ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Αξιοποίηση των Παραδόξων στη Διδασκαλία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Παπαδάτος Δ. Χαράλαμπος
Δ201412

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος **Καθηγητής ΕΚΠΑ**

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 27η Σεπτεμβρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Ζαχαριάδη Θεοδόσιο (επιβλέποντα)	Καθηγητή ΕΚΠΑ
▪ Πόταρη Δέσποινα	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪ Φαρμάκη Βασιλική	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενης από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Ζαχαριάδη Θεοδόσιο (επιβλέποντα)	Καθηγητή ΕΚΠΑ
▪ Πόταρη Δέσποινα	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪ Φαρμάκη Βασιλική	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- Τον επιβλέποντα της εργασίας μου καθηγητή, **κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο**, για την εξαιρετική τιμή που μου έκανε να με αναλάβει και να με καθοδηγήσει, αντιμετωπίζοντας διακριτικά και με πολύ μεγάλη υπομονή τις ασυνέπειές μου, έως την ολοκλήρωση αυτής της έρευνας, αναλαμβάνοντας ορισμένες φορές και βάρη τα οποία δεν θα μπορούσα μόνος μου να σηκώσω. Είναι βέβαιο ότι χωρίς την πρόθυμη βοήθειά του και τις διαρκείς ενθαρρύνσεις που μου έδινε δεν θα είχα φτάσει ποτέ στην ημέρα της παρουσίασης.
- Την καθηγήτρια **κα Πόταρη Δέσποινα**, για τη συμμετοχή της στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή και για τις εύστοχες παρατηρήσεις της, οι οποίες βελτίωσαν σημαντικά την εργασία.
- Την καθηγήτρια **κα Φαρμάκη Βασιλική**, τόσο για τη συμμετοχή της στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή όσο και για την καθοδήγησή της καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου ως επιβλέπουσα της φοίτησής μου.
- Την υποψήφια διδάκτορα **Μπακογιάννη Διονυσία**, για την πολύτιμη βοήθειά της σε όλα τα στάδια επεξεργασίας της εργασίας αυτής και τις αμέτρητες συμβουλές της που έδωσαν αποδεκτή δομή στις άτακτες σκέψεις μου.
- Όλους **τους διδάσκοντες** στο πρόγραμμα, για τις πολύ χρήσιμες γνώσεις που μας μετέδωσαν, για τον κατάλληλο παιδαγωγικά τρόπο με τον οποίο το έκαναν και διότι μέσα από την εκπαιδευτική διαδικασία μας ανανέωσαν και μας έκαναν να νιώσουμε πάλι μαθητές.
- Την **κα Κλη Ελένη**, για την άρτια γραμματειακή υποστήριξη που παρέχει.
- Τη **σύζυγό μου Μαρία**, διότι όλα αυτά τα χρόνια της φοίτησής μου στο μεταπτυχιακό σήκωσε δυσανάλογα μεγάλο βάρος των κοινών οικογενειακών μας υποχρεώσεων προκειμένου να είμαι σε θέση να ανταποκριθώ στις δικές μου φοιτητικές υποχρεώσεις. Χωρίς τη δική της συνεισφορά και αυτοθυσία ίσως δεν κατάφερνα να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη..... σελ. 05

Abstract..... σελ. 06

Εισαγωγή..... σελ. 07

1. Ιστορικά στοιχεία και παράδοξα

1.1. Ιστορική εξέλιξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων..... σελ. 09

1.2. Ο ρόλος των παραδόξων..... σελ. 13

2. Τα Στοχαστικά Μαθηματικά στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

2.1. Η Στατιστική Εκπαίδευση σήμερα..... σελ. 20

2.2. Συλλογιστική με πιθανότητες (Probabilistic Thinking)... σελ. 24

2.3. Διαφορετικές προσεγγίσεις της πιθανότητας..... σελ. 30

2.4. Παρανοήσεις, δυσκολίες και ο ρόλος της διαίσθησης..... σελ. 35

2.5. Ο ρόλος των παραδόξων στην ανάπτυξη του συλλογισμού με πιθανότητες..... σελ. 48

3. Έρευνα

3.1. Ερευνητικό πρόβλημα..... σελ. 52

3.2. Ερευνητικά ερωτήματα..... σελ. 53

3.3. Συμμετέχοντες – ιδιαίτερα στοιχεία..... σελ. 53

3.4. Σχεδιασμός ερωτηματολογίων – συλλογή δεδομένων.... σελ. 55

3.5. Πλαίσιο ανάλυσης των δεδομένων..... σελ. 62

4. Αποτελέσματα

4.1. Επεξεργασία των απαντήσεων – αποτελέσματα..... σελ. 73

4.2. Συζήτηση..... σελ. 84

4.3. Ευχαριστίες..... σελ. 89

Βιβλιογραφία..... σελ. 90

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α..... σελ. 96

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β..... σελ. 101

Ευρετήριο Όρων..... σελ. 104

Ευρετήριο Εικόνων..... σελ. 108

Περίληψη

Η παρούσα εργασία συνδέει τα παράδοξα – δηλαδή αποτελέσματα που αντίκεινται στη διαίσθηση – με τα Στοχαστικά Μαθηματικά στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Συνδετικός κρίκος μεταξύ των δύο είναι η διαίσθηση, η οποία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές – και όχι μόνο – αντιμετωπίζουν ορισμένα στοχαστικά προβλήματα και προκαλεί πολλές φορές δυσυπέρβατες παρανοήσεις.

Η μελέτη καταγράφει τις στρατηγικές με τις οποίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κάποια κατάλληλα για τη γνώση τους παράδοξα και το επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες στο οποίο φτάνουν, ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούν. Μέσω αυτών, επιδιώκεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές που έχουν διδαχτεί πιθανότητες στο σχολείο κάνουν χρήση των γνώσεών τους και αν η αξιοποίηση αυτών τους βοηθάει τελικά να αποφύγουν τις συνηθισμένες παρανοήσεις σε μεγαλύτερο βαθμό από ό,τι οι μαθητές που δεν έχουν διδαχτεί πιθανότητες.

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι παρόλο που οι εκπαιδευμένοι μαθητές κάνουν χρήση των εργαλείων που διδάχτηκαν, εντούτοις τελικά δεν επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα από τους υπόλοιπους μαθητές. Στο τέλος, στηρίζεται η πρόταση για αξιοποίηση των παραδόξων στη διδασκαλία με σκοπό την εξάλειψη κάποιων συνηθισμένων παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν παρόμοια προβλήματα.

Λέξεις κλειδιά: Παράδοξα, Πιθανότητες, Στατιστική, Παρανοήσεις, Ευρετικές.

Abstract

This study links paradoxes – ie results that are inconsistent with intuition – with Stochastic Mathematics at the level of secondary education. The connecting link between the two is intuition, which plays a very important role in the way students – and not only – face some stochastic problems and often cause insurmountable misconceptions.

The study records the strategies by which secondary school students face some paradoxes appropriate to their knowledge and the level of probabilistic thinking they reach, depending on the class they are attending. Through these, it is intended to ascertain whether students who have been taught probabilities at school make use of their knowledge and whether this exploitation ultimately helps the students avoid common misconceptions to a greater extent than students who have not been taught probabilities.

The resulting conclusion is that, although trained students use the tools they have been taught, they do not achieve better results than the rest of the pupils. In the end, the proposal for the use of paradoxes in teaching is being supported as a means to eliminate some common misconceptions posed by students when faced with similar problems.

Keywords: Paradoxes, Probabilities, Statistics, Misconceptions, Heuristics.

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να κάνει ζεύξη δύο πραγμάτων. Των παραδόξων από τη μια και του μαθήματος των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής από την άλλη, εντός των πλαισίων που διαμορφώνει το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η λέξη παράδοξο έχει πολλές ερμηνείες. Μία από αυτές είναι η εξής: «οποιοδήποτε συμπέρασμα ή αποτέλεσμα αντίθετο στην κοινή λογική και τη διαίσθησή μας και το οποίο μας εκπλήσσει» (Gardner, 1982/1989, p. vii). Με αυτή την έννοια χρησιμοποιείται η λέξη και στην παρούσα εργασία. Διαχρονικά, τα παράδοξα συνέβαλλαν στην ανάπτυξη και την εξέλιξη αρκετών κλάδων των μαθηματικών. Ενδεικτικά αναφέρουμε το γνωστό παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα. Η ιδέα ότι ένα άπειρο άθροισμα θετικών αριθμών μπορεί να δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα άνοιξε το δρόμο στους μαθηματικούς για την αποδοχή των άπειρων διαδικασιών στην Ανάλυση και την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού[1].

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά, από την άλλη πλευρά, είναι ένας κλάδος ο οποίος φαίνεται να κερδίζει έδαφος στην εκπαίδευση όλων των βαθμίδων, ιδιαίτερα στο εξωτερικό, καθώς ποικίλες εφαρμογές του συναντώνται πλέον στην κοινωνική και οικονομική ζωή των ανθρώπων (Tishkovskaya & Lancaster, 2012). Εκτός αυτού, όμως, είναι κι ένας κλάδος ο οποίος «βρίθει» παραδόξων σε τέτοιο βαθμό που είναι δύσκολο να μη συναντήσει κανείς παράδοξα σε αυτόν[2].

Αυτό που επιδιώκεται, λοιπόν, με την εργασία αυτή είναι μία έρευνα πάνω στις στρατηγικές με τις οποίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κάποια κατάλληλα για τις γνώσεις τους παράδοξα και το επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες στο οποίο φτάνουν ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούν. Ειδικότερα, επιδιώκεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές που έχουν διδαχτεί πιθανότητες στο σχολείο κάνουν χρήση των γνώσεών τους και αν η αξιοποίηση των εργαλείων αυτών τους βοηθάει τελικά να αποφύγουν τις συνηθισμένες παρανοήσεις σε μεγαλύτερο βαθμό από ό,τι οι μη-εκπαιδευμένοι πάνω στις πιθανότητες μαθητές.

---

[1] Αυτό υποστηρίζεται μεταξύ άλλων και στο βιβλίο «Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι» των Νεγρεπόντη Σ., Γιωτόπουλου Σ. & Γιαννακούλια Ε., Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999, σελ. 75.

[2] Το σχόλιο είναι παρμένο από το άρθρο «Teaching Statistics Through Paradoxes» του Székely, G.J., που παρουσιάστηκε στο συνέδριο ICOTS II, University of Victoria, B.C., Canada, το 1986, σελ. 322.

Απώτερος σκοπός είναι η πρόταση για αξιοποίηση των παραδόξων στη διδασκαλία για την εξάλειψη κάποιων συνήθων παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα Πιθανοτήτων και Στατιστικής.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα μέρη.

Στο πρώτο μέρος γίνεται αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και αναδεικνύεται ο κρίσιμος ρόλος ορισμένων παραδόξων σε αυτή την εξέλιξη.

Στο δεύτερο μέρος γίνεται λόγος για τη θέση των Στοχαστικών Μαθηματικών στη σύγχρονη εκπαίδευση. Ειδικότερα, αναφέρονται τα πλαίσια που έχουν διαμορφωθεί για τη μοντελοποίηση τόσο του στατιστικού συλλογισμού όσο και του συλλογισμού με πιθανότητες και οι διαφορετικές προσεγγίσεις της έννοιας της πιθανότητας. Ανάμεσα σε αυτά συζητείται ο κυρίαρχος ρόλος της διαίσθησης και εξετάζονται τα στοιχεία που την δομούν. Στη συνέχεια, αναπτύσσονται ορισμένες δημοφιλείς ευρετικές μέθοδοι και παρανοήσεις που εδράζονται στη διαίσθηση και γίνεται αναφορά στο ρόλο των παραδόξων στην ανάπτυξη του συλλογισμού με πιθανότητες.

Στο τρίτο μέρος συζητείται το ερευνητικό πρόβλημα, τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα και δίνονται όλα τα απαραίτητα στοιχεία του σχεδιασμού της έρευνας. Έπειτα, αναλύεται και διαμορφώνεται το κατάλληλο πλαίσιο για την αξιολόγηση των δεδομένων.

Στο τέταρτο μέρος περιέχονται τα συμπεράσματα της έρευνας, απαντιούνται τα ερευνητικά ερωτήματα, γίνεται κάποια συζήτηση πάνω στα ευρήματα, αναφέρονται οι περιορισμοί της έρευνας και γίνονται προτάσεις για αξιοποίηση των αποτελεσμάτων και για περαιτέρω έρευνα.

1. Ιστορικά στοιχεία και παράδοξα

1.1. Ιστορική εξέλιξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Η Θεωρία Πιθανοτήτων αποτελεί έναν από τους νεότερους κλάδους των Μαθηματικών, πράγμα απροσδόκητο αν σκεφτεί κανείς ότι η έννοια της τυχαιότητας απαντάται σε διάφορους πολιτισμούς, όπως οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι, ήδη από το 3500-3000 π.Χ.. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα η David (1962) αναφέρει τον «αστράγαλο», ένα κόκαλο ζώου με τέσσερις πλευρές που ίσως αποτέλεσε τον πρόγονο του γνωστού ζαριού.

Όμως παρά την ευρεία διάδοση της έννοιας του τυχαίου δεν αναπτύχθηκε κάποια επιστημονική προσέγγιση για την τυχαιότητα μέχρι το Μεσαίωνα (Batanero, 2015), αφήνοντας για αιώνες όλες τις προβλέψεις για μελλοντικά γεγονότα στερημένες από κάθε επιστημονική επεξεργασία (Batanero, Henry & Parzysz, 2005).

Μία άποψη για την αιτία της καθυστέρησης στην επιστημονική μελέτη της έννοιας της πιθανότητας που αναφέρουν οι Batanero et al. (2005) είναι ότι οφείλεται στην επικρατούσα τότε θεοκρατική αντίληψη που θέλει το μέλλον να ανήκει στον παντογνώστη και παντοδύναμο δημιουργό.

Μία δεύτερη άποψη που υποστηρίζεται από την David (1962) είναι ότι για να λάβει η έννοια της πιθανότητας επιστημονική υπόσταση έπρεπε πρώτα να αποσπαστεί από τα τυχερά παιχνίδια, πράγμα το οποίο δεν είναι βέβαιο ότι είχε επιτευχθεί εξ ολοκλήρου ακόμα και την εποχή που έγραφε το βιβλίο της.

Οι Borovcnik, Bentz & Kapadia (1991) διατυπώνουν επιπλέον την άποψη ότι δεν πρέπει να παραγνωρίζεται και η καθυστέρηση στην ωρίμανση της ίδιας της έννοιας, καθώς αυτό έχει συμβεί και με άλλες επιστημονικές έννοιες, όπως η αποδοχή ότι η Γη κινείται στη φυσική, η αποδοχή του αξιώματος της παραλληλίας στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αξιωματική θεμελίωση της Αριθμητικής από τον Peano κ.α..

Βέβαια, οι Batanero et al. (2005) σχολιάζουν – σκωπτικά – ότι αυτή η αδυναμία επιστημονικής μελέτης των μελλοντικών γεγονότων δεν εμπόδισε τους τζογαδόρους όλων των εποχών να ποντάρουν σε τυχερά παιχνίδια, απλά ο ποσοτικός έλεγχος των στοιχημάτων γινόταν με διαισθητικούς όρους.

Στο δρόμο προς την ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας, το πιο πρώιμο γνωστό σχόλιο που συναντάται σχετικά με το ότι οι 56 διαφορετικοί συνδυασμοί ρίψης τριών ζαριών δεν είναι ισοπίθανοι εμφανίζεται στο ποίημα *De vetula (Η γριούλα)* κάποιου ανώνυμου Λατίνου ποιητή που γράφτηκε μεταξύ του 1200 και του 1400 μ.Χ.. Το ποίημα σε κάποιο σημείο του αναφέρει (David, 1962, p.33):

> Υπάρχουν 56 δυνατότητες [για το αποτέλεσμα της ρίψης τριών ζαριών]. Αλλά, αν και τα τρία [ζάρια] είναι όμοια, υπάρχει μόνο ένας τρόπος για κάθε αποτέλεσμα. Αν δύο [ζάρια] είναι όμοια και ένα [ζάρι] διαφέρει, υπάρχουν τρεις τρόποι. Και αν όλα [τα ζάρια] είναι διαφορετικά, υπάρχουν έξι τρόποι.

Το πρώτο αποφασιστικό βήμα μιας συστηματικής καταμέτρησης των δυνατών περιπτώσεων σε κάποιο πείραμα τύχης φαίνεται ότι έγινε από τον Gerolamo Cardano (1501 – 1576), ο οποίος επιχείρησε γύρω στο 1526 στο βιβλίο του *Liber de Ludo Aleae (Book on Games of Chance)* [το οποίο πρωτοεκδόθηκε το 1663 (David, 1962, p. 60), μετά το θάνατο του συγγραφέα] να καταγράψει το δειγματικό χώρο της ρίψης δύο ή τριών ζαριών, όπως αναφέρει ο Katz (2009). Σύμφωνα με τον ίδιο συγγραφέα, εκτός από σωστή καταμέτρηση του δειγματικού χώρου, ο Cardano επιδεικνύει επίσης κατανόηση των βασικών εννοιών της πιθανότητας και γνώση του πολλαπλασιαστικού κανόνα για ανεξάρτητα ενδεχόμενα ως ένα βαθμό τουλάχιστον.

Στη συνέχεια με το ίδιο θέμα της ρίψης τριών ζαριών ασχολείται ο Galileo Galilei (1564 – 1642), του οποίου η συνεισφορά ήταν η διάκριση των διαφορετικών διατάξεων μέσα στον ίδιο συνδυασμό αποτελεσμάτων που αποτέλεσε ένα βήμα προόδου προς την ανάπτυξη της έννοιας της ανεξαρτησίας (Borovcnik & Kapadia, 2014b).

Ένα επόμενο βήμα προς την καλύτερη κατανόηση των πιθανοτήτων έγινε από τους Blaise Pascal (1623 – 1662) και Pierre de Fermat (1601 – 1665) σε αλληλογραφία που ανταλλάχτηκε μεταξύ τους το 1654 και αφορούσε σε δύο προβλήματα που προϋπήρχαν μεν αλλά παρέμεναν άλυτα μέχρι εκείνη την εποχή.

Το πρώτο πρόβλημα έγινε αφορμή να διευκρινιστεί ο όρος ευνοϊκές περιπτώσεις στην εκτέλεση ενός πειράματος και να διαχωριστούν μεταξύ τους οι έννοιες πιθανότητα και αναμενόμενη τιμή (Borovcnik & Kapadia, 2014a).

Το δεύτερο πρόβλημα, που αποτέλεσε ένα μεγάλο άλμα για την πληρέστερη κατανόηση της φύσης των πιθανοτήτων, ανέδειξε την ανάγκη να κατασκευάζονται

ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα για να μελετηθούν πειράματα τύχης ακόμα και αν χρειάζεται να εφευρεθούν περιπτώσεις που – ενδεχομένως – να αψηφούν τους κανόνες διεξαγωγής του πειράματος (Borovcnik & Kapadia, 2014b). Όπως αναφέρουν οι Batanero et al. (2005), η προϋπόθεση της ίσης πιθανότητας για τα στοιχειώδη εξαγόμενα σε ένα δίκαιο παιχνίδι ήταν το πρώτο κριτήριο για την εκτίμηση της πιθανότητας ενός σύνθετου ενδεχομένου.

Τα τρία προβλήματα που αναφέρονται επιγραμματικά στις προηγούμενες παραγράφους θα τα αναπτύξουμε διεξοδικότερα στην επόμενη ενότητα, διότι έχουν άμεση σχέση με το θέμα της παρούσας εργασίας.

Το πρώτο βιβλίο σχετικά με τις πιθανότητες κυκλοφόρησε το 1657 από τον Christian Huygens (1629–1695) και είχε τίτλο *De Ratiociniis in Aleae Ludo (On the Calculations in Games of Chance)*. Περιείχε μόλις 14 προτάσεις και κατέληγε σε πέντε ασκήσεις για τον αναγνώστη. Σε αυτό αναφέρεται και η λεγόμενη «αξία» της πιθανότητας. Με τον όρο αυτό εννοείται το ποσό που κάποιος είναι διατεθειμένος να πληρώσει προκειμένου να συμμετέχει σε ένα δίκαιο παιχνίδι. Στη σύγχρονη ορολογία λέγεται «αναμενόμενο κέρδος» και υπολογίζεται από τη μέση τιμή του ποσού που θα κέρδιζε κάποιος αν συμμετείχε στο παιχνίδι πολλές φορές (Katz, 2009).

Ακολούθησε το βιβλίο *Ars Conjectandi (Art of Conjecturing)* του James Bernoulli (1654 – 1705) που δημοσιεύτηκε το 1713 μετά το θάνατο του συγγραφέα. Το βιβλίο αυτό αποτελεί πλήρες εγχειρίδιο πιθανοτήτων, που καταλήγει σε μία πρώιμη μορφή του νόμου των μεγάλων αριθμών (Katz, 2009). Στο βιβλίο αυτό δίνεται ο παρακάτω ορισμός για την πιθανότητα (Gorroochurn, 2012, p. 69):

> «...αν το ολόκληρο και η απόλυτη βεβαιότητα, τα οποία παριστάνουμε με το γράμμα α ή με τη μονάδα 1, θα θεωρηθεί ότι αποτελούνται, για παράδειγμα, από πέντε πιθανότητες, δηλαδή από πέντε μέρη, τρία από τα οποία ευνοούν την ύπαρξη ή την υλοποίηση κάποιου γεγονότος, ενώ τα υπόλοιπα είναι ενάντια σε αυτό, θα λέμε ότι αυτό το ενδεχόμενο έχει βεβαιότητα 3/5 α, ή 3/5».

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας διατυπώθηκε αρχικά από τον Abraham de Moivre (1667 – 1754) στο βιβλίο του *The Doctrine of Chances* που πρωτοδημοσιεύτηκε το 1718. Γράφει ο de Moivre (1756, pp. 1-2, τα κεφαλαία γράμματα υπάρχουν στο πρωτότυπο):

> «...αν κατασκευάσουμε ένα Κλάσμα όπου ο Αριθμητής θα είναι ο αριθμός των Περιπτώσεων να συμβεί ένα Ενδεχόμενο και ο Παρονομαστής [θα είναι] ο αριθμός όλων των Περιπτώσεων είτε να συμβεί είτε να μη συμβεί [το ενδεχόμενο], αυτό το Κλάσμα θα είναι ένας κατάλληλος προσδιορισμός της Πιθανότητας να συμβεί»

Πάνω στο βιβλίο αυτό ο Thomas Bayes (1701-1761) έγραψε ένα δοκίμιο με τίτλο *an essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* το οποίο είδε το φως της δημοσιότητας το 1763, δύο χρόνια μετά το θάνατο του συγγραφέα. Στο δοκίμιο αυτό περιλαμβάνεται και το λεγόμενο Θεώρημα Bayes', μία απλή μορφή του οποίου με σύγχρονη ορολογία είναι η εξής:

Για δύο ενδεχόμενα A και B, με $P(B) \neq 0$, ισχύει: $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})}$.

Σύμφωνα με τη Batanero (2015), το θεώρημα αυτό, το οποίο υπαινίσσεται ότι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου μπορεί να αλλάξει εκ των υστέρων αν υπάρξουν νεότερα δεδομένα, έδωσε πάτημα σε κάποιους νεότερους ερευνητές να υποστηρίξουν ότι η πιθανότητα δεν είναι μία αντικειμενική ποσότητα αλλά μια υποκειμενική κρίση.

Η κλασική θεωρία πιθανοτήτων θεμελιώθηκε το 1795 από τον Pierre – Simon de Laplace (1749 – 1827) με το βιβλίο του *Theorie Analytique des Probabilites*, που δημοσιεύθηκε το 1812. Ο ορισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου του de Laplace αποτελεί βελτίωση του ορισμού του de Moivre και διατυπώνεται στην εισαγωγή του βιβλίου ως εξής (de Laplace, 1814, p. iv):

> «...το μέτρο αυτής της πιθανότητας [ενός ενδεχομένου]... δεν είναι παρά ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής είναι ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων, και του οποίου ο παρονομαστής είναι ο αριθμός όλων των δυνατών περιπτώσεων[3]».

Τόσο ο ορισμός του de Moivre όσο και αυτός του de Laplace βασίζεται στην αρχή της έλλειψης επαρκούς λόγου, σύμφωνα με την οποία τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου θεωρούνται ισοπίθανα αν δεν υπάρχει επαρκής λόγος για το αντίθετο. Η αρχή αυτή έτυχε κριτικής από μεταγενέστερους μαθηματικούς οι οποίοι

[3] *"...la mesure de cette probabilite... n'est ainsi qu' une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénomonateur est le nombre de tous les cas possibles".*

αμφισβήτησαν τη συμμετρία που απαιτεί και θεώρησαν την πιθανότητα ως το όριο προς το οποίο τείνει η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος. Για παράδειγμα, ο Richard Edler von Mises (1883 – 1953) γράφει στο βιβλίο του *Probability, Statistics and Truth* που εκδόθηκε αρχικά το 1928 (von Mises. 1957, p. 15):

> «Θα λέμε ότι μια συλλογή είναι ένα μαζικό φαινόμενο ή ένα επαναλαμβανόμενο συμβάν, ή, απλά μια μακρά ακολουθία παρατηρήσεων για τις οποίες υπάρχουν επαρκείς λόγοι να πιστεύουμε ότι η σχετική συχνότητα του παρατηρούμενου χαρακτηριστικού θα τείνει σε ένα σταθερό όριο εάν οι παρατηρήσεις συνεχίζονταν απεριόριστα. Αυτό το όριο θα καλείται *η πιθανότητα του χαρακτηριστικού που εξετάζεται μέσα στη δεδομένη συλλογή*».

Η σημερινή αξιωματική θεμελίωση οφείλεται στον Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) που παρουσίασε τις πιθανότητες ως ειδική περίπτωση της θεωρίας μέτρου το 1933 στο βιβλίο του *Foundations of the Theory of Probability*. Σύμφωνα με τη θεμελίωση αυτή, δεν ενδιαφερόμαστε για τη φύση των πιθανοτήτων αλλά για την εσωτερική συνοχή και τη συνέπειά τους. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, η πιθανότητα ως μαθηματικό αντικείμενο (που εντάσσεται στη θεωρία μέτρου) αρκεί να ικανοποιεί τα τρία βασικά αξιώματα του Kolmogorov (εικόνα 1).

(*i*) $P(\mathrm{A}) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A

(ii) $P(\Omega) = 1$, για ολόκληρο το δειγματικό χώρο Ω

(iii) Αν A και B είναι αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα, τότε $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Εικόνα 1: Τα αξιώματα του Kolmogorov για τη θεμελίωση της πιθανότητας

1.2. Ο ρόλος των παραδόξων

Από τη σύντομη ιστορική αναδρομή που προηγήθηκε, στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε στη συμβολή συγκεκριμένων προβλημάτων, στην ανάπτυξη των θεμελιωδών εννοιών της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Τα προβλήματα αυτά συχνά αποκαλούνται «παράδοξα». Ο όρος αυτός κυκλοφορεί με διάφορες έννοιες όπως

«ασυνέπεια, αντιπαράδειγμα σε ευρέως κρατούσες αντιλήψεις, παρανόηση, αληθής δήλωση που φαίνεται ψευδής και το αντίστροφο» (Kleiner & Movshovitz-Hadar, 1994, p. 963). Όμως στην παρούσα εργασία θα εννοούμε κατά κύριο λόγο το ίδιο με αυτό που περιγράφουν οι Borovcnik & Kapadia (2014b) με τον όρο puzzles (γρίφοι), δηλαδή «μια κατάσταση στην οποία η τρέχουσα έννοια παράγει μία λύση που διαισθητικά φαίνεται μη αποδεκτή. Ένας τέτοιου είδους γρίφος (puzzle), δείχνει ότι η διαισθητική βάση της έννοιας πρέπει να βελτιωθεί ή ότι η έννοια αντιτίθεται προς την προσδοκία του λύτη» (p. 35).

Για την παρούσα εργασία θα γίνεται επιλεκτικά και η χρήση του όρου «διαισθητικό παράδοξο» για να περιγράψει τα παραπάνω προβλήματα προς σαφή διάκριση μεταξύ άλλων προβλημάτων που δεν έχουν λάβει οριστική απάντηση και αποτελούν αντικείμενο έρευνας ή και τριβής μεταξύ των μαθηματικών και αποκαλούνται επίσης «παράδοξα». Τέτοια άλυτα προβλήματα, οποιουδήποτε επιπέδου κι αν είναι αυτά, δεν σχετίζονται καθόλου με την παρούσα εργασία.

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε εκτενέστερα στα τρία παράδοξα που ιστορικά βοήθησαν στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων μέχρι να αναδειχτεί σε επιστημονικό κλάδο και τα οποία αναφέρθηκαν προηγουμένως επιγραμματικά.

Το πρώτο τέτοιο παράδοξο ήταν αυτό που μελετήθηκε από τον Galilei και αφορούσε στο παρακάτω πρόβλημα σχετικά με τη ρίψη τριών ζαριών (David, 1962):

> Παρότι υπάρχει ίσος αριθμός τριάδων που αθροίζουν τόσο στο 9 όσο και στο 10, η πιθανότητα να φέρουμε 9 στην πράξη φαίνεται να είναι λιγότερη από την πιθανότητα να φέρουμε 10. Γιατί;

Το πρόβλημα αυτό φέρεται να έθεσε στον Galilei ο Μεγάλος Δούκας της Τοσκάνης (David, 1962; Batanero et al., 2005). Αν αυτό αληθεύει, τότε πιθανότατα πρόκειται για τον Cosimo II de' Medici (1590 – 1621). Για το λόγο αυτό το πρόβλημα συχνά επιγράφεται με τον τίτλο *Problem of the Grand Duke of Tuscany* (βλ. Borovcnik & Kapadia, 2014b). Ο Galilei για να απαντήσει στο ερώτημα κατασκεύασε έναν πίνακα (βλέπε David, 1962; Borovcnik & Kapadia, 2014b), απόσπασμα του οποίου ανακατασκευασμένο σύμφωνα με τη σύγχρονη ορολογία αποτελεί αυτός που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 2). Για παράδειγμα, από τους συνδυασμούς που δίνουν άθροισμα 9, ο συνδυασμός {6.2.1} προκύπτει από τις διατάξεις (6.2.1),

(6.1.2), (2.6.1), (2.1.6), (1.6.2) και (1.2.6), ο συνδυασμός {4.4.1} από τις διατάξεις (4.4.1), (4.1.4) και (1.4.4), ενώ ο συνδυασμός {3.3.3} μόνο από τη διάταξη (3.3.3). Από τη μελέτη του πίνακα γίνεται φανερό ότι συνολικά άθροισμα 10 μπορεί να σχηματιστεί με 6 διαφορετικούς συνδυασμούς αλλά με 27 διαφορετικές διατάξεις, ενώ άθροισμα 9 επιτυγχάνεται με 6 διαφορετικούς συνδυασμούς αλλά με 25 διαφορετικές διατάξεις.

Άθροισμα τριών ζαριών 10	Διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού		Άθροισμα τριών ζαριών 9	Διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού
6.3.1	6		6.2.1	6
6.2.2	3		5.3.1	6
5.4.1	6		5.2.2	3
5.3.2	6		4.4.1	3
4.4.2	3		4.3.2	6
4.3.3	3		3.3.3	1
Συνδυασμοί	**Διατάξεις**		**Συνδυασμοί**	**Διατάξεις**
6	**27**		**6**	**25**

Εικόνα 2: Ανακατασκευή του πίνακα του Galilei για το πρόβλημα της ρίψης τριών ζαριών

Η διάκριση των διαφορετικών διατάξεων μέσα στον ίδιο συνδυασμό αποτέλεσε τη συνεισφορά του Galilei και ήταν ένα βήμα προς την ανάπτυξη της έννοιας της ανεξαρτησίας, όπως σημειώνουν οι Borovcnik & Kapadia (2014b).

Το δεύτερο παράδοξο αποτελούσε το πρώτο από ένα ζεύγος προβλημάτων που απασχόλησε τους μεγάλους μαθηματικούς Pascal και Fermat σε μεταξύ τους αλληλογραφία. Αν και το πρόβλημα προϋπήρχε, λέγεται ότι το έφερε σε γνώση του Pascal ο Antoine Gombaud (1607 – 1684), γάλλος συγγραφέας και αφοσιωμένος παίκτης τυχερών παιχνιδιών, γνωστότερος με το παρωνύμιο Chevalier de Méré. Το παρακάτω πρόβλημα περιγράφεται από τους Borovcnik & Kapadia (2014a) ως εξής:

> Συγκρίνονται δύο παιχνίδια. Στο πρώτο παιχνίδι, ο παίκτης κερδίζει αν φέρει τουλάχιστον ένα «έξι» σε τέσσερις ρίψεις ενός ζαριού. Στο δεύτερο παιχνίδι, ο παίκτης κερδίζει αν φέρει τουλάχιστον μια φορά «εξάρες» σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

Με μια πρώτη ματιά τα δύο παιχνίδια φαίνονται απόλυτα όμοια μεταξύ τους. Ο ίδιος ο de Méré υποστήριξε την άποψη αυτή με το επιχείρημα ότι στην πρώτη περίπτωση οι προσπάθειες (που τις έβλεπε ως «ευνοϊκές περιπτώσεις») είναι 4 και οι δυνατές περιπτώσεις είναι 6 και στη δεύτερη περίπτωση οι προσπάθειες («ευνοϊκές περιπτώσεις») είναι 24 και οι δυνατές είναι 36. Άρα οι λόγοι είναι ίσοι. Εντούτοις, από την εμπειρία του ως παίκτης[4] διαπίστωσε ότι το πρώτο παιχνίδι ευνοούσε τον παίκτη, ενώ το δεύτερο τον αδικούσε. Ο Pascal επικοινώνησε με τον Fermat θέτοντάς του το πρόβλημα. Έτσι ξεκίνησε μια μαθηματική ανάλυση του παιχνιδιού – μέσω αλληλογραφίας – με προσεκτική καταμέτρηση του δειγματικού χώρου που κατέληξε ότι η πιθανότητα επιτυχίας για κάθε ένα από τα παιχνίδια είναι αντίστοιχα (εικόνα 3):

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0{,}518 > \frac{1}{2}$$

$$P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}491 < \frac{1}{2}$$

Εικόνα 3: Υπολογισμός των πιθανοτήτων επιτυχίας στα δύο προβλήματα του Chevalier de Méré

Η επεξεργασία του προβλήματος αυτού έφερε στην επιφάνεια δύο πηγές σύγχυσης, σύμφωνα με τους Borovcnik & Kapadia (2014a). Πρώτον, τη χρήση του όρου «ευνοϊκές περιπτώσεις» για να περιγράψει τις επαναλήψεις του πειράματος που δεν είναι υποσύνολο των δυνατών περιπτώσεων, δείχνοντας ότι ο ρόλος τους πρέπει να ξεκαθαριστεί. Δεύτερον, μια σύγχυση μεταξύ πιθανότητας και αναμενόμενης τιμής. Κατασκευάζοντας έναν πίνακα αποτελεσμάτων σε μια αντιπροσωπευτική σειρά 100 ρίψεων των ζαριών, παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή για τα «εξάρια» (αντίστοιχα τις «εξάρες») είναι 66. Όμως στο δεύτερο παιχνίδι το στοίχημα χάνεται πιο συχνά, 51 φορές έναντι 48 στο πρώτο παιχνίδι (εικόνα 4). Αυτό συμβαίνει επειδή το δεύτερο παιχνίδι παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά.

[4] Αυτό αμφισβητείται ότι μπορεί να είναι αλήθεια (Borovcnik & Kapadia, 2014a; βλ. και Ore, 1960) λόγω του πλήθους των αναγκαίων δοκιμών.

Πόσο συχνά το αποτέλεσμα είναι	"έξι" στο πρώτο παιχνίδι	"εξάρες" στο δεύτερο παιχνίδι
0	48	51
1	39	35
2	12	11
3 ή περισσότερες	1	3
Αναμενόμενη τιμή	**66**	**66**
Κερδισμένο στοίχημα	**52**	**49**

Εικόνα 4: Αναμενόμενη τιμή και πλήθος επιτυχιών στα προβλήματα του Chevalier de Méré

Τη σύγχυση αυτή ο νορβηγός μαθηματικός Øystein Ore (1899 – 1968), που ασχολήθηκε με την ιστορία των μαθηματικών, την ονόμασε «reasoning on the mean» (ROTM) (Ore 1953, p. 150, όπως αναφέρεται στο Gorroochurn, 2011). Το παραπάνω παράδοξο συνέβαλε τα μέγιστα προς τη διάκριση μεταξύ των δύο εννοιών.

