχεί στην ποσότητα του περιεχομένου και τον τρόπο παρουσίασης του ,είτε αφηρημένο είτε περισσότερο σαφή. Το τρίτο μέτρο σχετίζονταν με την αλληλουχία του περιεχομένου ενώ το τέταρτο εστίαζε στα φυσικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων όπως π.χ. ο αριθμός των σελίδων. Τέλος το πέμπτο μέτρο χαρακτήριζε το επίπεδο και την πολυπλοκότητα των απαιτήσεων αναφορικά με την επίδοση των μαθητών.

Μια άλλη προσέγγιση στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων προτάθηκε από τους Pepin and Haggarty (2001) οι οποίοι διέκριναν τέσσερις περιοχές στις οποίες μπορεί να εστιάσει η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων. Αυτές είναι: (α) τα μαθηματικά θέματα που παρουσιάζονται και οι πεποιθήσεις για την φύση των μαθηματικών που διέπουν το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων, (β) οι μέθοδοι που προτείνονται στα σχολικά εγχειρίδια για να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν το περιεχόμενο τους , (γ) το κοινωνιολογικό πλαίσιο των σχολικών εγχειριδίων που εξετάζει εάν τα σχολικά εγχειρίδια είναι προσαρμοσμένα στο επίπεδο επίδοσης των μαθητών ,(δ) τα πολιτισμικό ύφος που διακατέχει τα σχολικά εγχειρίδια, με έμφαση στον τρόπο με τον οποίο τα σχολικά εγχειρίδια αντικατοπτρίζουν πολιτισμικές αξίες και παραδόσεις.

Οι K. Jones, T. Fujita (2013) με αναφορά στο πλαίσιο ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων που εισήγαγαν οι Valverde et al. (2002) διερευνούν την προσέγγιση γεωμετρικών θεμάτων σε σχολικά εγχειρίδια της Μ. Βρετανίας και της Ιαπωνίας. Συγκεκριμένα υιοθετούν τα παρακάτω βήματα για να μεθοδεύσουν την ανάλυση τους:

- αναγνώριση του αριθμού των μαθημάτων (lessons) στα αντίστοιχα κεφάλαια (chapters) των σχολικών εγχειριδίων.
- κατάτμηση του μαθήματος στα επιμέρους δομήματα (blocks).
- κωδικοποίηση του κάθε τμήματος με βάση το περιεχόμενο και την προσδοκώμενη επίδοση του μαθητή.

Ο λόγος που οι ερευνητές επιλέγουν αυτό το πλαίσιο ανάλυσης είναι η αποκόμιση μιας συνολικής εικόνας σχετικά με τη δομή, το περιεχόμενο και τις αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα που πρόκειται ν' εμφανίσουν οι μαθητές.

Τέλος, μια αξιοσημείωτη ταξινόμηση των προσεγγίσεων για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων δόθηκε από τους Charalambous et al (2010) οι οποίοι χρησιμοποίησαν τρεις κατηγορίες ανάλυσης: την οριζόντια, την κατακόρυφη και την εντός πλαισίου. Αρχικά, η οριζόντια ανάλυση εξετάζει τα γενικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων και τον τρόπο οργάνωσης του περιεχομένου τους. Ωστόσο, άλλες παράμετροι όπως η ποιότητα και οι διδακτικές εκφάνσεις του περιεχομένου των εγχειριδίων δεν αποκαλύπτονται από την οριζόντια ανάλυση. Συνεπώς, προτείνουν ως αναγκαία μια βαθύτερη ανάλυση του μαθηματικού περιεχομένου, εισάγοντας την λεγόμενη κατακόρυφη ανάλυση. Σκοπός της είναι να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο τα σχολικά βιβλία αναδιαμορφώνουν και παρουσιάζουν το περιεχόμενο για τους σκοπούς της διδασκαλίας. Τις δυο αυτές μορφές ανάλυσης έρχεται τέλος να συμπληρώσει η εντός πλαισίου ανάλυση η οποία επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούν τις δραστηριότητες. Ακολουθώντας την προσέγγιση των Charalambous et al.(2010) στην παρούσα εργασία σε αντιστοιχία με την μέθοδο ανάλυσης που επέλεξαν και οι Wijaya et al.(2015) θ' αναλύσω τα επιλεγόμενα σχολικά εγχειρίδια από δυο διαφορετικές οπτικές. Αφενός θα μελετήσω τα εξωτερικά δομικά χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού υλικού (οριζόντια ανάλυση) και αφετέρου τα εσωτερικά χαρακτηριστικά που αφορούν το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων (κατακόρυφη ανάλυση). Τα δομικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων μελετώνται καθώς μας δίνουν μια σαφή εικόνα για το ποιες έννοιες/ διαδικασίες/ δεξιότητες είναι αυτές στις οποίες δίνεται μεγαλύτερη έμφαση κατά την διδασκαλία. Τέτοια δεδομένα αφορούν τον αριθμό των σελίδων αλλά κυρίως την έκταση που αφιερώνεται στο κομμάτι της επεξήγησης, στα λυμένα παραδείγματα και τις προς επίλυση δραστηριότητες. Ως δραστηριότητα θα θεωρήσω οτιδήποτε εμφανίζεται με τη μορφή ερώτησης, λυμένου παραδείγματος ή δραστηριότητας προς επίλυση. Αναφορικά με την κατακόρυφη ανάλυση αυτό που θα διερευνηθεί μέσω της παρούσας έρευνας είναι οι ευκαιρίες μάθησης που παρέχονται μέσα από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων.

2.2 Η μαθηματική δραστηριότητα

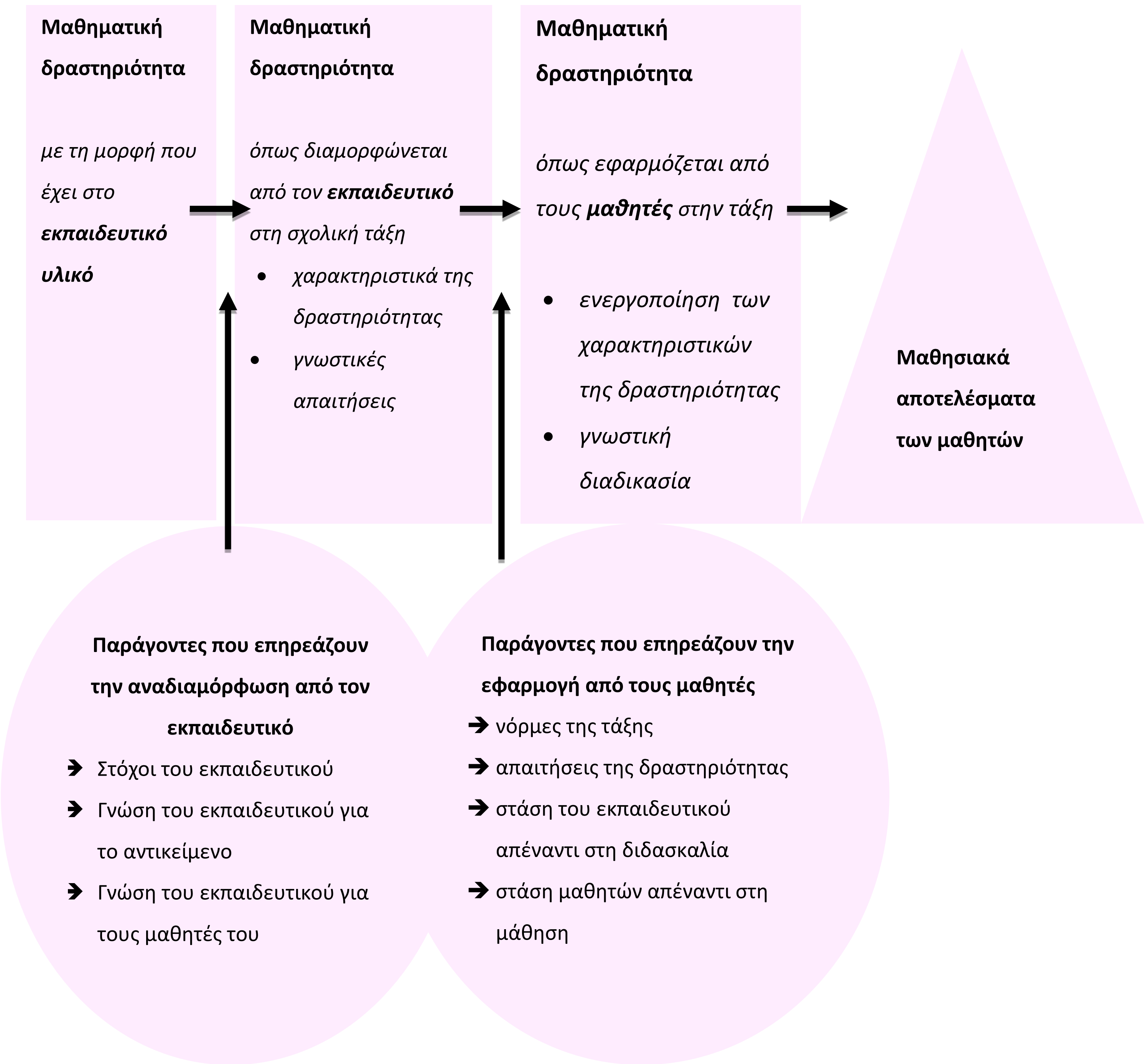
2.2.1 Η μαθηματική δραστηριότητα στην έρευνα για τη ΔτΜ.

Η έννοια της μαθηματικής δραστηριότητας είναι κεντρική στην έρευνα για τη ΔτΜ και αποτελεί σημείο αναφοράς για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Ερευνητικά δεδομένα όπως αυτά των Bromme, 1986; Clark and Yinker, 1987 αποκαλύπτουν ότι οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν και οργανώνουν την διδασκαλία τους σε μεγάλο βαθμό καθοδηγούμενοι από τις δραστηριότητες, ενώ ο σχεδιασμός μαθηματικών δραστηριοτήτων παραμένει ένα σημαντικό πεδίο στην έρευνα για την μαθηματική εκπαίδευση(Margolinas et al., 2013; Clarke, et al., 2014; Watson&Ohtani, 2015; Jones and Pepin, 2016).

Η κεντρική ιδέα της προσέγγισης που υιοθετείται στην παρούσα εργασία συνοψίζεται στο ότι οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται στην τάξη διαμορφώνουν τη βάση για την μάθηση. Αποτελούν επομένως ένα σημείο αναφοράς το οποίο θα αποτελέσει και τον κύριο άξονα της ανάλυσης μας. Οι μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές, μπορούν να διαμορφώσουν τις ευκαιρίες μάθησης και κατ' επέκταση τις εμπειρίες τους για τα Μαθηματικά στο σύνολο τους (Watson & Mason, 2007) ενώ έχει σημειωθεί ότι το είδος των δραστηριοτήτων αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών.

Με τον όρο μαθηματική δραστηριότητα, δεν εννοούμε απλώς μια λεκτική διατύπωση μαθηματικού προβλήματος (e.g. Clarke & Mesiti, 2013; Sierpinska,2004).Ως δραστηριότητα είναι δυνατό να ορίσουμε μια κατάσταση – πρόβλημα ή τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος (Κολέζα, 1987), ενώ σύμφωνα με τον ορισμό που πρότειναν οι Stein et al,. 1996 , είναι μια που λαμβάνει χώρα στην σχολική τάξη, σκοπός της οποίας είναι κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών σε μια μαθηματική έννοια, ιδέα ή δεξιότητα που πρόκειται να διδαχθεί.

Τον ορισμό αυτόν συμπληρώνει η παρακάτω διαγραμματική απεικόνιση.



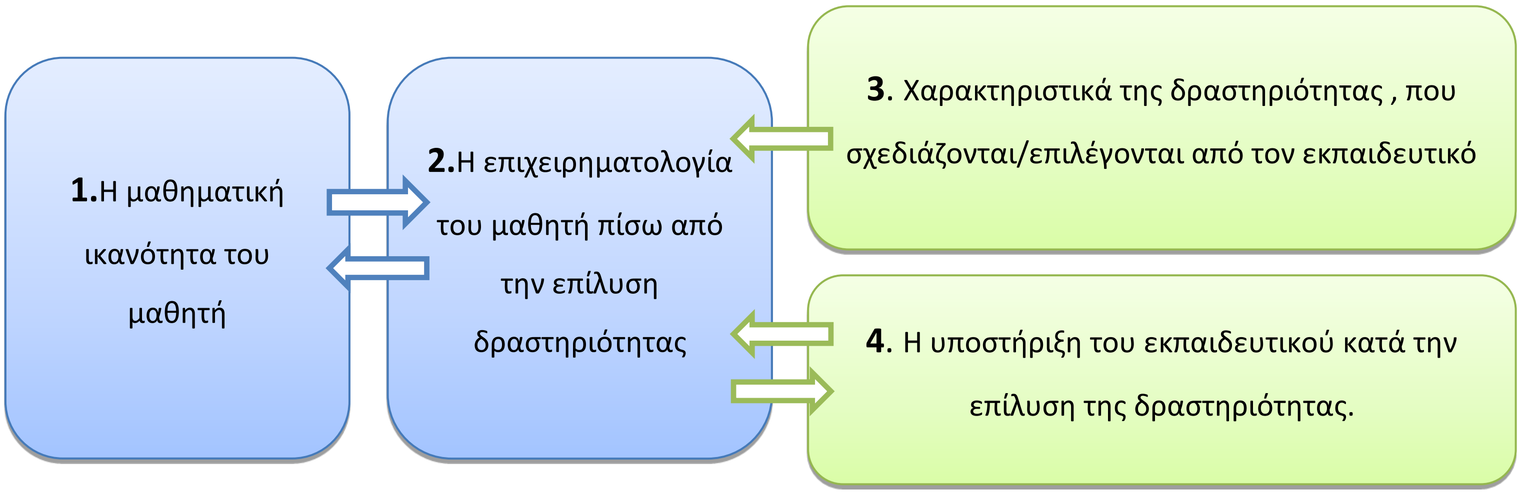
Σχήμα 2: Η μαθηματική δραστηριότητα, Stein et. al., 1996

Όπως θα παρατηρήσουμε, στο παραπάνω πλαίσιο , οι μαθηματικές δραστηριότητες περνούν από τρεις διαδοχικές φάσεις (οι οποίες αναπαρίστανται στα ορθογώνια, βλ. σχήμα 2). Έτσι έχουμε τις δραστηριότητες με τη μορφή που γράφονται από τους δημιουργούς του εκπαιδευτικού υλικού, τις δραστηριότητες όπως τροποποιούνται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη και τις δραστηριότητες όπως εφαρμόζονται από τους μαθητές στη διάρκεια του μαθήματος. Πιο συγκεκριμένα η πρώτη φάση αναφέρεται στη μορφή που έχουν οι δραστηριότητες όπως εμφανίζονται στις σελίδες ενός εγχειριδίου Μαθηματικών ή σε συνοδευτικό υλικό του αναλυτικού προγράμματος. Η επόμενη φάση αποτελεί το στάδιο στο οποίο οι δραστηριότητες αναδιαμορφώνονται από τον εκπαιδευτικό κατά τον σχεδιασμό και πραγματοποίηση της διδασκαλίας ενώ η τελευταία φάση συνιστά το στάδιο εφαρμογής της δραστηριότητας και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές επεξεργάζονται την δραστηριότητα, ενεργοποιούν την απαιτούμενη γνώση και δουλεύουν σε αυτήν. Παρατηρούμε επομένως ότι η φύση μιας δραστηριότητας διαφέρει καθώς διέρχεται από τη μια φάση στην άλλη. Με λίγα λόγια, η δραστηριότητα που εμφανίζεται στο εκπαιδευτικό υλικό δεν θα είναι ενδεχομένως πανομοιότυπη με αυτήν που έχει διαμορφώσει ο εκπαιδευτικός και κατ' επέκταση αυτή την οποία στην πραγματικότητα θα επεξεργαστούν οι μαθητές. Ας επισημάνουμε ότι σε κάθε φάση που περιγράψαμε παραπάνω υπεισέρχονται ετερογενείς παράγοντες που θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν. Πράγματι, στο σχήμα 2 εμφανίζονται δυο σημαντικές διαστάσεις των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Η 1^{η} αφορά στα χαρακτηριστικά των μαθηματικών δραστηριοτήτων δηλαδή σε εκείνες τις εκφάνσεις των δραστηριοτήτων που οι καθηγητές Μαθηματικών έχουν επισημάνει ως σημαντικές για την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης, του μαθηματικού συλλογισμού και την κατασκευής μαθηματικού νοήματος. Αυτά τα χαρακτηριστικά περιλαμβάνουν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, αναπαραστάσεις και στοιχεία μαθηματικής επικοινωνίας. Η 2^{η} διάσταση αναφέρεται στις γνωστικές απαιτήσεις, δηλαδή στα είδη των νοητικών διαδικασιών που απαιτούνται για την επίλυση της δραστηριότητας όπως αυτή δίνεται από τον εκπαιδευτικό καθώς και τις νοητικές διαδικασίες που τελικά επιστρατεύουν οι μαθητές όταν εμπλέκονται στη δραστηριότητα κατά την φάση της εφαρμογής. Αυτές οι νοητικές διαδικασίες όπως θα δούμε μπορεί να ποικίλουν περιλαμβάνοντας από απλή απομνημόνευση μέχρι την χρήση διαδικασιών και αλγορίθμων (με ή χωρίς την έμφαση στις έννοιες, στα επίπεδα κατανόησης ή νοηματοδότησης) και τις σύνθετες στρατηγικές συλλογιστικής και επιχειρηματολογίας οι οποίες θα ήταν τυπικές της διαδικασίας που ακολουθείται όταν κάποιος « κάνει Μαθηματικά» (π.χ. διατύπωση εικασιών, αιτιολόγησης και ερμηνείας).Ας σημειωθεί ότι τα χαρακτηριστικά και οι γνωστικές απαιτήσεις των δραστηριοτήτων μπορούν να μετασχηματιστούν σε οποιοδήποτε σημείο ανάμεσα σε δυο διαδοχικές φάσεις. Για παράδειγμα μια δραστηριότητα ενδεχομένως να προϋποθέτει εξ' αρχής υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων από τους μαθητές όμως κατά την εφαρμογή της να τροποποιηθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε το ενδιαφέρον των μαθητών να εστιάζεται τελικά μόνο στις διαδικασίες χωρίς καμία εννοιολογική σύνδεση. Την παραπάνω θεώρηση έρχονται να συμπληρώσουν οι Coles and Brown,2013 οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η μελέτη των δραστηριοτήτων δεν πρέπει να γίνεται ανεξάρτητα από τη χρήση τους.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, δοθείσης μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας, ακόμη και όταν η χρήση της είναι η προβλεπόμενη και επιδιωκόμενη (π.χ. από τους σχεδιαστές του αναλυτικού προγράμματος ή τους συγγραφείς ενός σχολικού εγχειριδίου), η αντιμετώπιση από τους μαθητές θα είναι ανεπανάληπτη, καθορισμένη από την ατομική τους ταυτότητα. Λαμβάνοντας υπόψιν τον πολυδιάστατο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας οι Johnson et al.,2017 στην προσέγγιση που υιοθετούν υποστηρίζουν ότι η μαθηματική δραστηριότητα περιλαμβάνει τον επιδιωκόμενο στόχο του σχεδιαστή , τις επιδιώξεις του εκπαιδευτικού κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας στην τάξη και τα διάφορα τεχνουργήματα (εκφώνηση προβλήματος, τα εργαλεία και τ’ αντικείμενα που διαμορφώνονται και τα παραγόμενα από τον μαθητή έργα) που τίθενται σε λειτουργία και γεννώνται από τις δράσεις εκπαιδευτικού και μαθητών κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης μιας δραστηριότητας.

Στην ίδια κατεύθυνση οι Rezat and Strässer (2012) αναγνωρίζουν την μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών μέσω της θεώρησης του Vygotsky σύμφωνα με την οποία η αλληλεπίδραση του μαθητή με τα Μαθηματικά διαμεσολαβείται από τεχνουργήματα όπως οι μαθηματικές δραστηριότητες, άποψη που μας οδηγεί στο γενικότερο συμπέρασμα ότι η χρήση του εργαλείου (όπως η δραστηριότητα) επιδρά θεμελιωδώς στον χαρακτήρα της διεργασίας που επιδιώκεται (μάθηση).Για το λόγο αυτό οι ίδιοι αναδιοργάνωσαν το μοντέλο της διδακτικής τριάδας (εκπαιδευτικός-μαθητής-Μαθηματικά) και το αντικατέστησαν με αυτό του τετραέδρου στο οποίο προσέθεσαν και τα εργαλεία διαμεσολάβησης στα οποία περιλαμβάνονται από σχολικά εγχειρίδια και ψηφιακά εργαλεία μέχρι δραστηριότητες Μαθηματικών. Επιπλέον, οι Clarke & Mesiti, 2013 υποστηρίζουν ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες συνιστούν μια μορφή κοινωνικής πρακτικής, που διεκπεραιώνει ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές συλλογικά ενώ κατ’ αντιστοιχία μ’ ένα σχέδιο μαθήματος, οι δραστηριότητες Μαθηματικών εμπεριέχουν συνήθως τις προσδοκίες και επιδιώξεις του δημιουργού αναφορικά με την ενδεχόμενη στάση των μαθητών.

Τέλος με αφορμή το θεωρητικό πλαίσιο που ανέπτυξαν οι Stein et al (1996) το οποίο και αναλύθηκε προηγουμένως διαγραμματικά, ο Lithner, 2017 εισάγει ένα νέο θεωρητικό μοντέλο αναφορικά με την μάθηση μέσω μιμητικού και δημιουργικού συλλογισμού.



Σχήμα 3: Συνιστώσες μαθητή (1) και (2) - Συνιστώσες δραστηριότητας/ εκπαιδευτικού (3) και (4),Lithner, 2017

Στη συνέχεια αναλύουμε καθεμία από τις συνιστώσες αυτής της διαγραμματικής απεικόνισης. Η 1η συνιστώσα αφορά στον όρο μαθηματική ικανότητα τον οποίο ορίζει ως την ικανότητα κάποιου να κατανοεί, να κρίνει, να κάνει και να χρησιμοποιεί Μαθηματικά. Σε αυτήν συμπεριλαμβάνονται η ικανότητα επίλυσης προβλήματος (όπου με τον όρο πρόβλημα εννοούμε μια δραστηριότητα πρόκλησης στην οποία ο λύτης δεν γνωρίζει εξ' αρχής την μέθοδο επίλυσης), η ικανότητα επιχειρηματολογίας (δηλαδή η αιτιολόγηση των επιλογών και των συμπερασμάτων) και η κατανόηση (Lithner,2017). Η 2η συνιστώσα αναφέρεται στην επιχειρηματολογία του μαθητή αναφορικά με την διαδικασία επίλυσης μιας δραστηριότητας και επηρεάζει την ικανότητα που αναπτύχθηκε ή πιο απλά τα όσα έμαθε ο μαθητής μέσα από την προσπάθεια επίλυσης της δραστηριότητας. Αντίστροφα, η ήδη υπάρχουσα ικανότητα επηρεάζει στον τύπο της επιχειρηματολογίας που μπορούν να υποστηρίξουν οι μαθητές. Η 3ησυνιστώσα αναφέρεται στα χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας που σχεδιάζονται/ επιλέγονται από τον εκπαιδευτικό και έχουν επίδραση στην επιχειρηματολογία των μαθητών ενώ η τελευταία συνιστώσα, αναφέρεται στην αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού-μαθητών για την υποστήριξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας κατά την επίλυση δραστηριότητας.

2.2.2 Η διδακτική αξία της μαθηματικής δραστηριότητας.

Η επιλογή των δραστηριοτήτων και οι συσχετιζόμενες παιδαγωγικές πρακτικές αποτελούν ένα κομβικό σημείο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Brousseau, 1997; Christiansen & Walther,1986) καθώς το περιεχόμενο μάθησης καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις δραστηριότητες που δίνονται στους μαθητές. Σύμφωνα μάλιστα με τους Lappan&Briars, 1995 «Καμία απόφαση που λαμβάνουν οι εκπαιδευτικοί δεν έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών και στην διαμόρφωση της αντίληψης για το τι συνιστά Μαθηματικά από την ίδια την επιλογή ή την δημιουργία των δραστηριοτήτων με τις οποίες ο εκπαιδευτικός εμπλέκει διδακτικά τους μαθητές του στην μελέτη των Μαθηματικών».

Σύμφωνα με το NCTM, 1991 οι μαθηματικές δραστηριότητες έχουν αξιοσημείωτο ρόλο στις διαδικασίες μάθησης των μαθητών καθώς « διαβιβάζουν αντιλήψεις για το τι είναι Μαθηματικά και το τι συνεπάγεται το να κάνει κανείς Μαθηματικά». Παράλληλα, οι διδακτικές προσεγγίσεις που υποστηρίζονται από κείμενο είναι κυρίαρχες στην διδασκαλία Μαθηματικών σε πολλές χώρες συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας. Ο βασικός στόχος ενός σχολικού εγχειριδίου είναι να παρέχει μια συστηματική προοδευτική μάθηση με σκοπό την απόκτηση νέας γνώσης (Seguin, 1989). Οι δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές παρέχουν το απαραίτητο πλαίσιο μέσα στο οποίο θα μάθουν να σκέφτονται γύρω από το αντικείμενο μελέτης ενώ το πλήθος των διαφορετικών δραστηριοτήτων θέτει συνεχώς νέες γνωστικές απαιτήσεις στους μαθητές (Doyle, 1983; Marx&Walsh,1988; Hiebert&Wearne,1993).Κατά συνέπεια, ο χαρακτήρας των δραστηριοτήτων μπορεί δυνητικά να επηρεάσει και να διαμορφώσει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές ή ακόμη και να περιορίσει ή να διευρύνει την οπτική τους αναφορικά με το μαθηματικό αντικείμενο με το οποίο εμπλέκονται διδακτικά.

Οι Pepin &Haggarty, 2002 υπογραμμίζουν ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν και πρέπει ν' αντιμετωπίζονται ως ένα μέσο που δυνητικά μπορεί να ενισχύσει συνολικά την μαθηματική κατανόηση παρά ως ένα απλό όχημα για το ίδιο το περιεχόμενο. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο ρόλος της μαθηματικής δραστηριότητας αποκτά κομβική σημασία αν ειδικότερα αναλογιστούμε το πλήθος των διαφορετικών οπτικών για τα Μαθηματικά που η καθεμία από αυτές μπορεί να προσφέρει στον μαθητή.

Όπως υπογραμμίζει ο Schoenfeld,1994 οι μαθητές διαμορφώνουν την αντίληψη τους για την οντολογία των Μαθηματικών μέσα από τις πραγματικές τους εμπειρίες στον κόσμο των Μαθηματικών, την ίδια στιγμή που οι πρώτες τους ευκαιρίες να βιώσουν τα Μαθηματικά τοποθετούνται μέσα στις δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται στην σχολική τάξη. Έτσι για παράδειγμα, δραστηριότητες που είναι σχεδιασμένες ώστε να ενθαρρύνουν υψηλό επίπεδο συλλογιστικής είναι πιθανότερο να έχουν αυτό το αποτέλεσμα σε αντίθεση με άλλες που είναι απλώς σχεδιασμένες με σκοπό να παρέχουν ευκαιρίες για απλή εξάσκηση (Doyle, 1998; Hiebert & Wearne, 1997).Επιπρόσθετα, όπως αναφέρει η Ames, 1992 οι μαθηματικές δραστηριότητες που είναι πιο πιθανό να χαρακτηριστούν ως πιο αποτελεσματικές είναι αυτές που προσφέρουν ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών, αρκετές αλλά όχι υπέρμετρες προκλήσεις και χαρακτηρίζονται από το στοιχείο της πρωτοτυπίας.

Στην ίδια κατεύθυνση ο Niss, 2007 διατύπωσε ότι είναι απαραίτητο για τους μαθητές να δουλέψουν πάνω σε δραστηριότητες στις οποίες θα έχουν την ευκαιρία να εμπλακούν παραγωγικά με σημαντικά θέματα των Μαθηματικών. Ωστόσο όπως επισημαίνει θα πρέπει να δίνεται προσοχή ώστε να επιτευχθεί η λεπτή ισορροπία ανάμεσα σε δραστηριότητες που λειτουργούν ως προωθητικές για τη μάθηση από αυτές που αποτελούν στην πραγματικότητα εμπόδιο για τη μάθηση. Μάλιστα συμπληρώνει ότι γνωρίζουμε ελάχιστα για το πως τα παραπάνω εφαρμόζονται κατά τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που προορίζονται για τους σκοπούς της διδασκαλίας όπως επίσης και για τους μηχανισμούς που συνδέουν μια τέτοιου είδους διδασκαλία με θετικά μαθησιακά αποτελέσματα. Η έννοια της παραγωγικής εμπλοκής προέρχεται από την παραδοχή ότι η ανάπτυξη βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων (π.χ. η επειρηματολογία και η εννοιολογική κατανόηση) απαιτεί ενεργή εμπλοκή σε απαιτητικές γνωστικές διαδικασίες (π.χ. επίλυση μη τυπικών προβλημάτων).Υπογραμμίζει μάλιστα ακολουθώντας τους Schoenfeld 1985 και Brousseau 1997 ότι είναι ελάχιστα ή καθόλου εφικτή η γνωστική μετάβαση σε τέτοιου είδους δεξιότητες αποκλειστικά μέσα από μαθησιακές διαδικασίες μικρότερης δυσκολίας ,φέρνοντας ως παράδειγμα τη μιμητική επανάληψη τυποποιημένων λύσεων. Αντίθετα όπως επισημαίνει ο Hewson, 2011 οι πλούσιες σε μαθηματικό περιεχόμενο δραστηριότητες επιτρέπουν στους μαθητές να:

- Να εμπλακούν ενεργητικά σε δραστηριότητες ακόμη κι αν αρχικά δεν είναι προδιαγεγραμμένη η μέθοδος για την επίλυση τους.
- Να διερευνήσουν στο εύρος που τους επιτρέπουν οι δυνατότητες τους
- Να θέσουν και να επιλύσουν οι ίδιοι προβλήματα και να διατυπώσουν εικασίες.
- Να εργαστούν σε πολλά επίπεδα.
- Να επεκτείνουν ή να εφαρμόσουν τη γνώση τους σε νέα πλαίσια.
- Να εργαστούν με επιτυχία χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους.
- Να διευρύνουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλήματος.
- Να εμβαθύνουν και να διευρύνουν την μαθηματική γνώση του περιεχομένου.
- Να αντιληφθούν και να νοηματοδοτήσουν τις μαθηματικές αρχές που υπεισέρχονται και να κάνουν συνδέσεις με διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών.
- Να εργαστούν σε καταστάσεις προβλήματος με υψηλό επίπεδο μαθηματικής πρόκλησης.
- Ν’ αναγνωρίζουν τα μαθηματικά ως εργαλείο για την ανθρώπινη σκέψη καθώς και την παρουσία τους σε κάθε έκφανση της ανθρώπινης δραστηριότητας .

Επιχειρώντας να απαντήσει στο ερώτημα αναφορικά με τα στοιχεία που προσδίδουν διδακτική αξία σε μια μαθηματική δραστηριότητα, ο Lithner,2017 αξιοποιώντας τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του Brousseau, 1997 εκθέτει τα χαρακτηριστικά και τις συνέπειες της τυποποιημένης μάθησης και αναδεικνύει τους λόγους που επιβάλλουν τον σχεδιασμό μιας πιο εποικοδομητικής εναλλακτικής.

Αρχικά η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων επεξηγεί τους λόγους για τους οποίους η παροχή τυποποιημένων αλγοριθμικών διαδικασιών είναι η πιο ελκυστική και επικρατούσα επιλογή για τον εκπαιδευτικό. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων οι λαθεμένες ή ημιτελείς αντιλήψεις των μαθητών δεν θεωρούνται ως αποτυχίες αλλά συχνά είναι αναπόφευκτες και θεμελιώδεις για τις διαδικασίες δόμησης της γνώσης. Εντούτοις συχνά ο εκπαιδευτικός στην προσπάθεια του να υπερπηδήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του παρέχει τυποποιημένα πρότυπα λύσεων που εφαρμόζονται σε ομάδες δραστηριοτήτων. Κάτι τέτοιο αποδεσμεύει τους μαθητές από την ευθύνη του διανοητικού μόχθου και κατ’ επέκταση την εμπλοκή που απαιτείται για περαιτέρω εμβάθυνση. Ένα δεύτερο σημείο που επισημαίνεται μέσα από τη θεωρία του Brousseau είναι οι λόγοι της αναποτελεσματικότητας της μίμησης αλγορίθμων. Πράγματι ένας αλγόριθμος ως μια αλληλουχία εκτελέσιμων εντολών για την επίλυση μιας κλάσης δραστηριοτήτων , είναι σχεδιασμένος ώστε να εμπεριέχει όλες τις προκαθορισμένες για την επίλυση μεθόδους. Κάτι τέτοιο προσφέρει μεν αξιοπιστία και ταχύτητα όταν ο στόχος είναι αποκλειστικά η επίλυση προβλήματος , οδηγεί δε σε τυποποιημένη μάθηση από τη στιγμή που δε νοηματοδοτείται μαθηματικά. Τρίτον η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων στοχεύει στον σχεδιασμό καταστάσεων που επιτρέπουν την κατασκευή της γνώσης απο τον μαθητή. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές πρέπει να λάβουν ευθύνη για μέρος της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος την ίδια στιγμή που ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να διαμορφώσει με κατάλληλο τρόπο την διδακτική κατάσταση μέσω της οποίας ο μαθητής θα κατακτήσει την επιδιωκόμενη γνώση. Κάτι τέτοιο όπως γίνεται αντιληπτό αναθέτει μεγαλύτερο μερίδιο ευθύνης και υψηλό επίπεδο απαιτήσεων στον εκπαιδευτικό.

2.2.3 Η ανάλυση των μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Σε αυτήν την ενότητα θα προχωρήσουμε σε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αναφορικά με τους διαφορετικούς τρόπους ανάλυσης δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Αρχικά ένας τρόπος ανάλυσης αφορά στη μελέτη γενικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών δραστηριοτήτων που λειτουργούν υποβοηθητικά της μάθησης. Πιο συγκεκριμένα, οι Kilpatrick et al (2001) εκθέτουν την οπτική τους σχετικά με το τι θεωρούν ως επιτυχή μάθηση στα Μαθηματικά. Εισάγουν μάλιστα τον όρο «μαθηματική αρτιότητα» για να αποτυπώσουν όλα τα στοιχεία που συναποτελούν στην επιτυχή μάθηση των Μαθηματικών .Διακρίνουν μάλιστα πέντε διαπλεκόμενες και αλληλεξαρτώμενες πτυχές του όρου. Αυτές είναι:

- **Εννοιολογική κατανόηση**, δηλαδή η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, λειτουργιών και σχέσεων.
- **Διαδικαστική ευχέρεια**, δηλαδή ικανότητα για ευέλικτη, ακριβή, αποτελεσματική και κατάλληλη επιτέλεση διαδικασιών.
- **Στρατηγική ικανότητα**, δηλαδή ικανότητα για μορφοποίηση, αναπαράσταση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.
- **Προσαρμοστικότητα**, δηλαδή δυνατότητα για λογική σκέψη, αναστοχασμό, επεξήγηση και αιτιολόγηση.
- **Παραγωγική διάθεση**, δηλαδή ενσυναίσθητη τάση ν' αντιμετωπίζουμε τα Μαθηματικά ως κάτι λογικό ,χρήσιμο και αξιόλογο.

Επιπλέον σημειώνουν ότι η ποιότητα της διδασκαλίας εξαρτάται για παράδειγμα από τις επιλογή των δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία καθώς και τις γνωστικές τους απαιτήσεις ενώ επισημαίνουν ότι «οι προσδοκίες του εκπαιδευτικού αναφορικά με τα Μαθηματικά που είναι σε θέση να κατανοήσουν οι μαθητές του έχουν τη δύναμη να επηρεάσουν τις δραστηριότητες που επιλέγονται ή και τις ερωτήσεις που τίθενται κατά τη διάρκεια του μαθήματος, με λίγα λόγια δηλαδή να διαμορφώσουν τις ευκαιρίες και τα κίνητρα της μάθησης τους». Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται μάλιστα από τα ευρήματα των Haggarty &Peppin (2002) ως αποτέλεσμα της μελέτης σχολικών εγχειριδίων.

Οι Hiebert et al, 1997 διατυπώνουν ότι η δόμηση της μαθηματικής κατανόησης από τους μαθητές χτίζεται μέσω «αναστοχασμού και επικοινωνίας» υπογραμμίζοντας ότι ο ρόλος των δραστηριοτήτων είναι να επιτρέπουν και να ενθαρρύνουν αυτές τις διεργασίες. Κάτι τέτοιο μας οδηγεί συμπερασματικά σε κάποια κριτήρια που θα πρέπει να πληροί μια δραστηριότητα. Σ΄ αυτά περιλαμβάνεται αρχικά η αντιμετώπιση της δραστηριότητας από τους μαθητές ως μιας κατάστασης προβλήματος , ως κάτι δηλαδή που πρέπει ν' αντιμετωπίσουν μέσα από μια πορεία σκέψης παρά ως μια προκαθορισμένη «συνταγή» που πρέπει ν' ακολουθήσουν. Επιπρόσθετα είναι σημαντικό, η όποια προβληματική παρουσιάζει η δραστηριότητα να προέρχεται από τα ίδια τα Μαθηματικά και όχι από κάτι άλλο και τέλος να παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν ήδη κατεκτημένες δεξιότητες και γνώσεις.

Μια δεύτερη απόπειρα ανάλυσης επιχειρούν οι Stein et al. (1996), βασιζόμενοι στις γνωστικές απαιτήσεις των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Αρχικά, κάνουν τη διάκριση ανάμεσα στις μαθηματικές δραστηριότητες που εμπλέκουν σε επιφανειακό επίπεδο τον μαθητή και σε δραστηριότητες που απαιτούν την κατασκευή προσωπικού νοήματος από τους μαθητές και επιπλέον εμβάθυνση, ερμηνεία, ευελιξία, ιεράρχηση και ορθή διαχείριση των δεδομένων. Σ' αυτήν τη διάκριση εισάγουν όπως προαναφέραμε τον όρο γνωστική απαίτηση με στόχο να εξειδικεύσουν περισσότερο την κατηγοριοποίηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Έτσι ορίζουν τον όρο γνωστικές απαιτήσεις ως «τις γνωστικές διαδικασίες στις οποίες πραγματικά εμπλέκονται οι μαθητές όσο δουλεύουν σε μια δραστηριότητα». Μέσω αυτού του ορισμού και με την χρήση των τεσσάρων ιεραρχικά διατεταγμένων κατηγοριοποιήσεων που θα επεξηγήσουμε αναλυτικά, η Stein και οι συνεργάτες της (1996; 2000) κάνουν τον διαχωρισμό ανάμεσα στα χαμηλότερα και υψηλότερα επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων σε δραστηριότητες Μαθηματικών. Ως χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων χαρακτηρίζονται οι δραστηριότητες που κατά κύριο λόγο περιλαμβάνουν **απομνημόνευση** ή και εμπλοκή σε μαθηματικές διαδικασίες ωστόσο με την **απουσία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών ιδεών**. Με την χρήση του όρου «απομνημόνευση» οι ερευνητές περικλείουν διαδικασίες όπως η στείρα αναπαραγωγή μαθηματικών θεσφάτων, η διατύπωση μνημονικών κανόνων και τύπων χωρίς την απαραίτητη απόδοση μαθηματικού νοήματος στις έννοιες που πραγματεύεται η δραστηριότητα. Αντίστοιχα με τον όρο «απουσία συνδέσεων» εννοούν την έμφαση στον υπολογισμό ενός ορθού αποτελέσματος χωρίς την παροχή μαθηματικής επιχειρηματολογίας που να θεμελιώνει αυστηρά την αλγοριθμική διαδικασία.

Από την άλλη πλευρά οι μαθηματικές δραστηριότητες με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις ενθαρρύνουν τις **συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών** και απαιτούν από τους μαθητές « **να κάνουν Μαθηματικά**» ώστε να εμπλακούν σε διεργασίες αναστοχασμού , αυτορρύθμισης κλπ. Με λίγα λόγια προϋποθέτουν την βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τον μαθητή και την ικανότητα του να τις εφαρμόζει παρέχοντας παράλληλα επεξηγήσεις. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει επιγραμματικά τα διάφορα επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων όπως έχουν καταγραφεί και ιεραρχηθεί από την υπάρχουσα έρευνα.

Επίπεδο γνωστικής απαίτησης	**Περιγραφή**
Χαμηλό επίπεδο απαιτήσεων (Απομνημόνευση)	• Στείρα αποστήθιση μαθηματικών ισχυρισμών κανόνων, τύπων, ορισμών και μαθηματικής ορολογίας. • Πιστή αναπαραγωγή ενός μαθηματικού τύπου, ενός κανόνα χωρίς κριτική αμφισβήτηση. • Καμία εννοιολογική σύνδεση ή νοηματοδότηση πίσω από τον μαθηματικό ισχυρισμό, τύπο, κανόνα ή ορισμό.
Χαμηλό προς μεσαίο επίπεδο απαιτήσεων (Εφαρμογή διαδικασιών χωρίς συνδέσεις)	• Αλγοριθμικός χαρακτήρας • Μικρό περιθώριο για αμφισβήτηση σχετικά με την διαδικασία που πρέπει ν' ακολουθηθεί • Καμία σύνδεση με την απόδοση μαθηματικού νοήματος στην διαδικασία που τελείται. • Εστίαση στην ορθότητα των απαντήσεων παρά στην μαθηματική κατανόηση. • Δεν απαιτούνται επεξηγήσεις από τους μαθητές.

Μεσαίο προς υψηλό επίπεδο απαιτήσεων (Εφαρμογή διαδικασιών με συνδέσεις)	• Έμφαση στην διαδικασία για την βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. • Προτεινόμενες πορείες επίλυσης σε γενικό πλαίσιο σε στενή ωστόσο σύνδεση με τις σχετιζόμενες κεντρικές μαθηματικές ιδέες. • Ποικιλία αναπαραστάσεων και συνδέσεις μεταξύ αυτών. • Επαυξημένες γνωστικές απαιτήσεις.
Υψηλό επίπεδο απαιτήσεων (Η κατεξοχήν μαθηματική διαδικασία)	• Απαιτεί σύνθετο και μη αλγοριθμικό συλλογισμό. • Διερεύνηση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών και σχέσεων από τον μαθητή. • Διαδικασίες αυτοέλεγχου και αυτορρύθμισης της γνωστικής διαδικασίας. • Ανάλυση των περιορισμών στις λύσεις και τις χρησιμοποιούμενες στρατηγικές. • Επιφορτίζει τον μαθητή με το άγχος για τον μη προβλέψιμο χαρακτήρα της διαδικασίας επίλυσης.

Πίνακας 1-Επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων

Τέλος ένα ακόμη επίπεδο ανάλυσης των δραστηριοτήτων βασίζεται στην έννοια των μαθηματικών συνδέσεων. Οι Hiebert & Carpenter (1992) θεωρούν ότι οι συνδέσεις μεταξύ των εννοιών είναι απαραίτητες για την ενίσχυση της μαθηματικής κατανόησης. Μάλιστα την ορίζουν ως «τον τρόπο με τον οποίο η πληροφορία αναπαρίσταται και δομείται. Έτσι «μια μαθηματική ιδέα ή ισχυρισμός γίνονται αντιληπτά εάν η νοητική τους αναπαράσταση είναι μέρους ενός δικτύου αναπαραστάσεων. Ο βαθμός κατανόησης καθορίζεται από το πλήθος και την ισχύ των συνδέσεων». Ο Hiebert (1986) σχολίασε μάλιστα ότι η απουσία συνδέσεων στα Μαθηματικά είναι παράγοντας που ευθύνεται για την στροφή από τις διαισθητικές και πλούσιες σε μαθηματικά νοήματα προσεγγίσεις σε άλλες πιο τυποποιημένες που δεν ενέχουν διαδικασίες νοηματοδότησης.

Οι Pepin&Haggarty(2002) επιχειρώντας μια σύνθεση των προαναφερθέντων πλαισίων ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων καταλήγουν στην κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων βάσει των ακόλουθων κριτηρίων. Συγκεκριμένα διερευνούν σε τι βαθμό οι δραστηριότητες:

- Ενισχύουν την συσχετιστική κατανόηση σε σύγκριση με την διαδικαστική ή εργαλειακή κατανόηση.
- Ενισχύουν τη διαδικαστική ευχέρεια.
- Ενθαρρύνουν σύνδεση με την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών.(δραστηριότητες που αξιοποιούν στοιχεία γνώριμα στους μαθητές).
- Επιχειρούν συνδέσεις με τις έννοιες και τις μαθηματικές σχέσεις που υπεισέρχονται.
- Επιχειρούν εσωτερικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και εξωτερικές συνδέσεις με άλλα πεδία μάθησης.
- Εντάσσονται σε κάποιο πλαίσιο το οποίο ενισχύει τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη

πραγματική ζωή (π.χ. δραστηριότητες που αξιοποιούνται για την εισαγωγή μιας έννοιας).

- Εμπεριέχουν υψηλού γνωστικού επιπέδου δεξιότητες (π.χ. δραστηριότητες που απαιτούν αιτιολόγηση και γενίκευση).
- Ενθαρρύνουν τη σύνδεση διαφορετικών τύπων αναπαράστασης.(π.χ. δραστηριότητες που εμπεριέχουν περισσότερες από μια αναπαραστάσεις).

2.2.4 Αλγοριθμικός και δημιουργικός συλλογισμός ως στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας.

Μια σειρά ερευνών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ένα κρίσιμο στοιχείο που επηρεάζει τα μαθησιακά αποτελέσματα είναι το εάν ή όχι οι μαθητές εμπλέκονται σε αλγοριθμικό (μιμητικό) ή δημιουργικό συλλογισμό. Ο συλλογισμός είναι η αλληλουχία της σκέψης που υιοθετείται για την παραγωγή ισχυρισμών και συμπερασμάτων κατά την επίλυση προβλήματος.

Ο αλγοριθμικός (μιμητικός) συλλογισμός συνίσταται στην προσπάθεια επίλυσης μιας δραστηριότητας μέσω της εφαρμογής ενός αλγορίθμου που είτε δίνεται είτε ανακαλείται από τον μαθητή (Lithner, 2008). Παραδείγματα τέτοιου είδους συλλογισμού περιλαμβάνουν την ανάκληση στην μνήμη μιας ήδη γνωστής διαδικασίας ή την μιμητική επανάληψη ενός παραδείγματος που δόθηκε από τον εκπαιδευτικό και την εφαρμογή του σε παραπλήσιο παράδειγμα από τους μαθητές. Όπως ο ίδιος παρατηρεί στα σχολικά εγχειρίδια αλλά και στην καθαυτή διδακτική πρακτική είναι μικρή η συχνότητα των ευκαιριών που έχουν οι μαθητές για την δόμηση της γνώσης τους στο πλαίσιο που προτείνεται από τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων. Όταν αυτό συμβαίνει, οι μαθητές παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις μέσα από τον δημιουργικό και μαθηματικά δομημένο συλλογισμό(Lithner 2008). Διακρίνει μάλιστα τα κυριότερα κριτήρια τα οποία πληροί αυτό το είδος συλλογισμού. Αυτά είναι τα ακόλουθα: (1) δημιουργικότητα: ο μαθητής δημιουργεί μια συλλογιστική πορεία που δεν προϋπήρχε ή αναδιαμορφώνει μια ξεχασμένη (Silver, 1997), (2) αληθοφάνεια: η ύπαρξη επιχειρημάτων, ο ρόλος των οποίων είναι ν' επεξηγούν τους λόγους για την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής (Pólya 1954; Lithner 2008), (3) μαθηματική θεμελίωση: η ύπαρξη επιχειρημάτων η θεμελίωση των οποίων γίνεται με αναφορά σε μαθηματικές ιδιότητες που ενυπάρχουν στον συλλογισμό (Lithner, 2008)

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει αποκαλύψει δυο κύριες χρήσεις της δημιουργικότητας στα Μαθηματικά (Sriraman et al. 2013): την αξιοσημείωτη δημιουργικότητα που είναι χαρακτηριστικό των ιδιοφυιών και την καθημερινή δημιουργικότητα που μπορεί να ενισχυθεί σε μεγάλο βαθμό στον ευρύ μαθητικό πληθυσμό (Silver, 1997).Το τελευταίο νοηματοδοτείται ως η εξαρχής σύνθεση μιας λύσης σε δραστηριότητες ή η εκ νέου διαμόρφωση ξεχασμένων λύσεων και έχουν την προσωπική σφραγίδα του ατόμου που τις δημιούργησε.

Ποια είναι όμως τα βασικά χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων που βασίζονται στον αλγοριθμικό (μιμητικό) συλλογισμό και αντίστοιχα αυτών που καλλιεργούν την δημιουργική μαθηματική συλλογιστική;

Αρχικά προτού απαντηθεί το παραπάνω ερώτημα ας σημειωθεί ότι ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων που ενθαρρύνουν τον αλγοριθμικό συλλογισμό στο πλαίσιο του σχολείου είναι σχετικά εύκολος, Αυτός ο ισχυρισμός επιβεβαιώνεται αν αναλογιστούμε ότι στα Μαθηματικά εμφανίζεται πληθώρα τυποποιημένων μεθόδων για την επίλυση διαφόρων τύπων δραστηριοτήτων. Δεύτερον παρατηρεί κανείς με την πρώτη ματιά ότι τα σχολικά εγχειρίδια βρίθουν από δραστηριότητες που λύνονται με αντιγραφή των λυμένων παραδειγμάτων ή άλλων τυποποιημένων μοντέλων λύσεων. Τρίτον, είναι εύκολο για έναν μαθητή να χρησιμοποιήσει για αλγοριθμική διαδικασία καθότι δεν προϋποθέτει τη νοηματοδότηση των εννοιών που υπεισέρχονται στη δραστηριότητα ενώ έχει ελάχιστες απαιτήσεις όχι μόνο ως προς την δημιουργική ικανότητα του μαθητή αλλά και ως προς το επίπεδο της εννοιολογικής τους κατανόησης.(Lithner, 2008). Επομένως όπως ορίζεται κατά τον Lithner, 2017 μια δραστηριότητα στην οποία διατίθεται (δίνεται ή ανακαλείται) εξαρχής μια ολοκληρωμένη μέθοδος επίλυσης καλείται ως δραστηριότητα αλγοριθμικού συλλογισμού.

Αναφορικά με τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που απαιτούν από τον μαθητή να επιστρατεύσει δημιουργικό συλλογισμό , το σημείο κλειδί είναι αφενός το επίπεδο δυσκολίας της δραστηριότητας να είναι τέτοιο ώστε ο μαθητής να είναι σε θέση να προχωρήσει στην επίλυση της και αφετέρου η ίδια η διαδικασία επίλυσης να οδηγήσει τον μαθητή στην κατασκευή της επιδιωκόμενης γνώσης. Σύμφωνα μάλιστα με τον ορισμό γι’ αυτόν τον τύπο συλλογισμού που δόθηκε είναι απαραίτητο για τους μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν μαθηματικά επιχειρήματα που να υποστηρίζουν κάθε φάση επίλυσης της δραστηριότητας. Έχοντας λάβει υπόψιν αυτά τα στοιχεία ο Lithner, 2017 συνοψίζει τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει μια δραστηριότητα που ενθαρρύνει αυτό το είδος συλλογισμού. Σ’ αυτά περιλαμβάνονται ότι:(1) δεν παρέχεται καμία ολοκληρωμένη μέθοδος επίλυσης στον μαθητή, (2) είναι φυσιολογικό για τους μαθητές να αιτιολογούν την κατασκευή και εφαρμογή μιας λύσης.

2.3 Η Γεωμετρία ως διδακτικό αντικείμενο

2.3.1 Γεωμετρικός συλλογισμός και χωρική ικανότητα.

