ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ισορροπία Αγοράς με Γραμμικές Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Χρήστος Π. Καραθάνος

Επιβλέπων: **Ζησιμόπουλος Βασίλειος,** Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2018

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ισορροπία Αγοράς με Γραμμικές Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Χρήστος Π. Καραθάνος
Α.Μ.: Μ1248

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **Ζησιμόπουλος Βασίλειος,** Καθηγητής ΕΚΠΑ

Ιούλιος 2018

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασία είναι το πρόβλημα του υπολογισμού Ισορροπιών σε αγορές Arrow- Debreu και Fisher με γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Στο πρώτο μέρος, παρουσιάζονται πολυωνυμικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα με την χρήση κυρτών προγραμμάτων βελτιστοποίησης. Οι αλγόριθμοι αυτοί έχουν το μειονέκτημα ότι στηρίζονται στον ελλειψοειδή αλγόριθμο, ο οποίος δεν είναι αποδοτικός στην πράξη και για τον λόγο αυτό τα τελευταία χρόνια έχει επιχειρηθεί η σχεδίαση αλγορίθμων που βασίζονται σε συνδυαστικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός της μέγιστης ροής σε ένα γράφημα. Το δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας επικεντρώνεται σε αλγορίθμους τέτοιας φύσης. Αρχικά, παρουσιάζεται ένας ισχυρά πολυωνυμικός αλγόριθμος για αγορές Fisher και, αφού εξηγηθούν οι κύριες τεχνικές που χρησιμοποιεί, αναλύεται η πολυπλοκότητά του. Στη συνέχεια, στο τελευταίο τμήμα της εργασίας, οι τεχνικές αυτές επεκτείνονται και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ενός ασθενώς πολυωνυμικού συνδυαστικού αλγορίθμου για αγορές Arrow-Debreu.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Θεωρία Παιγνίων

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: ισορροπία αγοράς, αγορά fisher, αγορά arrow-debreu, ισχυρά πολυωνυμικός αλγόριθμος, συνδυαστικοί αλγόριθμοι

ABSTRACT

This thesis focuses on the problem of finding Equilibria in Arrow-Debreu and Fisher markets with Linear Utilities. In the first part, we present polynomial time algorithms via convex programming. Such algorithms use the Ellipsoid algorithm as a black box and are notoriously non-practical, therefore, there has recently been a lot of effort towards obtaining algorithms through the use of combinatorial tools, such as flow computation in graphs. In the second part, we focus on algorithms of such nature. First, we present a strongly polynomial algorithm for Fisher Markets and after highlighting the main techniques used by it we analyze its complexity. Finally, we focus on extensions of those techniques that lead to the development of a weakly-polynomial combinatorial algorithms for Arrow-Debreu markets with Linear utilies.

SUBJECT AREA: Game Theory

KEYWORDS: market equilibrium, fisher market, arrow-debreu market, strongly polynomial algorithm, combinatorial algorithms

Αφιερώνεται στους γονείς μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα το Κοινωφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης για την υποτροφία που μου παρείχε ώστε να περατωθούν οι σπουδές του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βασίλειο Ζησιμόπουλο για την αδιάλειπτη βοήθεια που μου παρείχε κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο μου Δημήτρη για την βοήθεια και συμπαράσταση στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Θεωρία Παιγνίων

Η Θεωρία Παιγνίων (Game Theory) είναι ο τομέας των Μαθηματικών και της Επιστήμης Υπολογισμού (Computer Science), που επιχειρεί να μοντελοποιήσει καταστάσεις όπου πολλαπλοί συμμετέχοντες αλληλεπιδρούν ή επηρεάζουν με οποιονδήποτε τρόπο το αποτέλεσμα (outcome) των άλλων παικτών [1].

1.2 Παίγνιο Ταυτόχρονης Κίνησης

Ας θεωρήσουμε ότι ένα παίγνιο (game) αποτελείται από ένα σύνολο n παικτών (players). Έστω δηλαδή οι παίκτες $\{1, 2, \ldots, n\}$. Κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει μία στρατηγική από ένα σύνολο στρατηγικών S_i. Για να παίξει το παίγνιο ένας παίκτης i, πρέπει να επιλέξει μία στρατηγική $s_i \in S_i$. Ορίζουμε ως $s = (s_1, \ldots, s_n)$ το διάνυσμα (vector) στρατηγικών, που έχουν επιλεχθεί από τους παίκτες. Τέλος ορίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών επιλογών, όλων των παικτών ως $S = \times_i S_i$.

Το διάνυσμα των στρατηγικών $s \in S$, που επιλέχθηκε από τους παίκτες καθορίζει το αποτέλεσμα για κάθε παίκτη. Γενικότερα το αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό για διαφορετικούς παίκτες. Για να οριστεί το παίγνιο, θα πρέπει κάθε παίκτης να διαθέτει μία διάταξη προτίμησης (preference ordering) όλων των δυνατών αποτελεσμάτων. Για το λόγο αυτό πρέπει να οριστεί μία ολοκληρωμένη, μεταθετική και ανακλαστική δυαδική σχέση οριζόμενη πάνω στο σύνολο των δυνατών διανυσμάτων στρατηγικής S. Κατά αυτόν τον τρόπο, δεδομένου δύο στοιχείων του S, η σχέση αυτή δηλώνει ποιο από τα δύο αποτελέσματα προτιμά ασθενώς ο παίκτης i. Ώς ασθενής προτίμηση (weakly preference) της στρατηγικής S_1 από την στρατηγική S_2 για τον παίκτη i, ορίζεται όταν ο παίκτης i προτιμά το αποτέλεσμα της S_1 από αυτό της S_2 ή θεωρεί τα αποτελέσματα των διανυσμάτων αυτών ισοδυνάμως καλά.

Ο απλούστερος τρόπος για να ορισθούν οι προτιμήσεις των παικτών, είναι να ανατεθούν για κάθε παίκτη τιμές για κάθε αποτέλεσμα. Σε κάποια είδη αυτών των παιγνίων, είναι φυσικό να αντιστοιχιστούν οι τιμές αυτές σαν το κέρδος των παικτών, ενώ σε άλλα είδη παιγνίων σαν το κόστος που εισάγεται από τους παίκτες. Για το λόγο αυτό ορίζονται οι συναρτήσεις $u_i : S \to \mathbb{R}$ ως οι συναρτήσεις κέρδους (ή ευχαρίστησης) (utility) και οι συναρτήσεις $c_i : S \to \mathbb{R}$ ως οι συναρτήσεις κόστους για κάθε παίκτη i αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις αυτές είναι εναλλάξιμες μεταξύ τους, καθώς $u_i(s) = -c_i(s)$ εξορισμού.

Σε περίπτωση που κάθε συνάρτηση u_i είχε οριστεί συναρτήσει μόνο της στρατηγικής s_i του i παίκτη αντί για το σύνολο S των στρατηγικών όλων των παικτών, το πρόβλημα θα αποτελούνταν από n ανεξάρτητα προβλήματα βελτιστοποίησης. Αυτή είναι η ουσιώδης διαφορά των παιγνίων από το σύστημα ανεξαρτήτων προβλημάτων βελτιστοποίησης, ότι το κέρδος κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από την στρατηγική που θα επιλέξει αλλά και από τις στρατηγικές που θα επιλέξουν οι άλλοι παίκτες [1].

1.3 Ισορροπία στην Οικονομική Θεωρία

Στην Οικονομική Θεωρία ως αγορά (market) ορίζεται οποιαδήποτε διαδικασία, σύστημα, κοινωνική σχέση στην οποία τα μέλη εμπλέκονται σε κάποιο είδος ανταλλαγής (αγαθών, υπηρεσιών κτλ). Επομένως ως αγορά ορίζεται γενικότερα η διαδικασία κατά την οποία επιτυγχάνεται η ανάθεση κάποιας αξίας στα αγαθά αυτά (ως αγαθά θα αναφέρονται γενικότερα τα αγαθά και οι υπηρεσίες εφεξής). Κατά αυτό τον τρόπο η αγορά επιτρέπει την διανομή και ανάθεση των αγαθών μέσα σε μία κοινωνία.

Από επιστημονικής απόψεως, μία αγορά αποτελείται από ένα σύνολο πρακτόρων (agents) ή εμπόρων (traders) καθώς και πιθανών αγοραστών, οι οποίοι διαθέτουν ένα σύνολο -διαιρετέων συνήθως- αγαθών και ενδιαφέρονται να πουλήσουν τα αγαθά αυτά με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους τους ή την απόκτηση άλλων αγαθών που επιθυμούν. Ως επί των πλείστων μαθηματικά έχουν μοντελοποιηθεί δύο ειδών αγορές. Η πρώτη αγορά αποτελείται μόνο από εμπόρους που εισέρχονται στην αγορά έχοντας ο καθένας μία συλλογή αγαθών και ενδιαφέρονται να τα πουλήσουν (ανταλλάξουν) με σκοπό να αποκτήσουν άλλα αγαθά που τους προσφέρουν μεγαλύτερη χρησιμότητα. Αυτού του είδους η αγορά αποκαλείται αγορά Arrow-Debreu. Το δεύτερο είδος αγοράς αποτελείται από αγοραστές που ο καθένας διαθέτει κάποια αγοραστική δύναμη (χρήματα) και από αγαθά που μπορούν να αποκτήσουν. Σκοπός των αγοραστών είναι να αποκτήσουν αγαθά που θα τους προσφέρουν τη μέγιστη ευχαρίστηση, χωρίς ωστόσο να υπερβούν την αρχική τους αγοραστική δύναμη (budget), δηλαδή τα λεφτά με τα οποία εισήλθαν στην αγορά. Το είδος αυτής της αγοράς καλείται αγορά Fischer. Και τα δύο είδη αγορών θα αναπτυχθούν στη παρούσα διπλωματική.

Κεντρικό ρόλο στην Οικονομική Θεωρία παίζει η έννοια της ισορροπίας (equilibrium) σε μία αγορά. Ως ισορροπία θεωρείται η κατάσταση με τις εξής ιδιότητες:

1. Οι πράκτορες ενεργούν λογικά, δηλαδή η επιδίωξη τους είναι να μεγιστοποιήσουν το δικό τους κέρδος. Συνήθως το κέρδος αυτό μοντελοποιείται από μία αντικειμενική συνάρτηση (objective function) των αγαθών, που δηλώνει την ευχαρίστηση ή χρησιμότητα που απολαμβάνει ο πράκτορας ανάλογα με τα αγαθά (ή κέρδος) που διαθέτει στο τέλος της αγοράς.
2. Κανένας πράκτορας δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει από την στρατηγική που ακολουθεί.
3. Υπάρχει δυναμική διαδικασία με την οποία μπορεί να επιτευχθεί η ισορροπία αυτή, χαρακτηρίζοντας την με αυτό το τρόπο ως μία εφικτή κατάσταση ηρεμίας (stable state).

Με τον παραπάνω ορισμό καταλήγουμε ότι η ισορροπία σε μία αγορά μπορεί να οριστεί ως το σύνολο της αξίας κάθε διαιρέσιμου αγαθού (τιμές) ανά μονάδα, με τέτοιο τρόπο ώστε όταν οι πράκτορες που διαθέτουν τα αγαθά αυτά, τα πουλήσουν στις τιμές αυτές, προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν την αντικειμενική τους συνάρτηση, η συνολική ζήτηση των αγαθών θα είναι ίση με την συνολική προσφορά τους. Όταν επιτευχθεί το ισοζύγιο προσφοράς και ζήτησης, λέγεται ότι η αγορά τερματίζει (market clears) [2].

1.4 Αγορά Arrow-Debreu

Το 1954 οι K. Arrow και G. Debreu, έδωσαν τον ορισμό ενός μοντέλου παραγωγής, ανταλλαγής και κατανάλωσης (αγορά) και απέδειξαν την ύπαρξη ισορροπίας πάνω στο μοντέλο αυτό, ορίζοντας και χρησιμοποιώντας την έννοια της αφηρημένης οικονομίας [3]. Μία αφηρημένη οικονομία μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία γενίκευση ενός παιχνιδιού, στο οποίο η επιλογή κάθε πράκτορα όχι μόνο επηρεάζει την τελική αποζημίωση αλλά επίσης και το σύνολο των επιλογών (στρατηγικών) των άλλων πρακτόρων. Το αποτέλεσμα της δημοσίευσης αυτής συνοψίζεται σε δύο θεωρήματα. Στο πρώτο θεώρημα αποδεικνύεται ότι αν κάθε μονάδα κατανάλωσης έχει αρχικά κάποια ποσότητα κάθε αγαθού διαθέσιμη προς ανταλλαγή, τότε μία κατάσταση ισορροπίας υπάρχει. Στο δεύτερο θεώρημα επιτυγχάνεται χαλάρωση της συνθήκης του προηγούμενου θεωρήματος απαιτώντας τα εξής:

1. Κάθε πράκτορας μπορεί να διαθέσει κάποια θετική ποσότητα εργασίας (labor) στην παραγωγή τουλάχιστον ενός αγαθού.
2. Κάθε τέτοιος τύπος εργασίας προσφέρει μία θετική χρησιμότητα στην παραγωγή των επιθυμητών αγαθών.

Σε πιο σύγχρονα πλαίσια, η αγορά Arrow-Debreu ($\mathcal{AD}$ εφεξής) μπορεί σε αφηρημένο επίπεδο να περιγραφεί ως το εξής παίγνιο (βασιζόμενοι στο πρώτο θεώρημα). Στην αγορά εισέρχονται ένας αριθμός πρακτόρων διαθέτοντας μία προικοδότηση (endownment), δηλαδή μία αρχική ποσότητα από αγαθά. Σκοπός κάθε πράκτορα είναι να ανταλλάξει τα αγαθά αυτά με σκοπό την απόκτηση άλλων που θα του μεγιστοποιήσουν την ευχαρίστηση, εκφραζόμενη με μία αντικειμενική συνάρτηση. Βάσει αυτής της ανταλλαγής καθορίζεται για κάθε αγαθό μία τιμή. Ισορροπία στο παιχνίδι αυτό επιτυγχάνεται όταν για τις τιμές των αγαθών όπου μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση κάθε πράκτορα, έχουμε ισοζύγιο προσφοράς και ζήτησης των αγαθών και επομένως η αγορά τερματίζει.

1.4.1 Μαθηματική περιγραφή της αγοράς Arrow-Debreu

Μια ανταλλακτική αγορά $\mathcal{AD}$ αποτελείται από ένα σύνολο $\{T_1, \ldots, T_n\}$ έμπορους ($n \geq 1$) και από ένα σύνολο $\{G_1, \ldots, G_m\}$ αγαθών ($m \geq 1$). Κάθε έμπορος T_i διαθέτει μία αρχική προικοδότηση $e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{in}) \in \mathbb{R}_+^m$, όπου e_{ij} είναι η ποσότητα του αγαθού G_j που διαθέτει αρχικά. Επίσης κάθε έμπορος διαθέτει μία συνάρτηση χρησιμότητας $u_i : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$, όπου $u_i(x_{i1}, \ldots, x_{im})$ εκπροσωπεί τη χρησιμότητα που αποκομίζει, αν στο τέλος της αγοράς η ποσότητα του αγαθού G_j που αποκτά είναι x_{ij} για κάθε $j \in [m]$. Η επιλογή των αγαθών του i εμπόρου, ορίζεται λοιπόν ως το διάνυσμα $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im})$ και η επιλογή όλων των εμπόρων ως το διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Τέλος ορίζουμε ως s το διάνυσμα προσφοράς, όπου η j-οστή συνιστώσα $s_j = \sum_{i=1}^{n} e_{ij}$ είναι η συνολική προσφορά του αγαθού G_j.

Έστω $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \neq \mathbf{0}$ ένα μη αρνητικό διάνυσμα τιμών, όπου $\pi_j \geq 0$ είναι η τιμή ανά μονάδα του αγαθού G_j. Κάθε έμπορος T_i ανταλλάσσει με τους άλλους εμπόρους την αρχική του προικοδότηση σε τιμές π, με στόχο να αποκτήσει μία συλλογή αγαθών που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητας του. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ο έμπορος T_i να πουλάει την αρχική του προικοδότηση σε τιμές π, ώστε να αποκτήσει ένα έσοδο $e_i \cdot \pi$, το οποίο στη συνέχεια το χρησιμοποιεί για να αποκτήσει μία συλλογή (bundle) αγαθών $x_i \in \mathbb{R}^m_+$ που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητας του.

Επομένως για να περιγραφεί μία λύση χρειάζονται και τα δύο διανύσματα (π, x). Η δυσκολία του προβλήματος έγκειται στο να προσδιοριστεί μία κατάλληλη τιμή του διανύσματος των τιμών π. Η έννοια της καταλληλότητας σχετίζεται με την ιδιότητα του τερματισμού της αγοράς, όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Βέβαια αν υποτεθεί η ύπαρξη ενός μαντείου (oracle) το οποίο διαθέτει το διάνυσμα του π, η εύρεση του x αποτελεί μία επίλυση n προγραμμάτων, ένα για κάθε έμπορο. Αυτό συμβαίνει διότι δεδομένου του διανύσματος τιμών π, η εύρεση της ανάθεσης αγαθών x_i για κάθε έμπορο μπορεί να υπολογιστεί από την λύση του προγράμματος:

$$\begin{aligned} max \quad & u_i(x_i) \\ \text{s.t:} \quad & x_i \cdot \pi \leq e_i \cdot \pi \\ & x_i \in \mathbb{R}^m_+ \end{aligned} \tag{1}$$

Ο πρώτος περιορισμός (constraint) σημαίνει απλά ότι κάθε έμπορος διαθέτοντας το εμπόρευμα του αποκτά αγοραστική ικανότητα $e_i \cdot \pi$. Επομένως δεν μπορεί να ξοδέψει περισσότερα από αυτά για να αποκτήσει αγαθά που θα μεγιστοποιήσουν την αντικειμενική του συνάρτηση.

Πάνω σε αυτό το υπόβαθρο, ορίζουμε ως π μία ισορροπία της αγοράς Arrow-Debreu, εάν μπορεί να ανατεθεί σε κάθε έμπορο T_i μία συλλογή αγαθών x_i που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητας του u_i (δεδομένου του διανύσματος τιμών π), με τέτοιον τρόπο ώστε η προσφορά να ισούται με τη ζήτηση, δηλαδή η αγορά να τερματίσει.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συλλογή αγαθών x_i δεν είναι απαραιτήτως μοναδική. Φορμαλιστικά δεδομένων των τιμών π, ορίζουμε ως $OPT_i(\pi)$ το σύνολο των βέλτιστων συλλογών αγαθών του T_i, δηλαδή το σύνολο των αγαθών που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας του εμπόρου T_i. Επομένως καταλήγουμε στο εξής λήμμα.

Λήμμα 1. *Δεδομένου του π, $x_i \in OPT_i(\pi)$ ανν είναι λύση του προγράμματος (1).*

Σε περίπτωση που το π δεν αποτελεί ισορροπία της αγοράς, τότε η συνολική ζήτηση του G_i μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερη, είτε μικρότερη της προσφοράς (demand) s_j. Η πλεονάζουσα ζήτηση (excess demand) ενός αγαθού, δεδομένου του π, μπορεί να οριστεί ως $c_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} - s_j$. Επομένως η πλεονάζουσα ζήτηση της αγοράς περιγράφεται από το διάνυσμα $c = (c_1, \ldots, c_m)$. Καθώς όπως αναφέραμε η ανάθεση x_i δεν είναι απαραιτήτως μοναδική, και το διάνυσμα c μπορεί να μην είναι μοναδικό. Ομοίως με τον ορισμό του OPT_i προκύπτει ο ορισμός της πλεονάζουσας ζήτησης.

Ορισμός 1 (Πλεονάζουσα Ζήτηση). *Δεδομένου των τιμών π, η πλεονάζουσα ζήτηση*

$C(\pi)$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα c της μορφής:

$$c = x_i + \cdots + x_n - s$$

όπου $x_i \in OPT_i(\pi)$. Επίσης για κάθε αγαθό G_i θα χρησιμοποιούμε τον ορισμό $C_j(\pi)$ για την προβολή του $C(\pi)$ στην j-συνιστώσα (που συμβολίζει το αγαθό G_j).

Από τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να ορίσουμε την ισορροπία μία αγοράς $\mathcal{AD}$.
Ορισμός 2 (Ισορροπία Αγοράς Arrow-Debreu). *Ένα διάνυσμα π αποτελεί ισορροπία της αγοράς $\mathcal{AD}$ ανν $\mathbf{0} \in C(\pi)$.*

1.5 Αγορά Fisher

Το 1891, ο I. Fisher πρότεινε ένα απλό μοντέλο αγοράς [4]. Στο μοντέλο Fisher $\mathcal{F}$ δεν υπάρχουν έμποροι που επιδιώκουν να ανταλλάξουν τα αγαθά τους, αλλά αγοραστές (buyers) που εισέρχονται στην αγορά διαθέτοντας αγοραστική δύναμη (budget) B_i. Όπως και στην αγορά $\mathcal{AD}$, οι αγοραστές διαθέτουν μία αντικειμενική συνάρτηση $u_i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$ (ως επί το πλείστον στην βιβλιογραφία μελετάται η περίπτωση των κυρτών συναρτήσεων). Στην αγορά αυτή υπάρχει, σε αντιστοιχία με την αγορά $\mathcal{AD}$, ένα σύνολο G αγαθών. Για τα αγαθά αυτά υπάρχει προσφορά $s = (s_1, \ldots, s_m)$, διαθέσιμα προς πώληση στους αγοραστές.

Δεδομένου ενός μη-αρνητικού διανύσματος τιμών $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \neq \mathbf{0}$, κάθε αγοραστής i χρησιμοποιεί την αγοραστική δύναμη που διαθέτει, για να αγοράσει μία συλλογή αγαθών $x_i \in \mathbb{R}^m_+$ που μεγιστοποιεί την συνάρτηση ευχαρίστησης του. Όπως και με την αγορά $\mathcal{AD}$, δεδομένου του διανύσματος π, ορίζουμε ως $OPT_i(\pi)$, το σύνολο των βέλτιστων συλλογών για τον αγοραστή i. Δηλαδή $x \in OPT_i$ ανν είναι λύση του προγράμματος:

$$\begin{aligned} max \quad & u_i(x_i) \\ \text{s.t:} \quad & x_i \cdot \pi \leq B_i \\ & x_i \in \mathbb{R}^m_+ \end{aligned} \tag{2}$$

Οι ορισμοί της πλεονάζουσας ζήτησης και της ισορροπίας αγοράς είναι ίδιες όπως και με την αγορά $\mathcal{AD}$. (1.4.1). Η διαφορά είναι ότι τα σημεία ισορροπίας στο μοντέλο $\mathcal{F}$ δεν είναι βαθμωτά αμετάβλητα (scale-invariant), καθώς μία κλιμάκωση (scaling) από έναν θετικό παράγοντα του διανύσματος x, δεν επηρεάζει την αγοραστική δύναμη B_i του αγοραστή και επομένως αλλάζουν οι παράμετροι του προγράμματος (2).

1.5.1 Η αγορά Fischer ως ειδική περίπτωση της αγοράς Arrow-Debreau

Έστω μία αγορά Fisher $\mathcal{F}$. Πρώτα θα εισάγουμε κάποιες παραδοχές και αλλαγές ώστε να κανονικοποιήσουμε την αγορά αυτή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} B_i = 1$. Από οικονομικής απόψεως η παραδοχή αυτή ισοδυναμεί σε μία αλλαγή της νομισματικής μονάδας, έτσι ώστε μία μονάδα να αντιστοιχεί στο σύνολο των διαθέσιμων χρημάτων στην αγορά αυτή. Επίσης, πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε αγαθό βρίσκεται σε αρχική προσφορά: $s_j = 1, \forall j$. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως αλλαγή της μονάδας μέτρησης κάθε αγαθού. Φυσικά μία τέτοια αλλαγή απαιτεί και την αναθεώρηση των αντικειμενικών συναρτήσεων των αγοραστών, καθώς $x_{ij} \leq s_j, \ \forall i, j$ και η αντικειμενική συνάρτηση u_i είναι συναρτήσει του x_i. Παρόλα αυτά η κλάση της συνάρτησης u_i δεν αλλάζει από την παραπάνω αλλαγή, εφόσον δεν μεταβάλλεται η κυρτότητα των συναρτήσεων αυτών.

Ο στόχος είναι η μετατροπή μίας αγοράς Fisher $\mathcal{F}$ με n αγοραστές και m αγαθά, σε μία αγορά Arrow-Debreu $\mathcal{AD}$ με n εμπόρους και m αγαθά. Για να επιτευχθεί αυτό για κάθε αγοραστή στην αγορά $\mathcal{F}$, δημιουργείται ένας έμπορος στην αγορά $\mathcal{AD}$ με την ίδια αντικειμενική συνάρτηση και με αρχική προικοδότηση B_i μονάδες από κάθε προϊόν. Θα πρέπει να αποδειχθεί λοιπόν ότι π είναι ένα σημείο ισορροπίας της αγοράς $\mathcal{AD}$ αν και μόνο αν είναι επίσης και ένα σημείο ισορροπίας της αγοράς $\mathcal{F}$.

Θα αποδειχθεί το πρώτο σκέλος. Έστω π ένα σημείο ισορροπίας της αγοράς $\mathcal{AD}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας επίσης ας θεωρηθεί ότι $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$, καθώς η εξίσωση αυτή μπορεί να προκύψει με κλιμάκωση οποιουδήποτε σημείου ισορροπίας π της αγοράς $\mathcal{AD}$. Επομένως αν π ένα σημείο ισορροπίας της αγοράς $\mathcal{AD}$, τότε ο έμπορος i έχει αγοραστική δύναμη $\sum_{j=1}^{m} B_i \pi_j = B_i$, που είναι ίση με αυτήν του αντίστοιχου αγοραστή της αγοράς Fisher $\mathcal{F}$. Κατά αυτόν τον τρόπο, στο σημείο ισορροπίας π, η ζήτηση του θα είναι ίδια και στις δύο αγορές, καθώς η αντικειμενική του συνάρτηση δεν αλλάζει και διαθέτει την ίδια αγοραστική δύναμη. Επίσης η προσφορά κάθε αγαθού είναι ίδια σε κάθε αγορά, καθώς για την αγορά $\mathcal{AD}$ έχουμε $s_j = \sum_{i=1}^{n} B_i = 1$ για κάθε αγαθό, και για την αγορά $\mathcal{F}$ έχουμε $s_j = 1$ επίσης για κάθε αγαθό. Τέλος, αφού εξ υποθέσεως το διάνυσμα π ένα σημείο ισορροπίας της αγοράς $\mathcal{AD}$, δηλαδή η αγορά τερματίζει, συνεπάγεται ότι το π αποτελεί και σημείο ισορροπίας της αγοράς $\mathcal{F}$. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορεί να κατασκευαστεί η απόδειξη και για το αντίστροφο σκέλος.

2. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ARROW-DEBREU

2.1 Το θεώρημα σταθερού σημείου Brouwer

Πριν παρουσιαστεί το θεώρημα Brouwer, θα αναλυθούν αρχικά κάποιες τοπολογικές έννοιες.

Ορισμός 3 (Συμπαγές σύνολο). *Ένα σύνολο ορίζεται ως συμπαγές (compact) εάν:*

1. *είναι κλειστό (closed), δηλαδή περιλαμβάνει και τα ακραία σημεία και*
2. *είναι φραγμένο (bounded), δηλαδή όλα τα σημεία του βρίσκονται εντός κάποιας σταθερής απόστασης μεταξύ τους.*

Ορισμός 4 (Κυρτό σύνολο). *Ένα σύνολο ορίζεται ως κυρτό (convex) εάν για κάθε ζευγάρι σημείων του συνόλου αυτού, κάθε σημείο της ευθείας που ενώνει το ζεύγος αυτό ανήκει επίσης στο σύνολο αυτό.*

Έχοντας τους παραπάνω ορισμούς, το θεώρημα σταθερού σημείου Brouwer συνοψίζεται ως εξής:

Θεώρημα 1 (Brouwer). *Για κάθε συνεχής συνάρτηση απεικόνισης f από ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον εαυτό του, υπάρχει ένα σημείο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Εν συνεχεία, το θεώρημα του Brouwer μπορεί να επεκταθεί και για συναρτήσεις με πεδίο τιμών σύνολα (set-valued functions) από το θεώρημα του Kakutani. Μία τέτοια συνάρτηση φ από το σύνολο X στο δυναμοσύνολο του Y, γράφεται ως $\varphi : X \to 2^Y$.

Θεώρημα 2 (Kakutani). *Έστω S ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Έστω $\varphi : S \to 2^S$ μία συνολοσυνάρτηση με κλειστό γράφημα (closed graph) και με την ιδιότητα ότι $\varphi(x)$ είναι μή κενή και κυρτή για κάθε $x \in S$. Τότε η φ έχει σταθερό σημείο.*

2.2 Απόδειξη ύπαρξης ισορροπίας ως σταθερού σημείου

Σε αυτή την παράγραφο θα δοθεί μία απλοποιημένη απόδειξη της ύπαρξης ενός σημείου ισορροπίας αγοράς Arrow-Debreu. Θα χρησιμοποιηθούν οι μαθηματικοί συμβολισμοί της παραγράφου 1.4.1. θεωρούμε ότι $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_j, \dots, \pi_m)$ και ότι $0 \le \pi_j \le 1, \forall j$.

Έστω η συνάρτηση $f(\pi) = (f_1(\pi), \dots, f_j(\pi), \dots, f_m(\pi)) \in \mathbb{R}^m$.

Ως $f_j(\pi)$ ορίζεται η συνάρτηση:

$$f_j(\pi) = \frac{\pi_j + \max(0, C_j(\pi))}{1 + \sum_j \max(0, C_j(\pi))} \tag{3}$$

με πεδίο ορισμού το συμπαγές και κυρτό σύνολο $\Delta^m = [0, 1]^m$ πάνω στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^m$. Αφού $0 \le \pi_j \le 1$, εύκολα παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι το $[0, 1]$ και ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.

Εύκολα συμπεραίνεται ότι η συνάρτηση $f(\pi)$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta^m = [0, 1]^m$ και ομοίως πεδίο τιμών το Δ^m, δηλαδή $f : \Delta^m \to \Delta^m$. Επίσης η f είναι συνεχής. Έτσι οι συνθήκες του θεώρηματος Brouwer ισχύουν και επομένως η $f(\pi)$ έχει σταθερό σημείο.

Έστω ένα σημείο ισορροπίας π της αγοράς $\mathcal{AD}$. Στο σημείο αυτό θα έχουμε εξ ορισμού $Z_j(\pi) = 0$ και επομένως για τις συναρτήσεις $f_j(\pi)$ θα ισχύει $f_j(\pi) = \pi_j$. Δηλαδή στο σημείο ισορροπίας θα έχουμε $f(\pi) = (\pi_1, \ldots, \pi_j, \ldots, \pi_m)$ και επομένως το σημείο αυτό αποτελεί και σταθερό σημείο της συνάρτησης αυτής. Η ύπαρξη του σταθερού σημείου έχει αποδειχθεί από το θεώρημα Brouwer. Επομένως αποδείχθηκε η ύπαρξη του σημείου ισορροπίας ως σταθερού σημείου της συνάρτησης $f(\pi)$.

3. ΑΓΟΡΕΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

3.1 Ορισμός γραμμικών συναρτήσεων χρησιμότητας

Στην οικονομική θεωρία μία γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας είναι της μορφής:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_mx_m \tag{4}$$

ή σε διανυσματική μορφή:

$$u(x) = u \cdot x \tag{5}$$

και ποσοτικοποιεί την προτίμηση ή ευχαρίστηση που απολαμβάνει ένας αγοραστής από την συλλογή των αγαθών $x = (x_1, \ldots, x_m)$ που έχει επιλέξει.

Προτού παρατεθούν οι ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων, θα δοθούν κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί.

Ορισμός 5. *Έστω δύο συλλογές αγαθών x και y. Ο συμβολισμός $\succeq$ ορίζει μία σχέση διάταξης "είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο" των συλλογών αυτών. Δηλαδή*

$$x \succeq y \Rightarrow u(x) \geq u(y)$$

Ορισμός 6. *Έστω δύο συλλογές αγαθών x και y. Ο συμβολισμός $\succ$ ορίζει μία σχέση διάταξης "είναι αυστηρώς καλύτερη από" των συλλογών αυτών. Δηλαδή*

$$x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y)$$

Ορισμός 7. *Έστω δύο συλλογές αγαθών x και y. Τότε ο συμβολισμός $\sim$ ορίζει μία σχέση "είναι ισοδύναμη" (ως προς την προτίμηση). Δηλαδή:*

$$x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$$

Ορισμός 8. *Ως **σύνολο κατανάλωσης** (consumption set) $\mathbb{X}$ ορίζεται το σύνολο όλων των δυνατών συλλογών αγαθών x.*

Ορισμός 9. *Ένα σύνολο συλλογών αγαθών λέγεται **κυρτό** (convex) αν για κάθε $x, y, z \in \mathbb{X}$, όπου $y \succeq x$ και $z \succeq x$, για κάθε $\theta \in [0, 1]$ ισχύει:*

$$\theta y + (1 - \theta)z \succeq x$$

Ορισμός 10. *Ένα σύνολο συλλογών αγαθών λέγεται **αυστηρώς κυρτό** (strictly convex) αν για κάθε $x, y, z \in \mathbb{X}$, όπου $y \succeq x$, $z \succeq x$ και $y \neq z$, για κάθε $\theta \in [0, 1]$ ισχύει:*

$$\theta y + (1 - \theta)z \succ x$$

Ορισμός 11. *Ως **λόγος αντικατάστασης** (marginal rate of substitution MRS) δύο αγαθών*

i και j για μία γραμμική συνάρτηση χρησιμοποίησης ορίζεται ο λόγος:

$$MRS_{i,j} = \frac{u_i}{u_j}$$

Έχοντας τους παραπάνω ορισμούς, παρατηρείται ότι η γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας εμφανίζει τις εξής ιδιότητες:

- Η προτίμηση είναι αυστηρώς μονότονη (strictly monotone), δηλαδή η απόκτηση μεγαλύτερης ποσότητας ενός αγαθού οδηγεί σε αύξηση της τιμής της συνάρτησης χρησιμότητας:
$$x_i' > x_i \Rightarrow u(x_1, \ldots, x_i', \ldots x_m) > u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$$
- Η προτίμηση είναι κυρτή (convex), αλλα όχι αυστηρώς κυρτή. Ένας γραμμικός συνδυασμός δύο συλλογών x και y όπου $x \sim y$, είναι ισοδύναμος των αρχικών συλλογών αλλά όχι καλύτερος αυτών. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στη γραμμικότητα της συνάρτησης χρησιμότητας.
- Ο λόγος αντικατάστασης όλων των αγαθών είναι σταθερός.
- Η ζήτηση (ως συνάρτηση της τιμής) είναι μία βηματική συνάρτηση: ο αγοραστής επιθυμεί να μην αγοράσει τα αγαθά για τα οποία ο λόγος χρησιμότητας ανά τιμή είναι μικρότερος από το μέγιστο λόγο, και επιθυμεί να αγοράσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ποσότητα αγαθών για τα οποία ο λόγος χρησιμότητας ανά τιμή είναι μέγιστος.

3.2 Η γραμμική αγορά Fisher ως πρόγραμμα Eisenberg-Gale

Η αγορά Fisher ορίζεται ως εξής. Έστω μία αγορά που αποτελείται από n αγοραστές όπου κάθε i αγοραστής διαθέτει e_i αρχική προικοδότηση. Επίσης στην αγορά αυτή διατίθενται m αγαθά με προσφορά $s = (s_1, \ldots, s_m)$. Για κάθε αγοραστή γνωρίζουμε την συνάρτηση ευχαρίστησης του u_i. Οι τιμές αγαθών $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \neq \mathbf{0}$ ορίζονται ως τιμές τερματισμού της αγοράς (market clearing prices) αν εφόσον ανατεθεί σε κάθε αγοραστή μία βέλτιστη συλλογή αγαθών σχετικά με τις τιμές αυτές, τότε δεν υπάρχει πλεόνασμα ή έλλειψη των αγαθών αυτών. Ως βέλτιστη συλλογή αγαθών ορίζεται η συλλογή που του αποφέρει την μέγιστη ευχαρίστηση σύμφωνα με τη συνάρτηση ευχαρίστησης κάθε αγοραστή.

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί η γραμμική αγορά Fisher, στην οποία η συνάρτηση ευχαρίστησης κάθε αγοραστή είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής:

$$u_i(x_i) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} x_{ij} \tag{6}$$

όπου u_{ij} είναι η ευχαρίστηση που απολαμβάνει ο αγοραστής i για μία μονάδα του αγαθού j και x_{ij} η ποσότητα που αποκτά ο αγοραστής i από το αγαθο j.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε s_j ισούται με τη μονάδα, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη κλιμάκωση (scaling) των u_{ij} αντίστοιχα. Επίσης στην γενική περίπτωση τα u_{ij} και e_i είναι ρητοί αριθμοί, και με κατάλληλη κλιμάκωση μπορούν να θεωρηθούν ακέραιοι.

Με τις παραπάνω υποθέσεις τα σημεία ισορροπίας μιας αγοράς Fisher με γραμμικές συναρτήσεις χρησιμοποίησης μπορούν να βρεθούν ως οι βέλτιστες λύσεις ενός κυρτού προγράμματος (convex program) που είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως πρόγραμμα Eisenberg-Gale.

Η κατασκευή αυτού του προγράμματος είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική για την κατανόηση της αγοράς Fisher. Ως πρώτο βήμα θα πρέπει στους περιορισμούς του προγράμματος αυτού να θέσουμε τους περιορισμούς της κατανομής των αγαθών:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad & \forall j \in G \\ x_{ij} \geq 0 \quad & \forall i \in B, \forall j \in G \end{aligned} \tag{7}$$

Δεδομένων αυτών των περιορισμών θα πρέπει να βρεθεί μία αντικειμενική συνάρτηση για το πρόγραμμα η οποία να διαθέτει τις εξής ιδιότητες:

- Εάν η ευχαρίστηση όλων των αγοραστών για κάθε αγαθό κλιμακωθούν επί μίας σταθεράς, τότε η βέλτιστη κατανομή δεν μεταβάλλεται.
- Εάν η προικοδότηση ενός αγοραστή μοιραστεί σε δύο νέους αγοραστές με την ίδια συνάρτηση ευχαρίστησης με τον αρχικό αγοραστή, τότε το άθροισμα των βέλτιστων κατανομών των νέων αγοραστών θα πρέπει να ισούται με την βέλτιστη κατανομή του αρχικού αγοραστή.

Τις επιθυμητές αυτές ιδιότητες τις παρουσιάζει ο σταθμισμένος, από την προικοδότηση κάθε αγοραστή, γεωμετρικός μέσος όρος των συναρτήσεων χρησιμοποίησης των αγοραστών. Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση είναι της μορφής:

$$\max \left(\prod_{i \in B} u_i^{e_i} \right)^{1/\sum_i e_i} \tag{8}$$

Φυσικά ο εκθέτης μπορεί να απαλειφθεί χωρίς να επηρεάσει την αντικειμενική συνάρτηση δίνοντας:

$$\max \left(\prod_{i \in B} u_i^{e_i} \right) \tag{9}$$

Παίρνοντας τον λογάριθμο της παραπάνω αντικειμενικής συνάρτησης καταλήγουμε στην τελική μορφή του προγράμματος Eisenberg-Gale:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} e_i \log u_i \\ \text{s.t:} \quad & u_i = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} x_{ij} \quad \forall i \in B \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in G \\ & x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad \forall i \in B, \forall j \in G \end{aligned} \tag{10}$$

Οι Lagrangian πολλαπλασιαστές της δεύτερης ομάδας των περιορισμών, συμβολικά π_j, μπορούν να θεωρηθούν ως οι τιμές των αγαθών. Εφαρμόζοντας στο πρόγραμμα αυτό τις συνθήκες Karush, Kuhn, Tucker (KKT), οι βέλτιστες τιμές των x_{ij} και π_j θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\forall j \in G: \quad \pi_j \geq 0 \tag{11}$$

$$\forall j \in G: \quad \pi_j > 0 \Rightarrow \sum_{i \in B} x_{ij} = 1 \tag{12}$$

$$\forall i \in B, \forall j \in G: \quad \frac{u_{ij}}{\pi_j} \leq \frac{\sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}}{e_i} \tag{13}$$

$$\forall i \in B, \forall j \in G: \quad x_{ij} > 0 \Rightarrow \frac{u_{ij}}{\pi_j} = \frac{\sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}}{e_i} \tag{14}$$

Από τις παραπάνω συνθήκες εύκολα προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι βέλτιστες τιμές των x_{ij} και π_j του προγράμματος Eisenberg-Gale ικανοποιούν τις συνθήκες εκκαθάρισης της αγοράς Fisher. Παράλληλα το πρόγραμμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθούν βασικές ιδιότητες των σημείων ισορροπίας του μοντέλου Fisher.

Θεώρημα 3. *Για την αγορά Fisher με γραμμικές συναρτήσης χρησιμότητας ισχύουν:*

1. *Εάν κάθε αγαθό έχει τουλάχιστον ένα πιθανό αγοραστή τότε υπάρχει σημείο ισορροπίας.*
2. *Το σύνολο των σημείων ισορροπίας είναι κυρτό.*
3. *Η κατανομή x_{ij} των αγαθών όπως και οι τιμές τους π_j είναι μοναδικές.*
4. *Εάν όλα τα u_{ij} και οι προικοδοτήσεις e_i είναι ρητοί αριθμοί, τότε η κατανομή των αγαθών και οι τιμές είναι επίσης ρητοί αριθμοί και μπορούν να αναπαρασταθούν με πολυωνυμικά πολλά δυφία.*

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε αγαθό έχει τουλάχιστον έναν πιθανό αγοραστή. Τότε για κάθε αγαθό j υπάρχει τουλάχιστον ένας αγοραστής i ώστε $u_{ij} > 0$. Από την τρίτη KKT συνθήκη

(13) τότε προκύπτει:

$$\pi_j \geq \frac{e_j u_{ij}}{\sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}} > 0$$

Επειδή $\pi_j > 0$ για κάθε αγαθό j, από την δεύτερη KKT συνθήκη (12) προκύπτει ότι:

$$\sum_{i \in B} x_{ij} = 1$$

Επομένως σε κάθε βέλτιστη λύση του προγράμματος Eisenberg-Gale ισχύει η ιδιότητα ότι όλα τα αγαθά κατανέμονται πλήρως.

Από την τρίτη και τέταρτη συνθήκη παρατηρείται ο λόγος $\frac{u_{ij}}{\pi_j}$. Αυτός ο λόγος έχει ιδιαίτερη σημασία στην οικονομική θεωρία και ονομάζεται όφελος προς τιμή (bang per buck) και αποτελεί την χρησιμότητα που απολαμβάνει ο αγοραστής ανά χρηματική μονάδα. Φυσικά ένας αγοραστής επιθυμεί να αποκτήσει αγαθά για τα οποία ο λόγος αυτός μεγιστοποιείται. Αντίστοιχα ο λόγος $\frac{\sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}}{e_i}$ εκφράζει την συνολική χρησιμότητα που απολαμβάνει από τα αγαθά που του έχουν κατανεμηθεί προς την αρχική του προικοδότηση, δηλαδή εκφράζει το συνολικό όφελος που αποκόμισε σε σχέση με τα λεφτά με τα οποία εισήλθε στην αγορά.

Από την τέταρτη συνθήκη ειδικότερα παρατηρείται ότι αν ο αγοραστής i αποκτήσει κάποια ποσότητα του προϊόντος j, δηλαδή $x_{ij} > 0$, τότε ο λόγος χρησιμότητας ανά χρηματική μονάδα του αγοραστή για το προϊόν αυτό μεγιστοποιείται, δηλαδή ο αγοραστής αυτός αποκτά μία συλλογή αγαθών που αποτελείται από τα πιο επιθυμητά, για τον αγοραστή αυτόν, αγαθά.

Τέλος η τέταρτη συνθήκη είναι ισοδύναμη με:

$$\forall i \in B, \forall j \in G: \quad \frac{e_i u_{ij} x_{ij}}{\sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}} = \pi_j x_{ij}$$

Αν αθροιστεί η παραπάνω εξίσωση για όλα τα αγαθά προκύπτει:

$$\forall i \in B: \quad \frac{e_i \sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}}{\sum_{j \in G} u_{ij} x_{ij}} = \sum_{j \in G} \pi_j x_{ij}$$

που φυσικά ισούται με:

$$\forall i \in B: \quad e_i = \sum_{j \in G} \pi_j x_{ij}$$

το οποίο υποδηλώνει ότι σε μία βέλτιστη τιμή του προγράμματος Eisenberg-Gale, ο αγοραστής ξοδεύει όλη την αρχική του προικοδότηση. Επομένως αποδείχθηκε ότι όλα τα αγαθά κατανέμονται πλήρως και ότι όλοι οι αγοραστές ξοδεύουν όλη την αρχική τους προικοδότηση και επομένως ότι υπάρχει σημείο ισορροπίας της αγοράς αυτής το οποίο είναι η βέλτιστη τιμή του προγράμματος αυτού.

Καθώς κάθε σημείο ισορροπίας αποτελεί βέλτιστη λύση του προγράμματος Eisenberg-Gale, τότε το σύνολο των σημείων ισορροπίας είναι ένα κυρτό σύνολο. Αυτό συμβαίνει καθώς το πρόγραμμα Eisenberg-Gale αποτελεί πρόγραμμα κυρτής βελτιστοποίησης, όπου εξ ορισμού ορίζεται πάνω σε κυρτό σύνολο. Έτσι αποδείχθηκε το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος.

Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι αυστηρώς κοίλη, εάν υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία ισορροπίας τότε η χρησιμότητα u_i που αποκομίζει ο κάθε χρήστης i πρέπει να είναι ίδια σε κάθε από τα σημεία αυτά. Με αυτή την παρατήρηση και χρησιμοποιώντας την τέταρτη συνθήκη προκύπτει επίσης ότι και οι τιμές των αγαθών πρέπει να είναι ίδιες. Επομένως προκύπτει ότι η χρησιμότητα που αποκομίζει ο κάθε αγοραστής, όπως και οι τιμές των αγαθών είναι ίδια σε κάθε σημείο ισορροπίας για την αγορά Fisher με γραμμικές συναρτήσεις χρησιμότητας.

Η ισχύς του τελευταίου σκέλους του θεωρήματος βασίζεται στην απόδειξη ότι οι κατανομές ισορροπίας όπως και οι τιμές αποτελούν λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με ρητούς συντελεστές. Το πλήθος των κατανομών ισορροπίας είναι $n \cdot m$. Το πλήθος των τιμών είναι φυσικά m. Έστω k το πλήθος των μη μηδενικών x_{ij}. Τότε αρκεί να βρεθούν $k + m$ συναρτήσεις για τις k μη μηδενικές κατανομές και τις m τιμές. Από το πρώτο σκέλος του θεωρήματος έχει αποδειχθεί ότι $\pi_j > 0$ λόγω της παραδοχής ότι κάθε αγαθό έχει τουλάχιστον έναν υποψήφιο αγοραστή. Έτσι προκύπτουν m γραμμικές εξισώσεις από τη δεύτερη KKT συνθήκη. Με την αντικατάσταση των μεταβλητών π_j με τις $q_j = 1/\pi_j$, που είναι εφικτή καθώς $\pi_j > 0$, εύκολα προκύπτουν k γραμμικές εξισώσεις από την τέταρτη KKT συνθήκη. Επομένως οι κατανομές ισορροπίας και οι τιμές αποτελούν ρητούς αριθμούς ως λύση γραμμικών εξισώσεων με ρητούς συντελεστές e_i και u_{ij}. □

3.3 Η γραμμική αγορά Arrow-Debreu

Στο παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί ένα μη κυρτό πρόγραμμα για την αγορά Arrow-Debreu. Έπειτα θα μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο κυρτό πρόγραμμα και τέλος θα παρουσιαστεί ένας πολυωνυμικός γεωμετρικός αλγόριθμος επίλυσης [5].Όπως έχει αναφερθεί η αγορά Arrow-Debreu αποτελείται από n εμπόρους (traders). Κάθε έμπορος εισέρχεται στην αγορά αυτή διαθέτοντας μία συλλογή από διαιρετέα αγαθά. Σκοπός κάθε εμπόρου είναι να πουλήσει τα αγαθά που διαθέτει ώστε με τα λεφτά που θα αποκτήσει να αγοράσει αγαθά που θα μεγιστοποιήσουν την συνάρτηση χρησιμότητας του $u_i(x)$. Ως σημείο ισορροπίας αυτής της αγοράς ορίζονται οι τιμές των προϊόντων για τις οποίες ισχύουν οι εξής ιδιότητες για την αγορά:

1. Κάθε έμπορος αποκτά μία συλλογή αγαθών που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητάς του, δηλαδή αποκτά την βέλτιστη για αυτόν συλλογή αγαθών.
2. Δεν υπάρχει πλεονασμός ή έλλειψη αγαθών, δηλαδή όλα τα αγαθά της αγοράς διατίθενται στους εμπόρους και έτσι η αγορά τελειώνει.

Στην γραμμική αγορά Arrow-Debreu οι συναρτήσεις χρησιμότητας των εμπόρων είναι γραμμικές. Δηλαδή για τον έμπορο i η συνάρτηση χρησιμότητας δίνεται από την σχέση:

$$u_i(x_i) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} x_{ij}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε έμπορος εισέρχεται στην αγορά διαθέτοντας ένα μόνο αγαθό. Σε περίπτωση που διαθέτει περισσότερα αγαθά, έστω k μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε k εμπόρους, με την ίδια συνάρτηση χρησιμότητας με τον αρχικό έμπορο, που ο καθένας θα διαθέτει μόνο ένα από τα αγαθά αυτά. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε έμπορος διαθέτει μία μονάδα από το αγαθό με το οποίο εισέρχεται στην αγορά, κάτι που μπορεί να γίνει εύκολα με κλιμάκωση των αντίστοιχων συντελεστών χρησιμότητας u_{ij}. Ακόμη, θεωρείται ότι οι συντελεστές u_{ij} είναι στην γενική περίπτωση ρητοί, που με κατάλληλη κλιμάκωση μπορούν να γίνουν ακέραιοι.

Για λόγους ευκολίας θα υποθέσουμε ότι κάθε έμπορος επιθυμεί κάποιο αγαθό, δηλαδή ότι $\forall i\ \exists j : u_{ij} > 0$. Στην περίπτωση που δεν επιθυμεί κάποιο αγαθό, τότε η τιμή του αγαθού του μπορεί να οριστεί αυθαίρετα, όπως και να του δοθεί οποιαδήποτε συλλογή αγαθών και πάλι αυθαίρετα. Ακόμη θα υποθέσουμε ότι κάθε αγαθό είναι επιθυμητό από κάποιον έμπορο, δηλαδή ότι $\forall j\ \exists i : u_{ij} > 0$. Σε αντίθετη περίπτωση η τιμή του αγαθού αυτού θα είναι μηδενική και επομένως μπορεί να αφαιρεθεί από την αγορά.

3.3.1 Μη κυρτό πρόγραμμα για αγορά Arrow-Debreu

Ένα μη κυρτό πρόγραμμα που έχει ως εφικτά σημεία (feasible points) όλα και μόνο τα σημεία ισορροπίας της αγοράς Arrow-Debreu (με τις παραδοχές που προαναφέρθηκαν) είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} \forall j: &\quad \sum_i x_{ij} = 1 \\ \forall i,j: &\quad x_{ij} \geq 0 \\ \forall i,j: &\quad \frac{u_{ij}}{\pi_j} \leq \frac{\sum_k u_{ik} x_{ik}}{\pi_i} \\ \forall i: &\quad \pi_i > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Η πρώτη και η δεύτερη συνθήκη περιγράφουν μία εφικτή κατανομή των αγαθών. Η τρίτη συνθήκη υποδεικνύει ότι η χρησιμότητα των αγαθών που απέκτησε ο αγοραστής i, δηλαδή το άθροισμα $\sum_k u_{ik} x_{ik}$, ξοδεύοντας π_i χρηματικές μονάδες έχουν τον μεγαλύτερο λόγο χρησιμότητας (οφέλους) προς τιμή. Η τελευταία συνθήκη αποτελεί την παραδοχή ότι κάθε αγαθό κατανέμεται καθότι $\forall j\ \exists i : u_{ij} > 0$.

Για το παραπάνω πρόγραμμα ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα 4. *Το σύνολο των εφικτών λύσεων του μη κυρτού προγράμματος (15) περιλαμβάνει όλα και μόνο τα σημεία ισορροπίας της αγοράς Arrow-Debreu.*

Απόδειξη. Εκ κατασκευής του προγράμματος είναι προφανές ότι τα σημεία ισορροπίας της αγοράς αποτελούν εφικτά σημεία του προγράμματος. Επομένως μένει να δειχθεί το αντίστροφο σκέλος. Ο τρίτος περιορισμός αποτελεί το “κλειδί” για την απόδειξη αυτή.

Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε τον τρίτο περιορισμό με $x_{ij}\pi_j$. Τότε προκύπτει:

$$\forall i,j: \quad u_{ij}x_{ij} \leq \frac{\sum_k u_{ik}x_{ik}}{\pi_i} x_{ij}\pi_j$$

Αν αθροίσουμε την παραπάνω ανισότητα για όλα τα j προκύπτει:

$$\forall i: \quad \sum_j u_{ij}x_{ij} \leq \frac{\sum_k u_{ik}x_{ik}}{\pi_i} \sum_j x_{ij}\pi_j$$

Να σημειωθεί ότι η παραδοχή ότι κάθε έμπορος επιθυμεί κάποιο αγαθό συνεπάγεται ότι $\sum_k u_{ik}x_{ik}$ είναι μη μηδενικό. Έπειτα από τις απλοποιήσεις της παραπάνω ανισότητας έχουμε:

$$\forall i: \quad \pi_i \leq \sum_j x_{ij}\pi_j$$

Αθροίζοντας για όλα τα i:

$$\sum_i \pi_i \leq \sum_i \sum_j x_{ij}\pi_j$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_i \pi_i \leq \sum_j \pi_j \sum_i x_{ij}$$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο περιορισμό:

$$\forall j: \quad \sum_i x_{ij} = 1$$

στην παραπάνω ανισότητα, εύκολα προκύπτει ότι

$$\sum_i \pi_i \leq \sum_j \pi_j$$

Όμως η παραπάνω ανισότητα αποτελεί αυστηρή ισότητα που συνεπάγεται ότι και οι προηγούμενες ανισότητες σε κάθε εφικτό σημείο του προγράμματος αποτελούν ισότητες. Από το γεγονός αυτό προκύπτουν τα δύο παρακάτω λήμματα τα οποία αποδεικνύουν το θεώρημα. □

Λήμμα 2. *Κάθε εφικτό σημείο του μη κυρτού προγράμματος (15) ικανοποιεί τον περιορισμό ότι κάθε έμπορος ξοδεύει όλα τα λεφτά που απέκτησε, δηλαδή:*

$$\forall i: \quad \pi_i = \sum_j x_{ij}\pi_j \tag{16}$$

Λήμμα 3. *Κάθε εφικτό σημείο του μη κυρτού προγράμματος (15) ικανοποιεί την συνθήκη ότι τα λεφτά κάθε εμπόρου ξοδεύονται βέλτιστα, δηλαδή αν $x_{ij} > 0$ ο τρίτος περιορισμός του προγράμματος είναι ισότητα.*

3.3.2 Κυρτό πρόγραμμα για αγορά Arrow-Debreu

Το μη κυρτό πρόγραμμα (15) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα κυρτό πρόγραμμα με τις εξής παρατηρήσεις. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η τρίτη συνθήκη του προγράμματος (15) είναι αναγκαία μόνο για τα i και j που $u_{ij} > 0$. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η παραδοχή ότι κάθε έμπορος έχει προτίμηση σε κάποιο αγαθό συνεπάγεται ότι $\sum_k u_{ik}x_{ik} > 0$. Η τελευταία παρατήρηση είναι ότι από την τέταρτη συνθήκη προκύπτει ότι $\pi_i, \pi_j > 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο λογάριθμος όλων των ανισοτήτων του τρίτου περιορισμού, δηλαδή:

$$\forall i, j \text{ για τα οποία } u_{ij} > 0 : \log(\pi_i) - \log(\pi_j) \leq \log\left(\frac{\sum_k u_{ik}x_{ik}}{u_{ij}}\right)$$

Αντικαθιστώντας κάθε $\log(\pi_i)$ με τη νέα μεταβλητή $LOG\pi_i$ προκύπτει:

$$\forall i, j \text{ για τα οποία } u_{ij} > 0 : LOG\pi_i - LOG\pi_j \leq \log\left(\frac{\sum_k u_{ik}x_{ik}}{u_{ij}}\right)$$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι κοίλη, δηλαδή $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log(x)+\log(y)}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος δύο εφικτών σημείων ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα και επομένως αποτελεί επίσης εφικτό σημείο. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ισοδύναμο κυρτό πρόγραμμα του μη κυρτού προγράμματος (15) έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\forall j: &\quad \sum_i x_{ij} = 1 \\
\forall i, j: &\quad x_{ij} \geq 0 \\
\forall i, j \text{ για τα οποία } u_{ij} > 0: &\quad LOG\pi_i - LOG\pi_j \leq \log\left(\frac{\sum_k u_{ik}x_{ik}}{u_{ij}}\right) \\
\forall i: &\quad \pi_i > 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Για το παραπάνω πρόγραμμα έχουμε τα εξής:

Θεώρημα 5. *Το μη κυρτό πρόγραμμα (15) είναι ισοδύναμο με το κυρτό πρόγραμμα (17).*

Πόρισμα 1. *Το σύνολο όλων των πιθανών σημείων ισορροπίας, σε λογαριθμική κλίμακα (δηλαδή το σύνολο των μεταβλητών $LOG\pi_i$), είναι κυρτό.*

3.3.3 Γενικευμένος αλγόριθμος ελέγχου εφικτότητας με χρήση διοφαντικής προσέγγισης

Πριν την ανάλυση του αλγορίθμου παρατίθενται οι εξής ορισμοί:

Ορισμός 12 (Πολυπλοκότητα εδρών). *Έστω $P \subset \mathbb{R}^n$ ένα πολύεδρο και φ ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Το P έχει* ***πολυπλοκότητα εδρών*** *(facet-complexity) το πολύ φ, αν υπάρχει ένα σύστημα ανισοτήτων με ρητούς συντελεστές που έχει σαν σύνολο λύσεων το P και για το οποίο το μήκος κωδικοποίησης (encoding length) κάθε ανισότητας του συστήματος είναι το πολύ φ. Σε περίπτωση όπου $P = \mathbb{R}^n$ απαιτείται $\varphi \geq n + 1$.*

Ορισμός 13 (Καλώς ορισμένο πολύεδρο). *Ένα* ***καλώς ορισμένο*** *(well-described) πολύεδρο είναι μία τριπλέτα $(P; n, \varphi)$, όπου $P \subset \mathbb{R}^n$ με πολυπλοκότητα εδρών το πολύ φ. Το μήκος κωδικοποίησης $\langle P \rangle$ ενός καλώς ορισμένου πολυέδρου είναι $\varphi + n$.*

Στο παρούσα ενότητα θα αναλυθεί μία γενίκευση του θεωρήματος 6.4.1 από το βιβλίο των Grotschel, Lovasz και Schrijver [6]:

Θεώρημα 6. *Το πρόβλημα ισχυρής μη κενότητας (nonemptiness) ενός καλώς ορισμένου πολυέδρου, δοθέντος ενός μαντείου ισχυρού διαχωρισμού (strong separation oracle), μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Το θεώρημα κάνει την παραδοχή ενός καλώς ορισμένου πολυέδρου, το οποίο δεν είναι αληθές για το κυρτό πρόγραμμα Eisenberg-Gale. Ένα καλώς ορισμένου πολύεδρο σημαίνει ότι κάθε έδρα του πολυέδρου μπορεί να κωδικοποιηθεί με δυαδική ακολουθία μήκους φ. Το γεγονός αυτό με τη σειρά του υπονοεί ότι κάθε ακραίο σημείο (corner point) του πολυέδρου επίσης χρησιμοποιεί ρητούς συντελεστές με μήκος κωδικοποίησης φ και n, την διάσταση του χώρου. Φυσικά το μήκος κωδικοποίησης ενός ρητού αριθμού είναι το άθροισμα των μηκών κωδικοποίησης του αριθμητή και του παρανομαστή.

Η παραδοχή ενός καλού ορισμένου πολυέδρου βοηθάει στο παραπάνω θεώρημα, καθώς εγγυάται την ύπαρξη ενός υπερεπιπέδου με μικρό μήκος κωδικοποίησης, για το μαντείο αυστηρού διαχωρισμού. Όμως όπως αναφέρθηκε το πρόγραμμα Eisenberg-Gale δεν ικανοποιεί την συνθήκη του καλώς ορισμένου πολυέδρου. Για το λόγο αυτό αφαιρείται η παραδοχή ενός καλού ορισμένου πολυέδρου, επιτρέποντας το κυρτό σύνολο να βρίσκεται εν μέρει εκτός του ελλειψοειδούς που κατασκευάζεται από τον ελλειψοειδή αλγόριθμο (ellipsoid algorithm). Συνήθως κατά την διάρκεια της εκτέλεσης του ελλειψοειδούς αλγορίθμου το κυρτό σύνολο βρίσκεται εντός κάθε ελλειψοειδούς που κατασκευάστηκε.

Θεώρημα 7. *Δεδομένου ενός κυρτού συνόλου και ενός ισχυρού αλγορίθμου διαχωρισμού, με την εγγύηση ότι το σύνολο περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο με μήκος δυαδικής κωδικοποίησης το πολύ φ, ένα σημείο του κυρτού συνόλου μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη. Το πνεύμα της απόδειξης αυτής είναι η χρησιμοποίηση του ελλειψοειδούς αλγορίθμου σε ένα φραγμένο σύνολο διάστασης n, που περιέχει τη λύση που αναζητάμε, με σκοπό τον περιορισμό του όγκου του συνόλου σε μία τιμή για την οποία το σύνολο των λύσεων θα βρίσκεται σε ένα υπερεπίπεδο διάστασης $n - 1$. Έπειτα με τη χρήση της επαγωγής αποδεικνύεται το θεώρημα.

Σε αυτή την απόδειξη υποθέτουμε ότι το κυρτό σύνολο περιέχει ένα σημείο με μήκος κωδικοποίησης το πολύ φ. Εάν ο αλγόριθμος αποτύχει, τότε η εγγύηση της ύπαρξης του σημείου δεν ισχύει και επομένως ο αλγόριθμος τερματίζει με αυτήν την απάντηση. Υποθέτουμε επίσης ότι ο αλγόριθμος δεν βρίσκει τυχαία κάποιο σημείο με τις επιθυμητές ιδιότητες, διότι σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος τερματίζει και επιστρέφει το σημείο αυτό. Ο στόχος είναι η εύρεση ενός σημείου με μήκος δυαδικής κωδικοποίησης το πολύ φ, επομένως ο χώρος αναζήτησης μπορεί να περιοριστεί στον υπερκύβο $[-2^{\varphi}, 2^{\varphi}]$. Ο υπερκύβος αυτός περιλαμβάνει όλα τα ρητά σημεία με μήκος κωδικοποίησης φ. Επομένως θεωρούμε $\mathcal{C}$ την τομή του υπερκύβου με το δοθέν κυρτό σύνολο. Έχοντας το σύνολο $\mathcal{C}$, διατηρούμε τον αλγόριθμο διαχωρισμού και επιπλέον ο χώρος αναζήτησης είναι φραγμένος. Επομένως εκτελούμε τον ελλειψοειδή αλγόριθμο για το σύνολο $\mathcal{C}$, μέχρι ο όγκος του ελλειψοειδούς να είναι κάτω από $1/(2^{2n\varphi}n!)$. Η επιλογή αυτής της τιμής εξασφαλίζει συγκεκριμένες ιδιότητες. Καταρχήν ένα ρητό σημείο με μήκος δυαδικής κωδικοποίησης φ, έχει παρανομαστή το πολύ 2^{φ}. Επομένως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο ρητών με μέγιστο παρανομαστή 2^{φ} είναι τουλάχιστον $2^{-2\varphi}$. Ο όγκος ενός ορθογωνίου απλοειδούς (simplex) με ακμές μοναδιαίου μήκους είναι $1/(n!)$. Επομένως εύκολα προκύπτει ότι ο όγκος ενός ορθογωνίου απλοειδούς με ακμές $2^{-2\varphi}$ ισούται με $1/(2^{2n\varphi}n!)$. Όταν λοιπόν ο όγκος του συνόλου πέσει σε μία τιμή χαμηλότερη του $1/(2^{2n\varphi}n!)$, έχει εξασφαλιστεί ότι το σύνολο των ρητών αριθμών με μήκος κωδικοποίησης το πολύ φ δεν έχει πλήρεις διαστάσεις, δηλαδή υπάρχει ένα υπερεπίπεδο, έστω $\mathcal{H}$, διάστασης $n-1$ πάνω στο οποίο βρίσκονται οι ρητοί αριθμοί ελλειψοειδούς με μήκος δυαδικής κωδικοποίησης το πολύ φ. Επομένως εάν είναι εφικτή η εύρεση αυτού του υπερεπιπέδου , η αναζήτηση μπορεί να συνεχιστεί στην τομή του $\mathcal{C}$ με το $\mathcal{H}$. Κατά αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα περιορίστηκε κατά μία διάσταση, και με επαγωγή αποδεικνύεται το θεώρημα.

Για την εύρεση του $\mathcal{H}$ παρατηρούμε ότι το ελλειψοειδές όταν φτάσει σε όγκο μικρότερο του $1/(2^{2n\varphi}n!)$, θα έχει αποκτήσει ένα άξονα με πολύ μικρό μήκος (μικρότερο από την μικρότερη διαφορά μεταξύ των ρητών με μήκος κωδικοποίησης φ). Ο σκοπός είναι να συνεχιστεί ο ελλειψοειδής αλγόριθμος μέχρι ο όγκος να πέσει κάτω από μία τιμή V, ώστε να αποκτήσει κάποιες ιδιότητες που θα διευκολύνουν την προσέγγιση του από ένα διάνυσμα παράλληλο του μικρότερου άξονα του ελλειψοειδούς. Όταν ο όγκος γίνει μικρότερος από V, τότε ο μικρότερος άξονας του ελλειψοειδούς θα έχει μήκος το πολύ $nV^{1/n}$. Αυτό προκύπτει θεωρώντας ένα απλό κάτω όριο $(r/n)^n$ του όγκου μίας σφαίρας διάστασης n με ακτίνα r.

Έστω v το κέντρο του ελλειψοειδούς και w το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στο μικρότερο άξονα του. Τότε το υπερεπίπεδο $\mathcal{H}'$ που ορίζεται από την εξίσωση $w \cdot x = w \cdot v$ αποτελεί μία εκθετικά καλή προσέγγιση του $\mathcal{H}$. Έστω u κάποιο σημείο του ελλειψοειδούς, τότε προκύπτει:

$$|w \cdot u - w \cdot v| = |w \cdot (u - v)| \leq nV^{1/n}$$

Για να ανακτηθεί το υπερεπίπεδο $\mathcal{H}$ από το $\mathcal{H}'$ θα χρησιμοποιηθεί η διοφαντική προσέγγιση, καθότι λόγω της χρήσης του ελλειψοειδούς τα w και v μπορούν να αποτελούνται από άρρητους αριθμούς.

Θεώρημα 8 (Διοφαντική προσέγγιση). *Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, ώστε δοθέντος ρητών αριθμών* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *και* $0 < \varepsilon < 1$, *υπολογίζει ακεραίους* $p_1, \ldots, p_n$ *και έναν ακέραιο* q *έτσι ώστε:*

$$1 \leq q \leq 2^{n(n+1)/4}\varepsilon^{-n}$$

και

$$|\alpha_i q - p_i| < \varepsilon (i = 1, \ldots, n)$$

Επομένως η προσέγγιση του διανύσματος $(w, w \cdot v)$ από ένα διάνυσμα ακεραίου αριθμητή (p, π) και έναν κοινό παρανομαστή q, όπου το p έχει διάσταση n και το π είναι μονοδιάστατο, θα επιτευχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο διαλέγοντας τις παραμέτρους:

$$1 \leq q < 2^{n^2}\varepsilon^{-n},$$
$$|w_i q - p_i| < \varepsilon \text{ και } |w \cdot v - \pi| < \varepsilon$$

Έστω z ένα σημείο με μήκος κωδικοποίησης φ μέσα στο ελλειψοειδές. Τότε:

$$\begin{aligned} |p \cdot z - \pi| &\leq |qw \cdot z - qw \cdot v| + \varepsilon(\| z \|_1 + 1) \leq q|w \cdot z - w \cdot v| + \varepsilon n 2^{\varphi} \\ &< 2^{n^2}\varepsilon^{-n} n V^{1/n} + \varepsilon n 2^{\varphi} \end{aligned}$$

Μία σημαντική ιδιότητα του $|p \cdot z - \pi|$ είναι ότι το μέτρο αυτό είναι μηδενικό ή έχει ένα κάτω φράγμα. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί καθώς τα p, z είναι ακέραια και το z ένα ρητός αριθμός με μήκος κωδικοποίησης φ. Επομένως ο κοινός παρανομαστής του $|p \cdot z - \pi|$, μπορεί να είναι το πολύ $2^{(n+1)\varphi}$. Από την ιδιότητα αυτή συμπεραίνεται ότι το μέτρο αυτό είναι είτε μηδενικό είτε το ελάχιστο $2^{-(n+1)\varphi}$. Επομένως με κατάλληλη επιλογή των αθροισμάτων της παραπάνω ανισότητας μπορεί να επιτευχθεί τιμή μικρότερη του κάτω φράγματος. Δηλαδή μπορεί να επιλεγεί το ε τέτοιο ώστε:

$$\varepsilon n 2^{\varphi} < \frac{1}{2}\frac{1}{2^{(n+1)\varphi}} \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{2n2^{(n+2)\varphi}}$$

Μία κατάλληλη επιλογή είναι:

$$\varepsilon = \frac{1}{4n2^{(n+2)\varphi}}$$

Ομοίως για το πρώτο προσθετέο της ανισότητας του $|p \cdot z - \pi|$ προκύπτει:

$$2^{n^2}\varepsilon^{-n} n V^{1/n} < \frac{1}{2}\frac{1}{2^{(n+1)\varphi}} \Rightarrow V < \left(\frac{e^n}{2n2^{(n+1)\varphi + n^2}}\right)^n$$

Μία κατάλληλη επιλογή συνυπολογίζοντας την παραπάνω τιμή του ε είναι:

$$V = \frac{1}{2^{(n+1)^3(\varphi+1)} n^{n^2+n}}$$

Η τιμή του όγκου αυτού είναι εκθετικά μικρή, δηλαδή ο εκθέτης του δύο στον παρανομαστή είναι πολυωνυμικός στο n και γραμμικός στο φ. Επομένως ο ελλειψοειδής αλγόριθμος θα επιτύχει την τιμή αυτή σε χρόνο πολυωνυμικό στο n και γραμμικός στο φ. Αξίζει να τονιστεί ότι ο τύπος για το κέντρο της έλλειψης μπορεί να δώσει άρρητες συντεταγμένες. Το εμπόδιο αυτό μπορεί να ξεπεραστεί με το γνωστό κόλπο της μετατόπισης του κέντρου σε έναν κοντινό σημείο με ρητές συντεταγμένες και αντίστοιχη αύξηση του ελλειψοειδούς κατά ένα μικρό παράγοντα. Έπειτα και από αυτές τις αλλαγές, ο όγκος του ελλειψοειδούς ελαττώνεται με εκθετικό ρυθμό. □

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει:

Θεώρημα 9. *Δεδομένου ενός κυρτού συνόλου με αλγόριθμο διαχωρισμού ισχυρά πολυωνυμικό και μία τιμή ακριβείας φ, υπάρχει ένας αλγόριθμος με oracle-polynomial time και γραμμικό χρόνο ως προς φ που εκτελεί τα εξής:*

- *συμπεραίνει ότι δεν υπάρχει σημείο στο κυρτό σύνολο με δυαδικό μήκος κωδικοποίησης το πολύ φ,*
- *παράγει ένα σημείο στο κυρτό σύνολο με δυαδικό μήκος κωδικοποίησης το πολύ $P(n)\varphi$, όπου $P(n)$ είναι πολυωνυμικό.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι το $P(n)$ είναι ένας παράγοντας προσέγγισης, ως κατάλοιπο του εκθετικού παράγοντα προσέγγισης της διοφαντικής προσέγγισης που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο.

4. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΑΓΟΡΕΣ FISHER

4.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί η δημοσίευση του J. Orlin [7]. Η αγορά Fisher αποτελείται από ένα σύνολο B n αγοραστών και από ένα σύνολο G από m αγαθά. Κάθε αγοραστής εισέρχεται στην αγορά διαθέτοντας μία αρχική προικοδότηση (χρήματα) e_i. Η προτίμηση κάθε αγοραστή ως προς κάθε αγαθό προκύπτει από την τιμή U_{ij}. Στόχος είναι ο καθορισμός της τιμής κάθε αγαθού, ώστε κάθε αγαθό να πωλείται πλήρως και οι αγοραστές να έχουν ξοδέψει όλη την αρχική τους προικοδότηση για την απόκτηση των αγαθών που τους προσφέρουν την περισσότερη ευχαρίστηση. Οι παραπάνω ιδιότητες περιγράφουν μία ισορροπία της αγοράς Fisher.

Έστω $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \neq \mathbf{0}$ το διάνυσμα των τιμών. Με x_{ij} συμβολίζεται η ανάθεση του αγαθού j στον αγοραστή i. Ως πλεόνασμα χρημάτων (surplus cash) του αγοραστή i ορίζεται:

$$c_i(x) = e_i - \sum_{j \in G} x_{ij} \tag{18}$$

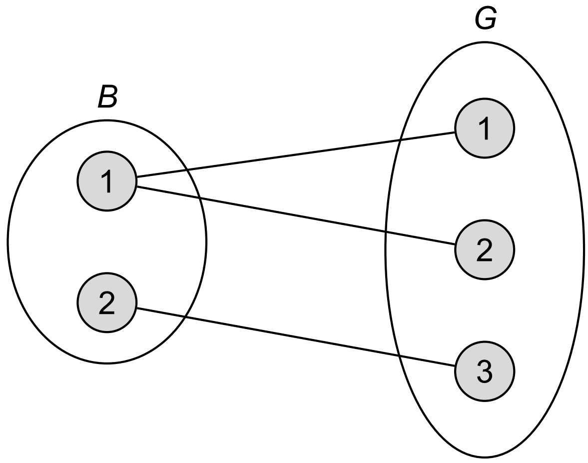
Ως πλεόνασμα προσφοράς (backorder amount) του αγαθού j ορίζεται:

$$b_i(\pi, x) = -\pi_j + \sum_{i \in B} x_{ij} \tag{19}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι γνωστές παραδοχές ότι για κάθε αγοραστή i υπάρχει αγαθό j τέτοιο ώστε $U_{ij} > 0$ και για κάθε αγαθό j υπάρχει αγοραστής i ώστε $U_{ij} > 0$.

Σημαντικό ρόλο για την επίλυση του προβλήματος της αγοράς Fisher αποτελεί ο λόγος οφέλους προς τιμή U_{ij}/π_j, δηλαδή ο λόγος ευχαρίστησης που απολαμβάνει ο αγοραστής i για το αγαθό j προς την τιμή του αγαθού αυτού. Ο λόγος αυτός έχει σημαντική αξία, επειδή σε ένα σημείο ισορροπίας ο αγοραστής θα αποκτήσει μόνο τα αγαθά για τα οποία ο λόγος αυτός μεγιστοποιείται. Επομένως για κάθε $i \in B$ ορίζεται ο μέγιστος λόγος οφέλους προς τιμή $\alpha_i(\pi) = \max U_{ij}/\pi_j : j \in G$. Χρησιμοποιώντας τον λόγο αυτό για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα τιμών π μπορεί να οριστεί το διμερές γράφημα (bipartite graph) $E(\pi)$ όπου το αριστερό σκέλος περιέχει κόμβους για όλους τους αγοραστές, δηλαδή για το σύνολο B και το δεξί σκέλος περιλαμβάνει όλα τα αγαθά $j \in G$. Για κάθε ζεύγος (i, j) για το οποίο μεγιστοποιείται ο λόγος όφελος προς τιμή $\alpha_i(\pi)$ δημιουργείται μία ακμή στο γράφημα αυτό. Οι ακμές αυτές ονομάζονται ακμές ισότητας (equality edges). Το γράφημα $E(\pi)$ αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην ανάπτυξη ισχυρώς πολυωνυμικών αλγορίθμων, καθότι μπορούν να αντληθούν ιδέες από την εκτενή γραφοθεωρητική έρευνα, όπως το πρόβλημα της μεγιστοποίησης ροής (max flow). Ένα παράδειγμα του λόγου οφέλους προς τιμή παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.

Ένα σημείο ισορροπίας αποτελείται από το ζεύγος τιμών και ανάθεσης αγαθών (π, x) για το οποίο ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:



Σχήμα 1: Παράδειγμα λόγου οφέλους προς τιμή. Ο αγοραστής 1 έχει μέγιστο λόγο για τα αγαθά 1 και 2, ενώ ο αγοραστής 2 για το αγαθό 3.

1. Περιορισμός χρημάτων: Για κάθε $i \in B,\ c_i(x) = 0$
2. Περιορισμός αγαθών: Για κάθε $j \in G, b_j(\pi, x) = 0$
3. Λόγος οφέλους προς τιμή: Για κάθε $i \in B$ και $j \in G$, αν $x_{ij} > 0$, τότε $(i, j) \in E(\pi)$.
4. Περιορισμοί μη αρνητικών τιμών: $x_{ij} \geq 0, \pi_j \geq 0$ για κάθε $i \in B$ και $j \in G$.

Η βασική αλγοριθμική ιδέα για την επίλυση του προβλήματος της αγοράς Fisher βασίζεται στην χρήση του γραφήματος ισότητας E και ξεκινώντας από μία αρχική ανάθεση τιμών π^0, οι τιμές αυτές αυξάνονται κατά μία διακριτή ποσότητα Δ, ώστε οι τιμές να είναι πάντα αυξανόμενες. Ο αλγόριθμος αυτός, βασιζόμενος σε κάποιες ιδιότητες που παρουσιάζει το γράφημα, καταλήγει σε μία ισορροπία της αγοράς σε πολυωνυμικό χρόνο.

4.2 Συνοπτική παρουσίαση του πολυωνυμικού αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος αρχικά καθορίζει ένα αρχικό διάνυσμα π^0. Κατά την διάρκεια του αλγορίθμου, οι τιμές μεταβάλλονται με έναν διακριτό γραμμικό τρόπο, ώστε οι τιμές να είναι μη φθίνουσες. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται σε μία **παράμετρο κλιμάκωσης** (scaling factor) Δ. Παρακάτω θα παρουσιαστούν δύο βασικοί ορισμοί που θα χαρακτηρίζουν μία λύση και αποτελούν τον κορμό του αλγορίθμου.