Το τρίτο παράδοξο ήταν και αυτό που έδωσε την ώθηση ώστε να γίνει πιο αποφασιστικό βήμα προς την αναβάθμιση των πιθανοτήτων σε επιστημονικό κλάδο. Το βήμα αυτό έγινε όταν οι Pascal και Fermat έλυσαν δι' αλληλογραφίας αυτό το πρόβλημα του οποίου η λύση χαρακτηρίζεται ως σημείο – σταθμός (break-through) στην ιστορία της θεωρίας των πιθανοτήτων από τον Ore (1960). Την εν λόγω αλληλογραφία εξέθεσε ο Pascal στο έργο του *Traité du Triangle Arithmétique (Treatise on the Arithmetical Triangle)* το 1654 και αφορά στο πρόβλημα με τον τίτλο «παράδοξο της διανομής του στοιχήματος»[5] (Székely, 1986; Borovcnik & Kapadia, 2014b; Gorroochurn, 2011):

> Δύο παίκτες παίζουν ένα δίκαιο παιχνίδι (δηλ. έχουν και οι δύο την ίδια πιθανότητα να νικήσουν) και έχουν συμφωνήσει ότι όποιος κερδίσει 6 γύρους πρώτος παίρνει ολόκληρο το βραβείο (που είναι προσυμφωνημένο). Ας υποθέσουμε ότι το παιχνίδι στην πράξη σταματά προτού κάποιος από αυτούς κερδίσει το βραβείο (π.χ. ο πρώτος

[5] Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι το ίδιο πρόβλημα κυκλοφορεί στη βιβλιογραφία με διαφορετικές εκδοχές τόσο ως προς τον αριθμό των γύρων που απαιτούνται για τη νίκη όσο και ως προς τον αριθμό των κερδισμένων γύρων για κάθε παίκτη τη στιγμή της διακοπής. Στο (Székely, 1986) αντιμετωπίζεται και η γενικευμένη περίπτωση του προβλήματος.

παίκτης έχει κερδίσει 5 και ο δεύτερος 3 γύρους). Πώς μπορεί να μοιραστεί το βραβείο δίκαια[6];

Αυτό το πρόβλημα φαινομενικά στερείται πιθανοτήτων όπως εύστοχα παρατηρούν οι Borovcnik & Kapadia (2014b). Εντούτοις, στα ιστορικά στοιχεία που παραθέτει ο Székely (1986) αναφέρεται ότι το συγκεκριμένο παράδοξο αρχικά αντιμετωπίστηκε αποτυχημένα ως πρόβλημα αναλογιών ακόμα και από μεγάλους μαθηματικούς προηγούμενων εποχών όπως ο Fra Luca Bartolomeo de Paccioli (περ. 1445 – 1517) και ο Niccolò Fontana Tartaglia (1499 – 1557) και εν τέλει επιτυχημένα ως πρόβλημα πιθανοτήτων από τους Pascal και Fermat το 1654. Λόγω αυτής της επιτυχίας, πάντα σύμφωνα με τον Székely (1986), η χρονολογία 1654 θεωρήθηκε από αρκετούς ως η γενέθλια χρονολογία της θεωρίας πιθανοτήτων, χαρακτηρίζοντας όσα αποτελέσματα προηγήθηκαν αυτής ως «προϊστορία» των πιθανοτήτων.

Σύμφωνα με τον Székely (1986), μία λανθασμένη απάντηση που δόθηκε από πολλούς μαθηματικούς – μεταξύ των οποίων και από τον ίδιο τον Paccioli[7] – ήταν να μοιραστεί το βραβείο ανάλογα με τους κερδισμένους γύρους, δηλαδή 5:3.

Ο Tartaglia, γνωστός για τη συνεισφορά του στην ανακάλυψη του γενικού τύπου λύσεων για τις εξισώσεις τρίτου βαθμού, στο πρόβλημα αυτό πρότεινε να μοιραστεί το βραβείο σε αναλογία 2:1. Το σκεπτικό του θα μπορούσε να είναι το εξής[8]: Ο πρώτος παίκτης είχε κερδίσει 2 γύρους περισσότερους από τον δεύτερο. Οι δύο αυτοί γύροι αποτελούν το ένα τρίτο των απαιτούμενων για να βγει ο τελικός νικητής. Οπότε ο πρώτος παίκτης πρέπει να πάρει το ένα τρίτο του βραβείου και κατόπιν το υπόλοιπο να μοιραστεί εξίσου στους δύο παίκτες.

Ο Cardano, που είχε ασχοληθεί με το πρόβλημα αυτό στο βιβλίο του *Practica Arithmetice* ήδη από το 1539 (σημειώσαμε και πιο πάνω ότι το πρόβλημα προϋπήρχε), είχε αντιληφθεί ότι η διανομή θα έπρεπε να βασιστεί στο πόσους γύρους έπρεπε να κερδίσει ακόμα ο κάθε παίκτης και όχι στο πόσους γύρους είχε ήδη κερδίσει. Παρά ταύτα, δεν μπόρεσε να δώσει το σωστό λόγο για τη μοιρασιά, καθώς θεώρησε ότι αν οι παίκτες Α και Β χρειάζονται α και β γύρους αντίστοιχα για να

[6] Σημείωση του συγγραφέα: Σιωπηρά δεχόμαστε ότι το βραβείο είναι τέτοιο στη φύση του ώστε να μπορεί να μοιραστεί με οποιονδήποτε τρόπο κι αν απαιτηθεί από τη λύση.

[7] όπως αναφέρει ο Gorroochurn (2011).

[8] σύμφωνα με τον Székely (1986), βλ. και Katz (2009).

νικήσουν, τότε ο λόγος της διανομής μεταξύ των Α και Β θα έπρεπε να είναι $\beta \cdot (\beta + 1) \ : \ \alpha \cdot (\alpha + 1)$ και έτσι κατέληξε στο λόγο 6:1 (Gorroochurn, 2011).

Οι Pascal και Fermat αντιμετώπισαν το ερώτημα ως πρόβλημα πιθανοτήτων. Με τέτοιο σκεπτικό, η δίκαιη μοιρασιά σχετίζεται με την πιθανότητα του κάθε παίκτη να κερδίσει το παιχνίδι. Σύμφωνα με τον Fermat, για να απαντήσουμε στο ερώτημα σωστά, θα συνεχίσουμε το παιχνίδι με τρεις φανταστικούς γύρους ακόμα κι αν κάποιοι από αυτούς φαίνονται περιττοί (διότι ένας από τους παίκτες έχει ήδη κερδίσει το παιχνίδι). Αυτή η επέκταση κάνει όλα τα δυνατά ενδεχόμενα ισοπίθανα. Έχουμε λοιπόν τα εξής 8 δυνατά αποτελέσματα υποθετικής συνέχισης του παιχνιδιού (AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB) από τα οποία μόνο το τελευταίο δίνει τη νίκη στον δεύτερο παίκτη. Επομένως η δίκαιη μοιρασιά του βραβείου απαιτεί λόγο 7:1 (Székely, 1986; Gorroochurn, 2011).

Οι Borovcnik & Kapadia (2014b) αναφέρουν ποιο είναι το σημαντικό σημείο συνεισφοράς στην εξέλιξη της θεωρίας των πιθανοτήτων από αυτό το παράδοξο. Αρχικά αναφέρονται στην παρατήρηση του Fermat ότι δεν έχει νόημα να μετρηθούν οι περιπτώσεις πραγματικής συνέχισης του παιχνιδιού, καθώς δεν μπορούν να θεωρηθούν ισοπίθανες. Έπειτα αναφέρονται στην υποθετική συνέχιση του παιχνιδιού ακόμα και κόντρα στους κανόνες του. Το παιχνίδι επεκτείνεται με υποθετικούς γύρους ώστε να επιτευχθούν περιπτώσεις ίσου μήκους – άρα ισοπίθανες – ακόμα κι αν ορισμένες από αυτές είναι αδύνατες στην πράξη (διότι το παιχνίδι θα έχει λήξει νωρίτερα). Η ανάγκη για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα έστω και αν παραβλέπονται οι κανόνες του παιχνιδιού αποτέλεσε ένα μεγάλο άλμα για την πληρέστερη κατανόηση της φύσης των πιθανοτήτων γιατί, όπως αναφέρουν οι Batanero et al. (2005), η προϋπόθεση της ίσης πιθανότητας για τα στοιχειώδη εξαγόμενα σε ένα δίκαιο παιχνίδι ήταν το πρώτο κριτήριο για να εκτιμηθεί η πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου που δημιουργείται από αυτά τα στοιχειώδη εξαγόμενα.

2. Τα Στοχαστικά Μαθηματικά στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

2.1. Η Στατιστική Εκπαίδευση σήμερα

Η στατιστική, βασικά, αφορά στη συλλογή και ανάλυση δεδομένων και τη λήψη αποφάσεων με βάση τα δεδομένα. Το σημείο εκκίνησης σε μια στατιστική μελέτη είναι ένα πραγματικό πρόβλημα που οδηγεί σε μερικά στατιστικά ερωτήματα που απαιτούν δεδομένα για να απαντηθούν (Batanero & Borovcnik, 2016). Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο (Burrill & Biehler, 2011) δύο είναι τα βασικά στοιχεία που διαφοροποιούν τη στατιστική από τα κλασικά μαθηματικά: (α) η μεταβλητότητα της στατιστικής έναντι της απολυτότητας των μαθηματικών και (β) ο ρόλος του γενικού πλαισίου. Στη στατιστική το πλαίσιο είναι που δίνει νόημα, ενώ στα μαθηματικά το πλαίσιο δίνει ευκαιρίες για εφαρμογές.

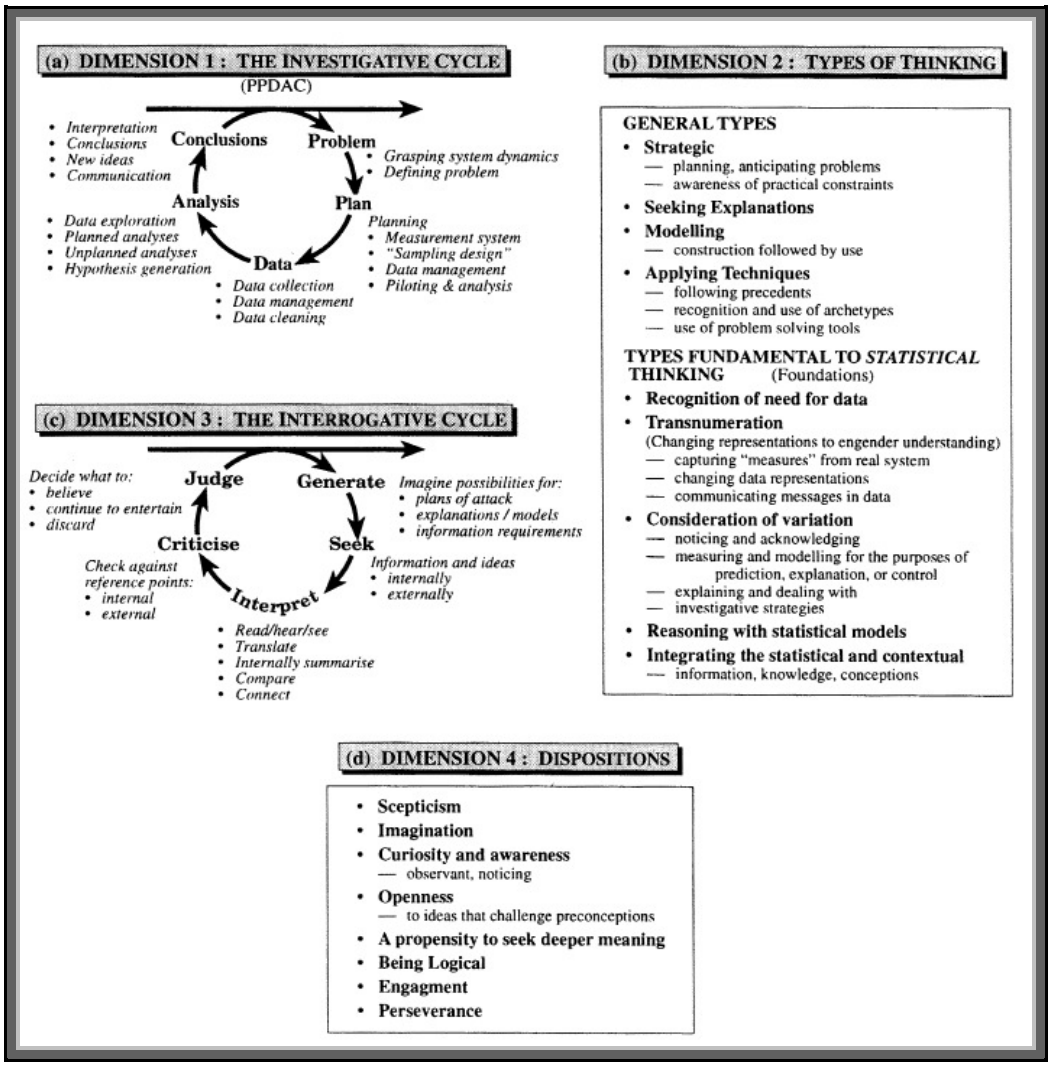
Για παράδειγμα (Batanero & Borovcnik, 2016), όταν μελετάμε τον όγκο ενός κυλίνδρου στα μαθηματικά, ο ίδιος τύπος ισχύει πάντα ανεξάρτητα από το αν ο κύλινδρος είναι ένα δοχείο χυμού ή μέρος ενός κτιρίου. Ωστόσο, στη στατιστική, ο τύπος δεδομένων και το πλαίσιο είναι απαραίτητα για την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου ανάλυσης και για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Ακόμα και αν οι υπολογισμοί στις στατιστικές διαδικασίες μπορούν να εκτελεστούν πλήρως με χρήση κατάλληλου λογισμικού, η απόφαση σχετικά με τις διαδικασίες και τις τεχνικές που πρέπει να χρησιμοποιηθούν και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων στο πλαίσιο των δεδομένων παραμένουν μια μεγάλη πρόκληση κατά τη διδασκαλία της στατιστικής.

Οι Burrill & Biehler (2011) διακρίνουν, επίσης, διαφορές και στα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν οι δύο κλάδοι:

- Στα (καθαρά) μαθηματικά η απόφαση για το τι να γίνει πιστευτό είναι απλή διότι τα συμπεράσματα προκύπτουν επαγωγικά από τον ορισμό και κάποιες συμφωνημένες αρχές. Στη στατιστική, η συλλογιστική είναι εν μέρει απαγωγική και τα συμπεράσματα πάντοτε αβέβαια.
- Ο βαθμός πίστης σε ένα στατιστικό συμπέρασμα εξαρτάται από την ακεραιότητα ολόκληρης της διερευνητικής διαδικασίας, ενώ στα (καθαρά) μαθηματικά μια απόδειξη επιβεβαιώνει το συμπέρασμα.

- Στη στατιστική, ο τρόπος συλλογής των δεδομένων και ο ρόλος της τυχαιότητας καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα, ενώ στα (καθαρά) μαθηματικά, η συλλογιστική είναι ανεξάρτητη από τα δεδομένα.

Οι Wild & Pfannkuch (1999) επιχείρησαν, μέσα από συνεντεύξεις με επαγγελματίες που χρησιμοποιούσαν στατιστική και με φοιτητές που εργάζονταν σε στατιστικά ερευνητικά έργα, να κατασκευάσουν ένα πλαίσιο που να οργανώνει τα στοιχεία του στατιστικού συλλογισμού. Το πλαίσιο προτείνει τέσσερις διαστάσεις στις οποίες κάποιος λειτουργεί συνεχώς και ταυτόχρονα. Οι διαστάσεις αφορούν σε όλους τους ανθρώπους αλλά οι πιο ειδικοί θα αποδίδουν στατιστικούς συλλογισμούς καλύτερης ποιότητας. Το μοντέλο των Wild & Pfannkuch (1999) φαίνεται στο επόμενο σχήμα (εικόνα 5):



Εικόνα 5: Οι διαστάσεις του στατιστικού συλλογισμού στο πλαίσιο των Wild & Pfannkuch

Η πρώτη διάσταση αποτελεί τον *ερευνητικό κύκλο (the investigative cycle)*. Ο κύκλος περιλαμβάνει τα βήματα *Πρόβλημα, Σχεδιασμός, Δεδομένα, Ανάλυση και Συμπέρασμα (Problem, Planning, Data, Analysis, Conclusion – PPDAC)*. Τα βήματα αναλύονται παρακάτω (Batanero & Borovcnik, 2016).

Πρόβλημα: οι λύτες κατανοούν το πρόβλημα και το θέτουν με στατιστικούς όρους.

Σχεδιασμός: οι λύτες αναπτύσσουν μια στρατηγική για τη λύση. Σχεδιάζουν πώς θα μετρήσουν κάποια μεταβλητή ποσότητα, με ποια μέθοδο θα επιλέξουν το δείγμα τους και πώς θα αναλύσουν τα δεδομένα τους.

Δεδομένα: οι λύτες συλλέγουν τα δεδομένα τους. Πρέπει να αναφερθεί ότι η στατιστική κατανόηση αυξάνεται όταν εμπλέκονται στο σχεδιασμό ενός εργαλείου για τη συλλογή των δεδομένων. Μετά τη συλλογή, τα δεδομένα τοποθετούνται σε κατάλληλο λογισμικό. Ίσως χρειαστεί και κάποια επεξεργασία των δεδομένων.

Ανάλυση: Αφού συλλεχθούν και καθαριστούν τα δεδομένα, η ανάλυση μπορεί να ξεκινήσει. Αν οι λύτες δεν έχουν κάποια ιδέα για το τι μπορούν να βρουν, θα μπορούσαν να διεξάγουν *διερευνητική ανάλυση δεδομένων (exploratory data analysis – EDA)*. Σε άλλες περιπτώσεις χρειάζεται *συμπερασματική ανάλυση (inferential analysis)* κατά την οποία ένα συμπέρασμα για το δείγμα γενικεύεται (υπό τις σχετικές προϋποθέσεις) στο γενικό πληθυσμό.

Συμπέρασμα: Στο τέλος έρχεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων με αναφορά στο πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος ώστε να απαντηθεί το αρχικό ερώτημα.

Η δεύτερη διάσταση περιλαμβάνει κάποιους *τύπους συλλογιστικής (types of thinking)* τόσο γενικούς (*Στρατηγική, Αναζήτηση εξηγήσεων, Μοντελοποίηση, Εφαρμογή τεχνικών*) όσο και πιο ειδικούς πάνω στη στατιστική συλλογιστική. Οι τελευταίοι αναλύονται από τους Batanero & Borovcnik (2016) ως εξής:

Αναγνώριση της ανάγκης για δεδομένα: Τα δεδομένα θεωρούνται πρωταρχική ανάγκη για αποφάσεις σε πραγματικές καταστάσεις Ένα σημαντικό μέρος της στατιστικής σκέψης είναι η αναγνώριση σημείων τα οποία απαιτούν νέα δεδομένα.

Μετα – αρίθμηση (transnumeration): Ο όρος επινοήθηκε από τους Wild & Pfannkuch (1999) και ορίζεται από τους ίδιους ως *αριθμητικοί μετασχηματισμοί που γίνονται για να διευκολύνουν την κατανόηση – numeracy transformations made to facilitate understanding* (p. 227). Αναφέρεται στην οπτικοποίηση των δεδομένων με ποικιλία αναπαραστάσεων με σκοπό την κατανόηση της κατάστασης.

Στοχασμός για τη μεταβλητότητα: Αναφέρεται στη διάκριση της στατιστικής από τη μαθηματική (ντετερμινιστική) μεταβλητότητα. Επίσης, στη γνώση των διαφόρων πηγών μεταβλητότητας: φυσικές μεταβολές του πληθυσμού, σφάλματα μέτρησης ή μεταβολές κατά τη δειγματοληψία. Ακόμα, στον έλεγχο της μεταβλητότητας όταν είναι γνωστή η αιτία.

Δικαιολόγηση με στατιστικά μοντέλα: Υπάρχει ένα ευρύ φάσμα στατιστικών μοντέλων που αναπτύχθηκαν ειδικά για την ανάλυση δεδομένων. Η χρήση μοντέλων είναι εκ των ουκ άνευ για τη στατιστική.

Σύνθεση στατιστικών γνώσεων και γνώσεων περιεχομένου: Σύνθεση των δύο τύπων γνώσης είναι αναγκαία επειδή η μεν σύνοψη της εργασίας θα συνθέτει, θα ερμηνεύει και θα γενικεύει την κατάσταση (όταν είναι δυνατό), στο δε τελικό στάδιο αυτής θα αποφασιστεί κατά πόσο η λύση είναι εύλογη και εφαρμόσιμη μέσα στο πλαίσιο.

Η τρίτη διάσταση είναι *ο κύκλος των ερωτήσεων (the interrogative cycle)*. Περιλαμβάνει τα βήματα *Παράγω, Αναζητώ, Ερμηνεύω, Κρίνω, Αποφασίζω* που αναλύονται ως εξής (Wild & Pfannkuch, 1999):

Παράγω: Πρώτο βήμα είναι ο καταιγισμός ιδεών (brainstorming) ατομικά ή συλλογικά για την εύρεση πιθανών εξηγήσεων και μηχανισμών που ερμηνεύουν το πρόβλημα, δηλαδή η δημιουργία υποθέσεων.

Αναζητώ: Ακολουθεί αναζήτηση σχετικών πληροφοριών εσωτερικά ή εξωτερικά. Εσωτερική είναι η αναζήτηση στη μνήμη ιδίων εμπειριών ή γνώσεων, ενώ εξωτερική είναι η συζήτηση με άλλους (ερευνητές, επαγγελματίες) και η εύρεση βιβλιογραφίας.

Ερμηνεύω: Αναφέρεται στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων της αναζήτησης.

Κρίνω: Αναστοχασμός όλης της διαδικασίας και έλεγχος της εσωτερικής συνέπειας των αποτελεσμάτων καθώς και σε σχέση με κάποια σημεία αναφοράς.

Αποφασίζω: Αποτελεί το αποτέλεσμα του προηγούμενου βήματος μετά από το ξεκαθάρισμα όσων κρίθηκαν μη-σχετικά και τη σύνθεση όσων κρίθηκαν σχετικά με το πρόβλημα. Είναι αυτό που μένει ως αποτέλεσμα όλης της διαδικασίας.

Η τέταρτη διάσταση λέγεται *διαθέσεις (dispositions)*. Περιλαμβάνει προσωπικές στάσεις που επηρεάζουν το στατιστικό συλλογισμό. Αυτές θα αναφερθούν επιγραμματικά: *Σκεπτικισμός, Φαντασία, Περιέργεια και επίγνωση, Ανοιχτότητα, Αναζήτηση βαθύτερου νοήματος, Λογική σκέψη, Δέσμευση, Επιμονή* (Wild & Pfannkuch, 1999).

Όπως θα δούμε στη συνέχεια η στατιστική συλλογιστική διαφέρει και από τη συλλογιστική με πιθανότητες αν και η δεύτερη αποτελεί κομμάτι της πρώτης.

2.2. Συλλογιστική με πιθανότητες (Probabilistic Thinking)

Ο Dietger Heitele (1975) έδωσε έναν κατάλογο θεμελιωδών ιδεών, οι οποίες συνολικά θα πρέπει να αποτελούν τις διάφορες διαστάσεις του συλλογισμού με πιθανότητες. Αυτές απαριθμούνται από τον Borovcnik (2005) ως εξής: υπολογισμός του βαθμού εμπιστοσύνης, δειγματικός χώρος, προσθετικός νόμος, ανεξαρτησία, ομοιόμορφη κατανομή και συμμετρία, συνδυαστική για να μετρηθούν οι ισοπίθανες περιπτώσεις, μοντέλα με κληρωτίδες και προσομοίωση, η ιδέα ενός δείγματος που να αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό, η ιδέα μιας τυχαίας μεταβλητής και η κατανομή της, νόμος των μεγάλων αριθμών.

Οι Burrill & Biehler (2011), αναφερόμενοι στον κατάλογο του Heitele, σχολιάζουν ότι αυτές οι έννοιες επελέγησαν ως θεμελιώδεις επειδή, μεταξύ άλλων, (α) είναι ισχυρές καθώς κάθε μία συνέβαλε την ανάδειξη της πιθανότητας σε μαθηματική θεωρία, (β) μπορούν να διδαχθούν σε διαφορετικά επίπεδα στο πρόγραμμα σπουδών, από το δημοτικό σχολείο έως το πανεπιστήμιο και οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν στην τυποποίηση και συμπλήρωσή τους και (γ) εμφανίζονται στις περισσότερες τυχαίες καταστάσεις.

Ο Borovcnik (2011, όπως αναφέρεται από τους Batanero & Borovcnik, 2016) περιέγραψε το συλλογισμό με πιθανότητες επεξεργαζόμενος τα ακόλουθα στοιχεία: α) *την ικανότητα εξισορρόπησης μεταξύ ψυχολογικών και τυπικών στοιχείων της πιθανότητας κατά τη χρήση μιας προσωπικής κλίμακας για την πιθανότητα*, β) *την κατανόηση ότι δεν υπάρχουν κριτήρια βέβαιης επιτυχίας σε τυχαίες καταστάσεις*, γ) *την ικανότητα διάκρισης μεταξύ τυχαιότητας και αιτιότητας* και δ) *την κατανόηση της διαφοράς μεταξύ της μελέτης ενός προβλήματος και της λήψης απόφασης*.

Άλλα στοιχεία του συλλογισμού με πιθανότητες είναι τα εξής (Batanero & Borovcnik, 2016):

1) *Επίδραση των προηγούμενων πιθανοτικών κρίσεων:* Πρόκειται για τη συνειδητοποίηση ότι πολλές πιθανότητες εξαρτώνται από άλλες (προηγούμενες)

πιθανότητες και για το λόγο αυτό οι πιθανότητες αυτές πρέπει να συνδέονται με την κατάλληλη υπο-ομάδα.

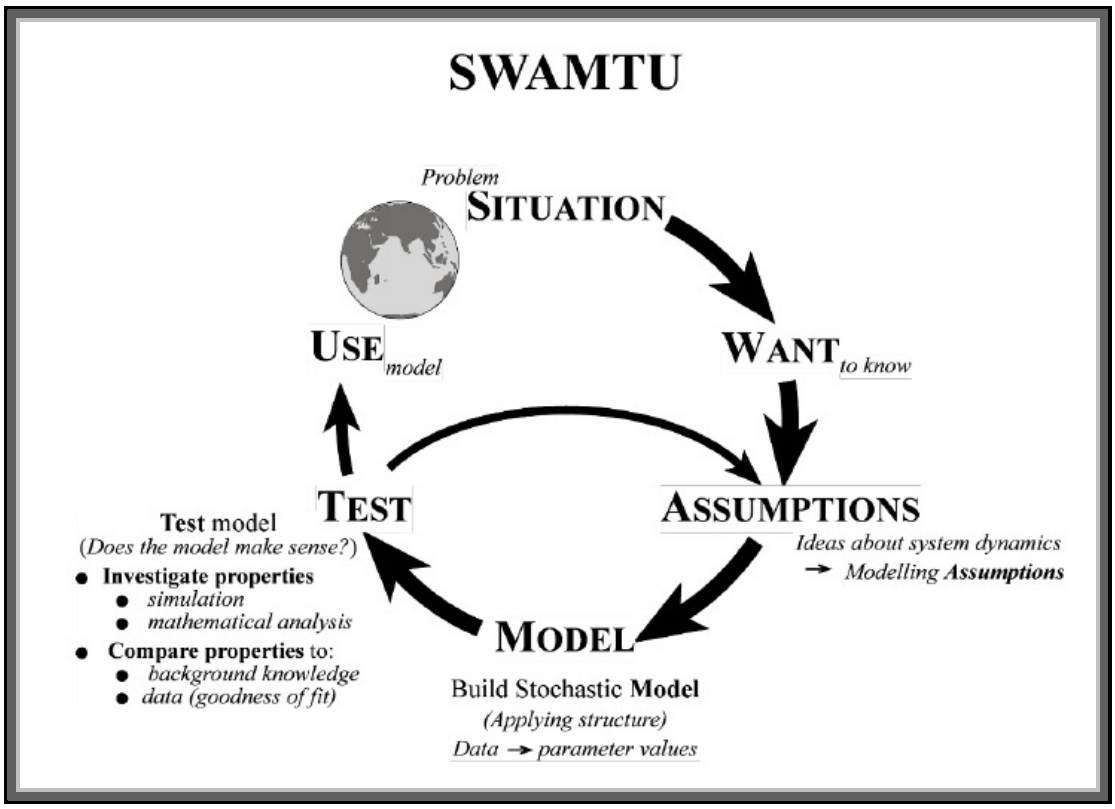
2) *Ασυμμετρία δεσμευμένων πιθανοτήτων:* Το κλειδί για την αντιμετώπιση των πιθανοτήτων και για την ορθή ερμηνεία τους είναι η κατανόηση ότι οι δεσμευμένες πιθανότητες δημιουργούν μια μη συμμετρική σχέση μεταξύ ενδεχομένων.

3) *Θεωρητικός χαρακτήρας της ανεξαρτησίας:* Η εφαρμογή της ανεξαρτησίας είναι συχνά εγγενής απαίτηση των μοντέλων με πιθανότητες αλλά είναι δύσκολο να ελεγχθεί εάν είναι πράγματι κατάλληλη υπόθεση. Παρά το αφηρημένο νόημά της, η ανεξαρτησία είναι μια κύρια έννοια στις πιθανότητες, καθώς οι συχνότητες έχουν νόημα μόνο εάν τα πειράματα πραγματοποιούνται «ανεξάρτητα».

4) *Το πρόβλημα των μικρών πιθανοτήτων:* Η ερμηνεία των μικρών πιθανοτήτων κατάλληλα είναι εξαιρετικά δύσκολη. Οι μικρές (δεσμευμένες) πιθανότητες των παρατηρούμενων αποτελεσμάτων χρησιμοποιούνται για να απορριφθεί η υπόθεση στην επαγωγική στατιστική αλλά αυτό δεν καθιστά ανίσχυρη την υπόθεση με την έννοια της λογικής. Είναι δύσκολο αλλά απαραίτητο να κατανοήσουμε τη λογική ενός τεστ σημαντικότητας, καθώς αποδυναμώνει τις μαθηματικές αποδείξεις κάνοντας χρήση εμπειρικών στοιχείων.

5) *Η συσχέτιση ως εξάρτηση με πιθανότητες:* Η κατανόηση ότι η συσχέτιση βασίζεται στις πιθανότητες και συνιστά μια πολύ πιο αδύναμη μορφή σχέσης από τη λειτουργική εξάρτηση. Επιπλέον, είναι σημαντικό να γίνει δεκτό ότι η συσχέτιση μπορεί να αυξηθεί, να παραχθεί ή να μεταβληθεί από άλλες μεταβλητές ή γεγονότα που συχνά παραμελούνται. Μια σωστή ερμηνεία της συσχέτισης σηματοδοτεί ένα μεγάλο βήμα προς τη συλλογιστική με πιθανότητες.

Οι Pfannkuch, Budgett, Fewster, Fitch, Pattenwise, Wild & Ziedins (2016) έκαναν μία προσπάθεια να βρουν τα δομικά στοιχεία της μοντελοποίησης καταστάσεων σχετικές με πιθανότητες και τις μεταξύ τους συνδέσεις. Προς τούτο, πήραν συνεντεύξεις από επτά επαγγελματίες διαφορετικών κλάδων που ασχολούνται με τη λήψη αποφάσεων ή διδάσκουν πιθανότητες. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ένα σχήμα που οι ερευνητές καλούν *κύκλο της μοντελοποίησης των πιθανοτήτων (probability modeling cycle).* Αυτός αποτελείται από έξι στάδια: *Κατάσταση (Situation), Επιθυμία (Want), Υποθέσεις (Assumptions), Μοντέλο (Model), Έλεγχος (Test), Χρήση (Use)* (συντομογραφικά SWAMTU). Η αλληλεπίδραση μεταξύ των σταδίων φαίνεται στο επόμενο σχήμα (εικόνα 6).



Εικόνα 6: Ο κύκλος μοντελοποίησης των πιθανοτήτων των Pfannkuch et. al.

Πρόβλημα / Κατάσταση: Η μοντελοποίηση γίνεται σε μία πραγματική κατάσταση. Εκτός από την ίδια την κατάσταση χρειάζεται να ληφθεί υπόψη και σχετική γνώση περιεχομένου (π.χ. εξειδικευμένη βιβλιογραφία).

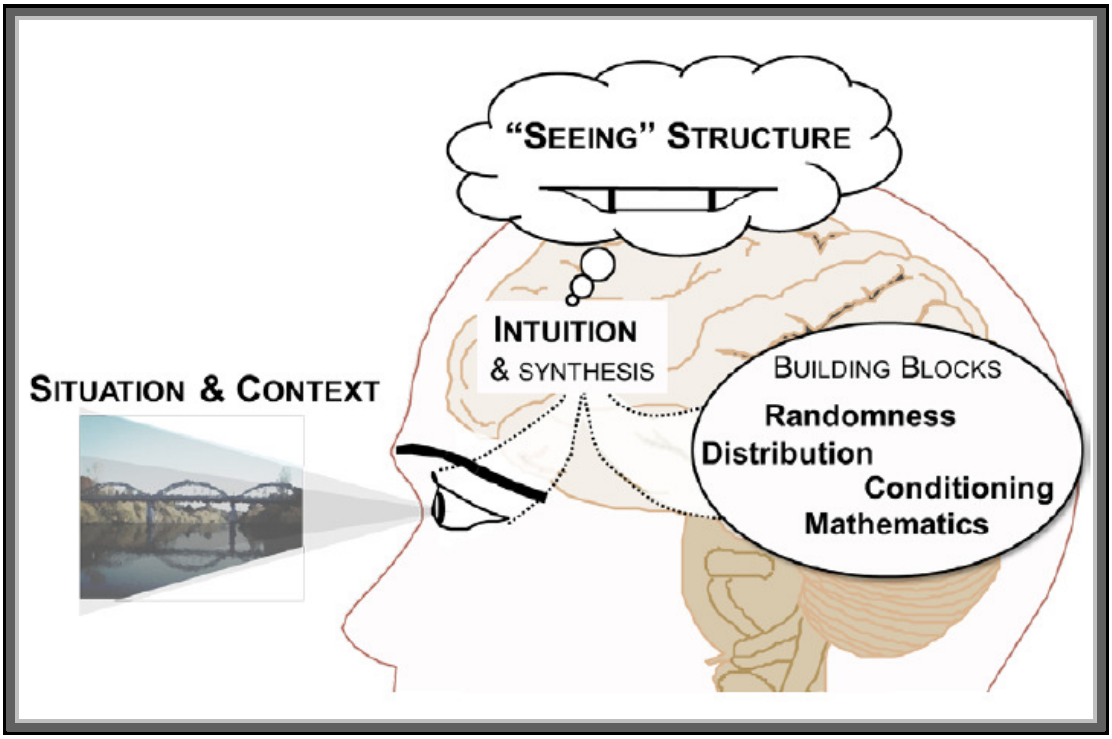
Επιθυμία να μάθω: Κίνητρο για τη διαδικασία μοντελοποίησης με πιθανότητες είναι το τι θέλουμε να μάθουμε. Οι απαντήσεις τροφοδοτούν έμμεσα τη διαδικασία μοντελοποίησης με πιθανότητες επειδή ορίζουν τον τύπο της πρόβλεψης που πρέπει να παρέχει το στοχαστικό μοντέλο.

Υποθέσεις: Ένα μοντέλο είναι μια προσέγγιση της πραγματικότητας και απαιτούνται ορισμένες υποθέσεις για να αποφασιστεί ποιος τύπος προσέγγισης μπορεί να είναι ο πλέον κατάλληλος. Για παράδειγμα, όσον αφορά στην πρόβλεψη του καιρού, η υπόθεση της ανεξαρτησίας των καιρικών συνθηκών διαδοχικών ημερών ίσως δεν αποτελεί καλή υπόθεση.

Μοντέλο: Εισαγωγή μαθηματικών δομών αφαιρετικά είτε από μια λεκτική περιγραφή είτε από τις πραγματικές περιστάσεις, ανάλογα με το είδος του προβλήματος που προσπαθούσαν να λύσουν.

Έλεγχος: Προσομοίωση, προκειμένου να συγκριθούν τα δεδομένα που παράγονται από το μοντέλο με τα πραγματικά δεδομένα και να διαπιστωθεί εάν το μοντέλο παράγει δεδομένα με παρόμοιες ιδιότητες και χαρακτηριστικά. Αν δεν ταιριάζουν, ίσως χρειάζεται επιστροφή στο στάδιο των υποθέσεων. Επίσης, το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία προβλέψεων.
Χρήση: Η χρήση του μοντέλου μπορεί να μην είναι πάντα επιτυχημένη. Επειδή πρόκειται για προσέγγιση της πραγματικότητας, σε πολλές περιπτώσεις το μοντέλο θα κατευθύνει σε σωστές αποφάσεις αλλά ενδέχεται να υπάρχουν και φορές κατά τις οποίες η προσέγγιση είναι ανεπαρκής, με αποτέλεσμα κακές αποφάσεις.

Η έρευνα των Pfannkuch et al. (2016) υποστηρίζει ότι η ικανότητα να βλέπει κανείς συγκεκριμένες δομές μέσα σε ένα πραγματικό πρόβλημα βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη ενός είδους διαίσθησης, που δομείται από τέσσερις διασυνδεδεμένους δομικούς λίθους: *τυχαιότητα (randomness)*, *κατανομή (distribution)*, *δεσμεύσεις (conditioning)* και *μαθηματικά (mathematics)*, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα (εικόνα 7).