Η Γεωμετρία αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι στο αναλυτικό πρόγραμμα για τα σχολικά Μαθηματικά τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ο Clements, 1998 ορίζει τη Γεωμετρία ως το πεδίο μελέτης του χώρου και των σχημάτων ενώ διασαφηνίζει ότι αυτό που μελετάται είναι αντικείμενα του χώρου όπως είναι οι γραμμές, τα σχήματα κλπ., οι σχέσεις που τα συνδέουν όπως είναι οι σχέσεις ισότητας και παραλληλίας και οι μετασχηματισμοί όπως η ανάκλαση και η στροφή. Όπως συνοψίζει « ο χωρικός συλλογισμός περιλαμβάνει την δημιουργία και τον χειρισμό νοητικών αναπαραστάσεων αυτών των αντικειμένων, τις μεταξύ τους σχέσεις και τους μετασχηματισμούς».

Στην ίδια κατεύθυνση, το αναλυτικό πρόγραμμα του Καναδά σημειώνει ότι η χωρική αντίληψη είναι η διαισθητική επίγνωση του περιβάλλοντα χώρου και των αντικειμένων μέσα σε αυτόν, ενώ όπως υπογραμμίζεται «η Γεωμετρία μας βοηθά ν' αναπαραστήσουμε και να περιγράψουμε τ' αντικείμενα και τις σχέσεις τους στον χώρο». Μάλιστα σημειώνεται ότι οι μαθητές αναπτύσσουν την χωρική τους αντίληψη μέσω της οπτικοποίησης, του σχεδιασμού και της σύγκρισης επίπεδων ή στερεών σχημάτων σε διαφορετικές θέσεις. Παράλληλα επισημαίνεται ότι η ισχυρή αντίληψη των χωρικών σχέσεων και η ικανότητα στην ορθή χρήση των γεωμετρικών εννοιών και της γεωμετρικής γλώσσας λειτουργεί υποστηρικτικά στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού και την μέτρηση. Ακόμη η χωρική αντίληψη μέρος της οποίας αποτελούν οι εσωτερικές και διαισθητικές αντιλήψεις αναφορικά με τα χαρακτηριστικά των δισδιάστατων σχημάτων και των τρισδιάστατων μοντέλων, οι συσχετίσεις των σχημάτων και το αποτέλεσμα των αλλαγών στα σχήματα, είναι απαραίτητη για την επίγνωση των γεωμετρικών εκφάνσεων του κόσμου μας.

Σύμφωνα με τον Jones, 2002 «η μελέτη της Γεωμετρίας συνεισφέρει στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων όπως η οπτικοποίηση, η κριτική σκέψη, η διαισθητική αντίληψη, η επίλυση προβλήματος, η ανάπτυξη και ο έλεγχος εικασιών, ο παραγωγικός συλλογισμός, η λογική επιχειρηματολογία και η απόδειξη. Συγκεκριμένα, όπως αναφέρει ο Yanik, 2011 «ο κλάδος της γεωμετρίας των μετασχηματισμών μπορεί εν δυνάμει να συμβάλλει στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας και της αιτιολόγησης». Πιο αναλυτικά επισημαίνει ότι η μελέτη γεωμετρικών μετασχηματισμών παρέχει στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες για περιγραφή κανονικοτήτων, ανακάλυψη των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων των ισομετριών, διατύπωση γενικεύσεων και καλλιέργεια χωρικών δεξιοτήτων. (Clements, Battista, Sarama & Swaminathan, 1997; Portnoy, Grundmeier & Graham, 2006).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής επίδοσης και του χωρικού συλλογισμού είναι στενή καθώς συχνά η έρευνα σημειώνει ότι η μαθηματική εξέλιξη των μαθητών ανακόπτεται εξαιτίας της ελλιπούς ανάπτυξης της χωρικής τους αντίληψης. Οι Battista and Clements, 1988 σημειώνουν ότι οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών Δημοτικού στο πεδίο της Γεωμετρίας οφείλονται εν μέρει στο αναλυτικό πρόγραμμα της σχολικής Γεωμετρίας το οποίο επικεντρώνεται στην αναγνώριση, την κατονομασία των γεωμετρικών σχημάτων και τον γεωμετρικό συμβολισμό. Προτείνουν επομένως ότι ο βασικός προσανατολισμός της γεωμετρίας του Δημοτικού σχολείου θα πρέπει να είναι «η μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων, της κίνησης και των σχέσεων που αναπτύσσονται στο χωρικό περιβάλλον». Αυτό πρακτικά σηματοδοτεί ότι οι πρώτες εμπειρίες των μαθητών θα πρέπει να επικεντρώνονται στην άτυπη μελέτη των σχημάτων και στις ιδιότητες τους καθώς επίσης και να έχουν ως πρωταρχικό στόχο την ανάπτυξη της διαισθητικής αντίληψης και την γνώση του χώρου. Ωστόσο ερευνητικά δεδομένα επιβεβαιώνουν ότι υπάρχει ανισομερή κατανομή του χρόνου που αφιερώνεται στην Γεωμετρία σε σύγκριση με την Αριθμητική με αποτέλεσμα τις εμφανώς λιγότερες ευκαιρίες μάθησης του πρώτου πεδίου έναντι του δεύτερου.

Μάλιστα οι Clements και Sarama (2011), υπογραμμίζουν ότι η γεωμετρία θα πρέπει να τεθεί σε ύψιστη προτεραιότητα καθώς αυτή μεταξύ άλλων - ως ένα όχημα για την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας- προοιωνίζει την επερχόμενη σχολική πρόοδο των μαθητών.

Συγκεκριμένα αναφέρουν ότι: «Εμπειρικά δεδομένα φανερώνουν ότι ένα υψηλό επίπεδο χωρικής αντίληψης δεν αντικατοπτρίζει απλώς έναν υψηλό δείκτη ευφυίας αλλά επιπλέον είναι ενδεικτική της ικανότητας του ατόμου να επιλύει μαθηματικά προβλήματα και μάλιστα όχι αυτά που θα χαρακτηρίζαμε ως προβλήματα ρουτίνας».

Επιπλέον αξιοσημείωτη είναι η σύνδεση του χωρικού συλλογισμού με την βελτίωση των σχολικών επιδόσεων στα Μαθηματικά και τη Φυσική (Newcombe, 2010), ενώ σε αρκετές έρευνες η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης φαίνεται να σχετίζεται με την ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης σε θέματα Ανάλυσης (Tall, 2007).

Σ’ αυτό σημείο είναι σημαντικό να δούμε πως εμφανίζεται όμως ο όρος χωρική ικανότητα στη διεθνή βιβλιογραφία. Ας σημειωθεί ότι η διατύπωση ενός ορισμού για τη χωρική ικανότητα αποτέλεσε πεδίο αμφιλεγόμενο για δεκαετίες εξαιτίας της αυξημένης δυσκολίας να οριοθετηθεί με ακρίβεια.

Αρχικά, σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1967) η χωρική ικανότητα αφορά στην ρητορική για την οντολογία του χώρου. Οι Lean & Clements (1981) όρισαν τη χωρική ικανότητα ως την ικανότητα διαμόρφωσης και χειρισμού νοερών εικόνων ενώ λίγα χρόνια αργότερα οι Linn & Petersen (1985) την περιέγραψαν ως την ικανότητα αναπαράστασης, μετασχηματισμού, παραγωγής και ανάκλησης συμβολικών, μη λεκτικών πληροφοριών ή πιο επεξηγηματικά ως διαδικασίες του νου με σκοπό την αντίληψη, την αποθήκευση, την ανάκληση, τη διάταξη και τη δημιουργία νοερών εικόνων (Linn & Petersen,1985).Έναν πιο λειτουργικό ορισμό δίνει ο Olkun, 2003 σύμφωνα με τον οποίο «Η χωρική ικανότητα είναι ο νοερός χειρισμός αντικειμένων και των μερών τους στον δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο» ενώ ο ορισμός που δίνεται στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση αναφέρει ότι «Ο χωρικός συλλογισμός είναι η διαδικασία με τη βοήθεια της οποίας σχηματίζουμε ιδέες για τις ιδιότητες και σχέσεις στο χώρο, τις αποδίδουμε με πραγματικές και νοερές εικόνες, τις διαχειριζόμαστε για την αντιμετώπιση καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα ο χωρικός συλλογισμός περιλαμβάνει: την αντίληψη, κατανόηση και παράσταση θέσεων, αμοιβαίων σχέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών μέσα στο χώρο όπως και γενικότερα τη διαχείριση κάθε χωρικής πληροφορίας και των μετασχηματισμών της».

Μάλιστα η έρευνα αναφορικά με τον χωρικό συλλογισμό διακρίνει δυο επιμέρους κατηγοριοποιήσεις: τον χωρικό προσανατολισμό και τη χωρική οπτικοποίηση.

Σύμφωνα με τους Guilford, Fruchter, & Zimmerman (1952), ο χωρικός προσανατολισμός αναφέρεται στον προσανατολισμό ενός ατόμου στον χώρο που τον περιβάλλει ακόμα κι αν αλλάξει ο προσανατολισμός του ενώ σύμφωνα με τους Ekstrom, French, Harman, & Derman (1976) είναι η ικανότητα αντίληψης χωρικών μοτίβων ή η διατήρηση του προσανατολισμού σύμφωνα με τα αντικείμενα στο χώρο.

Αναφορικά με την χωρική οπτικοποίηση, το NCTM (2000) την ορίζει ως «μια διαδικασία κατασκευής και χειρισμού νοερών αναπαραστάσεων δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων» και ως «την αντίληψη ενός σχήματος από διαφορετικές οπτικές». Με λίγα λόγια κατά τους Clements & Sarama, 2009, εμπεριέχει ικανότητες όπως ο χειρισμός νοερών αντικειμένων, η οπτικοποίηση, η περιστροφή, η ένωση και ο διαχωρισμός.

Στην παρούσα μελέτη θα υιοθετήσουμε τον ορισμό της Presmeg αναφορικά με την οπτικοποίηση σύμφωνα με τον οποίο «Όταν κάποιος δημιουργεί μια χωρική διάταξη (συμπεριλαμβανομένης μιας μαθηματικής καταχώρησης), υπάρχει μια οπτική, νοερή εικόνα στο μυαλό του, η οποία καθοδηγεί αυτή τη δημιουργία. Έτσι η οπτικοποίηση θεωρείται ότι εμπεριέχει διαδικασίες κατασκευής και μετασχηματισμού τόσο της νοερής οπτικής εικόνας όσο και όλων των πληροφοριών χωρικής φύσης που πιθανόν να εμπλέκονται όταν κάνουμε Μαθηματικά».

Όπως υπογραμμίζουν οι Bryant 2008; Sinclair et al. 2013 τα παιδιά έρχονται στο σχολείο με άτυπες ικανότητες οπτικού και χωρικού συλλογισμού και συχνά είναι σε θέση να κατανοούν αφηρημένες έννοιες προτού γίνει η εισαγωγή τους από το αναλυτικό πρόγραμμα. Πράγματι, τα παιδιά από μικρή ηλικία χρησιμοποιούν ενεργά οπτικό συλλογισμό σε καταστάσεις όπως είναι η πλοήγηση ή και πιο απλές όπως το να εκτιμήσουν ποιο είναι το «μεγαλύτερο κομμάτι μιας τούρτας».

Μάλιστα όπως επισημαίνει ο Arcavi, 2003 η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης και κυρίως η σύνδεση της με τα τυπικά Μαθηματικά είναι αναγκαία για την επιτυχία και την κατανόηση στο πεδίο των Μαθηματικών. Εντούτοις αυτό που παρατηρείται είναι ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν στηρίζονται σε οπτικό συλλογισμό κατά την ενασχόληση τους με μαθηματικές δραστηριότητες. Σε αυτό συμβάλλουν κατά τον Arcavi, 2003 τρεις σημαντικοί λόγοι: (α) οι υψηλές γνωστικές απαιτήσεις που ίσως ενέχουν οι δραστηριότητες χωρικού-οπτικού συλλογισμού. (β) η εκάστοτε κουλτούρα αναφορικά με την φύση των Μαθηματικών και (γ) ο ρόλος των οπτικών-χωρικών διαδικασιών σε αυτές τις κουλτούρες.

Την ίδια άποψη έρχεται να ενισχύσει ο αλγεβρικός χαρακτήρας των αναλυτικών προγραμμάτων, φαινόμενο που σημειώνεται σε διεθνές επίπεδο.

Συγκεκριμένα, η έμφαση στις αριθμητικές-αλγεβρικές μεθόδους και παράλληλα η επιφανειακή παρουσίαση της γεωμετρικής γνώσης, η αποκλειστική σχεδόν έκθεση πρότυπων μορφών γεωμετρικών σχημάτων και οι ασθενείς συνδέσεις μεταξύ των γεωμετρικών ιδεών σε συνδυασμό με τις περιορισμένες ευκαιρίες για την καλλιέργεια οπτικού-χωρικού συλλογισμού αποτελούν τους βασικότερους παράγοντες που συνθέτουν το πρόβλημα.

Σ’ αυτό το σημείο επομένως αξίζει να σταθούμε στην διδακτική αξία της οπτικού-χωρικού συλλογισμού διερευνώντας το ευρύ πεδίο των δεξιοτήτων που καλλιεργούνται μέσα από την ενδελεχή μελέτη της Γεωμετρίας .

Σε μια προσπάθεια να ορίσουν την έννοια της οπτικοποίησης ,οιHershkowitz, Ben Haim, Holes, Lappan, Mitchelmore, & Vinner, 1990 υπογραμμίζουν ότι « η οπτικοποίηση αναφέρεται γενικά στην ικανότητα αναπαράστασης, μετασχηματισμού, γενίκευσης, επικοινωνίας, παρατήρησης και αναστοχασμού της οπτικής πληροφορίας», ενώ συμφωνούν ότι κατέχει έναν αδιαμφισβήτητα πρωταγωνιστικό ρόλο στην κατανόηση της Γεωμετρίας. Ο Duval, 1998 αναφέρεται στην οπτικοποίηση ως μια από τις τρεις ανεξάρτητες γνωστικές διαδικασίες που έχουν συγκεκριμένο επιστημολογικό ρόλο στην Γεωμετρία και οι οποίες είναι: οπτικοποίηση, κατασκευή και επιχειρηματολογία. Η Presmeg, 1997 θεωρεί την οπτικοποίηση ως «τη διαδικασία που εμπεριέχεται στην κατασκευή και τον μετασχηματισμό των νοερών οπτικών εικόνων…» , ενώ ως οπτική εικόνα θεωρεί « μια νοερή κατασκευή που απεικονίζει οπτική ή χωρική πληροφορία» (Presmeg,1992).

Μάλιστα σύμφωνα με τον Dreyfus, 1991 «ο ρόλος της οπτικοποίησης στα Μαθηματικά, μπορεί και πρέπει και μπορεί να αναβαθμιστεί από ένα απλό υποστηρικτικό στοιχείο μάθησης σ’ ένα κοινώς αναγνωρισμένο εργαλείο μάθησης και απόδειξης». Αυτή η φράση συνοψίζει την αντίληψη που κυριαρχεί στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης σχετικά με το χαμηλό στάτους της οπτικοποίησης, η οποία δικαιολογεί σε μεγάλο βαθμό την άρνηση των μαθητών να χρησιμοποιήσουν οπτικοποίηση σε δραστηριότητες Μαθηματικών.

Στην ίδια κατεύθυνση το ευρέως γνωστό μοντέλο γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele, τοποθετεί το στάδιο του οπτικού συλλογισμού ως το πρώτο επίπεδο γεωμετρικής κατανόησης. Συγκεκριμένα, οι Van Hiele το 1986 ανέπτυξαν ένα μοντέλο για τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης, το οποίο αποτελείται από πέντε στάδια: το οπτικό επίπεδο, το αναλυτικό-περιγραφικό, το επίπεδο της αφηρημένης συσχετιστικής σκέψης, το επίπεδο παραγωγικού συλλογισμού και το επίπεδο της αυστηρότητας. Όπως μάλιστα επισημαίνεται οι σχετικές δραστηριότητες είναι ειδικά σχεδιασμένες για να καλύψουν τους στόχους του κάθε επιπέδου. Μολονότι, τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele είναι εστιασμένα στην γεωμετρία, αποκτούν πρόσθετη αξία στο πλαίσιο της γεωμετρίας των μετασχηματισμών όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Στη συνέχεια περιγράφονται λεπτομερώς τα τρία πρώτα επίπεδα .

Επίπεδο 1 (Οπτικό) : Το αντικείμενο θεωρείται ως ολότητα και κατά συνέπεια δεν γίνεται διάκριση των μεμονωμένων ιδιοτήτων. Σ' αυτό το επίπεδο βασικό χαρακτηριστικό είναι η αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων,

Επίπεδο 2 (Αναλυτικό-Περιγραφικό): Το αντικείμενο ταυτοποιείται μέσω των ιδιοτήτων του. Κάθε ιδιότητα μελετάται αποκομμένη από τις υπόλοιπες, και έτσι οι ιδιότητες των σχημάτων δεν γίνονται αντικείμενο σύγκρισης. Σ΄ αυτό το επίπεδο γίνεται ταξινόμηση των σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.

Επίπεδο 3 (Αφηρημένη συσχετιστική σχέση): Τα γεωμετρικά αντικείμενα, προσδιορίζονται μέσω των ιδιοτήτων τους ενώ οι συσχετισμοί μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων αρχίζουν να εξελίσσονται. Σ' αυτό το επίπεδο βασική επιδίωξη είναι η αντίληψη σχέσεων στο ίδιο το σχήμα και ανάμεσα στα σχήματα.

Τέλος σε μια προσπάθεια να συμπληρώσει και να βελτιώσει το παραπάνω μοντέλο γεωμετρικής σκέψης ο Battista (2002 έκανε ορισμένες παρεμβάσεις διαμορφώνοντας έτσι τα επίπεδα που περιγράψαμε προηγουμένως ως ακολούθως:

1. *αναγνώριση*, με στόχο την εξοικείωση με τη μορφή των βασικών σχημάτων και τη χρήση κατάλληλου λεξιλογίου,

2. *οπτική σύνδεση*, με στόχο τη συσχέτιση των γεωμετρικών σχημάτων με πραγματικές αναπαραστάσεις από το οικείο περιβάλλον,

2 *περιγραφική ανάλυση*, με στόχο τον εντοπισμό χαρακτηριστικών γνωρισμάτων, την αναγνώριση σχέσεων και την χρήση γεωμετρικών εννοιών,

3 *αφαιρετικότητα-συσχέτιση*, με στόχο την κατηγοριοποίηση σχημάτων,

4 *τυπική αξιωματικοποίηση*, που αποτελεί το ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης και στοχεύει στην αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας.

2.3.3 Διδασκαλία και μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών στην έρευνα για τη ΔτΜ

Η έρευνα στο πεδίο της γεωμετρίας των μετασχηματισμών τα τελευταία χρόνια έχει εστιάσει στην μελέτη της ανάπτυξης της γνώσης και της κατανόησης των μετασχηματισμών (Molina, 1990; Soon, 1989; Thaqi, Giménez, & Rosich, 2011; Yanik & Flores, 2009) ενώ έχει χρησιμοποιηθεί ένα σημαντικό πλήθος θεωρητικών προσεγγίσεων.

Ωστόσο οι παράγοντες που συνθέτουν την μαθηματική αυτή ικανότητα δεν φαίνεται να έχουν διασαφηνιστεί πλήρως στη διεθνή βιβλιογραφία με σημαντικές συνέπειες στην ίδια την διδακτική πράξη κατά την διδασκαλία και μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Σ’ αυτό το σημείο ας συμπληρωθεί ότι σύμφωνα με τον Kidder (1976), η ενασχόληση με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς είναι μια πολυπαραγοντική νοητική διαδικασία.

Δεν είναι μάλιστα λίγες οι έρευνες που εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στην ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών ως πεδίου που προσφέρει πολλαπλές ευκαιρίες μάθησης και συμβάλλει στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

Με τους μετασχηματισμούς βασικές έννοιες της γεωμετρίας όπως η ισότητα και η ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, εντάσσονται σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο. Οι ισομετρίες (μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) και η ομοιοθεσία δείχνουν ότι η ισότητα και η ομοιότητα υπακούουν σε συγκεκριμένες ιδιότητες των μετασχηματισμών (διατήρηση γωνιών και αποστάσεων, διατήρηση γωνιών και λόγων αποστάσεων αντίστοιχα) και δεν εξαρτώνται από την θέση ή τον προσανατολισμό των σχημάτων. Αυτό που επιδιώκεται είναι να αποκτήσουν οι μαθητές, μέσω των μετασχηματισμών, μια ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τους χρησιμοποιούν ως εργαλείο για τη μελέτη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί όπως η μεταφορά και η στροφή είναι θεμελιώδεις στην διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές καθώς η δυναμική τους φύση παρέχει σε αυτούς ευκαιρίες να συνδέσουν ένα μεγαλύτερο εύρος γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα, διερευνήσεις της ιδιότητας του αναλλοίωτου και της ισοδυναμίας μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν την απαρχή τους σε μια εισαγωγή στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς , όπου η φύση των μετασχηματισμών δίνει υπόσταση σε αυτές τις έννοιες. Σύμφωνα με τους Jones και Mooney οι μαθητές πρέπει να διαμορφώσουν ισχυρή κατανόηση των εννοιών στροφή, ανάκλαση, μεταφορά, ομοιότητα και ισότητα καθώς και να είναι σε θέση να συνδέουν αυτές τις έννοιες μετασχηματισμού έως το τέλος της βασικής τους εκπαίδευσης.

Τέτοιες διερευνήσεις των μετασχηματισμών καλλιεργούν στους μαθητές μια «γεωμετρική ματιά» ή με άλλα λόγια «τη δύναμη να βλέπεις τις γεωμετρικές ιδιότητες απαγκιστρωμένες από το εκάστοτε σχήμα».

Άλλες έρευνες αναδεικνύουν την διδακτική αξία των γεωμετρικών μετασχηματισμών ως ένα όχημα για την ανάπτυξης της ικανότητας για οπτικοποίηση και αναλυτικό συλλογισμό. Συγκεκριμένα μια προσέγγιση μέσω οπτικοποίησης υποστηρίζει την διερεύνηση και την ανακάλυψη ιδιοτήτων μέσω συγκεκριμένων χειρισμών, μοντέλων και σχηματικών αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, μια σχηματική αναπαράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο είναι δυνατόν να εκμαιεύσει στρατηγικές οπτικοποίησης με την προϋπόθεση ότι ο μαθητής θα είναι σε θέση να αναγνωρίσει τι του δίνεται. Η αναλυτική προσέγγιση φαίνεται να είναι πιο ελκυστική στους μαθητές εξαιτίας της άμεσης εφαρμογής του τύπου. Ωστόσο η χρήση γενικευμένων τύπων για την επίλυση των προβλημάτων γεωμετρικών μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή όσο επιφανειακά την αντιλαμβάνονται οι μαθητές.

Επιπρόσθετα, το πεδίο της γεωμετρίας των μετασχηματισμών προσφέρεται για την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να συνδέσουν έννοιας της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας . Μία ακόμη δυνατότητα που προσφέρουν οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, είναι η διαπραγμάτευση των συναρτήσεων. Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, αν και οι ίδιοι αποτελούν διαδικασίες-συναρτήσεις, μπορούν να αποτελέσουν ένα θαυμάσιο περιβάλλον για τη μελέτη τους.

Μάλιστα όπως διατυπώθηκε είναι καλύτερα η διαπραγμάτευση να αρχίζει στο γεωμετρικό-καρτεσιανό πλαίσιο και να επικουρείται με το αλγεβρικό. Αν και δεν φαίνεται να υπάρχει μια σαφής απάντηση στο ερώτημα, η έναρξη από το γεωμετρικό-καρτεσιανό πεδίο προσφέρει ένα πλούσιο διαισθητικό περιβάλλον δράσης.

Ωστόσο, στην έρευνα για τη ΔτΜ υπάρχουν ελάχιστες έρευνες αναφορικά με την κατανόηση και μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών παρά το αδιαμφισβήτητο της σημασίας τους για τον μαθηματικό εγγραμματισμό των μαθητών.

Αρχικά αξιοσημείωτη είναι η έρευνα της Edwards (1997), η οποία ισχυρίζεται ότι η γεωμετρία των μετασχηματισμών προσφέρει άφθονες ευκαιρίες στους μαθητές ν' αναπτύξουν την χωρική τους αντίληψη, την ικανότητα οπτικοποίησης και τον γεωμετρικό συλλογισμό.

Στην έρευνα της το 2003 μελέτησε τα μονοπάτια μάθησης που ανέπτυσσαν οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, εντοπίζοντας μια σημαντική παρανόηση σχετικά με τον μετασχηματισμό στροφής.

Συγκεκριμένα κατέγραψε την διαστρεβλωμένη εικόνα που είχαν οι μαθητές αναφορικά με τον μετασχηματισμό στροφής καθώς δεν τον αντιλαμβάνονταν ως μια διαδικασία αντιστοίχισης σημείων του επιπέδου γύρω από το δεδομένο σημείο (κέντρο). Αντ' αυτού οι μαθητές φάνηκε ότι ανέμεναν την ολίσθηση του σχήματος γύρω από το δεδομένο σημείο και στην συνέχεια την περιστροφή του γύρω από αυτό .

Στην ίδια κατεύθυνση, ο Sproule, 2005 μελετώντας τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές σε δραστηριότητες ανάκλασης εντόπισε ότι ενώ η μέτρηση αποστάσεων ήταν η πιο δημοφιλής στρατηγική των μαθητών, εντούτοις, αυτοί που είχαν χρησιμοποιήσει δίπλωση κατά μήκους του άξονα συμμετρίας σημείωσαν συνολικά καλύτερη επίδοση. Άλλες στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων ανάκλασης ήταν : η χρήση πλέγματος, η μέτρηση, ο σχεδιασμός με βοηθητικά σημάδια, η στρέψη του σχήματος, η νοερή δίπλωση και η χρήση καθρέφτη.

Ο Moyer (1978) διατύπωσε ότι ο μετασχηματισμός μεταφοράς είναι το ίδιο απλός με αυτόν της ανάκλασης. Την ίδια άποψη συμμερίστηκαν και οι Schultz και Austin (1983) οι οποίοι συμπληρώνουν ότι ακόμη κι αν η ανάκλαση μπορεί να θεωρηθεί μαθηματικά πρωταρχική ως έννοια, εντούτοις η μεταφορά φαίνεται να είναι ο πιο εύκολος τύπος μετασχηματισμών για τους μαθητές ενώ επισημαίνουν ότι η κατεύθυνση του μετασχηματισμού επηρεάζει την σχετική δυσκολία των στροφών και ανακλάσεων.

Οι Hollebrands, 2003 και Yanik, 2014 διατύπωσαν ότι οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών αναφορικά με τον μετασχηματισμό μεταφοράς βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στον τρόπο με τον οποίο ο ίδιοι προσλαμβάνουν την έννοια της κίνησης. Μάλιστα κατέληξαν σε τρία ιεραρχούμενα επίπεδα κατανόησης του μετασχηματισμού μεταφοράς. Έτσι σε πρώτο επίπεδο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον μετασχηματισμό μεταφοράς ως ένα ακαθόριστο είδος μεταφορικής κίνησης με όρους κίνησης φυσικών αντικειμένων όπως είναι η μετακίνηση ενός μολυβιού. Σημειώνουν μάλιστα ότι οι μαθητές συχνά ενσωματώνουν και άλλες φυσικές έννοιες ως αναπόσπαστο μέρος της συλλογιστικής τους για την μεταφορά όπως για παράδειγμα την αναγκαιότητα ύπαρξης μιας δύναμης που θα μετακινήσει ένα αντικείμενο ώστε να υπερνικήσει την τριβή. Στο ίδιο στάδιο οι μαθητές περιγράφουν τους μετασχηματισμούς μεταφοράς χωρίς να αναφερθούν στην κατεύθυνση ή στην απόσταση κατά την οποία μεταφέρθηκε το αντικείμενο ενώ συχνά δυσκολεύονται ν' αντιληφθούν ότι η έννοια της μεταφοράς δεν είναι επιπλέον μια περιστροφική κίνηση. Στο επόμενο (ενδιάμεσο) στάδιο διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονταν την κίνηση μεταφοράς και προσδιόριζαν κάθε φορά έναν από τους παράγοντες που την ορίζουν (είτε την κατεύθυνση είτε το μέτρο) αλλά ποτέ και τα δυο.

Τέλος το τρίτο επίπεδο σηματοδοτείται από μια αλλαγή στον τρόπο συλλογιστικής των μαθητών οι οποίοι νοηματοδοτούν πλέον την έννοια της παράλληλης μεταφοράς με όρους απόστασης και κατεύθυνσης, ενώ σ' ένα πιο προχωρημένο επίπεδο οι μαθητές είναι σε θέση να περιγράφουν τους μετασχηματισμούς μεταφοράς με διανυσματικούς όρους αν και όπως υπογραμμίζεται τέτοιου είδους επιχειρηματολογία ενδεχομένως να παραμένει ακόμη μια ισχυρή πρόκληση για τους μαθητές. Μάλιστα, αυτό που προτείνεται ώστε να επιτευχθεί ένα υψηλό επίπεδο κατανόησης του ρόλου του διανύσματος ο οποίος είναι καθοριστικός στον μετασχηματισμό μεταφοράς είναι η εμπλοκή τους με δραστηριότητες σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας όπως το Geogebraμε στόχο τον εμπλουτισμό των διαθέσιμων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων του μαθητή για την έννοια.

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι ένα σημαντικό μέρος της έρευνας για τη γεωμετρία των μετασχηματισμών εστιάζει στην κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Έτσι η Hollebrands, 2003 μελετώντας μαθητές Λυκείου συμπέρανε ότι για την κατανόηση των μετασχηματισμών ως αντιστοίχιση σημείων , είναι προαπαιτούμενη η κατανόηση τεσσάρων εννοιών θεμελιώδους σημασίας.

Αυτές είναι οι παρακάτω:

1. Το πεδίο ορισμού των μετασχηματισμών είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου.
2. Οι παράμετροι που καθορίζουν τους μετασχηματισμούς (π.χ. διάνυσμα , ευθεία ανάκλασης, κέντρο και γωνία περιστροφής)
3. Οι σχέσεις και ιδιότητες των μετασχηματισμών.
4. Η θεώρηση των μετασχηματισμών ως 1-1 αντιστοιχίσεις σημείων του επιπέδου σε σημεία του επιπέδου.

Σε μια άλλη μελέτη ο Glass (2001) διερεύνησε το επίπεδο κατανόησης μαθητών Γυμνασίου αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στο δυναμικό περιβάλλον του Geometer's Sketchpad. Η ανάλυση του οδήγησε σε τρεις κατηγοριοποιήσεις με κριτήρια α)το είδος κίνησης, β)το τελικό αποτέλεσμα της κίνησης, γ)τις ιδιότητες των μετασχηματισμών, που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αναγνωρίζουν και επιχειρηματολογούν για τα είδη των μετασχηματισμών.

Ο πρώτος τύπος κατηγοριοποίησης (σύμφωνα με το είδος της κίνησης) στηρίζεται στην μελέτη της κίνηση της εικόνας από την αρχική θέση και υπονοεί μια λειτουργική κατανόηση των μετασχηματισμών. Ο δεύτερος τύπος (σύμφωνα με το τελικό αποτέλεσμα της κίνησης) εστιάζει σε σύγκριση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά της αρχικής και τελικής εικόνα που απορρέουν από την κίνηση της εικόνας και αποτελεί μια ελαφρώς πιο δομική κατανόηση καθώς το ενδιαφέρον μετατίθεται από την ίδια την κίνηση στα χαρακτηριστικά της εικόνας πριν και μετά την κίνηση. Ο τρίτος τύπος σχετίζεται με τις ιδιότητες των μετασχηματισμών. Τ΄ αποτελέσματα από την έρευνα έδειξαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν πιο συχνά το κριτήριο της κίνησης για να διακρίνουν και να αιτιολογήσουν την απάντηση τους σχετικά με το είδος του μετασχηματισμού.

Ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο που απορρέει από την υπάρχουσα έρευνα αφορά στο ρόλο της διαδικαστικής ευχέρειας ως ένας παράγοντας που φαίνεται να συνεισφέρει στην επιτυχία των μαθητών σε δραστηριότητες μετασχηματισμών. Πράγματι «η ικανότητα κάποιου να εκτελεί διαδικασίες με ευελιξία, ακρίβεια, αποτελεσματικότητα και επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής» αποτελεί μια όψη της μαθηματικής αριστείας και περιγράφει αυτό που οι Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001 ορίζουν ως διαδικαστική ευχέρεια στις αλγεβρικές διαδικασίες .

Έχει μάλιστα συνδεθεί σε πολλές περιπτώσεις με την αποτελεσματική εφαρμογή μετασχηματισμών στο επίπεδο της Ανάλυσης. Μια τέτοια συσχέτιση είναι δικαιολογημένη καθώς αφενός οι αναλυτικές στρατηγικές στην γεωμετρία των μετασχηματισμών εξαρτώνται από τη χρήση αλγεβρικών κανόνων και αφετέρου η λανθασμένη εφαρμογή κανόνων σε δραστηριότητες μετασχηματισμών αποδίδεται σε ελλιπείς γνώσεις Άλγεβρας.

Μάλιστα, όσο οι μαθητές μεταπηδούν σε μεγαλύτερο επίπεδο εκπαίδευσης η διδασκαλία των μετασχηματισμών απαιτεί ολοένα και πιο αφαιρετικό επίπεδο σκέψης όπως είναι για παράδειγμα η θεώρηση τους ως αντιστοιχήσεις σημείων του επιπέδου.

Εντούτοις όπως επιβεβαιώνεται από πλήθος ερευνών (Harper, 2003; Jung, 2002; Portnoy et al., 2006; Yanik&Flores,2009) η συλλογιστική των μαθητών δεν αλλάζει δραματικά από το επίπεδο της πρωτοβάθμιας σε αυτό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

2.3.2 Η διδακτική αξία των γεωμετρικών μετασχηματισμών

Η ολοένα και αυξανόμενη έμφαση στην διδασκαλία της γεωμετρίας κατά τις τελευταίες δεκαετίες έχει τροποποιήσει το κατά βάση ευκλείδειο περιεχόμενο της, εισάγοντας νέα είδη γεωμετρίας, όπως είναι η γεωμετρία των μετασχηματισμών (Jones, 2002) .Μάλιστα οι Stouraitis, Potari, Skott, 2017 υπογραμμίζουν ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί έχουν κερδίσει μια πιο περίοπτη θέση στα νέα σχολικά εγχειρίδια σε σχέση με παλαιότερα. Μεταξύ άλλων εστιάζουν στην σχέση ανάμεσα στο αρχικό σχήμα και την εικόνα του, και αποδίδουν στους μετασχηματισμούς τον χαρακτήρα ενός εργαλείου απόδειξης.

Έτσι αναφέρουν χαρακτηριστικά το παράδειγμα της Ελλάδας, όπου η σχολική Γεωμετρία έχει παραδοσιακά τις ρίζες της στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και η διδασκαλία της γίνεται με αυστηρά παραγωγική μέθοδο. Συνεπώς, η χρήση των μετασχηματισμών ως εργαλείου απόδειξης αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση συγκριτικά με την Ευκλείδεια, καθώς η έννοια του «εν κινήσει» σχήματος μοιάζει συχνά ασύμβατη με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Η γεωμετρία των μετασχηματισμών αναφέρεται στον νοερό ή φυσικό μετασχηματισμό σχημάτων. Οι πιο κοινοί τύποι γεωμετρικών μετασχηματισμών στην βιβλιογραφία και στα σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι η μεταφορά, η ανάκλαση ως προς άξονα και η στροφή ως προς σημείο.

Τα διδακτικά οφέλη που απορρέουν από την διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι πολλαπλά όπως υπογράμμισε από πολύ νωρίς ο Williford, 1972 ο οποίος περιέγραψε ότι αρκετές μαθηματικές ιδιότητες από διαφορετικούς κλάδους της Γεωμετρίας (Τοπολογία, Προβολική Γεωμετρία, Αφινική Γεωμετρία, Ευκλείδεια Γεωμετρία) μπορούν να περιγραφούν με όρους από τη Γεωμετρία των μετασχηματισμών και να παρασταθούν μέσω διαφορετικών τύπων χειραπτικών δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες της Ευκλείδειας γεωμετρίας περιγράφονται με τους όρους ολίσθηση (slide), για την έννοια της μεταφοράς, στροφή(turn) για την έννοια της στροφής και τον όρο αναποδογύρισμα (flip) για την έννοια της ανάκλασης και οι οποίες είτε δρουν μεμονωμένα είτε σε συνδυασμό αφήνουν ένα σχήμα ή αντικείμενο αναλλοίωτο καθ’ όλα εκτός από τη θέση του. Η γεωμετρία των μετασχηματισμών περιλαμβάνει την μελέτη της κίνησης- μεταφορά, στροφή και ανάκλαση- και τον μετασχηματισμό ομοιότητας. Οι έννοιες του μετασχηματισμού και του αναλλοίωτου θεωρούνται ως στοιχειώδεις έννοιες που διαποτίζουν το ευρύ φάσμα των Μαθηματικών και της Φυσικής (Dienes and Golding, 1967)

Συνεπώς η καλή γνώση των γεωμετρικών μετασχηματισμών αποτελεί κρίσιμης σημασίας προτεραιότητα για τους εκπαιδευτικούς με σκοπό να δημιουργήσουν περιβάλλοντα μάθησης που να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη ισχυρής μαθηματικής γνώσης.

Σύμφωνα με τις Αρχές και πρότυπα του NCTM (2000) «Τα εκπαιδευτικά προγράμματα από το νηπιαγωγείο έως την Γ’ Λυκείου θα πρέπει να δίνουν τη δυνατότητα σε κάθε μαθητή να εφαρμόζει μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιεί την έννοια της συμμετρίας για να αναλύει μαθηματικές καταστάσεις» .

Επιπρόσθετα, με τους μετασχηματισμούς βασικές έννοιες της γεωμετρίας όπως η ισότητα και η ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, εντάσσονται σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο. Οι ισομετρίες (μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) και η ομοιοθεσία δείχνουν ότι η ισότητα και η ομοιότητα υπακούουν σε συγκεκριμένες ιδιότητες των μετασχηματισμών (διατήρηση γωνιών και αποστάσεων, διατήρηση γωνιών και λόγων αποστάσεων αντίστοιχα) και δεν εξαρτώνται από την θέση ή τον προσανατολισμό των σχημάτων. Αυτό που επιδιώκεται είναι να αποκτήσουν οι μαθητές, μέσω των μετασχηματισμών, μια ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τους χρησιμοποιούν ως εργαλείο για τη μελέτη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Κατά τη διάρκεια της προηγούμενης δεκαετίας υπήρξε αυξανόμενο ενδιαφέρον για την γεωμετρία των μετασχηματισμών στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Hollebrands, 2003; Portnoy, Grundmeier & Graham, 2006; Yanik & Flores, 2009).

Οι κυριότεροι λόγοι γι' αυτό ήταν :

1. Θεωρείται σημαντική στην ανάπτυξη του γεωμετρικού και χωρικού συλλογισμού (Hollebrands, 2003) και (Edwards, 1997)

2. Σχετίζεται με ένα πλήθος δραστηριοτήτων στην ακαδημαϊκή και καθημερινή ζωή, όπως οι γεωμετρικές κατασκευές, η τέχνη, η αρχιτεκτονική, η ξυλουργική, η μηχανική και η πλοήγηση (Boulter & Kirby, 1994).

Μάλιστα, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του Καναδά για τα Μαθηματικά, η κατανόηση της χωροταξικής διάταξης των αντικειμένων είναι κεντρικής σημασίας καθώς η δράση των μετασχηματισμών είναι εμφανής σε κάθε πτυχή της καθημερινής ζωής όπως κατά το άνοιγμα μιας πόρτας, στην οδήγηση, στην αναδιάταξη των επίπλων, καθώς και στον αθλητισμό. Όπως επισημαίνεται η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης ενισχύει την καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στην Τέχνη, την φύση και την αρχιτεκτονική ενώ την ίδια στιγμή ο προσδιορισμός και η πρόβλεψη της θέσης αποτελούν εξίσου σημαντικές παραμέτρους της χωρικής ικανότητας που είναι κυρίαρχη στα πεδία της μηχανικής, του σχεδίου και της ξυλουργικής.

2.3.4 Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στα Μαθηματικά

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί είναι η μελέτη των συναρτήσεων που απεικονίζουν σημεία του επιπέδου στο επίπεδο. Γενικότερα, ως μετασχηματισμό στο χώρο $\mathbb{R}^n$ (μας ενδιαφέρουν εδώ ιδιαίτερα οι περιπτώσεις n=1,2,3), ονομάζουμε κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του. Αντιλαμβανόμαστε επομένως ότι κάθε μετασχηματισμός δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια απεικόνιση σημείων του επιπέδου σε σημεία του επιπέδου. Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός έχει την ιδιότητα να απεικονίζει ένα σημείο Α(x, y) του επιπέδου σε ένα σημείο Α΄(x΄,y΄) του ίδιου επιπέδου. Σχηματικά ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\mathbf{A(x,\ y)} \longrightarrow \mathbf{A'\ (x',\ y')}$$

Η μελέτη τους επικεντρώνεται στο ν' αντιληφθεί κανείς ποιες από τις ιδιότητες των σχημάτων του επιπέδου, πάνω στα οποία δρα ένας μετασχηματισμός, μεταβάλλονται και ποιες διατηρούνται.

Σύμφωνα με το ποιες ιδιότητες των σχημάτων διατηρούνται (ή μεταβάλλονται) χαρακτηρίζονται και οι ομάδες μετασχηματισμών. Η ομάδα μετασχηματισμών που θα μας απασχολήσει είναι οι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί. Οι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί ή αλλιώς ισομετρίες διατηρούν τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων και το μέτρο των γωνιών. Κατά συνέπεια διατηρούν την ιδιότητα του αναλλοίωτου του γεωμετρικού αντικειμένου και μεταβάλλουν τη θέση ή και τον προσανατολισμό του. Στις ισομετρίες ανήκουν: οι ανακλάσεις ή κατοπτρισμοί(reflections) ,οι παράλληλες μεταφορές ή ολισθήσεις (translations), οι ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως (που αποτελούν σύνθεση κατοπτρισμού και παράλληλης μεταφοράς)(glide reflections) και τέλος οι στροφές κατά γωνία θ (rotations).Ας σημειωθεί εδώ ότι οι ισομετρίες απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα σε ίσα ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες σε ίσες γωνίες.

Συγκεκριμένα η ανάκλαση ως προς μια ευθεία (ε) του επιπέδου είναι η απεικόνιση που σε κάθε σημείο Α του επιπέδου αντιστοιχίζει το συμμετρικό του Α' ως προς την ευθεία αυτή. Η ανάκλαση λέγεται και συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία (ε).Βασικό χαρακτηριστικό της ανάκλασης είναι ότι αλλάζει τον προσανατολισμό. Επίσης, κάθε σημείο Α ∈ (ε) απεικονίζεται στο ίδιο σημείο, δηλαδή τα σημεία της (ε) είναι αναλλοίωτα κατά τον μετασχηματισμό.

Αντίστοιχα, η παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ ορίζεται ως ο μετασχηματισμός του επιπέδου κατά τον οποίο κάθε σημείο Α αντιστοιχίζεται στο σημείο Α', ώστε το $\overrightarrow{AA'}$ να έχει ίσο μήκος και να είναι παράλληλο και ομόρροπο (συγγραμμικό) με το $\overrightarrow{\alpha}$.Με λίγα λόγια η παράλληλη μεταφορά είναι ο μετασχηματισμός που μετατοπίζει κάθε σημείο (ενός σχήματος) κατά την ίδια σταθερή απόσταση, την ίδια διεύθυνση και φορά.

Η στροφή κατά γωνία θ με κέντρο στροφής ένα σημείο Ο ορίζεται ως ο μετασχηματισμός κατά τον οποίο το Ο παραμένει σταθερό, ενώ ένα σημείο Α αντιστοιχίζεται στο Α' με $\overrightarrow{OA}$=$\overrightarrow{OA'}$ και ∠ΑΟΑ' = ∠ θ. Με λίγα λόγια ο μετασχηματισμός στροφής , στρέφει κάθε σημείο (ενός σχήματος) κατά γωνία θ ως προς κέντρο στροφής ένα καθορισμένο σημείο Ο.

Τέλος ένας μετασχηματισμός του επιπέδου ορίζεται ως ανάκλαση μετ' ολισθήσεως όταν υπάρχουν ευθεία (ε) και διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ // (ε) ώστε κάθε σημείο Α ν' αντιστοιχεί στο Α', το οποίο προκύπτει από μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ και μια ανάκλαση ως προς μια ευθεία (ε).Επομένως η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως είναι σύνθεση δυο μετασχηματισμών, μιας μεταφοράς και μιας ανάκλασης, όπου ο άξονας της ανάκλασης είναι παράλληλος με το διάνυσμα της μεταφοράς.

Όπως είδαμε επομένως, οι συνήθεις γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν μια έκφραση 1-1 αντιστοιχίας ή απεικόνισης μεταξύ των σημείων του επιπέδου. Όπως γίνεται σαφές, η ένταξη των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο πρόγραμμα σπουδών, έστω και με μια μη τυπικά μαθηματική προσέγγιση απαιτεί από τους μαθητές την υιοθέτηση δυο διαφορετικών θεωρήσεων για την κατανόηση τους. Με λίγα λόγια, είναι απαραίτητη η χρήση εννοιών και διαδικασιών από

δύο διαφορετικά γνωστικά πεδία: τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα, με έμφαση στην ορθή χρήση της μαθηματικής γλώσσας.
Από την μια πλευρά, η χρήση της γεωμετρικής γλώσσας είναι αναγκαία για την περιγραφή των γεωμετρικών αντικειμένων και των σχέσεων που τα συνδέουν, ενώ επιπλέον προϋποθέτει και παράλληλα καλλιεργεί τον συνθετικό τρόπο σκέψης. Η χρήση της αλγεβρικής γλώσσας από την άλλη πλευρά, απαιτείται για την περιγραφή των εξισώσεων μετασχηματισμού, των απεικονίσεων και των συναρτήσεων, και αντιστοιχεί σε έναν αναλυτικό τρόπο σκέψης. Φυσικά κατά τη μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι δύο αυτές γλώσσες συνυπάρχουν και αλληλεπιδρούν δημιουργικά, συμπληρώνοντας η μια την άλλη και συνθέτοντας μια πληρέστερη εικόνα της έννοιας των μετασχηματισμών.

2.3.5 Μάθηση και Διδασκαλία των μετασχηματισμών του επιπέδου στην Γεωμετρία.

Σ' αυτή την ενότητα το ενδιαφέρον μας θα επικεντρωθεί στην έρευνα σχετικά με τις συνήθεις παρανοήσεις και λάθη των μαθητών όταν δουλεύουν σε δραστηριότητες ευκλείδειων μετασχηματισμών στο επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα θα προχωρήσουμε σε μια λεπτομερή βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφορικά με τα διάφορα ζητήματα που φαίνεται ν' αντιμετωπίζουν οι μαθητές δουλεύοντας σε δραστηριότητες των μετασχηματισμών παράλληλης μεταφοράς, ανάκλασης και στροφής γύρω απο σημείο.
Αναφορικά με το επίπεδο δυσκολίας κατά την μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών η Soon (1989) τους κατατάσσει ξεκινώντας απο τις περισσότερο προς τις λιγότερο οικείες για τους μαθητές ως εξής : ανάκλαση, στροφή γύρω απο σημείο και παράλληλη μεταφορά. Αντίθετα, οι Kidder (1976), Moyer, 1976, Moyer (1978)και Shah (1969) αναφέρουν ότι ο μετασχηματισμός μεταφοράς είναι ο πιο εύκολος για τους μαθητές. Οι Soon (1989) και Meleay (1998) επισήμαναν ότι οι μαθητές δεν έκαναν αυθόρμητα χρήση του ειδικού λεξιλογίου όταν χρειάστηκε να περιγράψουν μετασχηματισμούς μεταφοράς. Απεναντίας επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν κινήσεις των δακτύλων τους ή αδόκιμο λεξιλόγιο. Πράγματι ο Meleay τονίζει την σημασία που πρέπει να δίνεται στο λεξιλόγιο και την ανάπτυξη σχεδιαστικών δεξιοτήτων ως μέρος της διδασκαλίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Όπως μάλιστα επισημαίνουν οι Martinie &Stramel, 2004 ; Stein &Bovalino, 2001 ; Weiss, 2006, οι μαθητές χρειάζονται απτές ευκαιρίες ώστε να ενισχύσουν και να συμπληρώσουν τους όρους και τις εικονικές αναπαραστάσεις που συναντούν στα πλαίσια της γεωμετρίας των μετασχηματισμών. Σχετικά με την παραπάνω άποψη ο Williford (1972) είχε διατυπώσει ότι «Η

θεματολογία των γεωμετρικών μετασχηματισμών μπορεί να προσεγγισθεί με φυσικό τρόπο μέσω του χειρισμού απτών αντικειμένων ή σκίτσων [...] Αρχικά, το παιδί πραγματοποιεί ενέργειες πάνω στα ίδια τα αντικείμενα. Εν τέλει όμως απο την στιγμή που το αντικείμενο δίνει τη θέση του σε διακριτές εικόνες, το παιδί είναι σε θέση να διενεργήσει νοερούς μετασχηματισμούς πάνω σε αυτές».

Ας δούμε όμως πιο στοχευμένα, τις συνήθεις παρανοήσεις που εμφανίζονται κατά την μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών απο τους μαθητές. Σε πολλές έρευνες σημειώνεται ότι οι μαθητές τείνουν συχνά να εστιάζουν στην ολότητα του σχήματος που μετατοπίζεται ως αποτέλεσμα της δράσης κάποιου μετασχηματισμού παρά στον τρόπο με τον οποίο κάθε ένα σημείο αντιστοιχίζεται σ΄ένα νέο σημείο (Boulter & Kirby, 1994; Hollebrands, 2003, 2004; Kidder, 1976; Laborde, 1993; Soon, 1989).

Η Kidder, 1976 σημειώνει ότι οι μαθητές των Grade 4, 6 & 8 εμφανίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της ιδιότητας της διατήρησης του μήκους σε μετασχηματισμούς ισομετρίας. Υπογραμμίζεται μάλιστα ότι οι μαθητές συνήθως εστιάζουν στα οπτικά χαρακτηριστικά και την κίνηση του σχήματος στο οποίο δρα ο εκάστοτε μετασχηματισμός παρά στις ιδιότητες του ίδιου του μετασχηματισμού (Soon, 1989 ; Soon&Flake, 1989). Τον παραπάνω ισχυρισμό επιβεβαιώνει και συμπληρώνει η Laborde (1993) επισημαίνοντας ότι απαιτείται υψηλό επίπεδο συλλογιστικής προκειμένου να γίνει η κατανόηση της διατήρησης των ιδιοτήτων των σχημάτων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν ακόμη και τα ερευνητικά αποτελέσματα της Edwards (2003) τα οποία φανερώνουν ότι κατά την μάθηση των βασικών εννοιών της γεωμετρίας των μετασχηματισμών οι μαθητές «είχαν τις ίδιες προσδοκίες σχετικά με τον τρόπο που δρα ένας μετασχηματισμός και έκαναν παρόμοια λάθη». Η ίδια συνεχίζοντας υποστηρίζει ότι αυτή η επικρατούσα αντίληψη των μαθητών πηγάζει από τις κιναισθητικές εμπειρίες τους στον φυσικό κόσμο αναφέροντας συγκεκριμένα ότι « Η πηγή των παρερμηνειών που εμφανίζουν οι μαθητές είναι η κιναισθητική, φυσική αντίληψη της κίνησης που φέρνουν στο προσκήνιο οι μαθητές. Αυτές οι παρερμηνείες είναι στην πραγματικότητα εννοιολογήσεις που είναι λειτουργικές έξω από το πλαίσιο των τυπικών Μαθηματικών ».

