ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μπονιάκου Θεοχάρης

Αναπαραστάσεις της Lie Άλγεβρας sl(2)

Τριμελής Επιτροπή:
ΙΩΑΝΝΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ
ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ ΚΟΝΤΟΓΕΩΡΓΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΑΛΙΑΚΑΣ (Επιβλέπων)

Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα – 2017

Περίληψη

Η $sl(2)$ είναι η άλγεβρα διάστασης 2 που αποτελείται από τους ενδομορφισμούς με ίχνος 0 ενός διανυσματικού χώρου V πάνω από ένα σώμα F. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με τις αναπαραστάσεις της $sl(2)$ και θα αποδείξουμε ότι οι αναάγωγες αναπαραστάσεις της βρίσκονται σε $1-1$ αντιστοιχία με τους θετικούς ακεραίους. Επίσης, θα αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικού (ως προς ισομορφισμό) κανονικού κυκλικού προτύπου για κάθε βάρος λ και θα υπολογισούμε ένα τύπο πολλαπλότητας βαρών για πεπερασμένης διάστασης ανάγωγα πρότυπα ανώτατου βαρους ($Freudenthal's\ formula$).

Abstract

$sl(2)$ is the 2 diamensional algebra consisting of all endomorphisms with trace 0 of a vector space V over a field F. In this master's thesis we deal with the represantations of $sl(2)$ and we prove that there is a $1-1$ correspondence between the irreducible $L-$modules (up to isomorphism) and the set of positive integers. In addition, we prove the existence of a unique up to isomorphisms standard cyclic module for every weight λ and we compute Freudenthal's weight multiplicity formula for irreducible finite dimensional modules of highest weight.

Περιεχόμενα

1 Βασικοί ορισμοί

1.1 Lie άλγεβρες

Ορισμός 1.1.1.

Μία *Lie* άλγεβρα L πάνω από ένα σώμα F είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το F εφοδιασμένος με μια απεικόνιση

$$[,] : L \times L \to L, \ (x, y) \mapsto [x, y] \text{ για όλα τα } x,y \in L$$

η οποία καλείται μεταθέτης (*Lie* μεταθέτης) και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$(I1)$. Είναι διγραμμική.
$(I2)$. $[x, x] = 0$, για όλα τα $x \in L$.
$(I3)$. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ για όλα τα x,y και $z \in L$.

Η ιδιότητα $(I3)$ καλείται ταυτότητα *Jacobi*. Παρατηρούμε επίσης, ότι από την ιδιότητα $(I2)$ προκύπτει η

$$(I2')\ [x, y] = -[y, x] \text{ για όλα τα } x,y \in L.$$

Επιπλεόν, αν η χαρακτηριστική του σώματος F είναι $\neq 2$, η ιδιότητα $(I2)$ είναι ισοδύναμη με την $(I2')$.

Ορισμός 1.1.2.
Έστω *Lie* άλγεβρα L πάνω από ένα σώμα F. Αν έχουμε ότι $[x, y] = 0$ για όλα τα x,$y \in L$, τότε η L θα ονομάζεται αβελιανή.

Παραδείγματα 1.1.3.
(i). Κάθε διανυσματικός χώρος V μπορεί να θεωρηθεί *Lie* άλγεβρα ορίζοντας $[x, y] = 0$ για όλα τα x,$y \in V$.
(ii). Ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ δομείται σε *Lie* άλγεβρα με τη βοήθεια του εξωτερικού γινομένου. Στην περίπτωση αυτή,

$$[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

για όλα τα $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
(iii). Έστω $M_{n\times n}(F)$ ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F. Ορίζοντας τον μεταθέτη ως

$$[A, B] = AB - BA$$

για όλα τα A,$B \in M_{n\times n}(F)$, ο διανυσματικός χώρος $M_{n\times n}(F)$ γίνεται *Lie* άλγεβρα.

Ορισμός 1.1.4.
Έστω L,L' *Lie* άλγεβρες πάνω από ένα σώμα F. Θα λέμε ότι είναι ισόμορφες αν υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $\phi : L \to L'$ που ικανοποιεί την $\phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)]$ για όλα τα x,$y \in L$. Τότε η ϕ καλείται ισομορφισμός *Lie* αλγεβρών.

Ορισμός 1.1.5.
Έστω L *Lie* άλγεβρα και K ένας υπόχωρος (διανυσματικός) της L. Ο K καλείται υποάλγεβρα της L αν $[x,y] \in K$ για κάθε x,$y \in K$. Ειδικότερα, ο K είναι μια *Lie* άλγεβρα σχετική με τις πράξεις της L.

Παρατήρηση 1.1.6.
Κάθε στοιχείο $x \in L$ με $x \neq 0$ ορίζει μια υποάλγεβρα F_x της L διάστασης 1, με τον τετριμμένο πολλαπλασιασμό, λόγω της ιδιότητας $(I2)$.

Σημείωση: Σε αυτην την εργασία θα ασχοληθούμε κυριώς με *Lie* άλγεβρες των οποίων ο υποκείμενος διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση πάνω απο το F. Αυτό θα εννοείται πάντα, εκτός αν ειπωθεί κάτι διαφορετικό.

1.2 Γραμμικές Lie άλγεβρες

Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από το F, συμβολίζουμε με $End\ V$ το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών $V \to V$. Ο $End\ V$ ως διανυσματικός χώρος πάνω από το F έχει διάσταση n^2 ($n = dim$ V). Ορίζοντας μια νέα απεικόνιση $[x,y] = xy - yx$, η οποία ονομάζεται αγκύλη των x και y, ο $End\ V$ γίνεται *Lie* άλγεβρα. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς τις ιδιότητες του Ορισμού 1.1.1.

Συμβολισμός: Για να ξεχωρίσουμε την νέα αλγεβρική δομή από την παλιά συσχετισμένη της, γράφουμε $gl(V)$ αντί για $End\ V$ όταν την θεωρούμε ως *Lie* άλγεβρα (στην περίπτωση που ο V είναι απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος, θα χρησιμοποιούμε πάλι τον συμβολισμό $gl(V)$).

Ορισμός 1.2.1.
Την παραπάνω *Lie* άλγεβρα την ονομάζουμε γενική γραμμική άλγεβρα.

Ορισμός 1.2.2.
Κάθε υποάλγεβρα της $gl(V)$ καλείται γραμμικη *Lie* άλγεβρα.

Σημείωση: Είναι δυνατόν κάποιος να σταθεροποιήσει μια βάση για τον V και να θεωρήσει την $gl(V)$ ως το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων πάνω από το F, το οποίο συμβολίζουμε με $gl(n, F)$. Παρακάτω θα γράψουμε τον πολλαπλασιαστικό πίνακα για το $gl(n, F)$ σχετικά με την συνήθη βάση η οποία αποτελείται από όλους τους πίνακες e_{ij}(με 1 στη θέση (i, j) και 0 αλλού).Έχουμε ότι $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ και από το οποίο προκύπτει

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}.$$

Παραδείγματα 1.2.3.
(A). Έστω $dim\ V = l + 1$. Συμβολίζουμε με $sl(V)$ ή $sl(l + 1, F)$ το σύνολο των ενδομορφισμών του V που έχουν ίχνος 0 (θυμίζουμε ότι το ίχνος ενός πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου και είναι ανεξάρτητο της επιλογής βάσης, άρα είναι καλά ορισμένο για έναν ενδομορφισμό του V). Έχουμε ότι $Tr(xy) = Tr(yx)$ και $Tr(x + y) = Tr(x) + Tr(y)$, άρα η $sl(V)$ είναι υποάλγεβρα της $gl(V)$ η οποία καλείται ειδική γραμμική άλγεβρα λόγω της σχέσης της με την ειδική γραμμική ομάδα $SL(V)$ που αποτελείται από όλους τους ενδομορφισμούς με det 1. Θα υπολογίσουμε τώρα την διασταση της:
Έχουμε ότι η $sl(V)$ είναι γνήσια υποάλγεβρα της $gl(V)$ και άρα η διάστασή της είναι $\leqslant (l + 1)^2 - 1$. Απ·ο την άλλη, μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων πινάκων με ίχνος ίσο με 0. Παίρνουμε όλα τα στοιχεία e_{ij} $(i \neq j)$ και τα $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. Τελικά βλέπουμε ότι ο αριθμός των στοιχείων είναι ίσος με $(l + 1)^2 - 1$. Θα θεωρούμε πάντα την παραπάνω βάση ως την συνήθη βάση για την $sl(l + 1, F)$.
(B). Έστω F σώμα και V πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από το F, άρα ορίζεται το $gl(n, F)$. Ορίζουμε τώρα:
$\mathrm{t}(n, F) =$ το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων (a_{ij}), $a_{ij} = 0$ αν $i > j$.
$\mathrm{n}(n, F) =$ το σύνολο των αυστηρά άνω τριγωνικών πινάκων (a_{ij}), $a_{ij} = 0$ αν $i \geqslant j$.
$\delta(n, F) =$ το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι όλα τα παραπάνω είναι κλειστά ως προς την πράξη της αγκύλης και άρα είναι υποάλγεβρες της $gl(n, F)$. Τέλος,παρατηρούμε ότι $\mathrm{t}(n, F) = \delta(n, F) + \mathrm{n}(n, F)$ και ότι $[\delta(n, F), \mathrm{n}(n, F] = \mathrm{n}(n, F)$. Από το δεύτερο προκύπτει ότι $[\mathrm{t}(n, F), \mathrm{t}(n, F)] = \mathrm{n}(n, F)$.

Σημείωση: Αν H,K είναι υποάλγεβρες μιας *Lie* άλγεβρας L, τότε με $[H, K]$ συμβολίζουμε τον υπόχωρο του L που έκτείνεται από τους μεταθέτες $[x, y]$, $x \in H$,$y \in K$.

1.3 Lie άλγεβρες παραγωγίσεων

Κάποιες *Lie* άλγεβρες γραμμικών μετασχηματισμών δημιουργούνται φυσιολογικά ως παραγωγίσεις αλγεβρών.

Ορισμός 1.3.1.
Με τον όρο F-άλγεβρα εννοούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathfrak{U}$ πάνω από ένα σώμα F εφοδιασμένο με μια διγραμμική πράξη $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$. Στην περίπτωση που $\mathfrak{U}$ είναι *Lie* άλγεβρα χρησιμοποιούμε την αγκύλη.

Ορισμός 1.3.2.
Με τον όρο παραγώγιση του $\mathfrak{U}$ εννοούμε μια γραμμική απεικόνιση δ: $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, η οποία ικανοποιεί τον γνωστό κανόνα του γινομένου $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

Συμβολισμός: Την συλλογή όλων των παραγωγίσεων του $\mathfrak{U}$ την συμβολίζουμε με **Der** $\mathfrak{U}$.

Παρατήρηση 1.3.3. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι το **Der** $\mathfrak{U}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του **End** $\mathfrak{U}$.

Κάθως κάθε *Lie* άλγεβρα είναι μια F-άλγεβρα υπό την παραπάνω έννοια, έχει κατ′ επέκταση οριστεί και το **Der** L.

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω $x \in L$, η απεικόνιση $y \mapsto [x, y]$ είναι ένας ενδομορφισμός της L, τον οποίο ονομάζουμε και συμβολίζουμε με $ad\ x$. Ειδικότερα, $ad\ x \in \mathbf{Der}\ L$. Αυτό προκύπτει διότι μπορούμε να γράψουμε τη ταυτότητα *Jacobi* (χρησιμοποιώντας την $(I2')$ του ορισμού 1.1.1.) στη παρακάτω μορφή:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Ορισμός 1.3.5. Παραγωγίσεις της μορφής του παραδείγματος 1.3.4. ονομάζονται εσωτερικές, ενω όλοι οι υπόλοιπες καλούνται εξωτερικές.

Παρατήρηση 1.3.5. Είναι δυνατόν να έχουμε $ad\ x = 0$, ακόμα και στην περίπτωση που $x \neq 0$. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, σε κάθε *Lie* άλγεβρα διάστασης 1.

Ορισμός 1.3.6.
Η απεικόνιση $L \to \mathbf{Der}\ L$ η οποία στέλνει το x στο $ad\ x$ καλείται *adjoint* απεικόνιση της L.

Σημείωση: Σε κάποιες περιπτώσεις θα πρέπει να βλέπουμε ένα x ως στοιχείο της L αλλά παράλληλα και ως στοιχείο μιας υποάλγεβρας K της L. Για να αποφύγουμε πιθανή ασάφεια, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $ad_L\ x$ ή $ad_K\ x$ για να δείξουμε αν το x δρα στην L (αντίστοιχα, K).

1.4 Ιδεώδη

Ορισμός 1.4.1.
Ένας υπόχωρος I μιας *Lie* άλγεβρας L καλείται ιδεώδες της L αν για $x \in L$, $y \in I$ ισχύει ότι $[x, y] \in I$ (λόγω της ιδιότητας $[x, y] = -[y, x]$, η παραπάνω συνθήκη θα μπορούσε να γραφτεί ως $[y, x] \in I$).

Τα ιδεώδη στη θεωρία των *Lie* αλγεβρών έχουν παρόμοιο ρόλο με αυτόν των κανονικών υποομάδων στη θεωρία ομάδων και των αμφίπλευρων ιδεωδών στη θεωρία δακτυλίων. Προκύπτουν ως πυρήνες ομομορφισμών. Είναι προφανές ότι 0 (ο υπόχωρος που αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα) και L είναι ιδεώδη της L.

Ορισμός 1.4.2.
Έστω *Lie* άλγεβρα L:
(i). Ορίζουμε ως κέντρο της L το σύνολο $Z(L) = \{z \in L | [x, z] = 0$ για κάθε $x \in L\}$.
(ιι). Ορίζουμε ως παραγόμενη άλγεβρα της L, συμβολίζουμε με $[LL]$, την υποάλγεβρα που περιέχει όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς μεταθετών $[x, y]$, όπου $x,y \in L$.

Παρατήρηση 1.4.3.
Ισχύει ότι μια *Lie* άλγεβρα L είναι αβελιανή $\Leftrightarrow Z(L) = L \Leftrightarrow [LL] = 0$.

Έστω I,J ιδεώδη μιας *Lie* άλγεβρας L, τότε $I + J = \{x + y | x \in I, y \in J\}$ είναι επίσης ιδεώδες της L. Παρόμοια, $[IJ] = \{\Sigma x_i y_i | x_i \in I, y_i \in J\}$ είναι ιδεώδες και η παραγόμενη άλγεβρα $[LL]$ είναι ειδική περίπτωση αυτής της κατασκευής.

Είναι φυσιολογικό να μελετήσουμε τη δομή των *Lie* αλγεβρών μέσω των ιδεωδών τους. Αν τα μόνα ιδεώδη μιας *Lie* άλγεβρας L είναι το 0 και ο εαυτός της, και αν ισχύει ότι $[LL] \neq 0$, η L καλείται απλή. Η συνθήκη $[LL] \neq 0$ (δηλαδή, L όχι αβελιανή) δίνεται για την αποφυγή άσκοπης σημασίας στην άλγεβρα διάστασης 1. Είναι προφανές ότι αν η L είναι απλή, τότε $Z(L) = 0$ και $L = [LL]$.

Παράδειγμα 1.4.4.
Έστω $L = sl(2, F)$, χαρακτηριστική $F \neq 2$. Τότε παίρνουμε σαν κανονική βάση της L τους τρείς πίνακες (Παράδειγμα 1.2.3.A):

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας είναι πλήρως καθορισμένος από τις σχέσεις: $[x, y] = h$, $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$. (Παρατηρούμε ότι τα x,y,h είναι ιδιοδιανύσματα της $ad\ h$,που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $2, -2, 0$. Αφού η χαρακτηριστική του F είναι $\neq 2$, οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.) Έστω $I \neq 0$ ιδεώδες της L και έστω $ax + by + ch$ τυχαίο μη μηδενικό στοιχείο του I. Δρώντας με την $ad\ x$ δύο φορές, παίρνουμε ότι $-2bx \in I$ και δρώντας δύο φορές με την $ad\ y$, παίρνουμε ότι $-2ay \in I$. Ως αποτέλεσμα, αν a ή b είναι $\neq 0$, τότε I περιέχει είτε το y είτε το x (χαρακτηριστική $F \neq 2$), και άρα, προκύπτει $I = L$. Από την άλλη πλευρά, αν $a = b = 0$, τότε $0 \neq ch \in I$, άρα $h \in I$, και πάλι προκύπτει $I = L$. Τελικά, καταλήγουμε στο ότι η L είναι απλή.

Στην περίπτωση που μια *Lie* άλγβερα L δεν είναι απλή (και όχι μονοδιάστατη), είναι πιθανό να "παράγουμε" γνήσια μη μηδενικά ιδεώδη I και κατ' αυτόν τον τρόπο να πάρουμε μια *Lie* άλγεβρα μικρότερης διάστασης. Η κατασκευή μιας άλγεβρας πηλίκο L/I (I είναι ιδεώδες της L) είναι χωρίς αυστηρότητα παρόμοια με την κατασκευή ενός δακτυλίου πηλίκο. Ως διανυσματικός χώρος το L/I είναι ο χώρος πηλίκο, ενώ ο *Lie* μεταθέτης ορίζεται ως $[x + I, y + I] = [x, y] + I$ για όλα τα x,$y \in L$. Είναι καλά ορισμένος, διότι αν $x + I = x' + I$, $y + I = y' + I$, τότε έχουμε $x' = x + u (u \in I)$, $y' = y + v (v \in I)$.

Έπεται, $[x',y'] = [x,y] + ([u,y] + [x,v] + [u,v])$ και άρα $[x',y'] + I = [x,y] + I$, το τελευταίο διότι οι παράγοντες μέσα στην παρένθεση ανήκουν στο I.

Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες συσχετιζόμενες έννοιες που θα χρειαστούν στη σύνεχεια, ανάλογες με εκείνες που προκύπτουν στη θεωρία ομάδων. (a) Ο κανονικοποιητής μιας υποάλγεβρας (ή απλά υπόχωρου) K μιας Lie άλγεβρας L ορίζεται ως $N_L(K) = \{x \in L | [x,K] \subset K\}$. Από την ταυτότητα $Jacobi$, $N_L(K)$ είναι υποάλγεβρα της L και μπορεί να περιγραφεί ως η μεγαλύτερη υποάλγεβρα της L που περιέχει την K σαν ιδεώδες (στην περίπτωση που K είναι υποάλγεβρα). Αν $K = N_L(K)$, τότε καλούμε την K αυτοκανονικοποιήσιμη. (b) Ο κεντροποιητής ενός υποσυνόλου X της L ορίζεται ως $C_L(X) = \{x \in L | [x,X] = 0\}$. Πάλι λόγω της ταυτότητας $Jacobi$ είναι υποάλγεβρα της L. Για παράδειγμα, $C_L(L) = Z(L)$.

1.5 Ομομορφισμοί και αναπαραστάσεις

Ορισμός 1.5.1.
Έστω $\phi : L \to L'$ (L, L' Lie άλγεβρες) γραμμικος μετασχηματισμός:
(i). Ο ϕ καλείται ομομορφισμός αν $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, για όλα τα x,$y \in L$.
(ii). Ο ϕ καλείται μονομορφισμός αν $Ker\ \phi = 0$.
(iii). Ο ϕ καλείται επιμορφισμός αν $Im\ \phi = L'$.
(iv). Ο ϕ καλείται ισομορφισμός (όπως στο 1.1.4.) αν είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός ταυτόχρονα.

Παρατήρηση 1.5.2. Παρατηρούμε ότι $Ker\ \phi$ είναι ιδεώδες της L. Πράγματι, αν $\phi(x) = 0$ και y τυχόν στοιχείο της L, τότε $\phi([xy]) = [\phi(x), \phi(y)] = 0$. Επίσης, είναι εύκολα αντιληπτό ότι $Im\ \phi$ είναι υποάλγεβρα της L'.

Ισχύουν όπως και σε άλλες αλγεβρικές θεωρίες τα παρακάτω θεωρήματα ομομορισμών:

Θεώρημα 1.5.3.
(a). Αν $\phi : L \to L'$ είναι ομομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε $L/Ker\ \phi \cong Im\phi$.
(b). Αν I και J είναι ιδεώδη της L με $I \subset J$, τότε J/I είναι ιδεώδες της L/I και $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.
(c). Αν I,J είναι ιδεώδη της L, τότε υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ $(I+J)/J$ και $I/(I \cap J)$. $\blacksquare$

Ορισμός 1.5.4.

Αναπαράσταση μιας *Lie* άλγεβρας L είναι ένας ομομορφισμός $\phi : L \to gl(V)$ ($V =$ διανυσματικός χώρος πάνω από το F).

Αν και απαιτούμε η L να είναι πεπερασμένης διάστασης, είναι χρήσιμο να αφήσουμε το V να έχει τύχαια διάσταση(η $gl(V)$ έχει νόημα σε κάθε περίπτωση). Για τώρα θα ασχολήθουμε με την *adjoint* αναπαράσταση $ad : L \to gl(V)$ (1.3.6.), η οποία στέλνει το x στο $ad\ x$, όπου $ad\ x(y) = [x, y]$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η ad είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Για να δείξουμε ότι διατηρεί την πράξη της αγκύλης, υπολογίζουμε:
$[ad\ x{,}ad\ y](z) = ad\ x\ ad\ y(z) - ad\ y\ ad\ x(z) = ad\ x([y, z]) - ad\ y([x, z]) =$ $[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [x, [y, z]] + [[x, z], y] = [[x, y], z] = ad\ [x, y]\ (z)$.
Η τέταρτη ισότητα έπεται από την ιδιότητα $(I2')$ και η πέμπτη από την ιδιότητα $(I3)$ (Ορισμός 1.1.1.).

Τέλος, παρατηρούμε ότι $Ker\ ad = \{x \in L | ad\ x = 0\} = \{x \in L | [x, y] = 0$ για όλα τα $y \in L\ \}$. Άρα, $Ker\ ad = Z(L)$. Από αυτό βγαίνει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα: Αν L έιναι απλή *Lie* άλγεβρα, τότε $Z(L) = 0$ και άρα έχουμε ότι η $ad : L \to gl(V)$ είναι μονομορφισμός. Αυτό ουσιαστικά μας λέει ότι κάθε απλή *Lie* άλγεβρα είναι ισόμορφη με μια γραμμικη *Lie* άλγεβρα.

Ορισμός 1.5.5.
Ένας ισομορφισμός ϕ :$L \to L$, όπου L *Lie* άλγεβρα καλείται αυτομορφισμός της L και το σύνολο όλων των αυτομορφισμών της L συμβολίζεται με $Aut\ L$.

Παράδειγμα 1.5.6. Έστω $g \in GL(V)$ ένας τυχαίος αντιστρέψιμος ενδομορφισμός του V και έστω ότι ισχύει $gLg^{-1} = L$, τότε άμεσα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto gxg^{-1}$ είναι αυτομορφισμός της L.

1.6 Επιλυσιμότητα

Σε αυτή τη παράγραφο μελετάμε μια *Lie* άλγεβρα χρησιμοποιώντας τον σχηματισμό παραγόμενων αλγεβρών.

Ορισμός 1.6.1.
Έστω L *Lie* άλγεβρα. Η ακολούθια ιδεωδών $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [LL]$, $L^{(2)} =$

$[L^{(1)}L^{(1)}]$, $\cdots$, $L^{(i)} = [L^{(i-1)}L^{(i-1)}]$ καλείται παραγώμενη σειρά της L.

Ορισμός 1.6.2.
Έστω L *Lie* άλγεβρα. Η L καλείται επιλύσιμη αν $L^{(n)} = 0$ για κάποιο n.

Παράδειγμα 1.6.3.: Οι άνω τριγωνικοί πίνακες.

Πρόταση 1.6.4. Έστω L *Lie* άλγεβρα:
(a). Αν L επιλύσιμη, τότε το ίδιο ισχύει για κάθε υποάλγεβρα και ομομορφική εικόνα της L.
(b). Αν I είναι επιλύσιμο ιδεώδες της L τέτοιο ώστε L/I επιλύσιμη, τότε L επιλύσιμη.
(c). Αν I, J επιλύσιμα ιδεώδη της L, τότε το ίδιο ισχύει και για το $I + J$.

Απόδειξη:(a) Από τον ορισμό, έχουμε άμεσα ότι αν K υποάλγεβρα της L, τότε $K^{(i)} \subset L^{(i)}$. Παρόμοια, αν $\phi{:}L \to M$ είναι επιμορφισμός, με χρήση επαγωγής στο i δείχνουμε ότι $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$.
(b) Έστω $(L/I)^{(n)} = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Από (a), όπου στη θέση της ϕ είναι ο κανονικός ομομορφισμός $\pi{:}L \to L/I$, παίρνουμε $\pi(L^{(n)}) = 0$ ή ότι $L^{(n)} \subset I = Ker\ \pi$. Τώρα αφού $I^{(m)} = 0$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και την ισότητα $(L^{(i)})^{(j)} = L^{(i+j)}$ έχουμε ότι $L^{(n+m)} = 0$.
(c) Από θεώρημα 1.5.3(c) γνωρίζουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ $(I + J)/J$ και $I/(I \cap J)$. Ως ομομορφική εικόνα του I έχουμε $I/(I \cap J)$ επιλύσιμη, άρα και $(I + J)/J$ επιλύσιμη. Τέλος, $I + J$ επιλύσιμη αφού J και $(I + J)/J$ επίλύσιμες και από (b) έχουμε το ζητούμενο. ■

Εφαρμογή:
Έστω L *Lie* άλγεβρα και S ένα μεγιστικό επιλύσιμο ιδεώδες της L (δεν περιέχεται σε κάποιο μεγαλύτερο επιλύσιμο ιδεώδες). Αν τώρα I είναι ένα άλλο επιλύσιμο ιδεώδες της L, τότε από πρόταση 1.6.3(c) παίρνουμε $S + I = S$ (μεγιστικότητα S) ή $I \subset S$. Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχει μοναδικό μεγιστικό επιλύσιμο ιδεώδες, το οποίο καλείται ριζικό της L και συμβολίζεται $Rad\ L$. Στην περίπτωση που $Rad\ L = 0$, η L ονομάζεται ημιαπλή. Για παράδειγμα, μια απλή άλγεβρα είναι ημιαπλή, καθώς τα μόνα ιδεώδη της είναι το 0 και L, και L δεν είναι επιλύσιμη. Επίσης, $L = 0$ είναι ημιαπλή. Τέλος, παρατηρούμε ότι για τυχαία *Lie* άλγεβρα L , $L/Rad\ L$ είναι ημιαπλή (χρήση (b) της πρότασης 1.6.3).

1.7 Μηδενοδυναμία

Ορισμός 1.7.1.
Έστω L *Lie* άλγεβρα. Η ακολουθία ιδεωδών $L^0 = L$, $L^1 = [LL]$ $(= L^{(1)})$, $L^2 = [LL^1], \cdots, L^i = [LL^{i-1}]$ ονομάζεται κατωτέρα κεντρική σειρά της L.

Ορισμός 1.7.2.
Έστω L *Lie* άλγεβρα. Η L καλείται μηδενοδύναμη αν $L^n = 0$ για κάποιο n.

Παρασειγμα 1.7.3.: Οι αυστηρά άνω τριγωνικοί πίνακες.

Είναι προφανές ότι κάθε αβελιανή άλγεβρα είναι μηδενοδύναμη. Επίσης, ισχύει $L^{(i)} \subset L^i$ για κάθε i, άρα κάθε μηδενοδύναμη άλγεβρα είναι επιλύσιμη. Το αντίστροφο του παράπανω δεν ισχύει.

Πρόταση 1.7.4. Έστω L *Lie* άλγεβρα:
(a). Αν L είναι μηδενοδύναμη, τότε το ίδιο ισχύει για κάθε υποάλγεβρα και ομομορφική εικόνα της L.
(b). Αν $L/Z(L)$ μηδενοδύναμη, τότε L μηδενοδύναμη.
(c). Αν L μηδενοδύναμη και $L \neq 0$, τότε $Z(L) \neq 0$.

Απόδειξη:(a) Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 1.6.4(a).
(b) Έστω $L^n \subset Z(L)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $L^{n+1} = [LL^n] \subset [LZ(L)] = 0$.
(c) Ο τελευταίος μη μηδενικός όρος της κατωτέρας κεντρικής σειράς περιέχεται στο $Z(L)$. ■

Η συνθήκη για την οποία η L είναι μηδενοδύναμη μπορεί να εκφραστεί διαφορετικά ως εξής: Για κάποιο n (εξαρτάται μόνο από την L), $ad\ x_1\ ad\ x_2 \cdots ad\ x_n(y) = 0$ για όλα τα x_i,$y \in L$. Συγκεκριμένα, $(ad\ x)^n = 0$ για κάθε $x \in L$.

Έστω L *Lie* άλγεβρα και $x \in L$, καλούμαι το x ad-μηδενοδύναμο αν $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμος ενδομορφισμός. Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι: Αν L μηδενοδύναμη *Lie* άλγεβρα, τότε όλα τα στοιχεία της L είναι ad-μηδενοδύναμα. Όπως θα δούμε παρακάτω ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 1.7.5.(Engel)
Αν όλα τα στοιχεία μιας *Lie* άλγεβρας L είναι ad-μηδενοδύναμα, τότε L μηδενοδύναμη.

Λήμμα 1.7.6.
Έστω $x \in gl(V)$ μηδενοδύναμος ενδομορφισμός. Τότε $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμος.