Εικόνα 7: Η διαίσθηση και οι δομικοί λίθοι της σύμφωνα με την έρευνα των Pfannkuch et. al.

Για να ενισχύσουμε περισσότερο την αξία της διαίσθησης, θα μπορούσαμε στο σημείο αυτό να παραθέσουμε τη ρήση του Albert Einstein:

> «Πιστεύω στη διαίσθηση και στην έμπνευση... Η φαντασία είναι πιο σημαντική από τη γνώση. Διότι η γνώση είναι περιορισμένη, ενώ η φαντασία αγκαλιάζει ολόκληρο τον κόσμο[9]». (Einstein & Shaw, 2009, p. 97).

Οι δομικοί λίθοι για την ανάπτυξη της απαιτούμενης διαίσθησης αναλύονται από τους Pfannkuch et al. (2016) ως εξής:

Τυχαιότητα: Η ικανότητα να κατανοήσουμε και να μοντελοποιήσουμε την τυχαιότητα, τόσο μαθηματικά όσο και εμπειρικά, είναι θεμελιώδης δομικός λίθος της συλλογιστικής με πιθανότητες. Η έννοια της τυχαιότητας περιλαμβάνει και τις εκφάνσεις της, όπως τύχη, μεταβολή, τυχαία μεταβλητή, νόμος των μεγάλων αριθμών, διακύμανση και άλλα.

Κατανομή: Η κατανομή είναι το κλειδί για την αναγνώριση της δομής ενός πραγματικού προβλήματος και τη δημιουργία των υποθέσεων που θα το περιγράφουν.

Δεσμεύσεις (conditioning): Δεσμεύσεις που συνδυάζονται με ιδέες όπως ο δειγματικός χώρος, η ανεξαρτησία, η συνδιακύμανση και η συσχέτιση προσδιορίστηκαν ως κεντρικά στοιχεία για την αναγνώριση της δομής σε προβληματικές καταστάσεις. Για κάποιους το θεώρημα διαχωρισμού βρίσκεται στον πυρήνα.

Μαθηματικά: τα μαθηματικά είναι θεμελιώδη από την έννοια του αριθμού ως τα αξιώματα για την κατάκτηση συλλογισμού και μοντελοποίησης με πιθανότητες.

Σχετικά με τις μεθόδους διδασκαλίας των πιθανοτήτων και της στατιστικής, οι Batanero & Borovcnik (2016) σχολιάζουν ότι συχνά οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν πληροφορίες, όπως ορισμοί νέων εννοιών ή παραδείγματα διαδικασιών για την επίλυση στατιστικών προβλημάτων, και στη συνέχεια δίνουν ασκήσεις στους μαθητές για να εξασκηθούν σε αυτό που έμαθαν. Συνέπεια είναι η μάθηση ρουτίνας όπου οι μαθητές εφαρμόζουν τους τύπους χωρίς να κατανοούν βαθύτερα τις υποκείμενες έννοιες. Μια τέτοια παραδοσιακή προσέγγιση διδασκαλίας, βασισμένη σε δομημένα μαθήματα και απλές ασκήσεις, φαίνεται να αποτυγχάνει να αναπτύξει στατιστικό και

---

[9] *"I believe in intuition and inspiration... Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited, whereas imagination embraces the entire world".*

πιθανοτικό εγγραμματισμό στους μαθητές και να αποδώσει νόημα στις έννοιες και τις διαδικασίες.

Προκειμένου να βελτιωθεί η κατάσταση, οι ερευνητές συνιστούν τον επαναπροσανατολισμό της διδασκαλίας της στατιστικής περισσότερο προς την τεκμηρίωση και τη νοηματοδότηση. Οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να κατανοήσουν τους στόχους και τους περιορισμούς και να εικάσουν μια πιθανή πορεία επίλυσης. Μπορούν, για παράδειγμα, να εξετάσουν παρόμοια προβλήματα που έχουν επιλυθεί ή να επιλύσουν μια απλούστερη μορφή του αρχικού προβλήματος. Επιπλέον, συνιστώνται πειράματα και δημιουργικές εργασίες ως κεντρικές μέθοδοι για τη διδασκαλία της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να συνδέονται με προβλήματα πραγματικού κόσμου ή/και να περιέχουν πραγματικά ή προσομοιωμένα δεδομένα. Τέτοιες εργασίες και έρευνες αποτελούν καταλύτη για την εμπλοκή των μαθητών, για την εκμάθηση της επίλυσης προβλημάτων μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, για την ανάπτυξη δεξιοτήτων στατιστικού συλλογισμού και για τη σύνθεση της μάθησης. Πάνω από όλα, τα έργα διευκολύνουν τους μαθητές να δίνουν νόημα στις εργασίες της στατιστικής. Μια άλλη στρατηγική είναι και η οργάνωση των μαθητών σε ομάδες, όπου πιο προχωρημένοι μαθητές βοηθούν τους συμμαθητές τους.

Για τη σχέση των πιθανοτήτων με τη στατιστική, οι Batanero et. al (2016) σημειώνουν ότι ενώ η συλλογιστική με πιθανότητες αρχίζει με μοντέλα, διερευνά διάφορα σενάρια και αποσκοπεί στη ταύτιση των δεδομένων με κάποιο μοντέλο, η στατιστική συλλογιστική προσπαθεί να κατανοήσει τα παρατηρούμενα δεδομένα, αναζητώντας κατάλληλα μοντέλα που προσαρμόζονται σε αυτά και μπορούν να τα εξηγήσουν. Πρόκειται για τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος.

Ο συλλογισμός με πιθανότητες διαφέρει εξάλλου από τη δίτιμη λογική όπου μια δήλωση είναι είτε αληθής είτε ψευδής και ακολουθεί διαφορετικούς κανόνες από αυτή (Batanero et al., 2016). Ως παράδειγμα αναφέρεται το παράδοξο με το μη-μεταβατικό ζάρι, όπως περιγράφεται από τον Savage (1994), όπου ο παίκτης που θα επιλέξει δεύτερος ζάρι αποκτάει και το πλεονέκτημα στο παιχνίδι.

Επιπλέον, το επιστημονικό πεδίο των πιθανοτήτων είναι γεμάτο με διαισθητικές προκλήσεις και παράδοξα, ενώ οι παρανοήσεις και οι πλάνες είναι άφθονες (Borovcnik και Kapadia, 2014b; Leviatan, 2002; Székely, 1986; Heitele, 1975). Αυτά

τα απροσδόκητα αποτελέσματα εμφανίζονται ακόμα και από τα πρωταρχικά στάδια, όταν σε άλλους επιστημονικούς κλάδους εμφανίζονται μόνο όταν δουλεύουμε σε υψηλό επίπεδο αφαίρεσης (Batanero & Sanchez, 2005).

Επίσης, τα προβλήματα που σχετίζονται με πιθανότητες μας βγάζουν πολύ γρήγορα έξω από το μοντέλο και μας οδηγούν στις εφαρμογές. Για παράδειγμα, η ανεξαρτησία όπως ορίζεται από τον πολλαπλασιαστικό κανόνα, σπάνια χρησιμοποιείται για την απόδειξη της ανεξαρτησίας σε ένα συγκεκριμένο πείραμα (Batanero & Díaz, 2012).

Οι Batanero & Díaz (2012) περιγράφουν τη διαφορετικότητα στη φύση των πιθανοτήτων πολύ παραστατικά ως εξής: Στην αριθμητική ή τη γεωμετρία, μια στοιχειώδης διαδικασία μπορεί να αντιστραφεί. Αν ενώσουμε δύο μήλα και τρία μήλα, έχουμε πάντοτε ένα σύνολο πέντε μήλων και, αφαιρώντας τα τρία μήλα από το σύνολο, επιστρέφουμε στην αρχική κατάσταση. Αυτές οι διαδικασίες βοηθούν τα μικρά παιδιά να δουν τη μαθηματική δομή που βρίσκεται πίσω από τα υλικά και να οδηγηθούν σε αφηρημένο συλλογισμό. Στην περίπτωση ενός τυχαίου πειράματος, αντίθετα, λαμβάνουμε διαφορετικά αποτελέσματα κάθε φορά που επαναλαμβάνουμε το πείραμα και δεν μπορεί να γίνει αντιστροφή του πειράματος και να πάρουμε πάλι το αρχικό αποτέλεσμα.

2.3. Διαφορετικές προσεγγίσεις της πιθανότητας

Σύμφωνα με τον Hacking (1975, όπως αναφέρεται στο Batanero, Chernoff, Engel, Lee & Sánchez, 2016), η πιθανότητα κατανοήθηκε με δύο κύριες, μολονότι διαφορετικές, οπτικές από τότε που πρωτοεμφανίστηκε. Μια *στατιστική* πλευρά, όπου οι πιθανότητα προσδιορίζεται μέσω δεδομένων που συλλέγονται από έρευνες και πειράματα και μια *επιστημολογική* πλευρά που βλέπει την πιθανότητα ως έναν προσωπικό βαθμό πίστης, που εξαρτάται από τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες στο άτομο που την αποδίδει. Από αυτές τις κύριες οπτικές πηγάζουν οι σύγχρονες θεωρήσεις για την πιθανότητα: διαισθητική, κλασική, σχετικών συχνοτήτων, υποκειμενική, λογική, ροπών και αξιωματική. Κάθε μία από αυτές τις θεωρήσεις είναι πιο κατάλληλη για διαφορετική χρήση στην έρευνα και τη διδασκαλία (Batanero et al., 2016).

Σύμφωνα με τους Borovcnik & Kapadia (2014a) οι τρεις κύριες προσεγγίσεις της φύσης της πιθανότητας που σχετίζονται με τα σχολικά μαθηματικά είναι η Κλασική εκ των Προτέρων Θεωρία (Classical a Priori Theory – APT), η Θεωρία των Σχετικών Συχνοτήτων (Frequentist Theory – FQT) και η Υποκειμενική Θεωρία (Subjectivist Theory – SJT).

Η Κλασική εκ των Προτέρων Θεωρία (Classical a Priori Theory – APT) ακολουθεί τον ορισμό που, όπως αναφέρεται από τη Batanero (2015), δόθηκε αρχικά από τον de Moivre το 1718 και βελτιώθηκε από τον Laplace το 1812, σύμφωνα με τον οποίο πιθανότητα είναι απλά το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο ενός πειράματος διαιρούμενο με το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων για το πείραμα. Οι Borovcnik & Kapadia (2014a) σχολιάζουν ότι ο ορισμός αυτός προϋποθέτει ίση πιθανότητα για όλα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου και μια τέτοια προσέγγιση επιτρέπει τον υπολογισμό πιθανοτήτων πριν την εκτέλεση οποιασδήποτε δοκιμής του πειράματος. Στη βιβλιογραφία η θεωρία αυτή απαντάται και ως «θεωρητική πιθανότητα» (Hawkins & Kapadia, 1984; Pratt, 2011).

Σύμφωνα με τους Borovcnik & Kapadia (2014a), για να εφαρμοστεί αυτή η θεωρία πρέπει να αποφασιστεί ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα τα οποία είναι ισοπίθανα. Μια φαινομενική συμμετρία δεν αποτελεί ισχυρό επιχείρημα. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι ένα φυσικό πείραμα μπορεί να παρουσιάζει διάφορες συμμετρίες και είναι υποκειμενικό το ποια θα επιλέξουμε. Επιπλέον, πώς μπορεί κανείς να αποδώσει πιθανότητες σε μη συμμετρικές καταστάσεις; Τέλος, οι Batanero et al. (2005) αναφέρουν ότι ίση πιθανότητα θα προέκυπτε δύσκολα από περίπλοκες ανθρώπινες και φυσικές καταστάσεις πέρα από τα τυχερά παιχνίδια.

Η Θεωρία των Σχετικών Συχνοτήτων (Frequentist Theory – FQT) θέλει η πιθανότητα ενός ενδεχομένου να προσεγγίζεται από τις παρατηρούμενες σχετικές συχνότητες του ενδεχομένου σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές του πειράματος και, υπό αυτή την έννοια, είναι μία εκ των υστέρων πιθανότητα (Borovcnik & Kapadia, 2014a). Στη βιβλιογραφία συναντάμε επίσης τους όρους «εμπειρική πιθανότητα» (Hawkins & Kapadia, 1984; Konold, 1991) και «πειραματική πιθανότητα» (Pratt, 2011). Ως πιθανότητα ορίζουμε το όριο προς το οποίο τείνει η σχετική συχνότητα και ως εκ τούτου αυτή καθ' αυτή η πιθανότητα δεν υπολογίζεται ποτέ ακριβώς αλλά

πάντοτε εκτιμάται (Borovcnik & Kapadia, 2014a). Κεντρική θέση στη θεωρία αυτή κατέχει ο νόμος των μεγάλων αριθμών. Σύμφωνα με όσα γράφει ο Steinbring (1991a), εμπεριέχεται εδώ μια κυκλικότητα που δημιουργείται από τη ζεύξη μεταξύ εμπειρικής κατάστασης και μαθηματικού μοντελισμού. Αυτή η κυκλικότητα ή αυτοαναφορικότητα υπονοεί ότι η γνώση πρέπει να ερμηνεύεται σε όλα τα στάδια ανάπτυξής της ως πολύπλοκη δομή που δεν εκτείνεται γραμμικά ή επαγωγικά, αλλά απαιτεί μια συνεχή ποιοτική αλλαγή σε όλες τις έννοιες της θεωρίας (Steinbring, 1991a). Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε από τον Richard Edler von Mises (1883 – 1953) και, σύμφωνα με τους Borovcnik & Kapadia (2014a), ο ορισμός φαίνεται να βασίζεται περισσότερο σε γεγονότα παρά σε υποθέσεις και είναι δυνατόν να εφαρμοστεί ανεξαρτήτως συμμετρίας.

Κι όμως, συνεχίζουν οι ίδιοι ερευνητές, ακόμη κι αν η προσέγγιση μέσω σχετικών συχνοτήτων είναι διαισθητικά αξιόπιστη για την κατανόηση της μακροχρόνιας συμπεριφοράς ενός τυχαίου πειράματος, αυτή η προσέγγιση συναντά κάποια πρακτικά προβλήματα όταν είναι δύσκολο ή αδύνατο να επαναληφθεί το πείραμα πολλές φορές. Ακόμα κι έτσι, δεν είναι σαφές πόσες δοκιμές χρειάζονται για μια καλή εκτίμηση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου (Batanero et al., 2005; Batanero, 2015). Τέλος, δεν είναι σίγουρο ότι μπορούν να υπολογιστούν οι σχετικές συχνότητες ούτε ποια είναι το όριά τους (Borovcnik & Kapadia, 2014a).

Η Υποκειμενική Θεωρία (Subjectivist Theory – SJT) υποστηρίζει ότι πιθανότητες είναι οι εκτιμήσεις που γίνονται από κάθε άτομο ξεχωριστά για κάθε ενδεχόμενο. Για παράδειγμα, ενδεικτικό για το μέτρο της πιθανότητας που αποδίδει κάποιος σε ένα ενδεχόμενο θα μπορούσε να είναι το ποσό που θα ήταν διατεθειμένος να ποντάρει στην πραγματοποίηση του ενδεχομένου για κάποιο προκαθορισμένο όφελος. Σύμφωνα με τους Hawkins & Kapadia (1984) «σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό η πιθανότητα είναι μια έκφραση προσωπικής πίστης ή αντίληψης» (p.349). Διαφέρει από άτομο σε άτομο αλλά, τηρουμένων κάποιων προϋποθέσεων συνοχής και συνέπειας, αυτό δεν πειράζει. Κατά τη θεωρία αυτή συνδυάζονται εκ των προτέρων πληροφορίες και εκ των υστέρων δεδομένα για να αποδοθούν νέες πιθανότητες που κατά καιρούς επικαιροποιούνται (Borovcnik & Kapadia, 2014a).

Μια τέτοια θεώρηση κρίνεται από τους παραπάνω συγγραφείς υπερβολικά υποκειμενική, αφού δε δίνει τρόπο να προϋπολογιστούν οι πιθανότητες. Φαινομενικά συγχέει την αίσθηση με τα γεγονότα. Είναι, όμως, ιδανική όταν απουσιάζει τόσο η

συμμετρία, όσο και τα δεδομένα για τη χρήση των δύο προηγούμενων προσεγγίσεων. Σύμφωνα με τους Batanero et al. (2005), για τους υποκειμενιστές, προϋπάρχουσα πληροφορία, ανεξάρτητη από οποιοδήποτε εμπειρικό δεδομένο, όπως επίσης και εμπειρικές παρατηρήσεις επαναλαμβανόμενων πειραμάτων είναι σημαντικοί παράγοντες όταν εκτιμάται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Υποστηρικτικό στοιχείο αυτής της θεωρίας αποτελεί και ο τύπος του Bayes, στον οποίο πρακτικά η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ειδών πληροφορίας τυποποιείται. Κατά τη Batanero (2015) ο τύπος Bayes' δίνει τη δυνατότητα να αλλάζει η πιθανότητα για ένα ενδεχόμενο υπό το φως νέων διαθέσιμων δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα (Borovcnik & Kapadia, 2014a) επικαιροποιείται η πιθανότητα για τις διάφορες αιτίες όταν έχει ήδη παρατηρηθεί κάποια από τις συνέπειές τους. Να σημειώσουμε ακόμα στο σημείο αυτό ότι οι Hawkins & Kapadia (1984) υποστηρίζουν πως για τις απόψεις των μαθητών σχετικά με την πιθανότητα η υποκειμενική θεώρηση ίσως εξυπηρετεί καλύτερα.

Σύμφωνα με τους Batanero et al. (2016), η αξιωματική προσέγγιση της πιθανότητας χρησιμοποιείται κυρίως σε πανεπιστημιακό επίπεδο, ενώ η κλασική κυριαρχούσε πριν από το 1970 στο πρόγραμμα σπουδών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ορισμένων χωρών αλλά παρουσίαζε αυξημένη δυσκολία για τους μαθητές. Σήμερα, η προσέγγιση με σχετικές συχνότητες εμφανίζεται συστηματικότερα στα σχολικά προγράμματα σπουδών και η πιθανότητα εισάγεται ως ένα θεωρητικό εργαλείο για την προσέγγιση προβλημάτων που προκύπτουν από στατιστικά δεδομένα.

Εξάλλου, οι Chaput, Girard & Henry (2011) υποστηρίζουν ότι η προσέγγιση με σχετικές συχνότητες πρέπει να χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την κλασική, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν καλή κατανόηση της πιθανότητας, και να είναι σε θέση να την εφαρμόσουν σε πρακτικές εφαρμογές. Υποστηρίζουν δε την άποψη αυτή με το σκεπτικό ότι η μεν κλασική προσέγγιση μόνη της υποβαθμίζει την κατανόηση της πιθανότητας σε απλή καταμέτρηση των στοιχειωδών ενδεχομένων και ενθαρρύνει την υπερβολική χρήση της συνδυαστικής, ενώ η προσέγγιση με σχετικές συχνότητες μόνη της, λόγω της εμπειρικής φύσης της, δημιουργεί διδακτικά προβλήματα όπως σύγχυση μεταξύ παρατήρησης της πραγματικότητας (σταθεροποιημένη συχνότητα) και θεωρητικής γνώσης (πιθανότητα).

Ο Steinbring (1991b), αφού έχει πρώτα αναφέρει ότι υπάρχει μία κυκλικότητα τόσο στην προσέγγιση της έννοιας μέσω του κλασικού ορισμού όσο και στην προσέγγιση

μέσω σχετικών συχνοτήτων, διατυπώνει την άποψη ότι η διδασκαλία για να είναι πιο ολοκληρωμένη καλό είναι να γίνεται μέσω δραστηριοτήτων και μάλιστα πριν από την εισαγωγή των εννοιών θεωρητικά, συνδυάζοντας κατάλληλα τις δύο προσεγγίσεις.

Ως παράδειγμα τέτοιας δραστηριότητας, περιγράφει ένα παιχνίδι για την τάξη που περιλαμβάνει ένα ταμπλό αριθμημένο από το 1 έως το 12 και δύο ζάρια. Κάθε μαθητής επιλέγει έναν αριθμό και τοποθετεί το πιόνι του πάνω στο ταμπλό στην κατάλληλη θέση. Πάνω από κάθε αριθμό το ταμπλό έχει εννέα κουτάκια και στη δέκατη θέση ακολουθεί ο τερματισμός. Σε κάθε γύρο ρίχνονται τα δύο ζάρια και όποιο πιόνι βρίσκεται στο άθροισμα ανεβαίνει μία θέση προς τα πάνω. Όποιος παίκτης φτάσει πρώτος στον τερματισμό κερδίζει. Οι μαθητές καλούνται να κάνουν προβλέψεις, όπως: «Θα επέλεγες το 1; Εξήγησε» ή «Ποια νούμερα είναι καλές επιλογές κατά τη γνώμη σου. Εξήγησε» και καθώς παίζουν το παιχνίδι να σημειώνουν τα ζευγάρια των αριθμών με σκοπό να δουν γιατί κάποια νούμερα εμφανίζονται συχνότερα από άλλα. Η δραστηριότητα αυτή στοχεύει να εισάγει τους μαθητές στη μεταβλητότητα αξιοποιώντας τα δεδομένα που συλλέχτηκαν. Στη συνέχεια, ο Steinbring (1991b) προτείνει, ως προέκταση, οι μαθητές να συγκρίνουν το παιχνίδι αυτό με το αντίστοιχο που θα παιζόταν με ένα ζάρι δωδεκαεδρικού σχήματος αριθμημένο από το 1 έως το 12. Το δεύτερο μοντέλο αξιοποιεί τη συμμετρία, άρα τον κλασικό ορισμό.

Οι Konold & Kazak (2008) παραθέτουν παρόμοια δραστηριότητα για την εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητότητας, μόνο που στην περίπτωση αυτή δίνονται μερικά πιθανά διαγράμματα για την κατανομή των αριθμών 2-12 κατά τη ρίψη δύο ζαριών και οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν ποιο διάγραμμα είναι πιο πιθανό να προκύψει όταν εκτελεστούν 1000 ρίψεις. Σχολιάζουν δε ότι αρχικά οι μαθητές, βασισμένοι στις διαισθήσεις τους, επιλέγουν το διάγραμμα που δίνει λίγες ομοιόμορφες εμφανίσεις στους ακραίους αριθμούς 2-3 και 11-12 και περισσότερες αλλά πάλι ομοιόμορφες εμφανίσεις στους αριθμούς 4-10.

Οι ίδιοι επιστρατεύουν προσεγγίσεις μέσω συλλογής δεδομένων και διαγραμμάτων και υποστηρίζουν τη διδασκαλία τους με χρήση λογισμικών, όπως το TinkerPlots, πράγμα που, όπως λένε, σε τελική ανάλυση επιθυμούν και οι μαθητές με σκοπό την αποφυγή της εκτέλεσης μεγάλου πλήθους δοκιμών ενός πειράματος και εμπιστεύονται ότι τα δεδομένα που παράγει το λογισμικό δε διαφέρουν από εκείνα που θα έδινε η εκτέλεση του πειράματος με μηχανικά μέσα (Konold & Kazak, 2008).

Η χρήση λογισμικών ενθαρρύνεται και από τον Pratt (2011). Ανάμεσα στα άλλα αναφέρει το λογισμικό Basketball στο οποίο η τροχιά μιας βολής ενός παίκτη του μπάσκετ εξαρτάται από τη γωνία βολής, την ταχύτητα βολής, το ύψος βολής και την απόσταση από το καλάθι. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ποιες από τις τέσσερεις παραμέτρους θα επιτρέψουμε να μεταβάλλονται. Στην περίπτωση απενεργοποίησης όλων των παραμέτρων, λαμβάνουμε το ντετερμινιστικό μοντέλο όπου όλες οι βολές ακολουθούν ακριβώς την ίδια τροχιά. Με την ενεργοποίηση έστω μίας από αυτές, λαμβάνουμε πλέον τυχαίες τροχιές και έτσι εισάγουμε την έννοια της τυχαιότητας.

Στο ίδιο μοτίβο, οι Burrill & Biehler (2011), επίσης, υποστηρίζουν τη συνδυαστική αξιοποίηση της κλασικής προσέγγισης και της προσέγγισης μέσω σχετικών συχνοτήτων στη διδασκαλία. Απευθυνόμενοι προς τους εκπαιδευτικούς, προτείνουν μεταξύ άλλων:

- Χρησιμοποιείστε πραγματικά δεδομένα (δώστε έμφαση στη μεταβλητότητα, το θόρυβο και στην προέλευση των δεδομένων).
- Κατασκευάστε διαισθήσεις (χρησιμοποιείστε προσομοιώσεις, κάντε προβλέψεις πριν τους υπολογισμούς).
- Ξεκινήστε με ένα γράφημα (ανακαλύψτε συσχετίσεις, αναλύστε διαφορετικές αναπαραστάσεις, τονίστε την οπτικοποίηση ως μέσο ανακάλυψης σχέσεων).
- Αφήστε τους μαθητές να παίξουν με τυχαία γεγονότα και να δουν τη μεταβλητότητα.

2.4. Παρανοήσεις, δυσκολίες και ο ρόλος της διαίσθησης

Οι πρώτες έρευνες για την εξελικτική ανάπτυξη και τη δομή του ανθρώπινου συλλογισμού με πιθανότητες πραγματοποιήθηκαν τη δεκαετία 1960. Σημείο αναφοράς εκείνης της περιόδου ήταν το έργο των Jean William Fritz Piaget (1896 – 1980) και Bärbel Elisabeth Inhelder (1913 – 1997), οι έρευνες των οποίων δείχνουν ότι οι έννοιες των πιθανοτήτων αποκτώνται σε στάδια που βρίσκονται σε αντιστοιχία με τη γενικότερη θεωρία περί νοητικών αναπτυξιακών σταδίων του Piaget[10] (Jones,

[10] *Αισθησιο – κινητικό* (γέννηση ως 2 έτη), *προ – λογικό* (2 – 7 έτη), *συγκεκριμένων λογικών λειτουργιών* (7 – 11 έτη), *τυπικών λογικών λειτουργιών* (άνω των 11 ετών). Κατά τον Piaget, η σειρά

Langrall, Mooney & Thornton, 2004). Αυτό υποδεικνύει ότι δεν μπορούμε να αναμένουμε οποιαδήποτε ανάπτυξη συλλογισμού με πιθανότητες πριν από το *στάδιο των συγκεκριμένων λογικών λειτουργιών (concrete operational stage)* γιατί η ικανότητα αντιμετώπισης καταστάσεων που εμπλέκουν αβεβαιότητα προϋποθέτει την κατάκτηση των ντετερμινιστικών φαινομένων αιτίας-αποτελέσματος (Batanero, 2015) και βασίζεται στην ικανότητα του παιδιού να σκέφτεται λειτουργικά από άποψη συνδυαστικής (Greer, 2001; Batanero, 2015).

Όπως αναφέρει η Batanero (2015), οι Piaget και Inhelder ζήτησαν από παιδιά 6-9 ετών να διατυπώσουν τις σκέψεις τους για ένα πείραμα που προσομοίωνε σταγόνες βροχής να πέφτουν στις πλάκες πεζοδρομίου. Τα παιδιά, αφενός μεν υπέθεσαν ότι οι σταγόνες θα έπεφταν σε ίσο αριθμό για κάθε πλάκα του πεζοδρομίου, αφετέτου δε, όταν έμεινε μόνο μία στεγνή πλάκα στο πεζοδρόμιο, υπέθεταν κατά κανόνα ότι η επόμενη σταγόνα θα έπεφτε σε αυτήν, ώστε να υπάρχει ομοιομορφία στην κατανομή. Εντούτοις, ανακάλυψαν ότι τα παιδιά σε συγκεκριμένα αναπτυξιακά στάδια ήταν επιρρεπή σε υποκειμενικές διαισθήσεις (Piaget & Inhelder, 1951/1975, όπως αναφέρεται στο Batanero, 2016).

Ο όρος *διαίσθηση* ορίζεται από τους Fischbein & Gazit (1984) ως μια σφαιρική, συνθετική, μη ρητά δικαιολογημένη εκτίμηση ή πρόβλεψη. Μια διαίσθηση είναι κατά κάποιον τρόπο μια γνωστική πεποίθηση. Μερικές φορές, τέτοιες γνωστικές πεποιθήσεις μπορεί να συμπίπτουν με επιστημονικά αποδεκτές προτάσεις και άλλες φορές να αντιτίθενται σε αυτές. Οι παραπάνω ερευνητές τονίζουν ότι τέτοιες αντιλήψεις δεν πρέπει να αγνοούνται κατά τη διδασκαλία και αν είναι εσφαλμένες, πρέπει να εξαλείφονται και να αντικαθίστανται από ορθές. Σε αντίθετη περίπτωση, θα συνεχίσουν να παραπλανούν τον εκπαιδευόμενο (Fischbein & Gazit, 1984).

Για την ερμηνεία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, είναι χρήσιμο να λάβουμε υπόψη μας μερικά στοιχεία από την ψυχολογία που αφορούν στις *ευρετικές μεθόδους (heuristics)*, ιδιαίτερα αυτές που έχουν κάποια σχέση με τις πιθανότητες και τα παράδοξα που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία.

Με τον όρο *ευρετικές μέθοδοι (heuristics)* αναφέρονται στη βιβλιογραφία (Shaughnessy, 1977) στρατηγικές με τις οποίες ένα άτομο μπορεί να μειώσει την

των σταδίων είναι σταθερή, οι ηλικίες όμως είναι ενδεικτικές (Elliott, Kratochwill, Littlefield Cook & Travers, 2008).

πολυπλοκότητα ενός προβλήματος πιθανοτήτων και να φτιάξει ένα απλούστερο. Πρόκειται για απλούς κανόνες που προτείνονται για να εξηγήσουν πώς οι άνθρωποι παίρνουν αποφάσεις, κάνουν κρίσεις και λύνουν προβλήματα όταν δεν κατέχουν ή δε διαχειρίζονται όλες τις πληροφορίες.

Αν και οι ευρετικές μέθοδοι ίσως δίνουν απλές και ικανοποιητικές λύσεις σε μερικά προβλήματα πιθανοτήτων, από την άλλη μεριά ενδέχεται να οδηγούν σε συστηματικά λάθη και προκαταλήψεις (Shaughnessy, 1977). Συμβαίνει εντούτοις να προτιμούνται σε κάποιες περιπτώσεις επειδή δίνουν αποδεκτές απαντήσεις σε μικρό χρόνο.

Η πιο γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιούμενη ευρετική μέθοδος είναι αυτή της *δοκιμής και λάθους (trial and error)*, η οποία χρησιμοποιείται κατά κόρον σε απλά προβλήματα. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ο λύτης δοκιμάζει κάθε φορά διαφορετική πιθανή λύση στο πρόβλημα που αντιμετωπίζει. Απορρίπτοντας εκείνες που δε λύνουν το πρόβλημα και συνεχίζοντας τις δοκιμές ελπίζει να καταλήξει στο σωστό αποτέλεσμα. Φυσικά, μετά από μια μακρά σειρά αποτυχιών, είναι αρκετά πιθανό ο λύτης να σταματήσει την προσπάθεια.

Μερικές ακόμα δημοφιλείς ευρετικές μέθοδοι αναφέρονται στο βιβλίο του ούγγρου μαθηματικού George Pólya (1887 – 1985), *How to Solve It – Πώς να το λύσω* (Pólya, 1957/1991), για παράδειγμα:

- Αν δυσκολεύεσαι να καταλάβεις το πρόβλημα, προσπάθησε να ζωγραφίσεις μια εικόνα.
- Αν δεν μπορείς να βρεις μία λύση, προσπάθησε να υποθέσεις ότι βρήκες μία λύση και να δεις τι μπορείς να συμπεράνεις από αυτή («δουλεύοντας προς τα πίσω»).
- Αν το πρόβλημα είναι αφηρημένο, προσπάθησε να εξετάσεις ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.
- Προσπάθησε να λύσεις ένα πιο γενικό πρόβλημα πρώτα (το «παράδοξο του εφευρέτη»: το πιο φιλόδοξο σχέδιο μπορεί να έχει περισσότερες ελπίδες επιτυχίας).

Το ερευνητικό πρόγραμμα των Daniel Kahneman (γεν. 1934) και Amos Nathan Tversky (1937 – 1996) διερεύνησε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι για να κρίνουν υπό αβεβαιότητα (judging under uncertainty), τις λεγόμενες *ευρετικές μεθόδους (heuristics)* και *τα συστηματικά λάθη (μεροληψίες - biases)* που προκύπτουν

από αυτές. Μετά από χρόνια ερευνών, ο Kahneman συνόψισε την ουσία των διαισθητικών ευρετικών μεθόδων ως εξής (Kahneman, 2011, p. 12):

> όταν αντιμετωπίζουμε ένα δύσκολο ερώτημα, στη θέση του συχνά απαντάμε ένα άλλο πιο εύκολο, χωρίς συνήθως να αντιλαμβανόμαστε την αλλαγή.

Για την παρούσα εργασία θα εστιάσουμε σε ευρετικές μεθόδους που έχουν σχέση με τη διδασκαλία των μαθηματικών και ειδικότερα των στοχαστικών μαθηματικών. Κάποιες αρκετά δημοφιλείς, αναλύονται σε εργασίες των Tversky & Kahneman (1973; 1974; 1982; 2008), αλλά και άλλων ερευνητών, όπως παρακάτω.

Στήριξη και Προσαρμογή (Anchoring and Adjustment).

Περιγράφει την ανθρώπινη τάση να βασιζόμαστε στην πρώτη πληροφορία που λαμβάνουμε (*σημείο εκκίνησης – starting point*) για να πάρουμε μια απόφαση. Στη συνέχεια κάνουμε προσαρμογές ανάλογα με τις επιπλέον πληροφορίες που μας παρέχονται.

Για παράδειγμα (Tversky & Kahneman, 1974), στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν σε διάστημα μόλις 5 δευτερολέπτων το γινόμενο $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ (= 40.320), πολλοί από τους συμμετέχοντες στο πείραμα βασίστηκαν στους αρχικούς τους υπολογισμούς και ο μέσος υπολογισμός ήταν 512. Αντίθετα, όταν δόθηκε το ίδιο γινόμενο με ανάδρομη σειρά ως $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ (= 40.320), οι συμμετέχοντες το εκτίμησαν γύρω στο 2.250 βασισμένοι και πάλι στις πρώτες διαθέσιμες πράξεις και εκτιμώντας εξ αυτών εκείνες που δεν προλάβαιναν να εκτελέσουν.

Στην ίδια εργασία, αναφέρεται και άλλο ένα σχετικό πείραμα. Οι συμμετέχοντες καλούνταν γενικά να εκτιμήσουν κάποιο ποσοστό. Πριν την εκτίμηση, γυρνούσαν έναν τροχό που τους έδινε εντελώς τυχαία ένα σημείο εκκίνησης από 0 έως 100. Στο πρώτο βήμα καλούνταν να εκτιμήσουν, για παράδειγμα, αν το ποσοστό των αφρικανικών κρατών μέσα στα Ηνωμένα Έθνη ήταν πάνω ή κάτω από το σημείο εκκίνησης και στη συνέχεια να δώσουν τη δική τους εκτίμηση για το ζητούμενο ποσοστό, αυξάνοντας ή μειώνοντας τον αριθμό εκκίνησης. Διαπιστώθηκε ότι όσοι ξεκίνησαν από το 10 εκτίμησαν το ποσοστό αυτό στο 25% κατά μέσο όρο, ενώ εκείνοι που πήραν σαν αφετηρία το 65 απάντησαν κατά μέσο όρο 45%. Το ενδιαφέρον εύρημα ήταν ότι παρόλο που ο αριθμός (σημείο εκκίνησης) που έδινε ο

τροχός δεν είχε απολύτως καμία σχέση με το ποσοστό που ζητούνταν να εκτιμηθεί, εντούτοις φαίνεται να έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εκτίμηση.

Διαθεσιμότητα (Availabitity).

Περιγράφει την τάση να εκτιμήσουμε τη συχνότητα ενός γεγονότος με βάση το πόσο γρήγορα έρχονται στο μυαλό (συνειρμικά) σχετικές περιπτώσεις ή συσχετισμοί (Tversky & Kahneman, 1973). Όταν τέτοιες περιπτώσεις ή συσχετισμοί είναι άμεσα διαθέσιμες, τείνουμε να υπερεκτιμούμε τη συχνότητα του γεγονότος.

Για παράδειγμα (Tversky & Kahneman, 1973), στην ερώτηση αν υπάρχουν περισσότερες αγγλικές λέξεις που αρχίζουν με το γράμμα «Κ» από τις λέξεις που έχουν το γράμμα «Κ» στην τρίτη θέση, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων θεώρησε ότι στην πρώτη θέση εμφανίζεται πιο συχνά, πράγμα που δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Το λανθασμένο συμπέρασμα προήλθε από το γεγονός ότι κάποιος ανακαλεί πιο εύκολα στη μνήμη του λέξεις που αρχίζουν από «Κ», παρά λέξεις που το «Κ» βρίσκεται στην τρίτη θέση.

