



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εισαγωγή στην Ενεργό Δράση Euler-Heisenberg και εφαρμογές

Μεταπτυχιακή εργασία

Σ. Καστρινάκης
Α.Μ. 201621
επιβλέπων: Β. Γεωργαλάς

*Το παρόν είναι κόπος συλλογικής
προσπάθειας: δεν θα ήταν εφικτό χωρίς τους
ανθρώπους που με υποστήριξαν κατά τη
συγγραφή του, στους οποίους και το
αφιερώνω.*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Β. Γεωργαλά για τη διδασκαλία και καθοδήγησή του, τον χρόνο που αφιέρωσε και ιδιαιτέρως για την ακλόνητη εμπιστοσύνη και υποστήριξη που έδειξε προς το πρόσωπό μου.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Γ. Διαμάντη και Β. Σπανό για την εμπιστοσύνη και υποστήριξη κατά την εκπόνηση και παρουσίαση της εργασίας.

Περιεχόμενα

Αφιέρωση	3
Ευχαριστίες	4
Περιεχόμενα	5
Συμβάσεις	7
0. Εισαγωγή	9
0.1. Ιστορική αναδρομή	9
0.2. Αντικείμενο της εργασίας	12
1. Κβαντική ηλεκτροδυναμική	14
1.1. Μια ενοποιημένη αντίληψη	14
1.2. Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική	14
1.2.1. Η εξίσωση Klein-Gordon	15
1.2.2. Η εξίσωση Dirac	17
1.3. Η αναγκαιότητα της εικόνας των πεδίων	21
1.4. Κβαντική θεωρία πεδίου	23
1.5. Λαγκρανζιανή της QED	25
1.6. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	25
1.7. Το φερμιονικό πεδίο	26
1.8. Συμμετρίες της QED Λαγκρανζιανής	27
1.9. Κβάντωση των πεδίων	28
1.10. Διαταρακτική προσέγγιση	30
1.11. Κανόνες Feynman	32
1.11.1. Θεωρία ϕ^4	33
1.11.2. Yukawa	37
1.11.3. QED	42
1.12. Ολοκληρώματα διαδρομών	46
2. Επανακανονικοποίηση	50
2.1. Εισαγωγή	50
2.2. Η προέλευση της απειρίας	50
2.3. Η ιδέα της επανακανονικοποίησης	51
2.4. Τυπικός βαθμός απόκλισης	54
2.5. Επανακανονικοποίηση της QED	58
2.5.1. Εξαγωγή των όρων εξουδετέρωσης	58
2.5.2. Ο φερμιονικός διαδότης	62
2.5.3. Η διόρθωση κόμβου	73
2.5.4. Πόλωση κενού	75

3. Ενεργός θεωρία πεδίου	78
3.1. Εισαγωγή	78
3.2. Θεωρία 4-Fermi	80
3.3. Η μορφή της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg	84
4. Λαγκρανζιανή Euler-Heisenberg	87
4.1. Μη γραμμικές ηλεκτροδυναμικές	87
4.2. Ιδιοχρόνος Schwinger	89
4.3. Πεδία υποβάθρου	91
4.4. Η μέθοδος του ιδιοχρόνου Schwinger προς εύρεσιν της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg	93
4.5. Διαδότης για τετραγωνικές Χαμιλτονιανές	98
4.6. Η κλειστή μορφή της Λαγκρανζιανής ΕΗ	107
4.7. Διαταρακτική μορφή της Λαγκρανζιανής ΕΗ	113
4.8. Εφαρμογές της Λαγκρανζιανής ΕΗ	116
4.8.1. Το φαινόμενο Schwinger	116
4.8.2. Το κβαντικό κενό ως διηλεκτρικό (άλλες ιδιότητες)	118
4.8.3. Η κλειστή μορφή της Λαγκρανζιανής ΕΗ για sQED	120
Παραρτήματα	
Παράρτημα Α	123
Παράρτημα Β	125
Παράρτημα Γ	130
Βιβλιογραφία	134

Συμβάσεις

Ως επί το πλείστον θα ακολουθήσουμε τις συμβάσεις που τηρούνται στην [1].

Μονάδες

Δουλεύουμε στο σύστημα “φυσικών μονάδων”, δηλαδή

$$\hbar = c = 1$$

Σχετικότητα

Ακολουθούμε σύμβαση “δυτικής ακτής” όπου χρησιμοποιείται επίπεδη μετρική με τα περισσότερα πρόσημα αρνητικά. Αυτήν τη σύμβαση ακολουθούν τα περισσότερα βιβλία κβαντικής θεωρίας πεδίου (σε αντίθεση όμως με τα βιβλία Γενικής Σχετικότητας και θεωρίας χορδών).

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Αν και $g_{\mu\nu}$ θα ήταν ένας εξίσου αποδεκτός συμβολισμός για την παραπάνω ποσότητα λόγω του ότι τα περισσότερα φαινόμενα της κβαντικής θεωρίας πεδίου εκτυλίσσονται σε επίπεδο χωροχρόνο, για να αποφευχθεί σύγχυση θα επιμείνουμε στο επίπεδο $\eta_{\mu\nu}$.

Μετασχηματισμοί Fourier

Θα τοποθετούμε τον παράγοντα 2π εξ ολοκλήρου, έναν για κάθε μία διάσταση, εντός του ολοκληρώματος ορμής

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k)$$
$$\tilde{f}(k) = \int d^4x e^{+ik \cdot x} f(x)$$

(Για 3 (χωρικές) διαστάσεις τα πρόσημα στα εκθετικά αντιστρέφονται.)

Αντικαθιστώντας

$$\tilde{f}(k) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) \Rightarrow$$
$$f(x) = 1$$

αποδεικνύεται άμεσα η ταυτότητα

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) = \int d^4x e^{+ik \cdot x}$$

0. Εισαγωγή

0.1. Ιστορική αναδρομή¹

Η χρονική περίοδος 1923-1928 ήταν μια ιδιαίτερα δραστήρια περίοδος για την επιστήμη της φυσικής. Κατά την περίοδο αυτή, σε μια προσπάθεια εύρεσης της κατάλληλης κυματικής μηχανικής που θα ήταν σε συμφωνία με τις αρχές της σχετικότητας, αναπτύχθηκε η κβαντική μηχανική ενώ παράλληλα έγιναν προσπάθειες κατανόησης τού πως αυτή προέκυπτε απ' τα πλαίσια μιας σχετικιστικής θεωρίας. Συγκεκριμένα, το 1923 ο de Broglie διατυπώνει τον κυματοσωματιδιακό δυισμό μέσω των εξισώσεων

$$v = \frac{E}{h} \quad , \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad (0.1)$$

ενώ αργότερα, τα χρόνια 1925-1926, η κυματική προσέγγιση παρακάμφθηκε από τους Heisenberg, Born, Jordan και Pauli προκειμένου να αναπτύξουν μια μηχανική πινάκων (matrix mechanics). Το 1926 ο Schrödinger σε μια σειρά από papers προτείνει τόσο τη γνωστή του μη σχετικιστική κβαντική κυματική εξίσωση όσο και σε αργότερο paper της σειράς μια σχετικιστική γενίκευση. Μοιάζει μάλιστα (κατά τον Dirac) ο Schrödinger να είχε βρει πρώτα τη σχετικιστική εκδοχή, να είχε αποθαρρυνθεί από τις προβλέψεις αυτής και αργότερα να διαπίστωσε πως η μη σχετικιστική έκδοση αυτής ήταν σύμφωνη με το πείραμα! Όταν λοιπόν πρότεινε και τη σχετικιστική εξίσωση, αυτή είχε ήδη επανανακαλυφθεί από τους Klein και Gordon και η ονομασία αυτών επικράτησε να χρησιμοποιείται για την εξίσωση αυτή.

Η Klein-Gordon ήταν μια σχετικιστική κυματική εξίσωση όπως πράγματι έψαχναν και έγινε αποδεκτή ευρέως παρά τις εννοιολογικές δυσκολίες που παρουσίαζε. Αναμενόταν δηλαδή να περιγράφει τη σχετικιστική κίνηση όλων των σωματιδίων του μικρόκοσμου. Είχε όμως, όπως αναφέραμε μια σειρά από προβληματικά σημεία ή “παράδοξα” που όφειλαν να ερμηνευτούν. Για την περιγραφή του σπιν, δεν υπήρχε ακόμη μια θεωρία που να μην απαιτεί αυτό να πρέπει να εισαχθεί με το χέρι. Προέβλεπε επιπλέον μια άπειρη σειρά από στάθμες αρνητικής ενέργειας που όλο και μειώνονταν, κάτι που θα σήμαινε πως ένα σωματίδιο θα επιταχυνόταν επ' άπειρο κατεβαίνοντας τις στάθμες αυτές. Τέλος έμοιαζε να προβλέπει αρνητικές πιθανότητες!

Ειδικά αυτό το τελευταίο ενοχλούσε αρκετά τον Dirac, τόσο ώστε να συνεχίσει την αναζήτηση για μια άλλη σχετικιστική εξίσωση που να μην παρουσίαζε τέτοιες αρνητικές πιθανότητες. Κατάφερε πράγματι να βρει μια εξίσωση χωρίς αρνητικές πιθανότητες με το να φροντίσει η χρονική παραγωγή να είναι πρώτης τάξης και, για να είναι σχετικιστική η εξίσωση, να είναι πρώτης τάξης και οι τελεστές ορμής καθώς παραγωγίζονται ως προς τη θέση. Μάλιστα η εξίσωση αυτή απαιτεί αυτομάτως μια “τετραπλότητα”, μιας και απαιτεί τέσσερις λύσεις επίπεδου κύματος. Έτσι προέκυπτε κατευθείαν το ημιακέραιο σπιν από το

¹ Πιο αναλυτικές πληροφορίες στην αναφορά [9].

ένα ζεύγος λύσεων αλλά έμοιαζε να προβλέπει και λύσεις ίδιας μάζας και αντίθετου φορτίου! Το αποτέλεσμα αυτό δημοσιεύει το 1928, μια σχετικιστική εξίσωση για το ηλεκτρόνιο. Η εξίσωση αυτή, αν και απαλλαγμένη από αρνητικές πιθανότητες, συνέχιζε να έχει αρνητικές στάθμες ενέργειας (οι άλλες δύο λύσεις), κάτι στο οποίο δόθηκε ερμηνεία από τον Dirac το 1931 με τη θεωρία οπών: το κβαντικό κενό δεν είναι ασταθές από διαδικασίες εκπομπής δύο φωτονίων από το ηλεκτρόνιο που θα το πήγαιναν απ' τη χαμηλότερη στάθμη θετικής ενέργειας $+m_e c^2$ στην υψηλότερη αρνητικής ενέργειας $-m_e c^2$. Αντ' αυτού ο Dirac πρότεινε πως όλες οι στάθμες αρνητικής ενέργειας είναι ήδη κατειλημμένες από έναν άπειρο πληθυσμό ηλεκτρονίων, κάτι που έγινε γνωστό ως "θάλασσα του Dirac", οπότε η απαγορευτική αρχή του Pauli εγγυάται πως άλλα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να πέσουν σε χαμηλότερες ενέργειες αν δεν υπήρχε μια "οπή" στη θάλασσα αυτή, οι οποίες οπές ερμηνεύονται ως οι λύσεις αρνητικής ενέργειας που είδαμε νωρίτερα (αρχικά ο Dirac πρότεινε οι οπές να ερμηνευτούν ως τα πρωτόνια αλλά επανήλθε στην αρχική του ιδέα, αυτή του νέου σωματιδίου, όταν προέκυψε πως η θεωρία έπρεπε να είναι πλήρως συμμετρική). Μοιάζει δηλαδή να προβλέπονται πλέον φαινόμενα δίδυμης γένεσης και εξαύλωσης καθώς ένα ηλεκτρόνιο σε μια στάθμη αρνητικής ενέργειας που θα δεχόταν ενέργεια αρκετή για να υπερπηδήσει το ενεργειακό χάσμα των $2m_e c^2$ έμοιαζε να "δημιουργείται" εν συζυγία με ένα σωματίδιο αντίθετου φορτίου αλλά κατά τα άλλα ολόιδιο, κάτι που ερμηνεύτηκε να είναι η οπή στη θάλασσα Dirac. Τόσο η αυθόρμητη εμφάνιση του σπιν στους τύπους όσο και η ανακάλυψη του ποζιτρονίου e^+ το 1932 ήταν ισχυροί λόγοι για τους οποίους η εξίσωση Dirac έγινε πλέον αποδεκτή ως ορθή. Όπως όμως και η Klein-Gordon έπασχε και αυτή από την ερμηνεία της: η "θάλασσα" συνέβαλε άπειρη πυκνότητα φορτίου στο χώρο, κάτι που θεωρήθηκε πως μπορούσε να αγνοηθεί ως ένα υπόβαθρο που δεν επηρέαζε τις γνωστές εξισώσεις ενώ παράδοξα όπως το παράδοξο Klein, δηλαδή η μη διατήρηση της πιθανότητας, συνέχιζαν να ταλανίζονται.

Παράλληλα, ήδη από το 1926 στα papers που αναφέραμε για τη μηχανική πινάκων είχαν αρχίσει οι προσπάθειες κβάντωσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, προσπάθειες που ως επί το πλείστον φτάσανε σε μια ωριμότητα με τη δημοσίευση μερικών paper από τους Heisenberg και Pauli το 1929 εντός των οποίων εκθέτουν μια γενική αντιμετώπιση της θεωρίας κβαντικών πεδίων. Αναπάντητα ερωτήματα όπως το τι γινόταν με τις καταστάσεις αρνητικής ενέργειας συνέχιζαν να υπάρχουν αν και απαντήθηκαν στη συνέχεια. Άλλα ερωτήματα σχετικά με φαινόμενα που αργότερα θα εξηγούνταν με την ανακάλυψη μιας πληθώρας μη στοιχειωδών σωματιδίων επίσης έκαναν τη θεώρηση των κβαντικών πεδίων να αντιμετωπίζεται με διστακτικότητα. Ως αποτέλεσμα αυτών υπήρξε μια περίοδος όπου έγιναν υπολογισμοί σε πρώτη τάξη (e^2) για διάφορες διαδικασίες τόσο με τη θεώρηση των οπών όσο και με αυτήν των κβαντικών πεδίων. Είχαμε, για παράδειγμα, τους υπολογισμούς

- (1929) $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ Klein-Nishina
- (1930) $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ Dirac
- (1932) $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ Møller
- (1936) $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ Bhabha

καθώς και άλλους.

Η κβαντική θεωρία πεδίου, η κβάντωση δηλαδή της κλασικής θεώρησης των πεδίων για την περιγραφή του σωματιδιακού κόσμου, παρέκαμψε / έλυσε με την ερμηνεία της τα προβλήματα που η θεωρία των οπών του Dirac παρουσίαζε, όμως η ίδια με τη σειρά της εμφάνισε δικά της προβλήματα που έκαναν αδύνατη τη θεωρητική αποδοχή της παρά τις επιτυχίες αυτής. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα αυτά μπορούν να συνοψιστούν με μία φράση: πολλές προβλέψεις της θεωρίας έπασχαν από απειρίες. Ας αναφέρουμε μόνο την ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου. Το πρόβλημα ήταν γνωστό ήδη σε κλασικό επίπεδο, όπου το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρονίου έδινε με την ολοκλήρωση σε όλο το χώρο πως το πεδίο και άρα η ενέργεια που κουβαλούσε ήταν άπειρο πλησιάζοντας τον πόλο επί της θέσης του ηλεκτρονίου. Αν θεωρούσε κανείς μάλιστα ηλεκτρόνιο ακτίνας a , τότε η ιδιοενέργεια ήταν ανάλογη του $1/a$. Οι Born και Infeld μάλιστα πρότειναν μια Λαγκρανζιανή για την ηλεκτρομαγνητική θεωρία που περιορίζει το πόσο ισχυρό μπορεί να γίνει το ηλεκτρικό πεδίο κάτω από μια κρίσιμη ενέργεια με στόχο να επιλύσουν το κλασικό πρόβλημα, κάτι που έχασε το νόημά του όταν η κβαντική μηχανική έκανε φανερό πως η ίδια η έννοια της θέσης του ηλεκτρονίου έχανε το νόημά της κάτω από την τιμή του μήκους κύματος Compton. Μεταβαίνοντας στην κβαντική μηχανική το πρόβλημα της ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου απαλύνεται αλλά δεν εξαλείφεται, παίρνοντας τη μορφή

$$m_{em} = \frac{3\alpha}{2\pi} m_e \ln\left(\frac{\hbar}{mca}\right) \quad (0.2)$$

δηλαδή έχει πλέον μια λογαριθμική απόκλιση.

Ήταν έτσι, μέσα σε αυτό το κλίμα, που προέκυψε και η θεωρία που πρότειναν οι Euler και Heisenberg². Ανάμεσα σε όλες τις άλλες προβλέψεις που έβγαζαν άπειρο, έμοιαζε αρχικά να ανήκει και το πρόβλημα της σκέδασης φωτονίου-φωτονίου, ένα πρόβλημα που προκύπτει σε κβαντικό επίπεδο από δυνητικά ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων, μιας και τα φωτόνια είναι αφόρτιστα και άρα δεν αλληλεπιδρούν άμεσα ηλεκτρομαγνητικά. Οι Euler, Kockel και Heisenberg έδειξαν το 1935-1936 πως ήταν δυνατόν να εξαλειφθούν οι απειρίες αυτές χρησιμοποιώντας μια πρόταση που είχε γίνει νωρίτερα από τους Dirac και Heisenberg. Υπολόγισαν συγκεκριμένα μια ενεργό Λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει τέτοια μη γραμμικά ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα εξαιτίας των δυνητικών ζευγών ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων, αρκεί η συχνότητα των φωτονίων (και άρα η ενέργεια) να ήταν πολύ μικρότερη της μάζας των ηλεκτρονίων ($h\nu \ll m_e c^2$), την εξής:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} [(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 7(\vec{E} \cdot \vec{B})^2] + \dots \quad (0.3)$$

Η απομάκρυνση των απειριών από την κβαντική θεωρία πεδίου που περιέγραφε τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, η γνωστή και ως κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED), ήταν δυνατόν να γίνει αλλά αντιμετωπιζόταν με δυσπιστία μιας και έμοιαζε κανείς να “ξεφορτωνόταν τις απειρίες κάτω από το χαλί”, δηλαδή έμοιαζαν αυθαίρετες στη φύση τους. Ανάμεσα σε πολλές άλλες πιο εξωτικές, εναλλακτικές θεωρήσεις που θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν τις παρατηρήσεις, πολλοί φυσικοί δούλευαν προς μια συστηματική αφαίρεση των απειριών από την κβαντική ηλεκτροδυναμική, μια διαδικασία γνωστή ως επανακανονικοποίηση. Τις διορθώσεις που αυτό το μαθηματικό εργαλείο πρότεινε ήρθαν

² Βλέπε [20]

να επαληθεύσουν οι ανακοινώσεις στο συνέδριο του Shelter Island το 1947 για τη μέτρηση του Lamb shift καθώς και τη διόρθωση του γυρομαγνητικού λόγου του ηλεκτρονίου απ' την τιμή του Dirac $e\hbar/2mc$ κατά 1.0013. Τα επόμενα δύο χρόνια (και άλλο ένα συνέδριο στο αρχοντικό Pocono) ήταν αρκετά ώστε ο φορμαλισμός να λάβει την τελική του μορφή από τους Schwinger, Tomonaga, Feynman και Dyson. Πλέον η κβαντική ηλεκτροδυναμική ήταν θεμελιωμένη σε στέρεα θεμέλια, με την αυτοσυνέπεια αυτής δειγμένη.

0.2. Αντικείμενο της εργασίας

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη θεωρία που προτάθηκε από τους Euler και Heisenberg που αναφέραμε στα προηγούμενα. Όπως ήδη ειπώθηκε πρόκειται για μια ενεργό θεωρία ηλεκτρομαγνητισμού που εφαρμόζεται στο όριο των χαμηλών ενεργειών $h\nu \ll m_e c^2$ (και σε σταθερό ηλεκτρομαγνητικό υπόβαθρο). Η (ενεργή) Λαγκρανζιανή πυκνότητα που την περιγράφει είναι αυτή της σχέσης (0.3) αν και υπάρχει και κλειστή μορφή της σχέσης, όπως θα δούμε, που περιγράφει και ανώτερες τάξεις, αρκεί να αφορούν διαδικασίες ενός μόνο βρόγχου (1-loop). Το φυσικό νόημα της σχέσης είναι πως η κβαντική υφή του κενού σημαίνει πως αυτό δεν είναι ο πλήρως κενός, "άδειος" χώρος από σωματίδια ή / και πεδία της κλασικής φυσικής αλλά εντός του χώρου έχουμε πλέον δυνητικά ζεύγη φορτισμένων σωματιδίων που κάνουν το κβαντικό κενό να συμπεριφέρεται σαν να είχε ιδιότητες διηλεκτρικού. Μια τέτοια διαπίστωση έχει πολλές επεκτάσεις, καθώς ένα κβαντικό κενό με τέτοιες ιδιότητες σημαίνει πως αναμένουμε να επαναλαμβάνει πολλά απ' τα φαινόμενα που έχουμε συνηθίσει από τα γνωστά διηλεκτρικά: σκέδαση φωτονίου-φωτονίου (το πρόβλημα για το οποίο κατασκευάστηκε η θεωρία όπως αναφέραμε) λόγω της διαμεσολάβησης του δυνητικού ζεύγους που κάνει τα φωτόνια λοιπόν να παραβιάζουν την κλασική υπέρθεση, την ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής όπου το διηλεκτρικό "σπάει" (κάτι που προβλέφθηκε επίσης την ίδια εποχή, πριν την εγκαθίδρυση της QED και έγινε γνωστό ως φαινόμενο Schwinger) καθώς και άλλα φαινόμενα όπως η διπλοθλαστικότητα του κενού κλπ.

Λόγω της μεγάλης σημασίας της, το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας αυτής θα επικεντρωθεί στο να θέσει τα εννοιολογικά θεμέλια που θα χρησιμοποιηθούν και έπειτα να χτίσει με αυτά την αποδεικτική διαδικασία για την εξαγωγή της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg, ενώ προς το τέλος θα αναφερθούν συνοπτικά και διάφορες προεκτάσεις που κανείς θα μπορούσε να ερευνήσει περαιτέρω. Όσον αφορά τη ροή που θα ακολουθηθεί, αυτή δεν θα ταυτίζεται με την ιστορική ανάπτυξη του θέματος. Είδαμε συγκεκριμένα πως οι Heisenberg και Euler πρότειναν τη συγκεκριμένη θεωρία πριν η QED γίνει αποδεκτή ως μια αυτοσυνεπής θεωρία χωρίς προβληματικά άπειρα. Πλέον όμως γνωρίζουμε πως η QED έχει την αυστηρότητα και πληρότητα μιας αυτοσυνεπούς και πειραματικά αποδεδειγμένης θεωρίας, μάλιστα θεμελιώδους σημασίας. Καθώς πραγματεύεται τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα θα τη χρησιμοποιήσουμε λοιπόν για να εξάγουμε απ' αυτήν, ως ενεργό θεωρία αυτής, δηλαδή ως μερική περίπτωση, τη θεωρία των Heisenberg και Euler.

Πιο ειδικά, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια υπενθύμιση βασικών εννοιών από σχετικιστική κβαντική μηχανική (οι σχετικιστικές κυματικές εξισώσεις), γενικότερης

κβαντικής θεωρίας πεδίου (QFT) και, ως ειδική περίπτωση αυτής που θα χρειαστούμε για την ανάπτυξη του αντικειμένου μας, κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED). Βέβαια η παρουσίαση αυτών των θεμάτων σε όλη τους την πληρότητα θα ήταν αντικείμενο πολλών εξαμήνων σε οποιοδήποτε πανεπιστήμιο ή ισοδύναμα αντικείμενο πολυσέλιδων βιβλίων και η καθώς πρέπει παρουσίασή τους στα πλαίσια μιας εργασίας όπως η παρούσα δεν είναι παρά μόνο ως υπενθύμιση. Γι' αυτό το σκοπό, για λόγους πληρότητας, στο τέλος της εργασίας ένα κομμάτι της βιβλιογραφίας είναι ειδικά αφιερωμένο σε βιβλιογραφία επί της QFT.

Στο *δεύτερο κεφάλαιο* αναπτύσσουμε την έννοια της επανακανονικοποίησης και δείχνουμε την επανακανονικοποιησιμότητα στην περίπτωση της QED. Ο σκοπός μας κάνοντας αυτό είναι διπλός: δίνουμε στην QED την απαιτούμενη αυτοσυνέπεια ενώ ταυτόχρονα αναπτύσσουμε την απαιτούμενη διαίσθηση για όταν θα ανακύψει πάλι πρόβλημα απειριών στην καθεαυτή θεωρία Euler-Heisenberg.

Έχοντας πλέον μια αυτοσυνεπή θεωρία, την QED, για να στηρίξουμε πάνω της όσα θα πούμε μπορούμε να προχωρήσουμε στην εξαγωγή της Euler-Heisenberg. Αυτή θα αναδειχθεί ως μία ενεργός θεωρία της QED και επομένως στο *τρίτο κεφάλαιο* αναπτύσσουμε πρώτα τη γενικότερη έννοια της ενεργού θεωρίας πεδίου (EFT), δίνοντας πρώτα τον ορισμό και αναπτύσσοντας ύστερα παραδείγματα.

Τέλος, στο *τέταρτο κεφάλαιο* γίνεται η εξαγωγή της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg από την QED. Εξάγουμε πρώτα την κλειστή μορφή αυτής για 1-loop διαδικασίες μέσω της μεθόδου Schwinger ακολουθούμενη από κάποια μαθηματικά εργαλεία συμπλεκτικής γεωμετρίας και ροών. Έχοντας την κλειστή μορφή μπορούμε να εξάγουμε όρους όπως αυτούς στην (0.3) ή και πιο πέρα στο όριο των ασθενών πεδίων. Κλείνουμε λοιπόν την ανάλυσή μας με τη μελέτη προεκτάσεων του αρχικού αποτελέσματος: η προσέγγιση ασθενών πεδίων που αναφέραμε, η μορφή που παίρνει η Λαγκρανζιανή για την περίπτωση της βαθμωτής QED (scalar QED, αλλιώς sQED) και παράγωγα φαινόμενα όπως το φαινόμενο Schwinger.

1. Κβαντική Ηλεκτροδυναμική

1.1. Μια ενοποιημένη αντίληψη

Οι βασικοί πυλώνες της σύγχρονης φυσικής είναι η Γενική Σχετικότητα και η Κβαντική Μηχανική. Όποια θεωρία φυσικής επιδιώκει να περιγράψει τη φύση με κάποιο βαθμό πληρότητας οφείλει λοιπόν να ενοποιεί τις δύο αυτές εικόνες στην περιγραφή της. Εώς την ημέρα γραφής του παρόντος τέτοια ενοποίηση δεν έχει ακόμη επιτευχθεί (με πειραματική υποστήριξη). Μια μερική όμως επιτυχία σημειώνεται στις διάφορες κβαντικές θεωρίες πεδίου, όπου για συντομία θα θεωρούμε τις κοινές τεχνικές αυτών ως μία θεωρία “ομπρέλα”: την QFT (Quantum Field Theory). Αυτές ενοποιούν την κβαντική μηχανική (και καλύπτουν λοιπόν την περιγραφή του μικρόκοσμου) με τις απαιτήσεις της Ειδικής Σχετικότητας σχετικά με τις μετρήσεις διαφορετικά κινούμενων αδρανειακών παρατηρητών (και καλύπτουν συνεπώς την περιοχή ταχυτήτων κοντά στην ταχύτητα του φωτός). Μια τέτοια θεωρία είναι και η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική ή αλλιώς QED (Quantum Electrodynamics) που θα μας απασχολήσει.

Η επέκταση των παραπάνω θεωριών σε καμπύλους χωροχρόνους και συνεπώς η *πλήρης περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας*, τουλάχιστον σε θεμελιώδες/θεωρητικό επίπεδο, μέσω μιας θεωρίας που θα ενοποιεί Κβαντική Μηχανική με Γενική Σχετικότητα ακόμη προσκρούει σε λογικές αντιφάσεις όπως όταν είναι να περιγραφεί κάτι το τόσο μικρό και ταυτόχρονα “βαρύ” όπως μια μελανή οπή (άλλο παράδειγμα είναι η ικανοποιητική περιγραφή της φυσικής της Μεγάλης Έκρηξης κατά τη διάρκεια των πρώτων στιγμών αυτής). Η μόνη έως τώρα διατυπωμένη θεωρία (ή για να είμαστε ακριβείς από επιστημονικής απόψεως “υπόθεση”) που χαρακτηρίζεται από αυτοσυνέπεια είναι η θεωρία χορδών, που όμως δεν έχει (πάλι έως τώρα) καταφέρει να παράξει κάποια μοναδική πρόβλεψη που να ελέγχεται πειραματικά. Η εύρεση μιας θεωρίας που θα χαρακτηρίζεται από αυτοσυνέπεια και θα ελέγχεται και πειραματικά, αν και δεν θα σήμαινε το τέλος της φυσικής, θα αποτελούσε σταθμό, επισφραγίζοντας την ενότητα που καλύπτει τη θεμελιώδη κατανόησή μας των φυσικών φαινομένων.

Επιστρέφοντας στη μερική επιτυχία της QFT στο να ενοποιήσει την Ειδική Σχετικότητα με τον κβαντικό μικρόκοσμο θα επιχειρήσουμε λοιπόν σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο να συνοψίσουμε τόσο τα γενικά εργαλεία αυτής όσο και να περιγράψουμε τις ειδικές λεπτομέρειες που χαρακτηρίζουν την πλέον ελεγμένη κβαντική θεωρία πεδίου και γενικότερα θεωρία φυσικής που υπάρχει: την QED.

1.2. Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική

Αρχικά ας αναφέρουμε πως πριν τη διατύπωση της QFT είχαν γίνει προσπάθειες ενοποίησης της Κβαντικής Φυσικής με την Ειδική Σχετικότητα μέσω άλλων προσεγγίσεων. Αυτές οι προσεγγίσεις έγιναν κάτω απ’ τον κοινό τίτλο “Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική” και το αντικείμενο θα μελετηθεί στα παρακάτω υποκεφάλαια πριν μπούμε στη

πειραματικά ελεγμένη QFT διότι αν και οι εξισώσεις που προέκυψαν στα πλαίσια αυτού κατασκευάστηκαν με τη λανθασμένη εντύπωση πως αναφέρονταν σε ένα σχετικιστικό κβαντικό σωματίδιο (και θα αναφέρουμε κάποια πράγματα σχετικά με το γιατί κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει καθώς προσκρούει σε παράδοξα) μπορούμε, μέσω μιας αλλαγής στην οπτική μας (a paradigm shift) που μας προσφέρει η QFT, να τις επανερμηνεύσουμε για κβαντικά πεδία όπου και θα χρειαστούν.

1.2.1. Η εξίσωση Klein-Gordon

Η εξίσωση Schrödinger που περιγράφει μη σχετικιστικά σωματίδια στον μικρόκοσμο παράγεται (αλλά δεν αποδεικνύεται!) από την αντικατάσταση στη μη σχετικιστική και κλασική (δηλ. μη κβαντική) σχέση της ενέργειας

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (1.1)$$

των διάφορων φυσικών μεγεθών με τους αντίστοιχους κβαντομηχανικούς τελεστές

$$E \rightarrow \hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla} \quad (1.3)$$

$$\vec{x} \rightarrow \hat{\vec{x}} = \vec{x} \quad (1.4)$$

Εφαρμόζουμε την ισότητα τελεστών που προκύπτει στην κατάσταση του σωματιδίου στο χώρο των θέσεων, δηλαδή την κυματοσυνάρτηση $\langle \vec{x} | \psi \rangle = \psi(t, \vec{x})$, για να παράγουμε τη ζητούμενη εξίσωση

$$i \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(t, \vec{x}) \quad (1.5)$$

Άμεση συνέπεια της εξίσωσης Schrödinger είναι η διατήρηση της πυκνότητας πιθανότητας του σωματιδίου. Η εξίσωση συνέχειας προκύπτει άμεσα γράφοντας τη χρονική παράγωγο της πυκνότητας πιθανότητας (1.7) και μετά χρησιμοποιώντας την εξίσωση Schrödinger και τη συζυγή αυτής για της χρονικές παραγώγους που προκύπτουν. Έχουμε λοιπόν στο τέλος

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (1.6)$$

όπου

$$\rho = |\psi|^2 \quad (1.7)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2mi} \{ \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \} \quad (1.8)$$

Δεν είναι παράλογο λοιπόν κανείς να επιχειρήσει να παράγει μια σχετικιστική θεωρία κάνοντας το ίδιο αλλά για τη σχετικιστική έκφραση της ενέργειας

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (1.9)$$

Αντικαθιστώντας και εφαρμόζοντας πάλι στην κατάσταση ενός σωματιδίου φ (θα δούμε πως αυτή η ερμηνεία θα δώσει αντιφάσεις) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \varphi = 0 \quad (1.10)$$

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = 0 \quad (1.11)$$

Η τελευταία είναι γνωστή ως η εξίσωση Klein-Gordon.

Μερικά χαρακτηριστικά της εξίσωσης αυτής: η συγκεκριμένη εξίσωση έχει γραφεί για ένα ελεύθερο σωματίδιο. Αν θέλαμε να την επεκτείνουμε για σωματίδια σε δυναμικό και ας πάρουμε το δυναμικό να είναι το ηλεκτρομαγνητικό, θα αντικαθιστούσαμε την παράγωγο με:

$$p^\mu = i\partial^\mu \rightarrow \bar{p}^\mu - qA^\mu = i\partial^\mu - qA^\mu \quad (1.12)$$

και ό,τι περισσεύει απ' την Klein-Gordon είναι ο όρος δυναμικού (συνήθως θεωρώντας $q \ll 1$ και αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης).

Παρ' όλα αυτά μας αρκεί η εξίσωση του ελεύθερου σωματίδιου για τις αναλύσεις μας (ακόμη και στην μετέπειτα QFT όπου οι αλληλεπιδράσεις θα κωδικοποιηθούν στους όρους της Λαγκρανζιανής). Παρατηρούμε πως ο τελεστής Klein-Gordon (η παρένθεση πριν το άνυσμα κατάστασης φ στην (1.11)) είναι γραμμικός και η εξίσωση επιτρέπει κυματικές λύσεις

$$\varphi(x) = A \exp(-ip \cdot x) = A \exp(-iEt + i\vec{p}\vec{x}) \quad (1.13)$$

με A κάποια σταθερά. Συνεπώς κάθε λύση μπορεί να αναπαρασταθεί λόγω της γραμμικής άθροισης λύσεων και των κυματικών μερικών λύσεων ως μια σειρά Fourier σχετικιστικών κυμάτων. Η έκφραση δίνεται στην (1.105) όπου και θα χρειαστεί για την ανάπτυξη της μεθοδολογίας της QFT.

Μπορούμε να επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση συνέχειας με παρόμοιο τρόπο με τη μη σχετικιστική περίπτωση. Κατασκευάζουμε το αριστερό μέλος

$$\varphi^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} = \dots \quad (1.14)$$

και αντικαθιστούμε απ' την Klein-Gordon και τη συζυγή της για να παράγουμε το δεξί μέλος. Φέρνοντας σε μορφή εξίσωσης συνέχειας καταλήγουμε να 'χουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (1.15)$$

όπου

$$\rho = \varphi^* \partial_t \varphi - \varphi \partial_t \varphi^* \quad (1.16)$$

$$\vec{j} = \varphi \vec{\nabla} \varphi^* - \varphi^* \vec{\nabla} \varphi \quad (1.17)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η διατηρούμενη ποσότητα που παράγαμε μηδενίζεται για πραγματικά πεδία. Για μιγαδικά πεδία εν γένει είναι μη μηδενική όμως όχι αυστηρώς πραγματική μη-αρνητική. Οπότε συμπεραίνουμε πως:

- Έχουμε μια ποσότητα φ του χωροχρόνου που όμως δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως πλάτος πιθανότητας. Θα δούμε πως πρόκειται για ένα πεδίο που συνδέεται με κάποιο σωματίδιο.
- Με το πεδίο αυτό συνδέεται (στη μιγαδική περίπτωση) κάποιος διατηρούμενος κβαντικός αριθμός $c \cdot \rho$ όπου c μια σταθερά με $c \cdot \vec{j}$ την αντίστοιχη ροή.

Πριν γραφεί η εξίσωση του Dirac η εξίσωση Klein-Gordon ήταν η μόνη γνωστή σχετικιστική εξίσωση για την περιγραφή ενός κβαντικού σωματιδίου. Αν και αποδεκτή ως ορθή "έπασχε" από κάποια χαρακτηριστικά που δεν μπορούσαν να ερμηνευτούν

ικανοποιητικά. Η διατηρούμενη ποσότητα που συνδέεται με το φ όπως είδαμε δεν είναι υποχρεωτικά θετική και επιπρόσθετα η εξίσωση επιτρέπει δύο λύσεις της ενέργειας για δεδομένη ορμή και μάζα σωματιδίου, μία εκ των οποίων αρνητική! Συνεπώς αναμένει κανείς πως τα σωματίδια θα μπορούν να κατεβαίνουν στάθμη επ' άπειρον ενώ μοιάζει επιπρόσθετα η λύση μας να υπονοεί αρνητικές πιθανότητες! Λέμε όμως "έπασχε" μεταξύ αγγίστρων διότι θα δούμε στη συνέχεια πως τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να επανερμηνευτούν ώστε από προβληματικά να μετατραπούν σε ισχυρές προβλέψεις εντός του νέου πλαισίου που θα ειδωθούν. Δεν είναι η εξίσωση Klein-Gordon που είναι λάθος λοιπόν αλλά η αρχική ερμηνεία αυτής.

1.2.2. Η εξίσωση Dirac

Ο Dirac θέλοντας να απαλλαγεί απ' τις αρνητικές πιθανότητες που η εξίσωση Klein-Gordon υπονοούσε επιχείρησε να γράψει μια εξίσωση με τον τελεστή ∂_t , δηλαδή τον τελεστή ενέργειας, σε πρώτη τάξη. Συνδέοντας γραμμικά τον τελεστή ενέργειας με αυτόν της ορμής (το τετράγωνο στην ορμή της εξίσωσης Schrödinger δηλώνει καθαρά το μη σχετικιστικό της χαρακτήρα) γράφουμε τη γενική γραμμική σχέση

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta \cdot m \quad (1.18)$$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot \hat{p}_i + \beta \cdot m \quad (1.19)$$

Όντας μια σχετικιστική εξίσωση οφείλει να προβλέπει την Klein-Gordon, δηλαδή

$$\hat{H}^2 = \hat{\vec{p}}^2 + m^2 \quad (1.20)$$

Εφαρμόζουμε λοιπόν δύο φορές στη σειρά τον τελεστή ενέργειας (1.17) και καταλήγουμε με μια γραμμική σχέση γινομένων τελεστών ορμών και της μάζας. Συγκρίνουμε τους συντελεστές αυτής με αυτούς της Klein-Gordon για να προβλέψουμε τις τιμές των α_i και β . Έχουμε

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = I \quad (1.21)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} \equiv \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, i \neq j \quad (1.22)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, i = 1, 2, 3 \quad (1.23)$$

Υποθέτοντας πως οι συντελεστές α_i και β είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί καταλήγουμε σε άτοπο. Αν όμως δεν υποθέσουμε πως χαρακτηρίζονται από τη μαθηματική ιδιότητα της μεταθετικότητας, όπως στην περίπτωση των πινάκων και θα ερμηνεύσουμε λοιπόν τους συντελεστές αυτούς να 'ναι πίνακες, τότε το άτοπο αποφεύγεται.

Για να γράψουμε τους α_i και β πίνακες διερευνούμε τις παραπάνω ιδιότητες. Αποδεικνύεται συγκεκριμένα πως οι παραπάνω πίνακες είναι:

- **Ερμητιανοί**

(αφού \hat{H} ερμητιανός)

- **Μηδενικού ίχνους**

($tr(AB) = tr(BA)$)

άρα $tr(\beta) = tr(\beta \alpha_1^2) = tr(\alpha_1 \beta \alpha_1) = -tr(\alpha_1 \alpha_1 \beta) = -tr(\beta) = 0$

και ομοίως τα άλλα.)

- **Με ιδιοτιμές ± 1**

(αφού το τετράγωνο του πίνακα είναι ο μοναδιαίος άρα προκύπτει το τετράγωνο της ιδιοτιμής μονάδα. Καθώς ερμητιανοί άρα ιδιοτιμές πραγματικοί.)

- **Άρτιας διάστασης**

(μόνο άρτιος αριθμός από ± 1 δίνει ίχνος μηδέν σε διαγώνιο πίνακα, που μπορεί να γίνει αφού ερμητιανός)

Οι μικρότερης διάστασης πίνακες που πληρούν τα πάνω είναι οι 2×2 , δηλαδή οι πίνακες Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

όμως τέταρτος πίνακας με αυτές τις ιδιότητες δεν μπορεί να κατασκευαστεί. Ανεβαίνουμε λοιπόν σε αριθμό διαστάσεων και πάμε στους 4×4 . Εδώ οι ελεύθερες μεταβλητές είναι τόσες που αφότου εφαρμόσουμε όλες τις ιδιότητες οι πίνακες ακόμη δεν ορίζονται πλήρως. Με άλλα λόγια, υπάρχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις. Οι δύο που χρησιμοποιούνται πιο συχνά στη βιβλιογραφία είναι

$$\text{Dirac-Pauli: } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\text{Weyl: } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

όπου οι πίνακες είναι σε μορφή μπλοκ (block form) και το $\vec{\sigma}$ συμβολίζει την τριάδα των πινάκων Pauli. Τα φυσικά συμπεράσματα παραμένουν ίδια ασχέτως αναπαράστασης (όπως είναι αναμενόμενο) αρκεί κανείς να μην ανακατεύει αναπαραστάσεις. Η ερμηνεία των λύσεων κάθε αναπαράστασης όμως διαφέρει.

Πριν μπούμε σε κάποια αναπαράσταση συγκεκριμένα ας συνεχίσουμε με το γενικό συμβολισμό γράφοντας την εξίσωση Dirac στη συναλλοιώτη μορφή της. Αντικαθιστώντας την εξίσωση Dirac (1.17) με τους αντίστοιχους διαφορικούς τελεστές παίρνουμε

$$i\partial_t = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot (-i\partial_i) + \beta \cdot m \quad (1.27)$$

οπότε δρώντας με τον πίνακα β από αριστερά και όλον τον τελεστή σε μια κατάσταση ψ καταλήγουμε στη συνήθη γραφή της εξίσωσης Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad , \quad \gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha}) \quad (1.28)$$

Απ' τον ορισμό των γ πινάκων (1.28) καθώς και την ερμητιανότητα των α_i και β πινάκων σε συνδιασμό με τις ιδιότητες (1.21-1.23) προκύπτουν οι αντίστοιχες χρήσιμες ιδιότητες των γ πινάκων:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_{4 \times 4} \quad (1.29)$$

(το $\eta^{\mu\nu}$ αναφέρεται στους δείκτες Lorentz των γ πινάκων ενώ το $I_{4 \times 4}$ είναι πίνακας όπως και οι γ και αναφέρεται στους αντίστοιχους δείκτες αυτών (των στοιχείων των πινάκων), που θα ονομάσουμε "σπινორιακούς")

και ως ειδική περίπτωση αυτού

$$(\gamma^0)^2 = I \quad \text{και} \quad (\gamma^i)^2 = -I \quad \text{όπου} \quad i = 1,2,3 \quad (1.30)$$

Ακόμη

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (1.31)$$

που συνοψίζεται με την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη ταυτότητα

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (1.32)$$

Δρώντας με τον τελεστή $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ στην εξίσωση Dirac (1.28) προκύπτει πως τα στοιχεία του ψ ικανοποιούν το καθένα χωριστά την εξίσωση Klein-Gordon:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = 0 \quad (1.33)$$

$$\left[\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 I \right] \psi = 0 \quad (1.34)$$

$$[I\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 I] \psi = 0 \quad (1.35)$$

$$[\partial^2 + m^2] \psi_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (1.36)$$

κάτι που το αναμέναμε καθώς το ψ οφείλει να περιγράφει σχετικιστικά σωματίδια και άρα να πληρεί την (1.9). Οπότε το ψ μπορεί να εκφραστεί ως λύση κυματικής εξίσωσης.

Αν και αναφέραμε πως η μορφή της εξίσωσης Dirac είναι συναλλοίωτη θα έπρεπε πρώτα να το δείξουμε αυτό. Εμείς θα δεχτούμε εδώ πως οι δείκτες μ, ν, \dots των γ πινάκων είναι πράγματι Lorentz δείκτες. Η διαδικασία απόδειξης της υπόθεσης αυτής για τον απαιτητικό αναγνώστη εκτίθεται αναλυτικά στην [3] και με λίγο διαφορετικά λόγια στην [1]. Έτσι, μια πιο συστηματική μελέτη, που θα αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο το μέγεθος ψ , που λέγεται σπινόρας, μετασχηματίζεται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, θα έδινε την αναπαράσταση σπινόρων ως μία από τις αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz $SO(1,3)$. Το σκεπτικό με το οποίο εξάγαμε την εξίσωση Dirac (παρμένο από την [2]) είναι σημαντικό: έχοντας πλέον μια εξίσωση στη διάθεσή μας είμαστε ικανοί να τη θεμελιώσουμε σε πιο στέρεα θεμέλια έχοντας τη μορφή της να μας καθοδηγεί στην κατασκευή της αναπαράστασης που απαιτείται. Έπειτα κανείς μελετά τα διγραμμικά αντικείμενα $\psi^\dagger A \psi$ (όπως γίνεται στην [2]) και τα κατατάσσει ανάλογα με την τάξη του τανυστή και τις ιδιότητες τους σε σχέση με την κατοπτρική συμμετρία. Τέλος, κανείς μπορεί να κατασκευάσει μια αναλλοίωτη δράση και απ' αυτήν να προκύψει η συναλλοιότητα της εξίσωσης Dirac.

Εμείς θα παραλείψουμε τα πάνω για λόγους συντομίας και όπως είπαμε θα προχωρήσουμε δεχόμενοι πως οι ποσότητες που κατασκευάζονται με τους γ πίνακες είναι συναλλοίωτες. Θέλοντας να κατασκευάσουμε μια σχέση διατήρησης $\partial_\mu j^\mu = 0$ αναμένουμε να προκύπτει από ένα ανυσματικό αντικείμενο j^μ και μάλιστα το διατηρούμενο μέγεθος θα είναι η μηδενική συνιστώσα. Η ανάλυση των διγραμμικών ποσοτήτων που αναφέραμε πριν ή μερικές (εμπνευσμένες) προσπάθειες να παραλλάξουμε την απόδειξη που επιχειρήσαμε και στις άλλες εξισώσεις για την κατασκευή μιας διατηρούμενης ποσότητας οδηγούν στον ορισμό του μεγέθους

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.37)$$

οπότε προκύπτει πως

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (1.38)$$

και $\psi^\dagger \psi$ είναι το αναλλοίωτο που αναζητούσαμε. Το μέγεθος αυτό είναι αυστηρώς μη αρνητικό, δηλαδή ακριβώς αυτό που επιδίωξε εξαρχής να επιτύχει ο Dirac με την πρώτης τάξης χρονική παράγωγο.

Καθώς το ψ είπαμε πως μπορεί να εκφραστεί ως λύση κυματικής εξίσωσης, θα χρησιμοποιήσουμε το ansatz για τη μορφή της λύσης

$$\psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip \cdot x} \quad (1.39)$$

οπότε εισάγοντας την στην εξίσωση Dirac καταλήγουμε πως το $u(\vec{p})$ πληρεί τη σχέση

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)u(\vec{p}) = 0 \quad (1.40)$$

Για ευκολία συμβολισμού ορίζουμε

$$\sigma^\mu \equiv (I_{2 \times 2}, \vec{\sigma}) \text{ και } \bar{\sigma}^\mu \equiv (I_{2 \times 2}, -\vec{\sigma}) \quad (1.41)$$

οπότε επιλέγοντας την αναπαράσταση Weyl μπορούμε να γράψουμε

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

και άρα η (1.40):

$$\begin{pmatrix} -m & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (1.43)$$

δίνει σύστημα συζευγμένων εξισώσεων

$$\begin{aligned} p_\mu \sigma^\mu u_B &= m u_A \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu u_A &= m u_B \end{aligned} \quad (1.44)$$

Παρατηρείστε πως σε περίπτωση που $m = 0$ οι δύο εξισώσεις αποσυνδέονται. Καθώς ισχύει

$$(p_\mu \sigma^\mu)(p_\nu \bar{\sigma}^\nu) = m^2 \quad (1.45)$$

συμπεραίνουμε πως οι εξισώσεις (1.45) δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους ενώ ακόμα μπορούμε να εξάγουμε απ' αυτές λύση ως εξής: συμβολίζουμε με ξ' σπίνορα Weyl δύο συνιστωσών (οι σπίνορες Weyl ορίζονται ως το κομμάτι των δύο στοιχείων που δεν μηδενίζεται κατά την προβολή ενός σπίνορα όπου τελεστές προβολής $P_\pm \equiv \frac{1}{2}(I + \gamma^5)$ και όπου $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$) οπότε αν θέσουμε αυτόν να είναι το u_B τότε από (1.44):

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{p_\mu \sigma^\mu}{m} \xi' \\ \xi' \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

και ορίζοντας ως ρίζα πίνακα τον πίνακα με ιδιοτιμές τις ρίζες των ιδιοτιμών του αρχικού επιλέγουμε

$$\xi' = \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi \quad \xi^\dagger \xi = 1 \quad (1.47)$$

ώστε να φτάσουμε στη "λύση θετικής συχνότητας", που λέγεται έτσι λόγω της μορφής (1.39), η οποία είναι

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Με παρόμοιο τρόπο, παίρνοντας "λύση αρνητικής συχνότητας"

$$\psi(x) = v(\vec{p})e^{ip \cdot x} \quad (1.49)$$

αυτή θα οφείλει να ικανοποιεί

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)v(\vec{p}) = 0 \quad (1.50)$$

με τελικό αποτέλεσμα

$$v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi \\ -\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Είναι φανερό πως έχουμε δύο λύσεις θετικής και δύο αρνητικής ενέργειας (αν όχι, μπορείτε να πάρετε την εξίσωση ιδιοτιμών της ενέργειας και να το διαπιστώσετε. Ειδικά

στην περίπτωση της αναπαράστασης Dirac-Pauli φαίνεται αμέσως.) Όμως πέραν της ενέργειας και ορμής υπάρχει εδώ και ένας άλλος τελεστής που μετατίθεται με αυτούς, δηλαδή χαρακτηρίζει τις ιδιοκαταστάσεις. Πρόκειται για τον καλό κβαντικό αριθμό της ελικότητας

$$\lambda = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \quad (1.52)$$

Προκειμένου να φανεί απλά εδώ ας επιλέξουμε βάση για τα ξ_s

$$\xi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

και άρα

$$\xi_s^\dagger \xi_{s'} = \delta_{ss'} \quad (1.54)$$

Αυτά μετασχηματίζονται σύμφωνα με την $\frac{1}{2}$ αναπαράσταση της SU(2):

$$\frac{1}{2} \sigma_3 \xi_{\pm\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \xi_{\pm\frac{1}{2}} \quad (1.55)$$

και άρα τα αντίστοιχα u και v θα αναπαριστούν σπίνορες με σπιν $\pm 1/2$ κατά την z κατεύθυνση.

Κλείνουμε το κεφάλαιο της εξίσωσης Dirac με μια σειρά από χρήσιμες ταυτότητες:

$$\bar{u}_s(\vec{p}) u_{s'}(\vec{p}) = 2m \delta_{ss'} \quad (1.56)$$

$$\bar{v}_s(\vec{p}) v_{s'}(\vec{p}) = -2m \delta_{ss'} \quad (1.57)$$

$$\bar{u}_s(\vec{p}) v_{s'}(\vec{p}) = 0 \quad (1.58)$$

$$u_s^\dagger(\vec{p}) u_{s'}(\vec{p}) = 2p^0 \delta_{ss'} \quad (1.59)$$

$$v_s^\dagger(\vec{p}) v_{s'}(\vec{p}) = 2p^0 \delta_{ss'} \quad (1.60)$$

$$\sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) = \gamma_\mu p^\mu + m \quad (1.61)$$

$$\sum_s v_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) = \gamma_\mu p^\mu - m \quad (1.62)$$

1.3. Η αναγκαιότητα της εικόνας των πεδίων

Οι προσπάθειες εύρεσης μιας σχετικιστικής κυματικής εξίσωσης για την περιγραφή των κβαντικών σωματιδίων είδαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια όσο και στην εισαγωγή πως προσέκρουαν πάνω σε διάφορα παράδοξα. Έτσι, η Klein-Gordon ταλανιζόταν από την εμφάνιση αρνητικών ενεργειών και πιθανοτήτων ενώ η Dirac εξακολουθούσε να έχει τις αρνητικές ενέργειες εντός της θεώρησής των οπών, μέσω της οποίας ερμηνεύτηκε. Χαρακτηριστικό είναι το παράδοξο Klein αλλά και παρόμοιες θεωρητικές διατάξεις όπου η εφαρμογή της εξίσωσης Dirac σε σκεδάσεις από δυναμικά έχει ως αποτέλεσμα τη μη διατήρηση της πιθανότητας.

Η λύση στα πάνω προβλήματα και άλλα παρόμοια βρίσκεται στη συνειδητοποίηση πως είναι δυνατή η δημιουργία ζεύγους σωματιδίου-αντισωματιδίου, με αποτέλεσμα ο συνδιασμός κβαντικής μηχανικής και σχετικιστικών αρχών να καθιστάται αδύνατη πλέον η περιγραφή ενός κβαντικού σωματιδίου σε σχετικιστικά πλαίσια. Αυτό γίνεται εύκολα

φανερό αν κανείς φανταστεί ένα σωματίο μέσα σε κουτί (άπειρο πηγάδι δυναμικού) και τα τοιχώματα του κουτιού να μικραίνουν. Όσο μικραίνει το κουτί, τόσο περισσότερο προσδιορίζεται η θέση του σωματιδίου και άρα από την αρχή της απροσδιοριστίας, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, τόσο περισσότερο μπορεί η ορμή και άρα η ενέργεια του σωματιδίου να κυμανθεί. Από κάποιο σημείο και μετά θα έχει επαρκή ενέργεια ώστε να δημιουργήσει ζεύγος σωματιδίου-αντισωματιδίου, όπως επιβάλλει τώρα η σχέση από την Ειδική Σχετικότητα $E = mc^2$. Το χαρακτηριστικό αυτό μήκος είναι της τάξης του μήκους Compton $\lambda_c = h/mc$ και, όπως το μήκος de Broglie δίνει την τάξη μεγέθους όπου η κυματική φύση των σωματιδίων γίνεται εμφανής (κβαντική μηχανική), το μήκος Compton δίνει το μήκος από το οποίο και κάτω η έννοια του ευδιάκριτου αριθμού σωματιδίων χάνεται (όπως θα δούμε: κβαντική θεωρία πεδίου).

