**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Στρατηγικές απαρίθμησης αντικειμένων και συλλογισμοί σε έργα χωρικά, αριθμητικά και γεωμετρικά

**ΣΟΦΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ**

**Δ201427**

**Επιβλέπουσα Καθ. : Δέσποινα Πόταρη**

**ΑΘΗΝΑ 2018**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών**

**Σπουδών στη**

**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 27η Σεπτεμβρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

| Ονοματεπώνυμο | Βαθμίδα |
|---|---|
| • Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα) | Καθηγήτρια |
| • Θ. Ζαχαριάδη | Καθηγητή |
| • Γ. Ψυχάρη | Επικ. Καθηγητή |

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενης από τους:

| Ονοματεπώνυμο | Βαθμίδα |
|---|---|
| • Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα) | Καθηγήτρια |
| • Γ. Ψυχάρη | Επικ. Καθηγητή |
| • Μ. Πιττάλη | Εξωτ. Συνεργάτη Παν. Κύπρου |

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου:

Στην επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα, για την πολύτιμη καθοδήγηση και υποστήριξή της, τον χρόνο που αφιέρωσε και τις στοχευμένες επισημάνσεις της καθ' όλη τη διάρκεια αυτού του εγχειρήματος.

Στον επίκουρο καθηγητή κο Ψυχάρη Γεώργιο και τον Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών, Εξωτερικό Συνεργάτη Παν. Κύπρου κο Πιττάλη Μάριο, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στη συμβουλευτική επιτροπή και με βοήθησαν με τις παρατηρήσεις τους και την καλή τους πρόθεση σε αυτή τη συνεργασία.

Σε όλους τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού αυτού Προγράμματος, για τις γνώσεις που προσέφεραν.

Σε όλους τους συμφοιτητές για τη συνεργασία, τη βοήθεια και τις εμπειρίες που μοιραστήκαμε στην κοινή αυτή πορεία.

Στην κα Κλη Ελένη και στην κα Μπακογιάννη Διονυσία, που πάντα ήταν σε επαγρύπνηση για να προσφέρουν τη βοήθειά τους από τη θέση της γραμματείας του Προγράμματος.

Στους μαθητές που συμμετείχαν με προθυμία στη διεξαγωγή της έρευνας.

Στους δικούς μου ανθρώπους, που με υποστήριξαν σε όλες τις δυσκολίες και με ενθάρρυναν να συνεχίσω και να επενδύσω στην προσπάθεια αυτή.

Ξεχωριστά στη Βάσια, στον Θοδωρή και στον Ανδρέα, γιατί προσέφεραν απλόχερα τη μεγαλύτερη βοήθεια για την πραγμάτωση της διπλωματικής μου εργασίας.

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

**ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ**

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκαν οι συλλογισμοί και οι στρατηγικές μαθητών Δ' και Ε' δημοτικού σε έργα απαρίθμησης μαθηματικών αντικειμένων, σε σύνδεση με τον εντοπισμό πολλαπλασιαστικών σχέσεων και μοτίβων. Η έρευνα διεξήχθη σε τρεις μαθητές από κάθε τάξη, οι οποίοι έχουν υψηλές επιδόσεις στα σχολικά μαθηματικά. Υλοποιήθηκε σε τρεις φάσεις-προσωπικές συνεντεύξεις με κάθε μαθητή. Οι συμμετέχοντες ενεπλάκησαν σε έργα χωρικά, αριθμητικά και γεωμετρικά. Οι στρατηγικές απαρίθμησης και οι τύποι λαθών των μαθητών στο χωρικό έργο κατηγοριοποιήθηκαν με βάση τα μοντέλα των Anghileri και Finesilver αντίστοιχα, ενώ στα υπόλοιπα έργα οι ομαδοποιήσεις έγιναν με βάση τις απαντήσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι κυρίαρχος τρόπος υπολογισμού αντικειμένων για τους μαθητές ήταν ο συνδυασμός πολλαπλασιαστικών σχέσεων με προσθετικές. Οι μαθητές της Ε' δημοτικού πρότειναν συνολικά περισσότερες στρατηγικές ομαδοποίησης αντικειμένων στο χωρικό έργο, οι οποίες βασίστηκαν σε μεγάλο βαθμό στην αξιοποίηση τη έννοιας του διαιρέτη. Στα περισσότερα έργα, βασικό ρόλο έπαιξε η οπτική αναπαράστασή τους στην ανάδειξη πολλαπλασιαστικών σχέσεων από τους μαθητές, κάτι που δε συνέβη στην περίπτωση των αριθμητικών μοτίβων. Εντοπίστηκαν ομοιότητες στην αντιμετώπιση των διαφορετικών έργων αναφορικά με τις στρατηγικές απαρίθμησης, τους τύπους λαθών και τα σημειωτικά μέσα.

Λέξεις – κλειδιά: *πολλαπλασιαστική σκέψη, μοτίβο, απαρίθμηση, σημειωτικά μέσα, οπτική αναπαράσταση*

## ABSTRACT

In the present study we investigated the ways of reasoning and the strategies suggested by students of $4^{th}$ and $5^{th}$ grade to counting activities of mathematical objects, in connection with the examination of multiplicative relationships and patterns. The study was conducted with three students for each grade, with high achievement in school mathematics. It was implemented in three phases – personal interviews with each student. The participants engaged in spatial, numerical and geometrical activities. The counting strategies and the types of errors expressed by students in the spatial activity were categorized with the use of the models proposed by Anghileri and Finesilver respectively, while the categorization to the other activities was configured by the answers of the students. Through the results, the combination of multiplicative and additive relationships proved the predominant way of counting. In total, $5^{th}$ grade students suggested more strategies of grouping objects in the spatial activity, which depended heavily on the use of the concept of divisor. In most activities, their visual representation played the principal role to the emergence of multiplicative relationships expressed by students, something that did not happen in the case of numerical patterns. Similarities were noticed in the treatment of the different activities related to the counting strategies, the types of errors and the semiotics.

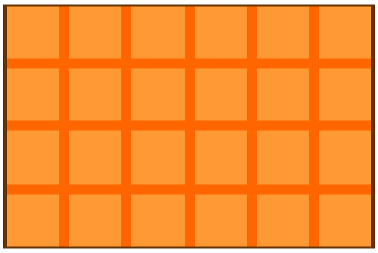


*Keywords: multiplicative thinking, pattern, counting, semiotic means, visual representation*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από πολύ μικρή ηλικία έχει διαπιστωθεί ότι οι άνθρωποι έχουν την ικανότητα να διακρίνουν κανονικότητες στο περιβάλλον γύρω τους και να τις αναπαράγουν (Sarama και Clements, 2009). Ωστόσο οι κανονικότητες αυτές, συχνά αποκαλούμενες ως μοτίβα, δεν ερμηνεύονται με τον ίδιο τρόπο από όλους. Έρευνες υποστηρίζουν ότι αυτό που παρατηρούμε σε ένα αντικείμενο εξαρτάται από εμάς (McGarvey, 2012· Radford, 2006).

Τα μαθηματικά έχουν μελετηθεί και χαρακτηριστεί ως «η επιστήμη των μοτίβων» (Wittmann, 2005· Resnick, 1982). Βασικό χαρακτηριστικό των μοτίβων, το οποίο δηλώνεται ρητά ή υπόρρητα στην προσπάθεια περιγραφής τους, είναι η επαναληψιμότητα ενός φαινομένου. Η επαναληψιμότητα μπορεί να υποδεικνύει σταθερότητα των στοιχείων του μοτίβου (Εικόνα 1) ή συστηματικό τρόπο μεταβολής τους (Εικόνα 2).



*Εικόνα 1*

*Εικόνα 2*

(πηγές: http://galileo.org/classroom-examples/math/math-fair-problems/puzzles/walls-of-rock/ , http://galileo.org/classroom-examples/math/math-fair-problems/puzzles/janus-upside-down/ )

Όπως υποστηρίχθηκε προηγουμένως, καθένα από τα μοτίβα στις εικόνες 1 και 2 μπορεί να ερμηνευθεί με διαφορετικούς τρόπους από έναν παρατηρητή. Έτσι, για παράδειγμα, στην Εικόνα 1 κάποιος μπορεί να διακρίνει ότι επαναλαμβάνονται μοναδιαία τετράγωνα, ενώ κάποιος άλλος να διακρίνει όμοιες τετράδες από τετράγωνα. Ομοίως στην Εικόνα 2 ένας παρατηρητής μπορεί να διατυπώσει ότι κάθε νέα σειρά έχει ένα επιπλέον κέρμα, ενώ ένας άλλος ότι το πλήθος κερμάτων σε κάθε σειρά είναι ίσο με τον τακτικό αριθμό της σειράς αυτής.

Εκτός από τα μοτίβα, κεντρική έννοια στο σχεδιασμό, την υλοποίηση και την εκπόνηση της παρούσας ερευνητικής εργασίας αποτελεί η πολλαπλασιαστική σκέψη (multiplicative thinking). Η επιλογή αυτής τη θεματικής περιοχής δεν έγινε τυχαία.

Αρχικά, η πολλαπλασιαστική σκέψη αναγνωρίζεται ως εξέχουσας σημασίας λειτουργία στη μαθηματική εκπαίδευση, η οποία εμφανίζεται από τα πρώτα σχολικά χρόνια (Anghileri, 1989· Brown, Kuchemann & Hodgen, 2010). Δεύτερον, η πολλαπλασιαστική σκέψη και ο πολλαπλασιαστικός συλλογισμός συνδέονται άμεσα με την έννοια του μοτίβου, διότι εμπεριέχουν την ιδιότητα της επαναληψιμότητας.

Η Anghileri (2000) αναγνωρίζει βασικές όψεις του πολλαπλασιασμού, που χρειάζεται να κατανοήσουν οι μαθητές από τις μικρές τάξεις. Αυτές είναι η *επανάληψη*, η *διττή φύση* του, η *αντιμεταθετικότητα* και η *επιμεριστικότητα* (Harries και Barmby, 2007). Ο πολλαπλασιασμός έχει διττή φύση γιατί συνδέει δύο διαφορετικού είδους δεδομένα: το πρώτο αντιπροσωπεύει το μέγεθος του συνόλου αντικειμένων στα οποία αναφέρεται κάποιος (π.χ. ένα σύνολο από ορισμένα πορτοκάλια), ενώ το δεύτερο αντιπροσωπεύει το πλήθος των επαναλήψεων του συνόλου (ίδια σύνολα από πορτοκάλια). Το σύνολο αντικειμένων αποτελεί τη **μονάδα σύνθεσης** (Battista, 2004· Steffe, 1994) ή απλώς τη **μονάδα** (Sophian, 2007· Thompson, 1994), στην οποία επιμερίζεται ένα υλικό.

Αναγνωρίζοντας την αξία του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού σε πλήθος καταστάσεων στη σχολική πραγματικότητα, καθίσταται ζωτικής σημασίας η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες πολλαπλασιαστικής φύσης. Συνεκτιμώντας το γεγονός ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις έχουν αναγνωριστεί ως βασικό εργαλείο στη μαθησιακή διαδικασία και ότι πολλαπλές μορφές αναπαράστασης μίας έννοιας συμβάλλουν στη βαθύτερη κατανόησή της, η σύνδεση του πολλαπλασιασμού με διαφορετικά μαθηματικά πεδία όπως η αριθμητική, η γεωμετρία και η στερεομετρία μπορεί να είναι καθοριστική για την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές.

Η παρούσα έρευνα συνδέει επίσης την αναγνώριση μοτίβων και πολλαπλασιαστικών δομών με την αντίληψη του χώρου. Πριν αρκετές δεκαετίες ο French (1951) υποστήριξε ότι κάποιος που διαθέτει χωρική ικανότητα μπορεί να αντιλαμβάνεται χωρικά μοτίβα (Colom, Contreras, Botella και Santacreu, 2001). Στην ερευνητική κοινότητα κεντρική συνιστώσα της χωρικής ικανότητας θεωρείται η οπτικοποίηση.

Σε πολλές χώρες η εύρεση κανονικοτήτων σε διαφορετικά πλαίσια είναι βασικό στοιχείο των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Barbosa, Palhares και Vale, 2007). Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι τα μοτίβα αποτελούν κεντρική έννοια στην εκπαίδευση, οι μαθητές εκδηλώνουν δυσκολίες στην περιγραφή τους. Στην παρούσα ερευνητική εργασία έγινε προσπάθεια να μελετηθούν οι στρατηγικές απαρίθμησης αντικειμένων και οι συλλογισμοί που αναπτύσσονται σε αυτές από μαθητές της Δ’ και της Ε’ δημοτικού, σε σύνδεση με την πολλαπλασιαστική σκέψη και τα μοτίβα.

Η έρευνα περιλαμβάνει δραστηριότητες από διαφορετικά μαθηματικά πεδία για να εξεταστούν οι τρόποι αντιμετώπισής τους από τους μαθητές και να αναδειχθούν συνδέσεις μεταξύ τους. Εντοπίστηκαν κοινές στρατηγικές απαρίθμησης στα χωρικά, στα αριθμητικά και στα γεωμετρικά έργα, καθώς και ορισμένοι κοινοί τύποι λαθών. Τα όμοια αυτά χαρακτηριστικά ομαδοποιήθηκαν με βάση το περιεχόμενό τους και παρουσιάζονται στο 5$^{ο}$ κεφάλαιο της παρούσας ερευνητικής εργασίας.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ακολούθως αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίχθηκαν τόσο ο σχεδιασμός της παρούσας έρευνας όσο και ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων που προέκυψαν από την ερευνητική διαδικασία. Όπως αναφέρθηκε στο 1ο κεφάλαιο η πολλαπλασιαστική σκέψη μπορεί καλλιεργηθεί σε ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών καταστάσεων. Βασικές έννοιες-πυλώνες για το παρόν ερευνητικό πλαίσιο είναι: η *πολλαπλασιαστική σκέψη*, τα *μοτίβα*, οι *οπτικές και νοητικές αναπαραστάσεις* και η *χωρική ικανότητα*.

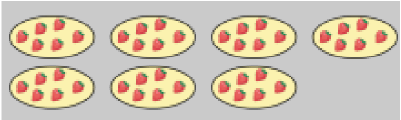
Η περιγραφή του περιεχομένου καθεμιάς από τις ανωτέρω έννοιες μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση αναδεικνύει συνδέσεις μεταξύ τους, οι οποίες και καθόρισαν την επιλογή των δραστηριοτήτων της ερευνητικής εργασίας. Για λόγους οργάνωσης και σαφήνειας παρουσιάζονται μεμονωμένα ως υποενότητες του κεφαλαίου και συσχετίζονται όπου κρίνεται απαραίτητο.

## 2.1. Πολλαπλασιασμός και πολλαπλασιαστική σκέψη

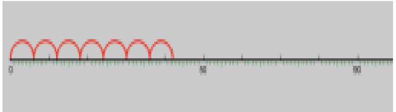
Προκειμένου να κατανοήσει κανείς το περιεχόμενο της πολλαπλασιαστικής σκέψης, είναι σημαντικό να αντιληφθεί τη διττή φύση του πολλαπλασιασμού. Όπως αναφέρθηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο, ο πολλαπλασιασμός συσχετίζει δύο διαφορετικά δεδομένα, εκ των οποίων το ένα αντιπροσωπεύει τη **μονάδα σύνθεσης** αντικειμένων και το άλλο το **πλήθος επαναλήψεων** της μονάδας αυτής. Η μονάδα σύνθεσης περιέχει «πράγματα» που αναπαρίστανται ως «ένα πράγμα» και η επιλογή της κατά τον Steffe (1994) είναι το ουσιαστικό σημείο στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού (Park και Nunes, 2001). Με άλλα λόγια, «*ο πολλαπλασιασμός απαιτεί πράξεις με σύνθετες μονάδες αντί για μεμονωμένες μονάδες, το οποίο μετά αλλάζει το τι εκτιμάται ως αριθμός*» (σελ. 129 των Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder και Thompson, 1998).

Έτσι, αναφερόμενοι στην Εικόνα 3 που ακολουθεί, μπορούμε να θεωρήσουμε μονάδα ένα πιάτο από φράουλες, ή δύο πιάτα, ή τρία πιάτα κ.ο.κ. Αντίστοιχα, υπολογίζουμε ότι έχουμε επτά μονάδες, ή τρεισήμισι μονάδες, ή δύο μονάδες και ένα τρίτο της μονάδας κ.ο.κ. Πρέπει να είναι κανείς συνεπής στη μονάδα που χρησιμοποιεί (δηλ. «τι μετράμε», όπως οπτικοποιείται στις Εικόνες 3, 4, 5), καθώς και να λαμβάνει υπόψη τις σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ διαφορετικών μονάδων (Sophian, 2007).

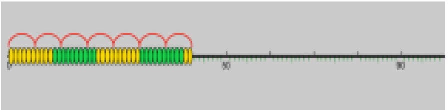
*Οπτικές αναπαραστάσεις μονάδων σύνθεσης*



*Εικόνα 3: Πιάτα από φράουλες*



*Εικόνα 4: Αριθμογραμμή*



*Εικόνα 5: Χάντρες*

*Harries κ. ά., 2007*

Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ διαφορετικών μονάδων μπορεί να εκδηλωθούν από τους μαθητές όπως στον συλλογισμό του Tommy, μαθητή 3ης τάξης Δημοτικού, κατά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού 8 x 6: «5 x 8 = 40, το μισό του 80. 6 x 8 = 48, γιατί 40 + 8 = 48. Τέλειωσε!». Κατά τον Heege (1985), ο οποίος διερεύνησε τους συλλογισμούς του Tommy στον πολλαπλασιασμό, οι σχέσεις αυτές μπορεί να προκύπτουν από άτυπες στρατηγικές ή από την απομνημόνευση της προπαίδειας των αριθμών, ή και από τα δύο. Ο Tommy ήταν ένας μαθητής που είχε απομνημονεύσει πολύ καλά πολλαπλασιασμούς αριθμών με το 10, όπως 7 x 10 ή 9 x 10. Με βάση αυτούς υπολόγιζε με ευχέρεια πολλαπλασιασμούς με το 5 και κατ' επέκταση μπορούσε να κατασκευάσει τον πίνακα της προπαίδειας ως το 10, προσθέτοντας ή αφαιρώντας όσο χρειαζόταν κάθε φορά.

Όπως πρότεινε ο Thompson (1993) είναι κρίσιμο να διακρίνουμε την ποσότητα από τον αριθμό (Caglayan, 2014). Ένας άνθρωπος φτιάχνει μία ποσότητα όταν συλλαμβάνει την ποιότητα ενός αντικειμένου με τέτοιο τρόπο, ώστε να κατανοεί την πιθανότητα του να το μετρήσει, π.χ. οι μπλε χάντρες που βλέπουμε σε ένα πλήθος από βραχιόλια είναι η ποιότητα που επιλέγουμε να μετρήσουμε σε αυτά. Ο Thompson εξηγεί ότι η ποσότητα συντίθεται από μία ποιότητα του αντικειμένου, μία κατάλληλη μονάδα και μία διαδικασία με την οποία αποδίδεις μία αριθμητική αξία σε αυτή την ποιότητα.

Στη σχολική εμπειρία ο πολλαπλασιασμός εισάγεται συνηθέστερα υπό τη μορφή επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, με αποτέλεσμα τη συσχέτισή τους (Larsson, Pattersson και Andrews, 2017). Οι Nunes και Bryant (1996) υποστήριξαν την ύπαρξη διαδικαστικής σύνδεσης των δύο πράξεων, καθώς ο πολλαπλασιασμός διαθέτει την επιμεριστική ιδιότητα (αναλύεται σε επιμέρους προσθέσεις) και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση χρησιμοποιείται ως διαδικασία επίλυσης πολλαπλασιασμών. Σε συμφωνία με τη συσχέτιση αυτή βρίσκεται και η πρόταση των Fischbein, Deri και Marino (1985) ότι κάθε αριθμητική πράξη διαθέτει ένα εγγενές διαισθητικό μοντέλο, και αυτό το μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό είναι η πρόσθεση (Park κ. ά., 2001).

Ωστόσο, από μία άλλη σκοπιά επισημαίνεται ότι οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις έχουν δικά τους χαρακτηριστικά που τις ξεχωρίζουν από τις προσθετικές, παρόλο που οι πρώτες μπορούν να μοντελοποιηθούν βάσει των δεύτερων (Anghileri, 1989). Σύμφωνα με αυτή, η έννοια που διαθέτουν τα παιδιά για τον πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις συσχετίσεις στο μυαλό τους κι όχι από την έννοια της πρόσθεσης. Τη δημιουργία συσχετίσεων στο μυαλό υποστηρίζει ο Piaget (1965) διατυπώνοντας ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μία ισοδυναμία που αναπτύσσεται μέσω της ένα προς ένα αντιστοιχίας μεταξύ δύο συνόλων. Από ψυχολογικής οπτικής, η ένα προς ένα αντιστοιχία είναι ένας εγγενής πολλαπλασιασμός (Kornilaki, 1999).

Από την άλλη πλευρά, οι Clark κ.ά. (1996) θεωρούν την πρόσθεση έμφυτη στην κατασκευή του αριθμού, καθώς αυτός συντίθεται προσθέτοντας συνεχώς μονάδες. Οι ίδιοι προτείνουν ότι ο πολλαπλασιασμός απαιτεί υψηλότερης τάξης σκέψη από την ικανότητα να προσθέτεις. Σε συμφωνία φαίνεται πως βρίσκονται οι Sowder κ.ά. (1998), που υποστηρίζουν ότι ο προσθετικός συλλογισμός αναπτύσσεται φυσικά και διαισθητικά, όταν εμπλεκόμαστε σε πολλές καταστάσεις προσθετικής φύσης. Αντίθετα, οι πολλαπλασιαστικές δεξιότητες δεν είναι προφανείς για να τις κατανοήσουμε.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει αναφορά σε ερευνητικά ευρήματα. Οι Park και και Nunes (2001), στο πλαίσιο εκπαιδευτικής παρέμβασης σε μαθητές 2ης τάξης Δημοτικού, διαπίστωσαν ότι μετά από εξάσκηση σε πολλαπλασιαστικές δεξιότητες τα παιδιά βελτιώθηκαν περισσότερο σε πολλαπλασιαστικά από ό,τι σε προσθετικά προβλήματα. Τα παιδιά αυτά πριν την αναφερθείσα εκπαιδευτική παρέμβαση γνώριζαν μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Οι ερευνητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι αν η πρόσθεση ήταν προαπαιτούμενη του πολλαπλασιασμού, δε θα ήταν δυνατό αυτό το αποτέλεσμα. Παράδειγμα προβλήματος της παρέμβασης παρουσιάζεται ακολούθως (Εικόνα 6).

*Η μαμά της Amy φτιάχνει δύο κατσαρόλες ντοματόσουπα. Θέλει να βάλει 3 ντομάτες σε κάθε κατσαρόλα. Πόσες ντομάτες χρειάζεται;*

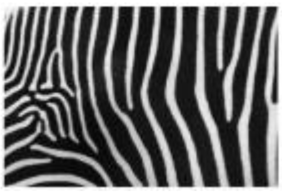
*Εικόνα 6*

*Park και Nunes, 2001*

Οι Mulligan, Prescott, Papic και Mitchelmore (2006) υλοποίησαν πρόγραμμα παρέμβασης σε μαθητές και δασκάλους, με εστίαση στο αριθμητικό σύστημα και την αξία θέσης, στον υπολογισμό μοτίβων, στον πολλαπλασιασμό και στα κλάσματα (Mulligan, 2011). Βρήκαν ότι η εστίαση σε πολλαπλασιαστικές έννοιες ήταν αναπόσπαστη στο χτίσιμο δομικών σχέσεων κατά τις πρώτες σχολικές τάξεις στα μαθηματικά. Απαραίτητες ήταν οι χωρικές κατασκευές ώστε να οπτικοποιούν οι συμμετέχοντες αυτές τις δομές. Τα ευρήματα αυτά αντικατοπτρίζουν τα οφέλη της σύνδεσης της πολλαπλασιαστικής σκέψης με οπτικές αναπαραστάσεις, καθώς και την πολύτιμη συμβολή της στην κατασκευή μαθηματικού νοήματος.

## 2.2. Μοτίβα

*M:* (Εικόνα 7) *Ένα μέρος του είναι μοτίβο και ένα μέρος του δεν είναι.*
*E: Ποιο μέρος του είναι μοτίβο και ποιο δεν είναι;*
*M: Αυτό το μέρος, επειδή είναι άσπρο-μαύρο-άσπρο-μαύρο-άσπρο-μαύρο. Αλλά μετά πηγαίνει σαν τρελό.*



*Εικόνα 7 (Riedle, 2009)*

*McGarvey, 2012*

Σε έρευνα του McGarvey (2012), εκ της οποίας παρατέθηκε το παραπάνω απόσπασμα, δάσκαλοι και μαθητές 1ης και 2ης τάξης Δημοτικού περιέγραψαν το μοτίβο ως κάτι που «επαναλαμβάνεται», που «προχωρά ξανά και ξανά», ενώ για την ακολουθία του οι δάσκαλοι είπαν ότι «μπορείς να προβλέψεις τι γίνεται μετά» και τα παιδιά ότι «ξέρεις τι θα συμβεί».

Η λέξη μοτίβο (pattern) προέρχεται από το γαλλικό “patron”, που σημαίνει “ένα μοντέλο τελειότητας που θα το μιμηθούν” (Online Etymology Dictionary). Το μοτίβο συναντάται με ποικίλους ορισμούς όπως «ο συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο κάτι έχει γίνει, έχει οργανωθεί ή συμβαίνει», «οποιαδήποτε συστηματικά επαναλαμβανόμενη διάταξη, ειδικά ένα σχέδιο από επαναλαμβανόμενες γραμμές, σχήματα ή χρώματα σε μία επιφάνεια», ή «οτιδήποτε χρησιμοποιείται σαν παράδειγμα, ειδικά για αντιγραφή» (Cambridge English Dictionary). Δεν υπάρχει ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός του μοτίβου στη διεθνή βιβλιογραφία, τόσο εντός του μαθηματικού πλαισίου όσο και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων.

Οι Olkun και Toluk-Ucar (2006) περιγράφουν το μοτίβο ως ένα σύστημα επαναλαμβανόμενων και σε σειρά διατεταγμένων αντικειμένων ή σχημάτων (Tanisli και Özdaş, 2009). Ένας ακόμη ορισμός προτείνει ότι μοτίβο είναι το «*να ψάχνει κανείς για μαθηματικές κανονικότητες και δομές, να φέρνει τάξη, νόημα, προβλεψιμότητα σε οπτικά ανοργάνωτες καταστάσεις και να διευκολύνει γενικεύσεις πέρα από τις άμεσα διαθέσιμες πληροφορίες*» (σελ. 319 από τους Sarama και Clements, 2009). Στην παρούσα ερευνητική εργασία η επαναληψιμότητα, την οποία αναφέρει πλήθος ερευνητών, είναι το χαρακτηριστικό βάσει του οποίου συσχετίζουμε το μοτίβο με την πολλαπλασιαστική σκέψη.

Κοινός τόπος για πλήθος ερευνητών της διδακτικής μαθηματικών είναι ότι η επαφή των μαθητών με τα μοτίβα από τις μικρές τάξεις βοηθά ποικιλοτρόπως στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και του μαθηματικού συλλογισμού (Walkowiak, 2013˙ Carpenter, Levi, Franke και Zeringue, 2005). Υψηλό ποσοστό των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών διαφόρων εκπαιδευτικών συστημάτων ανά τον κόσμο περιλαμβάνουν τα μοτίβα ως ζωτικής σημασίας δραστηριότητα για την ανάπτυξη δεξιοτήτων γενίκευσης. Η γενίκευση φαίνεται να συνδέεται ιδιαίτερα με την αλγεβρική σκέψη (Rivera, 2009˙ Radford, 2006˙ Lanin, 2005˙ Hargreaves κ.ά., 1998). Ως αποτέλεσμα, το μοτίβο υποστηρίζεται από πλήθος ερευνητών και εκπαιδευτικών ως ένα βασικό εργαλείο που μπορεί να εισαγάγει τους μαθητές στην άλγεβρα.

Παρόλα αυτά, ο Radford (2006) υποστηρίζει πως δεν οδηγούν όλα τα μοτίβα σε αλγεβρική σκέψη. Χρειάζονται κατάλληλες δραστηριότητες για να εμπλέξουμε τους μαθητές σε μοτίβα με αλγεβρικό νόημα. Επιπρόσθετα, αναφέρει την ύπαρξη διαφορετικών επιπέδων εμβάθυνσης στην αλγεβρική γενίκευση. Αυτή είναι η ικανότητα να συλλαμβάνεις κάτι κοινό που παρατηρείς στα στοιχεία μιας ακολουθίας, να είσαι σίγουρος ότι εφαρμόζεται σε όλους τους όρους της και να μπορείς να το χρησιμοποιείς για να παρέχεις μία άμεση έκφραση για οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Θεωρεί «αντικείμενο» (object) το υπονοούμενο κοινό στοιχείο και τη διαδικασία διαμόρφωσής του «αντικειμενοποίηση» (objectification). Η γενίκευση του κοινού είναι η διαμόρφωση αυτού που ο αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος Αριστοτέλης ονόμασε «γένος».

Αξίζει να περιγραφεί η σύνδεση του μοτίβου με την έννοια της αφαίρεσης. Σύμφωνα με τον Battista (2004) οι άνθρωποι για να κατασκευάσουν νέα γνώση στηρίζονται στην προϋπάρχουσα και ενεργούν αναστοχαστικά και αφαιρετικά. Η **αφαίρεση** θεωρείται κρίσιμο σημείο στην κατασκευή αυτή. Κατά τον von Glasersfeld (1995) στην αφαίρεση περιλαμβάνονται τα εξής στάδια:

-Σύλληψη: απομονώνεται ένα αντικείμενο, που θεωρείται η «μονάδα»

-Κατάκτηση: το αντικείμενο έχει αφαιρεθεί επαρκώς ώστε να μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς παρουσία ερεθίσματος

-Εσωτερίκευση: το αντικείμενο έχει αποσυνδεθεί από το αρχικό πλαίσιο σύλληψής του και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ελεύθερα στη φαντασία. Έχει χαρακτηριστεί από τους Steffe και Cobb (1988) ως η πιο γενικευμένη μορφή αφαίρεσης, στην οποία απομονώνεται η δομή, το μοτίβο, από την εμπειρία (Battista, 2004).

Έχει υποστηριχθεί ότι στον εντοπισμό των μοτίβων υπεισέρχονται υποκειμενικοί παράγοντες αλλά και κοινωνικοπολιτισμικές προσλαμβάνουσες. Ως αποτέλεσμα, ένα μοτίβο μπορεί να θεωρηθεί προσθετικό από έναν μαθητή και πολλαπλασιαστικό από έναν άλλον, ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο έχουν μεταφράσει τη δομή του μοτίβου και τη μονάδα (κοινό στοιχείο) που έχουν εντοπίσει (Rivera, 2009).

Σε έρευνα που πραγματοποίησε με μαθητές 8$^{ης}$ τάξης πάνω στη γενίκευση μοτίβων, ο Radford (2006) διέκρινε δύο διαφορετικές στρατηγικές που αξιοποίησαν τα παιδιά για να βρουν τον κανόνα ενός οπτικού μοτίβου: τη *γενίκευση* και την *επαγωγή*. *Γενίκευση* χαρακτηρίζει τη στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές παρατήρησαν κάθε στοιχείο του μοτίβου και εντόπισαν ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων, το οποίο και εξήγαγαν ως τον κανόνα του. *Επαγωγή* χαρακτηρίζει ο Radford τη στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές έκαναν υπολογισμούς, αξιοποιώντας τη μέθοδο δοκιμής και πλάνης, και κατέληξαν στον κανόνα μαντεύοντας. Ο Rivera (2009) ορίζει την απαγωγή ως σημείο έναρξης της επαγωγικής φάσης, όπου γίνεται η προσπάθεια επεξήγησης του μοτίβου βάσει των διαθέσιμων παραδειγμάτων, και την επαγωγή ως τον επαναλαμβανόμενο έλεγχο αυτών των επεξηγήσεων.

Με τις δύο αυτές στρατηγικές τα παιδιά οδηγήθηκαν σε δύο διαφορετικές αλγεβρικές εκφράσεις, που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα (Εικόνα 8):

*Κανόνας του μοτίβου*

*Στρατηγική γενίκευσης: (n + 1) + (n+2)*

*Στρατηγική επαγωγής: nx2 + 3*

*Εικόνα 8*

*(Radford, 2006)*

Οι Olkun και Yesildere (2007) έχουν διακρίνει τα μοτίβα ανάλογα με τη δομή και τον τρόπο αναπαράστασής τους σε *επαναληπτικά*, όπου τα στοιχεία τους επαναλαμβάνονται και σε *μεταβλητά*, όπου τα στοιχεία αλλάζουν (Tanisli και Ozdas, 2009). Ο Radford (2003) έχει διακρίνει τους εξής τύπους γενίκευσης ενός μοτίβου: 1) την *πραγματολογική*, που στηρίζεται σε δράσεις πάνω στους αριθμούς με χρήση λέξεων, χειρονομιών και αντίληψης 2) την *πλαισιακή*, όπου τα στοιχεία ονομάζονται μέσα από περιγραφή ενσωματωμένη στο πλαίσιο αναφοράς π.χ. «η επόμενη φιγούρα» και 3) τη *συμβολική*, όπου τα στοιχεία και οι πράξεις με αυτά εκφράζονται στο αλφαριθμητικό σύστημα της άλγεβρας (Radford, 2006).

Παρά την ιδιαίτερη βαρύτητα που έχει δοθεί στην αξιοποίηση των μοτίβων από τα πρώτα σχολικά χρόνια, έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές ηλικιών 8 έως και 15 ετών αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη λεκτική περιγραφή τους (Warren και Cooper, 2008˙ Assessment and Performance Unit, 1982 στο Hargreaves, Taylor και Threlfall, 1998). Επιπρόσθετα, ενώ από μικρή ηλικία τα παιδιά έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν μοτίβα σε εικόνες και λέξεις (2 έτη, σύμφωνα με τους Sarama κ.ά., 2009) και οι μαθητές ευρύτερα να βρίσκουν το επόμενο στοιχείο μίας ακολουθίας, ο κανόνας για να καθορίσουν την αξία ή το στοιχείο τυχαίας θέσης της ακολουθίας παραμένει πρόκληση (McGarvey, 2012).

## 2.3. Οπτικές και νοητικές αναπαραστάσεις

*Οπτικές αναπαραστάσεις*

Στις δραστηριότητες που διεξήχθησαν κατά την παρούσα έρευνα σπουδαία θέση έχουν οι οπτικές αναπαραστάσεις, οι οποίες γίνονται αντιληπτές μέσα από την αίσθηση της όρασης.