Ορισμός 14 (Δ-εφικτότητα). *Μία λύση (π, x) ορίζεται ως **Δ-εφικτή** (Δ-feasible) εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

1. $\forall i \in B, c_i(x) \geq 0$
2. $\forall j \in G,$ *αν* $\pi_j > \pi_j^0,$ *τότε* $0 \leq b_j(\pi, x) \leq \Delta$
3. $\forall i \in B,$ *και* $\forall j \in G:$ *αν* $x_{ij} > 0,$ *τότε* $(i, j) \in E(\pi)$ *και* x_{ij} *είναι πολλαπλάσιο του* Δ
4. $\forall i \in B$ *και* $\forall j \in G, x_{ij} \geq 0$ *και* $\pi_j \geq 0$

Ορισμός 15 (Δ-βελτιστότητα). *Μία λύση (π, x) ορίζεται ως **Δ-βέλτιστη** (Δ-optimal) εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

1. *Είναι Δ-εφικτή και*
2. $\forall i \in B,\ c_i(x) < \Delta$

Η Δ-εφικτότητα τροποποιεί της συνθήκες βελτιστότητας κατά τους εξής τρόπους:

1. Επιτρέπει σε κάθε αγοραστή να μην ξοδέψει ολόκληρη την προικοδότηση του.
2. Μπορεί να πουληθεί περισσότερο του 100% κάποιου αγαθού.
3. Τέλος οι αναθέσεις των αγαθών είναι πολλαπλάσια του Δ

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω έννοιες θα παρουσιαστούν δύο μορφές του αλγορίθμου. Η γενικότερη ιδέα του ασθενώς πολυωνυμικού αλγορίθμου είναι αυτή ενός "κλιμακωτού" αλγορίθμου (scaling algorithm). Ξεκινώντας από μία αρχική εφικτή λύση όπου $\Delta = e_{max}$, εκτελεί μία σειρά από φάσεις κλιμάκωσης. Τα δεδομένα εισόδου της Δ-κλιμάκωσης είναι μία Δ-εφικτή λύση (π, x). Η φάση Δ-κλιμάκωσης μετασχηματίζει την λύση αυτή σε μία Δ-βέλτιστη λύση (π', x'). Έπειτα ο αλγόριθμος μετασχηματίζει την λύση (π', x') σε μία $\Delta/2$-εφικτή. Τότε η τιμή Δ αντικαθίσταται με τη τιμή $\Delta/2$ και ο αλγόριθμος συνεχίζει στην επόμενη φάση. Ο συνολικός αριθμός των φάσεων που θα εκτελεστούν είναι φραγμένος από $O(n \log U_{max} + e_{max})$, οπότε για την παράμετρο Δ θα ισχύει $\Delta < 1/(8nU_{max}^n)$ και ο αλγόριθμος θα καθορίζει μία βέλτιστη λύση.

Στον παραπάνω αλγόριθμο βασίζεται ο αυστηρώς πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος. Η ιδέα που τον διαφοροποιεί είναι η παρατήρηση ότι αν $x_{ij} \geq 3n\Delta$ στην αρχή της φάσης Δ-κλιμάκωσης, τότε $x'_{ij} \geq 3n\Delta/2$ στην αρχή της φάσης $(\Delta/2)$-κλιμάκωσης. Οι ακμές (i, j) αναφέρονται ως άφθονες (abundant) και έχουν την ιδιότητα ότι άπαξ και μία ακμή γίνει άφθονη τότε η ακμή αυτή θα είναι θετική στην λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Επομένως αν εγγυάται η εύρεση μία τέτοιας ακμής σε το πολύ πολυωνυμική πολυπλοκότητα, τότε το πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Ο τρόπος επίτευξης αυτού του στόχου γίνεται ως εξής. Αν μία λύση είναι Δ-γόνιμη (Δ-fertile) (ο ορισμός θα δοθεί σε επόμενη υποενότητα) τότε θα υπάρχει μία άφθονη ακμή το πολύ σε $O(\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης. Αν μία λύση δεν είναι Δ-γόνιμη τότε υπάρχει αλγόριθμος που μετασχηματίζει τη λύση (π, x) σε μία νέα λύση (π', x') που είναι Δ'-γόνιμη και Δ'-εφικτή για κάποιο $\Delta' \leq \Delta/n^2$. Εφόσον θα υπάρχουν το πολύ n άφθονες ακμές, ο αριθμός των φάσεων θα είναι $O(n \log n)$ για όλες τις επαναλήψεις του αλγορίθμου.

4.3 Εισαγωγικές έννοιες

Κατά την διάρκεια του αλγορίθμου προϋποθέτουμε ότι το γράφημα ισοτήτων $E(\pi)$ δεν περιέχει κύκλους. Εάν δεν ισχύει η ιδιότητα αυτή, υπάρχει η δυνατότητα της χρήσης μικρών μεταβολών (perturbations) των U_{ij} τέτοιων ώστε να εγγυώνται την μη ύπαρξη των κύκλων. Μία τέτοια μεταβολή είναι η αντικατάσταση των U_{ij} με $U_{ij} + \varepsilon^{in} + \varepsilon^{j}$, όπου το ε επιλέγεται αυθαίρετα κοντά στο μηδέν.

Υποθέτουμε ότι $H \subseteq B \times G$. Αν το γράφημα H είναι μη κυκλικό, τότε το διάνυσμα

BasicSolution(H) είναι το μοναδικό διάνυσμα π που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. Αν $(i,j) \in H$ και αν $(i,k) \in H$, τότε $\frac{U_{ij}}{\pi_j} = \frac{U_{ik}}{\pi_k}$.
2. Για κάθε συνεκτικό (connected) υποσύνολο C του H: $\sum_{i \in C} e_i = \sum_{j \in C} \pi_j$.
3. Αν $(i,j) \notin H$ τότε $x_{ij} = 0$.
4. Για κάθε $i \in B$, $\sum_{j \in G} x_{ij} = e_i$.
5. Για κάθε $j \in G$, $\sum_{i \in B} x_{ij} = \pi_j$.

Οι πρώτοι δύο περιορισμοί μπορούν να καθορίσουν μοναδικά το διάνυσμα π, ενώ οι τρεις τελευταίοι περιορισμοί καθορίζουν μοναδικά την κατανομή των αγαθών x. Από τους περιορισμούς που ικανοποιεί το διάνυσμα *BasicSolution*(H) προκύπτει ότι μία λύση του προβλήματος Fisher μπορεί να καθοριστεί μοναδικά από το γράφημα ισοτήτων του.

Λήμμα 4. *Έστω (π^*, x^*) η βέλτιστη λύση του προβλήματος της αγοράς Fisher. Έστω $H^* = \{(i,j) : x^*_{ij} > 0\}$. Τότε BasicSolution$(H^*) = (\pi^*, x^*)$. Επίσης αν $x^*_{ij} > 0$, τότε $x^*_{ij} > e_{min}/D$, όπου $D = n(U_{max})^n$.*

Κάθε λύση που ικανοποιεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι ένα ρητός αριθμός με παρανομαστή μικρότερο του D σύμφωνα με τον κανόνα Cramer. Επίσης ο αριθμητής κάθε λύσης π_j, αν το j ανήκει στο συνεκτικό υποσύνολο C, θα είναι πολλαπλάσιο του $\sum_{i \in C} e_i$ το οποίο είναι τουλάχιστον e_{min}. Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει η τελευταία πρόταση του λήμματος.

Στο παρούσα ενότητα η παρουσία ενός υποσυνόλου όπως για παράδειγμα e_S θα δηλώνει άθροισμα, δηλαδή $e_S = \sum_{i \in S} e_i$. Παρατίθεται το στοιχειώδες λήμμα:

Λήμμα 5. *Εστω (π, x) οποιαδήποτε λύση και $B' \subseteq B$, $G' \subseteq G$. Τότε $e_{B'} - \pi_{G'} = c_{B'}(x) + b_{G'}(\pi, x)$.*

4.4 Ασθενώς πολυωνυμικός αλγόριθμος κλιμάκωσης

4.4.1 Αρχική λύση

Η αρχική επιλογή των τιμών πριν την έναρξη του αλγορίθμου, έχει ως εξής. Θέτουμε $\Delta^0 = e_{max}/n$. Για κάθε αγοραστή $i \in B$ θέτουμε $U_{iG} = \sum_{j \in G} U_{ij}$.

Για να αρχικοποιηθεί το διάνυσμα τιμών ορίζουμε $\forall i \in B, \forall j \in G : \pi_{ij} = \frac{U_{ij} e_i}{n U_{iG}}$. Από τις τιμές αυτές για κάθε αγαθό $j \in G$ επιλέγεται $\pi^0_j = \max\{\pi_{ij} : i \in B\}$.

Η αρχική ανακατανομή των αγαθών έχει ως εξής:$\forall i \in B, \forall j \in G : x_{ij} = 0$. Παρατηρείται ότι η αρχική λύση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις ώστε να είναι Δ-εφικτή. Επίσης από τις τιμές αυτές μπορεί να παραχθεί μία εφικτή λύση του προβλήματος θέτοντας $x_{ij} = \pi_j$ για κάποιο i με $(i,j) \in E(\pi)$.

4.4.2 Υπολειπόμενο δίκτυο και αλλαγή τιμών

Σε αυτήν την υποενότητα θα οριστεί το υπολειπόμενο δίκτυο (residual network). Έστω (π, x) μία Δ-εφικτή λύση κατά την φάση Δ κλιμάκωσης. Το υπολειπόμενο δίκτυο $N(\pi, x)$ ορίζεται ως εξής. Το σύνολο κόμβων είναι το $B \cup G$. Για κάθε άκμη ισότητας (i, j) υπάρχει μία κατευθυνόμενη ακμή-τόξο (arc) $(i, j) \in N(\pi, x)$. Οι ακμές αυτές ονομάζονται ευθείς ακμές (forward arcs). Για κάθε $(i, j) \in E(\pi) : x_{ij} > 0$ ορίζεται μία ακμή $(j, i) \in N(\pi, x)$. Οι ακμές αυτές αναφέρονται ως όπισθεν ακμές (backward arcs).

Έστω r ένας αρχικός κόμβος (root node) του δικτύου υπολοίπου $N(\pi, x)$. Ο αλγόριθμος επιλέγει ένα κόμβο $r \in B : c_r(x) \geq \Delta$. Ως $ActiveSet(\pi, x, r)$ ορίζεται το σύνολο των κόμβων $k \in B \cup G$ για το οποίο υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από το r στο k στο $N(\pi, x)$. Αν ένας κόμβος $k \in ActiveSet(\pi, x, r)$, τότε ο κόμβος αυτός ονομάζεται ενεργός (active) ως προς τα π, x, r.

Η αλλαγή των τιμών γίνεται με την αντικατάσταση των τιμών π_j όλων των ενεργών αγαθών με $q \cdot \pi_j$, για κάποιο $q > 1$. Δηλαδή χρησιμοποιείται η εξής συνάρτηση $f(q) = Price(\pi, x, r, q)$ όπου:

$$f_j(q) = \begin{cases} q\pi_j & \text{αν } j \in ActiveSet(\pi, x, r) \\ \pi_j & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{20}$$

Σε μία Δ φάση ο σκοπός είναι η αύξηση των τιμών χωρίς να χαθεί η ιδιότητα της Δ-εφικτότητας. Η διαδικασία $UpdatePrice(\pi, x, r)$ μας επιστρέφει το διάνυσμα τιμών π', όπου $\pi' = Price(\pi, x, r, q')$ και q' είναι η μέγιστη τιμή του q έτσι ώστε το (π', x) να παραμένει Δ-εφικτή λύση. Το διάνυσμα π' θα ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις εξής προϋποθέσεις:

1. Υπάρχει μία ακμή $(i, j) \in E(\pi') \setminus E(\pi)$ και επομένως ο κόμβος j γίνεται ενεργός. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος συνεχίζει να αυξάνει τις τιμές με την διαδικασία *PriceAndAugment*.

2. Υπάρχει κάποιος ενεργός κόμβος-αγαθό j με $b_j(\pi', x) \leq 0$. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος θα εκτελέσει μία αύξηση (augmentation) από τον κόμβο r στον κόμβο j. Η διαδικασία αυτή θα αναλυθεί εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα.

Από τις παραπάνω διαπιστώσεις ακολουθεί το εξής λήμμα.

Λήμμα 6. *Έστω (π, x) μία Δ-εφικτή λύση και π' το διάνυσμα τιμών που προκύπτει ως έξοδος της διαδικασίας $UpdatePrice(\pi, x, r)$. Τότε η λύση (π', x) είναι Δ-εφικτή.*

4.4.3 Μονοπάτια αύξησης και αλλαγή της διανομής αγαθών

Έστω (π, x) μία Δ-εφικτή λύση. Κάθε μονοπάτι $P \subseteq N(\pi, x)$ από έναν κόμβο $i \in B$ σε έναν κόμβο $j \in G$ καλείται αυξητικό μονοπάτι (augmenting path). Μία Δ-αύξηση (Δ-augmentation) επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση του διανύσματος x από ένα διάνυσμα

x' όπου:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \Delta & \text{αν } (i,j) \in P \text{ είναι ένα ευθύ τόξο του } N(\pi, x) \\ x_{ij} - \Delta & \text{αν } (i,j) \in P \text{ είναι ένα όπισθεν τόξο του } N(\pi, x) \\ x_{ij} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{21}$$

Λήμμα 7. *Έστω (π, x) μία Δ-εφικτή λύση και έστω $c_r \geq \Delta$. Έστω επίσης P ένα αυξητικό μονοπάτι από το κόμβο $r \in B$ στον κόμβο $k \in G$ για το οποίο $b_j(\pi, x) \leq 0$. Αν η κατανομή x' προκύπτει από μία Δ-αύξηση επί του μονοπατιού P, τότε η λύση (π, x') είναι επίσης Δ-εφικτή. Επιπλέον $c_r(x') = c_r(x) - \Delta$ και $c_j(x') = c_j(x)$ για $j \neq r$.*

Αφού έχει εξηγηθεί συνοπτικά η γενικότερη ιδέα των διαδικασιών, παρακάτω θα παρουσιαστούν αναλυτικά. Η διαδικασία *PriceAndAugment*(π, x) επαναληπτικά για συγκεκριμένη τιμή Δ αυξάνει τις τιμές π, μέχρι να βρει ένα αυξητικό μονοπάτι στο $N(\pi, x)$. Όταν βρεθεί εκτελεί την Δ-αύξηση και επανυπολογίζει τις τιμές $c_i(x), b_j(\pi, x)$.

Αλγόριθμος 1: PriceAndAugment

είσοδος: π, x

έναρξη

- Επιλογή ενός αγοραστή $r \in B$ με $c_r(x) \geq \Delta$
- Υπολογισμός *ActiveSet*(π, x, r)
- **επανάληψη**
  - αντικατάσταση π με κλήση της *UpdatePrice*(π, x)
  - επανυπολογισμός των $N(\pi, x), b(\pi, x),$ και *ActiveSet*(π, x, r)
- **έως** $\exists$ *ένας ενεργός κόμβος* $j \in G$: $b_j(\pi, x) \leq 0$
- έστω P ένα μονοπάτι στο $N(\pi, x)$ από το r στον κόμβο j με $b_j(\pi, x) \leq 0$
- αντικατάσταση του x εκτελόντας μία Δ-αύξηση στο μονοπάτι P
- επανυπολογισμός $c(x)$ και $b(\pi, x)$

Αλγόριθμος 2: ScalingAlgorithm

είσοδος: e, U

έναρξη

- $\Delta := \Delta^0; \quad \pi := \pi^0; \quad x := 0$
- *ScalingPhase* :
- **εφόσον** (π, x) *δεν είναι Δ-βέλτιστη λύση* **κάνε**
  - αντικατέστησε τα (π, x) καλώντας την *PriceAndAugment*(π, x)
- $E' := \{(i,j) : x_{ij} \geq 4n\Delta\}$
- **άν** *BasicSolution*(E') *είναι βέλτιστη* **τότε** τερματισμός
- $\Delta := \Delta/2$
- **για κάθε** $j \in G$ *τέτοιο ώστε* $b_j(\pi, x) > \Delta$ **κάνε**
  - ελάττωσε το x_{ij} κατά Δ για κάποια $i \in B$
- **επιστροφή στο** *ScalingPhase*

4.4.4 Ανάλυση πολυπλοκότητας του ασθενώς πολυωνυμικού αλγορίθμου

Παρατηρούμε ότι οι ενέργειες που εκτελεί ο *ScalingAlgorithm* είναι πολυωνυμικού χρόνου. Επομένως μένει να οριστεί ένα φράγμα στον αριθμό κλήσεων της διαδικασίας *PriceAndAugment*, όπως επίσης και στην πολυπλοκότητα αυτής. Ο αριθμός των κλήσεων θα φραχτεί με τη χρήση μίας συνάρτησης δυναμικού (potential function). Έστω $\Phi(x, \Delta) = \sum_{i \in B} \lfloor c_i(x)/\Delta \rfloor$. Θα δειχθεί ότι στην αρχή μία φάσης κλιμάκωσης $\Phi \leq n$ και στο τέλος αυτής $\Phi = 0$, και ότι κάθε κλήση της *PriceAndAugment* μειώνει την Φ ακριβώς κατά 1.

Από το λήμμα (6) και το λήμμα (7), προκύπτει ότι αν μία λύση είναι Δ-εφικτή στην αρχή της *PriceAndAugment* τότε και η ακολουθία των λύσεων που προκύπτουν κατά την διάρκεια της εκτέλεσης της είναι Δ-εφικτές. Επίσης η πιο σημαντική ιδιότητα του λήμματος (7) είναι ότι υποδεικνύει πως κάθε κλήση της *PriceAndAugment* μειώνει κατά μία μονάδα την Φ.

Στην πρώτη εκτέλεση της φάσης κλιμάκωσης, καθότι $c_i(x^0) \leq \Delta^0, \ \forall i \in B$, ισχύει για την τιμή Φ ότι $\Phi(x^0, \Delta^0) \leq |B| \leq n$. Έστω Δ μία τυχαία φάση κλιμάκωσης. Έστω (π, x) μία 2Δ-βέλτιστη λύση. Τότε $c_i(x) < 2\Delta, \ \forall i \in B$. Επομένως στο τέλος της 2Δ φάσης κλιμάκωσης έχουμε $\Phi(x, 2\Delta) \leq |B|$. Έπειτα η 2Δ αντικαθίσταται από την τιμή Δ και ο αλγόριθμος μειώνει κατά Δ την ανάθεση για κάθε αγαθό j όπου $b_j(\pi, x) > \Delta$. Αυτή η αλλαγή μπορεί να αυξήσει την τιμή Φ κατά το πολύ $|G|\Delta$. Επομένως στην αρχή της Δ φάσης κλιμάκωσης η Φ φράσσεται από $|B| + |G| = n$, και επομένως χρειάζονται το πολύ n κλήσεις της *PriceAndAugment* για να προκύψει μία Δ-βέλτιστη λύση.

Το επόμενο βήμα είναι να μελετηθεί η διαδικασία *PriceAndAugment*. Παρατηρείται και εδώ ότι χρειάζεται μόνο να αναλυθεί ο χρόνος που απαιτεί η *UpdatePrice*, καθώς όλες οι υπόλοιπες ενέργειες είναι πολυωνυμικού χρόνο. Με τη χρήση σωρού Fibonacci αποδεικνύεται ότι η *UpdatePrice* έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(m + |B| \log |B|)$, όπου m είναι ο αριθμός των (i, j) με $U_{ij} > 0$.

Ο χρόνος λοιπόν που χρειάζεται η κάθε φάση κλιμάκωσης έχει αναλυθεί. Επομένως μένει η ανάλυση του αριθμού των φάσεων κλιμάκωσης που χρειάζεται ο αλγόριθμος. Πριν γίνει η ανάλυση αυτή θα εισαχθεί μία καινούργια έννοια.

Ορισμός 16 (Δ-αφθονία). *Μία ακμή (i, j) ονομάζεται Δ-άφθονη (Δ-abundant) αν $x_{ij} \geq 3n\Delta$, όπου x_{ij} είναι η ανάθεση στην αρχή της φάσης Δ-κλιμάκωσης.*

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα είναι ότι όταν μία ακμή γίνεται Δ-άφθονη, θα παραμείνει άφθονη για όλες τις υπόλοιπες επαναλήψεις του αλγορίθμου, όπως προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 8. *Αν η ακμή (i, j) είναι άφθονη στην φάση Δ-κλιμάκωσης, είναι άφθονη και στην φάση $\Delta/2$-κλιμάκωσης, καθώς και σε όλες τις επόμενες φάσεις κλιμάκωσης.*

Απόδειξη. Έστω x' η ανάθεση στην αρχή της φάσης Δ-κλιμάκωσης και x'' η ανάθεση στο τέλος αυτής. Αν η ακμή (i, j) είναι Δ-άφθονη, τότε $x''_{ij} \geq 3n\Delta - n\Delta = 2n\Delta = 4n(\Delta/2)$. Επομένως παραμένει άφθονη και στη φάση $\Delta/2$-κλιμάκωσης. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι παραμένει άφθονη και σε όλες τις επόμενες φάσης κλιμάκωσης. □

Βάση αυτής της ιδιότητας, θα παρατεθεί απόδειξη για τον αριθμό των φάσεων κλιμάκωσης. Έστω (π^k, x^k) και Δ^k είναι η λύση και ο παράγοντας κλιμάκωσης στην k-οστή φάση κλιμάκωσης του αλγορίθμου. Επειδή η αλλαγή σε κάθε ανάθεση και κάθε τιμή είναι το πολύ $n\Delta$ κατά την διάρκεια της της Δ φάσης κλιμάκωσης, οι ακολουθίες $\{\pi_k : k = 1, 2, \ldots\}$ και $\{x_k : k = 1, 2, \ldots\}$ θα συγκλίνουν οριακά στην βέλτιστη λύση (π^*, x^*).

Έστω $\Delta^k < 1/(8nD)$ όπου $D = n(U_{max})^n$ και $E^k = \{(i,j) : x_{ij}^k > 4n\Delta^k\}$ Θα αποδειχθεί ότι η λύση *BasicSolution*(E^k) είναι βέλτιστη. Αν $(i,j) \in E^k$, τότε η ακμή αυτή είναι Δ-άφθονη και θα παραμείνει στο γράφημα για όλες τις επόμενες φάσεις κλιμάκωσης και επομένως $x_{ij}^* > 0$, σύμφωνα με το λήμμα (8). Αν $(i,j) \notin E^k$, τότε $x_{ij}^* < x_{ij}^k + 4n\Delta^k \leq 8n\Delta^k \leq 1/D$ και από το λήμμα (4) προκύπτει ότι $x_{ij}^* = 0$. Έτσι αποδείχθηκε ότι η λύση *BasicSolution*(E^k) είναι βέλτιστη. Ο αριθμός των φάσεων κλιμάκωσης που απαιτείται για να εγγυηθεί ότι $\Delta^k < 1/(8nD)$ είναι $O(\log e_{max} + n \log U_{max})$.

Επομένως παρατίθεται η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου *ScalingAlgorithm* στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 10. *Κατά την διάρκεια μία Δ φάσης κλιμάκωσης, ο αλγόριθμος ScalingAlgorithm μετασχηματίζει μία Δ-εφικτή λύση σε μία Δ-βέλτιστη λύση με το πολύ n κλήσεις της διαδικασίας PriceAndAugment. Κάθε κλήση της PriceAndAugment έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(m + |B| \log |B|)$. Ο αριθμός των φάσεων κλιμάκωσης είναι $O(e_{max} + n \log U_{max})$. Επομένως ο αλγόριθμος έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(n(m + n \log n)(e_{max} + n \log U_{max})$.*

4.4.5 Παράδειγμα του ασθενώς πολυωνυμικού αλγορίθμου

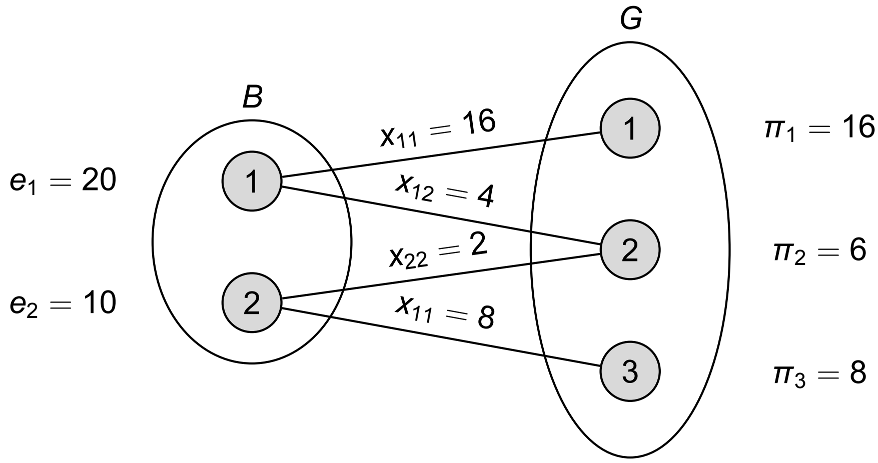
Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί ένα απλό παράδειγμα για τον ασθενώς πολυωνυμικό αλγόριθμο *ScalingAlgorithm*. Έστω μία αγορά Fisher που αποτελείται από δύο αγοραστές και τρία αγαθά. Ο πρώτος αγοραστής εισέρχεται με προικοδότηση $e_1 = 20$, ενώ ο δεύτερος με προικοδότηση $e_2 = 10$. Οι συναρτήσεις χρησιμότητας των αγοραστών είναι:

$$U_1 = 8x_{11} + 3x_{12} + 0x_{13}$$
$$U_2 = 0x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23}$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος αποτυπώνεται στο γράφημα ισότητας του Σχήματος 2). Στο γράφημα αυτό για λόγους πληρότητας συμπληρώθηκε σε κάθε ακμή (i,j) η κατανομή της προικοδότησης x_{ij}, αριστερά των αγοραστών η προικοδότηση τους και τέλος δεξιά των αγαθών οι τιμές τους στο σημείο ισορροπίας.

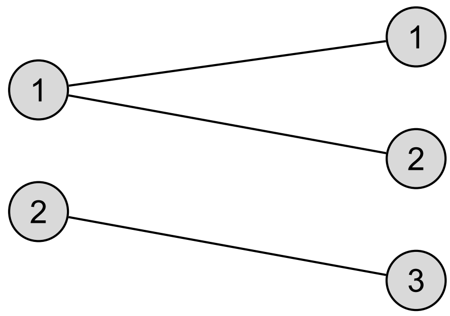
Οι αρχικές τιμές των παραμέτρων είναι:

- $\Delta^0 = 4$,
- $x^0 = \mathbf{0}$,
- $\pi^0 = (32/11,\ 12/11,\ 8/7)$



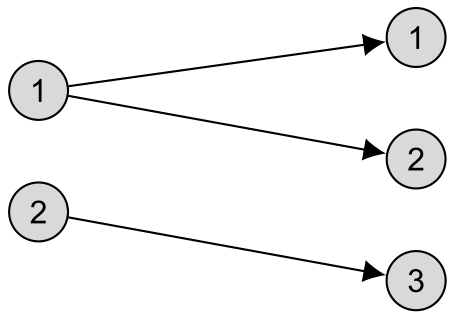
Σχήμα 2: Λύση του παραδείγματος αγοράς Fisher

Αφού η λύση (π^0, x^0) δεν είναι Δ-βέλτιστη, θα κληθεί η διαδικασία *PriceAndAugment*. Στη διαδικασία αυτή, έστω ότι επιλέγεται ο πρώτος αγοραστής (αφού και για τους δύο αγοραστές ισχύει ότι $c_i(x) \geq \Delta$). Επομένως υπολογίζεται το ενεργό σύνολο του πρώτου αγοραστή καλώντας την *ActiveSet*$(\pi, x, 1)$. Με τις τιμές αυτές το γράφημα ισοτήτων παρίσταται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Γράφημα ισότητας για την πρώτη φάση κλιμάκωσης

Από το γράφημα ισοτήτων του σχήματος 3), και δεδομένου ότι η αρχική ανάθεση είναι $x = 0$, προκύπτει το υπολειπόμενο δίκτυο που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.