Απόδειξη: Θα συσχετίσουμε το x με δύο ενδομορφισμούς στο $End\ V$, την αριστερή και δεξιά μετατόπιση κατά x: $\lambda_x(y) = xy$, $\rho_x(y) = yx$, που είναι μηδενοδύναμοι λόγω του ότι ο x είναι. Επίσης, λ_x και ρ_x μετατίθενται. Τώρα γνωρίζουμε ότι το άθροισμα ή η διαφορά δύο μηδενοδύναμων στοιχείων που μετατίθενται είναι ξανά μηδενοδύναμο στοιχείο. Άρα, αφού παρατηρήσουμε ότι $ad\ x = \lambda_x - \rho_x$, έχουμε ότι $ad\ x$ μηδενοδύναμο. ■

Θεώρημα 1.7.7.
Έστω L υποάλγεβρα της $gl(V)$, V πεπερασμένης διάστασης. Αν L αποτελείται απο μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς και $V \neq 0$, τότε υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $u \in V$ τέτοιο ώστε $L.u = 0$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε επαγωγή στη διάσταση της L, οι περιπτώσεις όπου η διάσταση της L είναι 0 ή 1 είναι προφανείς (για την περίπτωση που dim $L = 1$ θυμόμαστε ότι ένας μηδενοδύναμος γραμμικός μετασχηματισμός έχει πάντα τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0). Έστω $K \neq L$ υποάλγεβρα της L. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.7.6, K δρα (μέσω της ad) στο διανυσματικό χώρο L ως μία Lie άλγεβρα μηδενοδύναμων γραμμικων μετασχηματισμων, άρα το ίδιο και στο διανυσματικό χώρο L/K. Έχούμε όμως, $dim\ K < dim\ L$ και από επαγωγική υπόθεση παίρνουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $x + K \neq K$ στο L/K τέτοιο ώστε $[y, x] \in K$ για όλα τα $y \in K$ και $x \notin K$. Με άλλα λόγια, K περιέχεται γνήσια στο $N_L(K)$.

Επιλέγουμε K να είναι μεγιστική γνήσια υποάλγεβρα της L. Από τα παραπάνω έχουμε αναγκαστικά $N_L(K) = L$, δηλαδή, K είναι ιδεώδες της L. Αν τώρα $dim\ L/K$ είναι μεγαλύτερη του 1, τότε η αντίστροφη εικόνα στην L μιας μονοδιάστατης υποάλγεβρας της L/K (πάντα υπάρχει) θα ήταν γνήσια υποάλγεβρα της L, η οποία περιέχει την K, το οποίο είναι άτοπο (λόγω μεγιστικότητας της K), άρα K έχει συνδιάσταση 1. Μπορούμε να γράψουμε τώρα $L = K + F_z$ για οποιοδήποτε $z \in L - K$.

Από επαγωγική υπόθεση, $W = \{u \in V | K.u = 0\} \neq \{0\}$. Αφού K είναι ιδεώδες της L, W είναι σταθερό υπό την L: $x \in L$, $y \in K$, $w \in W$ δίνουν $yx.w = xy.w - [x, y].w = 0$. Επιλέγουμε $z \in L - K$ όπως παραπάνω, έτσι ώστε ο μηδενοδύναμος ενδομορφισμός z (δρα τώρα στον υπόχωρο W) έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή, υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $u \in W$ τέτοιο ώστε

$z.u = 0$. Τέλος, έχουμε $L.u = 0$, το ζητούμενο. ∎

Απόδειξη θεωρήματος 1.7.5.($Engel$): Από την υπόθεση του θεωρήματος παίρνουμε ότι η άλγεβρα $ad\ L \subset gl(L)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος 1.7.7 (μπορούμε να υποθέσουμε $L \neq 0$). Καταλήγουμε στο ότι υπάρχει $x \neq 0$ στην L τέτοιο ώστε $[Lx] = 0$, δηλαδή, $Z(L) \neq 0$. Τώρα προφανώς $L/Z(L)$ αποτελείται από μηδενοδύναμα στοιχεία και έχει διάσταση μικρότερη από αυτή της L. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην διάσταση της L παίρνουμε ότι $L/Z(L)$ είναι μηδενοδύναμη. Τέλος, από την πρόταση 1.7.4(b) έχουμε ότι L μηδενοδύναμη. ∎

Λήμμα 1.7.8.
Έστω L μηδενοδύναμη, K ιδεώδες της L. Αν $K \neq 0$, τότε $K \cap Z(L) \neq 0$

Απόδειξη: Η L δρα στην K μέσω της συζυγής αναπαράστασης, έτσι από το Θεώρημα 1.7.7 υπάρχει $x \in K$ με $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $[Lx] = 0$, άρα $x \in K \cap Z(L)$. ∎

2 Ημιαπλές Lie άλγεβρες

Έστω L *Lie* άλγεβρα πάνω από ένα σώμα F. Όλη η θεώρια που θέλουμε να αναπτύξουμε χρειάζεται την υπόθεση ότι η χαρακτηριστική του σώματος F να είναι 0. Επιπλέον, για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη των ιδιοτιμων για την ad x για τυχόν x (και όχι μόνο όταν $ad\ x$ μηδενοδύναμη), υποθέτουμε επίσης, ότι F είναι αλγεβρικά κλειστό, εκτός αν ειπωθεί κάτι διαφορετικό.

2.1 Θεωρήματα των Lie και Cartan

Το επόμενο θεώρημα είναι παρόμοιο με το Θεώρημα 1.7.6, αλλά χρειάζεται αλγεβρική κλειστότητα, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ότι το F περιέχει ολές τις απαιτούμενες ιδιοτιμές.

Θεώρημα 2.1.1.
Έστω L επιλύσιμη υποάλγεβρα της $gl(V)$, όπου V πεπερασμένης διάστασης. Αν $V \neq 0$, τότε V περιέχει ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα για όλους τους ενδομορφισμους στην L.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην διάσταση της L και προσπαθούμε να μιμηθούμε την απόδειξη του θεωρήματος 1.7.6 (η περίπτωση $dim\ L = 0$ είναι τετριμμένη).

Αφού L είναι επιλύσιμη και $dim\ L > 0$ έχουμε ότι L περιέχει γνήσια το $[LL]$. Τώρα, $L/[LL]$ είναι αβελιανή και άρα κάθε υπόχωρος είναι αυτόματα ιδεώδες. Παίρνουμε έναν υπόχωρο συνδιάστασης 1, τότε η αντίστροφη εικόνα του K είναι ιδεώδες συνδιάστασης 1 στην L και περιέχει το $[LL]$.

Από επαγωγική υπόθεση υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα $u \in V$ για το K (K είναι προφανώς επιλύσιμο και έστω $K = 0$, τότε η L είναι αβελιανή διάστασης 1 και ένα ιδιοδιάνυσμα για ένα βασικό διάνυσμα της L ολοκληρώνει την απόδειξη). Αυτό σημαίνει ότι για $x \in K$ ισχύει $x.u = \lambda(x)u$, $\lambda : K \to F$ γραμμική συνάρτηση. Σταθεροποιούμε το λ και συμβολίζουμε με W τον υπόχωρο

$$\{w \in V | x.w = \lambda(x)w \text{ για όλα τα } x \in K\} \text{ και άρα } W \neq 0.$$

Θα δείξουμε ότι η L σταθεροποιεί τον W. Έστω $w \in W$, $x \in L$. Για να δούμε αν το $x.w$ βρίσκεται στο W, θα πάρουμε τυχόν $y \in K$ και θα εξετάσουμε το $yx.w = xy.w - [x, y].w = \lambda(y)x.w - \lambda([x, y])w$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda([x, y]) = 0$. Σταθεροποιούμε $w \in W$, $x \in L$. Έστω $n > 0$

ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $w, x.w, \cdots, x^n.w$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ορίζουμε W_i να είναι ο υπόχωρος του V που εκτείνεται από τα $w, x.w, \cdots, x^{i-1}.w$ (Θέτουμε $W_0 = 0$), τότε $dim\ W_n = n$, $W_{n+i} = W_n$ για $i \geq 0$ και x απεικονίζει τον W_n στο W_n. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε $y \in K$ αφήνει κάθε W_i αναλλοίωτο.

Ισχυρισμός: Σχετικά με τη βάση $w, x.w, \cdots, x^{n-1}.w$ του W_n, ισχυριζόμαστε ότι ένα $y \in K$ αναπαραστάται από έναν άνω τριγωνικό πίνακα του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι όλα ίσα με $\lambda(y)$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ισοτιμία:

$$yx^i.w \equiv \lambda(y)x^i.w\ (mod\ W_i) \qquad (*)$$

την οποία θα αποδείξουμε με χρήση επαγωγής στο i. Η περίπτωση $i = 0$ είναι προφανής. Γράφουμε $yx^i.w = yxx^{i-1}.w = xyx^{i-1}.w - [x, y]x^{i-1}.w$. Από υπόθεση επαγωγής, έχουμε $yx^{i-1}.w = \lambda(y)x^{i-1}.w + w'$ $(w' \in W_{i-1})$. Αφού x απεικονίζει τον W_{i-1} στον W_i (από κατασκευή των W_i), παίρνουμε ότι η $*$ ισχύει για όλα τα i.

Τώρα, από τον τρόπο με τον είδαμε οτι ένα $y \in K$ δρα στον W_n, συμπεραίνουμε ότι $Tr_{W_n}(y) = n\lambda(y)$. Πιο συγκεκριμένα, αύτο ισχύει για όλα τα στοιχεία του K της μορφής $[x, y]$ (x όπως παραπάνω και $y \in K$). Ισχύει ότι x και y σταθεροποιούν το W_n, άρα το στοιχείο $[x, y]$ δρα στο W_n ως ο μεταθέτης δύο ενδομορφισμών του W_n και άρα το ίχνος του είναι 0. Τελικά, $n\lambda([x, y]) = 0$ και αφού έχουμε ότι $char\ F = 0$($char\ F$=χαρακτηριστική του F), αυτό καταλήγει στο ότι $\lambda([x, y]) = 0$, όπως και θέλαμε.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, γράφουμε $L = K + F_z$ και χρησιμοποιούμε ξανά το ότι το F είναι αλγεβρικά κλειστό για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα $v \in W$ του z για κάποια ιδιοτιμή του z. Τότε, το v είναι προφανώς κοινό ιδιοδιάνυσμα για την L και η λ μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική συνάρτηση στο L τέτοια ώστε $x.v = \lambda(x).v$, $x \in L$. ■

Παράδειγμα 2.1.2. Θα δούμε παράδειγμα το οποίο δείχνει την αναγκαιότητα να είναι $char\ F = 0$ στο θεώρημα 2.1.1. Έστω $p > 0$ πρώτος και σώμα F χαρακτηριστικής p. Παίρνουμε τους $p \times p$ πίνακες:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ y = diag(0, 1, 2, 3, \cdots, p-1)$$

Βλέπουμε ότι $[x, y] = x$ και άρα x και y εκτείνονται σε μια επιλύσιμη υποάλγεβρα L της $gl(p, F)$ με $dim\ L = 2$. Αλλά, τα ιδιοδιανύσματα του y είναι τα κανονικά βασικά διανύσματα και κανένα από αυτά δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του x.

Πόρισμα 2.1.3.(Θεώρημα Lie)
Έστω L επιλύσιμη υποάλγεβρα της $gl(V)$, $dim\ V = n < \infty$. Τότε η L σταθεροποιεί μια σημαία στον V (ως σημαία ορίζουμε μια αλυσίδα υποχώρων $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$, $dim\ V_i = i$), δηλαδή $L.V_i \subset V_i$ για όλα τα i.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 2.1.1 και επαγωγη στην $dim\, V$. ■

Γενικότερα, έστω L επιλύσιμη Lie άλγεβρα, $\phi : L \to gl(V)$ πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της L. Τότε $\phi(L)$ έιναι επιλύσιμη, από πρόταση $1.6.3(a)$ και άρα σταθεροποιεί μια σημαία, από πόρισμα 2.1.3. Για παράδειγμα, αν ϕ είναι η συζυγής αναπαράσταση, μια σημαία από υποχώρους σταθερή υπό την L έιναι μια αλυσίδα ιδεωδών της L, όπου καθένας έχει συνδιάσταση 1 στον επόμενο. Αύτο μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Πόρισμα 2.1.4.
Έστω L επιλύσιμη Lie άλγεβρα. Τότε υπάρχει αλυσίδα ιδεωδών της L, $0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L$, τέτοια ώστε $dim\ L_i = i$. ■

Πόρισμα 2.1.5
Έστω L επιλύσιμη Lie άλγεβρα. Τότε $x \in [LL]$ σημαίνει ότι $ad_L\ x$ είναι μηδενοδύναμο. Πιο συγκεκριμένα, $[LL]$ είναι μηδενοδύναμη.

Απόδειξη: Βρίσκουμε μια αλυσίδα ιδεωδών όπως στο πόρισμα 2.1.4. Σχετικά με μια βάση $(x_1, \cdots, x_n)$ της L για την οποία L_i εκτείνεται στα $x_1, \cdots, x_i$, οι πίνακες της $ad\ L$ ανήκουν στην $t(n, F)$. Επομένως, οι πίνακες της $[ad\ L, ad\ L] = ad_L[LL]$ ανήκουν στην $n(n, F)$. Άρα ως άμεσο αποτέλεσμα έχουμε ότι $ad_L\ x$ είναι μηδενοδύναμο για $x \in [LL]$, άρα και $ad_{[LL]}\ x$ είναι μηδενοδύναμο. Τελικά, $[LL]$ είναι μηδενοδύναμη. ■

Στα παρακάτω τρία αποτελέσματα, $char\ F$ θα είναι τυχαία. Καλούμε ένα $x \in End\ V$ (V πεπερασμένης διάστασης) ημιαπλό αν οι ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου πάνω από το F είναι διακεκριμένες. Ισοδύναμα, (F είναι αλγεβρικά κλειστό) x είναι ημιαπλό αν και μόνο αν x είναι διαγωνίσιμο. Σημειώνουμε ότι δύο ημιαπλοί ενδομορφισμοί που μετατίθενται μεταξύ τους μπορεί να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα. Επομένως, το άθροισμα και η διαφορά τους είναι ημιαπλή. Επίσης, αν x είναι ημιαπλός και απεικονίζει έναν υπόχωρο W του V στον εαυτό του, τότε και ο περιορισμός του x στο W είναι ημιαπλός.

Πρόταση 2.1.6.
Έστω V πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα F, $x \in End\ V$.
(a). Υπάρχουν μοναδικά x_s, $x_n \in End\ V$ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:
(i) $x = x_s + x_n$,(ii) x_s είναι ημιαπλό, (iii) x_n είναι μηδενοδύναμο, (iv) x_s και x_n μετατίθενται.
(b). Υπάρχουν πολυώνυμα $p(T)$, $q(T)$ μιας μεταβλητής, χωρίς σταθερό όρο, τέτοια ώστε $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Πιο συγκεκριμένα, x_s και x_n μετατίθενται με κάθε ενδομορφισμό που μετατίθεται με το x.
(c). Αν $A \subset B \subset V$ είναι υπόχωροι και το x απεικονίζει το B στο A, τότε και τα x_s, x_n απεικονίζουν το B στο A.

Η ανάλυση $x = x_s + x_n$ καλείται (προσθετική) ανάλυση $Jordan-Chevalley$ του x, ή απλά ανάλυση $Jordan$. Τα x_s, x_n καλούνται το ημιαπλό και το μηδενοδύναμο μέρος του x,αντίστοιχα.

Απόδειξη: Έστω $a_1, \cdots, a_k$ (με πολλαπλότητες $m_1, \cdots, m_k$) οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του x, ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του x είναι το $\Pi(T - a_i)^{m_i}$. Αν $V_i = Ker\ (x - a_i \cdot 1)^{m_i}$, τότε V είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων $V_1, \cdots, V_k$, όπου καθένας είναι σταθερός από τον x. Σε κάθε V_i, το x έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(T - a_i)^{m_i}$. Τώρα εφαρμόζουμε το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων (για τον δακτύλιο $F[T]$) για να βρούμε πολυώνυμο $p(T)$ που να ικανοποιεί τις παρακάτω ισοτιμίες, για τα σχετικά πρώτα mod: $p(T) \equiv a_i\ (mod\ (T - a_i)^{m_i})$, $p(T) \equiv 0\ (mod\ T)$. (Παρατηρούμε ότι η τελευταία ισοτιμία είναι περιττή αν το 0 είναι ιδιοτιμή του x, διαφορετικά T και $(T - a_i)^{m_i}$ είναι σχετικά πρώτα). Θέτουμε $q(t) = T - p(T)$. Προφανώς, $p(T)$ και $q(T)$ έχουν μηδενικό σταθερό όρο, αφού $p(T) \equiv 0\ (mod\ T)$.

Θέτουμε $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Αφού είναι πολυώνυμα του x, τα x_s και x_n μετατίθενται μεταξύ τους αλλά και με όλους τους ενδομορφισμούς που μετατίθενται με το x. Σταθεροποιούν όλους τους υπόχωρους του V που σταθεροποιούνται από το x, και ειδικά, τα V_i. Η ισοτιμία $p(T) \equiv a_i\ (mod\ (T - a_i)^{m_i})$ δείχνει ότι ο περιορισμός του $x_s - a_i \cdot 1$ στο V_i είναι 0 για κάθε i, άρα το x_s δρα διαγώνια στα V_i με μοναδική ιδιοτιμή το a_i, δηλαδή x_s ημιαπλό. Από τον ορισμό, $x_n = x - x_s$, από το οποίο έχουμε ότι x_n είναι μηδενοδύναμο. Λόγω του ότι $p(T)$, $q(T)$ δεν έχουν σταθερό όρο παίρνουμε το (c) της πρότασης.

Έστω τώρα ότι $x = s + n$ μία άλλη ανάλυση του x. Τότε έχουμε $x_s - s = n - x_n$. Λόγω του (b), όλοι οι παραπάνω ενδομορφισμοί μετατίθενται. Αθροίσματα ημιαπλών (μηδενοδύναμων, αντίστοιχα) ενδομορφισμών που μετατίθενται είναι ξανά ημιαπλά (μηδενοδύναμα, αντίστοιχα). Μόνο το 0 μπορεί να είναι ημιαπλό και μηδενοδύναμο, ταυτόχρονα. Άρα ισχύει $s = x_s$,$n = x_n$. ■

Ας πάρουμε τώρα την συζυγή ανπαράσταση της *Lie* άλγεβρας $gl(V)$, V πεπερασμένης διάστασης. Αν $x \in gl(V)$ είναι μηδενοδύναμο, τότε και $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμο (Λήμμα 1.7.5). Ισχύει το αντίστοίχο και για ημιαπλά. Επιλέγουμε μια βάση $(u_1, \cdots, u_n)$ του V για την οποία το x έχει πίνακα $diag$ $(a_1, \cdots, a_n)$. Έστω $\{e_{ij}\}$ είναι η κανονική βάση της $gl(V)$ και σχετίζεται με την $(u_1, \cdots, u_n)$: $e_{ij}(u_k) = \delta_{jk}(u_i)$. Με γρήγορο υπολογισμό (1.2 Σημείωση) βλέπουμε ότι $ad\ x(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$. Τελικά, βλέπουμε ότι $ad\ x$ έχει διαγώνιο πίνακα, σχετικό με την κανονική βάση της $gl(V)$.

Λήμμα 2.1.7.
Έστω $x \in End\ v$ $(dim\ V < \infty)$, $x = x_s + x_n$ η ανάλυση *Jordan* του x. Τότε, $ad\ x = ad\ x_s + ad\ x_n$ είναι η ανάλυση *Jordan* του $ad\ x$ (στην $End(End\ V)$).

Απόδειξη: Έχουμε δεί ότι $ad\ x_s$,$ad\ x_n$ είναι ημιαπλό και μηδενοδύναμο, αντίστοιχα. Μετατίθενται μεταξύ τους, αφού $[ad\ x_s, ad\ x_n] = ad\ [x_s, x_n] = 0$. Άρα, από πρόταση 2.1.6$(a)$ έχουμε το ζητούμενο.

Λήμμα 2.1.8.
Έστω $\mathfrak{U}$ πεπερασμένης διάστασης F-άλγεβρα. Τότε, $Der\ \mathfrak{U}$ περιέχει όλα τα ημιαπλά και μηδενοδύναμα μέρη (στην $End\ \mathfrak{U}$) όλων των στοιχείων της.

Απόδειξη: Αν $\delta \in Der\ \mathfrak{U}$, έστω σ, $\nu \in Der\ \mathfrak{U}$ να είναι το ημιαπλό και το μηδενοδύναμο μέρος του δ, αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\sigma \in Der\ \mathfrak{U}$. Αν $a \in F$, ορίζουμε $\mathfrak{U}_a = \{x \in \mathfrak{U} | (\delta - a.1)^k x = 0$ για κάποιο k (εξαρτάται από το x)$\}$. Τότε, $\mathfrak{U}$ είναι το ευθύ άθροισμα των $\mathfrak{U}_a$ για τα a τα οποία είναι ιδιοτιμές της δ (ή σ) και η σ δρα στα $\mathfrak{U}_a$ ως βαθμωτός πολλαπλασιασμός με a. Μπορούμε να δείξουμε ότι για a,$b \in F$ ισχύει $\mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \subset \mathfrak{U}_{a+b}$ μέσω του τύπου:

$$(*) \qquad (\delta - (a+b).1)^n (xy) = \textstyle\sum_{i=0}^n ((\delta - a.1)^{n-i} x) \cdot ((\delta - b.1)^i y)$$

για x, $y \in \mathfrak{U}$ (απόδειξη, με επαγωγή στο n). Τώρα, αν $x \in \mathfrak{U}_a$,$y \in \mathfrak{U}_b$, τότε $\sigma(xy) = (a+b)xy$, επειδή $xy \in \mathfrak{U}_{a+b}$ (μπορεί να είναι 0). Από την άλλη πλευρά, $(\sigma x)y + x(\sigma y) = (a+b)xy$. Από το ότι $\mathfrak{U} = \coprod \mathfrak{U}_a$ (ευθύ άθροισμα) έχουμε ότι η $\sigma \in Der\ \mathfrak{U}$, δηλαδή το ζητούμενο. ■

Έστω L *Lie* άλγεβρα. Είναι προφανές ότι αν $[LL]$ είναι μηδενοδύναμη, τότε η L είναι επιλύσιμη. Επίσης, έχουμε ότι η $[LL]$ είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν $ad_{[LL]}x$ είναι μηδενοδύναμο για κάθε $x \in [LL]$. Θα δείξουμε τώρα ένα κριτήριο "ίχνους" για τη μηδενοδύναμία ενός ενδομορφισμού.

Λήμμα 2.1.9.
Έστω $A \subset B$ να είναι δύο υπόχωροι του $gl(V)$, $dim\ V < \infty$. Θέτουμε $M = \{x \in gl(V) | [x, B] \subset A\}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $x \in M$ για το οποίο ισχύει $Tr(xy) = 0$ για όλα τα $y \in M$. Τότε, x είναι μηδενοδύναμο.

Απόδειξη: Έστω $x = s + n$ να είναι η ανάλυση $Jordan$ του x. Σταθεροποιούμε βάση $(u_1, \cdots, u_m)$ του V σχετικά με την οποία το s έχει πίνακα $diag$ $(a_1, \cdots, a_m)$. Έστω E να είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του F (πάνω από το $\mathbb{Q}$) που εκτείνεται στις ιδιοτιμές $a_1, \cdots, a_m$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $s = 0$ ή ισοδύναμα ότι $E = 0$. Αφού E έχει πεπερασμένη διάσταση πάνω από το $\mathbb{Q}$, αρκεί να δείξουμε ότι ο δυϊκός χώρος E^* είναι 0, δηλαδή ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $f : E \to \mathbb{Q}$ είναι 0.

Δοθείσας μιας f, έστω y να είναι το στοιχείο της $gl(V)$ του οποίου ο πίνακας σχετικός με την δοθείσα βάση να είναι $diag$ $(f(a_1), \cdots, f(a_m))$. Αν $\{e_{ij}\}$ είναι η αντίστοιχη βάση της $gl(V)$, όπως είδαμε πιο πριν ισχύει: ad $s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$, $ad\ y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$. Έστω τώρα $r(T) \in F[T]$ να είναι πολυώνυμο χωρίς σταθερό όρο που να ικανοποιεί την σχέση $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$, για όλα τα ζεύγη i, j. Η ύπαρξη τέτοιου $r(T)$ προέρχεται από την Παρεμβολή $Lagrange$. Δεν υπάρχει κάποια ασάφεια στις καθορισμένες τιμές, αφού $a_i - a_j = a_k - a_l$ σημαίνει (από γραμμικότητα της f) ότι $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$. Τελικά, έχουμε $ad\ y = r\ (ad\ s)$.

Έχουμε από λήμμα 2.1.7 ότι $ad\ s$ είναι το ημιαπλό μέρος του $ad\ x$, άρα μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο του $ad\ x$ χωρίς σταθερό όρο (Πρόταση 2.1.6.). Άρα, και το $ad\ y$ μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο του $ad\ x$ χωρίς σταθερό όρο. Από την υπόθεση του λήμματος έχουμε $ad\ x$ απεικονίζει το B στο A, άρα και $ad\ y\ (B) \subset A$, δηλαδή, $y \in M$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση του λήμματος, $Tr(xy) = 0$, παίρνουμε $\sum a_i f(a_i) = 0$. Η αριστερή πλευρά είναι ένας $\mathbb{Q}$-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του E και εφαρμόζοντας την f παίρνουμε $\sum f(a_i)^2 = 0$. Όλοι οι αριθμοί $f(a_i)$ είναι ρητοί και άρα αυτό έχει ως συνέπεια να είναι όλοι ίσοι με 0. Τέλος, η f πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0, διότι E εκτείνεται στα a_i. ■

Σημείωση: Αν x,y,z είναι ενδομορφισμοί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης, τότε ισχύει:

$$(*) \quad Tr([x, y]z]) = Tr(x[y, z]).$$

Για να το δείξουμε, γράφουμε $[x, y]z = xyz - yxz$, $x[y, z] = xyz - xzy$ και χρησιμοποιούμε το ότι $Tr(y(xz)) = Tr((xz)y)$.

Θεώρημα 2.1.10. (Κριτήριο Cartan)
Έστω L υποάλγεβρα της $gl(V)$, V πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι $Tr(xy) = 0$ για όλα τα $x \in [LL]$, $y \in L$. Τότε, η L είναι επιλύσιμη.

Απόδειξη: Όπως είχαμε αναφέρει και προηγουμένως, αρκεί να δείξουμε ότι $[LL]$ είναι μηδενοδύναμη ή αλλιώς ότι όλα τα $x \in [LL]$ είναι μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί (Θεώρημα 1.7.4($Engel$)). Εφαρμόζουμε το προηγούμενο λήμμα για την κατάσταση: V όπως δίνεται, $A = [LL]$, $B = L$, και άρα $M = \{x \in gl(V)|[x, L] \subset [LL]\}$. Προφανώς, $L \subset M$. Η υπόθεσή μας λέει ότι $Tr(xy) = 0$ για $x \in [LL]$, $y \in L$ και για να καταλήξουμε μέσω του προηγουμένου λήμματος ότι κάθε $x \in [LL]$ είναι μηδενοδύναμο, πρέπει να δείξουμε κάτι ισχυρότερο: $Tr(xy) = 0$ για $x \in [LL]$, $y \in M$.

Αν $[x, y]$ είναι τυπικός γεννήτορας της $[LL]$ και αν $z \in M$, τότε α'πο την ταυτότητα $(*)$ παίρνουμε ότι $Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z]) = Tr([y, z]x)$. Από τον ορισμό του M έχουμε ότι $[y, z] \in [LL]$ και άρα το δεξί μέρος είναι 0 από υπόθεση. ■

Πόρισμα 2.1.11.
Έστω L Lie άλγεβρα τέτοια ώστε $Tr(ad\ x\ ad\ y) = 0$ για όλα τα $x \in [LL]$, $y \in L$. Τότε, η L είναι επίλυσιμη.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.10 για την $adjoint$ αναπαράσταση της L, παίρνουμε ότι $ad\ L$ είναι επιλύσιμη. Αφού, $Ker\ ad = Z(L)$ είναι επιλύσιμη, τότε και η L είναι επιλύσιμη (Πρόταση 1.6.3(b)). ■

2.2 Killing form

Έστω L Lie άλγεβρα. Αν x,$y \in L$, ορίζουμε $\kappa(x, y) = Tr(ad\ x\ ad\ y)$. Τότε, κ είναι συμμετρική διγραμμική μορφή στην L και καλείται $Killing\ form$. Η κ είναι προσεταιριστική, με την έννοια ότι $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$, το οποίο προκύπτει από την ταυτότητα $(*)$ στην Σημείωση στην 2.1.

Λήμμα 2.2.1.
Έστω I ιδεώδες μιας Lie άλγεβρας L. Αν κ είναι η $Killing\ form$ της L και κ_I η $Killing\ form$ του I (βλέποντας το I ως Lie άλγεβρα), τότε $\kappa_I = k|_{I \times I}$.

