

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ



ΒΑΣΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Συναρτησοειδές ενεργειακής πυκνότητας KIDS  
και σχέση μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων

Gilho Ahn  
AM: 201628

Αθήνα 2018

## ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Πρώτο Μέλος: **Φ. Διάκονος**, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Δεύτερο Μέλος: **Θ. Μερτζιμέκης**, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Τρίτο Μέλος: **Π. Παπακωνσταντίνου**, Ερευνήτρια, IBS, Daejeon, S. Korea

Αναπληρωματικό Μέλος: **Ε. Στυλιάρης**, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Συναρτησοειδές ενεργειακής πυκνότητας KIDS και  
σχέση μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων

του φοιτητή

Gilho Ahn

A.M.: 2016 28

## Ευχαριστίες

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω την ερευνήτρια **Παναγιώτα Παπακωνσταντίνου**, η οποία με εισήγαγε στον κόσμο των συναρτησοειδών KIDS και παρά την τεράστια απόσταση, ήταν πάντοτε διαθέσιμη για να προσφέρει βοήθεια και καθοδήγηση, καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής, κ. **Φώτη Διάκονο**, κ. **Θεόδωρο Μερτζιμέκη** και κ. **Ευστάθιο Στυλιάρη**.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω την καθηγήτρια **Ειρήνη Μαυρομμάτη**, η οποία συνέβαλλε τα μέγιστα στην παρούσα εργασία και προφανώς χωρίς την πολύτιμη βοήθειά της δε θα μπορούσα να ολοκληρώσω τις σπουδές μου στο μεταπτυχιακό του τμήματος Φυσικής, καθώς και όλους τους υπόλοιπους καθηγητές μου που με έφεραν μέχρι εδώ που έφτασα.

Ευχαριστώ επίσης την μητέρα μου **Maria Oh** και τον αδερφό μου **Hyunho Ahn**, χωρίς την αστείρευτη αγάπη και ατελείωτη στήριξη των οποίων δε θα μπορούσα να συνεχίσω την προσπάθειά μου στην ακαδημαϊκή καριέρα.

Τέλος, φυσικά δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την **Μαρία Καρλατήρα**, χωρίς την οποία δε θα είχα αυτήν την αγάπη προς το αντικείμενο της Φυσικής από τα σχολικά μου χρόνια.

## Περίληψη

Οι προσπάθειες να γίνουν κατανοητοί οι αστέρες νετρονίων συνεχίζονται με έντονο ενδιαφέρον, ύστερα από την επιβεβαίωση ότι η γρήγορη διαδικασία σύλληψης νετρονίων ( $r$  – process) λαμβάνει χώρα και κατά τη συγχώνευση δυο αστέρων νετρονίων. Γίνονται επίσης πολλές προσπάθειες για τον προσδιορισμό της πυρηνικής καταστατικής εξίσωσης, η οποία καθορίζει τις ιδιότητες και την εξέλιξη των αστέρων νετρονίων. Μείζονος σημασίας είναι η επιβολή περιορισμών στις παραμέτρους της πυρηνικής ενέργειας συμμετρίας. Στις παραπάνω προσπάθειες, η θεωρία συναρτησοειδούς πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας (EDF) έχει αποδειχτεί πολύ χρήσιμη, αφού εμπεριέχει επιτυχώς αλληλοσυσχετίσεις και τις δυνάμεις τριών σωμάτων και παρέχει μια ενοποιημένη περιγραφή των πυρήνων, που μπορούν να μελετηθούν στο εργαστήριο, και της απείρων διαστάσεων ύλης, καθώς και της καταστατικής της εξίσωσης, η οποία είναι απαραίτητο δεδομένο για την εξεύρεση της σχέσης μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων.

Στην παρούσα εργασία, μελετάται ένα νέο συναρτησοειδές πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας, το συναρτησοειδές KIDS, με ιδιαίτερη έμφαση στην πυρηνική ενέργεια συμμετρίας. Συγκεκριμένα, η μορφή του συναρτησοειδούς μάζ επιτρέπει να μελετήσουμε πώς η μέγιστη μάζα ενός αστέρα νετρονίων επηρεάζεται από την επιλογή των ανώτερης τάξης παραγώγων της ενέργειας συμμετρίας, οι οποίες δεν είναι καλώς οριοθετημένες από τα πυρηνικά δεδομένα και τις παρατηρήσεις. Παρουσιάζονται κάποιοι πρώτοι περιορισμοί στην κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας, οι οποίοι θα βοηθήσουν σε περαιτέρω βελτιώσεις.

# Abstract

The efforts to understand neutron stars continue with intense interest, as it has been confirmed that it is also during the merging of two neutron stars that r-process takes place. Many efforts are made to determine the nuclear equation of state which governs the properties and evolution of neutron stars. Especially important is to constrain the parameters of the nuclear symmetry energy. In those efforts, nuclear energy density functional (EDF) theory has been a very useful tool, as it encodes efficiently correlations and the three-body force and it provides a unified framework for the description both of nuclei, which can be studied on Earth, and of infinite matter and its nuclear equation of state, which is a necessary input in order to find the mass-radius relation of neutron stars.

In the present study, a new nuclear EDF, the KIDS functional, is explored with a focus on the nuclear symmetry energy. In particular, the form of the functional allows us to examine how the maximum possible mass of a neutron star is affected by the choice of high-order derivatives of the symmetry energy, which are not sufficiently constrained from nuclear data and observations. Some first constraints on the skewness are presented, which will help guide further refinements.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Συναρτησοειδές KIDS</b>	<b>4</b>
2.1	Συναρτησοειδή της πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας (EDF) . . . . .	4
2.2	Συναρτησοειδές KIDS . . . . .	7
2.3	Σχέση του KIDS με το συναρτησοειδές Skyrme . . . . .	11
2.4	Σχέση του KIDS με άλλα συναρτησοειδή . . . . .	13
2.4.1	Σχέση με Gogny . . . . .	13
2.4.2	Σχέση με RMF . . . . .	13
2.4.3	Σχέση με BHF . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Ενέργεια Συμμετρίας και σχέση μάζας-ακτίνας αστέρων νετρονίων</b>	<b>15</b>
3.1	Ενέργεια Συμμετρίας στα πλαίσια της θεωρίας συναρτησοειδούς πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας . . . . .	15
3.2	Αστέρες νετρονίων . . . . .	20
3.3	Σχέση μάζας-ακτίνας αστέρων νετρονίων . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Καταστατικές εξισώσεις και σχέση μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων</b>	<b>27</b>
4.1	Καθαρή νετρονική ύλη (Pure Neutron Matter, PNM) . . . . .	27
4.2	Συμμετρική πυρηνική ύλη (Symmetric Nuclear Matter, SNM) . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα</b>	<b>52</b>
<b>6</b>	<b>Αναφορές</b>	<b>53</b>
<b>7</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>56</b>
7.1	Κλάσμα πρωτονίων σε αστρική ύλη . . . . .	56
7.2	Κώδικας (σε Python) για προσδιορισμό των παραμέτρων του συναρτησοειδούς KIDS . . . . .	59
7.3	Κώδικας σε (Python) για εξεύρεση πυκνότητας από κλάσμα ταχύτητας ήχου . . . . .	62

# 1 Εισαγωγή

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα της Πυρηνικής Φυσικής είναι η πλήρης κατανόηση της πυρηνικής ύλης. Χάρη στον πλούτο πειραματικών δεδομένων για πυρήνες κοντά στην κοιλάδα σταθερότητας, οι βασικές ιδιότητες συμμετρικής ύλης κοντά στην πυκνότητα κορεσμού είναι αρκετά καλά προσδιορισμένες. Οι γνώσεις μας όμως της ύλης κοντά στη γραμμή διαφυγής νετρονίων του ισοτοπικού χάρτη, και ως εκ τούτου της μη συμμετρικής ύλης, είναι ελλιπείς [1, 2, 3]. Τα τελευταία χρόνια, η προσοχή έχει στραφεί στους αστέρες νετρονίων, ύστερα και από την πειραματική επιβεβαίωση ότι μια από τις πιο σημαντικές πυρηνικές διεργασίες, η γρήγορη σύλληψη νετρονίων ( $r$  – process), λαμβάνει χώρα και κατά τη συγχώνευση δυο αστέρων νετρονίων [4].

Η ύλη στους αστέρες νετρονίων είναι πυκνή και πολύ ασύμμετρη. Παραδοσιακά μοντέλα δε μπορούν να την περιγράψουν. Επίσης, είναι δύσκολη η κατασκευή και μελέτη τόσο πυκνής ύλης στο εργαστήριο, οπότε είναι ελάχιστα τα διαθέσιμα πειραματικά μεγέθη και οι πειραματικές παρατηρήσεις. Από τα λίγα διαθέσιμα εργαλεία, όμως, έχουν προκύψει πολλά θεωρητικά μοντέλα προσαρμοσμένα πάνω σε αυτά. Τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα βασίζονται πάνω στη θεωρία συναρτησοειδών πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας, όπως το μοντέλο Skyrme και το μοντέλο Gogny [5]. Αυτά τα μοντέλα εφαρμόζονται και στους πυρήνες και στην πυρηνική ύλη και βοηθούν στην εξεύρεση της καταστατικής εξίσωσης των αστέρων νετρονίων.

Τα συναρτησοειδή που χρησιμοποιούνται, προσαρμόζονται κυρίως σε πειραματικά δεδομένα, με αποτέλεσμα να περιγράφουν την πυρηνική ύλη πολύ καλά σε πυκνότητες κοντά στην πυκνότητα κορεσμού ( $\rho_0$ ), περιοχή στην οποία οι υπάρχουσες γνώσεις βρίσκονται σε ένα αρκετά καλό επίπεδο, ενώ μακριά από αυτήν την πυκνότητα, διαφορετικά μοντέλα προβλέπουν διαφορετική συμπεριφορά της πυρηνικής ύλης. Αυτό φυσικά σημαίνει πολλές διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις, αναλόγως με το συναρτησοειδές που έχει προταθεί και δεν υπάρχει κάποιος άμεσος τρόπος να ελεγχθεί ποιο συναρτησοειδές περιγράφει σωστά την πυρηνική ύλη σε πυκνότητες μακριά από την πυκνότητα κορεσμού και σε μη συμμετρική ύλη.

Σημαντική συνιστώσα της καταστατικής εξίσωσης είναι η ενέργεια συμμετρίας συναρτησει της πυκνότητας, που χαρακτηρίζεται συνήθως από την τιμή της και από τις τιμές των παραγώγων της στην πυκνότητα κορεσμού. Αυτή επηρεάζει τη δομή ακόμα και σταθερών πυρήνων, και φυσικά και τους αστέρες νετρονίων, καθώς υπεισέρχεται στις εξισώσεις Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) που τους διέπουν. Η τιμή της, πέραν ίσως της τιμής της στην πυκνότητα κορεσμού ( $J$ ), δεν έχει οριοθετηθεί επαρκώς



πειραματικά. Το ίδιο ισχύει και για τις παραγώγους της.

Υπάρχουν, όμως, κάποια κριτήρια που πρέπει να πληρούν οι καταστατικές εξισώσεις. Αστρονομικές παρατηρήσεις περιορίζουν τις αποδεκτές καταστατικές εξισώσεις, όπως η παρατήρηση ενός αστέρα νετρονίων με μάζα μεγαλύτερη από δύο ηλιακές μάζες [6]. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα όσα συναρτησοειδή δε μπορούσαν να προβλέψουν μέγιστη μάζα αστέρων νετρονίων μεγαλύτερη από δύο ηλιακές μάζες να αναθεωρούνται. Εξαιρετικά χρήσιμοι είναι και μικροσκοπικοί υπολογισμοί της καταστατικής εξίσωσης με χρήση ρεαλιστικών αλληλεπιδράσεων ή βασισμένοι σε ενεργές θεωρίες πεδίου [7, 8, 9]. Τα αποτελέσματα τέτοιων υπολογισμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ψευδοδεδομένα για την προσαρμογή εύχρηστων συναρτησοειδών.

Μια μέθοδος που μας επιτρέπει να επιλέγουμε κατά βούληση τις τιμές των απροσδιόριστων μεγεθών και να τις εφαρμόζουμε απευθείας στην περιγραφή αστέρων νετρονίων, ώστε να ελέγχουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων στο κάθε μέγεθος, αλλά και το αν συμφωνούν τα αποτελέσματα με τις αστρονομικές παρατηρήσεις είναι επιθυμητή. Μια τέτοια μεθοδολογία είναι αδύνατη στα πλαίσια συνήθων συναρτησοειδών, που απαιτούν κάθε φορά προσαρμογή σε δεδομένα για πεπερασμένους πυρήνες, αλλά είναι ένα από τα πλεονεκτήματα του συναρτησοειδούς KIDS που μελετάται στην παρούσα εργασία. Η μορφή του συναρτησοειδούς KIDS, με τέσσερις παραμέτρους να χαρακτηρίζουν τη νετρονική ύλη και τουλάχιστον τρεις τη συμμετρική πυρηνική ύλη, επιτρέπει κατά βούληση επιλογή των ιδιοτήτων της πυρηνικής ύλης και ειδικότερα της ενέργειας συμμετρίας. Η μορφή του, καθώς και αρχικές αποδεκτές τιμές των παραμέτρων του έχουν προκαθοριστεί με τη βοήθεια ψευδοδεδομένων.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια εξαγωγής ενός συναρτησοειδούς KIDS από μεγέθη που έχουν προσδιοριστεί πειραματικά και σύγκρισης με συναρτησοειδή KIDS που έχουν προκύψει θεωρητικά από ψευδοδεδομένα. Κάποια από τα πειραματικά οριοθετημένα μεγέθη δεν είναι επακριβώς προσδιορισμένα και ένας από τους στόχους της εργασίας είναι ένας έλεγχος του κατά πόσον μπορούμε να απομακρυνθούμε από τις αρχικά αποδεκτές τιμές του συναρτησοειδούς, καθώς και το αν τρεις παράμετροι θα επαρκούσαν για την περιγραφή της νετρονικής ύλης. Κριτήριό μας είναι η περιγραφή αστέρων νετρονίων και ειδικότερα κατά πόσον η κάθε παραμετροποίηση μπορεί να προβλέψει αστέρα νετρονίων με μάζα μεγαλύτερη των δυο ηλιακών μαζών. Παρά το γεγονός ότι τα συναρτησοειδή που βρέθηκαν στην εργασία μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για μελέτη πυρηνικής δομής [10], στην παρούσα εργασία έχουν χρησιμοποιηθεί μόνο για τον προσδιορισμό των καταστατικών εξισώσεων.

Το περιεχόμενο της εργασίας είναι δομημένο ως εξής. Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία συναρτησοειδών πυκνότητας πυρηνικής ε-

νέργειας και επικεντρωνόμαστε στο μοντέλο που μας απασχολεί, το συναρτησοειδές KIDS. Γίνεται και μια συσχέτιση του μοντέλου αυτού με ήδη γνωστά μοντέλα. Στο τρίτο κεφάλαιο, εισάγεται το πιο σημαντικό μέγεθος, η ενέργεια συμμετρίας, καθώς και οι παράγωγοί της. Γίνεται μια εισαγωγή στους αστέρες νετρονίων και στο πώς προσδιορίζεται η σχέση μάζας-ακτίνας των αστέρων νετρονίων. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το υπολογιστικό μέρος της εργασίας. Παρουσιάζονται όλοι οι υπολογισμοί της καταστατικής εξίσωσης που έγιναν, για δυο ακραίες περιπτώσεις, την καθαρή νετρονική ύλη και τη συμμετρική πυρηνική ύλη, και στη συνέχεια αυτός της καταστατικής εξίσωσης της αστρικής ύλης. Με τη βοήθεια αυτής, παρουσιάζονται οι υπολογισμοί της σχέσης μάζας - ακτίνας των αστέρων νετρονίων, καθώς και το τι προοπτικές υπάρχουν για μελλοντικές έρευνες. Τα παραρτήματα αφορούν λεπτομέρειες των υπολογισμών.

## 2 Συναρτησοειδές KIDS

### 2.1 Συναρτησοειδή της πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας (EDF)

Η θεωρία συναρτησοειδούς πυκνότητας (Density Functional Theory, DFT) είναι μια μη τοπική προσέγγιση, η οποία χρησιμοποιείται για να περιγραφούν οι ιδιότητες πολύπλοκων συστημάτων πολλών σωμάτων, τα οποία είναι ισχυρά συζευγμένα [11].

Η θεωρία αυτή, που αρχικά αναπτύχθηκε στα πλαίσια της φυσικής στερεάς κατάστασης και της χβαντικής χημείας [12, 13], δε γενικεύεται εύκολα σε ατομικούς πυρήνες, αφού οι πυρήνες είναι μικρά, αυτοδέσμια (self – bound) συστήματα δύο ειδών φερμιονίων. Οι μικρές διαστάσεις αυτών οδηγούν σε σημαντικές χβαντικές διακυμάνσεις, οι οποίες είναι δύσκολο να συμπεριληφθούν στο ενεργειακό συναρτησοειδές. Η απουσία εξωτερικού δυναμικού υπονοεί ότι το πυρηνικό συναρτησοειδές ενεργειακής πυκνότητας πρέπει να γραφεί σε όρους εσωτερικών ομαλών και μη-ομαλών (σύζευξης) πυκνοτήτων [14]. Παρ’ όλα αυτά, χρησιμοποιείται ευρέως και με αρκετή επιτυχία σε μικροσκοπικές μελέτες πολύπλοκων βαριών πυρήνων [5]. Παρέχει ένα ενιαίο πλαίσιο περιγραφής τόσο πεπερασμένων πυρήνων, όσο και πυρηνικής ύλης ”απέιρων” διαστάσεων.

Τα παραδοσιακά μοντέλα προσαρμόζονται στις πυρηνικές ιδιότητες που μπορούν να μετρηθούν πειραματικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μπορούν αυτά τα μοντέλα να αναπαράγουν τις πυρηνικές ιδιότητες στην κοιλάδα σταθερότητας, αλλά κοντά στις γραμμές διαφυγής νετρονίων και πρωτονίων (Drip Lines) ή σε πυκνότητες μακριά από την πυρηνική πυκνότητα κορεσμού, όπου δεν υπάρχουν ακριβή πειραματικά δεδομένα, οι επεκτάσεις (extrapolations) πρέπει να γίνονται προσεκτικά. Νέα πειράματα σε εξωτικούς πυρήνες, καθώς και αστρονομικές παρατηρήσεις, όπως η εύρεση αστερών νετρονίων με μάζα μεγαλύτερη από δύο ηλιακές μάζες [6, 15], περιορίζουν τον αριθμό των αποδεκτών συναρτησοειδών. Έχουν επίσης προταθεί νέα συναρτησοειδή, όπως αυτά που έχουν προκύψει από ανάπτυγμα του πίνακα πυκνότητας (density matrix) [16].

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι να εφαρμόσει κανείς τη θεωρία συναρτησοειδούς πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας. Τρεις από τις πιο γνωστές μεθόδους είναι η τοπική (Skyrme), η μη-τοπική (Gogny) και η συναλλοιώτη (σχετικιστική) προσέγγιση [5, 17, 18]. Πρακτικά, τα συναρτησοειδή πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας διαφέρουν μεταξύ τους στην μορφή του συναρτησοειδούς και ακόμα και δύο συναρτησοειδή ίδιας μεθόδου μπορεί να δώσουν διαφορετικές προβλέψεις [11]. Τα παραπάνω είναι επιτυχη-

μένα και ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα για την περιγραφή της πυρηνικής δομής, αποτελούν τη βάση για τη θεωρία συναρτησοειδών της πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας και εφαρμόζονται στην περιγραφή σταθερών και εξωτικών πυρήνων, καθώς και στην εξαγωγή της νουκλεονικής καταστατικής εξίσωσης.

Εν γένει, τα συναρτησοειδή πυκνότητας ενέργειας δεν έχουν άμεση σχέση με κάποια συγκεκριμένη αλληλεπίδραση μεταξύ νουκλεονίων, αλλά είναι ενιαία (universal) συναρτησοειδή πυκνοτήτων και ρευμάτων νουκλεονίων. Χρησιμοποιώντας ενιαίες παραμέτρους, οι οποίες έχουν προκύψει από προσαρμογή σε εμπειρικές ιδιότητες νουκλεονικής ύλης και σε επιλεγμένα δεδομένα σε πεπερασμένους πυρήνες (βλ. π.χ. [19, 20] ως πρόσφατα παραδείγματα), τα μοντέλα που βασίζονται σε συναρτησοειδή πυκνότητας ενέργειας επιτρέπουν την συνεπή περιγραφή πολλών φαινομένων πυρηνικής δομής.

Το ακριβές και ενιαίο συναρτησοειδές πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας, το οποίο είναι προς το παρόν άγνωστο, προσεγγίζεται από απλά, και επί το πλείστον αναλυτικά, συναρτησοειδή, δομημένα από δυνάμεις και παραγωγούς πυρηνικών πυκνοτήτων και ρευμάτων, αντιπροσωπεύοντας κατανομές ύλης, σπιν, ορμής και κινητικής ενέργειας. Όταν συμπεριληφθούν συσχετίσεις σύζευξης (pairing), αναπαριστώνται από ζεύγη πυκνοτήτων. Στο πεδίο της πυρηνικής δομής, αυτή η μέθοδος είναι ανάλογη με τη θεωρία συναρτησοειδών πυκνότητας Kohn-Sham. Τα αυτοσυνεπή μοντέλα μέσου πεδίου αντιστοιχούν το πυρηνικό πρόβλημα πολλών σωμάτων σε ένα πρόβλημα ενός σώματος χρησιμοποιώντας τα βοηθητικά (auxiliary) μονοσωματιδιακά τροχιακά Kohn-Sham. Συμπεριλαμβάνοντας στο συναρτησοειδές πυκνότητας ενέργειας συσχετίσεις πολλών σωμάτων, η μέθοδος Kohn-Sham μπορεί να επεκταθεί πέραν των προσεγγίσεων Hartree-Fock και Hartree-Fock-Bogolyubov και έχει το πλεονέκτημα ότι χρησιμοποιεί τοπικά δυναμικά. Έχουν περιγραφεί επιτυχώς πολλές πυρηνικές ιδιότητες χρησιμοποιώντας αυτοσυνεπή μοντέλα μέσω πεδίων βασισμένα σε συναρτησοειδή πυκνότητας ενέργειας με αλληλεπίδραση Skyrme, σχετικιστικά συναρτησοειδή πυκνότητας ενέργειας και αλληλεπίδραση Gogny [5, 17, 18, 21, 22]. Εντούτοις, έχει πρόσφατα αναγνωριστεί ότι ελάχιστα από τα συναρτησοειδή παραδοσιακής μορφής περιγράφουν επιτυχώς και τους πυρήνες και την πυρηνική ύλη [23, 24].

Όλα τα μοντέλα που έχουν προταθεί συμφωνούν ότι ο όρος με την εξάρτηση από την πυκνότητα είναι αναπόσπαστο κομμάτι. Στο αρχικό μοντέλο Skyrme [25], καθώς και σε άλλα παλιότερα μοντέλα, είχε εισαχθεί μια απωστική δύναμη τριών σωμάτων επαφής, η οποία αντισταθμίζει την ελκτική αλληλεπίδραση δυο σωμάτων και παράγει κορεσμό. Έχει βρεθεί ότι η δύναμη τριών σωμάτων ισοδυναμεί με έναν όρο αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων, του οποίου η ισχύς ζεύξης (coupling strength) εξαρτάται γραμμικά από την τοπική πυκνότητα σε ορισμένες περιπτώσεις [26]. Μεταγενέστερα, η γραμμική

εξάρτηση αντικαταστάθηκε από κλασματικές εξαρτήσεις όπως  $\rho^{\frac{1}{3}}$  και  $\rho^{\frac{1}{6}}$  με σκοπό μια ακριβέστερη περιγραφή του συντελεστή συμπίεστικότητας (compression modulus). Και οι παραμετροποιήσεις Gogny [27], οι οποίες είναι πεπερασμένης εμβέλειας, ενισχύονται με έναν τέτοιο όρο. Η δύναμη της πυκνότητας είτε προσαρμόζεται, είτε συμπληρώνεται "με το χέρι". Τελευταία, περιλαμβάνονται περισσότεροι από ένας όροι με εξάρτηση από την πυκνότητα, αλλά η μορφή του επιλέγεται αυθαίρετα [28, 29]. Αυτό μπορεί να δώσει ακριβή προσαρμογή, αλλά υπάρχει κίνδυνος υπερπροσαρμογής, ο οποίος μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της προβλεπτικής ικανότητας.