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν και άλλοι ερευνητές, οι οποίοι σημειώνουν ότι η εικόνα που έχουν σχηματίσει οι μαθητές αναφορικά με τους μετασχηματισμούς ισομετρίας (μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) διαμορφώνεται και επηρεάζεται από όρους που χρησιμοποιούνται σε παραδείγματα εντός και εκτός μαθηματικού πλαισίου και δηλώνουν καθημερινές ενέργειες. Οι ίδιοι δηλώνουν ότι η κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών από τους μαθητές προϋποθέτει την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών όπως το διάνυσμα, η απόσταση, το διατεταγμένο ζεύγος, η συνάρτηση, και το επίπεδο. Μάλιστα θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στον τρόπο που οι μαθητές οπτικοποιούν και αναπαριστούν νοερά αυτές τις έννοιες ως το πρώτο βήμα για την διδασκαλία των μετασχηματισμών.

Ένα πλήθος ερευνητών (Edwards, 2003; Flanagan, 2001; Hollebrands, 2003; Jung, 2002; Yanik, 2006), υποστηρίζουν ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ένα εννοιολογικό πεδίο που θα πρέπει να διδάσκεται σε κάθε επίπεδο εκπαίδευσης, ενώ προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες να εργαστούν με σημαντικές μαθηματικές έννοιες όπως οι συναρτήσεις και η συμμετρία, να συσχετίσουν τα Μαθηματικά με άλλα πεδία αλλά και να επιχειρηματολογήσουν χρησιμοποιώντας πλήθος αναπαραστάσεων .Σύμφωνα με το NCTM ,2000 οι μαθητές Λυκείου θα πρέπει να είναι σε θέση «να κατανοούν και ν' αναπαριστούν τους μετασχηματισμούς μεταφοράς, ανάκλασης, στροφής και μεγέθυνσης στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας ποικιλία αναπαραστάσεων».

Εντούτοις οι μαθητές συναντούν σημαντικές δυσκολίες κατά την ενασχόληση τους σε δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών οι κυριότερες από τις οποίες είναι:

(α) η κατανόηση του επιπέδου ως του πεδίου ορισμού και συνόλου αφίξεως των μετασχηματισμών,

(β) η σύγχυση των παραμέτρων με τις μεταβλητές των μετασχηματισμών,

(γ) οι πρότερες , άτυπες εμπειρίες που πηγάζουν από την χρήση των μετασχηματισμών σε καθημερινές καταστάσεις και

(δ) η ανεπαρκής κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών που προηγούνται της διδασκαλίας των μετασχηματισμών(Edwards, 2003; Hollebrands, 2003; Jung, 2002; Yanik, 2011).

Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι εκτός από τους μαθητές η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών διαθέτουν ανεπαρκείς γνώσεις ή και μονομερή κατανόηση σχετικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, γεγονός που έχει άμεσο αντίκτυπο στην διδασκαλία τους. Πράγματι ο Yanik, 2006 μελετώντας τέσσερις υποψήφιους εκπαιδευτικούς διαπίστωσε την δυσκολία τους να περιγράψουν και να εφαρμόσουν μετασχηματισμούς. Ειδικότερα, αντιλαμβάνονταν τον μετασχηματισμό παράλληλης μεταφοράς ως ένα απροσδιόριστο είδος κίνησης και τα γεωμετρικά σχήματα αποκομμένα από το επίπεδο. Επιπλέον τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων έδειξαν ότι οι καθημερινές εμπειρίες είχαν επίδραση στον τρόπο που αντιλαμβάνονταν και αιτιολογούσαν τις απαντήσεις τους οι εκπαιδευτικοί.

Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν και από την μελέτη της Desmond (1997) σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς οι οποίοι είχαν δυσκολία στην αναγνώριση των ορθών μετασχηματισμών παράλληλης μεταφοράς και τον προσδιορισμό των αντίστοιχων διανυσμάτων . Ας σημειωθεί ότι η επικρατούσα θεώρηση για την έννοια της παράλληλης μεταφοράς μεταξύ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών ήταν αυτή της κίνησης.

Όμοια η Harper, 2003 στην έρευνα της διαπιστώνει ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετώπισαν προβλήματα στην χρήση διανυσμάτων για την παράλληλη μεταφορά σχημάτων καθώς και στον προσδιορισμό του διανύσματος μεταφοράς δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού. Είναι ενδιαφέρουσα μάλιστα η παρατήρηση της σχετικά με το αδόκιμο λεξιλόγιο (π.χ. κύλιση) που χρησιμοποιούσαν συχνά οι εκπαιδευτικοί για την περιγραφή του μετασχηματισμού της παράλληλης μεταφοράς, στοιχείο το οποίο επισημαίνουν και οι Portnoy et al. (2006) οι οποίοι διαπιστώνουν ότι η έννοια της παράλληλης μεταφοράς προσεγγίζονταν ως μια διαδικασία με εφαρμογή αντικείμενα της Γεωμετρίας και περιγράφονταν ως κύλιση ενός σχήματος στο επίπεδο ή ως η αλλαγή της θέσης του στο επίπεδο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα επιμέρους χαρακτηριστικά για κάθε τύπο γεωμετρικών μετασχηματισμών καθώς και τις δυσκολίες και τα γνωστικά εμπόδια που παρουσιάζονται στους μαθητές όταν εργάζονται σε δραστηριότητες μετασχηματισμών.

Α. Ο μετασχηματισμός της παράλληλης μεταφοράς

Σύμφωνα με το NCTM, τους Moyer (1978) and Shah (1969) ο μετασχηματισμός μεταφοράς είναι ο πιο εύληπτος τύπος μετασχηματισμού. Εντούτοις οι Schultz&Austin (1983) μελετώντας μαθητές της 5th Grade κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η κατεύθυνση της κίνησης στον μετασχηματισμό μεταφοράς είχε καθοριστική συνέπεια στο επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος. Συγκεκριμένα διαπίστωσαν ότι οι μεταφορές με κατεύθυνση προς τα δεξιά, και αμέσως μετά αυτοί με κατεύθυνση προς τ' αριστερά ήταν πιο εύκολοι απο τις μεταφορές σε διαγώνιο. Ακόμη παρατήρησαν ότι όσο αυξάνεται η απόσταση ανάμεσα στο αρχικό και τελικό σχήμα (εικόνα) σε παραδείγματα παράλληλης μεταφοράς, τόσο πιο μεγάλη ήταν η δυσκολία που αντιμετώπιζαν οι μαθητές στην διενέργεια του μετασχηματισμού.

Ας σημειωθεί ότι στην έρευνα για τη ΔτΜ ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της παράλληλης μεταφοράς έχει διττή ερμηνεία, αφενός ως κίνηση και αφετέρου ως απεικόνιση σημείου σε σημείο (Edwards, 2003; Hollebrands, 2003; Yanik & Flores,2009) γεγονός το οποίο επεξηγεί σε ικανοποιητικό βαθμό τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές. Πράγματι, στην θεώρηση της παράλληλης μεταφοράς ως κίνηση, κάθε σημείο του επιπέδου μπορεί να μεταφερθεί σε ένα άλλο σημείο διατηρώντας μια ορισμένη απόσταση και κατεύθυνση ενώ θα λέγαμε ότι προϋποθέτει την κατανόηση της έννοιας του διανύσματος. Όπως υποστηρίζει η Edwards, 2003 υιοθετώντας αυτήν την προσέγγιση , θα πρέπει ν’ αντιληφθούμε το επίπεδο ως ένα φόντο πάνω στο οποίο πραγματοποιείται ο χειρισμός των γεωμετρικών σχημάτων, ενώ αντίθετα θεωρώντας την παράλληλη μεταφορά ως αντιστοίχιση σημείου σε σημείο , η έννοια της κίνησης παύει ν’ αποτελεί αναγκαιότητα. Μέσω της τελευταίας εννοιολόγησης, όπως υπογραμμίζει ο Hollebrands, 2003 η μεταφορά αποκτά τον χαρακτήρα μιας ειδικής συνάρτησης που αντιστοιχίζει κάθε σημείο του επιπέδου σε ένα και μοναδικό σημείο το οποίο βρίσκεται σε ορισμένη απόσταση και κατεύθυνση σε σχέση με το αρχικό. Αυτός ακριβώς ο διττός χαρακτήρας του μετασχηματισμού παράλληλης μεταφοράς δημιουργεί μια σειρά από παρερμηνείες στους μαθητές οι οποίες παραμένουν σε πολλές περιπτώσεις αμετάβλητες καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής.

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα μελετήσουμε μερικές από αυτές όπως έχουν καταγραφεί στη διεθνή έρευνα. Αρχικά, ας σημειωθεί ότι μια μεγάλο μέρος των μαθητών κάθε ηλικίας αντιλαμβάνεται τον μετασχηματισμό παράλληλης μεταφοράς μονομερώς ως κίνηση. Η Flanagan (2001) σημειώνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα στο ν΄ αναγνωρίσουν ότι η αλλαγή θέσης που πραγματοποιείται σ' ένα σχήμα κατά τον μετασχηματισμό μεταφοράς σχετίζεται με το μέτρο της διανυσματικής ακτίνας και την αναπαράσταση του πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο. Η Hollebrands (2003) επισημαίνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση ν' αναγνωρίζουν ότι ένα σχήμα και η εικόνα του είναι σε παραλληλία και ότι οι αποστάσεις ανάμεσα στα σημεία του αρχικού και του κατ' εικόνα σχήματος είναι παντού ίδιες και διατηρούν το ίδιο μέτρο με αυτό του διανύσματος μεταφοράς. Την ίδια άποψη συμμερίζονται οι Flanagan (2001), Wesslen & Fernandez, (2005) οι οποίοι διαπιστώνουν ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι η μεταφορά ενός σχήματος μετακινεί κάθε σημείο του σε ίση απόσταση και παράλληλη διεύθυνση. Συμπεράσματα όπως τα παραπάνω μας βοηθούν ν' αντιληφθούμε ότι ο παράγοντας της κατεύθυνσης της μεταφοράς έχει επίδραση στο επίπεδο δυσκολίας του μετασχηματισμού που εφαρμόζεται.

Β. Ο μετασχηματισμός ανάκλασης

Στην έρευνα για τη ΔτΜ έχουν καταγραφεί σημαντικές παρερμηνείες αναφορικά με τον μετασχηματισμό ανάκλασης τόσο στην κατανόηση τους από μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς.

Ο Kuchemann (1980, 1981) διαπίστωσε ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες σε δραστηριότητες ανάκλασης ως προς μια διαγώνια ευθεία. Ειδικότερα, η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές αγνοούσαν συχνά την κλίση της ευθείας ανάκλασης και αντ' αυτού πραγματοποιούσαν ανάκλαση στην οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και από τους Burger & Shaugnessy (1986) και Schultz (1978).Ωστόσο όπως σημειώνεται σε πλήθος ερευνών, η δυσκολότερη μορφή ανάκλασης για τους μαθητές είναι αυτή στην οποία η ευθεία ανάκλασης τέμνει το αρχικό σχήμα (Edwards & Zazkis, 1993; Soon, 1989; Yanik&Flores, 2009).Όπως υπογραμμίζεται σ' αυτήν την περίπτωση είναι αρκετά βοηθητική η χρήση διαφανούς χαρτιού ώστε αρχικά να σχεδιάζεται η ευθεία ανάκλασης και το πρότυπο σχήμα και στη συνέχεια μέσων ανατροπής και κατάλληλης τοποθέτησης του χαρτιού να προκύπτει η θέση της εικόνας μετά τον μετασχηματισμό ανάκλασης.

Άλλες έρευνες (Clements, Battista & Sarama, 2001; Clements & Sarama, 1992; Hollebrands, 2003, 2004) εστιάζουν στις διαφοροποιήσεις ως προς το επίπεδο δυσκολίας που μπορεί να εμφανίζουν οι δραστηριότητες ανάκλασης εξαιτίας της σχετικής θέσης της ευθείας ανάκλασης. Έτσι σημειώνεται ότι η ανάκλαση ως προς τον κατακόρυφο άξονα y'y είναι πιο εύκολη εννοιολογικά για τους μαθητές από την ανάκλαση ως προς τον οριζόντιο άξονα (x'x). Όπως επισημαίνεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της ανάκλασης ως προς οποιαδήποτε άλλη ευθεία εκτός των αξόνων x'x και y'y παρουσιάζει αυξημένη δυσκολία για τους μαθητές.

Συνεχίζοντας με την μελέτη της βιβλιογραφίας και αφού εξετάσαμε τα κυριότερα ευρήματα αναφορικά με τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές, είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε όλα εκείνα τα στοιχεία που φανερώνουν ανεπάρκεια στην γνώση των εκπαιδευτικών οι οποίοι έχουν τον ρόλο του διαμεσολαβητή της γνώσης.

Πιο συγκεκριμένα ο Rollick (2007, 2009) πραγματοποιώντας συνεντεύξεις σε εκπαιδευτικούς διαπίστωσε ότι πολλοί από αυτούς εμφάνιζαν σοβαρές παρερμηνείες στην νοηματοδότηση και διενέργεια μετασχηματισμών ανάκλασης.Αυτό το οποίο σημειώνει είναι ότι οι εκπαιδευτικοί χαρακτήρισαν ως πιο εύκολες τις περιπτώσεις ανάκλασης με φορά κίνησης από τ' αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος του y-άξονα ή οποιασδήποτε κατακόρυφης ευθείας. Αντίθετα συνάντησαν μεγαλύτερη δυσκολία σε μετασχηματισμούς ανάκλασης σε περιπτώσεις που η φορά κίνησης ήταν από τα δεξιά προς τ' αριστερά ενώ έτειναν να ερμηνεύουν την κίνηση πάντα με φορά από πάνω προς τα κάτω. Ακόμη πολλοί από αυτούς αντιλαμβάνονταν την ανάκλαση ως μεταφορά σε περιπτώσεις που τα σχήματα που χρησιμοποιούνταν ήταν συμμετρικά.

Οι Yanik & Flores (2009) και οι Edwards & Zazkis (1993) κατέγραψαν σε έρευνες τους ότι οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είχαν συχνά την αντίληψη ότι η ευθεία ανάκλασης χωρίζει το σχήμα σε δυο ίσα μέρη ή θεωρούσαν ότι μια από τις πλευρές του σχήματος ήταν η προκαθορισμένη ευθεία ανάκλασης.

Συμπεραίνουμε επομένως ότι η έννοια της ανάκλασης είναι πολυσύνθετη και χρήζει ιδιαίτερης μελέτης τόσο για την ολόπλευρη κατανόηση της όσο και για την επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης από τον εκπαιδευτικό και από τα σχολικά εγχειρίδια.

Γ. Ο μετασχηματισμός στροφής

Στην έρευνα για τη ΔτΜ έχει καταγραφεί ένα πλήθος προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με δραστηριότητες με θέμα τους μετασχηματισμό στροφής. Μάλιστα οι Moyer (1975, 1978) και Shah (1969) Moyer (1975, 1978) and Shah

(1969) σημειώνουν ότι ο μετασχηματισμός στροφής εμφανίζει το υψηλότερο επίπεδο δυσκολίας για τους μαθητές Δημοτικού. Συγκεκριμένα, μεταξύ των προβλημάτων που εμφανίζονται περισσότερο συχνά αφορούν έννοιες όπως το μέτρο της γωνίας στροφής και το κέντρο στροφής. Συγκεκριμένα οι Clements & Burns (2000)και Clements & Battista (1992) σε έρευνες που πραγματοποίησαν κατέληξαν στη διαπίστωση ότι οι μαθητές της 4th Grade είχαν δυσκολίες στην μάθηση κεντρικών ιδεών όπως η γωνία, γεγονός που δυσχέραινε την κατανόηση του μετασχηματισμού στροφής. Πιθανή αιτία για τις παρανοήσεις που δημιουργούνται κατά τους Clements&Burns είναι ο στατικός ορισμός της γωνίας (η γωνία ως μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ δυο ημιευθειών που τέμνονται σε μια κορυφή).Μάλιστα οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η φυσική εμπειρία της στροφής του σώματος αποτελεί για τους μαθητές την πρώτη επαφή με τον μετασχηματισμό στροφής ενώ ακολούθως αναπτύσσεται η έννοια της στροφής προς τα δεξιά και μετέπειτα προς τ΄ αριστερά ενώ στο τέλος διαμορφώνεται η έννοια του μέτρου στροφής.

Η Kidder (1976) διεξάγοντας έρευνα σε μαθητές εννέα, έντεκα και δεκατριών ετών διαπίστωσε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολία στο να διατηρήσουν κάποιους παράγοντες αναλλοίωτους την ίδια στιγμή που κάποιοι άλλοι υπόκειντο σε διαρκή μεταβολή για την διεξαγωγή του μετασχηματισμού στροφής. Πράγματι παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν να διατηρήσουν σταθερή την απόσταση ανάμεσα στο κέντρο στροφής και τις κορυφές του σχήματος ενώ φάνηκε να μην έχουν αντιληφθεί ότι το μέτρο των γωνιών του σχήματος παρέμενε αμετάβλητο μετά τη δράση του μετασχηματισμού.

Επιπρόσθετα η έρευνα καταδεικνύει ότι οι μαθητές εμφανίζουν συχνά παρανοήσεις που σχετίζονται με την έννοια της γωνίας όταν εργάζονται σε δραστηριότητες με μετασχηματισμό στροφής. Έτσι παρατηρείται ότι πολλοί μαθητές έχουν την εσφαλμένη αντίληψη ότι το μέτρο μιας γωνίας εξαρτάται από το μήκος των ημιευθειών που σχηματίζουν τη γωνία (Clements, & Battista, 1989, 1990; Krainer, 1991).

Οι Edwards & Zazkis (1993) και αργότερα οι Yanik & Flores (2009) συμφωνούν ότι οι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την περίπτωση της στροφής γύρω από το κέντρο του σχήματος ενώ οι Soon & Flake (1989) στην ίδια κατεύθυνση συμπεραίνουν ότι οι μαθητές συναντούν μεγάλη δυσκολία σε μετασχηματισμούς στροφής όπου το κέντρο στροφής που δίνεται είναι ένα εξωτερικό σημείο του σχήματος. Πράγματι όπως περιγράφουν, οι μαθητές είχαν την τάση να αγνοούν το δοσμένο κέντρο στροφής και αντ' αυτού να στρέφουν το σχήμα περί το κέντρο του σχήματος ή μιας εκ των κορυφών του σχήματος ενώ παρατηρούν ότι πολύ συχνά οι μαθητές παρέβλεπαν την φορά της στροφής που υποδεικνύονταν .

Συνοψίζοντας οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών αναφορικά με τον μετασχηματισμό στροφής εντοπίζονται σε θέματα όπως η κατανόηση του κέντρου στροφής και το μέτρο της γωνίας στροφής (Freudenthal, 1971; Hollebrands, 2003, 2004; Soon & Flake, 1989).

Δ. Σύνθετοι μετασχηματισμοί

Η σύνθεση μετασχηματισμών αποτελεί σύμφωνα με το NCTM, 2000 μια σημαντική προσθήκη για την πληρέστερη κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Πράγματι όπως επισημαίνουν οι Wesslen & Fernandez, 2005 η μελέτη της σύνθεσης μετασχηματισμών ενισχύει την κατανόηση της έννοιας της ισότητας σχημάτων στο επίπεδο ενώ προσδίδει νόημα καθώς και την ιδιότητα της κλειστότητας στο μαθηματικό σύστημα των μετασχηματισμών. Πράγματι κατά τον συνδυασμό δυο μετασχηματισμών δημιουργείται ένας σύνθετος μετασχηματισμός και η τελική εικόνα του σχήματος μπορεί να προσδιοριστεί ως αποτέλεσμα της δράσης κάποιου εκ των αρχικών μετασχηματισμών. Συμπληρώνοντας τα παραπάνω οι ίδιοι ερευνητές αναφέρουν ότι «... η συμπερίληψη της σύνθεσης γεωμετρικών μετασχηματισμών στους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων κάνει τα Μαθηματικά ένα πιο ενδιαφέρον πεδίο καθώς τα καθιστά ένα σύστημα με πλήθος από μοτίβα κατάλληλα προς διερεύνηση».

Ας δούμε όμως ποια είναι τα σημεία που αποτελούν τροχοπέδη στην μάθηση των σύνθετων μετασχηματισμών. Αρχικά θα επισημάνουμε ότι οι δυσκολίες που εντοπίζονται εδώ αφορούν μεμονωμένα καθέναν από τους μετασχηματισμούς και επιπλέον τον συνδυασμό τους κυρίως όταν το ζητούμενο είναι η αναγνώριση των εκάστοτε μετασχηματισμών.

Μια ακόμη δυσκολία που φαίνεται συχνά να προκύπτει είναι ότι οι μαθητές συχνά δεν αντιλαμβάνονται την ισότητα δυο σχημάτων όταν αυτά έχουν διαφορετικό προσανατολισμό καθώς και ότι η κίνηση σε διαφορετική κατεύθυνση και μέτρο οδηγεί και πάλι στην ίδια εικόνα σχήματος.

Οι Usiskin et al. (2003) υπογραμμίζουν ότι δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός στροφής μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση ανακλάσεων, κατά συνέπεια αποτελεί κατάλληλο πεδίο για τη δημιουργία εικασιών από τους μαθητές. Επιπρόσθετα σημειώνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε δραστηριότητες που τους ζητείται ν’ αναγνωρίσουν το μέτρο και την κατεύθυνση της κίνησης που προκλήθηκε από την δράση κάθε μετασχηματισμού.

2.4 Τ’ αναλυτικά προγράμματα για την διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

2.4.1 Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Cambridge.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Cambridge προσφέρει ένα ευρύ σετ μαθησιακών στόχων για τα Μαθηματικά. Οι μαθησιακοί στόχοι καθορίζουν λεπτομερώς τι θα πρέπει να ξέρει και τι θα πρέπει να είναι σε θέση να κάνει ο μαθητής σε κάθε επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον παρέχουν μια δομή για την διδασκαλία και την μάθηση και μια αναφορά σχετικά με το ποια γνώση ή ικανότητα μπορεί να αξιολογηθεί.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης του Cambridge, ξεδιπλώνεται σε 5 γνωστικές περιοχές Μαθηματικών: Αριθμητική, Γεωμετρία, Μέτρηση, Διαχείριση δεδομένων και Επίλυση προβλήματος . Στις 4 πρώτες γνωστικές περιοχές υπεισέρχεται και η Επίλυση προβλήματος , που περιγράφει την χρήση τεχνικών και δεξιοτήτων καθώς και την εφαρμογή της νεοαποκτηθείσας γνώσης και των απαιτούμενων στρατηγικών με στόχο την επίλυση ενός προβλήματος.

Αναφορικά με την διδασκαλία και μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Cambridge τους εντάσσει για πρώτη φορά στην 5th Grade στην γνωστική περιοχή της Γεωμετρίας , στην υποκατηγορία ‘Position and movement’.
Συγκεκριμένα, διατυπώνεται ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση :

- Να προβλέπουν τη θέση ενός πολυγώνου μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης, είτε στην περίπτωση που η ευθεία ανάκλασης είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του πολυγώνου είτε στην περίπτωση που είναι σε πλάγια θέση ως προς αυτές.
- Ν’ αντιλαμβάνονται τον μετασχηματισμό (παράλληλης) μεταφοράς ως μετακίνηση κατά μήκους μιας ευθείας γραμμής, ν’ αναγνωρίζουν τη θέση ενός πολυγώνου μετά από μια παράλληλη μεταφορά και να διατυπώνουν με μαθηματική γλώσσα οδηγίες για την μεταφορά σχημάτων.

Στην 6th Grade η μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών συμπληρώνεται έτσι ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση:

- Να προβλέπουν τη θέση ενός πολυγώνου είτε μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης, όπου οι πλευρές του σχήματος δεν είναι παράλληλες ή κάθετες στην ευθεία ανάκλασης, είτε μετά από μετασχηματισμό μεταφοράς ή στροφής 90° γύρω από μια κορυφή.

Ας σημειωθεί ότι ήδη από την 5th Grade οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τις συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο (1ο τεταρτημόριο) και αντίστροφα να αποτυπώνουν ένα σημείο στο ορθοκανονικό σύστημα δοθέντων των συντεταγμένων του, ενώ στην 6th Grade οι μαθητές επεκτείνουν τις γνώσεις τους και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια.

2.4.2 Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Καναδά

Το αναλυτικό πρόγραμμα του Καναδά για τα Μαθηματικά διαρθρώνεται σε 5 γνωστικές περιοχές , στο οποίο διατυπώνονται οι γενικότερες αλλά και οι συγκεκριμένες επιδιώξεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το πρόγραμμα σπουδών για κάθε επίπεδο εκπαίδευσης είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλίσει ότι οι μαθητές θεμελιώνουν σε στέρεες βάσεις τη μαθηματική γνώση κάνοντας συνδέσεις και εφαρμόζοντας τις έννοιες με ποικίλους τρόπους. Για να υποστηριχθεί αυτή η διαδικασία, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει οποτεδήποτε αυτό είναι εφικτό να ενσωματώνουν έννοιες από οποιεσδήποτε από τις γνωστικές περιοχές των Μαθηματικών και να ενθαρρύνουν την εφαρμογή των μαθηματικών σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής.

Οι προαναφερθείσες γνωστικές περιοχές είναι : Αριθμητική, Μέτρηση, Γεωμετρία και Χωρική Αντίληψη, Μοτίβα και Άλγεβρα, Διαχείριση Δεδομένων και Πιθανότητες.

Πιο συγκεκριμένα στην περιοχή της Γεωμετρίας και της χωρικής αντίληψης οι μαθητές μαθαίνουν ν’ αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα και στερεά, να διακρίνουν τις ιδιότητες ενός αντικειμένων σε γεωμετρικές ή μη και να διερευνούν τις κοινές ιδιότητες για κλάσεις σχημάτων ή στερεών. Στην ίδια περιοχή εμπεριέχονται ακόμη μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες που σχετίζονται με τον προσδιορισμό και την περιγραφή της θέσης και της κίνησης.

Αναφορικά με την διδασκαλία και μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών, η τυπική εισαγωγή τους τοποθετείται στην 5^{th} Grade.

Το αναλυτικό πρόγραμμα του Καναδά θέτει τους παρακάτω ειδικούς στόχους σύμφωνα με τους οποίους οι μαθητές της 5^{th} Grade θα πρέπει να είναι σε θέση :

- Να εκτελούν έναν μεμονωμένο μετασχηματισμούς (μεταφορά, περιστροφή ή ανάκλαση) ενός δισδιάστατου σχήματος και να σχεδιάζουν την εικόνα που προκύπτει ως αποτέλεσμα του μετασχηματισμού.
- Ν’ αναγνωρίζουν και να περιγράφουν έναν μεμονωμένο μετασχηματισμό μεταφοράς, περιστροφής ή ανάκλασης σ’ ένα δισδιάστατο σχήμα.

Ας σημειωθεί ότι στους προαναφερθέντες στόχοι οι μετασχηματισμοί περιστροφής έχουν κέντρο μια από τις κορυφές του δοθέντος σχήματος και όχι ένα οποιοδήποτε σημείο ενώ η έμφαση δίνεται σε γωνία στροφής τετάρτου ($90°$), μισής στροφής ($180°$), στροφής τριών τετάρτων($270°$) ή πλήρους περιστροφής ($360°$) με την ορθή ή την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Στην 6^{th} Grade οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν τους γνωστούς μετασχηματισμούς δουλεύοντας στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου, εν συνεχεία να επεκτείνουν τις γνώσεις τους εκτελώντας συνδυαστικά μετασχηματισμούς (με ή χωρίς τη χρήση τεχνολογίας) και τέλος σχεδιάζοντας και περιγράφοντας την εικόνα που προκύπτει ως το αποτέλεσμα αυτών. Επιπρόσθετα, οι μαθητές θα είναι σε θέση να δημιουργούν, εκτελώντας επαναλαμβανόμενους μετασχηματισμούς, περίτεχνα σχέδια και να περιγράφουν με μαθηματική γλώσσα τους μετασχηματισμούς που οδήγησαν στην δημιουργία τους.

Συγκεκριμένα σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα επιδιώκεται από τους μαθητές :

- Να εκτελούν σε συνδυασμό μετασχηματισμούς μεταφοράς, περιστροφής ή/και ανάκλασης σ' ένα μεμονωμένο δισδιάστατο σχήμα με ή χωρίς την χρήση τεχνολογίας, να σχεδιάζουν και να περιγράφουν την εικόνα που προκύπτει ως αποτέλεσμα των μετασχηματισμών.
- Να εκτελούν έναν συνδυασμό από διαδοχικούς μετασχηματισμούς δισδιάστατων σχημάτων για να δημιουργήσουν ένα σχέδιο και εν συνεχεία ν' αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τους μετασχηματισμούς που χρησιμοποίησαν.
- Να εκτελούν και να περιγράφουν μεμονωμένους μετασχηματισμούς ενός δισδιάστατου σχήματος στο καρτεσιανό επίπεδο και συγκεκριμένα στο 1ο τεταρτημόριο (περιορισμός σε θετικές ακέραιες τιμές για τις συντεταγμένες των κορυφών).

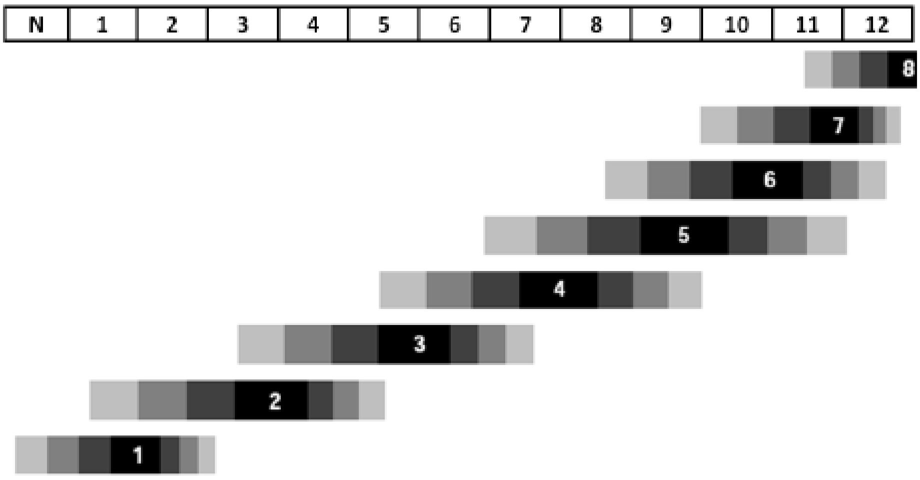
2.4.3 Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Κύπρου.

Το περιεχόμενο των Μαθηματικών διαρθρώνεται σε πέντε γνωστικές περιοχές για τους σκοπούς της οργάνωσης και της δόμησης της γνώσης. Συγκεκριμένα οι γνωστικές αυτές περιοχές είναι : Αριθμοί, Μέτρηση, Γεωμετρία, Άλγεβρα, Στατιστική-Πιθανότητες.

Όπως υπογραμμίζεται «Ο διαχωρισμός σε ενότητες περιεχομένου δεν σημαίνει ότι τα Μαθηματικά που προτείνονται μπορούν να διδαχτούν ή να αναπτυχθούν ως μεμονωμένες θεματικές ενότητες. Αντίθετα, οι ενότητες διαπλέκονται μεταξύ τους ή και συμπληρώνουν η μια την άλλη, ειδικότερα με την υποβολή και επίλυση προβλημάτων και την έμφαση σε ενιαίες αρχές που διέπουν τη μαθηματική σκέψη και το μαθηματικό συλλογισμό».

Με λίγα λόγια προβάλλεται ως κυρίαρχη η θεώρηση των Μαθηματικών ως ολότητα και υποστηρίζεται η παράλληλη ανάπτυξη δεξιοτήτων από όλο το φάσμα των Μαθηματικών.

Κεντρικό στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος σπουδών της Κύπρου είναι η ανάπτυξη του περιεχομένου σε 8 κλίμακες οι οποίες είναι ιεραρχικές και εξελίσσονται προοδευτικά. Εντούτοις όπως επισημαίνεται δεν είναι απόλυτα διακριτές καθώς σε κάθε κλίμακα εντοπίζονται στοιχεία της προηγούμενης κλίμακας. Κάτι τέτοιο προσφέρει ευελιξία τόσο σε μαθητές όσο και στον εκπαιδευτικό καθώς δίνει την ευκαιρία κάλυψης συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών σε περισσότερες από μια τάξεις ενώ επιτρέπει στους μαθητές να διατηρήσουν σε μεγάλο βαθμό τον δικό τους ρυθμό μάθησης των εννοιών.



Πίνακας 2: Δείκτες επιτυχίας-Κλίμακες

Ο Πίνακας 1 είναι ενδεικτικός για το εύρος κάθε κλίμακας, όπως επίσης και για την τάξη στην οποία αρχίζει και τελειώνει η διδασκαλία των εννοιών που περιλαμβάνει, τονίζοντας τη σπειροειδή διάταξη των μαθηματικών εννοιών οριζόντια και κατακόρυφα. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 1 τα μικρά ορθογώνια δείχνουν τις τάξεις και τα σκιασμένα ορθογώνια δείχνουν τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης κλίμακας.

Έτσι φαίνεται ενδεικτικά ότι η Κλίμακα 3 αρχίζει από την Γ’ Δημοτικού και ολοκληρώνεται λίγο μετά την εισαγωγή στην Α’ Γυμνασίου.

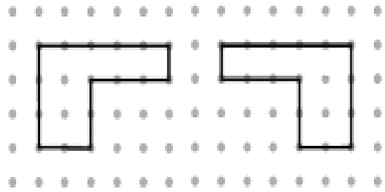
Το ενδιαφέρον στην παρούσα μελέτη θα στραφεί στις Κλίμακες 3 και 4 των οποίων το περιεχόμενο καλύπτεται σε μεγάλο βαθμό στις τάξεις Ε’ και Στ’ Δημοτικού. Συγκεκριμένα θα εκθέσουμε τους στόχους (δείκτες επιτυχίας και δείκτες επάρκειας) αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί ισομετρίας (παράλληλη μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) εισάγονται τυπικά στην Ε’ Δημοτικού. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου αναφορικά με την διερεύνηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών οι μαθητές επιδιώκεται να:

Γ3.16 Σχεδιάζουν και περιγράφουν το αποτέλεσμα μετασχηματισμών, όπως μεταφοράς, περιστροφής, ανάκλασης, μεγέθυνσης και σμίκρυνσης.

Συγκεκριμένα οι μαθητές διερευνούν και περιγράφουν το αποτέλεσμα μετασχηματισμών σε δραστηριότητες, όπως:

«Να περιγράψετε τον τρόπο με το οποίο πρέπει να μετακινηθεί το πρώτο σχήμα για να καλύψει το δεύτερο.»



Η μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών συνεχίζεται στην Στ' Δημοτικού. Οι μαθητές επιδιώκεται να :

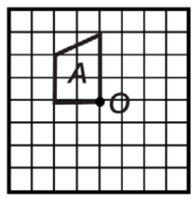
Γ4.17 Περιγράφουν και εκτελούν μετασχηματισμούς (περιστροφή υπό συγκεκριμένη γωνία, μεταφορά, ανάκλαση ως προς έναν ή περισσότερους άξονες) δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:

- Περιγράφουν και εκτελούν περιστροφή ενός σχήματος υπό γωνία $90°$, $180°$, $270°$ και $360°$.
- Κάνουν παράλληλη μεταφορά ενός σχήματος με βάση οδηγίες.

Συγκεκριμένα οι μαθητές περιγράφουν και εκτελούν μετασχηματισμούς σε δραστηριότητες όπως:

«Να περιστρέψετε το τραπέζιο Α κατά 90º δεξιόστροφα και να ονομάσετε το νέο τραπέζιο Β.»



3. Μεθοδολογία έρευνας

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα.

Το εκπαιδευτικό υλικό αποτελεί κεντρικό σημείο ενδιαφέροντος στη σύγχρονη έρευνα για τη ΔτΜ καθώς αντικατοπτρίζει τους επιδιωκόμενους στόχους του εκάστοτε αναλυτικού προγράμματος παρέχοντας μια ολοκληρωμένη πρόταση για την οργάνωση, ιεράρχηση και παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών. Συνιστά δε τον διαμεσολαβητή ανάμεσα στο επιδιωκόμενο και το εν δράσει αναλυτικό πρόγραμμα ενώ αποτελεί τον πλέον καθοριστικό παράγοντα αναφορικά με τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές.

Επομένως η ανάλυση σχολικών εγχειριδίων δίνει τη δυνατότητα να γνωρίσουμε καλύτερα τα χαρακτηριστικά των σχολικών Μαθηματικών και συνεπώς να διαπιστώσουμε τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών αντλώντας πληροφορίες σχετικά με τις μαθηματικές διαδικασίες και τα είδη συλλογισμού που είναι πιθανόν ν' αναπτύξουν οι μαθητές. Ιδιαίτερα στα Μαθηματικά έχει διαπιστωθεί ισχυρή αλληλεπίδραση τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών με το σχολικό εγχειρίδιο . Πιο συγκεκριμένα το ενδιαφέρον μας θα εστιαστεί στις δραστηριότητες που έχουν επιλεχθεί από τα σχολικά εγχειρίδια για την εισαγωγή, την παρουσίαση, την εφαρμογή, την διερεύνηση και την αξιολόγηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ισομετρίας.

Η επιλογή των γεωμετρικών μετασχηματισμών δεν είναι τυχαία. Καταλυτικό στοιχείο γι' αυτήν την επιλογή ήταν η περίοπτη θέση που έχουν κατακτήσει, από την προηγούμενη δεκαετία ήδη, στα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των περισσότερων χωρών συμπεριλαμβανομένης της Ελλάδας λόγω της ευελιξίας που προσδίδουν στην γεωμετρική σκέψη και τον συσχετισμό τους μ' ένα εύρος δραστηριοτήτων. Επιπρόσθετα αποτελούν ίσως τον πιο ισχυρό συνδετικό κρίκο μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας συνιστώντας ένα ιδανικό πεδίο για την διερεύνηση των μαθηματικών διαδικασιών και των τύπων συλλογισμού που καλλιεργούνται μέσα από τις επιλεγόμενες μαθηματικές δραστηριότητες. Εντούτοις η έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες για τους μαθητές καθώς τους εμπλέκει σε μαθηματικές δραστηριότητες με υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων. Συνεπώς είναι αντιληπτό ότι η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων και ειδικότερα των μαθηματικών δραστηριοτήτων θα μπορούσε να παρέχει δεδομένα προς την ερμηνεία και κατανόηση των δυσκολιών αυτών.

Ας σημειωθεί ότι η εισαγωγή των γεωμετρικών μετασχηματισμών, ξεκινά από τη δημοτική εκπαίδευση με πιο διαισθητικό τρόπο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση συστηματοποιείται. Σύμφωνα με το NCTM ,2000 οι μαθητές Λυκείου θα πρέπει να είναι σε θέση «να κατανοούν και ν' αναπαριστούν τους μετασχηματισμούς μεταφοράς, ανάκλασης, και στροφής , χρησιμοποιώντας ποικιλία αναπαραστάσεων».

Όπως αναφέρθηκε όμως οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί εισάγονται από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Το γεγονός αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ένα πλούσιο εννοιολογικό πεδίο που προσφέρει στους μαθητές ευκαιρίες να διερευνήσουν σημαντικές μαθηματικές έννοιες όπως οι συναρτήσεις και η συμμετρία, να συσχετίσουν τα Μαθηματικά με άλλα πεδία αλλά και να επιχειρηματολογήσουν χρησιμοποιώντας πλήθος αναπαραστάσεων. Κοινός στόχος είναι ν΄ αποτελέσουν ένα χρήσιμο εργαλείο για τη ανάπτυξη δημιουργικού μαθηματικού συλλογισμού , τη μελέτη και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Λαμβάνοντας υπόψιν τους παραπάνω προβληματισμούς και έχοντας επιχειρηματολογήσει για τις επιλογές που οδήγησαν στην παρούσα εργασία διατυπώνω ακολούθως τ' ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία θ' αποτελέσουν τον πυρήνα της ανάλυσης μου.

1.Ποιες οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές μέσω των δραστηριοτήτων που εντοπίζονται στα σχολικά εγχειρίδια αναφορικά με την έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών και πως αυτές σχετίζονται με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος;

2. Ποιες μαθηματικές διεργασίες και πιο είδος μαθηματικού συλλογισμού εγείρονται μέσα από τις επιλεγόμενες από τα σχολικά εγχειρίδια δραστηριότητες;

3. Τι είδους συνδέσεις επιτυγχάνονται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών;

Για τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα διερευνήθηκαν δραστηριότητες που εντάσσονται σε σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών και εξυπηρετούν διαφορετικούς σκοπούς της διδασκαλίας και της μάθησης των γεωμετρικών μετασχηματισμών ή δραστηριότητες που εμφανίζονται σε διαφορετικά εγχειρίδια τα οποία επιδιώκουν να καλύψουν τους στόχους του εκάστοτε αναλυτικού προγράμματος σπουδών.

3.2 Μέθοδος έρευνας

Έχοντας διατυπώσει τα ερευνητικά ερωτήματα θα επικεντρωθούμε στην περιγραφή της μεθοδολογίας μέσω της οποίας διεξήχθη η έρευνα μας αιτιολογώντας τις επιλογές μας. Έτσι το ενδιαφέρον μας θα εστιάσει στην ανάλυση τριών σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών που χρησιμοποιούνται ως μέρος της καθημερινής διδακτικής πρακτικής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Όπως περιγράψαμε και στο θεωρητικό μέρος της εργασίας ο όρος ανάλυση εγχειριδίων στην έρευνα για τη ΔτΜ είναι ευρύς και περιλαμβάνει είτε την ανάλυση μιας σειράς εγχειριδίων με στόχο την διερεύνηση της διδακτικής προσέγγισης που υιοθετείται για την παρουσίαση ενός μαθηματικού θέματος είτε την ανάλυση διαφορετικών σειρών εγχειριδίων κατά κύριο λόγο από διαφορετικές χώρες με στόχο την αναγνώριση των ομοιοτήτων και των διαφορών τους.

Το δεύτερο είδος ανάλυσης συνιστά αυτό που ονομάζουμε «σύγκριση σχολικών εγχειριδίων» και είναι αυτό που θα επιχειρήσουμε στην παρούσα έρευνα. Έτσι τα σχολικά εγχειρίδια που επιλέχθηκαν για τους σκοπούς της έρευνας αποτελούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα καθώς ικανοποιούν την αρχή της ποικιλομορφίας ως προς τα μορφολογικά και δομικά στοιχεία τους, την υιοθετούμενη διδακτική προσέγγιση, τους επιδιωκόμενους στόχους του αναλυτικού προγράμματος σπουδών στο οποίο στηρίχθηκαν για τη συγγραφή τους και τέλος ως προς την γενικότερη εκπαιδευτική κουλτούρα την οποία αποπνέουν. Ειδικότερα θα μελετηθούν δραστηριότητες από εγχειρίδια Μαθηματικών της διεθνούς εκπαιδευτικής σειράς (*Cambridge Primary Maths*) , από σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών του Καναδά (*Math Make Sense, Pearson*) και από τη νέα σειρά σχολικών εγχειριδίων της Κύπρου.

3.2.1 Παρουσίαση της σειράς Cambridge Primary Maths-Stages 5&6.

Το πρώτο από τα σχολικά εγχειρίδια που θ’ αναλύσουμε αποτελεί μέρος μιας σειράς βιβλίων του Cambridge για το Primary επίπεδο (Stages 1-6) με τον τίτλο ‘*Cambridge Primary Mathematics’*.Πρόκειται για μια νέα σειρά εγχειριδίων για τα Μαθηματικά σε επίπεδο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης των εκδόσεων *Cambridge University Press* με έτος έκδοσης 2014.Πιο συγκεκριμένα θ’ αναλύσουμε μαθηματικές δραστηριότητες αναφορικά με την διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών ισομετρίας που εισάγονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Cambridge στα Stages 5 &6. Κύρια χαρακτηριστικά αυτής της σειράς βιβλίων είναι ο διεθνής χαρακτήρας τους και η διερευνητική προσέγγιση για τη μάθηση με έμφαση στις δεξιότητες που απαιτούνται για την επίλυση προβλήματος. Συγκεκριμένα οι μαθηματικές διαδικασίες που πλαισιώνουν την επίλυση προβλήματος αναπτύσσονται πάντα σε συσχέτιση και παράλληλα με τους υπόλοιπους γνωστικούς τομείς των Μαθηματικών (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μέτρηση, Διαχείριση δεδομένων).Πρωταρχικής σημασίας αποτελεί και η ανάπτυξη δεξιοτήτων που σχετίζονται με την μαθηματική επικοινωνία, την διασύνδεση μαθηματικών εννοιών και την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας και αιτιολόγησης. Η σειρά βιβλίων για κάθε τάξη περιλαμβάνει εκπαιδευτικό υλικό για τον δάσκαλο, το βιβλίο του μαθητή καθώς και ένα τεύχος με μαθηματικά παιχνίδια προσανατολισμένα κάθε φορά στην επίτευξη των επιδιωκόμενων στόχων του αναλυτικού προγράμματος. Το βιβλίο του δασκάλου παρέχει ένα αναλυτικό πλάνο διδασκαλίας για κάθε μάθημα που παρουσιάζεται στο εγχειρίδιο του μαθητή καθώς και επιπλέον υποστηρικτικό υλικό για ενδεχόμενες διαφοροποιήσεις στη διδασκαλία, ερωτήσεις για την αξιολόγηση του διδακτικού έργου και για την ανατροφοδότηση αναφορικά με το επίπεδο της μαθηματικής κατανόησης που έχει επιτευχθεί.

Το εγχειρίδιο του μαθητή εμπεριέχει πρωτότυπες δραστηριότητες Μαθηματικών με στόχο την εμπλοκή των μαθητών στην διδασκόμενη έννοια ή διαδικασία καθώς και πλήθος απο ερωτήσεις, διερευνητικές δραστηριότητες και παιχνίδια. Όπως σημειώνεται βέβαια το εγχειρίδιο του μαθητή λειτουργεί συμπληρωματικά αλλά όχι αυτοδύναμα του βιβλίου για τον εκπαιδευτικό. Ειδικότερα η

διδακτική πορεία στηρίζεται σε μια δραστηριότητα ‘Core activity’ που ουσιαστικά αποτελεί τον πυρήνα του μαθήματος και η οποία περιγράφεται λεπτομερώς στο εγχειρίδιο για τον εκπαιδευτικό. Παράλληλα το βιβλίο του μαθητή περιλαμβάνει αρχικά μια κεντρική διερευνητική δραστηριότητα *‘Let’s investigate’*με τη μορφή ανοικτού προβλήματος το οποίο ο μαθητής μπορεί να προσεγγίσει σε πολλά επίπεδα (χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων στην εισαγωγή που κλιμακώνεται σταδιακά φτάνοντας σε ιδιαίτερα υψηλό επίπεδο δυσκολίας). στοχεύοντας στην εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης. Στη συνέχεια δίνεται επιπλέον υλικό (ερωτήσεις και δραστηριότητες) με στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος. Το υλικό αυτό προορίζεται είτε για τους σκοπούς της διαμορφωτικής αξιολόγησης στο τέλος του μαθήματος , είτε ως εργασία για το σπίτι, είτε υποστηρικτικά για την μάθηση της νέας μαθηματικής ορολογίας.
Ας σημειωθεί ότι οι επιμέρους στόχοι του αναλυτικού προγράμματος σπουδών του Cambridge, κατανέμονται με σπειροειδή δομή στο εγχειρίδιο του μαθητή και του εκπαιδευτικού. Ταυτόχρονα το περιεχόμενο οργανώνεται σε διδακτικές περιόδους (sessions) τα οποία με τη σειρά τους ιεραρχούνται σε τρεις ευρύτερες δέκα εβδομάδων η καθεμία. Όλα τα μαθήματα έχουν ενιαία δομή και καθένα από αυτά καταλαμβάνει στο εγχειρίδιο του μαθητή έκταση δύο σελίδων. Αξίζει να επισημανθεί ότι ένα μεγάλο μέρος του παρεχόμενου εκπαιδευτικού υλικού αναπτύσσεται αποκλειστικά και μόνο στο εγχειρίδιο του δασκάλου το οποίο δυνητικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αποκλειστικό εγχειρίδιο διδασκαλίας , ανεξάρτητα του εγχειριδίου του μαθητή.

3.2.2 Παρουσίαση της σειράς Pearson Math Make Sense –Grades 5&6.

Το δεύτερο από τα σχολικά εγχειρίδια που θ’ αναλύσουμε είναι μια σειρά από τον Καναδά των οποίων η συγγραφή στηρίχθηκε στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Οντάριο. Ο τίτλος της σειράς είναι ‘*Math Make sense’* των εκδόσεων Pearson με έτος έκδοσης το 2008. Όπως και με το προηγούμενο εγχειρίδιο η μελέτη μας θα επικεντρωθεί στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Το περιεχόμενο για κάθε τάξη (Grades 5 & 6) κατανέμεται σε 8 κεφάλαια (units) και στα επιμέρους μαθήματα (lessons) που διατηρούν ενιαία δομή. Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής της σειράς αφορά στην διδακτική προσέγγιση που επιχειρείται μέσω της επίλυσης προβλήματος μέσω της οποίας ο μαθητής αποκτά ευελιξία στην σκέψη και επιτυγχάνει σε βάθος κατανόηση των διδασκόμενων εννοιών.
Στα μορφολογικά χαρακτηριστικά θα σημειώναμε την συνέπεια και την ομοιομορφία με την οποία δομείται κάθε κεφάλαιο και μάθημα. Συγκεκριμένα, κάθε κεφάλαιο ξεκινά με μια σκηνή από την

πραγματικότητα ώστε ο μαθητής να ανακαλέσει την προϋπάρχουσα μαθηματική γνώση μέσα σ' ένα σχετικό ρεαλιστικό πλαίσιο που θα προκαλέσει το ενδιαφέρον του και θα ενθαρρύνει την εμπλοκή του στην μαθησιακή διαδικασία.

Κάθε μάθημα δομείται σε διακριτά τμήματα, ξεκινώντας με την ενότητα *'Explore'* στην οποία ο μαθητής διερευνά μια έννοια ή ένα πρόβλημα συνήθως χρησιμοποιώντας υποστηρικτικό υλικό μάθησης και σε συνεργασία με έναν συμμαθητή του. Ακολουθεί η ενότητα *'Show and Share'*όπου ο μαθητής μοιράζεται τα ευρήματα από την διερεύνηση του με άλλους μαθητές αναπτύσσοντας δεξιότητες όπως είναι η μαθηματική επικοινωνία και η επιχειρηματολογία ενώ στην ενότητα *'Connect'* επισημοποιείται η νέα γνώση και παρουσιάζονται μια ή περισσότερες λύσεις για ένα μαθηματικό πρόβλημα. Εν συνεχεία στην ενότητα 'Practice' οι μαθητές κάνουν εφαρμογή όσων διδάχθηκαν μέσα από δραστηριότητες και ακολούθως στην ενότητα ' Reflect' οι μαθητές αναστοχάζονται πάνω στην κεντρική ιδέα του μαθήματος απαντώντας σε ερωτήματα ή συμμετέχοντας σε διάλογο στην τάξη.

Άλλες ενότητες που περιλαμβάνονται στοχεύουν στην αξιολόγηση και ανασκόπηση του κεφαλαίου (*Show What You Know and Cumulative Review)*, στην διερεύνηση επιλεγμένων θεμάτων που επαφίονται της μαθηματική γνώση *(Investigation)* , στην ομαδοποίηση των στρατηγικών που διδάσκονται ως ξεχωριστό μάθημα ανά κεφάλαιο *(Strategies Toolkit)* και στην επίλυση ενός κεντρικού προβλήματος με αφορμή τη σκηνή από την πραγματικότητα μέσω της οποίας προκλήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών κατά την εισαγωγή του κεφαλαίου*(Unit Problem*).

Καινοτόμο στοιχείο αποτελεί το ένθετο σχετικά με την χρήση της τεχνολογίας για τον εμπλουτισμό της νέας μαθηματικής γνώσης. Για παράδειγμα στο 8ο κεφάλαιο της 6th Grade που πραγματεύεται τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς υπάρχουν δυο σχετικά ένθετα όπου παρουσιάζονται βήμα-βήμα με λεπτομερείς οδηγίες η διενέργεια μετασχηματισμών και ο σχεδιασμός μοτίβων με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

3.2.3 Παρουσίαση των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της Κύπρου–Ε' και Στ' Δημοτικού.

