ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών στην Εκπαίδευση

Στοιχεία Στατιστικής και παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών

ΚΑΠΠΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ

ΒΟΥΔΟΥΡΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Ιστορία και Φιλοσοφία Μαθηματικών στην Εκπαίδευση

ΑΘΗΝΑ

Ιούνιος 2018

ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών στην Εκπαίδευση

Στοιχεία Στατιστικής και παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών

ΚΑΠΠΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ

ΒΟΥΔΟΥΡΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Ιστορία και Φιλοσοφία Μαθηματικών στην Εκπαίδευση

ΑΘΗΝΑ

Ιούνιος 2018

Στους γονείς μου,
Σπύρο, Ελένη και τον
αδερφό μου Ανδρέα

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και επιβλέπουσα κυρία Βουδούρη Αγγελική για την πολύτιμη βοήθειά της, την καθοδήγηση αλλά και την κατανόηση που έδειξε σε όλο το διάστημα εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ θερμά και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Μπαραλή Γεώργιο και κυρία Μπούφη Ανδρονίκη. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη και συμπαράσταση που μου προσέφερε απλόχερα.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τα βασικά στοιχεία του κλάδου της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων. Ιδιαιτέρως, εξετάζουμε τα βασικά μέτρα θέσης και διασποράς. Επίσης, παρατίθενται οι βασικότερες κατανομές για τη μελέτη αντιπροσωπευτικών δειγμάτων. Παρουσιάζονται τα βασικά αποτελέσματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές ηλικίας 17-18 ετών. Ιδιαιτέρως, εξετάζονται οι βασικότεροι παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών.

Στο πρώτο κεφάλαιο έχουμε μια εισαγωγή στα Στοιχεία Στατιστικής. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται μέτρα κινδύνου και βασικές κατανομές. Δίνονται τύποι, βασικοί ορισμοί και παρατηρήσεις που κρίνονται απαραίτητα για τα επόμενα κεφάλαια. Το τρίτο κεφάλαιο ξεκινά με το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές (βασισμένο σε θέματα εξετάσεων) και στη συνέχεια γίνεται ανάλυση των αποτελεσμάτων. Το τελευταίο κεφάλαιο αναδεικνύει τις αιτίες (θετικές και αρνητικές) επίδοσης των μαθητών στα Μαθηματικά γενικότερα και στη Στατιστική ειδικότερα.

Abstract

This diploma thesis deals with the basic of the Statistics data and Probabilities. In particular, we are looking at the key positioning and dispersal measures. Also, the most basic distributions are presented for the study of representative samples. The main results of the survey were presented to students aged 17-18. In particular, the main factors influencing student performance are examined.

In the first chapter we have an introduction to Statistics. The second chapter presents risk measures and basic distributions. Here are the types, basic definitions and remarks that are deemed necessary for the next chapters. The third chapter starts with the questionnaire given to students (based on exam questions) and then analyzes the results. The final chapter highlights the causes (positive and negative) of student performance in Mathematics in general and in Statistics in particular.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικά στοιχεία Στατιστικής

1.1 Εισαγωγή

Ο όρος *στατιστική* είναι αρχαία ελληνική λέξη που ετυμολογείται από το αρχαίο ρήμα *ίστημι* και του εξ αυτού παραγώγου ρήματος *στατίζω* που σημαίνει τοποθετώ, ταξινομώ, συμπεραίνω. Παράγωγο δε και ο στατήρας. Τον όρο στατιστική αναφέρει ο Σωκράτης (Ξενοφώντας "Απομνημονεύματα") καθώς και ο Αριστοτέλης στο έργο του "Πολιτεία" απ΄ όπου και εισήλθε στη λατινική γλώσσα στη φράση *statisticum collegium* (διάλεξη για υποθέσεις της πολιτείας), από την οποία προήρθε με τη σειρά της η Ιταλική λέξη *statista*, που σημαίνει πολιτικός, και η Γερμανική λέξη *Statistik*, η οποία αρχικά αναφερόταν στην ανάλυση των δεδομένων για την πολιτεία. Τη σύγχρονη γενική έννοια της συλλογής και ταξινόμησης δεδομένων φέρεται να έλαβε στις αρχές του δεκάτου ένατου αιώνα (βλέπε λεξικό οικονομοτεχνικών όρων, 1965).

Η Στατιστική είναι μία μεθοδική μαθηματική, παλαιότερα τεχνική και σήμερα επιστήμη που επιχειρεί να εξαγάγει έγκυρη γνώση χρησιμοποιώντας εμπειρικά δεδομένα παρατήρησης, ή πειράματος. Κύριο αντικείμενο έρευνας και μελέτης της Στατιστικής είναι η συλλογή, ταξινόμηση, επεξεργασία, παρουσίαση, ανάλυση και ερμηνεία διαφόρων δεδομένων με απώτερο στόχο την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για λήψη ορθών αποφάσεων. Πρόκειται για σημαντική επιστήμη της οποίας οι εφαρμογές έχουν ευρύτατο πεδίο στη διοικητική, τις επιχειρήσεις, καθώς και στις θετικές και συμπεριφορικές ή Κοινωνικές επιστήμες.

Η Στατιστική αποτελεί σήμερα κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών, οι δε ασχολούμενοι στο στατιστικό πεδίο έρευνας και ανάλυσης καλούνται γενικά στατιστικοί ή στατιστικολόγοι.

Γενικά ο όρος Στατιστική φέρεται με διττή σημασία, αφενός υποδηλώνοντας μαθηματικές μεθόδους χειρισμού δεδομένων που λήφθηκαν με απαρίθμηση ή μέτρηση και αφετέρου αυτά τα ίδια τα δεδομένα που έχουν υποστεί αυτούς τους χειρισμούς. Σύμφωνα με τον Α. Αλεξόπουλο εξετάζοντας τον ορισμό όπως αυτός καθορίστηκε στη δεκαετία του 1950 "Στατιστική είναι σύνολο μεθόδων που καθοδηγούν στη λήψη ορθών αποφάσεων σε περιπτώσεις αβεβαιότητας" τονίζει την εννοιολογική διάκριση του συνόλου των στοιχείων ενός φαινομένου και το σύνολο των μεθόδων που εξετάζουν αυτά προς τον κοινό σκοπό.
Σύμφωνα με το Λεξικό Οικονομικοτεχνικών Όρων του Ελληνικού Κέντρου Παραγωγικότητος "Στατιστική είναι α) τα αριθμητικά δεδομένα που αναφέρονται σε σύνολο ατόμων, (έμψυχων, άψυχων, φαινόμενα κ,λπ.) και β) επιστήμη συλλογής, ανάλυσης και ερμηνείας τούτων των δεδομένων" (βλέπε Αδαμόπουλο Α., Δαμιανού Χ., Σβερκός Α., 1999).

Η Στατιστική έρευνα βασίζεται στη χρήση της στατιστικής θεωρίας, ενός κλάδου των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Στη στατιστική, η τυχαιότητα και η απροσδιοριστία ορίζονται στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων. Η πρακτική της στατιστικής περιλαμβάνει την σχεδίαση, συλλογή και ερμηνεία δεδομένων που προκύπτουν από αβέβαιες παρατηρήσεις. Επειδή η στατιστική αποσκοπεί στην εξαγωγή των «καλύτερων» πληροφοριών από τα διαθέσιμα δεδομένα, κατατάσσεται από μερικούς ως κλάδος της θεωρίας των αποφάσεων.

1.2 Ιστορική εξέλιξη του κλάδου της Στατιστικής

Βασιζόμενοι στα στοιχεία που μας παρέχει η Ελληνική Στατιστική Αρχή η επιστήμη της Στατιστικής εξελίχθηκε κατά τον ακόλουθο τρόπο

1828-1859

1828: διενεργείται η 1η Απογραφή Πληθυσμού.

1836: δημιουργείται Ειδικό Γραφείο Οικονομικών στο Υπουργείο Εσωτερικών, το οποίο οργανώνει Απογραφές με βάση διοικητικές πηγές, εργασία που επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο μέχρι το 1845 και σε αραιότερα χρονικά διαστήματα αργότερα (1848, 1853,1856).

1860-1909

1860: το Γραφείο Οικονομικών χωρίζεται σε τέσσερα (4) Τμήματα, ένα από τα οποία ονομάζεται Τμήμα Στατιστικής. Είναι η πρώτη φόρα που συνιστάται μέσα στη δημόσια διοίκηση μια Ειδική Υπηρεσία Στατιστικής.

1861: διενεργούνται η Απογραφή Πληθυσμού και η Απογραφή Γεωργίας.

1910-1924

Το 1910 αρχίζει ο εκσυγχρονισμός της δημόσιας διοίκησης και, κατά συνέπεια, και της Ειδικής Υπηρεσίας Στατιστικής. Δημιουργείται Τμήμα Στατιστικής στο τότε συσταθέν Υπουργείο Εθνικής Οικονομίας, που αργότερα αναβαθμίζεται σε Κεντρική Διεύθυνση Στατιστικής και έχει την ευθύνη της συλλογής, επεξεργασίας και δημοσίευσης όλων των εθνικών στατιστικών που αναφέρονται στον πληθυσμό, τη φυσική κίνηση πληθυσμού και τη μετανάστευση, στην παραγωγή γεωργίας, βιομηχανίας, βιοτεχνίας και συναφών κλάδων, καθώς και στις μεταφορές, το εσωτερικό / εξωτερικό εμπόριο, τις επικοινωνίες, τη δικαιοσύνη, τις τιμές κλπ. Συγκροτείται Συμβούλιο

Στατιστικής από Καθηγητές Πανεπιστημίου και εκπροσώπους των Εμπορικών και Βιομηχανικών Επιμελητηρίων. Κυριότερες στατιστικές εργασίες της περιόδου αυτής είναι: η Απογραφή Γεωργίας και οι Έρευνες Τιμών των βασικών καταναλωτικών αγαθών (1911), οι Απογραφές Πληθυσμού στα νέα εδάφη που προσαρτήθηκαν (1913), η Βιομηχανική Απογραφή και η Απογραφή Πληθυσμού (1920), καθώς και η Απογραφή Προσφύγων από τη Μικρά Ασία (1923).

1925-1955

1925: γίνεται η σύσταση της Γενικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδος μέσα στο Υπουργείο Εθνικής Οικονομίας, που συγκεντρώνει όλες τις κρατικές στατιστικές.

1929: εκδίδεται για πρώτη φορά το Μηνιαίο Στατιστικό Δελτίο. 1930: εκδίδεται η Στατιστική Επετηρίδα της Ελλάδος. Κυριότερες στατιστικές εργασίες της περιόδου αυτής είναι: η Απογραφή Πληθυσμού, η Έρευνα στις Βιβλιοθήκες και τον Τύπο και η Έρευνα Οικογενειακών Προϋπολογισμών Βιομηχανικών Εργατών (1929), η Απογραφή Βιομηχανικών Επιχειρήσεων (1930), η Απογραφή Πληθυσμού και Γεωργίας (1940), η Απογραφή Γεωργίας (1950) και η Απογραφή Πληθυσμού (1951).

1956-2009

Με το Ν.Δ. 3627/1956 οργανώνεται η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος. Με το Π.Δ. 224/1986 συνιστάται η Γενική Γραμματεία Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδος (Γ.Γ. ΕΣΥΕ), υπαγόμενη στο Υπουργείο Εθνικής Οικονομίας. Με το Ν. 2392/1996 ρυθμίζονται θέματα πρόσβασης της Γ.Γ. ΕΣΥΕ σε διοικητικές πηγές και διοικητικά αρχεία και θέματα στατιστικού απορρήτου.

Τίθεται σε ισχύ ο νέος στατιστικός Νόμος 3832/2010. Με το Νόμο αυτόν, όπως τροποποιήθηκε από τους Νόμους 3842/2010, 3899/2010, 3943/2011, 3965/2011, 4047/2012 και 4072/2012:

2010 μέχρι σήμερα

- Συνιστάται η Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ) ως ανεξάρτητη Αρχή, υπαγόμενη στον έλεγχο της Βουλής των Ελλήνων.

- Δημιουργείται το Ελληνικό Στατιστικό Σύστημα (ΕΛΣΣ) και συνιστάται το Συμβούλιο του Ελληνικού Στατιστικού Συστήματος (ΣΥΕΛΣΣ).

- Συνιστάται Συμβουλευτική Επιτροπή Ορθής Πρακτικής, της οποίας έργο είναι η κατάρτιση ετήσιας έκθεσης σχετικά με την εφαρμογή των αρχών 1-6 (θεσμικό πλαίσιο) του Κώδικα Ορθής Πρακτικής για τις Ευρωπαϊκές Στατιστικές στο ΕΛΣΣ.

- Καθορίζονται οι αρχές που πρέπει να διέπουν τις εργασίες της ΕΛΣΤΑΤ και των λοιπών φορέων του ΕΛΣΣ για την ανάπτυξη, παραγωγή και διάδοση των στατιστικών, σύμφωνα με τις διατάξεις του Κανονισμού (ΕΚ) αριθ. 223/2009 του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου, και όπως αυτές αναπτύσσονται στον Κώδικα Ορθής Πρακτικής για τις Ευρωπαϊκές Στατιστικές, που προβλέπεται στο άρθρο 11 του ιδίου Κανονισμού, όπως κάθε φορά ισχύουν.

- Ανατίθεται στην ΕΛΣΤΑΤ ο συντονισμός των δραστηριοτήτων των λοιπών φορέων του ΕΛΣΣ, οι οποίες αφορούν στην ανάπτυξη, παραγωγή και διάδοση των επίσημων στατιστικών της Χώρας καθώς και η πιστοποίηση ως «επίσημων», στατιστικών που έχουν καταρτιστεί από άλλους φορείς του ΕΛΣΣ.

1.3 Βασικά στοιχεία Στατιστικής

Ορισμός 1.1 (ορισμός Στατιστικής) Στατιστική (Statistics) είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

i. το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων

ii. τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους

iii. την εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων

Η Στατιστική επιτυγχάνει τη συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ανάλυση των στατιστικών στοιχείων (αριθμητικών δεδομένων) με την εφαρμογή κατάλληλων για κάθε περίπτωση στατιστικών μεθόδων, οι οποίες και συνιστούν το περιεχόμενό της.

Ορισμός 1.2 Κάθε σύνολο αντικειμένων ή ατόμων που έχουν κάποιο κοινό μετρήσιμο

χαρακτηριστικό αποτελεί έναν **πληθυσμό**.

Ορισμός 1.3 Κάθε υποσύνολο του πληθυσμού αποτελεί ένα **δείγμα** από τον πληθυσμό.

Ορισμός 1.4 Ένα τυχαίο δείγμα (random sample) είναι το δείγμα του πληθυσμού, όπου τα άτομα διαλέγονται το ένα μετά το άλλο, με κύριο χαρακτηριστικό, ότι τα υπόλοιπα άτομα του πληθυσμού κάθε φορά, έχουν τις ίδιες πιθανότητες να περιληφθούν στο τυχαίο δείγμα.

Σημαντική σημείωση αποτελεί το γεγονός ότι οι όροι πληθυσμός και δείγμα μπορεί να αναφέρονται είτε στα άτομα, είτε στις μετρήσεις του κοινού χαρακτηριστικού τους. Τότε υπάρχει μια κατανομή των μετρήσεων του δείγματος, η οποία συνήθως μελετάται και μια κατανομή των μετρήσεων όλου του πληθυσμού που συνήθως υπάρχει αλλά είναι δύσκολο να προσδιοριστεί.

Ορισμός 1.5 Τα χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των στατιστικών μονάδων ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό ονομάζονται **μεταβλητές**.

Οι μεταβλητές διαχωρίζονται σε:

Α. ποιοτικές (που δεν επιδέχονται αριθμητική μέτρηση)

Β. ποσοτικές (που δύναται να επιδέχονται αριθμητική μέτρηση)

Οι ποσοτικές μεταβλητές με τη σειρά τους διακρίνονται σε δυο ακόμα κατηγορίες:

1. Ασυνεχείς ή Διακριτές είναι εκείνες που παίρνουν ακέραιες τιμές (αριθμός μαθητών αίθουσας, αριθμός υπαλλήλων ενός λογιστηρίου, αριθμός παιδιών μιας οικογένειας, αριθμός οικογενειών, αριθμός εφημερίδων).

2. Συνεχείς είναι εκείνες που μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (εισόδημα, βάρος, ύψος).

1.4 Τρόποι παρουσίασης στατιστικών δεδομένων

Τα στατιστικά δεδομένα πρέπει να παρουσιάζονται με τρόπο απλό και σαφή, έτσι ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους από τον κάθε ενδιαφερόμενο. Η παρουσίαση μπορεί να γίνει με μορφή

Α. Πινάκων

Β. Γραφικών Παραστάσεων

Πίνακες

Σε κάθε πίνακα, που έχει συνταχθεί σωστά, εκτός από το κύριο σώμα, που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στήλες τα στατιστικά δεδομένα, παρατηρούνται και τα εξής ειδικότερα στοιχεία:

Α. τον τίτλο, που γράφεται στο πάνω μέρος και πρέπει να δηλώνει με σαφήνεια και με περιληπτικό τρόπο το περιεχόμενο του πίνακα

Β. τις επικεφαλίδες των στηλών (και γραμμών), που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τη μονάδα μετρήσεως των δεδομένων

Γ. την πηγή που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των δεδομένων

Δ. τις υποσημειώσεις που γράφονται στο κάτω μέρος του πίνακα και πριν από την πηγή, αν θεωρηθεί απαραίτητο να δοθούν κάποιες επεξηγήσεις.

Τύποι πινάκων

- ✓ Οι πίνακες μπορεί να είναι απλής εισόδου ή διπλής εισόδου.
- ✓ Οι πίνακες απλής εισόδου χρησιμοποιούνται όταν οι μονάδες του εξεταζόμενου πληθυσμού ερευνώνται ως προς ένα ποιοτικό ή ποσοτικό χαρακτηριστικό.
- ✓ Ενώ οι πίνακες διπλής εισόδου όταν οι μονάδες του εξεταζόμενου πληθυσμού μελετώνται ταυτοχρόνως ως προς δυο ποιοτικά ή ποσοτικά χαρακτηριστικά (για εκτενέστερη ανάλυση βλέπε Κικίλιας Π. κα, 2001).

Πίνακες κατανομής συχνοτήτων

Οι πίνακες αυτοί συντάσσονται με κατάλληλη κατάταξη και συστηματική ομαδοποίηση των τιμών της μεταβλητής που εξετάζεται. Ο τρόπος κατασκευής τους εξαρτάται από το είδος των χαρακτηριστικών.

Αθροιστικές Κατανομές Συχνοτήτων

Πολλές φορές χρειάζεται να γνωρίζουμε πόσες ή τι ποσοστό από τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής περιλαμβάνεται μέχρι ενός ορισμένου διαστήματος ή το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες από μια ορισμένη τιμή της μεταβλητής.

Οι αθροιστικές συχνότητες F i δίνουν την κατάλληλη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Δηλαδή, αν f 1, f2, …, fk οι συχνότητες της μεταβλητής X, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής xi είναι Fi = f1+ f2+ …+ fi.

Οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες εκφράζονται με τον ίδιο τρόπο

που εκφράζονται οι σχετικές συχνότητες. Τα ίδια ισχύουν και στα ομαδοποιημένα σε τάξεις χαρακτηριστικά. Η αθροιστική συχνότητα μιας τάξης μας δείχνει πόσες (ή ποιο ποσοστό

αν αναφερόμαστε σε σχετική) παρατηρήσεις είναι μικρότερες από το άνω όριο της τάξης αυτής.

Συνήθως ένας πίνακας περιέχει τις ακόλουθες στήλες:

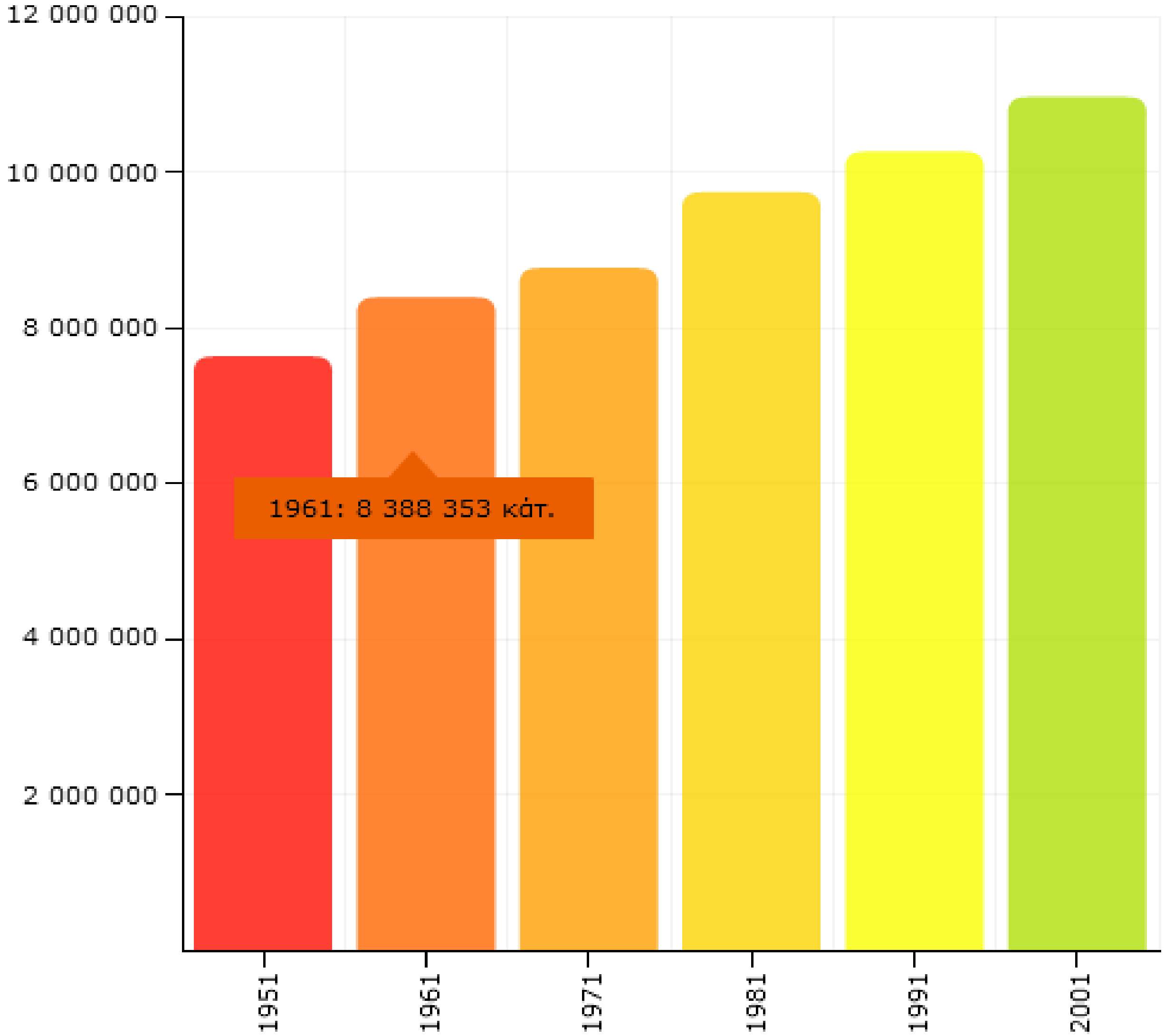
Τάξεις-Κεντρικές τιμές – Συχνότητες – Σχετικές Συχνότητες – Αθροιστικές Σχετικές Αθροιστικές -Γραφικές Παραστάσεις

Όπως και στους πίνακες έτσι και εδώ θα πρέπει μια γραφική παράσταση να περιέχει τα ακόλουθα στοιχεία: τίτλο, κλίμακα μεγεθών, υπόμνημα, πηγή (βλέπε Βλάμος Π. κα, 2008).

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις βασικότερες γραφικές παραστάσεις:

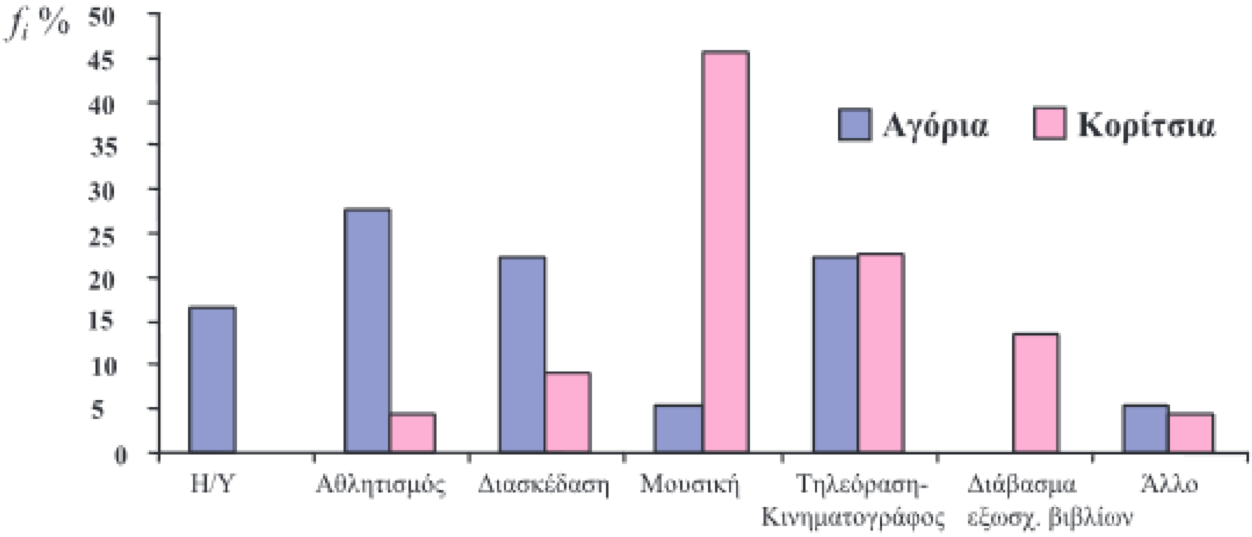
1. **Διαγράμματα ή Ραβδογράμματα**

Χρησιμοποιούνται κυρίως για τη γραφική απεικόνιση ποιοτικών δεδομένων .



