Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Κατεύθυνση: Μαθηματικά και Εκπαίδευση
Υποκατεύθυνση: Διδακτική των Μαθηματικών

Τίτλος: Αντιλήψεις και στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα.

Διπλωματική μελέτη της:
Αναστασίας Σπανούδη
Αριθ. Μητρώου: 211306

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
Χριστίνα Μισαηλίδου

Αθήνα, Μάρτιος 2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την καθηγήτρια μου και επιβλέπουσα της εργασίας Χριστίνα Μισαηλίδου για την ακαδημαϊκή της βοήθεια αλλά και για την ηθική της υποστήριξη σε ότι αφορά το περιεχόμενο και την διεξαγωγή της έρευνας μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την κυρία Βουδούρη και τον κύριο Μπαραλή που δέχτηκαν να είναι οι συνεπιβλέποντες της εργασίας μου.

Οφείλω επίσης ένα ευχαριστώ στις/ους δασκάλες/ους που συμμετείχαν με προθυμία στην έρευνα και ιδιαίτερα στις/ους δασκάλες/ους του δημοτικού σχολείου που φοίτησα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη:

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αφορμάται από άλλες έρευνες και μελέτες οι οποίες διερεύνησαν τη στάση των μαθητών απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, όπως αυτή των Verschaffel, De Corte, και Borghart (1997) στην οποία αποδεικνύεται η τάση των μαθητών να απομονώνουν τη γνώση της πραγματικότητας κατά την επίλυση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων στο σχολείο. Εναρκτήριο σημείο της παρούσας έρευνας είναι η υπόθεση που κάνει ο Gravemeijer (1997) σε σχέση με την αντίληψη που έχουν η ίδιοι οι ίδιοι για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα (δομή, περιεχόμενο και διδασκαλία της λύσης τους) η οποία δεν τους επιτρέπει να διεκδικήσουν αλλαγές ως προς τα λεκτικά προβλήματα που περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία. Για να διερευνηθούν λοιπόν οι αντιλήψεις και οι στάσεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί ως προς τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, διατυπώθηκε το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου ενώ στο δεύτερο μέρος μελετάται το αν οι εκπαιδευτικοί απομονώνουν και οι ίδιοι την γνώση της πραγματικότητας κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Συνεπώς διερευνάται η σχέση που έχει η στάση των μαθητών να απομονώνουν τη γνώση της καθημερινότητα από τα σχολικά μαθηματικά και να τα θεωρούν κάτι που βρίσκεται έξω από αυτούς με την στάση των ίδιων των εκπαιδευτικών και το αν οι ίδιοι απομονώνουν τη γνώση αυτή από τα σχολικά μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα η παρούσα εργασία μελετά: α) Πως αντιλαμβάνονται οι δάσκαλοι το λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα και το ρόλο του στη διδασκαλία των μαθηματικών β) Ποιος κατά τη γνώμη των δασκάλων είναι ο ρόλος του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών και γ) τις απόψεις των δασκάλων σχετικά με το ρόλο των ρεαλιστικών στοιχείων του πλαισίου ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος στην μαθηματική αναπαράσταση και λύση του προβλήματος.

Abstract:

This investigation is based on other studies that explore students' attitudes towards verbal mathematical problems such as Verschaffel's, De Corte's, and Borghart's (1997). They tried to demonstrate the students' tendency to isolate the knowledge that gained from the ordinary life from the process of solving a word problem during maths at school. The starting point of this research is the hypothesis made by Gravemeijer (1997) regarding teachers' self-perception of verbal mathematical problems (the structure, the content and the teaching of their solution) which does not allow them to claim changes regarding the verbal problems contained in the school books. To investigate the teachers' perceptions of verbal mathematical problems, we created a double part questionnaire. In the first part of the questionnaire we articulated some questions that their answers will reflect how primary school teachers consider the word maths mathematical problems. The second part examines whether teachers themselves isolate the knowledge of reality when solving mathematical problems. Therefore, we explore, the relationship between the attitude of students to isolate the knowledge of everyday life from school mathematics and consider them as something outside of them and the attitude of the teachers and whether they isolate this knowledge from school Mathematics. More specifically this paper studies the following questions: a) How do teachers perceive the mathematical problem and its role in the teaching of mathematics? b) What is the role of the word problems in the teaching process of mathematics according to the teachers and c) teachers' opinion about the role of realistic elements of the word problems' context in the mathematical representation and problem solving.

ΛΕΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Ο ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει τη στάση που έχουν οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Επίσης, κρίθηκε σημαντικό να υπάρξει ταυτόχρονη διερεύνηση της διαδικασίας της λύσης που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί και το κατά πόσο οι ίδιοι λαμβάνουν υπ' όψιν τους το ρεαλιστικό πλαίσιο των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων και τη γνώση μέσα από την εμπειρία της καθημερινής ζωής.

Επιπρόσθετα, θεωρήθηκε σημαντικό να διερευνηθούν και να ικανοποιηθούν κάποιοι επιμέρους αρχικοί στόχοι που μπήκαν στο πλαίσιο της έρευνας και αντιμετωπίστηκαν ως εξίσου σημαντικοί με τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα:

- Τι θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ρεαλιστικό πρόβλημα;
- Τους ικανοποιούν τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα;
- Πώς αξιολογούν τη διαδικασία της λύσης; Είναι το αποτέλεσμα ποιο σημαντικό ή η όλη διαδικασία;
- Λαμβάνεται υπ' όψιν το ρεαλιστικό πλαίσιο του λεκτικού προβλήματος κατά τη διαδικασία της επίλυσης;
- Απομονώνεται ή όχι η γνώση που αποκτήθηκε μέσα από την εμπειρία της καθημερινής ζωής κατά την επίλυση ενός προβλήματος;
- Προσπαθούν να εντοπίζουν τις λέξεις κλειδιά κατά την επίλυση μέσα στην διατύπωση του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος;

1.2 Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εναρκτήριο σημείο και αιτία εκπόνησης αυτής της εργασίας αποτέλεσε η διερεύνηση των στάσεων των εκπαιδευτικών απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα και ποιες είναι οι αιτίας που οδηγούν στην υιοθέτηση αυτών των στάσεων. Πιο συγκεκριμένα όμως, αφορμή για να ξεκινήσει η παρούσα έρευνα στάθηκε μια υπόθεση που έκανε ο Gravemeijer (1997) σε σχέση με την αντίληψη που έχουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα (δομή, περιεχόμενο και διδασκαλία της λύσης τους). Με βάση αυτή την υπόθεση ο Gravemeijer (1997) προσπαθεί να δώσει μια εξήγηση για τον λόγο που οι δάσκαλοι/ες δεν διεκδικούν κάποια βελτιστοποίηση όσον αφορά τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Η έρευνα αυτή λοιπόν, εκπονείται με αρχικό στόχο να διερευνήσει τις στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα και στην επίλυσή τους και κατ' επέκταση να απαντήσει ως ένα μέρος στην παραπάνω υπόθεση.

Αρχικά, με τον όρο "στάσεις" εννοούμε τις τάσεις του υποκειμένου να ανταποκρίνεται με κάποιο ομοιόμορφο τρόπο, ευμενώς ή δυσμενώς, έναντι συγκεκριμένων γεγονότων, ατόμων ή φορέων, αντικειμένων ή και μαθημάτων - των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων στην προκειμένη περίπτωση (Φιλίππου-Χρίστου, 1991). Συνεπώς, στην συγκεκριμένη εργασία, αρχικά θα διακρίνουμε την τάση που έχουν οι ίδιοι εκπαιδευτικοί να απομονώνουν τη μαθηματική γνώση που κατέκτησαν μέσα από την εμπειρία της καθημερινής ζωής από τα μαθηματικά στην τάξη καθώς επίσης και το κατά πόσο αυτό το γεγονός επηρεάζει και διαμορφώνει τη στάση τους ως προς την επίλυση των προβλημάτων κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Mcleod (1992), πολλές έρευνες χρησιμοποιούν τον όρο στάσεις (attitudes) στα πλαίσια μιας πιο γενικής ορολογίας η οποία περιλαμβάνει τις πεποιθήσεις μας για τα Μαθηματικά αλλά και για το εαυτό μας. Οι στάσεις, κατά τον Mcleod αναφέρονται σε συναισθηματικές αποκρίσεις (affective responses) οι οποίες περιλαμβάνουν είτε θετικά είτε αρνητικά συναισθήματα. Οι περισσότεροι ερευνητές που ασχολήθηκαν με τις στάσεις των μαθητών καταλήγουν στο συμπέρασμα πως οι στάσεις, ειδικότερα σε ό,τι έχει να κάνει με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, γεννιούνται και μεταβάλλονται ανάλογα με την επίδοση και την εικόνα που έχουν για τον εαυτό τους. Σε μια έρευνα που πραγματοποίησαν οι Hart & Walker (1993) καταλήγουν στο συμπέρασμα πως το ενδιαφέρον και τα κίνητρα των μαθητών για τα Μαθηματικά αυξάνονται όταν ασχολούνται με προβλήματα που ανήκουν στο πλαίσιο της καθημερινής πραγματικότητας και παρουσιάζουν χρησιμότητα και εκτός του σχολικού πλαισίου. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να πούμε πως η στάση των Μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά σχετίζεται άμεσα με την επίλυση και την κατανόηση λεκτικών Μαθηματικών προβλημάτων.

1.3 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

- Πώς αντιλαμβάνονται οι δάσκαλοι το λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα και το ρόλο του στη διδασκαλία των μαθηματικών;
- Ποιός κατά τη γνώμη των δασκάλων είναι ο ρόλος του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών;
- Ποιές οι απόψεις των δασκάλων σχετικά με το ρόλο των ρεαλιστικών στοιχείων του πλαισίου ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος (real world knowledge concerning the problems context, Verschaffel κ. συν. 1997) στην μαθηματική αναπαράσταση και λύση του προβλήματος.

1.4 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να δοθεί μια συνολική εικόνα της εργασίας θα παρουσιαστεί η δομή της ως προς τα κεφάλαια στα οποία επιμερίζεται και το περιεχόμενο αυτών.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** της εργασίας γίνεται μια παρουσίαση της βιβλιογραφίας η οποία χρησιμοποιήθηκε για να οροθετηθεί το θεωρητικό πλαίσιο όσον αφορά τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, το ρεαλιστικό ή μη- ρεαλιστικό τους πλαίσιο και τη διαδικασία επίλυσης τους. Αρχικά, γίνεται μια προσπάθεια ορισμού του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος και στη συνέχεια αποσαφηνίζεται η δομή και η έννοια του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος, ενώ γίνεται αναφορά και στις ήδη διαμορφωμένες αντιλήψεις των εκπαιδευτικών δε σχέση με αυτά τα δύο στοιχεία των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** η βιβλιογραφία περιορίζεται στην παρουσίαση της θεωρίας των ρεαλιστικών Μαθηματικών ως προς τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα γίνεται αναφορά στη δομή και στο περιεχόμενο που θα πρέπει να έχει ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα σύμφωνα με τα R.M.E.. Στη συνέχεια, παρατίθεται ένα παράδειγμα λεκτικού μαθηματικού προβλήματος σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο των R.M.E. ενώ αποσαφηνίζεται και ο ρόλος τους κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Έπειτα, γίνεται περιγραφή του όρου "Μαθηματικοποίηση" και ουσιαστικά γίνεται μια προσέγγιση ορισμού του τι σημαίνει "μαθαίνω Μαθηματικά" σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο των R.E.M.. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται συνοπτικά και άλλες εναλλακτικές θεωρίες μάθησης Μαθηματικών και ο ρόλος των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων μέσα σε αυτές ενώ επιχειρείται και ο διαχωρισμός τους ως προς τα κίνητρα και το περιεχόμενό τους.

Το **τέταρτο κεφάλαιο** είναι κυρίως αφιερωμένο στη λύση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων. Αρχικά γίνεται μια παρουσίαση του τι συμβαίνει κατά τη διαδικασία διδασκαλίας της λύσης και ποιος είναι ο στόχος τελικά αυτής της διαδικασίας. Επίσης θα παρατίθενται στοιχεία ερευνών τα οποία καταδεικνύουν τη στάση που οι έχουν οι μαθητές απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, το πως προχωρούν στη διαδικασία της λύσης καθώς και τι θεωρούν βασικό στόχο τους όταν επιλύουν ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα κατά την διδασκαλία. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται προτάσεις ερευνητών για το πως μπορεί να αλλάξει ο τρόπος που αντιμετωπίζονται τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών καθώς επίσης και η διαδικασία επίλυσης τους.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται όλα τα στοιχεία της έρευνας και περιγράφονται τα αποτελέσματα βάσει σχημάτων και πινάκων.

Τέλος, στο **έκτο κεφάλαιο** παρατίθενται τα συμπεράσματα ενώ γίνονται σχόλια πάνω στα αποτελέσματα της έρευνας σε σχέση με τη βιβλιογραφία και το σύνολο του θεωρητικού πλαισίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 ΛΕΚΤΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

2.1.1. Ορισμός του Λεκτικού Μαθηματικού Προβλήματος

Τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούν ένα πολύ οικείο συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τα μαθηματικά πρόβλημα ή λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, μπορούν να παίξουν διαφορετικό ρόλο κατά την διδασκαλία, ανάλογα με την στοχοθεσία και τη θεώρηση του εκπαιδευτικού. Στην παρούσα εργασία, με τον όρο λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα, θα αναφερόμαστε στα μαθηματικά προβλήματα που υπάρχουν κατά πλειοψηφία στα σχολικά βιβλία και σε αυτά που διαπραγματεύεται ο εκπαιδευτικός με τους μαθητές στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τι ορίζεται ως λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα λοιπόν;

Η Gerofsky (1996), εξετάζει τα μαθηματικά λεκτικά προβλήματα σε σχέση με τη διδασκαλία των Μαθηματικών και προσπαθεί να δώσει έναν ορισμό του "τι είναι ένα μαθηματικό λεκτικό πρόβλημα", εξετάζοντας τα κυρίως, μέσω της γλωσσικής και λογοτεχνικής οπτικής γωνίας. Θεωρεί λοιπόν, πως τα μαθηματικά προβλήματα είναι ένα κειμενικό είδος. Η Gerofsky (1999) υποστηρίζει ότι τα περισσότερα λεκτικά προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α. , ακολουθούν μια δομή τριών συστατικών στοιχείων η οποία είναι η παρακάτω:

1) μια **εισαγωγή** η οποία παρέχει πληροφορίες για τους ήρωες και την τοποθεσία της ιστορίας. (Αυτά τα στοιχεία δεν είναι συχνά απαραίτητα για την επίλυση του ίδιου του προβλήματος).

2) μια **σύνθεση πληροφοριών** οι οποίες καμιά φορά μπορεί να είναι και παραπλανητικές για τους απρόσεκτους

3) και τέλος, μια **ερώτηση**.

Αυτή η δομή των τυπικών λεκτικών προβλημάτων φαίνεται να βασίζεται στη δομή των αριθμητικών αλγορίθμων ή αλγεβρικών προβλημάτων και όχι σε δομή αφηγηματικών πλαισίων. Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής οδηγείται να διατυπώσει ουσιαστικά μια αλγεβρική εξίσωση ενός συνόλου μεταβλητών οι οποίες έχουν σχέση μεταξύ τους και συνδέονται με τη σταθερή συνθήκη της ισότητας. (Gerofsky,1999, p. 33)

Ο Radatz (1984) οπ. αναφ. στην Gerofsky (1996) επισημαίνει ότι κατά την επίλυση προβλημάτων, ένας αρχάριος μαθητής θα επικεντρωθεί στις ιστορίες και όχι στους αριθμούς. Τα μεγαλύτερα παιδιά, ωστόσο, προσπαθούν να οδηγηθούν σε μια λύση, ίσως χρησιμοποιώντας μια στρατηγική δοκιμής και λάθους, και συχνά πιστεύουν ότι τίποτα δεν είναι αδύνατον να λυθεί στα μαθηματικά.

Ο Radatz αναφέρει μάλιστα, πως τα παιδιά με μικρή μαθηματική εμπειρία θα προσπαθήσουν να αναλύσουμε την ιστορία πιο προσεκτικά, ενώ οι παλαιότεροι μαθητές έχουν μια συγκεκριμένη στάση απέναντι λεκτικά μαθηματικά προβλήματα: Τα αντιμετωπίζουν ως δραστηριότητες που μπορούν να λύσουν με τεχνικές και κανόνες και οι οποίες δεν έχουν καμιά σχέση με τη ζωή εκτός του σχολείου.

Αν εξετάσει κανείς τη δομή των προβλημάτων στα ελληνικά σχολικά βιβλία θα παρατηρήσει κοινά στοιχεία με αυτά που αναφέρει η Gerofsky, ως συστατικά στοιχεία της δομή ενός προβλήματος. Για παράδειγμα στο τετράδιο εργασιών

Παράδειγμα:

Οι μαθητές της Στ' τάξης του 4ου Δημοτικού σχολείου Κοκκινιάς, για να ενισχύσουν το ταμείο της τάξης τους, αποφάσισαν στο μάθημα των τεχνικών να κατασκευάσουν ημερολόγια και να τα πουλήσουν στη γειτονιά και στους συγγενείς τους. Τα παιδιά κατασκεύασαν 25 ημερολόγια και τα πούλησαν όλα προς 3,20 ευρώ το καθένα. Ο ταμίας της τάξης, καθώς συγκέντρωνε τα χρήματα, πρόσεξε στο τέλος ότι είχε μόνο χαρτονομίσματα χωρίς να έχει καθόλου κέρματα. Ανησύχησε μήπως έχασε τα ψηλά. Εσείς τι λέτε;

(Τετράδιο εργασιών Στ' Δημοτικού α' τεύχος, σελ. 10)

Με κίτρινο χρώμα είναι σημειωμένο το πρώτο δομικό στοιχείο ενός προβλήματος σύμφωνα με την Gerofsky (1999), με πράσινο το δεύτερο και με ροζ το τρίτο. Ένας μαθητής που έχει εμπειρία με τα μαθηματικά προβλήματα , σύμφωνα με τον Radatz (1984) θα μπορούσε να παραλείψει τις πληροφορίες που του δίνονται στις πρώτες τρείς (κίτρινες) γραμμές και να προχωρήσει άμεσα στις επόμενες τρεις (πράσινες) όπου καταγράφονται οι αριθμητικές πληροφορίες που του χρειάζονται για την επίλυση του ερωτήματος το οποίο αναφέρεται στην τελευταία (ροζ) γραμμή.

Ο Freudenthal (1991), οπ. αναφ. στην Van den Heuvel-Panhuizen (1996), θεωρούσε πως τέτοιου είδους μαθηματικά προβλήματα προκαλούν αντι-μαθηματική στάση στους μαθητές, θεωρία που θα αποδειχθεί λίγα χρόνια αργότερα και από έρευνα των Verschaffel, Greer και De Corte (2000) σύμφωνα με την οποία οι μαθητές έδειξαν μια πολύ ισχυρή τάση να διαχωρίζουν τις γνώσεις που συνδέονται με την πραγματικότητα και τους ρεαλιστικούς συλλογισμούς, από τις προβληματικές καταστάσεις που τους υποβάλλονται μέσω των μαθηματικών προβλημάτων στην τάξη.

Πιο συγκεκριμένα, ο Caldwell (1995, p. 39) οπ. αναφ. στους Verschaffel, Greer και De

Corte (2000), σε μια μελέτη του ένας 13χρονος μαθητής απάντησε ως εξής στην ερώτηση του ερευνητή ως προς το γιατί δεν έκανε χρήση ρεαλιστικών εκτιμήσεων κατά την επίλυση του προβλήματος που του τέθηκε: "*Τα γνωρίζω όλα αυτά, αλλά εγώ ποτέ δεν είχα σκεφτεί να τα συμπεριλάβω σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Τα Μαθηματικά δεν είναι για τέτοια πράγματα. Είναι για να κάνεις τις προσθέσεις σωστά και δε χρειάζεται να εξωτερικές γνώσεις για να τις κάνεις σωστά*" .

Όπως αναφέρουν οι Verschaffel, Greer και De Corte (2000) οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στο πεδίο των μαθηματικών προβλημάτων παρέχουν αναμφισβήτητες αποδείξεις για ισχυρή τάση των μαθητών να αποκλείουν τον πραγματικό κόσμο της γνώσης, όταν προσπαθούν να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα. Ωστόσο, όπως διατυπώνουν παραμένει ασαφές εάν η τάση αυτή οφείλεται σε μια βαθιά ριζωμένη πεποίθηση σχετικά με τη φύση των προβλημάτων και της λύσης τους μεταξύ των μαθητών, ή αν ήταν αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πειράματος (Verschaffel, Greer και De Corte ,2000, p.2)

Την τάση των μαθητών να αποκλείουν τις γνώσεις που αποκόμισαν μέσω του εμπειρικού κόσμου, όταν επιλύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα προσπάθησαν να ερμηνεύσουν μέσω έρευνας οι Verschaffel, Greer και De Corte (2000). Οι παραπάνω θεωρούν πως αυτό που οδηγεί τους μαθητές να μη λύνουν τα προβλήματα διαισθητικά, μέσω των γνώσεων που έχουν αποκτήσει από τις εμπειρίες τους (Sense-making), αλλά να ακολουθούν τυποποιημένες διαδικασίες προκειμένου να τα λύσουν έχει να κάνει με τις κρυφές πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά προβλήματα. Μερικές από αυτές όπως τις παρουσιάζουν οι Verschaffel, Greer και De Corte (2000) είναι:

- Κάθε πρόβλημα παρουσιάζεται από τον ίδιο το δάσκαλο ως επιλύσιμο.
- Υπάρχει μόνο μια (ακριβής συνήθως) αριθμητική απάντηση.
- Η απάντηση μπορεί να βρεθεί μέσω της εκτέλεσης μιας ή και περισσότερων αλγοριθμικών πράξεων
- Το πρόβλημα περιέχει όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για να βρούμε τη σωστή λύση.
- Τα άτομα, τα αντικείμενα, οι χώροι , οι πλοκή, κ.λπ. ενός μαθηματικού προβλήματος στο σχολείο, είναι διαφορετικά από ό,τι σε ένα πραγματικό κόσμο.

