Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Βαρυτική Φωτοπαραγωγή και Σκέδαση Compton

Πτυχιακή Εργασία
του:
Δημήτρη Τσιακούλια Μανέττα
(ΑΜ: 1110201300209)
Επιβλέπων: Βασίλειος Σπανός, Αν.Καθηγητής
Αθήνα, Σεπτέμβρης 2018

Βαρυτική Φωτοπαραγωγή και Σκέδαση Compton

Περίληψη

Στη παρούσα πτυχιακή εργασία θέλουμε να μελετήσουμε τις σχέσεις παραγοντοποίησης που εμφανίζονται στα βαρυτικά πλάτη μετάβασης στο όριο του ασθενούς πεδίου.Ξεκινάμε με την Einstein-Hilbert Δράση και κατασκευάζοντας τις general covariant Λαγκρανζιανές του Βαθμωτού ,Φερμιονικού και Ανυσματικού πεδίου .Τις οποίες αναπτύσσουμε στο όριο του ασθενούς βαρυτικού πεδίου, προκειμένου να εξάγουμε κανόνες Feynman για το Γκραβιτόνιο και την αλληλεπίδραση του με τα υπόλοιπα πεδία .Στη συνέχεια, μελετάμε το πλάτος της βαρυτικής φωτοπαραγωγής και του Compton με τη συμμετοχή Βαθμωτών και Φερμιονικών πεδίων και δείχνουμε οτι η απαίτηση gauge και Lorentz αναλλοιώτητας του βαρυτικού πεδίου, οδηγεί στη παραγοντοποίση των πλατών σε κινηματικούς όρους και γνωστά πλάτη διεργασιών της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η σύγχρονη ιστορία της περιγραφής της βαρύτητας ξεκινάει τον 17ο αιώνα απο τον Galileo ο οποίος ,σε αντίθεση με την επικρατούσα άποψη του Αριστοτέλη , υποστήριξε πως όλα τα αντικείμενα έχουν την ίδια βαρυτική επιτάχυνση όταν πέφτουν. Στα τέλη του αιώνα ο Newton θεωρόντας οτι η βαρυτική δύναμη εξαρτάται απο το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης δύο σωμάτων , αποδεικνύει τους παρατηρησιακούς νόμους του Kepler[1].

$$F \propto \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \tag{1}$$

Προκειμένου η παραπάνω σχέση να γίνει ισότητα χρειάζεται η λεγόμενη σταθερά της βαρύτητας G , η οποία και μετρήθηκε απο τον Cavendish το 1797. Η νευτώνια θεώρηση της βαρύτητας ήταν αρκετά επιτυχής , καθώς μπόρεσε να προβλέψει την ύπαρξη του πλανήτη Ποσειδώνα . Ομως μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα είχε γίνει φανερό , οτι έχει προβλήματα , αφου δε μπορούσε να προβλέψει σωστά τη τροχιά Ερμή. Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα έδωσε ο Einstein με τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας (1907 - 1915)[2].

Η παραδοχή της Γενικής Σχετικότητας είναι οτι ,τα βαρυτικά φαινόμενα δεν είναι το αποτέλεσμα κάποιας δύναμης ,αλλα της καμπύλωσης του χωροχρόνου η οποία προκύπτει απο την ύπαρξη κάποιας μάζας. Μια απο τις μεγαλύτερες θεωρητικές προβλέψεις της θεωρίας ήταν η καμπύλωση του φωτός , η οποία και επιβαιβεώθηκε το 1919 [3] .Παράλληλα με την Γενική Σχετικότητα αρχίζει και αναπτύσεται η κβαντική θεωρία

Η κβαντομηχανκή και η κβαντική θεωρία πεδίου είναι η άλλη θεμελιώδης θεωρία που έχουμε και στην ουσία διευρίνουν τη φυσική μας αντίληψη για τον κόσμο σε ατομικές και υποατομικές κλίμακες.Η πιο διαδεδομένη ίσως εκδοχή της είναι το Καθιερωμένο Πρότυπο η οποία έχει καταφέρει να ενώσει τις ηλεκτρασθενείς δυνάμεις με τις ισχυρές σε μία

$$U(1) \times SU(2) \times SU(3) \tag{2}$$

θεωρία βαθμίδας.

Στα πλαίσια της ενοποίησης των τεσσάρων δυνάμεων δεν άργησε να αρχίσουν οι προσπάθειες για να βρεθεί μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας .Οι έρευνες πήραν διάφορες κατευθύνσεις , με μία απο αυτές να είναι η Covariant βαρύτητα, στην οποία ανήκει και το αντικείμενο της εργασίας . Η Covariant βαρύτητα πρωτοεμφανίστηκε στη δεκαετία του 30 , αλλα απέκτησε έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον απο τη δεκαετία του 60 και μετά , με κυριότερες συνεισφορές αυτές των DeWitt , Feynman , Weinberg , Gupta οι οποίοι ασχολήθηκαν με τους κανόνες αλληλεπίδρασης του γκραβιτονίου , και των t'Hooft , Veltman ,Deser , Van Nieuwenhuizen οι οποίοι ασχολήθηκαν με το αν είναι επανακανονικοποίησημη η θεωρία , όπου και κατέληξαν πως δεν είναι . Αργότερα στα μέσα του 70 οι προσπάθειες για την επανακανονοικοποίση της θεωρίας μεταφέρθηκαν προς μια υπερσυμμετρική θεωρία της βαρύτητας , αλλά σύντομα κατάλλαβαν οτι και αυτή δεν είναι . Το 90 η υπερσυμμετρική θεωρία απέκτησε ξανά ενδιαφέρον μέσω της θεωρίας των χορδών.[4]

Παρόλο που η Κβαντική Σχετικότητα έχει απορηφθεί ως υποψήφια για τη θέση της κβαντικής βαρύτητας εξακολουθεί να έχει κάποιο ερευνητικό ενδιαφέρον υπο το πρίσμα των effective field theories , δηλαδή αναμένουμε , ανεξαρτήτως της τελικής της μορφής , σε ασθενή βαρυτικά πεδία τα αποτελέσματα να συμφωνούν με αυτά της κβαντικής Σχετικότητας[5].Ετσι με αφορμή την εργασία των Kawai, Lewellen και Tye [6] οι οποίοι μέσω της θεωρίας χορδών βρήκαν, πως εμφανίζεται μια σχέση παραγοντοποίησης ανάμεσα σε πλάτη ανοιχτών και κλειστών χορδών .Οι Choi , Shim και Song χρησιμοποιώντας μια τεχνική ,η οποία είχε ήδη χρησιμοποιειθεί για να βρεθούν παραγοντοποιήσεις σε πλάτη που περιλαμβάνουν κάποιο εξωτερικό άμαζο gauge σωμάτιο πχ[7] , επιβεβαίωσαν οτι μια τέτοια παραγοντοποίηση συμβαίνει και στη περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας σε επίπεδο δένδρου για αλληλεπιδράσεις της μορφής $\gamma X \to gX$ και $gX \to gX$, με X να είναι σωμάτια απο 0 μέχρι 2 σπιν χωρις το $\frac{3}{2}$. Εμείς σε αυτήν την εργασία επιβεβαιώνουμε τη παραγοντοποίηση αυτή , για την περίπτωση όπου X είναι μποζόνιο με σπίν 0 ή φερμιόνιο με σπίν $\frac{1}{2}$.

2 Einstein-Hilbert Δράση

Στην συγκεκριμένη εργασία έχουμε θεωρήσει οτι η μετρική του Ευκλείδειου χώρου αναπαριστάται απο τον πίνακα $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.Επίσης θεωρούμε οτι το Βαρυτικό πεδίο περιγράφεται απο τη δράση Einstein - Hilbert και δίνεται ως ,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{2}{\kappa^2}R] \tag{3}$$

Η οποία όπως θα δείξουμε στη συνέχεια οδηγεί στις εξισώσεις πεδίου του Einstein . Στη παραπάνω σχέση έχουμε συμβολίσει $\kappa^2 = 32\pi G, g = detg_{\mu\nu}$,οπου $g_{\mu\nu}$ η μετρική και $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ το Ricci scalar . ο Riemann tensor δίνεται απο

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{4}$$

ο Ricci tensor απο

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma} \tag{5}$$

και τα σύμβολα Christoffel απο

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \tag{6}$$

2.1 Εξίσωση κίνησης για το γκραβιτόνιο

Σε αυτή την ενότητα θα εξάγουμε την εξίσωση πεδίου του Einstein απο τη δράση μας. Προκειμένου να το κάνουμε αυτο πρέπει να βρούμε τα σημεία αυτά για τα οποία η δράση γίνεται στάσιμη .Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε που το δS είναι μηδέν,

$$S \to S + \delta S, \delta S = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\delta[\sqrt{-g}\frac{2}{\kappa^2}R + \sqrt{-g}\mathcal{L}_m] \\
&= \int d^4x[\delta(\sqrt{-g}\frac{2}{\kappa^2}R) + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)] \\
&= \int d^4x[\frac{\delta(\sqrt{-g}\frac{2}{\kappa^2}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}]\delta g^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x[\frac{2}{\kappa^2}(\frac{\delta(\sqrt{-g})R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{(\delta R)\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}]\delta g^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x[\frac{2}{\kappa^2}(\frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{8}$$

επομένως απο την απαίτηση το δS να είναι μηδέν προκύπτει,

$$\frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\kappa^2}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{9}$$

Τώρα η φόρμουλα του jacobi για το διαφορικό ενός πίνακα

$$d(detA) = tr(adj(AdA)). \tag{10}$$

μπορεί να εφαρμοστεί για την ορίζουσα της μετρικής και παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\delta g &= \delta(det(g)) \\ &= tr[adj(g)\delta g] \\ &= tr[det(g)g^{-1}\delta g] \\ &= gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{11}$$

οπότε επειδή

$$g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{12}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\delta g = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{13}$$

Και με βάση αυτά προκύπτει

$$\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}, \tag{14}$$

με αποτέλεσμα η εξίσωση κίνησης να γίνεται

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{4}T_{\mu\nu}, \tag{15}$$

όπου $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής της ενέργειας και ορίζεται ως [5]

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}\Big(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\Big). \tag{16}$$

Τώρα αυτο που θέλουμε να κάνουμε είναι να βρούμε το πως μεταβάλεται το Ricci scalar ως προς τη μετρική.Απο τον ορισμό του έχουμε

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \rightarrow \tag{17}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{18}$$

Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα έχουμε $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ με αποτέλεσμα ο Ricci tensor να γίνει

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} \tag{19}$$

Επειδή, εξετάζουμε τοπικά Ευκλίδειο χώρο περιμένουμε τα διαφορικά της μετρικής να είναι μηδέν στο σημείο που εξετάζουμε. Άρα και το $\partial_\alpha g = 0$.Οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu,\rho} - g^{\mu\kappa}\Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu}) \tag{20}$$

και αν ορίσουμε

$$\delta\omega^{\kappa} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - g^{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \tag{21}$$

Η σχέση (20) μπορεί να γραφτεί ως

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\delta\omega^{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}(\sqrt{-g}\delta\omega^{\kappa}) \tag{22}$$

Η Παραπάνω ποσότητα αποτελεί ολικό διαφορικό και με χρήση του θεωρήματος Gauss το ολοκλήρωμα της μπορεί να γραφτεί ως επιφανειακό ολοκλήρωμα . Όμως , επειδή στο άπειρο δε μεταβάλουμε τη ποσότητα $\delta\omega^{\kappa}$, ο όρος αυτός δε συνισφέρει στη μεταβολή της Δράσης οπότε μπορούμε να τον πετάξουμε. Έτσι βρίσκουμε τη εξίσωση πεδίου του Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa^2}{4}T_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{23}$$

3 Κβάντωση του βαρυτικού πεδίου

Προκειμένου να κβαντώσουμε τη θεωρία μας και να εξάγουμε κανόνες Feynman ακολουθούμε τη μέθοδο του Gupta [9] ,οπου ξεκινάει απο τη δράση $S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{2}{\kappa^2}R]$ και αναπτύσει τη μετρική γύρω απο μια ομαλή μετρική . Στη περίπτωση μας θα πάρουμε

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{24}$$

Το $g^{\mu\nu}$ προκύπτει απο την απαίτηση $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\lambda}h^{\nu}_{\lambda} \tag{25}$$

Ο όρος $\sqrt{-g}$ μετασχηματίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}
\sqrt{det(-g)} =& e^{\frac{1}{2}Trln(-\eta_{\mu\alpha}(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu}))} \\
=& e^{\frac{1}{2}Tr(ln(-\eta_{\mu\alpha})+ln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu}))} \\
=& e^{\frac{1}{2}Tr(ln(-\eta_{\mu\alpha}))}e^{\frac{1}{2}Tr(ln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu}))} \\
=& \sqrt{-\eta}e^{\frac{1}{2}Tr(ln(\delta^{\alpha}_{\nu}+\kappa h^{\alpha}_{\nu}))} \\
=& \sqrt{-\eta}e^{\frac{1}{2}Tr(\kappa h^{\alpha}_{\nu}-\frac{1}{2}\kappa^2 h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\nu})} \\
=& \sqrt{-\eta}e^{\frac{1}{2}(\kappa h^{\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{2}\kappa^2 h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\alpha})} \\
=& 1 + \frac{1}{2}\kappa h - \frac{1}{4}\kappa^2 h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{8}\kappa^2 h^2
\end{aligned} \tag{26}$$