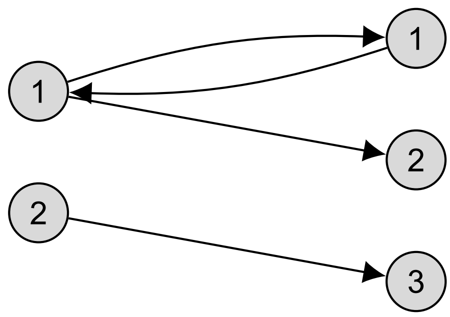


Σχήμα 4: Υπολειπόμενο δίκτυο για την πρώτη φάση κλιμάκωσης

Από το υπολειπόμενο δίκτυο του Σχήματος 4, προκύπτει ότι το ενεργό σύνολο του πρώτου αγοραστή περιλαμβάνει το πρώτο και το δεύτερο αγαθό. Εφόσον ισχύει $b_1(\pi, x) = -32/11 < 0$, η διαδικασία *PriceAndAugment* θα εκτελέσει μία Δ-αύξηση στο μονοπάτι από τον πρώτο αγοραστή στον πρώτο κόμβο, δηλαδή επί της ακμής $(1, 1)$. Έπειτα από την αύξηση αυτή, επανυπολογίζονται οι τιμές $c(x)$ και $b(\pi, x)$:

	c	b
1	16	12/11
2	10	-12/11
3	N/A	-8/7

Στην συνέχεια η διαδικασία *ScalingAlgorithm* ελέγχει αν η λύση αυτή είναι Δ-βέλτιστη, και αφού δεν είναι, η *PriceAndAugment* καλείται εκ νέου. Έστω ότι στην *PriceAndAugment* επιλέγεται ο πρώτος αγοραστής καθώς $c_1 \geq \Delta^0$. Καθώς σε αυτή την επανάληψη έχουμε κάποια κατανομή αγαθών το υπολειπόμενο δίκτυο θα έχει και ακμές από τα αγαθά προς τους αγοραστές και απεικονίζεται στο Σχήμα 5.



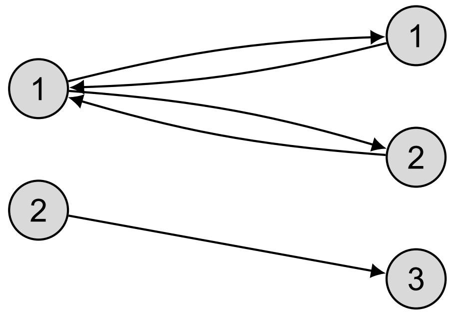
Σχήμα 5: Υπολειπόμενο δίκτυο στην δεύτερη εκτέλεση της PriceAndAugment για την πρώτη φάση κλιμάκωσης

Από το υπολειπόμενο δίκτυο του Σχήματος 5, παρατηρούμε ότι το σύνολο των ενεργών κόμβων του πρώτου αγοραστή είναι το πρώτο αγαθό με $b_1 = 12/11 > 0$ και το δεύτερο με $b_2 = -12/11 < 0$. Επομένως θα εκτελεστεί μία Δ^0 αύξηση πάνω στην ακμή $(1, 2)$ και οι τιμές $c(x)$ και $b(\pi, x)$ επανυπολογίζονται ως εξής:

	c	b
1	12	12/11
2	10	32/11
3	N/A	-8/7

Στην συνέχεια η διαδικασία *ScalingAlgorithm* ελέγχει αν η λύση αυτή είναι Δ-βέλτιστη, και αφού δεν είναι, η *PriceAndAugment* καλείται εκ νέου. Έστω ότι στην *PriceAndAugment* επιλέγεται ο πρώτος αγοραστής καθώς $c_1 \geq \Delta^0$. Για να υπολογιστεί το ενεργό σύνολο του πρώτου αγοραστή, το νέο υπολειπόμενο δίκτυο κατασκευάζεται και παρουσιάζεται στο Σχήμα 6. Προκύπτει ότι το ενεργό σύνολο του πρώτου αγοραστή περιλαμβάνει το πρώτο και το δεύτερο αγαθό.

Αφού κανένα από τα παραπάνω αγαθά δεν έχει πλεόνασμα $b_j \leq 0$, θα καλεστεί η διαδικασία *UpdatePrice*. Η μέγιστη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ^0-εφικτή είναι η $q = 11/8$, τιμή για την οποία μηδενίζεται το πλεόνασμα b_1. Επομένως το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi^0 = (4,\ 3/2,\ 8/7)$. Οι καινούργιες τιμές των πλεονασμάτων είναι



Σχήμα 6: Υπολειπόμενο δίκτυο στην τρίτη επανάληψη της πρώτης φάσης κλιμάκωσης

$b(x) = (0,\ 5/2,\ -8/7)$, ενώ δεν παρατηρείται κάποια αλλαγή στο υπολειπόμενο δίκτυο και επομένως στο ενεργό σύνολο του πρώτου αγοραστή. Αφού με την αναθεώρηση των τιμών προέκυψε κάποιο αγαθό για το οποίο $b_j = 0$, η διαδικασία *PriceAndAugment*, θα εκτελέσει μία Δ^0-αύξηση πάνω στην ακμή $(1, 1)$. Οι νέες τιμές των $c(x)$ και $b(\pi, x)$ έχουν ως εξής.

	c	b
1	8	4
2	10	5/2
3	N/A	-8/7

Εφόσον και αυτή η λύση δεν είναι Δ^0-βέλτιστη η διαδικασία *ScalingAlgorithm* θα καλέσει εκ νέου την *PriceAndAugment*. Έστω ότι επιλέγει και πάλι τον πρώτο αγοραστή. Το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει στο Σχήμα 6 και το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει το πρώτο και το δεύτερο αγαθό. Εφόσον το πλεόνασμα και των δύο αγαθών είναι θετικό η *UpdatePrice* θα καλεστεί. Η μέγιστη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ^0-εφικτή είναι η $q = 2$. Επομένως το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi^0 = (8,\ 3,\ 8/7)$. Με τις τιμές αυτές το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει, ενώ το νέο διάνυσμα πλεονάσματος είναι $b = (0,\ 1,\ -8/7)$. Έπειτα εκτελείται μία Δ^0-αύξηση κατά μήκος της ακμής $(1, 1)$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

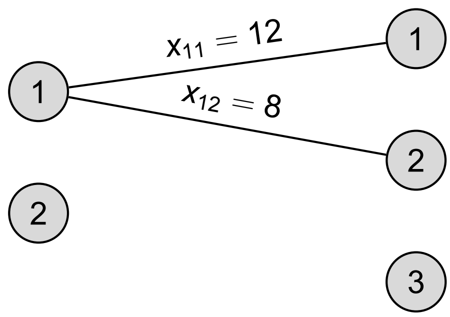
	c	b
1	4	4
2	10	1
3	N/A	-8/7

Εφόσον και αυτή η λύση δεν είναι Δ^0-βέλτιστη η διαδικασία *ScalingAlgorithm* θα καλέσει εκ νέου την *PriceAndAugment*. Έστω ότι επιλέγει και πάλι τον πρώτο αγοραστή. Το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει στο Σχήμα 6 και το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει το πρώτο και το δεύτερο αγαθό. Εφόσον το πλεόνασμα και των δύο αγαθών είναι θετικό η *UpdatePrice* θα καλεστεί. Η μέγιστη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ^0-εφικτή είναι η $q = 4/3$. Επομένως το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi^0 = (32/3,\ 4,\ 8/7)$. Με τις τιμές αυτές το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει, ενώ το νέο διάνυσμα πλεονάσματος είναι

$b = (4/3,\ 0,\ -8/7)$. Έπειτα εκτελείται μία Δ^0-αύξηση κατά μήκος της ακμής $(1, 2)$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

	c	b
1	0	4/3
2	10	4
3	N/A	-8/7

Μέχρι αυτή την επανάληψη της πρώτης φάσης η κατανομή των αγαθών παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Προσωρινή κατανομή αγαθών στην πρώτη φάση κλιμάκωσης

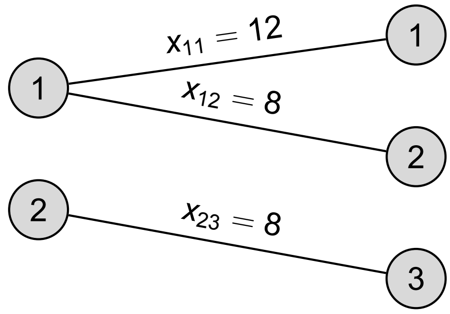
Εφόσον και αυτή η λύση δεν είναι Δ^0-βέλτιστη η *ScalingAlgorithm* θα καλέσει εκ νέου την *PriceAndAugment*. Αυτή τη φορά μπορεί να επιλεγεί μόνο ο δεύτερος αγοραστής. Το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει στο Σχήμα 6 και το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει το τρίτο αγαθό. Αφού για το τρίτο αγαθό έχουμε $b_3 = -8/7 \leq 0$, θα εκτελεστεί μία Δ^0-αύξηση κατά μήκος της ακμής $(2, 3)$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

	c	b
1	0	4/3
2	6	4
3	N/A	20/7

Η λύση δεν είναι Δ^0-βέλτιστη και η *ScalingAlgorithm* θα καλέσει εκ νέου την *PriceAndAugment*. Επιλέγεται και πάλι ο δεύτερος αγοραστής. Το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει στο Σχήμα 6 και το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει το τρίτο αγαθό. Εφόσον το πλεόνασμα του τρίτου αγαθού είναι θετικό η *UpdatePrice* θα καλεστεί. Η μέγιστη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ^0-εφικτή είναι η $q = 7/2$. Επομένως το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi^0 = (32/3,\ 4,\ 4)$. Με τις τιμές αυτές το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει, ενώ το νέο διάνυσμα πλεονάσματος είναι $b = (4/3,\ 0,\ 0)$. Έπειτα εκτελείται μία Δ^0-αύξηση κατά μήκος της ακμής $(2, 3)$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

	c	b
1	0	4/3
2	2	4
3	N/A	4

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή είναι Δ^0-βέλτιστη. Η κατανομή των αγαθών παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Προσωρινή κατανομή αγαθών στην πρώτη φάση κλιμάκωσης

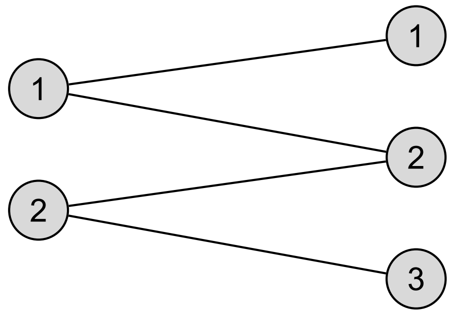
Επομένως η *ScalingAlgorithm* θα ελέγξει αν το γράφημα $E' = \{(i, j) : x_{ij} \geq 4n\Delta^0\}$ αποτελεί λύση του προβλήματος, κάτι το οποίο δεν ισχύει. Έπειτα ο αλγόριθμος θα προχωρήσει στην επόμενη φάση κλιμάκωσης $\Delta^1 = \Delta^0/2 = 2$. Για τα αγαθά για τα οποία $b_j > \Delta^1 = 2$ θα ακολουθήσει μείωση της κατανομής τους κατά Δ^1, δηλαδή για το δεύτερο αγαθό θα έχουμε $x_{12} = 6$, όπως και για το τρίτο $x_{23} = 6$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

	c	b
1	2	4/3
2	4	2
3	N/A	2

Στην δεύτερη φάση κλιμάκωσης καλείται η *PriceAndAugment*. Έστω ότι επιλέγεται ο πρώτος αγοραστής. Το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ως έχει στο Σχήμα 6 και το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει το πρώτο και το δεύτερο αγαθό. Εφόσον για κανένα από τα αγαθά αυτά δεν ισχύει $b_j \leq 0$, θα καλεστεί η *UpdatePrice*. Η μεγαλύτερη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ-εφικτή είναι η $q = 9/8$. Το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi^1 = (12,\ 9/2,\ 4)$. Οί νέες τιμές του πλεονάσματος γίνονται $b = (0,\ 3/2,\ 2)$. Έτσι η *PriceAndAugment* θα εκτελέσει μία Δ^1-αύξηση κατά μήκος της ακμής $(1, 1)$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ώς εξής:

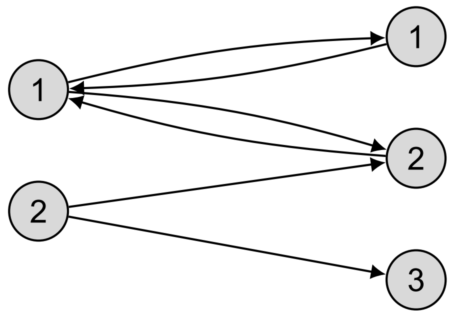
	c	b
1	0	2
2	4	3/2
3	N/A	2

Η λύση αυτή δεν είναι Δ^1-βέλτιστη επομένως η *PriceAndAugment* καλείται ξανά. Η μόνη δυνατή επιλογή είναι αυτή του δευτέρου αγοραστή. Το υπολειπόμενο δίκτυο παραμένει ώς έχει και το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει το τρίτο αγαθό. Εφόσον $b_3 > 0$, η *UpdatePrice* θα καλεστεί. Η μεγαλύτερη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ-εφικτή είναι η $q = 3/2$. Το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi^1 = (12,\ 9/2,\ 6)$. Για αυτή την τιμή παρατηρείται επίσης ότι πλέον $\frac{U_{22}}{\pi_2} = \frac{U_{23}}{\pi_3} = \frac{2}{3}$ και επομένως στο γράφημα ισότητας προστίθεται και η ακμή $(2, 2)$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Γράφημα ισότητας για την δεύτερη φάση κλιμάκωσης

Από το γράφημα ισότητας προκύπτει το υπολειπόμενο δίκτυο του Σχήματος 10.



Σχήμα 10: Υπολειπόμενο δίκτυο στην δεύτερη φάση κλιμάκωσης

Από το υπολειπόμενο δίκτυο παρατηρείται ότι πλέον το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει όλο το γράφημα, δηλαδή όλα τα αγαθά όπως και τον πρώτο αγοραστή. Οι νέες τιμές του πλεονάσματος είναι $b = (2,\ 3/2,\ 0)$ και ο αλγόριθμος θα εκτελέσει μία Δ^1-αύξηση στην ακμή $(2,3)$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

	c	b
1	0	2
2	2	3/2
3	N/A	2

Η παραπάνω λύση δεν είναι Δ^1-βέλτιστη επομένως η *PriceAndAugment* καλείται ξανά. Επιλέγεται ο δεύτερος αγοραστής. Το ενεργό σύνολο περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του γραφήματος. Εφόσον $b_j > 0$ καλείται η διαδικασία *UpdatePrice*. Η μέγιστη τιμή για την οποία η λύση παραμένει Δ^1-εφικτή είναι $q = 7/6$. Το νέο διάνυσμα τιμών είναι $\pi = (14,\ 21/4,\ 7)$. Το υπολειπόμενο δίκτυο μένει ως έχει και το νέο διάνυσμα του πλεονάσματος είναι $b = (0,\ 3/4,\ 1)$. Στην συνέχεια ο αλγόριθμος θα πραγματοποιήσει μία Δ^1-αύξηση κατά μήκος ενός μονοπατιού από τον δεύτερο αγοραστή προς το πρώτο αγαθό. Ένα τέτοιο μονοπάτι είναι $(b_2, g_2), (g_2, b_1), (b_1, g_1)$, όπου ως b_i αναφέρεται ο κόμβος του i-οστού αγοραστή και ως g_j ο κόμβος του j-οστού αγαθού. Επομένως έπειτα από αυτή την αύξηση θα έχουμε $x_{22} = 2$, $x_{12} = 4$ και $x_{11} = 16$. Οι νέες τιμές των $b,\ c$ έχουν ως εξής:

Η λύση αυτή είναι Δ^1-βέλτιστη. Το γράφημα $E' := \{(i,j) :\ x_{ij} \geq 2n\Delta^1 = 20\}$ είναι χωρίς ακμές και επομένως ο αλγόριθμος συνεχίζει στην επόμενη φάση κλιμάκωσης $\Delta^2 = 1$. Παρατηρούμε όμως ότι η λύση σε αυτή την φάση είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

	c	b
1	0	0
2	0	3/4
3	N/A	1

Σε επόμενες φάσεις κλιμάκωσης ο αλγόριθμος θα επιφέρει μικρές αλλαγές στην κατανομή χωρίς όμως να αλλάξει το γράφημα ισοτήτων. Στην φάση $\Delta^6 = 1/16$ θα ικανοποιείται η συνθήκη $x_{ij} \geq 2n\Delta^6 = 5/8$ και επομένως ο αλγόριθμος θα τερματίσει με την βέλτιστη λύση του Σχήματος 2.

4.5 Αυστηρώς πολυωνυμικός αλγόριθμος κλιμάκωσης

4.5.1 Εισαγωγή

Ο αυστηρώς πολυωνυμικός αλγόριθμος κλιμάκωσης βασίζεται στον ασθενή που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα. Η διαφοροποίηση του έγκειται στη χρήση δύο νέων ιδεών. Στην έννοια του πλεονάσματος (surplus) ενός υποσυνόλου των κόμβων και στην έννοια του γόνιμου (fertile) διανύσματος μεταβλητών. Παρακάτω θα δοθούν οι ορισμοί που θα χρειαστούν στην ανάλυση του αλγορίθμου.

Ορισμός 17 (Δ-συνιστώσα). *Για τη φάση Δ-κλιμάκωσης, ορίζουμε ως $A(\Delta)$, το σύνολο των Δ-άφθονων ακμών. Κάθε συνιστώσα (component) στο γράφημα που ορίζεται από το $A(\Delta)$, ονομάζεται Δ-συνιστώσα. Ως $C(\Delta)$ ορίζεται το σύνολο των Δ-συνιστωσών.*

Ορισμός 18 (Δ-υπολειπόμενο δίκτυο). *Έστω π ένα διάνυσμα τιμών κατά την διάρκεια της φάσης Δ-κλιμάκωσης. Ορίζουμε ως Δ-υπολειπόμενο δίκτυο $N(\pi, \Delta)$ το γράφημα που προκύπτει με ευθείς ακμές τις ακμές του $E(\pi)$, και όπισθεν ακμές τις αντίστροφες Δ-άφθονες ακμές. Ακόμη ορίζουμε ώς ενεργό σύνολο $ActiveSet(\pi, \Delta, r)$ το σύνολο των κόμβων που είναι προσβάσιμο από το κόμβο r στο δίκτυο $N(\pi, \Delta)$.*

Ένα παράδειγμα τέτοιου γραφήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.

Ορισμός 19 (πλεόνασμα). *Έστω ότι $H \subseteq B \cup G$. Ορίζεται ως πλεόνασμα του H με βάση ένα διάνυσμα τιμών π η τιμή:*

$$s(\pi, H) = \sum_{i \in H \cap B} e_i - \sum_{j \in H \cap G} \pi_j = e_H - \pi_H$$

Ορισμός 20 (Δ-γονιμότητα). *Έστω (π, x) μία λύση στην αρχή της φάσης Δ-κλιμάκωσης. Μια συνιστώσα H του $A(\Delta)$ ονομάζεται Δ-γόνιμη αν:*

1. *η συνιστώσα* H *περιέχει μόνο έναν κόμβο $i \in B$ και $e_i > \Delta/(3n^2)$, ή*
2. $s(\pi, H) \leq \Delta/(3n^2)$

Μία λύση ονομάζεται Δ-γόνιμη αν οποιαδήποτε από τις συνιστώσες του $C(\Delta)$ είναι Δ-γόνιμη.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της Δ-γονιμότητας μπορούμε να προσδιορίσουμε μία καινούργια άφθονη ακμή σε πολυωνυμικό χρόνο βάσει του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 9. *Έστω (π, x) μία λύση που προκύπτει στο τέλος της φάσης Δ-κλιμάκωσης. Για κάθε γόνιμη Δ-συνιστώσα, θα υπάρχει μία καινούργια άφθονη ακμή στο H μέσα σε* $5\log n + 5$ *φάσεις κλιμάκωσης.*

Απόδειξη. Έστω Δ' ο παράγοντας κλιμάκωσης έπειτα από τουλάχιστον $5\log n + 4$ φάσεις κλιμάκωσης. Τότε $\Delta' < \Delta/(16n^5)$. Έστω (π, x) η λύση στην αρχή της φάσης Δ' κλιμάκωσης. Αν $H = \{i\}$, τότε $e_i > 3n^2\Delta'$, και επομένως υπάρχει ακμή (i, j) με $x'_{ij} > 3n\Delta'$. Αν το H περιέχει μία ακμή του G, τότε $s(\pi', H) \le s(\pi, H) < -3n^2\Delta'$. Επειδή όμως $b_j(\pi', x') \ge 0$, επακολουθεί ότι υπάρχει κάποια ακμή (i, j) με $i \in B\ H$ και $j \in H \cap G$, τέτοια ώστε $x'_{ij} \ge 3n\Delta'$, και έτσι η ακμή (i, j) είναι άφθονη στη φάση Δ' κλιμάκωσης. □

Καθότι από τις αρχικές παραδοχές του προβλήματος το σύνολο των βέλτιστων ακμών δεν περιέχει κύκλους, συνεπάγεται ότι υπάρχουν το πολύ $n-1$ άφθονες ακμές. Αν η λύση στην αρχή κάθε φάσης κλιμάκωσης του *ScalingAlgorithm* ήταν γόνιμη, τότε έπειτα από $O(n\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης ο αλγόριθμος θα έβρισκε όλες τις άφθονες ακμές, από τις οποίες θα μπορούσε να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση. Όμως υπάρχει η περίπτωση στην αρχή μίας φάσης η λύση να μην είναι γόνιμη και επομένως ο αλγόριθμος *ScalingAlgorithm* δεν μπορεί να είναι αυστηρώς πολυωνυμικός.

4.5.2 Παρουσίαση του αυστηρώς πολυωνυμικού αλγορίθμου

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος *StrongScaling*. Η κύρια διαφορά με τον ασθενώς πολυωνυμικό αλγόριθμο *ScalingAlgorithm* έγκειται όταν η λύση στην αρχή της φάσης Δ-κλιμάκωσης είναι μη γόνιμη. Στην περίπτωση αυτό ο αλγόριθμος *StrongScaling* καλεί τη διαδικασία *MakeFertile* η οποία παράγει μία μικρότερη παράμετρο Δ' και ένα εφικτό διάνυσμα τιμών π' που είναι Δ'-γόνιμο. Έπειτα ο αλγόριθμος επιστρέφει στην φάση Δ'-κλιμάκωσης.

Επίσης υπάρχουν και άλλες δύο διαφορές με τον αλγόριθμο *ScalingAlgorithm*. Η διαδικασία *MakeFertile* επιτρέπει οι τιμές των αναθέσεων των αγαθών να μην είναι πολλαπλάσια του Δ. Επιπλέον η διαδικασία παράγει μία λύση (π', x'), έτσι ώστε το πλεόνασμα προσφοράς $b_j(\pi', x')$ επιτρέπεται να είναι μικρότερο του μηδενός αρκεί $b_j(\pi', x') \ge -\Delta/n^2$.

Παρακάτω παρατίθενται οι αλγόριθμοι.

Αλγόριθμος 4: MakeFertile

είσοδος: π, x, Δ

έναρξη

- $\Delta' := \mathit{GetParameter}(\pi, \Delta)$
- **άν** $\Delta' > \Delta/n^2$ **τότε** *Threshold* $:= \Delta/n^5$ και τερμάτισε
- $\pi' := \mathit{GetPrices}(\pi, \Delta')$
- $x' := \mathit{GetAllocations}(\pi, \Delta')$

Η διαδικασία *MakeFertile*(π, Δ) έχει τρεις υπορουτίνες. Η πρώτη υπορουτίνα είναι η

Αλγόριθμος 3: StrongScaling

είσοδος: e, U

έναρξη

$\Delta := \Delta^0;\ \pi := \pi^0;\ x := 0$ *Threshold* $:= \Delta$

ScalingPhase :

άν *BasicSolution*$(A(\Delta))$ *είναι βέλτιστη* **τότε** τερματισμός

εφόσον (π, x) *δεν είναι* Δ*-βέλτιστη λύση* **κάνε**

αντικατέστησε τα (π, x) καλώντας την *PriceAndAugment*(π, x)

άν *καμία* Δ*-συνιστώσα δεν είναι* Δ*-γόνιμη* **και** $\Delta \leq$ *Threshold* **τότε**

κάλεσε την *MakeFertile*(π, x, Δ)

άλλως

$\Delta := \Delta/2$

για κάθε $j \in G$ *τέτοιο ώστε* $b_j(\pi, x) > \Delta$ **κάνε**

ελάττωσε το x_{ij} κατά Δ για κάποια $i \in B$

επιστροφή στο *ScalingPhase*

GetParameter(π, Δ). Η διαδικασία αυτή υπολογίζει την επόμενη τιμή Δ' του παράγοντα κλιμάκωσης. Αν $\Delta' > \Delta/n^2$ η διαδικασία θέτει την τιμή *Threshold* σε Δ/n^5 και επιστρέφει στην φάση Δ-κλιμάκωσης. Ο λόγος της παραμέτρου *Threshold* είναι για να εμποδίζει την *MakeFertile* να καλεστεί για τουλάχιστον $5 \log n$ φάσεις κλιμάκωσης. Η συνθήκη αυτή απαιτείται λόγω του λήμματος 11, με την οποία δείχνεται ότι θα προκύψει μία νέα άφθονη ακμή σε $O(\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης.

Στην περίπτωση που $\Delta' \leq \Delta/n^2$ η διαδικασία *MakeFertile* συνεχίζει την εκτέλεση της. Η δεύτερη υπορουτίνα που καλείται ονομάζεται *GetPrices*(π, Δ'). Με την υπορουτίνα αυτή καθορίζεται ένα διάνυσμα τιμών π' που είναι Δ'-εφικτό. Επίσης το διάνυσμα π' είναι και Δ'-γόνιμο και ισχύει:

$$-\Delta'/2n \leq s(\pi, H) \leq \Delta' \text{ για κάθε } H \in C$$

Η τρίτη υπορουτίνα λέγεται *GetAllocations*(π', Δ') και καθορίζει μία ανάθεση x' που είναι σχεδόν Δ'-εφικτή και οι αναθέσεις βρίσκονται αποκλειστικά πάνω σε άφθονες ακμές.

Έπειτα ο αλγόριθμος *StrongScaling* συνεχίζει την εκτέλεση της Δ'-φάσης κλιμάκωσης.