Από τα παραπάνω προκύπτει ένας προβληματισμός ο οποίος ίσως είναι ο λόγος που οι μαθητές διαμόρφωσαν αυτές τις αντιλήψεις σχετικά με τα μαθηματικά πρόβλημα, ειδικά την άποψη για τη μη ρεαλιστική τους φύση. Στην ερώτηση αυτή, ενδεχομένως θα μπορούσαμε να απαντήσουμε λέγοντας πως οι διαμορφωμένες αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση των μαθηματικών προβλημάτων είναι αποτέλεσμα τόσο του τρόπου με τον οποίο είναι δομημένα όσο και λόγω της αντίληψης των δασκάλων για αυτά. Όπως αναφέρει ο Gravemeijer (1997) τα περισσότερα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα που διαπραγματεύονται οι μαθητές στα πλαίσια της διδασκαλίας δεν είναι τίποτα περισσότερο από ασκήσεις τεσσάρων πράξεων οι οποίες έχουν ντυθεί με "κείμενο". Στην πλειοψηφία τους, τα προβλήματα αυτά ζητούν να εντοπίσει ο μαθητής τη βασική αλγοριθμική πράξη που χρειάζεται για να λύσει το πρόβλημα, Έτσι, για τους μαθητές, η μόνη πρόκληση είναι απλά να εντοπίσουν τη σωστή αλγοριθμική πράξη που χρειάζεται για τη λύση του προβλήματος. Με δεδομένο τον στερεότυπο χαρακτήρα των τυπικών λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, η αντιμετώπιση των μαθητών είναι αρκετά λογική. Επομένως, θα μπορούσε κανείς να πει ότι αυτό που χρειάζεται για να αντιμετωπιστεί αυτή η μη-μαθηματική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά προβλήματα, είναι να αντικατασταθούν τα ήδη υπάρχοντα με άλλα τα οποία θα επιτρέπουν μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Όμως, οι ίδιοι οι δάσκαλοι, όπως σημειώνει ο Gravemeijer (1997), ***«δεν διεκδίκησαν μια τέτοια αλλαγή ως αποτέλεσμα, ίσως, της αντίληψης που έχουν οι ίδιοι για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα.»***

2.1.2. Διαμορφωμένες αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα

Οι Greer (1993), Reusser (1995) και Verschaffel, De Corte και Lasure (1994) οπ. αναφ. στους Verschaffel, De Corte και Borghart (1997), είχαν συλλέξει πολλά ερευνητικά στοιχεία που αποδεικνύουν τις αληθοφανείς βάσεις του παραπάνω ισχυρισμού του Gravemeijer (1997). Σύμφωνα με τους Verschaffel και συν. (1997) και στις τρεις έρευνες που αναφέρθηκαν παραπάνω οι μαθητές ηλικίας 11-13 ετών που έλαβαν μέρος στις έρευνες κλήθηκαν να απαντήσουν σε δύο είδη λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων. Το πρώτο είδος ονομάζεται s-problems και αφορά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα τα οποία λύνονται με τη χρήση εμφανών αλγοριθμικών διαδικασιών (τυπικά μαθηματικά προβλήματα του σχολείου). Το δεύτερο είδος, p-problems, αφορά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα τα οποία, εφόσον δεν ληφθεί υπόψη το ρεαλιστικό τους πλαίσιο, παρουσιάζουν μια προβληματική ως προς την μοντελοποίηση τους και την εκτέλεση τυπικών διαδικασιών για την επίλυση τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν την ισχυρή τάση των μαθητών να απομονώνουν την πραγματικότητα κατά την επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων. Ειδικότερα στα p-problems, πάρα πολλοί μαθητές δεν έλαβαν καθόλου υπόψη τους το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος με αποτέλεσμα να ακολουθήσουν τυπικές αλγοριθμικές πράξεις που όμως τους οδήγησαν σε μη-ρεαλιστικές λύσεις.

Σύμφωνα με τους Verschaffel και συν. (1997) την τάση αυτή των μαθητών ενισχύουν δύο πτυχές του διδακτικού περιβάλλοντος. Η πρώτη έχει να κάνει με τον «βομβαρδισμό» των μαθητών από τυπικά μαθηματικά προβλήματα που εύκολα μοντελοποιούνται και λύνονται με τη χρήση μιας εμφανούς αλγοριθμικής πράξης στην οποία χρησιμοποιούνται όλοι οι αριθμοί που αναφέρονται στην υπόθεση του προβλήματος. Η δεύτερη πτυχή αφορά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα και τα χρησιμοποιούν στο πλαίσιο της διδασκαλίας.

Οι Verschaffel και συν. (1997) στράφηκαν λοιπόν στην διερεύνηση των αντιλήψεων που έχουν οι ίδιοι οι δάσκαλοι τόσο για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα όσο και για τις λύσεις τους. Στην έρευνα τους συμμετείχαν 332 δάσκαλοι - φοιτητές της Φλαμανδικής περιοχής στους οποίους δόθηκε ένα τεστ δύο μερών. Το κάθε μέρος απαρτίζονταν από εφτά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Το ένα μέρος περιείχε s-problems όπως αυτά ορίζονται παραπάνω και το άλλο p-problems όπως αυτά ορίστηκαν επίσης πιο πάνω.

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν τις υποθέσεις των ερευνητών. Πιο συγκεκριμένα, περισσότεροι από τους μισούς δασκάλους-φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα (και σε μεγαλύτερο βαθμό τα τελευταία έτη σπουδαστών) έχουν την τάση να απομονώνουν τις γνώσεις του πραγματικού κόσμος και τις προσωπικές ρεαλιστικές εκτιμήσεις κατά την διαδικασία επίλυσης ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος. Έτσι, όπως και οι μαθητές στις προηγούμενες έρευνες, οι δάσκαλοι-φοιτητές έλυσαν τα p-problems με τον στερεότυπο, άκριτο, αλγοριθμικό τρόπο χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους το ρεαλιστικό πλαίσιο.

2.2. ΤΑ ΛΕΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΏΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ (R.M.E.)

2.2.1. Η δομή και το περιεχόμενο των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων σύμφωνα με τα R.M.E.

Η Van den Heuvel-Panhuizen (1996) διαχωρίζει τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα από αυτά που ο Gravemeijer ονομάζει *προβλήματα – πλαίσια*. O Treffers και Goffree (1982) οπ. αναφ. στην Van den Heuvel-Panhuizen (1996), επισημαίνουν πως τα λεκτικά προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία δε διαθέτουν ουσιώδη πλαίσια για την ρεαλιστική τους υπόσταση. Ουσιαστικά όπως αναφέρουν, αν αφαιρεθεί το πλαίσιο από το λεκτικό πρόβλημα και αντικατασταθεί με κάποιο άλλο, το πρόβλημα δεν μεταβάλλεται. Πιο συγκεκριμένα, αυτό που ονομάζει πλαίσιο στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η μικρή ιστορική αναφορά που βρίσκεται στις πρώτες γραμμές του προβλήματος το οποίο δεν επηρεάζει την κατανόηση του προβλήματος. Τα σχολικά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα δίνουν πολύ λίγα περιθώρια στους μαθητές να αντιμετωπίσουν αληθινές προβληματικές καταστάσεις ενώ όλα είναι επιλύσιμα.

Σύμφωνα με τον Gravemeijer (1999), ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα είναι πραγματικά αποτελεσματικό για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, όταν είναι στη μορφή αυτού που ο ίδιος ορίζεις ως πρόβλημα πλαίσιο (context problem). Σε ένα πρόβλημα πλαίσιο η διαπραγματεύσιμη προβληματική κατάσταση είναι εμπειρικά πραγματική (experimentally real) για τον μαθητή. Επομένως, εισάγεται ένα νέο χαρακτηριστικό στη δομή των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, αυτό του εμπειρικά ορθού.

Στο πλαίσιο αυτή της θεωρίας των R.M.E. (realistic mathematics education), “realistic” δεν σημαίνει για το πλαίσιο ότι προσεγγίζει την πραγματικότητα, αλλά ότι ο μαθητής μπορεί να φανταστεί την προβληματική κατάσταση εύκολα, να είναι δηλαδή εύκολο για τον μαθητή να την σκεφτεί ως πραγματικά ορθή για αυτόν (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)

Κεντρική σημασία στα R.M.E όσον αφορά τη λύση προβλημάτων, έχει το πλαίσιο (context) του προβλήματος και είναι μια έννοια που αναφέρθηκε και παραπάνω, για αυτό το λόγο θα χρειαστεί να διευκρινήσουμε τη σημασία της ανάλογα με τη θεωρία που την επικαλείται. Το πλαίσιο (context) ως έννοια, σύμφωνα με την Van den Heuvel-Panhuizen (1996), έχει δύο γενικές ερμηνείες. Η πρώτη έχει να κάνει με το περιβάλλον στο οποίο εξελίσσεται η διδακτική διαδικασία ενώ η δεύτερη έχει να κάνει με τα ειδικά χαρακτηριστικά που έχει μια άσκηση (task), είτε αυτά είναι λεκτικής μορφής, είτε είναι εικόνες που βοηθούν στην κατανόηση της προβληματικής κατάστασης που παρουσιάζεται μέσω της άσκησης. Στην παρούσα εργασία ο όρος πλαίσιο (context) θα έχει τη σημασία που της προσδίδουν τα R.M.E. Επομένως, για τα ρεαλιστικά Μαθηματικά ο όρος πλαίσιο (context) αναφέρεται στη δεύτερη ερμηνεία του όρου, στο ειδικό χαρακτηριστικό δηλαδή που έχει ένα πρόβλημα το οποίο βοηθάει στην κατανόηση της προβληματικής κατάστασης που προβάλλεται μέσα από το πρόβλημα, με την προϋπόθεση, ότι το ειδικό αυτό χαρακτηριστικό, δε θα είναι μια απλή προσέγγιση της πραγματικότητας μέσα από ένα αφηγηματικό πλαίσιο, αλλά κυρίως θα επιτρέπει στο μαθητή να φανταστεί την πραγματική κατάσταση ως εμπειρικά ορθή.

Οι Lynn Hodge, Qing Zhao, Jana Visnovska και Paul Cobb (2007) , διερεύνησαν το πως μέσα από δραστηριότητες όπως τα μαθηματικά προβλήματα (tasks) στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να υποστηριχτεί η μαθηματική εμπλοκή των μαθητών και η ανάπτυξη των μαθηματικών τους ικανοτήτων.

Η πεποίθηση αυτή προέκυψε από την αντίληψη ότι τα παιδιά θα πρέπει να λύνουν προβλήματα τα οποία θα είναι εμπειρικά πραγματικά (experimentally real) για αυτά, δηλαδή θα πρέπει οι μαθητές να έρχονται αντιμέτωποι με μαθηματικά προβλήματα τα οποία ενσωματώνονται σε καταστάσεις που γνωρίζουν μέσα από την καθημερινή τους ζωή, ώστε να καλλιεργηθεί ένα ρεαλιστικό ενδιαφέρονται τα Μαθηματικά.

Οι Hodge, Zhao, Visnovska και Cobb (2007) ισχυρίζονται ότι για να είναι ένα λεκτικό πρόβλημα, αξιοποιήσιμο και αποτελεσματικό στη διδασκαλία των μαθηματικών, θα πρέπει να ικανοποιεί δύο βασικά κριτήρια: 1) θα πρέπει να εντάσσεται στα πλαίσια της πραγματικότητας των μαθητών να είναι δηλαδή εμπειρικός πραγματικά και 2) θα πρέπει να ικανοποιεί την ανάγκη των μαθητών για διερεύνηση. Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα προβλήματος το οποίο κατά την άποψη τους, ικανοποιεί τα δύο παραπάνω κριτήρια που κάνουν ένα μαθηματικό πρόβλημα αποτελεσματικό.

2.2.2. Παράδειγμα προβλήματος σύμφωνα με τη θεωρία των R.M.E.:

Δόθηκε σε μαθητές (δεν φαίνεται σε ποια τάξη), στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος τους, η ανάλυση δεδομένων σχετικά με των αριθμό των Τ-λεμφοκυττάρων ασθενών του AIDS, οι οποίοι είχαν ακολουθήσει δύο διαφορετικά προγράμματα θεραπείας. Σύμφωνα με τους ερευνητές οι μαθητές κλήθηκαν να διερευνήσουν το ποια από τις δύο θεραπείες είναι πιο αποτελεσματική για τους ασθενείς. Από τις παρατηρήσεις των ερευνητών, διαπιστώθηκε ότι το θέμα του AIDS δε σχετίζονταν με τις εμπειρίες της καθημερινής ζωής σχεδόν όλων των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Για τον λόγο αυτό έγιναν κάποιες εισαγωγικές συζητήσεις, ενημερωτικού χαρακτήρα στις οποίες ο καθηγητής τους διευκρίνισε γιατί είναι σημαντικό το ζήτημα του AIDS για το ευρύ κοινό. Οι μαθητές διαπίστωσαν σιγά σιγά πως η διερεύνηση του ποια θεραπεία είναι πιο αποτελεσματική ήταν σημαντική σε κοινωνικό επίπεδο και έδειξαν σημαντικά μεγάλο ενδιαφέρον στην εύρεση αποτελέσματος. Ουσιαστικά αυτό που προσπάθησαν οι εκπαιδευτικοί να κάνουν ήταν να καλλιεργήσουν στους μαθητές αυτό που ονομάζουν ρεαλιστικό ενδιαφέρον (pragmatic interest) το οποίο οδηγεί και στην ανάπτυξη του μαθηματικού ενδιαφέροντος (mathematical interest). Σε αυτό συντέλεσε και το γεγονός ότι ξεκαθαρίστηκε, από την πλευρά τον καθηγητών, ότι τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας είναι πραγματικά σημαντικά σε κοινωνικό επίπεδο και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν. Στο πλαίσιο καλλιέργειας του μαθηματικού ενδιαφέροντος των μαθητών, εκτός από το γεγονός ότι τονίστηκε η σημαντικό της διερεύνησης από τη μεριά τους, κλήθηκαν να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της έρευνας τους σε μορφή έκθεσης και να τεκμηριώσουν με επιχειρήματα τα αποτελέσματα, όπως και να κρίνουν με επιχειρήματα πάλι, τα αποτελέσματα άλλων μαθητών.

Οι ερευνητές προσπάθησαν να καλλιεργήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών κάνοντας να τους να διαπιστώσουν τη σημαντικότητα της διερεύνησης της λύσης, τόσο σε κοινωνικό όσο και σε προσωπικό επίπεδο. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές αναλαμβάνουν την ευθύνη της γνώσης που αποκτούν κάτι που και ο Gravemeijer (1999) έχει επισημάνει ως σημαντική προϋπόθεση για την έννοια της μαθηματικοποίησης. Οι Cobb κ. συν. (2007) μετά το τέλος της έρευνας και της παρουσίασης των αποτελεσμάτων, αναφέρουν πως οι μαθητές είχαν αναπτύξει μεγαλύτερο ενδιαφέρον για την παρουσίαση των επιχειρημάτων τους και το πως αυτά θα αξιολογηθούν από τους υπόλοιπους ως προς την επάρκεια τους, παρά για το ίδιο το αποτέλεσμα, για το ποια θεραπεία ήταν η πιο αποτελεσματική.

Στη συγκεκριμένη άσκηση λοιπόν υπάρχουν δύο σημαντικές αναφορές. Η μια αφορά το ρεαλιστική ή πραγματικό ενδιαφέρον των μαθητών και η άλλη το μαθηματικό. Ουσιαστικά, όταν ικανοποιούνται και τα δύο αυτά κριτήρια σύμφωνα με τους παραπάνω , αυτό που επιτυγχάνεται σε ένα πρώτο επίπεδο είναι να καλλιεργηθεί το πραγματικό ενδιαφέρον των μαθητών για την πραγματική κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα (pragmatic interest). Αυτό θα οδηγήσει στην ανάπτυξη του μαθηματικού ενδιαφέροντος από την πλευρά των μαθητών (mathematical interest). Με βάση λοιπόν τις παραπάνω πεποιθήσεις, παρατίθενται τα παρακάτω κριτήρια, τα οποία θα πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να θεωρηθεί ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα αποτελεσματικό:

1. Πρέπει οι μαθητές να έχουν εξοικειωθεί με το θέμα που διαπραγματεύεται το λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα, είτε στα πλαίσια της σχολικής πραγματικότητας είτε στα πλαίσια της καθημερινότητας τους, έτσι ώστε να έχουν αναπτύξει μια προηγούμενη γνώση πάνω στο ερώτημα που διερευνούν και στις διαδικασίες που θα ακολουθήσουν.
2. Οι μαθητές θα πρέπει να αντιμετωπίσουν το ερώτημα που τους απευθύνεται ως σημαντικό έτσι ώστε η λύση του προβλήματος να έχει νόημα και σημασία για αυτούς.
3. Κατά την εισαγωγή του προβλήματος και κατά τη συζήτηση που θα προηγηθεί πριν προχωρήσουν στη λύση του, οι μαθητές θα πρέπει να το αντιμετωπίσουν από μια μαθηματική σκοπιά, ως λογικό.

2.2.3. Ο ρολος των προβλημάτων – πλαισίων στη διδασκαλία των μαθηματικών σύμφωνα με τα R.M.E.

Ο Freudenthal στο βιβλίο του "Mathematics as an educational task", προκειμένου να αποσαφηνίσει πόσο σημαντικό είναι κατά την διδασκαλία να λαμβάνεται υπόψη η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην πραγματικότητα και στα πεδία των Μαθηματικών (Γεωμετρία, Άλγεβρα), κάνει ένα παραλληλισμό με την εκμάθηση της μητρικής γλώσσας.

Ο Freudenthal στο σημείο αυτό εξηγεί πως ο συμβολικός κόσμος της επίσημης γνώσης δεν είναι κάτι ξεχωριστό και έξω από τον κόσμο που βιώνουμε καθημερινά, ώστε να επιχειρήσουμε διαδικασίες σύνδεσης μεταξύ τους. Ουσιαστικά, στο κομμάτι αυτό του βιβλίου του υποστηρίζει πως προκύπτει η επίσημη γνώση μέσα από διαδοχικές συνδέσεις των καταστάσεων της καθημερινής ζωής με γνωστικές έννοιες. Αυτό το σύνολο των συνδέσεων λοιπόν, κάποια στιγμή αυτονομείται και αποκόβεται εντελώς από την καθημερινή ζωή και αποκτά επίσημο και επιστημονικό χαρακτήρα. Στο σημείο αυτό σημειώνει πως αν χαθεί η επαφή της επίσημης γνώσης με την πραγματικότητα τότε η γνώση μετατρέπεται αυτόματα σε φάντασμα και σε κάτι μη-πραγματικό. Έτσι λοιπόν και για τα Μαθηματικά πιστεύει πως για κάποιον ο οποίος δεν είναι μαθηματικός είναι πολύ σημαντικό να μην ψάχνει για συνδέσεις της πραγματικότητας με τις γνωστικές μαθηματικές έννοιες, αλλά θα πρέπει να βρεθεί μεταξύ των σημείων επαφής των μαθηματικών και του βιώματος του μαθητή (Freudenthal, 1973, p. 76)

Οι εκπρόσωποι της θεωρίας των Ρεαλιστικών Μαθηματικών υποστηρίζουν πως για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο (να μην εντάσσεται το συμβολικό σύστημα των Μαθηματικών έξω από την εμπειρία και την πραγματικότητα των μαθητών), θα πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών να πραγματοποιείται με τη χρήση πλαισίων (context).

Πιο συγκεκριμένα, ο Gravemeijer (1999) αναφέρεται στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα με ρεαλιστικό πλαίσιο, ως προβλήματα-πλαίσια (context problems) που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε μια διδασκαλία η οποία θα έχει τον παραπάνω στόχο. Ουσιαστικά προσεγγίζει την έννοια των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων ως πλαίσια από τη σκοπιά των Ρεαλιστικών Μαθηματικών. Στο πλαίσιο αυτό, τα προβλήματα-πλαίσια (context problems) προορίζονται για την υποστήριξη μιας διαδικασίας επανίδρυσης η οποία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με τα επίσημα μαθηματικά. Ουσιαστικά, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να βρει το κατάλληλο πλαίσιο πρόβλημα, μέσα από ένα σχεδιασμό διδασκαλίας, ώστε ο μαθητής να εφεύρει εκ νέου τα επίσημα μαθηματικά. Με αυτόν τον τρόπο θα επιτευχθεί σταδιακά η διαδικασία της "μαθηματικοποιήσης".

2.2.4. Η έννοια της "μαθηματικοποίησης" και ο ορισμός του "μαθαίνω Μαθηματικά"

Βασική θέση της θεωρίας του Freudenthal, όπως αναφέρει και ο Gravemeijer (1999), αποτελεί η παραδοχή ότι *η εκμάθηση των Μαθηματικών θα πρέπει να έχει τα χαρακτηριστικά της γνωστικής ανάπτυξης και όχι μιας διαδικασίας σύνθεσης μεμονωμένων κομματιών έτοιμης γνώσης* (Freudenthal, 1971, 1973, 1991). Όπως υποστηρίζει ο Freudenthal (1973) στο βιβλίο του "Mathematics as an educational task" στη διδασκαλία, για να θεωρείται υγιής και γόνιμη, δε θα πρέπει να διδάσκονται απομονωμένα κομμάτια γνώσης, αλλά ένα συνολικό συνεκτικό υλικό. Αυτή η άποψη, σύμφωνα με τον Polya (1963) και τον Freudenthal (1973,1991) θα μπορούσε να γενικευθεί και έτσι προκύπτει μια πιο διευρυμένη πεποίθηση ότι *ο τρόπος με τον οποίο η ανθρωπότητα ανέπτυξε τη μαθηματική γνώση, είναι επίσης ο τρόπος με τον οποίο τα άτομα θα πρέπει να αποκτήσουν μαθηματική γνώση* (Gravemeijer,1999, p. 116).