Έτσι φτάνουμε να αναζητήσουμε τη λύση όλων των προηγούμενων γρίφων στην κβαντική θεωρία πεδίου. Ήδη σε κλασικό επίπεδο έχει γίνει επίκληση στην έννοια του πεδίου για την επίτευξη τοπικότητας στους φυσικούς νόμους, καθώς νόμοι όπως αυτός της παγκόσμιας έλξης ή του Coulomb έμοιαζε η διατύπωσή τους να υπονοεί ακαριαία δράση και κατά συνέπεια παραβίαση της αιτιότητας. Το ηλεκτρομαγνητικό και βαρυτικό πεδίο από την άλλη παρείχαν την απαραίτητη σταδιακή διάδοση των μεταβολών στο χώρο κάτω από την πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός. Σε κβαντικό τώρα επίπεδο, τα πεδία μπορούν να υποστηρίξουν την εικόνα των σωματιδίων ως τρόπους ταλάντωσης των πεδίων οπότε ένα ηλεκτρόνιο συγκεκριμένης ορμής είναι ένας τρόπος ταλάντωσης της ανάλυσης του πεδίου μέσω Fourier σε ιδιοκαταστάσεις ορμής. Όχι μόνο αυτό αλλά η γένεση και εξαύλωση σωματιδίων είναι πλέον δυνατή: ο αριθμός κάποιου είδους σωματιδίου επιτρέπεται να αλλάζει και άρα είναι ικανή η θεωρία να περιγράψει τις διαδικασίες αλληλεπίδρασης των σωματιδίων όπου δεν έχουμε τέτοιες διατηρήσεις. Ένα άλλο επιχείρημα που τίθεται στη βιβλιογραφία υπέρ της θεώρησης των πεδίων [8] είναι πως “όλα τα σωματίδια ίδιου είδους είναι ακριβώς ίδια”, εννοώντας πως αν πχ. κάποιος πάρει μετρήσεις από δύο ηλεκτρόνια, ένα από κάποιο αστρικό γεγονός που συνέβη πολλά εκατομμύρια χρόνια πριν και έφτασαν σωματίδια απ’ αυτό τώρα στη γη και ένα μόλις δημιουργημένο σε κάποιον επιταχυντή, θα τα βρει στα χαρακτηριστικά τους ακριβώς ίδια, κάτι που θα μπορούσε να παρθεί, με κάποια επιφύλαξη, ως ένδειξη πως τα δύο ηλεκτρόνια έχουν την ίδια προέλευση: ένα κοινό κβαντικό πεδίο.

Παραθέσαμε στα πάνω διάφορους λόγους για τους οποίους οδηγούμαστε με βεβαιότητα στην υιοθέτηση της κβαντικής θεωρίας πεδίου ως της εικόνας που περιγράφει τον μικρόκοσμο. Όπως εξηγήσαμε ήδη από την εισαγωγή, η εικόνα αυτή δικαιώθηκε όταν πέραν από τις ορθές προβλέψεις που έκανε για τις διάφορες πειραματικές μετρήσεις απέκτησε την απαραίτητη αυτοσυνέπεια, πρώτα για την περίπτωση της QED, με τη μέθοδο της επανακανονικοποίησης. Συνεπώς την ιδέα ενός σταθερού αριθμού σωματιδίων είμαστε υποχρεωμένοι να την εγκαταλείψουμε προς χάρην πεδίων που “γεμίζουν” τον χωροχρόνο (δηλαδή συναρτήσεων αυτού). Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου είναι αφιερωμένο λοιπόν στη συνοπτική παρουσίαση των μεθόδων, σε πρώτη φάση, γενικότερα της QFT και, σε δεύτερη φάση, ειδικότερα της QED. Αυτό είναι απαραίτητο για την

μετέπειτα μελέτη της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg, που θα τη χτίσουμε στο παρόν επί της QED.

1.4. Κβαντική θεωρία πεδίου

Η κβαντική θεωρία πεδίου βασίζεται στην εικόνα των πεδίων. Στην κβαντική μηχανική ο χρόνος ήταν μια απλή παράμετρος, ένας αριθμός που μετρούσε την εξέλιξη του συστήματος ενώ η θέση ήταν τελεστής. Καθώς σε μια σχετικιστική θεωρία αυτά θα έπρεπε να αντιμετωπίζονται ισάξια οφείλουμε, για την κατασκευή μιας τέτοιας θεωρίας, είτε να προάγουμε το χρόνο σε τελεστή είτε να “καθαιρέσουμε” τις συντεταγμένες θέσης από τελεστές σε παραμέτρους. Το πρώτο είναι αρκετά δύσκολο να γίνει. Το δεύτερο, απ’ την άλλη, είναι ακριβώς αυτό που κάνει η κβαντική θεωρία πεδίου: οι τελεστές, τα πεδία, είναι συναρτήσεις των τεσσάρων χωροχρονικών συντεταγμένων που δρουν ως οι παράμετροι των τελεστών. Ένα πεδίο λοιπόν, σε πρώτη φάση και σε κλασικό επίπεδο, δεν είναι τίποτα άλλο από μια συνάρτηση του χωροχρόνου, π.χ.

$$\varphi(\vec{x}, t) \quad (1.63)$$

με εικόνα κάποια μαθηματική ποσότητα, βαθμωτή, ανυσματική κλπ. Αν και η κβάντωση τέτοιων πεδίων θα γίνει σε επόμενο υποκεφάλαιο, μπορούμε λοιπόν ήδη να αναφέρουμε πως η βασική ιδέα της κβαντικής θεωρίας πεδίου συνοψίζεται λέγοντας πως

Ο χωροχρόνος πληρείται από μια σειρά από κβαντικά πεδία, δηλαδή συναρτήσεις αυτού, των οποίων οι τρόποι ταλάντωσης αντιστοιχούν στα κβαντικά σωματίδια, με κάθε είδος σωματιδίου να αντιπροσωπεύεται από το αντίστοιχο πεδίο.

Έτσι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατά τα γνωστά αντιστοιχεί σε διακριτά πακέτα ενέργειας, τα φωτόνια, αλλά πλέον και άλλα σωματίδια έχουν το δικό τους πεδίο π.χ. το πεδίο των ηλεκτρονίων για τα ηλεκτρόνια.

Πριν κβαντώσουμε τα πεδία αυτά οφείλουμε να περιγράψουμε τη δυναμική τους. Σε αυτό θα χρειαστούμε τις εξισώσεις κίνησης αυτών. Το υπόλοιπο αυτού του υποκεφαλαίου λοιπόν είναι αφιερωμένο στην περιγραφή της κλασικής θεωρίας πεδίου. Για το σκοπό αυτό θα επικαλεστούμε όσα γνωρίζουμε από τη Λαγκρανζιανή (και αργότερα Χαμιλτονιανή) θεώρηση της Μηχανικής. Καθώς όμως η Λαγκρανζιανές έχουμε μάθει να περιγράφουν διακριτό αριθμό σωματιδίων, οφείλουμε να γενικεύσουμε την περιγραφή, εισάγοντας την έννοια της “Λαγκρανζιανής πυκνότητας”. Κανείς μπορεί να σκεφτεί το χώρο γεμάτο με αρμονικούς ταλαντωτές σε κάθε σημείο αυτού οπότε και μια Λαγκρανζιανή θα αντιστοιχούσε στο σύστημα αυτό ως όλο. Κάνοντας τη μετάβαση στο συνεχές σύστημα δίνει αυτομάτως την έννοια της Λαγκρανζιανής πυκνότητας. Αν λοιπόν κανείς ζητήσει κατά τα γνωστά τη δράση του συστήματος ως το ολοκλήρωμα στο χρόνο μιας Λαγκρανζιανής

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) \quad (1.64)$$

τότε η αντιστοίχιση σε κάθε σημείο του χώρου ενός κινητικού όρου (που για λόγους αναλλοιώτητας σε μετασχηματισμούς Lorentz παίρνει και ένα ανάδελτα τετράγωνο, βλ. (1.67)) μείον ενός δυναμικού για εκείνη την περιοχή του χώρου έχει ως αποτέλεσμα η Λαγκρανζιανή να δίνεται από το ολοκλήρωμα στις χωρικές συντεταγμένες της Λαγκρανζιανής πυκνότητας που κατασκευάσαμε παραπάνω. Δηλαδή

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t) \quad (1.65)$$

$$\Rightarrow S = \int d^4x \mathcal{L}(\vec{x}, t) \quad (1.66)$$

όπου με \mathcal{L} συμβολίζουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα, ένα μέγεθος τόσο κεντρικό για τις διάφορες περιγραφές στη συνέχεια που θα συντομεύεται συνήθως σε απλά “Λαγκρανζιανή” χωρίς να υπάρχει περιθώριο σύγχυσης. Ως παράδειγμα μιας τέτοιας περιγραφής ας αναφέρουμε εκείνο των “ταλαντωτών σε κάθε σημείο του χώρου” που δίνει την πιο απλή περίπτωση του πραγματικού βαθμωτού πεδίου

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (1.67)$$

Καθώς μάλιστα δεν είναι λογικό η δυναμική του πεδίου να εξαρτάται άμεσα από το εν λόγω χωροχρονικό σημείο αλλά από τη διάταξη του πεδίου αυτή καθ’ εαυτή και μόνο μέσω αυτού οι χωροχρονικές συντεταγμένες να μπαίνουν στο ολοκλήρωμα, ας χρησιμοποιήσουμε τον πολύ πιο σαφή συμβολισμό

$$S(\varphi) = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi) \quad (1.68)$$

όπου η δράση φαίνεται πως είναι ένα συναρτησοειδές που αντιστοιχεί σε κάθε διάταξη του πεδίου στο χωροχρόνο μια αριθμητική τιμή. Οι εξισώσεις κίνησης για την κλασική κίνηση λοιπόν θα προκύψουν κατά τα γνωστά από το ακρότατο της δράσης

$$\delta S = 0 \quad (1.69)$$

Η κβαντική εξέλιξη μπορεί πάλι να χρησιμοποιήσει τη δράση στα πλαίσια ενός συναρτησοειδούς (generating functional) που παράγει τις συναρτήσεις συσχέτισης, αλλά αυτό θα το δούμε αργότερα.

Τέλος, για λόγους πληρότητας, ας αναφέρουμε πως το θεώρημα της Noether συνδέει κάθε συνεχή συμμετρία (οπότε στα επόμενα $\delta\omega^i$ απειροστά μικρό) με έναν νόμο διατήρησης

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0 \quad (1.70)$$

όπου αν η συμμετρία (που αριθμείται από το δείκτη i) περιγράφεται από τις σχέσεις

$$x'^\mu = x^\mu + X_i^\mu(x)\delta\omega^i \quad (1.71)$$

$$\varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \Psi_{ai}(\varphi, x)\delta\omega^i \quad (1.72)$$

τότε αποδεικνύεται πως η διατηρούμενη ποσότητα δίνεται από

$$J_i^\mu = \partial_\nu \varphi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} X_i^\nu - \mathcal{L} X_i^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \Psi_{ai} \quad (1.73)$$

1.5. Λαγκρανζιανή της QED

Στη συνέχεια γίνεται η καταγραφή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής θεωρίας, της κβαντικής θεωρίας πεδίου που θα μας απασχολήσει. Συναντάται με το αγγλικό της όνομα ως QED (Quantum Electrodynamics).

$$\mathcal{L} = \sum_k \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_k - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.74)$$

με

$$D_\mu = \partial_\mu + iq_k A_\mu \quad (1.75)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.76)$$

όπου q_k είναι το φορτίο του εν λόγω φερμιονίου (και $-q_k$ του αντιφερμιονίου) και k είναι ο δείκτης που μετρά τα διάφορα είδη αυτών. Τα σωματίδια οφείλουν να είναι σημειακά και όχι απλά κατά προσέγγιση σημειακά προκειμένου να λέμε πως οι προβλέψεις της θεωρίας μας δεν αποτελούν απλά προσεγγίσεις αλλά είναι ακριβείς.

Η παραπάνω Λαγκρανζιανή δεν γράφτηκε αυθαίρετα. Ο πιο άμεσος τρόπος “απόδειξης” / δικαιολόγησης της είναι να την εισάγουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange και να επιβεβαιώσουμε, εκ των υστέρων, ότι πράγματι δίνει τις εξισώσεις Maxwell όπως τις ξέρουμε απ’ την κλασική ηλεκτροδυναμική καθώς και τις εξισώσεις Dirac που οφείλουν να ικανοποιούν τα φερμιόνια.

1.6. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Για να μελετήσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παίρνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς αυτό. Δηλαδή

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 \quad (1.77)$$

Σπάζοντας τον υπολογισμό σε κομμάτια

$$\begin{aligned} \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} &= \partial^\mu \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \left[-\frac{1}{4} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \right] = -\frac{1}{2} \partial^\mu \left\{ F_{\kappa\lambda} \frac{\partial F^{\kappa\lambda}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu \left\{ F_{\kappa\lambda} \frac{\partial(\partial^\kappa A^\lambda - \partial^\lambda A^\kappa)}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu \{ F_{\kappa\lambda} [\delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\kappa] \} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \{ F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu} \} = -\partial^\mu F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.78)$$

και

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} &= -\frac{\partial}{\partial A^\nu} \left\{ \sum_k \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu D_\mu) \psi_k \right\} = -\frac{\partial}{\partial A^\nu} \left\{ \sum_k \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu i q_k A_\mu) \psi_k \right\} \\ &= \sum_k q_k \bar{\psi}_k \gamma_\nu \psi_k \equiv \sum_k J_{k\nu} \end{aligned} \quad (1.79)$$

(όπου $J_{k\nu} = q_k \bar{\psi}_k \gamma_\nu \psi_k$ το διατηρούμενο ρεύμα του φερμιονίου με δείκτη k , κάτι που θα φανεί παρακάτω)

Οπότε

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 \quad (1.80)$$

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} + \sum_k J_{k\nu} = 0 \quad (1.81)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \sum_k J_k^\nu \quad (1.82)$$

Βρήκαμε δηλαδή τις δύο απ' τις τέσσερις εξισώσεις Maxwell της κλασικής ηλεκτροδυναμικής όπως αυτές διατυπώνονται στη συναλλοίωτη μορφή τους. Οι άλλες δύο, οι χωρίς πηγές, προκύπτουν απευθείας απ' την αντισυμμετρική μορφή του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή:

$$\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} = 0 \quad (1.83)$$

ή αλλιώς

$$\epsilon^{\lambda\kappa\mu\nu} \partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.84)$$

που προφανώς είναι επίσης συναλλοίωτη.

Αξίζει να σημειωθεί πως απ' την πρώτη εξίσωση προκύπτει άμεσα η διατήρηση φορτίου:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \sum_k J_k^\nu \Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \sum_k J_k^\nu \Rightarrow \sum_k \partial_\nu J_k^\nu = 0 \quad (1.85)$$

ή, πιο απλά, για ένα είδος φερμιονίου

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \quad (1.86)$$

1.7. Το φερμιονικό πεδίο

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το συζυγές φερμιονικό πεδίο έχουν

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi}_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_k} = 0 \Rightarrow \quad (1.87)$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_k = 0 \quad (1.88)$$

Αυτός ο υπολογισμός ήταν συντομότερος! Εφόσον θέλουμε μπορούμε να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή και με έναν δεύτερο τρόπο που να κάνει άμεσα φανερή την ερμητιανότητα αυτής, αλλά η συγκεκριμένη μορφή που επιλέξαμε επιλέχθηκε ακριβώς διότι παράγει άμεσα τις εξισώσεις κίνησης εάν κανείς επικαλεστεί το συζυγές φερμιονικό πεδίο στις μερικές παραγώγους.

Παρατηρούμε πάλι πως το φορτίο διατηρείται. Τη διατήρηση αυτή είδαμε ήδη από τη (1.38) αλλά ας το δούμε εδώ πιο αναλυτικά. Συγκεκριμένα παρατηρούμε πως η ισχύς της παραπάνω εξίσωσης Dirac είναι για κάθε k. Οπότε συνδιάζοντας την εξίσωση Dirac πολλαπλασιασμένη απ' τα αριστερά με $\bar{\psi}_k$

$$\bar{\psi}_k [i\gamma^\mu (\partial_\mu + iq_k A_\mu) - m] \psi_k = 0 \quad (1.89)$$

με τη συζυγή μορφή αυτής

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_k - m\psi_k - q_k A_\mu \gamma^\mu \psi_k]^\dagger = 0 \quad (1.90)$$

$$\partial_\mu \bar{\psi}_k \gamma^\mu - im\bar{\psi}_k - iq_k A_\mu \bar{\psi}_k \gamma^\mu = 0 \quad (1.91)$$

πολλαπλασιασμένη εκ των υστέρων απ' τα δεξιά με ψ_k

$$\partial_\mu \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k - im\bar{\psi}_k \psi_k - iq_k A_\mu \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k = 0 \quad (1.92)$$

μπορούμε να τις αθροίσουμε προκειμένου να καταλήξουμε στο

$$\partial_\mu \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k + \bar{\psi}_k \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k = 0 \quad (1.93)$$

$$\partial_\mu (\bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k) = 0 \quad (1.94)$$

$$\partial_\mu J_k^\mu = 0 \text{ όπου } J_k^\mu \equiv q_k \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k \quad (1.95)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πιο γενικό καθώς αποδείξαμε τη διατήρηση του φορτίου ανεξάρτητα για κάθε είδος φερμιονίου.

1.8. Συμμετρίες της QED Λαγκρανζιανής

(ή αλλιώς: ένας άλλος, πιο ακριβής, τρόπος εξαγωγής της Λαγκρανζιανής)

Η διατήρηση του φορτίου αποτελεί άμεση συνέπεια της καθολικής συμμετρίας της εσωτερικής στροφής του φερμιονικού πεδίου:

$$\psi'(x) = e^{i\omega} \psi(x) \quad (1.96)$$

(αυτό μπορεί να δειχθεί μέσω του θεωρήματος της Noether)

Πέραν αυτού υπάρχει μια άλλη συμμετρία που γενικεύει την παραπάνω κάνοντας την τοπική. Πρόκειται για τη συμμετρία βαθμίδας, που εισάγεται κάνοντας τη φάση με την οποία περιστρέφουμε το πεδίο εν γένει διαφορετική από σημείο σε σημείο

$$\psi'(x) = e^{i\omega(x)} \psi(x) \quad (1.97)$$

Ζητώντας όμως μια τέτοια συμμετρία θα σήμαινε πως ο κινητικός όρος του φερμιονικού πεδίου δεν θα ήταν πλέον σύμφωνος με τη ζητούμενη συμμετρία, μιας και η παράγωγος θα χτυπά επιπλέον και τον όρο $e^{i\omega(x)}$. Εάν επιμείνουμε το φερμιονικό πεδίο ή πεδία

$$\mathcal{L} = \sum_k \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_k \quad (1.98)$$

να είναι συμμετρικά στις στροφές φάσης, όχι μόνο καθολικά αλλά και από χωροχρονικό σημείο σε χωροχρονικό σημείο, θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου

$$D_\mu = \partial_\mu + iq_k A_\mu(x) \quad (1.99)$$

της οποίας το επιπλέον πεδίο $A_\mu(x)$, το πεδίο βαθμίδας (gauge field), απαιτούμε να αλλάζει τιμές με το x έτσι ώστε ο κινητικός όρος να μένει πλέον αναλλοίωτος, κάτι που θα συμβεί αν απαιτήσουμε η συναλλοίωτη παράγωγος να δρα ως εξής:

$$D'_\mu \psi'(x) = e^{i\omega(x)} D_\mu \psi(x) \quad (1.100)$$

Με άλλα λόγια “πληρώνουμε” με ένα επιπλέον πεδίο βαθμίδας την επιμονή μας σε μια τοπική συμμετρία αλλαγής φάσης $e^{i\omega(x)}$. Δικαιωνόμαστε για την επιλογή μας αυτή μιας και το νέο αυτό πεδίο αποτελεί το γνωστό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το πεδίο των φωτονίων, κάτι που προέκυψε απ’ τη γενίκευση της καθολικής συμμετρίας που διατηρεί το ηλεκτρικό φορτίο σε τοπική. Προκειμένου να δούμε πως ακριβώς οφείλει να αλλάζει το πεδίο βαθμίδας για να πληρεί τα πάνω υπολογίζουμε

$$D'_\mu \psi'(x) = e^{i\omega(x)} D_\mu \psi(x) \quad (1.101)$$

$$(\partial_\mu + iq_k A'_\mu(x))(e^{i\omega(x)} \psi(x)) = e^{i\omega(x)} (\partial_\mu + iq_k A_\mu(x)) \psi(x) \quad (1.102)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q_k} \partial_\mu \omega(x) \quad (1.103)$$

που δεν είναι παρά ο γνωστός απ' τον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό μετασχηματισμός βαθμίδας

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (1.104)$$

Τέλος, δεν προσθέτουμε όρο μάζας στο φωτονικό πεδίο λόγω της άπειρης εμβέλειας του και ο κινητικός όρος μπαίνει για τη διατήρηση του ταυυστή ενέργειας-ορμής. Καταλήξαμε λοιπόν πάλι στην έκφραση (1.74) που επιδιώκαμε να γράψουμε.

1.9. Κβάντωση των πεδίων

Τόσο το φερμιονικό πεδίο όσο και το φωτονικό ικανοποιούν, οι συνιστώσες τους χωριστά, εξισώσεις Klein-Gordon. Οι λύσεις τους λοιπόν, στην περίπτωση μη αλληλεπιδρόντων πεδίων, μπορούν να διατυπωθούν ως άθροισμα κυματικών λύσεων μιας και οι εξισώσεις είναι γραμμικές. Η κβάντωση των φερμιονικών πεδίων τουλάχιστον μπορεί να γίνει αρκετά απλά μέσω της μεθόδου της κανονικής κβάντωσης (canonical quantization), προσέχοντας μόνο οι σχέσεις μεταξύ σπινόρων και των γενικευμένων τους ορμών να είναι αντιμεταθετικής φύσεως. Οι λύσεις των ελεύθερων (μη-αλληλεπιδρόντων) πεδίων από μόνες τους δεν θα είχαν κάποια ιδιαίτερα πρακτική αξία αλλά προκύπτει πως η εικόνα αλληλεπίδρασης των πεδίων είναι της ίδιας μορφής όταν κανείς επιχειρεί μια διαταρακτική προσέγγιση προκειμένου να βρει συναρτήσεις συσχέτισης n-σημείων (n-point correlation functions). (Για περισσότερα επ' αυτού βλ. [1].)

Για να ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα του πως γίνεται η κανονική κβάντωση ας μελετήσουμε το πραγματικό βαθμωτό πεδίο. Καθώς ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon η ανάλυση του σε άθροισμα κυματικών λύσεων γίνεται ως εξής:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{ip \cdot x}) \quad (1.105)$$

Το παραπάνω είναι λύση στο πρόβλημα ενός κλασικού (δηλ. μη-κβαντικού) πεδίου, όπου τα $a_{\vec{p}}$ και $a_{\vec{p}}^*$ είναι πλάτη και καθορίζουν το πεδίο. Για να μεταβούμε στην κβαντική θεωρία προάγουμε τα πλάτη από φυσικά μεγέθη σε τελεστές και συνεπώς και το πεδίο. Έχουμε δηλαδή

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \quad (1.106)$$

Τι σχέση οφείλουν να ικανοποιούν τα $a_{\vec{p}}$ και $a_{\vec{p}}^\dagger$; Ξεκινάμε από τη γνωστή σχέση μετάθεσης για τους τελεστές θέσης και ορμής

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.107)$$

όπου $\hat{\pi} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi} = \dot{\phi}$ και όπου η σχέση ισχύει μεταξύ των τελεστών για ίδιες χρονικές στιγμές. Οι μεταθέσεις θέσεων μεταξύ τους ή ορμών μεταξύ τους μηδενίζονται. Έτσι λοιπόν από αυτές τις μεταθετικές σχέσεις μπορεί κανείς να εξάγει πως

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (1.108)$$

και κάθε άλλη σχέση μετάθεσης ισούται με μηδέν.

Για ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο από την άλλη ισχύει

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.109)$$

όπου εφαρμόζοντας πάλι τις σχέσεις (1.107) (και μηδενίζοντας τις μεταθέσεις τελεστών θέσης ή ορμής μεταξύ τους όπως και πριν) παίρνουμε

$$\left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (1.110)$$

$$\left[b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (1.111)$$

ενώ κάθε άλλος συνδιασμός τελεστών (με ή χωρίς dagger) μηδενίζεται. Το νόημα ενός τέτοιου πεδίου είναι πως το $\phi(x)$ δημιουργεί φορτίο αντίθετου προσήμου (ως προς το σωματίδιο που αντιπροσωπεύει) είτε με την καταστροφή ενός σωματιδίου ($a_{\vec{p}}$) είτε με τη δημιουργία ενός αντισωματιδίου ($b_{\vec{p}}^\dagger$). Τα ακριβώς αντίστροφα ισχύουν για το πεδίο $\phi^*(x)$.

Το προηγούμενο χρησιμεύει σε περιπτώσεις όπως για μια βαθμωτή QED, δηλαδή μια QED όπου τα φορτισμένα σωματίδια είναι βαθμωτά. Σε πρώτη φάση όμως εμείς θα θέλαμε την ακριβή θεωρία και όχι προσεγγιστικές και άρα θα χρειαστεί να μελετήσουμε τους σπίνορες, που, όπως δηλώσαμε, είναι αντιμεταθετικής φύσεως. Αυτό γίνεται σε συμφωνία με το θεώρημα spin-στατιστικής προκειμένου οι διαδότες (οι συναρτήσεις συσχέτισης ανάμεσα σε δύο σημεία) να μην παραβιάζουν την αρχή αιτιότητας. Άρα

$$\{\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)\} = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.112)$$

Ακολουθώντας παρόμοια ανάλυση του σπινόρα με πριν καταλήγουμε στην έκφραση

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.113)$$

και το πεδίο που δημιουργεί σωματίδια (η για την ακρίβεια προκαλεί ανάβαση κατά φορτία ίδια με του σωματιδίου) είναι αυτό με bar αντί για απλά το συζυγές. Οι αντιμεταθετικές σχέσεις που προκύπτουν για τους τελεστές είναι

$$\{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{q}}^{r\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{q}}^{r\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{sr} \quad (1.114)$$

ενώ κάθε άλλη αντιμετάθεση αυτών των τελεστών μηδενίζεται.

Η περίπτωση του φωτονικού πεδίου απαιτεί λεπτότητα εκ μέρους μας όσον αφορά την κβάντωσή του και το διαδότη του (τον οποίο και θα μελετήσουμε στο υποκεφάλαιο 1.11.3 όταν εξάγουμε τους κανόνες Feynman της QED). Το πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός πως το φωτονικό πεδίο έχει μια συμμετρία βαθμίδας και άρα υπάρχουν ισοδύναμες περιγραφές της ίδιας φυσικής εικόνας. Εμείς εδώ θα περιοριστούμε προς το παρόν στο κλασικό πεδίο. Ξεκινάμε ως συνήθως με μια έκφραση της μορφής

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{r=0}^3 \left(a_{\vec{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.115)$$

Στην έκφραση αυτή υπάρχουν τέσσερα ανύσματα πόλωσης ϵ_μ^r . Θα χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία βαθμίδας για να δείξουμε πως για εξωτερικά και άρα επί mass shell φωτόνια οι δύο από τους τέσσερις βαθμούς ελευθερίας δεν είναι φυσικοί. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μετασχηματισμό βαθμίδας απαιτώντας βαθμίδα Lorenz για το πεδίο στο οποίο θα καταλήξουμε, δηλαδή απαιτούμε

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.116)$$

$$\Rightarrow p_\mu \epsilon^{r\mu}(p) = 0 ; r = 0,1,2,3 \quad (1.117)$$

Μπορούμε έτσι να βρούμε τρία ανεξάρτητα χωροειδή ανύσματα πόλωσης και να αποκλείσουμε το τέταρτο που είναι χρονοειδές. Με έναν υπολειπόμενο μετασχηματισμό βαθμίδας, που θα ικανοποιεί τη βαθμίδα Lorenz (1.116), μπορούμε ταυτοχρόνως να φέρουμε το πεδίο σε μια περιγραφή που θα πληρεί και τη βαθμίδα Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.118)$$

Είμαστε έτσι σε θέση να μηδενίσουμε και τον παράλληλο (ως προς την ορμή) βαθμό ελευθερίας προκειμένου να μείνουμε μόνο με τους φυσικούς β.ε., δηλαδή τους δύο κάθετους. Για το κλασικό φωτονικό πεδίο λοιπόν

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{r=1}^2 \left(a_{\vec{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.119)$$

Η έκφραση αυτή ισχύει και για την κβαντική περίπτωση αλλά όπως αναφέραμε το θέμα της κβάντωσης του φωτονικού πεδίου παρουσιάζει δυσκολίες. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι αυτός που μπορεί να γίνει μέσω της μεθοδολογίας των ολοκληρωμάτων διαδρομών. Εμείς για τη συνέχεια κρατάμε όσα ειπώθηκαν στα προηγούμενα για το φωτονικό πεδίο ως μια κλασική βάση και θα επιχειρήσουμε στο υποκεφάλαιο 1.11.3 να εξάγουμε τις σχετικές κβαντικές εκφράσεις μέσω μιας πιο πρακτικής προσέγγισης.

1.10. Διαταρακτική προσέγγιση

Κάθε εισαγωγική προσέγγιση της κβαντικής θεωρίας πεδίου, ή αλλιώς QFT, περιέχει ως βασικό εργαλείο τη διαταρακτική προσέγγιση / μέθοδο. (Ως συνήθως βασικό σημείο αναφοράς αυτής της ανάλυσης είναι η [1], ειδικά για αυτό το υποκεφάλαιο που ανακεφαλαιώνει τα προαπαιτούμενα της μελέτης μας.) Μια τέτοια εισαγωγή ξεκινά, πριν θεωρηθεί οποιαδήποτε διαταραχή, με το να αποδείξει τον τύπο που δίνει τη συνάρτηση συσχέτισης n-σημείων ως συνάρτηση του όρου αλληλεπίδρασης της Χαμιλτονιανής, οπότε μετά μέσω των αναπτυγμάτων των πεδίων που καταγράψαμε πριν και μέσω συναιρέσεων αυτών όπως αυτές επιβάλλονται από το θεώρημα του Wick, αναλύουμε τον όρο αλληλεπίδρασης και καταλήγουμε σε μια σειρά όρων για τη συνάρτηση n-σημείων. Αν επιπλέον τώρα οι όροι αυτοί ελατώνονται με κάθε επόμενο όρο, κάτι που έχουμε όταν ο όρος αλληλεπίδρασης (ή πιο σωστά διαταραχής, βλ. τέλος του υποκεφαλαίου) αποτελεί διαταραχή στην υπόλοιπη Χαμιλτονιανή, μπορούμε να κάνουμε λόγο και για διαταρακτική προσέγγιση του αποτελέσματος από πεπερασμένο αριθμό αυτών. Υπενθυμίζουμε εδώ μόνο την αρχική σχέση και θα δείξουμε στο μέλλον υπολογισμούς με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο:

$$\begin{aligned}
& \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle \Omega | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \} | \Omega \rangle}{\langle \Omega | T \{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \} | \Omega \rangle} \quad (1.120) \\
&\simeq \langle \Omega | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \} | \Omega \rangle \quad (\text{χωρίς bubble graphs})
\end{aligned}$$

Επί αυτής της σχέσης γίνεται η διαταρακτική προσέγγιση. Οι άλλες συναρτήσεις συσχέτισης n-σημείων προκύπτουν ομοίως: απλώς γράφουμε ανάλογο αριθμό πεδίων στα δύο μέλη της εξίσωσης. Έτσι, κάθε συνάρτηση συσχέτισης μπορεί πλέον να προσεγγιστεί ως μια σειρά φθίνοντων όρων. Ας σημειωθεί πως η σειρά δεν συγκλίνει υποχρεωτικά με τη συνηθισμένη έννοια αλλά είναι, με μαθηματική ορολογία, μια ασυμπτωτική σειρά.

Προκειμένου η θεωρία μας να έχει προβλεπτική δύναμη (και συνεπώς νόημα) οφείλει να δίνει προβλέψεις για ενεργές διατομές (και ρυθμούς διάσπασης). Οι ενεργές διατομές εξαρτώνται με τη σειρά τους από τις συνθήκες του πειράματος καθώς και τις φυσικές διεργασίες αυτές καθ' αυτές, κάτι που εκφράζεται μέσω του μεγέθους

$${}_{out} \langle p_1 p_2 \dots | k_1 k_2 \rangle_{in} = \langle p_1 p_2 \dots | S | k_1 k_2 \rangle \quad (1.121)$$

Ο τελεστής που περιέχει την εν λόγω φυσική είναι ο πίνακας S που αποτελεί οριακή περίπτωση του ενδιάμεσου τελεστή στο παραπάνω. Το όριο είναι για όταν ο χρόνος ανάμεσα σε αρχική και τελική κατάσταση τείνει στο άπειρο, ώστε αυτές οι ακραίες καταστάσεις να απέχουν απ' τη χρονική περιοχή όπου λαμβάνει χώρα η αλληλεπίδραση. Ο αναλυτικός υπολογισμός της παραπάνω ποσότητας γίνεται μέσω της σημαντικής σχέσης επαγωγής LSZ (LSZ reduction formula), που εκφράζει τον πίνακα S τώρα ως συνάρτηση των συναρτήσεων συσχέτισης n-σημείων. Καταφτάσαμε δηλαδή σε εκφράσεις που πλέον μπορούμε να χειριστούμε, πράγμα που δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει μιας και οι συναρτήσεις συσχέτισης περιέχουν όλη την πληροφορία σχετικά με τις διάφορες πιθανότητες του συστήματος.

Προκειμένου να αποκλείσουμε το τετριμμένο ενδεχόμενο τα σωματίδια να μην σκεδαστούν αλλά να διέλθουν χωρίς αλληλεπίδραση, κάτι που εκφράζουμε με έναν ταυτοτικό τελεστή, γράφουμε

$$S = I + iT \quad (1.122)$$

Λόγω διατήρησης της τετραορμής αναμένουμε το T μέρος του παραπάνω τύπου να περιέχει πάντα μια συνάρτηση δέλτα ως παράγοντα που να εκφράζει τη διατήρηση αυτή των εξωτερικών ορμών. Αυτό θα φανεί αναλυτικά όταν κάνουμε κάποιους υπολογισμούς στα παρακάτω, οπότε για να διευκολύνουμε τις εκφράσεις ενεργών διατομών ορίζουμε το αναλλοίωτο πλάτος μέσω της σχέσης

$$\langle p_1 p_2 \dots | iT | k_1 k_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum p_i \right) \cdot i\mathcal{M} \quad (1.123)$$

Εν περιλήψει, η ενεργός διατομές υπολογίζονται μέσω του αναλλοίωτου πλάτους \mathcal{M} , που, μέσω της προηγούμενης σχέσης, μπορεί να βρεθεί από τη συνάρτηση συσχέτισης

$$\begin{aligned}
& \langle p_1 p_2 \dots | iT | k_1 k_2 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \left(\langle p_1 p_2 \dots | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | k_1 k_2 \rangle_0 \right)_{\text{συνεκτικό, χωρίς άκρα}} \quad (1.124)
\end{aligned}$$

όπου οι δείκτες “συνεκτικό, χωρίς άκρα” είναι κρίσιμοι: προηγουμένως δώθηκε η έκφραση για μια συνάρτηση συσχέτισης εν γένει. Σε μια σκέδαση σωματιδίων ενδιαφερόμαστε μόνο για εκείνες τις συναρτήσεις (ή αλλιώς διαγράμματα, θα φανεί στο μέλλον γιατί αυτή η ονομασία) όπου όλα τα εξωτερικά πεδία (αυτά τα σωματίδια που εισέρχονται και αυτά που εξέρχονται δηλαδή) είναι συνδεδεμένα με όλα τα υπόλοιπα (“συνεκτικό” / “connected”) και όλες οι άπειρες συνεισφορές εξαιτίας του ότι οι εξωτερικοί διαδότες βρίσκονται επί mass shell έχουν αφαιρεθεί ήδη από τη σχέση LSZ (“χωρίς άκρα” / “amputated”). Στην προηγούμενη σχέση επίσης δεν συμπεριλάβαμε τους παράγοντες επανακανονικοποίησης \sqrt{Z} του κάθε άκρου. Τέτοιοι όροι δεν θα μας απασχολούν όσο υπολογίζουμε συναρτήσεις συσχέτισης όπως η παραπάνω, χωρίς άκρα, αλλά καλό είναι να θυμόμαστε πως αυτό συμβαίνει διότι έχουν ήδη συμπεριληφθεί στην έκφραση της σχέσης LSZ.

Αυτό που μας απομένει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε πράγματι το \mathcal{M} μέσω του θεωρήματος του Wick, μια δουλειά τόσο επαναλαμβανόμενη για όποιον επιχειρήσει να βγάλει παραπάνω από μερικούς υπολογισμούς, που γίνεται φανερό πως μπορεί να επισπευθεί μέσω ενός συνόλου κανόνων που κωδικοποιούν εκφράσεις με τη μορφή διαγραμμάτων: αυτά είναι τα γνωστά *διαγράμματα Feynman* και οι κανόνες αντιστοιχίας τους σε μαθηματικές εκφράσεις είναι το μόνο πράγμα που οφείλει κανείς να υπολογίζει εκ νέου όταν μελετά μια νέα θεωρία (και επομένως έχει μια διαφορετική Λαγκρανζιανή).

Πριν συνεχίσουμε όμως ας σημειώσουμε κάτι τελευταίο επί της προηγούμενης ανάλυσης. Κεντρική υπόθεσή μας ήταν το γεγονός πως το κομμάτι της Χαμιλτονιανής που αφορά την αλληλεπίδραση είναι επαρκώς μικρό ώστε να επιτρέπει μια διαταρακτική προσέγγιση του προβλήματος. Παρ’ όλα αυτά δεν είναι αυτή η μόνη διαταρακτική προσέγγιση που μπορεί κανείς να κάνει. Αποδεικνύεται [11] πως η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται ως εξής: έχουμε το δικαίωμα να πάρουμε μέρος της αλληλεπίδρασης να ανήκει στο αδιατάρακτο κομμάτι της Χαμιλτονιανής, πράγμα που σημαίνει πως τώρα οι αδιατάρακτες καταστάσεις είναι ιδιοκαταστάσεις της αδιατάρακτης Χαμιλτονιανής, δηλαδή της ελεύθερης Χαμιλτονιανής προσαναυξημένης με τον μη-αμεληταίο όρο αλληλεπίδρασης. Η διαταραχή γίνεται γύρω από τις ιδιοκαταστάσεις αυτές και βρίσκεται από το υπόλοιπο κομμάτι του όρου αλληλεπίδρασης που θεωρήθηκε επαρκώς μικρό. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα της σκέδασης ενός φορτισμένου σωματιδίου από ένα άλλο φορτισμένο και πολύ βαρύτερο σωματίδιο, ένας τρόπος επίλυσης είναι να θεωρήσει κανείς ένα πεδίο Coulomb υποβάθρου εξαιτίας του βαρύτερου σωματιδίου και να διαταράξει το αποτέλεσμα γύρω απ’ αυτό.

1.11. Κανόνες Feynman

Εκτελώντας μερικούς απλούς υπολογισμούς, συναιρώντας πεδία σε συναρτήσεις συσχέτισης, θα αρχίσει να γίνεται φανερό πως να επισπεύσουμε την πραξεολογία, δηλαδή θα είναι δυνατόν να εξάγουμε τους κανόνες Feynman της QED. Προκειμένου να μην μπλεχτούμε θα εκτελέσουμε αυτήν την επαγωγική διαδικασία σε βήματα,

χρησιμοποιώντας δύο απλούστερες θεωρίες ως ενδιάμεσα βήματα. Ξεκινάμε λοιπόν απ' την πολύ απλούστερη θεωρία ϕ^4 στην οποία μετά θα προστεθούν τα φερμιόνια και τέλος τα φωτόνια.

1.11.1. Θεωρία ϕ^4

Η Λαγκρανζιανή της θεωρίας, απ' τον όρο αλληλεπίδρασης της οποίας παίρνει το όνομά της, είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (1.125)$$

όπου ϕ είναι ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο.

Ας υποθέσουμε πως ζητάμε να βρούμε το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης δύο ϕ σωματιδίων όπου επίσης δύο ϕ σωματίδια εξέρχονται. Αναλύοντας σε σειρά το εκθετικό της έκφρασης

$$\begin{aligned} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot i\mathcal{M} &= \\ \langle p_3 p_4 | iT | p_1 p_2 \rangle &= \\ = \left({}_0 \langle p_3 p_4 | T(\exp[-i \int dt H_I(t)]) | p_1 p_2 \rangle_0 \right) & \text{συνεκτικό,} \\ & \text{χωρίς άκρα} \end{aligned} \quad (1.126)$$

και υπολογίζοντας μέχρι την επιθυμητή τάξη (ο δείκτης "I" παραλείφθηκε για να μη βαρύνει ο συμβολισμός, ομοίως στα παρακάτω τα "0" των διεγερμένων σταθμών της αδιατάρακτης θεωρίας)

$$= \left(\left\langle p_3 p_4 \left| T \left(\begin{aligned} & I + \frac{-i}{1!} \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots \\ \dots + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \right) \right| p_1 p_2 \right\rangle \right) \text{συνεκτικό,} \quad (1.127)$$

χωρίς άκρα

Παρατηρούμε στο παραπάνω πως ο μηδενικής τάξης όρος δεν συμβάλλει διότι παράγει ένα μη-συνεκτικό διάγραμμα (θα φανεί σε λίγο τι εννοούμε με γράφημα, πάντως παράγει δύο διαδότες που συνδέουν ανά δύο τα άκρα με διαφορετικούς τρόπους και όχι μια αλληλεπίδραση όλων των σωματιδίων όπως επιθυμούμε). Συνεπώς έχουμε μη μηδενική συμμετοχή από πρώτης τάξης και μετά.

Ας υποθέσουμε τώρα πιο συγκεκριμένα πως αναζητούμε τους όρους δεύτερης τάξης. Αυτό θα είναι και το πρώτο παράδειγμα υπολογισμών που θα εκτελέσουμε. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot i\mathcal{M} &= \\ = \left({}_0 \langle p_3 p_4 | T \left(\frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) | p_1 p_2 \rangle_0 \right) & \text{συνεκτικό,} \\ & \text{χωρίς άκρα} \end{aligned} \quad (1.128)$$

Ο τελεστής χρονικής σειράς (time ordering operator) εδώ είναι πιο πολύ ως μνημονικό βοήθημα, μιας και κανονικά θα έπρεπε να προηγείται όλης της παράστασης. Συγκεκριμένα όταν εφαρμόζουμε το θεώρημα του Wick σε μια τέτοια παράσταση οι συναιρέσεις, μιας και δεν έχουμε πια απλές καταστάσεις κενού, περιλαμβάνουν και τους τελεστές εντός των bra και ket.

Το θεώρημα του Wick (για την περίπτωση των μποζονίων) εκφράζεται εν συντομία ως

$$T\{\phi_1\phi_2 \dots \phi_n\} = N\{\phi_1\phi_2 \dots \phi_n + \text{κάθε δυνατή συναίρεση}\} \quad (1.129)$$

όπου με *τελεστή χρονικής σειράς* T εννοούμε εκείνον τον τελεστή που τοποθετεί σε χρονική σειρά, απ' τα δεξιά προς τα αριστερά, τους τελεστές επί των οποίων δρα, ενώ με *τελεστή κανονικής σειράς* N (που στη βιβλιογραφία γράφεται και ως : $\phi_1\phi_2 \dots \phi_n$: επί μιας σειράς τελεστών $\phi_1\phi_2 \dots \phi_n$) έχουμε τον τελεστή που τοποθετεί τελεστές καταστροφής στα δεξιά των τελεστών δημιουργίας, πράγμα που σημαίνει πως αν επιχειρούσαμε να αναπαράγουμε την απόδειξη του θεωρήματος θα έπρεπε να σπάσουμε τα πεδία σε κομμάτια θετικής ενέργειας $\phi^+(x)$ και κομμάτια αρνητικής ενέργειας $\phi^-(x)$, με τα τελευταία να περιέχουν τους τελεστές δημιουργίας. Τέλος, χρησιμοποιήσαμε την έννοια της συναίρεσης, που στην περίπτωση των μποζονίων ορίζεται ως

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & , x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & , y^0 > x^0 \end{cases} \quad (1.130)$$

και πολλαπλές συναιρέσεις μπορούν να γίνουν επί μιας έκφρασης.

Επιστρέφοντας στον υπολογισμό μας παρατηρούμε πως άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Wick είναι πως μόνο εκφράσεις όπου όλοι οι τελεστές είναι συναιρεμένοι, συμπεριλαμβανομένων των τελεστών εντός των bra και ket, είναι μη μηδενικές, μιας και τελεστές μη συναιρεμένοι τοποθετούνται σε κανονική σειρά και δίνουν λοιπόν μηδέν δρώντας επί των καταστάσεων κενού.

Έχουμε δύο ειδών συναιρέσεις: εσωτερικές, που παράγουν διαδότες, καθώς και συναιρέσεις με τις αρχικές ή τελικές καταστάσεις. Ας δούμε λοιπόν αυτές οι εξωτερικές συναιρέσεις τι παράγουν.

$$\begin{aligned} & \overline{\phi(x)|p\rangle}_0 \\ &= \left[\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} (a_{\vec{q}} e^{-iq \cdot x}), \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger \right] |0\rangle \\ &= \left\{ \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} ([a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^\dagger] e^{-iq \cdot x}) \right\} |0\rangle \\ &= \left\{ \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) e^{-iq \cdot x} \right\} |0\rangle \\ &= e^{-ip \cdot x} |0\rangle \end{aligned} \quad (1.131)$$

και με όμοιους υπολογισμούς έχουμε για τις τελικές καταστάσεις

$${}_0\langle p|\overline{\phi(x)} = \langle 0|e^{+ip \cdot x} \quad (1.132)$$

Απ' την άλλη οι εσωτερικές συναιρέσεις δηλώσαμε πως δίνουν διαδότες. Πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x)\phi(y)} &= (\text{για } x^0 > y^0) \\ &= [\phi^+(x), \phi^-(y)] \\ &= \left[\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} (a_{\vec{q}} e^{-iq \cdot x}), \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot y}) \right] \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \{ [a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^\dagger] e^{-iq \cdot x + ip \cdot y} \} \\
&= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \{ (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) e^{-iq \cdot x + ip \cdot y} \} \\
&= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}
\end{aligned}$$

Που δεν είναι παρά ένας μιγαδικός αριθμός (a c-number). Παίρνοντας και την άλλη περίπτωση, δηλαδή $y^0 > x^0$, παρατηρούμε πως πρόκειται για το διαδότη Feynman

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (1.134)$$

και επειδή μπορεί να φανεί χρήσιμο ως καταγράψουμε μεμονομένα τη μορφή του διαδότη στο χώρο ορμών, όπως αυτή γίνεται φανερή απ' την πάνω έκφραση

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.135)$$

Συνεπώς, για το ζητούμενο πλάτος

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot i\mathcal{M} \\
&= \left(\left\langle p_3 p_4 \left| T \left(\frac{(-i)^2}{2!} \int d^4 y \frac{\lambda}{4!} \phi^4(y) \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right) \right| p_1 p_2 \right\rangle_0 \right)_{\substack{\text{συνεκτικό,} \\ \text{χωρίς άκρα}}} \quad (1.136)
\end{aligned}$$

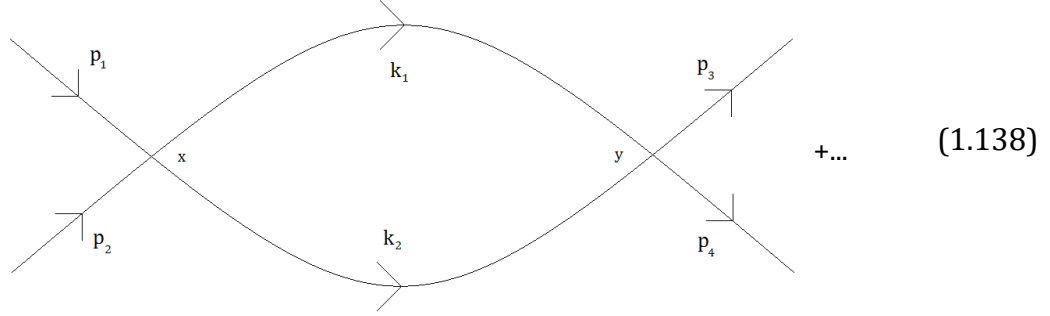
αν μελετήσουμε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούμε να συναιρέσουμε, είτε καταλήγουμε σε συναιρέσεις που δεν σέβονται το δείκτη “συνεκτικό, χωρίς άκρα” (θα φανεί αμέσως τώρα πιο διαισθητικά τι εννοούμε με αυτό) είτε καταλήγουμε σε μία απ' τις $8 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2$ ισοδύναμες συναιρέσεις

$$= \frac{8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2! \cdot 4! \cdot 4!} (-i\lambda)^2 \times \dots \quad (1.137)$$

$$\dots \times \langle p_3 p_4 | \int d^4 y \phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y) \int d^4 x \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) | p_1 p_2 \rangle$$

όπου το κλάσμα ονομάζεται συνδιαστικός παράγων (*combinatoric factor*) και απλοποιείται λοιπόν και γίνεται $\frac{1}{2}$. Είτε, καταλήγουμε σε μια συναίρεση όμοια με την πάνω αλλά για άλλο “κανάλι” όπως λέγονται οι διαφορετικές επιλογές άκρων για τα εισερχόμενα και εξερχόμενα σωματίδια. Η συγκεκριμένη συναίρεση που επιλέχθηκε καθώς και όλες οι ισοδύναμες αυτής παρατηρούμε πως μας δίνουν συγκεκριμένα αριθμητικά αποτελέσματα (που ειδικά στη θεωρία ϕ^4 είναι πολύ απλά καθώς δεν έχουμε πίνακες αλλά μιγαδικούς και άρα μετατίθενται ελεύθερα) και επομένως κάθε στοιχείο / κομμάτι της παραπάνω συναίρεσης μπορεί να κωδικοποιηθεί ως μια γραμμή ή κόμβος (φανταστείτε τα αρχικά και τελικά σωματίδια ως άκρα ή και κόμβους, τα x και y χωροχρονικά σημεία ως κόμβους και τις συναιρέσεις ως γραμμές που συνδέουν τους κόμβους αυτούς) σχηματίζοντας ένα διάγραμμα. Τέτοια διαγράμματα Feynman θα συμβολίζουν λοιπόν το εν λόγω πλάτος:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot i\mathcal{M} =$$



όπου στο πάνω, για λόγους απλότητας, δείχνουμε το πλάτος μόνο για το ένα κανάλι. Τα άλλα δύο θα ήταν το κανάλι για $p_1 \leftrightarrow -p_3$ στο σχήμα και $p_1 \leftrightarrow -p_4$.

Τώρα πλέον μπορεί να εξηγηθεί πιο άμεσα ο δείκτης “συνεκτικό, χωρίς άκρα” καθώς λαμβάνει υπόψη ουσιαστικά πως θα ζωγραφιστούν όλα τα πιθανά διαγράμματα επί των οποίων και θα εφαρμοστεί. Έτσι το συνεκτικό σημαίνει πως απαγορεύονται δύο ή παραπάνω αποκομμένα κομμάτια διαγράμματος (δηλ. απλά πολλαπλασιασμένα) ενώ χωρίς άκρα σημαίνει πως στα άκρα θα έχουμε απλές γραμμές και όχι προσαρτημένα σε αυτά βρόγχους και άλλα στοιχεία που, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο της επαναπαραμετροποίησης, οφείλονται στην αλληλεπίδραση του σωματιδίου με τον εαυτό του (και με άλλα πεδία υποβάθρου) παρά με τα άλλα σωματίδια της σκέδασης.

Εκτελώντας τώρα τις συναιρέσεις (ή το διάγραμμα αν θέλετε)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | e^{i(p_3+p_4)y} D_F(y-x) D_F(y-x) e^{-i(p_1+p_2)x} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y e^{i(p_3+p_4)y} D_F^2(y-x) e^{-i(p_1+p_2)x} \end{aligned} \quad (1.139)$$

και πηγαίνοντας στο χώρο ορμών μέσω μετασχηματισμού Fourier

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y e^{i(p_3+p_4)y} e^{-i(p_1+p_2)x} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \dots \\ &\quad \dots e^{-i(y-x)k_1} e^{-i(y-x)k_2} \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2) \\ &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2) \left[\int d^4x e^{i(p_3+p_4-k_1-k_2)y} \right] \dots \\ &\quad \dots \left[\int d^4y e^{i(k_1+k_2-p_1-p_2)x} \right] \\ &= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4k_1 \int d^4k_2 \frac{\tilde{D}(k_1)}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{D}(k_2)}{(2\pi)^4} \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - k_1 - k_2) \right] \dots \\ &\quad \dots \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \right] \end{aligned} \quad (1.140)$$

Μελετώντας τις αντιστοιχίες μεταξύ των μερών του διαγράμματος (κόμβοι, διαδότες-γραμμές και εξωτερικές γραμμές-άκρα) και των αριθμητικών στοιχείων των οποίων την εμφάνιση προκάλεσαν γίνονται άμεσα φανεροί οι εξής κανόνες Feynman (για το χώρο ορμών, ανάλογα θα μπορούσαμε να τους καταγράψουμε αν θέλαμε απ’ τα πάνω και για το χώρο θέσεων):

1. Σχεδιάζουμε όλα τα δυνατά διαγράμματα που σχετίζονται με το πλάτος που προσπαθούμε να υπολογίσουμε.
2. Κάθε κόμβος συνεισφέρει έναν παράγοντα $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p^\mu \text{ conserv.}) (-i\lambda)$
3. Κάθε διαδότης (εσωτερική γραμμή) συνεισφέρει έναν παράγοντα
$$\frac{\tilde{D}(p)}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$
4. Κάθε άκρο (διαδότης επί του φλοιού μάζας) συνεισφέρει ένα 1. (Σε άλλες θεωρίες αυτό δεν θα είναι τετριμμένο.)
5. Ολοκληρώνουμε επί όλων των τετραορμών εντός βρόγχων.
6. Καθώς κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε πολλαπλές ισοδύναμες συναιρέσεις πολλαπλασιάζουμε το κάθε διάγραμμα με τον κατάλληλο συνδιαστικό παράγοντα. Ο παράγοντας αυτός είναι ο αριθμός όλων των δυνατών συναιρέσεων διαιρεμένος με το παραγοντικό από το αρχικό εκθετικό και διαιρεμένος από τα παραγοντικά κάθε κόμβου.