Απόδειξη: Έστω x,$y \in I$, τότε $(ad\ x)$ $(ad\ y)$ είναι ενδομορφισμός της L και απεικονίζει την L στο I, άρα το ίχνος του $\kappa(x,y)$ συμπίπτει με το ίχνος $\kappa_I(x,y)$ του $(ad\ x)$ $(ad\ y)|_I = (ad_I\ x)$ $(ad_I\ y)$ (γνωρίζουμε από γραμμική άλγεβρα ότι αν W είναι υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης και ϕ ενδομορφισμός του V που απεικονίζει το V στο W, τότε $Tr\phi = Tr(\phi|_W)$). ■

Έστω L *Lie* άλγεβρα. Γενικότερα, μια συμμετρική γραμμική μορφή $\beta(x,y)$ λέγεται μη εκφυλισμένη αν το ριζικό της S είναι 0, όπου $S = \{x \in L | \beta(x,y) = 0$ για όλα τα $y \in L\}$. Επειδή η $Killing\ form$ είναι προσεταιριστική, το ριζικό της δεν είναι απλά υπόχωρος αλλά είναι ιδεώδες της L. Έχουμε από γραμμική άλγεβρα έναν πρακτικό τρόπο να ελέγχουμε την μη εκφυλισιμότητα: Σταθεροποιούμε $x_1, \cdots, x_n$ βάση της L. Τότε, κ είναι μη εκφυλισμένη αν και μόνο αν ο $n \times n$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία στη θέσεις i,j είναι τα $\kappa(x_i, x_j)$ έχει ορίζουσα $\neq 0$.

Παράδειγμα 2.2.2. Υπολογίζουμε την $Killing\ form$ της $sl(2,F)$, χρησιμοποιώντας την κανονική βάση (Παράδειγμα 1.4.4), την οποία γράφουμε με τη σειρά (x,h,y). Οι πίνακες που προκύπτουν είναι:

$$ad\ x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad\ h = diag(2,0,-2),\ ad\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα, κ έχει πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ με ορίζουσα -128 και άρα κ είναι μη εκφυλισμένη (αυτό ισχύει αν $char\ F \neq 2$).

Παρατήρηση 2.2.3. Γνωρίζουμε ότι μια *Lie* άλγεβρα L είναι ημιαπλή αν $Rad\ L = 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ότι η L δεν έχει μη μηδενικά αβελιανά ιδεώδη. Πράγματι, κάθε τέτοιο ιδεώδες θα πρέπει να περιέχεται στο ριζικό και αντίστροφα, το ριζικό (αν είναι $\neq 0$) περιέχει ένα τέτοιο ιδεώδες της L (ο τελευταίο μη μηδενικός όρος της παράγουσας σειράς του $Rad\ L$).

Θεώρημα 2.2.4.
Έστω L *Lie* άλγεβρα. Τότε, η L είναι ημιαπλή αν και μόνο αν η $Killing\ form$ της είναι μη εκφυλισμένη.

Απόδειξη: 'Εστε ότι $Rad\ L = 0$ και έστε S να είναι το ριζικό της κ. Από ορισμό του S, $Tr(ad\ x\ ad\ y) = 0$ για όλα τα $x \in S$, $y \in L$ (πιο συγκεκριμένα, για $y \in [SS]$). Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.10 (Κριτήριο $Cartan$), η $ad_L\ S$ είναι επιλύσιμη και άρα η S επιλύσιμη (Πόρισμα 2.1.11). Γνωρίζουμε όμως από όσα είπαμε παραπάνω ότι S είναι ιδεώδες της L, άρα $S \subset Rad\ L = 0$ και άρα κ είναι μη εκφυλισμένη.

Αντίστροφα, έστω $S = 0$. Για να δείξουμε ότι η L είναι ημιαπλή, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αβελιανό ιδεώδες I της L περιέχεται στο S. Έστω $x \in I, y \in L$. Τότε, $ad\ x\ ad\ y$ απεικονίζει $L \to L \to I$ και $(ad\ x\ ad\ y)^2$ απεικονίζει την L στο $[II] = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $ad\ x\ ad\ y$ είναι μηδενοδύναμο και άρα $0 = Tr(ad\ x\ ad\ y) = \kappa(x, y)$, άρα $I \subset S = 0$. ■

Ορισμός 2.2.5.
Έστω L Lie άλγεβρα. Θα λέμε ότι είναι το ευθύ άθροισμα των ιδεωδών $I_1, \cdots, I_s$, όταν $L = I_1 + \cdots + I_s$ (ευθύ άθροισμα υπόχωρων) και $I_i \bigcap \sum_{j \neq i} I_j = 0$. Αυτό αναγκάζει $[I_i I_j] \subset I_1 \cap I_j = 0$ αν $i \neq j$. Τέλος, γράφουμε $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$.

Θεώρημα 2.2.6.
Έστω L ημιαπλή Lie άλγεβρα. Τότε, υπάρχουν ιδεώδη $L_1, \cdots, L_s$ της L που είναι απλά (ως Lie άλγεβρες), τέτοια ώστε $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$. Κάθε απλό ιδεώδες της L συμπίπτει με ένα από τα L_i. Επίσης, η $Killing\ form$ κάθε L_i είναι ο περιορισμός της κ στο $L_i \times L_i$.

Απόδειξη: Αρχικά, έστω I ιδεώδες της L. Τότε, $I^{\perp} = \{x \in L | \kappa(x, y) = 0$ για όλα τα $y \in I\}$ είναι ιδεώδες της L, λόγω προσεταιριστικότητας της κ. Από Κριτήριο $Cartan$ (Θεώρημα 2.1.10), εφαρμόζώντας το για την Lie άλγεβρα I, παίρνουμε ότι το ιδεώδες $I \cap I^{\perp}$ της L είναι επιλύσιμο και άρα 0. Άρα, αφού $dim\ I + dim\ I^{\perp} = dim\ L$, έχουμε ότι $L = I \oplus I^{\perp}$.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στη διάσταση της L. Αν η L δεν έχει μη μηδενικό γνήσιο ιδεώδες, τότε η L είναι απλή και έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά, έστω L_1 να είναι ελαχιστικό μη μηδενικό ιδεώδες, τότε από όσα προηγήθηκαν, έχουμε $L = L_1 + L_1^{\perp}$. Πιο συγκεκριμένα, κάθε ιδεώδες του L_1 είναι ιδεώδες της L και άρα L_1 είναι ημιαπλό (δηλαδη, σε αυτή την περίπτωση απλό, λόγω ελαχιστικότητας). Για τον ίδιο λόγο, $L_1^{\perp}$ είναι ημιαπλό και από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι διασπάται σε ευθύ άθροισμα απλών ιδεωδών της L. Η ανάλυση της L έπεται.

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα των απλών ιδεωδών, παίρνουμε I να είναι ένα απλό ιδεώδες της L, τότε $[IL]$ είναι ιδεώδες του I, μη μηδενικό, διότι $Z(L) = 0$. Αυτό αναγκάζει το $[IL] = I$. Από την άλλη πλευρά, $[IL] = [IL_1] \oplus \cdots \oplus L_s$ για κάποιο s, άρα όλοι εκτός από έναν προσθετέο πρέπει να είναι 0. Έστω $[IL_i] = I$, τότε $I \subset L_i$ και $I = L_i$ (αφού L_i απλό για κάθε i).

Το τελευταίο ζητούμενο του θεωρήματος, έπεται από το λήμμα 2.2.1. ■

Πόρισμα 2.2.7.
Αν L ημιαπλή *Lie* άλγεβρα, τότε $L = [LL]$ και όλα τα ιδεώδη και ομομορφικές εικόνες της L είναι ημιαπλά. Επίσης, κάθε ιδεώδες της L είναι άθροισμα κάποιων απλών ιδεωδών της L. ■

2.3 Πλήρης αναγωγιμότητα αναπαραστάσεων

Ορισμός 2.3.1.
Έστω L *Lie* άλγεβρα. Ένας διανυσματικο΄ς χώρος V, εφοδιασμένος με μία πράξη $L \times V \to V$ ($(x,u) \mapsto x.u$ ή xu) καλείται L-πρότυπο αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$(I1)$. $(ax + by).u = a(x.u) + b(y.u)$,
$(I2)$. $x.(au + bw) = a(x.u) + b(x.w)$,
$(I3)$. $[x, y].u = x.y.u - y.x.u$ για $x,\, y \in L,\, u,\, w \in V,\, a,\, b \in F$.

Αν $\phi : L \to gl(V)$ είναι αναπαράσταση της L, τότε V μπορεί να θεωρηθεί L-πρότυπο με την δράση $x.u = \phi(x)(u)$. Αντίστροφα, δεδομένου ενός L-προτύπου V, η παραπάνω εξίσωση ορίζει μια αναπαράσταση $\phi : L \to gl(v)$.

Ομομορφισμός δύο L-προτύπων V και W είναι μια γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to W$, τέτοια ώστε να ισχύει $\phi(x.u) = x.\phi(u)$. Ο πυρήνας ενός ομομορφισμού είναι L-υποπρότυπο του V (ισχύουν τα κλασσικά θεωρήματα ομομορφισμών). Όταν η ϕ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, η ϕ καλείται ισομορφισμός L-προτύπων και σε αυτή τη περίπτωση, τα δύο L-πρότυπα λέμε ότι έχουν ισοδύναμες αναπαραστάσεις της L.

Ορισμός 2.3.2.
Έστω *Lie* άλγεβρα L: (α). Ένα L-πρότυπο V καλείται ανάγωγο αν έχει ακριβώς δύο L-υποπρότυπα (0 και τον εαυτό του).
(β). Ένα L-πρότυπο V καλείται πλήρως αναλύσιμο αν V είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων L-υποπροτύπων, ισοδύναμα, αν κάθε L-υποπρότυπο W του V έχει συμπλήρωμα W' (L-υποπρότυπο, τέτοιο ώστε $V = W \oplus W'$).

Σημείωση: Δεν θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο διάστασης 0 ως ανάγωγο L-πρότυπο.

Έστω L Lie άλγεβρα και W, W' L-πρότυπα. Το ευθύ άθροισμά τους γίνεται L-πρότυπο με τον προφανή τρόπο, ορίζοντας $x.(w, w') = (x.w, x.w')$. Η ορολογία "ανάγωγο" και "πλήρως αναλύσιμο" εφαρμόζει και για αναπαραστάσεις της L.

Αναφέρουμε τώρα το Λήμμα $Schur$ και θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω:

Λήμμα 2.3.3.(Schur)
Έστω L Lie άλγεβρα και ανάγωγη αναπαράσταση $\phi : L \to gl(V)$. Τότε, οι μόνοι ενδομορφισμοί του V που μετατίθενται με όλα τα $\phi(x)$ $(x \in L)$ είναι οι βαθμωτοί πολλαπλασιασμοί. ■

Αν L Lie άλγεβρα και V ένα L-πρότυπο, τότε η L είναι L-πρότυπο (για τη συζυγή αναπαράσταση). Ένα L-υποπρότυπο είναι ένα ιδεώδες και άρα ως αποτέλεσμα έχουμε ότι, μια απλή Lie άλγεβρα L είναι ανάγωγη ως L-πρότυπο, ενώ μια ημιαπλή άλγεβρα είναι πλήρως αναλύσιμη (Θεώρημα 2.2.6).

Έστω L Lie άλγεβρα. Τότε, ο δυϊκός διανυσματικός χώρος V^* γίνεται L-πρότυπο (καλείται δυϊκό) αν ορίσουμε, για $f \in V^*$, $u \in V$, $x \in L$: $(x.f)(u) = -f(x.u)$. Οι συνθήκες $(I1)$, $(I2)$ είναι προφανείς. Θα ελέγξουμε τη συνθήκη $(I3)$:

$$([x,y].f)(u) = -f([x,y].u) = -f(x.y.u - y.x.u) = -f(x.y.u) + f(y.x.u) = (x.f)(y.u) - (y.f)(x.u) = -(y.x.f)(u) + (x.y.f)(u) = ((x.y - y.x).f)(u).$$

Αν V, W είναι L-πρότυπα, έστω $V \otimes W$ να είναι το τανυστικό γινόμενο πάνω από το F των υποκείμενων διανυσματικών χώρων. Θυμόμαστε ότι αν V, W έχουν βάσεις $(v_1, \cdots, v_m)$ και $(w_1, \cdots, w_n)$, αντίστοιχα, τότε $V \otimes W$ έχει βάση που αποτελείται από τα mn διανύσματα $v_i \otimes w_j$. Μπορούμε να δώσουμε τη μορφή L-προτύπου στο τανυστικό γινόμενο ως εξής: $x.(v \otimes w) = x.v \otimes w + v \otimes x.w$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη $(I3)$:

$$[x,y].(v \otimes w) = [x,y].v \otimes w + v \otimes [x,y].w = (x.y.v - y.x.v) \otimes w + v \otimes (x.y.w - y.x.w) = (x.y.v \otimes w + v \otimes x.y.w) - (y.x.v \otimes w + v \otimes y.x.w)$$

Αναπτύσσοντας και το $(x.y - y.x).(v \otimes w)$ θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Δεδομένου ενός διανυσματικού χώρου V πάνω από ένα σώμα F, υπάρχει τυπικός ισομορφισμός διανυσματικών χώρων: $V^* \otimes V \to End\ V$, που δίνεται στέλνοντας ένα τυπικό γεννήτορα $f \otimes v$ $(f \in V^*,\ v \in V)$ στον ενδομορφισμό που η τιμή του στο $w \in V$ είναι $f(w)v$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αυτό ορίζει έναν επιμορφισμό $V^* \otimes V \to End\ V$ και αφού οι δύο πλευρές έχουν διάσταση ίση με n^2 $(n = dim\ V)$, θα πρέπει να είναι ισομορφισμός.

Τώρα, αν V (άρα και V^*) είναι L-πρότυπο, τότε $V^* \otimes V$ γίνεται L-πρότυπο με τον τρόπο που είπαμε προηγουμένως. Άρα, $End\ V$ μπορεί να θεωρηθεί ως L-πρότυπο μέσω του προηγούμενου ισομορφισμού. Αυτή η δράση της L στο $End\ V$ μπορεί να περιγραφεί ως εξής: $(x.f)(u) = x.f(u) - f(x.u)$, $x \in L$, $f \in End\ V$, $u \in V$. Γενικότερα, αν V και W είναι δύο L-πρότυπα, τότε η L δρα με το φυσιολογικό τρόπο στο χώρο $Hom\ (v, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων ως εξής: $(x.f)(u) = x.f(u) - f(x.u)$.

Στην 2.2 χρησιμοποιήσαμε το Κριτήριο $Cartan$ (Θεώρημα 2.1.10) για επιλυσιμότητα, για να δείξουμε ότι μια ημιαπλή Lie άλγεβρα L έχει μη εκφυλισμένη $Killing\ form$. Γενικότερα, έστω L ημιαπλή Lie άλγεβρα και $\phi : L \to gl(V)$ να είναι πιστή (δηλαδή, $1-1$) αναπαράσταση της L. Ορίζουμε συμμετρική διγραμμική μορφή $\beta(x, y) = Tr(\phi(x)\phi(y))$ στην L. Η μορφή β είναι προσεταιριστική, λόγω της σχέσης $(*)$ (Σημείωση στη 2.1) και άρα το ριζικό της S είναι ιδεώδες της L. Επιπλέον, β είναι μη εκφυλισμένη. Πράγματι, το Κριτήριο $Cartan$ (Θεώρημα 2.1.10) δείχνει ότι $\phi(S) \cong S$ είναι επιλύσιμο, άρα $S = 0$ (Η $Killing\ form$ είναι η β στην ειδική περίπτωση που $\phi = ad$).

Έστω L ημιαπλή Lie άλγεβρα και β μια μη εκφυλισμένη, συμμετρική, προσεταιριστική, διγραμμική μορφη στην L. Αν $(x_1, \cdots, x_n)$ βάση της L, τότε υπάρχει μοναδικά ορισμένη δυϊκή βάση $(y_1, \cdots, y_n)$ σχετική με την β που ικανοποιεί την $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Αν $x \in L$, μπορούμε να γράψουμε $[x, x_i] = \sum_j a_{ij} x_j$ και $[x, y_i] = \sum_j b_{ij} y_j$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της β, υπολογίζουμε:

$$a_{ik} = \sum_j a_{ij} \beta(x_j,\, y_k) = \beta([x, x_i],\, y_k) = \beta(-[x_i, x],\, y_k) = \beta(x_i,\, -[x, y_k]) = -\sum_j b_{kj} \beta(x_i,\, y_j) = -b_{ki}.$$

Αν $\phi : L \to gl(V)$ είναι αναπαράσταση της L, γράφουμε $c_\phi(\beta) = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i) \in End\ V$ (x_i, y_i ανήκουν σε δυϊκές βάσεις, όπως παραπάνω). Χρησιμοποιώντας τη ταυτότητα (στην $End\ V$) $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$ και το γεγονός ότι $a_{ik} = -b_{ki}$ (για x, όπως παραπάνω), παίρνουμε:

$$[\phi(x),\, c_\phi(\beta)] = \sum_i [\phi(x),\, \phi(x_i)]\phi(y_i) + \sum_i \phi(x_i)[\phi(x),\, \phi(y_i)] = \sum_{i,j} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i) + \sum_{i,j} b_i j \phi(x_i)\phi(y_j) = 0.$$

Με άλλα λόγια, $c_{\phi(\beta)}$ είναι ενδομορφισμός του V που μετατίθεται με το $\phi(L)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έστω $\phi : L \to gl(V)$ να είναι μια πιστή αναπαράσταση της L με μη εκφυλισμένη μορφή (ίχνους) $\beta(x,\, y) = Tr(\phi(x)\phi(y))$.

Στην περίπτωση αυτή, έχοντας σταθεροποιήσει μια βάση $(x_1, \cdots, x_n)$ της L, γράφουμε c_ϕ αντί για $c_\phi(\beta)$ και το ονομάζουμε στοιχείο $Casimir$ της ϕ. Το ίχνος του είναι $\sum_i Tr(\phi(x_i)\phi(y_i)) = \sum_i \beta(x_i,\, y_i) = dim\ L$. Στην περίπτωση που ϕ είναι ανάγωγη, το λήμμα $Schur$ (2.3.3) δείχνει ότι c_ϕ θα είναι βαθμωτό (ίσο με $dim\ L/\ dim\ V$) και άρα βλέπουμε ότι c_ϕ είναι ανεξάρτητο της βάσης της L που διαλέξαμε.

Παράδειγμα 2.3.4. Έστω $L = sl(2, F)$, $V = F^2$ και ϕ η ταυτοτική απεικόνιση $L \to gl(V)$. Έστω, (x, h, y) η κανονική βάση της L (Παράδειγμα 1.4.4). Εύκολα βλέπουμε ότι η δυϊκή βάση σχετική με τη μορφή ίχνους είναι η $(y, h/2, x)$ και άρα, $c_\phi = xy + (1/2)h^2 + yx = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι, $3/2 = dim\ L/dim\ V$.

Όταν ϕ δεν είναι πιστή, $Ker\ \phi$ είναι ιδεώδες της L και άρα άθροισμα κάποιων απλών ιδεωδών της L (Πόρισμα 2.2.7). Έστω L' να είναι το άθροισμα των υπολοίπων απλών ιδεωδών (Θεώρημα 2.2.6). Τότε, ο περιορισμός της ϕ στο L' είναι πιστή αναπαράσταση του L' και πραγματοποιούμε την ίδια διαδικασία (χρησιμοποιώντας δυϊκή βάση του L'). Το στοιχείο του $End\ V$, που θα προκύψει, είναι το στοιχείο $Casimir$ της ϕ, συμβολίζεται με c_ϕ και μετατίθεται με το $\phi(L') = \phi(L)$.

Λήμμα 2.3.5.
Έστω $\phi : L \to gl(V)$ αναπαράσταση μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας L. Τότε, $\phi(L) \subset sl(V)$. Πιο συγκεκριμένα, η L δρα με τετριμμένο τρόπο στα μονοδιάστατα L-πρότυπα.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $L = [LL]$ (Πόρισμα 2.2.7) και το ότι η $sl(V)$ είναι η παράγουσα άλγεβρα της $gl(V)$ $(\phi(L) = \phi([LL]) = [\phi(L)\phi(L)] \subset [gl(V)gl(V)] = sl(V))$. ■

Λήμμα 2.3.6.

Αν V έχει ανάγωγο L-υποπρότυπο W συνδιάστασης 1, τότε $Ker\ c_\phi = W'$, όπου W' το συμπλήρωμα του W.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι c_ϕ είναι ενδομορφισμός του V που μετατίθεται με το $\phi(L)$ και άρα $Ker\ c_\phi$ είναι L-υποπρότυπο του V. Αφού W ανάγωγο, έχουμε (Λήμμα $Schur$) ότι $c_\phi|W = \dfrac{dimL}{dimW} \cdot 1 \neq 0$. Επομένως, $Ker\ (c_\phi) \cap W = 0$.

Τώρα θα δείξουμε και ότι $dim\ Ker\ c_\phi = 1$. Έστω $dim\ V = n$. Αρχικά, $dim\ Ker\ c_\phi \leq dim\ V - dim\ W + dim\ (Ker\ (c_\phi) \cap W) = n-(n-1)+0 = 1$. Αφού $dim\ V/W = 1$, από Λήμμα 2.3.5, L δρα τετριμμένα στο V/W. Αφού $c_\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi(y_i)$, c_ϕ δρα τετριμμένα στο V/W και έχουμε $c_\phi|W \neq 0$, άρα $Tr_W(c_\phi) \neq 0$, από όπου έχουμε $dim\ Ker\ c_\phi \geq 1$. Τελικά, $dim\ Ker\ c_\phi = 1$ και $Ker\ c_\phi = W'$. ■

Λήμμα 2.3.7.
Αν V έχει (όχι αναγκαστικά ανάγωγο) L-υποπρότυπο W συνδιάστασης 1, τότε υπάρχει το W'.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 2.3.5, η L δρα τετριμμένα στο $V/W = Y$. Τότε η ακολουθία $0 \to W \to V \to Y \to 0$ είναι ακριβής. Αν W ανάγωγο, τότε το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο λήμμα.

Έστω W όχι ανάγωγο και W'' ένα μη μηδενικό γνήσιο υποπρότυπο του W. Τότε η ακολουθία $0 \to W/W'' \to V/W'' \to Y \to 0$ είναι ακριβής. Αφού $dim\ W/W'' < dim\ W$, με χρήση επαγωγής στη $dim\ W$, υπάρχει το συμπλήρωμα $\tilde{W}/W''$ του W/W'' στο V/W' και $dim\ \tilde{W}/W' = 1$. Έτσι παίρνουμε μια άλλη ακριβής ακολουθία :$0 \to W'' \to \tilde{W} \to Y \to 0$. Αφού $dim\ W'' < dim\ W$, από επαγωγή, υπάρχει το συμπλήρωμα X του W'' στο $\tilde{W}$ και $dim\ X = 1$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι X είναι το συμπλήρωμα του W στο V. Αφού $V/W'' = W/W'' \oplus \tilde{W}/W''$, έχουμε $X \cap W \subset \tilde{W} \cap W \subset W''$ και αφού $\tilde{W} = W'' \oplus X$, έχουμε $X \cap W'' = 0$. Από αυτά τα δύο, παίρνουμε ότι $X \cap W = 0$, δηλαδή, $X = W'$ στο V που είναι το ζητουμένο. ■

Λήμμα 2.3.8.
Έστω W μη μηδενικό γνήσιο L-υποπρότυπο του V. Έστω

$$\mathcal{V} = \{f \in Hom\ V, W) | f|_W = a \cdot 1_W, \text{ για κάποιο } a \in F\}$$

Έστω $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{V} | f|_W = 0\}$. Τότε,
(1) $\mathcal{V}$ είναι L-υποπρότυπο του $Hom\ (V, W)$, $\mathcal{W}$ είναι L-υποπρότυπο του $\mathcal{V}$ και $L.\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$.
(2) $dim\ \mathcal{W} = dim\ \mathcal{V} - 1$.

Απόδειξη: (1) Για κάθε $x \in L$, $f \in \mathcal{V}$ και $w \in W$, έχουμε $x.w \in W$ και

$(x.f)(w) = x.f(w) - f(x.w) = (x.aw) - a(x.w) = 0$. Τότε, $x.f \in \mathcal{W}$ και $L.\mathcal{W} \subset L.\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.
(2) Από ορισμό, η ακολουθία $0 \to \mathcal{W} \to \mathcal{V} \to F \to 0$ είναι ακριβής, όπου η απεκόνιση $\mathcal{V} \to F$ στέλνει $F \in \mathcal{V}$ στην ιδιοτιμή του $f|_W$. ■

Θεώρημα 2.3.9.(Weyl)
Έστω L ημιαπλή άλγεβρα *Lie*. Έστω $\phi : L \to gl(V)$ (πεπερασμένης διάστασης) αναπαράσταση της L. Τότε ϕ είναι πλήρως αναλύσιμη.

Απόδειξη:Έστω W μη μηδενικό γνήσιο L-υποπρότυπο του V. Από το Λήμμα 2.3.7, $\mathcal{W}$ έχει συμπλήρωμα $\mathcal{W}'$ στο $\mathcal{V}$. Έστω $f : V \to W$ να είναι ο γεννήτορας του $\mathcal{W}'$ τέτοιος ώστε $f|_W = 1_W$. Αφού $dim\ \mathcal{V}/\mathcal{W} = 1$, από το Λήμμα 2.3.5, L δρα τετριμμένα στο $\mathcal{V}/\mathcal{W} \simeq \mathcal{W}'$, δηλαδή,

$$o = (x.f)(u) = x.f(u) - f(x.u) \ \ \forall x \in L$$

Αν $u \in Ker\ f$, τότε $x.u \in Ker\ f$, από όπου παίρνουμε ότι $Ker\ f$ είναι L-υποπρότυπο του V.

Τέλος, θα δείξουμε ότι $Ker\ f = W'$. Αφού $f|_W = 1_W$ έχουμε $Im\ f = W$ και άρα $dim\ W = dim\ V/Ker\ f = dim\ V - dim\ Ker\ f$. Επίσης, αν $x \in Ker\ f \cap W$, τότε $0 = f(x) = x$ και άρα $Ker\ f \cap W = 0$. Συνεπώς, $Ker\ f = W'$ στο V. ■

Σημείωση: Το Θεώρημα *Weyl* δεν ισχύει στην περίπτωση που η χαρακτηριστική του σώματος F είναι θετική

2.4 Αναπαραστάσεις της $\mathbf{sl(2,F)}$

Στα παρακάτω όλα τα πρότυπα θα είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα F. Με L θα συμβολίζουμε την $sl(2,F)$, με κανονική βάση

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Παράδειγμα 1.4.4). Τότε $[h,x] = 2x$, $[h,y] = -2y$, $[x,y] = h$.

Έστω V τυχόν L-πρότυπο. Αφού h ημιαπλό, έχουμε ότι h δρα διάγωνια στα στοιχεία του V (Η υπόθεση ότι F είναι αλγεβρικά κλειστό, που δόθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, εξασφαλίζει ότι όλες οι απαιτούμενες ιδιοτιμές βρίσκονται στο F). Αυτό επιφέρει μια ανάλυση του V σε ευθύ άθροισμα ιδιόχωρων $V_\lambda = \{u \in V | h.u = \lambda u\}$, $\lambda \in F$. Κάθε υπόχωρος V_λ έχει νόημα (και είναι 0) όταν λ δεν είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού του V που αναπαριστά το h.

Ορισμός 2.4.1.
Όταν $V_\lambda \neq 0$ καλούμε το λ βάρος της h στο V και καλούμε το V_λ χώρο βάρους.

Λήμμα 2.4.2.
Αν $u \in V_\lambda$, τότε $x.u \in V_{\lambda+2}$ και $y.u \in V_{\lambda-2}$.

Απόδειξη: $h.(x.u) = [h,x].u + x.(h.u) = 2x.u + x.(\lambda u) = 2x.u + \lambda x.u = (\lambda+2)x.u$
και
$h.(y.u) = [h,y].u + y.(h.u) = -2y.u + y.(\lambda u) = -2y.u + \lambda y.u = (\lambda-2)y.u.$ ■

Παρατήρηση 2.4.3.: Από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε ότι x, y αναπαρίστανται από μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς του V.

Επίσης, αφού $dim\ V < \infty$ και το άθροισμα $V = \coprod_{\lambda \in F} V_\lambda$ είναι ευθύ, θα πρέπει να υπάρχει $V_\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε $V_{\lambda+2} = 0$ (σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, θα ισχύει $x.u = 0\ \forall\ u \in V_\lambda$). Για κάθε τέτοιο λ, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στο V_λ θα καλείται μεγιστικό διάνυσμα βάρους λ.

Λήμμα 2.4.4.
Έστω V ανάγωγο L-πρότυπο.Έστω $u_0 \in V_\lambda$ μεγιστικό διάνυσμα και θέτουμε $u_{-1} = 0$, $u_i = (1/i!)y^i.u_0$ $(i \geq 0)$. Τότε

(a) $h.u_i = (\lambda - 2i)u_i$,
(b) $y.u_i = (i+1)u_{i+1}$,
(c) $x.u_i = (\lambda - i + 1)u_{i-1} \quad (i \geq 0)$.

Απόδειξη: (a) Ισχύει $h.u_0 = \lambda u_0$. Από το Λήμμα 2.4.2 και χρήση επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.
(b) $y.u_i = y.(1/i!)y^i.u_0 = y.(i+1/(i+1)!)y^i.u_0 = (i+1)(1/(i+1)!)y^{i+1}.i_0 = (i+1)u_{i+1}$.
(c) Θα κάνουμε χρήση επαγωγής στο i. Όταν $i = 0$, τότε το δεξί μέρος της (c) είναι ίσο με 0, αφού $u_{-1} = 0$ και το αριστερό μέρος είναι επίσης ίσο με 0, διότι $x.u_0 \in V_{\lambda+2} = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$ix.u_i = x.y.u_{i-1} = [x,y].u_{i-1} + y.x.u_{i-1} = h.u_{i-1} + y.x.u_{i-1} =$$
$$(\lambda - 2(i-1))u_{i-1} + (\lambda - i + 2)y.u_{i-2} =$$

$$(\lambda - 2i + 2)u_{i-1} + (i-1)(\lambda - 1 + 2)u_{i-1} = i(\lambda - i + 1)u_{i-1}.$$

(Η τέταρτη ισότητα, από επαγωγή). Τέλος, διαιρούμε και τα δύο μέλη με i και έχουμε το ζητούμενο. ■

Θεώρημα 2.4.5.
Έστω V ανάγωγο L-πρότυπο. Τότε $V = \bigoplus_{\mu} V_{\mu}$, $\mu = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, όπου $dim\ V = m+1$ και $dim\ V_{\mu} = 1$ για όλα τα μ.

