ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Γενικευμενες Διαστατικες Ελαττωσεις τυπου Scherk-Schwarz

Διπλωματικη Εργασια στο Πλαισιο Αποκτησης Μεταπτυχιακου Διπλωματος Φυσικης

Φοιτητης: Γουλας Γεωργιος

Αριθμος Μητρωου: 201616

Επιβλεπων Καθηγητης: Κωνσταντινος Σφετσος, Καθηγητης

Αθήνα,Ιούνιος 2018

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια γενικευμένη μέθοδος διαστατικής ελάττωσης, η οποία παρέχει τη δυνατότητα απόκτησης μάζας σε πεδία της ελαττωμένης θεωρίας. Μελετώνται οι ιδιότητες του δυναμικού το οποίο προκύπτει ως αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής καθώς και οι κατάλληλες συνθήκες για την ομαλή συμπεριφορά του. Έπειτα εφαρμόζεται η διαδικασία αυτή στη δράση της ετεροτικής χορδής και μελετώνται οι επιπτώσεις της στη συμμετρία βαθμίδος που διαθέτει η ελαττωμένη θεωρία.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η τεχνική της διαστατικής ελάττωσης χρησιμοποιείται ευρέως στις θεωρίες υπερβαρύτητας για την κατασκευή υπερσυμμετρικών Yang-Mills θεωριών. Στη συνήθη διαστατική ελάττωση, η οποία φέρει τα ονόματα των Kaluza-Klein, υποθέτει κανείς πως ο χωρόχρονος διάστασης $D + d$ χωρίζεται στο συνήθη χωρόχρονο διάστασης D με μεταβλητές x^μ και σε έναν εσωτερικό συμπαγή χώρο διάστασης d, στον οποίον αντιστοιχούν μεταβλητές y^M. Τα πεδία και οι συμμετρίες της αρχικής θεωρίας θεωρούνται ανεξάρτητα των εσωτερικών συντεταγμένων. Έτσι έχει κανείς μια θεωρία σε D διαστάσεις, η οποία κληρονομεί συμμετρίες της αρχικής θεωρίας καθώς και νέα πεδία τα οποία εμφανίζονται ως συνιστώσες των αρχικών πεδίων στον εσωτερικό χώρο. Συγκεκριμένα, για τη δράση Einstein-Hibert η συμμετρία της αρχικής θεωρίας κάτω από διαφορομορφισμούς στον εσωτερικό χώρο μεταφράζεται σε μια Αβελιανή $U(1)^d$ συμμετρία βαθμίδος για την ελαττωμένη θεωρία με τα αντίστοιχα πεδία βαθμίδος να προέρχονται από τους μη διαγωνίους όρους της αρχικής μετρικής. Οι διαγώνιοι όροι της μετρικής συμπεριφέρονται ως βαθμωτά πεδία κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς και είναι τα λεγόμενα διαστελλόνια. Ο δε όγκος του εσωτερικού χώρου εμφανίζεται ως απλός πολλαπλασιαστικός παράγων της δράσης και μεταβάλλει τη μάζα Planck.Ωστόσο, οι υπερσυμμετρικές θεωρίες σε 10 και 11 διαστάσεις είναι άμαζες και η διαστατική ελάττωση των Kaluza-Klein δεν επιτρέπει την εμφάνιση έμμαζων πεδίων στις ελαττωμένες θεωρίες.

Το πρόβλημα αυτό λύνει η διαστατική ελάττωση τύπου Scherk-Schwarz, η οποία διαφέρει από τη συνήθη διαστατική ελάττωση καθώς επιτρέπει σε κάποια πεδία να έχουν εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες διατηρώντας όμως τη συνολική δράση ανεξάρτητη αυτών. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα επιπλέον δυναμικό στην ελαττωμένη θεωρία το οποίο εμπεριέχει όρους μάζας για κάποια πεδία ενώ η συμμετρία βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας γίνεται μη Αβελιανή.

Η παρούσα εργασία είναι δομημένη ως εξής: αρχικά θα παρουσιάσουμε την ελάττωση της δράσης Einstein-Hilbert σύμφωνα με την διαστατική ελάττωση των Kaluza-Klein κι έπειτα σύμφωνα με την ελάττωση τύπου Scherk-Schwarz, ώστε να καθίσταται εύκολη η σύγκριση των αποτελεσμάτων των 2 μεθόδων. Στη συνέχεια εξετάζουμε τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί η ομάδα βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας προκειμένου το δυναμικό να έχει ομαλή συμπεριφορά. Ακολουθούμε κατόπιν την ίδια διαδικασία για τη δράση της ετεροτικής χορδής σε 10 διαστάσεις, στην οποία περίπτωση έχουμε επιπλέον πεδία τύπου Kalb-Ramond και Yang-Mills. Εξετάζουμε ακόμη την επίδραση της ελάττωσης Scherk-Schwarz στη συμμετρία βαθμίδος της αρχικής θεωρίας.

1 Γενικευμένη Διαστατική Ελάττωση

1.1 Διαστατική Ελάττωση Kaluza-Klein σε d-διάστατο τόρο

Το εναρκτήριο σημείο είναι η δράση Einstein-Hilbert σε D+d διαστάσεις. Οι συμβάσεις που ακολουθούμε είναι οι εξής: η υπογραφή της μετρικής είναι $G = (-,+,+,+...,+)$ ενώ για τις χωροχρονικές συντεταγμένες x^{μ} με μ=0,1,2...D ενώ για τον εσωτερικό χώρο y^{M} με M=1,2...d. Για τον εφαπτόμενο χώρο έχουμε λατινικούς δείκτες $a, b, c...$ εάν αναφερόμαστε στο D-διάστατο χώρο ενώ για τον αντίστοιχο εσωτερικό χώρο έχουμε κεφαλαίους λατινικούς δείκτες $A, B, C...$ Χρησιμοποιούμε περισπωμένη για ένα πεδίο της αρχικής $D+d$-διάστατης θεωρίας ενώ η απουσία της υποδηλώνει πεδίο της ελαττωμένης. Αντίστοιχα οι δείκτες με περισπωμένη παίρνουν 2 τιμές: $\hat{x}^{\mu} = (x^{\mu}, y^{M})$. Η δράση Einstein-Hilbert είναι:

$$S_{EH} = \frac{1}{4\kappa^2} \int d\hat{x}^{D+d} \sqrt{-G} \hat{R} = \frac{1}{4\kappa^2} \int dx^D \int \frac{dy^d}{V_d} \hat{e} \hat{R} \tag{1.1}$$

όπου $\hat{e}$ είναι η ορίζουσα του πεδίου e^{a}_{μ}. Για τη βαθμωτή καμπυλότητα έχουμε:

$$\hat{R} = \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{\nu}\hat{\sigma}} \hat{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{G}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}} = \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{\nu}\hat{\sigma}} \hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{a}} \hat{e}^{\hat{\nu}}_{\hat{b}} \hat{e}^{\hat{\rho}}_{\hat{c}} \hat{e}^{\hat{\sigma}}_{\hat{d}} \hat{\eta}^{\hat{a}\hat{b}} \hat{\eta}^{\hat{c}\hat{d}} = \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{a}\hat{b}} \hat{e}^{\hat{\mu}\hat{a}} \hat{e}^{\hat{\nu}\hat{b}} \tag{1.2}$$

όπου:

$$\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{a}\hat{b}} = \partial_{\hat{\mu}} \hat{\omega}_{\hat{\nu}\hat{a}\hat{b}} + \hat{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\mu}\hat{a}} \hat{\omega}_{\hat{\nu}\hat{t}\hat{b}} - \hat{\mu} \leftrightarrow \hat{\nu} \tag{1.3}$$

Στην άνωθεν δράση έχουμε εισάγει επίσης τον αναλλοίωτο όγκο του εσωτερικού χώρου V_d με διαστάσεις (μήκους)^d έτσι ώστε $\frac{\kappa^2}{4\pi}$ να είναι η συνήθης σταθερά του Νεύτωνα με διαστάσεις (μήκους)$^{D-2}$. Στη γενικευμένη ελάττωση η Λαγκραντζιανή θα είναι αναλλοίωτη των εσωτερικών συντεταγμένων, εκτός από έναν παράγοντα τον οποίον θα αναιρέσουμε με κατάλληλη επιλογή του V_d. Για λόγους ευκολίας θα δουλέψουμε χρησιμοποιώντας τις φερμιονικές συγγενείς συνδέσεις με λατινικούς δείκτες:

$$\hat{\omega}_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{c}} \hat{\omega}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{b}} \tag{1.4}$$

Με ολοκλήρωση των ω-όρων κατά παράγοντες, η δράση παίρνει τη μορφή:

$$S_{EH} = \frac{1}{4\kappa^2} \int d^D x \int \frac{d^d y}{V_d} \hat{e} (\hat{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} \hat{\omega}^{\hat{b}\hat{c}}_{\hat{a}} + \hat{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{a}\hat{b}} \hat{\omega}^{\hat{c}}_{\hat{c}\hat{d}} \hat{\eta}^{\hat{b}\hat{d}}) \tag{1.5}$$

Στην Kaluza-Klein διαστατική ελάττωση θεωρεί κανείς αναπτύγματα των πεδίων στον εσωτερικό χώρο,τον οποίο θεωρούμε ως έναν d-διάστατος τόρο (δηλαδή αποτελείται δηλαδή από d τω πλήθος S^1). Για παράδειγμα, για ένα βαθμωτό πεδίο θα ισχύει (θεωρώντας απλώς έναν κύκλο ακτίνας R στον εσωτερικό χώρο με συντεταγμένη z):

$\hat{\phi} = \sum_n \phi_{(n)} e^{\frac{inz}{R}}$

Έτσι έχουμε έναν άπειρο αριθμό πεδίων στον ελαττωμένο χώρο, τα οποία αριθμούνται από το n. Η δράση του τελεστη $\hat{\Box}$ στο πεδίο δίνει:

$\hat{\Box}\hat{\phi} = \Box\phi_0 + (\Box\phi_1 - \frac{1}{R^2}\phi_1)e^{\frac{iz}{R}} + (\Box\phi_2 - \frac{4}{R^2}\phi_2)e^{\frac{2iz}{R}} + ...$

Οπότε θα ισχύει:

$\hat{\Box}\hat{\phi} = 0 \rightarrow (\Box\phi_n + \frac{n^2}{R^2}\phi_n) = 0$

Δηλαδή τα πεδία ϕ_n ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon με μάζες $m_n \sim \frac{|n|}{R}$. Στο όριο που η ακτίνα του κύκλου γίνεται πολύ μικρή, οι μάζες των πεδίων αυτών γίνονται τεράστιες. Τα σωματίδια αυτά δεν έχουμε τη δυνατότητα να τα παρατηρήσουμε, συνεπώς κρατούμε στη Lagrangian μόνο τους όρους $n = 0$, που σημαίνει πως τα πεδία τα οποία μένουν είναι ανεξάρτητα των εσωτερικών συντεταγμένων και άμαζα. Το επιχείρημα αυτό θα ισχύει για όλα τα επόμενα εδάφια. Για τα μοναδιαία ανύσματα ορθοκανονικής βάσης (vielbein[1]) έχουμε την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \delta^{\gamma} e_{\mu}^{a} & 2\kappa V_{\mu}^{M} E_{M}^{A} \\ 0 & E_{M}^{A} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε την άνωθεν τριγωνική μορφή για τα πλειομελή βάση εξαιτίας της τοπικής συμμετρίας Lorentz σε $D + d$ διαστάσεις ενώ $\delta = detE$. Ο εκθέτης γ αντιστοιχεί σε έναν αυθαίρετο μετασχηματισμό Weyl της ελαττωμένης πλειομελούς βάσης και θα επιλεγεί κατάλληλα στη συνέχεια. Το άνωθεν πεδίο περιέχει ένα D διάστατο βαρυτόνιο (e_{μ}^{a}), d τω πλήθος ανυσματικά πεδία V_{μ}^{M} και d^2 βαθμωτά πεδία E_{M}^{A}. Όμως εξαιτίας της τοπικής συμμετρίας Lorentz στον εσωτερικό χώρο, μόνο τα $\frac{d(d+1)}{2}$ εξ αυτών των βαθμωτών αντιστοιχούν σε διαδιδόμενα σωματίδια. Η αρχική θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων:

$$\acute{\hat{x}}^{\hat{\mu}} = \hat{x}^{\hat{\mu}} - \xi^{\hat{\mu}}(x) \tag{1.7}$$

$$\delta\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} = \xi^{\hat{\nu}}(x)\partial_{\hat{\nu}}\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} + \partial_{\hat{\mu}}\xi^{\hat{\nu}}(x)\hat{e}_{\hat{\nu}}^{\hat{a}}$$

Λαμβάνουμε τις απειροστές παραμέτρους ξ των μετασχηματισμών να είναι ανεξάρτητες των εσωτερικών συντεταγμένων. Για χωροχρονικούς μετασχηματισμούς, η άνωθεν εξίσωση δίνει για τα ελαττωμένα πεδία:

$$\delta e_{\mu}^{a}(x) = \xi^{\nu}(x)\partial_{\nu}e_{\mu}^{a}(x) + \partial_{\mu}\xi^{\nu}(x)e_{\nu}^{a}(x) \tag{1.8}$$

$$\delta V_{\mu}^{M}(x) = \xi^{\nu}(x)\partial_{\nu}V_{\mu}^{M}(x) + \partial_{\mu}\xi^{\nu}(x)V_{\nu}^{M}(x)$$

$$\delta E_{M}^{A}(x) = \xi^{\nu}(x)\partial_{\nu}E_{M}^{A}(x)$$

[1]Μια συναφής ονομασία που θα μπορούσε να αποδοθεί είναι πλειομελής βάση

Ενώ για μετασχηματισμούς στον εσωτερικό χώρο έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\delta e_\mu^a(x) = 0 \qquad (1.9)\\
&\delta V_\mu^M(x) = \frac{1}{2\kappa}\partial_\mu \xi^M(x)\\
&\delta E_M^A(x) = 0
\end{aligned}
$$

Οπότε κάτω από ξ^μ μετασχηματισμούς τα πεδία E_M^A μετασχηματίζονται ως βαθμωτά ενώ τα e_μ^a, V_μ^M ως ανύσματα. Κάτω από ξ^M μετασχηματισμούς τα πεδία V_μ^M μετασχηματίζονται ως ανύσματα ενώ τα e_μ^a, E_M^A ως βαθμωτά.

Έχοντας καθορίσει τα πεδία και τους νόμους μετασχηματισμού προχωρούμε στον υπολογισμό των ποσοτήτων που εμφανίζονται στη δράση όπως τα αντίστροφα πεδία πλαισίου και η μετρική. Η αντίστροφη πλειομελής βάση ορίζεται από:

$$
\hat{e}_{\hat{a}}^{\hat{\mu}} = \begin{bmatrix} \delta^{-\gamma} e_a^\mu & -2\kappa\delta^{-\gamma} e_a^\mu V_\mu^M \\ 0 & E_A^M \end{bmatrix} \qquad (1.10)
$$

για τις μετρικές έχουμε:

$$
\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{bmatrix} \delta^{2\gamma} g_{\mu\nu} + 4\kappa^2 V_\mu^M V_{\nu M} & 2\kappa V_{\mu N} \\ 2\kappa V_{\nu M} & G_{MN} \end{bmatrix} \qquad (1.11)
$$

$$
\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{bmatrix} \delta^{-2\gamma} g^{\mu\nu} & 2\kappa V^{\mu N} \\ 2\kappa V^{\nu M} & G^{MN} + 4\kappa^2\delta^{-2\gamma} V^{\mu M} V_\mu^N \end{bmatrix} \qquad (1.12)
$$

Για τη μετρική του εσωτερικού χώρου ισχύει: $G_{MN} = E_M^A E_N^B \delta_{AB}$ ενώ για τις φερμιονικές συγγενείς συνδέσεις έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\omega}_{c,ab} = \delta^{-\gamma}[\omega_{c,ab} + \gamma(\eta_{ca} e_b^\mu - \eta_{cb} e_a^\mu)\partial_\mu \delta] \qquad (1.13)\\
&\hat{\omega}_{c,aB} = \kappa\delta^{-2\gamma} e_c^\mu e_a^\nu V_{\mu\nu}^M E_{MB}\\
&\hat{\omega}_{c,AB} = \frac{1}{2}\delta^\gamma e_c^\mu (E_A^N \partial_\mu E_{NB} - E_B^N \partial_\mu E_{NA})\\
&\hat{\omega}_{C,ab} = -\kappa\delta^{-2\gamma} e_a^\mu e_b^\nu V_{\mu\nu}^M E_{MC}\\
&\hat{\omega}_{C,aB} = -\frac{1}{2}\delta^{-\gamma} E_B^M e_a^\mu \partial_\mu E_{MC}\\
&\hat{\omega}_{C,AB} = 0
\end{aligned}
$$

όπου ορίσαμε: $V_{\mu\nu}^M = \partial_\mu V_\nu^M - \partial_\nu V_\mu^M$. Η αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδος είναι προφανής στις παραπάνω εκφράσεις. Οι αναλυτικοί υπολογισμοί βρίσκονται στο παράρτημα. Από την έκφραση για τη βαθμωτή καμπυλότητα, βλέπουμε πως το R έχει έναν παράγοντα $\delta^{\gamma(D-2)+1}$. Συνεπώς μπορούμε να φέρουμε την ελαττωμένη δράση στη γνωστή μορφή Einstein-Hilbert επιλέγοντας:

$\gamma = -\frac{1}{D-2}$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω βρίσκουμε τελικά:

$$S_{EH} = \int d^D x e[\frac{1}{4\kappa^2}R - \frac{1}{4}\delta^{2/(D-2)}V^M_{\mu\nu}V^{N\mu\nu}G_{MN} + \frac{1}{16\kappa^2}\partial_\mu G_{MN}\partial^\mu G^{MN} - \frac{1}{4\kappa^2(D-2)}\partial_\mu ln\delta\partial^\mu ln\delta] \quad (1.14)$$

όπου η ολοκλήρωση στον εσωτερικό χώρο δίνει απλώς τον όγκο αυτού όπου και αναιρείται. Η ελαττωμένη αυτή δράση περιέχει μόνον άμαζα σωμάτια, ένα βαρυτόνιο, d Αβελιανά πεδία βαθμίδος και $\frac{1}{2}d(d+1)$ βαθμωτά πεδία. Επίσης, εάν κανείς αναπτύξει την εσωτερική μετρική περί το ελάχιστο της, $G_{MN} = g\delta_{MN}$ βλέπει πως οι κινητικοί όροι για τα βαθμωτά και διανυσματικά πεδία έχουν το σωστό πρόσημο. Η θεωρία αυτή είναι συμμετρική σε γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, τοπικούς Lorentz μετασχηματισμούς και μετασχηματισμούς βαθμίδος $U(1)^d$. Υπάρχει επίσης συμμετρία στους γενικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς της ομάδας $SL(E,R)$ που αντιστοιχούν σε :

$G^{'}_{MN} = T^K_M T^\Lambda_N G_{K\Lambda}$

$V^{'M}_\mu = T^{-1M}_N V^N_\mu$

όπου T είναι ένας πραγματικός πίνακας $d \times d$ διαστάσεων.

1.2 Γενικευμένη Διαστατική Ελάττωση σε καμπύλο d-διάστατο τόρο

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να γενικευθούν επιτρέποντας στα πεδία να έχουν εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες. Η γενίκευση αυτή πρέπει να γίνει με κατάλληλο τρόπο έτσι ώστε αφενός να μπορεί να οριστεί ένα όριο στο οποίο τα πεδία χάνουν την εξάρτηση αυτή (άρα ανακτώνται τα αποτελέσματα της συνήθους διαστατικής ελάττωσης) αφετέρου δε η συνολική δράση να μην έχει εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες. Φυσικά, από τη στιγμή που η δράση θα είναι ανεξάρτητη των εσωτερικών συντεταγμένων υπονοείται πως υπάρχει κάποια συμμετρία. Απουσία φερμιονίων, η συμμετρία Lorentz δεν έχει μεγάλη σημασία, οπότε η μοναδική συμμετρία την οποία μπορούμε να εκμεταλλευτούμε είναι αυτή σε γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Η διαστατική ελάττωση προσδιορίζεται από την επιλογή της y-εξάρτησης των απειροστών παραμέτρων $\xi^{\hat{\mu}}$. Η επιλογή θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μην περιορίζονται οι γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων σε D διαστάσεις και να είναι η ομάδα Lie των τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδος (την οποία θα αποκαλούμε G) όσο γενικότερη γίνεται. Για 2 διαδοχικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων σε $D+d$ διαστάσεις με παραμέτρους ξ_1,ξ_2 αναχαλώντας το νόμο μετασχηματισμού της πλειομελούς βάσης:

$$\delta_\xi \hat{e}^{\hat{a}}_{\hat{\mu}} = \xi^{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\nu}} \hat{e}^{\hat{a}}_{\hat{\mu}} + \partial_{\hat{\mu}} \xi^{\hat{\nu}} \hat{e}^{\hat{a}}_{\hat{\nu}} \tag{1.15}$$

Μπορεί κανείς να δείξει πως ισχύει:

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] = \delta_{\xi_3} \tag{1.16}$$

$$\xi^{\hat{\mu}}_3(x,y) = \xi^{\hat{\nu}}_1(x,y)\partial_{\hat{\nu}}\xi^{\hat{\mu}}_2(x,y) - 1 \leftrightarrow 2 \tag{1.17}$$

Θεωρούμε την ακόλουθη εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες:

$$\xi^\mu(x,y) = \xi^\mu(x) \tag{1.18}$$

$$\xi^M(x,y) = U^{-1M}_N(y)\xi^N(x) \tag{1.19}$$

Μπορεί κανείς να λάβει το όριο $U^{-1M}_N \to \delta^M_N$ και να ανακτήσει τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Ο μεταθέτης 2 χωροχρονικών μετασχηματισμών δίδεται από το x-ανάλογο της προηγούμενης εξίσωσης ενώ μεταθέτοντας έναν χωροχρονικό μετασχηματισμό ξ^μ_1 και έναν εσωτερικό μετασχηματισμό ξ^M_2 προκύπτει ένας νέος εσωτερικός μετασχηματισμός με παράμετρο:

$$\xi^M_3(x) = \xi^\mu_1(x)\partial_\mu\xi^M_2(x)$$

Το σημαντικότερο όμως είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα για το μεταθέτη 2 εσωτερικών μετασχηματισμών $\xi^M_1(x,y)$,$\xi^N_2(x,y)$:

$$\xi^M_3(x,y) = \xi^N_1(x,y)(\partial_N U^{-1M}_K)\xi^K_2 - 1 \leftrightarrow 2 \Leftrightarrow$$

$$\xi^K_3(x)U^{-1M}_K = \xi^P_1(x)U^{-1N}_P\partial_N U^{-1M}_K\xi^K_2(x) - 1 \leftrightarrow 2 \Leftrightarrow$$

$$\xi^\Lambda_3(x) = \xi^P_1(x)U^\Lambda_M U^{-1N}_P\partial_N U^{-1M}_K\xi^K_2(x) - 1 \leftrightarrow 2 =$$

$$\xi^P_1(x)\xi^K_2(x)(U^\Lambda_M U^{-1N}_P\partial_N U^{-1M}_K - U^\Lambda_M U^{-1N}_K\partial_N U^{-1M}_P) =$$

$$\xi^P_1(x)\xi^K_2(x)(-U^{-1N}_P U^{-1M}_K\partial_N U^\Lambda_M + U^{-1N}_K U^{-1M}_P\partial_N U^\Lambda_M) =$$

$$\xi^P_1(x)\xi^K_2(x)U^{-1M}_K U^{-1N}_P(\partial_M U^\Lambda_N - \partial_N U^\Lambda_M) \Leftrightarrow$$

$$\xi^\Lambda_3(x) = \gamma^\Lambda_{PK}\xi^P_1(x)\xi^K_2(x)$$

όπου ορίσαμε:

$$\gamma^M_{NP} = U^{-1K}_N U^{-1\Lambda}_P(\partial_\Lambda U^M_K - \partial_K U^M_\Lambda) \tag{1.20}$$

Φυσικά οι πίνακες U πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε η εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες να αναιρείται και οι γ^M_{NP} να είναι σταθεροί. Μπορεί κανείς να βρει τέτοιους πίνακες αν θεωρήσουμε τις συντεταγμένες y να είναι οι συντεταγμένες μιας πολλαπλότητας μιας ομάδας Lie με d γεννήτορες. Σε αυτήν την περίπτωση οι γεννήτορες του μετασχηματισμού μπορούν να γραφούν ως:

$$L_M = U_M^{-1N}(y)\partial_N \tag{1.21}$$

ενώ για το μεταθέτη τους θα ισχύει:

$$[L_N, L_P] = \gamma^M_{NP} L_M \tag{1.22}$$

Όμως από το 2ο θεώρημα του Lie, είναι γνωστό πως εάν ισχύει η άνωθεν σχέση για το μεταθέτη, τότε οι σταθερές δομής είναι όντως ανεξάρτητες των συντεταγμένων y και δίδονται από την άνωθεν έκφραση. Αναλυτικός υπολογισμός των πινάκων U δεν είναι απαραίτητος καθώς στους υπολογισμούς υπεισέρχονται οι σταθερές δομής και όχι οι ίδιοι. Στα επόμενα εδάφια ωστόσο θα συζητηθούν οι περιορισμοί των πινάκων αυτών.