Κρατώντας μέχρι δεύτερης τάξης όρους , καθώς μας ενδιαφέρει να βρούμε τον propagator τα σύμβολα Christoffel γίνονται

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \underline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + \underline{\underline{\Gamma}}^{\alpha}_{\mu\nu} \tag{27}$$

$$\underline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h^{\alpha}_{\mu,\nu} + h^{\alpha}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}) \tag{28}$$

$$\underline{\underline{\Gamma}}^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}h^{\alpha\gamma}(h_{\gamma\nu,\mu} + h_{\mu\gamma,\nu} - h_{\mu\nu,\gamma}) \tag{29}$$

τοτε ο ricci tensor γίνεται:

$$\begin{aligned}
R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\alpha\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} \\
&= \partial_\alpha(\underline{\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}} + \underline{\underline{\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}}}) - \partial_\beta(\underline{\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}} + \underline{\underline{\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}}}) \\
&\quad +(\underline{\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}} + \underline{\underline{\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}}})(\underline{\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}} + \underline{\underline{\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}}}) - (\underline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}} + \underline{\underline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}}})(\underline{\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}} + \underline{\underline{\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}}})
\end{aligned} \tag{30}$$

εμείς κρατάμε όρους μέχρι και δεύτερης τάξης ως προς h

$$\partial_\alpha \underline{\Gamma^\mu_{\nu\beta}} = \frac{1}{2}(h^\mu_{\nu,\beta\alpha} + h^\mu_{\beta,\nu\alpha} - h^{,\mu}_{\nu\beta,\alpha}) \tag{31}$$

$$\partial_\beta \underline{\Gamma^\mu_{\nu\beta}} = \frac{1}{2}(h^\mu_{\nu,\beta\alpha} + h^\mu_{\alpha,\nu\beta} - h^{,\mu}_{\nu\alpha,\beta}) \tag{32}$$

$$\partial_\alpha \underline{\underline{\Gamma^\mu_{\nu\beta}}} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha(h^{\mu\gamma}(h_{\gamma\nu,\beta} + h_{\beta\gamma,\nu} - h_{\nu\beta,\gamma})) \tag{33}$$

$$\partial_\beta \underline{\underline{\Gamma^\mu_{\nu\alpha}}} = -\frac{1}{2}\partial_\beta(h^{\mu\gamma}(h_{\gamma\nu,\alpha} + h_{\alpha\gamma,\nu} - h_{\nu\alpha,\mu})) \tag{34}$$

$$\underline{\Gamma}^\gamma_{\beta\nu}\underline{\Gamma}^\mu_{\gamma\alpha} = \frac{1}{4}(h^\gamma_{\beta,\nu} + h^\gamma_{\nu,\beta} - h^{,\gamma}_{\nu\beta})(h^\mu_{\gamma,\alpha} + h^\mu_{\alpha,\gamma} - h^{,\mu}_{\alpha\gamma}) \tag{35}$$

$$\underline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\nu}\underline{\Gamma}^\mu_{\gamma\alpha} = \frac{1}{4}(h^\gamma_{\alpha,\nu} + h^\gamma_{\nu,\alpha} - h^{,\gamma}_{\alpha\nu})(h^\mu_{\gamma,\beta} + h^\mu_{\beta,\gamma} - h^{,\mu}_{\beta\gamma}) \tag{36}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \underline{R}^\mu_{\nu\alpha\beta} + \underline{\underline{R}}^\mu_{\nu\alpha\beta} \tag{37}$$

$$\underline{R}^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h^\mu_{\beta,\nu\alpha} - h^{,\mu}_{\nu\beta,\alpha} - h^\mu_{\alpha,\nu\beta} + h^{,\mu}_{\nu\alpha,\beta}) \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R}}^\mu_{\nu\alpha\beta} = &+\frac{1}{2}\partial_\beta(h^{\mu\gamma}(h_{\gamma\nu,\alpha} + h_{\alpha\gamma,\nu} - h_{\nu\alpha,\mu})) \\
&- \frac{1}{2}\partial_\alpha(h^{\mu\gamma}(h_{\gamma\nu,\beta} + h_{\beta\gamma,\nu} - h_{\nu\beta,\gamma})) \\
&\frac{1}{4}(h^\gamma_{\beta,\nu} + h^\gamma_{\nu,\beta} - h^{,\gamma}_{\nu\beta})(h^\mu_{\gamma,\alpha} + h^\mu_{\alpha,\gamma} - h^{,\mu}_{\alpha\gamma}) \\
&- \frac{1}{4}(h^\gamma_{\alpha,\nu} + h^\gamma_{\nu,\alpha} - h^{,\gamma}_{\alpha\nu})(h^\mu_{\gamma,\beta} + h^\mu_{\beta,\gamma} - h^{,\mu}_{\beta\gamma})
\end{aligned} \tag{39}$$

Το $R_{\nu\alpha} = R^\beta_{\nu\alpha\beta}$,οπότε βρίσκουμε

$$\underline{R}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}(h^\beta_{\beta,\nu\alpha} - h^{,\beta}_{\nu\beta,\alpha} - h^\beta_{\alpha,\nu\beta} + h^{,\beta}_{\nu\alpha,\beta}) \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R}}_{\nu\alpha} = &-\frac{1}{2}\partial_\alpha(h^\beta_\mu h^\mu_{\beta,\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\beta(h^\beta_\gamma(h^\gamma_{\nu,\alpha} + h^\gamma_{\alpha,\nu} - h^{,\gamma}_{\alpha\nu}) \\
&+ \frac{1}{4}(h^\gamma_{\beta,\nu} + h^\gamma_{\nu,\beta} - h^{,\gamma}_{\beta\nu})(h^\beta_{\gamma,\alpha} + h^\beta_{\alpha,\gamma} - h^{,\beta}_{\gamma\alpha})
\end{aligned} \tag{41}$$

$$- \frac{1}{4}(h^\gamma_{\alpha,\nu} + h^\gamma_{\nu,\alpha} - h^{,\gamma}_{\nu\alpha})h^\beta_{\beta,\gamma} \tag{42}$$

$$R = g^{\nu\alpha}R_{\nu\alpha} = (\eta^{\nu\alpha} - h^{\nu\alpha})R_{\nu\alpha} \tag{43}$$

$$h^{\nu\alpha}\underline{R}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}h^{\nu\alpha}h^{\beta}_{\beta,\nu\alpha} - \frac{1}{2}h^{\nu}_{\alpha}\partial_{\beta}(h^{\beta,\alpha}_{\nu} + h^{\beta\alpha}_{,\nu} - h^{\alpha,\beta}_{\nu}) \tag{44}$$

$$\eta^{\nu\alpha}\underline{R}_{\nu\alpha} = h^{\beta,\alpha}_{\beta,\alpha} - h^{\beta,\alpha}_{\alpha,\beta} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\eta^{\nu\alpha}\underline{\underline{R}}_{\nu\alpha} &= -\frac{1}{2}\partial_{\alpha}(h^{\beta}_{\mu}h^{\mu,\alpha}_{\nu}) + \frac{1}{2}\partial_{\beta}(h^{\beta}_{\nu}(2h^{\nu\alpha}_{,\alpha}) - h^{\alpha,\nu}_{\alpha}) \\ &+ \frac{1}{4}(h^{\nu}_{\beta,\alpha} + h^{\nu}_{\alpha,\beta} - h^{,\nu}_{\beta\alpha})(h^{\beta,\alpha}_{\nu} + h^{\beta\alpha}_{,\nu} - h^{\alpha,\beta}_{\nu}) \quad (46) \\ &- \frac{1}{4}(2h^{\nu\alpha}_{,\alpha} - h^{\alpha,\nu}_{\alpha})h^{\beta}_{\beta,\nu} \quad (47)\end{aligned}$$

ακόμη απο το,

$$(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{8}h^2)\underline{R} \tag{48}$$

προκύπτουν οι όροι,

$$\frac{1}{2}h(h^{\beta,\alpha}_{\beta,\alpha} - h^{\beta,\alpha}_{\alpha,\beta}) \tag{49}$$

κάνοντας τις πράξεις , ολοκλήρωση κατα παράγοντες και αφού πετάξουμε τα ολικά διαφορικα παίρνουμε:

- $$\frac{1}{2}h(h^{\beta,\alpha}_{\beta,\alpha} - h^{\beta,\alpha}_{\alpha,\beta}) = -\frac{1}{2}h_{,\mu}h^{,\mu} + \frac{1}{2}h_{,\beta}h^{\beta,\mu}_{\mu} \tag{50}$$
- $$\frac{1}{4}(h^{\nu}_{\beta,\alpha} + h^{\nu}_{\alpha,\beta} - h^{,\nu}_{\beta\alpha})(h^{\beta,\alpha}_{\nu} + h^{\beta\alpha}_{,\nu} - h^{\alpha,\beta}_{\nu}) = -\frac{1}{4}h^{\nu}_{\alpha,\beta}h^{\alpha,\beta}_{\nu} + \frac{1}{2}h^{,\nu}_{\alpha\beta}h^{\alpha,\beta}_{\nu} \tag{51}$$
- $$\frac{1}{2}h^{\nu\alpha}h^{\beta}_{\beta,\nu\alpha} - \frac{1}{2}h^{\nu}_{\alpha}\partial_{\beta}(h^{\beta,\alpha}_{\nu} + h^{\beta\alpha}_{,\nu} - h^{\alpha,\beta}_{\nu}) = -\frac{1}{2}h^{\nu\alpha}_{,\alpha}h_{,\nu} + \frac{1}{2}h^{\nu}_{\alpha,\beta}h^{\beta,\alpha}_{\nu} + \frac{1}{2}h^{\nu}_{\alpha,\nu}h^{\beta\alpha}_{,\beta} - \frac{1}{2}h^{\nu}_{\alpha,\beta}h^{\alpha,\beta}_{\nu} \tag{52}$$
- $$-\frac{1}{4}(2h^{\nu\alpha}_{,\alpha} - h^{\alpha,\nu}_{\alpha})h^{\beta}_{\beta,\nu} = -\frac{1}{2}h^{\nu\alpha}_{,\alpha}h^{,\nu} + \frac{1}{4}h_{,\beta}h^{,\beta} \tag{53}$$

Οπότε, αναπτύσωντας εώς και σε δεύτερης ταξης όρους ως προς h και αφου κάνουμε την αντικατάσταση $h \to \kappa h$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\frac{2}{\kappa^2}R = &-\frac{2}{\kappa}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \Box h) + \Big[+ \frac{1}{2}\partial_{\lambda}h^{\mu\nu}\partial^{\lambda}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\lambda}h\partial^{\lambda}h \\ &- \partial_{\lambda}h^{\lambda\nu}\partial^{\mu}h_{\mu\nu} + \partial^{\nu}h\partial^{\mu}h_{\mu\nu}\Big]\end{aligned} \tag{54}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον propagator θα πρέπει να εισάγουμε κάποιον gauge fixing όρο , το οποίο μπορεί να γίνει ακολουθώντας τη μέθοδο των Ludvig Faddeev και Victor Popov [10], η οποία όμως εισάγει και το ghost πεδίο με το οποίο δε θα ασχοληθούμε ,αφού δεν θα εμφανιστεί στις αλληλεπιδράσεις που θα μελετήσουμε. Έτσι στους όρους οι οποίοι θα δώσουν τον propagator

$$+\frac{1}{2}\partial_\lambda h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\lambda h\partial^\lambda h - \partial_\lambda h^{\lambda\nu}\partial^\mu h_{\mu\nu} + \partial^\nu h\partial^\mu h_{\mu\nu} \tag{55}$$

θα προσθέσουμε τον gauge fixing όρο , ο οποίος αντιστοιχεί στη λεγόμενη αρμονική βαθμίδα ή αλλιώς de donder gauge.

$$(\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h)^2 \tag{56}$$

$$= +\partial^\mu h_{\mu\nu}\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\mu h_{\mu\nu}\partial^\nu h + \frac{1}{4}\partial_\nu h\partial^\nu h \tag{57}$$

ο δεύτερος και τρίτος όρος μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι είναι ίσοι και μαζί εξαφανίζουν τον τέταρτο όρο της αρχικής εξίσωσης ,ενώ ο πρώτος όρος ακυρώνει τον τρίτο της αρχικής.Εν τέλει μένει

$$-\frac{1}{2}\partial_\lambda h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial_\lambda h\partial^\lambda h \tag{58}$$

κάνοντας ολοκλήρωση κατα παράγοντες παίρνουμε

$$\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}h\partial_\lambda\partial^\lambda h \tag{59}$$

το οποίο μπορει να γραφτει ως

$$\frac{1}{2}h_{\mu\nu}(\Box(I^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}))h_{\alpha\beta} \tag{60}$$