Απόδειξη: Αρχικά δείχνουμε ότι τα $(u_i)_{0 \leq i \leq n}$ είναι γραμμηκώς ανεξάρτητα για κάθε n. Επαγωγή στο n. Για $n = 0$ ισχύει. Έστω $n > 0$ και έστω $\sum_{i=0}^{n} a_i u_i = 0$ για $a_i \in F$. Εφαρμόζοντας την h και στις δύο πλευρές, παίρνουμε, από Λήμμα 2.4.4(a)), $\sum_{i=0}^{n} (\lambda - 2i) a_i u_i = 0$. Τότε,

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (\lambda - 2i) a_i u_i - (\lambda - 2n) \sum_{i=0}^{n} a_i u_i = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i u_i$$

Από επαγωγή, $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και άρα $a_0 = a_1 = \ldots + a_{n-1} = 0$. Επομένως, $a_n u_n = 0$ και άρα $a_n = 0$.

Αφού $dim\ V < \infty$, υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $u_m \neq 0$ και $u_{m+i} = 0$ για όλα τα $i > 0$. Από το Λήμμα 2.4.4,$Span\{u_0, \ldots, u_m\}$ είναι μη μηδενικό L-υποπρότυπο του V με $u_i \in V_{m-2i}$. Τέλος, επειδή V ανάγωγο, $V = Span\{u_0, \ldots, u_m\}$ και

$$V = \bigoplus_{i=0}^{m} F u_i \subset \bigoplus_{i=0}^{m} V_{m-2i} = V$$

παίρνουμε ότι $V_{m-2i} = F u_i$ για κάθε i.

Παρατήρηση 2.4.6.: Από το Λήμμα 2.4.4(c), για $i = m+1$, παίρνουμε ότι $0 = x.u_{m+1} = (\lambda - m)u_m$. Αφού $u_m \neq 0$, έχουμε $\lambda = m = dim\ V - 1$. Με άλλα λόγια, το βάρος ενός μεγιστικού διανύσματος είναι μη αρνητικός ακέραιος ($= dim\ V - 1$) και καλείται ανώτατο βάρος του V.

Θεώρημα 2.4.7.
Έστω V ανάγωγο L-πρότυπο.
(a) V έχει (εκτός από μη μηδενικά πολλαπλάσια) μοναδικό μεγιστικό διάνυσμα ανώτατου βάρους.
(b) V έχει βάση όπως στο Λήμμα 2.4.4. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει το πολύ

ένα (σε ισομορφισμό) ανάγωγο L-πρότυπο για κάθε διάσταση ≥ 1.

Απόδειξη: (a) $-$Ύπαρξη:Από Λήμμα 2.4.4, u_0 είναι το επιλεγόμενο μεγιστικό διάνυσμα ανώτατου βάρους.
$-$Μοναδικότητα: Από Θεώρημα 2.4.5, $V_m = Fu_0$.
(b) Για το πρώτο μέρος, αρκεί να δείξουμε ότι οι πίνακες που αντιστοιχούν στα x, y, h ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις $((a)-(c))$, όπως τα x ,y ,h, δηλαδή,
$[h,x].u_i = h.x.u_i - x.h.u_i = 2(\lambda - i + 1)u_{i-1}$
$[h,y].u_i = h.y.u_i - y.h.u_i = -2(i+1)u_{i+1}$
$[x,y].u_i = x.y.u_i - y.x.u_i = (\lambda - 2i)u_i$.

Για το δεύτερο μέρος, υποθέτουμε ότι V και W είναι δύο ανάγωγα L-πρότυπα με διάσταση $m+1$ και διάνυσμα μεγιστικού βάρους u_0 και w_0, αντίστοιχα(τα διανύσματα u_i καυορίζουν πλήρως πρότυπα ίδιας διάστασης). ■

Πόρισμα 2.4.8.
Έστω V (πεπερασμένης διάστασης) L-πρότυπο. Τότε οι ιδιοτιμές του h στο V είναι όλες ακέραιοι και καθεμία προκύπτει μαζί με την αντίθετή της (ίδιο αριθμό φορών). Επιπλέον, σε κάθε ανάλυση του V σε ευθύ άθροισμα αναγώγων υποπροτύπων, ο αριθμός των προσθετέων είναι ίσος με $dim\ V_0 + dim\ V_1$.

Απόδειξη: Αν $V = 0$ δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Διαφορετικά, από το Θεώρημα $Weyl$ μπορούμε να γράψουμε το $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, με W_i ανάγωγα υποπρότυπα. Οι ιδιοτιμές του V είναι $\cup_{i=1}^{k}\{m_i, m_i - 2, \ldots, -m_i\}$, όπου $m_i + 1 = dim\ W_i$. Κάθε $m_i - 2j$ προκύπτει μαζί με $-(m_i - 2j)$ για όλα τα $1 \leq i \leq k$ και $0 \leq j \leq m_i/2$.

Αφού είτε $(W_i)_0$ είτε $(W_i)_1$ είναι χώρος βάρους για το W_i για κάθε i, τότε $dim\ (W_i)_0 + dim\ (W_i)_1 = 1$ για κάθε i. Επομένως, $k = \sum\limits_{i=1}^{k} 1 = \sum\limits_{i=1}^{k} dim$ $(W_i)_0 + dim\ (W_i)_1 = dim\ V_0 + dim\ V_1$. ■

Γνωρίζουμε ήδη πώς να κατασκευάζουμε πρότυπα σε μικρές διαστάσεις: τετριμμένο πρότυπο (διάσταση 1), φυσική αναπαράσταση (διάσταση 2), συζυγής αναπαράσταση (διάσταση 3). Για τυχαίο $m \geq 0$, οι σχέσεις του λήμματος 2.4.4 μας δίνουν τρόπο να ορίσουμε ανάγωγη αναπαράσταση της L σε έναν $m+1$-διάστατο διανυσματικό χώρο πάνω από το F με βάση $(u_0, \ldots, u_m)$ που καλείται $V(m)$ (απόδειξη θεωρήματος 2.4.7(b)). (Ένα γενικότερο θεώρημα ύπαρξης θα δούμε στο κεφάλαιο 5.)

2.5 Ανάλυση χώρου ριζών

Στα παρακάτω με L θα εννοούμε μια (μη μηδενική) άλγεβρα Lie. Θα μελετήσουμε τη δομή της L μέσω της συζυγής αναπαράστασής της.

Αν L αποτελείται εξ ολοκλήρου από μηδενοδύναμα στοιχεία, τότε L μηδενοδύναμη (Θεώρημα $Engel$). Αν δε συμβαίνει αυτό, τότε μπορούμε να βρούμε στοιχείο $x \in L$ του οποίου το ημιαπλό μέρος να είναι μη μηδενικό. Αυτό μας δείχνει ότι L έχει μη μηδενικές υποάλγεβρες (π.χ. $Span(x_s)$) που αποτελούνται από ημιαπλά στοιχεία.

Ορισμός 2.5.1.
Μια υποάλγεβρα της L που αποτελείται από ημιαπλά στοιχεία καλείται $toral$.

Λήμμα 2.5.2. Μια $toral$ υποάλγεβρα της L είναι αβελιανή.

Απόδειξη: Έστω T $toral$ υποάλγεβρα. Θέλουμε να δείξουμε ότι $[TT] = 0$, δηλαδή, $ad_T(x) = 0$ για όλα τα $x \in T$. Αφού $x \in T$ είναι ημιαπλό, $ad\ x$ είναι διαγωνίσιμη ($ad\ x$ ημιαπλή και F αλγεβρικά κλειστό) και άρα $ad_T(x)$ διαγωνίσιμη για όλα τα $x \in T$.

Αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές της $ad_T(x)$ είναι 0. Υποθέτουμε ότι $ad_T(x)(y) = [x, y] = ay$ για $a \neq 0$ και κάποιο μη μηδενικό $y \in T$. Αφού $ad_T(y)$ διαγωνίσιμη, τα ιδιοδιανύσματά της εκτείνονται στο T. Υποθέτουμε ότι

$$x = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n, \quad (*)$$

όπου $a_i \in F^*$ και z_i γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της $ad_T(y)$ τέτοια ώστε $ad_T(y)(z_i) = [y, z_i] = b_i z_i$ για $b_i \in F$. Εφαρμόζοντας την $ad_T(y)$ στην $(*)$, παίρνουμε

$$-ay = [y, x] = a_1 b_1 z_1 + \ldots a_n b_n z_n.$$

Εφαρμόζοντας ξανά την $ad_T(y)$, παίρνουμε $0 = [y, -ay] = a_1 b_1^2 z_1 + a_n b_n^2 z_n$. Αφού με z_i γραμμικώς ανεξάρτητα έχουμε $a_i b_i^2 = 0$ και άρα $b_i = 0$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Τότε $ay = a_1 b_1 z_1 + a_n b_n z_n = 0$, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας. ■

Ορισμός 2.5.3.

Έστω H *toral* υποάλγεβρα της L. Καλούμε της H μεγιστική *toral* υποάλγεβρα της L αν δεν υπάρχει *toral* υποάλγεβρα της L που να περιέχει γνήσια την H.

Αφού H είναι αβελιανή (Λήμμα 2.5.2), $ad_L(H)$ είναι μια οικογένεια ενδομορφισμών της L που μετατίθενται μεταξύ τους. Γνωρίζουμε από γραμμική άλγεβρα ότι $ad_L(H)$ είναι ταυτόχρονα διαγωνίσιμη. (Έστω $A_1, \ldots, A_r$ είναι γραμμικές απεικονίσεις σε ένα διανυσματικό χώρο V με κάθε A_i διαγωνίσιμη και A_i μετατίθενται μεταξύ τους. Για να δείξουμε ότι είναι ταυτόχρονα διαγωνίσιμοι, κάνουμε επαγωγή στον αριθμό r των γραμμικών απεικονίσεων. Το αποτέλεσμα είναι φανερό για $r = 1$, άρα έστω $r \geq 2$. Θέτουμε

$$E_\lambda = \{v \in V | A_r(v) = \lambda v\}$$

να είναι ένας ιδιόχωρος της A_r για κάποια ιδιοτιμή λ της A_r. Αφού A_r είναι διαγωνίσιμη, V είναι το ευθύ άθροισμα των ιδιόχωρων της A_r. Για $v \in E_\lambda$, $A_r(A_i(v)) = A_i(A_r(v)) = A_i(\lambda v) = \lambda(A_i(v))$, άρα $A_i(v) \in E_\lambda$. Επομένως, κάθε A_i περιορίζεται σε γραμμική απεικόνιση στον υπόχωρο E_λ και οι γραμμικές απεικονίσεις $A_i|_{E_\lambda}$ μετατίθενται, καθώς οι A_i μετατίθενται ως απεικονίσεις στο V και αυτοί οι περιορισμοί είναι διαγωνίσιμοι. Το πλήθος τους είναι ίσο με $r - 1$ και άρα από επαγωγή έχουμε ότι υπάρχει βάση του E_λ που αποτελείται απο "ταυτόχρονα" ιδιοδιανύσματα για τις $A_i|_{E_\lambda}$, $0 \leq i \leq r-1$. Τα στοιχεία του E_λ είναι και ιδιοδιανύσματα της $A_r|_{E_\lambda}$, καθώς όλα τα μη μηδενικά διανύσματα στο E_λ είναι ιδιοδιανύσματα της A_r. Συνεπώς, $A_i|_{E_\lambda}$, $0 \leq i \leq r$ είναι όλες διαγωνίσιμες. Ο διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα των ιδιόχωρων E_λ της A_r και άρα ενώνοντας "ταυτόχρονες" βάσεις ιδιοδιανυσμάτων για όλες τις $A_i|_{E_\lambda}$, καθώς το λ διατρέχει όλες τις ιδιοτιμές της A_r, παίρνουμε μια "ταυτόχρονη" βάση ιδιοδιανυσμάτων του V για όλες τις A_i). Με άλλα λόγια, L είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $L_\alpha = \{x \in L | [h, x] = \alpha(h)x$ για όλα τα $h \in H\}$, όπου $\alpha \in H^*$. Παρατηρούμε ότι $L_0 = C_L(H) =$ ο κεντροποιητής της H, που από το Λήμμα 2.5.2, περιέχει την H.

Ορισμός 2.5.4.
Θέτουμε $\Phi = \{\alpha \in H^* | \alpha \neq 0,\ L_\alpha \neq 0\}$ και καλούμε τα στοιχεία του Φ ρίζες της L (σχετικές με την H και είναι πεπερασμένες, αφού $dim\ L < \infty$). Αν $\alpha \in \Phi$, τότε L_α καλείται χώρος ρίζας α.

Με τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε μια ανάλυση χώρου ριζών (ανάλυση

Cartan): $L = C_L(H) \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$.

Πρόταση 2.5.5.
(i) Για κάθε $\alpha\ \beta \in H^*$, $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$.
(ii) Αν $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, τότε $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμο.
(iii) Αν α, $\beta \in H^*$ και $\alpha + \beta \neq 0$, τότε L_α είναι ορθογώνιο στο L_β, σχετικά με την *Killing form* κ της L.

Απόδειξη (i) Έστω $x \in L_\alpha$ και $y \in L_\beta$. Τότε $[h, x] = \alpha(h)x$ και $[h, y] = \beta(h)y$ για όλα τα $h \in H$. Με χρήση της ταυτότητας *Jacobi*, παίρνουμε

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y].$$

(ii) Άμεσο από το (i).
(iii) Αφού $\alpha+\beta \neq 0$, υπάρχει $h \in H$ τέτοιο ώστε $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$. Για όλα τα $x \in L_\alpha$ και $y \in L_\beta$, έχουμε (λόγω προσεταιριστικότητας της κ)

$$\alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa(\alpha(h)x, y) = \kappa([h, x], y) = -\kappa([x, h], y) = -\kappa(x, [h, y]) = \\ -\kappa(x, \beta(h)y) = -\beta(h)\kappa(x, y)$$

Επομένως, $(\alpha + \beta)(h)\kappa(x, y) = 0$ και άρα $\kappa(x, y) = 0$. ■

Πόρισμα 2.5.6.
Ο περιορισμός της *Killing form* κ στο $L_0 = C_L(H)$ $(\kappa|_{L_0})$ είναι μη εκφυλισμένος.

Από Θεώρημα 2.2.4 γνωρίζουμε ότι κ είναι μη εκφυλισμένη. Από την άλλη πλευρά, L_0 είναι ορθογώνιο για ·ολα τα L_α $(\alpha \in \Phi)$, σύμφωνα με τη παραπάνω πρόταση. Αν $z \in L_0$ είναι ορθογώνιο στο L_0, τότε $\kappa(z, L) = 0$, που αναγκάζει το $z = 0$. ■

Αναφέρουμε τώρα ένα στοιχείο από την γραμμική άλγεβρα:

Λήμμα 2.5.7.
Αν x ,y είναι ενδομορφισμοί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης που μετατίθενται, με y μηδενοδύναμο, τότε xy μηδενοδύναμο και πιο συγκεκριμένα, $Tr(xy) = 0$. ■

Πρόταση 2.5.8.

Έστω H μεγιστική $toral$ υποάλγεβρα της L. Τότε $H = C_L(H)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε στάδια. Γράφουμε $C = C_L(H)$.
(1)– Η C περιέχει όλα τα ημιαπλά και μηδενοδύναμα μέρη των στοιχείων της. Ένα x ανήκει στο $C_L(H)$ αν $ad\ x$ απεικονίζει τον υπόχωρο H του L στον υπόχωρο 0. Από Πρόταση 2.1.6, τα $ad\ x_s$ και $ad\ x_n$ (όπου $x = x_s + x_n$) έχουν την ίδια ιδιότητα.
(2)– Αν $x \in C_L(H)$ και x είναι ημιαπλό, τότε $x \in H$. Πράγματι, τότε $H + Fx$ (είναι αβελιανή υποάλγεβρα της L είναι $toral$, αφού το άθροισμα ημιαπλών στοιχείων που μετατίθενται είναι ημιαπλό. Τώρα από την μεγιστικότητα της H, $H + Fx = H$ και άρα $x \in H$.
(3)– Ο περιορισμός της κ στο H ($\kappa|_H$) είναι μη εκφυλισμένος. Έστω $\kappa(h, H) = 0$ για κάποιο $h \in H$, θα δείξουμε ότι $h = 0$. Αν $x \in C$ μηδενοδύναμο , τότε το γεγονός ότι $[x, h] = 0$ και ότι $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμο (μαζί με το προηγούμενο λήμμα) μας δίνουν ότι $\kappa(x, y) = Tr(ad\ x\ ad\ y) = 0$ για όλα τα $y \in H$ ($\kappa(x, H) = 0$). Αλλά τότε από (1) και (2) έχουμε ότι $\kappa(h, C) = 0$ και άρα $h = 0$ (Πόρισμα 2.5.6).
(4)– C είναι μηδενοδύναμη. Αν $x \in C$ είναι ημιαπλό, τότε $x \in H$ από (2) και $ad_C\ x = 0$. Από την άλλη, αν $x \in C$ είναι μηδενοδύναμο, τότε $ad_C\ x$ είναι μηδενοδύναμο. Έστω τώρα $x \in C$ τυχόν, με $x = x_s + x_n$, έχουμε $ad_C\ x = ad_C\ x_s + ad_C\ x_n = ad_C\ x_n$, δηλαδή, $ad_C\ x$ είναι μηδενοδύναμο. Από το Θεώρημα $Engel$, C είναι μηδενοδύναμη.
(5)– $H \cap [CC] = 0$. Πράγματι, έχουμε ότι $\kappa(H, H \cap [CC]) \subset \kappa(H, [CC])$ και λόγω προσεταιριστικότητας της κ μαζί με το ότι $[HC] = 0$, έχουμε $\kappa(H, [CC]) = 0$. Το ζητούμενο έπεται από το (3).
(6)– C είναι αβελιανή. Υποθέτουμε ότι $[CC] \neq 0$. Από (4) και Λήμμα 1.7.7, $Z(C) \cap [CC] \neq 0$. Έστω $0 \neq z \in Z(C) \cap [CC]$. Από (2) και (5), z δεν είναι ημιαπλό, διότι αν z ημιαπλό, τότε $z \in H$ από (2) και $z \in H \cap [CC]$ από (5), δηλαδή, $z = 0$, άτοπο. Άρα το μηδενοδύναμο μέρος n του z είναι μη μηδενικό και βρίσκεται στη C από (1). Αφού $z \in Z(C)$, από Πρόταση 2.1.6, $n \in Z(C)$. Τότε $[n, y] = 0$ για κάθε $y \in C$ και άρα $[ad\ n, ad\ y] = 0$ για κάθε $y \in C$. Άρα, αφού $ad\ n$ μηδενοδύναμο, από Λήμμα 2.5.7, έχουμε $\kappa(n, y) = 0$ για όλα τα $y \in C$. Επομένως, από Πόρισμα 2.5.6, $n = 0$, άτοπο.
(7)– $C = H$. Υποθέτουμε ότι $H \subsetneq C$, τότε υπάρχει μη μηδενικο μηδενοδύναμο στοιχείο $x \in C$ από (1),(2). Από το (6) και το Λήμμα 2.5.7, $\kappa(x, y) = 0$ για όλα τα $y \in C$, που έρχεται σε αντίφαση με το Πόρισμα 2.5.6. ■.

Πόρισμα 2.5.9. Ο περιορισμός της κ στο H ($\kappa|_H$) είναι μη εκφυλισμένος. ■

Σημείωση: Το παραπάνω Πόρισμα μας δίνει τη δυνατότητα να ταυτίσουμε την H με την H^*: σε $\phi \in H^*$ αντιστοιχούμε το (μοναδικό) στοιχείο $t_\phi \in H$ που ικανοποιεί την $\phi(h) = \kappa(t_\phi, h)$ για όλα τα $h \in H$ (είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, διότι αν $\phi(h) = \kappa(t_1, h) = \kappa(t_2, h)$ για κάθε $h \in H$, όπου $t_i \in H$, τότε $\kappa(t_1 - t_2, h) = 0$ για κάθε $h \in H$. Από το Πόρισμα 2.5.9,$t_1 = t_2$). Πιο συγκεκριμένα, Φ αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{t_\alpha; \alpha \in \Phi\}$ της H.

Πρόταση 2.5.10.
(1) $Span\ \Phi = H^*$.
(2) Αν $\alpha \in \Phi$, τότε $-\alpha \in \Phi$.
(3) Έστω $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Τότε $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$ (t_α όπως στη Σημείωση).
(4) Αν $\alpha \in \Phi$, τότε $[L_\alpha L_{-\alpha}]$ έχει διάσταση 1, με βάση t_α.
(5) $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$, για $\alpha \in \Phi$.
(6) Αν $\alpha \in \Phi$ και x_α είναι μη μηδενικό στοιχείο του L_α, τότε υπάρχει $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ τέτοιο ώστε τα x_α. y_α, $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ εκτείνονται σε μια απλή υποάλγεβρα της L διάστασης 3, ισόμορφη με $sl(2, F)$ μέσω

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(7) $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$ και $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

Απόδειξη: (1)− Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $Span\ \Phi = H^*$, τότε υπάρχει μη μηδενικό $h \in H$ τέτοιο ώστε $\alpha(h) = 0$ για όλα τα $\alpha \in \Phi$. Αυτό σημαίνει ότι $[h, L_\alpha] = 0$ για όλα τα $\alpha \in \Phi$. Έχουμε $[h, H] = [h, L_0] = 0$ και άρα $[h, L] = 0$, δηλαδή, $h \in Z(L)$. Όμως, L ημιαπλή και άρα $Z(L) = 0$, δηλαδή, $h = 0$, άτοπο.
(2)− Έστω $\alpha \in \Phi$. Αν $-\alpha \notin \Phi$ ($L_{-\alpha} = 0$), τότε από Πρόταση 2.5.5, $\kappa(L_\alpha, L_\beta] = 0$ για κάθε $\beta \in H^*$. Συνεπώς, $\kappa(L_\alpha, L] = 0$, που σημαίνει $L_\alpha = 0$, άτοπο.
(3)− Έστω $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Έστω $h \in H$. Η προσεταιριστικότητα της κ μας δίνει: $\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y) = \kappa(\kappa(x, y)t_\alpha, h) = \kappa(h, \kappa(x, y)y_\alpha)$. Αυτό μας δίνει ότι H είναι ορθογώνια στο $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha$ και από Πόρισμα 2.5.9, $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.
(4)− Αν $[L_\alpha L_{-\alpha}] \neq 0$, τότε από (3) έχουμε ότι $Span\ \{t_\alpha\} = [L_\alpha L_{-\alpha}]$. Έστω $0 \neq x \in L_\alpha$. Αν $\kappa(x, L_{-\alpha}) = 0$, τότε $\kappa(x, L) = 0$, που είναι άτοπο, διότι κ μη εκφυλισμένη. Άρα, μπορούμε να βρούμε $0 \neq y \in L_{-\alpha}$ για το οποίο $\kappa(x, y) \neq 0$ και από (3) έχουμε $[x, y] \neq 0$.
(5)− Υποθέτουμε ότι $\alpha(t_\alpha) = 0$ για κάποιο $\alpha \in \Phi$. Από το (4), υπάρχουν $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ με $\kappa(x, y) \neq 0$ και τροποποιώντας ένα από τα δύο με κάποιο πολλαπλάσιο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\kappa(x, y) = 1$. Θεωρούμε τη Lie άλγ-

βερα $S = Span\ \{x.y, t_\alpha\}$. Τότε $[t_\alpha, x] = \alpha(t_\alpha)x = 0$, $[t_\alpha, y] = -\alpha(t_\alpha)y = 0$ και $[x, y] = t_\alpha$ από (3). Άρα, S είναι επιλύσιμη. Από την Πρόταση 1.6.3, $ad_L(S)$ είναι επιλύσιμη και από Πόρισμα 2.1.5. $[ad_L(S)ad_L(S)]$ είναι μηδενοδύναμη και άρα $ad_L(s)$ είναι μηδενοδύναμο για κάθε $s \in [SS]$. Πιο συγκεκριμένα, $ad_L(t_\alpha)$ είναι μηδενοδύναμο. Αφού $t_\alpha \in H$ ημιαπλό, $ad_L(t_\alpha)$ ημιαπλό και άρα $ad_L(t_\alpha) = 0$. Συνεπώς, $t_\alpha \in Z(L) = 0$, διότι L ημιαπλή (Παρατήρηση 2.2.3) και άρα $t_\alpha = 0$, άτοπο.

(6)$-$ Δεδομένου $x_\alpha \in L_\alpha$, μπορούμε να βρούμε $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \dfrac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha}$ ((5) και το γεγονός ότι $\kappa(x_\alpha, L_{-\alpha}) \neq 0$. Θέτουμε $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$. Τότε $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, από (3). Επιπλέον, $[h_\alpha, x_\alpha] = \dfrac{2}{\alpha(t_\alpha}[t_\alpha, x_\alpha] = \dfrac{2\alpha(t_\alpha}{\alpha(t_\alpha}x_\alpha = 2x_\alpha$ και όμοια, $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Οπότε, $Span\ \{x_\alpha, y_\alpha.h_\alpha\}$ είναι μια υποάλγεβρα διάστασης 3 της L με ίδιο πολλαπλασιαστικό πίνακα με την $sl(2, F)$ (Παράδειγμα 1.4.4).

(7)$-$ t_α ορίζεται μέσω της $\kappa(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ $(h \in H)$ $(\kappa(t_{-\alpha}, h) = (-\alpha)(h) = -\alpha(h) = -\kappa(t_\alpha, h) = \kappa(-t_\alpha, h)$ για κάθε $h \in H$ και άρα από Πόρισμα 2.5.9 $t_\alpha = -t_{-\alpha})$. Παρατηρώντας τον τρόπο ορισμού των h_α, έπεται το ζητούμενο.
■

3 Συστήματα ριζών

3.1 Αξιώματα

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα έχουμε έναν σταθερό ευκλείδιο χώρο E, δηλαδή, έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με μια θετικά ορισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή (α, β). Γεωμετρικά, μια συμμετρία (αντικατοπτρισμός) στον E είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός που αφήνει σταθερό κατά σημείο ένα υπερεπίπεδο (υπόχωρος συνδιάστασης 1) και στέλνει κάθε διάνυσμα ορθογώνιο στο συγκεκριμένο υπερεπίπεδο, στο αρνητικό του. Άρα, μια συμμετρία (αντικατοπτρισμός) είναι ορθογώνια, δηλαδή, διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο στον E. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα α καθορίζει μια συμμετρία σ_α, με συμμετρικό υπερεπίπεδο $P_\alpha = \{\beta \in E | (\beta, \alpha) = 0\}$. Είναι φυσικό ότι κάθε μη μηδενικό διάνυσμα ανάλογο του α δίνει την ίδια συμμετρία. Είναι εύκολο να δώσουμε έναν αναλυτικό τύπο:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

(Βλέπουμε ότι στέλνει το α στο $-\alpha$ και ότι σταθεροποιεί όλα τα σημεία του P_α).

Λήμμα 3.1.1.
Έστω Φ πεπερασμένο σύνολο με $Span\ \Phi = E$. Υποθέτουμε ότι όλες οι συμμετρίες σ_α $(\alpha \in \Phi)$ αφήνουν το Φ αναλλοίωτο. Αν $\sigma \in GL(E)$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο, σταθεροποιεί κατά σημείο ένα υπερεπίπεδο P του E και στέλνει κάποιο μη μηδενικό $\alpha \in \Phi$ στο αρνητικό του, τότε $\sigma = \sigma_\alpha$ (και $P = P_\alpha$).

Απόδειξη: Έστω $\tau = \sigma\sigma_\alpha$ $(= \sigma{\sigma_\alpha}^{-1})$. Τότε, $\tau(\Phi) = \Phi$, $\tau(\alpha) = \alpha$ και τ δρά ως η ταυτοτική απεικόνιση στον υπόχωρο $\mathbb{R}_\alpha$ αλλά και στο πηλίκο $E/\mathbb{R}_\alpha$. Έτσι, όλες οι ιδιοτιμές της τ είναι ίσες με 1 και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο της τ διαιρεί το $(T-1)^l (l = dim\ E)$. Από την άλλη πλευρά, αφού Φ είναι πεπερασμένο, δεν γίνεται όλα τα διανύσματα $\beta, \tau(\beta), \cdots, \tau^k(\beta)$ $(\beta \in \Phi, k \geqslant Card$ $\Phi)$ να είναι διακεκριμένα, άρα κάποια δύναμη της τ σταθεροποιεί το β. Επιλέγουμε k αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε τ^k να σταθεροποιεί όλα τα $\beta \in \Phi$. Επειδή τώρα το Φ εκτείνεται στο E, αυτό αναγκάζει $\tau^k = 1$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το $T^k - 1$. Από τα παραπάνω δύο αποτελέσματα έχουμε ότι η τ έχει ελάχιστο πολυώνυμο $T-1 = \mu.\kappa.\delta.(T^k-1, (T-1)^l)$,δηλαδή, $\tau = 1$. ■

Ορισμός 3.1.2.
Ένα υποσύνολο Φ ενός ευκλείδιου χώρου E καλείται σύστημα ριζών στο E αν

ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:
$(R1)$ Φ πεπερασμένο, εκτείνεται στο E ($span\ \Phi = E$) και δεν περιέχει το 0.
$(R2)$ Αν $\alpha \in \Phi$, τα μόνα πολλαπλάσια του α στο Φ είναι τα $\pm\alpha$.
$(R3)$ Αν $\alpha \in \Phi$, η συμμετρία σ_α αφήνει το Φ αναλλοίωτο.
$(R4)$ Αν α, $\beta \in \Phi$, τότε $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Υπάρχει κάποιος πλεονασμός στα παραπάνω αξιώματα. Πιο συγκεκριμένα, το $(R2)$ και $(R3)$ δίνουν ότι $\Phi = -\Phi$. Κάποιες φορές το $(R2)$ παράλείπεται και τότε το σύστημα ριζών καλείται ανηγμένο σύστημα ριζών.