Αυτή είναι όλη και όλη η διαδικασία εύρεσης των κανόνων Feynman! Τώρα απλά θα εφαρμόσουμε τα ίδια, αλλά σε πιο σχετικές με το αντικείμενό μας θεωρίες ...

1.11.2. Yukawa

Συνεχίζουμε με τη θεωρία του Yukawa, ένα απλό μοντέλο (και σε ιστορικό επίπεδο κατασκευασμένο για την περιγραφή των υπολειπόμενων ισχυρών αλληλεπιδράσεων (residual strong force) αν και η ακρίβεια αυτού ξεφεύγει των στόχων του παρόντος κειμένου) που αφορά ένα φερμιονικό πεδίο που αλληλεπιδρά μέσω ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου. Καταφεύγουμε στη θεωρία αυτή προκειμένου να μην εισάγουμε ταυτόχρονα με τους κανόνες του φερμιονικού πεδίου και αυτού του φωτονικού.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - g\phi\bar{\psi}\psi \quad (1.141)$$

Η διαταρακτική προσέγγιση που παρουσιάσαμε παραμένει η ίδια αλλά το θεώρημα του Wick που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα οφείλει να τροποποιηθεί λόγω της αντιμεταθετικής φύσης των φερμιονικών πεδίων. Η εξίσωση που περιγράφει το θεώρημα παραμένει ίδια

$$T\{\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\dots\} = N\{\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\dots + \text{κάθε δυνατή συναίρεση}\} \quad (1.142)$$

όμως πλέον οι τελεστές T και N "πετάνε έξω" ένα επιπλέον μείον για κάθε αλλαγή σειράς στους τελεστές επί των οποίων δρουν. Για την πιο απλή περίπτωση λοιπόν έχουμε

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) , & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) , & y^0 > x^0 \end{cases} \quad (1.143)$$

και ως εκ τούτου ο διαδότης Dirac γράφεται ως

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle \quad (1.144)$$

Αλλαγή έχουμε και στον ορισμό της συναίρεσης που πλέον ορίζεται να 'ναι

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} \equiv \begin{cases} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} & , x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & , y^0 > x^0 \end{cases} = S_F(x-y) \quad (1.145)$$

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0 \quad (1.146)$$

και κάθε αλλαγή θέσης μεταξύ ενός τελεστή που έχει συναιρεθεί και ενός άλλου, συναιρεμένου ή μη, δίνει όπως πάντα ένα επιπλέον παράγοντα μείον.

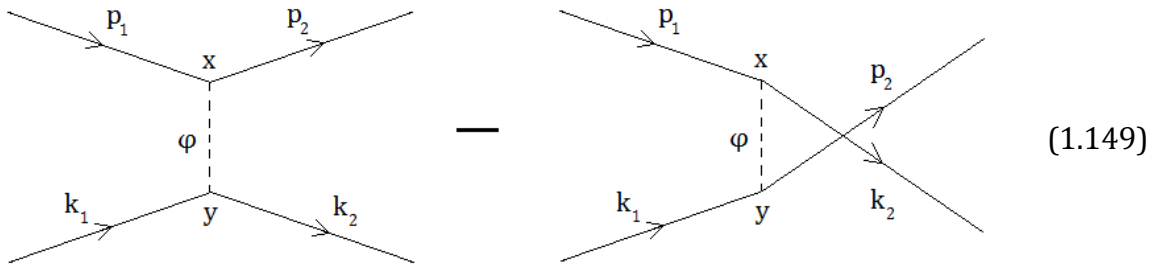
Θα υπολογίσουμε στα επόμενα, για να βρούμε τους κανόνες Feynman της θεωρίας Yukawa, το πλάτος σκέδασης δύο (ίδιου είδους) φερμιονίων συγκεκριμένου spin το καθένα, για λόγους απλότητας, με ακρίβεια μέχρι δεύτερης τάξης. Ας προσέξει ο αναγνώστης πως αυτή τη φορά δεν υπολογίζουμε το πλάτος ενός μόνο διαγράμματος αλλά ολόκληρο το πλάτος μέχρι κάποια τάξη που αφορά τη διαδικασία που μελετάμε. Αυτό δεν γίνεται για λόγους γενναιοδωρίας όσον αφορά τον αριθμό των πράξεων (!) αλλά διότι θα προκύψει πως έτσι και αλλιώς η κυρίαρχη συνεισφορά στο πλάτος είναι η δεύτερης τάξης και καθώς το δεύτερης τάξης διάγραμμα θα μας βοηθήσει να εξάγουμε με ευκολία τους κανόνες είχαμε την "πολυτέλεια" να διευρύνουμε την εκφώνηση. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \cdot i\mathcal{M} = \\ & = \left({}_0 \langle p_2 k_2 | T(\exp[-i \int dt H_I(t)]) | p_1 k_1 \rangle_0 \right)_{\substack{\text{συνεκτικό,} \\ \text{χωρίς άκρα}}} \\ & = \left({}_0 \langle p_2 k_2 | T(\exp[-i \int d^4x g \varphi \bar{\psi} \psi]) | p_1 k_1 \rangle_0 \right)_{\substack{\text{συνεκτικό,} \\ \text{χωρίς άκρα}}} \\ & = \left({}_0 \langle p_2 k_2 | I | p_1 k_1 \rangle_0 + (g^1 \text{ term}) + \mathcal{O}(g^2) \right)_{\substack{\text{συνεκτικό,} \\ \text{χωρίς άκρα}}} \end{aligned} \quad (1.147)$$

όπου όμως ο μηδενικής τάξης όρος δεν είναι συνεκτικός και στον πρώτης τάξης το πεδίο ϕ μηδενίζει τον όρο διότι έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή (expectation value). Έτσι καταλήγουμε λοιπόν στο δεύτερης τάξης αποτέλεσμα για το οποίο μιλήσαμε πριν

$$\simeq \left\langle p_2 k_2 \left| T \left\{ \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4y \varphi(y) \bar{\psi}(y) \psi(y) \int d^4x \varphi(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) \right\} \right| p_1 k_1 \right\rangle \quad (1.148)$$

Υπάρχουν τέσσερις συναιρέσεις που μπορούν να γίνουν, δύο ισοδύναμες για καθένα απ' τα παρακάτω διαγράμματα



(το μείον ανάμεσα στα διαγράμματα θα εξηγηθεί στα παρακάτω)

ή με ισοδύναμη αλγεβρική μορφή (γράφοντας μια αντιπροσωπευτική συναίρεση για κάθε διάγραμμα και πολλαπλασιάζοντας με τον αριθμό των ισοδύναμων συναιρέσεων, δηλ. 2)

$$\begin{aligned}
& \simeq 2 \frac{(-ig)^2}{2!} \langle p_2 k_2 | \int d^4 y \varphi(y) \bar{\psi}(y) \psi(y) \int d^4 x \varphi(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) | p_1 k_1 \rangle + \dots \\
& \dots + 2 \frac{(-ig)^2}{2!} \langle p_2 k_2 | \int d^4 y \varphi(y) \bar{\psi}(y) \psi(y) \int d^4 x \varphi(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) | p_1 k_1 \rangle
\end{aligned} \tag{1.150}$$

Οι συναίρέσεις των άκρων έγιναν κατ' αυτόν τον τρόπο διότι ένα πεδίο ψ , χωρίς bar, μπορεί να συναιρεθεί -και να μην μηδενιστεί εννοείται- μόνο με εισερχόμενα φερμιόνια ή εξερχόμενα αντιφερμιόνια και αντιστρόφως για το $\bar{\psi}$ με bar. Αυτό οφείλεται στους κανόνες συναίρεσης αυτούς καθ' αυτούς που δώσαμε νωρίτερα και θα γίνει φανερό αν κάνουμε αναλυτικά τους υπολογισμούς για τα άκρα. Έτσι, εισερχόμενα φερμιόνια δίνουν

$$\begin{aligned}
\psi(x) |p, s\rangle &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \sum_{s'} (a_{\vec{q}}^{s'} u^{s'}(q) e^{-iq \cdot x}) \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s'} |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \sum_{s'} (2\pi)^3 \delta^{(4)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{s, s'} u^{s'}(q) e^{-iq \cdot x} |0\rangle \\
&= u^s(p) e^{-ip \cdot x} |0\rangle
\end{aligned} \tag{1.151}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν τα αναπτύγματα που βρήκαμε στο υποκεφάλαιο 1.9. καθώς και η σχετικιστική μορφή της μονοσωματιδιακής κατάστασης

$$|p, s\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s'} |0\rangle \tag{1.152}$$

Είναι πλέον φανερό πως αν κάναμε τα ίδια με το $\bar{\psi}$ επί ενός φερμιονίου, όλες οι συναίρέσεις θα προέκυπταν μηδέν λόγω των τελεστών του $\bar{\psi}$. Ομοίως για κάθε άλλη περίπτωση που αναφέραμε πως μηδενίζεται. Αντίστροφα, οι άλλες περιπτώσεις που δεν μηδενίζονται, πέραν της παραπάνω, αποδεικνύεται με εντελώς όμοιους υπολογισμούς πως δίνουν, στην περίπτωση εξερχόμενου φερμιονίου

$$\langle p, s | \bar{\psi}(x) = \langle 0 | \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \tag{1.153}$$

και στην περίπτωση αντιφερμιονίων, το εισερχόμενο

$$\bar{\psi}(x) |p, s\rangle = \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \tag{1.154}$$

και το εξερχόμενο

$$\langle p, s | \psi(x) = \langle 0 | v^s(p) e^{ip \cdot x} \tag{1.155}$$

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος (μέχρι δεύτερης τάξης) συνεχίζοντας τον υπολογισμό πριν

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \cdot i\mathcal{M} = \\
& = 1 \cdot (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y D_F(y-x) \left(\sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \sqrt{2E_{\vec{k}_2}} \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \right) \times \dots \\
& \dots \times \langle 0 | \underbrace{a(k_2) a(p_2) \bar{\psi}(y) \psi(y)}_{\dots} \underbrace{\bar{\psi}(x) \psi(x) a^\dagger(p_1) a^\dagger(k_1)}_{\dots} | 0 \rangle \\
& \dots + (2\text{ος όρος})
\end{aligned} \tag{1.156}$$

Αυτό που συνέβει εδώ είναι πως κρατήσαμε το “1” για να μας θυμίζει πως, αν και στη συγκεκριμένη περίπτωση εξαλείφεται σε μονάδα, πάντα υπάρχει ένας συνδιαστικός παράγοντας. Ακόμη εξάγαμε τις ρίζες για να γίνουν πιο φανερές οι συναιρέσεις αλλά όταν εκτελέσουμε τις εν λόγω συναιρέσεις των άκρων φεύγουν και οι ρίζες όπως στους πάνω υπολογισμούς. Για να μην βαρύνει ο συμβολισμός μας παραλείπουμε προς το παρόν τους δείκτες spin των τελεστών αλλά εννοούνται πάντα. Τέλος, για καταστάσεις πολλαπλών σωματιδίων ακολουθούμε το συμβολισμό

$$|p, s; q, s'\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{q}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{q}}^{s'} |0\rangle \tag{1.157}$$

και συνεπώς το συζυγές είναι

$$\langle p, s; q, s' | = \langle 0 | \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{q}}} a_{\vec{q}}^{s'} a_{\vec{p}}^s \tag{1.158}$$

Στην αρχή αυτού του υποκεφαλαίου δηλώσαμε πως όποια αλλαγή της σειράς των τελεστών συνοδεύεται από τον ανάλογο αριθμό από (-1) λόγω της αντισυμμετρικής φύσης των φερμιονικών πεδίων. Απ’ την παρατήρηση αυτή γίνεται αμέσως φανερός ο “2ος όρος” : αρκεί να υπολογιστεί ο πρώτος όρος, να μεταθέσουμε τα ονόματα των τελικών τετραορμών και τότε οι συναιρέσεις του δεύτερου όρου απέχουν απ’ αυτές του πρώτου μόνο κατά μία μετάθεση (αντιμετάθεση πιο σωστά) των τελεστών καταστροφής στα αριστερά. Αυτή η αντιμετάθεση δίνει το επιπλέον μείον που χρειάζεται ώστε το δεύτερο διάγραμμα να περιγράφει τους υπολογισμούς του δεύτερου όρου και γι’ αυτό σχεδιάστηκε στα πάνω.

Για να βγει ο πρώτος όρος θα πρέπει να τον “αποσυμπλέξουμε” χρησιμοποιώντας και εδώ τις σχέσεις αντιμετάθεσης. Μεταφέροντας το $a(p_2)$ κατά δύο θέσεις προς τα δεξιά, με αποτέλεσμα να μην αλλάζει το πρόσημο λόγω ζυγού αριθμού αντιμεταθέσεων, έχουμε

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \cdot i\mathcal{M} = \\
& = 1 \cdot (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y D_F(y-x) \left(\sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \sqrt{2E_{\vec{k}_2}} \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \right) \times \dots \\
& \dots \times (-1)^2 \langle 0 | \underbrace{a(k_2) \bar{\psi}(y) \psi(y)}_{\dots} \underbrace{a(p_2) \bar{\psi}(x) \psi(x)}_{\dots} \underbrace{a^\dagger(p_1) a^\dagger(k_1)}_{\dots} | 0 \rangle \\
& \dots + (2\text{ος όρος})
\end{aligned} \tag{1.159}$$

(Αν θέλουμε δε να είμαστε τελείως προσεχτικοί θα επιχειρούσαμε να μην αλλάξουμε τη σειρά των ψ πεδίων καθώς πρόκειται για πίνακες. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται με τη μεταφορά του $a^\dagger(k_1)$ κατά τέσσερις θέσεις προς τα αριστερά.)

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y D_F(y-x) \dots \\
&\dots e^{i(k_2y+p_2x-k_1y-p_1x)} \bar{u}(k_2)u(k_1)\bar{u}(p_2)u(p_1)
\end{aligned} \tag{1.160}$$

Και ο μετασχηματισμός Fourier μάς μεταφέρει στο χώρο ορμών:

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}(q) e^{-iq(y-x)} \dots \\
&\dots e^{i(k_2y+p_2x-k_1y-p_1x)} \bar{u}(k_2)u(k_1)\bar{u}(p_2)u(p_1) \\
&= 1 \cdot (-ig)^2 \int d^4q \frac{\tilde{D}(q)}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ix(q+p_2-p_1)} \int d^4y e^{iy(k_2-k_1-q)} \dots \\
&\dots \bar{u}(k_2)u(k_1)\bar{u}(p_2)u(p_1) \\
&= 1 \cdot \int d^4q \frac{\tilde{D}(q)}{(2\pi)^4} (-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q+p_2-p_1) \dots \\
&\dots (-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_2-k_1-q) \bar{u}(k_2)u(k_1)\bar{u}(p_2)u(p_1)
\end{aligned} \tag{1.161}$$

Καταλήξαμε στην επιθυμητή έκφραση. Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε τον υπολογισμό, εκτελώντας ένα ολοκλήρωμα με τη βοήθεια μιας δέλτα συνάρτησης και βρίσκοντας έτσι το αναλλοίωτο πλάτος με τη διαγραφή και απ' τα δύο μέρη του παράγοντα $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2+k_2-p_1-k_1)$. Μας αρκεί όμως το πάνω για το στόχο μας, που είναι να κάνουμε άμεσα φανερούς τους κανόνες Feynman.

Πριν αρχίσουμε λοιπόν να συμπυκνώνουμε τα παραπάνω σε συμπεράσματα αξίζει να γίνει μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση που λόγω της παράλειψης από μέρους μας των δεικτών spin δεν είναι άμεσα φανερή. Αναμένουμε από το βαθμωτό σωματίδιο (και άρα μηδενικού spin) να μην μεταφέρει spin από το ένα φερμιόνιο στο άλλο. Πράγματι: τα γινόμενα πινάκων $\bar{u}u$, που διατηρήσαμε επιμελώς σε σειρά, περιέχουν ορθογώνιους μεταξύ τους πίνακες στην περίπτωση που δεν αναφέρονται στο ίδιο spin, μηδενίζοντας το αποτέλεσμα. Συνεπώς απαγορεύεται η αλλαγή στα spin κατά μήκος φερμιονικών γραμμών, τουλάχιστον όσον αφορά τη θεωρία Yukawa. Επιπρόσθετα, αν κάναμε τον παραπάνω υπολογισμό ανάμεσα σε ένα φερμιόνιο και ένα αντιφερμιόνιο θα βλέπαμε πως η θεωρία δεν αλλάζει το φορτίο (επί της ίδιας φερμιονικής γραμμής) μιας και τα u και \bar{u} είναι πάντα ορθογώνια μεταξύ τους.

Το παραπάνω παράδειγμα περιείχε όλα τα στοιχεία που κανείς χρειάζεται για να διαπιστώσει τους κανόνες Feynman της θεωρίας Yukawa εκτός από ένα: δεν είχαμε διάδοση φερμιονίου στο εσωτερικό του διαγράμματος και άρα δεν φάνηκε το αποτέλεσμα μιας εσωτερικής συναίρεσης ψ πεδίων. Οι σχέσεις (1.145) και (1.146) μας δίνουν όμως το ίδιο συμπέρασμα με το βαθμωτό πεδίο: πως οι εσωτερικές συναιρέσεις πρόκειται για διαδότες, με την ιδιαιτερότητα εδώ πως η συναίρεση οφείλει να συνδέει ένα ψ με ένα $\bar{\psi}$.

Οι κανόνες Feynman λοιπόν για τη θεωρία Yukawa στο χώρο των ορμών είναι:

1. Σχεδιάζουμε όλα τα δυνατά διαγράμματα που σχετίζονται με το πλάτος που προσπαθούμε να υπολογίσουμε.

2. Κάθε κόμβος συνεισφέρει έναν παράγοντα

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p^\mu \text{ conserv.}) (-ig)$$

3. Κάθε βαθμωτός διαδότης συνεισφέρει έναν παράγοντα

$$\frac{\tilde{D}(p)}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

ενώ κάθε φερμιονικός διαδότης

$$\frac{\tilde{S}(p)}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon}$$

4. Κάθε άκρο συνεισφέρει ένα 1 αν είναι βαθμωτό ενώ αν είναι

❖ εισερχόμενο φερμιόνιο : $u^S(p)$

❖ εξερχόμενο φερμιόνιο : $\bar{u}^S(p)$

❖ εισερχόμενο αντιφερμιόνιο : $\bar{v}^S(p)$

❖ εξερχόμενο αντιφερμιόνιο : $v^S(p)$

5. Ολοκληρώνουμε επί όλων των τετραορμών εντός βρόγχων.

6. Καθώς κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε πολλαπλές ισοδύναμες συναιρέσεις πολλαπλασιάζουμε το κάθε διάγραμμα με τον κατάλληλο συνδιαστικό παράγοντα. Ο παράγοντας αυτός είναι ο αριθμός όλων των δυνατών συναιρέσεων διαιρεμένος με το παραγοντικό από το αρχικό εκθετικό και διαιρεμένος από τα παραγοντικά κάθε κόμβου.

7. Η ειδική περίπτωση το διάγραμμα να περιέχει φερμιονικό βρόγχο αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο. Ο χειρισμός του είναι όμοιος στη θεωρία Yukawa.

1.11.3. QED

Έχοντας ήδη δει την εξαγωγή των κανόνων Feynman για τις δύο προηγούμενες θεωρίες, για την περίπτωση της QED δεν θα αναλύσουμε εξαρχής κάποιο διάγραμμα καθώς πλέον είναι φανερή η διαδικασία αλλά θα εστιάσουμε κατευθείαν στα σημεία αυτής που χρίζουν προσοχής και των οποίων η διερεύνηση έτσι και αλλιώς θα μας καθυστερούσε από τον υπολογισμό του διαγράμματος.

Αναφέραμε πως η κβάντωση του A^μ χρειάζεται λεπτότητα στο χειρισμό. Αυτό είπαμε προκύπτει από το γεγονός πως το πεδίο των φωτονίων έχει μια συμμετρία βαθμίδας. Συνεπώς υπάρχουν πολλοί ισοδύναμοι τρόποι περιγραφής αυτού ενώ είδαμε πως δεν είναι όλοι οι βαθμοί ελευθερίας αυτού φυσικοί αλλά υπάρχει ένας “πλεονασμός” στην περιγραφή του πεδίου ακριβώς λόγω αυτής της συμμετρίας. Ένας τρόπος να επιλύσουμε το πρόβλημα και να βρούμε τον αντίστοιχο διαδότη κλπ. είναι μέσω της μεθόδου των ολοκληρωμάτων διαδρομών, όπως γίνεται στην [1]. Τα ολοκληρώματα διαδρομών (βλ. κεφ. 1.12.) έχουν την ενδιαφέρουσα ερμηνεία για το πρόβλημα που ανακύπτει από τη συμμετρία βαθμίδας πως οφείλεται στο ότι κατά την ολοκλήρωση

ολοκληρώνουμε διαδρομές που είναι φυσικώς ισοδύναμες και άρα αθροίζουμε πέραν της ορθής απάντησης. Εμείς πάντως θα μείνουμε στην εικόνα των τρόπων ταλάντωσης και χωρίς να μπορούμε στη διαδικασία να βρούμε τις μεταθετικές σχέσεις του A^μ , αν και έχει φυσικό ενδιαφέρον ο χειρισμός και γίνεται μεταξύ άλλων στην [3], θα επιχειρήσουμε να βρούμε κατευθείαν το διαδότη.

Το εγχείρημά μας αυτό θα μας δώσει άλλον έναν, πιο πρακτικό, τρόπο να κατανοήσουμε τη δυσκολία που αντιμετωπίζουμε. Εώς τώρα ο διαδότης είχε ειπωθεί ως η συνάρτηση συσχετισμού 2-σημείων ενός πεδίου. Υπάρχει ένας ισοδύναμος τρόπος να περιγραφεί ως η συνάρτηση Green του τελεστή της αντίστοιχης εξίσωσης κίνησης. Αν επιχειρήσουμε να λύσουμε όμως για την περίπτωση του φωτονικού διαδότη ξεκινώντας από την εξίσωση κίνησης του φωτονικού πεδίου (1.82):

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad (1.162)$$

$$(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A^\mu = J_\nu \quad (1.163)$$

τότε ο διαδότης (στο χώρο ορμών) θα προέκυπτε από

$$(-\eta_{\mu\nu}k^2 + k_\mu k_\nu)i\tilde{\Delta}_F^{\nu\rho}(k) = -\delta_\mu^\rho \quad (1.164)$$

που δεν έχει λύση.

Προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα, είτε είχαμε ακολουθήσει τη μέθοδο των ολοκληρωμάτων διαδρομών είτε κάναμε όπως εδώ, η λύση είναι ίδια: πρέπει να επιλέξουμε βαθμίδα. Προκειμένου να ισχύει η βαθμίδα Lorenz ($\partial \cdot A = 0$) προσθέτουμε στη Λαγκρανζιανή έναν όρο που είναι ένας πολλαπλασιαστής Lagrange, βλ. [5], ώστε η εξίσωση κίνησης ως προς αυτόν να είναι η επιλογή της βαθμίδας που επιθυμούμε. Ο όρος αυτός είναι γνωστός ως όρος Faddeev-Popov και η Λαγκρανζιανή της QED παίρνει πλέον τη μορφή

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \quad (1.165)$$

όπου ο εν λόγω όρος είναι ο τελευταίος. Η εξίσωση του διαδότη (1.164) γίνεται τώρα

$$\left[-\eta_{\mu\nu}k^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu\right]i\tilde{\Delta}_F^{\nu\rho}(k) = -\delta_\mu^\rho \quad (1.166)$$

και πλέον έχει λύση. Μαντεύοντας λύση της μορφής $A\eta^{\nu\rho} + Bk^\nu k^\rho$ καταλήγουμε στην έκφραση

$$\tilde{\Delta}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (1.167)$$

Ας σημειωθεί πως οποιοδήποτε φυσικό αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο από την τιμή του ξ , κάτι που μας δίνει έναν επιπλέον έλεγχο των αποτελεσμάτων μας. Πάντως, εμείς για διευκόλυνση θα πάρουμε τη βαθμίδα Feynman ($\xi = 1$) οπότε και ο διαδότης απλοποιείται και μένει

$$\tilde{\Delta}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (1.168)$$

Η συνεισφορά του κόμβου στην QED προκύπτει άμεσα από τον όρο αλληλεπίδρασης στη Λαγκρανζιανή αν ληφθεί υπόψη πως τα πεδία θα συναιρεθούν, οπότε αφήνοντας πίσω ότι μένει από τον όρο αλληλεπίδρασης επί το $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\text{διατ. } p^\mu)$ που

προκύπτει από την ολοκλήρωση εκθετικών γύρω από τον κόμβο και ένα i από το εκθετικό της διαταρακτικής προσέγγισης. Δηλαδή η συνεισφορά είναι

$$-iq\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(\text{διατ. } p^\mu) \quad (1.169)$$

Αξίζει να προσέξουμε εδώ πως το γ^μ συνδέει το φερμιονικό με το φωτονικό πεδίο μέσω των δεικτών του: το φωτονικό πεδίο είναι συζευγμένο με αυτό μέσω του δείκτη Lorentz ενώ το φερμιονικό μέσω των σπινωριακών δεικτών. Αυτό μάλιστα σημαίνει πως πρέπει στον υπολογισμό του πλάτους διαγραμμάτων να είμαστε ακόμα πιο προσεχτικοί με τη σειρά των γ πινάκων και των σπινόρων σε σχέση με τη θεωρία Yukawa όπου οι γ πίνακες απουσίαζαν.

Μένει να δούμε τη συνεισφορά ενός φωτονικού άκρου. Αναφέραμε στο υποκεφάλαιο 1.9. πως η ανάλυση του πεδίου (/ τελεστή) σε συχνότητες προκύπτει να είναι η ίδια με την κλασική, δηλαδή (1.119). Δρώντας με αυτήν για την εύρεση της συνεισφοράς εντός διαγράμματος από τα άκρα θα έμοιαζε με

$$\overline{A_\mu(x)|q,r'\rangle} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{r=1}^2 \overline{(a_{\vec{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x})} \sqrt{2E_{\vec{q}}} a_{\vec{q}}^{r'\dagger} |0\rangle \quad (1.170)$$

όπου το άκρο εδώ είναι συγκεκριμένης ελικότητας r' . Ο υπολογισμός πράγματι διεξάγεται ως συνήθως, δίνοντας συνεισφορές στο χώρο θέσεων

$$\epsilon_\mu(p, r) e^{-ip \cdot x} \quad (1.171)$$

$$\epsilon_\mu^*(p, r) e^{ip \cdot x} \quad (1.172)$$

για εισερχόμενο και εξερχόμενο άκρο αντίστοιχα τετραορμής p και ελικότητας r , αλλά η απόδειξη αυτού απαιτούσε πρώτα να βρεθούν οι μεταθετικές σχέσεις ώστε κανείς να βεβαιωθεί για τις παραπάνω συναιρέσεις, οπότε και παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη δοσμένη στο πίσω μέρος βιβλιογραφία για μια αναλυτική εξαγωγή. Παρατηρήστε ακόμα πως γράφτηκε το συζυγές άνυσμα πόλωσης, έτσι ώστε να ισχύει και για την περίπτωση που από επίπεδη πόλωση κάποιος θα ήθελε να περιγράψει κυκλική πόλωση μέσω των ορισμών

$$\epsilon_\mu^\pm(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\epsilon_\mu(p, 1) \pm i\epsilon_\mu(p, 2)] \quad (1.173)$$

Μία μορφή διαγράμματος που μπορεί να προκύψει και να μας αναγκάσει να κάνουμε τον υπολογισμό των συναιρέσεων απ' την αρχή αν δεν την έχουμε ξαναδεί και προσθέσει στους κανόνες Feynman είναι η περίπτωση του φερμιονικού βρόγχου, δηλαδή μιας κλειστής διαδρομής από αλληπάλληλους φερμιονικούς διαδότες. Οι συναιρέσεις που συμβαίνουν σε μια τέτοια περίπτωση χαρακτηρίζονται από κυκλικότητα συνεπώς. Αποσυμπλέκουμε τη συναίρεση των αλληπάλληλων $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ πηγαίνοντας το πλέον δεξί ψ τελείως αριστερά με περιττό λοιπόν αριθμό αντιμεταθέσεων οπότε και ένα μείον θα βγει εκτός της έκφρασης που πλέον είναι ένα γινόμενο γ πινάκων και διαδοτών και μάλιστα το ίχνος αυτού του γινόμενου λόγω της αρχικής κυκλικής σύζευξης των σπινωριακών δεικτών. Μένουμε με ένα ίχνος λοιπόν γ πινάκων οπότε προκειμένου να μην κάνουμε πράξεις γ πινάκων στοιχείο-στοιχείο έχουν βρεθεί ταυτότητες βασισμένες στις ιδιότητες

τους για τη γρήγορη εξαγωγή τέτοιων παραστάσεων. Η trace technology (μέθοδος ιχνών;) όπως ονομάζεται παρατίθεται πλήρης στο παράρτημα Α για 4 χωροχρονικές διαστάσεις.

Πλέον έχουμε όλα τα στοιχεία που αναζητούσαμε και η σύνθεση αυτών γίνεται όμοια με τις άλλες θεωρίες. Συμπερασματικά, οι κανόνες Feynman της QED στο χώρο ορμών είναι:

1. Σχεδιάζουμε όλα τα δυνατά διαγράμματα που σχετίζονται με το πλάτος που προσπαθούμε να υπολογίσουμε.

2. Κάθε κόμβος συνεισφέρει έναν παράγοντα

$$-iq\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(\text{διατ. } p^\mu)$$

3. Κάθε φωτονικός διαδότης συνεισφέρει έναν παράγοντα

$$\frac{\tilde{\Delta}_F^{\mu\nu}(k)}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

και για $\xi = 1$ έχουμε τη βαθμίδα Feynman, ενώ κάθε φερμιονικός διαδότης συνεισφέρει

$$\frac{\tilde{S}(p)}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\varepsilon}$$

4. Κάθε άκρο συνεισφέρει αν είναι

- ❖ εισερχόμενο φωτόνιο : $\varepsilon_\mu(p, r)$
- ❖ εξερχόμενο φωτόνιο : $\varepsilon_\mu^*(p, r)$
- ❖ εισερχόμενο φερμιόνιο : $u^s(p)$
- ❖ εξερχόμενο φερμιόνιο : $\bar{u}^s(p)$
- ❖ εισερχόμενο αντιφερμιόνιο : $\bar{v}^s(p)$
- ❖ εξερχόμενο αντιφερμιόνιο : $v^s(p)$

5. Ολοκληρώνουμε επί όλων των τετραορμών εντός βρόγχων.

6. Καθώς κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε πολλαπλές ισοδύναμες συναιρέσεις πολλαπλασιάζουμε το κάθε διάγραμμα με τον κατάλληλο συνδιαστικό παράγοντα. Ο παράγοντας αυτός είναι ο αριθμός όλων των δυνατών συναιρέσεων διαιρεμένος με το παραγοντικό από το αρχικό εκθετικό και διαιρεμένος από τα παραγοντικά κάθε κόμβου (μονάδα στην QED).

7. Στην ειδική περίπτωση που το διάγραμμα περιέχει φερμιονικό βρόγχο αυτός αντιστοιχεί σε ένα ίχνος κατάλληλης σειράς πινάκων επί (-1) .

Παράρτημα: διακριτές συμμετρίες και θεώρημα του Furry

Σε αυτό το σημείο προσαρτάμε ένα μικρό παράρτημα σχετικά με τις διακριτές συμμετρίες των κβαντικών θεωριών πεδίου, καθώς στη μετέπειτα μελέτη μας της QED θα τις χρειαστούμε. Αυτές είναι

- η κατοπτρική συμμετρία ή αλλιώς συμμετρία P
- η συμμετρία συζυγίας φορτίου ή αλλιώς συμμετρία C
- η συμμετρία στην αλλαγή της φοράς του χρόνου

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις παραβιάζουν τις συμμετρίες P και C και σε εξαιρετικές περιπτώσεις και τη συνδιασμένη συμμετρία CP όμως μέχρι σήμερα η συμμετρία και των τριών προηγούμενων, δηλαδή η συμμετρία CPT μοιάζει να έχει καθολική ισχύ.

Θα αναφέρουμε συνοπτικά τη δράση των P και C συμμετριών στην QFT καθώς αυτούς τους κανόνες χρησιμοποιεί κανείς συνήθως. Η κατοπτρική συμμετρία δρα στο πρόσημο του ανύσματος θέσης και άρα

$$P: x \rightarrow \tilde{x} \quad (1.174)$$

όπου $\tilde{x} \equiv (x^0, -\vec{x})$. Γίνεται να μελετηθεί η δράση του τελεστή στους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για κάποιο πεδίο, βαθμωτό, σπινωριακό, ανυσματικό κλπ. και τα συμπεράσματα στα οποία οδηγείται κανείς για τα αντίστοιχα πεδία είναι

$$\Phi(x) \rightarrow \eta\Phi(\tilde{x}) \quad (1.175)$$

$$\Psi(x) \rightarrow \gamma^0\Psi(\tilde{x}) \quad (1.176)$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(\tilde{x}) \quad (1.177)$$

όπου η παράγοντας φάσης. Η συζυγία φορτίου, η αντικατάσταση δηλαδή των σωματιδίων με αντισωματίδια και ανάποδα, τώρα δρα ως εξής:

$$\phi \rightarrow \phi^\dagger \quad (1.178)$$

$$\psi \rightarrow i\gamma^2\psi^* \quad (1.179)$$

$$A_\mu \rightarrow -A_\mu \quad (1.180)$$

όπου εδώ το βαθμωτό πεδίο Φ μιγαδικό.

Την τελευταία σχέση χρησιμοποιούμε για να δείξουμε το γνωστό θεώρημα του Furry, το οποίο δηλώνει πως συναρτήσεις συσχέτισης περιττού πλήθους πεδίων A_μ μηδενίζονται. Η δήλωση αυτή είναι άμεση συνέπεια της συζυγίας φορτίου καθώς ο ηλεκτρομαγνητισμός είναι συμμετρικός κάτω από τη συμμετρία C και άρα αναμένουμε ταύτιση των συναρτήσεων συσχέτισης κάτω από τη δράση της συμμετρίας αυτής. Αν όμως η συνάρτηση συσχέτισης έχει περιττό αριθμό από A_μ εντός αυτής, προκύπτει η συνάρτηση συσχέτισης να ισούται με το αντίθετο της και άρα να μηδενίζεται.

1.12. Ολοκληρώματα διαδρομών

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης όπως έγινε προηγουμένως, με τη βοήθεια του θεωρήματος Wick, είναι ένας τρόπος να γίνουν οι πράξεις. Καθώς στη φυσική χρησιμεύει να έχει κανείς περισσότερους τρόπους αντιμετώπισης προβλημάτων, περισσότερα μαθηματικά εργαλεία αλλά και εικόνες που παρέχουν διαίσθηση, θα εισάγουμε στο παρόν υποκεφάλαιο έναν διαφορετικό τρόπο με τον οποίο μπορεί να γίνει ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης, που κάνει και τα δύο: είναι χρήσιμο εργαλείο καθώς παρέχει μια διαφορετική πορεία που κανείς μπορεί να επιχειρήσει για να επιλύσει ένα πρόβλημα κβαντικής θεωρίας πεδίου αλλά παρέχει και μια σημαντική οπτική από την οποία μπορούν να ειπωθούν τα πεδία. Συγκεκριμένα, στο υποκεφάλαιο αυτό θα δούμε συνοπτικά, χωρίς αποδεικτικές διαδικασίες, τους βασικούς τύπους που θα μας χρησιμεύσουν στη θεώρηση των κβαντικών πεδίων μέσω ολοκληρωμάτων διαδρομών.

Για μια σταδιακή εξαγωγή των τύπων μπορεί κανείς να ξεκινήσει να αντιμετωπίζει το πρόβλημα από το επίπεδο της κβαντικής μηχανικής όπου τα πράγματα είναι πιο απλά.

Όσα ειπωθούν στη συνέχεια, για όποιον θα ήθελε περισσότερες λεπτομέρειες, υπάρχουν πιο αναλυτικά στην περισσότερη βιβλιογραφία επί ενός προχωρημένου μαθήματος κβαντικής μηχανικής. Η παρουσίαση του θέματος ξεκινά με την αναζήτηση του διαδότη που δίνει το πλάτος μετάβασης από μια θέση x σε μια x' μέσα σε χρόνο t :

$$\langle \vec{x}' | e^{-iH(t'-t)/\hbar} | \vec{x} \rangle = \dots \quad (1.181)$$

Μπορούμε να σπάσουμε την έκφραση εισάγοντας ξανά και ξανά τη σχέση πληρότητας σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα, δύο εισαγωγές δίνουν

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int d^3\vec{x}_1 \int d^3\vec{x}_2 \langle \vec{x}', t' | \vec{x}_2, t_2 \rangle \langle \vec{x}_2, t_2 | \vec{x}_1, t_1 \rangle \langle \vec{x}_1, t_1 | \vec{x}, t \rangle \quad (1.182)$$

και προχωρώντας έτσι στο όριο όπου έχουμε άπειρες εισαγωγές καταλήγουμε να έχουμε ένα πλήθος ολοκληρώσεων που τείνουν στο άπειρο, καλύπτοντας σε κάθε “βήμα” του υπολογισμού όλες τις δυνατές τιμές που η θέση του κβαντικού σωματιδίου μπορεί να πάρει. Το σύνολο όλων αυτών των ολοκληρώσεων φτιάχνει λοιπόν ένα μαθηματικό αντικείμενο στο όριο που οι ενδιάμεσες θέσεις σχηματίζουν ένα συνεχές και το αντικείμενο αυτό το λέμε ένα ολοκλήρωμα διαδρομών. Ο διαδότης (1.181) καταλήγει να εκφράζεται ως

$$\langle \vec{x}' | e^{-iH(t'-t)/\hbar} | \vec{x} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \quad (1.183)$$

και το $\mathcal{D}x(t)$ υποδηλώνει το ολοκλήρωμα διαδρομών: η έκφραση είναι μια οδηγία που λέει πως πρέπει να μελετήσουμε κάθε δυνατή διαδρομή ανάμεσα στα x και x' για χρόνο t και να της προσδώσουμε την τιμή του πλάτους εντός του ολοκληρώματος, οπότε ο διαδότης προέρχεται από το άθροισμα όλων των συνεισφορών από κάθε δυνατή διαδρομή (!).

Εμείς θα αρκεστούμε στα πάνω προκειμένου με μια αναλογία να μεταβούμε στην περίπτωση των πεδίων, αλλά πριν το κάνουμε αυτό ας προσθέσουμε κάποιες άλλες εκφράσεις που προκύπτουν ήδη απ' την κβαντική μηχανική. Έτσι έχουμε τη συνάρτηση συσχέτισης n -σημείων η οποία προκύπτει με παρόμοια αποδεικτική διαδικασία με αυτήν της προηγούμενης σχέσης να είναι

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}', t' | T(\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)) | \vec{x}, t \rangle \\ = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x(t) x(t_1)x(t_2) \dots x(t_n) e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \end{aligned} \quad (1.184)$$

Ακόμη, εισάγοντας μια παραλλαγή της Λαγκρανζιανής που έχει έναν βοηθητικό όρο που μοιάζει με πηγή σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathcal{L}_J = \mathcal{L} + J(t)x(t) \quad (1.185)$$

τότε ο διαδότης για μια τέτοια Λαγκρανζιανή γίνεται

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)] + \frac{i}{\hbar} \int dt J(t)x(t)} \quad (1.186)$$

και αυτό, δηλαδή η εξάρτηση από τη βοηθητική μεταβλητή J , μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\langle \vec{x}', t' | T(\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)) | \vec{x}, t \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\delta^n \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle_J}{\delta J(t_1)\delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \quad (1.187)$$

Χρήσιμη ποσότητα για τον υπολογισμό στοιχείων S πινάκων είναι η συνάρτηση συσχέτισης για μετάβαση από κενό σε κενό. Μπορεί λοιπόν κανείς να ξεκινήσει από μια τέτοια έκφραση και με τη βοήθεια της (1.187) να γράψει

$$\langle 0|T(\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n))|0\rangle = (-i\hbar)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \quad (1.188)$$

όπου ορίσαμε

$$Z[J] \equiv \int dx' \int dx \langle 0|\vec{x}', t'\rangle \langle \vec{x}', t'|_J \vec{x}, t\rangle \langle \vec{x}, t|0\rangle \quad (1.189)$$

Δηλαδή, το $Z[J]$ είναι το generating functional (συναρτησοειδές που έχει λειτουργία παρόμοια με τη συνάρτηση επιμερισμού της Στατιστικής Φυσικής καθώς από τη σχέση (1.188) φαίνεται πως δίνει όλες τις συναρτήσεις συσχέτισης από κενό σε κενό). Η μορφή αυτού που χρησιμεύει πρακτικά περισσότερο είναι

$$Z[J] = Z_0^{-1} \int \mathcal{D}x(t) e^{i\int dt (\mathcal{L} + J(t)x(t))} \quad (1.190)$$

(το Z_0^{-1} είναι ο απαιτούμενος συντελεστής ώστε $Z[0] = 1$ και για να ορίζεται η έκφραση η Λαγκρανζιανή \mathcal{L} πρέπει να 'χει ένα μικρό φανταστικό κομμάτι)

Πλέον μεταβαίνουμε στη θεωρία πεδίων. Εδώ το νόημα του ολοκληρώματος διαδρομών είναι, κατ' αναλογία με το ότι παίρναμε όλες τις δυνατές διαδρομές για το κβαντικό σωματίδιο, πως παίρνουμε όλες τις δυνατές διατάξεις του πεδίου στο χωροχρόνο. Πάλι, το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί ένα πλάτος για κάθε μία τέτοια διάταξη στο generating functional και η τελική τιμή του ολοκληρώματος προκύπτει από την άθροιση αυτή στο όριο του συνεχούς.

Απ' την κβαντική μηχανική οι σημαντικές σχέσεις ήταν οι (1.188) και (1.190) καθώς δίνουν τις συναρτήσεις συσχέτισης που χρειάζονται για τον πίνακα S. Με παρόμοιες αποδεικτικές διαδικασίες με αυτές στην κβαντική μηχανική μπορούμε λοιπόν να παράγουμε τις σχέσεις για το συναρτησοειδές

$$Z[J] = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\varphi(x) e^{i[S(\varphi) + \int d^4x J(x)\cdot\varphi(x)]} \quad (1.191)$$

το οποίο παράγει τη συνάρτηση συσχέτισης

$$\begin{aligned} \langle \Omega|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n))|\Omega\rangle &= \frac{\delta^n Z[J]}{\delta(iJ(x_1))\delta(iJ(x_2)) \dots \delta(iJ(x_n))} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\varphi(x) \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) e^{iS(\varphi)} \end{aligned} \quad (1.192)$$

Όπως και στην περίπτωση της κβαντικής μηχανικής, όλες οι σχέσεις και οι αποδείξεις αυτών υπάρχουν αναλυτικά σε οποιαδήποτε βιβλιογραφία κοιτάξει κανείς επί της κβαντικής θεωρίας πεδίου για αυτά.

Αξίζει να σχολιάσουμε τις σταθερές που προκύπτουν στα ολοκληρώματα διαδρομών όταν εκτελείται το όριο που πάει στο συνεχές. Αυτές κανονικά θα έκαναν την έκφραση να αποκλίνει μιας και η σταθερά μπροστά θα γινόταν άπειρη στο όριο. Καθώς όμως οι εκφράσεις που στην κβαντική θεωρία πεδίου μας ενδιαφέρουν είναι λόγοι πλατών καταλήγουν πάντα να διαγράφονται οι σταθερές πριν παρθεί το όριο και άρα δεν προκαλούν πρόβλημα.

Μένουν να σημειωθούν δύο πράγματα ακόμη για αυτήν την τελείως συνοπτική παρουσίαση των απαραίτητων εργαλείων για τη συνέχεια όσον αφορά τα ολοκληρώματα διαδρομών στην κβαντική θεωρία πεδίου. Το πρώτο είναι πως, φυσικά, η ανάλυση που κάναμε σε διαταρακτικό επίπεδο συμφωνεί με τα ολοκληρώματα διαδρομών και μάλιστα μπορεί να αναπαραχθεί σε αυτά. Για μικρό διαταρακτικό όρο αλληλεπίδρασης S_{int} προκύπτει

$$Z[J] = \frac{1}{Z[0]} e^{iS_{int}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)} e^{\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y (iJ(y))(i\Delta_F(y-x))(iJ(x))} \quad (1.193)$$

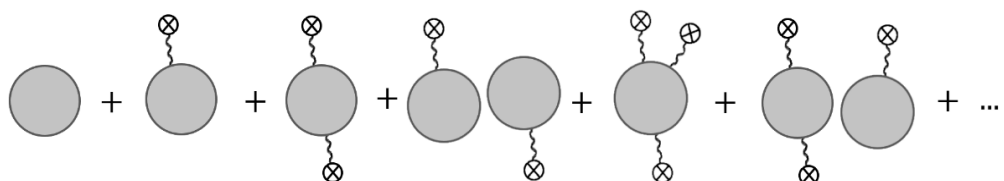
και απ' αυτό προκύπτουν πάλι οι κανόνες Feynman κλπ.

Το άλλο σημείο που αξίζει μνεία είναι τα συνεκτικά διαγράμματα. Λόγω της σχέσης (1.192) η $Z[J]$ μπορεί να γραφεί ως σειρά

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n (iJ(x_1)) \dots (iJ(x_n)) G(x_1, \dots, x_n) \quad (1.194)$$

όπου $G(x_1, \dots, x_n)$ η συνάρτηση συσχέτισης n-σημείων. Καθώς η $Z[J]$ είναι λοιπόν το άθροισμα όλων των πλατών (με κατάλληλους συντελεστές)

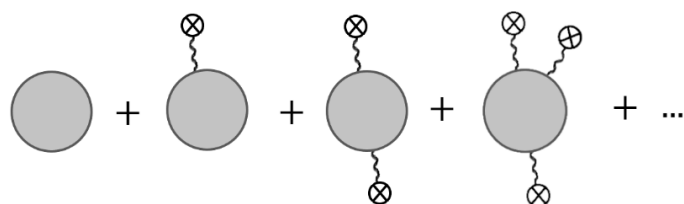
$$Z[J] =$$



$$+ \dots \quad (1.195)$$

ενώ εμείς μπορούμε να ορίσουμε generating functional $W[J]$ που να δίνει μόνο συνεκτικά διαγράμματα, που είναι αυτά που ενδιαφέρουν σε μια διαδικασία αλληλεπίδρασης αφού αν κομμάτια της αλληλεπίδρασης γίνονταν αποκομμένα το ένα από το άλλο εν παραλλήλω δεν θα μας ενδιέφερε το ενδεχόμενο,

$$W[J] =$$



$$+ \dots \quad (1.196)$$

άρα η απόδειξη για το πως συνδέονται είναι διαισθητική σχεδόν αφού τα διαγράμματα του $Z[J]$ προκύπτουν με πολλαπλασιασμό των διαγραμμάτων του $W[J]$ με όλους τους συνδιασμούς, οπότε

$$Z[J] = e^{iW[J]} \Leftrightarrow W[J] = -i \ln Z[J] \quad (1.197)$$

2. Επανακανονικοποίηση

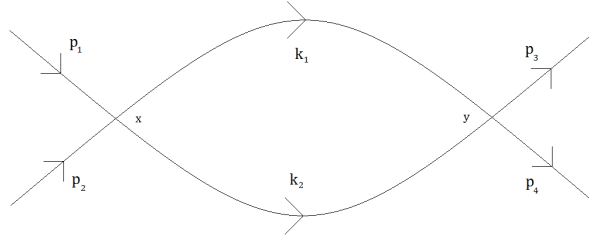
2.1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισάγαμε όλες τις βασικές έννοιες της QED καθώς και τα αντίστοιχα υπολογιστικά εργαλεία αυτής. Το σημείο κλειδί σε αυτά είναι πως καταφέραμε να αντιστοιχίσουμε πλάτη πιθανότητας στα διάφορα πιθανά ενδεχόμενα που εκφράζονται μέσω των διαγραμμάτων Feynman. Η ανάλυσή μας σε αυτό το σημείο θα ήταν πλήρης και θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε σε εφαρμογές της QED (και συγκεκριμένα σε αυτήν που μας ενδιαφέρει) αλλά κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές: όποιος επιχειρήσει έναν υπολογισμό έστω και μία τάξη μεγέθους πιο πέρα απ' την κυρίαρχη / μηδενική / "tree level" προσκρούει σε απειρίες. Τα εν λόγω διαγράμματα πρώτης τάξης και πάνω (ή αλλιώς "loop diagrams") προβλέπουν εν γένει πλάτη πιθανότητας με τιμή άπειρο.

Τα αποτελέσματα αυτά μοιάζει να στερούν από την QED την προβλεπτική της ικανότητα και να ακυρώνουν την ίδια τη θεωρία. Μια οικογένεια όμως από μεθόδους με το κοινό όνομα "Επανακανονικοποίηση" έρχεται στο γενικότερο κλάδο της QFT για να "γιατρέψει" όποιες θεωρίες πάσχουν από τέτοιες απειρίες (και όσες θεωρίες πράγματι γίνεται να επανακανονικοποιηθούν ονομάζονται γι' αυτό το λόγο "επανακανονικοποιήσιμες"). Τέτοιες επεμβάσεις στο οικοδόμημα μιας κάποιας κβαντικής θεωρίας πεδίου, όπως οι χειρισμοί που θα δούμε παρακάτω, έμοιαζαν σε πολύ κόσμο ad hoc και ήταν ο λόγος που για πολύ καιρό η QFT αντιμετωπιζόταν με καχυποψία απ' την επιστημονική κοινότητα. Όμως η ανάπτυξη της μεθόδου και η διατύπωσή αυτής με μαθηματική αυστηρότητα στα πλαίσια της "ομάδας επανακανονικοποίησης" (που ξεφεύγει απ' τα πλαίσια της εργασίας αυτής) επιβεβαίωσαν την ορθότητα της μεθόδου και αποκατέστησαν την προβλεπτική ικανότητα των επανακανονικοποιήσιμων θεωριών όπως η QED.

2.2. Η προέλευση της απειρίας

Για να καταλάβουμε τη μέθοδο της επανακανονικοποίησης ας ξεκινήσουμε ψάχνοντας την προέλευση του άπειρου στα μεμονομένα πλάτη κάθε διαγράμματος. Εκτελώντας έναν οποιονδήποτε υπολογισμό διαγράμματος που περιέχει βρόγχο γίνεται φανερό πως λόγω της κβαντικής φύσης των πεδίων η τετραορμή των ενδιάμεσων σωματιδίων μεταξύ αρχικών και τελικών είναι ελεύθερη να κυμανθεί στο πεδίο όλων των δυνατών τιμών αρκεί η διατήρηση της τετραορμής να γίνεται σεβαστή σε κάθε κόμβο. Αφού λάβουμε υπόψη τη διατήρηση της τετραορμής καταλήγουμε με μια σειρά από ανεξάρτητες μεταβλητές τετραορμής, ελεύθερες να κινηθούν η καθεμία σε όλο το πεδίο τιμών τους. Για παράδειγμα, στη φ^4 θεωρία, απ' τις δύο ενδιάμεσες τετραορμές του παρακάτω διαγράμματος μία είναι ανεξάρτητη



$$= \dots = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.1)$$

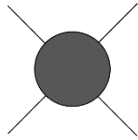
και το ολοκλήρωμα δίνει άπειρο (διαισθητικά: διότι για k μεγάλο παίρνουμε $\int \frac{d^4 k}{k^4}$ που αποκλίνει λογαριθμικά).

Μια φυσικώς πιο ρεαλιστική αντιμετώπιση της κατάστασης θα απαιτούσε από μέρους μας να συνειδητοποιήσουμε πως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάθε δυνατή τιμή της τετραορμής αδιακρίτως για τη θεωρία μας. Η QED, που μας ενδιαφέρει, πάνω από μια ενέργεια / ορμή “αποκοπής” Λ (cutoff) είναι λογικό πως δεν θα ισχύει ως φυσική θεωρία αμιγώς αλλά στα πλαίσια μιας ευρύτερης θεωρίας (της ηλεκτρασθενούς για αρχή) καθώς αναμένουμε στα υψηλότερα ενεργειακά επίπεδα την ανάδυση νέων σωματιδίων και φαινομένων που θα συμβάλλουν στην εκάστοτε συνάρτηση συσχέτισης που μελετάμε και το αντίστοιχο πλάτος πιθανότητας. Η ενέργεια αποκοπής Λ “οριοθετεί” λοιπόν τα όρια της εκάστοτε θεωρίας μας και η πηγή των “ενοχλητικών” απειριών προέρχεται απ’ το γεγονός πως συνήθως το Λ αυτό είναι τόσο μεγάλο ώστε στη μελέτη μας έως τώρα να έχει παρθεί ως πρακτικώς άπειρο, μια υπόθεση που τώρα μας προκαλεί προβλήματα.

2.3. Η ιδέα της επανακανονικοποίησης

Προκειμένου να εισάγουμε την ιδέα της επανακανονικοποίησης θα παρουσιάσουμε την πιο απλή μέθοδο επανακανονικοποίησης: πρόκειται για τη μέθοδο που χρησιμοποιεί την ενέργεια αποκοπής Λ που εισάγαμε πριν.