,όπου το I είναι στην ουσία το ταυτοτικό για τανυστές με δύο δείκτες , το οποίο παίρνει τους δεικτες α,β και τους μετατρέπει σε μ,ν . Ορίζεται ως

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) \tag{61}$$

$$h^{\mu\nu} = I^{\mu\nu\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \tag{62}$$

Για να εξάγουμε τον propagator , θα πρέπει να βρουμε το αντίστροφο της έκφρασης[11]: $I^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}$

$$[I^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}][aI_{\alpha\beta\gamma\delta} + b\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}] = I^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} \tag{63}$$

$$= aI^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} - \frac{1}{2}a\eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta} - 2b\eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta} + b\eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta} \tag{64}$$

Βλέπουμε πως για $a = 1$ και $b = -\frac{1}{2}$ οι τρεις τελευταίοι όροι εξαφανίζονται. Οπότε έχουμε :

$$iD^{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2 + i\epsilon}e^{-iqx}P^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{65}$$

$$P^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left[\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\right]. \tag{66}$$

3.1 Ανύσματα πόλωσης για το ελεύθερο γκραβιτόνιο

Τώρα θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει στο γκραβιτόνιο όταν δεν υπάρχει κάποια μάζα,δηλαδή όταν είναι ελεύθερο . Ξεκινάμε με την εξίσωση πεδίου Einstein (23) , η οποία σε πρώτης τάξης όρους ως προς h δίνει:

$$\frac{\kappa}{2}(h_{,\nu\alpha} - h^{,\beta}_{\nu\beta,\alpha} - h^{\beta}_{\alpha,\nu\beta} + h^{,\beta}_{\nu\alpha,\beta}) - \frac{\kappa}{2}\eta_{\nu\alpha}(\Box h - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}) = \frac{\kappa^2}{4}T_{\nu\alpha} \tag{67}$$

Απο εδώ μπορούμε να βρούμε το ίχνος του T ,το οποίο προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε με $\eta^{\nu\alpha}$,

$$\begin{aligned}&\frac{\kappa}{2}(2\Box h - 2h^{\nu\beta}_{\nu\beta}) - \frac{\kappa}{2}4(\Box h - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}) = \frac{\kappa^2}{4}T_{\nu\alpha}\\ &\rightarrow -\Box h + h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} = \frac{\kappa}{4}T^{\mu}_{\mu}\end{aligned} \tag{68}$$

και αντικαθιστώντας στην (67) παίρνουμε:

$$h_{,\nu\alpha} - h^{,\beta}_{\nu\beta,\alpha} - h^{\beta}_{\alpha,\nu\beta} + h^{,\beta}_{\nu\alpha,\beta} = \frac{\kappa}{2}\Big(T_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}T\Big) \tag{69}$$

η οποία στη αρμονική βαθμίδα γίνεται:

$$h_{,\nu\alpha} - \frac{1}{2}h^{,\nu}_{,\alpha} - \frac{1}{2}h^{,\nu}_{,\alpha} + h^{,\beta}_{\nu\alpha,\beta} = \frac{\kappa}{2}\Big(T_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}T\Big) \tag{70}$$

Οπότε όταν έχουμε απουσία πηγής βαρυτικού πεδίου έχουμε:

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{71}$$

Το $h_{\mu\nu}$ είναι 4×4 τένσορας ,οπότε έχει 16 στοιχεία .Επειδή απο τον ορισμό του είναι συμμετρικός ο αριθμός των ανεξαρτητων παραμέτρων πέφτει στους δέκα .Επίσης, επειδή έχουμε επιλέξει την αρμονική βαθμίδα ο αριθμός αυτός κατεβαίνει στους έξι . Επειδή είμαστε σε άδειο χώρο , χωρίς μάζες μπορούμε να κάνουμε και άλλον ένα μετασχηματισμό βαθμίδας , με τη προυπόθεση οτι θα είναι αρμονική.Έτσι για

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu \tag{72}$$

τότε

$$\begin{aligned}\partial^\mu(h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu) &= \frac{1}{2}\partial_\nu(h - 2\partial^\lambda\xi_\lambda)\\ \partial^\mu h_{\mu\nu} - \Box\xi_\nu - \partial_\nu\partial^\mu\xi_\mu &= \frac{1}{2}\partial_\nu h - \partial_\nu\partial^\lambda\xi_\lambda\\ \Box\xi_\nu &= 0\end{aligned} \tag{73}$$

Δηλαδή, για οποιδήποτε μετασχηματισμό βαθμίδας, ο οποίος πληρεί τη παραπάνω προυπόθεση ,παραμένουμε στη αρμονική βαθμίδα . Άρα πλεον έχουμε άλλους τέσσερεις περιορισμούς , με αποτέλεσμα να μένουν μόνο δύο ελεύθεροι παράμετροι.Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε να είναι

$$h_{\nu 0} = 0 \tag{74}$$

και να έχουμε κίνηση στη z κατεύθυνση

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu(z-t)} \tag{75}$$

το οποίο γράφεται ως

$$\partial^{\mu} h_{\mu\nu} = \partial^{0} h_{0\nu} - \partial^{z} h_{\nu z} = \frac{1}{2}\partial_{\nu} h \tag{76}$$

αν τώρα θέσουμε το ν = 0

$$-\partial^{z} h_{0z} = \frac{1}{2}\partial_{0} h \to h = h^{\lambda}_{\lambda} = 0 \tag{77}$$

οδηγούμαστε σε αυτο που λέμε transeverse traceless. Δηλαδή μέχρι τώρα έχουμε τους εξείς περιορισμούς :

$$\Box h_{\mu\nu} = 0\,,\ \partial^{\mu} h_{\mu\nu} = 0\,,\ h = 0\,,\ h_{0\nu} = 0\,. \tag{78}$$

Απο εδώ μπορούμε να κατασκευάσουμε τα πεδία αυτά με τη βοήθεια των ανυσμάτων πόλωσης του φωτονίου. Συγκεκριμένα το φωτόνιο έχει τέσσερεις βαθμούς ελεύθεριας .

$$A_{\mu} \sim \epsilon_{\mu} e^{-i\kappa x} \tag{79}$$

Όμως , αν θεωρήσουμε κίνηση στη z κατεύθυνση , η απαίτηση να έχει

$$k^2 = 0 \to k_0^2 = k_3^2 = k^2 \tag{80}$$

σε συνδυασμό με τον περιορισμό

$$k \cdot \epsilon = 0 \to k\epsilon_0 - k\epsilon_3 = 0 \to \epsilon_0 = \epsilon_3 \tag{81}$$

μας οδηγεί σε τρείς ανεξάρτητες παραμέτρους . Όμως, επειδή η θεωρία μας είναι αναλλοίωτη και σε μετασχηματισμούς γαυγε $\epsilon_{\mu}^{'} = \epsilon_{\mu} - \varepsilon k_{\mu}$,όπου το ε κάποια παράμετρος ,βέπουμε οτι μόνο δύο θα είναι οι φυσικά σημαντικοί βαθμοί ελευθερίας του ανύσματος πόλωσης. Μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon_3^{'} = \epsilon_3 - \varepsilon k_3$,με $\varepsilon = \frac{\epsilon_3}{k}$, το οποίο οδηγεί σε $\epsilon_3 = \epsilon_0 = 0$. Άρα μια κατάλληλη επιλογή για τα ανύσματα είναι η:

$$helicity \equiv \lambda = \pm 1 \tag{82}$$

$$\epsilon_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0) \tag{83}$$

$$\epsilon^{*}_{\mu(\lambda)} \epsilon^{\mu}_{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{84}$$

$$\epsilon_{\mu(\lambda)} \epsilon^{\mu}_{(\lambda)} = \frac{1}{2}(0 - 1 - (\pm i)^2 - 0) = 0 \tag{85}$$

θεωρούμε για το γκραβιτόνιο ότι

$$h_{\mu\nu} = A\varepsilon_{\mu\nu}e^{ikz} \tag{86}$$

και απο την εξίσωση κίνησης παίρνουμε

$$k^2 = 0 \tag{87}$$

Αν γράψουμε

$$\varepsilon_{\mu\nu(++)} = \epsilon_{\mu(+)}\epsilon_{\nu(+)} \tag{88}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu(--)} = \epsilon_{\mu(-)}\epsilon_{\nu(-)} \tag{89}$$

βρίσκουμε πως ,

$$\begin{aligned}
&\Box h_{\mu\nu} = 0 \\
&\partial^{\mu} h_{\mu\nu} = A\epsilon_{\mu}\epsilon_{\nu}k^{\mu}e^{ikz} = 0 \\
&h^{\lambda}_{\lambda} = A\epsilon_{\lambda}\epsilon^{\lambda}e^{ikz} = 0 \\
&h_{0\nu} = 0
\end{aligned}$$

οπότε βλέπουμε οτι αποτελεί λύση το

$$\varepsilon_{\mu\nu(\pm 2)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm i & 0 \\ 0 & \pm i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{90}$$

4 Αλληλεπίδραση του βαρυτικού πεδίου με μποζονικά πεδία

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ,το πως αλληλεπιδράει το γκραβιτόνιο με το μαζικό βαθμωτό ,παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου , αλλά και με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ,μπορούμε να θεωρήσουμε οτι όλα τα σωμάτια έχουν την ίδια μάζα m. Δηλαδή ξεκινάμε απο τη Λαγκρανζιανή της Βαθμωτής Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής , χωρίς να υπάρχει κάποιο βαρυτικό πεδίο , η οποία είναι:

$$\mathcal{L}_{QED} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{91}$$

οπου ϕ ειναι το βαθμωτό πεδίο , A το φωτονικό πεδίο και το $F^{\mu\nu}$ είναι ο τένσορας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου,οπου το $F^{\mu\nu}$ και το covariant derivative(D_μ) ορίζονται ως:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{92}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{93}$$

Τωρα μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή παρουσία βαρυτικού πεδίου μετατρέποντας τη παραπάνω στη general covariant μορφή της. Οπότε παίρνουμε

$$\mathcal{L}_{gs} = \sqrt{-g}[g^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) - m^2 \phi^* \phi] \tag{94}$$

απο την οποία ,αφου αναπτύξουμε το $g^{\mu\nu}$ και το $\sqrt{-g}$ όπως και πρίν, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gs} =& [1 + \frac{1}{2}\kappa h - \frac{1}{4}\kappa^2 h^\alpha_\beta h^\beta_\alpha + \frac{1}{8}\kappa^2 h^2] \times \\ & \Big([\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\lambda} h^\nu_\lambda] (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) - m^2 \phi^* \phi \Big)\end{aligned} \tag{95}$$

και μαζεύοντας του όρους ανάλογα με τη τάξη του h

$$\mathcal{L}^{(0)}_{gs} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \tag{96}$$

$$\mathcal{L}^{(1)}_{gs} = \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\eta_{\mu\nu} \left((D_\alpha \phi)^* (D^\alpha \phi) - m^2 \phi^* \phi \right) - 2 (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) \right] \tag{97}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{gs} =& \kappa^2 \left[\frac{1}{8} \Big(h^2 - 2h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \Big) \Big((D_\alpha \phi)^* (D^\alpha \phi) - m^2 \phi^* \phi \Big) \right. \\ & \left. + \Big(h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha - \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} \Big) (D_\mu \phi)^* (D_\nu \phi) \right]\end{aligned} \tag{98}$$

Απο τους παραπάνω όρους μπορούμε να εξάγουμε κανόνες Feynman για τον Διαδότη του βαθμωτού , και τις εξείς αλληλεπιδράσεις οι οποίες θα μας χρειαστούν: δύο βαθμωτά με ένα ανυσματικό, δύο βαθμωτά με δύο ανυσματικά ,

δύο βαρυτικά με ένα βαθμωτό και δύο βαρυτικά με δύο βαθμωτά.
Ξεκινάμε με τον όρο $\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$ ο οποίος δίνει τον propagator και μετά απο μία ολοκλήρωση κατα παράγοντες έρχεται στη μορφή $-\phi^*(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi$. Άρα ο propagator είναι η λύση της εξίσωσης

$$-(\partial^2 + m^2)\mathcal{D}(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \tag{99}$$

της οποίας η λύση στο χώρο των ορμών είναι

$$i\mathcal{D}(x) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ipx} \tag{100}$$

Η κβαντισμένη μορφή των βαθμωτών είναι

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \Big(a e^{-ipx} + b^\dagger e^{+ipx} \Big) \tag{101}$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \Big(a^\dagger e^{+ipx} + b e^{-ipx} \Big) \tag{102}$$

όπου το ϕ σε έναν όρο αλληλεπίδρασης μπορεί να υπονοεί την δημιουργία ενός αντισωμάτιου ή τη καταστροφή ενός σωματιδίου και το ϕ^* τη καταστροφή ενός σωμάτιου ή την δημιουργία ενός αντισωμάτιου. Για τα ανυσματικά πεδία έχουμε ,αν εισέρχεται

$$A^\mu \sim \epsilon^\mu e^{-ik_1 x} \tag{103}$$

και αν εξέρχεται

$$A^\mu \sim \epsilon^{*\mu} e^{+ik_2 x} \tag{104}$$

Ενώ για το βαρυτικό πεδίο

$$h_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_{\alpha\beta} e^{-ik_1 x} \tag{105}$$