Έστω Φ σύστημα ριζών στον E. Συμβολίζουμε με $\mathcal{W}$ την υποομάδα της $GL(E)$ που παράγεται από τις συμμετρίες σ_α ($\alpha \in \Phi$). Από το $(R3)$ έχουμε ότι $\mathcal{W}$ μεταθέτει το σύνολο Φ, το οποίο από το $(R1)$ είναι πεπερασμένο και εκτείνεται στο E. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρούμε το $\mathcal{W}$ ως υποομάδα της συμμετρικής ομάδας στο E και πιο συγκεκριμένα, $\mathcal{W}$ είναι πεπερασμένο. Το $\mathcal{W}$ καλείται ομάδα $Weyl$ του Φ και παίζει σημαντικό ρόλο στα παρακάτω.

Παράδειγμα 3.1.3.: Σύστημα ριζών $sl(2, F)$

$$\longleftarrow \cdot \longrightarrow \ (sl(2, F))$$

Λήμμα 3.1.4.
Έστω Φ σύστημα ριζών στο E με ομάδα $Weyl$ $\mathcal{W}$. Αν $\sigma \in GL(E)$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο, τότε $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(a)}$ για όλα τα $\alpha \in \Phi$ και $\langle\beta,\alpha\rangle = \langle\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\rangle$ για όλα τα α, $\beta \in \Phi$, όπου $\langle\beta,\alpha\rangle = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

Απόδειξη: $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$, αφού $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$. Έχουμε ότι το προηγούμενο είναι ίσο με $\sigma(\beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha) = \sigma(\beta) - \langle\beta,\alpha\rangle\sigma(\alpha)$. Αφού το $\sigma(\beta)$ διατρέχει το Φ καθώς το β διατρέχει το Φ, παίρνουμε ότι $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο. Επίσης, αφήνει σταθερό κατά σημείο το υπερεπίπεδο $\sigma(P_\alpha)$ και στέλνει το $\sigma(\alpha)$ στο $-\sigma(\alpha)$. Από το Λήμμα 1.3.1, έχουμε ότι $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(a)}$. Στη συνέχεια, συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση $\sigma_{\sigma(a)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)$, παίρνουμε το δεύτερο μέρος του λήμματος. ■

Υπάρχει μια φυσική έννοια ισομορφισμού μεταξύ δύο συστημάτων ριζών Φ, Φ' σε ευκλείδιους χώρους E, E', αντίστοιχα. Καλούμε (Φ, E) και (Φ', E') ισόμορφα αν υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων (όχι αναγκαστικά ισομετρία) $\phi : E \to E'$ που στέλνει το Φ στο Φ' έτσι ώστε $\langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$ για κάθε ζευγάρι ριζών α, $\beta \in \Phi$. Έπεται, ότι $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$. Άρα, ένας ισομορφισμός συστημάτων ριζών επάγει έναν κανονικό ισομορφισμό $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ ομάδων $Weyl$. Τέλος, από το παραπάνω λήμμα βλέπουμε ότι ένας αυτομορφισμός του Φ είναι το ίδιο πράγμα με έναν αυτομορφισμό του E που αφήνει το Φ αναλλοίωτο. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathcal{W}$ ως υποομάδα της $Aut\ \Phi$.

Το αξιώμα $(R4)$ περιορίζει σημαντικά τις πιθανές γωνίες που μπορεί να εμφανιστούν μεταξύ ζευγών ριζών. Θυμόμαστε ότι το συνημίτονο της γώνιας μεταξύ δύο διανυσμάτων α, $\beta \in E$, δίνεται από τη σχέση $\|\alpha\|\|\beta\| \cos \theta = (\alpha, \beta)$. Άρα, $\langle\beta, \alpha\rangle = \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\dfrac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta$ και $\langle\alpha, \beta\rangle\langle\beta, \alpha\rangle = 4 \cos^2 \theta$. Ο τελευταίος αριθμμός είναι μη αρνητικός ακέραιος, $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ και $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\beta, \alpha\rangle$ έχουν ίδιο πρόσημο. Από τα παραπάνω, οι μόνες περιπτώσεις που υπάρχουν όταν $\alpha \neq \pm\beta$ και $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ είναι οι παρακάτω.

$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\langle\beta, \alpha\rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi\ /2$	απροσδιόριστο
1	1	$\pi\ /3$	1
-1	-1	$2\pi\ /3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Πίνακας 1.

Λήμμα 3.1.5.
Έστω α, β μη ανάλογες ρίζες. Αν $(\alpha, \beta) > 0$ (δηλαδή, αν η γωνία μεταξύ των α και β είναι γνήσια οξεία), τότε $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Αν $(\alpha, \beta) < 0$, τότε $\alpha + \beta$ είναι ρίζα.

Απόδειξη: Αφού (α, β) είναι θετικό αν και μόνο αν $\langle\alpha, \beta\rangle$ είναι θετικό, ο Πίνακας 1 δείχνει ότι, είτε $\langle\alpha, \beta\rangle = 1$ είτε $\langle\beta, \alpha\rangle = 1$. Αν $\langle\alpha, \beta\rangle = 1$, τότε $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ (λόγω $(R3)$). Όμοια, αν $\langle\beta, \alpha\rangle = 1$, τότε $\beta - \alpha \in \Phi$, ως εκ τούτου $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$. Το δεύτερο μέρος προκύπτει από το πρώτο αν εφαρμοστεί για το $-\beta$ στη θέση του β. ■

3.2 Απλές ρίζες και ομάδα Weyl

Στα παρακάτω , Φ θα υποδηλώνει ένα σύστημα ριζών τάξης l (τάξη ενός συστήματος ριζών καλούμε την $dim\ E = l$) σε έναν ευκλείδιο χώρο E , με ομάδα $Weyl\ \mathcal{W}$.

Ορισμός 3.2.1.
Ένα υποσύνολο Δ του Φ καλείται βάση αν:
$(B1)$ Δ είναι βάση του E,
$(B2)$ κάθε ρίζα β μπορεί να γραφεί ως $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, οπού οι συντελεστές k_α είναι όλοι μη αρνητικοί ή όλοι μη θετικοί.
Τότε οι ρίζες στο Δ καλούνται απλές. Έχουμε ότι $Card\ \Delta = l$ (από $(B1)$ και ότι η έκφραση του β στη $(B2)$ είναι μοναδική.

Ορισμός 3.2.2.
(i) Ως ύψος $(height)$ μιας ρίζας ορίζουμε το $ht\ \beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$.
(ii) Αν όλα τα $k_\alpha \geq 0$ (αντίστοιχα, όλα τα $k_\alpha \leq 0$), καλούμε τη β θετική (αντίστοιχα, αρνητική) και γράφουμε $\beta \succ 0$ (αντίστοιχα, $\beta \prec 0$).

Οι συλλογές των θετικών και αρνητικών ριζών (σχετικών με το Δ) θα συμβολίζονται με Φ^+ και Φ^- (ισχύει ότι, $\Phi^- = -\Phi^+$). Αν α και β είναι θετικές ρίζες και $\alpha + \beta$ είναι ρίζα, τότε $\alpha + \beta$ είναι θετική ρίζα. Το Δ όριζει μια μερική διάταξη στο E, συμβιβαστή με τον συμβολισμό $\alpha \succ 0$: Ορίζουμε $\beta \prec \alpha$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta$ είναι άθροισμα θετικών ριζών ή $\beta = \alpha$. Τέλος, το μοναδικό πρόβλημα με τον ορισμό της βάσης είναι ότι αδυνατεί να εξασφαλίσει την ύπαρξη μιας τέτοιας βάσης.

Λήμμα 3.2.3.
Αν Δ βάση του Φ, τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$ για $\alpha \neq \beta$ και $\alpha - \beta$ δεν είναι ρίζα.

Απόδειξη: Διαφορετικά, $(\alpha, \beta) > 0$. Αφού, $\alpha \neq \beta$,από υπόθεση, και διότι προφανώς $\alpha \neq -\beta$, έχουμε από το λήμμα 3.1.4 ότι $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Το τελευταίο όμως παραβιάζει τη συνθήκη $(B2)$. ■

Θέλουμε να δείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 3.2.4. Το Φ έχει βάση.

Η Απόδειξη του θα μας δώσει μια συγκεκριμένη μέθοδο για την κατασκευή όλων των πιθανών βασεων. Για κάθε διάνυσμα $\gamma \in E$, ορίζουμε $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi | (\gamma, \alpha) > 0\}$ = το σύνολο των ριζών που βρίσκονται στη "θετική" πλεύρα του υπερεπιπέδου, ορθογώνιο με το γ. Είναι βασίκο στοιχείο στην Ευκλείδια γεωμετρία το γεγονός ότι η ένωση των πεπερασμένου το πλήθος υπερεπιπέδων $P_\alpha (\alpha \in \Phi)$ δεν μπορεί να καλύψει το E. Καλούμε το $\gamma \in E$ ομαλό αν $\gamma \in E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$, ιδιάζων διαφορετικά. Όταν γ είναι ομαλό, βλέπουμε ότι $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$. Αυτή θα είναι και η περίπτωση με την οποία θα ασχοληθούμε. Καλούμε $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ αναλύσιμο αν $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ για κάποια $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$, μη αναλύσιμο διαφορετικά. Τώρα αρκεί να αποδείξουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.4.$'$
Έστω $\gamma \in E$ ομαλό. Τότε το σύνολο $\Delta(\gamma)$ όλων των μη αναλύσιμων ριζών στο $\Phi^+(\gamma)$ είναι βάση του Φ και κάθε βάση είναι επιτεύξιμη με παρόμοιο τρόπο.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε στάδια.
(1) Κάθε ρίζα στο $\Phi^+(\gamma)$ είναι μη αρνητικός $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\Delta(\gamma)$.
- Διαφορετικά, έστω $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ που δεν μπορεί να γραφεί με αυτό τον τρόπο. Επιλέγουμε α τέτοιο ώστε (γ, α) να είναι το μικρότερο δυνατό. Προφάνως το α δεν μπορεί να ανήκει στο $\Delta(\gamma)$, άρα $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ ($\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$), από όπου έχουμε $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$. Αλλά, κάθενα από τα (γ, β_i) είναι θετικό, άρα β_1 και β_2 πρέπει να είναι μη αρνητικός $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\Delta(\gamma)$ (λόγω ελαχίστου του (γ, α)), από όπου παίρνουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το α. Το τελευταίο έρχεται σε σύγκρουση με την αρχική μας υπόθεση και άρα έχουμε το ζητούμενο.
(2) Έστω $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$, τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$ εκτός εάν $\alpha = \beta$.
- Διφορετικά θα είχαμε $\alpha - \beta$ είναι ρίζα (Λήμμα 3.1.4) και αφού $\beta \neq -\alpha$, έχουμε ότι είτε $\alpha - \beta$ είτε $\beta - \alpha$ είναι στο $\Phi^+(\gamma)$. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε ότι $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ είναι αναλύσιμο και στη δεύτερη περίπτωση, έχουμε, αντίστοιχα, ότι β είναι αναλύσιμο. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο.
(3) $\Delta(\gamma)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- Υποθέτουμε ότι $\sum r_\alpha \alpha = 0$, όπου $\alpha \in \Delta(\gamma)$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$. Διαχωρίζοντας του δείκτες α για τους οποίους $r_\alpha > 0$ από αυτούς για τους οποίους $r_\alpha < 0$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το παραπάνω ως εξής $\sum p_\alpha \alpha = \sum n_\beta \beta$ (p_α, $n_\beta > 0$, όπου τα σύνολα των α και β είναι ξένα). Καλούμε $\varepsilon = \sum p_\alpha \alpha$. Τότε, $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha n_\beta \ (\alpha, \beta) \leq 0$ από βήμα (2), το οποίο αναγκάζει $\varepsilon = 0$. Τό-

τε, έχουμε $0 = (\gamma, \varepsilon) = \sum p_\alpha(\gamma, \alpha)$, το οποίο αναγκάζει όλα τα $p_\alpha = 0$. Όμοια, όλα τα $n_\beta = 0$. (Το παραπάνω επιχείρημα ουσιαστικά δείχνει ότι κάθε σύνλο διανυσμάτων που βρίσκονται αυστηρά σε μια πλευρά ενός υπερεπιπέδου του E και σχηματίζουν αμβλείες γωνίες πρέπει να είναι γραμμηκά ανεξάρτητο.)
(4) $\Delta(\gamma)$ είναι βάση του Φ.
- Αφού $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$, η συνθήκη $(B2)$ ικανοποιείται από το βήμα (1). Επίσης, έχουμε ότι $\Delta(\gamma)$ εκτείνεται στο E και σε συνδυασμό με το βήμα (3) ικανοποιείται και η συνθήκη $(B1)$.
(5) Κάθε βάση Δ του Φ έχει τη μορφή $\Delta(\gamma)$ για κάποιο ομαλό $\gamma \in E$.
- Δεδομένου ενός Δ, επιλέγουμε $\gamma \in E$ τέτοιο ώστε $(\gamma, \alpha) > 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$. Από $(B2)$, γ είναι ομαλό και $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$, $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ (άρα έχουμε ισότητα). Αφού, $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, Δ αποτελείται από μη αναλύσιμα στοιχεία, δηλαδή, $\Delta \subset \Delta(\gamma)$. Αλλά έχουμε , $Card\ \Delta = Card\ \Delta(\gamma) = l = dim\ E$, άρα $\Delta = \Delta(\gamma)$. ■

Ορισμός 3.2.5.
Τα υπερεπίπεδα P_α $(\alpha \in \Phi)$ διαμερίζουν το E σε πεπερασμένου το πλήθος περιοχές, οι συνδεδεμένες συνιστώσες του $E - \bigcup_\alpha P_\alpha$ καλούνται (ανοικτά) τμήματα (*chambers*) *Weyl* του E.

Κάθε ομαλό $\gamma \in E$ ανήκει σε ακριβώς ένα τμήμα *Weyl*, που συμβολίζουμε με $\mathfrak{C}(\gamma)$. Όταν λέμε ότι $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ εννοούμε ότι τα γ, γ' βρίσκονται στην ίδια πλευρά καθενός υπερεπιπέδου P_α $(\alpha \in \Phi)$, δηλαδή, ότι $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ ή $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Αυτό μας δείχνει ότι τα τμήματα *Weyl* είναι σε $1-1$ αντιστοιχία με τις βάσεις. Γράφουμε $\mathfrak{C}(\Delta) = \mathfrak{C}(\gamma)$ αν $\Delta = \Delta(\gamma)$ και το καλούμε θεμελιώδες τμήμα *Weyl* σχετικό με το Δ. $\mathfrak{C}(\Delta)$ είναι ανοικτό κυρτό σύνολο που αποτελείται από όλα τα $\gamma \in E$ τα οποία ικανοποιούν τις ανισότητες $(\gamma, \alpha) > 0$ $(\alpha \in \Delta)$.

Η ομάδα *Weyl* στέλνει ένα τμήμα *Weyl* σε ένα άλλο, πιο αναλυτικά, $\sigma(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma\gamma)$, αν $\sigma \in \mathcal{W}$ και γ είναι ομαλό. Από την άλλη, $\mathcal{W}$ μεταθέτει βάσεις: σ στέλνει το Δ στο $\sigma(\Delta)$, το οποίο είναι βάση. Οι δύο αυτές δράσεις της $\mathcal{W}$ είναι συμβατές με την παραπάνω αντιστοιχία μεταξύ τμημάτων *Weyl* και βάσεων και τελικά έχουμε $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma\gamma)$, διότι $(\sigma\gamma, \sigma\alpha) = (\gamma, \alpha)$.

Έστω Δ μια σταθερή βάση για το Φ

Λήμμα 3.2.6.
Αν α θετική αλλά όχι απλή ρίζα, τότε $\alpha - \beta$ είναι ρίζα (αναγκαστικά θετική) για κάποιο $\beta \in \Delta$.

Απόδειξη: Αν $(\alpha,\beta)\leq 0$ για όλα τα $\beta\in\Delta$, έχουμε από την παρένθεση στο βήμα (3) του θεωρήματος 3.2.4$'$ ότι το $\Delta\cup\{\alpha\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό είναι άτοπο, αφού το Δ είναι βάση του E. Άρα, $(\alpha,\beta)>0$ για κάποιο $\beta\in\Delta$ και άρα από λήμμα 3.1.4 έχουμε ότι $\alpha-\beta\in\Phi$ (το λήμμα εφαρμόζεται διότι το β δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του α). Γράφουμε τώρα, $\alpha=\sum\limits_{\gamma\in\Delta}k_\gamma\gamma$ (όλα τα $k_\gamma\geq 0$ και κάποια $k_\gamma>0$ για $\gamma\neq\beta$). Αφαιρώντας το β από το α προκύπτει ένας $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός απλών ριζών με τουλάχιστον ένα θετικό συντελεστή. Αυτό αναγκάζει όλους τους συντελεστές να είναι θετικοί, λόγω της μοναδικότητας στην έκφραση $(B2)$. ■

Πόρισμα 3.2.7.
Κάθε $\beta\in\Phi^+$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha_1+\ldots+\alpha_k$ ($\alpha_i\in\Delta$, όχι αναγκαστικά διαφορετικά μεταξύ τους) με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μερικό άθροισμα $\alpha_1+\ldots+\alpha_j$ να είναι ρίζα.

Απόδειξη: Χρήση του προηγούμενου λήμματος και επαγωγή στο $ht\ \beta$. ■

Λήμμα 3.2.8.
Έστω α απλή ρίζα, τότε σ_α μεταθέτει τις θετικές ρίζες εκτός από την α.

Απόδειξη: Έστω $\beta\in\Phi^+-\{\alpha\}$, $\beta=\sum\limits_{\gamma\in\Delta}k_\gamma\gamma$ $(k_\gamma\geq 0)$. Είναι προφανές ότι το β δεν είναι πολλαπλάσιο του α. Άρα, $k_{\gamma>0}$ για κάποιο $\gamma\neq\alpha$. Αλλά ο συντελεστής του γ στο $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha$ είναι το k_γ. Άρα, $\sigma_\alpha(\beta)$ έχει τουλάχιστον ένα θετικό συντελεστή (σχτικό με το Δ), το οποίο την αναγκάζει να είναι θετική. Επιπλέον, $\sigma_\alpha(\beta)\neq\alpha$, αφού το α είναι η εικόνα του $-\alpha$. ■

Πόρισμα 3.2.9.
Θέτουμε $\delta=\frac{1}{2}\sum\limits_{\beta\succ 0}\beta$. Τότε, $\sigma_\alpha(\delta)=\delta-\alpha$ για όλα τα $\alpha\in\Delta$.

Απόδειξη: Άμεσο από το προηγούμενο λήμμα. ■

Λήμμα 3.2.10.
Έστω $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\Delta$ (όχι αναγκαστικά διαφορετικά). Γράφουμε $\sigma_i=\sigma_{\alpha_i}$. Αν $\sigma_1\cdots_{k-1}(\alpha_k)$ είναι αρνητική ρίζα, τότε για κάποιο δείκτη $1\leq s\geq k$, $\sigma_1\cdots\sigma_k=\sigma_1\cdots\sigma_{s-1}\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{k-1}$.

Απόδειξη: Γράφουμε $\beta_i=\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{k-1}(\alpha_k)$, $0\leq i\geq k-2$, $\beta_{k-1}=\alpha_k$.

Αφού $\beta_0 \prec 0$ και $\beta_{k-1} \succ 0$, μπορούμε να βρούμε το μικρότερο δείκτη s για τον οποίο $\beta_s \succ 0$. Τότε, $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$ και το λήμμα 3.2.8 δίνει ότι $\beta_s = \alpha_s$. Γενικά (λήμμα 3.1.3), $\sigma \in \mathcal{W}$ σημαίνει $\sigma_{\sigma_\alpha} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ και άρα πιο συγκεκριμένα, $\sigma_s = (\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{k-1})\sigma_k(\sigma_{k-1}\cdots\sigma_{s+1})$, το οποίο αποδεικνύει το λήμμα. ■

Πόρισμα 3.2.11.
Αν $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_k$ είναι μια έκφραση για το $\sigma \in \mathcal{W}$ σε όρους συμμετριών που αντιστοιχούν σε απλές ρίζες, με k το μικρότερο δυνατό, τότε $\sigma(\alpha_k) \prec 0$. ■

Θεώρημα 3.2.12. Έστω Δ μια βάση για το Φ.
(i) Αν $\gamma \in E$, γ ομαλό, τότε υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $(\sigma(\gamma),\alpha) > 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$ (άρα , $\mathcal{W}$ δρά μεταβατικά στα τμήματα $Weyl$).
(ii) Αν Δ' είναι μία άλλη βάση του Φ, τότε $\sigma(\Delta') = \Delta$ για κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}$ (άρα, $\mathcal{W}$ δρά μεταβατικά στις βάσεις).
(iii) Αν α ρίζα, τότε υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\sigma(\alpha) \in \Delta$.
(iv) $\mathcal{W}$ παράγεται από τα σ_α $(\alpha \in \Delta)$.
(v) Αν $\sigma(\Delta) = \Delta$, $\sigma \in \mathcal{W}$, τότε $\sigma = 1$ (άρα, $\mathcal{W}$ δρά απλά μεταβατικά στις βάσεις).

Απόδειξη: Αρχικά θα ορίσουμε $\mathcal{W}'$ να είναι η υποομάδα της $\mathcal{W}$ που παράγεται από τα σ_α $(\alpha \in \Delta)$, θα αποδείξουμω τα $(i) - (iii)$ για την $\mathcal{W}'$ και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$.

(i) Γράφουμε $\delta = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha \succ 0} \alpha$ και επιλέγουμε $\sigma \in \mathcal{W}'$ για το οποίο $(\sigma(\gamma),\delta)$ να είναι τα μεγαλύτερο δυνατό. Αν α είναι απλή ρίζα, τότε $\sigma_\alpha\sigma \in \mathcal{W}'$, άρα η επιλογή του σ σημαίνει ότι $(\sigma(\gamma),\delta) \geq (\sigma_\alpha\sigma(\gamma),\delta) = (\sigma(\gamma),\sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma),\delta - \alpha) = (\sigma(\gamma),\delta) - (\sigma(\gamma),\alpha)$ (Πόρισμα 3.2.9). Αυτό αναγκάζει $(\sigma(\gamma),\alpha) \geq 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$ και αφού γ είναι ομαλό, δεν μπορούμε να έχουμε $(\sigma(\gamma),\alpha) = 0$ για κάποιο α, διότι τότε γ θα ήταν ορθογώνιο του $\sigma^{-1}\alpha$. Άρα, όλες οι ανισότητες είναι αυστηρές και άρα $\sigma(\gamma)$ βρίσκεται στο θεμελιώδες τμήμα $Weyl$ $\mathfrak{C}(\Delta)$ και σ στέλνει το $\mathfrak{C}(\gamma)$ στο $\mathfrak{C}(\Delta)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) Αφού $\mathcal{W}'$ μεταθέτει τα τμήματα $Weyl$, από το (i), μεταθέτει και τις βάσεις του Φ.

(iii) Από το (ii), αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ρίζα ανήκει σε τουλάχιστον μία βάση. Αφού οι μόνες ρίζες που είναι πολλαπλάσια του α είναι οι $\pm\alpha$, τα υπερεπίπεδα P_β $(\beta \neq \pm\alpha)$ είναι διαφορετικά του P_α, υπάρχει $\gamma \in P_\alpha$, $\gamma \notin P_\beta$ (όλα τα $\beta \neq \pm\alpha$). Επιλέγουμε γ' αρκετά κοντά στο γ έτσι ώστε $(\gamma',\alpha) = \epsilon > 0$ καθως $|(\gamma',\beta)| > \epsilon$ για όλα τα $\beta \neq \pm\alpha$. Άρα, α ανήκει στη βάση $\Delta(\gamma')$.

(iv) Για να δείξουμε ότι $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συμμετρία σ_α $(\alpha \in \Phi)$ είναι στη $\mathcal{W}'$. Χρησιμοποιώντας το (iii), βρίσκουμε $\sigma \in \mathcal{W}'$ τέτοιο ώστε $\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$. Τότε, $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, δηλαδή, $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathcal{W}'$.

(iv) Έστω $\sigma(\Delta) = \Delta$ και $\sigma \neq 1$. Έχουμε από (iv) ότι σ γράφεται ως το γινόμενο μίας ή περισσοτέρων συμμετριών, το οποίο στη συνέχεια οδηγεί σε άτοπο (λόγω του Ποσίσματος 3.2.11). ■

Ορισμός 3.2.13.
Όταν $\sigma \in \mathcal{W}$ γράφεται ως $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}$ ($\alpha_i \in \Delta$, k ελάχιστο), καλούμε αυτή την έκφραση ανηγμένη και γράφουμε $l(\sigma) = k$, που είναι το μήκος της σ, σχετικό με το Δ. Ορίζουμε $l(1) = 0$.

Παρατήρηση 3.2.14.: Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το μήκος με έναν άλλο τρόπο, ως εξής: Ορίζουμε $n(\sigma) =$ ο αριθμός των θετικών ριζών α για τα οποία $\sigma(\alpha) \prec 0$.

Λήμμα 3.2.15.
Για όλα τα $\sigma \in \mathcal{W}$, $l(\sigma) = n(\sigma)$.

Απόδειξη: Επαγωγή στο μήκος $l(\sigma)$. Η περίπτωση $l(\sigma) = 0$ σημαίνει ότι $\sigma = 1$, άρα $n(\sigma) = 0$. Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για όλα τα $\tau \in \mathcal{W}$ με $l(\tau) < l(\sigma)$. Γράφουμε σ σε ανηγμένη μορφή ως $\sigma = \sigma_{\alpha_1 \cdots \sigma_{\alpha_k}}$, και θέτουμε $\alpha_k = \alpha$. Από το πόρισμα 3.2.11 έχουμε , $\sigma(\alpha) \prec 0$. Τότε από το λήμμα 3.2.8 παίρνουμε ότι $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$. Από την άλλη πλευρά, $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1 < l(\sigma)$, άρα από επαγωγική υπόθεση, $l(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$. Από τα παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή, $l(\sigma) = n(\sigma)$. ■

Λήμμα 3.2.16.
Έστω $\lambda,\mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Αν $\sigma\lambda = \mu$ για κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}$, τότε σ είναι γινόμενο απλών συμμετριών που σταθεροποιούν το λ, πιο συγκεκριμένα, $\lambda = \mu$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο μήκος $l(\sigma)$. Ηπερίπτωση $l(\sigma) = 0$ είναι πριφανής. Έστε $l(\sigma) > 0$. Από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι σ στέλνει κάποια θετική ρίζα σε αρνητική και άρα σ δεν μπορεί να στέλνει όλες τις απλές ρίζες σε θετικές. Έστω $\sigma(\alpha) \prec 0$ (για κάποιο $\alpha \in \Delta$). Τώρα, έχουμε $0 \geq (\mu, \sigma(\alpha)) = (\sigma^{-1}(\mu), \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0$, αφού $\lambda,\mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Αυτό αναγκάζει $(\lambda, \alpha) = 0$, $\sigma_\alpha\lambda = \lambda$, $(\sigma\sigma_\alpha)\lambda = \mu$. Από το λήμμα 3.2.8 (και το λήμμα 3.2.15), $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1$ και εφαρμόζουμε την επαγωγή. ■

Ορισμός 3.2.17.
Ένα σύστημα ριζών Φ καλείται ανάγωγο αν δεν μπορεί να διαμεριστεί ως έ-

νωση δύο γνησίων υποσυνόλων, ώστε κάθε ρίζα στο ένα υποσύνολο να είναι ορθογώνια σε κάθε ρίζα του άλλου.

Παρατήρηση 3.2.18.: Έστω Δ βάση του Φ. Θα δείξουμε ότι Φ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν Δ δεν μπορεί να διαμεριστεί με τον τρόπο που ειπώθηκε στον παραπάνω ορισμό. Έστω $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, με $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Αν Δ δεν περιέχεται εξ ολοκλήρου στο Φ_1 ή Φ_2, τότε υπάρχει μια παρόμοια διαμέριση του Δ, αλλά $\Delta \subset \Phi_1$ σημαίνει $(\Delta, \Phi_2) = 0$ ή $(E, \Phi_2) = 0$, αφού το Δ εκτείνεται στο E. Αυτό δείχνει ότι ισχύει η μία συνεπαγωγή. Αντίστροφα, έστω Φ ανάγωγο και $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ με $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Κάθε ρίζα είναι συζυγής με μία απλή ρίζα (Θεώρημα 3.2.12.(iii)), άρα $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, Φ_i το σύνολο ριζών που έχουν συζυγή στο Δ_i. Γνωρίζουμε ότι αν $(\alpha, \beta) = 0$ αυτό σημαίνει ότι $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_\beta \sigma_\alpha$. Αφού $\mathcal{W}$ παράγεται από τα σ_α $(\alpha \in \Delta)$, ο τύπος μιας συμμετρίας μας δίνει ότι κάθε ρίζα στο Φ_i προκύπτει από μια στο Δ_i προσθέτοντας ή αφαιρώντας στοιχεία του Δ_i. Άρα, Φ_i βρίσκεται στον υπόχωρο E_i του E που εκτείνεται από το Δ_i και βλέπουμε ότι $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Αυτό αναγκάζει $\Phi_1 = \varnothing$ ή $\Phi_2 = \varnothing$, από όπου $\Delta_1 = \varnothing$ ή $\Delta_2 = \varnothing$.