Εισάγοντας λοιπόν την ενέργεια Λ στη θεωρία μας για να χαρακτηρίζει το εύρος ισχύος της μετατρέπουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν, που τώρα κυμαίνονται από μηδέν μέχρι Λ , σε πεπερασμένα. Το πρώτο αυτό κομμάτι της διαδικασίας είναι το κομμάτι της κανονικοποίησης (regularization). Μετά από αυτό ακολουθεί το κομμάτι της επανακανονικοποίησης (renormalization). Για αρχή η ιδέα μπορεί να περιγραφεί ως εξής: με την κανονικοποίηση καταφέραμε να εκφράσουμε τα πλάτη που μας ενδιαφέρουν με πεπερασμένες εκφράσεις που όμως εξαρτώνται επιπλέον τώρα από το Λ . Αυτήν την επιπλέον ποσότητα, που είναι πρακτικώς άπειρη, σπάνια μπορούμε να την υπολογίσουμε (χαρακτηριστική εξαίρεση, για του λόγου το αληθές, είναι η συχνότητα Debye στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης, που σηματοδοτεί τις διατομικές αποστάσεις) και περιπλέκει τους υπολογισμούς. Αν επιπλέον πάρουμε $\Lambda \rightarrow \infty$ καταλήγουμε πάλι στο $\mathcal{M} = \infty$. Έτσι, στη φ^4 θεωρία, συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα για μια συνάρτηση συσχέτισης 4 σημείων, με $m^2 \ll s$, θα είχαμε:



$$= -i\lambda + i (\text{Const})\lambda^2 \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{s}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{t}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{u}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (2.2)$$

(το παράδειγμα αυτό υπάρχει στην [7])

Έχουμε τη δυνατότητα -και αυτό θα επιχειρήσουμε- να εξαλείψουμε τη στριφνή ποσότητα Λ από τον υπολογισμό μας. Για να το πετύχουμε αυτό επικαλούμαστε μια ποσότητα (ή παραπάνω σε άλλες περιπτώσεις) που μπορούμε να μετρήσουμε στο εργαστήριο. Στο πάνω παράδειγμα ας ονομάσουμε το πλάτος που παίρνουμε για μια συγκεκριμένη σκέδαση με λ_p (δηλαδή physical, φυσικό), όπου συγκεκριμένη ενέργεια και γωνία σκέδασης αντιστοιχούν σε συγκεκριμένα s_0, t_0, u_0 , οπότε:

$$-i\lambda_p = -i\lambda + i (\text{Const})\lambda^2 \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{s_0}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (2.3)$$

Η τελευταία σχέση μάς δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε το αρχικό πλάτος με βάση μια ποσότητα γνωστή, το πειραματικό λ_p , αντί του Λ . Παρατηρείστε ακόμη πως το λ είναι και αυτό συνάρτηση του Λ , δηλαδή $\lambda(\Lambda)$, καθώς το λ οφείλει να αλλάζει έτσι όταν αλλάζει το Λ της θεωρίας ώστε τουλάχιστον η πρόβλεψη της θεωρίας για το πλάτος \mathcal{M} να παραμένει η ίδια, η σωστή. Επιλύοντας λοιπόν ως προς το $\lambda(\Lambda)$:

$$-i\lambda = -i\lambda_p - i (\text{Const}) \lambda_p^2 \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{s_0}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda_p^3) \quad (2.4)$$

καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\mathcal{M} = -i\lambda_p + i (\text{Const}) \lambda_p^2 \left[\ln\left(\frac{s_0}{s}\right) + \ln\left(\frac{t_0}{t}\right) + \ln\left(\frac{u_0}{u}\right) \right] + \mathcal{O}(\lambda_p^3) \quad (2.5)$$

Αυτό δηλαδή που επιτύχαμε είναι να παρακάμψουμε την άγνοιά μας της φυσικής ποσότητας Λ με το να πάρουμε πειραματικά δεδομένα που περιέχουν όση πληροφορία χρειαζόμαστε. Καθώς τα δεδομένα αυτά ενέχουν και αυτά εξάρτηση απ' το Λ μπορούμε πλέον να εκφράσουμε τις προβλέψεις της θεωρίας με βάση κάποιες σταθερές μετρήσιμες ποσότητες (π.χ. μια τέτοια στην QED θα είναι και η μάζα του ηλεκτρονίου). Έχοντας εξαλείψει το Λ απ' τους υπολογισμούς μας μπορούμε να πάρουμε $\Lambda \rightarrow \infty$ και να επανέλθουμε στην αρχική θεωρία μας με πεπερασμένα πλέον πλάτη, δηλαδή με αποκατεστημένη την προβλεπτική ικανότητα τής θεωρίας.

Γιατί όμως να το κάνουμε αυτό; Γιατί χρειάζεται το $\Lambda \rightarrow \infty$ απ' τη στιγμή που είπαμε πως αρκεί να είναι ένα πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο ποσό που οριοθετεί τη θεωρία μας; Διαβάζοντας τα παραπάνω μπορεί κανείς να σχηματίσει τη λανθασμένη εντύπωση πως η επανακανονικοποίηση στηρίζεται στην ιδέα της ενέργειας αποκοπής. Η επανακανονικοποίηση όμως είναι μια γενικότερη συλλογή μεθόδων που στηρίζεται στην εξής ιδέα που πλέον μπορούμε να αναλύσουμε με όσα είδαμε.

Κάθε φυσική θεωρία (το σκεπτικό όσων ακολουθούν προέρχεται απ' την [15]) ξεκινά από μια σειρά παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το πρόβλημα και περιγράφει πως οι παράμετροι αυτές οφείλουν να επεξεργαστούν για να δώσουν το αποτέλεσμα που προβλέπει η θεωρία. Δηλαδή:

$$x_1, x_2, \dots \xrightarrow{f} \mathcal{M} \quad (2.6)$$

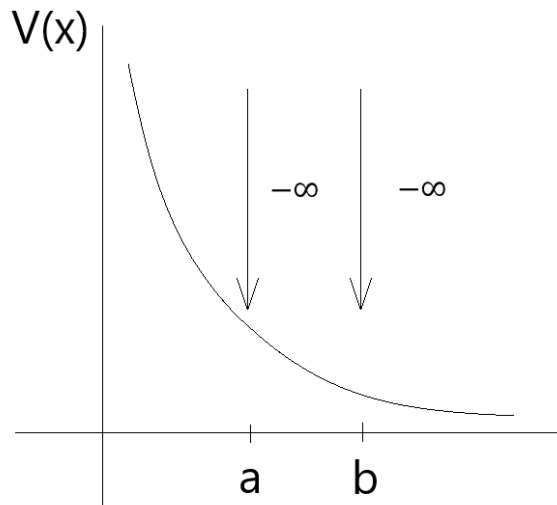
Αν κάποια απ' τις παραμέτρους αυτές είναι στριφνή (σκεφτείτε για παράδειγμα μια παράμετρο $x_i = k \cdot a$, όπου $a \in (0,1)$ όμως συντελεστή $k \gg 1$, ώστε να έχουμε απότομη εξάρτηση από την παράμετρο a), όπως ήταν η Δ παράμετρος παραπάνω που είναι πρακτικώς άπειρη αλλά όχι θεωρητικώς, τότε μπορεί τα αποτελέσματα να μην διαβάζονται, όπως το πλάτος της διαδικασίας (2.1) που προκύπτει άπειρο.

Όμως, αυτό δεν σημαίνει πως το τελικό αποτέλεσμα είναι ανύπαρκτο. Το ολικό πλάτος θα είναι ένας συνδιασμός (όπως θα δούμε και αργότερα σε πιο αναλυτικούς υπολογισμούς)

$$\bigotimes = +\infty - \infty + \dots \quad (2.7)$$

Απ' τα μαθηματικά η έκφραση αυτή είναι *αόριστη*, πράγμα που σημαίνει κυριολεκτικά πως αποτέλεσμα μπορεί να υπάρχει αλλά η πληροφορία που παρέχεται δεν είναι κατάλληλη για την εύρεση του αποτελέσματος (σκεφτείτε το $0 \cdot x = 0$ ή οποιοδήποτε αόριστο σύστημα πολλών μεταβλητών).

Το πάνω θυμίζει το πρόβλημα του άπειρου δυναμικού της κλασικής ηλεκτροδυναμικής όπου σε ένα δυναμικό Coulomb



$$V_1 = V(a) - V(0) = -\infty \quad (2.8)$$

$$V_2 = V(b) - V(0) = -\infty \quad (2.9)$$

όμως

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V(b) - V(a) \quad (2.10)$$

Δηλαδή διαφορά δυναμικού ορίζεται αλλά πρέπει να 'μαστε προσεκτικοί να μην πάρουμε σημείο αναφοράς το $V(0) = +\infty$ για τη μέτρηση του κάθε δυναμικού χωριστά.

Εν κατακλείδι, το ολικό πλάτος (και κάθε παρατηρήσιμη ποσότητα της θεωρίας μας) μπορεί να εκφράζεται με εκφράσεις όπως

$$\bigotimes = A + B \quad (2.11)$$

όπου

$$A = +\ln\Lambda \quad (2.12)$$

$$B = -\ln\Lambda + (\text{πεπερ.}) \quad (2.13)$$

όμως αν εμείς έχουμε μια στριφνή παράμετρο Λ ώστε να υπολογίζουμε μερικά πλάτη

$$A = +\infty \text{ και } B = -\infty \quad (2.14)$$

θα δυσκολευτούμε να υπολογίσουμε το πεπερασμένο κομμάτι που δίνει το ολικό πλάτος.

Σε αυτό το σημείο έρχεται η επανακανονικοποίηση: βρίσκοντας μια οικογένεια θεωριών που έχουν ως όριο τη ζητούμενη θεωρία (π.χ. οικογένεια θεωριών με $\Lambda = \text{πεπερ.}$ και η θεωρία μας για $\Lambda \rightarrow \infty$) (και μάλιστα το όριο αυτό δεν είναι υποχρεωτικά το $\Lambda \rightarrow \infty$ όπως θα δούμε. Μπορεί π.χ. να 'ναι μια αλλαγή στις διαστάσεις της θεωρίας) γράφουμε την πρόβλεψη που μας ενδιαφέρει (στα πάνω το ολικό πλάτος, βλ. (2.11)) οπότε η επανακανονικοποίηση βρίσκει βολικές παραμέτρους που κατασκευάζονται ώστε το αποτέλεσμα να μην εκτινάσσεται στο άπειρο με την εφαρμογή του ορίου. Δηλαδή

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots \xrightarrow{f} \mathcal{M}(\text{πεπερ.}) &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots \\ g_1, g_2, \dots \hookrightarrow \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots &= \pm\infty \\ \Downarrow \text{επανακανονικοποίηση} & \\ y_1, y_2, \dots \xrightarrow{f'} \mathcal{M}(\text{πεπερ.}) &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots \\ g'_1, g'_2, \dots \hookrightarrow \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots &= (\text{πεπερ.}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, πεπερασμένο \mathcal{M} όμως οι εκφράσεις που το δίνουν, λόγω πιο βολικών παραμέτρων, δεν εκτινάσσονται στο άπειρο και το ίδιο δεν γίνεται αόριστο.

2.4. Τυπικός βαθμός απόκλισης (*Superficial degree of divergence*)

Ως τυπικό βαθμό απόκλισης D θα ορίσουμε έναν αριθμό που θα μας χρησιμέψει ως ένα τυπικό κριτήριο για την εκτίμηση (και μόνο) του κατά πόσο αποκλίνει το ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί σε κάποιο διάγραμμα Feynman.

Θα αναλύσουμε την περίπτωση της QED θεωρίας που μας ενδιαφέρει οπότε κάθε κόμβος ενώνει έναν μποζονικό διαδότη (φωτονίου) με δύο φερμιονικούς διαδότες. Δεν θα προσδιορίσουμε παρ' όλα αυτά τον αριθμό των χωροχρονικών διαστάσεων. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για άλλες θεωρίες μπορεί με σχετικά άμεσο τρόπο να γενικεύσει την παρακάτω αποδεικτική διαδικασία.

Θα συμβολίζουμε με

- E_B τον αριθμό εξωτερικών διαδοτών μποζονικού χαρακτήρα
- E_F τον αριθμό εξωτερικών διαδοτών φερμιονικού χαρακτήρα
- I_B τον αριθμό εσωτερικών διαδοτών μποζονικού χαρακτήρα
- I_F τον αριθμό εσωτερικών διαδοτών φερμιονικού χαρακτήρα
- V τον αριθμό των κόμβων
- L τον αριθμό των βρόγχων (ο αριθμός των ελεύθερων / ανεξάρτητων τετραορμών εντός του διαγράμματος)
- n τον αριθμό των χωροχρονικών διαστάσεων

σε ένα κάποιο διάγραμμα Feynman. Τότε το ολοκλήρωμα που προκύπτει για το εν λόγω διάγραμμα αποκλίνει σε γενικές γραμμές αν οι μεταβλητές ολοκλήρωσης (οι ανεξάρτητες τετραορμές δηλαδή) του αριθμητή υπερτερούν αυτές του παρονομαστή. Έχουμε ήδη δει μια τέτοια εκτίμηση για τη θεωρία φ^4 στο υποκεφάλαιο 2.2. όπου είπαμε πως για μεγάλα k το διάγραμμα (2.1) είναι ανάλογο του $\int \frac{d^4k}{k^4}$ και μετά από μια περιστροφή Wick προκύπτει πως το ολοκλήρωμα αποκλίνει λογαριθμικά, δηλαδή οριακά. Με παρόμοιο σκεπτικό ορίζουμε λοιπόν τον τυπικό βαθμό απόκλισης να είναι:

$$D = n \cdot L - 2I_B - I_F \quad (2.16)$$

όπου ο θετικός όρος προέρχεται απ' τα διαφορικά ενώ ο αρνητικός όρος δικαιολογείται απ' τον αριθμό των ανεξάρτητων τετραορμών k που συνεισφέρει κάθε διαδότης. Έτσι, διαγράμματα με $D \geq 0$ αποκλίνουν τυπικώς (και για $D = 0$ οριακώς) ενώ αν $D < 0$ τότε συγκλίνουν.

Ομολογουμένως, ένα εργαλείο εκτίμησης της απόκλισης των διαγραμμάτων θα ήταν πρακτικώς άχρηστο εάν δεν γνωρίζουμε τα όρια ισχύος αυτού. Εκτός μίας εξαιρέσεως, το παραπάνω σκεπτικό σχετικά με το πότε το ολοκλήρωμα αποκλίνει είναι ορθό ή τουλάχιστον υπερεκτιμά την απόκλιση (πράγμα καλό στο πνεύμα της παροιμίας "better safe than sorry" / "φύλα τα ρούχα σου για να 'χεις τα μισά") όταν π.χ. συμμετρίες αίρουν κάποιες απειρίες. Η εξαίρεση την οποία οφείλει πάντα κανείς να προσέχει όταν χρησιμοποιεί τον τυπικό βαθμό απόκλισης αφορά διαγράμματα με $D < 0$ που όμως περιέχουν ένα αποκλίνον υποδιάγραμμα, κάτι που λοιπόν δεν αντανακλάται στο ολικό D .

Προκειμένου να κάνουμε μια ανάλυση όλων των διαγραμμάτων μιας θεωρίας, ας προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε τον τύπο (2.16) ώστε να δίνει το D ως προς ανεξάρτητα ρυθμιζόμενες μεταβλητές κάτι που, θα δούμε, σημαίνει κατά προτίμηση (αλλά όχι πάντα) μόνο τον αριθμό των άκρων ενός διαγράμματος.

Ο αριθμός των ανεξάρτητων τετραορμών μπορεί να εκτιμηθεί από έναν τύπο που ισχύει γενικότερα για κάθε QFT:

$$L = (I_B + I_F) - V + 1 \quad (2.17)$$

Η δικαιολόγηση αυτού του τύπου μπορεί να γίνει άμεσα με αναφορά στον τύπο του Euler που για επίπεδα σχήματα, δηλαδή γραφήματα, η χαρακτηριστική του Euler ισούται με 2:

$$V + F - E = 2 \quad (2.18)$$

(V = κόμβοι, F = επιφάνειες / έδρες, E = ακμές)

και στα διαγράμματα Feynman δεν μετράμε την εξωτερική "έδρα" οπότε το δεξί μέλος γίνεται 1. Μια τέτοια δικαιολόγηση μας επιβαρύνει όμως με την υποχρέωση να

γενικεύσουμε σε μη επίπεδα διαγράμματα. Αντ' αυτού καταφεύγουμε στην πιο απλή εξήγηση που παρέχεται σε βιβλία όπως τα [6] και [1]: αρκεί να μετρήσουμε τον αριθμό των εσωτερικών τετραορμών και τον αριθμό των περιορισμών επ' αυτών για να βρούμε τις ανεξάρτητες τετραορμές L (τους βρόγχους). Συγκεκριμένα θεωρούμε μία απροσδιόριστη τετραορμή για κάθε εσωτερική γραμμή (εδώ $I_B + I_F$). Οι V κόμβοι παρέχουν V περιορισμούς υπό τη μορφή διατήρησης της τετραορμής. Παρ' όλα αυτά κάποιος συνδιασμός των V περιορισμών είναι αυτός που δίνει τη διατήρηση της τετραορμής των εξωτερικών διαδοτών και γι' αυτό δεν επηρεάζει τις εσωτερικές τετραορμές. Ως εκ τούτου οι εσωτερικές τετραορμές που δεν προσδιορίζονται από τους κόμβους είναι $(I_B + I_F) - (V - 1)$ στον αριθμό και αυτόν θεωρούμε τον αριθμό των βρόγχων του διαγράμματος.

Θα χρειαστούμε τέλος τους εξής τύπους που προκύπτουν από τη μορφή των κόμβων (συγκεκριμένα εδώ της QED):

$$E_B + 2I_B = V \quad (2.19)$$

$$E_F + 2I_F = 2V \quad (2.20)$$

Συνδιάζουμε τώρα όλους τους προηγούμενους τύπους: ξεκινάμε απ' τον ορισμό του D , αντικαθιστούμε το L και μετά εκφράζουμε τα I_B, I_F ως προς τους εξωτερικούς διαδοτές, καταλήγοντας στην έκφραση

$$D = n - \left(\frac{4-n}{2}\right)V - \left(\frac{n-1}{2}\right)E_F - \left(\frac{n-2}{2}\right)E_B \quad (2.21)$$

Αυτή είναι η έκφραση που επιδιώκαμε να κατασκευάσουμε: στην περίπτωση της τετραδιάστατης QED βλέπουμε πως έχουμε εξάρτηση μόνο από το πόσα φερμιονικής και πόσα μποζονικής φύσεως άκρα έχει το εκάστοτε διάγραμμα. Καθώς μάλιστα οι συντελεστές εντός των παρενθέσεων είναι θετικοί, δεν μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των άκρων πάνω από κάποιες τιμές χωρίς να γίνει συγκλίνον το διάγραμμα. Παρακάτω θα δούμε τι συνέπεια έχει αυτό για την τετραδιάστατη QED που μελετάμε.

Ας δούμε όμως πρώτα γενικά τι μας διδάσκει ο παραπάνω τύπος για τις διάφορες θεωρίες. Ας πάρουμε την QED σε n διαστάσεις όπως εδώ.

- Για $n = 4$ ο όρος εξάρτησης από τον αριθμό των κόμβων δεν υπάρχει και ήδη συμπεράναμε πως ο αριθμός των συναρτήσεων συσχέτισης που μπορούν να κατασκευαστούν και που θα αποκλίνουν είναι πεπερασμένος. Καθώς δεν γίνεται λόγος για εξάρτηση από τον αριθμό κόμβων, κάθε διάγραμμα οποιασδήποτε τάξης αποκλίνει τυπικώς σε αυτές. Θεωρίες με αυτά τα χαρακτηριστικά λέγονται **επανακανονικοποιήσιμες**.
- Αν τώρα $n < 4$, όχι μόνο είναι πεπερασμένος ο αριθμός των συναρτήσεων συσχέτισης αλλά και ο αριθμός των τυπικώς αποκλίνοντων διαγραμμάτων αυτών είναι πεπερασμένος καθώς ο συντελεστής του δεύτερου όρου είναι αρνητικός και άρα η τάξη του διαγράμματος δεν μπορεί να αυξηθεί πάνω από κάποιο V χωρίς το D να γίνει αρνητικό. Θεωρίες με πεπερασμένο αριθμό διαγραμμάτων και όχι απλά συναρτήσεων συσχέτισης (που είναι πιο αδύναμη συνθήκη) λέγονται **υπερ-επανακανονικοποιήσιμες**³.

³ Πείτε το αυτό γρήγορα...

- Τέλος, αν $n > 4$, έχουμε την εξής περιπλοκή που δεν είχαμε στην ανάλυση για $n = 4$: όσο και να αυξηθεί ο αριθμός των άκρων, λόγω του θετικού συντελεστή στο δεύτερο όρο θα υπάρξει κάποια τάξη με V επαρκώς μεγάλο ώστε να αποκλίνει. Όταν κάθε συνάρτηση συσχέτισης προκύπτει να αποκλίνει μιλάμε για μια **μη-επανακανονικοποιήσιμη** θεωρία.

Αναγνωρίζουμε το γεγονός πως άλλες θεωρίες θα είχαν άλλης μορφής κόμβους και άρα θα άλλαζαν οι τύποι (2.19-2.20) και κατά συνέπεια και ο τελικός (2.21). Πέραν λοιπόν από τις διαστάσεις του χωροχρόνου σημασία έχει και η μορφή της θεωρίας μέσω της μορφής των κόμβων αυτής, οι οποίοι λοιπόν είναι κρίσιμοι για την επανακανονικοποιεσιμότητα αυτής. Μπορεί κανείς να επαναλάβει την πάνω ανάλυση με διαστατικά επιχειρήματα για μια γενική μορφή θεωρίας και να βρει πως προκειμένου μια θεωρία να είναι επανακανονικοποιήσιμη οφείλουν οι κόμβοι που προβλέπει να έχουν συντελεστές με διαστάσεις μάζας μη αρνητικές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η βαρύτητα που είναι μη επανακανονικοποιήσιμη ακριβώς διότι ο συντελεστής του όρου αλληλεπίδρασης είναι αρνητικής διαστατικότητας.

Επιστρέφουμε τώρα στην τετραδιάστατη QED που επιχειρηματολογήσαμε πως είναι επανακανονικοποιήσιμη και άρα αρκεί να μελετήσουμε τις απειρίες σε πεπερασμένο αριθμό πλατών και να τις επανακανονικοποιήσουμε. Αν δεν γινόταν αυτό με πεπερασμένο αριθμό θα είμασταν υποχρεωμένοι κάθε φορά που θα κοιτούσαμε μία τάξη πιο πέρα να εισάγουμε νέες σταθερές που πρέπει να παρθούν από το πείραμα, περιορίζοντας σημαντικά την προβλεπτική ικανότητα αυτής. Συγκεκριμένα, δοκιμάζοντας μικρές τιμές για τα E_F και E_B εξαντλούμε γρήγορα τα ενδεχόμενα των αποκλίνοντων διαγραμμάτων της τετραδιάστατης QED, που μοιάζουν να είναι επτά στο σύνολο: απ' την (2.21) για $n = 4$ έχουμε

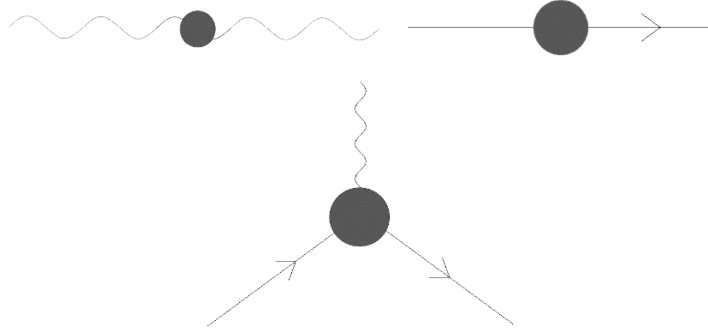
$$D = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B \quad (2.22)$$

οπότε (E_F άρτιο λόγω διατήρησης φορτίου)

#	E_F	E_B	D	Αποκλίνει;	Σχόλιο
1	0	0	4	Ναι	Ενέργεια κενού, οπότε δεν μας απασχολεί σε πρώτη φάση που αποκλίνει.
2	0	1	3	Όχι	Μηδενίζεται, λόγω C συμμετρίας.
3	0	2	2	Ναι	
4	0	3	1	Όχι	Μηδενίζεται, λόγω C συμμετρίας.
5	0	4	0	Όχι	Πεπερασμένο. Θα ξαναδούμε το διάγραμμα αυτό όταν μιλήσουμε για μη γραμμικά φαινόμενα στην QED.
6	2	0	1	Ναι	
7	2	1	0	Ναι	

Τα τρία διαγράμματα λοιπόν που θα μας ενδιαφέρουν είναι

- ο διαδότης του φωτονίου
- ο διαδότης του φερμιονίου
- το διάγραμμα κόμβου



Αυτά αποκλίνουν και επομένως οφείλουμε να τα επανακανονικοποιήσουμε με τη βοήθεια κάποιου πεπερασμένου αριθμού από σταθερές, όπως και θα γίνει στο επόμενο υποκεφάλαιο.

2.5. Επανακανονικοποίηση της QED⁴

Έχοντας αναπτύξει εννοιολογικά την ιδέα της επανακανονικοποίησης ας δούμε τώρα πως αυτή εφαρμόζεται στην πράξη στην περίπτωση της QED.

2.5.1. Εξαγωγή των όρων εξουδετέρωσης (counter-terms)

Η QED περιγράφεται όπως έχουμε ήδη αναλύσει στο (1.74) απ' την παρακάτω Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi_0 - \frac{1}{4} F^{0\mu\nu} F_{0\mu\nu} - q_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu} \quad (2.23)$$

Όλα τα πεδία καθώς και μάζες (μία εδώ) και σταθερές σύζευξης (επίσης μία) σημειώνονται με έναν δείκτη μηδέν για να δηλώσουν τις τιμές πριν την επανακανονικοποίηση.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον καθιερωμένο πλέον σε πολλά συγγράματα συμβολισμό για τους επανακανονικοποιημένους όρους της QED Λαγκρανζιανής και ας μην βγάξει ιδιαίτερο νόημα η αρίθμηση των δεικτών.

$$\mathcal{L} = Z_2 \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi - Z_2' m \bar{\psi} \psi - Z_3 \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - Z_1 q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (2.24)$$

Οι συντελεστές αυτοί αντιστοιχούν λοιπόν σε κάποια αλλαγή στις τιμές των διάφορων μεγεθών που εμφανίζονται. Οι δύο επανακανονικοποιήσεις που φαίνονται άμεσα είναι αυτές των πεδίων, που από τον πρώτο και τρίτο όρο είναι

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2} \psi \quad (2.25)$$

⁴ Το παρόν υποκεφάλαιο ακολουθεί την παρουσίαση που έχει γίνει από τον W. Rerko [14] επί του θέματος ενώ παρόμοια πορεία ακολουθείται και από τις αναφορές [1] και [3].

$$A_{0\mu} = \sqrt{Z_3} A_\mu \quad (2.26)$$

Με λίγο περισσότερο κόπο προκύπτει και η επανακανονικοποίηση της μάζας του φερμιονίου απ' τον όρο μάζας. Συγκρίνοντας με την αρχική μορφή του όρου

$$m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 = Z'_2 m \bar{\psi} \psi \quad (2.27)$$

$$\stackrel{(2.25)}{\implies} m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 = \frac{Z'_2}{Z_2} m \bar{\psi}_0 \psi_0 \quad (2.28)$$

$$\implies m = \frac{Z_2}{Z'_2} m_0 \quad (2.29)$$

Τέλος, η επανακανονικοποίηση της σταθεράς σύζευξης

$$q_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu} = Z_1 q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (2.30)$$

$$\stackrel{(2.25-26)}{\implies} q_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu} = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} q \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu} \quad (2.31)$$

$$\implies q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0 \quad (2.32)$$

Η επανακανονικοποιημένη Λαγκρανζιανή (2.24) οφείλει να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασηματισμούς βαθμίδας. Οι μεσαίοι όροι το πληρούν αυτό αυτομάτως αλλά η συναλλοίωτη παράγωγος του συνδιασμού των ακραίων όρων προκύπτει να 'ναι

$$\begin{aligned} Z_2 \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi - Z_1 q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu = \\ Z_2 \bar{\psi} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{Z_1}{Z_2} i q A_\mu \right) \psi \end{aligned} \quad (2.33)$$

Προκειμένου να ισχύει η συμμετρία βαθμίδας οφείλει η συναλλοίωτη παράγωγος να έχει τη γνωστή μορφή (1.75) και άρα πρέπει να ισχύει

$$Z_1 = Z_2 \quad (2.34)$$

Θα δούμε πως αυτό πράγματι προκύπτει αυτόματα από την ανάλυση που έπεται.

Η μορφή (2.24) της Λαγκρανζιανής είναι τέτοια που επιτρέπει πλέον να τη σπάσουμε σε δύο τμήματα. Έχουμε:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{counter} \quad (2.35)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{ren} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{counter} = (Z_2 - 1) \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi - (Z'_2 - 1) m \bar{\psi} \psi - (Z_3 - 1) \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ - (Z_1 - 1) q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \end{aligned} \quad (2.37)$$

που γράφεται πιο μαζεμένα ως

$$\mathcal{L}_{counter} = \bar{\psi} (i\delta_2 \gamma^\mu \partial_\mu - \delta_m) \psi - \frac{1}{4} \delta_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \delta_1 q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (2.38)$$

με καινούργια σύμβολα τα

$$\delta_1 = Z_1 - 1 \quad (2.39)$$

$$\delta_2 = Z_2 - 1 \quad (2.40)$$

$$\delta_3 = Z_3 - 1 \quad (2.41)$$

$$\delta_m = m(Z'_2 - 1) \quad (2.42)$$

Το πρώτο είναι μια πραγματικά επανακανονικοποιημένη Λαγκρανζιανή, δηλαδή έχει την ίδια μορφή με την Λαγκρανζιανή της QED (1.74) που έχουμε δει αλλά για τα επανακανονικοποιημένα μεγέθη (πεδία, μάζες και σταθερές σύζευξης), οπότε καταλαβαίνει κανείς πως θα εμφανίζονται οι ίδιες απειρίες με αυτές που μας προβλημάτισαν στις διάφορες συναρτήσεις συσχέτισης. Όμως, αν οι απειρίες τις QED ήταν “πραγματικές”, δηλαδή θεωρητικής φύσης, θα εγκαταλείπαμε τη θεωρία προς αναζήτηση μιας άλλης. Επειδή απλά τα φυσικώς μετρούμενα αποτελέσματα βγαίνουν αόριστα στην μη επανακανονικοποιημένη μορφή της Λαγκρανζιανής ελπίζουμε πως άμα το σπάσιμο γίνει με έξυπνο τρόπο οι όροι του δεύτερου μέρους της Λαγκρανζιανής θα εξουδετερώσουν τις απειρίες της επανακανονικοποιημένης Λαγκρανζιανής, απαλλάσσοντάς μας από τα αόριστα αποτελέσματα που παίρναμε. Γι’ αυτό τους όρους του δεύτερου μέρους της Λαγκρανζιανής τους ονομάζουμε όρους εξουδετέρωσης (counter-terms). Προς το παρόν δεν έχουμε προσδιορίσει τους συντελεστές Z ή, ισοδύναμα, τους συντελεστές δ και συνεπώς προς το παρόν έχουμε γράψει ένα γενικό σπάσιμο.

Ας αναφέρουμε επιπλέον πως στα επόμενα ο όρος αλληλεπίδρασης της Χαμιλτονιανής θεωρείται ο απλός όρος αλληλεπίδρασης προσ αυξημένος με τους όρους εξουδετέρωσης, δηλαδή

$$H_{int} = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \mathcal{L}_{counter} \quad (2.43)$$

Προσέξτε πως αυτό σημαίνει πως όταν αναλύσουμε το εκθετικό (1.124) σε τάξεις η ύπαρξη κάθε όρου εξουδετέρωσης θα προσμετράται στην τάξη του διαγράμματος (όπου κρίνουμε την τάξη απ’ τα \hbar).

Οι επιπλέον όροι, οι όροι εξουδετέρωσης, θα δώσουν λοιπόν επιπλέον διαγράμματα Feynman που αν έχουν το ίδιο (λογαριθμικό, γραμμικό κ.λ.π.) και αντίθετο (με μείον) είδος απόκλισης στο άπειρο με κάποιο απ’ τα άλλα διαγράμματα θα μας απαλλάξουν από τις απειρίες αυτών. Βρίσκουμε συνεπώς πρώτα τα αντίστοιχα διαγράμματα των όρων αυτών σε τι εκφράσεις αντιστοιχούν με τον ίδιο τρόπο που βρέθηκαν τα διαγράμματα των συνηθών όρων.

Οι τρεις επιπλέον όροι δίνουν, ο πρώτος

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow \\
 & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \cdot i\mathcal{M} = \\
 & = \langle p', s' | T \{ i \int d^4x (\bar{\psi}(i\delta_2 \gamma^\mu \partial_\mu - \delta_m) \psi) \} | p, s \rangle \\
 & = i \int d^4x \langle 0 | \bar{u}^{s'}(p') e^{ip'x} (i\delta_2 \gamma^\mu \partial_\mu - \delta_m) u^s(p) e^{-ipx} | 0 \rangle \\
 & = i \int d^4x \langle 0 | \bar{u}^{s'}(p') e^{ip'x} (\delta_2 \gamma^\mu p_\mu - \delta_m) u^s(p) e^{-ipx} | 0 \rangle \\
 & = \bar{u}^{s'}(p') [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) i(\delta_2 \gamma^\mu p_\mu - \delta_m)] u^s(p) \\
 & \quad \Rightarrow \\
 & i\mathcal{M}_{amp} = i(\delta_2 \gamma^\mu p_\mu - \delta_m)
 \end{aligned} \quad (2.44)$$

(και για την περίπτωση του αντιφερμιονίου όμοιος υπολογισμός και ίδιο αποτέλεσμα για το πλάτος χωρίς άκρα)

ο δεύτερος



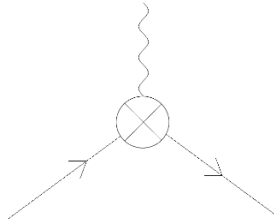
$$\begin{aligned}
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \cdot i\mathcal{M} = \\
& = \langle p', \lambda' | T \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \delta_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right\} | p, \lambda \rangle \\
& = -\frac{i}{4} \delta_3 \int d^4x \langle p', \lambda' | T \{ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \} | p, \lambda \rangle \\
& = -\frac{i}{4} \delta_3 \int d^4x T \{ (p', \lambda' | (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) | p, \lambda) \} \\
& = -\frac{i}{2} \delta_3 \int d^4x T \{ (p', \lambda' | (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) | p, \lambda) \} \\
& = -\frac{i}{2} \delta_3 \int d^4x T \{ (p', \lambda' | (-A^\nu \partial^\mu \partial_\mu A_\nu + A^\nu \partial_\nu \partial^\mu A_\mu) | p, \lambda) \} \\
& = -\frac{i}{2} \delta_3 \int d^4x T \{ (p', \lambda' | A_\mu (-\eta^{\mu\nu} \partial^2 + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu | p, \lambda) \} \\
& = -\frac{i}{2} 2\delta_3 \int d^4x \langle 0 | \varepsilon_\mu^*(p', \lambda') e^{ip'x} (-\eta^{\mu\nu} \partial^2 + \partial^\mu \partial^\nu) \varepsilon_\nu(p, \lambda) e^{-ipx} | 0 \rangle \\
& = -i\delta_3 \int d^4x \langle 0 | \varepsilon_\mu^*(p', \lambda') e^{ip'x} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \varepsilon_\nu(p, \lambda) e^{-ipx} | 0 \rangle \\
& = \varepsilon_\mu^*(p', \lambda') [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) (-i\delta_3) (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)] \varepsilon_\nu(p, \lambda)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

\Rightarrow

$$i\mathcal{M}_{amp} = -i\delta_3 (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)$$

(εκφράσαμε το $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ αλλιώς πετώντας τους επιφανειακούς όρους και όταν εκτελέσαμε τις συναιρέσεις βγήκε ένα 2 κάνοντας το συνδιαστικό παράγοντα μονάδα)

και τέλος ο τρίτος προκύπτει άμεσα αφού είναι ο ίδιος με τον απλό κόμβο της QED μόλις η σταθερά βγει εκτός



$$\begin{aligned}
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \cdot i\mathcal{M} = \\
& = \langle p', s' | T \{ i \int d^4x (-\delta_1 q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu) \} | p, s; q, \lambda \rangle \\
& = \delta_1 \langle p', s' | T \{ i \int d^4x (-q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu) \} | p, s; q, \lambda \rangle
\end{aligned} \tag{2.46}$$

\Rightarrow

$$i\mathcal{M}_{amp} = -ie\gamma^\mu \delta_1$$

Όπως είπαμε, οι συντελεστές Z και ισοδύναμα οι δ συντελεστές δεν έχουν προσδιοριστεί με τα μέχρι τώρα. Ο προσδιορισμός τους και άρα των όρων εξουδετέρωσης

θα γίνει μέσω των *συνθηκών επανακανονικοποίησης*. Θα απαιτήσουμε συνθήκες που θα έχουν ως αποτέλεσμα οι διαδότες του φωτονίου και ηλεκτρονίου να 'χουν υπόλοιπο μονάδα και η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου να 'ναι τα φυσικώς μετρούμενα (η εισαγωγή πειραματικών μετρήσεων που προτάθηκε στο κεφάλαιο 2.3). Καθώς δείξαμε πως η QED είναι μια επανακανονικοποιήσιμη θεωρία αναμένουμε πως με αυτόν τον πεπερασμένο αριθμό από συμβατές απαιτήσεις με τα πειραματικά δεδομένα η θεωρία μας να έχει προβλεπτική ισχύ σε ανώτερες τάξεις.

2.5.2. Ο φερμιονικός διαδότης

Η διόρθωση σε πρώτη τάξη του α στο φερμιονικό διαδότη αφορά έναν επιπλέον φωτονικό διαδότη να σχηματίζει βρόγχο και θα τη συμβολίζουμε με



$$\equiv -i\Sigma_2(p) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{i(\gamma^\kappa(p_\kappa + k_\kappa) + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \quad (2.47)$$

όπου το πάνω είναι προφανώς το πλάτος χωρίς άκρα. Ας σημειωθεί ιδιαίτέρως η ύπαρξη του όρου μάζας λ του φωτονίου που τίθεται εδώ μη μηδενική για να παρακαμφθεί η υπέρυθρη απόκλιση (infrared divergence), δηλαδή η απόκλιση στο ολοκλήρωμα για k κοντά στο μηδέν. Το τελικό αποτέλεσμα εκφράζεται λοιπόν συναρτήσει του λ και θα αποκλίνει όταν $\lambda \rightarrow 0$. Ο λόγος που κάτι τέτοιο δεν αποτελεί πρόβλημα είναι ο ίδιος που θα αναπτύξουμε στα παρακάτω και για τις υπεριώδεις αποκλίσεις: ότι δηλαδή η συγκεκριμένη διαδικασία του διαγράμματος δεν είναι η μοναδική που συνεισφέρει σε όποιο μετρήσιμο πλάτος θέλουμε να βρούμε. Συγκεκριμένα στο υπέρυθρο, σε όσες διαδικασίες θα αναγκαστούμε να εισάγουμε μια τέτοια μάζα φωτονίου λ θα υπάρχει και το αντίστοιχο διάγραμμα μιας διαδικασίας με ακτινοβολία πέδησης (Bremsstrahlung) που θα δίνει λοιπόν ίδια εξάρτηση από το λ με τέτοιο τρόπο ώστε η ολική εξάρτηση απ' αυτό να εξουδετερώνεται.

Για τον υπολογισμό του (2.47) λοιπόν θα γίνει χρήση μιας σειράς από μαθηματικά κόλπα, ξεκινώντας με τις *παραμέτρους Feynman* (Feynman parameters). Προκειμένου λοιπόν να συμπτίξουμε τους δύο παρονομαστές σε έναν ώστε να συμπληρωθεί μετά το τετράγωνο του k , κάτι που θα βολέψει στους υπολογισμούς, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(ax + b(1-x))^2} \quad (2.48)$$

ενώ ας αναφέρουμε για π.χ. τέσσερις μεταβλητές πως ισχύει

$$\frac{1}{abcd} = (3!) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{(ax + by + cz + d(1-x-y-z))^4} \quad (2.49)$$

και η γενίκευση σε πολλές μεταβλητές είναι πλέον φανερή. Εμείς πάντως θα περιοριστούμε εδώ σε δύο μεταβλητές, οπότε για

$$a = (p+k)^2 - m^2 + i\epsilon \quad (2.50)$$

$$b = k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon \quad (2.51)$$

το ζητούμενο πλάτος

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\gamma^\kappa (p_\kappa + k_\kappa) + m) \gamma_\mu}{(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(p) &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu (\gamma^\kappa (p_\kappa + k_\kappa) + m) \gamma_\mu \dots \\ &\dots \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon + x(p^2 + 2pk - m^2 + \lambda^2))^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

και συμπληρώνοντας το τετράγωνο

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\gamma^\kappa (p_\kappa + k_\kappa) + m) \gamma_\mu}{((k+xp)^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \quad (2.54)$$

όπου

$$\Delta \equiv -p^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2 (1-x) \quad (2.55)$$

Συνεχίζουμε απλοποιώντας την έκφραση. Η συναίρεση των γ πινάκων ισούται με

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\mu &= \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \eta_{\mu\nu} = \gamma^\mu (2\eta^{\kappa\nu} - \gamma^\nu \gamma^\kappa) \eta_{\mu\nu} \\ &= (2 - \gamma^\mu \gamma_\mu) \gamma^\kappa = (2 - n) \gamma^\kappa \end{aligned} \quad (2.56)$$

και το $\gamma^\mu \gamma_\mu = n$ είναι ο αριθμός των χωροχρονικών διαστάσεων. Καθώς θα χρειαστεί σε λίγο να γενικεύσουμε σε τυχαίο αριθμό διαστάσεων αποφεύγουμε προς το παρόν την αντικατάσταση αυτού. Οπότε

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2-n) \gamma^\kappa (p_\kappa + k_\kappa) + mn}{((k+xp)^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \quad (2.57)$$

Δεν συνεισφέρουν όμως όλοι οι όροι του αριθμητή στο ολοκλήρωμα καθώς περιττές συναρτήσεις που ολοκληρώνονται σε όλο το χώρο Minkowski μηδενίζονται.

Αντικαθιστώντας λοιπόν $l_\mu = k_\mu + xp_\mu$ και καθώς $d^4l = d^4k$ γίνεται

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(2-n) \gamma^\kappa (p_\kappa + l_\kappa - xp_\kappa) + mn}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \quad (2.58)$$

και η περιττή συνάρτηση είναι πλέον φανερή. Συνεπώς μένουμε με

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(2-n)(1-x) \gamma^\kappa p_\kappa + mn}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \quad (2.59)$$

Δεύτερο κόλπο που θα επιτρέψει απλοποιήσεις είναι να εκτελεστεί μια περιστροφή Wick ώστε το ολοκλήρωμα να πρέπει να γίνει σε Ευκλείδιο τετραδιάστατο χώρο. Ζητάμε δηλαδή

$$l_0 = il_4 \quad (2.60)$$

με τις εξής συνέπειες

$$l^2 = -l_E^2 \quad \text{και} \quad d^4l = id^4l_E \quad (2.61)$$

Το, Ευκλείδιο, πλέον ολοκλήρωμα

$$-i\Sigma_2(p) = -ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{(2-n)(1-x) \gamma^\kappa p_\kappa + mn}{(l_E^2 + \Delta - i\varepsilon)^2} \quad (2.62)$$

και το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ μπορούμε πλέον να το εκτελέσουμε αφού το απειροστό ήταν εκεί για να μας θυμίζει να μην περάσουμε πάνω από πόλους του μιγαδικού ολοκληρώματος της

μεταβλητής l_0 με την καμπύλη ολοκλήρωσης στα προηγούμενα, κάτι που δεν αποτελεί πρόβλημα.

$$-i\Sigma_2(p) = -ie^2 \int_0^1 dx [(2-n)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + mn] \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (2.63)$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι πλέον φανερά αποκλίνον και οφείλουμε να βρούμε τρόπο να κανονικοποιήσουμε την έκφραση προκειμένου να παρακάμψουμε με τη βοήθεια των όρων επανακανονικοποίησης την απειρία. Οι τρεις συνήθεις τρόποι κανονικοποίησης είναι

- Εισάγοντας ορμή αποκοπής: μια πεπερασμένη ποσότητα Λ που θα φράξει το ολοκλήρωμα από πάνω αντί για το άπειρο, οπότε ανακτάμε το ολοκλήρωμα με $\Lambda \rightarrow \infty$. Η μέθοδος αυτή δίνει αποτελέσματα μη συμβατά με την ταυτότητα Ward (βλ. [1] ή [3]) που για πλάτος διαδικασίας με άκρο φωτόνιο επί mass shell τετραορμής k^μ απαιτεί $k^\mu \mathcal{M}_\mu(k) = 0$ οπότε δεν είναι κατάλληλη μέθοδος για χρήση στα πλαίσια της QED.
- Με διαστατική κανονικοποίηση (dimensional regularization): θεωρούμε πως η διάσταση της θεωρίας (εδώ $n = 4$) είναι μιγαδικός αριθμός (!) οπότε το ολοκλήρωμα αν αποκλίνει είναι επειδή για τη συγκεκριμένη τιμή της διάστασης το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος παρουσιάζει πόλο. Η μέθοδος αυτή είναι συμβατή με την ταυτότητα Ward και είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί εδώ. Στο τέλος λοιπόν αρκεί να προσεγγίσει το γενικό αποτέλεσμα οριακά την τιμή $n \rightarrow 4$ για την ανάκτηση του επανακανονικοποιημένου πλάτους.
- Κανονικοποίηση Pauli-Villars: στη μέθοδο αυτή αφαιρείται απ' το αρχικό πλάτος ένας δεύτερος όρος όπου το φωτόνιο τώρα έχει μια μεγάλη πεπερασμένη μάζα Λ . Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε συμβολικά πως θα έχουμε τη διαφορά δύο ολοκληρωμάτων που περιέχουν

$$\int \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \int \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}$$

Η ανάκτηση της θεωρίας γίνεται για $\Lambda \rightarrow \infty$ όπου το δεύτερο διάγραμμα πάει στο μηδέν. Για μεγάλο αλλά πεπερασμένο Λ όμως μπορούμε να κάνουμε πράξεις και το δεύτερο διάγραμμα φροντίζει ώστε στις μεγάλες τιμές του k , όπου $k \gg \Lambda$, τα δύο διαγράμματα να αλληλοαναιρούνται. Έτσι, η απειρία του πρώτου διαγράμματος αφαιρείται απ' το δεύτερο και μένουμε με πεπερασμένη τιμή.

Όπως είπαμε, θα ακολουθήσουμε διαστατική κανονικοποίηση για τον υπολογισμό της (2.63), οπότε οφείλουμε να γράψουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα στη γενικότερη μορφή των n διαστάσεων:

$$I = \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (2.64)$$

που σπάει στα δύο ανεξάρτητα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{d\Omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty |l_E|^{n-1} d|l_E| \frac{1}{(|l_E|^2 + \Delta)^2} \quad (2.65)$$

Η επιφάνεια σφαίρας n διαστάσεων προκύπτει από

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ \pi^{n/2} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^n \\ &= \int d^n x e^{-\sum x_i^2} \\ &= \int d\Omega_n \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x^2} \\ &= \int d\Omega_n \frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} \end{aligned} \quad (2.67)$$

και καθώς

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t} \quad (2.68)$$

καταλήγουμε στην έκφραση

$$\pi^{n/2} = \int d\Omega_n \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (2.69)$$

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (2.70)$$

Έχοντας την έκφραση της επιφάνειας σφαίρας σε χώρο n διαστάσεων είναι δυνατό να βρεθεί ο αντίστοιχος όγκος με ολοκλήρωση (και λίγη διαστατική ανάλυση αν πρόκειται για μη μοναδιαία σφαίρα). Για την περίπτωση που μας ενδιαφέρει όμως μας αρκεί ο τύπος της επιφάνειας.

Μένει λοιπόν ο υπολογισμός του ακτινικού ολοκληρώματος. Σε αυτό το σημείο θα χρειαστεί να κάνουμε μία δεύτερη παράκαμψη. Η παράκαμψη αυτή θα γινόταν πιο σύντομη με τη χρήση της B συνάρτησης του Euler αλλά λιγότερο διαισθητική ή/και παιδαγωγική οπότε προτιμάμε τη μέθοδο που παραθέτουμε από την [14]. Η μέθοδος με τη B συνάρτηση υπάρχει στην [3].

Ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int \frac{d^n l_E}{(l_E^2 + \Delta)^\beta} \quad (2.71)$$

όπως είναι και το (2.64) ή ισοδύναμα (2.65) υπολογίζονται εύκολα εφόσον κανείς χρησιμοποιήσει τις παρακάτω δύο ταυτότητες.

Η πρώτη ταυτότητα μετατρέπει έναν παρονομαστή σε ολοκλήρωμα μέσω μιας βοηθητικής επιπλέον μεταβλητής. Θα έχει πρωταγωνιστικό ρόλο σε επόμενο κεφάλαιο όπου αποτελεί την αφετηρία της μεθόδου του ιδιοχρόνου Schwinger, όπου ο ιδιοχρόνος Schwinger είναι η βοηθητική μεταβλητή. Εδώ όμως η βοηθητική μεταβλητή θα είναι βραχύβια οπότε ας δηλώσουμε απλά την ταυτότητα:

$$\frac{1}{l_E^2 + \Delta} = \int_0^\infty da e^{-a(l_E^2 + \Delta)} \quad (2.72)$$

Προκειμένου να φτάσουμε σε μια έκφραση χωρίς το βάρος του εκθέτη στον παρονομαστή μπορούμε να μεταφέρουμε και αυτό το πρόβλημα για αργότερα μέσω πολλαπλών παραγωγίσεων:

$$\frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^\beta} = \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \frac{1}{l_E^2 + \Delta} \quad (2.73)$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν πρώτα την (2.73) και έπειτα την (2.72) στη (2.71) (δεν μας νοιάζει πως έχουν εκφραστεί τα διαφορικά στο αρχικό ολοκλήρωμα):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^n l_E}{(l_E^2 + \Delta)^\beta} = \int d\Omega_n \int_0^\infty |l_E|^{n-1} d|l_E| \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^\beta} \\ I &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty |l_E|^{n-1} d|l_E| \frac{1}{|l_E|^2 + \Delta} \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$I = \left[\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty |l_E|^{n-1} d|l_E| \int_0^\infty da e^{-a(|l_E|^2 + \Delta)}$$

όπου εντός αγκίστρου ο σφαιρικός όρος,

$$I = \left[\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty da \int_0^\infty |l_E|^{n-1} e^{-a(|l_E|^2 + \Delta)} d|l_E| \quad (2.75)$$

οπότε καθοδηγούμε να κατασκευάσουμε τον ορισμό της $\Gamma(x)$. Αντικαθιστούμε $t = a|l_E|^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty da \int_0^\infty \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-a\Delta} e^{-t} \frac{dt}{2a} \\ I &= \left[\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty da \frac{1}{2} a^{-\frac{n}{2}} e^{-a\Delta} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt \\ I &= \left[\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty da \frac{1}{2} a^{-\frac{n}{2}} e^{-a\Delta} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Για να μην “βαρύνει” η έκφραση, απλοποιούμε με όρους εντός αγκίστρου

$$\begin{aligned} I &= \pi^{\frac{n}{2}} \times \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \right)^{\beta-1} \int_0^\infty da a^{-\frac{n}{2}} e^{-a\Delta} \\ I &= \pi^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{(\beta-1)!} \int_0^\infty da a^{\beta-\frac{n}{2}-1} e^{-a\Delta} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$I = \pi^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{(\beta - 1)!} \int_0^\infty \frac{da'}{\Delta} \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{\beta - \frac{n}{2} - 1} e^{-a'}$$

$$I = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\beta - \frac{n}{2}\right)}{\Delta^{\beta - \frac{n}{2}} \Gamma(\beta)}$$

Έχοντας λοιπόν τώρα το απαραίτητο μαθηματικό οπλοστάσιο μπορούμε να κάνουμε τη διαστατική κανονικοποίηση του (2.63):

$$-i\Sigma_2(p) = -ie^2 \int_0^1 dx [(2-n)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + mn] \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (2.78)$$

$$\rightarrow -i\Sigma_2(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx [(2-n)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + mn] \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

Με έντονο μαύρο σημειώνονται τα σημεία όπου η διάσταση οφείλει να γενικευτεί. Τους συντελεστές εντός αγκίστρου προνοήσαμε από πριν να μην τους θέσουμε $n = 4$ όταν κάναμε της συναιρέσεις των γ πινάκων. Πέραν αυτού ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται και το γεγονός πως βγαίνοντας εκτός της ειδικής περίπτωσης των τεσσάρων χωροχρονικών διαστάσεων προκειμένου κανείς να κάνει διαστατική κανονικοποίηση οφείλει να προσέξει πως η σταθερά e δεν μένει αδιάστατη. Προκειμένου να αποκαταστήσουμε την ισότητα εισάγουμε μια κλίμακα μάζας μ η οποία λοιπόν έχει κατάλληλο εκθέτη. Η δικαιολόγηση αυτού προκύπτει από τη διάσταση του e σε $n - 1$ χωρικές διαστάσεις:

$$[F_{Coulomb}] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^{n-2}} \right] \quad (2.79)$$

$$\xrightarrow{\hbar=c=\epsilon_0=1}$$

$$[F_{Coulomb}] = \left[\frac{e^2}{r^{n-2}} \right] \Rightarrow M^2 = M^{n-2} [e]^2 \Rightarrow [e] = M^{\frac{4-n}{2}} \quad (2.80)$$

και ο εκθέτης του μ είναι πλέον φανερός.

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα το εξάγαμε για n διαστάσεις οπότε η (2.78) γίνεται

$$-i\Sigma_2(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx [(2-n)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + mn] \times \dots \quad (2.81)$$

$$\dots \times \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{\Delta^{2 - \frac{n}{2}} \Gamma(2)}$$

$$-i\Sigma_2(p) = -ie^2 \mu^{4-n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{[(2-n)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + mn]}{\Delta^{2 - \frac{n}{2}}} \quad (2.82)$$

και συνηθίζεται στη διαστατική κανονικοποίηση, καθώς ο πόλος που μας ενδιαφέρει είναι για n χωροχρονικές διαστάσεις να τείνουν στο 4, να εστιάζουμε γύρω από εκεί αντικαθιστώντας $\epsilon = 4 - n$ οπότε $\epsilon \rightarrow 0$. Τελικά έχουμε για την ακριβή μορφή, πριν

πάρομε προσεγγίσεις για ε μικρό (τελική μορφή για ένα βρόγχο, που είναι προσέγγιση βέβαια):

$$-i\Sigma_2(p) = -ie^2\mu^\varepsilon \frac{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{[(\varepsilon-2)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + m(4-\varepsilon)]}{\Delta^{\varepsilon/2}} \quad (2.83)$$

και το Δ απ' την (2.55).