Με την επιλογή της άνωθεν εξάρτησης από τις εσωτερικές συντεταγμένες έχουμε εξάγει μια αυθαίρετη d-διάστατη άλγεβρα Lie από την ομάδα των μετασχηματισμών συντεταγμένων σε $D + d$ διαστάσεις. Επιλέγουμε μια αντίστοιχη εξάρτηση για τα πεδία:

$$\begin{aligned} e^a_\mu(x,y) &= e^a_\mu(x) \\ V^M_\mu(x,y) &= U_N^{-1M} V^N_\mu(x) \\ E^A_M(x,y) &= U^N_M E^A_N(x) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Από φυσικής πλευράς οι βαθμοί ελευθερίας είναι οι ίδιοι. Οι νόμοι μετασχηματισμού για τα πεδία γίνονται:

$$\begin{aligned} \delta E^A_M(x) &= \gamma^N_{MP}\xi^P(x) E^A_N(x) \\ \delta E^M_A(x) &= \gamma^M_{NP}\xi^N(x) E^P_A(x) \\ \delta V^M_\mu(x) &= \frac{1}{2\kappa}\partial_\mu \xi^M(x) + \gamma^M_{NP}\xi^N(x) V^P_\mu(x) \\ \delta e^a_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Οπότε τα πεδία V^M_μ είναι πεδία βαθμίδος για την ομάδα G με σταθερές δομής γ^M_{NP}. Όπως θα φανεί στη συνέχεια οι σταθερές αυτές καθορίζουν το δυναμικό και τις μάζες των πεδίων. Η ορίζουσα δ είναι ανεξάρτητη των συντεταγμένων y ωστόσο η ορίζουσα $\hat{e}$ είναι:

$$\hat{e} = U(y)\delta^{\gamma D+1} e$$

όπου $U(y) = detU_N^M(y)$. Ο παράγων αυτός είναι το αναλλοίωτο μέτρο άρα η ολοκλήρωση στον εσωτερικό χώρο δίνει απλώς τον όγκο αυτού. Επιλέγοντας τώρα:

$V_d = \int d^d y U$

ο όγκος αυτός απαλείφεται. Από την αναλλοιώτητα του όγκου του εσωτερικού χώρου μπορούμε να λάβουμε τον εξής περιορισμό.

$$\gamma_{MN}^M = 0 \tag{1.25}$$

Δίνουμε την αναλυτική απόδειξη αυτού στο κεφάλαιο 2. Υπολογίζοντας τώρα τις φερμιονικές συγγενείς συνδέσεις έχουμε:

$$\hat{\omega}_{c,ab} = \delta^{-\gamma}[\omega_{c,ab} + \gamma(\eta_{ca}e_b^\mu - \eta_{cb}e_a^\mu)\partial_\mu ln\delta] \tag{1.26}$$

$$\hat{\omega}_{c,aB} = \kappa\delta^{-2\gamma}e_c^\mu e_a^\nu E_{MB}V_{\mu\nu}^M$$

$$\hat{\omega}_{c,AB} = \frac{1}{2}\delta^{-\gamma}e_c^\mu E_A^N D_\mu E_{NB} - A \Leftrightarrow B$$

$$\hat{\omega}_{C,ab} = -\kappa\delta^{-2\gamma}E_{MC}e_a^\mu e_b^\nu V_{\mu\nu}^M \tag{1.27}$$

$$\hat{\omega}_{C,aB} = -\frac{1}{2}\delta^{-\gamma}E_B^M e_a^\mu D_\mu E_{MC}$$

$$\hat{\omega}_{C,AB} = \frac{1}{2}\gamma_{NP}^M(E_A^N E_B^P E_{MC} + E_A^N E_C^P E_{MB} - E_B^N E_C^P E_{MA})$$

όπου έχουμε ορίσει:

$$V_{\mu\nu}^M = \partial_\mu V_\nu^M - \partial_\nu V_\mu^M - 2\kappa\gamma_{NP}^M V_\mu^M V_\nu^N \tag{1.28}$$

$$D_\mu E_{NB} = \partial_\mu E_{NB} - 2\kappa V_\mu^P \gamma_{NP}^M \tag{1.29}$$

Με βάση αυτά η ελαττωμένη δράση είναι:

$$\begin{aligned} S_{EH} = \int d^D xe[\frac{1}{4\kappa^2}R - \frac{1}{4}\delta^{2/(D-2)}V_{\mu\nu}^M V^{N\mu\nu}G_{MN} + \frac{1}{16\kappa^2}D_\mu G_{MN}D^\mu G^{MN} \\ - \frac{1}{4\kappa^2(D-2)}\partial_\mu ln\delta\partial^\mu ln\delta - \frac{1}{16\kappa^2}\delta^{-2/(D-2)}\gamma_{NP}^M(2\gamma_{MK}^N G^{PK} + \gamma_{\Lambda\Sigma}^K G_{MK}G^{N\Lambda}G^{P\Sigma})] \end{aligned} \tag{1.30}$$

1.3 Η Ομάδα Βαθμίδος

Εκτός από τη μετατροπή των παραγωγων σε συναλλοίωτες και του Αβέλιανού πεδίου σε μη Αβελιανό, η παραπάνω δράση περιέχει και το δυναμικό:

$$V(G) = 2\gamma_{NP}^M\gamma_{MP}^N + \gamma_{NP}^M\gamma_{\Lambda\Sigma}^K G_{MK}G^{N\Lambda}G^{P\Sigma} \tag{1.31}$$

Θεωρώντας τη μετρική $G_{MN} = g\delta_{MN}$ βλέπει κανείς πως το δυναμικό $V \sim g^{-1}$ όπου ο συντελεστής είναι αρνητικός και στο όριο $g \to 0$, $V \to -\infty$. Συνεπώς θα πρέπει να βάλουμε επιπλέον περιορισμούς στην ομάδα G (και στους πίνακες U) προκειμένου το δυναμικό να έχει ομαλή συμπεριφορά. Απαιτούμε το δυναμικό να είναι θετικά ορισμένο και να μηδενίζεται όταν $G_{MN} = \delta_{MN}$. Η απαίτηση αυτή μεταφράζεται στους εξής περιορισμούς για τις σταθερές δομής:

$$V(1) = 2\gamma^M_{NP}\gamma^N_{MP} + \gamma^M_{NP}\gamma^M_{NP} = 0 \tag{1.32}$$

$$\partial V/\partial G^{MN}(1) = 2\gamma^P_{KM}\gamma^K_{PN} + 2\gamma^K_{PM}\gamma^K_{PN} - \gamma^M_{PK}\gamma^N_{PK} = 0 \tag{1.33}$$

$$V(G) \geq 0 \tag{1.34}$$

Η συνθήκη (1.33) ισοδυναμεί με την απαίτηση: $R_{MN} = 0$, όταν $V^M_\mu = 0, e^a_\mu = \delta^a_\mu, E^M_A = \delta^A_M$. Για το λόγο αυτό τις ομάδες αυτές τις όνομάζουμε επίπεδες. Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε ομάδες με κατάλληλους πίνακες U οι οποίοι θα ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις είναι να κάνουμε πρώτα μια συνήθη διαστατική ελάττωση σε $D+1$ διαστάσεις και έπειτα να κάνουμε μια γενικευμένη διαστατική ελάττωση σε D διαστάσεις. Θεωρούμε τότε τους πίνακες U να είναι της μορφής:

$$U^M_N(y) = (exp(My^1))^M_N \tag{1.35}$$

όπου ο πίνακας M είναι άιχνος πίνακας διαστάσεων $d \times d$ του οποίου η πρώτη στήλη και γραμμή είναι 0. Οι σταθερές δομής σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\gamma^M_{NP} = M^M_N\delta^1_P - M^M_P\delta^1_N \tag{1.36}$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το εξής: εφόσον ο πίνακας M έχει 0 στην πρώτη στήλη και γραμμή, εύκολα μπορεί να δει κανείς πως και ο M^n θα έχει την ιδιότητα αυτή. Συνεπώς:

$$U^1_N = (I + y^1M + \tfrac{1}{2}(y^1M)^2 + ...)^1_N = I^1_N = \delta^1_N$$

Οπότε έχει κανείς μια άλγεβρα με τις εξής μεταθετικές σχέσεις:

$$[L_1, L_P] = -M^M_P L_M \tag{1.37}$$

$$[L_N, L_P] = 0, N, P \neq 1 \tag{1.38}$$

Η (1.32) γράφεται ως:

$$TrM(M + M^\top) = 0 \tag{1.39}$$

Οπότε επιλέγουμε τον πίνακα M ως αντισυμμετρικό. Με αυτήν την επιλογή, η συνθήκη (1.33) ικανοποιείται αυτόματα. Μένει να αποδείξουμε τη θετικότητα του δυναμικού. Αρχικά εκφράζουμε το δυναμικό συναρτήσει του πίνακα M:

$$V(G) = 2\gamma^M_{NP}\gamma^N_{MK}G^{PK} + \gamma^M_{K\Lambda}\gamma^N_{P\Sigma}G_{MN}G^{KP}G^{\Lambda\Sigma} =$$

$$(M_N^M\delta_P^1 - M_P^M\delta_N^1)(M_M^N\delta_K^1 - M_K^N\delta_M^1)G^{PK} + (M_K^M\delta_\Lambda^1 - M_\Lambda^M\delta_K^1)(M_P^N\delta_\Sigma^1 - M_\Sigma^N\delta_P^1)G_{MN}G^{PK}G^{\Lambda\Sigma} =$$

$$2M_N^M M_M^N G^{11} + 2M_K^M M_P^N G_{MN}G^{KP}G^{11} - 2M_K^M M_P^N G_{MN}G^{1K}G^{1P} =$$

$$2(M^2)_M^M G^{11} + 2G^{11}(G^{-1}M)^{PM}(MG)_{PM} - 2M_K^M M_P^N G_{MN}G^{1K}G^{1P}$$

$$2G^{11}Tr(M^1) - 2G^{11}(MG^{-1})^{MP}(GM)_{PM} - 2M_K^M M_P^N G_{MN}G^{1K}G^{1P} =$$

$$2G^{11}Tr(M^2 - MGMG^{-1}) - 2M_K^M M_P^N G_{MN}G^{1K}G^{1P} \rightarrow$$

$$V(G) = 2G^{11}Tr(M^2 - MGMG^{-1}) - 2M_K^M M_P^N G_{MN}G^{1K}G^{1P} \tag{1.40}$$

Κάτω από μετασχηματισμούς ξ^M έχει κανείς:

$$G^{1M} = M_N^M \xi^N G^{11} - M_N^M \xi^1 G^{1N}$$

Επειδή στο ασθενές όριο $G^{11} \sim 1$, τα πεδία G^{1N} έχουν σταθερούς όρους στις μεταβολές τους, οπότε κάνοντας έναν μετασχηματισμό βαθμίδος μπορούμε να θέσουμε: $G^{1N} = 0$. Σε αυτή τη βαθμίδα ο δεύτερος όρος του δυναμικού μηδενίζεται. Θεωρούμε τώρα το συμμετρικό πίνακα:

$$Y_{AB} = E_{MA}M_N^M E_B^N + E_{MB}M_N^M E_A^N$$

Υπολογίζοντας το τετράγωνο αυτού έχουμε:

$$Y_{AB}^2 = Y_{AC}Y_{DB}\delta^{CD} = (E_{MA}E_C^N M_N^M + E_{MC}E_A^N M_N^M)(E_{PD}E_B^K M_K^P + E_{PB}E_D^K M_K^P)\delta^{CD} =$$

$$E_{MA}E_B^K M_N^M M_K^P \delta_P^N + E_{MA}E_{PB}M_N^M M_K^P G^{NK} + E_A^N E_B^K M_N^M M_K^P G_{MP} E_A^N E_{PB} M_N^M M_K^P \delta_M^K =$$

$$2E_{MA}E_B^K M_K^{2M} + 2E_{MA}E_{PB}M_N^M M_K^P G^{NK}$$

Παίρνοντας το ίχνος αυτού:

$$Tr(Y^2) = Y_{AB}^2\delta^{AB} = 2Tr(M^2 - MGMG^{-1})$$

Όμως αφού $Tr(Y^2) \geq 0 \rightarrow 2Tr(M^2 - MGMG^{-1}) \geq 0$

Άρα το δυναμικό $V(G)$ είναι όντως θετικά ορισμένο. Μία κατηγορία καταλλήλων ομάδων δίδεται από την (54) όπου οι πίνακες M είναι πραγματικοί και αντισυμμετρικοί, με 0 στην πρώτη γραμμή και στήλη. Η γενικότερη κατηγορία πινάκων δεν είναι γνωστή αλλά μια περιγραφή αυτής μπορεί να γίνει ως εξής: θεωρούμε αρχικά τους δείκτες $M, N...$ να είναι 2 ειδών, $M, \bar{M}$, με $1 \leq \bar{M} \leq n$ και $n \leq M \leq d$. Αν τώρα πάρει κανείς n τω πλήθος πραγματικούς αντισυμμετρικούς πίνακες $M_{\bar{M}}$ με $d-n$ γραμμές και στήλες έτσι ώστε:

$$[L_{\bar{N}}, L_P] = -(M_{\bar{N}})_P^M L_M$$

$$[L_N, L_P] = [L_{\bar{N}}, L_{\bar{P}}] = 0$$

μπορεί να δειχθεί πως ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις, ενώ η ταυτότητα Jacobi απαιτεί:

$$[M_{\bar{N}}, M_{\bar{P}}] = 0$$

1.4 Υπολογισμός των μαζών

Σε αυτό το εδάφιο θα θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω λοιπόν d περιττός και η ομάδα G περιγράφεται από έναν απλό πίνακα M τάξης $d-1$. Ως ευκολία στο συμβολισμό θα θεωρήσουμε τους εσωτερικούς δείκτες να παίρνουν τιμές $M = 2, 3...d$. Κάνοντας έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό (ο οποίος δεν αποτελεί περιορισμό στη θεωρία) μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα M στη μορφή:

$$M_N^M = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & 0 & ... & 0 \\ -m_1 & 0 & m_2 & ... & 0 \\ . & -m_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & m_{d-1}/2 \\ 0 & 0 & ... & -m_{d-1}/2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

Δηλαδή τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα είναι τα M_3^2, M_2^3 κλπ. Η υπόθεση για την τάξη του πίνακα ισοδυναμεί με την απαίτηση οι παράμετροι m_N να είναι μη μηδενικές. Εργαζόμαστε στην βαθμίδα του προηγούμενου εδαφίου:

$$G^{1M} = G_{1M} = 0 \tag{1.42}$$

Από τον ορισμό του πεδίου βαθμίδος $V_{\mu\nu}^M$ έχουμε:

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{1.43}$$

$$V_{\mu\nu}^M = D_\mu V_\nu^M - D_\nu V_\mu^M \tag{1.44}$$

όπου:

$$D_\mu V_\nu^M = \partial_\mu V_\nu^M + 2\kappa V_\mu M_N^M V_\nu^N \tag{1.45}$$

είναι η συναλλοίωτη παράγωγος για ηλεκτρικά φορτισμένα πεδία. Αν πάρουμε το γραμμικό συνδυασμό $V_\mu^2 + iV_\mu^3$ βλέπουμε ότι:

$$D_\mu(V_\nu^2+iV_\nu^3) = \partial_\mu(V_\nu^2+iV_\nu^3)+2i\kappa m_1 V_\mu(V_\nu^2+iV_\nu^3) = \partial_\mu(V_\nu^2+iV_\nu^3)+iKV_\mu(V_\nu^2+iV_\nu^3)$$

Δηλαδή το πεδίο $V_\mu^2 + iV_\mu^3$ είναι ένα μιγαδικό διανυσματικό πεδίο με ηλεκτρικό φορτίο $K = 2\kappa m_1$. Έχουμε ακόμη τις εξής συναλλοίωτες παραγώγους:

$$D_\mu G_{11} = \partial_\mu G_{11} \tag{1.46}$$

$$D_\mu G_{1M} = 2\kappa M_K^N V_\mu^K G_{NM} \tag{1.47}$$

$$D_\mu G_{MN} = \partial_\mu G_{MN} - 2\kappa V_\mu (M_M^K G_{KN} + M_N^K G_{KM}) \tag{1.48}$$

Από την εξίσωση (66) βλέπουμε πως ο κινητικός όρος των βαθμωτών πεδίων $g^{\mu\nu} D_\mu G_{MN} D_\nu G^{MN}$ περιέχει τον όρο μάζας για τα πεδία βαθμίδος:

$$L_{VM} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{MN} M_K^M M_\Lambda^N V_\mu^K V_\nu^\Lambda \tag{1.49}$$

Δηλαδή το πεδίο $V_\mu^2 + iV_\mu^3$ έχει μάζα m_1 κ.ο.κ. Η σχέση μάζας-φορτίου είναι:

$\mathbf{M} = \frac{1}{2\kappa}\mathbf{K}$

Για τις μάζες των βαθμωτών πεδίων είναι βολικό να αφαιρέσουμε την ορίζουσα από τον πίνακα G_{MN} ορίζοντας:

$$\bar{G}_{MN} = G_{MN} G^{-1/(d-1)} \tag{1.50}$$

Τότε από την εξίσωση (49) έχουμε τον πλήρη κινητικό όρο για τα βαθμωτά πεδία:

$$L_{kin} = -\frac{1}{2} e(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{8\kappa^2} \partial_\mu \bar{G}_{MN} \partial^\mu \bar{G}^{MN}) \tag{1.51}$$

όπου ορίσαμε

$\phi_1 = \frac{1}{c_1} lnG$

$\phi_2 = \frac{1}{c_2} lnGG_{11}$

$c_1 = \sqrt{8(D-2)}\kappa$

$c_2 = \sqrt{8}(d-1)\kappa$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (49),(59),(60) και (69)για το δυναμικό βρίσκουμε:

$$L_{int} = -\frac{1}{k\kappa^2} e \exp(\frac{D-3}{D-2} c_1 \phi_1 - c_2 \phi_2) Tr(M^2 - M\bar{G}M\bar{G}^{-1}) \tag{1.52}$$

Για να δει κανείς τις μάζες των βαθμωτών αρκεί απλώς να θέσει $\bar{G} = \exp(2\kappa S)$ όπου S είναι ένας πραγματικός άιχνος συμμετρικός πίνακας και να αναπτύξει σε δυνάμεις αυτού. Εάν το κάνει κανείς αυτό βρίσκει πως εκτός των ϕ_1, ϕ_2 υπάρχουν επιπλέον $\frac{1}{2}(d-3)$ βαθμωτά πεδία ενώ τα υπόλοιπα είναι φορτισμένα και έμμαζα εάν όλα τα m_N είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

1.5 Διαστατική Ελάττωση Πεδίων Ύλης

Σε αυτό το εδάφιο θα μελετήσουμε τη διαστατική ελάττωση πεδίων τα οποία εμφανίζονται συχνά σε θεωρίες υπερβαρύτητας, συγκεκριμένα του βαθμωτού πεδίου (0-μορφή), πεδίων Yang-Mills (1-μορφή) καθώς και αντισυμμετρικού τανυστικού πεδίου δευτέρας τάξης (2-μορφή).

1.5.1 Το Βαθμωτό Πεδίο

Στη 10-διάστατη θεωρία υπερβαρύτητας υπάρχει ένα βαθμωτό πεδίο με κινητικό όρο:

$$S_\Phi = \tfrac{1}{2}\int d^Dx \int \tfrac{d^dy}{V_d}\hat{e}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\partial_{\hat{\mu}}\Phi\partial_{\hat{\nu}}\Phi$$

Το Φ όμως δεν έχει εσωτερικούς δείκτες, οπότε πρέπει να το εκλάβουμε ως απλέτα της ομάδας G. Θέτοντας λοιπόν $\Phi(x,y) = \Phi(x)$ η ελαττωμένη δράση είναι:

$$S_\Phi = \tfrac{1}{2}\int d^Dx e g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$$

Όπως βλέπουμε το πεδίο Φ δεν έχει όρο μάζας μετά την ελάττωση και όπως φαίνεται δεν μπορεί να αποκτήσει με τη γενικευμένη διαστατική ελάττωση που μελετούμε.

1.5.2 Πεδίο Yang-Mills

Τα πεδία Yang-Mills στη γενικότερη περίπτωση είναι πεδία βαθμίδος της $SU(N)$ ομάδος και κεντρικής σημασίας στη σύγχρονη φυσική καθώς αποτελούν τη βάση για τις θεμελιώδεις δυνάμεις στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου. Τέτοια πεδία εμφανίζονται επίσης στις θεωρίες υπερβαρύτητας εξ ου και η μελέτη των συνεπειών της διαστατικής ελάττωσης. Δεδομένης μιας ομάδας H με σταθερές δομής c^I_{JK} και πεδία βαθμίδος $\hat{A}^I_{\hat{\mu}}$ τα πεδία Yang-Mills δίδονται από την:

$$\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}}\hat{A}^I_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{A}^I_{\hat{\mu}} + g c^I_{JK}\hat{A}^J_{\hat{\mu}}\hat{A}^K_{\hat{\nu}} \tag{1.53}$$

ενώ η δράση είναι:

$$S_{YM} = -\frac{1}{4}\int d^Dx \int \frac{d^dy}{V_d}\hat{e}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\kappa}}\hat{g}^{\hat{\nu}\hat{\lambda}}\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{F}^I_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}} \tag{1.54}$$

όπου υπονοείται άθροιση στους δείκτες I. Πέραν των γενικών μετασχηματισμών συντεταγμένων, η θεωρία αυτή είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς βαθμίδος:

$$\delta\hat{A}^I_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}}\Lambda^I - g c^I_{JK}\Lambda^J\hat{A}^K_{\hat{\mu}} \tag{1.55}$$

Με βάση τους κανόνες για την y-εξάρτηση, θα έχουμε για τα δυναμικά βαθμίδος:

$$\hat{A}^I_\mu(x,y) = A^I_\mu(x) \tag{1.56}$$

$$\hat{A}^I_M(x,y) = U^N_M A^I_N(x) \tag{1.57}$$

Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς, το A^I_μ δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ξ^M, συνεπώς ορίζουμε το ελαττωμένο δυναμικό ως:

$$a^I_\mu(x) = A^I_\mu(x) - 2\kappa V^M_\mu A^I_M \tag{1.58}$$

Για τη διαστατική ελάττωση υπολογίζουμε τις διάφορες συνιστώσες του $\hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ στον εφαπτόμενο χώρο.

$$\hat{F}^I_{ab} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_a \hat{e}^{\hat{\nu}}_b \hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}^\mu_a \hat{e}^\nu_b \hat{F}_{\mu\nu} + \hat{e}^M_a \hat{e}^\nu_b \hat{F}_{M\nu} + \hat{e}^N_a \hat{e}^\nu_b \hat{F}_{\mu N} + \hat{e}^M_a \hat{e}^N_b \hat{F}_{MN} =$$

$$(\delta^{-\gamma} e^\mu_a)(\delta^{-\gamma} e^\nu_b)(\partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\nu + g c^I_{JK} A^J_\mu A^K_\nu)$$

$$+ (-2\kappa\delta^{-\gamma} V^P_\mu U^{-1M}_P e^\mu_a)(\delta^{-\gamma} e^\nu_b)(-\partial_\nu A^I_\Lambda U^\Lambda_M + g c^I_{JK} A^J_\Lambda U^\Lambda_M A^K_\nu)$$

$$+ (\delta^{-\gamma} e^\mu_a)(-2\kappa\delta^{-\gamma} V^P_\nu U^{-1N}_P e^\nu_b)(\partial_\mu A^I_\Lambda U^\Lambda_N + g c^I_{JK} A^J_\mu A^J_\Lambda U^\Lambda_N)$$

$$+(-2\kappa\delta^{-\gamma} V^P_\mu U^{-1M}_P e^\mu_a)(-2\kappa\delta^{-\gamma} V^P_\nu U^{-1N}_P e^\nu_b)(\partial_M U^\Lambda_N A^I_\Lambda - \partial_N U^\Lambda_M A^I_\Lambda + g c^I_{JK} A^J_\Lambda A^K_\Sigma U^\Lambda_M U^\Sigma_N) =$$

$$\delta^{-2\gamma} e^\mu_a e^\nu_b (\partial_\mu a^I_\nu - \partial_\nu a^I_\mu + g c^I_{JK} a^J_\mu a^K_\nu + 2\kappa A^I_M V^M_{\mu\nu}) = \delta^{-2\gamma} e^\mu_a e^\nu_b (F^I_{\mu\nu} + 2\kappa A^I_M V^M_{\mu\nu})$$

$$\hat{F}^I_{ab} = \delta^{-2\gamma} e^\mu_a e^\nu_b (F^I_{\mu\nu} + 2\kappa A^I_M V^M_{\mu\nu}) \tag{1.59}$$

$$F^I_{\mu\nu} = \partial_\mu a^I_\nu - \partial_\nu a^I_\mu + g c^I_{JK} a^J_\mu a^K_\nu \tag{1.60}$$

