Εθνικό και
Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πανεπιστήμιο
Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η εμφάνιση ευκαιριών γενίκευσης στην τάξη των μαθηματικών και η διαχείριση τους από τον εκπαιδευτικό

Στυλίδης Ν. Ευάγγελος
Δ201324

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής
Δ. Πόταρη - Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Αθήνα – Ιανουάριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Ιανουαρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους επιβλέποντες Πανεπιστημιακούς, κ. Δ. Πόταρη, κ. Γ. Ψυχάρη και κ. Θ. Ζαχαριάδη για τη συμμετοχή τους στην τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή της παρούσας εργασίας, καθώς και για τη σημαντική συμβολή τους στην εκπόνησή της. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού τμήματος, τα μαθήματα των οποίων είχα την τύχη να παρακολουθήσω, καθώς και την γραμματεία του τμήματος η οποία με εξυπηρέτησε με τον καλύτερο τρόπο. Από το πρώτο κιόλας μάθημα που παρακολούθησα στο τμήμα συνειδητοποίησα πως μπροστά μου ανοίγεται ένας καινούργιος κόσμος και ολοκληρώνοντας αυτήν την διαδρομή αισθάνομαι πιο ώριμος και πιο συνειδητοποιημένος ως προς την επιστήμη που υπηρετούμε.

Ιδιαίτερη αναφορά θα ήθελα να κάνω στην κυρία Πόταρη, η οποία είχε καθοριστική συμβολή στην απόφαση μου να στραφώ προς την Διδακτική των Μαθηματικών και κατά επέκταση στο να ολοκληρώσω το συγκεκριμένο μεταπτυχιακό πρόγραμμα. Από τα χρόνια που ήμουν προπτυχιακός φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ μέχρι και τη στιγμή που ολοκλήρωσα την παρούσα εργασία, η κυρία Πόταρη αποτέλεσε για μένα πηγή γνώσης, καθοδήγησης και κυρίως θαυμασμού προς την επιστήμη της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένειά μου και τους προσωπικούς μου φίλους για την αμέριστη και συνεχή συμπαράστασή τους.

Περίληψη

Ο ρόλος της γενίκευσης στις θετικές επιστήμες και πιο συγκεκριμένα σε αυτή των Μαθηματικών είναι αδιαμφισβήτητος. Το να διατυπώνεις προτάσεις, συλλογισμούς και συμπεράσματα που έχουν γενικευμένη ισχύ είναι ένα από τα βασικά συστατικά του πυρήνα των επιστημών αυτών. Όσον αφορά την διδακτική των μαθηματικών, η πλειοψηφία της ερευνητικής κοινότητας συμφωνεί στο κεντρικό ρόλο που η γενίκευση οφείλει να κατέχει στην σχολική τάξη. Στην Ελλάδα, η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να γενικεύουν αποτελεί βασική προϋπόθεση του Μαθηματικού Γραμματισμού, ο οποίος είναι ο απώτερος στόχος του εκπαιδευτικού συστήματος. Ωστόσο είναι αξιοσημείωτο ότι οι ορισμοί για την έννοια της γενίκευσης εκτός από αρκετοί στο πλήθος εξελίσσονταν ταυτόχρονα με την ανάπτυξη του κλάδου της διδακτικής των μαθηματικών. Αντίστοιχα μεγάλο πλήθος ερευνών επικεντρώθηκαν στις δυσκολίες που οι μαθητές εντοπίζουν ως προς την επίτευξη της γενίκευσης, τις στρατηγικές αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών και τον ρόλο του εκπαιδευτικού ως προς την διαχείριση της έννοιας. Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις σχολικών τάξεων, στις οποίες ο εκάστοτε εκπαιδευτικός ακολουθούσε διαφορετικές διδακτικές πρακτικές, εντοπίσαμε τις στιγμές και την μορφή με την οποία η γενίκευση εμφανίζεται στη διάρκεια του μαθήματος και καταδείξαμε τον τρόπο της συνολικής διαχείρισης της από τον εκπαιδευτικό. Τα αποτελέσματα μας σε συνδυασμό με τις επιμέρους συζητήσεις που είχαμε με τους δύο εκπαιδευτικούς, αναδεικνύουν την έντονη επιρροή που οι προσωπικοί στόχοι και απόψεις των δυο εκπαιδευτικών είχαν στην διαμόρφωση δυο αισθητά διαφορετικών σχολικών περιβαλλόντων, τα οποία οδήγησαν σε διαφορετικές μορφές γενίκευσης σε κάθε τάξη.

Λέξεις κλειδιά: γενίκευση, στρατηγικές γενίκευσης, αλγεβρική σκέψη, ρεαλιστικά μαθηματικά, ερευνητική μάθηση, μεταφορά γνώσης, είδη διδασκαλίας.

Abstract

The role and usefulness of generalization in sciences and more specifically in the field of mathematics is undeniable. To formulate proposals, reasoning, and conclusions with generalized strength is one of the core components of the core of every science that uses mathematics. As far as didactics of mathematics are concerned, the majority of the research community agrees on the central role that generalization must hold in the classroom. In Greece, developing pupils' ability to generalize is a basic requirement of Mathematical Literacy, which is one of the ultimate goals of the educational system. However, it is noteworthy that there are many definitions of the concept of generalization, and those definitions evolved simultaneously with the science of teaching mathematics. A correspondingly large number of surveys are focused on the difficulties students encounter in generalizing, strategies to address these difficulties, and the role of the teacher in managing the concept of generalizing in the class environment. In the present study, we focused in two different cases of school classes in which each teacher followed different teaching practices, we identified the moments and the form in which the generalization appeared during the courses we attended, and finally we tried to demonstrate the way of its overall management by the teacher. Our results, combined with the individual discussions we had with the two teachers, highlight the strong influence that the two teachers' personal goals and views had on shaping two significantly different school environments, which led to different forms of generalization in each class.

Keywords: generalization, generalization strategies, algebraic thinking, realistic mathematics (RME), IBL, knowledge transfer, teaching styles.

Εισαγωγή

Η έννοια του μαθηματικού γραμματισμού, της ικανότητας δηλαδή ενός ατόμου να σκέπτεται, να κρίνει και γενικότερα να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά μέσα σε ένα δημοκρατικό περιβάλλον, αποτελεί έναν από τους βασικούς πυλώνες του ελληνικού προγράμματος σπουδών. Σε αυτό αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι ένας από τους κύριους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι *«η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου»*. Ένα από τα αναπόσπαστα στοιχεία του μαθηματικού γραμματισμού είναι η ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν.

Το σύνολο των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών θεωρεί πως η ανάπτυξη της συγκεκριμένης ικανότητας (generalizing) αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής διδασκαλίας. Η γενίκευση άλλωστε είναι διεθνώς αποδεχτή ως ένα καίριο συστατικό της μαθηματικής επιστήμης (Kaput, 1992; Reid, 2002; Sfard,1995) και συμπεριλαμβάνετε σε αρκετά προγράμματα σπουδών άλλων χωρών – για παράδειγμα στο National Council of Teachers of Mathematics της Αμερικής – ως ένας από τους διδακτικούς στόχους του μαθήματος. Στην τάξη των μαθηματικών ευκαιρίες για γενίκευση παρουσιάζονται σε όλους τους κλάδους, αλλά όπως είναι αναμενόμενο, ένα μεγάλο πλήθος ερευνητών επικεντρώνεται στο μάθημα της άλγεβρας, όπου οι γενικεύσεις αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της αλγεβρικής σκέψης (algebric reasoning). O Dienes (1961) είχε τονίσει ότι για να ενισχυθεί ο αλγεβρικός συλλογισμός των μαθητών, πρέπει οι τελευταίοι να συνειδητοποιήσουν ότι οι αλγεβρικοί κανόνες και σχέσεις είναι γενικεύσεις. Ενώ οι Kaput (1999) και Mason (1996) μας υπενθυμίζουν ότι οι γενικές προτάσεις και η ανακάλυψη της γενικότητας βρίσκονται στον πυρήνα της μαθηματικής δραστηριότητας.

Οι Carpenter και Franke (2001) αναφέρουν: «Όταν οι μαθητές κάνουν γενικεύσεις σχετικά με τις ιδιότητες των αριθμών ή για την λύση μιας άσκησης, τότε γίνεται απόλυτα εμφανής η μαθηματική τους σκέψη. Πολλές φορές οι γενικεύσεις αυτές παρέχουν σε μια τάξη μαθηματικές προτάσεις που αξίζει να εξεταστούν." Επί προσθέτως η Jurow (2004) επισημαίνει ότι επειδή η γενίκευση είναι μια κεντρική μαθηματική πρακτική, η καταγραφή του τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν ή προσπαθούν να περιγράψουν αντικείμενα που συνεχώς μεταβάλλονται, θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε πώς εισέρχονται στο εξειδικευμένο και πειθαρχικά αυστηρό διάλογο των μαθηματικών.

Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο ότι ο ορισμός της γενίκευσης εξελισσόταν ταυτόχρονα με την επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών. Μια σύντομη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας είναι αρκετή για να συμπεράνουμε πως η εξέλιξη της έννοιας «μεταφορά γνώσης» οδήγησε στον όρο της γενίκευσης, ο οποίος διατυπώθηκε αρχικά υπό το πρίσμα της γνωστικής ψυχολογίας και στη συνέχεια υπό το πρίσμα των κοινωνικών προσεγγίσεων στην μάθηση. Στην βιβλιογραφία εκτός από το πλήθος των ορισμών που έχουν διατυπωθεί, συναντάμε επίσης αρκετές έρευνες που έχουν επικεντρωθεί στις διδακτικές πρακτικές που μπορεί να ακολουθήσει ένας εκπαιδευτικός ώστε να προωθήσει την γενίκευση στη σχολική τάξη. Επιπροσθέτως, θεωρίες διδασκαλίας όπως τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην εκπαίδευση και η Ερευνητική Διδασκαλία συμπεριλαμβάνουν την γενίκευση στα στάδια ενός μαθήματος βασισμένο σε αυτές. Στις θεωρίες αυτές η επίτευξη της γενίκευσης συνδέεται άμεσα με την επιτυχής κατάληξη της συνολικής διδασκαλίας.

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε μελέτη δυο διαφορετικών περιπτώσεων σχολικών τμημάτων στα οποία οι δυο εκπαιδευτικοί ακολούθησαν διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις. Σκοπός μας ήταν να καταγράψουμε πώς η γενίκευση εμφανίζεται στο εκάστοτε σχολικό τμήμα, πως ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να την εκμαιεύσει και να την προωθήσει, ποιες ευκαιρίες δίνονται στους μαθητές να γενικεύσουν και γενικότερα πως οι δυο εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται την έννοια. Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων πραγματοποιηθήκαν συνεντεύξεις με τους δυο εκπαιδευτικούς, στις οποίες τους ζητήθηκε να σχολιάσουν τα κρίσιμα περιστατικά που επιλέξαμε και την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε. Ήταν συνειδητή επιθυμία μας να καταγράψουμε το κίνητρο και το σκεπτικό των δύο εκπαιδευτικών, καθώς αυτό επηρέασε τις διδακτικές τους επιλογές. Στα κρίσιμα συμβάντα που παρουσιάζουμε και αναλύουμε επιθυμούμε να αναδείξουμε τις διαφορές ή/και τις ομοιότητες σχετικά με τη γενίκευση σε δυο διαφορετικά σχολικά περιβάλλοντα, ενώ μέσω των συνεντεύξεων να συνδέσουμε τα ευρήματα με τις γενικότερες πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών.

Τα αποτελέσματα της εργασίας επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό την βιβλιογραφία και αναδεικνύουν το πώς η στάση των δυο εκπαιδευτικών, οι διδακτικές τους επιλογές και πρακτικές επηρέασαν την μορφή που η γενίκευση εμφανίστηκε στην τάξη καθώς και τις ευκαιρίες που παρουσιάστηκαν σε ένα τμήμα να προβεί σε αυτή. Επίσης, επειδή σε ένα από τα δύο τμήματα το μάθημα βασίστηκε σε ρεαλιστικά προβλήματα, η επίτευξη συλλογικής γενίκευσης αποτέλεσε τον απώτερο στόχο της διδασκαλίας, με αποτέλεσμα οι διαφορές που καταγράφηκαν μεταξύ των δύο σχολικών τμημάτων ήταν αρκετά εμφανείς. Ωστόσο, οφείλουμε να τονίσουμε ότι δεν επιθυμούμε να προβούμε σε συγκρίσεις ως προς το ποιο είδος ήταν πιο αποτελεσματικό καθώς ένα τέτοιο εγχείρημα θα ήταν τουλάχιστον αβάσιμο, ειδικά στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας.

Κεφάλαιο 1ο - Θεωρητικό Υπόβαθρο – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.1 Ορισμοί της Γενίκευσης

Είναι γενικά αποδεκτό από μεγάλο μέρος της ερευνητικής κοινότητας πως η γενίκευση είναι μια από της πιο αυθεντικές πρακτικές της τάξης των μαθηματικών, καθώς η διαδικασία γενίκευσης ενός συνόλου ιδιαίτερων περιπτώσεων και η δικαιολόγηση και επισημοποίηση γενικευμένων ισχυρισμών είναι θεμελιώδους σημασίας για τα μαθηματικά. Ωστόσο, μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας είναι αρκετή για να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα πως οι ορισμοί περί της γενίκευσης ποικίλλουν, καθώς τα τελευταία είκοσι χρόνια έχουν διευρυνθεί οι προσπάθειες ορισμού της έννοιας. Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές έχουν μετατοπίσει τις αντιλήψεις τους για τον όρο από μια ατομική γνωστική δράση στα πλαίσια της γνωστικής ψυχολογίας (Breiteig & Grevholm 2006, Davis 1985, Dubinsky 1991, Font & Contreras 2008, Mitchelmore & White 2007), σε μια δραστηριότητα πλαισιοθετημένη στο κοινωνικό περιβάλλον (situated activity), η οποία δύναται να εξελιχθεί μέσω πολλαπλών εργαλείων και ατόμων [Carraher, Martinez & Schliemann 2008, Carraher & Schliemann 2002, Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz 2001, Ellis 2005, Engle 2006, Jurow 2004, Lobato, Ellis, & Muñoz 2003, Tuomi-Gröhn & Engeström 2003).

Πριν όμως μελετήσουμε τους ορισμούς της γενίκευσης οφείλουμε να αναφερθούμε στην έννοια «μεταφορά γνώσης», που ορίζεται ως η νοητική διαδικασία κατά την οποία η γνώση που έχει ήδη αποκτηθεί επεκτείνεται και εφαρμόζεται σε διαφορετικές περιπτώσεις (Lobato, 2003). Παρόλο που η έννοια θεωρείται συχνά ως βασική προϋπόθεση για τη μάθηση, έχει συγκεντρώσει αρνητική προσοχή σε ορισμένες ερευνητικές κοινότητες, ιδιαίτερα στην έρευνα για την διδακτική των μαθηματικών. Η Strachota (2016) υποστηρίζει πως ένα μεγάλο μέρος των ερευνητών αντιλαμβάνεται την έννοια της μεταφοράς ως μια απομονωμένη ατομική γνωστική δραστηριότητα και προσθέτει ότι υπάρχουν έρευνες που έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα πως η μεταφορά μπορεί να είναι αντιπαραγωγική για την διδασκαλία των μαθηματικών.

Οι προαναφερθείσες έρευνες για την μεταφορά γνώσης παρουσίασαν αρκετά σημαντικά ευρήματα και το πιο διαδεδομένο εξ αυτών είναι το ότι η εξάσκηση συγκεκριμένων προβλημάτων και ασκήσεων έχει ως αποτέλεσμα μικρή ή ανύπαρκτη μεταφορά γνώσης σε παρόμοια ή συναφή προβλήματα (Hickey, Kindfteld, Horwitz & Christie 1999). Υπάρχουν δηλαδή μελέτες που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές σπάνια μεταφέρουν προηγούμενη γνώση. Ωστόσο, η συντριπτική πλειοψηφία των θεωριών για το πώς ο άνθρωπος μαθαίνει αντιμετωπίζουν την προϋπάρχουσα γνώση ως αναπόσπαστο συστατικό της μάθησης. Ως εκ τούτου, οι ερευνητές έχουν ονομάσει αυτό το εύρημα ως το «ερευνητικό παράδοξο της μεταφοράς γνώσης» (Lobato, 2006). Είναι αρκετά πιθανό το παράδοξο αυτό να συνέβαλε στο να απομακρυνθεί από το επίκεντρο των ερευνών η συγκεκριμένη έννοια (Strachota, 2016). Στα μέσα της δεκαετίας του 1980 οι θεωρητικοί ερευνητές εξέφρασαν μια δυσαρέσκεια για τις παραδοσιακές απόψεις και προσεγγίσεις καθώς και για τον περιορισμένο ορισμό της μεταφοράς γνώσης. Ο Lobato (2006) αναφέρει ότι οι ερευνητές άρχισαν να αμφισβητούν *«τις υποθέσεις σχετικά με τη γνώση, τους γνώστες, τη μάθηση και το πλαίσιο»* υπονομεύοντας τις παραδοσιακές θεωρήσεις της μεταφοράς. Ήταν λοιπόν, λογική εξέλιξη το να επιχειρηθεί μια νέα προσπάθεια για τον προσδιορισμό του όρου, η οποία συνέπεσε με το δεύτερο κύμα της γνωστικής έρευνας. Τα παραπάνω συνέβαλαν σε μια ανακατασκευασμένη κατανόηση της μεταφοράς της γνώσης, στην οποία πλέον η επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών αναφέρεται ως γενίκευση (Strachota, 2016).

Οι δομές του κονστρουκτιβισμού διαμόρφωσαν τον ορισμό της μεταφοράς γνώσης και είναι φυσικό επακόλουθο να έχουν συμβάλει στις προσπάθειες των ερευνητών να ορίσουν την έννοια της γενίκευσης. Οι κονστρουκτιβιστές απέρριψαν τον παραδοσιακό ορισμό της μεταφοράς επειδή δεν θεωρούσε την αντίληψη ως ένα από τα καίρια συστατικά της (Strachota, 2016). Άλλωστε, οποιοσδήποτε κονστρουκτιβιστικός ορισμός για την γενίκευση βασίζεται στην θεμελιώδη υπόθεση ότι η μαθηματική κατανόηση εξαρτάται από την αντίληψη των ατόμων (Anderson, Reder & Simon, 1997). Βασιζόμενη στη θεωρία της μάθησης του Piaget, η κονστρουκτιβιστική έρευνα για τη γενίκευση ορίζει την έννοια με όρους νοητικής αφαίρεσης (για παράδειγμα οι Font και Contreras, 2008) και συχνά ο όρος αντιμετωπίζεται ως μια νοητική διαδικασία κατά την οποία οι συλλογισμοί γίνονται πιο αφηρημένοι, μια διαδικασία απομάκρυνσης από τη συγκεκριμένη κατάσταση ή μια διαδικασία αναγνώρισης ομοιοτήτων.

Η σχέση μεταξύ γενίκευσης και μεταφοράς είναι προφανής επειδή, σε επιφανειακό επίπεδο, αυτός ο ορισμός ευθυγραμμίζεται με τον παραδοσιακό ορισμό της μεταφοράς γνώσης. Ωστόσο η αμερικανίδα ερευνήτρια Strachota (2016) μελετώντας τους επιμέρους ορισμούς που έχουν διατυπωθεί στο πλαίσιο της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας, ισχυρίζεται ότι οι ερευνητές περιγράφουν τη γενίκευση ως μια διαδικασία με την οποία ένα άτομο κατασκευάζει και εφαρμόζει μια γενική ιδέα, γεγονός που προϋποθέτει ότι η γνώση είναι ατομική και γνωστική. Παρόλο που η μεταφορά περιγράφεται επίσης ως "ατομική και γνωστική", σε σύγκριση με έναν κονστρουκτιβιστικό ορισμό της γενίκευσης, ο παραδοσιακός ορισμός της μεταφοράς δίνει λιγότερη έμφαση στο άτομο. Η Strachota ισχυρίζεται ότι σε αντίθεση με τις παραδοσιακές έρευνες για την μεταφορά, η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση επιθυμεί να εξηγήσει τα στάδια και τις αναπαραστάσεις που θα διαμορφώσουν τον συλλογισμό ενός ατόμου που προσπαθεί να κατανοήσει τον κόσμο. Ολοκληρώνοντας την σύγκριση των εννοιών μεταφοράς γνώσης και γενίκευσης και επιθυμώντας να εστιάσουμε στην δεύτερη, οφείλουμε να αναφέρουμε πως αρκετοί ερευνητές έχουν επιχειρήσει να διατυπώσουν τον δικό τους ισχυρισμό για την έννοια. Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε ένα μέρος τον ορισμών αυτών, με σκοπό να αναδείξουμε πιθανές διαφορές και ομοιότητες.

Υπό το πρίσμα της γνωστικής ψυχολογίας η γενίκευση θεωρείται ως ένα στατικό μοντέλο, κατά το οποίο οι προσπάθειες των μαθητών να γενικεύσουν συγκρούονται με την προϋπάρχουσα γνώση ώστε να υπάρξει μια εν δυνάμει ανακατασκευή της τελευταίας (Harel & Tall, 1991; Piaget & Henriques, 1978). Σύμφωνα με τον Davydov (1990) η γενίκευση παρουσιάζεται ως η διαδικασία κατά την οποία συγκεκριμένες και αρχικά μεμονωμένες περιπτώσεις υπάγονται σε μια γενικότερη έννοια, το οποίο, όπως τονίζεται, δεν είναι το ίδιο με το να αναπτύσσουμε μια γενικότερη έννοια βασιζόμενοι σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Για τον Kaput (1999) γενίκευση είναι η νοητική δραστηριότητα κατά την οποία ο συλλογισμός μας εξελίσσεται φτάνοντας σε ένα επίπεδο στο οποίο η εστίαση μας δεν περιορίζεται πλέον σε μια συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά σε πρότυπα και σχέσεις αυτών των συγκεκριμένων περιπτώσεων.

Ο Dreyfus (1991) θεωρεί σαν γενίκευση το να βλέπεις και να αναγνωρίζεις ομοιότητες, ενώ στις έρευνες των Dubinsky (1991) και Harl & Tall (1991) η έννοια αντιμετωπίζεται σαν η διαδικασία κατά την οποία ο συλλογισμός ενός ατόμου επεκτείνεται πέρα από μια συγκεκριμένη περίπτωση με την οποία ασχολείται εκείνη τη συγκεκριμένη στιγμή. Οι ερευνητές έχουν επίσης, διακρίνει διάφορους τύπους γενίκευσης, ενώ αρκετοί έχουν προβεί σε μια κατηγοριοποίηση των διαφορετικών «πρακτικών που οδηγούν στη γενίκευση» (generalizing activities) – με την πλούσια ερευνητική και συγγραφική δουλειά του V.V. Davydov να αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα. Οι Mitchelmore και White (2007) πιστεύουν ότι η γενίκευση είναι η διαδικασία στην οποία κάποιος αναγνωρίζει την ουσία μιας ιδέας μέσω ενός διασυνδεδεμένου ιστού γνώσης για αυτή την ιδέα και στη συνέχεια δημιουργεί ένα μοντέλο που χρησιμεύει ως βάση τόσο για την ιδέα όσο και για τους συγγενικούς με αυτήν συλλογισμούς. Οι Fond και Contreras (2009) εξηγούν ότι το προϊόν της διαδικασίας της γενίκευσης είναι ένας γενικευμένος συλλογισμός και για αυτό το λόγο η διαδικασία δεν διαφέρει από την αντικειμενοποίηση (objectification), την εξιδανίκευση (idealization) ή την νοητική αφαίρεση (abstraction) στις οποίες προβαίνει ένα άτομο. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι θεώρησαν τη γενίκευση ως την ανάπτυξη της αποσαφηνισμένης (decontextualized) γνώσης που μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε κατάσταση (Anderson, Reder, & Simon, 1997, όπως βρέθηκε στην Jurrow, 2004). Κάποιοι εξ αυτών υποστηρίζουν ότι η μάθηση, δεν συνδέεται με συγκεκριμένα πλαίσια, αλλά εξαρτάται από την ανάπτυξη πνευματικών αναπαραστάσεων που αντιστοιχούν σε μια εξωτερική πραγματικότητα. Βασιζόμενοι στα παραπάνω η γενίκευση είναι μια ατομική γνωστική δραστηριότητα, καθώς θεωρείται ως το προϊόν των κατάλληλων νοητικών αναπαραστάσεων.

Ακόμα και πιο πρόσφατες έρευνες προσπαθούν να προσεγγίσουν την έννοια με κύριο κριτήριο τις εσωτερικές νοητικές διαδικασίες των μαθητών. Ο Lannin (2005) μελετώντας τις στρατηγικές που οι μαθητές ακολουθούσαν κατά την εμπλοκή τους με συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων, παρουσίασε τα διάφορα στάδια γενίκευσης που εντόπισε, τονίζοντας ότι η απόδειξη είναι ένα κρίσιμο συστατικό της διαδικασίας που θα οδηγήσει στην γενίκευση. Η Ellis (2007) προσπάθησε να αναγνωρίσει τις γνωστικές ενέργειες (cognitive actions) των μαθητών στην προσπάθεια των τελευταίων να γενικεύσουν. Οι δύο αυτοί ερευνητές αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα ενός νέου κύματος ερευνητών οι οποίοι ναι μεν ενστερνίζονται την γνωστική χροιά της έννοιας, προσπαθούν δε να την προσεγγίσουν και υπό το πρίσμα κοινωνικών θεωριών (sociocultural theories), δηλαδή ως ένα φαινόμενο πλαισιοθετημένο στο κοινωνικό πλαίσιο (situated) στο οποίο εξελίσσεται.

Οι κοινωνικά προσανατολισμένοι επαναπροσδιορισμοί της έννοιας «μεταφορά γνώσης» διατυπώθηκαν ταυτόχρονα με το δεύτερο κύμα της γνωσιακής έρευνας (Strachota, 2016). Μελετώντας τη μάθηση σε μη παραδοσιακά περιβάλλοντα, οι ερευνητές αντιπαρήλθαν στις θεωρίες που αντιμετώπιζαν τη μάθηση ως ατομική και γνωστική πράξη με θεωρίες όπως η κοινωνικοπολιτισμική θεωρία του Vygotsky (1978), η κατανεμημένη γνώση (Hutchins,1993) και ενσωματωμένη γνώση (Glenberg, Witt & Metcalfe, 2013). Η Strachota ισχυρίζεται πως ένας από τους λόγους για το διευρυμένο πλήθος ορισμών της γενίκευσης είναι ότι οι ορισμοί αυτοί διαμορφώνονται από τις θεωρίες της μάθησης. Αφού λοιπόν η γενίκευση είναι θεμελιώδους σημασίας για την μάθηση (Carraher & Schliemann, 2002), ο επαναπροσδιορισμός των αντιλήψεων για το πώς αυτή επιτυγχάνεται απαιτεί τον επαναπροσδιορισμό της γενίκευσης. Επίσης, θεωρώντας δεδομένο ότι η μεταφορά γνώσης είναι θεμελιώδη συστατικό για τη μάθηση, όταν οι ερευνητές άρχισαν να διευρύνουν τις προοπτικές τους για την έννοια, την επαναπροσδιόρισαν ως μια δυναμική, πλαισιοθετημένη στο κοινωνικό περιβάλλον θεωρητική κατασκευή, που ονομάστηκε γενίκευση. Όπως και με τους ορισμούς που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, υπάρχει ένα αντίστοιχο πλήθος ορισμών που διατυπώθηκαν από ερευνητές που εξετάζουν την γενίκευση ως μια συλλογική διαδικασία, λαμβάνοντας υπόψη το πώς οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, τα εργαλεία, η προσωπική ιστορία και το εκάστοτε περιβάλλον επιδρούν στο τρόπο που ένα άτομο καταλήγει στην γενίκευση. Ο όρος πλέον απέκτησε μια επιπλέον ερευνητική προοπτική, καθώς μελετάτε ως μια κοινωνική πρακτική, ριζωμένη στις δραστηριότητες και στην ομιλία (Jurow, 2014).

Την σύνδεση των δύο εννοιών – μεταφορά γνώσης και γενίκευσης – μπορούμε να την διακρίνουμε στον ορισμό των Carraher και Schliemann (2002), σύμφωνα με τον οποίο η γενίκευση είναι η νοητική κατασκευή που προκύπτει από την αποδοχή, την προσαρμογή και την αναδιοργάνωση ενός πλούτου προηγούμενων μαθησιακών εμπειριών και γνώσεων. Η Ellis (2011), όπως προαναφέρθηκε, φαίνεται να προσπαθεί να παντρέψει την γνωστική με την κοινωνική χροιά του όρου, καθώς η ίδια γράφει τα εξής: *«ορίζω την γενίκευση ως μια δραστηριότητα στην οποία τα άτομα ενώ βρίσκονται μέσα σε κοινωνικό-μαθηματικά πλαίσια προβαίνουν σε μια από τις εξής* *(νοητικές) πράξεις: (α) αναγνωρίζουν ομοιότητες και κοινά χαρακτηριστικά σε διαφορετικές περιπτώσεις, (β) επεκτείνουν τον συλλογισμό τους πέρα από τα πλαίσια και τα όρια της αρχικής προέλευσης αυτού και (γ) εξάγουν ευρύτερα συμπεράσματα, τα οποία απορρέουν από συγκεκριμένες περιπτώσεις».* Στον συγκεκριμένο ορισμό μπορεί κανείς να διακρίνει την παραδοχή ότι η γενίκευση αποτελεί μια πλαισιοθετημένη δραστηριότητα (situated activity), παραδοχή την οποία ενστερνίζονται και άλλα μέλη της ερευνητικής κοινότητας (Carraher, Nemirovcsky & Schliemann 1995). Η Ellis υποστηρίζει ότι η γενίκευση και η μάθηση έχουν μια θεμελιώδη ομοιότητα: προκύπτουν από τις συλλογικές αναπαραστάσεις, οι οποίες έχουν τις ρίζες τους στο κοινωνικό περιβάλλον και πηγάζουν από τις εμπειρίες μας. Μέσω των ανθρώπινων συναναστροφών, της γλώσσας και των εργαλείων πραγματοποιείται η μετάβαση των αναπαραστάσεων αυτών από άτομο σε άτομο.

Η Ellis (2011) ωστόσο θέλοντας να τονίσει την σχέση που έχει η διαδικασία της γενίκευσης με το περιβάλλον στο οποίο επιθυμούμε να επιτευχτεί, υποστηρίζει πως η γενίκευση που κατέγραψε στις έρευνες της πέρασε μέσα από πολλά στάδια μέχρι την τελική της μορφή, στην οποία οι μαθητές δεν θα είχαν φτάσει αν εργάζονταν απομονωμένοι από το περιβάλλον της ομάδας μελέτης. Στις έρευνες αυτές η Ellis είχε τον διπλό ρόλο της καθηγήτριας/ερευνήτριας και θεωρεί πως έπειτα από μια σειρά μαθημάτων επιτεύχθηκε μια *συλλογική γενίκευση* (collective generalizing), που δεν θα είχε επιτευχθεί σε κάποιο διαφορετικό, μη κοινωνικό πλαίσιο. Υποστηρίζει επίσης ότι η έννοια συλλογική γενίκευση δεν διαφέρει από την συλλογική απόδειξη (collective proving) των Blanton και Styllianou (2010) ή την συλλογική αφαίρεση (collective abstraction) του Cobb (2005), καθώς όλες πηγάζουν μέσα από δημόσιες συναναστροφές που πραγματοποιούνται σε κοινό περιβάλλον.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως ένας ενδεικτικός κοινωνικοπολιτισμικός ορισμός για την έννοια είναι αυτός που διατύπωσε η Jurow (2004), συμφώνα με τον οποίο η γενίκευση είναι μια κοινωνική διαδικασία κατά την οποία αρχικά εντοπίζουμε και στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι κάποιος κανόνας μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλαπλές καταστάσεις ή αντικείμενα. Η διαδικασία αυτή πλάθεται από τα άτομα και τις αναπαραστάσεις ή/και τα εργαλεία που εμπλέκονται σε αυτήν.
Γίνεται λοιπόν αντιληπτό, πως παρά τις διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι ερευνητές ορίζουν τη γενίκευση, η έννοια είναι δυναμική και διαμορφώνεται από κοινωνικούς και γνωστικούς παράγοντες. Η Strachota (2016) υποστηρίζει πως αφού οι θεωρίες που διατυπώθηκαν κατά το δεύτερο κύμα της διδακτικής των μαθηματικών είναι αρκετά ευέλικτες, ορισμένοι συγγραφείς αναπτύσσουν τα δικά τους θεωρητικά «brand», αναγνωρίζοντας πως ο ορισμός τους μπορεί να διαφέρει από τους άλλους. Το ενδεικτικό παράδειγμα που δίνει η Strachota είναι ο Dörfler (2008) ο οποίος περιγράφει την προσέγγιση του για τον όρο ως μια σημειωτική κονστρουκτιβιστική κατανόηση της γενίκευσης επειδή βασίζει τον ορισμό του στην υπόθεση ότι το νόημα

κατασκευάζεται από συστήματα κοινωνικών σημείων (social sign systems). Ωστόσο πίσω από όλους αυτούς τους ορισμούς παραμένει η θεμελιώδης ιδέα ότι η γενίκευση διαμορφώνεται από τις εκάστοτε κοινωνικές παραμέτρους.

1.2 Δυσκολίες των μαθητών ως προς την γενίκευση

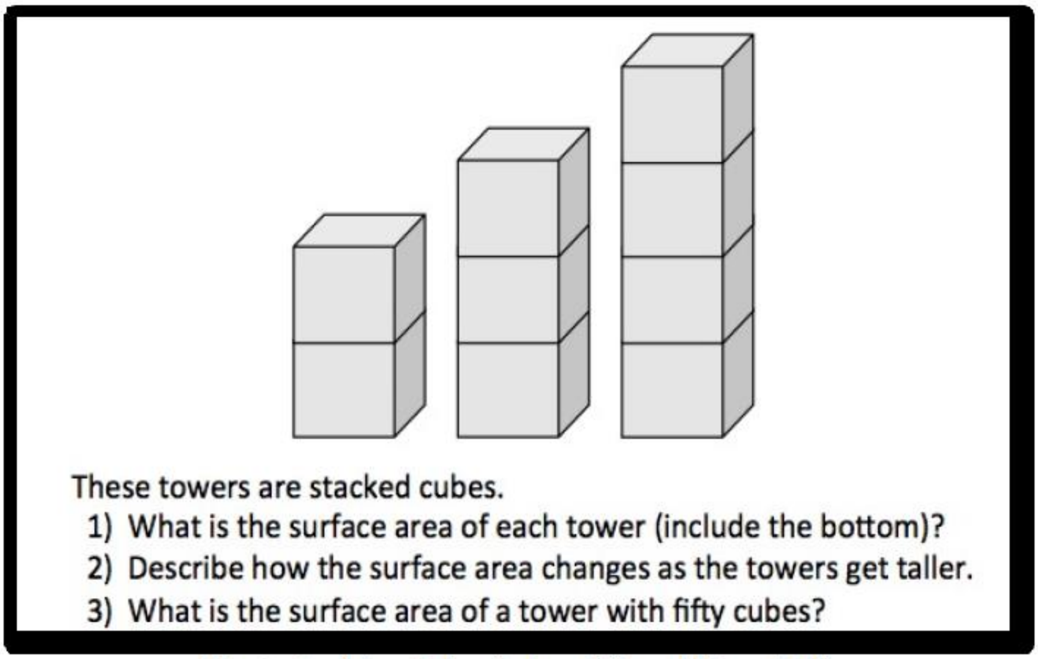
Υπάρχει ένα σύνολο ερευνητών που υποστηρίζουν ότι η γενίκευση είναι μια φυσική νοητική διαδικασία και συμβαίνει χωρίς την αναγκαία ύπαρξη ενός εκπαιδευτικού ή ενός προγράμματος σπουδών που την προάγει και την ενισχύει (Strachota, 2016). Οι Schifter, Monk, Russell και Bastable (2008) στην έρευνα τους για την πρώιμη άλγεβρα ισχυρίζονται ότι τα παιδιά έχουν μια φυσική τάση να παρατηρούν και να συζητούν τις κανονικότητες και τα μοτίβα στο σύστημα αριθμών, γεγονός που αποτελεί θεμέλιο για την κατασκευή, τη δοκιμή και την δικαιολόγηση γενικεύσεων. Προσθέτουν επίσης, ότι πολλές παραδοσιακές στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες μπορούν να αποτελέσουν πλατφόρμες γενικεύσεως, όπως για παράδειγμα η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης, καθώς οι μαθητές έχοντας προβεί σε έναν αριθμό δοκιμών θα καταλήξουν στο συμπέρασμα πως η σειρά με την οποία προστίθενται δύο όροι δεν επηρεάζει το τελικό άθροισμα. Όταν αρχίζουν να κατανοούν έννοιες σαν αυτή, οι μαθητές θα αρχίσουν να διερευνούν τη γενικότητα του εκάστοτε συλλογισμού. Σύμφωνα με τον Mason (1996) οι μαθητές επιδεικνύουν μια συνειδητοποίηση της γενικότητας όταν είναι σε θέση να βλέπουν μια γενική ιδέα σε κάτι συγκεκριμένο και να εντοπίσουν το συγκεκριμένο στον γενικό.

Ωστόσο, το να φτάσουν οι μαθητές σε σωστές γενικεύσεις δεν είναι μια απλή διαδικασία, όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από το πλήθος των ερευνών που ανέδειξαν αρκετές από τις δυσκολίες όσον αφορά την επίτευξη γενίκευσης. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι σύμφωνα με τους English & Warren (1995), Kieran (1992), Lannin (2005) οι μαθητές δυσκολεύονται στο να διατυπώσουν σωστές γενικές μαθηματικές προτάσεις, ενώ όσον αφορά την άλγεβρα, σύμφωνα με τους Lee & Wheeler (1987), Orton & Orton (1994) και Stacey (1989) οι δυσκολίες συχνά εντοπίζονται στην προσπάθεια των μαθητών να δημιουργήσουν χρήσιμες αλγεβρικές προτάσεις ή λήμματα αναγνωρίζοντας τα αντίστοιχα μοτίβα. Άλλωστε, η διάκριση των μοτίβων συχνά προκαλεί δυσκολίες καθώς απαιτεί να διακρίνουμε σε τι πρέπει να δώσουμε σημασία μέσα σε ένα μαθηματικό πλαίσιο, καθώς και να χρησιμοποιήσουμε διάφορα εργαλεία, όπως οι γραφικές παραστάσεις, για να αναγνωρίσουμε συγγενικά μαθηματικά φαινόμενα (Latour, 1987). Επί προσθέτως, σύμφωνα με την Ellis (2011) οι έρευνες των Pegg & Redden (1990), Schliemann, Carraher, & Brizuela (2001), Szombathely & Szarvas (1998) κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι μαθητές συνηθίζουν να επικεντρώνονται σε μοτίβα που συμμεταβάλλονται και όχι σε σχέσεις αλληλεξάρτησης που θα τους οδηγήσουν στην γενίκευση, να καταφέρουν δηλαδή να διατυπώσουν έναν γενικό τύπο ή να διατυπώσουν ένα γενικευμένο συλλογισμό.