## 2.2 Συναρτησοειδές KIDS

Το συναρτησοειδές που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία, το συναρτησοειδές KIDS (Korea - IBS - Daegu - Sungkyunkwan) [30], ξεκίνησε να αναπτύσσεται προκειμένου να αντιμετωπίσει τα παραπάνω προβλήματα.

Πρώτον, σε αντίθεση με άλλα μοντέλα, στα οποία η εξάρτηση από την πυκνότητα επιλέγεται αυθαίρετα, το συναρτησοειδές KIDS χρησιμοποιεί δυνάμεις της ορμής Fermi, δηλαδή το ανάπτυγμα γίνεται σε δυνάμεις του  $\rho^{\frac{1}{3}}$ . Πράγματι, δυνάμεις του  $k_F$  εμφανίζονται συστηματικά, όπως για παράδειγμα στη θεωρία του Brueckner για ομογενή ύλη [2] και στη θεωρία ενεργειακού συναρτησοειδούς για αραιά συστήματα Fermi χωρίς πόνια [31]. Εξάλλου, είναι αποδεδειγμένο στα πλαίσια της χειραλικής θεωρίας διαταραχών ότι κοντά στην πυκνότητα κορεσμού οι χαμηλότερης τάξης όροι  $k_F^3$ ,  $k_F^4$  είναι σημαντικοί και αναντικατάστατοι [32]. Αυτό σημαίνει ότι η κυβική ρίζα της πυκνότητας όχι μόνο αναδύεται φυσικά στην έκφραση της ενέργειας ανά σωματίδιο ως  $k_F$ , αλλά και δε μπορεί να αγνοηθεί.

Δεύτερον, οι παράμετροί του βασίζονται σε γνωστές ή ευρέως αποδεκτές ιδιότητες της πυρηνικής ύλης κοντά στον κορεσμό. Η τελική επιλογή των όρων έγινε με τη βοήθεια στατιστικής ανάλυσης, ενώ ελέγχθηκε, επίσης, και η φυσικότητά τους. Στις προεκτάσεις σε αραιά ή ασύμμετρη ύλη, το συναρτησοειδές KIDS αναπαράγει μια ποικιλία υπάρχοντων μικροσκοπικών αποτελεσμάτων, στα οποία δεν έχει γίνει προσαρμογή. Επίσης, προβλέπει μια σχέση μάζας - ακτίνας για τους αστέρες νετρονίων, η οποία είναι συνεπής με αστρονομικές παρατηρήσεις.

Σύμφωνα με το μοντέλο KIDS, η προσέγγιση για την ενέργεια ανά σωματίδιο (Energy per particle)  $\varepsilon$ , αγνοώντας την συνεισφορά Coulomb στην περίπτωση ενός ομογενούς συστήματος νουκλεονίων με πυκνότητα πρωτονίων  $\rho_p$  και πυκνότητα νετρονίων  $\rho_n$  δίνεται από την έκφραση:

$$\varepsilon(\rho, \delta) = \frac{E(\rho, \delta)}{A} = T(\rho, \delta) + \sum_{i=0}^3 c_i(\delta) \rho^{1+\frac{i}{3}} \quad (1)$$

όπου  $\rho = \rho_p + \rho_n$  η ολική πυκνότητα και  $\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}$  η ασυμμετρία. Η κινητική ενέργεια ανά σωματίδιο  $T$  δίνεται από την  $T = T_p + T_n$ , όπου  $T_p$  και  $T_n$  οι κινητικές ενέργειες πρωτονίων και νετρονίων ανά σωματίδιο αντίστοιχα, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$T_n(\rho, x_p) = \frac{3\hbar^2}{10M} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} H_n(x_p) \quad (2)$$

όπου  $x_p = \frac{1-\delta}{2} = \frac{\rho_p}{\rho}$  το κλάσμα πρωτονίων [30], ενώ το άθροισμα συνιστά τη δυναμική ενέργεια,  $U(\rho, \delta)$ .

Ξεχωρίζουν δύο περιπτώσεις νουκλεονικών συστημάτων. Η πρώτη είναι η συμμετρική πυρηνική ύλη (Symmetric Nuclear Matter, SNM), για την οποία ισχύουν:

$$\rho_p = \rho_n, \delta = 0, x_p = \frac{1}{2}, H_{\frac{5}{3}} = 1, H_2 = 1$$

$$\frac{E_{\text{SNM}}}{A} = \frac{3\hbar^2}{10M} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} + \sum_{i \geq 0} c_i(0) \rho^{1+\frac{i}{3}} \quad (3)$$

ενώ η δεύτερη είναι η καθαρή νετρονική ύλη (Pure Neutron Matter, PNM), για την οποία ισχύουν:

$$\rho_p = 0, \rho_n = \rho, \delta = 1, x_p = 0, H_{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, H_2 = 2$$

$$\frac{E_{\text{PNM}}}{A} = \frac{3\hbar^2}{10M} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} + \sum_{i \geq 0} c_i(1) \rho^{1+\frac{i}{3}} \quad (4)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις εξάγονται τα βασικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν την συμμετρική πυρηνική ύλη: η πυκνότητα κορεσμού ( $\rho_0$ ) για την οποία η ενέργεια της συμμετρικής πυρηνικής ύλης ελαχιστοποιείται

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = 0,$$

η ενέργεια ( $\varepsilon_0$ ) στην πυκνότητα κορεσμού και η (α)συμπιεστότητα ( $K_0$ ) στην πυκνότητα κορεσμού, όπου

$$K_0 \equiv 9\rho^2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0}. \quad (5)$$

Ορίζεται επίσης από την 3<sup>η</sup> παράγωγο της ενέργειας η skewness (κυρτότητα)

$$Q_0 \equiv 27\rho_0^3 \left( \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \rho^3} \right)_{\rho_0}. \quad (6)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν, για δεδομένα  $\rho_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $K_0$  και  $Q_0$  ένα σύστημα  $4 \times 4$  εξισώσεων ως προς  $c_i(0)$ . Όπως δείχτηκε στην [30], η  $c_3(0)$  έχει μικρή συνεισφορά και μπορεί να τεθεί ίση με το μηδέν, δεδομένου ότι η  $Q_0$  δεν είναι καλά προσδιορισμένη.

Οι  $c_0(0)$ ,  $c_1(0)$ ,  $c_2(0)$  λαμβάνονται τότε από τις  $\rho_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $K_0$  επιλύοντας αντίστοιχο αλγεβρικό σύστημα  $3 \times 3$  (βλ. Παράρτημα).

Αντίστοιχες εκφράσεις εξάγονται για τη νετρονική ύλη. Συγκεκριμένα, τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την ενέργεια συμμετρίας μπορούν να γραφούν συναρτήσει των σταθερών  $c_i(1) - c_i(0)$ . Θα επανέλθουμε στην ενέργεια συμμετρίας στην παράγραφο 3.1.

Το παραπάνω συναρτησοειδές έχει επομένως 8 άγνωστες παραμέτρους, τις  $c_i(\delta)$ , οι οποίες βρίσκονται με κατάλληλη προσαρμογή σε δεδομένα. Στην παραμετροποίηση  $ad - 2$  του συναρτησοειδούς KIDS [30], τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην εύρεση των παραμέτρων  $c_i(1)$  ελήφθησαν από την καταστατική εξίσωση των Akmal-Pandharipande-Ravenhall (APR), η οποία βασίζεται στα δυναμικά Argonne V18 και Urbana [8]. Οι  $c_i(0)$  προσδιορίστηκαν θεωρώντας τιμές των ιδιοτήτων της συμμετρικής πυρηνικής ύλης πυκνότητα κορεσμού ( $\rho_0$ ), ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο ( $\varepsilon_0$ ) και (α)συμπιεστότητα ( $K_0$ ) να έχουν τις τιμές

$$\rho_0 = 0.16 \text{fm}^{-3}, \quad \varepsilon_0 = -16 \text{MeV}, \quad K_0 = 240 \text{MeV}$$

με  $c_3(0) = 0$ . Τέλος, η εξάρτηση από την ασυμμετρία μπορεί να προσεγγιστεί πολύ ικανοποιητικά από παραβολική μορφή

$$c_i(\delta) \approx c_i(0) + (c_i(1) - c_i(0))\delta^2 \quad (7)$$

	$c_0(\delta)$	$c_1(\delta)$	$c_2(\delta)$	$c_3(\delta)$
SNM( $\delta = 0$ )	-664.52	763.55	40.13	0.00
PNM( $\delta = 1$ )	-411.13	1007.78	-1354.64	956.47

Πίνακας 1:  $ad - 2$  παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS. Οι μονάδες των  $c_i(\delta)$  είναι  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ . Αναφ. [30].

Το σετ παραμέτρων που βρέθηκε κατ' αυτόν τον τρόπο φαίνεται στον πίνακα (1). Στην αναφορά [30] εξετάστηκε η φυσικότητα των παραμέτρων και η ποιότητα των προεκτάσεων που προέκυψαν.

Ένα άλλο μέγεθος που χρειάζεται κατά την επίλυση των εξισώσεων TOV (εξισώσεις (32)), οι οποίες θα αναφερθούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο) είναι η πίεση ασύμμετρης πυρηνικής ύλης  $P$ , η οποία ορίζεται ως:

$$P = \rho^2 \frac{\partial(\frac{E}{A})}{\partial \rho} \quad (8)$$



και για το συναρτησοειδές KIDS, δεδομένης της παραβολικής προσέγγισης, δίνεται από τη σχέση [23]:

$$P = \frac{\hbar^2}{5M} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} H_{\frac{5}{3}} + \sum_{i \geq 0} \left( 1 + \frac{i}{3} \right) \rho^{2+\frac{i}{3}} [c_i(0)(2 - H_2) + c_i(1)(H_2 - 1)] \quad (9)$$

Η παράγωγος της πίεσης συνδέεται με ένα ακόμη μέγεθος το οποίο είναι απαραίτητο στην παρούσα μελέτη. Αυτό το μέγεθος είναι το κλάσμα της ταχύτητας του ήχου στην πυρηνική ύλη προς την ταχύτητα του φωτός, το οποίο ορίζεται ως:

$$\left( \frac{u_s}{c} \right)^2 = \frac{dP}{d\varepsilon_{\text{tot}}} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\text{tot}}} = \frac{2\rho \frac{\partial(\frac{P}{A})}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2(\frac{P}{A})}{\partial \rho^2}}{mc^2 + \frac{E}{A} + \frac{P}{\rho}} \quad (10)$$

όπου  $P$  η πίεση δίνεται από τη σχέση (8) και  $\varepsilon_{\text{tot}} = (mc^2 + \frac{E}{A})\rho$  η ολική ενέργεια. Αυτό το μέγεθος χρησιμοποιείται στον έλεγχο αιτιότητας (causality), το οποίο απαιτεί το κλάσμα αυτό να είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με 1 [33].

Ειδικότερα, για το συναρτησοειδές KIDS, δεδομένης της παραβολικής προσέγγισης, το κλάσμα της ταχύτητας του ήχου δίνεται από τη σχέση [33]:

$$\left( \frac{u_s}{c} \right)^2 = \frac{\frac{\hbar^2}{3M} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} H_{\frac{5}{3}} + \sum_{i \geq 0} (1 + \frac{i}{3})(2 + \frac{i}{3}) \rho^{1+\frac{i}{3}} [c_i(0)(2 - H_2) + c_i(1)(H_2 - 1)]}{Mc^2 + \frac{E}{A} + \frac{P}{\rho}} \quad (11)$$

## 2.3 Σχέση του KIDS με το συναρτησοειδές Skyrme

Το συναρτησοειδές Skyrme στη γενική του μορφή, ορίζεται ως εξής [23]:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{E}{\rho} = & \frac{3\hbar^2}{10M} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} H_{\frac{5}{3}} + \frac{t_0}{8} \rho [2(x_0 + 2) - (2x_0 + 1)H_2] \\ & + \frac{1}{48} \sum_{i=1}^3 t_{3i} \rho^{\sigma_i+1} [2(x_{3i} + 2) - (2x_{3i} + 1)H_2] + \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} (aH_{\frac{5}{3}} + bH_{\frac{8}{3}}) \\ & + \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}+\beta} \left[ t_4(x_4 + 2)H_{\frac{5}{3}} - t_4(x_4 + \frac{1}{2})H_{\frac{8}{3}} \right] \\ & + \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}+\gamma} \left[ t_5(x_5 + 2)H_{\frac{5}{3}} + t_5(x_5 + \frac{1}{2})H_{\frac{8}{3}} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

όπου

$$\begin{aligned} a &= t_1(x_1 + 2) + t_2(x_2 + 2) \\ b &= \frac{1}{2} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)] \end{aligned}$$

και

$$H_n(x_p) = 2^{n-1} [(x_p)^n + (1 - x_p)^n].$$

Η απλοποιημένη έκδοση αυτής της σχέσης προκύπτει μηδενίζοντας τα  $t_n$  και  $x_n$  για  $n = 1, 2, 4, 5$ . Αν επιπλέον χρησιμοποιηθεί  $\sigma_i = \frac{1}{3}$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{E}{A} = \varepsilon = & \frac{3\hbar^2}{10M} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} H_{\frac{5}{3}} + \frac{t_0}{8} \rho [2(x_0 + 2) - (2x_0 + 1)H_2] \\ & + \frac{1}{48} \sum_{i>0} t_{3i} \rho^{1+\frac{i}{3}} [2(x_{3i} + 2) - (2x_{3i} + 1)H_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

Παρατηρώντας ότι το  $t_0$  είναι μια ειδική περίπτωση του  $\frac{t_{3i}}{6}$  για  $i = 0$ , όπως και το  $x_0$  για το  $x_{3i}$ , ο όρος με το  $t_0$  μπορεί να συμπεριληφθεί στο άθροισμα ως προς  $i$  ως εξής:

$$\frac{E}{A} = \varepsilon = \frac{3\hbar^2}{10M} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} H_{\frac{5}{3}} + \frac{1}{48} \sum_{i \geq 0} t_{3i} \rho^{1+\frac{i}{3}} [2(x_{3i} + 2) - (2x_{3i} + 1)H_2] \quad (14)$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτουν δυο διαφορετικές εξισώσεις για τις δυο περιπτώσεις που μελετώνται. Η πρώτη είναι για συμμετρική πυρηνική ύλη (SNM):

$$\frac{E_{\text{SNM}}}{A} = \varepsilon_{\text{SNM}} = \frac{3\hbar^2}{10M} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16} \sum_{i \geq 0} t_{3i} \rho^{1+\frac{i}{3}} \quad (15)$$

ενώ η δεύτερη είναι για καθαρή νετρονική ύλη (PNM):

$$\frac{E_{\text{PNM}}}{A} = \varepsilon_{\text{PNM}} = \frac{3\hbar^2}{10M} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{24} \sum_{i \geq 0} t_{3i} \rho^{1+\frac{i}{3}} (1 - x_{3i}) \quad (16)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3) και (15), προκύπτει η πρώτη σχέση μεταξύ των παραμέτρων KIDS και Skyrme:

$$c_i(0) = \frac{t_{3i}}{16} \quad (17)$$

ενώ συγκρίνοντας τις σχέσεις (4) και (16), προκύπτει και η δεύτερη σχέση μεταξύ των παραμέτρων KIDS και Skyrme:

$$c_i(1) = \frac{t_{3i}}{24} (1 - x_{3i}). \quad (18)$$

Σημειώνεται ότι οι όροι που παραλείψαμε ( $t_n$ ,  $x_n$  για  $n = 1, 2, 4, 5$ ) αντιστοιχούν στην εξάρτηση από την ορμή. Για ομοιογενή πυρηνική ύλη (SNM και PNM) μπορούν ισοδύναμα να αντικατασταθούν από όρους  $\rho^{\frac{5}{3}}$ , κλπ., δηλαδή να "απορροφηθούν" στις  $c_i(0)$ ,  $c_i(1)$ . Η μόνη προσέγγιση σε αυτό το σημείο αφορά τις ενδιάμεσες τιμές  $0 < \delta < 1$ , όπου ούτως η άλλως η ακριβής εξάρτηση παραμένει άγνωστη, και όπου η ευρέως χρησιμοποιούμενη παραβολική προσέγγιση (7) αρκεί για τους σκοπούς της εργασίας μας.

## 2.4 Σχέση του KIDS με άλλα συναρτησοειδή

Το συναρτησοειδές KIDS μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επεκταμένο μοντέλο Skyrme, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως [30]. Με αυτόν τον τρόπο, συνδέεται με άλλα μοντέλα, όπως το σχετικιστικό μοντέλο μέσου πεδίου, το μοντέλο Gogny, καθώς και μοντέλα που χρησιμοποιούν τοπική προσέγγιση πυκνότητας (Local Density Approximation, LDA), όπως το μοντέλο Brueckner-Hartree-Fock, BHF [21].

### 2.4.1 Σχέση με Gogny

Ένα από τα πολλά αυτοσυνεπή πυρηνικά μοντέλα είναι το μοντέλο Gogny, το οποίο έχει αποδειχτεί ισχυρό εργαλείο στην πυρηνική φυσική [27]. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιεί μια ενεργή αλληλεπίδραση αντίστοιχη της Skyrme-Hartree-Fock, SHF, και της Relativistic Mean Field, RMF, και οι παράμετροί του έχουν προσαρμοστεί σε εμπειρικά δεδομένα. Είναι ένα μη-σχετικιστικό μοντέλο όπως και το μοντέλο Skyrme, αλλά χρησιμοποιεί μια πεπερασμένης εμβέλειας αλληλεπίδραση δυο σωμάτων, με όλους τους όρους ανταλλαγής να χρησιμοποιούνται ορθά. Το συναρτησοειδές Gogny μπορεί με γενικές τεχνικές αναπτύγματος πίνακα πυκνότητας [34] να αντιστοιχηθεί με το συναρτησοειδές Skyrme.

### 2.4.2 Σχέση με RMF

Το σχετικιστικό μοντέλο μέσου πεδίου είναι μια σχετικιστική θεωρία αλληλεπιδρώντων νουκλεονικών πεδίων Dirac και μεσονικών μέσων πεδίων με μειωμένες αντισωματιδιακές συνεισφορές στην νουκλεονική κυματοσυνάρτηση (προσέγγιση απουσίας θάλασσας ("no-sea" approximation)) [35, 36]. Το σχετικιστικό μοντέλο μέσου πεδίου είναι η σχετικιστική επέκταση του μοντέλου SHF, με την έννοια ότι χρησιμοποιείται η ίδια συνταγή, δηλαδή το μοντέλο βασίζεται στη διαισθητική επιλογή και στη θεωρητική καθοδήγηση με τις παράμετρος να προσδιορίζονται φαινομενολογικά. Η σύζευξη σπιν-τροχιάς είναι δομημένη εντός της RMF και αυτή είναι η μεγάλη διαφορά μεταξύ των δυο μοντέλων.

### 2.4.3 Σχέση με BHF

Το μοντέλο Brueckner-Hartree-Fock βασίζεται στη θεωρία Brueckner [36] και πρόκειται για ένα μοντέλο ενός συναρτησοειδούς προσδιορισμένου από πρώτες αρχές (ab initio). Τα μεγέθη που προκύπτουν μετά από υπολογισμούς προσέγγισης τοπικής πυκνότητας (LDA) είναι μεν εντός λογικών τιμών, αλλά προκύπτουν μεγάλες απο-

κλίσεις (σφάλματα, deviations), οι οποίες δεν επιτρέπουν πρακτικές εφαρμογές. Αυτή η αδυναμία σχετίζεται με το γεγονός ότι ένας αυστηρός "ab initio" υπολογισμός (χρησιμοποιώντας μόνο αλληλεπιδράσεις νουκλεονίου-νουκλεονίου) δε μπορεί ποτέ να δώσει το σωστό σημείο κορεσμού. Το κλειδί για την ποσοτική επιτυχία της LDA βρίσκεται στους όρους απόκλισης, οι οποίοι επιτρέπουν την μοντελοποίηση της πυρηνικής ενέργειας επιφάνειας. Αυτοί είναι και οι πιο σημαντικοί όροι. Έχουν γίνει προσπάθειες να κατασκευαστεί ένα συναρτησοειδές, στο οποίο οι εξαρτώμενοι από την πυκνότητα όροι προέρχονται από μικροσκοπικούς LDA υπολογισμούς [37], αλλά υπάρχει το πρόβλημα ότι η μικροσκοπική κατανόηση είναι περιορισμένη, με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγάλο εύρος προβλέψεων για ιδιότητες πυρηνικής ύλης [38].

### 3 Ενέργεια Συμμετρίας και σχέση μάζας-ακτίνας αστέρων νετρονίων

#### 3.1 Ενέργεια Συμμετρίας στα πλαίσια της θεωρίας συναρτησοειδούς πυκνότητας πυρηνικής ενέργειας

Το σημαντικό μέγεθος που χαρακτηρίζει την αλληλεπίδραση στο ισοανυσματικό κανάλι είναι η **πυρηνική ενέργεια συμμετρίας**, η οποία περιγράφει τη στατική απόκριση του πυρήνα ως προς την ασυμμετρία νετρονίων και πρωτονίων. Η πυρηνική ενέργεια συμμετρίας επηρεάζει μια πληθώρα φαινομένων στους πυρήνες, από φαινόμενα σύζευξης ισοσπίν μέχρι την ευστάθεια πυρήνων πλούσιων σε νετρόνια και τελικά, τις μάζες και ακτίνες αστέρων νετρονίων [11]. Ωστόσο, στο ισοανυσματικό κανάλι υπάρχουν ακόμα μεγάλες αβεβαιότητες λόγω ανεπάρκειας πειραματικών δεδομένων.

Η καταστατική εξίσωση ομογενούς, πλούσιας σε νετρόνια ύλης μπορεί να εκφραστεί σε όρους της ενέργειας ανά νουκλεόνιο,  $\varepsilon(\rho, \delta)$ , η οποία στα πλαίσια της παραβολικής προσέγγισης δίνεται από την εξίσωση:

$$\varepsilon(\rho, \delta) = \varepsilon(\rho, 0) + E_{\text{sym}}(\rho)\delta^2 + O(\delta^4). \quad (19)$$

Η ενέργεια συμμετρίας μη συμμετρικής πυρηνικής ύλης (με  $\delta \in (0, 1)$ ) είναι

$$E_{\text{sym}}(\rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon(\rho, \delta)}{\partial \delta^2} \right)_{\delta=0} \approx \varepsilon(\rho, 1) - \varepsilon(\rho, 0) \quad (20)$$

και ισούται περίπου με την ενέργεια που δαπανάται για μετατροπή της συμμετρικής πυρηνικής ύλης (SNM) σε καθαρή νετρονική ύλη (PNM) [39]. Χάρη στις τεράστιες προσπάθειες που έχουν γίνει τις τελευταίες δεκαετίες, η συμμετρική πυρηνική ύλη έχει γίνει κατανοητή, δηλαδή ο όρος  $E(\rho, 0)$  είναι γνωστός σε ικανοποιητικό βαθμό [40].

Ακόμη πιο πρόσφατα, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες στην διερεύνηση της όχι ακόμα τόσο καλά κατανοητής  $E_{\text{sym}}(\rho)$ , χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα από εργαστήρια και αστροφυσικές παρατηρήσεις. Επίσης, έχουν χρησιμοποιηθεί οι περισσότερες διαθέσιμες πυρηνικές δυνάμεις σε μικροσκοπικές θεωρίες πολλών σωμάτων όπως και φαινομενολογικά μοντέλα [39].

Όμως, τα διάφορα μοντέλα προβλέπουν τελείως διαφορετικά αποτελέσματα τόσο στις χαμηλές (σε σχέση με την πυκνότητα κορεσμού) πυκνότητες, όσο και στις υψηλές πυκνότητες, παρά το γεγονός ότι συμφωνούν εκ κατασκευής κοντά στην πυκνότητα

κορεσμού. Αυτό καθιστά αναγκαίο να εφαρμοστούν ακριβείς πειραματικοί περιορισμοί προκειμένου να γίνει κάποια πρόοδος στην κατανόηση της ενέργειας συμμετρίας. Για την εξαγωγή πληροφοριών για την ενέργεια συμμετρίας από πειραματικές παρατηρήσεις ώστε να περιοριστεί η ενέργεια συμμετρίας, έχει γίνει πολλή δουλειά στο να βρεθούν κατάλληλα παρατηρήσιμα μεγέθη, ευαίσθητα ως προς αυτήν. Το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας έχει επικεντρωθεί στον περιορισμό της ενέργειας συμμετρίας λίγο κάτω από την πυκνότητα κορεσμού  $\rho_0$ , με αποτέλεσμα η συμπεριφορά της ενέργειας συμμετρίας στις υψηλές πυκνότητες να είναι ακόμα αβέβαιη [41, 42, 43, 44, 45, 46].