Η κανονικοποίηση της ποσότητας $-i\Sigma_2(p)$ έχει σε αυτό το σημείο τελειώσει. Προκειμένου να την επανακανονικοποιήσουμε μελετάμε το είδος της απειρίας που υπάρχει σε αυτή. Η ποσότητα που τείνει στο άπειρο όταν $\varepsilon \rightarrow 0$ είναι η Γάμμα συνάρτηση, που στο μηδέν έχει πόλο. Για να βρούμε τι μορφής θα πρέπει να αναπτύξουμε γύρω από μικρά ε την ισότητα:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (2.84)$$

όπου $\gamma \simeq 0,5772$ η σταθερά Euler-Mascheroni. Οπότε

$$\begin{aligned} \Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Μαζί με την ανάπτυξη γύρω από το μηδέν της εκθετικής συνάρτησης

$$\begin{aligned} a^\varepsilon &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\ln a)^n \varepsilon^n, \quad a > 0 \text{ και } \varepsilon \ll 1 \\ a^\varepsilon &= 1 + (\ln a)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.86)$$

μπορούμε πλέον να αναπτύξουμε την (2.83) στην έκφραση

$$-i\Sigma_2(p) = \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx [(\varepsilon-2)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + m(4-\varepsilon)] \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(p) &= \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx [(\varepsilon-2)(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + m(4-\varepsilon)] \dots \\ &\dots \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma\right) \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$-i\Sigma_2(p) = \frac{-i\alpha}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\varepsilon} [4m - \gamma^\kappa p_\kappa] \\ + \varepsilon^0 \left[(1+\gamma)\gamma^\kappa p_\kappa - 2m(1+2\gamma) \right. \\ \left. + \int_0^1 dx [-2(1-x)\gamma^\kappa p_\kappa + 4m] \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right) \right] \right. \\ \left. + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \quad (2.89)$$

Ήδη από τη σχέση (2.85) είναι φανερό πως το πλάτος παρουσιάζει πόλο για $n = 4$ που πέφτει με το αντίστροφο του ε . Επιλογή μιας άλλης μεθόδου κανονικοποίησης, όπως π.χ. η Pauli-Villars δίνει άλλης φύσεως σύγκλιση, για το συγκεκριμένο παράδειγμα $\sim \ln(\Lambda)$ όπου υπενθυμίζουμε πως Λ η μάζα νοητού σωματιδίου που μετά τη στέλνουμε στο άπειρο. Συνεπώς η διαφορετική φύση της ποσότητας που καθορίζει την οικογένεια θεωριών που

κάνει την κανονικοποίηση συνεπάγεται διαφορετικές εκφράσεις για τον αποκλίνοντα όρο. Στα παρακάτω εμείς ας περιοριστούμε στη διαστατική κανονικοποίηση.

Ο όρος λοιπόν που οφείλει να αποκλιστεί είναι ο πρώτος στην τελευταία έκφραση (2.89). Είναι ο όρος που δίνει την απόκλιση. Θα φροντίσουμε αυτός να αναιρείται από τον όρο εξουδετέρωσης με το να θέσουμε κατάλληλα τις σταθερές που περιέχονται εντός του όρου εξουδετέρωσης. Όπως όμως είναι φανερό από την τελευταία έκφραση, οι επιλογές που έχουμε για όρους εξουδετέρωσης δεν είναι μόνο να επιλεγεί ο ακριβώς αντίθετος του αποκλίνοντος αλλά και κάθε άλλος όρος που βρίσκεται κατά μία πρόσθεση σταθεράς πλησίον αυτού. Δηλαδή, μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε μια σειρά από διαφορετικά σχήματα επανακανονικοποίησης (renormalization schemes) όπως λέγονται. Αυστηρώς, ο πλήρης καθορισμός των *συνθηκών επανακανονικοποίησης* (εκείνες οι σχέσεις που τα πλάτη της επανακανονικοποιημένης θεωρίας οφείλουν να πληρούν) είναι αυτός που ορίζει πλήρως την επανακανονικοποίηση. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά μερικά σχήματα ως ιδέες:

- σχήμα (μ): Όλοι οι όροι του διαγράμματος που περιέχει το αποκλίνον κομμάτι $1/\epsilon$ παίρνεται ως ο αποκλίνον όρος.
- σχήμα (MS): Η ιδέα της ελάχιστης αφαίρεσης (minimal subtraction) αναφέρεται στην αφαίρεση μόνο του κομματιού $1/\epsilon$ που πράγματι αποκλίνει.
- σχήμα (\overline{MS}): Παραλλαγή του πάνω (modified minimal subtraction - προσαρμοσμένη ελάχιστη αφαίρεση) όπου επιπρόσθετα αφαιρούνται και οι σταθερές που προκύπτουν από την προσέγγιση του εκθετικού και της Γάμμα συνάρτησης, δηλαδή ως αποκλίνον κομμάτι που αφαιρείται παίρνεται

$$\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi)$$

Ως τώρα η ανάλυσή μας ήταν σε πρώτη τάξη. Στη συνέχεια θα μιλήσουμε γενικά για τον καθορισμό της μορφής του διαδότη, θα βρούμε της σταθερές σε πρώτη τάξη και θα αναφέρουμε το λόγο για τον οποίο μας αρκεί η ανάλυση έως αυτό το σημείο αντί να πάμε και σε ανώτερες τάξεις.

Ο φερμιονικός διαδότης, που αναζητούμε, αλλά και κάθε άλλο είδος διαδότη μπορεί να καθοριστεί σε κλειστή μορφή από μια συγκεκριμένη κατηγορία διαγραμμάτων γνωστά ως 1PI (one particle irreducible). Ένα διάγραμμα δύο (ίδιων) άκρων θεωρείται 1PI όταν δεν είναι δυνατόν να χωριστεί σε δύο αποκομμένα διαγράμματα αν “κόψουμε” στη μέση κάποιον εσωτερικό διαδότη του διαγράμματος. Ο συγκεκριμένος ορισμός είναι χρήσιμος καθώς επιτρέπει την πρώτη ισότητα στην (2.90). Το διάγραμμα του 1PI στα κάτω συμβολίζει το άθροισμα κάθε δυνατού 1PI διαγράμματος. Έχουμε λοιπόν:

και ονομάζοντας τα αντίστοιχα πλάτη:

$$i\mathcal{M} = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} + \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} (-i\Sigma_f) \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} + \dots \quad (2.91)$$

$$i\mathcal{M} = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} \left[1 + \frac{\Sigma_f}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} + \left(\frac{\Sigma_f}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.92)$$

$$i\mathcal{M} = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\Sigma_f}{\gamma^\mu p_\mu - m_0}} \right] = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0 - \Sigma_f} \quad (2.93)$$

(Συντελεστή στο άθροισμα των 1PI πλατών Σ_f βάλουμε το $-i$ ώστε στο άθροισμα να φεύγει μαζί με το i του αντίστοιχου διαδότη στα δεξιά. Ο δείκτης f θα εξηγηθεί σε λίγο.)

Πλέον μπορούμε να επικεντρωθούμε σε εκείνα τα διαγράμματα που είναι 1PI για τη μελέτη μας. Πάμε πάλι σε ανάλυση πρώτης τάξης οπότε το $-i\Sigma_2(p)$ στην (2.47) είναι το μόνο 1PI πρώτης τάξης. Κάτι τέτοιο όμως είδαμε δεν είναι αποδεκτό καθώς περιέχει απειρία. Χρησιμοποιούμε τη Λαγκρανζιανή με τους όρους εξουδετέρωσης οπότε στα πρώτης τάξης 1PI διαγράμματα πρέπει να προσμετρήσουμε και ένα από αυτά που βρήκαμε απ' τους όρους εξουδετέρωσης ως διάγραμμα αλληλεπίδρασης 2 άκρων και βασιζόμαστε σε αυτό να αφαιρέσει την απειρία ώστε να μείνουμε με πεπερασμένο όρο (finite, εξού και ο δείκτης):

Προκειμένου να εκφράσουμε την απειρία εντός του $-i\Sigma_2$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξής σημαντική παρατήρηση: όταν γράφουμε το πλάτος κάποιου διαγράμματος καταλήγουμε εν γένει με το ολοκλήρωμα κάποιου γινομένου κλασμάτων. Αν παραγωγίσουμε ως προς κάποια εξωτερική ορμή ο τυπικός βαθμός απόκλισης του ολοκληρώματος θα μειώνεται μέχρι η νιοστή παράγωγος να δίνει πλέον συγκλίνοντα ολοκληρώματα. Δοκιμάστε κάποιο απλό παράδειγμα όπως το

$$\Gamma(p^2) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.95)$$

στη φ^4 θεωρία για να δείτε άμεσα πώς η παραγωγή προξενεί τη συγκλίνουσα μορφή της έκφρασης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σύγκλιση προκύπτει μετά την πρώτη κιόλας παραγωγή.

Καθώς αυτή η παρατήρηση ισχύει γενικότερα για κάθε διάγραμμα, θα την εφαρμόσουμε για να αναπτύξουμε το $\Sigma_2(p)$ γύρω από το m . Με m συμβολίζουμε την επανακανονικοποιημένη μάζα του φερμιονίου όπως αυτή προκύπτει ως ο (χαμηλότερος) πόλος της Källén-Lehmann αναπαράστασης

$$\frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0 - \Sigma_f} = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0} + (\text{πεπερασμένοι όροι για } p^2 = m^2) \quad (2.96)$$

Η ανάπτυξη λοιπόν γύρω από το m :

$$\Sigma_2(p) = \Sigma_2(\gamma^\mu p_\mu = m) + \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\mu p_\mu)} \right|_{\gamma^\mu p_\mu = m} (\gamma^\mu p_\mu - m) + \Sigma_f(p) \quad (2.97)$$

Επιπλέον όροι δεν θα χρειαστούν, καθόπως μας υποδεικνύει το αποκλίνον κομμάτι της (2.89). Επομένως γράφουμε τους δύο πρώτους και το υπόλοιπο το ονομάζουμε πεπερασμένο δηλαδή είναι το $\Sigma_f(p)$ από πριν. Μήπως σε ανώτερες τάξεις χρειάζονται περισσότερες σταθερές για την εξουδετέρωση των απειριών; Θα αναφερθούμε σε λίγο σε ανώτερες τάξεις και θα αναφέρουμε το λόγο για τον οποίο τέτοιο πρόβλημα δεν προκύπτει. Απ' την (2.97) τώρα προκύπτουν ως άμεση συνέπεια οι σχέσεις:

$$\Sigma_f(\gamma^\mu p_\mu = m) = 0 \quad (2.98)$$

$$\left. \frac{\partial \Sigma_f(p)}{\partial(\gamma^\mu p_\mu)} \right|_{\gamma^\mu p_\mu = m} = 0 \quad (2.99)$$

Απαιτούμε δηλαδή συγκεκριμένες ιδιότητες από την τελική πεπερασμένη ποσότητα! Αυτό είναι ο λόγος που οι συγκεκριμένες σχέσεις είναι σημαντικές καθώς είναι 2 απ' τις 4 σχέσεις επανακανονικοποίησης που δηλώσαμε πως πρέπει να καθοριστούν για μια συγκεκριμένη κανονικοποίηση.

Η (2.97) μπορεί να επιλυθεί ως προς το ζητούμενο πεπερασμένο κομμάτι

$$\Sigma_f(p) = \Sigma_2(p) - \Sigma_2(\gamma^\mu p_\mu = m) - \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\mu p_\mu)} \right|_{\gamma^\mu p_\mu = m} (\gamma^\mu p_\mu - m) \quad (2.100)$$

όποτε και η σύγκριση με την (2.94) είναι άμεση. (Προφανώς γίνεται ισοδύναμα να αντικαταστήσουμε τη (2.97) στη (2.94).) Έχουμε

$$\Sigma_2(\gamma^\mu p_\mu = m) + \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\mu p_\mu)} \right|_{\gamma^\mu p_\mu = m} (\gamma^\mu p_\mu - m) = \delta_2 \gamma^\mu p_\mu - \delta_m \quad (2.101)$$

δηλαδή

$$\delta_2 = \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\mu p_\mu)} \right|_{\gamma^\mu p_\mu = m} \quad (2.102)$$

και

$$\Sigma_2(\gamma^\mu p_\mu = m) - m \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\mu p_\mu)} \right|_{\gamma^\mu p_\mu = m} = -\delta_m \quad (2.103)$$

$$m\delta_2 - \delta_m = \Sigma_2(\gamma^\mu p_\mu = m) \quad (2.104)$$

Το σύστημα (2.102) και (2.104) δίνει τις τιμές των σταθερών δ και άρα τη μορφή του όρου εξουδετέρωσης που χρειαζόμαστε (ή όρων αν ειπωθούν ως δύο).

Αφήνοντας την παραπάνω ανάλυση κατά μέρους για όποιον θα ήθελε τις σχέσεις επανακανονικοποίησης, μπορούμε *εναλλακτικά* να χρησιμοποιήσουμε minimal subtraction και τη (2.94) *κατευθείαν* προκειμένου να βρούμε τον όρο εξουδετέρωσης. Λόγω της πραξολογίας που οδήγησε στη (2.89), δηλαδή

$$-i\Sigma_2(p) = \frac{-i\alpha}{4\pi} \frac{2}{\varepsilon} [4m - \gamma^\kappa p_\kappa] + \text{πεπερ.} \quad (2.105)$$

επιλέγουμε (καθώς πολλές επιλογές υπάρχουν, όπως εξηγήθηκε) στη (2.94) να είναι

$$\delta_2 = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.106)$$

$$\delta_m = -\frac{2m\alpha}{\pi} \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.107)$$

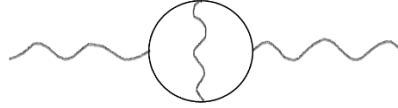
Μετά την εξουδετέρωση των απειριών παραμένει το πεπερασμένο κομμάτι, οπότε το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ μπορεί να παρθεί και άρα απ' την έκφραση (2.89) αρκούσε το ε^0 κομμάτι, που δίνει λοιπόν *σε πρώτη τάξη* το επανακανονικοποιημένο πλάτος

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[(1 + \gamma)\gamma^\kappa p_\kappa - 2m(1 + 2\gamma) + \int_0^1 dx [-2(1 - x)\gamma^\kappa p_\kappa + 4m] \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) \right] \quad (2.108)$$

Σημαντικό σχόλιο:

Βρήκαμε εδώ ποιοί πρέπει να 'ναι οι συντελεστές δ_2 και δ_m και ομοίως θα κάνουμε και για τα άλλα δύο διαγράμματα σημαντικά για την επανακανονικοποίηση της QED. Αρκούν όμως οι όροι εξουδετέρωσης που εισάγαμε μέχρι τώρα για να φύγουν όλες οι απειρίες σε όλες τις τάξεις; Μήπως επιπλοκές από διαγράμματα σε ανώτερες τάξεις σημαίνουν πως δεν μας αρκούν οι τέσσερις σταθερές δ που εισάγαμε για την QED; Η τελική απάντηση είναι πως για επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες, άρα και για την QED, δεν υπάρχουν τέτοιες ανησυχίες: οι όροι εξουδετέρωσης που εισάγονται με τον τρόπο που υποδείξαμε είναι επαρκείς για την επανακανονικοποίηση της θεωρίας. Παρακάτω αναλύουμε το γιατί.

Η ανησυχία μας πήγαζε από επιπλοκές σε ανώτερες τάξεις. Πράγματι έχουμε την ύπαρξη υποδιαγραμμάτων (subdiagrams), δηλαδή διαγραμμάτων που αποκλίνουν αλλά που δεν φαίνεται κάτι τέτοιο στο βαθμό τυπικής απόκλισης καθώς είναι κομμάτι ενός μεγαλύτερου διαγράμματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις τέτοιες αποκλίσεις διορθώνονται με τον διαισθητικά προφανή τρόπο, δηλαδή από τα αντίστοιχα διαγράμματα με το αποκλίνον κομμάτι να έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο όρο εξουδετέρωσης. Το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων θα δίνει πεπερασμένο πλάτος όπως θα αναμέναμε. Η πραγματικές επιπλοκές έρχονται από διαγράμματα με αποκλίνοντα κομμάτια που εμπλέκονται μεταξύ τους, πιο συγκεκριμένα μοιράζονται διαδότες. Τέτοια διαγράμματα λέγονται *εμφωλευμένες ή αλληλεπικαλυπτόμενες αποκλίσεις* (nested or overlapping divergences) και ως αναφέρουμε ως παράδειγμα το παρακάτω διάγραμμα.



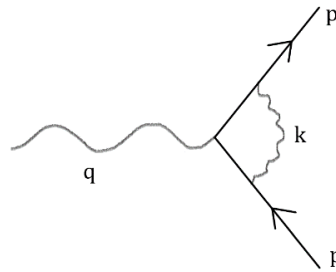
(2.109)

Το διάγραμμα αυτό διορθώνεται από δύο όρους εξουδετέρωσης που αντιστοιχούν στο διάγραμμα κόμβου, ένα για κάθε κόμβο που συνδέεται με έναν εξωτερικό διαδότη, αλλά και έναν γενικότερο όρο εξουδετέρωσης του φωτονικού διαδότη για όλο το διάγραμμα του παραδείγματος. Προφανώς δεν μας αρκεί η κατά περίπτωση επίλυση αλλά δίνει μια αίσθηση πως είναι εφικτή μια γενικότερη λύση.

Το θεώρημα BPHZ έρχεται στο σημείο αυτό, με μια εκτενή ανάλυση των εμφωλευμένων αποκλίσεων, να εγγυηθεί πως για κάθε επανακανονικοποιήσιμη θεωρία οι όροι εξουδετέρωσης που εισάγαμε όπως στο υποκεφάλαιο 2.5 επαρκούν για την πλήρη επανακανονικοποίηση. Εμείς λοιπόν θα δεχτούμε το αποτέλεσμα αυτό και δεν θα ασχοληθούμε με ανώτερες τάξεις για τη συνέχεια της ανάλυσής μας καθώς η απόδειξη αυτού είναι απαιτητική και θα παραπέμψουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία. Για λόγους πληρότητας στη βιβλιογραφία του παρόντος μπορεί κανείς να δει τις [1] και [3] και τις αναφορές εντός αυτών.

2.5.3. Η διόρθωση κόμβου

Οι κόμβοι της QED διορθώνονται σε πρώτη τάξη από τα διαγράμματα



(2.110)

που αντιστοιχούν στην έκφραση (χωρίς άκρα):

$$\begin{aligned}
 -ie\Lambda^\mu(p, p') &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \dots \\
 \dots \gamma^\nu \frac{i}{\gamma_\lambda(p'^\lambda + k^\lambda) - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\gamma_\rho(p'^\rho + k^\rho) - m + i\varepsilon} \gamma^\kappa \frac{-i\eta_{\nu\kappa}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{2.111}$$

όπου ο συμβολισμός $-ie\Lambda^\mu$ κατ' αναλογία με το $-ie\gamma^\mu$ της μηδενικής τάξης. Απλοποιώντας

$$\begin{aligned}
 \Lambda^\mu(p, p') &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \dots \\
 \dots \gamma^\nu \frac{1}{\gamma_\lambda(p'^\lambda + k^\lambda) - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma_\rho(p'^\rho + k^\rho) - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{2.112}$$

Η παραπάνω έκφραση αποκλίνει, όπως μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας τις πράξεις όπως και στο φερμιονικό διαδότη, μια διαδικασία που θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε. Αντ' αυτού θα επικαλεστούμε ένα κολπάκι για να συντομεύσουμε τις πράξεις. Πριν όμως ασ συνδέσουμε τα πάνω με τον όρο εξουδετέρωσης.

Όπως και με τον φερμιονικό διαδότη, προσθέτουμε το διάγραμμα του αντίστοιχου όρου εξουδετέρωσης προκειμένου να κατασκευάσουμε το πεπερασμένο πλάτος της διαδικασίας που ενδιαφέρει.

$$-ie\Lambda_f^\mu(p, p') = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \quad (2.113)$$

$$-ie\Lambda_f^\mu(p, p') = -ie\Lambda^\mu(p, p') - ie\gamma^\mu\delta_1 \quad (2.114)$$

Σε αυτό το σημείο ήρθε η ώρα να εισάγουμε την τρίτη συνθήκη επανακανονικοποίησης. Απαιτώντας

$$\Lambda_f^\mu(p = p') = 0 \quad (2.115)$$

προκύπτει απ' την (2.114)

$$\Lambda^\mu(p = p') = -\gamma^\mu\delta_1 \quad (2.116)$$

Όπως είπαμε μπορούμε να κάνουμε όλες τις πράξεις ή να επικαλεστούμε ένα κόλπο προς διευκόλυνση μας. Είχαμε δηλώσει πως για τη σταθερά δ_1 που προσπαθούμε εδώ να προσδιορίσουμε αναμένουμε να ισχύει

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow \delta_1 = \delta_2 \quad (2.117)$$

προκειμένου να ισχύει η συμμετρία βαθμίδας στην επανακανονικοποιημένη QED, πράγμα απαραίτητο. Καθώς από το φερμιονικό διαδότη ισχύει η (2.102), αυτό μεταφράζεται στην προσδοκία πως

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 \\ -\gamma^\mu\delta_1 &= -\gamma^\mu\delta_2 \\ \Lambda^\mu(p = p') &= -\gamma^\mu \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\nu p_\nu)} \right|_{\gamma^\nu p_\nu = m} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Άρα αντί να υπολογίσουμε εκ νέου τη $\Lambda^\mu(p, p')$ καθοδηγούμαστε απ' την παραπάνω προσδοκία μας να ισχύει η συμμετρία βαθμίδας στην επανακανονικοποιημένη θεωρία να δούμε με τι ισχύει η παράγωγος της ποσότητας $\Sigma_2(p)$ του προηγούμενου υποκεφαλαίου. Προς απλοποίηση της παραγωγής

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} = \frac{\partial(\gamma^\nu p_\nu)}{\partial p_\mu} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\sigma p_\sigma)} = \gamma^\mu \frac{\partial \Sigma_2}{\partial(\gamma^\sigma p_\sigma)} \quad (2.119)$$

οπότε αναμένουμε

$$\Lambda^\mu(p = p') = - \left. \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} \right|_{\gamma^\nu p_\nu = m} \quad (2.120)$$

Ελέγχουμε: καθώς η απειροστή διαφορά αντιστρόφου πίνακα δίνεται από

$$\begin{aligned} \delta(A^{-1}) &= (A + \delta A)^{-1} - A^{-1} \\ &= [A(1 + A^{-1}\delta A)]^{-1} - A^{-1} \\ &= (1 + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1} - A^{-1} \\ &= (1 - A^{-1}\delta A)A^{-1} - A^{-1} \\ &= -A^{-1}\delta A A^{-1} \end{aligned} \quad (2.121)$$

η εκτέλεση των παραγώγων αντίστροφων τελεστών γίνεται ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\gamma^\sigma p_\sigma - m} = - \frac{1}{\gamma^\sigma p_\sigma - m} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma^\rho p_\rho - m} \quad (2.122)$$

και συνεπώς, ο υπολογισμός που μας ενδιαφέρει, είναι

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial p^\sigma} = \frac{\partial}{\partial p^\sigma} \left\{ -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{i}{\gamma^\kappa (p_\kappa + k_\kappa) - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial p^\sigma} = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \dots \quad (2.124)$$

$$\dots \gamma^\nu \frac{1}{\gamma^\kappa (p_\kappa + k_\kappa) - m + i\varepsilon} \gamma_\sigma \frac{1}{\gamma^\lambda (p_\lambda + k_\lambda) - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}$$

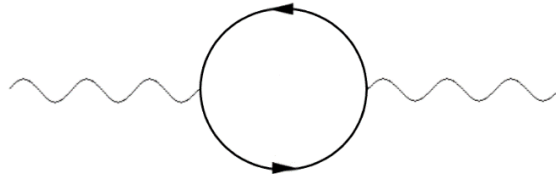
οπότε ανεβάζουμε το δείκτη σ στο δεξί μέλος για την παράγωγο ως προς τη συναλλοίωτη ορμή και συγκρίνοντας με την εξίσωση (2.112) συμπεραίνουμε πως η (2.120) επαληθεύεται. Συνεπώς, με το προηγούμενο σκεπτικό

$$\delta_1 = \delta_2 \quad (2.125)$$

και άρα η συναλλοίωτη παράγωγος παραμένει ίδια στην επανακανονικοποιημένη θεωρία όπως αυτή προβλέπεται από τη συμμετρία βαθμίδας. Φαίνεται λοιπόν γιατί επιλέχθηκε η συνθήκη (2.115) καθώς κοιτώντας για $p = p'$ μπορέσαμε να κάνουμε τη σύνδεση με το φερμιονικό διαδότη και έτσι μας διευκόλυνε στην απόδειξη της ισότητας (2.125).

2.5.4. Πόλωση κενού

Μένει να υπολογιστεί η διόρθωση στο διάγραμμα του φωτονικού διαδότη, ένα διάγραμμα γνωστό και ως η πόλωση του κενού. Έχουμε



$$= i\Pi^{\mu\nu}(k) \quad (2.126)$$

με k την ορμή των άκρων και το πλάτος έχει δείκτες όντας χωρίς τα φωτονικά άκρα. Οι μόνοι τανυστές Lorentz που μπορούν να έχουν αυτήν τη μορφή είναι $g^{\mu\nu}$ και $k^\mu k^\nu$ οπότε από την ταυτότητα Ward (βλ. [1] ή [3]) $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$ αναμένουμε το πλάτος αυτό να έχει τη μορφή

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \Pi(k^2) \quad (2.127)$$

Πράγματι, εκφράζοντας το πλάτος (2.126)

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma^\kappa q_\kappa - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\gamma^\lambda (q_\lambda + k_\lambda) - m + i\varepsilon} \quad (2.128)$$

μπορούμε να εκτελέσουμε πράξεις όπως και στην περίπτωση του φερμιονικού διαδότη και να καταλήξουμε στην έκφραση (2.127) όπου

$$\Pi(k^2) = \frac{-8e^2 \mu^{4-n}}{(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[k^2 x(x-1) + m^2]^{2-\frac{n}{2}}} \quad (2.129)$$

Η επανακανονικοποίηση γίνεται κατά τα γνωστά προσπαθώντας να αφαιρέσουμε την απειρία από την εν λόγω διαδικασία. Δηλαδή με το να κάνουμε

$$\Pi_f(k^2) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

$$\Pi_f(k^2) = \Pi(k^2) - \delta_3 \quad (2.130)$$

το οποίο γίνεται διότι το πλάτος αποκλίνει λογαριθμικά και άρα αρκεί ο πρώτος όρος της Taylor ανάπτυξης να αφαιρεθεί. Θέτουμε λοιπόν ως τελευταία συνθήκη επανακανονικοποίησης για κάποιο συγκεκριμένο $k^2 = -M^2$ την

$$\Pi_f(k^2 = -M^2) = 0 \quad (2.131)$$

$$\Rightarrow \delta_3 = \Pi(-M^2) \quad (2.132)$$

$$\Rightarrow \Pi_f(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(-M^2) \quad (2.133)$$

όπου το M δεν προσδιορίζεται κάπου αλλά είναι το σημείο γύρω από το οποίο αναπτύσσουμε και απ' τα προηγούμενα λοιπόν δίνει την κλίμακα στην οποία προσδιορίζεται η θεωρία μας. Έτσι έχουμε

$$Z_3 = 1 + \delta_3 = 1 + \Pi(-M^2) \quad (2.134)$$

και απ' την (2.129)

$$Z_3 = 1 + \frac{-8e^2\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[-M^2x(x-1) + m^2]^{2-\frac{n}{2}}} \quad (2.135)$$

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να βρούμε την εξάρτηση του επανακανονικοποιημένου συντελεστή σύζευξης από την ενεργειακή κλίμακα του προβλήματος, δηλαδή πώς "τρέχει" ο συντελεστής σύζευξης της QED, κάτι που εκφράζεται μέσω της λεγόμενης βήτα συνάρτησης της QED. Ξεκινάμε από τη σχέση (2.32)

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} q_0 \quad (2.136)$$

και καθώς δείξαμε πως $Z_1 = Z_2$

$$e = \sqrt{Z_3} e_0 \quad (2.137)$$

$$\alpha = Z_3 \alpha_0 \quad (2.138)$$

Ο ρυθμός αλλαγής αυτού με την κλίμακα είναι

$$\frac{d\alpha}{dM} = \alpha_0 \frac{dZ_3}{dM} = \frac{\alpha}{Z_3} \frac{dZ_3}{dM} \quad (2.139)$$

και καθώς $Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \Rightarrow Z_3 \approx 1$ προσεγγίζουμε την (2.139) με

$$\frac{d\alpha}{dM} = \alpha \frac{dZ_3}{dM} \quad (2.140)$$

$$\frac{d\alpha}{dM} = \frac{8\alpha^2\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}-1}} \left(-2 + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) 2M \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{[-M^2x(x-1) + m^2]^{3-\frac{n}{2}}} \quad (2.141)$$

Ας προσέξουμε το όριο όπου $n = 4 - \varepsilon$ με $\varepsilon \rightarrow 0$, οπότε

$$\left(-2 + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) = \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.142)$$

Αν επιπλέον προσεγγίσουμε με το να πάρουμε κλίμακες πολύ μεγαλύτερες του m , δηλαδή $m \ll M$, τότε για $n = 4$

$$\frac{d\alpha}{dM} = \frac{8\alpha^2}{4\pi} 2M \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{[-M^2x(x-1)]} \quad (2.143)$$

$$\frac{d\alpha}{dM} = \frac{4\alpha^2}{\pi M} \int_0^1 dx x(1-x) = \frac{2\alpha^2}{3\pi M} \quad (2.144)$$

Πλέον ορίζεται η βήτα συνάρτηση:

$$\beta(\alpha) \equiv M \frac{d\alpha}{dM} = \frac{2\alpha^2}{3\pi} \quad (2.145)$$

και με ολοκλήρωση της δ.ε. αυτής προκύπτει η μεταβολή του συντελεστή σύζευξης της QED:

$$\alpha(M^2) = \frac{\alpha(M_0^2)}{1 - \frac{\alpha(M_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{M_0^2}\right)} \quad (2.146)$$

3. Ενεργός Θεωρία Πεδίου

3.1. Εισαγωγή

Η πρώτες θεωρίες στη Φυσική ήταν αυτές που περιέγραφαν τον κόσμο στην κλίμακα αποστάσεων που λειτουργούσε ο άνθρωπος ή, στην περίπτωση της αστρονομίας, σε κλίμακες ορατές. Η εξαγωγή των νόμων του μικρόκοσμου και άρα των πιο θεμελιικών θεωριών έγινε στις αρχές του περασμένου αιώνα, από λίγες παρατηρήσεις επ' αυτού καθώς και απ' τη γνώση μας του τι πρέπει να προβλέπει η θεμελιώδης θεωρία όταν ειδωθούν οι συνέπειες αυτής στις μεγαλύτερες κλίμακες. Τελικός σκοπός είναι η εύρεση της θεωρίας στη βάση όλων των άλλων που να δικαιολογεί από πρώτες αρχές κάθε γνωστό φαινόμενο, συνήθως με το να αποδειχθεί απλά η σύνδεσή της με κάποια πιο ειδική θεωρία.

Συμπεραίνουμε πως υπάρχουν θεωρίες που σχετίζονται με μια σχέση πιο θεμελιώδους - λιγότερο θεμελιώδους. Οι τελευταίες παίρνουν το όνομα "ενεργές" θεωρίες καθώς είναι εκείνες οι θεωρίες που προκειμένου να κάνουν προβλέψεις αγνοούν έναν ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας του φυσικού προβλήματος, όπως τουλάχιστον αυτό θα περιγραφόταν από την πιο θεμελιώδη θεωρία. Η θερμοδυναμική είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα θεμελιώδους θεωρίας: αντί να ασχοληθεί με τους πρακτικά άπειρους βαθμούς ελευθερίας όπως αυτοί προκύπτουν απ' τις θέσεις και ορμές του καθενός ατόμου εντός κουτιού ο κλάδος της θερμοδυναμικής επιλέγει εκείνους τους βαθμούς ελευθερίας που κρίνονται απαραίτητοι για την επίλυση των ερωτημάτων που τίθενται στα πλαίσια αυτής, π.χ. πολλοί β.ε. συνοψίζονται στον έναν της μέσης κινητικής ενέργειας των ατόμων, δηλαδή της θερμοκρασίας. Η σύνδεση της θερμοδυναμικής με τον πιο θεμελιώδη μικρόκοσμο γίνεται μέσω του κλάδου της Στατιστικής Φυσικής.

Οι ενεργές θεωρίες παίζουν κεντρικό ρόλο λοιπόν στην Επιστήμη γενικότερα καθώς είναι χρήσιμες είτε από αναγκαιότητα είτε για διευκόλυνση. Έτσι η up-down περιγραφή στα πριν δείχνει πως ήταν *απαραίτητη* η περιγραφή πρώτα πιο προφανών μηχανισμών προτού κανείς έχει το απαραίτητο πλαίσιο (ή αλλιώς *foothold* / "πάτημα") για να προχωρήσει να μελετήσει τα θεμέλια. Απ' την άλλη, λιγότεροι β.ε. μπορεί να *διευκολύνουν* την επίλυση ενός προβλήματος που, ενώ η πιο θεμελιώδης θεωρία είναι γνωστή, το πρόβλημα στη θεμελιώδη αυτή μορφή μοιάζει αδύνατο ή πολύ δύσκολο.

Ειδικότερα τώρα στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου, πάλι έχουμε φανερές τις σχέσεις μεταξύ διάφορων κβαντικών θεωριών πεδίου όπου η μία είναι μια ενεργή περιγραφή της άλλης, οπότε και λέμε πως η πρώτη είναι μια *ενεργός θεωρία πεδίου* (effective field theory).

Ό,τι ειπώθηκε για τις ενεργές θεωρίες ισχύει λοιπόν και για τις EFT. Χαρακτηρίζονται από το ότι απλοποιούν την περιγραφή του προβλήματος παραλείποντας εκείνους τους β.ε. που δεν φαίνονται στα πλαίσια (ενεργειακά, κλπ) του προβλήματος. Συγκεκριμένα για τη δράση μιας ενεργού θεωρίας μπορούμε να πούμε πως:

Λέμε ενεργό δράση τη δράση εκείνη που δίνει τα ίδια αποτελέσματα με μία δεδομένη δράση, αλλά χρησιμοποιώντας διαφορετικούς β.ε. Με ίδια αποτελέσματα σε μια EFT εννοούμε ίδιες συναρτήσεις συσχέτισης και στοιχεία S πίνακα.

Οι διαφορές μεταξύ μιας ενεργού δράσης και της πλήρους δράσης είναι πως η πρώτη συνήθως έχει λιγότερους β.ε. , είναι μη επανακανονικοποιήσιμη και έχει περιορισμένο φάσμα ισχύος.

Ειδικότερα στα πλαίσια της περιγραφής των ολοκληρωμάτων διαδρομών (path integrals) η παράλειψη αυτή των β.ε. είναι εύκολο να περιγραφεί: λέμε πως οι β.ε. που δεν ενδιαφέρουν “ολοκληρώνονται” (the d.o.f. are integrated out) καθώς αρκεί κανείς να εκτελέσει την ολοκλήρωση ως προς τα αντίστοιχα πεδία (δηλαδή τους μη ενδιαφέροντες β.ε.) για να μείνει με μια έκφραση ολοκληρώματος διαδρομών που θα του δίνει τη δράση της ενεργού θεωρίας. Π.χ. σε μια σκέδαση φερμιονίων ψ που αλληλεπιδρούν μέσω μποζονικού πεδίου φ , κανείς που ενδιαφέρεται μόνο για τέτοιου είδους σκεδάσεις σε χαμηλές ενέργειες, οπότε τα δυνητικά φ δεν έχουν πολλά περιθώρια να κάνουν πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις, να μελετήσει μια θεωρία με όρο αλληλεπίδρασης κατευθείαν ανάμεσα στα διάφορα ψ . Η δράση που περιέχει μόνο ψ προκύπτει λοιπόν από το ολοκλήρωμα:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\Gamma[\psi, \bar{\psi}]} = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS[\varphi, \psi, \bar{\psi}]} \quad (3.1)$$

όπου $S[\varphi, \psi, \bar{\psi}]$ η δράση της πλήρους θεωρίας και $\Gamma[\psi, \bar{\psi}]$ της ενεργού. Στην περίπτωση που ορίζεται αντίστοιχη Λαγκρανζιανή (πυκνότητα) για την ενεργό δράση γίνεται λόγος για την ενεργό Λαγκρανζιανή της ενεργού θεωρίας \mathcal{L}_{eff} .

Είπαμε ακόμη πως οι EFT ως ενεργές θεωρίες θα προκύπτουν είτε από αναγκαιότητα είτε προς διευκόλυνση. Πράγματι η ενεργή περιγραφή των ασθενών αλληλεπιδράσεων από τη θεωρία 4-Fermi έγινε αρχικά από αναγκαιότητα καθώς δεν ήταν γνωστοί ακόμη τότε οι αντίστοιχοι φορείς αλληλεπίδρασης, ενώ πλέον η περιγραφή, αν και όχι θεμελιώδης, συνεχίζει να διευκολύνει σε υπολογισμούς που αν γίνουν στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου είναι αρκετά πιο δύσκολοι.

Θα δούμε λοιπόν στη συνέχεια παραδείγματα από ενεργές θεωρίες πεδίου προκειμένου να κατανοήσουμε τη χρησιμότητά τους και τα εργαλεία που χρειάζεται κανείς για την περιγραφή τους και συγκεκριμένα τη μέθοδο σύγκρισης συντελεστών (matching procedure). Η ενεργή θεωρία των Heisenberg και Euler ειδικότερα λειτούργησε ως πρότυπο για τις ενεργές θεωρίες πεδίου (κατά την [24]) και είναι ακριβώς αυτή η θεωρία που θα μελετήσουμε σε βάθος, ξεκινώντας από το υποκεφάλαιο 3.3 και συνεχίζοντας στο κύριο μέρος της εργασίας αυτής στο κεφάλαιο 4. Στο 3.3. θα δείξουμε πως, ήδη με τις γνώσεις που έχουμε, μπορούμε να προσδιορίσουμε με επιχειρήματα συμμετρίας τη μορφή αυτής αλλά και πως η μέθοδος σύγκρισης εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτήν.

3.2. Θεωρία 4-Fermi

Μια άλλη ενεργός θεωρία που μας δείχνει τη σημασία της μεθόδου των EFT και συνεπώς θα μελετήσουμε πριν την Euler-Heisenberg ως μια πρώτη ιδέα του πως λειτουργούν πρακτικά οι EFT είναι, όπως αναφέραμε, η 4-Fermi. Αναπτύχθηκε ιστορικά περίπου την ίδια εποχή με τη θεωρία των Euler-Heisenberg αν και έγινε αργότερα φανερό πως ήταν απλά το χαμηλοενεργειακό όριο μιας άλλης θεωρίας. Η θεωρία 4-Fermi προτάθηκε από τον Fermi για την περιγραφή της ασθενούς αλληλεπίδρασης μέσω κόμβου τεσσάρων φερμιονίων. Από πειραματικές μετρήσεις μάλιστα η σταθερά σύζευξης του κόμβου ήταν γνωστή ώστε όταν μετέπειτα διατυπώθηκε η πλήρης θεωρία που περιέγραφε το φαινόμενο και η οποία περιγράφεται από το Καθιερωμένο Πρότυπο μέσω της ενιαίας εικόνας των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων, η σύγκριση της διαδικασίας τεσσάρων φερμιονίων με την αντίστοιχη της πλήρους θεωρίας που διαμεσολαβείται από τα σωματίδια φορείς της (ηλεκτρ)ασθενούς αλληλεπίδρασης W^\pm και Z^0 να δίνει τη σταθερά σύζευξης ανάμεσα στους φορείς της αλληλεπίδρασης και τα φερμιόνια! Η ανάπτυξη λοιπόν μιας ενεργού κατανόησης (μιας φαινομενολογικής κατανόησης αν θέλετε) ήταν σημαντική για τη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων καθώς έθεσε τις βάσεις για την πλήρη κατανόηση αυτής και τις απαιτήσεις που η περιγραφή αυτής θα έπρεπε να πληρεί στο χαμηλοενεργειακό όριο, περιορίζοντας την τελική μορφή που η πλήρης θεωρία μπορούσε να έχει.

Η θεωρία 4-Fermi ξεκινά με την υπόθεση πως οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από κόμβο 4 φερμιονίων. Χαρακτηριστική τέτοια αλληλεπίδραση είναι η διάσπαση βήτα

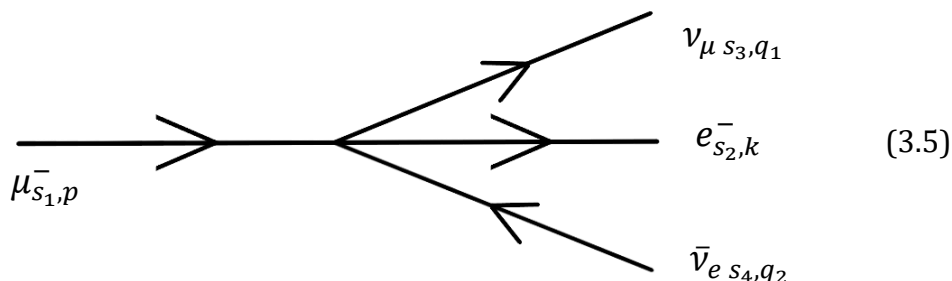
$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \text{ (διάσπαση } \beta^-) \quad (3.2)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \text{ (διάσπαση } \beta^+) \quad (3.3)$$

όπου η δεύτερη απαιτεί την παρουσία πυρήνα για να συμβεί λόγω της απαίτησης σε ενέργεια καθώς $m_n > m_p$. Άλλη ασθενής αλληλεπίδραση είναι η διάσπαση του μιονίου

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (3.4)$$

την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα για τη μελέτη της 4-Fermi. Έστω λοιπόν η διάσπαση (3.4) που περιγράφεται από ένα σχήμα της μορφής



Καθώς οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις αφορούν αριστερόστροφα σωματίδια και δεξιόστροφα αντισωματίδια το ρεύμα στο οποίο συνδέονται θα περιέχει τον κατάλληλο προβολικό τελεστή (ο οποίος δεν υπήρχε στην αρχική πρόταση του Fermi οπότε θα μελετήσουμε μια πιο κοντινή στην πλήρη θεωρία εκδοχή της ώστε να φανεί η σύνδεση

τους). Βάζοντας και μια σταθερά σύζευξης G_F ο όρος αλληλεπίδρασης που τις περιγράφει είναι

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_{\nu\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_\mu] [\bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu e}] + h.c. \quad (3.6)$$

Είτε με συναιρέσεις Wick είτε με παραγώγους συναρτησοειδών μπορεί κανείς να βρει πως η αλληλεπίδραση (3.6) σημαίνει μια συγκεκριμένη συνεισφορά από τους κόμβους σε διαγράμματα Feynman. Εμείς θα πάμε να δούμε με συναιρέσεις Wick τη διαδικασία (3.4), που πιο αναλυτικά γράφεται

$$\mu^-(p, s_1) \rightarrow e^-(k, s_2) + \nu_\mu(q_1, s_3) + \bar{\nu}_e(q_2, s_4) \quad (3.7)$$

Το πλάτος αυτής της διαδικασίας λοιπόν είναι (τάξεως G_F)

$$\begin{aligned} & \langle e^-(k, s_2) \nu_\mu(q_1, s_3) \bar{\nu}_e(q_2, s_4) | T \{ i \int d^4x \mathcal{L}_F(x) \} | \mu^-(p, s_1) \rangle = \\ & = i \int d^4x e^{-ix \cdot (p - k - q_1 - q_2)} \left(-\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) [\bar{u}_{\nu\mu}^{s_3}(q_1) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\mu^{s_1}(p)] \times \\ & \quad \times [\bar{u}_e^{s_2}(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\nu e}^{s_4}(q_2)] \\ & = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q_1 - q_2) \left(-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) [\bar{u}_{\nu\mu}^{s_3}(q_1) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\mu^{s_1}(p)] \times \\ & \quad \times [\bar{u}_e^{s_2}(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\nu e}^{s_4}(q_2)] \\ & \Rightarrow i\mathcal{M} = \left(-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) [\bar{u}_{\nu\mu}^{s_3}(q_1) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\mu^{s_1}(p)] [\bar{u}_e^{s_2}(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\nu e}^{s_4}(q_2)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

και απ' τον υπολογισμό αυτό (καθώς και ό,τι γνωρίζουμε από τους κανόνες Feynman για φερμιονικά άκρα) προκύπτει πως κάθε κόμβος διαγράμματος Feynman της θεωρίας Fermi αντιστοιχεί στην έκφραση

$$-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)]^{ab} [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)]^{cd} \quad (3.9)$$

όπου a, b, c, d οι σπινωριακοί δείκτες που αντιστοιχούν στο σπίνωρα με τον οποίο συζεύγονται. Από το αναλλοίωτο πλάτος μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό διάσπασης του μιονίου ή αντίστροφα, καθώς το πλάτος θα εξαρτάται από το πόσο ισχυρή είναι η σύζευξη G_F , με πειραματική μέτρηση του ρυθμού διάσπασης Γ να βρούμε πόση είναι η τιμή G_F της θεωρίας αυτής. Με τη βοήθεια της trace technology του παραρτήματος A υπολογίζουμε το

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64G_F^2 (q_1 \cdot p) (k \cdot q_2) \quad (3.10)$$

που χρειάζεται στον υπολογισμό του

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\mu} |\overline{\mathcal{M}}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q_1 - q_2) \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \frac{d^3\vec{q}_1}{(2\pi)^3 2q_1^0} \frac{d^3\vec{q}_2}{(2\pi)^3 2q_2^0} \quad (3.11)$$

ο οποίος καταλήγει να δίνει

$$\Gamma = \frac{m_\mu^5 G_F^2}{192\pi^3} \quad (3.12)$$

και η αντίστροφη έκφραση δίνει το μέσο χρόνο ζωής τ του μιονίου. Πειραματικές μετρήσεις αυτού του μέσου χρόνου ζωής (και της μάζας του μιονίου) δίνουν στην τιμή της σταθεράς σύζευξης την τιμή

$$G_F = 1,166 \times 10^{-5} (GeV)^{-2} \quad (3.13)$$

και οι διαστάσεις τέτοιες ώστε να συμφωνούν με το γεγονός πως η Λαγκρανζιανή πυκνότητα έχει διάσταση 4.

Εώς αυτό το σημείο είδαμε τη θεωρία 4-Fermi. Με την περαιτέρω κατανόηση των ασθενών αλληλεπιδράσεων και την τοποθέτησή τους σε ένα ενοποιημένο πλαίσιο με τον ηλεκτρομαγνητισμό, δηλαδή με την διατύπωση της ηλεκτρασθενούς θεωρίας που αποτελεί κομμάτι της διατύπωσης του Καθιερωμένου Προτύπου, φάνηκε πως η θεωρία του Fermi αποτελούσε το χαμηλοενεργειακό όριο της ηλεκτρασθενούς θεωρίας, που περιγράφει την ασθενή αλληλεπίδραση με τη βοήθεια των αντίστοιχων φορέων αλληλεπίδρασης W^\pm και Z^0 . Δηλαδή η θεωρία 4-Fermi ήταν μια ενεργή θεωρία, κάτι που φαίνεται από το γεγονός πως περιέγραφε τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις αγνοώντας τους βαριούς β.ε. που ήταν οι φορείς αλληλεπίδρασης και των οποίων η συμπεριφορά στο όριο των χαμηλών ενεργειών λοιπόν μπορούσε να περιγραφεί / συμπεριληφθεί εντός μιας σταθεράς, της σταθεράς σύζευξης. Στα παρακάτω θα δούμε λίγα στοιχεία από την πλήρη θεωρία ώστε να φανεί το γιατί σε χαμηλές ενέργειες ήταν επαρκής η 4-Fermi για την περιγραφή των ασθενών αλλά και πώς, συγκρίνοντας τις εκφράσεις για την πλέον απλή διαδικασία της διάσπασης του μιονίου για τις δύο θεωρίες, μπορούμε να αποκτήσουμε τη σταθερά σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων g .

Στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από μια Λαγκρανζιανή της οποίας ο όρος αλληλεπίδρασης του W μιοζονίου είναι

$$\mathcal{L}_W^{SM} = \frac{g}{2\sqrt{2}} [W_\alpha J^{\alpha+} + W_\alpha^\dagger J^\alpha] \quad (3.14)$$

όπου

$$J_\alpha = \sum_{l=e,\mu} \bar{\psi}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \quad (3.15)$$

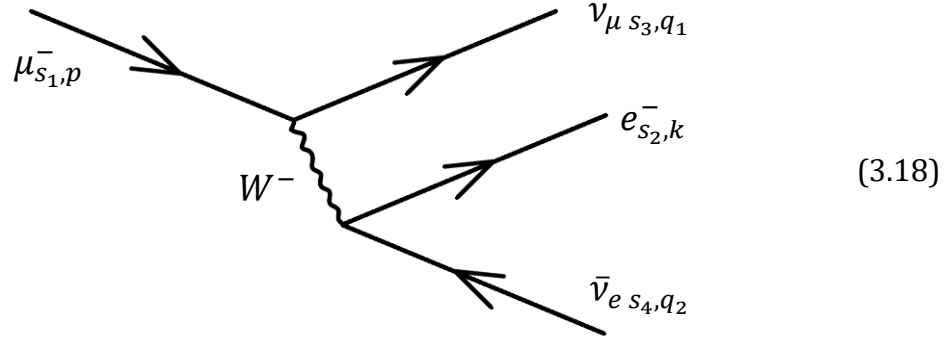
Οπότε κάθε κόμβος συμβάλλει στα διαγράμματα Feynman έναν παράγοντα

$$i \frac{g}{2\sqrt{2}} [\gamma^\mu (1 - \gamma_5)]^{ab} \quad (3.16)$$

ενώ κανείς μπορεί να βρει και τον διαδότη της θεωρίας να είναι

$$D_W^{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2} \right) \quad (3.17)$$

Η διαδικασία (3.7) λοιπόν γίνεται με τη “διαμεσολάβηση” ενός μιοζονίου W με κατάλληλο πρόσημο, δηλαδή W^- εδώ, ώστε να διατηρείται το φορτίο και έτσι η διαδικασία (τάξεως g^2) αντί για έναν κόμβο 4 φερμιονίων έχει δύο κόμβους 2 φερμιονίων και ενός μιοζονίου ο καθένας, όπως στο σχήμα (3.18).



Γνωρίζοντας τους κανόνες Feynman, μπορούμε από το σχήμα να υπολογίσουμε το πλάτος της διαδικασίας (3.7) όπως αυτό δίνεται από τη θεωρία με μποζόνιο:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_W &= \left(i \frac{g}{2\sqrt{2}}\right) \left[\bar{u}_{\nu_\mu}^{s_3}(q_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_\mu^{s_1}(p)\right] \times \\
&\times \left[\frac{-i}{q^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}\right)\right] \left(i \frac{g}{2\sqrt{2}}\right) \left[\bar{u}_e^{s_2}(k)\gamma_\nu(1-\gamma_5)v_{\nu_e}^{s_4}(q_2)\right] \\
&= \left(i \frac{g^2}{8m_W^2}\right) \left[\frac{m_W^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu}{q^2 - m_W^2 + i\varepsilon}\right] \times \\
&\times \left[\bar{u}_{\nu_\mu}^{s_3}(q_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_\mu^{s_1}(p)\right] \left[\bar{u}_e^{s_2}(k)\gamma_\nu(1-\gamma_5)v_{\nu_e}^{s_4}(q_2)\right]
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

όπου $q = p - q_1 = k + q_2$.

Έχοντας πλέον την έκφραση για το διαδότη μπορούμε να βρούμε τη συμπεριφορά της αλληλεπίδρασης στο χαμηλό ενεργειακό όριο. Αυτό διότι αναμένουμε το μποζόνιο W λόγω της μεγάλης μάζας του να υπερισχύει της μεταφερόμενης ορμής q στο διαδότη. Μια εκτίμηση της μεταφερόμενης ροής δείχνει

$$q^2 = (p - q_1)^2 \sim p^2 \sim m_\mu^2 = (0,106 \text{ GeV})^2 \tag{3.20}$$

ενώ

$$m_W^2 = (80.4 \text{ GeV})^2 \tag{3.21}$$

Άρα ο διαδότης (3.17) μπορεί, εξαιτίας του ότι

$$q^2 \ll m_W^2 \tag{3.22}$$

να προσεγγιστεί από

$$D_W^{\mu\nu}(q) \simeq \frac{ig^{\mu\nu}}{m_W^2} \tag{3.23}$$

οπότε και στο όριο των χαμηλών ενεργειών η αλληλεπίδραση μοιάζει πράγματι με κόμβο 4 φερμιονίων, δηλαδή η πλήρης θεωρία προβλέπει τη συμπεριφορά αυτή ως το όριο αυτής στις χαμηλές ενέργειες.

Μάλιστα γίνεται να βρούμε την τιμή της σταθεράς σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων g από τη θεωρία 4-Fermi. Αυτό το βλέπουμε γενικότερα στις ενεργές θεωρίες: για να μεταβούμε από την πλήρη στην ενεργή ή αντίστροφα οφείλουμε να κάνουμε σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο θεωριών για διάφορες διαδικασίες. Εδώ θα συγκρίνουμε για τη διαδικασία της διάσπασης του μιονίου το πλάτος που δίνει η 4-Fermi με αυτό που δίνει η πλήρης θεωρία στο χαμηλοενεργειακό όριο. Συγκρίνοντας λοιπόν τα αποτελέσματα (3.8) και (3.19) στις χαμηλές πάντα ενέργειες έχουμε

$$-\frac{g^2}{8} \left[\frac{i}{m_W^2} \right] = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad (3.26)$$

Το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν προβλέπει τις τιμές των μαζών αλλά πρέπει να μπουν ως παράμετροι με το χέρι από πειραματικά δεδομένα. Αν λοιπόν λάβουμε και την τιμή (3.21) υπόψιν, μαζί με το G_F από τη 4-Fermi (3.13) καταλήγουμε στη σταθερά σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων

$$\alpha_W = \frac{g^2}{4\pi} \simeq 0.03 \quad (\text{για χαμηλές ενέργειες}) \quad (3.27)$$

3.3. Η μορφή της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg

Είναι άξιο αναφοράς πως αρκούν οι γνώσεις κβαντικής θεωρίας πεδίου μέχρι το παρόν σημείο για την εύρεση της μορφής της ενεργού Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg ενώ ακόμη και η ακριβής έκφραση αυτής (μέχρι κάποια τάξη ακρίβειας) προκύπτει αν κανείς είναι διατεθειμένος να κάνει τις απαραίτητες πράξεις. Αναφερόμαστε στο γεγονός πως είναι δυνατόν σε πρώτη φάση να μαντέψει κανείς τη μορφή μιας θεωρίας από τις συμμετρίες αυτής.