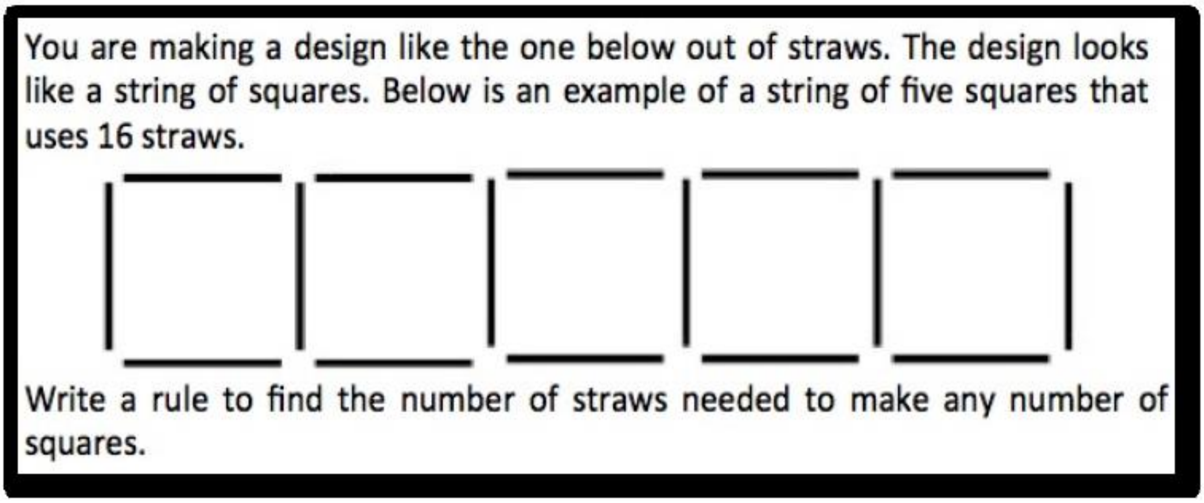
Στην έρευνα του Lannin (2005) που προαναφέραμε οι μαθητές έτειναν να χρησιμοποιούν δύο είδη απόδειξης για να δικαιολογήσουν τους ισχυρισμούς τους, δηλαδή την γενίκευση στην οποία είχαν καταλήξει. Το πρώτο είδος ονομάστηκε από τον ερευνητή ως «εμπειρική απόδειξη» καθώς παρατήρησε ότι οι μαθητές βασίζονταν συχνά στην εμπειρία τους και σε εμπειρικά δεδομένα, αδυνατώντας να φτάσουν σε γενικότερα συμπεράσματα. Έπειτα από παροτρύνσεις των εκπαιδευτικών συνήθιζαν να καταλήγουν προς το δεύτερο είδος: την διατύπωση «γενικών παραδειγμάτων». Ο ερευνητής υποστηρίζει ότι τα εμπειρικά δεδομένα μπορούν να παράσχουν κάποια διαβεβαίωση όσον αφορά την ορθότητα μιας συγκεκριμένης γενίκευσης, αλλά στερούνται της επεξηγηματικής ισχύς (Hanna, 1990) που είναι επιθυμητή στην διατύπωση ενός γενικευμένου ισχυρισμού. Ενώ για τα γενικά παραδείγματα προσθέτει ότι εγείρουν ορισμένες αξιοσημείωτες αμφιβολίες σχετικά με το αν οι μαθητές συνειδητοποιούν τη σύνδεση των παραδειγμάτων αυτών με τον γενικευμένο συλλογισμό στον οποίο επάγονται.

Οι μελέτες που επικεντρώνονται στην σχέση των μαθητών με την γενίκευση είναι αρκετά χρήσιμες επειδή μελετώντας και κατανοώντας το πώς αυτοί γενικεύουν, μελετάμε και κατανοούμε ταυτόχρονα σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο με το οποίο μαθαίνουν μαθηματικά. Το πνεύμα του παραπάνω ισχυρισμού διέπει το σύνολο της βιβλιογραφίας που ασχολήθηκε με την έννοια, ανεξάρτητα την ερευνητική σκοπιά του εκάστοτε ερευνητή. Ωστόσο, επειδή η παρούσα εργασία επιθυμεί να μελετήσει την εμφάνιση της γενίκευσης στην σχολική τάξη και να εστιάσει περισσότερο στον τρόπο που ο εκπαιδευτικός την διαχειρίζεται. Για τον λόγο αυτό δεν θα επεκταθούμε σε περισσότερα άρθρα για την σχέση των μαθητών με την γενίκευση και τις πιθανές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. Στη συνέχεια της βιβλιογραφικής ανασκόπησης η προσοχή μας θα εστιαστεί στις διδακτικές πρακτικές που προωθούν την ικανότητα γενίκευσης και στον θέση που έχει η έννοια σε διάφορες θεωρίες σχεδίασης διδασκαλιών.

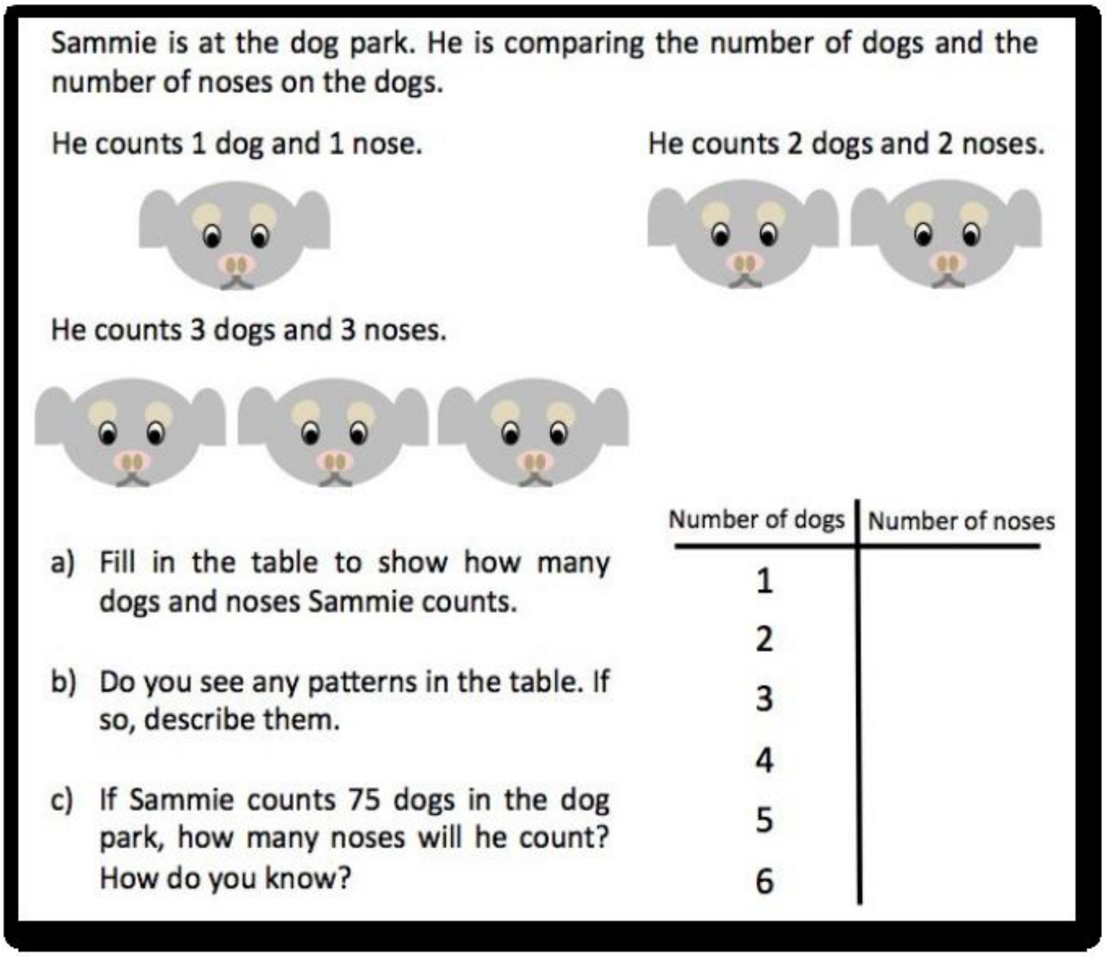
Πριν ολοκληρώσουμε όμως το υποκεφάλαιο με τις δυσκολίες των μαθητών και αφού όπως προαναφέραμε στη συνέχεια θα μελετήσουμε μη παραδοσιακές θεωρίες διδασκαλίας οφείλουμε να παραθέσουμε το εξής απόσπασμα από το άρθρο «Generalizing in interaction: Middle school mathematics students making mathematical generalizations in a population-modeling project» της Jurow (2004): *«Συχνά οι εκπαιδευτικοί, οι σχεδιαστές των προγραμμάτων σπουδών και οι συγγραφείς των σχολικών βιβλίων δεν αναγνωρίζουν ότι τα μαθηματικά μοτίβα δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά. Οι μαθητές θα δυσκολεύονται να τα αναγνωρίσουν και ως αποτέλεσμα να γενικεύσουν, όσο η διδασκαλία τους περιορίζει στο να εκτίθενται σε πολλαπλές παρόμοιες περιπτώσεις. Αυτό που χρειάζονται είναι να προσανατολίσουμε την σκέψη τους στο να αναγνωρίζει τις σχέσεις αυτές μέσω από πλήθος διαφορετικών περιπτώσεων».* Η αμερικανίδα ερευνήτρια κατέληξε στο εξής συμπέρασμα έπειτα από την έρευνα της σε μαθητές μέσης ηλικίας. Με τον παραπάνω ισχυρισμό της πιστεύουμε ότι ασκεί κριτική στα προγράμματα σπουδών που δεν προσπαθούν να δώσουν τις κατάλληλες ευκαιρίες στους μαθητές ώστε αυτοί να ενισχύσουν την ικανότητα τους να γενικεύουν. Ακολουθούν κάποια ενδεικτικά προβλήματα που σύμφωνα με την βιβλιογραφία ενισχύουν και προωθούν την γενίκευση.



Από το «National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.»



Από το άρθρο: «Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities» Lannin, J. K. (2005).



Sammie is at the dog park. He is comparing the number of dogs and the number of noses on the dogs.

He counts 1 dog and 1 nose.

He counts 2 dogs and 2 noses.

He counts 3 dogs and 3 noses.

a) Fill in the table to show how many dogs and noses Sammie counts.

b) Do you see any patterns in the table. If so, describe them.

c) If Sammie counts 75 dogs in the dog park, how many noses will he count? How do you know?

Number of dogs	Number of noses
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Από το άρθρο: «The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade» Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015)

Natural numbers are put in groups as follows:
(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ...
Find the sum of numbers in the 10th group.
Find the sum of numbers in the nth group.

Από το άρθρο: «Educating teachers to pose mathematical problems in the digital age: Toward alternative ways of curriculum design». Abramovich, S. (2015).

A group of people is in a room together for some kind of meeting. Each person is expected to become part of a group. The first group will have one person, the second group will have two people, the third group will have three people, and so on. The person in the group one is assigned the number one. The persons in the group two are assigned the numbers two and three. The persons in the group three are assigned the numbers four, five, six, and so on with the remaining groups. Each person in each group is given a piece of candy according to their number. For example, person one gets one piece of candy, person two gets two pieces of candy, person three gets three pieces of candy, and so on. The person handing out the candy wants to put each group's candy in a zip lock bag prior to handing it out and needs to know the total pieces of candy each group will get. Help this person to solve the problem.

Από το άρθρο: «Educating teachers to pose mathematical problems in the digital age: Toward alternative ways of curriculum design». Abramovich, S. (2015).

Una says that if you add any two consecutive numbers, then your answer will always be odd.
Do you agree with Una?
Why or why not?

Από το άρθρο: «Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving» Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002).

Una says that if you add any two even numbers, then your answer will always be even.
Do you agree with Una?
Why or why not?
Next, Una is thinking about what happens if you add any number of even numbers. What do you think about adding any number of even numbers?

Από το άρθρο: «Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving» Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002).

1.3 Η γενίκευση σε σχέση με τις διδακτικές πρακτικές

Αποδεχόμενοι τις έντονες δυσκολίες που οι μαθητές εμφανίζουν επί του θέματος και πάντα σε συνδυασμό με την αναμφισβήτητη χρησιμότητα της γενίκευσης, αρκετοί ερευνητές επικεντρώνονται πλέον στο πως η μαθηματική διδασκαλία μπορεί να υποστηρίξει και να αναπτύξει την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν μέσα στο περιβάλλον μιας σχολικής τάξης (Jurow, 2004; Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Becker & Rivera, 2006).

Ο Lannin επιχειρώντας ρεαλιστικά προβλήματα τον οποίων η λύση ήταν συνυφασμένη με την διατύπωση γενικευμένων συλλογισμών κατέγραψε τις *στρατηγικές γενίκευσης* που καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

TABLE 1
Generalization Strategies

Strategy	*Description*
Nonexplicit	
Counting	Drawing a picture or constructing a model to represent the situation to count the desired attribute.
Recursive	Building on the previous term or terms in the sequence to determine subsequent term.
Explicit	
Whole-object	Using a portion as unit to construct a larger unit by multiplying (e.g., 3 apples cost $8 so 9 apples cost $24). There may or may not be an appropriate adjustment for over- or undercounting.
Guess-and-check	Guessing a rule without regard to why this rule might work. Usually this involves experimenting with various operations and numbers provided in the problem situation.
Contextual	Constructing a rule based on information provided in the situation; relating the rule to a counting technique.

Από το άρθρο: «Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities» John K. Lannin, 2005

Οι στρατηγικές αυτές αναφέρονται κυρίως σε δράσεις των μαθητών. Όσον αφορά πρακτικές που ο εκπαιδευτικός μπορεί να ακολουθήσει για να ενισχύσει την γενίκευση θα αναφερθούμε κατά κύριο λόγο στο άρθρο της Ellis *«Generalizing-Promoting Actions: How Classroom Collaborations Can Support Students»* του 2011, στο οποίο επιχειρεί να μελετήσει το πώς θα καμφθούν οι δυσκολίες που μια σχολική τάξη εμφανίζει στην γενίκευση. Η αμερικανίδα ερευνήτρια δεν επικεντρώθηκε σε ένα μεμονωμένο μαθητή, αλλά ενστερνιζόμενη την γενίκευση και ως μια «κοινωνική πρακτική» μελέτησε – μαζί με την βοήθεια 2 ακόμα συνεργατών της – την μαθηματική συμπεριφορά ενός συνόλου 6 μαθητών, με την ίδια να είναι η καθοδηγήτρια της ομάδας μελέτης.

Το μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο βασίστηκαν οι δραστηριότητες που έλαβαν χώρα ήταν η συνάρτηση $y=αx^2$. Ωστόσο, αντί για μια παραδοσιακή διδασκαλία κατά την οποία θα γινόταν μια τυπική εισαγωγή των μαθητών στη συγκεκριμένη έννοια, με τον καθηγητή να παραθέτει στην τάξη τις απαραίτητες πληροφορίες που οι μαθητές «οφείλουν να γνωρίζουν», η Ellis συνειδητά προτίμησε μια διαφορετική πρακτική. Με το «διδακτικό πείραμα» που επιχείρησαν, επιθυμούσαν οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με ένα συγκεκριμένο τύπο τετραγωνικής ανάπτυξης. Αποφάσισαν λοιπόν, με την βοήθεια του λογισμικού ΄΄Geometer's Sketchpad΄΄, να δώσουν την δυνατότητα στους μαθητές να μετρήσουν, να καταγράψουν και να μελετήσουν το πώς μεταβάλλονταν οι τιμές του μήκους, του πλάτους και του εμβαδού ενός ορθογωνίου όταν η τιμή του μήκους μεγάλωνε, με την προϋπόθεση ότι η αναλογία του μήκους και του πλάτους παρέμενε σταθερή. Όλα τα στάδια του πειράματος συνοψίζονται στο παρακάτω πίνακα.

Day	Mathematical topics	Day	Mathematical topics
1	Measurement and area	9	Justifying the second differences as $2a$
2	Comparing perimeter and area	10	Identifying second differences for tables with different Δh values
3	Identifying first and second differences in tables	11	Connecting equations, tables, and graphs
4	Connecting first and second differences to area	12	Graphing parabolas
5	Identifying height:length ratios and creating $y = ax^2$ equations	13	Graphing first and second differences
6	Creating generalizations about second differences	14	Creating $y = ax^2 + c$ equations and graphs
7	Justifying generalizations about second differences	15	Summarizing generalizations
8	Creating $y = ax^2$ equations from tables and identifying the second difference as $2a$		

Figure 1. Overview of the teaching-experiment sessions.

Από το άρθρο "Generalizing-Promoting Actions: How Classroom Collaborations Can Support Students"

Σκοπός των 15 συναντήσεων που πραγματοποιήθηκαν, ήταν να τοποθετήσουν τους μαθητές σε ένα μαθηματικό περιβάλλον που θα τους έδινε πολλές ευκαιρίες να γενικέψουν και να διατυπώσουν τα δικά τους συμπεράσματα. Η Ellis μελετώντας όλες τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που έλαβαν χώρα στις συναντήσεις αυτές, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν κάποιες συγκεκριμένες πρακτικές που ένας εκπαιδευτικός μπορεί να ακολουθήσει, ώστε να προωθήσει και να ενισχύσει την ικανότητα τον μαθητών να γενικεύουν.

Οι τρεις πρώτες πρακτικές, που έχουν προκύψει και ως αποτελέσματα άλλων ερευνών (για παράδειγμα: Cobb et al., 1997; Hall & Rubin, 1998; Jurow, 2004; Lehrer, Strom, & Confrey, 2002; O'Connor & Michaels, 1996), είναι οι εξής:

1. Η ενθάρρυνση των μαθητών να δικαιολογούν και να ξεκαθαρίζουν τις απαντήσεις και τις μαθηματικές προτάσεις που διατυπώνουν.
2. Το να εκθέτεις τις προτάσεις των μαθητών στο σύνολο της τάξης ώστε να αποτελούν θέμα συζήτησης και σχολιασμού.
3. Η ενθάρρυνση των προσπαθειών για γενίκευση, ειδικά όταν αυτές συνδέονται με δραστηριότητες πρόβλεψης αποτελεσμάτων ή συμπερασμάτων.

Ωστόσο η Ellis παρατήρησε και ακόμα τρεις πρακτικές που δεν είχαν εμφανιστεί σε κάποια προγενέστερη έρευνα:

4. Το να βασίζεις το μάθημα σε μια ιδέα ή ένα συμπέρασμα που προκύπτει από γενίκευση και να «χτίζεις» πάνω σε αυτό.
5. Η δημόσια γενίκευση, εννοώντας ότι ο ίδιος ο εκπαιδευτικός παραθέτει συχνά στην τάξη συλλογισμούς που οδηγούν σε γενίκευση.
6. Η εστίαση της προσοχής των μαθητών στις μαθηματικές σχέσεις που αναπτύσσονται μέσα στα πλαίσια μιας μαθηματικής δραστηριότητας.

Θα ήταν βασική παράλειψη να μην αναφέρουμε πως η ερευνήτρια δεν στάθηκε μόνο στις πρακτικές του εκπαιδευτικού, αλλά εστίασε και στις αλληλεπιδράσεις που αναπτύχθηκαν μεταξύ των μαθητών. Όπως αναμενόταν από την παραδοχή της γενίκευσης ως μιας πλαισιοθετημένης διαδικασίας, οι αλληλεπιδράσεις αυτές έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην διαμόρφωση των συλλογισμών που τους οδήγησαν στο τελικό αποτέλεσμα. Τονίζει όμως ότι ο εκπαιδευτικός ήταν αυτός που επηρέασε συνειδητά με την στάση του την επίτευξη της γενίκευσης, κυρίως με το να επιμένει συνεχώς στο να μεταφέρονται σε όλη την ομάδα οι μαθηματικές ιδέες που διατύπωνε κάποιος μαθητής. Ταυτόχρονα τους ενθάρρυνε να γενικεύουν απαιτώντας παράλληλα, αφενός να ξεκαθαρίζουν τις ιδέες τους και αφετέρου να τις δικαιολογούν κατάλληλα. Η Ellis, έχοντας τον διπλό ρόλο του εκπαιδευτικού-ερευνητή, ξεκαθαρίζει πως η στάση της ήταν αυτή που διαμόρφωνε τον τόνο και το ύφος των συνευρέσεων.

Βέβαια ανεξάρτητα από την γενίκευση, ο γενικότερος ρόλος του εκπαιδευτικού έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης μεγάλου πλήθους ερευνών. Ο Kynigos (2006) υποστηρίζει ότι ο ρόλος αυτός δεν πρέπει να τον περιορίζει σε ένα απλό κομιστή της γνώσης, σαν αυτή να είναι έκθεμα σε μουσείο, αντιθέτως οφείλει να κατανοεί τις νοητικές κατασκευές του μαθητή και να τον βοηθά στην αναδιοργάνωση των (νοητικών) δομών που αυτός σχηματίζει. Συνοπτικά η στάση του καθηγητή μπορεί να περιγραφεί ως μια συνεχιζόμενη εναλλαγή μεταξύ των παρακάτω ρόλων: «εισηγητής, συντονιστής, διευκρινίζων, σύμβουλος, πηγή, εμψυχωτής, συνερευνητής» (Kynigos, 2006). Στην συνέχεια της βιβλιογραφικής ανασκόπησης θα αναφερθούμε σε δυο μη παραδοσιακές θεωρίες μάθησης: τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση των Μαθηματικών και στην Ερευνητική Μάθηση. Στις θεωρίες αυτές γίνεται εκτενής αναφορά για τον ανανεωμένο ρόλο του εκπαιδευτικού και είναι αξιοσημείωτο το γεγονός πως ο ρόλος αυτός παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με όσα αναφέραμε στο παρόν υποκεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου.

1.4 Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και Γενίκευση

Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Εκπαίδευση (RealisticMathematics Education-RME) αναπτύχθηκαν από το Ινστιτούτο Freudenthal της Ολλανδίας (Zulkardi, 2010). Ο Γερμανό-Ολλανδός καθηγητής Hans Freudenthal (1905-1990) γνωστός, εκτός των άλλων, για τη φράση «Μάθηση των Μαθηματικών μέσα από την επανεφεύρεσή τους», θεωρείται πνευματικός πατέρας των RME. Δεν επιθυμούμε στην παρούσα εργασία να αναγερθούμε αναλυτικά στην ιστορία της συγκεκριμένης θεωρίας, ωστόσο αξίζει να αναφέρουμε ότι τα RME προέκυψαν μέσα σε ένα κλίμα αντιπαράθεσης με το κίνημα των Νέων Μαθηματικών (Bourbaki), τα οποία επηρέασαν στις παλιότερες δεκαετίες τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών και το βασικό τους επιχείρημα ήταν ότι τα Μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται κατά τον τρόπο με τον οποίο είναι αξιωματικά θεμελιωμένα.

Ο Freudenthal είχε χαρακτηριστικά δηλώσει ότι: *«ίσως θα έπρεπε [οι μαθητές]΄να γίνουν γνωστές σε κάποιο βαθμό των δομικής φύσης τους [των Μαθηματικών]. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι τα Μαθηματικά θα έπρεπε να τους παρουσιάζονται ως μια δομή, είτε σύμφωνα με την σύλληψη των Bourbaki είτε σύμφωνα με οποιαδήποτε άλλη σύλληψη. Θα ήταν σίγουρα ένα μάταιο εγχείρημα. Επιπρόσθετα ένα σύστημα σαν αυτό των Bourbaki [...] δεν αποδίδει δικαιοσύνη στα Μαθηματικά ως διάκονος αλλά ως αφέντης».*

Η κεντρική ιδέα των RME είναι ότι κατά την διάρκεια της διδασκαλίας τους τα Μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, υπό την έννοια ότι πρέπει να είναι κοντά στις εμπειρίες των μαθηματικών και να σχετίζονται με καταστάσεις της καθημερινότητας. Ο όρος ‘ρεαλιστικά’ δεν αναφέρεται μόνο στη σύνδεση τους με τον πραγματικό κόσμο αλλά και στη χρήση προβληματικών καταστάσεών που να είναι αληθινές - ρεαλιστικές - στο μυαλό των μαθητών. Η δεύτερη βασική αρχή των RME είναι πως αφού τα Μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα, η διδασκαλία τους οφείλει να έχει τη μορφή μιας καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης, στην οποία οι μαθητές μπορούν να βιώσουν μια διαδικασία όμοια με αυτήν κατά την οποία εφευρέθηκαν τα Μαθηματικά.

Θεμελιώδη ρόλο στα RME έχει η έννοια της μαθηματικοποίησης, ένας όρος που σχετίζεται ως ένα βαθμό με την γενίκευση. Σύμφωνα με τον Treffers (1987) η μαθηματικοποίηση διακρίνεται σε δύο είδη: την οριζόντια και την κάθετη. Στην οριζόντια οι μαθητές εφευρίσκουν μαθηματικά εργαλεία που βοηθούν στην οργάνωση και επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος, ενώ ο όρος κάθετη μαθηματικοποίηση αναφέρεται σε μια διαδικασία αναδιοργάνωσης των μαθηματικών εννοιών μέσα στο ίδιο το μαθηματικό σύστημα.

Η οριζόντια μαθηματικοποίηση μπορεί να προκύψει από αρκετές διαδικασίες όπως η αναγνώριση και περιγραφή συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών ή/και αντικειμένων ενός γενικού πλαισίου, από την κατασκευή ενός σχήματος, από την τυποποίηση και απεικόνιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους, από την ανακάλυψη σχέσεων ή/και κανονικοτήτων, από την αναγνώριση όμοιων και ισομορφικών χαρακτηριστικών σε διαφορετικά προβλήματα, από την μετατροπή ενός πραγματικού-ρεαλιστικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα και από την μετατροπή ενός πραγματικού-ρεαλιστικού προβλήματος σε ένα γνωστό μαθηματικό πρόβλημα

Η κάθετη μαθηματικοποίηση συνδέεται με διαδικασίες όπως η τυποποιημένη αναπαράσταση μιας σχέσης, η απόδειξη κανονικοτήτων, η βελτίωση και προσαρμογή μοντέλων, η χρήση διαφορετικών μοντέλων, ο συνδυασμός και η ενσωμάτωση μοντέλων, η τυποποίηση ενός μαθηματικού μοντέλου και τέλος η γενίκευση. Δεν είναι πολύ σαφές ποιον σε ποιόν από τους ορισμούς που καταγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους αναφέρεται ο Treffers, ωστόσο είναι φανερό ότι η επίτευξη της γενίκευσης, παρουσιάζεται ως ένας από τους απώτερους στόχους μιας διδασκαλίας βασισμένης στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά.

Αξίζει να αναφερθεί ότι στα πλαίσια μιας σχολικής τάξης είναι πιθανόν να μην μπορεί να γίνει εύκολα η διάκριση σε οριζόντια και κάθετη μαθηματικοποίηση. Ο Freudenthal (1991) άλλωστε αναφέρει: *«Η οριζόντια μαθηματικοποίηση σχετίζεται με την μεταφορά από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων, ενώ η κάθετη μαθηματικοποίηση συνεπάγεται κινήσεις εντός του κόσμου των συμβόλων. Όμως η διάκριση ανάμεσα στα δύο είδη μαθηματικοποίησης δεν είναι πάντα ευκρινής.»*

Ο Harun Zulkardi (2010) σε άρθρο του αφιερωμένο στην σχεδίαση μαθημάτων στο πλαίσιο των RME, αναφέρει ότι από τον συνδυασμό της μαθηματικοποίησης του Treffers, των επιπέδων

Van Hiele και της διδακτική φαινομενολογίας του Freudenthal προκύπτουν πέντε βασικά χαρακτηριστικά των RME: (α) η φαινομενολογική διερεύνηση ή/και η χρήση πλαισίου (contexts), (β) Η χρήση προτύπων/μοντέλων ή/και η γεφύρωση μέσω καθέτων εργαλείων, (γ) η αξιοποίηση όσων κατασκευάζουν ή παράγουν οι μαθητές, (δ) ο διαδραστικός χαρακτήρας της διδασκαλίας και (ε) η διαπλοκή διαφόρων τμημάτων μάθησης. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας επιλέγουμε να κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά στο πρώτο χαρακτηριστικό, το οποίο είναι συνήθως το σημείο εκκίνηση μιας διδασκαλίας βασισμένης στα RME. Ο Zulkardi αναφέρει ότι *«τα φαινόμενα κατά τα οποία εμφανίζονται οι έννοιες στην πραγματικότητα πρέπει να είναι η πηγή από την οποία αναβλύζει η διαμόρφωση της έννοιας».*

Στο στάδιο αυτό συναντάμε την έννοια της εννοιολογική μαθηματικοποίησης (conceptual mathematization) που ορίζεται ως η διαδικασία μέσα από την οποία εκμαιεύεται η κατάλληλη έννοια δια μέσω μιας πραγματικής κατάστασης (De Lange, 1987), ένας ορισμός που θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως είναι «συγγενικός» με τους αντίστοιχους της γενίκευσης. Αντίστοιχος ισχυρισμός μπορεί να διατυπωθεί και για την έννοια της εφαρμοσμένης μαθηματικοποίησης – που επίσης εντάσσεται στο πρώτο χαρακτηριστικό των RME – καθώς ο Zulkardi αναφέρει *«Η διαδικασία αυτή (εννοιολογική μαθηματικοποίηση) θα αναγκάσει τους μαθητές να διερευνήσουν την κατάσταση, να αναγνωρίσουν τα σχετικά με αυτήν Μαθηματικά, να κατασκευάσουν σχήματα, να ανακαλύψουν κανονικότητες, και να αναπτύξουν ένα μοντέλο που θα οδηγήσει σε μια μαθηματική έννοια. Τότε οι μαθητές μπορούν και πρόκειται να εφαρμόσουν μαθηματικές έννοιες σε νέα πεδία του πραγματικού κόσμου και έτσι θα ενισχύσουν και θα ισχυροποιήσουν την έννοια. Η διαδικασία αυτή (η εφαρμογή των εννοιών σε νέα παιδία) ονομάζεται εφαρμοσμένη μαθηματικοποίηση.»*

Στο άρθρο του Zulkardi που προαναφέραμε – όπως ήταν αναμενόμενο αφού αναφέρεται στον σχεδιασμό διδασκαλίας – γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στον ρόλο του εκπαιδευτικού σε ένα μάθημα βασισμένο στα RME. Γενικά τα RME απαιτούν από τον εκπαιδευτικό να είναι ο οργανωτής και ως ένα βαθμό οδηγός των μαθητών, ενώ συχνά θα απαιτηθεί από αυτόν να γίνει αξιολογητής αυτών (De Lange, 1996, Gravenmeijer, 1994). Τα βήματα/πρακτικές που προτείνονται για τον εκπαιδευτικό είναι:

(α) Να δώσει στους μαθητές ένα πρόβλημα πλαισίου που να σχετίζεται με το προς διδασκαλία μαθηματικό αντικείμενο.

(β) Κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης να δώσει ένα στοιχείο στους μαθητές π.χ. σχεδιάζοντας έναν πίνακα.

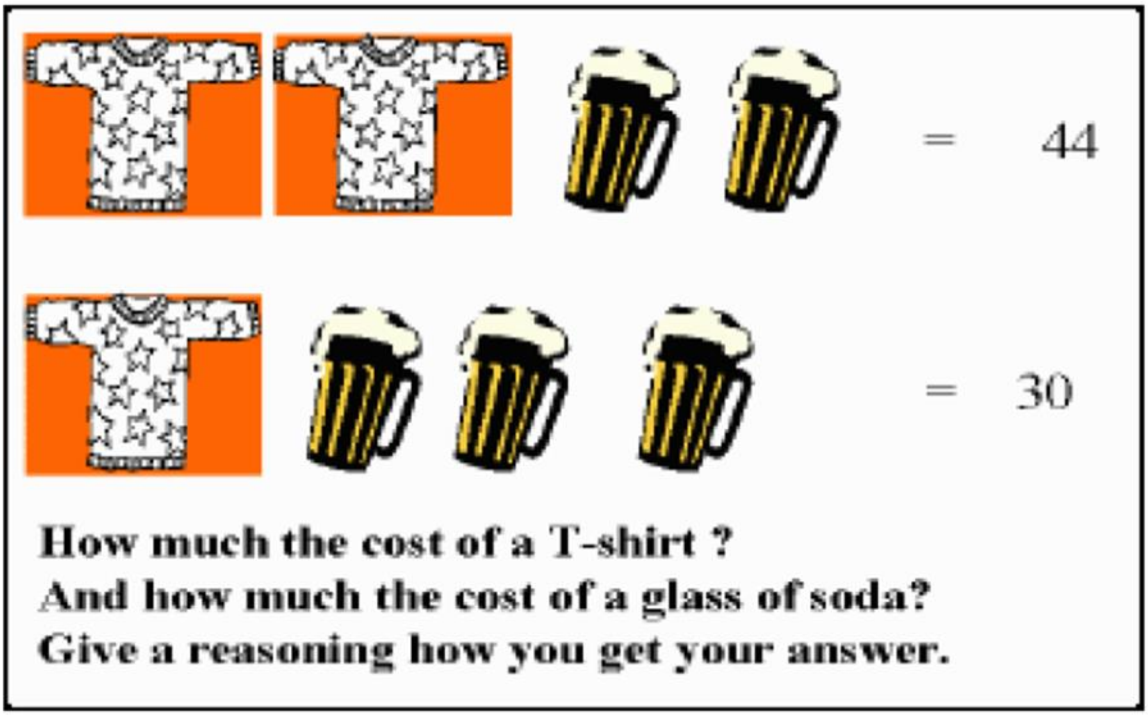
(γ) Να προτρέψει τους μαθητές να συγκρίνουν τις λύσεις τους σε μια συζήτηση με όλη την τάξη, δίνοντας έμφαση στην καταλληλότητα και επάρκεια των διαφορετικών λύσεων.

(δ) Να αφήσει τους μαθητές να βρουν τις δικές τους λύσεις .

(ε) Να δώσει στη τάξη ένα άλλο πρόβλημα στο ίδιο πλαίσιο.

Τονίζεται επίσης ότι οι μαθητές θα κληθούν να παράγουν εργαλεία υπό την μορφή συμβόλων, διαγραμμάτων και μοντέλων. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων η κοινωνική ενορχήστρωση των μαθητών οφείλει να είναι δομημένη με τρόπο που θα επιτρέπει την αλληλεπίδραση, τη συζήτηση, τη διαπραγμάτευση και τη συνεργασία μεταξύ τους. Τέλος το υλικό αξιολόγησης πρέπει να είναι προϊόν ανοικτών ερωτήσεων που θα οδηγήσει τους μαθητές σε «ελεύθερες παραγωγές».

Κλείνοντας την συγκεκριμένη ενότητα οφείλουμε να εστιάσουμε αρχικά στον κεντρικό ρόλο που έχει η γενίκευση στην επίτευξη της οριζόντιας και – κυρίως – κάθετης μαθηματικοποίησης. Γίνεται αντιληπτό ότι ένα μάθημα που σχεδιάσθηκε με βάση την συγκεκριμένη φιλοσοφία, επιθυμεί από τους μαθητές συχνά να προβαίνουν σε γενικεύσεις. Επίσης η προτεινόμενη στάση του εκπαιδευτικού έχει αρκετές ομοιότητες με τις πρακτικές που ενισχύουν την γενίκευση – και παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα – γεγονός που δεν πιστεύουμε ότι είναι συμπτωματικό.



Χαρακτηριστικό παράδειγμα για σχεδιασμό μαθήματος που θα εμπίπτει στο πλαίσιο των RME. Από το άρθρο «How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach?» Zulkardi Harun, 2010

1.5 Inquiry-based learning (IBL) και Γενίκευση

Για την συγκεκριμένη ενότητα της εργασίας βασιστήκαμε σε μεγάλο βαθμό στο άρθρο «Research evidence on the benefits of IBL» των Regina Bruder και Anne Prescott (2013) στο οποίο γίνεται αναφορά σε ένα σύνολο εμπειρικών μελετών αφιερωμένων στην ευρύτερη αντιμετώπιση της IBL - για τα Μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες γενικότερα. Επίσης παρουσιάζονται πλεονεκτήματα, μειονεκτήματα και χρήσιμα αποτελέσματα σχετικά με διδασκαλίες βασισμένες στη θεωρία IBL.

Ο όρος IBL αναφέρεται σε μαθητοκεντρικούς τρόπους διδασκαλίας, σύμφωνα με τους οποίους οι μαθητές (α) θα διατυπώνουν δικές τους, επιστημονικά προσανατολισμένες, ερωτήσεις, (β) θα δώσουν προτεραιότητα στα αποδεικτικά στοιχεία για την αντιμετώπιση των ερωτήσεων, (γ) θα διατυπώσουν εξηγήσεις με βάσει τα στοιχεία, (δ) θα συνδέουν εξηγήσεις με την επιστημονική γνώση, (ε) θα επικοινωνούν και δικαιολογούν τις εξηγήσεις αυτές, (ζ) θα διερευνούν καταστάσεις και (η) θα αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης.

Οι βασικοί στόχοι της IBL είναι η αύξηση των αρμοδιοτήτων των μαθητών ώστε να ενισχυθεί η μαθηματική σκέψη – αφού πρώτα θα έχουν δοθεί σε αυτούς τα κατάλληλα κίνητρα για μάθηση. Επιπροσθέτως οι μαθητές θα «εφοδιάζονται» με στρατηγικές για περαιτέρω μελλοντική χρήση. Σύμφωνα με τον Chan (2006) τα βασικά χαρακτηριστικά μιας - δομημένης στη IBL – διδασκαλίας είναι το ότι δίνονται στους μαθητές οι κατάλληλες ευκαιρίες για δημιουργία διάφορων προσεγγίσεων και λύσεων, για ανταλλαγή απόψεων μεταξύ τους, για λήψη αποφάσεων και την κατάλληλη αξιολόγησής τους. Στη συγκεκριμένη θεωρία συναντάμε ξανά μια μετατόπιση από την παραδοσιακή, δασκαλοκεντρική διδασκαλία σε μια διδασκαλία με τον μαθητή στο επίκεντρο. Ως teacher-centred ορίζεται η διδασκαλία στην οποία η νέα γνώση κατακτιέται με χρήση μαθηματικών ορισμών, κανόνων, πλαισίων και μεθόδων που δίνονται από τον εκπαιδευτικό, ενώ ως student-centred ορίζεται η διδασκαλία στην οποία η γνώση ανακαλύπτεται από τους μαθητές με βοήθεια ή καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό.

Οι Kremer & Schluter (2006) διέκριναν τρεις πτυχές για την IBL: (α) Structural Inquiry: Όταν ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές ένα πρόβλημα ή ερώτημα για επίλυση αλλά ταυτόχρονα δίνει και τις κατάλληλες μεθόδους ή/και εργαλεία που κρίνει απαραίτητα για την επίλυση αυτή, (β) Guided Inquiry: όταν ο εκπαιδευτικός παρέχει στους μαθητές το πρόβλημα ή τα ερωτήματα και τα υλικά, αλλά οι μαθητές είναι αυτοί που καλούνται να βρουν τις κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης και (γ) Open Inquiry: Οι μαθητές βρίσκουν προβλήματα ή ερωτήματα του ενδιαφέροντός τους κι αποφασίζουν για τις μεθόδους και τα εργαλεία που θέλουν να χρησιμοποιήσουν.

Οι Klauer και Leuther (2007) υποστήριξαν ότι η IBL έχει καλύτερες επιδόσεις όταν ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί την τάξη προς την εύρεση του κανόνα, ενώ ο Neber (2001) διέκρινε καλύτερα αποτελέσματα όταν ο εκπαιδευτικός δίνει μια ήπια κατεύθυνση στην τάξη, παρέχοντας τις απαραίτητες γνώσεις μόνο όταν είναι απαραίτητο. Οι παραπάνω περιγραφές παραπέμπουν στην Guided Inquiry, η οποία θεωρείται από τους ερευνητές ως η πιο αποτελεσματική μέθοδος. Έχει επίσης παρατηρηθεί ότι όταν οι μαθητές έχουν προγενέστερη γνώση του θέματος τα αποτελέσματα είναι πιο θετικά (Egan and Greeno 1981, Hermann 1981, Kirschner 2006), ενώ η IBL κρίνεται ως μη αποδοτική όταν παρατηρείται μικρή ανατροφοδότηση μεταξύ των μαθητών ή μεταξύ των μαθητών και τους εκπαιδευτικού (Brown and Campione, 1994). Υπάρχουν έρευνες που κάνουν επιπλέον κριτική στην IBL, αλλά στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας δεν επιθυμούμε να επεκταθούμε περεταίρω. Οι Bruder και Prescott (2013) καταλήγουν στο ότι η προτιμότερη οδός είναι ο κατάλληλος συνδυασμός διαφορετικών μεθόδων σχεδιασμού διδασκαλίας. Όσο για την θέση της γενίκευσης στην IBL, θα παραθέσουμε ένα απόσπασμα των Maaß και Artigue (2013) το οποίο περιγράφει εν συντομία την συγκεκριμένη μέθοδο διδασκαλίας και τον ρόλο της γενίκευσης σε αυτήν:

«Η IBL αναφέρεται σε μια προοπτική/μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών και της επιστήμης γενικότερα, η οποία είναι περισσότερο επικεντρωμένη στους μαθητές, οι οποίοι καλούνται να εργαστούν με τρόπους παρόμοιους με αυτούς που οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες εργάζονται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να παρατηρήσουν φαινόμενα, να διατυπώσουν ερωτήσεις και να αναζητήσουν μαθηματικούς και επιστημονικούς τρόπους για να απαντήσουν στις ερωτήσεις αυτές (πραγματοποίηση πειραμάτων, συστηματικός έλεγχος των μεταβλητές, σχεδιασμός διαγραμμάτων, πραγματοποίηση αριθμητικών υπολογισμών, εύρεση μοτίβων και σχέσεων, διατύπωση και απόδειξη εικασιών). Στη συνέχεια οι μαθητές ερμηνεύουν και αξιολογούν τις λύσεις τους και γνωστοποιήσουν τα αποτελέσματά τους μέσω διαφόρων μέσων (συζητήσεις, αφίσες, παρουσιάσεις). Αυτό σημαίνει επίσης ότι θα πρέπει να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τα αποτελέσματα και τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους και να τα συνδέσουν προκειμένου να αναπτυχθούν προοδευτικά οι μαθηματικές έννοιες και δομές.»