Όπως έχει επισημάνει ο Arcavi (2003), η όραση έχει κεντρικό ρόλο στη βιολογική και κοινωνικοπολιτισμική μας ύπαρξη. Με αυτήν ενθαρρυνόμαστε να «δούμε» όχι μόνο ό,τι φτάνει στο μάτι μας, αλλά και ό,τι είμαστε ανίκανοι να δούμε, καθώς και να οδηγηθούμε σε ερωτήματα που δε θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε χωρίς αυτήν. Η όραση μάς επιτρέπει να οπτικοποιούμε αυτά τα οποία επικοινωνούμε, και η οπτικοποίηση αυτή είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη της κατανόησης (Barbosa κ.ά., 2007˙ Arcavi, 2003).

Σε επιστήμες όπως είναι η φυσική και η μηχανική, γίνεται ευρεία χρήση οπτικών αναπαραστάσεων (διαγράμματα, σύμβολα, εικόνες κ.ά.). Μάλιστα, ορισμένοι επιστήμονες και μαθηματικοί όπως ο Einstein και ο Hadamard έχουν αρνηθεί ότι «σκέφτονται με λέξεις». Όταν προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα, χρησιμοποιούμε και εσωτερικευμένες αναπαραστάσεις στο μυαλό αλλά και εξωτερικευμένες αναπαραστάσεις σε χαρτί, σε πίνακα ή κάπου αλλού (Larkin και Simon, 1987).

Οι Hershkowitz, Arcavi και Bruckheimer (1989) χρησιμοποιούν τον όρο *οπτικοποίηση* για να αναφερθούν στην οπτική αναπαράσταση και την περιγράφουν ως «*την ικανότητα, τη διεργασία και το προϊόν δημιουργίας, μετάφρασης, χρήσης και αναστοχασμού πάνω σε εικόνες, ζωγραφιές, διαγράμματα, στο μυαλό, στο χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και επικοινωνία πληροφοριών, τη σκέψη και την ανάπτυξη προηγουμένως άγνωστων ιδεών και την ανάπτυξη κατανόησης*» (1989, σελ. 75 στο Arcavi, 2003). Υπό το πρίσμα αυτό η οπτικοποίηση θεάται υπό τρεις υποστάσεις: είναι ταυτόχρονα ικανότητα, προϊόν και διαδικασία δημιουργίας.

Όπως ορίζουν οι Sedig και Sumner (2006, σελ. 2) οπτική αναπαράσταση είναι «*μία συλλογή γραφικών συμβόλων που οπτικά κωδικοποιούν αιτιακές, λειτουργικές, δομικές, σημασιολογικές ιδιότητες και σχέσεις ενός κόσμου που αναπαρίσταται – αφηρημένου ή συγκεκριμένου*» (Montenegro, Costa και Lopes, 2018).

Οι εικόνες, τα διαγράμματα, τα σχήματα, οι χειρονομίες, ο λόγος, είναι σύμβολα. Είναι εργαλεία που μας βοηθούν να αναπαραστήσουμε δεδομένα. Με αυτά τα εργαλεία οι άνθρωποι κατασκευάζουν διαδικασίες με νόημα, αποδεκτές στο κοινωνικό πλαίσιο όπου ανήκουν, για να εξωτερικεύσουν τις σκέψεις τους και να φέρουν εις πέρας διάφορες δραστηριότητες. Συνδέοντάς τα με τη διαδικασία διαμόρφωσης ενός μαθηματικού αντικειμένου, ο Radford (2003) αποκαλεί τα μέσα αυτά *σημειωτικά μέσα αντικειμενοποίησης* και παράγονται από σύμβολα και κανόνες διεθνούς χαρακτήρα (Radford, 2006).

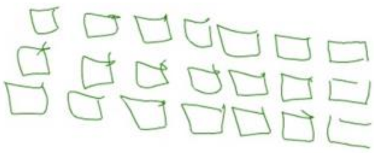
Έχει υποστηριχθεί από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να ωφελήσουν ιδιαίτερα τους μαθητές στην κατασκευή νοήματος (El Mouhayar και Jurdak, 2013˙ Wittmann, 2005). Σημείο σύγκλισης φαίνεται να είναι και η αξία των πολλαπλών αναπαραστάσεων μίας έννοιας ή ενός αντικειμένου, των συνδέσεων μεταξύ τους καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας περάσματος από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη (Harries κ.ά., 2007˙ Battista, 2004). Κάθε αναπαράσταση αναδεικνύει διαφορετικές οπτικές της ίδιας έννοιας. Αυτό φυσικά προϋποθέτει ότι κάποιος διαθέτει τη γνώση και τα εργαλεία για να κάνει τις απαιτούμενες μεταφράσεις και μετατροπές, είτε εντός μίας αναπαράστασης είτε μεταξύ διαφορετικών. Κατά συνέπεια, ένα διάγραμμα μπορεί να αξίζει όσο 10.000 λέξεις, αλλά μπορεί και όχι (Mayer και Sims, 1994). Ενδεικτικό παράδειγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων αποτελούν στην παρούσα έρευνα τα μοτίβα στη δεύτερη φάση διεξαγωγής της, τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν τόσο σχηματικά όσο και αριθμητικά.

Ωστόσο, ενώ ο ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να είναι καθοριστικός, ιδίως στη γεωμετρία και τη στερεομετρία, δε φαίνεται να εκτιμάται σε αυτό το βαθμό στη σχολική πραγματικότητα. Πολλοί ερευνητές αναγνωρίζουν τον ρόλο της οπτικοποίησης στα μαθηματικά, ενώ άλλοι λένε ότι από μόνη της δεν αρκεί. Εδώ συμβάλλουν και υποκειμενικές διαφοροποιήσεις˙ ένας μαθητής μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικές στρατηγικές κατά την εργασία του πάνω σε μαθηματικό έργο, ένας άλλος μη οπτικές στρατηγικές κι ας είναι οπτικό το έργο (Barbosa κ.ά., 2007). Έρευνες σε μαθητές διαφόρων ηλικιών έχουν δείξει ότι ορισμένοι εντοπίζουν μοτίβα αξιοποιώντας τη ζωγραφική (οπτικό ερέθισμα) ενώ άλλοι χρησιμοποιούν με επιμονή αριθμητικά πλαίσια στις εξηγήσεις τους, όχι πάντα με επιτυχία (Sasman, Linchevski και Olivier, 1999˙ Becker και Rivera, 2006).

Στην έρευνα των Sasman κ.ά. διαπιστώθηκε ότι μαθητές 8ης τάξης ενώ είχαν στη διάθεσή τους εικόνες σχημάτων σε δραστηριότητες μοτίβων, εργάστηκαν σχεδόν αποκλειστικά εντός του αριθμητικού πλαισίου, αγνοώντας τη δομή των σχημάτων. Ένα ακόμη εύρημα της έρευνας αυτής ήταν ότι οι μαθητές έδωσαν αρκετές εσφαλμένες απαντήσεις, που υποδείκνυαν ότι δεν ήξεραν το *πώς* να αξιοποιήσουν αποτελεσματικά τα δεδομένα που τους δίνονταν.

Οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως περιγράφηκε προηγούμενα, αξιοποιούνται διδακτικά τόσο στην εμπλοκή των μαθητών με μοτίβα από νεαρή ηλικία όσο και στην εξοικείωσή τους με πολλαπλασιαστικές δομές. Η αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού ως μία διάταξη από σειρές και στήλες, όπως φαίνεται παρακάτω στην Εικόνα 9, έχει προταθεί ότι μπορεί να βοηθήσει πολύ στην κατανόηση της πράξης και της διττής φύσης της (Harries κ.ά., 2007).

*Η οπτική αναπαράσταση της Ida (5η τάξη) για ένα πάρκινγκ με τρεις σειρές των επτά αυτοκινήτων*



*Σχήμα 7*

*Larsson, Pattersson και Andrews, 2017*

Ο Arcavi (2003) επισήμανε ορισμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην οπτικοποίηση. Αυτές μπορεί να είναι *πολιτισμικές*, που σχετίζονται με αξίες και πεποιθήσεις γύρω από τη σημασία του «κάνω μαθηματικά» και του «τι είναι αποδεκτό και έγκυρο», *γνωστικές*, είτε γιατί η οπτική πληροφορία μπορεί να υποδηλώνει αβεβαιότητα για τους μαθητές είτε λόγω δυσκολιών στις μεταφράσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, και *κοινωνιολογικές*, που συνδέονται είτε με τον πλούτο (ή την έλλειψη) οπτικών ερεθισμάτων στις διαφορετικές κουλτούρες των μαθητών είτε με τις επιδράσεις που ασκεί ο μετασχηματισμός της επιστημονικής γνώσης, ώστε να μπορεί να διδαχθεί στα παιδιά.

*Νοητικές αναπαραστάσεις*

Εκτός από τις οπτικές ή εξωτερικευμένες αναπαραστάσεις (visual or external representations), μείζονος σημασίας για τον μαθηματικό συλλογισμό είναι και οι νοητικές ή εσωτερικευμένες αναπαραστάσεις (mental or internal representations). Για την πληρέστερη περιγραφή μίας εσωτερικευμένης αναπαράστασης, κρίνεται σημαντικό να γίνει αναφορά στην εικόνα (imagery), στα νοητικά μοντέλα (mental models) και στα σχήματα (schemas).

Ο Pylyshyn (1973) περιγράφει την εικόνα ως μία αδιαμφισβήτητη μορφή εμπειρίας, πολύτιμη για τον άνθρωπο. Έχει προταθεί από τον Bower (1972) η διάκριση των (νοητικών) εικόνων, ως εμφανίσεων (appearances) πραγμάτων στο μυαλό μας, από τις υποθέσεις που έχουμε για αυτά, από το τι μας θυμίζουν (prepositions) (Pylyshyn, 1973).

Ο ρόλος της εικόνας έχει λάβει διακυμάνσεις ανά τα χρόνια, από απόλυτα ουσιώδες στοιχείο για την ανθρώπινη σκέψη ως και κάτι μικρής σημασίας. Η «εικόνα» έγινε δημοφιλέστερη τον 19$^{ο}$ αιώνα, μέσα από την επιστήμη της ψυχολογίας, όταν έγιναν συστηματικές προσπάθειες να αναπαρασταθούν οι «ιδέες». Αυτό έπρεπε να γίνει με έναν τέτοιο τρόπο, που δε θα χρειαζόταν να αναχθεί σε πιο απλουστευμένες αναπαραστάσεις για να περιγραφεί. Καθώς οι λέξεις ανάγονται στη γλώσσα, η μόνη εναλλακτική που για πολλούς είχε εγκυρότητα, έστω και με κάποια επιφύλαξη, ήταν οι νοητικές εικόνες (Kosslyn, 1980). Το γεγονός αυτό φαίνεται να παραμένει υπό αμφισβήτηση, κατά τον Pylyschyn (1973). Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι έγινε παύση στη μελέτη της νοητικής εικόνας κατά την άνοδο του μπιχεβιορισμού (πρώτο μισό του 20$^{ου}$ αιώνα) και τότε συνέχισε να εξετάζεται μόνο για την ψυχοθεραπεία και την τροποποίηση συμπεριφοράς (Presmeg, 2006).

Αναφερόμενοι στα νοητικά μοντέλα, ο όρος έχει χρησιμοποιηθεί από ερευνητές στην ψυχολογία και στην εκπαίδευση για να περιγράψει τις γνωστικές αναπαραστάσεις που τα παιδιά κατασκευάζουν κατά τη διάρκεια καταστάσεων μάθησης (Fischbein, 1999· English, 1997). Ο Chinnappan (1998) ορίζει τα σχήματα (schemas), τα οποία αξιοποιεί για να περιγράψει ένα νοητικό μοντέλο. Ορίζει λοιπόν το σχήμα (schema) ως «*μία ενότητα γνώσης που περιέχει πληροφορίες για κεντρικές έννοιες, τις σχέσεις μεταξύ αυτών και γνώση για το πώς και πότε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις έννοιες*» (σελ. 202). Υιοθετεί την πρόταση ότι τα νοητικά μοντέλα ενός ανθρώπου συγκροτούν μία σειρά από γνωστικές ενέργειες, όπως είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων και η απόφαση για το ποια σχήματα (schemas) θα ενεργοποιηθούν, και το πώς θα αξιοποιήσει ο άνθρωπος αυτή τη γνώση κατά την επίλυση ενός προβλήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το (νοητικό) σχήμα είναι μία έννοια ευρέως μελετημένη στην επιστήμη της ψυχολογίας, προκειμένου να αναλυθούν οι διεργασίες του εγκεφάλου. Ο Fischbein, επιδίωξε να συνθέσει τους χαρακτηρισμούς του σχήματος σε έναν ορισμό, θεωρώντας το «*ένα πρόγραμμα που εμπλέκει το άτομο στο α) να καταγράψει, να επεξεργαστεί, να ελέγξει και να ενσωματώσει εσωτερικά πληροφορίες και β)να αντιδράσει με νόημα και αποτελεσματικά στα περιβαλλοντικά ερεθίσματα*» (1999, σελ. 39).

Καταληκτικά, η επιστήμη της ψυχολογίας υποστηρίζει ότι οι μαθητές κατασκευάζουν, μεταφράζουν, σκέφτονται και νοηματοδοτούν με βάση νοητικές δομές, όπως περιγράφηκαν ανωτέρω, χρησιμοποιώντας τες στους μαθηματικούς τους κόσμους. Η οπτικοποίηση περιέχει νοητικές διεργασίες τις οποίες μπορεί να μη διαθέτουν οι μαθητές, όμως αυτό είναι δυνατό να καλλιεργηθεί μέσα από την κατάλληλη καθοδήγηση (Pittalis, Mousoulides και Christou, 2009).

## 2.4. Χωρική ικανότητα

### 2.4.1. Χωρική ικανότητα και ο ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων

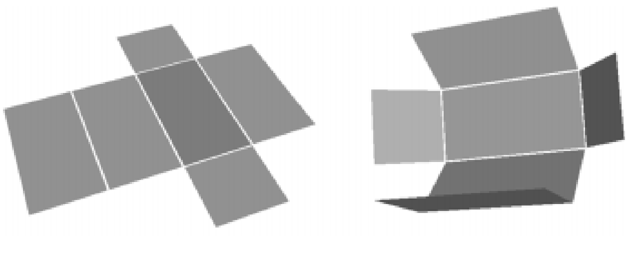
Υποστηρίζοντας τα παιδιά στο να νοηματοδοτήσουν και να δημιουργήσουν εικόνες, μοντέλα, γραφήματα στο χαρτί ή στον υπολογιστή, τα βοηθάμε να αποκτήσουν **αντίληψη του χώρου**, να αποκτήσουν δηλαδή αίσθηση του χώρου μέσα στον οποίο ζουν. Η αίσθηση που έχουμε για το χώρο μας βοηθά να δέσουμε ένα παπούτσι, να διπλώσουμε μία σελίδα, να κλοτσήσουμε μία μπάλα στο ποδόσφαιρο (Κολέζα, 2009).

Ορισμένοι ερευνητές περιγράφουν τη χωρική ικανότητα (spatial ability) χρησιμοποιώντας τον όρο «ικανότητα αντίληψης του χώρου» (spatial perception). Όπως είπε ο Gutiérrez «*δεν υπάρχει καμία γενική συμφωνία για την ορολογία που χρησιμοποιείται σ' αυτό τον τομέα. Μπορεί ένας ερευνητής να χρησιμοποιεί, παραδείγματος χάριν, τον όρο 'visualization' και ένας άλλος τον όρο 'spatial thinking' και να διαπιστώνουμε ότι μοιράζονται το ίδιο νόημα με διαφορετικούς όρους. Αφ' ετέρου, ένας όρος, όπως ο όρος 'visual image', μπορεί να έχει διαφορετικό νόημα για διαφορετικούς ερευνητές*» (1996, σελ. 4).

Όπως αναφέρει ο Bishop (1980) το ενδιαφέρον για τη χωρική ικανότητα εκδηλώθηκε αρχικά μέσα από συστηματική ψυχολογική μελέτη του Galton (1883) σχετικά με τις νοητικές ικανότητες του ανθρώπου και την ανάπτυξή τους. Στη συνέχεια, ο Thurstone (1938) όρισε τον χωρικό παράγοντα ως συνθετικό στοιχείο της ανθρώπινης ευφυΐας. Το 1934 ο ίδιος χαρακτήρισε τη χωρική-οπτική ικανότητα ως μία από τις σπουδαιότερες νοητικές ικανότητες, η οποία αφορά το να επεξεργάζεσαι νοητικά σχήματα, μεγέθη και αποστάσεις χωρίς να υπάρχουν λεκτικά ή αριθμητικά σύμβολα (Κολέζα, 2009).

Ωστόσο, είναι δύσκολο να διατυπωθεί ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός για τη χωρική ικανότητα, εξαιτίας της συνθετότητας της έννοιας. Όπως διατύπωσε η Carroll (1993, σελ.4), «*έχει να κάνει με τις ικανότητες των ατόμων να ψάχνουν το οπτικό πεδίο, να συλλαμβάνουν φόρμες, σχήματα και θέσεις αντικειμένων όπως συλλαμβάνονται οπτικά, σχηματίζοντας νοητικές αναπαραστάσεις αυτών και χειρίζοντάς τες νοητικά*» (Haffler, 2010).

Κοινός τόπος για μεγάλο μέρος ερευνητών είναι ότι βασική συνιστώσα της χωρικής ικανότητας είναι η χωρική οπτικοποίηση (spatial visualization). Κατά τον Herbert Maier (1996) αυτή αφορά την αναγνώριση αντικειμένου του οποίου τα μέρη κινούνται ή αλλάζουν θέση (π.χ. αναπτύγματα στερεού), ενώ ο Mc Gee (1979) αναλύει εκτενέστερα το περιεχόμενό της θεωρώντας την ως ικανότητα νοερού χειρισμού, περιστροφής και αλλαγής θέσης ενός αντικειμένου (Κολέζα, 2009). Υπό αυτό το πρίσμα, είναι κρίσιμη για τους μαθητές τόσο η επιλογή της θέσης τους για την αντιμετώπιση χωρικών έργων, όσο και η διατήρηση της θέσης αυτής μέχρι το πέρας των έργων.



*Εικόνα 10*

*Pittalis και Christou, 2013*

Έχει υποστηριχθεί ότι η ανάπτυξη της ικανότητας χωρικής κατασκευής δε λαμβάνει χώρα από μόνη της. Όσον αφορά διατεταγμένους κύβους, η χωρική τους κατασκευή μπορεί να αναπτύσσεται παράλληλα με την ικανότητα να σκέφτεσαι και να αιτιολογείς πάνω σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις (Finesilver, 2017). Επισημαίνεται από την ίδια ερευνήτρια ότι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές φαίνεται πως συνδέονται και με τους υπολογισμούς τους και με την αίσθηση του χώρου που έχουν για τον πολλαπλασιασμό.

Παραταύτα, η έρευνα πάνω στις σχέσεις μεταξύ χωρικών δεξιοτήτων και επιδεξιότητας στους υπολογισμούς είναι περιορισμένη˙ δεν έχει αναδειχθεί ευρέως η ύπαρξη συσχέτισης, ούτε και η μορφή της. Η Finesilver (2017) διερεύνησε στρατηγικές υπολογισμού πλήθους κύβων από μαθητές (11 έως 15 ετών) χαμηλών επιδόσεων στα σχολικά μαθηματικά. Διαπίστωσε ότι οι μαθητές βασίστηκαν ιδιαίτερα στην απαρίθμηση κύβων βήμα-βήμα, συχνά δείχνοντάς τους αναλυτικά, και λιγότερο σε στρατηγικές όπως η ανάκτηση της προπαίδειας. Ωστόσο, η απαρίθμηση κύβων σε «στρώματα» φάνηκε να τους διευκόλυνε στους υπολογισμούς τους. Από την άλλη πλευρά, ο Friedman (1995) κάνοντας μετα-ανάλυση 75 μελετών, διαπίστωσε μικρή συσχέτιση των μαθηματικών επιδόσεων με τη χωρική ικανότητα (Pittalis κ.ά., 2009).

Καταληκτικά, αξίζει να αναφερθεί ότι οι Pittalis κ.ά. (2009) σε έρευνά τους με μαθητές 5$^{ης}$ έως και 9$^{ης}$ τάξης (2009) διαπίστωσαν ότι η αναπαράσταση τρισδιάστατων σχημάτων εμπεριέχει δύο διακριτές, αλλά συμπληρωματικές και ισάξιες ικανότητες: την *κωδικοποίηση* (κατασκευή δισδιάστατων αναπαραστάσεων, δικτύων και μετάφρασή τους) και την *αποκωδικοποίηση* (ερμηνεία των δομικών στοιχείων και των γεωμετρικών ιδιοτήτων τους). Το εύρημα αυτό αναδεικνύει την κρίσιμη σημασία της ορθής μετάφρασης δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων σχημάτων για τον (νοερό) χειρισμό τους από έναν παρατηρητή.

### 2.4.2. Στρατηγικές απαρίθμησης κύβων και τύποι λαθών

Η Anghileri (1997) πρότεινε μία κατηγοριοποίηση των στρατηγικών απαρίθμησης κύβων που αξιοποιούν οι μαθητές σε τρισδιάστατες διατάξεις (Finesilver, 2017). Το μοντέλο αυτό υιοθετήθηκε στην παρούσα έρευνα για την οργάνωση και την περιγραφή των απαντήσεων που έδωσαν οι συμμετέχοντες σε χωρικό έργο, αποτυπωμένο δισδιάστατα. Σύμφωνα με την Anghileri, οι στρατηγικές των μαθητών μπορούν να ενταχθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

*1. Πολλαπλασιασμός*

Ο μαθητής υπολογίζει ένα σύνολο χωρίς καμία ένδειξη πρόσθεσης ή προσπέρασης αριθμού κατά το μέτρημα (π.χ. άμεση ανάκληση προπαίδειας ή μίας στρατηγικής υπολογισμού βάσει των αριθμών που πολλαπλασιάζονται).

*2. Πρόσθεση/Προσπέραση αριθμού κατά το μέτρημα*

Ο μαθητής απαριθμεί σε βήματα με βάση το πλήθος στρωμάτων ή στηλών, χωρίς την ένδειξη εσωτερικών αριθμών (π.χ. χρησιμοποιεί αριθμητικό μοτίβο με βάση τους αριθμούς που προστίθενται).

*3. Μέτρημα*

α. Η απαρίθμηση περιλαμβάνει την προσπέραση μερικών κύβων κατά τη διάρκεια εφαρμογής της (όταν συμβαίνει *εντός* ενός στρώματος κύβων).

β. Ρυθμικό μέτρημα: Ο μαθητής μετρά κάθε κύβο ξεχωριστά αλλά η σειρά μετρήματος γίνεται ρυθμικά, με έμφαση στο πλήθος κάθε (ίσης) υποομάδας κύβων.

γ. Ομαδοποιημένο μέτρημα: ο μαθητής μετρά κάθε κύβο ξεχωριστά, αλλά η σειρά μετρήματος είναι οργανωμένη σε υποομάδες κύβων.

δ. Μοναδιαίο μέτρημα: Ο μαθητής μετρά κάθε κύβο ξεχωριστά, χωρίς καμία ομαδοποίηση.

Αναφερόμενοι στα λάθη που έχουν παρατηρηθεί να συμβαίνουν από τους μαθητές κατά την απαρίθμηση τρισδιάστατων διατάξεων κύβων (τα οποία, όπως και οι ανωτέρω στρατηγικές, θα αξιοποιηθούν στο δισδιάστατο επίπεδο στα παρόντα ερευνητικά δεδομένα), η Finesilver (2017) τα ομαδοποιεί ως εξής:

*1. Χωρικής κατασκευής*

Ο μαθητής χρησιμοποιεί μία ελλιπή ή λανθασμένη απόδοση έννοιας στη δομή του σχήματος, π.χ. διπλομετρά έδρες κύβων, δεν υπολογίζει τους εσωτερικούς κύβους.

*2. Αριθμητικού υπολογισμού ή ανάκτησης*

Ο μαθητής κάνει λάθος στο μέτρημα ή στην ανάκτηση ενός αριθμητικού δεδομένου ενώ πολλαπλασιάζει, προσθέτει ή προσπερνά κατά το μέτρημα π.χ. “τρεις δωδεκάδες... 12, 24, 38”.

*3. Λεκτικής απαρίθμησης σειράς*

Ο μαθητής κάνει λάθος στο μέτρημα, π.χ. “26, 27, 29, 30”.

*4. Οπτικοχωρικό/Κιναισθητικό*

Ο μαθητής κάνει λάθος σχετικά με τη φυσική οπτική του μετρήματος, π.χ. στον συγχρονισμό λεκτικού μετρήματος και χειρονομίας, σύγχυση στο ποιες ενότητες έχουν ήδη μετρηθεί κ.ά.

Τέλος, επισημαίνεται ότι η διεξαγωγή της έρευνας αυτής, σε όλα τα στάδια, βασίστηκε στη νοητική πράξη του *αναστοχασμού* (reflection). Σε ερευνητικά ευρήματα των Battista και Clements (1995) ο αναστοχασμός έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να συλλογιστούν πάνω στις στρατηγικές και τους υπολογισμούς τους, ενώ παράλληλα να εξετάσουν και να ξαναδομήσουν τα νοητικά τους μοντέλα. Ο αναστοχασμός, εκτός από εργαλείο, τέθηκε παράλληλα και στόχος στην παρούσα έρευνα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

## 3.1. Σκοποί έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε μέρος της προϋπάρχουσας έρευνας σχετικά με την πράξη του πολλαπλασιασμού και τη σύνδεσή του με την πρόσθεση, την έννοια του μοτίβου, τον ρόλο των αναπαραστάσεων και τη χωρική ικανότητα. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχει προταθεί ότι η ικανότητα χωρικής κατασκευής μπορεί να αναπτύσσεται παράλληλα με την ικανότητα να συλλογίζεται κανείς πάνω σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις, με μία πιθανότητα η σχέση των δύο να είναι αμφίδρομη.

Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να συνεισφέρει στον τομέα της διδακτικής παρουσιάζοντας τρόπους αντιμετώπισης διαφορετικών μαθηματικών έργων από μαθητές Δ' και Ε' δημοτικού, σε σύνδεση με τον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και την αναγνώριση μοτίβων. Για τον λόγο αυτό διαμορφώθηκαν δραστηριότητες από διαφορετικά μαθηματικά πεδία τα οποία εμπλέκονται μεταξύ τους σε αυτές, εν προκειμένω τον χώρο, την αριθμητική και την επίπεδη γεωμετρία. Οι δραστηριότητες αυτές επιδέχονται ποικίλες προσεγγίσεις από τους μαθητές.

**Κεντρικό ερευνητικό ερώτημα**: Μελέτη των συλλογισμών και των στρατηγικών απαρίθμησης αντικειμένων που αξιοποιούν μαθητές Δ' και Ε' δημοτικού σε έργα χωρικά, αριθμητικά και γεωμετρικά και η ανάδειξη πολλαπλασιαστικών σχέσεων σε σύνδεση με τα μοτίβα.

Η μελέτη του κεντρικού ερευνητικού ερωτήματος έγινε μέσα από την ανάλυση των προσωπικών συνεντεύξεων έξι μαθητών υψηλού επιπέδου στα σχολικά μαθηματικά (τριών της Δ' και τριών της Ε' δημοτικού), οι οποίες διεξήχθησαν σε τρεις φάσεις για τον καθένα. Η έρευνα αυτή επικεντρώθηκε στα εξής σημεία:

-Ποια μοτίβα απαρίθμησης μαθηματικών αντικειμένων αναγνωρίζουν και προτείνουν οι μαθητές;

-Πώς συνδέονται αυτά τα μοτίβα με πολλαπλασιαστικές δομές;

-Ποια είναι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές και πώς διαχειρίζονται εσφαλμένες στρατηγικές τους;

-Ποιες ομοιότητες αναδεικνύονται στις στρατηγικές απαρίθμησης, αλλά και στους τύπους σφαλμάτων στα διαφορετικά μαθηματικά έργα;

## 3.2. Ερευνητική μέθοδος

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη περίπτωσης (case study). Πρόκειται για μία ερευνητική μέθοδο κατά την οποία μελετάται ένα φαινόμενο εις βάθος. Ο όρος «περίπτωση» υπονοεί την αναφορά σε ένα υποκείμενο ή φαινόμενο ή σε ένα μικρό αριθμό υποκειμένων ή φαινομένων και δεν επιδιώκει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Μία έρευνα μελέτης περίπτωσης χρησιμοποιεί πολλαπλές μεθόδους και πηγές και παράλληλα εστιάζει σε σχέσεις και διαδικασίες για την ολιστική αντιμετώπιση του φαινομένου που μελετάται.

## 3.3. Συμμετέχοντες

Οι μαθητές που επιλέχθηκαν να συμμετάσχουν είναι τρεις από τη Δ’ δημοτικού (ένα κορίτσι, δύο αγόρια) και τρεις από την Ε’ δημοτικού (τρία αγόρια). Διακρίνονται για τις σχολικές τους επιδόσεις στα μαθηματικά ως μαθητές υψηλού επιπέδου. Στην επιλογή τους επιπλέον γνώμονες ήταν η ευχέρεια που επιδεικνύουν σε νοερούς πολλαπλασιασμούς αλλά και η αντίληψη του χώρου, με βάση προέρευνα όπου συμμετείχαν, και η οποία θα αναφερθεί ακολούθως στη διαδικασία της έρευνας. Για λόγους συμβολικούς οι μαθητές θα ονομάζονται στο εξής «Ειρήνη», «Νώντας», «Θάνος» για τη Δ’ δημοτικού και «Ιορδάνης», «Σταύρος» και «Δήμος» για την Ε’ δημοτικού.

## 3.4. Διαδικασία έρευνας

### 3.4.1. Προέρευνα

Πριν την υλοποίηση της κυρίως έρευνας διεξήχθη προέρευνα που περιλάμβανε μία δραστηριότητα χωρικού προσανατολισμού, για να γίνει μία πρώτη εκτίμηση της χωρικής αντίληψης των μαθητών αυτών, αλλά και των μονάδων αναφοράς που μπορούσαν να διακρίνουν στα σχήματα που τους δίνονταν. Η προέρευνα υλοποιήθηκε σε μία συνάντηση για τον καθένα και είχε τη μορφή γραπτής συμπλήρωσης του έργου από τους μαθητές, χωρίς επικοινωνία με την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια διεξαγωγής της, παρά μόνο διευκρινιστικά κατά την έναρξη, με παράθεση παραδείγματος. Θα ακολουθήσει μία σύντομη περιγραφή των αποτελεσμάτων αυτής για να γίνουν σαφέστερα τα κριτήρια επιλογής των συμμετεχόντων.

Ο Δήμος και ο Σταύρος εκτελούσαν νοερές πράξεις με μεγάλη ευχέρεια και εκδήλωσαν την ίδια άνεση στο νοερό χειρισμό σχημάτων κατά την προέρευνα. Από την άλλη πλευρά, παρά τις υψηλές επιδόσεις τους στους νοερούς υπολογισμούς, ο Θάνος της Δ’ δημοτικού και ο Ιορδάνης της Ε’ δημοτικού δυσκολεύονταν να εντοπίσουν επιμέρους ομάδες κύβων μέσα στο ίδιο σχήμα. Ο Θάνος μάλιστα είχε την πρόθεση να προτείνει επιμέρους κομμάτια που απαρτίζουν ένα σχήμα, αλλά δεν ήταν πάντα σε θέση να ολοκληρώσει τους συλλογισμούς του με επιτυχία. Τέλος, ο Νώντας και η Ειρήνη εκδήλωσαν ευχέρεια στην οπτικοποίηση των σχημάτων, ενώ η Ειρήνη έδειξε το ίδιο και στους νοερούς πολλαπλασιασμούς. Με βάση τα παραπάνω αξιολογήθηκε ότι η συμμετοχή των συγκεκριμένων μαθητών στην παρούσα ποιοτική έρευνα θα μπορούσε να αναδείξει όσο το δυνατόν πιο πλούσια δεδομένα.

Μετά την προέρευνα ακολούθησαν ορισμένες τροποποιήσεις όσον αφορά τη διαμέριση των δραστηριοτήτων στις επιμέρους φάσεις της κυρίως έρευνας, ιδίως λόγω του χρόνου που εκτιμήθηκε ότι απαιτούν για επεξεργασία. Στη συνέχεια ακολούθησε η κυρίως έρευνα, στην οποία συμμετείχαν οι προαναφερθέντες έξι μαθητές. Η προέρευνα έλαβε χώρα εντός σχολικού χώρου και ωραρίου για τέσσερις εξ αυτών και εκτός για τους υπόλοιπους δύο. Η κυρίως έρευνα έλαβε χώρα εκτός σχολικού χώρου και ωραρίου για όλους, εκτός της μαθήτριας της Δ' τάξης.

### 3.4.2. Κυρίως έρευνα

Η κυρίως έρευνα υλοποιήθηκε μέσα σε τρεις προσωπικές συναντήσεις της ερευνήτριας με κάθε μαθητή, διάρκειας μίας ώρας και δέκα λεπτών περίπου κάθε φορά, με τη μορφή ημιδομημένης συνέντευξης. Κατά τη διάρκεια αυτής ο ρόλος της ερευνήτριας ήταν διττός, ερευνητικός και εκπαιδευτικός, με βασικό μέλημα οι συμμετέχοντες να ενθαρρύνονται να ανταποκριθούν σε ερωτήματα αλλά όχι να τους δίνονται οι απαντήσεις. Σε κάθε συνάντηση τα υλικά που περιλαμβάνονταν ήταν σταθερά: κάμερα καταγραφής με ενσωματωμένη ηχογράφηση, φύλλα εργασίας, μολύβι, γόμα και χρωματιστά στιλό σε περίπτωση που χρειαζόταν να σημειωθεί κάτι με διαφορετικό χρώμα.

Στην πρώτη συνάντηση δόθηκε στους συμμετέχοντες φύλλο εργασίας χωρικού περιεχομένου, στη δεύτερη δόθηκε φύλλο που περιλάμβανε αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα, διαχωρισμένα σε δύο επιμέρους δραστηριότητες ενώ στην τρίτη φάση δόθηκε φύλλο που απεικόνιζε ένα σύνολο από διατεταγμένες τελείες, που συγκροτούσαν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι συμμετέχοντες είχαν περιορισμένη εμπειρία στην εμπλοκή με δραστηριότητες χωρικού περιεχομένου.