Πίνακας 1. Εξέλιξη πληθυσμού Ελλάδας

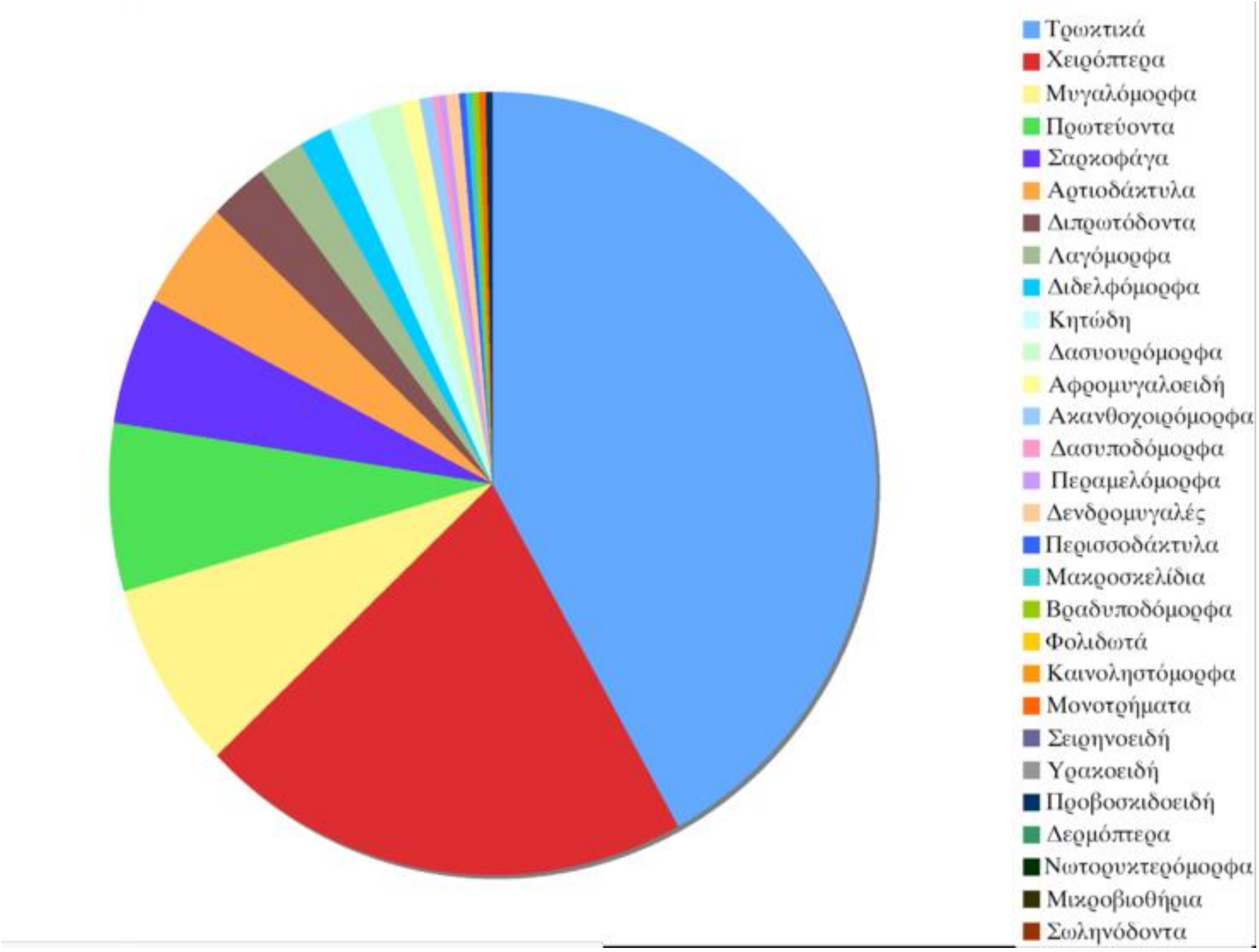
2. Σύνθετα διαγράμματα



Πίνακας 2. Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για την απασχόληση των μαθητών ανάλογα με το φύλο (Σχολικό βιβλίο γ΄ Λυκείου - Στοιχεία Στατιστικής).

3. **Κυκλικά Διαγράμματα.**

Αυτά είναι ένας κύκλος χωρισμένους σε κυκλικούς τομείς και κάθε κυκλικός τομέας αντιστοιχεί σ' ένα τμήμα του απεικονιζόμενου συνόλου (σε μια τιμή της μεταβλητής). Επειδή τα απόλυτα μεγέθη των τμημάτων μετατρέπονται σε ποσοστά επί τοις 100 του συνόλου (η γωνία του κυκλικού τομέα είναι ανάλογη με την αντίστοιχη σχετική συχνότητα της τιμής της μεταβλητής), γι' αυτό τα κυκλικά διαγράμματα ενδείκνυνται όταν ζητείται η παρουσίαση της ποσοστιαίας σύνθεσης του εξεταζόμενου συνόλου ή η σύγκριση των ποσοστιαίων συνθέσεων δυο ή περισσοτέρων συνόλων. Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο παράδειγμα.



Πίνακας 3. Κατανομή των ζωντανών και προσφάτως εξαφανισμένων ειδών θηλαστικών ανά τάξη.

4. **Ιστογράμματα**

Χρησιμοποιούνται για τη γραφική απεικόνιση ποσοτικών κατανομών, αποτελούνται από διαδοχικά ορθογώνια, που έχουν βάσεις ίσες με τα διαστήματα των τάξεων τοποθετημένες πάνω στον οριζόντιο άξονα. Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης τάξεως. Επίσης, αν ενώσουμε τα μέσα των επάνω βάσεων των ορθογωνίων ενός ιστογράμματος, σχηματίζεται τεθλασμένη γραμμή, που λέγεται **πολύγωνο συχνοτήτων**. Επίσης, θα μπορούσαμε, αφού χωριστεί ο οριζόντιος άξονας σε διαστήματα, που αντιστοιχούν στις τάξεις ίσου πλάτους, να ορίσουμε πάνω από το μέσο κάθε διαστήματος και σε ύψος ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα κάθε τάξεως. Στη συνέχεια, ενώνοντας αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται το πολύγωνο συχνοτήτων. Αν στον κάθετο άξονα αντί για τις απλές συχνότητες έχουμε τις σχετικές, τότε έχουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αντίστοιχα των σχετικών συχνοτήτων.

Στην περίπτωση, που έχουμε τις αθροιστικές συχνότητες στον κάθετο άξονα, τότε έχουμε το ιστόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων. Το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων κατασκευάζεται όπως και το πολύγωνο συχνοτήτων, μόνο που συνδέουμε τις πάνω δεξιά κορυφές των ορθογωνίων μεταξύ τους, αντί για τα μέσα των πάνω βάσεων.

Πίνακας 4. Ιστόγραμμα και Πολύγωνο Συχνοτήτων.

5. Χρονολογικά διαγράμματα ή Χρονοδιαγράμματα

Αυτά χρησιμοποιούνται για τη γραφικά απεικόνιση της διαχρονικής εξελίξεως ενός μεγέθους οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου είδους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται ως άξονας μετρήσεως του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μετρήσεως της εξεταζόμενης μεταβλητής.

6. Σημειόγραμμα

Όταν έχουμε ένα μικρό μόνο αριθμό παρατηρήσεων, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί εύκολα με ένα διάγραμμα σημείων. Το διάγραμμα αυτό είναι απλά η τοποθέτηση των διαθέσιμων τιμών πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Εάν υπάρχουν δυο ή περισσότερες τιμές οι οποίες συμπίπτουν, τοποθετούνται η μια πάνω στην άλλη.

1.5 Μέτρα Θέσης και Διασποράς

Εκτός από τις κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, είναι απαραίτητα κάποια αριθμητικά μεγέθη, που είναι γνωστά ως αριθμητικά περιγραφικά μέτρα. Αυτά τα μέτρα χρησιμοποιούνται επίσης για τη θεωρία της στατιστικής συμπερασματολογίας.

Διακρίνονται σε δυο κατηγορίες:

- τα μέτρα θέσεως που καθορίζουν τη θέση των τιμών στο χώρο.
- τα μέτρα διασποράς (μεταβλητότητας) που καθορίζουν πως μεταβάλλονται οι τιμές της μεταβλητής.

Μέτρα θέσης για μη ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

Μέσος αριθμητικός ή Μέση τιμή ορίζεται ως το πηλίκο των τιμών της μεταβλητής δια το πλήθος των τιμών της.

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Διάμεσος **(Μ)** είναι η τιμή εκείνη της μεταβλητής που χωρίζει το σύνολο των τιμών σε δυο ίσα μέρη, ώστε ο αριθμός των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από το Μ, να είναι ίσος με τον αριθμό αυτών που είναι μεγαλύτερες από το Μ. Είναι το σημείο της κατανομής που αφήνει 50% των παρατηρήσεων προς τα πάνω και 50% προς τα κάτω.

Για να βρούμε τη διάμεσο, οι παρατηρήσεις κατατάσσονται κατά τη φυσική τους διάταξη. Στην περίπτωση που οι τιμές της μεταβλητής δεν περιέχονται σε πίνακα συχνοτήτων, η διάμεσος δίνεται από τον όρο (N+1)/2, όπου N το πλήθος των παρατηρήσεων.

Εάν το N είναι **περιττός** αριθμός η διάμεσος είναι η παρατήρηση που βρίσκεται στη (N+1)/2 θέση, γιατί αυτή η παρατήρηση αφήνει (N-1)/2 παρατηρήσεις προς τα κάτω και (N-1)/2 παρατηρήσεις προς τα πάνω. Ενώ εάν το N είναι **άρτιος**, τότε στη μέση των τιμών υπάρχουν δυο τιμές, οπότε η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δυο αυτών μεσαίων τιμών.

Μέτρα θέσης για ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

Ο μέσος υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\mu = \frac{x_1 f_1 + \ldots + x_k f_k}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

όπου k ο αριθμός των τάξεων, xi η κεντρική τιμή της i-τάξεως και fi η αντίστοιχη συχνότητα.

Για τον υπολογισμό της διαμέσου, υπολογίζουμε τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων. Κατόπιν, εντοπίζουμε μεταξύ ποιών αθροιστικών συχνοτήτων βρίσκεται το N/2 και προσδιορίζουμε την τάξη της μεγαλύτερης αθροιστικής συχνότητας. Η διάμεσος βρίσκεται εντός των ορίων αυτής της τάξης, δίνεται από τον τύπο:

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right)$$

όπου δ το πλάτος της τάξης.

Παρόμοια, υπολογίζονται και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια.

Μέτρα μεταβλητότητας για μη ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

Το **εύρος** είναι το πιο απλό και δείχνει το πλάτος των τιμών της μεταβλητής. Υπολογίζεται εύκολα, αφού τοποθετηθούν οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά, δηλαδή αφαιρούμε από τη μέγιστη τιμή την ελάχιστη.

Το μειονέκτημα του εύρους είναι ότι εξαρτάται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. Παρόλα αυτά, χρησιμοποιείται και από τους οικονομολόγους σε αρκετές περιπτώσεις (στο χρηματιστήριο για τις τιμές των μετοχών, στη μελέτη του εύρους μεταξύ χαμηλών και υψηλών τιμών κ.ο.κ).

Ένα άλλο μέτρο διασποράς είναι η **μέση απόκλιση** που ορίζεται ως ο μέσος αριθμητικός των απολύτων διαφορών των τιμών της μεταβλητής από το μ. Δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\sum |x_i - \mu|}{N}$$

όπου N ο αριθμός των παρατηρήσεων.

Όσο πιο μικρό είναι το αποτέλεσμα, τόσο πιο κοντά στο μ βρίσκονται οι παρατηρήσεις, που σημαίνει ότι τόσο αντιπροσωπευτικός και αξιόπιστος είναι ο μ. Λόγω των απολύτων τιμών, δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός του, γι’ αυτό χρησιμοποιούνται άλλα μέτρα διασποράς.

Τα πλέον συχνά χρησιμοποιούμενα μέτρα διασποράς είναι η διακύμανση ή διασπορά και η τυπική απόκλιση. Η διακύμανση είναι ο μέσος αριθμητικός των τετραγώνων των διαφορών των τιμών μιας μεταβλητής από το μέσο αριθμητικό της. Συμβολίζεται με σ^2 όταν αναφερόμαστε σε πληθυσμό και με s^2 όταν αναφερόμαστε σε δείγμα.

Δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}]$$

Η δειγματική διασπορά διαιρείται με n-1αντί με n, όπως ο αντίστοιχος τύπος της διασποράς του πληθυσμού. Αυτό γιατί η δειγματική διασπορά χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διασποράς

του πληθυσμού και με τον τρόπο που ορίζεται έχει την ιδιότητα της αμεροληψίας. Επειδή η διακύμανση εκφράζεται μέσω του τετραγώνου της μεταβλητής, γι' αυτό παίρνουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης που ονομάζεται τυπική απόκλιση και η οποία εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τη μονάδα μέτρησης της μεταβλητής.

Όσο μικρότερες είναι οι τιμές της διασποράς και της τυπικής απόκλισης, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από το μ βρίσκονται οι τιμές της μεταβλητής. Επίσης, είναι φανερό ότι οι τιμές της διασποράς κυμαίνονται μεταξύ 0 και άπειρο.

Ένα άλλο μέτρο μεταβλητότητας είναι ο **συντελεστής μεταβλητότητας**. Ορίζεται ως εξής:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}100$$

$$CV = \frac{s}{\overline{x}}100$$

Είναι καθαρός αριθμός, απαλλαγμένος από μονάδες μέτρησης της μεταβλητής. Εκφράζει το ‘άπλωμα’ των τιμών σε σχέση με το μέσο. Επίσης, χρησιμοποιείται για συγκρίσεις ομάδων μεταξύ τους (είτε οι ομάδες εκφράζονται με ίδιες μονάδες μέτρησης είτε όχι). Επίσης, χρησιμοποιείται για την εξέταση της ομοιογένειας μέσα στην ίδια ομάδα. Επίσης, όταν ο CV δεν ξεπερνά το 10%, λέμε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μέτρα μεταβλητότητας για ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

Για τη διασπορά και την τυπική απόκλιση που κυρίως μας ενδιαφέρει, ισχύουν:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \mu^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum f_i (x - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1} [\sum f_i x_i^2 - \frac{(\sum f_i x_i)^2}{n}]$$

όπου xi η κεντρική τιμή της i τάξης και f i η αντίστοιχη συχνότητα. Προφανώς, από τα υπόλοιπα μέτρα μεταβλητότητας, υπολογίζονται με βάση της γενικής μεθοδολογίας των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων.

Ιδιότητες μέσου και διασποράς

Ιδιότητες του μέσου:

1. Αν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) μια σταθερή ποσότητα, τότε ο μ αυξάνεται (ή μειώνεται) κατά την ποσότητα αυτή.

2. Αν όλες οι τιμές της μεταβλητής είναι ίσες με μια σταθερά, τότε ο μ ισούται με την σταθερά αυτή.

3. Αν όλες οι τιμές της μεταβλητής πολλαπλασιασθούν επί μια σταθερά, τότε ο μ πολλαπλασιάζεται με αυτή την σταθερά.

4. Αν από όλες τις τιμές της μεταβλητής αφαιρέσουμε το μ, τότε το άθροισμα των διαφορών x-μ, ισούται με μηδέν.

5. Αν ένας πληθυσμός χωρισθεί σε κ υποπληθυσμούς, που ο καθένας έχει Ν1, …, Νκ μονάδες και οι αντίστοιχοι μέσοι είναι μ1, …, μκ, τότε ο μέσος όλου του πληθυσμού είναι:

$$\mu = \frac{\mathrm{N}_1\mu_1 + \ldots + \mathrm{N}_\kappa\mu_\kappa}{\mathrm{N}_1 + \ldots + \mathrm{N}_\kappa}$$

Ιδιότητες της διασποράς:

1. Αν έχουμε ότι όλες της μεταβλητής ίσες με μια σταθερά, τότε η διασπορά ισούται με μηδέν.

2. Αν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) μια σταθερή ποσότητα, τότε η διασπορά και η διακύμανση παραμένουν αμετάβλητες.

3. Αν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής πολλαπλασιασθούν (ή διαιρεθούν) με μια σταθερή ποσότητα, τότε η διασπορά πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με το τετράγωνο της ποσότητας αυτής, ενώ η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται (ή διαιρείται) με την ποσότητα αυτή.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα Κινδύνου και Βασικές Κατανομές

2.1 Εισαγωγή

Το οικονομικό περιβάλλον αποτελεί ένα δυναμικό περιβάλλον στο οποίο οι μεταβολές είναι ταχύτατες, με επιπτώσεις ραγδαίες και πολυδιάστατες σε επίπεδο κυβερνήσεων, οργανισμών, επιχειρήσεων και ιδιωτών. Λόγω, της μεταβλητότητας αυτής, η έννοια του κινδύνου και της διαχείρισής του κάνουν αισθητή την παρουσία τους όλο και περισσότερο σε σχέση με το παρελθόν, αφού η ταχύτητα των εξελίξεων οδηγεί σε άμεσες συνέπειες ανεξαρτήτως γεωγραφικών ή φυσικών συνόρων. Η χρεοκοπία κολοσσιαίων επιχειρηματικών οργανισμών σε διάφορους κλάδους της οικονομίας, όπως της WorldCom (κλάδος τηλεπικοινωνιών), Abengoa (κλάδος ενέργειας), Barings (χρηματοπιστωτικός κλάδος), Lehman Brothers (τραπεζικός κλάδος), SwissAir (κλάδος αερομεταφορών) είναι μερικά παραδείγματα που για λόγους είτε κοινωνικοπολιτικούς (τρομοκρατικό χτύπημα της 11ης Σεπτεμβρίου) είτε για λόγους κακής διαχείρισης και έλλειψης ολοκληρωμένων εποπτικών μηχανισμών είχαν μεγάλου εύρους αρνητικές συνέπειες όχι μόνο στην περιοχή που εμφανίστηκαν, αλλά παγκόσμια. Με γνώμονα τα παραπάνω, στο χώρο της διαχείρισης των κινδύνων γίνονται συνεχείς προσπάθειες βελτίωσης των υπαρχόντων τεχνικών και εργαλείων καθώς και έρευνες για την ανάπτυξη νέων, που με παράλληλες ενέργειες γνωστοποίησης αυτών έχουν σαν κύριο σκοπό την συγκέντρωση γνώσης γύρω από την αναγνώριση και την όσο γίνεται πιο αποτελεσματική διαχείριση των κινδύνων (για το κεφάλαιο 2 βλέπε Eales (1995), Williams et al. (1999)).

Ορισμός 2.1 (*ορισμός του Κινδύνου*) Όταν τα άτομα ερωτώνται να ορίσουν τον κίνδυνο, τα περισσότερα από αυτά εισηγούνται ότι "κίνδυνος είναι η πιθανότητα της εμφάνισης των δυσμενών συνεπειών". Είναι αρκετά συνηθισμένο να σκεφτόμαστε τον κίνδυνο από την αρνητική του διάσταση και να ορίζουμε αυτόν μόνο με την αναφορά στις δυσμενείς συνέπειες. Αυτή η τοποθέτηση, αποτελεί ωστόσο μια περιορισμένη άποψη, διότι εστιάζει την προσοχή μόνο στις δυνητικές απώλειες και απομακρύνεται από την πιθανότητα ότι μπορεί να επιτευχθούν οφέλη από την ανάληψη του κινδύνου. Επομένως, είναι σημαντικό να αποφύγουμε την περιορισμένη άποψη, καθώς οι επιχειρήσεις βασίζονται κυρίως στην προϋπόθεση ότι χρειάζεται να αναλαμβάνουν κίνδυνο για να επιτύχουν κέρδη. Έχοντας υπόψη μας τα παραπάνω, υιοθετούμε ως κίνδυνο την αβεβαιότητα των μελλοντικών αποτελεσμάτων. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα λοιπόν ότι ο κίνδυνος είναι κάτι το οποίο θα συμβεί στο μέλλον, αλλά δεν μπορεί να προβλεφθεί επ' ακριβώς σήμερα διότι υπάρχει αβεβαιότητα. Ο κίνδυνος και η αβεβαιότητα δεν θα πρέπει να λαμβάνονται ως αρνητικοί παράγοντες και αυτό αποτελεί μια σκέψη-κλειδί που πρέπει να έχουμε πάντα υπόψη μας. Οι κίνδυνοι εμφανίζονται σε πολλούς τομείς και με πολλές μορφές στην καθημερινότητα. Η στατιστική αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο, όπου το πεδίο εφαρμογής της συγκαταλέγεται σε πλήθος άλλων επιστημών. Η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων έχει γίνει πλέον επιτακτική πριν τη λήψη αποφάσεων. Συγκεκριμένα στον ασφαλιστικό κλάδο η μελέτη και η ορθή μέτρηση κινδύνου είναι απαραίτητος πρόδρομος για τη διαχείρισή του.

2.2 Κίνδυνοι και ζημιές

Υπό μια ευρεία έννοια, οι ασφαλιστικές εταιρείες αναφέρονται στην επιχείρηση μεταφοράς (ολικώς ή μερικώς) των κινδύνων και τις οικονομικές επιπτώσεις των απρόβλεπτων ατυχιών. Η κεντρική ιδέα των αναλογιστικών μαθηματικών είναι η έννοια του κινδύνου. Ο κίνδυνος μπορεί να περιγραφεί ως ένα γεγονός που μπορεί ή δεν μπορεί να λάβει χώρα (ως εκ τούτου, ένα τυχαίο γεγονός) και επιφέρει ορισμένες αρνητικές οικονομικές συνέπειες. Πάντα περιέχεται ένα στοιχείο αβεβαιότητας: είτε τη στιγμή της εμφάνισης (όπως στην ασφάλιση ζωής) ή από το ίδιο το περιστατικό ή τη φύση και τη σοβαρότητα των συνεπειών (όπως στην αυτοκινητο-βιομηχανική ασφάλιση). Τα αναλογιστικά μοντέλα ασχολούνται με ένα ασφαλιστικό κίνδυνο, από μια κλάση που αντιπροσωπεύει το τυχαίο ποσό των χρημάτων που η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να πληρώσει για να αποζημιώσει τον ασφαλιζόμενο και τους τρίτους για τις συνέπειες της εμφάνισης του ασφαλισμένου κινδύνου. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, η μοντελοποίηση των τυχαίων μεταβλητών των ασφαλιστικών κινδύνων μπορεί γενικά να θεωρηθεί ότι είναι μη αρνητική. Αυτό οδηγεί στο ακόλουθο επίσημο ορισμό:

Ορισμός 2.2 Ένας κίνδυνος *X* είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το τυχαίο χρηματικό ποσό που καταβάλλεται από την ασφαλιστική εταιρεία για να αποζημιώσει τον ασφαλιζόμενο, δικαιούχους ή και τρίτους σε εκτέλεση της ασφαλιστικής σύμβασης.

Σε αντάλλαγμα για την παροχή κάλυψης, ο ασφαλιστής θα λάβει πριμοδοτήσεις. Ο ασφαλιστής συχνά ενδιαφέρεται για το σύνολο των ταμειακών ροών που σχετίζονται με την πολιτική της εταιρείας. Η απώλεια (πάνω από ένα ορισμένο ποσόν αναφοράς περιόδου) ορίζεται ως η παρούσα αξία των πληρωμών που πρέπει να γίνουν από τον ασφαλιστή μείον τη παρούσα αξία των ασφαλίστρων που πρέπει να καταβληθούν από τον ασφαλισμένο.

Ορισμός 2.3 Λαμβάνοντας υπόψη τον κίνδυνοXπου καλύπτεται από ασφαλιστική εταιρεία σε αντάλλαγμα ενός ασφαλίστρουPπληρωμής (όπουPείναι η παρούσα αξία των ασφαλίστρων που πρέπει να καταβληθεί). Η σχετική απώλεια Lορίζεται ως

$$L = X - P. \tag{2.1}$$

Παρατήρηση 2.1 Σε πολλά αναλογιστικά εγχειρίδια, η πριμοδότηση *σ* υποτίθεται ότι είναι ένα γνωστό χρηματικό ποσό, που καθορίζεται από τους όρους της πολιτικής. Έτσι, η ασφάλιση των επιχειρήσεων αποτελείται αντικαθιστώντας τις τυχαίες συνέπειες του ασφαλισμένου κινδύνου από ένα ντετερμινιστικό ποσό πριμοδότησης.