Τα πιο πολλά υποσχόμενα παρατηρήσιμα μεγέθη συνδεδεμένα με ισοανυσματικές ιδιότητες είναι οι ακτίνες των νετρονίων, οι επιδερμίδες νετρονίων και οι διπολικές πολωσιμότητες, ενώ οι περισσότερες προσπάθειες που γίνονται επικεντρώνονται στη βελτίωση αβεβαιοτήτων στις καταστατικές εξισώσεις συμμετρικής και μη συμμετρικής πυρηνικής ύλης και στην εξάρτηση από την πυκνότητα. Οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν την πυρηνική ενέργεια συμμετρίας δεν είναι τυχαίες, αλλά επηρεάζονται από σημαντικά παρατηρήσιμα πυρηνικά μεγέθη [11].

Στη μη συμμετρική πυρηνική ύλη, το μονοσωματιδιακό πυρηνικό δυναμικό  $U_n$  (ή  $U_p$ ) μπορεί να αναπτυχθεί ως προς την ασυμμετρία  $\delta$  ως εξής:

$$U_\tau(\mathbf{k}, \rho, \delta) = U_0(\mathbf{k}, \rho) + \tau_3 U_{\text{sym},1}(\mathbf{k}, \rho) \cdot \delta + U_{\text{sym},2}(\mathbf{k}, \rho) \cdot \delta^2 + O(\delta^3) \quad (21)$$

όπου  $\tau_3 = \pm 1$  για  $\tau = n$  ή  $p$  και  $\mathbf{k}$  η ορμή νουκλεονίων. Τα  $U_0$  και  $U_{\text{sym},2}$  είναι ισοβαθμωτά δυναμικά, ενώ το  $U_{\text{sym},1}$  είναι ισοανυσματικό δυναμικό. Στη θεωρία μέσου πεδίου, η **ενέργεια συμμετρίας** έχει δύο όρους (κινητικό και δυναμικό):

$$E_{\text{sym}}(\rho) = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_0^*} + \frac{1}{2} U_{\text{sym},1}(\mathbf{k}, \rho) \quad (22)$$

ενώ η **κλίση της ενέργειας συμμετρίας**,  $L(\rho) \equiv 3\rho \left( \frac{\partial E_{\text{sym}}}{\partial \rho} \right)$ , έχει πέντε όρους:

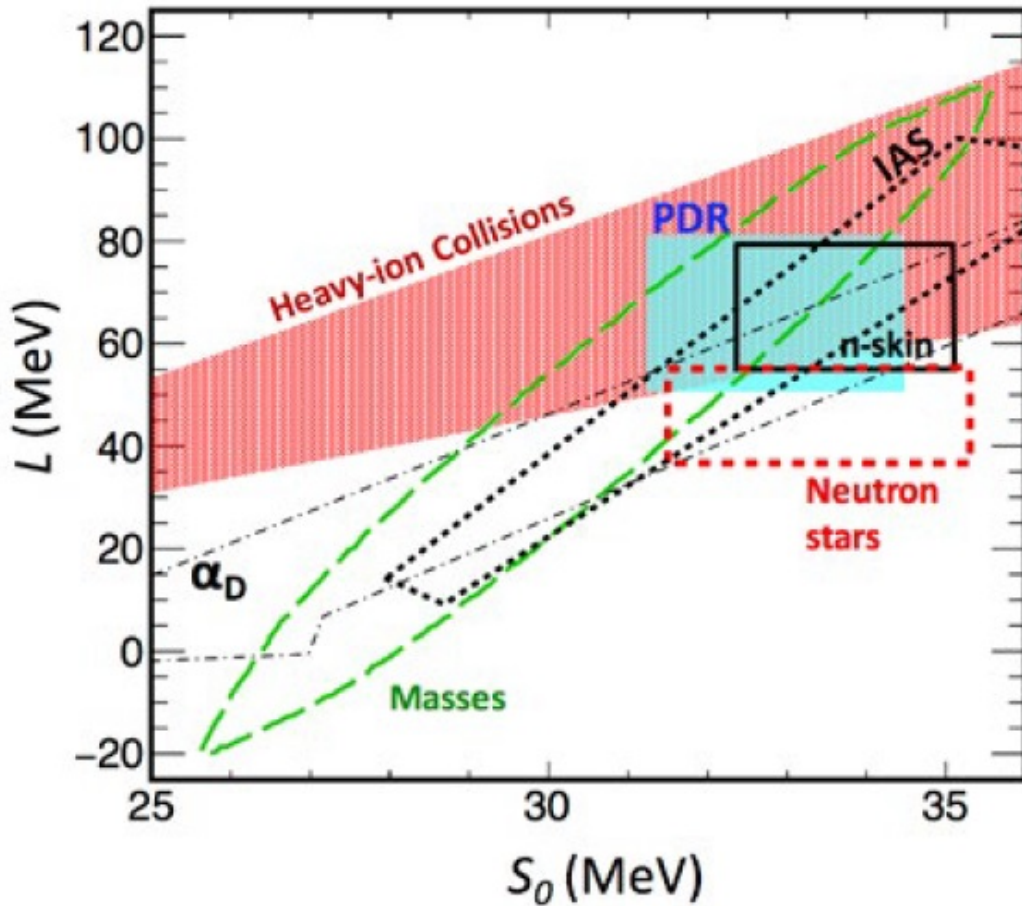
$$\begin{aligned} L(\rho) = & \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_0^*} - \frac{1}{6} \left( \frac{\hbar^2 k^3}{(m_0^*)^2} \cdot \frac{\partial m_0^*}{\partial k} \right)_{\mathbf{k}_F} + \frac{3}{2} U_{\text{sym},1}(\rho, \mathbf{k}_F) \\ & + \left( \frac{\partial U_{\text{sym},1}}{\partial k} \right)_{\mathbf{k}_F} \cdot \mathbf{k}_F + 3U_{\text{sym},2}(\rho, \mathbf{k}_F) \end{aligned} \quad (23)$$

όπου  $k_F = \left( \frac{6\pi^2 \rho}{n} \right)^{\frac{1}{3}}$  η ορμή Fermi νουκλεονίων, όπου ο βαθμός εκφυλισμού  $n = 4$  για πρωτόνια και  $n = 2$  για νετρόνια, και  $m_0^* = \frac{m}{1 + \frac{m}{k^2 k_F}} \left( \frac{dU_0}{dk} \right)_{\mathbf{k}_F}$  η ισοβαθμωτή ενεργός μάζα των νουκλεονίων [47]. Είναι προφανές ότι τα δυο μεγέθη  $E_{\text{sym}}(\rho)$  και  $L(\rho)$  εξαρτώνται

από τη γνώση των ισοβαθμιωτών ( $U_0, U_{\text{sym},2}$ ) και του ισοανυσματικού ( $U_{\text{sym},1}$ ) δυναμικού. Ενώ το  $U_0$  είναι καλά περιορισμένο από πειραματικές παρατηρήσεις, η γνώση της εξάρτησης από την πυκνότητα και την ορμή των άλλων δυο δυναμικών είναι πολύ περιορισμένη [39].

Η ενέργεια συμμετρίας σε πυκνότητα κορεσμού ( $\rho_0$ )  $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ , που συμβολίζεται και ως  $J$  ή  $S_0$ , ως συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου KIDS είναι:

$$J = \frac{\hbar^2}{6m} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} - \sum_{i=0}^3 (c_i(0) - c_i(1)) \rho_0^{1+\frac{i}{3}} \quad (24)$$



Σχήμα 1: Διάγραμμα της κλίσης της ενέργειας συμμετρίας ( $L$ ) ως προς την ενέργεια συμμετρίας σε πυκνότητα κορεσμού ( $S_0$ ), το οποίο έχει προκύψει από διάφορες θεωρητικές διερευνήσεις στην πυρηνική φυσική και διάφορες αστροφυσικές παρατηρήσεις. Αναφ. [3].

ενώ η κλίση της ( $L(\rho_0)$ ) είναι:



$$L(\rho_0) = \frac{\hbar^2}{3m} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} - \sum_{i=0}^3 (3+i) (c_i(0) - c_i(1)) \rho_0^{1+\frac{i}{3}}. \quad (25)$$

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει καλή γνώση για κάποιους όρους της  $L(\rho_0)$ , είναι λογικό να υπάρχουν δυσκολίες στον καθορισμό της ισοσπίν εξάρτησης της ασυμπίεστοτητας της ασύμμετρης πυρηνικής ύλης στην πυκνότητα κορεσμού  $\rho_0$  ( $K_0(\delta) = D_0 + K_\tau \delta^2 + O(\delta^4)$ ), όπου  $K_\tau = K_{\text{sym}}(\rho_0) - 6L(\rho_0) - Q_0 \frac{L(\rho_0)}{K_0}$  σε όρους της καμπυλότητας της ενέργειας συμμετρίας ( $K_{\text{sym}}(\rho_0)$ ), της κυρτότητας,  $Q_0$  (εξισώσεις (27) και (29) αντίστοιχα) και της ασυμπίεστοτητας,  $K_0$ , στην πυκνότητα κορεσμού.

Η **καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας**,  $K_{\text{sym}}$ , είναι η δεύτερη παράγωγος της ενέργειας συμμετρίας και ορίζεται ως:

$$K_{\text{sym}}(\rho_0) \equiv 9\rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 E_{\text{sym}}(\rho)}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} = 3 \left[ \rho \frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho} - L(\rho) \right]_{\rho_0}. \quad (26)$$

Οι μορφές της ενέργειας συμμετρίας και της κλίσης της, οι οποίες δίνονται στις εξισώσεις (22) και (23) αντίστοιχα, είναι σημαντικές για την κατανόηση της φυσικής που κρύβεται πίσω από αυτά τα μεγέθη.

Η καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας σε πυκνότητα κορεσμού ( $K_{\text{sym}}(\rho_0)$ ) ως συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου KIDS ισούται με:

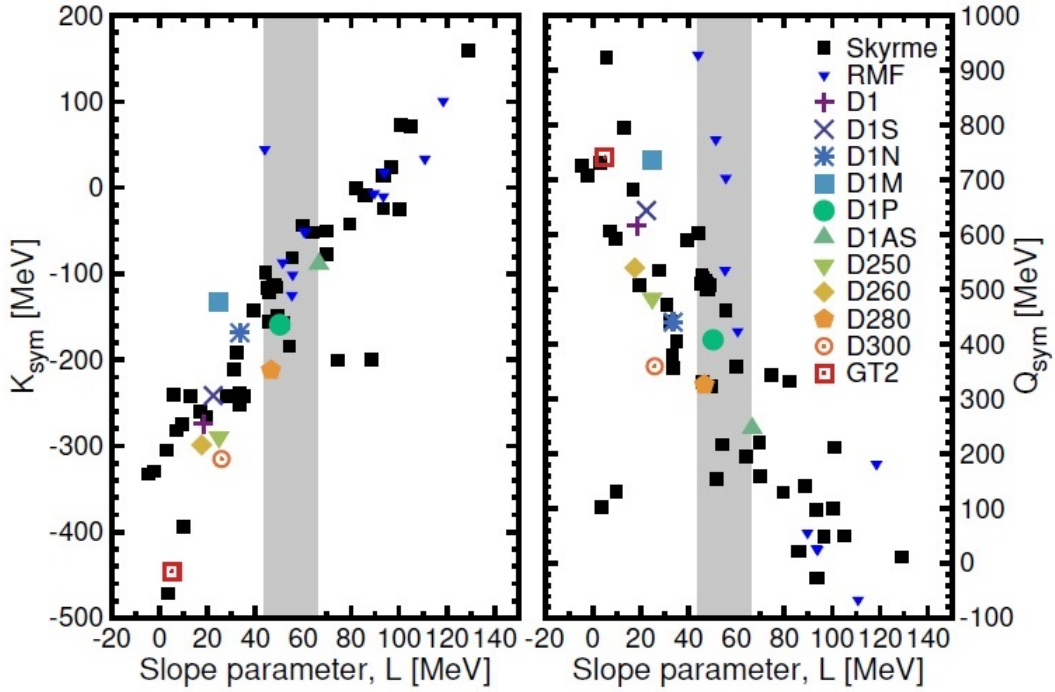
$$K_{\text{sym}}(\rho_0) = -\frac{\hbar^2}{3m} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} - \sum_{i=0}^3 (3+i)i (c_i(0) - c_i(1)) \rho_0^{1+\frac{i}{3}}. \quad (27)$$

Το τελευταίο μέγεθος που είναι σημαντικό στην μελέτη που ακολουθεί είναι η **κυρτότητα**,  $Q_{\text{sym}}$ , η οποία είναι η τρίτη παράγωγος της ενέργειας συμμετρίας και ορίζεται ως:

$$Q_{\text{sym}}(\rho_0) \equiv 27\rho_0^3 \left( \frac{\partial^3 E_{\text{sym}}(\rho)}{\partial \rho^3} \right)_{\rho_0} \quad (28)$$

Η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας σε πυκνότητα κορεσμού ( $Q_{\text{sym}}(\rho_0)$ ) ως συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου KIDS είναι:

$$Q_{\text{sym}}(\rho_0) = \frac{4\hbar^2}{3m} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} + \sum_{i=0}^3 (3+i)i(3-i) (c_i(0) - c_i(1)) \rho_0^{1+\frac{i}{3}}. \quad (29)$$



Σχήμα 2: Η καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας ( $K_{\text{sym}}$ ) και η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας ( $Q_{\text{sym}}$ ) σαν συναρτήσεις της κλίσης της ενέργειας συμμετρίας ( $L$ ) για συναρτησοειδή Skyrme (μαύρα τετράγωνα στην εικόνα) και συναρτησοειδή Gogny (όλα τα υπόλοιπα) [48]. Η σκιαγραφημένη περιοχή αντιστοιχεί σε περιορισμούς των Lattimer και Steiner [49].

Πειραματικές μετρήσεις κατανομής φορτίου σε βαριούς πυρήνες έδειξαν ότι η πυκνότητα κορεσμού ισούται με  $\rho_0 = 0.160 \pm 0.005 \text{fm}^{-3}$  [33]. Επίσης, πληροφορίες από ακτίνες νετρονίων ( $r_n$ ), επιδερμίδα νετρονίων ( $r_n - r_p$ ) και γιγαντιαίους συντονισμούς, οι οποίοι είναι χρήσιμοι στην κατανόηση των ισοανυσματικών μεγεθών των παραμετροποιήσεων, έδειξαν ότι η ενέργεια συμμετρίας στην πυκνότητα κορεσμού ισούται με  $J = 30 - 35 \text{MeV}$  [21] (σχήμα 1). Πρόσφατες αναλύσεις διαχύσεων ισοσπίν και διπλού λόγου νετρονίων προς πρωτόνια ( $\frac{n}{p}$  ratio) σε συγκρούσεις βαριών ιόντων οδήγησαν στην τιμή της κλίσης της,  $L(\rho_0) = 40 - 76 \text{MeV}$  [50] και σε καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας ίση με  $K_{\text{sym}}(\rho_0) = -100 \pm 100 \text{MeV}$  [51]. Η κυρτότητα δεν έχει οριοθετηθεί αυστηρά ακόμα, αλλά υπάρχουν ενδείξεις για ισχυρή συσχέτιση με την κλίση, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2:  $Q_{\text{sym}}(\rho_0) = -6.443L(\rho_0) + (708.74 \pm 118.14) \text{MeV}$  [52].

### 3.2 Αστέρες νετρονίων

Οι αστέρες νετρονίων (Neutron Stars) είναι πολύ πυκνά αστρικά σώματα, τα οποία προέρχονται από εκρήξεις υπερκαινοφανών αστέρων (supernova). Οι αστέρες νετρονίων έχουν γίνει εργαστήριο ελέγχου θεμελιωδών θεωριών Φυσικής, όπως σχετικιστικών θεωριών βαρύτητας, καθώς και ιδιοτήτων της ύλης σε ακραίες πυκνότητες. Παίζουν σημαντικό ρόλο στην αστροφυσική, διότι στο εσωτερικό τους βρίσκεται μεγάλη ποικιλία πολύ δραστήριων πηγών ακτίνων-Χ, ακτίνων-γ, καθώς και ραδιοκυμάτων.

Η μάζα τους είναι ίση περίπου με μια με δυο φορές αυτής του Ήλιου ( $M_{\odot}$ ), έχουν ακτίνα περίπου ίση με 10 με 12 χιλιόμετρα και μια μέση πυκνότητα ίση περίπου με

$$\rho \approx 7 \times 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \sim (2 - 3)\rho_0,$$

όπου  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  η μέση πυκνότητα της πυρηνικής ύλης. Η πυκνότητα στο κέντρο των αστέρων νετρονίων  $\rho(0)$  (central density) είναι ακόμη μεγαλύτερη, φτάνοντας έως και  $(10 - 20)\rho_0$ . Οι αστέρες νετρονίων χαρακτηρίζονται και από το ισχυρό μαγνητικό τους πεδίο, το οποίο κυμαίνεται μεταξύ  $10^9 - 10^{15} \text{G}$ . Η πίεση Fermi αποτρέπει την βαρυτική κατάρρευση.

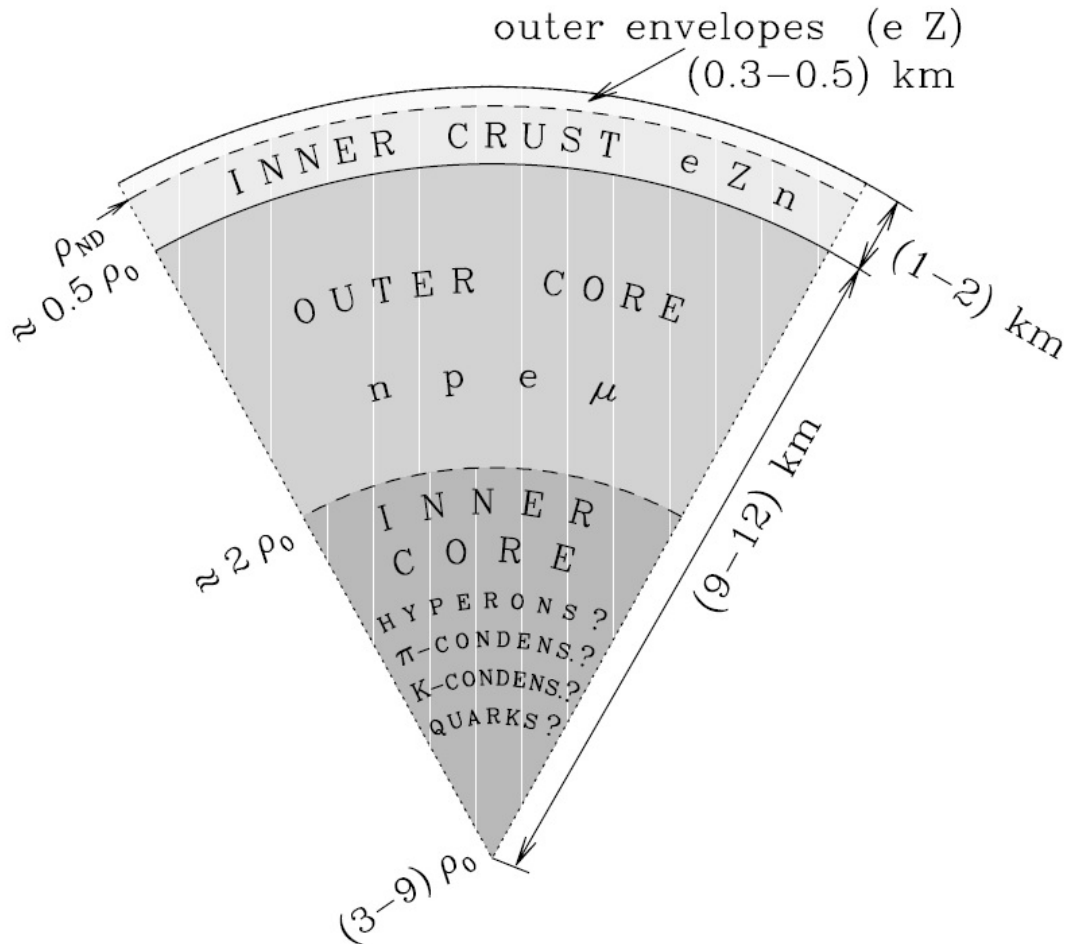
Η πηγή ενέργειας των αστέρων νετρονίων είναι η βαρύτητά τους, η οποία είναι περίπου 10 φορές πιο ισχυρή από την συνήθη θερμοδυναμική καύση, αφού  $g_{\text{NS}} \approx 10^{11} g_{\text{Earth}}$ . Η βαρυτική ενέργεια σύνδεσης ενός σωματιδίου μάζας  $m$  είναι περίπου το ένα δέκατο της ενέργειας ηρεμίας του, δηλαδή  $G \frac{mM}{R} \approx 0.1mc^2$ , όπου  $M$ ,  $R$  η μάζα και η ακτίνα του αστέρα νετρονίων.

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής των αστέρων νετρονίων προέρχεται από την απελευθέρωση της βαρυτικής ενέργειας σύνδεσης. Όταν ο αστρικός πυρήνας σε μια υπερκαινοφανή έκρηξη καταρρέει από τις βαρυτικές δυνάμεις, προκειμένου να σχηματιστεί ένας αστέρας νετρονίων, η διατήρηση της στροφορμής επιβάλλει αύξηση του ρυθμού περιστροφής [53].

Οι αστέρες νετρονίων έχουν στο εσωτερικό τους θερμοκρασία περίπου  $10^{11} \text{K}$  όταν δημιουργηθούν, ενώ σε μερικές μόλις ημέρες η θερμοκρασία αυτή μειώνεται περίπου στους  $10^{10} \text{K}$  λόγω εκπομπής νετρίνων (neutrino cooling). Στην αρχική φάση της ζωής του αστέρα, η θερμοκρασία στο εσωτερικό του κυμαίνεται μεταξύ  $(10^8 - 10^9) \text{K}$ , ενώ η θερμοκρασία στην επιφάνειά του είναι περίπου 10 φορές μικρότερη.

Οι αστέρες νετρονίων έχουν μια ατμόσφαιρα υδρογόνου πάχους περίπου 1cm. Στην επιφάνεια του αστέρα, το ισχυρό μαγνητικό πεδίο συμπιέζει τα άτομα μέχρι το σχήμα τους να γίνει (περίπου 10 φορές) επιμηκυμένο ως προς έναν άξονα (prolate). Τέτοιου σχήματος άτομα δένονται ισχυρά κατά μήκος των μικρών αξόνων τους, αλλά ασθενικά

κατά μήκος του μεγάλου άξονα. Δηλαδή η επιφάνεια των αστέρων νετρονίων είναι καλυμμένη με πολυμερή, που συνδέονται με τις μαγνητικές γραμμές. Είναι άριστοι αγωγοί κατά το μήκος τους.



Σχήμα 3: Η διατομή ενός αστέρα νετρονίων. Οι παράμετροι εξαρτώνται από την καταστατική εξίσωση του πυρήνα. Αναφ. [54].

Πιο βαθιά, στον εσωτερικό φλοιό, η πυκνότητα αυξάνει. Η ενέργεια Fermi των ηλεκτρονίων αυξάνει μέχρι να είναι πολύ μεγαλύτερη από είτε την ενέργεια αλληλεπίδρασης με το μαγνητικό πεδίο, είτε από την ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης Coulomb με τους ατομικούς πυρήνες. Τα ηλεκτρόνια σχηματίζουν ένα σχετικιστικό αέριο, το οποίο κινείται ελεύθερα μέσα στην ύλη. Τέτοιο σύστημα φυσικά σχηματίζει ένα τέλειο κρυσταλλικό μέταλλο.

Ακόμη πιο βαθιά, στον εξωτερικό "πυρήνα", η πυκνότητα αυξάνει ακόμη περισσότερο και οι ενέργειες Fermi των νετρονίων και πρωτονίων μέσα στους πυρήνες αρχίζουν να αυξάνουν. Όταν η πυκνότητα γίνει περίπου ίση με  $10^{12} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ , τότε η ενέργεια διαχω-

ρισμού  $S(n, p) \approx 0$ , με αποτέλεσμα τα νετρόνια να αρχίζουν να ξεχειλίζουν από τους πυρήνες, ενώ τα πρωτόνια δε μπορούν να διαφύγουν λόγω της δύναμης Coulomb. Η εικόνα των πυρήνων σε ρευστό νετρονίων είναι αυτή σταγόνας λαδιού σε σαπουνόνερο. Τα νετρόνια αποδυναμώνουν την ενέργεια επιφάνειας, με αποτέλεσμα την αύξηση της πυκνότητας της αστρικής ύλης μέχρι να γίνει περίπου  $10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Τότε οι πυρήνες διαλύονται πλήρως σε ένα υπέρρευστο πλούσιο σε νετρόνια.