4.5.3 Παρουσίαση των διαδικασιών του αυστηρώς πολυωνυμικού αλγορίθμου

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν πιο αναλυτικά οι υπορουτίνες της διαδικασίας *MakeFertile*. Και οι δύο αυτές διαδικασίες βασίζονται στην διαδικασία *SpecialPrice*(π, H, t) όπου H είναι μία Δ-συνιστώσα, και $t \geq 0$. Η διαδικασία αυτή παράγει ένα εφικτό διάνυσμα τιμών $\hat{\pi}$ που εξαρτάται από την H συνιστώσα και την τιμή t. Στη διαδικασία αυτή το διάνυσμα τιμών π αυξάνεται μέχρι ένα από τα δύο γεγονότα:

1. $s(\hat{\pi}, H) = t$ ή
2. υπάρχει μία συνιστώσα $J \in C$, για την οποία: $s(\hat{\pi}, J) = -s(\hat{\pi}, H)/2n^2$

Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται παρακάτω.

Αλγόριθμος 5: SpecialPrice

είσοδος: π, H, t

έναρξη

$\pi' := \pi$

επέλεξε έναν κόμβο $u \in H \cap G$

εφόσον $s(\pi', H) > t$ **και** $s(\pi', J) > -s(\pi', H)/2n^2, \ \forall J \in C$ **κάνε**

υπολόγισε τους ενεργούς κόμβους $ActiveSet(\pi', \Delta, u)$

$\forall$ μη-ενεργό κόμβο $j \in G$, θέσε $\hat{\pi}_j = \pi'_j$

$\forall$ ενεργό κόμβο $j \in G$, θέσε $\hat{\pi}_j = q\pi'_j$,

όπου $q > 1$ είναι η ελάχιστη τιμή για την οποία:

1. μία καινούργια ακμή ισότητας εμφανίζεται ή
2. $s(\pi', H) > t$ ή
3. $s(\pi', J) > -s(\pi', H)/2n^2$ για κάποιο $J \in C$

θέσε $\pi' := \hat{\pi}$

Η διαδικασία *GetParameter* υπολογίζει την επόμενη τιμή του παράγοντα κλιμάκωσης. Για κάθε $H \in C$, με έναν τουλάχιστον κόμβο να ανήκει στο G, η διαδικασία καλεί την $SpecialPrice(\pi, H, 0)$ και υπολογίζει το διάνυσμα τιμών όπως και τον παράγοντα κλιμάκωσης που συμβολίζεται ως Δ_H. Στην περίπτωση που $H = \{i\}, i \in B$ ο παράγοντας κλιμάκωσης ισούται με $\Delta_H := e_i$. Έπειτα ο αλγόριθμος θέτει $\Delta' = \max\{\Delta_H : \ H \in C\}$. Ο πλήρης αλγόριθμος παρουσιάζεται παρακάτω.

Αλγόριθμος 6: GetParameter

είσοδος: π, H, t

έναρξη

για κάθε *συνιστώσα* $H \in C$ **κάνε**

άν $H = \{i\}$ **και** $i \in B$ **τότε**

$\Delta_H := e_i$

άλλως

$\hat{\pi} := SpecialPrice(\pi, H, 0)$

$\Delta_H := s(\hat{\pi}, H)$

$\Delta' = \max\{\Delta_H : \ H \in C\}$

Η υπορουτίνα *GetPrices* υπολογίζει το επόμενο διάνυσμα τιμών. Αρχικά υπολογίζει τις τιμές για κάθε συνιστώσα καλώντας την $SpecialPrice(\pi, H, \Delta'), \ \forall H \in C$ και έπειτα ορίζει ως π την μέγιστη τιμή ανά συνιστώσα του διανύσματος τιμών. Ο πλήρης αλγόριθμος έχει ως εξής:

Αλγόριθμος 7: GetPrices

είσοδος: π, Δ'

έναρξη

  για κάθε *συνιστώσα $H \in C$ που περιλαμβάνει ένα κόμβο του G* **κάνε**

    άν $s(\pi, H) \leq \Delta'$ **τότε**

      $\pi^H := \pi$

    άλλως

      $\pi^H := SpecialPrice(\pi, H, \Delta')$

  $\forall j \in G,\ \pi'_j := \max\{\pi^H_j :\ H \in C\}$

Όσον αφορά την διαδικασία GetAllocations, για κάθε Δ-συνιστώσα H με τουλάχιστον δύο κόμβους, ορίζουμε έναν κόμβο στο $H \cap B$ ως τη B-ρίζα του H, και έναν κόμβο στο $H \cap G$ ως τη G-ρίζα του H. Αν το H αποτελείται από έναν κόμβο k, τότε αυτός αποτελεί τη ρίζα.

Η διαδικασία καθορίζει την ανάθεση x', αρχικά αποκτώντας μία βασική εφικτή λύση για ένα πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους[[8]]. Στη διαδικασία αυτή ορίζεται ως d_k η προσφορά/ζήτηση του κόμβου k. Αν $i \in B$ τότε $d_i \geq 0$. Αν $j \in G$ τότε $d_j \leq 0$.

Αλγόριθμος 8: GetAllocations

είσοδος: π', Δ'

έναρξη

  για κάθε *συνιστώσα $H \in C$* **κάνε**

    άν *i είναι η B-ρίζα του H* **τότε**

      $d_i = \max\{0, e_H - \pi'_H\}$

    άν *j είναι η G-ρίζα του H* **τότε**

      $d_j = \min\{0, e_H - \pi'_H\}$

    άν *k δεν είναι η B-ρίζα ή η G-ρίζα του H* **τότε**

      $d_k = 0$

  επέλεξε την ανάθεση x' ως τη μοναδική λύση που ικανοποιεί
  τους περιορισμούς προσφοράς/ζήτησης και
  $x'_{ij} = 0$ για όλες τις μη-άφθονες ακμές (i, j)

Το λήμμα που ακολουθεί αφορά ιδιότητες των μεταβλητών Δ' και π' που χρειάζονται για την διαδικασία *GetAllocation*. Ως Δ_H και π^H αναφέρεται ο παράγοντας κλιμάκωσης και οι τιμές που υπολογίζονται στις διαδικασίες *GetParameter* και *GetPrices*.

Λήμμα 10. *Έστω ότι Δ' και π' είναι οι έξοδοι των διαδικασιών GetParameter και GetPrices αντίστοιχα. Τότε ισχύουν οι προτάσεις που ακολουθούν:*

1. *Για κάθε $H \in C$, $s(\pi', H) \geq -\Delta'/n^2$.*
2. *Αν $H \in C$ και $H = \{i\}$ και $i \in B$, τότε $e_i \leq \Delta'$.*

3. *Για κάθε* $H \in C$, $s(\pi^H, H) = \min\{s(\pi', H), \Delta'\}$.

4. *Υπάρχει μία συνιστώσα* $H \in C$, *τέτοια ώστε* $\pi^H = \pi'$ *και* $s(\pi', H) = \Delta'$.

5. *Είτε υπάρχει ένας κόμβος* $i \in B$ *με* $e_i = \Delta'$, *είτε υπάρχει συνιστώσα* $J \in C$ *με* $s(\pi', J) = -\Delta'/n^2$.

6. *Αν* $s(\pi, J) < 0$, *τότε υπάρχει* $H \in C$ *με* $s(\pi', H) = \Delta'$ *και* $J \subseteq ActiveSet(\pi', H)$.

4.5.4 Ανάλυση πολυπλοκότητας του ισχυρώς πολυωνυμικού αλγορίθμου

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιαστούν τα λήμματα με τα οποία θα προσδιορισθεί η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου *StrongScaling*. Αρχικά παρουσιάζεται το λήμμα με το οποίο καθορίζονται οι απαιτούμενες εκτελέσεις φάσεων κλιμάκωσης μέχρι την εμφάνιση μίας νέας άφθονης ακμής.

Λήμμα 11. *Έστω ότι ο αλγόριθμος StrongScaling ξεκινάει με αρχική λύση* (π, x) *και παράγοντα κλιμάκωσης* Δ. *Εάν* Δ' *η παράμετρος που προκύπτει από την GetParameter και* $\Delta' > \Delta/n^2$, *τότε θα υπάρξει μία νέα άφθονη ακμή σε* $O(\log n)$ *φάσεις κλιμάκωσης.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το λήμμα 10, μπορεί να επιλεχθεί μία συνιστώσα H τέτοια ώστε $s(\pi^H, H) = \Delta'$. Επίσης θα υπάρχει συνιστώσα J με $s(\pi^H, J) = -\Delta_H/n^2$. Επειδή $\Delta' > \Delta/n^2$, ο αλγόριθμος *StrongScaling* ακολούθησε την φάση $\Delta/2$-κλιμάκωσης. Έστω ότι $\hat{\Delta} < \Delta'/n^2$ και έστω ότι $(\hat{\pi}, \hat{x})$ είναι μία εφικτή λύση στο τέλος της φάσης $\hat{\Delta}$ κλιμάκωσης. Θα δειχθεί ότι η λύση $(\hat{\pi}, \hat{x})$ είναι $\hat{\Delta}$-γόνιμη και θα υπάρξει μία νέα άφθονη ακμή μέσα σε $O(\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη, έστω ότι $\hat{\pi}_H \leq \pi^H_H$. Τότε $s(\hat{\pi}, H) \geq \Delta' \geq n^2\hat{\Delta}$ και επομένως υπάρχει μία άφθονη ακμή εξερχόμενη της συνιστώσας H. Στην δεύτερη περίπτωση $\hat{\pi}_H > \pi^H_H$. Τότε $s(\hat{\pi}, J) \leq s(\pi^H, J) = -\Delta'/n^2 < -\hat{\Delta}/n^4$ και επομένως η συνιστώσα J είναι $\hat{\Delta}$-γόνιμη και θα υπάρξει μία νέα άφθονη ακμή μέσα σε $O(\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης. □

Παρακάτω παραθέτουμε τις ιδιότητες των λύσεων (π', x') που προκύπτουν από την κλήση της *MakeFertile*.

Λήμμα 12. *Έστω ότι* Δ' *και* (π', x') *είναι η παράμετρος και η λύση που δημιουργείται έπειτα από την κλήση της MakeFertile. Έστω επίσης ότι* $\Delta' \leq \Delta/n^2$. *Τότε οι επακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς:*

- (π', x') *είναι* Δ'*-γόνιμη.*
- $c_i(x') \leq \Delta'$ *για κάθε* $i \in B$.
- $-\Delta'/n^2 \leq b_j(\pi', x') \leq 0$ *για κάθε* $j \in G$.
- *Αν* $(i, j) \in A(\Delta)$, *τότε* $x'_{ij} > 2n\Delta'$.
- *Αν* $\Delta'' < \Delta/3n^2$, *τότε η λύση στην φάση* Δ''*-κλιμάκωσης είναι* Δ''*-εφικτή. Επίσης μέσα σε* $O(\log n)$ *φάσεις κλιμάκωσης θα υπάρξει νέα άφθονη ακμή.*

Συνοψίζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει το θεώρημα χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου.

Θεώρημα 11. *Ο αλγόριθμος StrongScaling βρίσκει μία βέλτιστη λύση* (π^*, x^*) *σε* $O(n \log n)$ *φάσεις κλιμάκωσης. Καλεί την διαδικασία MakeFertile το πολύ n φορές, και κάθε κλήση της κοστίζει* $O(n(m + n \log n))$. *Επίσης καλεί την PriceAndAugment για κάθε φάση κλιμάκωσης* $O(n)$ *φορές. Συνολικά εκτελείται σε* $O((n^2 \log n)(m + n \log n))$ *χρόνο.*

Απόδειξη. Όταν ο αλγόριθμος έχει βρει όλες τις άφθονες ακμές, μπορεί να υπολογίσει τη βέλτιστη λύση. Καθότι μία καινούργια ακμή βρίσκεται σε το πολύ $O(\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης, ο αλγόριθμος θα τερματίσει με μία βέλτιστη λύση.

Ο αλγόριθμος καλεί την διαδικασία *MakeFertile* το πολύ n φορές καθώς κάθε κλήση της οδηγεί σε νέα άφθονη ακμή. Κάθε κλήση της *MakeFertile* χρειάζεται $O(n(m + n \log n))$ χρόνο εκτέλεσης. Υπάρχουν το πολύ $O(\log n)$ φάσεις κλιμάκωσης ανάμεσα σε κάθε κλήση της *MakeFertile* και κάθε φάση κλιμάκωσης απαιτεί χρόνο $O(n(m + n \log n))$. Επομένως ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O((n^2 \log n)(m + n \log n))$. $\square$

5. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΓΟΡΑ ARROW-DEBREU

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθεί η δημοσίευση των Duan, Garg και Mehlhorn [9]. Στην αγορά Arrow-Debreu εισέρχονται n πράκτορες, ο καθένας έχοντας μία αρχική προικοδότηση διαιρετέων αγαθών. Κάθε πράκτορας χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση χρησιμότητας συναρτήσει των αγαθών. Η αγορά τερματίζει σε ένα σύνολο τιμών όταν κάθε πράκτορας ξοδεύει ολόκληρη την αγοραστική δύναμη που αποκτά, πουλώντας τα αγαθά που διέθετε όταν εισήλθε στην αγορά, για να αποκτήσει ένα συνδυασμό αγαθών που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας του, και όλα τα αγαθά πωλούνται πλήρως.

Στην παρούσα δημοσίευση αναλύεται η γραμμική αγορά Arrow-Debreu. Στην αγορά αυτή όλοι οι πράκτορες διαθέτουν γραμμικές συναρτήσεις χρησιμότητας της μορφής:

$$U(x) = u_1 x_1 + \ldots + u_j x_j + \ldots u_n x_n$$

όπου $u_j \leq U_{max}$ η χρησιμότητα του αγαθού j και x_j η ποσότητα του αγαθού που έχει αποκτήσει ο πράκτορας. Σε αυτές τις συνθήκες θα παρουσιαστεί ένας συνδυαστικός αλγόριθμος χρονικής πολυπλοκότητας $O(n^7 \log^3(nU_{max}))$, ο οποίος παρουσιάζει μία βελτίωση της τάξης του n^3 από τον αλγόριθμο των Duan και Mehlhorn [10].

Φορμαλιστικά το μοντέλο έχει ως εξής. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρείται ότι ο αριθμός των αγαθών ισούται με τον αριθμό των πρακτόρων και ότι ο i-στος πράκτορας διαθέτει το i-στο αγαθό εξ ολοκλήρου. Επίσης υπάρχει συνολικά μία μονάδα αγαθού. Ως $u_{ij} \geq 0$ ορίζεται η χρησιμότητα που απολαμβάνει ο πράκτορας i αν διαθέτει ολόκληρο το αγαθό j. Όπως αναφέρθηκε ήδη, θεωρείται ότι οι τιμές u_{ij} είναι φραγμένες από την τιμή U_{max}. Στην συνέχεια υιοθετούνται κάποιες συνηθισμένες παραδοχές. Μία από αυτές είναι ότι κάθε πράκτορας επιθυμεί τουλάχιστον ένα αγαθό, δηλαδή $\forall i : \max_j u_{ij} > 0$. Επόμενη παραδοχή είναι ότι κάθε αγαθό είναι επιθυμητό από τουλάχιστον έναν αγοραστή, δηλαδή $\forall j : \max_i u_{ij} > 0$. Μία μη συνηθισμένη παραδοχή είναι ότι για κάθε γνήσιο υποσύνολο πρακτόρων P, υπάρχει $i \in P$ και $j \notin P$ έτσι ώστε $u_{ij} > 0$. Τελευταία παραδοχή είναι ότι όλοι οι πράκτορες δρουν λογικά και ξοδεύουν όλα τα λεφτά για την απόκτηση αγαθών που προσφέρουν μέγιστη χρησιμότητα ανά χρηματική μονάδα, δηλαδή αν $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_j, \ldots, \pi_n)$ το διάνυσμα τιμών, ο πράκτορας i προτίθεται να αποκτήσει μόνο τα αγαθά j για τα οποία:

$$\frac{u_{ij}}{\pi_j} = \max_l \frac{u_{il}}{\pi_l}$$

Πάνω στο μοντέλο που περιγράφηκε μια κατάσταση ισορροπίας είναι ένα διάνυσμα τιμών π και οι αναθέσεις αγαθών $x_{ij} \geq 0$ τέτοια ώστε:

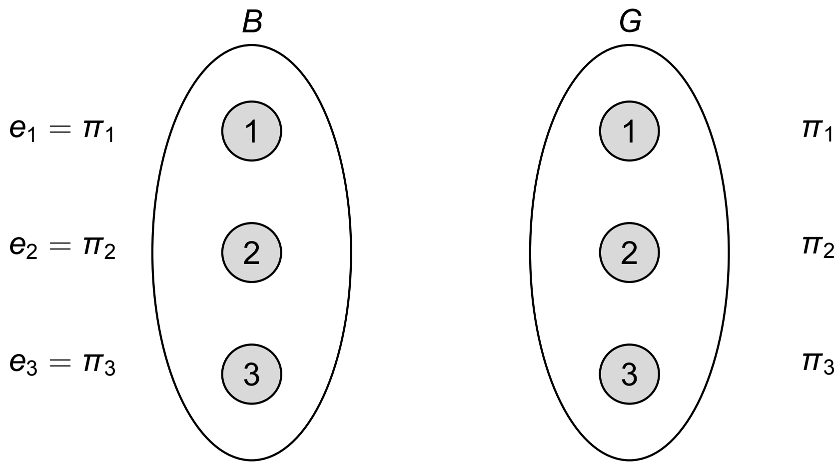
- Όλα τα αγαθά μοιράζονται πλήρως: $\sum_i x_{ij} = 1$ για όλα τα αγαθά j.
- Όλα τα λεφτά ξοδεύονται: $\pi_i = \sum_j x_{ij}\pi_j$ για κάθε πράκτορα i.

- Μόνο τα αγαθά που δίνουν μέγιστη χρησιμότητα ανά χρηματική μονάδα για κάθε πράκτορα αγοράζονται:

$$\forall i, j: \; x_{ij} > 0 \Rightarrow \frac{u_{ij}}{\pi_j} = \alpha_i = \max_l \frac{u_{il}}{\pi_l}$$

5.1.1 Περιγραφή μοντέλου

Για την περιγραφή του μοντέλου είναι χρήσιμο κάθε πράκτορα να αναπαρασταθεί δύο φορές. Η πρώτη με την ιδιότητα του ως αγοραστής και η δεύτερη με την ιδιότητα του πωλητή (ιδιοκτήτη) ενός αγαθού. Για το λόγο αυτό ορίζονται δύο σύνολα, το σύνολο των αγοραστών $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και το σύνολο των αγαθών $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ (βλ. Σχήμα 11). Κατά αυτό τον τρόπο αν η τιμή του αγαθού g_i είναι π_i τότε ο αγοραστής b_i θα διαθέτει π_i χρηματικές μονάδες για να ξοδέψει.

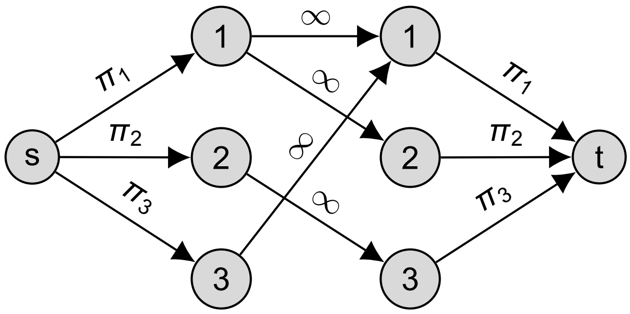


Σχήμα 11: Παρουσίαση των πρακτόρων ως αγοραστών και ως πωλητών

Το γράφημα χρησιμότητας (utility graph) είναι το διμερές γράφημα με σύνολο κόμβων το σύνολο $B \cup G$, όπου b_i και g_j ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν $u_{ij} > 0$. Κάθε κύκλος D στο γράφημα αυτό θα είναι άρτιου μήκους και οι ακμές μπορούν να χρωματιστούν με ένα από δύο χρώματα έτσι ώστε οι γειτονικές ακμές ενός κύκλου να έχουν διαφορετικό χρώμα. Έστω D_0 και D_1 τα σύνολα των ακμών ανάλογα με τον χρωματισμό τους σε ένα κύκλο. Θα ορίζεται ως (D_0, D_1) ο 2-διαμερισμός (2-partition) ενός κύκλου D. Ένα στιγμιότυπο (instance) λέγεται εκφυλισμένο (degenerate) αν υπάρχει κύκλος D με 2-διαμερισμό (D_0, D_1) στο γράφημα ισότητας τέτοιος ώστε:

$$\prod_{e \in D_0} u_e = \prod_{e \in D_1} u_e$$

Ώς γράφημα ισότητας G_π (equality graph), για ένα διάνυσμα τιμών π, ορίζεται το κατευθυνόμενο διμερές γράφημα $(B \cup G, E_\pi)$, όπου E_π είναι το σύνολο των ακμών (b_i, g_j) για τις οποίες ισχύει $u_{ij}/\pi_j = \alpha_i$. Άξιο αναφοράς είναι ότι για μη εκφυλισμένα στιγμιότυπα το γράφημα ισότητας είναι ένα δάσος (forest).



Σχήμα 12: Παράδειγμα δικτύου ισότητας

Για ένα δεδομένο διάνυσμα τιμών $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ το δίκτυο ισότητας (equality network) N_π, είναι ένα δίκτυο ροής (flow network) με σύνολο κόμβων το $s, t \cup B \cup G$, όπου s είναι ο κόμβος πηγή (source node) και t είναι ο κόμβος καταβόθρα (sink node). Το γράφημα αυτό έχει ως ακμές:

1. Μία ακμή (s, b_i) με χωρητικότητα π_i για κάθε $b_i \in B$.
2. Μία ακμή (g_j, t) με χωρητικότητα π_j για κάθε $g_j \in G$.
3. Μία ακμή (b_i, g_j) με άπειρη χωρητικότητα όταν ισχύει $u_{ij}/\pi_j = \alpha_i$, δηλαδή το σύνολο ακμών E_π.

Στόχος είναι να βρεθεί ένα θετικό διάνυσμα τιμών π τέτοιο ώστε να υπάρχει μία ροή για την οποία όλες οι ακμές από το κόμβο s και όλες οι ακμές που καταλήγουν στον κόμβο t να είναι κορεσμένες (saturated), δηλαδή να διέρχεται ροή όσο και η χωρητικότητά τους. Για μια τέτοια ροή, $(s, B \cup G \cup t)$ και $(s \cup B \cup G, t)$ αποτελούν ελάχιστες τομές (minimum cuts). Όταν ισχύει κάτι τέτοιο, όλα τα αγαθά πωλούνται και όλα τα αγαθά που κερδίσανε οι πράκτορες ξοδεύονται σε αγαθά με μέγιστη χρησιμότητα ανά χρηματική μονάδα.

Σημαντικό ρόλο στον αλγόριθμο παίζει η γειτονιά ενός συνόλου αγοραστών. Ο ορισμός παρατίθεται παρακάτω.

Ορισμός 21 (γειτονιά). *Για ένα σύνολο S αγοραστών ως γειτονιά (neighborhood) $\Gamma(S)$ ορίζεται το σύνολο $\Gamma(S) = \{g \in G | (b, g) \in E_\pi$ για κάποιο $b \in S\}$.*

Επίσης μία σημαντική έννοια είναι αυτή του πλεονάσματος.

Ορισμός 22 (πλεόνασμα). *Δεδομένης μιας ροής f, ορίζεται το πλεόνασμα $r(b_i)$ ενός αγοραστή b_i ως:*

$$c(b_i) = p_i - \sum_j f_{ij}$$

όπου f_{ij} είναι η ροή πάνω στην ακμή (b_i, g_j). Ομοίως ως πλεόνασμα ενός αγαθού g_j ορίζεται:

$$c(g_j) = p_j - \sum_i f_{ij}$$

Το διάνυσμα πλεονάσματος ορίζεται ως $c = (c(b_1), c(b_2), \ldots, c(b_n))$ και το συνολικό πλεόνασμα ως $|c| = \sum_i c(b_i) = \sum_j c(g_j)$, καθώς η συνολική χωρητικότητα από τον κόμβο s και προς τον κόμβο t είναι ίση με $\sum_i p_i$.

Συμπληρωματικά για ένα σύνολο S αγοραστών το ελάχιστο (minimal) πλεόνασμα ορίζεται ως $c_{min}(S) = \min\{c(b)|b \in S\}$ και ως μέγιστο (maximal) $c_{max}(S) = \max\{c(b)|b \in S\}$. Για το κενό σύνολο έχουμε $c_{max}(\emptyset) = 0$. Τέλος ως εκροή (outflow) ορίζεται $outflow(b_i) = \sum_j f_{ij}$.

Ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στην εύρεση μίας ισορροπημένης ροής. Ο ορισμός παρατίθεται.

Ορισμός 23 (ισορροπημένη ροή). *Μία μέγιστη ροή είναι ισορροπημένη (balanced) αν ελαχιστοποιεί την 2-νόρμα του διανύσματος πλεονάσματος των αγοραστών:*

$$||c|| = (c(b_1)^2 + c(b_2)^2 + \ldots + c(b_n)^2)^{1/2}$$

Το παρακάτω λήμμα αναφέρεται στην ύπαρξη και εύρεση μίας ισορροπημένης ροής.

Λήμμα 13. *Στο δίκτυο ισότητας υπάρχουν ισορροπημένες ροές και μπορούν να υπολογιστούν με n υπολογισμούς μέγιστης ροής. Αν f είναι μία ισορροπημένη ροή, οι αγοραστές b_i και b_j έχουν ακμές ισότητας στο ίδιο αγαθό g και υπάρχει θετική ροή από το b_i στο g, τότε το πλεόνασμα του b_j δεν είναι μεγαλύτερο από το πλεόνασμα του b_i. Επίσης έστω f_0 μία μέγιστη ροή και G_0 τα αγαθά που πωλούνται πλήρως με τη ροή f_0. Τότε υπάρχει μία ισορροπημένη ροή για την οποία όλα τα αγαθά στο G_0 πωλούνται πλήρως.*

Μία σημαντική διαπίστωση είναι ότι για όλα τα μη εκφυλισμένα προβλήματα της αγοράς, το γράφημα ισότητας είναι ένα δάσος για κάθε διάνυσμα τιμών.