Για ενός έτους πολιτικές με μια εφάπαξ καταβολή ασφαλίστρου (σε ζήτημα πολιτικής), η πριμοδότηση μειώνεται σε ένα σταθερό ποσό. Στην ασφάλιση ζωής, για παράδειγμα, μεσνα είναι συχνά ένα μη τετριμμένο τυχαίο διάνυσμα, ανάλογα με την εναπομένουσα διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου. Επίσης, στον τομέα της ασφάλισης αυτοκινήτων , με την εφαρμογή της αξιολογικής διαβάθμισης συστήματα (όπως οι μηχανισμοί *bonus-malus*) κάνει την πριμοδότηση που καταβάλλεται από τον αντισυμβαλλόμενο να εξαρτάται από τις αξιώσεις που έχουν αναφερθεί στο παρελθόν.

2.3 Βασικές Κατανομές

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό όλες οι σοβαρές και αξιόπιστες εταιρίες ανά τον κόσμο οφείλουν να εντοπίσουν την κατανομή ή τον συνδυασμό κατανομών που ακολουθεί ο εκάστοτε κίνδυνος που αναλαμβάνουν. Για παράδειγμα, ο ασφαλιστικός κλάδος δαπανά και επενδύει υπέρογκα ποσά ώστε να εντοπίσει την κατανομή που ακολουθούν οι ζημιές, για να μπορέσει να προσφέρει όσο το δυνατόν “δικαιότερα” και ανταγωνιστικότερα ασφάλιστρα (βλέπε Χαραλαμπίδη (2000), Δαμιανού και Κούτρας (2003)).

2.3.1 Διακριτή ομοιόμορφη κατανομή

• Εμφανίζεται στις περιπτώσεις όπου η υπό εξέταση τ.μ. Xπαίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών (π.χ. $X \in \{1,2,\dots,n\}$) και όλες οι πιθανότητες $P(X = i)$είναι ισοπίθανες. Αν Xμια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τις τιμές x=$1,2,..k$ σταθερή πιθανότητα 1/ k τότε λέμε ότι η X ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή. Η συνάρτηση πιθανότητας της Xείναι:

$$f(x) = P(X = x) = 1/k \tag{2.2}$$

όπου $x = 1,2,\dots,k$.με $k \leqslant n$.

Αν Χ ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με πιθανότητα που δίνεται από την (1.2), τότε η μέση τιμή προκύπτει από

$$E(X) = (k + 1)/2 \tag{2.3}$$

και η διασπορά είναι

$$Var(X) = (k^2 - 1)/12. \tag{2.4}$$

2.3.2 Διωνυμική κατανομή

Διωνυμικό πείραμα, είναι το πείραμα που αποτελείται από n δοκιμές, η κάθε μια από τις οποίες έχει μόνο δυο δυνατά και αντίθετα αποτελέσματα (Ε και Α) και για το οποίο ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

(i) Οι πιθανότητες των δυο αντίθετων αποτελεσμάτων παραμένουν σταθερές σε όλες τις δοκιμές του πειράματος.

(ii) Οι δοκιμές του πειράματος είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

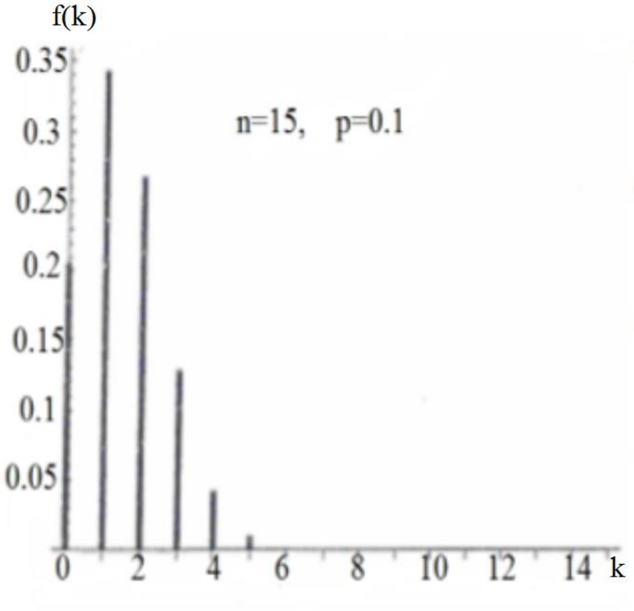
Η διωνυμική κατανομή είναι μια διακριτή συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Περιγράφει ένα τυχαίο πείραμα με δυο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία) και πιθανότητα επιτυχίας p που επαναλαμβάνεται n φορές. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών. Η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες σε n ανεξάρτητα πειράματα με πιθανότητα επιτυχίας p κάθε φορά είναι:

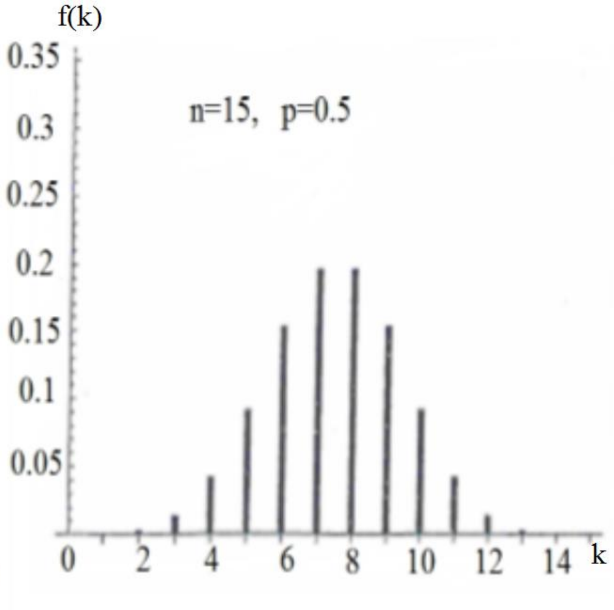
$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (2.5)$$

$0 < p < 1$ και $k = 0,1,2,\ldots,n$.

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διασπορά
$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$

Κάθε επιμέρους δοκιμή του διωνυμικού πειράματος λέγεται δοκιμή Bernoulli.





2.3.3 Κατανομή Bernoulli

Έστω Xο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p(και αποτυχίας $q = 1 - p$). Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν – ένα) τυχαίας μεταβλητής Xκαλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.Αν συμβολίσουμε με p, qτις πιθανότητες εμφάνισης των στοιχειωδών ενδεχομένων {ε}, {α} (επιτυχίας και αποτυχίας αντίστοιχα) είναι φανερό ότι θα έχουμε

$$p + q = 1{,}0 \leqslant p \leqslant 1{,}0 \leqslant q \leqslant 1.$$

Για X=1 έχουμε επιτυχία και για X=0 αποτυχία. Η κατανομή Bernoulli παίρνει τις εξής τιμές:

$$P(X = 1) = p \qquad (2.6)$$

και

$$P(X = 0) = q = 1 - p. \qquad (2.7)$$

Ισοδύναμα, η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli είναι η

$$f(x) = p^x q^{(1-x)}, x = 0{,}1. \qquad (2.8)$$

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διασπορά
$p^x q^{(1-x)}$	$p \in (0,1)$	p	$p(1-p)$

2.3.4 Κατανομή Poisson

Έστω μια ακολουθία τυχαίων ενδεχομένων για την οποία:

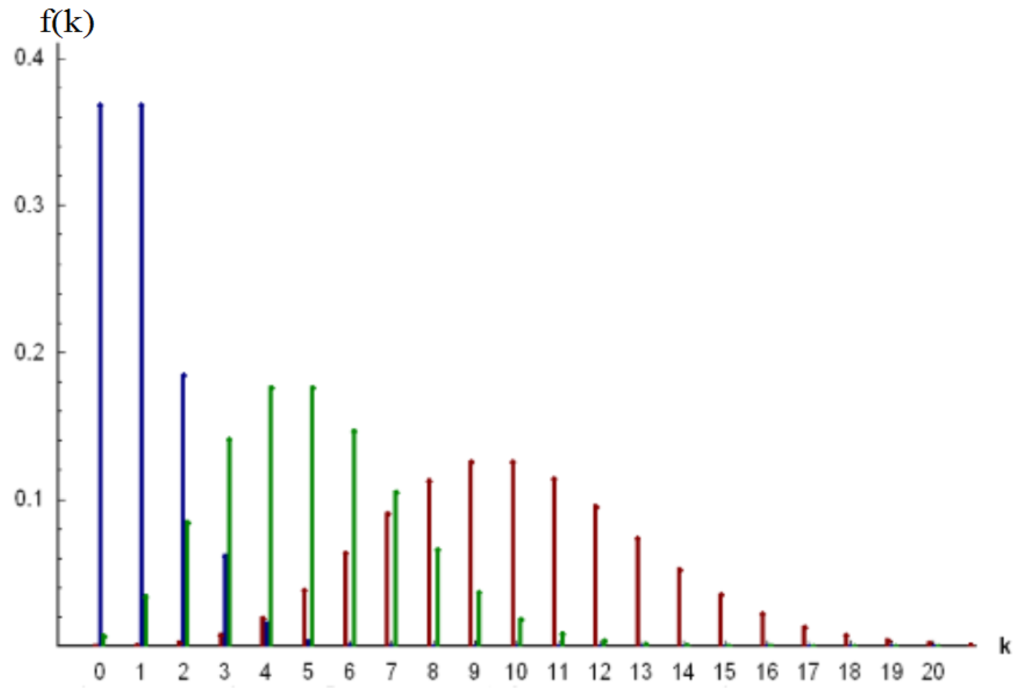
(α) τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα,

(β) τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται με ένα σταθερό μέσο ρυθμόλανά μονάδα χρόνου,

(γ) τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και έστωXο αριθμός των ενδεχομένων που πραγματοποιούνται στη μονάδα του χρόνου.

Στην περίπτωση που πληρούνται όλα τα παραπάνω, τότε τα ενδεχόμενα ακολουθούν κατανομή Poisson.

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διασπορά
$(\lambda^k e^{-\lambda})/k!$	$\lambda > 0$	λ	λ



Σχήμα 2.1 Συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson για λ = 1 (μπλε), λ = 5 (πράσινο) και λ = 10 (κόκκινο).

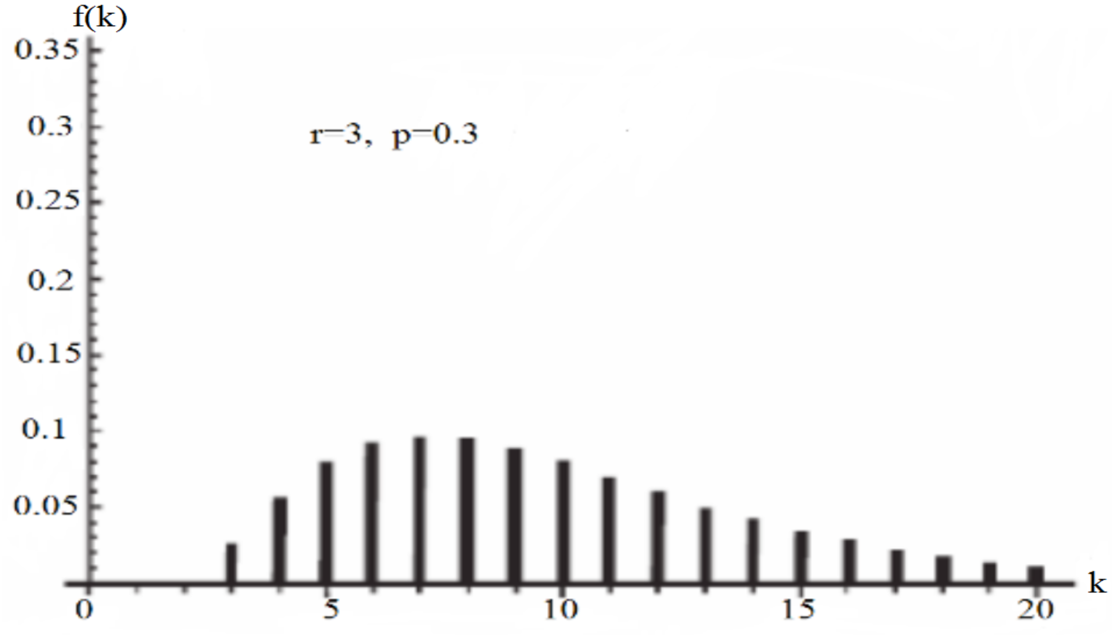
2.3.5 Αρνητική διωνυμική κατανομή

Θεωρούμε μια ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p(και αποτυχίας $q = 1 - p$) σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω Xο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της rεπιτυχίας. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Xκαλείται αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους rκαι p.Η συνάρτηση πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

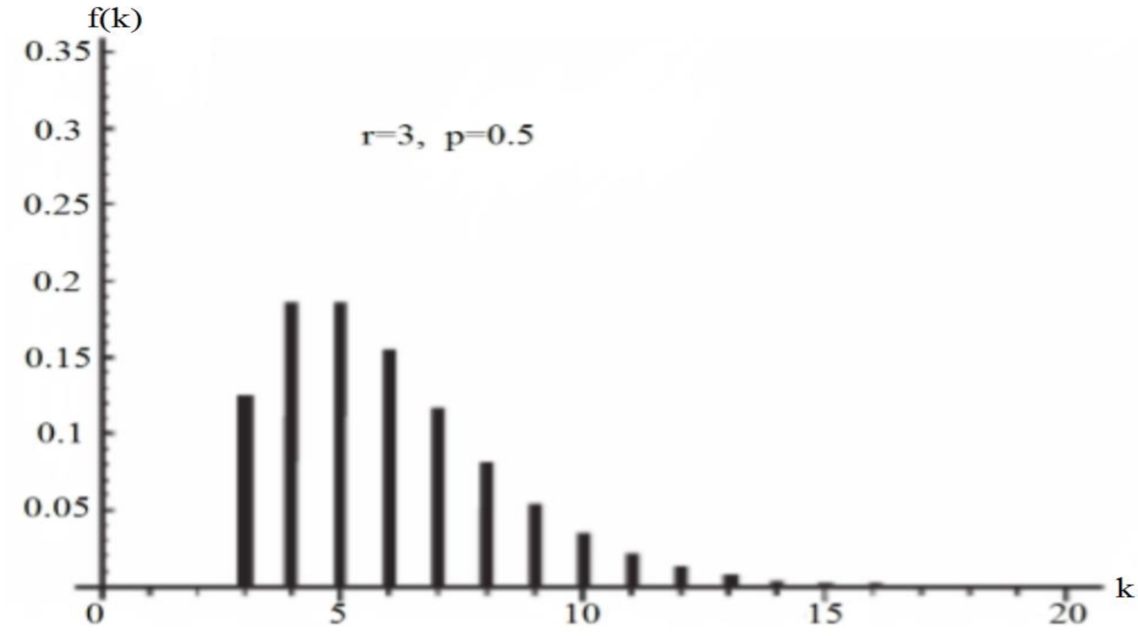
$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad (2.9)$$

για $k = 0,1,2, \ldots$

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διακύμανση
$\binom{r+k-1}{r-1}p^r(1-p)^k$	$p \in (0,1), r \in \mathbb{N}$	r/p	$r\frac{1-p}{p^2}$



Σχήμα 2.2 Συνάρτηση πιθανότητας της Αρνητικής διωνυμικής κατανομής για $r = 3, p = 0.3$.



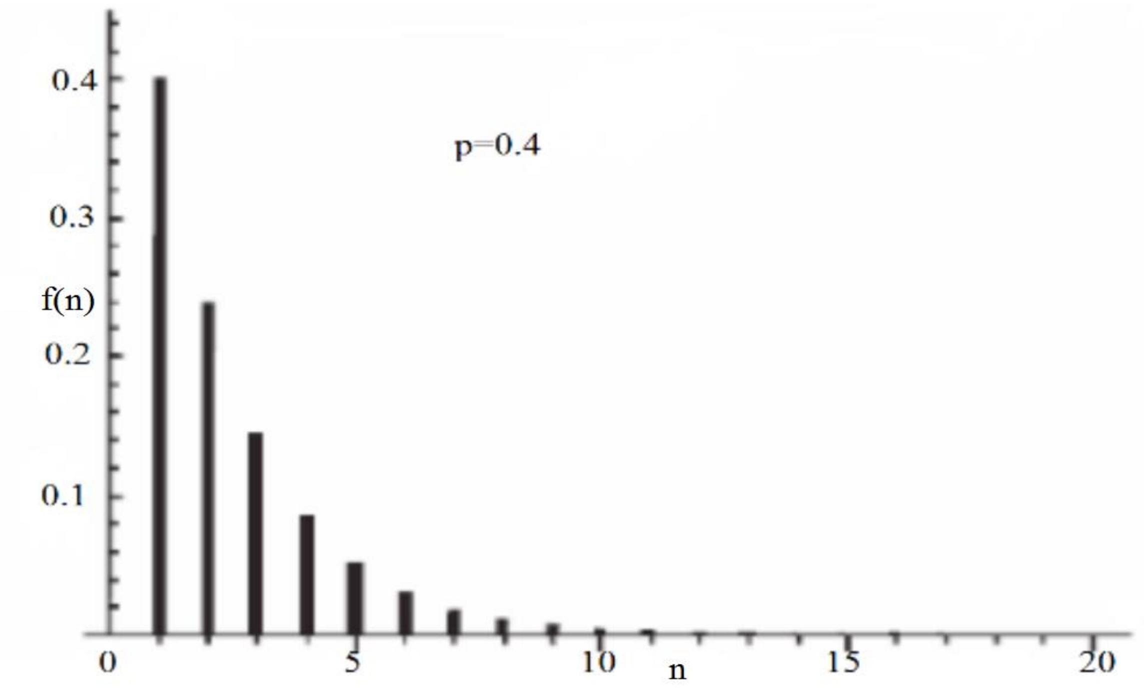
Σχήμα 2.3 Συνάρτηση πιθανότητας της Αρνητικής διωνυμικής κατανομής για $r = 3, p = 0.5$.

2.3.6 Γεωμετρική κατανομή

Θεωρούμε μια ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p(και αποτυχίας $q = 1 - p$) σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω Xο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Xκαλείται γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p.Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}, n \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετρος	Μέση τιμή	Διακύμανση
$p(1-p)^{n-1}$	$p \in (0,1)$,$n \geqslant 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$



Σχήμα 2.4 Συνάρτηση πιθανότητας της Γεωμετρικής κατανομής για $p = 0.4$.

2.3.7 Κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή (γνωστή και ως *Γκαουσιανή κατανομή*) είναι η σημαντικότερη κατανομή με τις περισσότερες εφαρμογές. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα κάθε φυσική ποσότητα της οποίας η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ότι διαμορφώνεται από ένα μεγάλο αριθμό (ανεξάρτητων) παραγόντων ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή. Χρησιμοποιείται ως μία πρώτη προσέγγιση για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες τείνουν να συγκεντρώνονται γύρω από μια μέση τιμή. Η κανονική κατανομή αποτελεί την πιο σημαντική κατανομή της στατιστικής μεθοδολογίας για τους εξής βασικούς λόγους:

- Την κανονική κατανομή ακολουθούν με πολύ μεγάλη προσέγγιση τα περισσότερα συνεχή φαινόμενα.

- Πολλές ασυνεχείς κατανομές πιθανοτήτων μπορούν να προσεγγιστούν μέσω της κανονικής κατανομής. Για παράδειγμα πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά, όπως το ύψος, το βάρος η βαθμολογία σε διαγώνισμα, κ.τ.λ.

- Η κανονική κατανομή αποτελεί σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα (το άθροισμα ενός ικανοποιητικά μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή) τη βάση της στατιστικής συμπερασματολογίας ή επαγωγικής στατιστικής.

- Τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν κανονική κατανομή. Γι' αυτό το λόγο η Κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων.

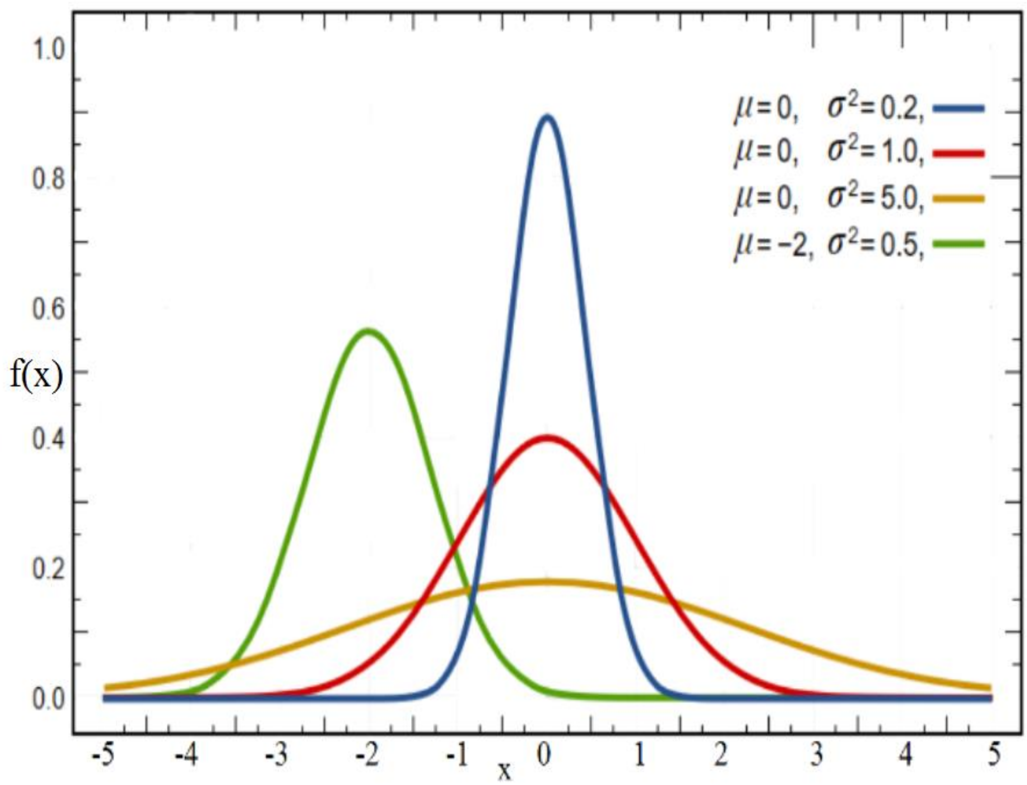
Η γραφική παράσταση της σχετιζόμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχει σχήμα "καμπάνας" και είναι γνωστή ως Γκαουσιανή συνάρτηση ή κωδωνοειδής καμπύλη.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.11)$$

όπου μ= μέση τιμή και σ^2= διακύμανση.

Ακολουθεί το Κεντρικό οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), όπως ορίζεται από το βιβλίο Δαμιανού και Κούτρα (2003).

Ορισμός 2.4 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα): Αν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθουςnκαι υπολογίσουμε τους μέσους τους, τότε για μεγάλαn(θεωρητικά $n \to \infty$) η κατανομή αυτών των μέσων (των δειγματικών) είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή επίσηςμκαι διασπορά σ^2/n.