Με βάση αυτήν την αντίληψη ο Freudenthal (1973) εδραίωσε τη θεωρία των R.M.E., ενώ όρισε ως βάση της μαθηματικής δραστηριότητας τη *μαθηματικοποίηση* (mathematizing). Ορίζει λοιπόν ως μαθηματικοποίηση την διαχείριση και οργάνωση της πραγματικότητας με μαθηματικές έννοιες: ''***Organizing the reality with mathematical means is today called mathematizing***''. Ουσιαστικά βλέπει αυτή τη δραστηριότητα ως ένα μέσο που θα βοηθήσει τον μαθητή να ανακαλύψει εκ νέου τα μαθηματικά, μιας και ισχυρίζεται πως αυτή η οργάνωση της πραγματικότητας, αποτελεί από μόνη της μαθηματική δραστηριότητα (Freudenthal, 1973, p. 44) Όπως αναφέρει και ο Gravemeijer (1999), βασική ιδέα αυτής της αρχής είναι η μαθητές να φτάσουν σε ένα επίπεδο να θεωρούν τις γνώσεις που αποκτούν, ως δική τους ιδιωτική γνώση, γνώση για την οποία έχουν την πλήρη ευθύνη οι ίδιοι.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά την έννοια της μαθηματικοποιήσης, ο Gravemeijer (1999) αναφέρει πως σύμφωνα με τον Freudenthal, μπορεί να περιλαμβάνει δύο είδη δραστηριοτήτων. Από τη μια την μαθηματικοποιήση θεμάτων τα οποία βρίσκονται στην καθημερινή μας ζωή και από την άλλη την μαθηματικοποιήση μαθηματικών θεμάτων (Freudenthal, 1971).

Ο Freudenthal (1971) οπ. αναφ. στον Gravemeijer (1999) θεωρεί πως δεν υπάρχει καμιά θεμελιώδης διαφορά μεταξύ της μαθηματικοποίησης θεμάτων της καθημερινής ζωής και της μαθηματικοποίσης μαθηματικών θεμάτων. Συνεπώς, όπως υποστηρίζει και ο Gravemeijer (1999), *έναρξη της μαθηματικής εκπαίδευσης θα μπορούσε να θεωρηθεί η διαδικασία μαθηματικοποίησης θεμάτων της ξαθημερινής μας ζωής.*

Ο Treffers (1987) οπ. αναφ. στον Gravemeijer (1999) διακρίνει δύο είδη μαθηματικοποίησης. Το ένα είδος αφορά την οριζόντια (horizontal) και το άλλο την κάθετη (vertical) μαθηματικοποίηση. Η Οριζόντια Μαθηματικοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής είναι σε θέση να περιγράψει ένα πραγματικό πρόβλημα (context problem) με μαθηματικούς όρους - να είναι δηλαδή σε θέση να το λύσει με τη χρήση μαθηματικών μέσων. Η Κάθετη Μαθηματικοποίηση αναφέρεται στη μαθηματικοποίηση της δικής μας, ατομικής, μαθηματικής δραστηριότητας. Όπως αναφέρει και Gravemeijer (1999), μέσω της κάθετης μαθηματικοποίησης, ο μαθητής φτάνει σε ένα υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών. Συνεπώς, η μαθηματικοποιήση είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης αυτών των δύο διαδικασιών. Έχει δηλαδή δύο συνιστώσες, την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη (κάθετη) μαθηματικοπιήση.

Σύμφωνα με τον Freudenthal, τα Μαθηματικά για να έχουν νόημα για τον μαθητή, θα πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, να μη βρίσκονται έξω από τον εμπειρικό του κόσμο και να σχετίζονται με καταστάσεις και γεγονότα της καθημερινής του ζωής. Επισήμανε επίσης μέσα από τη θεωρία του πως τα μαθηματικά είναι ‘μια ανθρώπινη δραστηριότητα και ότι μαθαίνονται στην πράξη’ *(“a human activity and that one learns it by doing it*”).

Το επίδικο λοιπόν, σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση είναι το πως τελικά μπορούμε να επανεντάξουμε το μαθηματικό σύστημα συμβόλων μέσα στην πραγματική εμπειρία, ώστε τα μαθηματικά να αποκτήσουν νόημα για τον μαθητή και να μην έχουμε τα αποτελέσματα αρνητικής στάσης κατά τη διδασκαλία.

2.2.5. Άλλες εναλλακτικές θεωρίες μάθησης Μαθηματικών

Εκτός από τη θεωρία των R.M.E ο Gravemeijer (1999) αναφέρεται και σε δύο άλλες εναλλακτικές θεωρίες μάθησης των Μαθηματικών. Το βασικό δομικό χαρακτηριστικό που εντοπίζει στις δύο αυτές θεωρίες μάθησης είναι η γεφύρωση ανάμεσα στον συμβολικό κόσμο των μαθηματικών και στις εμπειρίες της πραγματικότητας η οποία μπορεί να γίνει μέσω των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων τα οποία εμφανίζονται ως πλαίσια της μαθηματικής γνώσης.

Η πρώτη θεωρία εισάχθηκε από τον Kaput (1994a), ο οποίος υπογραμμίζει τη σχέση μεταξύ μαθηματικών συμβολικών συστημάτων, όπως γραφήματα και καθημερινή πραγματικότητα. Το πρόβλημα, κατά την άποψή του, είναι το χάσμα μεταξύ του νησιού όπου "διαμένουν" τα επίσημα συμβολικά μαθηματικά και την ηπειρωτική χώρα της πραγματικής ανθρώπινης εμπειρίας. Ο ίδιος, όπως αναφέρει και ο Gravemeijer (1999), αποσαφηνίζει αυτό το κενό δίνοντας ως παράδειγμα τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις μαθηματικές συναρτήσεις που ορίζονται με αλγεβρικό τρόπο και τις εμπειρικές συναρτήσεις που περιγράφουν φαινόμενα της καθημερινής ζωής.

Ο Kaput επιδιώκει να βρει καταστάσεις τις οποίες, για να κατακτηθεί το νησί των μαθηματικών συμβολικών συστημάτων και της επίσημης μαθηματικής γνώσης, θα πρέπει οι μαθητές να να εκμεταλλευτούν και μέσα από τις δικές τους εμπειρίες να τις διερευνήσουν. Με αυτό τον τρόπο υποστηρίζει ότι θα έρθουν αντιμέτωπη με την επίσημη μαθηματική γνώση.

Αυτό που ενδεχομένως μπορούμε να παρατηρήσουμε και σημειώνει και ο Gravemeijer (1999) είναι ότι Kaput παίρνει έτοιμο το σύστημα μαθηματικών συμβόλων το οποίο είναι το σημείο στόχος, το σημείο δηλαδή που είναι ο τελικός προορισμός. Ουσιαστικά για τον Kaput το σύστημα μαθηματικών συμβόλων προϋπάρχει και βρίσκεται έξω από τον πραγματικό κόσμο του μαθητή. Το μόνο που μένει, είναι απλά να υπάρξει μια γεφύρωση μεταξύ των δύο αυτών κόσμων.

Η διαφορά των θεωριών που παρουσιάστηκαν παραπάνω σε σχέση με αυτή του Freudenthal και κατ' επέκταση των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, είναι ότι οι θεωρίες αυτές παίρνουν το συμβολικό σύστημα των Μαθηματικών ως κάτι έτοιμο και έξω από τον πραγματικό κόσμο των μαθητών, ένας κόσμος που υπάρχει παράλληλα και πρέπει να γεφυρωθεί με την πραγματικότητα. Η Γεφύρωση αυτή θα επιτευχθεί σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές με οτιδήποτε έχει διαμεσολαβητικό χαρακτήρα, ενώ ο Freudenthal τονίζει πως το συμβολικό σύστημα των Μαθηματικών όπως και κάθε επίσημη γνώση, προκύπτει μέσα από καταστάσεις της πραγματικότητας και άρα δε θα πρέπει να το αντιμετωπίζουμε ως κάτι ξένο από αυτή, γιατί τότε θα μετατραπεί σε κάτι μη πραγματικό και χωρίς νόημα για τον μαθητή.

2.3. Η ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΩΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

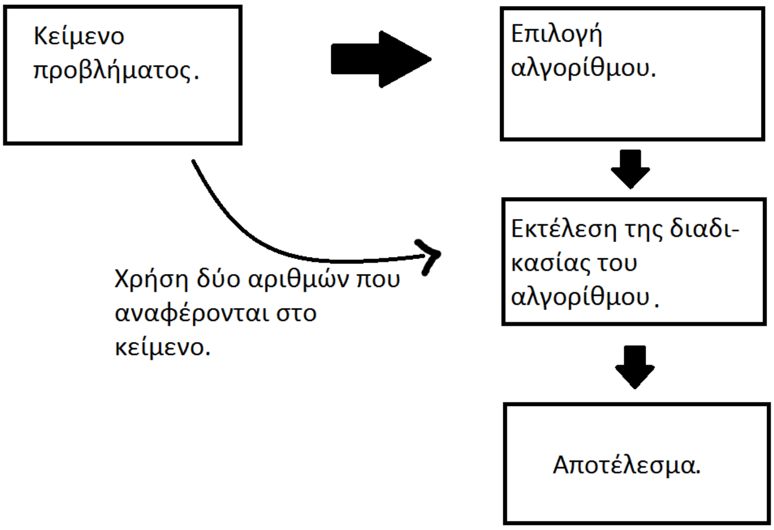
Στο κομμάτι αυτό της εργασίας θα εξεταστεί ένα πολύ σημαντικό μέρος της διδασκαλίας των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, αυτό της λύσης τους. Θα γίνει μια παρουσίαση του τι συμβαίνει κατά τη διαδικασία διδασκαλίας της λύσης και ποιος είναι ο στόχος τελικά αυτής της διαδικασίας. Επίσης θα παρουσιαστούν στοιχεία ερευνών τα οποία καταδεικνύουν τη στάση που οι έχουν οι μαθητές απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, το πως προχωρούν στη διαδικασία της λύσης καθώς και τι θεωρούν βασικό στόχο τους όταν επιλύουν ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα κατά την διδασκαλία.

2.3.1. Η διδασκαλία της λύσης των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων

Στο παρελθόν πραγματοποιήθηκαν πολλές έρευνες στις οποίες οι ερευνητές προσπάθησαν να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διαδικασία της λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος καθώς και το πως αντιμετωπίζουν τα προβλήματα που τους δίνονται προς λύση κατά τη διδασκαλία στην τάξη. Δύο από τις έρευνες που πραγματοποιήθηκαν και δίνουν αρκετά στοιχεία, αποτελούν αυτές που πραγματοποίησαν οι Verschaffel, De Corte και Lasure (1994) σε μαθητές 10-11 ετών στο Βέλγιο και Creer (1993) σε μαθητές 13-14 ετών στην Βόρεια Ιρλανδία. Στις έρευνες αυτές συγκεντρώθηκαν πολλά στοιχεία που καταδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές αλλά και αντιμετωπίζουν τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα και τη διαδικασία της λύσης τους κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Πιο συγκεκριμένα, στις έρευνες αυτές αναδείχθηκε η τάση που παρουσιάζουν οι μαθητές να απομονώνουν και τη γνώση της καθημερινής ζωής από τα σχολικά μαθηματικά και κατ' επέκταση από τη διαδικασία επίλυσης τους. Ουσιαστικά, στα αποτελέσματα των ερευνών παρατηρήθηκε το γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές εστίασαν την προσοχή τους στο να εντοπίσουν το σωστό αλγόριθμο στον οποίο θα τοποθετούσαν τα νούμερα που δίνονται στην υπόθεση, ώστε να καταλήξουν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα το οποίο τις περισσότερες φορές ήταν μη ρεαλιστικό.

Σύμφωνα με τον Greer (1997) υπάρχουν αρκετά στοιχεία που προκύπτουν από διάφορες έρευνες τα οποία καταδεικνύουν μια συγκεκριμένη διαδικασία την οποία ακολουθούν οι μαθητές προκειμένου να καταλήξουν στη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος. Η διαδικασία αυτή κατά τον Greer (1997) παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα το κείμενο του προβλήματος οδηγεί στην επιλογή μιας εκ των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Η επιλογή αυτή μπορεί να βασίζεται σε επιφανειακά κριτήρια όπως λέξεις-κλειδιά ή στον συσχετισμό του ερωτήματος που τίθεται στο πρόβλημα με ένα πρωταρχικό μοντέλο το οποίο αντιστοιχεί σε μια πράξη. Για παράδειγμα όταν "*λέμε πως έχουμε τα πολλά και ψάχνουμε τα λίγα, τότε κάνουμε διαίρεση*". Ο αλγόριθμος που επιλέχτηκε στη συνέχεια εφαρμόζεται για τους δύο αριθμούς που αναφέρονται στο κείμενο του προβλήματος, εκτελείται και συνήθως δεν ελέγχεται η ορθότητα του αποτελέσματος σε σχέση με το ρεαλιστικό πλαίσιο του κειμένου (Silver κ. συν., 1993 οπ. αναφ. στον Greer, 1997).

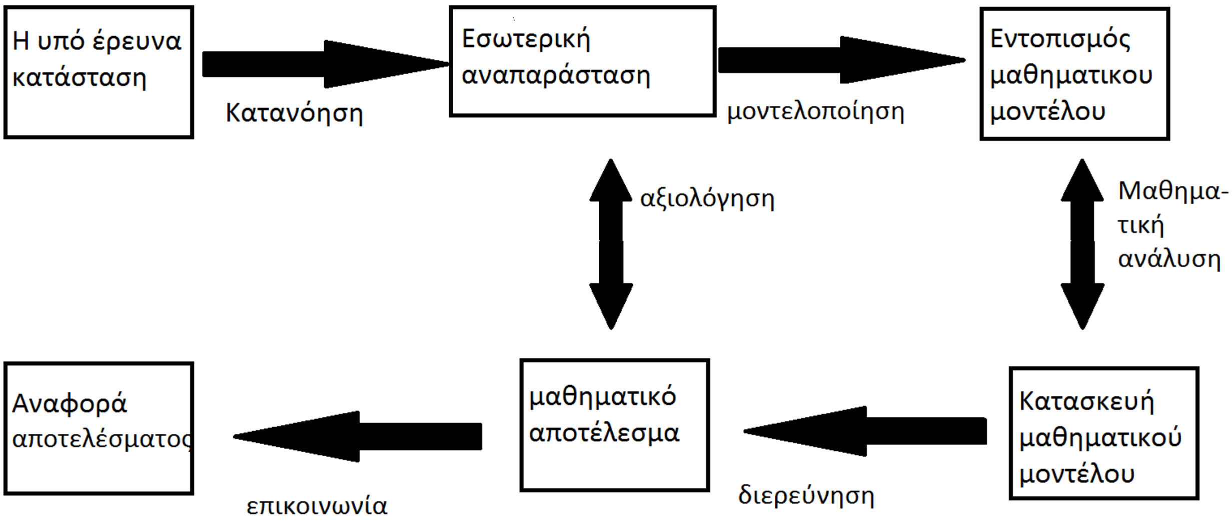
Με αυτόν τον τρόπο το ρεαλιστικό πλαίσιο δεν λαμβάνεται υπόψιν κατά τη λύση του προβλήματος και έτσι η γνώση της καθημερινής ζωής απομονώνεται σε σχέση με τη γνώση που παράγεται μέσα στην σχολική τάξη. Αυτό έχει σαν συνέπεια τα σχολικά μαθηματικά να θεωρούνται από τους μαθητές κάτι ξεχωριστό σε σχέση με αυτά τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή και να ταυτίζουν τα πρώτα με τις αλγοριθμικές διαδικασίες των πράξεων.

2.3.2. Πως μπορεί να αλλάξει η αντιμετώπιση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων από την μεριά των μαθητών (προτάσεις ερευνητών):

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούν κάποιες από τις πιο προοδευτικές απόψεις οι οποίες στοχεύουν στη μεταρρύθμιση του τρόπου λύσης των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων μέσα από την επανίδρυση και μετατροπή των κοινωνικομαθηματικών νορμών. Αρχικά οι Verschaffel, De Corte, Lasure, Vaerenbergh, Bogaerts και Ranticks (1999) υποστηρίζουν ότι θα πρέπει να αλλάξουν κάποια βασικά χαρακτηριστικά τα οποία έχουν να κάνουν με τις επιρροές που ασκούνται στους μαθητές κατά την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Οι Verschaffel et al. (1999) υπογραμμίζουν πως είναι σημαντικό να εξαλειφθούν κάθε είδος στρατηγικές επίλυσης και τονίζουν πως πρέπει να αλλάξει ο τρόπος με τον οποίο ο δάσκαλος και οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος μέσα στην τάξη. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει οι μαθητές να σταματήσουν να επιλύουν τα μαθηματικά προβλήματα μέσα από προκαθορισμένες διαδικασίες εφαρμογών οι οποίες έχουν πρώτα εξηγηθεί και φτιαχτεί από τον δάσκαλο, αλλά θα πρέπει να αναπτυχθούν τεχνικές αλληλεπίδρασης που στοχεύουν στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων.

Τέλος, θεωρούν πως είναι σημαντικό να αλλάξει η φύση των μαθηματικών προβλημάτων τα οποία δίνονται προς λύση κατά τη διδασκαλία. Τα προβλήματα πρέπει να σταματήσουν να έχουν την τυπική μορφή των προβλημάτων εφαρμογών ενώ θα πρέπει να περιέχουν “προβληματικές καταστάσεις” οι οποίες θα απαιτούν να ληφθεί υπόψιν το ρεαλιστικό πλαίσιο προκειμένου να επιλυθούν.

Σε μια μεταγενέστερη έρευνα οι De Corte, Verschaffel και Greer (2000) λαμβάνοντας υπόψιν τους τα πορίσματα των ερευνών στα οποία ήταν εμφανής η τάση των μαθητών να απομονώνουν την πραγματικότητα από τη διαδικασία επίλυσης των λεκτικών προβλημάτων, προτείνουν κάποιες αλλαγές οι οποίες πρώτον, θα σχετίζονται με την αλλαγή της φύσης και της ποιότητας των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων που δίνονται στην τάξη κατά τη διδασκαλία ώστε να μην αποκτούν οι μαθητές λανθασμένες πεποιθήσεις (π.χ. Όλα τα προβλήματα είναι επιλύσιμα) και δεύτερον, προτείνουν οι μαθητές να μπαίνουν σταδιακά στη διαδικασία να αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά προβλήματα ως διαδικασία μοντελοποίησης (process of modeling) κατά την οποία θα οδηγούνται σταδιακά στη λύση. Η διαδικασία αυτή θα είναι κυκλική και όχι γραμμική όπως παρουσιάστηκε από παλαιότερες θεωρίες. Παρακάτω δίνεται ένα σχήμα, στο οποίο σχηματοποιείται η μοντελοποίηση της διαδικασίας λύσης προβλημάτων και τα στάδια της βάσει της διατύπωσης του Verscaffel και Greer :



Σχήμα 2.

Ο Verscaffel στο άρθρο του "Everyday Knowledge and Mathematical Modeling of School Word Problems", υποστηρίζει συμπερασματικά πως: *η παραπάνω διαδικασία αποτελεί τη **γεφύρωση** μεταξύ των Μαθηματικών, ως ένα σύνολο εργαλείων για την περιγραφή πτυχών του πραγματικού κόσμου και των Μαθηματικών ως ανάλυση αφηρημένων δομών* και προτείνει μια "μοντελοποιημένη" οπτική γωνία των Μαθηματικών που διδάσκονται στο σχολείο, έναντι της παραδοσιακής που επικρατεί.

Σύμφωνα με την παραπάνω μοντελοποιημένη διαδικασία επίλυσης η οποία είναι σε κυκλική διάταξη αρχικά ο μαθητής θα πρέπει να καταλάβει την προβληματική κατάσταση που περιγράφεται. Στη συνέχεια, θα πρέπει να δομήσουν ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την ουσία των στοιχείων που δίνονται και τη σχέση μεταξύ τους. Έπειτα, γίνεται ο εντοπισμός του μαθηματικού μοντέλου ώστε να παραχθεί ένα αριθμητικό αποτέλεσμα του οποίου η ορθότητα ελέγχεται αφού ληφθεί υπόψιν το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος. Τέλος, κοινοποιείται το αποτέλεσμα.

Παρατηρώντας τη δομή που έχει η αυτοματοποιημένη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος που σύμφωνα με τον Greer (1997) ακολουθούν οι μαθητές για να καταλήξουν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και της μοντελοποιημένης διαδικασίας που προτείνει λίγα χρόνια αργότερα με τον Verschaffel και De Corte (2000) μπορεί κανείς να διακρίνει την ομοιότητα. Πρόκειται, για δύο σχεδόν ταυτόσημες διαδικασίες. Στο σημείο που διαφέρουν κατά την παρούσα ανάγνωση, είναι στο ότι η δεύτερη διαδικασία περιέχει ένα βήμα που απαιτεί τον έλεγχο του παραγόμενου αριθμητικού αποτελέσματος σε σχέση με το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος. Στη διαδικασία που προτείνουν οι Verschaffel et al. (2000) το ρεαλιστικό πλαίσιο εμπλέκεται στη λύση μέσω μιας μοντελοποιημένης διαδικασίας. Ουσιαστικά δίνεται σαν βήμα που θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν από τους μαθητές ενδεχομένως ως προειδοποίηση. Στην περίπτωση όμως αυτή μιλάμε και πάλι για αυτοματοποίηση της επίλυσης. Ο μαθητής δεν εμπλέκει αυθόρμητα το ρεαλιστικό πλαίσιο στην διαδικασία επίλυσης ως μια αναπόφευκτη συνθήκη που υπάρχει ούτως η άλλως, αλλά καλείται να το θεωρήσει ως έναν εξωτερικό παράγοντα που "δεν πρέπει" να αφήσει εκτός της διαδικασίας επίλυσης, εάν θέλει να το αριθμητικό του αποτέλεσμα να είναι σωστό. Πρόκειται λοιπόν, για μια διευρυμένη αλγοριθμική διαδικασία.