Πλησιάζοντας τον εσωτερικό "πυρήνα" του αστέρα, η πυκνότητα γίνεται μεγαλύτερη από αυτή των συνήθων πυρήνων ( $10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ). Η σύνθεση της ύλης σε υψηλές πυκνότητες, οι οποίες λαμβάνουν χώρα στους πυρήνες αστέρων νετρονίων, είναι ακόμα αβέβαιη. Αναμένονται να εμφανίζονται και άλλα σωματίδια πέραν των νουκλεονίων και ηλεκτρονίων, όπως μίονια, πιόνια, καόνια, υπερόνια καθώς και παράξενη ύλη κουάρκ (με μη μηδενική παραδοξότητα) [54].

Ο λόγος για τον οποίο οι πληθυσμοί των πρωτονίων μικραίνουν με την αύξηση της πυκνότητας είναι ότι τα πρωτόνια πρέπει να συνοδεύονται από ηλεκτρόνια λόγω ηλεκτρικής ουδετερότητας, με αποτέλεσμα να προτιμάται η αντίδραση:



διότι η ενέργεια Fermi αυξάνει απότομα.

Προκειμένου ένας αστέρας νετρονίων να βρίσκεται σε ισορροπία, πρέπει η πίεση από τα αλληλεπιδρώντα φερμιόνια που περιέχει να αντισταθμίζει τη βαρυτική πίεση και να αποτρέπεται η βαρυτική κατάρρευση του αστέρα [55].

### 3.3 Σχέση μάζας-ακτίνας αστέρων νετρονίων

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η φυσική των αστέρων νετρονίων, καθώς και των δυαδικών συστημάτων που συγχωνεύονται, είναι σημαντικό να προσδιοριστεί η καταστατική εξίσωση της ισχυρά αλληλεπιδρώσης ύλης, πλούσιας σε νετρόνια. Οι καταστατικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται διατυπώνονται μέσω της ενέργειας ανά σωματίδιο ( $\frac{E}{A}$ ), ή της πίεσης  $P$  συναρτήσει της πυκνότητας:

$$P = \rho^2 \frac{d\left(\frac{E}{A}(\rho)\right)}{d\rho} \quad (31)$$

Παρά το ότι η καταστατική εξίσωση της συμμετρικής πυρηνικής ύλης έχει περιοριστεί σε κάποιο εύρος γύρω από την πυκνότητα κορεσμού, στις υψηλές πυκνότητες υπάρχουν μεγάλες διαφορές στα αποτελέσματα. Η γνώση της μη συμμετρικής πυρηνικής ύλης είναι πολύ περιορισμένη, κυρίως λόγω δυσκολιών στον ακριβή προσδιορισμό της ενέργειας συμμετρίας [3].

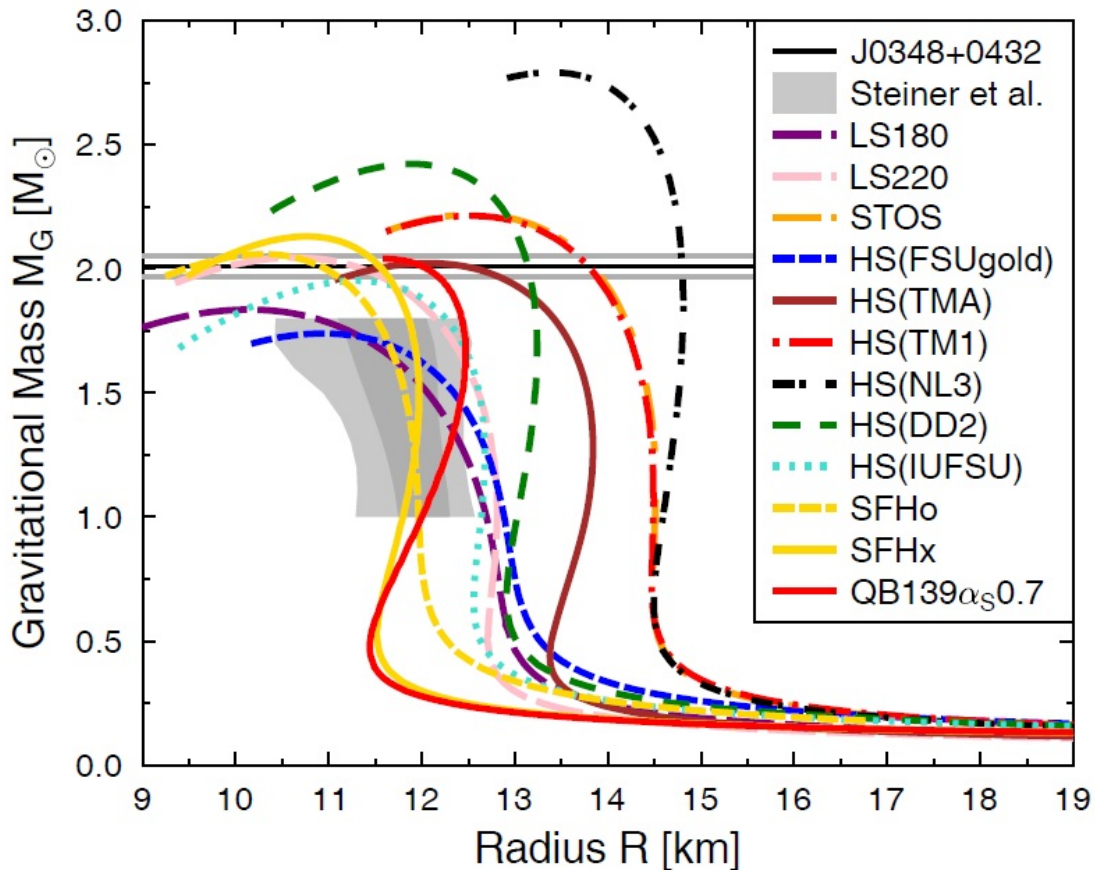
Πρόσφατα έχουν χρησιμοποιηθεί πολλές πειραματικές μέθοδοι για τη λεπτομερή μελέτη της ενέργειας συμμετρίας καθώς και της κλίσης της, όπως αναφέρθηκε. Η κλίση της ενέργειας συμμετρίας παρέχει την κυρίαρχη βαρυονική συνεισφορά στην πίεση των αστέρων νετρονίων και επηρεάζει το πάχος της επιδερμίδας νετρονίων. Η ασυμπίεστοτητα της συμμετρικής πυρηνικής ύλης (ένας τρόπος μέτρησης της καμπυλότητας της καταστατικής εξίσωσης σε πυκνότητα κορεσμού) είναι άλλο ένα σχετικό μέγεθος. Μπορεί να προσδιοριστεί καταρχήν από μελέτες συλλογικών πυρηνικών δονήσεων. Γενικά, όμως, η σχέση των πειραματικών δεδομένων με την καταστατική εξίσωση παρουσιάζει εξάρτηση από το μοντέλο. Ως εκ τούτου, αβεβαιότητες παραμένουν [3].

Μια άλλη μέθοδος προσδιορισμού της καταστατικής εξίσωσης βασίζεται σε παρατηρήσεις σε δυαδικά συστήματα αστέρων νετρονίων με λευκούς νάνους. Οι μάζες αυτών των αστέρων νετρονίων έχουν μετρηθεί με ακρίβεια να φτάνουν τις δυο ηλιακές μάζες. Το αποτέλεσμα περιορίζει την σκληρότητα (ένα μέγεθος που καθορίζει την αύξηση της πίεσης για δεδομένη αύξηση πυκνότητας) των καταστατικών εξισώσεων και ήδη απορρίπτει πολλά μοντέλα (βλ. σχήμα 4). Ένας ακόμα καλύτερος περιορισμός στην καταστατική εξίσωση είναι ο καθορισμός της ακτίνας και της μάζας του ίδιου αντικειμένου. Για αστέρες νετρονίων χαμηλών μαζών, αυτό οδηγεί στον περιορισμό κάποιου συγκεκριμένου συνδυασμού (α)συμπίεστοτητας και της κλίσης της ενέργειας συμμετρίας [56].

Ο περιορισμός που προκύπτει από την παρατήρηση αστέρων νετρονίων με μάζα μεγαλύτερη από δύο ηλιακές μάζες προκάλεσε τη διερεύνηση του εσωτερικού των αστέρων νετρονίων. Μελέτες αρχικά είχαν υποδείξει ότι η εμφάνιση επιπλέον βαθμών



ελευθερίας κάνει την καταστατική εξίσωση πιο μαλακή και μειώνει την μέγιστη δυνατή μάζα, αλλά υπάρχουν ακόμα μεγάλες αβεβαιότητες λόγω ανεπαρκούς κατανόησης των αλληλεπιδράσεων στο μέσο. Παρά τα προβλήματα αυτά, τα φαινομενολογικά μοντέλα αδρονίων και κουάρκ μπορούν να εφοδιαστούν με τις κατάλληλες τροποποιήσεις στις υψηλές πυκνότητες, έτσι ώστε να μπορεί να επιτευχθεί τελική μέγιστη μάζα μεγαλύτερη από δυο ηλιακές μάζες [3].



Σχήμα 4: Σχέσεις μάζας - ακτίνας για ψυχρούς αστέρες νετρονίων σε  $\beta$ -ισορροπία για διάφορες καταστατικές εξισώσεις. Αναφ. [56].

Υπάρχουν πολλές καταστατικές εξισώσεις που έχουν προταθεί για ψυχρή ύλη αστέρων νετρονίων. Προκειμένου μια καταστατική εξίσωση να είναι χρήσιμη σε αστροφυσικές προσομοιώσεις, πρέπει να ισχύει σε μεγάλο εύρος πυκνοτήτων, θερμοκρασιών και ασυμμετρίας ισοσπίν. Επίσης, πρέπει να περιλαμβάνει μια περιγραφή συσσωματωμένης ή/και ανομοιογενούς ύλης σε πυκνότητες μικρότερες από την πυκνότητα πυρηνικού κορεσμού. Υπάρχουν ελάχιστες καταστατικές εξισώσεις που ικανοποιούν τα παραπάνω. Τέτοιες καταστατικές εξισώσεις είναι μείζονος σημασίας για την αστροφυσική, αφού αυτές χρησιμοποιούνται σε προσομοιώσεις συγχώνευσης αστέρων νετρονίων και

σε υπερκαινοφανείς εκρήξεις [3, 56].

Η εύρεση της καταστατικής εξίσωσης της μη συμμετρικής πυρηνικής ύλης είναι το κύριο αντικείμενο πολλών μελετών της πυρηνικής δομής και πυρηνικών αντιδράσεων που εμπλέκουν ασταθείς πυρήνες μακριά από την κοιλάδα σταθερότητας του ισοτοπικού χάρτη. Στην εύρεση αυτή, ο πιο σημαντικός παράγοντας είναι το πυρηνικό δυναμικό μέσου πεδίου που χρησιμοποιείται.

Υπάρχει ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της ακτίνας κατανομής νετρονίων σε πυρήνες και της πίεσης της νετρονικής ύλης σε πυκνότητες κοντά στην τιμή  $\rho \approx 0.1\text{fm}^{-3}$ , που είναι περίπου ίση με τα δύο τρίτα της πυρηνικής πυκνότητας κορεσμού. Μεγάλη τιμή πίεσης σημαίνει ότι τα νετρόνια θα πιέζονται προς την επιφάνεια του πυρήνα και άρα θα αυξηθεί η ακτίνα κατανομής νετρονίων. Επομένως, η μέτρηση της νετρονικής ακτίνας περιορίζει την καταστατική εξίσωση νετρονίων, η οποία δίνει την πίεση ως συνάρτηση της πυκνότητας νετρονικής ύλης.

Πρόσφατα έγιναν μελέτες στις οποίες χρησιμοποιήθηκε η χειραλική θεωρία διαταραχών προς υπολογισμό της καταστατικής εξίσωσης νετρονίων, συνυπολογίζοντας σημαντικές συνεισφορές από δυνάμεις τριών νετρονίων. Βρέθηκε ότι η καταστατική εξίσωση πυρηνικής ύλης πλούσιας σε νετρόνια σχετίζεται στενά με την ενέργεια συμμετρίας [56].

Αποτελέσματα από υπολογισμούς Hartree-Fock για τη μη συμμετρική πυρηνική ύλη έδειξαν ότι υπάρχουν δυο οικογένειες που συνδέονται με δυο διαφορετικές συμπεριφορές της ενέργειας συμμετρίας της πυρηνικής ύλης σε υψηλές πυρηνικές πυκνότητες, οι οποίες ονομάστηκαν μαλακή και σκληρή συμπεριφορά (soft and stiff behaviors). Αυτές οι δυο συμπεριφορές προβλέπουν και πολύ διαφορετικές συμπεριφορές του λόγου πρωτονίων προς νετρόνια στην  $\beta$ -ισορροπία.

Η διαφορά στην ενέργεια συμμετρίας της πυρηνικής ύλης επηρεάζει την καταστατική εξίσωση των  $\beta$ -σταθερών αστέρων νετρονίων, καθώς και κύρια χαρακτηριστικά της, όπως μάζα, ακτίνα, πυκνότητα και ροπή αδράνειας.

Η κατανομή ύλης στους αστέρες νετρονίων βρίσκεται με επίλυση των εξισώσεων Tolman - Oppenheimer - Volkoff (TOV) για την πίεση σε κάθε στρώμα του αστέρα,  $P(r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -G \frac{(M(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2})}{r(r c^2 - 2GM(r))} \\ \frac{dM}{dr} &= \frac{4\pi \epsilon(r) r^2}{c^2} \end{aligned} \quad (32)$$

όπου  $\epsilon$  η ενεργειακή πυκνότητα, συμπεριλαμβανομένης της μάζας ηρεμίας ( $\epsilon \approx \rho c^2$ )



στον εξωτερικό φλοιό) και  $M$  η βαρυτική μάζα. Οι εξισώσεις (32) είναι μια προσέγγιση ασθενούς πεδίου και υποθέτουν ότι ο αστέρας δεν περιστρέφεται [54].

Οι εξισώσεις αυτές είναι ένα σύστημα δυο διαφορικών εξισώσεων για τρεις άγνωστες συναρτήσεις με την καταστατική εξίσωση να συσχετίζει την πίεση  $P$  με την πυκνότητα  $\rho$ . Λύνονται ολοκληρώνοντας από  $r = 0$  προς τα έξω, με αρχικές τιμές  $\rho(0)$ ,  $P(0) = P(\rho(0))$ ,  $m(0) = 0$  μέχρις ότου η πίεση να μηδενιστεί, δηλαδή  $P(R) = 0$ ,  $m(R) = M$  και προκύπτει η μάζα του αστέρα σαν συνάρτηση της κεντρικής πυκνότητας,  $M(\rho(0))$ . Η ολοκλήρωση δίνει και το προφίλ πίεσης (Pressure profile,  $P(r)$ ) καθώς και το αντίστοιχο προφίλ πυκνότητας (Density profile,  $\rho(r)$ ) για δεδομένη κεντρική πυκνότητα.

Οι εξισώσεις TOV (32) ισχύουν για όλο τον αστέρα νετρονίων, και όχι μόνο για το φλοιό. Στην παρούσα εργασία, όμως, δεν ενδιαφέρει η ακριβής  $P(\rho)$  στον φλοιό, αλλά η  $P(\rho)$  για πυκνότητες μεγαλύτερες από  $\rho_0$ , αφού αυτή είναι που επηρεάζει κυρίως τη μέγιστη μάζα.

## 4 Καταστατικές εξισώσεις και σχέση μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων

Μέχρι τώρα έχουμε μια μόνο παραμετροποίηση KIDS, τη λεγόμενη KIDS ad – 2 [30], βασισμένη σε αποδεκτές ιδιότητες συμμετρικής πυρηνικής ύλης και στα ψευδοδομένα APR [8] για τη νετρονική ύλη. Στο κεφάλαιο αυτό διερευνούμε το αποδεκτό πεδίο τιμών για μεγέθη όπως η κυρτότητα ( $Q_{\text{sym}}$ ) της ενέργειας συμμετρίας, εξετάζοντας και άλλες παραμετροποιήσεις.

### 4.1 Καθαρή νετρονική ύλη (Pure Neutron Matter, PNM)

Αρχικά, βρέθηκαν τα μεγέθη ενέργεια συμμετρίας  $J$ , η κλίση της ενέργειας συμμετρίας  $L$ , η καμπυλότητά της  $K_{\text{sym}}$  και η κυρτότητά της  $Q_{\text{sym}}$  σε πυκνότητα κορεσμού (σχέσεις (24), (25), (27) και (29) για  $\rho = \rho_0$ ) για το συναρτησοειδές ad – 2. Οι τιμές αυτές φαίνονται στον πίνακα 2.

	$J(\text{MeV})$	$L(\text{MeV})$	$K_{\text{sym}}(\text{MeV})$	$Q_{\text{sym}}(\text{MeV})$
ad – 2	32.76	49.11	-156.69	586.29
Values used	33	50	-160 και 0	-200, 0, 400, 600 και 1000

Πίνακας 2: Η ενέργεια συμμετρίας, η κλίση της ενέργειας συμμετρίας, η καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας και η κυρτότητά της που προκύπτουν από τις παραμέτρους ad – 2 του συναρτησοειδούς KIDS (Αναφ. [30]), καθώς και τα στρογγυλοποιημένα μεγέθη που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την εργασία.

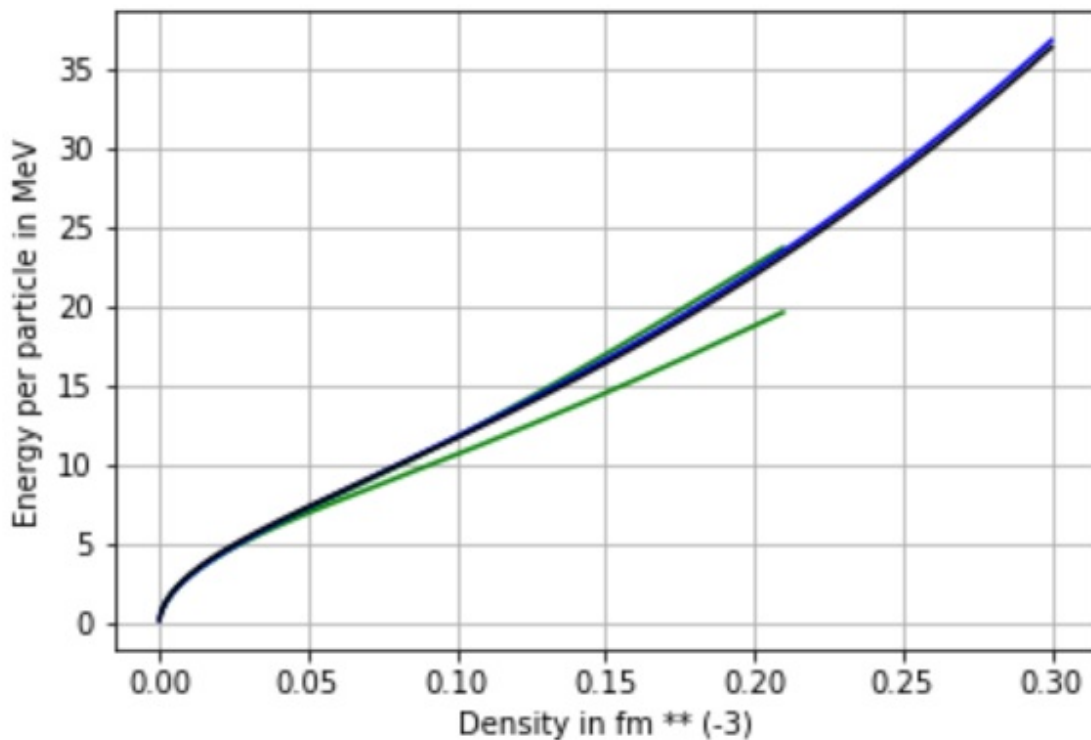
$Q_{\text{sym}}(\text{MeV})$	$c_0(1)$	$c_1(1)$	$c_2(1)$	$c_3(1)$
-200	382.50	-3395.77	6801.91	-4077.37
0	174.16	-2244.51	4681.28	-2775.29
400	-242.50	58.01	440.00	-171.12
600	-450.84	1209.27	-1680.64	1130.96
1000	-867.50	3511.79	-5921.92	3735.13

Πίνακας 3: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS που βρέθηκαν για  $J, L, K_{\text{sym}}$  ίσα με 33, 50, -160 MeV αντίστοιχα και διαφορετικές τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας,  $Q_{\text{sym}}$ . Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .

Χρησιμοποιώντας τιμές παραπλήσιες των παραπάνω τεσσάρων μεγεθών που εμπίπτουν

στο πεδίο τιμών που έχουμε από παρατηρήσεις (βλ. σχ. 1, 2) και για δεδομένη τετράδα  $ad - 2$  παραμέτρων για την συμμετρική πυρηνική ύλη, βρέθηκαν νέοι συντελεστές  $c_i(1)$ , με τους οποίους θα γίνει η εξέταση της φυσικότητας των παραμέτρων. Τα μεγέθη αυτά φαίνονται στον πίνακα 2, ενώ οι τετράδες συντελεστών που βρέθηκαν φαίνεται στον πίνακα 3, για  $K_{\text{sym}} = -160 \text{ MeV}$  και  $Q_{\text{sym}} = 600 \text{ MeV}$  (στρογγυλοποιημένη παραμετροποίηση).

Το ότι οι τέσσερις παράμετροι που βρέθηκαν είναι ικανοποιητικά παραπλήσιες με αυτές της  $ad - 2$  (πίνακας 1) είναι μια πολύ καλή ένδειξη ότι οι παράμετροι  $ad - 2$  παρουσιάζουν φυσικότητα και ότι έχουν ικανοποιητική προβλεπτική ικανότητα (predictive power), αφού δεν είναι υπερπροσδιορισμένες (overtrained) για εντελώς συγκεκριμένα δεδομένα.

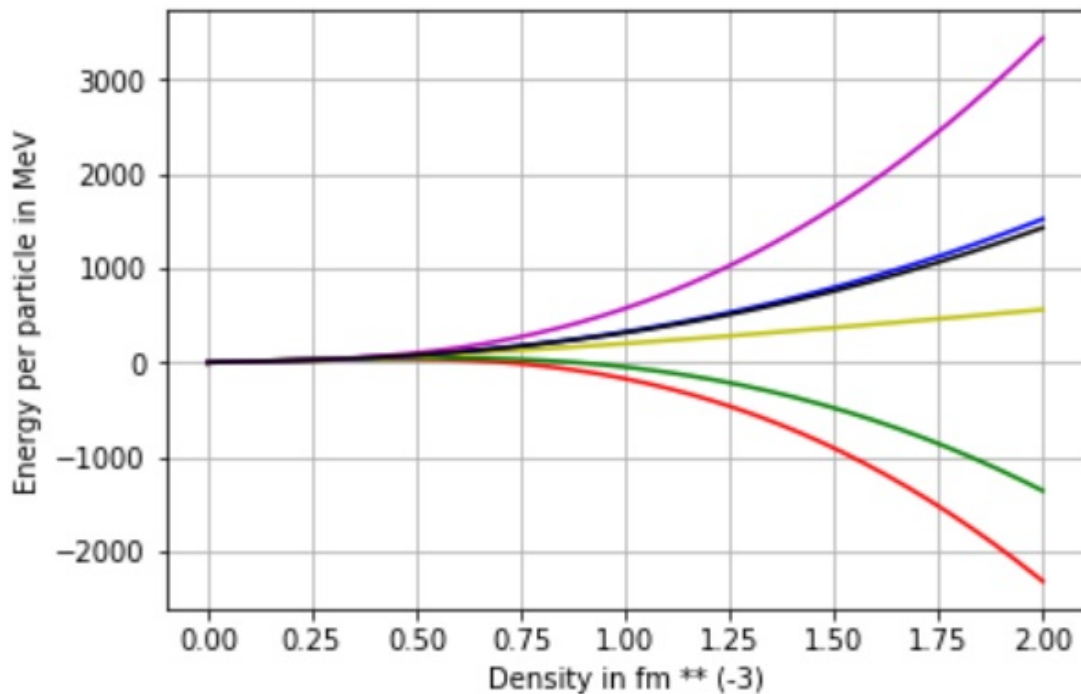


Σχήμα 5: Γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο για την καθαρή νετρονική ύλη ως προς την πυκνότητα. Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στην "στρογγυλοποιημένη" παραμετροποίηση του πίνακα 2, η μαύρη στις παραμέτρους της  $ad - 2$ , ενώ οι πράσινες καμπύλες είναι περιορισμοί που προέρχονται από αποτελέσματα χPT [9].