2.3.8 Εκθετική κατανομή

Στην θεωρία πιθανοτήτων και στην στατιστική, η εκθετική κατανομή ανήκει στην οικογένεια των συνεχών κατανομών πιθανότητας. Περιγράφει τον χρόνο μεταξύ γεγονότων σε μια διαδικασία Πουασόν (Poisson), δηλαδή μια διαδικασία στην οποία γεγονότα συμβαίνουν συνεχώς και ανεξάρτητα με ένα σταθερό μέσο ρυθμό. Η εκθετική κατανομή ανήκει στην ευρύτερη εκθετική οικογένεια, η οποία είναι μια κλάση κατανομών πιθανότητας που περιλαμβάνει ακόμα την κανονική κατανομή, την διωνυμική κατανομή, την κατανομή γάμμα, την κατανομή Poisson και άλλες. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) μιας εκθετικής κατανομής είναι:

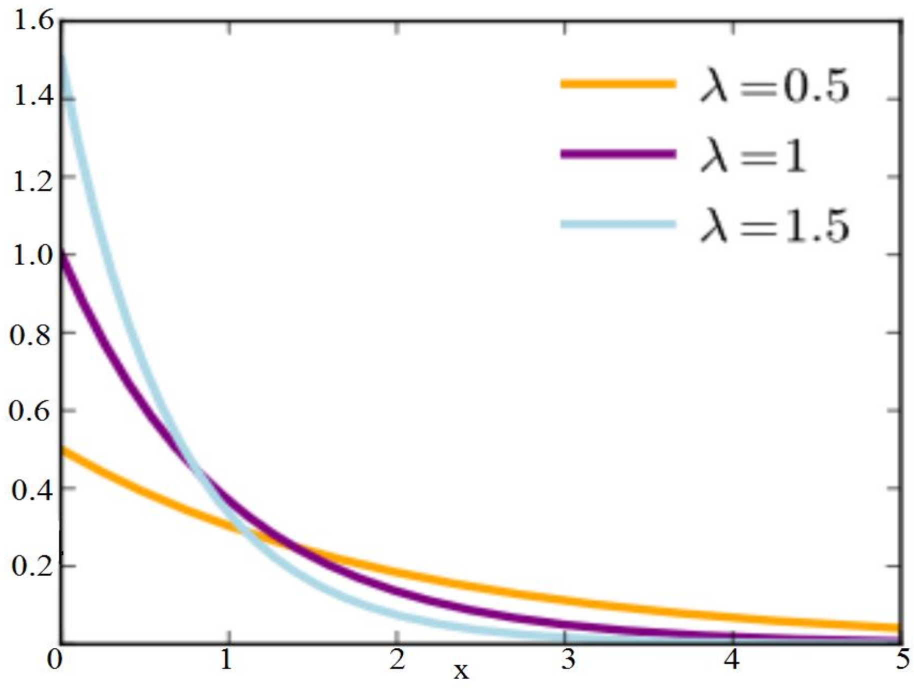
$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Η μέση τιμή της αναμενόμενης τιμής μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής X με παράμετρο ρυθμού$\lambda > 0$είναι

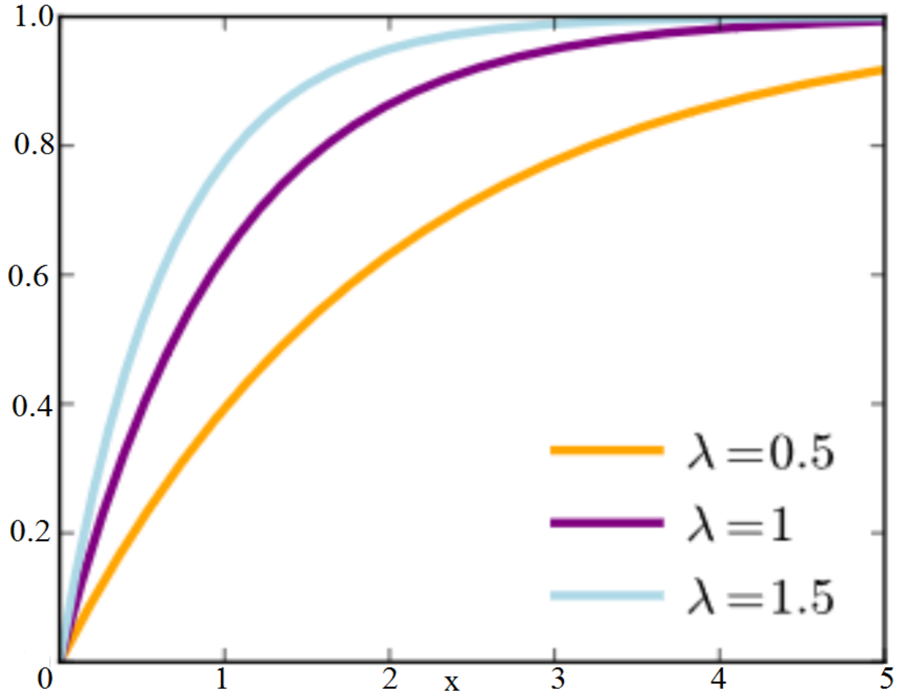
$$E(X) = 1/\lambda.$$

Η διασπορά του X είναι:

$$Var(X) = 1/\lambda^2.$$



Σχήμα 2.5 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας εκθετικών κατανομών.



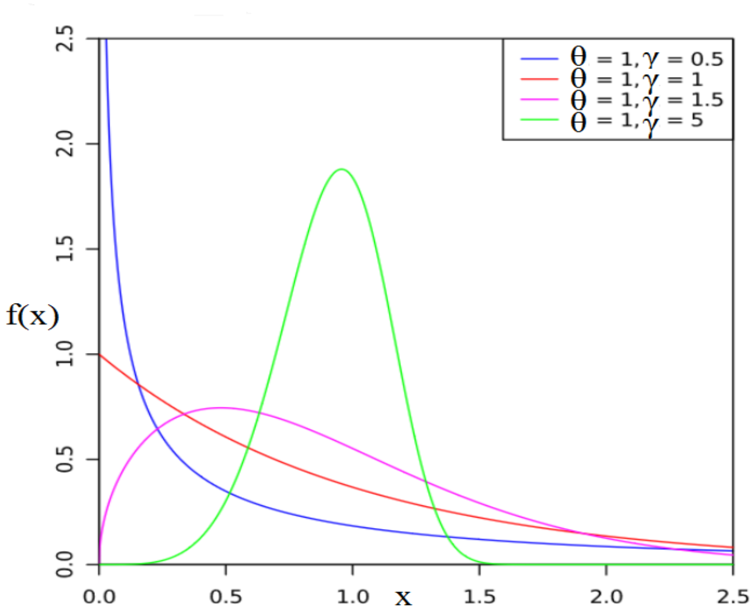
Σχήμα 2.6 Αθροιστική συνάρτηση διαφόρων εκθετικών κατανομών.

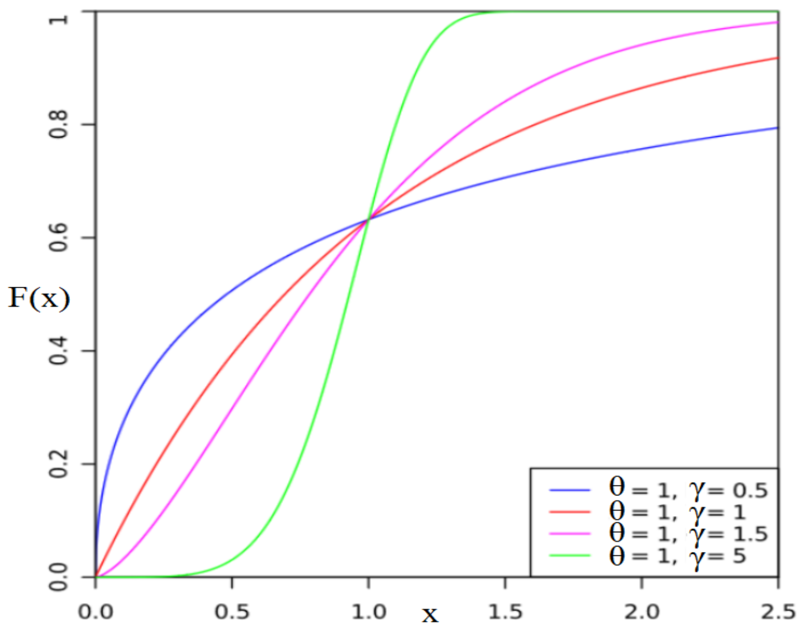
2.3.9 Κατανομή Weibull

Η κατανομή Weibull μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της Weibull κατανομής είναι:

$$f(x) = \theta\gamma x^{(\gamma-1)} e^{-\theta x^{\gamma}}, \tag{2.13}$$

όπου $x > 0, \gamma > 0, \theta > 0$.




F(x)
x
θ = 1, γ= 0.5
θ = 1, γ= 1
θ = 1, γ= 1.5
θ = 1, γ= 5

2.3.10 Κατανομή Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα, μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της Γάμμα κατανομής είναι:

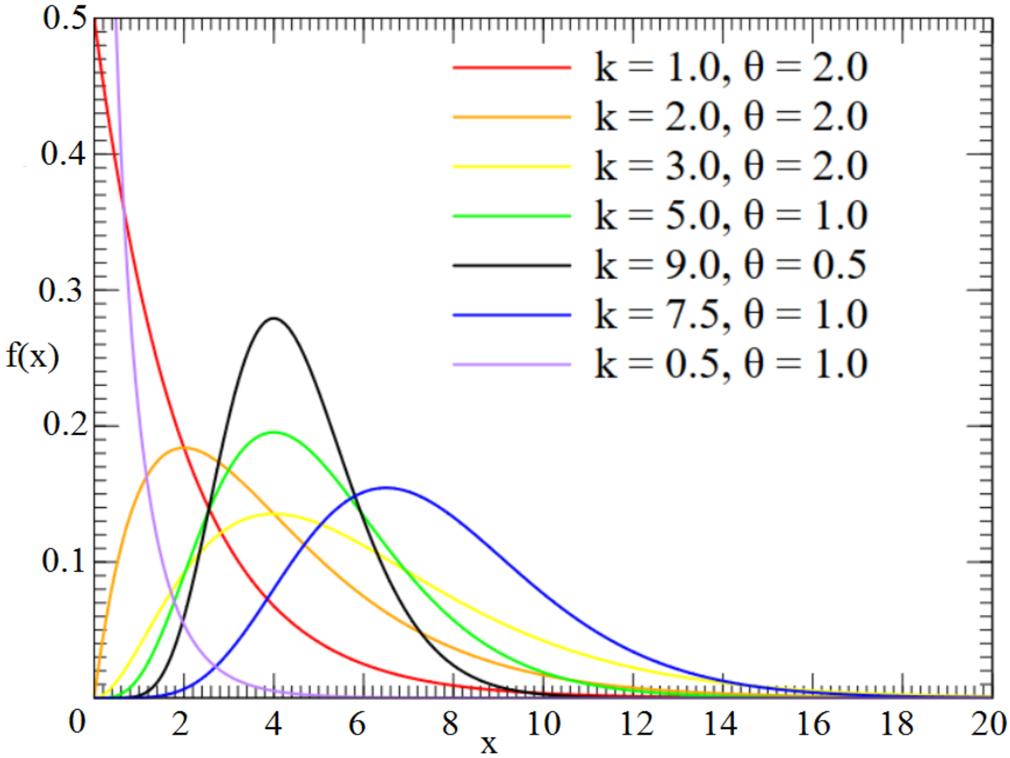
$$f(x)= \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}} > 0, \quad (2.14)$$

με $k > 0, \theta > 0$.

νάρτηση πυκνότητας πιθανότητ	Μέση τιμή	Διασπορά
$\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$	$k\theta$	$k\theta^2$

Όπου $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$ η συνάρτηση Γάμμα.

Ακολουθεί το Σχήμα 2.7 που μας δείχνει πως επηρεάζεται η κατανομή Γάμμα για τις διάφορες τιμές των k και θ.



Σχήμα 2.7 Πως επηρεάζεται η κατανομή Γάμμα από τις διαφορετικές τιμές των k και θ.

2.3.11 Κατανομή Pareto

Η κατανομή Pareto χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή γεωφυσικών, κοινωνικών, αναλογιστικών και πολλών άλλων ειδών παρατηρήσιμων φαινομένων. Αξίζει να σημειωθεί ότι στον ασφαλιστικό κλάδο έχει συχνή χρήση στον υπολογισμό αποζημιώσεων που προκύπτουν από πρόκληση πυρκαγιών. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της κατανομής Pareto είναι η εξής:

$$f(x) = (\alpha\theta^{\alpha})/(x+\theta)^{(\alpha+1)}, \tag{2.15}$$

με $\alpha, \theta > 0$.

Επίσης, ισχύει

$$F(x) = 1 - (\theta/(x+\theta))^{\alpha},$$

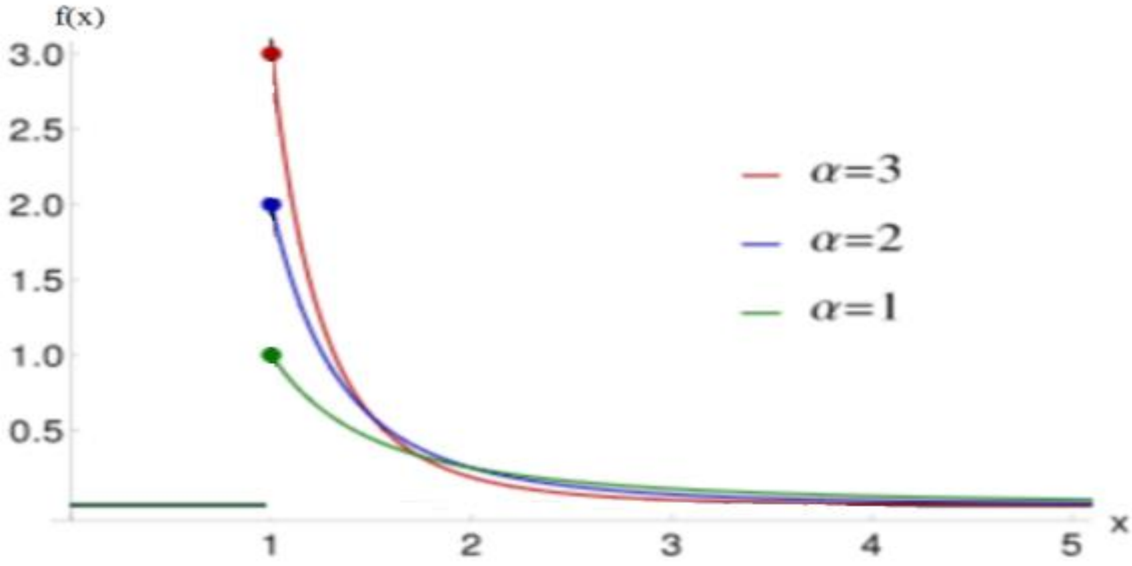
Αν$\alpha > 1$ η μέση τιμή δίνεται από

$$E(X) = \theta/(\alpha - 1)$$

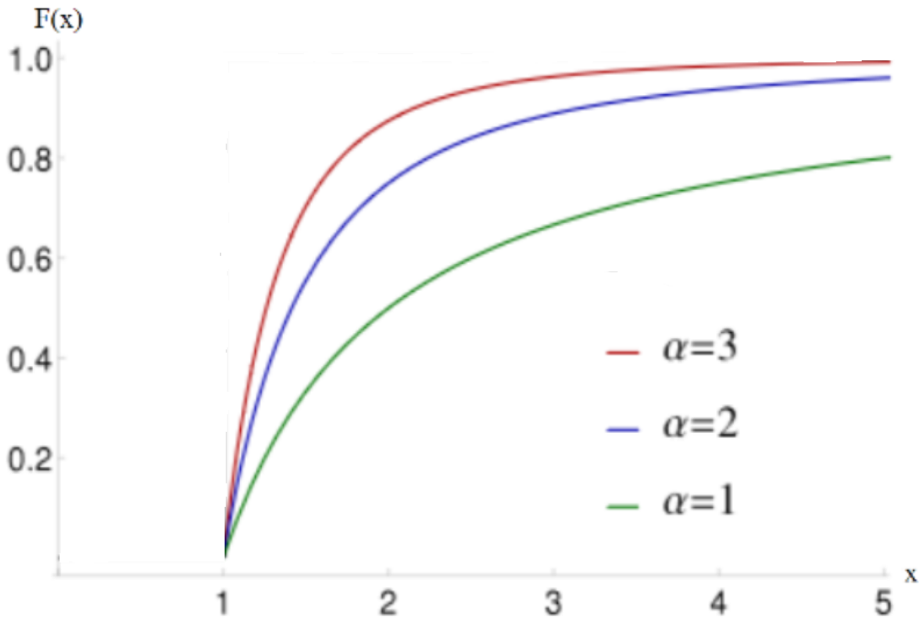
και για $\alpha > 2$ η διασπορά είναι

$$Var(X) = (\alpha\theta^2)/(\alpha-1)^2\,(\alpha-2).$$

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Κατανομής Pareto για τις διαφορετικές τιμές του α (βλέπε Σχήμα 2.8 και 2.9 αντίστοιχα).



Σχήμα 2.8 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κατανομής Pareto για διαφορετικάα.



Σχήμα 2.9 Αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κατανομής Pareto για διάφορες τιμές του α.

2.4 Χρόνος Επιβίωσης και Συνάρτηση Επιβίωσης

Ως χρόνος επιβίωσης μπορεί να ορισθεί ο χρόνος μέχρι να συμβεί ένα συγκεκριμένο γεγονός. Το γεγονός μπορεί να είναι η εμφάνιση μιάς ασθένειας, η εξέλιξη ή η επιτυχία μιας θεραπείας σε κάποια ασθένεια, ο θάνατος ενός ασθενή, η παύση λειτουργίας μιας συσκευής κτλ. Ο χρόνος επιβίωσης ονομάζεται και χρόνος ως το “γεγονός” ή την “αποτυχία”. Επίσης, μπορούμε να εισαγάγουμε μια συνάρτηση ουράς (*tf*), που συχνά αποκαλείται συνάρτηση επιβίωσης και ορίζεται ως εξής:

$$S(t) = P(T \geqslant t) = 1 - F(t), \text{ για } t \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Με απλά λόγια, η παραπάνω σχέση αντιπροσωπεύει την πιθανότητα τοTνα παίρνει μια τιμή μεγαλύτερη από t. Εάν τοTείναι η τυχαία μέλλουσα διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου, τότε έχουμε $\overline{F}(t)$να είναι η πιθανότητα ο ασφαλισμένος να επιβιώσει μέχρι την ηλικίαt.Ακόμα, εφόσον T είναι το συνολικό ποσό των απαιτήσεων που παράγεται από ένα συγκεκριμένο αντισυμβαλλόμενο, τότε έχουμε$P(T \geqslant t)$να είναι η πιθανότητα ότι η αντίστοιχη πολιτική δημιουργεί μια απώλεια μεγαλύτερη από t. Η συνάρτηση επιβίωσης είναι μη αρνητική και φθίνουσα συνάρτηση του t με $S(0) = 1$ και

S(∞) = 0. Η γραφική παράσταση της $S(t)$συναρτήσει του tείναι γνωστή ως καμπύλη επιβίωσης και είναι πολύ σημαντική στην ανάλυση δεδομένων χρόνου επιβίωσης (βλέπε Denuit et al. (2001)).

2.4.1 Συνάρτηση Κινδύνου

Η συνάρτηση κινδύνου$h(t)$,ορίζεται ως η πιθανότητα αποβίωσης (ή πραγμάτωσης του γεγονότος που εξετάζεται) τη χρονική στιγμήt,δεδομένου ότι το άτομο έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t. Οπότε,

$$h(t) = \lim_{s \to 0} \frac{P(t \le T \le t + s / T \ge t)}{s} . \tag{2.17}$$

Η συνάρτηση κινδύνου δίνει ένα μέτρο του πόσο πιθανό είναι ένα άτομο να αποβιώσει ως συνάρτηση της ηλικίας του ατόμου, για παράδειγμα ο κίνδυνος θανάτου ανάμεσα σε αυτούς που είναι ζωντανοί τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

2.5 Μέτρα Κινδύνου

Για αιώνες, η λειτουργία των ασφαλιστών και αντασφαλιστών ήταν να πουλήσουν την κάλυψη του κινδύνου. Τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν προσχωρήσει σε αυτή τη δραστηριότητα οι τράπεζες και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Σήμερα, οι δύο αυτές ομάδες αντιμετωπίζουν την ίδια πρόκληση: να συλλέγουν και να διαχειρίζονται τους κινδύνους. Ως αποτέλεσμα ψάχνουν για αγορές όπου οι κίνδυνοι αυτοί μπορούν να αντισταθμίζονται. Όταν δεν υπάρχουν φράκτες, για παράδειγμα λόγω της δομικής ατέλειας της αντίστοιχης αγοράς, πρέπει να καθιερωθεί ένα προσεκτικό μέτρο κινδύνου και εάν είναι απαραίτητο, να δημιουργηθούν αξιόπιστα αποθεματικά. Οι εταιρείες δείχνουν τεράστιο ενδιαφέρον για τις πρόσφατα αναπτυχθείσες τεχνικές για τη μέτρηση του κινδύνου και την αξιολόγηση κερδοφόρων τομέων της επιχείρησης. Ο τομέας διαχείρισης έρχεται αντιμέτωπος καθημερινά με το δύσκολο έργο της συμφιλίωσης των αντικρουόμενων συμφερόντων μεταξύ των πελατών και ασφαλισμένων, από τη μία και των μετόχων από την άλλη. Οι πρώτοι ενδιαφέρονται για ισχυρή οικονομική ευημερία, ενώ οι δεύτεροι απαιτούν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απόδοση των ιδίων κεφαλαίων τους, ευθυγραμμισμένη με τον κίνδυνο που ενέχουν οι επενδύσεις τους. Στους τομείς ασφάλισης και χρηματοδότησης έχουν προταθεί πολυάριθμα μέτρα κινδύνου, από τα πιο στοιχειώδη ως τα πιο περίτεχνα. Διαφορετικές κατηγορίες των μέτρων κινδύνου αντιπροσωπεύουν διαφορετικές σχολές σκέψης (ουσιαστικά κατάλληλα μέτρα κινδύνου είναι εκείνα που συμμορφώνονται με τα αξιώματα). Παρ 'όλα αυτά, στην πράξη η εύρεση του κατάλληλου μέτρου που θα χρησιμοποιηθεί για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου για την ασφάλιση των χαρτοφυλακίων εξακολουθεί να αποτελεί θέμα για συζήτηση. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετές νέες προσεγγίσεις γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα, ενώ αξίζει να σημειωθούν εμφανίσεις πιο “εκλεπτυσμένων” θεωριών, κυρίως στην οικονομική βιβλιογραφία, όπως η Αναλογιστική Θεωρία Εξαρτημένων Κινδύνων *.

Μέτρηση του κινδύνου πρακτικά σημαίνει προσδιορισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τους κατόχους επικίνδυνων χαρτοφυλακίων. Ορόσημο σε αυτή την εξέλιξη ήταν η αξιωματική προσέγγιση για τα μέτρα κινδύνου. Οι λειτουργικές μορφές, θεμελιώδεις ιδιότητες και τα μέτρα κινδύνου έχουν μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία από το 1970, κυρίως με το πρόσχημα των αρχών υπολογισμού πριμ. Υπάρχει ευρύ φάσμα μέτρων κινδύνου και αρκετά συγγράμματα που μελετούν τις αντίστοιχες ιδιότητές τους.

Παίρνοντας ως δεδομένο ότι οι εκάστοτε κίνδυνοι ορίζονται ως μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές (βλέπε Ορισμό 2.2), η μέτρηση κινδύνου είναι εφάμιλη με την εύρεση αντιστοίχισης rμεταξύ αυτών των τυχαίων μεταβλητών και των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ο πραγματικός αριθμός που υποδηλώνει ένα γενικό μέτρο του κινδύνου που συνδέεται με τον κίνδυνο Xστο εξής θα συμβολίζεται ως r[X]. Επομένως, ένα μέτρο κινδύνου δεν είναι παρά μια συνάρτηση που αντιστοιχεί ένα μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό σε κίνδυνο. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ποιές πτυχές της επικινδυνότητας, που συνδέονται με το αβέβαιο αποτέλεσμα του κινδύνου που εξετάζουμε, έχει ως στόχο να ποσοτικοποιήσει το επιλεγμένο μέτρο κινδύνου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι κανένα μέτρο κινδύνου δεν μπορεί να συμπεριλάβει ολόκληρη την εικόνα του εγγενούς κινδύνου σε κάποια κατάσταση στην πραγματική ζωή, αλλά το καθένα από αυτά θα επικεντρωθεί σε μια συγκεκριμένη πτυχή του κινδύνου.

Υπάρχει ένας παραλληλισμός με τη μαθηματική στατιστική, όπου τα χαρακτηριστικά των κατανομών μπορούν να έχουν αρκετά διαφορετικές σημασίες και χρήσεις. Για παράδειγμα, η μέση τιμή για τη μέτρηση της κεντρικής τάσης, η διακύμανση για τη μέτρηση της εξάπλωσης, η κυρτότητα που αντικατοπτρίζει ασυμμετρία και η μέτρηση του πάχους των ουρών. Σκοπός μας είναι να επικεντρωθούμε σε μέτρα κινδύνου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των διατάξεων και των κεφαλαιακών απαιτήσεων που πρέπει να υιοθετηθούν προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση. Στο πλαίσιο αυτό, θα επικεντρωθούμε στα μέτρα κινδύνου που μετρούν τη “δεξιά” ουρά των κατανομών. Για απλότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε τα μοντέλα της αγοράς χωρίς τα επιτόκια, * βλέπε Denuit et al. (2005)

ωστόσο για την επέκταση όλων των ορισμών πιο κοντά στην «πραγματική» περίπτωση γίνεται χρήση κατάλληλης προεξόφλησης. Είμαστε τώρα έτοιμοι να αναφέρουμε τον ορισμό ενός μέτρου κινδύνου.

Ορισμός 2.5 Μέτρο κινδύνου είναι μια συνάρτηση rπου μετατρέπει έναν κίνδυνο X σ' έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό r[X], πιθανώς άπειρο και αντιπροσωπεύει το επιπλέον ποσό που πρέπει να προστεθεί στο αναμενόμενο X ώστε να γίνει δεκτό.

Η ιδέα είναι ότι το μέτρο κινδύνου που έχει επιλεγεί ποσοτικοποιεί το βαθμό επικινδυνότητας του X:μεγάλες τιμές του X μας λένε ότι το X είναι "επικίνδυνο". Συγκεκριμένα, εάν το X είναι μια πιθανή απώλεια ενός οικονομικού χαρτοφυλακίου πάνω από ένα χρονικό ορίζοντα, ερμηνεύουμε το r[X] ως το ποσό του κεφαλαίου που θα πρέπει να προστεθεί ώστε το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο να είναι φερέγγυο σε εσωτερικούς και εξωτερικούς ελέγχους. Τέτοια μέτρα κινδύνου, που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των προβλέψεων και των κεφαλαιακών απαιτήσεων, προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση είναι από πολλές απόψεις παρόμοια με την αναλογιστική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου.