Από το παραπάνω ενδεικτικό απόσπασμα γίνεται φανερό ότι η επίτευξη της γενίκευσης αποτελεί σε μεγάλο βαθμό τον σκοπό μιας διδασκαλίας εμπνευσμένης από την θεωρία IBL. Η έννοια, όπως και στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, συναντάται στα τελικά στάδια των δραστηριοτήτων και αντιμετωπίζεται ως επιστέγασμα των όσων έχουν ήδη προηγηθεί, σε βαθμό που θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ταυτίζεται με την κατάκτηση και κατανόηση της νέας γνώσης. Ο ρόλος και κατά επέκταση οι πρακτικές που προτείνονται για τον εκπαιδευτικό έχουν ομοιότητες με τις αντίστοιχες των RME, καθώς η περιστροφή του μαθήματος γύρω από τους συλλογισμούς των μαθητών θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση. Ως επί το πλείστον λοιπόν, ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει περισσότερο τον ρόλο καθοδηγητή και συν-ερευνητή επειδή επιθυμεί οι μαθητές να διατυπώσουν τις δικές τους προσεγγίσεις, να ανταλλάξουν απόψεις μεταξύ τους, να συμμετέχουν ενεργά στη λήψη αποφάσεων και να προβούν στην κατάλληλη αξιολόγησής των αποφάσεων αυτών, καταλήγοντας στους γενικευμένους συλλογισμούς, τους οποίους ο εκπαιδευτικός θα επιβεβαιώσει.

1.6 Τα είδη διδασκαλίας

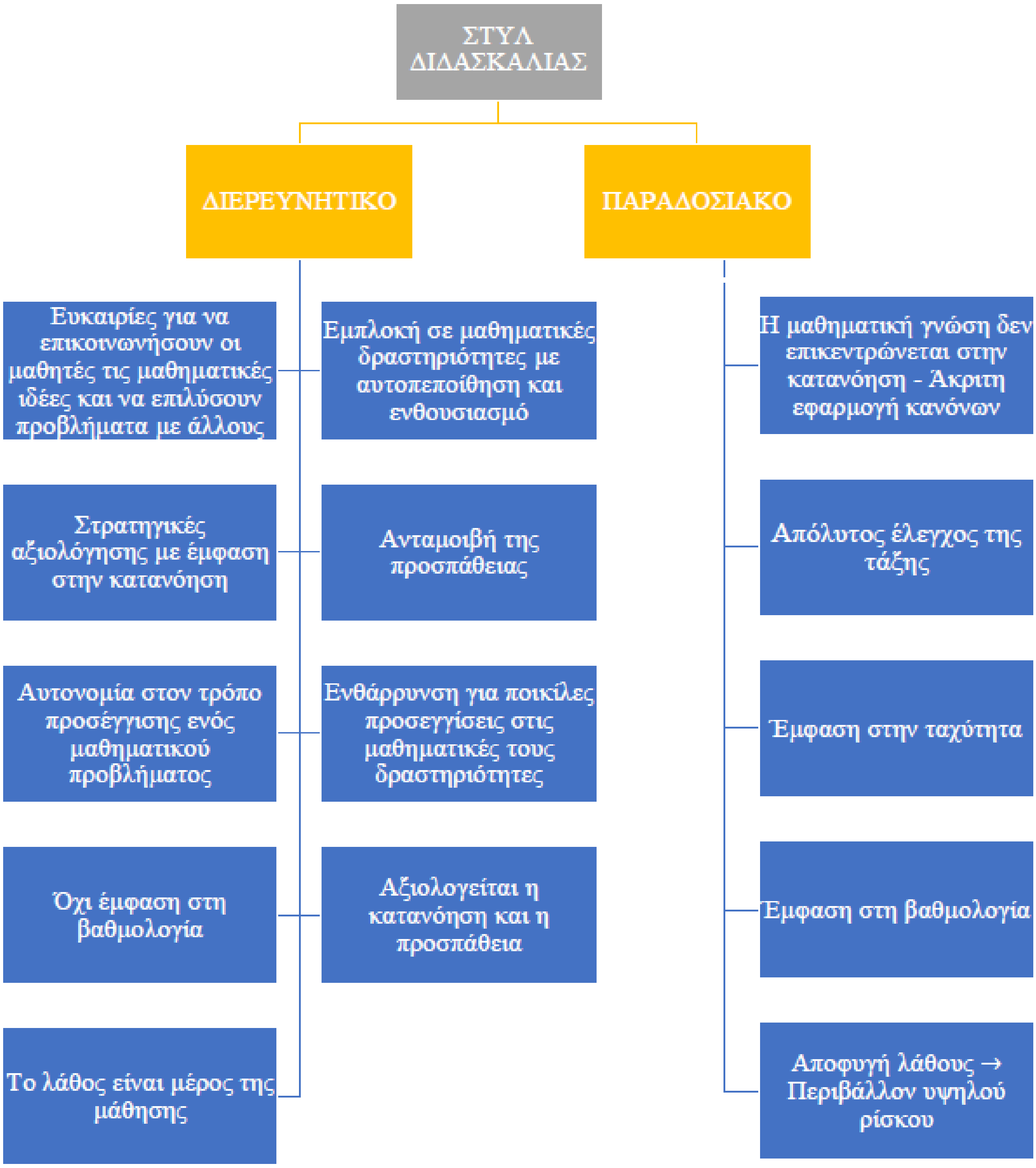
Στο συγκεκριμένο, τελευταίο υποκεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, επιθυμούμε να αναφερθούμε στα βασικά είδη – ή αλλιώς στυλ – διδασκαλίας που έχουν καταγραφεί στην έρευνα για την διδακτική των μαθηματικών. Ο τρόπος διδασκαλίας ενός εκπαιδευτικού αποτέλεσε το αντικείμενο μελέτης μεγάλου πλήθους ερευνών από τα πρώτα κιόλας χρόνια της συγκεκριμένης επιστήμης. Οι Fischer & Fischer (1979) ισχυρίζονταν ότι ακόμα και αν δύο εκπαιδευτικοί διδάσκουν με τρόπο που παραπέμπει σε διαλέξεις ή προτιμούν να εργάζονται με μικρές ομάδες συζήτησης, είναι πιθανό να διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους. Από τις πρώτες έρευνες λοιπόν θεωρείται ως δεδομένο πως ανεξάρτητα από το διδακτικό στυλ που ένας εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί, σε αυτό θα διαφαίνεται οπωσδήποτε η προσωπική του σφραγίδα. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές κάνουν λόγο για έξι διαφορετικά στυλ (teaching styles): (α) task – oriented, όπου δίνεται στους μαθητές το γνωστικό αντικείμενο προς μελέτη και απαιτείται από αυτούς η αναπαραγωγή (performance) του, (β) cooperative planner, όπου ο εκπαιδευτικός είναι επικεφαλής, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να συμμετάσχουν ενεργά ως ισότιμα και σεβαστά μέλη, (γ) child centered, όπου οι μαθητές καθορίζουν το πρόγραμμα σπουδών ανάλογα με τα ενδιαφέροντά τους, (δ) subject centered, όπου ο δάσκαλος είναι ικανοποιημένος με την κάλυψη της ύλης, ανεξάρτητα με το αν εγκαθιδρύθηκε η γνώση, (ε) learning centered, όπου αναζητά τη χρυσή τομή μεταξύ των (δ) και (ε), και τέλος (στ) emotionally exciting, όπου ο διδάσκων μεταφέρει τον προσωπικό του ενθουσιασμό στην τάξη.

Ανατρέχοντας στο άρθρο των Opdenakker & Van Damme (2006) παρατηρούμε ότι καθώς η επιστήμη της διδακτική των μαθηματικών εξελισσόταν, συχνά διατυπωνόταν ένας διαχωρισμός των ειδών διδασκαλίας. Οι Bennett (1976) και Wade (1981) χρησιμοποίησαν τους όρους τυπικό και άτυπο (formal – informal). Ο MacNeil (1980) τα χωρίζει σε επεξηγηματικό (expository), δηλαδή η διδασκαλία κατά την οποία ο εκπαιδευτικός στο πλαίσιο της παράδοσης της νέας ύλης εξηγεί τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες στο σύνολο της τάξης και διερευνητικό (discovery), όταν οι μαθητές καταλήγουν στη νέα γνώση με δραστηριότητες διερεύνησης. Η Kelly (1980) χρησιμοποιεί την διχοτομία διερευνητικό και απολυταρχικό (exploratory και autoritarian). Ωστόσο οι δυο ερευνητές αποδέχονται τον διαχωρισμό μαθητοκεντρικό (learner-centered) με την έμφαση να δίνεται περισσότερο στους μαθητές και στους συλλογισμούς τους και μαθηματικοκεντρικό (content-centered) με την έμφαση να δίνεται περισσότερο αρχικά στο μαθηματικό περιεχόμενο του κάθε μαθήματος και στη συνέχεια σε ασκήσεις συγγενικές με αυτό. Κάθε ερευνητής από όσους προαναφέραμε περιγράφει με εκτενώς τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε διδακτικού στυλ, αλλά συνειδητά δεν θα αναφερθούμε περεταίρω, επειδή δεν το κρίνουμε απαραίτητο στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Ωστόσο θα αναφερθούμε πιο διεξοδικά στον διαχωρισμό των Stipek et al (2001), σύμφωνα με τον οποίο τα στυλ χωρίζονται σε κατασκευαστικό (constructivist ή social – constructivist) και παραδοσιακό (oriented – traditional). Λαμβάνοντας υπόψη τους το NCTM5, περιγράφουν το διερευνητικό/κατασκευαστικό στυλ, ως τη διδασκαλία όπου οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες για να επικοινωνήσουν τις μαθηματικές ιδέες και να επιλύσουν προβλήματα με άλλους, να εμπλακούν σε μαθηματικές δραστηριότητες με αυτοπεποίθηση και ενθουσιασμό. Προσθέτουν επίσης ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να χρησιμοποιούν στρατηγικές αξιολόγησης που να εστιάζουν στην κατανόηση και όχι στη σωστή απάντηση. Επίσης οφείλουν να εκτιμούν και να ανταμείβουν την προσπάθεια και την επιμονή των μαθητών, παρέχοντας τους αυτονομία στον τρόπο προσέγγισης ενός μαθηματικού προβλήματος και ενθαρρύνοντας τους να χρησιμοποιούν ποικίλες προσεγγίσεις στις μαθηματικές τους δραστηριότητες.

Τονίζεται επίσης, ότι δεν είναι απαραίτητο για έναν εκπαιδευτικό να δίνει στη βαθμολογία ζωτική σημασία, αλλά για την αξιολόγηση του μαθητή να λαμβάνει σε μεγάλο βαθμό υπόψη του αφενός την κατανόηση των εννοιών, αφετέρου τη προσπάθεια που ο εκάστοτε μαθητής καταβάλλει. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται για την αντιμετώπιση των λαθών, τα οποία θεωρούνται ως αναπόσπαστο μέρος της μάθησης και ένα εκπαιδευτικός οφείλει να τα εκμεταλλεύεται συχνά, γιατί του δίνουν την ευκαιρία να κατανοήσει τον τρόπο σκέψεις ενός μαθητή και τις πιθανές δυσκολίες που αντιμετωπίζει. Είναι προφανές ότι οι διδασκαλίες επηρεασμένες από τις θεωρίες των RME και IBL εντάσσονται σε αυτήν την κατηγορία.

Όσον αφορά στο παραδοσιακό στυλ, στην έρευνα των Stipek et al (2001) αναφέρεται ότι οι εκπαιδευτικοί που ακολουθούν αυτόν τον τρόπο πραγματοποιούν μια διδασκαλία επικεντρωμένη στην εφαρμογή κανόνων και διαδικασιών, οι οποίες θα επιφέρουν τη σωστή απάντηση. Σύμφωνα με την Thompson (1992) στο ίδιο άρθρο, η μαθηματική γνώση ταυτίζεται με την εφαρμογή των κατάλληλων διαδικασιών και χειρισμό συμβόλων, χωρίς απαραίτητα οι μαθητές να κατανοούν τις ενέργειές τους. Ο εκπαιδευτικός κατέχει τον απόλυτο έλεγχο της τάξης και οι μαθητές αναλώνονται στην εκμάθηση διαδικασιών – τεχνικών. Επίσης, ο εκπαιδευτικός δίνει έμφαση στην ταχύτητα και στη βαθμολογία, με αποτέλεσμα η δεύτερη να γίνεται το μοναδικό κίνητρο για το μαθητή – και όχι η γνώση. Τέλος, το λάθος θα πρέπει να αποφεύγεται, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα κλίμα υψηλού ρίσκου στην τάξη. Ο συγκεκριμένος όρος (υψηλό ρίσκο) συναντιέται συχνά σε τέτοιου είδους βιβλιογραφία και αναφέρεται στο σχολικό περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές δεν αισθάνονται την άνεση να εκφράσουν τους μαθηματικούς τους συλλογισμούς, επειδή φοβούνται ότι θα κάνουν λάθος, γεγονός που θα έχει επίπτωση στην βαθμολογία τους και κάποιες φορές ίσως προκαλέσει τον αρνητικό σχολιασμό του εκπαιδευτικού ή των υπόλοιπων μαθητών της τάξης. Οι τρείς τελευταίες παράγραφοι συνοψίζονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Τα χαρακτηριστικά του διερευνητικού/κατασκευαστικού και του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας όπως περιγράφονται στο άρθρο «Teachers' beliefs and practices related to mathematics» των Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001).

Κλείνοντας το συγκεκριμένο υποκεφάλαιο, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι πλέον στην πιο πρόσφατη βιβλιογραφία δίνεται έμφαση στις διαφορετικές διαστάσεις των διδακτικών στυλ και όχι τόσο στις διχοτομίες τους. Ωστόσο, για τα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα αρκεστούμε στα όσα ήδη παρουσιάσαμε, καθώς κρίνονται αρκετά για την ανάλυση των δεδομένων που θα ακολουθήσει. Επιπλέον, θα ήταν παράλειψη να μην τονίσουμε πως ένας εκπαιδευτικός δύναται να χρησιμοποιεί, συνειδητά ή μη, στοιχεία στην διδασκαλία του που ανήκουν σε παραπάνω από ένα είδος.

Κεφάλαιο 2ο – Μεθοδολογία

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε μελέτη-περίπτωση δύο διαφορετικών εκπαιδευτικών-σχολικών τμημάτων Γ' Γυμνασίου, κατά την διάρκεια της παράδοσης του κεφαλαίου των "Γραμμικών Συστημάτων". Η επιλογή των συγκεκριμένων τμημάτων έγινε με βάση την προγενέστερη γνώση πως οι δυο εκπαιδευτικοί διαφέραν - ως ένα βαθμό - στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν την διδασκαλία των μαθηματικών. Στις μετέπειτα ενότητες της εργασίας θα ακολουθήσει εκτενής ανάλυση των διαφορών αυτών, στο σημείο όμως αυτό οφείλουμε να αναφέρουμε πως δεν γνωρίζαμε εξ αρχής ποιες διδακτικές επιλογές θα πραγματοποιούσαν κατά την διδασκαλία του συγκεκριμένου κεφαλαίου και προφανώς δεν υπήρχε κάποια αρχική βεβαιότητα πως θα υπάρξουν αισθητές διαφορές.

Επίσης, οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζονταν μεταξύ τους, ούτε ήρθαν σε επαφή κατά την διάρκεια της έρευνας. Παρόλο που ήταν ενήμεροι πως το θέμα της παρούσας εργασίας - για την οποία πραγματοποιήθηκαν οι παρακολουθήσεις των τμημάτων τους - είναι η γενίκευση, δεν τους δόθηκαν περεταίρω λεπτομέρειες σχετικά με τους στόχους της έρευνας. Ο σκοπός και τα αποτελέσματα αποκαλύφθηκαν σε αυτούς κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν μετά την ανάλυση των δεδομένων.

2.1 Ερευνητικοί Στόχοι

Οι ερευνητικοί στόχοι της εργασίας είναι οι εξής:

I. Με ποια μορφή και υπό ποιες προϋποθέσεις εμφανίζεται η έννοια της γενίκευσης μέσα στις δύο σχολικές τάξεις.
II. Με ποιες πρακτικές ο εκάστοτε εκπαιδευτικός διαχειρίστηκε την γενίκευση.

Ο πρωταρχικός λοιπόν στόχος ήταν να εντοπίσουμε αν εμφανίζεται η γενίκευση μέσα στην εκάστοτε τάξη, δηλαδή να εξετάσουμε όχι μόνο αν οι μαθητές προβαίνουν σε γενικεύσεις αλλά και πως το περιβάλλον της κάθε σχολικής τάξης τους δίνει αυτή την δυνατότητα. Όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχει ένα αξιοσημείωτο πλήθος ορισμών για την έννοια και έπειτα από την μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων και των σημειώσεων που προέκυψαν από κάθε διδακτική ώρα, προσπαθήσαμε να κατασταλάξουμε στον αν πράγματι κάποιος από τους ορισμούς αυτούς ικανοποιείται, προσδιορίζοντας την στιγμή και το πλαίσιο μέσα στο οποίο αυτό συμβαίνει.

Ωστόσο, επειδή ο εκπαιδευτικός είναι ο κύριος υπεύθυνος για την διαμόρφωση του κλίματος που επικρατεί σε ένα τμήμα, το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα είναι στραμμένο στις πρακτικές και την γενικότερη στάση του. Στόχος μας ήταν να εντοπίσουμε αρχικά τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να προκαλέσει την γενίκευση και στη συνέχεια το πως την διαχειρίζεται. Όπως και με το πλήθος των ορισμών, υπάρχει ένα αντίστοιχο σύνολο ερευνών που προσπαθούν να συνδέσουν την συμπεριφορά και τις πρακτικές ενός εκπαιδευτικού με την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να γενικεύουν και τα ευρήματα αυτά τα λάβαμε υπόψιν, υπό την έννοια ότι αναζητήσαμε αν και ποιες από τις πρακτικές αυτές οι δύο εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν και αν και με ποιό τρόπο αυτές συνδέονται με την έννοια της γενίκευσης.

Οφείλουμε να αναφέρουμε ότι οι εκπαιδευτικοί δεν ενημερώθηκαν σχετικά με το ποιες είναι οι πρακτικές που η βιβλιογραφία έχει συνδέσει με την γενίκευση, καθώς επιθυμούσαμε να μην επηρεάσουμε - έστω και σε μικρό βαθμό - τον γενικότερο τρόπο διδασκαλία τους. Επίσης, παρά το γεγονός ότι αναμέναμε να συναντήσουμε κάποιες διαφορές στην διδασκαλία, δεν γνωρίζαμε από πριν την φύση των διαφορών αυτών. Όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια τα δυο σχολικά περιβάλλοντα που μελετήσαμε ήταν αρκετά διαφορετικά, γεγονός που επιθυμούσαμε να εκμεταλλευτούμε για να δώσουμε μια επιπλέον ερευνητική διάσταση στην εργασία.

2.2 Η διαδικασία της έρευνας

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας πραγματοποιήθηκαν παρακολουθήσεις και ηχογραφήσεις συνολικά δεκαεπτά (17) διδακτικών ωρών, σε δύο δημόσια σχολεία της ευρύτερης περιοχής της Αττικής. Στα τμήματα αυτά δίδασκαν οι δύο εκπαιδευτικοί που είχαν δεχτεί να συμμετάσχουν στην έρευνα, στους οποίους θα αναφερόμαστε ως Ε1 και Ε2. Οι εννέα (9) παρακολουθήσεις πραγματοποιηθήκαν στα τμήματα της Γ Γυμνασίου του πειραματικού σχολείου που διδάσκει ο Ε1 και οι υπόλοιπες (8) στο μοναδικό τμήμα Γ Γυμνασίου που διδάσκει ο Ε2. Οι παρακολουθήσεις έλαβαν χώρα τους πρώτους μήνες του 2017. Έπειτα από συνεννόηση με τους εκπαιδευτικούς, καταφέραμε οι επισκέψεις μας στα σχολεία να είναι τέτοιες, ώστε και στις δυο περιπτώσεις να παρακολουθήσουμε την συνολική διδασκαλία του κεφαλαίου των Γραμμικών Συστημάτων.

Πριν, κατά την διάρκεια και μετά την ολοκλήρωση των παρακολουθήσεων πραγματοποιήθηκαν συζητήσεις με τους εκπαιδευτικούς με σκοπό να εμβαθύνουμε στις διδακτικές πεποιθήσεις και στόχους τους. Μετά την ανάλυση των δεδομένων, επιχειρήσαμε να συνδέσουμε τα ευρήματα μας σχετικά με την μορφή της γενίκευσης που εντοπίσαμε και τις πεποιθήσεις του εκάστοτε εκπαιδευτικού.

2.3 Το προφίλ των εκπαιδευτικών

Οι δυο εκπαιδευτικοί που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα επιλέχτηκαν με βάση κάποια συγκεκριμένα κριτήρια. Το πρώτο από αυτά ήταν το γεγονός πως και οι δυο είχαν μια πολυετή διδακτική εμπειρία σε δημόσια σχολεία. Επίσης και οι δυο είναι απόφοιτοι του διατηματικού μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών “Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών” των πανεπιστημίων Αθήνας και Λευκωσίας. Το δεύτερο κριτήριο ήταν ότι σε συζητήσεις που προηγήθηκαν της επιλογής τους, κατέστη σαφές ότι ενστερνίζονται τον βασικό ρόλο που κατέχει η γενίκευση στη διδακτική των μαθηματικών.

Το τρίτο και σημαντικότερο κριτήριο, το οποίο αναφέρθηκε και στις προηγούμενες παραγράφους, ήταν το γεγονός πως αναμέναμε οι τρόποι διδασκαλίας που θα ακολουθούσαν - για το ίδιο σημείο της ύλης - να διαφέρουν μεταξύ τους. Ευελπιστούσαμε δηλαδή, ότι από τις διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις θα προκύπταν δυο διαφορετικά περιβάλλοντα σχολικής τάξης, γεγονός που θέλαμε να εκμεταλλευτούμε ώστε να μελετήσουμε την γενίκευση σε δυο διαφορετικές περιπτώσεις.

Πιο συγκεκριμένα, ο Ε1 επέλεξε να εισάγει την τάξη στις έννοιες του κεφαλαίου μέσω μιας δραστηριότητας εμπνευσμένης από την θεωρία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, που στα αρχικά του στάδια δεν είχε κάποια φαινομενικά άμεση σχέση με τα συστήματα. Επί προσθέτως έχοντας ως πρόσχημα τα επιμέρους ρεαλιστικά προβλήματα έθιξε στην τάξη έννοιες όπως η χρήση μιας μεταβλητής, πώς διαμορφώνονται αλγεβρικές σχέσεις μέσα από ένα ρεαλιστικό πρόβλημα και πως βασιζόμενοι σε μαθηματικούς κανόνες μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις ισότητες αυτές σε ισοδύναμες μορφές.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός κάνοντας συνειδητά την επιλογή να μην περιοριστεί στην απλή - κάποιες φορές μηχανική - επίλυση συστημάτων, ακολούθησε μια πορεία που διαφέρει αρκετά από ότι θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως “παραδοσιακή”. Η διδασκαλία του είχε μια έντονη διερευνητική χροιά, γεγονός που οφείλεται τόσο στις εργασίες στις οποίες βάσισε το μάθημα όσο και στο ότι στην τάξη δεν χρησιμοποιήθηκε το σχολικό βιβλίο, οι μαθητές εργάζονταν συχνά σε ομάδες, οι ασκήσεις για το σπίτι δίνονταν και λύνονταν μέσω μιας ηλεκτρονικής πλατφόρμας επικοινωνίας και συχνά προσπαθούσε να είναι περισσότερο ο συντονιστής της τάξης που επιβεβαίωνε - όποτε έκρινε απαραίτητο την νέα γνώση - παρά ο κομιστής αυτής. Η σωστή κατασκευή, η διατύπωση και ο ορθός μετασχηματισμός μαθηματικών σχέσεων φάνηκε να απασχολεί την τάξη στον ίδιο βαθμό - και σε μερικές φορές μεγαλύτερο - με την επίλυση των γραμμικών συστημάτων και αναμφισβήτητα αποτέλεσε έναν από τους κύριους στόχους του μαθήματος

Τέλος, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι ο Ε1 δίδασκε σε τάξη πειραματικού σχολείου, γεγονός που του πρόσφερε την άνεση να μην περιορίζεται στα όρια του αναλυτικού προγράμματος, ενώ οι μαθητές - τους οποίους αναλάμβανε για τρίτη συνεχή χρονιά - φαίνονταν αρκετά εξοικειωμένοι με το είδος της διδασκαλίας που επιχείρησε. Για παράδειγμα το γεγονός ότι συχνά δούλευαν σε ομάδες δεν προκάλεσε κάποια διαταραχή στην ροή του μαθήματος, καθώς αποτελούσε μια συνηθισμένη για αυτούς πρακτική.

Ο δεύτερος εκπαιδευτικός ακολούθησε μια διαφορετική πορεία στο τρόπο διδασκαλίας του. Βασίστηκε σε δραστηριότητα που δεν υπήρχε στο βιβλίο για να εισάγει τους μαθητές στο νέο κεφάλαιο, η οποία δεν συμπεριλάμβανε κάποιο ρεαλιστικό πρόβλημα και ήταν αρκετά συγγενική με το κλίμα του βιβλίου. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είχε αρκετά ερωτήματα που κατευθύναν σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές ως προς τη σειρά που έπρεπε να εργαστούν και είχε ξεκάθαρο σκοπό τόσο την επανάληψη παλιότερων γνώσεων αναφορικά με τις ευθείες, όσο και την σύνδεση των γνώσεων αυτών με τις νέες έννοιες του κεφαλαίου.

Στο τμήμα του Ε2 ακολουθήθηκαν οι νόρμες που κάποιος περιμένει να συναντήσει σε μια σχολική τάξη, με τον καθηγητή να κατευθύνει σε μεγάλο βαθμό το μάθημα και να δίνει τον λόγο στους μαθητές κυρίως όταν αυτοί έπρεπε να απαντήσουν σε κάποιο ερώτημα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως ο εκπαιδευτικός είχε τόσο κεντρικό ρόλο στην διεξαγωγή του μαθήματος που σπάνια κάποιος μαθητής εκφράστηκε στην τάξη με παραπάνω από δυο προτάσεις μαθηματικής φύσεως και όταν αυτό συνέβαινε, ήταν κυρίως για να συνεχιστεί η ροή του μαθήματος που ο ΓΓ είχε χαράξει. Ήταν φανερό πως αρκετές φορές δεν ήταν διατεθειμένος να αφήσει το μάθημα να παρεκκλίνει από την πορεία αυτή και η συμμετοχή των μαθητών περιοριζόταν σε σύντομες απαντήσεις, ενώ κάποιες λανθασμένες παραβλέφθηκαν χωρίς περεταίρω εξηγήσεις.

Στο σύνολο των ωρών που παρακολουθήσαμε τηρήθηκε η αναμενόμενη σειρά όσον αφορά την διδασκαλία του κεφαλαίου, με το βάρος να δίνεται αρχικά στην γεωμετρική ερμηνεία των γραμμικών σχέσεων και στη συνέχεια στην αλγεβρική επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Όσον αφορά τα ρεαλιστικά προβλήματα - μέσω των οποίων οι μαθητές θα μπορούσαν να κατασκευάσουν, γενικεύοντας κάποιες μαθηματικές σχέσεις - η επίλυση και αντιμετώπιση τους δεν αποτέλεσε την βάση του μαθήματος και τα λίγα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στην τάξη, αντιμετωπίστηκαν σαν ένα επιπλέον είδος άσκησης.

Ωστόσο ο Ε2 εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι είχε το χρονικό περιθώριο - έχοντας προχωρήσει αρκετά στην ύλη - αφιέρωσε αρκετό διδακτικό χρόνο στην αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων, φτάνοντας σε σημείο να παρουσιάσει στην τάξη ασκήσεις με αυξημένη δυσκολία. Οι ασκήσεις αυτές είχαν σαν κοινό χαρακτηριστικό την υπολογιστική τους φύση, απαιτώντας από τους μαθητές να προβούν σε αρκετούς αλγεβρικούς υπολογισμούς.

Οι βασικοί πυλώνες της διδασκαλίας του ήταν δύο: ο πρώτος αφορούσε την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αντιμετωπίζουν αλγεβρικά ακόμα και πιο προχωρημένες περιπτώσεις συστημάτων, ενώ ο δεύτερος ήταν μέσω της σύνδεσης της γραμμικής με την αλγεβρική επίλυση, να πραγματοποιηθεί στην τάξη μια επανάληψη εννοιών σχετικών με τις ευθείες. Ήταν απόλυτα φανερό ότι είχε κάνει την διδακτική επιλογή να στηρίξει την διδασκαλία πάνω στους συγκεκριμένους στόχους και το μάθημα που παρακολουθήσαμε σπάνια παρέκκλινε από αυτή την πορεία. Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την γενικότερη διδασκαλία του ως παραδοσιακή και δασκαλοκεντρική, χαρακτηρισμούς που ο ίδιος δεν αρνείται.

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας, επιχειρήθηκε μια σύντομη σκιαγράφηση του προφίλ των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας τους, με βάση τα όσα καταγράψαμε στις διδακτικές ώρες που παρευρεθήκαμε στην σχολική τάξη. Περαιτέρω ανάλυση των όσων περιληπτικά παρουσιάστηκαν και πως συνδέονται με την γενίκευση θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας. Η ρεαλιστική δραστηριότητα του Ε1, η εισαγωγική δραστηριότητα του Ε2 καθώς και το φυλλάδιο με επιπλέον ασκήσεις του Ε2 συμπεριλαμβάνονται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

2.4 Διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τις παρακολουθήσεις απομονώσαμε κάποια κρίσιμα συμβάντα από τις διδασκαλίες αυτές, στα οποία εντοπίστηκε η γενίκευση. Στα αποσπάσματα αυτά μελετάμε επίσης τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται την σχολική τάξη και την επιρροή του τρόπου αυτού στην μορφή της γενίκευσης. Η ανάλυση χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες, μια για τον κάθε εκπαιδευτικό. Τα κρίσιμα συμβάντα παρουσιάζονται με χρονική σειρά και συνοψίζονται στους παρακάτω πίνακες.

Κρίσιμα Συμβάντα για τον Ε1	Γενίκευση

Περιστατικό 1: Απόσπασμα από την πρώτη διδακτική ώρα, στην οποία οι μαθητές έρχονται σε πρώτη επαφή με δραστηριότητα ρεαλιστικών προβλημάτων.	Αρχίζει η οριζόντια μαθηματικοποίηση. Οι μαθητές διατυπώνουν μαθηματικές σχέσεις.
Περιστατικό 2: Σύντομο απόσπασμα από την πρώτη διδακτική ώρα κατά την ενασχόληση των μαθητών με την δραστηριότητα.	Οι μαθηματικοί κανόνες- στο απόσπασμα η απλοποίηση μιας σχέσης ισότητας- προκύπτουν από το πλαίσιο του προβλήματος και παρουσιάζονται στην τάξη σαν λογικά βήματα.
Περιστατικό 3: Από την δεύτερη διδακτική ώρα που το μάθημα βασίζεται στην δραστηριότητα. Απόσπασμα από την επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος, το οποίο απαιτεί από τους μαθητές να λύσουν γραμμικό σύστημα με δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους.	Οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί ούτε την έννοια των γραμμικών συστημάτων ούτε τις μεθόδους επίλυσης. Ωστόσο η μέθοδος της αντικατάστασης προκύπτει γενικεύοντας όσα είχαν προηγηθεί στα προηγούμενα ερωτήματα.
Περιστατικό 4: Από την δεύτερη διδακτική ώρα που το μάθημα βασίζεται στην δραστηριότητα. Απόσπασμα από την επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος, το οποίο απαιτεί από τους μαθητές να λύσουν γραμμικό σύστημα με δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους.	Συνεχίζεται η προσπάθεια εισαγωγής της μεθόδου επίλυσης ως απόρροια των όσων έχουν προηγηθεί στην δραστηριότητα.
Περιστατικό 5: Από το τέλος της δεύτερης διδακτικής ώρας. Απόσπασμα από την επίλυση ρεαλιστικού προβλήματος.	Η μαθήτρια διατυπώνει ένα διαφορετικό του αναμενομένου συλλογισμό, ο οποίος αλλάζει την ροή του μαθήματος.

Κρίσιμα Συμβάντα για τον Ε2	Γενίκευση
Περιστατικό 1: Από την δεύτερη διδακτική ώρα, στην οποία συνεχίζεται ο διάλογος που ξεκίνησε στην	Ο εκπαιδευτικός ανακεφαλαιώνει τα όσα είχαν προηγηθεί μέχρι τότε στην τάξη, παρουσιάζοντας τους κανόνες/γενικεύσεις.

πρώτη διδακτική ώρα γύρω από τις έννοιες των ευθειών.	
Περιστατικό 2: Από την τρίτη διδακτική ώρα, όπου παρουσιάζεται η μέθοδος της αντικατάστασης	Ο εκπαιδευτικός επιχειρεί την μετάβαση από την γεωμετρική στην αλγεβρική αντιμετώπιση
Περιστατικό 3: Από την πέμπτη διδακτική ώρα, όπου ενώ έχουν λυθεί αρκετές υπολογιστικές ασκήσεις επιχειρείται μια σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών γνώσεων με αφορμή την κλίση των ευθειών που αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα.	Ο εκπαιδευτικός επιχείρησε την εξαγωγή του εξής συλλογισμού: «όταν η ευθεία έχει αρνητική κλίση, δηλαδή όταν η γωνία ω που σχηματίζεται μεταξύ της ευθείας και τον 0χ έχει αρνητική εφαπτομένη, τότε η ευθεία είναι φθίνουσα γεγονός που επαληθεύετε από το ότι η γωνία ω είναι αμβλεία και από τις γνώσεις μας από την γεωμετρία ξέρουμε ότι οι αμβλείες γωνίες έχουν αρνητική εφαπτομένη».
Περιστατικό 5: Από την έβδομη διδακτική ώρα όπου λύνεται για πρώτη φορά ένα πρόβλημα που απαιτεί την κατασκευή των εξισώσεων των γραμμικών συστημάτων	Αν και το πρόβλημα δεν έχει ρεαλιστική χροιά, οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες εφάμιλλες με τα στάδια της οριζόντιας μαθηματικοποίησης.

Κεφάλαιο 3ο – Αποτελέσματα

3.1 Γενίκευση στις τάξεις του Ε1

3.1.1 Κρίσιμο Περιστατικό 1

Οι διάλογος που ακολουθεί προέρχεται από την πρώτη διδακτική ώρα παρακολούθησης, όπου οι μαθητές μετά την αρχική επαφή τους με την δραστηριότητα, αρχίζουν να διατυπώνουν μαθηματικές σχέσεις με τα προϊόντα. Η επιλογή για παρουσίαση του συγκεκριμένου αποσπάσματος οφείλεται επίσης στο γεγονός ότι από την συγκεκριμένη χρονική στιγμή και έπειτα τέτοιου είδος διάλογοι διατυπώνονται συνεχώς μέσα στην χολική τάξη. Το ερώτημα που είχε τεθεί στους μαθητές και για το οποίο εξελίσσεται στην τάξη ο διάλογος που ακολουθεί είναι το b. από το παρακάτω απόσπασμα της δραστηριότητας (τα προηγούμενο ερώτημα μόλις έχει λυθεί) :

Ανταλλαγή προϊόντων

Η Delia ζει σε μια κοινότητα στην οποία οι άνθρωποι ανταλλάσουν τα προϊόντα που παράγουν με άλλα προϊόντα που χρειάζονται. Η Delia έχει πιάσει μερικά ψάρια και θέλει να ανταλλάξει με άλλα τρόφιμα. Άκουσε ότι μπορεί να ανταλλάξει τα ψάρια με καρπούζια , αλλά θέλει και άλλα τρόφιμα και ρωτάει να μάθει τι άλλο είναι διαθέσιμο.

Να τι έμαθε η Delia για τις ανταλλαγές τροφίμων:

- **Για πέντε ψάρια (Ψ) μπορεί να πάρει δύο καρπούζια (Κ)**
- **Για τέσσερα μήλα (Μ) μπορεί να πάρει μια φρατζόλα ψωμί (φψ).**
- **Για ένα καρπούζι μπορεί να πάρει ένα καλαμπόκι (κ) και δύο μήλα.**
- **Για 10 μήλα μπορεί να πάρει τέσσερα καρπούζια.**

a. Ξαναγράψτε τις πληροφορίες ώστε να είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθούν

5Ψ=2Μ (για παράδειγμα)

b. Η Delia λέει "μπορώ να αλλάξω 10 ψάρια με 10 μήλα".

Είναι αυτό σωστό? ______ (yes/no). Εξηγείστε

Ε1: Συμφωνείτε όλοι πως έτσι θα έπρεπε να ναι? (κανένας μαθητής δεν φαίνεται να διαφωνεί) Ωραία, πάμε στο δεύτερο ερώτημα. Η Ντέινα λέει μπορώ να αλλάξω 10 ψάρια με 10 μήλα. Συμφωνείτε, ναι ή όχι και γιατί?
μαθήτρια: δεν συμφωνούμε
Ε1: Όχι. Πες μας γιατί
ε, γιατί αφού με 5 ψάρια μπορείς να πάρεις δυο καρπούζια και από αυτά μπορείς να πάρεις 4 μήλα
Ε1 : Περίμενε περίμενε. Από αυτά ποια αυτά? Από τα 2 καρπούζια μπορείς να πάρεις 4 μήλα? –ναι – γιατί από τα 2 καρπούζια μπορείς να πάρεις 4 μήλα?
-(άλλος μαθητής) με τα 2 καρπούζια μπορείς να τα ανταλλάξεις με 4 μήλα και 2 καλαμπόκια - καταγράφει στον πίνακα-
-(η πρώτη μαθήτρια) τότε με 10 ψάρια θα παίρνεις 8 μήλα
Ε1: Περίμενε περίμενε, ε! ένας ένας γιατί δεν καταλαβαίνω. Καταρχάς ποιος από τους δύο το έλυσε, γιατί δεν νομίζω και οι δυο ότι το λύσατε
-και οι δυο
Ε1: Και οι δυο ωραία και οι δυο. Εξηγείστε μου αναλυτικά τι σκεφτήκατε
-ναι. Και μετά τα 4 καρπούζια που έχουμε βρει από την πρώτη σχέση, από τα α 4 καρπούζια βγαίνουνε 4 καλαμπόκια και 8 μήλα
Ε1: Άλλη σχέση δεν υπάρχει που να μας εξυπηρετεί με τα καρπούζια?
-(άλλη μαθήτρια) εφόσον έχουμε 10 ψάρια που μας δίνουν 4 καρπούζια παίρνουμε και 20 μήλα
Ε1: Τι?
- Όχι, ε, 10 μήλα. Γιατί εφόσον με τα 10 ψάρια πήραμε 4 καρπούζια..