### 3.5. Δραστηριότητες της έρευνας

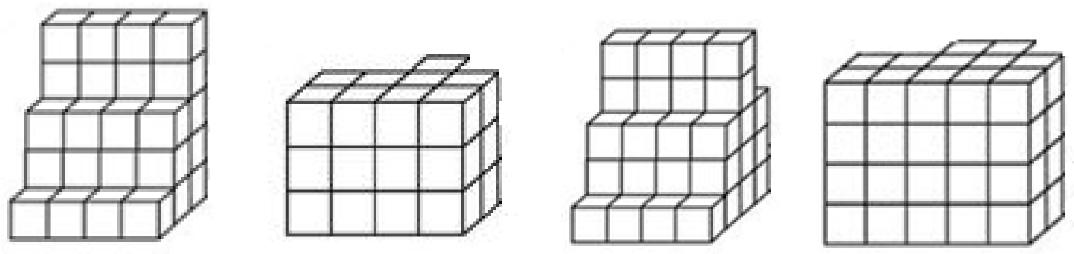
Για τη διερεύνηση του κεντρικού ερευνητικού ερωτήματος, αλλά και των σημείων εστίασης της παρούσας έρευνας, διαμορφώθηκαν τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες παρουσιάζονται και περιγράφονται αναλυτικά ακολούθως. Τρεις εξ αυτών περιλαμβάνουν οπτικοποιημένη πληροφορία, υπό τη μορφή σχήματος (δραστηριότητες 1, 3, 4) και μία είναι αριθμητικού περιεχομένου (δραστηριότητα 2). Βασικοί γνώμονες για την επιλογή των δραστηριοτήτων ήταν ότι συνδέονται με διαφορετικά πεδία των μαθηματικών (χώρος, γεωμετρία, αριθμητική) και επιδέχονται διαφορετικές προσεγγίσεις, όπου μπορεί να εμπλέκονται μεταξύ τους τα πεδία αυτά.

1η φάση – 1η Δραστηριότητα

Στη φάση αυτή δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας χωρικού περιεχομένου, με τέσσερις εικόνες που αποτύπωναν τρισδιάστατα σχήματα στο χαρτί.

***ΦΥΛΛΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ 1 – ΦΑΣΗ Α***

**Πόσους κύβους βλέπεις σε κάθε εικόνα; Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τους υπολογίσεις.**



**Σχήμα Α** **Σχήμα Β** **Σχήμα Γ** **Σχήμα Δ**

(Πηγή σχημάτων: https://myscres.com/worksheet/math-worksheets-counting-cubes-9.html )

Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται από τους μαθητές αφενός να υπολογίσουν τους κύβους που απαρτίζουν το κάθε σχήμα, αφετέρου να εκφράσουν διαφορετικές στρατηγικές απαρίθμησης αυτών των κύβων. Η δραστηριότητα επιλέχθηκε με κριτήριο ότι στοχεύει να διερευνήσει δύο πράγματα: τους τρόπους που επεξεργάζονται οι μαθητές ένα τρισδιάστατο σχήμα αποτυπωμένο δισδιάστατα και εκφράζονται για αυτό αλλά και τα μοτίβα που μπορούν να διακρίνουν, ως εργαλεία για την απαρίθμηση των κύβων. Αυτό συνεπάγεται ότι οι μαθητές είναι πιθανό να αντιμετωπίσουν το έργο είτε οπτικά είτε αριθμητικά. Επιπροσθέτως, τα σχήματα ανά δύο παρουσιάζουν ομοιότητες, για να μελετηθεί αν οι μαθητές εκφράζουν συσχετίσεις μεταξύ τους τόσο ως προς το οπτικό ερέθισμα όσο και ως προς τις στρατηγικές απαρίθμησης των κύβων που τα αποτελούν.

2η φάση – 2η και 3η Δραστηριότητα

Η δεύτερη φάση εμπεριέχει δύο δραστηριότητες: η πρώτη αφορά σε δύο αριθμητικά μοτίβα και η δεύτερη σε ένα γεωμετρικό μοτίβο. Στις δραστηριότητες αυτές ζητείται από τους μαθητές να αναγνωρίσουν σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία κάθε μοτίβου για να ανακαλύψουν τον κανόνα του, αλλά και να κατασκευάσουν οι ίδιοι τα επόμενα.

## *ΦΥΛΛΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ 2 – ΦΑΣΗ Β*

**1. Συμπλήρωσε τη σειρά με τα επόμενα δύο στοιχεία. Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τα υπολογίσεις.**

***α. 5, 15, 25***

***β. 1, 4, 9, 16***

**2. Συμπλήρωσε τη σειρά με τα επόμενα δύο στοιχεία. Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τα υπολογίσεις.**

Πηγή γεωμετρικού μοτίβου: Barbosa κ.ά., 2007

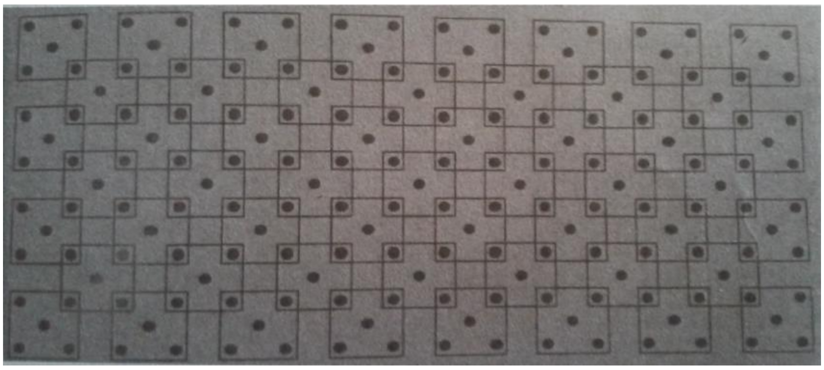
Και οι δύο δραστηριότητες αφορούν στην αναγνώριση του κανόνα που ικανοποιεί η κάθε σειρά στοιχείων, δηλαδή η εύρεση μοτίβου. Τόσο στα αριθμητικά μοτίβα της πρώτης δραστηριότητας όσο και στο γεωμετρικό μοτίβο της δεύτερης οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν στρατηγικές που στηρίζονται σε απαρίθμηση των μαθηματικών αντικειμένων μέσα από αθροιστικές, πολλαπλασιαστικές δομές ή συνδυασμούς των δύο. Επιπλέον, στη δεύτερη δραστηριότητα, ο κανόνας μπορεί να εξαχθεί τόσο από το οπτικό ερέθισμα όσο και αριθμητικά.

3η φάση – 4η Δραστηριότητα

Η τρίτη φάση περιλαμβάνει μία δραστηριότητα γεωμετρικού τύπου, η οποία επίσης επιδέχεται διαφορετικές στρατηγικές στο μέτρημα του πλήθους των τελειών. Η δραστηριότητα προσφέρεται για την ανάδειξη ποικίλων ιδεών, αλλά ενέχει και το ενδεχόμενο σύγχυσης των μαθητών λόγω της διάταξης των μαθηματικών αντικειμένων.

## *ΦΥΛΛΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ 3 – ΦΑΣΗ Γ*

**Πόσες είναι συνολικά οι τελείες; Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τις υπολογίσεις.**



Πηγή ορθογώνιας διάταξης: Λάμπρου και Σπανουδάκης, 2014

### 3.6. Δεδομένα και ανάλυση δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων της παρούσας εργασίας πραγματοποιήθηκε με διάφορους τρόπους. Κάμερα κατέγραφε με βίντεο και ήχο κάθε συνέντευξη, εστιασμένη στα φύλλα εργασίας. Επιπρόσθετα, κρατήθηκαν σημειώσεις κατά τη διάρκεια και μετά το πέρας κάθε συνέντευξης και απομαγνητοφωνήθηκαν οι διάλογοι των συμμετεχόντων με την ερευνήτρια. Κατά την απομαγνητοφώνηση κρατήθηκαν σημειώσεις οι οποίες και συμπληρώθηκαν στους διαλόγους, με ρόλο διευκρινιστικό όπου αυτό κρίθηκε απαραίτητο. Τέλος, συλλέχθηκαν δεδομένα και από τα φύλλα εργασίας των μαθητών.

Στην ανάλυση των δεδομένων και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται εστίαση σε κρίσιμα συμβάντα, όπως αυτά αξιολογήθηκαν. Τα κρίσιμα συμβάντα παρουσιάζονται με τίτλους και αφορούν την ανάδειξη είτε ορισμένων εκ των ορθών συλλογισμών που ανέπτυξαν οι μαθητές είτε σφαλμάτων και του τρόπου με τον οποίο εξελίχθηκαν, σε σύνδεση με τα ερευνητικά ερωτήματα.

Αναφορικά με την πρώτη δραστηριότητα, οι απαντήσεις των μαθητών αναλύθηκαν υπό το πρίσμα των στρατηγικών απαρίθμησης κύβων της Anghileri. Οι στρατηγικές αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2 και βοήθησαν σημαντικά στην κατηγοριοποίηση των ιδεών που πρότειναν οι μαθητές, καθώς και στη σύγκριση των συλλογισμών τους. Οι τύποι λαθών των μαθητών κατά τους υπολογισμούς πλήθους κύβων μελετήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν με βάση το μοντέλο της Finesilver. Στην παρούσα έρευνα, τόσο οι στρατηγικές απαρίθμησης όσο και οι τύποι λαθών εξετάζονται σε αντικείμενα αποτυπωμένα στο δισδιάστατο επίπεδο.

Στις υπόλοιπες δραστηριότητες οι ομαδοποιήσεις των στρατηγικών και των λαθών έγιναν με βάση το περιεχόμενό τους, το οποίο παρουσιάζει ομοιότητες με τις ομαδοποιήσεις των προαναφερθέντων μοντέλων.

Όλες οι δραστηριότητες μελετήθηκαν και αναλύθηκαν λαμβάνοντας υπόψη δύο βασικά κριτήρια: την ανάπτυξη διαφορετικών συλλογισμών και την ανάδειξη ποικίλων πολλαπλασιαστικών σχέσεων, είτε μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων είτε μέσα στα ίδια τα μαθηματικά αντικείμενα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας που διεξήχθη σε μαθητές της Δ' και της Ε' δημοτικού, όπως αυτά εξάχθηκαν από την ανάλυση των δεδομένων που περιγράφηκε. Οι τρόποι απαρίθμησης, οι τρόποι εξήγησης του κανόνα στα μοτίβα και οι στρατηγικές εύρεσης του επόμενου στοιχείου κατηγοριοποιήθηκαν με τη μορφή πινάκων στα μαθηματικά έργα. Τύποι λαθών ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα μόνο για το χωρικό έργο σύμφωνα με το μοντέλο της Finesilver, ενώ για τα επόμενα κρίθηκε καταλληλότερη η ενσωμάτωση της περιγραφής των λαθών στην ανάλυση των αποτελεσμάτων.

### 4.1. Δραστηριότητα 1η (χωρική)

Από τη συλλογή των δεδομένων αναδείχθηκαν ποικίλοι συνδυασμοί των στρατηγικών του μοντέλου της Anghileri (1997) από τους μαθητές, με επικρατέστερο τον συνδυασμό πολλαπλασιασμού - πρόσθεσης κύβων με προσπέραση κατά το μέτρημα. Αρχικά ομαδοποιούνται οι στρατηγικές κάθε μαθητή σε πίνακα και ακολουθεί η μελέτη των αποτελεσμάτων, με την παράθεση ενδεικτικών παραδειγμάτων.

**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ**

*Ειρήνη* (Πίνακας 1)

| Σχήμα Α | Σχήμα Β | Σχήμα Γ | Σχήμα Δ |
|---|---|---|---|
| Πολλαπλασιασμός | Μοναδιαίο Μέτρημα με ρυθμό – πολλαπλασιασμός | Πρόσθεση/ προσπέραση κατά το μέτρημα - έμφαση στο μέτρημα υποομάδων | Μοναδιαίο Μέτρημα με ρυθμό – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα |
| Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 2 τρόπους) | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 2 τρόπους) | Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 2 τρόπους) |
| | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα - πολλαπλασιασμός | Πολλαπλασιασμός – έμφαση στο μέτρημα υποομάδων | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων |

*Νώντας* (Πίνακας 2)

| **Σχήμα Α** | **Σχήμα Β** | **Σχήμα Γ** | **Σχήμα Δ** |
|---|---|---|---|
| Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – πολλαπλασιασμός (με 3 τρόπους) | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων - πολλαπλασιασμός | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – πολλαπλασιασμός (με 3 τρόπους) |
| Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων – Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | | Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων – Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα - πολλαπλασιασμός | |
| Πολλαπλασιασμός | | Πολλαπλασιασμός | |

*Θάνος* (Πίνακας 3)

| **Σχήμα Α** | **Σχήμα Β** | **Σχήμα Γ** | **Σχήμα Δ** |
|---|---|---|---|
| Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μοναδιαίο μέτρημα | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μοναδιαίο μέτρημα |
| Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα - πολλαπλασιασμός | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | |
| Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | | | |

*Ιορδάνης* (Πίνακας 4)

| **Σχήμα Α** | **Σχήμα Β** | **Σχήμα Γ** | **Σχήμα Δ** |
|---|---|---|---|
| Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – μοναδιαίο μέτρημα | Μοναδιαίο Μέτρημα | Πολλαπλασιασμός - πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 2 τρόπους) |
| Πολλαπλασιασμός | Πολλαπλασιασμός - πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | Πολλαπλασιασμός | Μοναδιαίο Μέτρημα |
| Μοναδιαίο Μέτρημα | Μοναδιαίο Μέτρημα | | |

*Σταύρος* (Πίνακας 5)

| **Σχήμα Α** | **Σχήμα Β** | **Σχήμα Γ** | **Σχήμα Δ** |
|---|---|---|---|
| Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – ρυθμικό μέτρημα | Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με δύο τρόπους) | Πολλαπλασιασμός - πρόσθεση/ προσπέραση κατά το μέτρημα – ρυθμικό μέτρημα | Πολλαπλασιασμός - πρόσθεση/ προσπέραση κατά το μέτρημα – μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων |
| Πολλαπλασιασμός | Μοναδιαίο Μέτρημα | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 4 τρόπους) | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 6 τρόπους) |
| Μοναδιαίο Μέτρημα | | Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων | |
| Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | | Μοναδιαίο Μέτρημα | |
| Μέτρημα με προσπέραση κύβων (με 6 τρόπους) | ʹ | | |

*Δήμος* (Πίνακας 6)

| **Σχήμα Α** | **Σχήμα Β** | **Σχήμα Γ** | **Σχήμα Δ** |
|---|---|---|---|
| Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 2 τρόπους) | Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 4 τρόπους) | Πολλαπλασιασμός - πρόσθεση/ προσπέραση κατά το μέτρημα (με 3 τρόπους) | Πολλαπλασιασμός - πρόσθεση/ προσπέραση κατά το μέτρημα (με 4 τρόπους) |
| Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα (με 3 τρόπους) | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα | Πολλαπλασιασμός | Πολλαπλασιασμός (με 5 τρόπους) |
| | | Μοναδιαίο Μέτρημα | Μοναδιαίο Μέτρημα |
| | | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων | Πολλαπλασιασμός – μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων |
| | ʹ | | Πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα – Μέτρημα με προσπέραση εντός στρώματος κύβων |

Όσον αφορά το πλήθος στρατηγικών, ο Σταύρος και ο Δήμος της Ε’ δημοτικού έδωσαν με διαφορά τις περισσότερες εναλλακτικές προτάσεις πάνω στα δοθέντα σχήματα. Σημαντικό ποσοστό τρόπων διαμέρισης των κύβων από τους μαθητές αυτούς διατυπώθηκε με βάση το κριτήριο ότι **ο συνολικός αριθμός κύβων είναι πολλαπλάσιο του πληθικού αριθμού που μετρά πόσοι κύβοι συγκροτούν την υποομάδα.** Αντίστροφα, ότι ο πληθικός αριθμός της υποομάδας πρέπει να είναι διαιρέτης του συνολικού αριθμού κύβων. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι οι έννοιες του πολλαπλάσιου και του διαιρέτη περιέχονται στη διδαχθείσα ύλη της Ε’ τάξης. Ορισμένες φορές οι μαθητές αυτοί κύκλωσαν τον παράγοντα που δήλωνε τη μονάδα σύνθεσης για να τη διακρίνουν από το πλήθος επαναλήψεων. Ωστόσο, ο

Ιορδάνης δεν αναφέρθηκε στις έννοιες αυτές, όμως εξέφρασε την ιδιότητα του διαιρέτη σε έναν συλλογισμό του.

Αξίζει να σημειωθεί η εμμονή του Σταύρου στην ανεύρεση διαφορετικών μονάδων σύνθεσης των σχημάτων με βάση τους διαιρέτες του συνολικού πλήθους κύβων κάθε φορά, εκφράζοντας ρητά ότι «τώρα που ξέρω τον συνολικό αριθμό είναι πιο δύσκολο να σκεφτώ ομάδες που δεν είναι ακριβώς, που να περισσεύει και κάτι». Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι στα σχήματα Α και Γ, κατά την απαρίθμηση των κύβων σε ομάδες, επέμενε στην ύπαρξη και στην εύρεση λάθους όντας πεπεισμένος ότι το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι σίγουρα σωστό και ότι έχει κάνει κάποιο λάθος στο μέτρημα ενδιάμεσων κύβων. Η ίδια εστίαση στη σχέση διαιρέτη-πολλαπλάσιου είναι έκδηλη στο σχήμα Β, όπου οι κύβοι είναι 27 και ο Σταύρος έδωσε με διαφορά τις λιγότερες στρατηγικές από τα υπόλοιπα τρία σχήματα.

Ο Σταύρος και ο Δήμος αρχικά πρότειναν στρατηγικές υπολογισμού του πλήθους κύβων που στηρίχθηκαν στο οπτικό ερέθισμα. Σε έναν αριθμό εναλλακτικών συλλογισμών που εξέφρασαν για τα σχήματα, τα αντιμετώπισαν πρώτα ως αριθμητικά δεδομένα και στη συνέχεια ανέτρεξαν στο σχήμα ως οπτικό δεδομένο, για να εντοπίσουν τις υποομάδες που είχαν υπολογίσει αριθμητικά. Οι μαθητές της Δ’ δημοτικού δεν εξέφρασαν κάτι ανάλογο. Οι στρατηγικές τους στηρίχθηκαν κατά κύριο λόγο στο οπτικό ερέθισμα. Κοινή διαπίστωση είναι ότι οι μαθητές της Δ’ και της Ε’ δημοτικού επεδίωκαν συνήθως να βρίσκουν μονάδες σύνθεσης κύβων, δηλαδή μοτίβα υπολογισμού, με τρόπο ώστε να ομαδοποιούν όλους τους κύβους χωρίς να αφήνουν υπόλοιπο. Το υπόλοιπο το εξέφραζαν κυρίως στα σχήματα Β και Δ, όπου και ήταν περισσότερο αναμενόμενο λόγω της διάταξης των κύβων.

Ωστόσο, η Ειρήνη στο σχήμα Δ υπολόγισε τους κύβους σε τετράδες και στη συνέχεια και σε δυάδες τετράδων και σε τετράδες τετράδων. Τις δυάδες τετράδων τις αξιοποίησε αφού προηγουμένως τις είχε εφαρμόσει για τις πίσω δύο στήλες του σχήματος, σαν υπόλοιπο («και θα πάρω και μία δυάδα, την πίσω»). Το πέρασμα από τη μία μονάδα σύνθεσης στην άλλη θα μπορούσε να υποδηλώνει την ύπαρξη πολλαπλασιαστικού υποβάθρου στον συλλογισμό της. Επιπρόσθετα, σχεδιάζοντας πάνω στο σχήμα έδειξε και μίλησε για τετράδα (τετράδων).

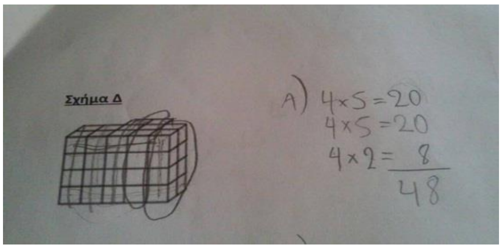
Η ίδια μαθήτρια στους προφορικούς και γραπτούς υπολογισμούς της χρησιμοποίησε αρκετά συχνά την πράξη της πρόσθεσης. Όπως φαίνεται παρακάτω σε ενδεικτικές στρατηγικές των μαθητών, στο σχήμα Β η Ειρήνη σημείωσε και πρόσθεσε τετράδες και μία τριάδα σε έναν τρόπο, ενώ κύκλωσε και έγραψε πολλαπλασιασμό οχτάδας σε έναν άλλο. Στην περίπτωση των οχτάδων η ερευνήτρια ρώτησε την Ειρήνη πόσες οχτάδες δημιούργησε. Αυτή η ερώτηση ενδεχομένως να παρέπεμψε τη μαθήτρια να γράψει τον πολλαπλασιασμό. Αυτό συμφωνεί με την πρόταση του Rivera (2009) ότι ένα μοτίβο μπορεί να ερμηνευθεί προσθετικά από μία σκοπιά και πολλαπλασιαστικά από μία άλλη. Ωστόσο, η Ειρήνη όταν εξέφρασε τον συλλογισμό της προσέθετε οχτώ κάθε φορά, δεν έκανε πολλαπλασιασμό.

Παρά την ευχέρεια με την οποία εκτελεί πολλαπλασιασμούς, νοερούς ως το 10 και κάθετους, στη συνέντευξη η Ειρήνη δεν αξιοποιεί την πράξη αυτή στη συχνότητα που θα μπορούσε. Επιπλέον, αναφέρεται ότι η Ειρήνη κατά την επεξεργασία τριών από τα τέσσερα σχήματα απαρίθμησε τους κύβους έναν προς έναν, σημειώνοντας με το μολύβι όποιον μετρούσε. Η Finesilver (2017) αναφέρει ότι το μέτρημα ένα – ένα χρησιμοποιείται από μικρούς και μεγάλους ως ένας σίγουρος τρόπος υπολογισμού, αλλά επιλέγεται και από μαθητές με δυσκολίες.

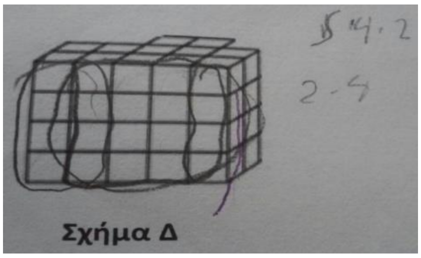
Πριν την έναρξη των συνεντεύξεων είχε διευκρινιστεί ότι δεν είναι αναγκαίο να περιέχονται όλοι οι κύβοι σε υποομάδες πάντα, ότι θα μπορούσαν π.χ. να περισσέψουν ορισμένοι που θα υπολογισθούν ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Τα δοθέντα σχήματα ευνοούσαν την ανάδειξη εναλλακτικών οπτικών, υποομάδων «ακριβώς» κατά έναν τρόπο αλλά «με υπόλοιπο» κατά έναν άλλο, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις των σχημάτων Β και Δ, όπου το πίσω μέρος δεν είναι καλυμμένο από ολοκληρωμένο στρώμα κύβων. Αξίζει να σημειωθεί πως όλοι οι μαθητές, κατά έναν τουλάχιστον τρόπο, αντιμετώπισαν τις πίσω στήλες σε αυτά τα σχήματα ως «υπόλοιπο» που πρόσθεσαν στο τέλος των υπολογισμών τους.

Σε συνέχεια εντοπισμού κοινών συλλογισμών των συμμετεχόντων της έρευνας, όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν ίδιες μεταξύ τους επιφάνειες από κύβους εντός των σχημάτων Β και Δ. Τις αξιοποίησαν ως εργαλείο απαρίθμησης, είτε με διαδοχικές προσθέσεις ίσου πλήθους κύβων (Ειρήνη, Ιορδάνης, Δήμος) είτε πολλαπλασιάζοντας το πλήθος κύβων μίας επιφάνειας επί το πλήθος ίδιων επιφανειών (Νώντας, Σταύρος). Εξαίρεση αποτελεί ο Θάνος, που εξέφρασε πολλαπλασιαστική στρατηγική στο σχήμα Β, ενώ δεν τη διατύπωσε για το σχήμα Δ.

**Δήμος** **Σταύρος**




*Εικόνα 11*




*Εικόνα 12*

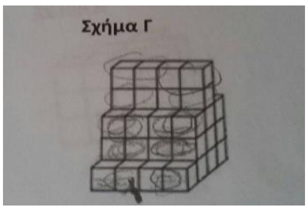
Για να απαριθμήσουν κύβους οι μαθητές χώρισαν τα σχήματα σε στρώματα, οριζόντια και κατακόρυφα, σε στήλες και σε γραμμές και σε άλλες υποομάδες που προέκυψαν οπτικά και δεν εντάσσονται στις προηγούμενες. Τα νοητικά αυτά μοντέλα των μαθητών για τις διατάξεις κύβων έρχονται σε συμφωνία με ευρήματα των Batista κ. ά. (1995), σε έρευνα με μαθητές 3ης έως και 5ης τάξης.

Όλοι οι μαθητές αξιοποίησαν κάποια στιγμή το μοναδιαίο μέτρημα δείχνοντας με το μολύβι έναν-έναν κύβο, είτε το λεκτικοποίησαν είτε το έκαναν στο μυαλό τους. Η Ειρήνη εξέφρασε αυτόν τον τρόπο προφορικά και γραπτά από τις πρώτες της στρατηγικές στα σχήματα, ενώ ο Ιορδάνης στο σχήμα Β. Ο Νώντας, ο Σταύρος και ο Δημήτρης διαχειρίστηκαν τον υπολογισμό επιφανειών περισσότερο πολλαπλασιαστικά (γραμμή επί στήλη), ενώ ο Θάνος, και στους μοναδιαίους κύβους και σε ομάδες κύβων υπολόγιζε κυρίως με μοναδιαίο τρόπο, αναζητώντας πάνω στο σχήμα την οπτικοποίηση αυτών που υπολογίζει βήμα – βήμα (είτε φαίνονταν είτε όχι).

Ενδεικτικά θα παρουσιαστούν ορισμένες από τις στρατηγικές, ομαδοποιημένες για τα σχήματα Α και Γ μαζί και για τα σχήματα Β και Δ μαζί, με κριτήριο ότι τα σχήματα κάθε ζευγαριού συσχετίζονται οπτικά. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι μόνο ο Νώντας (Δ’) και ο Ιορδάνης (Ε’) δήλωσαν ρητά την ομοιότητα των σχημάτων.

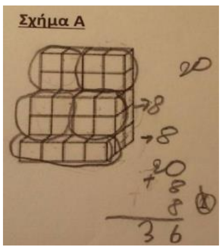
Σχήματα Α και Γ

**Σταύρος**: *Σχηματισμός δυάδων με προσπέραση κατά το μέτρημα*



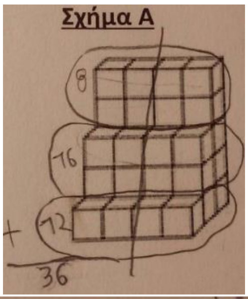

*Εικόνα 13*

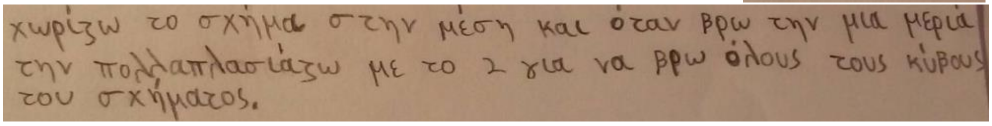
**Ειρήνη**: *Σχηματισμός τετράδων με προσπέραση κατά το μέτρημα*




*Εικόνα 14*

**Νώντας**: *Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση/προσπέραση κατά το μέτρημα*

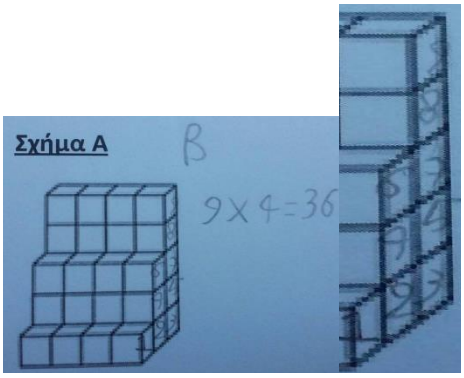


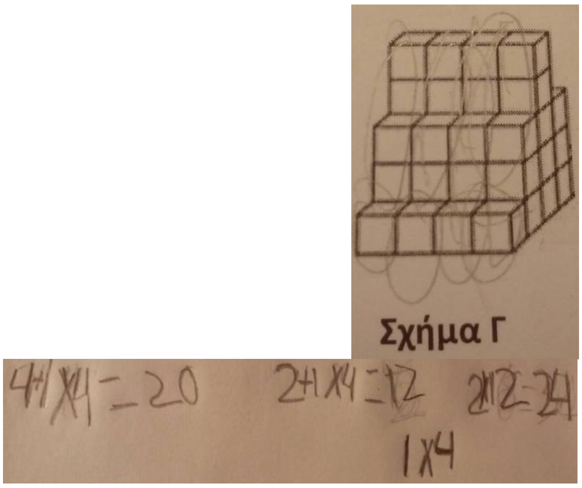

Εικόνα 15

**Ιορδάνης**: *Πολλαπλασιασμός*

**Θάνος**: *Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση/προσπέραση κατά το μέτρημα*




Εικόνα 16

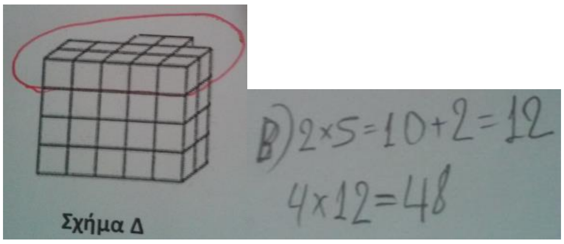



Εικόνα 17

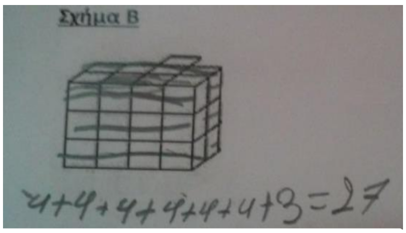
Σχήματα Β και Δ

**Δήμος:** *Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση μέτρημα*

**Ειρήνη:** *Πρόσθεση/προσπέραση κατά το*




Εικόνα 18

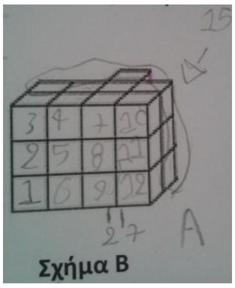



Εικόνα 19

**Ειρήνη:** *Πολλαπλασιασμός*

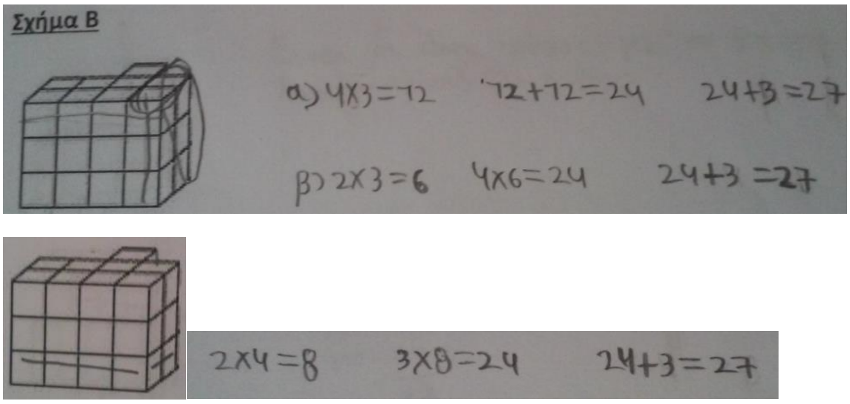

Εικόνα 20

**Ιορδάνης:** *Μοναδιαίο μέτρημα – πρόσθεση/προσπέραση κατά το μέτρημα*




Εικόνα 21

**Νώντας:** *Πολλαπλασιασμός – πρόσθεση/προσπέραση κατά το μέτρημα*




Εικόνα 22

<u>*Στρατηγική με κριτήριο τον διαιρέτη*</u>

Ως ένα κρίσιμο συμβάν παρουσιάζεται μία εκ των στρατηγικών του Δήμου, η οποία στηρίχθηκε στην έννοια του διαιρέτη. Ο μαθητής είχε υπολογίσει το σύνολο των κύβων για το σχήμα Γ με άλλους τρόπους προηγουμένως.

…

*Δ: (αφού μελετά το σχήμα δείχνοντας στρώματα οριζόντια και κατακόρυφα με το μολύβι) Μπορούμε να το διαιρέσουμε, … να το χωρίσουμε διά τρία.*

*Ε: Τι λες (τον κοιτά διερευνητικά);*

*Δ: Να δοκιμάσουμε με τριάδες;*

*Ε: Γιατί είπες την τριάδα;*

*Δ: Γιατί… 48 διά 3 βγαίνει.*

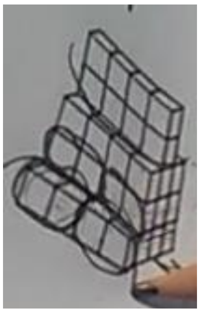
*Ε: Μμμ.*

*Δ: Βγαίνει…*

*Ε: Μμμ*

*Δ: Πώς όμως (δείχνει διερευνώντας στο σχήμα με το μολύβι). Ίσως, τώρα που το σκέφτ… θα μπορούσαμε… να… πάρουμε για λίγο αυτές, να πάρουμε κι αυτή που προεξέχει*

Εικόνα 23



Εικόνα 24

*να πάρουμε τις δύο πάνω που εξέχουν και τη μία κάτω που εξέχουν (δηλ. οι κύβοι) και να κρατήσουμε το ομοιόμορφο κομμάτι τελοσπάντων*

*Ε: Μμμ*

*Δ: Να το… να βρούμε πόσα είναι, και μετά να προσθέσουμε αυτά (δείχνει αυτά που εξαίρεσε πιο πάνω).*

*Ε: Πολύ ωραία. Αυτό με κάποια στρατηγική, μόνα τους; Ένα-ένα;*

*Δ: Ε το βρίσκουμε, ναι... Το βρίσκουμε (δείχνει στρώματα κύβων).*

*Ε: Στρώματα;*

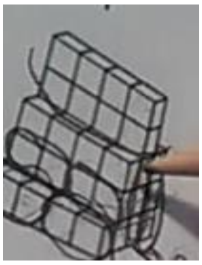
*Δ: Ναι. Ή από δω ή από κει (δείχνει οριζόντια ή κατακόρυφα).*

*Ε: Αυτό που είπες με τριάδες; Παίζει;*

*Δ: Εε, για τριάδες…*

*Ε: Θέλω να πω γενικά στο σχήμα αυτό παίζουν οι τριάδες;*

*Δ: Θα μπορούσαμε να, πάμε εδώ, εδώ και εδώ (διαδοχικά κυκλώνει τις τρεις ίδιες στήλες τριάδων από το πλάι) και μετά, να πάρουμε…*



Εικόνα 25

*Δ: (συνέχεια) Τρία εδώ και να προσθέσουμε το άλλο εδώ; (Από την κάτω τετράδα που εξαίρεσε ομαδοποιεί τους τρεις κύβους και τον τελευταίο προτείνει να τον ομαδοποιήσει με αυτούς που εξαίρεσε στο πάνω μέρος).*

*Ε: Μμμ… γίνεται;*

*Δ: Οπότε, μία τριάδα εδώ (δείχνει ξεκινώντας οριζόντια από πάνω), δεύτερη τριάδα εδώ και τρίτη εδώ.*


*Εικόνα 26*


*Εικόνα 27*

*Ε: Μμμ (γνέφει καταφατικά)*

*Δ: Μαζί μ' αυτή. Τα 'χουμε μπαχαλέψει λίγο.*

*Ε: Δεν πειράζει, είναι ξεκάθαρο… και; (τον παροτρύνει να ολοκληρώσει το συλλογισμό)*

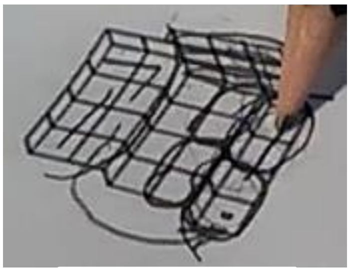
*Δ: Είναι ξεκάθαρο;*

*Ε: Ναι. Είναι ξεκάθαρο το τι κάνεις. Και;*

*Δ: Και…*

*Ε: Τελειώσαμε με τις τριάδες;*

*Δ: Εε… ε, υπάρχει κι αυτή η τριάδα..*



*Εικόνα 28*

Πέρα από την έκφραση ποικίλων ομαδοποιήσεων με βάση τους διαιρέτες, ο Δήμος αξιοποίησε τα οπτικά ερεθίσματα περισσότερο από τον Σταύρο. Στο ίδιο Σχήμα (το Γ) πρότεινε τη νοερή μετακίνηση της μπροστινής κάτω τετράδας στην κορυφή του επόμενου κατακόρυφου στρώματος από αυτήν, και τη μετακίνηση της πάνω τετράδας του μεθεπόμενου (του πιο ψηλού) κατακόρυφου στρώματος στην κορυφή του αμέσως επόμενου. Οι νοεροί χειρισμοί του σχήματος είχαν σκοπό να γίνει ομοιόμορφο, όπως το χαρακτήρισε ο Δήμος, (δηλαδή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) και να μπορέσει να απαριθμήσει τους κύβους πιο εύκολα, κάτι που πρότεινε και στο Σχήμα Δ. Αξίζει να παρουσιαστεί αυτή η οπτική, την οποία ήταν ο μόνος που εκδήλωσε.