2.5.1 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Για μια ασφαλιστική εταιρεία εκτεθειμένη σε υποχρέωση X,η αρχή υπολογισμό του ασφαλίστρου Pμας δίνει το ελάχιστο ποσό $P[X]$ που ο ασφαλιστής πρέπει να αυξήσει στο συμβόλαιο του ασφαλισμένου, ώστε ο ασφαλιστής να έχει συμφέρον να προχωρήσει με τη σύμβαση. Οι αρχές ασφαλίστρου είναι αξιοπρόσεκτα παραδείγματα πιθανών μέτρων κινδύνου. Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι ο αριθμός που προκύπτει από την εφαρμογή τους σε κάποιο ασφαλιστικό κίνδυνο Xείναι υποψήφιος για την πριμοδότηση που συνδέεται με τη σύμβαση που προβλέπει κάλυψη κατά X.Παρεμπιπτόντως, πρόκειται για τα πιο κοινά μέτρα κινδύνου στην αναλογιστική επιστήμη.

Αν και υπάρχει συναίνεση (τουλάχιστον αν όλοι συμφωνούν σχετικά με την κατανομή των κινδύνων) για το καθαρό ασφάλιστρο (το οποίο είναι και το αναμενόμενο ποσό απαίτησης), υπάρχουν πολλοί τρόποι να προστεθεί ένα ποσό στο ακαθάριστο ασφάλιστρο. Ένα ποσό ασφαλείας προστίθεται στο αναμενόμενο κόστος που αξιώνει η εταιρεία και αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο που συνδέεται με το ρίσκο που βαραίνει τον ασφαλιστή. Αυτό το ποσό είναι άλλωστε μια έκφραση σχετικά με τον κίνδυνο που φέρει (μεγαλύτερο ποσό σημαίνει μεγαλύτερο κίνδυνο). Στην πράξη η πριμοδότηση για έναν “λιγότερο ελκυστικό” κίνδυνο πρέπει να υπερβαίνει το ασφάλιστρο για έναν “πιο ελκυστικό” κίνδυνο (με τον όρο “ελκυστικό κίνδυνο” αναφερόμαστε σε κινδύνους που είναι στα πλαίσια της τακτικής που ακολουθεί η εταιρεία και θέλει να τους αναλαμβάνει). Ως εκ τούτου, η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση ενός μέτρου κινδύνου.

Ακολουθούν οι πιό δημοφιλής αρχές για τον τρόπο υπολογισμού ασφαλίστρων (βλέπε Kaas et al. (2001), Goovaerts et al. (1984)).

i) Το καθαρό ασφάλιστρο (*net premium*), γνωστό και ως αρχή της ισοδυναμίας, ισούται απλά με την αναμενόμενη τιμή ενός κινδύνου X,

$$P(X) = E(X).$$

Το συγκεκριμένο ασφάλιστρο χρησιμοποιείται για ουδέτερες τακτικές των ασφαλιστρών ως προς τον κίνδυνο.

ii) Η αρχή “αναμενόμενης τιμής”, σύμφωνα με την οποία το ασφάλιστρο ισούται με το καθαρό ασφάλιστρο, συν μια επιβάρυνση $\alpha E(X)$,με $\alpha > 0$μια παράμετρος που δείχνει την συμφωνημένη επιβάρυνση.

$$P(X) = (1 + \alpha)E(X).$$

iii) Η αρχή “διακύμανσης” (*variance principle)*, στην οποία η επιβάρυνση του ασφαλίστρου εξαρτάται από τη διακύμανση $Var(X)$.

$$P(X) = E(X) + \alpha Var(X),$$

με $\alpha > 0$.

iv) Η αρχή “τυπικής απόκλισης” (*standard deviation principle*), στην οποία η επιβάρυνση του ασφαλίστρου εξαρτάται από την τυπική απόκλιση $\sigma(X)$.

$$P(X) = E(X) + \alpha\sigma(X),$$

με $\alpha > 0$.

2.5.2 Επιθυμητές ιδιότητες

Παρόλο που ο Ορισμός 2.5 είναι πολύ γενικός, τα μέτρα κινδύνου πρέπει να ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα. Αρκετοί συγγραφείς πρότειναν διάφορες απαιτήσεις που τα μέτρα κινδύνου θα πρέπει να πληρούν (βλέπε Goovaerts et al. (1984)). Παραθέτουμε τις σημαντικότερες:

- Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας (*Non-excessive loading*).

$$r[X] \leq \max[X] = F_X^{-1},$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή *X*.

Προφανώς, είναι ανώφελο να κρατήσουμε περισσότερα κεφάλαια απ' ότι η μέγιστη τιμή της απώλειας.

- Μη-αρνητική φόρτιση (*Non-negative loading*).

$$r[X] \geq E(X),$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή *X*.

Το ελάχιστο κεφάλαιο πρέπει να υπερβαίνει την αναμενόμενη ζημία, αλλιώς θα υπάρξουν καταστροφικά αποτελέσματα για την εταιρεία (υπό τις προϋποθέσεις του νόμου των μεγάλων αριθμών).

- Προσθετικότητα ως προς σταθερά (*Translativity*).

$$r[X + c] = r[X] + c,$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή *X* και για κάθε *c*

Θυμόμαστε ότι έχουμε προσθέσει ένα ποσό, ώστε να γίνει δεκτός ο κίνδυνος που αναλαμβάνουμε (ποσό ασφάλειας). Είναι πασίδηλο ότι οποιαδήποτε αύξηση της ευθύνης από ένα ντετερμινιστικό ποσό c, θα πρέπει να έχει ως αποτέλεσμα την ίδια αύξηση στο κεφάλαιο,

$$r(X - r[X]) = 0,$$

όταν προσθέτουμεXστην αρχική$-X$θέση, παίρνουμε μια «ουδέτερη» θέση.

- Σταθερότητα ή όχι αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας (*Constancy or no unjustified loading*).

Όποια και αν είναι η σταθερά c, θα πρέπει να έχουμε

$$r(c) = c.$$

Για να αντιμετωπιστεί η απώλεια του c, είναι σαφές ότι ο ασφαλιστής πρέπει να έχει κεφάλαιο ίδιου ποσού στη διάθεσή του. Ειδικότερα, $r(0) = 0$, ενώ η ποσότητα $r(X)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως απαίτηση περιθωρίου και είναι το ελάχιστο ποσό του κεφαλαίου, το οποίο εάν προστεθεί στοXστην αρχή της περιόδου και επενδυθεί σε ένα περιουσιακό στοιχείο άνευ κινδύνου, κάνει τοX«αποδεκτό».

- Υποπροσθετικότητα (*Subadditivity*).

$$r[X + Y] \leq r[X] + r[Y],$$

για κάθε Xκαι Y.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να συνοψιστεί στην έκφραση «μια συγχώνευση δεν δημιουργεί επιπλέον κινδύνους». Αντιλαμβανόμαστε ότι υπάρχει η ιδέα μείωσης του κινδύνου, μέσω του διαχωρισμού. Όταν ισχύει η ισότητα, μιλάμε για προσθετικότητα. Η δομή της εξάρτησης μεταξύ X και Yσυχνά καθορίζεται και μιλάμε για προσθετικότητα όταν πρόκειται για ανεξάρτητους κινδύνους.

- Συμμονοτονική προσθετικότητα (*Comonotonic additivity*).

$$r[X+Y]=r[X]+r[Y],$$

για κάθε Xκαι Y.

Αυτό ισχύει εξαιτίας του γεγονότος ότι βάζοντας συμμονοτονικούς κινδύνους μαζί δεν μειώνεται η επικινδυνότητα της κατάστασης. Οι συμμονοτονικοί κίνδυνοι αναφέρονται στο ίδιο γεγονός και δεν μπορούν να λειτουργήσουν ο ένας ως εξασφάλιση έναντι του άλλου. Με τη σειρά τους οι ασφαλιστές δεν είναι πρόθυμοι να μειώσουν τον κινδύνου σε περίπτωση πολιτικής συνδυασμού τέτοιων κινδύνων.

- Θετική ομοιογένεια (*Positive homogeneity*).

$$r[cX]=cr[X],$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή Xκαι για οποιαδήποτε θετική σταθερά c.

Συχνά σχετίζεται με τη νομισματική μονάδα που χρησιμοποιείται. Η θετική ομοιογένεια είναι στενά συνδεδεμένη με την ομοιομονοτονική προσθετικότητα. Πράγματι, υποθέτοντας ότιcείναι ένας θετικός ακέραιος, τότε η συμμονοτονική προσθετικότητα μας δίνει το εξής:

$$r[cX]=r[X+X+....+X]=r[X]+r[X]+...+r[X]=cr[X].$$

- Μονοτονία (*Monotonicity*).

$$\Pr[X\leq Y]=1\Rightarrow r[X]\leq r[Y],$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X,Y.

Το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται ως μαξιλάρι ασφαλείας για τοXείναι πάντα μικρότερο από το αντίστοιχο ποσό για τοY,όταν τοYυπερβαίνει τοX.Από αυτή την οπτική γωνία φαίνεται ως μια πολύ φυσική ιδιότητα.

Παρατήρηση 2.2: Οι προϋποθέσεις που αναφέρονται παραπάνω δεν είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, εάν το rείναι μονότονο δεν υπάρχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας, καθώς πάντα ισχύει ότι $X \leqslant max(X)$.

Παρατήρηση 2.3: Πρέπει να τονιστεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων αποτυγχάνουν να πληρούν όλες τις προαναφερθείσες ιδιότητες (εκτός από την αρχή καθαρών ασφαλίστρων).

Παρατήρηση 2.4: Οι ιδιότητες υποπροσθετικότητας και θετικής ομοιογένειας είναι αντικείμενα προς περαιτέρω συζήτηση. Παρόλο που τίθεται σε αμφισβήτηση το κατά πόσο η υποπροσθετικότητα περιγράφει την πραγματικότητα, καθώς αγνοεί εντελώς την έννοια του υπολειπόμενου κινδύνου, οι Föllmer και Schied (2002) * παρατήρησαν ότι αυτές οι δύο ιδιότητες δεν επηρεάζονται από τον κίνδυνο ρευστότητας. Σύμφωνα με Rootzén και Klüppelberg (1999), η υποπροσθετικότητα είναι μια βολική μαθηματική ιδιότητα, η οποία όμως δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα. Η συμπεριφορά ενός μέτρου κινδύνου σε σχέση με τον συνυπολογισμό των κινδύνων είναι ζωτικής σημασίας. Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό το ουσιαστικό ερώτημα είναι το εξής:

Δίνονται δύο χαρτοφυλάκια X, Yκαι η από κοινού κατανομή πιθανότητάς τους, πώς ο κίνδυνος του συνολικού r[X+Y] σχετίζεται με τον κίνδυνο των επιμέρους θέσεων r[X] και r[Y]; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να σχετίζεται με τον τρόπο που τα Xκαι Yεξαρτώνται στοχαστικά μεταξύ τους. Επίσης, η συμμονοτονική προσθετικότητα είναι σύμφωνη με την προσέγγιση που ακολουθεί: αν τα Xκαι Yείναι απολύτως εξαρτημένα, τότε δεν υπάρχει περιορισμός του κινδύνου. Εκτός από την ακραία περίπτωση να παρουσιαστεί κάποια επίδραση λόγω της συγχώνευσης, με αποτέλεσμα να υπερτερεί η υποπροσθετικότητα. Μια άλλη σκέψη υποστηρίζει ότι η άθροιση «θετικά εξαρτημένων» κινδύνων στην πραγματικότητα αυξάνει την επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου και ότι αυτό θα προκαλέσει υψηλότερες κεφαλαιακές απαιτήσεις. Αυτό οδηγεί στη χρήση υπερπροσθετικότητας για θετικώς εξαρτημένους κινδύνους και της προσθετικότητας για ανεξάρτητους.

2.6 Οικονομικό κεφάλαιο

Οι ασφαλιστικές εταιρείες, καθώς και οι τράπεζες θα πρέπει να κατέχουν κάποια μορφή κεφαλαίου «μαξιλάρι» ώστε να είναι σε θέση ν' αντιμετωπίσουν απροσδόκητες ζημιές. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών κεφαλαίων είναι η έννοια του οικονομικού κεφαλαίου (EC)και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.6: Το οικονομικό κεφάλαιο ορίζεται, σε σχέση με κάποιο μέτρο κινδύνου, από τη σχέση:

$$EC[S] = r[S] - E[S],$$

όπου S είναι η συνολική ζημία της εταιρείας.

Ο λόγος για τη μείωση του μέτρου κινδύνου $r[S]$ από την αναμενόμενη ζημία $E[S]$ οφείλεται στην « καλύτερη πρακτική » της αποσύνθεσης του συνολικού κεφαλαίου $r[S]$ για τον κίνδυνο, σε ένα πρώτο μέρος $E[S]$ κάλυψης των προβλεπόμενων απωλειών και ένα δεύτερο μέρος $EC[S]$, ως μαξιλάρι για την αντιμετώπιση μη αναμενόμενων ζημιών.

2.6.1 Αναμενόμενο προσαρμοσμένο κεφάλαιο

Τα χαρτοφυλάκια πιο συχνά αναλύονται με τη βοήθεια μιας μέτρησης των επιδόσεων προσαρμοσμένου κινδύνου σε αυτό. Ένα καλό μέτρο κέρδους αξιολογεί τις οικονομικές επιδόσεις με τη δέουσα προσοχή στον κίνδυνο έκθεσης: ένα ευρώ που κερδίζεται ή αναμένεται να κερδηθεί όταν υπάρχει "μεγάλος" κίνδυνος "δεν αξίζει τόσο" όσο όταν υπάρχει μικρός κίνδυνος. Προφανώς η εκάστοτε εταιρεία για να κερδίσει κάποιο ποσό θέλει να λάβει όσο το δυνατόν μικρότερο κίνδυνο ή αντίστοιχα για τον κίνδυνο που θα πάρει επιδιώκει να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο όφελος. Συγκεκριμένα, το κέρδοςRτης εταιρείας, είναι η διαφορά μεταξύ του ασφαλίστρουPκαι του συνολικού ποσού απαίτησηςS.Υπό την προϋπόθεση ότι το$r[S]$είναι μη μηδενικό, ορίζεται (βλέπε για παράδειγμα Denuit et al.(2005)) η αναμενόμενη προσαρμοσμένη απόδοση κινδύνου$(ERAR)$για το χαρτοφυλάκιο που μελετάμε ως εξής:

$$ERAR[R,S] = \frac{E[R]}{r[S]} \tag{2.18}$$

Στην πράξη, η εταιρεία στοχεύει να μεγιστοποιήσει την$ERAR$.

2.7 Αξία σε κίνδυνο (*Value at Risk*)

Την τελευταία δεκαετία έχει παρουσιαστεί αυξανόμενο ενδιαφέρον από τη μεριά των επαγγελματιών για τη μελέτη των κατανομών πιθανότητας με τη μέθοδο ποσοστημορίων (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Jorion (2000). Τα ποσοστημόρια έχουν βρει εφαρμογή σε τρέχουσες πρακτικές διαχείρισης κινδύνου με τη μορφή της έννοιας της αξίας σε κίνδυνο(VaR).Η έννοια αυτή εισήχθη για να δώσει απάντηση στο εξής ερώτημα:

Τι ποσό μπορούμε να αναμένουμε ότι θα χάσουμε σε μία ημέρα, εβδομάδα, έτος,… με μία δεδομένη πιθανότητα;

Στο σημερινό οικονομικό κόσμο η σημασία του VaRείναι αναντίρρητη, δεδομένου ότι οι ρυθμιστικές αρχές αποδέχονται αυτό το μοντέλο ως βάση για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον κίνδυνο αγοράς .

Ορισμός 2.7 (μαθηματικός ορισμός): Λαμβάνοντας υπόψη ένα επίπεδο εμπιστοσύνηςαστο $(0,1)$, το VaR του χαρτοφυλακίου σε επίπεδο εμπιστοσύνηςαδίνεται από το μικρότερο αριθμόl,τέτοιο ώστε η πιθανότητα η απώλεια L να υπερβαίνει το l να είναι το πολύ $1-\alpha$. Μαθηματικά, αν L είναι η απώλεια ενός χαρτοφυλακίου, τότε:

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \Re : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \Re : \overline{F_L}(l) \geq \alpha\}$$

(2.19)

Η αριστερή ισότητα είναι ένας ορισμός τουVaR.Η δεξιά ισότητα ισχύει μόνο για παραμετρικάVaR.Οι διαχειριστές κινδύνου συνήθως υποθέτουν ότι κάποιο μέρος των άσχημων γεγονότων θα έχουν απροσδιόριστες απώλειες, είτε επειδή οι αγορές είναι κλειστές, είτε λόγω περιορισμένης ρευστοποίησης.

Ορισμός 2.8 Δοθέντος ενός κινδύνουXκαι ένα επίπεδο πιθανότηταςpστο$(0,1)$,το αντίστοιχο VaR, συμβολίζεται με $VaR[X;p]$ και ορίζεται ως:

$$VaR[X;p] = F^{-1}(p). \quad (2.20)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το VaR πάντα υπάρχει και εκφράζεται στην κατάλληλη μονάδα μέτρησης, δηλαδή σε χαμένα χρήματα. Θα καταφύγουμε συχνά στην ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας , η οποία ισχύει για όλα τα pστο $(0,1)$:

$$VaR[X;p] \leqslant x \Leftrightarrow p \leqslant F(x). \quad (2.21)$$

2.7.1 Κυριότερες ιδιότητες του VaR

Οι κυριότερες ιδιότητες του VaRως μέτρο κινδύνου είναι οι εξής:

1. Το VaRδεν εμφανίζει υπερβολικό περιθώριο κέρδους,

$$X \leqslant max[X] \Rightarrow VaR[X;p] \leqslant max[X] \forall p.$$

Επομένως, είναι μικρότερο από την μέγιστη δυνατή ζημία και δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

2. Το VaRείναι προσθετικό ως προς μία σταθεράc,

$$VaR[X+c,p] = VaR[X,p] + c.$$

3. Το VaRείναι θετικά ομοιογενές,

$$VaR[cX,p] = cVaR[X,p].$$

4. Το VaRδεν προκαλεί υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

$$VaR[c,p] = c \forall p > 0.$$

5. Το VaRείναι αύξουσα συνάρτηση.

6. Το VaRείναι μια βέλτιστη κεφαλαιακή απαίτηση για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

2.7.2 Αξία σε κίνδυνο (με βάση το οικονομικό κεφάλαιο)

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών κεφαλαίων βασίζεται στο VaR.Αν το Sδηλώνει το σύνολο των απαιτήσεων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου για μια δεδομένη περίοδο αναφοράς και το Pδηλώνει το συνολικό ασφάλιστρο για αυτό το χαρτοφυλάκιο, τότε το $VaR[S;p]-P$είναι το μικρότερο ποσό πρόσθετων κεφαλαίων που απαιτείται, ώστε η εταιρεία να είναι τεχνικά αφερέγγυα με μια μικρή πιθανότητα, το πολύ $1-p$.
Συγκεκριμένα, για ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης p, το VaR με βάση το οικονομικό κεφάλαιο ορίζεται ως:

$$EC[S;p] = VaR[S;p] - E[S]. \tag{2.22}$$

Για παράδειγμα, εάν το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι ρυθμισμένο σε$p = 99.98\%$ το $EC[S;p]$θα είναι επαρκές για την κάλυψη μη αναμενόμενων ζημιών στα9998από τα 10000 χρόνια.

Κεφάλαιο 3

3.1 Διεξαγωγή έρευνας και παράθεση αποτελεσμάτων

Το παρακάτω ερωτηματολόγιο μοιράστηκε σε 50 μαθητές (25 αγόρια, 25 κορίτσια) ηλικίας 17-18 ετών. Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε, αφού οι μαθητές είχαν ολοκληρώσει την ύλη. Το 30% των μαθητών είναι θετικής κατεύθυνσης, το 50% τεχνολογικής κατεύθυνσης και το 20% θεωρητικής κατεύθυνσης. Οι μαθητές που έλαβαν μέρος όφειλαν να ασχοληθούν με το ερωτηματολόγιο για 3 ώρες (κανένα ερωτηματολόγιο δεν έγινε δεκτό πριν τις 3 ώρες). Τα ερωτηματολόγια για αξιοκρατικούς λόγους απαντήθηκαν ανώνυμα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Άσκηση 1 (πανελλήνιες 2016)

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		ν_4
ΣΥΝΟΛΟ		ν=………

Να αποδείξετε ότι $c=4$.

Μονάδες 4

Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}=14$, να αποδείξετε ότι $\nu_4=5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s=4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

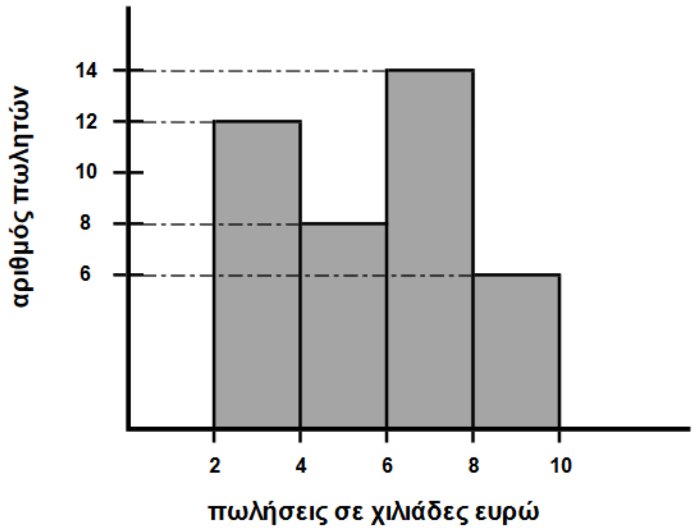
Μονάδες 6

Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

Άσκηση 2 (πανελλήνιες 2014)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



B1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

Μονάδες 5

B2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες f_i, $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
[· , ·)			
[· , ·)			
[· , ·)			
[· , ·)			
Σύνολο			

Μονάδες 8

B3. **α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

(μονάδες 6)

β) Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Άσκηση 3 (πανελλήνιες 2014)

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι $P(K) = x_1$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(A) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ με } \ x_1 < x_2$$

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(K)$, $P(A)$ και $P(\Pi)$, όπου $P(\Pi)$ η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

Μονάδες 10

Γ2. Αν $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»

Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»

Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

Μονάδες 9

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

Μονάδες 6

Άσκηση 4 (πανελλήνιες 2013)

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$

  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$

Μονάδες 4

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Δίνεται ότι $f_1 = 0{,}1$, $f_2 = 0{,}3$, $f_3 = 0{,}2$ και $f_4 = 0{,}4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 7

Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $\kappa < \nu$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

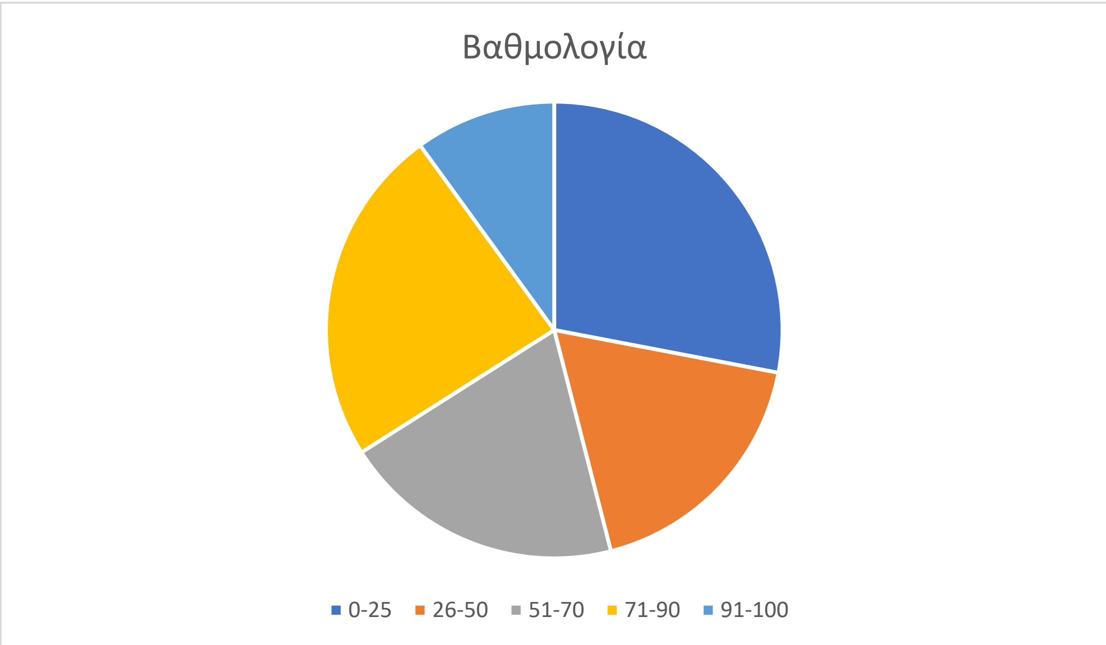
Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

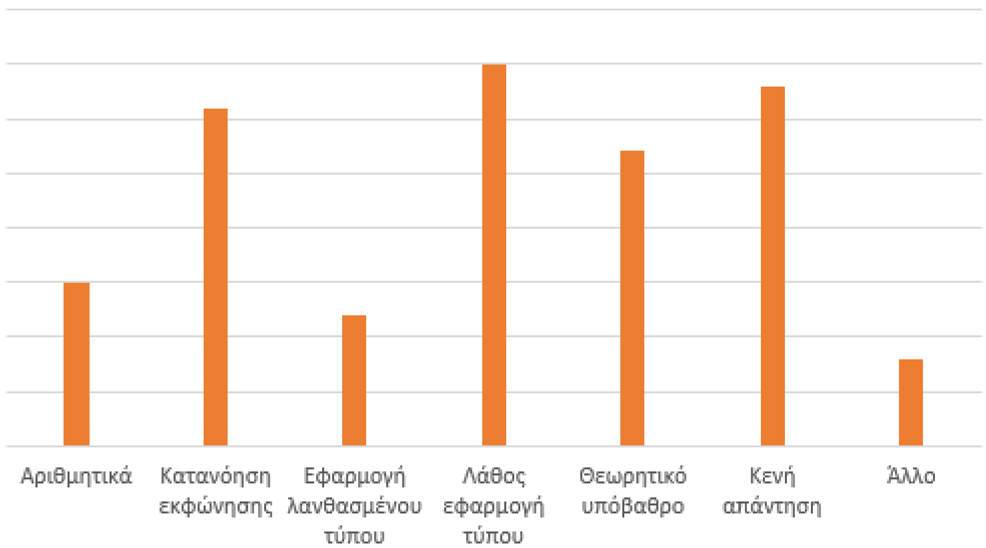
3.2 Παράθεση αποτελεσμάτων

Το ερωτηματολόγιο αθροίζει στις 100 μονάδες.