Ε1: Δεν μου λες Ιάσωνα (προς τον πρώτο μαθητή). όταν ανταλλάσσεις 10 μήλα με 4 καρπούζια, προφανώς δεν θα ισχύει και το αντίστροφο?
-όχι (ο πρώτος μαθητής)
Ε1: Γιατί όχι?
-γιατί δεν υποχρεώνει ότι αυτός θα θέλει να αγοράσει
Ε1: Είπε κανένας ότι υπάρχει τέτοιο πρόβλημα? Πάει σε έναν άλλο αγοραστή. Γενικά οι ανταλλαγές γίνονται με αυτό τον τρόπο.
-Το ότι μπορεί να ανταλλάξει αυτό δεν σημαίνει ότι μπορεί να ανταλλάξει και τα δύο (Ιάσωνας)
-σκεφτήκαμε ότι με τα ψάρια το μόνο που μπορείς να αγοράσεις, και παίρνει ψάρια, είναι τα δυο καρπούζια (ναι). Τα δύο καρπούζια το κάθε ένα ίσον με 2 καλαμπόκια και 4 μήλα. Με 4 μήλα μπορείς να πάρεις μια φρατζόλα ψωμί. ΕΕ όχι, με 10 ψάρια.. Ε1: Να κάνω μια παρατήρηση? Να κάνω μια παρατήρηση που νομίζω? ΜΙΣΟ ΛΕΠΤΟ. Δεν λέει πουθενά στο πρόβλημα πόσα ψάρια έχει αυτή. Εντάξει? Λέει απλώς ότι θέλει να ανταλλάξει 10 ψάρια με 10 μήλα. Αυτό συζητάμε.
-άρα θα τα κάνεις 10 ψάρια αυτά θα διπλασιαστούνε ανάλογα. Θα γίνει 10 ψάρια = με 4 καρπούζια, 4 καρπούζια = με 4 (περίμενε περίμενε, επαναλαμβάνει ο μαθητής και καταγράφει)
Ε1: 10 ψαρια=4 καρπούζια. Αυτό από ποια σχέση προκύπτει εδώ;
-με την πρώτη μάλλον
ΜΚ: Με την πρώτη, άρα από την πρώτη έχω 10 ψάρια λες είναι τα ανταλλάσσει με 4 καρπούζια

Αρχικά, οφείλουμε να αναφέρουμε πως διάλογοι σαν και αυτόν που παρουσιάζουμε στο παραπάνω απόσπασμα συνέβησαν με μεγάλη συχνότητα σε όλα τα τμήματα που παρακολουθήσαμε, ειδικά την πρώτη φορά που ένα τμήμα ερχόταν σε αρχική επαφή με τη δραστηριότητα. Όπως είναι αναμενόμενο από την στιγμή που το μάθημα βασίστηκε στα ρεαλιστικά προβλήματα, στο παραπάνω απόσπασμα συναντάμε σε μεγάλο βαθμό όσα έχουν καταγραφεί στις θεωρίες για την διδακτική βασισμένη στα ρεαλιστικά προβλήματα και παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Πιο συγκεκριμένα, στο παραπάνω διάλογο εντοπίζεται το πέρασμα από το πλαίσιο του προβλήματος στο κόσμο των μαθηματικών, βρισκόμαστε δηλαδή στην αρχή της οριζόντιας μαθηματικοποίησης. Οι μαθητές, είτε το συνειδητοποιούσαν είτε όχι, πρόβαιναν συνεχώς σε διατύπωση και επεξεργασία μαθηματικών σχέσεων και αυτό είναι ένα είδος γενίκευσης που περιμένουμε να συναντήσουμε στο μάθημα της άλγεβρας. Οι σχέσεις αυτές δεν αποτελούνταν από τις συνηθισμένες μεταβλητές - χ,ψ,α,β - αλλά από μεταβλητές που συμβόλιζαν τα προϊόντα και αρκετοί συλλογισμοί φάνηκε να βασίζονται στην λογική, παρά σε αλγεβρικούς κανόνες.

Ο ισχυρισμός για εμφάνιση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης ενισχύεται από το γεγονός πως μέσω της ενασχόλησης τους με το συγκεκριμένο αρχικό ερώτημα οι μαθητές:

- αναγνώριζαν και περιέγραφαν συγκεκριμένες μαθηματικές ιδέες (για παράδειγμα: *«σκεφτήκαμε ότι με τα ψάρια το μόνο που μπορείς να αγοράσεις, και παίρνει ψάρια, είναι τα δυο καρπούζια (ναι). Τα δύο καρπούζια το κάθε ένα ίσον με 2 καλαμπόκια και 4 μήλα. Με 4 μήλα μπορείς να πάρεις μια φρατζόλα ψωμί. ΕΕ όχι, με 10 ψάρια».)*
- προέβησαν σε τυποποίηση και απεικόνιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους (*κάθε φράση που διατύπωσαν οι μαθητές στο παραπάνω απόσπασμα θα μπορούσε να δοθεί σαν παράδειγμα*)
- ανακάλυψαν σχέσεις και μετέτρεψαν ένα ρεαλιστικό σε μαθηματικό πρόβλημα (για παράδειγμα: *«ναι. και μετά τα 4 καρπούζια που έχουμε βρει από την πρώτη σχέση, από τα α 4 καρπούζια βγαίνουνε 4 καλαμπόκια και 8 μήλα.»*)

Οι παραπάνω πρακτικές των μαθητών παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία αφενός ως στοιχεία της οριζόντιας μαθηματικοποίησης αφετέρου ως στρατηγικές που οδηγούν και ενισχύουν την γενίκευση. Βέβαια, ο διάλογος απορρέει από τα ερωτήματα της δραστηριότητα, η οποία είναι η βάση διεξαγωγής του μαθήματος. Πάνω σε αυτήν άρχισε να δημιουργείται ένα περιβάλλον πλούσιο σε ευκαιρίες για τους μαθητές να εκφραστούν και να επικοινωνήσουν τους μαθηματικούς τους συλλογισμούς. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μέσω τόσο του συγκεκριμένου ερωτήματος – αλλά και της δραστηριότητας γενικότερα – ο Ε1 προσπαθεί *«να προσανατολίσει την σκέψη των μαθητών στο να αναγνωρίζει τις σχέσεις αυτές μέσω από πλήθος διαφορετικών περιπτώσεων»* μια πρακτική που η Jurow (2004) υποστηρίζει ότι θα ενισχύσει την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν.

Όσον αφορά την στάση του εκπαιδευτικού, παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο απόσπασμα προσπαθεί να θέσει στο επίκεντρο τις απαντήσεις και κυρίως τους συλλογισμούς των μαθητών. Ο

ίδιος προσπαθεί να περιορίσει τον ρόλο του περισσότερο σε αυτόν του συντονιστή, επιβεβαιώνοντας ή διαψεύδοντας τους ισχυρισμούς όποτε έκρινε απαραίτητο, χωρίς όμως να δίνει πλήρεις απαντήσεις στους μαθητές που θα ολοκλήρωναν την δραστηριότητα, για παράδειγμα:
Ε1: Να κάνω μια παρατήρηση? Να κάνω μια παρατήρηση που νομίζω? Μισό λεπτό. Δεν λέει πουθενά στο πρόβλημα πόσα ψάρια έχει αυτή. Εντάξει? Λέει απλώς ότι θέλει να ανταλλάξει 10 ψάρια με 10 μήλα. Αυτό συζητάμε.

Επίσης τους ζητά να επιμείνουν στον συλλογισμό τους και να τον δικαιολογήσουν περεταίρω:

- παράδειγμα 1: *Ε1: Και οι δυο ωραία και οι δυο. Εξηγείστε μου αναλυτικά τι σκεφτήκατε*
- *παράδειγμα 2: Ε1: 10 ψαρια=4 καρπούζια. Αυτό από ποια σχέση προκύπτει εδώ;)*

Υπενθυμίζουμε ότι κανένας εκπαιδευτικός δεν ήταν ενήμερος για το ποιές πρακτικές είχαμε καταγράψει στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, ενώ επίσης δεν γνώριζαν πως ένα από τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας είναι ο τρόπος με τον οποίο θα διαχειριστούν την γενίκευση στην σχολική τάξη. Ωστόσο είναι αξιοσημείωτο ότι οι πρακτικές που καταγράψαμε στο παραπάνω απόσπασμα προτείνονται:

- Στην θεωρία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών στην Εκπαίδευση (RME) η οποία, μεταξύ άλλων, προτείνει στους εκπαιδευτικούς:
    1. Να δώσουν στους μαθητές ένα πρόβλημα πλαισίου που να σχετίζεται με το προς διδασκαλία μαθηματικό αντικείμενο (*η δραστηριότητα θα οδηγήσει αρχικά στην εξαγωγή σχέσεων και στη συνέχεια στην επίλυση συστημάτων*).
    2. Να προτρέψουν τους μαθητές να συγκρίνουν τις λύσεις τους σε μια συζήτηση με όλη την τάξη, δίνοντας έμφαση στην καταλληλότητα και επάρκεια των διαφορετικών λύσεων (*Ε1: Δεν μου λες Ιάσωνα, όταν ανταλλάσσεις 10 μήλα με 4 καρπούζια, προφανώς δεν θα ισχύει και το αντίστροφο?)*
    3. Να αφήσουν τους μαθητές να βρουν τις δικές τους λύσεις .

- Στην θεωρία της ερευνητικής διδασκαλίας (IBL) η οποία θέτει σαν βασική προϋπόθεση μια μαθητοκεντρική διδασκαλία (student-centred), στην οποία η γνώση ανακαλύπτεται από τους μαθητές με βοήθεια ή καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό.

- Στην βιβλιογραφία που προσπαθεί να εντοπίσει τις πρακτικές ενός εκπαιδευτικού που θα ενισχύσουν την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν. Δύο από τις πρακτικές που η Ellis

(2011) αναφέρει είναι:

1. Η ενθάρρυνση των μαθητών να δικαιολογούν και να ξεκαθαρίζουν τις απαντήσεις και τις μαθηματικές προτάσεις που διατυπώνουν. (*Ε1: Και οι δυο ωραία και οι δυο. Εξηγείστε μου αναλυτικά τι σκεφτήκατε)*
2. Η εστίαση της προσοχής των μαθητών στις μαθηματικές σχέσεις που αναπτύσσονται μέσα στα πλαίσια μιας μαθηματικής δραστηριότητας. (*Ε1: Άλλη σχέση δεν υπάρχει που να μας εξυπηρετεί με τα καρπούζια?)*

Η στάση του Ε1, στο συγκεκριμένο απόσπασμα, βρίσκεται σε πλήρη σύμπνοια με τα όσα οι προαναφερθείσες θεωρίες προστάζουν. Οι πρακτικές αυτές επαναλαμβάνονταν με μεγάλη συχνότητα στα μαθήματα που παρακολουθήσαμε και θα τις συναντήσουμε στα κρίσιμα συμβάντα που ακολουθούν.

3.1.2 Κρίσιμο Περιστατικό 2

Στο παρακάτω σύντομο απόσπασμα καταγράφεται ένας διάλογος που πραγματοποιήθηκε κατά την ενασχόληση της τάξης με το ερώτημα του πρώτου κρίσιμου περιστατικού.

- Ωραία τότε αφού έχουμε 4 καρπούζια από την πρώτη σχέση, τότε θα ισχύει από τα 4 καρπούζια παίρνουμε 10 μήλα (επαναλαμβάνει ο καθηγητής και καταγράφει στον πίνακα) άρα ισχύει (Ε1: άρα ισχύει τι?) ότι με 10 ψάρια μπορείς να ανταλλάξεις 10 μήλα
Ε1: Ωραία. Μπορεί κάποιος να εξάγει κανένα επιπλέον συμπέρασμα από την τελευταία σχέση που έχουμε εκεί πέρα? Ωραία 10 ψάρια μπορείς και τα ανταλλάσσεις με 10 μήλα. Αυτό τι σημαίνει?
- 1ψ=1μ
Ε1: Ωραία. Ότι η αξία που έχει το κάθε ψάρι είναι ίση με την αξία που έχει το κάθε μήλο. Άρα επιπλέον έχουμε ότι η αξία του ενός ψαριού ισούται με την αξία του ενός μήλου. Δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά πρέπει να δώσει τα 10 ψάρια για να πάρει τα 10 μήλα. Μπορεί να δώσει και 3 ψάρια να πάρει 3 μήλα. Αφού έχουν την ίδια αξία.

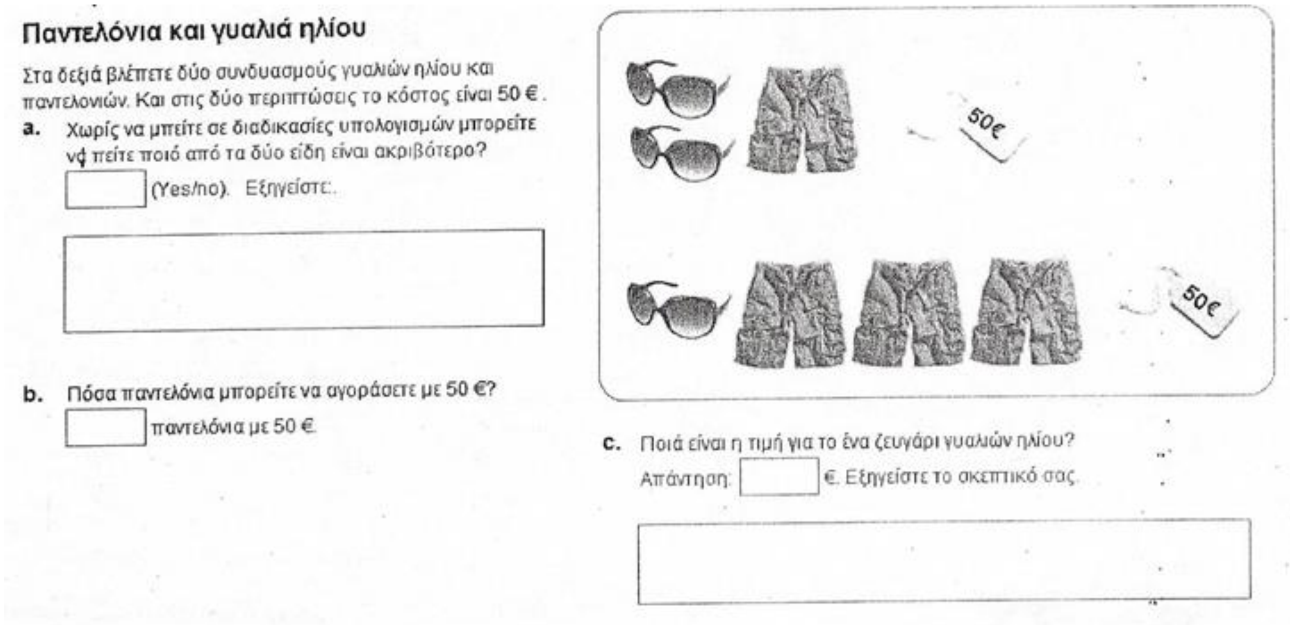
Υπάρχουν δυο παρατηρήσεις που μπορούν να προκύψουν από τον συγκεκριμένο διάλογο. Η πρώτη σχετίζεται με τον αρχικό συλλογισμό του μαθητή (*Ωραία τότε αφού έχουμε 4 καρπούζια από την πρώτη σχέση, τότε θα ισχύει από τα 4 καρπούζια παίρνουμε 10 μήλα άρα ισχύει ότι… με 10 ψάρια μπορείς να ανταλλάξεις 10 μήλα*) ο οποίος διατυπώνει έναν πιο γενικευμένο μαθηματικό ισχυρισμό. Όπως και στο πρώτο κρίσιμο περιστατικό αυτό που καταγράφεται στη συγκεκριμένη φράση είναι το πως η δραστηριότητα προτρέπει τον μαθητή να προβεί στη διατύπωση αυτού του ισχυρισμού. Δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τις νοητικές συνδέσεις που διαμόρφωσαν τον συλλογισμό του μαθητή, αλλά θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η επεξεργασία των σχέσεων που πραγματοποίησε βασιζόταν – ως έναν βαθμό – στη κοινή λογική. Ο ισχυρισμός μας βασίζεται στο ότι η απάντηση του πήγαζε από τα πλαίσιο του προβλήματος, το οποίο τους παρουσιάστηκε περισσότερο ως ένας ρεαλιστικός γρίφος παρά σαν μια άσκηση που απαιτεί την εφαρμογή αλγεβρικών κανόνων. Αυτός ήταν άλλωστε και ο σκοπός της συγκεκριμένης δραστηριότητας: να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τα μαθηματικά που χρειάζονται για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων, χωρίς να έχουν διδαχθεί «επίσημα» τις αντίστοιχες έννοιες.

Η δεύτερη αξιοσημείωτη παρατήρηση στο παραπάνω απόσπασμα είναι ότι έπειτα από ερώτηση του Ε1 (*Ωραία. Μπορεί κάποιος να εξάγει κανένα επιπλέον συμπέρασμα από την τελευταία σχέση που έχουμε εκεί πέρα? Ωραία 10 ψάρια μπορείς και τα ανταλλάσσεις με 10 μήλα. Αυτό τι σημαίνει?*) στην τάξη θίγεται ένας αλγεβρικός κανόνας – αυτός της διαίρεσης των δύο μερών μιας ισότητας με τον ίδιο διάφορο του μηδενός αριθμό – στα πλαίσια του προβλήματος. . Η απάντηση του εκπαιδευτικού προσπαθεί να δικαιολογήσει την απάντηση του μαθητή με βάση την κοινή λογική, αυτήν που θα χρησιμοποιούσαμε στην καθημερινή μας ζωή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μια απλή συνεπαγωγή σχέσεων ($10χ = 10ψ \Leftrightarrow χ = ψ$) να αποκτά επιπλέον νόημα με τον τρόπο που παρουσιάζεται. Ο τρόπος που αντιμετωπίστηκε η απάντηση του μαθητή (*1ψ=1μ)* από τον Ε1, καταδεικνύει μια από τις βασικές αρχές της διδασκαλίας του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού: δεν επιθυμεί να αναπαράγει απλά τους αλγεβρικούς κανόνες αλλά να τους χρησιμοποιήσει μέσα στο πλαίσιο της δραστηριότητας. Παρομοίως, χωρίς αναφορά σε κάποιον αλγεβρικό κανόνα ο Ε1 αναφέρει εν συντομία στην τάξη την ισοδυναμία «$1ψ=1μ \Leftrightarrow 3ψ=3μ$» (*Μπορεί να δώσει και 3 ψάρια να πάρει 3 μήλα. Αφού έχουν την ίδια αξία*).

Παρατηρούμε λοιπόν πως αφενός η δραστηριότητα έχει διαμορφώσει το κατάλληλο μαθηματικό περιβάλλον για την διατύπωση αυτών των συλλογισμών, αφετέρου ο ίδιος ο εκπαιδευτικός με την στάση του προσπαθεί να παροτρύνει τους μαθητές να τους διατυπώσουν (*Ε1: Μπορεί κάποιος να εξάγει κανένα επιπλέον συμπέρασμα από την τελευταία σχέση που έχουμε εκεί πέρα?*). Η Ellis (2011) υποστηρίζει ότι «το να εκθέτεις τις προτάσεις των μαθητών στο σύνολο της τάξης ώστε να αποτελούν θέμα συζήτησης και σχολιασμού» θα οδηγήσει τους μαθητές ένα βήμα πιο κοντά στην γενίκευση. Παρόλο που το απόσπασμα είναι σύντομο, είναι εμφανής η πρόθεση του Ε1 να θέσει τις δύο προτάσεις των μαθητών του αποσπάσματος ως τη βάση διεξαγωγής του μαθήματος, τουλάχιστον για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Αυτό η διδακτική πρακτική καταγράφηκε αρκετά συχνά στα τμήματα του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού.

3.1.3 Κρίσιμο Περιστατικό 3

Το κρίσιμο συμβάν που ακολουθεί προκύπτει από την δεύτερη διδακτική ώρα που το συγκεκριμένο τμήμα ασχολήθηκε με την δραστηριότητα. Στο απόσπασμα περιέχεται ο διάλογος που αναπτύχθηκε στην τάξη κατά την επίλυση του παρακάτω προβλήματος, το οποίο τους είχε δοθεί σαν εργασία για το σπίτι.



Παντελόνια και γυαλιά ηλίου

Στα δεξιά βλέπετε δύο συνδυασμούς γυαλιών ηλίου και παντελονιών. Και στις δύο περιπτώσεις το κόστος είναι 50 €.

a. Χωρίς να μπείτε σε διαδικασίες υπολογισμών μπορείτε να πείτε ποιό από τα δύο είδη είναι ακριβότερο?

☐ (Yes/no). Εξηγείστε:

b. Πόσα παντελόνια μπορείτε να αγοράσετε με 50 €?

☐ παντελόνια με 50 €

c. Ποιά είναι η τιμή για το ένα ζευγάρι γυαλιών ηλίου?

Απάντηση: ☐ €. Εξηγείστε το σκεπτικό σας.

Διάλογος
Ε1: Άρα ένας τρόπος θα ήταν αυτός. Ο οποίος βέβαια σε δυσκολότερα προβλήματα, ή έτσι και οι λύσεις ήταν με δεκαδικούς αριθμούς. Σκέφτηκες ότι η λύση μπορεί να ήταν δεκαδικός ή σε ένα δυσκολότερο πρόβλημα ;
-όχι δεν μου έβγαινε μετά σε αυτό το πρόβλημα, το τρίτο
Ε1: Μάλιστα, άρα να προσπαθήσουμε να βρούμε μια άλλη μέθοδο που να μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα. Παναγιώτης.

-Είπα ότι ένα ζευγάρι γυαλιά ίσον με δυο παντελόνια
Ε1: Πώς καταλαβαίνεις? Κάνει την εξής παρατήρηση, λέει ότι (γράφει ταυτόχρονα στον πίνακα) 1 ζευγάρι γυαλιά = 2 παντελόνια. Αυτό παρατήρησε ο Παναγιώτης. Πώς το παρατήρησες? Δηλαδή πώς το έβγαλες αυτό το συμπέρασμα? Πώς έφτασες σε αυτό το συμπέρασμα? Κοιτάξτε αντίστοιχα τις εικόνες που υπάρχουν…/
-(Παναγιώτης) γιατί δυο γυαλιά και ένα παντελόνι = με ένα γυαλί και 3 παντελόνια

Στο παραπάνω απόσπασμα καταγράφεται η προσπάθεια του Ε1 να λυθεί στη τάξη ένα πρόβλημα στο οποίο υπάρχουν δύο άγνωστοι και δυο σχέσεις που τους συνδέουν, χωρίς οι μαθητές να έχουν διδαχθεί την έννοια των γραμμικών συστημάτων και τους αντίστοιχους τρόπους επίλυσης. Είναι αξιοσημείωτο ότι κανένας από αυτούς τους όρους δεν αναφέρθηκε κατά την διάρκεια του συγκεκριμένου μαθήματος. Στο πρόβλημα αυτό λοιπόν, ο εκπαιδευτικός επιθυμεί από τους μαθητές να εφαρμόσουν την μέθοδο της αντικατάστασης, βασιζόμενοι σε λογικά βήματα και σε όσα είχαν συζητηθεί στα προηγούμενα ερωτήματα (*Ε1: Μάλιστα, άρα να προσπαθήσουμε να βρούμε μια άλλη μέθοδο που να μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα. Παναγιώτης;*). Όταν ο Παναγιώτης έδωσε μια απάντηση για την οποία είχε ήδη κάνει κάποιες αντικαταστάσεις, ο Ε1 ζήτησε από αυτόν να αναφέρει στην τάξη τον συλλογισμό του θέτοντας του ερωτήσεις που θα είχαν αυτό το αποτέλεσμα (*Ε1: Πώς το καταλαβαίνεις? (..) Πώς το παρατήρησες? Δηλαδή πώς το έβγαλες αυτό το συμπέρασμα? Πώς έφτασες σε αυτό το συμπέρασμα? Κοιτάξτε αντίστοιχα τις εικόνες που υπάρχουν*). Οι ερωτήσεις αυτές έχουν σαν αποτέλεσμα η απάντηση και οι σκέψεις του Παναγιώτη να παρουσιάζονται σε όλη την τάξη και για λίγα λεπτά το μάθημα να βασίζεται στην δικαιολόγηση του συμπεράσματος του μαθητή. Παρατηρούμε επίσης ότι ο Ε2 προσπαθεί να μοιράσει το λόγο σε αρκετούς μαθητές, μέχρι να ακουστεί μια απάντηση στην οποία πιστεύει πως αξίζει να εστιάσει την προσοχή της τάξης. Όπως θα φανεί στη πορεία ο Ε2 δεν στέκεται απλά στην απάντηση του μαθητή και επιθυμεί το μάθημα να βασιστεί γύρω από τον συλλογισμό που οδήγησε σε αυτήν την απάντηση.

Ε1: μάλιστα. Λέει το εξής, πρώτα απ' όλα. Αφού έχουν την ίδια αξία, 50 € και στη μία και στην άλλη περίπτωση, 2 γυαλιά και ένα παντελόνι άρα είναι όσο 1 ζευγάρι γυαλιά και 3 παντελόνια.

Δηλαδή έχουμε, 2γ, ας πούμε, +1π, το γ και το π ορίζω ως την αξία αντίστοιχα για τα γυαλιά και το παντελόνι, =1γ+3π από το οποίο, από το οποίο για λέγε Παναγιώτη παρακάτω,
-ε μετά θα πούμε ότι ένα ζευγάρι γυαλιά…
Ε1: Ουσιαστικά εδώ έχω δύο γυαλιά, από εδώ έχω ένα γυαλί, άρα ουσιαστικά ένα ζευγάρι γυαλιά, από εδώ έχω 1 παντελόνι από εκεί 3 παντελόνια, άρα ισούται με 2 παντελόνια. Μπορείτε να το καταλάβετε? Φαίνεται στις εικόνες… φαίνεται γιατί? Γιατί έχει αντικατασταθεί η δεύτερη κατάσταση . με τι έχει αντικατασταθεί? Ναι
-με ένα ζευγάρι γυαλιά?
Ε1: Ένα ζευγάρι γυαλιά με τι έχει αντικατασταθεί?
-με δυο παντελόνια
Ε1: Με δύο παντελόνια ενώ η αξία δεν έχει μεταβληθεί, γιατί αν είχε μεταβληθεί η αξία δεν θα ήξερα το τι θα γινόταν. Ωραία. Άρα ένα ζευγάρι γυαλιά είναι όσο η αξία 2 παντελονιών, εντάξει?
Ε1: Και, Ιάσωνα, θέλω να μου προτείνεις τώρα λύση που έχουμε αυτή την επιπλέον πληροφορία. (εε θα σας πετάξω έξω και τους δυο ε?) λέγε Κωνσταντίνε
-αφού το ένα γυαλί ισούται με 2 παντελόνια, τότε πρέπει το ένα παντελόνι να έχει τη μισή τιμή από αυτή που έχει το γυαλί (ναι) οπότε…
Ε1: Λέει ο Κων/νος ότι απ’ αυτό μπορώ να βγάλω συμπέρασμα ότι το ένα παντελόνι έχει τη μισή αξία απ’ αυτή που έχουν τα γυαλιά, εντάξει? Άρα? … άρα ας μιλήσει κάποιος τη σκέψη του. Εσύ είπες «α», ας ακούσω τι είναι το «α»
-εφόσον έχουμε δυο γυαλιά εδώ πέρα, (ναι) τότε… και έχουμε ένα παντελόνι σημαίνει ότι.. ουσιαστικά…2 γυαλιά ισούται με 4 παντελόνια
Ε1: Άρα θα έχουμε ότι η αξία για τα 2 γυαλιά θα είναι όση η αξία για τα 4 παντελόνια
-ναι.

Στο παραπάνω απόσπασμα υπάρχουν δυο στιγμές στις οποίες ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να αναλύσει το σκεπτικό ενός μαθητή, θέτοντας τον σαν βάση διεξαγωγής του μαθήματος.

Παρατηρούμε ότι ο Ε1 βασίζεται στην ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών και δεν εκφράζει δικούς του μαθηματικούς συλλογισμούς. Είναι χαρακτηριστικό επίσης ότι προσπαθεί να εμπλέξει αρκετούς μαθητές στην διεξαγωγή του μαθήματος, οι οποίοι φαίνεται να έχουν αποδεχτεί τον ενεργό ρόλο που ο εκπαιδευτικός επιθυμεί να τους δώσει. Παρατηρούμε ότι στην προσπάθεια του να καταστήσει σαφές σε όλη την τάξη το πώς καταλήγουμε στην τελική απάντηση, επεμβαίνει στη ροή του λόγου των μαθητών, κυρίως όταν κρίνει απαραίτητο ότι χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση (*Ε1:μάλιστα. Λέει το εξής, πρώτα απ' όλα. Αφού έχουν την ίδια αξία, 50 € και στη μία και στην άλλη περίπτωση, 2 γυαλιά και ένα παντελόνι άρα είναι όσο 1 ζευγάρι γυαλιά και 3 παντελόνια. Δηλαδή έχουμε, 2γ, ας πούμε, +1π, το γ και το π ορίζω ως την αξία αντίστοιχα για τα γυαλιά και το παντελόνι, =1γ+3π από το οποίο, από το οποίο για λέγε Παναγιώτη παρακάτω*).

Πιστεύουμε πως το να αισθάνονται οι μαθητές πως οι απαντήσεις τους έχουν ισχυρό αντίκτυπο στην διεξαγωγή του μαθήματος και ότι θα αφιερωθεί αρκετός διδακτικός χρόνος στην ανάλυση των μαθηματικών προτάσεων που θα διατυπώσουν έχει θετικό αντίκτυπο στην διαμόρφωση ενός διδακτικά ωφέλιμου σχολικού περιβάλλοντος. Πιστεύουμε ότι είναι επίσης, ένας από τους λόγους της υψηλής συμμετοχής που παρατηρήσαμε στις τάξεις του πρώτου εκπαιδευτικού. Όπως θα φανεί στο παρακάτω απόσπασμα ο διάλογος συνεχίστηκε με τον εκπαιδευτικό να μοιράζει τον λόγο σε ακόμα περισσότερους μαθητές.

Όσον αφορά το μαθηματικό μέρος της ανάλυσης οφείλουμε να τονίσουμε ότι στην εξέλιξη λοιπόν του διαλόγου, ο Ε1 αναφέρει για πρώτη φορά την λέξη «αντικατάσταση», γεγονός που συμβαίνει μέσα στο πλαίσιο του προβλήματος:

«Ε1: Φαίνεται στις εικόνες… φαίνεται γιατί? Γιατί έχει αντικατασταθεί η δεύτερη κατάσταση... με τι έχει αντικατασταθεί? Ναι

-με ένα ζευγάρι γυαλιά?

ΜΚ: Ένα ζευγάρι γυαλιά με τι έχει αντικατασταθεί?

-με δυο παντελόνια»

Η αντικατάσταση λοιπόν βασίζεται σε βήματα κοινής λογικής που ένας μαθητής θα έκανε χωρίς να του έχει διδαχθεί κάποια αλγεβρική μέθοδος και προσεγγίζεται με έναν διαφορετικό τρόπο από ότι σε μια παραδοσιακή τάξη άλγεβρας. Την ευκαιρία για την διαφορετική αυτή προσέγγιση την πρόσφερε η ρεαλιστική δραστηριότητα και ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός την εκμεταλλεύτηκε και την διαχειρίστηκε μέσα στην σχολική τάξη. Αυτός ο τρόπος διαχείρισης καταγράφεται έντονα στην συνέχεια του κρίσιμου συμβάντος που ακολουθεί

-να ρωτήσω κάτι? Αυτό δεν σημαίνει ότι τα δύο γυαλιά έχουν την αξία ε ενός παντελονιού άρα..
Ε1: Τα δύο γυαλιά είπαμε έχουν την αξία τεσσάρων παντελονιών ….Ρένια
-δεν μπορούμε να πούμε ότι εφόσον τα δύο γυαλιά και το παντελόνι κάνουν 50€ άρα σίγουρα έχουν αξία κάτω από 25€?
Ε1: Τι να πούμε?
-(επαναλαμβάνει) (ναι) και μετά, εφόσον έχουμε το παντελόνι που είναι η διπλάσια τιμή εε η μισή τιμή των γυαλιών, να τα δούμε τους συνδυασμούς.
Ε1: Ναι.. δηλαδή? Να καταλάβω τους συνδυασμούς. Εε αυτό περιμένω τους συνδυασμούς…
κύριε, τα έχετε γράψει ανάποδα, έχετε γράψει ότι ένα παντελόνι ίσον με μισό γυαλί
-α όχι ισχύει.
Ε1: Όταν 1 ζευγάρι γυαλιά αντιστοιχούν στην αξία ενός παντελονιού.. – όχι νόμιζα.. Λοιπόν, λέγε Ντίνα.
-με βάση με αυτό που λέει 1 παντελόνι ίσο με την αξία του.. τη μισή αξία του ζευγαριού γυαλιών, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα γυαλιά μπορούν να κάνουν 40 ευρώ και το ένα παντελόνι να κάνει 10
Ε1: Ναι , αλλά γιατί να το υποθέσουμε αν υπάρχει τρόπος να το υπολογίσουμε? Μας ενδιαφέρει να το υπολογίσουμε
-γιατί με βάση αυτό τον συνδυασμό, τότε αν το ένα ζευγάρι γυαλιά κάνει 20 τότε το παντελόνι..
Ε1: Το ένα ζευγάρι γυαλιά γιατί να κάνει 20?
-γιατί αν συνδυάσουμε ότι τα 2 γυαλιά κάνουν 40
Ε1: Αν άλλαζαν τα νούμερα? Αν ήταν πιο περίεργα τα νούμερα? Αν αντί για 50 έλεγε 63€ και για τη μια περίπτωση και για την άλλη?

Άρα να βρούμε έναν τρόπο που να μπορούμε να λύνουμε το πρόβλημα σε όλες τις περιπτώσεις, εντάξει?
-έχω βρει το αποτέλεσμα πάντως
Ε1: Έχεις βρει το αποτέλεσμα, αλλά μήπως το αποτέλεσμα βασίζετε σε αυτό που μόλις είπα? Δηλαδή, αν έλεγε ότι για 2 γυαλιά και 1 παντελόνι πληρώσαμε 63 € και στη μια περίπτωση και για 1 ζευγάρι γυαλιά και 3 παντελόνια πληρώσαμε 63€ και στην άλλη περίπτωση, θα μπορούσες να λύσεις το πρόβλημα να βρεις την απάντηση? Όχι! Ε άρα το ζητούμενο είναι να μπορώ να λύσω το πρόβλημα πάντα. Λέγε Δέσποινα.
-εγώ πήρα την πρώτη εικόνα (ναι) και σκέφτηκα ότι αν το παντελόνι είναι χ (ναι) τότε τα γυαλιά που είναι δυο φορές το παντελόνι και έχουμε 2 ζευγάρια γυαλιά θα είναι χ+2*2χ=50

Αρχικά παρατηρούμε πως η ρεαλιστική φύση της δραστηριότητας αναγκάζει τους μαθητές να εκφραστούν με μαθηματικές σχέσεις, στις οποίες οι μεταβλητές έχουν αντικατασταθεί από τα προϊόντα. Αυτό συνέβαινε σε όλα τα τμήματα που παρακολουθήσαμε, στα οποία η δραστηριότητα αποτέλεσε την βάση διεξαγωγής του μαθήματος. Μια δεύτερη βασική παρατήρηση είναι το ότι ο Ε1 συνεχίζει συνειδητά να προσπαθεί να προωθήσει την ανάπτυξη διαλόγου μέσα στην τάξη και να δώσει τον λόγο σε πλήθος μαθητών, παροτρύνοντάς τους να δικαιολογούν την απάντηση τους και να διατυπώσουν την λογική πίσω από τις απαντήσεις τους. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε μετά τις πρώτες απαντήσεις να διατυπώσει μια σωστή λύση ή ένα σωστό συλλογισμό, αλλά προτιμάει να αφιερώσει τον διδαχτικό χρόνο στην ανάπτυξη διαλόγου με τους μαθητές, πρακτική που έχει σαν αποτέλεσμα ένα μεγάλο μέρος της τάξης να συμμετέχει ενεργά στην διεξαγωγή του μαθήματος.

Από τις απαντήσεις που καταγράψαμε παρατηρούμε πως αν και υπήρχαν μαθητές που εξέφραζαν σωστές μαθηματικές προτάσεις, κανένας εξ αυτών δεν φαίνεται να μπορεί να διατυπώσει και να δικαιολογήσει έναν ολοκληρωμένο συλλογισμό που θα παραπέμπει στην μέθοδο της αντικατάστασης. Επίσης, υπήρχαν ορισμένοι που κατέληγαν σε τελικές απαντήσεις κάνοντας υποθέσεις και δοκιμές καθώς τους βόλευαν οι αριθμοί *(-…τη μισή αξία του ζευγαριού γυαλιών, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα γυαλιά μπορούν να κάνουν 40 ευρώ και το ένα παντελόνι να κάνει 10*), πρακτική που σύμφωνα με την έρευνα συνηθίζεται από τους μαθητές όταν αυτοί καλούνται να διατυπώσουν προτάσεις γενικευμένης φύσης. Ο Ε1 όμως επέμενε στην εξεύρεση μιας γενικευμένης μεθόδου επίλυσης *(-Ε1: Ναι , αλλά γιατί να το υποθέσουμε αν υπάρχει τρόπος να το υπολογίσουμε? Μας ενδιαφέρει να το υπολογίσουμε*), παροτρύνοντας τους μαθητές να προβούν και να διατυπώσουν γενικεύσεις. Όπως προαναφέραμε θεωρούμε αξιοσημείωτο το ότι ο λόγος δόθηκε σε αρκετούς μαθητές και το ότι οι απαντήσεις τους αντιμετωπίστηκαν με λογική ανατροφοδότησης και όχι απλής επιβεβαίωσης ή διάψευσης. Ο Ε1 δηλαδή απόφευγε να δώσει μια πλήρης απάντηση αλλά με τον τρόπο ανταπόκρισης του προσπαθούσε να οδηγήσει την σκέψη των μαθητών προς την σωστή κατεύθυνση. Για παράδειγμα, όταν μια μαθήτρια ισχυρίστηκε πως έχει καταλήξει στο σωστό αποτέλεσμα, ο Ε1 απαντάει: *«Έχεις βρει το αποτέλεσμα, αλλά μήπως το αποτέλεσμα βασίζετε σε αυτό που μόλις είπα?* (εννοεί με δοκιμές) *Δηλαδή, αν έλεγε ότι για 2 γυαλιά και 1 παντελόνι πληρώσαμε 63 € και στη μια περίπτωση και για 1 ζευγάρι γυαλιά και 3 παντελόνια πληρώσαμε 63€ και στην άλλη περίπτωση, θα μπορούσες να λύσεις το πρόβλημα να βρεις την απάντηση? Όχι! Ε άρα το ζητούμενο είναι να μπορώ να λύσω το πρόβλημα πάντα»*. Με την απάντηση του ο Ε1 προσπαθεί, ξανά μέσα από το πλαίσιο της δραστηριότητας, να τονίσει τόσο στην μαθήτρια όσο και στην υπόλοιπη τάξη που παρακολουθεί τον διάλογο την αναγκαιότητα εξεύρεσης μιας γενικευμένης μεθόδου.

Πριν παραθέσουμε τον υπόλοιπο διάλογο του κρίσιμου συμβάντος οφείλουμε να αναφερθούμε στον συλλογισμό της μαθήτριας «*-εγώ πήρα την πρώτη εικόνα και σκέφτηκα ότι αν το παντελόνι είναι χ τότε τα γυαλιά που είναι δυο φορές το παντελόνι και έχουμε 2 ζευγάρια γυαλιά θα είναι χ+2*2χ=50*» που για πρώτη φορά αναφέρεται η λέξη «εξίσωση». Είναι επίσης, η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται το χ για να συμβολιστεί ο άγνωστος και να διατυπωθεί η κατάλληλη σχέση. Η απάντηση αυτή θα ήταν περισσότερο αναμενόμενη αν δεν βρισκόμασταν στο δεύτερο μάθημα του κεφαλαίου αλλά σε μεταγενέστερα μαθήματα και είναι αξιοσημείωτο το ότι διατυπώθηκε στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ωστόσο ο Ε1 δεν στέκεται στον τύπο με τα χ που διατύπωσε η μαθήτρια, δεν λύνει δηλαδή την εξίσωση που θα ολοκλήρωνε το πρόβλημα. Είναι φανερό πως ο Ε1 έχει προαποφασίσει ότι η λύση που θα παρουσιαστεί στην τάξη πρέπει να πηγάζει από το πλαίσιο της δραστηριότητας, την οποία προσπαθεί να εκμεταλλευτεί για να εισάγει την έννοια της αντικατάστασης στην επίλυση γραμμικών συστημάτων και γι’ αυτό τους υπενθυμίζει το πρόβλημα με την ανταλλαγή προϊόντων. Επίσης, όπως θα φανεί στο διάλογο που ακολουθεί έχοντας καταλάβει ότι το σύνολο της τάξης δυσκολεύεται να κάνει την νοητική σύνδεση, παρουσιάζει ο ίδιος τον απαιτούμενο συλλογισμό.

