



Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Φυσικής

Διπλωματική Εργασία

Σολιτόνια στη Γενική Θεωρία της
Σχετικότητας

Καραθανάσης Χρήστος
ΑΜ:201631

Επιβλέπων Καθηγητής: Θ. Αποστολάτος

Αθήνα 2018

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής :

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Θεοχάρης Αποστολάτος	Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθήνας
Δεύτερος Εξεταστής	Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης	Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθήνας
Τρίτος Εξεταστής	Δημήτριος Φραντζεσκάκης	Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Θεοχάρη Αποστολάτο, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή, κ. Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη και τον Καθηγητή, κ. Δημήτριο Φραντζεσκάκη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Περίληψη

Τα σολιτόνια είναι λύσεις μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων και φέρουν αρκετές ομοιότητες με σωματίδια: έχουν πεπερασμένη ενέργεια, χαρακτηριστική ταχύτητα διάδοσης και διατηρούν την δομή τους όταν συγκρούονται μεταξύ τους. Αρχικά παρατηρήθηκαν σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δύο διαστάσεων στην υδροδυναμική, όπως η εξίσωση Korteweg-de Vries. Το 1960 αναπτύχθηκε η μέθοδος του αντίστροφου σχεδασμού για την συστηματική λύση αυτής. Προς τα τέλη του 1970, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε και στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Με αυτό το μαθηματικό εργαλείο, επιτεύχθηκε η εύρεση εξαιρετικά μεγάλου αριθμού λύσεων των εξισώσεων του Einstein στο κενό. Δεδομένης μιας μετρικής που αποτελεί λύση αυτών των εξισώσεων, η μέθοδος επιτυγχάνει την δημιουργία νέων μετρικών που παραμένουν λύσεις των ίδιων εξισώσεων. Έτσι όπως είναι κατασκευασμένη η μέθοδος, μπορεί να εφαρμοστεί για μετρικές που παρουσιάζουν κάποιες συμμετρίες. Συγκεκριμένα, αφορά μετρικές που έχουν εξάρτηση μόνο από δύο από τις τέσσερις συντεταγμένες. Συνεπώς, υπάρχει η επιλογή εφαρμογής της μεθόδου σε χρονοεξαρτώμενες ή χρονοανεξάρτητες μετρικές. Στις στατικές μετρικές η μέθοδος οδηγεί στις γνωστές μετρικές Kerr και Schwarzschild. Στις χρονοεξαρτώμενες, οι λύσεις που παράγονται έχουν κοσμολογικό ενδιαφέρον. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με τις χρονοεξαρτώμενες μετρικές.

Λέξεις Κλειδιά : Γενική Σχετικότητα, Βαρυτικά Κύματα, Σολιτόνια

Abstract

Solitons are some remarkable solutions of non linear differential equations that bare particle-like properties : they have a finite energy, a characteristic velocity of propagation and maintain their structures when two of them collide. The first equations that solitons appeared as solutions, were some non linear two dimensional differential equations of hydrodynamics, like the Korteweg-de Vries equation. In 1960, a method for solving those was developed, the Inverse Scattering Method(ISM). In the late 1970s the ISM was extended to General Relativity and offered a way to compute new solutions of the Einstein's field equations. Given a metric that is a solution of the Einstein equation in empty space, the method produces new metrics that remain solutions of the same equations. The ISM can be applied to metrics that posses certain symmetries. Namely, it can be applied to metrics that depend on two coordinates only. Hence, there are two families of produced solutions, the time dependent and time independent. The latter leads to the known solutions of the Kerr and Schwarzschild metrics. The time dependent solutions produce metrics that are of cosmological interest.

Key Words : General Relativity, Gravitational Waves, Solitons

Περιεχόμενα

1	Μέθοδος Αντίστροφου Σκεδασμού	4
2	Σολιτόνια στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	9
3	Μελέτη των Σολιτονικών Λύσεων για $n=1$, $n=2$	21
4	Σολιτονικές Λύσεις με Υπόβαθρο την Μετρική Kasner	28
	Bibliography	56

Κεφάλαιο 1

Μέθοδος Αντίστροφου Σχεδασμού

Η Μέθοδος Αντίστροφου Σχεδασμού (Inverse Scattering Method ή για συντομία ISM) είναι ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να λύσουμε μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής :

$$u_t = F(u, u_z, u_{zz}, \dots) \quad (1.1)$$

όπου F μια μη γραμμική συνάρτηση. Για να είναι εφικτό να ολοκληρώσουμε αυτή την εξίσωση με τη χρήση του ISM πρέπει να την συσχετίσουμε με ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων γραμμικών τελεστών όπου η άγνωστη συνάρτηση $u(t, z)$ θα είναι το δυναμικό. Για την ολοκλήρωση της 1.1 κατασκευάζουμε το παρακάτω :

$$L\psi(\lambda, z, t) = \lambda\psi(\lambda, z, t), \quad L = -\frac{d^2}{dz^2} + u(z, t) \quad (1.2)$$

όπου λ η παράμετρος φάσματος. Έστω ότι γνωρίζουμε το δυναμικό u την χρονική στιγμή $t = 0$. Το πρόβλημα σχεδασμού αποτελείται από την εύρεση όλων των ποσοτήτων $S(\lambda, 0)$ που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική τιμή της ιδιοσυναρτήσης $\psi(\lambda, z, 0)$ για $z \rightarrow -\infty$ δεδομένης της $\psi(\lambda, z, 0)$ για $z \rightarrow +\infty$. Στο παραπάνω πρόβλημα η παράμετρος λ είναι η ενέργεια του σχεδασμένου. Θετικές τιμές αυτής δίνουν το συνεχές φάσμα του προβλήματος 1.2, ενώ αρνητικές αντιπροσωπεύουν τις δέσμιες καταστάσεις στο δυναμικό u και δίνουν το διακριτό φάσμα. Οπότε οι ποσότητες $S(\lambda, 0)$ αποτελούνται από τα πλάτη ανάκλασης, διάθλασης και τις αρνητικές ιδιοτιμές λ_n .

Το αντίστροφο του παραπάνω προβλήματος είναι να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε το δυναμικό $u(z, t)$ αν γνωρίζουμε τις ποσότητες $S(\lambda, t)$. Αυτό είναι το πρόβλημα του αντίστροφου σχεδασμού. Αν ξέρουμε τα $S(\lambda, 0)$ και την χρονική εξέλιξη αυτών, δηλαδή μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες $S(\lambda, t)$, τότε

μπορούμε να εφαρμόσουμε το ISM και να βρούμε το $u(z, t)$. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την χρονική εξέλιξη των $S(\lambda, 0)$ πρέπει να έχουμε στη διάθεσή μας άλλη μία σχέση της μορφής :

$$\psi_{,t} = A\psi \quad (1.3)$$

όπου A διαφορικός τελεστής που περιέχει μόνο παραγώγους του u ως προς τη χωρική συντεταγμένη z . Το σύστημα των 1.2, 1.3 ονομάζεται *Lax pair* ή $L - A$ pair [8]. Η ύπαρξη δύο τέτοιων εξισώσεων σημαίνει ότι υπάρχει μία εξίσωση συμβατότητας η οποία πρέπει να ικανοποιείται. Αυτή η εξίσωση μπορούμε να δείξουμε ότι συμπίπτει με την σχέση 1.1 που θέλουμε να ολοκληρώσουμε. Άρα κάθε ολοκληρώσιμη διδιάστατη μη γραμμική διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως συνθήκη συμβατότητας προβλήματος ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων δύο διαφορικών τελεστών.

Η λύση που θα βγάλουμε από την διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω δε θα έχει αναλυτική μορφή καθώς από την μετατροπή $S(\lambda, t) \rightarrow u(z, t)$ προκύπτουν πολύπλοκες εξισώσεις με δύσκολα υπολογίσιμα ολοκληρώματα [12]. Υπάρχει μια ειδική κατηγορία λύσεων για τις οποίες μπορούμε να βρούμε πλήρως αναλυτικές εκφράσεις. Θεωρώντας ότι ο συντελεστής ανάκλασης μηδενίζεται καταλήγουμε σε αυτές τις λύσεις, οι οποίες ονομάζονται *σολιτονικές*.

Στις σολιτονικές λύσεις οι τιμές λ_n του διακριτού φάσματος συμπίπτουν με τους πόλους του πλάτους διάθλασης στο μιγαδικό λ -επίπεδο [3, σελ. 5]. Για να βρούμε αυτές τις λύσεις ξεκινάμε από ένα $L - A$ pair πρόβλημα [13] :

$$\psi_{,z} = U\psi, \quad \psi_{,t} = V\psi \quad (1.4)$$

όπου U, V είναι $N \times N$ πίνακες με στοιχεία μιγαδικές συναρτήσεις. Η συνθήκη συμβατότητας του συστήματος 1.4 είναι :

$$U_{,t} - V_{,z} + [U, V] = 0 \quad (1.5)$$

Θεωρούμε τώρα ότι ο U έχει N_1 απλούς πόλους στα σημεία $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{N_1}$ και ο V έχει N_2 στα σημεία $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{N_2}$. Άρα είναι της μορφής :

$$U = U_0 + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{U_n}{\lambda - \kappa_n}, \quad V = V_0 + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{V_n}{\lambda - \epsilon_n} \quad (1.6)$$

Παίρνοντας την 1.5 και χρησιμοποιώντας τις 1.6 βλέπουμε ότι αν μηδενίσουμε τους συντελεστές κάθε πόλου καταλήγουμε σε ένα σύστημα $N_1 + N_2$ εξισώσεων. Επίσης παίρνουμε το όριο $\lambda \rightarrow \infty$ και βρίσκουμε άλλη μία σχέση. Από τις 1.6 όμως φαίνεται ότι έχουμε $N_2 + N_1 + 2$ αγνώστους. Άρα έχουμε μια ελευθερία βαθμίδας την οποία θα χρησιμοποιήσουμε. Ορίζουμε τους πίνακες :

$$\tilde{U} = jUj^{-1} + j_{,z}j^{-1}, \quad \tilde{V} = jVj^{-1} + j_{,t}j^{-1} \quad (1.7)$$

όπου j αυθαίρετος μιγαδικός πίνακας με στοιχεία συναρτήσεις των t, z . Εύκολα φαίνεται ότι το σύστημα 1.4 ικανοποιείται με την ταυτόχρονη αλλαγή $U \rightarrow \tilde{U}$, $V \rightarrow \tilde{V}$, $\psi \rightarrow j\psi$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία βαθμίδας που έχουμε δίνουμε στον j κατάλληλη τιμή ώστε να ικανοποιούνται οι :

$$U_0 = -j^{-1}j_{,z}, \quad V_0 = -j^{-1}j_{,t} \quad (1.8)$$

Τελικά έχουμε :

$$\tilde{U} = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\tilde{U}_n}{\lambda - \kappa_n}, \quad \tilde{V} = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\tilde{V}_n}{\lambda - \epsilon_n} \quad (1.9)$$

Παίρνουμε την πιο απλή περίπτωση όπου οι παραπάνω πίνακες έχουν από ένα πόλο ο καθένας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτοί βρίσκονται στα σημεία $\lambda = \pm 1$ και ορίζοντας $\tilde{U}_1 = A$, $\tilde{V}_1 = B$ καταλήγουμε στο σύστημα :

$$\psi_{,z} = \frac{A}{\lambda - 1}\psi, \quad \psi_{,t} = \frac{B}{\lambda + 1}\psi \quad (1.10)$$

Η συνθήκη συμβατότητας 1.5 ανάγεται τώρα σε δύο εξισώσεις :

$$A_{,t} - B_{,z} = 0 \quad (1.11)$$

$$A_{,t} + B_{,z} + [A, B] = 0 \quad (1.12)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα χωρίο Γ πάνω στο μιγαδικό λ -επίπεδο και πάνω σε αυτό έναν $N \times N$ πίνακα $G(\lambda, z, t)$ με στοιχεία συναρτήσεις χωρίς ανώμαλα σημεία[16]. Ορίζουμε άλλους δύο τέτοιους πίνακες χ , χ' όπου ο ένας είναι αναλυτικός στο εσωτερικό και ο άλλος στο εξωτερικό του Γ και πάνω στο Γ ισχύει:

$$\chi\chi' = G \quad (1.13)$$

Οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος είναι μη μοναδικές καθώς, αν βρούμε δύο πίνακες χ , χ' που ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέσαμε, τότε και η αλλαγή $\chi \rightarrow \chi g$, $\chi' \rightarrow g^{-1}\chi'$, με g αυθαίρετο πίνακα, είναι λύση. Χρησιμοποιούμε αυτή την ελευθερία και απαιτούμε $\chi(\infty) \rightarrow I$ ώστε η επιλογή να είναι μονοσήμαντη. Προκειμένου να έχουμε σολιτονικές λύσεις πρέπει να υπάρχουν σημεία στο λ -επίπεδο που οι χ , χ' έχουν απλούς πόλους. Άρα να έχουν τη γενική μορφή:

$$\chi = I + \sum_{n=1}^N \frac{R_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad \chi' = I + \sum_{n=1}^N \frac{R'_n}{\lambda - \mu_n} \quad (1.14)$$

Έστω ότι γνωρίζουμε μία λύση του συστήματος 1.10 Ψ_0 με A_0 , B_0 . Ορίζουμε μία κατάλληλη συνάρτηση $G_0(\lambda)$ τέτοια ώστε πάνω στο χωρίο Γ να ισχύει :

$$G(\lambda, z, t) = \psi_0(\lambda, z, t)G_0(\lambda)\psi_0^{-1}(\lambda, z, t) \quad (1.15)$$

Παραγωγίζουμε την 1.15 ως προς z και με χρήση των 1.10, 1.13 βρίσκουμε :

$$\chi_{,z}\chi' + \chi\chi'_{,z} = \frac{1}{\lambda-1}(A_0\chi\chi' - \chi\chi'A_0) \quad (1.16)$$

Ορίζουμε τον πίνακα :

$$U = \chi^{-1}(-\chi_{,z} + \frac{1}{\lambda-1}A_0\chi) = (\chi'_{,z} + \frac{1}{\lambda-1}\chi'A_0)\chi'^{-1} \quad (1.17)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι ο U είναι αναλυτικός και εντός και εκτός του Γ και έχει πόλους στο $\lambda = 1$ και στα λ_n, μ_n . Με παραγωγή ως προς t ορίζουμε και έναν άλλον πίνακα :

$$V = \chi^{-1}(-\chi_{,t} + \frac{1}{\lambda+1}B_0\chi) = (\chi'_{,t} + \frac{1}{\lambda+1}\chi'B_0)\chi'^{-1} \quad (1.18)$$

Και ο V είναι αναλυτικός και εντός και εκτός του Γ και έχει πόλους στο $\lambda = -1$ και στα λ_n, μ_n . Από τις 1.17, 1.18 βλέπουμε ότι ισχύουν :

$$\chi_{,z} = \frac{1}{\lambda-1}A_0\chi - \chi U, \quad \chi_{,t} = \frac{1}{\lambda+1}B_0\chi - \chi V \quad (1.19)$$

Θέτοντας $\chi = \psi_0\psi^{-1}$ έχουμε τελικά :

$$\psi_{,z} = U\psi, \quad \psi_{,t} = V\psi \quad (1.20)$$

Αυτή είναι μια νέα λύση του συστήματος 1.10 αλλά οι πίνακες U, V περιέχουν και πόλους στα σημεία λ_n, μ_n . Προκειμένου να έχουμε πόλους μόνο στα $\lambda \pm 1$, όπως ήταν το αρχικό μας σύστημα, θα πρέπει να μηδενίσουμε όλους τους συντελεστές των επιπλέον πόλων. Για παράδειγμα θα πάρουμε την πιο απλή περίπτωση που οι χ, χ' έχουν έναν πόλο ο καθένας :

$$\chi = I + \frac{R_1}{\lambda - \lambda_1}, \quad \chi' = I + \frac{R'_1}{\lambda - \mu_1} \quad (1.21)$$

Γενικά στο ISM ο πίνακας G είναι άγνωστος και εμφανίζεται μέσα στις λύσεις. Στις πλήρως σολιτονικές λύσεις, που είναι αυτές με τις οποίες θα ασχοληθούμε, θέτουμε $G = I$. Από την 1.13 βλέπουμε ότι αυτό σημαίνει :

$$\chi' = \chi^{-1} \quad (1.22)$$

Από την 1.21 βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει :

$$R_1 = (\lambda_1 - \mu_1)P, \quad R'_1 = -(\lambda_1 - \mu_1)P \quad (1.23)$$

όπου P ο προβολικός τελεστής ο οποίος έχει την ιδιότητα $P^2 = P$. Οπότε έχουμε :

$$\chi = I + \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \lambda_1} P, \quad \chi' = I - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \mu_1} P \quad (1.24)$$

Από τις 1.17, 1.18 και 1.24 μηδενίζοντας τους συντελεστές στους πόλους λ_1, μ_1 βρίσκουμε :

$$P \left(-\partial_z + \frac{A_0}{\lambda_1 - 1} \right) (I - P) = 0 \quad (1.25)$$

$$P \left(-\partial_t + \frac{B_0}{\mu_1 - 1} \right) (I - P) = 0 \quad (1.26)$$

$$(I - P) \left(-\partial_z + \frac{A_0}{\lambda_1 - 1} \right) P = 0 \quad (1.27)$$

$$(I - P) \left(-\partial_t + \frac{B_0}{\mu_1 - 1} \right) P = 0 \quad (1.28)$$

Ο προβολικός τελεστής χαρακτηρίζεται από δύο υπόχωρους, την εικόνα του $\hat{M} = \text{Im}(P)$ και τον πυρήνα του $\hat{N} = \text{Ker}(P)$. Για αυτούς γνωρίζουμε ότι :

$$(I - P)\hat{M} = 0, \quad P\hat{N} = 0 \quad (1.29)$$

Βλέπουμε ότι οι εξισώσεις 1.25-1.28 ικανοποιούνται αν θέσουμε :

$$\hat{M} = \psi_0|_{\lambda=\lambda_1} \hat{M}_0, \quad \hat{N} = \psi_0|_{\lambda=\mu_1} \hat{N}_0 \quad (1.30)$$

όπου \hat{M}_0, \hat{N}_0 σταθεροί υπόχωροι χωρίς κοινά στοιχεία και με το άθροισμά τους να δίνει ολόκληρο τον N -διάστατο μιγαδικό χώρο.

Κεφάλαιο 2

Σολιτόνια στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο ISM στη γενική θεωρία της σχετικότητας πρέπει η μετρική μας να κατέχει κάποιες συμμετρίες[3, σελ. 10-11]. Θεωρούμε ότι έχουμε μια μετρική $g_{\mu\nu}$ η οποία αποτελεί λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό, δηλαδή $R_{\mu\nu} = 0$. Η πρώτη συμμετρία που χρειαζόμαστε είναι αυτή η μετρική να εξαρτάται μόνο από δύο από τις τέσσερις συντεταγμένες του χωρόχρονου. Αυτό σημαίνει ότι ο χωρόχρονος που έχουμε, κατέχει δύο ανυσματικά πεδία Killing που μετατίθενται μεταξύ τους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα πάρουμε την περίπτωση που η μία τέτοια συντεταγμένη είναι η χωρική z και η άλλη ο χρόνος t . Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στην στάσιμη περίπτωση όπου και οι δύο συντεταγμένες από τις οποίες εξαρτάται η μετρική είναι χωρικές. Σε κάθε μετρική μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μετασχηματισμό $x^\mu = x'^\mu(x'^\nu)$ και να τη φέρουμε στη μορφή :

$$ds^2 = f(z, t)(dz^2 - dt^2) + 2g_{a3}(z, t)dx^a dz + g_{ab}(z, t)dx^a dx^b \quad (2.1)$$

όπου οι δείκτες a, b παίρνουν τις τιμές 1, 2 και αναφέρονται στις άλλες δύο χωρικές συντεταγμένες. Στην παραπάνω μετρική στην οποία καταλήξαμε δεν μπορεί να εφαρμοστεί το ISM. Επειδή δεν μπορούμε να απαλείψουμε με κάποιον καινούργιο μετασχηματισμό συντεταγμένων άλλους όρους, θα θεωρήσουμε ότι η μετρική κατέχει κάποια ακόμα συμμετρία λόγω κάποιου φυσικού περιορισμού. Θα ασχοληθούμε με μετρικές για τις οποίες υπάρχουν επιφάνειες δύο διαστάσεων που είναι ορθογώνιες στην ομάδα των τροχιών. Από αυτόν τον περιορισμό η μετρική γίνεται :

$$ds^2 = f(z, t)(dz^2 - dt^2) + g_{ab}(z, t)dx^a dx^b \quad (2.2)$$

Μπορεί να φαίνεται ότι απλοποιήσαμε αρκετά την μετρική με τις συμμετρίες που υποθέσαμε, αλλά η μορφή αυτή στην οποία έχουμε καταλήξει παραμένει ακόμα

αρκετά γενική. Πολλές γνωστές μετρικές της βιβλιογραφίας έχουν αυτή τη μορφή ή την παρόμοια αξισυμμετρική και στάσιμη μορφή αυτής :

$$ds^2 = f(\rho, z)(d\rho^2 + dz^2) + g_{ab}(\rho, z)dx^a dx^b \quad (2.3)$$

Μερικές από αυτές είναι η μετρική των επίπεδων κυμάτων των Robinson-Bondi, η μετρική κυλινδρικών κυμάτων των Einstein-Rosen, τα ομογενή μοντέλα του Bianchi I-VII συμπεριλαμβανομένων και των μοντέλων Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, καθώς και οι μετρικές των Schwarzschild και Kerr.

Συμβολίζουμε τον διδιάστατο πραγματικό και συμμετρικό πίνακα στην μετρική ως g :

$$g := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Την ορίζουσα του g την συμβολίζουμε με :

$$\det g := a^2 \quad (2.5)$$

Υπολογίζοντας τον τανυστή του Ricci για μια μετρική της μορφής 2.2 και βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες R_{0a} και R_{3a} μηδενίζονται ταυτοτικά. Χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες :

$$\eta = \frac{1}{2}(z - t), \zeta = \frac{1}{2}(z + t) \quad (2.6)$$

Στις καινούργιες συντεταγμένες οι υπόλοιπες συνιστώσες του Ricci γράφονται ως τρεις απλές σχέσεις. Συγκεκριμένα, επειδή θέλουμε κενό χώρο, πρέπει όλες να μηδενίζονται. Έτσι από τις $R_{ab} = 0$ [2, σελ. 365] παίρνουμε την σχέση:

$$(ag_{,\zeta}g^{-1})_{,\eta} + (ag_{,\eta}g^{-1})_{,\zeta} = 0 \quad (2.7)$$

Οι άλλες δύο σχέσεις προέρχονται από τις $R_{00} + R_{33} = 0$ και $R_{03} = 0$ και είναι:

$$(\ln f)_{,\zeta}(\ln a)_{,\zeta} = (\ln a)_{,\zeta\zeta} + \frac{1}{4a^2} \text{Tr } A^2 \quad (2.8)$$

$$(\ln f)_{,\eta}(\ln a)_{,\eta} = (\ln a)_{,\eta\eta} + \frac{1}{4a^2} \text{Tr } B^2 \quad (2.9)$$

όπου οι πίνακες A, B είναι:

$$A = -ag_{,\zeta}g^{-1}, \quad B = ag_{,\eta}g^{-1} \quad (2.10)$$

Υπάρχει άλλη μια σχέση που προέρχεται από την $R_{00} - R_{33} = 0$ και είναι :

$$(\ln f)_{,\eta\zeta} = +\frac{1}{4a^2} \text{Tr } AB - (\ln a)_{,\eta\zeta} \quad (2.11)$$

Η 2.11 δεν αποτελεί νέα εξίσωση καθώς μπορεί να βρεθεί από τον συνδυασμό των 2.5-2.10.