Συγκεκριμένα: όντας μια ηλεκτρομαγνητική θεωρία μπορούμε να περιοριστούμε στο φωτονικό πεδίο και στο σπινιοριακό του ηλεκτρονίου / ποζιτρονίου (και τυχόν άλλων φορτισμένων σωματιδίων). Καθώς όμως αναζητούμε μια ενεργή θεωρία της QED για χαμηλές ενέργειες, θυμηθείτε πως η θεωρία Euler-Heisenberg κατασκευάστηκε με κίνητρο να περιγράψει σκεδάσεις φωτονίων, θα αγνοήσουμε τους βαριούς βαθμούς ελευθερίας των φορτισμένων σωματιδίων, περιοριζόμενοι στο φωτονικό πεδίο A^μ , από το οποίο οφείλουμε να κατασκευάσουμε λοιπόν όλη τη Λαγκρανζιανή μας. Άρα αυτή θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int}(A^\mu) \quad (3.28)$$

όπου τον όρο Maxwell που είναι ο κινητικός όρος τον γνωρίζαμε και μένει το υπόλοιπο, οι όροι αλληλεπίδρασης φωτονίων. Δηλαδή η ενεργός αυτή θεωρία θα έχει κόμβους φωτονίων ως μια ενεργή περιγραφή διαδικασιών που μεσολαβούνται από δυνητικά ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων αλλά τα οποία ως βαριοί β.ε. ολοκληρώνονται και η επίδραση τους στο σύστημα κωδικοποιείται εντός των συντελεστών της θεωρίας. Θυμίζουμε πως η αντίστοιχη διαδικασία της QED σε κυρίαρχη τάξη περιγράφεται από το box diagram όπως στο επόμενο σχήμα και η θεωρία μας, ως χαμηλοενεργειακό όριο αυτής, δηλαδή με ενεργειακό εύρος ισχύος $\hbar\omega \ll m_e c^2$, καταλήγει την αλληλεπίδραση αυτήν να τη βλέπει σαν έναν κόμβο τεσσάρων φωτονίων. Όμοια ισχύουν και για τους άλλους όρους.

(3.29)

Η συμπεριφορά αυτή της ενεργού θεωρίας μας είναι ήδη γνωστή από το προηγούμενο υποκεφάλαιο, όπου πάλι οι διαδότες της πλήρους θεωρίας αν αφορούν τους βαριούς β.ε. τείνουν τα άκρα αυτών στο όριο της ενεργού θεωρίας να συμπέσουν.

Για την εύρεση των όρων αλληλεπίδρασης θα στηριχτούμε σε επιχειρήματα συμμετρίας για την εύρεση της μορφής τους. Η *συμμετρία βαθμίδας*

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (3.30)$$

που ικανοποιεί ο ηλεκτρομαγνητισμός μας οδηγεί στο να δουλέψουμε μόνο με τα μεγέθη αυτά που μένουν αναλλοίωτα κάτω απ' τη συμμετρία αυτή για την κατασκευή του όρου αλληλεπίδρασης, δηλαδή τα πεδία

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.31)$$

ενώ η *Lorentz συμμετρία* απαιτεί η Λαγκρανζιανή να αποτελείται από αναλλοίωτους όρους προκειμένου οι εξισώσεις κίνησης να είναι συναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς Lorentz και άρα οι δείκτες στους όρους $F_{\mu\nu}$ πρέπει να ταιριάζουν. Είναι δυνατό να δειχθεί πως τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητισμού είναι ακριβώς δύο, τα

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \text{ και } \mathcal{G} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (3.32)$$

όπου $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ το dual του ηλεκτρομαγνητικού ταυυστή.

Όστε οι όροι αλληλεπίδρασης της Λαγκρανζιανής παίρνουν τώρα τη μορφή γινομένων αυτών των αναλλοίωτων ποσοτήτων. Ας παρατηρήσουμε πως το θεώρημα του Furry απαιτεί το μηδενισμό διαγραμμμάτων με περιττό αριθμό φωτονικών άκρων και αυτό προέκυψε αυτομάτως εξαιτίας της τάξης των $F_{\mu\nu}$ στα αναλλοίωτα. Αν απαιτήσουμε τέλος η θεωρία μας να είναι αναλλοίωτη στις *συμμετρίες P και C* όπως θα έπρεπε αφού αυτές πληρούνται από την QED πάνω στην οποία στηρίζεται η EH, τότε το αναλλοίωτο \mathcal{G} ως ψευδοβαθμωτό εμφανίζεται μόνο σε άρτιες δυνάμεις. Καταλήγουμε στη μορφή

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + c_1' (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + c_2' (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots \quad (3.33)$$

όπου παραλείψαμε όρους ανώτερης τάξης στο $F_{\mu\nu}$.

Όσον αφορά τους συντελεστές, η διάσταση αυτών για τη συγκεκριμένη τάξη, δηλαδή τέταρτες δυνάμεις του $F_{\mu\nu}$, επιβάλλει να έχουν διαστάσεις μάζας -4. Καθώς λοιπόν η χαρακτηριστική μάζα του εν λόγω συστήματος είναι αυτή του βαριού β.ε. δηλαδή του ηλεκτρονίου, ξαναγράφουμε τους συντελεστές αυτούς σε αδιάστατη μορφή ως εξής:

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{c_1}{m_e^4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{c_2}{m_e^4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \dots \quad (3.34)$$

Αυτή είναι και η τελική μορφή, για ακρίβεια μέχρι δεδομένη τάξη, στην οποία μπορούμε να φέρουμε τη Λαγκρανζιανή Euler-Heisenberg με τα απλά επιχειρήματα που προηγήθηκαν. Τα c_1 και c_2 είναι αδιάστατοι αριθμοί και η εύρεση τους απαιτεί πολύ μεγαλύτερο κόπο από άποψη πράξεων. Είναι παρ' όλα αυτά δυνατή και στηρίζεται στη σύγκριση του πλάτους σκέδασης του box diagram που περιγράφει την αλληλεπίδραση 4 φωτονίων στα πλαίσια της πλήρους θεωρίας δηλαδή της QED και του αντίστοιχου διαγράμματος με κόμβο 4 φωτονίων που περιγράφεται απ' τους δύο αυτούς όρους τέταρτης τάξης στο $F_{\mu\nu}$. Έχουμε δηλαδή εξαγωγή των χαρακτηριστικών της ενεργού θεωρίας με σύγκριση με την πλήρη που, όπως ήδη είπαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο όταν μελετούσαμε τη θεωρία Fermi, συμβαίνει συχνά στα πλαίσια εύρεσης ενεργών θεωριών πεδίου όπου είτε χρησιμοποιείται η πλήρης θεωρία για τη σύγκριση αν αυτή είναι διαθέσιμη (όπως στην EH) είτε γίνεται σύγκριση της ενεργού θεωρίας με γνωστά πειραματικά δεδομένα. Έτσι μπορούμε να φτάσουμε μέχρι κάποια ακρίβεια όρων στον υπολογισμό.

Συνοψίζοντας το σκεπτικό που ακολουθήσαμε για την εύρεση της μορφής της θεωρίας σε έναν αλγόριθμο, αυτό που κάναμε είναι:

- Καταγράφουμε τα πεδία που ενδιαφέρουν τη θεωρία.
- Γράφουμε όλους τους δυνατούς όρους που μπορούν να γραφούν από αυτά, με απροσδιόριστους ακόμα συντελεστές.
- Αποκλείουμε με επιχειρήματα συμμετρίας όρους ή συνδιασμούς όρων.
- Προσδιορίζουμε τη διάσταση κάθε συντελεστή και από τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος αν μπορούμε αντικαθιστούμε.
- Βρίσκουμε τους συντελεστές με σύγκριση με μια πιο θεμελιώδη θεωρία ή με πειραματικά δεδομένα.

Προηγουμένως τονίσαμε πως ο αλγόριθμος αυτός μας πάει μέχρι μια κάποια ακρίβεια. Για παράδειγμα, η σύγκριση με το box diagram της QED δίνει τα σωστά αποτελέσματα για τους συντελεστές αλλά απαιτεί εκτενέστατους υπολογισμούς [23] και αυτό μάλιστα μόνο για την κυρίαρχη τάξη της αλληλεπίδρασης! Αντ' αυτού λοιπόν εμείς θα υπολογίσουμε στο 4^ο κεφάλαιο την EH με μια άλλη μέθοδο και η κλειστή⁵ έκφραση που θα προκύψει στο τέλος θα έχει ως διαταρακτική προσέγγιση τους προηγούμενους όρους αλληλεπίδρασης.

⁵ Αν και για να είμαστε ακριβείς, ακόμα και αυτή η κλειστή μορφή αφορά διαδικασίες μέχρι 1 φερμιονικό βρόγχο εξαιτίας της υπόθεσης των πεδίων υποβάθρου που παίρνουμε που αποκλείει να συμβάλλουν διαδικασίες της QED με δυνητικά φωτόνια. Βλ. κεφάλαιο 4.

4. Λαγκρανζιανή Euler-Heisenberg

4.1. Μη γραμμικές ηλεκτροδυναμικές

Η κλασική Ηλεκτροδυναμική καθορίζεται από ένα σύνολο τεσσάρων μόλις εξισώσεων, όπου μιλάμε φυσικά για τις εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4.4)$$

που καθορίζουν τη μορφή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου συναρτήσει του ηλεκτρικού φορτίου και του ρεύματος αυτού, ενώ η μία εξίσωση που καθορίζει το πως αυτές οι πηγές κινούνται εντός κάποιου πεδίου, ολοκληρώνοντας έτσι τον “κύκλο” των αντιδράσεων μεταξύ πεδίων και πηγών, η δύναμη Lorentz

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.5)$$

προκύπτει από επιχειρήματα Lorentz συναλλοιότητας. Ακόμη και η τόσο σημαντική εξίσωση συνέχειας του ηλεκτρικού φορτίου, η εξίσωση που περιγράφει την τοπική και άρα και ολική διατήρηση αυτού

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (4.6)$$

είναι μια απλή και άμεση συνέπεια των (4.1) και (4.4) αν εφαρμόσουμε στην τελευταία έναν τελεστή απόκλισης.

Μια άλλη συνέπεια των εξισώσεων Maxwell χωρίς πηγές είναι πως αν εφαρμόσουμε έναν δεύτερο τελεστή στροβιλισμού στις (4.2) και (4.4) προκύπτουν οι κυματικές εξισώσεις του φωτός

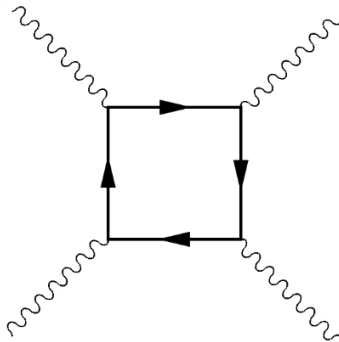
$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (4.7)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \quad (4.8)$$

Αυτές έχουν λοιπόν ως λύση ηλεκτρομαγνητικά κύματα (που οφείλουν να πληρούν ταυτοχρόνως τις πολύ πιο περιοριστικές εξισώσεις Maxwell). Χαρακτηριστικό αυτών των κυμάτων, που ο Maxwell ερμήνευσε ως φωτεινή ακτινοβολία, είναι πως άθροισμα τέτοιων κυματικών λύσεων είναι επίσης λύση, δηλαδή ισχύει η αρχή της υπέρθεσης και η θεωρία χαρακτηρίζεται ως γραμμική. Ο χαρακτηρισμός αυτός βέβαια δεν προέρχεται από τις δευτεροβάθμιες κυματικές εξισώσεις που ειπώθηκαν για να φανεί εύκολα η γραμμικότητα αλλά ήδη από τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις Maxwell που φαίνεται η γραμμικότητά τους από τη γραμμικότητα των τελεστών. Επιστρέφοντας πάντως στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (φως), αυτά πάντα διέρχονται το ένα μέσα από το άλλο χωρίς καμία

αλληλεπίδραση. Το ίδιο δεν ισχύει και σε περιπτώσεις που έχουμε μη γραμμικά μέσα: σε κλασικό επίπεδο μπορούν να παρατηρηθούν μη γραμμικά φαινόμενα με την “καταλυτική” βοήθεια κάποιου υλικού μέσου. Πάντως λόγω των πάνω σε κλασικό επίπεδο αποκλείεται η αλληλεπίδραση φωτεινών ακτίνων στο κενό.

Σε αυτό το σημείο έρχεται η κβαντική υφή της φυσικής πραγματικότητας να κάνει άλλη μία διόρθωση σε όσα γνωρίζουμε, μιας και σε κβαντικό επίπεδο φαινόμενα κλασικώς απαγορευμένα συνήθως προκύπτουν ότι ήταν όχι αδύνατα αλλά απλώς αρκετά απίθανα. Μπορούν λοιπόν φωτεινές δέσμες να αλληλεπιδράσουν σε συνθήκες κενού; Με την εώς τώρα κεκτημένη πείρα μας σε φαινόμενα της QFT μπορούμε να φανταστούμε ένα ζεύγος ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου να ξεπηδά απ’ το κενό ως δυνητικά σωματίδια για να μεσολαβήσουν της αλληλεπίδρασης. Το διάγραμμα, συγκεκριμένα, που σε χαμηλότερη τάξη θα το έκανε αυτό προκύπτει να είναι το box diagram:



(καθώς και μια παραλλαγή αυτού με τη ροή του φερμιονικού βρόγχου ανάποδα) Περιμένουμε λοιπόν στο κβαντικό κενό να υπάρχει μια μικρή πιθανότητα αλληλεπίδρασης (καθώς πρόκειται για ανώτερης τάξης διάγραμμα) μεταξύ φωτονίων. Ίσως μπορέσουμε να χαμηλώσουμε την ενέργεια εμφάνισης του παραπάνω φαινομένου με μια, ας μου επιτραπεί η φράση, πηγή ενέργειας, δηλαδή δοκιμάζοντας να σκεδάσουμε φως εντός ενός πεδίου υποβάθρου (background field).

Μιλάμε πλέον για σκεδάσεις φωτονίων στο κενό, δηλαδή σε συνθήκες που δεν συμμετέχουν στη σκέδαση φορτισμένα σωματίδια παρά μόνο ως δυνητικά σωματίδια. Αντί να χρησιμοποιήσουμε όλο το οπλοστάσιο της QED για να χειριστούμε το πρόβλημα μπορούμε να αναπτύξουμε μια ενεργή θεωρία πεδίου (Effective Field Theory). Τέτοια παραδείγματα είναι γνωστά στη Σύγχρονη Φυσική όπως η θεωρία Fermi που διατυπώθηκε για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις πριν την ανακάλυψη των φορέων των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων W^\pm και Z^0 . Δηλαδή αντί της πλήρους Λαγκρανζιανής της QED χρησιμοποιούμε μια ενεργή Λαγκρανζιανή (effective Lagrangian) που θα αποτελείται από τον ελεύθερο όρο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αλλά και όρους αλληλεπίδρασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με τον εαυτό του που θα εμπεριέχουν τις όποιες αλληλεπιδράσεις προβλέπονται από διαδικασίες όπως το πάνω box diagram. Η ολοκλήρωση των πεδίων, δηλαδή βαθμών ελευθερίας, που γίνεται για την ανάπτυξη μιας τέτοιας ενεργού θεωρίας πεδίου γίνεται όπως περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3.

Μια τέτοια Λαγκρανζιανή λοιπόν θα διευκολύνει στην επίλυση προβλημάτων στα οποία θα προκύπτουν μόνο εισερχόμενα και εξερχόμενα φωτόνια, αρκεί το πρόβλημα να μείνει εντός των ενεργειακών ορίων που επιβάλλονται από την ακρίβεια του υπολογισμού των όρων αλληλεπίδρασης. Αν επιπλέον η παραπάνω ενεργή θεωρία προκύψει εντός ενός σταθερού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπως θα χρειαστεί σε πολλά προβλήματα, τότε η Λαγκρανζιανή αυτή είναι πλέον η Euler-Heisenberg Λαγκρανζιανή.

Η Euler-Heisenberg Λαγκρανζιανή είναι η ενεργός Λαγκρανζιανή που αγνοεί τους φερμιονικούς β.ε. της πλήρους θεωρίας που θα περιγραφόταν ως μια QED με ένα σταθερό υπόβαθρο HM πεδίου.

Υπάρχουν και άλλες Λαγκρανζιανές που έχουν διατυπωθεί περιγράφοντας μη γραμμικές ηλεκτροδυναμικές, αλλά εμείς θα εστιάσουμε στην Euler-Heisenberg. Ας αναφέρουμε απλά πως μια άλλη μη γραμμική ηλεκτροδυναμική περιγράφεται από την Born-Infeld Λαγκρανζιανή, διατυπωμένη αρχικά για να λύσει το πρόβλημα της άπειρης ενέργειας ακριβώς πάνω στη θέση ενός σημειακού φορτίου (πρόβλημα που *παρακάμφθηκε* με την έλευση της κβαντικής μηχανικής) φράσσοντας την ένταση του πεδίου για μεγάλες τιμές αυτού. Η συγκεκριμένη Λαγκρανζιανή θα είχε χαθεί στη λήθη των πεπαλαιωμένων υποθέσεων αν δεν αποκτούσε νέο ενδιαφέρον με την επανεμφάνισή της ως χαμηλοενεργειακό υπόβαθρο στη θεωρία χορδών!

Ένα ισχυρό χαρακτηριστικό της Euler-Heisenberg είναι πως, όντας μια ενεργή θεωρία πεδίου της QED, αναμένουμε τις προβλέψεις της να αληθεύουν ακόμη πριν λάβουμε πειραματική επιβεβαίωση. Αυτό διότι στηριχτήκαμε στην QED, την πλέον ελεγμένη θεωρία φυσικής από πειραματικής άποψης (με προβλέψεις που ελέγχθηκαν πειραματικά με μεγάλη ακρίβεια). Όσα ειπωθούν εντός της εργασίας λοιπόν (και λαμβάνοντας υπόψη πάντα τα όρια εφαρμοσιμότητας εκεί που πρέπει, όσον αφορά την ενέργεια) είναι στέρεα θεμελιωμένα από επιστημονικής άποψης!

Όπως αναφέραμε, η Euler-Heisenberg Λαγκρανζιανή θα διευκολύνει στην επίλυση πολλών προβλημάτων. Πριν όμως φτάσουμε στις εφαρμογές αυτής θα πρέπει να βρούμε την ακριβή διατύπωσή της, το οποίο και θα κάνουμε στη συνέχεια.

4.2. Ιδιοχρόνος Schwinger

Σε αυτό το σημείο θα εισάγουμε τη μέθοδο του Schwinger για ελεύθερους διαδότες ώστε όταν προκύψει η ανάγκη να τη χρησιμοποιήσουμε σε ένα πρόβλημα με αλληλεπίδραση με το εξωτερικό HM πεδίο να μην χαθεί στις πράξεις το καθαυτό σκεπτικό για το οποίο εισάγεται. Αυτό διότι αναλύοντας τη Λαγκρανζιανή της QED και προσπαθώντας να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη ενεργό θεωρία θα καταλήξουμε σε μια έκφραση που θα εξαρτάται κυρίως από μια συνάρτηση Green, τον αντίστοιχο διαδότη. Για απλότητα θα μελετήσουμε το μποζονικό διαδότη, ενώ η φερμιονική περίπτωση θα γίνει στα μετέπειτα κατευθείαν για το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Ο μποζονικός διαδότης πληρεί την εξίσωση (με $\varepsilon > 0$ ώστε να πληρούνται οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες)

$$(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)\Delta_F(x, x') = -i\delta^{(4)}(x - x') \quad (4.9)$$

και κατά τα γνωστά ένας μετασχηματισμός Fourier της $\Delta_F(x, x')$ συνάρτησης και εισάγοντας την εκ νέου στην (4.9) μας δίνει τη μετασχηματισμένη $\tilde{\Delta}_F(p)$. Έτσι ο διαδότης γίνεται

$$\Delta_F(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.10)$$

Η ιδέα της μεθόδου του ιδιοχρόνου Schwinger στηρίζεται στην ταυτότητα

$$\frac{i}{A + i\varepsilon} = \int_0^\infty ds e^{is(A+i\varepsilon)} \quad , A \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad (4.11)$$

με την οποία λοιπόν ένας παρονομαστής μετατρέπεται σε εκθετικό μέσω μιας πρόσθετης μεταβλητής s , του ιδιοχρόνου Schwinger, αν και ο τελευταίος χαρακτηρισμός θα γίνει σαφής σε λίγο. Παρατηρήστε την απαίτηση $\varepsilon > 0$ για το φανταστικό μέρος του παρονομαστή: αν δεν πληρείται η ταυτότητα δεν ισχύει. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα (4.11) στον παρονομαστή που προκύπτει στο διαδότη (4.10) βλέπουμε πως προκύπτει η διευκόλυνση να δουλεύουμε πλέον μόνο με εκθετικά:

$$\Delta_F(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \int_0^\infty ds e^{is(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (4.12)$$

Κανείς μπορεί να θεωρήσει το προηγούμενο καθώς και όλα τα επόμενα απλά ως ένα μαθηματικό κόλπο χωρίς ιδιαίτερο αντίκτυπο στην κατανόησή του καθώς η εξαγωγή φυσικού νοήματος είναι... λίγο στριφνή. Παρ' όλα αυτά θα επιχειρήσουμε να πορευτούμε με αυτήν καθώς η εικόνα δίνει μια κάποια φυσική διαίσθηση του τι κάνουν οι πράξεις. Εν συντομία, μπορεί κανείς να σκέφτεται πως οι τύποι περιγράφουν μια μη σχετικιστική κβαντική μηχανική ενός σωματιδίου σε τέσσερις διαστάσεις (μια γενίκευση της γνωστής τρισδιάστατης περίπτωσης). Ακόμη, ο χρόνος που στην κβαντική μηχανική είναι μια παράμετρος παραγκωνίζεται τώρα στον τετραδιάστατο χώρο που είπαμε και η παράμετρος s είναι η παράμετρος που μετρά την εξέλιξη πλέον. Αυστηρώς όμως απλά χρησιμοποιούμε εργαλεία της κβαντικής μηχανικής ενός σωματιδίου σε μια QFT και έτσι οφείλουμε να προσέξουμε τα όρια εφαρμοσιμότητας αυτών. Ορίζουμε λοιπόν τελεστές \hat{x}^μ, \hat{p}^μ με τις αντίστοιχες εξισώσεις ιδιοτιμών

$$\begin{aligned} \hat{x}^\mu |x\rangle &= x^\mu |x\rangle \\ \hat{p}^\mu |p\rangle &= p^\mu |p\rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

Υποθέτουμε πλήρη βάση

$$I = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} |x\rangle\langle x| = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle\langle p| \quad (4.14)$$

και ακόμη ισχύει

$$\langle x|p\rangle = e^{-ipx} \quad (4.15)$$

Γράφουμε λοιπόν τη σχέση (4.12), μέσω της (4.15), στη μορφή

$$\Delta_F(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle \int_0^\infty ds e^{is(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (4.16)$$

$$\Delta_F(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle x|p\rangle \langle p| \int_0^\infty ds e^{is(\hat{p}^2 - m^2 + i\varepsilon)} |x'\rangle \quad (4.17)$$

όπου περάσαμε το εναπομείνον εκθετικό στο ένα bracket μετατρέποντας την ιδιοτιμή πίσω σε τελεστή. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα περνά έξω και το ολοκλήρωμα της ορμής λόγω της (4.14) φεύγει οπότε

$$\Delta_F(x, x') = \int_0^\infty ds \langle x|e^{is(\hat{p}^2 - m^2 + i\varepsilon)} |x'\rangle \quad (4.18)$$

$$\Delta_F(x, x') = \int_0^\infty ds e^{-ism^2} e^{-s\varepsilon} \langle x|e^{is\hat{p}^2} |x'\rangle \quad (4.19)$$

Ήδη ερμηνεύσαμε πως το σωματίδιο βρίσκεται σε έναν τετραδιάστατο χώρο Hilbert. Αν είναι να ερμηνεύσουμε την παράμετρο Schwinger ως μια παράμετρο εξέλιξης σε κάποιο χρόνο, όπως είπαμε πως θα κάνουμε, τότε η σχέση (4.19) ερμηνεύεται λέγοντας ότι ο διαδότης για να διαδωθεί το σωματίο από μια θέση x' σε μια θέση x είναι το ολοκλήρωμα του πλάτους πιθανότητας, με κάποιο συντελεστή βαρύτητας, να διαδωθεί ανάμεσα στις δύο αυτές θέσεις σε χρόνο s και ολοκληρώνουμε ως προς κάθε δυνατό χρονικό διάστημα s . Αυτό διότι η (4.19) γράφεται

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, x') &= \int_0^\infty ds e^{-ism^2} e^{-s\varepsilon} \langle x|e^{-is\mathcal{H}_{pt}} |x'\rangle \\ &= \int_0^\infty ds e^{-ism^2} e^{-s\varepsilon} \langle x; 0|x'; s \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

και ο συντελεστής του χρόνου στο εκθετικό ερμηνεύεται ως η Χαμιλτονιανή του αντίστοιχου προβλήματος. Δηλαδή ορίσαμε $\mathcal{H}_{pt} = -\hat{p}^2$.

Συνοψίζοντας, βρήκαμε έναν διαφορετικό τρόπο γραφής του διαδότη που στηρίζεται στη θεμελιώδη ταυτότητα (4.11) ενώ:

Ερμηνεύσαμε τα μεγέθη στην ανάλυση που έπεται με τα μαθηματικά εργαλεία μιας μη σχετικιστικής κβαντικής μηχανικής σε τέσσερις διαστάσεις και μία νέα χρονική παράμετρο s , τον ιδιοχρόνο Schwinger.

4.3. Πεδία υποβάθρου

Ορίσαμε την Euler-Heisenberg Λαγκρανζιανή να περιγράφει αλληλεπιδράσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχοντας όμως ήδη παρόν ένα σταθερό πεδίο στο υπόβαθρο, εννοώντας με αυτό κάποιο κλασικό πεδίο που υπάρχει στην περιοχή αλληλεπίδρασης. Ένα πεδίο υποβάθρου εν γένει μπορεί να είναι οτιδήποτε, όπως το πεδίο Coulomb που παράγει ένα φορτισμένο σωματίδιο στο χώρο γύρω του. Για την Euler-Heisenberg ειδικά ζητάμε το πεδίο υποβάθρου να 'ναι σταθερό.

Έτσι λοιπόν, για να εισάγει κανείς μια θεωρία με πεδίο υποβάθρου, πρέπει να σπάσει το εν λόγω πεδίο στο κλασικό πεδίο $B(x)$ (που ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης) του υποβάθρου και σε ένα κβαντικό πεδίο που θα κυμαίνεται γύρω από το υπόβαθρο.

$$\hat{\varphi}(x) = B(x) + \hat{\eta}(x) \quad (4.21)$$

Το πιο κλασικό παράδειγμα τέτοιου σπασίματος είναι στις διάφορες απόπειρες για την κβάντωση της βαρύτητας, όπου το βαρυτόνιο ορίζεται ως οι κβαντικές διακυμάνσεις γύρω από τον επίπεδο χώρο.

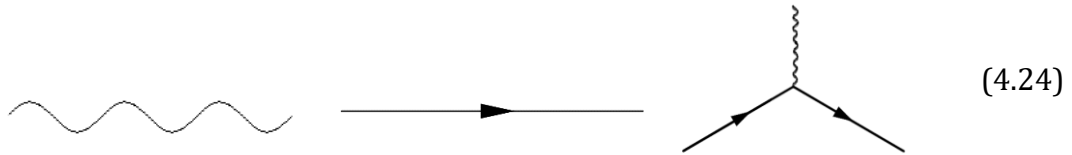
$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) \quad (4.22)$$

Εν γένει κανείς προχωράει από εδώ στο να αναπτύξει τη Λαγκρανζιανή με τη βοήθεια του πάνω σπασίματος και να εξάγει νέους όρους αλληλεπίδρασης, όπως κόμβοι μεταξύ του πεδίου υποβάθρου και του κβαντικού. Το αντικείμενο μπορεί μετά να αναπτυχθεί κατά τα γνωστά με τους δικούς του κανόνες Feynman κλπ. Η ανάλυση που θα κάνουμε εμείς θα ακολουθήσει μια πιο απλοϊκή προσέγγιση καθώς δεν θα χρειαστεί να πάμε πέρα από το πεδίο υποβάθρου στην πάνω ανάπτυξη.

Ας δούμε τώρα συγκεκριμένα για την QED πως εφαρμόζονται τα παραπάνω. Όπως γνωρίζουμε η Λαγκρανζιανή της πλήρους θεωρίας είναι

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - qA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad , q = -e \quad (4.23)$$

και έχει ως συνέπεια τα αντίστοιχα τρία διαγράμματα για τους όρους αυτούς της QED:



Η εισαγωγή του υποβάθρου γίνεται, κατ' αναλογία με ό,τι προηγήθηκε, ως

$$A^\mu = A_{cl}^\mu + \hat{A}^\mu \quad (4.25)$$

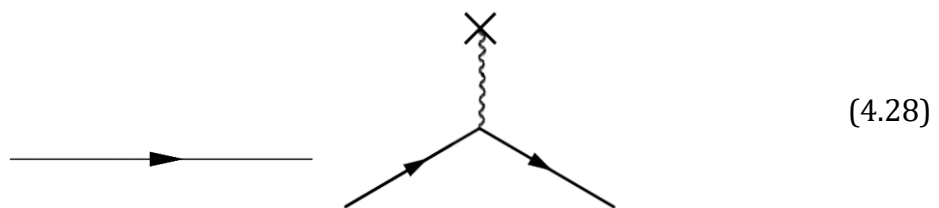
Αγνοώντας σε πρώτη φάση κβαντικά δυναμικά φωτόνια αυτό που απομένει είναι η αντικατάσταση του πλήρους HM πεδίου από το πεδίο υποβάθρου,

$$A^\mu \rightarrow A_{cl}^\mu \quad (4.26)$$

Αν είναι να προχωρήσουμε σε επόμενες τάξεις βρόγχων πέραν της πρώτης (1-loop) κάτι τέτοιο δεν θα ήταν επιτρεπτό, αλλά για την ανάλυση που μας ενδιαφέρει μπορούμε να "παρακάμψουμε" το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας πεδίου υποβάθρου με την απλοϊκή αυτή ανάλυση [22]. Οπότε

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{cl,\mu\nu}F_{cl}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + i\varepsilon)\psi - qA_{cl}^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (4.27)$$

Πλέον τα διαγράμματα, που αφορούν τους κβαντικούς βαθμούς ελευθερίας, είναι



καθώς μόνο τα φερμιόνια αποτελούν κβαντικούς βαθμούς ελευθερίας πια. Το "x" στο πάνω διάγραμμα υποδηλώνει ακριβώς ότι πρόκειται για το κλασικό πεδίο που συνεισφέρει ένα άκρο. Έτσι, αν κανείς ζητούσε το διαδότη της θεωρίας, ο διαδότης θα

πρέπει να “ντυθεί” από μια σειρά άκρα απ’ το κλασικό πεδίο, οπότε έχουμε την εικόνα πως ο “ντυμένος” διαδότης ισούται με⁶

$$\begin{aligned} \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Αν κανείς θέλει να το δει αυτό πιο αναλυτικά οφείλει να πάρει το αντίστοιχο παράγον συναρτησοειδές για την QED (με κλασικό ΗΜ πεδίο) και από τη μορφή του εκθέτη (1.191) προκύπτει ο αντίστροφος τελεστής (“πίνακας”) του διαδότη, άρα και η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί. Για συντομία, αρκεί κανείς να δει το διγραμμικό όρο στον εκθέτη, που από τη σχέση (4.27) είναι, αγνοώντας τα ανύσματα $\psi, \bar{\psi}$,

$$A(x, y) = i(\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon)\delta^{(4)}(x - y) \quad (4.30)$$

(όπου πάρθηκε ολοκλήρωση ως προς 2 θέσεις των ψ και $\bar{\psi}$ για να φανεί η μορφή “πίνακα”)

και άρα

$$\int d^4y A(x, y) A^{-1}(y, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (4.31)$$

Είπαμε πως $S_F(y, x') \equiv A^{-1}(y, x')$ οπότε καταλήγουμε στην έκφραση

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) S_F(x, x') = -i\delta^{(4)}(x - x') \quad (4.32)$$

Η τελευταία έκφραση γράφεται αλλιώς με τη βοήθεια της ταυτότητας

$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \dots$ ως

$$\begin{aligned} S_F(x, x') &= \frac{-i\delta^{(4)}(x - x')}{(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon)} = \frac{-i\delta^{(4)}(x - x')}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \left(1 - \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m}\right)} \\ &= \frac{-i\delta^{(4)}(x - x')}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)} \sum \left[1 + \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} + \left(\frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m}\right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

και το σχήμα (4.29) προκύπτει άμεσα.

Έχοντας εξάγει τη μορφή του διαδότη για τη θεωρία με υπόβαθρο, στη συνέχεια θα εννοούμε πάντα πως το A^μ είναι το κλασικό / το υπόβαθρο προς απλοποίηση της γραφής.

4.4. Η μέθοδος του ιδιοχρόνου Schwinger προς εύρεση της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg

Ξεκινάμε από τη Λαγκρανζιανή της QED (με ΗΜ υπόβαθρο όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο) και, προς εύρεση της Euler-Heisenberg ενεργού Λαγκρανζιανής, θα ολοκληρώσουμε ως προς τους βαριούς βαθμούς ελευθερίας των φερμιονίων. Κατ’ αναλογία λοιπόν με τον τύπο (3.1) γράφουμε για την περίπτωση της QED:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A e^{i\Gamma(A)} &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) \psi \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

οπότε συγκρίνοντας τα δύο μέλη έχουμε

⁶ Βλέπε [22]

$$e^{i\Gamma(A)} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) \psi \right] \right\} \quad (4.35)$$

Η ολοκλήρωση ως προς τα $\psi, \bar{\psi}$ γίνεται καθώς είναι ένα ολοκλήρωμα Gauss επί πεδίων με τιμές Grassman αριθμών. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) \psi] \right\} = \mathcal{N} \det(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) \quad (4.36)$$

οπότε η (4.35) γίνεται

$$e^{i\Gamma(A)} = \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \right\} \mathcal{N} \det(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) \quad (4.37)$$

$$i\Gamma(A) = i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + \ln[\det(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon)] + \text{σταθ}. \quad (4.38)$$

Αγνοώντας τη σταθερά που μπορεί πάντα να προστεθεί σε μια Λαγκρανζιανή χωρίς να επηρεάζει το αποτέλεσμα (και θα χρησιμοποιηθεί αυτό στο τέλος για να προκύψει επανακανονικοποιημένη η Λαγκρανζιανή) παρατηρούμε τον όρο Maxwell και έναν επιπλέον λογαριθμικό όρο. Καθώς πλέον η δράση είναι συναρτησοειδής *μόνο* του ηλεκτρομαγνητικού τετρανύσματος, συνειδητοποιούμε πως ο όρος Maxwell θα δίνει τον κινητικό όρο της ενεργού θεωρίας και άρα η αλληλεπίδραση, ο κόμβος ή κόμβοι της θεωρίας θα προβλέπονται απ' τον λογαριθμικό όρο. Όπως και να 'χει, μας ενδιαφέρει τώρα να εξαχθεί η Λαγκρανζιανή απ' την πάνω δράση και άρα πρέπει ο δεύτερος αυτός όρος να γραφεί έτσι ώστε να διευκολύνει τις πράξεις.

Αντιμετωπίζοντας τον τελεστή $(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon)$ μέσω της (βοηθητικής) εικόνας ενός απειροδιάστατου πίνακα, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα που ισχύει για πίνακες M

$$\text{tr}(\ln M) = \ln(\det M) \quad (4.39)$$

οπότε

$$i\Gamma(A) = i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + \text{tr}[\text{Tr}(\ln(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon))] \quad (4.40)$$

όπου με Tr δηλώνουμε το ίχνος του "απειροδιάστατου" πίνακα / τελεστή και με tr το ίχνος στους σπινωριακούς δείκτες. Το ίχνος έχει γενικότερα την καλή ιδιότητα να είναι ίδιο ανεξαρτήτως βάσης. Έχουμε λοιπόν το ελεύθερο να επιλέξουμε βάση και πηγαίνουμε σε αυτήν των θέσεων ώστε πλέον η μορφή της Λαγκρανζιανής μπορεί να εξαχθεί αφού εμφανίζουμε το ολοκλήρωμα στο χώρο Minkowski. Δηλαδή

$$i\Gamma(A) = i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \text{tr} \langle x | \ln(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) | x \rangle \right] \quad (4.41)$$

όπου πλέον το ίχνος συμβολίζεται με πεζό γράμμα καθώς αφορά τους σπινωριακούς δείκτες μόνο. Εν τέλει η ενεργός δράση

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \text{tr} \langle x | \ln(i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon) | x \rangle \quad (4.42)$$

Η λογαριθμική εξάρτηση δεν μας βοηθά παραπέρα, όμως αν είχαμε την έκφραση στον παρονομαστή θα γινόταν λόγος για τον φερμιονικό διαδότη σε πεδίο υποβάθρου A^μ . Γι' αυτό το λόγο επιχειρούμε την παράγωγο

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} &= -i \frac{\partial}{\partial m^2} \text{tr} \langle x | \ln(i\gamma^\mu D_\mu - \sqrt{m^2} + i\varepsilon) | x \rangle \\ &= \frac{i}{2m} \text{tr} \left\langle x \left| \frac{1}{i\gamma^\mu D_\mu - m + i\varepsilon} \right| x \right\rangle\end{aligned}\quad (4.43)$$

Έχουμε το διαδότη του κεφαλαίου 4.3 εκφρασμένο στη βάση των θέσεων και ζητείται το ίχνος του πίνακα αυτού λόγω της ολοκλήρωσης στα x που είναι ίδια στα ανύσματα αριστερά και δεξιά. Οπότε κανείς μπορεί να φανταστεί (και εδώ χρειάστηκε ο υπολογισμός του διαδότη για υπόβαθρο) τη σειρά του σχήματος (4.29) όταν τα άκρα ταυτιστούν λόγω του ίχνους⁷:

$$\begin{aligned}& \text{Diagrammatic expansion of the propagator} \\ & \text{Double-line circle} = \text{wavy line} + \text{circle with 2 wavy lines} + \text{diamond with 4 wavy lines} \\ & + \text{hexagon with 6 wavy lines} + \text{octagon with 8 wavy lines} + \dots\end{aligned}\quad (4.44)$$

όπου αναμένουμε από το θεώρημα του Furry διαγράμματα με περιττό αριθμό φωτονικών άκρων να μηδενίζονται, εξού και η παράλειψη τους στο σχήμα. Απ' το σχήμα αυτό ήδη αρχίζει να φαίνεται, γνωρίζοντας πλέον πως μια ενεργή θεωρία μπορεί να θεωρηθεί πως τείνει τους διαδότες των βαριών β.ε. στο να συμπέσουν τα άκρα τους στα διαγράμματα της πλήρους θεωρίας, πώς θα προκύψουν οι κόμβοι για 4,6,... κλπ. φωτόνια.

Πράγματι, περιττός αριθμός φωτονικών άκρων δεν θα προκύψει καθώς η (4.43) γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} &= \frac{i}{2m} \text{tr} \left\langle x \left| \frac{i\gamma^\mu D_\mu + m}{-(\gamma^\mu D_\mu)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right| x \right\rangle \\ &= \frac{i}{2m} \text{tr} \left\langle x \left| \frac{i\gamma^\mu D_\mu + m}{-m^2 \left[1 - \frac{-(\gamma^\mu D_\mu)^2 + i\varepsilon}{m^2} \right]} \right| x \right\rangle\end{aligned}\quad (4.45)$$

Η σειρά που προκύπτει δίνει άρτιες δυνάμεις γ πινάκων και μαζί με το πρώτο κομμάτι του αριθμητή καταλήγουμε σε ίχνη περιττού αριθμού γ πινάκων, που μηδενίζονται. Απομένει το δεύτερο κομμάτι του αριθμητή λοιπόν

⁷ σχήμα παρμένο από την [19].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} &= \frac{i}{2m} \text{tr} \left\langle x \left| \frac{+m}{-(\gamma^\mu D_\mu)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right| x \right\rangle \\ &= \frac{i}{2} \text{tr} \left\langle x \left| \frac{1}{-(\gamma^\mu D_\mu)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right| x \right\rangle\end{aligned}\quad (4.46)$$

Στο σημείο αυτό εισάγουμε πάλι τη μέθοδο του ιδιοχρόνου Schwinger, όπως την είδαμε στο υποκεφάλαιο 4.2 και μαζί με την ερμηνεία που τις δώσαμε ως μιας μη σχετικιστικής κβαντικής μηχανικής 4 διαστάσεων και μίας παραμέτρου s , αν και τώρα βεβαίως θα χρειαστεί να προσαρμόσουμε το χειρισμό των μετέπειτα πράξεων καθώς δεν πρόκειται πια για έναν ελεύθερο διαδότη. Με χρήση της κεντρικής ταυτότητας (4.11) πάντως

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{tr} \left\langle x \left| e^{is[-(\gamma^\mu D_\mu)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \right| x \right\rangle \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-\varepsilon s} e^{-ism^2} \text{tr} \left\langle x \left| e^{-is(\gamma^\mu D_\mu)^2} \right| x \right\rangle \quad (4.48)$$

και ολοκληρώνοντας ξανά ως προς το m^2 για να επανέλθουμε στη (4.42), ο δεύτερος όρος αυτής είναι τελικά (αγνοώντας τη σταθερά από την ολοκλήρωση καθώς είπαμε πως είναι αδιάφορη εντός μιας Λαγκρανζιανής για τις εξισώσεις κίνησης)

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \int_0^\infty ds e^{-\varepsilon s} \frac{e^{-ism^2}}{s} \text{tr} \left\langle x \left| e^{-is(\gamma^\mu D_\mu)^2} \right| x \right\rangle \quad (4.49)$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να φέρουμε τον εκθέτη εντός του ίχνους σε μια πιο εύχρηστη μορφή.

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = \frac{1}{2} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu D_\nu \quad (4.50)$$

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = \frac{1}{2} 2\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu, D_\nu] \quad (4.51)$$

Μια παραλλαγή του ορισμού του γεννήτορα της Clifford άλγεβρας είναι

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (4.52)$$

και από πράξεις

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu] = iqF_{\mu\nu} \quad (4.53)$$

Οπότε η (4.51):

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = D^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} iqF_{\mu\nu} = D^2 + \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.54)$$

Ορίζοντας το μέγεθος

$$iD_\mu = i(\partial_\mu + iqA_\mu) \rightarrow \Pi_\mu \equiv p_\mu - qA_\mu \quad (4.55)$$

καταλήγουμε στην ανάπτυξη

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = -\Pi^2 + \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.56)$$

Η έκφραση (4.49) γράφεται λοιπόν

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\varepsilon s} e^{-ism^2} \text{tr}\langle x|e^{-is\mathcal{H}_{pt}}|x\rangle \quad (4.57)$$

και επιδέχεται την ίδια ερμηνεία με την ελεύθερη περίπτωση του υποκεφαλαίου 4.2, με μόνες αλλαγές πως

- καθώς πάλι ερμηνεύουμε το συντελεστή του $-is$ στον εκθέτη ως τη Χαμιλτονιανή της ερμηνείας μας, αυτή εδώ είναι

$$\mathcal{H}_{pt} = -\Pi^2 + \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (4.58)$$

- το σωματίδιο, λόγω του ίχνους στην έκφραση, αφότου εξελιχθεί στο χρόνο s σύμφωνα με το διαδότη επιστρέφει στη θέση x κλείνοντας βρόγχο και αυτό για κάθε τιμή της χρονικής διάρκειας s . Αυτό συμφωνεί με ό,τι είπαμε νωρίτερα πως η ενεργός δράση είναι για έναν βρόγχο και συμφωνεί και με το σχήμα (4.44).

Το “μισό” του διαδότη επιλύεται άμεσα, καθώς ο τελεστής $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(\hat{x})$, οπότε ας ορίσουμε

$$\mathcal{H}_{pt} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \quad (4.59)$$

τα δύο κομμάτια της (4.58) αντίστοιχα, και άρα λόγω $[\mathcal{H}_1, \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\hat{x})] = 0$ δεδομένου ότι $F_{\mu\nu} = \text{σταθερός ταυστής}$

$$\langle x|e^{-is\mathcal{H}_{pt}}|y\rangle = \langle x|e^{-is\mathcal{H}_1 - is\frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\hat{x})}|y\rangle = \langle x|e^{-is\mathcal{H}_1}|y\rangle e^{-is\frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(y)} \quad (4.60)$$

Ας σημειωθεί [17] πως η μέθοδος του ιδιοχρόνου Schwinger έχει ακριβώς το πλεονέκτημα αυτό: να μας επιτρέπει να δουλεύουμε στο χώρο των θέσεων και των ορμών ταυτόχρονα. Δείτε για παράδειγμα εδώ πως, λόγω της 4-διάστατης QM έχουμε αναμειγμένους τελεστές θέσης και ορμής:

$$\mathcal{H}_{pt} = -\Pi^2 + \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\left(\hat{p}_\mu - qA_\mu(\hat{x})\right)^2 + \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\hat{x}) \quad (4.61)$$

Οπότε το πρόβλημα υπολογισμού της ενεργού Λαγκρανζιανής της QED με υπόβαθρο σε 1 βρόγχο απλοποιήθηκε μέσω της μεθόδου του ιδιοχρόνου Schwinger στην εύρεση ενός διαδότη

$$\langle x|e^{-is\mathcal{H}_1}|y\rangle \quad (4.62)$$

Επιλέξαμε αρχικά τη μέθοδο του ιδιοχρόνου Schwinger για την εύρεση της ΕΗ Λαγκρανζιανής. Σε αυτό το σημείο βρισκόμαστε πάλι σε ένα σταυροδρόμι, όπου στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που εκθέτονται για την εύρεση του διαδότη αυτού. Εμείς, στο επόμενο υποκεφάλαιο, επιλέγουμε να παρουσιάσουμε μια μέθοδο εξαγωγής διαδότη για Χαμιλτονιανές με τετραγωνικούς όρους και σταθερή μετρική σε έναν 2n-διάστατο φασικό χώρο που βασίζεται σε τεχνικές συμπλεκτικής Γεωμετρίας.

4.5. Διαδότης για τετραγωνικές Χαμιλτονιανές⁸

Όπως είπαμε, καθώς αναζητάμε να βρούμε μια έκφραση για το διαδότη (4.62), θα εισάγουμε μερικά μαθηματικά εργαλεία από τη συμπλεκτική Γεωμετρία. Ξεκινάμε από τη μορφή της Χαμιλτονιανής όπου μας ενδιαφέρουν Χαμιλτονιανές της μορφής

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\hat{x}^T G_1 \hat{x} + \hat{x}^T G_2 \hat{p} + \hat{p}^T G_3 \hat{x} + \hat{p}^T G_4 \hat{p}) \quad (4.63)$$

με G_i , $i = 1,2,3,4$ σταθερούς $n \times n$ πίνακες που συνδέουν τους αντίστοιχους τελεστές όπως πάνω. Οι τελεστές είναι ανύσματα σε έναν n διάστατο χώρο λοιπόν και γι' αυτό το σύμβολο ανάστροφου πίνακα σε εκείνα αριστερά.

Το σκεπτικό αυτό μπορεί να πάει ένα βήμα παραπέρα και να ορίσουμε ένα άνυσμα $2n$ -διαστάσεων στο φασικό χώρο, οπότε το άνυσμα είναι

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

και η Χαμιλτονιανή γράφεται συνεπτυγμένα πλέον ως

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \langle \hat{X}, G \hat{X} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{I,J=0}^{2n} \hat{X}^I G_{IJ} \hat{X}^J \quad (4.65)$$

όπου

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Ας σημειωθεί πως για τη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου αντί των ελληνικών δεικτών, που τρέχουν στις τιμές 0,1,2,3 του χώρου Minkowski, θα έχουμε λατινικούς δείκτες που θα τρέχουν κατά μήκος του φασικού χώρου 1,...,2n.

Με αυτή τη σημειολογία μπορούμε να προχωρήσουμε στην καθεαυτό εύρεση του διαδότη (4.62). Θα εκμεταλλευτούμε προς αυτόν το σκοπό το γεγονός πως πλέον μελετάμε μια μη σχετικιστική κβαντική μηχανική και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις τεχνικές αυτής. Ο ζητούμενος διαδότης λοιπόν μπορεί να γραφεί και ως

$$\langle x | e^{-i\mathcal{H}t} | y \rangle = \langle x | \psi(y, t) \rangle \quad (4.67)$$

δηλαδή ως μια κυματοσυνάρτηση της κατάστασης $|\psi(y, t)\rangle$, που είναι

$$|\psi(y, t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t} |y\rangle \quad (4.68)$$

και πληρεί την εξίσωση Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(y, t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(y, t)\rangle \quad (4.69)$$

Μεταβαίνουμε λοιπόν σε κάτι που μοιάζει με την εικόνα Heisenberg, όπου π.χ. η εξίσωση ιδιοτιμών-ιδιοκαταστάσεων της θέσης μετατρέπεται ως εξής:

$$\hat{x}^k |y\rangle = y^k |y\rangle \quad (4.70)$$

$$e^{-i\mathcal{H}t} \hat{x}^k e^{i\mathcal{H}t} e^{-i\mathcal{H}t} |y\rangle = e^{-i\mathcal{H}t} y^k |y\rangle \quad (4.71)$$

$$\hat{x}^k(t) |\psi(y, t)\rangle = y^k |\psi(y, t)\rangle \quad (4.72)$$

⁸ Στη βιβλιογραφία, όπως τονίσαμε, υπάρχουν πολλοί τρόποι εξαγωγής του διαδότη. Αυτό αλλά και το επόμενο κεφάλαιο στηρίζονται στη διατριβή του Böhl [19] καθώς δεν είναι ευκολοπρόσιτη η βιβλιογραφία επί των μαθηματικών εργαλείων που παρουσιάζονται στη συνέχεια. Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να επιλέξουμε κάποια άλλη μέθοδο (και ο αναγνώστης προτρέπεται να δει τη βιβλιογραφία που παρέχεται στο τέλος του παρόντος).

Γενικότερα λοιπόν ο τελεστής \hat{X}^K είναι

$$\hat{X}^K(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \hat{X}^K e^{i\mathcal{H}t} \quad (4.73)$$

και επομένως η εξίσωση κίνησης που αντιστοιχεί προκύπτει άμεσα απ' την παραγωγή με τη χρονική παράγωγο να 'ναι

$$\frac{d}{dt} \hat{X}^K(t) = -i[\mathcal{H}, \hat{X}^K(t)] \quad (4.74)$$

Τελικός σκοπός μας είναι να βρούμε μια διαφορική εξίσωση για τον ίδιο το διαδότη, προκειμένου έπειτα να λυθεί και να προκύψει έκφραση γι' αυτόν.

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες συνιστώσες του ανύσματος που κατασκευάσαμε του φασικού χώρου, την ιδιότητα δηλαδή του χώρου πως

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij} \quad (4.75)$$

πράγμα που κωδικοποιούμε εντός του συμπλεκτικού πίνακα Ω , που ορίζεται ως

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

και μας δίνει τη δυνατότητα λοιπόν να γράψουμε

$$[\hat{X}^I, \hat{X}^J] = i(\Omega^{-1})^{IJ} \quad (4.77)$$

Η (4.74) εξαιτίας της (4.77) μπορεί να αναλυθεί στην πολύ πιο χρήσιμη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{X}^K(t) &= -i[\mathcal{H}, \hat{X}^K(t)] = -\frac{i}{2} \left[\sum_{I,J=0}^{2n} \hat{X}^I(t) G_{IJ} \hat{X}^J(t), \hat{X}^K(t) \right] \xrightarrow{G=G^T} \\ \frac{d}{dt} \hat{X}^K(t) &= -i \sum_{I,J=0}^{2n} \hat{X}^I(t) G_{IJ} [\hat{X}^J(t), \hat{X}^K(t)] \\ \frac{d}{dt} \hat{X}^K(t) &= \sum_{I,J=0}^{2n} \hat{X}^I(t) G_{IJ} (\Omega^{-1})^{JK} \xrightarrow{\substack{G=G^T \\ (\Omega^{-1})^T = -\Omega^{-1}}} \\ \frac{d}{dt} \hat{X}^K(t) &= - \sum_{I=0}^{2n} (\Omega^{-1} G)^K{}_I \hat{X}^I(t) \end{aligned} \quad (4.78)$$

και τελικώς

$$\frac{d}{dt} \hat{X}^K(t) = - \sum_{I=0}^{2n} \Lambda^K{}_I \hat{X}^I(t) \quad , \Lambda \equiv \Omega^{-1} G \quad (4.79)$$

Κανείς μπορεί να δει πως το πάνω διαθέτει λύση

$$\hat{X}^K(t) = e^{-t\Lambda} \hat{X}^K \quad (4.80)$$

οπότε ανακύπτει το ερώτημα αν οι δύο λύσεις ταυτίζονται. Προκειμένου να αποδείξουμε πως πράγματι οι δύο λύσεις ταυτίζονται επικαλούμαστε την έννοια της ροής:

Ορίζουμε ροή επί μιας πολλαπλότητας M μια συνάρτηση

$$\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

τέτοια ώστε

$$\varphi(0, p) = p$$

$$\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p) \quad (4.81)$$

Πράγματι, τόσο η (4.73) όσο και η (4.80) πληρούν τις ιδιότητες αυτές, οπότε για σαφήνεια γράφουμε αυτές τις συμπλεκτικές ροές ως

$$\varphi_1(t, \hat{X}) = e^{-i\mathcal{H}t} \hat{X} e^{+i\mathcal{H}t} \quad (4.82)$$

$$\varphi_2(t, \hat{X}) = S^t \hat{X}, \quad S^t \equiv e^{-t\Lambda} \quad (4.83)$$

Επικαλούμαστε τώρα ένα θεώρημα για την ισότητα δύο οποιονδήποτε ροών (όχι υποχρεωτικά συμπλεκτικών) που λέει

Θεώρημα

Δύο ροές ταυτίζονται όταν οι παράγωγοι ως προς την παράμετρο αυτών είναι ίσες στην μηδενική τιμή της παραμέτρου της καθεμιάς. Δηλαδή

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_1(t, \hat{X}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi_2(t, \hat{X}) \right|_{t=0} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \quad (4.84)$$

Απόδειξη

Κάθε ροή ικανοποιεί την παρακάτω απλή διαφορική εξίσωση όπου η συνάρτηση X στο δεύτερο μέλος εξαρτάται *μόνον* από τη ροή και όχι από t ή \hat{X} ,

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, p) = X(\varphi(t, p)) \quad (4.85)$$

Πράγματι, αν πάρουμε συγκεκριμένα την συνάρτηση $M \rightarrow M$:

$$X(p) \equiv \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, p) \right|_{t=0} \quad (4.86)$$

τότε

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, p) = \left. \frac{d}{ds} \varphi(t+s, p) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \varphi(s, \varphi(t, p)) \right|_{s=0} = X(\varphi(t, p)) \quad (4.87)$$

Με τη βοήθεια του λήμματος αυτού, αρκεί να παρατηρήσουμε πως για συγκεκριμένο σημείο $p \in M$ η (4.85) είναι μια απλή διαφορική εξίσωση (όπως προΐδεάσαμε στα πριν) της t μεταβλητής με αρχική συνθήκη $\varphi(0, p) = p$. Η διαφορική αυτή εξίσωση προσδιορίζεται πλήρως από το ποια είναι η X συνάρτηση και επομένως αν έχουμε δύο ροές με ίδια X συνάρτηση, δηλαδή *ίδια παράγωγο στην αρχή*, τότε και οι ροές ταυτίζονται. ■

Επιστρέφοντας στις ροές (4.82-4.83) και παρατηρώντας πως πληρούν το κριτήριο του θεωρήματος καθώς απ' τα (4.74, 4.78, 4.79) έχουμε

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_1(t, \hat{X}) \right|_{t=0} = -i[\mathcal{H}, \hat{X}^K(t)] = \left. \frac{d}{dt} \varphi_2(t, \hat{X}) \right|_{t=0} \quad (4.88)$$

και άρα οι ροές ισούνται, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Η μετάβαση απ' τη ροή φ_1 στη ροή φ_2 δεν έγινε τυχαία, αλλά με σκοπό όπως έχουμε δηλώσει την εύρεση μιας διαφορικής εξίσωσης για το διαδότη. Η ροή φ_2 συγκεκριμένα μπορεί να αναλυθεί όπως θα γίνει στα επόμενα αξιοποιώντας τη συμπλεκτική φύση αυτής ώστε να διατυπωθούν ιδιότητες για τον S^t πίνακα. Καθώς όμως

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow e^{-i\mathcal{H}t} \hat{X} e^{+i\mathcal{H}t} = S^t \hat{X} \quad (4.89)$$

μπορούμε να μεταβούμε απ' την εξίσωση (4.72), που με το νέο συμβολισμό γράφεται ως

$$e^{-i\mathcal{H}t} \hat{X}^k e^{+i\mathcal{H}t} |\psi(y, t)\rangle = y^k |\psi(y, t)\rangle \quad (4.90)$$

με k να τρέχει μόνο στους δείκτες που αντιστοιχούν στους τελεστές θέσης, στην εξίσωση

$$\sum_{I=0}^{2n} (S^t)^k_I \hat{X}^I |\psi(y, t)\rangle = y^k |\psi(y, t)\rangle \quad (4.91)$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που αναζητούμε αλλά χρειάζεται καλοπισμό και πολύ πιο σημαντικά χρειάζεται τις ιδιότητες του S^t πίνακα.