Ενδιαφέρουσα είναι και η μελέτη των Fischbein & Schnarch (1997) σχετικά με την εξέλιξη των παρανοήσεων που οφείλονται στη χρήση των ευρετικών μεθόδων, καθώς αυξάνεται η ηλικία των υποκειμένων της έρευνας. Για τη διαθεσιμότητα, η έρευνα έδειξε ότι αυξάνει με την ηλικία. Το πρόβλημα που ανέδειξε αυτή την αύξηση είναι το παρακάτω:

> Υπάρχουν λιγότεροι, ίσοι ή περισσότεροι τρόποι να διαλέξει κανείς μια επιτροπή που να αποτελείται από 2 μέλη μεταξύ 10 υποψηφίων από ό,τι αν διαλέξει κάποιος μια επιτροπή που να αποτελείται από 8 μέλη μεταξύ 10 υποψηφίων;

Όλο και περισσότεροι, καθώς αυξάνει η ηλικία (και το επίπεδο εκπαίδευσης) των ερωτηθέντων, απαντούν ότι η επιλογή των 2 από τους 10 δίνει περισσότερες δυνατές επιλογές από ό,τι η επιλογή των 8 από τους 10. Η εξήγηση για αυτό ίσως είναι ότι η επιλογή των δύο μελών της επιτροπής στην πρώτη περίπτωση φαντάζει πιο προσιτή (διαθεσιμότητα) από την επιλογή των οκτώ μελών της δεύτερης περίπτωσης. Στην πραγματικότητα, οι δυνατές επιλογές είναι ισάριθμες.

Αντιπροσωπευτικότητα (Representativeness).

Περιγράφει την τάση να αποφασίζουμε για το πόσο πιθανό είναι ένα γεγονός με βάση κάποιο πρότυπο που έχουμε στο μυαλό μας για τη συγκεκριμένη περίπτωση (συνήθως ένα τυπικό ή μέσο μέλος της κατηγορίας).

Για παράδειγμα (Tversky & Kahneman, 1973), σε έξι διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος, το αποτέλεσμα Κ-Γ-Κ-Γ-Γ-Κ φαντάζει πιο πιθανό από το αποτέλεσμα Κ-Κ-Κ-Γ-Γ-Γ, διότι το τελευταίο αποκλίνει από το πρότυπο του τυχαίου που υπάρχει στο μυαλό μας. Επίσης, αν η ρουλέτα φέρει μια μακρά σειρά κόκκινων αποτελεσμάτων, πολλοί τείνουν (λανθασμένα) να πιστεύουν ότι στο επόμενο γύρισμα πρέπει να υπάρξει μια «διορθωτική» κίνηση που θα ευνοήσει το μαύρο χρώμα, παρανόηση γνωστή και με το όνομα *the gambler's fallacy* (Falk & Konold, 1992; Batanero et al., 2016).

Άλλο παράδειγμα για την ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας, σχετικό με τις πιθανότητες, δίνεται μέσα από το παρακάτω πρόβλημα:

> Μια πόλη εξυπηρετείται από δύο νοσοκομεία. Στο μεγάλο νοσοκομείο γεννιούνται κάθε μέρα περίπου 45 μωρά και στο μικρό νοσοκομείο γεννιούνται κάθε μέρα περίπου 15 μωρά. Είναι γνωστό ότι περίπου το 50% όλων των μωρών είναι αγόρια αλλά το ακριβές ποσοστό ποικίλει από μέρα σε μέρα. Για διάστημα ενός χρόνου κάθε νοσοκομείο κατέγραψε τις ημέρες κατά τις οποίες πάνω από το 60% των μωρών που γεννήθηκαν ήταν αγόρια. Ποιο νοσοκομείο νομίζετε ότι κατέγραψε περισσότερες τέτοιες μέρες;
>
> (α) το μεγάλο νοσοκομείο
>
> (β) το μικρό νοσοκομείο
>
> (γ) περίπου το ίδιο (ήτοι διαφορά 5% το ένα από το άλλο).

Οι περισσότεροι απάντησαν το τρίτο, πιθανώς σκεπτόμενοι ότι τα δύο γεγονότα περιγράφονται από τις ίδιες στατιστικές, άρα έχουν την ίδια αντιπροσωπευτικότητα στο γενικό πληθυσμό (Tversky & Kahneman, 1974). Ασφαλώς, ο νόμος των μεγάλων αριθμών μας υποδεικνύει ότι το μικρό νοσοκομείο έχει μεγαλύτερα περιθώρια αποκλίσεων από το αντιπροσωπευτικό 50%, κάτι που δεν φαίνεται να το αντιλαμβάνονται διαισθητικά οι περισσότεροι ερωτηθέντες.

Στην περίπτωση αυτή η μελέτη των Fischbein & Schnarch (1997) έδειξε ότι οι παρανοήσεις που στηρίζονται στην αντιπροσωπευτικότητα (όπως στο πρώτο παράδειγμα παραπάνω) γενικά φθίνουν με την αύξηση της ηλικίας (άρα και της ωριμότητας μαθηματικής ή ηλικιακής). Όμως στην περίπτωση που η

αντιπροσωπευτικότητα συνδέεται με το μέγεθος του δείγματος και το κατά πόσο επηρεάζει αυτό (όπως στο τελευταίο παράδειγμα παραπάνω), τότε οι σχετικές παρανοήσεις αυξάνουν με την ηλικία και αυτό χαρακτηρίζεται αξιοσημείωτο εύρημα.

Σε αυτό το επίμονο είδος παρανόησης έχει συζητηθεί και ένας άλλος κλάδος που οδηγεί σε παρανοήσεις πάνω στις πιθανότητες και περιγράφεται στην έρευνα (Meehl & Rosen, 1955; Bar-Hillel, 1980; Tversky & Kahneman, 1982) ως

Αγνόηση της προϋπάρχουσας κατάστασης (base-rate neglect).

Πρόκειται για την εξαγωγή συμπερασμάτων χωρίς να ληφθούν υπόψη οι προϋπάρχουσες (χωρίς άλλες προϋποθέσεις) πιθανότητες να συμβεί ή να μη συμβεί ένα γεγονός και η στήριξη των συμπερασμάτων αποκλειστικά και μόνο στη νεώτερη πληροφορία αντί να συνδυαστούν οι δύο πληροφορίες (Bar-Hillel, 1980).

Στην ίδια εργασία παρατίθεται και μια εξήγηση για αυτό, σύμφωνα με την οποία οι άνθρωποι ταξινομούν τις πληροφορίες με βάση τη (νομιζόμενη) σχετικότητα με το υπό έρευνα ενδεχόμενο και αφήνουν τις πληροφορίες που φαίνονται να έχουν μεγάλη σχέση με αυτό να κυριαρχήσουν πάνω στις πληροφορίες που φαίνεται να μη σχετίζονται τόσο άμεσα. Η πληροφορία κρίνεται πιο σχετική όταν συνδέεται άμεσα με την υπό εξέταση κατάσταση και λιγότερο σχετική όταν πρόκειται για κάτι θεμελιώδες που ισχύει γενικά (Bar-Hillel, 1980).

Ειδικότερα, συμβαίνει να αγνοούμε τις πληροφορίες για το γενικό πληθυσμό όταν μας δίνονται νέες πληροφορίες για ένα υποσύνολό του που είναι το αντικείμενο έρευνάς μας ή όταν η νέα πληροφορία μπορεί να αποδοθεί μέσω της αιτιότητας σε ορισμένα μέλη του γενικού πληθυσμού (Tversky & Kahneman, 1982). Το αποτέλεσμα είναι να υποτιμούμε την πληροφορία που φαίνεται περιστασιακή ή θεμελιώδης για χάρη της πιο συγκεκριμένης ή αιτιώδους πληροφορίας, τη στιγμή που η σωστή χρήση των πληροφοριών θα ήταν η σύζευξη μεταξύ τους.

Ως ένα εύληπτο παράδειγμα αναφέρουμε το παρακάτω πρόβλημα (Clark, 2002/2006):

> Σε μία πόλη στην οποία μόνον ένας άνθρωπος στους δέκα είναι μαύρος, ένας άνδρας ισχυρίζεται ότι του επιτέθηκε και τον λήστεψε ένας μαύρος. Σε αναπαραστάσεις του επεισοδίου υπό τον ανάλογο φωτισμό με διάφορους ανθρώπους στο ρόλο του κακοποιού, το θύμα αναγνώρισε ορθώς τη φυλή του κακοποιού στο 80% των περιπτώσεων. Μαύροι και λευκοί έχουν ίσες πιθανότητες να διαπράξουν κάτι τέτοιο.

Στην ερώτηση αν είναι πιο πιθανό το θύμα να έχει δίκιο ή άδικο στην αναγνώριση της φυλής του κακοποιού, οι περισσότεροι ερωτηθέντες σκέφτονται κάπως έτσι (Clark, 2002/2006): «Αν το θύμα έχει 80% πιθανότητες να αναγνωρίσει ορθώς το χρώμα του κακοποιού και αν ισχυρίζεται πως του επιτέθηκε ένας μαύρος είναι φυσικό ότι οι πιθανότητες του θύματος να έχει δίκιο είναι περισσότερες από τις πιθανότητες να έχει άδικο». Στην πραγματικότητα ισχύει ακριβώς το αντίθετο. Είναι πολύ πιο πιθανό να έχει άδικο, επειδή οι πιθανότητες να έχει δίκιο είναι μόνο 4/13, δηλαδή λιγότερες από μία στις τρεις! Πρόκειται για τη δεσμευμένη πιθανότητα ο κακοποιός να ήταν μαύρος δεδομένου ότι αναγνωρίστηκε ως μαύρος (Clark, 2002/2006).

Στα παραπάνω αξίζει να προστεθεί και η παρακάτω παρανόηση που φέρει τον τίτλο (Lecoutre, 1992):

Προκατάληψη της ίσης πιθανότητας (equiprobability bias).

Κατά τους Gauvrit & Morsanyi (2014) η προκατάληψη αυτή περιγράφει την τάση να πιστεύουμε ότι κάθε τυχαία μεταβλητή είναι «ισοπίθανη» (δηλ. ομοιόμορφη) από τη φύση της, δηλαδή όλα τα δυνατά αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα. Αυτή η διαίσθηση οδηγεί σε συχνά λάθη όταν λύνουμε προβλήματα πιθανοτήτων με μη-ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές. Στη δημιουργία αυτής της προκατάληψης συμβάλλει και ο τρόπος που διδάσκονται οι πιθανότητες στο σχολείο (μέσω του κλασικού ορισμού) και έχει σαν αποτέλεσμα η τάση να αυξάνεται παρά τη σχετική εκπαίδευση.

Με την προκατάληψη αυτή σχετίζεται ένα πολύ δημοφιλές πρόβλημα (Poincaré, 1912; Borovcnik & Kapadia, 2014b) με τον τίτλο *παράδοξο του Bertrand*:

> Τρία ίδια κουτιά Α, Β και Γ έχουν το καθένα από δύο συρτάρια α και β. Στο κουτί Α κάθε συρτάρι περιέχει από ένα χρυσό νόμισμα. Στο κουτί Β κάθε συρτάρι περιέχει από ένα αργυρό νόμισμα. Στο κουτί Γ το ένα συρτάρι περιέχει ένα χρυσό νόμισμα και το άλλο συρτάρι περιέχει ένα αργυρό νόμισμα. Δηλαδή:

Κτ / Σρ	Α	Β	Γ
α	Χρυσό	Αργυρό	Χρυσό
β	Χρυσό	Αργυρό	Αργυρό

Εικόνα 8: Σχηματική αναπαράσταση των κουτιών του Bertrand

> Ανοίγουμε τυχαία ένα συρτάρι από τα έξι. Ποια είναι η πιθανότητα να περιέχει ένα χρυσό νόμισμα;
> Ανοίγουμε τυχαία ένα συρτάρι από τα έξι και αυτό περιέχει ένα χρυσό νόμισμα. Ποια είναι η πιθανότητα το άλλο συρτάρι του ίδιου κουτιού να περιέχει ένα αργυρό νόμισμα (δηλαδή να έχω επιλέξει το κουτί Γ);

Το πρώτο πρόβλημα είναι εισαγωγικό και η λύση του είναι 1/2 (Poincaré, 1912). Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό αφού έχουμε 6 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα για την επιλογή συρταριού (Αα, Αβ, Βα, Ββ, Γα, Γβ) και 3 από αυτά περιέχουν χρυσό νόμισμα (Αα, Αβ, Γα).

Αναλύοντας το δεύτερο πρόβλημα, ο Poincaré δίνει πρώτα τη λανθασμένη απάντηση (Poincaré, 1912, p. 27, τα έντονα γράμματα οφείλονται στο συγγραφέα):

> Είτε έπεσα στο κουτί Γ είτε στο κουτί Α. Στην πρώτη περίπτωση το δεύτερο νόμισμα [στο άλλο συρτάρι] θα είναι αργυρό, στη δεύτερη [περίπτωση] είναι χρυσό. Η πιθανότητα φαίνεται έτσι 1/2. **Αυτό το συμπέρασμα είναι ψευδές**[11].

Οι Borovcnik & Kapadia (2014b) συνδέουν το πρόβλημα αυτό με την πεποίθηση ότι εκ των υστέρων πληροφορίες δεν μπορούν να αλλάξουν τις αρχικές πιθανότητες. Όμως, άλλοι ερευνητές (Falk & Lann, 2008; Gauvrit & Morsanyi, 2014) συνδέουν προβλήματα της ίδιας συνομοταξίας με το παραπάνω με τη σωστή καταμέτρηση του δειγματικού χώρου ο οποίος αποτελείται (στο πρόβλημα αυτό) από τα συρτάρια ως

[11] *"Ou bien, je suis tombé sur le coffret C, ou bien sur le coffret A; dans le premier cas, la seconde médaille sera en argent, dans le second en or. La probabilité semble donc 1/2. Cette conclusion est fausse".*

απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και όχι από τα κουτιά. Τυχόν λανθασμένη καταμέτρηση του δειγματικού χώρου οδηγεί σε λανθασμένο υπολογισμό των πιθανοτήτων. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι ο ίδιος ο Poincaré στο βιβλίο του *Calcul des Probabilités* αξιοποιεί το πρόβλημα αυτό στο πρώτο μόλις κεφάλαιο, το σχετικό με τον ορισμό της πιθανότητας (Poincaré, 1912).

Στην εργασία του Keren (1984), όπου αναλύεται περισσότερο ένα πρόβλημα από αυτά που ανέδειξαν την τάση για κρίση με χρήση της αντιπροσωπευτικότητας, δίνεται περισσότερη βαρύτητα στην επιλογή του σωστού δειγματικού χώρου. Συγκεκριμένα, σε μία εργασία των Kahneman & Tversky (1972) δίνονται δύο πιθανές κατανομές για την τυχαία διανομή 20 βόλων σε πέντε παιδιά. Βρέθηκε ότι 69% των ερωτηθέντων θεωρεί πιο πιθανή την εμφάνιση της κατανομής (4,4,5,4,3) από ό,τι της κατανομής (4,4,4,4,4), τη στιγμή που αντικειμενικά οι πιθανότητες είναι 0.00257 και 0.00321 αντίστοιχα. Το εύρημα ερμηνεύτηκε από τους Kahneman & Tversky ως αποτέλεσμα της αντιπροσωπευτικότητας. Η άνιση κατανομή των βόλων στην πρώτη περίπτωση φαίνεται περισσότερο αντιπροσωπευτική μιας «τυχαίας διανομής», όπως περιγράφεται στην εκφώνηση του προβλήματος, από ό,τι η ομοιόμορφη κατανομή. Σχολιάζοντας την άποψη αυτή, ο Keren (1984) επισημαίνει ότι μπορεί οι ερωτηθέντες να έχουν μπερδέψει τη συγκεκριμένη κατανομή (4,4,5,4,3) με την *κλάση των κατανομών* όπου ένα παιδί παίρνει τρεις βόλους, τρία παιδιά παίρνουν από τέσσερεις βόλους και ένα παιδί παίρνει πέντε βόλους. Επειδή ο παραπάνω συνδυασμός εμπεριέχει 20 διαφορετικές διατάξεις, η πιθανότητα *της κλάσης* είναι 20 x 0.00257 = 0.05140 και έχει σημαντικά μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης από την κατανομή (4,4,4,4,4). Επομένως, ο δειγματικός χώρος παίζει κεντρικό ρόλο στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Οι Chernoff & Zazkis (2011), που ερευνούν διεξοδικά τη λανθασμένη καταμέτρηση του δειγματικού χώρου, εισάγουν την έννοια του *δειγματικού συνόλου (sample set)* ενός τυχαίου πειράματος που το ορίζουν ως «κάθε σύνολο όλων των δυνατών ενδεχομένων, όπου τα στοιχεία αυτού του συνόλου δεν είναι κατ' ανάγκην ισοπίθανα» (p. 18). Είναι, με άλλα λόγια, ο συνηθισμένος δειγματικός χώρος χωρίς τα στοιχεία του να αναγράφονται με το συμβατικό τρόπο. Αναγνωρίζουν, ασφαλώς, ότι το δειγματικό σύνολο δεν μπορεί κατ' αρχήν να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμούς πιθανοτήτων αλλά υποστηρίζουν ότι είναι ένα φυσικό σημείο εκκίνησης για μια παιδαγωγική προσέγγιση (Chernoff & Zazkis, 2011).

Προσέγγιση του αποτελέσματος (outcome approach).

Οι Falk & Konold (1992) διαχωρίζουν την έννοια *πιθανότητα* (που είναι η μαθηματική όψη της έννοιας) από την έννοια *πρόβλεψη* (που ανάγεται στην επιθυμία των ανθρώπων να μάθουν το μέλλον). Η πιθανότητα μετράει πόσες φορές θα εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο μετά από πολλές δοκιμές, ενώ η πρόβλεψη θα ήθελε να ξέρει αν το ενδεχόμενο θα εμφανιστεί στην επόμενη εκτέλεση του πειράματος. Ο Konold (1989), μέσα από σχετική έρευνα που έκανε σε δεκαέξι προπτυχιακούς φοιτητές, διαπίστωσε ότι κάποιοι άνθρωποι φτάνουν σε συμπεράσματα με πιθανότητες χωρίς να ακολουθούν ούτε την τυπική θεωρία ούτε τις ευρετικές μεθόδους αλλά με τη μέθοδο που ονόμασε *προσέγγιση του αποτελέσματος (outcome approach)*, στην οποία απώτερος σκοπός είναι η επιτυχημένη πρόβλεψη του αποτελέσματος μεμονωμένων δοκιμών ενός πειράματος. Για παράδειγμα, όταν ζητείται να ερμηνευτεί μια πρόβλεψη καιρού με πιθανότητα βροχής 70%, πολλοί απαντούν ότι αυτό σημαίνει ότι θα βρέξει κι αν δεν βρέξει, τότε η πρόβλεψη του μετεωρολόγου ήταν λανθασμένη (Konold, 1991).

Σύγχυση μεταξύ συνθήκης και αιτιότητας.

Πρόκειται για την παρανόηση όπου η μη μηδενική δεσμευμένη πιθανότητα μεταξύ δύο ενδεχομένων ερμηνεύεται ως αιτιότητα, δηλαδή ότι το ένα ενδεχόμενο συνεπάγεται το άλλο. Από πιο αυστηρή σκοπιά (Díaz, Batanero & Contreras, 2010), αν το γεγονός B συνεπάγεται ένα άλλο γεγονός A ($B \Rightarrow A$), τότε κάθε φορά που συμβαίνει το B, θα συμβαίνει και το A, έτσι ώστε $P(A|B) = 1$. Τότε το A εξαρτάται από το B. Η σχέση, όμως, $P(A|B) = 1$ δεν βεβαιώνει ότι το B είναι αίτιο του A, παρόλο που η σχέση δέσμευσης θα μπορούσε να σημαίνει σχέση αιτιότητας.

Για παράδειγμα, ο ρυθμός των γεννήσεων είναι μικρότερος σε εκείνες τις χώρες όπου το προσδόκιμο ζωής του πληθυσμού είναι υψηλότερο. Αυτό δε σημαίνει κατ' ανάγκην ότι η αύξηση του ρυθμού γεννήσεων μειώνει το προσδόκιμο ζωής αλλά υπάρχουν άλλες αιτίες που προκαλούν συγχρόνως τα δύο αυτά φαινόμενα (π.χ. εργασία των γυναικών στις ανεπτυγμένες χώρες).

Από ψυχολογική σκοπιά, το άτομο που υπολογίζει τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ ίσως αποδώσει διαφορετικού τύπου σχέσεις μεταξύ των A και B ανάλογα με τα συμφραζόμενα. Αν εννοήσει το B ως αιτία του A, τότε η σχέση $P(A|B)$ ερμηνεύεται ως σχέση αιτιότητας. Αν εννοήσει το A ως πιθανή αιτία του B, τότε η σχέση $P(A|B)$

ερμηνεύεται ως σχέση διάγνωσης. Αυτή η διάκριση δεν αντικατοπτρίζεται στους μαθηματικούς υπολογισμούς και στην εκτίμηση της ανεξαρτησίας δύο γεγονότων. Γενικά, δύο γεγονότα Α και Β μπορούν να είναι εξαρτημένα, χωρίς κάποιο από τα δύο να συνεπάγεται κατ' ανάγκην το άλλο (πρβλ. και Falk, 1986).

Κυρίαρχο ρόλο παίζει επίσης και το έργο του Efraim Fischbein (1920 – 1998) ο οποίος υποστήριξε ότι είμαστε σε θέση να ωθήσουμε τα παιδιά προς μια πιο εξελιγμένη συλλογιστική ακόμη και πριν από το *στάδιο των συγκεκριμένων λογικών λειτουργιών (concrete operational stage)*. Σύμφωνα με τον Greer (2001), η θεωρία του Fischbein για την ανάπτυξη του συλλογισμού με πιθανότητες είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εκπαίδευση και η βελτίωση της διδασκαλίας των πιθανοτήτων ήταν βασική του μέριμνα.
Ο Fischbein επέκτεινε την έρευνα των Piaget & Inhelder και Tversky & Kahneman πάνω στις διαισθήσεις που σχετίζονται με πιθανότητες, κάνοντας τη διάκριση ανάμεσα σε εκείνες που δεν σχετίζονται με τη διδασκαλία (τις οποίες ονόμασε πρωτογενείς) και εκείνες που σχετίζονται με τη διδασκαλία (που τις ονόμασε δευτερογενείς) (Greer, 2001). Η άποψή του ήταν ότι οι πρωτογενείς διαισθήσεις δεν θα έπρεπε απαραίτητα να ξεπεραστούν (γιατί δε γίνεται) αλλά μάλλον να αντικατασταθούν από δευτερογενείς διαισθήσεις. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσω ενεργής αλληλεπίδρασης με φαινόμενα που εμπλέκουν πιθανότητες, απόκτησης πόρων για αναπαραστάσεις και διαισθητικά μοντέλα. Τα διαισθητικά μοντέλα μπορούν να προκύψουν σιωπηρά ή συνειδητά και μπορούν να οφείλονται σε διδασκαλία ή όχι. Ως παράδειγμα ισχυρών εκπαιδευτικών μοντέλων αναφέρει τα δενδροδιαγράμματα που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τις δομές των συνδυασμών και των διατάξεων (Greer, 2001). Ωστόσο, επισημαίνει δύο βασικές πτυχές της σχέσης μεταξύ πρωτογενών και δευτερογενών διαισθήσεων. Πρώτον, ότι είναι πολύ δύσκολο να γίνει σαφής διάκριση μεταξύ των δύο τύπων διαισθήσεων και, δεύτερον, ότι οι καινούργιες σωστές διαισθήσεις δεν αντικαθιστούν τόσο απλά τις λανθασμένες πρωτογενείς. Οι πρωτογενείς διαισθήσεις είναι συνήθως τόσο ανθεκτικές ώστε συνυπάρχουν με νέες, ανώτερες, επιστημονικά αποδεκτές.

Στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, το έργο του Michael J. Shaughnessy ακολούθησε τις ιδέες των Tversky και Kahneman κάνοντας εξειδικευμένη έρευνα πάνω στις διαισθήσεις σχετικά με τις πιθανότητες και τις δυσκολίες στη μάθηση. Ο

Shaughnessy (1977) διατυπώνει τη γνώμη ότι ορισμένες παρανοήσεις μπορεί να οφείλονται στην άγνοια των νόμων των πιθανοτήτων και έτσι θα μπορούσαν να εξαλειφθούν μετά από εξοικείωση με τις σχετικές έννοιες. Όμως υπάρχουν και ψυχολογικές αιτίες για μερικές παρανοήσεις για τις οποίες δεν αρκεί μια απλή παραδοσιακή διδασκαλία. Επίσης παρατηρεί ότι οι εκπαιδευόμενοι έρχονται στο μάθημα έχοντας ήδη ένα σύνολο παρανοήσεων σχετικά με τις πιθανότητες και τη στατιστική και ένα σύνολο ευρετικών μεθόδων, στοιχεία που θα μπορούσαν να προωθήσουν και να διατηρήσουν τις παρανοήσεις τους. Πειραματιζόμενος με φοιτητές στους οποίους απηύθυνε διδασκαλία μέσω δραστηριοτήτων, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι μια διδασκαλία στην οποία οι εκπαιδευόμενοι θα πειραματίζονται, θα χτίζουν τα δικά τους μοντέλα μέσα από δραστηριότητες και θα ανακαλύπτουν μόνοι τους τις αρχές της απαρίθμησης μπορεί να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους πάνω στις πιθανότητες (Shaughnessy, 1977).

Σχετικά με τις προκαταλήψεις, ο Shaughnessy (1977) σημειώνει ότι η έρευνα των Kahneman και Tversky δείχνει ότι ακόμη και άνθρωποι που έχουν εκπαιδευτεί πάνω στις πιθανότητες εμφανίζουν τις ίδιες παρανοήσεις με τους μη-εκπαιδευμένους. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με τον ίδιο ερευνητή, όχι μόνο ότι η εκπαίδευση πάνω στη θεωρία των πιθανοτήτων δεν επαρκεί από μόνη της για να ξεπεραστούν αυτές οι προκαταλήψεις αλλά και ότι είναι πολύ δύσκολο να ξεπεραστούν γενικά.

Η εργασία των Fischbein & Schnarch (1997) για την εξέλιξη των παρανοήσεων σε σχέση με την ηλικία, υποστηρίζει ότι οι φοιτητές έχουν γενικά μείωση των παρανοήσεων σε σχέση με τους μαθητές. Το εύρημα αυτό αποδίδεται από τους συγγραφείς στη γενική μαθηματική ωριμότητα και την τριβή με το μαθηματικό συλλογισμό που έχουν οι φοιτητές.

Να σημειώσουμε εδώ ότι την άποψη να φέρουμε τα παιδιά από σχετικά μικρή ηλικία αντιμέτωπα με στοχαστικά προβλήματα διατυπώνει και ο Heitele (1975), με το σκεπτικό ότι αν οι εσφαλμένες διαισθητικές αντιλήψεις δεν αντιμετωπιστούν έγκαιρα θα παγιωθούν και θα είναι πολύ δύσκολο να ξεπεραστούν αργότερα. Την άποψη ότι τα παιδιά κουβαλούν όχι μία αλλά πλήθος διαισθήσεων σχετικά με την τύχη πριν διδαχτούν πιθανότητες στηρίζουν και οι Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier & Lipson (1993) και προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να τις λαμβάνουν υπόψη τους.

Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι οι παρανοήσεις που οφείλονται στη διαίσθηση όχι μόνο δεν μειώνονται με την ηλικία και την εκπαίδευση αλλά σε

κάποιες περιπτώσεις, απεναντίας, αυξάνονται. Όμως, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η σωστή εκπαίδευση και η καλλιέργεια της μαθηματικής συλλογιστικής συγκρατεί κατά κάποιο τρόπο τη διαίσθηση και προφυλάσσει από τα διαισθητικά ολισθήματα τον εκπαιδευμένο άνθρωπο.

2.5. Ο ρόλος των παραδόξων στην ανάπτυξη του συλλογισμού με πιθανότητες

Με όσα αναπτύχθηκαν έως εδώ γίνεται φανερό ότι ένας από τους στόχους της διδασκαλίας θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη στοχαστικού συλλογισμού, που διαφέρει από τον καθαρό μαθηματικό συλλογισμό (Batanero & Díaz, 2012). Εξάλλου, αναγνωρίζεται και η ανάγκη να αναπτύξουμε ένα δυνατό σύστημα διαισθήσεων στους μαθητές (Díaz, Batanero & Contreras, 2010). Δεν αρκεί μόνο να δείξουμε διαφορετικά μοντέλα και τις εφαρμογές τους αλλά πρέπει να απαντήσουμε σε ερωτήσεις σχετικά με την καταλληλότητα ενός μοντέλου και να αντιμετωπίζουμε αντίθετες έννοιες όπως τυχαιότητα και αιτιότητα (Batanero & Sanchez, 2005).
Οι Falk & Konold (1992, p. 157) αναφέρουν:

> Οι πιθανότητες είναι εξαιρετικά πλούσιες σε αντιδιαισθητικά παραδείγματα, που συχνά περιέχουν πλάνες και παράδοξες καταστάσεις. Κάποια από αυτά τα παραδείγματα έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων. Οι μαθητές μπορούν παρόμοια να ωφεληθούν συγκρίνοντας τις διαισθήσεις τους σχετικά με τους γρίφους και τα παράδοξα με τυποποιημένες λύσεις... Ένα παράδοξο συνήθως ενεργοποιεί μία σύγκρουση. Τέτοιες συγκρούσεις ίσως ενθαρρύνουν τους μαθητές να εξετάσουν κριτικά τις διαισθητικές θεωρίες τους.

Δεν πρέπει να παραβλέπουμε ότι οι μαθητές δεν έρχονται κενοί από γνώσεις αλλά κάθε νέα πληροφορία συνδέεται στενά με την προϋπάρχουσα γνώση. Οι μαθητές κατασκευάζουν δικά τους νοήματα συνδέοντας τη νέα πληροφορία με αυτό που πιστεύουν ότι ισχύει. Οι καινούργιες ιδέες τείνουν να γίνουν αποδεκτές από τους μαθητές μόνο όταν η παλιά γνώση δε λειτουργεί ή παρουσιάζεται ανεπαρκής για κάποιο σκοπό που θεωρούν σημαντικό (Garfield & Ben - Zvi, 2007).

Ο Steinbring (1991b) αναφέρει ότι τα πολλά παράδοξα που εμφανίζονται στη θεωρία πιθανοτήτων υποδεικνύουν τη δύσκολη σχέση που ενυπάρχει στις πιθανότητες μεταξύ υποκειμενικών διαισθήσεων και αντικειμενικών δομών των πιθανοτήτων. Τα παράδοξα αναδεικνύουν συχνά μια αντίφαση μεταξύ μαθηματικών υπολογισμών και διαισθητικών αναπαραστάσεων. Αυτές οι αντιφάσεις απορρέουν εν μέρει από την κατανόηση της διαφοράς μεταξύ των δύο με υποκειμενικό τρόπο.

Μερικές χρήσιμες επισημάνσεις για τη διδασκαλία αναφέρουν οι Garfield & Ahlgren (1988). Σύμφωνα με αυτούς, οι διδάσκοντες θα πρέπει μεταξύ άλλων:

- να εισάγουν τα θέματα μέσω δραστηριοτήτων και προσομοιώσεων και όχι αφαιρετικά
- να χρησιμοποιούν οπτικές αναπαραστάσεις και να τονίζουν διερευνητικές μεθόδους για τα δεδομένα
- να επισημαίνουν στους μαθητές συνήθεις λανθασμένες χρήσεις της στατιστικής (πχ. στις ειδήσεις και στις διαφημίσεις)
- να αναγνωρίσουν και να αντιμετωπίσουν τα συνήθη λάθη στους συλλογισμούς των μαθητών πάνω στις πιθανότητες
- να δημιουργούν καταστάσεις που απαιτούν συλλογισμούς με πιθανότητες οι οποίες να ανταποκρίνονται στις απόψεις των μαθητών για τον κόσμο.

Εδώ μπαίνει και ο ρόλος των παραδόξων στη διδασκαλία. Τα προβλήματα αυτά, διαχρονικά, έχουν δώσει ώθηση στη μαθηματική επιστήμη για να αναπτυχθεί, μέσα από το ξεκαθάρισμα ή την αναδιαμόρφωση εννοιών, τη διεύρυνση υπαρχουσών θεωριών και τη δημιουργία νέων. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται (Kleiner & Movshovitz-Hadar, 1994).

Σύμφωνα με τους ίδιους συγγραφείς, μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας τα παράδοξα μπορούν να διαδραματίσουν ένα σημαντικό ρόλο, δημιουργώντας περιέργεια, αυξάνοντας την κινητοποίηση, δημιουργώντας πρόσφορο έδαφος για συζήτηση, ενθαρρύνοντας την εξέταση υποβοσκουσών αντιλήψεων και δείχνοντας ότι η λανθασμένη λογική και επιχειρηματολογία δεν είναι ασυνήθιστη μέσα στο μαθηματικό οικοδόμημα.

Την εισαγωγή παραδόξων στη διδασκαλία υποστηρίζουν και οι Falk & Konold (1992) με το σκεπτικό ότι μαγνητίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Υπάρχουν αρκετοί ερευνητές που προτείνουν τη χρήση των παραδόξων κατά τη διδασκαλία σε φοιτητές (π.χ. Klymchuk & Kachapova, 2012) ή κατά την προετοιμασία των εκπαιδευτικών πριν διοριστούν (π.χ. Batanero, Contreras, Fernándes & Ojeda, 2010). Δε λείπουν, όμως, και οι περιπτώσεις όπου κάποια από αυτά προτείνονται ακόμα και για μαθητές λυκείου (Batanero, Contreras, Díaz & Cañadas, 2014, p. 11; Batanero, Godino & Roa, 2004, p. 6-7; Taylor & Stacey, 2014, p. 15). Η Leviatan (2002) διατηρεί κάποια επιφύλαξη για τη χρήση των παραδόξων στη διδασκαλία, επειδή υπάρχει ο κίνδυνος να δημιουργηθεί αχρείαστη σύγχυση στους διδασκόμενους, όμως θεωρεί ότι μια προσεχτική εισαγωγή τους είναι χρήσιμη, διότι αν οι παρανοήσεις δεν αντιμετωπιστούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, δεν εξαφανίζονται με απλή μελέτη της θεωρίας. Ο λόγος είναι ότι οι εκπαιδευόμενοι δεν εξετάζουν εκείνη την ώρα αν η νέα γνώση αντιτίθεται στη διαίσθησή τους. Εφόσον, όμως, οι υπάρχουσες διαισθήσεις τους παραμένουν αμετάβλητες, συναντώντας αργότερα στη ζωή τους ένα πραγματικό πρόβλημα πιθανοτήτων, θα χρησιμοποιήσουν περισσότερο τις διαισθήσεις τους παρά τη γνώση τους. Από την εμπειρία της, καταλήγει η Leviatan (2002), είναι καλύτερο όλες αυτές οι συγκρούσεις να αντιμετωπιστούν και η σκέψη να ξεκαθαριστεί κατά τη διδασκαλία. Για το σκοπό αυτό η ίδια επιστρατεύει μεθοδικά ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων στη διδασκαλία των στοχαστικών μαθηματικών, μεταξύ των οποίων και ορισμένα από τα παράδοξα που συζητάμε στην παρούσα εργασία.

Όσο αφορά στα οφέλη που προκύπτουν από τη χρήση παραδόξων στην εκπαίδευση, οι Movshovitz-Hadar & Hadass (1990) θεωρούν ότι:

- Παρέχουν πρόσφορο έδαφος για επανάληψη εννοιών αποφεύγοντας τα προβλήματα ρουτίνας, πληροφορούν για κρίσιμα σημεία της ιστορίας των μαθηματικών και ενισχύουν τη δημιουργική μάθηση.
- Προκαλούν γνωστικά εμπόδια στον εκπαιδευτικό που προετοιμάζεται για την περίπτωση που θα τα συναντήσει στους μαθητές του.
- Αποτελούν ισχυρό κίνητρο για την αναμόρφωση του γνωστικού πλαισίου.

- Περιορίζουν τα λάθη και αναδεικνύουν ευκαιρίες μάθησης. Αναπτύσσουν σε διδάσκοντες και διδασκόμενους νοητικά παιδαγωγικά εργαλεία.
- Βελτιώνουν την ετοιμότητα και τις μετα-γνωστικές στρατηγικές των εμπλεκομένων.

Όμως απαιτούνται οι επόμενες δύο προϋποθέσεις:

- Χρειάζονται στέρεα νοητικά θεμέλια για να χτίσουμε πάνω στα παράδοξα.
- Χρειάζεται καλή προετοιμασία για την ένταξή τους στη διδασκαλία.