Το τρίτο από τα σχολικά εγχειρίδια που επιλέχθηκε για ανάλυση είναι μια νέα σειρά μαθηματικών βιβλίων για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση που βασίστηκε στο αναθεωρημένο πρόγραμμα σπουδών της Κύπρου. Η μελέτη μας θα εστιάσει στις επιμέρους ενότητες αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ισομετρίας κατά την εισαγωγή τους στην Ε' Δημοτικού (Ενότητα 4) και την επέκταση τους στην Στ' Δημοτικού (Ενότητα 12).

Ας δούμε όμως τα βασικά χαρακτηριστικά της δομής των σχολικών αυτών εγχειριδίων καθώς και τους άξονες πάνω στους οποίους «χτίζεται» κάθε διδακτική ενότητα. Έτσι οι ενότητες στο διδακτικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε' τάξης ακολουθούν την πιο κάτω δομή:

- *Εξερεύνηση, Διερεύνηση:* Στις εξερευνήσεις υπάρχουν δραστηριότητες που στόχο έχουν να προκαλέσουν την περιέργεια των μαθητών και την ελεύθερη εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών. Είναι δηλαδή το σημείο στο οποίο ο μαθητής εμπλέκεται σε μια γνήσια κατάσταση προβλήματος μέσα από την οποία θ' αναδειχθεί η ανάγκη για την εισαγωγή ή την επέκταση-συμπλήρωση μιας νέας έννοιας ή μαθηματικής διαδικασίας.

Από την άλλη πλευρά στις διερευνήσεις περιλαμβάνονται δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές διερευνούν μαθηματικές ιδέες σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και στις οποίες έχουν τη δυνατότητα να διατυπώσουν υποθέσεις, να ελέγξουν την εγκυρότητα των υποθέσεών τους και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

- *Δραστηριότητες* : Οι δραστηριότητες που προτείνονται είναι διαβαθμισμένες και αντιστοιχούν στην διδακτέα ύλη του συγκεκριμένου μαθήματος.
- *Δραστηριότητες Ενότητας* : Περιλαμβάνουν τα κυριότερα σημεία στα οποία εστιάζεται το ενδιαφέρον της ενότητας. Η αξιοποίηση τους γίνεται στα πλαίσια της περαιτέρω εξάσκησης, επανάληψης ή /και αξιολόγησης.
- *Δραστηριότητες Εμπλουτισμού*: Περιλαμβάνουν δραστηριότητες ευρύτερης θεματολογίας σχετικά με τις υπό ανάπτυξη μαθηματικές έννοιες. Αποτελούν επιπρόσθετο υλικό που δίνει την ευκαιρία στους μαθητές: (α) ν' ανακαλέσουν προηγούμενες γνώσεις, (β) να κάνουν περαιτέρω εξάσκηση, (γ) να επεκτείνουν τις γνώσεις τους γύρω από ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα , (δ) να εμβαθύνουν σε θέματα που τους ενδιαφέρουν, (ε) να επιλύσουν προβλήματα με υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής πρόκλησης, ώστε να αναπτύξουν περαιτέρω τις μαθηματικές τους ικανότητες.

Αντίστοιχα η δομή που ακολουθείται στο διδακτικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Στ' τάξης εμπεριέχει όλες τις προηγούμενες ενότητες ωστόσο εμπλουτίζεται με αρκετές νέες. Έτσι η διδακτική πορεία που τελικά υιοθετείται είναι η παρακάτω:

- *Τι θα μάθουμε:* Παρατίθεται το περιεχόμενο και οι επιδιώξεις της ενότητας, όπως προκύπτουν από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί αναμένεται να προγραμματίσουν και να σχεδιάσουν τη διδασκαλία της κάθε ενότητας με βάση το περιεχόμενο και τις επιδιώξεις αυτές.
- *Έχουμε μάθει*: Γίνεται υπενθύμιση βασικών εννοιών από προηγούμενες τάξεις που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των νέων εννοιών της εκάστοτε ενότητας.
- *Εξερεύνηση, Διερεύνηση*

- *Νέες Έννοιες :* Στις Νέες Έννοιες, παρατίθεται η νέα γνώση που πρέπει να κατακτήσουν ο μαθητές με το πέρας της μαθησιακής διαδικασίας του κάθε μαθήματος. Στο σημείο αυτό συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τις Διερευνήσεις/Εξερευνήσεις. Στο σημείο αυτό γίνεται η επισημοποίηση της νέας γνώσης.
- *Παραδείγματα*: Τα παραδείγματα περιλαμβάνουν λύσεις ασκήσεων και καλύπτουν σημαντικές παραμέτρους του μαθήματος, έχοντας ως σκοπό την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών του μαθήματος. Στο σημείο αυτό οι μαθητές νοηματοδοτούν τη νέα μαθηματική έννοια και έχουν τη δυνατότητα ν' αντιληφθούν τις διαφορετικές εκφάνσεις της συσχετίζοντας την με άλλες έννοιες.
- *Δραστηριότητες*
- *Δραστηριότητες Ενότητας*
- *Δραστηριότητες Εμπλουτισμού*

Σ΄ αυτό το σημείο ας σημειωθεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια επιχειρούν να εντάξουν τη χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών για τα Μαθηματικά μέσα από απλές δραστηριότητες που περιγράφονται βήμα προς βήμα στο εγχειρίδιο του μαθητή.

Τέλος αξίζει να επισημάνουμε ότι οι συγγραφείς της σειράς έχουν φροντίσει ώστε η δομή του εγχειριδίου Μαθηματικών για την Στ' Τάξη να έρχεται σε συμφωνία με τη δομή των αντίστοιχων εγχειριδίων του Γυμνασίου , για σκοπούς της ομαλότερης μετάβασης των μαθητών από τη μια βαθμίδα εκπαίδευσης στην άλλη.

3.3 Συλλογή δεδομένων

3.3.1 Το υλικό της έρευνας.

Για τη συλλογή των δεδομένων έγινε η επιλογή δραστηριοτήτων από τις τρεις σειρές σχολικών εγχειριδίων που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν είναι αντιπροσωπευτικές των επιδιωκόμενων, για κάθε επίπεδο, στόχων του αναλυτικού προγράμματος και καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα όπως (δραστηριότητες για την ανάδειξη της αναγκαιότητας εισαγωγής της νέας έννοιας, δραστηριότητες διερεύνησης, δραστηριότητες εφαρμογής, δραστηριότητες εμπλουτισμού κ.λπ.).

Από τα σχολικά εγχειρίδια του Cambridgeαναλύσαμε δραστηριότητες από το βιβλίο του μαθητή (Learner's Book) καθώς και δραστηριότητες που προτείνονται στον οδηγό του εκπαιδευτικού. Συγκεκριμένα, για τοStage 5 μελετήθηκαν οι παράγραφοι6.2 Translation and Reflectionκαι29.1 Co-ordinates and Transformations συνολικής έκτασης τεσσάρων σελίδων ενώ από το αντίστοιχο

σχολικό εγχειρίδιο για το Stage 6 μελετήθηκαν οι παράγραφοι10.1 Describing Translations, 10.2 Reflecting Shapes, 10.3 Rotationκαι 34.2 Transforming Shapesσυνολικής έκτασης 7 σελίδων.
Από το εγχειρίδιο του Καναδά 'Math makes sense 5' για την 5^{th} Grade μελετήθηκε το 8^{o} κεφάλαιο με τίτλο 'Transformations' και συγκεκριμένα οι παράγραφοι 'Translations' , 'Reflections' , 'Rotations' και 'Exploring Different Points of Rotations'.Η συνολική έκταση του κεφαλαίου είναι περίπου 20 σελίδες. Αντίστοιχα από το εγχειρίδιο '*Math make sense 6'*για την 6^{th} Grade μελετήθηκε το 8^{o} κεφάλαιο 'Transformations' και ειδικότερα οι παράγραφοι 'Transformations on a Coordinate grid', 'Successive Transformations' , Combining Transformations' και ' Creating Designs'. Η συνολική έκταση του κεφαλαίου είναι περίπου 30 σελίδες.
Τέλος από τη σειρά βιβλίων της Κύπρου θα εξετάσουμε τα μαθήματα 11&12 από την ενότητα 4 του σχολικού εγχειριδίου της $5^{ης}$ Δημοτικού καθώς και τα μαθήματα 11&12 από την ενότητα 12 του σχολικού εγχειριδίου της $6^{ης}$ Δημοτικού. Επιπλέον μελετήθηκαν κάποιες από τις δραστηριότητες της ενότητας καθώς και οι αντίστοιχες δραστηριότητες εμπλουτισμού.

3.3.2 Μονάδα ανάλυσης-Η μαθηματική δραστηριότητα

Στην παρούσα έρευνα αξιοποιήθηκαν δραστηριότητες από τις τρεις σειρές σχολικών εγχειριδίων που περιγράψαμε προηγουμένως οι οποίες αποτελούν και την βασική μονάδα ανάλυσης. Καθώς η φύση της μαθηματικής δραστηριότητας είναι ευρύς και πολυδιάστατος είναι απαραίτητο να διασαφηνίσουμε ποια ακριβώς θεώρηση θα ακολουθήσουμε για την ανάλυση μας. Έτσι με τον όρο μαθηματικές δραστηριότητες θα εννοούμε στο εξής τις σχολικές δραστηριότητες, τις εργασίες, τις ερωτήσεις, τα προβλήματα, τις κατασκευές, τις εφαρμογές ή τις ασκήσεις που επικεντρώνονται σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια (Cai, Moyer, Nie, & Wang, 2010; Stein et al., 1996).
Την επιλογή της συγκεκριμένης μονάδας για την ανάλυση μας αιτιολογεί το γεγονός ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες διαμορφώνουν και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών, τις αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά και τον τρόπο με τον οποίο δομούν τις μαθηματικές έννοιες. Μάλιστα ο Lappan, 1993 σημειώνει ότι: Καμία άλλη διδακτική απόφαση που λαμβάνεται από τον εκπαιδευτικό δεν έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών και στις αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά από την επιλογή ή την δημιουργία δραστηριοτήτων τις οποίες ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί προκειμένου να εμπλέξει τους μαθητές στη μελέτη των Μαθηματικών. Όπως βέβαια είναι φυσικό δεν παρέχουν όλες οι μαθηματικές δραστηριότητες τις ίδιες ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές (Stein et al.,2009). Για παράδειγμα κάποιες μαθηματικές δραστηριότητες ενδεχομένως να εστιάζουν στην απομνημόνευση, ενώ κάποιες άλλες έχουν τη δύναμη να μυούν τους μαθητές στην επιχειρηματολογία και την ευέλικτη

επίλυση προβλήματος. Συνεπώς είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτή η σύνδεση ανάμεσα στην επιλογή της μαθηματικής δραστηριότητας και τους επιδιωκόμενους διδακτικούς στόχους. Αν λ.χ. ο στόχος ενός μαθήματος είναι η διαδικαστική ευχέρεια, τότε οι πλέον κατάλληλες δραστηριότητες θα ήταν όσες θα ενθάρρυναν τους μαθητές να εργάζονται με ταχύτητα και αποτελεσματικότητα. Από την άλλη πλευρά, αν ο στόχος του μαθήματος είναι η βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, τότε ως πιο κατάλληλες θα χαρακτηρίζονταν δραστηριότητες που θα ενθάρρυναν την ενεργητική επίλυση προβλήματος και τις δεξιότητες επιχειρηματολογίας. Στα σχολικά εγχειρίδια που πρόκειται ν' αναλύσουμε οι δραστηριότητες ποικίλουν ως προς την μορφή, τους στόχους που εξυπηρετούν κατά την διδασκαλία, το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων που θέτουν , το είδος του μαθηματικού συλλογισμού που ενεργοποιούν και το είδος του πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσονται. Στόχος μας είναι να διερευνήσουμε τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών αναφορικά με την μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

3.3.3 Άξονες ανάλυσης

Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων που μελετήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας έρευνας στηρίχθηκε σε τέσσερις βασικούς άξονες καθένας από τους οποίους μας βοηθά να αποκτήσουμε μια πληρέστερη εικόνα για τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται μέσω των σχολικών εγχειριδίων στους μαθητές. Ας σημειωθεί ότι οι άξονες που θα χρησιμοποιήσουμε επιλέχθηκαν μετά από την μελέτη της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων σε αντίστοιχες έρευνες και περιεγράφηκαν λεπτομερώς στην ενότητα 2.1.7.

Ο πρώτος άξονας αναφέρεται στα **μαθηματικά χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων.** Εδώ κύριος στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις δραστηριότητες με κριτήριο τις κρίσιμες μαθηματικές έννοιες, διαδικασίες και σχέσεις που επιδιώκεται ν' αναδειχθούν από το εκάστοτε σχολικό εγχειρίδιο. Σ' αυτήν την ενότητα η ανάλυση μας θα στηριχθεί στα ερευνητικά αποτελέσματα αναφορικά με την μάθηση και διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών και τα οποία περιγράψαμε σε προηγούμενη ενότητα.

Ο δεύτερος άξονας εξετάζει το **είδος των γνωστικών απαιτήσεων** που θέτουν οι δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών. Υιοθετώντας τον ορισμό που δίνεται από τους Stein, Smith, Henningsen, & Silver, (2009) η γνωστική απαίτηση είναι η διαφοροποίηση στον τρόπο σκέψης που απαιτεί η εμπλοκή των μαθητών σε μια μαθηματική δραστηριότητα. Συνέπεια αυτού του ορισμού είναι η κατηγοριοποίηση των γνωστικών απαιτήσεων σε τέσσερα επίπεδα τα οποία επιγραμματικά είναι τα παρακάτω: **(α)διαδικασίες απομνημόνευσης**, **(β) διαδικασίες με απουσία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών**, **(γ) διαδικασίες με συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών, (δ)η διαδικασία του να «κάνω Μαθηματικά».** Το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων καθορίζει τον βαθμό κατανόησης που έχουν την ευκαιρία να κατακτήσουν οι μαθητές. Έτσι ως χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων χαρακτηρίζονται οι δραστηριότητες που κατά κύριο λόγο περιλαμβάνουν απομνημόνευση ή εμπλοκή σε μαθηματικές διαδικασίες χωρίς να πραγματοποιούνται συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών. Αντίθετα, οι μαθηματικές δραστηριότητες με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις ενθαρρύνουν τις συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και απαιτούν από τους μαθητές να εμπλακούν σε γνήσιες μαθηματικές διαδικασίες. Στην ανάλυση των δραστηριοτήτων που θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια της εργασίας μας θα κατηγοριοποιήσουμε τις δραστηριότητες με κριτήριο το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων που θέτουν στον μαθητή ερμηνεύοντας τες μέσα από τους φακούς των ευκαιριών μάθησης. Για την κατηγοριοποίηση αυτή θα μας χρησιμεύσει ο Πίνακας 1 που περιγράφει αναλυτικά τα επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων και τα επιμέρους χαρακτηριστικά του κάθε επιπέδου.

Παράλληλα θα μελετήσουμε το **είδος του μαθηματικού συλλογισμού** που εγείρεται κατά την επίλυση δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών. Στηριζόμενοι στο θεωρητικό πλαίσιο που ανέπτυξε ο Lithner, 2008 θα διακρίνουμε τις δραστηριότητες σε αυτές που εγείρουν **αλγοριθμικό (μιμητικό) συλλογισμό** και σε αυτές που εγείρουν **δημιουργικό συλλογισμό**. Παραδείγματα δραστηριοτήτων αλγοριθμικού συλλογισμού περιλαμβάνουν την ανάκληση στην μνήμη μιας γνωστής διαδικασίας, την μιμητική επανάληψη ενός λυμένου παραδείγματος και την εφαρμογή του σε παραπλήσιο παράδειγμα από τους μαθητές. Ας σημειωθεί ότι τέτοιου είδους δραστηριότητες κυριαρχούν στα σχολικά εγχειρίδια και ενώ φαίνεται να ενισχύουν τη διαδικαστική ευχέρεια των μαθητών εντούτοις όμως δεν προϋποθέτουν εννοιολογική κατανόηση. Από την άλλη πλευρά οι δραστηριότητες που επιστρατεύουν τον δημιουργικό συλλογισμό δεν παρέχουν καμία ολοκληρωμένη μέθοδος επίλυσης στους μαθητές απαιτώντας συνήθως την εξ' ολοκλήρου κατασκευή της λύσης καθώς και την αιτιολόγηση και επεξήγηση των επιλεγόμενων στρατηγικών επίλυσης.

4.Αποτελέσματα

4.1 Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών στα σχολικά εγχειρίδια

Από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων για τον μαθητή και κάποιους οδηγούς για τον εκπαιδευτικό, εξετάσαμε δραστηριότητες των οποίων το μαθηματικό περιεχόμενο αφορά στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς παράλληλης μεταφοράς, ανάκλασης και στροφής. Συνολικά μέσω των δραστηριοτήτων που προτείνονται οι μαθητές επιδιώκεται μετά το πέρας της 6^{th} Grade να προβλέπουν, ν' αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τη θέση ενός γεωμετρικού αντικειμένου μετά από έναν ή περισσότερους μετασχηματισμούς μεταφοράς, ανάκλασης ή στροφής. Ακόμη οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να εκτελούν διαδοχικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ,να σχεδιάζουν την εικόνα ενός σχήματος μετά από τη δράση ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών αλλά και να δημιουργούν οι ίδιοι τα δικά τους σχέδια με τη εφαρμογή μετασχηματισμών. Τέλος σε κάποιες από τις δραστηριότητες επιχειρείται η σύνδεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με άλλους τομείς της καθημερινής ζωής π.χ. με την Τέχνη (βλ. μοτίβα).

Αυτό το οποίο πρόκειται να εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα είναι τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών τα οποία αναδεικνύονται μέσα από την επιλογή των αντίστοιχων μαθηματικών δραστηριοτήτων. Κάτι τέτοιο θα μας βοηθήσει στην προσπάθεια μας να διαλευκάνουμε τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Έτσι θα αναλύσουμε για καθεμία από τις σειρές βιβλίων με ποιον τρόπο επιλέγει να παρουσιάσει τις έννοιες της παράλληλης μεταφοράς, της ανάκλασης, της στροφής καθώς και τη σύνθεση μετασχηματισμών.

4.1.1 Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών στα σχολικά εγχειρίδια του Cambridge

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί εισάγονται στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών του Cambridge στο Επίπεδο 5 (Stage 5).Η εισαγωγή τους γίνεται στο κεφάλαιο που πραγματεύεται τη θέση και κίνηση στο επίπεδο, αμέσως μετά το μάθημα που αφορά στον προσδιορισμό της θέσης με χρήση συντεταγμένων στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο. Σ΄ αυτό το επίπεδο οι μαθητές διερευνούν τον μετασχηματισμό μεταφοράς καθώς και τον μετασχηματισμό ανάκλασης σε παραδείγματα στα οποία η ευθεία ανάκλασης είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του σχήματος. Τέλος χρησιμοποιούν τους παραπάνω μετασχηματισμούς για τη συμπλήρωση μοτίβων (patterns) καθώς και για την επίλυση γρίφων.

Στο επόμενο επίπεδο (Stage 6) οι μαθητές επεκτείνουν τις γνώσεις τους για το καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων και στα 4 τεταρτημόρια. Οι μαθητές περιγράφουν με τη βοήθεια συντεταγμένων τη θέση των κορυφών της εικόνας του σχήματος μετά από μετασχηματισμό μεταφοράς κατά μήκος μιας ευθείας σε οριζόντια, κατακόρυφη ή διαγώνια διεύθυνση. Επιπρόσθετα, οι μαθητές διερευνούν την δράση του μετασχηματισμού ανάκλασης σε σχήματα, όταν η ευθεία ανάκλασης είναι σε πλάγια θέση ως προς τις πλευρές του σχήματος. Σε επόμενο μάθημα, οι μαθητές γνωρίζουν τον μετασχηματισμό στροφής δουλεύοντας σε παραδείγματα όπου το κέντρο στροφής είναι μια από τις κορυφές του πολυγώνου και η γωνία στροφής είναι 90°.Τέλος οι μαθητές μελετούν συνδυασμούς όλων των προηγούμενων μετασχηματισμών δίνοντας έμφαση στην δημιουργία και την μελέτη γεωμετρικών μοτίβων.

Στα επόμενα θα εξετάσουμε τα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών μέσα από την μελέτη των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια του Cambridge.

Α.Μετασχηματισμός μεταφοράς

Η εισαγωγή των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς γίνεται με τον μετασχηματισμό μεταφοράς .Αρχικά οι μαθητές μέσω μιας σειράς τριών δραστηριοτήτων CB_Δ1, CB_Δ2 και CB_Δ3 διερευνούν τον μετασχηματισμό μεταφοράς στο πλαίσιο της δημιουργίας μοτίβων. Στην πρώτη από αυτές τις δραστηριότητες δίνεται στους μαθητές ένα μοτίβο καθώς και ο κανόνας για τη δημιουργία του (μεταφορά κατά μήκος μιας διαγωνίου, 2cm δεξιά και 1 cm πάνω) ενώ τους ζητείται να εξετάσουν αν κάθε στοιχείο του μοτίβου έχει μεταφερθεί κατά τον ίδιο τρόπο. Στην 2^η δραστηριότητα δίνεται ξανά ένα ημιτελές μοτίβο το οποίο έχει προκύψει με την εφαρμογή μετασχηματισμού μεταφοράς κατά μήκος μιας διαγωνίου. Εδώ οι μαθητές επιδιώκεται να συμπληρώσουν το μοτίβο ώστε κάθε κομμάτι του στοιχείου επανάληψης να έχει μεταφερθεί κατά τον ίδιο τρόπο (4 cm δεξιά και 2 cm πάνω). Στην 3^η δραστηριότητα αναμένεται από τους μαθητές να δημιουργήσουν οι ίδιοι ένα μοτίβο με εφαρμογή μετασχηματισμού μεταφοράς σ' ένα στοιχείο επανάληψης της επιλογής τους. Ας σημειωθεί ότι τις παραπάνω δραστηριότητες τις εντοπίζουμε στον οδηγό του εκπαιδευτικού με την μορφή φύλλου εργασίας το οποίο αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα του μαθήματος. Μέσω αυτού οι μαθητές περνούν σταδιακά από την αναγνώριση του μετασχηματισμού μεταφοράς στην συμπλήρωση και την εξ' ολοκλήρου δημιουργία ενός μοτίβου, με αφορμή την διατήρηση της κανονικότητας που αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό του.

Περνώντας στις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου αξίζει να σημειωθεί η δραστηριότητα CB_Δ4 στην οποία δίνεται στους μαθητές ένα γεωμετρικό μοτίβο του οποίου το στοιχείο επανάληψης είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Οι μαθητές αρχικά εστιάζοντας σ' ένα από τα ορθογώνια καλούνται να περιγράψουν τον μετασχηματισμό παράλληλης μεταφοράς του (2 cm δεξιά) και στην συνέχεια δοθέντων δυο στοιχείων του μοτίβου (τρίγωνα Α και Β) να διατυπώσουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς που μετακινεί το τρίγωνο Α στο τρίγωνο Β (μεταφορά κατά μήκος διαγωνίου . Θα παρατηρούσαμε επομένως ότι με αυτό το ερώτημα ο μετασχηματισμός μεταφοράς προσεγγίζεται διδακτικά ως κίνηση στο επίπεδο. Κάτι τέτοιο γίνεται φανερό και στον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η έννοια του μετασχηματισμού μεταφοράς στον οδηγού του εκπαιδευτικού. Συγκεκριμένα αναφέρεται ως ' η κίνηση ενός αντικειμένου ή εικόνας κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής χωρίς αυτό να στρέφεται'.

Σε επόμενο μάθημα οι μαθητές μελετούν τον μετασχηματισμό μεταφοράς πολυγώνων στο καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές περιγράφουν λεκτικά τον μετασχηματισμό μεταφοράς ενός σχήματος δίνοντας το μέτρο, τη διεύθυνση (οριζόντια/κατακόρυφη) και την φορά της κίνησης ενώ επιπλέον προσδιορίζουν με τη βοήθεια συντεταγμένων τις θέσεις των κορυφών της εικόνας του σχήματος. Χαρακτηριστική είναι η δραστηριότητα CB_Δ5 στην οποία οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν ένα παζλ περιγράφοντας με μαθηματική γλώσσα τον τρόπο με τον οποίο καθένα από τα κομμάτια θα κινηθεί ώστε να βγει από τον λαβύρινθο. Όμοια στην δραστηριότητα Ca_Δ6 του σχολικού εγχειριδίου οι μαθητές δίνουν οδηγίες για την περιγραφή της κίνησης (μεταφορά δεξιά/αριστερά ή πάνω/κάτω) ενός εξαγώνου σ' ένα πλέγμα τετραγώνων. Και στις δυο αυτές δραστηριότητες ο μετασχηματισμός μεταφοράς αποτελεί ένα εργαλείο για την κατανόηση και την μαθηματική περιγραφή της κίνησης.
Από την άλλη πλευρά, μέσω της δραστηριότητας CB_Δ7 οι μαθητές αναγνωρίζουν τις αλλαγές που προκαλεί ο μετασχηματισμός μεταφοράς στις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του σχήματος. Έτσι για παράδειγμα, ένας μετασχηματισμός μεταφοράς στην οριζόντια διεύθυνση προς τα δεξιά ή αριστερά προκαλεί μεταβολή μόνο στις τετμημένες των κορυφών ενώ αντίστοιχα ένας μετασχηματισμός μεταφοράς στην κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω ή προς τα κάτω προκαλεί μεταβολή μόνο στις τεταγμένες των κορυφών. Παρατηρούμε επομένως ότι στην δραστηριότητα αυτή κεντρικό στοιχείο αποτελεί η αλγεβρική προσέγγιση των μετασχηματισμών.

Στο επόμενο επίπεδο (Stage 6) οι μαθητές διερευνούν μετασχηματισμούς μεταφοράς στο καρτεσιανό επίπεδο (και στα 4 τεταρτημόρια). Αρχικά μέσω της δραστηριότητας CB_Δ8, που δίνεται σε φύλλο εργασίας, οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν τους μετασχηματισμούς μεταφοράς που δρουν για την μεταφορά σχημάτων κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής στην οριζόντια, κατακόρυφη ή πλάγια διεύθυνση. Θα παρατηρήσουμε ότι στην πλειοψηφία των παραδειγμάτων η μεταφορά γίνεται στην πλάγια διεύθυνση (μεταφορά στην x-διεύθυνση και στην y-διεύθυνση) ενώ νοηματοδοτείται η χρήση των προσήμων (+/-) για τον προσδιορισμό της φοράς. Περνώντας στο σχολικό εγχειρίδιο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δραστηριότητα CB_Δ9 στην οποία επιδιώκεται από τους μαθητές να εφαρμόσουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς σε δοσμένο τετράπλευρο του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες. Οι μαθητές θα πρέπει να σχεδιάσουν το αρχικό σχήμα και τις εικόνες που προκύπτουν από τους διαφορετικούς μετασχηματισμούς ενώ στη συνέχεια αναμένεται να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών για κάθε ένα από τα σχήματα.

Β. Μετασχηματισμός ανάκλασης

Ο μετασχηματισμός ανάκλασης εισάγεται στο επίπεδο 5 (Stage 5) σε αντιπαραβολή με τον μετασχηματισμό μεταφοράς. Οι περιπτώσεις που μελετώνται αφορούν αποκλειστικά και μόνο μετασχηματισμούς ανάκλασης ως προς ευθεία που είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του αρχικού σχήματος. Αρχικά στην δραστηριότητα CB_Δ10 οι μαθητές επιδιώκεται να εφαρμόσουν τον μετασχηματισμό ανάκλασης σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας ως ευθεία ανάκλασης καθεμία από τις πλευρές του τριγώνου. Προτείνεται μάλιστα η χρήση καθρέφτη ώστε οι μαθητές να ελέγξουν την ορθότητα της κατασκευής των αντίστοιχων εικόνων του αρχικού σχήματος. Στο σχολικό εγχειρίδιο οι δραστηριότητες επικεντρώνονται κυρίως στην συμπλήρωση μοτίβων και γεωμετρικών παζλ. Συγκεκριμένα η δραστηριότητα CB_Δ11 παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς οι μαθητές επιδιώκεται να εντοπίσουν μια σειρά από διαδοχικά σχήματα καθένα από τα οποία ν' αποτελεί την εικόνα του προηγούμενου του ως προς ευθεία σε οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση. Στόχος της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι οι μαθητές να διακρίνουν τον μετασχηματισμό ανάκλασης από τον μετασχηματισμό μεταφοράς και κατ' επέκταση να αντιληφθούν τις διαφορές και τις ομοιότητες τους.

Σε επόμενη δραστηριότητα (CB_Δ12) επιδιώκεται από τους μαθητές να σχεδιάσουν την εικόνα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της δράσης του μετασχηματισμού ανάκλασης σε γραμμές και σχήματα στο επίπεδο ως προς μια ευθεία παράλληλη είτε με καθεμία από τις γραμμές είτε με μια εκ των πλευρών του κάθε σχήματος. Για την κατασκευή αυτή οι μαθητές θα πρέπει να στηριχθούν στην ιδιότητα του μετασχηματισμού ανάκλασης να διατηρεί αναλλοίωτη την απόσταση κάθε σημείου της εικόνας του σχήματος από την ευθεία ανάκλασης. Προχωρώντας σε επόμενο μάθημα οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τον προσδιορισμό της θέσης στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και ειδικότερα στο 1^{ο} τεταρτημόριο. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος κεντρική δραστηριότητα είναι η CB_Δ13 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να εφαρμόσουν τον μετασχηματισμό ανάκλασης σε τρίγωνα που έχουν σχεδιαστεί στο 1^{ο} τεταρτημόριο. Η επιλογή των παραδειγμάτων της δραστηριότητας είναι στοχευμένη ώστε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν αναπόφευκτα την ιδιότητα του αναλλοίωτου της απόστασης κάθε κορυφής από την ευθεία ανάκλασης προκειμένου να κατασκευάσουν την εικόνα κάθε σχήματος. Συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται να φέρουν από κάθε κορυφή το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς τον άξονα ανάκλασης και στη συνέχεια να το προεκτείνουν κατά ίσο τμήμα. Έτσι τελικά ενώνοντας τις εικόνες των κορυφών θα οδηγηθούν στην εικόνα του σχήματος. Ας σημειωθεί ότι σε κάθε περίπτωση η ευθεία ανάκλασης είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του σχήματος ενώ είναι σε πλάγια θέση κάτι το οποίο θέτει μια επιπρόσθετη δυσκολία όπως έχει σημειωθεί από την έρευνα. Αντίστοιχη είναι η δραστηριότητα CB_Δ14 από το σχολικό εγχειρίδιο στην οποία δίνεται η οδηγία στους μαθητές να οπτικοποιήσουν και στη συνέχεια να εντοπίσουν με τη χρήση καθρέφτη ή διαφανούς χαρτιού τη θέση της εικόνας του αρχικού σχήματος μετά από ανάκλαση ως προς ευθεία. Ας σημειωθεί ότι η ευθεία ανάκλασης που επιλέγεται είναι η $y=x$ (διχοτόμος 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων).Μάλιστα οι μαθητές ενδεχομένως να παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες των αντίστοιχων κορυφών στο αρχικό σχήμα και την εικόνα του εναλλάσσονται μεταξύ τους. Πράγματι αν Α(x, y) είναι ένα σημείο του αρχικού σχήματος τότε Α' (y,x) είναι εικόνα του μετά την δράση του μετασχηματισμού ανάκλασης ως προς την ευθεία y=x.Κάτι τέτοιο φυσικά δεν αποτελεί κεντρικό στόχο της παραπάνω δραστηριότητας αφού δεν διατυπώνεται κάποιο σχετικό ερώτημα στους μαθητές.

Στο επόμενο επίπεδο (Stage 6) οι μαθητές διερευνούν τον μετασχηματισμό ανάκλασης σε παραδείγματα όπου η ευθεία ανάκλασης δεν είναι κατ' ανάγκην παράλληλη σε κάποια από τις πλευρές του σχήματος. Συγκεκριμένα μέσω της δραστηριότητας CB_Δ15 οι μαθητές εκτιμούν και σχεδιάζουν την εικόνα ενός σχήματος μετά τη δράση μετασχηματισμού ανάκλασης. Σε κάθε περίπτωση η ευθεία ανάκλασης διέρχεται από μια κορυφή του σχήματος. Όπως θα παρατηρήσουμε η δραστηριότητα αυτή προϋποθέτει την κατανόηση της έννοιας της απόστασης από τους μαθητές ενώ αν ανατρέξουμε στη σχετική έρευνα θα διαπιστώσουμε ότι τέτοιες περιπτώσεις ανάκλασης αποτελούν πηγή δυσκολιών και παρερμηνειών για τους μαθητές. Μάλιστα όπως επισημαίνεται από την έρευνα των Kuchemann (1980, 1981), Burger & Shaugnessy (1986) και Schultz (1978) σε περιπτώσεις στις οποίες η ευθεία ανάκλασης είναι μια διαγώνια ευθεία, οι μαθητές αγνοούν συχνά την κλίση της ευθείας ανάκλασης και αντ' αυτού φαίνεται να πραγματοποιούν ανάκλαση στην οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση. Στο ίδιο φύλλο εργασίας προτείνεται η δραστηριότητα CB_Δ16 στην οποία οι μαθητές καλούνται να τρέψουν ένα σχήμα σε συμμετρικό ως προς δυο άξονες (διαγώνιες ευθείες) σκιάζοντας επιπλέον τετράγωνα. Για την ολοκλήρωση αυτής της δραστηριότητας οι μαθητές επιδιώκεται να εφαρμόσουν διαδοχικούς μετασχηματισμούς ανάκλασης στο δοθέν τετράγωνο ως προς κάθε έναν από τους δυο άξονες ανάκλασης και στη συνέχεια να ελέγξουν και να συμπληρώσουν το σχήμα ώστε να πληροί την ιδιότητα της συμμετρίας ως προς τις δοθείσες ευθείες. Ας σημειωθεί ότι στο σχολικό εγχειρίδιο συναντάμε επιπλέον δραστηριότητες αυτής της μορφής τις οποίες δεν θ' αναλύσουμε ξεχωριστά. Ωστόσο μια από τις δραστηριότητες που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η CB_Δ17 στην οποία δίνονται στους μαθητές δυο ευθύγραμμα τμήματα εκ των οποίων το ένα αποτελεί εικόνα του πρώτου μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης ως προς ευθεία. Οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν και να σχεδιάσουν την ευθεία ανάκλασης (ευθεία y=x) και στη συνέχεια να καταγράψουν τα ζεύγη ακέραιων συντεταγμένων που εντοπίζουν πάνω στο τμήμα αυτής της ευθείας διατυπώνοντας παράλληλα τις παρατηρήσεις τους σχετικά με την κανονικότητα που παρατηρούν (ισότητα τετμημένων-τεταγμένων).Θα παρατηρήσουμε επομένως ότι στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καλούνται να επιστρατεύσουν ικανότητες οπτικοποίησης ώστε αρχικά να προβλέψουν την θέση της ευθείας ανάκλασης και στη συνέχεια ν' ανακαλέσουν την ιδιότητα του αναλλοίωτου της απόστασης των αντίστοιχων σημείων στα δυο σχήματα από την ευθεία ανάκλασης ώστε να ελέγξουν την ορθότητα της αρχικής τους εκτίμησης. Τέλος η δραστηριότητα CB_Δ18 οι μαθητές αναμένεται να οδηγηθούν στην κατασκευή του μαθηματικού συμβόλου του πολλαπλασιασμού μέσω διαδοχικών ανακλάσεων ενός ευθυγράμμου τμήματος και των εικόνων του ως προς τους άξονες x'x και y'y.Στη συνέχεια επιδιώκεται να διατυπώσουν οι ίδιοι τις οδηγίες κατασκευής του μαθηματικού συμβόλου της πρόσθεσης επιλέγοντας το ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο θα δράσει ο μετασχηματισμός ανάκλασης καθώς και την ευθεία ανάκλασης. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σκέλος της δραστηριότητας έχει τη μορφή ανοικτού ερωτήματος καθώς δίνει στους μαθητές περισσότερους βαθμούς ελευθερίας και την ευκαιρία για διερεύνηση περισσότερων εναλλακτικών λύσεων.

Γ. Μετασχηματισμός στροφής

Ο μετασχηματισμός στροφής εισάγεται στα σχολικά εγχειρίδια του Cambridge στο Επίπεδο 6 (Stage 6).Αρχικά, μέσω της δραστηριότητας CB_Δ19 οι μαθητές εφαρμόζουν τον μετασχηματισμό στροφής σε δοθέντα σχήματα σχεδιασμένα στο καρτεσιανό επίπεδο. Οι περιπτώσεις που μελετώνται μέσω της δραστηριότητας αυτής είναι αυτές της στροφής ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ενός πλάγιου παραλληλογράμμου κατά γωνία 90° με τη φορά των δεικτών του ρολογιού και κέντρο μια κορυφή τους. Η επιλογή των παραδειγμάτων γι' αυτήν τη δραστηριότητα είναι στοχευμένη ώστε οι μαθητές να διευκολύνονται κατά τη χάραξη της γωνίας 90°, με κορυφή το κέντρο στροφής και πλευρά μια από τις πλευρές του σχήματος, χρησιμοποιώντας και τις γραμμές του πλέγματος. Επιπλέον θα παρατηρήσουμε ότι και στα δυο παραδείγματα η στροφή των παραλληλογράμμων κατά 90° αλλάζει τον προσανατολισμό τους από κατακόρυφο σε οριζόντιο. Ας σημειωθεί ότι, για την διευκόλυνση των μαθητών, η εφαρμογή του μετασχηματισμού στροφής 90° σε δοθέν σχήμα προτείνεται να γίνει κατά τρόπο κιναισθητικό. Συγκεκριμένα δίνεται στους μαθητές η οδηγία να κατασκευάσουν μια ορθή γωνία με κορυφή το κέντρο στροφής, ως εργαλείο για να αντιληφθούν το μέτρο της γωνίας στροφής, και στη συνέχεια να στρέψουν το χαρτί τους ως προς το σταθερό αυτό κέντρο (δοθείσα κορυφή του πολυγώνου).

Περνώντας στις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου η CB_Δ20 αφορά την στροφή ευθυγράμμου τμήματος ως προς ένα άκρο του. Οι μαθητές καλούνται να στρέψουν τον δείκτη ρολογιού κατά γωνία 90° με τη φορά των δεικτών του ρολογιού και κέντρο στροφής το κέντρο του ρολογιού. Σ' αυτή την απλή δραστηριότητα οι μαθητές επικεντρώνονται στη σχεδίαση της εικόνας ενός ευθυγράμμου τμήματος που αποτελεί την πιο απλή περίπτωση σχήματος κάνοντας κατάλληλη αλλαγή του προσανατολισμού σύμφωνα με τη γωνία στροφής. Χαρακτηριστικό στοιχείο αυτής της δραστηριότητας είναι η αισθητοποίηση της φοράς κίνησης μέσω της χρήσης του παραδείγματος του ρολογιού. Εκτός από αυτό θα λέγαμε ότι αποτελεί μια στοχευμένη δραστηριότητα καθώς αναδεικνύει όλα τα στοιχεία που ορίζουν τον μετασχηματισμό στροφής (κέντρο στροφής, φορά, μέτρο γωνίας). Σε επόμενες δραστηριότητες που συναντάμε στο σχολικό εγχειρίδιο οι μαθητές επιδιώκεται να εφαρμόσουν διαδοχικούς μετασχηματισμούς σ' ένα σχήμα και στη συνέχεια στην κάθε εικόνα του. Έτσι στη δραστηριότητα CB_Δ21 οι μαθητές εφαρμόζουν διαδοχικά τον ίδιο μετασχηματισμό στροφής σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο και σε κάθε μια από τις εικόνες του με στόχο τη δημιουργία ενός σύνθετου σχήματος. Το κέντρο στροφής είναι ένα εσωτερικό σημείο της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου και η γωνία στροφής είναι 90°.Αντίστοιχα, μέσω της δραστηριότητας CB_Δ22 οι μαθητές αναμένεται να εφαρμόσουν διαδοχικούς μετασχηματισμούς στροφής σ' ένα μη κυρτό σχήμα. Το κέντρο στροφής είναι μια από τις κορυφές του σχήματος και η γωνία στροφής είναι 90°. Στόχος των δυο προηγούμενων δραστηριοτήτων είναι οι μαθητές ν' αντιληφθούν τον μετασχηματισμό στροφής ως εργαλείο για την δημιουργία σχεδίων. Αξίζει μάλιστα να υπογραμμίσουμε ότι η επιλογή το κέντρο στροφής να μην είναι κάποια από τις κορυφές του τριγώνου δυσχεραίνει σε μεγάλο βαθμό την εφαρμογή του μετασχηματισμού στροφής από τους μαθητές. Τέλος στη δραστηριότητα CB_Δ23 δίνεται στους μαθητές ένα σχήμα και η εικόνα που προκύπτει μετά από στροφή 90. ° Εδώ οι μαθητές επιδιώκεται να προσδιορίσουν τη θέση της εικόνας ενός σημείου του αρχικού σχήματος δίνοντας τις συντεταγμένες του. Χαρακτηριστικό αυτής της δραστηριότητας είναι ότι οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν ποιο από τα σημεία της εικόνας του σχήματος ικανοποιεί τις ιδιότητες του μετασχηματισμού στροφής δηλαδή απέχει από το κέντρο το ίδιο με το αντίστοιχο σημείο πάνω στο αρχικό σχήμα και ταυτόχρονα διατηρεί μαζί με τα άλλα δυο σημεία αναφοράς (κέντρο στροφής, αρχικό σημείο) τη γωνία στροφής (90°). Χαρακτηριστικό αυτής της δραστηριότητας είναι ότι οι μαθητές πρέπει να διακρίνουν τη θέση των νέων κορυφών στην εικόνα του σχήματος . Μάλιστα είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι το σχήμα στο οποίο επιλέγεται να δράσει ο μετασχηματισμός στροφής παρουσιάζει συμμετρίες με αποτέλεσμα να μην είναι προφανής η λύση και κατ' επέκταση να απαιτείται καλή γνώση των κρίσιμων μαθηματικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού προκειμένου οι μαθητές ν' απαντήσουν ορθά. Να υπενθυμίσουμε ότι ο μετασχηματισμός στροφής αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το πιο δύσκολο είδος μετασχηματισμού καθώς εμπεριέχει την κατανόηση της έννοιας της γωνίας ως αλλαγή κατεύθυνσης. Κάτι τέτοιο έχει άμεσες συνέπειες στην διδακτική προσέγγιση που επιχειρείται από το σχολικό εγχειρίδιο ενώ δικαιολογεί κάποιες από τις συμβάσεις οι οποίες φαίνεται να ακολουθούνται. Για παράδειγμα η σκοπιμότητα πίσω από την επιλογή της γωνίας στροφής 90°, της δεξιόστροφης φοράς ή ακόμη και της επιλογής το κέντρο στροφής να είναι μια από τις κορυφές του σχήματος αιτιολογείται από παράγοντες όπως η βαθμίδα εκπαίδευσης, οι επιδιωκόμενοι στόχοι αλλά και άλλους παράγοντες που αφορούν τις νόρμες διδασκαλίας και μάθησης που υπαγορεύει το σχολικό εγχειρίδιο.

Δ. Σύνθεση μετασχηματισμών

Ολοκληρώνοντας την ενότητα των γεωμετρικών μετασχηματισμών οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να δουλέψουν με μια σειρά από δραστηριότητες σύνθεσης μετασχηματισμών του ίδιου ή διαφορετικού είδους και την εφαρμογή τους αρχικά σ' ένα σχήμα και στη συνέχεια σε καθεμία από τις εικόνες που προκύπτουν.

Πράγματι στη δραστηριότητα CB_Δ24 οι μαθητές εφαρμόζουν διαδοχικά μετασχηματισμό ανάκλασης στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του ως προς τον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα. Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να διερευνήσουν νέους τρόπους δημιουργίας του τελικού σχήματος αξιοποιώντας διαφορετικά είδη μετασχηματισμών (μεταφορά, ανάκλαση, στροφή). Θα παρατηρήσουμε επομένως ότι ένας από τους κεντρικούς στόχους αυτής της δραστηριότητας είναι ν' ανακαλύψουν οι μαθητές ότι ένα σύνθετο σχήμα μπορεί να προκύψει ως αποτέλεσμα της συνδυαστικής δράσης διαφορετικών ειδών μετασχηματισμών.

Άλλες δραστηριότητες που συναντάμε στην ενότητα αυτή δίνουν στον μαθητή περισσότερες ευκαιρίες για δημιουργική εργασία ενώ παράλληλα έχουν το χαρακτήρα ανοιχτής δραστηριότητας. Παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας είναι η CB_Δ25 που συναντάμε στο σχολικό εγχειρίδιο στην οποία οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν διαδοχικούς μετασχηματισμούς της επιλογής τους με στόχο την δημιουργία ενός εντυπωσιακού σχεδίου.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μαθηματικά χαρακτηριστικά αναφορικά με τις δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Μαθηματικά χαρακτηριστικά * ***Cambridge Primary Mathematics***	**Μετασχηματισμός μεταφοράς**	**Μετασχηματισμός ανάκλασης**	**Μετασχηματισμός στροφής**
Μεταφορά στην οριζόντια/ κατακόρυφη διεύθυνση	6		
Μεταφορά σε πλάγια διεύθυνση	7		
Σύνθεση μετασχηματισμών μεταφοράς	3		
Ανάκλαση ως προς τον x άξονα/οριζόντια διεύθυνση		3	
Ανάκλαση ως προς y άξονα/ κατακόρυφη διεύθυνση		5	
Ανάκλαση ως προς πλάγια ευθεία παράλληλη σε πλευρά του σχήματος		5	
Ανάκλαση ως προς ευθεία τέμνουσα του σχήματος		3	
Σύνθεση μετασχηματισμών ανάκλασης		1	
Στροφή ως προς μια κορυφή του σχήματος.			4
Στροφή ως προς άλλο σημείο που δεν αποτελεί κορυφή ή το κέντρο του σχήματος.			1
Σύνθεση μετασχηματισμών στροφής			2
Σύνθεση μετασχηματισμών διαφορετικού είδους			2

(1) Κάποιες από τις δραστηριότητες ανήκουν σε περισσότερες από μια κατηγορίες.

4.1.2 Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου.

Η έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών εισάγεται στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου στην Ε' Δημοτικού ενώ επεκτείνεται και συμπληρώνεται στην Στ' Δημοτικού. Συγκεκριμένα στο εγχειρίδια περιλαμβάνονται μαθήματα συμμετρίας ως προς άξονα, παράλληλης μεταφοράς, στροφής και ανάκλασης. Στα επόμενα θα εξετάσουμε τα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών μέσα από την μελέτη των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου

Α. Συμμετρία ως προς άξονα- Μετασχηματισμός ανάκλασης

Η διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών στα εγχειρίδια της Ε' Δημοτικού ξεκινά με την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα εισάγοντας τους μαθητές άτυπα στον γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης. Αρχικά οι μαθητές μέσω της δραστηριότητας CY_Δ1 αναμένεται να παρατηρήσουν τις κρίσιμες ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων. Σ' αυτές περιλαμβάνονται τα εξής: (α)τα δυο σχήματα (αρχικό σχήμα και εικόνα σχήματος) είναι ίσα. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουν οι μαθητές μέσω της επιλογής συρσίματος (dragging),του λογισμικού Geogebra στο οποίο καλούνται να εργαστούν, για ν΄ απαντήσουν στο ερώτημα σχετικά με τη μορφή, το μέγεθος και τη θέση των δυο σχημάτων. Μάλιστα ο Rollick, 2009 διακρίνει την ιδιότητα αυτή ως αξιοσημείωτη αναφέροντας ότι η διατήρηση του σχήματος και του μεγέθους των δυο σχημάτων παραμένουν αναλλοίωτα μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης. (β) Οι αποστάσεις των συμμετρικών σημείων από τον άξονα συμμετρίας είναι ίσες. Ειδικότερα οι μαθητές οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι οι αντίστοιχες κορυφές των δυο σχημάτων (πρότυπου και εικόνας) ισαπέχουν από τον άξονα συμμετρίας γεγονός που ο Rollick, 2009 επισημαίνει ξανά ως αξιοσημείωτη ιδιότητα που πρέπει να διδάσκεται στα πλαίσια της διδασκαλίας του μετασχηματισμού ανάκλασης. Στο παράδειγμα μας, τόσο η κορυφή Α όσο και η κορυφή Α΄ έχουν απόσταση 2 τετράγωνα από τον άξονα συμμετρίας. Άλλα στοιχεία στα οποία εστιάζεται το ενδιαφέρον μας αφορούν την διεύθυνση του άξονα συμμετρίας (κατακόρυφη ευθεία) καθώς και την κατεύθυνση της κίνησης (η εικόνα του σχήματος είναι στα δεξιά του αρχικού σχήματος) κάτι το οποίο όπως καταγράφει η έρευνα συνιστά την πιο απλή περίπτωση συμμετρίας ως προς άξονα.

Στις δραστηριότητες που ακολουθούν η CY_Δ2 στοχεύει στην συμπλήρωση από τους μαθητές του συμμετρικού ενός σχεδίου πάνω σε πλέγμα (grid) ως προς δοσμένη ευθεία και μετέπειτα στην εξ' ολοκλήρου κατασκευή ενός συμμετρικού σχεδίου ενώ στην CY_Δ3 αναμένεται από τους μαθητές να σχεδιάσουν το συμμετρικό ενός σχήματος αυτή τη φορά πάνω σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (1^{o} τεταρτημόριο). Ο άξονας συμμετρίας είναι άλλοτε σε οριζόντια, άλλοτε σε κατακόρυφη και άλλοτε σε πλάγια διεύθυνση. Η περίπτωση στην οποία η ευθεία ανάκλασης βρίσκεται σε πλάγια θέση καταγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία ως αυξημένης δυσκολίας. Επιπρόσθετα αξίζει να υπογραμμίσουμε ότι σ' ένα από τα παραδείγματα ο άξονας συμμετρίας διέρχεται από μια εκ των κορυφών του σχήματος. Η επιλογή αυτού του παραδείγματος δεν φαίνεται να είναι τυχαία καθώς οδηγεί τους μαθητές στην κατανόηση του αναλλοίωτου της θέσης ενός σημείου όταν αυτό βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας (ή την ευθεία ανάκλασης).Τέλος στην CY_Δ4 οι μαθητές κατασκευάζουν σε καθεμία από τις περιπτώσεις τον άξονα συμμετρίας δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του. Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν με ακρίβεια τη σχετική θέση του άξονα συμμετρίας. Τέλος από τις δραστηριότητες εμπλουτισμού η CY_Δ5 παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς δίνονται στους μαθητές δυο συμμετρικά σχήματα (τετράγωνα) με άξονα συμμετρίας μια οριζόντια ευθεία γραμμή και επιπλέον κάποιες από τις συντεταγμένες των κορυφών χωρίς κάποια αναφορά σε σύστημα συντεταγμένων. Οι μαθητές αναμένεται να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών αξιοποιώντας την ιδιότητα της ισότητας των συμμετρικών σχημάτων.