Περνώντας τώρα στον όρο $\hat{F}^I_{aB}$ έχουμε:

$$\hat{F}^I_{aB} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_a \hat{e}^{\hat{\nu}}_B \hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}^\mu_a \hat{e}^N_B \hat{F}^I_{\mu N} + \hat{e}^M_a \hat{e}^N_B \hat{F}^I_{MN} = (\delta^{-\gamma} e^\mu_a E^\Lambda_B U^{-1N}_\Lambda)(\partial_\mu A^I_P U^P_N + g c^I_{JK} A^J_\mu A^K_P U^P_N)$$

$$- 2\kappa\delta^{-\gamma} e^\mu_a V^P_\mu U^{-1M}_P E^\Sigma_B U^{-1N}_\Sigma (\partial_M U^\Lambda_N A^I_\Lambda - \partial_N U^\Lambda_M A^I_\Lambda + g c^I_{JK} A^J_\Lambda A^K_\Sigma U^\Lambda_M U^\Sigma_N) =$$

$$\delta^{-\gamma} e^\mu_a e^N_B D_\mu A^I_N$$

$$\hat{F}^I_{aB} = \delta^{-\gamma} e^\mu_a e^N_B D_\mu A^I_N \tag{1.61}$$

$$D_\mu A^I_N = \partial_\mu A^I_N + g c^I_{JK} a^J_\mu A^K_N - 2\kappa A^I_M \gamma^M_{NP} V^P_\mu \tag{1.62}$$

όπου η παράγωγος $D_\mu A^I_M$ είναι συναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της ομάδος $G \times H$

Για τον τελευταίο όρο $\hat{F}^I_{AB}$:

$$\hat{F}^I_{AB} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_A \hat{e}^{\hat{\nu}}_B \hat{F}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}^M_A \hat{e}^N_B \hat{F}^I_{MN} = E^P_A E^K_B U^{-1M}_P U^{-1N}_K (\partial_M U^\Lambda_N A^I_\Lambda - \partial_N U^\Lambda_M A^I_\Lambda + g c^I_{JK} A^J_\Lambda A^K_\Sigma U^\Lambda_M U^\Sigma_N) =$$

$$- E^P_A E^N_B (\gamma^M_{PK} A^I_M - g c^I_{JK} A^J_P A^K_N)$$

$$\hat{F}^I_{AB} = -E^P_A E^N_B (\gamma^M_{PK} A^I_M - g c^I_{JK} A^J_P A^K_N) \tag{1.63}$$

Με βάση αυτά η ελαττωμένη δράση γίνεται:

$$S_{YM} = \int d^D x e[-\frac{1}{4}\delta^{2/(D-2)}(F^I_{\mu\nu}+2\kappa A^I_M V^M_{\mu\nu})(F^{I\mu\nu}+A^I_N V^{N\mu\nu})+\frac{1}{2}G^{MN}g^{\mu\nu}D_\mu A^I_M D_\nu A^I_N$$
$$-\frac{1}{4}\delta^{-2/(D-2)}G^{MP}G^{N\Lambda}(\gamma^\Sigma_{MN}A^I_\Sigma - gc^I_{JK}A^J_M A^K_N)(\gamma^\Sigma_{P\Lambda}A^I_\Sigma - gc^I_{JK}A^J_P A^K_\Lambda)] \quad (1.64)$$

Το δυναμικό στον τελευταίο όρο είναι μη αρνητικό και μηδενίζεται εάν $A^I_M = 0$ (επιλογή η οποία επιτρέπεται από τις εξισώσεις κίνησης).Βλέπουμε πως το δυναμικό περιέχει τον όρο μάζας:

$$\frac{1}{2}M^2A^2 = \frac{1}{4}\gamma^M_{K\Lambda}\gamma^N_{P\Sigma}A^I_M A^I_N \quad (1.65)$$

Αν αναλογιστούμε τη συζήτηση του προηγούμενου εδαφίου, βλέπουμε πως το A^I_1 παραμένει άμαζο, ενώ τα A^I_2, A^I_3 περιγράφουν πεδία με μάζες m_1 κ.ο.κ. Παρατηρούμε επίσης πως οι μάζες του βαρυτικού τμήματος (δηλαδή των πεδίων V^M_μ,G_{MN} δεν επηρεάζονται.

1.5.3 Αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο δευτέρας τάξης

Η 10-διάστατη θεωρία υπερβαρύτητας περιέχει αντισυμμετρικό τανυστικό δυναμικό βαθμίδος $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Το δυναμικό αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως το ανάλογο του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού A_μ για την επιφάνεια που διαγράφει μια χορδή καθώς κινείται. Η θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς βαθμίδος της μορφής:

$$\delta_\Lambda \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}}\Lambda_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\Lambda_{\hat{\mu}} \quad (1.66)$$

ενώ το πεδίο (το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος) δίδεται από την:

$$\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} = \partial_{\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}} + \partial_{\hat{\lambda}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\nu}}\hat{B}_{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \quad (1.67)$$

και ο κινητικός όρος είναι:

$$S = -\frac{1}{12}\int d^D x \int \frac{d^d y}{V_d}\hat{e}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\mu}'}\hat{g}^{\hat{\nu}\hat{\nu}'}\hat{g}^{\hat{\lambda}\hat{\lambda}'}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}}\hat{H}_{\hat{\mu}'\hat{\nu}'\hat{\lambda}'} \quad (1.68)$$

Η διαστατική ελάττωση παράγει μια θεωρία με ένα αντισυμμετρικό πεδίο $B_{\mu\nu}$, d τω πλήθος διανυσματικά πεδία $B_{\mu M}$ και $\frac{1}{2}d(d-1)$ βαθμωτά πεδία B_{MN}. Όπως και πριν θεωρούμε την εξής εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες:

$$\hat{B}_{\mu\nu}(x,y) = B_{\mu\nu}(x) \quad (1.69)$$

$$\hat{B}_{\mu M}(x,y) = U^N_M(y)B_{\mu N}(x) \quad (1.70)$$

$$\hat{B}_{MN}(x,y) = U^K_M(y)U^P_N(y)B_{KP}(x) \quad (1.71)$$

ενώ για τους μετασχηματισμούς βαθμίδος:

$$\hat{\Lambda}_\mu(x,y) = \Lambda_\mu(x) \tag{1.72}$$

$$\hat{\Lambda}_M(x,y) = U_M^N(y)\Lambda_N(x) \tag{1.73}$$

Ορίζοντας τα ελαττωμένα δυναμικά (αναλογικά με την περίπτωση των δυναμικών Yang-Mills) ως:

$$b_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - 2\kappa V_{[\mu}^M b_{\nu]M} - B_{MN}V_\mu^M V_\nu^N \tag{1.74}$$

$$b_{\mu M} = B_{\mu M} - V_\mu^N B_{MN} \tag{1.75}$$

Ο υπολογισμός των ελαττωμένων πεδίων γίνεται όπως και στην περίπτωση των πεδίων Yang-Mills. Παραθέτουμε εδώ τα αποτελέσματα, ενώ ένας αναλυτικός υπολογισμός αυτών όπως και μια μελέτη της άλγεβρας της ομάδας βαθμίδος υπάρχει στο κεφάλαιο 2 όπου εφαρμόζουμε τη γενικευμένη διαστατική ελάττωση στη δράση της ετεροτικής χορδής. Έχουμε λοιπόν:

$$H_{MNP} = B_{MK}\gamma_{NP}^K \tag{1.76}$$

$$H_{\mu MN} = D_\mu B_{MN} + b_{\mu K}\gamma_{MN}^K \tag{1.77}$$

$$H_{\mu\nu M} = D_\mu b_\nu - D_\nu b_\mu + 2\kappa V_{\mu\nu}^N B_{MN} \tag{1.78}$$

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu b_{\nu\lambda} - 2\kappa b_{\mu M} V_{\nu\lambda}^M + cycles \tag{1.79}$$

Οι συναλλοίωτες παράγωγοι είναι:

$$D_\mu B_{MN} = \partial_\mu B_{MN} - 2\kappa V_\mu^P(\gamma_{NP}^K B_{MK} + \gamma_{MP}^K B_{NK}) \tag{1.80}$$

$$D_\mu b_{\nu M} = \partial_\mu b_{\nu M} - 2\kappa\gamma_{MP}^N V_\mu^P b_{\nu N} \tag{1.81}$$

και η ελαττωμένη δράση είναι:

$$\begin{aligned} S = -\int d^D x e[\frac{1}{12}\delta^{4/(D-2)}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta^{2/(D-2)}G^{MN}H_{\mu\nu M}H_N^{\mu\nu} \\ + \frac{1}{4}G^{MP}G^{NK}H_{\mu MN}H_{PK}^\mu - \frac{1}{12}\delta^{-2/(D-2)}G^{MN}G^{PK}G^{\Lambda\Sigma}H_{MP\Lambda}H_{NK\Sigma}] \end{aligned} \tag{1.82}$$

Η ελαττωμένη δράση περιέχει τόσο τους όρους μάζας για βαθμωτά και ανυσματικά πεδία καθώς και κινητικούς όρους και αλληλεπιδράσεις. Οι μάζες των πεδίων μπορούν να υπολογιστούν με τρόπο ανάλογο του εδαφίου 1.4. Θα πρέπει να σχολιάσουμε στο σημείο αυτό ότι και στα πεδία αυτά αλλά και στα Yang-Mills πεδία εισαγάγαμε την εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες με τρόπο ανάλογο αυτού για τη βαθμωτή καμπυλότητα. Όπως θα φανεί και στην εφαρμογή που ακολουθεί για τα πεδία ύλης υπάρχει μια επιπλέον ελευθερία-μπορούμε δηλαδή να έχουμε εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες χωρίς να εισάγουμε τους πίνακες $U_N^M(y)$.

2 Διαστατική Ελάττωση Scherk-Schwarz της ετεροτικής χορδής

Στο εδάφιο αυτό θα εφαρμόσουμε την τεχνική της μαζικής διαστατικής ελάττωσης που αναπτύξαμε στο προηγούμενο εδάφιο στη δραση του χαμηλοενεργειακού ορίου της ετεροτικής χορδής. Στην περίπτωση αυτή θα επικεντρωθούμε στα επιπλέον πεδία ύλης τα οποία περιέχονται στη θεωρία ενώ θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα για το βαρυτικό κομμάτι της δράσης από πριν. Θα θεωρήσουμε εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες των πεδίων Yang-Mills και Kalb-Ramond και θα εξετάσουμε πως οι συμμετρίες των πεδίων αυτών μεταβάλλονται εξαιτίας αυτής. Ακολουθούμε μια ελαφρώς διαφορετική σύμβαση. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε τον όρο γ=0 ο οποίος αντιστοιχούσε στο μετασχηματισμό Weyl της θεωρίας καθώς και $2\kappa = 1$. Η θεωρία της ετεροτικής χορδής εμπεριέχει το διαστελλόνιο ως πολλαπλασιαστικό παράγοντα $e^{-\Phi}$ οπότε ο μετασχηματισμός Weyl είναι εμφανής. Όπως και στα προηγούμενα θα θεωρήσουμε πρώτα τη συνήθη διαστατική ελάττωση έτσι ώστε να υπάρχει σύγκριση των αποτελεσμάτων, έπειτα θα εξετάσουμε μόνο την εξάρτηση των πεδίων από τις εσωτερικές συντεταγμένες και τέλος θα θεωρήσουμε τη γενικότερη περίπτωση της ελάττωσης σε καμπύλο τόρο. Η δράση της θεωρίας μας είναι η:

$$S = \int d^{10}x\sqrt{-G}e^{-\Phi}[R + \nabla\Phi^2 - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{16} F^I_{\mu\nu}F^{I\mu\nu}] \tag{2.1}$$

όπου:

$$ds^2 = G_{ab}d\tilde{x}^a d\tilde{x}^b \tag{2.2}$$

είναι η string-frame μετρική και

$$F^I = dA^I \tag{2.3}$$

$$H = dB - \frac{1}{2}A^I \wedge F^I \tag{2.4}$$

είναι τα πεδία Yang-Mills και Kalb-Ramond και φ είναι το διαστελλόνιο. Σημειώνουμε εδώ πως τα πεδία αυτά είναι Αβελιανά ενώ στον ορισμό του H υπάρχουν και οι λεγόμενοι όροι Chern-Simons. Η παρουσία αυτών των όρων περιπλέκει τόσο τη διαστατική ελάττωση (καθώς θα έχουν τη δική τους εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες) αλλά και τη συμμετρία βαθμίδος (καθώς όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ένας μετασχηματισμός Yang-Mills δεν επηρρεάζει μόνο το αντίστοιχο πεδίο αλλά και το H).

Για το βαρυτικό κομμάτι της δράσης (στο οποίο εμπεριέχεται το διαστελλόνιο) η συνήθης διαστατική ελάττωση δίνει:

$$S_{EH} = \int d^D x\sqrt{-g}e^{-\phi}[R + (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4}D_\mu G_{MN}D^\mu G^{MN} - \frac{1}{4}G_{MN}V^M_{\mu\nu}V^{N\mu\nu}] \tag{2.5}$$

$$e^{-\phi} = \sqrt{G}e^{-\Phi} \to \Phi(x,y) = \phi(x) + \frac{1}{2}ln|G| \tag{2.6}$$

Για τα υπόλοιπα πεδία, αναλύουμε τους τανυστικούς βαθμούς ελευθερίας ως εξής:

$$A^I = A^I_\mu(x,y)dx^\mu + A^I_M(x,y)dy^M \tag{2.7}$$

$$B = \frac{1}{2}B_{\mu\nu}(x,y)dx^\mu \wedge dx^\nu + B_{\mu M}(x,y)dx^\mu \wedge dy^M + \frac{1}{2}B_{MN}(x,y)dy^M \wedge dy^N \tag{2.8}$$

Όπως και πριν, στη συνήθη διαστατική ελάττωση τα πεδία είναι ανεξάρτητα των εσωτερικών συντεταγμένων, οπότε:

$$A^I_\mu(x,y) = A^I_\mu(x), A^I_M(x,y) = A^I_M(x), B_{\mu\nu}(x,y) = B_{\mu\nu}(x)$$

$$B_{\mu M}(x,y) = B_{\mu M}(x), B_{MN}(x,y) = B_{MN}(x), V^M_\mu(x,y) = V^M_\mu(x)$$

Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα, κάτω από έναν διαφορομορφισμό έχουμε τους εξής μετασχηματισμούς:

$$dy'^M = dy^M - \partial_\mu \omega^M dx^\mu \tag{2.9}$$

$$V'^M = V^M + \partial_\mu \omega^M dx^\mu \tag{2.10}$$

$$dy'^M + V'^M_\mu dx^\mu = dy^M + V^M_\mu dx^\mu \tag{2.11}$$

Ωστόσο, οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας δεν είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για να έχουμε εμφανή συμμετρία βαθμίδος θα εκφράσουμε τους κινητικούς όρους των πεδίων στην εφαπτόμενη βάση την οποία κατασκευάζουμε να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε την ακόλουθη μορφή για τα πεδία πλαισίου:

$$E^A_M = \begin{bmatrix} e^\alpha_\mu & E^A_N V^N_\mu \\ 0 & E^A_M \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$E^M_A = \begin{bmatrix} e^\mu_\alpha & -e^\mu_\alpha V^M_\mu \\ 0 & E^M_A \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

προκειμένου να κατασκευάσουμε την αναλλοίωτη εφαπτόμενη βάση:

$$e^\alpha = e^\alpha_\mu dx^\mu \tag{2.14}$$

$$E^A = E^A_M(dy^M + V^M_\mu dx^\mu) \tag{2.15}$$

Για την ελάττωση των πεδίων θα στηριχτούμε στη βάση των dx^μ, E^A καθώς και στη συμμετρία βαθμίδος της αρχικής θεωρίας. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε τους κινητικούς όρους των πεδίων στον εφαπτόμενο χώρο και έπειτα θα οργανώσουμε τα πεδία αυτά στην αναλλοίωτη βάση ενώ η συμμετρία βαθμίδος θα μας επιτρέψει να ορίσουμε σωστά τους ελαττωμένους βαθμούς ελευθερίας ώστε να καθίσταται σαφής η συμμετρία της ελαττωμένης θεωρίας. Με βάση τα όσα είπαμε προχωρούμε στην ελάττωση των πεδίων Yang-Mills και Kalb-Ramond.

Για το Yang-Mills δυναμικό έχουμε:

$A^I = A^I_\mu dx^\mu + A^I_M dy^M$

και φυσικά για το πεδίο έχουμε:

$$F^I = dA^I = \partial_{[\mu} A^I_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M dx^\mu \wedge dy^M \quad (2.16)$$

Εκφράζοντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό στην ενδιάμεση βάση έχουμε:

$$F^I = \frac{1}{2}(\partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu - \partial_\mu A^I_M V^M_\nu + \partial_\nu A^I_M V^M_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A =$$

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu(A^I_\nu - V^M_\nu A^I_M) - \partial_\nu(A^I_\mu - V^M_\mu A^I_M) + A^I_M(\partial_\mu V^M_\nu - \partial_\nu V^M_\mu)) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$+ \partial_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A =$$

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu a^I_\nu - \partial_\nu a^I_\mu + A^I_M(\partial_\mu V^M_\nu - \partial_\nu V^M_\mu)) dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A =$$

$$\frac{1}{2}(F^I_{\mu\nu} + A^I_M V^M_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A =$$

$$\frac{1}{2} f^I_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A$$

όπου ορίσαμε:

$$a^I_\mu = A^I_\mu - A^I_M V^M_\mu \quad (2.17)$$

$$V^M_{\mu\nu} = \partial_\mu V^M_\nu - \partial_\nu V^M_\mu \quad (2.18)$$

$$f^I_{\mu\nu} = F^I_{\mu\nu} + A^I_M V^M_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

ως το ελαττωμένο δυναμικό και το Kaluza-Klein πεδίο προκειμένου να φέρουμε τον πρώτο όρο στη μορφή ενός Yang-Mills πεδίου. Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς τα δυναμικά a^I_μ είναι αναλλοίωτα κάτω από τους μετασχηματισμούς $y^M \to y^M - \omega^M$. Τελικά έχουμε για τη δράση των πεδίων αυτών:

$$S_{YM} = -\int dx^D [\frac{1}{4}\sqrt{-g} e^{-\phi} f^I_{\mu\nu} f^{I\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\mu A^I_M \nabla^\mu A^I_N G^{MN}] \quad (2.20)$$

Η ελάττωση του Kalb-Ramond πεδίου είναι κάπως πιο περίπλοκη εξαιτίας τόσο της φύσης του ως μια 3-μορφή όσο και της ύπαρξης Chern-Simons όρων στον ορισμό του. Ξεκινούμε υπολογίζοντας τη συνεισφορά αυτών των όρων.

$$A^I \wedge F^I = \frac{1}{2} A^I_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + (\frac{1}{2} A^I_M \hat{F}^I_{\mu\nu} + A^I_{[\mu}\partial_{\nu]} A_M) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy^M$$

$$- A_{[M}\partial_\mu A_{N]} dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N$$

Από την άλλη, για το δυναμικό B έχουμε:

$$dB = \tfrac{1}{2}\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + \partial_{[\mu}B_{\nu]M}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy^M + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B_{MN}dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N$$

οπότε συνολικά για το πεδίο H έχουμε:

$$H = dB - \tfrac{1}{2}A \wedge F =$$

$$\tfrac{1}{2}(\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} - \tfrac{1}{4}A^I_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda})dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

$$+ (\partial_{[\mu}B_{\nu]M} - \tfrac{1}{2}A_M\hat{F}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}A_{[\mu}\partial_{\nu]}A_M)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy^M$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\partial_\mu B_{MN} - A_{[M}\partial_\mu A_{N]})dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N$$

Για την ελάττωση του H ακολουθούμε την εξής πορεία (την οποία θα εφαρμόσουμε και στην περίπτωση όπου υπάρχει εξάρτηση των πεδίων από τις εσωτερικές συντεταγμένες). Ξαναγράφουμε το πεδίο ως εξής:

$$H = \hat{H}_{\mu\nu\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + \hat{H}_{\mu\nu M}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy^M + \hat{H}_{\mu MN}dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N \tag{2.21}$$

όπου οι όροι με αγκύλη από πάνω ταυτίζονται με τους αντίστοιχους όρους της προηγούμενης έκφρασης. Έπειτα ξαναγράφουμε το πεδίο H στην ενδιάμεση βάση χρησιμοποιώντας την άνωθεν έκφραση. Για τον όρο $\hat{H}_{\mu MN}$ έχουμε:

$$H_{\mu MN}dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N = H_{\mu MN}E^M_A E^N_B dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B + 2H_{\mu MN}V^N_\nu E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A$$

$$+ H_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

Για τον όρο $\hat{H}_{\mu\nu M}$ έχουμε:

$$H_{\mu\nu M}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy^M = H_{\mu\nu M}E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A - H_{\mu\nu M}V^M_\lambda dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

Συγκεντρώνοντας τα άνωθεν αποτελέσματα το πεδίο H στην ενδιάμεση βάση εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} H &= (\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \\ &+ (\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu)E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A + \hat{H}_{\mu MN}E^M_A E^M_B dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B \end{aligned} \tag{2.22}$$

Μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά και έχοντας ως γνώμονα τη συμμετρία βαθμίδος να οργανώσουμε κατάλληλα τα νέα πεδία. Για τον όρο $\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu$ ευρίσκουμε:

$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu =$

$\partial_{[\mu}B_{\nu]M} - \frac{1}{2}A^I_M\partial_{[\mu}A^I_{\nu]} + \frac{1}{2}A^I_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M + V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}B_{MN} + \frac{1}{2}A^I_M V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_N - \frac{1}{2}A^I_N V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M$

Χρησιμοποιώντας τις εξής ταυτότητες:

$A^I_M V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_N = A^I_M\partial_{[\mu}(A^I_N V^N_{\nu]}) - A^I_M A^I_N\partial_{[\mu}V^N_{\nu]}$

$A^I_N V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M = \partial_{[\mu}(A^I_N V^N_{\nu]}A^I_M) - A^I_M\partial_{[\mu}(A^I_N V^N_{\nu]})$

$A^I_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M = \partial_{[\mu}(A^I_{\nu]}A^I_M) - A^I_M\partial_{[\mu}A^I_{\nu]}$

$V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}B_{MN} = \partial_{[\mu}(V^N_{\nu]}B_{MN}) - B_{MN}\partial_{[\mu}V^N_{\nu]}$

έχουμε:

$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu =$

$\partial_{[\mu}[B_{\nu]M} + B_{MN}V^N_{\nu]} + \frac{1}{2}(A^I_{\nu]} - A^I_N V^N_{\nu]})A^I_M] - \frac{1}{2}A^I_M[\partial_\mu(A^I_\nu - A^I_N V^I_\nu) - \partial_\nu(A^I_\mu - A^I_N V^I_\mu)]$

$+ \frac{1}{2}(B_{MN} + \frac{1}{2}A^I_M A^I_N)(\partial_\mu V^N_\nu - \partial_\nu V^N_\mu) =$

$\partial_{[\mu}[B_{\nu]M} + B_{MN}V^N_{\nu]} + \frac{1}{2}a^I_{\nu]}A^I_M] - \frac{1}{2}A^I_M(\partial_\mu a^I_\nu - \partial_\nu a^I_\mu) + \frac{1}{2}(B_{MN} + \frac{1}{2}A^I_M A^I_N)V^N_{\mu\nu} =$

$\partial_{[\mu}b_{\nu]M} - \frac{1}{2}A^I_M F^I_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(B_{MN} + \frac{1}{2}A^I_M A^I_N)V^N_{\mu\nu} =$

$\frac{1}{2}(H_{\mu\nu} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}h_{\mu\nu M}$

$$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu = \frac{1}{2}h_{\mu\nu M} = \frac{1}{2}(H_{\mu\nu} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu}) \tag{2.23}$$

όπου ορίσαμε:

$$b_{\mu M} = B_{\mu M} + B_{MN}V^N_\mu + \frac{1}{2}a^I_\mu A^I_M \tag{2.24}$$

$$C_{MN} = B_{MN} + \frac{1}{2}A^I_M A^I_N \tag{2.25}$$

ως το ελαττωμένο δυναμικό με το αντίστοιχο πεδίο βαθμίδος. Περνούμε τώρα στον υπολογισμό του $\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda$. Από την (122):

$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda =$

$\frac{1}{2}\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} - \frac{1}{4}A^I_{[\mu}\hat{F}^I_{\nu\lambda]} - \partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu + \frac{1}{4}A^I_M V^M_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}V^M_\mu A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M + \frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda$

$$+\frac{1}{2}A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]}=$$

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu B_{\nu\lambda}-\frac{1}{2}a^I_\mu\hat{F}^I_{\nu\lambda}-2\partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu+V^M_\mu A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M+\partial_\mu B_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda+A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]})$$