Ο Brousseau 1990 οπ. αναφ. στον Gravemeijer (1997) επισημαίνει πως για να αλλάξει η αντιμετώπιση αυτή των μαθητών θα πρέπει να επαναπροσδιοριστεί ολόκληρο το "διδακτικό συμβόλαιο" (didactical contract). Ο Brousseau (1984, 1990, 1997) οπ. αναφ. στους Verschaffel, L., Greer, B., and de Corte (2000) με την έννοια του διδακτικού συμβολαίου εννοεί το σύνολο των απαιτήσεων, των προσδοκιών και των κανόνων που πλαισιώνουν την αλληλεπίδραση μαθητή – δασκάλου στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα ο Brousseau (1997, p. 225) οπ. αναφ. στους Verschaffel, L., Greer, B., and de Corte (2000) δίνει για το διδακτικό συμβόλαιο τον παρακάτω ορισμό: "*Κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας η οποία έχει οργανωθεί και εκτελεσθεί από τον εκπαιδευτικό της τάξης οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα το οποίο το επεξεργάζονται μέσω των πληροφοριών που τους παρέχει ο εκπαιδευτικός, τις ερωτήσεις που γίνονται στο πλαίσιο αυτό και τους περιορισμούς που προβάλλονται από το μέρος του εκπαιδευτικού κατά τη διαδικασία. Όλα τα παραπάνω είναι μέρος της προσωπικής μεθοδολογίας που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός. Όλες αυτές οι "εκπαιδευτικές συνήθεις" τους εκπαιδευτικού είναι αναμενόμενες για τους μαθητές του, ενώ οι συμπεριφορά των μαθητών από την άλλη είναι αναμενόμενη για τον δάσκαλο τους.*"

Σύμφωνα με τον Gravemeijer (1997) θα πρέπει ο επαναπροσδιορισμός και η επαναδιαπραγμάτευση αυτού του διδακτικού συμβολαίου ή όπως το αποκαλούν οι Cobb, Yackel και Wood (1992) "κοινωνικομαθηματικές νόρμες" (sociomathematical norms), να γίνει με βάση το πλαίσιο "εξήγησε και δικαιολόγησε" (explain and justify). Με βάση αυτό το πλαίσιο οι μαθητές θα πρέπει να εξηγούν και να δικαιολογούν τις ιδέες και προτάσεις που έχουν για να λυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα καθώς και να ακούν και να κρίνουν τις ιδέες και προτάσεις των συμμαθητών τους. Προκειμένου όμως οι μαθητές να αιτιολογούν τις ιδέες και τις προτάσεις τους για λύση των προβλημάτων θα πρέπει να λαμβάνεται το ρεαλιστικό πλαίσιο υπόψιν κατά τη διαδικασία επίλυσης να γίνεται μια διαπραγμάτευση της ορθότητας της λύσης που προτείνουν με βάση αυτό το πλαίσιο. Επομένως, σύμφωνα με τον Gravemeijer (1997), η διαδικασία εύρεσης της λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος πρέπει να σταματήσει να επικεντρώνεται στο “*ναι, το κάνουμε*” ύστερα από τον “σωστό” προσδιορισμό του αλγορίθμου από τους μαθητές και στο “*όχι, δεν το κάνουμε*” ύστερα από έναν λάθος προσδιορισμό.

Παρόλα αυτά, στις περισσότερες τάξεις, αυτό που επικρατεί κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ο διαχωρισμός της πραγματικότητας από τα Μαθηματικά στην τάξη κατά τη διαδικασία της επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Αυτό λοιπόν, σύμφωνα με τον Gravemeijer (1997), μπορεί να αλλάξει εφόσον αλλάξουν και οι “κοινωνικομαθηματικές νόρμες” ώστε οι μαθητές να ξέρουν ποιος τύπος απάντησης είναι ο επιθυμητός. Για να αλλάξουν οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες σύμφωνα τον Cobb (1991) θα πρέπει να αλλάξουν τόσο τα ίδια τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα τα οποία διδάσκονται κατά τη διδασκαλία, όσο και ο τρόπος με τον οποίο αυτά συζητούνται μέσα στην τάξη.

Οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες σύμφωνα με τους Yackel και Cobb (1996) συγκροτούνται μέσω μιας συνεχούς δια δραστικής διαδικασίας η οποία περιλαμβάνει τον δάσκαλο και τους μαθητές ως συμμετέχοντες. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα πλέγμα “κανονικοτήτων” που επικρατούν μέσα στην τάξη στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Το τι γίνεται όμως “κανονικότητα” μέσα σε μια τάξη σύμφωνα με τους Yackel και Cobb (1996) καθορίζεται από ένα σύνολο επιμέρους παραγόντων. Αυτοί μπορεί να είναι οι τρέχοντες διδακτικοί στόχοι, οι πεποιθήσεις και υποθέσεις των συμμετεχόντων στην διδακτική διαδικασία. Ταυτόχρονα αυτοί οι στόχοι και σε μεγάλο βαθμό σιωπηρή κατανοήσεις οι ίδιοι επηρεάζονται από αυτό που νομιμοποιείται ως αποδεκτή μαθηματική δραστηριότητα. Είναι με αυτή την έννοια που λέμε κοινωνικομαθηματικών κανόνες και τους στόχους και τις πεποιθήσεις σχετικά με μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση είναι αντανακλαστικά σχετικές.

Σύμφωνα με τα ρεαλιστικά μαθηματικά το “διδακτικό συμβόλαιο” έχει συγκροτηθεί μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες ώστε να αργότερα να αποκτήσει μια πιο γενικευμένη φύση μέσα στην τάξη κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών.

Ο Gravemeijer (1997) αντιπαρατίθεται στην παραπάνω άποψη λέγοντας πως η μοντελοποίηση μπορεί να εννοηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος, έχει να κάνει με τη μετάφραση της ρεαλιστικής κατάστασης σε μαθηματικούς όρους και ο δεύτερος έχει να κάνει με οργάνωση αυτής της κάστασης στα πλαίσια της δραστηριότητας όμως. Ουσιαστικά αυτό που τονίζει ο Gravemeijer (1997) σε σχέση με την άλλη άποψη είναι ότι οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να κατανοήσουν τη διάκριση μεταξύ του μοντέλου “model” και της κατάστασης “situation”.

Ο ίδιος υποστηρίζει την προσέγγιση που αφορά την οργάνωση “organizing” η οποία δίνει έμφαση στην μοντελοποίηση ως δραστηριότητα “organizing as an activity”. Η ιδέα αυτή σύμφωνα με τον Gravemeijer (1997) προσαρμόζεται με την αντίληψη του Freudenthal βάσει της οποίας τα Μαθηματικά ορίζονται ως ανθρώπινη δραστηριότητα.

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ
(ΕΡΕΥΝΑ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. ΣΤΟΧΟΘΕΣΙΑ

Με την παρούσα έρευνα επιχειρείται να εξεταστεί το πως οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά προβλήματα στο επίπεδο της διδασκαλίας των Μαθηματικών και πως αυτό επηρεάζει το αποτέλεσμα (μάθηση), την αντίληψη των μαθητών για το τι σημαίνει "μαθαίνω μαθηματικά" αλλά και την αξιολόγησή τους. Πιο συγκεκριμένα, με τα συγκεκριμένα ερωτηματολόγια θα γίνει μια προσπάθεια να διερευνηθεί ο τρόπος που χρησιμοποιούνται τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα στα πλαίσια της διδασκαλίας, ποιον σκοπό εξυπηρετούν, σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς αλλά και γενικότερα, τι αντιλαμβάνονται οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ως λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα στα πλαίσια της διδασκαλίας.

3.2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικά ερωτήματα:

Πώς αντιλαμβάνονται οι δάσκαλοι το λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα και το ρόλο του στη διδασκαλία των μαθηματικών;

Ποιός κατά τη γνώμη των δασκάλων είναι ο ρόλος του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών;

Ποιές οι απόψεις των δασκάλων σχετικά με το ρόλο των ρεαλιστικών στοιχείων του πλαισίου ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος (real world knowledge concerning the problems context, Verschaffel κ. συν. 1997) στην μαθηματική αναπαράσταση και λύση του προβλήματος.

3.3. ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ:

Στην παρούσα έρευνα ο υπό μελέτη πληθυσμός είναι εκπαιδευτικοί Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (δάσκαλοι/ες Δημοτικής Εκπαίδευσης) από διάφορα σχολεία της Ελλάδος. Οι απαντήσεις που θα δοθούν από την πλευρά του πληθυσμού, θα μελετηθούν προκειμένου να διαπιστωθούν οι γνώσεις, στάσεις και απόψεις των εκπαιδευτικών σε σχέση μετά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα.

3.4. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Το πρώτο βήμα της έρευνας ήταν ο προσδιορισμός των στόχων με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Στη συνέχεια, με γνώμονα τα παραπάνω ακολούθησε η σύσταση του ερωτηματολογίου. Ο στόχος της παρούσας έρευνας, όπως διατυπώθηκε και παραπάνω, είναι η συλλογή των απόψεων και των αντιλήψεων που έχουν οι δάσκαλοι/ες της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στην Ελλάδα για τη χρήση και τη φύση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Πριν τη σύσταση του ερωτηματολογίου, μελετήθηκαν έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στο εξωτερικό, σχετικές με την αντίληψη που έχουν οι δάσκαλοι/ες για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, αλλά και το πως οι ίδιοι οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά προβλήματα που τους δίνονται προς λύση. Έγινε δηλαδή μια προσπάθεια σύνδεσης των στερεότυπων αντιλήψεων των μαθητών/τριων για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα και των απόψεων των δασκάλων για το ρόλο τους στην διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών.

Το ερωτηματολόγιο, προκειμένου να καλυφθούν καλύτερα οι ερευνητικοί στόχοι, χωρίστηκε σε δύο μέρη:

3.4.1. Παρουσίαση Ερωτηματολογίου

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

3.4.1.1. Α ΜΕΡΟΣ - Ερωτήματα:

Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς αφορούσε ερωτήσεις ανάπτυξης μιας και οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να υποστηρίξουν τις απόψεις τους πάνω σε συγκεκριμένα ζητήματα τα οποία αφορούν την διδασκαλία τον λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων καθώς και τη διαδικασία επίλυσης τους. Ακολουθούν τα ερωτήματα:

1. Διατυπώστε και στη συνέχεια λύστε ένα μαθηματικό πρόβλημα.

2. Για ποιο λόγο θα χρησιμοποιούσατε ένα μαθηματικό πρόβλημα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών; Σε τι σας εξυπηρετεί;

3. Πώς θα έπρεπε να διδάσκεται, κατά τη γνώμη σας, η 'λύση μαθηματικού προβλήματος' στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών του δημοτικού σχολείου;

4. Τα μαθηματικά προβλήματα που δίνετε προς επίλυση στην τάξη σας από ποιες πηγές προέρχονται; (π.χ. σχολικό βιβλίο μαθηματικών, άλλα βιβλία, διαδίκτυο κλπ.)

5. Τα τωρινά σχολικά βιβλία μαθηματικών του δημοτικού σχολείου είναι κατάλληλα για τη

διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος; Εξηγήστε.

6. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:
Ο Δημήτρης ζήτησε από τη μητέρα του να πάρει τις 4 σοκολάτες που υπήρχαν στο ντουλάπι της κουζίνας και να τις μοιραστεί, μετά το παιχνίδι, με τους 3 φίλους του. Φτάνοντας όμως στην πλατεία του χωριού για να παίξει, διαπιστώνει ότι ήρθε και ένα ακόμη παιδάκι. Τι μέρος από τις 4 σοκολάτες θα πάρει καθένα από τα 5 παιδάκια;
Έχετε μια τάξη με μαθητές (π.χ. Γ' Δημοτικού) που δεν έχουν διδαχθεί τα κλάσματα. Με ποιο τρόπο θα μπορούσε να αξιοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα σε μια τέτοια την τάξη;

3.4.1.2. Περιγραφή Α Μέρους ερωτηματολογίου:

Με **το πρώτο** ερώτημα γίνεται μια προσπάθεια να διαπιστωθεί τι δομή έχει ένα μαθηματικό πρόβλημα για τους εκπαιδευτικούς. Αν δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί έχουν στο μυαλό τους την στερεότυπη μορφή λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων όπως αυτό περιγράφεται ως τρίπτυχο από την Gerofsky (1999).

Με **το δεύτερο** ερευνητικό ερώτημα συλλέγονται πληροφορίες σχετικές με τον ρόλο που έχουν τα μαθηματικά λεκτικά προβλήματα για τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Αν δηλαδή αποτελούν απλά ασκήσεις εφαρμογής της νέας γνώσης και άρα μέσο αξιολόγησης των μαθητών ή αν τα προβλήματα προορίζονται για την υποστήριξη μιας διαδικασίας επανίδρυσης της γνώσης η οποία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με τα επίσημα μαθηματικά, να εφεύρουν δηλαδή εκ νέου τα επίσημα μαθηματικά, όπως υποστηρίζει η θεωρία των ρεαλιστικών Μαθηματικών (R.M.E.). **Το τρίτο** ερευνητικό ερώτημα έχει τη μορφή προβλήματος και έχει χρησιμοποιηθεί από τους Verschaffel, De Corte, και Borghart (1997), σε μια έρευνα που πραγματοποίησαν σχετικά με το πως αντιμετωπίζουν τις λύσεις των προβλημάτων οι εκπαιδευτικοί. Πιο συγκεκριμένα, διερεύνησαν το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί έχουν απομονώσει ή οχι τα σχολικά μαθηματικά από την εμπειρία της καθημερινότητας και συνεπώς, αν είναι σε θέση να δώσουν μια ρεαλιστική και ορθή απάντηση στο πρόβλημα και όχι απλά να προχωρήσουν σε μια εκτελεστική διαδικασία παραγωγής αριθμητικού αποτελέσματος μέσα από την εργαλιστική χρήση αλγορίθμων πράξεων. (Verschaffel κ. συν., p. 267). Τ**ο τέταρτο** ερευνητικό ερώτημα δίνεται περισσότερο για να διερευνηθεί οι ποικιλία των πηγών από τις οποίες ένας/μια εκπαιδευτικός αντλεί τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα που δουλεύουν κατά τη διδασκαλία. **Το πέμπτο** ερευνητικό ερώτημα έχει ως στόχο να επαληθεύσει την απάντηση που θα δοθεί στο τρίτο ερώτημα, αλλά επίσης δόθηκε και για να εμβαθύνω στο αν οι δάσκαλοι αντιμετωπίζουν τα προβλήματα ως εφαρμογές ή ως μέσο για να ανακαλύψουν τα παιδιά τη νέα μάθηση. Πιο συγκεκριμένα, αν για αυτούς η χρήση της λύσης του προβλήματος, περιορίζεται μόνο στο να εντοπίσουν αν είναι σωστή ή λάθος, έτσι ώστε να διαπιστωθεί αν το παιδί "έμαθε" καλά τη νέα γνώση ή μέσω αυτής επιχειρείται μια σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα. Τέλος, με **το έκτο** ερευνητικό ερώτημα, με τη σειρά του, δίνεται περισσότερο για να διαπιστωθεί αν επαληθεύεται ή όχι η απάντηση που δόθηκε στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα. Επιχειρείται να διερευνηθεί αν για αυτούς ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα δίνεται αφού έχει διδαχθεί η νέα γνώση, ώστε να αξιολογήσουν ποιος /α μαθητής/τρια την "εμπέδωσε" ή αν μπορεί να δοθεί χωρίς να έχει διδαχθεί η νέα γνώση, στα πλαίσια της ανακαλυπτικής διδασκαλίας και την επανίδρυσης της γνώσης.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

3.4.1.2. Β ΜΕΡΟΣ - Λεκτικά Προβλήματα:

Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου περιλαμβάνει ερωτήματα τα οποία έχουν τη μορφή προβλήματος. Όλα τα παρακάτω λεκτικά προβλήματα έχουν χρησιμοποιηθεί ήδη από τους Verschaffel, De Corte, και Lasure (1994), σε μια έρευνα που πραγματοποίησαν σχετικά με το πως αντιμετωπίζουν τις λύσεις των προβλημάτων οι εκπαιδευτικοί. Πιο συγκεκριμένα, διερεύνησαν το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί έχουν απομονώσει ή όχι τα σχολικά μαθηματικά από την εμπειρία της καθημερινότητας και συνεπώς, αν είναι σε θέση να δώσουν μια ρεαλιστική και ορθή απάντηση στο πρόβλημα, λαμβάνοντας υπόψη παραμέτρους της πραγματικότητας και όχι απλά να προχωρήσουν σε μια εκτελεστική διαδικασία παραγωγής αριθμητικού αποτελέσματος μέσα από την εργαλειστική χρήση αλγοριθμικών πράξεων. (Verschaffel κ. συν., 2002, p. 260). Τα προβλήματα έχουν χωριστεί σε δύο κατηγορίες, όπως έκανε και ο Verschaffel κ. συν. 1994. Οι Verschaffel, De Corte και Lasure (1994) και Greer (1993) μελέτησαν την τάση που έχουν οι μαθητές να αγνοούν πτυχές της πραγματικότητας, σε Βόρεια Ιρλανδία και Φλάνδρα, ενώ λύνουν μαθηματικά προβλήματα. Μοίρασαν στο δείγμα μαθητών που μελέτησαν ερωτηματολόγια τα οποία αποτελούνταν από δύο είδη μαθηματικών προβλημάτων. Η πρώτη κατηγορία προβλημάτων ήταν τα S-items (standars items) τα οποία λύνονταν με την εφαρμογή μιας αλγοριθμικής πράξης η οποία ήταν και προφανής. Η δεύτερη κατηγορία προβλημάτων ήταν τα P-items (problematic items) τα οποία απαιτούσαν οι μαθητές να λάβουν υπόψη τους και την πραγματικότητα προκειμένου να δώσουν μια ρεαλιστική λύση. Έτσι και στην παρούσα μελέτη, δόθηκαν λεκτικά μαθηματικά προβλήματα στους/στις εκπαιδευτικούς τα οποία ανήκουν και στις δύο αυτές κατηγορίες.

Λεκτικά προβλήματα

Π1. 450 μαθητές θα πρέπει να μετακινηθούν με λεωφορεία για να πάνε εκδρομή στην εξοχή. Τα λεωφορεία που θα τους μεταφέρουν είναι 36 θέσεων. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;

Π2. Ο κύριος Στράτος χρειάζεται ένα σκοινί αρκετά μεγάλο ώστε να το δέσει ανάμεσα σε δύο πασσάλους οι οποίοι έχουν 12 μέτρα απόσταση μεταξύ τους. Τα μόνα κομμάτια σκοινιού που διαθέτει είναι μήκους 1,5 μέτρου. Πόσα τέτοια κομμάτια θα χρειαστεί να τα δέσει μεταξύ τους, ώστε να φτιάξει ένα μεγαλύτερο που θα φτάνει να καλύψει την απόσταση ανάμεσα στους δύο πασσάλους;

Π3. Η Αλίκη και η Μελέκ πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Η Μελέκ μένει 17 χλμ. μακριά από το σχολείου τους, ενώ η Αλίκη 8 χλμ. Πόσα χιλιόμετρα μακριά μένει η μια από την άλλη;

Π4. Ένας παππούς έδωσε στα 4 εγγόνια του ένα κουτί που περιέχει 48 βόλους για να τους μοιραστούν δίκαια μεταξύ τους. Πόσους βόλους θα πάρει το κάθε εγγόνι;

Π5. Ο Στέφανος αγόρασε 4 σανίδες μήκους 2,5 μέτρων η κάθε μία. Χρειάζεται σανίδες 1 μέτρου. Πόσες σανίδες 1 μέτρου μπορεί να κόψει από τις 4 σανίδες που αγόρασε;

Π6. Μια φρουρά από 400 στρατιώτες σε μια απομακρυσμένη μονάδα έχει τροφές για 6 μήνες. Πόσους στρατιώτες έπρεπε να έχει η φρουρά για να περάσει 8 μήνες με τις ίδιες πάντα τροφές;

Π7. Ο καλύτερος χρόνος που έχει κάνει ο Γιάννης για τα 100 μέτρα είναι 17 δευτερόλεπτα. Σε πόσο χρόνο θα τρέξει 1 χλμ.;

Π8. Αυτή η φιάλη (βλ. διπλανή εικόνα) γεμίζει από μια βρύση με σταθερό ρυθμό. Εάν το ύψους του νερού φτάνει τα 3,5 εκ. μετά από 10 δευτερόλεπτα, σε ποιο ύψος θα φτάσει το νερό μετά από 30 δευτερόλεπτα;

Π9. Ο Αμίρ θέλει να αγοράσει 3 βιβλία που κοστίζουν 18,5 ευρώ το ένα. Έχει μόνο τα 10,50 ευρώ. Αν αποταμιεύει κάθε μέρα 1,50 ευρώ, σε πόσες μέρες θα συγκεντρώσει τα χρήματα που του λείπουν;

Π10. Η Φανή αγόρασε 4 κόκκινες κορδέλες μήκους 2,5 μέτρων η κάθε μία. Πόσες κορδέλες μισού μέτρου μπορεί να κόψει από αυτές τις 4 κορδέλες;

3.4.1.3. Περιγραφή Β Μέρους ερωτηματολογίου:

Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου, όπως θα αναλύσουμε και στη συνέχεια αποτελείται από τα παραπάνω προβλήματα προς λύση. Τα προβλήματα αυτά είναι χωρισμένα σε τυπικά και μη – τυπικά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Τα τυπικά ακολουθούν τη δομή και τη στοχοθεσία ενός στερεότυπου προβλήματος το οποίο υπάρχει κατά μέσο όρο στα σχολικά βιβλία, ενώ τα μη-τυπικά παρουσιάζουν απαιτήσεις ως προς το ρεαλιστικό πλαίσιο το οποίο πρέπει να ληφθεί υπόψιν προκειμένου να δοθεί και ρεαλιστική απάντηση.