Στο σχήμα 5 φαίνεται το γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο για τις παραμέτρους της περίπτωσης (I) του πίνακα 6 μαζί με το αντίστοιχο για την περίπτωση της  $ad - 2$ . Οι πράσινες καμπύλες είναι το πάνω και το κάτω όριο της ενέργειας ανά σωματίδιο σε

MeV, σύμφωνα με μικροσκοπικές μελέτες βασισμένες στη χειραλική θεωρία πεδίου [9]. Οι δυο καμπύλες (μπλε και μαύρη) είναι πάρα πολύ κοντά η μια στην άλλη και εντός του άνω ορίου (πράσινη καμπύλη).

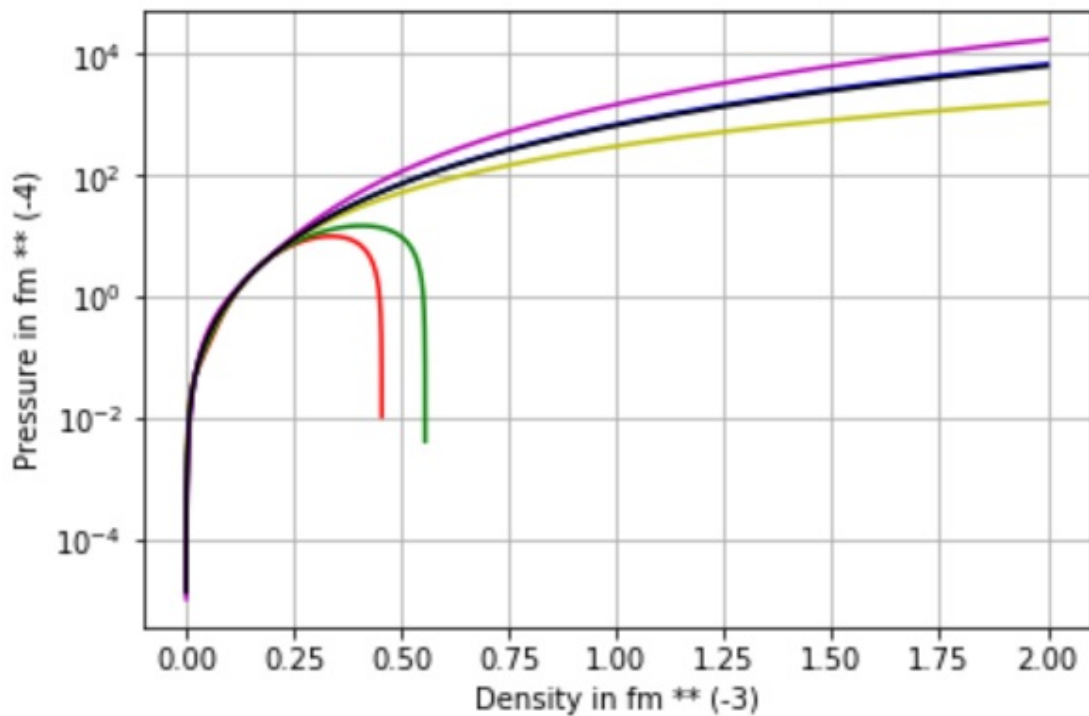
Το επόμενο βήμα είναι να γίνει ένας έλεγχος για το ποιο είναι το αποδεκτό εύρος των τιμών της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας, δεχόμενοι την φυσικότητα των αρχικών παραμέτρων  $ad - 2$ . Προς εξέταση αυτού, ξαναυπολογίστηκαν οι συντελεστές  $c_i(1)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  για διάφορες τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας. Δεδομένου του ότι η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας δεν είναι πολύ καλά οριοθετημένη, δοκιμάστηκαν τιμές από  $Q_{sym} = -200\text{MeV}$  μέχρι και  $1000\text{MeV}$ . Οι παράμετροι που βρέθηκαν παρουσιάζονται στον πίνακα 3.



Σχήμα 6: Γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 3, καθώς και για αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{sym} = -200\text{ MeV}$ , το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το ματζέντα σε 1000 και το μαύρο σε την  $ad - 2$ .

Από τα αποτελέσματα που πάρθηκαν, το πρώτο που παρατηρείται είναι ότι για κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας ίση με  $-200, 0$  και  $400\text{MeV}$ , τα πρόσημα των παραμέτρων  $c_i(1)$  είναι διαφορετικά από αυτά για  $600\text{MeV}$ . Αυτό υποδεικνύει ότι ίσως η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας πρέπει να είναι μεγαλύτερη από  $400\text{MeV}$ . Προς επιβεβαίωση του παραπάνω ισχυρισμού, έγιναν τα διαγράμματα ενέργειας ανά σωματίδιο

και πίεσης προς πυκνότητα για τις πέντε τετράδες παραμέτρων, καθώς και για τις  $ad-2$  παραμέτρων (σχήματα 6 και 7).



Σχήμα 7: Γράφημα πίεσης για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 3, καθώς και για αυτές της  $ad-2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο για 400, το μπλε σε 600, το ματζέντα σε 1000 και το μαύρο στην  $ad-2$ .

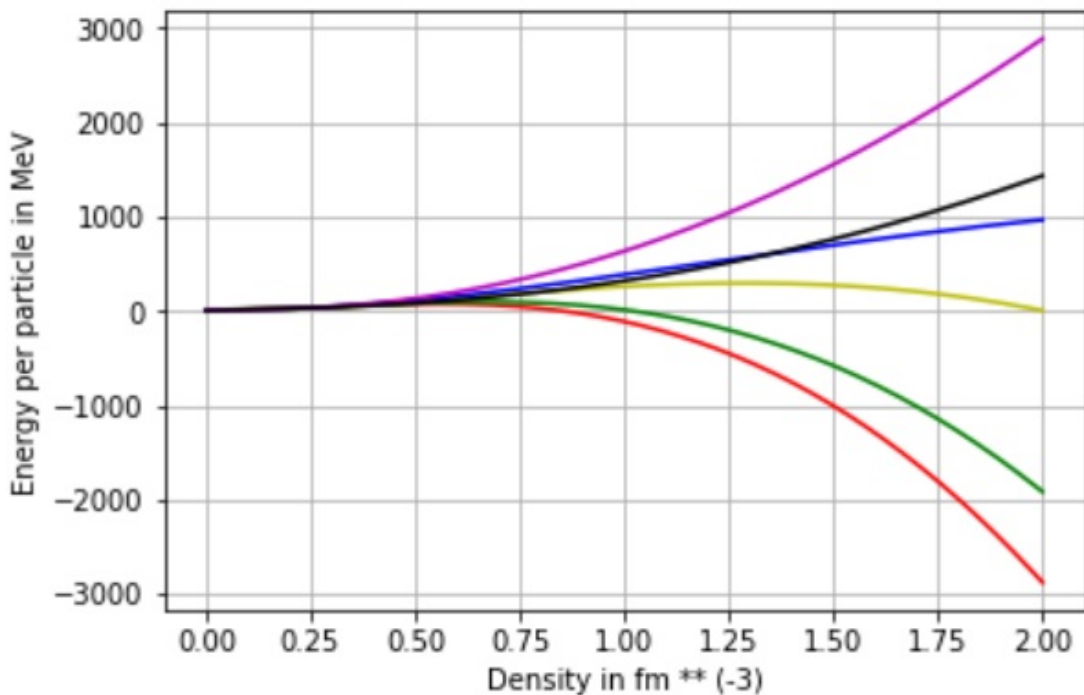
Στο σχήμα 7 φαίνονται ότι οι τιμές της πίεσης που προκύπτουν από τις παραμέτρους που αντιστοιχούν σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  και 0 MeV αποκλίνουν πολύ από την πίεση που προκύπτει από τις  $ad-2$  παραμέτρους και εμφανίζουν αστάθεια. Όπως αναμενόταν κοιτώντας τις παραμέτρους, η πλησιέστερη στην  $ad-2$  πίεση είναι αυτή που προκύπτει για  $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV, αφού υπάρχει πολύ μικρή απόκλιση μεταξύ των παραμέτρων, η οποία προέρχεται από τα στρογγυλοποιημένα μεγέθη, ενώ ικανοποιητική είναι και η πίεση για  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV.

Πέραν των παραπάνω παραμέτρων, έγινε διερεύνηση των παραμέτρων που προκύπτουν από  $J = 33$  MeV,  $L = 50$  MeV,  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV και για διάφορες τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας. Οι παράμετροι που προέκυψαν για αυτήν την επιλογή των μεγεθών φαίνονται στον πίνακα 4.

$Q_{\text{sym}}(\text{MeV})$	$c_0(1)$	$c_1(1)$	$c_2(1)$	$c_3(1)$
-200	1382.50	-8000.81	13587.96	-7202.37
0	1174.16	-6849.55	11467.32	-5900.29
400	757.50	-4547.03	7226.04	-3296.12
600	549.16	-3395.77	5105.40	-1994.04
1000	132.50	-1093.25	864.13	610.13

Πίνακας 4: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS που βρέθηκαν για  $J, L, K_{\text{sym}}$  ίσα με 33, 50, 0 MeV αντίστοιχα και διαφορετικές τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας  $Q_{\text{sym}}$ . Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .

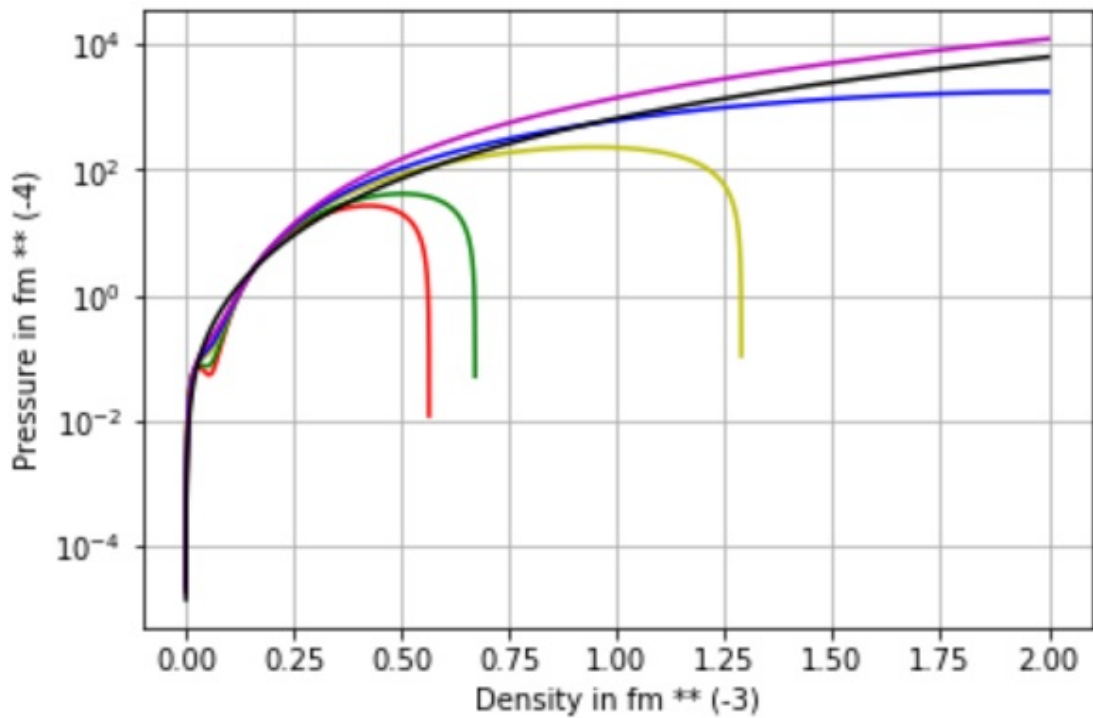
Από τον πίνακα 4, φαίνεται ότι οι παράμετροι που προκύπτουν είναι πολύ διαφορετικές από αυτές που είχαμε βρει στην περίπτωση  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV (πίνακας 3), αφού διαφέρουν ακόμα και στα πρόσημά τους.



Σχήμα 8: Γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 4, καθώς και για αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το ματζέντα σε 1000 και το μαύρο στην  $ad - 2$ .

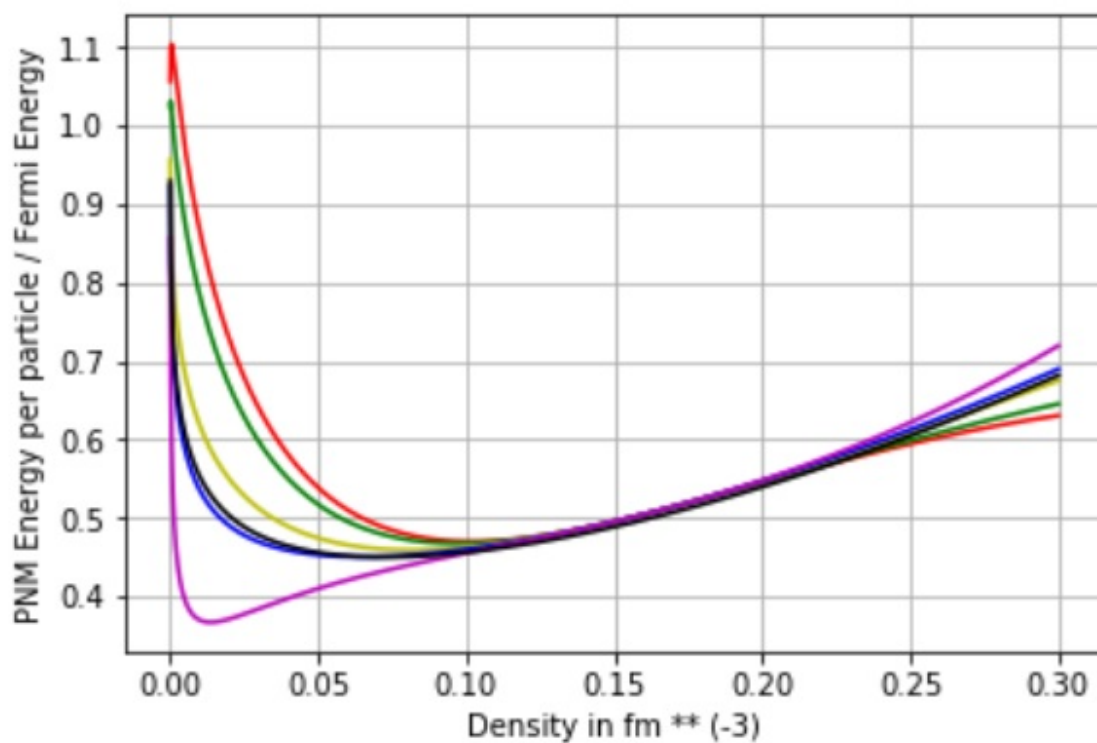
Στο σχήμα 8, όπως και στο σχήμα 9, παρατηρούμε ότι οι περισσότερες περιπτώσεις αποκλίνουν από την  $ad - 2$ . Τρεις από τις καμπύλες του σχήματος 9 εμφανίζουν αρ-

νητική παράγωγο πίεσης, που μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια. Υπάρχει, όμως, μια καμπύλη που παρουσιάζει πιο ικανοποιητική συμπεριφορά στο σχήμα 9. Αυτή αντιστοιχεί στις παραμέτρους που προκύπτουν από την επιλογή των μεγεθών  $J = 33$  MeV,  $L = 50$  MeV,  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV. Το ότι αυτή η επιλογή παραμέτρων δίνει μια "καλή" καμπύλη πίεσης ίσως προέρχεται από το ότι η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας είναι ισχυρά συζευγμένη με την καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας. Αυτό το αποτέλεσμα είναι ένα κίνητρο να μελετηθεί το συναρτησοειδές KIDS συμπεριλαμβάνοντας όρους ανώτερης τάξης ( $c_4(1)$ ,  $c_5(1)$ , κτλ.).



Σχήμα 9: Γράφημα πίεσης για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 4, καθώς και για αυτές της  $ad = 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το ματζέντα σε 1000 και το μαύρο στην  $ad = 2$ .

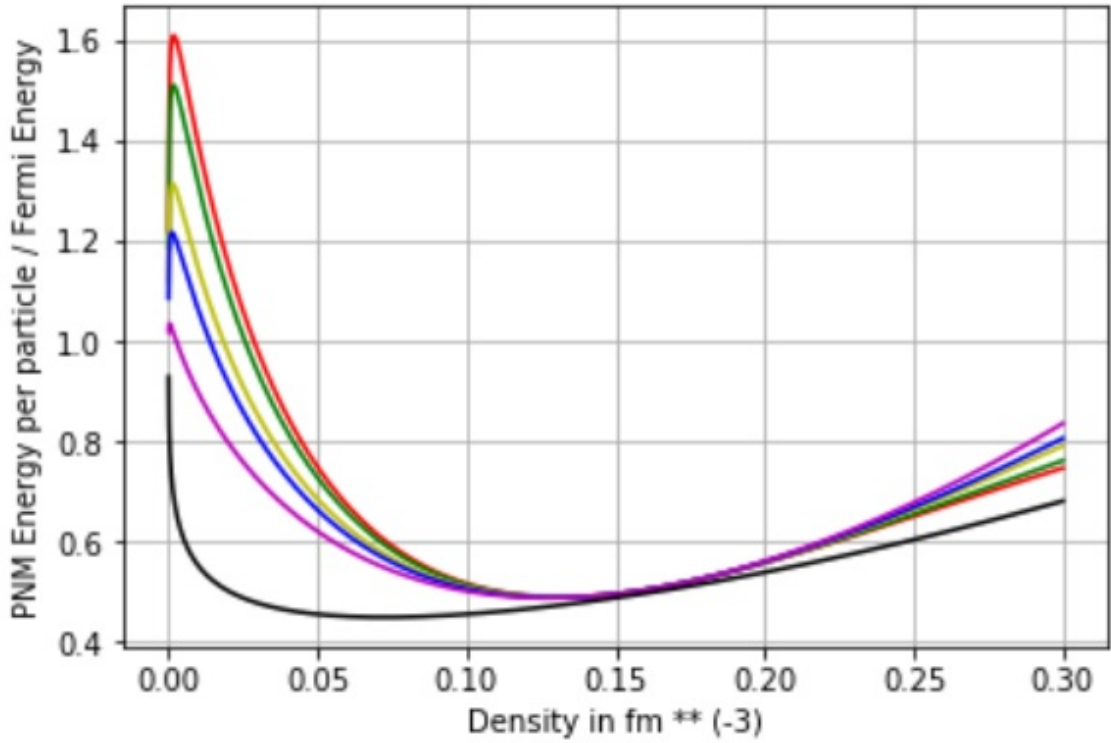
Στο σχήμα 10 έχει γίνει το διάγραμμα κλάσματος ενέργειας καθαρής νετρονικής ύλης προς την αντίστοιχη ιδανικού αερίου Fermi. Φαίνεται ότι η μπλε γραμμή ( $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV) ακολουθεί πιστά την μαύρη γραμμή ( $ad = 2$ ). Η ματζέντα ( $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV) αποκλίνει αρκετά από την μαύρη, και από άλλους ρεαλιστικούς υπολογισμούς (βλ. σχήμα 5).



Σχήμα 10: Γράφημα κλάσματος ενέργειας για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 3, καθώς και για αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το ματζέντα σε 1000 και το μαύρο στην  $ad - 2$ .

Το ίδιο γράφημα έγινε και για τις παραμέτρους του πίνακα 4, όπως φαίνεται στο σχήμα 11. Από το σχήμα φαίνεται ότι όλες οι καμπύλες αποκλίνουν αρκετά από την θεωρούμενη ρεαλιστική συμπεριφορά της  $ad - 2$  (μαύρη καμπύλη).





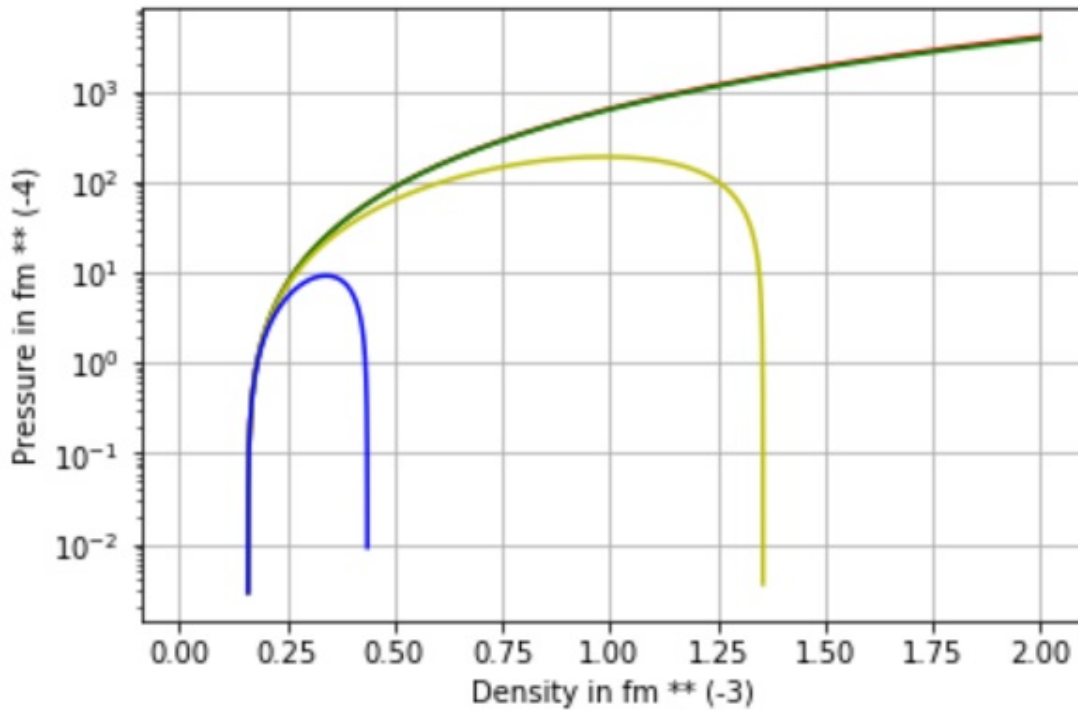
Σχήμα 11: Γράφημα κλάσματος ενέργειας για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 4, καθώς και αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, κίτρινο σε 400, μπλε σε 600, ματζέντα σε 1000 και μαύρο στην  $ad - 2$ .

Ως ένα δεύτερο βήμα, δοκιμάστηκε το κατά πόσο μπορεί το συναρτησοειδές KIDS να περιγράψει σωστά την καθαρή νετρονική ύλη, χρησιμοποιώντας τρεις αντί για τέσσερις παραμέτρους  $c_i(1)$ . Το βήμα αυτό αποσκοπεί στο να εξεταστεί το κατά πόσο είναι απαραίτητη η χρήση τεσσάρων παραμέτρων.

$c_0(1)$	$c_1(1)$	$c_2(1)$	$c_3(1)$	$Q_{\text{sym}}$ (MeV)
-1059.16	1317.79	-81.04	0	-229.71
-1051.20	1273.79	0	-49.76	-237.35
-820.69	0	2346.35	-1490.43	-458.64
0	-4535.16	10700.19	-6619.73	-1246.50

Πίνακας 5: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS που βρέθηκαν για  $J, L, K_{\text{sym}}$  ίσα με 33, 50, -160 MeV αντίστοιχα, μηδενίζοντας κάθε φορά μια εκ των  $c_i(1)$ . Στην τελευταία στήλη είναι η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας που προκύπτει χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους. Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η εξής. Χρησιμοποιώντας μόνο τα μεγέθη  $J = 33 \text{ MeV}$ ,  $L = 50 \text{ MeV}$  και  $K_{\text{sym}} = -160 \text{ MeV}$  από τις σχέσεις (24), (25) και (27), εξετάστηκαν μόνο τρεις από τις τέσσερις παραμέτρους, μηδενίζοντας μια εκ των τεσσάρων  $c_i(1)$ , με  $i = 0, 1, 2, 3$ . Οι παράμετροι που προέκυψαν φαίνονται στον πίνακα 5.



Σχήμα 12: Γράφημα πίεσης για την καθαρή νετρονική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 5. Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $c_3(1) = 0$ , το πράσινο σε  $c_2(1) = 0$ , κίτρινο σε  $c_1(1) = 0$  και μπλε σε  $c_0(1) = 0$ .

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι ο μηδενισμός ενός από τους δυο τελευταίους όρους ( $c_2(1)$ ,  $c_3(1)$ ) δε συνεπάγεται δραστηκή αλλαγή στους υπόλοιπους δυο όρους ( $c_0(1)$ ,  $c_1(1)$ ), όσο και στην τιμή της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας που προκύπτει από τις παραμέτρους, σε αντίθεση με τον μηδενισμό ενός από τους δυο πρώτους όρους, που οδηγεί σε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα. Αυτό ενισχύει την άποψη ότι οι κυρίαρχοι όροι είναι οι δυο πρώτοι, ενώ οι υπόλοιποι δυο δεν παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο.