3. Έρευνα

3.1. Ερευνητικό πρόβλημα

Με βάση τα όσα εκτέθηκαν παραπάνω, ο συλλογισμός με πιθανότητες είναι ένα πολύπλοκο νοητικό κατασκεύασμα, στηριζόμενο σε υπολογίσιμο βαθμό από τη διαίσθηση, το οποίο ιστορικά κατακτήθηκε με αργούς ρυθμούς και προσεχτικά βήματα μέχρι να φτάσει στη σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση με τις ποικίλες εφαρμογές. Οι θεμελιώδεις έννοιές του, όπως είναι ο δειγματικός χώρος, η ανεξαρτησία, η διάκριση μεταξύ διατάξεων και συνδυασμών, η έννοια της αναμενόμενης τιμής και η αναγνώριση της ανάγκης για ισοπίθανα στοιχειώδη (απλά) ενδεχόμενα στο δειγματικό χώρο, για να αναπτυχθούν οργανωμένα απαίτησαν και τη γνωστική σύγκρουση που προκλήθηκε από την εμφάνιση ορισμένων προβλημάτων τα οποία ακόμα και σήμερα αποκαλούνται παράδοξα, διότι προκαλούν το κοινό αίσθημα και προβληματίζουν ακόμα και μετά τη μαθηματική επεξεργασία και οριστική λύση τους. Η δε μαθηματική απόδειξη συμβαίνει αρκετές φορές να μην πείθει τον αναγνώστη, τη στιγμή που είναι συνηθισμένο και συνάμα απαιτητό από τη μαθηματική επιστήμη να στηρίζει τα συμπεράσματά της σε αποδείξεις βασισμένες σε αξιώματα και βασικές αρχές της λογικής. Στην περίπτωση των παραδόξων, και ιδιαίτερα εντός των πιθανοτήτων, φαίνεται να αμφισβητείται η αποδεικτική δύναμη των μαθηματικών.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ανάπτυξη του συλλογισμού με πιθανότητες στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα και μία πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς, καθώς αρκετές φορές δεν έχουν ούτε οι ίδιοι κατακτήσει και ξεκαθαρίσει τις εμπλεκόμενες έννοιες. Επίσης, οι προϋπάρχουσες διαισθήσεις περί τυχαιότητας ή/και πιθανότητας αντιστέκονται στη νέα γνώση σε μεγαλύτερο βαθμό από ό,τι συμβαίνει σε άλλα διδακτικά αντικείμενα ή ακόμα και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Το αποτέλεσμα είναι οι παρανοήσεις που υπάρχουν να διαιωνίζονται και να προκαταλαμβάνουν αποφάσεις ενηλίκων (πλέον) ερευνητών σε κρίσιμα ορισμένες φορές ζητήματα. Κεντρικό ρόλο στις προκαταλήψεις αυτές φαίνεται να έχουν τα παράδοξα που έχουν καταγραφεί και πολλαπλώς μελετηθεί αλλά συνεχίζουν να κεντρίζουν το ενδιαφέρον ανηλίκων και ενηλίκων. Τα προβλήματα αυτά, που κυκλοφορούν με διάφορα ονόματα,

αξιοποιούνται από αρκετούς ερευνητές και πανεπιστημιακούς καθηγητές είτε στη διδασκαλία των φοιτητών σε διάφορα πανεπιστήμια είτε στην επιμόρφωση των μελλοντικών εκπαιδευτικών πριν από το διορισμό τους στην εκπαίδευση. Ιδιαίτερα στην τελευταία περίπτωση, κάποια από αυτά τα παράδοξα διδάσκονται ως υποδείγματα ή πρότυπα μεθοδολογίας για τη διδασκαλία των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

3.2. Ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση την παραπάνω πρόταση, στην παρούσα εργασία θα θέλαμε να διερευνήσουμε με ποιο τρόπο αντιμετωπίζουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ορισμένα παράδοξα σε σχέση με την τάξη στην οποία φοιτούν και την τυπική εκπαίδευσή τους μέσα στο σχολείο. Πιο συγκεκριμένα, θέσαμε τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Τι παρανοήσεις φαίνεται να έχουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην αντιμετώπιση κάποιων «διαισθητικών» παραδόξων; Υπάρχουν διαφορές στις παρανοήσεις ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούν;

- Τι επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες εμφανίζουν οι μαθητές σε διάφορες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όταν αντιμετωπίζουν τέτοια «διαισθητικά» παράδοξα; Υπάρχουν διαφορές στα επίπεδα ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούν;

- Η τυπική γνώση που αποκτάται μέσα από τη διδασκαλία βοηθάει τους μαθητές να φτάσουν σε περισσότερο επιτυχημένα αποτελέσματα κατά την αντιμετώπιση αυτών των «διαισθητικών» παραδόξων;

3.3. Συμμετέχοντες – ιδιαίτερα στοιχεία

Στην έρευνα συμμετείχαν 213 μαθητές διαφορετικών βαθμίδων και τάξεων από 4 διαφορετικά σχολεία – ένα γυμνάσιο και τρία λύκεια – του νομού Αττικής. Το γυμνάσιο ανήκει σε περιοχή του νοτίου τομέα Αθηνών και οι μαθητές του έχουν καλό

βιοτικό επίπεδο, οι δε επιδόσεις τους στα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από τους εκπαιδευτικούς του σχολείου «πολύ καλές». Από το γυμνάσιο αυτό συμμετείχαν στην έρευνα 48 μαθητές της Β γυμνασίου και 63 μαθητές της Γ γυμνασίου. Τα τρία λύκεια ανήκουν όλα σε περιοχές του κεντρικού τομέα Αθηνών, οι μαθητές τους έχουν καλό βιοτικό επίπεδο, ενώ για τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά δε συλλέχτηκαν στοιχεία. Από το πρώτο λύκειο συμμετείχαν στην έρευνα 30 μαθητές της Α λυκείου, από το δεύτερο λύκειο συμμετείχαν στην έρευνα 23 μαθητές της Α λυκείου και 21 μαθητές της Γ λυκείου, ενώ από το τρίτο λύκειο συμμετείχαν στην έρευνα 28 μαθητές της Γ λυκείου. Αθροιστικά οι συμμετέχοντες ανά τάξη είναι: Β γυμνασίου 48, Γ γυμνασίου 63, Α λυκείου 53 και Γ λυκείου 49. Κανένα από τα σχολεία δεν ήταν πειραματικό, πρότυπο ή ειδικό σχολείο με την ειδική ή τη γενική έννοια του όρου. Όλα ήταν τυπικά σχολεία γενικής εκπαίδευσης. Για λόγους τόσο ηθικής δεοντολογίας όσο και προστασίας των προσωπικών δεδομένων δε ζητήθηκε από τους μαθητές κανένα προσωπικό στοιχείο εκτός από την τάξη στην οποία φοιτούν. Ως συνέπεια αυτού, δεν έχουμε αριθμητικά στοιχεία για την επίδοσή τους στα μαθηματικά ή γενικότερα στα μαθήματα, όπως επίσης και για το φύλο τους ή άλλα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους (μαθησιακές δυσκολίες, δομή της οικογένειάς τους κ.α.). Τέτοια στοιχεία ενδεχομένως επηρεάζουν τις επιδόσεις, αλλά στην παρούσα έρευνα δεν κατέστη δυνατό να ελεγχθούν. Η συμμετοχή των μαθητών στην έρευνα ήταν εθελοντική και ανώνυμη.

Η επιλογή των σχολείων έγινε με βάση την προσβασιμότητα σε αυτά, επομένως η δειγματοληψία δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτική ως προς κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό των μαθητών ή των σχολείων. Ο αρχικός σχεδιασμός προέβλεπε τη συμμετοχή μόνο δύο ομάδων, της Γ γυμνασίου και της Γ Λυκείου, και τη σύγκριση μεταξύ τους. Στη συνέχεια, όμως, αξιοποιήθηκαν και απαντήσεις μαθητών που δόθηκαν σε δοκιμαστικό επίπεδο, καθώς το πλήθος τους έφτασε να είναι συγκρίσιμο με αυτό των βασικών ομάδων και δεν υπήρξε διαφοροποίηση μεταξύ του δοκιμαστικού φύλλου εργασίας και του τελικού που δόθηκε στις δύο παραπάνω βασικές ομάδες.

Οι μαθητές, βάσει αναλυτικού προγράμματος, θα έπρεπε να έχουν έρθει σε πρώτη επαφή με στοιχειώδεις έννοιες της στατιστικής από τη Β Γυμνασίου και με στοιχειώδεις έννοιες των πιθανοτήτων από τη Γ Γυμνασίου. Διερευνήθηκε, εντούτοις, και διαπιστώθηκε ότι καμία από τις τάξεις των γυμνασίων δεν είχε διδαχτεί κατά τη διεξαγωγή της έρευνας τα σχετικά κεφάλαια του σχολικού βιβλίου. Επομένως, όποιες

γνώσεις τυχόν υπάρχουν οφείλονται σε εξωσχολικές πηγές και προσωπικό ενδιαφέρον των ίδιων των μαθητών ή των οικείων τους. Για την Α λυκείου, επίσης διαπιστώθηκε ότι σε κανένα από τα δύο λύκεια δεν υπήρχαν μαθητές που να έχουν διδαχτεί στοχαστικά μαθηματικά στο γυμνάσιο. Σημειώνουμε ότι για την Α λυκείου στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα δεν προβλέπεται η διδασκαλία του κεφαλαίου των πιθανοτήτων στο μάθημα της Άλγεβρας, κάτι που ίσχυε τα προηγούμενα χρόνια για κάποια λίγα σχολικά έτη. Επομένως, θεωρείται ότι οι συμμετέχοντες δεν έχουν διδαχτεί πιθανότητες στο σχολείο και ό,τι γνώσεις τυχόν επιδεικνύουν οφείλονται σε άλλους παράγοντες.

Αντίθετα, για τη Γ λυκείου προβλέπεται η διδασκαλία πιθανοτήτων στο μάθημα «Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής» το οποίο είναι μάθημα γενικής παιδείας υποχρεωτικό για όλους τους μαθητές. Κατά το παρελθόν υπήρξε επί σειρά ετών και κατ' επιλογήν πανελλαδικά εξεταζόμενο αλλά κατά τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Οι μαθητές της Γ Λυκείου που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα απαιτήθηκε να έχουν διδαχτεί στο σχολείο τα σχετικά κεφάλαια του σχολικού βιβλίου και τα φύλλα εργασίας να δοθούν στους μαθητές μετά τη συγκεκριμένη διδασκαλία. Επομένως, οι συμμετέχοντες μαθητές της Γ Λυκείου έχουν την τυπική γνώση στη διάθεσή τους μέσω της ενδοσχολικής διδασκαλίας και αυτό είναι ένα στοιχείο που τους διαφοροποιεί από τους μαθητές όλων των υπόλοιπων τάξεων.

Όλα τα φύλλα εργασίας διανεμήθηκαν και επεστράφησαν μετά τις διακοπές του Πάσχα, κατά τους μήνες Απρίλιο και Μάιο του 2018, δηλαδή προς το τέλος της σχολικής χρονιάς. Αυτό ήταν αναγκαίο ειδικά για τους μαθητές της Γ Λυκείου προκειμένου πρώτα να διδαχτούν τα κεφάλαια των πιθανοτήτων που είναι τοποθετημένα στο τέλος της διδακτέας ύλης και μετά να υποστούν τις δοκιμασίες. Το γεγονός ότι οι εργασίες δόθηκαν τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή ενδεχομένως να επηρεάζει τα αποτελέσματα αλλά για το κεφάλαιο της ύλης που μας ενδιαφέρει δεν μπορούσε να γίνει διαφορετικά.

3.4. Σχεδιασμός ερωτηματολογίων – συλλογή δεδομένων

Η έρευνα διεξήχθη με τη σύνταξη και διανομή σχετικού φύλλου εργασίας (ερωτηματολόγιο) στο οποίο περιέχονταν δύο έργα που έπρεπε να αντιμετωπίσουν οι

μαθητές. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τα παράδοξα πάνω στα οποία βασίστηκαν τα δύο έργα καθώς και την ακριβή μορφή υπό την οποία αυτά δόθηκαν στους μαθητές.
Το πρώτο έργο βασίστηκε σε ένα πρόβλημα γνωστό ως

Το παράδοξο των δύο παιδιών.

Το πρόβλημα δημοσιεύτηκε αρχικά από τον Martin Gardner στο περιοδικό Scientific American το 1959 και η υπόθεση έχει ως εξής (Gardner, 1961):

> Ο κ. Smith έχει δύο παιδιά. Τουλάχιστον το ένα από αυτά είναι αγόρι. Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο παιδιά να είναι αγόρια;
> Ο κ. Jones έχει δύο παιδιά. Το μεγαλύτερο από αυτά είναι κορίτσι. Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο παιδιά να είναι κορίτσια;

Αυθόρμητα σκέπτεται κανείς ότι τα δύο ερωτήματα πρέπει να έχουν την ίδια απάντηση. Μία συνήθης δικαιολόγηση είναι ότι η σειρά γέννησης φαίνεται άσχετη με το φύλο του άλλου παιδιού και δεν μπορεί να το επηρεάζει. Η αρχική διαίσθηση ότι τα δύο προβλήματα είναι ταυτόσημα είναι δυνατό να ξεπεραστεί εύκολα, κατασκευάζοντας προσεκτικά τους δειγματικούς χώρους.
Για το πρώτο, υπάρχουν 3 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα για τη γέννηση των παιδιών εφόσον το ένα από αυτά είναι αγόρι (ΑΑ, ΑΚ και ΚΑ) και από αυτά μόνο το ένα (ΑΑ) περιλαμβάνει δύο αγόρια. Άρα η πιθανότητα να έχει δύο αγόρια είναι 1/3. Για το δεύτερο, υπάρχουν 2 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα για τη γέννηση των παιδιών εφόσον το πρώτο από αυτά είναι κορίτσι (ΚΑ και ΚΚ) και από αυτά το ένα (ΚΚ) περιλαμβάνει δύο κορίτσια. Άρα η πιθανότητα να έχει δύο κορίτσια είναι 1/2.
Για πληρότητα, να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι η Khovanova (2012) χαρακτηρίζει την απλοϊκή αυτή λύση ως εσφαλμένη, φέρνοντας σε πρωτεύουσα θέση τη μέθοδο με την οποία ο πατέρας (κ. Smith) δηλώνει ότι τουλάχιστον ένα από τα παιδιά του είναι αγόρι. Ανάλογα με τη μέθοδο, η απάντηση που δίνεται στο πρόβλημα είναι διαφορετική. Έτι περαιτέρω, αλλάζοντας κατάλληλα τη μέθοδο μπορεί να γίνει αποδεκτή οποιαδήποτε απάντηση μεταξύ 0 και 1! Προτείνει λοιπόν να δίνεται έμφαση στη μέθοδο με την οποία προκύπτουν οι διάφορες πληροφορίες στο πρόβλημα ώστε να μπορεί να δοθεί μονοσήμαντη απάντηση. Διαφορετικά το χαρακτηρίζει «ασαφές». Δε θα σταθούμε, όμως, περισσότερο σε αυτό, διότι δεν αποτελεί το κεντρικό στοιχείο που απασχόλησε την έρευνά μας.

Αυτό που έχει περισσότερο ενδιαφέρον είναι ο τρόπος με τον οποίο οι επιπλέον πληροφορίες – όσο άσχετες κι αν φαίνονται – μεταβάλλουν ριζικά το πρόβλημα. Για να γίνει κατανοητό αυτό, αναφέρουμε ένα αληθινό περιστατικό. Στην 9η επετειακή συνάντηση προς τιμήν του Martin Gardner, ο Gary Foshee έθεσε το εξής πρόβλημα (Khovanova, 2012; Taylor & Stacey, 2014):

> Έχω δύο παιδιά. Το ένα είναι αγόρι γεννημένο Τρίτη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχω δύο αγόρια[12];

Φαίνεται παράδοξο η ημέρα γέννησης του ενός παιδιού (επιπλέον πληροφορία) να σχετίζεται με το φύλο του άλλου παιδιού. Έτσι, δίνεται η εντύπωση ότι η νέα πληροφορία είναι άσχετη με το ερώτημα και άρα δεν μπορεί να επηρεάζει με κάποιο τρόπο τη ζητούμενη πιθανότητα. Η διαισθητική αυτή αντιμετώπιση έχει τις ρίζες της σε μία παρανόηση που η Falk (1992), παίρνοντας αφορμή από ένα άλλο παρόμοιο πρόβλημα, ονομάζει «no-news, no-change» ή «I've known it all along»[13]. Τα πράγματα, όμως, δεν είναι έτσι.

Οι Taylor & Stacey (2014) σχολιάζουν ότι αυτή η επιπλέον πληροφορία σχετικά με την ημέρα γέννησης του αγοριού αλλάζει την πιθανότητα το άλλο παιδί να είναι αγόρι σε 13/27. Μάλιστα αναφέρουν ότι οποιαδήποτε επιπλέον πληροφορία ανεβάζει την πιθανότητα από το 1/3 (που έχει το πρόβλημα του κ. Smith) μέχρι το 1/2 (που έχει το πρόβλημα του κ. Jones) και μάλιστα μπορούμε να βρούμε (ή καλύτερα να επινοήσουμε) κατάλληλη πληροφορία, έτσι ώστε να επιτύχουμε οποιαδήποτε πιθανότητα επιθυμούμε ανάμεσα στο 1/3 και στο 1/2.

Οι ίδιοι, αναφερόμενοι σε διδακτικές μεθόδους, προτείνουν να χρησιμοποιήσουμε για τη μοντελοποίηση των προβλημάτων αυτής της μορφής πίνακες διπλής εισόδου. Αναφέρονται σε δύο θετικά στοιχεία: (α) βοηθάει τους μαθητές να οπτικοποιήσουν τη διαδικασία και να μην είναι η λύση εντελώς φορμαλιστική και άρα δυσνόητη και (β) αποκαλύπτει με έναν παραστατικό τρόπο ποιο είναι το κλειδί της υπόθεσης, αυτό που

---

[12] Αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς το πρόβλημα που εξετάζουμε τίθεται ως εξής: *Επιλέγουμε τυχαία κάποιον/α με δύο παιδιά και τον/την ρωτάμε: «Έχεις ένα αγόρι γεννημένο Τρίτη, ναι ή όχι;». Αν απαντήσει «ναι», ποια είναι η πιθανότητα να έχει δύο αγόρια;* (βλ. Khovanova, 2012, p. 9).

[13] Ο τίτλος *"no-news, no-change"* κατά την άποψη του συγγραφέα δεν εκφράζει ακριβώς το περιεχόμενο της παρανόησης, καθώς δίδεται οπωσδήποτε κάποια επιπλέον πληροφορία άρα δεν είναι "no-news". Διατηρείται σε κάθε περίπτωση ο τίτλος που δίνει το άρθρο της Falk.

διαφοροποιεί το ένα πρόβλημα από τα άλλα παρόμοια. Το στοιχείο αυτό είναι η τομή των ενδεχομένων. Η διδασκαλία αυτών των προβλημάτων προτείνεται στην εργασία αυτή ως κατάλληλη για μαθητές λυκείου (ίσως και μικροτέρων τάξεων) στο μάθημα των πιθανοτήτων (Taylor & Stacey, 2014, p. 15).

Στη γενική του περίπτωση το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Να βρεθεί η πιθανότητα μια οικογένεια να έχει δύο αγόρια, δεδομένου ότι έχει τουλάχιστον ένα αγόρι το οποίο έχει ένα χαρακτηριστικό με πιθανότητα p. Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα γενικά είναι $\frac{2-p}{4-p}$. Οι οριακές καταστάσεις αυτού είναι $\lim_{p\to 0}\frac{2-p}{4-p}=\frac{1}{2}$ (μηδενική τομή – πρόβλημα κ. Jones) και $\lim_{p\to 1}\frac{2-p}{4-p}=\frac{1}{3}$ (μέγιστη τομή – πρόβλημα κ. Smith). Για την απόδειξη παραπέμπουμε στην εργασία των Taylor & Stacey (2014), όπου υπάρχουν επιπλέον και άλλες εκδοχές του ίδιου προβλήματος. Επίσης και στους Borovcnik & Kapadia (2014b).

Βασισμένοι στα παραπάνω, σχεδιάσαμε το πρώτο έργο για τους μαθητές. Το έργο αυτό αποτελούνταν από δύο σκέλη – προβλήματα που ήταν παρόμοια μεταξύ τους.

Η ακριβής μορφή του πρώτου έργου, όπως μοιράστηκε στους μαθητές, ήταν η εξής:

«Προσπαθήστε να λύσετε τα επόμενα δύο προβλήματα:

Α. Σταματάμε στο δρόμο τυχαία έναν άνθρωπο που ξέρουμε ότι έχει δύο παιδιά και τον ρωτάμε: «Έχεις τουλάχιστον ένα αγόρι;». Απαντάει «ναι».
Τι νομίζετε ότι είναι πιο πιθανό;
(α) Να έχει δύο αγόρια, (β) να έχει ένα αγόρι και ένα κορίτσι, (γ) είναι το ίδιο πιθανό.

Β. Σταματάμε στο δρόμο τυχαία έναν άνθρωπο που ξέρουμε ότι έχει δύο παιδιά και τον ρωτάμε: «Το μεγαλύτερο παιδί σου είναι κορίτσι;». Απαντάει «ναι».
Τι νομίζετε ότι είναι πιο πιθανό;
(α) Να έχει δύο κορίτσια, (β) να έχει ένα κορίτσι και ένα αγόρι, (γ) είναι το ίδιο πιθανό.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας σε κάθε περίπτωση».

Τα ερωτήματα δόθηκαν με τη μορφή πολλαπλής επιλογής για να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να απαντήσουν σε αυτά, ακόμη κι αν ένιωθαν κάποια ανασφάλεια σχετικά με την ικανότητά τους να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Επίσης, επειδή οι απαντήσεις αναμένονταν να είναι κατά κύριο λόγο διαισθητικού τύπου στις μικρές ηλικίες που στερούνται τη σχετική εκπαίδευση, δεν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν από τις ηλικίες αυτές, εάν ζητούνταν ακριβής υπολογισμός κάποιων πιθανοτήτων. Στη συνέχεια, όμως, ζητήθηκε η απάντηση να δικαιολογηθεί για να γίνει φανερή η στρατηγική που ακολουθήθηκε. Ο σχεδιασμός ήταν να εστιάσουμε περισσότερο στη στρατηγική που ακολουθήθηκε παρά στην απάντηση αυτή καθ' εαυτή, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι θα αγνοήσουμε τελείως την απάντηση.

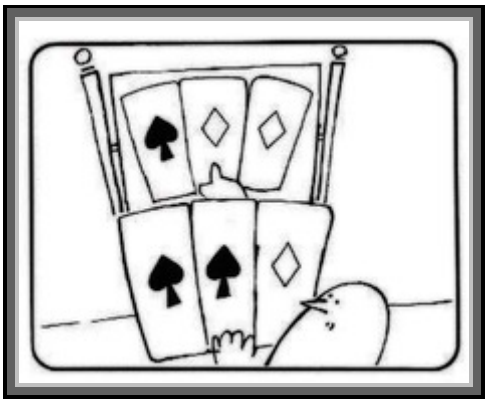
Τα δύο παραπάνω προβλήματα θεωρήθηκαν ως ένα έργο διότι μία από τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρει είναι αν οι μαθητές διαχωρίζουν το ένα πρόβλημα από το άλλο, όπως θα έπρεπε να συμβεί με βάση την προηγηθείσα ανάλυση. Η διατύπωση των δύο αυτών προβλημάτων δεν ήταν η απλούστερη δυνατή με βάση τη βιβλιογραφία. Τέθηκε όμως με την παραπάνω μορφή σκόπιμα, επειδή μία κριτική που έχει ασκηθεί στο συγκεκριμένο παράδοξο είναι η ασάφεια του ερωτήματος, όπως είδαμε περισσότερο αναλυτικά προηγουμένως. Για τις ανάγκες των μαθητών της Γ λυκείου, που έχουν και το μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον ως οι μόνοι που έχουν διδαχτεί τις πιθανότητες στο σχολείο, θελήσαμε να εξασφαλίσουμε τη μοναδικότητα της ορθής λύσης, έστω κι αν με την επιλογή μας αυτή επιβαρύναμε τους μαθητές των μικρότερων τάξεων. Θα δούμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων ότι αυτή η επιλογή ενδεχομένως να είχε επίδραση στις απαντήσεις της Β γυμνασίου.

Η βασική στόχευση αυτού του έργου ήταν ο έλεγχος των ικανοτήτων των μαθητών να ξεχωρίσουν τη διαφορετική δομή που έχει ο δειγματικός χώρος του κάθε πειράματος. Αυστηρότερα, στο πρώτο σκέλος – πρόβλημα αναμένεται οι μαθητές που κινούνται προς τη σωστή κατεύθυνση να διαχωρίσουν τις περιπτώσεις ΑΚ και ΚΑ μεταξύ τους σε δύο διακεκριμένα σημεία του δειγματικού χώρου, ενώ οι μαθητές που δεν κινούνται στη σωστή κατεύθυνση αναμένεται να χρησιμοποιήσουν το δειγματικό σύνολο (sample set), αποδίδοντας λανθασμένα ίση πιθανότητα στα στοιχεία του.

Το δεύτερο έργο βασίστηκε σε ένα πρόβλημα γνωστό ως

Το παράδοξο με τα τρία τραπουλόχαρτα (Gardner, 1982/1989):

Υπάρχουν τρία τραπουλόχαρτα. Το ένα έχει μπαστούνι και από τις δύο μεριές. Το τελευταίο έχει καρό και από τις δύο όψεις. Το μεσαίο τραπουλόχαρτο έχει μπαστούνι από τη μία όψη και καρό από την άλλη όψη.



Εικόνα 9: Τα τρία τραπουλόχαρτα του Gardner

Ανακατεύουμε τα τραπουλόχαρτα μέσα σε ένα καπέλο, επιλέγουμε ένα και το ακουμπάμε με τη μία όψη φανερή επάνω σε ένα τραπέζι. Μετά στοιχηματίζουμε αν η πίσω όψη του τραπουλόχαρτου είναι ίδια με την όψη που φαίνεται.

Το παιχνίδι με μια πρώτη ματιά φαίνεται δίκαιο. Αν υποθέσουμε ότι η φανερή όψη είναι καρό, τότε αποκλείεται να είναι το χαρτί που έχει μπαστούνι και από τις δύο όψεις. Επομένως φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι θα είναι ένα από τα άλλα δύο χαρτιά, είτε το καρό-μπαστούνι είτε το καρό-καρό. Θεωρώντας τα ενδεχόμενα ισοπίθανα, δίνουμε στο κάθε ένα πιθανότητα 1/2.

Η παραπάνω συλλογιστική είναι λάθος για τον ίδιο λόγο που αναλύσαμε όταν εξετάσαμε το παράδοξο του Bertrand. Ο δειγματικός χώρος (sample space) εδώ περιέχει τις όψεις των τραπουλόχαρτων και όχι από τα ίδια τα τραπουλόχαρτα, διαφορετικά δεν περιέχει ισοπίθανα ενδεχόμενα[14]. Στην αρχή υπάρχουν έξι ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα (οι όψεις των τραπουλόχαρτων) και όχι τρία (τα τραπουλόχαρτα). Μετά την εμφάνιση μιας καρό όψης, υπάρχουν τρία ισοπίθανα ενδεχόμενα από τα οποία μόνο το ένα έχει διαφορετική την πίσω όψη από την μπροστά. Άρα το παιχνίδι ευνοεί την εμφάνιση της ίδιας όψης δύο στις τρεις φορές που παίζεται. Πηγή του παραδόξου είναι η παρανόηση της λανθασμένης καταμέτρησης του δειγματικού χώρου.

[14] Πρόκειται, δηλαδή, για το *δειγματικό σύνολο (sample set)*, κατά τους Chernoff & Zazkis (2011).

Το συγκεκριμένο παράδοξο (με μάρκες αντί για τραπουλόχαρτα) προτείνεται από τους Batanero, Godino & Roa (2004) ως εργαλείο για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών προκειμένου να διδάξουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση θέματα σχετικά με δεσμευμένη πιθανότητα. Στο συγκεκριμένο άρθρο προτείνεται και μία μέθοδος για τη διδακτική αξιοποίησή του στην τάξη. Στη δική μας περίπτωση δεν θα ασχοληθούμε με δεσμευμένες πιθανότητες, διότι δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη του σχολείου αλλά θα αξιοποιήσουμε το ίδιο εργαλείο με διαφορετική στόχευση.

Βασισμένοι στα προηγούμενα, σχεδιάσαμε το δεύτερο έργο για τους μαθητές. Η ακριβής διατύπωση είχε ως εξής:

«Ένα παιχνίδι παίζεται με τρεις κάρτες.
Η μία είναι μαύρη και από τις δύο όψεις. Η δεύτερη είναι κόκκινη και από τις δύο όψεις.
Η τρίτη κάρτα είναι μαύρη από τη μία όψη και κόκκινη από την άλλη όψη.

Ανακατεύουμε τις κάρτες κρυφά μέσα σε ένα κουτί, επιλέγουμε μία και την ακουμπάμε με τη μία όψη φανερή επάνω σε ένα τραπέζι. Η όψη που φαίνεται είναι κόκκινη.

Η όψη που δε φαίνεται είναι πιο πιθανό να είναι:
(α) Κόκκινη, (β) μαύρη, (γ) τα δύο χρώματα είναι το ίδιο πιθανά.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας».

Και εδώ, όπως και στο πρώτο έργο, η εστίαση ήταν περισσότερο στη δικαιολόγηση και λιγότερο στην απάντηση αλλά θέλαμε οι μαθητές να απαντήσουν έστω και αν δεν μπορούν να δικαιολογήσουν. Κεντρικό θέμα αυτής της εργασίας κατά το σχεδιασμό υπήρξε η σωστή επιλογή του δειγματικού χώρου. Στην περίπτωση αυτή αναμέναμε, σύμφωνα πάντα με τη σχετική ανάλυση, δύο κατευθύνσεις για τους μαθητές. Κάποιοι να θεωρήσουν στοιχεία του δειγματικού χώρου τα τραπουλόχαρτα, ενώ κάποιοι τις όψεις αυτών που είναι και το σωστό. Στην πρώτη περίπτωση οδηγούμαστε σε ακατάλληλο δειγματικό χώρο (δειγματικό σύνολο – sample set) και η επιλογή αυτή

οδηγεί σε παραπλάνηση και τελικά σε λάθος απάντηση. Στη δεύτερη περίπτωση, αν δεν υπάρξει άλλος λάθος χειρισμός, οδηγούμαστε κατά κανόνα στη σωστή απάντηση. Να σημειώσουμε επίσης ότι από τα τρία (δύο + ένα) προβλήματα, το ένα είχε ως σωστή απάντηση αυτή που έδινε ίση πιθανότητα στα ζητούμενα ενδεχόμενα, ενώ τα άλλα δύο έδιναν άνιση. Η κατασκευή δειγματικού χώρου με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι η βασική απαίτηση για να εφαρμοστεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ο οποίος διδάσκεται στο σχολείο.

Τα έργα – ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν στο σχολείο όπου φοιτά ο κάθε μαθητής, ανά τμήμα τάξης, χωρίς την παρουσία του ερευνητή και υπό την εποπτεία του εκπαιδευτικού του τμήματος, εντός μίας διδακτικής ώρας που οι συνεργαζόμενοι εκπαιδευτικοί αφιέρωσαν για το σκοπό αυτό. Ως γενική αρχή προτάθηκε στους εκπαιδευτικούς να διαθέσουν στους μαθητές 30 λεπτά για την επεξεργασία και των δύο εργασιών, χωρίς να πιέσουν, εντούτοις, τους μαθητές με αφορμή το χρόνο. Δεν αναφέρθηκε από τους συνεργαζόμενους εκπαιδευτικούς κανένα πρόβλημα ως προς το χρόνο που διατέθηκε ή περίπτωση κατά την οποία κάποιος μαθητής ξεπέρασε τη μία διδακτική ώρα (40 λεπτά). Οι μαθητές απάντησαν σε όλα τα ερωτήματα γραπτά. Τα φύλλα εργασίας συλλέχτηκαν και κωδικοποιήθηκαν με βάση το σχολείο προέλευσης και την τάξη.

3.5. Πλαίσιο ανάλυσης των δεδομένων

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων προτιμήθηκε το πλαίσιο των Jones, Langrall, Thornton & Mogill (1997) το οποίο αφενός έχει διαμορφωθεί για να αναλύσει στοχευμένα τη συλλογιστική των μαθητών πάνω στις πιθανότητες και αφετέρου, εκτός από τα αναγνωριζόμενα επίπεδα συλλογισμού, τοποθετεί και τα έργα των μαθητών στα επίπεδα ξεχωριστά για κάθε ένα από τα στοιχεία που συνθέτουν το συλλογισμό με πιθανότητες, δηλαδή το δειγματικό χώρο, την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, τη σύγκριση πιθανοτήτων και τη δεσμευμένη πιθανότητα. Αυτό διευκολύνει την τοποθέτηση των έργων στα επίπεδα από μέρους του ερευνητή. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας που έχουν διαμορφώσει οι Jones et al. (1997) παρουσιάζεται στην επόμενη σελίδα (εικόνα 10).

ΣΤΟΙΧΕΙΑ	Επίπεδο 1 Υποκειμενικό	Επίπεδο 2 Μεταβατικό	Επίπεδο 3 Άτυπα Ποσοτικό	Επίπεδο 4 Αριθμητικό
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ	καταγράφει ένα μη πλήρες σύνολο αποτελεσμάτων για ένα πείραμα ενός σταδίου	καταγράφει ένα πλήρες σύνολο αποτελεσμάτων για ένα πείραμα ενός σταδίου και μερικές φορές καταγράφει ένα πλήρες σύνολο αποτελεσμάτων για ένα πείραμα δύο σταδίων με περιορισμένη και μη συστηματική στρατηγική	καταγράφει συγκροτημένα τα αποτελέσματα για ένα πείραμα δύο σταδίων με μερικώς γενετική στρατηγική	υιοθετεί και εφαρμόζει μια γενετική στρατηγική που δίνει τη δυνατότητα για πλήρη καταγραφή των αποτελεσμάτων για περιπτώσεις δύο και τριών σταδίων
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΝΟΣ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟΥ	προβλέπει περισσότερο/λιγότερο πιθανά ενδεχόμενα βασισμένος σε υποκειμενική κρίση αναγνωρίζει βέβαια και αδύνατα ενδεχόμενα	προβλέπει περισσότερο/λιγότερο πιθανά ενδεχόμενα βασισμένος σε ποσοτικές κρίσεις αλλά ίσως επιστρέφει σε υποκειμενικές κρίσεις	προβλέπει περισσότερο/λιγότερο πιθανά ενδεχόμενα βασισμένος σε ποσοτικές κρίσεις ακόμα και σε καταστάσεις με μη συναφή αποτελέσματα χρησιμοποιεί αριθμούς άτυπα για να συγκρίνει πιθανότητες κάνει διάκριση μεταξύ "βέβαιου", "αδύνατου" και "πιθανού" ενδεχομένου και διακιολογεί την επιλογή ποσοτικά	προβλέπει περισσότερο/λιγότερο πιθανά για πειράματα ενός σταδίου αποδίδει αριθμητικές πιθανότητες στα ενδεχόμενα (μπορεί να είναι πραγματικές πιθανότητες ή κάποια μορφή στοιχήματος)
ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	συγκρίνει την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε δύο διαφορετικούς δειγματικούς χώρους, συνήθως βασισμένος σε ποικίλες υποκειμενικές ή αριθμητικές κρίσεις δεν μπορεί να ξεχωρίσει "δίκαιες" και "άδικες" καταστάσεις με πιθανότητες	συγκρίνει πιθανότητες βασισμένος σε ποσοτικές κρίσεις (μπορεί να μην ποσοτικοποιεί σωστά και ίσως έχει δυσκολίες όταν εμπλέκονται μη συναφή ενδεχόμενα) αρχίζει να διακρίνει "δίκαιες" και "άδικες" καταστάσεις με πιθανότητες	συγκρίνει πιθανότητες βασισμένος σε συγκροτημένες ποσοτικές κρίσεις δικαιολογεί με έγκυρο ποσοτικό συλλογισμό αλλά μπορεί να έχει δυσκολίες όταν εμπλέκονται μη συναφή γεγονότα διακρίνει "δίκαιες" και "άδικες" γεννήτριες πιθανοτήτων βασισμένος σε έγκυρο αριθμητικό συλλογισμό	αποδίδει αριθμητικό μέτρο στην πιθανότητα και συγκρίνει ενσωματώνει μη συναφή και συναφή αποτελέσματα στον προσδιορισμό πιθανοτήτων αποδίδει ίσες αριθμητικές πιθανότητες σε ισοπίθανα ενδεχόμενα
ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ	παίρνοντας αφορμή από μία δοκιμή ενός πειράματος ενός σταδίου, δεν καταγράφει μια πλήρη λίστα αποτελεσμάτων αν και μια πλήρης λίστα είχε δοθεί πριν από την πρώτη δοκιμή αναγνωρίζει πότε υπάρχουν βέβαια και αδύνατα ενδεχόμενα σε καταστάσεις μη-επανατοποθέτησης	αναγνωρίζει ότι η πιθανότητα κάποιων ενδεχομένων αλλάζει σε καταστάσεις μη-επανατοποθέτησης, αλλά η αναγνώριση είναι ατελής και συνήθως περιορίζεται μόνο σε ενδεχόμενα που έχουν συμβεί προηγουμένως	μπορεί να προσδιορίσει αλλαγές στα μέτρα των πιθανοτήτων σε μια κατάσταση μη-επανατοποθέτησης αναγνωρίζει ότι οι πιθανότητες όλων των ενδεχομένων αλλάζουν σε μια κατάσταση μη-επανατοποθέτησης	αποδίδει αριθμητικές πιθανότητες σε καταστάσεις επανατοποθέτησης και μη-επανατοποθέτησης διακρίνει εξαρτημένα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Εικόνα 10: Το 4-επίπεδο πλαίσιο κατάταξης της συλλογιστικής με πιθανότητες των Jones et al.