Στην Στ' τάξη η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα επανέρχεται με μια δραστηριότητα CY_Δ6 που αξιοποιεί το λογισμικό Geogebra και την επιλογή συρσίματος (dragging) με στόχο αυτή τη φορά την διερεύνηση της ιδιότητας των συμμετρικών σημείων να ισαπέχουν από τον άξονα συμμετρίας. Στη δραστηριότητα αυτή ο άξονας συμμετρίας των σχημάτων έχει επιλεγεί να είναι ο κατακόρυφος άξονας y'y ώστε οι μαθητές να υπολογίσουν με ευκολία τις αποστάσεις των κορυφών από αυτόν και να οδηγηθούν στη διατύπωση του ισχυρισμού για την ισότητα των αποστάσεων των αντίστοιχων κορυφών από τον y'y στα δυο συμμετρικά σχήματα. Η εγκυρότητα και η δυνατότητα γενίκευσης του ισχυρισμού αυτού διασφαλίζεται για τους μαθητές μέσω της ευκαιρίας που τους παρέχεται από το λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας για μελέτη αναρίθμητων ζευγών συμμετρικών σχημάτων. Ως επακόλουθο της προηγούμενης διερεύνησης το σχολικό εγχειρίδιο περνά στην επισημοποίηση των συμπερασμάτων της διερεύνησης που προηγήθηκε παραθέτοντας τις ιδιότητες των συμμετρικών σημείων ως προς άξονα. Μέσω αυτών τελικά μεταβαίνει στην έννοια των συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα. Αξίζει ακόμη να σημειωθεί ότι στη δραστηριότητα αυτή καθώς και στις επόμενες που ακολουθούν οι μαθητές εργάζονται στο $1^{ο}$ και $2^{ο}$ τεταρτημόριο προκειμένου να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών του συμμετρικού σχήματος. Στη συνέχεια ακολουθεί η δραστηριότητα CY_Δ7 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να σχεδιάσουν το συμμετρικό ενός ορθογωνίου ως προς τον κατακόρυφο άξονα και να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του σχήματος. Σε επόμενη δραστηριότητα CY_Δ8 δίνονται στους μαθητές ζεύγη σχημάτων (αρχικό σχήμα και εικόνα σχήματος) και αναμένεται από τους μαθητές να σχεδιάσουν την ευθεία ανάκλασης. Στις δυο περιπτώσεις που εξετάζονται η ευθεία ανάκλασης είναι είτε σε οριζόντια είτε σε κατακόρυφη διεύθυνση. Μάλιστα σε μια από τις δυο περιπτώσεις η ευθεία ανάκλασης είναι εξωτερική των σχημάτων στοιχείο που απαιτεί από τους μαθητές ν' αξιοποιήσουν την ιδιότητα των σημείων τους ν' απέχουν ίση απόσταση από την ευθεία ανάκλασης. Συνολικά στα εγχειρίδια της Ε' και Στ' Δημοτικού που εξετάσαμε ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της ανάκλασης επιλέγεται να παρουσιαστεί μέσω της έννοιας της συμμετρίας ως προς άξονα ενώ ο όρος 'ανάκλαση' αναφέρεται σε δραστηριότητες όπου ζητείται από τους μαθητές να κατονομάσουν τον αντίστοιχο μετασχηματισμό.

Β. Μετασχηματισμός μεταφοράς

Ο επόμενος μετασχηματισμός που συναντάμε στο σχολικό εγχειρίδιο της Κύπρου είναι ο μετασχηματισμός της παράλληλης μεταφοράς ο οποίος εισάγεται μέσω μιας ανοιχτής δραστηριότητας (CY_Δ9) με αναφορές σε πίνακες ζωγραφικής του Escher. Οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον τρόπο δημιουργίας για μια σειρά από πίνακες του γνωστού εικαστικού και να περιγράψουν ομοιότητες και διαφορές ως προς τον τρόπο δημιουργίας τους. Αξίζει να επισημάνουμε ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα αναδεικνύει δυο είδη μετασχηματισμών, αυτόν της παράλληλης μεταφοράς και εκείνον της στροφής ως προς κέντρο. Πράγματι, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι τα σχέδια πάνω στα οποία έδρασε ο μετασχηματισμός μεταφοράς έχουν διατηρήσει αναλλοίωτο τον προσανατολισμό τους και έχουν μετατοπισθεί σημείο προς σημείο κατά το ίδιο μέτρο, διεύθυνση και φορά. Πράγματι μέσω της ερώτησης αναφορικά με τις ομοιότητες και τις διαφορές που παρατηρούνται στον τρόπο δημιουργίας των έργων Τέχνης οι μαθητές επιδιώκεται να οδηγηθούν στις αξιοσημείωτες μαθηματικές ιδιότητες που διακρίνουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς από τον μετασχηματισμό στροφής. Για παράδειγμα ο μετασχηματισμός μεταφοράς διατηρεί τον προσανατολισμό τους σχήματος σε αντίθεση με τον μετασχηματισμό στροφής. Επιπλέον οι μαθητές θα διαπιστώσουν τις κοινές ιδιότητες των δυο μετασχηματισμών όπως για παράδειγμα τη διατήρηση της ισότητας μεταξύ του αρχικού σχήματος και της εικόνας του σχήματος. Ακολουθεί η δραστηριότητα CY_Δ10 στην οποία ζητείται από τους μαθητές να εφαρμόσουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς σε σχήματα του 1^{ου} τεταρτημορίου. Στα ερωτήματα περιλαμβάνεται και ένα παράδειγμα στο οποίο γίνεται σύνθεση δυο παράλληλων μεταφορών (3 τετράγωνα δεξιά και 5 τετράγωνα κάτω). Ακόμη στην δραστηριότητα CY_Δ11 επιδιώκεται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς που έδρασε ώστε η κορυφή Α να μετατοπισθεί στο σημείο Α' (3 τετράγωνα δεξιά και 2 κάτω).Συνοψίζοντας στις δυο προηγούμενες δραστηριότητες οι μαθητές εμπλέκονται με την έννοια του διανύσματος μεταφοράς χωρίς όμως να χρησιμοποιούν τον τυπικό μαθηματικό τρόπο έκφρασης του.

Μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα αποτελεί και η CY_Δ12 που στοχεύει στην διερεύνηση ενός ισχυρισμού σχετικά με το εάν η εφαρμογή διαφορετικών μετασχηματισμών σε ένα σχήμα μπορεί να οδηγήσει στην ίδια εικόνα σχήματος. Ενδεικτικά, δίνεται στους μαθητές η εικόνα ενός σχήματος για το οποίο εξετάζονται οι δυνατοί μετασχηματισμοί μέσω των οποίων μπορεί να προκύψει από το αρχικό σχήμα (ανάκλαση, μεταφορά ή συνδυασμός των δυο μετασχηματισμών).

Στην Στ' τάξη η έννοια της παράλληλης μεταφοράς επανέρχεται μέσω μιας δραστηριότητας διερεύνησης (CY_Δ13) στην οποία οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι σε κάθε ζεύγος αντίστοιχων κορυφών στο αρχικό σχήμα και την εικόνα του, η απόσταση μεταξύ τους είναι σταθερή. Παράλληλα με τη δυνατότητα του δυναμικού χειρισμού των σχημάτων επιδιώκεται να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι κάθε σημείο του σχήματος και συγκεκριμένα καθεμία από τις κορυφές μετακινείται προς την ίδια κατεύθυνση και σε ίση απόσταση ενώ σε κάθε περίπτωση τα σχήματα είναι ίσα. Ο ισχυρισμός αυτός εγκυροποιείται από τη μελέτη των παραδειγμάτων που ο μαθητής έχει την ευκαιρία να διερευνήσει μέσω της λειτουργίας του δρομέα που επιτρέπει τη κατακόρυφη και οριζόντια μεταφορά του σχήματος.

Σε επόμενη δραστηριότητες (CY_Δ14) οι μαθητές επιδιώκεται να σχεδιάσουν την εικόνα ενός σχήματος μετά από μετασχηματισμό μεταφοράς κατά ορισμένα τετράγωνα δεξιά/αριστερά ή πάνω/κάτω ενώ σ' ένα από αυτά τα παραδείγματα τους ζητείται να μεταφέρουν το σχήμα δεξιά και στη συνέχεια πάνω. Αντίστοιχα στη δραστηριότητα (CY_Δ15) οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας. Μάλιστα αναμένεται από τους μαθητές να περιγράψουν τη σύνθεση δυο παράλληλων μεταφορών (αριστερά και πάνω, δεξιά και πάνω).

Τέλος ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δραστηριότητα CY_Δ16 στην οποία οι μαθητές πρέπει αρχικά ν' αναγνωρίσουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς (σύνθεση παράλληλων μεταφορών) που έδρασε σε ένα ορθογώνιο. Μάλιστα προς διευκόλυνση των μαθητών στην αναγνώριση του μετασχηματισμού μεταφοράς, δίνεται ότι μια από τις κορυφές της εικόνας του σχήματος ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Πράγματι η επιλογή αυτού του σημείου δεν είναι τυχαία καθώς οι μαθητές μπορούν εύκολα ν' αναγνωρίσουν το διάνυσμα μεταφοράς από τις συντεταγμένες τις αντίστοιχης κορυφής στο αρχικό σχήμα. Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών της εικόνας του σχήματος ανακαλώντας την κρίσιμη ιδιότητα του μετασχηματισμού μεταφοράς να μετακινεί κάθε σημείο του σχήματος σε ίση απόσταση και την ίδια κατεύθυνση. Θα επισημαίναμε επομένως ότι στα πλαίσια της δραστηριότητας αυτής οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τον τρόπο που επιδρά ο μετασχηματισμός μεταφοράς στις συντεταγμένες ενός σχήματος περνούν δηλαδή στην θεώρηση του μετασχηματισμού ως συνάρτησης που απεικονίζει κάθε σημείο του αρχικού σχήματος σ' ένα άλλο στην εικόνα του σχήματος.

Γ. Μετασχηματισμός στροφής

Ο μετασχηματισμός στροφής εισάγεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Κύπρου ήδη από την Ε' Δημοτικού ως περιστροφή σχήματος κατά γωνία 90°, 180° ή 270° κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή αντίστροφα. Σ' αυτό το σημείο ας σημειωθεί ότι η εμπλοκή των μαθητών με τον μετασχηματισμό στροφής γίνεται εμπειρικά χωρίς να έχουν διερευνηθεί οι κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες της έννοιας αυτής κάτι το οποίο θα γίνει στην Στ' Δημοτικού

Αρχικά στη δραστηριότητα CY_Δ17 αναμένεται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν την εικόνα του σχήματος που θα προκύψει μετά από την περιστροφή του κατά ορισμένη γωνία με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Στην επόμενη δραστηριότητα CY_Δ18 οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον κανόνα περιστροφής σε μοτίβα εντοπίζοντας την κανονικότητα και απαντώντας τόσο για το μέτρο της γωνίας όσο και για τη φορά περιστροφής. Χαρακτηριστικό και των δυο δραστηριοτήτων είναι ότι δίνεται κάποια οπτική βοήθεια προκειμένου οι μαθητές να διευκολυνθούν στις απαντήσεις τους ενώ το κέντρο στροφής είναι σε κάθε περίπτωση το κέντρο του σχήματος και όχι οποιοδήποτε σημείο.

Άλλη δραστηριότητα αναφορικά με τον μετασχηματισμό στροφής είναι η CY_Δ19 στην οποία δίνονται δυο εικόνες Α και Β και ζητείται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν το μέτρο στροφής ώστε η εικόνα Α μετά από περιστροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού να δώσει την εικόνα Β. Συγκεκριμένα, η εικόνα θα πρέπει να περιστραφεί 270° με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Στην Στ' τάξη η έννοια της περιστροφής ορίζεται πιο αυστηρά ως ο μετασχηματισμός στον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου με γωνία περιστροφής θ. Δίνεται μάλιστα ένα παράδειγμα στο οποίο ένα σχήμα περιστρέφεται γύρω από μια κορυφή του κατά 90° δεξιόστροφα και στη συνέχεια επισημαίνεται ότι τα δύο σχήματα (αρχικό σχήμα και εικόνα) είναι ίσα μεταξύ τους.

Η πρώτη δραστηριότητα που θα μελετήσουμε είναι η CY_Δ20 μέσω της οποίας επιδιώκεται από τους μαθητές να προσδιορίσουν το κέντρο και τη γωνία περιστροφής. Ας δούμε όμως μερικά από τα μαθηματικά χαρακτηριστικά αυτής της δραστηριότητας. Αρχικά ας σημειωθεί ότι στις 3 από τις 4 περιπτώσεις που παρουσιάζονται το κέντρο στροφής είναι μια εκ των κορυφών του σχήματος ενώ στην 4^{η} περίπτωση το κέντρο περιστροφής είναι σημείο εξωτερικό του αρχικού σχήματος κάτι το οποίο την συγκαταλέγει στις δραστηριότητες που έχουν ιδιαίτερη δυσκολία για τους μαθητές όπως επισημαίνουν οι Wesslen & Fernandez,2005.Πράγματι όπως σημειώνεται από τους Edwards & Zazkis (1993) και Yanik & Flores (2009) οι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την περίπτωση της στροφής γύρω από το κέντρο του σχήματος σε αντίθεση με την περίπτωση που το κέντρο στροφής είναι σημείο εξωτερικό του σχήματος όπως υπογραμμίζουν οι Soon & Flake (1989).Οι ίδιοι μάλιστα αναφέρουν ότι συχνά οι μαθητές αγνοούν το δοσμένο κέντρο στροφής και να στρέφουν το σχήμα περί το κέντρο του σχήματος ή μιας εκ των κορυφών του σχήματος.

Σε επόμενες δραστηριότητες όπως είναι οι CY_Δ21 και CY_Δ22 οι μαθητές αναμένεται ν' αναγνωρίσουν την εικόνα του σχήματος δοθέντων του αρχικού σχήματος, του μέτρου της γωνίας, του κέντρου και της φοράς στροφής. Οι δραστηριότητες αυτές αποτελούν επέκταση της δραστηριότητας CY_Δ17 όπου οι μαθητές περιστρέφουν ένα σχήμα ως προς το κέντρο του κάτι που συνιστά την πιο απλή μορφή μετασχηματισμού στροφής για τους μαθητές. Μάλιστα οι Edwards & Zazkis (1993), Yanik & Flores (2009), και οι Wesslen & Fernandez (2005) συμφωνούν ότι οι μαθητές έχουν ως πρωταρχική την έννοια της στροφής ως προς το κέντρο του σχήματος όταν αναφέρονται στον μετασχηματισμό στροφής. Αντίστοιχα, στη δραστηριότητα CY_Δ23 οι μαθητές επιδιώκεται να σχεδιάσουν την εικόνα ενός σχήματος στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων μετά από στροφή ως προς μια κορυφή του σχήματος και στη συνέχεια να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μαθηματικά χαρακτηριστικά αναφορικά με τις δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Μαθηματικά χαρακτηριστικά * ***Σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου***	**Μετασχηματισμός μεταφοράς**	**Μετασχηματισμός ανάκλασης**	**Μετασχηματισμός στροφής**
Μεταφορά στην οριζόντια/ κατακόρυφη διεύθυνση	5		
Μεταφορά σε πλάγια διεύθυνση	3		
Σύνθεση μετασχηματισμών μεταφοράς	0		
Ανάκλαση ως προς τον x άξονα/οριζόντια διεύθυνση		6	
Ανάκλαση ως προς y άξονα/ κατακόρυφη διεύθυνση		7	
Ανάκλαση ως προς πλάγια ευθεία παράλληλη σε πλευρά του σχήματος		2	
Ανάκλαση ως προς ευθεία τέμνουσα του σχήματος		1	
Σύνθεση μετασχηματισμών ανάκλασης		0	
Στροφή ως προς μια κορυφή του σχήματος.			6
Στροφή ως προς το κέντρο του σχήματος			4
Στροφή ως προς άλλο σημείο που δεν αποτελεί κορυφή ή το κέντρο του σχήματος.			1
Σύνθεση μετασχηματισμών στροφής			0
Σύνθεση μετασχηματισμών διαφορετικού είδους			0

*Κάποιες από τις δραστηριότητες ανήκουν σε περισσότερες από μια κατηγορίες.

4.1.3 Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στα σχολικά εγχειρίδια του Καναδά.

Η έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών εμφανίζεται στη σειρά σχολικών εγχειρίδιων ‘Math make sense’ του Καναδά στην 5th Grade και συμπληρώνεται στην 6th Grade. Περιλαμβάνονται μαθήματα για την διδασκαλία του μετασχηματισμού μεταφοράς, ανάκλασης και στροφής ως προς κέντρο ενώ αφιερώνεται ειδικό μάθημα για την μελέτη περιπτώσεων όπου η στροφή πραγματοποιείται με κέντρο ένα εξωτερικό σημείο του σχήματος. Στη συνέχεια η διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών επεκτείνεται στο ορθοκανονικό επίπεδο και οι μαθητές εξοικειώνονται με την δράση διαδοχικών μετασχηματισμών του ίδιου ή διαφορετικού είδους. Τέλος γίνεται αναφορά στην εφαρμογή των μετασχηματισμών για την δημιουργία σχεδίων ή μοτίβων.

Στα πλαίσια της ανάλυσης μας θα εξετάσουμε τα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά που διαμορφώνουν τις έννοιες των γεωμετρικών μετασχηματισμών όπως αυτές προσεγγίζονται διδακτικά στα σχολικά εγχειρίδια του Καναδά.

Α. Μετασχηματισμός μεταφοράς

Ο μετασχηματισμός μεταφοράς εισάγεται στους μαθητές της Ε' Δημοτικού μέσω του όρου 'slide' που νοηματοδοτείται μέσω παραδειγμάτων από την πραγματική ζωή (π.χ. υποστολή σημαίας, ολίσθηση σε τσουλήθρα).

Η εμπλοκή των μαθητών ξεκινά με τη δραστηριότητα Ca_Δ1 η οποία έχει ως στόχο την διερεύνηση του μετασχηματισμού παράλληλης μεταφοράς μέσω της αισθητοποίησης που προσφέρει η χρήση κατάλληλων χειραπτικών μέσων. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μεταφέρουν παράλληλα ένα αντικείμενο ' pattern block' πάνω σε ισομετρικό χαρτί με τη βοήθεια του χάρακα και στη συνέχεια μελετώντας τα ίχνη των δυο σχημάτων (αρχικό σχήμα και εικόνα σχήματος) αναφέρονται συγκριτικά στις ομοιότητες και τις διαφορές τους. Με αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές αυτενεργούν εκτελώντας οι ίδιοι τον μετασχηματισμό μεταφοράς και επιχειρηματολογούν χρησιμοποιώντας μαθηματική γλώσσα. Συνεπώς οδηγούνται μέσω της ανακαλυπτικής μάθησης στις κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφοράς.

Ας σημειωθεί ότι στο σχολικό εγχειρίδιο για την 5th Grade ο μετασχηματισμός μεταφοράς παρουσιάζεται ως κίνηση κατά μήκους μιας ευθείας χωρίς την αλλαγή προσανατολισμού ενώ η περιγραφή που αναμένεται να δώσουν οι μαθητές περιλαμβάνει τον αριθμό των τετραγώνων κατά τον οποίο μετακινήθηκε το σχήμα και η φορά κίνησης (δεξιά ή αριστερά, κάτω ή πάνω).Μάλιστα το παράδειγμα που δίνεται, αποτελεί μια γενική περίπτωση μεταφοράς καθώς το σχήμα υπόκειντai σε δυο μεταφορές (δεξιά και κάτω) ενώ για την περιγραφή αυτού του μετασχηματισμού εισάγεται και ο όρος του διανύσματος μεταφοράς το οποίο αναφέρεται ως το διάνυσμα που «ενώνει» κάθε σημείο του σχήματος με το αντίστοιχο σημείο στην εικόνα του σχήματος.

Επιπρόσθετες δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο έχουν ως στόχο την εφαρμογή του μετασχηματισμού μεταφοράς σε σχήμα, τον σχεδιασμό τόσο της εικόνας του σχήματος όσο και του διανύσματος μεταφοράς (Ca_Δ2). Επιπλέον μέσω της δραστηριότητας (CA_Δ3) επιδιώκεται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του σε περιπτώσεις που έχει δράσει ένας μετασχηματισμός ενώ ενθαρρύνεται η διατύπωση επιχειρηματολογίας βασισμένη στα μαθηματικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τον μετασχηματισμό μεταφοράς από τους υπόλοιπους. Μεταξύ των 4 περιπτώσεων που προσφέρονται προς διερεύνηση υπάρχουν 2 αντιπαραδείγματα στο ένα εκ των οποίων έχει αλλάξει ο προσανατολισμός και στο άλλο το μέγεθος της εικόνας του σχήματος. Μέσω της δραστηριότητας αυτής εξετάζεται το κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να διακρίνουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς αναγνωρίζοντας στο στοιχεία που διατηρεί αναλλοίωτα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τέλος και οι δραστηριότητες Ca_Δ4 και Ca_Δ5. Στην δραστηριότητα Ca_Δ4 στόχος είναι οι μαθητές να περιγράψουν τον μετασχηματισμό που μεταφέρει ένα σχήμα από μια θέση σε άλλη δοθέντος του διανύσματος μεταφοράς, του αρχικού σχήματος και της εικόνας του. Μάλιστα φαίνεται να επιδιώκεται η σταδιακή σύνδεση με την έννοια του διανύσματος. Παράλληλα μέσω της δραστηριότητας Ca_Δ5 οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ακόμη ότι τα διανύσματα μεταφοράς (3,5) και (5,3) δεν είναι ίσα. Οι μαθητές οδηγούνται εμμέσως σε αυτό το συμπέρασμα καθώς μεταφέροντας το αρχικό σχήμα κατά τα εν λόγω διανύσματα οδηγούνται σε διαφορετική εικόνα ενώ στην άλλη οι μαθητές καλούνται να διαπιστώσουν ότι το διάνυσμα μεταφοράς μέσω του οποίου το σχήμα Α απεικονίζεται στο σχήμα Β είναι αντίθετο του διανύσματος μεταφοράς μέσω του οποίου το σχήμα Β απεικονίζεται στο σχήμα Α, έχουν με λίγα λόγια αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Και σε αυτή τη περίπτωση οι μαθητές καταλήγουν εμμέσως σε αυτό το συμπέρασμα μέσω των στοχευμένων ερωτημάτων της δραστηριότητας χωρίς να γίνεται αναφορά στα διανύσματα μεταφοράς.

Στην 6^{th} Grade η διδασκαλία του μετασχηματισμού μεταφοράς επεκτείνεται στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Οι μαθητές αναμένεται πλέον ν’ αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τις αλλαγές που προκύπτουν στις συντεταγμένες των κορυφών του σχήματος ως αποτέλεσμα της δράσης του μετασχηματισμού μεταφοράς. Έτσι κατανοούν για παράδειγμα ότι η μεταφορά του αρχικού σχήματος κατά 5 τετράγωνα δεξιά και 2 τετράγωνα κάτω επιφέρει αλλαγή στις συντεταγμένες κάθε σημείου της εικόνας του σχήματος (αύξηση κατά 5 μονάδες στις τετμημένες και ελάττωση κατά 2 μονάδες στις συντεταγμένες).Με λίγα λόγια αντιμετωπίζουν καλλιεργείται πλέον μια συναρτησιακή θεώρηση της έννοιας του μετασχηματισμού μεταφοράς. Παράλληλα επισημαίνεται η ιδιότητα της ισότητας μεταξύ του αρχικού σχήματος και της εικόνας του ως ένα από τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού μεταφοράς.

Μια από τις δραστηριότητες που αναφέρονται σ’ αυτόν τον τύπο μετασχηματισμού είναι η Ca_Δ6 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να σχεδιάσουν την εικόνα ενός τριγώνου που προκύπτει μετά από μετασχηματισμό μεταφοράς, να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες του και να περιγράψουν λεκτικά την σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες συντεταγμένες των δυο σχημάτων. Στη συνέχεια καλούνται να αξιοποιήσουν τον κανόνα που διατύπωσαν για να προβλέψουν τη θέση ενός τυχαίου σημείου στο επίπεδο μετά την εφαρμογή του ίδιου μετασχηματισμού. Σε αυτήν την δραστηριότητα όπως περιγράψαμε και προηγουμένως οι μαθητές αναμένεται να προσεγγίσουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς ως μια συνάρτηση που απεικονίζει κάθε σημείο ενός σχήματος σε ένα άλλο πάνω στην εικόνα του σχήματος.

Β. Μετασχηματισμός ανάκλασης

Ο μετασχηματισμός ανάκλασης παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο της 5th Grade αμέσως μετά τον μετασχηματισμό μεταφοράς . Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο όρος 'flip' χρησιμοποιείται ώστε οι μαθητές να συνδέσουν αισθητηριακά τον μετασχηματισμό ανάκλασης με εμπειρίες από την καθημερινή ζωή ενώ η πρώτη ουσιαστική εμπλοκή των μαθητών επιτυγχάνεται μέσω μιας διερευνητικής δραστηριότητας (Ca_Δ7) στην οποία οι μαθητές εξοικειώνονται μέσω της χρήσης χειραπτικού υλικού (Mira) στην ανάκλαση γεωμετρικών αντικειμένων (pattern blocks) ως προς άξονα. Παράλληλα εξετάζουν τα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά του παραπάνω μετασχηματισμού. Συγκεκριμένα οι μαθητές επιδιώκεται ν΄ αναγνωρίσουν ότι κατά τον μετασχηματισμό ανάκλασης διατηρείται σταθερή η απόσταση κάθε σημείου από την ευθεία ανάκλασης ενώ ο προσανατολισμός του σχήματος μεταβάλλεται. Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να διερευνήσουν ειδικές περιπτώσεις ανάκλασης (π.χ. το σχήμα έχει ένα κοινό σημείο με την ευθεία ανάκλασης, η ευθεία ανάκλασης τέμνει το σχήμα) και να παρατηρήσουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στο αρχικό σχήμα και την εικόνα του σχήματος.
Αμέσως μετά , στη δραστηριότητα Ca_Δ8 οι μαθητές αναμένεται ν' αναγνωρίσουν στα πλαίσια ενός γεωμετρικού μοτίβου το αρχικό σχήμα και καθεμία από τις εικόνες που προκύπτουν από αλλεπάλληλες ανακλάσεις. Την ίδια στιγμή επιδιώκεται να προσδιορίσουν τις ευθείες ανάκλασης. Με λίγα λόγια οι μαθητές

Επιπρόσθετα συναντάμε δραστηριότητες όπως η Ca_Δ8 στην οποία οι μαθητές αναμένεται να σχεδιάσουν την εικόνα του σχήματος που προέκυψε μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης . Η επιλογή και η σειρά των παραδειγμάτων που εξετάζονται δεν είναι σε καμία περίπτωση τυχαία αφού καλύπτονται όλες οι ειδικές περιπτώσεις που έχουν μαθηματικό ή διδακτικό ενδιαφέρον. Έτσι σε κάποια από τα παραδείγματα η ευθεία ανάκλασης έχει κατακόρυφο ή οριζόντιο προσανατολισμό σχήματα (α) και (β), σε άλλο παράδειγμα η ευθεία ανάκλασης είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του σχήματος σχήμα (γ) ή τέμνει το σχήμα (δ). Στη δραστηριότητα Ca_Δ9 επιδιώκεται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν σε ποιες περιπτώσεις το αρχικό σχήμα έχει υποστεί μετασχηματισμό ανάκλασης διακρίνοντας τον από τον μετασχηματισμό μεταφοράς με κριτήριο την διατήρηση ή μη του προσανατολισμού. Στη συνέχεια καλούνται να προσδιορίσουν την ευθεία ανάκλασης δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του σχήματος. Και εδώ η ευθεία ανάκλασης είναι μια οριζόντια

ή κατακόρυφη ευθεία σε αντιδιαστολή με τη δραστηριότητα Ca_ Δ10 στην οποία τα δυο σχήματα έχουν υποστεί ανάκλαση είτε ως προς ευθεία πλάγια είτε ως προς τέμνουσα ευθεία.
Άλλη μια δραστηριότητα με διδακτικό ενδιαφέρον αποτελεί η Ca_Δ11 η οποία στοχεύει στην διερεύνηση της ιδιότητας κάποιων λέξεων να διατηρούνται αναλλοίωτες κατά τον μετασχηματισμό τους ως προς οριζόντιο άξονα ενώ καλούνται να βρουν λέξεις με την ιδιότητα αυτή. Τέλος στη δραστηριότητα Ca_Δ12 οι μαθητές αναμένεται να βρουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στον μετασχηματισμό ανάκλασης και τον μετασχηματισμό μεταφοράς και στη συνέχεια να σκεφτούν και να σχεδιάσουν ζεύγη σχημάτων (αρχικό σχήμα και εικόνα σχήματος) που εν δυνάμει μπορούν να προκύψουν είτε από μετασχηματισμό ανάκλασης είτε από μετασχηματισμό μεταφοράς.

Στην 6^{th} Grade ο μετασχηματισμός ανάκλασης μελετάται στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ενώ οι μαθητές αναμένεται να προσδιορίζουν τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του σχήματος ώστε οι αποστάσεις από τον άξονα ανάκλασης των αντίστοιχων κορυφών στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του σχήματος τους να είναι ίσες.

Ενδεικτική δραστηριότητα είναι η Ca_Δ13 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να σχεδιάσουν την εικόνα ενός τριγώνου μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης ως προς την ευθεία y=x, να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών του αρχικού σχήματος και της εικόνας του και να εντοπίσουν την αλλαγή των αντίστοιχων συντεταγμένων στα δυο σχήματα. Συγκεκριμένα οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι αν A (x,y) τότε A’ (y,x).Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν τις συντεταγμένες της εικόνας ενός σημείου μετά από ανάκλαση ως προς την ίδια ευθεία ανάκλασης. Σ’ αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι μέσω της επιλογής του κατάλληλου παραδείγματος, ο στόχος της δραστηριότητας επεκτείνεται πέρα από την διαδικαστική εφαρμογή του μετασχηματισμού αλλά στην εξοικείωση των μαθητών στον εντοπισμό κανονικοτήτων δηλαδή στην συναρτησιακή θεώρηση του μετασχηματισμού.

Γ. Μετασχηματισμός στροφής

Η διδασκαλία του μετασχηματισμού στροφής εισάγεται στην 5^{th} Grade μέσω του παραδείγματος του τροχού που στοχεύει στην οπτικοποίηση του από τους μαθητές ενώ περιγράφεται με τον όρο ‘turn’ επιτυγχάνοντας έτσι την σύνδεση της μαθηματικής έννοιας που θα παρουσιαστεί με τις αισθητηριακές εμπειρίες των μαθητών.

Στα επόμενα θα μελετήσουμε τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των επιλεγμένων δραστηριοτήτων. Έτσι στη δραστηριότητα Ca_Δ14 οι μαθητές αναμένεται να σχεδιάσουν ένα σχήμα μετά από μετασχηματισμό στροφής με κέντρο μια εκ των κορυφών του κατά μισή στροφή, ένα τέταρτο στροφής και τρία τέταρτα στροφής κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή την αντίστροφη φορά. Παράλληλα ζητείται από τους μαθητές να παρατηρήσουν την αλλαγή θέσης και προσανατολισμού του σχήματος. Αντίστροφα σε επόμενη δραστηριότητα (Ca_Δ15) οι μαθητές επιδιώκεται να περιγράψουν τον μετασχηματισμό στροφής δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του. Ας επισημάνουμε ότι για την πλήρη περιγραφή του μετασχηματισμού στροφής οι μαθητές αναμένεται να αναφερθούν στα στοιχεία που ορίζουν τον μετασχηματισμό στροφής δηλαδή το μέτρο της γωνίας στροφής, το κέντρο στροφής και την φορά κίνησης. Επιπρόσθετα στην δραστηριότητα Ca_Δ16 επιδιώκεται από τους μαθητές να διακρίνουν παραδείγματα και μη παραδείγματα μετασχηματισμού στροφής με ταυτόχρονη αιτιολόγηση της απάντησης από τους μαθητές. Συγκεκριμένα δίνονται στους μαθητές δυο περιπτώσεις σχημάτων στα οποία έχει δράσει ένας μετασχηματισμός (σχήμα α-μεταφορά, σχήμα β-στροφή ως προς κέντρο, σχήμα γ-ανάκλαση, σχήμα δ-στροφή ως προς κέντρο).Οι μαθητές αναμένεται να στηριχθούν στις κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες των μετασχηματισμών προκειμένου ν' απαντήσουν. Στόχος αυτής της δραστηριότητας είναι να εντοπίσουν οι μαθητές τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα στους διαφορετικούς τύπους μετασχηματισμών.

Σε άλλες δραστηριότητες όπως η Ca_Δ17 και Ca_Δ18 επιδιώκεται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν ότι οι εικόνες που προκύπτουν ως αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού στροφής ενός σχήματος κατά ¼ στροφής με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή κατά ¾ στροφής με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού είναι ισοδύναμες. Το ίδιο συμβαίνει και στα ζεύγη εικόνων που προέκυψαν ως αποτέλεσμα στροφής κατά ½ με τη φορά των δεικτών του ρολογιού και κατά ½ της στροφής με την αντίστροφη φορά.

Σε επόμενο μάθημα οι μαθητές, έχοντας διερευνήσει περιπτώσεις όπου το κέντρο στροφής είναι μια από τις κορυφές του αρχικού σχήματος, εξετάζουν παραδείγματα στα οποία το κέντρο στροφής είναι εξωτερικό του σχήματος. Αυτή η περίπτωση μετασχηματισμού στροφής θέτει υψηλό επίπεδο δυσκολίας στους μαθητές σύμφωνα με τους ερευνητές. Πιο συγκεκριμένα στις δραστηριότητες Ca_Δ19 και Ca_Δ20 οι μαθητές σχεδιάζουν την εικόνα σχήματος μετά από στροφή κατά ½ ή ¼ στροφής δεξιόστροφα ως προς κέντρο ένα εξωτερικό σημείο του σχήματος. Εντούτοις οι γνωστικές απαιτήσεις καθεμιάς από τις παραπάνω δραστηριότητες είναι διαφορετική αφού παρατηρούμε ότι στην πρώτη δραστηριότητα το κέντρο στροφής κείται στην ίδια ευθεία με μια από τις πλευρές του αρχικού σχήματος. Αντίθετα στην δεύτερη δραστηριότητα το κέντρο στροφής δεν κείται στην ίδια ευθεία με κάποια από τις πλευρές του σχήματος. Σε επόμενη δραστηριότητα Ca_Δ21 οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον μετασχηματισμό στροφής δοθέντων του αρχικού σχήματος, της εικόνας του και του κέντρου στροφής προσδιορίζοντας το μέτρο στροφής και τη φορά της κίνησης. Σε καθεμία από τις περιπτώσεις το κέντρο στροφής κείται σε μια από τις ευθείες που ορίζει μια από τις πλευρές του αρχικού σχήματος.

Στην 6th Grade οι μαθητές δουλεύουν στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες των κορυφών στην εικόνα του σχήματος που προκύπτει μετά από μετασχηματισμό στροφής κατά γωνία της οποίας το μέτρο περιγράφουν σε μοίρες (90°, 180°, 270°).Ενδεικτική είναι η δραστηριότητα Ca_Δ22 στην οποία επιδιώκεται από τους μαθητές να σχεδιάσουν την εικόνα του σχήματος και να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών μετά από τη δράση μετασχηματισμού στροφής κατά γωνία 90°, 180°, 270 ως προς μια από τις κορυφές του σχήματος. Αντίστοιχα στην δραστηριότητα Ca_Δ23 ζητείται από τους μαθητές με στρέψουν ένα σχήμα με κέντρο ένα σημείο εξωτερικό του σχήματος.

Δ. Σύνθεση μετασχηματισμών

Στην 6th Grade οι μαθητές εξοικειώνονται με τη σύνθεση μετασχηματισμών περισσότερων του ενός μέσω του μαθήματος με τίτλο 'Successive translations' στο οποίο επιδιώκεται η αναγνώριση ή η εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών του ίδιου τύπου σ' ένα σχήμα και του μαθήματος 'Combining Transformations' στο οποίο στόχος είναι η αναγνώριση ή η εφαρμογή μετασχηματισμών διαφορετικών τύπων σε ένα σχήμα.

Μελετώντας τις δραστηριότητες που εντοπίζονται σε αυτά τα δυο μαθήματα παρατηρούμε ότι η Ca_Δ24 και η Ca_Δ25 είναι ενδεικτικές της εφαρμογής διαδοχικών μετασχηματισμών. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στη δραστηριότητα Ca_Δ24 οι μαθητές εφαρμόζοντας τρεις διαδοχικούς μετασχηματισμούς αναμένεται να παρατηρήσουν ότι κατά την εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών ανάκλασης ως προς την ίδια ευθεία το ζεύγος αρχικού σχήματος και εικόνας εναλλάσσονται. Το ίδιο θα παρατηρήσουν και κατά την στροφή σχήματος κατά 180° με κέντρο την ίδια κορυφή του σχήματος. Σε αντιπαραβολή με την δραστηριότητα που περιγράψαμε, η Ca_Δ25 στοχεύει στην εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών μεταβάλλοντας όμως στοιχεία όπως η ευθεία ανάκλασης στην περίπτωση διαδοχικών ανακλάσεων, ή ακόμη το μέτρο, τη φορά ή τη γωνία στροφής στην περίπτωση διαδοχικών μετασχηματισμών στροφής. Κατά συνέπεια, οι μαθητές παρατηρούν ότι οι θέσεις του αρχικού σχήματος και της τελικής εικόνας διαφέρουν. Ως προς τα μαθηματικά χαρακτηριστικά αυτών των δραστηριοτήτων θα λέγαμε ότι βρίσκονται σε άμεση σύνδεση με τα επιμέρους χαρακτηριστικά των εκάστοτε μετασχηματισμών (μεταφοράς, ανάκλασης, στροφής). Άλλες δραστηριότητες όπως οι Ca_Δ26 και Ca_Δ27 στοχεύουν στην αναγνώριση και περιγραφή των διαδοχικών μετασχηματισμών που δρουν ώστε να προκύψει η τελική εικόνα του σχήματος. Συγκεκριμένα, στην Ca_Δ26 επιδιώκεται από τους μαθητές ν' αναγνωρίσουν δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς στροφής (στροφή κατά 180° και στη συνέχεια στροφή 90° με την θετική φορά).Και στους δυο μετασχηματισμούς το κέντρο στροφής είναι μια εκ των κορυφών του τριγώνου. Στην δραστηριότητα Ca_Δ27 οι μαθητές επιδιώκεται να περιγράψουν δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς (του ίδιου τύπου) μέσω των οποίων προκύπτει η τελική εικόνα του σχήματος. Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να διερευνήσουν αν υπάρχει άλλος συνδυασμός μετασχηματισμών του ίδιου τύπου. Οι μαθητές αναμένεται να εντοπίσουν ως ισοδύναμους μετασχηματισμούς δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς ανάκλασης και δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς στροφής. Και σε αυτήν την δραστηριότητα τα κέντρα στροφής που επιλέγονται είναι κορυφές των σχημάτων ενώ οι ευθείες ανάκλασης ταυτίζονται με πλευρές του σχήματος.

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα δραστηριότητα είναι η Ca_Δ28 στην οποία αναμένεται από τους μαθητές να διερευνήσουν μια ειδική περίπτωση στην οποία η σύνθεση διαδοχικών μετασχηματισμών μεταφοράς οδηγεί σε ταύτιση του αρχικού σχήματος και της τελικής εικόνας. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί θα λέγαμε μια αναφορά στην σύνθεση αντίστροφων συναρτήσεων που ισοδυναμεί με την ταυτοτική συνάρτηση.

Όμοια σε επόμενο μάθημα συναντάμε δραστηριότητες σύνθεσης διαφορετικών τύπων μετασχηματισμών. Και εδώ βασικοί στόχοι είναι αφενός η εφαρμογή μετασχηματισμών σ’ ένα σχήμα και κατόπιν στην εικόνα του, αφετέρου η αναγνώριση των πιθανών συνδυασμών μετασχηματισμών που δρουν έως ότου προκύψει η τελική εικόνα σχήματος. Η δυσκολία των δραστηριοτήτων εξαρτάται πάλι από την επιλογή της θέσης του κέντρου στροφής για τον μετασχηματισμό στροφής και την σχετική θέση της ευθείας ανάκλασης ως προς το σχήμα πάνω στο οποίο δρα ο μετασχηματισμός ανάκλασης (Ενδεικτικές δραστηριότητες Ca_Δ29 έως Ca_Δ31).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η δραστηριότητα Ca_Δ32 στην οποία οι μαθητές διερευνούν το κατά πόσο η σειρά εφαρμογής δυο διαφορετικών τύπων μετασχηματισμών μεταβάλλει την τελική εικόνα. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η σύνθεση μη ομοειδών μετασχηματισμών (π.χ. μεταφορά και κατόπιν στροφή) δεν μπορεί εν γένει να πραγματοποιηθεί με οποιαδήποτε σειρά χωρίς να επιφέρει αλλαγή στην τελική εικόνα σχήματος.

Άλλες δραστηριότητές στοχεύουν στην εξοικείωση των μαθητών με την διερεύνηση των πιθανών συνδυασμών μετασχηματισμών που θα μπορούσαν να δράσουν διαδοχικά στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του έως ότου προκύψει η τελική εικόνα (Ca_Δ33). Οι δραστηριότητες αυτές απαιτούν από τους μαθητές διαδικασίες οπτικοποίησης δηλαδή νοητικούς χειρισμούς του γεωμετρικού σχήματος ώστε να προσδιορίσουν τελικά τον κατάλληλο συνδυασμό μετασχηματισμών.

Τέλος σε άλλες δραστηριότητες οι μαθητές επιδιώκεται ν’ αναγνωρίζουν και να περιγράφουν την δράση ενός ή και περισσότερων μετασχηματισμών ξεκινώντας από ένα αρχικό σχήμα με σκοπό την δημιουργία ενός σχεδίου. Οι δραστηριότητες που αξιοποιούνται από το σχολικό εγχειρίδιο στοχεύουν είτε στην αναγνώριση και περιγραφή των μετασχηματισμών για την ανακατασκευή ενός δοθέντος σχεδίου (Ca_Δ34 και Ca_Δ35), είτε στην κατασκευή ενός εμπνευσμένου από τους μαθητές σχεδίου με την εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών ίδιου ή διαφορετικού είδους σε ένα αρχικό σχήμα σχεδιασμένο στο ορθοκανονικό σύστημα (Ca_Δ36, Ca_Δ37). Μέσω των παραπάνω δραστηριοτήτων οι μαθητές αντιλαμβάνονται και είναι σε θέση να διακρίνουν την παρουσία των μετασχηματισμών σε εκφάνσεις της πραγματικής ζωής ενώ ο γενικότερος στόχος που θα λέγαμε ότι επιτυγχάνεται μετά το τέλος της διδακτικής ενότητας που αφορά στους μετασχηματισμούς είναι η θεώρηση τους ως ευρύτερο εργαλείο για την κατανόηση και περιγραφή της κίνησης.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μαθηματικά χαρακτηριστικά αναφορικά με τις δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Μαθηματικά χαρακτηριστικά (*) ***Math make sense -Καναδάς***	**Μετασχηματισμός μεταφοράς**	**Μετασχηματισμός ανάκλασης**	**Μετασχηματισμός στροφής**
Μεταφορά στην οριζόντια/ κατακόρυφη διεύθυνση	3		
Μεταφορά σε πλάγια διεύθυνση	3		
Σύνθεση μετασχηματισμών μεταφοράς	3		
Ανάκλαση ως προς τον x άξονα/οριζόντια διεύθυνση		4	
Ανάκλαση ως προς y άξονα/ κατακόρυφη διεύθυνση		4	
Ανάκλαση ως προς πλάγια ευθεία παράλληλη σε πλευρά του σχήματος		3	
Ανάκλαση ως προς ευθεία τέμνουσα του σχήματος		2	
Σύνθεση μετασχηματισμών ανάκλασης		3	
Στροφή ως προς μια κορυφή του σχήματος.			7
Στροφή ως προς το κέντρο του σχήματος			0
Στροφή ως προς άλλο σημείο που δεν αποτελεί κορυφή ή το κέντρο του σχήματος.			4
Σύνθεση μετασχηματισμών στροφής			4
Σύνθεση μετασχηματισμών διαφορετικού είδους			12

*Κάποιες από τις δραστηριότητες ανήκουν σε περισσότερες από μια κατηγορίες.

4.2 Γνωστικές απαιτήσεις δραστηριοτήτων και είδη μαθηματικού συλλογισμού.

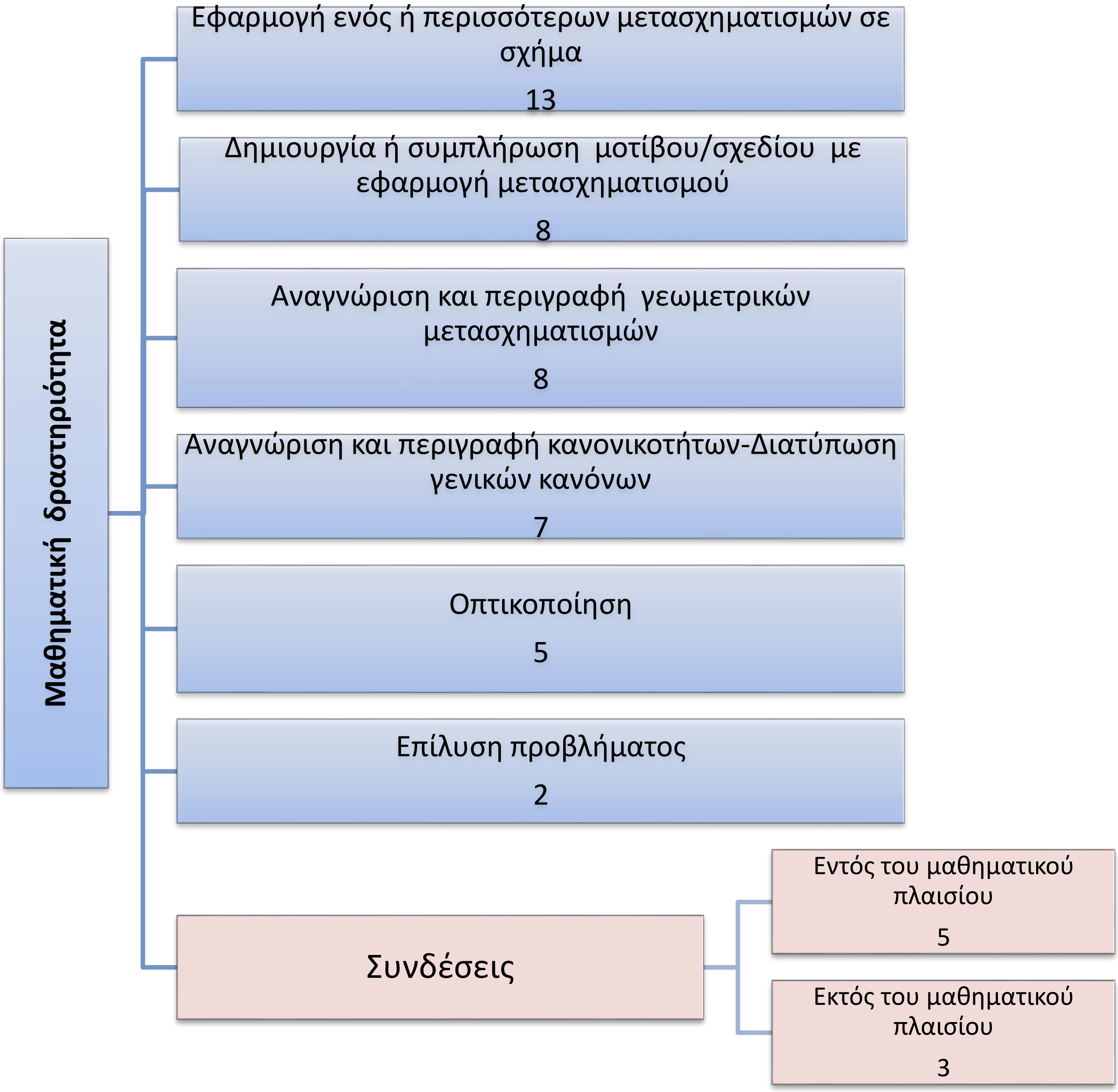
Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε δεδομένα που απαντούν σε ένα από τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Θα διερευνήσουμε δηλαδή το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων που θέτουν οι δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών που εντοπίζονται στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Σε προηγούμενη ενότητα μάλιστα παρουσιάσαμε τα χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου αξιοποιώντας τις παραμέτρους και το θεωρητικό πλαίσιο που εισήγαγαν οι Stein, Smith, Henningsen και Silver (2000). Κατ’ αυτόν τον τρόπο διακρίναμε όπως θα δούμε παρακάτω τις δραστηριότητες σε τέσσερις υποκατηγορίες. Αρχικά οι δραστηριότητες με χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων στηρίζονται περισσότερο σε διαδικασίες απομνημόνευσης, οι δραστηριότητες χαμηλού-μεσαίου επιπέδου έχουν κυρίως διαδικαστικό χαρακτήρα χωρίς να επιδιώκονται μαθηματικές συνδέσεις, οι δραστηριότητες μεσαίου-υψηλού επιπέδου επιχειρούν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και τέλος οι δραστηριότητες υψηλού επιπέδου απαιτούν εμπλοκή σε κατεξοχήν μαθηματικές διεργασίες, διερεύνηση μαθηματικών σχέσεων και ιδιοτήτων και βαθιά εννοιολογική κατανόηση προκειμένου κάποιος να ανταποκριθεί με επιτυχία σε αυτές. Ας σημειωθεί ότι οι δραστηριότητες που χαρακτηρίζονται ως υψηλών γνωστικών απαιτήσεων ενθαρρύνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και επιχειρηματολογίας και παρέχουν στους μαθητές περισσότερες ευκαιρίες μάθησης. (Henningsen & Stein, 1997; Stein & Smith, 1998) ενώ συμβάλλουν στην βελτίωση της επίδοσης των μαθητών (Boston & Smith, 2009). Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα θεωρούσε κανείς αναμενόμενο να εντοπίσουμε ένα μεγάλο ποσοστό τέτοιων δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια.

Στην προσπάθεια μας να μελετήσουμε ενδελεχώς τις γνωστικές απαιτήσεις των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών θα παρουσιάσουμε την αναμενόμενη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών σε σύνδεση με τους διάφορους τύπους δραστηριοτήτων που εντοπίζουμε στα σχολικά εγχειρίδια. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κάνουμε την αντιστοίχιση αυτών με τα προαναφερθέντα επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων. Για παράδειγμα θα δούμε ότι άλλες δραστηριότητες απαιτούν απλή απομνημόνευση ή πιστή εφαρμογή των βημάτων μιας διαδικασίας που έχει διδαχθεί χωρίς εννοιολογικές συνδέσεις και επομένως θα χαρακτηρίζονταν ως χαμηλών ή μεσαίων γνωστικών απαιτήσεων και άλλες που απαιτούν αναγνώριση μιας κανονικότητας, αιτιολόγηση με μαθηματική επιχειρηματολογία και διατύπωση ενός γενικού ισχυρισμού και επομένως θα χαρακτηρίζονταν ως υψηλών γνωστικών απαιτήσεων.

4.2.1 Γνωστικές απαιτήσεις δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών - Cambridge Primary Maths.

Ξεκινώντας την ανάλυση των δραστηριοτήτων με άξονα το επίπεδο των γνωστικών τους απαιτήσεων θα πρέπει να σημειώσουμε ότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς οι δραστηριότητες ποικίλουν ως προς τους γνωστικούς στόχους που καλύπτουν, το είδος των ενεργειών και το επίπεδο εμπλοκής των μαθητών , το εύρος των συνδέσεων που επιχειρούν να δημιουργήσουν και συνολικά το γνωστικό υπόβαθρο που θέτουν για την επίλυση τους.

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα είδη των μαθηματικών δραστηριοτήτων και των μαθηματικών διεργασιών που εγείρονται μέσα από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων της σειράς Cambridge Primary Maths.Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο ν' αναφέρουμε ότι οι κατηγορίες της μαθηματικής δραστηριότητας είναι επικαλυπτόμενες αφού ή ίδια δραστηριότητα μπορεί να εγείρει δυο ή και περισσότερες μαθηματικές διεργασίες.