Ε1: Ναι, άρα ουσιαστικά (εξίσωση λέει κάποιος άλλος μαθητής) ναι θα φτάσουμε και στην εξίσωση, αλλά βλέπω ότι ούτε με την εικόνα ούτε με την εξίσωση γίνεται τίποτα. Λοιπόν, άρα ουσιαστικά λέει το εξής, αυτό που μπορώ να κάνω είναι αντί να έχω δύο ζευγάρια με γυαλιά και ένα παντελόνι (γράφει στον πίνακα)- δεν τα σχημάτισα τώρα και πάρα πολύ καλά- μπορώ

να αντικαταστήσω την αξία αυτών, και ξέρω ότι αυτά εδώ μαζί όλα κοστίζουν 50€ , μπορώ να αντικαταστήσω τι? Πχ την αξία των γυαλιών με πόση θα ήτανε ισοδύναμη αξία παντελονιών. Δηλαδή, αυτά τα δύο ζευγάρια γυαλιά πώς θα μπορούσα να τα αντικαταστήσω, με τι θα μπορούσα να τα αντικαταστήσω?
-Με ψ
Ε1: Δεν λέω πώς θα τα συμβολίσω, τα έχω συμβολίσει γ και π τα έχω συμβολίσει, χ και ψ, ό,τι θέλετε. Θυμηθείτε ρε παιδιά το πρόβλημα που λύσαμε τις προάλλες με την ανταλλαγή προϊόντων. Άρα είναι σαν να αλλάζεις το ένα προϊόν με άλλο προϊόν.
-κύριε τι ακριβώς εννοείται?
Ε1: Προχτές δεν λύσαμε το πρόβλημα με τις ανταλλαγές..
-όχι δεν εννοώ αυτό, το ερώτημα που θέσατε εσείς ποιο είναι?
Ε1: Ωραία, σκέψου ότι το προϊόν αυτό που είναι τα γυαλιά μπορείς να το αλλάξεις και στη θέση του να βάλεις κάποιο που να έχει ισοδύναμη αξία. Ποιο μπορεί να έχει ισοδύναμη αξία με 2 ζευγάρια γυαλιά με βάση τις πληροφορίες του προβλήματος? Ορίστε
-4 παντελόνια
Ε1: Ααα άρα 4 παντελόνια! Άρα έχω 4 παντελόνια και άλλο ένα παντελόνι που κάνουν 50 ευρώ. Το οποίο σημαίνει ότι 5 παντελόνια = 50€ άρα η αξία του παντελονιού είναι 10 ευρώ κτλ κτλ. Και ακόμα και αν αυτό εδώ δεν έλεγε 50 και έλεγε οποιονδήποτε άλλον αριθμό, ας πούμε 107 αντί να λέει , αλλά 107 να λέει και εκείνο, να λέει 107 και εκείνο, τότε σε αυτή την περίπτωση 4π+π=107, βρίσκω πάλι την αξία που έχει το παντελόνι. άμα βρω την αξία που έχει το παντελόνι μπορώ να βρω την αξία που έχουν τα γυαλιά. Γιατί είναι απαραίτητο όμως οι δυο τιμές να είναι ίσες μεταξύ τους? Γιατί δηλαδή να μην τις βάλω διαφορετικές? Τη μια 107 την άλλη 60, 90, 103, δεν έχει σημασία. Ορίστε
-γιατί τότε δεν θα ξέραμε το ένα πίσω../
Ε1: Γιατί τότε δεν θα έβγαινε αυτή εδώ η σχέση. Ότι ένα ζευγάρι γυαλιά έχει τόση αξία όσο 2 παντελόνια. Γιατί αυτό εδώ στηρίχτηκε στο ότι μπόρεσα να εξισώσω το πρώτο με το δεύτερο , το πρώτο μέλος από την πρώτη εξίσωση με το πρώτο μέλος από τη δεύτερη εξίσωση. Εντάξει?

Λοιπόν, άρα να συνοψίσουμε, εκμεταλλεύτηκε ο Παναγιώτης το γεγονός ότι είχαν την ίδια αξία ακόμα και όταν αντικαταστάθηκε το ένα ζευγάρι γυαλιά με δύο παντελόνια, άρα προσδιόρισε ποια ήταν η σχέση ανάμεσα στην αξία που έχουν τα γυαλιά και στην αξία που έχουν τα παντελόνια, ότι ένα ζευγάρι γυαλιά έχει τόση αξία όση δύο παντελόνια, και πήγαμε σε κάποια από τις δύο εξισώσεις … λέγε Ρένα

Παρατηρούμε λοιπόν πως παρά τις προτροπές του εκπαιδευτικού (*Ε1: Θυμηθείτε ρε παιδιά το πρόβλημα που λύσαμε τις προάλλες με την ανταλλαγή προϊόντων. Άρα είναι σαν να αλλάζεις το ένα προϊόν με άλλο προϊόν*), δεν διατυπωνόταν στην τάξη ο συλλογισμός που ο ίδιος επιθυμούσε. Ωστόσο παρόλο που υπήρχαν ορισμένοι μαθητές που φαινόταν να έχουν πλησιάσει σε αυτόν τον τρόπο σκέψης, είναι φανερό ότι ο Ε1 επιθυμούσε η λύση να προκύψει από το σύνολο της τάξης και όταν αυτό δεν συνέβη τότε ο συλλογισμός που οδηγεί στην λύση παρουσιάστηκε από τον ίδιο (Ε1: *Λοιπόν, άρα να συνοψίσουμε, εκμεταλλεύτηκε ο Παναγιώτης το γεγονός ότι είχαν την ίδια αξία ακόμα και όταν αντικαταστάθηκε το ένα ζευγάρι γυαλιά με δύο παντελόνια, άρα προσδιόρισε ποια ήταν η σχέση ανάμεσα στην αξία που έχουν τα γυαλιά και στην αξία που έχουν τα παντελόνια, ότι ένα ζευγάρι γυαλιά έχει τόση αξία όση δύο παντελόνια, και πήγαμε σε κάποια από τις δύο εξισώσεις*)

Στην προσπάθεια μας να εντοπίσουμε την ύπαρξη της γενίκευσης, ισχυριζόμαστε ότι στο συγκεκριμένο απόσπασμα η έννοια της γενίκευσης ταυτίζεται με την επιτυχής κατάληξης της ρεαλιστικής δραστηριότητας. Ο εκπαιδευτικός θεωρεί πως το πρόβλημα έχει λυθεί όταν στην τάξη διατυπωθεί ένας γενικευμένος συλλογισμός που θα μπορέσει να εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος αλλάζουν (*Ε1: Άρα να βρούμε έναν τρόπο που να μπορούμε να λύνουμε το πρόβλημα σε όλες τις περιπτώσεις, εντάξει;*). Με την απόφαση του να βασίσει το μάθημα στην ρεαλιστική δραστηριότητα, στο τμήμα έχει διαμορφωθεί ένα μαθηματικό περιβάλλον που θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να επινοήσουν την απαιτούμενη μέθοδο επίλυσης και αυτό είναι ένα υψηλού επιπέδου είδος γενίκευσης. Αν λάβουμε επίσης υπόψη ότι ο απώτερος σκοπός της συνολικής δραστηριότητας είναι οι μαθητές να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι την μέθοδο που δημιούργησαν και χρησιμοποίησαν για τη λύση του συγκεκριμένου ρεαλιστικού πρόβλημα μπορούν να την χρησιμοποιούν σε αντίστοιχες περιπτώσεις, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε πως ικανοποιούνται και τα τρία σκέλη του ορισμού της Ellis, συμφώνα με τον οποίο η έννοια ορίζεται ως μια δραστηριότητα στην οποία τα άτομα ενώ βρίσκονται μέσα σε κοινωνικό-μαθηματικά πλαίσια – η ομαδοσυνεργατική δραστηριότητα και ο διάλογος στον οποίο συμμετέχει μεγάλο ποσοστό της τάξης – προβαίνουν σε μια από τις εξής (νοητικές) πράξεις:

- αναγνωρίζουν ομοιότητες και κοινά χαρακτηριστικά σε διαφορετικές περιπτώσεις (*Θυμηθείτε ρε παιδιά το πρόβλημα που λύσαμε τις προάλλες με την ανταλλαγή προϊόντων*)
- επεκτείνουν τον συλλογισμό τους πέρα από τα πλαίσια και τα όρια της αρχικής προέλευσης αυτού (*θα μπορούσες να λύσεις το πρόβλημα να βρεις την απάντηση τότε? Όχι! Ε άρα το ζητούμενο είναι να μπορώ να λύσω το πρόβλημα πάντα*)
- εξάγουν ευρύτερα συμπεράσματα, τα οποία απορρέουν από συγκεκριμένες περιπτώσεις (η εύρεση μιας γενικής μεθόδου λύσης απαραίτητης για την επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος που θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αντίστοιχες περιπτώσεις)

Το να καταφέρουν λοιπόν οι μαθητές να γενικεύσουν είναι ο απώτερος σκοπός του εκπαιδευτικού και της δραστηριότητας και ανεξάρτητα από το αν ο γενικευμένος συλλογισμός διατυπώθηκε τελικά από τον Ε1 η συμμετοχή της τάξης ήταν αρκετά έντονη, σε σημείο που θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως επιχειρήθηκε μια συλλογική γενίκευση (collective generalizing, Ellis 2011).

Ο ισχυρισμός για ύπαρξη γενίκευσης στο συγκεκριμένο σημείο ενισχύεται από το η θεωρία των ΡΜΕ, η οποία εντάσσει την διατύπωση γενικευμένων συλλογισμών στα τελικά στάδια της κάθετης μαθηματικοποίησης και στο συγκεκριμένο απόσπασμα καταγράφεται το στάδιο αυτό: στους μαθητές δίνεται η ευκαιρία μέσω της δραστηριότητας να ανακαλύψουν και να χρησιμοποιήσουν την μέθοδο της αντικατάστασης χωρίς να την έχουν διδαχθεί. Επιπλέον ο Ε1 με σκοπό να κλείσει τον κύκλο της κάθετης μαθηματικοποίησης θα τους τονίσει – κάτι που πραγματοποιήθηκε στα επόμενα μαθήματα – πως η μέθοδος που καταλήξαμε να χρησιμοποιήσουμε ονομάζεται «μέθοδος της αντικατάστασης». Οφείλουμε να αναφέρουμε ξανά ότι ο εκπαιδευτικός μέχρι εκείνη την στιγμή δεν είχε αναφερθεί ούτε στις εισαγωγικές έννοιες του κεφαλαίου και φυσικά ούτε στους πιθανούς τρόπους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος, καθώς ήταν διδακτική του επιλογή να εισάγει τις έννοιες με την συγκεκριμένη δραστηριότητα, επιθυμώντας όπως ο ίδιος μας δήλωσε: *«να καταλάβουν οι μαθητές την λογική και το σκεπτικό πίσω από την μέθοδο της αντικατάστασης»*

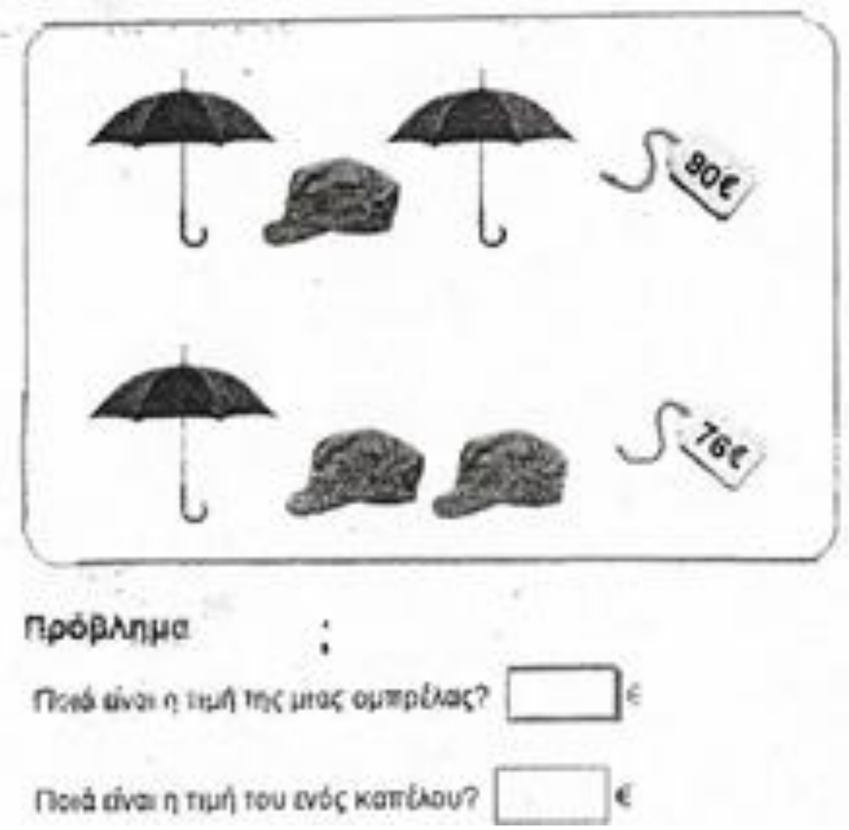
Παρόλο που το συγκεκριμένο ερώτημα που προκάλεσε το περιστατικό που αναλύσουμε είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα ρεαλιστικού προβλήματος των ΡΜΕ, το γεγονός πως οι μαθητές έπρεπε να ανακαλύψουν μόνοι τους τον τρόπο επίλυσης του προσδίδει μια ερευνητική χροιά. Δεν μπορούμε επίσης, να παραμελήσουμε το γεγονός πως το συγκεκριμένο κρίσιμο συμβάν πληροί απόλυτα την περιγραφή των Katja Maaß και Miche`le Artigue (2013) για τα τελευταία στάδια μιας διδασκαλίας βασισμένης στην θεωρία IBL. Οι δυο ερευνητές αναφέρουν ότι: *«..στη συνέχεια οι* *μαθητές ερμηνεύουν και αξιολογούν τις λύσεις τους και γνωστοποιήσουν τα αποτελέσματά τους μέσω διαφόρων μέσων (συζητήσεις, αφίσες, παρουσιάσεις). Αυτό σημαίνει επίσης ότι θα πρέπει να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τα αποτελέσματα και τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους και να τα συνδέσουν προκειμένου να αναπτυχθούν προοδευτικά οι μαθηματικές έννοιες και δομές»*. Δεν είναι στόχος μας στην παρούσα εργασία να αναλύσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές των δυο θεωριών διδασκαλίας – IBL και PME – αλλά δεν μπορούμε να παραμελήσουμε το γεγονός ότι ο ισχυρισμός για την εμφάνιση της γενίκευσης στην τάξη στο παραπάνω περιστατικό ενισχύεται και από τις δυο θεωρίες.

Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές που ο Ε1 ακολούθησε, η έκταση του παραπάνω αποσπάσματος είναι αρκετή για να εντοπίσουμε πολλές από τις πρακτικές που καταγράφονται στην βιβλιογραφία της γενίκευσης, των RME και της IBS, καθώς ο εκπαιδευτικός:

- έδινε την δυνατότητα σε αρκετούς μαθητές να εκφράσουν τους μαθηματικούς τους συλλογισμούς
- αρκετές φορές ζήτησε από τους μαθητές να «χτίσουν» πάνω στους συλλογισμούς αυτούς
- έθετε την απάντηση κάποιου μαθητή ως θέμα συζήτησης στην τάξη
- σε περίπτωση λανθασμένων απαντήσεων ή συλλογισμών ζητούσε από τον μαθητή να δικαιολογήσει την πρόταση του
- προσπαθούσε να τους παροτρύνει να συνδυάσουν όσα είχαν προηγηθεί στο προηγούμενο ερώτημα
- δεν έδινε καθοριστικές απαντήσεις αλλά προσπαθούσε να ενισχύσει την εξέλιξη του διαλόγου και διατύπωσε τον γενικευμένο συλλογισμό αφού είχε δώσει αρκετές ευκαιρίες στην τάξη και είχε αφιερώσεις αρκετό διδακτικό χρόνο.

3.1.4 Κρίσιμο Περιστατικό 4

Αντίστοιχο με του προηγούμενου κρίσιμου συμβάντος ήταν το διδακτικό εγχείρημα του Ε1 που επιχειρήθηκε μέσω του παρακάτω ρεαλιστικού προβλήματος, το οποίο είχε τεθεί στους μαθητές ως εργασία για το σπίτι:



Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από τον διάλογο που αναπτύχθηκε μέσα στην τάξη και περιέχει την προσπάθεια του εκπαιδευτικού να οδηγήσει την τάξη στην χρήση της μεθόδου της αντικατάστασης, χωρίς αυτή να έχει διδαχτεί:

Ε1: ουσιαστικά καπέλο έχω και εδώ και εδώ (δείχνει στον πίνακα και εννοεί τις 2 μεριές της ισότητας), εντάξει όπως ομπρέλα έχω και εδώ και εδώ, άρα αυτά είτε τα έχω είτε δεν τα έχω είναι το ίδιο πράγμα. Άρα τελικά μια ομπρέλα ισούται όσο ένα καπέλο + 4 ευρώ, η αξία μιας ομπρέλας είναι όσο ένα καπέλο + 4 ευρώ.

Ωραία αξιοποιήστε αυτή την σχέση για να λύσετε και να δείτε τι γίνεται.

(παρατηρήσεις σε μαθητές για φασαρία)

Ε1: λοιπόν, πότε θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την σχέση που βγάλαμε ότι η αξία μιας ομπρέλας είναι

όσο ενός καπέλου + 4 ευρώ για να βγάλεις γενικά αποτέλεσμα πόσο είναι η αξία του κάθε καπέλου και η αξία της κάθε ομπρέλας; Λέγε Ρένια
-εφόσον έχουμε αρχικά 2 ομπρέλες μπορούμε να γράψουμε 2 καπέλα και 8 ευρώ
Ε1: άρα δηλαδή την αξία της κάθε ομπρέλας την αντικαθιστούμε με κάτι ισοδύναμης αξίας, δηλαδή ένα καπέλο και 4 ευρώ… (τα γράφει στον πίνακα).. άρα
-άρα 3 καπέλα + 8
Ε1: άρα 3 καπέλα + 8 ίσο με 80 άρα
-άρα 80-8= 3 καπέλα (μια άλλη μαθήτρια)
ΜΚ: άρα 3 καπέλα ίσον
-72
Ε1: άρα 3κ=72
-24 ευρώ το κάθε καπέλο
Ε1: και η αξία της κάθε ομπρέλας;
-κύριε το 72 δεν μου βγαίνει
(ο Ε1 το εξηγεί στην μαθήτρια) Ε1: άρα η αξία της ομπρέλας πόσο είναι
-28
Ε1: άρα για να συνοψίσω, για να συνοψίσω.. αυτό που σκέφτηκε σε αυτήν την περίπτωση ο Κωνσταντίνος ήταν να δημιουργήσει μια καινούργια σχέση, βλέποντας την αξία που έχουμε, προσθέτοντας κάποια χρήματα σε αυτό εδώ (δείχνει στον πίνακα) και βρίσκοντας μια σχέση για την αξία της ομπρέλας και του καπέλου και μετά αντικαταστήσαμε- αντικαταστήσαμε (το τονίζει) τις ομπρέλες με ίσης αξίας, δηλαδή καπέλο + 4 ευρώ το καθένα, για να προσδιορίσουμε ποια είναι η τιμή του καπέλου.

Οφείλουμε αρχικά να αναφέρουμε ότι ο διάλογος που αναπτύχθηκε στην τάξη – ο οποίος δεν συμπεριλαμβάνεται ολόκληρος στο απόσπασμα – ήταν μικρότερος συγκριτικά με αυτόν που προηγήθηκε με αφορμή το πρόβλημα του τρίτου κρίσιμου συμβάντος. Οι μαθητές έπειτα από όσα είχαν προηγηθεί, φαίνονταν πιο εξοικειωμένοι με την μέθοδο της αντικατάστασης που χρησιμοποιήθηκε. Ο Ε1 χρησιμοποιεί το πρόβλημα για να εφαρμόσει ξανά την μέθοδο που είχε εισάγει στην τάξη, δίνοντας έμπρακτα στους μαθητές την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν ότι η μέθοδος αυτή είναι ένα εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν υπάρχουν δύο άγνωστοι που συνδέονται με δύο σχέσεις. Το διδακτικό του εγχείρημα αποσκοπεί στο να καταλήξουν οι μαθητές μόνοι τους στο συμπέρασμα αυτό, να τους δώσει δηλαδή ένα επιπλέον ερέθισμα για να γενικεύσουν, δημιουργώντας από μόνοι τους τους συλλογισμούς που επιθυμεί να τους διδάξει στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Αν οι μαθητές καταφέρουν να γενικεύσουν θα έχουν καταλήξει μόνοι τους – με την απαραίτητη καθοδήγηση του εκπαιδευτικού – στη νέα γνώση.

Η δραστηριότητα και ο τρόπος που ο εκπαιδευτικός την αξιοποιεί διαμορφώνουν το κατάλληλο περιβάλλον στην τάξη. Όσον αφορά την θεωρία των RME θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι στο απόσπασμα υπάρχουν πτυχές του σταδίου της κάθετης μαθηματικοποίησης. Υπενθυμίζουμε ότι ο συγκεκριμένος όρος αναφέρεται σε διαδικασίες που θα πραγματοποιηθούν σε μια τάξη μέσω της εμπλοκής των μαθητών με ρεαλιστικά προβλήματα. Κάποιες από τις διαδικασίες αυτές που εντοπίζονται στο απόσπασμα είναι:

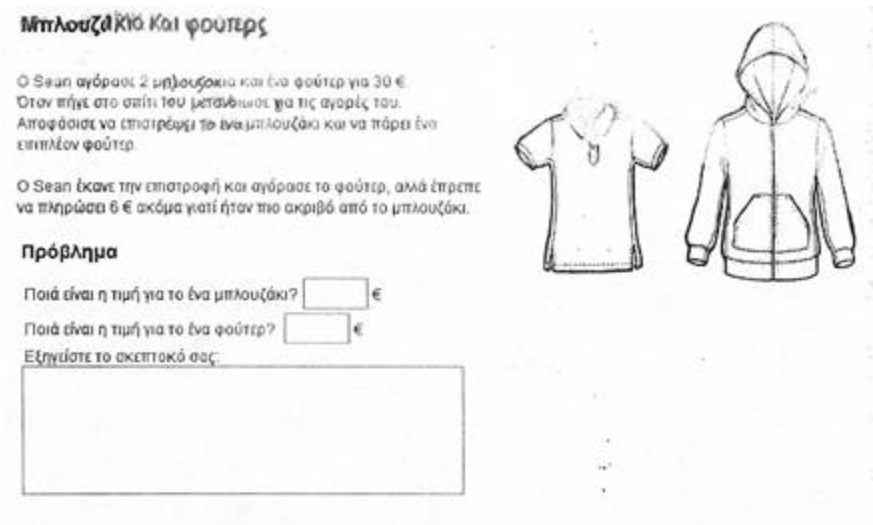
- η τυποποιημένη αναπαράσταση μιας σχέσης (-*εφόσον έχουμε αρχικά 2 ομπρέλες μπορούμε να γράψουμε 2 καπέλα και 8 ευρώ*)
- ο συνδυασμός και η ενσωμάτωση μοντέλων (χρησιμοποιείται η μέθοδος που επινοήθηκε και αξιοποιήθηκε στο προηγούμενο πρόβλημα)
- η τυποποίηση ενός μαθηματικού μοντέλου (η μέθοδος της αντικατάστασης έχει χρησιμοποιηθεί πλέον δύο φορές, άρα αρχίζει να τυποποιείται: *Ε1: άρα για να συνοψίσω, για να συνοψίσω.. αυτό που σκέφτηκε σε αυτήν την περίπτωση ο Κωνσταντίνος ήταν να δημιουργήσει μια καινούργια σχέση, βλέποντας την αξία που έχουμε, προσθέτοντας κάποια χρήματα σε αυτό εδώ (δείχνει στον πίνακα) και βρίσκοντας μια σχέση για την αξία της ομπρέλας και του καπέλου και μετά αντικαταστήσαμε- αντικαταστήσαμε (το τονίζει) τις ομπρέλες με ίσης αξίας, δηλαδή καπέλο + 4 ευρώ το καθένα, για να προσδιορίσουμε ποια είναι η τιμή του καπέλου.*)
- η γενίκευση (απώτερος σκοπός είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι η μέθοδος που εφευρέθηκε και χρησιμοποιήθηκε στα 2 προβλήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αντίστοιχες περιπτώσεις)

Επίσης από την βιβλιογραφία για την σχεδίαση μαθημάτων στο πλαίσιο των RME προκύπτουν πέντε βασικά χαρακτηριστικά για τα RME: (α) η φαινομενολογική διερεύνηση ή/και η χρήση πλαισίου (contexts), (β) Η χρήση προτύπων/μοντέλων ή/και η γεφύρωση μέσω καθέτων εργαλείων, (γ) η αξιοποίηση όσων κατασκευάζουν ή παράγουν οι μαθητές, (δ) ο διαδραστικός χαρακτήρας της διδασκαλίας και (ε) η διαπλοκή διαφόρων τμημάτων μάθησης (Harun Zulkardi, 2010). Στο κρίσιμο περιστατικό που παρουσιάζουμε συναντάμε την αξιοποίηση της μεθόδου της αντικατάστασης, η οποία είχε κατασκευαστεί με την βοήθεια του καθηγητή από τους μαθητές στα προηγούμενα ερωτήματα της δραστηριότητας. Παρατηρούμε επίσης, την διαδραστικότητα της διδασκαλίας καθώς ο Ε1 βασίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό σε απαντήσεις και συλλογισμούς των μαθητών για την διεξαγωγή του μαθήματος (Ε1: *άρα για να συνοψίσω, για να συνοψίσω.. αυτό που σκέφτηκε σε αυτήν την περίπτωση ο Κωνσταντίνος ήταν να δημιουργήσει μια καινούργια σχέση*).

Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθεί ο εκπαιδευτικός, παρατηρούμε μια επανεμφάνιση των όσων καταγράψαμε στο προηγούμενο κρίσιμο συμβάν. Στο συγκεκριμένο απόσπασμα η πρακτική που είναι πιο εμφανής είναι το ότι το μάθημα βασίζεται στους συλλογισμούς και τις απαντήσεις των μαθητών, τους οποίους ο Ε1 αναλύει και καταγράφει στον πίνακα με σκοπό να γίνουν κατανοητοί από το σύνολο της τάξης. Αξιόλογη είναι επίσης η παρότρυνση του προς του μαθητές (*Ωραία αξιοποιήστε αυτή την σχέση για να λύσετε και να δείτε τι γίνεται.*) με την οποία προσπαθεί αφενός να τους καθοδηγήσει στο να φτάσουν στην λύση του προβλήματος, αφετέρου να τους βοηθήσει να συνειδητοποιήσουν την λογική της μεθόδου της αντικατάστασης (αξιοποιούμε την μία σχέση για να λύσουμε την άλλη). Όπως έχουμε προαναφέρει στην ανάλυση των προηγουμένων κρίσιμων συμβάντων οι πρακτικές αυτές συμπεριλαμβάνονται στην βιβλιογραφία των RME και της γενίκευσης.

3.1.5 Κρίσιμο Περιστατικό 5

Το απόσπασμα που ακολουθεί περιέχει τον διάλογο που αναπτύχθηκε στην τάξη μεταξύ του Ε1 και μιας μαθητρίας για την επίλυση του παρακάτω ρεαλιστικού προβλήματος:



Μπλουζάκια και φούτερς

Ο Sean αγόρασε 2 μπλουζάκια και ένα φούτερ για 30 €.
Όταν πήγε στο σπίτι του μετάνιωσε για τις αγορές του.
Αποφάσισε να επιστρέψει το ένα μπλουζάκι και να πάρει ένα επιπλέον φούτερ.

Ο Sean έκανε την επιστροφή και αγόρασε το φούτερ, αλλά έπρεπε να πληρώσει 6 € ακόμα γιατί ήταν πιο ακριβό από το μπλουζάκι.

Πρόβλημα

Ποιά είναι η τιμή για το ένα μπλουζάκι? €
Ποιά είναι η τιμή για το ένα φούτερ? €
Εξηγείστε το σκεπτικό σας:

Οφείλουμε να αναφέρουμε ότι το συγκεκριμένο ερώτημα ήταν το τελευταίο της δραστηριότητας και υπήρχε μια χρονική πίεση - σύμφωνα με τα λεγόμενα του ιδίου – στο να προλάβει όχι μόνο να λύσει την άσκηση αλλά να τονίσει τον συλλογισμό πίσω από την μέθοδο επίλυσης.

Διάλογος
Ε1: αγοράσαμε 2 μπουφάν και ένα φούτερ (περνάει σε επόμενο πρόβλημα)
-αυτό ήταν δύσκολο
-αυτό ήταν το πιο εύκολο
Ε1: αγοράσαμε 2 μπλουζάκια και ένα φούτερ και πληρώσαμε 30 ευρώ, όταν πήγε στο σπίτι του αποφάσισε ότι θα επιστρέψει το ένα μπλουζάκι και θα πάρει ένα επιπλέον φούτερ, πήγε λοιπόν στο μαγαζί, επέστρεψε το μπλουζάκι και αγόρασα το φούτερ αλλά πλήρωσε επιπλέον 6 ευρώ. Εντάξει; Έδωσε λοιπόν το μπλουζάκι και στην θέση του πήρε ένα φούτερ, αλλά αναγκάστηκε να πληρώσει και 6 ευρώ, δηλαδή το φούτερ ήταν ακριβότερο
-(μαθητής από μόνος του) άρα το φούτερ είναι ένα μπλουζάκι και 6 ευρώ
Ε1: άρα 1φ= 1 μπλουζάκι + 6, αυτή λοιπόν είναι η πληροφορία που έχουμε και βρείτε τώρα πόσο είναι η αξία για το μπλουζάκι και το φούτερ
-κύριε να πω;
Ε1: έχουμε και πληροφορία στην αρχή (απαντάει σε άλλο μαθητή) ότι 2 μπλουζάκια και ένα φούτερ ίσο με 30. Έλα, λύστε το με τις μεθόδους που είδαμε τώρα.. (παρατηρήσεις σε μαθητές για φασαρία)
Λέγε Πένια
-ναι λοιπόν..1 μπλουζάκι και 1 φούτερ ίσο με 36
Ε1: άρα ουσιαστικά πάω και αντικαθιστώ την αξία του φούτερ με ένα μπλουζάκι και 6 ευρώ, άρα θα έχω δύο μπλούζες και η αξία από άλλη μια μπλούζα και 6 ευρώ όλα μαζί μου κάνουν 30 ευρώ
-όχι κύριε
Ε1: όχι;
-δεν είπα αυτό, είπα ότι ένα μπλουζάκι + 2 φούτερ ίσο με 36 ευρώ, αφού αλλάζει το μπλουζάκι και παίρνει ένα άλλο φούτερ και σύνολο κάνουν 36
Ε1: ωραία, ας το δω με τον τρόπο που το λες.. ένα μπλουζάκι και 2 φούτερ, γιατί αντάλλαξε το μπλουζάκι με το φούτερ, μου κάνουν 36, παρακάτω
-άρα 2 μπλουζάκια και 4 φούτερ ίσο με 72…και μετά θα κάνουμε 2 μπλουζάκια + 3 φούτερ = 1 φούτερ = 72
Ε1: τι θα κάνουμε?
-θέλετε να έρθετε να το δείτε;
Ε1: ναι να το δω
-(άλλος μαθητής): το έχει μπλέξει πάρα πολύ

Ε1: κάτσε περίμενε να το δούμε (το κοιτάει και συνεχίζει) α μάλιστα… και κάνει το εξής: εδώ πέρα διασπάει αυτό εδώ (εννοεί το 4φ σε 3φ+1φ) και το γράφει δυο μπλουζάκια και 1 φούτερ και άλλα τρία φούτερ, τα τέσσερα συνολικά φούτερ που είχε και τα διέσπασε σε 3 και 1, ίσο 72, αλλά τα δύο μπλουζάκια και ένα φούτερ έχουμε πληροφορία από πριν ότι έχουν αξία 30 ευρώ
-κύριε αυτό μπορείτε να μας το εξηγήσετε
-δεν ισχύει (άλλος μαθητής)
Ε1: πως δεν ισχύει; Εξετάστε εσείς αν ισχύει.. (κουδούνι) λοιπόν έκανε τα εξής.. και πως θα συνεχίσει; ..3 φούτερ είναι η διαφορά που έχει από τα 72 ευρώ τα 30 ευρώ

Η πρώτη αξιοσημείωτη παρατήρηση αφορά την αμεσότητα της ανταπόκρισης του μαθητή, ο οποίος χωρίς να έχει ερωτηθεί προσωπικά διατύπωσε μια μαθηματική σχέση από τα δεδομένα του προβλήματος (*άρα το φούτερ είναι ένα μπλουζάκι και 6 ευρώ*). Παρατηρούμε λοιπόν πως το στάδιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης πλέον είναι πιο σύντομο, γεγονός που είναι πολύ πιθανόν να οφείλεται στο ότι οι μαθητές έχουν αποκτήσει μια – μικρή έστω – εμπειρία από την μέχρι στιγμής ενασχόληση τους με τέτοιας φύσης προβλήματα. Στην συνέχεια ο Ε1 προτρέπει την τάξη να εργαστεί με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα ερωτήματα (*Ε1: έχουμε και πληροφορία στην αρχή ότι 2 μπλουζάκια και ένα φούτερ ίσο με 30. Έλα, λύστε το με τις μεθόδους που είδαμε τώρα.*). Ο σκοπός του παραμένει ο ίδιος: οι μαθητές θα καταλάβουν έμπρακτα και από μόνοι τους ότι η μέθοδος που ανακαλύφθηκε στην τάξη είναι ένα γενικευμένο εργαλείο για τέτοιου είδους προβλήματα. Υπενθυμίζουμε ότι ακόμα δεν έχουν αναφερθεί οι έννοιες των γραμμικών συστημάτων στην τάξη και ότι στα περιστατικά που αναλύσουμε καταγράφεται η υλοποίηση της απόφασης του Ε1 να εισάγει τις έννοιες μέσω ρεαλιστικών προβλημάτων.

Ωστόσο στο συγκεκριμένο απόσπασμα υπάρχει ένα επιπλέον περιστατικό που χρήζει αναφοράς. Όταν ο Ε1 δίνει τον λόγο στην Πένια για να εκφράσει τον τρόπο λύσης, η μαθήτρια παρουσιάζει έναν συλλογισμό που ξάφνιασε τον εκπαιδευτικό. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο Ε1 ήθελε να παρουσιαστεί στην τάξη η εξής επίλυση: *«άρα ουσιαστικά πάω και αντικαθιστώ την αξία του φούτερ με ένα μπλουζάκι και 6 ευρώ, άρα θα έχω δύο μπλούζες και η αξία από άλλη μια μπλούζα και 6 ευρώ όλα μαζί μου κάνουν 30 ευρώ»* και προς στιγμήν πίστεψε ότι αυτή την μέθοδο εφάρμοζε και η Πένια. Η μαθήτρια όμως του απαντάει *«-όχι κύριε»* και ότι ο συλλογισμός της ήταν *«-δεν είπα αυτό, είπα ότι ένα μπλουζάκι + 2 φούτερ ίσο με 36 ευρώ, αφού αλλάζει το μπλουζάκι και παίρνει ένα άλλο φούτερ και σύνολο κάνουν 36»* . Είναι λοιπόν φανερό ότι ο τρόπος επίλυσης που πρότεινε η Πένια ήταν διαφορετικός από αυτόν που ο ίδιος σκόπευε να παρουσιάσει στην τάξη. Ο συλλογισμός της όμως παρουσιάστηκε στους υπόλοιπους μαθητές, ακόμα και όταν κάποιοι από τους μαθητές διαμαρτυρήθηκαν για την πολυπλοκότητα του συγκεκριμένου τρόπου λύσης *(- το έχει* *μπλέξει πάρα πολύ Ε1: κάτσε περίμενε να το δούμε*). Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τα τελευταία λεπτά του μαθήματος να αφιερωθούν εξ ολοκλήρου στην παρουσίαση του συλλογισμού της Πένιας.

Είναι φανερό ότι η διδακτική πρακτική που ο Ε1 εφαρμόζει στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι αυτή που στην βιβλιογραφία περιγράφεται ως *«το να εκθέτεις τις προτάσεις των μαθητών στο σύνολο της τάξης ώστε να αποτελούν θέμα συζήτησης και σχολιασμού»*. Ωστόσο ο συλλογισμός της Πένιας αντικατέστησε αυτόν του ίδιου του εκπαιδευτικού. Θεωρούμε λοιπόν ότι είναι πολύ σημαντικό να δημιουργείται στην τάξη ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές θα αισθάνονται ισοδύναμοι με τον εκπαιδευτικό, σε βαθμό που αυτό θα τους οδηγήσει στο να έχουν την άνεση να διατυπώνουν τους μαθηματικούς τους συλλογισμούς και κατά επέκταση να έχουν περισσότερες πιθανότητες να φτάσουν στην γενίκευση. Με την απόφαση του να μην παραμελήσει τον συλλογισμό της μαθήτριας επειδή «ήταν πιο πολύπλοκος» ή επειδή «δεν προλαβαίνουμε να τον αναλύσουμε τώρα» ο Ε1 προσθέτει ένα λιθαράκι στην δημιουργία ενός τέτοιου περιβάλλοντος το οποίο θα αναπτύξει όχι μόνο την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν, αλλά θα ενισχύσει τον μαθηματικό γραμματισμό, που είναι ο βασικός στόχος του ελληνικού προγράμματος σπουδών.

3.2. Η Γενίκευση στην τάξη του Ε2

3.2.1 Κρίσιμο Περιστατικό 1

Το πρώτο περιστατικό που θα αναλύσουμε προέρχεται από την δεύτερη ώρα που παρακολουθήσαμε το τμήμα του Ε2. Η προηγούμενη διδακτική ώρα – η οποία ήταν η πρώτη του νέου κεφαλαίου – είχε αφιερωθεί σε επανάληψη εννοιών σχετικές με τις ευθείες, έννοιες απαραίτητες για την γεωμετρική ερμηνεία των γραμμικών συστημάτων. Στο απόσπασμα καταγράφεται ο διάλογος στην τάξη όταν ο Ε2 θέλησε να επαναλάβει όσα είχαν συζητηθεί στο προηγούμενο μάθημα

Διάλογος
Ε2: Αυτό το χ=-3 είναι ευθεία?
-ναι. Είναι ευθεία και..
Ε2: Ποια ευθεία είναι?
-είναι κάθετη στην.. προς το…

Ε2: Πώς το καταλαβαίνουμε? Θέλω να μου πεις πάλι κάποια σημεία. Συγνώμη (την διακόπτει) θέλω να πω κάτι. Το χαρακτηριστικό όλων των σημείων που θα πει είναι ποια? Ποιο χαρακτηριστικό? Λέγε Κυριάκο
- -3
Ε2: Τι εννοείς κάντο πιο σαφές
-…
Ε2: Ε κάτι με το -3, τι εννοείς? Κάντο πιο σαφές. -3 εδώ τι?
-το -3 θα είναι κοινό σημείο σε όλες τις, σε όλα τα σημεία που θα χουν…
Ε2: Το -3, σε ποια θέση? Στο χ ή στο ψ? αυτό εννοώ.
-στο χ
Ε2: Ε στο χ. άρα όλα αυτά τα σημεία.. πες μια πρόταση που να έχει μέσα τη λέξη τετμημένη. Για πες μια πρόταση τέτοια.
όλα τα σημεία του χ θα…
-ε
Ε2: Ποια λέξη είπα να χρησιμοποιήσεις? (μαθητής: τετμημένη) ωραία, για πάμε άλλη μια
-όλα τα σημεία του χ
Ε2: Της γραφικής παράστασης
- εε.. της γραφικής παράστασης χ θα έχουν τετμημένη το -3
Ε2: Εύγε. Άρα η Βασιλική θα μου πει μερικά τέτοια. Ποια είναι Βασιλική, πες μου
- (-3,5)
Ε2: 3,0 -3,3 -3,1 ,μπλα μπλα μπλα μπλα μπλα, και πώς θα βάλουμε τώρα τους άξονες, το οποίο θα το κάνετε τώρα αμέσως και θα το δω εγώ στα τετράδια. Ωραία. Για να δω τι ευθεία θα προκύψει τώρα. Έλα λίγο
-θα είναι παράλληλη στην ψψ’

Ε2: Πολύ σωστά. Τέλος είπα εγώ και προσέξτε το αυτό, και καλό είναι να το σημειώσετε και στο μυαλό και στο χαρτί, ο μάγκας εκείνος ο οποίος μπορεί να καταλάβει ψ=5 τι ακριβώς ευθεία είναι ή χ=2 τι ακριβώς ευθεία είναι, *(κτ κπ λέει μια λέξη που δεν ακούγεται καθαρά 12:02)* μπράβο, εκείνος που δεν μπορεί τόσο γρήγορα, μπορεί να έχει και μπακ απ τι? Ποιο? Εκείνο το απ' έξω που μάθαμε. Ποιο? Ψ=5 παράλληλη στον ?
-χχ
Ε2: Και χ=2 παράλληλη στον?
-ψψ'
Ε2: Το ανάποδο. Και αυτό πηγαίνει αμέσως, γρήγορα. Βέβαια, καλό είναι να έχεις και μπακ απ από πίσω γνώση, γιατί συμβαίνει αυτό. Απλά είναι σαν μνημονικός κανόνας ,εξαιρετικά γρήγορος ,για να βρίσκεις ποια είναι η ευθεία αυτή *(στο σημείο αυτό αναφέρεται σε μνημονικό κανόνα που είχε αναφέρει στο προηγούμενο μάθημα).* Άρα, μέχρι τώρα, συγνώμη λίγο ένα λεπτάκι, μελετήσαμε μέχρι τα τώρα την περίπτωση α=0 και β όχι μηδέν. Β=0 και α όχι μηδέν και είδαμε ότι αυτά είναι κάποιες ευθείες πολύ χαρακτηριστικές, παράλληλοι στους άξονες.