Μονάδες	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
0-25	14	28%
26-50	9	18%
51-70	10	20%
71-90	12	24%
91-100	5	10%

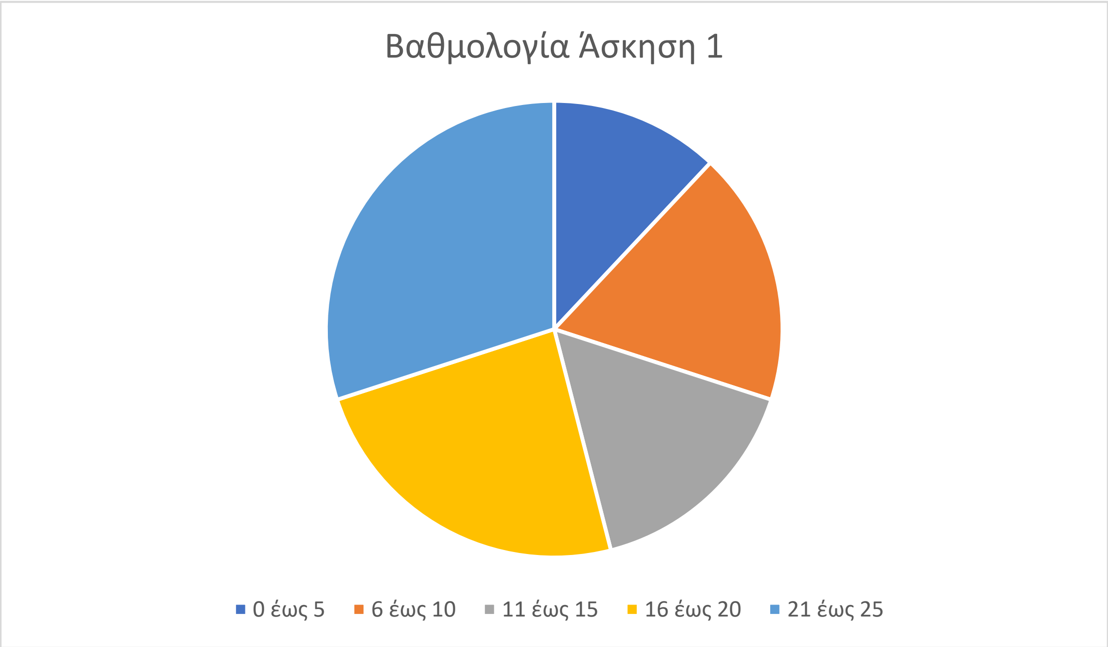


Κατηγορία λαθών	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
Αριθμητικά	15	30%
Κατανόηση εκφώνησης	31	62%
Εφαρμογή λανθασμένου τύπου	12	24%
Λάθος εφαρμογή τύπου	35	70%
Θεωρητικό υπόβαθρο	27	54%
Κενή απάντηση	33	66%
Άλλο	8	16%



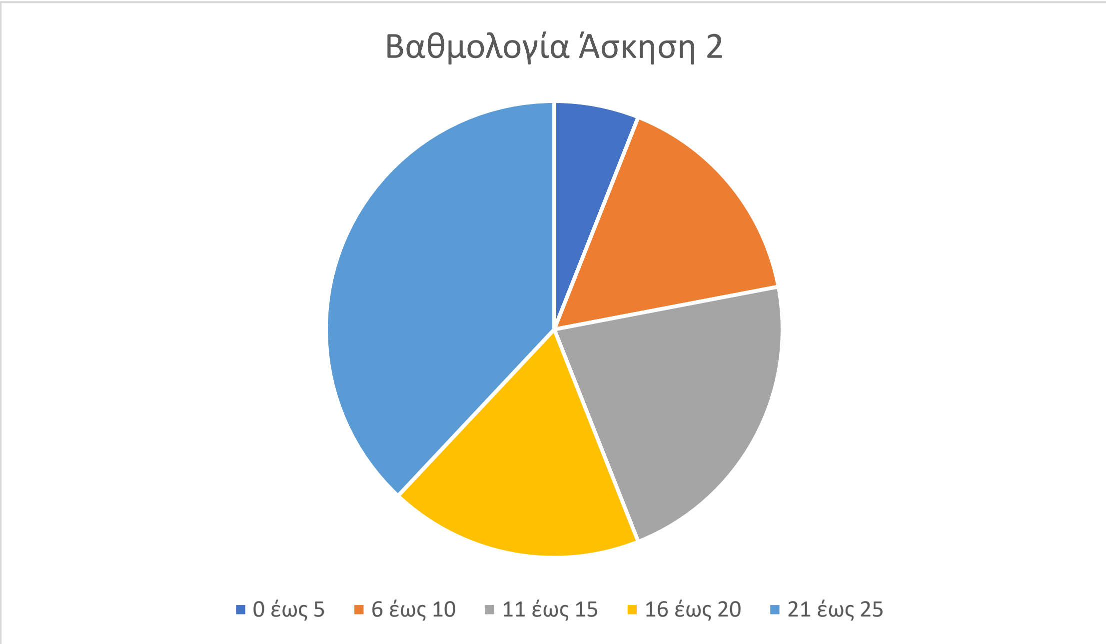
Βαθμολογία Άσκηση 1

Μονάδες	Μαθητές	Ποσοστό
0-5	6	12%
6-10	9	18%
11-15	8	16%
16-20	12	24%
21-25	15	30%



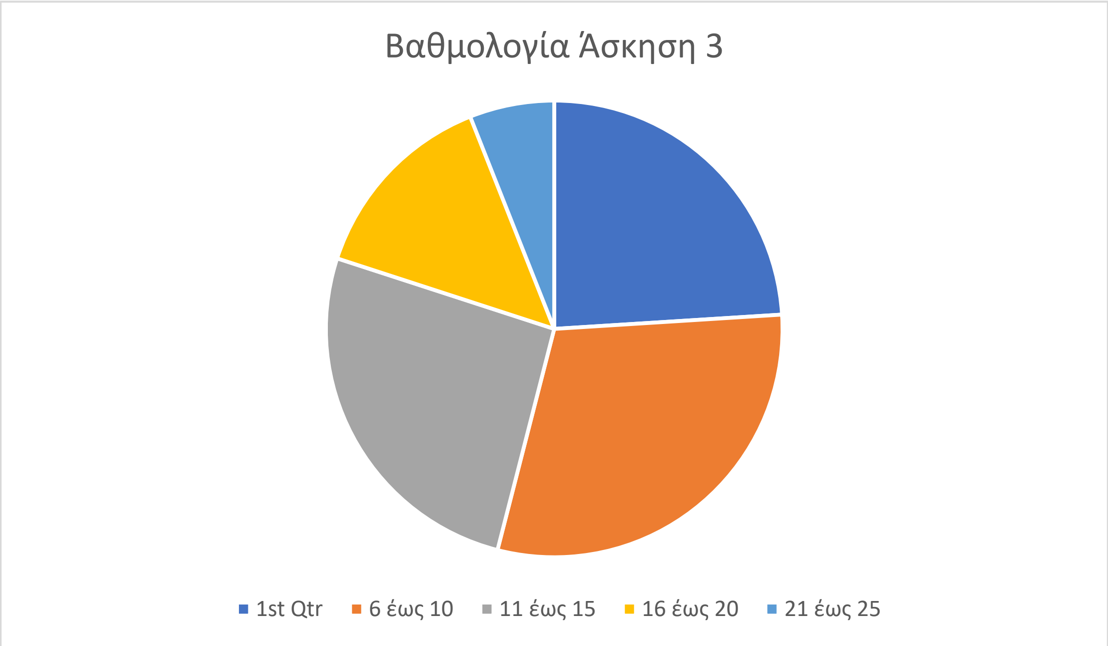
<u>Βαθμολογία Άσκηση 2</u>

Μονάδες	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
0-5	3	6%
6-10	8	16%
11-15	11	22%
16-20	9	18%
21-25	19	38%



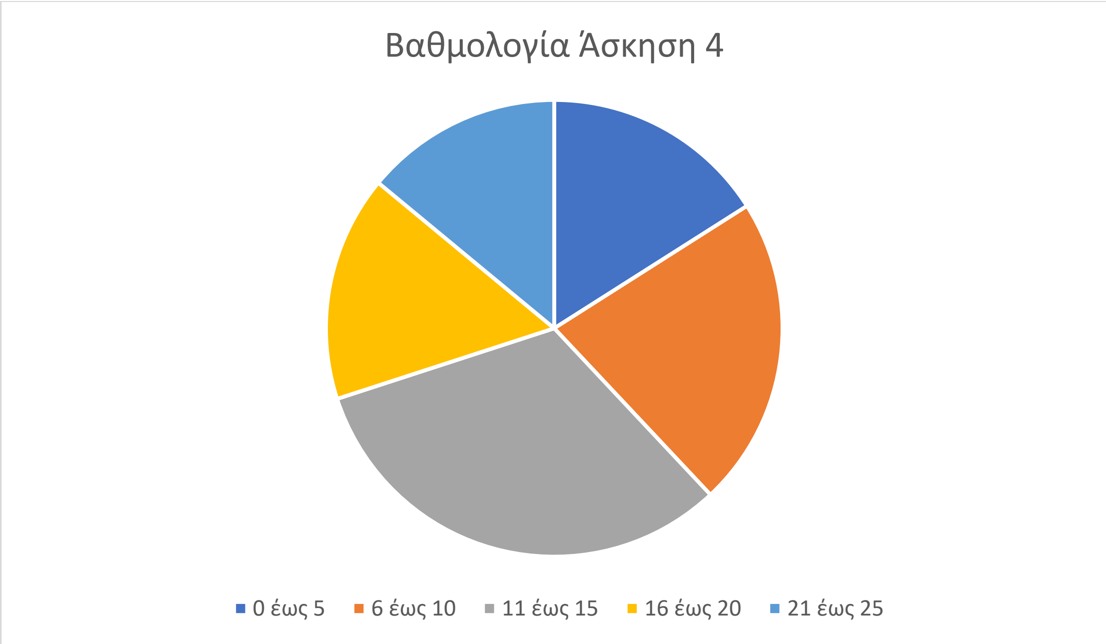
<u>Βαθμολογία Άσκηση 3</u>

Μονάδες	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
0-5	12	24%
6-10	15	30%
11-15	13	26%
16-20	7	14%
21-25	3	6%



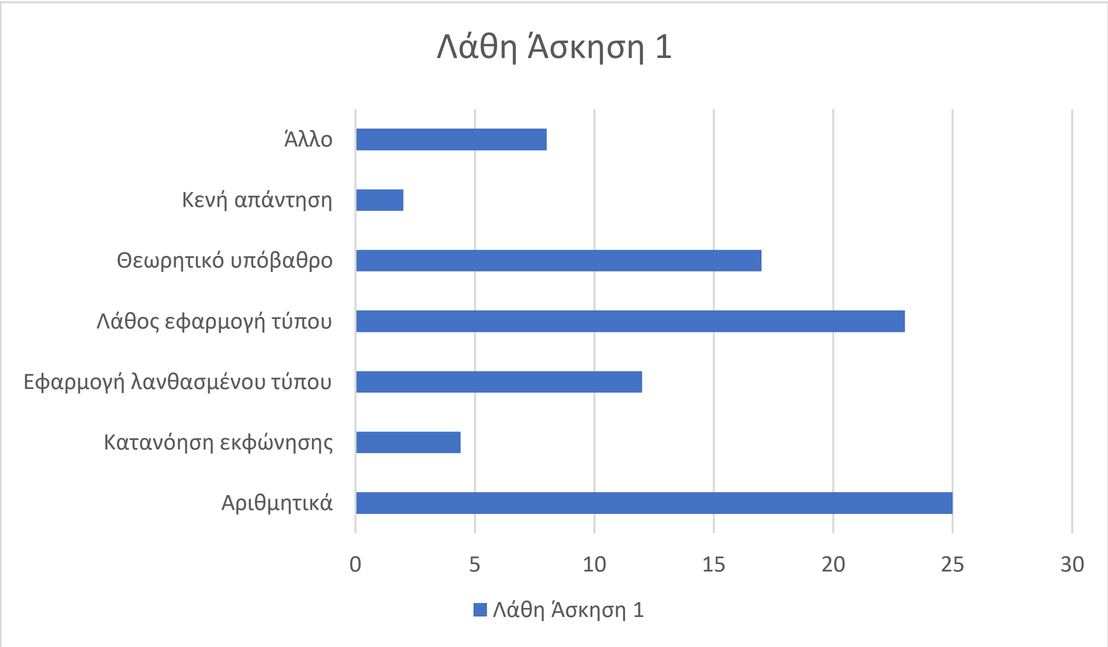
Βαθμολογία Άσκηση 4

Μονάδες	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
0-5	8	16%
6-10	11	22%
11-15	16	32%
16-20	8	16%
21-25	7	14%



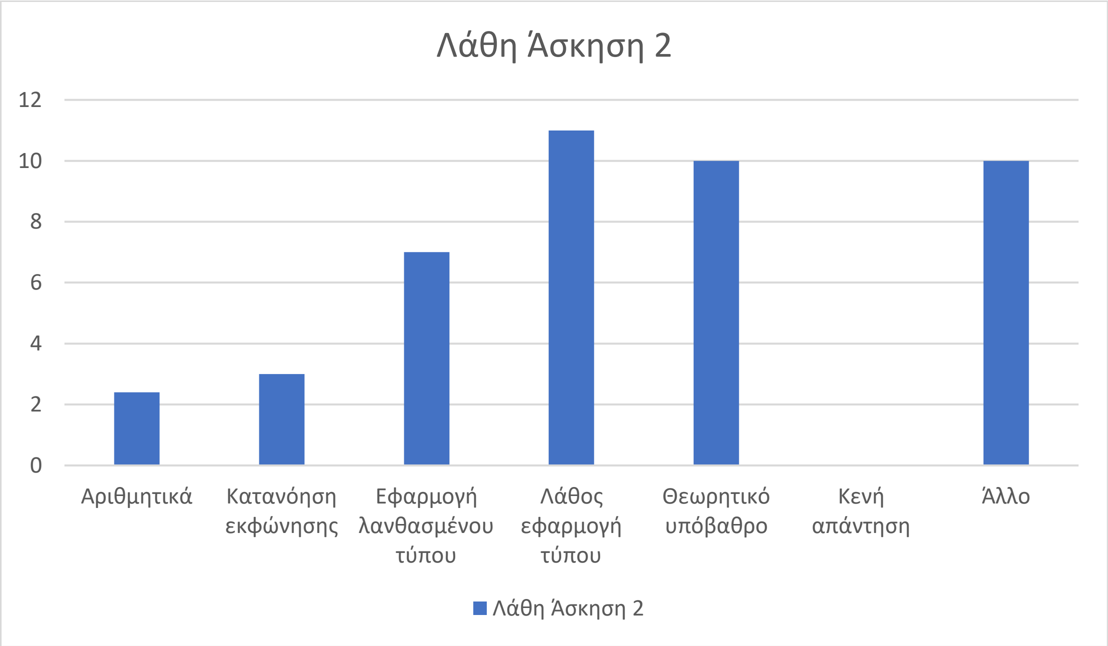
Λάθη Άσκηση 1

Κατηγορία λαθών	Μαθητές	Ποσοστό
Αριθμητικά	25	50%
Κατανόηση εκφώνησης	7	14%
Εφαρμογή λανθασμένου τύπου	12	24%
Λάθος εφαρμογή τύπου	23	46%
Θεωρητικό υπόβαθρο	17	34%
Κενή απάντηση	2	4%
Άλλο	8	16%



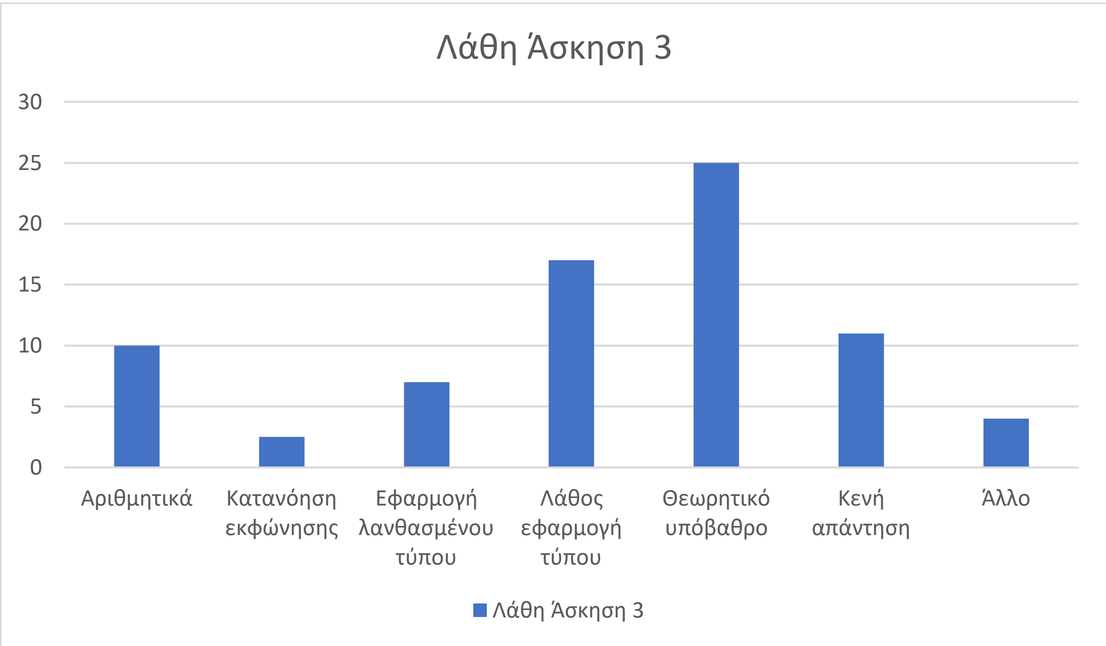
Λάθη Άσκηση 2

Κατηγορία λαθών	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
Αριθμητικά	16	32%
Κατανόηση εκφώνησης	3	6%
Εφαρμογή λανθασμένου τύπου	7	14%
Λάθος εφαρμογή τύπου	11	22%
Θεωρητικό υπόβαθρο	10	20%
Κενή απάντηση	0	0%
Άλλο	10	20%



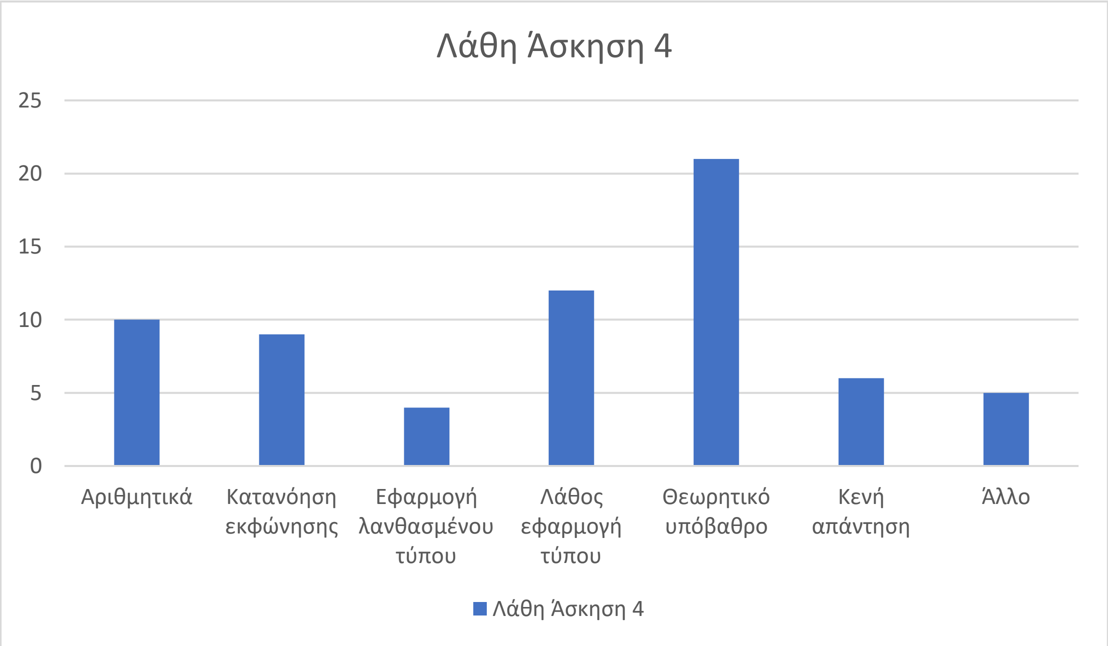
Λάθη Άσκηση 3

Κατηγορία λαθών	**Μαθητές**	**Ποσοστό**
Αριθμητικά	10	20%
Κατανόηση εκφώνησης	21	42%
Εφαρμογή λανθασμένου τύπου	7	14%
Λάθος εφαρμογή τύπου	17	34%
Θεωρητικό υπόβαθρο	25	50%
Κενή απάντηση	11	22%
Άλλο	4	8%



Λάθη Άσκηση 4

Κατηγορία λαθών	Μαθητές	Ποσοστό
Αριθμητικά	10	20%
Κατανόηση εκφώνησης	9	18%
Εφαρμογή λανθασμένου τύπου	4	8%
Λάθος εφαρμογή τύπου	12	24%
Θεωρητικό υπόβαθρο	21	42%
Κενή απάντηση	6	12%
Άλλο	5	10%



Κεφάλαιο 4

Παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών

Η σχολική επίδοση, άμεσα συνυφασμένη με τη βαθμολογία, έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών με στόχο να φανεί ποια είναι η ψυχολογία των μαθητών ανάλογα με την επίδοση αλλά και να εξηγηθεί ο σχολικός αποκλεισμός και η διαρροή φοίτησης.

Η έρευνα των Akiba et al. (2002), σημειώνει ότι οι βίαιες και αντισχολικές συμπεριφορές είναι αποτέλεσμα της εικόνας του αποτυχημένου που έχουν τα παιδιά με κακές επιδόσεις. Ο παράγοντας βαθμολογία σε ορισμένη στιγμή και για συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα προδιαγράφει τη μελλοντική βαθμολογία, καθώς χωρίς την αίσθηση επιτυχίας απλώς επιβεβαιώνεται η αποτυχία και προοδεύουν μόνο οι ορισμένοι που έχουν υψηλές επιδόσεις. Αξιοσημείωτο είναι, ότι οι χαμηλοί βαθμοί μπορούν να προκαλέσουν την εγκατάλειψη του σχολείου. Αναφορικά με την εγκατάλειψη, οι Κάτσικας και Καββαδίας μιλούν για συσσωρευμένη κακή επίδοση που οδηγεί τα παιδιά να παραιτηθούν και να απορρίψουν το σχολείο εφόσον τους κάνει να νιώθουν απορριπτέα. Ακόμη, έρευνες στην Ελλάδα έδειξαν ότι ήδη από το Δημοτικό οι κακές επιδόσεις είναι η κύρια αιτία της σχολικής διαρροής (βλέπε Τουρτούρας, Χ. (2010)).