Για την ειδική περίπτωση όπου a είναι σταθερό τότε οδηγούμαστε πάντα σε Minkowski χωρόχρονο. Πράγματι αν a σταθερό τότε από τις 2.8, 2.9 βλέπουμε ότι $\text{Tr } A^2 = \text{Tr } B^2 = 0$. Από τις 2.10 αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν και ο g είναι σταθερός πίνακας. Η συνάρτηση f δε μπορεί να υπολογιστεί σε αυτή την περίπτωση από τις 2.8, 2.9 αλλά από την 2.11 βλέπουμε ότι έχει τη γενική λύση $f = \exp[f_1(\eta) + f_2(\zeta)]$. Με έναν μετασχηματισμό $\eta = \eta(\eta')$, $\zeta = \zeta(\zeta')$ μπορούμε να φέρουμε τη μετρική σε Minkowski μορφή.

Από το ίχνος της 2.7 βρίσκουμε ότι το a ικανοποιεί την κυματική εξίσωση :

$$a_{,\zeta\eta} = 0 \quad (2.12)$$

Η λύση αυτής είναι η :

$$a = \alpha(\zeta) + \beta(\eta) \quad (2.13)$$

όπου α, β αυθαίρετες συναρτήσεις. Αργότερα θα χρειαστούμε και μια δεύτερη λύση η οποία είναι :

$$b = \alpha(\zeta) - \beta(\eta) \quad (2.14)$$

Η σχέση 2.7 με χρήση των 2.10 γράφεται ως :

$$A_{,\eta} - B_{,\zeta} = 0 \quad (2.15)$$

Χρειαζόμαστε άλλη μία σχέση η οποία θα περιέχει τους πίνακες A, B . Αυτήν την βρίσκουμε από συνδυασμό των 2.12, 2.15 :

$$A_{,\eta} + B_{,\zeta} + a^{-1}[A, B] - a_{,\eta}a^{-1}A - a_{,\zeta}a^{-1}B = 0 \quad (2.16)$$

Πρέπει τώρα να κατασκευάσουμε ένα κατάλληλο σύστημα ιδιοτιμών-ιδιοκαταστάσεων που θα μας δίνει τις σχέσεις 2.15, 2.16 ως συνθήκες συμβατότητας. Ορίζουμε τον μιγαδικό πίνακα $\psi(\lambda, \zeta, \eta)$ με στοιχεία συναρτήσεις και εξάρτηση από τις συντεταγμένες η, ζ και την μιγαδική παράμετρο φάσματος λ . Επίσης ορίζουμε τους γραμμικούς διαφορικούς τελεστές D_1, D_2 οι οποίοι μετατίθενται και όταν δράσουν πάνω στην ψ έχουν ιδιοτιμές :

$$D_1\psi = \frac{A}{\lambda - a}\psi, \quad D_2\psi = \frac{B}{\lambda + a}\psi \quad (2.17)$$

Βλέπουμε ότι τα δεξιά μέλη των σχέσεων 2.17 έχουν πόλους στο μιγαδικό λ -επίπεδο στα σημεία $\pm a$. Άρα και οι τελεστές που θα κατασκευάσουμε θα πρέπει να έχουν πόλους στα σημεία αυτά. Αυθαίρετα επιλέγουμε ο D_1 όταν δρα να παραγωγίζει ως προς ζ και ο D_2 ως προς η ενώ και οι δύο πρέπει να

έχουν παραγωγή ως προς την παράμετρο λ . Συνεπώς η γενική μορφή αυτών είναι :

$$D_1 = \partial_\zeta + \frac{h_1(\lambda, a, \zeta, a, \eta)}{\lambda - a} \partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\eta + \frac{h_2(\lambda, a, \zeta, a, \eta)}{\lambda + a} \partial_\lambda \quad (2.18)$$

όπου h_1, h_2 αυθαίρετες συναρτήσεις. Θέλουμε οι τελεστές να μετατίθενται άρα να ισχύει :

$$[D_1, D_2] = 0 \quad (2.19)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων 2.17, 2.18, 2.19 και χρήση της 2.12 βρίσκουμε :

$$h_1 = -2a, \zeta \lambda, \quad h_2 = 2a, \eta \lambda \quad (2.20)$$

Οπότε η τελική μορφή των τελεστών είναι :

$$D_1 = \partial_\zeta - \frac{2a, \zeta \lambda}{\lambda - a} \partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\eta + \frac{2a, \eta \lambda}{\lambda + a} \partial_\lambda \quad (2.21)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν δράσουμε πάνω στην πρώτη από τις εξισώσεις 2.17 με τον D_2 και στην δεύτερη με τον D_1 και αφαιρέσουμε τα αποτελέσματα τότε, προκειμένου να ισχύει η 2.19, πρέπει οι πίνακες A, B να ικανοποιούν τις 2.15, 2.16.

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις 2.21 για $\lambda = 0$ έχουν την ίδια μορφή με τις 2.10. Άρα αν βρούμε μια λύση $\psi(\lambda, \zeta, \eta)$ που ικανοποιεί τις 2.21 και μηδενίσουμε την παράμετρο φάσματος τότε παίρνουμε μια λύση που ικανοποιεί τις αρχικές σχέσεις 2.5, 2.6. Συνεπώς ισχύει :

$$g(\zeta, \eta) = \psi(0, \zeta, \eta) \quad (2.22)$$

Έστω ότι γνωρίζουμε μια λύση g_0 που ικανοποιεί τις 2.5, 2.6. Τότε μπορούμε να βρούμε τους πίνακες A_0, B_0 και ολοκληρώνοντας τις 2.17 να βρούμε την ψ_0 . Αυτές είναι οι ποσότητες υποβάθρου και αναφέρονται σε μία ήδη υπάρχουσα μετρική (f_0, g_0) η οποία είναι λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό και πάνω στην οποία θα προσθέσουμε σολιτόνια.

Ορίζουμε έναν πίνακα $\chi(\lambda, \zeta, \eta)$ για τον οποίο ισχύει :

$$\psi = \chi \psi_0 \quad (2.23)$$

Από τις σχέσεις 2.17, 2.23 βρίσκουμε ότι για τον χ ισχύουν οι σχέσεις :

$$D_1 \chi = \frac{1}{\lambda - a} (A \chi - \chi A_0), \quad D_2 \chi = \frac{1}{\lambda + a} (B \chi - \chi B_0) \quad (2.24)$$

Ο πίνακας g πρέπει να είναι συμμετρικός και πραγματικός. Αυτές τις δύο συνθήκες μπορούμε να τις εξασφαλίσουμε επιβάλλοντας κάποιους περιορισμούς στον

χ . Η πρώτη από αυτές εξασφαλίζεται αν απαιτήσουμε ο χ να είναι πραγματικός στον πραγματικό άξονα του λ -επιπέδου :

$$\bar{\chi}(\bar{\lambda}, \zeta, \eta) = \chi(\lambda, \zeta, \eta) \quad (2.25)$$

όπου η άνω παύλα συμβολίζει τον μιγαδικό συζυγή. Παρόμοια σχέση πρέπει να ισχύει και για τον ψ :

$$\bar{\psi}(\bar{\lambda}, \zeta, \eta) = \psi(\lambda, \zeta, \eta) \quad (2.26)$$

Η δεύτερη συνθήκη για τη συμμετρικότητα του g είναι λίγο πιο πολύπλοκη και βασίζεται σε μια συμμετρία που έχουν οι λύσεις του συστήματος 2.24. Έστω ότι έχουμε έναν πίνακα $\chi(\lambda, \zeta, \eta)$ ο οποίος ικανοποιεί το σύστημα 2.24. Αντικαθιστώντας στο όρισμα όπου λ το a^2/λ , παίρνουμε τον πίνακα :

$$\chi'(\lambda, \zeta, \eta) = g(\zeta, \eta) \tilde{\chi}^{-1}(a^2/\lambda, \zeta, \eta) g_0^{-1}(\zeta, \eta) \quad (2.27)$$

όπου $\tilde{\chi}(\lambda, \zeta, \eta)$ ο ανάστροφος του $\chi(\lambda, \zeta, \eta)$. Βλέπουμε ότι ο $\chi'(\lambda, \zeta, \eta)$ ικανοποιεί το σύστημα 2.24 μόνο αν ο $g(\zeta, \eta)$ είναι συμμετρικός. Άρα μπορούμε να εξασφαλίσουμε την συμμετρικότητα του $g(\zeta, \eta)$ αν απαιτήσουμε $\chi'(\lambda, \zeta, \eta) = \chi(\lambda, \zeta, \eta)$, δηλαδή :

$$g(\zeta, \eta) = \chi(\lambda, \zeta, \eta) g_0(\zeta, \eta) \tilde{\chi}(a^2/\lambda, \zeta, \eta) \quad (2.28)$$

Με κατάλληλη παραμετροποίηση μπορούμε να επιλέξουμε να ισχύει $\chi(\infty) \rightarrow I$, άρα για $\lambda \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι ισχύει :

$$g(\zeta, \eta) = \chi(0, \zeta, \eta) g_0(\zeta, \eta) \quad (2.29)$$

Αποτέλεσμα το οποίο μπορούμε να δούμε και με συνδυασμό των 2.22, 2.23. Οπότε το πρόβλημα τώρα έχει αναχθεί στην εύρεση κατάλληλου πίνακα χ , από την ολοκλήρωση των 2.24, που θα πληροί τους περιορισμούς 2.25, 2.26.

Εμείς θα ασχοληθούμε με πλήρως σολιτονικές λύσεις χωρίς μη σολιτονικά μέρη. Η δυνατότητα εύρεσης τέτοιων λύσεων οφείλεται στην ύπαρξη σημείων μ_k όπου ο πίνακας χ έχει απλούς πόλους στο μιγαδικό λ -επίπεδο. Έχουμε επιλέξει ότι στο άπειρο ο χ θα τείνει στον μοναδιαίο πίνακα άρα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε n πόλους, θα πρέπει να έχει την παρακάτω μορφή[1] :

$$\chi(\lambda, \zeta, \eta) = I + \sum_{k=1}^n \frac{R_k(\zeta, \eta)}{\lambda - \mu_k(\zeta, \eta)} \quad (2.30)$$

όπου R_k πίνακες που εξαρτώνται από τις συντεταγμένες ζ, η . Από την συνθήκη 2.25 βλέπουμε ότι είτε όλοι οι πόλοι θα πρέπει να είναι στον πραγματικό άξονα του λ , είτε αν εμφανίζεται κάποιος μιγαδικός πόλος, τότε πρέπει να υπάρχει και ο μιγαδικός συζυγής του. Επίσης βλέπουμε ότι οι πίνακες R_k , που

αντιστοιχούν σε πραγματικούς πόλους, πρέπει να είναι πραγματικοί. Αν έχουμε κάποιον μιγαδικό πόλο μ_k με πίνακα R_k τότε, όπως είπαμε, θα πρέπει να υπάρχει κάποιος άλλος $\mu_{k'}$ που θα είναι $\mu_{k'} = \bar{\mu}_k$ με $R_{k'} = \bar{R}_k$. Από την συνθήκη 2.28 βλέπουμε ότι αν έχουμε πόλο στο $\lambda = \mu$ τότε υπάρχει και ένα άλλο σημείο στο οποίο η ορίζουσα του χ μηδενίζεται, το $\lambda = a^2/\mu$. Ο πίνακας χ^{-1} εμφανίζει τις ίδιες ιδιότητες.

Όταν συνδυάσουμε τις 2.24, 2.30 εύκολα φαίνεται ότι οι σχέσεις που θα πάρουμε θα έχουν στο δεξί μέλος μόνο όρους πρώτης τάξης, ενώ στο αριστερό και πόλους δεύτερης. Απαιτώντας να ισχύουν οι σχέσεις και στους πόλους $\lambda = \mu_k$ συνεπάγεται ότι πρέπει να μηδενίζονται οι συντελεστές των όρων με πόλους δεύτερης τάξης. Από αυτή τη διαδικασία παίρνουμε δύο σχέσεις για κάθε πόλο:

$$\mu_{k,\zeta} = \frac{2a_{,\zeta}\mu_k}{a - \mu_k}, \quad \mu_{k,\eta} = \frac{2a_{,\eta}\mu_k}{a + \mu_k} \quad (2.31)$$

Οι παραπάνω σχέσεις παρουσιάζουν μια σημαντική συμμετρία. Αν ένα μ_k είναι λύση αυτών, τότε και η ποσότητα a^2/μ_k θα είναι λύση. Λόγω αυτής της συμμετρίας οι λύσεις του συστήματος 2.31 είναι και λύσεις της :

$$\mu_k^2 + 2(b - \omega_k)\mu_k + a^2 = 0 \quad (2.32)$$

όπου τα ω_k είναι μιγαδικές σταθερές. Για κάθε ω_k η 2.32 δίνει δύο λύσεις, την μ_k και την a^2/μ_k . Αν το μέτρο της μίας είναι μικρότερο από το a τότε το μέτρο της άλλης είναι μεγαλύτερο του a και το αντίστροφο. Αυτό μας επιτρέπει να συμβολίσουμε τις λύσεις ως μ_k^{in} και μ_k^{out} ανάλογα με το αν βρίσκονται εντός ή εκτός του κύκλου με ακτίνα $|\lambda| = a$ στο λ -επίπεδο. Αυτές γράφονται στη μορφή :

$$\mu_k^{in} = (\omega_k - b) - \sqrt{(\omega_k - b)^2 - a^2} \quad (2.33)$$

$$\mu_k^{out} = (\omega_k - b) + \sqrt{(\omega_k - b)^2 - a^2} \quad (2.34)$$

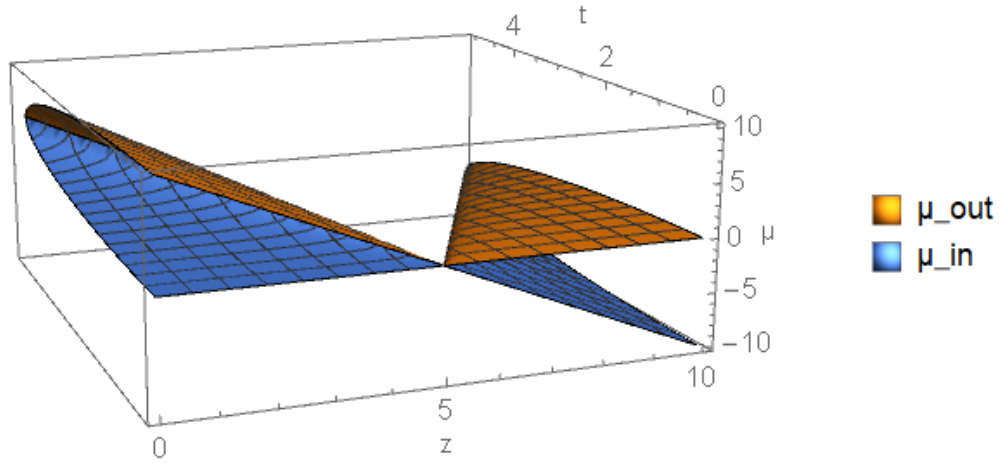
Χρησιμοποιώντας τις 2.29 και 2.30 βλέπουμε ότι ισχύει :

$$g(\zeta, \eta) = \left(I - \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{\mu_k} \right) g_0 \quad (2.35)$$

Στο σημείο που έχουμε φτάσει το μόνο που μένει να υπολογίσουμε είναι οι πίνακες R_k . Ξαναγράφουμε της 2.24 σε διαφορετική μορφή :

$$\frac{A}{\lambda - a} = D_1(\chi)\chi^{-1} + \chi \frac{A_0}{\lambda - a}\chi^{-1} \quad (2.36)$$

$$\frac{B}{\lambda + a} = D_2(\chi)\chi^{-1} + \chi \frac{B_0}{\lambda + a}\chi^{-1} \quad (2.37)$$



Σχήμα 2.1: Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων $\mu^{in,out}$ για πραγματικούς πόλους με $\omega = 5$, $z \in (0, 10)$ και $t \in (0, 5)$.

Τα αριστερά μέλη των 2.36, 2.37 δεν έχουν πόλους στα σημεία $\lambda = \mu_k$. Αυτό σημαίνει, ότι οι συντελεστές των όρων στο δεξί μέλος με πόλους στα σημεία αυτά θα πρέπει να μηδενίζονται. Έτσι βρίσκουμε τις σχέσεις :

$$R_{k,\zeta}\chi^{-1}(\mu_k) + R_k \frac{A_0}{\mu_k - a} \chi^{-1}(\mu_k) = 0 \quad (2.38)$$

$$R_{k,\eta}\chi^{-1}(\mu_k) + R_k \frac{B_0}{\mu_k + a} \chi^{-1}(\mu_k) = 0 \quad (2.39)$$

Από την ταυτότητα $\chi\chi^{-1} = I$ και την σχέση 2.30 βλέπουμε ότι ισχύει :

$$R_k\chi^{-1}(\mu_k) = 0 \quad (2.40)$$

Οι πίνακες R_k , $\chi^{-1}(\mu_k)$ μπορούν να γραφτούν ως :

$$(R_k)_{ab} = n_a^{(k)} m_b^{(k)} \quad (2.41)$$

$$[\chi^{-1}(\mu_k)]_{ab} = q_a^{(k)} p_b^{(k)} \quad (2.42)$$

Από τις 2.40, 2.41 και 2.42 βλέπουμε ότι ισχύει :

$$m_a^{(k)} q_a^{(k)} = 0 \quad (2.43)$$

Χρησιμοποιώντας τις 2.38, 2.39, 2.41 και 2.42 βρίσκουμε δύο σχέσεις για τα διανύσματα $m_a^{(k)}$:

$$\left(m_{a,\zeta}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(A_0)_{ba}}{\mu_k - a} \right) q_a^{(k)} = 0 \quad (2.44)$$

$$\left(m_{a,\eta}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(B_0)_{ba}}{\mu_k + a} \right) q_a^{(k)} = 0 \quad (2.45)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν ορίσουμε τον πίνακα $M_k = \psi_0^{-1}|_{\lambda=\mu_k} = \psi_0^{-1}(\mu_k, \zeta, \eta)$ τότε οι εξισώσεις 2.17 έχουν τη μορφή :

$$M_{k,\zeta} + M_k \frac{A_0}{\mu_k - a} = 0 \quad (2.46)$$

$$M_{k,\eta} + M_k \frac{B_0}{\mu_k + a} = 0 \quad (2.47)$$

Οπότε μια λύση για τα διανύσματα $m_a^{(k)}$ είναι :

$$m_a^{(k)} = m_{0b}^{(k)} (M_k)_{ba} = m_{0b}^{(k)} [\psi_0^{-1}(\mu_k, \zeta, \eta)]_{ba} \quad (2.48)$$

όπου τα $m_{0b}^{(k)}$ είναι αυθαίρετα μιγαδικά σταθερά διανύσματα. Πλέον μένει μόνο να υπολογίσουμε τα $n_a^{(k)}$. Παίρνουμε την 2.28 και χρησιμοποιούμε την 2.30 για να βγάλουμε μια σχέση. Απαιτούμε η σχέση να ισχύει στους πόλους $\lambda = \mu_k$ και βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχύει :

$$R_k g_0 \left[I + \sum_{l=1}^n \frac{\mu_k}{a^2 - \mu_k \mu_l} \tilde{R}_l \right] = 0 \quad (2.49)$$

Συνδυάζοντας τις 2.41, 2.49 βρίσκουμε ένα σύστημα σχέσεων για τα $n_a^{(k)}$:

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{kl} n_a^{(l)} = \mu_k^{-1} m_c^{(k)} (g_0)_{ca} \quad (2.50)$$

όπου Γ_{kl} ο συμμετρικός πίνακας με στοιχεία :

$$\Gamma_{kl} = -m_c^{(k)} m_b^{(k)} (g_0)_{cb} (a^2 - \mu_k \mu_l)^{-1} \quad (2.51)$$

Ορίζουμε τον αντίστροφο του Γ_{kl} , δηλαδή τον πίνακα για τον οποίο ισχύει :

$$\Pi_{km} \Gamma_{ml} = \delta_{kl} \quad (2.52)$$

Τελικά από τις 2.50, 2.52 βρίσκουμε :

$$n_a^{(k)} = \sum_{l=1}^n \mu_l^{-1} \Pi_{kl} L_a^{(l)} \quad (2.53)$$

όπου

$$L_a^{(l)} = m_c^{(l)} (g_0)_{ca} \quad (2.54)$$

Έχουμε υπολογίσει όλα τα απαραίτητα στοιχεία που χρειαζόμασταν. Από τις σχέσεις 2.35, 2.41, 2.53 και 2.54 βρίσκουμε :

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^n \mu_k^{-1} \mu_l^{-1} \Pi_{kl} L_a^{(k)} L_b^{(l)} \quad (2.55)$$

Ο ψ_0 ικανοποιεί την 2.26. Άρα όταν οι πόλοι μ_k είναι πραγματικοί τότε, για να μην έχει η μετρική φανταστικό μέρος, θα πρέπει να πάρουμε όλες τις αυθαίρετες σταθερές που εμφανίζονται μέσα στη σχέση 2.55 πραγματικές. Οπότε όλα τα $m_{0b}^{(k)}$ θα πρέπει να τα πάρουμε πραγματικά και συνεπώς, θα είναι και όλα τα $m_a^{(k)}$ πραγματικά. Αν έχουμε κάποιο μιγαδικό πόλο μ_k τότε θα πρέπει να υπάρχει και ο μιγαδικός συζυγής του $\mu_{k'} = \bar{\mu}_k$ με $m_{0b}^{(k')} = \bar{m}_{0b}^{(k)}$.