Επίσης, από τις αρνητικές τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας που προκύπτουν από τις παραμέτρους του πίνακα 5, ήδη υπάρχει η υποψία ότι δεν κρύβεται κάποιο φυσικό νόημα πίσω από τις παραμέτρους όταν δε ληφθεί υπ' όψιν κάποια εκ των τεσσάρων παραμέτρων. Προς επιβεβαίωση αυτού του πρώτου συμπεράσματος, έγιναν

τα γραφήματα πίεσης προς πυκνότητα με αυτές τις παραμέτρους (σχήμα 12).

Όπως φαίνεται στο σχήμα 12, οι παράμετροι του πίνακα 5 αδυνατούν να αναπαραγάγουν την πίεση σωστά. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το ότι προς περιγραφή της καθαρής νετρονικής ύλης με το συναρτησοειδές KIDS, χρειάζονται τουλάχιστον τέσσερις μη μηδενικές παράμετροι  $c_i(1)$ .

Το επόμενο βήμα είναι να γίνει ένας υπολογισμός με τα συναρτησοειδή KIDS που προέκυψαν που μπορεί να προβλέπει κάτι φυσικά παρατηρήσιμο. Ο σκοπός της εργασίας είναι να βρεθεί η σχέση μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων για τις παραμέτρους  $c_i(1)$  που βρέθηκαν. Χρησιμοποιήθηκαν δυο προγράμματα, το πρόγραμμα EOS και το πρόγραμμα TOV.

Το πρώτο πρόγραμμα, το **EOS** (βλ. Παράρτημα), λαμβάνει σαν δεδομένα τις τιμές των παραμέτρων και βρίσκει την καταστατική εξίσωση της αστρικής ύλης (δηλαδή ουδέτερης ύλης σε β-ισορροπία) [57]. Για δεδομένη τιμή πυκνότητας υπολογίζεται το κλάσμα πρωτονίων και άρα η ασυμμετρία και στη συνέχεια η ενέργεια ανά σωματίδιο και η πίεση χρησιμοποιώντας την εξίσωση (12). Δίνει ως αρχείο εξόδου ένα text file (που περιέχει πληροφορίες για την ενέργεια ανά σωματίδιο, την πίεση, την πυκνότητα και το κλάσμα πρωτονίων στην αστρική ύλη), το οποίο χρησιμοποιεί ως αρχείο εισόδου το δεύτερο πρόγραμμα, το **TOV**, για να λύσει αριθμητικά τις εξισώσεις TOV (32) και να δώσει ένα αρχείο εξόδου που εμπεριέχει πληροφορίες για την μάζα, την ακτίνα και την πυκνότητα στο κέντρο ενός αστέρα νετρονίων [58].

Τα δυο αυτά προγράμματα έτρεξαν για κάθε περίπτωση που βρέθηκε παραπάνω (παράμετροι  $c_i(1)$  στους πίνακες 3, 4 και 5 και  $c_i(0)$  από την ad – 2) προκειμένου να προκύψουν πιθανές σχέσεις μάζας - ακτίνας αστέρων νετρονίων. Φυσικά, όταν εισαχθούν δεδομένα με παραμέτρους που οδηγούν σε αστάθειες, τα προγράμματα παρουσιάζουν σφάλμα, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να εξαχθούν οι ζητούμενες σχέσεις.

Όπως ήταν αναμενόμενο, για πολλούς συνδυασμούς τα προγράμματα παρουσίασαν σφάλμα. Υπήρχαν μόνο τρεις περιπτώσεις στην καθαρή νετρονική ύλη που τα προγράμματα έτρεξαν κανονικά. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις είναι αυτές που έδωσαν λογικά γραφήματα πίεσης και κλάσματος ενέργειας και φαίνονται στον πίνακα 6.

	$c_0(0)$	$c_1(0)$	$c_2(0)$	$c_3(0)$
(I)	-450.84	1209.27	-1680.64	1130.96
(II)	-867.50	3511.79	-5921.92	3735.13
(III)	132.50	-1093.25	864.13	610.13

Πίνακας 6: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS που δεν παρουσίασαν σφάλμα κατά το τρέξιμο των δυο προγραμμάτων. Το (I) αντιστοιχεί στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV, το (II) στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV και το (III) στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV. Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .

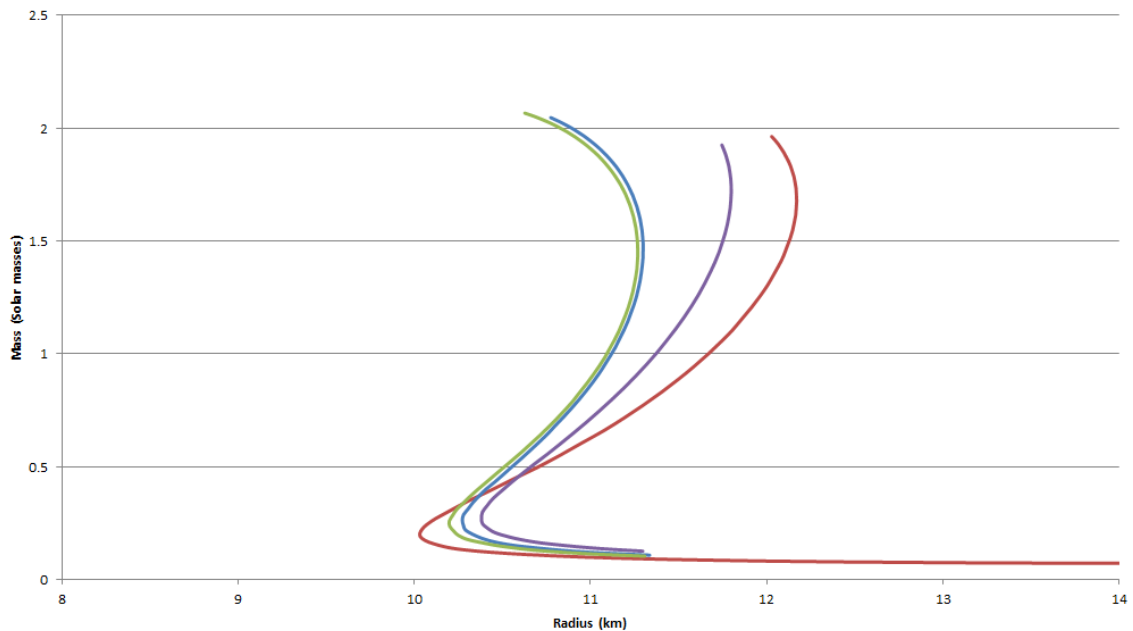
Από τους συνδυασμούς παραμέτρων του πίνακα 6, μπορούν να εξαχθούν γραφήματα με σχέσεις μάζας - ακτίνας για αστέρες νετρονίων. Πριν γίνει αυτό, όμως, πρέπει να γίνει ένας έλεγχος αιτιότητας (causality), δηλαδή η ταχύτητα του ήχου στην πυρηνική ύλη να είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου στο κενό. Η ταχύτητα του ήχου στην πυρηνική ύλη εξαρτάται από την πυκνότητα (βλ. εξίσωση (11)) και για κάποιες πυκνότητες ξεπερνάει την ταχύτητα του φωτός στο κενό, δηλαδή η εξίσωση μάζας - ακτίνας είναι superluminal. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η πυκνότητα στο κέντρο του αστέρα νετρονίων είναι πάντα μεγαλύτερη από ότι έξω, η συνθήκη που επιβάλλει η αιτιότητα είναι να μην ληφθούν υπ' όψιν οι τιμές εξόδου για πυκνότητες μεγαλύτερες από αυτές (βλ. Παράρτημα).

	Max Mass( $M_{\odot}$ )	$R_{1.4}(\text{km})$	$\rho_{\text{max}}(\text{fm}^{-3})$
(I)	2.05	11.29	0.877
(II)	1.92	11.70	0.615
(III)	1.96	12.07	0.632
ad - 2	2.06	11.27	0.906

Πίνακας 7: Η μέγιστη μάζα αστέρων νετρονίων, η ενδεικτική ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων με μάζα 1.4 ηλιακές μάζες και η μέγιστη πυκνότητα για την οποία η ταχύτητα του ήχου δε ξεπερνάει αυτή του φωτός. Το (I) αντιστοιχεί στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV, το (II) στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV, το (III) στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV και η τελευταία περίπτωση αντιστοιχεί στις παραμέτρους της ad - 2.

Οι πυκνότητες αυτές βρίσκονται από την εξίσωση (11) και οι οριακές πυκνότητες

που γίνεται η αποκοπή των δεδομένων δίνονται στον πίνακα 7. Στον ίδιο πίνακα επίσης δίνεται και η μέγιστη μάζα που μπορεί να έχει ένας αστέρας νετρονίων λαμβάνοντας υπό όψιν το κριτήριο της αιτιότητας, καθώς και μια ενδεικτική τιμή της ακτίνας του αστέρα αν έχει μάζα ίση με 1.4 ηλιακές μάζες.



Σχήμα 13: Γράφημα της μάζας ως προς την ακτίνα για αστέρες νετρονίων. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV, το μώβ στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV, το κόκκινο στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV. και το πράσινο αντιστοιχεί στις παραμέτρους της  $ad - 2$ .

Τα τελικά γραφήματα μάζας ακτίνας αστέρων νετρονίων, τα οποία προκύπτουν από τις παραμέτρους που είχαν υπολογιστεί, παρουσιάζονται στο σχήμα 13. Φαίνεται ότι πέραν του αποτελέσματος των παραμέτρων  $ad - 2$ , μόνο η περίπτωση (I) μπορεί να προβλέψει αστέρα νετρονίων με μάζα μεγαλύτερη από 2 ηλιακές μάζες.

Εξετάστηκε επίσης το κατά πόσο ισχύει η σύγκλιση των όρων της δυναμικής ενέργειας ανά σωματίδιο, δηλαδή η

$$U(\rho, 1) = \sum_{i \geq 0}^3 c_i(1) \rho^{1 + \frac{i}{3}},$$

του μοντέλου KIDS για τις παραμέτρους των τριών περιπτώσεων του πίνακα 6, καθώς και με την παραμετροποίηση  $ad - 2$  (πίνακας 8).

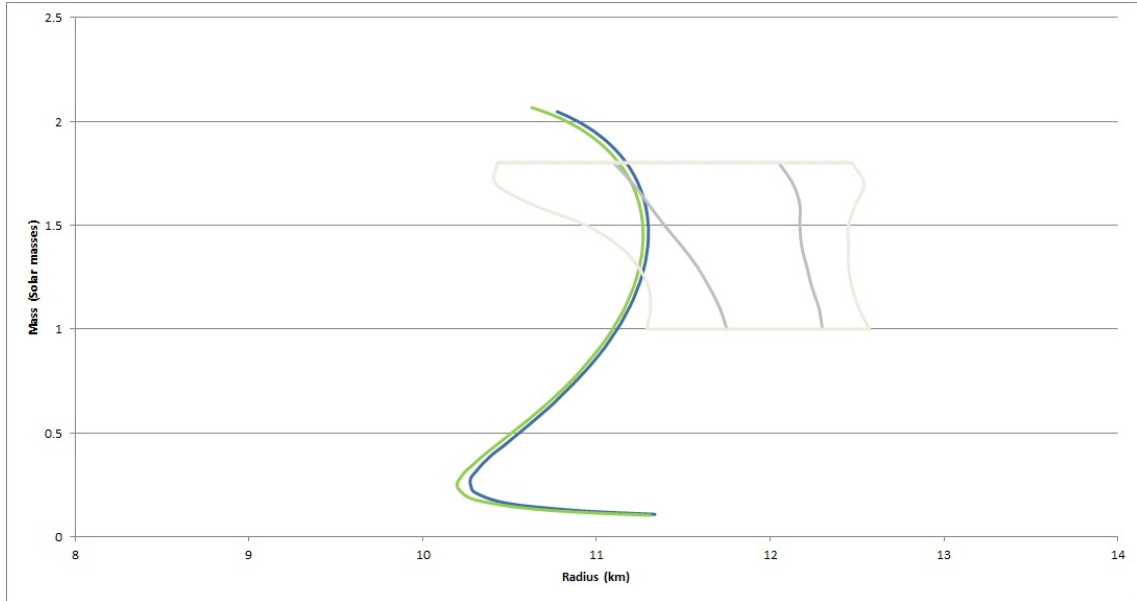
	$U_0 > U_1$	$U_1 > U_2$	$U_2 > U_3$
(I)	$\sim 0.05$	$\sim 0.4$	$> 1$
(II)	$< 0.01$	$\sim 0.2$	$> 1$
(III)	$< 0.01$	$> 1$	$> 1$
ad - 2	$\sim 0.07$	$\sim 0.4$	$> 1$

Πίνακας 8: Μέγιστες τιμές της πυκνότητας για την οποία ισχύει ότι ο  $n$ -οστός όρος της δυναμικής ενέργειας ανά σωματίδιο για τη νετρονική ύλη (εξίσωση (4)) είναι μεγαλύτερος από τον όρο  $n+1$ , για  $n = 0, 1, 2$ . Οι μονάδες της πυκνότητας είναι  $\text{fm}^{-3}$ . Το (I) αντιστοιχεί στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160 \text{ MeV}$  και  $Q_{\text{sym}} = 600 \text{ MeV}$ , το (II) στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160 \text{ MeV}$  και  $Q_{\text{sym}} = 1000 \text{ MeV}$ , το (III) στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = 0 \text{ MeV}$  και  $Q_{\text{sym}} = 1000 \text{ MeV}$  και η τελευταία περίπτωση αντιστοιχεί στις παραμέτρους της ad - 2.

Παρατηρείται ότι στις περιπτώσεις (II) και (III) για οποιαδήποτε τιμή της πυκνότητας (στο εύρος τιμών πυκνότητας που εξετάζουμε) ισχύει  $E_0 < E_1$ , σε αντίθεση με την περίπτωση (I), στην οποία υπάρχει κάποιο εύρος πυκνοτήτων κοντά στην πυκνότητα κορεσμού που ικανοποιείται η σύγκλιση των όρων της δυναμικής ενέργειας ανά σωματίδιο για τη νετρονική ύλη. Αυτό είναι μια ένδειξη ότι οι περιπτώσεις (II) και (III) δεν ανταποκρίνονται στα κριτήρια φυσικότητας του μοντέλου KIDS, αφού ο πρώτος όρος είναι πάντα μικρότερος από το δεύτερο όρο. Η διερεύνηση πάντως της νετρονικής ύλης δεν έχει κατασταλάξει και θα συνεχιστεί στο μέλλον.

Στο σχήμα 14 φαίνονται οι σχέσεις μάζας - ακτίνας για τις παραμέτρους της περίπτωσης (I) του πίνακα 6 και για τις παραμέτρους της ad-2, μαζί με τους περιορισμούς από αστροφυσικές παρατηρήσεις [59]. Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις μάζας - ακτίνας που προκύπτουν ικανοποιούν σε αρκετά καλό βαθμό τους περιορισμούς αυτούς.

Η σχέση μάζας - ακτίνας που προκύπτει, όμως, δε συμφωνεί με αυτές της αναφοράς [30], παρά το ότι οι συντελεστές είναι ίδιοι ή παραπλήσιοι. Ο κύριος λόγος είναι ότι στην παρούσα εργασία δεν έχει αντιμετωπιστεί επακριβώς η αραιά ύλη στον φλοιό των αστέρων νετρονίων, καθώς και στην περιοχή μετάβασης, στον κώδικα EOS. Το συναρτησοειδές σε αυτές τις περιοχές δεν ισχύει ως έχει, αλλά πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν η συσσωματωμένη ύλη. Παρά το γεγονός, όμως, ότι η προσέγγισή μας επηρεάζει αρκετά την ακτίνα, η μέγιστη μάζα δεν αναμένεται να επηρεάζεται ιδιαίτερα.



Σχήμα 14: Γράφημα της μάζας ως προς την ακτίνα για αστέρες νετρονίων. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί στις παραμέτρους με  $K_{\text{sym}} = -160$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV, το πράσινο στις παραμέτρους της  $ad - 2$ , ενώ φαίνονται και οι περιορισμοί από την εργασία των Steiner et al., [41]. Τα εξωτερικά όρια (ανοιχτό γκρι) κλείνουν την περιοχή τιμών με επίπεδο εμπιστοσύνης (confidence level)  $2\sigma$ , ενώ τα εσωτερικά όρια (σκούρο γκρι) κλείνουν την περιοχή τιμών με επίπεδο εμπιστοσύνης  $1\sigma$ .

Στον πίνακα 9 γίνεται μια σύγκριση μεταξύ των μεγεθών που βρέθηκαν στην παρούσα εργασία και υπολογίστηκαν με τις παραμέτρους του πίνακα 6 με άλλα μεγέθη που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Οι HS καταστατικές εξισώσεις έχουν προκύψει από συνδυασμό ενός στατιστικού συνόλου διαφόρων πυρήνων σε πυρηνική στατιστική ισορροπία και ενός σχετικιστικού μοντέλου μέσου πεδίου για μη δέσμους πυρήνες, δηλαδή το επεκταμένο μοντέλο πυρηνικής στατιστικής ισορροπίας [60], ενώ οι SFHo και SFHx είναι δυο νέες παραμετροποιήσεις που έχουν χρησιμοποιήσει μετρήσεις ακτίνας αστέρων νετρονίων από δυαδικά συστήματα μικρής μάζας [61]. Οι LS βασίζονται στο πρότυπο υγρής σταγόνας και περιλαμβάνουν επιφανειακές επιδράσεις [62] και οι STOS βασίζονται στο σχετικιστικό μοντέλο μέσου πεδίου για την περιγραφή ομογενούς πυρηνικής ύλης [63]. Τα δυο τελευταία μοντέλα δίνουν κλασικές καταστατικές εξισώσεις για καταστάσεις πυρηνικής στατιστικής ισορροπίας [56].

EoS	$\rho_0$ [fm <sup>-3</sup> ]	$S(\rho_0)$ [MeV]	$L(\rho_0)$ [MeV]	$R_{1.4}$ [km]	$M_{\max}$ [M <sub>⊙</sub> ]
SFH <sub>o</sub>	0.1583	31.57	47.10	11.89	2.06
SFH <sub>x</sub>	0.1602	28.67	23.18	11.99	2.13
HS(TM1)	0.1455	36.95	110.99	14.47	2.21
HS(TMA)	0.1472	30.66	90.14	13.85	2.02
HS <sub>F</sub> SUgold)	0.1482	32.56	60.43	12.55	2.02
HS(DD2)	0.1491	31.67	55.04	13.22	2.42
HS(IUFSU)	0.1546	31.29	47.20	12.68	1.95
HS(NL3)	0.1482	37.39	118.49	14.77	2.79
STOS(TM1)	0.1452	36.89	110.79	14.50	2.22
LS(180)	0.1550	28.61	73.82	12.16	1.84
LS(220)	0.1550	28.61	73.82	12.67	2.05
Exp.	~ 0.15	29.0 - 32.7	40.5 - 61.9	10.4 - 12.9	≥ 2.0
(I)	0.1600	33.00	50.00	11.29	2.05
(II)	0.1600	33.00	50.00	11.70	1.92
(III)	0.1600	33.00	50.00	12.07	1.96

Πίνακας 9: Ιδιότητες πυρηνικής ύλης σε πυκνότητα κορεσμού,  $\rho_0$ , για διάφορες καταστατικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται [56], μαζί με τις τρεις που βρέθηκαν (πίνακας 6). Τα μεγέθη είναι η πυκνότητα κορεσμού  $\rho_0$ , η ενέργεια συμμετρίας  $S(\rho_0)$ , η κλίση της ενέργειας συμμετρίας  $L(\rho_0)$ . Επίσης, δίνονται η ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων με μάζα ίση με 1.4 ηλιακές μάζες  $R_{1.4}$  και η μέγιστη βαρυτική μάζα του αστέρα νετρονίων  $M_{\max}$  αντίστοιχα.

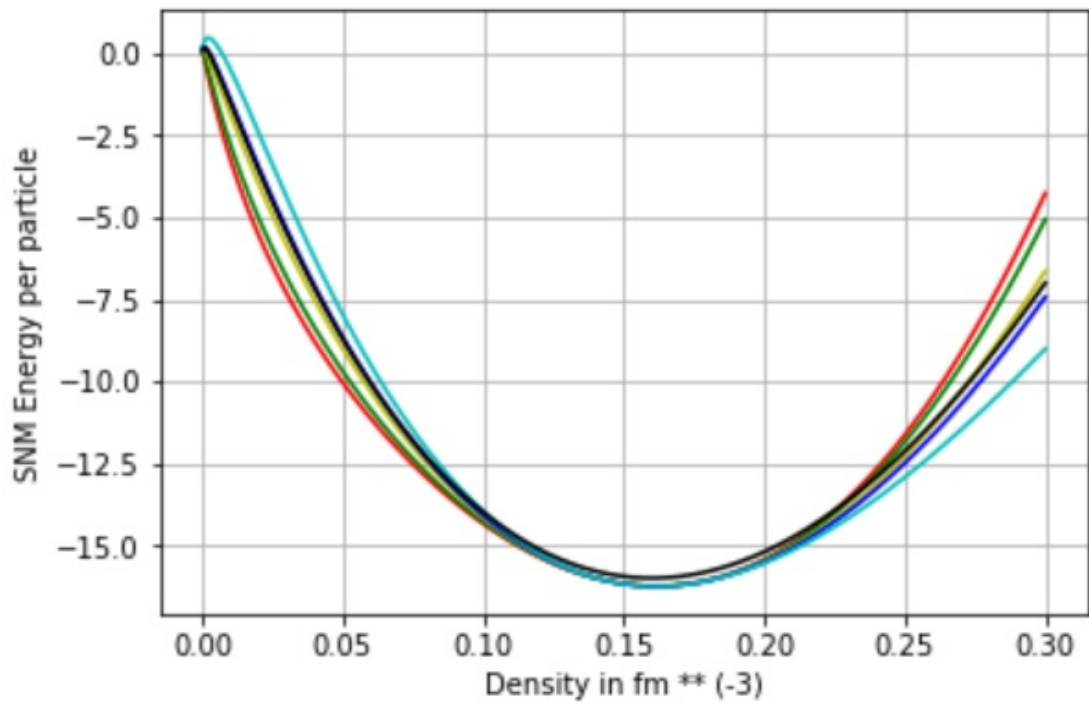


## 4.2 Συμμετρική πυρηνική ύλη (Symmetric Nuclear Matter, SNM)

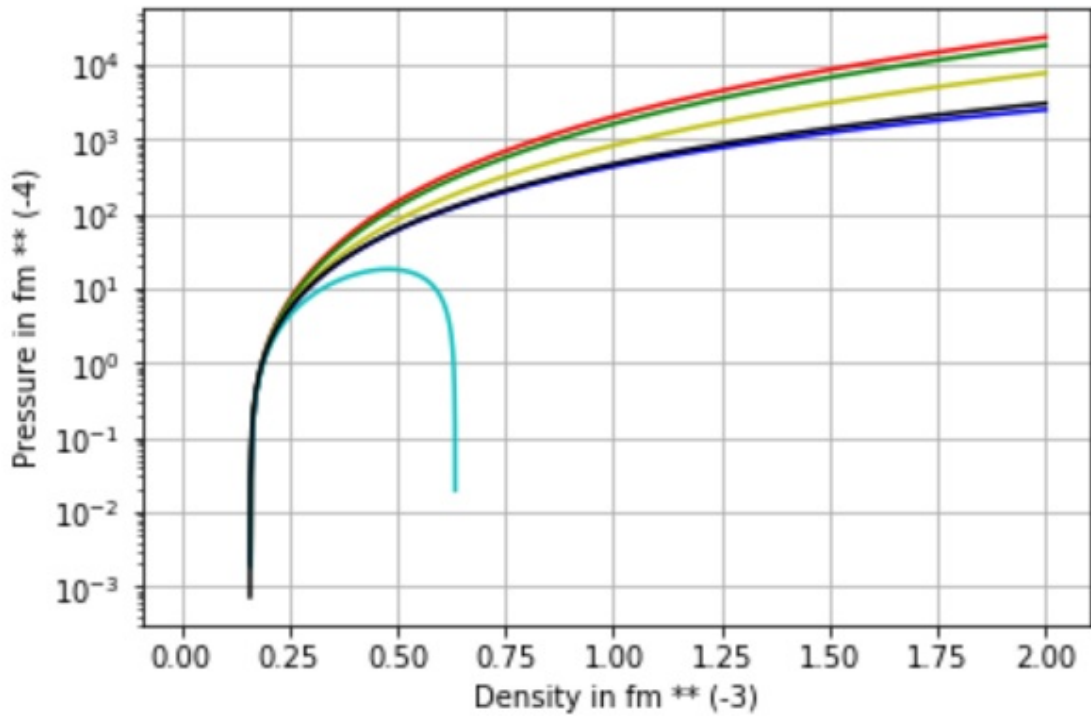
Η διερεύνηση που γίνεται εδώ είναι αντίστοιχη με αυτή που έγινε για την καθαρή νετρονική ύλη, αλλά με διαφορετικά συμπεράσματα, όπως αναμενόταν. Το πρώτο βήμα ήταν να χρησιμοποιηθούν τα ίδια μεγέθη όπως και στην περίπτωση της καθαρής νετρονικής ύλης (δηλαδή ενέργεια συμμετρίας  $J$ , η κλίση  $L$  και η καμπυλότητά της  $K_{\text{sym}}$ , καθώς και η κυρτότητα της  $Q_{\text{sym}}$ , οι τιμές των οποίων φαίνονται στον πίνακα 2), με τη διαφορά ότι αντί να βρεθούν οι συντελεστές  $c_i(1)$  δεδομένων των  $c_i(0)$ , έγινε το αντίθετο, δηλαδή βρέθηκαν τα  $c_i(0)$  παίρνοντας ως δεδομένα τα  $c_i(1)$  της ad – 2 παραμετροποίησης (βλ. πίνακες 1 και 2).