3.5. ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ:

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν οι απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στο ερωτηματολόγιο. Η ανάλυση των απαντήσεων επικεντρώθηκε στο πως αντιλαμβάνεται ο/η εκπαιδευτικός τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα ως προς τα παρακάτω βασικά σημεία:

α) Τη δομή τους. Αν δηλαδή οι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα έχουν τη συγκεκριμένη δομή που παρουσιάζουν κυρίως τα λεκτικά μαθηματικά των σχολικών βιβλίων η οποία αποτελείται από τρία δομικά στοιχεία (Gerofsky,1999, p. 33). ή αν έχουν τη μορφή διερευνητικού ερωτήματος όπως αυτά παρουσιάζονται στα πλαίσια των R.M.E. .

β) Το ρόλο τους κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Διερευνάται τι ποσοστό των εκπαιδευτικών θεωρούν ότι τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιούνται ως εφαρμογές της νέας γνώσης η οποία έχει διδαχθεί νωρίτερα και άρα αποτελεί και μέσο αξιολόγησης ή χρησιμοποιούνται στην αρχή της διδασκαλίας ώστε να προκύψει η νέα γνώση μέσα από την επίλυση του προβλήματος.

γ) Τη διαδικασία της λύσης τους. Εξετάζεται το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι η λύση ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος πρέπει να διδάσκεται ως μια μοντελοποιημένη διαδικασία ή θεωρούν ότι θα πρέπει να προκύπτει μέσα από διεργασίες των μαθητών οι οποίες θα συνδέονται και με την καθημερινή τους εμπειρία.

δ) Το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν υπόψη τους την καθημερινή εμπειρία προκειμένου να δώσουν μια ρεαλιστική λύση σε ένα πρόβλημα. Ουσιαστικά, διερευνάται το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί απομονώνουν τα σχολικά μαθηματικά από την καθημερινή εμπειρία και περιορίζονται σε αλγοριθμικές πράξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Η συγκεκριμένη έρευνα στοχεύει στο να εντοπιστούν οι αντιλήψεις καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, τόσο στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών όσο και σε σχέση με τη γνώση της καθημερινής ζωής. Αφορμή για την εκπόνηση αυτής της έρευνας αποτέλεσαν οι έρευνες που πραγματοποίησαν οι Greer (1993), Reusser (1995) και Verschaffel, De Corte και Lasure (1994) οπ. αναφ. στους Verschaffel, De Corte και Borghart (1997). Στη σειρά αυτή των ερευνών δόθηκαν λεκτικά μαθηματικά προβλήματα στους μαθητές ηλικίας 11-13 ετών.

Τα μαθηματικά αυτά προβλήματα, της παραπάνω έρευνας, ήταν χωρισμένα σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία ήταν αυτή των s-problems και αφορά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα τα οποία λύνονται με τη χρήση εμφανών αλγοριθμικών διαδικασιών (τυπικά μαθηματικά προβλήματα του σχολείου). Η δεύτερη κατηγορία, τα p-problems, αφορά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα τα οποία, εφόσον δεν ληφθεί υπόψη το ρεαλιστικό τους πλαίσιο, παρουσιάζουν μια προβληματική ως προς την μοντελοποίηση τους και την εκτέλεση τυπικών διαδικασιών για την επίλυση τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν την ισχυρή τάση των μαθητών να απομονώνουν την πραγματικότητα και την εμπειρία κατά την επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων.

Το βασικό ερώτημα που διαμορφώνεται λοιπόν, αφορά τις αιτίες που οδηγούν τους μαθητές να έχουν αυτή την τάση. Εναρκτήριο σημείο αυτής της έρευνας είναι η υπόθεση που κάνει ο Gravemeijer (1997) σε σχέση με την αντίληψη που έχουν η ίδιοι οι δάσκαλοι/ες για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα η οποία δεν τους επιτρέπει να διεκδικήσουν αλλαγές ως προς τα λεκτικά προβλήματα που περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία. Για να διερευνηθούν λοιπόν οι αντιλήψεις που έχουν οι δάσκαλοι/ες ως προς τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, διατυπώθηκε το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου ενώ στο δεύτερο μέρος αποτυπώνεται το αν οι δάσκαλοι/ες απομονώνουν και οι ίδιοι/ες την πραγματικότητα από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Η ανάλυση των δεδομένων της συγκεκριμένης έρευνας πραγματοποιείται σε δύο επίπεδα, Το πρώτο επίπεδο αφορά τα τρία πρώτα βασικά σημεία εστίασης της έρευνας όπως αυτά προκύπτουν από το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου και θα παρουσιάζονται για κάθε ερώτημα ξεχωριστά και το δεύτερο επίπεδο αφορά την παρουσίαση αποτελεσμάτων τα οποία προκύπτουν από το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου, με βάση το τέταρτο σημείο εστίασης της έρευνας όπως αυτό παρουσιάζεται παραπάνω.

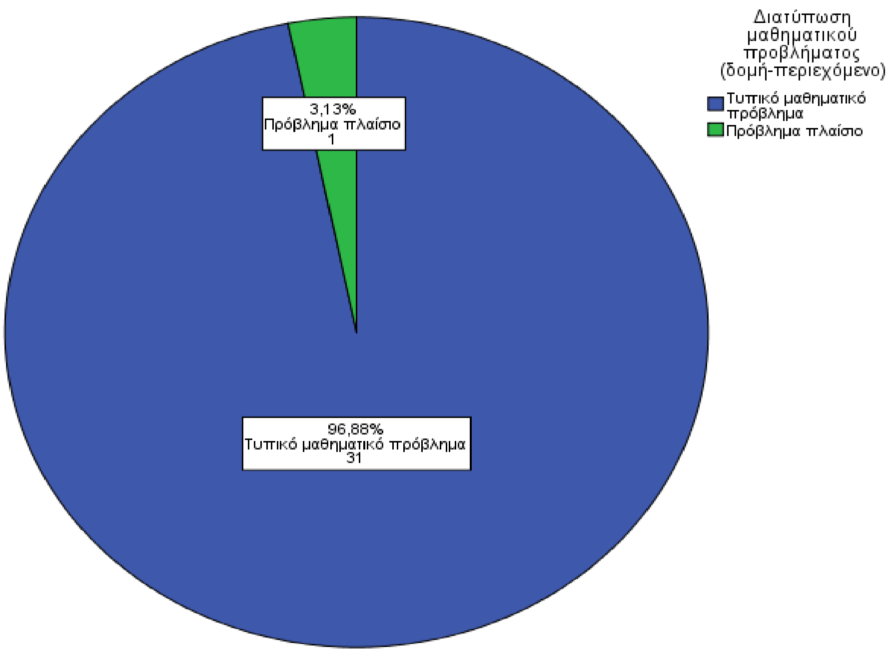
4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ:

Οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας που έλαβαν μέρος σε αυτή την έρευνα δε θα κατηγοριοποιηθούν, προς το παρόν, ως προς συγκεκριμένα χαρακτηριστικά όπως η ηλικία και τα χρόνια υπηρεσίας. Στην παρούσα διαδικασία θα εξεταστούν τα αποτελέσματα συνολικά.

4.2.1. Παρουσίαση αποτελεσμάτων για το Α Μέρος του Ερωτηματολογίου

1ο Ερώτημα:

Ξεκινώντας από το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου, στο πρώτο ερώτημα: ***Διατυπώστε και στη συνέχεια λύστε ένα μαθηματικό πρόβλημα.*** Παρατηρούμε ότι μόλις ένας/μία δάσκαλος/α (3,13%) διατύπωσε ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα το οποίο εκτός από το ότι απομακρύνεται από το πρότυπο της στερεότυπης διατύπωσης μαθηματικού λεκτικού προβλήματος, όπως υπάρχουν και στα σχολικά βιβλία, προσεγγίζει το μοντέλο της διερεύνησης που προβάλλουν τα R.M.E. Οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα διατύπωσαν μαθηματικά λεκτικά προβλήματα σύμφωνα με το στερεότυπο μοντέλο προβλημάτων που υπάρχουν και σήμερα στα ελληνικά σχολικά βιβλία. Παράδειγμα τέτοιου στερεότυπου προβλήματος: "*Ο μπαμπάς του Γιάννη είναι 25 χρόνια μεγαλύτερος από τον Γιάννη και είναι 30 χρονών. Πόσο χρονών είναι ο Γιάννης;*"



Σχήμα 3

Διατύπωση μαθηματικού προβλήματος (δομή-περιεχόμενο)

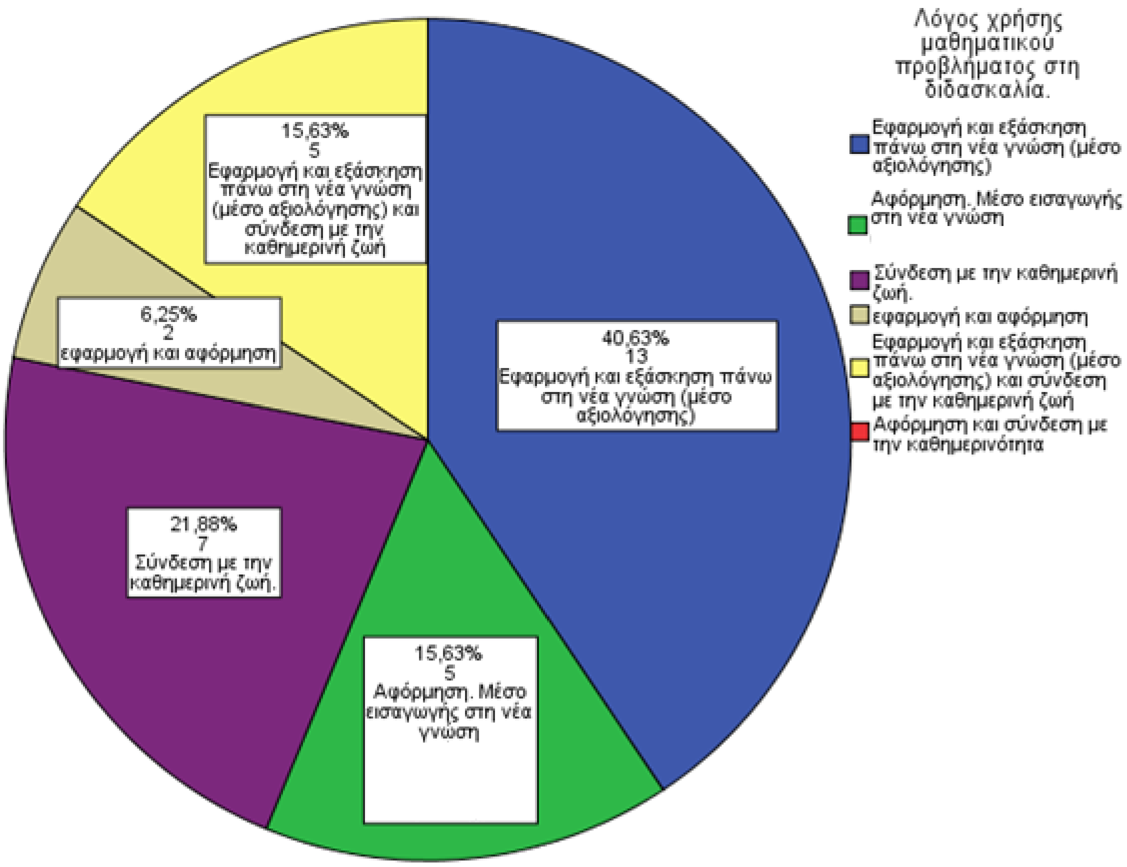
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Τυπικό μαθηματικό πρόβλημα	31	96,9	96,9	96,9
	Πρόβλημα πλαίσιο	1	3,1	3,1	100,0
	Total	32	100,0	100,0	

Πίνακας 1.

Πιο συγκεκριμένα ο/η εκπαιδευτικός σχεδίασε δύο τραπέζια πάνω στα οποία δε διατυπώνεται κανένα μήκος και ζητούσε από τους μαθητές να διαπιστώσουν πιο από τα δύο τραπέζια έχει το μικρότερο εμβαδόν. Από τη μια, αφού δεν δίνονται τα απαραίτητα μήκη ώστε να ακολουθηθεί ο αλγόριθμος του εμβαδού τραπεζίου, οι μαθητές θα αναγκαστούν να συγκρίνουν τις επιφάνειες τους με κάποιο τρόπο που θα σκεφτούν μόνοι τους. Επομένως, το αποτέλεσμα και η απάντηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν συνδέεται με την αλγοριθμική πράξη στην οποία θα τοποθετηθούν τα μήκη προκειμένου να "παραχθεί" το αριθμητικό αποτέλεσμα. Κατ' επέκταση, με αυτόν τον τρόπο και η ίδια η έννοια του εμβαδού δε θα συνδεθεί με τον τύπο που δίνει το εμβαδόν τραπεζίου, αλλά με την επιφάνεια ως μέγεθος. Όπως ακριβώς συμβαίνει και με τα προβλήματα μαθηματικών που αντιμετωπίζουμε στην καθημερινή μας ζωή. Δεν δομούνται με βάση κάποιο αλγοριθμικό μοντέλο α ούτε η λύση τους συνδέεται με αυτό.

2ο Ερώτημα:

Στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: ***Για ποιο λόγο θα χρησιμοποιούσατε ένα μαθηματικό πρόβλημα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών; Σε τι σας εξυπηρετεί;*** Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί σε ποσοστό 40,63% (13 ερωτηματολόγια) έδωσαν απαντήσεις οι οποίες καταδεικνύουν την τάση που έχουν να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά προβλήματα ως εφαρμογές της νέας γνώσης, η οποία έχει διδαχθεί προηγουμένως. Αναπόφευκτα λοιπόν, τα μαθηματικά προβλήματα θεωρούνται μέσα αξιολόγησης για το μεγαλύτερο ποσοστό δασκάλων. Παράδειγμα απάντησης που ανήκει στην πλειοψηφία: "*Για να κατανοήσουν τα παιδιά σε ποια προβληματική κατάσταση χρησιμοποιούμε ποια μαθηματική πράξη. Δευτερεύον σκοπός να εξασκηθεί το παιδί στις πράξεις. Τέτοιες μαθηματικές προβληματικές καταστάσεις θα συναντήσει το παιδί και στην καθημερινή του ζωή, οπότε είναι καλό να ξέρει να τις χειρίζεται.*"



Σχήμα 4.

Λόγος χρήσης μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία.

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Εφαρμογή και εξάσκηση πάνω στη νέα γνώση (μέσο αξιολόγησης)	13	40,6	40,6	40,6
	Αφόρμηση. Μέσο εισαγωγής στη νέα γνώση	5	15,6	15,6	56,3
	Εφαρμογή και αφόρμηση	2	6,3	6,3	62,5
	Σύνδεση με την καθημερινή ζωή.	7	21,9	21,9	84,4
	Εφαρμογή και εξάσκηση πάνω στη νέα γνώση (μέσο αξιολόγησης) και σύνδεση με την καθημερινή ζωή	5	15,6	15,6	100,0
	Total	32	100,0	100,0	

Πίνακας 2.

Μόλις το 12,5% των δασκάλων θεωρούν πως τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αφόρμηση ή όπως ονομάζει ο Gravemeijer (1997) ως “organizing activity” για την εισαγωγή στη νέα γνώση. Κάποιοι εκπαιδευτικοί, παρόλο που δείχνουν να αντιλαμβάνονται το ρόλο των μαθηματικών προβλημάτων στην διαδικασία επανίδρυσης της γνώσης, εντούτοις κάπου παρακάτω αποδεικνύουν πως δεν μπορούν, σε ένα βαθύτερο εννοιολογικό πλαίσιο, να ξεφύγουν από την στερεότυπη αντίληψη που έχουν για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα και για τη λύση τους. Για παράδειγμα, ένας/μια εκπαιδευτικός έγραψε μέσα στην απάντηση του δεύτερου ερωτήματος το εξής: “*Επιπλέον μπορούν να βοηθήσουν στη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης με αποτέλεσμα τη κατάκτηση της γνώσης και εμπειρικά και πιο ολιστικά”,* ενώ στη συνέχεια διατυπώνει μέσα σε παρένθεση το εξής: *όπως το παραπάνω πρόβλημα,* αναφερόμενος/η στο πρόβλημα που διατύπωσε ως απάντηση στο πρώτο ερώτημα του ερωτηματολογίου το οποίο είχε ξεκάθαρα στερεοτυπική μορφή η οποία ευνοούσε μόνο την διαδικασία εφαρμογής αλγορίθμου.

Κάποιοι επίσης από αυτούς/ες τους εκπαιδευτικούς, μέσα από τις διατυπώσεις δείχνουν *να κατανοούν το γεγονός ότι οι μαθητές μέσα από τη διαδικασία της δραστηριότητας του προβλήματος μεταβαίνουν από άτυπες μοντελοποιήσεις της λύσης σε ένα σχήμα πιο επίσημο σταδιακά και ανακαλυπτικά. Για παράδειγμα ένας/μία άλλος/η εκπαιδευτικός διατυπώνει το εξής: “να επινοούν λύσεις και να αυξάνουν την κριτική τους ικανότητα τους”* ή *" διευρύνει την έννοια των μαθηματικών έξω από τα στενά πλαίσια εξάσκησης σε αναπαραγωγικού τύπου ασκήσεις και βοηθά τα παιδιά να γενικεύουν τις γνώσεις".* Αυτό θα μπορούσε να πεις κανείς ότι αποτελεί μια ένδειξη ότι κάποιοι/ες εκπαιδευτικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν την έννοια της μαθηματικοποίησης ή όπως ονομάζει ο Freudentha (1973) “mathematizing” αλλά όπως φαίνεται και στις απαντήσεις του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος, η αντίληψη που έχουν για τη δομή ενός μαθηματικού προβλήματος είναι στερεοτυπική τελικά και κυρίως βαθιά ριζωμένη στη συνείδηση τους.

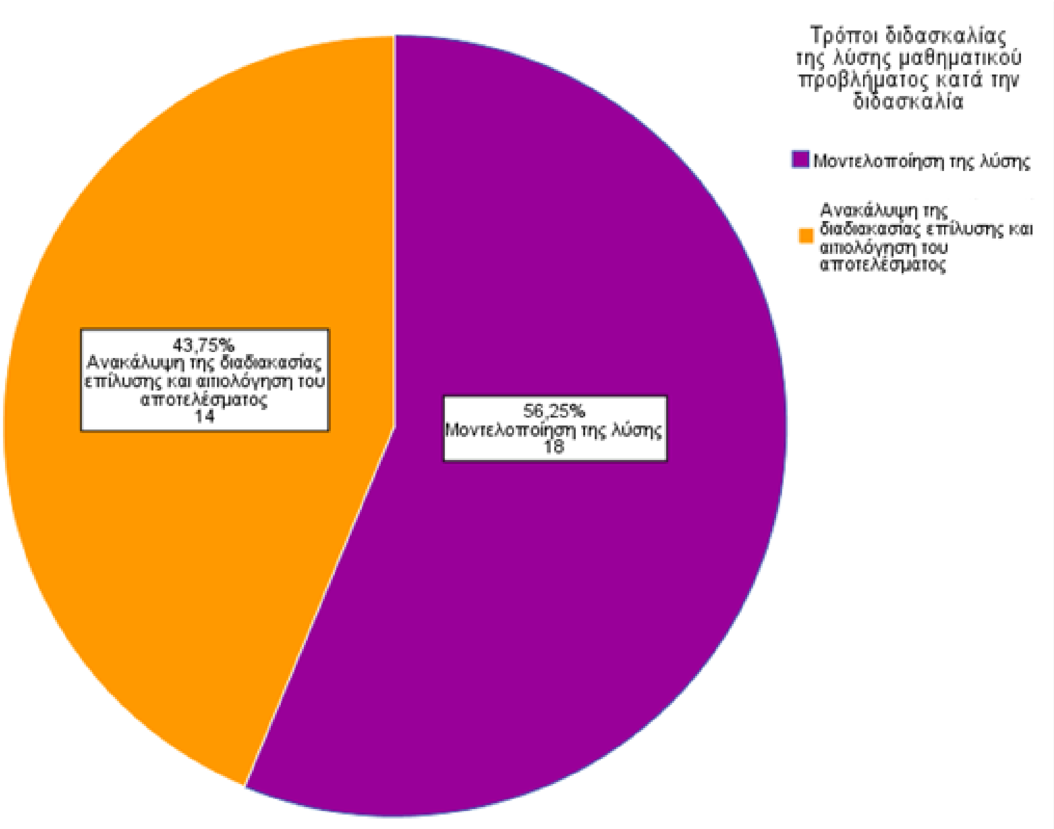
Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι συνολικά 12 συμμετέχοντες/ουσες (περίπου 38% των ερωτηματολογίων) ανέφεραν, εκτός των άλλων λόγων για τους οποίους αξιοποιούν τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα στη διδασκαλία, ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι ένα μέσο σύνδεσης της διδασκαλίας των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή ή με καταστάσεις τις καθημερινής ζωής. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι *"τέτοιες μαθηματικές προβληματικές θα συναντήσει το παιδί και στην καθημερινή ζωή"* ή *"συνδέει τις μαθητικές πράξεις με την καθημερινή ζωή"* ή *"ανταποκρίνεται το αποτέλεσμα στην πραγματικότητα;"*

Τόσο ο Freudenthal όσο και πολλοί άλλοι ερευνητές όπως ο Greer (1997) ασχολήθηκαν με την έννοια της πραγματικότητας (reality) στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Επειδή το ποσοστό των εκπαιδευτικών που επικαλέστηκαν την έννοια της σύνδεσης της διδασκαλίας με την πραγματικότητα, είναι σημαντικό, αξίζει να δούμε τι ακριβώς εννοούν με αυτό.