Ο τελευταίος όρος αρχικά ήταν αντισυμμετρικός στους δείκτες M,N όμως αυτό ι-σοδυναμεί με αντισυμμετρία στους δείκτες ν,λ. Θέλουμε το τελικό αποτέλεσμα να είναι πλήρως αντισυμμετρικό αφού η έκφραση αυτή πολλαπλασιάζεται με τη βάση $dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\lambda$. Γνωρίζουμε όμως πως για έναν τανυστή $A_{\mu\nu\lambda}$ ο οποίος είναι αν-τισυμμετρικός στους δείκτες ν,λ το πλήρως αντισυμμετρικό τμήμα του είναι το:

$$A_{[\mu\nu\lambda]}=\frac{1}{3}(A_{\mu\nu\lambda}+A_{\nu\lambda\mu}+A_{\lambda\mu\nu})=\frac{1}{3}(A_{\mu\nu\lambda}+cycles)$$

Οπότε θα γράψουμε την έκφραση μας σε μορφή αντισυμμετρική στους δείκτες ν,λ και εν τέλει θα πάρουμε την κατάλληλη έκφραση με τις κυκλικές μεταθέσεις. Αυτό μας επιτρέπει στις πράξεις να κάνουμε άφοβα μια κυκλική εναλλαγή των δεικτών μ,ν,λ. Χρησιμοποιώντας τις εξής ταυτότητες:

$$\partial_\mu B_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda=\partial_{[\nu}B_{MN}V^M_{\lambda]}V^N_\mu=\partial_{[\nu}(B_{MN}V^N_\mu)V^M_{\lambda]}-B_{MN}V^M_{[\lambda}\partial_{\nu]}V^N_\mu=$$

$$-\partial_{[\nu}(B_{MN}V^N_{\lambda]})V^M_\mu-B_{MN}V^N_\mu\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]}$$

$$2\partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu=\partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu+\partial_\mu B_{[\nu M}V^M_{\lambda]}=\partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu+\partial_\mu(B_{[\nu M}V^M_{\lambda]})-B_{[\nu M}\partial_\mu V^M_{\lambda]}=$$

$$\partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu+\partial_\mu(B_{[\nu M}V^M_{\lambda]})+B_{\mu M}\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]}$$

Το αποτέλεσμα είναι:

$$\hat{H}_{\mu\nu\lambda}-\hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda+\hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda=$$

$$\partial_\mu(B_{\nu\lambda}+V^M_{[\nu}B_{\lambda]M})-\frac{1}{2}a^I_\mu\hat{F}^I_{\nu\lambda}-(B_{\mu M}+B_{MN}V^N_\mu)\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]}-\partial_{[\nu}(B_{\lambda]M}+B_{MN}V^N_{\lambda]})V^M_\mu$$

$$+V^M_\mu A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M+A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τις εξής ταυτότητες για δυναμικά Yang-Mills προκειμένου να φέρουμε σε κατάλληλη μορφή το ελαττωμένο πεδίο H:

$$V^M_\mu A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M=A^I_\mu V^M_{[\lambda}\partial_{\nu]}A^I_M=A^I_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]})-A^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]}$$

$$A^I_M V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]}\partial_\mu A^I_N=-A^I_M V^M_\mu V^N_{[\lambda}\partial_{\nu]}A^I_N=-A^I_N V^N_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]})+A^I_N V^N_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]}$$

Με βάση τα άνωθεν έχουμε:

$$V_\mu^M A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M + A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]} =$$

$$A^I_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]}) - A^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} - A^I_N V^N_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]}) + A^I_N V^N_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} =$$

$$a^I_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]}) - a^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} = a^I_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]}) - \tfrac{1}{2}a^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} - \tfrac{1}{2}a^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]}$$

Ακόμη:

$$-\tfrac{1}{2}a^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} = -\tfrac{1}{2}a^I_{[\lambda}A^I_M\partial_\mu V^M_{\nu]} = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu(a^I_{[\lambda}A^I_M V^M_{\nu]}) + \tfrac{1}{2}\partial_\mu(a^I_{[\lambda}A^I_M)V^M_{\nu]} =$$

$$-\tfrac{1}{2}\partial_\mu(a^I_{[\lambda}A^I_M V^M_{\nu]}) - \tfrac{1}{2}V^M_\mu\partial_{[\nu}(a^I_{\lambda]}A^I_M)$$

Συνολικά λοιπόν έχουμε:

$$V_\mu^M A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M + A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]} =$$

$$a^I_\mu\partial_{[\nu}(A^I_M V^M_{\lambda]}) - \tfrac{1}{2}a^I_\mu A^I_M\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} - \tfrac{1}{2}\partial_\mu(a^I_{[\lambda}A^I_M V^M_{\nu]}) - \tfrac{1}{2}V^M_\mu\partial_{[\nu}(a^I_{\lambda]}A^I_M)$$

Συγκεντρώνοντας τα άνωθεν:

$$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda =$$

$$\tfrac{1}{2}[\partial_\mu(B_{\nu\lambda} + V^M_{[\nu}B_{\lambda]M} - \tfrac{1}{2}V^M_{[\nu}a^I_{\lambda]}A^I_M) - \tfrac{1}{2}a^I_\mu(\partial_\nu(A^I_\lambda - A^I_M V^M_\lambda) - \partial_\lambda(A^I_\nu - A^I_M V^M_\nu))$$

$$-(B_{\mu M} + B_{MN}V^N_\mu + \tfrac{1}{2}a^I_\mu A^I_M)\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} - \partial_{[\nu}(B_{\lambda]M} + B_{MN}V^N_{\lambda]} + \tfrac{1}{2}a^I_{\lambda]}A^I_M)V^M_\mu] =$$

$$\tfrac{1}{2}[\partial_\mu(B_{\nu\lambda} + V^M_{[\nu}b_{\lambda]M} - B_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda - V^M_{[\nu}a^I_{\lambda]}A^I_M) - \tfrac{1}{2}a^I_\mu(\partial_\nu a^I_\lambda - \partial_\lambda a^I_\nu)$$

$$-b_{\mu M}\partial_{[\nu}V^M_{\lambda]} - V^M_\mu\partial_{[\nu}b_{\lambda]M}] =$$

$$\tfrac{1}{6}(\partial_\mu b_{\nu\lambda} - \tfrac{1}{2}a^I_\mu F^I_{\nu\lambda} - \tfrac{1}{2}V^M_\mu H_{\nu\lambda M} - \tfrac{1}{2}b_{\mu M}V^M_{\nu\lambda} + cycl.)$$

Ορίζουμε λοιπόν το ελαττωμένο πεδίο και δυναμικό ως εξής:

$$b_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + V^M_{[\mu}b_{\nu]M} - B_{MN}V^M_\mu V^N_\nu - V^M_{[\mu}a^I_{\nu]}A^I_M \tag{2.26}$$

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu b_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}a^I_\mu F^I_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}V^M_\mu H_{\nu\lambda M} - \frac{1}{2}b_{\mu M}V^M_{\nu\lambda} + cycl. \tag{2.27}$$

Βλέπουμε λοιπόν πως εκτός από τους αρχικούς Chern-Simons όρους έχουμε και νέους οι οποίοι παρήχθησαν από τη διαστατική ελάττωση. Οι όροι αυτοί είναι αρκετά σημαντικοί για την συμμετρία βαθμίδος που χαρακτηρίζει τόσο την αρχική όσο και την ελαττωμένη θεωρία και διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο όταν στα δυναμικά επιτραπεί μια εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες. Το ελαττωμένο πεδίο Kalb-Ramond γράφεται συνολικά:

$$H = \frac{1}{3!}H_{\mu\nu\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + \frac{1}{2}(H_{\mu\nu M} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu})E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu B_{MN} + A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]})E^M_A E^N_B dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B \quad (2.28)$$

Ενώ για την αντίστοιχη δράση έχουμε:

$$S_{KR} = -\int dx^D \sqrt{-g}e^{-\phi}[\frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4}h_{\mu\nu M}h^{\mu\nu}_N G^{MN}$$
$$+ \frac{1}{4}(\partial_\mu B_{MN} + A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]})(\partial^\mu B_{PQ} + A^I_{[P}\partial^\mu A^I_{Q]})G^{MP}G^{NQ}] \quad (2.29)$$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε την τελική έκφραση της ελαττωμένης δράσης και να σχολιάσουμε τις συμμετρίες της:

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

όπου η ελαττωμένη δράση για τη μετρική, το διαστελλόνιο και τη 2-μορφή είναι:

$$S_1 = \int dx^D \sqrt{-g}e^{-\phi}[R + (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}] \quad (2.30)$$

Η δράση για τα βαθμωτά πεδία είναι:

$$S_2 = \int dx^D \sqrt{-g}e^{-\phi}[\frac{1}{4}(\nabla_\mu G_{MN})(\nabla^\mu G^{MN}) - \frac{1}{2}G^{MN}(\nabla_\mu A^I_M)(\nabla^\mu A^I_N)$$
$$- \frac{1}{4}(\partial_\mu B_{MN} + A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]})(\partial^\mu B_{PQ} + A^I_{[P}\partial^\mu A^I_{Q]})G^{MP}G^{NQ}] \quad (2.31)$$

Για την ελάττωση σε έναν d-τόρο, έχουμε από τη μετρική $\frac{1}{2}d(d+1)$ καθότι συμμετρικός τανυστής, από τη 2-μορφή $\frac{1}{2}d(d-1)$ ως αντισυμμετρικός τανυστής και $16d$ από τα Yang-Mills πεδία. Τέλος έχουμε τη δράση των πεδίων βαθμίδος:

$$S_3 = -\frac{1}{4}\int dx^D \sqrt{-g}e^{-\phi}[f^I_{\mu\nu}f^{I\mu\nu} + h_{\mu\nu M}h^{\mu\nu}_N G^{MN} + G_{MN}V^M_{\mu\nu}V^{N\mu\nu}] \quad (2.32)$$

Προκειμένου να μελετήσουμε καλύτερα τις συμμετρίες βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας ορίζουμε την ελαττωμένη πολλαπλέτα βαθμίδας ως:

$$A^\alpha_\mu = \begin{bmatrix} V^M_\mu \\ b_{\mu M} \\ a^I_\mu \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$F^\alpha_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} V^M_{\mu\nu} \\ H_{\mu\nu M} \\ F^I_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

όπου ο δείκτης α παίρνει τιμές $1, 2...2d + 16$. Διατρέχει δηλαδή πρώτα M ανταλλοίωτους δείκτες στον εσωτερικό χώρο,έπειτα M συναλλοίωτους δείκτες στον ίδιο χώρο και τέλος 16 δείκτες για τα πεδία βαθμίδος. Η θεωρία αυτή έχει $U(1)^{2d+16}$ συμμετρία, την οποία κληρονόμησε από την αρχική μέσω της διαστατικής ελάττωσης:$U(1)^{16}$ από τα αρχικά 16 πεδία βαθμίδος, μία $U(1)^d$ η οποία προέρχεται από τους διαφορομορφισμούς στον εσωτερικό χώρο και μία $U(1)^d$ η οποία αποτελεί υπόλοιπο της συμμετρίας του πεδίου B καθώς: $B' = B + d\omega$. Αυτή η συμμετρία βαθμίδος είναι Αβελιανή, καθώς τα πεδία βαθμίδος μετασχηματίζονται ως:

$$\delta A^a(x) = \partial_\mu \omega^a(x)$$

Όταν εισάγουμε παραμέτρους μάζας στα επόμενα εδάφια η συμμετρία αυτή θα γίνει μη-Αβελιανή (όπως έγινε και με τα πεδία Kaluza-Klein).

2.1 Γενικευμένη διαστατική ελάττωση των Yang-Mills και Kalb-Ramond πεδίων σε επίπεδο d-διάστατο τόρο

Έχοντας εξετάσει την κλασσική διαστατική ελάττωση και τις συμμετρίες της ελαττωμένης θεωρίας μπορούμε να περάσουμε στη μαζική ελάττωση. Στο εδάφιο αυτό θα υποθέσουμε εξάρτηση μόνο των πεδίων Yang-Mills και Kalb-Ramond από τις εσωτερικές συντεταγμένες. Αν και ουσιαστικά θεωρούμε τους πίνακες $U^M_N(y)$ να είναι ταυτοτικοί, εντούτοις είναι δυνατόν για τα πεδία ύλης να έχουν εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες κάτι που φαίνεται και από τη μορφή που επιλέγουμε για τα δυναμικά. Φυσικά το βαθμωτό πεδίο σε κάθε περίπτωση υπακούει την εξίσωση (2.6) οπότε και παραμένει άμαζο και ανεξάρτητο των εσωτερικών συντεταγμένων. Εφόσον ο εσωτερικός χώρος παραμένει επίπεδος η ελάττωση της βαθμωτής καμπυλότητας παραμένει ίδια. Προχωρούμε λοιπόν στην ελάττωση των υπολοίπων πεδίων.

Για το πεδίο Yang-Mills επιλέγουμε μια πολύ απλή μορφή:

$$\hat{A}^I_M = A^I_M + m^I_{MN} y^N \tag{2.35}$$

Υπολογίζουμε όπως και πριν το πεδίο:

$$F^I = \partial_{[\mu} A^I_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M dx^\mu \wedge dy^M - m^I_{MN} dy^M \wedge dy^N =$$

$$\tfrac{1}{2}(\partial_\mu a^I_\nu - \partial_\nu a^I_\mu - 2m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu + A^I_M V^M_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$+ (\partial_\mu A^I_M - 2m^I_{MN} V^N_\mu) E^M_A dx^\mu \wedge E^A - m^I_{MN} E^M_A E^N_B E^A \wedge E^B =$$

$$\tfrac{1}{2}(F^I_{\mu\nu} + A^I_M V^M_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu + D_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A - m^I_{MN} E^M_A E^N_B E^A \wedge E^B$$

Όπου ορίσαμε το μη Αβελιανό πεδίο και τη συναλλοίωτη παράγωγο

$$F^I_{\mu\nu} = \partial_\mu a^I_\nu - \partial_\nu a^I_\mu - 2m^I_{MN}V^M_\mu V^N_\nu \tag{2.36}$$

$$D_\mu A^I_M = \partial_\mu A^I_M - 2m^I_{MN}V^N_\mu \tag{2.37}$$

Η σημασία τους θα γίνει φανερή όταν θα μελετήσουμε τις συμμετρίες της ελαττωμένης θεωρίας. Προς το παρόν έχουμε την ελαττωμένη δράση:

$$S_{YM} = -\int d^Dx\sqrt{-g}e^{\phi}[\frac{1}{4}f^I_{\mu\nu}f^{I\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu A^I_M D^\mu A^I_N G^{MN} + m^I_{MN}m^I_{PQ}G^{MP}G^{NQ}] \tag{2.38}$$

Η επιλογή της μορφής του πεδίου H είναι πιο περίπλοκη καθώς από τη μία θα πρέπει να περιέχει την εξάρτηση του πεδίου από τις εσωτερικές συντεταγμένες και από την άλλη να αναιρεί την επιπλέον εξάρτηση την οποία εισάγουν οι Chern-Simons. Αρχικά θεωρούμε την ακόλουθη έκφραση για το δυναμικό B.

$$\hat{B} = B + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + c \tag{2.39}$$

Η εξάρτηση του δυναμικού από τις εσωτερικές συντεταγμένες βρίσκεται εξ ολοκλήρου στις μορφές α,β,γ οι οποίες θα προσδιοριστούν κατάλληλα προκειμένου να εξυπηρετούν τους σκοπούς μας. Υπολογίζουμε τους όρους Chern-Simons:

$A^I \wedge F^I = \frac{1}{2}A^I_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$

$+ (\frac{1}{2}A^I_M\hat{F}^I_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^I_{MN}y^N\hat{F}^I_{\mu\nu} + A^I_{[\mu}\partial_{\nu]}A_M)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \eta^M$

$- (A_\mu m^I_{MN} + A_{[M}\partial_\mu A_{N]} + m^I_{[MP}y^P\partial_\mu A_{N]})dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N$

$- ((A_{[M} + m^I_{MK}y^K))m^I_{NP}dy^M \wedge dy^N \wedge dy^P$

όπου $\hat{F}^I_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A^I_{\nu]}$ Απαιτώντας τώρα το πεδίο H να ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης και να είναι ανεξάρτητο των εσωτερικών συντεταγμένων έχουμε την ακόλουθη συνθήκη:

$\frac{\partial}{\partial y^Q}H_{MNP} = 0$

Όμως από τον ορισμό του H βρίσκουμε: $dH = -\frac{1}{2}F^I \wedge F^I$

Συνεπώς έχουμε τη συνθήκη:

$$m^I_{[MN}m^I_{PQ]} = 0 \to m^I_{MN}m^I_{PQ} + m^I_{MQ}m^I_{NP} + m^I_{MP}m^I_{QN} = 0 \tag{2.40}$$

Με εξαίρεση τον άνωθεν δεσμό οι παράμετροι m^I_{MN} είναι ανεξάρτητοι. Παρατηρούμε επίσης πως ο δεσμός αυτός εμφανίζεται και στον όρο Chern-Simons οπότε ο όρος:

$m^I_{[M|Q}m^I_{NP]}y^Q = 0$. Βλέπουμε πως οι όροι με εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$\frac{1}{2}\hat{F}^I_{\mu\nu}m^I_{MN}y^N dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dy^M - A^I_\mu m^I_{MN}dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N = d(A^I_\mu dx^\mu \wedge m^I_{MN}y^N dy^M)$

$-\partial_\mu A^I_N m^I_{MP}y^P dx^\mu \wedge dy^M \wedge dy^N - A^I_M m^I_{NP}dy^M \wedge dy^N \wedge dy^P = d(A^I_M dy^M \wedge m^I_{NP}y^P dy^N)$

Λαμβάνοντας υπ'όψην το πρόσημο $-\frac{1}{2}$ που υπάρχει στους όρους Chern-Simons βλέπουμε πως πρέπει να επιλέξουμε:

$\alpha = A^I_\mu dx^\mu \wedge m^I_{MN}y^N dy^M$ και $\beta = A^I_M dy^M \wedge m^I_{NP}y^P dy^N$

Όμως περιμένουμε εν γένει το πεδίο H να έχει τη δική του ροή στον εσωτερικό χώρο οπότε διαλέγουμε τη μορφή

$c = \frac{1}{2}\beta_{MNP}y^P$

όπου β_{MNP} είναι σταθερός πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής (ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις κίνησης). Με βαση αυτά η μορφή για την ελάττωση του δυναμικού B είναι:

$$\hat{B}_{\mu M} = B_{\mu M} + \frac{1}{2}m_{MN}y^N A^I_\mu = B_{\mu M} + \frac{1}{2}m_{MN}y^N(a^I_\mu + A^I_P V^P_\mu) \tag{2.41}$$

$$\hat{B}_{MN} = B_{MN} + \beta_{MNP}y^P + A^I_{[M}m^I_{N]P}y^P \tag{2.42}$$

Ενώ η έκφραση για το πεδίο H είναι:

$H = \frac{1}{2}(\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} - \frac{1}{2}A^I_{[\mu}\hat{F}^I_{\nu\lambda]})dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$

$+ (\partial_{[\mu}B_{\nu]M} - \frac{1}{4}A^I_M\hat{F}^I_{\mu\nu} - \frac{1}{2}A^I_\mu\partial_\nu A^I_M)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \eta^M$

$+ (\frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN} + A^I_\mu m^I_{MN} + \frac{1}{2}A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]})dx^\mu \wedge \eta^M \wedge \eta^N$

$+ \frac{1}{2}(\beta_{MNP} + 2A^I_M m^I_{NP})dy^M \wedge dy^N \wedge dy^P$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως πριν:

$H = (\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda - \hat{H}_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$

$+ (\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu)E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A$

$+ (\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu)E^M_A E^N_B dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B + \hat{H}_{MNP}E^M_A E^N_B E^P_C E^A \wedge E^B \wedge E^C$

Για τον όρο $\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu$ έχουμε:

$\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu =$

$\frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN} + A^I_\mu m^I_{MN} + \frac{1}{2}A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]} - \frac{3}{2}\beta_{MNP}V^P_\mu - 3A^I_{[M}m^I_{NP]}V^P_\mu =$

$\frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN} + A^I_\mu m^I_{MN} + \frac{1}{2}A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]} - \frac{3}{2}\beta_{MNP}V^P_\mu - 2A^I_{[M}m^I_{N]P}V^P_\mu - A^I_P m^I_{MN}V^P_\mu =$

$\frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN} - \frac{3}{2}\beta_{MNP}V^P_\mu - A^I_{[M}m^I_{N]P}V^P_\mu + a^I_\mu m^I_{MN} + \frac{1}{2}A^I_{[M}(\partial_\mu A^I_{N]} - 2m^I_{N]P}V^P_\mu) =$

$\frac{1}{2}(D_\mu B_{MN} + A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]}) \rightarrow$

$$\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu = \frac{1}{2}(D_\mu B_{MN} + A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]}) \quad (2.43)$$

$$D_\mu B_{MN} = \partial_\mu B_{MN} + 2a^I_\mu m^I_{MN} - 3\beta_{MNP}V^P_\mu - 2A^I_{[M}m^I_{N]P}V^P_\mu \quad (2.44)$$

Περνούμε τώρα στον όρο: $\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu$

$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu =$

$\partial_{[\mu}B_{\nu]M} - \frac{1}{2}A^I_M\partial_{[\mu}A^I_{\nu]} + \frac{1}{2}A^I_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M + V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}B_{MN} + 2A^I_{[\mu}V^N_{\nu]}m^I_{MN}$

$+ \frac{1}{2}A^I_M V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_N - \frac{1}{2}A^I_N V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M + \frac{3}{2}\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu + 3A^I_{[M}m^I_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu$

Θα επεξεργαστούμε τους όρους οι οποίοι περιέχουν τις m παραμέτρους καθώς ήδη γνωρίζουμε πως να επεξεργαστούμε τους υπόλοιπους όρους από την περίπτωση της Kaluza-Klein διαστατικής ελάττωσης. Έχουμε:

$3A^I_{[M}m^I_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu = A^I_M m^I_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + A^I_P m^I_{MN}V^N_\mu V^P_\nu + A^I_N m^I_{PM}V^N_\mu V^P_\nu =$

$A^I_M m^I_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + 2A^I_{[P}m^I_{M|N]}V^N_\mu V^P_\nu = A^I_M m^I_{NP}V^N_\mu V^P_\nu - 2A^I_P m^I_{MN}V^N_{[\nu}V^P_{\mu]}$

$2A^I_{[\mu}V^N_\nu m^I_{MN} - 2A^I_P m^I_{MN}V^N_{[\nu}V^P_{\mu]} = 2a^I_{[\mu}V^N_{\nu]}m^I_{MN}$

Συγκετρώνοντας τα άνωθεν:

$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu =$

$\frac{1}{2}(\partial_\mu b_{\nu M} - \partial_\nu b_{\mu M} + 3\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu + 4m^I_{MN}a^I_{[\mu}V^N_{\nu]} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu}) =$

$\frac{1}{2}(H_{\mu\nu M} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu})$ όπου ορίσαμε:

$$H_{\mu\nu M} = \partial_\mu b_{\nu M} - \partial_\nu b_{\mu M} + 3\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu + 4m^I_{MN}a^I_{[\mu}V^N_{\nu]} \quad (2.45)$$

Απομένει ο ελαττωμένος Kalb-Ramond όρος:

$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V_\lambda^M + \hat{H}_{\mu MN}V_\nu^M V_\lambda^N - \hat{H}_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P =$

$\frac{1}{2}\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} - \frac{1}{4}A^I_{[\mu}\hat{F}^I_{\nu\lambda]} - \partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V_\mu^M + \frac{1}{4}A^I_M V_\mu^M \hat{F}^I_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}V_\mu^M A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M + \frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN}V_\nu^M V_\lambda^N$

$+ A^I_\mu m^I_{MN}V_\nu^M V_\lambda^N + \frac{1}{2}A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]} - \frac{1}{2}\beta_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P - A^I_{[M}m^I_{NP]}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P$

Οι m-όροι:

$A^I_{[\mu}m^I_{MN}V_\nu^M V^N_{\lambda]} - A^I_{[M}m^I_{NP]}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P = A^I_{[\mu}m^I_{MN}V_\nu^M V^N_{\lambda]} - A^I_M m^I_{NP}V^M_{[\mu}V_\nu^N V^P_{\lambda]} =$

$\frac{1}{3}(A^I_\mu m^I_{MN}V_\nu^M V_\lambda^N - A^I_M m^I_{NP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P + cycles) =$

$\frac{1}{3}(a^I_\mu m^I_{MN}V_\nu^M V_\lambda^N + cycles)$

Οι υπόλοιποι όροι ορίζουν όπως πριν τα ελαττωμένα δυναμικά, οπότε έχουμε εν τέλει:

$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V_\lambda^M + \hat{H}_{\mu MN}V_\nu^M V_\lambda^N - \hat{H}_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P = \frac{1}{6}H_{\mu\nu\lambda}$