Λήμμα 14. *Έστω ένα κύκλος D στο γράφημα ισότητας. Αν $D \subseteq E_\pi$ για κάποιο διάνυσμα τιμών π, το σύνολο των συναρτήσεων χρησιμότητας είναι εκφυλισμένο.*

5.1.2 Παρουσίαση του αλγορίθμου

Συνοπτικά ο αλγόριθμος ξεκινά με όλες τις τιμές π_i να ισούνται με τη μονάδα. Πάνω σε αυτό το δίκτυο ισότητας N_π προσδιορίζεται μία ισορροπημένη ροή f. Ο αλγόριθμος λειτουργεί σε φάσεις. Σε κάθε φάση προσδιορίζεται ένα σύνολο αγοραστών S με πλεόνασμα, κατά τρόπο που θα εξηγηθεί μετέπειτα, και το σύνολο των αγαθών $\Gamma(S)$ τα οποία είναι συνδεδεμένα με τους αγοραστές. Έπειτα οι τιμές των αγαθών αυξάνονται κατά ένα κοινό παράγοντα $x > 1$. Έστω π' το διάνυσμα των τιμών που προκύπτει και f' η ροή. Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση μίας ισορροπημένης ροής f' για την οποία θα ισχύει ότι τα αγαθά που είχαν πωληθεί πλήρως με ροή f' θα εξακολουθούν να πωλούνται πλήρως και με ροή f'. Θέτουμε $\pi = \pi'$ και $f = f'$ και επαναλαμβάνουμε. Όταν το συνολικό πλεόνασμα γίνει λιγότερο από $\varepsilon = 1/(8n^{4n}U^{3n})$, τερματίζουμε τις επαναλήψεις και υπολογίζονται οι τιμές της ισορροπίας από το τρέχοντα διάνυσμα π και τη τρέχουσα ροή f.

Πιο αναλυτικά για την κάθε φάση, πρώτα θα εξηγηθεί η επιλογή του συνόλου των αγοραστών S. Η επιλογή αυτή είναι σημαντική για την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου επηρεάζοντας τον συνολικό αριθμό των φάσεων. Για ένα φράγμα c_0 του πλεονάσματος, έστω $S(c_0) = \{b \in B|c(b) \geq c_0\}$ το σύνολο των αγοραστών με πλεόνασμα μεγαλύτερο του c_0. Η επιλογή της τιμής c_0 έχει ως εξής. Αρχικά διατάσσονται οι αγοραστές κατά φθίνουσα σειρά του πλεονάσματος τους $c(b_1) \geq c(b_2) \geq \cdots \geq c(b_{n-1}) \geq c(b_n)$. Έστω ελάχιστο $\ell \geq 1$ τέτοιο ώστε $outflow(b_\ell) = 0$ και $g_j \notin \Gamma(S)$ για κάθε b_j με $c(b_\ell) > c(b_j) \geq c(b_\ell)/(1+1/n)$, όπου $S = S(c(b_\ell))$. Σε περίπτωση που ένα τέτοιο ℓ δεν υπάρχει, θέτουμε $\ell = n$ και $S = S(c(b_n))$, δηλαδή επιλέγεται το σύνολο όλων των αγοραστών. Τέλος τίθεται $c_0 = c(b_\ell)$.

Λήμμα 15. $c(b_\ell) > 0$

Για την εύρεση του δείκτη ℓ, πραγματοποιώντας μία σάρωση των αγοραστών κατά φθίνον πλεόνασμα και κάνοντας τους απαραίτητους ελέγχους μπορεί να πραγματοποιηθεί σε χρόνο $O(n^2)$. Αρχικά θέτουμε $\ell = 1$ και $\Gamma = \Gamma(b_1)$. Αυξάνεται η τιμή ℓ κατά μία μονάδα όσο $\ell < n$ και $c(b_{\ell+1}) = c(b_\ell)$. Κάθε φορά που η τιμή ℓ αυξάνεται ενώνουμε το σύνολο $\Gamma(b_\ell)$ στο σύνολο Γ (το σύνολο Γ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα διάνυσμα bit). Αν ο δείκτης ℓ φτάσει στην τιμή n τότε επιστρέφεται ως η επιθυμητή τιμή του ℓ. Σε αντίθετη περίπτωση κάνουμε το εξής για $j = \ell+1, \ell+2, \ldots$: αν η τιμή j φτάσει τη τιμή $n+1$ ή $c(b_j) < c(b_\ell)/(1+1/n)$ επιστρέφεται η τρέχουσα τιμή του ℓ. Αν $outflow(b_j) \neq 0$ ή $g_j \in \Gamma$ τότε προσθέτουμε το $\Gamma(b_{\ell+1}, \ldots, b_j)$ στο Γ, θέτεται $\ell = j$ και επαναλαμβάνουμε ξανά για $j = \ell + 1, \ldots$

Λήμμα 16. *Ο δείκτης ℓ μπορεί να ευρεθεί σε χρονική πολυπλοκότητα $O(n^2)$.*

Αλγόριθμος 9: GetIndexEll

```
έναρξη
    ℓ := 1
    Γ := Γ(b_1)
    βρόχος
        εφόσον ℓ < n και c(b_{ℓ+1}) κάνε
            ℓ := ℓ + 1
            Γ := Γ ∪ Γ(b_ℓ)
        άν ℓ = n τότε επέστρεψε το ℓ
        για j := ℓ + 1; ; j := j + 1 κάνε
            άν j = n + 1 ή c(b_j) < c(b_ℓ)/(1 + 1/n) τότε επέστρεψε το ℓ
            άν outflow(b_j) ≠ 0 ή g_j ∈ Γ τότε
                Γ := Γ ∪ Γ({b_{l+1}, ..., b_j})
                ℓ := j
                συνέχεια
```

Λήμμα 17. *Δεν υπάρχουν ακμές στο γράφημα E_π από το σύνολο S στο $G \setminus \Gamma(S)$, και οι ακμές από το $\bar{S}$ στο $\Gamma(S)$ δεν φέρουν ροή.*

Απόδειξη. Το πρώτο σκέλος είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του συνόλου $\Gamma(S)$. Για το δεύτερο μέρος, έστω ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε υπάρχει κάποιος αγοραστής $b_j \notin S$ και αγαθό $g_k \in \Gamma(S)$, τέτοια ώστε να υπάρχει θετική ροή στην ακμή (b_j, g_k). Επειδή $g_k \in \Gamma(S)$, εξ ορισμού θα υπάρχει αγοραστής $b_i \in S$ τέτοιος ώστε $(b_i, g_k) \in E_\pi$. Από το λήμμα 13 περί ισορροπημένων ροών έπεται ότι $c(b_j) \geq c(b_i)$ και επομένως $b_j \in S$. □

Εφόσον προσδιοριστεί το σύνολο S, αυξάνονται οι τιμές των αγαθών στο $\Gamma(S)$ και η ροή στις ακμές που προσπίπτουν στα αγαθά αυτά κατά έναν κοινό παράγοντα $x > 1$. Επίσης αυξάνεται η ροή από το κόμβο s στους αγοραστές του S έτσι ώστε η διατήρηση της ροής να ισχύει. Κατά αυτό το τρόπο προκύπτει ένα νέο διάνυσμα τιμών p' και μία νέα ροή f'. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα πλεονάσματα των αγαθών στο $\Gamma(S)$ παραμένει μηδενικό. Συνοπτικά:

$$\pi'_j = \begin{cases} x \cdot \pi_j & \text{αν } g_j \in \Gamma(S) \\ \pi_j & \text{αν } g_j \notin \Gamma(S) \end{cases} \tag{22}$$

$$f'_{ij} = \begin{cases} x \cdot f_{ij} & \text{αν } g_j \in \Gamma(S) \\ f_{ij} & \text{αν } g_j \notin \Gamma(S) \end{cases} \tag{23}$$

Οι αλλαγές των ροών στις γειτονικές ακμές των κόμβων s και t επακολουθούν από την διατήρηση της ροής. Εφόσον δεν υπάρχουν ακμές από το S στο $G \setminus \Gamma(S)$ και οι ακμές από το $\bar{S}$ στο $\Gamma(S)$ δεν φέρουν ροή, μία ισοδύναμη διατύπωση για τις νέες ροές είναι $f'_{ij} = x \cdot f_{ij}$ αν $b_i \in S$ και $f'_{ij} = f_{ij}$ αν $b_i \in \bar{S}$.

Οι αλλαγές στις τιμές και στις ροές επηρεάζουν τα πλεονάσματα των αγοραστών, οδηγώντας στην αύξηση κάποιων και στη μείωση κάποιων άλλων. Οι αγοραστές κατά αυτόν το τρόπο μπορούν να διαχωριστούν σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με το εάν ο αγοραστής b ανήκει στο σύνολο S ή όχι και ανάλογα με το εάν το αγαθό που ανήκει στον αγοραστή b ανήκει στο σύνολο $\Gamma(S)$ ή όχι. Η επίδραση των αλλαγών πάνω στα πλεονάσματα δίνεται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 18. *Δεδομένης μίας μέγιστης ροής f στο δίκτυο ισότητας N_π, ένα σύνολο S αγοραστών τέτοιο ώστε όλα τα αγαθά στο $\Gamma(S)$ να πωλούνται πλήρως και να μην υπάρχει ροή από το $\bar{S}$ στο $\Gamma(S)$, και μία αρκούντως μικρή παράμετρος $x > 1$, η ροή f' που προκύπτει από την (23) είναι μία εφικτή ροή πάνω στο δίκτυο ισότητας N_π με βάση τις τιμές (22). Το πλεόνασμα κάθε αγαθού παραμένει αμετάβλητο και τα πλεονάσματα των αγοραστών γίνονται:*

$$c'(b_i) = \begin{cases} x \cdot c(b_i) & \begin{array}{r} \text{αν } b_i \in S,\ g_i \in \Gamma(S) \\ \text{(αγοραστής τύπου 1)} \end{array} \\ (1-x)\cdot \pi_i + x \cdot c(b_i) & \begin{array}{r} \text{αν } b_i \in S,\ g_i \notin \Gamma(S) \\ \text{(αγοραστής τύπου 2)} \end{array} \\ (x-1)\cdot \pi_i + x \cdot c(b_i) & \begin{array}{r} \text{αν } b_i \notin S,\ g_i \in \Gamma(S) \\ \text{(αγοραστής τύπου 3)} \end{array} \\ c(b_i) & \begin{array}{r} \text{αν } b_i \notin S,\ g_i \notin \Gamma(S) \\ \text{(αγοραστής τύπου 4)} \end{array} \end{cases}$$

Εκτός από τον παραπάνω διαχωρισμό των αγοραστών σε τέσσερις τύπους, για την βελτίωση της χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου, οι αγοραστές τύπου 4 χωρίζονται σε δύο επιπλέον τύπους. Ένας αγοραστής τύπου 4 είναι ένας αγοραστής τύπου 4a αν το πλεόνασμα του είναι τουλάχιστον $c_{min}(S)/(1+1/n)$. Ειδάλλως αποτελεί αγοραστή τύπου 4b.

Λήμμα 19. *$c(b_i) < c_{min}(S)/(1+1/n)$ για κάθε αγοραστή b_i τύπου 3 και 4b. Για έναν αγοραστή b_i τύπου 4a και μία ακμή $(b_i, g_j) \in E_\pi,\ c_j \in \Gamma(S)$.*

Λήμμα 20. *Αν υπάρχει αγοραστής τύπου 3 τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας τύπου 1 αγοραστή.*

Το επόμενο βήμα αφορά τον υπολογισμό του παράγοντα x. Οι τιμές των αγαθών στο $\Gamma(S)$ και η ροή πάνω στις ακμές που προσπίπτουν σε αυτά αυξάνονται κατά ένα κοινό παράγοντα x μέχρι ένα από τα τέσσερα παρακάτω γεγονότα να συμβούν:

1. Μία καινούργια ακμή εισέρχεται στο γράφημα ισότητας
2. Το πλεόνασμα ενός τύπου 2 αγοραστή και ενός τύπου 3 ή 4b αγοραστή γίνονται ίσα
3. Το πλεόνασμα ενός αγοραστή τύπου 2 γίνεται μηδενικό
4. Ο παράγοντας x φτάνει μία μέγιστη τιμή x_{max}, όπου:

$$x_{max} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{Cn^3} & \text{αν υπάρχουν αγοραστές τύπου 3} \\ 1 + \frac{1}{Ckn^3} & \text{αν υπάρχουν k αγοραστές τύπου 1} \\ & \text{και δεν υπάρχουν αγοραστές τύπου 3} \end{cases}$$

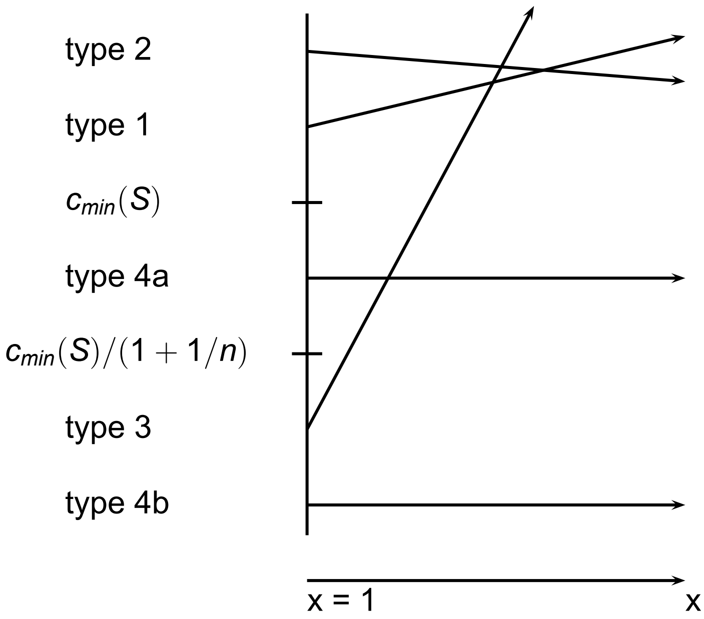
   και $C = 48e^2$.

Η αύξηση της τιμής των αγαθών στο $\Gamma(S)$ οδηγεί στο να γίνουν τα αγαθά στο $G \setminus \Gamma(S)$ πιο αρεστά στους αγοραστές του S. Επομένως μία ακμή από κάποιον αγοραστή στο S σε κάποιο αγαθό του $G \setminus \Gamma(S)$ μπορεί να εμφανιστεί. Αυτό το γεγονός θα συμβεί όταν $x = x_{eq}(S)$, όπου:

$$x_{eq}(S) = \min\{\frac{u_{ij}}{\pi_j} \cdot \frac{\pi_k}{u_{ik}} \mid b_i \in S,\ (b_i, g_j) \in E_\pi,\ g_k \notin \Gamma(S)\}$$

Όταν αυξηθούν οι τιμές των αγαθών στο $\Gamma(S)$ κατά ένα παράγοντα $x \leq x_{eq}(S)$, οι ακμές ισότητας στο $(S \times \Gamma(S) \cup (\bar{S} \times (G \setminus \Gamma(S))))$ θα παραμείνουν στο δίκτυο ισότητας. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το λήμμα (17) οι ακμές που φέρουν ροή θα παραμείνουν στο δίκτυο.

Με την αύξηση του παράγοντα x το πλεόνασμα των αγοραστών τύπου 1 και 3 αυξάνεται ενώ το πλεόνασμα των αγοραστών τύπου 2 μειώνεται και τέλος το πλεόνασμα των αγοραστών τύπου 4 μένει αμετάβλητο (βλ. Σχήμα (13)). Εφόσον το συνολικό πλεόνασμα παραμένει σταθερό (καθότι τα πλεονάσματα των αγαθών δεν επηρεάζονται από την αύξηση τιμών), η μείωση του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 2 ισούται με την αύξηση του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 1 και 3. Ορίζεται ως $x_{23}(S)$ ο ελάχιστος παράγοντας για τον οποίο τα πλεονάσματα ενός αγοραστή τύπου 2 και 3 γίνονται ίσα. Ομοίως ορίζεται ως $x_{24}(S)$ ο ελάχιστος παράγοντας για τον οποίο τα πλεονάσματα ενός αγορα-



Σχήμα 13: Η μεταβολή των πλεονασμάτων των διαφόρων τύπων αγοραστών συναρτήσει του x.

στή τύπου 2 και 4b γίνονται ίσα. Τέλος ορίζεται ώς $x_2(S)$ ο παράγοντας για τον οποίο το πλεόνασμα ενός αγοραστή τύπου 2 μηδενίζεται.

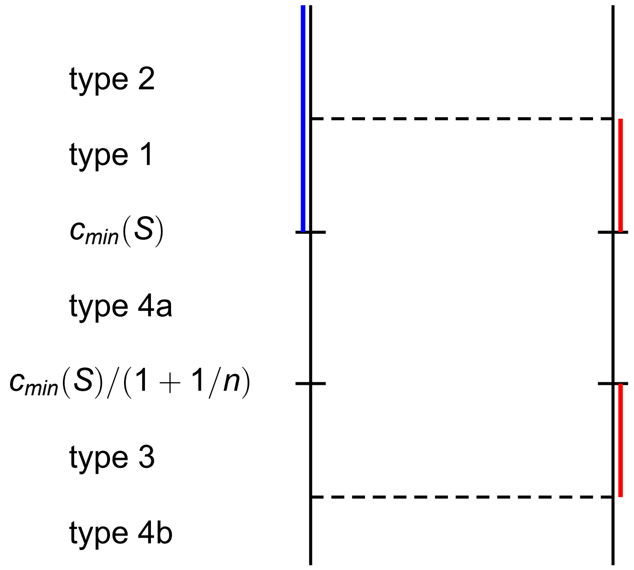
$$\begin{aligned}
x_{23}(S) = \min\{&\frac{\pi_i + \pi_j - c(b_j)}{\pi_i + \pi_j - c(b_i)} | \\
&b_i \text{ είναι τύπου 2 και } b_j \text{ είναι τύπου 3}\} \\
x_{24}(S) = \min\{&\frac{\pi_i - c(b_j)}{\pi_i - c(b_i)} | \\
&b_i \text{ είναι τύπου 2 και } b_j \text{ είναι τύπου 4b}\} \\
x_2(S) = \min\{&\frac{\pi_i}{\pi_i - c(b_i)} | \\
&b_i \text{ είναι τύπου 2 αγοραστής}\}
\end{aligned}$$

Λήμμα 21. *Για το σύνολο S και $x = \min\{x_{max}, x_{eq}(S), x_{23}(S), x_{24}(S), x_2(S)\}$, η ροή f' είναι μία εφικτή ροή στο $N_{\pi'}$.*

Η περιγραφή του αλγορίθμου έχει ολοκληρωθεί. Μία τελευταία σημαντική ιδιότητα του αλγορίθμου είναι ότι τα αγαθά με μη μηδενικό πλεόνασμα έχουν τιμή ίση με τη μονάδα.

Λήμμα 22. *Όταν το πλεόνασμα ενός αγαθού γίνει μηδέν, θα παραμείνει μηδέν. Όσο το πλεόνασμα ενός αγαθού είναι μη μηδενικό, η τιμή του θα παραμείνει ίση με τη μονάδα.*

Απόδειξη. Αρχικά όλα τα αγαθά έχουν τιμή ίση με τη μονάδα. Η αλλαγή των τιμών δεν επηρεάζει το πλεόνασμα κανενός αγαθού και μόνο αυξάνει τη τιμή των αγαθών που πωλούνται πλήρως. Σε μία ισορροπημένη ροή f', όλα τα αγαθά που πωλούνται πλήρως με ροή f, πωλούνται πλήρως και με τη ροή f'. □



Σχήμα 14: Το αριστερό τμήμα παρουσιάζει τους αγοραστές. Το σύνολο S αποτελείται από αγοραστές τύπου 1 και 2, και παρουσιάζεται με τη μπλε γραμμή. Το σύνολο Γ(S) παρουσιάζεται με την κόκκινη γραμμή. Τα αγαθά Γ(S) πωλούνται πλήρως στους αγοραστές του συνόλου S. Οι αγοραστές τύπου 4a δεν έχουν εξερχόμενη ροή και όλες οι ακμές ισότητας δίπλα σε αυτούς τελειώνουν στο Γ(S). Οι αγοραστές τύπου 3 και 4b δεν έχουν καθόλου ροή στο Γ(S).

Αλγόριθμος 10: Παρουσίαση αλγορίθμου

έναρξη

Θέσε $\pi := 1\ \forall i$ και θέσε f μία ισορροπημένη ροή στο N_π

εφόσον $|c(B)| \geq \varepsilon$ **κάνε**

Ταξινόμησε τους αγοραστές κατά φθίνουσα σειρά των πλεονασμάτων:$b_1, b_2, \ldots, b_n$

Βρες το μικρότερο $\ell \geq 1$ για το οποίο το $S = S(c(b_\ell))$ ικανοποιεί:

- $outflow(b_i) = 0$ και
- $g_i \notin \Gamma(S)$ για κάθε b_i με $c(b_\ell) > c(b_i) \geq c(b_\ell)/(1+1/n)$

και θέσε $\ell = n$ αν δεν υπάρχει τέτοιο ℓ

Θέσε $S = S(c(b_\ell))$

Θέσε $x = \min(x_{max}, x_{eq}, x_{23}, x_{24}, x_2)$

Ανανέωσε τις τιμές και τη ροή σύμφωνα με τις (22) και (23)

Θέσε f' τη νέα ροή και π' το νέο διάνυσμα τιμών

Υπολόγισε μία ισορροπημένη ροή f'' στο N_π με την ιδιότητα τα αγαθά που πωλούνται πλήρως με τη ροή f να πωλούνται πλήρως και με τη ροή f''

Θέσε $f := f''$ και $\pi := \pi'$

Υπολόγισε τις τιμές ισορροπίας από τα f και π που προέκυψαν

5.1.3 Ανάλυση πολυπλοκότητας

Στην υποενότητα αυτή θα μελετηθεί η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Αρχικά θα γίνει διαχωρισμός των φάσεων σε x_{max}-φάσεις και σε φάσεις εξισορρόπησης (balancing phases). Μία φάση είναι x_{max}-φάση αν $x = x_{max}$, διαφορετικά είναι φάση εξισορρόπησης. Για την ανάλυση των φάσεων θα χρησιμοποιηθούν δύο συναρτήσεις δυναμικού (potential functions), η πρώτη είναι το γινόμενο των τιμών $\Pi = \prod_i \pi_i$, ενώ τη δεύτερη αποτελεί η 2-νόρμα $\|c(B)\|$, όπου B το σύνολο των αγοραστών.

Αρχικά αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι τιμές είναι φραγμένες από $(nU_{max})^n$, όπως προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 23. *Όλες οι τιμές είναι φραγμένες από* $max(n, U_{max})^{n-1}$.

Το γεγονός αυτό οδηγεί στο φράγμα $(nU_{max})^{n^2}$ για το γινόμενο των παραγόντων x όλων των φάσεων, όπως προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 24. *Έστω μία φάση h και $x_h > 1$ ο παράγοντας κατά τον οποίο αυξάνονται οι τιμές των αγαθών του $\Gamma(S)$. Τότε:*

$$\prod_h x_h \leq (nU_{max})^{n^2}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\prod_h x_h &\leq \prod_j \left(\prod_{\pi_j \text{ που αυξάνεται στην φάση } h} x_h \right) \\ &\leq \prod_j (nU_{max}^n) \leq (nU_{max})^{n^2}\end{aligned}$$

□

Οι x_{max}-φάσεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη είναι αυτή που δεν περιλαμβάνει αγοραστή τύπου 3. Ο αριθμός τέτοιων x_{max}-φάσεων προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 25. *Ο αριθμός x_{max}-φάσεων που δεν περιλαμβάνουν αγοραστή τύπου 3 είναι* $O(n^4 \log(nU_{max}))$.

Απόδειξη. Έστω T ο αριθμός των φάσεων αυτών. Έστω μία τέτοια φάση η οποία περιλαμβάνει k αγοραστές τύπου 1. Τότε οι τιμές ακριβώς k αγαθών αυξάνονται κατά έναν παράγοντα $x_{max} = 1 + 1/(Ckn^2)$. Τότε το $\Pi = \prod_i \pi_i$ αυξάνεται κατά έναν παράγοντα:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{Ckn^2}\right)^k &= \exp\left(k \ln\left(1 + \frac{1}{Ckn^2}\right)\right) \\ &\geq \exp\left(k\frac{1}{2Ckn^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2Cn^2}\right)\end{aligned}$$

Εφόσον $\Pi \leq (nU_{max})^{n^2}$ έχουμε ότι το $\ln \Pi$ φράσσεται από τη τιμή $n^2 \log(nU_{max})$. Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned}T \cdot 1/(2Cn^2) &\leq n^2 \log(nU_{max}) \Rightarrow \\ T &\leq 2Cn^4 \log(nU_{max})\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το λήμμα. □

Η δεύτερη κατηγορία των x_{max}-φάσεων είναι αυτή που περιλαμβάνει αγοραστές τύπου 3. Ο αριθμός τέτοιων x_{max}-φάσεων προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 26. *Ο αριθμός των x_{max}-φάσεων με αγοραστές τύπου 3 είναι $O\left(n^4 \ln n\right)$.*

Απόδειξη. Έστω B_i το σύνολο των αγοραστών τύπου i για $i \leq 3$. Αρχικά θα δειχθεί ότι η συνολική αγοραστική δύναμη των αγοραστών τύπου 3 είναι το πολύ ίσο με τη συνολική αγοραστική δύναμη των αγοραστών τύπου 2, δηλαδή ότι:

$$\sum_{i \in B_3} \pi_i \leq \sum_{i \in B_2} \pi_i = \sum_{i \in B_3} \pi_i + \sum_{i \in B_1 \cup B_2} c(b_i)$$

Τα αγαθά που ανήκουν στους αγοραστές τύπου 1 και 3 αγοράζονται πλήρως από τους αγοραστές τύπου 1 και 2. Επομένως:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B_1 \cup B_3} \pi_i &= \sum_{i \in B_1 \cup B_3} inflow(g_i) \\ &= \sum_{i \in B_1 \cup B_2} outflow(b_i) \\ &= \sum_{i \in B_1 \cup B_2} (\pi_i - c(b_i)) \end{aligned}$$

Αφαιρώντας το $\sum_{i \in B_1} \pi_i$ από τα δύο μέλη προκύπτει ότι:

$$\sum_{i \in B_2} \pi_i = \sum_{i \in B_3} \pi_i + \sum_{i \in B_1 \cup B_2} c(b_i) \tag{24}$$

και η ανισότητα ισχύει καθότι τα πλεονάσματα $c(b_i)$ είναι μη αρνητικές ποσότητες.