Μεταβαίνοντας στους τύπους σφαλμάτων, ακολούθως ομαδοποιούνται λάθη που έκαναν οι μαθητές κατά την απαρίθμηση κύβων στο χαρτί, με βάση την κατηγοριοποίηση λαθών που πρότεινε η Finesilver (2017). Ακολουθεί ανάλυση λαθών και παράθεση ενδεικτικών περιπτώσεων.

**<u>ΛΑΘΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Δ’ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ</u>** (Πίνακας 7)

| |
|---|
| <u>*Ειρήνη*</u><br><br>1. Αριθμητικού υπολογισμού / ανάκτησης (Σχήμα Α, Σχήμα Γ)<br>2. Χωρικής κατασκευής (Σχήμα Α, Σχήμα Γ) |
| <u>*Νώντας*</u><br><br>1. Αριθμητικού υπολογισμού / ανάκτησης (Σχήμα Α, Σχήμα Δ)<br>2. Χωρικής κατασκευής (Σχήμα Β, Σχήμα Δ) |
| <u>*Θάνος*</u><br><br>1. Χωρικής κατασκευής (Σχήμα Α, Σχήμα Β, Σχήμα Δ)<br>2. Οπτικοχωρικό – κιναισθητικό (Σχήμα Β)<br>3. Αριθμητικού υπολογισμού / ανάκτησης (Σχήμα Β, Σχήμα Γ) |

**<u>ΛΑΘΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Ε’ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ</u>** (Πίνακας 8)

| |
|---|
| <u>*Ιορδάνης*</u><br><br>1. Χωρικής κατασκευής (Σχήμα Δ) |
| <u>*Σταύρος*</u><br><br>1. Χωρικής κατασκευής (Σχήμα Α)<br>2. Αριθμητικού υπολογισμού / ανάκτησης (Σχήμα Α, Σχήμα Β, Σχήμα Γ) |
| <u>*Δήμος*</u><br><br>1. Χωρικής κατασκευής (Σχήμα Α)<br>2. Αριθμητικού υπολογισμού / ανάκτησης (Σχήμα Γ) |

Όλοι οι μαθητές υπέπεσαν τουλάχιστον μία φορά σε λάθος χωρικής κατασκευής και σχεδόν όλοι και σε αριθμητικό λάθος, είτε απέρρεε από την ανάκτηση της προπαίδειας είτε κατά την πρόσθεση. Επιπρόσθετα, επισημαίνεται το λάθος του Δήμου στη χρήση του συμβόλου «=» στην Εικόνα 18. Ο μαθητής εκτέλεσε σειριακά πράξεις συνδέοντάς τες με το ίσον, όπως φάνηκε πως συνέβαινε στον συλλογισμό του ως συνεχής διαδικασία. Το ίσον εδώ φαίνεται πως χρησιμοποιείται σαν εργαλείο που δηλώνει ότι θα ανακοινωθεί ένα αποτέλεσμα, το οποίο θα προκύψει από το πρώτο μέλος της ισότητας. Είναι ένα φαινόμενο σύνηθες για τους μαθητές (Blanton, Otálora, Brizuela, Murphy Gardiner, Sawrey, Gibbins και Kim, 2018; Alibali, Knuth, Hattikudur, Mc Neil και Stephens, 2007). Αυτό υποδεικνύει λανθασμένη ερμηνεία του συμβόλου από τον Δήμο, καθώς εξισώνει δύο άνισα μέλη, πράγμα το οποίο εφαρμόζει και σε άλλο τρόπο υπολογισμού του πλήθους κύβων στο ίδιο σχήμα. Η ερευνήτρια δεν παρενέβη στο σημείο αυτό, για να μη διακόψει τη ροή συλλογισμού του μαθητή. Ωστόσο, το φαινόμενο επανήλθε στη δεύτερη δραστηριότητα, όπου και κρίθηκε απαραίτητη η παρέμβαση της ερευνήτριας.

Τέλος, αναφέρεται η λανθασμένη έκφραση «Προσθέτω 1+1» του Σταύρου, την οποία επισήμανε η ερευνήτρια ρωτώντας τον «Ένα κι ένα, αυτά τα δύο μόνα τους;». Ο μαθητής δεν ήξερε πώς να το γράψει και η ερευνήτρια τον βοήθησε υποδεικνύοντας να βάλει παύλα ανάμεσα στα 1. Επιπρόσθετα, είπε «πολλαπλάσιο» ενώ εννοούσε «διαιρέτη» στη συνέντευξη, σε αντίθεση με την ορθή του διατύπωση ότι «Το 18 δε διαιρείται με το 4». Ο μαθητής χρησιμοποιούσε ορθά τα μαθηματικά εργαλεία στις προκείμενες περιπτώσεις, αλλά εκδήλωσε σύγχυση στη χρήση της μαθηματικής ορολογίας.

*Διόρθωση λάθους χωρικής κατασκευής με λεπτομερή αποκωδικοποίηση του σχήματος*

Επιλέχθηκε η περίπτωση σφάλματος του Θάνου. Ο Θάνος επέδειξε εναλλακτικό τρόπο διαχείρισης της μπροστινής όψης των σχημάτων για να απαριθμήσει τους κύβους, όμως παρουσίασε ιδιαίτερη δυσκολία στο να παρατηρήσει το πίσω μέρος και να συγκρατήσει στο νου τους κύβους που δε φαίνονται για να τους υπολογίσει. Ο μαθητής υπέπεσε σε σφάλμα χωρικής κατασκευής, όπως αυτό κατηγοριοποιείται από τη Finesilver (2017), διπλομετρώντας έδρες κύβων και μη υπολογίζοντας άλλους. Αναφερόμαστε σε απόσπασμα από την περίπτωση του σχήματος Α, όπου χώρισε το μπροστινό μέρος σε κατακόρυφες δυάδες, βασιζόμενος στο οπτικό ερέθισμα.

…

*Ε: Έχεις φτιάξει ομάδα από δυάδες;*

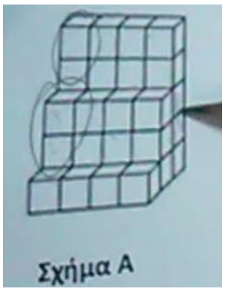
*Θάνος: (γνέφει καταφατικά)*

*Ε: Και πόσες τέτοιες έχεις;*

*Θάνος: (μετρά την πρόσοψη) Μία δύο τρεις τέσσερις πέντε έξι εφτά οχτώ.*

*Ε: Μμ. Υπάρχουν άλλες, στο σχήμα;*

*Θάνος: Πίσω… εεε… στο μπροστινό όχι. Πίσω… υπάρχει, αυτό (σημειώνει με το μολύβι, αρχικά την κατακόρυφη δυάδα που περιέχει κύβο κι από το τελευταίο κάτω στρώμα αλλά στη συνέχεια σημειώνει πιο έντονα την ακριβώς από πάνω δυάδα)… αυτό και, άλλα τρία δυάρια (δείχνει με το μολύβι πάνω στο σχήμα, δίπλα από τη δυάδα που φαίνεται στο πλάι).*




*Εικόνα 29*

*Ε: Μμ… συνολικά πόσα δυάρια δηλαδή; Όλα μαζί αυτά τα διπλά;*

*Θάνος: Εε… (παύση 7 δευτερόλεπτα) Δώδεκα.*

*Ε: Σίγουρος;*

*Θάνος: Ναι.*

*Ε: Δώδεκα διπλά.*

*Θάνος: Ναι.*

*Ε: Ωραία. Εε… έχουμε τελειώσει μετά; Έχουμε βρει όλους τους κύβους;*

*Θάνος: Εε ναι… (κοιτά το σχήμα). Ωπ, όχι. Είναι κι αυτές εδώ (δείχνει το κάτω κάτω στρώμα κύβων).*

*Ε: Μμμ, κάτω κάτω ε; Και πόσοι είναι, Θάνο;*

*Θάνος: (μετρά ένα-ένα δείχνοντας πάνω στο σχήμα, διπλομετρά τον μπροστά και πλαϊνό κύβο δείχνοντας τις έδρες του αναλόγως, λέει «επτά» πολύ χαμηλόφωνα)*

*Ε: Μπορείς να μου δείξεις ένα κύβο;*

*Θάνος: 'Όχι είναι… έξι (δείχνει έναν - έναν και μετρά τους εμφανείς). Ένας δύο τρεις τέσσερις πέντε έξι.*

*Ε: Μμ… τους έχουμε καλύψει όλους;*

*Θάνος: Μμ ναι (ξανακοιτά το σχήμα)… είναι και πίσω;*

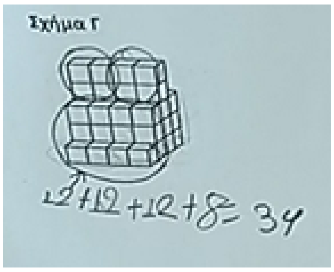
*Ε: Υπάρχουν κι άλλοι που δεν τους βλέπουμε;*

*Θάνος: Εε… (ακουμπά το μολύβι πάνω στον δεύτερο και στον τρίτο πλαϊνό κύβο, εκτείνοντας το μολύβι επί των οριζόντιων σειρών τους) έξι.*

*Ε: Μμ… μάλιστα. Κι αυτοί οι έξι πώς είναι μοιρασμένοι; Πού είναι βαλμένοι, να το πω έτσι; Πού είναι βαλμένοι πάνω στο σχήμα; Αν μπορούσα να τους δω, πού βρίσκονται αυτοί; Έτσι, στο περίπου.*
*Θάνος: Από πίσω απ’ αυτά εδώ (δείχνει πίσω από την μπροστινή σειρά του κάτω κάτω στρώματος.*
*Ε: Αα, μάλιστα.*

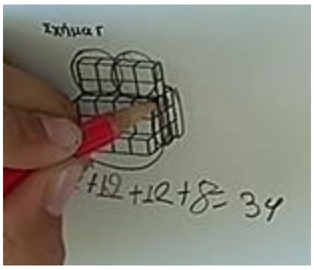
*Αλλαγή στρατηγικής – αναστοχασμός και παραίτηση*

Αυτό το κρίσιμο συμβάν αφορά λάθη της Ειρήνης στην επεξεργασία του σχήματος Γ. Η Ειρήνη κατά τον συλλογισμό της σε μία στρατηγική έκανε δύο διαφορετικά λάθη: χωρικής κατασκευής και αριθμητικού υπολογισμού. Αρχικά υπολόγισε κύβους σαν κατακόρυφα στρώματα, απομονώνοντας τις δύο τετράδες κύβων που προεξέχουν.




*Εικόνα 30*

Σε αυτό το σημείο είχε σφάλει και χωρικά και αριθμητικά. Είπε ότι νομίζει πως πρέπει να υπολογίσει άλλη μία «γραμμούλα», σημειώνοντας παράλληλα στο χαρτί.




*Εικόνα 31*

Στην πραγματικότητα «γραμμούλα» η Ειρήνη εννοούσε το δεύτερο κατακόρυφο στρώμα τριών τετράδων κατά σειρά. Δεν έγινε διόρθωση από την ερευνήτρια σε αυτό το σημείο, θεωρήθηκε ότι αυτό θα βοηθούσε τη μαθήτρια να μείνει εστιασμένη τη δεδομένη στιγμή. Στη συνέχεια η Ειρήνη άλλαξε γνώμη και έσβησε τη σημείωσή της, παρατηρώντας το σχήμα εκ νέου στην πρόσοψη.

…

*Ει: Αυτό (δείχνει την κάτω μπροστινή τετράδα)*


Εικόνα 32

*Ε: Ναι…*

*Ει: Πρέπει να μπει άλλη μία φορά, νομίζω.*

*Ε: Η τετράδα αυτή;*

*Ει: Πρέπει (κάτι πήγε να πει)… ναι.*

*Ε: Γιατί πιστεύεις;*

*Ει: Επειδή, είναι μία δύο τρεις τέσσερις (δείχνει από το πλάι με το μολύβι τους κύβους του πατώματος στο σχήμα για να αιτιολογήσει τις τετράδες) πρέπει να είναι τέσσερις φορές (δείχνει την μπροστινή κάτω τετράδα και μετά ξανά μία-μία) είναι μία, δύο, τρεις τέσσερις.*

*Ε: Τέσσερις τετράδες δηλαδή κάτω, στο κάτω, πάτωμα ας πούμε. Αν πάει έτσι βέβαια αλλάζει ο τρόπος που τα μετράς, ε; Θα αλλάξει αν μετράς το πάτωμα πρώτα, ξεχωριστά γιατί πριν κύκλωσες κάτι άλλο. Είναι σα να μου λες άλλο τρόπο, ε; (Η Ει σκέφτεται) Σ' αυτή την περίπτωση αν το έκανες έτσι, όπως λες τώρα… καν' το όπως το λες τώρα… με το πάτωμα το κάτω χωριστά.*

…

Η μαθήτρια βρισκόταν κοντά στον εντοπισμό του λάθους της, όμως δεν ήταν σίγουρη για αυτό. Καθώς η εξήγησή της υπεδείκνυε διαφορετικό τρόπο χωρίσματος του σχήματος από αυτόν που αξιοποίησε προηγουμένως (οριζόντιο, αντί για κατακόρυφο) η ερευνήτρια την παρότρυνε να σχεδιάσει σε νέο σχήμα με βάση αυτόν το νέο της συλλογισμό ώστε να συγκεντρωθεί σε αυτόν, για να οδηγηθεί σε κάποιο συμπέρασμα. Η Ειρήνη σχεδίασε σε νέο σχήμα, με νέα στρατηγική κατά την οποία υπολόγισε κύβους συνδυάζοντας οριζόντια και κατακόρυφα στρώματα. Διαπίστωσε ότι σε δύο από τις έως τότε στρατηγικές της είχε βρει κοινό αποτέλεσμα, ενώ σε μία βρήκε διαφορετικό. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη στρατηγική της, ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

…

*Ε: Σ’ αυτό το ένα (δηλ. τη μία στρατηγική που διαφωνεί το αποτέλεσμα) υπάρχει κάτι που θα μπορούσες να δεις που… καταλαβαίνεις πού μπορεί να σφάλει;*

*Ει: Μμμ… δεν ξέρω. (δείχνει σα να μην ακολουθεί η σκέψη της την ερώτηση)*

*Ε: Για κάνε μια προσπάθεια.*

*Ει: (παύση 7 δευτερόλεπτα) Νομίζω δεν έχω υπολογίσει το τελευταίο στρώμα (δείχνει το πίσω κατακόρυφο, στη συνέχεια μετρά από μέσα της έναν-έναν τους μπροστινούς κύβους ακουμπώντας τους με το μολύβι διαδοχικά. Μετρώντας το κάτω μπροστινό, παραβλέπει το ακριβώς από πίσω του.)*

*Ε: Δηλαδή;*

*Ει: Δηλαδή είναι συν δώδεκα (το γράφει). Άρα… αλλά μας βγαίνει, σαράντα έξι.*

Εικόνα 33

*Ε: Μμ*

*Ει: Θέλουμε άλλα δύο.*

*Ε: Που κάπου τα… φάγαμε ε; (της χαμογελάει). Εε, οκ. Πού μπορεί να είναι αυτά τα δύο;*

*Ει: Μμ*

*Ε: Ε;*

*Ει: Δεν ξέρω.*

*Ε: Θες να ξαναδείς τη στρατηγική σου; Μήπως το βρεις*

*Ει: Ναι (ελέγχει το σχήμα δείχνοντας με το μολύβι). Δεν ξέρω πού μπορεί.*

*Ε:Είδες από πού τα πήρες δηλαδή; Τα δώδεκα και δώδεκα και δώδεκα και τα λοιπά;*

*Ει: Ναι.*

*Ε: Μπορείς να μου τα δείξεις;*

*Ει: Τα πήρα, μία φορά εδώ το δώδεκα (κυκλώνει ξανά το μπροστινό κατακόρυφο στρώμα και επιπλέον τη μπροστινή τετράδα)*

*Ε: Από πού;*

*Ει: Τη μπροστινή.*

*Ε: Όλα; Και το κάτω στρώ, και το κάτω, το μπροστινό;*

*Ει: Και αυτό ναι.*

*Ε: Και αυτό μαζί, όλα μαζί δώδεκα.*

*Ει: Και το από πίσω, που είναι άλλο ένα ίδιο στρώμα κι άλλα δώδεκα.*

*Ε: Μμ.*

*Ει: Κι άλλο ένα, κι άλλο ένα δώδεκα.*

*Ε: Τρία δωδεκάρια.*

*Ει: Μμ.*

*Ε: Και μετά;*

*Ει: Και μετά πήρα οχτώ που ήταν αυτά τα πάνω*

*Ε: Μμ. Και πόσο βγαίνει αυτό;*

*Ει: Τριάντα τέσσερα. Νομίζω είχα ξεχάσει το τελευτ… όχι δεν το ‘χα ξεχάσει (μουντζουρώνει τη δωδεκάδα που είχε γράψει επιπλέον και το σαράντα έξι)*

*Ε: Βέβαια τα κάνουμε με προσοχή αυτά που λέμε ε;*

*Ει: (Γνέφει καταφατικά)*

*Ε: Είμαστε σίγουροι;*

*Ει: Δεν μπορώ να το βρω.*

*Ε: Στην πρόσθεση έστω που έκανες, μμ; (η Ε κοιτάζει το χαρτί και δείχνει να αποσύρεται). Είναι τριάντα τέσσερα.*

*Ει: Ω, το αποτέ, το, είναι τριάντα τέσ, (το δείχνει στο χαρτί), α σ' αυτήν (δείχνει τους προσθετέους);*

*Ε: Ναι, λέω είναι…*

*Ει: Α… είναι… δεν είναι τριάντα τέσσερα.*

*Ε: Γιατί;*

*Ει: Είναι, δώδεκα και δώδεκα, είκοσι τέσσερα (δείχνει με κυκλική κίνηση του μολυβιού γύρω από τα δύο δωδεκάρια), και δώδεκα, τριάντα έξι. Τριάντα, α, τριάντα έξι και οκτώ (τονίζει το «οκτώ», διορθώνει το αποτέλεσμα). Σαράντα…*

*Ε: Μμ*

*Ει: Τέσ (πολύ χαμηλόφωνα)*

*Ε: Πλησιάζει πιο κοντά στο στόχο ε; Το σαράντα οχτώ. Αλλά δεν τον έχουμε φτάσει ακόμα.*

…

Η Ειρήνη δεν εντόπισε πού έγινε λάθος και δε βρήκε το σωστό αποτέλεσμα. Εκδήλωσε μία διάθεση απομάκρυνσης της προσοχής της από το έργο σε ορισμένα σημεία, ιδίως σε καταστάσεις όπου διαπίστωνε ή πίστευε ότι βρίσκεται σε αδιέξοδο. Για τον λόγο αυτό η ερευνήτρια επεδίωκε να την εμψυχώνει και να την παροτρύνει για την εξήγηση των συλλογισμών της, ιδίως για τον αναστοχασμό πάνω σε λάθη. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η Ειρήνη έκανε λάθη στα σχήματα Α και Γ, και όχι στα Β και Δ. Αυτό πιθανόν δείχνει ότι τα Β και Δ είχαν για εκείνη πιο ξεκάθαρη δομή.

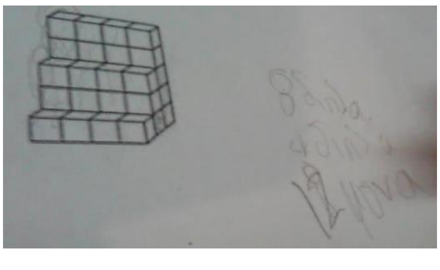
Άξια αναφοράς είναι η ανάδειξη σχέσεων ισοδυναμίας μεταξύ διαφορετικών μονάδων από κύβους, από τον Θάνο και τον Δήμο. Οι δύο μαθητές εξέφρασαν σχέσεις ισοδυναμίας με διαφορετικό τρόπο: ο Θάνος την εισήγαγε με βάση το οπτικό ερέθισμα με δική του πρωτοβουλία και συνέχισε με υποστηρικτικές ερωτήσεις από την ερευνήτρια, ενώ ο Δήμος τις εξέφρασε με ευχέρεια μέσα από την επεξήγηση των συλλογισμών του και με την ιδιότητα του πολλαπλάσιου.

Ο Θάνος κατά τη διεξαγωγή της έρευνας εκφραζόταν με αργούς ρυθμούς, ορισμένες φορές και με αβεβαιότητα. Για το λόγο αυτό η ερευνήτρια τον παρακινούσε να ανταποκριθεί σε ερωτήσεις προκειμένου να γίνονται ξεκάθαροι οι συλλογισμοί του και να τους διατυπώνει ολοκληρωμένα (χαρακτηριστική ερώτηση που του γινόταν τακτικά: «υπάρχουν κι άλλοι κύβοι που δεν του βλέπουμε;»). Μάλιστα, σε στρατηγική του στο Σχήμα Α κύκλωσε δύο δυάδες κύβων και διατύπωσε τον πολλαπλασιασμό 2 x 2, δείχνοντας τις δύο αυτές δυάδες. Η ερευνήτρια του εξήγησε ότι ένας από τους δύο αριθμούς του πολλαπλασιασμού πρέπει να δείχνει την ομάδα από πράγματα και ο άλλος πόσες φορές «παίρνουμε» αυτή την ομάδα. Το ανωτέρω γεγονός περιγράφεται ως απόσπασμα που μπορεί να υποδηλώνει παρανοήσεις ως προς τη διττή φύση του πολλαπλασιασμού και εγγενείς δυσκολίες στην οπτική του αναπαράσταση. Από την άλλη πλευρά, ο μαθητής εκτέλεσε σωστά αριθμητικά πολλούς νοερούς πολλαπλασιασμούς.

*<u>Αλλαγή και διατήρηση στρατηγικής – σχέση ισοδυναμίας</u>*

Ο Θάνος στο Σχήμα Α ομαδοποίησε τους κύβους οπτικά σε διπλά και μονά κυβάκια. Πήγε να υπολογίσει το σύνολο με λανθασμένο τρόπο, αθροίζοντας όλες τις ομάδες ενώ δεν ήταν ισοδύναμες. Το λάθος αυτό δεν εντάσσεται σε κάποια από τις κατηγορίες της Finesilver (2017) και παρουσιάζεται ανεξάρτητα, μέσα από το παρακάτω απόσπασμα.

…



*Εικόνα 34*

*Ε: Όλο αυτό το πακέτο πόσα βγαίνουνε;*

*Θ: Εε, είκοσι τέσσερα.*

*Ε: Είκοσι τέσσερα τι, μονά ή διπλά;*

*Θ: Και τα δύο. Μαζί.*

*Ε: (Χαμογελάει) Ε όχι, εμένα με νοιάζει, να με, να ξέρω. Πρέπει να 'ναι απ' το ένα είδος. Δεν μπορείς να πεις, άμα σου πούνε, οχτώ πατάτες και τέσσερις ντομάτες να πεις δώδεκα πατατοντομάτες. Πρέπει να είναι ξεκάθαρο, ποιος είναι τι.*

*Θ: Οχτώ, τέσσερα (υπολογίζει ξανά τα διπλά, ξαναγράφει το οχτώ) και έξι… τα δώδεκα μονά να τα κάνουμε έξι διπλά;*

*Ε: Γίνεται αυτό;*

*Θ: Νομίζω ναι.*

*Ε: Για δείξε μου.*

*…*

Ο Θάνος προτείνει να προστεθεί τετράδα πάνω από την κάτω μπροστινή τετράδα, και δεν ολοκληρώνει κάποιο συλλογισμό πάνω σε αυτό. Επίσης, είχε διατυπώσει προτάσεις ανεξάρτητες από το ζητούμενο στο σχήμα Β (π.χ. πρότεινε κατασκευή λεκτικού προβλήματος με ευρώ που δε σχετιζόταν με το σχήμα με κάποιο τρόπο). Με γνώμονα τα γεγονότα αυτά η ερευνήτρια τον παρότρυνε να επαναφέρει τη σκέψη του στη διάταξη του σχήματος όπως είναι στο φύλλο εργασίας, προκειμένου να το επεξεργαστεί και να αιτιολογήσει την εξίσωση των δώδεκα μονών με τα έξι διπλά. Για λόγους συντομίας θεωρήθηκε ότι ένα απόσπασμα μπορεί να παραληφθεί από την παρουσίαση.

…

*Ε: Μπορείς στο σχήμα εδώ όπως το βλέπεις να βάλεις έξτρα κουτάκια δικά σου;*

*Θ: Όχι.*

*Ε: Όχι. Άρα με αυτά που έχεις θα πρέπει να, να φτιάξεις αυτά τα διπλά που λες. Τα μονά λες θα τα κάνω διπλά. Για φτιάξε μου λοιπόν… πόσα μονά πρέπει να βρεις να φτιάξουν ένα διπλό;*

*Θ: (παύση πέντε δευτερολέπτων)*

*Ε: Πόσα μονά θα φτιάξουν ένα διπλό;*

*Θ: Έξι.*

*Ε: Δείξε μου ένα μονό.*

*Θ: (δείχνει με το μολύβι στο χαρτί το κάτω αριστερά κουτάκι)Α, αυτό εδώ.*

*Ε: Μμ, δείξε μου ένα διπλό.*

*Θ: (Δείχνει πάνω αριστερά ένα κατακόρυφο) Ε, αυτό εδώ.*

*Ε: Ωραία, άρα, πόσα τέτοια θες (δείχνει μονό) για να φτιάξεις ένα τέτοιο (δείχνει διπλό);*

*Θ: Εεε, δύο.*

*Ε: Ωραία. Για φτιάξε λοιπόν ένα διπλό.*

*Θ: (κυκλώνει κάτω αριστερά οριζόντιο)*

*Ε: Ωραία. Είδες που, ξαφνικά έγινε το μονό διπλό; Άλλο διπλό;*

*Θ: (κυκλώνει το διπλανό)*

*Ε: Μπράβο.*

*Θ: Εε, αυτό αυτό, εε κι από πίσω αυτό κι αυτό (δείχνει διαδοχικά τα από πίσω αντίστοιχα διπλά στο μεσαίο και στο πίσω κάτω στρώμα).*

*Ε: Ωραία, πόσα βγήκανε;*

*Θ: Εε (μετρά δείχνοντας με το μολύβι πάνω στο σχήμα και στο πλάι του) έξι.*

…

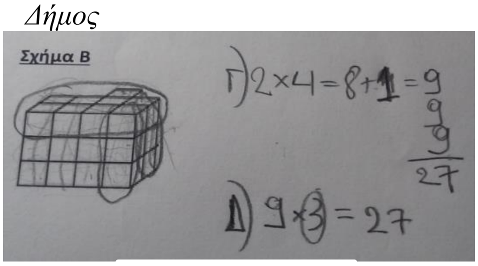
Ο Θάνος μπορούσε να δείξει στο σχήμα τις μονάδες σύνθεσης (μονά, διπλά), αλλά έκανε λάθος στον υπολογισμό γιατί αυτός περιείχε διαφορετικές μονάδες σύνθεσης. Μέσα από ερωτήσεις της ερευνήτριας, ο Θάνος οδηγήθηκε στην εύρεση σχέσης ισοδυναμίας των μονάδων όχι μόνο αριθμητικά αλλά και οπτικά, κι έτσι τροποποίησε τη στρατηγική του. Μετέτρεψε τα δώδεκα μονά κυβάκια σε έξι διπλά και οδηγήθηκε στο σωστό αποτέλεσμα.

Από την άλλη πλευρά, ο Δήμος εξήγησε με ευχέρεια τις σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των δωδεκάδων και των εξάδων, όπως και μεταξύ των τετράδων και των δυάδων *(«αν χωρίζαμε τις τετράδες στη μέση (δείχνει στο σχήμα), οπότε θα έβγαιναν διπλάσιες δυάδες»)* στο σχήμα Δ. Σημειώνεται ότι οι μαθητές ρωτιούνταν να δείξουν τις ομάδες που πρότειναν κάθε φορά πάνω στο φύλλο εργασίας.

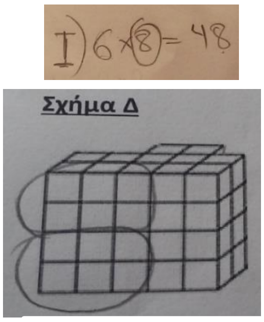
Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις λέξεις «στρώμα» (Δήμος, Σταύρος, Νώντας), «γραμμή» (Νώντας, Ειρήνη), «σειρά» (Δήμος, Σταύρος, Νώντας), «στήλη» (όλοι οι μαθητές), «πάτωμα», «τοίχος» (Ειρήνη), «επιφάνεια» (Δήμος) για να εκφράσουν επιφάνειες από κύβους. Η ερευνήτρια παρενέβη μόνο στη διάκριση της γραμμής ή της σειράς από τη στήλη και του οριζόντιου από το κάθετο, για να είναι ξεκάθαρη, ορθή και κοινή η χρήση τους από εκείνη και τον εκάστοτε μαθητή. Ο Θάνος ήταν ο μόνος που δεν ανέφερε καθόλου την έννοια της στήλης, παρόλο που με τις κατακόρυφες κινήσεις του μολυβιού πάνω στα σχήματα υποδήλωνε ότι την αξιοποιεί στους συλλογισμούς του. Ενδεχομένως αυτό να δείχνει ότι ο μαθητής δεν είναι εξοικειωμένος με τη χρήση της λέξης  σε οπτικά έργα, κάτι που φάνηκε στη συνέχεια και στο γεωμετρικό μοτίβο. Λανθασμένη χρήση της έννοιας της στήλης επιχειρήθηκε από τον Ιορδάνη, όπου και παρενέβη η ερευνήτρια για να υποστηρίξει τη διαδικασία. Εδώ γίνεται εμφανής η σημασία ορθής χρήσης του σημειωτικού συστήματος της γλώσσας για την ανάπτυξη της σκέψης.

Σημαντική διαπίστωση κρίνεται ακόμη το γεγονός ότι ο Σταύρος και ο Δήμος της Ε’ δημοτικού, οι οποίοι αξιοποίησαν την έννοια του διαιρέτη στους υπολογισμούς τους, δημιούργησαν γινόμενα (πολλαπλασιαστικές σχέσεις) στα οποία επιδίωξαν συχνά να εντοπίσουν και τους δύο παράγοντες ως μονάδες σύνθεσης των σχημάτων που εξέταζαν. Το εύρημα αυτό αναδεικνύει τη διττή φύση του πολλαπλασιασμού, όπως έχει ορίσει η Anghileri (2000), την οποία τα παιδιά δείχνουν να έχουν αναγνωρίσει και χρησιμοποιούν στους συλλογισμούς τους (Harries κ.ά., 2007). Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι εξής περιπτώσεις:

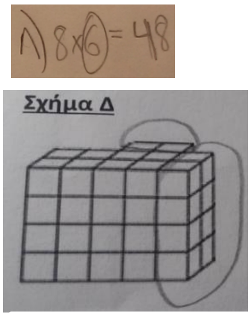
*Δήμος*




Εικόνα 35



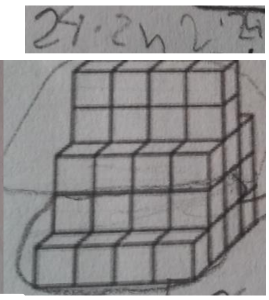

Εικόνα 36




Εικόνα 37

*Σταύρος*


Εικόνα 38



Εικόνα 39

Αντιπαραβάλλοντας τις αριθμητικές με τις οπτικές στρατηγικές σε αυτή την περίπτωση, ο Νώντας και ο Ιορδάνης δημιούργησαν λιγότερες πολλαπλασιαστικές σχέσεις, στις οποίες εστίασαν στο οπτικό ερέθισμα για να προτείνουν κάτι που «βγαίνει» σα μονάδα σύνθεσης (π.χ. πεντάδα).

Καταληκτικά, οι συμμετέχοντες αξιοποίησαν πλήθος διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων για να εκφράσουν αλλά και να αναπτύξουν τους συλλογισμούς τους (λέξεις, ρυθμικό χτύπημα του μολυβιού πάνω στο σχήμα, χειρονομίες, σχήματα).

## 4. 2. Δραστηριότητα 2η (αριθμητικά μοτίβα)

Στη δραστηριότητα αυτή όπως και στην 3η (γεωμετρικό μοτίβο) οι απαντήσεις των μαθητών αναλύθηκαν με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας. Ακολούθως ομαδοποιούνται οι στρατηγικές που δόθηκαν για τις δύο ακολουθίες αριθμών. Στην προκειμένη περίπτωση, οι κανόνες που διατυπώθηκαν είναι και στρατηγικές εύρεσης των επόμενων στοιχείων.

Οι στρατηγικές φαίνονται στους παρακάτω πίνακες ανά τάξη. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν δεδομένα ξεχωριστά για τους συμμετέχοντες, για να μελετηθούν οι απαντήσεις και οι συλλογισμοί τους.

### ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΜΟΤΙΒΟΥ – ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

**ΜΑΘΗΤΕΣ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ** (Πίνακας 9)

| |
|---|
| **Μοτίβο α**<br>1) Ανεβαίνω 10 : Ειρήνη, Νώντας, Θάνος<br>2) Πολλαπλασιάζω το 5 με τους ζυγούς αριθμούς και προσθέτω 5 : Νώντας<br>3) Οι Μονάδες μένουν 5 και οι Δεκάδες ανεβαίνουν κατά 1: Ειρήνη, Θάνος<br>4) Κάνω την προπαίδεια του 5 αλλά περνάω ένα κάθε φορά : Ειρήνη |
| **Μοτίβο β**<br>Αυτό που προσθέτω μεγαλώνει κάθε φορά κατά 2 : Ειρήνη, Νώντας , Θάνος |

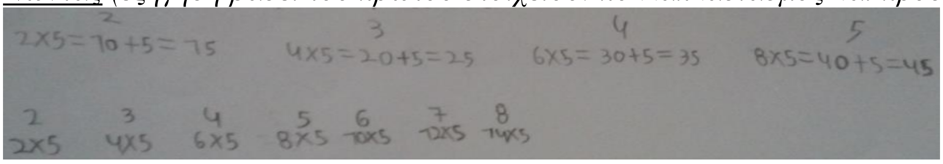
**ΜΑΘΗΤΕΣ Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ** (Πίνακας 10)

| |
|---|
| **Μοτίβο α**<br>1) Ανεβαίνω 10 : Ιορδάνης, Σταύρος, Δήμος<br>2) Πολλαπλασιάζω το 5 με τους περιττούς αριθμούς : Δήμος<br>3) Προσθέτω στο επόμενο στοιχείο 2x5, 4x2,5 κ.λπ. ή 7+2+1, 3+6+1 κ.λπ. : Σταύρος<br>4) Οι Μονάδες μένουν 5 και οι Δεκάδες ανεβαίνουν κατά 1: Ιορδάνης<br>5) Προσθέτω στο πρώτο στοιχείο 10 παραπάνω από ό,τι πρόσθεσα για να βρω το προηγούμενο : Δήμος<br>6) Στοιχείο + 10 = επόμενο στοιχείο : Δήμος |
| **Μοτίβο β**<br>1) Προσθέτω κάθε φορά τον προηγούμενο συν 2 : Σταύρος<br>2) Η διαφορά του προηγούμενου από τον επόμενο διαφέρει κατά 2 από την προηγούμενη διαφορά : Ιορδάνης<br>3) Προσθέτω 2 στην απόσταση των δύο προηγούμενων στοιχείων : Σταύρος<br>4) Επόμενο στοιχείο = στοιχείο + 2 περισσότερες μονάδες από όσες πρόσθεσα στο προηγούμενο για να βρω αυτό |

Αρχικά, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές παρουσίασαν δυσκολία στο να λεκτικοποιήσουν τις στρατηγικές τους, ιδιαίτερα στην περίπτωση του δεύτερου μοτίβου. Μεγαλύτερη ευχέρεια έδειξαν στην εύρεση των επόμενων στοιχείων κάθε μοτίβου. Η δυσκολία στην εξήγηση των κανόνων διαπιστώθηκε ανεξάρτητα από το αν πρότειναν διαφορετικούς τρόπους μετάφρασης των μοτίβων και είναι ένα εύρημα που επιβεβαιώνεται από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση (Warren κ.ά., 2007).

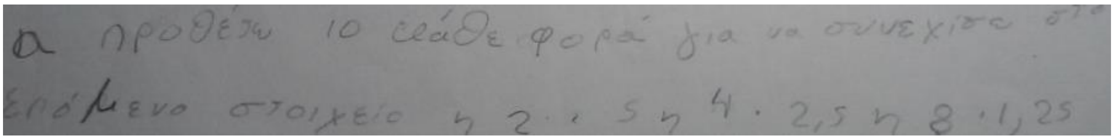
Μιλώντας συγκεκριμένα για το μοτίβο α, οι μαθητές εξέφρασαν και πολλαπλασιαστικά και προσθετικά μοτίβα, αλλά και συνδυασμούς των δύο. Όλοι οι μαθητές έδωσαν ως πρώτη εξήγηση-κανόνα του μοτίβου ότι *ανεβαίνει 10 κάθε φορά*, ή *προσθέτω 10 κάθε* φορά, το οποίο ήταν και αναμενόμενο ως πρώτη οπτική σύλληψή του. Αναδείχθηκαν δύο διαφορετικοί τύποι γενίκευσης εξ αυτών που προτείνει ο Radford (2003): η πλαισιακή και η συμβολική (Radford, 2006). Η συμβολική γενίκευση εμφανίστηκε μόνο σε απαντήσεις που έδωσε ο Δήμος. Η πλαισιακή διατυπώθηκε από όλους τους μαθητές, καθώς εξέφρασαν στρατηγικές με βάση το *προηγούμενο στοιχείο* για να υπολογίσουν το *επόμενο*. Ωστόσο, ορισμένες εξηγήσεις-γενικεύσεις του μοτίβου στηρίχθηκαν στο πρώτο στοιχείο της ακολουθίας για την εύρεση κάθε επόμενου.

*<u>Νώντας</u> (εξήγηση βάσει του πρώτου στοιχείου: πολλαπλασιασμός και πρόσθεση)*



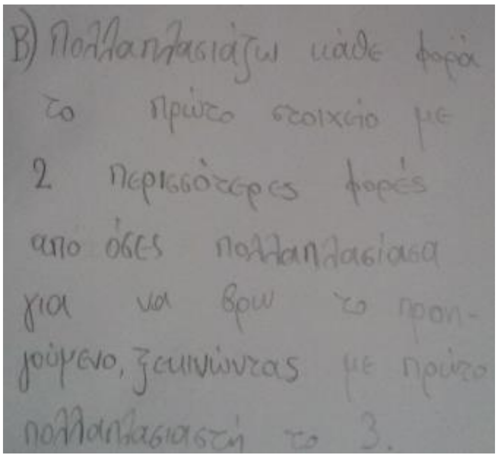

*Εικόνα 40*

*<u>Σταύρος</u> (εξήγηση βάσει του προηγούμενου στοιχείου: πρόσθεση – πολλαπλασιασμός και πρόσθεση)*




*Εικόνα 41*

*<u>Δήμος</u> (εξήγηση βάσει του πρώτου και του προηγούμενου στοιχείου: πολλαπλασιασμός)*




*Εικόνα 42*

Είναι φανερό στη στρατηγική του Δήμου ότι θεωρεί πως ο κανόνας του μοτίβου εφαρμόζεται πρώτη φορά από το πρώτο προς το δεύτερο στοιχείο και όχι από το πρώτο. Φαίνεται ότι όλοι οι μαθητές ανέπτυξαν τον ίδιο συλλογισμό μέσα από τη στρατηγική *ανεβαίνω 10 κάθε φορά*, αλλά και από όλες τις στρατηγικές που εξέφρασαν εκτός από μία απάντηση του Ιορδάνη. Ο Ιορδάνης είπε ότι «Μπορείς να κάνεις πολλαπλασιασμό και κάθε φορά να πολλαπλασιάζεις το 5 με 3, 5, 7, 9, κ.λπ.». Η ερευνήτρια τον ρώτησε αν το 1 είναι μέσα σε αυτή τη σειρά αριθμών και ο μαθητής είπε πως είναι, γιατί το μοτίβο περιέχει και το 5.

Και ο Σταύρος εφαρμόζει πρώτη φορά τον κανόνα του για το δεύτερο στοιχείο και αξιοποιεί ιδιαίτερα ιδιότητες των αριθμών, όπως ενήργησε και στο πρώτο έργο (χωρικό). Παρά το γεγονός ότι ανέλυσε το 10 σε γινόμενα και ανέδειξε σχέσεις ισοδυναμίας ο Σταύρος δεν αναφέρθηκε ρητά στην έννοια του πολλαπλάσιου αυτή τη φορά, ούτε και την αξιοποίησε σε άλλη στρατηγική του. Επιπρόσθετα, δυσκολεύτηκε να λεκτικοποιήσει ορθά τη σκέψη του κι ας μπορούσε να υπολογίσει σωστά τα επόμενα δύο στοιχεία. Αρχικά έγραψε «Προσθέτω 10-10», μετά από ερωτήσεις της ερευνήτριας το άλλαξε γράφοντας «Προσθέτω 10» και συμπλήρωσε προφορικά «για να συνεχίσω ένα στοιχείο». Η υποστήριξη της ερευνήτριας στην αναδιατύπωση της πρότασής του, ώστε να έχει ολοκληρωμένο νόημα μαθηματικά, οδήγησε τον Σταύρο στην πρόταση που φαίνεται παραπάνω.

Στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι απαντήσεις των μαθητών περιγράφουν την αυξανόμενη (αριθμητικά) φύση των στοιχείων, με κατεύθυνση από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο στοιχείο. Από τους μαθητές Δ' δημοτικού μόνο η Ειρήνη ξεκίνησε την εξήγησή της λέγοντας ότι «15-5=10». Από τους μαθητές Ε' Δημοτικού μόνο ο Δήμος υπέδειξε μία αντίστροφη πορεία στους συλλογισμούς του, εφαρμόζοντας πολλαπλασιαστικό μοτίβο σε έναν τρόπο και προσθετικό σε έναν άλλο. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 42, συσχέτισε τις φορές που πολλαπλασιάζεται το 5 στο στοιχείο που ψάχνει με τις φορές που πολλαπλασιάζεται το 5 για να προκύψει το προηγούμενο στοιχείο.

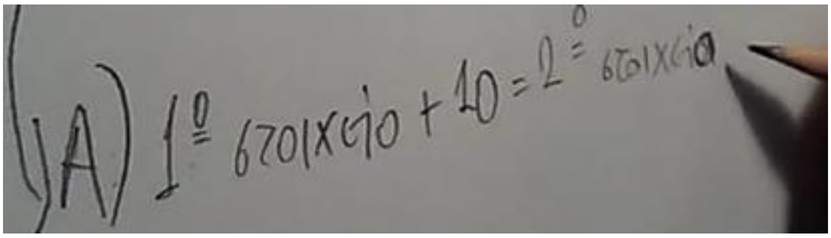
<u>*Ένα επιστημολογικό λάθος και η διόρθωσή του*</u>

Αφού παρατήρησε και είπε ότι κάθε φορά για το επόμενο στοιχείο *ανεβαίνω 10*, ο Δήμος οδηγήθηκε με αξιοσημείωτο τρόπο στην αλγεβρική γενίκευση «στοιχείο+10 = επόμενο στοιχείο». Είναι ο μόνος μαθητής που πρότεινε αλγεβρικές προσεγγίσεις, και το έκανε και για τις δύο ακολουθίες αριθμών. Άξιο σχολιασμού είναι το γεγονός ότι ο Δήμος δεν είχε προηγούμενη επαφή με την κατασκευή αλγεβρικών εκφράσεων ούτε εντός ούτε εκτός του σχολικού πλαισίου. Ακολουθεί απόσπασμα της συζήτησης με την ερευνήτρια:

…

*Δ: Μπορούμε να το γράψουμε… $1^{ο}$ στοιχείο+10=$2^{ο}$ στοιχείο*

*Ε: Πολύ καλά. Είναι ξεκάθαρο. Πολύ καλά, ωραία.*



Εικόνα 43

*Δ: Ωραία. Και πάει λέγοντας.*

*Ε: Θες να γράψεις με κάποιο τρόπο αυτό το «και πάει λέγοντας»; Πώς θα το 'γραφες;*

*Δ: (συμπληρώνει +10 δίπλα στο $2^{ο}$ στοιχείο) Έτσι (δεν ακούγεται).*

*Ε: Να ρωτήσω κάτι; Να ρωτήσω κάτι; (του δείχνει το «=») αυτό το ίσον στη μέση, τι δηλώνει το ίσον, τι δείχνει σε μία πράξη;*

*Δ: Το αποτέλεσμα.*

*Ε: Για πες.*

*Δ: (δείχνει την αριστερή μεριά από το ίσον) Η πράξη και (δείχνει στη δεξιά μεριά το «2ο στοιχείο») από δω το ίσον.*

*Ε: Μάλιστα.*

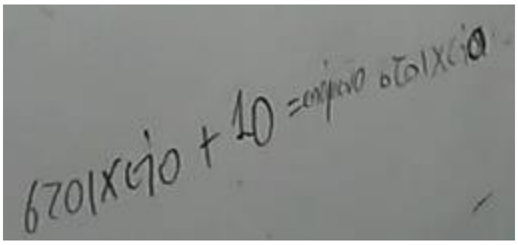
*Δ: Οπότε για να βρούμε…*

*Ε: Άρα αυτό (δείχνει όλη την αριστερή μεριά) είναι ίσο με αυτό (δείχνει όλη τη δεξιά μεριά);*

*Δ: (έκφραση ότι κατάλαβε το λάθος, παίρνει γόμα να το σβήσει) Όχι (σβήνει το 10 στη δεξιά μεριά)*

*Ε: Είναι σα να 'ναι το ίδιο.*

*Δ: (δεν ακούγεται, σκέφτεται δείχνοντας με το μολύβι το 2ο στοιχείο, σβήνει το «1ο» και το «2ο»). Επόμενο (εννοεί «επόμενο στοιχείο», το γράφει στη δεξιά μεριά μπροστά από το «στοιχείο»). Καλύτερα;*




Εικόνα 44

*Ε: Είναι ξεκάθαρο;*

*Δ: (δοκιμάζει χαμηλόφωνα ακουμπώντας το μολύβι από στοιχείο σε στοιχείο, λέγοντας «συν δέκα», «ναι»)*

*Ε: Νομίζω είναι λίγο πιο, πιο ολοκληρωμένο από το προηγούμενο.*

…

Στο απόσπασμα αυτό εμφανίζεται η κρίσιμη νοηματοδότηση του συμβόλου «=» από τους μαθητές. Το ίσον για πολλούς μαθητές στο δημοτικό είναι συνυφασμένο με το αποτέλεσμα μίας πράξης, όπως και για τον Δήμο. Αφότου ο Δήμος εκτέλεσε μία πρόσθεση που τον οδήγησε στο δεξιό μέλος της ισότητας, πρόσθεσε σε αυτό 10 αγνοώντας ότι ο νέος προσθετέος ανατρέπει την ισοδυναμία μεταξύ των δύο μελών. Με την παρέμβαση της ερευνήτριας μέσω ερώτησης ο Δήμος κατάλαβε το λάθος και διόρθωσε την έκφρασή του.

Τέλος, από τους μαθητές μόνο ο Νώντας συσχέτισε τον τακτικό αριθμό των στοιχείων με τις φορές που χρειάζεται να πολλαπλασιάσει το 5 για να βρει το εκάστοτε στοιχείο της ακολουθίας. Ο συλλογισμός του περιγράφεται ως κρίσιμο συμβάν.

Ο Νώντας γενικότερα έδειξε ευχέρεια στη διατύπωση ιδεών, απαντούσε όμως βεβιασμένα ορισμένες φορές στις συνεντεύξεις και κάποιες από αυτές διατύπωνε κάτι που μετά από λίγο μπορεί να το διόρθωνε, είτε στο χαρτί είτε προφορικά. Τόσο στην αρχή όσο και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, η ερευνήτρια προσπάθησε να ξεκαθαρίσει στον Νώντα ότι δεν ελέγχεται για τις γνώσεις του και ότι θα τηρηθεί ανωνυμία στη συλλογή των δεδομένων. Εκείνος υποστήριζε σθεναρά ότι το ήξερε και ότι δεν είχε άγχος, αν και στη συνέχεια η συμπεριφορά του εκδήλωσε ανησυχία.

*Σύγκριση αναπαραστάσεων για εύρεση του κανόνα*

Ο Νώντας λοιπόν πρότεινε τον πολλαπλασιασμό του 5 με τους ζυγούς διαδοχικά ξεκινώντας από το 2 και την πρόσθεση με 5 κάθε φορά. Όταν η ερευνήτρια επέκτεινε τη συζήτησή τους ρωτώντας τον τι θα έκανε για να υπολογίσει τον $8^{ο}$ αριθμό, εκείνος συνέχισε το μέτρημα φτάνοντας στο γινόμενο 14x5, το οποίο είναι ορθό. Ο ίδιος πρότεινε ότι θα μπορούσε εναλλακτικά να πολλαπλασιάσει επί 2 τις οκτώ φορές που υπολόγισε το 5, στο $5^{ο}$ στοιχείο. Ως τότε, στην πάνω σειρά (όπου υπολογίζει +5 κάθε φορά) δεν είχε αριθμήσει τα στοιχεία.

*Ν: Γιατί καταλαβαίνω ότι, επειδή αυτός είναι ο τέταρτος αριθμός (δείχνει το $5^{ο}$ στοιχείο), δηλαδή άμα κάνω το τέταρτο με έναν ίσο του, θα βγει ο όγδοος.*

Αυτή η διαδικασία όμως του έδωσε αποτέλεσμα 95 (το υπολόγισε γραπτώς σε άλλο φύλλο εκείνη τη στιγμή). Ο μαθητής δεν είχε υπολογίσει ότι ο $8^{ος}$ αριθμός που προκύπτει από τον κανόνα του, όπως τον διατύπωσε, ήταν το $9^{ο}$ στοιχείο της ακολουθίας και όχι το $8^{ο}$. Η καθηγήτρια επανάφερε στη συζήτηση τον προηγούμενο υπολογισμό του, όμως ο Νώντας συνέχισε να υποστηρίζει τη στρατηγική του. Μετά από παρότρυνσή της, αναγνώρισε τον τακτικό αριθμό των στοιχείων ξεκινώντας από το 15 ($2^{ο}$ στοιχείο) και παροτρύνθηκε να τους αριθμήσει. Εστίασε στην αριθμητική πράξη 14x5 στην κάτω σειρά, όπου είχε ήδη καταγράψει τις διαδοχικές πράξεις από το $2^{ο}$ στοιχείο ως το $8^{ο}$. Το πέρασμα από τη μία στρατηγική στην άλλη και οι υπολογισμοί φάνηκαν να τον μπέρδεψαν. Στους προφορικούς υπολογισμούς έκανε ορισμένα λάθη και εκτέλεσε τελικά την πράξη 14x5 κάθετα για να είναι σίγουρος.

Στο μοτίβο β, όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν ότι *αυτό που προσθέτω μεγαλώνει κατά 2*. Αναφέρθηκαν σχεδόν αποκλειστικά στο ίδιο προσθετικό μοτίβο με διάφορες εκφράσεις. Άξιο σχολιασμού είναι και το γεγονός ότι κανένα από τα δύο μοτίβα δεν αντιμετωπίστηκε από κάποιο μαθητή σχηματικά˙ κανένας δεν ανέτρεξε σε κατασκευή σχήματος, ως μορφής οπτικής αναπαράστασης των έργων.

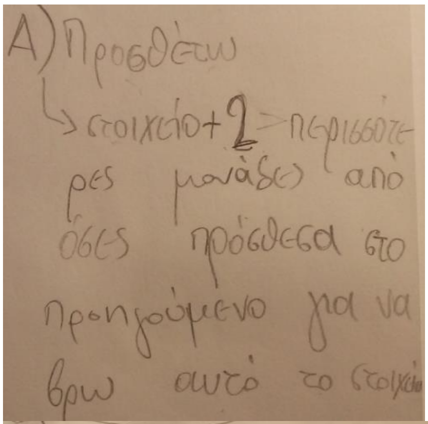
Οι μαθητές της Ε’ δημοτικού υπέδειξαν με τις απαντήσεις τους την έννοια της απόστασης και κατ’ επέκταση της αφαίρεσης, μεταξύ των δύο προηγούμενων στοιχείων. Μόνο ο Ιορδάνης και ο Σταύρος κατέγραψαν τη «διαφορά» ή την «απόσταση» των δύο προηγούμενων στοιχείων στην εξήγηση του κανόνα. Επίσης, η Ειρήνη όταν ρωτήθηκε αν υπάρχει άλλη σκέψη για την ερμηνεία του μοτίβου πέρα από το ότι «προσθέτω τον προηγούμενο κι άλλα 2», πρότεινε την αφαίρεση μεταξύ δύο στοιχείων, όχι με απόλυτη βεβαιότητα ότι λειτουργεί:

*Ει: απ’ το δεξί...να αφαιρεί τα 9, δηλαδή 16 - 9, και θα μας βγει νομίζω…ίσον 7.*

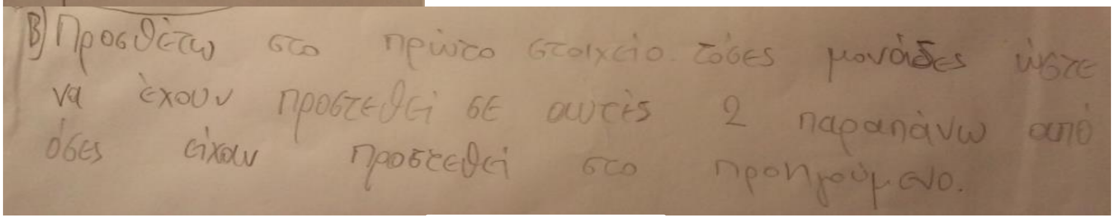
Η διαφορά στις εκφράσεις των δύο τάξεων μπορεί να δείχνει ότι η επέκταση της στρατηγικής *βλέπω τις διαφορές* στη στρατηγική *βλέπω τις διαφορές ανάμεσα στις διαφορές* μπορεί να χρησιμοποιείται λιγότερο συχνά από τους μικρότερους μαθητές. Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι οι μικρότεροι μαθητές δε διαθέτουν αυτή τη στρατηγική ή αυτή την ικανότητα επεξεργασίας των δύο στρατηγικών ταυτόχρονα, όπως προτείνουν οι Hargreaves κ.ά. (1998) σε ανάλογα ευρήματά τους με μαθητές $3^{ης}$ ως και $6^{ης}$ τάξης.

Σε αυτό το μοτίβο όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν ως πρώτο προσθετέο το 3, για να οδηγηθούν στο $2^{ο}$ στοιχείο (δηλαδή το 4). Κανένας μαθητής δεν εξέφρασε την εκδοχή να εφαρμόζεται ο κανόνας του μοτίβου από το $1^{ο}$ στοιχείο. Επιπρόσθετα, κανένας δεν ανέφερε τους τετράγωνους αριθμούς. Οι τετράγωνοι αριθμοί, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός των αριθμών με τον εαυτό τους, είναι έννοια που εισάγεται στη Στ’ Δημοτικού μέσα από τις δυνάμεις. Ωστόσο, στηρίζεται στην προπαίδεια, η οποία περιλαμβάνεται από τη Β’ Δημοτικού στα σχολικά Μαθηματικά για τους αριθμούς ως το 10.

Προσπαθώντας να βρει διαφορετικούς τρόπους ερμηνείας του δεύτερου αριθμητικού μοτίβου, ο Δήμος πρότεινε την ίδια εξήγηση αλλά με διαφορετικό τρόπο. Γενικότερα, ο Δήμος χρειαζόταν αρκετό χρόνο για να επεξεργαστεί μόνος του το συγκεκριμένο έργο αλλά και να λεκτικοποιήσει τις σκέψεις του. Παρακάτω είναι οι δύο τρόποι εξήγησης που έδωσε στο μοτίβο β, ο πρώτος σε μία προσπάθεια αλγεβρικής γενίκευσης και ο δεύτερος με καθαρά λεκτικό τρόπο.


A) Προσθέτω
↳ στοιχείο+2 => περισσότε-
ρες μονάδες από
όσες πρόσθεσα στο
προηγούμενο για να
βρω αυτό το στοιχείο

Εικόνα 45


B) Προσθέτω στο πρώτο στοιχείο τόσες μονάδες ώστε
να έχουν προστεθεί σε αυτές 2 παραπάνω από
όσες είχαν προστεθεί στο προηγούμενο.

Εικόνα 46

*<u>Εγχείρημα πολλαπλασιασμού - παραίτηση</u>*

Ως κρίσιμο συμβάν παρουσιάζεται η περίπτωση του Σταύρου. Ο Σταύρος ως εναλλακτική στρατηγική προσπάθησε να βρει έναν συνδυασμό πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης, εμπλέκοντας τα διπλάσια του κάθε στοιχείου, κάτι που τον οδήγησε σε αδιέξοδο. Στη συνέχεια, ανέλυσε τους προσθετέους σε μία μονάδα και σε δυάρια. Ο Σταύρος εξέφραζε στον συλλογισμό του διαδοχικές προσθέσεις με το 2 για να πάει από το προηγούμενο στοιχείο στο επόμενο κάθε φορά, χωρίς να αναφερθεί στον πολλαπλασιασμό. Αυτό προκάλεσε την επέκταση της συζήτησης από την ερευνήτρια, η οποία ανέφερε πρώτη το «δυάρι». Η ερευνήτρια επεδίωξε να κάνει τον μαθητή να συλλογιστεί πάνω σε αυτή τη βάση. ώστε να μελετηθεί αν μπορεί να εξαχθεί κανόνας του μοτίβου με πολλαπλασιαστική σχέση.

…

*Ε: Προσθέτεις δυάρια δηλαδή.*

*Σ: Ναι. Απλά.*

*Ε: Ε, σ' αυτό (δείχνει το 1) πρόσθεσες ένα δυάρι.*

*Σ: Όχι, σε αυτό δεν, εδώ δεν πρό, ναι 1 και 2.*

*Ε: Εδώ (δείχνει ανάμεσα στο 4 και στο 9);*

*Σ: Μετά 1 και 2 συν 2.*

*Ε: Πόσα δυάρια;*

*Σ: Δύο.*

*Ε: Εδώ πόσα (δείχνει ανάμεσα στο 9 και στο 16);*

*Σ: Τρία.*

*Ε: Εδώ (δείχνει ανάμεσα στο 16 και στο 25);*

*Σ: Τέσσερα.*

*Ε: Εδώ (δείχνει προς το 36);*

*Σ: Πέντε.*

*Ε: Τι γίνεται όσο μεγαλώνεις δηλαδή;*

*Σ: Ε, προσθέτω συν, ένα παραπάνω δυάρι.*

Ο Σταύρος είπε ότι εκείνος στον συλλογισμό του θεώρησε τον πρώτο προσθετέο ως 3, δεν τον «έσπασε» σε 1 και 2 για αυτό τα δυάρια σε αυτή την περίπτωση θα έβγαιναν τέσσερα και όχι πέντε. Ρωτήθηκε πόσα δυάρια θα προστεθούν για να φτιαχτεί το 8$^{ο}$ στοιχείο.

…

*Ε: Για τον 8$^{ο}$, από τον προηγούμενό του πόσα δυάρια θα έχεις προσθέσει;*

*Σ: Ένα. Απ' τον προηγούμενό του, τα επτάρια (εννοεί δυάρια) θα ήτανε έξι. Απ'τον προηγούμενό του.*

*Ε: Στον προηγούμενό του θα είχε, ο έβδομος όρος δηλαδή*

*Σ: Ο έβδομος*

*Ε: Το έβδομο στοιχείο θα είχε πόσα δυάρια που του πρόσθεσες;*

*Σ: Έξι.*

*Ε: Έξι, σκέτο; Έξι δυάρια;*

*Σ: (μιλά ταυτόχρονα) Έξι κι ένα (εννοεί μονό).*

*Ε: Ωραία.*

*Σ: Μετά θα 'χε επτά και ένα. Στον όγδοο.*

*Ε: Α, πολύ ωραία.*

…

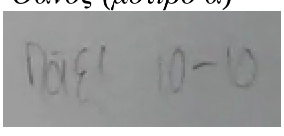
Προκειμένου να επανεξετάσει τους υπολογισμούς του και να δει αν μπορεί να οδηγηθεί στη διατύπωση ενός γενικού συμπεράσματος – κανόνα μέσα από τα δυάρια, η ερευνήτρια παρακίνησε τον Σταύρο να υπολογίσει το 15$^{ο}$ στοιχείο. Ο Σταύρος κατέληξε ότι το 15$^{ο}$ στοιχείο θα έχει 14 δυάρια. Για να διευκρινίσει την απάντησή του, η ερευνήτρια τον ρώτησε αν 14 δυάρια είναι αυτά που απέχει από τον προηγούμενό του ή είναι ο αριθμός ο ίδιος, και ο Σταύρος απάντησε ότι είναι ο αριθμός ο ίδιος. Εδώ είναι εμφανές ότι υπήρξε σύγχυση στο μαθητή ως προς την ταυτότητα των στοιχείων του μοτίβου: θεώρησε στοιχεία τους προσθετέους και όχι τους αριθμούς της ακολουθίας. Χρειάστηκε η παρέμβαση της ερευνήτριας, που τον προβλημάτισε αν είναι λογικό το $15^{ο}$ στοιχείο αυτής της ακολουθίας να είναι 14x2=28, 28+1=29. Ο Σταύρος χρειάστηκε ξανά την εξήγηση των λεγομένων του από την ερευνήτρια για να το αντιληφθεί και μετά παραιτήθηκε από την προσπάθεια.

Η συζήτηση για το δεύτερο μοτίβο ήταν μεγαλύτερης διάρκειας από την προβλεπόμενη, καθώς υπήρχε πρόσφορο έδαφος για την ανάδειξη συλλογισμών από τον Σταύρο. Παρά το γεγονός ότι παρεμβλήθηκε ολιγόλεπτο διάλειμμα όταν ζητήθηκε, είναι πιθανόν η συζήτηση αυτή να ήταν κουραστική, ακριβώς επειδή επένδυσε αρκετά ο μαθητής στην επεξεργασία του έργου. Τέλος, αναφέρεται ότι ο Σταύρος και ο Δήμος έκαναν μία προσπάθεια σύνδεσης πολλαπλασιαστικής σχέσης στο μοτίβο, όπου ενεπλάκησαν τα τετράγωνα των αριθμών που τους δίνονταν, όμως οδηγήθηκαν σε αδιέξοδο και την απέρριψαν.

Κλείνοντας, για να επεξεργαστούν τα έργα οι μαθητές χρησιμοποίησαν ρυθμικό μέτρημα λέγοντας κατευθείαν το αποτέλεσμα (ιδίως στο μοτίβο α), γραπτή αποτύπωση της κατεύθυνσης και των πράξεων από ένα στοιχείο στο επόμενό του, καθώς επίσης και τον λόγο. Τη γραπτή αυτή αποτύπωση έκαναν ο Δήμος, η Ειρήνη και ο Θάνος, ενώ το ρυθμικό μέτρημα αξιοποιήθηκε από όλους κάποια στιγμή, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων.

Τα λάθη και οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν στα αριθμητικά μοτίβα είναι α) αριθμητικού υπολογισμού / ανάκτησης σε νοερούς υπολογισμούς και β) τρόπου έκφρασης, όσον αφορά την εξήγησή τους. Ο Νώντας έκανε λάθη κατά τους νοερούς πολλαπλασιασμούς με το 5 στο μοτίβο α και λανθασμένη χρήση του συμβόλου «=» στο μοτίβο β, όπως ακριβώς περιγράφηκε στην περίπτωση του Δήμου. Δυσκολίες ή ανεπάρκεια στη λεκτική περιγραφή των μοτίβων αποτυπώθηκαν τόσο γραπτά όσο και προφορικά. Η ερευνήτρια παρενέβη όπου κρίθηκε απαραίτητο για να ενθαρρύνει την αναδιατύπωση ή τη συμπλήρωση εκφράσεων, για ολοκληρωμένο νόημα. Ενδεικτικά, παρουσιάζονται οι παρακάτω εικόνες.

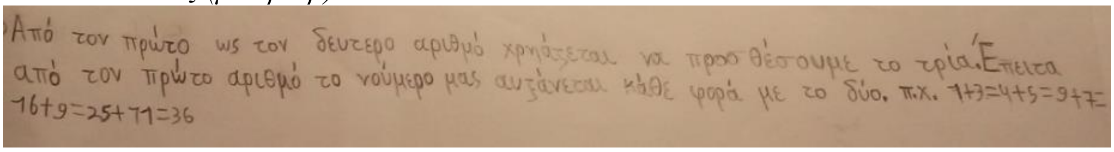
*Θάνος (μοτίβο α)*



*Εικόνα 47*

Μετά από ερώτηση της ερευνήτριας για την αρχή του μοτίβου α, ο Θάνος πρόσθεσε ότι «ξεκινάει από το 5».

*Νώντας (μοτίβο β)*



Από τον πρώτο ως τον δευτερο αριθμό χρηάζεται να προσθέσουμε το τρία. Έπειτα από τον πρώτο αριθμό το νούμερο μας αυξάνεται κάθε φορά με το δύο. π.χ. 1+3=4+5=9+7=16+9=25+11=36

*Εικόνα 48*

## 4.3. <u>Δραστηριότητα 3η (γεωμετρικό μοτίβο)</u>

Το έργο αυτό απαιτούσε επεξεργασία υπό δύο διαφορετικές σκοπιές: τον κανόνα με τον οποίο ερμηνεύεται το μοτίβο και τους τρόπους απαρίθμησης των τετραγώνων των στοιχείων του, αφότου αυτά έχουν κατασκευαστεί. Το γεωμετρικό μοτίβο αντιμετωπίστηκε από τους μαθητές ως επί το πλείστον με βάση το οπτικό ερέθισμα.

Στην 3η και 4η δραστηριότητα κρίθηκε καταλληλότερη η ενσωμάτωση των δεδομένων στους ίδιους πίνακες για τις δύο τάξεις. Όλοι οι μαθητές σχεδίασαν και υπολόγισαν σωστά τα επόμενα δύο στοιχεία του μοτίβου. Ο κανόνας του μοτίβου, καθώς και οι στρατηγικές απαρίθμησης που πρότειναν οι μαθητές συνοψίζονται με βάση το περιεχόμενό τους στους παρακάτω πίνακες. Θα ακολουθήσει η παρουσίαση ενδεικτικών παραδειγμάτων.

**Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΜΟΤΙΒΟΥ** (Πίνακας 11)

| |
|---|
| *1. Η στήλη και η γραμμή μεγαλώνουν κάθε φορά κατά 1*<br>Θάνος, Νώντας, Σταύρος, Ιορδάνης |
| *2. Κάθε στοιχείο περιέχει το προηγούμενο συν 3, 5, 7, 9 κ.λπ. ανάλογα τη σειρά του*<br>Ειρήνη, Δήμος |
| *3. Τα τετράγωνα της διαγωνίου αυξάνονται κάθε φορά κατά 1*<br>Δήμος |

**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ** (Πίνακας 12)

| |
|---|
| *1. Πολλαπλασιασμός και πρόσθεση* (Δήμος, Νώντας, Σταύρος, Ειρήνη, Ιορδάνης, Θάνος) |
| *2. Πολλαπλασιασμός (Σταύρος, Νώντας)* |
| *3. Πρόσθεση* (Θάνος, Νώντας, Σταύρος) |
| *4. Μοναδιαίο μέτρημα* (Ειρήνη, Θάνος, Δήμος, Ιορδάνης, Σταύρος) |
| *5. Μέτρημα με βάση τη διαγώνιο* (Δήμος) |
| *6. Μέτρημα με βάση τον τακτικό αριθμό στοιχείου* (Νώντας, Σταύρος) |

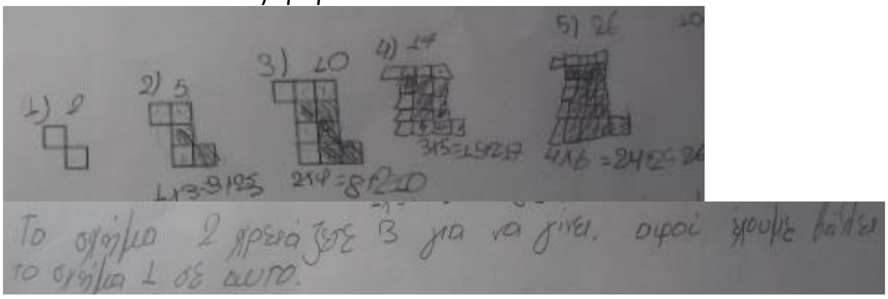
Όλοι οι μαθητές εκτός της Ειρήνης και του Δήμου παρατήρησαν και εξήγησαν τον κανόνα ότι το σχήμα *μεγαλώνει κατά μία σειρά και μία στήλη κάθε φορά*. Η Ειρήνη ανέφερε ότι *το σχήμα γίνεται κάθε φορά πιο χοντρό και πιο ψηλό*. Το παρομοίασε με πολυκατοικία και διαπίστωσε ότι κάθε φορά έχει περισσότερους ορόφους. Η μαθήτρια προσέγγισε με αρκετή σαφήνεια τη λεκτική περιγραφή αυτού που συμβαίνει στο σχήμα, χωρίς να χρησιμοποιήσει μαθηματική ορολογία. Ωστόσο, ενώ αιτιολόγησε την αύξηση κατά 1 στους ορόφους (σειρές), δεν έκανε το ίδιο με τις στήλες.

Η Ειρήνη και ο Δήμος ήταν οι μόνοι που εντόπισαν, με διαφορετικό τρόπο ο καθένας, ότι *κάθε επόμενο στοιχείο περιέχει το προηγούμενο και προστίθενται σε αυτό 3, 5, 7, 9 κ.λπ.*, ανάλογα με τη θέση του στην ακολουθία (Εικόνες 49, 50). Η Ειρήνη έκανε τη διαπίστωση αυτή μέσα από το οπτικό ερέθισμα και έτσι την τεκμηρίωσε. Σημειώνεται ότι η Ειρήνη με τον Δήμο ανέφεραν κάποια στιγμή τη λέξη «μοτίβο» εκτός της συνέντευξης, μιλώντας για τα έργα της $2^{η}$ φάσης.

Ο Δήμος εξήγε τον κανόνα αριθμητικά, αφότου έφτιαξε τα επόμενα δύο στοιχεία. Στην εξήγηση και κατασκευή της διάταξης των τετραγώνων στα σχήματά του κεντρικό ρόλο φαίνεται πως έπαιξε η διαπίστωσή του ότι τα τετράγωνα της διαγωνίου αυξάνονται κατά 1 κάθε φορά. Ξεκινούσε από την κατασκευή της διαγωνίου και συμπλήρωνε τα απαραίτητα τετράγωνα πάνω και κάτω από αυτήν. Υπολόγισε το πλήθος τετραγώνων κάθε στοιχείου και σύγκρινε τις διαφορές τους. Έτσι ήταν σε θέση να γνωρίζει το πλήθος τετραγώνων του $6^{ου}$ στοιχείου, χωρίς να το έχει κατασκευάσει· το αντίθετο, η γνώση του πλήθους τετραγώνων τον βοηθούσε να κατασκευάσει το νέο σχήμα. Με παρόμοιο τρόπο, η Ειρήνη προέβλεπε πόσα τετράγωνα θα μετρούσε στο νέο στοιχείο, έχοντας σχεδιάσει και αφαιρέσει το προηγούμενο μέσα σε αυτό.

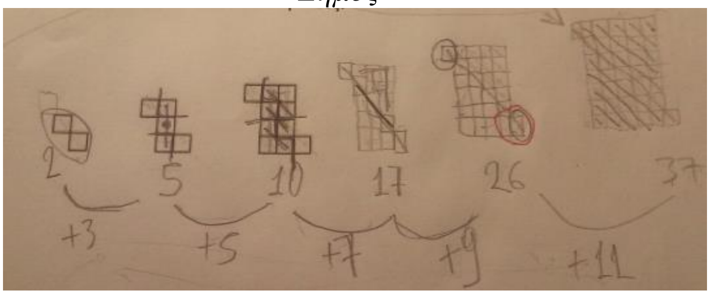
Ολοκληρώνοντας τη συσχέτιση των δύο συλλογισμών, ο Δήμος ανακάλεσε ότι τις διαφορές (αριθμητικά) μεταξύ των στοιχείων τις είχε ξανασυναντήσει στο αριθμητικό μοτίβο. Από την άλλη πλευρά, όταν η Ειρήνη ρωτήθηκε αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των πληθικών αριθμών των στοιχείων είπε ότι το άθροισμα των τριών πρώτων στοιχείων είναι ίσο με το τέταρτο, κάτι που αναγνώρισε πως δεν ισχύει για το πέμπτο.

*Ειρήνη*




Εικόνα 49

*Δήμος*




Εικόνα 50

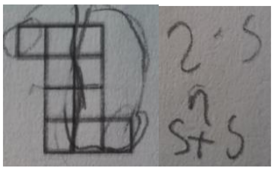
Οι μαθητές έκαναν διάφορες παρατηρήσεις στην προσπάθεια να περιγράψουν χαρακτηριστικά του μοτίβου. Ορισμένες από αυτές παρουσιάζονται ανωτέρω ως στρατηγικές βάσει των οποίων μέτρησαν τα τετράγωνα. Ο Σταύρος και ο Νώντας βρήκαν ότι τα στοιχεία με μονό τακτικό αριθμό μπορούν να χωριστούν οριζόντια στη μέση, να υπολογιστεί το μισό τους και να διπλασιαστεί. Σημειώνεται ότι ο Νώντας είχε προτείνει τη στρατηγική του χωρίσματος στη μέση και στο χωρικό έργο. Επιπρόσθετα, ο Σταύρος πρότεινε και το κατακόρυφο μοίρασμα του σχήματος. Το νοερό «κόψιμο» του σχήματος ως εργαλείο για τον υπολογισμό των στοιχείων που το αποτελούν υποδεικνύει ευελιξία στον χειρισμό του.

Η επεξεργασία του σχήματος με άξονα τη μεγάλη διαγώνιο απασχόλησε ιδιαίτερα τον Δήμο. Έτσι, διαπίστωσε ότι σε κάθε σχήμα η διαγώνιος έχει ίσο πλήθος τετραγώνων με τη στήλη και ότι τα τετράγωνα ενδιάμεσα των άκρων της διαγωνίου είναι ίσα με το πλήθος των στηλών. Προσπάθησε αρκετά να σκεφτεί πώς θα προβλέψει το πλήθος τετραγώνων με βάση τις συσχετίσεις που εξέφραζε. Η ερευνήτρια τον παρότρυνε να επανεστιάσει στον υπολογισμό τετραγώνων, και αυτό τον βοήθησε να οδηγηθεί στον εντοπισμό της *διαφοράς μεταξύ των διαφορών*.

Τέλος, ο Σταύρος και ο Ιορδάνης διαπίστωσαν ότι οι σειρές διαφέρουν κατά δύο από τις στήλες κάθε φορά. Και οι δύο οδηγήθηκαν σε αυτή τη σκέψη μετά από παρακίνηση της ερευνήτριας να παρατηρήσουν τα σχήματα, σε σημεία που θεωρήθηκαν κρίσιμα για αυτούς και θα παρουσιαστούν παρακάτω.

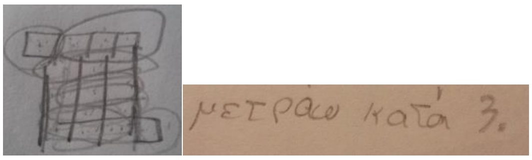
΄Οσον αφορά τις στρατηγικές απαρίθμησης, στην πράξη της πρόσθεσης ομαδοποιήθηκαν περιπτώσεις πέραν του μαναδιαίου μετρήματος, όπως η πρόσθεση σειρών. Η συνδυαστική κατηγορία Πολλαπλασιασμού και Πρόσθεσης περιλαμβάνει τις περιπτώσεις όπου έγινε πολλαπλασιασμός, όπως σειράχστήλη, ή μετρήματος σε δυάδες, τριάδες ή τετράδες (όπως πρότειναν ο Δήμος και ο Θάνος) όπου στο τέλος προστίθεντο τετραγωνάκια που υπολείπονταν.

*Σταύρος : πολλαπλασιασμός ή πρόσθεση*



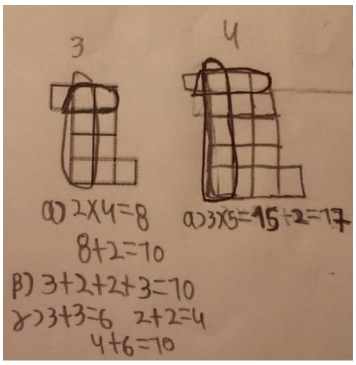

Εικόνα 51

*Ιορδάνης : πολλαπλασιασμός και πρόσθεση*




Εικόνα 52

*Νώντας: πολλαπλασιασμός και πρόσθεση ή πρόσθεση*




Εικόνα 53

Ο Δήμος έδειξε τον υπολογισμό τετραγώνων με βάση τη μεγάλη διαγώνιο, είτε μετρώντας ένα – ένα πάνω (ή κάτω) από αυτήν και τον διπλασιασμό τους είτε σχεδιάζοντας παράλληλες διαγωνίους σε όλο το σχήμα και ομαδοποιώντας τις ίσες.

Όλοι οι μαθητές εξέφρασαν πλαισιακές γενικεύσεις για να εξηγήσουν τον κανόνα του γεωμετρικού μοτίβου, δηλαδή αξιοποίησαν το προηγούμενο στοιχείο για να κατασκευάσουν το επόμενο και να το υπολογίσουν. Γενικά, οι μαθητές αξιοποίησαν τα σχήματα, τη γλώσσα, το ρυθμικό μέτρημα 1-1 δείχνοντας με το μολύβι τετράγωνα, για να επεξεργαστούν το έργο και να εξηγήσουν τους συλλογισμούς τους. Καθένας χρησιμοποίησε τα σημειωτικά συστήματα για διαφορετικό σκοπό, κι έτσι για παράδειγμα με το ρυθμικό μέτρημα 1-1 ο Ιορδάνης μέτρησε ανά σειρά και ανά στήλη τα τετράγωνα του σχήματος που έφτιαξε για να ελέγξει πού έκανε λάθος, ο Δήμος μέτρησε τα τετράγωνα πάνω από μία διαγώνιο για να τα διπλασιάσει και η Ειρήνη για να σκιάσει το προηγούμενο σχήμα μέσα στο επόμενο και να υπολογίσει μετά πόσα προστέθηκαν.

Λάθη που εντοπίζονται στο γεωμετρικό μοτίβο είναι α) στη χρήση μαθηματικών συμβολισμών και ορολογίας, β) εκφραστικά και γ) κατασκευαστικά. Όπως φαίνεται παραπάνω η Ειρήνη κάνει λανθασμένη χρήση του συμβόλου «=», καθώς εκτελεί πράξεις σειριακά, χωρίς να ισοδυναμούν τα μέλη των ισοτήτων. Το ίδιο λάθος εντοπίζεται από τον Ιορδάνη και τον Νώντα. Επιπρόσθετα, ο Ιορδάνης έκανε λάθος στην κατασκευή του σχήματος: δεν είχε τραβήξει καθαρά μία ευθεία γραμμή διαμέρισης σειρών κι έτσι έκανε λάθος στο μέτρημα ανά στήλη. Το διόρθωσε μόνος του, μετρώντας τα τετράγωνα ανά σειρά. Λανθασμένη ορολογία χρησιμοποιούν ο Νώντας και ο Θάνος, μιλώντας για μία σειρά με τον όρο «στήλη». Με τον Νώντα το νόημα ξεκαθαρίζεται μέσα από διευκρινιστικές ερωτήσεις της ερευνήτριας. Ο Θάνος φάνηκε πως δε γνωρίζει τη σημασία σειράς και στήλης, και του εξηγήθηκαν. Παρόλα αυτά, επαναλαμβάνει τη λανθασμένη χρήση της στήλης.

Ο Θάνος έκανε λάθος στην κατασκευή του 4$^{ου}$ στοιχείου και η ερευνήτρια δεν το διόρθωσε. Τον άφησε να σχεδιάσει και να συνεχίσει με την κατασκευή του 5$^{ου}$ σχήματος. Εκεί βλέποντας τα προηγούμενα στοιχεία κατάλαβε μόνος του ότι έπρεπε να προσθέσει μία σειρά στο 4$^{ο}$ σχήμα, εκτός από μία στήλη. Ανέφερε μάλιστα τη σειρά ως «άλλη μία έτσι», δείχνοντας οριζόντια γραμμή:

…

*Θ: (ενώ φτιάχνει σειρά τετραγώνων στο 5$^{ο}$ σχήμα) Α… εδώ πέρα πρέπει να κάνω άλλη μία έτσι (δείχνει το 4$^{ο}$ σχήμα, δείχνει σειρά). Εδώ πέρα, πρέπει να κάνω… μπερδεύτηκα λίγο (σβήνει, ξέρει τι κάνει τώρα, δεν είναι μπερδεμένος, προσθέτει σειρά).*

*Ε: Γιατί;*

*Θ: Γιατί, εδώ πέρα, έχει μία (δείχνει σχήμα 2), μετά έχει δύο (σχήμα 3). Μετά (σχήμα 4), έχει, μετά πρέπει να έχει τρεις.*

*Ε: Μμ, τι είναι αυτές οι μία, δυο τρεις; Που έγιναν δύο και μετά τρεις;*

*Θ: Στήλες.*

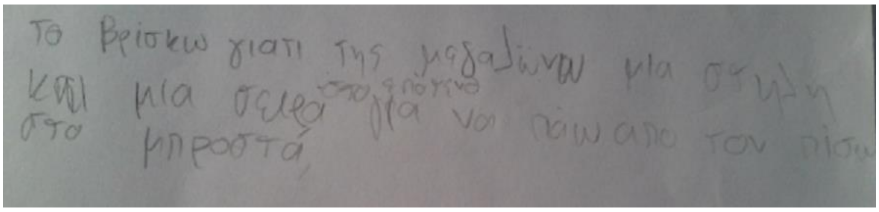
*Ε: Στήλες δεν είπαμε το κάθετο (του δείχνει κατακόρυφη κίνηση πάνω από το φύλλο), το κατακόρυφο;*

*Θ: Α, ναι, ε σειρές.*

*Ε: Το οριζόντιο; Μμ. Ωραία.*

…

Ο μαθητής έφτασε στη γραπτή περιγραφή του κανόνα «Το βρίσκω γιατί μεγαλώνω μία στήλη και μια σειρά στο επόμενο για να πάω από τον πίσω στο μπροστά».



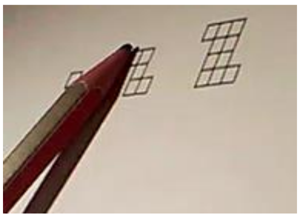
Εικόνα 54

<u>*Δυσκολία περιγραφής του κανόνα – νέες παρατηρήσεις*</u>

Περιγράφεται η περίπτωση όπου ο Σταύρος προσπάθησε να εξηγήσει τον κανόνα του μοτίβου. Αντιμετώπισε δυσκολία στη λεκτική διατύπωση της «σειράς». Αναφέρεται ότι ο Σταύρος είχε χρησιμοποιήσει τη «σειρά» στους προφορικούς υπολογισμούς του στο χωρικό έργο. Κατά τη διάρκεια επεξεργασίας του έργου εκείνου, ο Σταύρος είχε πει ότι μία κατακόρυφη τριάδα κύβων την αποκαλούμε «στήλη» ή «κάθετη», κι έτσι η ερευνήτρια του ζήτησε να δείξει μία γραμμή, που αναδιατυπώνοντας την έκφρασή της την όρισε «σειρά». Ο Σταύρος κατάλαβε και έδειξε μία οριζόντια διατεταγμένη ομάδα κύβων.

…

*Σ: … Εδώ, του δίνει μιά στήλη και του, του έβαλε συν δύο να ανεβεί, για να πάει πιο ψηλά, να ανεβεί πιο πάνω.*



Εικόνα 55

*(συνεχίζει, δείχνοντας το πρώτο στοιχείο τώρα) δηλαδή, εδώ που 'χει ένα κι είναι χαμηλά, εδώ (ξαναδείχνει το δεύτερο) του 'βαλε και μια... στήλη, αλλά για κάποιο λόγο του πρόσθεσε δω δύο (πάνω σειρά δείχνει, τετραγωνάκια) και το 'κανε έτσι (κινεί το μολύβι πάνω στο σχήμα για να το δείξει). Μισό λεπτάκι, να, θέλω να δω και το επόμενο. Ενώ εδώ, απ' τα τρία που είναι έτσι του έχει προσθέσει κι άλλο ένα κι από ό,τι φαίνεται, κάθε φορά του προσθέτει, ένα για ν' ανεβεί πιο πάνω συν, μια στήλη. Από ό,τι φαίνεται. Αλλά στην αρχή εδώ (δείχνει το πρώτο σχήμα) του βάζει συν άλλα δύο για να ανεβεί πιο ψηλά, κι ανεβαίνει κι αυτό. Άρα μάλλον, λέγω εγώ τώρα μάλλον, στην, το επόμενο θα 'χει τρεις στήλες, αυτό θα μετακινηθεί εδώ (δείχνει το κάτω δεξιά κουτάκι να πηγαίνει μία θέση δεξιά), θα μπει μια στήλη (δείχνει αριστερά του) αυτό θα πάει πάνω (δείχνει το πάνω αριστερά να μετακινείται μία θέση πάνω) και δω θα μπει συν ένα κουτάκι (δείχνω πάνω από κάθε μια από τις υπάρχουσες στήλες).*

*Ε: Για φτιάξ' το αυτό που λες.*

*Σ: Δε θα τα καταφέρω...*

...

Ο Σταύρος προσπαθούσε να εξηγήσει εκ νέου τον κανόνα για το μοτίβο λέγοντας ότι στο νέο σχήμα προστίθεται συν μία στήλη συν ένα κουτάκι για να ανεβεί πιο πάνω η στήλη (εννοεί πάνω από κάθε μία).

…

*Σ: (σχεδιάζει το πέμπτο στοιχείο)... Έξι. Εγώ αυτό κατάλαβα.*

*Ε: Έξι τι είναι αυτά;*

*Σ: Δηλαδή από πέντε που ήταν πριν εδώ (δείχνει στήλη στο προηγούμενο στοιχείο) πέντε είχε η στήλη.*

*Ε: Πέντε τι;*

*Σ: Κουτάκια.*

*Ε: Ναι.*

*Σ: Τώρα έχει έξι κουτάκια γιατί απ' ό,τι φαίνεται, ανεβαίνει συν ένα.*

...

Ενώ αντιλαμβάνεται αυτό που συμβαίνει, ο Σταύρος δυσκολεύεται να λεκτικοποιήσει ότι αυτό το «συν ένα» είναι σειρά. Η ερευνήτρια τον ρωτά να περιγράψει τα χαρακτηριστικά του νέου σχήματός του, και σε αυτά ο Σταύρος μιλά για τις στήλες του και για τα μονά τετράγωνα που έχουν όλα τα σχήματα πάνω αριστερά και κάτω δεξιά. Μετά από παρότρυνσή της να δει τις στήλες και τις σειρές στα σχήματα ο Σταύρος διαπίστωσε ότι α) οι γραμμές είναι πάντα δύο περισσότερες από τις στήλες και β) ότι *η στήλη και η γραμμή μεγαλώνουν κάθε φορά κατά 1*. Μάλιστα, προσπαθώντας να αποκωδικοποιήσει το πρώτο στοιχείο, ήταν ο μόνος που το συσχέτισε με τις παρατηρήσεις του για το μοτίβο˙ διατύπωσε ότι και σε αυτό οι γραμμές είναι δύο περισσότερες από τις στήλες.

Η περίπτωση του Σταύρου αναδεικνύει τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές στην εξήγηση των μοτίβων, παρόλο που μπορούσε ορθά να συμπληρώσει τα επόμενα στοιχεία. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με παλαιότερα ευρήματα, σε μαθητές 11 και 15 ετών (APU, 1982 στο Hargreaves κ.ά., 1998). Άξιο αναφοράς κρίνεται ότι ο Σταύρος αντιμετώπισε το έργο καθαρά οπτικά, χωρίς να δείχνει ότι συλλογίζεται πάνω στους αριθμούς όπως ο Δήμος, παρόλο που ο Σταύρος χρησιμοποίησε ιδιαίτερα την ανάλυση αριθμών στα προηγούμενα έργα.

Αναφορικά με τον Ιορδάνη, στην αρχή επιχείρησε ανεπιτυχώς να μιλήσει για τα δοθέντα σχήματα με λόγους που τα συνδέουν («το πρώτο είναι το ένα τρίτο του τρίτου, το δεύτερο είναι τα δύο τρίτα του τρίτου»). Στη συνέχεια της συνέντευξης υπολόγισε τα τετραγωνάκια και είπε ορθά ότι το πρώτο είναι το ένα πέμπτο του τρίτου, ενώ το δεύτερο είναι το ένα δεύτερο του τρίτου. Μετά από ορισμένες προσπάθειες να κατασκευάσει επόμενο στοιχείο συμπληρώνοντας τετράγωνα πάνω σε προηγούμενο, ο Ιορδάνης παροτρύνθηκε από την ερευνήτρια να μιλήσει για τις γραμμές (τις σειρές) και τις στήλες των στοιχείων. Υπολόγισε τις σειρές και τις στήλες κάθε στοιχείου και κατέγραψε αυτό που παρατήρησε. Αυτό βοήθησε τον Ιορδάνη να επιστρέψει στην κατασκευή των σχημάτων και να την υλοποιήσει σωστά.

Φαίνεται συνολικά να μην υπάρχει σημαντική διαφορά στον εντοπισμό των ερμηνειών ανάμεσα στους μαθητές της Δ’ και της Ε’ τάξης. Αναφορικά με τους υπολογισμούς, οι μαθητές της Ε’ δημοτικού δείχνουν μεγαλύτερη ευχέρεια στη χρήση πολλαπλασιασμού, γεγονός που φαίνεται φυσιολογικό λόγω της εξοικείωσής τους με αυτόν.

Τέλος, στο έργο αυτό οι μαθητές χρησιμοποίησαν αποκλειστικά προσθετικές δομές για να εξηγήσουν τον κανόνα του μοτίβου, ενώ στην απαρίθμηση τετραγώνων παρουσιάστηκαν, σε γενικές γραμμές, οι στρατηγικές που αξιοποίησαν οι συμμετέχοντες στην απαρίθμηση κύβων. Αυτό υποδηλώνει ότι οι ομαδοποιήσεις στρατηγικών σε χωρικά και σε γεωμετρικά έργα παρουσιάζουν ομοιότητες και ενδεχομένως θα μπορούσαν να συσχετιστούν.

## 4.4. <u>Δραστηριότητα 4η (ορθογώνια διάταξη από τελείες)</u>

Ο τρόπος διάταξης των τελειών στο συγκεκριμένο έργο μπορεί να προκαλέσει σύγχυση κατά την απαρίθμησή τους, πράγμα που συνέβη σε αρκετούς συμμετέχοντες. Το έργο αυτό αντιμετωπίστηκε από τους μαθητές καθαρά οπτικά. Οι ορθά εφαρμοσμένες στρατηγικές απαρίθμησης των μαθητών μπορούν να ομαδοποιηθούν στον πίνακα που ακολουθεί. Έπεται η παρουσίαση και η ανάλυση ενδεικτικών περιπτώσεων.

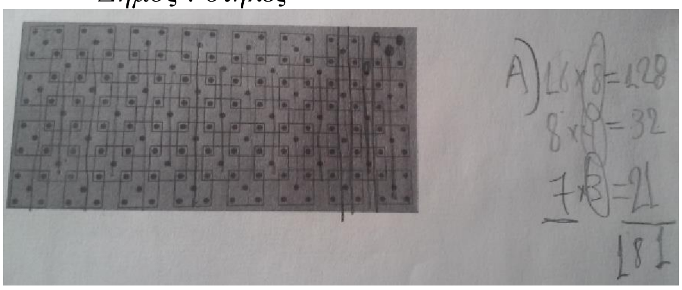
**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ** (Πίνακας 13)

| |
|---|
| *1. Μοναδιαίο μέτρημα* (Νώντας, Ειρήνη, Θάνος, Σταύρος, Δήμος, Ιορδάνης) |
| *2. Πολλαπλασιασμός και πρόσθεση: Συνδυασμός πεντάδων με μονάδες ή ομάδες μονάδων* (Σταύρος, Νώντας, Ειρήνη, Θάνος) |
| *3. Πολλαπλασιασμός και πρόσθεση: Συνδυασμός ομάδων εκτός πεντάδας* (Ιορδάνης, Δήμος) |
| *3. Διαγώνιοι σε ομάδες* (Ιορδάνης, Δήμος) |

Στην απαρίθμηση τελειών όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν πολλαπλασιαστικές σχέσεις σε συνδυασμό με προσθετικές. Επιπλέον, οι μαθητές εφάρμοσαν το μοναδιαίο μέτρημα τελειών, είτε ως μεμονωμένη στρατηγική είτε συνδυαστικά κατά τη διάρκεια υλοποίησης μίας άλλης. Μάλιστα, ορισμένοι το έκαναν ακόμα και στις περιπτώσεις που προέβλεπαν το πλήθος με βάση την επαναληψιμότητα της οπτικής πληροφορίας. Με κριτήριο την επαναληψιμότητα του τρόπου διάταξης των πεντάδων ο Θάνος ανέφερε ότι το σχήμα είναι μοτίβο.

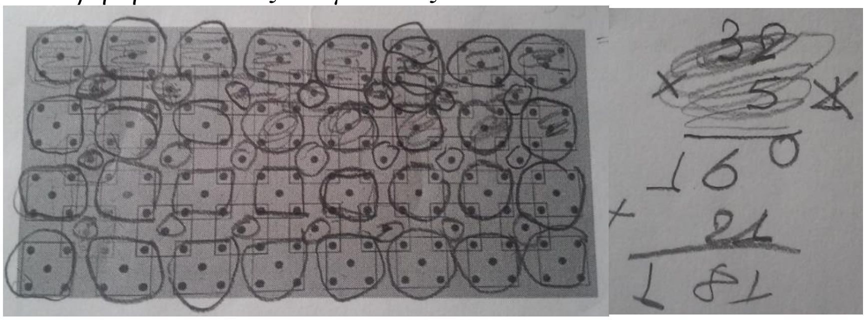
Οι τελείες αποκαλούνταν συχνά «κουκίδες» κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Για να τις απαριθμήσουν, οι συμμετέχοντες ομαδοποίησαν τις τελείες με διάφορους τρόπους: σε σειρές, σε στήλες, σε δυάδες, τριάδες τετράδες ή πεντάδες. Παρουσιάζονται ακολούθως ορισμένες στρατηγικές:

*Δήμος : στήλες*



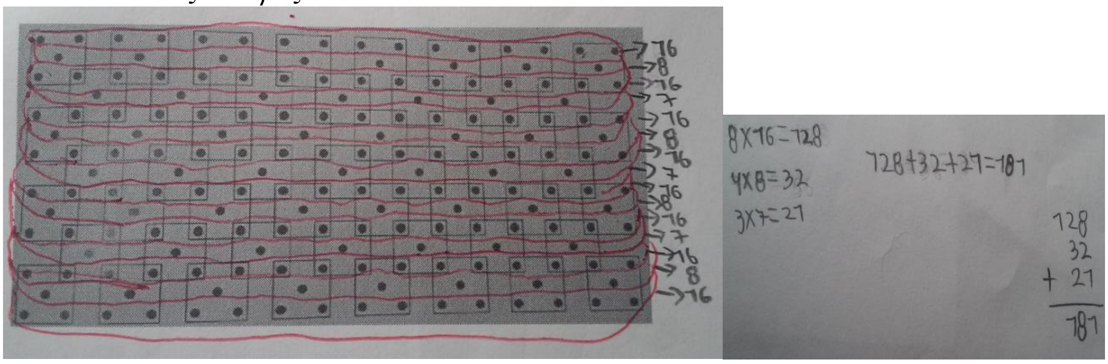

*Εικόνα 56*

*Ειρήνη : πεντάδες και μονάδες*



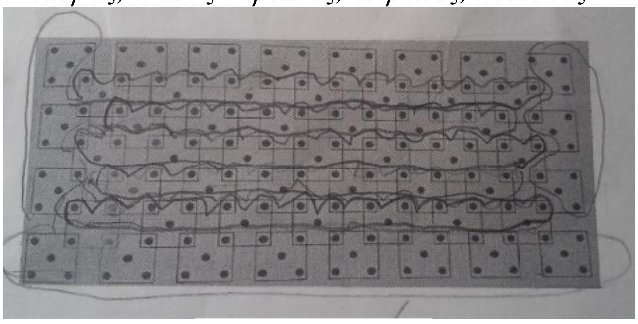

Εικόνα 57

*Νώντας : σειρές*



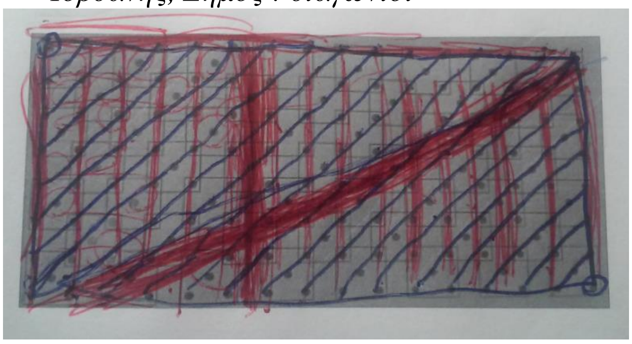

Εικόνα 58

*Σταύρος, Θάνος : τριάδες, τετράδες, πεντάδες*



Εικόνα 59

*Ιορδάνης, Δήμος : διαγώνιοι*



Εικόνα 60

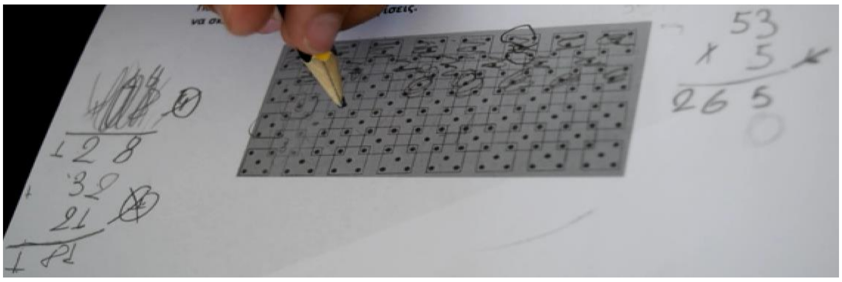
Όλοι οι συμμετέχοντες εκτός του Δήμου έσφαλαν σε υπολογισμούς τους, διπλομετρώντας τελείες. Για τους περισσότερους αυτό συνέβη από την πρώτη τους στρατηγική, όπου υπολόγισαν πλήθος από πεντάδες τελειών, όπως είναι διατεταγμένες σα ζάρια στο σχήμα. Ο Σταύρος παρατήρησε και είπε εξ αρχής ότι κάποιες τελείες ανήκουν ταυτόχρονα σε διαφορετικά τετράγωνα και ρώτησε αν αυτές μετράνε για μία φορά ή για δύο. Η ερευνήτρια τον ρώτησε πώς θα τις μετρούσε αν ήταν μόνος του, με βάση αυτό που φαίνεται κι εκείνος απάντησε ότι θα τις μετρούσε μια φορά, όπως και έπραξε. Ωστόσο, και ο ίδιος έκανε λάθη στο μέτρημα.

Δίνεται βαρύτητα στο ζήτημα του διπλομετρήματος τελειών, καθώς αποδείχθηκε ότι συσχετίστηκε άμεσα με τις στρατηγικές απαρίθμησης των μαθητών και κατά συνέπεια, επηρέασε τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που κατασκεύασαν. Συνηθέστερα η ερευνήτρια επέτρεπε την ολοκλήρωση των λανθασμένων υπολογισμών και παρότρυνε τους μαθητές για πρόταση άλλης στρατηγικής, προκειμένου να κάνουν συγκρίσεις και να αποφασίσουν ποια εκδοχή θεωρούν έγκυρη.

Όπου θεώρησε κατάλληλο η ερευνήτρια παρενέβαινε, είτε ρωτώντας τους συμμετέχοντες αν κάποια «ζάρια» είναι τελείως διαφορετικά μεταξύ τους είτε ζητώντας τους να κυκλώσουν τετράγωνα των οποίων οι τελείες να ανήκουν μόνο σε αυτά, (δηλαδή όχι τετράγωνα που αλληλεπικαλύπτονται). Εναλλακτικά, τους πρότεινε να σημειώνουν με κάποιο τρόπο τις τελείες που υπολογίζουν ώστε να διευκολυνθούν. Η ερώτηση σχετικά με τα τετράγωνα φάνηκε να τους βοήθησε να αντιληφθούν το λάθος.

### *Αλλαγή και διατήρηση στρατηγικής*

Θεωρείται άξιο παρουσίασης ένα απόσπασμα από τη συζήτηση με την Ειρήνη. Η Ειρήνη είχε διπλομετρήσει τελείες εφαρμόζοντας τη στρατηγική των πεντάδων και στη συνέχεια πρότεινε τη στρατηγική *σε σειρές* των 16, των 8 και των 7 τελειών. Παροτρύνθηκε από την ερευνήτρια να σημειώνει τις σειρές που υπολόγιζε, γιατί όπως φάνηκε δεν τις θυμόταν. Διαπίστωσε λοιπόν ότι δε βρήκε ίδια αποτελέσματα.