όπου ορίζουμε:

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu b_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}a^I_\mu F^I_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}V_\mu^M H_{\nu\lambda M} - \frac{1}{2}b_{\mu M}V^M_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}\beta_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P - a^I_\mu m^I_{MN}V_\nu^M V_\lambda^P + cycles \quad (2.46)$$

Η τελική μορφή του Kalb-Ramond πεδίου είναι:

$$H = \frac{1}{6}H_{\mu\nu\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + \frac{1}{2}(H_{\mu\nu M} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu})E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A$$
$$+\frac{1}{2}(D_\mu B_{MN} + A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]})E^M_A E^N_B dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B + \frac{1}{2}(\beta_{MNP} + 2A^I_M m^I_{NP})E^M_A E^N_B E^P_C E^A \wedge E^B \wedge E^C \quad (2.47)$$

ενώ η ελαττωμένη δράση είναι:

$$S_{KR} = -\int d^D x\sqrt{-g}e^{-\phi}[\frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4}G^{MN}h_{\mu\nu M}h^{\mu\nu}_N + \frac{1}{4}G^{MP}G^{NQ}(D_\mu B_{MN} + A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]})(D^\mu B_{PQ} + A^I_{[P}D^\mu A^I_{Q]})] \quad (2.48)$$

Η τελική δράση για την ελαττωμένη θεωρία είναι:

$S = S_1 + S_2 + S_3$

με:

$$S_1 = \int d^D x \sqrt{-g} e^{\phi} [R + (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}] \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} S_2 = - \int d^D x \sqrt{-g} e^{\phi} [W(G, A) - \frac{1}{4} \nabla_\mu G_{MN} \nabla^\mu G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{MN} D_\mu A^I_M D^\mu A^I_N \\ + \frac{1}{4} G^{MP} G^{NK} (D_\mu B_{MN} + A^I_{[M} D_\mu A^I_{N]})(D^\mu B_{PK} + A^I_{[P} D^\mu A^I_{K]})] \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$S_3 = -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} e^{\phi} [f^I_{\mu\nu} f^{I\mu\nu} + h_{\mu\nu M} h^{\mu\nu}_N G^{MN} + G_{MN} V^M_{\mu\nu} V^{N\mu\nu}] \tag{2.51}$$

ως τις δράσεις για τη μετρική, 3-μορφή και διαστελόνιο, τη δράση για τα βαθμωτά πεδία και τη δράση των πεδίων βαθμίδος αντίστοιχα. Εκτός από τους νέους ορισμούς των πεδίων $F^I_{\mu\nu}, H_{\mu\nu M}$ και τις συναλλοίωτες παραγώγους των βαθμωτών πεδίων έχουμε έναν επιπλέον όρο, συγκεκριμένα τον:

$$\begin{aligned} W(A, G) = \frac{3}{4} G^{MN} G^{PK} G^{\Lambda\Sigma} (\beta_{MP\Lambda} + 2A^I_{[M} m^I_{P\Lambda]})(\beta_{NK\Sigma} + 2A^I_{[N} m^I_{K\Sigma]}) \\ + G^{MN} G^{PK} m^I_{MP} m^I_{NK} \end{aligned} \tag{2.52}$$

ο οποίος περιέχει τις μάζες των βαθμωτών πεδίων A^I_M. Θα σχολιάσουμε σε αυτό το σημείο μερικά πράγματα για τη συμμετρία βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας ενώ η αναλυτική μελέτη της θα γίνει παρακάτω, όπου θα υπάρχουν και οι σταθερές γ^M_{NP}. Αρχικά παρατηρούμε απο τον ορισμό του ελαττωμένου πεδίου Yang-Mills πως η ελαττωμένη συμμετρία έχει γίνει μη Αβελιανή. Οι Yang-Mills μετασχηματισμοί είναι της μορφής $\acute{A}^I = A^I + d\Lambda^I$. Προκειμένου να διατηρήσουμε τη μορφή του δυναμικού A αναλλοίωτη, οι μετασχηματισμοί αυτοί πρέπει να είναι το πολύ δευτέρας τάξης ως προς y:

$$\Lambda^I = \lambda^I(x) + \lambda^I_M(x) y^M + \frac{1}{2} \lambda^I_{MN}(x) y^M y^N \tag{2.53}$$

όπου $\lambda^I_{MN} = \lambda^I_{NM}$. Αν τώρα σβήσουμε τα Kaluza-Klein δυναμικά, θα δούμε πως πρέπει οι παράγοντες $\lambda^I_M, \lambda^I_{MN}$ να είναι σταθεροί. Με βάση την (2.35) βλέπουμε ότι ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$$\begin{aligned} \delta A^I_\mu &= \partial_\mu \lambda^I \\ \delta A^I_M &= \lambda^I_M \\ \delta m^I_{MN} &= \lambda^I_{MN} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Από τη σκοπιά της ελαττωμένης θεωρίας ο μετασχηματισμός βαθμίδας έχει 3 αποτελέσματα. Πρώτον, ο όρος λ^I αποτελεί την ελαττωμένη μορφή του αρχικού $U(1)^{16}$

μετασχηματισμού βαθμίδος. Οι όροι λ^I_{MN} οι οποίοι είναι συμμετρικοί εξασφαλίζουν την αντισυμμετρικότητα των όρων m^I_{MN}. Ακόμη και αν αρχικά είχαμε έναν τυχαίο πίνακα M^I_{MN} μπορούμε να τον γράψουμε ως: $M^I_{MN} = M^I_{(MN)} + M^I_{[MN]}$ και να σβήσουμε το συμμετρικό τμήμα μέσω ενός μετασχηματισμού βαθμίδας. Τέλος οι όροι λ^I_M δίνουν καθολικές αξιονικές μετατοπίσεις των πεδίων A^I_M. Οι μετατοπίσεις αυτές σβήνουν όταν κανείς λάβει υπ΄όψηn του την παρουσία των Kaluza-Klein πεδίων. Συγκεκριμένα ο ελαττωμένος Yang-Mills τομέας θα είναι:

$$\acute{F}^I_{\mu\nu} + \acute{A}_M V^M_{\mu\nu} =$$

$$\partial_\mu(A^I_\nu - A^I_M V^M_\nu - \lambda^I_M V^M_\nu) - \mu \leftrightarrow \nu - 2m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu + A^I_M V^M_{\mu\nu} + \lambda^I_M V^M_{\mu\nu} =$$

$$F^I_{\mu\nu} + A^I_M V^M_{\mu\nu}$$

Οπότε στην ελαττωμένη θεωρία δε θα μας απασχολήσουν οι μετασχηματισμοί αυτοί. Οι μετασχηματισμοί αυτοί όμως επιδρούν και στο Kalb-Ramond πεδίο, από τη μία μέσω της παρουσίας των όρων Chern-Simons και από την άλλη εξαιτίας της μορφής του ελαττωμένου δυναμικού. Συγκεκριμένα μπορεί να δειχθεί πως τα ελαττωμένα δυναμικά μετασχηματίζονται ως:

$$\begin{aligned} &\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 2\lambda^I m^I_{MN} \\ &\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} - 2\lambda^I m^I_{MN} V^N_\mu \\ &\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I F^I_{\mu\nu} + \lambda^I m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu \end{aligned} \tag{2.55}$$

Αν δεν είχαμε αγνοήσει τις μετατοπίσεις των πεδίων A_M θα είχαμε έναν επιπλέον $\delta\beta_{MNP} = -2\lambda^I_{[M} m^I_{N]P}$. Όπως μπορεί κανείς να δει ο μετασχηματισμός αυτός εγγυάται πως η ροή του H στον εσωτερικό χώρο είναι αναλλοίωτη. Συνολικά για τα ελαττωμένα δυναμικά βαθμίδος έχουμε:

Kalb-Ramond μετασχηματισμούς:

$$\delta b_{\mu M} = \partial_\mu \kappa_M \tag{2.56}$$

Yang-Mills μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} &\delta a^I_\mu = \partial_\mu \lambda^I \\ &\delta b_{\mu M} = -2\lambda^I m^I_{MN} V^N_\mu \end{aligned} \tag{2.57}$$

Kaluza-Klein μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} &\delta V^M_\mu = \partial_\mu \omega^M \\ &\delta a^I_\mu - 2m^I_{MN} V^M_\mu \omega^N + O(\omega^2) \\ &\delta b_{\mu M} = 2m^I_{MN} a^I_\mu \omega^N + 3\beta_{MNP} V^N_\mu \omega^P + O(\omega^2) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Θεωρούμε τις παραμέτρους κ,λ,ω ως μια ενιαία παράμετρο $\hat{\omega}^a = (\omega^M, \kappa_M, \lambda^I)$ (όπως κάναμε πριν για τα πεδία βαθμίδος) όπου ο δείκτης a παίρνει $2d + 16$ τιμές. Οι αντίστοιχοι γεννήτορες των μετασχηματισμών είναι $T_a = (L_M, X^M, Y^I)$ όπου η σειρά είναι πρώτα Kaluza-Klein, έπειτα Kalb-Ramond και τέλος Yang-Mills. Θεωρούμε πως κλείνουν μια άλγεβρα:

$$[T_a, T_b] = if^c_{ab}T_c$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο μετασχηματισμού για πεδία βαθμίδος:

$$\delta A^a_\mu = f^a_{bc}A^b_\mu\hat{\omega}^c + \partial_\mu\hat{\omega}^a$$

βρίσκουμε ότι οι σταθερές δομής f^a_{bc} είναι:

$$f^I_{MN} = 2m^I_{MN} \tag{2.59}$$

$$f_{MNP} = -3\beta_{MNP}$$

ενώ η άλγεβρα των γεννητόρων είναι:

$$[X^M, X^N] = [Y^I, Y^J] = [X^M, Y^I] = [X^M, L_M] = 0 \tag{2.60}$$

$$[Y^I, L_M] = 2im^I_{MN}X^N$$

$$[L_M, L_N] = -3i\beta_{MNP}X^P + 2im^I_{MN}Y^I$$

Οπότε βλέπουμε πως η συμμετρία βαθμίδος έχει γίνει μη Αβελιανή με τις παραμέτρους μάζας να καθορίζουν τις σταθερές δομής. Προχωρούμε τώρα στη γενικότερη περίπτωση διαστατικής ελάττωσης.

2.2 Γενικευμένη διαστατική ελάττωση σε καμπύλο d-διάστατο τόρο

Για να εισάγουμε εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες θεωρούμε, εν αντιθέσει με το προηγούμενο εδάφιο, πως ο εσωτερικός χώρος είναι τόρος με μη μηδενική τανυστική καμπυλότητα. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τη συζήτηση του εδαφίου 1.3 καθώς υπάρχει η δυνατότητα να είναι επίπεδος κατά Ricci. Η εφαπτόμενη βάση στο χώρο αυτό η^M δίνεται συναρτήσει της ολονομικής βάσης dy^M από τις συναρτήσεις εφέλκυσης U^M_N:

$$\eta^M = U^M_N(y)dy^N \tag{2.61}$$

Τα διανυσματικά πεδία Killing εκφράζονται από την αντίστροφη εφέλκυση:

$$L_M = U^{-1N}_M\partial_N$$

όπως επιτάσσει η εξίσωση (32). Με βάση την ανάλυση που κάναμε περιμένουμε τα πεδία αυτά να σχηματίζουν μια άλγεβρα Lie:

$$[L_N, L_P] = 2\gamma^M_{NP}$$

όπου ο παράγων 2 έχει επιλεγεί για διευκόλυνση κάποιων υπολογισμών. Μπορεί κανείς να δει πως:

$$d\eta^M = -\gamma^M_{NP}\eta^N \wedge \eta^P \tag{2.62}$$

ενώ υπολογίζοντας την αναλυτική έκφραση της 2ης εξωτερικής παραγώγου έχουμε τη συνθήκη:

$$d^2\eta^M = 0 \rightarrow \gamma^M_{N[P}\gamma^N_{K\Lambda]} = 0 \tag{2.63}$$

Εξακολουθεί να ισχύει ο περιορισμός (40). Η απόδειξη αυτού πηγάζει από την αναλλοιώτητα του εσωτερικού όγκου. Η απαίτηση αυτή εκφράζεται ως:

$$\mathcal{L}_{L_M} V_d = 0$$

Όπου $\mathcal{L}_{\xi_M} = di_{\xi_M} + i_{\xi_M} d$ είναι η Lie παράγωγος και $V_d = \frac{1}{d!}\epsilon_{N_1 N_2 \ldots N_d}\eta^{N_1} \wedge \eta^{N_2} \wedge \ldots \wedge \eta^{N_d}$ είναι ο αναλλοίωτος όγκος. Δεδομένου ότι η διαφορική μορφή του όγκου είναι μέγιστης διάστασης για τον εσωτερικό χώρο θα ισχύει $dV_d = 0$. Παίρνοντας το εσωτερίκό γινόμενο:

$$i_{L_M} V_d = \frac{1}{d!}\epsilon_{N_1, N_2 \ldots N_d} L_M \eta^{N_1} \wedge \eta^{N_2} \wedge \ldots \wedge \eta^{N_d} =$$

$$\frac{1}{d!}\epsilon_{N_1 N_2 \ldots N_d}(U^{-1N}_M U^{N_1}_K \partial_N dy^K \wedge \eta^{N_2} \wedge \ldots \wedge \eta^{N_d} - U^{-1N}_M U^{N_2}_K \partial_N dy^K \wedge \eta^{N_1} \wedge \eta^{N_3} \wedge \ldots$$

$$\wedge\, \eta^{N_d} + \ldots) =$$

$$\frac{1}{d!}\epsilon_{N_1 N_2 \ldots N_d}(\delta^{N_1}_M \eta^{N_2} \wedge \ldots \wedge \eta^{N_d} - \delta^{N_2}_M \eta^{N_1} \wedge \eta^{N_3} \wedge \ldots \wedge \eta^{N_d} + \ldots) =$$

$$\frac{1}{d!}(\epsilon_{M N_2 N_3 \ldots N_d}\eta^{N_2} \wedge \ldots \eta^{N_d} - \epsilon_{N_1 M N_3 \ldots N_d}\eta^{N_1} \wedge \eta^{N_3} \wedge \ldots \wedge \eta^{N_d} + \ldots) =$$

$$\frac{1}{d!}(\epsilon_{M N_1 N_2 \ldots N_{d-1}}\eta^{N_1} \wedge \eta^{N_2} \wedge \ldots \eta^{N_{d-1}} - \epsilon_{N_1 M N_2 \ldots N_(d-1)}\eta^{N_1} \wedge \ldots \eta^{N_{d-1}} + \ldots) =$$

$$\frac{1}{(d-1)!}\epsilon_{M N_1 \ldots N_{d-1}}\eta^{N_1} \wedge \eta^{N_2} \wedge \ldots \eta^{N_{d-1}}$$

Παίρνοντας τώρα την εξωτερική παράγωγο:

$$d(i_{L_M} V_d) = \frac{1}{(d-1)!}\epsilon_{M N_1 N_2 \ldots N_{d-1}} d(\eta^{N_1} \wedge \ldots \eta^{N_d}) = -\frac{1}{(d-1)!}\epsilon_{M N_1 \ldots N_{d-1}}\gamma^{N_1}_{KP}\eta^K \wedge \eta^P \wedge \ldots \eta^{N_{d-1}}$$

$$+\, \frac{1}{(d-1)!}\epsilon_{M N_1 N_2 \ldots N_(d-1)}\gamma^{N_2}_{KP}\eta^{N_1} \wedge \eta^K \wedge \eta^P \wedge \ldots \wedge \eta^{N_{d-1}} + \ldots =$$

$\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!}\epsilon_{MNN_1N_2...N_{d-1}}\gamma^N_{N_1N_d}\eta^{N_1}\wedge\eta^{N_2}\wedge...\eta^{N_d}+...=$

$\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!}\epsilon_{MNN_1N_2...N_{d-1}}\gamma^N_{N_1N_d}\epsilon^{N_1...N_d}V_d+...=$

$\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!}\gamma^N_{N_1N_d}(d-2)!\delta^{N_1N_d}_{[MN]}V_d+\frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!}\gamma^N_{N_2N_d}(d-2)!\delta^{N_2N_d}_{[MN]}V_d...=$

$\frac{(-1)^d}{d-1}\gamma^N_{NM}V_d+\frac{(-1)^d}{d-1}\gamma^N_{NM}V_d+...=(-1)^d\gamma^N_{NM}V_d$

Εφόσον $\mathcal{L}_{L_M}V_d=0\rightarrow\gamma^N_{NM}=0$

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί τανυστικών πεδίων οι οποίοι γεννώνται από τα πεδία Killing μπορούν να γραφούν ως: $\delta T=\mathcal{L}_L T$. Για τους απειροστούς μετασχηματισμούς των η^M έχουμε:

$$\acute{\eta}^M=S^M_N\eta^N \tag{2.64}$$

όπου: $S^M_N(\omega)=\delta^M_N-2\gamma^M_{NP}\omega^P$ και ανήκει στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας των ισομετριών. Ορίζουμε τώρα την τετραγωνική ρίζα του άνωθεν πίνακα ως:

$$\Omega^M_N(\omega)=\delta^M_N-\gamma^M_{NP}\omega^P \tag{2.65}$$

Αν επιτρέψουμε στις μορφές ω^M να εξαρτώνται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες τότε μπορούμε να γράψουμε το μετασχηματισμών των η^M:

$$\acute{\eta}^M=S^M_N\eta^N-O^M_N d\omega^N=\eta^M-2\gamma^M_{NP}\omega^P\eta^N-d\omega^M+O(\omega^2) \tag{2.66}$$

Για τη μετρική έχουμε σύμφωνα με την (116):

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+G_{MN}(\eta^M+V^M_\mu dx^\mu)(\eta^N+V^N_\nu dx^\nu)$$

ενώ οι εξισώσεις (176), (177) επιβάλλουν:

$$\acute{V}^M_\mu=S^M_N V^N_\mu+O^M_N\partial_\mu\omega^N \tag{2.67}$$

$$\acute{G}_{MN}=S^{-1K}_M S^{-1P}_N G_{KP} \tag{2.68}$$

Τα αποτελέσματα αυτά θα φανούν χρήσιμα στη μελέτη της συμμετρίας βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας. Για το βαρυτικό κομμάτι της θεωρίας από την εξίσωση (49):

$$S=\int d^Dx\sqrt{-g}e^{-\phi}[R+(\nabla\phi)^2+\frac{1}{4}D_\mu G_{MN}D^\mu G^{MN}-\frac{1}{4}G_{MN}V^M_{\mu\nu}V^{N\mu\nu} \\ -\gamma^M_{NP}(2\gamma^N_{MP}+\gamma^K_{\Lambda\Sigma}G_{MK}G^{N\Lambda}G^{P\Sigma})] \tag{2.69}$$

Προχωρούμε τώρα στην ελάττωση των πεδίων ύλης.

2.2.1 Ελάττωση των Yang-Mills και Kalb-Ramond πεδίων

Για το πεδίο Yang-Mills επιλέγουμε την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{A}^I = A^I_\mu dx^\mu + A^I_M \eta^M + \sigma^I = A^I + \sigma^I \tag{2.70}$$

όπου οι 1-μορφές σ^I αποτελούν γενίκευση των όρων $m^I_{MN} y^N$. Υπολογίζοντας το αντίστοιχο πεδίο έχουμε:

$$F^I = dA^I = \partial_{[\mu} A^I_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M dx^\mu \wedge \eta^M - A^I_P \gamma^P_{MN} \eta^M \wedge \eta^N + d\sigma^I$$

Στην περίπτωση του επίπεδου τόρου είχαμε από την εξίσωση (2.36) τον όρο

$$-m^I_{MN} dy^M \wedge dy^N$$

και πρέπει στο όριο που $\gamma^P_{MN} \to 0$ να έχουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα. Συνεπώς πρέπει:

$$d\sigma^I = -m^I_{MN} \eta^M \wedge \eta^N \tag{2.71}$$

Φυσικά πρέπει να ισχύει:

$$d^2\sigma^I = 0 \leftrightarrow m^I_{[M|N} \gamma^N_{PQ]} \eta^M \wedge \eta^P \wedge \eta^Q = 0 \leftrightarrow$$

$$m^I_{MN} \gamma^N_{PQ} + m^I_{MQ} \gamma^N_{NP} + m^I_{MP} \gamma^N_{QN} = 0 \tag{2.72}$$

Η άνωθεν είναι η Jacobi ταυτότητα για τις σταθερές δομής. Με βάση τα παραπάνω έχουμε την ακόλουθη έκφραση για το Yang-Mills πεδίο:

$$F^I = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu A^I_M dx^\mu \wedge \eta^M - (m^I_{MN} + A^I_P \gamma^P_{MN}) \eta^M \wedge \eta^N$$

Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία έχουμε:

$$F^I = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu - 2\partial_{[\mu} A^I_M V^M_{\nu]} - 2m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu - A^I_P \gamma^P_{MN} V^M_\mu V^N_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$+ (\partial_\mu A^I_M - 2(m^I_{MN} + A^I_P \gamma^P_{MN}) V^N_\mu) E^M_A dx^\mu \wedge E^A - (m^I_{MN} + A^I_P \gamma^P_{MN}) E^M_A E^N_B E^A \wedge E^B$$

Ορίζοντας σε αυτό το σημείο:

$$D_\mu A^I_M = \partial_\mu A^I_M - 2(m^I_{MN} + A^I_P \gamma^P_{MN}) V^N_\mu \tag{2.73}$$

και χρησιμοποιώντας την (2.36)καθώς και τον ορισμό του μη αβελιανού πεδίου:

$$V^M_{\mu\nu} = \partial_\mu V^M_\nu - \partial_\nu V^M_\mu - 2\gamma^M_{NP} V^N_\mu V^P_\nu \tag{2.74}$$

βρίσκουμε τελικά για το ελαττωμένο πεδίο:

$$F^I = \frac{1}{2}(F^I_{\mu\nu} + A^I_M V^M_{\mu\nu})dx^\mu \wedge dx^\nu + D_\mu A^I_M E^M_A dx^\mu \wedge E^A$$
$$- (m^I_{MN} + A^I_P \gamma^P_{MN}) E^M_A E^N_B E^A \wedge E^B \quad (2.75)$$

Για την ελάττωση του Kalb-Ramond πεδίου εργαζόμαστε όπως πριν υπολογίζοντας πρώτα τους όρους Chern-Simons:

$A^I \wedge F^I = \frac{1}{2} A^I_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + (\frac{1}{2} A^I_M \hat{F}^I_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sigma_M \hat{F}^I_{\mu\nu} + A^I_{[\mu}\partial_{\nu]} A_M) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \eta^M -$

$(A_\mu \hat{F}_{MN} + A_{[M}\partial_\mu A_{N]} + \sigma_{[M}\partial_\mu A_{N]}) dx^\mu \wedge \eta^M \wedge \eta^N - ((A_{[M} + \sigma_{[M}) \hat{F}_{NP]}) \eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αρχική μορφή του Yang-Mills πεδίου και ορίσαμε:

$\hat{F}^I_{\mu\nu} = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu$

$\hat{F}^I_{MN} = m^I_{MN} + A^I_P \gamma^P_{MN}$

Παρατηρούμε πως η εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες βρίσκεται στους εξής 3 όρους:

- $\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}\sigma_M dx^\mu dx^\nu \eta^M = d(A_\mu dx^\mu) \wedge \sigma$
- $\sigma_M \partial_\mu A_N dx^\mu \wedge \eta^M \wedge \eta^N = d(A_M \eta^M) \wedge \sigma - A_M d(\eta^M) \wedge \sigma$
- $\sigma_{[M} \hat{F}_{NP]} \eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P$

Συνεπώς ορίζουμε το πεδίο $\hat{B}$ ως:

$\hat{B} = B + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + c$

όπου $\alpha = A^I_M \eta^M \wedge \sigma^I$, $\beta = A^I_\mu dx^\mu \wedge \sigma^I$, ο όρος B είναι ανεξάρτητος των εσωτερικών συντεταγμένων, οι όροι α,β υπάρχουν για να εξουδετερώσουν τους αντίστοιχους όρους προερχόμενους από την Chern-Simons συνεισφορά και ο όρος c περιέχει την εξάρτηση του πεδίου $\hat{B}$ από τις εσωτερικές συντεταγμένες και θα επιλεγεί κατάλληλα στην πορεία. Ουσιαστικά γενικεύουμε τη μορφή που είχαμε επιλέξει για τον επίπεδο τόρο (2.39). Σημειώνουμε πως ισχύει $\alpha + \beta = A^I \wedge \sigma^I$. Με βάση αυτά βρίσκουμε για το πεδίο H:

$H = d\hat{B} - \frac{1}{2} A \wedge F =$

$dB - \frac{1}{4} A_\mu \hat{F}_{\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$

$$- \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}A_M\hat{F}_{\mu\nu} + A_{[\mu}\partial_{\nu]}A_M)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \eta^M$$

$$+ \tfrac{1}{2}(A_{[M}\partial_\mu A_{N]} - A_\mu(2m_{MN} + A_P\gamma^P_{MN}))dx^\mu \wedge \eta^M \wedge \eta^N$$

$$+ \tfrac{1}{2}A^I_M(2m^I_{NP} + A^I_K\gamma^K_{NP})\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P + dc + \tfrac{1}{2}\sigma_{[M}m_{NP]}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P$$