Αρχικά παρατηρούμε ότι με την ερώτηση «*Αυτό το χ=-3 είναι ευθεία?»* ο Ε2 επιθυμεί να επαναλάβει – ρωτώντας τους μαθητές – όσα είχαν αναφερθεί στο προηγούμενο μάθημα για τις ευθείες και πιο συγκεκριμένα για αυτές που είναι παράλληλες με τους καρτεσιανούς άξονες. Ωστόσο η μαθήτρια στην οποία τέθηκε η αρχική ερώτηση, φαίνεται να δυσκολεύεται να διατυπώσει μια ολοκληρωμένη απάντηση. Ο Ε2 τότε επεμβαίνει θέτοντας της επιπλέον βοηθητικές ερωτήσεις (*Ε2: Πώς το καταλαβαίνουμε? Θέλω να μου πεις πάλι κάποια σημεία*), αλλά στην συνέχεια την διακόπτει και απευθύνει το λόγο σε άλλο μαθητή (*Ε2: θέλω να πω κάτι. Το χαρακτηριστικό όλων των σημείων που θα πει είναι ποια? Ποιο χαρακτηριστικό? Λέγε Κυριάκο*) ο οποίος αν και πλησιάζει στην απάντηση δεν την διατυπώνει με τον τρόπο που ο Ε2 επιθυμεί. Για αυτό το λόγο οι ερωτήσεις που του έθετε ο εκπαιδευτικός είχαν μια έντονη χροιά καθοδήγησης (*Ε2: Ποια λέξη είπα να χρησιμοποιήσεις? (μαθητής: τετμημένη) ωραία, για πάμε άλλη μια*) μέχρι ο μαθητής να διατυπώσει την απάντηση.

Το πρώτο σημείο που επιθυμούμε να σταθούμε περισσότερο είναι όταν ο Ε2 αναφέρεται στον «*μνημονικό κανόνα*» που οι μαθητές «*μπορούν να έχουν ως μπακ απ*». Ο Ε2 αναφέρει: *«Τέλος είπα εγώ και προσέξτε το αυτό, και καλό είναι να το σημειώσετε και στο μυαλό και στο χαρτί, ο μάγκας εκείνος ο οποίος μπορεί να καταλάβει ψ=5 τι ακριβώς ευθεία είναι ή χ=2 τι ακριβώς ευθεία είναι.. μπράβο, εκείνος που δεν μπορεί τόσο γρήγορα, μπορεί να έχει και μπακ απ τι? Ποιο? Εκείνο* *το απ' έξω που μάθαμε»* και *«Το ανάποδο. Και αυτό πηγαίνει αμέσως, γρήγορα. Βέβαια, καλό είναι να έχεις και μπακ απ από πίσω γνώση, γιατί συμβαίνει αυτό. Απλά είναι σαν μνημονικός κανόνας, εξαιρετικά γρήγορος ,για να βρίσκεις ποια είναι η ευθεία αυτή»*. Στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως teacher-centred η διδασκαλία στην οποία η νέα γνώση κατακτιέται με χρήση μαθηματικών ορισμών, κανόνων, πλαισίων και μεθόδων που δίνονται από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές και στο απόσπασμα αυτό καταγράφεται η προτροπή του Ε2 να χρησιμοποιούν τον μνημονικό κανόνα που τους είχε αναφέρει στο προηγούμενο μάθημα, γιατί είναι μια «εξαιρετικά γρήγορη» μέθοδος για να θυμούνται πότε οι ευθείες είναι παράλληλες με τους καρτεσιανούς άξονες. Τους τονίζει βέβαια ότι καλό είναι να έχουν και την γνώση, αλλά αφήνει να εννοηθεί ότι με τον συγκεκριμένο μνημονικό κανόνα θα βρίσκουν πάντα την σωστή απάντηση και αυτό έχει μεγαλύτερη σημασία.

Στην συνέχεια ο εκπαιδευτικός αναφέρεται στον γενικό τύπο της ευθείας και σε έννοιες που οι μαθητές είχαν διδαχθεί στην Δευτέρα Γυμνασίου και είχαν υπενθυμισθεί στο προηγούμενο μάθημα.

Ε2: Τώρα τι θα συμβεί αν δεν είναι το α μηδέν και δεν είναι το β μηδέν. Όπως βλέπεται το γ το έχουμε λίγο στην απ' έξω, έτσι? Ας είναι ο,τι θέλει, δεν μας πειράζει! Πράγματι, το γ είτε είναι είτε δεν είναι μηδέν δεν καθορίζει κάτι. Και τι εννοώ, για το αν θα είναι παράλληλες οι ευθείες, στους άξονες. Καλά, λοιπόν, πες ότι το α δεν είναι μηδέν και το β δεν είναι μηδέν, οκ, τι ευθεία βγαίνει τώρα.
-είναι ευθεία που θα περνάει από το 0
Ε2: Που θα περνάει από το μηδέν? Ναι, μπορεί να περνάει από το μηδέν, μπορεί να μην περνάει από το μηδέν, αλλά το χαρακτηριστικό της είναι ότι… άμα το α δεν είναι 0 και το β δεν είναι 0 τι θα είναι αυτή η ευθεία?
-ευθεία
Ε2: Θα είναι σίγουρα ευθεία ναι!
-και αυτό ήθελα να πω δεν ξέρω…
Ε2: Οκ, όλες αυτές είναι ευθείες. Α! μια και μου έδωσε την πάσα. Σε λίγο θα κάνουμε και κάποιες άλλες που θα έχουνε μέσα χ και ψ όπως εδώ, αλλά θα έχουνε ένα τετράγωνο στο χ ή στο ψ και τότε θα δούμε ότι έχει δίκιο η Βασιλική και δεν είναι όλες ευθείες. Όταν έχεις τετράγωνο δηλαδη , θα δούμε μια γραφική παράσταση που δεν θα είναι ευθεία. Αλλά κρατηθείτε! (γέλια) ωραία, αν το χ δεν έχει τετράγωνο το ψ δεν έχει τετράγωνο και είναι της μορφής αυτής εδώ που

είδαμε, είναι ευθεία. Και εγώ ρώτησα, αν το α ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ και το β ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ, τότε η ευθεία αυτή..?
-δεν είναι παράλληλη
Ε2: Δεν είναι παράλληλη στους άξονες. Έτσι. Ωραία. Είναι μια πλάγια ευθεία. Τώρα, όπως είπε ο Κώστας μπορεί να περνάει από το (0,0) μπορεί και να μην περνάει. Ποιο παιδάκι θυμάται από τη Β Γυμνασίου, πώς θα τσεκάρουμε αν περνάει από το (0,0)? Κάτσε να δώσω ένα παράδειγμα. Και να γενικεύσουμε λιγάκι αυτό. Πότε μια ευθεία περνάει από ένα σημείο και πότε όχι. Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Η ευθεία ε-στο φυλλάδιο στο πίσω μέρος τα σημειώνετε αυτά- η ευθεία ε:2χ-3ψ=11 περνά από το ο 0,0? αυτό είναι το πρώτο υπό ερώτημα, το δεύτερο υπό ερώτημα είναι, βρείτε σημείο της (συνεννόηση με μαθητές που δεν έχουν φυλλάδιο/οδηγίες που να γράψουν) και προσπαθήστε να μου σκεφτείτε λιγάκι αυτό. Περιμένω λίγο να τσεκάρετε αν περνάει από το 0,0 αυτή. Α! και όποιος μπορεί να μου πει και μια φόρμουλα πότε η ευθεία περνάει από το 0,0 θα έχει και αυτό πολύ πλάκα. Ε, το χεις? Στάσου, σιγά σιγά, θα σε ρωτήσω σε λίγο. Και το δεύτερο υπό ερώτημα θέλει, πότε δεν περνάει από το 0,0? Βρείτε μου τα σημεία. Πότε περνάει από το 0.0 αυτή? Η συγκεκριμένη, περνάει? Ισμήνη τι λες? Ποια είναι η μέθοδος για να το ελέγξω αυτό?
-για να περνάει από το μηδέν πρέπει να είναι ανάλογα τα ποσά

Ένα διδακτικό περιστατικό που χρήζει ιδιαίτερης αναφοράς είναι ο διάλογος που εξελίχτηκε στην τάξη όταν ο Ε2 θέλησε να θίξει τη γενική μορφή της ευθείας (*Ε2: Τώρα τι θα συμβεί αν δεν είναι το α μηδέν και δεν είναι το β μηδέν;*). Η πρώτη απάντηση (*-είναι ευθεία που θα περνάει από το 0*) αναγκάζει τον εκπαιδευτικό να ξεκαθαρίσει ότι «*μπορεί να περνάει από το μηδέν, μπορεί να μην περνάει από το μηδέν»* και έπειτα από επαναλαμβανόμενες ερωτήσεις (*Και εγώ ρώτησα, αν το α δεν είναι μηδέν και το β δεν είναι μηδέν, τότε η ευθεία αυτή;)* ένας μαθητής εκφράζει την απάντηση που ο Ε2 επιθυμούσε να ακούσει: «δεν είναι παράλληλη». Η απάντηση αυτή φαίνεται να δίνει το έναυσμα που ο Ε2 χρειαζόταν για να οδηγήσει τους μαθητές αρχικά στον γενικό κανόνα, ότι δηλαδή αν το α και το β είναι διάφορα του μηδενός τότε η ευθεία δεν είναι παράλληλη στους άξονες και στη συνέχεια να θίξει το πότε μια «πλάγια ευθεία» περνάει από το (0,0) (*Ε2: Και να γενικεύσουμε λιγάκι αυτό. Πότε μια ευθεία περνάει από ένα σημείο και πότε όχι*). Ο τρόπος που θέλει να εδραιώσει και να ενισχύσει την συγκεκριμένη γενίκευση είναι μέσω του έλεγχου μιας συγκεκριμένης ευθείας (η ευθεία ε:2χ-3ψ=11 περνά από το ο (0,0);) ενώ ταυτόχρονα πληροφορεί τους μαθητές πως υπάρχει και ένας γενικός τρόπος να κάνουν τον συγκεκριμένο έλεγχο (*Ε2: Α! και* *όποιος μπορεί να μου πει και μια φόρμουλα πότε η ευθεία περνάει από το (0,0) θα έχει και αυτό πολύ πλάκα*). Μια μαθήτρια αρχικά αναφέρει ότι «τα ποσά πρέπει να είναι ανάλογα» και στο διάλογο που ακολουθεί φαίνεται ο τρόπος διαχείρισης της απάντησης αυτής από τον εκπαιδευτικό.

Ε2: Αα πρέπει να είναι ανάλογα τα ποσά. Κάτι θυμάται από τα πέρσι αλλά όχι καλά καλά καλά. Αυτή η ευθεία εδώ έχει ένα χ και ένα ψ. πρέπει καλά να κατανοήσω τι σχέση έχει αυτό το χ και το ψ με σημεία της γραφικής παράστασης. Είδαμε στην προηγούμενη φάση (δείχνει στον πίνακα) ότι το χ και το ψ γεννάει σημεία και αυτά κάνουν την γραφική παράσταση. Ωραία. Τώρα θέλω να μου πείτε πώς θα καταλάβω αν αυτή εδώ περνάει από το μηδέν?
-θα βάλω όπου χ το 0
Ε2: Γιατί αυτό?
-για να δούμε πόσο είναι το ψ
Ε2: Πολύ ωραία. Ή μπορούμε ταυτόχρονα να βάλουμε όπου χ και όπου ψ το μηδέν για να δούμε αν τηρείτε. Για κάντε το αυτό. Άρα θα πούμε: θέτω χ=0 και ψ=ο και περιμένω να δούμε τι θα βγει. Εκείνο που δεν μ' αρέσει ακόμα είναι που δεν έχετε ακόμα χωνέψει-καταλάβει ΓΙΑΤΙ βάζω όπου χ το μηδέν και όπου ψ το μηδέν? Δηλαδή τι θέλω να πω, αυτή όπως είδαμε και την προηγούμενη φορά είναι μια ευθεία, μάλιστα είπαμε είναι πλάγια ευθεία. Οκ. Τα σημεία της πώς βγαίνουν? Αυτή έχει κάποια σημεία βρε παιδί μου, μπορεί να είναι αυτή, κοίτα (γράφει πίνακα) αυτή εδώ η ευθεία. Μπορεί. Πώς βγαίνουν τα σημεία της? Πώς βγαίνει αυτό? Πώς το βγάζουμε? Να αυτή η ευθεία έχει αυτά τα σημεία. Ναι;

Παρατηρούμε πως έπειτα από συνεχείς παροτρύνσεις του Ε2 διατυπώνεται η απάντηση που επιθυμούσε (*-θα βάλω όπου χ το 0 - Ε2: Γιατί αυτό? -για να δούμε πόσο είναι το ψ*). Στη συνέχεια προτρέπει τους μαθητές να ακολουθήσουν την μέθοδο αυτή για να πραγματοποιήσουν και μόνοι τους τον έλεγχο (*Ε2: Για κάντε το αυτό. Άρα θα πούμε: θέτω χ=0 και ψ=ο και περιμένω να δούμε τι θα βγει*).

Όσον αφορά την γενίκευση, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι αυτή εμφανίζεται στα παραπάνω αποσπάσματα με τη μορφή των γενικών μεθόδων και κανόνων που παρουσιάζονται στους μαθητές, οι οποίοι δεν δημιούργησαν τους γενικευμένους συλλογισμούς, αλλά μέσω των ερωτήσεων και των ασκήσεων που τίθενται σε αυτούς, ο εκπαιδευτικός ευελπιστεί ότι θα τους κατανοήσουν και αποδεχτούν και κατά επέκταση θα αποκτήσουν την νέα γνώση. Στο συγκεκριμένο κρίσιμο συμβάν δεν μπορούμε να εντοπίσουμε κάποιον από τον ορισμό της γενίκευσης που αναφέρεται στην βιβλιογραφία, αυτό ωστόσο είναι πιθανόν να οφείλεται στην φύση των δεδομένων μας, τα οποία όντας απομαγνητοφωνήσεις σχολικών τμημάτων αδυνατούν να καταγράψουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις νοητικές διεργασίες που πραγματοποιούνται στο εσωτερικό του εκάστοτε μαθητή. Είναι πιθανόν δηλαδή οι μαθητές έπειτα από τις προτροπές και τις ερωτήσεις του Ε2 να υπάγουν την μεμονωμένη περίπτωση (ευθείες $\chi = -3$ και $2\chi\text{-}3\psi=11$) σε μια γενικότερη έννοια (οικογένεια ευθειών που είναι παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα και πλάγιες ευθείες που δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων αντίστοιχα), κάτι που θα ικανοποιούσε τον ορισμό – υπό το πρίσμα της γνωστικής ψυχολογίας – που ο Davydov (1990) έχει διατυπώσει για την έννοια. Δυστυχώς από τη φύση των δεδομένων μας στο συγκεκριμένο απόσπασμα δεν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε με απόλυτη βεβαιότητα ότι οι μαθητές γενικεύουν. Μπορούμε όμως να ισχυριστούμε πως στο απόσπασμα αφενός καταγράφεται το ερέθισμα που δίνεται στους μαθητές για να φτάσουν στην γενίκευση, αφετέρου συμπεραίνουμε πως δεν πραγματοποιείται μια «συλλογική γενίκευση» που θα ήταν αποτέλεσμα της συνολικής εργασίας που πραγματοποιήθηκε στην τάξη.

Το προαναφερμένο ερέθισμα πηγάζει – κατά κύριο λόγο – από την συνολική παρουσία του εκπαιδευτικού και οι ερωτήσεις και ασκήσεις που γίνονται στην τάξη έχουν περισσότερο συνοδευτικό χαρακτήρα παρά αποτελούν το έναυσμα για δημιουργία γενικεύσεων. Ο ισχυρισμός βασίζεται ότι στο απόσπασμα φαίνεται ότι ο Ε2 κατευθύνει σε μεγάλο βαθμό τη ροή του μαθήματος, με τους μαθητές να συμμετέχουν με σύντομες απαντήσεις όταν ερωτηθούν. Η συμμετοχή τους γίνεται με τρόπο που κυρίως συμπληρώνει τα όσα ο Ε2 επιθυμεί να παρουσιάσει στο τμήμα και όχι με τρόπο που το μάθημα θα βασιστεί στους συλλογισμούς τους. Παρατηρούμε ότι ο εκπαιδευτικός είναι το κέντρο του μαθήματος καθώς από αυτόν πηγάζει η νέα γνώση και παρόλο που το συγκεκριμένο απόσπασμα είναι μικρής έκτασης για να μας οδηγήσει σε συμπεράσματα, το σύνολο των μαθημάτων που παρακολουθήσαμε και όσων παρουσιαστούν στα επόμενα κρίσιμα συμβάντα, επιβεβαιώνουν ότι ο Ε2 ήταν κατά κύριο λόγο ο κομιστής της γνώσης και κατά επέκταση των γενικευμένων συλλογισμών. Αυτή η διδακτική του επιλογή είχε σαν φυσικό επακόλουθο ο ρόλος των μαθητών να περιορίζεται στο να κατανοήσουν την γενίκευση που τους παρουσιάζεται και όχι να την κατασκευάσουν εξ ολοκλήρου.

Ωστόσο, το γεγονός πως οι διδακτικές πρακτικές που σύμφωνα με την βιβλιογραφία θα ενισχύσουν την ικανότητα γενίκευσης έχουν σαν προϋπόθεση το μάθημα να βασίζεται στους συλλογισμούς των μαθητών, καθιστά δύσκολο για εμάς το να τις εντοπίσουμε στο συγκεκριμένο απόσπασμα. Όπως αναφέραμε ήδη οι πρακτικές του Ε2 που καταγράψαμε, ταιριάζουν περισσότερο στον ορισμό teacher-centred learning, καθώς η γνώση κατακτιέται με χρήση μαθηματικών ορισμών, κανόνων (*Ε2:..μελετήσαμε μέχρι τα τώρα την περίπτωση α=0 και β όχι μηδέν και β=0 και α όχι μηδέν και είδαμε ότι αυτά είναι κάποιες ευθείες πολύ χαρακτηριστικές, παράλληλες στους άξονες*), πλαισίων και μεθόδων (*Ε2: Άρα θα πούμε: θέτω χ=0 και ψ=0 και περιμένω να δούμε τι θα βγει*) που δίνονται από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές.

Το στυλ διδασκαλίας του Ε2, όπως παρουσιάζεται στο συγκεκριμένο απόσπασμα, πληροί αρκετά από τα στοιχεία που αναφέραμε στο τελευταίο υποκεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Σύμφωνα με την έρευνα λοιπόν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μαθηματικοκεντρικό (content-centered) αν υιοθετήσουμε τη θεωρία των Opdenakker & Van Damme (2006). Διακρίνουμε ότι ο Ε2 δίνει σχεδόν αποκλειστική έμφαση στο μαθηματικό αντικείμενο και η διδακτική του αυτή επιλογή έχει ως αποτέλεσμα το μάθημα να μην περιστρέφεται γύρω από τους συλλογισμούς των μαθητών. Αν εξετάσουμε το απόσπασμα υπό το πρίσμα της έρευνας του Stipek και των συνεργατών του (2001), θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως παραδοσιακή, καθώς ο εκπαιδευτικός κατέχει τον απόλυτο έλεγχο της τάξης και οι μαθητές αναλώνονται κυρίως στην εκμάθηση διαδικασιών – τεχνικών. Επίσης, ο εκπαιδευτικός δίνει έμφαση στην ταχύτητα, προτρέποντας σε κάποια σημεία του αποσπάσματος τους μαθητές να ξέρουν τον σύντομο τρόπο.

Εν κατακλείδι παρατηρούμε ότι με την γενικότερη στάση του ο Ε2 αποτελεί τον άξονα γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το μάθημα, καθώς όλα όσα οι μαθητές «πρέπει να ξέρουν», είτε είναι ορισμοί είτα είναι μέθοδοι, προέρχονται και σε μεγάλο βαθμό από αυτόν. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι η γενίκευση δεν πραγματοποιήθηκε. Η διατύπωση ενός τέτοιου ισχυρισμού θα ήταν αβάσιμη στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, καθώς ο στόχος μας ήταν να ερευνήσουμε τη μορφή με την οποία η γενίκευση εμφανίζεται μέσα στην τάξη και στην ανάλυση του περιστατικού που προηγήθηκε περιγράψαμε το πώς η γενικότερη στάση του εκπαιδευτικού επηρεάζει την μορφή αυτή.

3.2.2 Κρίσιμο Περιστατικό 2

Τα προηγούμενα δύο μαθήματα είχαν αφιερωθεί σε επανάληψη εννοιών για τις ευθείες και στην γραφική επίλυση συστημάτων. Το πρώτο μέρος του τρίτου μαθήματος αφιερώνεται στις ασκήσεις που είχαν τεθεί ως εργασία για το σπίτι, οι οποίες λύθηκαν με τον σχεδιασμό ευθειών και την εύρεση κοινού σημείου. Ο Ε2 κατά την διάρκεια της επίλυσης των ασκήσεων αυτών, απευθυνόμενος στην τάξη αναφέρει ότι *"οι μαθηματικοί βρήκαν τρόπο για να περάσουν τις δυσκολίες, όταν οι συντεταγμένες του σημείου δεν μπορούν να προσδιοριστούν εύκολα",* ενώ όταν οι ασκήσεις τελείωσαν τονίζει ότι "*πρέπει να δούμε την μέθοδο εύρεσης σημείου, όταν οι συντεταγμένες δεν είναι βολικές".* Οι μαθητές έχουν πλέον έρθει σε επαφή με την έννοια του γραμμικού συστήματος, αλλά δεν έχουν διδαχθεί τις αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης και ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να τονίσει την μετάβαση από το γεωμετρικό στον αλγεβρικό τρόπο, πριν εισάγει την μέθοδο της αντικατάστασης. Προσπαθεί επίσης, να συνοψίσει όσα έχουν διδαχθεί συνολικά στην χρονιά μέχρι τότε και λέει χαρακτηριστικά στους μαθητές: *"θέλω όλοι να συνειδητοποιήσετε πως* *μέχρι στιγμής έχουμε κάνει εξισώσεις πρώτου βαθμού, εξισώσεις δευτέρου βαθμού και πλέον κάνουμε γραμμικά συστήματα τα οποία έχουν μια διαφορά”.* Η αναφορά στα προηγούμενα γίνεται με σκοπό να δώσει έμφαση στο ότι *“πλέον η λύση είναι ένα σημείο συνταγμένων και όχι ένας απλός αριθμός”.* Αφού έχει τονίσει όσα επιθυμούσε, ακολουθεί η πρώτη αναφορά στην μέθοδο της αντικατάστασης, η οποία έχει καταγραφεί στο παρακάτω απόσπασμα:

Διάλογος
Ε2: Στην αρχή λοιπόν ήταν η γεωμετρία, δηλαδή από τα αρχαία χρόνια τα μαθηματικά ήταν κυρίως γεωμετρικής φύσης, αλλά μετά ήρθε ο σπουδαίος μαθηματικός Decard, ο Καρτέσιος και έφτιαξε..
Μ: το καρτεσιανό σύστημα
Ε2:Ωραία, τα έχουμε πει αυτά, το ορθοκανονικό σύστημα, κατάφερε αυτός να κάνει τι; να κάνει τη γέφυρα που ενώνει την γεωμετρία με την άλγεβρα, δηλαδή να μην έχουμε πια μια ευθεία αλλά να έχουμε σημεία της ευθείας, που το κάθε σημείο της ευθείας έχει μια ταυτότητα, το χ του και το ψ του. Μιας λοιπόν τώρα που και εμείς θα μεταβούμε από το γεωμετρικό στο αλγεβρικό, θα προσπαθήσουμε δηλαδή να εντοπίσουμε ένα ζευγάρι που κάνει για αυτό το σύστημα (δείχνει ένα σύστημα στον πίνακα) αλλά όχι με την πιο απαρχαιωμένη μέθοδο του να φτιάξεις τα σχέδια και να ερμηνεύσεις το σημείο τομής, γιατί το σημείο τομής είπαμε ότι έχει αυτό το μειονέκτημα, μπορεί να ξέρεις τις συντεταγμένες του ποιες είναι, αλλά αν δεν είναι ακέραιοι αριθμοί δεν θα τους βρίσκεις εύκολα. Ωραία λοιπόν, σε αυτήν την περίπτωση που θα θες λοιπόν μεγάλη ακρίβεια θα σκεφτείς όχι γεωμετρικά αλλά αλγεβρικά, θα κάνεις πράξεις δηλαδή για να βρεις το χ και το ψ. Μην ξεχνάτε ότι το χ και το ψ που μας κάνει για παράδειγμα σε αυτό το σύστημα (δείχνει στον πίνακα) είναι ένα ζευγάρι που τι; Στην ουσία έχεις άλγεβρα πια, γιατί αντικαθιστάς το χ και το ψ στις εξισώσεις αυτές και στην ουσία αυτές επαληθεύονται. Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι έχεις κάνει άλγεβρα εκείνη την ώρα, γιατί έβαλες απάνω νουμεράκια και έβγαλες 5 = 5, για παράδειγμα. Άρα λοιπόν η άλγεβρα παίζει πολύ μεγάλο ρόλο εδώ και πράγματι όπως μου είπε προηγουμένως ο συμμαθητής σας, θα προσπαθήσουμε να βρούμε αλγεβρικό τρόπο στην επίλυση του συστήματος. Ωραία ας ξεκινήσω από αυτό που ανέφερες προηγουμένως, τι θες να κάνω; (Μια μαθήτρια είχε προτείνει μια αλγεβρική μέθοδο, σε μια από τις ασκήσεις που λύθηκαν γραμμικά, αλλά ο Ε2 δεν το συνέχισε τότε περεταίρω. Τώρα όμως της απευθύνει ξανά τον λόγο)
Μ: σκέφτηκα ότι χ = -ψ …και πήγα στην από κάτω (αναφέρεται σε μια από τις προηγούμενες ασκήσεις, στις οποίες η μια ευθεία ήταν η χ+ψ=0)..
Ε2: Ωραία αυτό θα περιγράψω τώρα. Προσέξτε λοιπόν ποιος είναι ο πρώτος τρόπος με τον οποίο

μπορούμε να χειριστούμε προβλήματα τέτοια και ακόμα πιο πολύπλοκα, για παράδειγμα αυτό που το έχουμε μπροστά μας. Άρα Β' τρόπος - Άλγεβρα (το γράφει στον πίνακα). Θέλω να με βοηθήσεις Εύα στο εξής, να μου πεις..να σκεφτούμε κάποιο τρόπο ώστε να εντοπίσουμε το χ. Το πρόβλημα με την πρώτη εξίσωση είναι ότι έχει και χ και ψ. Έχει δύο αγνώστους και δεν έχουμε μάθει ποτέ να λύνουμε εξίσωση με δύο αγνώστους, άρα θέλω να ξεπαστρέψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους. Πώς να το κατάφερνα αυτό;
Μ (που είχε μιλήσει και πριν): το χ είναι ίσο με -ψ

Αναλύοντας το απόσπασμα που καταγραφεί την εισαγωγή της νέας μεθόδου παρατηρούμε ότι ο εκπαιδευτικός ξεκινάει την εισαγωγή της νέας γνώσης με ένα μονόλογο που παραπέμπει σε διάλεξη, στο οποίο αφενός προσπαθεί να συνδέσει την αλγεβρική με την γεωμετρική προσέγγιση (*να μην έχουμε πια μια ευθεία αλλά να έχουμε σημεία της ευθείας, που το κάθε σημείο της ευθείας έχει μια ταυτότητα, το χ του και το ψ του*), αφετέρου να πείσει την τάξη ότι *"η άλγεβρα παίζει πολύ μεγάλο ρόλο εδώ"* και για αυτό το λόγο *"θα προσπαθήσουμε να βρούμε αλγεβρικό τρόπο στην επίλυση του συστήματος"*. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός πως μια μαθήτρια φάνηκε να γνωρίζει ήδη την μέθοδο της αντικατάστασης, την οποία πρότεινε σαν λύση σε μια από τις ασκήσεις που είχαν προηγηθεί και αντιμετωπίστηκαν γραμμικά. Ωστόσο, ο Ε2 δεν στέκεται στον συλλογισμό που την οδήγησε στην μέθοδο αυτή, δεν την ρωτάει δηλαδή πως σκέφτηκε αυτόν τον τρόπο, αλλά της απευθύνει τον λόγο αφού έχει ήδη αναφέρει πρώτα όσα επιθυμούσε (*Ε2: Ωραία αυτό θα περιγράψω τώρα*).

Ό συλλογισμός της δεν βρέθηκε στο επίκεντρο και οι απαντήσεις της ήταν σύντομες, αφού η έννοια είχε παρουσιαστεί από τον Ε2, για αυτό λοιπόν ισχυριζόμαστε ότι η συμμετοχή της γίνεται με τρόπο που συμπληρώνει και σε καμιά περίπτωση δεν καθορίζει την εξέλιξη του μαθήματος. Ο Ε2 μας ανέφερε σε μεταγενέστερη συζήτηση ότι η επιλογή της συγκεκριμένης διδακτικής μεθόδου οφείλεται στο ότι "επιθυμεί να διασφαλίσει πως οι έννοιες θα εκφραστούν με τον τρόπο που θέλει ο ίδιος, ειδικά όταν πρώτο-εισάγονται", με σκοπό αυτές "να καταστούν όσο πιο κατανοητές γίνεται".
Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι η συνέχεια του παραπάνω διαλόγου και σε αυτό καταγράφεται η εισαγωγή της μεθόδου της αντικατάστασης στη τάξη

Ε2: άρα δηλαδή προτείνεις την πρώτη εξίσωση να την λύσεις ως προς χ... να το (δείχνει στον πίνακα).. άρα αυτό να πάει και να γίνει χ=-ψ. Ωραία και μετά;

Μ: βάζω όπου χ το -ψ
Ε2: στην δεύτερη λοιπόν εξίσωση, όπου υπάρχει χ θα βάλετε το καινούργιο πράγμα. Άρα Κώστα πώς θα γίνει η δεύτερη εξίσωση που λέει χ-ψ=0 ;
Μ: -ψ-ψ=0
Ε2: -ψ-ψ=0. Ε, αυτή όμως παιδιά είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, δεν έχει χ και ψ να μας προβληματίζει. Άρα λοιπόν μπορεί να λυθεί. Στέργιο, πως θα την λύσουμε αυτή; Ως προς ψ, πόσο κάνεις -ψ-ψ;
Μ:-2ψ
Ε2: -2ψ=0, άρα ψ ίσον; όχι το 2 που μου λέτε συνέχεια.
Ε2: Πόσο κάνει το ψ; τι θα κάνω τώρα;
Δυο μαθητές απαντάνε ταυτόχρονα 0
Ε2: γιατί; πως το βρίσκω;
Μ (μια άλλη μαθήτρια): Αφού είναι ένα γινόμενο που κάνει μηδέν..
Ε2 και τα δυο τα;
Μ: αα… και τα δυο τα διαιρώ με το -2
Ε2: τα διαιρώ με το -2, ωραία και έχουμε ίσο το ψ = 0 . Ωραία έχοντας εντοπίσει το ψ, έχω ότι ψ=0 τι θα κάνω; πες μου Χρήστο
Μ:εε..την λύση του άλλου, επειδή χ = -ψ, το χ είναι -0 άρα.

E2: με ενδιαφέρει πάρα πολύ η παρουσίαση που θα κάνετε σε αυτές τις ασκήσεις, δηλαδή βρήκες το ψ, τώρα θες να επικαλεστείς αυτήν (εννοεί την σχέση)..εε θα την κλείσεις σε ένα κουτί θα την ονομάσεις 1, μην βλέπω χύμα σχέσεις.. και θα πεις εδώ: Λόγω της 1 (γράφει ταυτόχρονα στον πίνακα) τι έχω αφού το ψ=0; χ ίσον; χ ίσον 0. Και στο τέλος της άσκησης για να πάρεις 20 είπαμε ότι η λύση δεν είναι το χύμα πράγμα που έχει ο πίνακας. Η λύση είναι ένα ζευγάρι. Άρα το ζεύγος από εδώ και πέρα είναι η λέξη κλειδί. Η λύση είναι το ζεύγος (0,0). Άρα για να δούμε τώρα τι συμπέρασμα βγάλαμε, που καταλήξαμε; Τι μπορώ να εφαρμόζω από εδώ και πέρα; Τι καταλάβαμε από αυτήν την περίεργη *αλγεβρική* (το τονίζει με το ύφος της φωνής του) μέθοδο; Πρώτα από όλα φαίνεται ξεκάθαρα ότι η γεωμετρία δυστυχώς δεν είναι αρκετή, είναι ανεπαρκής;
Μαθητές: Ναι

Αναλύοντας το παραπάνω απόσπασμα διαπιστώνουμε ότι ο εκπαιδευτικός μέσω των ερωτήσεων που θέτει στους μαθητές – οι οποίες έχουν καθοδηγητική χροιά – καταλήγει στην εφαρμογή της νέας μεθόδου στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Οι απαντήσεις ωστόσο των μαθητών ήταν πολύ σύντομες και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως έχουν συμπληρωματικό χαρακτήρα. Παρατηρούμε επίσης ότι ο εκπαιδευτικός δίνει ιδιαίτερη σημασία στο διαδικαστικό κομμάτι της μεθόδου (Ε*2: με ενδιαφέρει πάρα πολύ η παρουσίαση που θα κάνετε σε αυτές τις ασκήσεις)* το οποίο είναι βασικό στοιχείο της παραδοσιακής διδασκαλίας. Το ίδιο ισχύει επίσης, για την χρησιμοποίηση της βαθμολογίας σαν κίνητρο για μάθηση *(Ε2: Και στο τέλος της άσκησης για να πάρεις 20 είπαμε ότι η λύση..).* Όταν ολοκληρώθηκε η επίλυση της άσκησης ο εκπαιδευτικός επιχείρησε να συνοψίσει τα όσα είχαν προηγηθεί στην τάξη και με αυτό τον τρόπο να ολοκληρώσει την εισαγωγή της μεθόδου.

Ε2: Ωραία, δεύτερον θέλω να μου βγάλετε ένα μονοπάτι, θα κάνω και αυτό όταν βλέπουμε δυο τέτοιες εξισώσεις (ρωτάει την τάξη αλλά σηκώνουν χέρι μόνο κάποιοι συγκεκριμένοι μαθητές). Να μου πει κάποιος άλλος, όχι μόνο όλο οι ίδιοι. Γιώργο δεν το έχουμε; τι πρέπει να κάνω για τον τρόπο αυτό; Πες μου
Μ (απαντάει μια μαθήτρια, όχι ο Γιώργος): Θα πρέπει να λύσουμε τη πρώτη
Ε2: τη μια, όποια θέλουμε, όχι απαραίτητα την πρώτη
Μ (συνεχίζει η ίδια μαθήτρια): ως προς ψ και μετά θα λύσουμε την δεύτερη Ε2: περίμενε, έχουμε λύσει ως προς χ, την βάζουμε σε κουτάκι, την ονομάζουμε 1 για την διευκόλυνση μας και μετά αυτό το κουτάκι το;
Μ: το ε...
Ε2: το αντικαθιστούμε στην δεύτερη

M: το αντικαθιστούμε στην δεύτερη
Ε2: ωραία, για να δούμε λοιπόν, είστε μόνο λόγια ή και πράξεις. Να λυθεί λοιπόν το εξής σύστημα. (στη συνέχεια θέτει στους μαθητές ένα σύστημα το οποίο απαιτεί να λυθεί με την μέθοδο της αντικατάστασης)

Ο εκπαιδευτικός λοιπόν, παροτρύνει από τους μαθητές "να του βγάλουν ένα μονοπάτι" ή αλλιώς "μια μέθοδο" την οποία θα χρησιμοποιούν " όταν βλέπουμε δυο τέτοιες (γραμμικές) εξισώσεις (με δύο αγνώστους)". Έπειτα από μικρή καθοδήγηση, η μαθήτρια που είχε προτείνει την μέθοδο πριν αυτή διδαχθεί στην τάξη στην αρχή του κρίσιμου συμβάντος, συνοψίζει σύντομα την διαδικασία που ακολούθησε. Η μέθοδος έχει πλέον "παρουσιαστεί επίσημα" και ο υπόλοιπος διδακτικός χρόνος – καθώς και τα επόμενα μαθήματα – επικεντρώνονται σε ασκήσεις που απαιτούν την εφαρμογή της.

Μελετώντας το κρίσιμο συμβάν μπορούμε να καταλήξουμε στο χαρακτηρισμό της διδασκαλίας ως μαθηματικοκεντρική, βασιζόμενοι τόσο στο απόσπασμα που παρουσιάσαμε, όσο και στη συνολική ροή της τρίτης διδακτικής ώρας. Ο ισχυρισμός αυτός πηγάζει από ότι το μάθημα επικεντρώθηκε αρχικά στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με γεωμετρική μέθοδο, έπειτα έγινε η σύνδεση με την αλγεβρική επίλυση και αφού παρουσιάστηκε στους μαθητές η μέθοδος της αντικατάστασης, λύθηκαν ασκήσεις με σκοπό την κατανόηση της μεθόδου. Σε όλη την διδακτική ώρα, ο εκπαιδευτικός είχε τον απόλυτο έλεγχο της τάξης και της εξέλιξης του μαθήματος και σπάνια κάποιος συλλογισμός ενός μαθητή βρέθηκε στο επίκεντρο. Όταν οι μαθητές έπαιρναν τον λόγο αυτό συνέβαινε για να λύσουν κάποια άσκηση ή να απαντήσουν σύντομα σε κάποια ερώτηση του εκπαιδευτικού. Όπως θα φανεί και στην συνέχεια, ο ρόλος τους περιοριζόταν στην εφαρμογή μεθόδων, γεγονός που το συναντάμε στα χαρακτηριστικά των μαθηματικοκεντρικών διδασκαλιών – αν βασιστούμε στον διαχωρισμό των Opdenakker & Van Damme (2006) – ή στων παραδοσιακών διδασκαλιών, αν υιοθετήσουμε την ταξινόμηση του Stipek και των συνεργατών του (2001).

Η γενίκευση εμφανίζεται με την ίδια μορφή που εντοπίστηκε και στο προηγούμενο κρίσιμο περιστατικό, κρυμμένη δηλαδή πίσω από τους κανόνες ή τις μεθόδους που πηγάζουν, σε αποκλειστικό σχεδόν βαθμό, από τον εκπαιδευτικό. Οι μαθητές γίνονται δέκτες της νέας γνώσης και δεν συμβάλλουν στην δημιουργία της. Υπάρχει ένα μικρός αριθμός μαθητών που συμμετέχουν στην διεξαγωγή του μαθήματος, οι απαντήσεις τους όμως είναι αρκετά σύντομες και η συμμετοχή τους έχει κυρίως συμπληρωματικό χαρακτήρα. Ο ρόλος που έχει δοθεί στο σύνολο της τάξης περιορίζεται κυρίως στη παρακολούθηση και την προσπάθεια για κατανόηση των όσων ο εκπαιδευτικός διδάσκει. Στην τάξη φαίνεται να έχει διαμορφωθεί το εξής άτυπο διδαχτικό συμβόλαιο: όταν οι γενικευμένοι συλλογισμοί και μέθοδοι παρουσιάζονται σε αυτούς, οι μαθητές οφείλουν να τις αποδεχτούν και στην συνέχεια να τις κάνουν κτήμα τους. Οι ασκήσεις που θα ακολουθήσουν, θα τους δώσουν την ευκαιρία να αναπτύξουν τις αλγεβρικές τους ικανότητες αλλά και να διαπιστώσουν έμπρακτα ότι τελικά ο εκπαιδευτικός είχε δίκιο και ότι πράγματι η μέθοδος που τους δίδαξε μπορεί να χρησιμοποιείται σε κάθε αντίστοιχη περίπτωση.

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι ακόμα και σε ένα μάθημα που βασίζεται στην κατανόηση και εφαρμογή των μεθόδων που ο εκπαιδευτικός εισάγει στην τάξη, θα εμφανιστούν κάποιες αφορμές και ευκαιρίες ώστε οι μαθητές να πραγματοποιήσουν γενικεύσεις. Ωστόσο, τόσο στο συγκεκριμένο απόσπασμα, όσο και στις υπόλοιπες ώρες που παρακολουθήσαμε, ο εκπαιδευτικός αποτελεί το κέντρο της διεξαγωγής του μαθήματος κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα οι γενικεύσεις των μαθητών να περιορίζονται στην κατανόηση των όσων τους διδάχθηκαν, δηλαδή θα γενικεύουν επειδή θα κατανοήσουν την γενικότητα της νέας γνώσης που τους παρουσιάστηκε. Ο ισχυρισμός αυτός που μόλις διατυπώσαμε αποτελεί το επιστέγασμα της ανάλυσης τόσο των κρίσιμων συμβάντων που συμπεριλάβαμε στην εργασία, όσο και των υπόλοιπων διδακτικών ωρών που παρακολουθήσαμε. Πιστεύουμε επίσης, ότι σαν ισχυρισμός επιβεβαιώνεται με έμμεσο τρόπο από την βιβλιογραφία, σύμφωνα με την οποία σε μια παραδοσιακή διδασκαλία οι έννοιες πηγάζουν από τον εκπαιδευτικό. Άρα και οι ευκαιρίες για γενίκευση θα περιορίζονται - σε πολύ μεγάλο βαθμό - στην κατανόηση των όσων ο εκπαιδευτικός διδάσκει.