Η σχολική επίδοση ενός μαθητή ορίζεται ως η αξιολόγηση της απόδοσης του σε σχέση με την εκπαιδευτική διαδικασία. Επομένως επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες που εμπλέκονται στην εκπαιδευτική πράξη, αλλά και στη γενικότερη διάπλαση της προσωπικότητας του παιδιού. Αρκετοί μαθητές παρουσιάζουν χαμηλή σχολική επίδοση και οι γονείς τους τις περισσότερες φορές αποδίδουν την αποτυχία του παιδιού τους σε «τεμπελιά» ή σε γενικότερη αδυναμία στα μαθήματα. Η πραγματικότητα όμως σίγουρα βρίσκεται σε βαθύτερα αίτια.

4.1 Παράγοντες της σχολικής επίδοσης στο σχολείο

Η σχολική επίδοση είναι αποτέλεσμα τριών παραγόντων: α) κοινωνικοοικονομικών, β) κοινωνικοπολιτισμικών και γ) του τρόπου διαπαιδαγώγησης των γονέων απέναντι στα παιδιά τους (βλέπε Γεωργογιάννης, Π., (2008)). Οι παράγοντες , ωστόσο, που σχετίζονται με τη σχολική επίδοση είναι πολλοί, όπως προκύπτει από την ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, γεγονός που δεν μας επιτρέπει να έχουμε μια ξεκάθαρη και καθοριστική εικόνα για αυτούς. Οι παράγοντες που επηρεάζουν τη σχολική επίδοση ποικίλλουν. Ορισμένοι από αυτούς είναι: «το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο της οικογένειας, η ηλικία, οι συνεχείς μετακινήσεις και αλλαγές σχολείων, το μορφωτικό επίπεδο των γονέων, η μετανάστευση και η χώρα προέλευσης, το φύλο, το είδος του σχολείου και η γεωγραφική τοποθεσία όπου στεγάζεται αυτό και η γλώσσα». Σημειώνουμε σε αυτούς και τη συσχέτιση επίδοσης με το αυτοσυναίσθημα. Το σχολείο και η οικογένεια πρέπει να αναζητούν τρόπους για να βοηθούν το μαθητή να αναπτύσσει θετικό αυτοσυναίσθημα για τις ικανότητές του ώστε να αυξάνει την επίδοσή του. Το υψηλό αυτοσυναίσθημα έχει ως αποτέλεσμα υψηλές βαθμολογίες και το χαμηλό αυτοσυναίσθημα χαμηλές βαθμολογίες αντίστοιχα. Παρακάτω γίνεται μία προσπάθεια διαχωρισμού των παραγόντων που επιδρούν στη σχολική επίδοση, σε εσωτερικούς και εξωτερικούς, οι οποίοι είτε αφορούν κατά κύριο λόγο τους αλλοδαπούς είτε αλλοδαπούς και γηγενείς μαθητές συγχρόνως. Όλοι αυτοί οι παράγοντες επηρεάζουν τη σχολική πορεία τόσο των γηγενών όσο και των πολιτισμικά διαφορετικών μαθητών.

4.2 Εσωτερικοί παράγοντες που επιδρούν στη σχολική επίδοση

Ορισμένες παιδαγωγικές προσεγγίσεις υποθέτουν ότι ο δρόμος προς την επίδοση περνά μέσα από τη σχέση εκπαιδευτικού -μαθητή και ότι η σχέση αυτή είναι θετική για το μαθητή. Ωστόσο, όσο αφορά την επίδοση,δεν είναι μόνο ο δάσκαλος εκείνος που μπορεί να διαδραματίσει κάποιο ρόλο στην επίδοση του μαθητή.

Σε ένα εποικοδομητικό σχολείο χαρακτηρισμοί όπως «αδιάφορη» συμπεριφορά και «χαμηλή» μαθηματική επίδοση καλούνται να λάβουν προεκτάσεις, οι ενέργειες καλούνται να νοηματοδοτηθούν, η επίμονη «μη συμμετοχή» των μαθητών καλείται να σημασιοδοτηθεί. Γενικά, ο καθηγητής και οι μαθητές, παρ' όλο που ως φυσική παρουσία βρίσκονται στον ίδιο χώρο και μετέχουν του ίδιου μαθήματος, σε ορισμένες περιπτώσεις δείχνουν να συμμετέχουν σε διαφορετικές δραστηριότητες, να έχουν διαφορετικά κίνητρα. Απ' τη μία, το γενικό κίνητρο του καθηγητή – όπως τουλάχιστον εξάγεται από άτυπες συζητήσεις – φαίνεται να συνοψίζεται στο «να διδαχτούν οι μαθητές τα μαθηματικά μ' ένα τρόπο που να έχει νόημα». Οι ενέργειες του εκπαιδευτικού και οι μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες προσπαθεί να εμπλέξει τους μαθητές του φαίνεται να εξυπηρετούν απόλυτα το στόχο της βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Απ' την άλλη όμως, τα κίνητρα των μαθητών συνήθως είναι εκ διαμέτρου αντίθετα. Έχοντας βιώσει μια συνεχιζόμενη μαθηματική αποτυχία, έχουν διδαχτεί ότι η ενεργός συμμετοχή δε συνοδεύεται από καλά αποτελέσματα. Έτσι, αποφεύγουν τη μαθηματική εμπλοκή. Επιλέγουν τη «μη συμμετοχή» παρά την αποκάλυψη των όποιων ανεπαρκειών και παρανοήσεων. Ανοίγοντας το πλαίσιο έξω απ' τους τοίχους της τάξης, διαπιστώνουμε ότι πέραν της μαθητικής τους ταυτότητας, οι μαθητές φέρουν ένα σωρό άλλες ταυτότητες. Ανήκουν σε κάποιες φιλικές ομάδες, παρέες. Προέρχονται από συγκεκριμένα οικογενειακά περιβάλλοντα, έχουν μια συγκεκριμένη κοινωνική τοποθέτηση. Έχουν προσωπικές ανάγκες, προσωπικές προτεραιότητες, προσωπικά σχέδια για το μέλλον. Οι πολλαπλές αυτές ταυτότητες δείχνουν να επηρεάζουν τη μαθηματική τους παρουσία. Εισέρχονται μαζί με τους μαθητές στην τάξη των μαθηματικών, κάθονται δίπλα τους στο θρανίο και συμβάλλουν ή αναστέλλουν τη μαθηματική τους πρόοδο. Αυτό που ονομάζουμε «μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών» είναι μια διαδικασία που σαφώς χαρακτηρίζεται από μεγάλη πολυπλοκότητα. Ακόμα όμως κι όταν η πόρτα της τάξης είναι ερμητικά κλειστή φαίνεται ότι οι ευρύτεροι παράγοντες που την επηρεάζουν, υπεισέρχονται και διαχέονται στην αίθουσα.

4.2.1 Το είδος του σχολείου και η γεωγραφική του τοποθεσία

Αρχικά, πρέπει να αναφέρουμε ότι η μορφή και η δομή του σημερινού σχολείου είναι καθοριστικήγια την πορεία όλων το μαθητών μέσα σε αυτό. Καθώς το σχολείο προσφέρει τυποποιημένη γνώση, είναι απαιτητικό και έχει ένα σύστημα αξιολόγησης που βασίζεται στις κυρίαρχες κοινωνικές ιδεολογίες, δεν μπορεί να βοηθήσει εξίσου όλα τα παιδιά. Το σχολείο φαίνεται να ακολουθεί τους κοινωνικούς - ταξικούς διαχωρισμούς, αποκλείοντας από τη διαδικασία του τους γονείς που ανήκουν στα χαμηλότερα κοινωνικοοικονομικά στρώματα, παρέχοντας άνισες ευκαιρίες ενισχύοντας την κοινωνική και ταξική αναπαραγωγή. Έρευνες δείχνουν ότι τα σχολεία που φοιτούν μόνο μαθητές μεσαίων και ανώτερων κοινωνικών τάξεων είναι σχολεία πλούσιων περιοχών, ελιτίστικου χαρακτήρα που αποτελούν πρότυπα. Ενώ, τα αναποτελεσματικά σχολεία εμφανίζονται στις χαμηλές κοινωνικοοικονομικά περιοχές με τα σχολεία αγροτικών περιοχών να έχουν μαθητές χαμηλών επιδόσεων και στη γλώσσα και στα μαθηματικά. Οι ευκαιρίες για μάθηση λοιπόν, βρίσκονται μάλλον στα σχολεία αστικών και ημιαστικών περιοχών παρά σε αγροτικά. Σε σχετική έρευνα που έχει γίνει με σκοπό να εξεταστεί η κατανομή της επίδοσης στη χώρα μας, παρατηρήθηκαν διαφορές στην επίδοση στα Μαθηματικά της Β’ τάξης του Γυμνασίου, ανάλογα με τις περιοχές και τα είδη οικισμού που βρισκόταν το σχολείο. Φάνηκε ότι, η ανακατανομή της επίδοσης ακολουθεί την κοινωνική και πολιτισμική ανισότητα. Έτσι, υψηλό μέσο όρο επίδοσης είχαν οι μαθητές των βορείων και ανατολικών προαστίων της Αθήνας. Ενώ, χαμηλότερο μέσο όρο επίδοσης είχαν οι μαθητές των δυτικών προαστίων που είναι λίγο καλύτερος από εκείνον των μεγάλων χωριών. Στα μικρά χωριά φαίνεται να είναι αρκετά χαμηλότερος. Σε σχετική έρευνα που πραγματοποιήθηκε οι μαθητές των σχολείων της Α' Αθήνας εμφανίζουν περισσότερο θετικά αισθήματα και περισσότερο θετικές αντιλήψεις για τις γνωστικές ικανότητες στα Μαθηματικά από τους μαθητές της Γ’ Αθήνας. Δεν προκύπτουν γεωγραφικές περιοχές με διαφορές των μαθητών ως προς τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην εργασία. Οι μαθητές και των τεσσάρων διευθύνσεων έχουν παρόμοιες απόψεις όσον αφορά την γενικότερη αξία και δυσκολία των Μαθηματικών.

Επίσης, καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει και ο εκπαιδευτικός. Πολλές έρευνες έχουν δείξει τη σημασία των προκαταλήψεων, των στερεοτύπων και των προσδοκιών που έχουν οι εκπαιδευτικοί. Συνήθως, οι πολιτισμικά διαφορετικές ομάδες μαθητών, καθώς και οι προερχόμενοι από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα είναι αποδέκτες των χαμηλών προσδοκιών που έχουν οι δάσκαλοι για αυτούς. Οι προσδοκίες αυτές αφορούν στις ικανότητες και τις δυνατότητες των μαθητών για την επίδοση. Όταν είναι αρνητικές, συνοδεύονται από αρνητικές στάσεις και συμπεριφορές εκ μέρους των δασκάλων και έχουν αντίκτυπο στις επιδόσεις και στη μελλοντική πορεία των μαθητών (βλέπε Τουρτούρας Χ. (2010)). «Έχει αποδειχθεί το γεγονός, ότι οι χαμηλές προσδοκίες των δασκάλων για τις δυνατότητες επιτυχίας κάποιων παιδιών - που συνήθως προέρχονται από κατώτερα κοινωνικοοικονομικά στρώματα ή είναι γλωσσικά και πολιτισμικά διαφορετικά παιδιά-διαμορφώνουν την περαιτέρω αρνητική τους στάση προς αυτά». Επίσης, «η επαγγελματική, κοινωνική και μορφωτική θέση, καθώς και οι στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών» επιδρούν στη σχολική επίδοση. Σημαντική είναι η συμβολή του δασκάλου στην επίδοση των μαθητών και ο τρόπος διδασκαλίας αποτελεί την άμεση απόδειξη από μέρους του ότι προσπαθεί να συνεισφέρει προς μια θετική κατεύθυνση. Έτσι, αναφορικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, οι Renga και Dalla υποστηρίζουν ότι προκειμένου οι δάσκαλοι να βοηθήσουν τους μαθητές, μεταξύ άλλων, πρέπει να είναι ενθουσιώδεις, να προσεγγίζουν με ενεργητικό τρόπο τις μαθηματικές έννοιες και να προγραμματίζουν τη διδασκαλία τους γνωρίζοντας τα ιδιαίτερα ενδιαφέροντα των μαθητών τους.

4.2.2 Ο τρόπος αξιολόγησης

Η αξιολόγηση κρίνεται από πολλούς ερευνητές ως ένας παράγοντας σχολικής αποτυχίας για πολλά παιδιά, αν και αυτή έχει υιοθετηθεί από πολλά δυτικά εκπαιδευτικά συστήματα. Με την αξιολόγηση εννοούμε τη μέτρηση τις επίδοσης του μαθητή δηλαδή, του βαθμού κατάκτησης των παρεχόμενων γνώσεων που αντιστοιχίζεται με ένα βαθμό ή ένα γράμμα. Ο βαθμός αυτός δεν μας παρέχει κάποιες ιδιαίτερες πληροφορίες απλά ενισχύει τη λογική του σχολείου να ιεραρχεί και να κατατάσσει το μαθητικό κοινό. Η βαθμολογία είναι η λιγότερο έγκυρη μέθοδος αξιολόγησης της σχολικής επίδοσης, η οποία στη χώρα μας έχει ταυτιστεί με την επίδοση (βλέπε Κοντογιαννοπούλου κ.α. (2000)). Σκοπός της αξιολόγησης είναι να φανερώνονται, τόσο όλες οι ικανότητες των διαφόρων μαθητών όσο και οι διάφορες πλευρές της μάθησης και της διδασκαλίας. Οι εξετάσεις μορφής δοκιμίου, που ακολουθεί το ελληνικό σχολείο, δεν δίνουν αυτές τις πληροφορίες. Αντιθέτως, δίνουν μια πλασματική εικόνα προσέγγισης, μέσω της δημιουργίας, στη μάθηση και την αξιολόγηση. Στην πραγματικότητα, αυτό που παρατηρείται στο ελληνικό σχολείο είναι η εξάρτηση μάθησης και αποστήθισης, η εξάρτηση τυποποιημένης βαθμολόγησης και αποστήθισης, και τέλος, ο υπολογισμός της μάθησης με αριθμούς.

4.3 Εξωτερικοί παράγοντες που επιδρούν στη σχολική επίδοση

4.3.1 Το κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο οικογένειας

Οι οικονομικοί λόγοι συνδέονται στενά με την εκπαιδευτική επιτυχία. Θα λέγαμε ότι η ισότητα που υπάρχει ως προς τη δυνατότητα που δίνεται σε όλους για εκπαίδευση δεν έχει μετατραπεί σε ισότητα ως προς το αποτέλεσμα που προκύπτει από αυτή την ευκαιρία. Η κοινωνική θέση και η ανισότητα μεταξύ των οικογενειών, από τις οποίες προέρχονται οι μαθητές, δημιουργεί και ανισότητα επιδόσεων στο σχολείο. Μαθητές προερχόμενοι από μειονοτική κοινωνική ομάδα, δεν έχουν την ίδια πρόσβαση στις γνώσεις με μαθητές που ανήκουν στην κυρίαρχη εθνική ομάδα. Η διαφορά με την κυρίαρχη ομάδα φαίνεται ακόμη και από τα υλικά αγαθά που υπάρχουν στο σπίτι τους, που αποτελούν δείκτες της κοινωνικοικονομικής κατάστασης των οικογενειών τους.

Οι ομάδες πληθυσμού με χαμηλό οικονομικό επίπεδο έχουν λιγότερες δυνατότητες σε δημόσια και κοινωνικά αγαθά,συμπεριλαμβανομένου και του αγαθού της εκπαίδευσης, με αποτέλεσμα να αποκλείονται κοινωνικά. Τα παιδιά των ομάδων αυτών τυγχάνουν άνισων ευκαιριών στο σχολείο,αποκλείονται από την εκπαίδευση ή ακόμα και περιθωριοποιούνται μέσα στο σχολείο. Όπως έχει δειχθεί ερευνητικά, οι μαθητές προερχόμενοι από χαμηλά κοινωνικά στρώματα βιώνουν την σχολική αποτυχία ως αποτέλεσμα διαφόρων ειδών στερήσεων που σχετίζονται με υλικά αγαθά και καλές συνθήκες διαβίωσης για αυτούς και τις οικογένειές τους. Σε αυτές τις ομάδες ανήκουν τα παιδιά αγροτών, εργατών, ανέργων, μεταναστών και τα παιδιά που ζουν μακριά από κάποιο αστικό κέντρο (βλέπε Edwards, V. (1998)).

Στις οικογένειες αυτές, μπορεί να λείπουν κάποια αγαθά που υπάρχουν σε άλλα νοικοκυριά, άλλα πιο άμεσα συσχετιζόμενα με την επίδοση και άλλα λιγότερο. Στα τελευταία ανήκουν υλικά αγαθά όπως, το αυτοκίνητο και η θέρμανση πράγματα που υποδηλώνουν την οικονομική κατάσταση της οικογένειας. Ενώ, το γραφείο, το λεξικό, η αριθμομηχανή, η βιβλιοθήκη και ιδιαίτερα ο αριθμός βιβλίων που υπάρχουν στο σπίτι υποδηλώνουν την κοινωνικοοικονομική κατάσταση της οικογένειας, αλλά και το ενδιαφέρον που έχει η οικογένεια για τη μελέτη του παιδιού. Ακόμα, είναι σημαντικό το επάγγελμα των γονιών του μαθητή. Οι μαθητές των οποίων ο πατέρας ασκεί το επάγγελμα του στελέχους επιχείρησης, του εκπαιδευτικού, του στρατιωτικού – αστυνομικού, του γιατρού ή του ελεύθερου επαγγελματία – επιστήμονα, έχουν περισσότερο θετικά αισθήματα και περισσότερο θετικές αντιλήψεις για τις γνωστικές ικανότητες στα Μαθηματικά από τους μαθητές των οποίων ο πατέρας ασκεί το επάγγελμα του οικοδόμου. Την ίδια στάση έχουν και οι μαθητές των οποίων ο πατέρας είναι στέλεχος επιχείρησης ή εκπαιδευτικός έναντι των μαθητών των οποίων ο πατέρας ασκεί το επάγγελμα του τεχνίτη. Το επάγγελμα του πατέρα δεν επιδρά στις αντιλήψεις των μαθητών για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στην εργασία. Το επάγγελμα του πατέρα δεν επιδρά στις αντιλήψεις των μαθητών για την γενικότερη αξία των Μαθηματικών. Το επάγγελμα του πατέρα δεν επιδρά στις αντιλήψεις των μαθητών για τη δυσκολία των Μαθηματικών.

4.3.2 Το μορφωτικό επίπεδο των γονέων

Η σχολική επίδοση είναι ανάλογη του μορφωτικού επιπέδου των γονέων. Πιο συγκεκριμένα, όσο καλύτερο είναι το μορφωτικό τους επίπεδο τόσο καλύτερες είναι οι επιδόσεις των παιδιών τους και αντίστροφα. Μάλιστα, τα προερχόμενα από υψηλό γονεϊκό μορφωτικό επίπεδο σημειώνουν καλές επιδόσεις τόσο σε γραφή, ανάγνωση αλλά και στα μαθηματικά. Με τη σειρά τους επηρεάζονται το λεξιλόγιό τους και η πληρότητα της γλωσσικής έκφρασης, όλοι παράγοντες που διαμορφώνουν τη σχολική επιτυχία. Ακόμη, ανάμεσα σε οικονομικά ισοδύναμες ομάδες, μόνο το μορφωτικό και πολιτιστικό τους επίπεδο μπορεί να τις διαφοροποιήσει αν και τίθεται υπό αμφισβήτηση το αν είναι ισχυρότερο από το κοινωνικοικονομικό επίπεδο. Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι το μορφωτικό επίπεδο είναι μια υποκατηγορία του κοινωνικοοικονομικού. Πάντως, το τελευταίο δεν είναι καθοριστικός και μοναδικός παράγοντας για την επίδοση, καθώς η έρευνα του Coleman έδειξε πως παιδιά με ίδια κοινωνικοοικονομικά χαρακτηριστικά στις οικογένειές τους διέφεραν στις σχολικές επιδόσεις τους. Ωστόσο, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ερευνών οι οποίες δείχνουν ότι υπάρχει συνάφεια μεταξύ του επιπέδου της εκπαίδευσης των γονέων, της επίδοσης και της σχολικής επιτυχίας. Αυτό το γεγονός της μεταξύ των σχέσης, επιβεβαιώνεται σε όλες τις χώρες. Όμως, πρέπει να σημειωθεί ότι στην Ελλάδα, σε αντίθεση με άλλες Ευρωπαϊκές χώρες, στις περιπτώσεις όπου οι γονείς των μαθητών έχουν πανεπιστημιακή εκπαίδευση τότε, εξαιτίας αυτής, δίνεται σημαντική ώθηση στην επίδοση των παιδιών τους.

Αναλυτικότερα, οι μαθητές των οποίων η μητέρα ανήκει στο επίπεδο της ανώτατης εκπαίδευσης εμφανίζουν περισσότερο θετικά αισθήματα και περισσότερο θετικές αντιλήψεις για τις γνωστικές ικανότητες στα Μαθηματικά από τους μαθητές των οποίων η μητέρα ανήκει σε χαμηλότερη κατηγορία εκπαίδευσης. Οι μαθητές των οποίων η μητέρα ανήκει στο επίπεδο της ανώτατης εκπαίδευσης εμφανίζουν περισσότερο θετικές αντιλήψεις για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στην εργασία από τους μαθητές των οποίων η μητέρα ανήκει στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Το μορφωτικό επίπεδο της μητέρας δεν επιδρά στις αντιλήψεις του μαθητή για την γενικότερη αξία των Μαθηματικών. Το μορφωτικό επίπεδο της μητέρας δεν επιδρά στις αντιλήψεις του μαθητή για τη δυσκολία των Μαθηματικών.

Οι μαθητές των οποίων ο πατέρας ανήκει στο επίπεδο της ανώτατης εκπαίδευσης εμφανίζουν περισσότερο θετικά αισθήματα και περισσότερο θετικές αντιλήψεις για τις γνωστικές ικανότητες στα Μαθηματικά από τους μαθητές των οποίων ο πατέρας ανήκει σε χαμηλότερη κατηγορία εκπαίδευσης. Οι μαθητές των οποίων ο πατέρας ανήκει στο επίπεδο της ανώτατης εκπαίδευσης εμφανίζουν περισσότερο θετικές αντιλήψεις για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στην εργασία από τους μαθητές των οποίων ο πατέρας ανήκει στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα δεν επιδρά στις αντιλήψεις του μαθητή για την γενικότερη αξία των Μαθηματικών. Το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα δεν επιδρά στις αντιλήψεις του μαθητή για τη δυσκολία των Μαθηματικών.

4.3.3 Το φύλο

Οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ των φύλων είναι γνωστή. Έτσι, τα κορίτσια φαίνεται να μην μένουν στάσιμα στο σχολείο ούτε να απορρίπτονται από αυτό σε σχέση με τα αγόρια, άσχετα με την τάξη φοίτησης. Παρόλα αυτά, υπάρχουν αρκετές προκαταλήψεις απέναντι σε αυτό το φύλο που σκιαγραφούνται στα σχολικά εγχειρίδια και συνοδεύονται από αρνητικές στάσεις και χαμηλές προσδοκίες των δασκάλων. Επιπροσθέτως, τα κορίτσια έχουν την τάση να θεωρούνται καλύτερα σε θεωρητικά- λεκτικά μαθήματα παρά σε πρακτικά, όπως είναι τα Μαθηματικά. Ανάλογες αντιλήψεις εμφανίζονται και μεταξύ μειονοτικών αγοριών και κοριτσιών. Κάποιες έρευνες όμως, στο διεθνή χώρο, δείχνουν ότι δεν υπάρχουν διαφορές στην επίδοση στα Μαθηματικά ανάμεσα στα δύο φύλα και σε ορισμένες περιπτώσεις τα κορίτσια στο Δημοτικό είναι λίγο καλύτερα από τα αγόρια σε αυτό το μάθημα209. Αναφορικά με την επίδοση στα Μαθηματικά της Δ' Δημοτικού, σε σχετική έρευνα, δεν υπάρχουν πολλές στατιστικά σημαντικές διαφορές επίδοσης. Δεν εμφανίζονται ανισότητες στην επίδοση ανάμεσα στα δύο φύλα, τόσο στην Ελλάδα όσο και σε άλλες χώρες. Στις ΗΠΑ, όπου τα τεστ γνωστικών ικανοτήτων είναι καθιερωμένα, παρατηρούνται διαφορές επίδοσης ανάμεσα στα δύο φύλα. Οι δοκιμασίες αυτές εξετάζουν τις ικανότητες σε γλώσσα και αριθμητική, με τους άντρες να έχουν υψηλότερες επιδόσεις στην αριθμητική και τις γυναίκες υψηλότερες στη γλώσσα. Αυτό μπορεί να οφείλεται στη πεποίθηση, που έχουν οι κοινωνίες εκ των προτέρων, ότι ορισμένα πράγματα μπορούν να τα φέρουν εις πέρας μόνο οι γυναίκες και ορισμένα άλλα μόνο οι άντρες αντίστοιχα. Επομένως, όταν τους ανατίθεται ένα έργο, τούτο σημαίνει ότι έχουν τις έμφυτες ικανότητες, ανάλογα με το φύλο τους, για να το ολοκληρώσουν. Θα λέγαμε λοιπόν ότι, έχει προωθηθεί κοινωνικά μία αντίληψη ότι τα αγόρια είναι καλύτερα σε κάποια γνωστικά αντικείμενα από ότι τα κορίτσια και το αντίθετο (βλέπε Κοντογιαννοπούλου κ.α. (2000)). Διαγνωστικά τεστ σε Ευρωπαϊκές χώρες έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα αγόρια εμφανίζουν περισσότερο θετικά αισθήματα και είναι περισσότερο θετικές οι αντιλήψεις τους σχετικά με τις γνωστικές τους ικανότητες στα Μαθηματικά από τα κορίτσια. Τα αγόρια εμφανίζουν περισσότερο θετικές αντιλήψεις για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στην εργασία από τα κορίτσια. Τα κορίτσια εμφανίζουν περισσότερο θετικές αντιλήψεις για την γενικότερη αξία των Μαθηματικών από τα αγόρια.