Αν παρατηρήσει κανείς τη φύση και τη δομή των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων που διατυπώθηκαν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, από τους/τις ίδιους εκπαιδευτικούς θα κάνει μια σειρά διαπιστώσεων που δεν είναι και τόσο ενθαρρυντικές. Αρχικά, όπως προαναφέρθηκε, το 96,9% των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα, διατύπωσε προβλήματα που έχουν την στερεοτυπική μορφή λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, κάτι που όχι μόνο δεν ευνοεί την σύνδεση με την πραγματικότητα αλλά ενισχύει τον προσανατολισμό προς την εύρεση του κατάλληλου αλγορίθμου και την απομάκρυνση από το ρεαλιστικό πλαίσιο ακόμα και αν αυτό υπάρχει ως αναφορά στην πρώτη γραμμή του διατυπωμένου προβλήματος. Επίσης, κάποιοι/ες δεν έβαλαν καν ρεαλιστικό πλαίσιο, διατυπώνοντας ένα πρόβλημα που έχει τη μορφή εξίσωσης. Τέλος, σχεδόν όλα τα μαθηματικά προβλήματα που διατυπώθηκαν από τους/τις εκπαιδευτικούς στο πρώτο ερώτημα, ακόμη και αυτών που έκαναν αναφορά στη σημαντικότητα της σύνδεσης της διδασκαλίας με την πραγματικότητα, δεν ικανοποιούσαν κανένα από τα κριτήρια που έθεσαν οι Cobb κ. συν. (2007) ώστε ένα πρόβλημα να προκαλέσει το πραγματιστικό ενδιαφέρον των μαθητών (pragmatic interest) και έτσι να οδηγήσει στο μαθηματικό ενδιαφέρον (mathematic interest). Τα περισσότερα λεκτικά προβλήματα που διατυπώθηκαν αφορούν στερεότυπες διαδικασίες οι οποίες ναι μεν εξελίσσονται στα πλαίσια της πραγματικότητάς μας καθημερινά, αλλά δεν ικανοποιούν ένα βασικό στόχο, την καλλιέργεια του ενδιαφέροντος από την πλευρά των μαθητών όπως έχει διατυπώσει και ο Dewey, (1913/1975). Επομένως, η αναφορά στη σημαντικότητα της σύνδεσης της διδασκαλίας των μαθηματικών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής ήταν περισσότερο επιφανειακές παρά επιτακτικές.

3ο ερώτημα:

Στο τρίτο ερώτημα της διερεύνησης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, βασικό ρόλο παίζει η λύση του προβλήματος. Το ερώτημα ήταν: ***Πώς θα έπρεπε να διδάσκεται, κατά τη γνώμη σας, η 'λύση μαθηματικού προβλήματος' στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών του δημοτικού σχολείου;*** Οι απαντήσεις σε αυτήν την ερώτηση κατατάχθηκαν σε δύο πολύ συγκεκριμένες κατηγορίες. Η πρώτη αφορά τη μοντελοποίηση της λύσης τους μαθηματικού προβλήματος η οποία έχει να κάνει με τον προσανατολισμό προς την εύρεση του κατάλληλου αλγορίθμου και η δεύτερη αφορά την αποκαλυπτική διαδικασία λύσης η οποία όπως υποστηρίζει ο Gravemeijer (1997) θα πρέπει να στηρίζεται στη διαδικασία "εξήγησε και αιτιολόγησε την απάντηση που προτείνεις" (explain and justify).



Σχήμα 5.

Τρόποι διδασκαλίας της λύσης μαθηματικού προβλήματος κατά την διδασκαλία

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μοντελοποίηση της λύσης	18	56,3	56,3	56,3
	Ανακάλυψη της διαδικασίας επίλυσης και αιτιολόγηση του αποτελέσματος	14	43,8	43,8	100,0
	Total	32	100,0	100,0	

Πίνακας 3.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3. οι περισσότεροι/ες από τους/τις εκπαιδευτικούς (56,3%) που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν είτε έμμεσα είτε άμεσα πως η λύση του μαθηματικού προβλήματος θα πρέπει να διδάσκεται ως τυποποιημένη διαδικασία. Μερικές από τις απαντήσεις που δόθηκαν και ανήκουν σε αυτή την κατηγορία, περιγράφουν μια διαδικασία η οποία από τη μια εμπεριέχει στοιχεία ανακαλυπτικής διαδικασίας για την εύρεση της λύσης, αλλά από την άλλη προβάλλουν ως βασικό στόχο αυτής της διαδικασίας την εύρεση μιας πρότυπης λύσης η οποία θα εφαρμόζεται σε "παρόμοια προβλήματα", ενώ κάποιες άλλες απαντήσεις εμπεριείχαν τα ίδια τα βήματα.

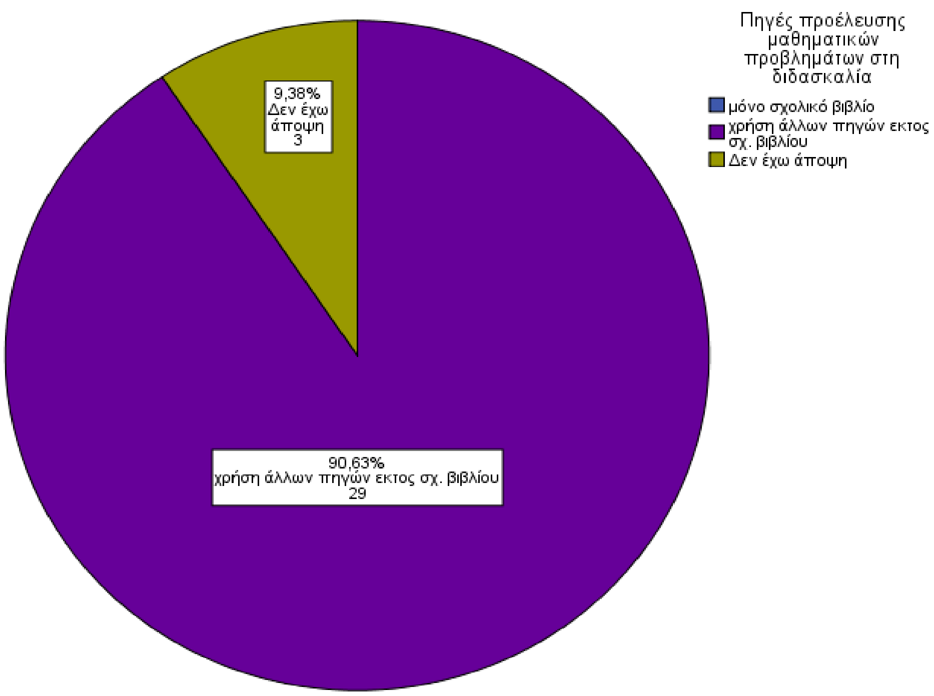
Αξιοσημείωτο είναι και το ποσοστό (43,8%) των εκπαιδευτικών που όπως διατυπώνουν στις απαντήσεις τους προτιμούν οι λύσεις στα προβλήματα να μη διδάσκονται ως μοτίβα, αλλά οι μαθητές να προχωρούν μόνοι τους προς αυτές με αφορμή κάποιο πρόβλημα που δίνεται ως αφόρμηση. Για παράδειγμα ένας/μια εκπαιδευτικός που ανήκει σε αυτό το δείγμα διατυπώνει: "*Κατά τη γνώμη μου το σχολείο θα έπρεπε να δώσει έμφαση στα ρεαλιστικά προβλήματα, τα οποία έχουν πολύ περιορισμένη θέση στα σχολικά εγχειρίδια και η επίλυσή τους προϋποθέτει χρήση ποικιλίας στρατηγικών επίλυσης. Συνεπώς, τα ρεαλιστικά προβλήματα παρακινούν τους μαθητές να αγνοήσουν τους κανόνες του διδακτικού συμβολαίου που συνήθως εφαρμόζεται στις σχολικές τάξεις και να σταθούν απέναντι σε αυτά με ερευνητική και κριτική διάθεση."*

Σημαντικό είναι και το γεγονός πως παραπάνω από τους μισούς εκπαιδευτικούς που ανήκουν στο 43,8%, στις απαντήσεις που έδωσαν, υπογραμμίζουν και πάλι τη σημαντικότητα της σύνδεσης του περιεχομένου των προβλημάτων με την καθημερινή ζωή (βλ. Ανάλυση 2ου ερωτήματος). Παρόλα αυτά, μερικοί από αυτούς, στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματός τους που διατύπωσαν στην πρώτη ερώτηση χρησιμοποίησαν αλγοριθμικές διαδικασίες οι οποίες δεν επιτρέπουν την σύνδεση με τη γνώση της καθημερινής ζωής αλλά και την εννοιολογική κατανόηση της διαδικασίας. Για παράδειγμα ένας/μια εκπαιδευτικός στην ερώτηση τρία (3) απαντάει ως εξής: Όπως προανέφερα με τον συνδυασμό άλλων γνωστικών τομέων και προσαρμογής των προβλημάτων στην καθημερινότητα των παιδιών. Ενώ για να επιλύσει το πρόβλημα που διατύπωσε χρησιμοποίησε τη μέθοδο των τριών η οποία διδάσκεται ως αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης.

Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε πως ενώ οι εκπαιδευτικοί σε μεγάλο ποσοστό αναγνωρίζουν πως η λύση δε θα έπρεπε να διδάσκεται ως αλγόριθμος ή ως μοτίβο, δεν το κατανοούν σε ένα βαθύτερο επίπεδο.

4ο ερώτημα:

Στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα οι εκπαιδευτικοί απάντησαν στην εξής ερώτηση: ***Τα μαθηματικά προβλήματα που δίνετε προς επίλυση στην τάξη σας από ποιες πηγές προέρχονται; (π.χ. σχολικό βιβλίο μαθηματικών, άλλα βιβλία, διαδίκτυο κλπ..*** Οι απαντήσεις που δόθηκαν χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη περιλαμβάνει τις απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί λένε πως χρησιμοποιούν μόνο το σχολικό βιβλίο, η δεύτερη αυτές όπου οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν πως χρησιμοποιούν και άλλες πηγές ή τα φτιάχνουν μόνοι τους με τη βοήθεια πηγών και η τρίτη αυτές όπου οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν πως δεν μπορούν να έχουν άποψη μιας και δεν έχουν διδάξει πρόσφατα. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί πως το συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα, τελικά, δεν συνέβαλε πολύ στη διαμόρφωση των τελικών συμπερασμάτων, έδωσε όμως μια εικόνα για την προέλευση των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται σήμερα στις σχολικές τάξης. Στον παρακάτω πίνακα γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων:

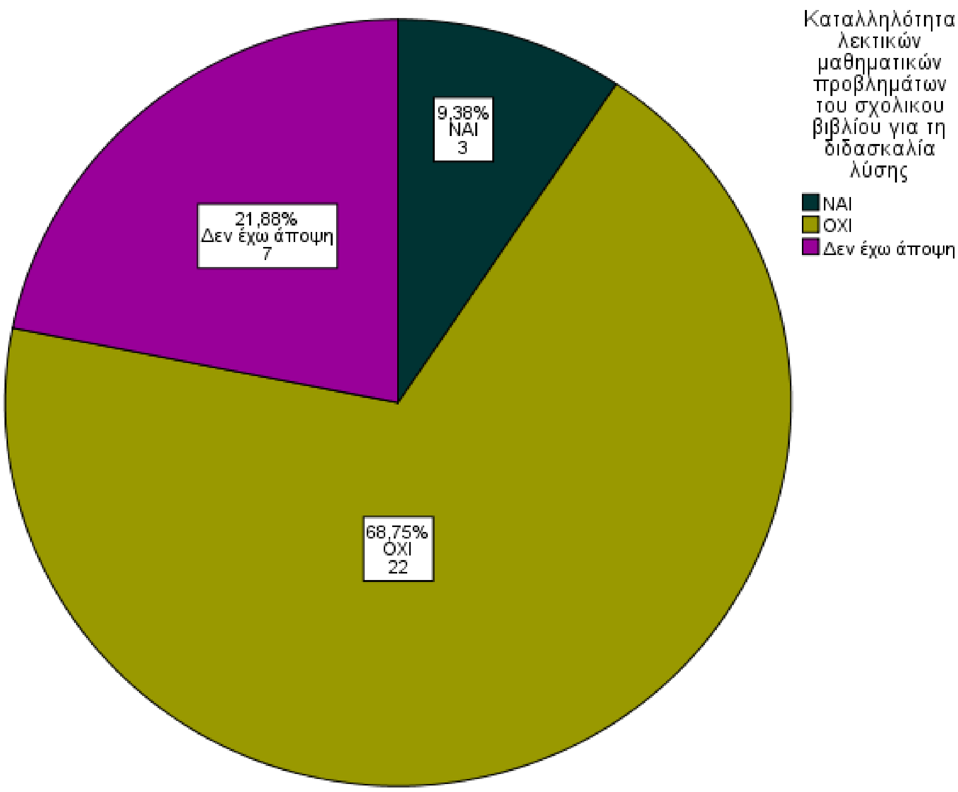


Σχήμα 6.

Όπως παρατηρούμε και στο σχεδιάγραμμα η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (90,63%) της έρευνας χρησιμοποιούν πάνω από μία πηγές, εκτός του σχολικού βιβλίου για να αντλήσουν τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα που χρησιμοποιούν στη διδασκαλία. Κάποιοι (9,38%) δεν εκ φέραν άποψη.

5ο Ερώτημα:

Στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα: ***Τα τωρινά σχολικά βιβλία μαθηματικών του δημοτικού σχολείου είναι κατάλληλα για τη διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος; Εξηγήστε.*** Γίνεται μια προσπάθεια να διερευνηθεί η άποψη που έχουν οι εκπαιδευτικοί για τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών αλλά και το πως αντιλαμβάνονται τον τρόπο που διδάσκουν τη λύση μαθηματικού προβλήματος. Οι απαντήσεις σε αυτό το ερευνητικό ερώτημα κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Στη μια κατηγορία περιλαμβάνονται απαντήσεις που δεν θεωρούν κατάλληλα τα σχολικά βιβλία Μαθηματικών για τη διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος, στην δεύτερη περιλαμβάνονται όλες εκείνες οι απαντήσεις οι οποίες είναι θετικές ως προς το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων σε σχέση με τη διδασκαλία της λύσης. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τις απαντήσεις εκείνων των εκπαιδευτικών οι οποίοι/ες δεν είχαν άποψη.



Σχήμα 7.

Καταλληλότητα λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων του σχολικου βιβλίου για τη διδασκαλία Λύσης

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΝΑΙ	3	9,4	9,4	9,4
	ΟΧΙ	22	68,8	68,8	78,1
	Δεν έχω άποψη	7	21,9	21,9	100,0
	Total	32	100,0	100,0	

Πίνακας 5.

Όπως φαίνεται και στις δύο εικόνες η πλειοψηφία των συμμετεχόντων (68.8%) έδειξαν με την απάντηση τους πως δεν θεωρούν κατάλληλα τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών για τη διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος. Το αμέσως μεγαλύτερο ποσοστό συμμετεχόντων (22%) δεν εξέφρασε κάποια άποψη με την αιτιολόγηση ότι δεν διαθέτουν την κατάλληλη εμπειρία με τα σχολικά βιβλία, ώστε να τα κρίνουν. Μόλις το 9,4% των συμμετεχόντων θεωρούν πως τα σχολικά βιβλία διδάσκουν με κατάλληλο τρόπο της λύση μαθηματικού προβλήματος. Μελετώντας όμως το δεύτερο σκέλος των απαντήσεων που αφορά το "εξηγήστε", διαπιστώνουμε πως ο "χάρτης" των αποτελεσμάτων διαμορφώνεται διαφορετικά. Στο σημείο αυτό λοιπόν, δίνεται η δυνατότητα να διαπιστωθεί τι θεωρείται κατάλληλο και τι ακατάλληλο για τους/τις εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα, ως προς τι διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος. Ξεκινώντας από αυτούς/ες που απάντησαν αρνητικά ως προς την καταλληλόλητα των σχολικών βιβλίων, παρατηρείται ότι μόλις 7 άτομα από αυτούς/ες (22 σύνολο) τεκμηρίωσαν λέγοντας πως ο λόγος που θεωρούν ακατάλληλα τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών είναι η μεθόδευση της λύσης και η μοντελοποίηση της διαδικασίας της. Μάλιστα μερικοί υπογράμμισαν και το γεγονός ότι ενώ τα προβλήματα που βρίσκονται στα σχολικά βιβλία έχουν γραφτεί με σκοπό να προσεγγίσουν την καθημερινή ζωή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, αυτό τελικά δεν συμβαίνει. Παράδειγμα: *"Θεωρώ πως όχι γιατί περιέχουν δυσκολίες στο λεξιλόγιο, αναφέρονται συνήθως σε καταστάσεις από την κοινωνική ζωή των ενηλίκων και όχι από τον κοινωνικό περίγυρο των μαθητών σε πολλές μάλιστα περιπτώσεις έρχονται σε αντιπαράθεση με την άτυπη καθημερινή γνώση των νεαρών μαθητών. Επιπλέον θεωρούν ότι κάθε πρόβλημα επιδέχεται μία και μοναδική λύση που είναι πάντα αριθμητική και μάλιστα για να φτάσουν σ΄αυτή χρειάζεται απλώς να χρησιμοποιήσουν όλα τα προτεινόμενα δεδομένα χρησιμοποιώντας κάποια από τις γνωστές «τέσσερις» πράξεις. Τείνουν να χρησιμοποιούν ορισμένες στρατηγικές που εξαρτώνται μόνο από τους δοσμένους αριθμούς αγνοώντας το νοηματικό περιεχόμενο του προβλήματος."*

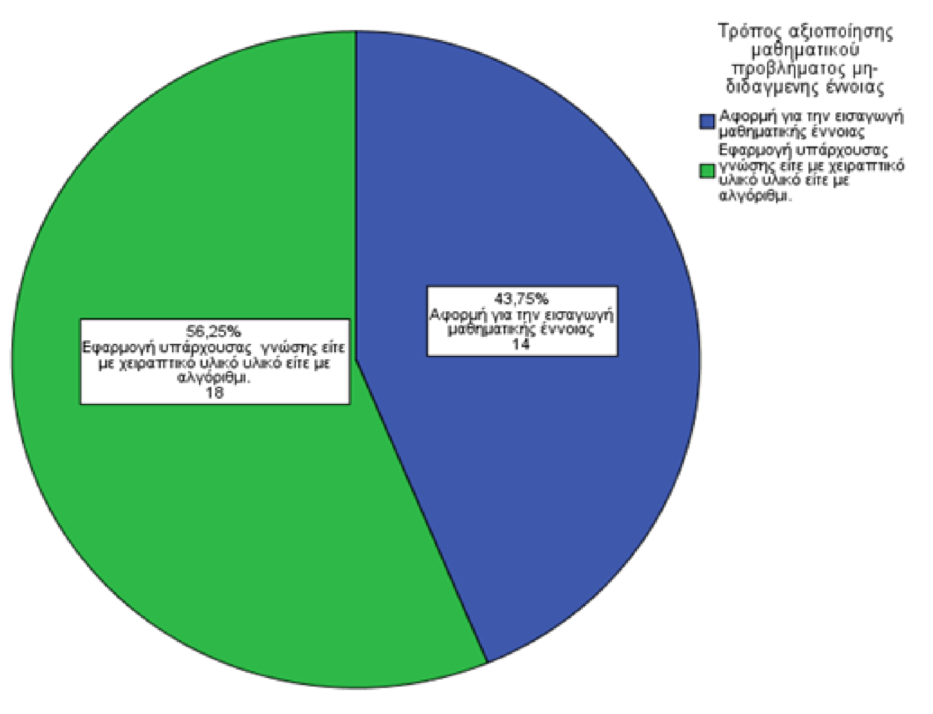
Για τους/τις υπόλοιπους/ες συμμετέχοντες/ουσες η ακαταλληλότητα των σχολικών βιβλίων για τη διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος έγκειται σε άλλους λόγους. Οι περισσότεροι/ες από αυτό τον υπόλοιπο των εκπαιδευτικών που θεωρούν ακατάλληλα τα σχολικά βιβλία για τη διδασκαλία της λύσης μαθηματικού προβλήματος τεκμηρίωσαν λέγοντας πως "παρέχουν πολλές άχρηστες πληροφορίες που μπερδεύουν τα παιδιά", "είναι πολύπλοκα και ανωτέρου επιπέδου", "μεγάλος όγκος πληροφοριών" ενώ κάποιοι/ες απλά συγκρίνουν τα βιβλία μεταξύ των τάξεων χωρίς να κάνουν λόγο για κάτι συγκεκριμένο.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι αρκετοί από αυτούς/ες τους/τις εκπαιδευτικούς (20%) θεωρούν ακατάλληλα τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών για τη διδασκαλία λύσης διότι δεν μοντελοποιούν με εμφανή τρόπο τη διαδικασία επίλυσης. Μερικές από τις διατυπώσεις είναι οι εξής: "ζητάνε από τους μαθητές να λύσουν προβλήματα που δεν έχουν εξηγήσει", "θα έπρεπε να έχουν πιο μεθοδική προσέγγιση", "ζητάει τη λύση προβλημάτων με ελάχιστες κατευθύνσεις για το πρόβλημα", "δε μπορείς να διακρίνει το ζητούμενο εύκολα", "ο μαθητής δεν εκτίθεται ώστε να συνηθίσει να εφαρμόζει μια στρατηγική επίλυσης".

Τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν στο συμπέρασμα πως τελικά οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται την ακαταλληλότητα των σχολικών βιβλίων ως προς τη διδασκαλία λύσης μαθηματικού προβλήματος με μηχανικό τρόπο, δηλαδή, ουσιαστικά δεν είναι σε θέση να διεκδικήσουν αλλαγές ως προς το περιεχόμενο όπως σημειώνει και ο Gravemeijer (1997), μιας και οι ίδιοι αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά προβλήματα ως εφαρμογές και ταυτίζουν τη λύση με μοντελοποιημένες διαδικασίες και μοτίβα. Ακόμα και οι εκπαιδευτικοί που έκαναν λόγο για τις πολλές πληροφορίες που παρέχουν τα σχολικά προβλήματα μαθηματικών, ουσιαστικά αντιλαμβάνονται τις πληροφορίες αυτές ως εμπόδιο για τη μεθόδευση και μοντελοποίηση της διαδικασίας της λύσης. Συνεπώς, μόνο 7 στα 32 ερωτηματολόγια διατύπωσαν ότι το προβληματικό των σχολικών βιβλίων έχει να κάνει με την μοντελοποίηση και τη μεθόδευση των λύσεων που προωθούν καθώς και με το περιεχόμενό τους το οποίο δεν προσεγγίζει την καθημερινή ζωή ούτε τα ενδιαφέροντα των μαθητών.