Πίνακας 3 Είδη μαθηματικής δραστηριότητας-Cambridge Primary Maths

Στην κατηγορία **εφαρμογή ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών** θα παρατηρήσουμε ότι συγκεντρώνεται το μεγαλύτερο πλήθος δραστηριοτήτων. Σε αυτές οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν την εικόνα που προκύπτει μετά από τη δράση ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών αξιοποιώντας τα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες κάθε μετασχηματισμού. Το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων που θέτει αυτή η κατηγορία δραστηριοτήτων κυμαίνεται κατά κύριο λόγο από χαμηλό-μεσαίο έως μεσαίο-υψηλό καθώς καθορίζεται κάθε φορά από το είδος των μετασχηματισμών αλλά και από το εάν ή όχι αφορά σύνθεση περισσότερων του ενός μετασχηματισμών. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε τη δραστηριότητα CB_Δ12 ως χαμηλού-μεσαίου επιπέδου και την δραστηριότητα CB_Δ13 ως μεσαίου υψηλού. Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δυο δραστηριότητες αφορούν μετασχηματισμό ανάκλασης. Εντούτοις θα παρατηρούσε κανείς ότι διαφέρουν ως προς τις μαθηματικές διεργασίες που εγείρουν. Πράγματι, στη δραστηριότητα CB_Δ12 οι μαθητές εφαρμόζουν τον μετασχηματισμό ανάκλασης ως προς ευθεία με κατακόρυφη διεύθυνση και παράλληλη σε πλευρές των αρχικών σχημάτων. Ας σημειωθεί ακόμη ότι όλες οι πλευρές των σχημάτων βρίσκονται και αυτές σε οριζόντια/κατακόρυφη διεύθυνση κάτι το οποίο δεν δυσχεραίνει τους μαθητές. Μάλιστα είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ η δραστηριότητα αυτή εμπεριέχει κάποιες από τις κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες του μετασχηματισμού ανάκλασης, όπως την διατήρηση των αντίστοιχων αποστάσεων από την ευθεία ανάκλασης, όμως δεν απαιτεί από τον μαθητή εννοιολογικές συνδέσεις ούτε προκαλεί γνωστικές συγκρούσεις. Κατά συνέπεια θα την εντάσσαμε στην κατηγορία δραστηριοτήτων που εγείρουν αλγοριθμικό συλλογισμό. Αξίζει μάλιστα να σημειωθεί ότι ένας μαθητής μπορεί να οδηγηθεί στη λύση της αξιοποιώντας νοερά την τεχνική της δίπλωσης ως προς τη διακεκομμένη ευθεία και σχεδιάζοντας τη συμμετρική εικόνα. Αντίθετα στην δραστηριότητα CB_Δ13 οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τον μετασχηματισμό ανάκλασης σε τρίγωνα με την ευθεία ανάκλασης σε κάθε περίπτωση να είναι σε διαγώνια διεύθυνση. Αυτό το μαθηματικό χαρακτηριστικό έχει κρίσιμη σημασία ως προς τις γνωστικές απαιτήσεις που θέτει η συγκεκριμένη δραστηριότητα αφού οδηγεί τον μαθητή σε ανάκληση των ιδιοτήτων της ανάκλασης προκειμένου να σχεδιάσουν την εικόνα του σχήματος. Βέβαια αξίζει να επισημάνουμε ότι παρόλο που σε αυτή τη δραστηριότητα το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων έχει αυξηθεί, εντούτοις όμως η μέθοδος επίλυσης χαρακτηρίζεται ως αλγοριθμική.

Επιπρόσθετα πρέπει να σημειώσουμε ότι σε αντίθεση με την προηγούμενη δραστηριότητα, εδώ ο προσανατολισμός του σχήματος μεταβάλλεται μετά τη δράση του μετασχηματισμού κάτι το οποίο λειτουργεί αποτρεπτικά σε οποιαδήποτε προσπάθεια εφαρμογής του μετασχηματισμού χωρίς την αντίστοιχη αναφορά στα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά της έννοιας .Παράλληλα ενθαρρύνονται συνδέσεις με άλλες γεωμετρικές έννοες (π.χ. απόσταση σημείου από ευθεία).

Στην κατηγορία **δημιουργία ή συμπλήρωση μοτίβου / σχεδίου με εφαρμογή μετασχηματισμού** οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς ως εργαλεία για την κατασκευή ή συμπλήρωση ενός μοτίβου ή ενός σχεδίου ξεκινώντας από ένα αρχικό σχήμα και εφαρμόζοντας διαδοχικούς μετασχηματισμούς του ίδιου ή διαφορετικού είδους σε αυτό. Το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων εδώ ποικίλει ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας που προσφέρει κάθε δραστηριότητα. Για παράδειγμα η δραστηριότητα CB_Δ2 χαρακτηρίζεται ως χαμηλού-μεσαίου επιπέδου καθώς στοχεύει στην συμπλήρωση ενός μοτίβου για το οποίο δίνονται το αρχικό σχήμα και το διάνυσμα μεταφοράς με τις επιμέρους συνιστώσες στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση. Οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν διαδικαστικά τον μετασχηματισμό μεταφοράς, ακολουθώντας την μέθοδο που παρουσιάζεται στο παράδειγμα, και να σχεδιάσουν τα τμήματα τα οποία δεν έχουν σχεδιαστεί στην επιφάνεια που δίνεται. Αντίθετα η δραστηριότητα CB_Δ24 χαρακτηρίζεται ως υψηλών γνωστικών απαιτήσεων (στο 2^{ο} μέρος της) καθώς εμπεριέχει ερωτήματα που στοχεύουν στη διερεύνηση των διαφορετικών συνδυασμών μετασχηματισμών (μεταφορά, ανάκλαση, στροφή) από τα οποία μπορεί να προκύψει το ίδιο μοτίβο. Πράγματι θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τέτοιες δραστηριότητες έχουν αυξημένες γνωστικές απαιτήσεις από τους μαθητές αφού προϋποθέτουν εννοιολογική κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών και των κρίσιμων μαθηματικών χαρακτηριστικών που τους διακρίνουν ενώ επιπλέον χαρακτηρίζονται ως μη προβλέψιμες ως προς την διαδικασία που θ' ακολουθηθεί για την επίλυση τους. Ας σημειωθεί ότι η δραστηριότητα για την οποία γίνεται λόγος απαιτεί από τον μαθητή την παροχή αιτιολόγησης και τη χρήση μαθηματικής γλώσσας κάτι το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό μιας υψηλού επιπέδου δραστηριότητας. Θα πρέπει να υπογραμμίσουμε τέλος ότι οι δραστηριότητες αυτού του είδους αποτελούν ενδεικτικά παραδείγματα δημιουργικού συλλογισμού.

Στην επόμενη κατηγορία **Προσδιορισμός και περιγραφή γεωμετρικών μετασχηματισμών,** έχουμε δραστηριότητες με χαμηλό προς μεσαίο επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τη δραστηριότητα CB_Δ8 στην οποία οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του σχήματος. Οι μαθητές ακολουθούν πιστά την μέθοδο που έχει διδαχθεί (μεταφορά σε οριζόντια / κατακόρυφη διεύθυνση) και περιγράφουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς που δρα στο αρχικό σχήμα χρησιμοποιώντας τις λέξεις οριζόντια/κατακόρυφα για να προσδιορίσουν τη διεύθυνση κίνησης και τα πρόσημα +/- για να προσδιορίσουν τη φορά κίνησης. Παράλληλα, θα λέγαμε ότι η δραστηριότητα δεν περιλαμβάνει την παροχή αιτιολογημένων απαντήσεων ενώ εστιάζει περισσότερο στην ορθότητα των απαντήσεων και λιγότερο στην μαθηματική κατανόηση. Έτσι θα εντάσσαμε την δραστηριότητα αυτή σε αυτές που εγείρουν αλγοριθμικό τρόπο σκέψης. Αντίθετα στην δραστηριότητα CB_Δ11 το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων είναι υψηλότερο αφού οι μαθητές πρέπει ν' αναγνωρίσουν τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς ανάκλασης σε ένα σχήμα και σε καθεμία από τις επόμενες εικόνες του και να τους διακρίνουν από τους μετασχηματισμούς μεταφοράς. Μάλιστα είναι φανερό ότι για την επίλυση της δραστηριότητας οι μαθητές πρέπει να ανατρέξουν στα μαθηματικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τους δυο μετασχηματισμούς και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους ακόμη κι αν αυτό δεν τους ζητείται ρητά. Με λίγα λόγια η δραστηριότητα αυτή απαιτεί κατά κύριο διεργασίες δημιουργικού συλλογισμού.

Ακολουθεί η κατηγορία **Αναγνώριση και περιγραφή κανονικοτήτων-Διατύπωση γενικών κανόνων** στην οποία ανήκουν δραστηριότητες που χαρακτηρίζονται ως υψηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων. Πράγματι η δραστηριότητα CB_Δ7 είναι ενδεικτική αυτής της κατηγορίας αφού στοχεύει στην αναγνώριση της κανονικότητας των αντίστοιχων συντεταγμένων στο αρχικό σχήμα και την εικόνα του μετά τη δράση μετασχηματισμού μεταφοράς στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση. Πράγματι αυτή η δραστηριότητα θέτει υψηλές απαιτήσεις καθώς επιχειρείται μια αλγεβρική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών και η σύνδεση τους με έννοιες όπως η συνάρτηση. Οι μαθητές κατανοούν ότι μεταφορά στην οριζόντια διεύθυνση σημαίνει μεταβολή των τετμημένων και αντίστοιχα μεταφορά σε κατακόρυφη διεύθυνση σημαίνει μεταβολή των τεταγμένων. Επομένως οδηγούνται σταδιακά στην διατύπωση γενικών κανόνων και τη διερεύνηση σχέσεων, κάτι που αποτελεί ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά μαθηματικής δραστηριότητας με υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων και την κατατάσσει ως προς το είδος μαθηματικού συλλογισμού που απαιτεί στις δραστηριότητες δημιουργικού συλλογισμού.

Μια ακόμη κατηγορία που συναντάμε αφορά στη μαθηματική διεργασία της οπτικοποίησης και συγκεκριμένα τη **Πρόβλεψη της νέας θέσης του σχήματος μετά από τη δράση μετασχηματισμού.** Σ’ αυτή την κατηγορία εντοπίζουμε δραστηριότητες στις οποίες ο μαθητής καλείται αρχικά να προβλέψει τη θέση της εικόνας του σχήματος μετά από τη δράση ενός μετασχηματισμού. Ας σημειωθεί επιπλέον ότι όπως καταγράφεται στην σχετική έρευνα το γνωστικό πεδίο των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι το πλέον κατάλληλο για την καλλιέργεια δεξιοτήτων οπτικοποίησης και ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των μαθητών η οποία σύμφωνα με τους Lean & Clements (1981) ορίζεται ως η ικανότητα διαμόρφωσης και χειρισμού νοερών εικόνων στον νου. Θα χαρακτηρίζαμε μάλιστα τέτοιου είδους δραστηριότητες ως υψηλών γνωστικών απαιτήσεων αφού εγείρουν σύνθετο, μη αλγοριθμικό τρόπο σκέψης. Μάλιστα όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα το υψηλό επίπεδο χωρικής αντίληψης δεν αντικατοπτρίζει απλώς έναν υψηλό δείκτη ευφυΐας αλλά επιπλέον είναι ενδεικτικό της ικανότητας του ατόμου να επιλύει μαθηματικά προβλήματα.

Ως ενδεικτικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αναφέρουμε τη δραστηριότητα CB_Δ15 στην οποία ζητείται αρχικά από τους μαθητές να προβλέψουν τη θέση της εικόνας των σχημάτων μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης ως προς ευθεία. Αξίζει να επισημάνουμε ότι μέσω της διεργασίας οπτικοποίησης εγείρεται στους μαθητές η ανάγκη για μαθηματική αιτιολόγηση και αυτοέλεγχο. Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας μάλιστα οι μαθητές επιστρέφουν στο σχήμα για να ελέγξουν την ορθότητα των απαντήσεων τους σχεδιάζοντας με ακρίβεια την εικόνα του σχήματος βάσει των μαθηματικών χαρακτηριστικών του μετασχηματισμού. Τέτοιες διεργασίες όπως αυτές που περιγράφονται παραπάνω είναι ενδεικτικές δημιουργικού συλλογισμού αφού προϋποθέτουν αιτιολόγηση και επεξήγηση των επιλεγόμενων στρατηγικών επίλυσης.

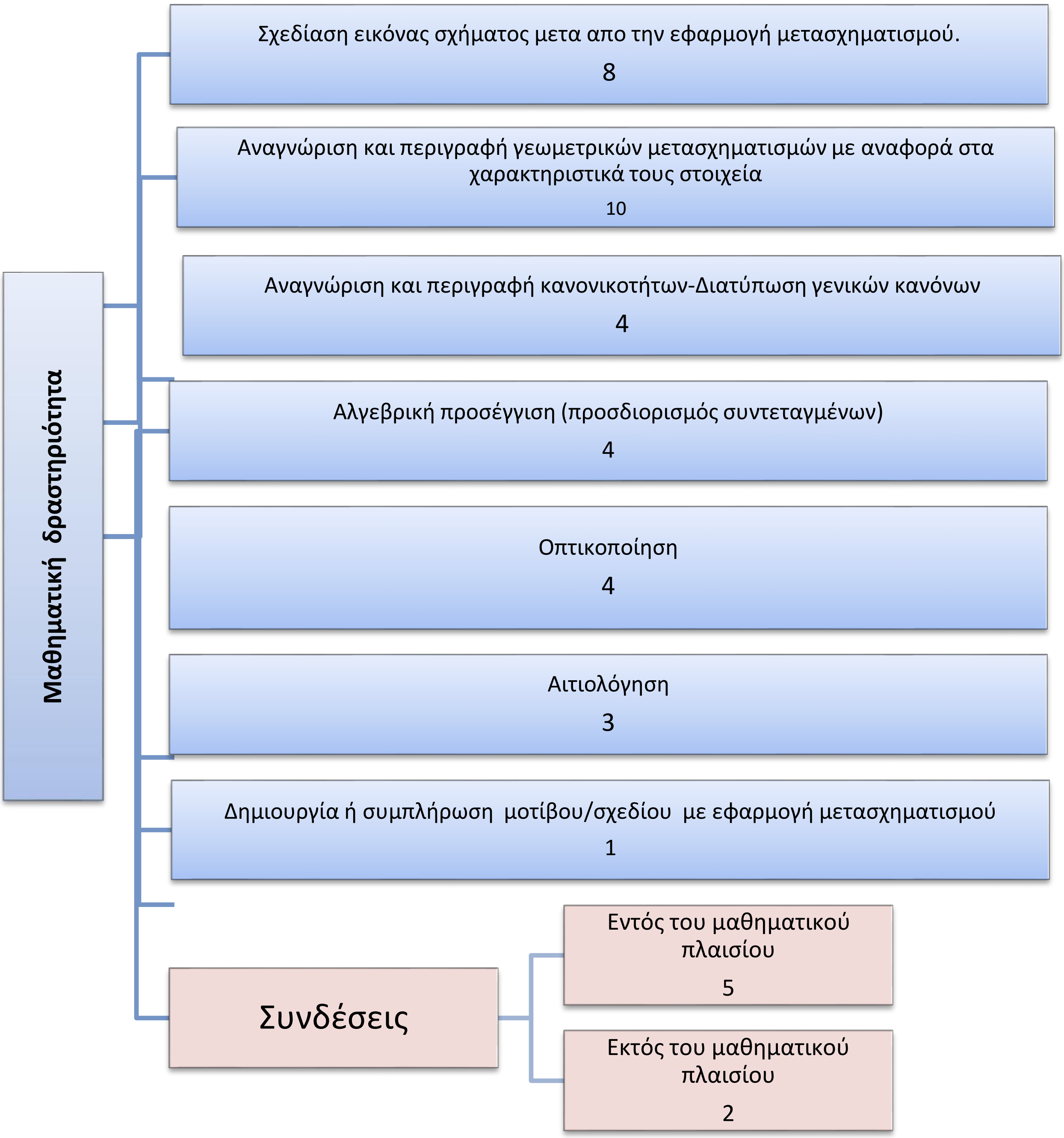
Στην τελευταία κατηγορία έχουμε εντάξει μαθηματικές δραστηριότητες που σχετίζονται με την **επίλυση προβλήματος**. Εδώ εντοπίζουμε δραστηριότητες που επιτρέπουν στους μαθητές την ενεργητική εμπλοκή και αφορούν καταστάσεις προβλήματος με υψηλό επίπεδο μαθηματικής πρόκλησης για τις οποίες δεν είναι εξ' αρχής προδιαγεγραμμένη η πορεία επίλυσης τους. Όπως γίνεται αντιληπτό τέτοιες δραστηριότητες επιτρέπουν συνδέσεις με άλλες έννοιες των Μαθηματικών ή ακόμη και άλλα γνωστικά πεδία και χαρακτηρίζονται ως υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Κύριο χαρακτηριστικό τέτοιων δραστηριοτήτων είναι ότι επιδρούν καταλυτικά στη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά καθώς αναδεικνύουν τα Μαθηματικά ως εργαλείο για την ανθρώπινη σκέψη τονίζοντας την παρουσία τους σε κάθε έκφανση της ανθρώπινης δραστηριότητας .Ενδεικτικά αναφέρουμε τη δραστηριότητα CB_Δ18 (β μέρος) η οποία στοχεύει στο σχεδιασμό του συμβόλου της πρόσθεσης με εφαρμογή μετασχηματισμών. Οι μαθητές θα πρέπει να σχεδιάσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θα αποτελέσει το αρχικό σχήμα στο οποίο θα εφαρμόσουν τον αρχικό μετασχηματισμό και στη συνέχεια να επιλέξουν κατάλληλους μετασχηματισμούς τους οποίους θα εφαρμόσουν διαδοχικά σε καθεμία από τις εικόνες που θα προκύπτουν. Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση που μπορεί να δοθεί από τους μαθητές δεν είναι μοναδική επιτρέποντας στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες για διερεύνηση. Όπως γίνεται αντιληπτό η επίλυση προβλήματος περιλαμβάνεται στην ομάδα δραστηριοτήτων που εγείρουν δημιουργικό τρόπο σκέψης καθώς απαιτούν από τους μαθητές συνδυαστική σκέψη και εξ' ολοκλήρου κατασκευή της λύσης.

Αναφορικά με τις **συνδέσεις** που επιχειρούνται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών θα παρατηρήσουμε ότι σε ελάχιστες περιπτώσεις αυτές εντάσσονται σε πλαίσιο ξεκάθαρα μη μαθηματικό. Όσον αφορά τις συνδέσεις εντός του μαθηματικού πλαισίου θα λέγαμε ότι εστιάζουν κυρίως σε θέματα που άπτονται της έννοιας του μοτίβου (patterns) ενώ σε δραστηριότητες μετασχηματισμού μεταφοράς επιδιώκεται η σύνδεση με τη μαθηματική έννοια του διανύσματος. Εκτός του μαθηματικού πλαισίου, αυτό που παρατηρήσαμε έντονα είναι ότι μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων αναπτύσσεται σ' ένα τεχνητά δομημένο πλαίσιο που προσομοιάζει μια οικεία για τους μαθητές κατάσταση χωρίς όμως αυτό ν' αποτελεί στοιχείο που εξυπηρετεί στην επίλυση των δραστηριοτήτων. Ενδεικτικό παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας αποτελεί η CB_Δ2 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να συμπληρώσουν τα μέρη που λείπουν από ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο που βρίσκεται σ' ένα χαρτί περιτυλίγματος ελέγχοντας εάν κάθε σημείο του στοιχειού επανάληψης μεταφέρεται κατά τον ίδιο τρόπο (διάνυσμα μεταφοράς). Εδώ το πλαίσιο δεν εξυπηρετεί στην επίλυση του προβλήματος καθώς οι μαθηματικές διεργασίες που απαιτούνται είναι εμφανείς χωρίς ν' απαιτούν συλλογισμό εντός του πλαισίου. Αντίθετα, η CB_Δ5 αποτελεί μια δραστηριότητα στην οποία το πλαίσιο στο οποίο τίθεται ενθαρρύνει συνδέσεις με πραγματικές εμπειρίες των μαθητών. Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές επιδιώκεται να λύσουν ένα γρίφο με κινητά μέρη-sliding puzzle ολισθαίνοντας διαδοχικά τα κομμάτια μέσα στο πλέγμα με κατάλληλο τρόπο ώστε το κομμάτι με τον αριθμό 1 να βγει από το πλέγμα όπως δείχνει το βέλος. Οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν αναλυτικά τον τρόπο μεταφοράς κάθε κομματιού στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση με τη μορφή οδηγιών. Το πρόβλημα αυτό επιχειρεί συνδέσεις με πεδία που δεν είναι κατεξοχήν μαθηματικά όπως η επίλυση γεωμετρικών puzzle. Το κύριο χαρακτηριστικό ωστόσο αυτής της δραστηριότητας είναι ότι απαιτείται από τους μαθητές λογικός συλλογισμός εντός του πλαισίου για την κατανόηση και την επίλυση του προβλήματος καθώς και ικανότητα χωρικού συλλογισμού και οπτικοποίησης.

4.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών - Σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου

Συνεχίζουμε την ανάλυση μας μελετώντας δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου για την Ε' και Στ' Δημοτικού με άξονα το επίπεδο των γνωστικών τους απαιτήσεων. Κι εδώ οι δραστηριότητες ποικίλουν από χαμηλού-μεσαίου επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων έως και υψηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε πολλές δραστηριότητες ζητείται από τους μαθητές να παρέχουν αιτιολόγηση για τις απαντήσεις τους ή ακόμη και να αναγνωρίσουν κανονικότητες. Άλλο χαρακτηριστικό που συναντάμε σε αρκετές δραστηριότητες είναι η προσπάθεια να επιτευχθούν συνδέσεις είτε εντός του πεδίου των Μαθητών είτε με άλλα πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητες όπως η Τέχνη.

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα είδη των μαθηματικών διεργασιών που εγείρονται μέσα από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων .Και εδώ όπως και προηγουμένως είναι απαραίτητο ν' αναφέρουμε ότι οι κατηγορίες που διακρίναμε είναι επικαλυπτόμενες αφού ή ίδια δραστηριότητα μπορεί να εγείρει δυο ή και περισσότερες μαθηματικές διεργασίες.



Στην κατηγορία **Σχεδίαση εικόνας σχήματος μετά από την εφαρμογή μετασχηματισμού** συναντάμε δραστηριότητες που στην πλειοψηφία τους θα χαρακτηρίζαμε ως μεσαίου-υψηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη δραστηριότητα CY_Δ23 ως χαμηλού-μεσαίου επιπέδου καθώς στοχεύει στην σχεδίαση της εικόνας ενός αρχικού σχήματος μετά τη δράση μετασχηματισμού στροφής κατά 90° ως προς κέντρο μια από τις κορυφές του σχήματος. Εδώ οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τα βήματα μιας διαδικασίας την οποία έχουν διδαχθεί για την οποία όμως χρειάζεται ν' ανακαλέσουν τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού στροφής. Με λίγα λόγια ενέχει αλγοριθμικό συλλογισμό. Αξίζει να επισημάνουμε ότι η επιλογή του αρχικού σχήματος (τρίγωνο) επιφορτίζει τους μαθητές με επιπλέον γνωστικές απαιτήσεις καθώς θα πρέπει να είναι πολύ προσεκτικοί στη διατήρηση του μήκους των πλευρών μετά τη δράση του μετασχηματισμού στροφής καθώς και στην αλλαγή του προσανατολισμού του νέου σχήματος. Ας σημειωθεί ότι ως παράδειγμα για την ανακάλυψη-παρουσίαση της έννοιας της στροφής επιλέγεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε διεύθυνση παράλληλη στους άξονες κάτι το οποίο χαρακτηρίζεται ως μια χαμηλότερων γνωστικών απαιτήσεων.

Σε επόμενη κατηγορία **Αναγνώριση και περιγραφή των γεωμετρικών μετασχηματισμών με αναφορά στα χαρακτηριστικά τους στοιχεία** συναντάμε δραστηριότητες τις οποίες θα χαρακτηρίζαμε ως μεσαίων-υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Εδώ οι μαθητές καλούνται ν' αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία για καθέναν από τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς αξιοποιώντας τις κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες αυτών και προτείνοντας στρατηγικές επίλυσης στηριζόμενοι σε αυτές. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται ν΄ αναγνωρίσουν στοιχεία όπως ο άξονας συμμετρίας σε περιπτώσεις μετασχηματισμού ανάκλασης, το κέντρο και τη γωνία στροφής σε περιπτώσεις μετασχηματισμού στροφής, το διάνυσμα μεταφοράς σε περιπτώσεις μετασχηματισμού μεταφοράς. Παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων αποτελούν η CY_ Δ15 και η CY_Δ20. Στην πρώτη οι μαθητές επιδιώκεται να περιγράψουν τον μετασχηματισμό μεταφοράς προσδιορίζοντας το διάνυσμα μεταφοράς (μεταφορά στην οριζόντια ή/και κατακόρυφη διεύθυνση), ενώ στη δεύτερη να προσδιορίσουν το κέντρο και τη γωνία στροφής δοθέντων του αρχικού σχήματος και της εικόνας του. Και σε αυτές τις δραστηριότητες κυριαρχεί ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης καθώς όπως σχολιάσαμε προηγουμένως οι μαθητές επιδιώκεται να επαναλάβουν τα βήματα μιας διαδικασίας που έχουν διδαχθεί.

Άλλες δραστηριότητες περιλαμβάνουν ερωτήματα που υπάγονται στην κατηγορία **Αναγνώριση και περιγραφή κανονικοτήτων-Διατύπωση γενικών κανόνων**. Εδώ οι μαθητές χρησιμοποιώντας εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας καλούνται να εντοπίσουν και να περιγράψουν κανονικότητες. Μέσα από την μελέτη πολλών περιπτώσεων που προσφέρει ο δυναμικός χειρισμός σχημάτων οι μαθητές αναμένεται να διατυπώσουν γενικές παρατηρήσεις και να οδηγηθούν στην γενίκευση. Για παράδειγμα στη δραστηριότητα CY_Δ6 οι μαθητές οδηγούνται στην παρατήρηση ότι η απόσταση των αντίστοιχων σημείων από τον άξονα συμμετρίας είναι σταθερή. Στη συνέχεια ισχυροποιούν την παρατήρηση τους μελετώντας επιπλέον περιπτώσεις συμμετρικών σχημάτων. Θα χαρακτηρίζαμε αυτήν τη δραστηριότητα ως μεσαίων-υψηλών γνωστικών απαιτήσεων αφού αφενός προϋποθέτει την περιγραφή κανονικοτήτων που αποτελεί μια γνήσια μαθηματική διεργασία αφετέρου όμως η επιλογή του σχήματος ,και η διατύπωση των επιμέρους ερωτημάτων της δραστηριότητας είναι τέτοια ώστε ο μαθητής σκόπιμα να καθοδηγηθεί στην ανακάλυψη του κανόνα. Τέτοιες δραστηριότητες εγείρουν διεργασίες δημιουργικού συλλογισμού καθώς εμπλέκουν τους μαθητές σε διερευνητική μάθηση, μη τυποποιημένο τρόπο σκέψης ενώ επιπλέον έχουν μη προβλέψιμο χαρακτήρα ως προς την πορεία επίλυσης τους γεγονός το οποίο χαρακτηρίζει εν γένει τις κατ' εξοχήν μαθηματικές δραστηριότητες.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η επόμενη κατηγορία δραστηριοτήτων όπου επιχειρείται μια **αλγεβρική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών.** Ενδεικτική είναι η δραστηριότητα CY_Δ5 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας ενός σχήματος μετά από μετασχηματισμό ανάκλασης ανακαλώντας τις κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες του μετασχηματισμού ανάκλασης (τ' αντίστοιχα σημεία ισαπέχουν από τον άξονα συμμετρίας). Οι γνωστικές απαιτήσεις αυτής της δραστηριότητας είναι μεσαίου-υψηλού επιπέδου καθώς προϋποθέτει βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών χαρακτηριστικών του μετασχηματισμού ανάκλασης και σύνδεση με έννοιες όπως η έννοια της απόστασης και η κατανόηση του συστήματος συντεταγμένων. Αντίστοιχη είναι η δραστηριότητα CY_Δ16 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου μετά από μετασχηματισμό μεταφοράς. Εδώ οι μαθητές πρέπει να δουλέψουν αντίστροφα προκειμένου να προσδιορίσουν το διάνυσμα μεταφοράς (μεταφορά κατά 11 μονάδες αριστερά και 5 μονάδες κάτω) έτσι ώστε η κορυφή Γ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να συμπέσει με την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια επιδιώκεται να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες και των υπόλοιπων κορυφών.

Ας σημειωθεί ότι μέσω της δραστηριότητας αυτής επιχειρείται μια συναρτησιακή προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών δηλαδή ως αντιστοιχία σημείου σε σημείου που εδώ περιγράφεται ως A(x,y) → A'(x-11, y-5). Δραστηριότητες όπως αυτή θα χαρακτηρίζονταν εν γένει ως αλγοριθμικές καθώς στοχεύουν στην επανάληψη μιας διαδικασίας εντούτοις όμως στη συγκεκριμένη δραστηριότητα εντοπίζονται στοιχεία δημιουργικού μη τυπικού συλλογισμού. Για παράδειγμα για την αναγνώριση του διανύσματος μεταφοράς απαιτείται αντίστροφη συλλογιστική πορεία κάτι που μαρτυρά μη τυποποιημένες νοητικές διεργασίες σκέψης και παράλληλα η μεταφορά από το ένα σύστημα αναπαράστασης (γεωμετρικό σχήμα στο επίπεδο) σε άλλο (σύστημα συντεταγμένων) απαιτεί υψηλό επίπεδο εννοιολογικών συνδέσεων που δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση δείγμα αλγοριθμικού συλλογισμού.

Μια άλλη κατηγορία δραστηριοτήτων που συναντάμε έχουν ως κύρια μαθηματική διεργασία αυτή της **οπτικοποίησης**. Ενδεικτική αυτής της κατηγορίας είναι η δραστηριότητα CY_Δ21 στην οποία αναμένεται από τους μαθητές να εντοπίσουν το σχήμα που προκύπτει μετά από στροφή ενός σχήματος ως προς ένα σημείο. Εδώ κύριος στόχος είναι ο νοερός χειρισμός των γεωμετρικών σχημάτων, διεργασία η οποία χαρακτηρίζεται ως μεσαίου-υψηλού επιπέδου αφού η διαδικασία που ακολουθείται από τους μαθητές για την επίλυση της δεν είναι αλγοριθμική και στηρίζεται περισσότερο σε οπτικό-χωρικό συλλογισμό.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η κατηγορία δραστηριοτήτων όπου η επιδιωκόμενη μαθηματική διεργασία είναι η **αιτιολόγηση ισχυρισμών.** Τέτοιες δραστηριότητες χαρακτηρίζονται από υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων καθώς απαιτούν τη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μετασχηματισμών, την κατανόηση των ομοιοτήτων και των διαφορών ανάμεσα στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, και τέλος την διατύπωση μαθηματικής επιχειρηματολογίας από τους μαθητές. Πράγματι η δραστηριότητα CY_Δ12 είναι ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της κατηγορίας αυτής αφού μέσω αυτής επιχειρείται η σύνδεση των μετασχηματισμών μεταφοράς και ανάκλασης. Οι μαθητές παρατηρούν και αιτιολογούν το ισοδύναμο των δυο μετασχηματισμών για την ειδική περίπτωση που παρουσιάζεται στην δραστηριότητα. Δραστηριότητες όπως αυτή εγείρουν δημιουργικό συλλογισμό αφού απαιτούν επεξήγηση και αιτιολόγηση των εικασιών, διεργασίες αυτοελέγχου και αυτορρύθμισης έως ότου οι μαθητές ισχυροποιήσουν την ορθότητα του προς εξέταση ισχυρισμού.

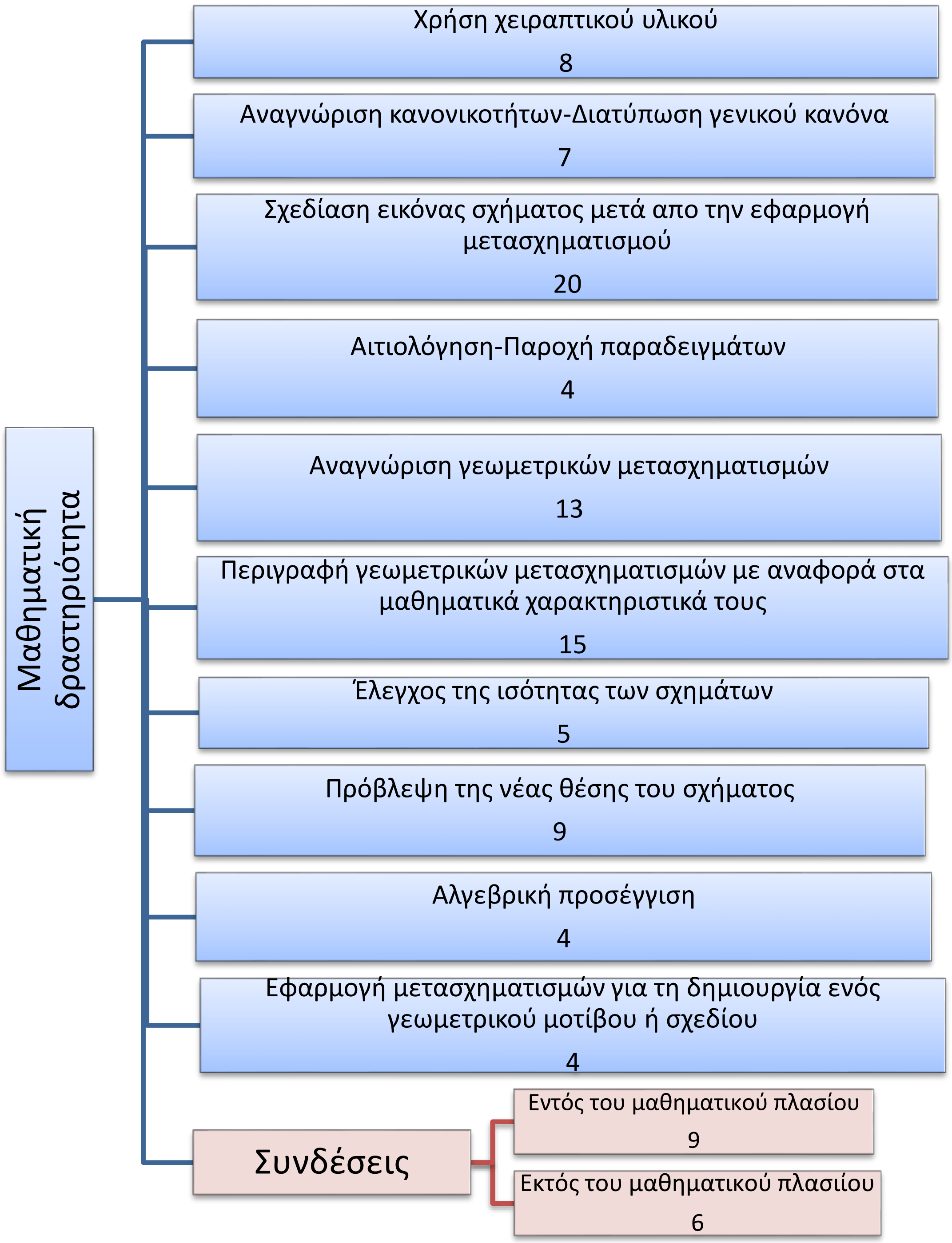
Τέλος μια δραστηριότητα που συναντάμε ανήκει στην κατηγορία **Δημιουργία και συμπλήρωση μοτίβου με εφαρμογή μετασχηματισμών.** Εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ως εργαλείο για την συμπλήρωση ή τη δημιουργία μοτίβων ή σχεδίων που προκύπτουν από την επανάληψη ενός αρχικού σχήματος. Ενδεικτική είναι η δραστηριότητα CY_Δ2 μέσω της οποίας οι μαθητές επιδιώκεται να εφαρμόσουν τον γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης προκειμένου το σχήμα που θα προκύψει να έχει την ιδιότητα της συμμετρίας ως προς άξονα . Οι γνωστικές απαιτήσεις αυτής της δραστηριότητας χαρακτηρίζονται ως μεσαίου-υψηλού επιπέδου αφού εδώ οι μαθητές αναμένεται ν΄ ανακαλέσουν την ιδιότητα του μετασχηματισμού ανάκλασης αναφορικά με την διατήρηση της απόστασης των αντίστοιχων σημείων από την ευθεία ανάκλασης ενώ στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας οι μαθητές αξιοποιούν τον μετασχηματισμό ανάκλασης για την εξ’ ολοκλήρου δημιουργία ενός δικού τους σχεδίου που θα ικανοποιεί την ιδιότητα της συμμετρίας ως προς άξονα. Σ’ αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι σε δραστηριότητες τέτοιου είδους οι μαθητές δεν χρειάζεται πάντοτε να επιστρατεύσουν διεργασίες δημιουργικού συλλογισμού (αν και θα ήταν το προφανές σε μια δραστηριότητα που η κύρια μαθηματική διεργασία είναι η δημιουργία ή η συμπλήρωση μοτίβου).Αντίθετα, οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν αλγοριθμικό συλλογισμό ανακαλώντας στη μνήμη τα μαθηματικά χαρακτηριστικά κάθε μετασχηματισμού.

Αναφορικά με τις **συνδέσεις** που επιχειρούνται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών θα διαπιστώσουμε ότι κατά κύριο λόγο δεν υπάγονται σε κάποιο πραγματικό πλαίσιο αναφοράς. Εντούτοις μια από τις δραστηριότητες που επιχειρούν συνδέσεις με καταστάσεις και εμπειρίες της πραγματικής ζωής είναι η CY_Δ9. Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να δουλέψουν σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο και συγκεκριμένα στο πεδίο της Τέχνης όπου μέσα από την μελέτη έργων Τέχνης του εικαστικού Escher καλούνται να εντοπίσουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία τω έργων και επιπλέον τις ομοιότητες και διαφορές αυτών. Πρόκειται για έργα στα οποία χρησιμοποιήθηκαν οι μετασχηματισμοί μεταφοράς, στροφής, ανάκλασης μεμονωμένα ή και σε συνδυασμό. Οι μαθητές επιδιώκεται ν’ απαγκιστρωθούν από το πραγματικό πλαίσιο στο οποίο τίθεται το πρόβλημα και να διακρίνουν τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν τα σχήματα. Στον αντίποδα, πολλές από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων αναπτύσσονται σε ένα πλαίσιο το οποίο φαίνεται να προσομοιάζει μια πραγματική κατάσταση με επιφανειακό εντούτοις τρόπο χωρίς πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Για παράδειγμα, στην δραστηριότητα CY_Δ24 οι μαθητές εφαρμόζουν μετασχηματισμό στροφής σε μια εικόνα που προσομοιάζει ένα πραγματικό αντικείμενο (δείκτης φούρνου) κατά γωνία 270° με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Η δραστηριότητα αυτή, αν και χρησιμοποιεί ως στοιχείο αφόρμησης ένα αντικείμενο της καθημερινότητας, δεν απαιτεί διαδικασίες μοντελοποίησης ή συλλογισμό σε άλλο πλαίσιο πέρα από αυτό των Μαθηματικών. Τέλος οι συνδέσεις που εντοπίζουμε εντός του μαθηματικού πλαισίου αφορούν την αλγεβρική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών μέσω της μελέτης της σχέσης που συνδέει τις αντίστοιχες κορυφές.

4.2.3 Γνωστικές απαιτήσεις δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών - Σχολικά εγχειρίδια Math make sense (Καναδάς)

Ολοκληρώνουμε την ανάλυση μας μελετώντας δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια της σειράς Math make sense του Καναδά για την 5^{th} και 6^{th} Grade με άξονα το επίπεδο των γνωστικών τους απαιτήσεων. Όπως θα παρατηρήσουμε τα είδη των μαθηματικών δραστηριοτήτων παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλομορφία ως προς τις γνωστικές τους απαιτήσεις ενώ χαρακτηριστικό είναι ότι επιχειρούνται συνδέσεις με πεδία εντός και εκτός των Μαθηματικών σε κάθε στάδιο της μάθησης (εισαγωγικές δραστηριότητες, δραστηριότητες εφαρμογής, δραστηριότητες διερεύνησης-επέκτασης).

Στον παρακάτω εγχειριδίων πίνακα συγκεντρώσαμε τα είδη των μαθηματικών διεργασιών που εγείρονται μέσα από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων. Ας σημειωθεί ότι πολλές από τις δραστηριότητες ενδέχεται να ανήκουν σε περισσότερες από μια κατηγορίες μιας και είναι δυνατόν να εμπεριέχονται περισσότερες από μια μαθηματικές διεργασίες.



Ξεκινάμε την ανάλυση μας με μια κατηγορία δραστηριοτήτων που περιλαμβάνει τη **χρήση χειραπτικού υλικού.** Σ’ αυτήν την κατηγορία οι μαθητές ενθαρρύνονται να αισθητοποιήσουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μέσα από τη χρήση υλικών. Οι μαθητές εφαρμόζουν μετασχηματισμούς μεταφοράς, ανάκλασης, στροφής σ’ ένα πραγματικό αντικείμενο (συνήθως κάποιο pattern block) και κατ’ αυτό τον τρόπο υποβοηθούνται στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Επιπρόσθετα, μέσω των δραστηριοτήτων αυτών επιχειρείται η σύνδεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με την φυσική κίνηση. Θα λέγαμε ότι το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων αυτών των δραστηριοτήτων είναι μεσαίο-υψηλό εφόσον δίνεται έμφαση στη διαδικασία με στόχο την βαθύτερη κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Ως ενδεικτικό παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας θ’ αναφέρουμε την Ca_Δ7 στην οποία οι μαθητές ανακαλύπτουν τις μαθηματικές ιδιότητες του μετασχηματισμού ανάκλασης με τη χρήση ειδικού καθρέπτη (Mira). Εδώ η κύρια μαθηματική διεργασία που εγείρεται είναι η διερεύνηση των διαφορετικών περιπτώσεων αναφορικά με την σχετική θέση του αρχικού σχήματος ως προς την ευθεία ανάκλασης. Οι μαθητές διατυπώνουν εικασίες, πειραματίζονται χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό ώστε να ελέγξουν την αρχική εικασία τους και τελικά επιβεβαιώνουν ή διαψεύδουν τους ισχυρισμούς τους. Τέτοιες δραστηριότητες απαιτούν δημιουργικό συλλογισμό αφού μέσα από αυτές επιδιώκεται η ανακάλυψη μαθηματικών σχέσεων συνεπώς ο μαθητής δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ακολουθεί κάποια γνωστή τυποποιημένη διαδικασία.

Άλλες δραστηριότητες ανήκουν στην κατηγορία **Αναγνώριση κανονικοτήτων –Διατύπωση γενικού κανόνα.** Εδώ οι μαθητές επιδιώκεται να εντοπίσουν και να περιγράψουν κανονικότητες καθώς και να εξετάσουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτές συμβαίνουν. Στη συνέχεια αναμένεται να οδηγηθούν στην διατύπωση ενός ισχυρισμού-κανόνα στηριζόμενοι στην ειδική περίπτωση που παρουσιάζεται στην δραστηριότητα. Οι γνωστικές απαιτήσεις τέτοιων δραστηριοτήτων θα χαρακτηρίζονταν ως υψηλού επιπέδου αφού οι μαθητές καλούνται να απαγκιστρωθούν από το συγκεκριμένο πλαίσιο της δραστηριότητας και να εστιάσουν σε μια κανονικότητα που παρατηρούν στο σχήμα. Για παράδειγμα η δραστηριότητα Ca_Δ32 στοχεύει στην παρατήρηση ότι η εφαρμογή των μετασχηματισμών είναι μη αντιμεταθετική. Συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν δυο οποιοσδήποτε μετασχηματισμούς (διαφορετικούς) σ’ ένα τυχαίο τετράπλευρο και στην εικόνα του και στη συνέχεια να εφαρμόσουν τους ίδιους μετασχηματισμούς με την αντίστροφη σειρά. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές οδηγούνται σταδιακά στην διατύπωση ενός γενικού κανόνα, η εγκυρότητα του οποίου ισχυροποιείται από την τυχαία επιλογή του σχήματος και των γεωμετρικών μετασχηματισμών που έδρασαν σε αυτό. Όπως και σε προηγούμενα σχολικά εγχειρίδια έτσι και εδώ τέτοιες διεργασίες είναι ενδεικτικές δημιουργικού συλλογισμού.

Σ’ αυτό το σημείο ας περάσουμε στην κατηγορία **Σχεδίαση εικόνας σχήματος μετά από την εφαρμογή μετασχηματισμού** στην οποία ανήκει η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων που συναντάμε στα σχολικά εγχειρίδια του Καναδά. Οι γνωστικές απαιτήσεις τέτοιων δραστηριοτήτων ποικίλουν καθώς βρίσκονται σε άμεση σχέση με τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών και το πλήθος των μετασχηματισμών που εφαρμόζονται (ένας ή περισσότεροι μετασχηματισμοί).Για παράδειγμα η δραστηριότητα Ca_Δ2 χαρακτηρίζεται ως χαμηλών-μεσαίων γνωστικών απαιτήσεων καθώς οι μαθητές εφαρμόζουν αλγοριθμικά τον μετασχηματισμό μεταφοράς στο δοθέν σχήμα χωρίς ν’ αποδίδουν νόημα στην μαθηματική διαδικασία που τελείται και χωρίς να επιχειρούνται εννοιολογικές συνδέσεις. Αντίθετα η δραστηριότητα Ca_Δ23 χαρακτηρίζεται ως μεσαίων-υψηλών γνωστικών απαιτήσεων αφού επιδιώκεται από τους μαθητές να στρέψουν το σχήμα με κέντρο ένα εξωτερικό σημείο του σχήματος. Αυτό το μαθηματικό χαρακτηριστικό προσθέτει επιπλέον δυσκολία στην εφαρμογή του μετασχηματισμού καθώς οι μαθητές καλούνται επιπλέον να μεταφέρουν το σχήμα και στη συνέχεια να το στρέψουν. Και στα δυο παραδείγματα δραστηριοτήτων που παραθέσαμε το κύριο είδος συλλογισμού που απαιτείται για την ολοκλήρωση τους είναι ο αλγοριθμικός αφού επιδιώκεται από τους μαθητές η βήμα προς βήμα εφαρμογή των διαδικασιών που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στην θεωρία.

Στη συνέχεια περνάμε σε μια κατηγορία δραστηριοτήτων όπου η κύρια μαθηματική διεργασία είναι η **αιτιολόγηση ισχυρισμών με παροχή παραδειγμάτων.** Εδώ οι μαθητές παρέχουν επεξηγήσεις σχετικά με την ορθότητα μιας πρότασης και δίνουν παραδείγματα για έναν ισχυρισμό. Τέτοιες δραστηριότητες χαρακτηρίζονται ως υψηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων αφού εμπλέκουν τους μαθητές σε γνήσια μαθηματική δραστηριότητα που εμπεριέχει διαδικασίες αυτορρύθμισης και αυτοελέγχου σε κάθε στάδιο της επίλυσης. Ενδεικτική αυτής της κατηγορίας είναι η δραστηριότητα Ca_Δ12 στην οποία οι μαθητές καλούνται να διαπιστώσουν ομοιότητες ανάμεσα στους μετασχηματισμούς μεταφοράς και ανάκλασης και στη συνέχεια να δώσουν ένα παράδειγμα ενός ζεύγους αρχικού σχήματος και εικόνας που θα μπορούσαν να έχουν προκύψει ως το αποτέλεσμα καθενός από τους παραπάνω μετασχηματισμούς. Θα παρατηρούσαμε επομένως ότι σε αυτήν την δραστηριότητα οι μαθητές επιστρατεύουν δημιουργικό και όχι αλγοριθμικό συλλογισμό ενώ απαιτούνται εννοιολογικές συνδέσεις προκειμένου να εντοπιστούν ομοιότητες και διαφορές στα δυο είδη μετασχηματισμών.

Ένα σημαντικό πλήθος δραστηριοτήτων ανήκει στην κατηγορία **Αναγνώριση γεωμετρικών μετασχηματισμών.** Σε αυτήν συναντάμε δραστηριότητες μεσαίων-υψηλών γνωστικών απαιτήσεων αφού η επίλυση τους προϋποθέτει βαθιά κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων των γεωμετρικών μετασχηματισμών και απαιτεί την ικανότητα για οπτικό συλλογισμό. Ενδεικτική αυτής της κατηγορίας είναι η δραστηριότητα Ca_Δ27 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται ν’ αναγνωρίσουν τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς που έδρασαν στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του προκειμένου το σχήμα να βρεθεί στην τελική του θέση. Μάλιστα οι μαθητές καλούνται να προτείνουν δυο πιθανούς συνδυασμούς διαδοχικών μετασχηματισμών (στροφή κατά 180 ή ανάκλαση ως προς κατακόρυφη και οριζόντια ευθεία) κάτι το οποίο απαιτεί κατανόηση των σχέσεων που συνδέουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Η συλλογιστική πορεία που ακολουθείται από τους μαθητές σε δραστηριότητες όπως οι παραπάνω έχει περισσότερα στοιχεία δημιουργικού συλλογισμού αφού απαιτείται η ικανότητα για συνδυαστική γνώση αναφορικά με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, υψηλό επίπεδο χωρικής αντίληψης και οπτικοποίησης.

Ένα μεγάλο ποσοστό δραστηριοτήτων υπάγονται στην ομάδα **Περιγραφή γεωμετρικών μετασχηματισμών με αναφορά στα μαθηματικά χαρακτηριστικά τους.** Εδώ η κύρια μαθηματική διεργασία αφορά την χρήση μαθηματικής γλώσσας για την παροχή των χαρακτηριστικών στοιχείων που συνιστούν την ταυτότητα ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού. Τέτοια στοιχεία είναι το διάνυσμα μεταφοράς, η ευθεία ανάκλασης, το κέντρο και το μέτρο της γωνίας στροφής. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας είναι η Ca_Δ10 η οποία έχει μεσαίο-υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων καθώς προϋποθέτει την ικανότητα για αντίστροφη συλλογιστική πορεία. Συγκεκριμένα οι μαθητές επιδιώκεται να δουλέψουν με αντίστροφη σειρά ξεκινώντας με δεδομένο το ζεύγος αρχικού σχήματος και εικόνας με στόχο να προσδιορίσουν την ευθεία ανάκλασης. Ας σημειωθεί ότι σε αυτήν την δραστηριότητα είναι αναγκαίες οι συνδέσεις και η ανάκληση των κρίσιμων μαθηματικών χαρακτηριστικών του μετασχηματισμού ανάκλασης. Και εδώ όπως και πριν δεν αρκεί η τυποποιημένη μιμητική επανάληψη διαδικασιών αλλά δυνατότητα για αντίστροφη συλλογιστική πορεία σε άμεση σύνδεση πάντοτε με τις κρίσιμες μαθηματικές ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ αρχικού σχήματος και της εικόνας του.

Άλλη μια μαθηματική διεργασία που εγείρεται μέσα από μια ομάδα δραστηριοτήτων είναι εκείνη της **πρόβλεψης**, δηλαδή της δυνατότητας για εκτίμηση της εικόνας του σχήματος που θα προκύψει ως το αποτέλεσμα της δράσης ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών. Εδώ οι δραστηριότητες χαρακτηρίζονται ως υψηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων καθώς προϋποθέτουν ικανότητες χωρικής αντίληψης και εποπτείας και στη συνέχεια την διατύπωση μιας εικασίας που στηρίζεται σ' αυτήν την νοερή εικόνα. Επομένως και εδώ το είδος του συλλογισμού που φαίνεται να αναπτύσσεται είναι ο δημιουργικός. Ενδεικτική είναι η δραστηριότητα Ca_Δ17 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να προβλέψουν τη νέα θέση ενός μη κυρτού σχήματος μετά από μετασχηματισμό στροφής ως προς μια κορυφή του κατά ¼ στροφής κατά την ορθή φορά ή ¾ στροφής κατά την αντίστροφη πλευρά. Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να επιβεβαιώσουν ή να διαψεύσουν την ακρίβεια της εκτίμησης τους σχεδιάζοντας την εικόνα του νέου σχήματος.