Αφού έχουμε βρει το g μένει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση f ώστε να έχουμε την ολοκληρωμένη έκφραση της μετρικής μας. Για να το κάνουμε πρέπει να βρούμε τους πίνακες A , B και να χρησιμοποιήσουμε τις 2.8, 2.9. Οι A , B μπορούν να υπολογιστούν από τις 2.10 ή από τις 2.36, 2.37. Από τις τελευταίες βλέπουμε ότι, εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων $(\lambda \pm a)^{-1}$ των δεξιών και αριστερών μελών στα σημεία $\mp a$ αντίστοιχα, παίρνουμε τις σχέσεις :

$$A = 2aa_{,\zeta} \left[\sum_{k=1}^n (a - \mu_k)^{-2} R_k \right] \chi^{-1}(a, \zeta, \eta) + \chi(a, \zeta, \eta) A_0 \chi^{-1}(a, \zeta, \eta) \quad (2.56)$$

$$B = 2aa_{,\eta} \left[\sum_{k=1}^n (a + \mu_k)^{-2} R_k \right] \chi^{-1}(-a, \zeta, \eta) + \chi(-a, \zeta, \eta) B_0 \chi^{-1}(-a, \zeta, \eta) \quad (2.57)$$

Από αυτές τις σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τα ίχνη των A^2 , B^2 και στη συνέχεια να ολοκληρώσουμε τις εκράσεις 2.8, 2.9. Θα βγάλουμε τώρα την πλήρη έκφραση της μετρικής για ένα σολιτόνιο πάνω σε υπόβαθρο g_0 . Για $n = 1$ από τις 2.30, 2.51, 2.52, 2.53 και 2.54 βρίσκουμε :

$$\chi_1 = I + \frac{\mu_1^2 - a^2}{\mu_1(\lambda - \mu_1)} P_1 \quad (2.58)$$

όπου P_1 είναι ο προβολικός τελεστής και ισούται με :

$$(P_1)_{ab} = \frac{m_c^{(1)}(g_0)_{ca} m_b^{(1)}}{m_d^{(1)}(g_0)_{df} m_f^{(1)}} \quad (2.59)$$

Από την 2.35 έχουμε τελικά :

$$g_1 = \left[I - \frac{\mu_1^2 - a^2}{\mu_1^2} P_1 \right] g_0 \quad (2.60)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο αντίστροφος του χ_1 είναι :

$$\chi_1^{-1} = I + \frac{\mu_1^2 - a^2}{a^2 - \lambda\mu_1} P_1 \quad (2.61)$$

Από τις 2.56 και 2.57 βρίσκουμε :

$$\text{Tr } A_1 = \frac{2a_{,\zeta}(a + \mu_1)}{a - \mu_1} + \text{Tr } A_0 = \frac{4a_{,\zeta}\mu_1}{a - \mu_1} \quad (2.62)$$

$$\text{Tr } B_1 = \frac{2a_{,\eta}(a - \mu_1)}{a + \mu_1} + \text{Tr } B_0 = \frac{4a_{,\eta}\mu_1}{a + \mu_1} \quad (2.63)$$

$$\text{Tr } A_1^2 = \frac{4a_{,\zeta}^2(a + \mu_1)^2}{(a - \mu_1)^2} + \text{Tr } A_0^2 + \frac{4a_{,\zeta}(a + \mu_1)}{(a - \mu_1)} \text{Tr}(A_0 P_1) \quad (2.64)$$

$$\text{Tr } B_1^2 = \frac{4a_{,\eta}^2(a - \mu_1)^2}{(a + \mu_1)^2} + \text{Tr } B_0^2 - \frac{4a_{,\eta}(a - \mu_1)}{(a + \mu_1)} \text{Tr}(B_0 P_1) \quad (2.65)$$

Ολοκληρώνοντας τις 2.8 και 2.9 βρίσκουμε :

$$f_1 = \frac{C_1 a \mu_1^2 \Gamma_{11}}{\mu_1^2 - a^2} f_0 \quad (2.66)$$

όπου C_1 αυθαίρετη σταθερά, f_0 η τιμή του υποβάθρου και Γ_{11} ίσο με :

$$\Gamma_{11} = (\mu_1^2 - a^2)^{-1} m_a^{(1)} m_b^{(1)} (g_0)_{ab} \quad (2.67)$$

Οπότε βρήκαμε την πλήρη έκφραση (f_1, g_1) της μετρικής ενός σολιτονίου πάνω σε ένα υπόβαθρο (f_0, g_0) . Για να βρούμε την μετρική με δύο σολιτόνια έχουμε δύο επιλογές. Η πρώτη είναι να εφαρμόσουμε τις γενικές σχέσεις για $n = 2$. Η δεύτερη είναι να πάρουμε ως υπόβαθρο την (f_1, g_1) , η οποία έχει ήδη ένα σολιτόνιο, και να εφαρμόσουμε τις σχέσεις ξανά για $n = 1$. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε με τους δύο τρόπους είναι ακριβώς τα ίδια. Εδώ επιλέγουμε να δουλέψουμε με τον δεύτερο τρόπο.

Τώρα ως ψ υποβάθρου θα έχουμε το $\psi_1 = \chi_1 \psi_0$. Τα καινούργια m διανύσματα θα είναι :

$$m_a'^{(2)} = m_{0b}^{(2)} [\psi_1^{-1}(\mu_2, \zeta, \eta)]_{ba} = m_{0b}^{(2)} (\psi_0^{-1})_{bc} (\chi_1^{-1})_{ca} \quad (2.68)$$

Ορίζουμε τον νέο προβολικό τελεστή :

$$(P_2')_{ab} = \frac{m_c'^{(2)}(g_1)_{ca} m_b'^{(2)}}{m_d'^{(2)}(g_1)_{df} m_f'^{(2)}} \quad (2.69)$$

Με αυτόν κατασκευάζουμε τον πίνακα χ_2 :

$$\chi_2 = I + \frac{\mu_2^2 - a^2}{\mu_2(\lambda - \mu_2)} P_2' \quad (2.70)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το g_2 :

$$g_2 = \chi_2(0, \zeta, \eta) g_1 = \left[I - \frac{\mu_2^2 - a^2}{\mu_2^2} P_2' \right] \left[I - \frac{\mu_1^2 - a^2}{\mu_1^2} P_1 \right] g_0 \quad (2.71)$$

Από τις 2.56 και 2.57 βρίσκουμε :

$$\text{Tr } A_2 = \frac{2a_{,\zeta}(a + \mu_2)}{a - \mu_2} + \text{Tr } A_1 = \frac{2a_{,\zeta}(a + \mu_2)}{a - \mu_2} + \frac{2a_{,\zeta}(a + \mu_1)}{a - \mu_1} + \text{Tr } A_0 \quad (2.72)$$

$$\text{Tr } B_2 = \frac{2a_{,\eta}(a - \mu_2)}{a + \mu_2} + \text{Tr } B_1 = \frac{2a_{,\eta}(a - \mu_2)}{a + \mu_2} + \frac{2a_{,\eta}(a - \mu_1)}{a + \mu_1} + \text{Tr } B_0 \quad (2.73)$$

$$\text{Tr } A_2^2 = \frac{4a_{,\zeta}^2(a + \mu_2)^2}{(a - \mu_2)^2} + \text{Tr } A_1^2 + \frac{4a_{,\zeta}(a + \mu_2)}{(a - \mu_2)} \text{Tr}(A_1 P_2') \quad (2.74)$$

$$\text{Tr } B_2^2 = \frac{4a_{,\eta}^2(a - \mu_2)^2}{(a + \mu_2)^2} + \text{Tr } B_1^2 - \frac{4a_{,\eta}(a - \mu_2)}{(a + \mu_2)} \text{Tr}(B_1 P_2') \quad (2.75)$$

Ολοκληρώνοντας τις 2.8 και 2.9 βρίσκουμε :

$$f_2 = \frac{C_2' a \mu_2^2 [m_a^{(2)} (g_1)_{ab} m_b^{(2)}]}{(\mu_2^2 - a^2)^2} f_1 = \frac{C_2 a^2 \mu_1^2 \mu_2^2}{(\mu_1^2 - a^2)(\mu_2^2 - a^2)} (\Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2) f_0 \quad (2.76)$$

όπου C_2' αυθαίρετη σταθερά και $C_2 = C_2' C_1$. Είναι εύκολο να δούμε πως γενικεύονται οι 2.71, 2.76 για n σολιτόνια. Από τη μορφή που έχουν φαίνεται ότι οι γενικές σχέσεις για n σολιτόνια είναι :

$$g_n = \left[\prod_{k=1}^n \left(I - \frac{\mu_k^2 - a^2}{\mu_k^2} P_k' \right) \right] g_0 \quad (2.77)$$

$$f_n = C_n a^n \left(\prod_{k=1}^n \mu_k^2 \right) \left[\prod_{k=1}^n (\mu_k^2 - a^2) \right]^{-1} (\det \Gamma_{kl}) f_0 \quad (2.78)$$

Από την 2.69 βλέπουμε ότι για τον P ισχύουν :

$$\text{Tr } P = 1, \quad \det P = 0 \quad (2.79)$$

Με χρήση αυτών των ιδιοτήτων και την 2.77 ότι :

$$\det g_n = a^{2n} \left(\prod_{k=1}^n \mu_k^{-2} \right) \det g_0 = a^{2n+2} \prod_{k=1}^n \mu_k^{-2} \quad (2.80)$$

Η μετρική που κατασκευάσαμε δεν ικανοποιεί την συνθήκη 2.5. Προκειμένου να είμαστε συνεπείς με αυτήν ορίζουμε τη παρακάτω μετρική, την οποία ονομάζουμε physical :

$$g_n^{(ph)} = a(\det g_n)^{-1/2} g_n \quad (2.81)$$

Τώρα βλέπουμε ότι πράγματι ισχύει $\det g_n^{(ph)} = a^2$. Χρησιμοποιώντας την 2.81 και τις 2.10 βρίσκουμε τους νέους πίνακες $A^{(ph)}$, $B^{(ph)}$:

$$A_n^{(ph)} = A_n - a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\zeta} I \quad (2.82)$$

$$B_n^{(ph)} = B_n + a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\eta} I \quad (2.83)$$

Από αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε τους παρακάτω πίνακες :

$$(A_n^{(ph)})^2 = (A_n)^2 - 2a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\zeta} A_n + a^2 (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\zeta} I \quad (2.84)$$

$$(B_n^{(ph)})^2 = (B_n)^2 + 2a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\eta} B_n + a^2 (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\eta} I \quad (2.85)$$

Από τις 2.82-2.85 βρίσκουμε :

$$\text{Tr } A_n^{(ph)} = \text{Tr } A_n - 2a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\zeta} \quad (2.86)$$

$$\text{Tr } B_n^{(ph)} = \text{Tr } B_n + 2a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\eta} \quad (2.87)$$

$$\text{Tr}(A_n^{(ph)})^2 = \text{Tr}(A_n)^2 - 2a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\zeta} \text{Tr } A_n + 2a^2 (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\zeta} \quad (2.88)$$

$$\text{Tr}(B_n^{(ph)})^2 = \text{Tr}(B_n)^2 + 2a (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\eta} \text{Tr } B_n + 2a^2 (\log [a(\det g_n)^{-1/2}])_{,\eta} \quad (2.89)$$

Τέλος από τις δύο τελευταίες σχέσεις και τις 2.8, 2.9 βρίσκουμε :

$$f_n^{(ph)} = C_n a^{-n^2/2} \left(\prod_{k=1}^n \mu_k \right)^{n+1} \left[\prod_{k>l=1}^n (\mu_k - \mu_l)^{-2} \right] (\det \Gamma_{kl}) f_0 \quad (2.90)$$

Άρα η τελική λύση για n σολτόνια είναι η :

$$ds^2 = f_n^{(ph)} (dz^2 - dt^2) + (g_n^{(ph)})_{ab} dx^a dx^b \quad (2.91)$$

Κεφάλαιο 3

Μελέτη των Σολιτονικών Λύσεων για $n=1$, $n=2$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της μετρικής 2.91 για $n = 1$ και $n = 2$, δηλαδή για ένα και δύο σολιτόνια. Σε όλο το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με τις physical λύσεις και για αυτό το λόγο παραλείπουμε την ετικέτα ph . Επίσης δεν θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο συγκεκριμένο υπόβαθρο άρα τα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουμε θα είναι γενικά. Θα ξεκινήσουμε από την μελέτη της μετρικής για ένα σολιτόνιο με πόλο μ_1 . Έτσι έχουμε από τις 2.80, 2.81 για $n = 1$, $k = 1$, $l = 1$:

$$(g_1)_{ab} = a^{-1}\mu_1(g_0)_{ab} + (a\mu_1 Q_{11})^{-1}(a^2 - \mu_1^2)L_a^{(1)}L_b^{(1)} \quad (3.1)$$

όπου τα $L_a^{(1)}$ δίνονται από την 2.54 και ορίσαμε τον :

$$Q_{kl} = m_a^{(k)}(g_0)_{ab}m_b^{(l)} \quad (3.2)$$

Επίσης από την 2.90 έχουμε :

$$f_1 = C_1 a^{-1/2}(a^2 - \mu_1^2)^{-1}\mu_1^2 Q_{11} f_0 \quad (3.3)$$

Έχουμε δει ότι αν κάποιο μ_1 είναι λύση τότε και το a^2/μ_1 είναι λύση. Άρα έχουμε δύο σολιτονικές λύσεις για $n = 1$, μία για το μ_1^{in} και μία για το μ_1^{out} . Η λύση για δύο πόλους μ_1, μ_2 βρίσκεται πάλι από τις 2.80, 2.81 αλλά για $n = 2$, $k = 2$, $l = 1$:

$$(g_2)_{ab} = (g_0)_{ab} + D^{-1}(\mu_2 - \mu_1)(a^2 - \mu_1\mu_2)[\mu_1^{-1}(a^2 - \mu_1^2)Q_{22}L_a^{(1)}L_b^{(1)} - \mu_2^{-1}(a^2 - \mu_2^2)Q_{11}L_a^{(2)}L_b^{(2)} - (\mu_2 - \mu_1)Q_{22}Q_{11}(g_0)_{ab}] \quad (3.4)$$

όπου $D = Q_{22}Q_{11}(a^2 - \mu_1\mu_2)^2 - Q_{12}^2(a^2 - \mu_1^2)(a^2 - \mu_2^2)$.

Από την 2.90 έχουμε :

$$f_2 = C_2 a^{-2} \mu_1^3 \mu_2^3 (a^2 - \mu_1 \mu_2)^{-2} (a^2 - \mu_1^2)^{-1} (a^2 - \mu_2^2)^{-1} (\mu_1 - \mu_2)^{-2} D f_0 \quad (3.5)$$

Όπως έχουμε πει θέλουμε η μετρική να είναι πραγματική. Για έναν πόλο αυτό σημαίνει ότι όλες οι αυθαίρετες σταθερές θα πρέπει να είναι πραγματικές. Από τις παραπάνω σχέσεις και τις σχέσεις του κεφαλαίου δύο βλέπουμε ότι εδώ έχουμε τις ω_1 , $m_{01}^{(1)}$, $m_{02}^{(1)}$. Επίσης πρέπει να είναι πραγματικό και το μ_1 . Από τις 2.33, 2.34 βλέπουμε ότι αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύει :

$$(b - \omega_1)^2 \geq a^2 \quad (3.6)$$

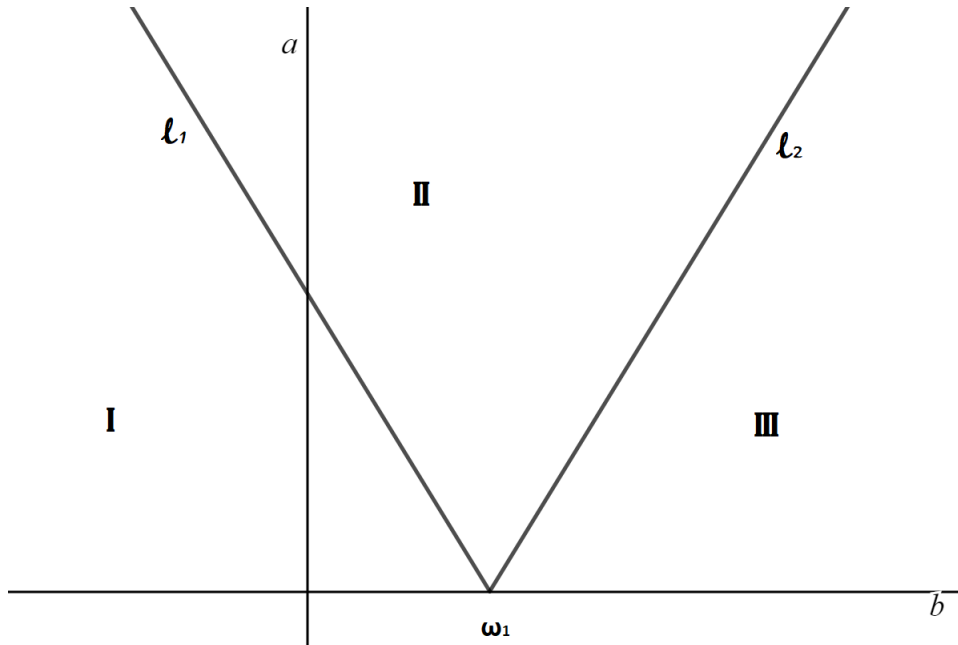
Άρα στο (a, b) -επίπεδο η μετρική ενός σολιτονίου ορίζεται εκτός του κώνου που σχηματίζεται από τις ευθείες $\ell_1 : (b - \omega_1) = -a$ και $\ell_2 : (b - \omega_1) = a$. Πάνω στις ℓ_1 , ℓ_2 έχουμε $\mu_1^2 = a^2$ και από την 3.1 είναι εύκολο να δούμε ότι αυτό σημαίνει $g_1 = g_0$. Για την περιοχή του χώρου που βρίσκεται εντός του κώνου βλέπουμε ότι τα μ_1 γίνονται μιγαδικά :

$$\mu_1^{in,out} = (\omega_1 - b) \pm i\sqrt{a^2 - (\omega_1 - b)^2} \quad (3.7)$$

Άρα σε αυτή την περιοχή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση των δύο σολιτονίων 3.4 με μ_1, μ_2 τα $\mu_1^{in,out}$ της 3.7. Για τα $\mu_1^{in,out}$ παρατηρούμε ότι ισχύει $|\mu_1| = a$. Από την 3.4 βλέπουμε ότι αυτό σημαίνει $g = g_0$. Άρα η περιοχή εντός του κώνου παραμένει αδιατάραχτη. Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα είναι να υπολογίσουμε τον πίνακα χ , ο οποίος για δύο μιγαδικούς πόλους με μέτρο a βγαίνει ίσος με τον μοναδιαίο πίνακα.

Η g για το ένα σολιτόνιο είδαμε ότι είναι ομαλή σε όλο το χώρο. Οι παράγωγοι της όμως παρουσιάζουν ασυνέχειες πάνω στις ℓ_1 , ℓ_2 . Επειδή το f δίνεται από τις παραγώγους της g οι ασυνέχειες αυτές θα εμφανίζονται σε αυτό. Πράγματι από την 3.3 βλέπουμε ότι η f_1 περιέχει τον όρο $(a^2 - \mu_1^2)^{-1}$. Για αυτό τον λόγο η f εκτός του κώνου θα δίνεται από την 3.3, ενώ εντός θα έχουμε $f = f_0$. Πάνω στις ℓ_1 , ℓ_2 η f θα αποκλίνει, άρα η φυσική ερμηνεία που δίνουμε σε αυτές τις λύσεις είναι ότι περιγράφουν βαρυτικά ωστικά κύματα. Αυτές οι ασυνέχειες εμφανίζονται σε μετρικές που περιέχουν πραγματικούς πόλους. Όταν υπάρχουν μόνο μιγαδικοί συζυγείς τότε η σολιτονική μετρική ορίζεται σε όλο το χώρο.

Θεωρούμε ότι το a είναι μία φωτοειδής συντεταγμένη άρα ο άξονας $a = 0$ συμβολίζει την αρχή του σύμπαντος και η ανωμαλία που παρουσιάζεται εκεί έχει κοσμολογικό χαρακτήρα. Με βάση αυτό η μετρική που βρήκαμε πιο πάνω περιγράφει ένα κοσμολογικό μοντέλο με δύο ωστικά βαρυτικά κύματα. Αυτά διαδίδονται εκτός του κώνου φωτός με τέτοιο τρόπο ώστε να διαταράσσουν τις περιοχές I, III , όπως φαίνονται στο σχήμα 3, και να αφήνουν αδιατάραχτη την περιοχή II .

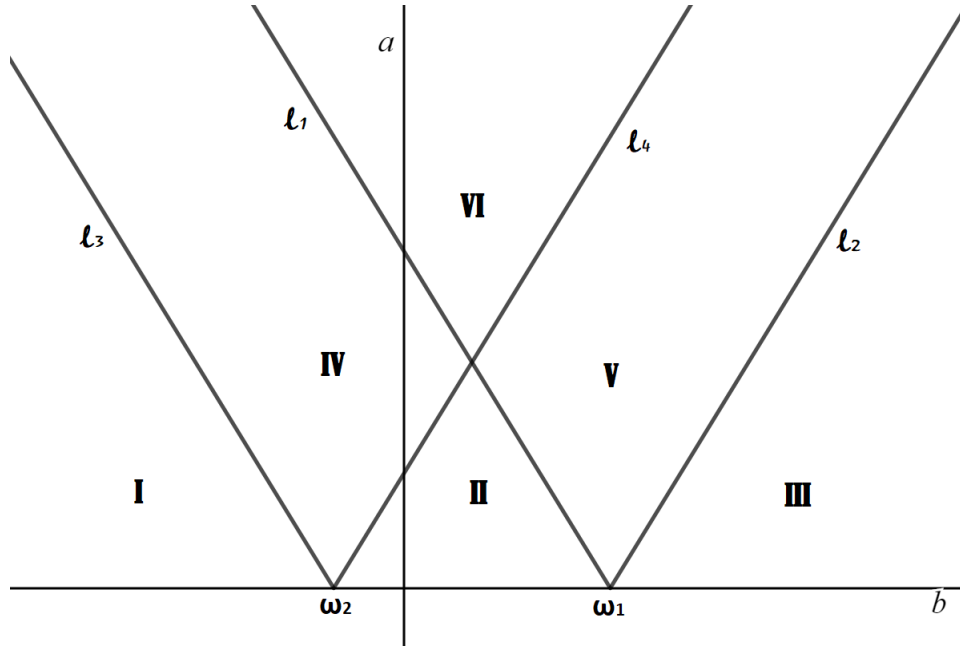


Σχήμα 3.1: Σολιτονική λύση με ένα πραγματικό πόλο. Ο κώνος φωτός χωρίζει τον χωρόχρονο σε τρεις περιοχές. Στην περιοχή *II* έχουμε την μετρική του υποβάθρου ενώ στις *I*, *III* την σολιτονική λύση ενός πόλου. Οι περιοχές ενώνονται μεταξύ τους μέσω των φωτοειδών γραμμών l_1 , l_2 . Οι μετρικές στις διάφορες περιοχές μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους πάνω στις ευθείες αλλά εμφανίζονται ασυνέχειες στη συνάρτηση f .

Θα ασχοληθούμε τώρα με την μετρική δύο πόλων μ_1, μ_2 . Όπως έχουμε δει έχουμε δύο επιλογές, είτε τα μ_1, μ_2 είναι και τα δύο πραγματικά είτε μιγαδικά με $\mu_1 = \bar{\mu}_2$. Για την πρώτη περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα στα $\mu_1^{in,out}$ και $\mu_2^{in,out}$. Οποιοδήποτε ζευγάρι (μ_1, μ_2) διαλέξουμε τα παρακάτω συμπεράσματα ισχύουν.

Έστω ότι έχουμε ένα ζευγάρι (μ_1, μ_2) πραγματικών πόλων. Τελείως ανάλογα με την περίπτωση του ενός πόλου θα έχουμε δύο κώνους φωτός που θα χωρίζουν τον χωρόχρονο σε έξι περιοχές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι περιοχές αυτές χωρίζονται από τις ευθείες $l_i (i = 1, 2, 3, 4)$ οι οποίες αντιστοιχούν στις σχέσεις :

$$(b - \omega_k)^2 = a^2, \quad (k = 1, 2) \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.2: Σολιτονική λύση με δύο πραγματικούς πόλους. Οι κώνοι φωτός χωρίζουν τον χωρόχρονο σε έξι περιοχές. Στις *I*, *II*, *III* και *IV* ο πόλος μ_1 είναι πραγματικός. Αντίστοιχα στις *I*, *II*, *III* και *V* είναι ο μ_2 . Η σολιτονική λύση με δύο πόλους ορίζεται στις περιοχές *I*, *II*, *III*. Στην περιοχή *IV* ο μ_2 γίνεται μιγαδικός και η λύση είναι η σολιτονική με μόνο πόλο τον μ_1 . Παρόμοια στην *V* ο μ_1 γίνεται μιγαδικός άρα η λύση είναι η σολιτονική με μόνο πόλο τον μ_2 . Τέλος στην περιοχή *VI* έχουμε και τους δύο πόλους μιγαδικούς και η μετρική εκεί είναι η μετρική του υποβάθρου. Η περιοχή *II* είναι η περιοχή αλληλεπίδρασης όπου τα σολιτόνια συγκρούονται. Οι μετρικές στις διάφορες περιοχές μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους πάνω στις ευθείες ℓ_i αλλά εμφανίζονται ασυνέχειες.