Σε σχέση με τον πίνακα αυτό, δεδομένου ότι το δομικό στοιχείο της δεσμευμένης πιθανότητας χαρακτηρίζεται από τη διαδικασία της επανατοποθέτησης ή μη κατά τις επαναλαμβανόμενες δοκιμές του πειράματος, γίνεται αντιληπτό ότι τα έργα που ζητήθηκαν από τους μαθητές στην παρούσα έρευνα αφορούσαν περισσότερο στα τρία πρώτα δομικά στοιχεία, δηλαδή στο δειγματικό χώρο, στην πιθανότητα ενός ενδεχομένου και στη σύγκριση πιθανοτήτων. Επιπλέον, με βάση τα δεδομένα που συλλέχτηκαν, χρειάστηκαν και ορισμένες τροποποιήσεις για να μπορούν να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα.

Οι μικρές τροποποιήσεις που έγιναν αφενός θεωρούμε ότι δεν επηρεάζουν το συνολικό δόμημα και τους κεντρικούς άξονες του πλαισίου και αφετέρου θα δικαιολογηθούν όσο γίνεται καλύτερα με βάση πραγματικά παραδείγματα από τα δεδομένα που συλλέχτηκαν.

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η δικαιολόγηση που έδωσαν οι μαθητές δεν περιείχε κατ' ανάγκην στοιχεία από όλους τους δομικούς λίθους του συλλογισμού με πιθανότητες. Αυτό δεν εμπόδισε την κατάταξή τους σε κάποιο επίπεδο συλλογισμού με βάση τα στοιχεία που εμφανίστηκαν στις δικαιολογήσεις τους στην πράξη, ακόμα κι αν η κατάταξη βασίστηκε σε έναν και μόνο από τους δομικούς λίθους. Οι περιπτώσεις όπου οι μαθητές απάντησαν την ερώτηση πολλαπλής επιλογής χωρίς να δικαιολογήσουν την επιλογή τους καταχωρήθηκαν ως ελλείπουσες τιμές (missing). Περιπτώσεις όπου οι μαθητές δεν έδωσαν καθόλου απάντηση εμφανίστηκαν μόνο στο δεύτερο έργο και ήταν ακριβώς 4 μαθητές (3 μαθητές της Α λυκείου και 1 μαθητής της Γ γυμνασίου). Κατ' αρχήν οι μαθητές αυτοί καταχωρήθηκαν ως ελλείπουσες τιμές (διαφορετικού κωδικού) αλλά κατ' ουσία για το επίπεδο αυτών των μαθητών ελήφθη υπόψη η επίδοσή τους στο πρώτο έργο. Επισημαίνουμε ότι στην περίπτωση που μαθητής πήρε στα χέρια του το ερωτηματολόγιο αλλά επέλεξε να μην δώσει απάντηση σε κανένα από τα δύο έργα, θεωρήθηκε ότι δεν συμμετείχε στην έρευνα και δεν ελήφθη καθόλου υπόψη το συγκεκριμένο γραπτό.

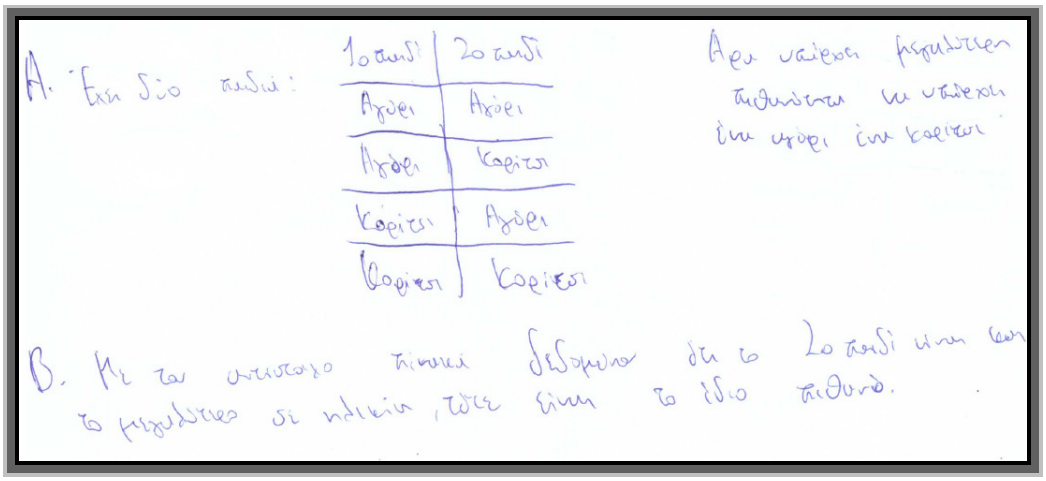
Κατά την τελική καταχώρηση σε επίπεδα, λαμβανομένων υπόψη και των δύο έργων όπως περιγράφεται και παρακάτω, διαπιστώθηκε ότι υπήρξαν 3 μαθητές της Β γυμνασίου και 7 μαθητές της Α λυκείου οι οποίοι καταχωρήθηκαν ως ελλείπουσες τιμές λόγω έλλειψης δικαιολόγησης και στα δύο έργα με τα οποία καταπιάστηκαν.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε εκτενέστερα την τοποθέτηση των μαθητών στα επίπεδα 1-4 σε σχέση με τα τρία δομικά στοιχεία που μας ενδιαφέρουν, όπως χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.

Δειγματικός χώρος: Στο επίπεδο 1 κατατάσσονται οι μαθητές που καταγράφουν το δειγματικό χώρο ελλιπώς για πείραμα ενός σταδίου. Στα δοσμένα έργα δεν εφαρμόζεται λόγω της φύσης των προβλημάτων, επειδή δεν ζητείται οι μαθητές να κατασκευάσουν μόνοι τους το δειγματικό χώρο πειράματος ενός σταδίου αλλά δίνονται εξαρχής τα δυνατά εξαγόμενα (αγόρι ή κορίτσι στο πρώτο έργο, κόκκινη ή μαύρη όψη στο δεύτερο έργο).

Στο επίπεδο 2 κατατάσσονται οι μαθητές οι οποίοι καταγράφουν το δειγματικό σύνολο (sample set) του πειράματος (των δύο σταδίων) με την έννοια που αναπτύχθηκε παραπάνω αντί για το δειγματικό χώρο. Για παράδειγμα, για το πρώτο ερώτημα του πρώτου έργου (code 2039 – Γ λυκείου): «Το γεγονός ότι το ένα παιδί είναι αγόρι είναι σίγουρο. Για το δεύτερο παιδί [υπάρχουν] δύο μόνο πιθανότητες, να είναι αγόρι ή να είναι κορίτσι». Σημειώνουμε ότι η διάκριση σε πρώτο και δεύτερο παιδί δεν είναι σωστή για το πρώτο ερώτημα αυτού του έργου. Η ίδια απάντηση για το δεύτερο ερώτημα του πρώτου έργου θα τοποθετούνταν σε ανώτερο επίπεδο.

Στα επίπεδα 3-4 έγινε μία προσαρμογή στο πλαίσιο, καθώς τοποθετήθηκαν μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν εργαλεία (το αντικείμενο της έρευνας), όπως δενδροδιαγράμματα ή πίνακες διπλής εισόδου για την καταγραφή του δειγματικού χώρου. Ατελείς ή μερικώς ορθές κατασκευές καταχωρήθηκαν στο επίπεδο 3 και πλήρεις κατασκευές στο επίπεδο 4. Δεν απαιτείται το σχήμα (ειδικά για τις μικρότερες ηλικίες που δεν το έχουν διδαχτεί) αλλά μόνο η μεθοδικότητα στον προσδιορισμό. Παράδειγμα επιπέδου 3 (code 2052 – Α λυκείου) στο δεύτερο έργο: «Υπάρχουν 3 κατηγορίες. $1^{η}$ μαύρη – μαύρη, $2^{η}$ μαύρη – κόκκινη, $3^{η}$ κόκκινη – κόκκινη». Καταγράφει το δειγματικό σύνολο και όχι το δειγματικό χώρο αλλά τοποθετείται στο επίπεδο 3, διότι χρησιμοποιεί μεθοδικότητα στην καταγραφή. Πλήρως ορθές καταγραφές με χρήση εργαλείων τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 4, όπως στο παρακάτω παράδειγμα από το πρώτο έργο (εικόνα 11), που αξιοποιείται για την απάντηση και των δύο υποερωτημάτων (code 2037 – Γ λυκείου).



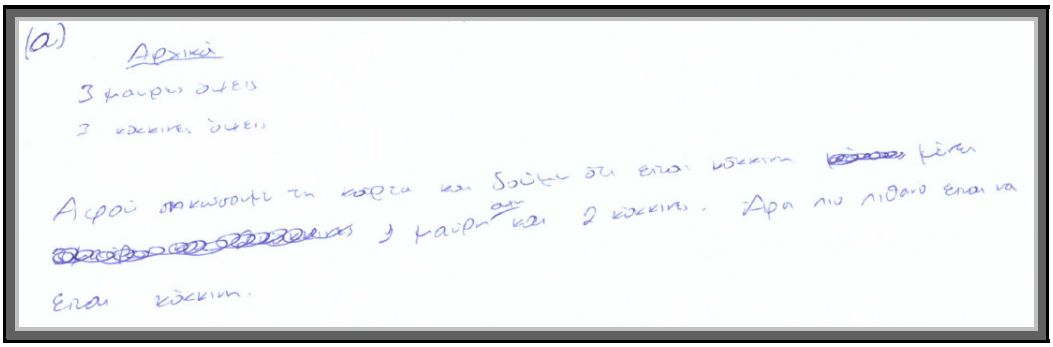
Εικόνα 11: Απάντηση μαθητή της Γ λυκείου στο πρώτο έργο που κατατάχτηκε στο επίπεδο 4

Πιθανότητα ενός ενδεχομένου: Στο επίπεδο 1 τοποθετήθηκαν οι υποκειμενικοί υπολογισμοί πιθανοτήτων και οι αναγνωρίσεις βέβαιων και αδύνατων ενδεχομένων. Για παράδειγμα (code 1027 – Γ λυκείου), στο πρώτο έργο (ερώτημα α) η απάντηση: «Επειδή όταν ο άνθρωπος ρωτήθηκε χρησιμοποιήθηκε η λέξη τουλάχιστον, θεωρώ πως πιο πιθανό είναι να έχει δύο αγόρια» αποτελεί υποκειμενικό υπολογισμό και στη δεύτερη εργασία η απάντηση (code 4203 – Β Γυμνασίου): «Αποκλείουμε την κάρτα που είναι μαύρη και από τις δύο όψεις...» αποτελεί αναγνώριση αδύνατου ενδεχομένου. Στο ίδιο επίπεδο τοποθετήθηκαν και ιδιάζουσες απαντήσεις οι οποίες στερούνται μαθηματικού ερείσματος, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση μαθητή της Γ Γυμνασίου (code 4118) ο οποίος αναφέρει στο δεύτερο έργο: «β, επειδή θα πέσει η σκιά της κάρτας πάνω στο τραπέζι με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι είναι μαύρη». Τέτοιο σκεπτικό εμφανίζεται περισσότερο στις μικρότερες ηλικίες. Στο ίδιο έργο έχουμε και το σκεπτικό «είναι το ίδιο πιθανόν γιατί έτσι πιστεύω» (code 4187 – Β Γυμνασίου). Τέλος, δίνουμε κι ένα παράδειγμα από τη Γ λυκείου (code 1016) για το πρώτο έργο: «Και τα δύο είναι πιθανά γιατί αν κάποιος σκεφτεί αυτό το πρόβλημα με κοινή λογική θα διαπιστώσει ότι και τα δύο είναι πιθανά». Αυτές οι περιπτώσεις ανήκουν στο επίπεδο 1 ως υποκειμενικές κρίσεις.

Στο επίπεδο 2 τοποθετήθηκαν υπολογισμοί βασισμένοι σε ποσοτικές κρίσεις με μη συγκροτημένο τρόπο. Για παράδειγμα στο δεύτερο έργο (code 3088 – Α λυκείου): «[Στην αρχή] έχει τρεις όψεις κόκκινου και τρεις όψεις μαύρου [χρώματος], από τη στιγμή που φεύγει η μία πιθανότητα [όψη] του κόκκινου και μένουν 2, ενώ το μαύρο έχει ακόμα 3 [όψεις] είναι πιο πιθανό το μαύρο». Ποσοτικοποιεί τα μεγέθη αλλά

αποτυγχάνει να μετρήσει σωστά τις όψεις που συνεχίζουν να βρίσκονται στο παιχνίδι. Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς αν τυχόν ο μαθητής αυτός βρίσκεται πιο χαμηλά, εφόσον δεν αναγνωρίζει το αδύνατο ενδεχόμενο, όμως η ποσοτικοποίηση που κάνει δεν επιτρέπει να ισχυριστούμε κάτι τέτοιο, εφόσον ξεπερνάει την υποκειμενική κρίση και χρησιμοποιεί μέτρηση για να δικαιολογήσει τη σκέψη του. Θα μπορούσε μάλιστα να τοποθετηθεί και σε ακόμα υψηλότερο επίπεδο, αν δεν είχε κάνει το λάθος στη μέτρηση.

Στα επίπεδα 3-4, κατόπιν προσαρμογής του πλαισίου, τοποθετήθηκαν οι συλλογιστικές που χρησιμοποιούν αριθμούς για να μετρηθούν οι πιθανότητες με συνεπή τρόπο. Στο επίπεδο 3 καταχωρήθηκαν οι τελικά λανθασμένες λύσεις παρά τη σωστή ποσοτικοποίηση και στο επίπεδο 4 οι λύσεις που ήταν ποσοτικοποιημένες και μέχρι τέλους σωστές. Παράδειγμα για το επίπεδο 3 στο δεύτερο έργο (code 1005 – Γ λυκείου): «Στην αρχή έχουμε τρεις κάρτες τις οποίες έχουμε ανακατέψει, οπότε κάθε κάρτα έχει 33,33% πιθανότητες να τραβηχτεί. Αφού η κάρτα η οποία τραβήχτηκε έχει μία (τουλάχιστον) όψη που είναι κόκκινη, απορρίπτεται η κάρτα με τις δύο μαύρες όψεις και είμαστε ανάμεσα στις 2 κάρτες που έχουν τουλάχιστον μία κόκκινη όψη η καθεμία. Άρα οι πιθανότητες είναι "50-50"». Χρησιμοποιεί με συνέπεια ποσοτική γλώσσα αλλά υποθέτει ίση πιθανότητα και στο δεύτερο βήμα, πράγμα που δεν ισχύει. Ορθές δικαιολογήσεις ποσοτικού χαρακτήρα τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 4 ακόμα και αν δεν έχουν την αυστηρή τυπική μορφή της πιθανότητας. Ένα τέτοιο παράδειγμα (code 1001 – Γ λυκείου) από το δεύτερο έργο δίνουμε στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 12):



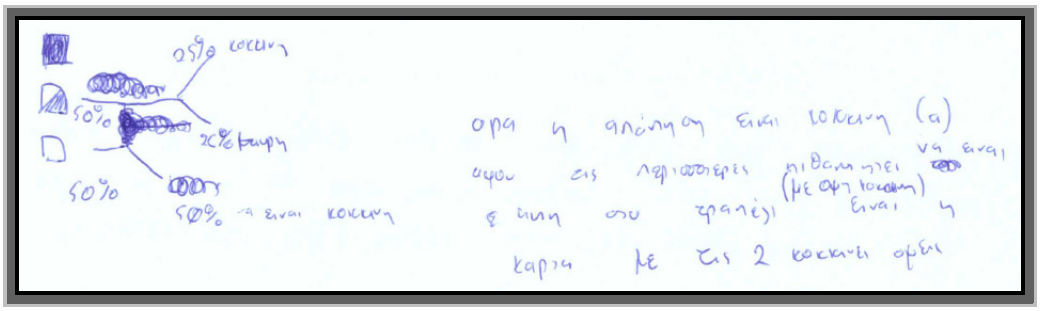
Εικόνα 12: Απάντηση μαθητή της Γ λυκείου στο δεύτερο έργο που κατατάχτηκε στο επίπεδο 4

Σύγκριση πιθανοτήτων: Η αδυναμία διάκρισης μεταξύ δίκαιων και άδικων καταστάσεων, αποτέλεσε κριτήριο για την τοποθέτηση των μαθητών στο επίπεδο 1. Σε πολλές περιπτώσεις αυτό εκτιμήθηκε από τη σύγκριση των απαντήσεων στα δύο

υποερωτήματα του πρώτου έργου. Κατά κανόνα, όσοι δεν κατάφεραν να δουν διαφορές ανάμεσα στα δύο υποερωτήματα, τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1. Εξαιρέσεις μπορεί να υπάρχουν, όμως, αν προκύπτουν επαρκή στοιχεία από τον υπόλοιπο συλλογισμό του μαθητή που να υποστηρίζουν το αντίθετο.

Στο επίπεδο 2 τοποθετούνται όσοι κάνουν τη διάκριση μεταξύ των δύο υποερωτημάτων του πρώτου έργου (καθώς και οι τυχόν εξαιρέσεις του επιπέδου 1) και όσοι χρησιμοποιούν ποσοτικές συγκρίσεις με μη συγκροτημένο τρόπο. Δίνουμε ένα παράδειγμα (code 1008 – Γ λυκείου) από το δεύτερο σκέλος – πρόβλημα του πρώτου έργου: «...αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα γέννησης αγοριού και κοριτσιού είναι ίσες τότε... οι πιθανότητες να γεννηθούν 2 κορίτσια μειώνονται κατά κάθε γέννα οπότε εάν αρχικά η πιθανότητα κοριτσιού ήταν 50%, την επόμενη φορά θα είναι 25% οπότε πιθανότερο (θεωρητικά) είναι να βγει αγόρι και όχι κορίτσι».

Στο επίπεδο 3 τοποθετούνται όσοι χρησιμοποιούν ποσοτικό συλλογισμό και δίνουν έγκυρες δικαιολογήσεις αλλά ίσως υπάρχουν ελλείψεις στα πιο περίπλοκα σημεία της επεξεργασίας. Για παράδειγμα (code 2058 – Α λυκείου) στο δεύτερο έργο απαντά: «Κόκκινη διότι έχουμε βγάλει ήδη την μαύρη – μαύρη κάρτα από το παιχνίδι και έτσι έχουμε δύο κάρτες, δηλαδή 3 κόκκινες όψεις και 1 μαύρη όψη οπότε 75% πιθανότητα να είναι κόκκινη η όψη που δεν φαίνεται και 25% να είναι μαύρη». Η απάντηση αυτή θα μπορούσε να τοποθετηθεί και στο επίπεδο 4, αλλά αποτυγχάνει να εξαιρέσει την όψη που έχει ήδη αποκαλυφθεί από τους τελευταίους υπολογισμούς που κάνει. Να σημειώσουμε εδώ ότι ο μαθητής διαγράφει χιαστί τη (σωστή) απάντησή του, δείγμα ότι και ο ίδιος δεν εμπιστεύεται ότι η απάντηση που μόλις υπολόγισε με σχεδόν άψογο μαθηματικό τρόπο είναι η σωστή. Παρά τη διαγραφή, η απάντηση τοποθετήθηκε στο εν λόγω επίπεδο, διότι μας ενδιαφέρει το επίπεδο συλλογισμού του μαθητή και δεν βαθμολογούμε το γραπτό του υπό την τυπική έννοια του όρου. Όμοια στο δεύτερο έργο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 13), ο μαθητής (code 3085 – Α λυκείου) έχει υπολογίσει τις πιθανότητες κάθε βήματος και συγκρίνει την πιθανότητα να εμφανιστεί κόκκινη όψη μεταξύ των δύο καρτών που έχουν τουλάχιστον μία κόκκινη όψη αλλά οι ποσότητες πιθανοτήτων που αναγράφει δεν είναι απόλυτα ορθές.



Εικόνα 13: Απάντηση μαθητή της Α λυκείου στο δεύτερο έργο που κατατάχτηκε στο επίπεδο 3

Για το επίπεδο 4 απαιτείται να έχουν μετρηθεί ποσοτικά και να έχουν δοθεί σωστά οι πιθανότητες τόσο των ισοπίθανων όσο και των μη ισοπίθανων καταστάσεων. Τέτοιο επίπεδο δεν εμφανίστηκε στους συμμετέχοντες μαθητές σε σύγκριση πιθανοτήτων. Με άλλα λόγια, όλες οι ποσοτικές συγκρίσεις πιθανοτήτων που τυχόν επιχείρησαν οι μαθητές περιείχαν κάποιο μικρό σφάλμα και καταχωρήθηκαν στο επίπεδο 3. Επίπεδο 4 εμφανίζεται βεβαίως από τα υπόλοιπα δύο στοιχεία του συλλογισμού με πιθανότητες.

Κατά τις ως άνω αναλύσεις των έργων των μαθητών δεν λάβαμε πάντοτε υπόψη την ορθή ή λάθος απάντηση στην ερώτηση. Αυτό θα αποτελέσει ξεχωριστό στατιστικό στοιχείο. Ως τώρα ενδιαφερθήκαμε μόνο για τη συλλογιστική που παρουσιάζουν οι μαθητές κατά την επεξεργασία των έργων. Δεδομένου ότι δεν υπήρξαν συνεντεύξεις με τους μαθητές, δεν ήταν δυνατόν να υπάρχει σε όλους τους μαθητές μοναδική απάντηση ως προς την κατάταξή τους. Έγινε όμως κάθε δυνατή προσπάθεια να υπάρχει συνέπεια με όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω μέσω των θεωρητικών επισημάνσεων και των παραδειγμάτων. Αφού καταγράφηκε το επίπεδο συλλογισμού του κάθε μαθητή χωριστά για κάθε έργο, στη συνέχεια δημιουργήθηκε μία νέα μεταβλητή στην οποία κρατήσαμε το ανώτερο επίπεδο συλλογισμού στο οποίο φτάνει ο κάθε μαθητής. Αυτό θα θεωρούμε πως είναι το επίπεδο συλλογισμού του. Δεν έχει σημασία σε ποιο από τα δύο έργα επιτεύχθηκε αυτό ή εάν το επίπεδο ήταν το ίδιο και για τα δύο. Όπως προαναφέραμε, οι 4 μαθητές που δεν απάντησαν στο δεύτερο έργο καταχωρήθηκαν με βάση την επίδοσή τους στο πρώτο έργο, ενώ οι 10 μαθητές που δε δικαιολόγησαν την απάντησή τους σε κανένα έργο, παρέμειναν ελλείπουσες τιμές.

Στον παρακάτω πίνακα (εικόνα 14) παρουσιάζουμε το τελικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, όπως διαμορφώθηκε μετά την επεξεργασία του πλαισίου των Jones et al. (1997) – που αποτέλεσε τη βάση – σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν αναλυτικά παραπάνω.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ	Επίπεδο 1 Υποκειμενικό	Επίπεδο 2 Μεταβατικό	Επίπεδο 3 Άτυπα Ποσοτικό	Επίπεδο 4 Αριθμητικό
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ	καταγραφή του δειγματικού χώρου ελλιπώς για πείραμα ενός σταδίου	καταγραφή του δειγματικού συνόλου (sample set) του πειράματος αντί για το δειγματικό χώρο	χρήση εργαλείων όπως δενδροδιαγράμματα ή πίνακες διπλής εισόδου για την καταγραφή του δειγματικού χώρου ατελώς ή με μερικώς ορθό τρόπο.	χρήση εργαλείων όπως δενδροδιαγράμματα ή πίνακες διπλής εισόδου για την καταγραφή του δειγματικού χώρου με πλήρως ορθό τρόπο.
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΝΟΣ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟΥ	υποκειμενικός υπολογισμός πιθανοτήτων ή/και αναγνώριση βέβαιων ή/και αδύνατων ενδεχομένων	υπολογισμός βασισμένος σε ποσοτικές κρίσεις με μη συγκροτημένο τρόπο	χρήση αριθμών για να μετρηθούν οι πιθανότητες με συνεπή τρόπο αλλά λανθασμένη λύση	χρήση αριθμών για να μετρηθούν οι πιθανότητες με συνεπή τρόπο και μέχρι τέλους σωστή λύση
ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	αδυναμία διάκρισης μεταξύ δίκαιων και άδικων καταστάσεων	διάκριση μεταξύ δίκαιων και άδικων καταστάσεων ή/και χρήση ποσοτικών συγκρίσεων με μη συγκροτημένο τρόπο	χρήση ποσοτικού συλλογισμού και παροχή έγκυρων δικαιολογήσεων αλλά με ελλείψεις στα πιο περίπλοκα σημεία της επεξεργασίας	ποσοτική μέτρηση και σωστή αναγραφή των πιθανοτήτων τόσο των ισοπίθανων όσο και των μη ισοπίθανων καταστάσεων

Εικόνα 14: Τροποποίηση του πλαισίου των Jones et al. για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας

Κατά δεύτερο λόγο, κάθε γραπτό αξιολογήθηκε και για την τυχόν παρανόηση που παρουσιάζει ο μαθητής κατά την επεξεργασία του κάθε έργου. Για την κατάταξη αυτή χρησιμοποιήθηκε η σύνοψη παρανοήσεων που κάνει η Savard (2014) αλλά χωρίς να ληφθεί υπόψη η διάκριση μεταξύ ντετερμινιστικών και μη-ντετερμινιστικών παρανοήσεων. Από τα δεδομένα αναγνωρίστηκαν 6 παρανοήσεις: *Ίση πιθανότητα (equiprobability), προσέγγιση αποτελέσματος (outcome approach), λάθος καταμέτρηση του δειγματικού χώρου (sample space), διαθεσιμότητα (availability), προσωπική ερμηνεία (personalist interpretation), αντιπροσωπευτικότητα (representativeness).* Ασφαλώς, υπήρχε και η κατηγορία καμία παρανόηση για τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές ενήργησαν με αυστηρά μαθηματικό τρόπο χωρίς να βασιστούν σε διαισθητικές στρατηγικές. Για τις περιπτώσεις που οι μαθητές δεν έδιναν απάντηση στα ερωτήματα, καθώς και για εκείνες που έδιναν μεν απάντηση αλλά χωρίς καμία δικαιολόγηση δημιουργήθηκαν δύο κατηγορίες ελλειπουσών τιμών (missing). Οι περιπτώσεις αυτές συνοψίζονται παρακάτω.

	Βαθμίδα-τάξη	Περιπτώσεις					
		Έγκυρες		Ελλείπουσες		Σύνολα	
		N	Ποσοστό	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό
Στρατηγική στο πρώτο έργο	Β Γυμν.	44	91,7%	4	8,3%	48	100,0%
	Γ Γυμν.	63	100,0%	0	,0%	63	100,0%
	Α Λυκ.	42	79,2%	11	20,8%	53	100,0%
	Γ Λυκ.	49	100,0%	0	,0%	49	100,0%
Στρατηγική στο δεύτερο έργο	Β Γυμν.	42	87,5%	6	12,5%	48	100,0%
	Γ Γυμν.	62	98,4%	1	1,6%	63	100,0%
	Α Λυκ.	44	83,0%	9	17,0%	53	100,0%
	Γ Λυκ.	49	100,0%	0	,0%	49	100,0%

Παρατηρούμε ότι η τάξη Β γυμνασίου και, ιδιαίτερα έντονα, η τάξη Α λυκείου εμφανίζουν μεγαλύτερα ποσοστά ελλειπουσών τιμών. Αυτό αποδίδεται περισσότερο στο ότι τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στις τάξεις αυτές σε πιλοτικό στάδιο, ειδικά δε στην Α λυκείου μερικά και από εκπαιδευτικό θεωρητικών μαθημάτων. Φαίνεται ότι οι μαθητές της Α λυκείου αρκέστηκαν περισσότερο στο να επιλέξουν μία απάντηση στην πολλαπλή επιλογή χωρίς να δικαιολογήσουν. Για την τάξη Β γυμνασίου κάτι τέτοιο πρέπει να θεωρηθεί εντελώς δικαιολογημένο, καθώς οι μαθητές δεν έχουν τις γνώσεις για να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους και είναι φυσικό να διστάζουν.

Οι στρατηγικές που καταγράφηκαν σε αυτό το στάδιο ήταν και πάλι ανεξάρτητες από τη σωστή ή όχι απάντηση στην ερώτηση του προβλήματος. Ως εκ τούτου, υπάρχουν περιπτώσεις που ο μαθητής απαντάει μεν σωστά στην ερώτηση αλλά έχει ακολουθήσει λανθασμένη στρατηγική. Επίσης μια σωστή μαθηματική στρατηγική που δεν παρουσιάζει κάποια παρανόηση αλλά, εντούτοις, δεν οδηγεί για κάποιο λόγο στη σωστή απάντηση, καταγράφηκε και πάλι ως σωστή.

Στις παρανοήσεις κρίθηκε σκόπιμο να γίνει καταγραφή ανά έργο. Έτσι, ένας μαθητής είναι δυνατόν να παρουσιάζει διαφορετική παρανόηση στο πρώτο έργο και διαφορετική στο δεύτερο. Σε περίπτωση, όμως, που εμφανίζεται παραπάνω από μία παρανόηση εντός του ίδιου έργου, επιλέχτηκε η κατά την άποψη του συγγραφέα πιο ισχυρή. Στην περίπτωση αυτή υπάγονται και τα δύο υποερωτήματα του πρώτου έργου, τα οποία αξιολογήθηκαν ως ένα, με τρόπο ώστε στην περίπτωση που σε κάθε ένα από αυτά παρουσιάζεται διαφορετική παρανόηση να καταγράφεται μόνο η επικρατούσα. Αυτό κρίθηκε αναγκαίο για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, καθώς πολλοί από τους μαθητές που δεν έκαναν τη διάκριση ανάμεσα στα δύο

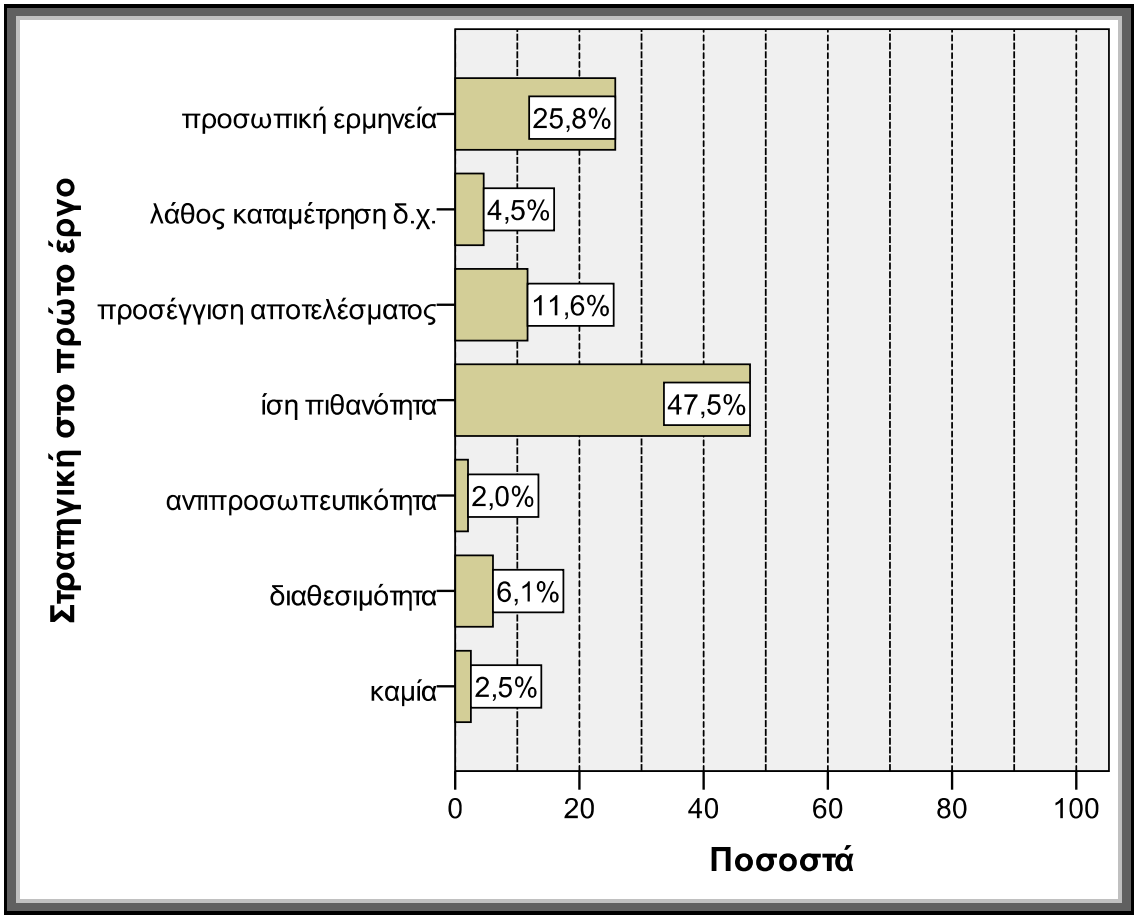
υποερωτήματα του έργου αυτού, τα αντιμετωπίζουν ενιαία. Η παράμετρος αν οι μαθητές επεξεργάστηκαν ενιαία το πρώτο έργο ή όχι καταγράφηκε ως ακόμα μία μεταβλητή. Χρησιμοποιήθηκε κατ' αρχήν για την τοποθέτηση των μαθητών στο κατάλληλο επίπεδο, σύμφωνα με τα όσα εκτέθηκαν προηγουμένως, αλλά διατηρήθηκε και ως αυτόνομη μεταβλητή για να μπορεί να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τονίζουμε ότι η αναγνώριση ή μη της διαφορετικότητας των δύο υποερωτημάτων – προβλημάτων του πρώτου έργου δεν σχετίζεται με την απάντηση σε αυτά. Υπάρχουν περιπτώσεις που εμφανίζεται η ίδια απάντηση στα δύο υποερωτήματα αλλά σημειώθηκε ότι ο μαθητής έκανε διάκριση μεταξύ των δύο και, αντιστρόφως, υπάρχουν περιπτώσεις που εμφανίζεται διαφορετική απάντηση αλλά σημειώθηκε ότι ο μαθητής τα αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο.

Τέλος, για κάθε ένα από τα τρία (δύο και ένα) προβλήματα καταγράφηκαν οι απαντήσεις των μαθητών. Εκτός από τις απαντήσεις, δημιουργήθηκε και μία δίτιμη μεταβλητή για το αν ο μαθητής απαντάει στο ερώτημα σωστά ή λανθασμένα. Σημειώνουμε ότι στο πρόβλημα 1Α η σωστή απάντηση ήταν το (β), στο πρόβλημα 1Β η σωστή απάντηση ήταν το (γ) και στο πρόβλημα 2 η σωστή απάντηση ήταν το (α). Κάθε πρόβλημα είχε διαφορετική επιλογή ως σωστή απάντηση.