για τη περίπωση που εισέρχεται , και για όταν εξέρχεται έχουμε

$$h_{\alpha\beta} \sim \varepsilon^*_{\alpha\beta} e^{+ik_2 x} \tag{106}$$

Έτσι για το διάγραμμα που αντιστοιχεί στον όρο αλληλεπίδρασης δύο βαθμωτών με ένα ανυσματικό ,όπου και τα δύο βαθμωτα είναι ηλεκτρόνια $+ieA^\mu(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi)$, έχουμε πως

$$\phi \sim a e^{-ip_1 x} + b^\dagger e^{+ip_1 x}) \tag{107}$$

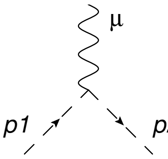
$$\phi^* \sim a^\dagger e^{+ip_2 x} + b e^{-ip_2 x} \tag{108}$$

$$\partial_\nu \phi \sim -ip_{1\nu} a^\dagger e^{-ip_1 x} + ip_{1\nu} b e^{+ip_2 x} \tag{109}$$

$$\partial_\mu \phi^* \sim ip_{2\mu} a e^{+ip_1 x} - ip_{2\mu} b^\dagger e^{-ip_2 x} \tag{110}$$

$$\tag{111}$$

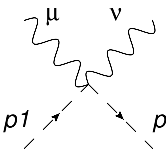
Άρα για τη περίπτωση μας οπου ένα ηλεκτρόνιο καταστρέφεται και ένα άλλο δημιουργείται έχουμε



$$= -ie(p_1 + p_2)^{\mu}\epsilon_{\mu} \tag{112}$$

Οι κανόνες Feynman είναι οι τανυστές οι οποίοι θα δώσουν το παραπάνω πλάτος . Οπότε είναι προφανές οτι το κανόνας vertex για την αλληλεπίδραση θα είναι $-ie(p_1+p_2)^{\mu}$. Για τον όρο $e^2 A_{\mu} A^{\mu} \phi^* \phi$, ο οποίος μπορεί να μας δώσει τη περίπτωση όπου το εισερχόμενο φωτόνιο καταστρέφεται και δημιουργείται ένα άλλο.

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= \epsilon_1^{\mu} e^{-ik_1 x} + \epsilon_2^{*\mu} e^{+ik_2 x} \rightarrow \\ A_{\mu} A^{\mu} &= 2\epsilon_{1\mu}\epsilon_2^{*\mu} e^{i(k_2-k_1)} x \end{aligned} \tag{113}$$

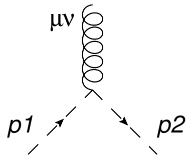


$$= 2ie(\epsilon \cdot \epsilon_2^*) \tag{114}$$

Απο τον όρο $\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\eta_{\mu\nu}\left((\partial_{\alpha}\phi)^*(\partial^{\alpha}\phi) - m^2\phi^*\phi\right) - 2(\partial_{\mu}\phi)^*(\partial_{\nu}\phi)\right]$ για τη περίπτωση που το εισερχόμενο βαθμωτό σωμάτιο καταστρέφεται και δημιουργείται το τελικό παίρνουμε:

$$(\partial_{\mu}\phi)^*(\partial_{\nu}\phi) \sim -i^2 p_{2\mu} p_{1\nu} \tag{115}$$

οπότε

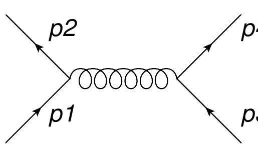


$$= i\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu}[\eta_{\mu\nu}((p_1 p_2) - m^2) - 2p_{1\nu}p_{2\mu}] \tag{116}$$

Λόγω της συμμετρικότητας του τανυστή $h_{\mu\nu}$ στην εναλλαγή του μ , ν ο κανόνας Feynman για το vertex θα είναι

$$V^{\mu\nu} = i\frac{\kappa}{2}[\eta^{\mu\nu}((p_1 p_2) - m^2) - 2I^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}] \tag{117}$$

Σε αυτό το σημείο μπορουμε να ελένξουμε το αν η θεωρία οδηγεί στον νόμο του Νεύτωνα . Για να το κάνουμε αυτό , θα πάρουμε τον νευτώνιο όριο των τετραορμών στο οποίο έχουμε $p^{\mu} \approx (m, 0, 0, 0)$ Το σχετικό διάγραμμα θα είναι



$$= -i\mathcal{M} \tag{118}$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathcal{M} =& i\frac{\kappa}{2}[\eta_{\mu\nu}(p_1p_2)-m_1^2)-p_{1\mu}p_{2\nu}-p_{1\nu}p_{2\mu}]\frac{i}{2q^2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}+\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}-\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma})\\ &\times i\frac{\kappa}{2}[\eta_{\rho\sigma}(p_3p_4)-m_2^2)-p_{3\rho}p_{4\sigma}-p_{3\sigma}p_{4\rho}]\\ =&\kappa^2\Big[(p_3p_4-m_2^2)(p_1p_2-m_1^2)-\frac{1}{2}(p_3p_4)(p_1p_2-m^2)-\frac{1}{2}(p_1p_2)(p_3p_4-m_2^2)\\ &-\frac{1}{2}(p_3p_1)(p_2p_4)+\frac{1}{2}(p_3p_4)(p_1p_2)-\frac{1}{2}(p_3p_2)(p_4p_1)\Big]\frac{i}{q^2}\to \end{aligned} \tag{119}$$

$$\mathcal{M} =\frac{\kappa^2}{2}\frac{m_1^2m_2^2}{q^2} \tag{120}$$

το οποίο χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier απο τον χώρο των ορμών στο χώρο των θέσεων

$$\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{iqr}\frac{1}{q^2}=\frac{1}{4\pi r} \tag{121}$$

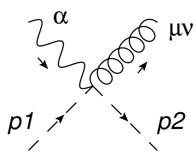
και ορίζοντας το δυναμικό ως

$$V(x)=-\frac{1}{2m_1}\frac{1}{2m_2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{iqx}\mathcal{M}(q) \tag{122}$$

παίρνουμε:

$$V(r)=-G\frac{m_1m_2}{r} \tag{123}$$

Για τον όρο $\frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}[\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi^* ieA^\alpha\phi - i\phi^* eA_\alpha\partial^\alpha\phi) - 2ie\partial_\mu\phi^* A_\nu\phi + i2eA_\mu\phi^*\partial_\nu\phi]$ όπου ένα φωτόνιο εισέρχεται και παράγεται ένα γκραβιτόνιο



$$=\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{*\mu\nu}[-\eta_{\mu\nu}(ep_{2\alpha}\epsilon^\alpha+ep_1^\alpha\epsilon_\alpha)+2ep_{2\mu}\epsilon^\nu+2ep_{1\nu}\epsilon^\mu]$$

Απο τη παραπάνω έκφραση μπορούμε να εξάγουμε την έκφραση για τον κανόνα του vertex λαμβάνωντας υπόψη της συμμετρικότητα του $h_{\mu\nu}$.

$$V^{\mu\nu,\alpha}=-ie\frac{\kappa}{2}[\eta^{\mu\nu}(p_1+p_2)^\alpha-\eta^{\alpha\mu}(p_1+p_2)^\nu-\eta^{\alpha\nu}(p_1+p_2)^\mu] \tag{124}$$

Το οποίο διαφωνεί με τον κανόνα Feynman που δίνεται στην [13] κατα ένα παράγοντα -1 ,αλλά συμφωνεί με τον κανόνα του [22], ενώ και οι δύο έχουν αναπτύξει την ίδια Λαγκρανζιανή με τον ίδιο τρόπο. Δεδομένου του ότι ο ένας κανόνας οδηγεί στη παραγοντοποίηση των πλατών ,όπως θα δούμε στη συνέχεια, ενώ ο άλλος όχι, θεωρούμε πως πρόκειται για τυπογραφικό λάθος.

Τέλος , ο τελευταίος όρος και πιο περίπλοκος όρος που μας ενδιαφέρει απο το συγκεκριμένο κομμάτι της Λαγκρανζιανής, είναι αυτός που περιγράφει τη αλληλεπίδραση δύο βαθμωτών με δύο γκραβιτόνια και είναι ο

$$\kappa^2 \left[\frac{1}{8}\Big(h^2 - 2h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\Big)\Big((\partial_\alpha\phi)^*(\partial^\alpha\phi) - m^2\phi^*\phi\Big) + \Big(h^{\mu\alpha}h^\nu_\alpha - \frac{1}{2}hh^{\mu\nu}\Big)(\partial_\mu\phi)^*(\partial_\nu\phi)\right] \tag{125}$$

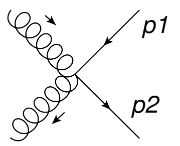
Για το συγκεκριμένο όρο ξέρουμε οτι μπορούμε να αναπτύξουμε το βαρυτικό πεδίο ως

$$h_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha}e^{-ik_1x} + \varepsilon^*_{\mu\alpha}e^{+ik_2x} \tag{126}$$

Με αποτέλεσμα ένας γενικός όρος $h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta}$ να δίνει

$$\begin{aligned} h_{\mu\alpha}h_{\nu\beta} =& (\varepsilon_{\mu\alpha}e^{-ik_1x} + \varepsilon^*_{\mu\alpha}e^{+ik_2x})(\varepsilon_{\nu\beta}e^{-ik_1x} + \varepsilon^*_{\nu\beta}e^{+ik_2x}) \\ \to& (\varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon^*_{\nu\beta} + \varepsilon^*_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\beta})e^{i(k_1-k_2)x} \end{aligned} \tag{127}$$

καθώς εμάς μας ενδιαφέρει η περίπτωση που το ένα γκραβιτόνιο καταστρέφεται και το άλλο δημιουργείται. Άρα το διάγραμμα δίνει



$$= A$$

όπου,

$$\begin{aligned} A =& i\kappa^2\Big[\frac{1}{8}(2\varepsilon^\alpha_\alpha\varepsilon^{\beta*}_\beta - 4\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{*\mu\nu})[(p_1\cdot p_2) - m^2] \\ &+ [(\varepsilon^{*\mu\alpha}\varepsilon^\nu_\alpha + \varepsilon^{*\nu}_\alpha\varepsilon^{\mu\alpha}) - \frac{1}{2}(\varepsilon^{*\alpha}_\alpha\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{*\mu\nu}\varepsilon^\alpha_\alpha)](p_{1\nu}p_{2\mu})\Big] \end{aligned} \tag{128}$$

Το να εξάγουμε τον κανόνα Feynman ,αν και δε χρειάζεται αφού θα το συναντήσουμε ξανά σε αυτή τη μορφή ,αποτελεί μια πιο λεπτή υπόθεση απο τις προηγούμενες ,καθώς πρέπει να λάβουμε υπόψη τη συμμετρικότητα και των δύο h που εμφανίζονται.Για αυτό και θα περιγράψουμε αναλυτικά την εξαγωγή του κανόνα .Ο όρος $\varepsilon^\alpha_\alpha\varepsilon^{*\beta}_\beta$ είναι ήδη συμμετρικοποιημένος οπότε θα δώσει ένα όρο $\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}$, ο οποίος οδηγεί στη σύζευξη των πεδίων $h^{\mu\nu}, h^{\rho\sigma}$ με τον ευατό τους . Το $\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{*\mu\nu}$ θα δώσει τον όρο $I^{\mu\nu,\rho\sigma}$.Οι υπόλοιποι όροι δίνουν

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^{*\mu\alpha}\varepsilon^\nu_\alpha + \varepsilon^{*\nu}_\alpha\varepsilon^{\mu\alpha})(p_{1\nu}p_{2\mu}) \to \\ &\frac{1}{2}\Big[(\eta^{\rho\mu}I^{\sigma\nu\alpha\beta} + \eta^{\rho\nu}I^{\sigma\mu\alpha\beta} + \eta^{\sigma\mu}I^{\rho\nu\alpha\beta} + \eta^{\sigma\nu}I^{\rho\mu\alpha\beta}\Big](p_{1\alpha}p_{2\beta}) \\ &(\varepsilon^{*\alpha}_\alpha\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{*\mu\nu}\varepsilon^\alpha_\alpha)(p_{1\nu}p_{2\mu}) \to \\ &[\eta^{\rho\sigma}I^{\mu\nu\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}I^{\rho\sigma\alpha\beta}](p_{1\alpha}p_{2\beta}) \end{aligned} \tag{129}$$