Εικόνα 61

…

*Ε: Ποιο πιστεύεις για σένα, είναι πιθανό, είναι πιο πιθανό να είναι σωστό; Και γιατί;*

*Ει: Αυτό (δείχνει αριστερά)…*

*Ε: Γιατί;*

*Ει: Α όχι, αυτό (δείχνει τις πεντάδες δεξιά). Γιατί, είχα μετρήσει όλα τα κουτάκια και μετά τα πολλαπλασίασα. Δε μέτραγα τις τελείες.*

*Ε: Μμ, μέτραγες τα κουτάκια ε; Ενώ στο άλλο τι έκανες;*

*Ει: Στο άλλο ήταν, πιο περίπλοκο.*

*Ε: Ωραία… να ρωτήσω κάτι. Στο πρώτο, ε, στο δεύτερο μάλλον, όπως το έκανες, όταν υπολόγιζες κάτι, που το έπαιρνες σειρά-σειρά, την έσβηνες κιόλας, ε*

*Ει: Μμ (γνέφει καταφατικά).*

*Ε: Και τελικά είδαμε ότι δεν έμεινε τίποτα. Στο πρώτο, στην πρώτη επιλογή που έκανες τετράγωνα, σβήναμε; Έσβηνες ό,τι υπολόγιζες για να δούμε αν φεύγει κάτι ή μένει κάτι, αν υπολογίζουμε κάτι δύο φορές;*

*Ει: Όχι.*

*Ε: Γενικά, για να το δούμε και εικόνα. Είναι σημαντική η εικόνα σε αυτό το έργο.*

*Ει: Απλά τα μέτραγα… και μετά έκανα τη, τον πολλαπλασιασμό.*

…

Είναι εμφανές ότι το μοντέλο που έχει στη σκέψη της η Ειρήνη για τις πεντάδες είναι τόσο ισχυρό, ώστε να είναι πιο αξιόπιστη στρατηγική για εκείνη από ό,τι οι υπολογισμοί των σειρών, στους οποίους συμφωνούσε ότι δεν είχε παραληφθεί κάτι από το σχήμα. Στο σημείο αυτό η ερευνήτρια της ζήτησε να βρει και να σκιάσει τα 53 τετράγωνα που ανέφερε και η μαθήτρια ξεκίνησε να σκιάζει.

…

*Ε: Όταν λέμε κουτάκι έχεις αποφασίσει και έχεις πει ότι ένα κουτάκι έχει πόσες κουκίδες;*

*Ει: Πέντε.*

*Ε: Πέντε. Άρα για να βρω αυτών των πενήντα τριών, λες πενήντα τρία επί πέντε. Σημαίνει κάθε κουκίδα είναι στο, στο κουτάκι.*

*Ει: Α (βλέμμα διαφωνίας).*

*Ε: Τι;*

*Ει: Πέντε κουκίδες είναι σ' ένα κουτάκι (δείχνει διαδοχικά το 5 και το 53 στην κάθετη πράξη).*

*Ε: Κι άμα μια κουκίδα είναι σε δυο κουτάκια;*

*Ει: Είναι και στα δύο.*

*Ε: Την υπολογίζω το ίδιο;*

*Ει: Όχι.*

*Ε: Αλλά;*

*Ει: (παύση για 5 δευτερόλεπτα)Την υπολογίζω για μία.*

*Ε: Μμ. Εδώ το 'χουμε κάνει για μία;*

*Ει: Όχι, το 'χουμε κάνει για δύο.*

…

Τελικά η Ειρήνη συνειδητοποίησε ότι ο τρόπος αυτός δεν της φαινόταν έγκυρος. Διατήρησε, ωστόσο, τη στρατηγική των πεντάδων και τη διόρθωσε, με διακριτές ομάδες τελειών (Εικόνα 57). Η Ειρήνη κατάφερε να διατηρήσει το γεωμετρικό μοτίβο των ζαριών και να το τροποποιήσει, αφού συνειδητοποίησε ότι διπλομετρούσε.

Και ο Νώντας διόρθωσε το λάθος του μετά από δεύτερη στρατηγική, διατηρώντας τις πεντάδες και ομαδοποιώντας τα υπολειπόμενα σε κατακόρυφες τριάδες. Ο Νώντας στη δεύτερη στρατηγική απαριθμούσε τελείες σε σειρές και δεν παρατήρησε ότι οι μικρότερες σε πλήθος τελειών πηγαίνουν εναλλάξ 8-7. Η ερευνήτρια τον ρώτησε αν έχει μετρήσει τις τελείες σε μία σειρά των 7 που της έδειχνε με το μολύβι του και τότε ο μαθητής είδε ότι έκανε λάθος. Σημειώνεται ότι και σε αυτό το έργο ο Νώντας εκδήλωσε ανήσυχη συμπεριφορά ορισμένες φορές, καθώς έκανε προφορικά νοερούς υπολογισμούς που μπορεί να τους διόρθωνε την ίδια στιγμή.

Η μόνη περίπτωση όπου η ερευνήτρια δεν ανέμενε την εφαρμογή νέας στρατηγικής από τον μαθητή ήταν αυτή του Θάνου, ο οποίος ανέφερε ότι το σχήμα είναι σαν μοτίβο από τετράγωνα «πάει 5-5», που είναι πιο έξω και μετά πιο μέσα στις σειρές, λέγοντας ότι «μετά κάνει πάλι το ίδιο». Ο Θάνος διέκρινε την επαναληψιμότητα στο σχήμα, βασικό στοιχείο που εντοπίζουν οι μαθητές για να χαρακτηρίσουν το μοτίβο (McGarvey, 2012). Αφότου ολοκλήρωσε την απαρίθμηση πεντάδων, η ερευνήτρια τον ρώτησε σχετικά με τα κοινά στοιχεία των τετραγώνων του σχήματος. Ο Θάνος διαπίστωσε ότι όλα έχουν τελείες που η μία είναι μέσα σε δύο τετράγωνα και η ερευνήτρια τον ρώτησε πώς τις υπολογίζει. Τότε διαπίστωσε το λάθος του και τροποποίησε τη στρατηγική του, διατηρώντας πεντάδες και εντάσσοντας τριάδες και τετράδες. Τέλος, ο Ιορδάνης ήταν ο μόνος που άλλαξε τη στρατηγική των πεντάδων απαριθμώντας κατακόρυφες οκτάδες και μοναδιαίες τελείες.

Ένα ακόμη γεγονός που παρατηρήθηκε είναι ότι ο Ιορδάνης, η Ειρήνη και ο ο Σταύρος εφάρμοσαν την πολλαπλασιαστική σχέση μήκος x πλάτος. Η Ειρήνη το εφάρμοσε ορθά σε τέσσερις σειρές των οκτώ πεντάδων και στη συνέχεια πρόσθεσε τις υπολειπόμενες τελείες.

Από την άλλη πλευρά, ο Ιορδάνης εφάρμοσε την πολλαπλασιαστική αυτή σχέση για να υπολογίσει την «περίμετρο», το «γύρω γύρω» του σχήματος όπως έδειξε, δηλαδή τις πεντάδες που διατάσσονται πάνω στις τέσσερις πλευρές. Αυτό υποδεικνύει σύγχυση ανάμεσα στην έννοια της περιμέτρου και του εμβαδού. Όταν του ζητήθηκε να μετρήσει ξανά τα ζάρια που είχε απομονώσει στο σχήμα για να ελέγξει τη στρατηγική του, ο Ιορδάνης επέμενε στον ίδιο πολλαπλασιασμό. Μόνο όταν του ζητήθηκε να τα απαριθμήσει ένα – ένα κατάλαβε ότι έκανε λάθος και οδηγήθηκε στον σωστό υπολογισμό, χωρίς όμως να μπορεί να εξηγήσει ποιο ήταν το λάθος. Με το μέτρημα ένα – ένα, η ερευνήτρια ρώτησε τον Ιορδάνη αν είχαν συμπεριληφθεί όλα τα τετράγωνα που είχε απομονώσει. Εκείνος εξέφρασε αβεβαιότητα για τις ενέργειές του λέγοντας ότι «μπορεί να λείπει κάτι». Κατέληξε στην πρόταση ότι η πράξη του είναι σωστή. Ο Ιορδάνης φάνηκε να δυσφορεί όταν οι στρατηγικές του οδηγούσαν σε λάθη, κάνοντας στη συνέχεια κινήσεις πιο έντονες. Η ερευνήτρια επεδίωκε να τον ενθαρρύνει ώστε να είναι ήρεμος και να συνεχίσει εστιασμένος σε αυτό που κάνει.

Παρατηρώντας τις στρατηγικές του Σταύρου, ήταν ο μόνος που πρότεινε και έδειξε την ομαδοποίηση τελειών με τρόπους που διπλομετρούνταν (ανά πέντε, ή συνδυασμούς ανάμεσα σε τριάδες, τετράδες, πεντάδες) αφαιρώντας στη συνέχεια τις διπλομετρημένες. Παρόλα αυτά, και ο Σταύρος προηγουμένως πρότεινε τον υπολογισμό πλήθους τελειών παραπάνω από μία φορές, υποδεικνύοντας λανθασμένη αποκωδικοποίηση του σχήματος. Επιδίωξε να πολλαπλασιάσει το πλήθος τελειών μίας σειράς τετραγώνων με το πλήθος τελειών μίας στήλης τετραγώνων και οδηγήθηκε σε έναν πληθικό αριθμό πολύ μεγαλύτερο από τον αρχικό, όπου τις απαρίθμησε μία προς μία. Η εφαρμογή νέας στρατηγικής (πεντάδες, τριάδες και τετράδες) τον βοήθησε να προσεγγίσει ορθά το αποτέλεσμα. Ωστόσο, ο Σταύρος δε βρήκε το λάθος του αξιοποιώντας τη γεωμετρική κατασκευή, αλλά με βάση το αριθμητικό δεδομένο που είχε στο νου ότι έπρεπε να βρει. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με ευρήματα των Battista κ. ά. (1995) σε έργα χωρικής κατασκευής με μαθητές 3ης, 4ης και 5ης τάξης.

Ωστόσο, ομαδοποιήσεις τελειών εντός των ζαριών πρότειναν όλοι. Η Ειρήνη πρότεινε ότι μπορεί να απαριθμήσει μία – μία ή δύο –δύο τις τελείες, ενώ ο Δήμος εξέφρασε σε συλλογισμό του οριζόντιες ή κατακόρυφες δυάδες, ομαδοποιημένες στη συνέχεια σε τετράδα. Ο Σταύρος έδειξε ακόμη ότι μπορεί να μετρήσει τις τελείες ομαδοποιώντας τις πεντάδες σε εικοσάδες (τέσσερα ζάρια μαζί). Δείχνοντας και μετρώντας εικοσάδες διαπίστωσε ότι έκανε λάθος, γιατί γνώριζε το αποτέλεσμα που έπρεπε να βγει. Ξαναμετρώντας τες, το διόρθωσε. Και σε αυτό το έργο πρότεινε να σπάσει τον αριθμό 5 σε 3 και 2, ή σε 1, 2 και 2, οριζόντια ή κατακόρυφα πάνω στο ζάρι, γεγονός εντελώς ανάλογο με τα σπασίματα αριθμών που έκανε και στα υπόλοιπα έργα.

Τέλος, οι μαθητές σε αυτό το έργο χρησιμοποίησαν διάφορα σημειωτικά συστήματα για να επικοινωνήσουν τις σκέψεις τους, αλλά και να αναπτύξουν τους συλλογισμούς τους: γλώσσα, ρυθμικό μέτρημα με το μολύβι πάνω στο σχήμα, σχήματα. Δείχνοντας ζάρια διαδοχικά, ο Θάνος και ο Σταύρος απαρίθμησαν ρυθμικά ανά 5, ο Ιορδάνης και η Ειρήνη απαρίθμησαν μονάδες πεντάδων, ενώ ο Νώντας και ο Δήμος μονάδες δυάδων. Μοναδιαίο μέτρημα τελειών σε όλο το σχήμα εφάρμοσαν ο Σταύρος και ο Θάνος, οι οποίοι προσέγγισαν πολύ το σωστό πλήθος αλλά έκαναν λάθος.

Αναδείχθηκαν πλούσιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις, αλλά και παρανοήσεις από τους μαθητές στη δραστηριότητα αυτή. Τα λάθη που έγιναν από τους συμμετέχοντες ήταν λάθη α) αποκωδικοποίησης του σχήματος β) επιστημολογικά (περίπτωση της περιμέτρου από τον Ιορδάνη) και β) αριθμητικών υπολογισμών. Εκτός των προηγούμενων παραδειγμάτων, αναφέρεται ακόμη το λάθος αντίληψης του σχήματος από τον Δήμο και ο τρόπος διαχείρισής του, κατά την απαρίθμηση τελειών στις στήλες. Εκεί ο Δήμος πρότεινε ότι υπάρχει επανάληψη 8 – 4 – 8 – 4 στο πλήθος τελειών. Παρατηρώντας το σχήμα είπε «Όπα»˙ άρχισε να απαριθμεί μία-μία τελεία στις στήλες, χάραξε κατακόρυφες γραμμές και εφάρμοσε αρκετές φορές ακόμη το μοναδιαίο μέτρημα. Έτσι, κατάλαβε μόνος του το λάθος λέγοντας «8 – 4 – 8 – 3». Η διαπίστωση αυτή τροποποίησε την πολλαπλασιαστική σχέση που είχε κατασκευάσει προηγουμένως ο Δήμος. Κάποια στιγμή στη συνέχεια, σημείωσε με το μολύβι τα διαφορετικά ύψη τριών διαδοχικών στηλών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκαν στρατηγικές απαρίθμησης μαθηματικών αντικειμένων σε έργα που υπάγονται σε διαφορετικά μαθηματικά πεδία, καθώς και οι συνδέσεις αυτών των στρατηγικών με πολλαπλασιαστικές δομές και μοτίβα. Για τον σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν τέσσερις δραστηριότητες: μία χωρικού τύπου αποτυπωμένη δισδιάστατα, μία αριθμητικού τύπου και δύο γεωμετρικού τύπου. Τις δραστηριότητες αυτές επεξεργάστηκαν τρεις μαθητές της Δ’ δημοτικού και τρεις μαθητές της Ε’ δημοτικού υψηλού επιπέδου στα σχολικά μαθηματικά, σε τρεις φάσεις-προσωπικές συνεντεύξεις με τον καθένα. Όλες οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να επιδέχονται διαφορετικές προσεγγίσεις, αριθμητικές και γεωμετρικές.

Κεντρικοί πυλώνες στην επεξεργασία των δραστηριοτήτων ήταν η διερεύνηση, η κατασκευή και η οπτικοποίηση. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να αναπτύξουν και να εκφράσουν συλλογισμούς και ενθαρρύνονταν να αναστοχάζονται πάνω σε αυτούς. Ακολούθως παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν, σε σύνδεση με τα ερευνητικά ερωτήματα. Στις υποενότητες 5.2., 5.3. παρουσιάζονται κοινοί τύποι λαθών, κοινές στρατηγικές απαρίθμησης και κοινά σημειωτικά μέσα που αναδείχθηκαν μέσα από την ανάλυση των δεδομένων στα διαφορετικά έργα.

## 5.1. Εντοπισμός μοτίβων απαρίθμησης και πολλαπλασιαστικές δομές

Αναφορικά με την πρώτη δραστηριότητα, αναδείχθηκαν ποικίλες εναλλακτικές στρατηγικές απαρίθμησης που εντάσσονται στο μοντέλο της Anghileri (1997), αλλά και συνδυασμοί των κατηγοριών του μοντέλου, όπως διαπίστωσε σε έρευνα με τρισδιάστατες διατάξεις κύβων η Finesilver (2017). Κυρίαρχος ήταν ο συνδυασμός του πολλαπλασιασμού με πρόσθεση / προσπέραση κατά το μέτρημα. Οι μαθητές της Δ’ δημοτικού βασίστηκαν στο οπτικό ερέθισμα για να διαμερίσουν το συνολικό πλήθος κύβων, ενώ οι μαθητές της Ε’ δημοτικού εκτός της οπτικής πληροφορίας αξιοποίησαν και την αριθμητική ιδιότητα του διαιρέτη. Η Ειρήνη της Δ’ δημοτικού χρησιμοποίησε συχνά την διαδοχική πρόσθεση ισοπληθών ομάδων στις πράξεις της και το μοναδιαίο μέτρημα των κύβων για να τους υπολογίσει, μία στρατηγική που χρησιμοποιείται συχνά ως βέβαιη για να βρεθεί το αποτέλεσμα (Finesilver, 2017). Ο Νώντας και ο Θάνος κατέγραψαν περισσότερο πολλαπλασιασμούς. Ωστόσο, ο Θάνος εκδήλωνε αβεβαιότητα καθώς μιλούσε για τους κύβους που δε φαίνονταν στο σχήμα και στον αρχικό προφορικό υπολογισμό του πλήθους συχνά χρησιμοποιούσε προσθετικές σχέσεις. Από την άλλη πλευρά, ο Νώντας έδειξε συνολικά μεγαλύτερη σιγουριά μιλώντας για τα «πίσω στρώματα» του σχήματος, εκτελώντας πολλαπλασιασμούς σειρών ή στηλών με άνεση.

Οι δύο εκ των τριών μαθητών της Ε’ δημοτικού, ο Δήμος και Σταύρος, μίλησαν για τους διαιρέτες και τα πολλαπλάσια ενός αριθμού και έχοντας υπολογίσει και επιβεβαιωθεί στις αρχικές τους στρατηγικές για το συνολικό πλήθος κύβων σε κάθε σχήμα, διατύπωναν και εντόπιζαν νέους τρόπους διαίρεσης βάσει διαιρετών, κι ας μην ήταν οπτικά ομοιόμορφες διατάξεις. Έτσι, οδηγήθηκαν σε πλήθος πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή φαίνεται πως αναχαίτισε τον Σταύρο κατά έναν τρόπο, από το να αναζητήσει εναλλακτικές ομαδοποιήσεις και είναι κάτι που δήλωσε και ο ίδιος. Αντίθετα, ο Δήμος εκτός των στρατηγικών απαρίθμησης βάσει διαιρετών, εντόπισε περισσότερες πολλαπλασιαστικές σχέσεις κοιτώντας το σχήμα, σε σχέση με τον Σταύρο, και μάλιστα αναφέρθηκε σε σχέσης ισοδυναμίας. Η διαπίστωση αυτή στηρίζεται σε πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Τέλος, ο Ιορδάνης εφάρμοσε σε γενικές γραμμές στρατηγικές όπως οι μαθητές της Δ’ δημοτικού, χωρίς την αξιοποίηση του διαιρέτη. Παρόλα αυτά, η ιδιότητά του αξιοποιήθηκε υπόρρητα σε μία περίπτωση απαρίθμησης, ως εργαλείο που βοήθησε τον Ιορδάνη να επαληθεύσει ότι οι ομάδες του «βγαίνουν ακριβώς».

Στη δεύτερη δραστηριότητα, οι μαθητές εξέφρασαν κανόνες των μοτίβων και στρατηγικές εύρεσης των επόμενων στοιχείων που στηρίχθηκαν κυρίως στην παρατήρηση των διαφορών μεταξύ ζευγαριών από στοιχεία, όπως διαπιστώθηκε και στην έρευνα των Hargreaves κ.ά. (1998) σε μαθητές 3ης έως 6ης τάξης. Όλοι οι μαθητές πρότειναν μία τουλάχιστον προσθετική ερμηνεία κάθε μοτίβου. Αναφορικά με το πρώτο μοτίβο, ο Θάνος και η Ειρήνη της Δ’ δημοτικού έκαναν ακόμη την οπτική διαπίστωση ότι *οι μονάδες μένουν πάντα σταθερές ενώ οι δεκάδες ανεβαίνουν 1 κάθε φορά*, που είναι μία πρώτη ανάγνωση του μοτίβου. Η Ειρήνη ωστόσο οδηγήθηκε και σε πολλαπλασιαστική σχέση, με μεγαλύτερη ευκολία από τον Νώντα αυτή τη φορά. Ο Νώντας εγκλωβίστηκε διατυπώνοντας δύο παρόμοιες αριθμητικές ακολουθίες ˙χρειάστηκαν εκ νέου έλεγχος και κάθετοι υπολογισμοί για να οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα.

Σχετικά με τους μαθητές της Ε’ δημοτικού, και ο Σταύρος με τον Δήμο πρότειναν πολλαπλασιαστική σχέση στο πρώτο μοτίβο. Ο Σταύρος μπορούσε με ευχέρεια να αναλύει τον προσθετέο σε ζευγάρια παραγόντων, ενώ ο Δήμος οδηγήθηκε στην κατασκευή αλγεβρικής έκφρασης, εύρημα αξιόλογο δεδομένης της ηλικίας του. Χρειάστηκε η παρέμβαση της ερευνήτριας για την ορθή μετάφραση του «=», η οποία βοήθησε τον Δήμο να κατανοήσει το λάθος του. Ο Δήμος με τον Σταύρο επιδίωξαν να σχηματίσουν πολλαπλασιαστική σχέση στο δεύτερο μοτίβο, εξετάζοντάς την είτε εντός των στοιχείων της ακολουθίας είτε εντός των διαφορών μεταξύ τους, αλλά δεν το κατάφεραν. Οι στρατηγικές του Ιορδάνη εμπίπτουν στις προαναφερθείσες. Ο Ιορδάνης ήταν ο μόνος που λεκτικοποίησε τον κανόνα χρησιμοποιώντας τη «διαφορά» μεταξύ διαδοχικών στοιχείων σε αυτόν.

Οι ερμηνείες του γεωμετρικού μοτίβου ήταν καθαρά προσθετικής φύσης, είτε με βάση οπτικό ερέθισμα, η με συνδυασμό οπτικού και αριθμητικού ερεθίσματος. Η Ειρήνη ήταν η μόνη που ενσωμάτωσε στο νέο στοιχείο το προηγούμενο στοιχείο οπτικά και πρόσθετε διαδοχικά μονούς αριθμούς σε κάθε νέο στοιχείο, ενώ οι περισσότεροι μαθητές (Νώντας, Ιορδάνης, Θάνος, Σταύρος) διαπίστωσαν την προσθήκη γραμμής και στήλης κάθε φορά. Ο Δήμος στηρίχθηκε στη μοναδιαία αύξηση των τετραγώνων της διαγωνίου και για τον κανόνα του μοτίβου και για την απαρίθμηση τετραγώνων, ενώ στη συνέχεια εντόπισε και αριθμητικό μοτίβο μέσα στο γεωμετρικό.

Κοινός τόπος για τα μοτίβα ήταν η δυσκολία επαρκούς λεκτικοποίησης των κανόνων τους, όπως έχει βρεθεί και σε προηγούμενες έρευνες (Warren κ.ά., 2008˙ Noss, Healy και Hoyles, 1997). Επιπρόσθετα, από τις επεκτάσεις συζητήσεων της ερευνήτριας με ορισμένους από τους μαθητές αποδείχθηκε δύσκολο για αυτούς να διατυπώσουν τον κανόνα υπολογισμού τυχαίου στοιχείου της ακολουθίας. Το εύρημα συμφωνεί με άλλα της διεθνούς βιβλιογραφίας (McGarvey, 2012˙ Lannin, 2005). Επισημαίνεται, ωστόσο, ότι δεν ήταν σκοπός της παρούσας έρευνας η διατύπωση κανόνων υπολογισμού τυχαίου στοιχείου της ακολουθίας από τους μαθητές.

Οι στρατηγικές υπολογισμού του πλήθους τετραγώνων παρουσίασαν ομοιότητες για τους μαθητές, με κυρίαρχο τον συνδυασμό πολλαπλασιασμού σειράςχστήλη και πρόσθεσης των υπολειπόμενων. Επιπρόσθετα, ο Νώντας και ο Σταύρος πρότειναν την πρόσθεση ανά σειρά και το νοερό «κόψιμο» του σχήματος στη μέση. Ο Σταύρος έδειξε μεγαλύτερη ευχέρεια στον νοερό χειρισμό του σχήματος προτείνοντας ακόμη δύο τρόπους «κοψίματος». Στρατηγικές νοερού μοιράσματος του σχήματος στα δύο ήταν και οι μοναδικές που πρότειναν αποκλειστικά πολλαπλασιαστική στρατηγική απαρίθμησης, χωρίς συνδυασμό με την πρόσθεση. Τέλος, αναδείχθηκε συχνά συσχέτιση του πλήθους ομοίων αντικειμένων που συνθέτουν ένα στοιχείο της εκάστοτε ακολουθίας, με τον τακτικό αριθμό του στοιχείου σε αυτήν, είτε ρητά είτε υπόρρητα από τους συμμετέχοντες (Lannin, 2009˙ Warren κ.ά., 2008).

Στην τέταρτη δραστηριότητα παρουσιάστηκαν ποικίλες στρατηγικές ομαδοποίησης των τελειών από τους μαθητές, ορθές είτε εξ αρχής είτε μετά από τροποποίηση λανθασμένων στρατηγικών. Και εδώ επικρατέστερος τρόπος υπολογισμού του πλήθους αντικειμένων είναι ο συνδυασμός πολλαπλασιασμού με πρόσθεση. Η Ειρήνη απαρίθμησε δημιουργώντας διαφορετικούς συνδυασμούς μονάδων σύνθεσης, όπου γραπτά χρησιμοποιούσε περισσότερο την πολλαπλασιαστική πράξη σε σχέση με το πρώτο έργο και εφάρμοσε την προσθετική όταν έπρεπε να κάνει πράξη με διψήφιους ή διψήφιους και τριψήφιο. Αυτό πιθανόν να συνδέεται με το γεγονός ότι στο σχήμα αυτό τα αντικείμενα προς απαρίθμηση ήταν περισσότερα.

Το χώρισμα του σχήματος σε σειρές ή στήλες και ο πολλαπλασιασμός των ίσων με το πλήθος τους ήταν μία στρατηγική πολλαπλασιαστικής φύσης της Ειρήνης, του Νώντα και του Δήμου, ενώ ο Θάνος βασίστηκε κυρίως στην υπάρχουσα (οπτικά) ομαδοποίηση σε πεντάδες, για να κάνει συνδυασμό με άλλες μονάδες σύνθεσης. Το «πάτημα» στην πεντάδα αξιοποιήθηκε από όλους εκτός από τον Δήμο. Μόνο ο Σταύρος διέκρινε χωρίς παρότρυνση ότι κάποιες τελείες διπλομετρούνται και τις αφαιρούσε από του υπολογισμούς του, ωστόσο προκαλεί εντύπωση το γεγονός ότι ενώ ανέλυσε τις πεντάδες σε μικρότερες μονάδες σύνθεσης δεν αναφέρθηκε στη χρήση διαιρέτη ή πολλαπλάσιου στις στρατηγικές του. Επιπρόσθετα, παρά το γεγονός ότι διέκρινε μόνος του το διπλομέτρημα τελειών, σε ορισμένες στρατηγικές του διπλομέτρησε και χρειάστηκε να εφαρμόσει εναλλακτικές για να το διαπιστώσει. Η σύγχυση του Σταύρου ενδεχομένως να συνδέεται με την πυκνότητα των τελειών στο σχήμα.

Ο Δήμος με τον Ιορδάνη ανέδειξαν τον συνδυασμό πολλαπλασιαστικής δομής με προσθετική δομή ομαδοποιώντας διαγωνίους από τελείες. Αξίζει να αναφερθεί ότι μία πρότερη στρατηγική του Ιορδάνη, για την οποία χρειάστηκε χρόνο, χρειαζόταν διόρθωση και μετά τη διόρθωσή της οδηγήθηκε ξανά σε εσφαλμένη απαρίθμηση. Αυτό φάνηκε ότι του προκάλεσε νευρικότητα και ανακουφίστηκε ιδιαίτερα όταν ολοκλήρωσε τη στρατηγική των διαγωνίων, γιατί ήταν ένας τρόπος να ελέγξει άλλη στρατηγική του.

### 5.2. Τύποι λαθών: ομοιότητες και εξέλιξη λανθασμένων στρατηγικών

Οι τύποι λαθών των μαθητών έχουν ομοιότητες στις τέσσερις δραστηριότητες. Υπήρξαν λάθη εκφραστικά (π.χ. περιγραφή μοτίβου ή στρατηγικής μέτρησης), επιστημολογικά (π.χ. «=»), αριθμητικού υπολογισμού ή ανάκτησης (κυρίως σε νοερές πράξεις) και κατασκευής (π.χ. σχεδιασμός επόμενου στοιχείου, υπολογισμός εδρών αντί κύβων). Τα λάθη κατασκευής αφορούν το χωρικό μοτίβο και τα γεωμετρικά μοτίβα, καθώς οι μαθητές δεν έκαναν λάθος στην κατασκευή των επόμενων δύο στοιχείων στα αριθμητικά μοτίβα. Τα παραπάνω αποτελούν μία σύνθεση των τύπων λαθών σε χωρικές διατάξεις που συναντώνται στο μοντέλο της Finesilver (2017) με δυσκολίες και λάθη που εντοπίζονται στον χειρισμό μοτίβων και στον μαθηματικό συμβολισμό στη διεθνή βιβλιογραφία (Warren και Cooper, 2008˙ Blanton κ.ά., 2018˙ Alibali κ.ά., 2007). Στην περίπτωση της χωρικής κατασκευής, σημειώνεται ότι όλοι οι μαθητές της Δ' δημοτικού παρουσίασαν σε κάποιο σημείο λανθασμένη αντίληψη του σχήματος, όπου χρειάστηκαν παρότρυνση για να το παρατηρήσουν, κάτι που δε συνέβη με τον Δήμο της Ε' δημοτικού.

Αναφορικά με τη διαχείριση εσφαλμένων στρατηγικών από τους μαθητές, σε όλα τα έργα εντοπίστηκαν λάθη που αφορούσαν στην αποκωδικοποίηση των σχημάτων για το χωρικό έργο και για τα γεωμετρικά έργα και στην αποκωδικοποίηση του μοτίβου που επαναλαμβάνεται στη μία εκ των αριθμητικών ακολουθιών. Όπως παρουσιάστηκε στα αποτελέσματα, στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές σύγκριναν τις στρατηγικές αυτές με άλλες που είχαν ήδη εφαρμόσει (π.χ. Σταύρος, Ειρήνη στο χωρικό έργο) ή με νέες που εφάρμοσαν στη συνέχεια (π.χ. Ιορδάνης, Ειρήνη στο γεωμετρικό και στο χωρικό μοτίβο αντίστοιχα). Σε άλλη περίπτωση, τροποποίησαν τη στρατηγική αναστοχαζόμενοι κατά την υλοποίηση της ίδιας (Θάνος, Δήμος στο χωρικό και στο δεύτερο γεωμετρικό έργο αντίστοιχα). Στις περισσότερες εσφαλμένες στρατηγικές, οι συμμετέχοντες κατάφεραν να εντοπίσουν το λάθος και να τις τροποποιήσουν ή να αλλάξουν στρατηγική, ενώ σε άλλες οι μαθητές οδηγήθηκαν σε αδιέξοδο (όπως ο Σταύρος στο δεύτερο αριθμητικό μοτίβο, η Ειρήνη στο χωρικό έργο). Επιπρόσθετα, σε ορισμένες περιπτώσεις ο έλεγχος λαθών στα αριθμητικά αποτελέσματα έγινε με εστίαση στη σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων, και όχι στον επανέλεγχο του σχήματος, εύρημα που συμφωνεί με αυτά των Battista κ.ά. (1995).

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τον αναστοχασμό πάνω στις ενέργειές τους, ο Νώντας ο Σταύρος και ο Δήμος ήταν περισσότερο θετικά διακείμενοι συγκριτικά με την Ειρήνη, τον Θάνο και τον Ιορδάνη.

## 5.3. Ομοιότητες στρατηγικών απαρίθμησης στα έργα

Παρατηρήθηκαν ορισμένες κοινές στρατηγικές απαρίθμησης μαθηματικών αντικειμένων στους τρεις τύπους έργων, οι οποίες μπορούν να ομαδοποιηθούν ως εξής: το *μοναδιαίο-ρυθμικό μέτρημα*, ο *πολλαπλασιασμός*, ο *συνδυασμός πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης* και η *πρόσθεση με προσπέραση κατά το μέτρημα*. Στην τελευταία κατηγορία εντάσσονται προσθετικές πράξεις όπου δεν είναι μοναδιαίο το μέτρημα. Αναδείχθηκε ο κυρίαρχος ρόλος της πολλαπλασιαστικής σκέψης, της προσθετικής και συνδυασμός των δύο στις στρατηγικές των μαθητών. Φάνηκε ακόμη σε διάφορες εκφάνσεις η μετάφραση του πολλαπλασιασμού ως πράξη επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (Larsson κ.ά., 2017˙ Brown κ.ά., 2010). Και στους τρεις τύπους έργων οι μαθητές αξιοποίησαν διάφορα σημειωτικά μέσα για να αναπτύξουν τους συλλογισμούς τους όπως είναι η γλώσσα, τα σχήματα, οι χειρονομίες και τα ρυθμικά χτυπήματα του μολυβιού πάνω στα μαθηματικά αντικείμενα. Όπως χαρακτηρίζει ο Radford (2006), αυτά αποτέλεσαν σημειωτικά μέσα *αντικειμενοποίησης* για τους μαθητές, κατά την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων.

## 5.4. Προτάσεις – Επεκτάσεις για μελλοντική έρευνα

Μέσα από την παρούσα έρευνα αναδείχθηκαν ομοιότητες αλλά και διαφορές στους συλλογισμούς και στους τρόπους έκφρασης μαθητών Δ’ και Ε’ τάξης δημοτικού, που ενεπλάκησαν σε διάφορα έργα και απαρίθμησαν με ποικίλους τρόπους μαθηματικά αντικείμενα.

Κατά τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων και την ανάλυση των δεδομένων εντοπίστηκαν δυσκολίες, συχνά και ανεπάρκεια στην εξήγηση των συλλογισμών των μαθητών από τους ίδιους. Καθώς η εξήγηση των συλλογισμών επικοινωνείται με τον λόγο, το εύρημα ενδέχεται να συσχετίζεται με την κατανόηση προβλήματος στα μαθηματικά. Μέσα από την υπόθεση αυτή, προτείνεται η αξιοποίηση λεκτικών προβλημάτων σε πολλαπλές μαθηματικές καταστάσεις. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να κάνουν όσο το δυνατόν περισσότερες συνδέσεις της φυσικής γλώσσας με το μαθηματικό περιεχόμενο, νοητικά και πρακτικά. Μία ακόμη κοινή διαπίστωση σε ορισμένους μαθητές ήταν η λανθασμένη χρήση του συμβόλου της ισότητας, όταν εκτελούσαν πράξεις διαδοχικά. Αυτό υποδεικνύει λανθασμένη νοηματοδότηση του συμβόλου και θα ήταν ωφέλιμο να διερευνηθεί ο τρόπος που νοηματοδοτούν και οι εκπαιδευτικοί μαθηματικά σύμβολα μέσα από διάφορες διδακτικές πρακτικές.

Επιπρόσθετα, οι συνεντεύξεις με τους συμμετέχοντες στην έρευνα ανέδειξαν περιορισμένες αναπαραστάσεις των μοτίβων, νοητικές και οπτικές. Κανένας μαθητής δεν επιδίωξε να αντιμετωπίσει σχηματικά τα αριθμητικά μοτίβα για να οδηγηθεί σε κάποιο συμπέρασμα και μόνο ο Δήμος παρατήρησε αριθμητικό μοτίβο μέσα στο γεωμετρικό. Επιπρόσθετα, σε περιορισμένες περιπτώσεις έγινε από τους μαθητές συσχέτιση της δομής του πρώτου στοιχείου των ακολουθιών (αριθμητικών και γεωμετρικών) με τον κανόνα τους. Το τελευταίο εύρημα έχει παρουσιαστεί και από τον Lannin (2009). Επισημαίνεται διότι μπορεί να συνεισφέρει στη βαθύτερη κατανόηση της κατασκευαστικής δομής ενός μοτίβου, και κατ' επέκταση κρίνεται σημαντική η συνεκτίμησή του στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η παρουσίαση πολλαπλών αναπαραστάσεων ενός μαθηματικού αντικειμένου στους μαθητές, αλλά και η παρότρυνση για εξέταση του πώς μοιάζουν, πώς διαφέρουν, πώς συνδέονται, μπορεί να τους βοηθήσει ιδιαίτερα στην κατασκευή νοήματος. Στην προκειμένη περίπτωση, η εμπλοκή με έργα απαρίθμησης ενθαρρύνει την κατασκευή πλούσιων σχέσεων, προσθετικής και πολλαπλασιαστικής φύσης. Η ικανότητα πολλαπλών προσεγγίσεων μίας μαθηματικής κατάστασης έχει αναγνωριστεί εξέχων δείκτης εννοιολογικής κατανόησης (NCTM, 2001 στο Cromley, Booth, Wills, Chang, Tran, Madeja, Shipley και Jahners, 2017)..