Για πιο λόγο λοιπόν ήταν σημαντικό να μεταβούμε στη ροή φ_2 ; Ο χώρος που μελετάμε ανήκει ως αντικείμενο μελέτης στη συμπλεκτική Γεωμετρία, όπου γίνεται λόγος για μια πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια 2-μορφή που είναι ακριβώς η (4.77). Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια ομάδα, τη συμπλεκτική ομάδα $Sp(2n)$ με στοιχεία P τέτοια ώστε δρώντας στο χώρο να διατηρούν τη συμπλεκτική ιδιότητα αυτού. Ζητούμε δηλαδή

$$[\hat{X}^J, \hat{X}^L] = i(\Omega^{-1})^{JL} \quad (4.92)$$

και ταυτοχρόνως ο μετασχηματισμός

$$\hat{X}' = P\hat{X} \quad (4.93)$$

δίνει

$$[\hat{X}^{I'}, \hat{X}^{K'}] = i(\Omega^{-1})^{IK} \quad (4.94)$$

οπότε η τελευταία απαίτηση παράγει

$$\begin{aligned} [P^I_J \hat{X}^J, P^K_L \hat{X}^L] &= i(\Omega^{-1})^{IK} \\ P^I_J P^K_L [\hat{X}^J, \hat{X}^L] &= i(\Omega^{-1})^{IK} \\ P^I_J P^K_L i(\Omega^{-1})^{JL} &= i(\Omega^{-1})^{IK} \\ P^I_J (\Omega^{-1})^{JL} (P^T)_L^K &= (\Omega^{-1})^{IK} \\ P\Omega^{-1}P^T &= \Omega^{-1} \end{aligned} \quad (4.94)$$

και καθώς κάθε στοιχείο ομάδας αντιστρέφεται αντιστρέφουμε τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με τον ορισμό $Q = P^{-1}$

$$\begin{aligned} (P\Omega^{-1}P^T)^{-1} &= (\Omega^{-1})^{-1} \\ (P^T)^{-1}\Omega P^{-1} &= \Omega \\ (P^{-1})^T \Omega P^{-1} &= \Omega \end{aligned} \quad (4.95)$$

και τελικώς

$$Q^T \Omega Q = \Omega, \quad \forall Q \in Sp(2n) \quad (4.96)$$

η καθοριστική ιδιότητα της συμπλεκτικής ομάδας.

Εναλλακτικά βρίσκουμε τις ιδιότητες του γεννήτορα ώστε να συμφωνεί με την (4.96). Αν λοιπόν γράψουμε ένα γενικό στοιχείο όπως εκείνο της (4.83):

$$S^t \equiv e^{-t\Lambda} \quad (4.97)$$

τότε απ' την (4.96) έχουμε

$$(e^{-t\Lambda})^T \Omega e^{-t\Lambda} = \Omega \quad (4.98)$$

και καθώς Λ στοιχείο της $sp(2n)$ άλγεβρας Lie, της αντίστοιχης ομάδας $Sp(2n)$, τότε για $t \ll 1$ δίνει

$$(1 - t\Lambda^T)\Omega(1 - t\Lambda) = \Omega \quad (4.99)$$

$$\Lambda^T \Omega + \Omega \Lambda = 0 \quad (4.100)$$

Αυτή είναι η ιδιότητα που ικανοποιεί ο γεννήτορας προκειμένου πράγματι να παράγει στοιχείο της συμπλεκτικής ομάδας.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα σχετικά με τη σημασία της ροής φ_2 . Καθώς στην (4.79) προέκυψε $\Lambda \equiv \Omega^{-1}G$ και βλέπουμε πως αυτό πληρεί την (4.100):

$$\Lambda^T \Omega + \Omega \Lambda = (\Omega^{-1}G)^T \Omega + \Omega \Omega^{-1}G = G^T (\Omega^T)^{-1} \Omega + G \quad (4.101)$$

και αυτό μηδενίζεται καθώς $\Omega^T = -\Omega$ και $G^T = G$ απ' την ανάλυση μας ήδη απ' την αρχή του κεφαλαίου. Άρα το Λ της (4.79) πληρεί πράγματι την (4.100) για τους γεννήτορες και ισοδύναμα αυτό σημαίνει πως κάθε στοιχείο $e^{-t\Lambda}$ της φ_2 ροής ανήκει στη συμπλεκτική ομάδα $\text{Sp}(2n)$ και εξ ορισμού διατηρεί τη συμπλεκτική δομή αυτής! Η ονομασία "συμπλεκτική ροή" είναι πλέον δικαιολογημένη.

Βέβαια η σημασία της ροής φ_2 για εμάς, σε σχέση με την εξαγωγή του διαδότη που ψάχνουμε, είναι η σύνδεσή της με τη φ_1 , η οποία σύνδεση δίνει τη διαφορική εξίσωση (4.91). Τώρα που δείξαμε πως κάθε στοιχείο S^t πληρεί τη θεμελιώδη ιδιότητα (4.96), γράφοντας το στοιχείο αυτό σε μορφή μπλοκ-πίνακα

$$S^t \equiv \begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

μπορούμε να εξάγουμε τις ιδιότητες που ισχύουν για κάθε $n \times n$ μπλοκ S_i^t , $i = 1,2,3,4$ εξαιτίας της ιδιότητας (4.96). Έτσι

$$\begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

$$\begin{pmatrix} (S_1^t)^T & (S_3^t)^T \\ (S_2^t)^T & (S_4^t)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_3^t & S_4^t \\ -S_1^t & -S_2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

και άρα

$$(S_1^t)^T S_3^t = (S_3^t)^T S_1^t \quad (4.105)$$

$$(S_2^t)^T S_4^t = (S_4^t)^T S_2^t \quad (4.106)$$

$$(S_1^t)^T S_4^t - (S_3^t)^T S_2^t = I \quad (4.107)$$

$$(S_4^t)^T S_1^t - (S_2^t)^T S_3^t = I \quad (4.108)$$

Μια άλλη τετράδα εξισώσεων προκύπτει από την εναλλακτική μορφή της (4.96) που είδαμε στο τέλος της (4.94), δηλαδή $P\Omega^{-1}P^T = \Omega^{-1}$, που επίσης ισχύει για κάθε στοιχείο P της $\text{Sp}(2n)$. Συνεπώς

$$\begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.109)$$

$$\begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

$$\begin{pmatrix} S_2^t & -S_1^t \\ S_4^t & -S_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (S_1^t)^T & (S_3^t)^T \\ (S_2^t)^T & (S_4^t)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

με αποτέλεσμα τις σχέσεις

$$S_2^t(S_1^t)^T = S_1^t(S_2^t)^T \quad (4.112)$$

$$S_4^t(S_3^t)^T = S_3^t(S_4^t)^T \quad (4.113)$$

$$S_1^t(S_4^t)^T - S_2^t(S_3^t)^T = I \quad (4.114)$$

$$S_4^t(S_1^t)^T - S_3^t(S_2^t)^T = I \quad (4.115)$$

Απ' όλες τις παραπάνω σχέσεις, ο αντίστροφος πίνακας S^{-t} κατασκευάζεται εύκολα.

Γράφουμε

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (4.116)$$

και συγκρίνοντας με τις (4.105-4.108) μαντεύουμε εύκολα

$$\begin{pmatrix} (S_4^t)^T & -(S_2^t)^T \\ -(S_3^t)^T & (S_1^t)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^t & S_2^t \\ S_3^t & S_4^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

Δηλαδή

$$(S^t)^{-1} = S^{-t} = \begin{pmatrix} S_1^{-t} & S_2^{-t} \\ S_3^{-t} & S_4^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S_4^t)^T & -(S_2^t)^T \\ -(S_3^t)^T & (S_1^t)^T \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο συμβολισμός μετά το δεύτερο "ίσον" είναι παραπλανητικός καθώς τα S_i^{-t} είναι τα $n \times n$ μπλοκ του $(S^t)^{-1}$ πίνακα και δεν υπονοεί σε καμία περίπτωση ο αρνητικός εκθέτης εδώ σχέσεις όπως $S_i^{-t} S_i^t = I_{n \times n}$ (**ΛΑΘΟΣ**). Παρ' όλα αυτά κρατάμε αυτόν το συμβολισμό για λόγους απλότητας αν και πιο σωστό θα ήταν μάλλον το $(S^{-t})_i$.

Με τη βοήθεια των πάνω ιδιοτήτων θα μπορούμε να υπολογίσουμε τη λύση. Πρώτα όμως ας γραφεί η (4.91) με τη νέα γραφή των μπλοκ πινάκων S_i^t , οπότε καθώς ο δείκτης $k = 0, 1, \dots, n$ μόνο, αντί για μέχρι $2n$:

$$(S_1^t \hat{x} + S_2^t \hat{p}) |\psi(y, t)\rangle = \vec{y} |\psi(y, t)\rangle \quad (4.119)$$

όπου ας σημειωθεί πως από ισότητα στοιχείων πήγαμε σε ισότητα ανυσμάτων.

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\langle x |$ έχουμε

$$(S_1^t \vec{x} - i S_2^t \vec{\nabla}) \langle x | \psi(y, t)\rangle = \vec{y} \langle x | \psi(y, t)\rangle \quad (4.120)$$

Ορίζουμε

$$\psi_y^t(x) \equiv \langle x | \psi(y, t)\rangle \quad (4.121)$$

για ευκολία, οπότε καταλήγουμε στη σχέση που θα επιχειρήσουμε στα επόμενα να λύσουμε

$$(S_1^t \vec{x} - i S_2^t \vec{\nabla}) \psi_y^t(x) = \vec{y} \psi_y^t(x) \quad (4.122)$$

Από εδώ και πέρα ακολουθούν πράξεις, οπότε προς χάριν του βιαστικού αναγνώστη παραθέτουμε τις υποθέσεις και ιδιότητες με βάση τις οποίες χτίζουμε τη λύση στα επόμενα και μέχρι το τέλος του υποκεφαλαίου. Η λύση χτίζεται με βάση την υπόθεση πως

- ο πίνακας S_2^t αντιστρέφεται
- και με χρήση των ιδιοτήτων
 - ο τελεστής χρονικής εξέλιξης είναι μοναδιαίος
 - ισχύει η δεύτερη συνθήκη του ορισμού της ροής (4.81)
 - ισχύει η εξίσωση Schrödinger, (4.69), για την κυματοσυνάρτηση

Πιο αναλυτικά αμέσως τώρα.

Επιλύοντας την εξίσωση (4.122) ως προς το ανάδελτα δίνει

$$(-iS_2^t \vec{\nabla})\psi_y^t(x) = (\vec{y} - S_1^t \vec{x}) \psi_y^t(x) \quad (4.123)$$

$$\vec{\nabla}\psi_y^t(x) = i(S_2^t)^{-1}(\vec{y} - S_1^t \vec{x}) \psi_y^t(x) \quad (4.124)$$

όπου υποθέσαμε πως το αντίστροφο $(S_2^t)^{-1}$ υπάρχει. Ας μην μπερδευτεί κανείς με το S_2^{-t} στην (4.118) που δεν είναι ο αντίστροφος του S_2^t αλλά το μπλοκ του αντίστροφου του πίνακα S^t εξ ολοκλήρου. Άρα στην (4.118) δεν έχουμε υπολογίσει το αντίστροφο που είδαμε εδώ και μας είναι άγνωστο αν πράγματι ο S_2^t αντιστρέφεται. Αν όχι, η παρακάτω λύση δεν ισχύει. Η λύση της (4.124) λοιπόν:

$$\psi_y^t(x) = f(y, S^t) \exp\left(-\frac{i}{2}\langle x, (S_2^t)^{-1}S_1^t x \rangle + i\langle (S_2^t)^{-1}y, x \rangle\right) \quad (4.125)$$

καθώς το $(S_2^t)^{-1}S_1^t$ συμμετρικό:

$$\begin{aligned} (S_2^t)^{-1}S_1^t &= [(S_2^t)^{-1}S_1^t]^T \\ S_1^t &= S_2^t[(S_2^t)^{-1}S_1^t]^T \\ S_1^t &= S_2^t(S_1^t)^T((S_2^t)^{-1})^T \\ S_1^t &= S_2^t(S_1^t)^T((S_2^t)^T)^{-1} \\ S_1^t(S_2^t)^T &= S_2^t(S_1^t)^T \end{aligned} \quad (4.126)$$

που είναι η (4.112) και άρα έχει δειχθεί αληθής.

Επικαλούμαστε τώρα την πρώτη από τις ιδιότητες που αναφέραμε, ότι δηλαδή ο χρονικός τελεστής είναι μοναδιαίος και άρα

$$\psi_y^t(x) = \langle x | e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle = \overline{\psi_x^{-t}(y)} \quad (4.127)$$

$$\Rightarrow \psi_y^t(x) = \overline{f(x, S^{-t})} \exp\left(\frac{i}{2}\langle y, (S_2^{-t})^{-1}S_1^{-t} y \rangle - i\langle (S_2^{-t})^{-1}x, y \rangle\right) \quad (4.128)$$

$$\stackrel{(4.118)}{\implies} \psi_y^t(x) = \overline{f(x, S^{-t})} \exp\left(\frac{i}{2}\langle y, (S_2^{-t})^{-1}S_1^{-t} y \rangle + i\langle x, (S_2^t)^{-1}y \rangle\right) \quad (4.129)$$

Φέραμε τη λύση σε αυτήν την εναλλακτική μορφή ώστε συγκρίνοντας (4.125) και (4.129) να περιορίσουμε τη λύση σε

$$\psi_y^t(x) = N(S^t)\Phi_y^t(x) \quad (4.130)$$

όπου

$$\Phi_y^t(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\langle y, (S_2^{-t})^{-1}S_1^{-t} y \rangle - \frac{i}{2}\langle x, (S_2^t)^{-1}S_1^t x \rangle + i\langle (S_2^t)^{-1}y, x \rangle\right) \quad (4.131)$$

$$\stackrel{(4.118)}{\implies} \Phi_y^t(x) = \exp\left(-\frac{i}{2}\langle y, S_4^t(S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2}\langle x, (S_2^t)^{-1}S_1^t x \rangle + i\langle (S_2^t)^{-1}y, x \rangle\right) \quad (4.132)$$

και όπου πλέον ο ακαθόριστος συντελεστής N εξαρτάται μόνο από το S^t , που ήταν ο στόχος της σύγκρισης και άρα της εναλλακτικής γραφής της λύσης. Οφείλει βέβαια

$$N(S^{-t}) = \overline{N(S^t)} \quad (4.133)$$

Για τον περαιτέρω προσδιορισμό του $N(S^t)$ επικαλούμαστε τη δεύτερη ιδιότητα της ροής:

$$\begin{aligned} \psi_y^{s+t}(x) &= \langle x | e^{-i(s+t)\mathcal{H}} | y \rangle = \langle x | e^{-is\mathcal{H}} e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle \\ &= \int d^n u \langle x | e^{-is\mathcal{H}} | u \rangle \langle u | e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle = \int d^n u \psi_u^s(x) \psi_y^t(u) \end{aligned} \quad (4.134)$$

και θέτοντας $x = y = 0$:

$$N(S^{s+t}) = N(S^s)N(S^t) \int d^n u \Phi_u^s(0)\Phi_0^t(u) \quad (4.135)$$

Αναλύουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} & \int d^n u \Phi_u^s(0)\Phi_0^t(u) \\ &= \int d^n u \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\langle u, S_4^s(S_2^s)^{-1} u \rangle\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\langle u, (S_2^t)^{-1} S_1^t u \rangle\right) \right] \\ &= \int d^n u \exp\left(-\frac{i}{2}\langle u, [S_4^s(S_2^s)^{-1} + (S_2^t)^{-1} S_1^t] u \rangle\right) \end{aligned} \quad (4.136)$$

που είναι ολοκλήρωμα Gauss $\int d^n x \exp(-\pi\langle x, Ax \rangle) = (\det A)^{-1/2}$ και άρα

$$\begin{aligned} \int d^n u \Phi_u^s(0)\Phi_0^t(u) &= (-2\pi i)^{\frac{n}{2}} [\det((S_4^s(S_2^s)^{-1} + (S_2^t)^{-1} S_1^t))]^{-\frac{1}{2}} \\ &= (-2\pi i)^{\frac{n}{2}} [\det(S_2^s)^{-1} \det(S_2^t)^{-1} \det((S_2^t S_4^s + S_1^t S_2^s))]^{-\frac{1}{2}} \\ &= (-2\pi i)^{\frac{n}{2}} [\det(S_2^s)^{-1} \det(S_2^t)^{-1} \det((S^t S^s)_2)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.137)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.135) προκύπτουν

$$N(S^{s+t}) = N(S^s)N(S^t) (-2\pi i)^{\frac{n}{2}} [\det(S_2^s)^{-1} \det(S_2^t)^{-1} \det((S^t S^s)_2)]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.138)$$

$N(S^{s+t}) \det((S^{s+t})_2)^{1/2} = N(S^s)N(S^t) (-2\pi i)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^s)^{1/2} \det(S_2^t)^{1/2}$
 οπότε ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $R(S^t)$ μέσω της σχέσης

$$N(S^t) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n/2} \det(S_2^t)^{-1/2} R(S^t) \quad (4.139)$$

η (4.138) απλοποιείται στην

$$R(S^{s+t}) = R(S^s)R(S^t) \quad (4.140)$$

Μας μένει λοιπόν, για τον υπολογισμό του διαδότη, ο υπολογισμός του $R(S^t)$. Στη συνέχεια θα δείξουμε πως

$$R(S^t) = 1 \quad \forall t \quad (4.141)$$

και αυτό θα γίνει αξιοποιώντας το γεγονός πως το $\psi_y^t(x)$ οφείλει να πληρεί την εξίσωση Schrödinger. Σε πρώτη ανάλυση όμως το μέτρο προκύπτει εύκολα απ' τις (4.133), (4.139) και (4.140):

$$N(S^{-t}) = \overline{N(S^t)} \quad (4.142)$$

$$\Rightarrow |N(S^{-t})| = |\overline{N(S^t)}| \quad (4.143)$$

$$\Rightarrow |N(S^{-t})| = |N(S^t)| \quad (4.144)$$

$$\Rightarrow \left| \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n/2} \det(S_2^{-t})^{-1/2} R(S^{-t}) \right| = \left| \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n/2} \det(S_2^t)^{-1/2} R(S^t) \right| \quad (4.145)$$

$$\Rightarrow |\det(S_2^{-t})^{-1/2}| |R(S^{-t})| = |\det(S_2^t)^{-1/2}| |R(S^t)| \quad (4.146)$$

και καθώς από (4.118) είναι $\det(S_2^{-t}) = \det(-(S_2^t)^T) = (-1)^n \det(S_2^t)$ άρα

$$|R(S^{-t})| = |R(S^t)| \quad (4.147)$$

Η (4.140) τέλος δίνει:

$$|R(S^{s+t})| = |R(S^s)| |R(S^t)| \quad (4.148)$$

$$|R(S^t)| |R(S^{-t})| = |R(S^0)| = |R(I)| \quad (4.149)$$

$$\stackrel{(4.147)}{\implies} |R(S^t)|^2 = |R(I)| \quad (4.150)$$

και το δεξί μέλος προκύπτει μονάδα όπως φαίνεται αν θέσουμε $t = 0$. Δείξαμε λοιπόν πως

$$|R(S^t)| = 1 \quad (4.151)$$

Δηλαδή το $R(S^t)$ είναι απλά μία φάση.

Η εξίσωση Schrödinger θα χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της φάσης αυτής. Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\frac{d}{dt} + i\mathcal{H}\right)\psi_y^t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\psi_y^t(x) = -i\mathcal{H}\psi_y^t(x) \quad (4.152)$$

Η έκφραση της λύσης μέχρι εδώ, από τις (4.130), (4.132) και (4.139), είναι:

$$\begin{aligned} \psi_y^t(x) &= \langle x|e^{-it\mathcal{H}}|y\rangle = R(S^t) \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \dots \\ &\dots \exp\left(-\frac{i}{2}\langle y, S_4^t(S_2^t)^{-1}y\rangle - \frac{i}{2}\langle x, (S_2^t)^{-1}S_1^t x\rangle + i\langle (S_2^t)^{-1}y, x\rangle\right) \end{aligned} \quad (4.153)$$

Οπότε, για τον καθορισμό της φάσης $R(S^t)$, που εξαρτάται μόνο από το t , αρκεί να συγκρίνουμε τις εκφράσεις για $\frac{d}{dt}\psi_y^t(x)$ και $-i\mathcal{H}\psi_y^t(x)$. Η σύγκριση γίνεται στο *Παράρτημα Β* και απ' αυτή φαίνεται πως η χρονική παράγωγος της φάσης $R(S^t)$ μηδενίζεται.

Έχοντας δείξει πως

$$\frac{d}{dt}R(S^t) = 0 \quad (4.154)$$

αρκεί να βρεθεί το $R(S^t)$ για τυχαίο t . Πράγματι, αν πάρουμε $t = 0$, δηλαδή $R(S^0) = R(I)$ τότε, απ' τη (4.140), έχουμε

$$R(S^{0+0}) = R(S^0)R(S^0) \Rightarrow R(S^0) = R(I) = 1 \quad (4.155)$$

και φτάσαμε στο ζητούμενο

$$R(S^t) = 1 \quad \forall t \quad (4.156)$$

Ο διαδότης είναι πλήρως καθορισμένος σε αυτό το σημείο:

$$\begin{aligned} \psi_y^t(x) &= \langle x|e^{-it\mathcal{H}}|y\rangle = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{i}{2}\langle y, S_4^t(S_2^t)^{-1}y\rangle - \frac{i}{2}\langle x, (S_2^t)^{-1}S_1^t x\rangle + i\langle (S_2^t)^{-1}y, x\rangle\right) \end{aligned} \quad (4.157)$$

Κανείς μπορεί να επαληθεύσει την αλήθεια της έκφρασης δοκιμάζοντας να βρεί το διαδότη του απλού αρμονικού ταλαντωτή, του οποίου η έκφραση είναι ήδη γνωστή. Αν λοιπόν πάρουμε

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2) \quad (4.158)$$

είναι εύκολο να δούμε

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{pmatrix} = \Omega^{-1}G = \begin{pmatrix} G_3 & G_4 \\ -G_1 & -G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned}
S^t = e^{-\Lambda t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda t)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda)^{2n}}{(2n)!} t^{2n} - \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda)^{2n}}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{(2n)!} t^{2n} - \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\
&= I \cos(t) - \Lambda \sin(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.160}$$

$$\langle x | e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{1/2} (-\sin(t))^{-1/2} \exp \left(\frac{i}{2} \cot(t) (x^2 + y^2) - \frac{ixy}{\sin(t)} \right) \tag{4.161}$$

$$\langle x | e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle = \left(\frac{-i}{2\pi \sin(t)} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{i}{2} \cot(t) (x^2 + y^2) - \frac{ixy}{\sin(t)} \right) \tag{4.162}$$

που πράγματι είναι η έκφραση που δίνεται στη βιβλιογραφία. Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, στο Παράρτημα Γ γίνεται η επαλήθευση της λύσης για το σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα προχωρήσουμε με την εφαρμογή της έκφρασης που βρήκαμε για τη Χαμιλτονιανή της θεωρίας μας.

4.6. Η κλειστή μορφή της Λαγκρανζιανής EH

Η μορφή της ενεργού Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg προέκυψε στην (4.57) ως συνάρτηση ενός διαδότη. Τώρα που επιστρατέψαμε τα απαραίτητα εργαλεία για την κατασκευή της λύσης του γενικότερου προβλήματος της εύρεσης διαδότη για μια τετραγωνική Χαμιλτονιανή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που κατασκευάσαμε στην ειδικότερη περίπτωση που μελετάμε. Δηλαδή

- Εντοπίζουμε τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος.
- Απομονώνουμε απ' αυτήν τον πίνακα G .
- Κατασκευάζουμε απ' το G το γεννήτορα Λ
- και απ' το γεννήτορα το συμπλεκτικό στοιχείο S^t , δηλαδή έναν $2n \times 2n$ πίνακα.
- Έχοντας το S^t κατασκευάζουμε το διαδότη απ' την (4.157).

Και ειδικά για εδώ, τέλος θα πάρουμε το διαδότη και θα τον εισάγουμε στον τύπο της ενεργού Λαγκρανζιανής.

Έχουμε ήδη γράψει τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος, βλ. (4.58), αλλά όπως τονίσαμε μόνο η \mathcal{H}_1 μένει εντός του διαδότη, οπότε και αυτό θα χρειαστεί να φέρουμε στην τετραγωνική μορφή (4.63) που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $s \rightarrow -t/2$ που θα φέρει την (4.57) στη μορφή

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t} e^{\frac{t}{2}} e^{i\frac{t}{2}m^2} \text{tr} \left\langle x \left| e^{i\frac{t}{2}\mathcal{H}_{pt}} \right| x \right\rangle \tag{4.163}$$

Ο διαδότης (4.60) πλέον είναι

$$\left\langle x \left| e^{i\frac{t}{2}\mathcal{H}_{pt}} \right| y \right\rangle = \left\langle x \left| e^{i\frac{t}{2}\mathcal{H}_1 + i\frac{t}{4}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\hat{x})} \right| y \right\rangle = \left\langle x \left| e^{i\frac{t}{2}\mathcal{H}_1} \right| y \right\rangle e^{+i\frac{t}{4}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(y)} \tag{4.164}$$

και η Χαμιλτονιανή

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\Pi^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_\mu - qA_\mu(\hat{x})\right)^2 \quad (4.165)$$

μιας και η επίλυση που έγινε ήταν για διαδότες της μορφής $\langle x|e^{-it\mathcal{H}}|y\rangle$. Η επίλυση της ενεργού Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg έχουμε δηλώσει πως είναι αυτή που αφορά διαδικασίες της QED σε χαμηλό ενεργειακό επίπεδο, για ενέργειες $\hbar\omega \ll m_e c^2$, για σταθερό HM υπόβαθρο. Η απαίτηση λοιπόν $F_{\mu\nu} = \text{σταθ.}$ επιτυγχάνεται μέσω της βαθμίδας Schwinger-Fock:

$$A_\mu = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu \quad (4.166)$$

όπου εδώ τα $F_{\mu\nu}$ είναι σταθεροί συντελεστές. Έτσι, η Χαμιλτονιανή (4.165) έρχεται στην τετραγωνική μορφή (4.63) και πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε το πρώτο μισό της (4.164). Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{2}\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_\mu - qA_\mu(\hat{x})\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_\mu + \frac{q}{2}F_{\mu\nu}\hat{x}^\nu\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\kappa\mu}\left(\hat{p}_\kappa + \frac{q}{2}F_{\kappa\lambda}\hat{x}^\lambda\right)\left(\hat{p}_\mu + \frac{q}{2}F_{\mu\nu}\hat{x}^\nu\right) \end{aligned} \quad (4.167)$$

και συνεπώς ο πίνακας G της τετραγωνικής Χαμιλτονιανής έχει τη μορφή

$$G = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{4}F^T\eta F & \frac{q}{2}F^T\eta \\ \frac{q}{2}\eta F & \eta \end{pmatrix} \quad (4.168)$$

$$\Rightarrow \Lambda = \Omega^{-1}G = \begin{pmatrix} \frac{q}{2}\eta F & \eta \\ -\frac{q^2}{4}F^T\eta F & -\frac{q}{2}F^T\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{2}\eta F & \eta \\ \frac{q^2}{4}F\eta F & \frac{q}{2}F\eta \end{pmatrix} \quad (4.169)$$

Για διευκόλυνση ορίζουμε $\tilde{F} \equiv \frac{q}{2}F$ οπότε

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \eta\tilde{F} & \eta \\ \tilde{F}\eta\tilde{F} & \tilde{F}\eta \end{pmatrix} \quad (4.170)$$

και καθώς θα χρειαστεί υπολογίζουμε και τις διάφορες δυνάμεις

$$\Lambda^2 = 2 \begin{pmatrix} \eta\tilde{F}\eta\tilde{F} & \eta\tilde{F}\eta \\ \tilde{F}\eta\tilde{F}\eta\tilde{F} & \tilde{F}\eta\tilde{F}\eta \end{pmatrix}, \dots \quad \Lambda^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} (\eta\tilde{F})^n & (\eta\tilde{F})^{n-1}\eta \\ \tilde{F}(\eta\tilde{F})^n & (\tilde{F}\eta)^n \end{pmatrix} \quad (4.171)$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει με μαθηματική επαγωγή. Το συμπλεκτικό στοιχείο τώρα:

$$S^t = e^{-t\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \Lambda^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} 2^{n-1} \begin{pmatrix} (\eta\tilde{F})^n & (\eta\tilde{F})^{n-1}\eta \\ \tilde{F}(\eta\tilde{F})^n & (\tilde{F}\eta)^n \end{pmatrix} \quad (4.172)$$

και κάνοντας πράξεις σε κάθε μπλοκ χωριστά, εκτελώντας την άθροιση ώστε να εμφανιστεί το άθροισμα που αντιστοιχεί σε εκθετικό του $-2t\eta\tilde{F}$:

$$S^t = \begin{pmatrix} e^{-t\eta\tilde{F}} \cosh(t\eta\tilde{F}) & -e^{-t\eta\tilde{F}} \sinh(t\eta\tilde{F}) \tilde{F}^{-1} \\ -\tilde{F} e^{-t\eta\tilde{F}} \sinh(t\eta\tilde{F}) & \tilde{F} e^{-t\eta\tilde{F}} \cosh(t\eta\tilde{F}) \tilde{F}^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.173)$$

Έχουμε δηλαδή όλα τα μπλοκ του S^t , οπότε μαζί με το αντίστροφο του S_2^t

$$(S_2^t)^{-1} = -\tilde{F} e^{t\tilde{F}} [\sinh(t\tilde{F})]^{-1} \quad (4.174)$$

$$= -\tilde{F} [\cosh(t\tilde{F}) + \sinh(t\tilde{F})] [\sinh(t\tilde{F})]^{-1} = -\tilde{F} [\coth(t\tilde{F}) + I]$$

έχουμε όλα τα μεγέθη που χρειάζεται να αντικατασταθούν στον τύπο του διαδότη (4.157).

Ξαναγράφουμε την (4.157) ως:

$$\langle x | e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle = A \cdot B \quad (4.175)$$

με

$$A = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.176)$$

$$B = \exp \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right) \quad (4.177)$$

Όμως

$$S_4^t (S_2^t)^{-1} = (S_2^t)^{-1} S_1^t = -\tilde{F} \coth(t\tilde{F}) \quad (4.178)$$

που είναι συμμετρικός πίνακας, άρα η παράσταση B καταλήγει να 'χει τη μορφή

$$B = \exp \left(\frac{i}{2} \langle (y-x), \tilde{F} \coth(t\tilde{F}) (y-x) \rangle - i \langle x, \tilde{F} y \rangle \right) \quad (4.179)$$

και συνεπώς είναι αδιάφορη για τον υπολογισμό της Λαγκρανζιανής ΕΗ καθώς όταν ταυτίσουμε τα άκρα του διαδότη, δηλ. $x = y$, είναι $B = 1$ καθώς \tilde{F} αντισυμμετρικός.

Από το διαδότη μένει λοιπόν (για $x = y$ και $n = 4$) το

$$\langle x | e^{-it\mathcal{H}} | x \rangle = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{4}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\pi^2} [\det(S_2^t)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \quad (4.180)$$

(Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να βρούμε το διαδότη δεν χρειάζεται επιπλέον μαθηματικά εργαλεία αλλά ας προσέξω πως έχει αυθαιρεσία προσήμου, όπως επισημάναμε και στο Παράρτημα Γ.)

Δηλαδή χρειαζόμαστε την ορίζουσα του (4.174), δηλαδή το γινόμενο οριζουσών:

$$\det(S_2^t)^{-1} = \det(\tilde{F}) \det(e^{t\tilde{F}}) \det \left\{ [\sinh(-t\tilde{F})]^{-1} \right\} \quad (4.181)$$

Η ορίζουσα του εκθετικού ισούται με μονάδα καθώς

$$\begin{aligned} (e^{t\tilde{F}})^T &= e^{t\tilde{F}^T} = e^{-t\tilde{F}} = \eta^{-1} e^{-t\tilde{F}} \eta \\ \det \left[(e^{t\tilde{F}})^T \right] &= \det[\eta^{-1} e^{-t\tilde{F}} \eta] \\ \det[e^{t\tilde{F}}] &= \det[\eta^{-1}] \det[e^{-t\tilde{F}}] \det[\eta] \\ \det[e^{t\tilde{F}}] &= [\det[e^{t\tilde{F}}]]^{-1} \\ [\det[e^{t\tilde{F}}]]^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.182)$$

και λόγω συνέχειας της ορίζουσας στη μεταβλητή t καταλήγουμε στη θετική τιμή. Οι άλλες δύο ορίζουσες προκύπτουν με γνωστή μέθοδο, δηλαδή αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα ηF (που υπάρχει και στις δύο) με τη βοήθεια χαρακτηριστικών πολυωνύμων. Αν συμβολίσουμε μάλιστα τα δύο αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητισμού ως

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \quad \mathcal{G} = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (4.183)$$

τότε ορίζονται οι ποσότητες a και b έτσι ώστε

$$\mathcal{F} = \frac{a^2 - b^2}{2} \quad \mathcal{G} = ab \quad (4.184)$$

δηλαδή

$$a = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}} \quad b = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}} \quad (4.185)$$

Με τη βοήθεια αυτών, οι ιδιοτιμές που θα βρούμε εκφράζονται ως

$$\lambda_i = \pm a, \pm ib \quad (4.186)$$

οπότε

$$\det(\eta F) = -a^2 b^2 \quad (4.187)$$

και $\det(F) = \det(\eta^{-1}) \det(\eta F) = a^2 b^2$

Άρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός πως έχουμε 4×4 πίνακες για να βγάλουμε συντελεστές εκτός της ορίζουσας,

$$\det(\tilde{F}) = \left(\frac{q}{2}\right)^4 \det(F) = \left(\frac{q}{2}\right)^4 a^2 b^2 \quad (4.188)$$

και

$$\det[\sinh(-t\eta\tilde{F})] = (-1)^4 \det[\sinh(t\eta\tilde{F})] = \det\left[\sinh\left(\frac{q}{2}t\eta F\right)\right] = \dots \quad (4.189)$$

Επικαλούμαστε ορθογώνιο μετασχηματισμό U που να μετατρέπει το ηF σε διαγώνιο πίνακα D , δηλαδή $U\eta F U^{-1} = D$.

$$\begin{aligned} \dots &= \det\left[U^{-1} \sinh\left(\frac{q}{2}tD\right) U\right] = \det\left[\sinh\left(\frac{q}{2}tD\right)\right] = \prod_i \sinh\left(\frac{q}{2}t\lambda_i\right) \\ &= \sinh^2\left(\frac{q}{2}at\right) \sinh^2\left(i\frac{q}{2}bt\right) = -\sinh^2\left(\frac{q}{2}at\right) \sin^2\left(\frac{q}{2}bt\right) \end{aligned} \quad (4.190)$$

Μαζεύουμε λοιπόν τα αποτελέσματα και η (4.180) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-it\mathcal{H}} | x \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} [\det(S_2^t)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[\det(\tilde{F}) \det(e^{t\eta\tilde{F}}) \det\left\{[\sinh(-t\eta\tilde{F})]^{-1}\right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4 a^2 b^2}{-\sinh^2\left(\frac{q}{2}at\right) \sin^2\left(\frac{q}{2}bt\right)} \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\pi^2} \left[i \frac{q^2 ab}{4 \sinh\left(\frac{q}{2}at\right) \sin\left(\frac{q}{2}bt\right)} \right] \end{aligned} \quad (4.191)$$

και το ίχνος αυτού είναι το ίδιο. Αν τώρα πάμε στην πλήρη έκφραση (4.164) θα πρέπει να υπολογίσουμε και το ίχνος (θυμίζουμε πως πήραμε $x = y$)

$$\text{tr}\left(e^{+i\frac{t}{4}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)}\right) = \dots \quad (4.192)$$

Ο πίνακας σF μπορεί να βρεθεί πως έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_i = \pm 2i(a \pm ib) \quad (4.193)$$

οπότε το ίχνος (4.192) ισούται με

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(e^{+i\frac{t}{4}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{tr} \left(i\frac{t}{4}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x) \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i\frac{t}{4}q \right)^n \text{tr} \left(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x) \right)^n \end{aligned} \quad (4.194)$$

και χρησιμοποιώντας πάλι $U\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)U^{-1} = D$ και την κυκλική ιδιότητα του ίχνους, γίνεται να μεταφερθούμε στις αντίστοιχες δυνάμεις του διαγώνιου πίνακα, οπότε

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(e^{+i\frac{t}{4}q\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i\frac{t}{4}q \right)^n \text{tr}(D^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i\frac{t}{4}q \right)^n \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i^n \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i\frac{t}{4}q \right)^n \lambda_i^n \right] = \sum_{i=1}^4 e^{i\frac{t}{4}q\lambda_i} \\ &= e^{i\frac{t}{4}q2i(a+ib)} + e^{-i\frac{t}{4}q2i(a+ib)} + e^{i\frac{t}{4}q2i(a-ib)} + e^{-i\frac{t}{4}q2i(a-ib)} \\ &= e^{-\frac{t}{2}q(a+ib)} + e^{\frac{t}{2}q(a+ib)} + e^{-\frac{t}{2}q(a-ib)} + e^{\frac{t}{2}q(a-ib)} \\ &= 4 \cosh \left(\frac{q}{2}at \right) \cos \left(\frac{q}{2}bt \right) \end{aligned} \quad (4.195)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να αντικαταστήσουμε το ίχνος εντός της (4.163). Η έκφραση της Λαγκρανζιανής είναι λοιπόν

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{q^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t} e^{\frac{\varepsilon t}{2}} e^{i\frac{t}{2}m^2} \left\{ ab \coth \left(\frac{q}{2}at \right) \cot \left(\frac{q}{2}bt \right) \right\} \quad (4.196)$$

Καθώς δεν χρειάζεται πια, μπορούμε να αντιστρέψουμε την αλλαγή μεταβλητής που κάναμε αρχικά για να έρθει η Χαμιλτονιανή στην τετραγωνική μορφή για την οποία είχαμε διαδότη, δηλαδή κάνουμε $t \rightarrow -2s$ και παίρνουμε πίσω την παράμετρο Schwinger που είχαμε αρχικά. Ακόμη παραλείπουμε στη συνέχεια τον όρο με το ε .

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{q^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \{ ab \coth(qas) \cot(qbs) \} \quad (4.197)$$

ή για συντομία συμβολίζουμε

$$\Delta\mathcal{L}_{eff} = \frac{q^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \{ ab \coth(qas) \cot(qbs) \} \quad (4.198)$$

Προκειμένου η έκφραση να γραφεί ως προς αδιάστατες μεταβλητές, ορίζουμε

$$a' = \frac{q}{m^2}a = \frac{1}{E_{cr}}a \quad \text{και} \quad b' = \frac{q}{m^2}b = \frac{1}{E_{cr}}b \quad (4.199)$$

καθώς τα a και b είχαν διαστάσεις ηλεκτρικού (και άρα, αφού $c = 1$, επίσης μαγνητικού) πεδίου. Το πεδίο

$$E_{cr} = \frac{m^2}{q} = \frac{m^2}{e} \quad (4.200)$$

είναι χαρακτηριστικό του προβλήματος, έχει πολύ μεγαλύτερη τιμή απ' οτιδήποτε έχουμε επιτύχει μέχρι στιγμής σε εργαστηριακές συνθήκες και η φυσική του σημασία και τεράστια τιμή του θα εξηγηθεί όταν αναλύσουμε το φαινόμενο Schwinger στις εφαρμογές. Επομένως

$$\Delta\mathcal{L}_{eff} = \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism_e^2} \{a'b' \coth(m_e^2 a's) \cot(m_e^2 b's)\} \quad (4.201)$$

και με την αντικατάσταση $s \rightarrow \frac{1}{m_e^2} s$

$$\Delta\mathcal{L}_{eff} = \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is} \{a'b' \coth(a's) \cot(b's)\} \quad (4.202)$$

Μια τελευταία “αλλαγή μεταβλητής” που χρειάζεται να γίνει ώστε η έκφραση να έρθει στη μορφή που έχει συνήθως στη βιβλιογραφία είναι $s \rightarrow -is$, όπου ουσιαστικά πρόκειται για μια περιστροφή Wick. Παίρνουμε λοιπόν

$$\Delta\mathcal{L}_{eff} = \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \{a'b' \coth(-ia's) \cot(-ib's)\} \quad (4.203)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{eff} = \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \{a'b'i \cot(a's) i \coth(b's)\} \quad (4.204)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{eff} = -\frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \{a'b' \cot(a's) \coth(b's)\} \quad (4.205)$$

Σε αυτό το σημείο μοιάζει ο υπολογισμός να έχει τελειώσει, αλλά πρέπει να προσέξουμε πως η έκφραση εκτινάσσεται στο άπειρο για τιμές του s κοντά στο μηδέν, κάτι που φαίνεται αν πάρουμε το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} & a'b' \cot(a's) \coth(b's) \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3}(-a'^2 + b'^2) - \frac{1}{45}(a'^4 + 5a'^2 b'^2 + b'^4)s^2 + \mathcal{O}(s^4) \end{aligned} \quad (4.206)$$

οπότε και οι δύο πρώτοι όροι δίνουν την απόκλιση του ολοκληρώματος (ο δεύτερος θα πολλαπλασιαστεί με το $1/s$ της (4.205)). Προκειμένου να πάρουμε το ορθό αποτέλεσμα θα πρέπει να το επανακανονικοποιήσουμε. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να το πετύχουμε αυτό είναι αυτή της ελάχιστης αφαιρέσης (minimal subtraction), αφαιρώντας δηλαδή μόνο τους αποκλίνοντες όρους.

Το φυσικό νόημα της παραπάνω αφαιρέσης γίνεται εύκολα κατανοητό αν κανείς λάβει υπόψιν από που προέρχεται η απειρία. Στην παράμετρο Schwinger είχαμε δώσει το φυσικό νόημα να μετρά τον ιδιοχρόνο του σωματιδίου και είχαμε δει πως ο διαδότης του φερμιονίου προέκυπτε από τη διάδοση σε όλους τους δυνατούς αυτούς χρόνους (και άρα ολοκληρώναμε). Έπειτα κλείσαμε το βρόγχο οπότε μετρούσε το χρόνο για την ολοκλήρωση της κλειστής αυτής διαδρομής. Μικρά s λοιπόν συμπεραίνουμε πως αντιστοιχούν σε μικρούς χρόνους δηλαδή μικρές διαδρομές και άρα αντίστοιχα μεγάλες ορμές του φερμιονικού βρόγχου. Για να πειστεί κανείς πως πρόκειται πράγματι για το πρόβλημα του υπεριώδους ορίου αρκεί να δει κανείς το σχήμα (4.44): το πρώτο διάγραμμα είναι απλά ο όρος Maxwell που δεν φαίνεται στην παραπάνω Euler-Heisenberg αφού επιλέξαμε να δείχνουμε μόνο τον όρο αλληλεπίδρασης $\Delta\mathcal{L}_{eff}$. Έπειτα έρχονται όλα τα διαγράμματα με άρτιο αριθμό φωτονικών άκρων στο φερμιονικό βρόγχο, *ακόμα και το* διάγραμμα για μηδέν άκρα (πράγμα λογικό αφού αντιστοιχεί στο γυμνό διαδότη όταν ενώσουμε τα άκρα του), κάτι που στο σχήμα (4.44) παραλείφθηκε μιας και αντιπροσωπεύει την ενέργεια κενού. Οπότε είναι πλέον φανερό πως οι όροι που δίνουν άπειρη συνεισφορά είναι ο όρος ενέργειας κενού και ο όρος πόλωσης κενού όπως τον

είχαμε δει στο κεφάλαιο 2. Η αφαίρεση των δύο αποκλίνοντων όρων στην (4.205) αντιστοιχεί λοιπόν στην αφαίρεση αυτών των άπειρων διαγραμμάτων κατά τα γνωστά. Δεν κάνουμε δηλαδή τίποτα περισσότερο όταν αφαιρούμε το διάγραμμα πόλωσης κενού από το να επιλύουμε την υπεριώδη απόκλιση όπως στο κεφάλαιο 2.

Συνεπώς, η τελική έκφραση για την ενεργό Λαγκρανζιανή Euler-Heisenberg είναι

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \quad (4.207)$$

$$\dots - \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s} \left[s^2 a' b' \cot(a's) \coth(b's) - 1 + \frac{s^2}{3} (a'^2 - b'^2) \right]$$

όπου

$$a' = \frac{e}{m_e^2} a = \frac{1}{E_{cr}} a \quad \text{και} \quad b' = \frac{e}{m_e^2} b = \frac{1}{E_{cr}} b \quad (4.208)$$

$$\mathcal{F} = \frac{a^2 - b^2}{2} \quad \text{και} \quad \mathcal{G} = ab \quad (4.209)$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται μόνο συναρτήσει σταθερών, των μεταβλητών a' και b' που αντιστοιχούν λοιπόν στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και μιας βουβής μεταβλητής s που για λόγους φυσικής εποπτείας είπαμε πως είναι ο ιδιοχρόνος Schwinger. Αυτή είναι λοιπόν η κλειστή μορφή για υπολογισμό μέχρι έναν βρόγχο, σε συμφωνία με το πως ορίσαμε τη Λαγκρανζιανή αυτή στο υποκεφάλαιο 4.1. Στη συνέχεια θα δούμε πως αυτή η μορφή μπορεί να αναλυθεί διαταρακτικά ώστε να δίνει την έκφραση απ' την οποία εξάγονται άμεσα οι κόμβοι τεσσάρων, έξι κ.ο.κ. φωτονίων, δηλαδή το όριο των ασθενών πεδίων.

4.7. Διαταρακτική μορφή της Λαγκρανζιανής EH

Για επαρκώς μικρές τιμές του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου τα a και b θα είναι επίσης επαρκώς μικρά ώστε να μπορεί να γίνει η διαταρακτική ανάπτυξη της κλειστής μορφής (4.207). Επαρκώς μικρά πεδία και άρα a και b σημαίνει, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (4.208), να είναι έντασης μικρότερης της χαρακτηριστικής E_{cr} που θα δούμε στη συνέχεια στο φαινόμενο Schwinger. Όπως αναφέραμε πάντως πρόκειται για μια τιμή μεγάλη, της τάξεως 10^{16} Vcm^{-1} , ώστε σε όλες τις μέχρι τώρα διατάξεις και στα περισσότερα φαινόμενα η προσέγγιση που ακολουθεί να ισχύει και μάλιστα να διευκολύνει τη μελέτη της Λαγκρανζιανής Euler-Heisenberg.

Συνεπώς υποθέτουμε

$$a', b' \ll 1 \quad (4.210)$$

και χρησιμοποιούμε ξανά το ανάπτυγμα (4.206) αλλά το αναπτύσσουμε αρκετά πιο πέρα απ' ότι πριν καθώς θα χρειαστούν και οι μετέπειτα όροι για τους όρους αλληλεπίδρασης που θα θέλουμε να παράγουμε. Όπως και σε κάθε διαταρακτική προσέγγιση όπως αυτή, καθώς η μεταβλητή που διαταράσσουμε είναι μικρότερη της μονάδας, όσο αυξάνει η τάξη των όρων τόσο πιο αμεληταίοι γίνονται και ανάλογα το πρόβλημα που μελετάμε μπορούμε από κάποια τάξη και μετά να τους αγνοούμε. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
& a'b's^2 \cot(a's) \coth(b's) \\
& = 1 + \frac{1}{3}s^2(-a'^2 + b'^2) + \frac{s^4}{45}(-a'^4 - 5a'^2b'^2 - b'^4) \\
& \quad + \frac{s^6}{945}(-2a'^6 - 7a'^4b'^2 + 7a'^2b'^4 + 2b'^6) \\
& \quad + \frac{s^8}{14175}(-3a'^8 - 10a'^6b'^2 + 7a'^4b'^4 - 10a'^2b'^6 - 3b'^8) + \mathcal{O}(s^9)
\end{aligned} \tag{4.211}$$

και καθώς οι δύο πρώτοι όροι του πολυωνύμου αφαιρούνται από την επανακανονικοποίηση, μένουμε, αφού σπάσουμε το ολοκλήρωμα (4.207) σε άθροισμα ολοκληρωμάτων του πολυωνύμου (4.211), με μια Λαγκρανζιανή με έναν όρο Maxwell και μια σειρά από όρους αλληλεπίδρασης, ως εξής

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} + \Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} + \Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} + \dots \tag{4.212}$$

Καθώς αυτά θα μας δώσουν τους κόμβους 4,6,8... φωτονίων και επομένως ενεργές διατομές για τις αντίστοιχες διαδικασίες σκέδασης φωτονίων, θα επιχειρήσουμε να εξάγουμε τους πρώτους αυτούς όρους αναλυτικά.

Ξεκινάμε λοιπόν με το

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} & = -\frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s} \left[\frac{s^4}{45} (-a'^4 - 5a'^2b'^2 - b'^4) \right] \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} & = -\frac{m_e^4}{360\pi^2} (-a'^4 - 5a'^2b'^2 - b'^4) \left[\int_0^\infty ds s e^{-s} \right] \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} & = \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} (a^4 + 5a^2b^2 + b^4) \Gamma(2) \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} & = \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 7a^2b^2) \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} & = \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} [(a^2 - b^2)^2 + 7(ab)^2] \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(4)} & = \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} [(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 7(\vec{E} \cdot \vec{B})^2]
\end{aligned} \tag{4.213}$$

και όπως περιμέναμε ήδη από την τάξη των a και b η έκφραση αυτή⁹ δίνει τους όρους αλληλεπίδρασης 4 φωτονίων, δηλαδή τον κόμβο που προβλέπει η ενεργός θεωρία μας.

Συνεχίζουμε με τον κόμβο 6 φωτονίων που θα προκύψει απ' το

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} & = -\frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s} \left[\frac{s^6}{945} (-2a'^6 - 7a'^4b'^2 + 7a'^2b'^4 + 2b'^6) \right] \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} & = -\frac{m_e^4}{8\pi^2 945} (-2a'^6 - 7a'^4b'^2 + 7a'^2b'^4 + 2b'^6) \left[\int_0^\infty ds s^3 e^{-s} \right] \\
\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} & = \frac{e^6}{8\pi^2 945 m_e^8} (2a^6 + 7a^4b^2 - 7a^2b^4 - 2b^6) \Gamma(4)
\end{aligned} \tag{4.214}$$

⁹ Η σημαντική αυτή έκφραση υπάρχει στους Heisenberg και Euler [20].

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} = \frac{6e^6}{8\pi^2 945 m_e^8} [2(a^2 - b^2)^3 + 13a^4 b^2 - 13b^4 a^2]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} = \frac{6e^6}{8\pi^2 945 m_e^8} [2(a^2 - b^2)^3 + 13a^2 b^2 (a^2 - b^2)]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(6)} = \frac{e^6}{1260\pi^2 m_e^8} [2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^3 + 13(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)]$$

και τελείως όμοια ο κόμβος 8 φωτονίων από

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = -\frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s} \left[\frac{s^8}{14175} (-3a'^8 - 10a'^6 b'^2 + 7a'^4 b'^4 - 10a'^2 b'^6 - 3b'^8) \right]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = -\frac{m_e^4}{8\pi^2 14175} (-3a'^8 - 10a'^6 b'^2 + 7a'^4 b'^4 - 10a'^2 b'^6 - 3b'^8) \left[\int_0^\infty ds s^5 e^{-s} \right]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = \frac{e^8}{8\pi^2 14175 m_e^{12}} (+3a^8 + 10a^6 b^2 - 7a^4 b^4 + 10a^2 b^6 + 3b^8) \Gamma(6) \quad (4.215)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = \frac{120e^8}{8\pi^2 14175 m_e^{12}} [3(a^2 - b^2)^4 + 22a^6 b^2 - 25a^4 b^4 + 22a^2 b^6]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = \frac{120e^8}{8\pi^2 14175 m_e^{12}} [3(a^2 - b^2)^4 + a^2 b^2 (22a^4 - 25a^2 b^2 + 22b^4)]$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = \frac{120e^8}{8\pi^2 14175 m_e^{12}} \{3[a^2 - b^2]^4 + a^2 b^2 [22(a^2 - b^2)^2 + 19a^2 b^2]\}$$

$$\Delta\mathcal{L}_{EH}^{(8)} = \frac{e^8}{945\pi^2 m_e^{12}} [3(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^4 + 22(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 + 19(\vec{E} \cdot \vec{B})^4]$$

Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να διασταυρωθούν με τη βιβλιογραφία, ώστε σε περίπτωση μιας διαφορετικής εξαγωγής, π.χ. με εύρεση κάποιων πλατών κατευθείαν από QED όπως γίνεται στην [23] για 4 φωτόνια, να αποτελούν μια μέθοδο επαλήθευσης τόσο της μεθοδολογίας που χρησιμοποιήσαμε όσο και του αποτελέσματος.