Στις περιοχές *I*, *II* και *III* έχουμε :

$$(b - \omega_k)^2 \geq a^2, \quad (k = 1, 2) \quad (3.9)$$

Από τις σχέσεις 2.34, 2.35 βλέπουμε ότι, αν πάρουμε τα $\omega_{1,2}$, $m_{01,02}^{(1,2)}$ πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι και οι δύο πόλοι είναι πραγματικοί. Άρα σε αυτές τις περιοχές έχουμε την σολιτονική λύση 3.4, 3.5. Περνώντας από την περιοχή *I* στην *IV* διασχίζοντας την ℓ_3 βλέπουμε ότι ο μ_1 παραμένει πραγματικός αλλά ο μ_2 γίνεται μιγαδικός με $|\mu_2| = a$. Σε αυτή την περιοχή έχουμε σολιτονική λύση με τρεις πόλους, τους μ_1 , μ_2 , $\bar{\mu}_2$. Όμως $|\mu_2| = a$ και, όπως είδαμε και στην περίπτωση του ενός πόλου, αυτό σημαίνει ότι τα σολιτόνια με τους μιγαδικούς συζυγείς πόλους αλληλοεξουδετερώνονται. Τελικά, μένει μόνο ο πόλος μ_1 , άρα

η μετρική σε αυτή την περιοχή είναι η σολιτονική ενός πόλου. Τελείως παρόμοια στην περιοχή V θα έχουμε μόνο τον πόλο μ_2 . Τέλος στην περιοχή VI έχουμε και τους δύο πόλους μιγαδικούς. Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε ότι σε αυτή την περιοχή του χώρου θα έχουμε σολιτονική λύση τεσσάρων πόλων, $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2$. Όμως $|\mu_1| = |\mu_2| = a$ άρα τα σολιτόνια αλληλοεξουδετερώνονται ανα ζεύγη και τελικά έχουμε την μετρική του υποβάθρου.

Πάνω στις ευθείες l_1, l_2, l_3, l_4 παρουσιάζονται ασυνέχειες στις παραγώγους των $g_{1,2}$ οι οποίες, όπως φαίνεται και από τις σχέσεις 3.3, 3.5, εμφανίζονται μέσα στις συναρτήσεις $f_{1,2}$. Όπως και πριν αυτό μας οδηγεί στο να ερμηνεύσουμε αυτή την λύση ως βαρυτικά ωστικά κύματα. Θεωρώντας ότι το a είναι φωτοειδής μεταβλητή, το προηγούμενο σχήμα δείχνει δύο ζευγάρια βαρυτικών ωστικών κυμάτων τα οποία ξεκινούν και διαδίδονται για $a = 0$. Στην περιοχή II , δύο από αυτά συγκρούονται. Μετά από πεπερασμένο χρόνο διαχωρίζονται και δίνουν τις σολιτονικές λύσεις ενός πόλου στις περιοχές IV, V . Στις I, III έχουμε δύο σολιτόνια σε κάθε περιοχή τα οποία δε συγκρούονται ποτέ γιατί το ένα προπορεύεται του άλλου. Τα σολιτόνια διαδίδονται με τέτοιο τρόπο ώστε να αφήνουν αδιατάρακτη την περιοχή VI .

Παραπάνω δόθηκε η κοσμολογική ερμηνεία των λύσεων για πραγματικούς πόλους αν το a είναι φωτοειδής μεταβλητή. Αν a είναι χωροειδής, τότε η ερμηνεία αλλάζει. Σε αυτή την περίπτωση το b γίνεται χρονοειδής. Το σχήμα με τον έναν πόλο περιγράφει την συστολή ενός κύματος (περιοχή I) καθώς περνάει ο χρόνος. Το κύμα καταρρέει στο σημείο ω_1 και ανακλάται διαταράσσοντας τον χώρο (περιοχή III). Η περιοχή II παραμένει αδιατάρακτη. Το σχήμα με τους δύο πόλους περιγράφει δύο τέτοια κύματα όπου το ένα καταρρέει στο ω_1 και το άλλο στο ω_2 . Ανάμεσα στο χρονικό διάστημα $\omega_1 - \omega_2$ σχηματίζεται η περιοχή σύγκρουσης (περιοχή II).

Όπως είδαμε η ύπαρξη πραγματικών πόλων οδηγεί σε ασυνέχειες στη μετρική. Αν υπάρχουν μόνο ζευγάρια συζυγών μιγαδικών πόλων αυτές οι ασυνέχειες δεν υπάρχουν. Οι σολιτονικές μετρικές τότε είναι ομαλές σε όλο τον χώρο, αν είναι η μετρική του υποβάθρου ομαλή παντού.

Μια ειδική περίπτωση λύσεων των εξισώσεων του Einstein είναι οι διαγώνιες μετρικές. Η εφαρμογή του ISM πάνω σε ένα υπόβαθρο με διαγώνια μετρική απλοποιεί τις πράξεις. Καταρχήν για κάθε διαγώνια μετρική μπορούμε να βρούμε τα διανύσματα $m_a^{(k)}$ κατευθείαν από τις σχέσεις 2.43-2.45 χωρίς να χρειαστεί να βρούμε τον ψ_0 . Επιπλέον, κάθε διαγώνια μετρική, η οποία είναι λύση των σχέσεων 2.5, 2.7, μπορεί να γραφτεί στην γενική μορφή :

$$g_0 = \text{diag}(ae^{u_0}, ae^{-u_0}) \quad (3.10)$$

όπου το a ικανοποιεί την 2.12 και το $u_0(\zeta, \eta)$ είναι λύση της εξίσωσης :

$$(au_{0,\zeta})_{,\eta} + (au_{0,\eta})_{,\zeta} = 0 \quad (3.11)$$

Η μετρική του υποβάθρου με βάση τα παραπάνω παίρνει τη μορφή :

$$ds^2 = f_0(dz^2 - dt^2) + ae^{u_0}(dx^1)^2 + ae^{-u_0}(dx^2)^2 \quad (3.12)$$

Η συνάρτηση f_0 υπολογίζεται από τις 2.8, 2.9 και 2.10 όπου αντί για g βάζουμε το g_0 . Χρησιμοποιώντας τις 2.43-2.45 βρίσκουμε ότι για κάθε διαγώνια μετρική υποβάθρου θα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\frac{m_{2,\zeta}^{(k)}}{m_2^{(k)}} - \frac{m_{1,\zeta}^{(k)}}{m_1^{(k)}} = \frac{2a}{a - \mu_k} u_{0,\zeta} \quad (3.13)$$

$$\frac{m_{2,\eta}^{(k)}}{m_2^{(k)}} - \frac{m_{1,\eta}^{(k)}}{m_1^{(k)}} = \frac{2a}{a + \mu_k} u_{0,\eta} \quad (3.14)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις $\rho_k(\zeta, \eta)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) για τις οποίες ισχύουν :

$$\rho_{k,\zeta} = \frac{a + \mu_k}{a - \mu_k} u_{0,\zeta} \quad (3.15)$$

$$\rho_{k,\eta} = \frac{a - \mu_k}{a + \mu_k} u_{0,\eta} \quad (3.16)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τελικά :

$$\frac{m_2^{(k)}}{m_1^{(k)}} = e^{\rho_k + u_0 + C_2^{(k)} - C_1^{(k)}} \quad (3.17)$$

όπου $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ σταθερές. Συνεπώς η γενική μορφή αυτών θα είναι :

$$m_1^{(k)} = h^{(k)}(\zeta, \eta) e^{C_1^{(k)}} e^{c(\rho_k + u_0)} \quad (3.18)$$

$$m_2^{(k)} = h^{(k)}(\zeta, \eta) e^{C_2^{(k)}} e^{c'(\rho_k + u_0)} \quad (3.19)$$

όπου $h^{(k)}(\zeta, \eta)$ αυθαίρετες συναρτήσεις και c, c' σταθερές που ικανοποιούν την $c' - c = 1$. Οι σταθερές $C_{1,2}^{(k)}$ στις παραπάνω σχέσεις μπορεί να είναι και μιγαδικές. Συγκεκριμένα αν έχω πραγματικούς πόλους τότε είναι πραγματικές ενώ αν έχω μιγαδικούς τότε είναι μιγαδικές. Από τις 3.1-3.3 και τις σχέσεις που βρήκαμε πιο πάνω έχουμε ότι η μετρική ενός σολιτονίου και με διαγώνια μετρική υποβάθρου είναι:

$$g_1 = \frac{1}{\mu_1 \cosh(\tilde{\rho}_1)} \begin{pmatrix} (\mu_1^2 e^{\tilde{\rho}_1} + a^2 e^{-\tilde{\rho}_1}) e^{u_0} & a^2 - \mu_1^2 \\ a^2 - \mu_1^2 & (\mu_1^2 e^{-\tilde{\rho}_1} + a^2 e^{\tilde{\rho}_1}) e^{-u_0} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$f_1 = C_1 \frac{a^{1/2} \mu_1}{a^2 - \mu_1^2} \cosh(\tilde{\rho}_1) f_0 \quad (3.21)$$

όπου $\tilde{\rho}_k = \rho_k + C_2^{(k)} - C_1^{(k)}$. Παρόμοια από τις 3.4, 3.5 μπορούμε να βρούμε την μετρική για δύο σολιτόνια :

$$(g_2)_{11} = \left[1 + \frac{1}{D} \left(\cosh(2\tau) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sinh(2\tau) + \cosh(2\sigma) - \frac{a^2 + \mu_1\mu_2}{a^2 - \mu_1\mu_2} \sinh(2\sigma) \right) \right] a e^{u_0} \quad (3.22)$$

$$(g_2)_{22} = \left[1 + \frac{1}{D} \left(\cosh(2\tau) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sinh(2\tau) + \cosh(2\sigma) + \frac{a^2 + \mu_1\mu_2}{a^2 - \mu_1\mu_2} \sinh(2\sigma) \right) \right] a e^{-u_0} \quad (3.23)$$

$$(g_2)_{12} = \frac{2a}{D} \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sinh(\sigma) \sinh(\tau) + \frac{a^2 + \mu_1\mu_2}{a^2 - \mu_1\mu_2} \cosh(\sigma) \cosh(\tau) \right] \quad (3.24)$$

$$f_2 = C_2 \mu_1 \mu_2 D (a^2 - \mu_1^2)^{-1} (a^2 - \mu_2^2)^{-1} f_0 \quad (3.25)$$

όπου

$$D = 4\mu_1\mu_2 \left[\frac{a^2}{(a^2 - \mu_1\mu_2)^2} \cosh^2(\sigma) + \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \sinh^2(\tau) \right] \quad (3.26)$$

$$\sigma = \tilde{\rho}_1/2 + \tilde{\rho}_2/2, \quad \tau = \tilde{\rho}_1/2 - \tilde{\rho}_2/2 \quad (3.27)$$

Διαγώνιες μετρικές σολιτονίων μπορούν να προκύψουν από τις παραπάνω σχέσεις παίρνοντας τα κατάλληλα όρια. Για παράδειγμα, στις μετρικές του ενός και δύο σολιτονίων, βλέπουμε ότι αν πάρουμε $|C_2^{(1,2)} - C_1^{(1,2)}| \rightarrow \infty$ τότε οι μη διαγώνιοι όροι των $g_{1,2}$ μηδεζίζονται. Τότε όμως τα $f_{1,2}$ αποκλίνουν οπότε θα πρέπει να πάρουμε $C_{1,2} \propto e^{-(C_2^{(1,2)} - C_1^{(1,2)})}$.

Κεφάλαιο 4

Σολιτονικές Λύσεις με Υπόβαθρο την Μετρική Kasner

Η μέθοδος του ISM που περιγράψαμε προηγουμένως έχει εφαρμοστεί εκτεταμένα στην κοσμολογία και ειδικά στην παραγωγή ακριβών μη ομογενών κοσμολογικών μοντέλων. Το σύμπαν φαίνεται να είναι ισοτροπικό και ομογενές και για αυτό το λόγο περιγράφεται μέσω της μετρικής των Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW). Ωστόσο, κοσμολογικά μοντέλα πέραν του FLRW είναι ενδιαφέροντα και χρήσιμα. Αυτό οφείλεται σε αναπάντητα ερωτήματα τα οποία αφήνει το FLRW. Για παράδειγμα, τώρα το σύμπαν είναι ισοτροπικό και ομογενές αλλά πιστεύεται ότι σε παλιότερες εποχές ήταν ανισοτροπικό[11]. Επίσης χρησιμοποιώντας διαταραχτικές μεθόδους στο FLRW είδαμε ότι σε μικρούς χρόνους αποκλίνει η μετρική από την ισοτροπία[9]. Αυτό οδήγησε στην μελέτη μοντέλων που δεν είναι ισοτροπικά.

Η μελέτη μοντέλων διαφορετικών από το FLRW ξεκίνησε με ανισοτροπικά και ομογενή μοντέλα στα οποία μια ομάδα G_3 δρα απλά και μεταβατικά στις υπερεπιφάνειες της ομοιογένειας[6],[10]. Αυτά τα μοντέλα κατηγοριοποιούνται με βάση τα Bianchi types και κάποια από αυτά έχουν την ενδιαφέρουσα ιδιότητα της εξέλιξης σε ισοτροπικά. Το πιο απλό από αυτά είναι το Bianchi type I το οποίο περιγράφεται στο κενό από την μετρική του Kasner :

$$ds^2 = -dT^2 + \sum_{j=1}^3 T^{2P_j} (dx^j)^2 = -dT^2 + T^{2P_1} dx^2 + T^{2P_2} dy^2 + T^{2P_3} dz^2 \quad (4.1)$$

όπου P_j σταθερές που ονομάζονται τα εκθετικά του Kasner. Αυτή η μετρική περιγράφει ένα χωρόχρονο όπου οι τομές ίδιου χρόνου είναι χωρικά επίπεδες αλλά ο χωρόχρονος διαστέλλεται ή συρρικνώνεται με διαφορετικούς ρυθμούς στις

διάφορες διαστάσεις. Για να είναι ο χωρόχρονος κενός πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :

$$\sum_{j=1}^3 P_j = 1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^3 P_j^2 = 1 \quad (4.3)$$

Η συνθήκη 4.2 ορίζει ένα επίπεδο (Kasner plane) και η 4.3 μια σφαίρα (Kasner sphere). Όλα τα P_j που βρίσκονται στην τομή του επιπέδου και της σφαίρας ικανοποιούν τις δύο συνθήκες και μας δίνουν μια λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό. Ισοτροπική διαστολή ή συρρίκνωση δεν επιτρέπεται. Αν είχαμε ισοτροπική διαστολή τότε από την 4.2 θα είχαμε $P_j = 1/3$ αλλά τότε δεν θα ικανοποιούταν η 4.3. Επίσης ένα τουλάχιστον εκθετικό θα πρέπει να είναι αρνητικό και συνεπώς η μία διάσταση να συρρικνώνεται εκτός και αν έχουμε ένα $P_j = 1$ και όλα τα υπόλοιπα ίσα με το μηδέν. Στην τελευταία περίπτωση με τον μετασχηματισμό $T' = T \cosh(x_j)$, $x'_j = T \sinh(x_j)$ η μετρική έρχεται σε μορφή Minkowski. Τέλος, η μετρική είναι όπως είπαμε Bianchi type I άρα έχει τρία χωροειδή διανύσματα Killing.

Στη μετρική 4.1 δε μπορεί να εφαρμοστεί το ISM, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων προκειμένου να τη φέρουμε στη μορφή 2.2. Κάνουμε τις παρακάτω αλλαγές :

$$T = t^{(d^2+3)/4}, \quad P_1 = \frac{2(1+d)}{d^2+3}, \quad P_2 = \frac{2(1-d)}{d^2+3}, \quad P_3 = \frac{d^2-1}{d^2+3} \quad (4.4)$$

και η μετρική γίνεται :

$$ds^2 = t^{(d^2-1)/2}(dz^2 - dt^2) + t^{1+d}dx^2 + t^{1-d}dy^2 \quad (4.5)$$

Επειδή η παραπάνω μετρική είναι γραμμική σε συντεταγμένες t, x, y, z και θα τη χρησιμοποιήσουμε ως μετρική υποβάθρου, είναι βολικό να γράψουμε μερικές από τις σχέσεις του κεφαλαίου δύο σε αυτές τις συντεταγμένες. Θεωρούμε ότι $a = t, b = z$ και συνεπώς καθορίζουμε τις συναρτήσεις α, β στις 2.13, 2.14. Η 2.5 γίνεται :

$$\det g = t^2 \quad (4.6)$$

Οι εξισώσεις 2.7-2.10 γίνονται τώρα :

$$U_{,t} - V_{,z} = 0 \quad (4.7)$$

$$(\ln f)_{,t} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} \text{Tr}(U^2 + V^2) \quad (4.8)$$

$$(\ln f)_{,z} = \frac{1}{2t} \text{Tr}(UV) \quad (4.9)$$

όπου U, V είναι οι πίνακες $U = tg_t g^{-1}$ και $V = tg_{,z} g^{-1}$ και συνδέονται με τους πίνακες A, B μέσω των σχέσεων $2U = -(B + A)$, $2V = B - A$. Οι εξισώσεις 2.17 μετατρέπονται στις :

$$\tilde{D}_1 \psi = -\frac{tV + \lambda U}{\lambda^2 - t^2} \Psi, \quad \tilde{D}_2 \psi = -\frac{tU + \lambda V}{\lambda^2 - t^2} \Psi \quad (4.10)$$

όπου :

$$\tilde{D}_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - t^2} \partial_\lambda, \quad \tilde{D}_2 = \partial_t - \frac{2\lambda t}{\lambda^2 - t^2} \partial_\lambda \quad (4.11)$$

είναι οι αντίστοιχες των 2.18 και οι καινούργιοι τελεστές είναι :

$$\tilde{D}_1 = (D_1 + D_2)/2, \quad \tilde{D}_2 = (D_1 - D_2)/2 \quad (4.12)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα ως υπόβαθρο την μετρική 4.5. Όπως και πριν ισχύει :

$$g(t, z) = \psi(0, t, z), \quad \psi = \chi \psi_0 \quad (4.13)$$

Οι πόλοι του πίνακα χ ικανοποιούν τώρα τις εξισώσεις :

$$\mu_{k,z} = \frac{2\mu_k^2}{t^2 - \mu_k^2}, \quad \mu_{k,t} = \frac{2\mu_k t}{t^2 - \mu_k^2} \quad (4.14)$$

Οι λύσεις αυτών είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

$$\mu_k^2 + 2(z - \omega_k)\mu_k + t^2 = 0 \quad (4.15)$$

όπου ω_k μιγαδική σταθερά. Άρα έχουμε δύο λύσεις :

$$\mu_k^\pm = \omega_k - z \pm \sqrt{(\omega_k - z)^2 - t^2} \quad (4.16)$$

με $|\mu_k^+| > t$ και $|\mu_k^-| < t$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα διανύσματα $m_a^{(k)}$ μέσω της 2.48. Με αυτά φτιάχνουμε τον πίνακα Γ_{kl} από την 2.51 καθώς και τον Π_{kl} από την 2.52 και τέλος βρίσκουμε την μετρική n σολιτονίων με υπόβαθρο την μετρική του Kasner από τις 2.55, 2.78. Αυτές οι λύσεις δεν ικανοποιούν την συνθήκη 4.6 άρα από τις 2.81, 2.90 φτιάχνουμε λύσεις που την ικανοποιούν. Παραπάνω περιγράψαμε εν συντομία την διαδικασία παραγωγής σολιτονικών λύσεων και είδαμε ότι χρειαζόμαστε τον πίνακα ψ_0 της μετρικής Kasner. Για να τον βρούμε αυτόν, πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις 4.10 με $g_0 = \text{diag}(t^{1+d}, t^{1-d})$, $U_0 = tg_{0,t} g_0^{-1} = \text{diag}(1 + d, 1 - d)$ και $V_0 = tg_{0,z} g_0^{-1} = 0$. Πραγματοποιώντας την ολοκλήρωση βρίσκουμε :

$$\psi_0 = \text{diag}((t^2 + 2z\lambda + \lambda^2)^{(1+d)/2}, (t^2 + 2z\lambda + \lambda^2)^{(1-d)/2}) \quad (4.17)$$

Τα διανύσματα $m_a^{(k)}$ είναι συνεπώς :

$$m_a^{(k)} = m_{0b}^{(k)} [\psi_0^{-1}(\mu_k, \zeta, \eta)]_{ba} = (m_{01}^{(k)}(2\omega_k \mu_k)^{-(d+1)/2}, m_{02}^{(k)}(2\omega_k \mu_k)^{(d-1)/2}) \quad (4.18)$$

Με βάση αυτά μπορούμε να κατασκευάσουμε την μετρική των n σολιτονίων με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει και θα φτάσουμε σε μια μετρική της μορφής 2.91. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε βρει την γενική έκφραση των διανυσμάτων $m_a^{(k)}$ για διαγώνιες μετρικές υποβάθρου με τη χρήση των συναρτήσεων ρ_k . Θα συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα με αυτά που βρήκαμε τώρα και θα βρούμε τις αντιστοιχίες μεταξύ των λύσεων. Για την Kasner έχουμε $u_0 = d \ln t$ και συνεπώς $\rho_k = d \ln(\mu_k/t)$. Προκειμένου λοιπόν να είναι τα δύο αποτελέσματα συμβατά πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$e^{C_1^{(k)}} = m_{01}^{(k)}(2\omega_k)^{-(d+1)/2}, \quad e^{C_2^{(k)}} = m_{02}^{(k)}(2\omega_k)^{(d-1)/2} \quad (4.19)$$

$$h^{(k)}(\zeta, \eta)\mu_k^{cd} = \mu_k^{-(d+1)/2}, \quad h^{(k)}(\zeta, \eta)\mu_k^{c'd} = \mu_k^{(d-1)/2} \quad (4.20)$$

Επιλέγοντας $h^{(k)} = \mu_k^{-1/2}$ βρίσκουμε $c' = -c = 1/2$. Έχουμε δει ότι για να πάρουμε διαγώνια μετρική σολιτονίων πρέπει $|C_2^k - C_1^k| \rightarrow \infty$. Από τις 4.19 βλέπουμε ότι αυτό σημαίνει ότι $m_{01}^{(k)} = 0$ ή $m_{02}^{(k)} = 0$. Οι διαγώνιες μετρικές που προκύπτουν από αυτήν την επιλογή έχουν τη μορφή :

$$ds^2 = f(z, t)(dz^2 - dt^2) + g_{11}(z, t)dx^2 + g_{22}(z, t)dy^2 \quad (4.21)$$

Δουλεύοντας με διαγώνιες μετρικές έχει το πλεονέκτημα ότι λείπουν οι μη γραμμικοί όροι που κάνουν τις εξισώσεις που προκύπτουν εξαιρετικά πολύπλοκες. Λόγω αυτού ο τανυστής του Riemann γίνεται, τις περισσότερες φορές, εύκολα υπολογίσιμος και κάποιες από τις συνιστώσες του έχουν απευθείας φυσικό νόημα. Συγκεκριμένα για τις σολιτονικές μετρικές πολλά χαρακτηριστικά των σολιτονίων παραμένουν ίδια και στη διαγώνια μορφή της μετρικής όπως, για παράδειγμα, οι τροχιές των πόλων. Για αυτό το λόγο είναι συμφέρον να προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε πρώτα τα φαινόμενα που δημιουργούνται στις διαγώνιες μετρικές. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε μερικά βαθμωτά μεγέθη.