Ο τελευταίος όρος επαναγράφεται ως:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^I_{[M}m^I_{NP]}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P = -\tfrac{1}{2}\sigma^I \wedge d\sigma^I$$

Επιλέγουμε τον όρο c έτσι ώστε από τη μία να εξουετερώνει τον όρο αυτό ο οποίος έχει εξάρτηση από τις εσωτερικές συντεταγμένες και ταυτόχρονα να μας δίνει τις συνιστώσες του πεδίου H οι οποίες βρίσκονται εντός του τόρου χωρίς όμως να εξαρτώνται από αυτόν. Συγκεκριμένα θεωρούμε:

$$dc + \frac{1}{2}\sigma_{[M}m_{NP]}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P = \frac{1}{2}\beta_{MNP}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P \tag{2.76}$$

Θεωρώντας τώρα την εξωτερική παράγωγο της άνωθεν έκφρασης έχουμε:

$$d(dc - \tfrac{1}{2}\sigma^I \wedge \sigma^I) = -\tfrac{1}{2}d\sigma^I \wedge d\sigma^I = -\tfrac{1}{2}m^I_{[MN}m^I_{PK]}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P \wedge \eta^K$$

Από την άλλη:

$$\tfrac{1}{2}d(\beta_{MNP}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P) = \tfrac{3}{2}\beta_{\Lambda[MN}\gamma^\Lambda_{PK]}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P \wedge \eta^K$$

Εξισώνοντας τα 2 αποτελέσματα:

$$m^I_{[MN}m^I_{PK]} = 3\beta_{\Lambda[MN}\gamma^\Lambda_{PK]} \tag{2.77}$$

Αυτή είναι και η τελευταία από τις ανεξάρτητες ταυτότητες Jacobi της ελαττωμένης θεωριας και στο όριο $\gamma^M_{NP} \to 0$ ανακτούμε την (2.40). Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη μορφή για την ελάττωση του πεδίου H:

$$H = \tfrac{1}{2}(\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} - \tfrac{1}{2}A^I_{[\mu}\hat{F}^I_{\nu\lambda]})dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

$$+ (\partial_{[\mu}B_{\nu]M} - \tfrac{1}{4}A^I_M\hat{F}^I_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}A^I_\mu\partial_\nu A^I_M)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \eta^M$$

$$+ (B_{\mu P}\gamma^P_{MN} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B_{MN} + A^I_\mu m^I_{MN} + \tfrac{1}{2}A^I_\mu A^I_P\gamma^P_{MN} + \tfrac{1}{2}A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]})dx^\mu \wedge \eta^M \wedge \eta^N$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\beta_{MNP} + 2A^I_M m^I_{NP} + C_{MK}\gamma^K_{NP})\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P$$

Όπως και πριν, εκφράζουμε το πεδίο στην αναλλοίωτη βάση και έπειτα υπολογίζουμε τις επιμέρους συνεισφορές:

$$H = (\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda - \hat{H}_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

$$+ (\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu)E^M_A dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A$$

$$+ (\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu)E^M_A E^N_B dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B + \hat{H}_{MNP}E^M_A E^N_B E^P_C E^A \wedge E^B \wedge E^C$$

Υπολογίζουμε τον όρο: $\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu$. Αντικαθιστώντας τις ποσότητες έχουμε:

$$\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu = \tfrac{1}{2}\partial_\mu B_{MN} + B_{\mu P}\gamma^P_{MN} + A^I_\mu m^I_{MN} + \tfrac{1}{2}A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]} + \tfrac{1}{2}A^I_\mu A^I_P \gamma^P_{MN}$$

$$- \tfrac{3}{2}\beta_{MNP}V^P_\mu - 3A^I_{[M}m^I_{NP]} - 3C_{[M|K}\gamma^K_{NP]}V^P_\mu$$

Γράφουμε τους πλήρως αντισυμμετρικούς τανυστές σε μορφή αντισυμμετρική στους δείκτες MN ως εξής:

$$A^I_{[M}m^I_{NP]} = \tfrac{1}{3}(A^I_M m^I_{NP} + A^I_P m^I_{MN} + A^I_N m^I_{PM}) = \tfrac{1}{3}(A^I_M m^I_{NP} + A^I_P m^I_{MN} - A^I_N m^I_{MP})$$

$$= \tfrac{1}{3}(2A^I_{[M}m^I_{N]P} + A^I_P m^I_{MN})$$

Ομοίως για τον όρο $C_{[M|K}\gamma^K_{NP]}$ έχουμε:

$$C_{[M|K}\gamma^K_{NP]} = \tfrac{1}{3}(2C_{[M|K}\gamma^K_{N]P} + C_{PK}\gamma^K_{MN})$$

$$= \tfrac{1}{3}(2B_{[MK}\gamma^K_{N]P} + B_{PK}\gamma^K_{MN} + A^I_{[M}A^I_K\gamma^K_{N]P} + \tfrac{1}{2}A^I_P A^I_K \gamma^K_{MN})$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε:

$$\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu =$$

$$\tfrac{1}{2}(\partial_\mu B_{MN} + 2B_{\mu P}\gamma^P_{MN} + 2A^I_\mu m^I_{MN} + A^I_{[M}\partial_\mu A^I_{N]} + A^I_\mu A^I_P\gamma^P_{MN} - 3\beta_{MNP}V^P_\mu - 4A^I_{[M}m^I_{N]P}V^P_\mu$$

$$-2A^I_P m^I_{MN}V^P_\mu - 4B_{[MK}\gamma^K_{N]P}V^P_\mu - 2B_{PK}\gamma^K_{MN}V^P_\mu - 2A^I_{[M}A^I_K\gamma^K_{N]P}V^P_\mu - A^I_P A^I_K \gamma^K_{MN}V^P_\mu)$$

$$= \tfrac{1}{2}[A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]} + \partial_\mu B_{MN} + 2(B_{\mu P} + B_{PK}V^K_\mu + \tfrac{1}{2}(A^I_\mu - A^I_K V^K_\mu)A^I_P)\gamma^P_{MN}$$

$$+ 2(A^I_\mu - A^I_P V^P_\mu)m^I_{MN} - 2A^I_{[M}m^I_{N]P}V^P_\mu - 3\beta_{MNP}V^P_\mu + 4B_{K[M}\gamma^K_{N]P}V^P_\mu] =$$

$$\tfrac{1}{2}[A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]} + \partial_\mu B_{MN} + 2b_{\mu P}\gamma^P_{MN} + 2a^I_\mu m^I_{MN} - 3\beta_{MNP}V^P_\mu - 2A^I_{[M}m^I_{N]P}V^P_\mu + 4B_{K[M}\gamma^K_{N]P}V^P_\mu]$$

$$= \tfrac{1}{2}(A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]} + D_\mu B_{MN}) \to$$

$$\hat{H}_{\mu MN} - 3\hat{H}_{MNP}V^P_\mu = \frac{1}{2}(A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]} + D_\mu B_{MN}) \tag{2.78}$$

$$D_\mu B_{MN} = \partial_\mu B_{MN} + 2b_{\mu P}\gamma^P_{MN} + 2a^I_\mu m^I_{MN} - 3\beta_{MNP}V^P_\mu$$
$$- 2A^I_{[M} m^I_{N]P} V^P_\mu + 4B_{Q[M}\gamma^Q_{N]P}V^P_\mu \quad (2.79)$$

Περνώντας τώρα στον όρο $(\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu)$ έχουμε:

$$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu =$$

$$\partial_{[\mu}B_{\nu]M} - \tfrac{1}{2}A^I_M\partial_{[\mu}A^I_{\nu]} + \tfrac{1}{2}A^I_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M + 2B_{[\mu P}V^N_{\nu]}\gamma^P_{MN} + V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}B_{MN} + 2A^I_{[\mu}V^N_{\nu]}m^I_{MN}$$

$$+A^I_{[\mu}V^N_{\nu]}A^I_P\gamma^P_{MN} + \tfrac{1}{2}A^I_M V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_N - \tfrac{1}{2}A^I_N V^N_{[\nu}\partial_{\mu]}A^I_M + \tfrac{3}{2}\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu + 3A^I_{[M}m^I_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu$$

$$+ 3C_{[M|K}\gamma^K_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu$$

Αρχικά εκφράζουμε τους πλήρως αντισυμμετρικούς τανυστές σε μορφή αντισυμμετρική στους δείκτες μ,ν.

$$3A^I_{[M}m^I_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu = A^I_M m^I_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + A^I_P m^I_{MN}V^N_\mu V^P_\nu + A^I_N m^I_{PM}V^N_\mu V^P_\nu =$$

$$A^I_M m^I_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + 2A^I_{[P}m^I_{M|N]}V^N_\mu V^P_\nu = A^I_M m^I_{NP}V^N_\mu V^P_\nu - 2A^I_P m^I_{MN}V^N_{[\nu}V^P_{\mu]}$$

Η τελευταία ισότητα αιτιολογείται από το γεγονός ότι η αντισυμμετρικότητα στους N, P δείκτες ισοδυναμεί με αντισυμμετρικότητα στους μ,ν δείκτες εξαιτίας των όρων $V^N_\mu V^P_\nu$. Ομοίως για τον όρο $3C_{[M|K}\gamma^K_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu$ έχουμε:

$$3C_{[M|K}\gamma^K_{NP]}V^N_\mu V^P_\nu = C_{MK}\gamma^K_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + 2C_{PK}\gamma^K_{MN}V^N_{[\mu}V^P_{\nu]} =$$

$$C_{MK}\gamma^K_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + 2(B_{PK} + \tfrac{1}{2}A^I_P A^I_K)\gamma^K_{MN}V^N_{[\mu}V^P_{\nu]} =$$

$$C_{MQ}\gamma^K_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + 2(B_{PK} - \tfrac{1}{2}A^I_P A^I_K)\gamma^P_{MN}V^N_{[\nu}V^K_{\mu]}$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$\hat{H}_{\mu\nu M} + 2\hat{H}_{\mu MN}V^N_\nu + 3\hat{H}_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu =$$

$$\partial_{[\mu}b_{\nu]M} - \tfrac{1}{2}A^I_M F^I_{\mu\nu} + 2(B_{[\mu P} + B_{PK}V^K_{[\mu} + \tfrac{1}{2}A^I_{[\mu}A^I_P - \tfrac{1}{2}A^I_P A^I_K V^K_{[\mu})V^N_{\nu]}\gamma^P_{MN}$$

$$+\tfrac{3}{2}\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu - (B_{MN} + \tfrac{1}{2}A^I_M A^I_N)\partial_{[\mu}V^N_{\nu]} + C_{MK}\gamma^K_{NP}V^N_\mu V^P_\nu + 2(A^I_{[\mu} - A^I_P V^P_{[\mu})V^N_{\nu]}m^I_{MN} =$$

$$\partial_{[\mu}b_{\nu]M} - \tfrac{1}{2}A^I_M F^I_{\mu\nu} + 2b_{[\mu P}V^N_{\nu]}\gamma^P_{MN} + \tfrac{3}{2}\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu - C_{MN}\partial_{[\mu}V^N_{\nu]} + C_{MN}\gamma^N_{PK}V^P_\mu V^K_\nu$$

$$+ 2a^I_{[\mu}V^N_{\nu]}m^I_{MN} =$$

$\frac{1}{2}[\partial_\mu b_{\nu M} - \partial_\nu b_{\mu M} + 4a^I_{[\mu}V^N_{\nu]}m^I_{MN} + 4b_{[\mu P}V^N_{\nu]}\gamma^P_{MN} + 3\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu$

$- A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}(\partial_\mu V^N_\nu - \partial_\nu V^N_\mu - 2\gamma^N_{PK}V^P_\mu V^K_\nu)] =$

$\frac{1}{2}(H_{\mu\nu M} - A^I_M F^I_{\mu\nu} - C_{MN}V^N_{\mu\nu}]$

όπου έχουμε:

$$H_{\mu\nu M} = \partial_\mu b_{\nu M} - \partial_\nu b_{\mu M} + 4a^I_{[\mu}V^N_{\nu]}m^I_{MN} + 4b_{[\mu P}V^N_{\nu]}\gamma^P_{MN} + 3\beta_{MNP}V^N_\mu V^P_\nu \tag{2.80}$$

Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό του τελευταίου όρου:

$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda - \hat{H}_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τον κάθε όρο έχουμε:

$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda - \hat{H}_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda =$

$\frac{1}{2}\partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]} - \frac{1}{4}A^I_{[\mu}\hat{F}^I_{\nu\lambda]} - \partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu + \frac{1}{4}A^I_M V^M_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}V^M_\mu A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M + B_{\mu P}\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda$

$+ \frac{1}{2}\partial_\mu B_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + A^I_\mu m^I_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + \frac{1}{2}A^I_\mu A^I_P \gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + \frac{1}{2}A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]}$

$- \frac{1}{2}\beta_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda - A^I_{[M}m^I_{NP]}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda - C_{[M|K}\gamma^K_{NP]}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda$

Επειδή οι όροι στην άνωθεν έκφραση είναι αντισυμμετρίκοί ως προς τους δείκτες ν,λ και θέλουμε το αποτέλεσμα να είναι πλήρως αντισυμμετρικό στους δείκτες μ,ν,λ ξαναγράφουμε την άνωθεν έκφραση ως εξής:

$\hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V^M_\lambda + \hat{H}_{\mu MN}V^M_\nu V^N_\lambda - \hat{H}_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda =$

$\frac{1}{6}(\partial_\mu B_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}a^I_\mu \hat{F}^I_{\nu\lambda} - 2\partial_{[\nu}B_{\lambda]M}V^M_\mu + V^M_\mu A^I_{[\nu}\partial_{\lambda]}A^I_M + 2B_{\mu P}\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda$

$+ \partial_\mu B_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + 2A^I_\mu m^I_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + A^I_\mu A^I_P\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + A^I_M\partial_\mu A^I_N V^M_{[\nu}V^N_{\lambda]}$

$- \beta_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda - 2A^I_M m^I_{NP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda - 2C_{MK}\gamma^K_{NP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda + cyc.perm.)$

Συγκεντρώνοντας τους γ-όρους:

$2B_{\mu P}\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + A^I_\mu A^I_P\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda - 2C_{MK}\gamma^K_{NP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda =$

$2B_{\mu P}\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda + A^I_\mu A^I_P\gamma^P_{MN}V^M_\nu V^N_\lambda - 2(B_{MK} + \frac{1}{2}A^I_M A^I_K)\gamma^K_{NP}V^M_\mu V^N_\nu V^P_\lambda =$

$2(B_{\mu P} + B_{PK}V_\mu^K + \frac{1}{2}A_\mu^I A_P^I - \frac{1}{2}A_P^I A_K^I V_\mu^K)\gamma_{MN}^P V_\nu^M V_\lambda^N =$

$2(B_{\mu P} + B_{PK}V_\mu^K + \frac{1}{2}a_\mu^I A_P^I)\gamma_{MN}^P V_\nu^M V_\lambda^N = 2b_{\mu P}\gamma_{MN}^P V_\nu^M V_\lambda^N$

Για τους m-όρους έχουμε:

$2A_\mu^I m_{MN}^I V_\nu^M V_\lambda^N - 2A_M^I m_{NP}^I V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P = 2(A_\mu^I - A_P^I V_\mu^P) m_{MN}^I V_\nu^M V_\lambda^N = 2a_\mu^I m_{MN}^I V_\nu^M V_\lambda^N$

Οι υπόλοιποι όροι δίνουν τα γνωστά αποτελέσματα από την Kaluza-Klein ελάττωση. Είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε την τελική έκφραση για την ελαττωμένη 3-μορφή $H_{\mu\nu\lambda}$. Έχουμε:

$H_{\mu\nu\lambda} = \hat{H}_{\mu\nu\lambda} - \hat{H}_{\mu\nu M}V_\lambda^M + \hat{H}_{\mu MN}V_\nu^M V_\lambda^N - \hat{H}_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P =$

$\partial_\mu b_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}a_\mu^I \partial_\nu(a_\lambda^I - \partial_\lambda a_\nu^I) - b_{\mu M}\partial_{[\nu}V_{\lambda]}^M - V_\mu^M \partial_{[\nu}b_{\lambda]M} + 2a_\mu^I m_{MN}^I V_\nu^M V_\lambda^N + 2b_{\mu P}\gamma_{MN}^P V_\nu^M V_\lambda^N$

$- \beta_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P =$

$\partial_\mu b_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}V_\mu^M(\partial_\nu b_{\lambda M} - \partial_\lambda b_{\nu M} + 3\beta_{MNP}V_\nu^N V_\lambda^P + 4\gamma_{MN}^P b_{[\nu P}V_{\lambda]}^N + 4m_{MN}^I a_{[\nu}^I V_{\lambda]}^N)$

$- \frac{1}{2}a_\mu^I \partial_\nu(a_\lambda^I - \partial_\lambda a_\nu^I - 2m_{MN}^I V_\nu^M V_\lambda^N) - \frac{1}{2}b_{\mu M}(\partial_\nu V_\lambda^M - \partial_\lambda V_\nu^M - 2\gamma_{NP}^M V_\nu^N V_\lambda^P)$

$- m_{MN}^I a_\mu^I V_\nu^M V_\lambda^N - \gamma_{NP}^M b_{\mu M} V_\nu^N V_\lambda^P + \frac{1}{2}\beta_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P$

Γενικεύοντας τον ορισμό του ελαττωμένου πεδίου Kalb-Ramond

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu b_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}a_\mu^I F_{\nu\lambda}^I - \frac{1}{2}V_\mu^M H_{\nu\lambda M} - \frac{1}{2}b_{\mu M}V_{\nu\lambda}^M$$
$$- m_{MN}^I a_\mu^I V_\nu^M V_\lambda^N - \gamma_{NP}^M b_{\mu M} V_\nu^N V_\lambda^P + \frac{1}{2}\beta_{MNP}V_\mu^M V_\nu^N V_\lambda^P \quad (2.81)$$

Συνολικά λοιπόν για την ελάττωση του πεδίου H έχουμε:

$$H = \frac{1}{6}H_{\mu\nu\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda + \frac{1}{2}(H_{\mu\nu M} - A_M^I F_{\mu\nu}^I - C_{MN}V_{\mu\nu}^N)E_A^M dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge E^A$$
$$+ \frac{1}{2}(D_\mu B_{MN} + A_{[M}^I D_\mu A_{N]}^I)E_A^M E_B^N dx^\mu \wedge E^A \wedge E^B$$
$$+ \frac{1}{2}(\beta_{MNP} + 2A_M^I m_{NP}^I + 2C_{MK}\gamma_{NP}^K)E_A^M E_B^N E_C^P E^A \wedge E^B \wedge E^C \quad (2.82)$$

Και η ελαττωμένη δράση είναι:

$$S=-\int d^Dx\sqrt{-g}e^{-\phi}[\frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{4}G^{MN}(H_{\mu\nu M}-A^I_M F^I_{\mu\nu}-C_{MP}V^P_{\mu\nu})\times$$

$$(H^{\mu\nu}_N-A^I_N F^{I\mu\nu}-C_{NP}V^{P\mu\nu})+\frac{1}{4}G^{MP}G^{NK}(D_\mu B_{MN}+A^I_{[M}D_\mu A^I_{N]})(D_\mu B_{PK}+A^I_{[P}D_\mu A^I_{K]})$$

$$+\frac{3}{4}G^{MK}G^{NP}G^{\Lambda\Sigma}(\beta_{MN\Lambda}+2A^I_{[M}m^I_{N\Lambda]}-2C_{T[M}\gamma^T_{N\Lambda]})(\beta_{KP\Sigma}+2A^I_{[K}m^I_{P\Sigma]}-2C_{T[K}\gamma^T_{P\Sigma]})] \tag{2.83}$$

2.2.2 Συμμετρία βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τις μεταβολές στη συμμετρία βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας εξαιτίας της εισαγωγής των παραμέτρων $m^I_{MN}, \beta_{MNP}, \gamma^M_{NP}$. Όπως έχει φανεί από τον ορισμό των πεδίων $F^I_{\mu\nu}$ η γενικότερη συμμετρία βαθμίδος έχει γίνει πλέον μη Αβελιανή. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας από τους μετασχηματισμούς Kalb-Ramond, έπειτα τους μετασχηματισμούς Yang-Mills και τέλος τους μετασχηματισμούς Kaluza-Klein. Έπειτα θα προσδιορίσουμε την άλγεβρα των μετασχηματισμών βαθμίδος.

Ως γνωστόν η 2-μορφή B εισάγει μια συμμετρία βαθμίδος μέσω μιας 1-μορφής στην αρχική θεωρία, καθώς κατά το μετασχηματισμό: $\acute{B}=B+d\kappa$ όπου $k=k_\mu dx^\mu+k_M dy^M$ κάποια συνάρτηση, το πεδίο H παραμένει αναλλοίωτο. Μετά τη διαστατική ελάττωση θα έχουμε d $U(1)$ συμμετρίες εξαιτίας των εσωτερικών συντεταγμένων του κ καθώς και την ελαττωμένη συμμετρία του πεδίου $B_{\mu\nu}$. Προκειμένου τα ελαττωμένα πεδία να παραμένουν ανεξάρτητα των εσωτερικών συντεταγμένων πρέπει να απαιτήσουμε και από τις παραμέτρους του μετασχηματισμού το ίδιο. Θέτοντας $k_\mu=0$ έχουμε:

$$\delta B=d(k_M\eta^M)=\partial_\mu k_M dx^\mu\wedge\eta^M-2k_M\gamma^M_{NP}\eta^N\wedge\eta^P$$

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε για τα δυναμικά:

$$\acute{B}_{MN}=B_{MN}-2k_P\gamma^P_{MN}$$

$$\acute{B}_{\mu M}=B_{\mu M}+\partial_\mu k_M$$

$$\acute{B}_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (2.24), (2.27) και (2.36) βρίσκουμε:

$$\acute{B}_{MN}=B_{MN}-2k_P\gamma^P_{MN} \tag{2.84}$$

$$\acute{b}_\mu=b_{\mu M}+\partial_\mu\kappa_M-2\kappa_P\gamma^P_{MN}V^N_\mu \tag{2.85}$$

$$\acute{b}_{\mu\nu}=V^M_{[\mu}\partial_{\nu]}\kappa_=\frac{1}{2}V^M_{\mu\nu}\kappa_M+\gamma^M_{NP}\kappa_M V^N_\mu V^P_\nu \tag{2.86}$$

Στον τελευταίο όρο κάναμε παραγοντική ολοκλήρωση και αγνοήσαμε την τέλεια παράγωγο μέσω ενός ελαττωμένου μετασχηματισμού Kalb-Ramond.