Για τη Λαγκρανζιανή του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και βρίσκουμε

$$\mathcal{L}^{(0)}_{gA} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{130}$$

$$\mathcal{L}^{(1)}_{gA} = \frac{\kappa}{2}h^{\tau}_{\nu}F^{\mu\nu}F_{\mu\tau} - \frac{1}{8}hF^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_{gA} = &-\frac{\kappa^2}{32}(h^2 - 2h^{\nu}_{\mu}h^{\mu}_{\nu})F^{\rho\phi}F_{\rho\phi}\\ &+ \frac{\kappa^2}{4}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}[hh^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma} - 2h^{\alpha}_{\mu}h^{\mu\rho}\eta^{\beta\sigma} - h^{\alpha\rho}h^{\beta\sigma}]\end{aligned} \tag{132}$$

Απο τους παραπάνω όρους μας ενδιαφέρει μόνο ο διαδότης του ανυσματικού πεδίου και ο όρος αλληλεπίδρασης δυο ανυσματικών πεδίων με ένα βαρυτικό. Ο διαδότης προκύπτει απο τον τετραγωνικό όρο $\mathcal{L}^{(0)}_{gA}$ αφού του προσθέσουμε ένα όρο βαθμίδας της μορφής $-\frac{1}{2\xi}\partial^{\mu}A_{\mu}\partial^{n}uA_{\nu}$ δηλαδή

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\partial^{\mu}A_{\mu}\partial^{n}uA_{\nu}\\ =&-\frac{1}{2}\partial^{\mu}A^{\nu}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) - \frac{1}{2\xi}\partial^{\mu}A_{\mu}\partial^{\nu}A_{\nu} \qquad (133)\\ =&\frac{1}{2}A_{\mu}\Big(\partial^2\eta^{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi})\partial^{\mu}\partial^{\nu}\Big)A_{\nu} \qquad (134)\end{aligned}$$

Οπότε ο διαδότης θα είναι η λύση της εξίσωσης

$$\Big(\partial^2\eta^{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi})\Big)\mathcal{D}(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \tag{135}$$

η οποία στο χώρο των ορμών γίνεται

$$\Big(-p^2\eta^{\mu\lambda} + (1-\frac{1}{\xi})p^{\mu}p^{\lambda}\Big)\mathcal{D}_{\lambda\nu}(p) = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{136}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διαλέξουμε τη βαθμίδα Feynman ($\xi = 1$) και βλέπουμε πως η λύση είναι

$$iD^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4}\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2}e^{-ipx} \tag{137}$$

ο κανόνας vertex για την αλληλεπίδραση 2 φωτονίων με ένα γκραβιτόνιο προκύπτει απο το $\mathcal{L}^{(1)}_{gA}$, του οποίου ο πρώτος όρος δίνει:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}h^{\tau}_{\nu}F^{\mu\nu}F_{\mu\tau}\\ =&\frac{1}{2}h^{\tau}_{\nu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu})(\partial_{\mu}A_{\tau} - \partial_{\tau}A_{\mu})\\ =&\frac{1}{2}h^{\tau}_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}\partial\mu A_{\tau} - \frac{1}{2}h^{\tau}_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\tau}A_{\mu}\\ &-\frac{1}{2}h^{\tau}_{\nu}\partial^{\nu}A_{\mu}\partial_{\mu}A_{\tau} + \frac{1}{2}h^{\tau}_{\nu}\partial^{\nu}A_{\mu}\partial_{\tau}A_{\mu}\end{aligned} \tag{138}$$

και ο δεύτερος:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{8}hF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\
=&\frac{1}{8}h(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\\
=&-\frac{1}{4}h\partial^\mu A^\nu\partial_\mu A_\nu+\frac{1}{4}h\partial^\mu A^\nu\partial_\nu A_\mu
\end{aligned} \tag{139}
$$

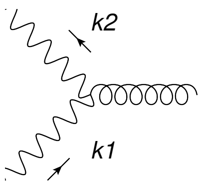
Επίσης άμα δράσουμε με ένα διαφορικό πάνω στο ανάπτυγμα του ανυσματικού πεδίου βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu A^\nu &= -ik_1^\mu\epsilon^\nu e^{-ik_1x}+ik_2^\mu\epsilon^{*\nu}e^{ik_2x}\\
\partial^\tau A^\sigma &= -ik_1^\tau\epsilon^\sigma e^{-ik_1x}+ik_2^\tau\epsilon^{*\sigma}e^{ik_2x}
\end{aligned}
$$

Οπότε ένας γενικός όρος $\partial^\mu A^\nu\partial^\tau A^\sigma$ θα μας δίνει για τη περίπτωση όπου ένα φωτόνιο εισέρχεται και ένα εξέρχεται απο την αλληλεπίδραση

$$
\partial^\mu A^\nu\partial^\tau A^\sigma = k_1^\mu k_2^\tau\epsilon^\nu\epsilon^{*\sigma}e^{-i(k_1-k_2)x}+k_1^\tau k_2^\mu\epsilon^\sigma\epsilon^{*\nu}e^{-i(k_1-k_2)x} \tag{140}
$$

Με βάση τα παραπάνω το πλάτος της αλληλεπίδρασης θα είναι



$$= A \tag{141}$$

όπου,

$$
\begin{aligned}
A=&\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{*\tau}(\epsilon^\nu\epsilon^{*\tau}(k_1k_2)+\epsilon^\tau\epsilon^{*\nu}(k_1k_2))-\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{*\tau}(\epsilon^\nu\epsilon_\mu^*k_1^\mu k_{2\tau}+\epsilon_\mu\epsilon^{*\nu}k_{1\tau}k_2^\mu)\\
&-\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{\tau}(\epsilon^\mu k_1^\nu\epsilon_\tau^*k_{2\mu}+\epsilon^{*\mu}k_2^\nu\epsilon_\tau k_{1\mu})+\frac{1}{2}\epsilon_\nu^{*\tau}(\epsilon^\mu k_1^\nu\epsilon_\mu^*k_{2\tau}+\varepsilon^{*\mu}k_2^\nu\epsilon_\mu k_{1\tau})\\
&-\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha^{*\alpha}(\epsilon^\nu\epsilon_\nu^*(k_1k_2))+\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha^{*\alpha}\epsilon^\nu k_{2\nu}\epsilon^{*\mu}k_{1\mu}
\end{aligned} \tag{142}
$$

Ο κανόνας αυτός δεν αναγράφεται στην [13] ,αλλά αυτό που βρίσκουμε συμφωνεί με αυτόν της [22] .

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{*\tau}(\epsilon^\nu\epsilon^{*\tau}(k_1k_2)+\epsilon^\tau\epsilon^{*\nu}(k_1k_2))-\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha^{*\alpha}(\epsilon^\nu\epsilon_\nu^*(k_1k_2))\to\varepsilon^{*\alpha\beta}\epsilon_\gamma\epsilon_\delta^*\frac{1}{2}P_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\\
&-\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{*\tau}(\epsilon^\nu\epsilon_\mu^*k_1^\mu k_{2\tau}+\epsilon_\mu\epsilon^{*\nu}k_{1\tau}k_2^\mu)\to-\frac{1}{2}\varepsilon^{*\alpha\beta}\epsilon^\gamma\epsilon^{*\delta}(k_{1\gamma}k_{2\beta}\eta_{\alpha\delta}+k_{1\beta}k_{2\delta}\eta_{\alpha\gamma})
\end{aligned}
$$

κτλπ.Η ολοκληρωμένη μορφή δίνεται στο παράρτημα A.

5 Αλληλεπίδραση του βαρυτικού πεδίου με φερμιονικά πεδία

Τώρα θέλουμε να ασχοληθούμε με την αλληλεπίδραση των φερμιονίων με το βαρυτικό πεδίο, όμως η μέθοδος που έχουμε χρησιμοποιείσει μέχρι τώρα,δηλαδή το να αντικαταστίσουμε ολα τα διαφορικά με covariant derivatives και τη μετρική του επίπεδου χώρου $\eta^{\mu\nu}$ με $g^{\mu\nu}$ λειτουργεί μόνο για αντικείμενα τα οποία συμπεριφέρονται σαν τένσορες κάτα τους μετασχηματισμούς Lorentz ,ενώ τα φερμιονικά πεδία δεν είναι τέτοια. Μια λύση για να μπορέσουμε να εισάγουμε σπίνορες στη γενική σχετικότητα είναι μέσω του φορμαλισμού tetrad .

Ξεκινάμε απο τη γνωστή λαγκρανζιανή του φερμιονικού πεδίου στον χώρο minkowski

$$L_e = i\overline{\psi}\overline{\gamma}_\mu \psi_{,\mu} - m\overline{\psi}\psi \tag{143}$$

οπου οι πίνακες γ ορίζονται απο τη σχέση

$$\overline{\gamma}_\mu \overline{\gamma}_\nu + \overline{\gamma}_\nu \overline{\gamma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{144}$$

Όμως , η επιλογή της Λαγκρανζιανής δεν είναι μοναδική , καθώς η οποιαδήποτε λαγρανζιανή που διαφέρει κατα κάποιο ολικό διαφορικό , θα έδινε την ίδια δράση . Επίσης, η αναπαράσταση των πινάκων γ μπορεί να είναι οποιαδήποτε , η οποία ικανοποιεί τη σχέση αντιμετάθεσης. Έτσι σε μια άλλη αναπαράσταση γ'

$$L_e^1 = i\overline{\psi}'\overline{\gamma}'_\mu \psi'_{,\mu} - m\overline{\psi}'\psi' \tag{145}$$

Μία άλλη επιλογή που διαφέρει κατα ένα ολικό διαφορικό είναι η

$$L_e^2 = -i\overline{\psi}'_{,\mu}\overline{\gamma}'_\mu \psi' - m\overline{\psi}'\psi' \tag{146}$$

Τώρα αν υποθέσουμε οτι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια άλλη αναπαράσταση των γ πινάκων η οποία σχετίζεται με τη $\overline{\gamma}'_\mu$ μέσω της σχέσης

$$\overline{\gamma}'_\mu = S^{-1}\overline{\gamma}_\mu S \tag{147}$$

οπου η πράξη $S^{-1}\overline{\gamma}_\mu S$ αναπαριστά ένα μοναδιαίο μετασχηματισμό στον 4×4 πίνακα γ. Η εξίσωση (144) γίνεται

$$S^{-1}\overline{\gamma}_\mu S S^{-1}\overline{\gamma}_\nu S + S^{-1}\overline{\gamma}_\nu S S^{-1}\overline{\gamma}_\mu S = 2\delta_{\mu\nu} \rightarrow \tag{148}$$

$$\overline{\gamma}_\mu \overline{\gamma}_\nu + \overline{\gamma}_\nu \overline{\gamma}_\mu = 2S\delta_{\mu\nu}S^{-1} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{149}$$

Άρα όντως οι πίνακες μας διατηρούν τη σχέση μετάθεσης που θέλουμε .Επομένως μπορούμε τώρα να γράψουμε τις Λαγκρανζιανές ως

$$L_e^1 = i(\overline{\psi}'S^{-1})\overline{\gamma}_\mu[(S\psi')_{,\mu} - S_{,\mu}S^{-1}(S\psi')] - m(\overline{\psi}'S^{-1})(S\psi') \tag{150}$$

Αν τώρα θέσουμε

$$\overline{\psi}' S^{-1} = \overline{\psi} \tag{151}$$

$$S\psi' = \psi \tag{152}$$

$$\overline{\Gamma}_\mu = S_{,\mu} S^{-1} \tag{153}$$

παίρνουμε

$$L_e^1 = i\overline{\psi}\gamma_\mu[\psi_{,\mu} - \overline{\Gamma}_\mu\psi] - m\overline{\psi}\psi \tag{154}$$

$$L_e^2 = -i[\overline{\psi}_{,\mu} + \overline{\psi}\overline{\Gamma}_\mu]\overline{\gamma}_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{155}$$

Έτσι σε έναν Ευκλίδειο χώρο ο οποισδήποτε γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω Λαγκρανζιανων είναι η πιο γενική έκφραση που μπορούμε να έχουμε Εμάς μας ενδιαφέρει να βρούμε τη μορφή των λαγκρανζιανών σε καμπυλωμένο χώρο . Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό θεωρούμε οτι τα πεδία ψ και $\overline{\psi}$ είναι βαθμωτές ποσότητες ,ενώ οι πίνακες γ μετασχιματίζονται σαν ανύσματα .
Θα υποθέσουμε οτι οι πίνακες γ στον καμπυλωμένο χώρο ικανοποιούν την ίδια σχέση μετάθεσης με τα γ στον Ευκλίδειο , με τη διαφορά οτι αντί για $\delta_{\mu\nu}$ έχουμε $g_{\mu\nu}$,δηλαδή

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \tag{156}$$

Καθώς και το ότι η ποσότητα $\overline{\Gamma}$ που εμφανίζεται στις λαγκρανζιανές του μη καμπυλωμένου χώρου τώρα γίνεται Γ_μ οπότε έχουμε

$$L_{eg}^1 = (-g)^{\frac{1}{2}}[i\overline{\psi}\gamma^\mu(\psi_{,\mu} - \Gamma_\mu\psi)m\overline{\psi}\psi] \tag{157}$$

$$L_{eg}^1 = (-g)^{\frac{1}{2}}[i(\overline{\psi}_{,\mu} + \overline{\psi}\Gamma_\mu)\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi] \tag{158}$$

Το πρόβλημα τώρα σε σχέση με τη προηγούμενη περίπτωση έιναι οτι οι Λαγκρανζιανές μας δε διαφέρουν κατα κάποιο ολικό διαφορικό.Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε $\Gamma_\mu = 0$, βρίσκουμε

$$L_{eg}^2 = L_{eg}^1 - (\sqrt{-g}i\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)_{,\mu} + i\sqrt{-g}\overline{\psi}\gamma^\mu_{,\mu}\psi + i(\sqrt{-g})_{,\mu}\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{159}$$

Μπορούμε να δούμε οτι οι όροι που χαλάνε την ισοδυναμία των δύο λαγκρανζιανών θα ήταν μηδέν στη περίπτωση του ευκλίδειου χώρου καθώς τα γ θα ήταν σταθερά και θα μπορούσαμε να επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα είχαμε $\sqrt{-g} = 1$.