Κλείνοντας την ανάλυση του συγκεκριμένου περιστατικού, οφείλουμε να τονίσουμε τις αισθητές διαφορές που υπάρχουν στους τρόπους εισαγωγής της μεθόδου της αντικατάστασης που επιχείρησαν οι δύο εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα. Στην τάξη του πρώτου αφιερώθηκαν δυο διδακτικές ώρες όπου επιχειρήθηκε μια συλλογική γενίκευση, ενώ στο τμήμα του δεύτερου για την εισαγωγή της έννοιας αφιερώθηκε ο διδακτικός χρόνος που καταγράφηκε στο παραπάνω απόσπασμα. Ο υπόλοιπος χρόνος αφιερώθηκε σε ασκήσεις και σύνδεση γεωμετρικής και αλγεβρικής ερμηνείας. Δεν επιχειρήθηκε κάποια συλλογική γενίκευση, επιχειρήθηκε όμως έντονη αλγεβρική εξάσκηση ώστε να κατανοηθεί η μέθοδος. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα η γενίκευση να υπάρχει πίσω από τα όσα διδάσκει ο εκπαιδευτικός. Δεν είναι σκοπός μας να συγκρίνουμε τις δύο διδασκαλίες ως προς την αποτελεσματικότητα τους, παρά μόνο να αναδείξουμε τις διαφορετικές ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές για γενίκευση στα δύο σχολικά περιβάλλοντα. Περισσότερα για τις διαφορές αυτές, σε συνδυασμό με την λογική του κάθε εκπαιδευτικού πίσω από τις διδακτικές επιλογές του, θα ακολουθήσουν στα επόμενα στάδια της δραστηριότητας.

3.2.3 Κρίσιμο Περιστατικό 3

Το επόμενο κρίσιμο συμβάν προέρχεται από την πέμπτη διδακτική ώρα που παρακολουθήσαμε, η οποία περιείχε αρκετά περιστατικά τα οποία θα μπορούσαμε να επιλέξουμε για να αναλύσουμε. Όσον αφορά την γενίκευση, το πιο σημαντικό περιστατικό συνέβη στο τέλος του μαθήματος. Ο διάλογος που αναπτύχθηκε στο απόσπασμα που θα παρουσιάσουμε αποτέλεσε, σε μεγάλο βαθμό, το επιστέγασμα των όσων είχαν προηγηθεί εκείνη την ημέρα στο τμήμα. Για αυτό το λόγο, πριν παραθέσουμε τον διάλογο θα περιγράψουμε σύντομα όσα είχαν συμβεί μέχρι εκείνη την στιγμή.

Το μάθημα ξεκίνησε με τον Ε2 να θέτει στην τάξη μια άσκηση η οποία ζητούσε την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με εξισώσεις τις 2χ-4=ψ και (3 - χ)/2 – (χ + ψ)/4 = 4. Ο εκπαιδευτικός έδωσε λίγο χρόνο στους μαθητές και στη συνέχεια εκμεταλλεύτηκε την άσκηση αρχικά για να τονίσει ότι στη σχέση με τα κλάσματα *«αν της κάνουμε την διαδικασία που κάνουμε κάθε φορά που βλέπουμε κλάσματα, δηλαδή απαλοιφή παρανομαστών, τότε θα μοιάζει με ευθεία»*, αφού θα την έχουμε *«φέρει στην γενική μορφή αχ+βψ=γ»*, η οποία υπήρχε γραμμένη με κόκκινα γράμματα στον πίνακα. Στη συνέχεια, η άσκηση λύνεται με μικρή συμμετοχή των μαθητών και φαίνεται πως ο Ε2 χρησιμοποιεί την επίλυση της για να κάνει ένα είδος παράδοσης που αποσκοπεί στην κατανόηση των αλγεβρικών διαδικασιών, όπως η *«σωστή χρήση των παρενθέσεων»* στην οποία κάνει ιδιαίτερη αναφορά. Όταν οι ευθείες ήταν πλέον *«γραμμένες στην γενική μορφή»*, ο Ε2 αναφέρει «*πριν την επίλυση να δούμε γεωμετρικά τι συμβολίζουν οι σχέσεις αυτές»* και *«άλγεβρα το κατάλαβα …βάζω το κεφάλι κάτω, κάνω πράξεις …γεωμετρικά τι σημαίνει αυτό;»* και *«Θα ανακεφαλαιώσουμε την γεωμετρική ερμηνεία μετά την λύση της άσκησης»*. Μια μαθήτρια ανάφερε ότι *αφού «είναι δύο ευθείες μπορούμε να βρούμε σημείο τομής»*. Το μάθημα στο σημείο της γεωμετρικής ερμηνείας και της κλίσης της ευθείας παραπέμπει περισσότερο σε διάλεξη, στην οποία ο εκπαιδευτικός τονίζει στους μαθητές τι πρέπει να θυμούνται. Στη συνέχεια, η άσκηση λύνεται αλγεβρικά κυρίως από τον Ε2 με συμμετοχή κάποιων μαθητών όταν τους απευθύνεται ο λόγος. Κατά την διάρκεια της επίλυσης ο εκπαιδευτικός κάνει συχνά παρατηρήσεις σε σημεία που ο ίδιος κρίνει απαραίτητα, ενώ συζητιούνται και οι δύο μέθοδοι επίλυσης για να καταλήξουμε σε λύση με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Στο τέλος τονίζεται ξανά ότι η λύση *«όπως έχουμε πει πρέπει να είναι ζεύγος»*.

Η επόμενη άσκηση που τίθεται στην τάξη είναι ένα μη γραμμικό σύστημα αποτελούμενο από τις σχέσεις ψ=3/χ και 2χ-ψ=6. Η συμμετοχή της τάξης στο συγκεκριμένο σημείο είναι πολύ μικρή, ειδικά στο σημείο που ο Ε2 επιχειρεί να τους υπενθυμίσει τα *«αντιστρόφως ανάλογα ποσά και την γραφική τους παράσταση»*. Η μικρή συμμετοχή των μαθητών έχει σαν αποτέλεσμα το μάθημα να θυμίζει διάλεξη, με τον Ε2 μέσω ενός μονολόγου να λύνει γραφικά την άσκηση. Όταν η άσκηση ολοκληρώθηκε τους υπαγορεύει να γράψουν: *«Ερώτηση: Πόσες λύσεις έχει το σύστημα; Απάντηση: Δύο, όσες και τα κοινά σημεία»*. Για άλλη μια φορά φαίνεται πως ο εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε την άσκηση για να κάνει παράδοση *«πιο προχωρημένων περιπτώσεων»*, αλλά ο τρόπο εξέλιξης του μαθήματος έχει ως αποτέλεσμα όλα όσα αναφέρθηκαν για τα μη γραμμικά συστήματα να μοιάζουν με μικρή παρένθεση, ειδικά από την στιγμή *«που είναι εκτός ύλης»*.

Το κρίσιμο περιστατικό που επιθυμούμε να εστιάσουμε μας προέρχεται με αφορμή την επίλυση της άσκησης «Να βρεθούν οι κλίσεις των ευθειών 2ψ + 3χ = 6 και -3χ + 3ψ = 8», η οποία είχε δοθεί σαν εργασία για το σπίτι. Ο Ε2 επιχειρεί να δώσει τον λόγο στους μαθητές, επιμένοντας ταυτόχρονα στην αλγεβρική επίλυση *«για να μην παρασυρθούν και πουν ότι η κλίση είναι απλά το 3, δηλαδή το νούμερο μπροστά από το χ»* άρα θα πρέπει *«να λύσω ως προς ψ»*. Οι μαθητές φάνηκε να μην έχουν κάποια συγκεκριμένη δυσκολία, κάτι που ήταν ως ένα βαθμό αναμενόμενο γιατί η αντίστοιχη διαδικασία είχε προηγηθεί και συζητηθεί διεξοδικά στη πρώτη άσκηση. Μετά λοιπόν από την επίλυση της άσκησης, εξελίσσεται ο παρακάτω διάλογος:

Διάλογος
Ε2: Είχα πει και κάτι άλλο, θετική κλίση και αρνητική κλίση. Ποιος το κατάλαβε αυτό; Ίριδα
Μ: Αν η ευθεία έχει θετική κλίση η ευθεία βρίσκεται στο πρώτο (φαίνεται να εννοεί πρώτο τεταρτημόριο, η απάντηση της δεν καταγράφηκε καθαρά στην ηχογράφηση) και αν έχει αρνητική στο δεύτερο
Ε2: Πάμε όμως να τα μορφοποιήσουμε αυτά. Θετική κλίση… (παύση για να γράψει στον πίνακα) κάτσε λίγο να το βρούμε αυτό μαζί, γιατί πρέπει να το συνδέσουμε λίγο με την τριγωνομετρία και αυτό δεν είναι εύκολο. Τι είπαμε ότι είναι η κλίση άμα δω την γωνία; Η κλίση μας είναι.. εσύ μας το πες.. πες
Μ: είναι η εφαπτομένη της γωνίας
Ε2: Είναι η εφαπτομένη της γωνίας.. η κλίση, αυτό το α που μου λέτε είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω, όπου ω είναι τι; Και αντί να λέμε λόγια καλύτερα να δούμε σχήμα. Να η ευθεία σου κοίτα την (δείχνει μια ευθεία στον πίνακα) αυτή για παράδειγμα. Ποιος μπορεί να έρθει στο πίνακα να μου δείξει ποια είναι αυτή η γωνία ω
(Σηκώνεται μια κοπέλα και κάνει λάθος)
Ε2: Έχει κάποιος αντίθετη άποψη
(σηκώνεται ένας μαθητής και τη συμβολίζει σωστά
Ε2: είναι αυτή, σβήσε της Βασιλικής την γωνία (την λάθος), πρέπει να φροντίζουμε να ξεκινάει από τον Οχ και να πηγαίνει αριστερόστροφα. Ωραία; Ωραία… Στην άλλη περίπτωση που η ευθεία μου

είναι έτσι (σχηματίζει μια φθίνουσα ευθεία) ποια είναι η γωνία ω; Εντάξει μη σας σηκώνω τώρα για αυτό, είναι αυτή εδώ έτσι; (την σχηματίζει ο ίδιος). Πάντα ξεκινάει από τον Οχ. Αυτός που γράφει καλές σημειώσεις και θα την βγάλει καθαρή στο πανεπιστήμιο είναι αυτός που τώρα θα σημειώσει «ξεκινάς από τον Οχ αριστερόστροφα». Ωραία αυτή είναι η ω. Ας προσπαθήσουμε τώρα να δούμε τι επιρροή έχει αυτό το «αρνητική κλίση και θετική κλίση» στην γωνία ω και άρα στην μορφή της ευθείας. Ρε παιδιά συγνώμη απλά μπακαλίστικα, το ένα είναι κατηφόρα και το άλλο ανηφόρα εντάξει. Αλλά τη σχέση έχει αυτό με την θετική και αρνητική κλίση; Αυτό προσπαθούμε να δούμε. Οπότε λοιπόν θετική κλίση αρνητική κλίση (σημειώνει τις λέξεις θετική και αρνητική κλίση στον πίνακα). Για να δούμε θα καταφέρουμε να βρούμε την σχέση που έχει η κλίση με την γωνία και άρα την ευθεία**.** Έχουμε αυτό το όπλο και μόνο για να παλέψουμε. Δείτε το εδώ, αυτό (δείχνει στον πίνακα τις σχεδιασμένες ευθείες), Προσπαθούμε τώρα να βρούμε το δρόμο μας πως; Πες στην πρώτη περίπτωση πως η κλίση είναι θετική
Μ: δεν κατάλαβα.. αυτό δεν έχω καταλάβει
Ε2: Υπάρχει απορία; Πρώτη περίπτωση είπαμε θετική κλίση, τι σημαίνει αυτό; Λέγε Χρήστο
Μ: ότι η εφαπτομένης της ω είναι θετική
Ε2: ότι η εφαπτομένη της ω είναι θετική, αυτό σημαίνει αυτό. Και αυτό τι σημαίνει για την ω; Τριγωνομετρία
Μ: ότι είναι στο πρώτο τεταρτημόριο
Ε2: Ωραία, η ω όμως όταν είχε εφαπτομένη θετική ήταν οξεία ή αμβλεία;
Μ: και οξεία και αμβλεία μπορούσε να ήταν, αφού..
Ε2 (τον διακόπτει πριν ολοκληρώσει τον συλλογισμό του): Όχι, αν είναι αμβλεία η ω, αν ήταν λοιπόν στο δεύτερο τεταρτημόριο, εκεί πέρα τι έχουμε για την εφαπτομένη; Αρνητική άρα δεν μπορεί να είναι και αμβλεία. Όταν έχει θετική εφαπτομένη, η ω είναι τι; Οξεία**. (**Απαντάει ο ίδιος πριν προλάβει κάποιος μαθητής) Ωραία; Που σημαίνει, ποιο από τα δύο σχήματα ταιριάζει; Βάζουμε ένα βελάκι και το συνδέουμε με την οξεία γωνία. Πάμε τώρα στη δεύτερη περίπτωση, γράψτε μου στα τετράδια περνάω να δω, το ίδιο συμπέρασμα, δηλαδή με αρνητικό α (εννοεί το α στον τύπο $\psi = \alpha\chi + \beta$) πως βρίσκω ποιο είναι το σχήμα μου;
(περνάει λίγος χρόνος)
Ε2: Για να ακούσω.. έλα και οι υπόλοιποι λιγάκι, ποιο είναι; Για πάμε να κάνουμε την στιχομυθία, (απευθυνόμενος σε ένα μαθητή) α αρνητικό τι σημαίνει;
Μ: αρνητική κλίση
Ε2: αρνητική κλίση, άρα τι σημαίνει αυτό για την ω; για την εφαπτομένη;
Μ: μικρότερη του 0
Ε2: ότι εφω μικρότερη του 0, ωραία, θέλω να σκεφτούμε, να θυμηθούμε, σε ποιο τεταρτημόριο ήταν η εφαπτομένη αρνητική; Ναι..

Μ: στο δεύτερο τεταρτημόριο
Ε2: στο δεύτερο τεταρτημόριο, και αλλού, πάντως στο δεύτερο τεταρτημόριο που μας ενδιαφέρει η γωνία τι ήταν;
Μ: αρνητική
Ε2: η γωνία δεν ήταν αρνητική, η γωνία ήταν; (περιμένει μια στιγμή αλλά δεν απαντάει κάποιος μαθητής) αμβλεία. Ωραία σωστά, άρα η γωνία ήταν αμβλεία, άρα ποιο είναι το σχήμα που ταιριάζει;
(ένας μαθητής απαντάει δείχνοντας στον πίνακα την φθίνουσα ευθεία)
Ε2: ωραία πριν το σβήσω τον πίνακα και πάμε στο τελικό πράγμα που θέλω σήμερα να σας πω, πείτε μου αν το έχουμε κατανοήσει αυτό πλήρως,. Όταν θα ξαναρωτήσω λοιπόν, η ευθεία έχει θετική κλίση τι σημαίνει αυτό; Θα πρέπει να ξέρουμε αμέσως τι; Ναι..
Μ: ότι είναι οξεία
Ε2: θα πρέπει να ξέρω λοιπόν ότι η γωνία είναι αντίστοιχα αμβλεία ή οξεία, εντάξει πολύ ωραία. Ναι απορία..
Μ: Συγγνώμη, η εφαπτομένη είναι θετική και στο τέταρτο τεταρτημόριο
Ε2: Ναι, μιλάμε για γωνία τριγώνου όμως, δεν θα πούμε ότι είναι από 270 μοίρες (ώστε να είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο)
Μ: θα μπορούσαμε να πούμε.. (Ο μαθητής προσπαθεί να εκφράσει ένα συλλογισμό αλλά ο εκπαιδευτικός τον διακόπτει)
Ε2: έχεις δίκιο σε αυτό, αλλά εμείς κοιτάμε για το πρώτο και το δεύτερο τεταρτημόριο (Η εφαπτομένη είναι αρνητική στο τέταρτο τεταρτημόριο, ο Ε2 δεν θέλησε όμως να επεκταθεί περεταίρω. Η διδακτική ώρα έφτανε στο τέλος της και ίσως αυτό να επηρέασε την στάση του.)
(ο μαθητής διατυπώνει μια απορία, χτυπάει κουδούνι και ο Ε2 του την εξηγεί κατ ιδίαν, ο διάλογος τους όμως δεν καταγράφηκε καθαρά στην μαγνητοφώνηση)

Από όσα μαθήματα του τμήματος του Ε2 παρακολουθήσαμε, δεν εντοπίστηκε κάποια άλλη στιγμή που να διαφαίνεται τόσο έντονα η πρόθεση του εκπαιδευτικού για γενίκευση, η οποία θα απορρέει από το σύνολο της τάξης και δεν θα προέρχεται κατά κύριο λόγο από τον ίδιο. Θα μπορούσαμε δηλαδή να ισχυριστούμε, ότι στο συγκεκριμένο απόσπασμα καταγράφεται η προσπάθεια του εκπαιδευτικού για επίτευξη συλλογικής γενίκευσης (Ellis, 2011). Είναι ιδιαίτερα φανερό, όπως άλλωστε μας δήλωσε και ο ίδιος, ότι ο σκοπός του είναι να συνδέσει τις μαθηματικές έννοιες που έχουν ήδη διατυπωθεί σε προηγούμενα κεφάλαια (*εφαπτομένη αμβλείας και οξείας γωνίας*) με τις έννοιες του τωρινού μαθήματος (*αρνητική και θετική κλίση ευθειών*). Η νοητική διαδικασία που προσπαθεί να προκαλέσει στους μαθητές θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «μεταφορά γνώσης», αφού σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας (Lobato, 2003) ως μεταφορά θεωρείται η νοητική διαδικασία κατά την οποία η γνώση που έχει ήδη αποκτηθεί *(τριγωνομετρικές έννοιες)* επεκτείνεται και εφαρμόζεται σε διαφορετικές περιπτώσεις *(κλίσεις και μονοτονία ευθειών)*. Στην βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφέραμε την σχέση μεταξύ των δυο εννοιών και στο συγκεκριμένο απόσπασμα η σχέση αυτή είναι αρκετά έντονη. Ωστόσο, ισχυριζόμαστε ότι στο απόσπασμα γίνεται προσπάθεια γενίκευσης, επειδή σκοπός του Ε2 είναι η κατασκευή ενός γενικευμένου συλλογισμού. Υπενθυμίζουμε πως σύμφωνα με τους Fond και Contreras (2009), τέτοιοι συλλογισμοί είναι το προϊόν κάθε διαδικασίας που αποσκοπεί σε γενίκευση και επειδή ο συλλογισμός που προσπαθεί να Ε2 απαιτεί προγενέστερες γνώσεις από το κεφάλαιο της γεωμετρίας, υπάρχει το προαναφερόμενο κοινό έδαφος μεταξύ της γενίκευσης και της μεταφοράς γνώσης. Πιστεύουμε πως στο συγκεκριμένο εγχείρημα του εκπαιδευτικού, η επίτευξη της γενίκευσης απαιτεί την μεταφορά γνώσης, γεγονός όμως που όχι μόνο δεν αναιρεί αλλά ενισχύει τον ισχυρισμό μας για εμφάνιση της έννοιας στο συγκεκριμένο απόσπασμα.

Ο Ε2 επιχείρησε την εξαγωγή του εξής συλλογισμού: «όταν η ευθεία έχει αρνητική κλίση, δηλαδή όταν η γωνία ω που σχηματίζεται μεταξύ της ευθείας και τον 0χ έχει αρνητική εφαπτομένη, τότε η ευθεία είναι φθίνουσα – ή κατηφόρα όπως την αποκάλεσε – γεγονός που επαληθεύετε από το ότι η γωνία ω είναι αμβλεία και από τις γνώσεις μας από την γεωμετρία ξέρουμε ότι οι αμβλείες γωνίες – γωνίες του δεύτερου τεταρτημορίου – έχουν αρνητική εφαπτομένη». Αντίστοιχος ήταν ο συλλογισμός για τις αύξουσες ευθείες που σχηματίζουν οξεία γωνία με τον άξονα των χ. Αν λάβουμε υπόψη μας όσα προηγήθηκαν εκείνη την ημέρα στο μάθημα πριν το κρίσιμο περιστατικό, θα συμπεράνουμε ότι ο Ε2 προετοίμαζε την τάξη μέσω των προηγούμενων ασκήσεων πριν επιχειρήσει να συνδέσει τις έννοιες. Στις ασκήσεις αυτές, εκτός από τις αλγεβρικές μεθόδους, τόνιζε συνεχώς το πώς «μια εξίσωση πρέπει να την φέρνουμε στην γενική μορφή» και έδινε ιδιαίτερη έμφαση στο ότι «πρέπει να λύνουμε ως προς ψ» για να μπορούμε «να βρίσκουμε την κλίση του χ χωρίς να μπερδευόμαστε». Επίσης, είχε αφιερώσει αρκετό διδακτικό χρόνο στην επανάληψη εννοιών από το κεφάλαιο των ευθειών, όπως φαίνεται και στο πρώτο κρίσιμο περιστατικό που αναλύσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, ενώ το κεφάλαιο με τις τριγωνομετρικές έννοιες είχε διδαχθεί αρκετά πρόσφατα. Οι μαθητές λοιπόν, ήταν ως ένα βαθμό προετοιμασμένοι για να «μορφοποιήσουν όλα όσα συζητάγανε στην τάξη» όχι μόνο στο συγκεκριμένο μάθημα, αλλά σε μια σειρά μαθημάτων που είχαν προηγηθεί αρκετά πρόσφατα.

Είναι φανερό ότι ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να δώσει τα κατάλληλα ερεθίσματα στους μαθητές για να φτάσουν μόνοι τους στο συμπέρασμα και δεν επιθυμούσε να διατυπώσει μόνος του τον τελικό συλλογισμό. Ωστόσο, τα ερεθίσματα αυτά προέρχονται από αρκετά καθοδηγούμενες ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου, δεν προκύπτουν δηλαδή από κάποια δραστηριότητα αλλά από άμεσες προτροπές του εκπαιδευτικού. Ειδικά με τη φράση *«Ας προσπαθήσουμε τώρα να δούμε τι επιρροή έχει αυτό το αρνητική κλίση και θετική κλίση στην γωνία ω και άρα στην μορφή της ευθείας. Ρε παιδιά συγνώμη απλά μπακαλίστικα, το ένα είναι κατηφόρα και το άλλο ανηφόρα εντάξει. Αλλά τη σχέση έχει αυτό με την θετική και αρνητική κλίση; Αυτό προσπαθούμε να δούμε. Οπότε λοιπόν θετική κλίση αρνητική κλίση. Για να δούμε θα καταφέρουμε να βρούμε την σχέση που έχει η κλίση με την γωνία και άρα την ευθεία»* προδίδει σε μεγάλο βαθμό την γενίκευση που θέλει να προκαλέσει. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες αναλύσεις των κρίσιμων περιστατικών από τα τμήματα του Ε2, δεν θα ισχυριστούμε ότι η γενίκευση παρουσιάζεται έτοιμη στην τάξη, υπήρχαν όμως σημεία που η καθοδήγηση ήταν τόσο έντονη που οριακά κάτι τέτοιο δεν συνέβη. Για παράδειγμα, με την ερώτηση *«Και αυτό τι σημαίνει για την ω; Τριγωνομετρία»* στερεί από τους μαθητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν εξ ολοκλήρου μόνοι τους την σύνδεση μεταξύ δυο φαινομενικά ξένων γνωστικών πεδίων. Βέβαια, με τον τρόπο του εξασφαλίζει ότι η σκέψη των μαθητών θα ακολουθήσει την επιθυμητή κατεύθυνση. Η γενίκευση λοιπόν στο απόσπασμα δεν βρίσκεται πίσω από την γενικότητα ενός κανόνα, αλλά είναι έντονα κατευθυνόμενη με τον τρόπο που ο Ε2 προσπαθεί να την πραγματοποιήσει.

Αναλύοντας περεταίρω τις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού, παρατηρούμε επίσης ότι ενώ απευθύνει μεγάλο πλήθος ερωτήσεων προς τους μαθητές, σε αρκετές από αυτές απαντάει αμέσως ο ίδιος, χωρίς να έχει δώσει την ευκαιρία σε κάποιον μαθητή να εκφραστεί. Την συγκεκριμένη πρακτική την έχουμε συναντήσει σε όλα τα κρίσιμα συμβάντα του Ε2 που αναλύσαμε και θεωρούμε πως είναι ένα βασικό στοιχείο της διδασκαλίας του, που καταδεικνύει την επιθυμία του να ορίζει σε σχεδόν αποκλειστικό βαθμό την ροή του μαθήματος. Θέτοντας αρκετές ρητορικές ερωτήσεις, επιχειρεί να κατευθύνει την σκέψη των μαθητών αρχικά ως προς το τι πρέπει να αναρωτηθούν, ώστε αυτοί να εστιάσουν τον συλλογισμό τους προς την σωστή κατεύθυνση και στο τέλος να κατανοήσουν όσο το δυνατόν καλύτερα τα όσα τους διδάσκει. Όπως τονίσαμε και στις άλλες περιπτώσεις, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το μάθημα κάποιες στιγμές να παραπέμπει σε διάλεξη και παρόλο που στο συγκεκριμένο περιστατικό ο Ε2 προσπαθεί ο συλλογισμός να προκύψει από τους μαθητές, κανένας από όσους πήραν τον λόγο δεν εξέφρασε μια μακροσκελή μαθηματική πρόταση. Υπήρχε επίσης, ένα ποσοστό της τάξης που δεν συμμετείχε στο μάθημα και φαινόταν απλά να περιμένει από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον από τους μαθητές που συμμετείχαν να εκφράσει το γενικότερο συμπέρασμα.

Μελετώντας τις απαντήσεις των μαθητών παρατηρούμε ότι η συμμετοχή τους περιορίστηκε σε σύντομες απαντήσεις και κανένας από αυτούς δεν εξέφρασε ολόκληρο τον τελικό συλλογισμό. Υπήρχε ωστόσο ένα μικρό σύνολο μαθητών που συμμετείχε ενεργά στην διαδικασία του μαθήματος και από τις απαντήσεις τους φαινόταν να έχουν πραγματοποιήσει αρκετές από τις απαιτούμενες νοητικές συνδέσεις, να έχουν δηλαδή προβεί στην επιθυμητή γενίκευση. Αυτό κρίθηκε αρκετό από τον Ε2 που επιχείρησε να συνοψίσει όσα είχαν συζητηθεί και κατά επέκταση να διατυπώσει σύντομα τον γενικευμένο συλλογισμό λίγο πριν το τέλος του μαθήματος, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην ταχύτητα που πλέον μπορούμε να απαντάμε σε αντίστοιχες ερωτήσεις, όπως φαίνεται στο διάλογο:

Ε2: Όταν θα ξαναρωτήσω λοιπόν, η ευθεία έχει θετική κλίση τι σημαίνει αυτό; Θα πρέπει να ξέρουμε αμέσως τι;

Μ: ότι είναι οξεία

Ε2: θα πρέπει να ξέρω λοιπόν ότι η γωνία είναι αντίστοιχα αμβλεία ή οξεία, εντάξει πολύ ωραία.

Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές για άλλη μια φορά δυσκολευόμαστε να εντοπίσουμε κάποια από αυτές που η βιβλιογραφία συνδέει με την ενίσχυση της γενίκευσης, καθώς ο εκπαιδευτικός είχε τον κύριο ρόλο στην εξέλιξη του μαθήματος και η βιβλιογραφία επιθυμεί τον μαθητή και τους συλλογισμού του περισσότερο στο επίκεντρο σε σχέση με όσα καταγράψαμε. Το στυλ διδασκαλίας του Ε2 να μπορεί να θεωρηθεί τόσο μαθηματικοκεντρικό (Opdenakker & Van Damme, 2006) αφού δόθηκε αποκλειστική έμφαση στο μαθηματικό περιεχόμενο, όσο και παραδοσιακό (Stipek et al, 2001) επειδή ο εκπαιδευτικός είχε τον απόλυτο έλεγχο της τάξης, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε υπολογιστικές μεθόδους και κανόνες κυρίως στα όσα προηγήθηκαν του αποσπάσματος.

Ωστόσο στο απόσπασμα επειδή προσπαθεί να εμπλέξει τους μαθητές στην δημιουργία της γενίκευσης, διακρίνουμε στοιχεία (συμμετοχή των μαθητών στις μαθηματικές διαδικασίες μιας τάξης) από το στυλ διδασκαλίας που ο Stipek και οι συνεργάτες ονόμασαν διερευνητικό/κατασκευαστικό. Όπως αναφέραμε στην βιβλιογραφική ανασκόπηση είναι πιθανόν για κάποιον εκπαιδευτικό να συνδυάζει στοιχεία από περισσότερα τους ενός στυλ και κάτι αντίστοιχο συμβαίνει στο συγκεκριμένο κρίσιμο συμβάν. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα για το κατά πόσο είναι τυχαίο το γεγονός πως η ύπαρξη αυτών των μη παραδοσιακών στοιχείων διδασκαλίας συμπίπτει με την χρονική στιγμή που στη τάξη έχει δημιουργηθεί το πιο πυκνό σε ευκαιρίες γενίκευσης περιβάλλον σε σχέση με τις υπόλοιπες διδακτικές ώρες που παρακολουθήσαμε.

3.2.4 Κρίσιμο Περιστατικό 4

Το απόσπασμα που ακολουθεί προέρχεται από την επίλυση του παρακάτω προβλήματος του σχολικού βιβλίου:

9 Αν 3 + 3 + 3 + ...+ 3 + 5 + 5 + 5 + + ... + 5 = 410 και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100, να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες φορές ο αριθμός 5.

Διάλογος
ΓΓ: Αυτό το πράγμα να το σκεφτείς με μυαλό είναι πολύ δύσκολο, να γιατί χρειαζόμαστε συστήματα. (ο μαθητής διατυπώνει από την θέση του και ο εκπαιδευτικός σημειώνει στο πίνακα και σχολιάζει ότι κρίνει απαραίτητο.)
Μ: θα φτιάξουμε 2 εξισώσεις
Ε2: θα φτιάξουμε 2 εξισώσεις, υπέροχα
Μ: η πρώτη θα είναι
Ε2: αρχικά συγνώμη, για να βάλουμε λίγο στο μυαλό μας τάξη.. με το που πάω να λύσω ένα πρόβλημα, αυτό που μου ζητάνε, καλά είναι να το κάνω ψηφίο, να το κάνω άλγεβρα. Τι μου ζητάνε εδώ; Ζητάνε ένα πράγμα ή δύο πράγματα;
Μ: δύο
Ε2: Ποία δύο; Πόσα 3 και πόσα 5, θέλω άλγεβρα το πόσα 3, πώς το κάνω άλγεβρα; Χ.. άρα λοιπόν πες έχω χ από αυτά εδώ και ψ από τούτα.. πες τώρα
Μ: 3χ+5ψ=410
ΓΓ: Περίμενε να μας το εξηγήσεις αυτό
Μ: έχω τόσα 3αρια και τόσα 5αρια και αυτό είναι το σύνολο
Ε2: άρα το 410 εσύ λες ότι απαρτίζεται από το
Μ: το 3χ και 5ψ
Ε2: Αν αυτά ήταν 10 (εννοεί το πλήθος των 3) και αυτά 20 (εννοεί το πλήθος των 5) λέω για παράδειγμα, θα ήταν 10 φορές το 3 έτσι; Πόσες φορές το 3. Αν ήταν 50,θα είχαμε 50 φορές το 3, τώρα που είναι χ, σαν αξία πόσο είναι αυτό;

Μ: 3χ
Ε2: άρα αυτή η αξία, το 3χ και αυτή εδώ η αξία.. τι αξία είναι; έχει 5, πόσες φορές το έχει το 5;
Μ: 4 φορές
Ε2: 4 φορές.. αυτό εδώ το ψ τι νόημα έχει;
Μ: ψ φορές
Ε2: ψ φορές το 5..μπορεί να το έχει 500 φορές.. μπορεί να έχει 50..Τώρα είναι εξίσωση, πολύ όμορφη αλλά δυστυχώς έχει μέσα 2 αγνώστους, δεν μπορώ, ξέρω εγώ, να την λύσω ως προς χ.. χρειάζομαι και μια δεύτερη, Στέργιο;
Μ2: ναι θέλω.. (σαστίζει για λίγο)
Ε2: περίμενε να την δούμε μαζί, το 100 τι είναι, έχεις διαβάσει το πρόβλημα;
Μ2: αν προσθέσουμε το πλήθος.. προσθέσουμε το πρώτο μέρος μας κάνει 100
Ε2: περίμενε το πλήθος των ψηφίων εδώ πέρα, πόσοι είναι αυτοί, ε;
Μ2: Ναι
Ε2: αυτοί μόνοι τους πόσοι είναι (τα 5αρια);
Μ2: τέσσερεις
Ε2: Μας είπε πριν ο Μ ότι είναι τέσσερεις.. και αυτοί είναι τρείς (εννοεί τα 3αρια)..ίσως εκεί υπάρχει παρανόηση ε (εννοεί τα τρία 3άρια της εκφώνησης);.. οι τελίτσες του βιβλίου τι σημαίνουν; Ορέστη; (ο μαθητής είναι πολύ πιθανόν να έχει μπερδευτεί με τα 5αρια και 3αρια που έχει η εκφώνηση του προβλήματος)
Μ3: να διευκρινίσουμε ότι υπάρχουν περισσότερα από 3
Ε2: υπάρχουν περισσότερα και δεν τα γράφει αυτός, γιατί; Γιατί μπορεί να είναι 500, να γεμίσει πόσες σελίδες με αυτά; Άρα βάζει τελίτσες και σου λέει, «εσύ βρες μου πόσα είναι» Άρα συγγνώμη, εμείς αρχικά που ξεκινήσαμε, τι συμφωνήσαμε; Πόσα είναι αυτά;
Μ: χ
Ε2: που το λέει; να εδώ το λέει (δείχνει στον πίνακα). Άρα λοιπό πόσα 3; Πόσα;
Μ: χ
Ε2: χ.. τι θα πει χ; ρε παιδί μου μπορεί να έχουμε 50 3αρια στη σειρά.. άρα έχω πολλά 3..πόσα είπαμε;
αρκετοί μαθητές μαζί: χ
Ε2: και αυτά πόσα είναι; (εννοεί τα 5)

αρκετοί μαθητές μαζί: ψ
Ε2: και πόσα είναι όλα μαζί;
Μ4:100
Ε2: άρα το χ+ψ είναι το 100 που είπε η Ναυσικά, άρα να η δεύτερη εξίσωση.. ότι χ τα 3αρια και υ τα 5αρια μας κάνουν συνολικά 100 ψηφία. Μόλις το λύσετε θα βρείτε ένα χ και ένα ψ που θα πει τόσα 3αρια και τόσα 5αρια. Μια εξαιρετική άσκηση που παντρεύει γιατί υπάρχουν χ και ψ με την πραγματικότητα. (ο Ε2 με αυτήν την αναφώνηση ολοκληρώνει την άσκηση και συνεχίζει τον συλλογισμό του για τη σχέση των χ και ψ με την πραγματικότητα στις επόμενες ασκήσεις της συγκεκριμένης διδακτικής ώρας)

Ένας από τους κύριους λόγους που συμπεριλάβαμε το συγκεκριμένο απόσπασμα είναι το γεγονός πως η συγκεκριμένη άσκηση, που είχε δοθεί στους μαθητές ως εργασία για το σπίτι, είναι η πρώτη απ' όσες λύθηκαν στα μαθήματα που παρακολουθήσαμε, που απαιτεί από τους μαθητές να κατασκευάσουν τις εξισώσεις που θα αποτελέσουν το γραμμικό σύστημα. Στο απόσπασμα αυτό καταγράφεται επίσης η πρώτη φορά που η διατύπωση μιας αλγεβρικής σχέσης αποτελεί το κέντρο του μαθήματος, το οποίο μέχρι τότε περιστρεφόταν είτε γύρω από τις έννοιες των ευθειών είτε από τις μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Το πρόβλημα αν και δεν πηγάζει από κάποιο ρεαλιστικό πλαίσιο, δεν προκύπτει δηλαδή από μια κατάσταση συγγενική με την καθημερινότητα των μαθητών, έχει ομοιότητες με τα ρεαλιστικά προβλήματα επειδή απαιτεί την κατασκευή των γραμμικών εξισώσεων, διαδικασία εφάμιλλη με το στάδιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης.

Αναλύοντας τον διάλογο παρατηρούμε ότι ο Ε2 προσπαθεί να εστιάσει την προσοχή των μαθητών στο πως δημιουργείται το επιθυμητό γραμμικό σύστημα. Αρχικά τους τονίζει ότι πρέπει να αλγεβρικοποιήσουμε τα δεδομένα (*Ε2: με το που πάω να λύσω ένα πρόβλημα, αυτό που μου ζητάνε, καλά είναι να το κάνω ψηφίο, να το κάνω άλγεβρα*) και στη συνέχεια τους προτρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι οι άγνωστοι της άσκηση είναι δύο (*Ε2: Ζητάνε ένα πράγμα ή δύο πράγματα;*). Παρατηρούμε ότι παρά το γεγονός πως ένας μαθητής διατυπώνει σωστά την πρώτη γραμμική σχέση ($3χ + 5ψ = 410$) ο Ε2 δεν αρκείται στην απάντηση αυτή και του ζητάει να την δικαιολογήσει. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αφιερωθεί λίγος χρόνος για την ανάλυση του συλλογισμού του μαθητή. Φαίνεται πως ο σκοπός του εκπαιδευτικού στο σημείο αυτό είναι να δώσει στους μαθητές μέσω τυχαίων παραδειγμάτων να καταλάβουν τον γενικό συλλογισμό που θα μας οδηγήσει στην κατάλληλη χρήση των μεταβλητών και κατά επέκταση στην διατύπωση της εξίσωσης (*Ε2: Αν αυτά ήταν 10 (εννοεί το πλήθος των 3) και αυτά 20 (εννοεί το πλήθος των 5) λέω για παράδειγμα, θα ήταν 10 φορές το 3 έτσι; Πόσες φορές το 3. Αν ήταν 50,θα είχαμε 50 φορές το 3, τώρα που είναι χ, σαν αξία πόσο είναι αυτό;*). Συναντάμε λοιπόν ένα είδος γενίκευσης, αυτό της διατύπωσης σχέσεων.

Στη συνέχεια τονίζει στους μαθητές ότι η εξίσωση «*δυστυχώς έχει μέσα 2 αγνώστους*» άρα *«δεν μπορώ να την λύσω ως προς χ»* και φτάνει μόνος του στο συμπέρασμα πως *«χρειάζομαι και μια δεύτερη»*. Ο συλλογισμός αυτός δεν διατυπώθηκε από κάποιον μαθητή, χωρίς αυτό κατά ανάγκη να σημαίνει ότι δεν υπήρχαν μαθητές που να τον πραγματοποίησαν. Παρατηρούμε όμως πως ο Ε2 τον παρουσιάζει ο ίδιος στην τάξη, πιθανώς για να διασφαλίσει πως θα γίνει αντιληπτός από όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος αυτής. Η γενίκευση, δηλαδή το ότι «αφού έχω δυο αγνώστους χρειάζομαι και μια δεύτερη σχέση για να μπορέσω να τους προσδιορίσω» παρουσιάζεται έτοιμη στο τμήμα και οι μαθητές οφείλουν πλέον να την κατανοήσουν μέσω της άσκησης. Όσον αφορά την δεύτερη σχέση του προβλήματος (χ + ψ = 100) έπειτα από διάφορες ερωτήσεις που αποσκοπούσαν στο να κατανοήσουν τον συλλογισμό που θα οδηγεί στη κατασκευή της *(Ε2: άρα έχω πολλά 3..πόσα είπαμε; - αρκετοί μαθητές μαζί: χ -Ε2: και αυτά πόσα είναι; - αρκετοί μαθητές μαζί: ψ - Ε2: και πόσα είναι όλα μαζί; - Μ4:100 - Ε2: άρα το χ+ψ είναι 100)*, η σχέση διατυπώνεται και η άσκηση φτάνει στο τέλος.