Περνούμε τώρα στους μετασχηματισμούς Yang-Mills. Στην αρχική θεωρία αυτοί είναι: $\delta A^I = d\Lambda^I$. Επιθυμώντας τη διατήρηση της μορφής ελάττωσης και την ανεξαρτησία των πεδίων από τις εσωτερικές συντεταγμένες, απαιτούμε την ανεξαρτησία των μετασχηματισμών από τα y. Για τα ελαττωμένα δυναμικά έχουμε όπως και στην περίπτωση του επίπεδου τόρου:

$$\acute{A}^I_M = A^I_M$$

$$\acute{a}^I_\mu = a^I_\mu + \partial_\mu \lambda^I$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί αφήνουν το Yang-Mills τομέα της δράσης αναλλοίωτο. Οι Yang-Mills μετασχηματισμοί όμως επιδρούν και στα Kalb-Ramond πεδία, από τη μία μέσω των όρων Chern-Simons και από την άλλη μέσω της εμφάνισης τους στη μορφή ελάττωσης. Για τους Chern-Simons όρους έχουμε:

$$\acute{H} = d\acute{B} - \tfrac{1}{2}\acute{A}^I \wedge F^I = d\acute{B} - \tfrac{1}{2}A^I \wedge F^I - \tfrac{1}{2}d\Lambda^I \wedge F^I =$$

$$d(\acute{B} - \tfrac{1}{2}\Lambda^I F^I) - \tfrac{1}{2}A^I \wedge F^I$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $dF^I = 0$. Οπότε για να είναι αναλλοίωτο το H πρέπει: $\delta B = \frac{1}{2}\Lambda^I F^I + d\Omega$, όπου εισάγουμε μια 1-μορφή Ω προκειμένου να σβήσουμε τέλειες παραγώγους. Από την άλλη η μορφή ελάττωσης για το B είναι:

$$B = \tfrac{1}{2}B_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + B_{\mu M}dx^\mu \wedge \eta^M + \tfrac{1}{2}B_{MN}dy^M \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}A^I_\mu dx^\mu \wedge \sigma^I$$

$$+ \tfrac{1}{2}A^I_M \eta^M \wedge \sigma^I$$

Εκτός από τους B όρους αλλάζει και ο $A^I_\mu \wedge \sigma^I$ όρος ενώ ο $A^I_M \wedge \sigma^I$ παραμένει ίδιος (αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό $\Lambda^I = \lambda^I(x)$). Συγκεντρώνοντας τις 2 συνεισφορές περιμένουμε για το μετασχηματισμό του B:

$$\tfrac{1}{2}\acute{B}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + \acute{B}_{\mu M}dx^\mu \eta^M + \tfrac{1}{2}\acute{B}_{MN}\eta^M \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}\acute{A}^I_\mu dx^\mu \wedge \sigma^I =$$

$$\tfrac{1}{2}B_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + B_{\mu M}dx^\mu \wedge \eta^M + \tfrac{1}{2}B_{MN}\eta^M \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}A^I_\mu dx^\mu \wedge \sigma^I + \tfrac{1}{2}\lambda^I F^I$$

$$+ d\Omega$$

Για τον A-όρο έχουμε:

$$\acute{A}^I_\mu dx^\mu \wedge \sigma^I = A^I_\mu dx^\mu \wedge \eta^M + \partial_\mu \lambda^I dx^\mu \wedge \sigma^I$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη τον τελευταίο όρο:

$\partial_\mu \lambda^I dx^\mu \wedge \sigma^I = d(\lambda^I \sigma^I) + \lambda^I m^I_{MN} \eta^M \wedge \eta^N$

Οπότε έχουμε:

$\frac{1}{2}\acute{B}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + \acute{B}_{\mu M} dx^\mu \wedge \eta^M + \frac{1}{2}\acute{B}_{MN}\eta^M \wedge \eta^N =$

$\frac{1}{2}B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + B_{\mu M} dx^\mu \wedge dy^M + \frac{1}{2}B_{MN} dy^M \wedge \eta^N + \frac{1}{2}\lambda^I F^I - \frac{1}{2}\lambda^I m^I_{MN}\eta^M \wedge \eta^N$

$d(\Omega - \frac{1}{2}\lambda^I \sigma^I) =$

$\frac{1}{2}(B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I \hat{F}^I_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu + (B_{\mu M} + \frac{1}{2}\lambda^I \partial_\mu A^I_M) dx^\mu \wedge dy^M$

$+ \frac{1}{2}(B_{MN} - 2\lambda^I m^I_{MN} - \lambda^I A^I_P \gamma^I_{MN})\eta^M \wedge \eta^N + d(\Omega - \frac{1}{2}\lambda^I \sigma^I) =$

$\frac{1}{2}(B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I \hat{F}^I_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu + (B_{\mu M} - \frac{1}{2}\partial_\mu \lambda^I A^I_M) dx^\mu \wedge \eta^M$

$+ \frac{1}{2}(B_{MN} - 2\lambda^I m^I_{MN})\eta^M \wedge \eta^N + d(\Omega + \frac{1}{2}\lambda^I A^I_M \eta^M - \frac{1}{2}\lambda^I \sigma^I)$

το οποίο συνεπάγεται:

$\acute{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I \hat{F}^I_{\mu\nu}$

$\acute{B}_{\mu M} = B_{\mu M} + \frac{1}{2}\lambda^I \partial_\mu A^I_M$

$\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 2\lambda^I m^I_{MN}$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί συνεπάγονται για τα ελαττωμένα δυναμικά

$$\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 2\lambda^I m^I_{MN} \tag{2.87}$$

$\acute{b}_{\mu M} = \acute{B}_{\mu M} + \acute{B}_{MN} V^N_\mu + \frac{1}{2}A^I_M \acute{a}^I_\mu = B_{\mu M} - \frac{1}{2}\partial_\mu \lambda^I A^I_M + B_{MN} V^N_\mu - 2m^I_{MN} V^N_\mu$

$+ \frac{1}{2}A^I M a^I_\mu + \frac{1}{2}A^I_M \partial_\mu \lambda^I \rightarrow$

$$\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} - 2\lambda^I m^I_{MN} V^N_\mu \tag{2.88}$$

$\acute{b}_{\mu\nu} = \acute{B}_{\mu\nu} + V^M_{[\mu}\acute{b}_{\mu M} - \acute{B}_{MN} V^M_\mu V^N_\nu - A^I_M V^M_{[\mu}\acute{a}^I_{\nu]} =$

$B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I \hat{F}^I_{\mu\nu} + V^M_{[\mu} b_{\nu]} - 2\lambda^I m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu - B_{MN} V^M_\mu V^N_\nu + 2\lambda^I m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu$

$$- A^I_M V^M_{[\mu} a^I_{\nu]} - A^I_M V^M_{[\mu}\partial_{\nu]}\lambda^I = b_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\lambda^I(\partial_\mu a^I_\mu - \partial_\nu a^I_\mu) - \partial_{[\nu}(\lambda^I A^I_M V^M_{\mu]}) \rightarrow$$

$$\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I F^I_{\mu\nu} + \lambda^I m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu \tag{2.89}$$

Στο τελευταίο κομμάτι αγνοήσαμε την ολική παράγωγο $\partial_{[\nu}(\lambda^I A^I_M V^M_{\mu]})$ καθώς αποτελεί μετασχηματισμό της μορφής Kalb-Ramond. Βλέπουμε πως οι μετασχηματισμοί Yang-Mills είναι ανεξάρτητοι των γ^M_{NP} συνεπώς είναι ίδιοι με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς για επίπεδο εσωτερικού τόρου.

Περνούμε τώρα στους μετασχηματισμούς Kaluza-Klein. Αυτή η κατηγορία μετασχηματισμών είναι η πιο σύνθετη καθώς επηρεάζει τα πεδία ύλης και των 3 τομέων. Έχουμε σχολιάσει ήδη πως ο μετασχηματισμός για τα G_{MN}, V^M_μ είναι:

$$\acute{G}_{MN} = G_{MN} + 2\gamma^P_{MK}\omega^K G_{PN} + 2\gamma^P_{NK}\omega^K G_{PM} + O(\omega^2)$$

$$\acute{V}^M_\mu = V^M_\mu - 2\gamma^M_{NP}\omega^P V^N_\mu + \partial_\mu \omega^M + O(\omega^2)$$

Από το νόμο μετασχηματισμού του G_{MN} βλέπουμε πως είναι ευθύ γινόμενο βαθμωτών που ανήκουν στην απλέτα (εφόσον δεν εμπεριέχονται άλλα πεδία) και στις 2 συζυγής αναπαραστάσεις (με φορτίο -1) της ομάδας ισομετριών.

Εξετάζουμε τώρα την επίδραση των μετασχηματισμών αυτών στα πεδία Yang-Mills. Από τις 1-μορφές σ^I έχουμε:

$$d\acute{\sigma}^I = -m^I_{MN}\acute{\eta}^M \wedge \acute{\eta}^N = -m^I_{MN}(\eta^M - 2\gamma^M_{PK}\omega^K\eta^P - d\omega^M)\wedge(\eta^N - 2\gamma^N_{\Lambda\Sigma}\omega^\Sigma\eta^\Lambda - d\omega^N) =$$

$$d(\sigma^I) + 2m^I_{MN} d\omega^M \wedge \eta^N + 2\gamma^M_{PK} m^I_{MN}\omega^K \eta^P \wedge \eta^N + 2\gamma^N_{\Lambda\Sigma} m^I_{MN}\omega^\Sigma\eta^M \wedge \eta^\Lambda =$$

$$d(\sigma^I + 2m^I_{MN}\omega^M\eta^N) + 2(m^I_{MN}\gamma^N_{PK}\omega^M\eta^P \wedge \eta^K + \gamma^M_{PK} m^I_{MN}\omega^K\eta^P \wedge \eta^N$$

$$+ \gamma^N_{\Lambda\Sigma} m^I_{MN}\omega^\Sigma \eta^M \wedge \eta^\Lambda)$$

Οι γ-όροι μπορούν να επαναγραφούν ως:

$$m^I_{MN}\gamma^N_{PK}\omega^M\eta^P \wedge \eta^K + m^I_{NK}\gamma^N_{PM}\omega^M\eta^P \wedge \eta^K + m^I_{KN}\gamma^N_{PM}\omega^M\eta^K \wedge \eta^P =$$

$$(m^I_{MN}\gamma^N_{PK} + m^I_{KN}\gamma^N_{MP} + m^I_{PN}\gamma^N_{KM})\omega^M\eta^P \wedge \eta^K = 0$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα απορρέει από την ταυτότητα Jacobi (2.72). Συνολικά λοιπόν για το μετασχηματισμό των μορφών σ^I έχουμε:

$$\acute{\sigma}^I = \sigma^I + 2m^I_{MN}\omega^M\eta^N + d\Xi \tag{2.90}$$

όπου Ξ είναι κάποια αυθαίρετη 0-μορφή. Τον μετασχηματισμό αυτόν μπορούμε να τον αγνοήσουμε καθώς είναι μετασχηματισμός Yang-Mills (άρα μπορούμε πάντα να κάνουμε έναν αντίστοιχο μετασχηματισμό $\acute{A}^I = A^I - d\Xi$ και να τον σβήσουμε). Για τα πεδία

A^I έχουμε:

$$\acute{A}^I = \acute{A}^I_\mu dx^\mu + \acute{A}^I_M \acute{\eta}^M + d\acute{\sigma}^I =$$

$$\acute{A}^I_\mu dx^\mu + \acute{A}^I_M(\eta^M - 2\gamma^M_{NP}\omega^P\eta^N - d\omega^M) + \sigma^I + 2m^I_{MN}\omega^M\eta^N =$$

$$(\acute{A}^I_\mu - \partial_\mu\omega^M A^I_M)dx^\mu + (\acute{A}^I_M - 2\acute{A}^I_N\gamma^N_{MP}\omega^P - 2m^I_{MN}\omega^N)\eta^M + \sigma^I$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται:

$$\acute{A}^I_\mu = A^I_\mu + \partial_\mu\omega^M A^I_M$$

$$\acute{A}^I_M = A^I_M + 2\gamma^N_{MP}\omega^P + 2m^I_{MN}\omega^N$$

Με βάση αυτές, έχουμε από την (118) για τα ελαττωμένα δυναμικά:

$$\acute{A}^I_M = A^I_M + 2\gamma^N_{MP}\omega^P + 2m^I_{MN}\omega^N \tag{2.91}$$

$$\acute{a}^I_\mu = \acute{A}^I_\mu - \acute{A}^I_M\acute{V}^M_\mu = A^I_\mu + \partial_\mu\omega^M A^I_M - (A^I_M + 2\gamma^N_{MP}\omega^P + 2m^I_{MN}\omega^N)$$

$$\times\,(V^M_\mu - 2\gamma^M_{NP}\omega^P V^N_\mu + \partial_\mu\omega^M) \rightarrow$$

$$\acute{a}^I_\mu = a^I_\mu - 2m^I_{MN}\omega^N V^M_\mu + O(\omega^2) \tag{2.92}$$

Τέλος εξετάζουμε την επίδραση που έχουν οι μετασχηματισμοί αυτοί στο δυναμικό της 2-μορφής. Ανακαλούμε ότι: $\hat{B} = B + \alpha + \beta + c$ και $\alpha + \beta = A^I \wedge \sigma^I$. Ο μετασχηματισμός των 2-μορφών α,β είναι γνωστός από πριν. Για το μετασχηματισμό της μορφής c ξεκινούμε από την εξωτερική παράγωγο της:

$$dc = -\tfrac{1}{2}m^I_{MN}\sigma^I \wedge \eta^M \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P$$

Αν θεωρήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στις 2 μορφές: $\delta c = \acute{c} - c$ τότε από την παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$d\delta c = -\tfrac{1}{2}m^I_{MN}\delta\sigma^I \wedge \eta^M \wedge \eta^N - m^I_{MN}\sigma^I \wedge \delta\eta^M \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P) =$$

$$\tfrac{1}{2}\delta\sigma^I \wedge d\sigma^I - m^I_{MN}\sigma^I \wedge (-2\gamma^M_{PK}\omega^K\eta^P - d\omega^M) \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P) =$$

$$\tfrac{1}{2}\delta\sigma^I \wedge d\sigma^I + 2m^I_{MN}\gamma^M_{KP}\omega^P\sigma^I \wedge \eta^K \wedge \eta^N + m^I_{MN}\sigma^I \wedge d\omega^M \wedge \eta^N + \tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M \wedge \eta^N \wedge \eta^P)$$

Χρησιμοποιώντας ότι:

$$m^I_{MN}\sigma^I \wedge d\omega^M \wedge \eta^N = m^I_{MN}\sigma^I \wedge d(\omega^M\eta^N) + m^I_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^M\sigma^I \wedge \eta^K \wedge \eta^P$$

και

$$m^I_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^M\sigma^I\wedge\eta^K\wedge\eta^P+2m^I_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^P\sigma^I\wedge\eta^K\wedge\eta^N=$$

$$\omega^M\sigma^I\wedge\eta^K\wedge\eta^P(m^I_{MN}\gamma^N_{KP}+m^I_{PN}\gamma^I_{MK}+m^I_{KN}\gamma^N_{PM})=0$$

καταλήγουμε στο: $d\delta c=\frac{1}{2}\delta\sigma^I\wedge d\sigma^I+m^I_{MN}\sigma^I\wedge d(\omega^M\eta^N)+\frac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P)$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες μετασχηματισμού των σ^I:

$$d\delta c=d\sigma^I\wedge(m^I_{MN}\omega^M\eta^N+\tfrac{1}{2}d\xi^I)+\sigma^I\wedge d(m^I_{MN}\omega^M\eta^N)+\tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P)=$$

$$2d\sigma^I\wedge(m^I_{MN}\omega^M\eta^N+\tfrac{1}{2}d\xi^I)-d\sigma^I\wedge(m^I_{MN}\omega^M\eta^N+\tfrac{1}{2}d\xi^I)+\sigma^I\wedge d(m^I_{MN}\omega^M\eta^N)$$

$$+\tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P)=$$

$$2d\sigma^I\wedge(m^I_{MN}\omega^M\eta^N)-d\sigma^I\wedge(m^I_{MN}\omega^M\eta^N-d\Xi^I)+\sigma^I\wedge d(m^I_{MN}\omega^M\eta^N)$$

$$+\tfrac{1}{2}\beta_{MNP}\delta(\eta^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P)=$$

$$-d\theta-2m^I_{MN}m^I_{KP}\omega^M\eta^K\eta^P\eta^N-3\beta_{MNP}\gamma^M_{K\Lambda}\omega^\Lambda\eta^K\wedge\eta^N\wedge\eta^P-\tfrac{3}{2}\beta_{MNP}d\omega^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την:

$$\beta_{MNP}\delta(\eta^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P)=3\beta_{MNP}\delta\eta^M\wedge\eta^N\wedge\eta^P=-6\beta_{MNP}\gamma^M_{KP}\omega^P\eta^K\wedge\eta^N\wedge\eta^P$$

και ορίσαμε: $\theta=\sigma^I\wedge(m^I_{MN}\omega^M\eta^N-\frac{1}{2}d\Xi^I)$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την άνωθεν εξίσωση χρησιμοποιώντας την (2.77) και να πάρουμε:

$$\acute{c}=c-\theta-\tfrac{3}{2}\beta_{MNP}\omega^M\eta^N\wedge\eta^P+d\tilde{\Lambda}$$

όπου $\tilde{\Lambda}$ είναι μια τυχαία καθολική 1-μορφή. Χρησιμοποιώντας τους νόμους μετασχηματισμού του A^I μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των μεταβολών των μορφών α και β. Εύκολα μπορεί να δει κανείς πως σε πρώτη τάξη ως προς ω ότι:

$$\acute{\alpha}+\acute{\beta}=\alpha+\beta+2m^I_{MN}\omega^M\sigma^I\wedge\eta^N+A^I\wedge(2m^I_{MN}\omega^M\eta^N+d\Xi^I)$$

Θυμίζουμε πως η εισαγωγή του μετασχηματισμού Yang-Mills $d\Xi^I$ εισάγει στο πεδίο $\hat{B}$ έναν μετασχηματισμό $\delta\hat{B}=\frac{1}{2}\Xi^I F^I$. Συνολικά λοιπόν έχουμε τον εξής μετασχηματισμό εξαιτίας των μορφών α,β,c:

$$\acute{B} = B + \tfrac{1}{2}\Xi^I F^I - \delta c - \tfrac{1}{2}\delta(\alpha+\beta) =$$

$$d(\Lambda - \tilde{\Lambda} - \tfrac{1}{2}A^I\Xi^I) + \tfrac{3}{2}\beta_{MNP}\omega^M\eta^N \wedge \eta^P - A^I \wedge (m^I_{MN}\omega^M\eta^N)$$

Επιλέγουμε το μετασχηματισμό βαθμίδος του πεδίου B έτσι ώστε να σβήνει την τέλεια παράγωγο: $\Lambda = \tilde{\Lambda} - \frac{1}{2}A^I\Xi^I$ και καταλήγουμε στην:

$$\acute{B} = B + \frac{3}{2}\beta_{MNP}\omega^M\eta^N \wedge \eta^P - A^I \wedge (m^I_{MN}\omega^M\eta^N) \qquad (2.93)$$

Βέβαια, ο μετασχηματισμός του πεδίου B έχει επιπλέον συνεισφορές από το μετασχηματισμό των βάσεων η^M. Για τους μετασχηματισμούς αυτούς έχουμε:

$$\acute{B} = \tfrac{1}{2}\acute{B}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + \acute{B}_{\mu M}dx^\mu \wedge \acute{\eta}^M + \tfrac{1}{2}\acute{B}_{MN}\acute{\eta}^M \wedge \acute{\eta}^N =$$

$$\tfrac{1}{2}(\acute{B}_{\mu\nu} - \acute{B}_{[\mu M}\partial_{\nu]}\omega^M)dx^\mu \wedge dx^\nu + (\acute{B}_{\mu M} - 2\acute{B}_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P + B_{MN}\partial_\mu\omega^N)dx^\mu \wedge \eta^M$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\acute{B}_{MN} - 4\acute{B}_{[M|K}\gamma^K_{N]P}\omega^P)\eta^M \wedge \eta^N$$

Αθροίζοντας τις συνεισφορές βρίσκουμε τελικά:

$$\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 4B_{K[M}\gamma^K_{N]P}\omega^P + 3\beta_{MNP}\omega^P + 2A^I_{[M}m^I_{N]P}\omega^P$$

$$\acute{B}_{\mu M} = B_{\mu M} + 2B_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P - B_{MN}\partial_\mu\omega^N + A^I_\mu m^I_{MN}\omega^N$$

$$B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + 2B_{[\mu M}\partial_{\nu]}\omega^M$$

Από αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό των ελαττωμένων δυναμικών. Για το $b_{\mu M}$ έχουμε:

$$\acute{b}_{\mu M} = \acute{B}_{\mu M} + \acute{B}_{MN}\acute{V}^N_\mu + \tfrac{1}{2}\acute{A}^I_M\acute{a}^I_\mu =$$

$$B_{\mu M} + 2B_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P - B_{MN}\partial_\mu\omega^N + A^I_\mu m^I_{MN}\omega^N + B_{MN}V^N_\mu - 4B_{K[M}\gamma^K_{N]P}\omega^P V^N_\mu$$

$$+ 3\beta_{MNP}\omega^P V^N_\mu + 2A^I_{[M}m^I_{N]P}\omega^P V^N_\mu - 2B_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^P V^K_\mu + B_{MN}\partial_\mu\omega^N - B_{MN}\partial_\mu\omega^N$$

$$+ \tfrac{1}{2}a^I_\mu A^I_M + \tfrac{1}{2}(2m^I_{MN}\omega^N + 2\gamma^N_{MP}A^I_N)a^I_\mu + \tfrac{1}{2}A^I_M(-2m^I_{NP}\omega^P V^N_\mu)$$

Από τους m-όρους έχουμε:

$$A^I_\mu m^I_{MN}\omega^N + 2A^I_{[M}m^I_{N]P}\omega^P V^N_\mu + m^I_{MN}\omega^N a^I_\mu - A^I_M m^I_{NP}\omega^P V^N_\mu =$$

$$A^I_\mu m^I_{MN}\omega^N + A^I_M m^I_{NP}\omega^P V^N_\mu - A^I_N m^I_{MP}\omega^P V^N_\mu + m^I_{MN}\omega^N a^I_\mu - A^I_M m^I_{NP}\omega^P V^N_\mu =$$

$$(A^I_\mu - A^I_P V^P_\mu) m^I_{MN}\omega^N + m^I_{MN}\omega^N a^I_\mu = 2a^I_\mu m^I_{MN}\omega^N$$

Από τους γ-όρους έχουμε:

$$2B_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P - 4B_{K[M}\gamma^K_{N]P}\omega^P V^N_\mu - 2B_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^P V^K_\mu + \gamma^N_{MP}A^I_N a^I_\mu =$$

$$2B_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P - 2B_{KM}\gamma^K_{NP}\omega^P V^N_\mu + 2B_{KN}\gamma^K_{MP}\omega^P V^N_\mu - 2B_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^P V^K_\mu + \gamma^N_{MP}A^I_N a^I_\mu =$$

$$2B_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P - 2B_{NM}\gamma^N_{KP}\omega^P V^K_\mu + 2B_{KN}\gamma^K_{MP}\omega^P V^N_\mu - 2B_{MN}\gamma^N_{KP}\omega^P V^K_\mu + \gamma^N_{MP}A^I_N a^I_\mu =$$

$$2(B_{\mu N} + B_{NK}V^K_\mu + \tfrac{1}{2}A^I_M a^I_\mu)\gamma^N_{MP}\omega^P = 2b_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} + 2b_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P + 2a^I_\mu m^I_{MN}\omega^N + 3\beta_{MNP}V^N_\mu\omega^P + O(\omega^2) \tag{2.94}$$

Απομένει ο υπολογισμός του $\acute{b}_{\mu\nu}$, που είναι και ο πιο μακροσκελής. Έχουμε:

$$\acute{b}_{\mu\nu} = \acute{B}_{\mu\nu} + \acute{V}^M_{[\mu}\acute{b}_{\nu]} - \acute{B}_{MN}\acute{V}^M_\mu \acute{V}^N_\nu - \acute{A}^I_M \acute{V}^M_{[\mu}\acute{a}^I_{\nu]}$$

Υπολογίζοντας τις επιμέρους συνεισφορές σε πρώτη τάξη ως προς ω, έχουμε:

$$\acute{V}^M_{[\mu}\acute{b}_{\nu]} = V^M_{[\mu}b_{\nu]} + 2m^I_{MN}V^M_{[\mu}a^I_{\nu]}\omega^N + 3\beta_{MNP}\omega^P V^M_\mu V^N_\nu + \partial_{[\mu}\omega^M b_{\nu]M}$$

$$\acute{B}_{MN}\acute{V}^M_\mu \acute{V}^N_\nu = B_{MN}V^M_\mu V^N_\nu + 2B_{MN}\partial_\mu\omega^M V^N_\nu + 3\beta_{MNP}V^M_\mu V^N_\nu\omega^P + 2A^I_{[M}m^I_{N]P}\omega^P V^M_\mu V^N_\nu$$

$$\acute{A}^I_M \acute{V}^M_{[\mu}\acute{a}^I_{\nu]} = A^I_M V^M_{[\mu}a^I_{\nu]} - 2A^I_{[M}m^I_{N]P}V^M_\mu V^N_\nu\omega^P + A^I_M\partial_{[\mu}\omega^M a^I_{\nu]} + 2m^I_{MN}V^M_{[\mu}a^I_{\nu]}\omega^N$$

Αθροίζοντας τα άνωθεν έχουμε τελικα:

$$\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\omega^M b_{\nu]M} + 2B_{[\mu M}\partial_{\nu]}\omega^M - 2B_{MN}\partial_\mu\omega^M V^N_\nu - A^I_M\partial_{[\mu}\omega^M a^I_{\nu]} =$$

$$b_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\omega^M b_{\nu]M} - 2\partial_{[\mu}\omega^M(B_{\nu]M} + B_{MN}V^M_{\nu]} + \tfrac{1}{2}A^I_M a^I_{\nu]}) =$$

$$b_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\omega^M b_{\nu]M} - 2\partial_{[\mu}\omega^M b_{\nu]M} = b_{\mu\nu} - \partial_\mu\omega^M b_{\nu]M} = b_{\mu\nu} + \omega^M\partial_{[\mu}b_{\nu]M} \rightarrow$$

$$\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega^M H_{\mu\nu M} - \frac{3}{2}\beta_{MNP}\omega^M V^N_\mu V^P_\nu - 2\gamma^P_{MN}\omega^M b_{[\mu|P}V^N_{\nu]} - 2\omega^M m^I_{MN}a^I_{[\mu}V^N_{\nu]} \tag{2.95}$$

Ο υπολογισμός αυτός ολοκληρώνει τη μελέτη των Kaluza-Klein μετασχηματισμών. Πλέον μπορούμε να προσδιορίσουμε την άλγεβρα και τις σταθερές δομής της ομάδας βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας. Αρχικά συνοψίζουμε στον ακόλουθο πίνακα τα 3 είδη μετασχηματισμών που αποτελούν την ομάδα:

Kalb-Ramond μετασχηματισμούς:

$$\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 2\kappa_p \gamma^P_{MN} \tag{2.96}$$

$$\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} + \partial_\mu \kappa_M - 2\kappa_P \gamma^P_{MN} V^N_\mu$$

$$\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa_M V^M_{\mu\nu} + \gamma^M_{NP}\kappa_M V^N_\mu V^P_\mu$$

Yang-Mills μετασχηματισμούς:

$$\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 2\lambda^I m^I_{MN} \tag{2.97}$$

$$\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} - 2\lambda^I m^I_{MN} V^N_\mu$$

$$\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda^I F^I_{\mu\nu} + \lambda^I m^I_{MN} V^M_\mu V^N_\nu$$

$$\acute{a}^I_\mu = a^I_\mu \partial_\mu \lambda^I$$

Kaluza-Klein μετασχηματισμούς:

$$\acute{G}_{MN} = G_{MN} + 2\gamma^P_{MK}\omega^K G_{PN} + 2\gamma^P_{NK}\omega^K G_{PM} + O(\omega^2) \tag{2.98}$$

$$\acute{V}^M_\mu = V^M_\mu - 2\gamma^M_{NP}\omega^P V^N_\mu + \partial_\mu \omega^M + O(\omega^2)$$

$$\acute{A}^I_M = A^I_M + 2\gamma^N_{MP}\omega^P + 2m^I_{MN}\omega^N$$

$$\acute{a}^I_\mu = a^I_\mu - 2m^I_{MN}\omega^N V^M_\mu + O(\omega^2)$$

$$\acute{B}_{MN} = B_{MN} - 4B_{K[M}\gamma^K_{N]P}\omega^P + 3\beta_{MNP}\omega^P + 2A^I_{[M} m^I_{N]P}\omega^P + O(\omega^2)$$

$$\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} + 2b_{\mu N}\gamma^N_{MP}\omega^P + 2a^I_\mu m^I_{MN}\omega^N + 3\beta_{MNP}V^N_\mu \omega^P + O(\omega^2)$$

$$\acute{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega^M H_{\mu\nu M} - \frac{3}{2}\beta_{MNP}\omega^M V^N_\mu V^P_\nu - 2\gamma^P_{MN}\omega^M b_{[\mu|P} V^N_{\nu]} - 2\omega^M m^I_{MN} a^I_{[\mu} V^N_{\nu]}$$

Προσδιορίζουμε τώρα την άλγεβρα Lie της ομάδας. Όπως αναφέραμε και πριν, θεωρούμε τις παραμέτρους των μετασχηματισμών ως μία ενιαία παράμετρο $\hat{\omega}^a = (\omega^M, \kappa_M, \lambda^I)$ και τους αντίστοιχους γεννήτορες: $T_a = (L_M, X^M, Y^I)$. Ο νόμος μετασχηματισμού για τα πεδία βαθμίδος είναι:

$$\acute{A}^a_\mu = A^a_\mu + f^a_{bc} A^b_\mu \hat{\omega}^c + \partial_\mu \hat{\omega}^a$$

Αν γράψουμε το νόμο αυτό σε μορφή πίνακα για την ελαττωμένη πολλαπλέτα βαθμίδος έχουμε:

$$\acute{V}_\mu = V^M_\mu - 2\gamma^M_{NP} V^N_\mu \omega^P + \partial_\mu \omega^M$$

$$
\acute{b}_{\mu M} = b_{\mu M} + \begin{bmatrix} V_\mu^N & b_{\mu N} & a_\mu^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\beta_{MNP} & -2\gamma^P_{MN} & -2m^I_{MN} \\ 2\gamma^N_{MP} & 0 & 0 \\ 2m^I_{MP} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^P \\ \kappa_P \\ \lambda^I \end{bmatrix} + \partial_\mu \kappa_P
$$

$$
\acute{a}^I_\mu = a^I_\mu - 2m^I_{MN} V^M_\mu \omega^N + \partial_\mu \lambda^I
$$

Βρίσκουμε τις σταθερές δομής να είναι:

$$
\begin{aligned}
&f^M_{NP} = 2\gamma^M_{NP} && (2.99)\\
&f^I_{MN} = 2m^I_{MN} \\
&f_{MNP} = -3\beta_{MNP}
\end{aligned}
$$

Με βάση αυτές μπορούμε να προσδιορίσουμε την άλγεβρα των γεννητόρων των μετασχηματισμών. Οι μεταθετικές σχέσεις είναι:

$$
\begin{aligned}
&[X^M, X^N] = [Y^I, Y^J] = [X^M, Y^I] = 0 && (2.100)\\
&[X^M, L_N] = 2i\gamma^M_{NP} X^P \\
&[Y^I, L_M] = 2im^I_{MN} X^N \\
&[L_M, L_N] = -3i\beta_{MNP} X^P + 2im^I_{MN} Y^I + 2i\gamma^P_{MN} L_P
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε από τις παραπάνω εξισώσεις πως οι γεννήτορες των μετασχηματισμών Yang-Mills και Kalb-Ramond μετατίθενται το οποίο είναι αναμενόμενο. Η αρχική θεωρία είχε τις συμμετρίες αυτές στην Αβελιανή τους μορφή και μετατίθεντο οπότε και η ελαττωμένη θεωρία έχει την ιδιότητα αυτή. Οι συμμετρίες που δε μετατίθενται είναι εκείνες των μετασχηματισμών Yang-Mills και Kalb-Ramond με τους μετασχηματισμούς Kaluza-Klein το οποίο είναι αποτέλεσμα της γενικευμένης διαστατικής ελάττωσης καθώς σε κάθε περίπτωση οι σταθερές δομής σχετίζονται με την εξάρτηση των πεδίων από τις εσωτερικές συντεταγμένες. Φυσικά έχουμε και τη μη μεταθετικότητα των εσωτερικών ισομετριών ως αποτέλεσμα της μη μηδενικής καμπυλότητας του εσωτερικού χώρου.

2.3 Καταληκτικά Σχόλια

Με αυτά τα σχόλια κλείνει η μελέτη της διαστατικής ελάττωσης των Scherk-Schwarz. Συνοψίζοντας, αναφέρουμε πως η εξάρτηση των πεδίων από τις εσωτερικές συντεταγμένες μπορεί να ερμηνευτεί από γεωμετρικής πλευράς ως τη θεώρηση του εσωτερικού χώρου ως έναν χώρο με μη μηδενική τανυστική καμπυλότητα. Για την κατάλληλη συμπεριφορά του δυναμικού το οποίο εμφανίζεται οι σταθερές δομής πρέπει να υπακούουν συγκεκριμένους περιορισμούς οι οποίοι μεταφράζονται σε περιορισμούς για την εξάρτηση των πεδίων από τις εσωτερικές συντεταγμένες στην περίπτωση του καμπύλου τόρου. Φυσικά υπάρχει σε κάθε περίπτωση η δυνατότητα για τα πεδία ύλης να έχουν αυτήν την εξάρτηση ακόμη και στον επίπεδο τόρο. Από πλευράς αποτελεσμάτων η τεχνική αυτή δίνει τη δυνατότητα σε κάποια πεδία να αποκτούν μάζες οι οποιες μπορούν να ρυθμιστούν με κατάλληλη επιλογή των διαφόρων παραμέτρων. Οι Αβελιανές συμμετρίες της αρχικής θεωρίας εξακολουθούν να είναι Αβελιανές μετά την ελάττωση, ενώ η μη Αβελιανή ομάδα ισομετριών αντιστοιχεί σε μια μη Αβελιανή ομάδα βαθμίδος της ελαττωμένης θεωρίας. Τα πεδία αυτά έχουν φορτίο και μάζα ως αποτέλεσμα των μη μηδενικών σταθερών δομής. Τα 2 είδη συμμετριών, δηλαδή οι αρχικές συμμετρίες βαθμίδος και η μη Αβελιανή συμμετρία Kaluza-Klein δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους όπως φαίνεται από τη συζήτηση του προηγούμενου εδαφίου.

Μαθηματικό Παράρτημα

Α′ Ελάττωση των φερμιονικών συγγενών συνδέσεων

Οι συνδέσεις σπιν δίνονται συναρτήσει της πλειομελούς βάσης από την εξίσωση:

$$\hat{\omega}_{\hat{c},\hat{a}\hat{b}} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{c}}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{\hat{a}}\partial_{[\hat{\mu}}e_{\hat{\nu}]\hat{b}} - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{c}}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{\hat{b}}\partial_{[\hat{\mu}}e_{\hat{\nu}]a} - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{[\hat{a}}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{\hat{b}]}\partial_{\mu}\hat{e}_{\hat{\nu}\hat{c}}$$

Χρησιμοποιούμε την άνωθεν εξίσωση όπως και τις ακόλουθες εκφράσεις για την πλειομελή βάση:

$$\hat{e}^{\hat{a}}_{\hat{\mu}} = \begin{bmatrix} \delta^{\gamma}e^{a}_{\mu} & 2\kappa V^{N}_{\mu}E^{A}_{N} \\ 0 & E^{A}_{N}U^{N}_{M} \end{bmatrix} \hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a} & -2\kappa\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a}V^{N}_{\mu}U^{-1M}_{N} \\ 0 & E^{N}_{A}U^{-1M}_{N} \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}^{\hat{\mu}\hat{a}} = \begin{bmatrix} \delta^{\gamma}e^{\mu a} & 2\kappa g^{\mu\nu}V^{N}_{\mu}E^{A}_{N} \\ 0 & E^{NA}U^{-1M}_{N} \end{bmatrix} \hat{e}^{\hat{a}\hat{\mu}} = \begin{bmatrix} \delta^{-\gamma}e^{a\mu} & -2\kappa\delta^{-\gamma}e^{a\mu}V^{N}_{\mu}U^{-1M}_{N} \\ 0 & E^{AN}U^{-1M}_{N} \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_{\hat{\mu}\hat{a}} = \begin{bmatrix} \delta^{\gamma}e_{\mu a} & 2\kappa V^{N}_{\mu}E_{AN} \\ 0 & E_{NA}U^{-1N}_{M} \end{bmatrix} \hat{e}_{\hat{a}\hat{\mu}} = \begin{bmatrix} \delta^{-\gamma}e_{a\mu} & -2\kappa\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a}V^{P}_{\mu}G_{MN}U^{-1N}_{P} \\ 0 & E_{AN}U^{-1N}_{M} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ελαττωμένες συνδέσεις, έχοντας κατά νου πως οι περισπωμένοι δείκτες παίρνουν 2 τιμές, μία για τον εσωτερικό χώρο και μία για το χωρόχρονο ενώ αν κάποια ποσότητα απουσιάζει από το ανάπτυγμα των δεικτών υπονοείται πως είναι 0. Για την $\hat{\omega}_{c,ab}$, με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$\hat{\omega}_{c,ab} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_{c}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{a}\partial_{[\hat{\mu}}e_{\hat{\nu}]b} - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{c}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{b}\partial_{[\hat{\mu}}e_{\hat{\nu}]a} - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{[a}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{b]}\partial_{\mu}\hat{e}_{\hat{\nu}c} =$$

$$(\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{c})(\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{c})\partial_{\mu}(\delta^{\gamma}e_{\nu b}) - a \leftrightarrow b - (\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{[a})(\delta^{-\gamma}e^{\nu}_{b]})\partial_{\mu}e_{\nu c} =$$

$$\delta^{-2\gamma}(e^{\mu}_{c}e^{\nu}_{a}\delta^{\gamma}\partial_{\mu}e_{\nu b} + e^{\mu}_{c}e^{\nu}_{a}e_{\nu b}\gamma\delta^{\gamma-1}\partial_{\mu}\delta - a \leftrightarrow b - e^{\mu}_{[a}e^{\nu}_{b]}\delta^{\gamma}\partial_{\mu}e_{\nu c} - e^{\mu}_{[a}e^{\nu}_{b]}e_{\nu c}\gamma\delta^{\gamma-1}\partial_{\mu}\delta)$$

Στην άνωθεν έκφραση, οι όροι που δεν περιέχουν παραγώγους του δ απαρτίζουν τη σύνδεση $\delta^{\gamma}\omega_{c,ab}$. Για τους άλλους όρους χρησιμοποιούμε τα εξής:

$$\delta^{\gamma-1}\partial_{\mu}\delta = \delta^{\gamma}\frac{\partial_{\mu}\delta}{\delta} = \delta^{\gamma}\partial_{\mu}ln\delta$$

$$e^{\mu}_{c}e^{\nu}_{a}e_{\nu b}\gamma\delta^{\gamma-1}\partial_{\mu}\delta - a \leftrightarrow b = e^{\mu}_{c}\eta_{ab}\gamma\delta^{\gamma}\partial_{\mu}ln\delta - a \leftrightarrow b = 0$$

Με βάση αυτά:

$$\hat{\omega}_{c,ab} = \delta^{-\gamma}[\omega_{c,ab} + \gamma(\eta_{ca}e^{\mu}_{b} - \eta_{cb}e^{\mu}_{a})\partial_{\mu}ln\delta]$$

Για τη σύνδεση $\hat{\omega}_{c,aB}$ έχουμε:

$$\hat{\omega}_{c,aB} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_c \hat{e}^{\hat{\nu}}_a \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\nu}]B} - a \leftrightarrow B - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{[a} \hat{e}^{\hat{\nu}}_{B]} \partial_{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\nu}c} =$$

$$\hat{e}^{\mu}_c \hat{e}^{\nu}_a \partial_{[\mu} \hat{e}_{\hat{\nu}B} + \hat{e}^{\mu}_c \hat{e}^{N}_a \partial_{\mu} \hat{e}_{NB} + \hat{e}^{M}_c \hat{e}^{N}_a \partial_M \hat{e}_{NB} - a \leftrightarrow B =$$

$$(\delta^{-\gamma} e^{\mu}_c)(\delta^{-\gamma} e^{\nu}_a) \partial_{[\mu} (2\kappa E_{NB} V^{N}_{\mu]}) + (\delta^{-\gamma} e^{\mu}_c)(-2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\nu}_a V^{K}_{[\nu} U^{-1N}_{K}) U^{P}_{N} \partial_{\mu]} E_{PB}$$

$$+ (2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\mu}_c V^{K}_{\mu} U^{-1M}_{K})(2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\nu}_a V^{P}_{\nu} U^{-1N}_{P}) E_{\Lambda B} \partial_{[M} U^{\Lambda}_{N]} =$$

$$2\kappa \delta^{-2\gamma} e^{\mu}_c e^{\nu}_a E_{\Lambda B} (\partial_{[\mu} V^{\Lambda}_{\nu]} + 2\kappa V^{K}_{\mu} V^{P}_{\nu} U^{-1M}_{K} U^{-1N}_{P} \partial_{[M} U^{\Lambda}_{N]}) =$$

$$\kappa \delta^{-2\gamma} e^{\mu}_c e^{\nu}_a E_{MB} (\partial_{\mu} V^{M}_{\nu} - \partial_{\nu} V^{M}_{\mu} + 2\kappa V^{N}_{\mu} V^{P}_{\nu} \gamma^{M}_{PN}) = \kappa \delta^{-2\gamma} e^{\mu}_c e^{\nu}_a E_{MB} V^{M}_{\mu\nu}$$

με το μη Αβελιανό πεδίο να είναι:

$$V^{M}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} V^{M}_{\nu} - \partial_{\nu} V^{M}_{\mu} - 2\kappa \gamma^{M}_{NP} V^{N}_{\mu} V^{P}_{\nu}$$

Για την $\hat{\omega}_{c,AB}$ έχουμε:

$$\hat{\omega}_{c,AB} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_c \hat{e}^{\hat{\nu}}_A \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\nu}]B} - A \leftrightarrow B - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{[A} \hat{e}^{\hat{\nu}}_{B]} \partial_{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\nu}c} =$$

$$\hat{e}^{\mu}_c \hat{e}^{N}_A \partial_{[\mu} \hat{e}_{\nu]B} + \hat{e}^{\mu}_c \hat{e}^{N}_A \partial_{[M} \hat{e}_{N]B} - A \leftrightarrow B =$$

$$(\delta^{-\gamma} e^{\mu}_c)(E^{K}_A U^{-1N}_{K}) U^{P}_{N} \tfrac{1}{2} \partial_{\mu} E_{PB} + (-2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\mu}_c V^{K}_{\mu} U^{-1M}_{K})(E^{P}_A U^{-1N}_{P}) \partial_{[M} U^{\Lambda}_{N]} - A \leftrightarrow B =$$

$$\delta^{-\gamma} e^{\mu}_c (\tfrac{1}{2} E^{K}_A \partial_{\mu} E_{KB} - 2\kappa V^{K}_{\mu} E^{P}_A E_{\Lambda B} U^{-1M}_{K} U^{-1N}_{P} \partial_{[M} U^{\Lambda}_{N]}) - A \leftrightarrow B =$$

$$\delta^{-\gamma} e^{\mu}_c (\tfrac{1}{2} E^{N}_A \partial_{\mu} E_{NB} - \kappa V^{P}_{\mu} E^{N}_A \gamma^{M}_{NP}) - A \leftrightarrow B = \tfrac{1}{2} \delta^{-\gamma} e^{\mu}_c E^{N}_A D_{\mu} E_{NB} - A \Leftrightarrow B$$

Όπου ορίσαμε τη συναλλοίωτη παράγωγο: $D_{\mu} E_{NB} = \partial_{\mu} E_{NB} - 2\kappa V^{P}_{\mu} \gamma^{M}_{NP}$

$$\hat{\omega}_{C,ab} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_C \hat{e}^{\hat{\nu}}_a \partial_{[\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\nu}]b} - a \leftrightarrow b - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{[a} \hat{e}^{\hat{\nu}}_{b]} \partial_{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\nu}C} =$$

$$- \hat{e}^{\mu}_{[a} \hat{e}^{\nu}_{b]} \partial_{\mu} \hat{e}_{\nu C} - \hat{e}^{M}_{[a} \hat{e}^{\nu}_{b]} \partial_M \hat{e}_{\nu C} - \hat{e}^{M}_{[a} \hat{e}^{N}_{b]} \partial_M \hat{e}_{NC} =$$

$$- (\delta^{-\gamma} e^{\mu}_a)(\delta^{-\gamma} e^{\nu}) \partial_{[\mu} (2\kappa E_{NC} V^{N}_{\nu]}) - (\delta^{-\gamma} e^{\mu}_a)(-2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\nu}_b V^{K}_{[\nu} U^{-1M}_{K}) U^{N}_{M} \partial_{\mu]} E_{NC}$$

$$- (2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\mu}_{[a} V^{K}_{\mu} U^{-1N}_{K})(2\kappa \delta^{-\gamma} e^{\nu}_{b]} V^{P}_{\mu} U^{-1M}_{P}) E_{\Lambda C} \partial_N U^{\lambda}_{M} =$$

$$- 2\kappa \delta^{-2\gamma} (e^{\mu}_a e^{\nu}_b E_{MC} \partial_{[\mu} V^{M}_{\nu]} + 2\kappa e^{\mu}_a e^{\nu}_b V^{N}_{\mu} V^{P}_{\nu} U^{-1K}_{N} U^{-1\Lambda}_{P} \partial_{[K} U^{M}_{\Lambda]} E_{MC}) =$$

$-2\kappa\delta^{-2\gamma}E_{MC}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}(\partial_{[\mu}V^{M}_{\nu]}+\kappa V^{N}_{\mu}V^{P}_{\nu}\gamma^{M}_{PN}) = -\kappa\delta^{-2\gamma}E_{MC}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}(\partial_{\mu}V^{M}_{\nu}-\partial_{\nu}V^{M}_{\nu}-2\kappa V^{N}_{\mu}V^{P}_{\nu}\gamma^{M}_{NP}) =$

$-\kappa\delta^{-2\gamma}E_{MC}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}V^{M}_{\mu\nu}$

$\hat{\omega}_{C,aB} = \hat{e}^{M}_{C}\hat{e}^{N}_{a}\partial_{[M}\hat{e}_{N]B} - \frac{1}{2}\hat{e}^{\mu}_{a}\hat{e}^{N}_{B}\partial_{\mu}\hat{e}_{NC} - \hat{e}^{M}_{a}\hat{e}^{N}_{B}\partial_{[M}\hat{e}_{N]C} =$

$(U^{-1}M_{\Lambda}E^{\Lambda}_{C})(-2\kappa\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a}V^{K}_{\mu}U^{-1N}_{K})E_{PB}\partial_{[M}U^{P}_{N]} - \frac{1}{2}(\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a})(U^{-1N}_{\Lambda}E^{\Lambda}_{B})U^{K}_{N}\partial_{\mu}E_{KC}$

$-(-2\kappa\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a}V^{K}_{\mu}U^{-1M}_{K})(U^{-1N}_{\Lambda}E^{\Lambda}_{B})E_{PC}\partial_{[M}U^{P}_{N]} =$

$-\frac{1}{2}\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{a}(E^{N}_{B}\partial_{\mu}E_{NC} - 2\kappa E^{\Lambda}_{B}E_{PC}V^{K}_{\mu}\gamma^{P}_{\Lambda K}) = -\frac{1}{2}e^{\mu}_{a}E^{N}_{B}D_{\mu}E_{NC}$

$\hat{\omega}_{C,AB} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_{C}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{A}\partial_{[\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{\nu}]B} - A \leftrightarrow B - \hat{e}^{\hat{\mu}}_{[A}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{B]}\partial_{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{\nu}C} =$

$\hat{e}^{M}_{C}\hat{e}^{M}_{A}\partial_{[M}\hat{e}_{N]B} - A \leftrightarrow B - \hat{e}^{M}_{A}\hat{e}^{N}_{B}\partial_{[M}\hat{e}_{N]C} =$

$(E^{K}_{C}U^{-1M}_{K})(E^{P}_{A}U^{-1N}_{P})E_{\Lambda B}\partial_{[M}U^{\Lambda}_{N]} - (E^{K}_{C}U^{-1M}_{K})(E^{P}_{B}U^{-1N}_{P})E_{\Lambda A}\partial_{[M}U^{\Lambda}_{N]}$

$-(U^{-1M}_{K}E^{K}_{A})(U^{-1N}_{P}E^{P}_{B})E_{\Lambda C}\partial_{[M}U^{\Lambda}_{N]} =$

$U^{-1M}_{K}U^{-1N}_{P}\partial_{[M}U^{\Lambda}_{N]}(E^{K}_{C}E^{P}_{A}E_{\Lambda B} - E^{K}_{C}E^{P}_{B}E_{\Lambda A} - E^{K}_{A}E^{P}_{B}E_{\Lambda C}) =$

$\frac{1}{2}\gamma^{\Lambda}_{PK}(E^{K}_{C}E^{P}_{A}E_{\Lambda B} - E^{K}_{C}E^{P}_{B}E_{\Lambda A} - E^{K}_{A}E^{P}_{B}E_{\Lambda C}) =$

$\frac{1}{2}\gamma^{M}_{NP}(E^{N}_{A}E^{P}_{B}E_{MC} + E^{N}_{A}E^{P}_{C}E_{MB} - E^{N}_{B}E^{P}_{C}E_{MA})$

Συγκεντρώνοντας λοιπόν τα άνωθεν έχουμε τον πίνακα:

$\hat{\omega}_{c,ab} = \delta^{-\gamma}[\omega_{c,ab} + \gamma(\eta_{ca}e^{\mu}_{b} - \eta_{cb}e^{\mu}_{a})\partial_{\mu}ln\delta]$

$\hat{\omega}_{c,aB} = \kappa\delta^{-2\gamma}e^{\mu}_{c}e^{\nu}_{a}E_{MB}V^{M}_{\mu\nu}$

$\hat{\omega}_{c,AB} = \frac{1}{2}\delta^{-\gamma}e^{\mu}_{c}E^{N}_{A}D_{\mu}E_{NB} - A \Leftrightarrow B$

$\hat{\omega}_{C,ab} = -\kappa\delta^{-2\gamma}E_{MC}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}V^{M}_{\mu\nu}$

$\hat{\omega}_{C,aB} = -\frac{1}{2}e^{\mu}_{a}E^{N}_{B}D_{\mu}E^{[?]}_{NC}$

$\hat{\omega}_{C,AB} = \frac{1}{2}\gamma^{M}_{NP}(E^{N}_{A}E^{P}_{B}E_{MC} + E^{N}_{A}E^{P}_{C}E_{MB} - E^{N}_{B}E^{P}_{C}E_{MA})$

Μπορεί κανείς εύκολα να αναπαράξει τις ίδιες συνδέσεις για την περίπτωση της Kaluza-Klein διαστατικής ελάττωσης θέτοντας $U^{M}_{N} = \delta^{M}_{N} \rightarrow \gamma^{M}_{NP} = 0$.

Αναφορές

[1] J.Scherk, J.H.Schwarz *How to get masses from extra dimensions*

[2] N.Kaloper, R.C. Myers *The O(dd) Story of Massive Supergravity*

[3] D.Z. Freedman, A.V.Proeyen *Supergravity*

[4] K.Sfetsos, *Notes on Theoretical and Mathematical Physics*