Λήμμα 3.2.19.
Έστω Φ ανάγωγο. Σχετικά με τη μερική διάταξη $\prec$, υπάρχει μοναδική μεγιστική ρίζα β (πιο συγκεκριμένα, $\alpha \neq \beta$ σημαίνει $ht\ \alpha < ht\ \beta$ και $(\beta, \alpha) \geq 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$). Αν $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, τότε όλα τα $k_\alpha > 0$.

Απόδειξη: Έστω $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ να είναι μεγιστική στη μερική διάταξη, προφανώς $\beta \succ 0$. Αν $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$ και $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}$, τότε $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι μια διαμέριση. Υποθέτουμε ότι Δ_2 είναι μη κενό. Τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$ για $\alpha \in \Delta_2$ (από λήμμα 3.2.3) και αφού Φ είναι ανάγωγο, τουλάχιστον ένα $\alpha \in \Delta_2$ πρέπει να μην είναι ορθογώνιο στο Δ_1, που σημαίνει ότι υπάρχει $\alpha' \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $(\alpha, \alpha') < 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\beta + \alpha$ είναι ρίζα (λήμμα 3.1.4), το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τη μεγιστικότητα της β. Άρα Δ_2 είναι κενό και όλα τα $k_\alpha > 0$. Το παραπάνω επιχείρημα μα δίνει ότι $(\alpha, \beta) \geq 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$ (με $(\alpha, \beta) > 0$ για τουλάχιστον ένα α, αφού το Δ εκτείνεται στο E). Τώρα έστω β' μια άλλη μεγιστική ρίζα. Το προηγούμενο επειχείρημα εφαρμόζεται για τη β' και άρα β' περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα $\alpha \in \Delta$ για το οποίο ισχύει $(\alpha, \beta') > 0$. Έπεται ότι $(\beta', \beta) > 0$ και $\beta' - \beta$ είναι ρίζα, εκτός εάν $\beta' = \beta$. Αλλά, αν $\beta' - \beta$ είναι ρίζα, τότε είτε $\beta \prec \beta'$ είτε $\beta' \prec \beta$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, β είναι μοναδική. ■

Λήμμα 3.2.20.
Έστω Φ ανάγωγο. Τότε $\mathcal{W}$ δρά ανάγωγα στο E. Πιο συγκεκριμένα, η $\mathcal{W}$-

τροχιά μιας ρίζας α εκτείνεται στο E.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{W}_\alpha$ = η $\mathcal{W}$-τροχιά μιας ρίζας α. Τότε, *span* $\mathcal{W}_\alpha$ είναι ένας (μη μηδενικός) $\mathcal{W}$-αναλλοίωτος υπόχωρος του E και άρα το δεύτερο μέρος του λήμματος, έπεται από το πρώτο. Για το πρώτο, έστω E' ένας μη μηδενικός υπόχωρος του E αναλλοίωτος υπό την $\mathcal{W}$. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα E'' του E' είναι επίσης $\mathcal{W}$-αναλλοίωτο και $E = E' \oplus E''$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για $\alpha \in \Phi$, είτε $\alpha \in E'$ είτε $E' \subset P_\alpha$, αφού $\sigma_\alpha(E') = E'$ (Αν $E' \nsubseteq P_\alpha$. Έστω $\mu \in E' \setminus P_\alpha$, $\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha \rangle \alpha \in E'$. Αφού $\mu \notin P_\alpha$, $\langle \mu, \alpha \rangle \neq 0$. Άρα, $\alpha \in E'$). Συνεπώς, $\alpha \notin E'$ σημαίνει $\alpha \in E''$ και άρα κάθε ρίζα βρίσκεται σε έναν από τους δύο υπόχωρους. Αυτό διαμερίζει το Φ σε ορθογώνια υποσύνολα, αναγκάζοντας ένα από τα δύο να είναι κενό. Αφού *span* $\Phi = E$, καταλήγουμε στο ότι $E' = E$. ■

Λήμμα 3.2.21.
Έστω Φ ανάγωγο. Τότε προκύπτουν το πολύ δύο μήκη ριζών (μήκος ρίζας $= (\alpha, \alpha)^{1/2}$ για α ρίζα) στο Φ και όλες οι ρίζες ορισμένου μήκους είναι συζυγείς υπό την $\mathcal{W}$.

Απόδειξη: Αν α, β δύο ρίζες, τότε δεν γίνεται όλα τα $\sigma(\alpha)$ ($\sigma \in \mathcal{W}$) να είναι ορθογώνια με το β, αφού τα $\sigma(\alpha)$ εκτείνονται στο E (λήμμα 3.2.20). Αν $(\alpha, \beta) \neq 0$ και $\|\beta\| > \|\alpha\|$, γνωρίζουμε ότι $\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2 \in \{2, 3\}$ και αν υπήρχαν 3 τετραγωνικά μήκη ριζών $a < b < c$ θα είχαμε $\frac{c}{a} = 3$ και $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = 2$. Επομένως, $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = 2 \cdot 2 = 4$ και καταλήγουμε σε αντίφαση. Τώρα έστω α, β να έχουν το ίδιο μήκος. Αφού αντικαταστίσουμε ένα από τα δύο με ένα $\mathcal{W}$-συζυγές μπορούμε να τα θεωρήσουμε μη ορθογώνια (και διαφορετικά, διαφορετικά έχουμε τελειώσει). Με βάση την 3.1, έχουμε ότι $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Αντικαθιστώντας β (αν χρειαστεί) με $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$. Συνεπώς, $(\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha)(\beta) = \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$. ■

Ορισμός 3.2.22.
Αν Φ ανάγωγο, με δύο διαφορετικά μήκη ριζών, μιλάμε για μακρές και βραχείες ρίζες (Αν όλες οι ρίζες είναι ιδίου μήκους, τότε τις καλούμε όλες μακρές).

Λήμμα 3.2.23.
Έστω Φ ανάγωγο, με δύο διαφορετικά μήκη ριζών. Τότε, η μεγιστική ρίζα β του λήμματος 3.2.19 είναι μακρά.

Απόδειξη: Έστω $\alpha \in \Phi$ τυχαίο. Αρκεί να δείξουμε ότι $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$. Για αυτό αντικαθιστούμε το α με ένα $\mathcal{W}$-συζυγές του, που βρίσκεται στη κλειστότητα του θεμελιώδους τμήματος $Weyl$ (σχετικό με το Δ). Αφού $\beta - \alpha \succ 0$ (λήμμα 3.2.19), έχουμε $(\gamma, \beta - \alpha) \geq 0$ για κάθε $\gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για $\gamma = \beta$ και $\gamma = \alpha$ (λήμμα 3.2.19) παίρνουμε $(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$. ■

Ορισμός 3.2.24
Έστω Φ σύστημα ριζών τάξης l με ομάδα $Weyl$ $\mathcal{W}$ και Δ βάση του Φ. Σταθεροποιούμε μία διάταξη $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ των απλών ριζών. Ο πίνακας $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ καλείται πίνακας $Cartan$ του Φ και τα στοιχεία του καλούνται ακέραιοι $Cartan$.

Σημείωση: Ο πίνακας $Cartan$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης Δ για το Φ, διότι από Θεώρημα 3.2.12.(ii) η ομάδα $Weyl$ $\mathcal{W}$ δρα μεταβατικά στη συλλογή των βάσεων.

3.3 Αφηρημένη θεωρία βαρών

Έστω Φ σύστημα ριζών σε έναν ευκλείδιο χώρο E με ομάδα $Weyl$ $\mathcal{W}$.

Ορισμός 3.3.1.
Έστω Λ το σύνολο όλων των $\lambda \in E$ για τα οποία ισχύει $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ $(\alpha \in \Phi)$. Καλούμε τα στοιχεία του Λ βάρη.

Παρατήρηση 3.3.2: Αφού $\langle \lambda, \alpha \rangle = \dfrac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ εξαρτάται ουσιαστικά από το λ, Λ είναι υποομάδα του E που περιέχει το Φ. Επίσης, έχουμε ότι $\lambda \in \Lambda$ αν και μόνο αν $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$ (Δ βάση του Φ).

Ορισμοός 3.3.3.
Καλούμε την υποομάδα του Λ που παράγεται από Φ ριζικό σύνδεσμο και τη συμβολίζουμε με Λ_r.

Σημείωση: Λ_r είναι σύνδεσμος στο E υπό την έννοια ότι είναι $\mathbb{Z}$-ανάπτυγμα μιας $\mathbb{R}$-βάσης του E (για παράδειγμα, ενός συνόλου απλών ριζών).

Σταθεροποιούμε βάση $\Delta \subset \Phi$ και ορίζουμε $\lambda \in \Lambda$ να είναι κυρίαρχο αν όλοι οι ακέραιοι $\langle \lambda, \alpha \rangle$ $(\alpha \in \Delta)$ είναι μη αρνητικοί και ισχυρά κυρίαρχο αν όλοι οι ακέραιοι είναι θετικοί. Συμβολίζουμε με Λ^+ το σύνολο των κυρίαρχων βαρών. Επιπλέον, Λ^+ είναι το σύνολο των βαρών που βρίσκονται στη κλειστότητα του θεμελιώδους τμήματος *Weyl* $\mathfrak{C}(\Delta)$, ενώ το $\Lambda \cap \mathfrak{C}(\Delta)$ είναι το σύνολο των ισχυρά κυρίαρχων βαρών.

Αν $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, τότε τα διανύσματα $2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i)$ είναι ξανά βάση του E. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ να είναι η δυϊκή (σχετική με το εσωτερικό γινόμενο στο E), με $\dfrac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$. Αφού όλα τα $\langle \lambda_i, \alpha \rangle$ $(\alpha \in \Delta)$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τα λ_i είναι κυρίαρχα βάρη και τα καλούμε θεμελιώδη κυρίαρχα βάρη (σχετικά με τη Δ). Παρατηρούμε ότι $\sigma_i(\lambda_j) = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$ $(\sigma_i = \sigma_{\alpha_i})$. Αν $\lambda \in E$ τυχόν, π.χ., οποιοδήποτε βάρος, θέτουμε $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$. Τότε $0 = \langle \lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha \rangle$ για κάθε απλή ρίζα α, το οποίο δίνει $(\lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha) = 0$ και άρα ότι $\lambda = \sum m_i \lambda_i$. Επομένως, Λ είναι σύνδεσμος με βάση $(\lambda_i,\ 1 \le i \le l)$ και $\lambda \in \Lambda^+$ αν και μόνο αν όλα τα $m_i \ge 0$.

Λ/Λ_r είναι πεπερασμένη ομάδα και καλείται θεμελιώδης ομάδα του Φ. Για να το δείξουμε, γράφουμε $\alpha_i = \sum_j m_{ij}\lambda_j$ $(m_{ij} \in \mathbb{Z})$. Τότε $\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \sum_j m_{ij} \langle \lambda_j, \alpha_k \rangle$ $= m_{ik}$. Άρα, βλεπουμε ότι ο πίνακας *Cartan* εκφράζει την αλλάγη βάσης. Για να γράψουμε τα λ_j με όρους α_i, αρκεί να αντιστρέψουμε τον πίνακα *Cartan*, η ορίζουσα του είναι ο μόνος παρανομαστής που εμπλέκεται και αυτό υπολογίζει τον δείκτη της Λ_r στην Λ.

Λήμμα 3.3.4.
Κάθε βάρος είναι συζυγές υπό την $\mathcal{W}$ με μοναδικό κυρίαρχο βάρος. Αν λ είναι κυρίαρχο, τότε $\sigma(\lambda) \prec \lambda$ για όλα τα $\sigma \in \mathcal{W}$ και αν λ είναι ισχυρά κυρίαρχο, τότε $\sigma(\lambda) = \lambda$ μόνο όταν $\sigma = 1$.

Απόδειξη : Λήμμα 3.2.16. ■

Λήμμα 3.3.5
Έστω $\lambda \in \Lambda^+$. Τότε, ο αριθμός των κυρίαρχων βαρών $\mu \prec \lambda$ είναι πεπερασμένος.

Απόδειξη: Αφού $\lambda + \mu \in \Lambda^+$ και $\lambda - \mu$ είναι άθροισμα θετικών ριζών (3.2) έχουμε ότι $0 \le (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu)$. Συνεπώς, μ βρίσκεται στο συμπαγές σύνολο $\{x \in E | (x, x) \le (\lambda, \lambda)\}$, του οποίου η τομή με το διακριτό σύνολο Λ^+ είναι πεπερασμένη. ■

Θυμίζουμε από Πόρισμα 3.2.9 ότι $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$ και ότι $\sigma_i(\delta) = \delta - \alpha_i$ $(1 \leq i \leq l)$.

Λήμμα 3.3.6. $\delta = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$, άρα δ είναι (ισχυρά) κυρίαρχο βάρος.

Απόδειξη: Αφού $\sigma_i(\delta) = \delta - \alpha_i$, $(\delta - \alpha_i, \alpha_i) = (\sigma_i^2(\delta), \sigma(\alpha_i)) = (\delta, -\alpha_i) \leftrightarrow 2(\delta, \alpha_i) = (\alpha_i, \alpha_i) \leftrightarrow \langle \delta, \alpha_i \rangle = 1$ $(1 \leq i \leq l)$. Αλλά, $\delta = \sum_i \langle \delta, \alpha_i \rangle \lambda_i$ (3.3 σελ.13) και άρα το ζητούμενο έπεται. ■

Λήμμα 3.3.7.
Έστω $\mu \in \Lambda^+$, $\nu = \sigma^{-1}\mu$ $(\sigma \in \mathcal{W})$. Τότε $(\nu + \delta, \nu + \delta) \leq (\mu + \delta, \mu + \delta)$ και η ισότητα ισχύει μόνο αν $\nu = \mu$.

Απόδειξη: Από Λήμμα 3.3.6, έχουμε $\delta \in \Lambda^+$ και από Λήμμα 3.3.4 $\sigma(\delta) \prec \delta$. Αφού $\mu \in \Lambda^+$, τότε $(\mu, \delta, \sigma(\delta)) \geq 0$ και παίρνουμε

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) = (\sigma(\nu + \delta), \sigma(\nu + \delta)) = (\mu + \sigma(\delta), \mu + \sigma(\delta)) = (\mu, \mu) + 2(\mu, \sigma(\delta)) + (\sigma(\delta), \sigma(\delta)) = (\mu, \mu) + (\delta, \delta) + 2(\mu, \sigma(\delta)) + 2(\mu, \delta) - 2(\mu, \delta) = (\mu + \delta, \mu + \delta) - 2(\mu, \delta - \sigma(\delta)) \leq (\mu + \delta, \mu + \delta)$$

και η ισότητα ισχύει ανν $(\mu, \delta - \sigma(\delta)) = 0$, δηλαδή, $(\mu, \delta) = (\mu, \sigma(\delta) = (\nu, \delta) \Rightarrow (\mu - \nu, \delta) = 0$. Τέλος, από Λήμμα 3.3.4 και Λήμμα 3.3.6, παίρνουμε $\mu = \nu$. ■

Ορισμός 3.3.8.
Ένα υποσύνολο Π του Λ καλείται κεκορεσμένο (κορεσμένο) αν για κάθε $\lambda \in \Pi$, $\alpha \in \Phi$ και i μεταξύ του 0 και $\langle \lambda, \alpha \rangle$, το βάρος $\lambda - i\alpha$ βρίσκεται στο Π.

Παρατήρηση 3.3.9.: Αν Π κεκορεσμένο σύνολο και $\lambda \in \Pi$, τότε $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha \in \Pi$. Από το ότι η $\mathcal{W}$ παράγεται από τις συμμετρίες, έχουμε ότι Π σταθερό υπό την $\mathcal{W}$.

Ορισμός 3.3.10.
Λέμε ότι ένα κεκορεσμένο σύνολο Π έχει ανώτατο βάρος λ ($\lambda \in \Lambda^+$ αν $\lambda \in \Pi$ και $\mu \prec \lambda$ για κάθε $\mu \in \Pi$.

Παραδείγματα 3.3.11. (α) $\{0\}$ είναι κεκορεσμένο.
(β) $\Phi \cup \{0\}$, όπου Φ το σύνολο ριζών μιας ημιαπλής άλγεβρας *Lie*, είναι κεκορεσμένο. Πιο συγκεκριμένα, αν Φ είναι ανάγωγο, τότε υπάρχει μοναδική

μεγιστική ρίζα (σχετική με μια σταθερή βάση Δ του Φ) και είναι το ανώτατο βάρος της $\Phi \cup \{0\}$.

Λήμμα 3.3.12.
Κάθε κεκορεσμένο σύνολο που έχει ανώτατο βάρος λ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη: Με χρήση λήμματος 3.3.5. $\blacksquare$

Λήμμα 3.3.13.
Έστω Π κεκορεσμένο, με ανώτατο βάρος λ. Αν $\mu \in \Lambda^+$ και $\mu \prec \lambda$, τότε $\mu \in \Pi$.

Απόδειξη: Έστω $\mu' = \mu + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Pi$ ($k_\alpha \in \mathbb{Z}^+$). Θα δείξουμε ότι μπορούμε να μειώσουμε κατά 1 ένα από τα k_α ενώ παράλληλα να παραμένουμε στο Π και έτσι τελικά θα φτάσουμε στο ζητούμενο, ότι $\mu \in \Pi$. Παρατηρούμε πρώτα ότι λ είναι της μορφής μ'. Υποθέτουμε ότι $\mu' \neq mu$, τότε κάποιο k_α είναι θετικό και $(\sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha) > 0$. Από αυτό παίρνουμε ότι $(\sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \beta) > 0$ για κάποιο $\beta \in \Delta$, με $k_\beta > 0$. Πιο συγκεκριμένα, $\langle \sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \beta \rangle$ είναι θετικό. Τέλος, από τον ορισμό του κεκορεσμένου συνόλου, μπορούμε να αφαιρέσουμε β από μ' παραμένοντας στο Π και άρα μειώσμε το k_β κατά 1. $\blacksquare$

Λήμμα 3.3.14.
Έστω Π κεκορεσμένο, με ανώτατο βάρος λ. Αν $\mu \in \Pi$, τότε $(\mu + \delta, \mu + \delta) \leq (\lambda + \delta, \lambda + \delta)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\mu = \lambda$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 3.3.7, αρκεί να το δείξουμε για μ κυρίαρχο. Γράφουμε $\mu = \lambda - \pi$, όπου π είναι άθροισμα θετικών ριζών. Τότε $(\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta) = (\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\lambda + \delta - \pi, \lambda + \delta - \pi) = (\lambda + \delta, \pi) + (\pi, \mu + \delta) \geq (\lambda + \delta, \pi) \geq 0$, με τις ανισότητες να ισχύουν διότι $\mu + \delta$ και $\lambda + \delta$ είναι κυρίαρχα. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\pi = 0 \Rightarrow \mu = \lambda$, αφού $\lambda + \delta$ ισχυρά κυρίαρχο. $\blacksquare$

4 Καθολικά περιβάλλουσες άλγεβρες

Θα θεωρούμε F ένα τύχον σώμα (εκτός αν ειπωθεί κάτι διαφορετικό) και V διανυσματικός χώρος πάνω από το F (πεπερασμένης διάστασης).

4.1 Τανυστικές και συμμετρικές άλγεβρες

Αρχικά θα εισάγουμε μερικές άλγεβρες ορισμένες μέσω καθολικών ιδιοτήτων. Σταθεροποιούμε πεπερασμένο διανυσματικό χώρο V πάνω από το F. Έστω $T^0V = F$, $T^1V = V$, $T^2V = V \otimes V, \ldots, T^mV = V \otimes \ldots \otimes V$ (m αντίτυπα). Ορίζουμε $\mathfrak{T}(V) = \coprod_{i=0}^{\infty} T^iV$ και εισάγουμε ένα προσεταιριστικό γινόμενο, που ορίζεται στους ομογενείς γεννήτορες του $\mathfrak{T}(V)$ με τον προφανή τρόπο $(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k)\,(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T^{k+m}V$. Αυτό κάνει το $\mathfrak{T}(V)$ προσεταιριστική ταξινομημένη άλγεβρα με μονάδα 1 που παράγεται από το 1 και οποιαδήποτε βάση του V και την καλούμε άλγερβρα τανυστών στον V (τανυστική άλγεβρα). $\mathfrak{T}(V)$ είναι η καθολική προσεταιριστική άλγεβρα σε n γεννήτορες ($n = dim\ V$), με την εξής έννοια: δεδομένης F-γραμμικής απεικόνισης $\phi : V \to \mathfrak{U}$ (όπου, $\mathfrak{U}$ είναι προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα 1 πάνω από το F), υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός F-αλγεβρών $\psi : \mathfrak{T}(V) \to \mathfrak{U}$ τέτοιος ώστε $\psi(1) = 1$ και το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό (i= ένθεση):

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathfrak{T}(V) \arrow[d, "\psi"] \\
& \mathfrak{U}
\end{tikzcd}$$

Τώρα, έστω I (αμφίπλευρο) ιδεώδες στο $\mathfrak{T}(V)$ που παράγεται από όλα τα $x \otimes y - y \otimes x$ (x,$y \in V$) και καλούμε $\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{T}(V)/I$ τη συμμετρική άλγεβρα στον V, όπου $\sigma : \mathfrak{T}(V) \to \mathfrak{S}(V)$ θα δηλώνει την κανονική απεικόνιση. Οι γεννήτορες του I βρίσκονται στο T^2V, που σημαίνει ότι $I = (I \cap T^2V) \oplus (I \cap T^3V) \oplus \ldots$. Επομένως, σ είναι μονομορφική στα $T^0V = F$,$T^1V = V$ (μας επιτρέπει να θεωρούμε το V ως έναν υπόχωρο του $\mathfrak{S}(V)$) και $\mathfrak{S}(V)$ κληρονομεί μια ταξινόμηση από την $\mathfrak{T}(V)$: $\mathfrak{S}(V) = \coprod_{i=0}^{\infty} S^iV$. Ο λόγος υπολογισμού του I είναι για να έχουμε ότι τα στοιχεία του V μετατίθενται, άρα $\mathfrak{S}(V)$ είναι καθολικη (με την παραπάνω έννοια) για γραμμικές απεικονίσεις από τον V σε μεταθετικές προσεταιριστικές F-άλγεβρες με μονάδα 1. Επιπλέον, αν $(x_1, \ldots, x_n)$ μια βάση του V, τότε $\mathfrak{S}(V)$ είναι κανονικά ισομορφικός με την άλγεβρα των πολυωνύμων n μεταβλητών πάνω από το F, με βάση που αποτελείται από το 1 και όλα τα $x_{i(1)} \cdots x_{i(k)}$, $k \geq 1$, $1 \leq i(1) \leq i(2) \leq \ldots \leq i(k) \leq n$.

4.2 Κατασκευή της $\mathfrak{U}(\mathbf{L})$

Ορισμός 4.2.1.
Έστω L *Lie* άλγεβρα (μπόρει και απειροδιάστατη). Μία καθολικά περιβάλλουσα άλγεβρα της L είναι ένα ζεύγος $(\mathfrak{U}$,$i)$, όπου $\mathfrak{U}$ είναι μία προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα 1 πάνω από το F, $i : L \to \mathfrak{U}$ γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την :

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \qquad (*)$$

για x,$y \in L$ και ισχύει το παρακάτω: για κάθε προσεταιριστική άλγεβρα $\mathfrak{V}$ με μονάδα 1 και κάθε γραμμική απεικόνιση $j : L \to \mathfrak{V}$ που ικανοποιούν την $(*)$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αλγεβρών $\phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ (που στέλνει το 1 στο 1) τέτοιος ώστε $\phi \circ i = j$.

Παρατήρηση 4.2.2.:(Μοναδικότητα)
Έστω ότι υπάρχει και άλλο ζεύγος (B, i') που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του ορισμού, τότε παίρνουμε ομομορφισμούς $\phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ με $\phi \circ i = i'$ και $\psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$ με $\psi \circ i' = i$. Από ορισμό, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"'] & \mathfrak{U} \arrow[d] \\
 & \mathfrak{U}
\end{tikzcd}$$

Αλλά $1_{\mathfrak{U}}$ και $\psi \circ \phi$ καταφέρνουν το παραπάνω, άρα $\psi \circ \phi = 1_{\mathfrak{U}}$. Όμοια, $\phi \circ \psi = 1_{\mathfrak{B}}$.

Παρατήρηση 4.2.4.:(Ύπαρξη)
Έστω $\mathfrak{T}(L)$ η άλγβερα τανυστών στην L (4.1) και J αμφίπλευρο ιδεώδες στην $\mathfrak{T}(L)$ που παράγεται από όλα τα $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $(x$,$y \in L$. Ορίζουμε

$\mathfrak{U}(L) = \mathfrak{T}(L)/J$ και έστω $\pi : \mathfrak{T}(L) \to \mathfrak{U}(L)$ ο κανονικός ομομορφισμός. Παρατηρούμε ότι $J \subset \coprod_{i>0} T^i L$, άρα π απεικονίζει το $T^0 L = F$ ισομορφικά στη $\mathfrak{U}(L)$ (επομένως, $\mathfrak{U}(L)$ περιέχει τουλάχισταν τα βαθμωτά). Δεν είναι εύκολο να δούμε ότι π απεικονίζει το $T^1 L = L$ ισομορφικά στη $\mathfrak{U}(L)$ και θα δειχτεί αργότερα. $(\mathfrak{U}, i)$ είναι καθολικά περιβάλλουσα άλγεβρα της L, όπου $i : L \to \mathfrak{U}(L)$ είναι ο περιορισμός της π στο L. Πράγματι, έστω $j : L \to \mathfrak{U}(L)$ να είναι όπως στον ορισμό. Από την καθολική ιδιότητα της $\mathfrak{T}(L)$ προκύπτει μοναδικός ομομορφισμός αλγεβρών $\phi' : \mathfrak{T}(L) \to \mathfrak{U}$ που επεκτείνει τον j και στέλνει το 1 στο 1. Η ιδιότητα $(*)$ του j αναγκάζει όλα τα $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ να ανήκουν στο $Ker\ \phi'$ και άρα ϕ' επιφέρει ομομορφισμό $\phi : \mathfrak{U}(L) \to \mathfrak{U}$ τέτοιο ώστε $\phi \circ i = j$. Η μοναδικότητα του ϕ προκύπτει από το γεγονός ότι το 1 μαζί με την $Im\ i$ παράγουν την $\mathfrak{U}(L)$.

Παράδειγμα 4.2.5.: Έστω L αβελιανή. Τότε το ιδεώδες J (από παρατήρηση 4.2.4) παράγεται από όλα τα $x \otimes y - y \otimes x$, και άρα συμπίπτει με το ιδεώδες I (4.1). Αυτό μας δίνει ότι $\mathfrak{U}(L)$ συμπίπτει με τη συμμετρική άλγεβρα $\mathfrak{S}(L)$ (πιο συγκεκριμένα, $i : L \to \mathfrak{U}(L)$ είναι $1-1$).

4.3 Θεώρημα PBW και συνέπειες

Για συντομία θα γράφουμε $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(L)$,$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(L)$,$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(L)$, όμοια, γράφουμε T^m,S^m. Ορίζουμε φιλτράρισμα (διήθηση) στο $\mathfrak{T}$ με $T_m = T^0 \oplus \ldots \oplus T^m$ και θέτουμε $U_m = \pi(T_m)$, $U_{-1} = 0$. Ισχύει ότι, $U_m U_r \subset U_{m+r}$ και $U_m \subset U_{m+1}$. Θέτουμε $G^m = U_m / U_{m-1}$ (είναι διανυσματικός χώρος) και ο πολλαπλάσιασμός στην $\mathfrak{U}$ ορίζει διγραμμική απεικόνιση $G^m \times G^r \to G^{m+r}$ (καλά ορισμένη, διότι $U_{m-1} U_{r-1} \subset U_{m+r-2} \subset U_{m+r-1}$). Αυτή επεκτείνεται σε διγραμμική απεικόνιση $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, όπου $\mathfrak{G} = \coprod_{m=0}^{\infty} G^m$ και κάνει την $\mathfrak{G}$ ταξινομημένη προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα 1. Αφού π απεικονίζει το T^m στο U_m, η σύνθετη γραμμική απεικόνιση $\phi_m : T^m \to U_m \to G^m = U_m/U_{m-1}$ έχει νόημα. Είναι επί, διότι $\pi(T_m \setminus T_{m-1}) = U_m \setminus U_{m-1}$. Επομένως, οι απεικονίσεις ϕ_m συνδυάζονται και δίνουν γραμμική απείκονιση $\mathfrak{T} \to \mathfrak{G}$, που είναι επί και στέλνει το 1 στο 1.

Λήμμα 4.3.1.
Η $\phi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{G}$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών. Επιπλέον, $\phi(I) = 0$ (I όπως στην 4.1) και άρα ϕ επιφέρει ομομορφισμό ω της $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}/I$ στη $\mathfrak{G}$.