$Q_{\text{sym}}(\text{MeV})$	$c_0(0)$	$c_1(0)$	$c_2(0)$	$c_3(0)$
-200	-1458.15	5167.10	-8116.42	5033.84
0	-1249.81	4015.84	-5995.79	3731.76
400	-833.15	1713.32	-1754.51	1127.59
600	-624.81	562.06	366.13	-174.49
1000	-208.15	-1740.46	4607.41	-2778.66

Πίνακας 10: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS για συμμετρική πυρηνική ύλη που βρέθηκαν για  $J$ ,  $L$ ,  $K_{\text{sym}}$  ίσα με 33, 50, -160 MeV αντίστοιχα και διαφορετικές τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας  $Q_{\text{sym}}$ . Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .



Σχήμα 15: Γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο (σε μονάδες MeV) για την συμμετρική πυρηνική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 10, καθώς και για αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το γαλάζιο σε 1000 και το μαύρο στην  $ad - 2$ .



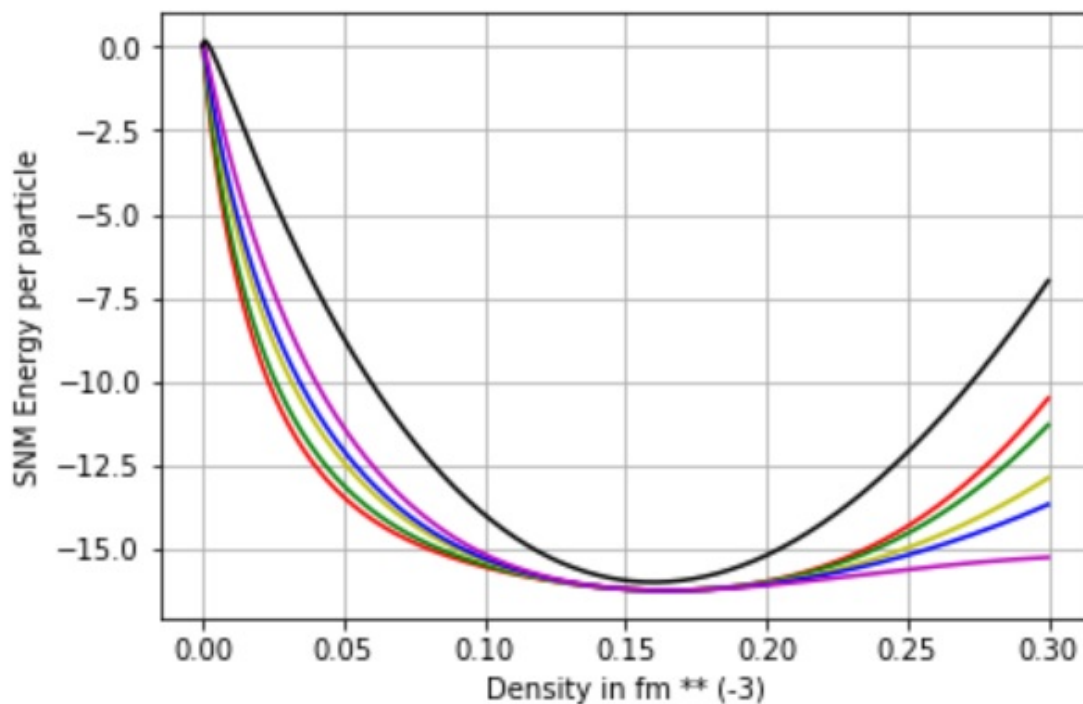
Σχήμα 16: Γράφημα πίεσης για την συμμετρική πυρηνική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 10, καθώς και για αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το γαλάζιο σε 1000 και το μαύρο στην  $ad - 2$ .

Πάλι βρέθηκαν διάφορες τετράδες συντελεστών, για διαφορετικές τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας, οι οποίες τιμές παρουσιάζονται στον πίνακα 10, και έγιναν τα αντίστοιχα γραφήματα για την ενέργεια ανά σωματίδιο και την πίεση σαν συναρτήσεις της πυκνότητας που προκύπτουν για τις παραπάνω παραμέτρους που δίνονται στα σχήματα 15 και 16 αντίστοιχα.

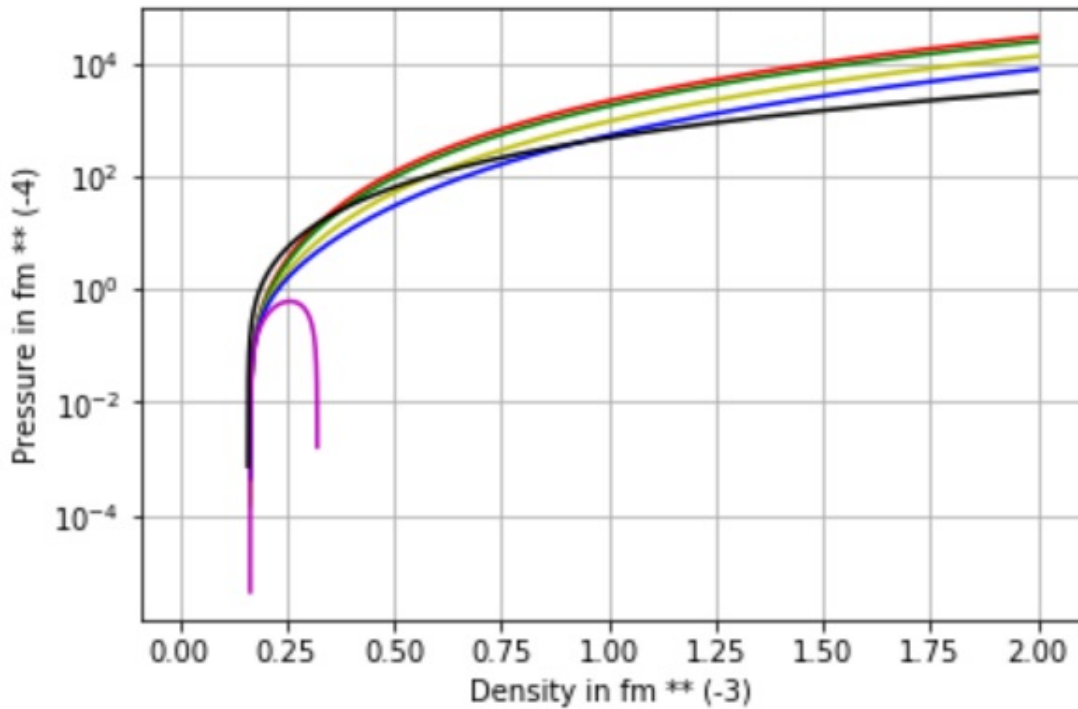
Σε πρώτη ματιά, οι συντελεστές δεν είναι καθόλου κοντά στις τιμές της  $ad - 2$  για την συμμετρική πυρηνική ύλη (πίνακας 1), αλλά στα σχήματα 15 και 16, υπάρχουν καμπύλες που είναι κοντά στην αρχική καμπύλη  $ad - 2$ . Έπειτα, δοκιμάστηκε η περίπτωση όπου η καμπυλότητα της ενέργειας συμμετρίας ισούται με την οριακή τιμή μηδέν ( $K_{\text{sym}} = 0$  MeV). Τα αποτελέσματα για τις παραμέτρους του συναρτησοειδούς KIDS τότε είναι τα εξής (πίνακας 11).

$Q_{\text{sym}}(\text{MeV})$	$c_0(0)$	$c_1(0)$	$c_2(0)$	$c_3(0)$
-200	-2458.15	9772.14	-14902.47	8158.84
0	-2249.81	8620.88	-12781.83	6856.76
400	-1833.15	6318.36	-8540.55	4252.59
600	-1624.81	5167.10	-6419.91	2950.51
1000	-1208.15	2864.58	-2178.64	346.34

Πίνακας 11: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS για συμμετρική πυρηνική ύλη που βρέθηκαν για  $J, L, K_{\text{sym}}$  ίσα με 33, 50, 0 MeV αντίστοιχα και διαφορετικές τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας  $Q_{\text{sym}}$ . Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .



Σχήμα 17: Γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο για την συμμετρική πυρηνική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 11, καθώς και για αυτές της  $ad = -2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, το κίτρινο σε 400, το μπλε σε 600, το ματζέντα σε 1000 και το μαύρο στην  $ad = -2$ .



Σχήμα 18: Γράφημα πίεσης για την συμμετρική πυρηνική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 11, καθώς και αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = -200$  MeV, το πράσινο σε 0, κίτρινο σε 400, μπλε σε 600, ματζέντα σε 1000 και μαύρο στην  $ad - 2$ .

Τόσο τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 11, όσο και οι καμπύλες στα σχήματα 17 και 18 δεν είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικές για το κατά πόσο μπορούν να περιγράψουν πυρήνες, οι οποίοι απαιτούν μεγαλύτερες τιμές (α)συμπιεστότητας (οι καμπύλες έχουν (α)συμπιεστότητα περίπου  $K_0 \approx 80$  MeV αντί για την τιμή  $K_0 = 240$  MeV που αναμενόταν). Παρ' όλα αυτά, θα ελέγξουμε αν μπορούν να περιγράψουν αστέρες νετρονίων.

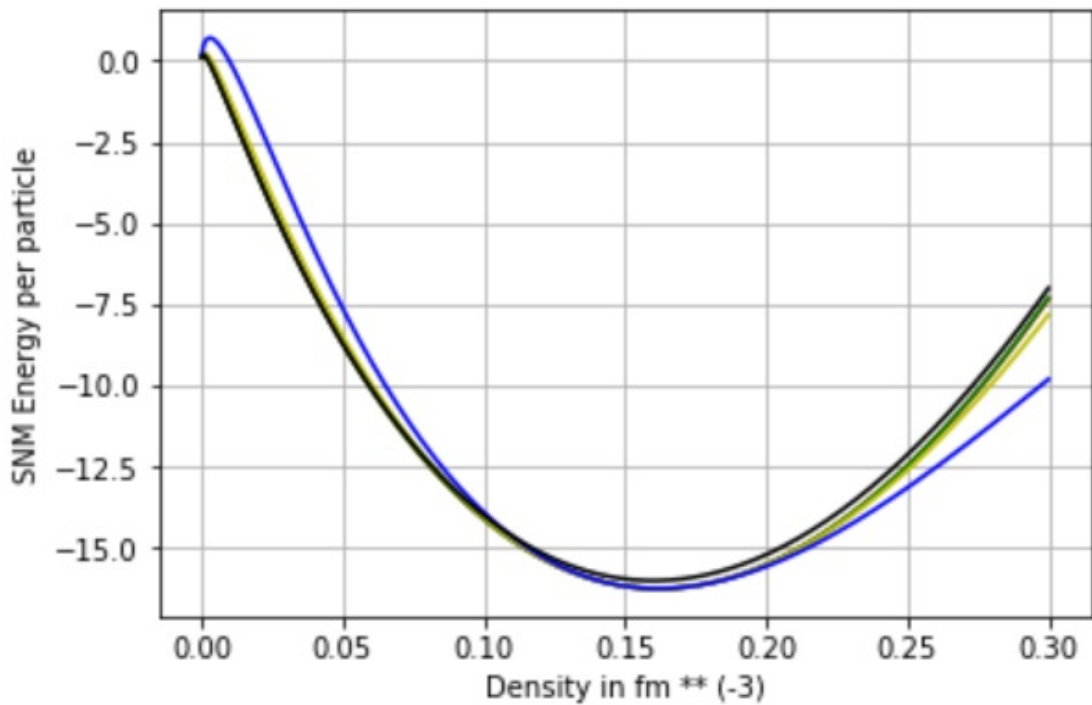
Είναι γνωστό ότι η συμμετρική πυρηνική ύλη μπορεί να περιγραφεί επιτυχώς από το συναρτησοειδές KIDS χρησιμοποιώντας τρεις παραμέτρους, σε αντίθεση με την καθαρή νετρονική ύλη, η οποία έχειδειχθεί (στην προηγούμενη παράγραφο) ότι χρειάζεται τουλάχιστον τέσσερις παραμέτρους.

Για να εξεταστεί ο παραπάνω ισχυρισμός, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως και με την καθαρή νετρονική ύλη. Δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιηθεί η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας, να βρεθούν νέες παράμετροι μηδενίζοντας μια εκ των τεσσάρων  $c_i(0)$ . Οι παράμετροι που βρέθηκαν φαίνονται στον πίνακα 12.

$c_0(0)$	$c_1(0)$	$c_2(0)$	$c_3(0)$	$Q_{\text{sym}}$ (MeV)
-652.73	716.34	81.94	0	573.20
-660.78	760.82	0	50.31	565.47
-523.10	0	1401.45	-810.19	697.64
0	-2890.69	6726.15	-4079.58	1199.82

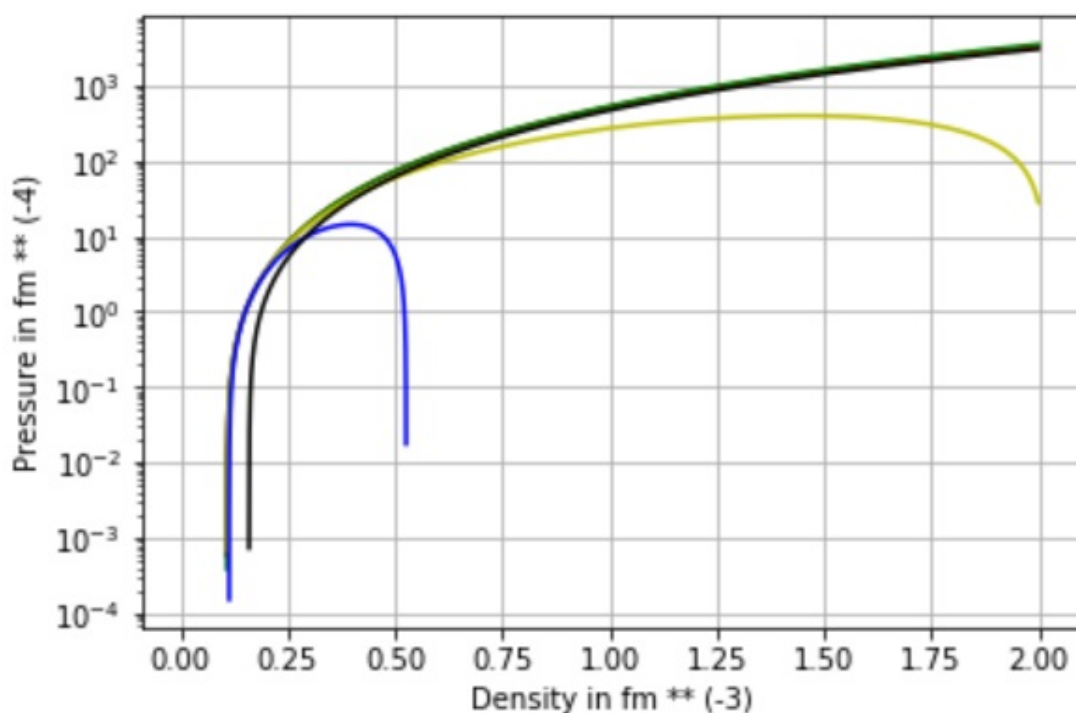
Πίνακας 12: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS που βρέθηκαν για  $J, L, K_{\text{sym}}$  ίσα με 33, 50, -160 MeV αντίστοιχα, μηδενίζοντας κάθε φορά μια εκ των  $c_i(0)$ . Στην τελευταία στήλη είναι η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας που προκύπτει χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους. Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η τριάδα παραμέτρων που προκύπτει για  $c_3(0) = 0$  είναι παραπλήσια με την τριάδα παραμέτρων  $ad - 2$  για την συμμετρική πυρηνική ύλη, όπως και η κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας που προκύπτει από αυτές τις παραμέτρους είναι πολύ κοντά στην αρχική τιμή που βρέθηκε για τις παραμέτρους της  $ad - 2$  (πίνακας 2). Εξάλλου, και στα σχήματα 19 και 20 φαίνεται ότι η κόκκινη καμπύλη ακολουθεί την μαύρη καμπύλη πάρα πολύ κοντά.



Σχήμα 19: Γράφημα ενέργειας ανά σωματίδιο συμμετρικής πυρηνικής ύλης σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 12, καθώς και αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα (που συμπίπτει με το μαύρο χρώμα) αντιστοιχεί σε  $c_3(0) = 0$ , το πράσινο σε  $c_2(0) = 0$ , το κίτρινο σε  $c_1(0) = 0$ , μπλε σε  $c_0(0) = 0$  και το μαύρο στην  $ad - 2$ .

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι δεν υπάρχει μεγάλη αλλαγή μεταξύ των παραμέτρων που προκύπτουν από το μηδενισμό της  $c_3(0)$  και των παραμέτρων που προκύπτουν από το μηδενισμό της  $c_2(0)$ , σε αντίθεση με το τι γίνεται όταν μηδενιστεί κάποιος εκ των  $c_0(0)$  και  $c_1(0)$  (σχήματα 19 και 20). Επίσης, η τιμή της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας δεν αλλάζει πολύ με τον μηδενισμό των δυο τελευταίων όρων, σε αντίθεση με το τι γίνεται όταν μηδενίζεται κάποιος από τους δυο πρώτους. Αυτό σημαίνει ότι οι κυρίαρχοι (και πιθανώς αναπόσπαστοι) όροι είναι οι όροι για  $i = 0, 1$ , ενώ οι όροι  $i = 2, 3$  δεν παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο.



Σχήμα 20: Γράφημα πίεσης για την συμμετρική πυρηνική ύλη σαν συνάρτηση της πυκνότητας για τις παραμέτρους του πίνακα 12, καθώς και για αυτές της  $ad - 2$ . Το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί σε  $c_3(0) = 0$ , το πράσινο σε  $c_2(0) = 0$ , το κίτρινο σε  $c_1(0) = 0$ , το μπλε σε  $c_0(0) = 0$  και το μαύρο στην  $ad - 2$ .

Μετά, χρησιμοποιώντας όλους τους παραπάνω συνδυασμούς για τη συμμετρική πυρηνική ύλη, τρέξαμε τα δυο προγράμματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, τα EOS και TOV, για την εύρεση της σχέσης μάζας - ακτίνας των αστερών νετρονίων. Από όλους τους συνδυασμούς των παραμέτρων  $c_i(0)$ , υπήρχαν και σε αυτή την περίπτωση μόνο τρεις περιπτώσεις που και τα δυο προγράμματα έτρεξαν χωρίς κανένα πρόβλημα. Και οι τρεις περιπτώσεις είναι από το μηδενισμό ενός εκ των τεσσάρων  $c_i(0)$  (δηλαδή όλες οι περιπτώσεις από τους πίνακες 10 και 11 παρουσίασαν πρόβλημα στα προγράμματα) και οι περιπτώσεις φαίνονται στον πίνακα 13.



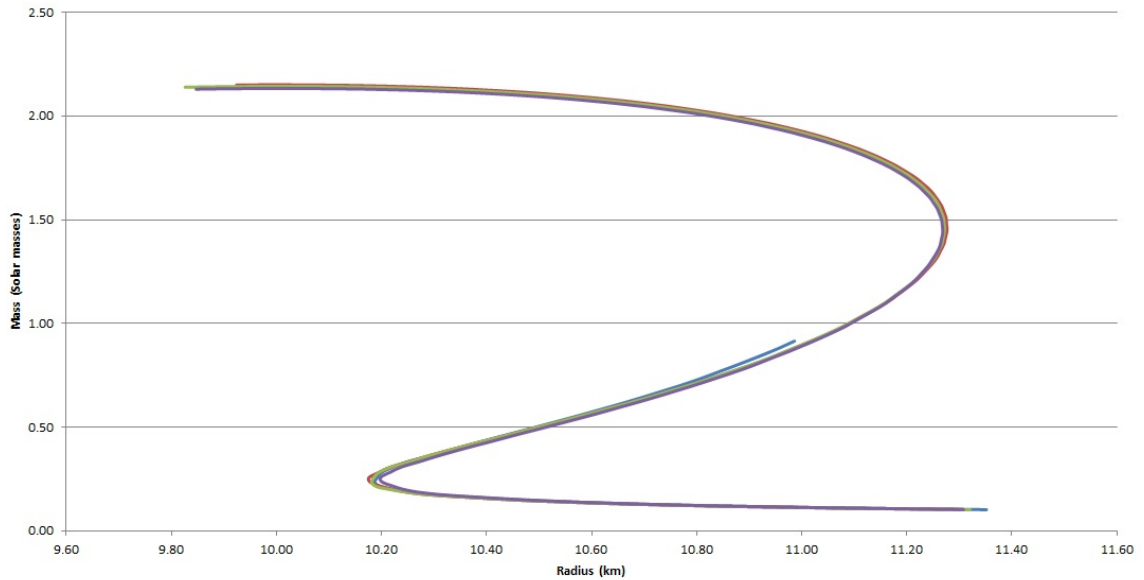
	$c_0(0)$	$c_1(0)$	$c_2(0)$	$c_3(0)$
(I)	-652.73	716.34	81.94	0
(II)	-660.78	760.82	0	50.31
(III)	-523.10	0	1401.45	-810.19

Πίνακας 13: Οι παράμετροι του συναρτησοειδούς KIDS με τους οποίους έτρεξαν τα δυο προγράμματα χωρίς να παρουσιάσουν σφάλμα. Ο κάθε συντελεστής  $c_i$  έχει μονάδες  $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+i}$ .

Από αυτές τις περιπτώσεις, προέκυψαν οι σχέσεις μάζας ακτίνας, μετά τον έλεγχο αιτιότητας, κατά αντίστοιχο τρόπο με την προηγούμενη παράγραφο. Οι τιμές αυτές φαίνονται στον πίνακα 14, ενώ τα αντίστοιχα γραφήματα μάζας - ακτίνας φαίνονται στο σχήμα 21.

	Max Mass( $M_\odot$ )	$R_{1.4}(\text{km})$	$\rho_{\text{max}}(\text{fm}^{-3})$
(I)	2.14	11.26	1.27
(II)	2.15	11.27	1.21
(III)	0.92	11.18	0.407
ad - 2	2.13	11.27	1.33

Πίνακας 14: Η μέγιστη μάζα αστέρων νετρονίων, η ενδεικτική ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων με μάζα 1.4 ηλιακές μάζες και η μέγιστη πυκνότητα για την οποία η ταχύτητα του ήχου δε ξεπερνάει αυτή του φωτός, για τις τρεις περιπτώσεις του πίνακα 13, καθώς και για την περίπτωση της ad - 2. Η περίπτωση (III) απορρίπτεται επειδή δίνει μέγιστη μάζα ίση με μόλις  $0.92 M_\odot$ .



Σχήμα 21: Γράφημα της μάζας ως προς την ακτίνα για αστέρες νετρονίων. Το πράσινο χρώμα αντιστοιχεί στην περίπτωση (I), το κόκκινο στην περίπτωση (II), το μπλε στην περίπτωση (III) και το μωβ αντιστοιχεί στην περίπτωση της  $ad - 2$ .