Έτσι για να λύσουμε το πρόβλημα των απείρων μη ισοδύναμων συνδυασμών των Λαγκρανζιανών μας , θα ψάξουμε να βρούμε τη ποσότητα Γ_μ για την οποία οι L_{eg}^1 και L_{eg}^2 γίνονται ισοδύναμες. Δηλαδή , εφόσον

$$L_{eg}^2 = L_{eg}^1 + \sqrt{-g}i\overline{\psi}[\gamma^\mu_{,\mu} + \gamma^\mu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \Gamma_\mu\gamma^\mu + \gamma^\mu\Gamma_\mu]\psi \tag{160}$$

θέλουμε το Γ_μ να είναι τέτοιο ώστε

$$-\gamma^\mu\Gamma_\mu + \Gamma_\mu\gamma^\mu = \gamma^\mu_{,\mu} + \gamma^\mu\Gamma^\sigma_\mu = \gamma^\mu_{;\mu} \tag{161}$$

οπου συμβολίσαμε ως $\gamma^\mu_{;\mu}$ τη ποσότητα $\gamma^\mu_{,\mu} + \gamma^\mu\Gamma^\sigma_\mu$ η οποία δεν είναι άλλη απο το covariant derivative του contravariant ανύσματος γ^μ. Η παραπάνω εξίσωση λύνεται για [παράρτημα Δ]

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4}\gamma_{\alpha;\mu}\gamma^\alpha \tag{162}$$

Επομένως μπορούμε πλέον να διαλέξουμε

$$L_{eg} = L^1_{eg} + L^2_{eg} \tag{163}$$

$$= \sqrt{-g}[\frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\psi_{,\mu} - \frac{i}{2}\overline{\psi}_{,\mu}\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{i}{2}\overline{\psi}[\gamma^\mu\Gamma_\mu + \Gamma_\mu\gamma^\mu]\psi \tag{164}$$

Σε αυτό το σημείο για να βρούμε τη σχέση της λαγκρανζιανής μας στον καμπυλωμένο χώρο με το βαρυτικό πεδίο $h_{\mu\nu}$,θα πρέπει να βρούμε , το πως σχετίζεται το γ^μ με το $\overline{\gamma}^\alpha$ του Ευκλίδειου χώρου.

Σε κάθε σημείο του χωροχρόνου x έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων απο τις γενικές συντεταγμένες x^i στις $\overline{x}^i$ των οποίων η μετρική αντιστοιχεί στην ευκλίδεια.

$$dx^\mu = a^\mu_\alpha d\overline{x}^\alpha \tag{165}$$

$$d\overline{x}^\beta = b^\beta_\nu dx^\nu \tag{166}$$

Απο τη παραπάνω σχέση μπορούμε να εξάγουμε τις ακόλουθες

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}a^\mu_\alpha a^\nu_\beta d\overline{x}^\alpha d\overline{x}^\beta = \eta_{\alpha\beta}d\overline{x}^\alpha d\overline{x}^\beta \tag{167}$$

$$g_{\mu\nu}a^\mu_\alpha a^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{168}$$

$$a^\mu_\alpha a^\nu_\beta = \delta_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \tag{169}$$

ακόμη για κάποιο σημείο στο χώρο η σχέση

$$\gamma^\mu = a^\mu_\alpha\overline{\gamma}^\alpha \tag{170}$$

μας δίνει

$$\begin{aligned} 2g^{\mu\nu} =& \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \\ =& a^\mu_\alpha a^\nu_\beta(\overline{\gamma}^\alpha\overline{\gamma}^\beta + \overline{\gamma}^\beta\overline{\gamma}^\alpha) \\ =& g^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\overline{\gamma}^\alpha\overline{\gamma}^\beta + \overline{\gamma}^\beta\overline{\gamma}^\alpha) \\ \rightarrow& g^{\mu\nu}(\overline{\gamma}^\alpha\overline{\gamma}^\beta + \overline{\gamma}^\beta\overline{\gamma}^\alpha) = 2\eta^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \\ \rightarrow& (\overline{\gamma}^\alpha\overline{\gamma}^\beta + \overline{\gamma}^\beta\overline{\gamma}^\alpha) = 2\eta^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{171}$$

η οποία είναι και η σωστή σχέση μετάθεσης των γ πινάκων.Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με τη σχέση των πεδίων a , b και τη μετρική αφού αναπτυχθεί σε δυνάμεις των βαρυτικών πεδίων $h_{\mu\nu}$. Έτσι η σχεση(24) γίνεται

$$b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{172}$$

Προκειμένου να φτιάξουμε ένα ανάπτυγμα για το $b_{\mu\nu}$ με όρους h παίρνουμε

$$b = (1 + \kappa h)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\kappa}{2} h - \frac{\kappa^2}{8} h^2 + \frac{3\kappa^3}{48} h^3 + ... \tag{173}$$

και

$$b_{\mu\alpha} = \eta_{\mu\alpha} + \frac{\kappa}{2} h_{\mu\alpha} - \frac{\kappa^2}{8} h_{\mu\rho} h_{\rho\alpha} + ... \tag{174}$$

Επίσης απο τη σχέση

$$a^{\mu}_{\alpha} b^{\alpha}_{\nu} = \frac{dx^{\mu}}{d\overline{x}^{\alpha}} \frac{d\overline{x}^{\alpha}}{dx^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{175}$$

περιμένουμε οτι το a θα αναπτύσεται ως εξής

$$\begin{aligned} a =& (1 + \kappa h)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\kappa}{2} h + 3 \frac{\kappa^2}{8} h^2 - \frac{15\kappa^3}{48} + ... & (176) \\ a_{\mu\alpha} =& \eta_{\mu\alpha} - \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} + \frac{3\kappa^2}{8} h_{\mu\rho} h_{\rho\alpha} & (177) \end{aligned}$$

Οπότε η Λαγκρανζιανή μας είναι [παράρτημα Δ]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = \sqrt{-g} \Big[& \frac{i}{2} (\overline{\psi} \gamma_\alpha \psi_{,\beta} - \overline{\psi}_{,\beta} \gamma_\alpha \psi) a_{\alpha\beta} - m \overline{\psi} \psi \\ & - \frac{i}{4} \overline{\psi} \underline{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho} \psi a_{\rho\beta} a_{\alpha\nu} b_{\mu\alpha,\beta} \Big] \end{aligned} \tag{178}$$

όπου,

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2} h + \frac{\kappa^2}{8} h^2 - \frac{\kappa^2}{4} h_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + ... \tag{179}$$

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta} + \frac{3\kappa}{8} h_{\alpha\rho} h_{\rho\beta} + ... \tag{180}$$

$$b_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta} - \frac{\kappa^2}{8} h_{\alpha\rho} h_{\rho\beta} + ... \tag{181}$$

Για τη καλύτερη παρουσίαση των πράξεων θα χωρίσουμε τη Λαγκρανιανή σε επιμέρους κομμάτια, ξεκινώντας με τον όρο$-\sqrt{-g} m \overline{\psi} \psi$,ο οποίος όταν κάνουμε το αναπτυγμα γίνεται

$$\begin{aligned} & - \sqrt{-g} m \overline{\psi} \psi \\ =& [1 + \frac{\kappa}{2} h + \frac{\kappa^2}{8} h^2 - \frac{\kappa^2}{4} h_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}][-m \overline{\psi} \psi] \\ =& -m \overline{\psi} \psi - \frac{\kappa}{2} h m \overline{\psi} \psi - \frac{\kappa^2}{8} h^2 m \overline{\psi} \psi + \frac{\kappa^2}{4} h_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} m \overline{\psi} \psi \end{aligned} \tag{182}$$

Ο επόμενος όρος που θα αναπτύξουμε είναι ο $\sqrt{-g}\Big[\frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)a_{\alpha\beta}\Big]$ ο οποίος γίνεται

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g}\Big[\frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)a_{\alpha\beta}\Big]\\
=&\Big[1+\frac{\kappa}{2}h+\frac{\kappa^2}{8}h^2-\frac{\kappa^2}{4}h_{\rho\delta}h_{\rho\delta}\Big]\Big[\frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)a_{\alpha\beta}\Big]\times\\
&\times\Big[\delta_{\alpha\beta}-\frac{\kappa}{2}h_{\alpha\beta}+\frac{3\kappa^2}{8}h_{\alpha\rho}h_{\rho\beta}\Big]\\
=&\frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\alpha}-\overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha\psi)+\frac{i\kappa}{4}h(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\alpha}-\overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha\psi)\\
&-\frac{i\kappa}{4}h_{\alpha\beta}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)+\frac{3i\kappa^2}{16}h_{\alpha\rho}h_{\rho\beta}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\psi_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)\\
&-\frac{i\kappa^2}{8}hh_{\alpha\beta}[(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)]+\frac{i\kappa^2}{16}h^2\delta_{\alpha\beta}[(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)\\
&-\frac{i\kappa^2}{8}h_{\rho\delta}h_{\rho\delta}\delta_{\alpha\beta}[(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)]
\end{aligned}\tag{183}$$

Τέλος , μένει ο όρος $-\frac{i}{4}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi a_{\rho\beta}a_{\alpha\nu}b_{\mu\alpha,\beta}$, ο οποίος μας δίνει

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g}\Big[-\frac{i}{4}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi a_{\rho\beta}a_{\alpha\nu}b_{\mu\alpha,\beta}\Big]\\
=&\Big[1+\frac{\kappa}{2}h+\frac{\kappa^2}{8}h^2-\frac{\kappa^2}{4}h_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\Big]\Big[-\frac{i}{4}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi\Big]\times\\
&\times\Big[\delta_{\rho\beta}-\frac{\kappa}{2}h_{\rho\beta}+\frac{3\kappa^2}{8}h_{\rho\sigma}h_{\sigma\beta}\Big]\Big[\delta_{\alpha\nu}-\frac{\kappa}{2}h_{\alpha\nu}+\frac{3\kappa^2}{8}h_{\alpha\phi}h_{\phi\nu}\Big]\times\\
&\times\Big[\frac{\kappa}{2}h_{\mu\alpha,\beta}-\frac{\kappa^2}{8}(h_{\mu\sigma}h_{\sigma\alpha,\beta}+h_{\mu\sigma,\beta}h_{\sigma\alpha})\Big]\\
=&\Big[\frac{i\kappa}{2}h_{\mu\alpha,\beta}\delta_{\rho\beta}\delta_{\alpha\nu}-\delta_{\rho\beta}\frac{i\kappa^2}{4}h_{\alpha\nu}h_{\mu\alpha,\beta}-\delta_{\alpha\nu}\frac{i\kappa^2}{4}h_{\rho\beta}h_{\mu\alpha,b}\\
&+\delta_{\rho\beta}\delta_{\alpha\nu}\frac{i\kappa^2}{4}h_{\mu\alpha,\beta}h-\frac{i\kappa^2}{8}\delta_{\rho\beta}\delta_{\alpha\nu}(h_{\mu\sigma}h_{\sigma\alpha,\beta}+h_{\mu\sigma,\beta}h_{\sigma\alpha})\Big]\times\\
&\times\Big[-\frac{1}{4}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi\Big]\\
=&\Big[\frac{i\kappa}{2}h_{\mu\nu,\rho}-\frac{i\kappa^2}{4}h_{\alpha\nu}h_{\mu\alpha,\rho}-\frac{i\kappa^2}{4}h_{\rho\beta}h_{\mu\nu,\beta}\\
&+\frac{i\kappa^2}{4}h_{\mu\nu,\rho}h-\frac{i\kappa^2}{8}(h_{\mu\sigma}h_{\sigma\nu,\rho}+h_{\mu\sigma,\rho}h_{\sigma\nu})\Big]\times\\
&\times\Big[-\frac{1}{4}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi\Big]\\
=&\frac{i}{16}h_{\alpha\nu}h_{\mu\alpha,\rho}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi
\end{aligned}\tag{184}$$

Οι υπόλοιποι όροι μηδενίζονται επειδή μπορούμε να δούμε οτι πρόκειται για γινόμενο συμμετρικού με αντισυμμετρικό τανυστή. Για παράδειγμα ο όρος

$$\overline{\psi}\frac{i\kappa^2}{16}hh_{\mu\nu,\rho}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi \tag{185}$$