Απόδειξη: Έστω $x \in T^m$,$y \in T^r$ να είναι ομογενείς τανυστές. Από ορισμό του γινομένου στο $\mathfrak{G}$, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ και άρα έχουμε ότι ϕ είναι πολλαπλασιαστική στο $\mathfrak{T}$. Έστω $x \otimes y - y \otimes x$ (x,$y \in L$) τυπικός γεννήτορας του I. Τότε, $\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$, από ορισμό. Από την άλλη πλευρά, $\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1$, από όπου παίρνουμε $\phi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_1/U_1 = 0$ και άρα $I \subset Ker\ \phi$, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Γράφουμε τώρα το βασικό θεώρημα του κεφαλαίου, το οποίο θα αποδείξουμε στη παράγραφο 4.4.

Θεώρημα 4.3.2.(Θεώρημα Poincaré – Birkhoff – Witt ή Θεώρημα PBW)
Ο ομομορφισμός $\omega : \mathfrak{S} \to \mathfrak{G}$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών.

Πόρισμα 4.3.3.
Έστω W υπόχωρος του T^m. Υποθέτουμε ότι η κανονική απεικόνιση $T^m \to S^m$ στέλνει το W ισομορφικά στο S^m. Τότε $\pi(W)$ είναι συμπλήρωμα του U_{m-1} στο U_m.

Απόδειξη: Θεωρούμε το διάγραμμα (όλες οι απεικονίσεις κανονικές):

$$\begin{tikzcd}
U_m \arrow[r] & G^m \\
T^m \arrow[u] \arrow[r] & S^m \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Από το παραπάνω λήμμα (και τους ορισμούς), το διάγραμμα αυτό είναι μεταβατικό. Αφού $\omega : \mathfrak{S} \to \mathfrak{G}$ είναι ισομορφισμός (από το Θεώρημα PBW), η κάτω απεικόνιση στέλνει το $W \subset T^m$ ισομορφικά στο G^m και γυρίζοντας στη πάνω απεικόνιση, έχουμε το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 4.3.4.
Η κανονική απεικόνιση $i : L \to \mathfrak{U}(L)$ είναι $1 - 1$ (άρα L μπορεί να ταυτίζεται με $i(L)$).

Απόδειξη: Ειδική περίπτωση του Πορίσματος 4.3.3, όπου $W = T^1 = L$. ■

Έχουμε αφήσει την L να μπορεί να είναι απειροδιάστατη αλλά για τους στόχους της εργασίας αρκεί η L να έχει αριθμήσιμη βάση.

Πόρισμα 4.3.5.
Έστω $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ διατεταγμένη βάση της L. Τότε τα στοιχεία $x_{i(1)} \cdots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes \ldots \otimes x_{i(m)})$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $i(1) \leq i(2) \leq \ldots \leq i(m)$, μαζί με το 1, αποτελούν βάση της $\mathfrak{U}(L)$.

Απόδειξη: Έστω W ο υπόχωρος του T^m που εκτείνεται από όλα τα $x_{i(1)} \otimes \ldots \otimes x_{i(m)}$, $i(1) \leq \ldots \leq i(m)$. Βλέπουμε ότι W απεικονίζεται ισομορφικά στο S^m και άρα απο Πόρισμα 4.3.3 έχουμε ότι $\pi(W)$ είναι συμπλήρωμα του U_{m-1} στο U_m. ■

Ορισμός 4.3.6.
Μια βάση της $\mathfrak{U}(L)$, όπως κατασκευάστηκε παραπάνω, καλείται PBW βάση.

Πόρισμα 4.3.7.
Έστω H υποάλγεβρα της L και επεκτείνουμε μια διατεταγμένη βάση $(h_1, h_2, \ldots)$ της H σε μια διατεταγμένη βάση $(h_1, \ldots, x_1, \ldots$ της L. Τότε ο ομομορφισμός $\mathfrak{U}(H) \to \mathfrak{U}(L)$ που επάγεται από την $1-1$ απεικόνιση $H \to L \to \mathfrak{U}(L)$ είναι $1-1$ και $\mathfrak{U}(L)$ είναι ελεύθερο $\mathfrak{U}(L)$-πρότυπο με ελεύθερη βάση που αποτελείται από όλα τα $x_{i(1)} \otimes \ldots \otimes x_{i(m)}$, $i(1) \leq \ldots \leq i(m)$, μαζί με το 1.

Απόδειξη: Άμεσο από το Πόρισμα 4.3.5. ■

4.4 Απόδειξη θεωρήματος PBW

Έστω L *Lie* άλγεβρα και σταθεροποιούμε διατεταγμένη βάση $(x_k; k \in \Omega)$ της L. Αυτή η επιλογή ταυτίζει την $\mathfrak{S}$ με την άλγβερα των πολυωνύμων στις μεταβλητές z_k $(k \in \Omega)$. Για κάθε ακολουθία $\Sigma = (k_1, \ldots, k_m)$ δεικτών (m καλείται μήκος της Σ), θέτουμε $z_\Sigma = z_{k_1} \cdots z_{k_m} \in S^m$, $x_\Sigma = x_{k_1} \otimes \ldots \otimes x_{k_m} \in T^m$. Καλούμε τη Σ αύξουσα αν $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_m$, στη δεδομένη διάταξη του Ω. Ορίζουμε $\emptyset$ να είναι αύξουσα και $z_\emptyset = 1$. Άρα, $\{z_\Sigma | \Sigma$ αύξουσα $\}$ είναι βάση της $\mathfrak{S}$. Σχετιζόμενο με την ταξινόμηση $\mathfrak{S} = \coprod S^m$ $(\bigoplus S^m)$ είναι το φιλτράρισμα (διήθηση) $S_m = S^0 \oplus \ldots \oplus S^m$.

Στα παρακάτω λήμματα, γράφουμε $k \leq \Sigma$ αν $k \leq s$ για όλα τα $s \in \Sigma$.

Λήμμα 4.4.1.
Για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f_m : L \otimes S_m \to \mathfrak{S}$ που ικανοποιεί:

(I_m) $f_m(x_k \otimes z_\Sigma) = z_k z_\Sigma$ για $k \leq \Sigma$, $z_\Sigma \in S_m$.
(II_m) $f_m(x_k \otimes z_\Sigma) - z_k z_\Sigma \in S_n$ για $n \leq m$, $z_\Sigma \in S_n$.
(III_m) $f_m(x_k \otimes f_m(x_s \otimes z_T)) = f_m(x_s \otimes f_m(x_k \otimes z_T)) + f_m([x_k, x_s] \otimes z_T)$ για όλα τα $z_T \in S_{m-1}$.

Επιπλέον, ο περιορισμός της f_m στο $L \otimes S_{m-1}$ συμφωνεί με την f_{m-1}.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η (III_m) ισχύει, αφού αποδειχτεί η (II_m). Επίσης, ο περιορισμός της f_m στο $L \otimes S_{m=1}$ ικανοποιεί αυτόματα τις συνθήκες (I_{m-1}), (II_{m-1}), (III_{m-1}) και λόγω μοναδικότητας ο περιορισμός θα πρέπει να συμπίπτει με την f_{m-1}. Τώρα, για να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα των f_m, θα κάνουμε χρήση επαγωγής στο m.

Για $m = 0$, υπάρχει μόνο το $z_\Sigma = 1$ και άρα θέτουμε $f_o(x_k \otimes 1) = z_k$ (και επεκτείνουμε γραμμικά στο $L \otimes S_0$). Εύκολα βλέπουμε ότι οι συνθήκες (I_0), (II_0), (III_0) ικανοποιούνται και από την (I_0) παίρνουμε τη μοναδικότητα της f_0.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει μαναδική f_{m-1} που ικανοποιεί τις (I_{m-1}), (II_{m-1}), (III_{m-1}) και θα δείξουμε τον τρόπο επέκτασης της f_{m-1} σε μια απεικόνιση f_m. Για αυτό αρκεί να προσδιορίσουμε το $f_m(x_k \otimes z_\Sigma)$ όταν Σ είναι αύξουσα ακολουθία μήκους m.

Έστω $\Sigma = (s,\, T)$ μια αύξουσα ακολουθία μήκους m, με $s \leq T$ και T αύξουσα ακολουθία μήκους $m-1$.

(1) Ορίζουμε $f_m|_{L\otimes S_{m-1}} = f_{m-1}$.

(2) Αν $k \leq \Sigma$, τότε ορίζουμε $f_m(x_k \otimes z_\Sigma = z_k z_\Sigma$ για να ικανοποιείται η (I_m).

(3) Σε περίπτωση που $k > s$, από την (I_{m-1}) έχουμε $z_\Sigma = z_s z_T = f_{m-1}(x_s \otimes z_T)$. Τότε $f_m(x_k \otimes z_\Sigma) = f_m(x_k \otimes f_{m-1}(x_s \otimes z_T))$. Από (1) και (II_{m-1}), $f_m(x_k \otimes z_T) = f_{m-1}(x_k \otimes z_T) = z_k z_T + y$ για κάποιο $y \in S_{m-1}$. Αφού $s \leq (k,\, T)$, $f_m(x_s \otimes f_m(x_k \otimes z_T)) = f_m(x_s \otimes (z_k z_T + y)) = z_s z_k z_T + f_{m-1}(x_s \otimes y)$ από (1), (2). Επίσης, $f_m([x_k, x_s] \otimes z_T) = f_{m-1}([x_k, x_s] \otimes z_T)$ από (1). Επομένως, για να ικανοποιείται η (III_m), ορίζουμε $f_m(x_k \otimes z_\Sigma) = z_s z_k z_T + f_{m-1}(x_s \otimes y) + f_{m-1}([x_k, x_s] \otimes z_T)$. Από όσα προηγήθηκαν έπεται η μοναδικότητα του ορισμού των f_m.

Ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι (I_m), (II_m), (III_m):
- (I_m) Από (2), η (I_m) ισχύει.

- (II_m) Από (2) και (II_{m-1}), απομένει η περίπτωση $n = m$ και $k > s$.

$$f_m(x_k \otimes z_\Sigma - z_k z_\Sigma = z_s z_k z_T + f_{m-1}(x_s \otimes y) + f_{m-1}([x_k, x_s] \otimes z_T) - z_k z_s z_T = (f_{m-1}(x_s \otimes y) - z_s y) + z_s y + (f_{m-1}([x_k, x_s] \otimes z_T) - [z_k, z_s] z_T).$$

Από (II_{m-1}), $f_{m-1}(x_s \otimes y) - z_s y \in S_{m-1}$ και $f_{m-1}([x_k, x_s] \otimes z_T) - [z_k, z_s] z_T \in S_{m-1}$ και αφού $y \in S_{m-1}$, $z_s y \in S_m$ και ισχύει η (II_m).
-(III_m) Από (3), ισχύει η (III_m) για $k > s$ και $s \leq T$. Επίσης, ισχύει για $k < s$ και $k \leq T$, αφού $f_m(x_s \otimes f_m(x_k \otimes Z_T)) - f_m(x_k \otimes f_m(x_s \otimes z_T)) = f_m([x_s, x_k] \otimes z_T) = -f_m([x_k, x_s] \otimes z_T)$. Προφανώς, η (III_m) ισχύει για $k = s$. Τέλος, υπάρχει η περίπτωση όπου ούτε $k \leq T$ ούτε $s \leq T$. Έστω $T = (p, \Psi)$, όπου $p \leq \Psi$. Μένει να δείξουμε ότι ισχύει η (III_m) για $k > p$ και $s > p$. Θα γράφουμε για ευκολία $xz = f_m(x \otimes z)$ για $x \in L$, $z \in S_m$ και άρα θέλουμε να δείξουμε την παρακάτω σχέση για την (III_m):

$$x_k(x_s z_T) - x_s(s_k z_T) = [x_k, x_s] z_T.$$

Από (II_{m-1}), έχουμε $x_s z_\Psi = z_s z_\Psi + w$ για κάποιο $w \in S_{m-2}$. Αφού $p < s$ και $p \leq \Psi$, από προηγούμενη περίπτωση, η (III_m) ισχύει για $x_k(x_p(z_s z_\Psi))$, δηλαδή,

$$x_k(x_p(z_s z_\Psi)) = x_p(x_k(z_s z_\Psi)) + [x_k, x_p] z_s z_\Psi$$

Από επαγωγική υπόθεση, η (III_{m-1}) ισχύει για $x_k(x_p(w))$,δηλαδη,

$$x_k(x_p(w)) = x_p(x_k(w)) + [x_k, x_p] w.$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω δύο σχέσεις, παίρνουμε

$$x_k(x_p(x_s z_\Psi)) = x_p(x_k(x_s z_\Psi)) + [x_k, x_p](x_s z_\Psi)$$

Από επαγωγή, η (III_{m-1}) ισχύει για $x_k([x_s, x_p] z_\Psi)$, δηλαδή,

$$x_k([x_s, x_p] z_\Psi) = [x_s, x_p](x_k z_\Psi) + [x_k, [x_s, x_p]] z_\Psi$$

Από (I_{m-1}) και (III_{m-1}), έχουμε $x_s z_T = x_s(x_p z_\Psi) = x_p(x_s z_\Psi) + [x_s, x_p] z_\Psi$. Άρα,

$$x_k(x_s z_T) = x_k(x_p(x_s z_\Psi)) + x_k([x_s, x_p] z_\Psi)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω τρείς σχέσεις, παίρνουμε

$$x_k(x_s z_T) = x_p(x_k(x_s z_\Psi)) + [x_k, x_p](x_s z_\Psi) + [x_s, x_p](x_k z_\Psi) + [x_k, [x_s, x_p]] z_\Psi \ (*)$$

Αλλάζοντας θέση στα k και s στην $(*)$, παίρνουμε

$x_s(x_k z_T) = x_p(x_s(x_k z_\Psi)) + [x_s, x_p](x_k z_\Psi) + [x_k, x_p](x_s z_\Psi) + [x_s, [x_k, x_p]]z_\Psi$ $(**)$

Τέλος, αφαιρώντας από την $(*)$ την $(**)$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
& x_k(x_s z_T) - x_s(x_k z_T) \\
&= x_p(x_k(x_s z_\Psi)) - x_p(x_s(x_k z_\Psi)) + [x_k, [x_s, x_p]]z_\Psi - [x_s, [x_k, x_p]]z_\Psi \\
&= x_p([x_k, x_s]z_\Psi) + [x_k, [x_s, x_p]]z_\Psi + [x_s, [x_p, x_k]]z_\Psi \\
&= [x_k, x_s](x_p z_\Psi) + [x_p, [x_k, x_s]]z_\Psi + [x_k, [x_s, x_p]]z_\Psi + [x_s, [x_p, x_k]]z_\Psi \text{ από } (III_{m-1}) \\
&= [x_k, x_s](x_p z_\Psi) \text{ από ταυτότητα } Jacobi \ (1.1) \\
&= [x_k, x_s]z_T.
\end{aligned}
$$

Επομένως, η (III_m) ισχύει και για την τελευταία περίπτωση. ■

Λήμμα 4.4.2.
Υπάρχει αναπαράσταση $\rho : L \to gl(\mathfrak{S})$ που ικανοποιεί:
(α) $\rho(x_k)z_\Sigma = z_k z_\Sigma$ για $k \leq \Sigma$.
(β) $\rho(x_k)z_\Sigma = z_k z_\Sigma \ (mod\ S_m)$, αν Σ έχει μήκος m.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 4.4.1 μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $f : L \otimes \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος 4.4.1. για όλα τα m (αφού ο περιορισμός της f_m στο $L \otimes S_{m-1}$ είναι η f_{m-1}, λόγω μοναδικότητας). Με άλλα λόγια, $\mathfrak{S}$ γίνεται L-πρότυπο (από συνθήκη (III_m)), διαθέτοντας μια αναπαράσταση ρ που ικανοποιεί τις (α),(β), λόγω των (I_m), (II_m). ■

Λήμμα 4.4.3.
Έστω $t = (t_i)_{0 \leq i \leq m} \in T_m \cap J$ ($J = Ker\ \pi$, $\pi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{U}$ η κανονική απεικόνιση), όπου $t_i \in T^i$. Τότε η ομογενής συνιστώσα t_m του t βαθμού m βρίσκεται στο I ($I =$ ο πυρήνας της κανονικής απεικόνισης $\mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$).

Απόδειξη: Έστω $t_m = \sum_{i=0}^{r} c_i x_{\Sigma(i)}$, κάθε $\Sigma(i)$ είναι μήκους m. Λόγω καθολικής ιδιότητας της $\mathfrak{U}$ ο ομομορφισμός $\rho : L \to gl(\mathfrak{S})$ μπορεί να επεκταθεί σε ομομορφισμό αλγεβρών $\rho' : \mathfrak{T} \to End\ \mathfrak{S}$, τέτοιο ώστε $J \subset Ker\ \rho'$. Τότε, $\rho'(t) = 0$ ($t \in J$). Από Λήμμα 4.4.2, $\rho'(t) \cdot 1$ είναι πολυώνυμο του οποίου ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι ο $(t_m\ mod\ I) = \sum_{i=1}^{r} c_i z_{\Sigma(i)} = 0$ στη $\mathfrak{S}$. Άρα, $t_m \in I$. ■

Απόδειξη Θεωρήματος PBW: Έστω $t \in T^m$, $\pi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{U}$ η κανονική απεικόνιση. Θα δείξουμε ότι $\pi(t) \in U_{m-1} = \pi(T_{m-1})$ σημαίνει ότι $t \in I$. Αλλά, $t \in T^m$, $\pi(t) \in U_{m-1}$ δίνουν ότι $\pi(t) = \pi(t')$ για κάποιο $t' \in T_{m-1}$. Επομένως, $t - t' \in T_m \cap J$. Από Λήμμα 4.4.3, η ομογενής συνιστώσα του $t - t'$ βαθμού m είναυ το $t \in I$. Άρα, w είναι $1-1$ και από Λήμμα 4.3.1 w ισομορφισμός αλγεβρών. ■

5 Θεωρία αναπαραστάσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο με L θα εννοούμε μια ημιαπλή άλγεβρα Lie (πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα F χαρακτηριστικής 0), H σταθερή CSA ($Cartan$ υποάλγεβρα= μηδενοδύναμη υποάλγεβρα της L που ισούται με τον κανονικοποιητή της στην L) της L, Φ σύστημα ριζών, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ βάση του Φ και $\mathcal{W}$ ομάδα $Weyl$.

5.1 Βάρη και μεγιστικά διανύσματα

Παρατήρηση 5.1.1.: Αν L ημιαπλή ($char\ F = 0$), τότε μια μεγιστική $toral$ υποάλγεβρα H είναι αβελιανή (άρα, μηδενοδύναμη) και $N_L(H) = H$, διότι $L = H \coprod\limits_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$, με $[HL_\alpha] = L_\alpha$ για $\alpha \in \Phi$. Άρα, στη περίπτωση ημιαπλής άλγεβρας Lie υπάρχει $Cartan$ υποάλγβερα της L.

Αν V πεπερασμένης διάστασης L-πρότυπο, τότε H δρα διαγώνια στο V: $V = \coprod V_\lambda$, όπου $\lambda \in H^*$ και $V_\lambda = \{u \in V | h.u = \lambda(h)u$ για κάθε $h \in H\}$.

Ορισμός 5.1.2.
Για τυχόν V L-πρότυπο (οι υπόχωροι V_λ είναι καλά ορισμένοι) αν $V_\lambda \neq 0$, το καλούμε χώρο βάρους και το λ βάρος του V (πιο συγκεκριμένα, " βάρος της H στο V").

Έστω V τυχόν L-πρότυπο. Το άθροισμα V' όλων των χώρων βάρους V_λ είναι πάντα ευθύ (χρησιμοποιεί όμοιο επιχείρημα με την απόδειξη ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές για μια γραμμικά απεικόνιση είναι γραμμικώς ανεξάρτητα). Επιπλέον, V' είναι L-υποπρότυπο του V. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι L_α ($\alpha \in \Phi$) μεταθέτουν τους χώρους βάρους. Πράγματι, αν $x \in L_\alpha$, $u \in V_\lambda$, $h \in H$, τότε $h.x.u = x.h.u + [h, x].u = (\lambda(h) + \alpha(h))x.u$, άρα L_α στέλνει το V_λ στο $V_{\lambda+\alpha}$. Συνοψίζοντας, έχουμε:

Λήμμα 5.1.3. Έστω V τυχόν L-πρότυπο. Τότε

(a) L_α απεικονίζει V_λ στο $V_{\lambda+\alpha}$ ($\lambda \in H^*$, $\alpha \in \Phi$).
(b) Το άθροισμα $V' = \sum\limits_{\lambda\in H^*} V_\lambda$ είναι ευθύ και V' είναι L-υποπρότυπο του V.

(c) Αν $dim\ V < \infty$, τότε $V = V'$. ■

Ορισμός 5.1.4.
Ένα μέγιστο διάνυσμα (βάρους λ) σε ένα L-πρότυπο V είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα $u^+ \in V_\lambda$, με $L_\alpha.u^+ = 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$ $(\alpha \succ 0)$.

Παρατήρηση 5.1.5.: Υποθέτουμε ότι $dim\ V < \infty$. Θέτουμ $B(\Delta) = H + \coprod_{\alpha \succ 0} L_\alpha$ και $N(\Delta) = \coprod_{\alpha \succ 0} L_\alpha$. Γνωρίζουμε ότι $B(\Delta)$ υποάλγεβρα της L, με παράγουσα άλγεβρα $N(\Delta)$. Επιπλέον, $N(\Delta)$ είναι μηδενοδύναμη. Πράγματι , αν $x \in L_\alpha$ $(\alpha \succ 0)$, εφαρμόζοντας την $ad\ x$ στα διανύσματα (ρίζες) για ρίζες θετικού ύψους (σχετικά με το Δ) αυξάνουμε το ύψος κατά 1. Αυτό μας δίνει πως να κάνουμε την κατωτέρα κεντρική σειρά να πηγαίνει στο 0. Έπεται ότι $B(\Delta)$ είναι επιλύσιμη. Άρα, από Θεώρημα Lie, έχει κοινό ιδιοδιάνυσμα v ($L_\alpha.v = 0$ για $\alpha \succ 0$ και αυτό είναι το μέγιστο διάνυσμα.

Ορισμός 5.1.6.
Έστω $\mathfrak{U}(L)$ η καθολικά περιβάλλουσα άλγεβρα της L (L πεπερασμένης διάστασης). Αν $V = \mathfrak{U}(L).u^+$ για κάποιο μέγιστο διάνυσμα u^+ (βάρους λ), τότε καλούμε το V κανονικό κυκλικό (βάρους λ) και το λ ανώτατο βάρος του V.

Σταθεροποιούμε $x_\alpha \in L_\alpha$ $(\alpha \succ 0)$ και επιλέγουμε $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ (μοναδικό) για το οποίο $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.

Θεώρημα 5.1.7.
Έστω V κανονικό κυκλικό L-πρότυπο, με μέγιστο διάνυσμα $u^+ \in V_\lambda$ και $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Τότε,
(a) $V = Span\{y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} | i_j \in \mathbb{Z}^+\}$. Πιο συγκεκριμένα , V είναι το ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους του.
(b) Τα βάρη του V είναι της μορφής $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ $(k_i \in \mathbb{Z}^+)$, δηλαδή, για όλα τα βάρη ισχύει $\mu \prec \lambda$.
(c) Για κάθε $\mu \in H^*$, $dim\ V_\mu < \infty$ και $dim\ V_\lambda = 1$.
(d) Κάθε υποπρότυπο του V είναι το ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους του.
(e) V είναι μη αναλύσιμο L-πρότυπο, με μοναδικό μέγιστο (γνήσιο) υποπρότυπο W και μοναδικό ανάγωγο πηλίκο V/W.
(f) Κάθε μη μηδενική ομομορφική εικόνα του V είναι κανονικό κυκλικό πρότυπο βάρους λ.

Απόδειξη: Θέτουμε $L = N^- + B$, όπου $N^- = \coprod_{\alpha \prec 0} L_\alpha$ και $B = B(\Delta)$. Από το Θεώρημα PBW (Πορίσματα 4.3.5 και 4.3.7 του Θεωρήματος 4.3.2), έχουμε ότι $\mathfrak{U}(L).u^+ = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B).u^+ = \mathfrak{U}(N^-).u^+$ (αφού u^+ κοινό ιδιοσιάνυσμα της B) και $\mathfrak{U}(N^-)$ έχει βάση που αποτελείται από τα μονώνυμα $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$ και έχουμε το πρώτο μέρος του (a)

Το διάνυσμα $(*)$ $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}.u^+$ έχει βάρος $\lambda - \sum\limits_j i_j\beta_j$ (Λήμμα 5.1.3(a)), $i_j \geq 0$. Γράφοντας κάθε β_j ως μη αρνητικό $\mathbb{Z}$-γραμμικό συνδυασμό απλών ριζών (όπως στην 3.2), παίρνουμε το δεύτερο μέρος του (a) $(V = \oplus V_{\lambda - \sum\limits_j i_j\beta_j})$ και το (b).

Υπάρχει πεπερασμένος αριθμός διανυσμάτων $(*)$ στο (b) για τα οποία $\sum i_j\beta_j$ ισούται με ένα καθορισμένο $\sum\limits_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$. Από το (a), $V_\mu = Span\{$ τα παραπάνω πεπερασμένα διανύσματα $\}$, αν $\mu = \lambda - \sum k_i\alpha_i$ και άρα έχουμε $dim\ V_\mu < \infty$. Επιπλέον, το μοναδικό διάνυσμα της μορφής $(*)$ με βάρος $\mu = \lambda$ είναι το u^+ και άρα παίρνουμε το (c).

Έστω W υποπρότυπο του V και γράγουμε $w = \sum u_i \in W$ για $u_i \in V_{\mu_i}$, ανήκουν σε διαφορετικά βάρη. Πρέπει να δείξουμε ότι όλα τα u_i βρίσκονται στο W. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το παραπάνω, τότε μπορούμε να επιλέξουμε $w = u_1 + \ldots + u_n$ με n ελάχιστο, $n > 1$. Αφού $\mu_1 \neq \mu_2$, υπάρχει $h \in H$ τέτοιο ώστε $\mu_1(h) \neq \mu_2(h)$. Τότε, $h.w = \sum\limits_{i=1}^{n} h.u_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(h)u_i \in W$ όπως και $(h - \mu_1(h)\cdot 1).w = (\mu_2(h) - \mu_1(h))u_2 + \ldots + (\mu_n(h) - \mu_1(h))u_n \neq 0$ και καταλήγουμε σε αντίφαση, λόγω ελαχίστου του w.

Από (c), (d), κάθε γνήσιο υποπρότυπο του V βρίσκεται στο $\oplus_\mu V_\mu$ με $\mu \neq \lambda$. Τότε, το άθροισμα W όλων αυτών των υποπροτύπων είναι γνήσιο. Αυτό σημαίνει ότι V έχει μοναδικό μέγιστο γνήσιο υποπρότυπο και μοναδικό ανάγωγο πηλίκο v/W. Υποθέτουμε ότι $V = W_1 \oplus W_2$. Αφού W_1, $W_2 \subset W$, τότε $V \subset W$, άτοπο. Άρα, V μη αναλύσιμο και έχουμε το (e).

Υποθέτουμε ότι $f : V \to V'$ επί. Τότε $x.f(u^+) = f(x.u^+) = f(0) = 0$ για όλα τα $x \in L_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$. Τότε $f(u^+$ μέγιστο διάνυσμα και $V' = \mathfrak{U}(L).f(u^+)$ είναι κανονικό κυκλικό. Αφού $h.f(u^+) = f(h.u^+) = f(\lambda(h)u^+) = \lambda(h)f(u^+)$, το βάρος του $f(u^+)$ είναι λ. ■

Πόρισμα 5.1.8.

Έστω V όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Υποθέτουμε ότι V είναι ανάγωγο L-πρότυπο. Τότε u^+ είναι το μοναδικό μέγιστο διάνυσμα στο V (εκτός από πολλαπλάσια).

Αν w^+ ένα άλλο μέγιστο διάνυσμα, τότε $\mathfrak{U}(L).w^+ = V$ (αφού V ανάγωγο). Επομένως, το προηγούμενο θεώρημα εφαρμόζεται στα u^+ και w^+. Αν w^+ έχει βάρος λ', τότε $\lambda' \prec \lambda$ και $\lambda \succ \lambda'$ (από (b)), που σημαίνει $\lambda = \lambda'$. Τέλος, από (c) έχουμε ότι w^+ είναι πολλαπλάσιο του u^+. ■

Θεώρημα 5.1.9.
Έστω V, W κανονικά κυκλικά πρότυπα ανώτατου βάρους λ. Αν V και W είναι ανάγωγα, τότε είναι ισόμορφα.

Απόδειξη: Θέτουμε $X = V \oplus W$ (L-πρότυπο). Αν u^+, w^+ είναι τα μέγιστα διανύσματα βάρους λ στο V και W, αντίστοιχα, θέτουμε $x^+ = (u^+, w^+) \in X$, έτσι ώστε x^+ είναι μέγιστο διάνυσμα βάρους λ. Ορίζουμε Y L-υποπρότυπο του X, με $Y = \mathfrak{U}(L).x^+$ και ορίζουμε $p : Y \to V$, $p' : Y \to W$ οι προβολές, όπου $p(x^+) = u^+$, $p'(x^+) = w^+$. Τότε είναι φανερό ότι p, p' είναι ομομορφισμοί L-προτύπων και ισχύει $V = Im\ p \backsimeq Y/Ker\ p$, $W = Im\ p' \backsimeq Y/Ker\ p'$. Τέλος, ως ανάγωγα πηλίκα του κανονικού κυκλικού προτύπου Y, V και W είναι ισόμορφα, από Θεώρημα 5.1.7(e). ■

Θέτουμε $D_\lambda = Fu^+$ και $B = B(\Delta)$. Τότε D_λ είναι B-πρότυπο ως εξής

$$(h + \sum_{\alpha \succ 0} x_\alpha).u^+ = h.u^+ = \lambda(h)u^+ \text{ για } \lambda \in H^*.$$

Επιπλέον, D_λ είναι $\mathfrak{U}(B)$-πρότυπο και άρα μπορούμε να ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο $Z(\lambda) = \mathfrak{U}(L) \otimes_{\mathfrak{U}(B)} D_\lambda$, που γίνεται $\mathfrak{U}(L)$-πρότυπο με την φυσική δράση (αριστερή) του $\mathfrak{u}(L)$.