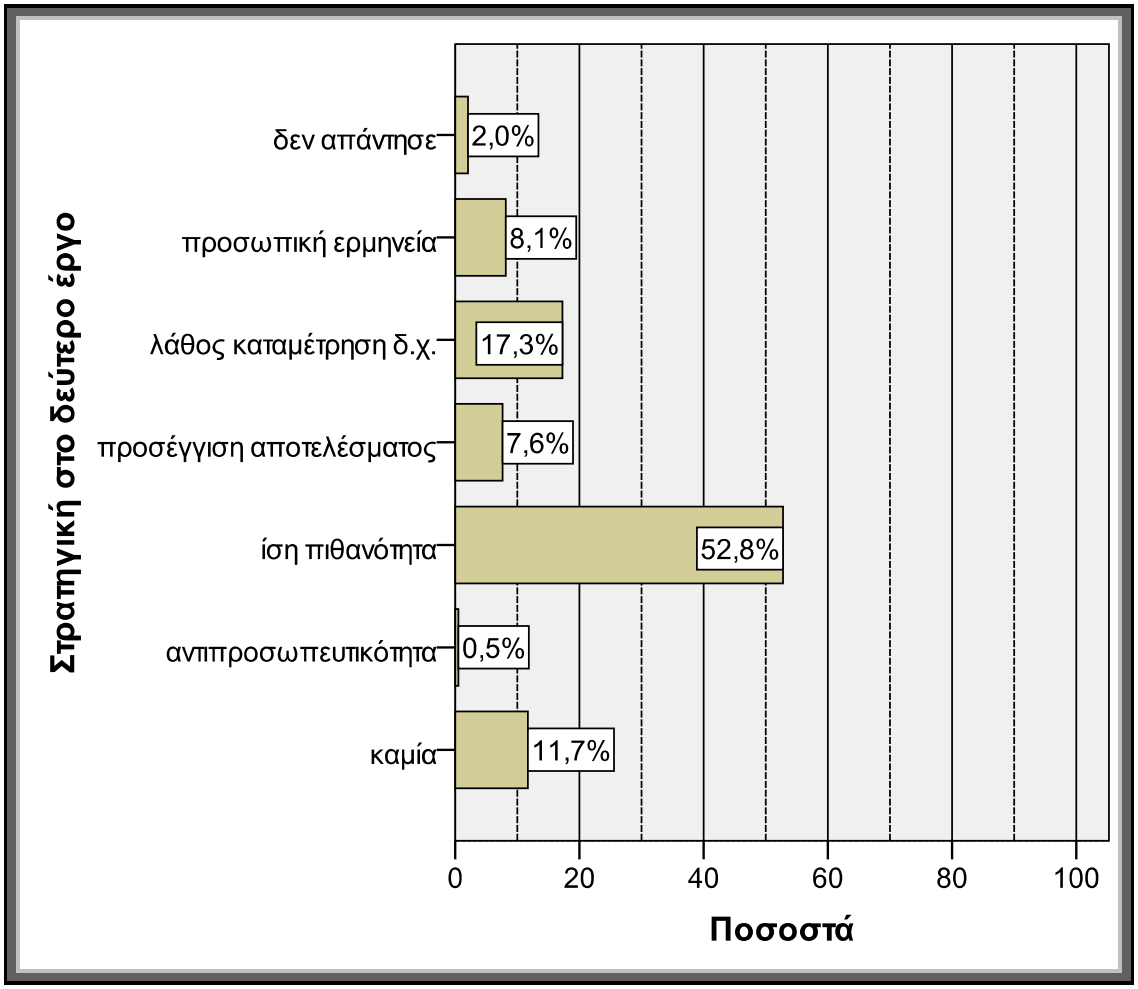
4. Αποτελέσματα

4.1. Επεξεργασία των απαντήσεων – αποτελέσματα

Μετά την καταχώρηση των δεδομένων στο στατιστικό πακέτο SPSS, θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα. Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα μας ενδιαφέρει το είδος των παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την αντιμετώπιση των παραπάνω «διαισθητικών» παραδόξων. Τα διαγράμματα σχετικών συχνοτήτων με τις καταγεγραμμένες στρατηγικές στα δύο έργα παρουσιάζονται παρακάτω (εικόνες 15 και 16).



Εικόνα 15: Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις στρατηγικές των μαθητών στο πρώτο έργο



Εικόνα 16: Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις στρατηγικές των μαθητών στο δεύτερο έργο

Από τη μελέτη των διαγραμμάτων διαπιστώνουμε ότι περίπου οι μισοί μαθητές χρησιμοποιούν τη στρατηγική της ίσης πιθανότητας για να δώσουν κάποια απάντηση στα προβλήματα και των δύο έργων. Στο πρώτο έργο, οι επόμενες σε συχνότητα παρανοήσεις που εμφανίζονται κατά σειρά είναι: προσωπική ερμηνεία (25,8%), προσέγγιση αποτελέσματος (11,6%) και διαθεσιμότητα (6,1%). Στο δεύτερο έργο, οι επόμενες σε συχνότητα παρανοήσεις είναι: λάθος καταμέτρηση δ.χ. (17,3%), καμία (11,7%), προσωπική ερμηνεία (8,1%) και προσέγγιση αποτελέσματος (7,6%). Φαίνεται να υπάρχει μία διαφοροποίηση.

Πιστεύουμε ότι η διαφοροποίηση οφείλεται στη φύση του προβλήματος. Το πρώτο έργο που τίθεται με όρους καθημερινής ζωής προκαλεί περισσότερες προσωποποιημένες κρίσεις, καθώς και επιθυμία να γνωρίζουμε ο συγκεκριμένος άνθρωπος που συναντάμε τι παιδιά έχει, ενώ το δεύτερο έργο φαίνεται περισσότερο μαθηματικό, καθώς αναφέρεται σε ένα τυχερό παιχνίδι, και προκαλεί περισσότερες προσπάθειες καταγραφής του δειγματικού χώρου (λανθασμένες και σωστές) και

λιγότερες προσωποποιημένες κρίσεις. Επίσης, η διαθεσιμότητα εμφανίζεται μόνο στο πρώτο έργο, όπου κανείς έχει τη δυνατότητα (και την τάση) να ανακαλέσει πληροφορίες για οικογένειες με δύο παιδιά.

Για να εξετάσουμε τις διαφορές σε σχέση με την τάξη φοίτησης, μελετάμε τους πίνακες με τα ποσοστά των μαθητών που χρησιμοποίησαν κάθε στρατηγική ανά τάξη στην οποία φοιτούσαν κατά τη διεξαγωγή της έρευνας.

Περίληψη επεξεργασίας περιπτώσεων

	Περιπτώσεις					
	Έγκυρες		Ελλείπουσες		Σύνολο	
	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό
Στρατηγική στο πρώτο έργο	198	93,0%	15	7,0%	213	100,0%
Στρατηγική στο δεύτερο έργο	197	92,5%	16	7,5%	213	100,0%

Στρατηγική στο πρώτο έργο ανά τάξη

		Βαθμίδα-τάξη				Σύνολο
		Β Γυμν.	Γ Γυμν.	Α Λυκ.	Γ Λυκ.	
καμία	Μέτρηση	0	2	0	3	5
	% επί του συνόλου	,0%	1,0%	,0%	1,5%	2,5%
διαθεσιμότητα	Μέτρηση	6	1	2	3	12
	% επί του συνόλου	3,0%	,5%	1,0%	1,5%	6,1%
αντιπροσωπευ-τικότητα	Μέτρηση	3	0	1	0	4
	% επί του συνόλου	1,5%	,0%	,5%	,0%	2,0%
ίση πιθανότητα	Μέτρηση	16	31	24	23	94
	% επί του συνόλου	8,1%	15,7%	12,1%	11,6%	47,5%
προσέγγιση αποτελέσματος	Μέτρηση	4	9	5	5	23
	% επί του συνόλου	2,0%	4,5%	2,5%	2,5%	11,6%
λάθος καταμέτρηση δ.χ.	Μέτρηση	0	2	1	6	9
	% επί του συνόλου	,0%	1,0%	,5%	3,0%	4,5%
προσωπική ερμηνεία	Μέτρηση	15	18	9	9	51
	% επί του συνόλου	7,6%	9,1%	4,5%	4,5%	25,8%
Σύνολο	Μέτρηση	44	63	42	49	198
	% επί του συνόλου	22,2%	31,8%	21,2%	24,7%	100,0%

Στρατηγική στο δεύτερο έργο ανά τάξη

		Βαθμίδα-τάξη				Σύνολο
		Β Γυμν.	Γ Γυμν.	Α Λυκ.	Γ Λυκ.	
καμία	Μέτρηση	3	9	4	7	23
	% επί του συνόλου	1,5%	4,6%	2,0%	3,6%	11,7%
αντιπροσωπευ-τικότητα	Μέτρηση	1	0	0	0	1
	% επί του συνόλου	,5%	,0%	,0%	,0%	,5%
ίση πιθανότητα	Μέτρηση	21	29	28	26	104
	% επί του συνόλου	10,7%	14,7%	14,2%	13,2%	52,8%
προσέγγιση αποτελέσματος	Μέτρηση	1	10	2	2	15
	% επί του συνόλου	,5%	5,1%	1,0%	1,0%	7,6%
λάθος καταμέτρηση δ.χ.	Μέτρηση	8	9	3	14	34
	% επί του συνόλου	4,1%	4,6%	1,5%	7,1%	17,3%
προσωπική ερμηνεία	Μέτρηση	8	4	4	0	16
	% επί του συνόλου	4,1%	2,0%	2,0%	,0%	8,1%
δεν απάντησε	Μέτρηση	0	1	3	0	4
	% επί του συνόλου	,0%	,5%	1,5%	,0%	2,0%
	Μέτρηση	42	62	44	49	197
	% επί του συνόλου	21,3%	31,5%	22,3%	24,9%	100,0%

Παρατηρούμε ότι η προκατάληψη της ίσης πιθανότητας κυριαρχεί σε όλες τις τάξεις. Ίσως υπάρχει μία μικρή μείωση καθώς κινούμαστε από την Γ γυμνασίου προς την Γ λυκείου αλλά πάντως όχι σε ουσιαστικό βαθμό. Η Β γυμνασίου κάνει χρήση περισσότερο προσωπικών ερμηνειών, πράγμα αναμενόμενο, αν αναλογιστεί κανείς ότι δεν έχει ούτε τα εργαλεία ούτε την ωριμότητα να αντιμετωπίσει τα προβλήματα. Η προσέγγιση του αποτελέσματος κάνει ένα «τίναγμα» στη Γ γυμνασίου αλλά είναι σταθερή στις άλλες τάξεις. Η λάθος καταμέτρηση του δειγματικού χώρου εμφανίζεται περισσότερο στη Γ λυκείου από ό,τι στις άλλες τάξεις. Εδώ φαίνεται μια προσπάθεια να αξιοποιηθούν τα εργαλεία που αποκτήθηκαν από τη διδασκαλία. Δεν είναι πάντα επιτυχημένη η χρήση τους αλλά υπάρχει. Για τον ίδιο λόγο φαίνεται να φθίνει η αξιοποίηση της προσωπικής ερμηνείας στις μεγαλύτερες τάξεις. Η αντιπροσωπευτικότητα έχει πολύ μικρή (σχεδόν μηδενική) αντιπροσώπευση στα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα.

Για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θα εξετάσουμε το επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες που εμφανίζουν οι μαθητές. Ως επίπεδο συλλογισμού εννοούμε το ανώτερο επίπεδο συλλογισμού που επιδεικνύει ο κάθε μαθητής κατά τη συνεξέταση των δύο έργων, όπως δηλώθηκε και παραπάνω. Για μία πρώτη εκτίμηση κατασκευάζουμε τον πίνακα συνάφειας.

Περίληψη επεξεργασίας περιπτώσεων

	Περιπτώσεις					
	Έγκυρες		Ελλείπουσες		Συνολικές	
	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό	N	Ποσοστό
Επίπεδο * Βαθμίδα-τάξη	203	95,3%	10	4,7%	213	100,0%

Πίνακας συνάφειας
Επίπεδο * Βαθμίδα-τάξη

		Βαθμίδα-τάξη				Σύνολα
		Β Γυμνασίου	Γ Γυμνασίου	Α Λυκείου	Γ Λυκείου	
Επίπεδο	υποκειμενικό	31	30	24	13	98
	μεταβατικό	13	26	18	22	79
	άτυπα ποσοτικό	1	7	4	12	24
	αριθμητικό	0	0	0	2	2
Σύνολα		45	63	46	49	203

Με μια πρώτη ματιά φαίνεται ότι στο επίπεδο 4 κατατάσσονται μόνο 2 μαθητές της Γ λυκείου. Το επίπεδο 3 το επιτυγχάνουν γενικά λίγοι μαθητές, ειδικά δε από τη Β γυμνασίου μόνο 1. Όμως από τους μαθητές της Γ λυκείου σχεδόν το 25% βρίσκεται σε αυτό το επίπεδο. Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών βρίσκεται στα επίπεδα 1 και 2. Ειδικά στο επίπεδο 1 βρίσκονται σχεδόν οι μισοί μαθητές.

Στη συνέχεια θέλουμε να δούμε αν υπάρχουν διαφορές στα επίπεδα συλλογισμού που εμφανίζουν οι μαθητές των διαφορετικών τάξεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε μία διατακτική κλίμακα τύπου likert. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα αν μπορούμε

να θεωρήσουμε την κλίμακα ισοδιαστημική και να εκτελέσουμε παραμετρικούς ελέγχους για την ύπαρξη διαφορών μεταξύ των ομάδων. Κατά την άποψη του συγγραφέα κάτι τέτοιο θα μπορούσε να γίνει δεδομένου ότι έχουμε περισσότερα από 30 άτομα από κάθε τάξη. Για το λόγο αυτό στο σώμα της εργασίας θα χρησιμοποιηθούν παραμετρικοί έλεγχοι. Επειδή όμως είναι πιθανό να εγερθούν αμφιβολίες ως προς την ορθότητα αυτής της παραδοχής, στο παράρτημα Α παρατίθενται και οι αντίστοιχοι μη-παραμετρικοί έλεγχοι και συγκρίνονται τα συμπεράσματα. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να διαπιστώσει ότι η μέθοδος δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα με ουσιώδη τρόπο.

Κατ' αρχήν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές τάξεις των μαθητών ως προς τα επίπεδα συλλογισμού που επιδεικνύουν. Για το λόγο αυτό εκτελούμε τον έλεγχο ANOVA.

ANOVA

Επίπεδο

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	13,138	3	4,379	9,399	,000
Within Groups	92,724	199	,466		
Total	105,862	202			

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ελέγχου είναι ($F = 9.40$; $df = 3$; $p < 0.001$), επομένως μπορούμε να δεχτούμε ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των διαφόρων τάξεων.
Για να διαπιστώσουμε ποιες τάξεις διαφέρουν, προχωρούμε σε ελέγχους ανά δύο με το Scheffe.

Πολλαπλές Συγκρίσεις

Επίπεδο (Scheffe)

(I) Βαθμίδα-τάξη	(J) Βαθμίδα-τάξη	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
Β Γυμνασίου	Γ Γυμνασίου	-,302	,133	,167	-,68	,07
	Α Λυκείου	-,232	,143	,455	-,64	,17
	Γ Λυκείου	-,728*	,141	,000	-1,13	-,33

Γ Γυμνασίου	Β Γυμνασίου	,302	,133	,167	-,07	,68
	Α Λυκείου	,070	,132	,964	-,30	,44
	Γ Λυκείου	-,426*	,130	,015	-,79	-,06
Α Λυκείου	Β Γυμνασίου	,232	,143	,455	-,17	,64
	Γ Γυμνασίου	-,070	,132	,964	-,44	,30
	Γ Λυκείου	-,496*	,140	,007	-,89	-,10
Γ Λυκείου	Β Γυμνασίου	,728*	,141	,000	,33	1,13
	Γ Γυμνασίου	,426*	,130	,015	,06	,79
	Α Λυκείου	,496*	,140	,007	,10	,89

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Επίπεδο

Scheffe[a,b]

Βαθμίδα-τάξη	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
Β Γυμνασίου	45	1,33	
Α Λυκείου	46	1,57	
Γ Γυμνασίου	63	1,63	
Γ Λυκείου	49		2,06
Sig.		,186	1,000

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 49,849.

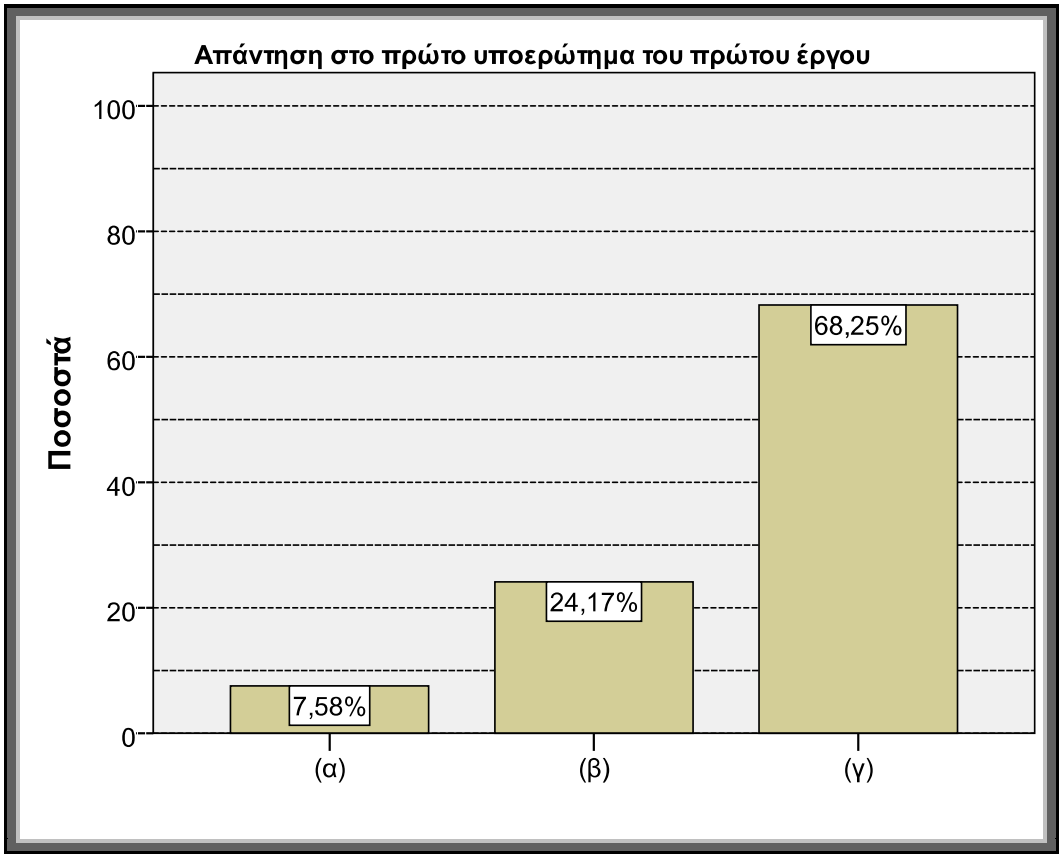
b. The group sizes are unequal. The harmonic mean of the group sizes is used. Type I error levels are not guaranteed.

Οι έλεγχοι έδειξαν ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιπέδων συλλογισμού της Γ Λυκείου και όλων των υπολοίπων τάξεων με τα εξής επίπεδα σημαντικότητας: $p < 0.001$ σε σχέση με τη Β Γυμνασίου, $p = 0.015$ σε σχέση με τη Γ Γυμνασίου και $p = 0.007$ σε σχέση με την Α Λυκείου. Οι υπόλοιπες τάξεις δεν έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Δημιουργούνται λοιπόν δύο ομογενή υποσύνολα. Στο ένα υπάρχει μόνη της η Γ λυκείου και στο άλλο τοποθετούνται όλες οι άλλες τάξεις, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα

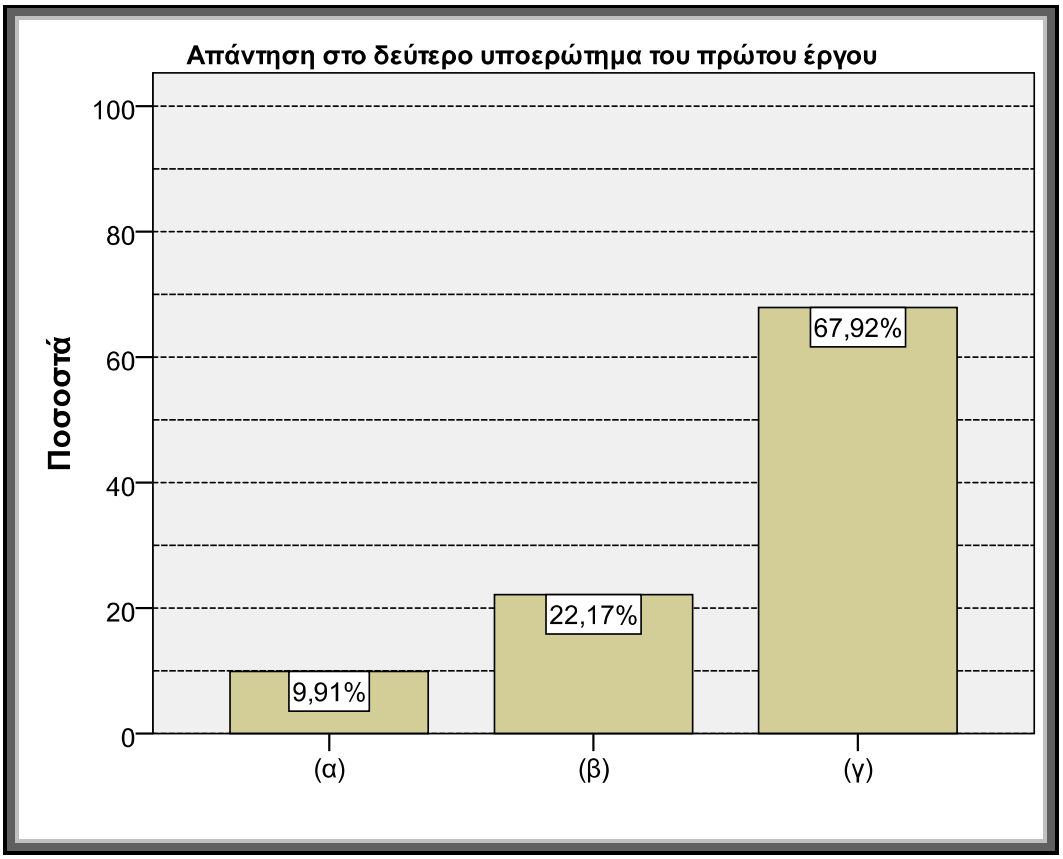
Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές της Γ λυκείου βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες σε σχέση με τους μαθητές όλων των χαμηλότερων τάξεων. Αυτό αποδίδεται σε κάποιο βαθμό στην ωριμότητα της ηλικίας τους αλλά περισσότερο στο γεγονός ότι έχουν διδαχτεί σχετικά κεφάλαια στο αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου τους.

Για το τελευταίο ερευνητικό ερώτημα θέλουμε να εξετάσουμε αν η κατάκτηση ανώτερου επιπέδου συλλογισμού με πιθανότητες μέσα από την τυπική εκπαίδευση βοηθάει τους μαθητές να απαντήσουν περισσότερο επιτυχημένα σε προβλήματα που έχουν χαρακτηριστεί ως παράδοξα.

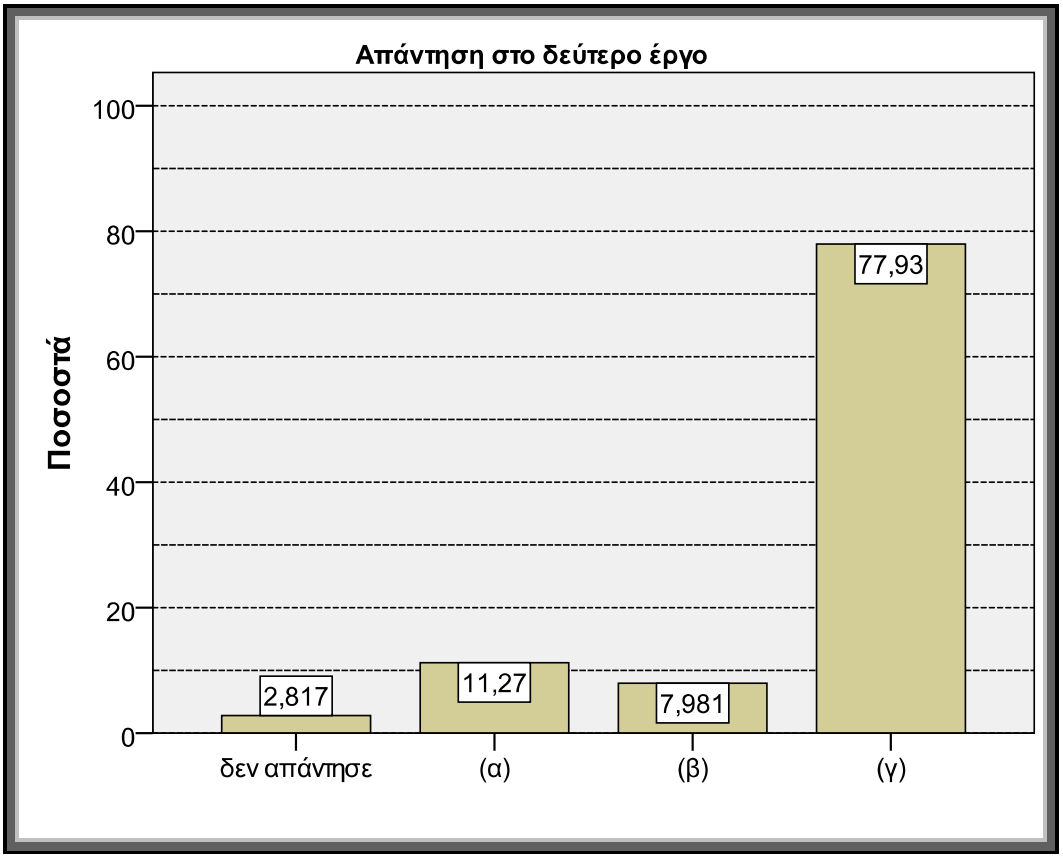
Πριν απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα εξετάσουμε τις απαντήσεις των μαθητών στα δύο έργα. Κάποια στατιστικά διαγράμματα φαίνονται παρακάτω (εικόνες 17, 18 και 19).



Εικόνα 17: Ποσοστά απαντήσεων των μαθητών στο πρώτο υποερώτημα του πρώτου έργου



Εικόνα 18: Ποσοστά απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο υποερώτημα του πρώτου έργου



Εικόνα 19: Ποσοστά απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο έργο

Πριν σχολιάσουμε τα διαγράμματα, να τονίσουμε ότι δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση μεταξύ του «δεν απάντησε» που εμφανίστηκε στις στρατηγικές επίλυσης και του «δεν απάντησε» που εμφανίζεται εδώ όπου μελετάμε την απάντηση στην πολλαπλή επιλογή. Εδώ εμφανίζονται περισσότερες μη – απαντήσεις. Αυτό οφείλεται σε μερικά ιδιάζοντα γραπτά, όπως είναι ένα γραπτό της Γ γυμνασίου (code 4138) όπου αφήνει κενή την πολλαπλή επιλογή στο δεύτερο έργο αλλά παρόλα αυτά δικαιολογεί την μη – απάντηση ως εξής: «Δεν ξέρουμε ποια θα είναι η σωστή απάντηση. Άρα δεν υπάρχει απάντηση». Αυτή η απάντηση και άλλες παρόμοιες ως προς την απάντηση στην πολλαπλή επιλογή καταχωρήθηκαν στο «δεν απάντησε». Όμως η επικρατούσα στρατηγική είναι η «προσέγγιση αποτελέσματος», αφού ο μαθητής θα ήθελε να ξέρει το χρώμα της κάρτας για να απαντήσει και όχι να εκτιμήσει ποιο χρώμα είναι περισσότερο πιθανό να βρίσκεται στην άλλη όψη, όπως ζητάει το πρόβλημα.

Από τη μελέτη των διαγραμμάτων, λοιπόν, παρατηρούμε ότι μόνο 1 στους 4 δίνει τη σωστή απάντηση στο πρώτο ερώτημα του πρώτου έργου. Στο δεύτερο ερώτημα του ίδιου έργου απαντάει σωστά το 68%. Αυτό οφείλεται ασφαλώς στο γεγονός ότι η σωστή απάντηση ήταν αυτή που έδινε ίσες πιθανότητες στα δύο συγκρινόμενα ενδεχόμενα. Στο δεύτερο έργο σωστή απάντηση δόθηκε από το 11% των ερωτηθέντων. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν υψηλά ποσοστά αποτυχίας στις περιπτώσεις που εμπλέκονται μη-ισοπίθανα ενδεχόμενα και μεγάλη επιτυχία όταν εμπλέκονται ισοπίθανα.

Θα θέλαμε στη συνέχεια να εξετάσουμε αν οι μαθητές της Γ λυκείου, οι οποίοι έχουν διδαχτεί πιθανότητες στο σχολείο, έχουν στη διάθεσή τους τα σχετικά τυπικά εργαλεία και είναι περισσότερο ώριμοι, αποδίδουν καλύτερα από ό,τι οι μαθητές της Γ γυμνασίου, οι οποίοι στο ερώτημα αυτό θα έχουν το ρόλο της ομάδας ελέγχου για τους λόγους που εξηγήσαμε παραπάνω.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, δημιουργήσαμε μία νέα μεταβλητή στην οποία καταχωρήσαμε μόνο το εάν η απάντηση είναι σωστή ή λάθος. Στη συνέχεια, συγκρίναμε τις μέσες επιδόσεις της Γ γυμνασίου και της Γ λυκείου. Παρατηρούμε ότι σε καμία από τις τρεις περιπτώσεις δεν προκύπτουν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Αυτό σημαίνει ότι, παρά το ανώτερο επίπεδο συλλογισμού που επιδεικνύουν οι μαθητές της Γ λυκείου, δε φαίνεται να επιτυγχάνουν καλύτερες επιδόσεις όταν έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα που έχουν χαρακτηριστεί ως παράδοξα.

Στατιστικά των ομάδων

Μεταβλητή	Βαθμίδα-τάξη	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Σωστό - λάθος 1α	Γ Γυμνασίου	63	,22	,419	,053
	Γ Λυκείου	49	,24	,434	,062
Σωστό - λάθος 1β	Γ Γυμνασίου	63	,75	,439	,055
	Γ Λυκείου	49	,82	,391	,056
Σωστό - λάθος 2	Γ Γυμνασίου	60	,10	,303	,039
	Γ Λυκείου	49	,12	,331	,047

t – Test Ανεξαρτήτων Δειγμάτων

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff.	Std. Err. Diff.	95% Confidence Interval of the Diff.	
									Lower	Upper
Σ-Λ 1α	Equal variances Assumed	,310	,579	-,280	110	,780	-,023	,081	-,183	,138
	Equal variances not assumed			-,278	101,467	,781	-,023	,081	-,184	,139
Σ-Λ 1β	Equal variances Assumed	3,250	,074	-,881	110	,380	-,070	,080	-,228	,088
	Equal variances not assumed			-,894	107,904	,373	-,070	,079	-,226	,086
Σ-Λ 2	Equal variances Assumed	,545	,462	-,369	107	,713	-,022	,061	-,143	,098
	Equal variances not assumed			-,366	98,496	,715	-,022	,061	-,144	,099

Στο παράρτημα Β έχουν καταχωρηθεί οι ίδιοι έλεγχοι για τα ζευγάρια Β γυμνασίου – Γ λυκείου και Α λυκείου – Γ λυκείου και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

4.2. Συζήτηση

Η παρούσα εργασία επιδιώκει να μεταφέρει τη σύγχρονη έρευνα για τις πιθανότητες στην ελληνική σχολική πραγματικότητα. Για το σκοπό αυτό εστιάζει στη συλλογιστική με πιθανότητες (probabilistic thinking) που αναπτύσσουν οι μαθητές μέσα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Κεντρική ιδέα είναι ότι ο συλλογισμός με πιθανότητες αποτελείται από κάποιες διαστάσεις, όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (Heitele, 1975; Borovcnik, 2005) αλλά η εργασία περιορίζεται στα στοιχεία εκείνα που προβλέπεται να αναπτυχθούν με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα.

Επιπλέον, γίνεται προσπάθεια να αξιοποιηθούν ερευνητικά διάφορα παράδοξα, τα οποία εμφανίζονται εξίσου σε βιβλία ψυχαγωγικού χαρακτήρα (π.χ. Clark, 2002; Gardner, 1982) και σε δημοσιεύσεις ερευνητικού χαρακτήρα (π.χ. Batanero, Godino & Roa, 2004; Taylor & Stacey, 2014), προκειμένου να μελετηθούν οι παρανοήσεις που εμφανίζουν και το επίπεδο συλλογισμού που επιτυγχάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν τέτοιου τύπου αξιοπρόσεκτα προβλήματα.

Άλλο ένα στοιχείο είναι η προσπάθεια μελέτης της εξέλιξης του συλλογισμού με πιθανότητες που εμφανίζουν οι μαθητές καθώς ωριμάζουν ηλικιακά και μορφωτικά μέσα στο περιβάλλον της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Πρόκειται για μία μελέτη εμπνευσμένη από εκείνη των Fischbein & Schnarch (1997) με δεδομένα από το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν σχετικά με τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές, το πρώτο που αξίζει να σημειωθεί είναι η μεγάλη ποσοστιαία εμφάνιση της προκατάληψης της ίσης πιθανότητας ανάμεσα στις στρατηγικές κατά την επεξεργασία των δύο έργων. Το εύρημα συμφωνεί με όσα αναφέρουν οι Gauvrit & Morsanyi (2014), όπου η συγκεκριμένη παρανόηση προκύπτει να κυριαρχεί σε συγκεκριμένα προβλήματα πιθανοτήτων, με ξεχωριστή ένταση δε στο πρόβλημα των δύο παιδιών που χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα εργασία. Οι Gauvrit & Morsanyi (2014) ισχυρίζονται ότι η διδασκαλία στο σχολείο μέσω του κλασικού ορισμού συμβάλλει στη διατήρηση της παρανόησης. Στη δική μας περίπτωση, περίπου οι μισοί μαθητές κάθε τάξης χρησιμοποιούν την ίση πιθανότητα, χωρίς να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές της Γ λυκείου που κατέχουν την τυπική γνώση παρουσιάζουν μεγάλη διαφοροποίηση σε αυτό. Διαφαίνεται πολύ μικρή

βελτίωση με την ωρίμανση. Ίσως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η σχολική διδασκαλία δε φαίνεται να βοήθησε στον ουσιαστικό περιορισμό της παρανόησης.

Έχοντας υπόψη τη θέση του Greer (2001) ότι οι πρωτογενείς διαισθήσεις είναι ανθεκτικές στη διδασκαλία και εκείνη του Shaughnessy (1977) ότι εκπαιδευμένοι και μη-εκπαιδευμένοι παρουσιάζουν τις ίδιες παρανοήσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάτι ανάλογο ισχύει στην παρούσα έρευνα περισσότερο στο πρόβλημα των δύο παιδιών όπου η μη χρήση κάποιας στρατηγικής είναι μόλις 2,5%. Στο πρόβλημα των τριών καρτών μη χρήση στρατηγικής παρατηρείται σε ποσοστό 11,7% και ίσως οφείλεται στο ότι το πρόβλημα αυτό φαίνεται σε πρώτη ανάγνωση περισσότερο μαθηματικό από ό,τι το πρώτο. Το σημείο στο οποίο διαφοροποιείται η Γ λυκείου είναι η λάθος καταμέτρηση του δειγματικού χώρου. Μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών της Γ λυκείου από ό,τι των άλλων τάξεων καταφεύγει σε αυτήν, δείγμα ότι γίνεται προσπάθεια χρήσης των εργαλείων που αποκτήθηκαν κατά τη διδασκαλία, αν και ανεπιτυχώς. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, η εκπαίδευση που έχουν οι μαθητές φαίνεται να επηρεάζει τη στρατηγική που επιλέγουν.

Σχετικά με την προσωπική ερμηνεία, αυτή εμφανίζεται περισσότερο στις μικρότερες τάξεις και λιγότερο στις μεγαλύτερες. Επίσης, παρατηρείται σαφώς συχνότερα στο πρώτο έργο και σπανιότερα στο δεύτερο, το οποίο δείχνει, όπως είπαμε και πιο πριν, περισσότερο μαθηματικό. Το εύρημα αυτό ενισχύει την άποψη ότι προβλήματα που διαφέρουν ως προς τα εξωτερικά χαρακτηριστικά τους (ακόμα κι αν έχουν παρόμοια μαθηματική δομή) συνδέονται με διαφορετικές διαισθητικές παρανοήσεις.

Ο ισχυρισμός των Fischbein & Schnarch (1997) ότι η χρήση της στρατηγικής της διαθεσιμότητας αυξάνει με την ηλικία, ίσως υποστηρίζεται από το πρώτο πρόβλημα για τις μεγάλες τάξεις. Εντούτοις ο αριθμός των μαθητών που έκαναν χρήση της διαθεσιμότητας είναι πολύ μικρός γενικά. Εντύπωση προκαλεί η αυξημένη χρήση της από μαθητές της Β γυμνασίου στο πρώτο πρόβλημα. Κάτι τέτοιο δεν ήταν αναμενόμενο αλλά μπορεί να εξηγηθεί αν ληφθεί υπόψη ότι η συγκεκριμένη ηλικία είναι μικρή για να αντιμετωπίσει με οποιαδήποτε μέθοδο τα παράδοξα που της τέθηκαν. Οπότε η καταφυγή στη διαθεσιμότητα ίσως αποτελούσε μία διέξοδο.

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την τελική επίδοση των μαθητών με βάση την απάντησή τους στην πολλαπλή επιλογή, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η διδασκαλία των πιθανοτήτων με κεντρικό σημείο αναφοράς τα ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τον κλασικό ορισμό του Laplace, παρότι δείχνει να βελτιώνει το γνωστικό επίπεδο των μαθητών και να τους εξοπλίζει με ισχυρότερα και συστηματικότερα εργαλεία

αντιμετώπισης προβλημάτων καθώς προχωράνε σε υψηλότερες βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εντούτοις αποτυγχάνει στο τελικό στάδιο να δώσει εκείνο το στοιχείο που χρειάζεται ώστε να ξεπεραστούν οι παρερμηνείες που προκαλούνται από τις διαισθήσεις (ιδιαίτερα τις πρωτογενείς) οι οποίες παραμένουν σε υψηλότερο βαθμό εμπιστοσύνης από ό,τι τα μαθηματικά εργαλεία κατά την άποψη των μαθητών, όπως εκδηλώνεται μέσα από τα έργα στα οποία εμπλέκονται. Ιδιαίτερα δε κατά την αντιμετώπιση «παραδόξων» το φαινόμενο επιτείνεται. Αυτό συμφωνεί με τους αντίστοιχους ισχυρισμούς των Batanero & Borovcnik (2016), σύμφωνα με τους οποίους η παραδοσιακή προσέγγιση αποτυγχάνει στον πιθανοτικό εγγραμματισμό των μαθητών και στην απόδοση νοήματος στις έννοιες και τις διαδικασίες.