Ο τανυστής του Riemann μπορεί να γραφτεί για μια μετρική της μορφής 4.21 ως :

$$R_{(\gamma\delta)}^{(\alpha\beta)} = \begin{pmatrix} E & B \\ -B & E \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

όπου οι δείκτες $(\alpha\beta)$ παίρνουν τις τιμές (01), (02), (03), (23), (31), (12) και τα E, B είναι 3×3 πίνακες με μη μηδενικά στοιχεία τα[7] :

$$E_{11} = e_1, \quad E_{22} = e_2, \quad E_{33} = e_3, \quad B_{12} = B_{21} = b \quad (4.23)$$

με :

$$e_1 = -\frac{1}{2f} \left[\frac{g_{22,zz}}{g_{22}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{22,z}}{g_{22}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{g_{22,t}}{g_{22}} \frac{f_{,t}}{f} - \frac{1}{2} \frac{g_{22,z}}{g_{22}} \frac{f_{,z}}{f} \right] \quad (4.24)$$

$$e_2 = -\frac{1}{2f} \left[\frac{g_{11,zz}}{g_{11}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{11,z}}{g_{11}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{g_{11,t}}{g_{11}} \frac{f_{,t}}{f} - \frac{1}{2} \frac{g_{11,z}}{g_{11}} \frac{f_{,z}}{f} \right] \quad (4.25)$$

$$e_3 = -\frac{1}{2f} \left[\frac{1}{2} \frac{g_{22,z}}{g_{22}} \frac{g_{11,z}}{g_{11}} - \frac{1}{2} \frac{g_{22,t}}{g_{22}} \frac{g_{11,t}}{g_{11}} \right] \quad (4.26)$$

$$b = -\frac{1}{2f} \left[\frac{1}{2} \frac{g_{11,tz}}{g_{11}} - \frac{1}{2} \frac{g_{11,z}}{g_{11}} \frac{g_{11,t}}{g_{11}} - \frac{1}{2} \frac{g_{11,t}}{g_{11}} \frac{f_{,z}}{f} - \frac{1}{2} \frac{g_{11,z}}{g_{11}} \frac{f_{,t}}{f} \right] \quad (4.27)$$

Για να διαχειριστούμε πιο εύκολα τις συνιστώσες του Riemann ορίζουμε τα παρακάτω διανύσματα[14] :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (1/\sqrt{2f})(\partial_t + \partial_z), & \vec{l} &= (1/\sqrt{2f})(\partial_t - \partial_z), \\ \vec{m} &= (1/\sqrt{2g_{11}})\partial_x + i(1/\sqrt{2g_{22}})\partial_y, & \vec{\bar{m}} &= (1/\sqrt{2g_{11}})\partial_x - i(1/\sqrt{2g_{22}})\partial_y \end{aligned} \quad (4.28)$$

Η μετρική έρχεται τώρα στη μορφή :

$$g_{\mu\nu} = m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu - n_\mu l_\nu - l_\mu n_\nu \quad (4.29)$$

Με αυτή την επιλογή διανυσμάτων οι μοναδικές μη μηδενικές συνιστώσες του Riemann(που, αφού έχουμε κενό χώρο, συμπίπτουν με τις συνιστώσες του ταυυστή Weyl) είναι τα παρακάτω βαθμωτά :

$$\Psi_0 = R_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu m^\nu n^\alpha m^\beta = \frac{1}{2}(e_2 - e_1) + b \quad (4.30)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu l^\nu (n^\alpha l^\beta - m^\alpha \bar{m}^\beta) = -\frac{1}{2} e_3 \quad (4.31)$$

$$\Psi_4 = R_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu \bar{m}^\nu l^\alpha \bar{m}^\beta = \frac{1}{2}(e_2 - e_1) - b \quad (4.32)$$

Τα παραπάνω βαθμωτά έχουν τώρα απευθείας φυσικό νόημα[15]. Το Ψ_0 και το Ψ_4 δίνουν το κομμάτι του βαρυτικού πεδίου που αντιστοιχεί σε ακτινοβολία, ενώ το Ψ_2 δίνει το Coulomb κομμάτι του πεδίου. Το Ψ_0 εκφράζει τα κύματα που κινούνται προς τα αριστερά και το Ψ_4 αυτά που κινούνται προς τα δεξιά. Τα παραπάνω βαθμωτά σχετίζονται άμεσα με τις παλιρροϊκές δυνάμεις που δέχονται σώματα μέσα σε αυτή την μετρική. Αν βρούμε κάποιο σημείο που τα βαθμωτά

απειρίζονται τότε εκεί έχουμε απειρισμό των δυνάμεων. Από αυτά μπορούν να κατασκευαστούν δύο ανεξάρτητα αναλλοίωτα βαθμωτά[14]:

$$I = \Psi_0\Psi_4 + 3\Psi_2^2, \quad J = \Psi_2(\Psi_0\Psi_4 - \Psi_2^2) \quad (4.33)$$

Με αυτά μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις μετρικές ανάλογα με τα παρακάτω: αν $I^3 = 27J^2$ τότε η μετρική είναι Petrov type D αλλιώς είναι Petrov type I. Αν η μετρική περιγράφει επίπεδα κύματα τότε $I = J = 0$ και είναι Petrov type N. Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε αν υπάρχουν περιοχές του χώρου όπου τα σωματίδια δέχονται άπειρες δυνάμεις, λόγω απειρισμών που παρουσιάζει η μετρική. Επειδή τα παραπάνω μεγέθη είναι αναλλοίωτα, τα συμπεράσματα που θα καταλήξουμε χρησιμοποιώντας τα, θα είναι ανεξάρτητα από την επιλογή των συνταταγμένων.

Επιλέγοντας $m_{01}^{(k)} = 0$ έχουμε ότι μετρική n σολιτονίων είναι τελικά [4] :

$$(g_n)_{11} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{\mu_k}{t} \right) (g_0)_{11}, \quad (g_n)_{22} = \frac{t^2}{(g_n)_{11}} \quad (4.34)$$

$$f_n = C_n f_0 t^{n(n-2d)/2} \prod_{k=1}^n \left[\frac{\mu_k^{2+d-n}}{(\mu_k^2 - t^2)} \right] \prod_{k,l=1; k>l}^n (\mu_k - \mu_l)^2 \quad (4.35)$$

με $f_0 = t^{(d^2-1)/2}$. Από τις παραπάνω σχέσεις είμαστε σε θέση να παράξουμε μετρικές με όσα σολιτόνια επιθυμούμε. Οι εκφράσεις όμως, γίνονται αρκετά πολύπλοκες για μεγάλους αριθμούς σολιτονίων. Για αυτό το λόγο θα μελετήσουμε τις μετρικές ενός και δύο πραγματικών πόλων καθώς και αυτές για δύο και τέσσερις μιγαδικούς πόλους.

Η μετρική ενός σολιτονίου με πραγματικό πόλο μ_1 είναι :

$$(g_1)_{11} = t^d \mu_1, \quad (g_1)_{22} = \frac{t^{2-d}}{\mu_1} \quad (4.36)$$

$$f_1 = C_1 \frac{t^{(d-2)d/2} \mu_1^{1+d}}{\mu_1 - t^2} \quad (4.37)$$

με $\mu_1 = \mu_1^\pm = z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - t^2}$, $z_1 = \omega_1 - z$ και $\omega_1, C_1, m_{02}^{(1)}$ πραγματικές σταθερές. Η σταθερά ω_1 σηματοδοτεί την αρχή του κώνου φωτός $z_1^2 = t^2$. Είναι φανερό ότι αυτή η λύση έχει νόημα μόνο στις περιοχές εκτός του κώνου φωτός δηλαδή για $z_1^2 \geq t^2$. Πάνω στον κώνο έχουμε $\mu_1/t = 1$ και συνεπώς οι συνιστώσες $g_{11,22}$ της μετρικής τείνουν στις συνιστώσες της μετρικής του υποβάθρου. Όμως, οι παράγωγοι των $g_{11,22}$ παρουσιάζουν ασυνέχειες πάνω στον κώνο οι οποίες φαίνονται στην συνάρτηση f_1 . Λόγω αυτών των ασυνεχειών

ερμηνεύουμε ότι αυτού του είδους οι μετρικές παρουσιάζουν ωστικά κύματα. Για να μελετήσουμε την παραπάνω μετρική θα χρησιμοποιήσουμε τα μεγέθη των σχέσεων 4.30-4.32. Από αυτές τις σχέσεις και παίρνοντας $\mu_1 = \mu_1^+$ βρίσκουμε:

$$\Psi_0 = t^{-(d^2-2d+4)/2} d (t + z_1) \left[\frac{-3d[t^4 - t^2(2z_1 + 3\mu_1)z_1 + 4z_1^3\mu_1]}{2^{1+d}C_1\omega_1^{d-1}(m_{02}^{(1)})^2\mu_1^{d+3}\sqrt{z_1^2 - t^2}} + \right. \quad (4.38)$$

$$\left. + \frac{-2[t^2(2z_1 + \mu_1) - 4z_1^2\mu_1](2t + z_1) + d^2[t^2 + (2z_1 + \mu_1) - 4z_1^2\mu_1](t - z_1)}{2^{1+d}C_1\omega_1^{d-1}(m_{02}^{(1)})^2\mu_1^{d+3}\sqrt{z_1^2 - t^2}} \right]$$

$$\Psi_2 = t^{-(d^2-2d+4)/2} \frac{t^{d-1}[t^{3-d} + (2-d)t^{1-d}\sqrt{z_1^2 - t^2}\mu_1][(1+d)t^2 - z_1\mu_1 d] - t^2\mu_1^2}{2^{d+1}C_1\omega_1^{d-1}(m_{02}^{(1)})^2\mu_1^{d+3}(-z_1^2 + t^2)(z_1\mu_1 - t^2)^{-1}} \quad (4.39)$$

$$\Psi_4 = t^{-(d^2-2d+4)/2} d (t - z_1) \left[\frac{3d[t^4 - t^2(2z_1 + 3\mu_1)z_1 + 4z_1^3\mu_1]}{2^{1+d}C_1\omega_1^{d-1}(m_{02}^{(1)})^2\mu_1^{d+3}\sqrt{z_1^2 - t^2}} + \right. \quad (4.40)$$

$$\left. + \frac{-2[t^2(2z_1 + \mu_1) - 4z_1^2\mu_1](2t - z_1) + d^2[t^2 + (2z_1 + \mu_1) - 4z_1^2\mu_1](t - z_1)}{2^{1+d}C_1\omega_1^{d-1}(m_{02}^{(1)})^2\mu_1^{d+3}\sqrt{z_1^2 - t^2}} \right]$$

Θα μελετήσουμε μόνο τα $\Psi_{0,4}$ που εκφράζουν βαρυτική ακτινοβολία. Για να δούμε πως συμπεριφέρονται αυτά τα μεγέθη πάνω στον κώνο φωτός γράφουμε $t = -z_1 - \epsilon$ για $z - \omega_1 > 0$ και $t = z_1 - \epsilon$ για $z - \omega_1 < 0$, όπου ϵ πολύ μικρό. Έτσι βρίσκουμε για την περιοχή $z - \omega_1 > 0$:

$$\Psi_0 = \frac{\omega_1^{1-d}(-1)^{-d}d(d^2 - 1)}{2^{d+1/2}C_1(m_{02}^{(1)})^2(z - \omega_1)^{(3+d^2)/2}} \sqrt{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.41)$$

$$\Psi_4 = \frac{3\omega_1^{1-d}(-1)^{-d}d}{2^{d-1/2}C_1(m_{02}^{(1)})^2(z - \omega_1)^{(1+d^2)/2}} (\sqrt{\epsilon})^{-1} + \frac{9\omega_1^{1-d}(-1)^{-d}d^2}{2^d C_1(m_{02}^{(1)})^2(z - \omega_1)^{(2+d^2)/2}} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.42)$$

και για την περιοχή $z - \omega_1 < 0$:

$$\Psi_0 = \frac{3\omega_1^{1-d}d}{2^{d-1/2}C_1(m_{02}^{(1)})^2(\omega_1 - z)^{(1+d^2)/2}} (\sqrt{\epsilon})^{-1} - \frac{9\omega_1^{1-d}d^2}{2^d C_1(m_{02}^{(1)})^2(\omega_1 - z)^{(2+d^2)/2}} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.43)$$

$$\Psi_4 = \frac{\omega_1^{1-d}d(d^2 - 1)}{2^{d+1/2}C_1(m_{02}^{(1)})^2(\omega_1 - z)^{(3+d^2)/2}} \sqrt{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.44)$$

Προκειμένου να πάμε στον κώνο φωτός πρέπει να επεξεργαστούμε τις παραπάνω σχέσεις στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$. Παρατηρούμε ότι για την περιοχή δεξιά του κώνου ($z - \omega_1 > 0$) το Ψ_4 απειρίζεται σε αυτό το όριο. Ίδια συμπεριφορά έχει το Ψ_0 για την περιοχή αριστερά του κώνου ($z - \omega_1 < 0$).

Για να μπορέσουμε να συνδέσουμε την μετρική αυτή με την μετρική του Kasner πάνω στις ευθείες του κώνου φωτός πρέπει να ορίσουμε κατάλληλα τα διανύσματα \vec{n} , \vec{l} για να μην έχουμε απειρισμούς. Ορίζουμε καινούργια διανύσματα \vec{n}' , \vec{l}' :

$$\vec{n}' = A\vec{n}, \vec{l}' = A^{-1}\vec{l} \quad (4.45)$$

Με χρήση των καινούργιων διανυσμάτων τα παραπάνω μεγέθη γίνονται :

$$(A^2\Psi_0, \Psi_2, A^{-2}\Psi_4) \quad (4.46)$$

Στην βιβλιογραφία, ανάλογα με το αν εξετάζουν την περιοχή δεξιά ή αριστερά του κώνου, επιλέγουν κατάλληλο A . Για την περιοχή $z - \omega_1 > 0$ παίρνουν $A = \sqrt{f_1}$ ενώ για την $z - \omega_1 < 0$ διαλέγουν $A = 1/\sqrt{f_1}$ [3, σελ. 99]. Εδώ θα προτιμήσουμε να βρούμε ένα A κοινό σε όλες τις περιοχές του χώρου. Παίρνοντας $A^2 = \sqrt{-(\omega_1 - z - t)/(z - t - \omega_1)}$ βρίσκουμε για $z - \omega_1 > 0$:

$$A^2\Psi_0 = \frac{(-1)^{-d}\omega_1^{1-d}d(d^2 - 1)}{2^d C_1(m_{02}^{(1)})^2(z - \omega_1)^{1+d^2/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad (4.47)$$

$$A^{-2}\Psi_4 = \frac{3(-1)^{-d}\omega_1^{1-d}d}{2^d C_1(m_{02}^{(1)})^2(z - \omega_1)^{1+d^2/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad (4.48)$$

Για την περιοχή $z - \omega_1 < 0$ έχουμε :

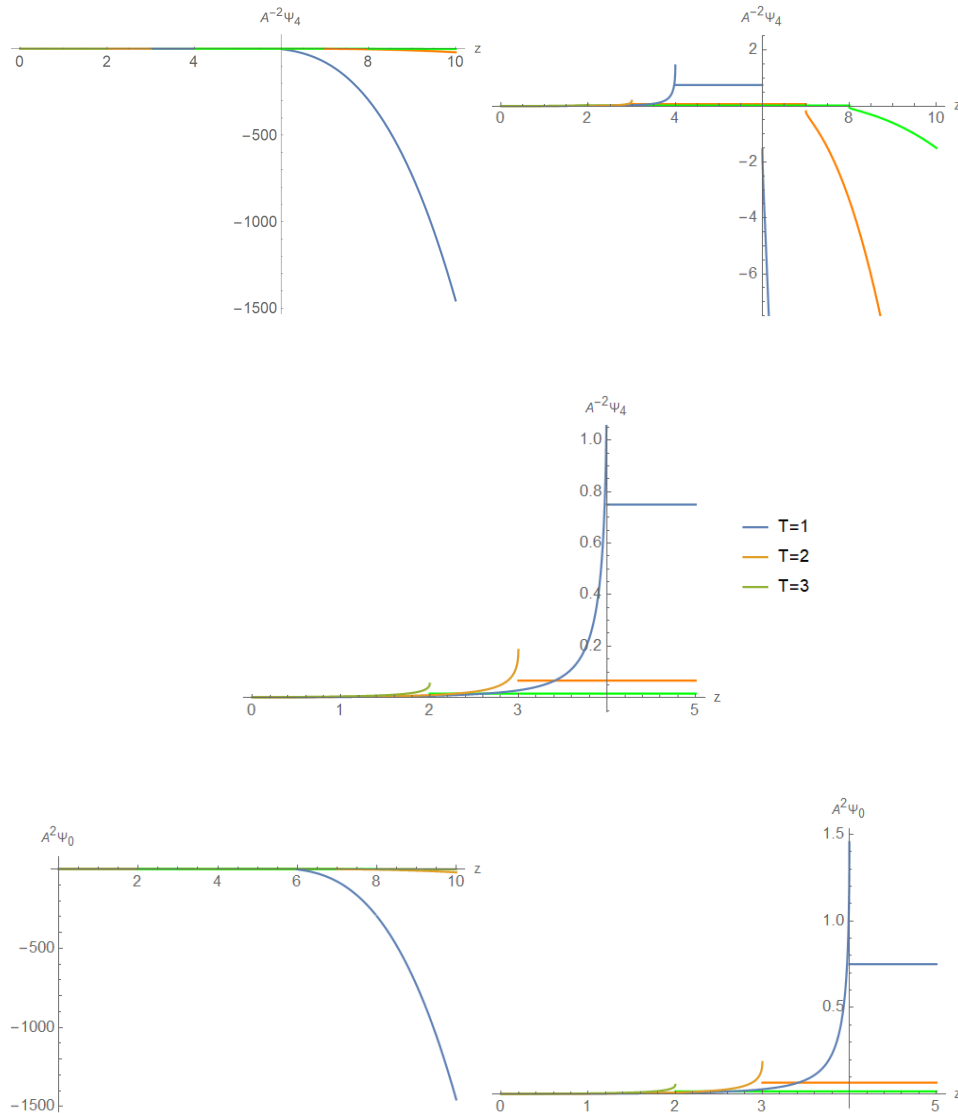
$$A^2\Psi_0 = \frac{3\omega_1^{1-d}d}{2^d C_1(m_{02}^{(1)})^2(\omega_1 - z)^{1+d^2/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad (4.49)$$

$$A^{-2}\Psi_4 = \frac{\omega_1^{1-d}d(d^2 - 1)}{2^d C_1(m_{02}^{(1)})^2(\omega_1 - z)^{2+d^2/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad (4.50)$$

Όπως έχουμε δει, η μετρική ενός σολιτονίου με πραγματικό πόλο ορίζεται μόνο εκτός του κώνου φωτός και εντός αυτού θα υπάρχει η μετρική υποβάθρου, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση η μετρική του Kasner. Ορίζουμε, όπως και πριν, κατάλληλα διανύσματα $(\vec{n}_K, \vec{l}_K, \vec{m}_K, \vec{\bar{m}}_K)$ ώστε να υπολογίσουμε για τη μετρική Kasner τα μεγέθη $\Psi_{0,4}^{(K)}$ και βρίσκουμε :

$$\Psi_{0,4}^{(K)} = \frac{1}{8}d(d^2 - 1)t^{-(d^2+3)/2} \quad (4.51)$$

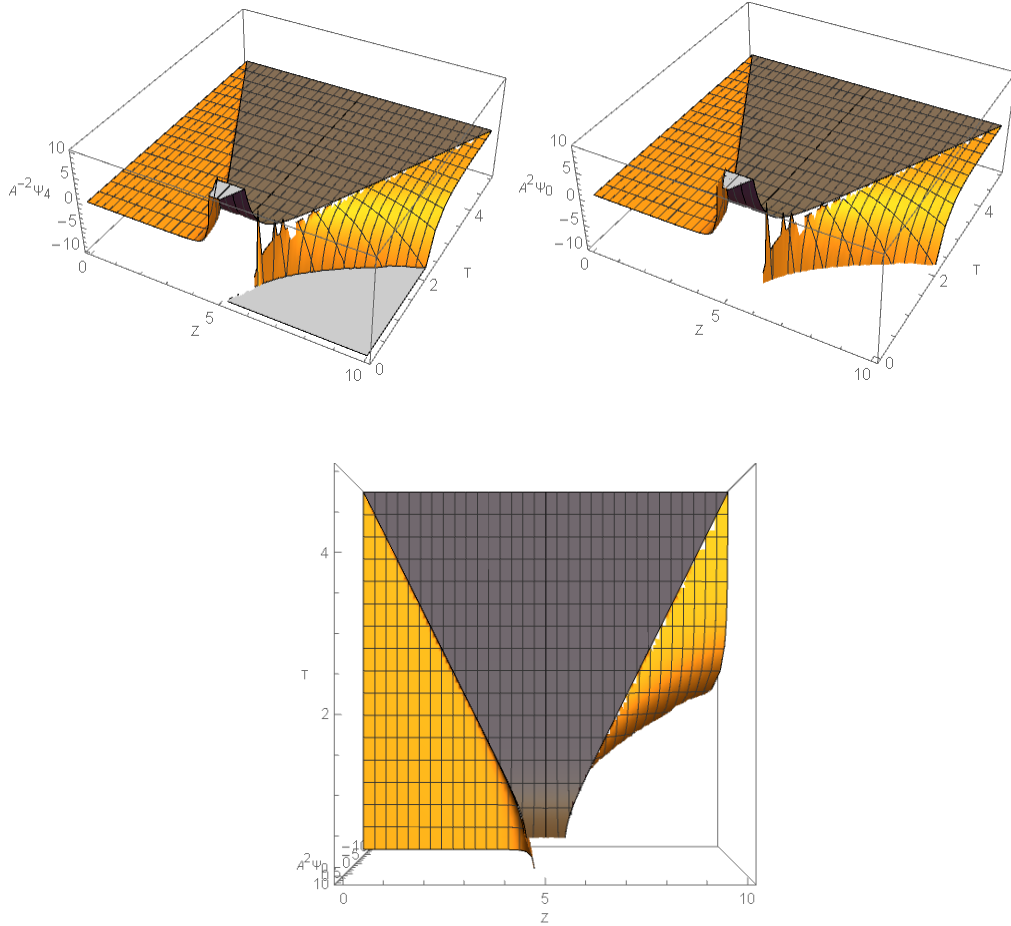
Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τα μεγέθη $\Psi_{0,4}$ και για την περιοχή εντός του κώνου τα $\Psi_{0,4}^{(K)}$. Τα διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί για $t = 1, 2, 3$, $d = 2$ και $\omega_1 = 5$.



Σχήμα 4.1: Διαγράμματα των $\Psi_{0,4}$ στις διάφορες περιοχές του χώρου για ένα πραγματικό πόλο με $d = 2$ και $\omega_1 = 5$.

Όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα με την επιλογή των διανυσμάτων που κάναμε απαλείψαμε τον απειρισμό πάνω στις γραμμές του κώνου φωτός. Παρατηρούμε όμως ότι υπάρχουν ασυνέχειες από τις περιοχές της μετρικής του σολιτονίου στην περιοχή της μετρικής υποβάθρου. Αυτές οφείλονται στις

ασυνέχειες των παραγώγων των συνιστωσών $g_{11,22}$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το Ψ_4 παρουσιάζει, για την περιοχή δεξιά του κώνου, απειρισμό όταν $z \rightarrow \infty$.