έχει το $h_{\mu\nu}$ ο οποίος είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των δεικτών εξ ορισμού. Επίσης οι δύο όροι του

$$-\frac{i\kappa^2}{8}(h_{\mu\sigma}h_{\sigma\nu,\rho}+h_{\mu\sigma,\rho}h_{\sigma\nu}) \tag{186}$$

ο καθένας ξεχωριστά δεν είναι συμμετρικός στην εναλλαγή του μ με το ν αλλά το άθροισμα τους είναι. Τώρα μαζεύοντας του όρους μπορούμε να δούμε ότι

$$\mathcal{L}_{gf}^{(0)} =\frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\alpha}-\overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha\psi)-m\overline{\psi}\psi \tag{187}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf}^{(1)} =&\frac{i}{2}h\Big[\frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\alpha}-\overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha\psi)-m\overline{\psi}\psi\Big]\\ &-\frac{i}{4}h_{\alpha\beta}(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi)\end{aligned} \tag{188}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf}^{(2)} =&\frac{3i\kappa^2}{16}h_{\alpha\rho}h_{\rho\beta}\Big(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi\Big)-\frac{i\kappa^2}{8}hh_{\alpha\beta}\Big(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\beta}-\overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha\psi\Big)\\ &+\frac{i\kappa^2}{16}h^2\Big(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\alpha}-\overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha\psi\Big)-\frac{i\kappa^2}{8}h^{\rho\delta}h_{\rho\delta}\Big(\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi_{,\alpha}-\overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha\psi\Big)\\ &+\frac{i}{16}h_{\alpha\nu}h_{\mu\alpha,\rho}\overline{\psi}\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho}\psi-\frac{\kappa^2}{8}h^2m\overline{\psi}\psi+\frac{\kappa^2}{4}h_{\alpha\beta}h_{\beta\alpha}m\overline{\psi}\psi\end{aligned} \tag{189}$$

Απο τους οποίους προκύπτουν ο διαδότης του φερμιονικού σωματιδίου , ο όρος αλληλεπίδρασης δύο φερμιωνίων με ένα γκραβιτόνιο , και δύο φερμιονίων με δύο γκραβιτόνια. Ο διαδότης δίνεται απο την εξίσωση

$$(i\not{\partial}-m)\mathcal{D}(x-y)=\delta^{(4)}(x-y) \tag{190}$$

η οποία στο χώρο τον ορμών δίνει

$$\mathcal{D}(x)=\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}\frac{i}{\not{p}-m} \tag{191}$$

Επίσης ,υπάρχουν και οι εξής όροι που προκύπτουν απο την αρχική Λαγκρανζιανή ,όταν αναπτύσουμε τα πεδία, και περιγράφουν την αλληλεπίδραση δύο φερμιονίων με ένα φωτόνιο, και δύο φερμιονίων με ένα γκραβιτόνιο και ένα φωτόνιο.

$$\mathcal{L}_{\gamma f}^{(0)} =-ie\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{192}$$

$$\mathcal{L}_{g\gamma f}^{(1)} =-\frac{1}{2}\kappa e(h\eta_{\mu\nu}-h_{\mu\nu})\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A^\nu \tag{193}$$

Θεωρούμε οτί τα αρχικά και τελικά φερμιόνια των αλληλεπιδράσεων μας αντιστοιχούν σε ελεύθερα ηλεκτρόνια ορμής p_1 και p_2 . Με αποτέλεσμα να έχουμε

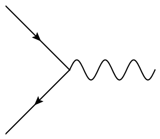
$$\psi_i = u_{(p_1)} e^{-ip_1 x} \tag{194}$$

$$i\partial_a \psi_i = p_{1\alpha} \psi_i \tag{195}$$

$$\overline{\psi}_f = \overline{u}_{(p_2)} e^{+ip_2 x} \tag{196}$$

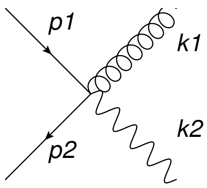
$$-i\partial_\alpha \overline{\psi}_f = p_{2\alpha} \overline{\psi}_f \tag{197}$$

Ο όρος $-ie\overline{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$ για τη περίπτωση που το φωτόνιο εισέρχεται δίνει,



$$= -ie\gamma^\mu \epsilon_\mu \tag{198}$$

Ο όρος$-\frac{1}{2}\kappa e(h\eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu})\overline{\psi}\gamma^\mu \psi A^\nu$ για την περίπτωση οπου το φωτόνιο δημιουργείται, ενώ το γκραβιτόνιο καταστρέφεται, μας δίνει



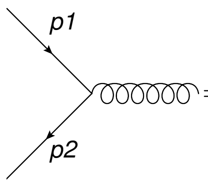
$$= -ie\kappa(\varepsilon^\alpha_\alpha \eta_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu})\overline{u}_{(p_2)}\gamma^\mu u_{(p_1)} \epsilon^{*\nu} \tag{199}$$

Ο όρος που περιγράφει την αλληλεπίδραση 2 φερμιονίων με ένα γκραβιτόνιο είναι

$$\frac{i}{2}h\Big[\frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma_\alpha \psi_{,\alpha} - \overline{\psi}_{,\alpha}\gamma_\alpha \psi) - m\overline{\psi}\psi\Big]$$

$$-\frac{i}{4}h_{\alpha\beta}(\overline{\psi}\gamma_\alpha \psi_{,\beta} - \overline{\psi}_{,\beta}\gamma_\alpha \psi) \tag{200}$$

$$\tag{201}$$

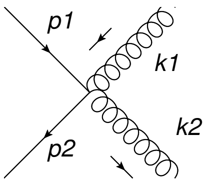


$$= \overline{u}_{(p_2)} A u_{(p_1)} \tag{202}$$

οπου,

$$A = \Big(\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha_\alpha \Big[\frac{1}{2}(\not{p}_1 + \not{p}_2) - m\Big] - \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}(\gamma_\alpha p_{1\beta} + p_{2\beta}\gamma_\alpha)\Big)$$

Τέλος έχει μείνει ο όρος αλληλεπίδρασης $L^{(2)}_{gf}$ που δίνει την αλληλεπίδραση δυο φερμιονίων και δύο γκραβιτόνιων ,εκ των οποίων το ένα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται



$$= \overline{u}_{(p_2)} B u_{(p_1)} \tag{203}$$

οπου ,

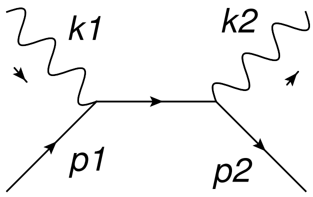
$$\begin{aligned} B =& i\kappa^2 \Big[\frac{1}{16}(\varepsilon^*_{\alpha\rho}\varepsilon_{\rho\beta} + \varepsilon_{\rho\beta}\varepsilon^*_{\alpha\rho)})(p_1+p_2)_\beta \gamma^\alpha - \frac{1}{8}(\varepsilon^\rho_\rho \varepsilon^{*\alpha}_\beta + \varepsilon^\alpha_\beta \varepsilon^*_{\rho\rho})(p_1+p_2)_\beta \gamma_\alpha \\ & + \frac{1}{8}(\varepsilon^{*\rho}_\rho \varepsilon^\sigma_\sigma)(\not{p}_1 + \not{p}_2) - \frac{1}{4}\varepsilon_{\rho\delta}\varepsilon^*_{\rho\delta}(\not{p}_1 + \not{p}_2) - (\varepsilon^{*\rho}_\rho \varepsilon^\sigma_\sigma) m + \frac{1}{4}\varepsilon^{*\rho}_\sigma \varepsilon^\rho_\sigma \\ & + \frac{1}{16}(k_{2\rho}\varepsilon^*_{\mu\alpha}\varepsilon_{\alpha\nu} - k_{1\rho}\varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon^*_{\alpha\nu})\underline{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho} \Big] \end{aligned} \tag{204}$$

6 Φαινόμενο Compton στη QED

Πριν ασχοληθούμε με βαρυτικές αλληλεπιδράσεις , θα παρουσιάσουμε το φαινόμενο Compton απο τη πλευρά της κβαντικής θεωρίας πεδίου στη κβαντική ηλεκτροδυναμική. Είναι ίσως η πιο γνωστή αλληλεπίδραση και μπορεί να βρεθεί σε πολλα συγγράμματα πχ. [12]

Ξεκινάμε με τα διαγράματα Feynman για το φαινόμενο compton στη scalar qed ,κατα το οποίο ενα βαθμωτο σωμάτιο αλληλεπιδρά με ένα φωτόνιο και παράγουν ένα φωτόνιο και ένα βαθμωτό.Η αλληλεπίδραση αυτή περιγράφεται απο τα τρία διαγραμματα Born A, Born B και seagull, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια

Για το πρώτο Born διάγραμμα παίρνουμε

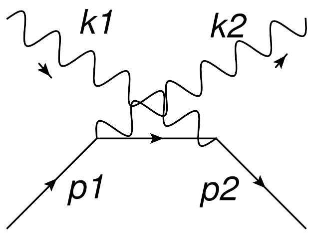


$= A_\alpha,$

με

$$A_\alpha = (-i^2)\frac{e^2\epsilon_{1,\mu}(p_1+q)^\mu(q+p_2)^\nu\epsilon^*_{2,\nu}}{q^2-m^2}$$
$$= -\frac{e^2\epsilon_{1,\mu}(2p_1-k_1)^\mu(2p_2+k_2)^\nu\epsilon^*_{2,\nu}}{p_1^2+k_1^2+2p_1k_1-m^2}$$
$$= -e^2\frac{2(\epsilon_1\cdot p_1)(\epsilon_2^*\cdot p_2)}{p_1\cdot k_1} \tag{205}$$

οπου χρησιμοποιήσαμε $q = p_1 + k_1$ και $q = k_2 + p_2$,καθώς και το οτι $\epsilon \cdot k = 0$. Το δεύτερο διαγραμμα Born είναι παρόμοιο με το πρώτο με τη διαφορά ,ότι το εισερχόμενο φωτόνιο συζεύγνυται με το εξερχώμενο βαθμωτό.

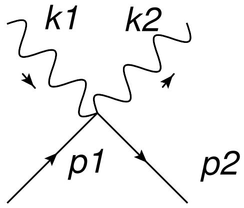


$= A_\beta,$

όπου

$$
\begin{aligned}
A_\beta &= (-i^2)\frac{e^2\epsilon_{1,\mu}(p_1+q)^\mu(q+p_2)^\nu\epsilon^*_{2,\nu}}{q^2-m^2} \\
&= -\frac{e^2\epsilon_{1,\mu}(2p_1-k_2)^\mu(2p_2-k_1)^\nu\epsilon^*_{2,\nu}}{p_1^2+k_2^2-2p_1k_2-m^2} \\
&= +e^2\frac{2(\epsilon_1\cdot p_2)(\epsilon_2^*\cdot p_1)}{p_1\cdot k_2}
\end{aligned}
\tag{206}
$$

με αυτή τη φορά να έχουμε $q = p_1 - k_2$ και $q = p_2 - k_1$. Τέλος το seagull το οποίο είναι απαραίτητο για να υπάρχει gauge συμμετρία δίνει



$$= A_\gamma,$$

$$A_\gamma = +2e^2\epsilon_{1,\mu}\eta^{\mu\nu}\epsilon^*_{2,\nu} = +2e^2(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) \tag{207}$$

Επομένως προσθέτοντας τους παραπάνω όρους παίρνουμε το συνολικό πλάτος το οποίο είναι

$$A_{Compton(S=0)} = 2e^2\Big[-\frac{(\epsilon_1\cdot p_1)(\epsilon_2^*\cdot p_2)}{p_1\cdot k_1} + \frac{(\epsilon_1\cdot p_2)(\epsilon_2^*\cdot p_1)}{p_1\cdot k_2} + (\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\Big] \tag{208}$$

Το οποίο περιμένουμε να μένει αναλλοίωτο κάτω απο gauge μετασχηματισμούς

$$\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + \lambda k_\mu \tag{209}$$

και όντως κάνοντας το μετασχηματισμό βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
\delta A_{Compton(S=0)} =& \lambda 2e^2\Big[-\frac{(k_1\cdot p_1)(\epsilon_2^*\cdot p_2)}{p_1\cdot k_1} + \frac{(k_1\cdot p_2)(\epsilon_2^*\cdot p_1)}{p_1\cdot k_2} + (k_1\cdot\epsilon_2^*)\Big] \\
=& \lambda 2e^2[-(\epsilon_2^* p_2) + (\epsilon_2^* p_1) + (k_1\epsilon_2^*)] \\
=& \lambda 2e^2[-(k_1\epsilon_2^*) + (k_1\epsilon_2^*)] = 0
\end{aligned}
\tag{210}
$$