4.3.4 Η γλώσσα και η κατεύθυνση σπουδών

Ο παράγοντας γλώσσα είναι καθοριστικός για την επιτυχία ή μη των μαθητών που ανήκουν σε μειονότητες και μιλούν διαφορετικές γλώσσες. Ωστόσο, παλιότερες θεωρίες της έδιναν σημαντικό ρόλο για την εξέλιξη των παιδιών που μιλούν την ίδια γλώσσα. Δηλαδή, παρά την ίδια γλωσσική και εθνική προέλευση η γλώσσα ήταν ανασταλτικός παράγοντας εξέλιξης για τα παιδιά κατώτερων κοινωνικοοικονομικών στρωμάτων. Στην περίπτωση διαφορετικής εθνικής προέλευσης, η μητρική γλώσσα δεν συμβαδίζει με την γλώσσα διδασκαλίας ενώ, έχει παρατηρηθεί υποτίμηση της μητρικής και τιμωρίας των παιδιών που χρησιμοποιούν τη μητρική τους. Κάτι τέτοιο μπορεί να οδηγήσει στη σχολική αποτυχία και τον αποκλεισμό. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται στο σπίτι αν δεν συνάδει με τη γλώσσα του σχολείου έχει αντίκτυπο στην επίδοση. Αυτό είναι ένα ζήτημα που δεν αφορά μόνο την εκπαίδευση των αλλόγλωσσων παιδιών αλλά και των παιδιών τα οποία χρησιμοποιούν στο οικογενειακό τους περιβάλλον κάποια διάλεκτο ή έναν άλλο γλωσσικό κώδικα. Η χρήση διαφορετικών γλωσσικών κωδίκων από εκείνον που χρησιμοποιείται στο σχολείο έχει να κάνει με την κοινωνική προέλευση των μαθητών. Άλλωστε, «είναι γνωστή η θέση που ανέπτυξε ο Basil Bernstein για τη σχέση γλωσσικού και γενικότερα επικοινωνιακού κώδικα, που αναπτύσσεται σε οικογένειες διαφορετικής κοινωνικής θέσης, με τη σχολική απόδοση. Το σχολείο υιοθετεί τον κώδικα των ανωτέρων κοινωνικών στρωμάτων και δίνει το προβάδισμα σς παιδιά που προέρχονται από αυτά (Bernstein, 1971)». Οι μαθητές δεν ωφελούνται στη μαθησιακή διαδικασία αν νιώθουν ντροπή για τη γλώσσα τους, απεναντίας ωφελούνται όταν νιώθουν άνεση και σιγουριά. Η κατεύθυνση που επιλέγουν οι μαθητές επίσης εξαρτάται από τις σχολικές τους επιδόσεις. Η θετική κατεύθυνση εμφανίζει περισσότερο θετικά αισθήματα και περισσότερο θετικές αντιλήψεις για τις γνωστικές ικανότητες στα Μαθηματικά από τη θεωρητική και την τεχνολογική. Έπεται η τεχνολογική έναντι της θεωρητικής. Η θετική και η τεχνολογική κατεύθυνση εμφανίζουν περισσότερο θετικές αντιλήψεις για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στην εργασία από τη θεωρητική. Η θετική κατεύθυνση εμφανίζει περισσότερο θετικές αντιλήψεις για την γενικότερη αξία των Μαθηματικών από τη θεωρητική και την τεχνολογική. Έπεται η τεχνολογική έναντι της θεωρητικής. Όσον αφορά τη δυσκολία των Μαθηματικών οι τρεις κατευθύνσεις δεν εμφανίζουν σημαντικές διαφορές.

Επιλογικά καταλήγουμε στο ότι οι συχνότερες αιτίες που οδηγούν σε χαμηλή σχολική επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Στατιστική είναι οι ακόλουθες:

- Έλλειψη σχολικής ωριμότητας μπορεί να προκαλέσει στο παιδί αδυναμία παρακολούθησης των μαθημάτων του, δυσκολίες στην ανάγνωση και γραφή, φτωχό λεξιλόγιο, αδυναμία προσαρμογής στο περιβάλλον και στους κανόνες της τάξης, δυσκολία στις κοινωνικές συναναστροφές. Η σχολική ωριμότητα αφορά την εξέλιξη της νοημοσύνης του παιδιού, που ποικίλει από άτομο σε άτομο, τη συναισθηματική και κοινωνική του εξέλιξη και τη βιολογική του ωρίμανση.

- Το αίσθημα ντροπής ή δειλίας είναι ένα χαρακτηριστικό αρκετών μαθητών και εκδηλώνεται με ένα συνεσταλμένο ύφος, την έλλειψη φιλικών σχέσεων, την απομόνωση και την αδυναμία συμμετοχής στις σχολικές δραστηριότητες.
- Η απουσία εσωτερικών κινήτρων δεν τοποθετεί την εκπαιδευτική διαδικασία και την αξία της γνώσης στην ορθή βάση
- Ο τρόπος διδασκαλίας των εκπαιδευτικών αλλά και η συμπεριφορά τους απέναντι σε κάθε μαθητή χωριστά επηρεάζει καταλυτικά τη σχολική επίδοση των μαθητών. Η επίπληξη, η τιμωρία ή η αποφυγή από μέρους του εκπαιδευτικού προς το μαθητή δημιουργεί προβλήματα στην ψυχοσύνθεση του μαθητή και μάλιστα όταν αυτές οι συμπεριφορές εκδηλώνονται μπροστά στους συμμαθητές του. Έτσι δημιουργούνται επιθετικές συμπεριφορές, άγχος, προβλήματα ένταξης στο σύνολο, μαθησιακές δυσκολίες, ανασφάλεια, συναισθήματα απόρριψης και αποτυχίας. Σε γενικότερο πλαίσιο, όταν το σχολικό περιβάλλον δεν είναι υποστηρικτικό προς τους μαθητές, δημιουργεί ευνοϊκές συνθήκες για την εμφάνιση των παραπάνω συμπεριφορών.

- Ο οικογενειακός παράγοντας είναι πρωταρχικής σημασίας για την εμφάνιση χαμηλής σχολικής επίδοσης. Οι κουρασμένοι μαθητές, που δεν προσέχουν στο μάθημα, δε συζητούν εύκολα, έχουν μελαγχολική έκφραση και κλείνονται στον εαυτό τους είναι στοιχεία που επιβεβαιώνουν πολλές φορές την έλλειψη υποστήριξης και ενδιαφέροντος από την οικογένεια με απώτερο αποτέλεσμα την κακή σχολική επίδοση.
- Η ελλιπής φοίτηση με αρκετές απουσίες, χωρίς λόγο από το σχολείο μπορεί να είναι ένδειξη αρνητικής στάσης προς αυτό, που συνήθως χαρακτηρίζει τους μαθητές με χαμηλή επίδοση και οδηγούνται σε σχολική στασιμότητα ή εγκατάλειψη.
- Οι μαθησιακές δυσκολίες (οπτική ή ακουστική διάκριση, δυσλεξία κ.α.) οδηγούν αρκετές φορές σε χαμηλή σχολική επίδοση, καθώς δεν μπορεί να ακολουθήσει το ρυθμό μάθησης της υπόλοιπης τάξης.
- Το χαμηλό αίσθημα αυτοεκτίμησης επιδρά αρνητικά στην απόδοση ενός μαθητή. Έχει βρεθεί ότι η υψηλή αυτοεκτίμηση συνδέεται με υψηλή σχολική επίδοση και ότι η χαμηλή σχολική επίδοση έχει ως αποτέλεσμα τη χαμηλή αυτοεκτίμηση. Επομένως για να βελτιωθεί η χαμηλή σχολική επίδοση χρειάζεται η δημιουργία ισχυρής αυτοεκτίμησης και εμπιστοσύνης του μαθητή στις δυνάμεις του.

- Γονείς και καθηγητές ασκούν πολλές φορές ψυχική πίεση στα παιδιά για υψηλές επιδόσεις. Αν και η προώθηση στη μόρφωση έχει θετικά αποτελέσματα, όταν μετατρέπεται σε πίεση και υπερβολική απαίτηση έχει τα ακριβώς αντίθετα αποτελέσματα και μπορεί να αγγίξει μέχρι και τη σχολική αποτυχία.

4.4 Τρόποι αντιμετώπισης μαθηματικών δυσκολιών των μαθητών

Τα σημεία που οφείλουμε να προσέξουμε ιδιαίτερα είναι τα κάτωθι:

- Σχετικά με τη σχολική ανωριμότητα, οι γονείς θα πρέπει πρωταρχικά να κατανοήσουν τη συμβολή της ανωριμότητας στη χαμηλή επίδοση του παιδιού και να μην την ανάγουν σε τεμπελιά ή αδιαφορία. Η ενθάρρυνση και οι ρεαλιστικές απαιτήσεις από τους γονείς σίγουρα είναι πολύ βοηθητικές. Τέλος η αξιολόγηση της κατάστασης από ειδικούς επιστήμονες μπορεί να οδηγήσει και στην καλύτερη αντιμετώπιση του προβλήματος.
- Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν εσωτερικά κίνητρα, να κατανοήσουν δηλαδή την αξία της γνώσης και να μη βάζουν στόχους για να ικανοποιήσουν τους γονείς, τους δασκάλους ή για να πάρουν καλούς βαθμούς. Έρευνα έχει δείξει ότι τα εσωτερικά κίνητρα, όσο προχωράμε από το Δημοτικό προς το Λύκειο ελαττώνονται. Ένα βοηθητικό σχολικό περιβάλλον, λοιπόν διευκολύνει την ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων, ενώ παράλληλα οι γονείς μπορούν να ενισχύσουν αυτή την ανάπτυξη συνδέοντας την γνώση και τα μαθήματα με διάφορες επιτυχίες του παιδιού στην καθημερινή του ζωή. Τα εσωτερικά κίνητρα παίζουν σπουδαίο ρόλο και αργότερα στη δια βίου μάθηση.
- Οι γονείς με τις στάσεις, τις αξίες, τις φιλοδοξίες και τις προσδοκίες τους, αλλά και τη συμπεριφορά τους επηρεάζουν σοβαρά τη σχολική επίδοση των παιδιών τους. Η οικογένεια που φροντίζει να κάνει το παιδί ανεξάρτητο και το παρακινεί να κάνει μόνο του τις διάφορες εργασίες, δημιουργεί ευνοϊκές συνθήκες για την ανάπτυξη των κινήτρων επίδοσης. Γενικά η θερμή και ήρεμη ατμόσφαιρα, το απαιτητικό αλλά συγχρόνως και δημοκρατικό οικογενειακό κλίμα που δίνει έμφαση στον αυτοέλεγχο και ενδιαφέρεται για την εκπαίδευση αποτελεί προϋπόθεση για τη σχολική επιτυχία του παιδιού. Βασικότερη προϋπόθεση όμως για τα κίνητρα επίδοσης είναι οι απαιτήσεις των γονέων να ανταποκρίνονται στο επίπεδο των δυνατοτήτων του παιδιού.
- Για τα συνεσταλμένα παιδιά, η σωστή προσέγγιση, η ιδιαίτερη προσοχή και η ενθάρρυνση για

συμμετοχή σε δραστηριότητες αποτελούν μια σωστή βάση. Εδώ ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι νευραλγικός, καθώς μέσα από την ευαισθητοποίηση της ομάδας της τάξης, την ανάθεση πρωτοβουλιών μπορεί να κινητοποιήσει το μαθητή σε μια καλύτερη συνεργασία. Επίσης οι εκπαιδευτικοί, μπορούν να ενισχύσουν τα «αποτυχημένα» παιδιά, τονίζοντας τα θετικά στοιχεία της συμπεριφοράς τους και επαινώντας κάθε προσπάθεια ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα. Είναι απαραίτητα ο εξατομικευμένος τρόπος διδασκαλίας, όπου χρειάζεται, η πίστη στις ικανότητες του μαθητή και η εργασία σε ομάδες.

Τέλος, το ίδιο το σχολείο ως σύστημα πρέπει να δίνει έμφαση στην ποιότητα, οι μαθητές να νιώθουν υποστήριξη και σεβασμό στην προσωπικότητά τους. Καλό είναι οι μαθητές να συμμετέχουν σε ευχάριστες διεργασίες μάθησης που να εμπεριέχουν αυτενέργεια και ανακάλυψη των ικανοτήτων τους.

4.5 Συμπεράσματα

Το ενδιαφέρον για τη διδακτική των εννοιών της στατιστικής αυξάνεται σταδιακά από τα μέσα της προηγούμενης δεκαετίας. Η συζήτηση που αναπτύσσεται στην κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών χαρακτηρίζεται από πολλαπλότητα απόψεων αναφορικά τόσο με το ρόλο των αντίστοιχων γνωστικών περιοχών στο σχολικό πρόγραμμα όσο και των τρόπων με τους οποίους θα μπορούσαν να αναπτυχθούν κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις. Παρότι από το τέλος της δεκαετίας του 1980 η στατιστική και οι πιθανότητες έχουν ενταχθεί επίσημα στα αναλυτικά προγράμματα πολλών χωρών, δεν είχαν μέχρι πρόσφατα αναπτυχθεί οι παιδαγωγικοί στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία των συγκεκριμένων αντικειμένων στη γενική παιδεία. Οι αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες έχουν διαφορετική υφή από τις υπόλοιπες περιοχές των μαθηματικών και παραμένουν δυσνόητες για πολλούς μαθητές καθώς αποτελούν τρόπους με τους οποίους μπορούμε να χειριστούμε καταστάσεις αβεβαιότητας και να βγάλουμε συμπεράσματα μέσα από το χειρισμό μεγάλου αριθμού και ποικιλίας δεδομένων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το είδος και η έκταση των δεδομένων στο πεδίο αυτό των μαθηματικών αποτελεί για τους περισσότερους μαθητές μια αφηρημένη διαδικασία μακριά από τη σφαίρα της εμπειρίας τους. Τα τελευταία χρόνια ο όρος διαχείριση δεδομένων προτείνεται ως συνδετικός κρίκος μέσω του οποίου επιχειρείται η διδακτική προσέγγιση των εννοιών των πιθανοτήτων και της στατιστικής στο σχολείο. Σε αυτή την εξέλιξη συνέβαλλε καθοριστικά η ανάπτυξη ειδικών εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να διαχειριστούμε μεγάλες ποσότητες δεδομένων και να κάνουμε ποικίλων ειδών καταχωρήσεις, ταξινομήσεις και παρουσιάσεις τους. Μπορούμε επίσης να κάνουμε ποσοτικές αναλύσεις των δεδομένων αυτών και άρα να τις επεξεργαστούμε στατιστικά. Έτσι, η ενσωμάτωση των αντικειμένων της στατιστικής και των πιθανοτήτων στο αναλυτικό πρόγραμμα αποτελεί ευκαιρία να καλλιεργηθούν οι στατιστικές διαισθήσεις των μαθητών, να έρθουν στο προσκήνιο οι μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται στις στατιστικές τεχνικές και να δημιουργηθούν πεδία διασύνδεσης των συγκεκριμένων εννοιών με ευρύτερες πτυχές της μάθησης των μαθηματικών όπως η συμβολική χρήση, η επαγωγική σκέψη και η λογική επεξεργασία. Δυστυχώς τα νέα παιδιά μεγαλώνουν σ’ ένα κοινωνικό σύστημα που έχει μάθει να αναγνωρίζει, να εκτιμά και να επιβραβεύει μόνο τον «επιτυχημένο» μαθητή. Σ’ ένα εκπαιδευτικό σύστημα του οποίου ο σχεδιασμός αναφέρεται σ’ ένα «μέσο» μαθητή. Σ’ ένα σχολικό σύστημα προσαρμοσμένο και προσανατολισμένο στη λογική των «επιδόσεων». Το σχολείο οφείλει να αντιμετωπίζει το μαθητή ως άνθρωπο με ατομικές και κοινωνικές ανάγκες, διαφοροποιημένες επιδιώξεις, προσωπική οπτική και σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί και το οικογενειακό περιβάλλον είναι κρίσιμο να εντάξουν τις παραστάσεις και τις εμπειρίες του εκάστοτε μαθητή στην πρόσληψη μαθηματικής παιδείας. Φιλοδοξία των ενηλίκων δεν να απαντήσουν απαραίτητα, αλλά να μοιραστούν τους προβληματισμούς τους. Έτσι κι αλλιώς κάποια ερωτήματα μένουν ανοιχτά, κάποια ερωτήματα δεν προσφέρονται σε εύκολες και μονομερείς απαντήσεις. Ένα άλλο σχολείο όμως –για να θυμηθούμε και την Boaler – υπάρχει. Ένα σχολείο όπου οι προσδοκίες της «επιτυχίας» και της «αποτυχίας» διαμορφώνονται από έναν πιο ανοιχτό σκοπό. Ένα σχολείο όπου οι δάσκαλοι ενθαρρύνουν τη συνεισφορά των «αδύνατων» μαθητών. Ένα σχολείο όπου οι σχέσεις βασίζονται στο σεβασμό και την κατανόηση διαφορετικών ανθρώπων και απόψεων. Στις σημερινές συνθήκες κοινωνικής, πολιτικής, οικονομικής και περιβαλλοντικής κρίσης, το σχολείο αυτό δείχνει το δρόμο: η ισότιμη πρόσβαση στο μαθηματικό προϊόν και κατ’ επέκταση η κοινωνική ισότητα δεν αποτελούν ουτοπία, αλλά ευτοπία.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., Σβέρκος Α. (1999). Στατιστική: βασικές έννοιες και παρουσίαση στατιστικών δεδομένων. Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής Γ΄ ενιαίου λυκείου, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων Αθήνα.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Γεωργογιάννης, Π. (2009), Διαπολιτισμική κοινωνική ψυχολογία και έρευνα, Επιστημονική σειρά: Βηματισμοί για μια αλλαγή στην εκπαίδευση - Τόμος 5ος, Πάτρα

Δαμιανού, Χ. και Κούτρας, Μ. (2003). Εισαγωγή στη Στατιστική, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Κικίλιας, Π., Λαμπίρης Μ., Πετράκης Α., Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα 2001.

Κοντογιαννοπούλου-Πολυδωρίδη, Γ., Σολομών, Ι., Σταμέλος, Γ. (2000), Ανιχνεύοντας την επίδοση στην ελληνική εκπαίδευση, Αθήνα:Μεταίχμιο

Λεξικό Οικονομικοτεχνικών Όρων του Ελληνικού Κέντρου Παραγωγικότητος, 2η έκδοση - Αθήναι 1965.

Τουρτούρας, Χ. (2010), Σχολική αποτυχία και αποκλεισμός- Η περίπτωση των παιδιών από την πρώην Σοβιετική Ένωση, Αθήνα:Επίκεντρο

Χαραλαμπίδης, Χ. (2000). Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Χαραλαμπίδης Χ., Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Τεύχος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1990.

Ξενόγλωσση

Bernstein, B. (1971) Class, codes and control, Vol. 1, London; Routledge & Kegan Paul.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). Actuarial Theory for Dependent Risks, John Wiley and Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chiechester, West Sussex, England

Eales, B. (1995). Financial Risk Management, McGraw-Hill, London.

Edwards, V. (1998), The power of Babel - Teaching and learning in multilingual classrooms, Staffordshire: Trentham Books Limited

Goovaerts, M.J., De Vijlder, F.E. and Haezendonck, J. (1984). Insurance Premiums: Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam.

Kaas, R., Goovaerts, M.J., Dhaene, J. and Denuit, M. (2001). Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Williams, A., Smith, M. and Young, P. (1999). Risk management and insurance, McGraw-Hill International Editions.

Παράρτημα

Φύλλο εργασίας 1

1. Το βάρος 10 μαθητών σε κιλά είναι:

52,50,57,52,60,50,50,52,57,50

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή

β) τη διάμεσο

γ) το εύρος

δ) τη διακύμανση

ε) την τυπική απόκλιση

στ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε εαν είναι ομοιογενές το δείγμα.

ζ) Να φτιάξετε διάγραμμα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

2. Το κάθε τμήμα ενός σχολείου έχει το εξής πλήθος μαθητών:

30,26,22,30,28,36,28,23,25,32

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή

β) τη διάμεσο

γ) το εύρος

δ) τη διακύμανση

ε) την τυπική απόκλιση

στ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε εαν είναι ομοιογενές το δείγμα.

ζ) Να φτιάξετε διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

3. Οι βαθμοί στο διαγώνισμα μαθηματικών είναι:

15,15,16,18,18,16,17,18,17,20

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή

β) τη διάμεσο

γ) το εύρος

δ) τη διακύμανση

ε) την τυπική απόκλιση

στ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε εαν είναι ομοιογενές το δείγμα.

ζ) Να φτιάξετε διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Φύλλο εργασίας 2

1. Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές:

5, 3, 3κ, 3, 2κ, 3, 3κ, κ

α) Αν η μέση τιμή τους είναι 4, να δείξετε ότι κ=2.

Να υπολογίσετε:

β) τη διάμεσο

γ) το εύρος

δ) τη διακύμανση

ε) την τυπική απόκλιση

στ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε εαν είναι ομοιογενές το δείγμα.

2. Οι ηλικίες 6 παιδιών είναι:

2, 6, 6+χ, 11, 11, 12+χ

α) Αν η μέση ηλικία είναι 9, να αποδείξετε ότι χ=3.

Για χ=3, **να υπολογίσετε:**

β) τη διάμεσο

γ) το εύρος

δ) τη διακύμανση

ε) την τυπική απόκλιση

στ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε εαν είναι ομοιογενές το δείγμα.

3. Οι παρατηρούμενες τιμές θερμοκρασίας είναι:

1, 9, 7, 5, 11, α, -1, 1

α) Αν η μέση θερμοκρασία είναι 5, να υπολογίσετε τον αριθμό α.

Για α=7, **να υπολογίσετε:**

β) τη διάμεσο

γ) το εύρος

δ) τη διακύμανση

ε) την τυπική απόκλιση

στ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε εαν είναι ομοιογενές το δείγμα.

Φύλλο εργασίας 3

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα [10, 20) και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[10, ·)					
[· , ·)					
[· , ·)					
[· , ·)					
[· , 20)					
Σύνολο					

Να βρείτε τη μέση βαθμολογία $\overline{x}$ των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών τους.

Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο; (Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Φύλλο εργασίας 4

Ο αριθμός των αδελφών των μαθητών της Γ' ΕΠΑ.Λ. ενός σχολείου, δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός x_i	Αριθμός Μαθητών ν_i
0	7
1	23
2	12
3	2
4	6
Σύνολο	50

Α. Να βρεθεί η μέση τιμή του αριθμού των αδερφών που έχουν οι μαθητές.

Β. Να βρεθεί η διάμεσος του αριθμού των αδερφών που έχουν οι μαθητές.

Γ. Πόσοι μαθητές έχουν τουλάχιστον 3 αδέρφια;

Δ. Ποιό το ποσοστό μαθητών που έχουν από 1 έως 3 αδέρφια;

Ε. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Φύλλο εργασίας 5

Οι βαθμοί 50 μαθητών στη Στατιστική δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Βαθμοί x_i	Συχνότητα v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
8	5					
10		9				
12	2α					
14					20	
17	α			0,98		
20						
Σύνολο						

Α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να δείξετε ότι α=10.

Β. Να βρεθεί η μέση τιμή.

Γ. Να βρεθεί η διάμεσος.

Δ. Να βρεθεί η διακύμανση.

Ε. Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση.

ΣΤ. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας.

Ζ. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Φύλλο εργασίας 6 (Κανονική κατανομή)

1.

Μελετήθηκε ο κυβισμός των κινητήρων X, σε κυβικά εκατοστά (κ. εκ.), δείγματος 2000 αυτοκινήτων. Στο δείγμα βρέθηκαν 50 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1400 κ. εκ. και 1680 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2000 κ. εκ. Το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Να βρείτε:

Α. τη μέση τιμή

Β. την τυπική απόκλιση

Γ. Να εκτιμήσετε το εύρος του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Δ. Αν μετά από επισκευή ο κυβισμός κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 4% να βρείτε:

- **i)** τη μέση τιμή
- **ii)** την τυπική απόκλιση των νέων τιμών
- **iii)** το εύρος των νέων τιμών.

2.

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.
Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

3.

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.
Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Α. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Β. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Δ. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).