Στο επόμενο βήμα αποδεικνύεται ότι $\sum_{i \in B_2} \pi_i \leq 2Cn^4$, όποτε $x \geq 1 + 1/(Cn^3)$. Η ροή κάθε τύπου 2 αγοραστή είναι $\pi_i - c(b_i)$ στην αρχή της φάσης. Η ροή αυτή κατά την ανανέωση των τιμών θα αυξηθεί κατά $(\pi_i - c(b_i))(Cn^3)$. Η αύξηση αυτή δεν μπορεί όμως να είναι μεγαλύτερη από το πλεόνασμα του και επομένως θα ισχύει $(\pi - c(b_i))/(Cn^3) \leq c(b_i)$ ή $\pi \leq (1 + Cn^3)c(b_i)$. Αθροίζοντας για τους αγοραστές τύπου δύο και παρατηρώντας ότι το πλεόνασμα αρχικά είναι το πολύ n και δεν αυξάνεται ποτέ, οδηγούμαστε:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B_2} \pi_i &\leq (1 + Cn^3) \sum_{i \in B_2} c(b_i) \\ &\leq n + Cn^4 \\ &\leq 2Cn^4 \end{aligned} \tag{25}$$

Τέλος, βάσει των δύο παραπάνω συμπερασμάτων θα αποδειχθεί ότι ο αριθμός των x_{max}-φάσεων με αγοραστές τύπου 3 είναι το πολύ $n + (Cn^4 + n)\ln(2Cn^4)$. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε θα υπάρχει αγοραστής b_i τέτοιος ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον $1 +$

$(Cn^3+1)\ln(2Cn^4)$ φάσεις κατά τις οποίες ο b_i θα είναι αγοραστής τύπου 3 και επομένως $x = 1 + 1/(Cn^3)$ για τις φάσεις αυτές. Σε κάθε τέτοια φάση λοιπόν η τιμή του αγοραστή b_i θα αυξάνεται κατά ένα παράγοντα $1 + 1/(Cn^3)$, και επομένως η τιμή π_i πριν την τελευταία φάση θα είναι τουλάχιστον

$$\begin{aligned}\pi_i &\geq \left(1 + 1/\left(Cn^3\right)\right)^{\left(Cn^3+1\right)\ln\left(Cn^4\right)}\\ &> e^{\ln\left(2Cn^4\right)} \Rightarrow\\ \pi_i &\geq 2Cn^4\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ανισότητα καταλήγουμε ότι το άθροισμα των τιμών των αγοραστών τύπου 3 θα είναι μεγαλύτερο από $2Cn^4$. Αφού όμως το άθροισμα των αγοραστών τύπου 3 είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τιμών των αγοραστών 2 (εξίσωση 24), αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των αγοραστών τύπου 2 είναι και αυτό μεγαλύτερο από $2Cn^4$. Όμως από την ανισότητα (25) καταλήγουμε σε αντίφαση. $\square$

Στην συνέχεια θα προσδιοριστεί ο αριθμός των φάσεων εξισορρόπησης. Η 2-νόρμα αποτελεί τη δεύτερη συνάρτηση δυναμικότητας. Με την προσαρμογή των τιμών και των ροών, το πλεόνασμα των αγοραστών τύπου 2 προσεγγίζει αυτό των αγοραστών τύπου 3. Παρακάτω θα παρουσιαστεί ένα λήμμα με το οποίο οριοθετείται η μείωση της 2-νόρμας του διανύσματος του πλεονάσματος. Με ένα δεύτερο λήμμα θα δειχθεί ότι κατά τη διάρκεια μίας x_{max}-φάσης η 2-νόρμα του διανύσματος πλεονάσματος αυξάνεται το πολύ κατά ένα παράγοντα $1 + O(1/n^3)$. Τέλος με ένα τρίτο λήμμα αποδεικνύεται ότι μία φάση εξισορρόπησης μειώνει τη 2-νόρμα του πλεονάσματος κατά ένα παράγοντα $1 - \Omega(1/n^3)$. Με τον συνδυασμό αυτών των λημμάτων προκύπτει το φράγμα $O(n^4 \log(nU_{max}))$ του αριθμού των φάσεων εξισορρόπησης.

Το κυρίως εργαλείο για την οριοθέτηση της μείωσης της 2-νόρμας του πλεονάσματος προκύπτει από το παρακάτω τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 27. *Έστω $c = (c_1, \ldots, c_n)$ και $c' = (c'_1, \ldots, c'_n)$ μη αρνητικά διανύσματα. Έστω $k \in [1, n]$ τέτοιο ώστε $c'_i \geq c'_j$ για $i \leq k < j$. Έστω επίσης ότι $\delta_i = c_i - c'_i \geq 0$ για $i \leq k$ και $\delta_j = c'_j - c_j \geq 0$ για $j > k$. Έστω $D = \min_{i \leq k} c_i - \max_{j>k} c_j$ και $\Delta = \sum_{i \leq k} \delta_i$. Αν $\Delta \geq \sum_{j>k} \delta_j$ τότε:*

$$\|c'\|^2 \leq \|c\|^2 - D\Delta$$

Με το παρακάτω λήμμα προσδιορίζεται η μέγιστη διαφορά ανάμεσα στα πλεονάσματα των αγοραστών τύπου S, όπως και κάποιες άλλες χρήσιμες ιδιότητες.

Λήμμα 28. *Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:*

1. *Το μέγιστο πλεόνασμα ενός αγοραστή είναι το μέγιστο πλεόνασμα ενός αγοραστή του συνόλου S, δηλαδή $c_{max}(B) = c_{max}(S)$.*
2. *Έστω $k = |\Gamma(S)|$. Τότε $c_{max}(S) \leq \min(e, (1 + 4k/n))c_{min}(S)$.*

3. *Το τετράγωνο της νόρμας του διανύσματος πλεονάσματος είναι φραγμένο από τη ποσότητα* $ne^2 c_{min}(S)^2$.

4. *Το μέγιστο πλεόνασμα από κάθε αγοραστή ή αγαθού είναι n.*

Για τις x_{max}-φάσεις με αγοραστές τύπου 3 έχουμε το παρακάτω λήμμα που φράσσει την αύξηση της 2-νόρμας του πλεονάσματος.

Λήμμα 29. *Σε μία* x_{max}*-φάση με αγοραστές τύπου 3, η 2-νόρμα του διανύσματος πλεονάσματος των αγοραστών αυξάνεται το πολύ κατά ένα παράγοντα* $1 + O(1/n^3)$. *Η συνολική αύξηση της 2-νόρμας του διανύσματος πλεονάσματος για όλες τις φάσεις* x_{max} *με αγοραστές τύπου 3 είναι* $n^{O(n)}$.

Για τις x_{max}-φάσεις χωρίς αγοραστές τύπου 3 αντίστοιχα προκύπτει το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 30. *Έστω μία* x_{max}*-φάση χωρίς αγοραστή τύπου 3. Τότε* $\|c'\| \leq (1 + O(1/n^3))\|c\|$. *Η συνολική αύξηση της 2-νόρμας του διανύσματος πλεονάσματος για όλες τις* x_{max}*-φάσεις χωρίς αγοραστές τύπου 3 είναι* $(nU_{max})^{O(n)}$.

Για τις φάσεις εξισορρόπησης το παρακάτω λήμμα προσδιορίζει τη μείωση της 2-νόρμας του πλεονάσματος.

Λήμμα 31. *Έστω* c'' *το πλεόνασμα που προκύπτει με βάση τη* f'. *Στις φάσεις εξισορρόπησης,*

$$\|c''\| \leq (1 - \Omega(\frac{1}{n^3}))\|c\|$$

Απόδειξη. Σε μία φάση εξισορρόπησης, αρχικά οι τιμές των αγαθών του $\Gamma(S)$ αυξάνονται και έπειτα οι ροές κατά έναν κοινό παράγοντα $x = \min(x_{eq}, x_{23}, x_{24}, x_2)$, ώστε να προκύψει μία καινούργια ροή f, και βάση αυτής κατασκευάζεται μία ισορροπημένη ροή f' στο δίκτυο N_π. Η 2-νόρμα της f' δεν είναι μεγαλύτερη από την 2-νόρμα της ροής f.

Στην αρχή της φάσης έχουμε:

$$\frac{c_{min}(S)}{1 + 1/n} \geq c_{max}(B_3 \cup B_{4b}) \Rightarrow$$

$$c_{min}(S) - c_{max}(B_3 \cup B_{4b}) \geq \frac{c_{min}(S)}{n + 1}$$

Η αλλαγή των τιμών και των ροών επηρεάζει τη διαφορά ανάμεσα στα παραπάνω πλεονάσματα. Προκύπτουν δύο περιπτώσεις αναλόγως αν η ροή f μειώνει στο μισό αυτή τη διαφορά ή όχι. Για συντόμευση παρακάτω θα συμβολίζεται $\mathrm{M} = C_{min}(S)$.

Η πρώτη περίπτωση επομένως είναι αυτή για την οποία:

$$c'_{min}(S) - c'_{max}(B_3 \cup B_{4b}) < \frac{c_{min}(S)}{2(n + 1)}$$

Η περίπτωση αυτή μπορεί να συμβεί για οποιαδήποτε περίπτωση της τιμής του παράγοντα x, δηλαδή είτε $x = x_{23}$, είτε $x = x_{24}$, είτε $x = x_2$, είτε τέλος $x = x_{eq}$. Αρχικά παρατηρείται ότι η συνολική μείωση του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 2 ισούται με τη συνολική αύξηση του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 1 και 3. Επίσης παρατηρείται ότι το πλεόνασμα των αγοραστών τύπου 2 δεν αυξάνεται, ενώ των αγοραστών τύπου 1 και 3 δεν μειώνεται. Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι η συνολική μείωση του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 2 προστιθέμενη από την συνολική αύξηση του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 3 είναι τουλάχιστον $c_{min}(S)/(2(n+1))$.

Το διάνυσμα του πλεονάσματος μπορεί να χωριστεί σε τρία υποδιανύσματα: το διάνυσμα c_1 του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 1, το διάνυσμα c_{23} των αγοραστών τύπου 2 και 3 και τέλος το διάνυσμα c_4 του πλεονάσματος των αγοραστών τύπου 4. Φυσικά η 2-νόρμα του τρίτου διανύσματος δεν μεταβάλλεται. Η 2-νόρμα του πρώτου διανύσματος αυξάνεται. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Εάν υπάρχουν αγοραστές τύπου 3, τότε $x \leq 1 + 1/(Cn^3)$ και επομένως:

$$\begin{aligned} \|c_1'\|^2 - \|c_1\|^2 &\leq ((1+\frac{1}{Cn^3})^2 - 1)n(eM^2) \\ &\leq \frac{3e^2M^2}{Cn^2} \end{aligned}$$

Στην δεύτερη περίπτωση όπου δεν υπάρχουν αγοραστές τύπου 3, ενώ υπάρχουν k αγοραστές τύπου 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \|c_1'\|^2 - \|c_1\|^2 &\leq ((1+\frac{1}{Ckn^2})^2 - 1)k(eM^2) \\ &\leq \frac{3e^2M^2}{Cn^2} \end{aligned}$$

Όσον αφορά την μεταβολή του δεύτερου υποδιανύσματος, θα χρησιμοποιηθεί το λήμμα (27) για τον προσδιορισμό ενός άνω φράγματος. Έστω $D = c_{min}(B_2) - c_{max}(B_3)$ η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στα πλεονάσματα των αγοραστών τύπου 2 και 3 και Δ η συνολική μείωση των πλεονασμάτων των αγοραστών τύπου 2. Στην περίπτωση αυτή $D \geq M/(n+1)$ και $\Delta \geq M/(2(n+1))$. Επομένως το τετράγωνο της 2-νόρμας του διανύσματος c_{23} μειώνεται τουλάχιστον κατά $M^2/(2(n+1)^2)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα για τα υποδιανύσματα καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} \|c'\|^2 - \|c\|^2 &= (\|c_1'\|^2 - \|c_1\|^2) + (\|c_{23}'\|^2 - \|c_{23}\|^2) + (\|c_4'\|^2 - \|c_4\|^2) \\ &\leq \frac{3e^2M^2}{Cn^2} - \frac{M^2}{2(n+1)^2} \\ &\leq -\Omega(\frac{1}{n^3})\|c\|^2 \quad \text{εφόσον } \|c\|^2 \leq ne^2M^2 \end{aligned}$$

□

το οποίο αποδεικνύει το λήμμα για τη πρώτη περίπτωση.

Η δεύτερη περίπτωση όπου:

$$c'_{min}(S) - c'_{max}(B_3 \cup B_{4b}) \geq \frac{c_{min}(S)}{2(n+1)}$$

προκύπτει μόνο για την περίπτωση $x = x_{eq}$. Αρχικά παρατηρείται ότι:

$$\begin{aligned} \|c''\|^2 - \|c\|^2 &= \|c''\|^2 - \|c'\|^2 + \|c'\|^2 - \|c\|^2 \\ &\leq \|c''\|^2 - \|c'\|^2 + \frac{3e^2M^2}{Cn^2} \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από την απόδειξη της πρώτης περίπτωσης. Επομένως πρέπει να προκύψει μία συσχέτιση της 2-νόρμας των πλεονασμάτων σε σχέση με τις ροές f'' και f'. Για το λόγο αυτό αρχικά κατασκευάζεται μία εφικτή ροή $\hat{f}$ από την ροή f' και έπειτα αναλύεται η 2-νόρμα του πλεονάσματος. Αφού η ροή f'' είναι μία ισορροπημένη ροή η 2-νόρμα είναι το πολύ ίση με την 2-νόρμα της ροής $\hat{f}$.

Για την κατασκευή της ροής $\hat{f}$, σε πρώτο βήμα αρχικοποιείται στην τιμή f', την ροή δηλαδή μετά την προσαρμογή των τιμών και των ροών. Έστω:

$$c_{min}(S, \hat{f}) \leq c_{max}(B_3 \cup B_{4b}, \hat{f}) \tag{$\star$}$$

και έστω E_{new} το σύνολο των νέων ακμών που συνδέουν αγοραστές του συνόλου S με αγαθά του συνόλου $G \setminus \Gamma(S)$. Για κάθε ακμή (b_i, g_j) στο E_{new} αρχικά αυξάνεται η ροή στην ακμή αυτή μέχρι το αγαθό g_j να πωλείται πλήρως ή να ισχύει η ανισότητα ($\star$). Στη δεύτερη περίπτωση η κατασκευή της ροής $\hat{f}$ έχει ολοκληρωθεί. Στη πρώτη περίπτωση επιλέγονται έπειτα οι ακμές (b_k, g_j) με $b_k \in \bar{S}$ που φέρουν ροή. Αφού οι αγοραστές τύπου $4a$ δεν έχουν ροή, ο αγοραστής b_k είναι τύπου 3 ή 4a και επομένως $c(b_k) \leq c(b_i)/(1 + 1/n)$. Για κάθε τέτοια ακμή αυξάνεται η ροή στην ακμή (b_i, g_j) και μειώνεται αντίστοιχα η ροή στην ακμή (b_k, g_j) μέχρι είτε η ροή στην ακμή (b_k, g_j) να μηδενιστεί ή να ισχύει η ανισότητα ($\star$). Στη δεύτερη περίπτωση η κατασκευή της $\hat{f}$ έχει ολοκληρωθεί.

Λήμμα 32. *Όταν ο αλγόριθμος κατασκευής της $\hat{f}$ ολοκληρωθεί, είτε η ανισότητα ($\star$) ισχύει για την ροή $\hat{f}$, είτε υπάρχει τουλάχιστον ένας αγοραστής στο S που το πλεόνασμά του με τη ροή $\hat{f}$ είναι μία μονάδα μικρότερο από το πλεόνασμα με τη ροή f'.*

Απόδειξη. Έστω μία νέα ακμή ισότητας (b_i, g_j). Αν η ανισότητα ($\star$) δεν ισχύει, τότε όλη η ροή προς το g_j προέρχεται από τον αγοραστή b_i και το αγαθό g_j πωλείται πλήρως. Με την ροή f' δεν υπήρχε ροή από τον αγοραστή b_i στο αγαθό g_j και επομένως το πλεόνασμα του αγοραστή b_i στη ροή $\hat{f}$ είναι κατά μία μονάδα τουλάχιστον λιγότερο από το πλεόνασμα με την ροή f'. □

Με την κατασκευή της ροής $\hat{f}$ από την ροή f', τα πλεονάσματα των αγοραστών τύπου 1 και 2 δεν αυξάνονται, ενώ τα πλεονάσματα των αγοραστών τύπου 3 και 4 δεν μειώνονται. Επίσης η συνολική μείωση των πλεονασμάτων των αγοραστών τύπου 1 και 2 είναι τουλάχιστον ίση με την συνολική αύξηση των πλεονασμάτων τύπου 3 και 4. Επομένως το λήμμα (27) ισχύει. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $D \geq M/(2(n+1))$ και $\Delta \geq D/2$ αν η ανισότητα $(\star)$ ισχύει και $\Delta \geq 1$ στην αντίθετη περίπτωση. Επομένως:

$$\begin{aligned}\|\hat{c}\|^2 - \|c'\|^2 &\leq -\frac{M}{2(n+1)}\min(\frac{M}{4(n+1)}, 1) \\ &= -\frac{M^2}{8(n+1)^2}\end{aligned}$$

διότι $M \leq n$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω φράγματα προκύπτει:

$$\begin{aligned}\|c''\|^2 - \|c\|^2 &\leq \|\hat{c}\|^2 - \|c'\|^2 + \frac{3e^2M^2}{Cn^2} \\ &\leq -\frac{M^2}{8(n+1)^2} + \frac{3e^2M^2}{Cn^2} \\ &= -\Omega(\frac{1}{n^3})\|c\|^2\end{aligned}$$

Έχοντας τα παραπάνω προκύπτει το φράγμα στον αριθμό των φάσεων εξισορρόπησης με το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 33. *Ο αριθμός των φάσεων εξισορρόπησης είναι* $O(n^4 \log(nU_{max}))$.

Απόδειξη. Έστω T ο αριθμός των φάσεων εξισορρόπησης. Η 2-νόρμα της αρχικά ισορροπημένης ροής δεν είναι μεγαλύτερη από $\sqrt{n}$. Στις x_{max}-φάσεις, η 2-νόρμα του πλεονάσματος πολλαπλασιάζεται κατά ένα παράγοντα το πολύ ίσο με $(nU_{max})^{O(n)}$. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο, ο βρόχος τερματίζει όταν $|c| < \varepsilon$. Επομένως έπειτα από $T-1$ φάσεις εξισορρόπησης θα έχουμε $|c| \geq \varepsilon$ που συνεπάγεται ότι $\|c\| \geq \varepsilon/\sqrt{n}$. Σε κάθε φάση εξισορρόπησης η 2-νόρμα του πλεονάσματος μειώνεται κατά ένα παράγοντα $1 - \Omega(1/n^3)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω επιχειρήματα προκύπτει:

$$\sqrt{n}(nU_{max})^{O(n)}(1-\Omega(1/n^3))^{T-1} \geq \varepsilon/\sqrt{n}$$

Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει το άνω φράγμα του αριθμού των φάσεων εξισορρόπησης. □

5.1.4 Ανάλυση πολυπλοκότητας εύρεσης ροών εξισορρόπησης

Στην παρούσα ενότητα θα δειχθεί ότι ισορροπημένες ροές μπορούν να υπολογιστούν με έναν υπολογισμό μέγιστης ροής και n υπολογισμούς μέγιστης ροής σε δίκτυα δάσους (forest networks). Η πολυπλοκότητα αυτή είναι καλύτερη από την εύρεση των ισορροπημένων ροών βάσει του υπολογισμού n μέγιστων ροών στο δίκτυο ισότητας [11]. Όλοι οι υπολογισμοί θεωρούνται ότι γίνονται σε γραφήματα με $O(n)$ ακμές.

Λήμμα 34. *Αν το* E_π *είναι γράφημα δάσος, μία μέγιστη ροή στο* N_π *μπορεί να υπολογιστεί* *με $O(n)$ αριθμητικές πράξεις.*

Η απόδειξη βασίζεται στον εξής αλγόριθμο εύρεσης μέγιστης ροής. Έστω $cap(e)$ η χωρητικότητα μίας ακμής e. Όσο το σύνολο E_π είναι μη κενό, επιλέγεται μία ακμή $(b_i, g_k) \in E\pi$ τέτοια ώστε είτε ο b_i είτε το g_k να έχει βαθμό ίσο με τη μονάδα. Κατευθύνεται ροή $q = \min(cap(s, b_i), cap(g_k, t))$ στο μονοπάτι (s, b_i, g_k, t), μειώνεται η χωρητικότητα των ακμών (s, b_i) και (g_k, t) κατά q και αφαιρείται η ακμή (b_i, g_k) από το δίκτυο. Το δίκτυο που προκύπτει είναι το (N'_π, cap') και ο αλγόριθμος συνεχίζει με την επιλογή νέας ακμής από το E'_π.

Από το παραπάνω λήμμα και από το γεγονός ότι μία ισορροπημένη ροή υπολογίζεται με το πολύ n υπολογισμούς μέγιστης ροής σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου ο υπολογισμός της μέγιστης ροής γίνεται σε δίκτυο με μειούμενες χωρητικότητες και ακμές που αφαιρούνται οδηγούν στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 35. *Αν E_π είναι γράφημα δάσος, μία ισορροπημένη ροή στο N_π μπορεί να υπολογιστεί με $O(n^2)$ αριθμητικές πράξεις.*

Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει τελικά το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 36. *Έστω $G_0 \subset G$ ένα υποσύνολο των αγαθών. Αν E_π είναι ένα δάσος και υπάρχει μία μέγιστη ροή στην οποία όλα τα αγαθά στο G_0 πωλούνται πλήρως, τότε μία ισορροπημένη ροή στην οποία όλα τα αγαθά στο G_0 πωλούνται πλήρως μπορεί να υπολογιστεί με $O(n^2)$ αριθμητικές πράξεις.*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει η χρονική πολυπλοκότητα που παρουσιάζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 12. *Για μη εκφυλισμένα στιγμιότυπα, ο αλγόριθμος υπολογίζει τιμές ισορροπίες σε $O(n^6 \log(nU_{max}))$ αριθμητικές πράξεις πάνω σε ρητούς αριθμούς.*

Απόδειξη. Όπως έχει δειχθεί ο αριθμός των φάσεων είναι $O(n^4 \log(nU_{max}))$, ενώ κάθε φάση απαιτεί $O(n^2)$ αριθμητικές πράξεις. Το δεύτερο μέρος του αλγορίθμου απαιτεί $O(n^4 \log(nU_{max}))$ αριθμητικές πράξεις. □

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την εργασία μελετήσαμε το πρόβλημα του υπολογισμού Ισορροπιών σε αγορές Arrow-Debreu και Fisher με γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Παρουσιάσαμε δυο κατηγορίες αλγορίθμων. Η πρώτη χρησιμοποιεί κυρτό προγραμματισμό και τον ελλειψοειδή αλγόριθμο αλλά είναι μη αποδοτική στην πράξη και η δεύτερη χρησιμοποιεί συνδυαστικές τεχνικές, όπως ο υπολογισμός μέγιστων ροών σε γραφήματα.

Αν και οι ανωτέρω τεχνικές έχουν οδηγήσει σε πληθώρα αλγορίθμων το πιο σημαντικό πρόβλημα στην περιοχή παραμένει ανοικτό: Υπάρχει ισχυρά πολυωνυμικός αλγόριθμος για αγορές Arrow-Debreu με γραμμικές συναρτήσεις; Οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του ισχυρά πολυωνυμικού αλγόριθμου για αγορές Fisher φαίνεται να αποτυγχάνουν σε αγορές Arrow-Debreu λόγω του γεγονότος ότι, σε αντίθεση με τις αγορές Fisher, τα διαθέσιμα χρήματα κάθε πράκτορα μεταβάλλονται ανάλογα με τις τιμές των προϊόντων. Συνεπώς, αν υπάρχει ισχυρά πολυωνυμικός αλγόριθμος για Arrow-Debreu αγορές, η κατασκευή του είναι πολύ πιθανόν να απαιτεί τη χρήση νέων τεχνικών και δομών δεδομένων.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Θεωρία Παιγνίων	Game Theory
Επιστήμη Υπολογισμού	Computer Science
αποτέλεσμα	outcome
παίγνιο	game
διάνυσμα	vector
διάταξη προτίμησης	preference ordering
ασθενής προτίμηση	weakly preference
χρησιμότητα	utility
κέρδος	payoff
αγαθά	goods
αγορά	market
πράκτορας	agent
έμπορος	trader
κατάσταση ηρεμίας	stable state
ισορροπία	equilibrium
αντικειμενική συνάρτηση	objective function
εργασία	labor
προικοδότηση	endownment
χρησιμότητα	utility
συλλογή	bundle
αγοραστική δύναμη	budget
σύνολο κατανάλωσης	consumption set
κυρτό (σύνολο)	convex (set)
κλιμάκωση	scaling
κυρτό πρόγραμμα	convex program
λόγος αντικατάστασης	marginal rate of substitution
όφελος προς τιμή	bang per buck
πλεόνασμα χρημάτων	surplus cash
πολυπλοκότητα εδρών	facet-complexity
καλώς ορισμένο	well-described
ακραίο σημείο	corner point
μη κενότητα	nonemptiness
μαντείο αυστηρού διαχωρισμού	strong separation oracle
ελλειψοειδής αλγόριθμος	ellipsoid algorithm
μέγιστη ροή	max flow
υπολειπόμενο δίκτυο	residual network
αύξηση	augmentation

αυξητικό μονοπάτι	augmenting path
άφθονος	abundant
πλεόνασμα	surplus
γόνιμος	fertile
συνιστώσα	component

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ, ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ ΚΑΙ ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

$\mathcal{AD}$	Arrow-Debreu
$\mathcal{F}$	Fisher

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.

[2] D. Paparas, "On the complexity of market equilibria and revenue maximization," Columbia University Academic Commons. [Online]. Available: https://doi.org/10.7916/D8MW2NVD

[3] G. Debreu and K. J. Arrow, "Existence of an equilibrium for a competitive economy," *Econometrica*, vol. 22, no. 3, pp. 265–90, 1954.

[4] W. C. Brainard and H. Scarf, "How to compute equilibrium prices in 1891," Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, Cowles Foundation Discussion Papers 1272, 2000. [Online]. Available: https://EconPapers.repec.org/RePEc:cwl:cwldpp:1272

[5] K. Jain, "A polynomial time algorithm for computing an arrow–debreu market equilibrium for linear utilities," *SIAM Journal on Computing*, vol. 37, no. 1, pp. 303–318, 2007. [Online]. Available: https://doi.org/10.1137/S0097539705447384

[6] Grötschel, Martin, Lovász, László, Schrijver, and Alexander, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*. Springer, 1988. [Online]. Available: http://eudml.org/doc/204222

[7] J. B. Orlin, "Improved algorithms for computing fisher's market clearing prices: Computing fisher's market clearing prices," in *Proceedings of the Forty-second ACM Symposium on Theory of Computing*, ser. STOC '10. New York, NY, USA: ACM, 2010, pp. 291–300. [Online]. Available: http://doi.acm.org/10.1145/1806689.1806731

[8] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice hall, 1993.

[9] R. Duan, J. Garg, and K. Mehlhorn, "An improved combinatorial polynomial algorithm for the linear arrow-debreu market," *CoRR*, vol. abs/1510.02694, 2015. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1510.02694

[10] R. Duan and K. Mehlhorn, "A combinatorial polynomial algorithm for the linear arrow-debreu market," *CoRR*, vol. abs/1212.0979, 2012. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1212.0979

[11] N. R. Devanur, C. H. Papadimitriou, A. Saberi, and V. V. Vazirani, "Market equilibrium via a primal–dual algorithm for a convex program," *J. ACM*, vol. 55, no. 5, pp. 22:1–22:18, Nov. 2008. [Online]. Available: http://doi.acm.org/10.1145/1411509.1411512