Η μορφή της Λαγκρανζιανής μέχρι τον κόμβο 4 φωτονίων ήταν ήδη γνωστή από το paper των Euler και Kockel, πριν αυτή γενικευτεί στην κλειστή μορφή του προηγούμενου κεφαλαίου. Το αποτέλεσμα των Heisenberg και Euler έχει επιβεβαιωθεί έκτοτε με διάφορες τεχνικές από τη θεωρία πεδίου (πχ. με τη μέθοδο Heat Kernel). Μάλιστα, οι Euler και Kockel στο ίδιο paper υπολόγισαν και την τάξη μεγέθους της ολικής ενεργού διατομής της διαδικασίας σκέδασης φωτονίου-φωτονίου, δηλαδή $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$, που (αργότερα) υπολογίστηκε ακριβώς να είναι

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{973}{10125\pi} \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \quad (4.216)$$

μια τιμή ιδιαίτερα μικρή, αν λάβει κανείς υπόψιν πως για ορατό φως η έκφραση δίνει $\sigma_{\gamma\gamma} \sim 10^{-70} \text{ cm}^2$ ενώ φωτόνια μεγάλης ενέργειας, της τάξεως MeV, δίνουν $\sigma_{\gamma\gamma} \sim 10^{-30} \text{ cm}^2$.

Πειραματική επιβεβαίωση, αν και δεν υπάρχει ακόμα για τη διαδικασία $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ αυτούσια λόγω της παραπάνω μικρής ενεργού διατομής, υπάρχει για παρόμοιας φύσεως διαδικασίες. Συγκεκριμένα:

- Η σκέδαση Delbrück αναφέρεται στη σκέδαση υψηλοενεργειακών φωτονίων από το πεδίο Coulomb ενός πυρήνα. Η σκέδαση περιγράφεται από το γνωστό box diagram που περιγράφει τη σκέδαση $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ με μόνη διαφορά πως τα δύο φωτονικά άκρα του διαγράμματος προέρχονται από φωτονικούς διαδότες από την αλληλεπίδραση με τον πυρήνα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ενεργός διατομή να είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης του ατομικού αριθμού του πυρήνα Z. Η πειραματική επιβεβαίωση αυτού δίνεται στις αναφορές [29,30].
- Η διαδικασία του photon splitting όπου η αλληλεπίδραση φωτονίου με υλικό δίνει δύο εξερχόμενα φωτόνια. Σε αυτήν, ένα άκρο του box diagram αντικαθίσταται από φωτονικό διαδότη. Η πειραματική επιβεβαίωση δίνεται στην [31].

4.8. Εφαρμογές της Λαγκρανζιανής EH

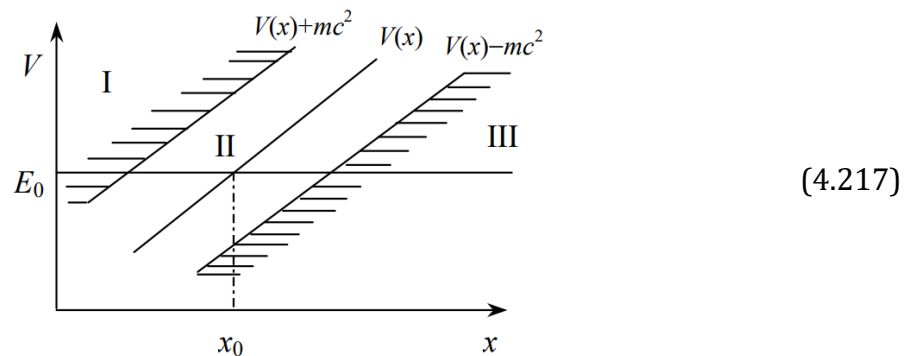
Έχοντας εξάγει τη μορφή της Λαγκρανζιανής EH μπορούμε να τη μελετήσουμε, βλέποντας τόσο ποιά είναι τα διάφορα χαρακτηριστικά της και τις προβλέψεις που αυτή κάνει όσο και τα διάφορα φαινόμενα που αναμένουμε απ' αυτήν. Ήδη είδαμε τη διαταρακτική προσέγγιση της κλειστής μορφής της, δηλαδή την απευθείας εξαγωγή των όρων αλληλεπίδρασης και άρα των κόμβων φωτονίων (άρτιου πλήθους) απ' αυτήν, μία από τις κυριότερες προβλέψεις της αφενός διότι η υπόθεση των ασθενών πεδίων πληρείται σε όλες εκτός των πιο ακραίων συνθηκών και αφετέρου εξαιτίας της πλέον χαρακτηριστικής πρόβλεψης της διαδικασίας $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ που ήταν το κίνητρο για την κατασκευή της και η οποία σημαίνει το τέλος της υπέρθεσης HM κυμάτων του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού (όταν μεταβαίνουμε σε κβαντικά συστήματα βεβαίως). Το φαινόμενο αυτό γενικότερα είναι ενδεικτικό του φυσικού νοήματος της Λαγκρανζιανής EH, που προβλέπει πως το κβαντικό κενό αποκτά ιδιότητες διηλεκτρικού, κάτι που σχολιάζουμε συνοπτικά στο υποκεφάλαιο 4.8.2. Πάντως φαινόμενα και προεκτάσεις της θεωρίας υπάρχουν πολλά, διαθέσιμα σε δημοσιεύσεις, οπότε εμείς εστιάζουμε σε αυτά που έχουν καθιερωθεί ως αναφορές που γίνονται συνήθως σε σύζευξη με τη μη γραμμική θεωρία των Heisenberg και Euler και αφήνουμε στον αναγνώστη περαιτέρω προβλέψεις και επεκτάσεις της θεωρίας που είναι ακόμη λιγότερο γνωστές, δίνοντας ως αφετηρία τη βιβλιογραφία στο τέλος.

4.8.1. Το φαινόμενο Schwinger

Βασιζόμενοι σε απλά επιχειρήματα σχετικότητας και κβαντικής φυσικής για την αναγκαιότητα ενέργειας $2m_e c^2$ για τη δημιουργία ενός πραγματικού και όχι δυνητικού

ζεύγους ή ίσως κιάλας επεκτείνοντας την εικόνα του διηλεκτρικού στην περίπτωση του κβαντικού κενού της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, μπορεί κανείς να υποθέσει πως επαρκώς ισχυρά πεδία θα επέτρεπαν τη δημιουργία πραγματικών ζευγών σωματιδίων όπως και στην περίπτωση ενός συνήθους διηλεκτρικού όπου από κάποια τιμή και μετά το ηλεκτρικό πεδίο έχει τέτοια ένταση ώστε να προκληθεί αυθόρμητα η δίδυμη γένεση αντίθετα φορισμένων σωματιδίων. Αναφερόμαστε στο φαινόμενο του dielectric breakdown (κατάρρευση διηλεκτρικού;), χαρακτηριστικό παράδειγμα του οποίου είναι οι αστραπές, η ηλεκτρική εκκένωση που προκαλείται από το ότι η τάση που εφαρμόζεται στον ατμοσφαιρικό αέρα ξεπερνά μια κρίσιμη τιμή και άρα δεν μπορεί πια να δράσει ως μονωτής.

Πράγματι ο υπολογισμός αυτός έγινε πρώτη φορά από τον Sauter λίγο πριν τη δημοσίευση της Λαγκρανζιανής ΕΗ. Η ιδέα είναι πως το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί την κλίση στο σχήμα που ακολουθεί¹⁰



οπότε ισχυρότερα πεδία αυξάνουν την κλίση του $V(x)$ και μειώνουν ως συνέπεια την απόσταση δια της οποίας, σε ενέργεια E_0 , πρέπει να λάβει χώρα το φαινόμενο σήραγγος που περιγράφει το φαινόμενο.

Προκύπτει πως η τιμή της έντασης που χαρακτηρίζει το πρόβλημα, γύρω στην οποία αρχίζει να γίνεται αντιληπτό το φαινόμενο, είναι η $E_{cr} = m_e^2/e$, που βρήκαμε χαρακτηριστικά στην Euler-Heisenberg και η οποία οριοθετούσε τη διαταρακτική ανάλυση αυτής. Αυτό δεν είναι τυχαίο αφού κανείς μπορεί να εξάγει με διαφορετικό τρόπο, χρησιμοποιώντας το φανταστικό κομμάτι της Λαγκρανζιανής ΕΗ για καθαρά ηλεκτρικό υπόβαθρο, την παραγωγή ζευγών του φαινομένου Schwinger. Μια διαισθητική πάντως εκτίμηση της τιμής δίνει έναν καλό μνημονικό κανόνα της ορθής τιμής: το ζητούμενο είναι μια ένταση E_{cr} τέτοια ώστε το έργο που αυτή θα παράγει, δηλαδή το γινόμενο της δύναμης eE_{cr} επί την απόσταση του ανηγμένου μήκους κύματος Compton $\hbar/m_e c$, να είναι της ίδιας τάξης με την ενέργεια παραγωγής ζεύγους, δηλαδή κατά προσέγγιση

$$eE_{cr} \frac{\hbar}{m_e c} \simeq m_e c^2 \quad (4.218)$$

$$E_{cr} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \quad (4.219)$$

¹⁰ σχήμα παρμένο από [20]

Η κρίσιμη αυτή ένταση είναι πολύ μεγαλύτερη από ό,τι έχουμε επιτύχει μέχρι σήμερα σε εργαστηριακές συνθήκες ή παρατηρούμε σε συνηθισμένα φαινόμενα, όπως τονίσαμε στη διαταρακτική προσέγγιση για να δικαιολογήσουμε το εύρος της εφαρμογής της. Ένας σύντομος υπολογισμός δίνει μια τάξη περίπου στα

$$E_{cr} \sim 10^{16} \text{ V cm}^{-1} \quad (4.220)$$

Αυτό, σε συνδιασμό με το γεγονός που υπονοήσαμε μέχρι τώρα πως για τιμές μικρότερες αυτής η πιθανότητες μειώνονται εκθετικά, σύμφωνα με τον τύπο που δίνει τον ρυθμό παραγωγής ζευγών σε ασθενές πεδίο

$$\Gamma \sim \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \exp \left[-\frac{m^2 \pi}{eE} \right] \quad (4.221)$$

σημαίνει πως το φαινόμενο αυτό μπορεί να παρατηρηθεί μόνο στις πολύ ακραίες συνθήκες περί της τάξης μεγέθους της κρίσιμης τιμής. Αν και ο υπολογισμός του ρυθμού (4.221) βασίζεται στη μη πραγματοποιήσιμη ρεαλιστικά υπόθεση ενός σταθερού ηλεκτρικού πεδίου υποβάθρου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για άλλες αναλύσεις πιο ρεαλιστικές.

Τέλος, ας αναφέρουμε πως ισχυρά μαγνητικά πεδία δεν θα μπορούσαν με παρόμοιο τρόπο να παράγουν πραγματικά ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων καθώς το αντίθετο φορτίο του ζεύγους θα σήμαινε πως αμέσως μετά την παραγωγή του το κάθε σωματίδιο θα ακολουθούσε κυκλική τροχία αντίθετης φοράς (και μικρής ακτίνας) εντός του ισχυρού μαγνητικού πεδίου και άρα θα είχαμε την άμεση εξαύλωσή τους. Επιπλέον η δράση του μαγνητικού πεδίου σε κινούμενο φορτίο δεν παράγει έργο. Επομένως ανάλογος υπολογισμός όπως αυτός της (4.219) δεν έχει νόημα.

4.8.2. Το κβαντικό κενό ως διηλεκτρικό (άλλες ιδιότητες)

Η Λαγκρανζιανή ΕΗ είδαμε πως προβλέπει μια μη γραμμική συμπεριφορά. Ήδη από την αρχική διατύπωσή της διατυπώθηκε πως η μη γραμμικότητα αυτή έμοιαζε να προσδίδει στο κβαντικό κενό χαρακτηριστικά ενός διηλεκτρικού μέσου.

Το κβαντικό κενό είδαμε πως διαφέρει από το κλασικό: αντί να χαρακτηρίζεται από την απουσία οποιουδήποτε περιεχομένου, όπως στην κλασική φυσική, έχουμε τη συνεχή “παρουσία” δυνητικών ζευγών σωματιδίων-αντισωματιδίων. Αυτά του δίνουν τις διαφορετικές του ιδιότητες καθώς τα δυνητικά αυτά ζεύγη μεσολαβούν διαφόρων διαδικασιών, με τελικό αποτέλεσμα να συμπεριφέρεται ως διηλεκτρικό.

Συγκεκριμένα, η αιτία αυτής της συμπεριφοράς βρίσκεται στο γεγονός πως τα δυνητικά ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων λειτουργούν ως δίπολα. Λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας επιτρέπεται η κύμανση της ενέργειας και η παραγωγή των ζευγών αυτών για χρόνους της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος Compton δια την ταχύτητα του φωτός και άρα ο χωρισμός ενός δυνητικού διπόλου κατά την αντίστοιχη απόσταση. Τα δυνητικά αυτά ζεύγη, αν και μη παρατηρήσιμα τα ίδια (εξού και ο όρος δυνητικά) έχουν παρατηρήσιμα αποτελέσματα ακριβώς λόγω της μεσολάβησης τους στις διάφορες κβαντικές διαδικασίες. Η εφαρμογή ενός υποβάθρου ηλεκτρικού πεδίου μοιάζει να προσανατολίζει μάλιστα τα δίπολα αυτά. Οπότε έχουμε εν κατακλείδι την πρόβλεψη από

τη θεωρία μας πως το κβαντικό κενό θα έχει ιδιότητες διηλεκτρικού και άρα θα παρουσιάζει τα ανάλογα φαινόμενα.

Αυτή η πρόβλεψη μπορεί να συνοψιστεί εντός της Λαγκρανζιανής ΕΗ που εξάγαμε, το φυσικό νόημα της οποία μπορούμε να δώσουμε μέσα από τα λεγόμενα του Weisskopf:

“When passing through electromagnetic fields, light will behave as if the vacuum, under the action of the fields, were to acquire a dielectric constant different from unity.”

Όσον αφορά τώρα τα φαινόμενα που η συμπεριφορά διηλεκτρικού προβλέπει και τα οποία δεν έχουμε αναφέρει ακόμα, οι πιο κεντρικές προβλέψεις είναι:

- η διπλοθλαστικότητα του κενού (και η περιστροφή της πόλωσης) [32]
- περίθλαση κενού [33]
- παραγωγή υψηλότερων αρμονικών δηλαδή συχνοτήτων [34]

Η Λαγκρανζιανή ΕΗ μας δίνει μια πληθώρα από προβλέψεις όπως έχει φανεί. Ήδη έχουμε δει τη σκέδαση φωτονίου-φωτονίου τόσο στη μορφή της διαδικασίας $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ όσο και σε διαδικασίες που αφορούν γενικότερα κόμβους άρτιου πλήθους φωτονίων (κεφ. 4.7), το φαινόμενο Schwinger (κεφ. 4.8.1) και τη συμπεριφορά γενικότερα του κενού ως διηλεκτρικό (παρόν κεφάλαιο).

Η παραπάνω εφαρμογές γίνονται με την υπόθεση που κάναμε περί σταθερού πεδίου υποβάθρου. Ας αναφερθεί όμως πως αυτό γίνεται ώστε μετά να προχωρήσει κανείς σε αναλύσεις πέραν του μη σταθερού υποβάθρου, που είναι δυνατές και γίνονται στη βιβλιογραφία.

Ακόμη

- Είναι δυνατές επεκτάσεις της θεωρίας ώστε να μεταβεί κανείς στην QCD και να μεταφέρει σε αυτήν τα υπολογιστικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια της QED.
- Στη βιβλιογραφία υπάρχουν μελέτες που αφορούν μελανή σπή με ηλεκτρικό ή και μαγνητικό φορτίο σε αλληλεπίδραση με την ΕΗ.

Τα πάνω ήταν για να πάρει κανείς μια ιδέα του τι υπάρχει ως εφαρμογές και βιβλιογραφία επ’ αυτών. Όπως δηλώσαμε δεν θα επεκταθούμε στις λεπτομέρειες αυτών αλλά προτρέπουμε τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να ψάξει τα προηγούμενα αντικείμενα. Εμείς, ως μια απλή επέκταση, στο παρόν θα καταπιαστούμε (στο κεφ. 4.8.3) με την παραλλαγή της θεωρίας ΕΗ για την περίπτωση που το φορτισμένο πεδίο που μεσολαβεί της αλληλεπίδρασης φωτονίου-φωτονίου είναι βαθμωτό αντί για φερμιονικό, δηλαδή θα δούμε τη μορφή της Λαγκρανζιανής ΕΗ όπως αυτή προκύπτει από μια βαθμωτή ηλεκτροδυναμική (scalar QED) αντί για τη συνηθισμένη σπινωριακή ηλεκτροδυναμική (spinor QED).

4.8.3. Η κλειστή μορφή της Λαγκρανζιανής ΕΗ για sQED

Στην περίπτωση που η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί ως αναμεταξύ σωματιδίων ενός φορτισμένου βαθμωτού πεδίου, μπορούμε να κάνουμε χρήση της θεωρίας της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής βαθμωτού πεδίου (scalar electrodynamics, sQED), η οποία περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_{sQED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - m^2|\varphi|^2 \quad (4.222)$$

ή αλλιώς

$$\mathcal{L}_{sQED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \varphi^*(D^2 + m^2)\varphi \quad (4.223)$$

Οι αλλαγές που οφείλουμε να κάνουμε στον υπολογισμό μας της Λαγκρανζιανής ΕΗ για τα συνήθη φορτισμένα πεδία της QED, που είναι οι σπίνορες, πηγαίνοντας στα βαθμωτά είναι ελάχιστες. Η ουσιαστική αλλαγή είναι πως πλέον αντί για φερμιονικό διαδότη έχουμε διαδότη της εξίσωσης Klein-Gordon, οπότε η σχέση (4.35) παίρνει τώρα τη μορφή

$$e^{i\Gamma(A)} = \int \mathcal{D}\varphi^*\mathcal{D}\varphi \exp\left\{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \varphi^*(D^2 + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right]\right\} \quad (4.224)$$

και η επίλυση του ολοκληρώματος δεν δίνει τώρα ορίζουσα στον αριθμητή αλλά στον παρονομαστή:

$$\int \mathcal{D}\varphi^*\mathcal{D}\varphi \exp\left\{i \int d^4x [-\varphi^*(D^2 + m^2)\varphi]\right\} = \mathcal{N} \frac{1}{\det(-D^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (4.225)$$

Συνεπώς, ακολουθώντας ίδια πορεία με την επίλυση στην περίπτωση της spinor QED, η σχέση (4.38):

$$i\Gamma(A) = i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] + \ln \left[\frac{1}{\det(-D^2 - m^2 + i\varepsilon)}\right] + \text{σταθ.} \quad (4.226)$$

$$\Rightarrow i\Gamma(A) = i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] - \ln[\det(-D^2 - m^2 + i\varepsilon)] \quad (4.227)$$

όπου πάλι θα παραλήψουμε τη σταθερά αφού δεν έχει κάποια φυσική συνέπεια και επομένως χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (4.39)

$$i\Gamma(A) = i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i \text{tr}\langle x | \ln(-D^2 - m^2 + i\varepsilon) | x \rangle\right] \quad (4.228)$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i \text{tr}\langle x | \ln(-D^2 - m^2 + i\varepsilon) | x \rangle \quad (4.229)$$

Παραγωγίζουμε πάλι ως προς m^2 προκειμένου να έχουμε τη μορφή του διαδότη

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} = -i \text{tr}\langle x | \frac{1}{-D^2 - m^2 + i\varepsilon} | x \rangle \quad (4.230)$$

την οποία και μπορούμε να μετατρέψουμε σε ένα ολοκλήρωμα ιδιοχρόνου Schwinger

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial m^2} = -\text{tr}\langle x | \int_0^\infty ds e^{-s\varepsilon} e^{-ism^2} e^{is(-D^2)} | x \rangle \quad (4.231)$$

οπότε

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2 \left\{ \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s\varepsilon} e^{-ism^2} \langle x | e^{-is\mathcal{H}_{pt}} | x \rangle \right\} \quad (4.232)$$

Δηλαδή καταλήγουμε με το ίδιο ολοκλήρωμα (με διαφορετικό συντελεστή) με τη σπινωριακή περίπτωση που όμως η Χαμιλτονιανή \mathcal{H}_{pt} είναι χωρίς τον όρο \mathcal{H}_2 παρά μόνο

$$\mathcal{H}_{pt} = -\Pi^2 = -\left(\hat{p}_\mu - qA_\mu(\hat{x})\right)^2 \quad (4.233)$$

Το προηγούμενο συμπέρασμα είναι σημαντικό αν κανείς θέλει να γλιτώσει πράξεις! Μόνο αυτό το κομμάτι χρησιμοποιήσαμε για την εξαγωγή του διαδότη, καθώς το κομμάτι του \mathcal{H}_2 πολλαπλασιάζε απλά το τελικό αποτέλεσμα με το ίχνος (4.195). Η παράλειψη αυτού του ίχνους δίνει (σε αντιστοιχία με την (4.198))

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\left\{\frac{1}{4}\frac{q^2}{8\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-\varepsilon s}e^{-ism^2}\left\{\frac{ab}{\sinh(qas)\sin(qbs)}\right\}\right\} \quad (4.234)$$

Εκτελούμε πάλι όλες τις αλλαγές μεταβλητών που κάναμε και στη σπινωριακή περίπτωση για να καταλήξουμε στο τελικό αποτέλεσμα.

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^4}{16\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-\varepsilon s}e^{-ism^2}\left\{\frac{a'b'}{\sinh(m^2a's)\sin(m^2b's)}\right\} \quad (4.235)$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^4}{16\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-\frac{\varepsilon s}{m^2}}e^{-is}\left\{\frac{a'b'}{\sinh(a's)\sin(b's)}\right\} \quad (4.236)$$

$s \rightarrow -is$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^4}{16\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{i\frac{\varepsilon}{m^2}s}e^{-s}\left\{\frac{a'b'}{\sin(a's)\sinh(b's)}\right\} \quad (4.237)$$

Οφείλουμε πάλι να προσέξουμε την υπερίωδη απόκλιση. Αυτήν τη φορά

$$\begin{aligned} & \frac{a'b's^2}{\sin(a's)\sinh(b's)} \\ &= 1 + \frac{1}{6}s^2(a'^2 - b'^2) + \frac{1}{360}s^4(7a'^4 - 10a'^2b'^2 + 7b'^4) \\ &+ \frac{1}{15120}s^6(31a'^6 - 49a'^4b'^2 + 49a'^2b'^4 - 31b'^6) \\ &+ \frac{1}{1814400}s^8(381a'^8 - 620a'^6b'^2 + 686a'^4b'^4 \\ &- 620a'^2b'^6 + 381b'^8) \end{aligned} \quad (4.238)$$

οπότε η επανακανονικοποίηση μας οδηγεί στην τελική έκφραση

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sQED,eff} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &+ \frac{m^4}{16\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^3}e^{-s}\left\{\frac{a'b's^2}{\sin(a's)\sinh(b's)} - 1 - \frac{1}{6}s^2(a'^2 - b'^2)\right\} \end{aligned} \quad (4.239)$$

Αν αποζητούσαμε το αποτέλεσμα σε προσέγγιση ασθενών πεδίων, αρκεί ο τρίτος όρος της (4.238) για μια πρώτη προσέγγιση:

$$\Delta\mathcal{L}_{sQED,eff}^{(4)} = \frac{m^4}{16\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-s}\left\{\frac{1}{360}s^4(7a'^4 - 10a'^2b'^2 + 7b'^4)\right\} \quad (4.240)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{sQED,eff}^{(4)} = \frac{m^4}{16\pi^2 360}(7a'^4 - 10a'^2b'^2 + 7b'^4)\Gamma(4) \quad (4.241)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{sQED,eff}^{(4)} = \frac{e^4}{960\pi^2 m^4}(7a^4 - 10a^2b^2 + 7b^4) \quad (4.242)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{sQED,eff}^{(4)} = \frac{e^4}{960\pi^2 m^4} [7(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2] \quad (4.243)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{sQED,eff}^{(4)} = \frac{e^4}{960\pi^2 m^4} [7(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2] \quad (4.244)$$

Καταλήξαμε έτσι σε εκφράσεις που περιγράφουν τη μη γραμμική ηλεκτροδυναμική ΕΗ όταν ως βάση θεωρήσαμε μια βαθμωτή κβαντική ηλεκτροδυναμική.

Παράρτημα Α

Μέθοδος ιχνών (Trace technology)

Στο παράρτημα αυτό παρατίθενται με σύντομες αποδείξεις (βασισμένες στις θεμελιώδεις ιδιότητες των γ πινάκων) τα ίχνη γινομένων γ πινάκων καθώς και σχετικές άλλες ταυτότητες. Οι εκφράσεις αυτές, που το σύνολο τους στην αγγλική ορολογία είναι γνωστό ως trace technology, επινοήθηκαν για να αποφευχθεί ο στοιχείο προς στοιχείο υπολογισμός που θα απαιτούνταν αλλιώς σε υπολογισμούς όπως του αναλλοίωτου πλάτους σκέδασης στην QED, που περιέχει σπίνορες, ή του πλάτους ασθενών αλληλεπιδράσεων. Πηγή είναι η [1].

- $tr(I) = 4$ (για $d = 4$)
- $tr(\gamma^\mu) = 0$ ($tr(\gamma^\mu) = tr(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu) = -tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5) = -tr(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu) = -tr(\gamma^\mu)$ όπου η δεύτερη ισότητα από $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ ενώ η τρίτη από κυκλική ιδιότητα ιχνών)
- $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ ($tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = tr(2g^{\mu\nu} I - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - tr(\gamma^\mu \gamma^\nu)$)
- $tr(\text{περιττός } \# \gamma) = 0$ (απόδειξη όμοια με ένα γ^μ)
- $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$ (απόδειξη όμοια για κάθε άρτιο $\# \gamma$: αντιμετωπίζουμε το γ^μ μέχρι να βρεθεί στα δεξιά, όπως κάναμε με τα δύο γ)
- $tr(\gamma^5 \times \text{περιττός } \# \gamma) = 0$ (καθώς το $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ περιέχει άρτιο $\# \gamma$)
- $tr(\gamma^5) = 0$ ($tr(\gamma^5) = tr(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = -tr(\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0) = -tr(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = -tr(\gamma^5)$)
- $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0$ (όμοια με $tr(\gamma^5)$ όπου το βοηθητικό γ^ρ έχει $\rho \neq \mu, \nu$)
- $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (όχι όπως πριν καθώς όλα τα 4 διαφορετικά γ μπορούν να υπάρχουν στην έκφραση. Η απόδειξη: δείχνουμε πρώτα πως $\propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ και έπειτα αντικαθιστούμε για την εύρεση της σταθεράς.)

Εκφράσεις που προέρχονται απ' την τελευταία σχέση μπορούν να απλοποιηθούν μέσω των ταυτοτήτων:

- $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$
- $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta_\nu^\mu$
- $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu)$

(Αποδείξεις: πάλι από επιχειρήματα συμμετρίας και η εύρεση της σταθεράς από αντικατάσταση για μία συγκεκριμένη περίπτωση.)

(παρατήρηση: κάθε σχέση μπορεί να αποδείξει την προηγούμενη!)

Αντιστροφή σειράς:

- $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots \gamma^\sigma) = tr(\gamma^\sigma \dots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu)$

(απόδειξη: ο τελεστής συζυγίας φορτίου (charge conjugation operator) είναι

$$C \equiv \gamma^0 \gamma^2 \Rightarrow C^2 = 1, C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$$

άρα

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots) = tr(C\gamma^\mu C C\gamma^\nu C \dots) = (-1)^n tr((\gamma^\mu)^T (\gamma^\nu)^T \dots) = tr(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

όπου στην τελευταία ισότητα το n =άρτιο καθώς για περιττό θα είχαμε μηδενικό ίχνος εξ αρχής.)

(Ίδια σχέση αν υπάρχουν γ^5 αλλά λίγο διαφορετική απόδειξη.)

Ταυτότητες για συναιρέσεις:

- $\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$

- $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$

- $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}$

- $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu$

(απόδειξη: μέσω σχέσεων αντιμετάθεσης.)

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Όλα τα πάνω είναι για 4 χωροχρονικές διαστάσεις. Άλλες εκφράσεις ισχύουν για n διαστάσεις γενικά. Στο κείμενο, όπου χρειαστούμε τις γενικότερες εκφράσεις θα τις αποδεικνύουμε εκείνη τη στιγμή.

Παράρτημα Β

Εξαγωγή της ισότητας των 2 μελών της εξίσωσης Schrödinger

Απ' τη μαθηματική ταυτότητα

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \operatorname{Tr} \left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

μπορούμε να εξάγουμε τα εξής

$$\frac{d}{dt} S_2^t = \left(\frac{d}{dt} S^t \right)_2 = -(e^{-\Lambda t} \Lambda)_2 = -(S^t \Lambda)_2$$

$$(S_2^t)^{-1} \frac{d}{dt} S_2^t = -(S_2^t)^{-1} (S^t \Lambda)_2 = -(S_2^t)^{-1} (S_1^t \Lambda_2 + S_2^t \Lambda_4) = -(S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 - \Lambda_4$$

και άρα μέσω της αρχικής σχέσης

$$\frac{d}{dt} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Tr} [(S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 + \Lambda_4]$$

Οι πράξεις για όλη την έκφραση λοιπόν:

$$l. h. s. = \frac{d}{dt} \psi_y^t(x)$$

$$\begin{aligned} &= R(S^t) \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \exp(\dots) \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \operatorname{Tr} [(S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 + \Lambda_4] \\ &+ R(S^t) \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \exp(\dots) \frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle \right. \\ &\left. + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right) + \left[\frac{d}{dt} R(S^t) \right] \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \exp(\dots) \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

με

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right) = \dots$$

$$((S_2^t)^{-1})' = -(S_2^t)^{-1} (S_2^t)' (S_2^t)^{-1}$$

$$\begin{aligned} ((S_2^t)^{-1} S_1^t)' &= ((S_2^t)^{-1})' S_1^t + (S_2^t)^{-1} S_1^t' = -(S_2^t)^{-1} (S_2^t)' (S_2^t)^{-1} S_1^t - (S_2^t)^{-1} (S_1^t \Lambda_1 + S_2^t \Lambda_3) \\ &= (S_2^t)^{-1} (S_1^t \Lambda_2 + S_2^t \Lambda_4) (S_2^t)^{-1} S_1^t - (S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_1 - \Lambda_3 \\ &= \Lambda_4 (S_2^t)^{-1} S_1^t - (S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_1 - \Lambda_3 + (S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 (S_2^t)^{-1} S_1^t \\ &= \Lambda_4 (S_2^t)^{-1} S_1^t + (S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_4^T - \Lambda_3 + (S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 (S_2^t)^{-1} S_1^t \end{aligned}$$

Απ' την άλλη, για τη Χαμιλτονιανή είναι γνωστή η μορφή της

$$\begin{aligned} r. h. s. &= -i \mathcal{H} \psi_y^t(x) \\ &= -\frac{i}{2} (\hat{x}^T G_1 \hat{x}) \psi_y^t(x) - \frac{i}{2} (\hat{x}^T G_2 \hat{p}) \psi_y^t(x) - \frac{i}{2} (\hat{p}^T G_3 \hat{x}) \psi_y^t(x) - \frac{i}{2} (\hat{p}^T G_4 \hat{p}) \psi_y^t(x) \end{aligned}$$

Θυμίζουμε $\Lambda = \Omega^{-1}G$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_3 & G_4 \\ -G_1 & -G_2 \end{pmatrix}$$

οπότε ο ένας όρος που έχει συνεισφορά στο ίχνος

$$\begin{aligned} \frac{-i}{2} (\hat{p}^T G_3 \hat{x}) &= \frac{-i}{2} (G_3)_{IJ} \hat{p}^I \hat{x}^J = \frac{-i}{2} (G_3)_{IJ} [\hat{x}^J \hat{p}^I - i\delta^{IJ}] = -\frac{1}{2} Tr G_3 - \frac{i}{2} \langle G_3 x, p \rangle \\ &= -\frac{1}{2} Tr G_2 - \frac{i}{2} \langle G_3 x, p \rangle = \frac{1}{2} Tr \Lambda_4 - \frac{i}{2} \langle G_3 x, p \rangle \end{aligned}$$

όπου $Tr G_3 = Tr G_2$ διότι $H = H^\dagger \Rightarrow G_3^T = G_2$. Για τον ίδιο λόγο

$$-\frac{i}{2} (\hat{x}^T G_2 \hat{p}) = -\frac{i}{2} \langle G_3 x, p \rangle$$

Θα χρειαστούμε τα

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right) = [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y]_j$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right) = [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t]_{jk}$$

οπότε

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \langle G_3 x, p \rangle &= -\frac{i}{2} (G_3)^{ji} x_i p_j = -\frac{1}{2} (G_3)^{ji} x_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ -(G_3)^{ji} x_i \frac{\partial}{\partial x^j} \psi_y^t(x) &= -\psi_y^t(x) (G_3)^{ji} x_i [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y]_j \\ &= -\psi_y^t(x) x_i (G_2)^{ij} [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y]_j \\ &= \psi_y^t(x) x_i (\Lambda_4)^{ij} [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x - i(S_2^t)^{-1} y]_j \\ -\frac{i}{2} (\hat{x}^T G_2 \hat{p}) \psi_y^t(x) - \frac{i}{2} (\hat{p}^T G_3 \hat{x}) \psi_y^t(x) \\ &= \psi_y^t(x) \left[\frac{1}{2} Tr \Lambda_4 - i \langle x, \Lambda_4 (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle + i \langle x, \Lambda_4 (S_2^t)^{-1} y \rangle \right] \end{aligned}$$

Ο άλλος όρος με συνεισφορά στο ίχνος

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} (\hat{p}^T G_4 \hat{p}) \psi_y^t(x) \\ &= +\frac{i}{2} \psi_y^t(x) (G_4)^{jk} \{ [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y]_j [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y]_k \\ &\quad + [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t]_{jk} \} \\ &= +\frac{i}{2} \psi_y^t(x) \{ [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y], \Lambda_2 [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y] \\ &\quad - i Tr [\Lambda_2 (S_2^t)^{-1} S_1^t] \} \\ &= +\frac{i}{2} \psi_y^t(x) \{ [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y], \Lambda_2 [-i(S_2^t)^{-1} S_1^t x + i(S_2^t)^{-1} y] \\ &\quad - i Tr [(S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2] \} \end{aligned}$$

και ο τελευταίος όρος

$$-\frac{i}{2}(\hat{x}^T G_1 \hat{x})\psi_y^t(x) = -\frac{i}{2}\psi_y^t(x) \langle x, G_1 x \rangle = +\frac{i}{2}\psi_y^t(x) \langle x, \Lambda_3 x \rangle$$

Συνεπώς

$$-i\mathcal{H}\psi_y^t(x) = \psi_y^t(x) \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{2}\langle x, \Lambda_3 x \rangle \\ -i\langle x, \Lambda_4(S_2^t)^{-1}S_1^t x \rangle + i\langle x, \Lambda_4(S_2^t)^{-1}y \rangle \\ + \frac{i}{2}\langle [-i(S_2^t)^{-1}S_1^t x + i(S_2^t)^{-1}y], \Lambda_2[-i(S_2^t)^{-1}S_1^t x + i(S_2^t)^{-1}y] \rangle \end{array} \right\} \\ + \psi_y^t(x) \left[\frac{1}{2}Tr(\Lambda_4 + (S_2^t)^{-1}S_1^t\Lambda_2) \right]$$

Τα ίχνη συμφωνούν αμέσως για l.h.s. και r.h.s.

Επιπλέον το

$$-\frac{i}{2}\langle x, [-\Lambda_3 + 2\Lambda_4(S_2^t)^{-1}S_1^t]x \rangle - \frac{i}{2}\langle [(S_2^t)^{-1}S_1^t x], \Lambda_2[(S_2^t)^{-1}S_1^t x] \rangle$$

συμφωνεί με το

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2}\langle x, (S_2^t)^{-1}S_1^t x \rangle \right) &= -\frac{i}{2}\langle x, [\Lambda_4(S_2^t)^{-1}S_1^t + (S_2^t)^{-1}S_1^t\Lambda_4^T - \Lambda_3 + (S_2^t)^{-1}S_1^t\Lambda_2(S_2^t)^{-1}S_1^t]x \rangle \\ &= -\frac{i}{2}\langle x, [(S_2^t)^{-1}S_1^t\Lambda_2(S_2^t)^{-1}S_1^t]x \rangle + \frac{i}{2}\langle x, [\Lambda_3]x \rangle - \frac{i}{2}\langle x, [\Lambda_4(S_2^t)^{-1}S_1^t]x \rangle \\ &\quad - \frac{i}{2}\langle x, [(S_2^t)^{-1}S_1^t\Lambda_4^T]x \rangle \end{aligned}$$

αφού $(S_2^t)^{-1}S_1^t$ συμμετρικός δείξαμε.

Ακόμη

$$+i\langle x, \Lambda_4(S_2^t)^{-1}y \rangle + \frac{i}{2}\langle [-i(S_2^t)^{-1}S_1^t x], \Lambda_2[+i(S_2^t)^{-1}y] \rangle + \frac{i}{2}\langle [+i(S_2^t)^{-1}y], \Lambda_2[-i(S_2^t)^{-1}S_1^t x] \rangle \\ = i\langle x, \{\Lambda_4(S_2^t)^{-1} + (S_2^t)^{-1}S_1^t\Lambda_2(S_2^t)^{-1}\}y \rangle$$

συμφωνεί με

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (+i\langle (S_2^t)^{-1}y, x \rangle) &= \frac{d}{dt} (+i\langle x, (S_2^t)^{-1}y \rangle) = i\langle x, -(S_2^t)^{-1}(S_2^t)'(S_2^t)^{-1}y \rangle \\ &= i\langle x, (S_2^t)^{-1}(S_1^t\Lambda_2 + S_2^t\Lambda_4)(S_2^t)^{-1}y \rangle \end{aligned}$$

Τέλος

$$+ \frac{i}{2}\langle [+i(S_2^t)^{-1}y], \Lambda_2[+i(S_2^t)^{-1}y] \rangle = -\frac{i}{2}\langle [(S_2^t)^{-1}y], \Lambda_2[(S_2^t)^{-1}y] \rangle$$

συμφωνεί με

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T S_4^t [(S_2^t)^{-1} y] \rangle \right) \\
&= -\frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y]', [S_2^t]^T S_4^t [(S_2^t)^{-1} y] \rangle - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [[S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} y]' \rangle \\
&= -\frac{i}{2} \langle ((S_2^t)^{-1})' y, [S_2^t]^T S_4^t [(S_2^t)^{-1} y] \rangle - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T S_4^t [(S_2^t)^{-1}]' y \rangle \\
&\quad - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T [S_4^t]' (S_2^t)^{-1} y \rangle \\
&= -\frac{i}{2} \langle S_2^t ((S_2^t)^{-1})' y, S_4^t [(S_2^t)^{-1} y] \rangle - \frac{i}{2} \langle S_2^t' [(S_2^t)^{-1} y], S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle \\
&\quad - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T S_4^t [(S_2^t)^{-1}]' y \rangle - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T [S_4^t]' (S_2^t)^{-1} y \rangle \\
&= -\frac{i}{2} \langle (I)' y, S_4^t [(S_2^t)^{-1} y] \rangle - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T S_4^t [(S_2^t)^{-1}]' y \rangle \\
&\quad - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T [S_4^t]' (S_2^t)^{-1} y \rangle \\
&= -\frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], -[S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} [(S_2^t)^{-1}]' (S_2^t)^{-1} y \rangle \\
&\quad - \frac{i}{2} \langle [(S_2^t)^{-1} y], [S_2^t]^T [S_4^t]' (S_2^t)^{-1} y \rangle
\end{aligned}$$

αφού πράγματι ισχύει

$$\begin{aligned}
-[S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} [(S_2^t)^{-1}]' + [S_2^t]^T [S_4^t]' &= \Lambda_2 \\
[S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} [S_1^t \Lambda_2 + S_2^t \Lambda_4] - [S_2^t]^T [S_4^t \Lambda_4 + S_3^t \Lambda_2] &= \Lambda_2 \\
[S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 - [S_2^t]^T S_3^t \Lambda_2 &= \Lambda_2
\end{aligned}$$

καθώς ισχύει

$$\begin{aligned}
[S_2^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} S_1^t - [S_2^t]^T S_3^t &= I \\
S_4^t (S_2^t)^{-1} S_1^t - S_3^t &= [(S_2^t)^{-1}]^T \\
[S_1^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} S_1^t - [S_1^t]^T S_3^t &= [S_1^t]^T [(S_2^t)^{-1}]^T \\
[S_1^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} S_1^t - [S_1^t]^T S_3^t &= [(S_2^t)^{-1} S_1^t]^T \\
[S_1^t]^T S_4^t (S_2^t)^{-1} S_1^t - [S_1^t]^T S_3^t &= (S_2^t)^{-1} S_1^t \stackrel{(4.107)}{\iff} \\
[(S_3^t)^T S_2^t + I] (S_2^t)^{-1} S_1^t - [S_1^t]^T S_3^t &= (S_2^t)^{-1} S_1^t \\
[(S_3^t)^T S_2^t] (S_2^t)^{-1} S_1^t &= [S_1^t]^T S_3^t
\end{aligned}$$

που ισχύει απ' την (4.105).

Δείξαμε λοιπόν την ισότητα των l.h.s. και r.h.s. της εξίσωσης Schrödinger με μόνο περισσευόμενο όρο στο l.h.s. τον τονισμένο με έντονο:

$$\begin{aligned}
 l.h.s. &= \frac{d}{dt} \psi_y^t(x) \\
 &= R(S^t) \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \exp(\dots) \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \text{Tr}[(S_2^t)^{-1} S_1^t \Lambda_2 + \Lambda_4] \\
 &+ R(S^t) \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \exp(\dots) \frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle \right. \\
 &\left. + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right) + \left[\frac{d}{dt} R(S^t) \right] \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \exp(\dots) \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

και συνεπώς δείξαμε αυτό που δηλώνουμε στο κυρίως κείμενο, πως δηλαδή:

$$\frac{d}{dt} R(S^t) = 0$$

ο.ε.δ.

Παράρτημα Γ

Διαδότης δύο συζευγμένων ταλαντωτών

Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε τον τύπο (4.157) που εξάγαμε για τον διαδότη τετραγωνικής Χαμιλτονιανής για την περίπτωση 2 συζευγμένων και ίδιων ταλαντωτών.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} g 2 x_1 x_2 + \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}$$

Το πρόβλημα χαρακτηρίζουν τα μεγέθη m , g και $k = m\omega^2$.

Αναδιατυπώνουμε τη Χαμιλτονιανή

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (k + g) \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} (k - g) \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}$$

όπου

$$x_+ \equiv \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \quad x_- \equiv \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_+ \equiv m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\sqrt{2}} \right) \quad p_- \equiv m \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{2}} \right)$$

που είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός άρα

$$p_1^2 + p_2^2 = p_+^2 + p_-^2$$

Έτσι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (k + g) x_+^2 + \frac{1}{2} (k - g) x_-^2 + \frac{p_+^2}{2m} + \frac{p_-^2}{2m}$$

Πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε τους σχετικούς πίνακες:

$$G = \begin{pmatrix} k + g & & & \\ & k - g & & \\ & & 1/m & \\ & & & 1/m \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} & & 1/m & 0 \\ & & 0 & 1/m \\ -k - g & 0 & & \\ 0 & -k + g & & \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \frac{-k - g}{m} & & & \\ & \frac{-k + g}{m} & & \\ & & \frac{-k - g}{m} & \\ & & & \frac{-k + g}{m} \end{pmatrix}$$

και η νιοστή δύναμη αυτού είναι ο πίνακας με τα στοιχεία υψωμένα στη νιοστή

$$S^t = e^{-\Lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda t)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} \left(\frac{-k-g}{m}\right)^n & & & & \\ & \left(\frac{-k+g}{m}\right)^n & & & \\ & & \left(\frac{-k-g}{m}\right)^n & & \\ & & & \left(\frac{-k+g}{m}\right)^n & \\ & & & & \frac{1}{m} \left(\frac{-k-g}{m}\right)^n \end{pmatrix} \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \frac{1}{m} \left(\frac{-k+g}{m}\right)^n \\ & & & 0 & \\ \frac{1}{m} \left(\frac{-k-g}{m}\right)^{n+1} & & 0 & & \\ & 0 & & \frac{1}{m} \left(\frac{-k+g}{m}\right)^{n+1} & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

και βγάζοντας τα μείον εκτός και σχηματίζοντας ρίζες ($|g| < |k|$) ώστε οι δυνάμεις να γίνουν $2n$ φτιάχνουμε \cos και \sin π.χ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{-k-g}{m}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{k+g}{m} t^2\right)^n = \cos\left(t \sqrt{\frac{k+g}{m}}\right)$$

οπότε

S^t

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(t \sqrt{\frac{k+g}{m}}\right) & 0 & \frac{-\sin\left(t \sqrt{\frac{k+g}{m}}\right)}{\sqrt{m(k+g)}} & 0 \\ 0 & \cos\left(t \sqrt{\frac{k-g}{m}}\right) & 0 & \frac{-\sin\left(t \sqrt{\frac{k-g}{m}}\right)}{\sqrt{m(k-g)}} \\ \frac{1}{m} \sqrt{\frac{k+g}{m}} \sin\left(t \sqrt{\frac{k+g}{m}}\right) & 0 & \cos\left(t \sqrt{\frac{k+g}{m}}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \sqrt{\frac{k-g}{m}} \sin\left(t \sqrt{\frac{k-g}{m}}\right) & 0 & \cos\left(t \sqrt{\frac{k-g}{m}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+g}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k-g}{m}}$$

$$S^t = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & 0 & \frac{-\sin(\omega_1 t)}{m\omega_1} & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2 t) & 0 & \frac{-\sin(\omega_2 t)}{m\omega_2} \\ \frac{\omega_1}{m} \sin(\omega_1 t) & 0 & \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \frac{\omega_2}{m} \sin(\omega_2 t) & 0 & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

$$\psi_y^t(x) = \langle x | e^{-it\mathcal{H}} | y \rangle = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \det(S_2^t)^{-\frac{1}{2}} \dots$$

$$\dots \exp \left(-\frac{i}{2} \langle y, S_4^t (S_2^t)^{-1} y \rangle - \frac{i}{2} \langle x, (S_2^t)^{-1} S_1^t x \rangle + i \langle (S_2^t)^{-1} y, x \rangle \right)$$

άρα

$$\det(S_2^t) = \frac{\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)}{m\omega_1 m\omega_2}$$

$$\begin{aligned} \psi_y^t(x) = \frac{im}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)}} \exp \left(-\frac{i}{2} \langle y, \begin{bmatrix} -m\omega_1 \cot(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & -m\omega_2 \cot(\omega_2 t) \end{bmatrix} y \rangle \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \langle x, \begin{bmatrix} -m\omega_1 \cot(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & -m\omega_2 \cot(\omega_2 t) \end{bmatrix} x \rangle \right. \\ \left. + i \left\langle \begin{bmatrix} \frac{-m\omega_1}{\sin(\omega_1 t)} & 0 \\ 0 & \frac{-m\omega_2}{\sin(\omega_2 t)} \end{bmatrix} y, x \right\rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_y^t(x) = \frac{im}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)}} \exp \left(\left[\frac{i}{2} m\omega_1 \cot(\omega_1 t) \right] (x_+^2 + y_+^2) \right. \\ \left. + \left[\frac{i}{2} m\omega_2 \cot(\omega_2 t) \right] (x_-^2 + y_-^2) + i \left[-\frac{m\omega_1}{\sin(\omega_1 t)} x_+ y_+ - \frac{m\omega_2}{\sin(\omega_2 t)} x_- y_- \right] \right) \end{aligned}$$

και οι δείκτες +, - και τα ω_1, ω_2 σημαίνουν ό,τι ορίσαμε προηγουμένως.

Για την περίπτωση της [28]:

$$k = 2m\omega^2 \quad g = -m\omega^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+g}{m}} = \omega \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k-g}{m}} = \sqrt{3}\omega$$

$$\psi_y^t(x) = \frac{im\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sin(\omega t) \sin(\sqrt{3}\omega t)}} \exp\left(\left[\frac{i}{2}m\omega \cot(\omega t)\right](x_+^2 + y_+^2)\right. \\ \left.+ \left[\frac{i}{2}m\sqrt{3}\omega \cot(\sqrt{3}\omega t)\right](x_-^2 + y_-^2) + i\left[-\frac{m\omega}{\sin(\omega t)}x_+y_+ - \frac{m\sqrt{3}\omega}{\sin(\sqrt{3}\omega t)}x_-y_-\right]\right)$$

και αφού ορίσαμε

$$x_+ \equiv \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \quad x_- \equiv \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_y^t(x) = \frac{im\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sin(\omega t) \sin(\sqrt{3}\omega t)}} \exp\left(\left[\frac{i}{2}m\omega \cot(\omega t)\right]\frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2\right. \\ \left.+ y_2^2) + \left[\frac{i}{2}m\sqrt{3}\omega \cot(\sqrt{3}\omega t)\right]\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)\right. \\ \left.+ i\left[-\frac{m\omega}{\sin(\omega t)}\frac{1}{2}(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2)\right.\right. \\ \left.\left.- \frac{m\sqrt{3}\omega}{\sin(\sqrt{3}\omega t)}\frac{1}{2}(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)\right]\right)$$

$$\psi_y^t(x) = \left(\frac{im\omega}{2\pi} 3^{1/4}\right) \frac{1}{\sqrt{\sin(\omega t) \sin(\sqrt{3}\omega t)}} \exp\left(\frac{i}{4}m\omega[\cot(\omega t) + \sqrt{3}\cot(\sqrt{3}\omega t)](x_1^2 + x_2^2\right. \\ \left.+ y_1^2 + y_2^2) + \frac{i}{4}m\omega[\cot(\omega t) - \sqrt{3}\cot(\sqrt{3}\omega t)](+2x_1x_2 + 2y_1y_2)\right. \\ \left.+ \frac{i}{4}m\omega\left[-\frac{2}{\sin(\omega t)}(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2)\right.\right. \\ \left.\left.- \frac{2\sqrt{3}}{\sin(\sqrt{3}\omega t)}(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)\right]\right)$$

και συμφωνεί με τον τύπο (53) της [28]. Η διαφορά ενός προσήμου μείον είναι άνευ σημασίας καθόσον ο διαδότης είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger, ως εκ τούτου υπάρχει μια αυθαιρεσία σε σταθερές φάσεις, στην προκειμένη περίπτωση $e^{i\pi} = -1$.

Βιβλιογραφία

Γενικά επί της QFT

- [1] Michael E. Peskin & Daniel V. Schroeder “An introduction to Quantum Field Theory” 1995
- [2] Francis Halzen & Alan D. Martin “Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics” 1984
- [3] Timo Weigand - Σημειώσεις διαλέξεων “Quantum Field Theory I + II”
- [4] Αθανάσιος Λαχανάς - Σημειώσεις διαλέξεων QFT
- [5] Claude Itzykson & Jean Bernard Zuber “Quantum Field Theory” 1980
- [6] Mark Srednicki “Quantum Field Theory” 2007
- [7] Anthony Zee “Quantum Field Theory in a Nutshell” 2003
- [8] David Tong - σημειώσεις διαλέξεων “Lectures on Quantum Field Theory”

0. Εισαγωγή

- [9] Steven Weinberg “The Quantum Theory of Fields” (τόμος I) 2005
- [10] Silvan S. Schweber “QED and the Men Who Made It” 1994

1. Κβαντική ηλεκτροδυναμική

- [11] Franz Gross “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory” 1993
- [12] Walter Greiner & Joachim Reinhardt “Quantum Electrodynamics” 1984
- [13] F. Di Lodovico - παρουσίαση “Quantum Electrodynamics: Dirac equation, antiparticles. QED and examples.”

2. Επανακανονικοποίηση

- [14] Wayne Repko - σημειώσεις διαλέξεων “Introduction to Renormalization”
- [15] Arnold Neumaier - σημειώσεις “Renormalization without infinities - an elementary tutorial” δοκιμαστική έκδοση, Ιούνιος 22, 2015

3. Ενεργός θεωρία πεδίου

- [16] Daniel Jaud - εργασία “Effective Field Theories - Scientific Work” 2012

4. Λαγκρανζιανή Euler-Heisenberg

- [17] Matthew D. Schwartz “Quantum Field Theory and the Standard Model” 2014
- [18] Thanu Padmanabhan “Quantum Field Theory: The Why, What and How” 2016
- [19] Patrick Albert Böhl - διατριβή “Vacuum Harmonic Generation in Slowly Varying Electromagnetic Backgrounds” 2016
- [20] Werner Heisenberg & Hans Euler (ιστορικό θεμέλιο της παρούσας εργασίας) “Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons” (“Consequences of the Dirac Theory of Positrons”) Zeit. f. Phys., 98 (1936), 714-732
- [21] Julian Schwinger (ιστορικό θεμέλιο της παρούσας εργασίας) “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization” Physical Review vol. 82 no. 5 June 1 1951

- [22] Felix Karbstein - δημοσίευση "The quantum vacuum in electromagnetic fields: From the Heisenberg-Euler effective action to vacuum birefringence" arXiv:1611.09883v1 [hep-th] 23 Nov 2016
- [23] Filip Preucil - μεταπτυχιακή εργασία "Effective interactions of the Euler-Heisenberg type in models of quantum field theory" 2014
- [24] Gerald V. Dunne "Heisenberg-Euler Effective Lagrangians: Basics and Extensions" arXiv:hep-th/0406216v1 23 Jun 2004
- [25] Hagen Kleinert "Particles and Quantum Fields" 2016
- [26] Leonard Parker & David Toms "Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity" 2009
- [27] Walter Dittrich "Probing the Quantum Vacuum" 1969
- [28] Surarit Pepore & Bodinchat Sukbot "Schwinger Method for Coupled Harmonic Oscillators and Time-Dependent Linear Potential" Chinese Journal of Physics vol. 53, no. 7, December 2015
- [29] S. Kahane & R. Moreh "Elastic scattering of 7.9-MeV photons from ^{181}Ta " Phys. Rev. C 9, 2384, 1 June 1974
- [30] P. Rullhusen et al. - δημοσίευση σχετικά με Delbrück scattering του 1983
- [31] G. Jarlskog et al. "Measurement of delbrueck scattering and observation of photon splitting at high energies" Phys.Rev. D8 (1973) 3813-3823
- [32] B. King - διδακτορική εργασία "Vacuum Polarisation Effects in Intense Laser Fields" 2010
- [33] A. Di Piazza, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel "Light diffraction by a strong standing electromagnetic wave" arXiv:hep-ph/0602039v2 28 Aug 2006
- [34] A.M. Fedotov, N.B. Narozhny "Generation of harmonics by a focused laser beam in the vacuum" arXiv:hep-ph/0604258v2 22 Aug 2006