Με τον τρόπο που αξιοποιήθηκε το συγκεκριμένο πρόβλημα από τον εκπαιδευτικό, παρουσιάζεται ένα επιπλέον διδακτικό όφελος για τους μαθητές αφού συμμετείχαν στο στάδιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης, δηλαδή συμμετείχαν στην δημιουργία των απαιτούμενων γραμμικών εξισώσεων. Η σωστή χρήση μεταβλητών και η διατύπωση σχέσεων είναι μια πρώιμη μορφή γενίκευσης, την οποία όπως έχουμε προαναφέρει είναι αναμενόμενο να συναντήσουμε στο μάθημα της άλγεβρας. Ωστόσο με την διδακτική επιλογή του εκπαιδευτικού να θέσει αυτού του είδους το πρόβλημα αφού έχει παραδοθεί η ύλη του κεφαλαίου – βρισκόμασταν στην έβδομη διδακτική ώρα – το στάδιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης είναι το μοναδικό επιπλέον όφελος για τους μαθητές. Η συγκεκριμένη άσκηση, καθώς και οι υπόλοιπες τρείς που λύθηκαν στην συγκεκριμένη διδακτική ώρα, αντιμετωπίστηκαν από την τάξη σαν ασκήσεις που έχουν την ιδιαιτερότητα το σύστημα να πρέπει πρώτα να κατασκευασθεί και μετά να επιλυθεί. Οι ευκαιρίες λοιπόν που είχαν οι μαθητές για γενίκευση περιοριζόταν σε μεγάλο βαθμό στο να διατυπώσουν τις απαιτούμενες γραμμικές σχέσεις. Στη συζήτηση που θα ακολουθήσει μετά την ανάλυση των κρίσιμων συμβάντων θα θίξουμε τα πιθανά διδακτικά οφέλη που ίσως να είχε το συγκεκριμένο πρόβλημα αν είχε τεθεί στους μαθητές πριν την παράδοση της ύλης, δηλαδή αν είχε δοθεί σαν εισαγωγική δραστηριότητα για το συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές που μπορούμε να εντοπίσουμε στο συγκεκριμένο απόσπασμα, παρατηρούμε ότι ο Ε2 αφενός δεν στέκεται στην σωστή απάντηση του πρώτου μαθητή και του ζητάει να δικαιολογήσει το πώς έφτασε σε αυτήν, αφετέρου δεν αφήνει για αρκετή ώρα τον λόγο στους μαθητές, με αποτέλεσμα αυτοί να διατυπώνουν σύντομες απαντήσεις. Επίσης, παρατηρούμε πως η συμμετοχή τους γίνεται με τρόπο που κατευθύνεται σε ένα βαθμό από τον εκπαιδευτικό για να θίξει όσα ο ίδιος επιθυμεί. Μια πιθανή αιτία της προηγούμενης παρατήρησης είναι το ότι όπως γίνεται φανερό από το απόσπασμα, ο κύριος στόχος του Ε2 είναι η κατανόηση των συλλογισμών που οδηγούν στην κατασκευή των δύο σχέσεων, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα οι ερωτήσεις που έθετε στους μαθητές να έχουν μια καθοδηγητική χροιά, ειδικά στον διάλογο που οδήγησε στην διατύπωση της δεύτερης σχέσης. Μια δεύτερη διδακτική πρακτική που εντοπίζουμε είναι η αναφορά σε μεθόδους επίλυσης, είτε πρόκειται για το πώς ξεκινάμε την αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων (*Ε2: αρχικά συγνώμη, για να βάλουμε λίγο στο μυαλό μας τάξη.. με το που πάω να λύσω ένα πρόβλημα, αυτό που μου ζητάνε, καλά είναι να το κάνω ψηφίο, να το κάνω άλγεβρα.*) είτε για γενικευμένους συλλογισμούς που ο ίδιος διατυπώνει (*Ε2: Τώρα είναι εξίσωση, πολύ όμορφη αλλά δυστυχώς έχει μέσα 2 αγνώστους, δεν μπορώ, ξέρω εγώ, να την λύσω ως προς χ… χρειάζομαι και μια δεύτερη*).

Επιχειρώντας να χαρακτηρίσουμε το στυλ διδασκαλίας που παρατηρούμε στο παραπάνω απόσπασμα, τείνουμε περισσότερο προς την παραδοσιακή μεριά της διχοτομίας του Stipec (2001), καθώς παρόλο που ο λόγος μοιράζεται στους μαθητές – η άσκηση άλλωστε είχε δοθεί ως εργασία για το σπίτι – ο εκπαιδευτικός ελέγχει σε μεγάλο βαθμό την τάξη, προσπαθώντας μέσω των ερωτήσεων που θέτει να διασφαλίσει ότι θα διατυπωθούν οι συλλογισμοί που είναι απαραίτητοι για τέτοιου είδους ασκήσεις (*έχουμε δυο αγνώστους, άρα χρειαζόμαστε δυο εξισώσεις).* Παρατηρούμε επίσης ότι κάποιες από τις σύντομές ερωτήσεις που θέτει έχουν ρητορική φύση, δηλαδή τις απαντάει ο ίδιος (για παράδειγμα: *Ε2: υπάρχουν περισσότερα και δεν τα γράφει αυτός, γιατί; Γιατί μπορεί να είναι 500, να γεμίσει πόσες σελίδες με αυτά; Άρα βάζει τελίτσες και σου λέει, «εσύ βρες μου πόσα είναι» Άρα συγγνώμη, εμείς αρχικά που ξεκινήσαμε, τι συμφωνήσαμε; Πόσα είναι αυτά;).* Από συζητήσεις που πραγματοποιήθηκαν με τον εκπαιδευτικό συμπεραίνουμε ότι ο σκοπός του είναι «όλοι οι μαθητές αρχικά να αναρωτηθούν, ώστε στη συνέχεια να κατανοήσουν όσο γίνεται καλύτερα», διδακτική επιλογή που τον καθιστά «συνειδητά» απόλυτο κυρίαρχο της εξέλιξης του μαθήματος.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση του συγκεκριμένου κρίσιμου συμβάντος καταλήγουμε σε παρόμοια συμπεράσματα με τα υπόλοιπα συμβάντα του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού που προηγήθηκαν. Το διδακτικό στυλ που έχει επιλέξει ανάγει τον ίδιο σε κύριο εκφραστή του μαθήματος και επηρεάζει τον τρόπο εμφάνισης της γενίκευσης. Το συγκεκριμένο συμβάν ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα γιατί οι μαθητές ναι μεν διατυπώνουν τις σχέσεις ή αναφέρουν τις σχέσεις που είχαν διατυπώσει στο σπίτι τους. Ωστόσο, τόσο στο συγκεκριμένο απόσπασμα όσο και στα άλλα δυο προβλήματα που λύθηκαν εκείνη την διδακτική ώρα, ο Ε2 μέσω των ερωτήσεων και προτροπών του που είχαν έντονη καθοδηγητική χροιά, στην προσπάθεια του να διασφαλίσει το ότι όσο το δυνατόν περισσότεροι μαθητές θα κατανοήσουν την λογική πίσω από την κατασκευή των εξισώσεων του, μετατρέπει το μάθημα σε παρουσίαση και κατανόηση μεθοδολογιών. Οι μαθητές είναι αρκετά πιθανόν να καταλήξουν σε κάποιες γενικεύσεις, για παράδειγμα ότι «αφού στο πρόβλημα υπάρχουν δυο εξισώσεις, μου χρειάζονται δύο εξισώσεις με τους αγνώστους αυτούς και αφού δημιουργήσω δυο σχέσεις που πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα πλέον έχω δημιουργήσει ένα σύστημα», αλλά οι γενικεύσεις αυτές είναι σε μεγάλο βαθμό εξαναγκασμένες από τον εκπαιδευτικό. Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι το κατά πόσο η διδακτική στάση ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν από μόνοι τους. Περισσότερα επί του συγκεκριμένου ερωτήματος θα ακολουθήσουν στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

Κεφάλαιο 4ο – Συζήτηση με τους εκπαιδευτικούς

Κατά την διάρκεια των παρακολουθήσεων και της εγγραφής της εργασίας πραγματοποιήθηκαν αρκετές συζητήσεις με τους δυο εκπαιδευτικούς. Στο παρόν κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να συνδέσουμε τα λεγόμενα τους –και κατά επέκταση τις απόψεις και τα κίνητρα τους – με τις παρατηρήσεις που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων.

Στην περίπτωση του πρώτου εκπαιδευτικού οφείλουμε αρχικά να αναφέρουμε ότι είναι απόλυτα συνειδητοποιημένος πως ορισμένες από τις διδακτικές του επιλογές θα ήταν δύσκολο να εφαρμοστούν σε ένα μη πειραματικό Γυμνάσιο. Όπως μας δήλωσε ο ίδιος, όταν επιχείρησε να προσθέσει επιπλέον στοιχεία στον τρόπο διδασκαλία του, αντιμετώπισε δυσκολίες από το γενικότερο σχολικό περιβάλλον του μη πειραματικού σχολείου που εργαζόταν. Τις δυσκολίες αυτές δεν τις αντιμετωπίζει πλέον καθώς στο πειραματικό έχει αναλάβει εξ ολοκλήρου τα τμήματα της Τρίτης Γυμνασίου και έχει την δυνατότητα να «βασίζει το μάθημα σε όποια δραστηριότητα κρίνει ότι θα προσφέρει στους μαθητές τα απαραίτητα διδακτικά οφέλη». Όσον αφορά την δραστηριότητα που παρακολουθήσαμε μας δηλώνει ότι «ήθελα να εισάγω τις έννοιες των γραμμικών συστημάτων με αυτήν, να την δώσω στους μαθητές πριν να έχουν διδαχτεί τις έννοιες». Ο απώτερος σκοπός του ήταν «να συνειδητοποιήσουν την λογική πίσω από τις μεθόδους, πως προέκυψαν δηλαδή αυτές» ενώ φαινόταν πεπεισμένος ότι «στο σχολείο και ειδικά στο Λύκειο, στο ογδόντα με ενενήντα τις εκατό των περιπτώσεων αναλωνόμαστε στην εκμάθηση κανόνων και μεθοδολογιών, ειδικά όταν έχεις το βάρος των εξετάσεων στις δυο τελευταίες τάξεις» για να καταλήξει ότι «έχω πάρει την απόφαση στο γυμνάσιο, ειδικά τώρα που είμαι στο πειραματικό, να επιλέγω μια ροή διδασκαλίας που θα δίνει έμφαση στην κατανόηση».

Η μέθοδος της αντικατάστασης έχει αναμφισβήτητα μια έντονη αλγεβρική και μεθοδολογική χροιά, ωστόσο η εισαγωγή της μεθόδου έγινε μέσω μια δραστηριότητας, στο τέλος της οποίας οι μαθητές θα έπρεπε να γενικεύσουν. «Θέλω να τους δώσω την ευκαιρία να κατασκευάσουν την μέθοδο από το μηδέν, θα ήταν πιο εύκολο για μένα να τους την διδάξω παρουσιάζοντας τους την μεθοδολογία, αλλά πιστεύω ότι δεν θα είχε το ίδιο διδακτικό όφελος». Ωστόσο, ο εκπαιδευτικός αναγνωρίζει ότι «αν λάβουμε υπόψη μας ότι το σύστημα εξετάσεων απαιτεί μια συνεχή εφαρμογή μεθοδολογιών, υπάρχουν φορές που αναρωτιέμαι για το διδακτικό όφελος που προσπαθώ να τους προσφέρω». Δεν επιθυμούμε να επεκταθούμε στο κατά πόσο το είδος των εξετάσεων επηρεάζει τον τρόπο διδασκαλίας, αλλά δεν θεωρούμε πως είναι τυχαίο το γεγονός πως και οι δυο εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε αυτό, όταν τους ζητήθηκε να σχολιάσουν τις διδακτικές τους επιλογές.

Υπενθυμίζουμε ότι ο εκπαιδευτικός άφηνε συχνά το μάθημα να περιστρέφεται γύρω από τους συλλογισμούς των μαθητών, δίνοντας τους την ευκαιρία να καθορίσουν ως ένα βαθμό την ροή του μαθήματος. Ο ίδιος ισχυρίζεται ότι η βαθύτερη κατανόηση των εννοιών έχει ως προϋπόθεση τον αυξημένο τους ρόλο. «Επιθυμώ από αυτούς να συμμετέχουν ενεργά στη τάξη, για αυτό και ψάχνω τρόπους διδασκαλίας για να τους εμπλέξω εποικοδομητικά στη ροή του μαθήματος». Υπενθυμίζουμε επίσης, ότι στα τμήματα του πρώτου εκπαιδευτικού καταγράφηκαν με μεγάλη συχνότητα αρκετές από τις πρακτικές που η βιβλιογραφία συνδέει με την ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να γενικεύουν. Όταν ερωτήθηκε επ’ αυτού ο εκπαιδευτικός απάντησε ότι «θέλω να τους δίνω συχνά τον λόγο και θέλω συνέχεια να τους προκαλώ να δικαιολογήσουν τους συλλογισμού τους ακόμα και αν κάνουν λάθος». Αν και δεν μας το δήλωσε ο ίδιος φαίνεται ότι προσπαθεί να μεταβεί από τον παραδοσιακό ρόλο ενός εκπαιδευτικού σε αυτό του συντονιστή και καθοδηγητή. Αυτές οι πεποιθήσεις είχαν ως αποτέλεσμα στα τμήματα που παρακολουθήσαμε να επιχειρήθηκε συχνά ένα είδος συλλογικής γενίκευσης.

Όσον αφορά τον δεύτερο εκπαιδευτικό, από τις πρώτες συζητήσεις μαζί έγινε αντιληπτό πως συνειδητά έχει επιλέξει να ακολουθεί ένα τρόπο διδασκαλίας που θα συνδυάζει στοιχεία «από πιο παραδοσιακές διδασκαλίες, όπου ο καθηγητής είχε τον απόλυτο έλεγχο της τάξης, αλλά χωρίς αυτός να αποτελεί φόβητρο για τους μαθητές». Ο εκπαιδευτικός μας τόνισε ότι «δεν θέλω να με φοβούνται, ούτε εμένα ούτε τα μαθηματικά, θέλω όμως να είναι συγκεντρωμένοι και εγώ θα προσπαθήσω να τους δώσω όσα περισσότερα εφόδια μπορώ για την συνέχεια των μαθητικών τους χρόνων». Όταν του αναφέραμε τις μη παραδοσιακές διδασκαλίες, όπως RME και IBL, μας ξεκαθάρισε πως «έχω στο παρελθόν προσπαθήσει να αλλάξω τον τρόπο διδασκαλίας μου, αλλά πιστεύω ότι δεν υπήρχε κάποια ουσιαστική διαφορά. Πίστεψε με, είμαι απόλυτα συνειδητοποιημένος ότι είμαι πιο παραδοσιακός, αλλά αυτό δεν συμβαίνει επειδή βαριέμαι ή δεν ενδιαφέρομαι να δοκιμάσω κάτι άλλο».

Όταν τον ρωτήσαμε για το αν πιστεύει πως θα ήταν πιο ωφέλιμο για τους μαθητές να κατασκευάζουν ή να ανακαλύπτουν ως ένα βαθμό οι ίδιοι την γνώση και κατά επέκταση να προβαίνουν σε γενικεύσεις στις οποίες συμμετείχαν ενεργά, ο εκπαιδευτικός μας απάντησε ότι «σίγουρα θα έχει και αυτό το δικό του όφελος, αλλά στο τέλος της ημέρας θα μπορούν να λύνουν ένα δύσκολο γραμμικό σύστημα; Θα έχουν μάθει τις έννοιες των ευθειών που θα τους είναι τόσο απαραίτητες στο μέλλον, εκτός από τα μαθηματικά και για την φυσική; Αυτά θέλω να σιγουρέψω, ξέρω τι χρειάζονται για τη συνέχεια, ήμουν τόσα χρόνια διορισμένος σε Λύκειο. Τώρα που είμαι στο Γυμνάσιο, είναι μεγάλη ηθική ικανοποίηση για μένα να μαθαίνω ότι κάποιο από τα τμήματα στα οποία δίδαξα, τα πάει περίφημα στο Λύκειο γιατί είχαν γερές βάσεις». Όταν ερωτήθηκε για το αν οι βάσεις που αναφέρει είναι κυρίως μεθοδολογικές, η συζήτηση κατέληξε για άλλη μια φορά στο είδος των εξετάσεων του εκπαιδευτικού μας συστήματος. «Προσπαθώ να τους δώσω όσα περισσότερα ερεθίσματα μπορώ, αναφέροντας για παράδειγμα γεγονότα από την ιστορία των μαθηματικών, θέτοντας τους ερωτήσεις-γρίφους όπως *«ποιος είναι ο αμέσως προηγούμενος αριθμός του 3;»* αλλά όταν πρόκειται για σημεία της ύλης που πρέπει να ξέρουν οπωσδήποτε, εκεί σίγουρα θα είμαι πιο αυστηρός και μεθοδολογικός, αυτά που θα χρειαστούν για το μέλλον τους ας τα μάθουν και απέξω από το να μην τα μάθουν καθόλου». Για τον αρκετό διδαχτικό χρόνο που αφιέρωσε σε επίλυση γραμμικών συστημάτων μας ανάφερε ότι «είχα υπολογίσει την εξέλιξη των μαθημάτων μέσα στη χρονιά ώστε να έχουμε αρκετό χρόνο που θα αφιερώναμε σε επίλυση αλγεβρικών συστημάτων. Θέλω να αναπτύξουν τις αλγεβρικές τους ικανότητες, δεν θέλω να πάνε στο Λύκειο και να μην έχουν μια άνεση με τις μεταβλητές και τις αλγεβρικές παραστάσεις»

Οι απόψεις και πεποιθήσεις του δεύτερου εκπαιδευτικού που καταγράψαμε στις παραπάνω παραγράφους, πιστεύουμε πως συσχετίζονται με το γεγονός πως στα μαθήματα που παρακολουθήσαμε, οι ευκαιρίες που είχαν οι μαθητές για να γενικεύσουν εντοπίζονταν κυρίως στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν τους γενικευμένους κανόνες που του παρουσιάζονταν, σε αποκλειστικό σχεδόν βαθμό, από τον εκπαιδευτικό. Γίνεται επίσης σαφές ότι η παρατήρηση αυτή οφείλεται σε απόλυτα συνειδητοποιημένες διδακτικές επιλογές του εκπαιδευτικού, οι οποίες είχαν σαν βασικό κριτήριο το «πως οι μαθητές θα προετοιμαστούν, όσο το δυνατόν καλύτερα, για τα μετέπειτα σχολικά τους χρόνια»

Κεφάλαιο 5ο – Συζήτηση

Ξεκινώντας την παρούσα εργασία είχαμε την προσωπική πεποίθηση πως εξαιτίας της φύσης της επιστήμης των μαθηματικών, είναι αναμενόμενο η διδασκαλία τους να προσφέρει αρκετές ευκαιρίες στους μαθητές να προβούν σε γενικεύσεις. Κατά την διάρκεια των παρακολουθήσεων όλα τα τμήματα βρίσκονταν στο κεφάλαιο των γραμμικών συστημάτων, βασικός διδακτικός σκοπός του οποίου είναι οι μαθητές να μπορούν να επιλύουν γραφικά και αλγεβρικά ένα γραμμικό σύστημα. Ωστόσο είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτο ότι παρά τις διαφορές στις δύο διδασκαλίες και την μεθοδολογική χροιά του κεφαλαίου, σε όλα τα τμήματα καταγράφηκαν διδακτικές στιγμές και περιστατικά στα οποία οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να γενικεύσουν. Αυτή η αρχική μας παρατήρηση πιστεύουμε πως καταδεικνύει την αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών, υπό την έννοια ότι ως μάθημα είναι συνυφασμένο με τους γενικευμένους συλλογισμούς και τις διαδικασίες αποδείξεως αυτών. Παρόλο που υπάρχουν στιγμές που η γενίκευση είναι δύσκολο να εντοπιστεί, ή να προσδιοριστεί η μορφή της, μια πιο βαθιά ανάλυση των δεδομένων θα αναδείξει τις στιγμές αυτές.

Στην βιβλιογραφική ανασκόπηση τονίσαμε το πώς η έννοια της γενίκευσης εξελίσσεται ταυτόχρονα με την επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών. Ανεξάρτητα από την ερευνητική σκοπιά που προσεγγίσαμε την έννοια, είναι αξιοσημείωτο το ότι στην προσπάθειά μας να αναλύσουμε τα δεδομένα και να εντοπίσουμε τις στιγμές στις οποίες η γενίκευση εμφανίζεται μέσα στην τάξη, η διαχωριστική γραμμή μεταξύ της επίτευξης της γενίκευσης και της κατανόησης των νέων εννοιών, ήταν δυσδιάκριτη. Από το πλήθος των ορισμών που παρουσιάστηκαν στην βιβλιογραφική ανασκόπηση συμπεραίνουμε την συγγενική σχέση μεταξύ των δυο εννοιών και κατά τη διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων η στενή αυτή σχέση επιβεβαιώθηκε, σε τόσο μεγάλο βαθμό που οι έννοιες ταυτίστηκαν. Η δεύτερη αυτή παρατήρηση πιστεύουμε ότι χρίζει ιδιαίτερης αναφοράς, καθώς θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι στα μαθηματικά, είτε οι εκπαιδευτικοί το συνειδητοποιούν είτε όχι, το να ισχυριστούμε πως ένας μαθητής κατανόησε τις έννοιες που διδάχτηκε, συχνά ταυτίζεται με το ότι αυτός προέβη στις κατάλληλες γενικεύσεις. Είτε χτίζει με την βοήθεια του εκπαιδευτικού τον γενικευμένο συλλογισμό από την αρχή, είτε απλά καλείται να κατανοήσει μια μαθηματική έννοια που του παρουσιάστηκε ολοκληρωμένη, άρα να κατανοήσει και την γενικότητα της, είναι δύσκολο να φανταστούμε την επίτευξη νέας γνώσης χωρίς την ύπαρξη της γενίκευσης.

Αυτές οι δυο παρατηρήσεις προέκυψαν και στα δυο σχολικά περιβάλλοντα που παρακολουθήσαμε και είναι ανεξάρτητες από τις όποιες διαφορές καταγράφηκαν. Παρόλο που στην παρούσα εργασία πραγματοποιήσαμε μελέτη δυο διαφορετικών περιπτώσεων, οι παρατηρήσεις αυτές – ότι πρώτον η γενίκευση θα εμφανιστεί ανεξάρτητα από το κεφάλαιο ή τις διδακτικές επιλογές και δεύτερον ότι η επίτευξη της γενίκευσης συχνά ταυτίζεται με την κατανόηση και αποδοχή της νέας γνώσης – πιστεύουμε ότι έχουν μια γενικότερη ισχύ, μπορούν δηλαδή να επαληθευτούν σε ένα οποιοδήποτε τμήμα. Ο ισχυρισμός αυτός δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί από την παρούσα εργασία, ωστόσο θα πρέπει να απασχολήσει την ερευνητική κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών. Υπάρχουν πολλές έρευνες που πραγματεύονται την έννοια της γενίκευσης, αρκετές από τις οποίες παρουσιάστηκαν στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, στις περισσότερες όμως δεν τονίζεται ότι ευκαιρίες για γενίκευση θα εμφανιστούν ανεξάρτητα των διδακτικών επιλογών του εκπαιδευτικού. Η χρησιμότητα της γενίκευσης είναι αδιαμφισβήτητη για την επιστήμη των μαθηματικών και οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να είναι συνειδητοποιημένοι πως και η διδασκαλία των μαθηματικών χρειάζεται να είναι πλούσια σε ευκαιρίες για τους μαθητές να γενικεύσουν, ώστε να μπορέσουν να εντοπίσουν τις στιγμές αυτές και να τις διαχειριστούν όπως αυτοί κρίνουν καλύτερα. Ωστόσο είναι πιθανό να διαφέρουν οι τρόποι που ένας εκπαιδευτικός πιστεύει πως πρέπει να διαχειριστεί την γενίκευση και αυτό έγινε απόλυτα σαφές στις δυο περιπτώσεις που μελετήσαμε στην παρούσα εργασία. Όσον αφορά λοιπόν τις επιμέρους διαφορές των δυο εκπαιδευτικών, από τα πρώτα στάδια της ανάλυση μας έγινε φανερό πως οι δύο διαφορετικοί τρόποι διδασκαλίας επηρέαζαν το είδος των ευκαιριών που παρουσιάστηκαν στους μαθητές για να γενικεύσουν, καθώς διαμόρφωναν διαφορετικές συνθήκες και περιβάλλον διεξαγωγής του μαθήματος.

Στην περίπτωση του πρώτου εκπαιδευτικού συναντήσαμε σχολικά τμήματα στα οποία οι μαθητές είχαν μεγαλύτερη μαθηματική ελευθερία. Η επίτευξη της γενίκευσης ταυτιζόταν με την κατανόηση της νέας ύλης, γεγονός το οποίο ήταν αναμενόμενο από τις θεωρίες των RME και IBL. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η εισαγωγή των μαθητών στις έννοιες, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός προσπάθησε με μια σειρά ρεαλιστικών δραστηριοτήτων να δώσει στην τάξη την ευκαιρία να ανακαλύψει και να χρησιμοποιήσει την αλγεβρική μέθοδο της αντικατάστασης. Το διδακτικό του εγχείρημα, το οποίο ταυτίσαμε με το εγχείρημα μιας συλλογικής γενίκευσης (Ellis, 2011), αποσκοπούσε στο να γενικεύσουν αρχικά αυτήν την μέθοδο και να συνειδητοποιήσουν ότι την διαδικασία και το σκεπτικό που χρησιμοποίησαν στα συγκεκριμένα προβλήματα μπορούν να τα εφαρμόζουν και σε άλλες αντίστοιχες περιπτώσεις. Ο ίδιος πιστεύει ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών θα είναι πιο εφικτή, αν αυτοί έχουν ενεργό ρόλο στην ανακάλυψη της μεθόδου και κατά επέκταση στην συνειδητοποίηση της γενικότητας της. «Τα διδακτικά οφέλη δεν θα ήταν τα ίδια αν η μέθοδος τους παρουσιαζόταν σαν μια έτοιμη συνταγή» μας δήλωσε ο ίδιος, όταν ερωτήθηκε γιατί επέλεξε τον τρόπο αυτό.

Στο δεύτερο σχολείο συναντήσαμε έναν καθηγητή που είχε τον απόλυτο έλεγχο της τάξης και οι μαθηματικές ελευθερίες των μαθητών περιορίζονταν κυρίως στο να κατανοούν όσα ο ίδιος παρουσίαζε στο τμήμα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα η πηγή της γενίκευσης να ήταν συχνά ο ίδιος, ειδικά αν λάβουμε υπόψη ότι οι περισσότερες ερωτήσεις που έθετε στους μαθητές είχαν μια έντονη καθοδηγητική χροιά και αποσκοπούσαν στο να συνεχιστεί η διδακτική πορεία που είχε χαράξει, χωρίς ιδιαίτερες αποκλίσεις. Αυτό ωστόσο δεν σημαίνει ότι οι μαθητές δεν προέβηκαν σε γενικεύσεις αλλά το ότι είχαν αρκετά περιορισμένο ρόλο στην εξαγωγή αυτών. Αν όντως κάποιοι από το τμήμα πραγματοποίησαν τις νοητικές διαδικασίες που η έρευνα χαρακτηρίζει σαν γενίκευση, αυτό θα συνέβαινε γιατί κατανόησαν τις μαθηματικές έννοιες που τους παρουσιάστηκαν και συνειδητοποίησαν την γενικότητα που συνοδεύει τον εκάστοτε μαθηματικό συλλογισμό. Ο ίδιος πίστευε ότι με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα αρχίσουν να αντιλαμβάνονται την νέα ύλη και τις συνδέσεις της με τα προηγούμενα και μέσω των ασκήσεων που θα λύσουν θα αποκτήσουν μια βαθύτερη κατανόηση.

Καταγράφοντας τις διδακτικές επιλογές που εφάρμοσαν οι δύο εκπαιδευτικοί εντοπίζεται μια βασική διαφορά σχετικά με τον ρόλο που είχαν οι μαθητές στις δύο περιπτώσεις. Αφού ο πρώτος εκπαιδευτικός επιθυμούσε το σύνολο της τάξης να έχει ενεργό ρόλο στην εισαγωγή της νέας ύλης και κατά επέκταση περισσότερες ευκαιρίες για γενίκευση, ήταν υποχρεωμένος να δώσει μεγαλύτερες ελευθερίες στους μαθητές και να βασίσει ένα μεγάλο μέρος του μαθήματος στους δικούς τους συλλογισμούς. Ενώ, αφού ο δεύτερος εκπαιδευτικός επιθυμούσε να ελέγχει απόλυτα την εξέλιξη του μαθήματος, οι μαθητές συμμετείχαν επιφανειακά στην εισαγωγή της νέας ύλης και όταν τους δινόταν αρκετός χρόνος για να εκφραστούν, ήταν κυρίως για να επιλύσουν κάποια άσκηση. Οι διδακτικές αυτές επιλογές ταυτίζονται απόλυτα με τις επιμέρους απόψεις των εκπαιδευτικών για τον απώτερο σκοπό της διδασκαλίας τους, καθώς ναι μεν και οι δύο αποσκοπούν στο να αποκομίσουν οι μαθητές τους όσο το δυνατόν μεγαλύτερο διδακτικό όφελος, αντιλαμβάνονται όμως με διαφορετικό τρόπο το πώς το όφελος αυτό θα επιτευχθεί. Ο πρώτος εκπαιδευτικός πιστεύει ότι δίνοντας μεγαλύτερη ελευθερία και έναν αυξημένο ρόλο στην διεξαγωγή του μαθήματος στους μαθητές, η μαθηματική τους αντίληψη – αρά και η δυνατότητα τους να γενικεύουν – θα αναπτυχθεί περισσότερο. Ο δεύτερος ενστερνίζεται την άποψη πως η εισαγωγή της νέας γνώσης οφείλει να πραγματοποιηθεί με την αυστηρή καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και μέσω των ασκήσεων που θα ακολουθήσουν της παράδοσης, οι μαθητές θα κατανοήσουν περεταίρω τις έννοιες και θα αποκτήσουν τα εφόδια που θα τους χρειαστούν για τις μελλοντικές τάξεις.

Για να γίνει πιο συγκεκριμένη η διαφορά στην φιλοσοφία των δυο εκπαιδευτικών, αξίζει να εστιάσουμε στον τρόπο που αξιοποίησαν τα προβλήματα. Στην περίπτωση του πρώτου τα ρεαλιστικά προβλήματα αποτέλεσαν την βάση διεξαγωγής του μαθήματος και εισαγωγής της νέας γνώσης. Στην περίπτωση του δευτέρου, οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με προβλήματα αφού είχαν διδαχθεί τις έννοιες του κεφαλαίου και είχαν λύσει αρκετές αλγεβρικές ασκήσεις. Τα τρία συνολικά προβλήματα που τέθηκαν στην τάξη αντιμετωπίστηκαν σαν ασκήσεις επιπλέον δυσκολίας, επειδή οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν το γραμμικό σύστημα πριν το επιλύσουν. Το εύλογο ερώτημα που τίθεται είναι ποια μέθοδος από τις δύο θα αποδώσει το μεγαλύτερο διδακτικό όφελος όσον αφορά την γενίκευση; Αν λάβουμε υπόψη μας τις θεωρίες των RME και IBL και την βιβλιογραφία που μελετά τις διδακτικές πρακτικές και στρατηγικές που ενισχύουν την γενίκευση, η απάντηση κλίνει περισσότερο προς την πρώτη περίπτωση.

Ωστόσο δεν επιθυμούμε να συγκρίνουμε τις διδασκαλίες των δύο εκπαιδευτικών, πάρα μόνο να αναδείξουμε το πώς οι διαφορές αυτές επηρεάζουν την έννοια που μελετάμε. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως το προφίλ του δεύτερου εκπαιδευτικού συναντιέται πιο συχνά στα σχολεία της χώρας μας, σε σχέση με αυτό του πρώτου και σε καμιά περίπτωση δεν επιθυμούμε να απαξιώσουμε τις πρακτικές που εντάσσονται σε πιο παραδοσιακές διδασκαλίες. Όπως τονίσαμε άλλωστε στις προηγούμενες παραγράφους, η έννοια της γενίκευσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τα μαθηματικά και ευκαιρίες για γενίκευση παρουσιάζονται ανεξάρτητα των διδακτικών επιλογών.

Ένα βασικό θέμα που προέκυψε από τις συζητήσεις με τους εκπαιδευτικούς είναι η επιρροή που το είδος των εξετάσεων, με αποκορύφωμα τις πανελλήνιες, έχει στην διδασκαλία τους. Αυτό αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την παρούσα έρευνα καθώς ένα μάθημα που θα παρέχει περισσότερες ελευθερίες στους μαθητές, βασική προϋπόθεση της έρευνας για να αναπτυχθούν οι ικανότητες αυτών να γενικεύουν, θα περιορίζει τον διδακτικό χρόνο που απομένει για την εστίαση σε μεγάλο πλήθος ασκήσεων και μεθοδολογιών, εστίαση που κρίνεται απαραίτητη για την καλή επίδοση στις εξετάσεις. Αυτός ο συνειρμός διατυπώθηκε συχνά από τον δεύτερο εκπαιδευτικό, ο οποίος έθεσε ως βασικό σκοπό της διδασκαλίας του την προετοιμασία της τάξης για όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα στο τέλος της χρονιάς. Το να περιορίζει το ρόλο τους στο να κατανοούν την γενίκευση που τους παρουσιάζει και όχι να αφιερώνει ολόκληρες διδακτικές ώρες για να κατασκευάσει με τους μαθητές τον γενικευμένο συλλογισμό, του δίνει το απαραίτητο χρονικό περιθώριο να εστιάσει την προσοχή της τάξης σε μεγάλο αριθμό ασκήσεων. Υπενθυμίζουμε επίσης, πως ο πρώτος εκπαιδευτικός μας δήλωσε ότι όταν εργαζόταν σε μη πειραματικό σχολείο και προσπάθησε να προσθέσει καινούργιες πτυχές στην διδασκαλία του συνάντησε αρκετές δυσκολίες και αντιρρήσεις από το σχολικό περιβάλλον. Ένα μεγάλο μέρος των αντιρρήσεων αυτών οφειλόταν στο γεγονός πως ο τρόπος διεξαγωγής του μαθήματος του δεν εστίαζε σε τόσο μεγάλο βαθμό στην επίλυση ασκήσεων και μεθοδολογιών και τα προβλήματα που έθετε στους μαθητές δεν συμβάδιζαν απόλυτα με το είδος των ασκήσεων που οι υπόλοιποι καθηγητές έθεταν στα τμήματα τους, γεγονός που δημιουργούσε πρόβλημα στην επιλογή θεμάτων για τις τελικές εξετάσεις.

Κλείνοντας λοιπόν την εργασία και εστιάζοντας στη γενικότερη εικόνα, προκύπτουν συγκεκριμένα ερωτήματα που οφείλουν να απασχολήσουν την κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών. Το πρώτο από αυτά είναι το πώς μπορεί ένας εκπαιδευτικός να προσθέσει διαφορετικά στοιχεία στην διδασκαλία του, επειδή πιστεύει πως τα οφέλη θα είναι περισσότερα για τους μαθητές τους – για παράδειγμα θα τους προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες να προβούν σε γενικεύσεις, όταν βρίσκεται σε ένα περιβάλλον που εστιάζει περισσότερο στην εφαρμογή μεθοδολογιών; Δεν είναι σκοπός της εργασίας μας να απαντήσει το συγκεκριμένο ερώτημα, το οποίο άλλωστε χρίζει την δική του έρευνα και σίγουρα δεν υπάρχει μια αντικειμενική, καθολικά αποδεκτή απάντηση. Ένα δεύτερο ερώτημα είναι το κατά πόσο τα οφέλη μιας διαφορετικής διδασκαλίας είναι μετρήσιμα, όταν οι μαθητές θα κρίνονται με ένα σύστημα εξετάσεων που διέπεται με την τωρινή φιλοσοφία. Μία σύντομη απάντηση θα μπορούσε να είναι πως τα οφέλη αυτά παρόλο που ίσως να μην είναι έντονα ορατά στις εξετάσεις, θα καλλιεργήσουν πιο βαθιά την μαθηματική σκέψη των μαθητών, μέρος της οποίας είναι και η ικανότητα γενίκευσης και θα τους φέρουν ένα βήμα πιο κοντά στον μαθηματικό γραμματισμό.

Βιβλιογραφία

Abramovich, S. (2015). Educating teachers to pose mathematical problems in the digital age:Toward alternative ways of curriculum design. IMVI Open Mathematical Education Notes, 5(2) (σσ 115-136)

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (1996). Situated learning and education. *Education Researcher*

Becker, J., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, σσ: 465–472)

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebraintervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, **46**(1) (σσ: 39-87)

Blanton, M., & Stylianou, D. (2010, April). *Discourse and knowing in undergraduate students' understanding of proof: What difference do our words make?*

Bruder, R., & Prescott, A. (2013.) Research evidence on the benefits of IBL, *ZDM: the international journal on mathematics education*

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*

Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (σσ: 155–162).
Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2002). The Transfer Dilemma. *The Journal of the Learning Sciences*

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*

Davydov, V. V. (1990). *Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (σελ. 95-126)

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical Thinking*

Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed), *Proceedings of the 25th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions. *Journal in Research in Mathematics Education*, **42** (σσ 308-345).

Ellis, A. B. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction*, **25** (σσ: 439 – 478).

Ellis, A. B. (2007). Connections between Generalizing and Justifying: Students' Reasoning with Linear Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, **38**(3) (σσ: 194–229).

Engle, R. A. (2006). Framing interactions to foster generative learning: A situative explanation of transfer in a community of learners classroom. *The Journal of the Learning Sciences*

English, L. D., & Warren, E. A. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*

Fischer, B. B., & Fischer, L. (1979). Styles in Teaching and Learning. *Educational Leadership, σσ. 245-254.*

Glenberg, A. M., Witt, J. K., & Metcalfe, J. (2013). From the revolution to embodiment 25 years of cognitive psychology. *Perspectives on Psychological Science*

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*

Hutchins, E. (1993). Learning to Navigate. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding Practice: Perspectives on Activity in Context*

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general inmathematics education. *Educational Studies in Mathematics*

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. *China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*

Hickey, D. T., Kindfteld, A. C., Horwitz, P., & Christie, M. A. (1999). Advancing educational theory by enhancing practice in a technology-supported genetics learning environment. *Journal of Education*

Jurow, A. S. (2004). Generalizing in interaction: Middle school mathematics students making mathematical generalizations in a population-modeling project. *Mind, Culture, and Activity*,**11**(4): (σελ: 279-300)

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T.Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Στο D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (σσ. 390–419)

Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In D. Mewborn, P. Sztajn, D.

Κυνηγός Χ.(2006). Το μάθημα της Διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη διδακτική των Μαθηματικών: από την Έρευνα στην Σχολικά Τάξη. *Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα*

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, **7**(3) (σσ. 231-258).

Latour, B. (1987). *Science in action: How to follow scientists and engineers through society*. Cambridge, MA: Harvard University Press

Lobato, J. E., Ellis, A. B., & Muñoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional environment afford students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*

Lobato, J. E. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and Vice Versa. *American Educational Research Journal*

Lobato, J. E. (2006). Alternative perspectives on the transfer of learning: History, issues, and challenges for future research. *The Journal of the Learning Sciences*

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (σσ. 65-86). Springer

Maaß, K.& Artigue, M. (2013) Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis *ZDM Mathematics Education (2013) 45:779–795*

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Opdenakker, M.-C., & Van Damme, J. (2006). Teacher characteristics and teaching styles as effectiveness enhancing factors of classroom practice. Teaching and Teacher Education(22), σσ. 1-21.

Piaget, J., & Henriques, G. (1978). *Itudes d'ıpistemologie et de psychologie gınıtiques: Tome 36. Recherches sur la gınıralisation* [Studies of genetic epistemology and psychology: Vol. 36. Research on generalization]. Paris: Presses Universitaires de France

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 5–29.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S., & Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? Στο J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (σσ. 389-412).

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, (σελ: 15–39)

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics. *Teaching and Teacher Education*(17), (σσ. 213-226).

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (σελ: 147–164)

Strachota,S. (2016). Conceptualizing Generalization. IMVI Open Mathematical Education Notes, vol. 6

Vygotsky, L. S. (1978). Internalization of Higher Psychological Functions. In M. W. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (Eds.), *Mind in society* (σσ: 52-91). Cambridge, MA: Harvard University Press.

White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, (σσ: 1693 – 1700)

Zulkardi, H. (2010). How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach? *Από την ιστοσελίδα:* http://www.reocities.com/ratuilma/rme.html