Σχήμα 4.2: Τρισδιάστατες απεικονίσεις των $\Psi_{0,4}$ για ένα πραγματικό πόλο με $d = 2$ και $\omega_1 = 5$. Στην περιοχή εντός του κώνου απεικονίζονται τα $\Psi_{0,4}^{(K)}$.

Πράγματι ορίζοντας $W = 1/z$ και αναπτύσσοντας τα $\Psi_{0,4}$ σε δυνάμεις του W έχουμε :

Για την περιοχή $z - \omega_1 > 0$:

$$A^2\Psi_0 = (-t^2\omega_1 W)^{-d} \left(\frac{d(2+3d+d^2)\omega_1}{2C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} W^{-1} - \right. \quad (4.52)$$

$$\left. - \frac{d(2+d)\omega_1[(1+d)^2\omega_1 - (d-2)t]}{2C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} + \mathcal{O}(W) \right)$$

$$A^{-2}\Psi_4 = (-t^2\omega_1 W)^{-d} \left(\frac{d(2+3d+d^2)\omega_1}{2C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} W^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{d(2+d)\omega_1[(1+d)^2\omega_1 + (d-2)t]}{2C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} + \mathcal{O}(W) \right) \quad (4.53)$$

Για την περιοχή $z - \omega_1 < 0$:

$$A^2\Psi_0 = (\omega_1/W)^{-d} \left(\frac{d(2-3d+d^2)\omega_1}{2^{1+2d}C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} W^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{d(d-2)\omega_1[(d-1)^2\omega_1 + (d+2)t]}{2^{1+2d}C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} + \mathcal{O}(W) \right) \quad (4.54)$$

$$A^{-2}\Psi_4 = (\omega_1/W)^{-d} \left(\frac{d(2-3d+d^2)\omega_1}{2^{1+2d}C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} W^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{d(d-2)\omega_1[(d-1)^2\omega_1 - (d+2)t]}{2^{1+2d}C_1(m_{02}^{(1)})^2 t^{(d^2-2d+4)/2}} + \mathcal{O}(W) \right) \quad (4.55)$$

Για το όριο $|z| \rightarrow \infty$ έχουμε $W \rightarrow 0$. Συνεπώς βρίσκουμε τα παρακάτω :

Από τις 4.52, 4.53 :

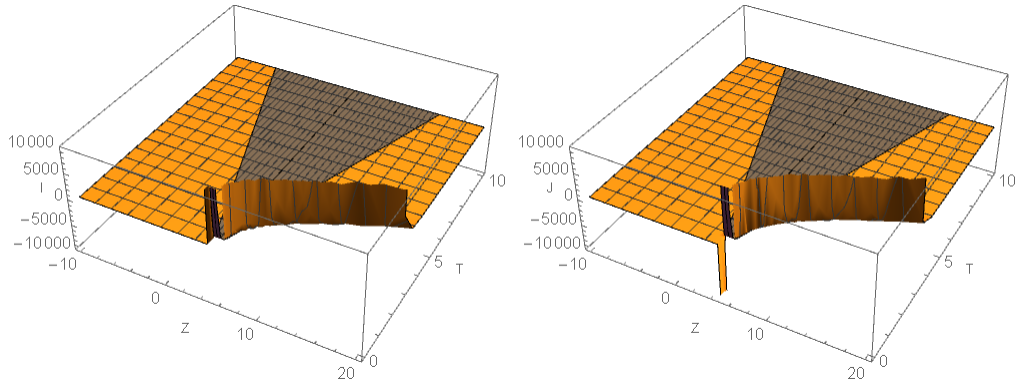
$$A^2\Psi_0 \propto t^{-(d^2+2d+4)/2} W^{-d-1}, \quad A^{-2}\Psi_4 \propto A^2\Psi_0 \quad (4.56)$$

Από τις 4.54, 4.55 :

$$A^2\Psi_0 \propto t^{-(d^2+2d+4)/2} W^{d-1}, \quad A^{-2}\Psi_4 \propto A^2\Psi_0 \quad (4.57)$$

Άρα για τα διαγράμματα που σχεδιάσαμε παραπάνω με $d = 2$ βλέπουμε πράγματι ότι τα $\Psi_{0,4}$ απειρίζονται για $z \rightarrow +\infty$. Αν παίρναμε $d < -1$ θα εμφανιζόταν απειρισμός στο $z \rightarrow -\infty$. Συνεπώς αυτή η μετρική δεν έχει φυσικό και κοσμολογικό ενδιαφέρον, καθώς περιγράφει μια διαταραχή που δεν είναι περιορισμένη σε κάποιο εύρος, αλλά επεκτείνεται σε όλο το z επίπεδο με συνεχώς αυξανόμενη τιμή.

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να τα δούμε και από τα διαγράμματα των I, J τα οποία φαίνονται παρακάτω. Πράγματι, βλέπουμε ότι πάνω στους κώνους δεν έχουμε απειρισμό, άρα ήταν απλώς συνέπεια των αρχικών συνταταγμένων, την οποία αναίρεσαμε επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση A . Αντιθέτως βλέπουμε ότι ο απειρισμός στο όριο $z \rightarrow \infty$ δεν μπορεί να αναρριθεί από κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων.



Σχήμα 4.3: Τρισδιάστατες απεικονίσεις των I , J για ένα πραγματικό πόλο με $d = 2$ και $\omega_1 = 5$. Στην περιοχή εντός του κώνου απεικονίζονται τα $I^{(K)}$, $J^{(K)}$.

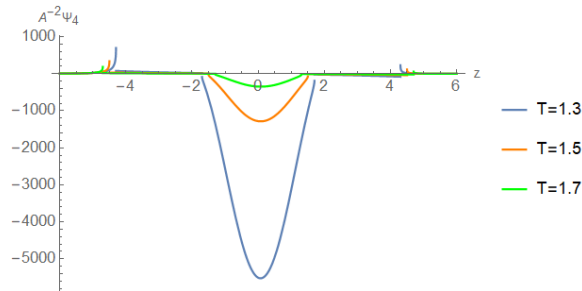
Από την παραπάνω συζήτηση καταλαβαίνουμε ότι όταν έχουμε δύο πραγματικούς πόλους $\mu_{1,2}^+$ ή $\mu_{1,2}^-$ τότε η μετρική θα παρουσιάζει απειρισμούς των $\Psi_{0,4}$ στο όριο $|z| \rightarrow \infty$. Αν όμως είχαμε πόλους διαφορετικής οικογένειας λύσεων, δηλαδή έναν μ_1^+ και έναν μ_2^- , τότε στο παραπάνω όριο τα μεγέθη $\Psi_{0,4}$ θα έτειναν στο μηδέν. Για να δούμε αυτά τα συμπεράσματα γράφουμε την μετρική των δύο πόλων με $\mu_1 = \mu_1^+$, $\mu_2 = \mu_2^-$, $z_1 = \omega_1 - z$, $z_2 = \omega_2 - z$ και επιλέγοντας $m_{01}^{(1)} = m_{01}^{(2)} = 0$, $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$:

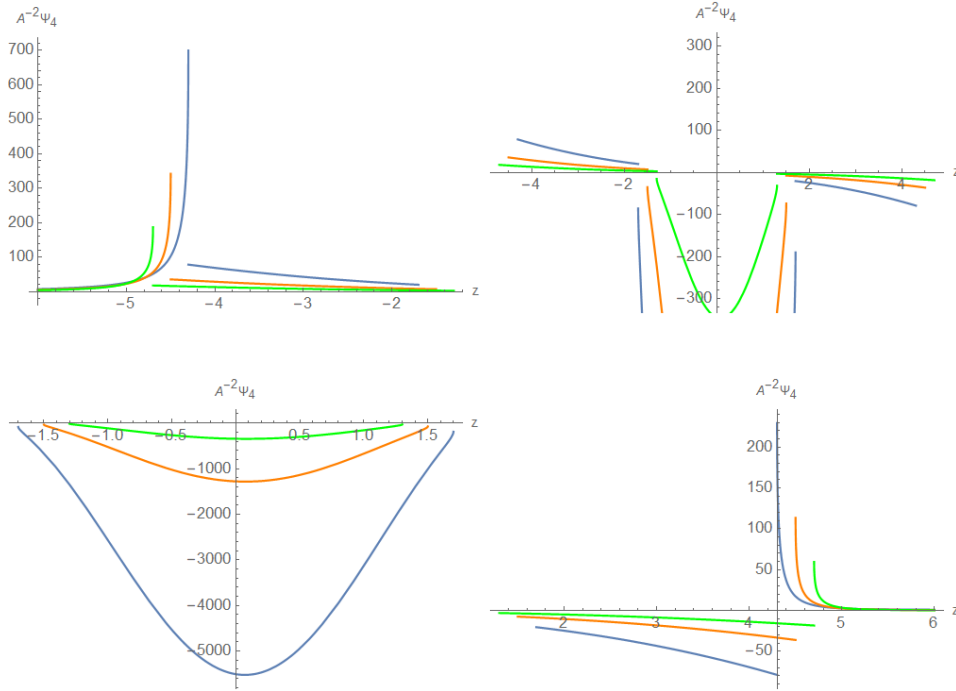
$$(g_2)_{11} = t^{d-1} \mu_1 \mu_2, \quad (g_2)_{22} = t^{3-d} \mu_1^{-1} \mu_2^{-1} \quad (4.58)$$

$$f_2 = C_2 t^{(d^2-4d+3)/2} \mu_1^d \mu_2^d \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1^2 - t^2)(\mu_2^2 - t^2)} \quad (4.59)$$

Οι εκφράσεις για τα μεγέθη $\Psi_{0,4}$ είναι αρκετά πολύπλοκες και για αυτό θα αναπαρασταθούν μόνο με διαγράμματα. Εδώ έχουμε δύο κώνους φωτός και, όπως και πριν, πάνω σε αυτούς τα $\Psi_{0,4}$ παρουσιάζουν απειρισμούς. Για το λόγο αυτό ορίζουμε καινούργια διανύσματα \vec{n}' , \vec{l}' των 4.45 με :

$$A^2 = \sqrt{\frac{(t+z)^2 - \omega^2}{(t-z)^2 - \omega^2}} \quad (4.60)$$





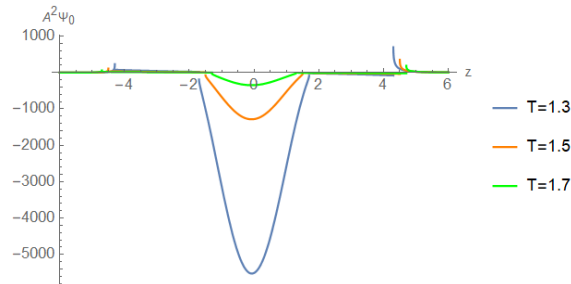
Σχήμα 4.4: Διαγράμματα του Ψ_4 στις διάφορες περιοχές του χώρου για δύο πραγματικούς πόλους με $d = 2, \omega = 3$.

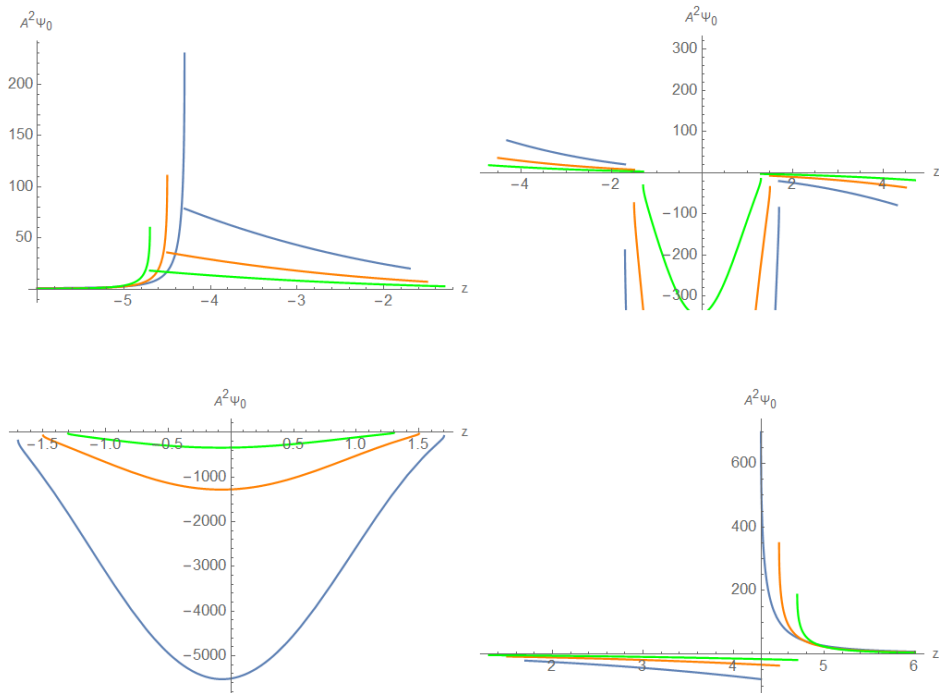
Τώρα δεν παρατηρούμε απειρισμούς για $|z| \rightarrow \infty$. Προκειμένου να το δούμε αυτό ορίζουμε $W = 1/z$ και κάνουμε την ίδια ανάλυση με πριν :

$$A^2\Psi_0^\pm = \frac{d(d^2 - 1)\omega^{4-2d}t^{-(d^2+3)/2}}{(-1)^d C_2(m_{02}^{(2)})^2(m_{02}^{(1)})^2} (2^{3-2d} \mp 2^{4-2d}(t \pm d\omega)W + \mathcal{O}(W^2)) \quad (4.61)$$

$$A^{-2}\Psi_4^\pm = \frac{d(d^2 - 1)\omega^{4-2d}t^{-(d^2+3)/2}}{(-1)^d C_2(m_{02}^{(2)})^2(m_{02}^{(1)})^2} (2^{3-2d} \pm 2^{4-2d}(t \mp d\omega)W + \mathcal{O}(W^2)) \quad (4.62)$$

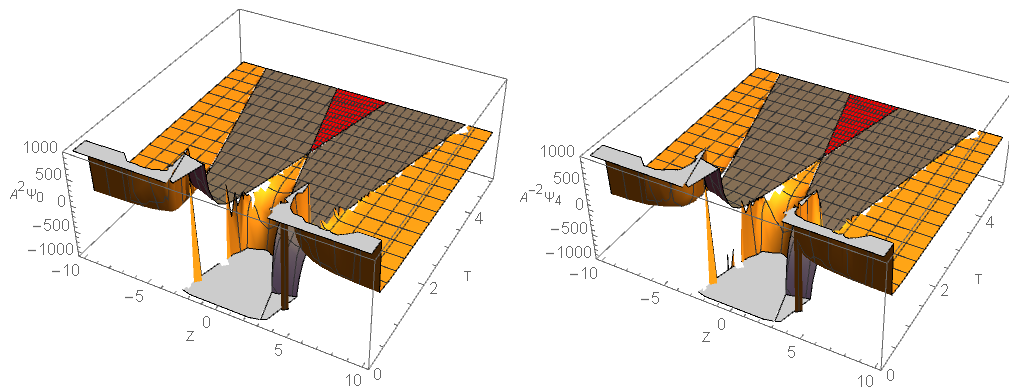
όπου Ψ^+, Ψ^- τα μεγέθη για $z > 0$ ή $z < 0$ αντίστοιχα.

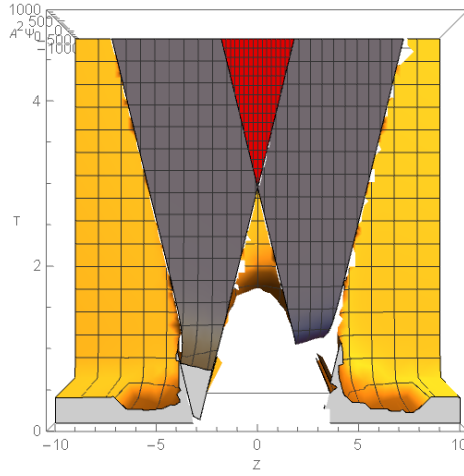




Σχήμα 4.5: Διαγραμμάτα του Ψ_0 στις διάφορες περιοχές του χώρου για δύο πραγματικούς πόλους με $d = 2, \omega = 3$.

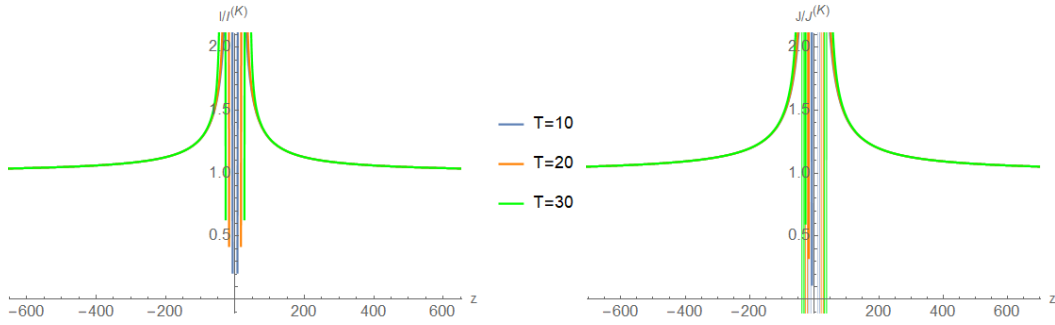
Βλέπουμε ότι τα μεγέθη στο όριο $W \rightarrow 0$ έχουν εξάρτηση από τον χρόνο $t^{-(d^2+3)/2}$ άρα πράγματι οι διαταραχές τείνουν στο μηδέν πολύ γρήγορα και είναι περιορισμένες σε κάποια z κάθε χρονική στιγμή. Στην περιοχή σύγκρουσης των σολιτονίων, δηλαδή στην $-\omega < z < \omega$, διακρίνουμε μια διαταραχή η οποία μειώνεται με την πάροδο του χρόνου αλλά η κορυφή της παραμένει στο ίδιο z . Στις περιοχές $z < -\omega$ και $z > \omega$ βλέπουμε διαταραχές που οι κορυφές τους κινούνται προς το άπειρο και συνεχώς μειώνονται.





Σχήμα 4.6: Τρισδιάστατη απεικόνιση των $\Psi_{0,4}$ για δύο πραγματικούς πόλους με $d = 2$, $\omega = 3$. Στην γκριζα περιοχή απεικονίζονται αντίστοιχα τα $\Psi_{0,4}$ του ενός πόλου. Στην κόκκινη περιοχή έχουν σχεδιαστεί τα $\Psi_{0,4}^{(K)}$.

Περιγράφει όμως η παραπάνω μετρική όντως διαταραχές που διαδίδονται πάνω στο υπόβαθρο Kasner; Για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση θα πάρουμε τους λόγους $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$. Για να είναι όντως διαταραχή σε υπόβαθρο Kasner θα πρέπει αυτοί οι λόγοι να τείνουν στη μονάδα στο όριο $t \ll |z| \rightarrow \infty$.



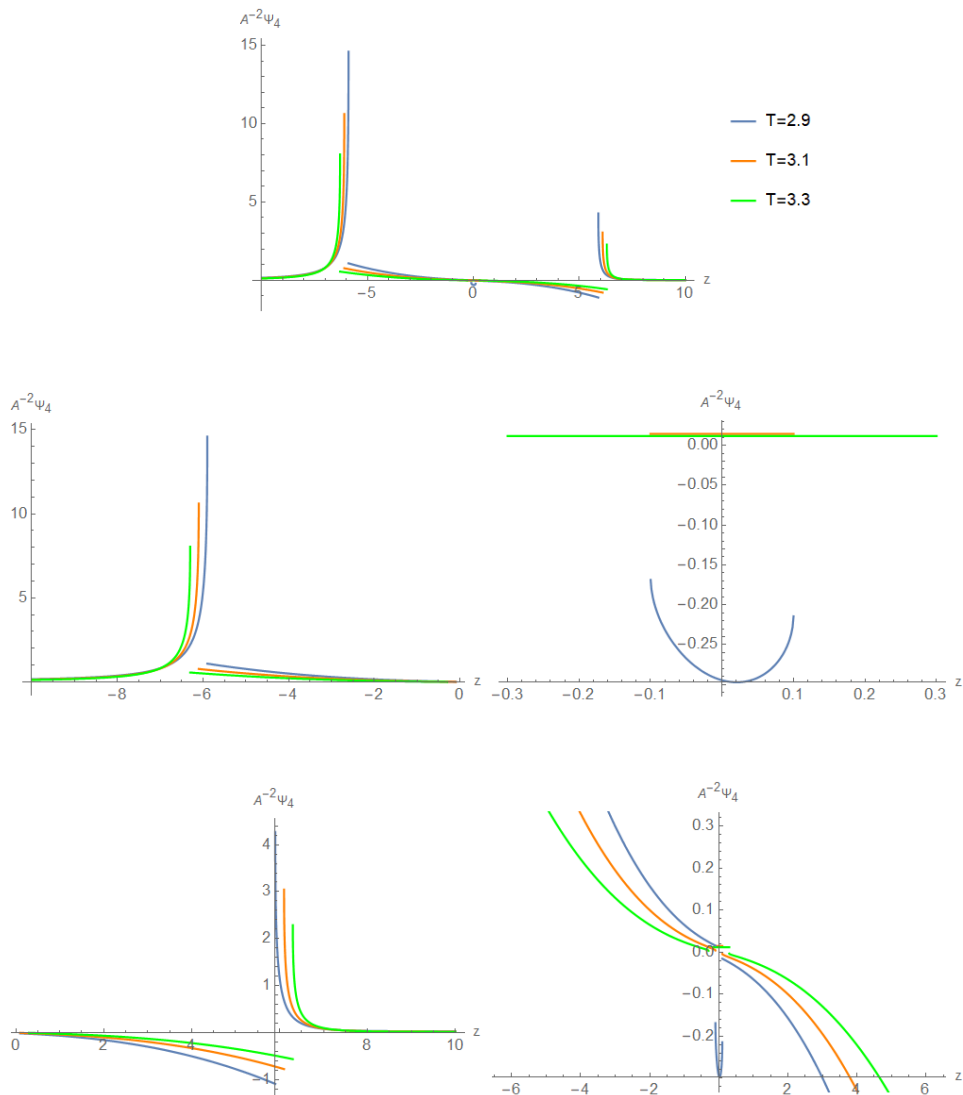
Σχήμα 4.7: Διαγράμματα των $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ για πραγματικούς πόλους με $d = 2$, $\omega = 3$.

Από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε ότι όντως συμβαίνει αυτό. Επίσης μπορούμε να το δούμε και ορίζοντας $z = 1/W$ και πηγαίνοντας στο όριο $W \rightarrow 0$:

$$ds_2^2 = ds_{(K)}^2 + \mathcal{O}(W) \quad (4.63)$$

όπου $ds_{(K)}^2$ η μετρική του Kasner. Με βάση αυτή την εικόνα ερμηνεύουμε ότι αυτή η μετρική περιγράφει ένα μη ομογενές κοσμολογικό μοντέλο που περιέ-

χει τέσσερα κύματα που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός σε υπόβαθρο Kasner [3, σελ. 110]. Την παραπάνω μετρική μπορούμε να την ενώσουμε πάνω στις γραμμές των κώνων φωτός με την μετρική του ενός σολιτονίου[5]. Όπως έχουμε πει νωρίτερα, αλλά το βλέπουμε και από τα τρισδιάστατα διαγράμματα, η περιοχή ανάμεσα από τους δύο πόλους περιέχει δύο σολιτόνια τα οποία συγκρούονται στο σημείο $(z, t) = (0, 3)$. Μετά την σύγκρουση αναδύεται ένας χωρόχρονος με μετρική αυτή του υποβάθρου.