Ένας περιορισμός της παρούσας έρευνας είναι ότι το δείγμα δεν επιλέχθηκε τυχαία, αλλά αποτελείτο από μαθητές υψηλού επιπέδου στα σχολικά μαθηματικά. Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσαν να διερευνηθούν οι συλλογισμοί μαθητών με χαμηλές σχολικές επιδόσεις, ή οι συλλογισμοί μαθητών χαμηλών και υψηλών επιδόσεων μαζί, ώστε να γίνουν συνδέσεις μεταξύ των ευρημάτων. Ενδιαφέρον θα ήταν να ληφθούν υπόψη διαφοροποιήσεις των συμμετεχόντων και ως προς την αντίληψη του χώρου και ως προς την αποτελεσματικότητα σε νοερούς υπολογισμούς.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ξενόγλωσσες

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A Longitudinal Examination of Middle School Students' Understanding of the Equal Sign and Equivalent Equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221-247.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367-385.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). In D. Pitta-Pantazi & C. Philippou (Eds.), Proceedings *of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (844-851). Larnaca, Cyprus.

Battista, M. T. (2004). Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185-204.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Enumerating Cubes in 3-D Arrays: Students' Strategies and Instructional Progress. In *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter for the Psychology of Mathematics Education* (1, 192-198). Columbus, Ohio.

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, G. L. Cortina, M Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2, 95-101). Mérida, México.

Bektasli, B. (2006). The relationships between spatial ability, logical thinking, mathematics performance and kinematics graph interpretation skills of 12th grade physics students. (phD thesis). The Ohio State University. Ohio.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – a review. *Educational Studies in mathematics*, 11, 257-269.

Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3), 167-201.

Brown, M., Küvhermann, D., & Hodgen, J. (2010). The struggle to achieve multiplicative reasoning 11-14. In M. Joubert & P. Andrews (eds.), *Proceedings of the 7th British Congress for Mathematics Education* (30, 49-56). Manchester, England.

Caglayan, G. (2014). Visualizing number sequences: Secondary preservice mathematics teachers' constructions of figurate numbers using magnetic color cubes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 110-128.

Cambridge English Dictionary online

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM*, 37(1), 53-59.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 201-217.

Colom, R., Contreras, M. J., Botella, J., & Santacreu, J. (2001). Vehicles of spatial ability. *Personality and individual Differences*, 32, 903-912.

Cromley, J. G., Booth, J. L., Wills, T. W., Chang, B. L., Tran, N., Madeja, M., Shipley, T. F., & Zahner, W. (2017). Relation of Spatial Skills to Calculus Proficiency: A Brief Report. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(1), 55-68.

English, L. D. (1997). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*. Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

Finesilver, C. (2017). Between Counting and Multiplication: Low-Attaining Students' Spatial Structuring, Enumeration and Errors in Concretely-Presented 3D Array Tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(2), 95-114.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the Psychology in Mathematics Education* (1, 3-19). Valencia, Spain.

Hargreaves, M., Taylor, D. S., & Threlfall, J. (1998). Children’s Strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24 (3), 315-331.

Harries, T., & Barmby, P. (2008). Representing and Understanding Multiplication, *Research in Mathematics Education*, 9(1), 33-45.

Heege, H. T. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 375-388.

Höffler, T. N. (2010). Spatial Ability: Its Influence on Learning with Visualizations-a Meta-Analytic Review. *Educational Psychology Review*, 22, 245-269.

Kornilaki, E. (1999). Young children’s understanding of multiplicative concepts. A psychological approach (phD thesis). University of London, London.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.

Larsson, K., Pettersson, K., & Andrews, P. (2017). Students’ conceptualizations of multiplication as repeated addition or equal groups in relation to multi-digit and decimal numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 1-13.

Mayer, R. E., & Sims, V. K. (1994). For Whom Is a Picture Worth a Thousand Words? Extensions of a Dual-Coding Theory of Multimedia Learning. *Journal of Educational Psychology*, 86(3), 389-401.

McGarvey, L. M. (2012). What is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 310-337.

Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children’s difficulties in mathematics learning. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 16(1), 19-39.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2018). Transformations in the Visual Representation of a Figural Pattern. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(2), 91-107.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203-233.

Park, J. H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication, *Cognitive Development*, 16, 763-773.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2009). Students' 3d geometry thinking profiles. In V. D. Guerrier, S. S. Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of 6th Conference of European Research in Mathematics Education* (316-325). Lyon, France.

Pittalis, M., & Christou, C. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 673-689.

Presmeg, N. C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (205-235). Rotterdam, the Netherlands.

Pylyschyn, Z. W. (1973). What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of mental imagery. *Psychological Bulletin*, 80(1), 1-24.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, G. L. Cortina, M Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology in Mathematics Education* (1, 2–21). Mérida, México.

Resnick, M. D. (1982). Mathematics as a science of patterns: Epistemology. *Noûs*, 16 (1), 95-105.

Rivera, F. D. (2010: published online in 2009). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 297-238.

Sasman, M. C., Linchevski, L., & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalization thinking processes. In J. Kuiper (Ed.), *Proceedings of the 7th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (406-415). Harare, Zimbabwe.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades'.  Journal of Mathematics Teacher Education, 1, 127-155.

Tanisli, D., & Özdaş, A. (2009). The Strategies of Using the Generalizing Patterns of the Primary School 5th Grade Students. Educational Sciences: Theory & Practice, 9(3), 1485-1497.

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. University of Chicago Press: Chicago.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 56-71.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185.

Wittmann, E. C. (2005). Mathematics as the Science of Patterns – A Guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood. Plenary Lecture at the *International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood". Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques* in collaboration with the *Institut de mathématique de l'Université de Mons-Hainaut*. Mons, Belgium.

Ελληνικές

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Ελλάδα: Τόπος.

Λάμπρου, Μ. και Σπανουδάκης, Ν. Κ. (2014). *Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους. Τόμος 8*. Κρήτη, Ελλάδα: Καγκουρό Ελλάς.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παρατίθενται ενδεικτικά

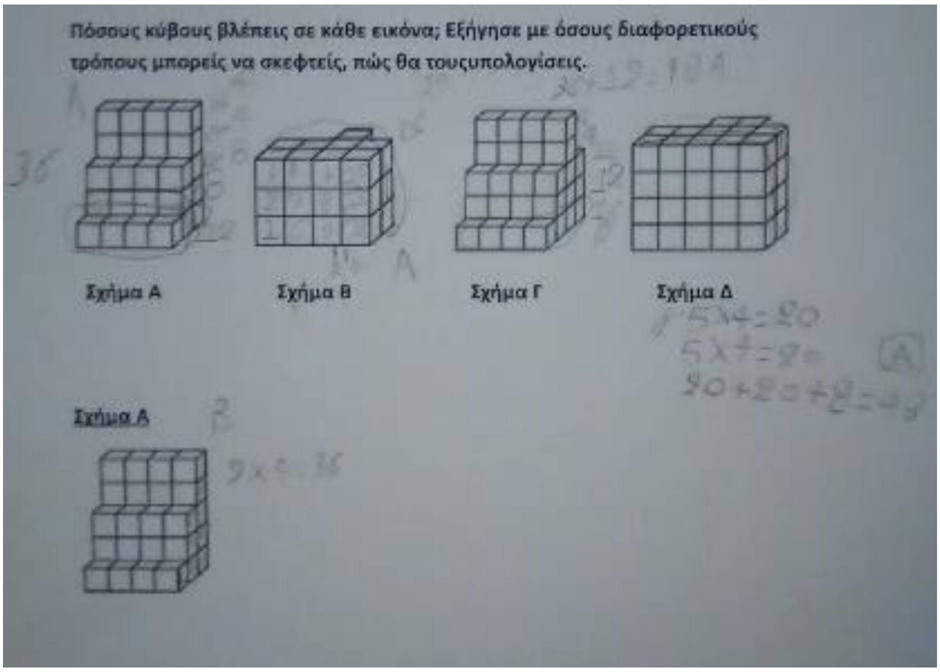
Α. μέρη φύλλων εργασίας των μαθητών

Β. απόσπασμα συνέντευξης με τον Σταύρο της Ε' δημοτικού από την 1η δραστηριότητα

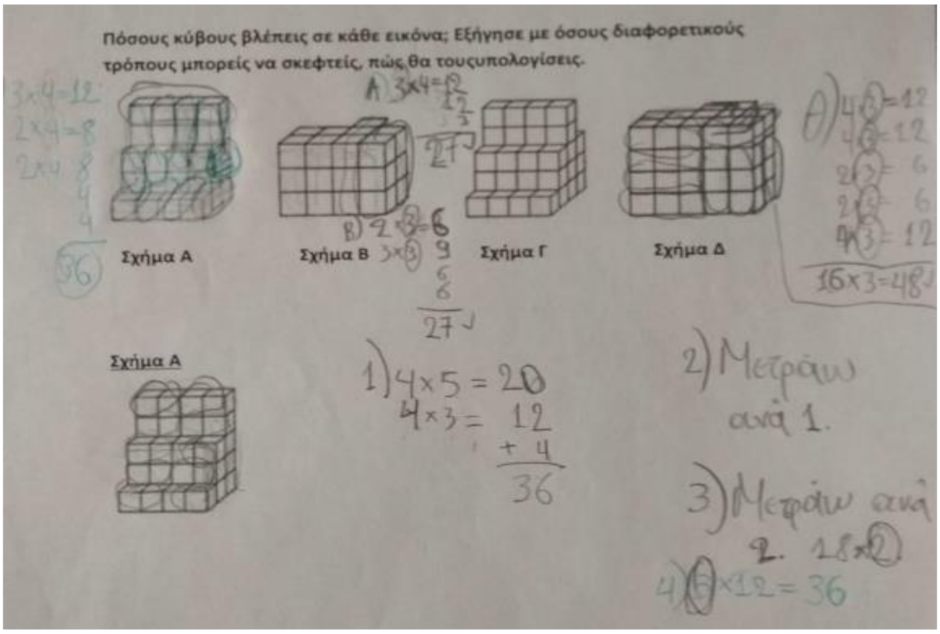
Α.

<u>Δραστηριότητα 1η</u>

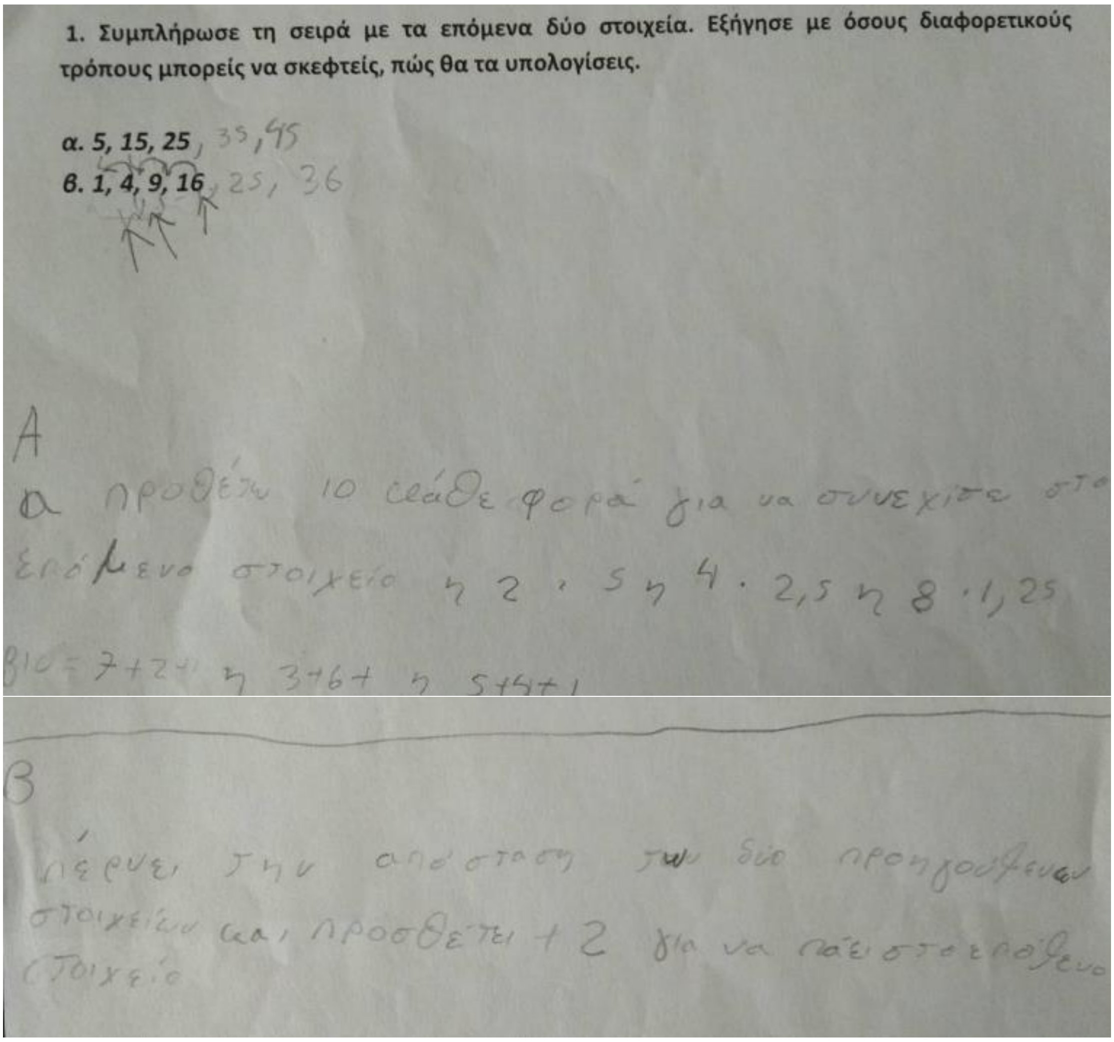
Ιορδάνης




Δήμος



<u>Δραστηριότητα 2η</u> (Σταύρος)



1. Συμπλήρωσε τη σειρά με τα επόμενα δύο στοιχεία. Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τα υπολογίσεις.

α. 5, 15, 25, 35, 45

β. 1, 4, 9, 16, 25, 36

A

α προσθέτω 10 κάθε φορά για να συνεχίσω στο επόμενο στοιχείο ή 2 · 5 ή 4 · 2,5 ή 8 · 1,25

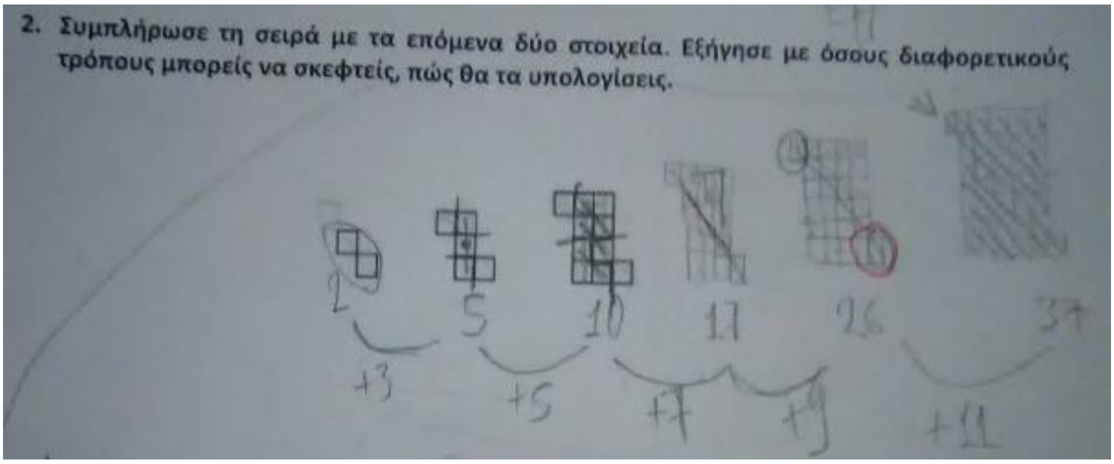
β10 = 7+2+1 ή 3+6+1 ή 5+4+1

B

λέρνει την απόσταση των δύο προηγούμενων στοιχείων και προσθέτει +2 για να πάει στο επόμενο στοιχείο

<u>Δραστηριότητα 3η</u>

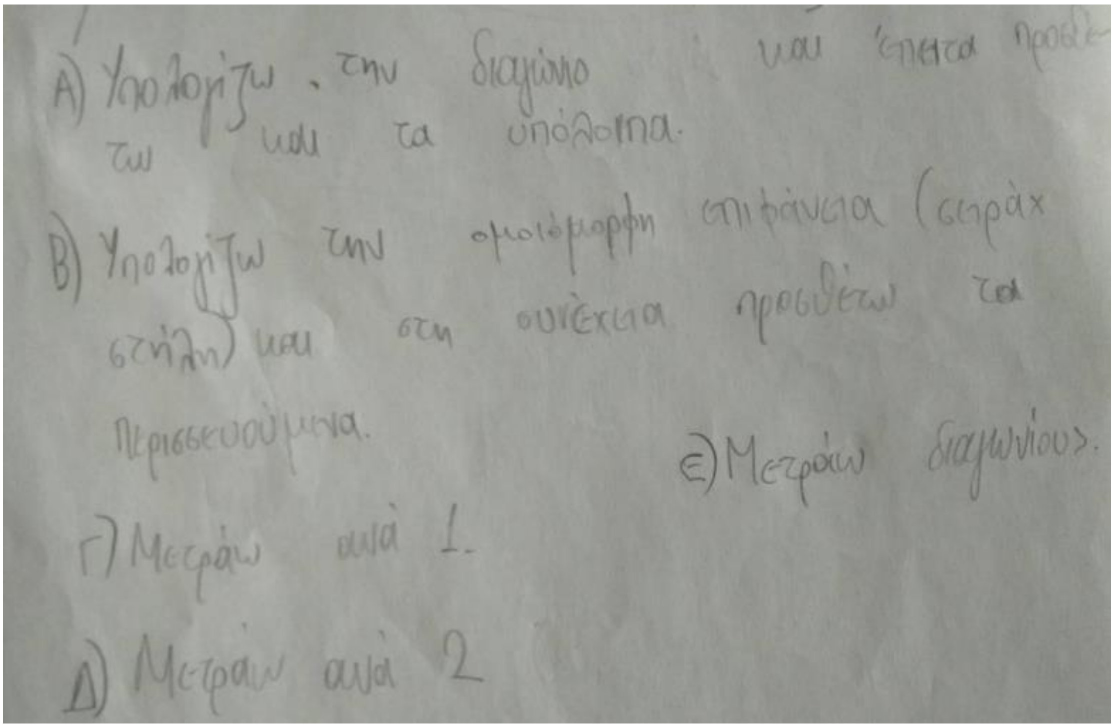
Δήμος



2. Συμπλήρωσε τη σειρά με τα επόμενα δύο στοιχεία. Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τα υπολογίσεις.

2 5 10 17 26 37

+3 +5 +7 +9 +11



Α) Υπολογίζω την διαγώνιο και έπειτα προσθέ
τω και τα υπόλοιπα.

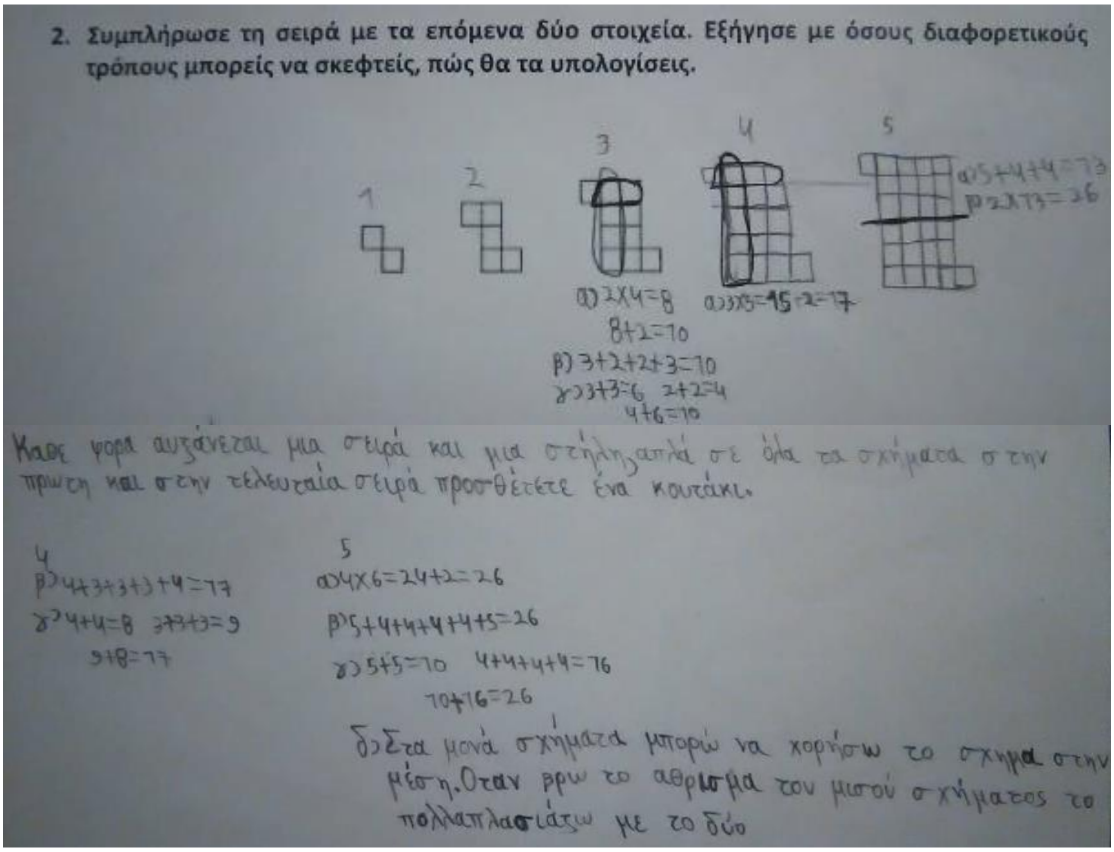
Β) Υπολογίζω την ομοιόμορφη επιφάνεια (σειράχ
στήλη) και στη συνέχεια προσθέτω τα
περισσευούμενα.

Ε) Μετράω διαγώνιους.

Γ) Μετράω ανά 1.

Δ) Μετράω ανά 2

Νώντας



**2. Συμπλήρωσε τη σειρά με τα επόμενα δύο στοιχεία. Εξήγησε με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να σκεφτείς, πώς θα τα υπολογίσεις.**



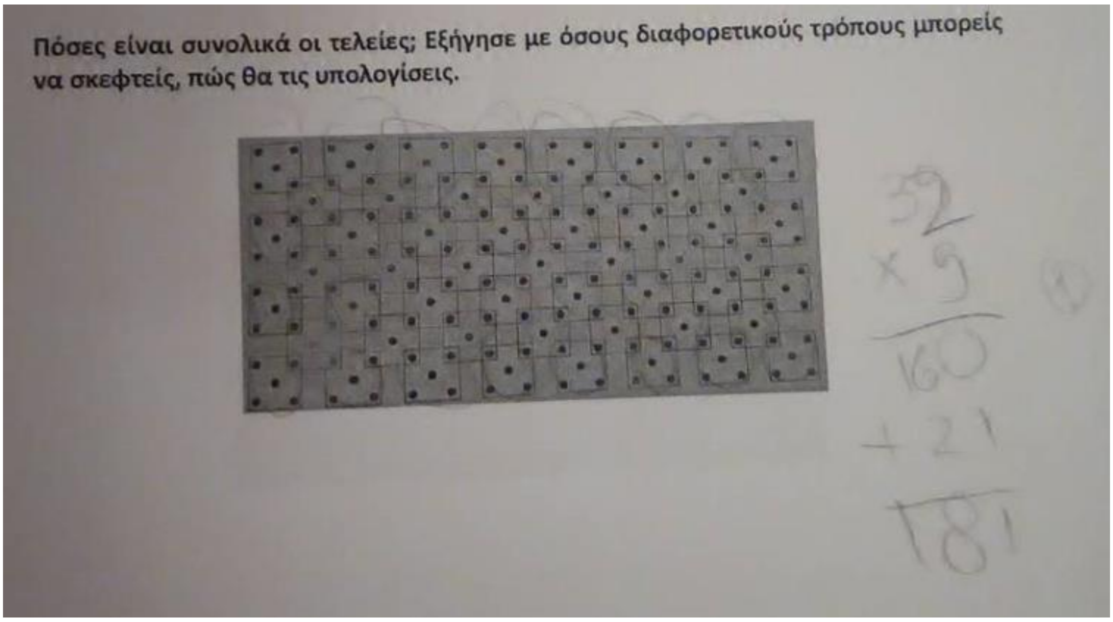
Καθε φορα αυξάνεται μια σειρά και μια στήλη,απλά σε όλα τα σχήματα στην πρωτη και στην τελευταία σειρά προσθέτετε ένα κουτάκι.

4
β) 4+3+3+3+4=17
γ) 4+4=8 3+3+3=9
9+8=17

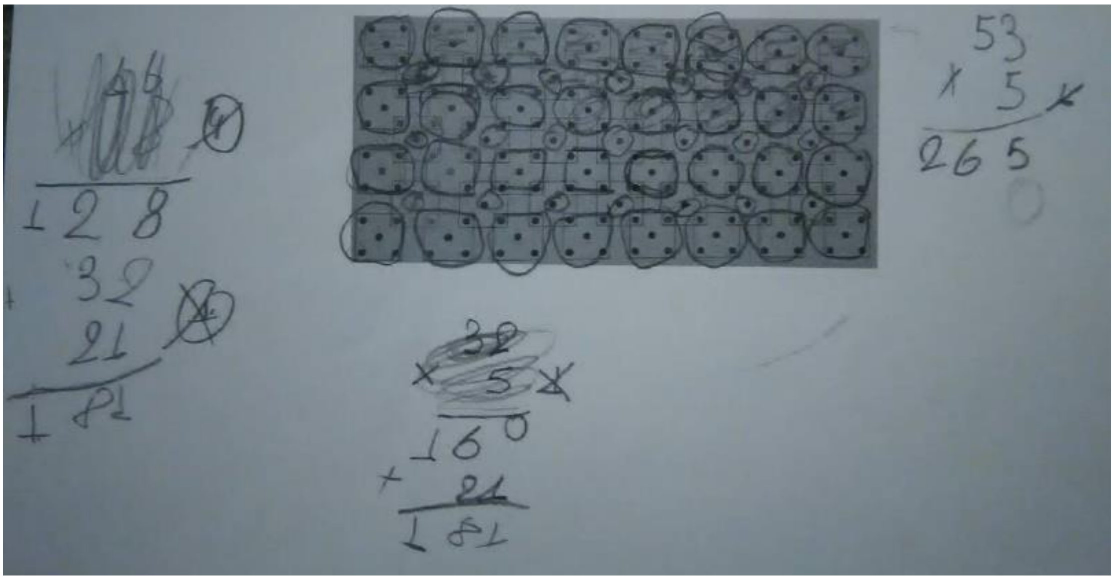
5
α)4x6=24+2=26
β) 5+4+4+4+4+5=26
γ) 5+5=10 4+4+4+4=16
10+16=26
δ) Στα μονά σχήματα μπορώ να χορήσω το σχημα στην μέση.Οταν βρω το αθροισμα τον μισού σχήματος το πολλαπλασιάζω με το δύο

Δραστηριότητα 4η

Θάνος




Ειρήνη



Β.

Απόσπασμα συζήτησης με τον Σταύρο κατά τη διεξαγωγή της 1ης δραστηριότητας

*Ε: Εντάξει, ωραία. Να σου πω κάτι, αν πρώτα τα 'βαζες ένα ένα όπως λες...*

*Σ: Ναι.*

*Ε: Θα 'βρισκες 36 πάλι λες;*

*Σ: Εεε, ναι. Θα μετρούσα πόσα μονά θα έβαζα και... θα έβρισκα το... 36 (μετρά 1-1 πάνω στο σχήμα λέγοντας) μπορούσα να κάνω 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 συν.. και να συνεχίσω με τα άλλα (άτακτα δείχνει με το μολύβι πάνω και γύρω από το σχήμα). Ναι.*

*Ε: Να σε ρωτήσω κάτι, πόσα φαίνονται; Πόσα δε φαίνονται;*

*Σ: Πόσα δε φαίνονται;*

*Ε: Πόσα φαίνονται να μου πεις πρώτα και πόσα δε φαίνονται.*

*Σ: Αα. Φαίνονται εδώ... κι απ' την εξωτερική, εδώ... (δείχνει την πλαϊνή πλευρά του σχήματος).*

*Ε: Από όπου, κι απ΄ το πλάι κι από όπου να 'ναι. Πόσα φαίνονται συνολικά κουτιά;*

*Σ: Φαίνονται... 1, 2... 4 , μμμ, ε, 4, 8 (δείχνει τις δύο πάνω σειρές τετράδων), εεμ, 11 (δείχνει τρεις κύβους της δεξιά ακριανής στήλης που φαίνονται στο πλάι), δεκαααπέντε (δείχνοντας την πάνω σειρά τετράδας του μεσαιου στρώματος), φφφφ {σε αυτό το σημείο δείχνει να δυσκολεύτηκε}, δεκαααaεννιά εικοσι τρία, φαίνονται.*

*Ε: Μμμ ναι...*

*Σ: Όχι, μισό... είκοσι τέσσερα φαίνονται.*

*Ε: Είσαι σίγουρος;*

*Σ: Ναι, δεν είχα μετρήσει αυτό στο πλάι (δείχνει στο κάτω στρώμα κύβων που ακουμπά στο έδαφος, τον πρώτο κύβο από τη μεσαία σειρά).*

*Ε: Οκ, ωραία.*

*Σ: Και με δυάδες μπορώ.*

*Ε: Ποιες δυάδες;*

*Σ: Δηλαδή, δύο, τέσσερα (δείχνει τις δυάδες της μπροστινής σειράς με το μολύβι), εε ... τώρα αυτό θα το ξαναμετρήσω γιατί είναι και τ' από πίσω που δε φαίνονται.*

*Ε: Μμμ*

*Σ: (Δείχνοντας σταθερά εναλλάξ τις δύο δυάδες της μπροστινής σειράς) Δύο τέσσερα, έξι οκτώ, δώδεκα δεκαέξι, (ανεβαίνει στο από πάνω πάτωμα κύβων και δείχνει ομοίως δυάδες) δεκαοκτώ, είκοσι, είκοσι δύο είκοσι τέσσεραααα, (ανεβαίνει πάλι πάτωμα και δείχνει ομοίως) είκοσι έξι είκοσι οκτώ (μικρή παύση), εε, τριάντα, τριάντα.. τέσσερα... (φαίνεται να κόλλησε και σκέφτεται)... μισό λεπτό. (δείχνει με το μολύβι ξανά την πρώτη κάτω κάτω δυάδα από κύβους). Βασικά, όχι με δυάδες. Θα το κάνω από πάνω (εννοεί ξεκινώντας το μέτρημα από τη σειρά από ψηλά και ξεκινά ξανά να δείχνει δυάδες με το μολύβι, δείχνοντας δυάδα κάθε φορά που μετρούσε δυνατά αλλά από πάνω προς τα κάτω στο σχήμα). Δύο τέσσερα έξι οκτώ, δώδεκα δεκατέεσσερα, δεκαέξι δεκαοκτώ, είκοσι είκοσι.. δύο, είκοσι τέσσερα είκοσι έξι, .... φφφ (βαθιά* *ανάσα) είκοσι οκτώ τριάντα , τριάντα... δύο τριάντα τέσσερα, τριάντα έξι ... (κοιτά μπερδεμένος την ερευνήτρια και παράλληλα δείχνει με το μολύβι την τελευταία δυάδα που δε μέτρησε δυνατά).*

*Ε: Τριάντα οχτώ βγήκανε;*

*Σ: Ναι. Για κάποιο λόγο.*

*Ε: Τριάντα έξι ή τριάντα οχτώ λες τελικά;*

*Σ: Να δω και τα άλλα που έκανα.*

*Ε: Μμμ*

*Σ: (Κοιτά τις πράξεις του προηγούμενα) Πέντε τέσσερις, είκοσι, τρεις τέσσερις, δώδεκα είκοσι και δώδεκα τριάντα δύο και τέσσερα... τριάντα έξι.*

*(Κοιτά το σχήμα ξανά δείχνοντας με το μολύβι τετράδες στο κάτω στρώμα κύβων) Μισό, τρεις τέσσερις, δώδεκα, δύο τέσσερα οκτώ δύο τέσσερα οκτώ (δείχνει τα δύο από πάνω στρώματα) και οκτώ (δείχνει τις δύο από πάνω τετράδες, σημειώνει δίπλα από κάθε στρώμα τους υπολογισμούς που έκανε προφορικά). Άρα δώδεκα συν οκτώ, είκοσι, είκοσι οκτώ τριάντα έξι βγαίνει.*

*Ε: Τώρα τα 'κανες δυάδες;*

*Σ: Το 'κανα...*

*Ε: Τι, τι στρατηγική έκανες;*

*Σ: Το 'κανα λίγο, για να είμαι σίγουρος ότι είναι τριάντα έξι και να προσπαθήσω να βρω στις δυάδες το λάθος που κάνω.*

*Ε: Αααα... (τον κοιτά με μειδίαμα). Το τρία επί τέσσερα ποιο είναι το τρία επί τέσσερα για δείξ' το μου.*

*Σ: Το τρία επί τέσσερα είναι τρία επί αυτά (δείχνει στο κάτω στρώμα κύβων, τους πλαϊνούς και αυτούς που φαίνονται στην μπροστινή σειρά).*

*Ε: Το κάτω στρώμα δηλαδή;*

*Σ: Ναι, το κάτω στρώμα.*

*Ε: Μετά; Το δύο επί τέσσερα;*

*Σ: Μετά είναι δύο επί τέσσερα δύο επί τέσσερα (δείχνει τα δύο από πάνω στρώματα).*

*Ε: Πολύ ωραία.*

*Σ: Και δύο επί τέσσερα (δείχνει τις δύο τελευταίες σειρές τετράδες πάνω)*

*Ε: Μμ, ωραία, οκ.*

*Σ: Και μας κάνουν πάλι τριάντα έξι.*