Είναι προφανές από τη διερεύνηση της συμμετρικής πυρηνικής ύλης, ότι προκειμένου να περιγραφεί καλά η συμμετρική ύλη, χρειάζονται τρεις παράμετροι  $c_i(0)$  και όχι τέσσερις, σύμφωνα με το μοντέλο συναρτησοειδούς KIDS.

## 5 Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

Σκοπός της εργασίας ήταν η διερεύνηση των παραμέτρων της ενέργειας συμμετρίας στα πλαίσια του συναρτησοειδούς KIDS. Επικεντρωθήκαμε στην λιγότερη οριοθετημένη παράμετρο, δηλαδή την κυρτότητα της ενέργειας συμμετρίας ( $Q_{\text{sym}}$ ). Εξετάσαμε επίσης κατά πόσο είναι απαραίτητοι οι όροι ανώτερης τάξης του συναρτησοειδούς, πέραν των δυο πρώτων, ενώ ως κριτήριο ελέγχου χρησιμοποιήθηκε η εξαγόμενη μέγιστη μάζα αστέρα νετρονίων.

Η παραπάνω μελέτη έδειξε ότι τα συναρτησοειδή KIDS που κατασκευάστηκαν από πειραματικές περιοχές τιμών κατάλληλων μεγεθών μπορούν να αναπαράγουν παρόμοιες καταστατικές εξισώσεις με αυτές των συναρτησοειδών που έχουν προκύψει από θεωρητικούς υπολογισμούς και συναρτησοειδών KIDS που χρησιμοποίησαν ψευδοδοδεδομένα. Τα μεγέθη που μελετήθηκαν έδειξαν παρόμοια συμπεριφορά και στις δυο περιπτώσεις.

Η διερεύνηση της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας ( $Q_{\text{sym}}$ ) υπέδειξε ως κάτω όριο της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας τα 400 MeV περίπου, εφόσον η  $K_{\text{sym}}$  παρέμεινε στα  $-160$  MeV. Μεγαλύτερη τιμή  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV έδειξε διαφορετική συμπεριφορά, απαιτώντας μεγαλύτερη  $Q_{\text{sym}}$ . Να σημειωθεί ότι κατά τη διερεύνηση δεν αλλάξαμε την κλίση της ενέργειας συμμετρίας που παραδοσιακά χαρακτηρίζει το κατά πόσο μαλακή ή σκληρή είναι η καταστατική εξίσωση. Δείχτηκε έτσι και ο σημαντικός ρόλος των ανώτερης τάξης παραγώγων της ενέργειας συμμετρίας. Η διερεύνηση αυτή θα ήταν αδύνατη με παραδοσιακά συναρτησοειδή που δεν έχουν την κατάλληλη μορφή και χρειάζονται κάθε φορά προσαρμογή σε πυρήνες.

Επιβεβαιώθηκε επίσης ότι οι πρώτες παράμετροι του αναπτύγματος του συναρτησοειδούς KIDS  $c_0(\delta)$  και  $c_1(\delta)$  είναι πολύ πιο σημαντικές (και ειδικότερα στην περίπτωση της συμμετρικής πυρηνικής ύλης, απαραίτητες στην περιγραφή της συμμετρικής ύλης) από τις επόμενες παράμετρους  $c_2(\delta)$  και  $c_3(\delta)$ .

Τέλος, επιβεβαιώθηκε ότι στα πλαίσια του μοντέλου του συναρτησοειδούς KIDS η συμμετρική πυρηνική ύλη χρειάζεται λιγότερες παραμέτρους (τρεις) από ότι η καθαρή νετρονική ύλη, η οποία χρειάζεται τουλάχιστον τέσσερις παράμετρους για ευελιξία, ίσως και περισσότερες με το ανοιχτό ερώτημα που έχει μείνει από τη διερεύνηση της περίπτωσης  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV και  $Q_{\text{sym}} = 1000$  MeV.

Τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας αφήνουν ακόμα ερωτήματα αναπάντητα, τα οποία μπορούν να διερευνηθούν πιο λεπτομερώς στο μέλλον. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα συναρτησοειδή KIDS που προέκυψαν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη πεπερασμένων πυρήνων, όπως έχει ήδη ξεκινήσει να εφαρμόζεται σε άλλα συναρτησοειδή KIDS [10, 64].

## 6 Αναφορές

- [1] A. G. Sitenko and V. K. Tartakovskii, *Lectures on the Theory of the Nucleus* (Pergamon Press, 1975)
- [2] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, New York, 1971)
- [3] Long Range Plan 2017, *Perspectives in Nuclear Physics*, NuPECC
- [4] E. Pian et al., *Nature* **551**, 67 (2017)
- [5] M. Bender et al., *Rev. Mod. Phys.* **75**, 121 (2003)
- [6] P. B. Demorest et al., *Nature* **467**, 1081-1083 (2010)
- [7] B. Friedman and V. R. Pandharipande, *Nucl. Phys. A* **361**, 502-520 (1981)
- [8] A. Akmal et al., *Phys. Rev. C* **58**, 1804-1828 (1998)
- [9] C. Drischler et al., *Phys. Rev. C* **89**, 025806 (2014)
- [10] H. Gil et al., arXiv: 1805.11321
- [11] W. Nazarewicz et al., *Eur. Phys. J. A* **50**, 20 (2014)
- [12] P. Hohenberg and W. Kohn, *Phys. Rev.* **136**, B864 (1964)
- [13] W. Kohn and L. Sham, *Phys. Rev.* **140**, A1133 (1965)
- [14] J. Messud et al., *Phys. Rev. C* **80**, 054314 (2009)
- [15] J. Antoniadis et al., *Science* **340**, 6131 (2013)
- [16] B. G. Carlsson et al., *Phys. Rev. C* **78**, 044326 (2008)
- [17] G. A. Lalazissis, P. Ring and D. Vretenar, *Extended Density Functionals in Nuclear Structure Physics* (Springer, 2004)
- [18] D. Vretenar et al., *Phys. Rep.* **409**, 101-259 (2005)
- [19] P. Klüpfel et al., *Phys. Rev. C* **79**, 034310 (2009)
- [20] M. Kortelainen et al., *Phys. Rev. C* **82**, 024313 (2010)
- [21] J. R. Stone and P.-G. Reinhard, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58**, 587 (2007)

- [22] J. Erler et al., Jour. Phys. G: Nucl. and Part. Phys. **38**, 033101 (2011)
- [23] M. Dutra et al., Phys. Rev. C **85**, 035201 (2012)
- [24] P. D. Stevenson et al., AIP Conf. Proc. **1529**, 262 (2013)
- [25] T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. **9**, 615-634 (1958)
- [26] D. Vautherin and D. M. Brink, Phys. Rev. C **5**, 626 (1972)
- [27] D. Gogny, Proc. Int. Conf. Nucl. Phys. **1**, 48 (1973)
- [28] B. Agrawal et al., Phys. Rev. C **73**, 034319 (2006)
- [29] Z. Zhang and L.-W. Chen, Phys. Rev. C **94**, 064326 (2016)
- [30] P. Papakonstantinou et al., Phys. Rev. C **97**, 014312 (2018)
- [31] H. W. Hammer and R. J. Furnstahl, Nucl. Phys. A **678**, 277-294 (2000)
- [32] N. Kaiser et al., Nucl. Phys. A **697**, 255-276 (2002)
- [33] E. Chabanat et al., Nucl. Phys. A **627**, 710 (1997)
- [34] J. W. Negele and D. Vautherin, Phys. Rev. C **5**, 1472 (1972)
- [35] J. Boguta and A. R. Bodmer, Nucl. Phys. **A292**, 413 (1977)
- [36] W. Greiner and J. A. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, 1995)
- [37] L. G. Cao et al., Phys. Rev. C **73**, 014313 (2006)
- [38] C. Fuchs, Prog. Part. Nuc. Phys. **56**, 1 (2006)
- [39] B.-A. Li, Nucl. Phys. News, **27**, 4 (2017)
- [40] P. Danielewicz et al., Science **298**, 1592 (2002)
- [41] A. W. Steiner et al., Phys. Rep. **411**, 325 (2005)
- [42] V. Baran et al., Phys. Rep. **410**, 335 (2005)
- [43] B.-A. Li et al., Phys. Rep. **464**, 113 (2008)
- [44] M. B. Tsang et al., Phys. Rev. C **86**, 015803 (2012)
- [45] C. J. Horowitz et al., J. Phys. **G41**, 093001 (2014)

- [46] M. Baldo and G. F. Burgio, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **91**, 203 (2016)
- [47] C. Xu et al., *Phys. Rev. C* **82**, 054607 (2010)
- [48] R. Sellahewa and A. Rios, *Phys. Rev. C* **90**, 054327 (2014)
- [49] J. M. Lattimer and A. W. Steiner, *Eur. Phys. J. A* **50**, 40 (2014)
- [50] L. W. Chen et al., *Phys. Rev. C* **82**, 024321 (2010)
- [51] J. Margueron et al., *Phys. Rev. C* **97**, 025805 (2018)
- [52] I. Tews et al., *Astrophys. J.* **848**, 105 (2017)
- [53] S. S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, J. Wiley (2004)
- [54] P. Haensel, A. Y. Potekhin and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*, Springer (2007)
- [55] C. A. Bertulani, *Nuclear Physics in a Nutshell*, Princeton University Press (2009)
- [56] T. Fischer et al., *Eur. Phys. J. A* **50**, 46 (2014)
- [57] P. Papakonstantinou, Institute for Basic Science (IBS), Private communication
- [58] Taehyun Kim, Kyungpook National University (S. Korea), Private communication
- [59] A. W. Steiner et al., *Astrophys. J.* **722**, 33-54 (2010)
- [60] M. Hempel and J. Schaffner-Bielich, *Nucl. Phys. A* **837**, 210 (2010)
- [61] A. W. Steiner et al., *Astrophys. J.* **774**, 17 (2013)
- [62] H. Shen et al., *Nucl. Phys. A* **637**, 435 (1998)
- [63] J. M. Lattimer and F. Swesty, *Nucl. Phys. A* **535**, 331 (1991)
- [64] H. Gil et al., *JPS Conf. Proc.* **20**, 011041 (2018)
- [65] NumPy v1.14 Manual, Scipy.org (2018)

## 7 Παραρτήματα

### 7.1 Κλάσμα πρωτονίων σε αστρική ύλη

Η ενέργεια ανά νουκλεόνιο στη γενική μορφή (βλέπε σχέση (19) ) γράφεται ως:

$$E_N = W(\rho) + \frac{S(\rho)}{\rho^2} (\rho_n - \rho_p)^2 \quad (33)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα αριθμού βαρυονίων (νουκλεονίων),  $\rho_p = x_p \rho$  η πυκνότητα αριθμού πρωτονίων,  $\rho_n = x_n \rho$  η πυκνότητα αριθμού νετρονίων,  $x_{p,n}$  τα κλάσματα πρωτονίων και νετρονίων,  $W(\rho)$  η ενέργεια ανά σωματίδιο συμμετρικής ύλης και  $S(\rho)$  η ενέργεια συμμετρίας.

Υπονοείται μια τετραγωνική προσέγγιση ως προς την ασυμμετρία  $\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}$ . Η αστρική ύλη (π.χ. σε έναν αστέρα νετρονίων) θα περιέχει νουκλεόνια και λεπτόνια. Θεωρούμε ότι υπάρχουν ηλεκτρόνια και μιονία, με τις αντίστοιχες πυκνότητες να είναι  $\rho_\mu \equiv x_\mu \rho$  και  $\rho_e \equiv x_e \rho$ , ενώ η ενέργεια ανά σωματίδιο για κάθε είδος λεπτονίου υποθέτεται ότι είναι αυτή ενός ελευθέρου αερίου Fermi.

Η ολική ενέργεια είναι:

$$E = E_N + m_p c^2 \rho_p + m_n c^2 \rho_n + E_e + E_\mu \quad (34)$$

όπου ο δεύτερος και ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (34) είναι οι ενέργειες ηρεμίας των νουκλεονίων, και  $E_e, E_\mu$  είναι οι ενέργειες των ηλεκτρονίων και μιονίων αντίστοιχα.

Στην ύλη που έχει επέλθει ισορροπία ως προς τις  $\beta$ -διασπάσεις, πρέπει να ισχύει:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e,$$

όπου τα  $\mu_i$  είναι τα χημικά δυναμικά των αντίστοιχων σωματιδίων. Οι συνθήκες ισορροπίας είναι:

$$p + e \rightarrow n + \nu_e, n + \bar{e} \rightarrow p + \bar{\nu}_e \quad (35)$$

$$p + \mu \rightarrow n + \nu_\mu, n + \bar{\mu} \rightarrow p + \bar{\nu}_\mu \quad (36)$$

$$\mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = 0 \quad (37)$$

Η εξίσωση (35) συνεπάγεται ότι

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e - \mu_{\nu_e},$$

η εξίσωση (36) ότι

$$\mu_n = \mu_p + \mu_\mu - \mu_{\nu_e}.$$

Αυτές οι σχέσεις, μαζί με τη σχέση (37), συνεπάγονται ότι τα χημικά δυναμικά των ηλεκτρονίων και των μιονίων είναι ίσα:

$$\mu_e = \mu_\mu \quad (38)$$

Η ουδετερότητα του ολικού φορτίου απαιτεί  $x_p = x_e + x_\mu$ , ενώ τα χημικά δυναμικά των λεπτονίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_e = cp_F = \hbar c(3\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}x_e^{\frac{1}{3}} \quad (39)$$

$$\mu_\mu = \sqrt{m_\mu^2c^4 + c^2p_F^2} = \sqrt{m_\mu^2c^4 + \hbar^2c^2(3\pi^2\rho)^{\frac{2}{3}}x_\mu^{\frac{2}{3}}} \quad (40)$$

Οι σχέσεις (39) και (40) δίνουν μαζί με τη σχέση (38) τη σχέση:

$$x_e^{\frac{2}{3}} - x_\mu^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{m_\mu c^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{(3\pi^2\rho)^{\frac{2}{3}}} = 0 \quad (41)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e,$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{\partial W}{\partial \rho_p} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial \rho_p} \left[ S(\rho) \left( \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho} \right)^2 \right] + m_p c^2 \\ &= \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{S(\rho)}{\rho^2} \right] (\rho_n - \rho_p)^2 - \rho \frac{S(\rho)}{\rho^2} 2(\rho_n - \rho_p) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{\partial W}{\partial \rho_n} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial \rho_n} \left[ S(\rho) \left( \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho} \right)^2 \right] + m_n c^2 \\ &= \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{S(\rho)}{\rho^2} \right] (\rho_n - \rho_p)^2 + \rho \frac{S(\rho)}{\rho^2} 2(\rho_n - \rho_p) \end{aligned} \quad (43)$$

οι οποίες τελικά καταλήγουν στη σχέση:

$$x_e + x_\mu - \frac{1}{2} + \frac{\hbar c(3\pi^2\rho x_e)^{\frac{1}{3}}}{8S(\rho)} = 0 \quad (44)$$



Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (38), (41) και (44) ως προς  $x_e$  και  $x_\mu$ , δεδομένης της ενέργειας συμμετρίας, δίνει ως αποτέλεσμα την σύσταση αστρικής ύλης, η οποία εισάγεται στην εξίσωση (33) και δίνει την καταστατική εξίσωση που ζητάμε. Αυτόν τον υπολογισμό κάνει το πρόγραμμα EOS και το αρχείο εξόδου περιέχει την καταστατική εξίσωση.

## 7.2 Κώδικας (σε Python) για προσδιορισμό των παραμέτρων του συναρτησοειδούς KIDS

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για να λυθούν τα αλγεβρικά συστήματα  $4 \times 4$  και  $3 \times 3$  κατά τη διερεύνηση των παραμέτρων του συναρτησοειδούς KIDS (Κεφ. 4). Αρχικά, θα παρουσιαστεί ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του  $4 \times 4$  συστήματος και μετά ο κώδικας για την επίλυση του  $3 \times 3$  συστήματος. Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε είναι η Python.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το  $4 \times 4$  σύστημα είναι:

```
xx1 = np.array([[r0, r1, r2, r3], [3r0, 4r1, 5r2, 6r3], [0, 4r1, 10r2, 18r3], [0, -8r1, -10r2, 0]])
xx2 = np.array([A, B, C, Dj])
xj = np.linalg.solve(xx1, xx2).
```

Οι παραπάνω εντολές δίνουν ως αποτέλεσμα μια λίστα (array) με τους συντελεστές της καθαρής νετρονικής ύλης ( $c_i(1)$ ) σε μορφή

$$x_j = [c_0(1), c_1(1), c_2(1), c_3(1)].$$

Η εντολή

```
np.linalg.solve(a, b),
```

όπου  $a$  ο πίνακας συντελεστών σε μορφή λίστας και  $b$  οι τεταγμένες τιμές σε μορφή λίστας, επιστρέφει τη λύση στην ίδια μορφή με το  $b$ .

Η εντολή αυτή χρησιμοποιεί τη βιβλιοθήκη NumPy, η οποία ξεκλειδώνει το θεμελιώδες πακέτο για υπολογισμούς στην Python [65]. Έχει πολλές χρήσεις, μια εκ των οποίων είναι η δυνατότητα να λύνει προβλήματα γραμμικής άλγεβρας. Σε αυτό το κομμάτι ανήκει η εντολή `linalg`, και οδηγεί σε υποπακέτο της `numpy` για τη γραμμική άλγεβρα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί προς χειρισμό ανυσμάτων και πινάκων, καθώς και προς επίλυση συστημάτων εξισώσεων. Τέλος, η εντολή `solve` επιλύει ένα σύστημα γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων ακριβώς.

Στον κώδικα, τα  $r_n$  αντιστοιχούν στα  $\rho_0^{1+\frac{n}{3}}$ , όπου  $\rho_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$ , ενώ τα  $A, B, C, D_j$  αντιστοιχούν στις εξισώσεις (24), (25), (27) και (29) αντίστοιχα, με αντικαταστημένες τις τιμές των φυσικών μεγεθών  $J, L, K_{\text{sym}}, Q_{\text{sym}}$  από τον πίνακα 2. Εφόσον θέτουμε  $J = 33 \text{ MeV}$ ,  $L = 50 \text{ MeV}$ ,  $K_{\text{sym}} = -160 \text{ MeV}$  και  $Q_{\text{sym}} = 600 \text{ MeV}$ , στην ακριβή τους μορφή, τα  $A, B, C, D_j$  είναι:

$$\begin{aligned}
A &= 33 - \frac{q}{2} + \sum_{i=0}^3 r_i c_i(0) \\
B &= 50 - q + \sum_{i=0}^3 (3+i) r_i c_i(0) \\
C &= -160 + q + \sum_{i=0}^3 (3+i) i r_i c_i(0) \\
C_1 &= C + 160 \\
D &= 600 - 4q - \sum_{i=0}^3 (3+i) i (3-i) r_i c_i(0) \\
D_1 &= D - 800 \\
D_2 &= D - 600 \\
D_3 &= D - 200 \\
D_4 &= D + 400
\end{aligned}$$

όπου

$$q = \frac{\hbar^2}{3M} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}}.$$

Το μέγεθος  $C_1$  χρησιμοποιήθηκε όταν υποθέσαμε  $K_{\text{sym}} = 0$  MeV, ενώ τα  $D_j$  με  $j = 1, 2, 3, 4$  αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της κυρτότητας της ενέργειας συμμετρίας, συγκεκριμένα στις  $Q_{\text{sym}} = -200, 0, 400, 1000$  MeV αντίστοιχα, ενώ το  $D$  αντιστοιχεί σε  $Q_{\text{sym}} = 600$  MeV.

Στη δεύτερη περίπτωση ( $3 \times 3$  σύστημα), ο κώδικας είναι πιο μικρός, αλλά έχει ένα επιπλέον σκέλος, λόγω του ότι μηδενίζουμε μια εκ των τεσσάρων συντελεστών που ψάχνουμε. Είναι ένας κώδικας ίδιας λογικής με την προηγούμενη περίπτωση, αλλά με τέσσερα ενδεχόμενα, μια για κάθε μηδενισμό μιας παραμέτρου. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για το  $3 \times 3$  σύστημα χρησιμοποιεί για την περίπτωση που  $c_3(0) = 0$ :

$$\begin{aligned}
x1 &= \text{np.array}([[r_0, r_1, r_2], [3r_0, 4r_1, 5r_2], [0, 4r_1, 10r_2]]) \\
x2 &= \text{np.array}([A, B, C]) \\
x &= \text{np.linalg.solve}(x1, x2)
\end{aligned}$$

για την περίπτωση που  $c_2(0) = 0$ :

$$\begin{aligned}
x1 &= \text{np.array}([[r_0, r_1, r_3], [3r_0, 4r_1, 6r_3], [0, 4r_1, 18r_3]]) \\
x2 &= \text{np.array}([A, B, C]) \\
x &= \text{np.linalg.solve}(x1, x2)
\end{aligned}$$

για την περίπτωση που  $c_1(0) = 0$ :

$$x1 = \text{np.array}([[r_0, r_2, r_3], [3r_0, 5r_2, 6r_3], [0, 10r_2, 18r_3]])$$

```
x2 = np.array ([A, B, C])
x = np.linalg.solve(x1, x2)
```

και τέλος, για την περίπτωση που  $c_0(0) = 0$ :

```
x1 = np.array ([[r1, r2, r3], [4r1, 5r2, 6r3], [4r1, 10r2, 18r3]])
x2 = np.array ([A, B, C])
x = np.linalg.solve(x1, x2)
```

όπου σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι παράμετροι που υπεισέρχονται είναι ίδιοι με αυτές στον κώδικα του  $4 \times 4$  συστήματος.

Το επιπλέον σκέλος που χρειάζεται είναι να οριστεί μια συνάρτηση, η οποία αναλόγως με το ποια περίπτωση θέλουμε να διερευνήσουμε, να επιλέγει και την κατάλληλη από τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα με εντολές `if` και `elif (else/if)`.

### 7.3 Κώδικας σε (Python) για εξεύρεση πυκνότητας από κλάσμα ταχύτητας ήχου

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί η πυκνότητα στην οποία το κλάσμα της ταχύτητας του ήχου προς την ταχύτητα του φωτός γίνεται ίσο με ένα στη νετρονική ύλη. Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε είναι η Python.

Αρχικά, πάρθηκε η εξίσωση (11) για

$$H_{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, H_2 = 2,$$

δηλαδή

$$\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{\frac{\hbar^2}{3M} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} + \sum_{i=0}^3 \left(1 + \frac{i}{3}\right) \left(2 + \frac{i}{3}\right) \rho^{1+\frac{i}{3}}}{M + \frac{E_{PNM}}{A} + \frac{P}{\rho}}, \quad (45)$$

όπου η ενέργεια ανά σωματίδιο για τη νετρονική ύλη  $\frac{E_{PNM}}{A}$  δίνεται από τη σχέση (4) και η πίεση  $P$  από τη σχέση (9), για τις τιμές της συνάρτησης  $H_n(x_p)$  που θεωρήσαμε παραπάνω.

Ύστερα, ορίσαμε μια συνάρτηση με τρεις βρόχους επανάληψης. Ο πρώτος βρόχος ελέγχει για τιμές πυκνότητας από 0 μέχρι 10 σε βήματα 0.1 σε ποια τιμή το κλάσμα των ταχυτήτων  $\left(\frac{u}{c}\right)^2$  γίνεται μεγαλύτερο από ένα. Μόλις βρεθεί κάποια τιμή που είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα, τότε η συνάρτηση περνάει με την ακριβώς προηγούμενη τιμή στο δεύτερο βρόχο, όπου γίνεται παρόμοια διαδικασία, αλλά με όρια την τιμή που ξεκίνησε και την τιμή που βρέθηκε το κλάσμα να είναι μεγαλύτερη του ένα, με 100 φορές μικρότερο βήμα (δηλαδή 0.001). Όταν πάλι σε κάποια τιμή το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας, η συνάρτηση περνάει στο τρίτο βρόχο, που δουλεύει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, με την επιπλέον εντολή τυπώματος της τιμής αυτής (τιμή πυκνότητας για την οποία το κλάσμα γίνεται μεγαλύτερο της μονάδας) και το σταμάτημα της συνάρτησης.

Η παραπάνω συνάρτηση δέχεται δυο μεταβλητές. Η πρώτη μεταβλητή είναι η πυκνότητα, ενώ η δεύτερη είναι μια λίστα, η οποία περιέχει τους παραμέτρους του συναρτησοειδούς που θέλουμε να μελετήσουμε, και είναι της μορφής

$$\text{list} = [c_0(1), c_1(1), c_2(1), c_3(1)],$$

οπότε ορίζοντας τις παραμέτρους  $c_i(1)$  στην παραπάνω μορφή λίστας, μπορούμε να αποφανθούμε για την οριακή τιμή πυκνότητας αποκοπής που ζητάμε.