Στο σημείο αυτό είναι ορθό να αναφέρουμε ορισμένους περιορισμούς της συγκεκριμένης έρευνας. Κατ' αρχήν, όπως γράφτηκε και νωρίτερα, το δείγμα των μαθητών που συμμετείχαν επιλέχθηκε με βάση την προσβασιμότητα του ερευνητή στα σχολεία και την ελεύθερη συνεργασία τόσο των διδασκόντων εκπαιδευτικών των τμημάτων όσο και των ίδιων των μαθητών. Δεν μπορεί λοιπόν με βεβαιότητα να χαρακτηριστεί αντιπροσωπευτικό ως προς κάποια από τις παραμέτρους που μελετώνται.

Έπειτα, η επιλογή των τάξεων διευρύνθηκε κατά τη διάρκεια της διανομής των φύλλων εργασίας. Ενώ αρχικά η στόχευση ήταν στη σύγκριση μεταξύ της Γ γυμνασίου και της Γ λυκείου και η διανομή σε άλλες τάξεις έγινε πρόχειρα στα πλαίσια πειραματισμού με τα φύλλα εργασίας, στη συνέχεια από τον αριθμό των φύλλων εργασίας που συγκεντρώθηκαν αποφασίστηκε να γίνουν περισσότερες συγκρίσεις. Όμως οι μαθητές που αποτελούσαν τα παράπλευρα δείγματα υπάρχει ενδεχόμενο να μην είχαν την ίδια αντιμετώπιση με εκείνους που συμμετείχαν στην κύρια έρευνα ως προς το χρόνο που διατέθηκε ή ως προς τις οδηγίες που τους δόθηκαν ή άλλους εξωτερικούς παράγοντες που ενδεχομένως δεν ελέγχθηκαν. Επομένως τα όποια αποτελέσματα περιλαμβάνουν τις ομάδες της Β γυμνασίου και της Α λυκείου πρέπει να αναγνωσθούν με επιφύλαξη.

Ο χρόνος διεξαγωγής της έρευνας, αμέσως μετά από τις διακοπές του Πάσχα και λίγο πριν τη λήξη του σχολικού έτους, δεν υπήρξε ο ενδεικνυόμενος για τη διεξαγωγή ερευνών για διάφορους λόγους. Ενδεικτικά αναφέρονται η προσήλωση των μαθητών περισσότερο στις εξετάσεις που ακολουθούν παρά στα μαθήματα και η ενδεχόμενη απουσία περισσότερων καλών μαθητών από τις τάξεις, ιδιαίτερα της Γ λυκείου, λόγω

προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις. Δεν μπορούσε να γίνει διαφορετικά, εντούτοις, καθώς επιθυμούσαμε να έχει διδαχτεί στη Γ λυκείου το κεφάλαιο των πιθανοτήτων που περιέχεται τελευταίο στο βιβλίο των μαθηματικών γενικής παιδείας της τάξης αυτής.

Το γεγονός ότι κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά για πρώτη φορά τα μαθηματικά γενικής παιδείας δεν υπήρξαν κατ' επιλογήν πανελλαδικά εξεταζόμενο μάθημα, ίσως έκανε περισσότερους μαθητές να το υποτιμήσουν από ό,τι συνήθως. Βεβαίως, τα αποτελέσματα στην περίπτωση αυτή θα ανταποκρίνονται περισσότερο στη μέλλουσα πραγματικότητα όσον αφορά στη μάθηση των πιθανοτήτων στο σχολείο.

Τέλος, ο ερευνητής αντιμετώπισε και δύο απρόσμενα εμπόδια μετά την ανάληψη της εργασίας. Πρώτον, σταμάτησε η διδασκαλία του κεφαλαίου των πιθανοτήτων στην αρχή της Α λυκείου, όπως γινόταν μέχρι πρόσφατα. Η τάξη αυτή όμως ήταν σαφώς πιο εύκολα προσβάσιμη από ό,τι η Γ λυκείου και η διδασκαλία γινόταν στην αρχή του σχολικού έτους, δίνοντας άνεση για τη συλλογή των δεδομένων σε πιο κατάλληλο χρόνο, η δε σύγκριση της Γ γυμνασίου με την Α λυκείου φάνταζε τότε περισσότερο φυσιολογική, λόγω εγγύτητας. Με την αφαίρεση του συγκεκριμένου κεφαλαίου αυτά κατέρρευσαν και η έρευνα εξωθήθηκε προς την Γ λυκείου. Επίσης, η αφαίρεση των πιθανοτήτων από τις πανελλαδικές εξετάσεις ήταν άλλη μία απρόσμενη εξέλιξη για τον ερευνητή, καθώς κατά την ανάληψη της εργασίας είχε προσφάτως δημοσιευτεί σε ΦΕΚ το νέο πρόγραμμα σπουδών Μαθηματικών του λυκείου (ΦΕΚ 162Β, 22–01–2015), το οποίο προέβλεπε σημαντική αύξηση των στοχαστικών μαθηματικών στη σχολική ύλη και σε καμία περίπτωση δε διαφαινόταν μείωση σε αυτήν. Το πρόγραμμα αυτό τελικά δεν εφαρμόστηκε ποτέ. Αυτή η εξέλιξη αναμένεται να μείωσε το ενδιαφέρον των μαθητών αλλά και ολόκληρης της σχολικής κοινότητας για τα κεφάλαια των πιθανοτήτων.

Κάτι επιπλέον που θα μπορούσε να γίνει σε μεταγενέστερο χρόνο είναι η χρήση των παραδόξων ως διδακτικά εργαλεία για την άρση παρανοήσεων και η μελέτη της επίδρασης μίας τέτοιας διδασκαλίας στη συλλογιστική των μαθητών. Αυτή η ιδέα αποτέλεσε εφαλτήριο για την παρούσα εργασία παρότι τελικά δεν μπόρεσε να υλοποιηθεί με τον τρόπο που είχε αρχικά φανταστεί και σχεδιάσει ο συγγραφέας.

Εν κατακλείδι, λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναγράφονται στο θεωρητικό μέρος σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η διδασκαλία των στοχαστικών μαθηματικών σε διεθνές επίπεδο περνάει μία φάση

εκσυγχρονισμού και ανανέωσης. Ερευνάται ο τρόπος με τον οποίο συλλογίζονται οι μαθητές αλλά και οι επαγγελματίες όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα πιθανοτήτων και αναπτύσσονται νέες προτάσεις για τη διδασκαλία των πιθανοτήτων βασισμένες σε περισσότερο ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και αξιοποιώντας τις διαφορετικές όψεις της πιθανότητας, όπως υπάρχουν καταγεγραμμένες στη βιβλιογραφία. Ιδιαίτερα, ενθαρρύνεται η προσέγγιση συνδυαστικά μέσω του κλασικού ορισμού και των σχετικών συχνοτήτων (Chaput, Girard & Henry, 2011) και μάλιστα προτάσσεται η εμπειρική προσέγγιση (Steinbring, 1991b). Προς την κατεύθυνση αυτή κινείται και η πρόταση για χρήση δεδομένων (πραγματικών ή κατασκευασμένων) κατά τη διδασκαλία των πιθανοτήτων δίνοντας στη διδασκαλία αυτών έναν περισσότερο «στατιστικό» χαρακτήρα (Batanero & Borovcnik, 2016), όπως επίσης και η χρησιμοποίηση προσομοιώσεων μέσω λογισμικού (Konold & Kazak, 2008).

Ανάμεσα στις προτάσεις αυτές μπορούμε να διακρίνουμε και την πρόταση για εισαγωγή μερικών ιδιαίτερων προβλημάτων που αποκαλούνται «παράδοξα» στη διδασκαλία. Στόχος είναι να προκαλέσουν εκείνη τη γνωστική σύγκρουση μεταξύ παλαιάς και νέας γνώσης που χρειάζεται για την αναδιαμόρφωση των κεντρικών εννοιών μέσα στο μυαλό των μαθητών και την ανάπτυξη καινούργιων στρατηγικών αντιμετώπισης προβλημάτων που εμπλέκουν πιθανότητες (Falk & Konold, 1992). Απώτερος σκοπός είναι η υπέρβαση των δυσκολιών που ιστορικά εμφανίζονται και η περισσότερο επιτυχημένη αντιμετώπισή τους, πράγμα που θα έχει ως αποτέλεσμα τη λήψη ορθότερων αποφάσεων σε καταστάσεις που εμπλέκουν αβεβαιότητα ή/και κίνδυνο. Η σύσταση να μην αγνοούνται κατά τη διδασκαλία οι διαισθήσεις των μαθητών γίνεται από τους Fischbein & Gazit (1984) και το γεγονός ότι τα παράδοξα μπορούν να βοηθήσουν στο ξεκαθάρισμα εννοιών αναγνωρίζεται από τους Kleiner & Movshovitz-Hadar (1994). Προτάσεις για τον τρόπο αξιοποίησής τους στην τάξη, βρίσκει κανείς άφθονες στη βιβλιογραφία για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, φοιτητές, μαθητές (Klymchuk & Kachapova, 2012; Batanero, Contreras, Fernándes & Ojeda, 2010; Batanero, Contreras, Díaz & Cañadas, 2014; Batanero, Godino & Roa, 2004; Taylor & Stacey, 2014; Leviatan, 2002). Επομένως, η πρόταση για συστηματικότερη παρουσίαση των παραδόξων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας έχει ερείσματα και ίσως επιτύχει την εξάλειψη συνήθων παρανοήσεων και τη βελτίωση των επιδόσεων σε παρόμοια προβλήματα. Κάτι τέτοιο, ενδεχομένως, μακροπρόθεσμα θα μπορούσε να οδηγήσει σε βελτίωση των

προσεγγίσεων των στοχαστικών μαθηματικών και των ποικίλων εφαρμογών τους οι οποίες, εκτός από το τζόγο και τα τυχερά παιχνίδια, ασχολούνται και με ορισμένες από τις σημαντικές πτυχές της κοινωνικής και οικονομικής ζωής, όπως είναι η αναλογιστική επιστήμη, τα ασφαλιστικά μαθηματικά, η θεωρία κινδύνου, οι στοχαστικές ανελίξεις και η επιχειρησιακή έρευνα.

4.3. Ευχαριστίες

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους εκπαιδευτικούς που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας, καθώς και τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή. Αποφεύγω σκόπιμα ονομαστικές αναφορές, διότι υπάρχει ο κίνδυνος να θιγεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων.

Βιβλιογραφία

Bar-Hillel, M. (1980). The base-rate fallacy in probability judgments. *Acta Psychologica, 44*(3), 211-233.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49).

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). Research on teaching and learning probability. In *Research on teaching and learning probability* (pp. 1-33). Springer, Cham.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C., & Cañadas, G. R. (2014). Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty Hall problem. In *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen–Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 363-376). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Batanero, C., Contreras, J. M., Fernándes, J. A. & Ojeda, M. M. (2010). Paradoxical games as a didactic tool to train teachers in probability. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Lubjana: International Association for Statistical Education.

Batanero, C. & Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 3*(1), 3-13.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education, 12*(1), 1-19.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In A. G. Jones (Ed.), *Mathematics education library: Vol. 40. Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York: Springer.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Borovcnik, M. (2005). Probabilistic and statistical thinking. In *Proceedings of the fourth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 485-507).

Borovcnik, M., Bentz, H.-J., & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 12. Chance encounters* (pp. 27–71). Dordrecht: Kluwer Academic.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014a). A historical and philosophical perspective on probability. In E.J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht: Springer.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014b). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. In E.J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 35-73). Dordrecht: Springer.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education* (pp. 85-95). Dordrecht: Springer.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 15-33.

Clark, M. (2002). *Paradoxes from A to Z.* Abingdon Oxfordshire: Routledge. [Μετάφραση (2006). *Τα παράδοξα από το Α έως το Ω*. Επιμέλεια: Ελένη Κεκροπούλου, Μετάφραση: Νίκος Παπαδάκης & Μαρτίνα Κόφφα, Αθήνα: εκδόσεις Ενάλιος].

David, F. N. (1962). *Games, gods and gambling*. London: Griffin.

Díaz, C., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 26*(2), 149-162.

Elliott, S. N., Kratochwill, T. R., Littlefield Cook, J., & Travers, J. F. (2000). *Educational Psychology: Effective Teaching, Effective Learning* (3rd ed.). USA: McGraw-Hill Companies. [Μετάφραση (2008). *Εκπαιδευτική Ψυχολογία. Αποτελεσματική διδασκαλία, Αποτελεσματική μάθηση*. Επιμέλεια: Γιάννης Μαμάης, Μετάφραση: Μαρία Σόλμαν & Φρόσω Καλύβα. Αθήνα: εκδόσεις Gutenberg].

Einstein, A., & Shaw, G. B. (2009). *Einstein on Cosmic Religion and Other Opinions and Aphorisms*. Mineola, New York: Dover Publications.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition, 43*(3), 197-223.

Falk, R., & Konold, C. (1992). The psychology of learning probability. *Statistics for the twenty-first century*, 151-164.

Falk, R., & Lann, A. (2008). The allure of equality: Uniformity in probabilistic and statistical judgment. *Cognitive Psychology*, *57*(4), 293-334.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational studies in mathematics*, *15*(1), 1-24.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for research in mathematics education*, 96-105.

Gardner, M. (1961). *The second Scientific American book of mathematical puzzles and diversions*. New York: Simon & Schuster.

Gardner, M. (1982). *Aha! Gotcha: Paradoxes to puzzle and delight*. New York: W. H. Freeman and Company. (Μετάφραση (1989). *Η μαγεία των παραδόξων*. Επιμ. Γ. Τρουφάκος, Μτφρ. Τ. Δημητρίου & Γ. Τρουφάκος, Αθήνα: εκδόσεις Τροχαλία).

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education, 19*(1), 44-63.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372-396.

Gauvrit, N., & Morsanyi, K. (2014). The Equiprobability Bias from a Mathematical and Psychological Perspective. *Advances in Cognitive Psychology, 10*(4), 119-130.

Gorroochurn, P. (2011). Errors of probability in historical context. *The American Statistician*, *65*(4), 246-254.

Gorroochurn, P. (2012). *Classic problems of probability*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, *45*(1-3), 15-33.

Hawkins, A. S., & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability – a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(4), 349-377.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational studies in Mathematics*, *32*(2), 101-125.

Kahneman, D. (2011). *Thinking fast and slow*. New York: MacMillan.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology*, *3*(3), 430-454.

Katz, V. (2009). *A History of Mathematics (3rd ed.)*. Boston: Pearson Education Inc.

Keren, G. (1984). On the importance of identifying the correct 'problem space'. *Cognition*, *16*(2), 121-128.

Khovanova, T. (2012). Martin Gardner's Mistake. *The College Mathematics Journal, 43*(1), 20-24.

Kleiner, I., & Movshovitz-Hadar, N. (1994). The role of paradoxes in the evolution of mathematics. *The American mathematical monthly, 101*(10), 963-974.

Klymchuk, S., & Kachapova, F. (2012). Paradoxes and counterexamples in teaching and learning of probability at university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(6), 803-811.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and instruction*, *6*(1), 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Springer.

Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology Innovations in Statistics Education*, *2*(1).

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics education*, 392-414.

de Laplace, P. S. (1814). *Théorie analytique des probabilités (2nd ed.)*. Paris: Mme Ve Courcier.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational studies in mathematics, 23*(6), 557-568.

Leviatan, T. (2002). On the use of paradoxes in the teaching of probability. *Proceedings of ICOTS, 6*.

Meehl, P. E., & Rosen, A. (1955). Antecedent probability and the efficiency of psychometric signs, patterns, or cutting scores. *Psychological bulletin, 52*(3), 194-216.

von Mises, R. (1957). *Probability, Statistics and truth (2nd ed.)*. London: George Allen and Unwin Ltd.

de Moivre, A. (1756). *The Doctrine of chances: or a method of calculating the probabilities of events in play (3rd ed.)*. London: A. Millar.

Movshovitz-Hadar, N., & Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 265-287.

Ore, O. (1960). Pascal and the invention of probability theory. *The American Mathematical Monthly*, *67*(5), 409-419.

Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., & Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice?. *Statistics Education Research Journal*, *15*(2).

Poincaré, H. (1912). *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematics* (2nd ed.). New Jersey: Princeton University Press. [Μετάφραση (1991). *Πώς να το λύσω*. Επιμέλεια: Τάσος Πατρώνης, Μετάφραση: Ξανθή Ψυακκή, Αθήνα: εκδόσεις Καρδαμίτσα].

Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. In *Proceedings of the 58th International Statistical Institute World Statistical Congress, Dublin* (pp. 890-899).

Savard, A. (2014). Developing Probabilistic Thinking: What About People's Conceptions?. In *Probabilistic Thinking* (pp. 283-298). Dordrecht: Springer.

Savage, R. P. (1994). The paradox of nontransitive dice. *The American Mathematical Monthly*, *101*(5), 429-436.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(3), 295-316.

Steinbring, H. (1991a). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 503-522.

Steinbring, H. (1991b). The theoretical nature of probability in the classroom. In *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht: Springer.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Reidel.

Taylor, W., & Stacey, K. (2014). Gardner's two children problems and variations: Puzzles with conditional probability and sample spaces. *The Australian Mathematics Teacher, 70*(2), 13-19.

Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. A. (2012). Statistical education in the 21st century: a review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education, 20*(2), 1-55

Tversky, A., & Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive psychology*, *5*(2), 207-232.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, 185*(4157), 1124–1131.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153–160). UK: Cambridge University Press

Tversky, A., & Kahneman, D. (2008). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. In Adler, J. E., & Rips, L. J. (Eds.), *Reasoning: Studies of human inference and its foundations* (pp. 114-135). New York: Cambridge University Press.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, *67*(3), 223-248.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Μη παραμετρικοί έλεγχοι για την ύπαρξη διαφορών μεταξύ των τάξεων ως προς το επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες.

Κατ' αρχήν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές τάξεις των μαθητών ως προς τα επίπεδα συλλογισμού που επιδεικνύουν. Για το λόγο αυτό εκτελούμε τον έλεγχο Kruskal-Wallis.

Κατατάξεις

Μεταβλητή	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση Κατάταξη
Επίπεδο	Β Γυμνασίου	45	78,18
	Γ Γυμνασίου	63	101,58
	Α Λυκείου	46	96,30
	Γ Λυκείου	49	129,77
	Total	203	

Στατιστικά ελέγχου[a,b]

	Επίπεδο
Chi-Square	22,713
df	3
Asymp. Sig.	,000

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι του ελέγχου είναι ($x^2 = 22.71$; $df = 3$; $p < 0.001$), επομένως μπορούμε να δεχτούμε ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των τάξεων.

Για να διαπιστώσουμε ποια/ες τάξη/εις διαφέρει/ουν από τις άλλες, προχωρούμε σε ελέγχους ανά δύο με το Mann-Whitney. Σε πρώτη φάση ελέγχουμε αν η Γ λυκείου διαφέρει από τις υπόλοιπες τάξεις. Αυτό μας ενδιαφέρει κατά κύριο λόγο, καθώς αναμένουμε να υπάρχει διαφορά λόγω της διδασκαλίας των πιθανοτήτων σύμφωνα με τη σχολική ύλη και την ωριμότητα λόγω της ηλικίας.

Σύγκριση μεταξύ Β γυμνασίου και Γ λυκείου
Κατατάξεις

	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση Κατάταξη	Άθροισμα Κατατάξεων
Επίπεδο	Β Γυμνασίου	45	35,32	1589,50
	Γ Λυκείου	49	58,68	2875,50
	Total	94		

Στατιστικά ελέγχου[a]

	Επίπεδο
Mann-Whitney U	554,500
Wilcoxon W	1589,500
Z	-4,517
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Σύγκριση μεταξύ Γ γυμνασίου και Γ λυκείου
Κατατάξεις

	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση κατάταξη	Άθροισμα Κατατάξεων
Επίπεδο	Γ Γυμνασίου	63	49,56	3122,00
	Γ Λυκείου	49	65,43	3206,00
	Total	112		

Στατιστικά ελέγχου[a]

	Επίπεδο
Mann-Whitney U	1106,000
Wilcoxon W	3122,000
Z	-2,767
Asymp. Sig. (2-tailed)	,006

a. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Σύγκριση μεταξύ Α λυκείου και Γ λυκείου
Κατατάξεις

	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση Κατάταξη	Άθροισμα Κατατάξεων
Επίπεδο	Α Λυκείου	46	39,85	1833,00
	Γ Λυκείου	49	55,65	2727,00
	Total	95		

Στατιστικά ελέγχου[a]

	Επίπεδο
Mann-Whitney U	752,000
Wilcoxon W	1833,000
Z	-3,009
Asymp. Sig. (2-tailed)	,003

a. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Οι έλεγχοι δείχνουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιπέδων συλλογισμού με πιθανότητες της Γ λυκείου και όλων των υπόλοιπων τάξεων με τα εξής στατιστικά: ($U = 554,50$; $p < 0.001$) σε σχέση με τη Β γυμνασίου, ($U = 1106,00$; $p = 0.006$) σε σχέση με τη Γ γυμνασίου και ($U = 752,00$; $p = 0.003$) σε σχέση με την Α λυκείου. Θα εξετάσουμε τώρα αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των άλλων τάξεων.

Σύγκριση μεταξύ Β γυμνασίου και Γ γυμνασίου
Κατατάξεις

	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση Κατάταξη	Άθροισμα Κατατάξεων
Επίπεδο	Β Γυμνασίου	45	47,08	2118,50
	Γ Γυμνασίου	63	59,80	3767,50
	Total	108		

Στατιστικά ελέγχου[a]

	Επίπεδο
Mann-Whitney U	1083,500
Wilcoxon W	2118,500
Z	-2,368
Asymp. Sig. (2-tailed)	,018

a. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Σύγκριση μεταξύ Β γυμνασίου και Α λυκείου

Κατατάξεις

	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση Κατάταξη	Άθροισμα Κατατάξεων
Επίπεδο	Β Γυμνασίου	45	41,78	1880,00
	Α Λυκείου	46	50,13	2306,00
	Total	91		

Στατιστικά ελέγχου[a]

	Επίπεδο
Mann-Whitney U	845,000
Wilcoxon W	1880,000
Z	-1,754
Asymp. Sig. (2-tailed)	,079

a. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Σύγκριση μεταξύ Γ γυμνασίου και Α λυκείου

Κατατάξεις

	Βαθμίδα-τάξη	N	Μέση Κατάταξη	Άθροισμα Κατατάξεων
Επίπεδο	Γ Γυμνασίου	63	56,22	3542,00
	Α Λυκείου	46	53,33	2453,00
	Total	109		

Στατιστικά ελέγχου[a]

	Επίπεδο
Mann-Whitney U	1372,000
Wilcoxon W	2453,000
Z	-,524
Asymp. Sig. (2-tailed)	,600

a. Grouping Variable: Βαθμίδα-τάξη

Σημαντική διαφορά εμφανίζεται μόνο μεταξύ της Β γυμνασίου και της Γ γυμνασίου (U = 1083,5; p = 0.018). Οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι: (U = 845; p = 0.079) για τη σύγκριση μεταξύ Β Γυμνασίου και Α λυκείου και (U = 1372; p = 0.6) για τη σύγκριση μεταξύ Γ Γυμνασίου και Α Λυκείου.

Οι διαφορές μεταξύ Β γυμνασίου και Γ γυμνασίου, που δεν εμφανίζονται στους παραμετρικούς ελέγχους, υποδεικνύουν ότι ίσως υπάρχει βελτίωση του συλλογισμού με πιθανότητες από τη Β στη Γ γυμνασίου αλλά κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποδοθεί

στη διδασκαλία, καθώς οι συμμετέχοντες μαθητές δεν είχαν διδαχτεί τις πιθανότητες στην τάξη. Άρα οφείλεται στην ηλικιακή ωριμότητα ή/και σε προσωπικό ενδιαφέρον. Το συμπέρασμα παραμένει ότι οι μαθητές της Γ λυκείου βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο συλλογισμού με πιθανότητες σε σχέση με τους μαθητές όλων των χαμηλότερων τάξεων. Αυτό αποδίδεται σε κάποιο βαθμό οπωσδήποτε στην ωριμότητα της ηλικίας τους αλλά περισσότερο στο γεγονός ότι έχουν διδαχτεί σχετικά κεφάλαια στο αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου τους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Έλεγχοι επιδόσεων ως προς τη σωστή απάντηση στα παράδοξα για τα ζευγάρια Β γυμνασίου – Γ λυκείου και Α λυκείου – Γ λυκείου.

Σύγκριση μεταξύ των επιδόσεων της Β γυμνασίου και της Γ λυκείου
Στατιστικά των ομάδων

	Βαθμίδα-τάξη	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Σωστό - λάθος 1α	Β Γυμνασίου	47	,34	,479	,070
	Γ Λυκείου	49	,24	,434	,062
Σωστό - λάθος 1β	Β Γυμνασίου	48	,44	,501	,072
	Γ Λυκείου	49	,82	,391	,056
Σωστό - λάθος 2	Β Γυμνασίου	48	,10	,309	,045
	Γ Λυκείου	49	,12	,331	,047

t – Test Ανεξαρτήτων Δειγμάτων

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff.	Std. Err. Diff.	95% Confidence Interval of the Diff.	
									Lower	Upper
Σ-Λ 1α	Equal variances assumed	4,122	,045	1,024	94	,308	,096	,093	-,090	,281
	Equal variances not assumed			1,022	92,216	,309	,096	,093	-,090	,281
Σ-Λ 1β	Equal variances assumed	27,260	,000	-4,154	95	,000	-,379	,091	-,560	-,198
	Equal variances not assumed			-4,143	88,844	,000	-,379	,091	-,561	-,197
Σ-Λ 2	Equal variances assumed	,317	,575	-,281	95	,779	-,018	,065	-,147	,111
	Equal variances not assumed			-,281	94,769	,779	-,018	,065	-,147	,111

Σύγκριση μεταξύ των επιδόσεων της Α λυκείου και της Γ λυκείου
Στατιστικά των ομάδων

	Βαθμίδα-τάξη	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Σωστό - λάθος 1α	Α Λυκείου	52	,17	,382	,053
	Γ Λυκείου	49	,24	,434	,062
Σωστό - λάθος 1β	Α Λυκείου	52	,69	,466	,065
	Γ Λυκείου	49	,82	,391	,056
Σωστό - λάθος 2	Α Λυκείου	50	,14	,351	,050
	Γ Λυκείου	49	,12	,331	,047

t – Test Ανεξαρτήτων Δειγμάτων

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff.	Std. Err. Diff.	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Σ-Λ 1α	Equal variances assumed	3,151	,079	-,884	99	,379	-,072	,081	-,233	,089
	Equal variances not assumed			-,880	95,637	,381	-,072	,082	-,234	,090
Σ-Λ 1β	Equal variances assumed	8,681	,004	-1,444	99	,152	-,124	,086	-,294	,046
	Equal variances not assumed			-1,451	97,730	,150	-,124	,085	-,294	,046
Σ-Λ 2	Equal variances assumed	,263	,609	,256	97	,799	,018	,069	-,119	,154
	Equal variances not assumed			,256	96,873	,798	,018	,069	-,118	,154

Σε όλες τις συγκρίσεις, φαίνεται να μην υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές εκτός από το ζευγάρι Β γυμνασίου – Γ λυκείου στην ερώτηση 1β η οποία είχε ως σωστή απάντηση ότι οι πιθανότητες είναι ίσες. Εκεί η Γ λυκείου επιδεικνύει σημαντικά καλύτερη επίδοση. Αυτό το εύρημα ίσως θα άξιζε να διερευνηθεί περισσότερο ως προς τους λόγους που η Β γυμνασίου αποτυγχάνει περισσότερο σε ερώτημα που περιλαμβάνει ισοπίθανα ενδεχόμενα. Ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι ο συλλογισμός με πιθανότητες της Β γυμνασίου βρίσκεται σε πολύ χαμηλό επίπεδο, πράγμα φυσικό άλλωστε εφόσον οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν έχουν έρθει ακόμη σε επαφή με το αντικείμενο.

Ευρετήριο Όρων

Α

αναπαράσταση 22, 35, 41, 43, 46, 49

ανεξαρτησία ..... 10, 15, 24 - 26, 28, 30, 46, 52

αντίληψη 9, 14, 32, 36, 47, 49

αντιπροσωπευτικότητα ..... 39 - 40, 44, 70, 76

αποτέλεσμα ..... 10, 16, 18 - 23, 25, 27, 30, 36 - 37, 40 - 42, 44 - 45, 52 - 53, 55, 59, 62, 66, 70 - 71, 74, 76, 78, 82 - 84, 86 - 88

Γ

γνώση ..... 10, 15, 23, 26, 28, 32 - 33, 48, 50, 52 - 53, 55, 71, 84, 88

Δ

δειγματικό σύνολο ..... 44, 59 - 61, 65

δειγματικός χώρος ..... 10, 12, 16, 24, 28, 31, 43 - 44, 52, 59, 60 - 62, 64 - 65, 70, 74, 76, 85

διαθέσιμος, -η, -ο ..... 30, 33, 38 - 39

διαθεσιμότητα ..... 39, 70, 74 - 75, 85

διαίσθηση ..... 27 - 28, 34 - 36, 42, 46 - 50, 52, 56, 85 - 86, 88

διαισθητικός, -ή, -ό ..... 9, 14, 30, 32, 38, 40, 46, 48 - 49, 53, 57, 59, 73

διάσταση ..... 21 - 24, 84

διάταξη ..... 10, 14 - 15, 44, 46, 52

διαφορά ..... 20, 24, 40, 49, 53, 68, 75, 77 - 79, 82

διδασκαλία ..... 20, 28 - 30, 34 - 36, 38, 46 - 51, 53, 55, 58, 76, 84 - 85, 87 - 88

Ε

εκπαίδευση ..... 33, 39, 42, 46 - 47, 50, 52 - 54, 59, 61, 73, 80, 84 - 86, 88

εκπαιδευτικός ..... 28, 46, 50, 53, 61 - 62, 71, 84, 86

ενδεχόμενο ..... 10 - 12, 19, 25, 31 -33, 41, 43 - 45, 52, 56, 58, 60, 62, 64, 66 - 67, 82, 85 - 86

εξέλιξη 19, 39, 47, 84, 87

επίπεδο ..... 14, 24, 30, 33, 39, 53 - 54, 62 - 69, 72, 77 - 80, 82, 84 - 85, 87

εργασία ..... 11, 13 - 14, 23, 29, 36, 38, 41, 44 - 45, 47, 50, 53 - 55, 58, 61 - 62, 65 - 66, 69 - 70, 78, 84, 86 - 87, 89

έρευνα ..... 14, 27, 29, 30, 35, 38 - 39, 41, 45 - 47, 53 - 55, 64 - 65, 75 - 76, 84 - 87, 89

ερευνητικός, -ή, -ό ..... 21 - 22, 37, 53, 59, 64, 73, 77, 80, 84

ερμηνεία 20, 22, 25, 36, 70, 74, 76, 85

ευρετική (μέθοδος) ..... 36 - 40, 45, 47

εύρημα ..... 38, 41, 44, 47, 84 - 85

Θ

θεωρία ..... 9 - 10, 12 - 14, 17 - 19, 24, 31 - 33, 35, 45 - 50, 89

Κ

καταμέτρηση ..... 10, 16, 33, 43 - 44, 60, 70, 74, 76, 85

κατανομή ..... 24, 27 - 28, 34, 36, 44

Λ

λάθος ..... 37, 42, 49, 51, 60, 62, 67, 69 - 70, 74, 76, 82, 85

λανθασμένος, -η, -ο ..... 18, 39, 40, 43 - 46, 49, 59 - 60, 67, 71 - 72, 74

Μ

μαθηματικά .....9, 14, 17, 20 - 21, 26 - 28, 31, 38, 49 - 50, 52, 54 - 55, 86 - 87, 89

μάθηση.....28 - 29, 46, 50 - 51, 87

μέθοδος .....20, 22, 28 - 29, 36 - 39, 45, 47, 49, 56 - 57, 61, 78, 85

μεταβλητότητα .....20, 23, 34 - 35

μοντέλο .....21, 23 - 27, 29 - 30, 34 - 35, 46 - 48

Ο

ορισμός .....11 - 12, 20, 28, 31 - 34, 42, 44, 62, 84 - 85, 88

Π

παράδοξο.....13 - 15, 17 - 19, 29, 36 - 37, 42, 48 - 53, 56 - 57, 59 - 61, 73, 80, 82, 84 - 88

παρανόηση .....14, 29, 39 -42, 45, 47, 50, 52 - 53, 57, 60, 70, 71, 73 - 74, 84 - 85, 87, 88

πείραμα.....10 -11, 13, 16, 25, 29 - 34, 36, 38, 44 - 45, 59, 64, 65

πιθανότητα .....9 - 14, 16 - 19, 24 - 26, 28 - 33, 35 - 37, 40 - 50, 52 - 70, 74, 76 - 77, 79 - 80, 82, 84 - 85, 87 - 88

πλαίσιο .....20 - 23, 29, 50, 62 - 65, 67, 69, 70, 86

πρόβλημα.....10 - 11, 13 - 20, 22 - 33, 37, 39 - 44, 47, 49 - 50, 52, 56 - 59, 62, 65 - 66, 68, 71 - 72, 74, 76, 80, 82, 84 - 86, 88

προκατάληψη 37, 42, 47, 52, 76, 84

προσέγγιση .....9, 26 - 28, 31 - 35, 44 - 45, 70, 74, 76, 82, 86, 88 - 89

προσωπικός, -ή, -ό ..... 24, 30, 32, 54 - 55, 70, 74, 76, 85

πρόταση 11, 36, 53, 88

Σ

στάδιο ..... 23, 25, 27, 30, 32, 35 - 36, 46, 65, 71, 86

στατιστική ..... 20 - 25, 28 - 30, 40, 47, 49, 54 - 55

στρατηγική ..... 22, 29, 36 - 37, 51, 59, 70 - 71, 73 - 75, 82, 84 - 85, 88

συλλογισμός ..... 21, 24, 28 - 29, 35, 46, 48, 52 - 53, 62, 64, 68 - 69, 77 - 80, 82, 84

συλλογιστική ..... 20 - 22, 24 - 25, 28 - 29, 46, 48, 60, 62, 63, 67, 69, 84, 87

συνδυασμός 10, 14, 44, 46, 52

συνδυαστική 24, 33, 35, 36

Τ

τυχαίος, -α, -ο ..... 9, 24, 28, 30, 32, 35, 38, 40, 42 - 44, 57, 58

τυχαιότητα ..... 9, 21, 24, 27 - 28, 35, 48, 52

Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 1: Τα αξιώματα του Kolmogorov για τη θεμελίωση της πιθανότητας.....13

Εικόνα 2: Ανακατασκευή του πίνακα του Galilei για το πρόβλημα της ρίψης τριών ζαριών 15

Εικόνα 3: Υπολογισμός των πιθανοτήτων επιτυχίας στα δύο προβλήματα του Chevalier de Méré.....16

Εικόνα 4: Αναμενόμενη τιμή και πλήθος επιτυχιών στα προβλήματα του Chevalier de Méré 17

Εικόνα 5: Οι διαστάσεις του στατιστικού συλλογισμού στο πλαίσιο των Wild & Pfannkuch 21

Εικόνα 6: Ο κύκλος μοντελοποίησης των πιθανοτήτων των Pfannkuch et. al.....26

Εικόνα 7: Η διαίσθηση και οι δομικοί λίθοι της σύμφωνα με την έρευνα των Pfannkuch et. al.....27

Εικόνα 8: Σχηματική αναπαράσταση των κουτιών του Bertrand.....43

Εικόνα 9: Τα τρία τραπουλόχαρτα του Gardner.....60

Εικόνα 10: Το 4-επίπεδο πλαίσιο κατάταξης της συλλογιστικής με πιθανότητες των Jones et al.....63

Εικόνα 11: Απάντηση μαθητή της Γ λυκείου στο πρώτο έργο που κατατάχτηκε στο επίπεδο 4 66

Εικόνα 12: Απάντηση μαθητή της Γ λυκείου στο δεύτερο έργο που κατατάχτηκε στο επίπεδο 4 67

Εικόνα 13: Απάντηση μαθητή της Α λυκείου στο δεύτερο έργο που κατατάχτηκε στο επίπεδο 3 69

Εικόνα 14: Τροποποίηση του πλαισίου των Jones et al. για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας 70

Εικόνα 15: Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις στρατηγικές των μαθητών στο πρώτο έργο.....73

Εικόνα 16: Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τις στρατηγικές των μαθητών στο δεύτερο έργο 74

Εικόνα 17: Ποσοστά απαντήσεων των μαθητών στο πρώτο υποερώτημα του πρώτου έργου 80

Εικόνα 18: Ποσοστά απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο υποερώτημα του πρώτου έργου.....81

Εικόνα 19: Ποσοστά απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο έργο.....81