Σημαντική είναι και η παρουσία κάποιων ερωτημάτων σε δραστηριότητες που στοχεύουν στην **διαπίστωση της ισότητας των σχημάτων** που προκύπτουν από ένα αρχικό σχήμα με εφαρμογή ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών ισομετρίας σε αυτό. Σε αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές επιδιώκεται να διαπιστώσουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχημάτων (ως προς τη θέση, το μέγεθος, το μέτρο των γωνιών τους και τον προσανατολισμό τους). Στην συγκεκριμένη ομάδα δραστηριοτήτων οι μαθητές καθοδηγούνται μέσω των στοχευμένων ερωτημάτων στην διατύπωση εικασιών για την ισότητα των σχημάτων τις οποίες αναμένεται να ελέγξουν με τη χρήση διαφανούς χαρτιού, ή δίπλωσης του χαρτιού έως ότου το αρχικό και το τελικό σχήμα συμπέσουν. Ενδεικτική είναι η δραστηριότητα CA_Δ30 στην οποία οι μαθητές επιδιώκεται να διαπιστώσουν, να επεξηγήσουν και να αιτιολογήσουν την ισότητα αρχικού και τελικού σχήματος επιστρατεύοντας δημιουργικό συλλογισμό.

Μια σημαντική κατηγορία δραστηριοτήτων είναι εκείνη στην οποία επιδιώκεται μια **αλγεβρική προσέγγιση** των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Είναι αξιοσημείωτο ότι σε αυτές τις δραστηριότητες επιχειρείται η σύνδεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με αλγεβρικές έννοιες αλλά κυρίως με την έννοια της συνάρτησης .Μάλιστα, θα χαρακτηρίζαμε το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων σε αυτές τις δραστηριότητες ως υψηλό αφού οι μαθητές επιδιώκεται να εμβαθύνουν στις μαθητικές έννοιες, να διερευνήσουν και να περιγράψουν κανονικότητες δηλαδή να εμπλακούν σε μια κατεξοχήν μαθηματική δραστηριότητα. Παράλληλα τέτοιες δραστηριότητες εντάσσονται στην κατηγορία δραστηριοτήτων με έντονο το στοιχείο το δημιουργικού μη τυποποιημένου τρόπου σκέψης. Ένα παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας που αξίζει να παραθέσουμε είναι η Ca_Δ6 στην οποία οι μαθητές αναμένεται να γράψουν τις συντεταγμένες των κορυφών του αρχικού σχήματος και της εικόνας που προκύπτει μετά από μετασχηματισμό μεταφοράς κατά 6 τετράγωνα αριστερά και ένα τετράγωνο κάτω ενώ αμέσως μετά καλούνται να διερευνήσουν τη σχέση ανάμεσα στις αντίστοιχες συντεταγμένες και να εκφράσουν την αλγεβρική σχέση που τις συνδέει.

Στην τελευταία ομάδα δραστηριοτήτων εντοπίζουμε όσες αφορούν στην **εφαρμογή ενός μετασχηματισμού για την δημιουργία ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου ή σχεδίου**. Εδώ οι μαθητές αναμένεται να προχωρήσουν σε εννοιολογική σύνδεση της έννοιας των γεωμετρικών μετασχηματισμών με την έννοια του γεωμετρικού μοτίβου. Παράλληλα ενθαρρύνονται συνδέσεις με άλλα πεδία εκτός των Μαθηματικών όπως η Τέχνη. Αξίζει να σημειωθεί ότι τέτοιες δραστηριότητες εντοπίζουμε στο τέλος της ενότητας των γεωμετρικών μετασχηματισμών όπου αφιερώνεται ένα μάθημα με τίτλο 'Creating designs'. Εκεί οι μαθητές αξιοποιούν τις γνώσεις τους για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σε διαφορετικά πλαίσια κάτι το οποίο αυξάνει το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων, ενώ ως το είδος του συλλογισμού που επιστρατεύεται είναι ο δημιουργικός, κυρίως εξαιτίας του μη προβλέψιμου και ανοιχτού χαρακτήρα των συναφών δραστηριοτήτων. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας αποτελούν οι Ca_Δ34 και Ca_Δ35 στις οποίες οι μαθητές επιδιώκεται αφενός ν' αναγνωρίσουν το αρχικό σχήμα και αφετέρου να περιγράψουν τους μετασχηματισμούς που έδρασαν διαδοχικά σε αυτό προκειμένου να δημιουργήσουν το δοθέν σχέδιο.

Τέλος αναφορικά με τις **συνδέσεις** που επιχειρούνται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών εντοπίζουμε συγκριτικά με τα προηγούμενα εγχειρίδια αρκετές δραστηριότητες που τίθενται σε πραγματικό πλαίσιο και στοχεύουν σε συνδέσεις με άλλα πεδία εκτός των Μαθηματικών. Αρχικά ας σημειωθεί ότι για την εισαγωγή των γεωμετρικών μετασχηματισμών στην 5th Grade επιλέγεται μια γενική δραστηριότητα που τίθεται σ' ένα πλαίσιο οικείο προς τους μαθητές (λούνα παρκ).Οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τα διαφορετικά είδη κίνησης που παρατηρούν (μεταφορά, στροφή) στα παιχνίδια. αντικειμένων, ο τροχός ενός ποδηλάτου που στρέφεται περί το κέντρο του, κ.α.).Θα λέγαμε ότι μέσω των παραπάνω παραδειγμάτων επιτυγχάνεται η σύνδεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με την φυσική έννοια της κίνησης πράγμα που από την μια πλευρά λειτουργεί καταλυτικά στην κατανόηση των μετασχηματισμών ενώ από την άλλη πλευρά μπορεί να προκαλέσει σοβαρές παρερμηνείες καθώς στα παραδείγματα αυτά δεν τηρείται η απαιτούμενη αυστηρότητα που χαρακτηρίζει τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. στοιχείο που παρατηρούμε αναφορικά με το επίπεδο σύνδεσης των γεωμετρικών μετασχηματισμών με εμπειρίες και καταστάσεις της πραγματικής ζωής είναι η ύπαρξη μιας πληθώρας δραστηριοτήτων που αξιοποιούν τη χρήση χειραπτικού υλικού. Πιο αναλυτικά, μέσα από δραστηριότητες όπως η Ca_Δ7 επιτυγχάνεται από τους συγγραφείς η δημιουργία εμπειριών στους μαθητές με καθοδηγούμενο τρόπο και τις οποίες οι μαθητές θα μπορούν να επικαλεστούν σε διάφορες φάσεις της μάθησης. Άλλες δραστηριότητες τίθενται στο πλαίσιο των μοτίβων που συχνά συναντώνται ως στοιχεία διακόσμησης, σε ψηφιδωτά ή μωσαϊκά, στα λεγόμενα patchwork και quilt. Εδώ οι όποιες συνδέσεις επιχειρούνται εξυπηρετούν την ανάγκη ενίσχυσης της θεώρησης των Μαθηματικών ως χρήσιμου εργαλείου με ποικίλες εφαρμογές. Ενδεικτικές σε αυτήν την κατηγορία είναι οι δραστηριότητες Ca_Δ37 και Ca_Δ38.

5.Συζήτηση-Συμπεράσματα

5.1 Ευκαιρίες μάθησης και μαθηματικά χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών στα σχολικά εγχειρίδια.

Ξεκινώντας την συζήτηση των αποτελεσμάτων θα σταθούμε στα κρίσιμα μαθηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών τα οποία επιδιώκεται ν' αναδειχθούν μέσα από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων και στην συγκριτική παρουσίαση τους. Στα σχολικά εγχειρίδια του Cambridge η μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών εστιάζει σε ειδικές περιπτώσεις μετασχηματισμών που διδακτικά χαρακτηρίζονται ως πιο κατάλληλες για μαθητές του Δημοτικού. Έτσι για παράδειγμα θα παρατηρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός στροφής, που εδώ εισάγεται αυστηρά στο Stage 6 εξετάζεται μόνο στην ειδική περίπτωση που η γωνία στροφής είναι 90° και το κέντρο στροφής είναι μια κορυφή του σχήματος ενώ σε ολόκληρη τη σειρά εγχειριδίων υπάρχει μια δραστηριότητα στην οποία το κέντρο στροφής είναι κάποιο άλλο σημείο. Αντίστοιχα σε δραστηριότητες μετασχηματισμού ανάκλασης οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι αυτές στις οποίες η ευθεία ανάκλασης είναι σε οριζόντια σε κατακόρυφη ή πλάγια διεύθυνση με το τελευταίο να συμβαίνει υπό την προϋπόθεση ότι είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του σχήματος. Σχολιάζοντας τα παραπάνω θα υπογραμμίζαμε ότι η επιλογή αυτών των περιπτώσεων για την διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών συμβαδίζει απόλυτα με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος που εκθέσαμε στην ενότητα 2.4.1 καθώς και με την υπάρχουσα έρευνα για τη ΔτΜ. Άλλο ένα σημείο που αξίζει να επισημανθεί είναι ότι τα γεωμετρικά αντικείμενα στα οποία δρουν οι μετασχηματισμοί βρίσκονται στην πλειοψηφία τους σε οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση κάτι το οποίο από την μια πλευρά ελαχιστοποιεί το επίπεδο δυσκολίας της δραστηριότητας αφετέρου όμως λειτουργεί αποτρεπτικά στην ανάπτυξη των εικόνων που διαθέτουν οι μαθητές για τις γεωμετρικές έννοιες.

Αξίζει τέλος να σχολιάσουμε την επιχειρούμενη σταδιακή μετάβαση από την γεωμετρική στην αλγεβρική/συναρτησιακή προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών η οποία φαίνεται να συμβαδίζει με την ανάπτυξη ανώτερων μαθηματικών διεργασιών (αναγνώριση κανονικοτήτων, διατύπωση και έλεγχος εικασιών, γενίκευση) . Κάτι τέτοιο δεν είναι τυχαίο αν λάβουμε υπόψιν μας ότι σύμφωνα με το οργανόγραμμα της Μαθηματικής εκπαίδευσης στη Μ. Βρετανία τα Stages 5 & 6 χαρακτηρίζονται ως ‘upper key stage 2’.

Στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου θα παρατηρούσε κάποιος τη σαφή δομή με την οποία παρουσιάζεται το αντικείμενο διδασκαλίας. Το γεγονός αυτό δεν εξυπηρετεί μόνο στην διατήρηση της συνοχής και της συνεκτικότητας των κεφαλαίων και των αντίστοιχων ενοτήτων αλλά επιπλέον έχει διδακτική σκοπιμότητα. Για παράδειγμα στην εισαγωγή κάθε κεφαλαίου υπάρχει συνήθως μια ή και περισσότερες δραστηριότητες που αξιοποιούν εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας με στοχευμένα ερωτήματα μέσω των οποίων αναδεικνύονται οι κρίσιμες ιδιότητες των μετασχηματισμών που καλούνται ν’ ανακαλύψουν οι μαθητές. Εστιάζοντας τώρα στα μαθηματικά χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων αξίζει να σημειώσουμε ότι ο μετασχηματισμός ανάκλασης υπονοείται ως το πρωταρχικό είδος μετασχηματισμού με το οποίο οι μαθητές εισάγονται στους γεωμετρικούς μετασχηματισμών. Μάλιστα στην Ε’ Δημοτικού φαίνεται να ταυτίζεται κάποιες φορές με την έννοια της αξονικής συμμετρίας που αποτελεί εσωτερική ιδιότητα ενός σχήματος και δεν υποδηλώνει τη σχέση δυο σχημάτων. Πράγματι στο σχολικό εγχειρίδιο ελάχιστα αναφέρεται ως μετασχηματισμός ανάκλασης. Αναφορικά με τα άλλα είδη μετασχηματισμών θα παρατηρήσουμε ότι και εδώ τα σχήματα τα οποία επιλέγονται βρίσκονται αποκλειστικά και μόνο σε οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση. Παράλληλα θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στις περισσότερες δραστηριότητες εφαρμογής μετασχηματισμού μεταφοράς η διεύθυνση κίνησης είναι προς τα δεξιά ή/και πάνω κάτι που φαίνεται να έχει τις καταβολές του στην σχετική έρευνα για τη ΔτΜ . Στον αντίποδα, ο μετασχηματισμός στροφής φαίνεται ν' αποκτά πιο κεντρικό ρόλο εδώ αφού οι μαθητές επιδιώκεται να δουλέψουν με γωνία στροφής 90 °,180° ή 270 °.Το κέντρο στροφής που επιλέγεται είναι είτε κάποια κορυφή του σχήματος όπως προηγουμένως είτε το κέντρο του σχήματος ενώ περιλαμβάνονται και παραδείγματα στα οποία τα κέντρο στροφής είναι εξωτερικό του σχήματος. Τέλος και εδώ υπάρχει ξεκάθαρα η διάθεση για αλγεβρική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών καθώς αρκετές δραστηριότητες εστιάζουν στη σχέση των συντεταγμένων των αντίστοιχων σημείων σε αρχικό και τελικό σχήμα.

Στα σχολικά εγχειρίδια της σειράς Math make sense του Καναδά η μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών γίνεται με συστηματικό τρόπο καλύπτοντας ειδικές περιπτώσεις που δεν εξετάζονται στα αντίστοιχα εγχειρίδια. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η μελέτη παραδειγμάτων μετασχηματισμού στροφής ως προς κέντρο σημείο εξωτερικό του σχήματος που δεν εξετάζεται σε κανένα από τα υπόλοιπα εγχειρίδια. Παράλληλα κατά την μελέτη του μετασχηματισμού ανάκλασης οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εξετάσουν διαφορετικές περιπτώσεις αναφορικά με την θέση της ευθείας ανάκλασης, τον προσανατολισμό του σχήματος και την σχετική θέση του ως προς αυτήν. Επιπρόσθετα, σημαντικό μέρος των δραστηριοτήτων αφιερώνεται σε διερεύνηση και ανάδειξη των κρίσιμων μαθηματικών ιδιοτήτων των μετασχηματισμών. Για παράδειγμα, οι μαθητές διαπιστώνουν, μέσα από καθοδηγούμενα ερωτήματα, την ισότητα των σχημάτων που έχουν προκύψει ως αποτέλεσμα της δράσης μετασχηματισμών. Αξίζει να σημειωθεί επιπλέον ότι σε αυτήν τη σειρά σχολικών εγχειριδίων δίνεται ιδιαίτερο βάρος στην συναρτησιακή προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών καθώς σε πολλές από τα ερωτήματα το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην σχέση των συντεταγμένων των αντίστοιχων κορυφών σε αρχικό και τελικό σχήμα. Ως προς τα σχήματα που επιλέγονται ως αντικείμενα της δράσης των μετασχηματισμών θα διαπιστώσουμε ότι παρουσιάζουν ποικιλία ως προς τον προσανατολισμό τους. Για παράδειγμα θα συναντήσουμε σχήματα σε οριζόντιο, κατακόρυφο ή και διαφορετικό προσανατολισμό κάτι το οποίο θα λέγαμε ότι συμβάλλει στην ολόπλευρη κατανόηση της έννοιας του σχήματος και στον εμπλουτισμό της εννοιολογικής εικόνας του σχήματος (concept image). Ακόμη θα παρατηρήσουμε ότι σε πολλές από τις δραστηριότητες επιδιώκεται αντιπαραβολή τα διαφόρων μετασχηματισμών (μεταφορά-ανάκλαση, στροφή-ανάκλαση) κάτι το οποίο στοχεύει στην επισήμανση των ομοιοτήτων και των διαφορών τους. Τέλος, είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των μετασχηματισμών αφιερώνεται από τα σχολικά εγχειρίδια στην σύνθεση μετασχηματισμών του ίδιου ή διαφορετικού είδους καθώς και στην χρήση τους ως εργαλείου κατασκευής μοτίβων ή σχεδίων. Ορόσημα αποτελούν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές καθοδηγούνται στην ιδιότητας της μη αντιμεταθετικότητας των μετασχηματισμών ή άλλες όπου η σύνθεση δυο ή περισσότερων μετασχηματισμών είναι η ταυτοτική συνάρτηση οδηγώντας τελικά στην ταύτιση αρχικού και τελικού σχήματος. Συνολικά θα λέγαμε ότι το εγχειρίδιο της σειράς Math make sense προσφέρει ένα πλούσιο ,από πλευράς αναπαραστάσεων, περιβάλλον μάθησης καλύπτοντας πλήρως τους στόχους του αντίστοιχου αναλυτικού προγράμματος.

Συνοψίζοντας θα παρατηρήσουμε ότι οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν τα σχολικά εγχειρίδια αναφορικά με την μάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές που εντοπίζονται κυρίως στην επιλογή των σχημάτων και των στοιχείων που ορίζουν τους μετασχηματισμούς (ευθεία ανάκλασης, διάνυσμα μεταφοράς, κέντρο και γωνία στροφής).

5.2 Ευκαιρίες μάθησης και γνωστικές απαιτήσεις των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών στα σχολικά εγχειρίδια.

Συνεχίζοντας με τη συζήτηση των αποτελεσμάτων θα εξετάσουμε τα είδη των γνωστικών απαιτήσεων που ενθαρρύνονται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών. Έτσι στα σχολικά εγχειρίδια του Cambridge ένα σημαντικό εύρος δραστηριοτήτων αφιερώνεται στην εφαρμογή, την αναγνώριση και περιγραφή ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών σε σχήμα, στη συμπλήρωση ή στη δημιουργία μοτίβου με την εφαρμογή μετασχηματισμού, στην αναγνώριση κανονικοτήτων και την διατύπωση γενικών κανόνων, στην οπτικοποίηση και στην επίλυση προβλήματος. Αυτές οι μαθηματικές διεργασίες αντιστοιχούν όπως είδαμε σε διαφορετικά επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων ανάλογα με το επίπεδο συνδέσεων που επιδιώκεται κάθε φορά. Σε γενικές γραμμές θα λέγαμε ότι το επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων κυμαίνεται από χαμηλό-μεσαίο έως και υψηλό. Για παράδειγμα κάποιες από τις δραστηριότητες εφαρμογής μετασχηματισμού σε σχήμα έχουν χαμηλό-μεσαίο επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων αφού δεν απαιτούν την ανάκληση των μαθηματικών χαρακτηριστικών του μετασχηματισμού, παρά μόνο την εφαρμογή μιας αλγοριθμικής διαδικασίας, ενώ αντίθετα σε κάποιες άλλες είναι απαραίτητες οι εννοιολογικές συνδέσεις. Από την άλλη πλευρά διεργασίες όπως η αναγνώριση και περιγραφή κανονικοτήτων, η οπτικοποίηση (που διατυπώνεται ως διαδικασία πρόβλεψης) δηλώνουν όπως είδαμε μεσαίο-υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων. Αυτό το οποίο αξίζει να σημειωθεί είναι ότι στην πλειοψηφία των δραστηριοτήτων επιδιώκεται αλγοριθμικός συλλογισμός με συνδέσεις ενώ σε κάποιες από τις δραστηριότητες όπως αυτές που αφορούν τη δημιουργία μοτίβων εντοπίζουμε ψήγματα δημιουργικού συλλογισμού. Συνολικά θα λέγαμε ότι τα εν λόγω σχολικά εγχειρίδια αν και εμπλέκουν τους μαθητές σε κάποιες μαθηματικές διεργασίες όπως η επίλυση προβλήματος εντούτοις όμως δεν περιλαμβάνουν διερευνητικά ερωτήματα ή ερωτήματα που αφορούν την παροχή αιτιολόγησης κάτι το οποίο συμβαίνει όπως θα δούμε συχνότερα στα υπόλοιπα εγχειρίδια. Μάλιστα θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η επιλογή για απουσία ανοιχτών ερωτημάτων δεν είναι τυχαία αφού βασικό κριτήριο συνιστά ο εναρμονισμός με τις δραστηριότητες αξιολόγησης που συναντώνται στις εξετάσεις του Cambridge.

Από την άλλη πλευρά στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου εντοπίζουμε εκτός των άλλων τη μαθηματική διεργασία της αιτιολόγηση γενικών ισχυρισμών. Τέτοιες δραστηριότητες θα λέγαμε ότι χαρακτηρίζονται ως μεσαίου- υψηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων καθώς προϋποθέτουν τη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μετασχηματισμών και την διατύπωση μαθηματικής επιχειρηματολογίας από τους μαθητές. Δραστηριότητες όπως αυτή εγείρουν δημιουργικό συλλογισμό αφού απαιτούν επεξήγηση και αιτιολόγηση των εικασιών, διεργασίες αυτοελέγχου και αυτορρύθμισης. Ας σημειωθεί ότι τέτοιες δραστηριότητες υποστηρίζονται από εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας και στοχευμένα ερωτήματα. Σε γενικές γραμμές οι γνωστικές απαιτήσεις των δραστηριοτήτων κυμαίνονται στο ίδιο επίπεδο όπως και στις αντίστοιχες του Cambridge.Για παράδειγμα σε δραστηριότητες όπου η κύρια μαθηματική διεργασία είναι η αναγνώριση και περιγραφή των γεωμετρικών μετασχηματισμών με αναφορά σε χαρακτηριστικά όπως το μέτρο και η γωνία στροφής, το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων είναι μεσαίο-υψηλό αφού για την επίλυση τους είναι αναγκαία η ανάκληση των κρίσιμων μαθηματικών ιδιοτήτων των μετασχηματισμών. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αλγεβρική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών συνιστά μια επιπλέον μαθηματική διεργασία με υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων καθώς απαιτεί όχι μόνο την διαπίστωση μιας κανονικότητας αλλά και τη μαθηματική περιγραφή της. Τέτοιες δραστηριότητες θα λέγαμε ότι εγείρουν περισσότερο τον δημιουργικό συλλογισμό. Συνολικά θα παρατηρήσουμε ότι τα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου προσφέρουν αρκετές ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές αφού περιλαμβάνουν αρκετά διερευνητικά ερωτήματα που εγείρουν τον συνθετικό τρόπο σκέψης. Παράλληλα η ποικιλία των διαφορετικών διεργασιών που απαιτούνται διαμορφώνει ένα πλούσιο περιβάλλον μάθησης για τους μαθητές.

Προχωρώντας τέλος στα σχολικά εγχειρίδια της σειράς Math make sense θα παρατηρήσουμε ότι οι διάφορες δραστηριότητες παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλομορφία ως προς τις μαθηματικές διεργασίες που εγείρουν και κατ' επέκταση ως προς τις γνωστικές τους απαιτήσεις.

Εδώ θα εντοπίσουμε αρκετά διερευνητικά ερωτήματα που αφορούν τον έλεγχο και την αιτιολόγηση ισχυρισμών μέσω παραδειγμάτων, την διαπίστωση κανονικοτήτων και την διατύπωση ισχυρισμών αλλά και κιναισθητικές διεργασίες που σχετίζονται με την χρήση χειραπτικού υλικού. Όπως γίνεται αντιληπτό το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων σε τέτοιου είδους διεργασίες είναι υψηλό καθώς οι μαθητές ενθαρρύνονται να εμπλακούν σε κατεξοχήν μαθηματικές δραστηριότητες και να εγείρουν τόσο αλγοριθμικό συλλογισμό όσο και δημιουργικό συλλογισμό προκειμένου να επιτύχουν τις απαραίτητες συνδέσεις. Αξίζει να επισημάνουμε ότι ακόμη και κατεξοχήν αλγοριθμικές διεργασίες όπως η εφαρμογή μετασχηματισμών ή η αναγνώριση και περιγραφή μετασχηματισμών έχουν μεσαίο-υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων ενώ θα πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι ένα μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων αφορούν τη δημιουργία μοτίβων ή σχεδίων με εφαρμογή μετασχηματισμών γεγονός που εγείρει τον δημιουργικό συλλογισμό. Συνολικά οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν τα εν λόγω εγχειρίδια είναι πλούσιες αν λάβουμε υπόψιν μας ότι εμπλέκουν τους μαθητές σε μεγάλο βαθμό σε υψηλού επιπέδου μαθηματικές διεργασίες.

5.3 Ευκαιρίες μάθησης και τα είδη των συνδέσεων που επιτυγχάνονται μέσα από τις δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών στα σχολικά εγχειρίδια.

Ολοκληρώνοντας τη συζήτηση των αποτελεσμάτων θα εξετάσουμε τα είδη των συνδέσεων που ενθαρρύνονται μέσω των δραστηριοτήτων γεωμετρικών μετασχηματισμών. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι μέσω της επιλογής δραστηριοτήτων που επιχειρούν συνδέσεις εντός και εκτός του μαθηματικού πλαισίου, τα σχολικά εγχειρίδιά διαμορφώνουν ένα περιβάλλον μάθησης πλούσιο σε ευκαιρίες για γνήσια εμπλοκή των μαθητών σε κατεξοχήν μαθηματική δραστηριότητα. Στην ίδια κατεύθυνση σύμφωνα με το Principles and Standards for School Mathematics μέσω των δραστηριοτήτων που επιδιώκουν συνδέσεις «οι μαθητές θα αποκτήσουν μια πιο πλούσια κατανόηση των μαθηματικών και των εφαρμογών τους».
Έτσι στα σχολικά εγχειρίδια του Cambridge θα παρατηρήσουμε ότι οι δραστηριότητες γεωμετρικών μετασχηματισμών σε ελάχιστες περιπτώσεις εντάσσονται σε πλαίσιο γνήσια μη μαθηματικό. Όσον αφορά τις συνδέσεις εντός του μαθηματικού πλαισίου θα λέγαμε ότι εστιάζουν κυρίως σε θέματα όπως η έννοια του μοτίβου (patterns) ενώ σε δραστηριότητες μετασχηματισμού μεταφοράς επιδιώκεται η σύνδεση με τη μαθηματική έννοια του διανύσματος. Εκτός του μαθηματικού πλαισίου, αυτό που παρατηρήσαμε είναι ότι μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων αναπτύσσεται σ’

ένα τεχνητά δομημένο πλαίσιο που προσομοιάζει μια οικεία για τους μαθητές κατάσταση χωρίς όμως αυτό ν' αποτελεί στοιχείο που εξυπηρετεί στην επίλυση των δραστηριοτήτων. Εντούτοις σε κάποιες δραστηριότητες (slider puzzle) γίνονται συνδέσεις και εκτός του μαθηματικού πλαισίου. Σε αυτήν την δραστηριότητα η επιλογή του πλαισίου εξυπηρετεί τους μαθηματικούς σκοπούς της δραστηριότητας και είναι αναγκαίο αφού απαιτείται από τους μαθητές λογικός συλλογισμός εντός του πλαισίου για την κατανόηση και την επίλυση του προβλήματος.

Στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου οι συνδέσεις που επιχειρούνται εντός των Μαθηματικών αφορούν την αλγεβρική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών μέσω της μελέτης της σχέσης συμμεταβολής των αντίστοιχων σημείων στο αρχικό σχήμα και την εικόνα του. Από την άλλη πλευρά οι συνδέσεις με καταστάσεις και εμπειρίες της πραγματικής ζωής είναι ελάχιστες. Η κυριότερη σύνδεση που γίνεται είναι με το πεδίο της Τέχνης και συγκεκριμένα μέσα από την μελέτη έργων Τέχνης του εικαστικού Escher. Η επιλογή αυτού του πλαισίου και εδώ εξυπηρετεί τους διδακτικούς σκοπούς της δραστηριότητας αφού οι μαθητές επιδιώκεται ν' απαγκιστρωθούν από το πραγματικό πλαίσιο στο οποίο τίθεται το πρόβλημα και να διακρίνουν τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν τα σχήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι και εδώ είναι έντονη η παρουσία δραστηριοτήτων που αναπτύσσονται σε ένα πλαίσιο το οποίο αν και προσομοιάζει μια πραγματική κατάσταση εντούτοις είναι επιφανειακή χωρίς να έχει κάποια πρόσθετη παιδαγωγική αξία.

Τέλος στα σχολικά εγχειρίδια του Καναδά οι συνδέσεις που εντοπίζονται εντός και εκτός του μαθηματικού πλαισίου παρουσιάζουν ενδιαφέρον και εντάσσονται σε κάθε φάση της διδασκαλίας ήδη από την εισαγωγή των εννοιών. Εντός των Μαθηματικών οι κυριότερες συνδέσεις αφορούν τις έννοιες του γεωμετρικού μοτίβου, του διανύσματος ενώ σε αρκετές δραστηριότητες υπονοούνται συνδέσεις με την έννοια της ισότητας επίπεδων σχημάτων. Τέλος μια κατηγορία δραστηριοτήτων που συναντάμε επιχειρεί τη σύνδεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με την Άλγεβρα και ιδιαίτερα την έννοια της συνάρτησης.

Από την άλλη πλευρά εκτός του μαθηματικού πλαισίου θα παρατηρήσουμε αρχικά ότι επιχειρείται σύνδεση με την φυσική έννοια της κίνησης μέσα από οικεία παραδείγματα όπως η ολίσθηση σε τσουλήθρα κλπ. που στοχεύει στην πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τη μελέτη των μετασχηματισμών καθώς και την αισθητοποίηση τους. Ακόμη είδαμε ότι τη χρήση χειραπτικού υλικού επιδιώκεται η δημιουργία πραγματικών εμπειριών στους μαθητές με καθοδηγούμενο τρόπο τις οποίες θα μπορούν να επικαλεστούν σε διάφορες φάσεις της μάθησης. Σημαντικό μέρος των δραστηριοτήτων αξιοποιεί έργα Τέχνης εστιάζοντας στην χρήση των μετασχηματισμών για την δημιουργία ψηφιδωτών, μωσαϊκών, patchwork και quilt . Εδώ οι όποιες συνδέσεις επιχειρούνται εξυπηρετούν την ανάγκη ενίσχυσης της θεώρησης των Μαθηματικών ως χρήσιμου εργαλείου με ποικίλες εφαρμογές.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education—A review. *Educational studies in mathematics*, 11(3), 257-269.

Boulter, D. & Kirby, J. (1994). Identification of strategies used in solving transformational geometry problems. *Journal of Educational Research*, 87 (5), 298-303

Cambridge Primary Mathematics Curriculum Framework (2013), *Cambridge University Press*

Cambridge Primary Mathematics Stage 5 Learner's Book (2014) by Emma Low (Author), *Cambridge University Press*

Cambridge Primary Mathematics Stage 6 Learner's Book (2014) by Emma Low (Author) *Cambridge University Press*

Clements, D. H. (1998). Geometric and Spatial Thinking in Young Children.

Doerr, H.M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics,* 62, 3–24

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.*), Handbook of research on mathematics teaching and learning.* 65-97. New York: McMillan

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behaviour,* 22 (1), 55-72

Fan, L., & Zhu, Y., Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions, *ZDM Mathematics Education*, 45, 633–646

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. In A. C. Porter & A. Gamoran (Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (pp. 231–266). Washington, D.C.: National Academy Press.

Flores, A. & Yanik, H. B. Geometric translations: an interactive approach based on students' concept images. *North American GeoGebra Journal,* 5 (1)

Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. Journal for Research in Mathematics Education, 7 (1), 40-52.

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM Mathematics Education*, 49 (6), 937–949

Math Makes Sense 5 (2005), *Pearson*

Math Makes Sense 6 (2005), *Pearson*

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 5-9*, 83-92.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nicol, C., & Crespo, S. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: how preservice teachers interpret and use curriculum materials, *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331–355

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 33(5), 158–175

Portnoy, N., Grundmeier, T.A, & Grahama, K. J. (2006). Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 196–207

Popkewitz, T. (1988). Institutional issues in the study of school Mathematics: Curriculum research. *Educational Studies in Mathematics,* 19, 221-249

Remillard, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula. *Review of Educational Research,* 75 (2), 211–246

Remillard, J. T., & Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM Mathematics Education,* 46, 705–718

Remillard, J., Kim O.-K. (2017). Knowledge of curriculum embedded mathematics: Exploring a critical domain of teaching. *Educational Studies in Mathematics*

Sinclair, N., & Bruce, C. D (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*, 47, 319–329

Stein, M. K., & Henningsen, M. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28 (5), 524–549

Stouraitis, K., Potari, D., Skott, J. (2017). Contradictions, dialectical oppositions, and shifts in teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 95. 203-217.

The Ontario Curriculum Grades 1-8 (2005), *Ministry of Education.*

Thaqi, X., Gimenez, J. & Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. *In Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, February 2011

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and Student achievement. *Studies in Educational Evaluation* 31, 315-327

Valero, P., (2007). A socio-political look at equity in the school organization of mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39, 225–233

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & M., Doorman, M. (2015). Opportunity-to-context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics,* 89, 41–65

Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D., Gagatsis, A. (2014). Primary school students’ structure and levels of abilities in transformational geometry

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers’ preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, 78, 231–260

Yanik, H. B. & Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior,* 28 (1), 41-57

Μαθηματικά Ε’ Δημοτικού -Μέρος 4, (2016), *Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.*

Μαθηματικά Στ’ Δημοτικού -Μέρος 6, (2017), *Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

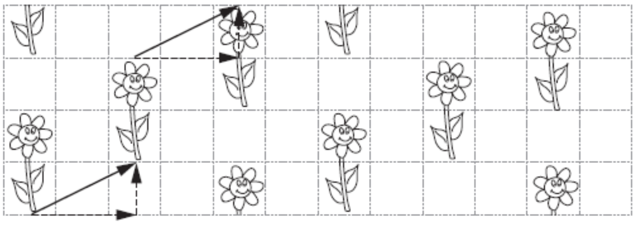
Πρόγραμμα σπουδών Μαθηματικών, (2010) Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

[Η κωδικοποίηση των δραστηριοτήτων ακολουθεί τη σειρά με την οποία έγινε η αρχική μελέτη και παρουσίαση τους αναφορικά με τα μαθηματικά τους χαρακτηριστικά Στο παράρτημα δε μεταφέραμε όλες τις δραστηριότητες των αντίστοιχων μαθημάτων από τα σχολικά εγχειρίδια αλλά μόνο αυτές στις οποίες έγινε αναφορά στις προηγούμενες ενότητες.]

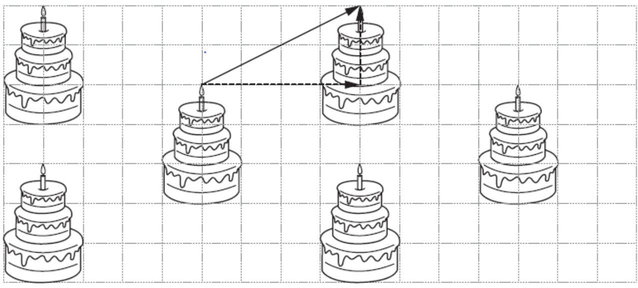
<u>Δραστηριότητες από τη σειρά εγχειριδίων Cambridge Primary Maths</u>

CB_Δ1
This is a pattern that uses translation.



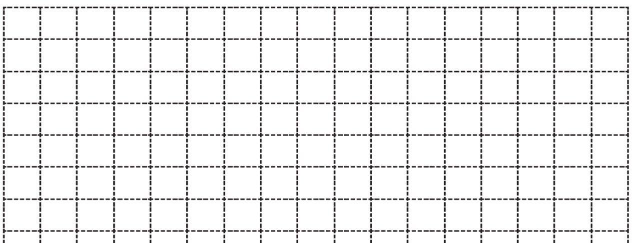
The pattern is made by translating the picture diagonally to the right and up.
Each part of the picture is translated 2 cm right and 1 cm up.
Check that all of the plants have been translated in the same way: choose the tip of a leaf on one of the plants and measure 2 cm to the right and1 cm up. You should be at the same point on a different plant.

CB_Δ2



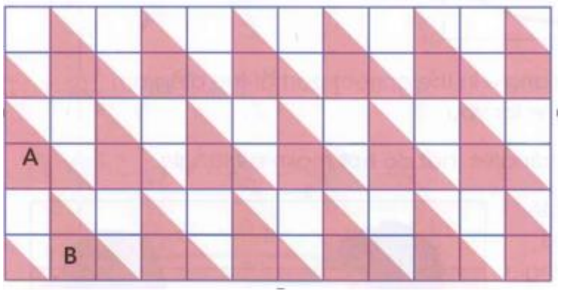
Complete the translation pattern on the birthday cake wrapping paper below.
Make sure that each part of the cake is translated in the same way.

CB_Δ3
Make your own pattern by translating a picture.



CB_Δ4

The pattern below is made on a grid of centimetre squares.



a) Look at the middle row of triangles. Each triangle is translated right to make the pattern. How many centimetres is each triangle translated to the right?

b) Describe the translation that moves triangle A to triangle B.

CB_Δ5

Slider puzzle

What to do:

· Cut out the grey rectangles for Puzzle 1 and arrange them as shown.

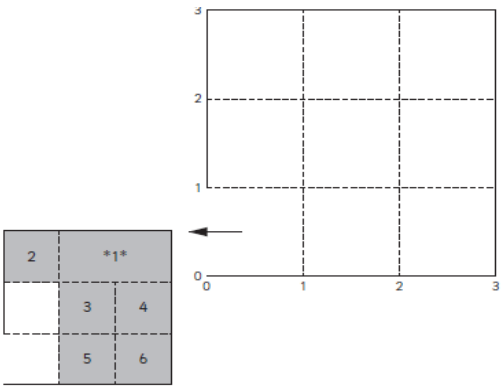
· One learner gives instructions for their partner to follow, to slide the pieces within the grid so that the piece marked '*1*' can slide out of the grid at the arrow.

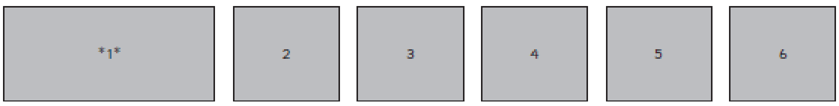
The instructions should be like this:

"Move piece number 5 minus 1 horizontally."

"Move piece number 5 plus 1 vertically."

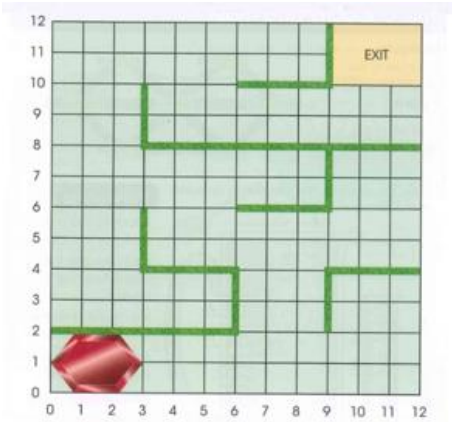
· Pieces cannot go over the solid line or any part of another piece.





CB_Δ6

Use a translation to move the hexagon through the maze to the EXIT. Write a set of instructions.

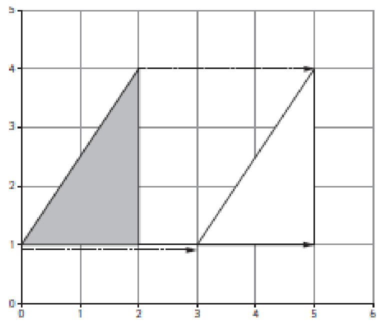


CB_Δ7

This triangle has moved +3 horizontally.

Each corner on this triangle has moved 3 squares to the right.

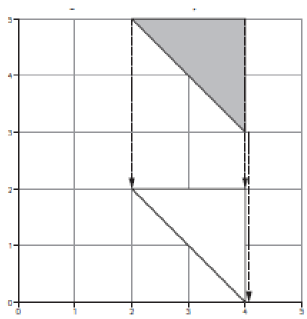
What are the coordinates of the grey triangle and the white triangle? What do you notice?



This triangle has moved −3 vertically.

Each corner on this triangle has moved 3 squares down.

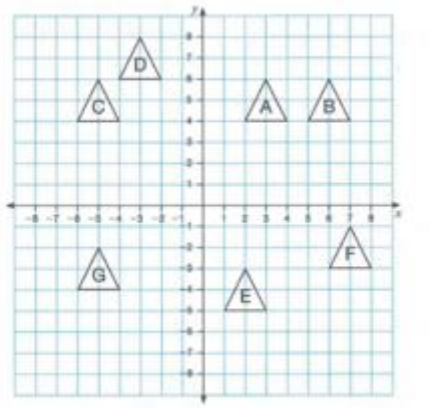
What are the coordinates of the grey triangle and the white triangle? What do you notice?



CB_Δ8

Look at the co-ordinate grid.Describe the following translations:

a) A to B
b) B to F
c) A to C
d) G to F
e) F to E
f) E to B
g) D to G



CB_Δ9

Draw axes from -8 to 8 on squared paper.Draw a trapezium with co-ordinates (2,1), (4,1), (4,5) and (2,3).Label it X.

Translate X to a new position following these rules.

(a) To A by translating +3 in the x-direction
(b) To B by translating -6 in the y-direction
(c) To C by translating -6 in the x-direction and -4 in the y-direction
(d) To D by translating -7 in the x- direction and +3 in the y-direction

Write down the co-ordinates for shapes A, B,C and D.

CB_Δ10

The dashed lines represent mirror lines.

1. Choose a triangle. Predict where the reflected shape would be for each mirror line.

Draw the image using a ruler and label it P.

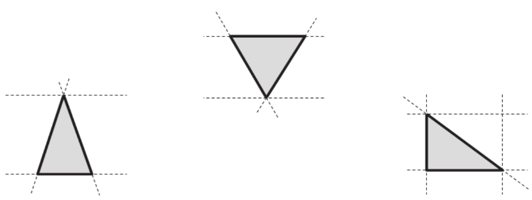
2. Now check your predictions. Place a mirror along each of the dashed lines in turn. Look at how the triangle is reflected.

3. Tick the images that you predicted correctly. Draw the reflections you did not predict correctly.

4. Experiment with the mirror along different dashed lines (try lines that are not parallel to a side).

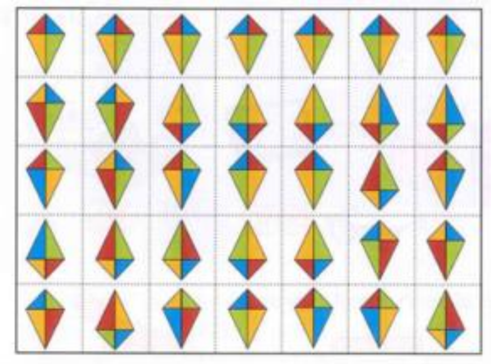
5. Try to draw some more reflections.

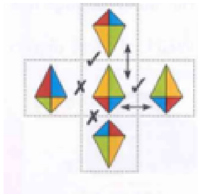
6. Repeat with another triangle.



CB_Δ11

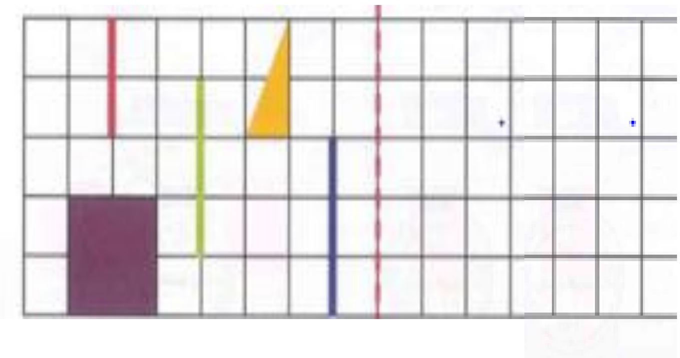
Find a path through the grid to the bottom row. Start at a kite in the top row. You can move to a next-door kite, if it is a reflection of the kite, you are on. The kite can be a reflection in a horizontal or vertical mirror line.





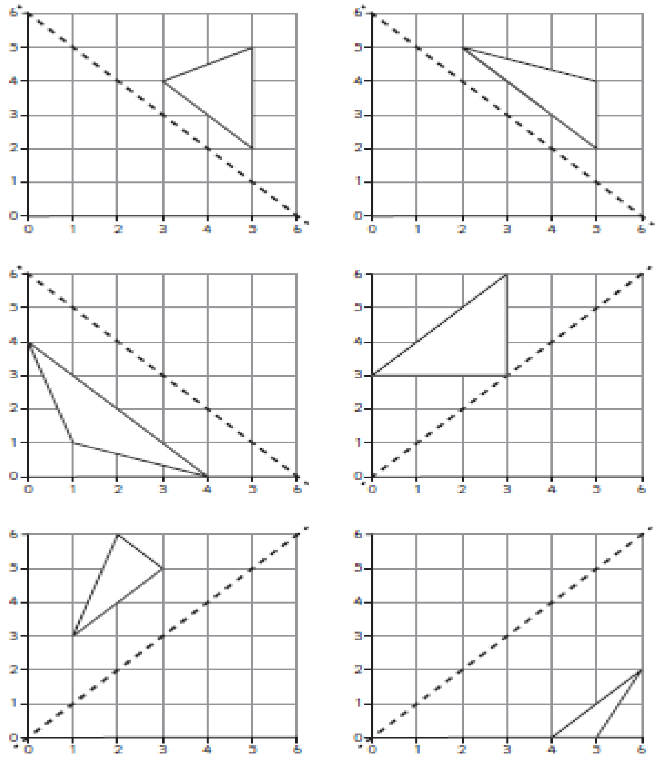
CB_Δ12

Copy the coloured lines, shapes and mirror line onto square paper. Reflect each of the coloured lines and shapes in the mirror line.



CB_Δ13

Reflecting triangles



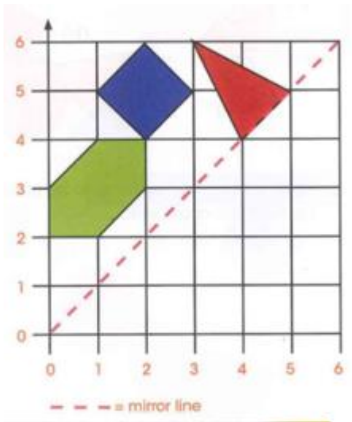
CB_Δ14

For each of these questions, try to visualise where the reflection would be first. Then use a mirror of tracing paper to check. What are the co-ordinates of the:

(a) Isosceles triangle when it is reflected in the mirror line?

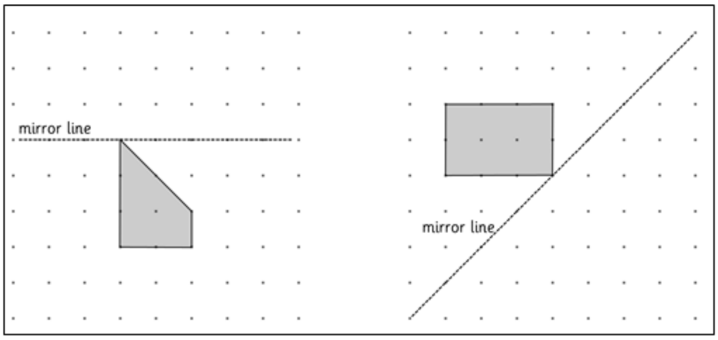
(b) Square when it is reflected in the mirror line?

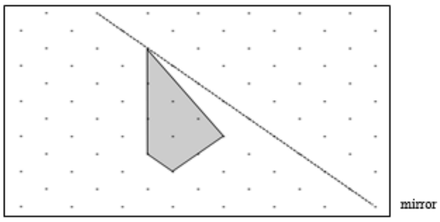
(c) Hexagon when it is reflected in the mirror line?



CB_Δ15

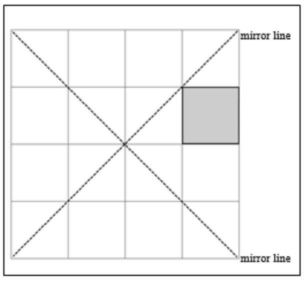
First predict where you think the reflection of each shape will be in the mirror line. Then draw it by looking at the points.





CB_Δ16

Here is a shaded square on a grid. Shade in three more squares so that the design is symmetrical in both mirror lines.



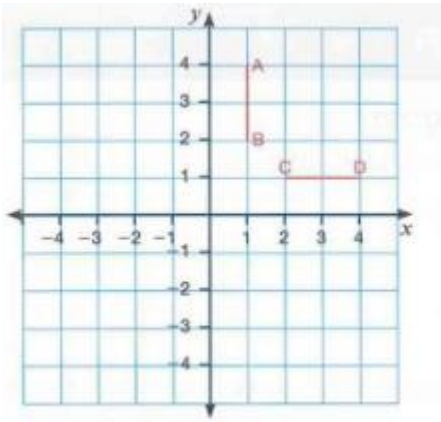
CB_Δ17

The line AB is a reflection of the line CD in a mirror line.

Draw the diagram and mark in the mirror line.

List all the points with whole number co-ordinates on the mirror line.

What do you notice about the co-ordinates of these points?



CB_Δ18

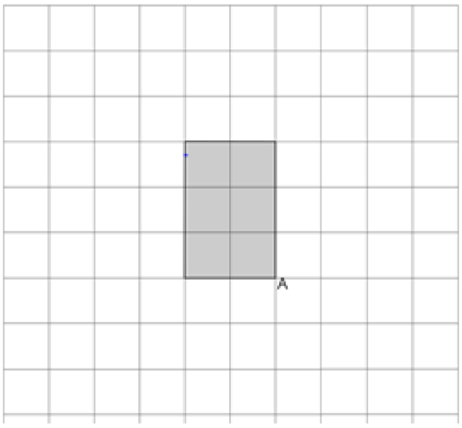
(a) Draw a grid with x and y axes from -4 to +4. Join the point (-4, 4) to the origin (0,0).Reflect this line in the y-axis. Then reflect the line and its image in the x-axis. What mathematical sign have you made?

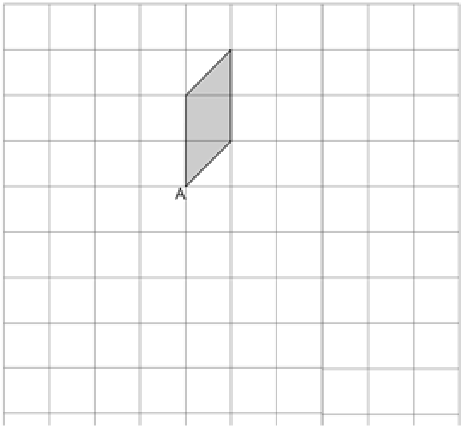
(b) Write instructions to make an addition sign using a line and reflecting it in different ways.

CB_Δ19

Rotate the rectangle 90° clockwise about point A.

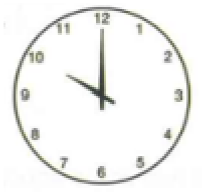
Rotate the parallelogram 90° clockwise about point A.





CB_Δ20

The hour hand on an analogue clock points to 10.It turns through 90° clockwise. What number does it point to?

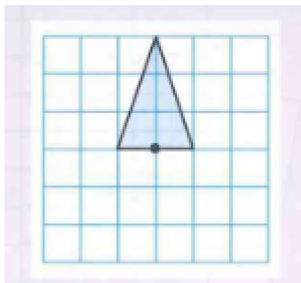


CB_Δ21

Look at the isosceles triangle drawn on a grid.

Rotate the triangle 90 clockwise about the ●

Draw the image. Continue rotating the triangle twice more. What shape have you made?

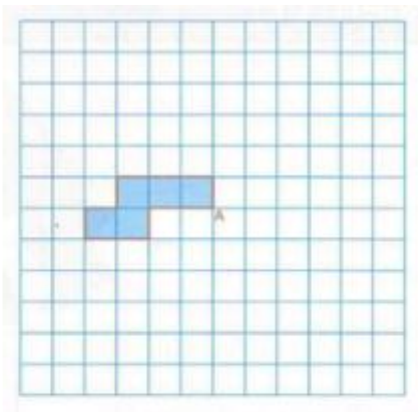


CB_Δ22

The diagram shows an octagon on a 12 by 12-square grid. Copy the shape onto squared paper.

Rotate the octagon 90 clockwise about point A and draw the image.

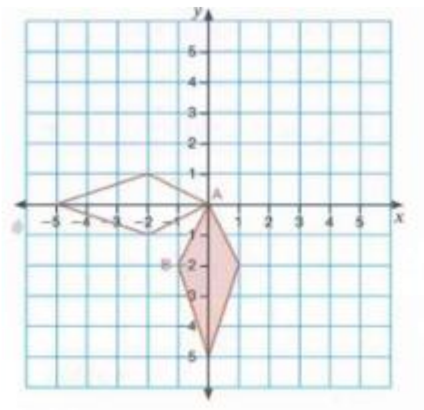
Rotate the new image 90 clockwise about point A again two more times each time drawing the image.



CB_Δ23

Look at the shaded shape on the grid.

The shape is rotated 90 clockwise. Point A stays in the same place but point B moves. What are the co-ordinates of the image of point B?



CB_Δ24

Here is a co-ordinate grid.

Plot the points (2, 0), (4, 2), (2, 4) and (0, 2).