Σχήμα 4.8: Διαγράμματα του Ψ_4 στις διάφορες περιοχές του χώρου για δύο πραγματικούς πόλους με $d = 2, \omega = 3$ ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την σύγκρουση.

Αφού οι διαταραχές, όπως είδαμε, διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός είναι ενδιαφέρον να δούμε πως συμπεριφέρονται τα μεγέθη $\Psi_{0,4}$ κοντά στον κώνο φωτός αλλά και μακριά από τις αρχές των σολιτονίων. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε ταυτόχρονα ότι $z = 1/W$ και $t = z - \omega - \epsilon$ όταν $z - \omega > 0$ ενώ $t = -z - \omega - \epsilon$ όταν $z + \omega < 0$. Αναπτύσσοντας σε σειρά βρίσκουμε για $z - \omega > 0$:

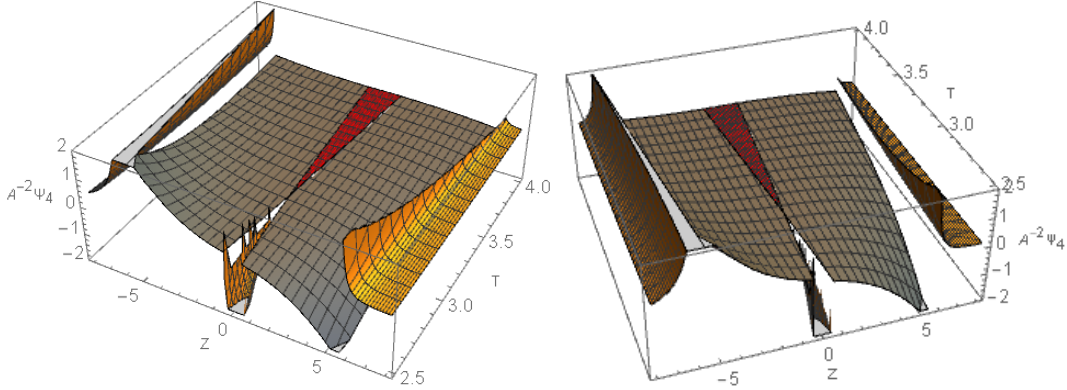
$$A^2\Psi_0 = \frac{W^{d^2/2}(1 - W\omega)^{-d(d-2)/2}}{(-1)^d\omega^{2d}} \left(\frac{2^{5-2d}d(d^2 - 1)\omega^{7/2}}{C_2(m_{02}^{(2)})^2(m_{02}^{(1)})^2} \sqrt{W} + \mathcal{O}(W) \right) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon W}) \quad (4.64)$$

$$A^{-2}\Psi_4 = \frac{W^{d^2/2}(1 - W\omega)^{-d(d-2)/2}}{(-1)^d\omega^{2d}} \left(-\frac{2^{5-2d}3\omega^3}{C_2(m_{02}^{(2)})^2(m_{02}^{(1)})^2} W + \mathcal{O}(W^{3/2}) \right) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon W}) \quad (4.65)$$

Ενώ για $z + \omega < 0$:

$$A^2\Psi_0 = \frac{W^{d^2/2}(1 - W\omega)^{-d(d-2)/2}}{(-1)^d\omega^{2d}} \left(-\frac{2^{5-2d}3\omega^3}{C_2(m_{02}^{(2)})^2(m_{02}^{(1)})^2} W + \mathcal{O}(W^{3/2}) \right) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon W}) \quad (4.66)$$

$$A^{-2}\Psi_4 = \frac{W^{d^2/2}(1 - W\omega)^{-d(d-2)/2}}{(-1)^d\omega^{2d}} \left(\frac{2^{5-2d}d(d^2 - 1)\omega^{7/2}}{C_2(m_{02}^{(2)})^2(m_{02}^{(1)})^2} \sqrt{W} + \mathcal{O}(W) \right) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon W}) \quad (4.67)$$



Σχήμα 4.9: Τρισδιάστατη απεικόνιση του $A^{-2}\Psi_4$ για δύο πραγματικούς πόλους με $d = 2$, $\omega = 3$.

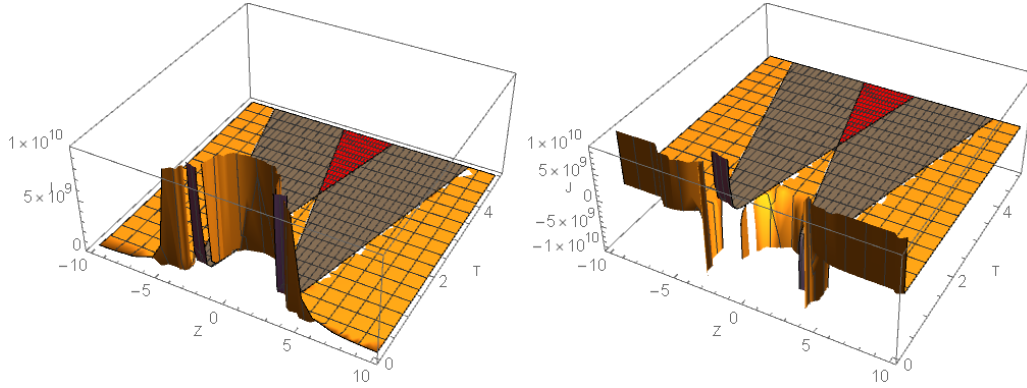
Στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$, $W \rightarrow 0$ έχουμε :

$$A^2\Psi_0 \propto W^{d^2/2+1/2} \propto t^{-(d^2+1)/2}, \quad A^{-2}\Psi_4 \propto W^{d^2/2+1} \propto t^{-(d^2+2)/2} \quad (4.68)$$

στην περιοχή $z - \omega > 0$ ενώ στην $z + \omega < 0$ βρίσκουμε :

$$A^2 \Psi_0 \propto W^{d^2/2+1} \propto t^{-(d^2+2)/2}, \quad A^{-2} \Psi_4 \propto W^{d^2/2+1/2} \propto t^{-(d^2+1)/2} \quad (4.69)$$

Παρατηρούμε ότι οι διαταραχές μειώνονται πολύ γρήγορα σε συνάρτηση με τον χρόνο. Αυτό οφείλεται στην διόγκωση του υποβάθρου με το πέρασμα του χρόνου και δεν σημαίνει ότι έχουμε φαινόμενα διασποράς.



Σχήμα 4.10: Τρισδιάστατη απεικόνιση των I , J για δύο πραγματικούς πόλους με $d = 2$, $\omega = 3$.

Σε ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και από τα διαγράμματα των I , J . Βλέπουμε ότι η μετρική παρουσιάζει απειρισμό μόνο για $t \rightarrow 0$, ο οποίος έχει κοσμολογική ερμηνεία.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τους μιγαδικούς πόλους. Συγκεκριμένα θα πάρουμε ένα μιγαδικό πόλο και τον συζυγή του. Όπως έχουμε πει αυτή η λύση δε θα παρουσιάζει ασυνέχειες πάνω στον κώνο φωτός. Σε αυτή την περίπτωση διαλέγουμε ξανά $m_{01} = 0$ και επίσης θα πρέπει να πάρουμε μιγαδικά ω και m_{02} . Έχουμε λοιπόν δύο πόλους για τους οποίους ισχύουν :

$$\mu_1^\pm = \omega_1 - z \pm \sqrt{(\omega_1 - z)^2 - t^2}, \quad \mu_2 = \bar{\mu}_1 \quad (4.70)$$

με $\omega_1 = x_1 + iy_1$,

$$m_{02}^{(1)} = m_R^{(1)} + im_I^{(1)}, \quad m_{02}^{(2)} = \bar{m}_{01}^{(1)} \quad (4.71)$$

με m_R, m_I πραγματικές σταθερές.

Η μετρική έχει την ίδια μορφή με αυτήν των δύο πραγματικών πόλων στις σχέσεις 4.58, 4.59. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι μπορούμε να γράψουμε[4]:

$$\frac{\mu_1^\pm}{t} = \sqrt{\sigma_1^\pm} e^{i\gamma_1} \quad (4.72)$$

όπου :

$$\sigma_1^\pm = L_1 \pm \sqrt{L_1^2 - 1}, \quad L_1 = \frac{z_1^2 + y_1^2}{t^2} + \sqrt{1 - 2\frac{z_1^2 - y_1^2}{t^2} + \frac{(z_1^2 + y_1^2)^2}{t^4}} \quad (4.73)$$

$$\gamma_1 = \cos^{-1} \left(\frac{2z_1\sqrt{\sigma_1}}{t(1 + \sigma_1)} \right) \quad (4.74)$$

και $z_1 = x_1 - z$. Από τις σχέσεις 4.34, 4.35 για $n = 2$ βλέπουμε ότι η μετρική γίνεται :

$$g_{11} = \sigma_1(g_0)_{11}, \quad g_{22} = \frac{t^2}{\sigma_1(g_0)_{11}} \quad (4.75)$$

$$f = Cf_0 \frac{t^2 \sigma_1^{1+d} (1 - \cos^2 \gamma_1)}{(\sigma_1 + 1)^2 - 4\sigma_1 \cos^2 \gamma_1} \quad (4.76)$$

Για να μελετήσουμε την παραπάνω μετρική πρέπει να βρούμε τις ασυμπτωτικές μορφές των μεγεθών I, J . Αν έχουμε κάπου απειρισμό θα εμφανιστεί σε αυτά. Διαλέγουμε να δουλέψουμε με το αρνητικό πρόσημο $\sigma_1 = \sigma_1^-$. Στις μετρικές των μιγαδικών πόλων πρέπει να κοιτάζουμε επιπλέον το φωτοειδές όριο. Αυτό δεν χρειάζεται στις μετρικές των πραγματικών πόλων, γιατί εκεί είχαμε την μετρική του υποβάθρου. Αναπτύσσουμε σε σειρά και βρίσκουμε τα παρακάτω. Στο χωροειδές όριο ($t \ll z \rightarrow \infty \Rightarrow W = 1/z \rightarrow 0$) :

$$I = (t^2 W^2)^{-2d} \left(\frac{4^{1+2d} (3 + 4d + d^2)^2 (7 + 4d + d^2)}{t^{d^2+7}} W^{-8} + \mathcal{O}(W^{-7}) \right) \quad (4.77)$$

$$J = (t^2 W^2)^{-3d} \left(\frac{8^{1+2d} (1 + d)^4 (3 + d)^4}{t^{3(d^2+7)/2}} W^{-12} + \mathcal{O}(W^{-11}) \right) \quad (4.78)$$

Στο φωτοειδές όριο ($t = z \rightarrow \infty \Rightarrow W = 1/z \rightarrow 0$) :

$$I = W^{d^2} \left(4(d^2 - 1)^2 \left(3y_1^4 + d^2 \frac{(y_1^2 + 4(y_1 + y_1^{3/2}))^5}{y_1(2 + y_1^{1/2})^{10}} \right) W^3 + \mathcal{O}(W^4) \right) \quad (4.79)$$

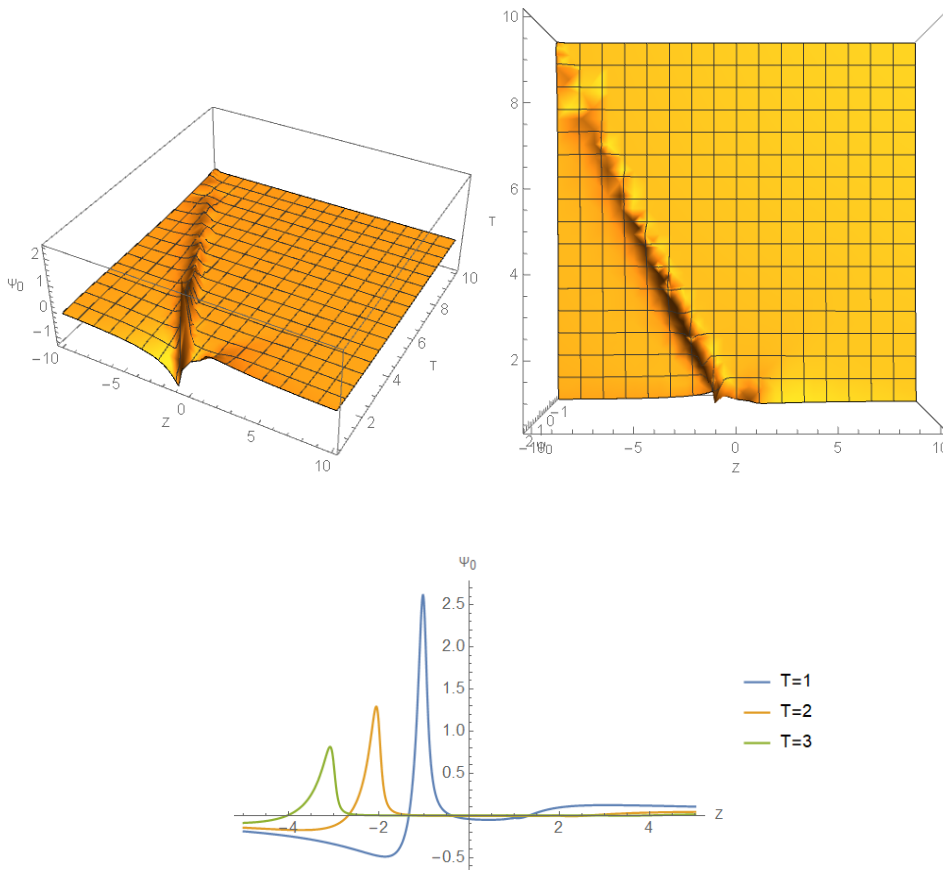
$$J = W^{3d^2/2} \left(\frac{8y_1^4}{2 + y_1^{1/2}} (y_1^2 + 4(y_1 + y_1^{3/2})) (d^2 - 1)^4 W^{9/2} + \mathcal{O}(W^{11/2}) \right) \quad (4.80)$$

Στο χρονοειδές όριο ($z \ll t \rightarrow \infty \Rightarrow W = 1/t \rightarrow 0$) :

$$I = W^{d^2} (4y_1^4 (d^2 - 1)^2 (3 + d^2) W^3 + \mathcal{O}(W^4)) \quad (4.81)$$

$$J = W^{3d^2/2} (8y_1^6 (d^2 - 1)^4 W^{9/2} + \mathcal{O}(W^{11/2})) \quad (4.82)$$

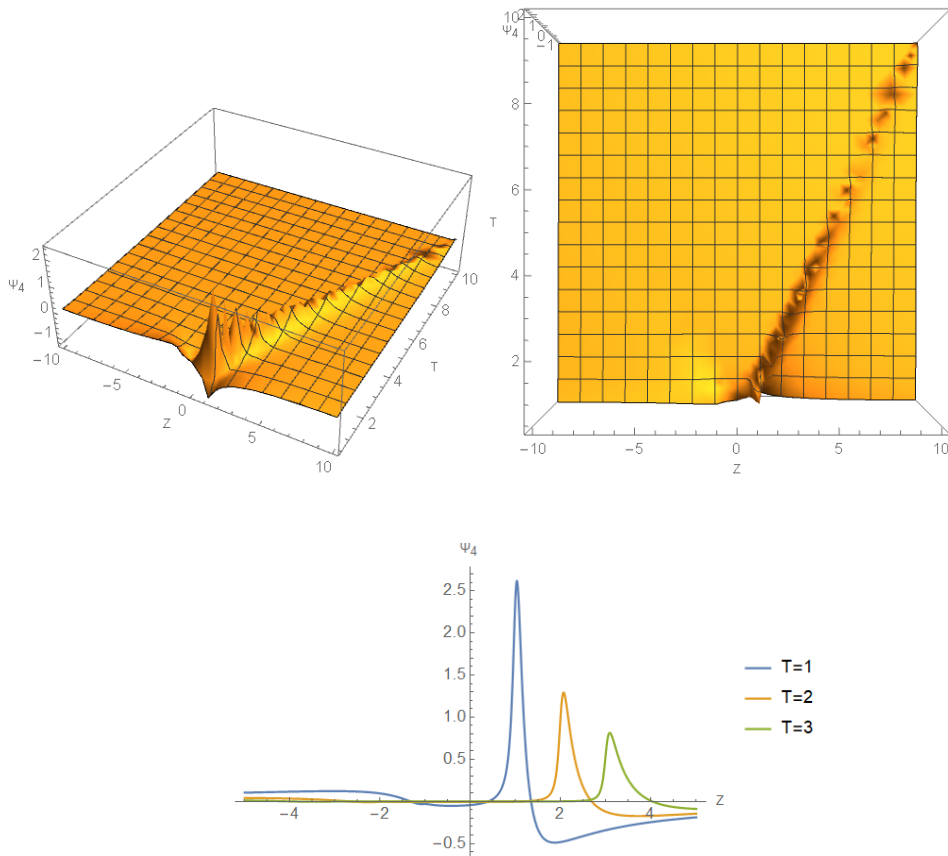
Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι δεν παρουσιάζεται απειρισμός για καμία τιμή του d στο φωτεινές και στο χρονοειδές όριο. Αντιθέτως, στο χωροειδές όριο εμφανίζεται απειρισμός για $d > -2$. Οπότε οι επιτρεπόμενες τιμές για την παράμετρο d είναι $d \leq -2$. Αν διαλέγαμε το θετικό πρόσημο στον πόλο τότε θα έπρεπε να πάρουμε $d \geq 2$. Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των $\Psi_{0,4}$ για $d = -2$. Παρατηρούμε ότι οι διαταραχές μειώνονται με την πάροδο του χρόνου. Όπως έχουμε πει και πριν, αυτή η εξάρτηση από τον χρόνο ευθύνεται στην διόγκωση του υποβάθρου και δεν υπονοεί διασπορά των σολιτωνίων. Οι διαταραχές κινούνται η μία προς τα δεξιά και η άλλη προς τα αριστερά και δε συγχροούνται ποτέ.



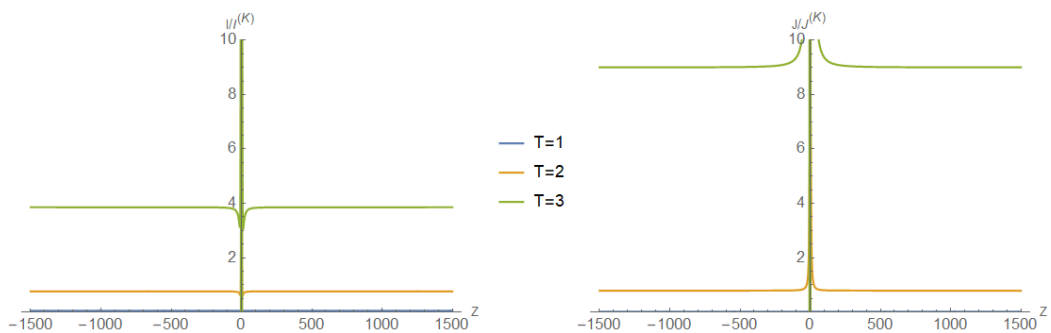
Σχήμα 4.11: Διαγράμματα του Ψ_0 για ένα μιγαδικό πόλο και τον συζυγή του με $d = -2$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0.1$.

Επίσης σχεδιάζουμε τα διαγράμματα $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ για μεγάλα z . Για να περιγράψει η μετρική διαταραχή σε υπόβαθρο Kasner θα πρέπει αυτοί οι λόγοι να τείνουν στη μονάδα στο όριο $t \ll |z| \rightarrow \infty$. Από τα παρακάτω διαγράμματα

βλέπουμε ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει άρα η μετρική δεν περιγράφει διαταραχές πάνω σε υπόβαθρο Kasner.



Σχήμα 4.12: Διαγράμματα του Ψ_4 για ένα μιγαδικό πόλο και τον συζυγή του με $d = -2$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0.1$.



Σχήμα 4.13: Διαγράμματα των $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ για ένα μιγαδικό πόλο και τον συζυγή του με $d = -2$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0.1$.

Για να παρατηρήσουμε σύγκρουση σολιτονίων θα πρέπει να πάρουμε τέσσερις πόλους. Η μετρική θα είναι τώρα :

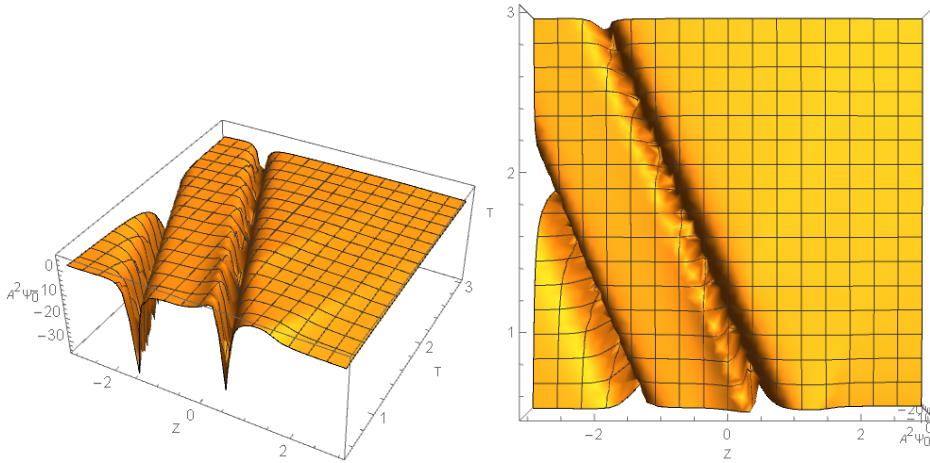
$$g_{11} = \sigma_1 \sigma_2 (g_0)_{11}, \quad g_{22} = \frac{t^2}{\sigma_1 \sigma_2 (g_0)_{11}} \quad (4.83)$$

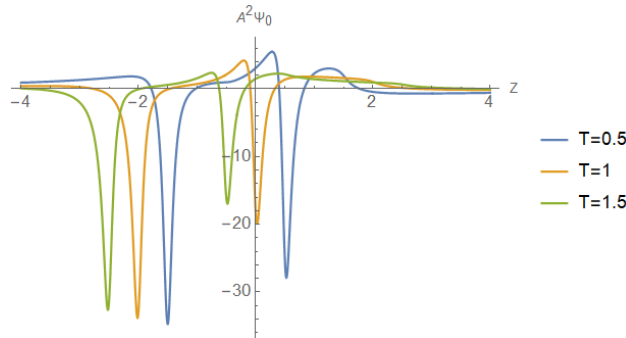
$$f = C f_0 t^{-8} \frac{\sigma_1^d H_1^{-1}}{(1 - \sigma_1)^2} \frac{\sigma_2^d H_2^{-1}}{(1 - \sigma_2)^2} \left[\left((\sigma_1 + \sigma_2) t^2 - \frac{8z_1 z_2 \sigma_1 \sigma_2}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \right)^2 - 64 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \frac{y_1^2}{(1 - \sigma_1)^2} \frac{y_2^2}{(1 - \sigma_2)^2} \right]^2 \quad (4.84)$$

με

$$H_k = (1 - \sigma_k)^2 + \frac{16 y_k^2 \sigma_k^2}{(1 - \sigma_k)^2 t^2} \quad (4.85)$$

Έχουμε δύο επιλογές για τους πόλους. Η πρώτη είναι να πάρουμε δύο πόλους με ίδια πρόσημα και τους συζυγείς αυτών, δηλαδή τους $\mu_1^+, \mu_2^+, \mu_3 = \overline{\mu_1^+}, \mu_4 = \overline{\mu_2^+}$ ή τους $\mu_1^-, \mu_2^-, \mu_3 = \overline{\mu_1^-}, \mu_4 = \overline{\mu_2^-}$. Η δεύτερη επιλογή που έχουμε είναι να πάρουμε πόλους διαφορετικών προσήμων $\mu_1^+, \mu_2^-, \mu_3 = \overline{\mu_1^+}, \mu_4 = \overline{\mu_2^-}$. Θα ξεκινήσουμε διαλέγοντας πόλους με ίδια πρόσημα $\mu_1 = \mu_1^+, \mu_2 = \mu_2^+$. Όπως προηγουμένως, πρέπει να διαλέξουμε συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου d ώστε να μην έχουμε απειρισμούς στα μεγέθη I, J . Στην περίπτωση που έχουμε διαλέξει βρίσκουμε ότι πρέπει να πάρουμε $d \geq 4$.