6ο ερώτημα

Το 6ο ερευνητικό ερώτημα : Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: **Ο Δημήτρης ζήτησε από τη μητέρα του να πάρει τις 4 σοκολάτες που υπήρχαν στο ντουλάπι της κουζίνας και να τις μοιραστεί, μετά το παιχνίδι, με τους 3 φίλους του. Φτάνοντας όμως στην πλατεία του χωριού για να παίξει, διαπιστώνει ότι ήρθε και ένα ακόμη παιδάκι. Τι μέρος από τις 4 σοκολάτες θα πάρει καθένα από τα 5 παιδάκια; Έχετε μια τάξη με μαθητές (π.χ. Γ' Δημοτικού) που δεν έχουν διδαχθεί τα κλάσματα. Με ποιο τρόπο θα μπορούσε να αξιοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα σε μια τέτοια την τάξη**; δόθηκε προκειμένου να διερευνηθεί η στάση των δασκάλων απέναντι σε ένα πρόβλημα που διαπραγματεύεται μια έννοια (στην προκειμένη περίπτωση την έννοια του μέρους και του όλου δηλαδή του κλάσματος) η οποία δεν έχει διδαχθεί προηγουμένως στους/στις μαθητές/τριες. Με αυτό το ερώτημα επίσης διαπιστώνεται και το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί απάντησαν συνειδητά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα το οποίο αφορά την αντίληψη τους για το ρόλο που έχουν τα μαθηματικά προβλήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν σε δε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη τοποθετήθηκαν όλες εκείνες οι απαντήσεις που καταδείκνυαν πως η χρήση του παραπάνω προβλήματος θα περιορίζονταν στην εφαρμογή κάποιας υπάρχουσας γνώσης που θα μπορούσε να συνδυαστεί με αυτό και άρα να αξιολογηθεί αν οι μαθητές/τριες την "εμπέδωσαν". Στην δεύτερη κατηγορία τοποθετήθηκαν εκείνες οι απαντήσεις στις οποίες ο/η εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται το παραπάνω πρόβλημα ως μια αφορμή για την εισαγωγή σε μια νέα έννοια.



Σχήμα 8.

Όπως φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα (56,25%) έδωσαν απαντήσεις οι οποίες επικαλούνται διαδικασίες που έχουν να κάνουν περισσότερο με εφαρμογή μιας ήδη υπάρχουσας γνώσης και όχι με την ανακαλυπτική διαδικασία της επανίδρυσης της. Παράδειγμα: "Θα έλεγα πως σε αυτή την περίπτωση το κάθε παιδί, θα έπαιρνε λιγότερη από μια σοκολάτα. Θα σχεδίαζα τέσσερα κομμάτια και θα τα χώριζα σε πέντε ίσα μέρη. Το κάθε παιδί θα έπαιρνε ένα μικρό κομμάτι από κάθε σοκολάτα. Προφανώς, δε θα υπήρχε αριθμητική λύση."

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί προτείνουν τη χρήση χειρ απτικού υλικού προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα, θεωρώντας πως με αυτόν τον τρόπο θα μετριαστεί η αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης. Παρόλα αυτά, η απλή χρήση του χειρ απτικού υλικού δεν έχει ως αποτέλεσμα την επανίδρυση της γνώσης και την ανακάλυψη της. Πολλές φορές ενισχύει αλγοριθμικές διαδικασίες όπως για παράδειγμα τα ξυλάκια που χρησιμοποιούνται στις μικρότερες τάξεις για να βοηθήσουν στους υπολογισμούς αλλά όχι στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση πολλοί εκπαιδευτικοί περιέγραψαν διαδικασίες οι οποίες είχαν ως στόχο την επίλυση και μόνο μέσω του χειρ απτικού υλικού και όχι την ανακάλυψη μιας νέας έννοιας η οποία μπορεί να συνδέεται με μια προηγούμενη γνώση. Για παράδειγμα: "Θα έλεγα πως σε αυτή την περίπτωση το κάθε παιδί, θα έπαιρνε λιγότερη από μια σοκολάτα. Θα σχεδίαζα τέσσερα κομμάτια και θα τα χώριζα σε πέντε ίσα μέρη. Το κάθε παιδί θα έπαιρνε ένα μικρό κομμάτι από κάθε σοκολάτα. Προφανώς, δε θα υπήρχε αριθμητική λύση."

Στην παραπάνω απάντηση δεν υπάρχει καμιά πρόθεση από τον/την εκπαιδευτικό να οδηγήσει τη διδασκαλία προς την "ανακάλυψη" της έννοιας των κλασμάτων. Η έννοια που φαίνεται να κυριαρχεί είναι αυτή της μοιρασιάς η οποία συνδέεται με την διαίρεση που ήδη οι μαθητές/τριες της Γ΄ Δημοτικού γνωρίζουν και άρα την επαναφέρουν και την εφαρμόζουν.

4.2.2. Παρουσίαση αποτελεσμάτων για το Β Μέρος του Ερωτηματολογίου

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς διερευνάται η στάση των εκπαιδευτικών και η πρακτική αντιμετώπιση που έχουν απέναντι στα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου έγινε κατηγοριοποίηση των προβλημάτων σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη τα προβλήματα (μη τυπικά) απαιτούν από τους/τις εκπαιδευτικούς να λάβουν τους το ρεαλιστικό πλαίσιο των προβλημάτων καθώς και να εμπλέξουν οι εκπαιδευτικοί στη διαδικασία της λύσης, γνώσεις τις καθημερινής ζωής. Η άλλη κατηγορία (τυπικά) αφορά προβλήματα των οποίων τόσο η δομή όσο και το περιεχόμενο οδηγούν προς την επιλογή και εκτέλεση μιας αλγοριθμικής πράξης για λύση. Τα είναι προβλήματα βάση αυτή την κατηγοριοποίηση αναλύονται παρακάτω:

Κατάταξη προβλημάτων βάσει του ρεαλιστικού τους πλαισίου
Βόλοι (τυπικό)
Κορδέλες (τυπικό)
Αποταμίευση (τυπικό)
Σανίδες (τυπικό)
Στρατιώτες (τυπικό)
Λεωφορείο (μη τυπικό)
Σκοινί (μη τυπικό)
Απόσταση (μη τυπικό)
Δρομέας (μη τυπικό)
Φιάλη (μη τυπικό)

Πίνακας 7.

Ξεκινώντας από τις απαντήσεις που δόθηκαν στα μη τυπικά προβλήματα παρατηρούμε μια κλιμακωτή άνοδο του ποσοστού των μη ρεαλιστικών απαντήσεων. Στο πρώτο πρόβλημα οι εκπαιδευτικοί έδωσαν σε ποσοστό 93,8% ρεαλιστικές απαντήσεις ενώ μόλις το 6,3% έδωσε μη ρεαλιστικές απαντήσεις. Συνεχίζοντας στο δεύτερο πρόβλημα, το ποσοστό των μη ρεαλιστικών απαντήσεων αυξήθηκε στο 50% και εξισώθηκε με τις ρεαλιστικές απαντήσεις οι οποίες είχαν ποσοστό επίσης 50%. Στο τρίτο πρόβλημα παρατηρείται μια άνοδος τους ποσοστού των μη ρεαλιστικών απαντήσεων σε ποσοστό 59,4% και μείωση των ρεαλιστικών απαντήσεων σε ποσοστό 40,6%. Στα μη τυπικά 7 και 8 έχουν μειωθεί αισθητά οι ρεαλιστικές απαντήσεις των εκπαιδευτικών, με τις μη ρεαλιστικές να υπερισχύουν σε ποσοστό 71,9% και 78,1% αντίστοιχα.

Η σταδιακή αύξηση των μη ρεαλιστικών απαντήσεων, κυρίως οφείλεται στο γεγονός ότι και τα ίδια τα προβλήματα σταδιακά παρουσίαζαν ολοένα και μεγαλύτερες απαιτήσεις ως προς την προβληματική υπόθεση που διατυπώνουν. Αυτό σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί έπρεπε, προκειμένου να τα λύσουν και να δώσουν μια ρεαλιστική απάντηση, να λάβουν υπόψη τους “τις πραγματικότητες” που επικαλείται το εκάστοτε πλαίσιο του προβλήματος. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα παραπάνω προβλήματα με συγκεκριμένη κατανομή. Ξεκινώντας από το λιγότερο απαιτητικό ως προς τη λήψη του ρεαλιστικού πλαισίου στα υπόψιν για την επίλυση του, σε αυτό που είναι περισσότερο απαιτητικό.

Προβλήματα	Ποσοστό ρεαλιστικών απαντήσεων (%)	Ποσοστό μη ρεαλιστικών απαντήσεων (%)
1 Λεωφορείο (μη τυπικό)	93,8	6,3
2 Σκοινιά (μη τυπικό)	50	50
3 Απόσταση (μη τυπικό)	40,6	59,4
4 Βόλοι (τυπικό)	100	0
5 Σανίδες (τυπικό)	78,1	21,9
6 Στρατιώτες (τυπικό)	59,4	40,6
7 Δρομέας (μη τυπικό)	28,1	71,9
8 Φιάλη (μη τυπικό)	21,9	78,1
9 Αποταμίευση (τυπικό)	93.8	6,3
10 Κορδέλες (τυπικό)	100	0

Πίνακας 8.

Η ανάλυση των απαντήσεων που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί δείχνει πως ο αριθμός των εκπαιδευτικών που αποκριθήκαν στις απαντήσεις των προβλημάτων λαμβάνοντας υπόψη τους το ρεαλιστικό πλαίσιο που περιέγραφαν αυτά είναι μικρός.

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα με τη βρύση το 78,1 % των εκπαιδευτικών έδωσαν μη ρεαλιστικές απαντήσεις καταφεύγοντας σε αναλογίες προκειμένου να δώσουν ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Κάποιοι ελάχιστοι από αυτούς, ενώ δείχνουν να παρατηρούν πως το σχήμα του φλασκιού δεν επιδέχεται απλή αναλογία, εντούτοις την εκτελούν και απαντούν με το αντίστοιχο αριθμητικό αποτέλεσμα.

Τα αποτελέσματα λοιπόν αυτής της έρευνας αποδεικνύουν την τάση που έχουν οι εκπαιδευτικοί να απομονώνουν τη γνώση του πραγματικού κόσμου από αυτό που

ονομάζουμε κατανόηση και λύση του μαθηματικού προβλήματος. Αυτό το συμπέρασμα έρχεται να επιβεβαιωθεί και από την ανάλυση των απαντήσεων στα μη προβληματικά προβλήματα που υπάρχουν στο ερωτηματολόγιο στα ποσοστά των ρεαλιστικών απαντήσεων είναι αρκετά υψηλά σε αυτά τα προβλήματα.

Όσον αφορά την δεύτερη κατηγορία προβλημάτων, τα τυπικά, όπως παρατηρούμε και στον πίνακα 7. οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί έδωσαν ρεαλιστικές απαντήσεις, σε κάθε μια από αυτές ξεχωριστά. Το γεγονός αυτό βέβαια ήταν αναμενόμενο μια και η φύση των τυπικών προβλημάτων είναι τέτοια που επιτρέπει τη μοντελοποίησή τους και η λύση τους προέρχεται μέσα από την άμεση εφαρμογή μιας ή περισσοτέρων αριθμητικών αλγορίθμων χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που περιέχονται στην υπόθεση του προβλήματος. Παρ’ όλα αυτά, αξίζει να σχολιαστεί το γεγονός ότι στο πρόβλημα με τους στρατιώτες (Πρόβλημα 6.), ενώ οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί αντιλήφθηκαν ότι πρόκειται για αναλογία και προσπάθησαν να εκτελέσουν την απλή μέθοδο των τριών, εντούτοις, πολλοί εκπαιδευτικοί (40,6%) δεν την εκτέλεσαν με βάση τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, αλλά σύμφωνα με τα ανάλογα ποσά. Αυτό είχε ως συνέπεια να δοθούν λάθος αριθμητικά αποτελέσματα ως απάντηση του προβλήματος. Ενώ το πρόβλημα δεν ανήκει στην κατηγορία των μη τυπικών προβλημάτων , οι εκπαιδευτικοί δεν επέδειξαν δεξιοτεχνία και παρουσίασαν αδυναμία στην επιλογή του αλγορίθμου για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Σύμφωνα με τον Hart (1981) οπ. αναφ. στον Gravemeijer, K., & Van Galen, F. (2003) αυτή η αδυναμία οφείλεται στο γεγονός ότι οι αλγόριθμοι διδάχθηκαν απομονωμένοι και αποκομμένοι. Αυτό με τη σειρά του οδηγεί στο αποτέλεσμα κατά το οποίο είναι γνωστό το πως εκτελείται ένα αλγόριθμος, αλλά δεν είναι εύκολο να διαπιστωθεί το πότε αυτός ο αλγόριθμος είναι ο κατάλληλος.

4.2.3. Παρουσίαση Βαθμολογίας Ερωτηματολογίων:

Στο τελευταίο στάδιο της έρευνας έγινε μια διαδικασία βαθμολόγησης κάθε ερωτηματολογίου ως προς τις απαντήσεις του β μέρους. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι κατηγορίες στις οποίες τοποθετήθηκαν οι εκπαιδευτικοί με βάση τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη λύση των προβλημάτων στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου. Κάθε εκπαιδευτικός βαθμολογήθηκε με τον βαθμό 1 όταν προσέγγιζε τη λύση λαμβάνοντας υπόψιν του το ρεαλιστικό πλαίσιο, τον βαθμό 0,5 όταν υπήρχε μια τάση ρεαλιστικής προσέγγισης αλλά όχι σε ικανοποιητικό επίπεδο και 0 όταν απομόνωνε εντελώς το ρεαλιστικό πλαίσιο από τη λύση.

Συνολική βαθμολογία	Κατηγορίες
1 1,5 2	Μη ρεαλιστική προσέγγιση
2,5 3	Απόκλιση από ρεαλιστική προσέγγιση
3,5 4	Τάση ρεαλιστικής προσέγγισης
6	Ρεαλιστική προσέγγιση

Πίνακας 9.

Στον παρακάτω πίνακα (βλ. Πίνακας 10) παρουσιάζονται οι βαθμολογίες όλων των ερωτηματολογίων. Σύμφωνα λοιπόν με τις βαθμολογίες που παρουσιάζονται στον πίνακα 9. το **56,3%** των εκπαιδευτικών προσέγγισαν τις λύσεις των προβλημάτων που τους δόθηκαν απομονώνοντας εντελώς το ρεαλιστικό πλαίσιο από τη διαδικασία επίλυσης. Το **18,7%** των εκπαιδευτικών, με βάση τις απαντήσεις τους στο β μέρος του ερωτηματολογίου φαίνεται πως ενώ κάνει κάποιες παρατηρήσεις ως προς το ρεαλιστικό πλαίσιο των προβλημάτων, παρόλα αυτά στην επίλυση δε το λαμβάνουν σχεδόν καθόλου υπόψιν. Το **21,9%** των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα παρουσιάζει μια τάση ρεαλιστικής προσέγγισης της λύσης. Αυτό σημαίνει κυρίως ότι στην επίλυση ορισμένων προβλημάτων, οι συγκεκριμένοι/ες εκπαιδευτικοί έλαβαν υπόψιν το ρεαλιστικό πλαίσιο. Τέλος, μόλις ένας/μια εκπαιδευτικός κατάφερε να συμπεριλάβει συνολικά το ρεαλιστικό πλαίσιο των προβλημάτων που διατυπώθηκαν στο β μέρος του ερωτηματολογίου κατά τη διαδικασία επίλυσης τους.

Score

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1,0	7	21,9	21,9	21,9
	1,5	3	9,4	9,4	31,3
	2,0	8	25,0	25,0	56,3
	2,5	1	3,1	3,1	59,4
	3,0	5	15,6	15,6	75,0
	3,5	3	9,4	9,4	84,4
	4,0	4	12,5	12,5	96,9
	6,0	1	3,1	3,1	100,0
	Total	32	100,0	100,0	

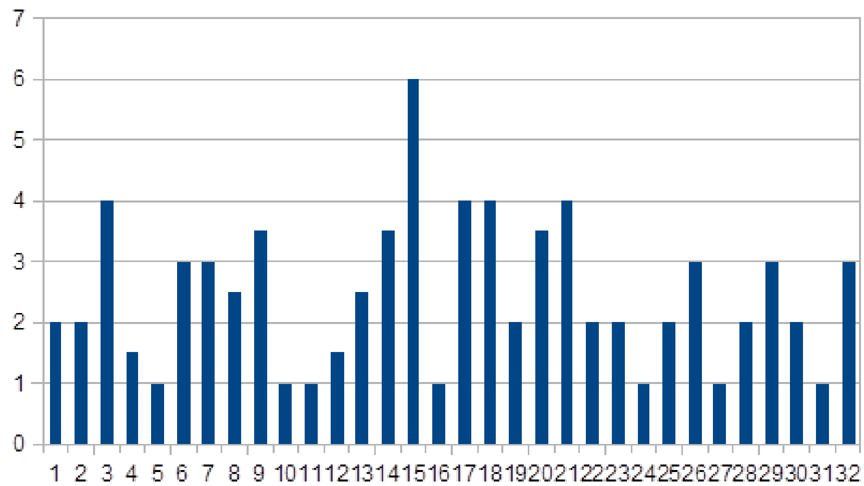
Πίνακας 10.

Ο τελικός πίνακας που διαμορφώνεται με βάση τους δύο παραπάνω (πίνακες 9 και 10) παρουσιάζει ομαδοποιημένα τα αποτελέσματα και είναι ο παρακάτω (πίνακας 11):

Συνολικός αριθμός ερωτηματολογίων	Ποσοστό (%)	Κατηγορίες
18	56,3	Μη ρεαλιστική προσέγγιση
6	18,7	Απόκλιση από ρεαλιστική προσέγγιση
7	21,9	Τάση ρεαλιστικής προσέγγισης
1	3,1	Ρεαλιστική προσέγγιση

Πίνακας 11.

Παρακάτω παρατίθεται ένα διάγραμμα που παρουσιάζει τη βαθμολογική κατάταξη κάθε ερωτηματολογίου:



Σχήμα 9.

4.2.4. Παρουσίαση και ανάλυση δυο χαρακτηριστικών ερωτηματολογίων:

Όπως φαίνεται και αναλυτικά στο παραπάνω διάγραμμα υπάρχει μόνο ένα ερωτηματολόγιο το οποίο ξεχώρισε μιας και προσέγγισε στο σύνολό του το πρότυπο της ρεαλιστικής προσέγγισης. Το ερωτηματολόγιο με τον αριθμό 15 λοιπόν, συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 6. Από την άλλη υπάρχουν περισσότερα από ένα ερωτηματολόγια που συγκεντρώνουν τη χαμηλότερη βαθμολογία η οποία είναι η μονάδα (1). Παρακάτω θα γίνει μια παρουσίαση και ένας σχολιασμός του ερωτηματολογίου που προσεγγίζει περισσότερο το ρεαλιστικό πρότυπο και εκείνου που απομακρύνεται εντελώς από αυτό. Το ερωτηματολόγιο που εκπροσωπεί σε αυτή την εργασία την ρεαλιστική προσέγγιση είναι σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία το ερωτηματολόγιο με τον αριθμό 15.

Α) Ο/η εκπαιδευτικός με την υψηλότερη βαθμολογία:

Ξεκινώντας από το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου, στην πρώτη ερώτηση ο/η εκπαιδευτικός απάντησε διατυπώνοντας ένα πρόβλημα στο οποίο καλούσε τους μαθητές να συγκρίνουν δύο ζωγραφισμένα τραπέζια ως προς το εμβαδόν και να δικαιολογήσουν την απάντηση που θα δώσουν. Σε κανένα από τα δύο σχήματα δεν δίνεται κάποιο μέγεθος. Αυτό που πετυχαίνει η διατύπωση αυτή είναι να μην παραπέμπει τους μαθητές στη σκέψη ότι η λύση βρίσκεται μόνο σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια, οι μαθητές που θα διαβάσουν αυτό το πρόβλημα θα αναζητήσουν την απάντηση του προβλήματος σε άλλες πρακτικές στις οποίες θα αναγκαστούν να εμπλέξουν και κάποιες γνώσεις ή πρακτικές από την καθημερινή τους ζωή μιας και το εμβαδόν σε αυτή την περίπτωση παύει να θεωρείται ο τύπος που παράγει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, ενώ ταυτίζεται με την επιφάνεια των δύο σχημάτων. Πολύ σημαντικό μέρος της διατύπωσης αποτελεί και το γεγονός ότι οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν την απάντηση τους.

Στο δεύτερο ερώτημα, οι λόγοι για τους οποίους θα χρησιμοποιούσε ένα μαθηματικό πρόβλημα στη διδασκαλία διατυπώνονται ως εξής: “*...διευρύνει την έννοια των μαθηματικών έξω από τα στενά πλαίσια εξάσκησης σε αναπαραγωγικού τύπου ασκήσεις και βοηθά τα παιδιά να γενικεύουν τις γνώσεις τους εφαρμόζοντάς τες σε συγκείμενα της καθημερινής ζωής. Επιπλέον, ένα μαθηματικό πρόβλημα, ανάλογα με το είδος και τη διατύπωσή του ενδέχεται να επιδέχεται περισσότερες των μία «λύσεων», καθώς οι πορείες που θα ακολουθηθούν να διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους.”* . Όπως φαίνεται στην παραπάνω απάντηση δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι ένα πρόβλημα δεν αποτελεί εφαρμογή και μέσο εξάσκησης του τυπολογίου, ενώ κάνει λόγο για περισσότερες από μία λύσεις σε κάθε πρόβλημα οι οποίες προκύπτουν από διαφορετικές "*πορείες*", όπως διατυπώνει. Αυτό επομένως αποτελεί ένδειξη η οποία βρίσκεται μακριά από τον πρότυπο της μοντελοποίηση της λύσης λεκτικών προβλημάτων.