Σημείωση: Το παραπάνω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό αφού μας δίνει ότι ανάγωγα πρότυπα ταξινομούνται από το μέγιστο βάρος τους.

Πρόταση 5.1.10.
$Z(\lambda)$ είναι κανονικό κυκλικό πρότυπο βάρους λ.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $1 \otimes u^+$ παράγει το $Z(\lambda)$. Επιπλέον, $1 \otimes u^+$ είναι μη μηδενικό, διότι $\mathfrak{U}(L)$ είναι ελεύθερο $\mathfrak{U}(B)$-πρότυπο (Πόρισμα 4.3.7 του θεωρήματος 4.3.2) με βάση που αποτελείται από μονώνυμα $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$ μαζί με το 1. Επομένως, $1 \otimes u^+$ είναι μέγιστο διάνυσμα βάρους λ. Θα το καλούμε v^+ για συντομία (δηλαδη, $Z(\lambda) = \mathfrak{U}(L).v^+$). ■

Πρόταση 5.1.11.
$Z(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(N^-) \otimes F$ ως $\mathfrak{U}(N^-)$-πρότυπα, όπου $N^- = \oplus_{\alpha \prec 0} L_\alpha$.

Απόδειξη: Από Πόρισμα 4.3.7, $\mathfrak{U}(L) \simeq \mathfrak{U}(N^-) \otimes \mathfrak{U}(B)$ και u^+ κοινό ιδιοδιάνυσμα της B. Τότε $Z(\lambda) = \mathfrak{U}(L).v^+ \simeq \mathfrak{U}(n^-) \otimes \mathfrak{U}(B).u^+ \simeq \mathfrak{U}(N^-) \otimes F.u^+$ και άρα $Z(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(N^-) \otimes F$ (ως $\mathfrak{U}(N^-)$-πρότυπα). ■

Πρόταση 5.1.12.
$Z(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(L)/I(\lambda)$, όπου $I(\lambda)$ είναι το αριστερό ιδεώδες της $\mathfrak{U}(L)$

$$I(\lambda) = \langle x_\alpha \in L_\alpha,\, h_\alpha - \lambda(h_\alpha) \cdot 1 | \alpha \in \Phi \rangle.$$

Απόδειξη: Αφού $x_\alpha.u^+ = 0$ και $(h_\alpha - \lambda(h_\alpha) \cdot 1).u^+ = 0$, τότε υπάρχει κανονικός ομομορφισμός $\mathfrak{U}(L)$-προτύπων $\mathfrak{U}(L)/I(\lambda) \to Z(\lambda)$ που στέλνει το σύμπλοκο του 1 στο μέγιστο διάνυσμα v^+. Χρησιμοποιώντας την PBW βάση της $\mathfrak{U}(L)$, βλέπουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση στέλνει τα σύμπλοκα του $\mathfrak{U}(B)$ στη γραμμή (ευθεία) Fu^+ και άρα έχουμε ότι είναι $1-1$ (επί από ορισμό), δηλαδή, $Z(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(L)/I(\lambda)$. ■

Θεώρημα 5.1.13.
Έστω $\lambda \in H^*$. Τότε υπάρχει ανάγωγο κανονικό κυκλικό πρότυπο $V(\lambda)$ βάρους λ.

Απόδειξη: Το $Z(\lambda)$ είναι κανονικό κυκλικό πρότυπο βάρους λ και έχει μέγιστο (γνήσιο) υποπρότυπο $Y(\lambda)$ (Θεώρημα 5.1.7(e)). Επομένως, $V(\lambda) = Z(\lambda)/Y(\lambda)$ είναι ανάγωγο (Θεώρημα 5.1.7(e)) και κανονικό κυκλικό. ■

5.2 Τύπος πολλαπλότητας

Όλα τα πρότυπα σε αυτή τη παράγραφο θα είναι πεπερασμένης διάστασης. Αν V ειναι L-πρότυπο, θέτουμε $\Pi(V)$ το σύνολο των βαρών του και στη περίπτωση που $V = V(\lambda)$, γράφουμε $\Pi(\lambda)$.

Έστω $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$ και $\mu \in \Pi(\lambda)$, $\alpha \in \Phi$. Το Λήμμα 5.1.3 δείχνει ότι ο υποχώρος W του V που εκτείνεται από όλους τους χώρους βάρους $V_{\mu+i\alpha}$ $(i \in \mathbb{Z})$ είναι αναλλοίωτο από το S_α $(S_\alpha \simeq sl(2,F))$. Σύμφωνα με την (2.4) και το Θεώρημα $Weyl$ για πλήρη αναγωγισιμότητα, τα βάρη στο $\Pi(\lambda)$ της μορφής $\mu + i\alpha$ φτιάχνουν μια χορδή $\mu - r\alpha, \ldots, \mu, \ldots, \mu + q\alpha$. Επιπλέον, η συμμετρία

σ_α αντιστρέφει τη χορδή και άρα έχουμε $r - q = \langle \mu, \alpha \rangle$. Αυτό αποδεικνύει το παρακάτω:

Πρόταση 5.2.1.
Αμ $\lambda \in \Lambda^+$, το σύνολο $\Pi(\lambda)$ είναι κεκορεσμένο (3.3). Πιο συγκεκριμένα, η αναγκαία και ικανή συνθήκη για ένα $\mu \in \Lambda$ να ανήκει στο $\Pi(\lambda)$ είναι το μ και όλα τα $\mathcal{W}$-συζυγή του να είναι $\prec \lambda$. ∎

Ορισμός 5.2.2.
Αν $\mu \in H^*$ γραμμική συνάρτηση, ορίζουμε ως πολλαπλότητα του μ στο $V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, να είναι $m_\lambda(\mu) = dim\ V(\lambda)_\mu$ ($= 0$ αν μ δεν είναι βάρος του $V(\lambda)$).

Θυμόμαστε από την 2.3 την έννοια του στοιχείου $Casimir$ c_ϕ μιας αναπαράστασης της L, που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του θεωρήματος $Weyl$ για πλήρη αναγωγισιμότητα. Τώρα με την $\mathfrak{U}(L)$ μπορούμε να έχουμε μια "καθολική" κατασκευή αυτής της μορφής.

Αρχίζοντας με την συζυγή αναπαράσταση της L, της οποίας η μορφή ίχνους είναι η $Killing\ form\ \kappa$. Από την 2.5 έχουμε μια φυσική κατασκευή δϋικής σχετικής με την κ. Αν α, β είναι γραμμικές συναρτήσεις στο H, γνωρίζουμε ότι L_α είναι ορθογώνιο στο L_β εκτός αν $\beta = -\alpha$ (Πρόταση 2.5.5(iii)). Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ο περιορισμός της κ στο H είναι μη εκφυλισμένος (Πόρισμα 2.5.9). Συνεπώς, μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής. Επιλέγουμε βάση της H, έστω $(h_1, \ldots, h_l)$ (σχετική με το Δ) και έστω $(k_1, \ldots, k_l)$ η δϋική βάση της H, σχετική με τον περιορισμό της κ στο H. Στη συνέχεια επιλέγουμε μη μηδενικό x_α σε κάθε L_α ($\alpha \in \Phi$) και έστω z_α το (μοναδικό) στοιχείο του $L_{-\alpha}$ που ικανοποιεί την $\kappa(x_\alpha, z_\alpha) = 1$. Από όσα προηγήθηκαν, οι βάσεις (h_i, $1 \leq i \leq l; x_\alpha$, $\alpha \in \Phi$) και (k_i, $1 \leq i \leq l; z_\alpha$, $\alpha \in \Phi$) είναι δϋικές σχετικά με τη κ.

Σημείωση: Το ζεύγος x_α, z_α δεν είναι το ίδιο με την συνηθησμένη επιλογή μας των x_α, y_α με $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε $[x_\alpha, z_\alpha] = t_\alpha = [(\alpha, \alpha)/2]h_\alpha$ (Πρόταση 2.5.10(3)).

Από ορισμό, το στοιχείο $Casimir$ για την ad είναι ο ενδομορφισμός της L που δίνεται από $c_{ad} = \sum\limits_{i=1}^{l} ad\ h_i\ ad\ k_i + \sum\limits_{\alpha \in \Phi} ad\ x_\alpha\ ad\ z_\alpha$. Αυτή κατασκευή μας κάνει να ενδιαφερθούμε για το στοιχείο $c_L = \sum_{i=1}^{l} h_i k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha z_\alpha \in \mathfrak{U}(L)$. Αν η ad επεκταθεί (μοναδικά) σε ομομορφισμό προσεταιριστικών αλγεβρών $ad : \mathfrak{U}(L) \to End\ L$, τότε $ad\ c_L$ είναι το c_{ad}. Για αυτό το λόγο καλούμε το c_L καθολικό στοιχείο $Casimir$ της L. Εύκολα βλέπουμε ότι c_L είναι ανεξάρτητο της επιλογής βάσης. Το επιχείρημα στην 2.3 (σελ.25) δείχνει ότι για κάθε αναπαράσταση ϕ της L, $\phi(c_L)$ μετατίθεται με $\phi(L)$ και άρα δρά ως βαθμωτό αν ϕ είναι ανάγωγη. Θα εξετάσουμε το πώς συνδέεται το $\phi(c_L)$ με το στοιχείο $Casimir\ c_\phi$.

Λήμμα 5.2.3.
Έστω L απλή άλγεβρα Lie. Αν $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι μη εκφυλισμένες συμμετρικές, προσεταιριστικές διγραμμικές μορφές στην L, τότε υπάρχει μη μηδενικό α (βαθμωτό) τέτοιο ώστε $f(x,y) = \alpha g(x,y)$ για όλα τα x, $y \in L$.

Απόδειξη: Κάθε μορφή (μη εκφυλισμένη) ορίζει έναν (φυσικό) ισομορφισμό διανυσματικών χώρων $L \to L^*$, με $x \mapsto s$, όπου $s(y) = f(x.y)$ ή $g(x,y)$. Η προσεταιριστικότητα μας εξασφαλίζει ότι είναι πράγματι ισομορφισμοί L-προτύπων (Θυμόμαστε από 2.3 σελ.24 τον τρόπο με τον οποίο L^* γίνεται L-πρότυπο). Συνθέτοντας μια από τις απεικονίσεις με την αντίστροφη της άλλης παίρνουμε έναν ισομορφισμό L-προτύπων $\pi : L \to L$. Αλλά L είναι ανάγωγο L-πρότυπο (είναι απλή), άρα π είναι ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός, σ'μφωνα με το Λήμμα $Schur$. Με άλλα λόγια, έχουμε $0 \neq \alpha \in F$ τέτοιο ώστε αν $f(x,y) = g(z,y)$ (για όλα τα $y \in L$), τότε $z = \alpha x$. ■

Έστω $\phi : L \to gl(V)$ αναπαράσταση της L, με L απλή. Αν $\phi(L) = 0$, τότε δεν έχουμε να εξετάσουμε κάτι. Διαφορετικά ϕ είναι πιστή (αφού $Ker\ \phi$ ιδεώδες της L) και άρα η μορφή $f(x,y) = Tr(\phi(x)\phi(y))$ στην L είναι μη εκφυλισμένη και προσεταιριστική. Η $Killing\ form$ έχει τις ίδιες ιδιότητες, άρα πρέπει να είναι ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο αf (από το προηγούμενο λήμμα). Πιο συγκεκριμένα, δεδομένης μίας βάσης της L, η δϋική βάση, σχετική με τη κ, προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία της δϋικής βάσης, σχετική με τη f, με $1/\alpha$. Αυτό μας δείχνει ότι $\phi(c_L) = (1/\alpha)c_\phi$ (με λόγια, το σύνηθες στοιχείο $Casimir$ είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο της εικόνας του καθολικού στοιχείου $Casimir$).

Τέλος, έστω L ημιαπλή. Παρατηρήσαμε στην 2.2 ότι διαφορετικά απλά ιδεώδη της L είναι ορθογώνια μεταξύ τους, σχετικά με τη κ. Αυτό μας δείχνει ότι οι δϋικές βάσεις που επιλέχθηκαν παραπάνω μπορούν να επιλεγούν να είναι ενώσεις ανάλογων δϋικών βάσεων για τις απλές συνιστώσες της L (σχετικές με την $Killing\ form$ τους, που προκύπτει περιορίζοντας τη κ). Επομένως, $c_L = c_{L_1} + \ldots + c_{L_t}$ ($L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$) και ϕ αναπαράσταση της L, κάθε$\phi(c_{L_i})$ είναι πολλάπλασιο του αντίστοιχου c_{ϕ_i} ($\phi_i = \phi_{L_i}$), όπου ϕ_i είναι τετριμμένη ή πιστή για κάθε i. Άρα, $\phi(c_L)$ συνδέεται με το c_ϕ (όχι αναγκαστικά ως πολλαπλάσιο). Πιο συγκεκριμένα, το παραπάνω δείχνει ότι $\phi(c_L)$ μετατίθεται με το $\phi(L)$.

Σταθεροποιούμε ανάγωγο L-πρότυπο $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$ και συμβολίζουμε με ϕ την αναπαράσταση που ορίζει. Επιπλέον, σταθεροποιούμε τις δϋικές βάσεις της L σχετικές με τη κ που επιλέξθηκαν προηγουμένως. Θα υπολογίσουμε, για κάθε βάρος μ του V, το ίχνος στο V_μ του ενδομορφισμού $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$. Αυτό έχει νοήμα, διότι $\phi(z_\alpha$ απεικονίζει το V_μ στο $V_{\mu-\alpha}$ και $\phi(x_\alpha)$ απεικονίζει το $V_{\mu-\alpha}$ στο V_μ.

Αφού εργαζόμαστε με μία ρίζα α, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία για την S_α (2.4). Χρειάζεται να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις, καθώς η βάση μας $(x_\alpha, z_\alpha, t_\alpha)$ δεν είναι η συνήθης (κανονική) και σχετίζεται με τη συνήθη βάση $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)$ ως εξής: $z_\alpha = [(\alpha,\alpha)/2]y_\alpha$, $t_\alpha = [(\alpha,\alpha)/2]h_\alpha$. Έστω $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ η βάση που χρησιμοποιήθηκε στους τύπους $(a) - (c)$, Λήμμα 2.4.4, για το ανάγωγο S_α-πρότυπο ανώτατου βάρους μ. Είναι πιο εύχρηστο το να αντικαταστήσουμε αυτή τη βάση με την $(w_0, w_1, \ldots, W_m)$, όπου $w_i = i![(\alpha,\alpha)^i/2^i]u_i$. Πραγματοποιώντας την αντικατάσταση, παίρνουμε:

(a') $t_\alpha.w_i = (m-2i)[(\alpha,\alpha)/2]w_i$
(b') $z_\alpha.w_i = w_{i+1},\ \ (w_{m+1} = 0)$
(c') $x_\alpha.w_i = i(m-i+1)[(\alpha,\alpha)/2]w_{i-1},\ \ (w_{-1} = 0)$.

Επομένως,

$$x_\alpha z_\alpha.w_i = (m-i)(i+1)[(\alpha,\alpha)/2]w_i. \qquad (1)$$

Τώρα έστω μ οποιοδήποτε βάρος του V για το οποίο $\mu+\alpha$ δεν είναι βάρος. Τότε (Πρόταση 5.2.1) έχουμε τη χορδή μ, $\mu-\alpha$, …, $\mu - m\alpha$, όπου $m = \langle \mu, \alpha \rangle$. Τα μ και α θα είναι σταθερά για την παρακάτω συζήτηση. Η αναπαράσταση της S_α στο άθροισμα των χώρων βάρους $W = V_\mu + V_{\mu-\alpha} + \ldots + V_{\mu-m\alpha}$ είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων αναπαραστάσεων (Θεώρημα $Weyl$), κάθε μια εμπλέκει μια χορδή βαρών σταθερή υπό την σ_α. Πιο συγκεκριμένα, έστω n_i $(0 \le i \le [m/2])$ να συμβολίζει τον αριθμό συνιστωσών που έχουν ανώτατο βάρος $(\mu - i\alpha)(h_\alpha)$.

Τότε $m(\mu - i\alpha) = n_0 + \ldots + n_i$ και $n_i = m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha)$. Για m άρτιο έχουμε

$$\begin{array}{l}
\mu \\
\mu - \alpha \\
\mu - 2\alpha \\
\vdots \\
\left.\left.\mu - \frac{m}{2}\alpha\right\} n_{m/2} \quad \right\} n_{(m-2)/2} \cdots \\
\vdots \\
\mu - (m-1)\alpha \\
\mu - m\alpha
\end{array}$$

Σχήμα 1.

Για κάθε k, $0 \leq k \leq m/2$, θέλουμε να υπολογίσουμε το ίχνος της $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ στο $V_{\mu - k\alpha}$. Έστω $0 \leq i \leq k$. Σε ένα ανάγωγο S_α-προσθετέο W που έχει ανώτατο βάρος $m - 2i = (\mu - i\alpha)(h_\alpha)$ (από 2.4, αν V πεπερασμένης διάστασης L-πρότυπο, μ βάρος του V, τότε $\mu(h_\alpha) = \langle \mu, \alpha \rangle$ για κάθε α απλή ρίζα), ο χώρος βάρους που αντιστοιχεί στο $\mu - k\alpha$ εκτείνεται από τα διανύσματα w_{k-i} (με τον παραπάνω συμβολισμό). Αντικαθιστώντας το m με $m - 2i$ και το i με $k - i$ στον τύπο (1), παίρνουμε

$$\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)w_{k-i} = (m - i - k)(k - i + 1)[(\alpha, \alpha)/2]w_{k-i}. \qquad (2)$$

Υπάρχουν n_i S_α-προσθετέοι του W με ανώτατο βάρος $m - 2i$ και άρα ο πίνακας της $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ (περιορισμένης στο $V_{\mu-k\alpha}$) έχει n_i διαγώνια στοιχεία της μορφής (2), σχετικά με μια κατάλληλη βάση από ιδιοδιανύσματα. Αφήνοντας το i να κυμαίνεται από 0 έως k, παίρνουμε για $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ διαγώνιο πίνακα τάξης $m(\mu - k\alpha) = n_0 + \ldots + n_k$, με ίχνος:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} n_i(m - i - k)(k - i + 1)(\alpha, \alpha)/2 \\
&= \sum_{i=0}^{k} (m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha))(m - i - k)(k - i + 1)(\alpha, \alpha)/2 \\
&= \sum_{i=0}^{k} m(\mu - i\alpha)(m - 2i)(\alpha, \alpha)/2. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει, διότι ο συντελεστής του $m(\mu - i\alpha)$ είναι $(\alpha,\alpha)/2$ επί $(m-i-k)(k-i+1)-(m-i-k-1)(k-i) = m-2i$. Τώρα θυμόμαστε ότι $m/2 = (\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ και η (3) γίνεται

$$Tr_{V_{\mu-k\alpha}}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha). \qquad (4)$$

Έτσι έχουμε τελειώσει με τα βάρη $\mu - k\alpha$ του πάνω μέρους του σχήματος 1. Αφού η συμμετρία σ_α εναλλάσσει το πάνω μέρος και το κάτω μέρος, μπορούμε να περιμένουμε ανάλογη συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα, $m(\mu - i\alpha) = m(\mu-(m-i)\alpha)$ για $m/2 < i \leq m$. Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση για k, $m/2 < k \leq m$, παίρνουμε

$$Tr_{V_{\mu-k\alpha}}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha) = \sum_{i=0}^{m-k-1} m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha). \qquad (5)$$

(Θα έπρεπε να αθροίσουμε ως $m-k$, αλλά $\phi(z_\alpha)$ "σκοτώνει" ένα διάνυσμα βάρους $\mu - k\alpha$ που ανήκει σε έναν S_α-προσθετέο του W με ανώτατο βάρος $\mu-(m-k)\alpha)$).

Παρατηρούμε ότι, για $m/2 < i \leq m$, $(\mu-i\alpha,\alpha)+(\mu-(m-i)\alpha,\alpha) = (2\mu - m\alpha,\alpha) = 0$, διότι $m = 2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$. Επομένως:

$$(m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\alpha) + m(\mu-(m-i)\alpha)(\mu-(m-i)\alpha,\alpha) = 0 \qquad (6)$$

Αυτό μας δείχνει ότι συγκεκριμένα ζεύγη προσθετέων μπορούν να προστεθούν στην (5):$k+1$ και $m-(k+1)$, $k+2$ και $m-(k+2)$, κ.ο.κ. (Για $m=2i$ άρτιος, (6) αναγκάζει $(\mu - i\alpha,\alpha) = 0$). Με άλλα λόγια, η (5) ανάγεται στη (4), για τυχόν k.

Τέλος, αν θεωρήσουμε τυχόν βάρος ν του V, κατασκευάζουμε τη χορδή βαρών του ν και έστω ο τελευταίος όρος $\nu + k\alpha$ να παίζει το ρόλο του μ στις παραπάνω σχέσεις. $m(\mu) = 0$ για κάθε μ τέτοιο ώστε $V_\mu = 0$ και μπορούμε να ξαναγράψουμε τη (4) ως εξής, για τυχόν $\mu \in \Pi(\lambda)$:

$$Tr_{V_\mu}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha). \qquad (7)$$

Έστω ϕ, V όπως προηγουμένως, $dim\ V > 1$. Έχουμε ότι το καθολικό στοιχείο $Casimir$ $c_L = \sum_{i=1}^{l} h_i k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha z_\alpha$. Αφού ϕ είναι ανάγωγη, $\phi(c_L)$ είναι βαθμωτός πολλαπλασιασμός, έστω c. Σταθεροποιούμε βάρος μ του V. Θέλουμε να υπολογίσουμε $Tr_{V_\mu}\phi(c_L) = cm(\mu)$.

Αρχικά, $\phi(h_i)$ $h_i = h_{\alpha_i}$ για α_i απλή ρίζα) είναι βαθμωτός πολλαπλασιασμός με $\mu(h_i)$ στο V_μ και όμοια για $\phi(k_i)$. Έστω $t_\mu \in H$ που ικανοποιεί την $\mu(h) = \kappa(t_\mu, h)$ για κάθε $h \in H$ (όπως στην 2.5). Γράφουμε $t_\mu = \sum_i$ α$_i h_i$, τότε από ορισμό $(h_i) = \sum_j$ α$_j \kappa(h_j, h_i)$ και $\mu(k_i) = \sum_j$ α$_j \kappa(h_j, k_i) =$α$_i$ (λόγω δϋικότητας). Επομένως, $(\mu, \mu) = \sum_{i,j}$ α$_i$ α$_j \kappa(h_j, h_i) = \sum_j \mu(h_i)\mu(h_j)$, από όπου:

$$\sum_i Tr_{V_\mu}\phi(h_i)\phi(k_i) = m(\mu)(\mu, \mu). \qquad (8)$$

Συνδυάζοντας την (8) με τη σχέση (7), έχουμε:

$$cm(\mu) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \qquad (9)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι $m(\mu)(\mu, \alpha)$ και $m(\mu)(\mu, -\alpha)$ εμφανίζονται στο άθροισμα και άρα μπορούμε να παραλείψουμε το δείκτη $i = 0$.

Η σχέση (9) ισχύει για τυχόν $\mu \in \Lambda$, $\mu \notin \Pi(\lambda)$, στην οποία περίπτωση γίνεται: $0 = \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$. Πράγματι, αν $\mu \notin \Pi(\lambda)$, τότε για κάθε $\alpha \in \Phi$ τα βάρη (αν υπάρχουν) της μορφής $\mu + i\alpha$ πρέπει να προκύπτουν σε χορδή με όλα τα i θετικά ή όλα τα i αρνητικά. Στη δεύτερη περίπτωση, το άθροισμα για α είναι 0 και το ίδιο ισχύει για την πρώτη περίπτωση, με επιχείρημα ανάλογο εκείνου της σχέσης (6).

Τα παραπάνω δείχνουν ότι για σταθερό $\alpha \in \Phi$ και κάθε $\mu \in \Lambda$, έχουμε:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) = 0. \qquad (10)$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu - i\alpha)(\mu - i\alpha, -\alpha) = m(\mu)(\mu, \alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \qquad (11)$$

Αντικαθιστώντας την (11) στην (9) (η άθροιση ξεκινά με $i = 1$, όπως παρατηρήθηκε), παίρνουμε τελικά:

$$cm(\mu) \;=\; (\mu,\mu)m(\mu) + \sum_{\alpha\succ 0} m(\mu)(\mu,\alpha) + 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha)$$
(12)

Θέτοντας $\delta + (1/2)\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$ (3.3), μπορούμε να γράψουμε τη (12) ως εξής:

$$cm(\mu) = (\mu,\mu+2\delta)m(\mu) + 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha) \qquad (13)$$

Το μειονέκτημα αυτού του τύπου είναι ότι εμπλέκει το c. Αλλά υπάρχει μία ειδική περίπτωση για την οποία γνωρίζουμε το $m(\mu)$, την $\mu=\lambda$, $m(\lambda)=1$. Επιπλέον, $m(\lambda+i\alpha)=0$ για όλες τις θετικές ρίζες α και κάθε $i\geq 1$. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε από την (13) τη τιμή $c=(\lambda,\lambda+2\delta)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον τύπο *Freudenthal*.

Θεώρημα 5.2.4.
Έστω $V=V(\lambda)$ ανάγωγο L-πρότυπο ανώτατου βάρους λ, $\lambda\in\Lambda^{+}$. Αν $\mu\in\Lambda$, τότε η πολλαπλότητα $m(\mu)$ του μ στο V δίνεται αναδρομικά ως εξής:

$$((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m(\mu) = 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\alpha). \; (14)$$
■

Παράδειγμα 5.2.5:Έστω $L=sl(3,F)$ και $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=\delta=\alpha_1+\alpha_2$. Τότε λ είναι θετική ρίζα και ισχύει $(\alpha_i,\alpha_i)=1$,όπου α_i ρίζα. Τότε, $\|\lambda+\delta\|^2=4$. Για $\mu=\alpha_2$, έχουμε $(\mu+\delta,\mu+\delta)=3$ και τελικά $m_\lambda(\mu)=2(\lambda,\alpha_1)m_\lambda(\lambda)=1$.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος *Freudenthal* παρέχει μια αποτελεσματική μέθοδο υπολογισμού πολλαπλοτήτων, ξεκινώντας με $m(\lambda)=1$. Από τη Πρόταση 5.2.1 και το Λήμμα 3.3.14, έχουμε ότι για $\mu\in\Pi(\lambda)$, $\mu\neq\lambda$, η ποσότητα $(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta)$ είναι μη μηδενική και άρα $m(\mu)=0$ όταν η ποσότητα αυτή είναι ίση με 0, $\mu\neq\lambda$. Επομένως, $m(\mu)$ είναι γνωστό δεδομένου ότι όλα τα $m(\mu+i\alpha)$ $(i\geq 1,\ \alpha\succ 0)$ είναι γνωστά, δηλαδή, δεδομένου ότι όλα τα $m(\nu)$, $\mu\succ\nu\succ\lambda$, είναι γνωστά.

Βιβλιογραφία

[1] *N. Bourbaki*, *Lie Groups and Lie Algebras*, *vol.* 1−3, 1989 (*Springer−Verlag*).

[2] *Roger W. Carter*, *Simple Groups and Simple Lie Algebras*, *J. London Math. Soc.* 40, 193 − 240 (1965).

[3] *William Fulton and Joe Harris*, *Representation Theory*: *A First Course*, 1991 (*volume* 129 *of Graduate Texts in Mathematics*, *Springer−Verlang*).

[4] *Brian C. Hall*, *Lie Groups*, *Lie Algebras and Representations*: *An Elementary Introduction*, 2004 (*volume* 222 *of Graduate texts in Mathematics*, *Springer − Verlang*), *Corrected second printing*.

[5] *James E. Humphreys*, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 1972 (*Third Printing revised*, *Springer − Verlang*).

[6] *James E. Humphreys*, *Modular Representations of Classical Lie Algebras and Semisimple Groups*, *Journal of Algebra* 19, 51 − 79 (1971).

[7] *N. Jacobson*, *Lie Algebras*, 1979 (*Interscience New York*), *Republication of the* 1962 *original*.

[8] *B. Kostant*, *A formula for the multiplicity of a weight*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93, 53 − 73 (1959).

[9] *Hauspeter Kraft and Claudio Procesi*, *A Primer on Classical Invariant Theory*, 1996.

[10] *J. S. Milne*, *Lie Algebras*, *Algebraic Groups*, *Lie Groups*, 2013 (*www.jmilne.org/math/CourseNotes/LAG.pdf.*).

[11] *Jean−Pierre Serre*, *Lie Algebras and Lie Groups*, 1992 (1964 *Lectures Given at Harvard University*).

[12] Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανου-

ήλ, Μιχάλης Π. Μαλιάκας, Αντώνιος Δ. Μελάς, Ολυμπία Π. Ταλλέλη, Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος II, 2009 (Εκδόσεις Σοφία).

[13] Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανουήλ, Μιχάλης Π. Μαλιάκας, Αντώνιος Δ. Μελάς, Ολυμπία Π. Ταλλέλη, Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα, 2012 (Εκδόσεις Σοφία), Γ Έκδοση.