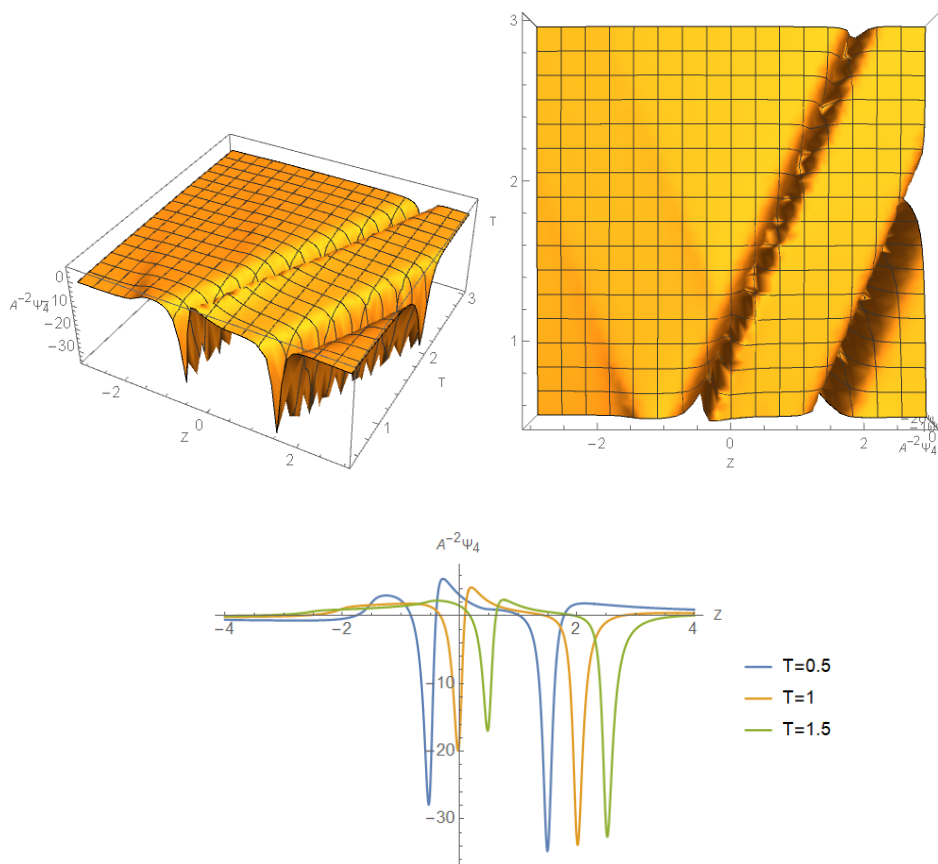


Σχήμα 4.14: Διαγράμματα του $A^2\Psi_0$ για δύο μιγαδικούς πόλους με ίδια πρόσημα και τους συζυγείς τους με $d = 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$.

Αφού έχουμε εξασφαλίσει ότι δεν εμφανίζονται απειρισμοί στα I , J , δεν θα εμφανίζονται ούτε στα $\Psi_{0,4}$. Άρα δεν χρειαζόμαστε κάποιο A , όπως στην περίπτωση των πραγματικών πόλων. Όμως, για να γίνει πιο εμφανής η σύγκρουση των σολιτονίων, θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα A . Συγκεκριμένα, όταν σχεδιάζουμε το $A^2\Psi_0$ παίρνουμε $A = \sqrt{f}$, ενώ όταν σχεδιάζουμε το $A^{-2}\Psi_4$ παίρνουμε $A = 1/\sqrt{f}$.

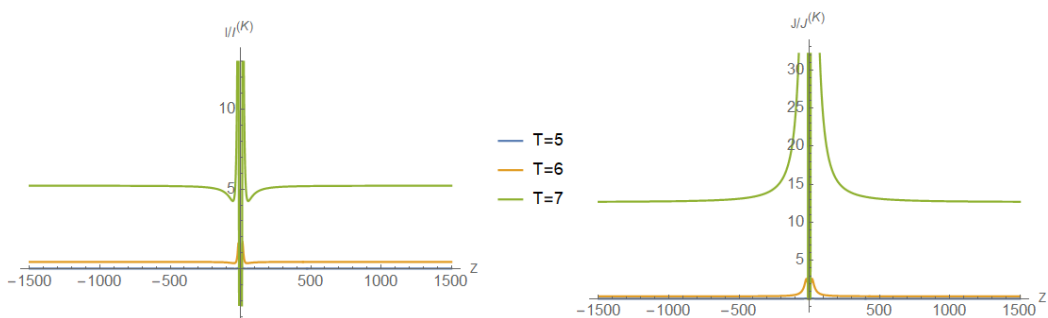
Όπως βλέπουμε έχουμε διαταραχές οι οποίες κινούνται με την ταχύτητα του φωτός. Τα μέγιστα αυτών βρίσκονται πάνω στις ευθείες των κώνων φωτός και, στο όριο $t \rightarrow z$, $|z| \rightarrow \infty$, βρίσκουμε ότι οι διαταραχές έχουν εξάρτηση $\propto t^{-1/2}$. Στα διαγράμματα του $A^2\Psi_0$ βλέπουμε δύο κορυφές με αρνητικές τιμές οι οποίες κινούνται προς τα αριστερά. Επίσης δύο μικρότερες κορυφές με θετικές τιμές κινούνται προς τα δεξιά. Αυτές δεν διακρίνονται σε αυτά τα διαγράμματα γιατί έχουν εξαρχής μικρές τιμές και πολλαπλασιάζοντας με A^2 τις κάνουμε ακόμα πιο μικρές. Σε αυτά τα διαγράμματα φαίνεται και η σύγκρουση σολιτονίων. Συγκεκριμένα οι δύο μεσαίες κορυφές συγκρούονται στο σημείο $(z, t) = (0, 1)$. Μετά την σύγκρουση συνεχίζουν να κινούνται προς την κατεύθυνση που κινούνταν πριν.

Ίδια συμπεράσματα παίρνουμε και από τα διαγράμματα του $A^{-2}\Psi_4$. Με βάση αυτά ερμηνεύουμε ότι αυτή η μετρική περιγράφει ένα χώρο στον οποίο υπάρχουν τέσσερις διαταραχές εκ των οποίων οι δύο συγκρούονται. Όλες διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός και το πλάτος τους μειώνεται καθώς περνάει ο χρόνος. Στα διαγράμματα και των δύο μεγεθών στο όριο $|z| \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι οι διαταραχές τείνουν σε μια σταθερή τιμή η οποία μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου. Άρα στο άπειρο σε όλο τον χώρο ασκείται μια σταθερή δύναμη η οποία τείνει στο μηδέν.



Σχήμα 4.15: Διαγράμματα του $A^{-2}\Psi_4$ για δύο μιγαδικούς πόλους με ίδια πρόσσημα και τους συζυγείς τους με $d = 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$.

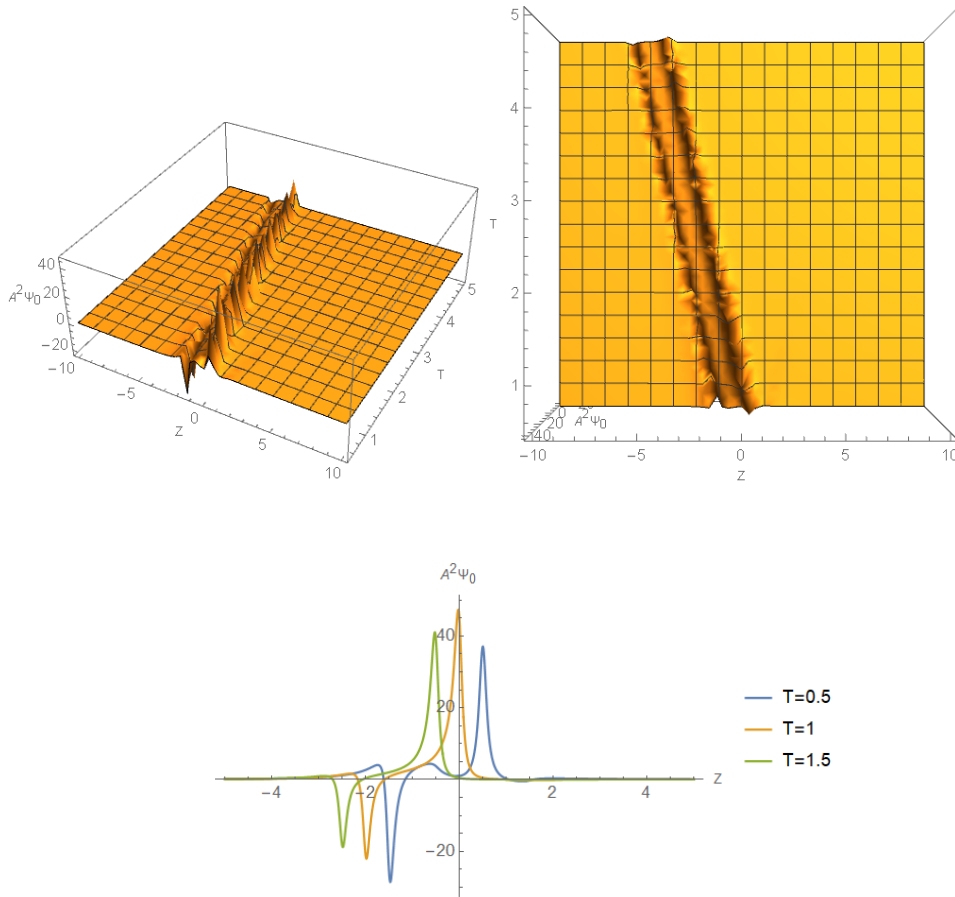
Από τα διαγράμματα $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ μπορούμε να δούμε αν η μετρική περιγράφει διαταραχή σε υπόβαθρο Kasner. Βλέπουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς οι λόγοι δεν τείνουν στη μονάδα.



Σχήμα 4.16: Διαγράμματα των $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ για δύο μιγαδικούς πόλους με ίδια πρόσσημα και τους συζυγείς τους με $d = 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$.

Στη συνέχεια θα διαλέξουμε πόλους με διαφορετικά πρόσημα $\mu_1 = \mu_1^+$, $\mu_2 = \mu_2^-$. Σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε απειρισμό για καμία τιμή της παραμέτρου d . Συνεπώς, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε κάποιο A . Παρόλα αυτά θα χρησιμοποιούμε τα ίδια A με πριν καθώς κάνουν πιο εμφανή την σύγκρουση των σολιτονίων και σχεδιάζουμε τα ίδια διαγράμματα.

Όπως και πριν φαίνονται και εδώ τέσσερις διαταραχές, δύο προς τα αριστερά και δύο προς τα δεξιά. Οι δύο μεσαίες συγκρούονται στο σημείο $(z, t) = (0, 1)$. Το πλάτος των διαταραχών μειώνεται όσο περνάει ο χρόνος. Η κορυφή των διαταραχών εντοπίζεται πάνω στον κώνο φωτός και έχει εξάρτηση $\propto t^{-1/2}$ από τον χρόνο στο όριο $|z| \rightarrow \infty$.



Σχήμα 4.17: Διαγράμματα του $A^2 \Psi_0$ για δύο μιγαδικούς πόλους με διαφορετικά πρόσημα και τους συζυγείς τους με $d = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$.

Από τα διαγράμματα $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ βλέπουμε ότι αυτή η μετρική περιγράφει όντως διαταραχές σε υπόβαθρο Kasner. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και

αν ορίσουμε $z = 1/W$ και αναπτύξουμε σε σειρά:

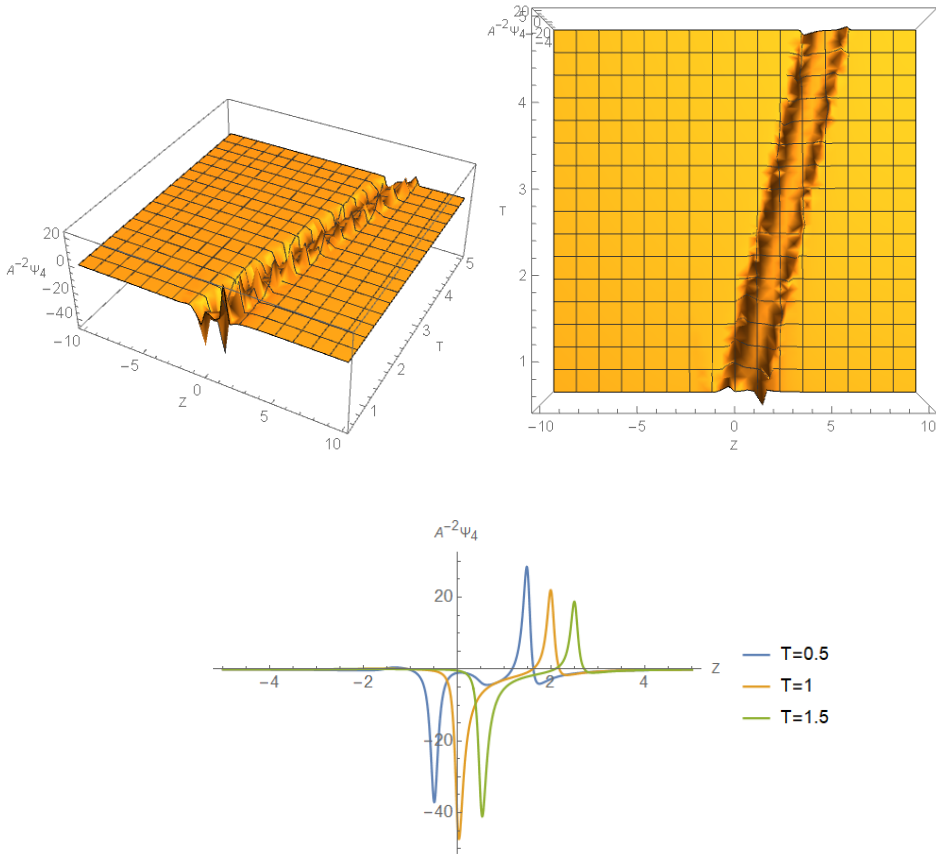
$$g_{11} = t^{1+d} + 4t^{d+1}W + \mathcal{O}(W^2), \quad g_{22} = t^{1-d} - 4t^{1-d}W + \mathcal{O}(W^2) \quad (4.86)$$

$$f = t^{(d^2-1)/2} + 4d t^{(d^2-1)/2}W + \mathcal{O}(W^2) \quad (4.87)$$

Δηλαδή βρίσκουμε ότι :

$$ds^2 = ds_{(K)}^2 + \mathcal{O}(W) \quad (4.88)$$

Άρα στο όριο $W \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι η μετρική τείνει στην μετρική του υποβάθρου.



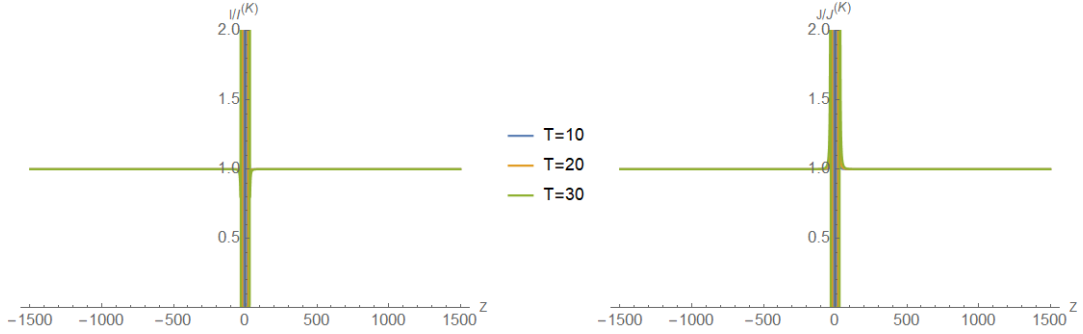
Σχήμα 4.18: Διαγράμματα του $A^{-2}\Psi_4$ για δύο μιγαδικούς πόλους με διαφορετικά πρόσημα και τους συζυγείς τους με $d = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το φωτοειδές όριο καθώς εκεί φαίνονται οι επιπτώσεις των κυμάτων στη μετρική. Για να το μελετήσουμε αυτό πάμε στο όριο $z \ll t \rightarrow \infty$ και ορίζουμε $x_1 = -x_2$, $y_1 = y_2$, $W = 1/t$:

$$\frac{g_{11}}{g_{11}^{(K)}} = 1 + 4zy_2x_2W^3 + \mathcal{O}(W^4), \quad \frac{g_{22}}{g_{22}^{(K)}} = 1 - 4zy_2x_2W^3 + \mathcal{O}(W^4) \quad (4.89)$$

$$\frac{f}{f^{(K)}} = \frac{(1 + (y_2/x_2)^2)^2}{(y_2/x_2)^4} + 4d zy_2^2 \frac{(1 + (y_2/x_2)^2)^2}{(y_2/x_2)^4} W^3 + \mathcal{O}(W^4) \quad (4.90)$$

Δηλαδή βρίσκουμε ότι η μετρική εμφανίζει μετά το πέρασμα του κύματος μια μόνιμη παραμόρφωση στην χρονική διεύθυνση και την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.



Σχήμα 4.19: Διαγράμματα των $I/I^{(K)}$, $J/J^{(K)}$ για δύο μιγαδικούς πόλους με διαφορετικά πρόσημα και τους συζυγείς τους με $d = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.1$.

Στο όριο $W \rightarrow 0$ η μετρική έχει την μορφή :

$$ds^2 = \frac{(1 + (y_2/x_2)^2)^2}{(y_2/x_2)^4} t^{(d^2-1)/2} (dz^2 - dt^2) + t^{d+1} dx^2 + t^{1-d} dy^2 \quad (4.91)$$

Ορίζουμε για ευκολία την σταθερά παραμόρφωσης ως $c = (1 + (y_2/x_2)^2)/(y_2/x_2)^2$ και κάνουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό συντεταγμένων :

$$\tilde{t} = c^{4/(d^2+3)} t, \quad \tilde{z} = c^{4/(d^2+3)} z \quad (4.92)$$

$$\tilde{x} = c^{-2(d+1)/(d^2+3)} x, \quad \tilde{y} = c^{2(d-1)/(d^2+3)} y \quad (4.93)$$

Καταλήγουμε στην μετρική :

$$ds^2 = \tilde{t}^{(d^2-1)/2} (d\tilde{z}^2 - d\tilde{t}^2) + \tilde{t}^{1+d} d\tilde{x}^2 + \tilde{t}^{1-d} d\tilde{y}^2 \quad (4.94)$$

Η μορφή αυτή είναι μια μετρική Kasner γραμμένη σε διαφορετικές συντεταγμένες σε σχέση με αυτές που χρησιμοποιούσαμε πριν την διέλευση του κύματος. Συνεπώς το κύμα δημιουργεί μη γραμμικά φαινόμενα που επηρεάζουν τον ίδιο τον χωρόχρονο και μας αναγκάζουν να αλλάξουμε συντεταγμένες, αν θέλουμε να κρατήσουμε μετρική της ίδιας μορφής με πριν.

Μελετήσαμε λοιπόν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς για πραγματικούς και

μιγαδικούς πόλους. Για περισσότερους πόλους τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε δεν αλλάζουν, απλώς αλλάζει ο αριθμός των διαταραχών και συνεπώς η μετρική στις περιοχές κοντά στους πόλους. Συγκεκριμένα στην περίπτωση των πραγματικών έχουμε την δημιουργία περισσότερων κώνων φωτός που η μετρική παρουσιάζει ασυνέχειες και για τους μιγαδικούς πόλους έχουμε περισσότερες συγχρούμενες διαταραχές.

Τα συμπεράσματα που καταλήγουμε πηγαίνοντας στα διάφορα όρια δεν αλλάζουν. Με βάση αυτά βρίσκουμε ότι οι μετρικές που περιγράφουν διαταραχές πάνω σε υπόβαθρο Kasner είναι αυτές των δύο πραγματικών πόλων με αντίθετα πρόσημα και των δύο μιγαδικών πόλων με αντίθετα πρόσημα και τους συζυγείς τους. Αντίστοιχα, στην περίπτωση των πραγματικών πόλων, οι μετρικές με περισσότερους πόλους, που θα παρουσιάζουν κοσμολογικό ενδιαφέρον, θα είναι αυτές που θα έχουν $2n$ πόλους με n πόλους μ^+ και n με μ^- , όπου $n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$. Στην περίπτωση των μιγαδικών πόλων ενδιαφέρουσες, από κοσμολογικής άποψης, θα είναι οι μετρικές των $4n$ πόλων με n πόλους μ^+ , n πόλους μ^- και τους μιγαδικούς συζυγείς αυτών.

Μελλοντική έρευνα πάνω στα βαρυτικά σολιτόνια πρέπει να επικεντρωθεί στην ανίχνευση τέτοιων διαταραχών. Συγκεκριμένα, πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος μελέτης των επιδράσεων αυτών των διαταραχών στους υπάρχοντες ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων. Θα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον οι κυματομορφές που θα προκαλούν τέτοιου είδους διαταραχές, οι οποίες ενδεχομένως να είναι πολύ διαφορετικές από αυτές που έχουν δημιουργηθεί για την ανίχνευση των κλασικών βαρυτικών κυμάτων.

Bibliography

- [1] V A. Belinskii and V Zakharov. Integration of the einstein equations by the method of the inverse scattering problem and calculation of exact soliton solutions. *75:1953–1971*, 1978.
- [2] Boling Guo (auth.) and Chaohao Gu (eds.). *Soliton Theory and Its Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [3] V. Belinski and E. Verdaguer. *Gravitational Solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2001.
- [4] B. J. Carr and E. Verdaguer. Soliton solutions and cosmological gravitational waves. *prd*, 28:2995–3006, 1983.
- [5] A. Curir, M. Francaviglia, and E. Verdaguer. Inhomogeneous cosmologies with shock waves. *apj*, 397:390, 1992.
- [6] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum. A class of homogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 12:108–141, 1969.
- [7] E. Ibaez, J.; Verdaguer. Multisoliton solutions to einstein’s equations. *Physical Review D*, 31, 1985.
- [8] Peter D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21(5), 1968.
- [9] E. Lifshitz. Republication of: On the gravitational stability of the expanding universe. *J. Phys.(USSR)*, 10:116, 1946.
- [10] M. A. H. MacCallum and G. F. R. Ellis. A class of homogeneous cosmological models: Ii. observations. *Communications in Mathematical Physics*, 19:31–64, 1970.
- [11] C. W. Misner. Mixmaster universe. *Physical Review Letters*, 22:1071–1074, 1969.

- [12] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, and V.E. Zakharov. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Monographs in Contemporary Mathematics. Springer US, 1984.
- [13] V. E. Zakharov ; A. B. Shabat. Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. ii. *Functional Analysis and Its Applications*, 13, 1979.
- [14] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [15] P. Szekeres. The gravitational compass. *Journal of Mathematical Physics*, 6:1387–1391, 1965.
- [16] V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov. Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method. *Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.); (United States)*, 47:6, 1978.