Στην τρίτη ερώτηση για το πως θα έπρεπε να διδάσκεται η λύση του μαθηματικού προβλήματος στην τάξη ο/η εκπαιδευτικός απάντησε ως εξής: *''**Η λύση είναι κάτι που δεν πρέπει να διδάσκεται κατά τη γνώμη μου, αλλά να προκύπτει από τα ίδια τα παιδιά**. Και δεν εννοώ να προκύπτει με πλήρως καθοδηγούμενη διαδικασία από πλευράς των δασκάλων, αλλά με διαμόρφωση τέτοιων συνθηκών κατά τη διάρκεια του μαθήματος, ώστε **τα παιδιά να αναδεικνύουν τις σκέψεις τους και τις πορείες που ακολούθησαν προς την όποια λύση, να επέρχεται σύγκρουση μεταξύ των απόψεων αυτών και με επιχειρηματολογία** και λογικές σκέψεις να προσπαθούν να βρουν ποια από τις λύσεις-απαντήσεις είναι η πιο δόκιμη.''*. Στις δύο αυτές τονισμένες με μαύρο προτάσεις που βρίσκονται μέσα στην απάντηση του/της εκπαιδευτικού, συμπυκνώνεται σε μεγάλο βαθμό η πεποίθηση του Freudenthal ότι η εκμάθηση των Μαθηματικών θα πρέπει να έχει τα χαρακτηριστικά της γνωστικής ανάπτυξης και να μην είναι μια διαδικασία σύνθεσης μεμονωμένων κομματιών έτοιμης γνώσης, αλλά επίσης εμπεριέχει και την έννοια της ευθύνης που πρέπει να αναλάβει το παιδί για τη γνώση που αποκτά και αυτό πετυχαίνεται σε μεγάλο βαθμό κυρίως μέσα από την επιχειρηματολογία υποστήριξης της λύσης που προτείνει. (Gravemeijer,1999).

Στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα ο/η εκπαιδευτικός απάντησε λέγοντας πως διαμορφώνει τις ασκήσεις που χρησιμοποιεί στην τάξη χρησιμοποιώντας την κατάλληλη βιβλιογραφία, εκτός σχολικού βιβλίου, αλλά και όλες τις πληροφορίες που έχει σχετικά με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών.

Η απάντηση που έδωσε ο/η εκπαιδευτικός στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο αφορά την καταλληλόλητα των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών ως προς τη διδασκαλία της λύσης του μαθηματικού προβλήματος, είναι η εξής: *''Υπάρχει μια προσπάθεια να διατυπώνονται προβλήματα από το ''καθημερινό περιβάλλον'' των παιδιών, ωστόσο παραμένουν προβληματικά. Συνήθως δεν είναι προβλήματα πραγματικά αλλά αναπαραγωγή-εφαρμογή-εξάσκηση της θεωρίας που διδάσκεται στο μάθημα της ημέρας. Τα προβλήματα δεν πρέπει να αντιστοιχούν σε μαθήματα και ενότητες συγκεκριμένες, κατά τη γνώμη μου. Χρειάζεται να υπάρχει μία ποικιλία προβλημάτων όπου αξιοποιούνται οι γνώσεις οι προηγούμενες και οι ως τώρα. Να μην αναφέρονται στην τρέχουσα ενότητα, επομένως να μην προμηνύουν τον τρόπο επίλυσής τους, καθώς έτσι χάνουν την έννοια του προβλήματος και του προβληματισμού, δεν δίνουν την ώθηση για συζήτηση και διάλογο μέσα στην τάξη για τα ίδια τα προβλήματα και τη φύση τους και επομένως και για την πορεία σκέψης και επίλυσής τους.''*. Όπως διαπιστώνεται από την απάντηση που δόθηκε ο/η εκπαιδευτικός ασκεί κριτική στο περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων σε δύο επίπεδα. Το πρώτο έχει να κάνει με την μη-πετυχημένη προσπάθεια να περιλαμβάνουν τα σχολικά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα ρεαλιστικό πλαίσιο και το δεύτερο έχει να κάνει με την μοντελοποίηση των λύσεων η οποία μοντελοποίηση ξεκινάει έτσι και αλλιώς με την αναγγελία του τρέχοντος κεφαλαίου ή ενότητας κάτι που όπως τονίζει ο/η εκπαιδευτικός στέκεται εμπόδιο στην ανάπτυξη διαλόγου μέσα στην τάξη.

Στο τελευταίο ερευνητικό ερώτημα του πρώτου μέρους το οποίο έχει να κάνει με τη διδασκαλία προβλήματος του οποίου η διαπραγματευόμενη μαθηματική έννοια (κλάσματα) δεν έχει διδαχθεί επίσημα στην τάξη, ο/η εκπαιδευτικός απαντά λέγοντας πως ένα τέτοιο πρόβλημα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να εισαχθεί η έννοια της δίκαιης μοιρασιάς.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό μέρος και τις λύσεις που έδωσε ο/η εκπαιδευτικός, αξίζει να αναφερθεί ότι στο σύνολο των λύσεων έλαβε υπόψιν του/της το ρεαλιστικό πλαίσιο κάθε προβλήματος.

Β) Ο/η εκπαιδευτικός με την χαμηλότερη βαθμολογία:

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο που θα παρουσιαστεί έχει συγκεντρώσει συνολική βαθμολογία ένα (1) η οποία είναι και η χαμηλότερη. Δεν είναι το μοναδικό ερωτηματολόγιο με συνολική βαθμολογία ένα (1), αλλά στο συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο παρουσιάζεται ξεκάθαρα το προφίλ του/της εκπαιδευτικού που απομακρύνεται εντελώς από την ρεαλιστική προσέγγιση των σχολικών μαθηματικών προβλημάτων.

Στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα ο/η εκπαιδευτικός διατύπωσε το παρακάτω πρόβλημα: Ένας συνεταιρισμός συσκεύασε 2970 κιλά λάδι σε δοχεία των 15 κιλών. Πόσα δοχεία χρειάστηκαν; Όπως διαπιστώνεται, πρόκειται για ένα στερεότυπο λεκτικό πρόβλημα το οποίο παρουσιάζει και την ίδια δομή με αυτή που περιγράφει η Gerofsky (1996) σύμφωνα με την οποία μια τέτοια στερεότυπη δομή ουσιαστικά οδηγεί απλά στην αναζήτηση του σωστού αλγορίθμου και άρα η εμπλοκή του ρεαλιστικού πλαισίου καθίσταται αδύνατη.

Όσον αφορά το 2ο ερευνητικό ερώτημα ο/η εκπαιδευτικός δίνει μια αρκετά γενικευμένη και μη διευκρινισμένη απάντηση λέγοντας πως τα μαθηματικά προβλήματα βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν βαθύτερη γνώση των μαθηματικών εννοιών.

Στο 3ο ερευνητικό ερώτημα ο/η εκπαιδευτικός θεωρεί πως ένας τρόπος να διδαχθεί η λύση μαθηματικού προβλήματος είναι η χρήση εποπτικού υλικού η σχεδιαγραμμάτων. Παρόλα αυτά συνεχίζει λέγοντας πως το χειρ απτικό υλικό βοηθάει στο να ξεχωρίζουν οι μαθητές τα ζητούμε από τα δεδομένα. Συνεπώς, μπαίνει στη βασική στοχοθεσία η εύρεση αριθμητικού αποτελέσματος κάτι που παραπέμπει και πάλι στην εύρεση του σωστού αλγορίθμου και σε καμιά σύνδεση με το ρεαλιστικό πλαίσιο.

Η απάντηση που δίνει στο 4ο ερευνητικό ερώτημα παρουσιάζει ενδιαφέρον. Στην ερώτηση λοιπόν για το ποιες πηγές λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων χρησιμοποιεί ως εκπαιδευτικός ο/η ίδιος/α απαντάει λέγοντας ότι επικεντρώνεται κυρίως στο σχολικό βιβλίο. Αυτό κατά συνέπεια σημαίνει πως ο/η εκπαιδευτικό αρκείται στα προβλήματα του σχολικού βιβλίου τα οποία όπως αναλύσαμε παραπάνω παρουσιάζουν κυρίως στερεοτυπική δομή, ενώ δεν προωθούν την εμπλοκή της καθημερινής γνώσης κατά τη διαδικασία της επίλυσής τους.

Στη συνέχεια, στην απάντησή του/της στο 5ο ερευνητικό ερώτημα ο/η ίδιος/α εκπαιδευτικός τοποθετείται κατά του τρόπου με τον οποίο διδάσκεται η λύση στο σχολικό βιβλίο. Θεωρεί πως τα σχολικά βιβλία θα " *έπρεπε να έχουν μια πιο μεθοδική προσέγγιση*". Από αυτή την απάντηση γίνεται διακριτό πως ο/η ίδιος/α αντιλαμβάνεται τη διαδικασία της λύσης ως μεθόδευση που οδηγεί στην εύρεση του σωστού αλγορίθμου. Στη συνέχεια, συμπληρώνει πως με τον τρόπο που μπαίνουν τα προβλήματα μέσα στην ύλη "*οι μαθητές δεν προλαβαίνουν να εμπεδώσουν τις μικρές λεπτομέρειες που βοηθούν στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων*". Επομένως γίνεται ξεκάθαρο πως ο/η εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται τη λύση των προβλημάτων ως μια διαδικασία μοντελοποίησης ή συνταγής η οποία θα οδηγήσει στην εύρεση του σωστού αλγορίθμου και στο σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Τέλος, στο 6ο ερώτημα ο/η εκπαιδευτικός δίνει μια περιγραφική λύση του προβλήματος η οποία είναι η εξής: "*Χωρίζω την κάθε σοκολάτα σε 5 ίσα μέρη. Το κάθε παιδί θα πάρει το 1 από τα 5 ίσα κομμάτια από την κάθε σοκολάτα. Άρα συνολικά θα πάρει από τις 4 σοκολάτες 1/5+1/5+1/5+1/5 = 4/5 τα τέσσερα πέμπτα.. Απαραίτητο το εποπτικό υλικό και μια άριστη ευκαιρία για την εισαγωγή στα κλάσματα."* . Εκπλήσσει ευχάριστα το γεγονός ότι στις παραπάνω απαντήσεις ενώ δείχνει ξεκάθαρα την τάση που έχει να αντιλαμβάνεται τα προβλήματα ως εφαρμογή και τη λύση ο μεθοδευμένη διαδικασία, εδώ, αν και κάνει μια περιγραφική λύση του προβλήματος, αντιλαμβάνεται ότι θα μπορούσε να μην αποτελεί πλέον εφαρμογή αλλά αφορμή για την εισαγωγή στην νέα έννοια. Για το λόγο αυτό βαθμολογήθηκε με μονάδα (1) η συγκεκριμένη απάντηση. Ίσως μπορούμε να θεωρήσουμε, μετά από αυτή την απάντηση, πως οι εκπαιδευτικοί ακόμα και αν αντιλαμβάνονται τα λεκτικά Μαθηματικά προβλήματα ως εφαρμογές, μπορούν μέσα από τη σωστή ενημέρωση να αναθεωρήσουν τις θέσεις τους για αυτά προσεγγίζοντας περισσότερο το ρεαλιστικό πρότυπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω ανάλυση των απαντήσεων που δόθηκαν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας, σίγουρα μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια συγκεκριμένα συμπεράσματα ως προς τις αντιλήψεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί για τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με τη δομή τους, το περιεχόμενό τους και το ρόλο τους στη διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και για το πως τα αντιμετωπίζουν οι ίδιοι σε σχέση με τη διαδικασία της επίλυσής τους.

Ξεκινώντας από τα πιο επιφανειακά χαρακτηριστικά ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος, αυτό που γίνεται αντιληπτό μέσω των απαντήσεων που δόθηκαν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα του πρώτου μέρους του ερωτηματολογίου, είναι το γεγονός ότι όλοι/όλες οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα, εκτός από έναν/μία, διατύπωσαν λεκτικά μαθηματικά προβλήματα τα οποία φέρουν τη δομή εκείνων των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία. Η δομή αυτή όπως έχει ήδη αναφερθεί, βασίζεται στην δομή που έχουν οι αλγόριθμοι και όχι σε αφηγήσεις ρεαλιστικών πλαισίων τα οποία προάγουν την εμπλοκή της γνώσης η οποία προέκυψε μέσα από τις εμπειρίες της καθημερινότητας. Επομένως, οι εκπαιδευτικοί δείχνουν να αντιλαμβάνονται τα προβλήματα ως αλγοριθμικές διαδικασίες οι οποίες έχουν ως στόχο το σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα και σε καμιά περίπτωση την εμπλοκή του ρεαλιστικού πλαισίου και την διαπραγμάτευση ή την επιχειρηματολογία πάνω στη διαδικασία της λύσης. Κατά συνέπεια, το λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα δεν μπορεί παρά να επιτελεί το ρόλο του μέσου αξιολόγησης και όχι του μέσου επανίδρυσης της γνώσης.

Η τάση αυτή των εκπαιδευτικών φάνηκε πιο έντονα και μέσα από τις απαντήσεις του δευτέρου ερωτήματος. Πολλοί εκπαιδευτικοί έδειξαν να μην αντιλαμβάνονται το τι σημαίνει τελικά να εμπλέκεται η γνώση της καθημερινής ζωής στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Έτσι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ενώ πολλοί/ες εκπαιδευτικοί έκαναν λόγο για σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή και την πραγματικότητα μέσω της αξιοποίησης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων κατά τη διδασκαλία, δεν αναφερόντουσαν στην εμπλοκή του ρεαλιστικού πλαισίου στη διαδικασία επίλυσης, αλλά στην απλή περιγραφή μιας φαινομενικά ρεαλιστικής κατάστασης. Όπως σημειώνει και ο Greer (1997) υπάρχει μια δυσκολία στο να διατυπωθεί με ακρίβεια το τι σημαίνει "πραγματικότητα" και επικαλείται ένα πρόβλημα που διατύπωσε ο Freudenthal (1991, p. 70). Το πρόβλημα είναι το εξής: *Ο κύριος Σμιθ έχει 26 Kg κρέας στο κρεοπωλείο του και παρήγγειλε άλλα 10 Kg. Πόσα κιλά κρέας έχει τώρα;*

Το πλαίσιο του προβλήματος είναι ρεαλιστικό και στην περίπτωση που δινόταν σε μια τάξη προς λύση σίγουρα το μυαλό των περισσοτέρων μαθητών-τριων θα πήγαινε στην εκτέλεση του αλγορίθμου της πρόσθεσης. Έτσι, θα υπήρχε η αντίληψη από τη μεριά του εκπαιδευτικού πως οι μαθητές έλυσαν ένα πρόβλημα που είναι συνδεδεμένο με την πραγματική ζωή απλά και μόνο γιατί το κρεοπωλείο είναι μέρος της πραγματικότητας μας.

Ωστόσο ο Freudenthal κάνει μια σημείωση παρακάτω λέγοντας πως η παραγγελία του κρέατος έγινε από το τηλέφωνο και το κρέας δεν θα "πετούσε" αμέσως μέχρι το κρεοπωλείο οπότε μερικά από τα 26 Kg κρέατος θα έχουν πουληθεί όταν φτάσει. Παρουσιάζει δηλαδή μια πτυχή του τι σημαίνει σύνδεση με την καθημερινή ζωή και την πραγματικότητα κάτι που σίγουρα διαφέρει με αυτό που αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν. Επομένως, οι αναφορές στην καθημερινή ζωή και τη σύνδεση με τη λύση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων υποδηλώνουν πως οι εκπαιδευτικοί σε μεγάλο βαθμό αντιλαμβάνονται τη δομή, το ρόλο και τον τρόπο λύσης των μαθηματικών προβλημάτων λίγο πολύ όπως αυτά παρουσιάζονται μέσα από τα σχολικά βιβλία. Κατά συνέπεια τα ρεαλιστικά στοιχεία που δίνονται και οι εμπλοκή τους στη λύση του προβλήματος επιτελούν περισσότερο για τους εκπαιδευτικούς έναν ρόλο αφηγηματικό οποίος εξαντλείται όπως και στα σχολικά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα στης πρώτες γραμμές της διατύπωσης του και που “ντύνει” επιφανειακά το πρόβλημα με μια ρεαλιστική επένδυση χωρίς να βάζει προϋποθέσεις για τη λύση του και χωρίς να θέτει όρους. Αυτό επιβεβαιώνουν και οι λύσεις που δόθηκαν στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου.

Στα περισσότερα προβλήματα που είχαν αυξημένη απαίτηση ως προς τη λήψη του ρεαλιστικού πλαισίου στα υπόψιν για την επίλυση τους οι εκπαιδευτικοί επικεντρώθηκαν και πάλι να εύρεση του κατάλληλου αλγορίθμου που θα οδηγούσε στο αριθμητικό αποτέλεσμα. Γενικότερα, οι εκπαιδευτικοί είχαν την τάση να απομονώνουν τα ρεαλιστικά στοιχεία που παρουσίαζε η υπόθεση του προβλήματος κατά τη διαδικασία επίλυσης. Ουσιαστικά, τη διαδικασία μονοπώλησε η προοπτική της μοντελοποίησης της διαδικασίας της λύσης με την εύρεση του κατάλληλου αλγορίθμου η οποίος θα οδηγούσε και στον αριθμητικό αποτέλεσμα. Κάποιοι/ες εκπαιδευτικοί μάλιστα, προσπάθησαν να μοντελοποιήσουν τη διαδικασία της λύσης κάνοντας πίνακες που παρουσίαζαν τα αριθμητικά στοιχεία, απομονωμένα από το πλαίσιο, ως ζητούμε και ως δεδομένα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

<u>Α- Μέρος ερωτηματολογίου:</u>

Ερώτημα πρώτο:

Δ1: Τυπικό μαθηματικό πρόβλημα (όπως αυτό περιγράφεται από την Gerofsky)

Δ2: Πρόβλημα πλαίσιο (όπως αυτό περιγράφεται στο άρθρο του Cobb και του Gravenmeijer)

Ερώτημα δεύτερο:

Δ1: Εφαρμογή και εξάσκηση πάνω στη νέα γνώση (μέσο αξιολόγησης)

Δ2: Αφόρμηση. Μέσο εισαγωγής στη νέα γνώση/ ανακαλυπτική διαδικασία κατάκτησης της γνώσης.

Δ3: και τα 2 παραπάνω

Δ4: Σύνδεση με την καθημερινή ζωή.

Δ5: Εφαρμογή/Εξάσκηση και σύνδεση με την καθημερινή ζωή

Δ6: Αφόρμηση και σύνδεση με την καθημερινή ζωή.

Ερώτημα τρίτο:

Δ1: Μοντελοποίηση της λύσης

Δ2: Ανακάλυψη της διαδικασίας λύσης.

Ερώτημα τέταρτο:

Δ1: Μόνο σχολικό βιβλίο

Δ2: Συνδυασμός πηγών

Δ3: Συνδυασμός πηγών με αυτοσχεδιασμό

Δ4: Αυτοσχεδιασμός

[1] **Ερώτημα πέμπτο:**

Δ1: ΟΧΙ

Δ2: ΝΑΙ

Ερώτημα έκτο:

Δ1: Αφορμή για την εισαγωγή σε έννοιες που αφορούν την κλασματική μονάδα.

Δ2: Εφαρμογή υπάρχουσας αλγοριθμικής γνώσης.

1. *Οι κωδικοί, σε αυτό το ερώτημα, επιλέχτηκαν με βάση την απάντηση που μπορούσα να δώσω στο αν επιβεβαιώνεται ή όχι, σε κάθε απάντηση, ο προβληματισμός του Gravemeijer (1997, p. 391) για το αν οι δάσκαλοι είναι σε θέση να διεκδικήσουν βελτίωση των σχολικών βιβλίων στο πλαίσιο των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Φιλίππου , Γ. & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας: Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Άτραπος

Freudenthal, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Riedel Publishing Company,Dordrecht, The Netherlands.

Hart, L.E., Walker, J. (1993) The role of affect in teaching and learning mathematics. In D. Owens (Ed.) Reasearch Ideas for the Classsroom: Middle Grades Mathematics, (pp. 22-38). New York: Macmillan - NCTM.

Dewey, J. (1913/1975). Interest and effort in education. Carbondale, IL: Southern Illinois University Press

Freudenthal, H.: 1991, *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L.: 1991, *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*.

Gravemeijer, K.P.E: 1994. *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute

Treffers, A.: 1991. *Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990*. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Greer, B.: 1997. Modeling reality in Mathematics classrooms: The case of word problems, School of Psychology, Queen's University, Belfast.

Cobb, P., Yackel E., Wood T.: 1992, *A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education, J ournal for Research in Mathematics Education, Vol. 23, No. 1., pp. 2-33.*

Gravemeijer, K: 1999, *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics*, Mathematical Thinking and Learning 1(2), 155–177.

Gravemeijer, K. and Doorman, D.: 1999, *Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example*, Educational Studies in Mathematics 39, 111–129.

Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). *Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity.* In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 114-122). Reston, VA: NCTM

Sfard, A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and* *objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics 22, 1–36.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. :1997. *Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems*. Learning and Instruction, 7. 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Greer, B. :2002. *Everyday knowledge and Mathematical Modeling of school word problems, Kluwer Academic Publishers*, The Netherlands

Cobb, P., Zhao, Q., Hodge, L., Visnovska, J. :2007. *What does it mean for an instructional task to effective*, 392-396

Marja Van den Heuvel-Panhuizen: 2003. *The didactictal use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Marja van den Heuvel-Panhuizen: 2005. *The role of contexts in assessment problems in mathematics*, FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada.

McLeod, D. (1992). Reasearch on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Reasearch in Mathematics Teaching and Learning (pp. 575-596). New York: Macmillan

Polya: 1945. *How to Solve It: A new aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Schoenfeld, A. H.: 1992. *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York:

Susan Gail Gerofsky: 1999. The word problems as genre in mathematics education, Simon Fraser University, Canada.