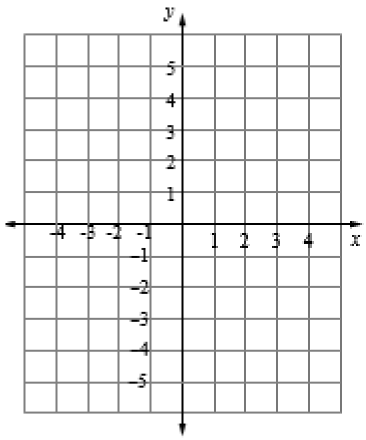
Join them to form a square.

Reflect the square in the *y*-axis

Reflect both the original square and its image in the *x*-axis.

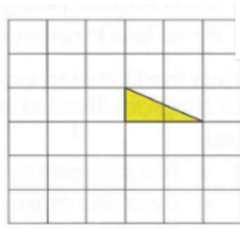
You should have a pattern made of four squares.

Start with the original square and find different ways of producing the same pattern of four squares. You could try using reflections, rotations and translations. Explain your findings.



CB_Δ25

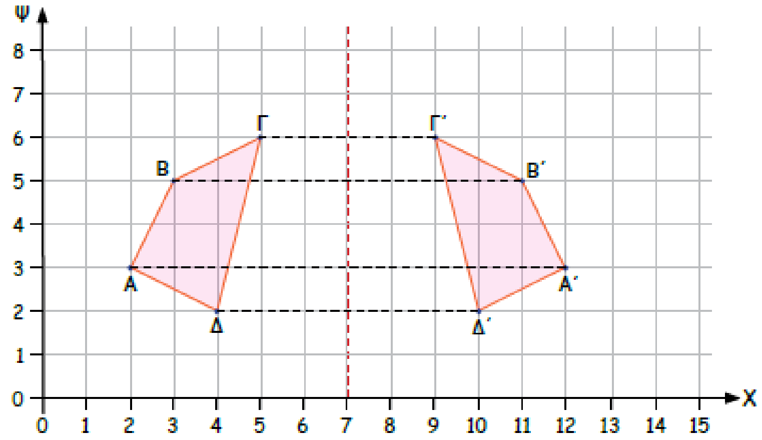
Draw a triangle on a six by six grid. Reflect it, translate it and rotate it until you have a design you think is attractive or interesting.



<u>Δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου</u>

CY_Δ1

Στο πιο κάτω πλέγμα η κόκκινη γραμμή είναι άξονας συμμετρίας.

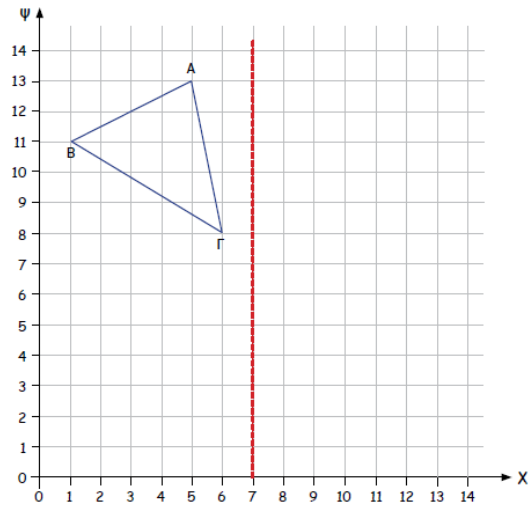


(α) Να σύρεις τις κορυφές του τετράπλευρου ΑΒΓΔ σε διαφορετικές θέσεις, χρησιμοποιώντας το εφαρμογίδιο. Τι παρατηρείς;

(β) Να συγκρίνεις τα σχήματα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' ως προς τη μορφή, το μέγεθος και τη θέση τους. γ) Τι παρατηρείς ως προς την απόσταση των πιο κάτω σημείων από τον άξονα συμμετρίας:

Α και Α'   Β και Β'   Γ και Γ'   Δ και Δ'

(δ)Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι ο άξονας συμμετρίας. Να σχεδιάσεις το συμμετρικό του σχήματος. Να σημειώσεις τις συντεταγμένες των κορυφών των δύο σχημάτων.

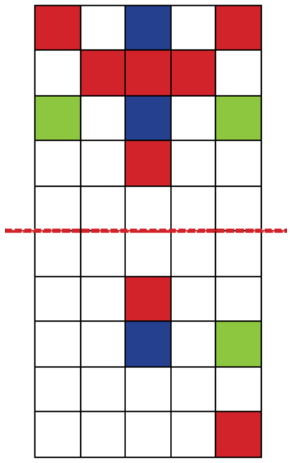


Α(,) Β(,) Γ(,)

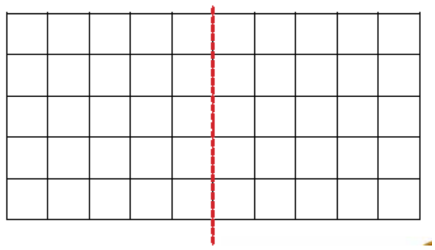
Α΄(,) Β΄(,) Γ΄(,)

CY_Δ2

(α) Να συμπληρώσεις το πιο κάτω σχέδιο, ώστε να είναι συμμετρικό με άξονα συμμετρίας τη διακεκομμένη γραμμή

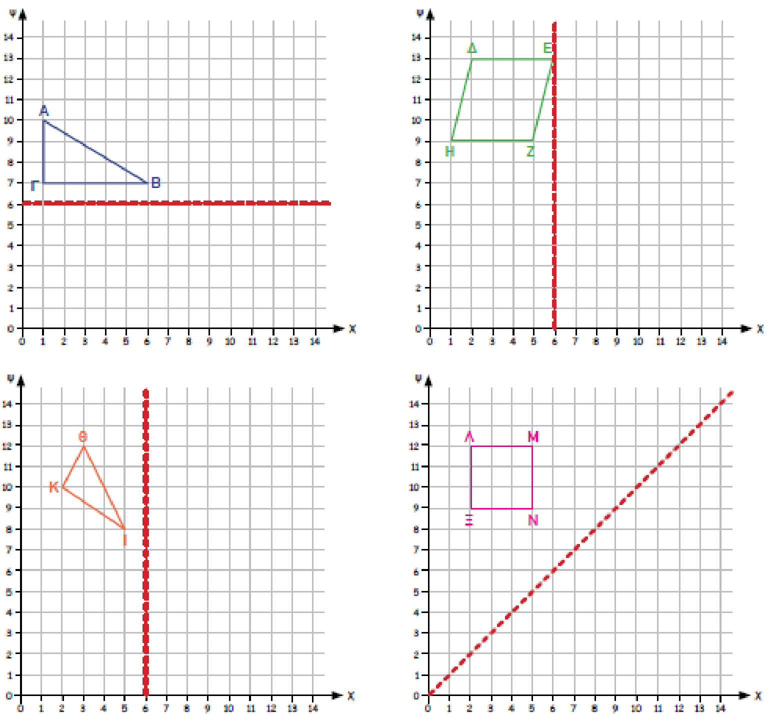


(β) Να κατασκευάσεις ένα δικό σου σχέδιο και το συμμετρικό του, με άξονα συμμετρίας τη διακεκομμένη γραμμή.



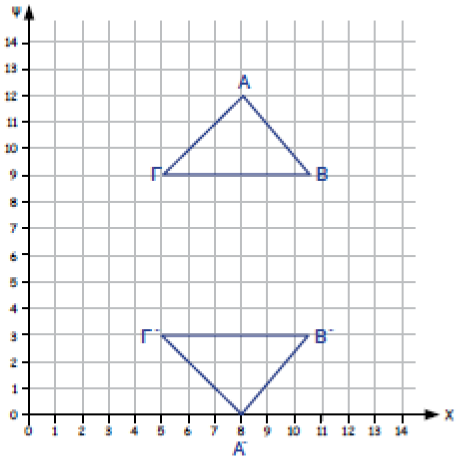
CY_Δ3

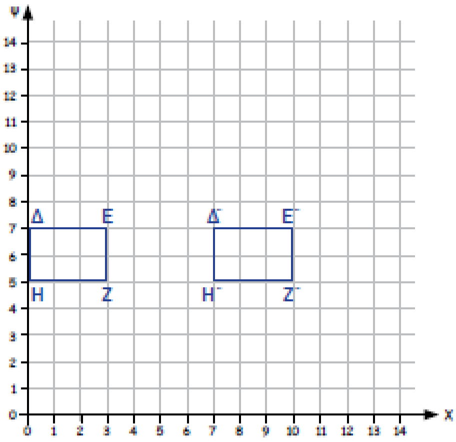
Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι άξονας συμμετρίας. Να σχεδιάσεις το συμμετρικό του κάθε σχήματος.



CY_Δ4

Να κατασκευάσεις τον άξονα συμμετρίας σε κάθε περίπτωση.

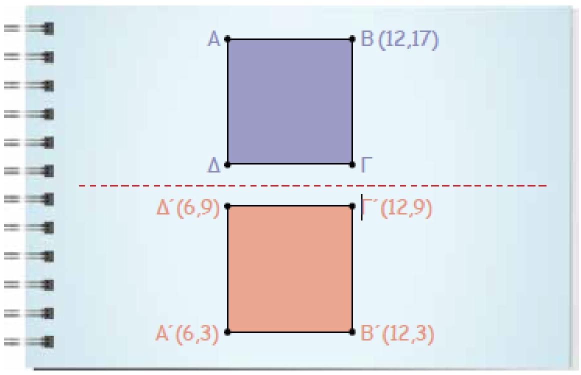




CY_Δ5

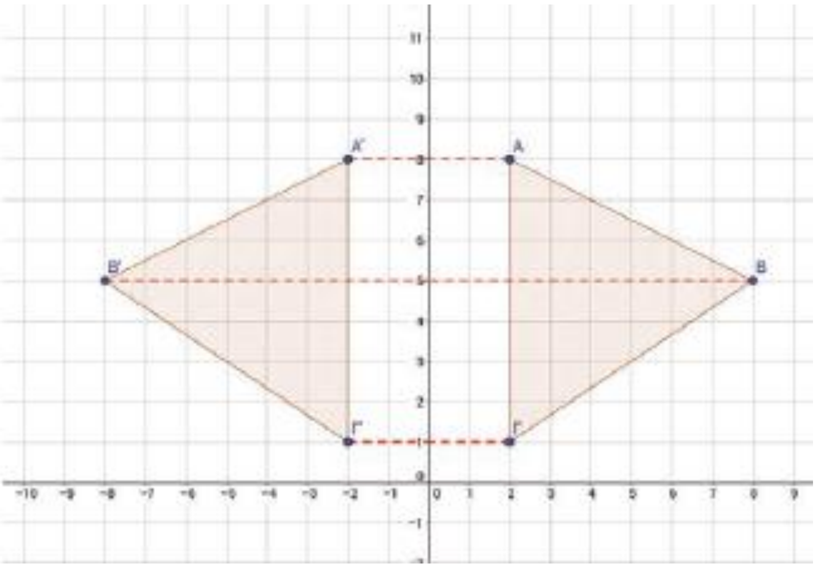
Το τετράγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι το συμμετρικό του τετραγώνου ΑΒΓΔ, με άξονα συμμετρίας τη διακεκομμένη γραμμή.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Γ και Δ; Να επεξηγήσεις.



CY_Δ6

Τάσος και η Νίκη εργάζονται στο πιο κάτω εφαρμογίδιο. Τα σχήματα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι συμμετρικά με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα.



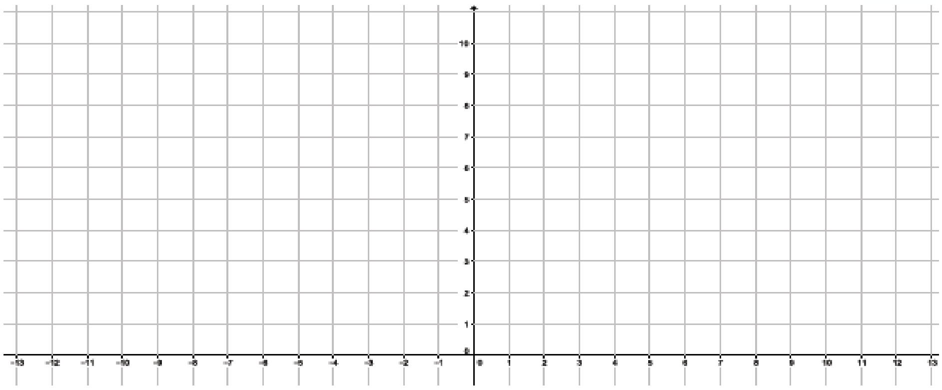
(α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών των σχημάτων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.
Α (,) Β (,) Γ (,)
Α΄ (,) Β΄(,) Γ΄ (,)
(β) Να γράψετε την απόσταση των πιο κάτω σημείων από τον άξονα συμμετρίας.
Τι παρατηρείτε;

Α ____________ Α΄ ____________	Β ____________ Β΄ ____________	Γ ____________ Γ΄ ____________

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να σύρετε τις κορυφές του σχήματος ΑΒΓ σε διαφορετική θέση. Να εξετάσετε κατά πόσο η παρατήρησή σας στο ερώτημα (β) ισχύει και σε άλλες περιπτώσεις συμμετρικών σχημάτων.

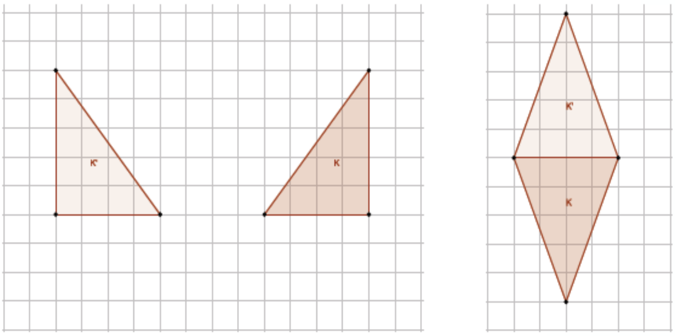
CY_Δ7

α) Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με συντεταγμένες:
Α (2,5) Β (6,5) Γ (6,2) Δ (2,2)



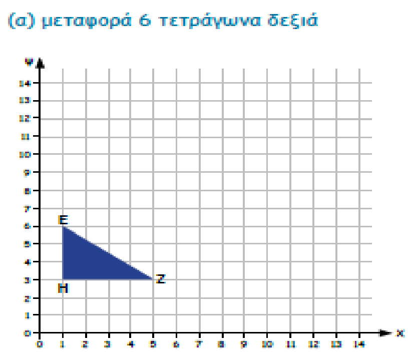
(β) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.
Α΄ (,) Β΄(,) Γ΄ (,) Δ΄ (,)

CY_Δ8
Το σχήμα Κ΄ είναι συμμετρικό του σχήματος Κ. Να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας σε κάθε περίπτωση.

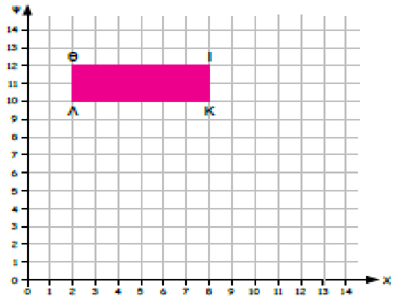


CY_Δ9
Ο Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972 μ.Χ.) ήταν Ολλανδός εικαστικός καλλιτέχνης. Στη γραφική του τέχνη, απεικόνιζε μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, των μορφών και του χώρου.
Να περιγράψεις τον τρόπο δημιουργίας των πιο κάτω σχεδίων στους πίνακες ζωγραφικής του Escher. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές εντοπίζεις στον τρόπο δημιουργίας τους

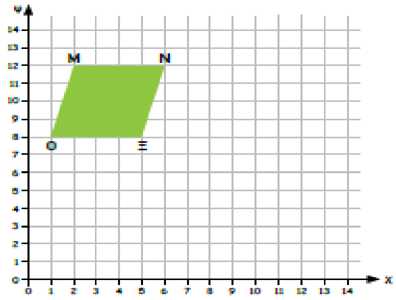
CY_Δ10
Να μεταφέρεις το αρχικό σχήμα σύμφωνα με τις οδηγίες, όπως στο παράδειγμα.



(β) μεταφορά 8 τετράγωνα κάτω

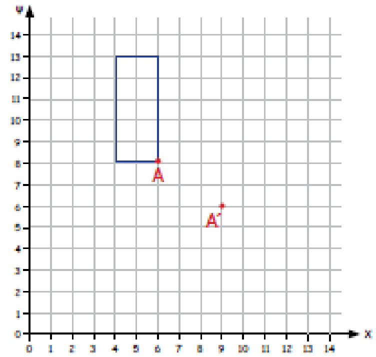


(γ) μεταφορά 3 τετράγωνα δεξιά
και 5 τετράγωνα κάτω

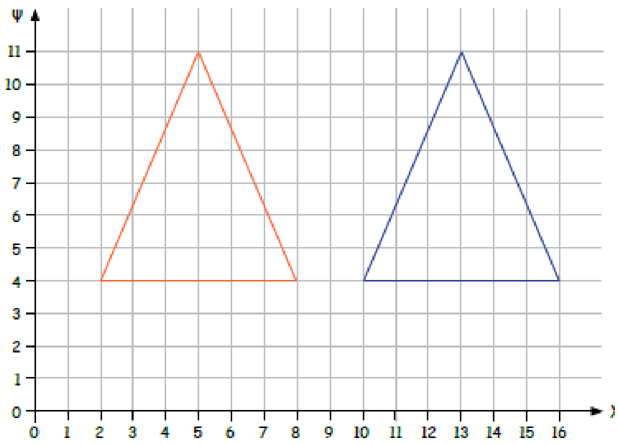


CY_Δ11

Να μεταφέρεις το ορθογώνιο ώστε η κορυφή Α να μετακινηθεί στο σημείο Α΄. Να περιγράψεις τον τρόπο που εργάστηκες.



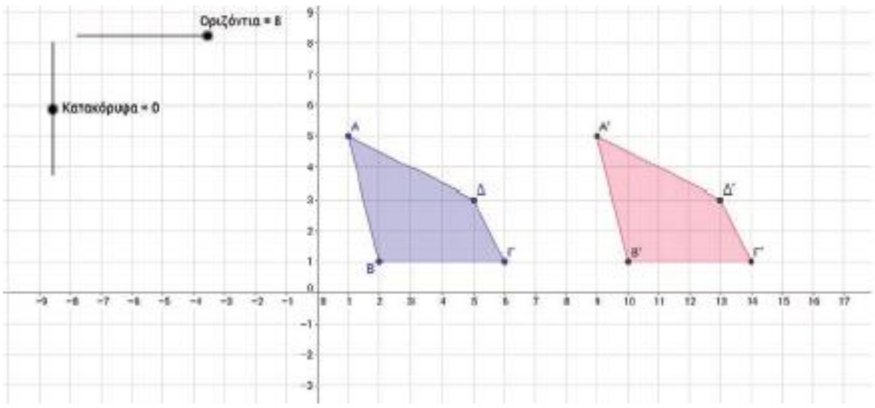
CY_Δ12



Με ποιο από τα δύο παιδιά συμφωνείς; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.

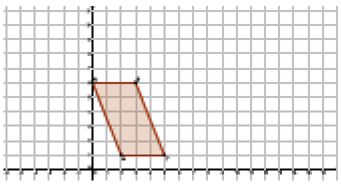
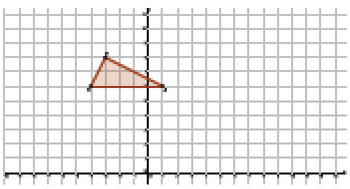
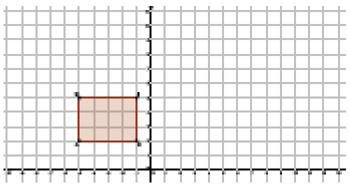
CY_Δ13

Η Πηνελόπη εργάστηκε με το πιο κάτω εφαρμογίδιο, για να μετακινήσει το σχήμα ΑΒΓΔ 8 τετράγωνα δεξιά. Από τη μεταφορά αυτή προέκυψε το σχήμα Α΄Β΄Γ΄Δ΄.



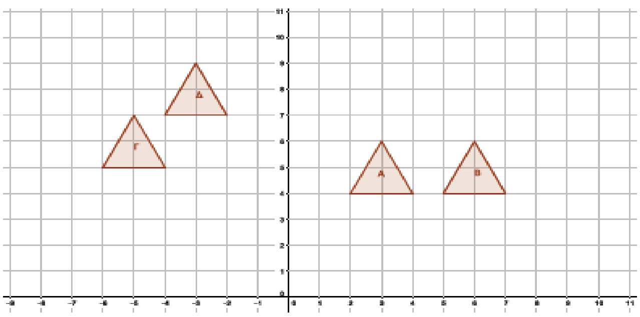
(α) Να συγκρίνετε τα δύο σχήματα ως προς τη μορφή, το μέγεθος και τη θέση τους.
(β) Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των πιο κάτω σημείων:
Α και Α΄ Β και Β΄ Γ και Γ΄ Δ και Δ΄
Τι παρατηρείτε;
(γ) Να χρησιμοποιήσετε τον δρομέα στο εφαρμογίδιο, για να μεταφέρετε το σχήμα ΑΒΓΔ:
(i) 3 τετράγωνα αριστερά
(ii) 2 τετράγωνα δεξιά
(iii) 2 τετράγωνα κάτω
Τι παρατηρείτε για την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Α΄, Β και Β΄, Γ και Γ΄ και Δ και Δ΄ σε κάθε περίπτωση;

CY_Δ14
Να κατασκευάσετε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού, αν το σχήμα μετακινηθεί:
(α) 5 τετράγωνα αριστερά (β) 3 τετράγωνα κάτω (γ) 6 τετράγωνα δεξιά και 2 τετράγωνα πάνω

CY_Δ15

Να συμπληρώσετε, όπως στο παράδειγμα.



Για να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο Α στο τρίγωνο Β:

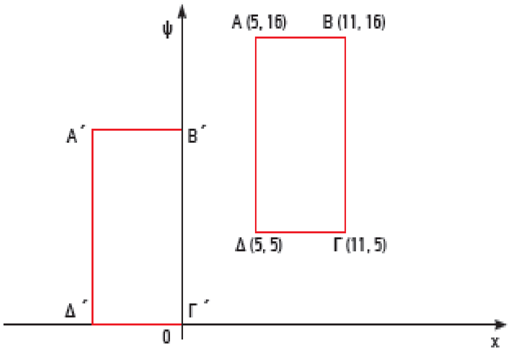
<u>Μετακινούμε κάθε σημείο του τριγώνου Α 3 μονάδες προς τα δεξιά.</u>

α) Για να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο Β στο τρίγωνο Γ
(β) Για να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο Γ στο τρίγωνο Δ

CY_Δ16

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει μεταφερθεί, ώστε το σημείο Γ΄ να βρίσκεται στο σημείο (0,0).

Να γράψετε τις συντεταγμένες του ορθογωνίου Α΄Β΄Γ΄Δ΄.



Α΄ (____, ____)

Β΄(____, ____)

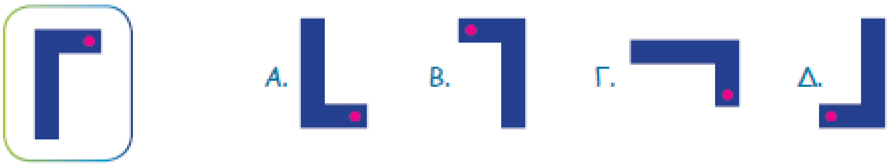
Γ΄ (____, ____)

Δ΄ (____, ____)

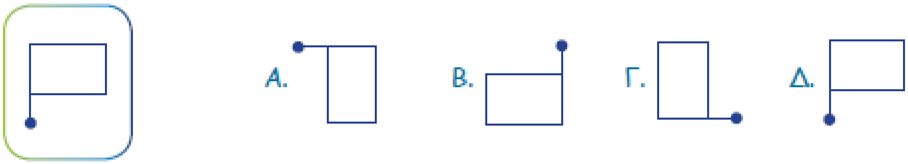
CY_Δ17

Να σημειώσεις την εικόνα που δείχνει το σχήμα, όταν περιστραφεί με τη φορά των δεικτών του ρολογιού κατά:

(α) 90°



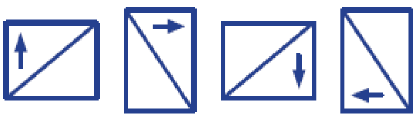
(β) 180°



CY_Δ18

Να διατυπώσεις τον κανόνα περιστροφής στα πιο κάτω μοτίβα:

(α)



Κανόνας:____

(β)

Κανόνας:____

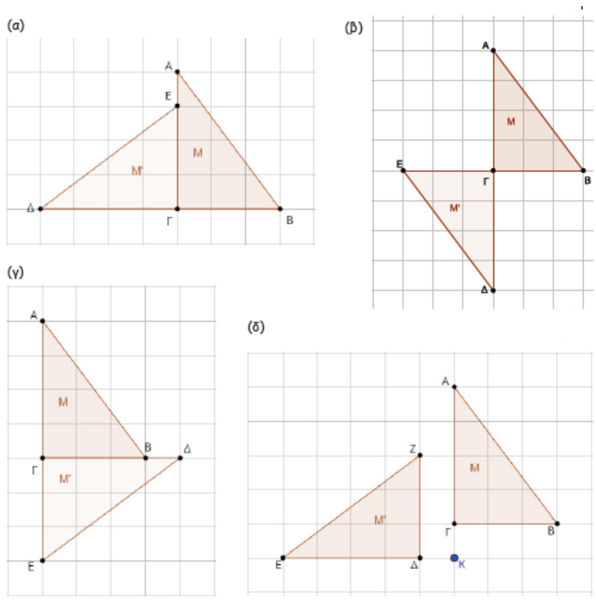
CY_Δ19

Πόσες μοίρες θα πρέπει να περιστραφεί με τη φορά των δεικτών του ρολογιού η εικόνα Α, ώστε να φαίνεται όπως την εικόνα Β

CY_Δ20

Να περιγράψετε την περιστροφή που εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να βρεθεί από τη θέση Μ στη θέση Μ΄.

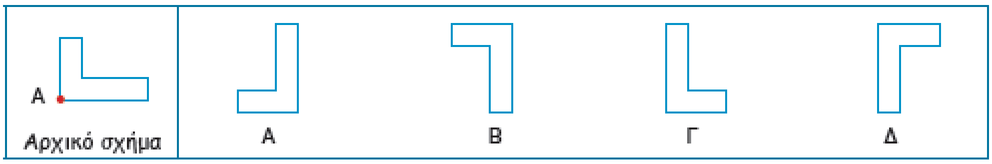
Να προσδιορίσετε το σημείο που αποτελεί το κέντρο της περιστροφής και τη γωνία περιστροφής.



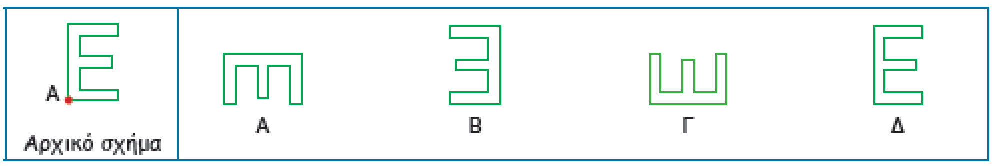
CY_Δ21

Να βάλετε σε κύκλο σχήμα που θα προκύψει, όταν το αρχικό σχήμα περιστραφεί γύρω από το σημείο Α:

(α) αριστερόστροφα κατά 90°

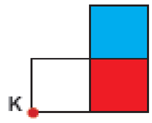


(β) δεξιόστροφα κατά 180°

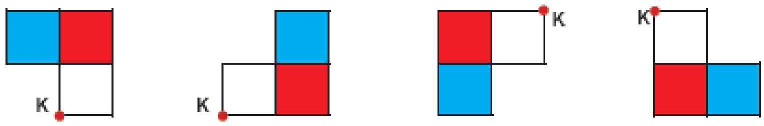


CY_Δ22

Το πιο κάτω σχήμα περιστράφηκε με κέντρο το σημείο Κ κατά 90° δεξιόστροφα.

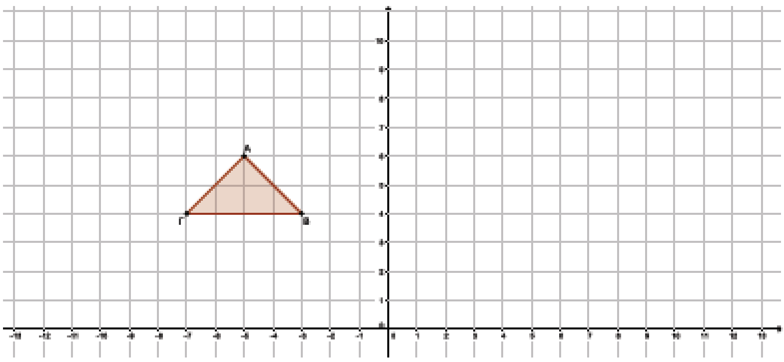


Να βάλετε σε κύκλο το σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή του.



CY_Δ23

Το σχήμα ΑΒΓ θα περιστραφεί δεξιόστροφα κατά 90° γύρω από το σημείο Β. Να σχεδιάσετε το σχήμα που θα προκύψει από την περιστροφή και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.



CY_Δ24

Ποια θέση θα έχει ο δείκτης του φούρνου όταν περιστραφεί 270° με τη φορά των δεικτών του ρολογιού;

Δραστηριότητες από τη σειρά Math make sense-Καναδάς

CA_Δ1

You will need pattern blocks, dot paper, and a ruler.

➤ Choose a pattern Block. Place it on the dot paper. Trace the block.

Slide the block in a straight line, in any direction. Do not turn the block.

Use a ruler if it helps. Trace the block in its new position.

How do the two positions of the block compare?

➤ Take turns to move a block and describe how its two positions compare.

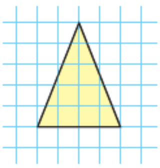
CA_Δ2

Copy each shape on grid paper. Use tracing paper. Translate the shape using the given translation.

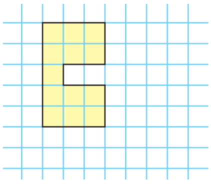
Draw the image and a translation arrow.

Describe the position and orientation of the image.

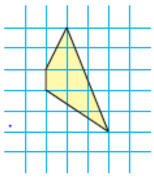
a) 7 squares left and 3 squares up



b) 5 squares right and 4 squares down



c) 3 squares left and 6 squares down

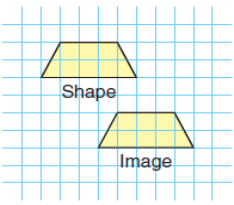


CA_Δ3

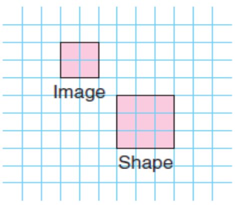
Does each picture show a translation? How do you know?

If a picture does show a translation, describe it.

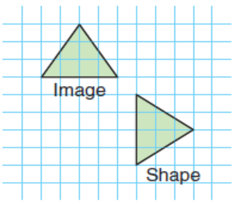
a)



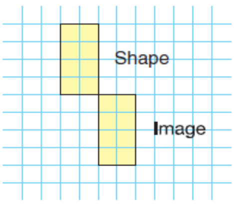
b)



c)



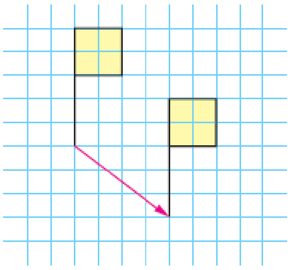
d)



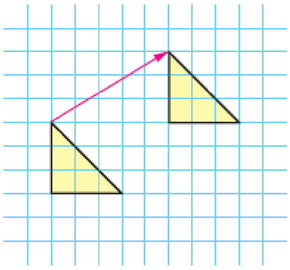
CA_Δ4

Write the translation that moved each shape to its image.

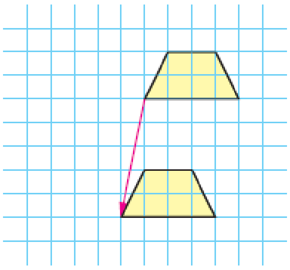
a)



b)



c)



CA_Δ5

a) Draw this shape on grid paper. Predict where the image will be after this translation:

3 squares left and 5 squares up. Draw the image to check your prediction.

b) Draw the shape again. Predict where the image will be after this translation:

5 squares left and 3 squares up. Draw the image to check your prediction.

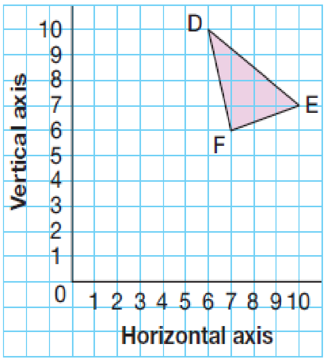
CA_Δ6

Copy this triangle on a grid.

a) Draw the image of _DEF after the translation 6 squares left and 1 square down.

b) Write the coordinates of the vertices of the triangle and its image. How are the coordinates related?

c) Another point on this grid is G (10, 2).Use your answer to part b to predict the coordinates of point G' after the same translation.



CA_Δ7

You will need Pattern Blocks, dot paper, a ruler, and a Mira.

➤ Draw a line through the centre of the dot paper. Place a Mira on this line.

➤ Place a block on one side of the line. Your partner places her block on the image she sees in the Mira.

➤ Take turns to place one block, then another block on its image. Each time, describe the position and orientation of the image.

➤Take turns to draw around a block and its image.

Draw around blocks that touch the Mira line.

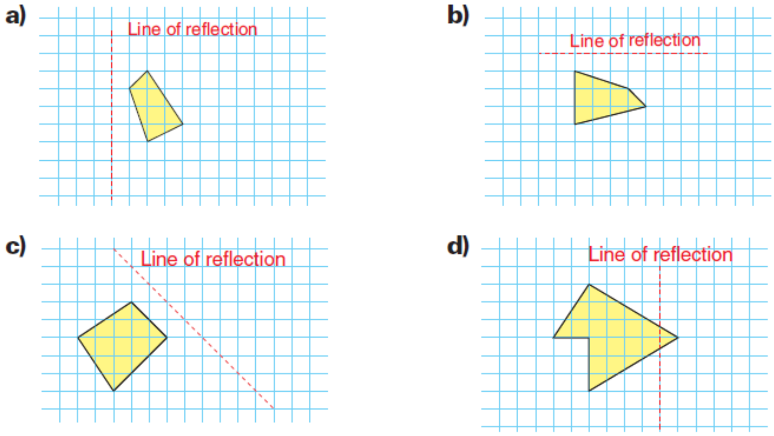
Draw around blocks that cross the Mira line.

In each case, how does the shape compare with its image?

CA_Δ8

Copy each shape and line of reflection on grid paper. Draw each reflection image.

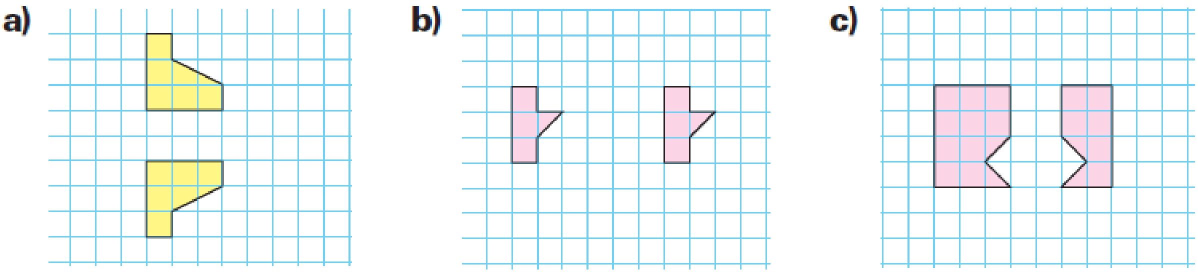
Describe the position and orientation of the image.



CA_Δ9

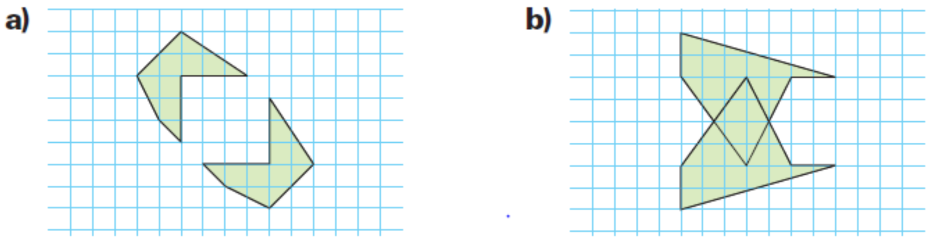
Which pictures show a reflection? How do you know?

Describe where the line of reflection is.



CA_Δ10

Each picture shows a shape and its reflection image.



Copy each picture on grid paper.

Draw the line of reflection. Explain how you did this.

How do you know the line of reflection is drawn correctly?

CA_Δ11

Print the letters of the alphabet as capital letters.

a) Draw a horizontal line above each letter. Place a Mira on the line. Which letters look the same in the Mira?

b) Draw a vertical line beside each letter. Place a Mira on the line.

Which letters look the same in the Mira?

c) Create three words whose images read the same as the words when a Mira is placed above the letters.

CA_Δ12

How are a translation and a reflection alike? Draw a shape and its image that could show both a reflection and a translation.

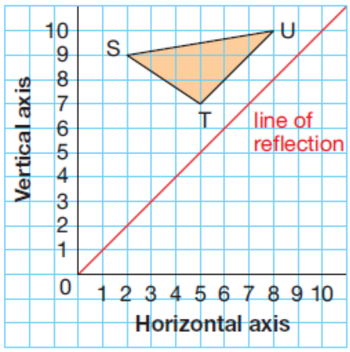
CA_Δ13

Copy this triangle on a coordinate grid.

a) Draw the image of ΔSTU after a reflection in the line of reflection.

b) Write the coordinates of the vertices of the triangle and its image. Describe how the positions of the vertices of the shape have changed.

c) Another point on this grid is V(4, 3). Predict the location of point V' after a reflection in the same line. How did you make your prediction?



CA_Δ14

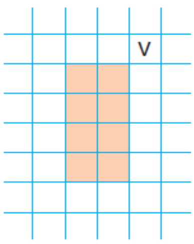
Copy each shape below on grid paper. For each shape:

• Rotate the shape about vertex V, using the rotation given.

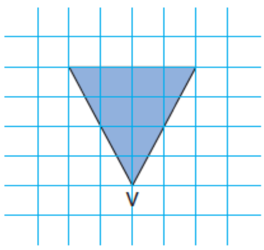
• Draw the rotation image.

• Describe the position and orientation of the image.

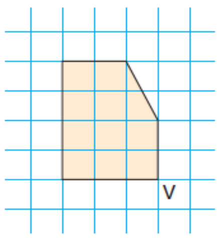
a) a $\frac{1}{4}$ turn counterclockwise



b) a $\frac{1}{2}$ turn clockwise



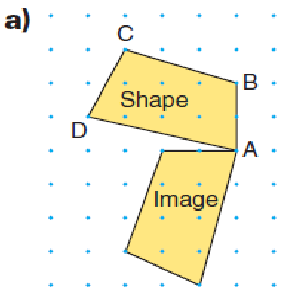
c) a $\frac{3}{4}$ turn clockwise

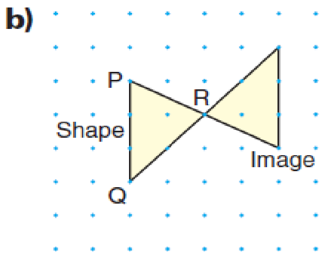


CA_Δ15

Each picture below shows a shape and its rotation image.

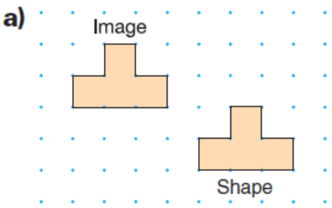
Describe the rotation. Include the direction of the turn.

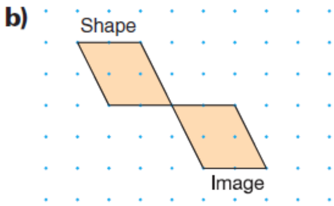


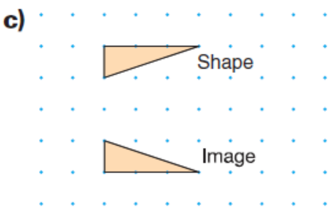


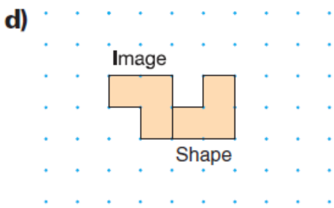
CA_Δ16

Which pictures show a rotation? How do you know? Describe the rotation.



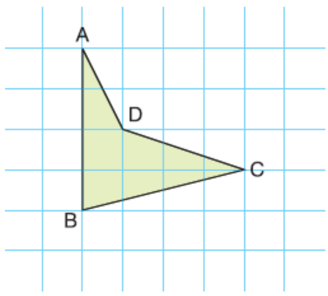






CA_Δ17

Copy this shape. Trace the shape on tracing paper. Use the tracing to rotate the shape. Predict the position of the image after each rotation below. Draw each image to check your prediction.



a) ¼ turn clockwise about vertex A.

b) ¾ turn counterclockwise about vertex A.

CA_Δ18

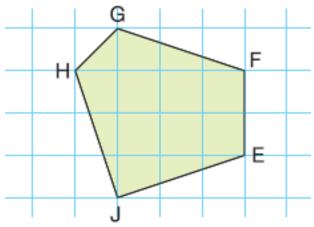
Copy this shape.

Use tracing paper to rotate the shape:

a) ½ turn clockwise about vertex E

b) ½ turn counterclockwise about vertex E

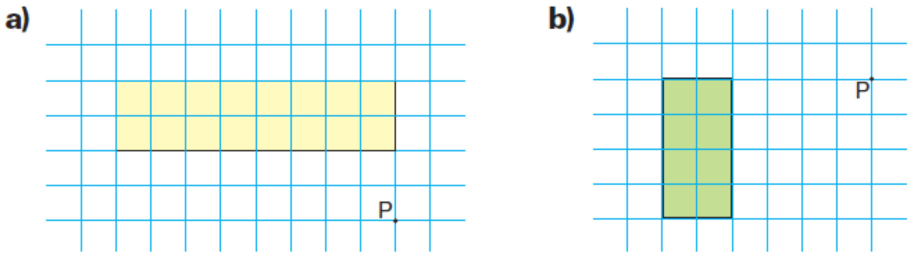
What do you notice about the rotation images?



CA_Δ19

Use tracing paper when needed. Copy each rectangle and point P on grid paper.

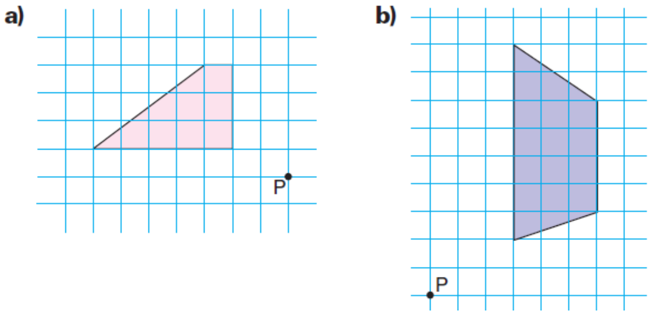
Draw each image after a ¼ turn clockwise about point P.



CA_Δ20

Copy each trapezoid and point P on grid paper.

Draw each image after a ½ turn clockwise about P.

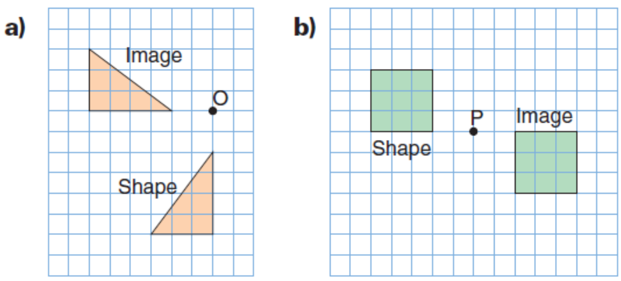


CA_Δ21

Describe each rotation.

Include:

- the fraction of the turn
- the point of rotation
- the direction



CA_Δ22

Copy this quadrilateral on a coordinate grid. Trace the quadrilateral on tracing paper.

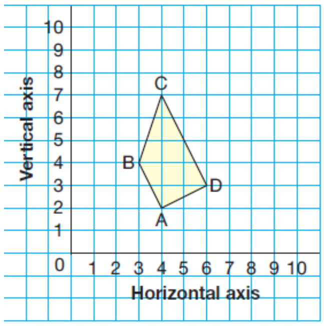
Draw the image of the quadrilateral after each rotation below.

Write the coordinates of the vertices.

a) 90° clockwise about vertex B

b) 270° clockwise about vertex B

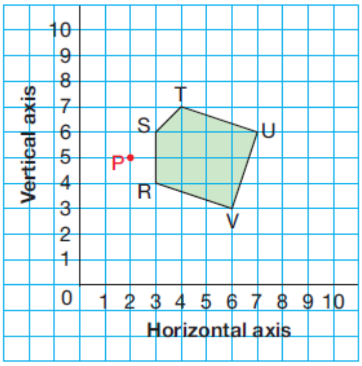
c) 270° counterclockwise about vertex B



CA_Δ23

Copy this pentagon on a coordinate grid.

Write the coordinates of each vertex. Rotate 90° counterclockwise about point A and draw the image. Write the coordinates of the vertices of the image. Describe how the positions of the vertices of the pentagon have changed.



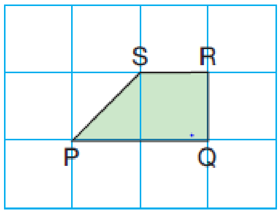
CA_Δ24

Copy this quadrilateral on grid paper. Make:

a) 3 successive translations of 1 square right and 2 squares up

b) 3 successive reflections in the line through SR

c) 3 successive rotations of 180° about vertex R



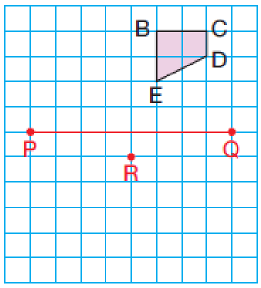
CA_Δ25

Copy this diagram on grid paper.

Draw and label both images each time.

a) Translate the quadrilateral 3 squares left and 2 squares down. Then translate the image 1 square right and 3 squares down.

b) Reflect the quadrilateral in a line through BE. Then reflect the image in the line PQ.

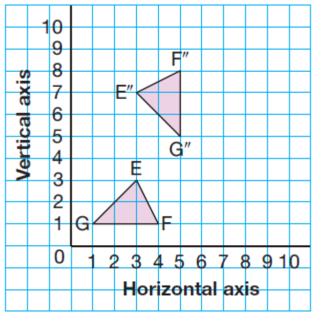


c) Rotate the quadrilateral 90° counterclockwise about vertex E. Then rotate the image 180° about point R.

CA_Δ26

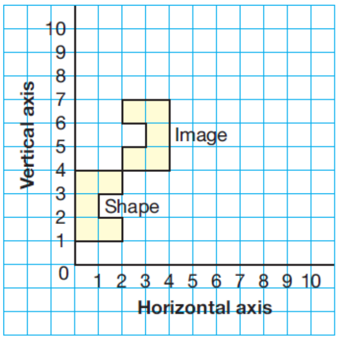
Describe two successive transformations that move Δ EFG to its image, Δ E”F”G”.

Show your work.



CA_Δ27

a) Describe two successive transformations that move the octagon to its image.



b) Can you find two other successive transformations? Explain.

CA_Δ28

The coordinates of a shape are:

A (3, 2) B(3, 6) C(5, 6) D(6, 4) E(5, 3) F(5, 2)

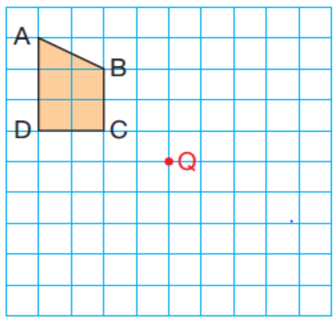
• The shape is translated 3 squares right and 1 square up.

• Then, the image is translated 2 squares left and 2 squares up.

• Then, the image is translated 1 square left and 3 squares down.

What are the coordinates of the final image? How have the positions of the vertices of the shape changed? Explain.

CA_Δ29



a) Copy the quadrilateral on grid paper.

• Translate the quadrilateral 3 squares right.

• Then rotate the translation image 90° clockwise about point Q.

b) Draw and label both images.

c) What can you say about the quadrilateral and its final image? How can you check?

CA_Δ30

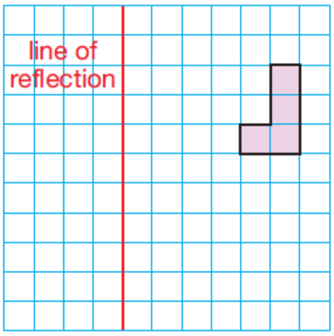
a) Copy the hexagon on grid paper.

• Translate the hexagon 2 squares left and 3 squares down.

• Then reflect the translation image in the line of reflection.

b) Draw and label both images.

c) How can you check that the hexagon and both images are congruent?



CA_Δ31

a) Copy the octagon on a coordinate grid.

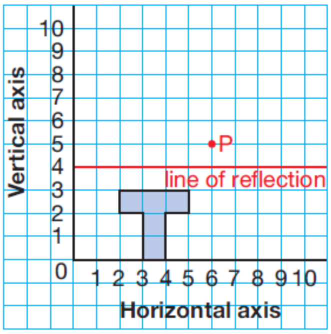
• Reflect the octagon in the line of reflection.

• Then rotate the reflection image 270° counterclockwise about P.

b) Draw and label both images.

c) What are the coordinates of the vertices of the final image?

d) Are the octagon and its final image congruent? How do you know?



CA_Δ32

Draw and label a quadrilateral on grid paper.

a) Choose two different transformations.

• Apply the first transformation to the quadrilateral.

• Then apply the second transformation to the image.

What can you say about the quadrilateral and its images? How can you check?

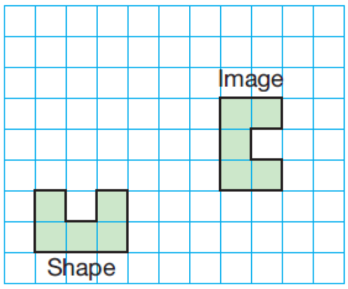
b) Use a different colour. Apply the transformations from part a in the reverse order.

c) Compare the final images from parts a and b. Does the order in which transformations are applied matter? Explain.

CA_Δ33

Describe a pair of transformations that move the shape to its image.

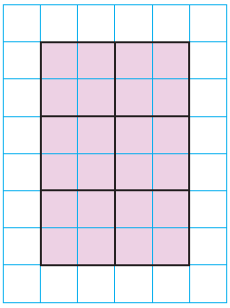
Find as many pairs of transformations as you can.



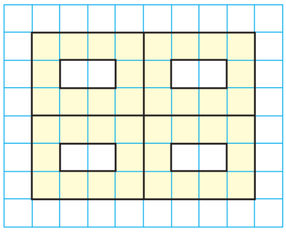
CA_Δ34

Explain how you could use transformations to make each design.

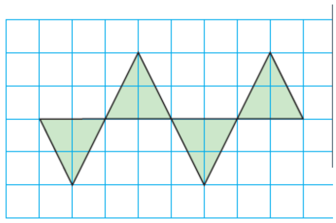
a)



b)

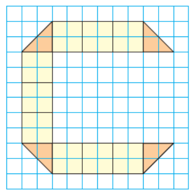


c)



CA_Δ35

Wanaba designed this logo for her canoe club's trip to Bowron Lake Provincial Park. She transformed copies of 2 shapes to create the letter C. The letter C looks like it is made from 3 overlapping canoe-like shapes.



a) What were the original shapes?

b) Describe the transformations that could have been used to create the logo.

c) Is another set of transformations possible? If your answer is yes, describe the transformations.

CA_Δ36

Suppose you have been hired to create a logo for a rock-climbing club in Squamish, BC.

a) Choose two or more shapes for your logo. Create the logo by transforming copies of your shapes on grid paper. Colour your logo to make it attractive.

b) Identify the original shapes. Describe the transformations you used.

c) Describe how your logo represents the rock-climbing club.

CA_Δ37

This is the Bear Paw quilt block.

a) Draw a coordinate grid. Label the axes from 0 to 7.

b) Copy the quilt block onto the grid.

c) The block can be made by transforming shapes.

• Identify the original shapes.

• Describe a set of transformations that can be used to create the block