Το φαινόμενο Compton στη φερμιονική QED έχει τα ίδια διαγράμματα όσο αφορά τα Born,με τη διαφορά ότι οι γραμμές πλέον αντιστοιχούν σε φερμιόνια και όχι βαθμωτα, αλλα απουσιάζει το seagull καθώς στη Λαγκρανζιανή μας δεν εμφανίζεται κάποιος όρος της μορφής $AA\overline{\psi}\psi$ Οπότε για το πρώτο Born

$$
\begin{aligned}
M_\alpha &= (-i^2)e^2\epsilon^{*\mu}\overline{u}_{(p_2)}\gamma_\mu\frac{(\not q + m)}{q^2-m^2}\gamma_\nu\epsilon^\nu u_{(p_1)} \\
&= -e^2\overline{u}_{(p_2)}\not\epsilon_2^*\frac{\not p_1 + \not k_1 + m}{2p_1\cdot k_1}\not\epsilon_1 u_{(p_1)}
\end{aligned}
\tag{211}
$$

οπου $q = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$.Για το δεύτερο

$$
\begin{aligned}
M_\beta &= (-i^2)e^2 \epsilon^\nu \overline{u}_{(p_2)} \gamma_\nu \frac{(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} \gamma_\mu u_{(p_1)} \epsilon^{*\mu} \\
&= +e^2 u_{(p_1)} \overline{u}_{(p_2)} \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_2 - \not{k}_1 + m}{2p_2 \cdot k_1} \not{\epsilon}_2^* u_{(p_1)}
\end{aligned} \tag{212}
$$

με $q = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$ Έτσι για το φερμιονικό φαινόμενο Compton έχουμε

$$
M_{Compton(S=\frac{1}{2})} = e^2 \overline{u}_{(p_2)} \Big[-\not{\epsilon}_2^* \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_2 - \not{k}_1 + m}{2p_2 \cdot k_1} \not{\epsilon}_2^* \Big] u_{(p_1)} \tag{213}
$$

Περιμένουμε πάλι όπως και πριν το συνολικό πλάτος να είναι αναλλοίωτο σε μετασχησματισμούς gauge ,και πράγματι :

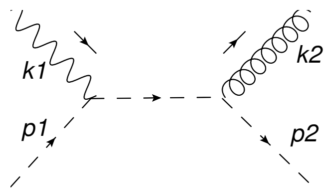
$$
\begin{aligned}
\delta M_{Compton(S=\frac{1}{2})} =& e^2 \overline{u}_{(p_2)} \Big[-\not{\epsilon}_2^* \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \not{k}_1 + \not{k}_1 \frac{\not{p}_2 - \not{k}_1 + m}{2p_2 \cdot k_1} \not{\epsilon}_2^* \Big] u_{(p_1)} \\
=& e^2 \overline{u}_{(p_2)} \Big[\frac{+\not{\epsilon}_2^* \not{k}_1 \not{p}_1 - 2(k_1 \cdot p_1)\not{\epsilon}_2^* - \not{\epsilon}_2^* \not{k}_1 \not{k}_1 - m\not{\epsilon}_2^* \not{k}_1}{2(p_1 \cdot k_1)} \\
&+ \frac{-\not{p}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2^* + 2(p_2 \cdot k_1)\not{\epsilon}_2^* + m\not{k}_1 \not{\epsilon}_2^* + \not{k}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2^*}{2(p_2 \cdot k_1)} \Big] u_{(p_1)} \\
=& e^2 \overline{u}_{(p_2)} \Big[\frac{+\not{\epsilon}_2^* \not{k}_1 m - 2(k_1 \cdot p_1)\not{\epsilon}_2^* - \not{\epsilon}_2^* k_1^2 - m\not{\epsilon}_2^* \not{k}_1}{2(p_1 \cdot k_1)} \\
&+ \frac{-m\not{k}_1 \not{\epsilon}_2^* + 2(p_2 \cdot k_1)\not{\epsilon}_2^* + m\not{k}_1 \not{\epsilon}_2^* + k_1^2 \not{\epsilon}_2^*}{2(p_2 \cdot k_1)} \Big] u_{(p_1)} \\
=& e^2 \overline{u}_{(p_2)} [-\not{\epsilon}_2^* + \not{\epsilon}_2^*] u_{(p_1)} = 0
\end{aligned} \tag{214}
$$

7 Βαρυτική φωτοπαραγωγή

7.1 παρουσία βαθμωτού πεδίου

Με τον όρο βαρυτική φωτοπαραγωγή αναφερόμαστε στο θεωρητικό φαινόμενο κατα το οποίο ένα βαθμωτό αλληλεπιδρά με ένα φωτόνιο και παράγει ένα βαρυτόνιο. Στη διεργασία αυτή εμφανίζονται τέσσερα διαγράμματα Feynman τα οποία χρειάζονται προκειμένου να ισχύει η ταυτότητα Ward.Τα τρία πρώτα είναι ακριβώς τα ίδια με τη περίπτωση του scalar Compton με τη διαφορά οτι τώρα δημιουργείται ένα γκραβιτόνιο αντί για φωτόνιο , και το τέταρτο είναι ένα καινούργιο διάγραμμα το οποίο περιέχει την αλληλεπίδραση δύο φωτονίων με ένα γκραβιτόνιο.

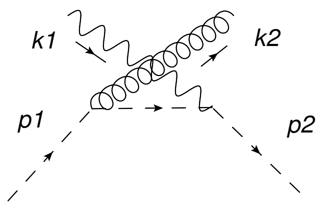
Για το πρώτο διάγραμμα Born έχουμε



$$= \mathcal{A}_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\alpha &= (-i)^2 \epsilon_\alpha e \frac{\kappa}{2} \frac{(p_1+q)^\alpha (p_2^\mu q^\nu + q^\mu p_2^\nu - \eta^{\mu\nu}(p_2 q - m^2))}{q^2 - m^2} \varepsilon^*_{\mu\nu} \\
&= -\epsilon_\alpha e \frac{\kappa}{2} \frac{(2p_1+k_1)^\alpha (2p_2^\mu p_2^\nu + p_2^\mu k_2^\nu + p_2^\nu k_2^\mu)}{2p_1 \cdot k_1} \varepsilon^*_{\mu\nu} \\
&= -e\kappa \frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)^2 (\epsilon_1 \cdot p_1)}{p_1 \cdot k_1}, \qquad (215)
\end{aligned}$$

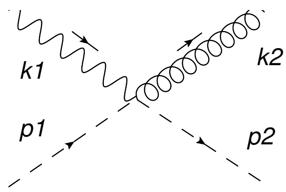
οπου $q = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$. Για το δεύτερο διάγραμμα Born παίρνουμε



$$= \mathcal{A}_\beta,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\beta &= (-i)^2 \varepsilon^*_{\mu\nu} e \frac{\kappa}{2} \frac{(p_1^\mu q^\nu + q^\mu p_1^\nu - \eta^{\mu\nu}(p_1 q - m^2))(q+p_2)^\alpha}{q^2 - m^2} \epsilon_\alpha \\
&= -\varepsilon^*_{\mu\nu} e \frac{\kappa}{2} \frac{(2p_1^\mu p_1^\nu - p_1^\mu k_2^\nu - p_1^\nu k_2^\nu)(2p_2 - k_1)^\alpha}{-2p_1 k_2} \epsilon_\alpha \\
&= +e\kappa \frac{(\epsilon_2^* \cdot p_1)^2 (\epsilon_1 \cdot p_2)}{p_1 \cdot k_2} \qquad (216)
\end{aligned}$$

οπου $q = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$.Για το seagull βρίσκουμε



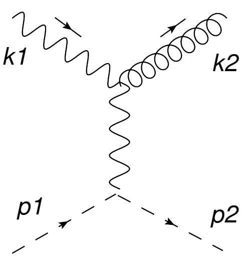
$$= \mathcal{A}_\gamma,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\gamma &= \varepsilon^*_{\mu\nu} e \frac{\kappa}{2} (\eta^{\mu\nu}(p_1+p_2)^\alpha - \eta^{\alpha\mu}(p_1+p_2)^\nu - \eta^{\alpha\nu}(p_1+p_2)^\mu)\epsilon_\alpha \\
&= +e\kappa(\epsilon^*_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon^*_2(p_1+p_2))
\end{aligned} \tag{217}$$

Σε μια τυπική αλληλεπίδραση της QED εδώ θα σταματούσαμε , αλλα άμα κάνουμε ένα gauge μετασχηματισμό , θα δούμε οτι το συνολικό πλάτος δε θα μείνει αναλλοίωτο όπως θα το θέλαμε.
Προτού υπολογίσουμε το γg pole διάγραμμα ,θα υπολογίσουμε το vertex μόνο του ,καθώς θα ξαναεμφανιστεί και αργότερα. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
T^\beta &= \varepsilon^*_{\mu\nu}\tau^{\mu\nu(\alpha\beta)}\epsilon_\alpha \\
&= i\frac{\kappa}{2}\varepsilon^*_{\mu\nu}[(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})(k_1 \cdot q) \\
&+ \eta^{\mu\nu}k_1^\beta q^\alpha + \eta^{\alpha\beta}(k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu) \\
&- (q^\alpha k_1^\nu \eta^{\mu\beta} + q^\alpha k_1^\mu \eta^{\nu\beta} + q^\mu k_1^\beta \eta^{\nu\alpha} + q^\mu k_1^\beta \eta^{\mu\alpha})]\epsilon_\alpha \\
&= i\frac{\kappa}{2}[(\epsilon q)k_1^\beta \varepsilon^\mu_\mu + \epsilon^\beta(k_1\epsilon^*)(q\epsilon^*) + \epsilon^\beta(k_1\epsilon^*)(q\epsilon^*) - (q\epsilon)(k_1\epsilon^*)\epsilon^{*\beta} \\
&- (q\epsilon)(k_1\epsilon^*)\epsilon^{*\beta} - (q\epsilon^*)k_1^\beta(\epsilon\epsilon^*) - (q\epsilon^*)k_1^\beta(\epsilon\epsilon^*) - \varepsilon^{*\mu}_\mu(qk_1)\epsilon^\beta] \\
&= i\kappa[\epsilon^{*\beta}((k_2\epsilon_1)(k_1\epsilon^*_2) - (k_1k_2)(\epsilon^*_2\epsilon_1)) + \epsilon_1^\beta(k_1\epsilon^*_2)^2 - k_1^\beta(k_1\epsilon^*_2)(\epsilon_1\epsilon^*_2)]
\end{aligned} \tag{218}$$

Οπότε το γ g pole διάγραμμα δίνει



$$= \mathcal{A}_\delta,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\delta &= -ie(p_1+p_2)^\gamma \frac{-\eta_{\gamma\beta}}{q^2} T^\beta \\
&= \frac{e\kappa}{2k_1 \cdot k_2}[(\epsilon^* \cdot (p_1+p_2)((k_2 \cdot \epsilon_1)(k_1\epsilon^*_2) - (k_1 \cdot k_2)(\epsilon^*_2 \cdot \epsilon_1)) \\
&+ (\epsilon_1 \cdot (p_1+p_2))(k_1\epsilon^*_2)^2 - (k_1 \cdot (p_1+p_2)(k_1 \cdot \epsilon^*_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon^*_2)]
\end{aligned} \tag{219}$$

,οπου $q = k_1 - k_2$.

Σε αυτό τώρα το σημείο μπορούμε να δείξουμε οτι το συνολικό πλάτος παρά την περίπλοκη μορφή επιδέχεται παραγοντοποίση . Το οποίο στη περίπτωση της φωτοπαραγωγής μπορεί να μη φαίνεται ως κάτι σημαντικό ,αλλα στη περίπτωση του Compton που θα δούμε αργότερα , πρόκειται για τρομερή απλούστευση της έκφρασης του πλάτους.Για να δείξουμε τη παραγοντοποίηση , ακολουθούμε τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην εργασία των Choi ,Shim ,Song [13] [14] ,με τις απαραίτητες αλλαγές, καθώς εμείς έχουμε θεωρήσει τη περίπτωση οπου το εξερχόμενο σωμάτιο είναι γκραβιτόνιο και το εισερχόμενο φωτόνιο , ενώ αυτοί το αντίστροφο.
Έτσι ξεκινάμε παίρνοντας τον δεύτερο όρο του $\mathcal{A}_\delta$ ο οποίος είναι ο :

$$-\frac{e\kappa}{2k_1\cdot k_2}(k_1\cdot k_2)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(\epsilon^*\cdot(p_1+p_2)) \tag{220}$$

και αφού το προσθέσουμε με το πλάτος γ παίρνουμε

$$+\frac{1}{2}e\kappa(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(\epsilon_2^*(p_1+p_2)) \tag{221}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}e\kappa(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(\epsilon_2^*p_1)+\frac{1}{2}e\kappa(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(\epsilon_2^*\cdot p_2)\\
&=+\frac{1}{2}e\kappa(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(\epsilon_2^*\cdot p_1)\frac{p_1\cdot k_2}{p_1\cdot k_2}+\frac{1}{2}e\kappa(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(\epsilon_2^*\cdot p_2)\frac{p_1\cdot k_1}{p_1\cdot k_1}
\end{aligned}$$

οπότε πλέον μπορούμε να γράψουμε το συνολικο πλάτος ως

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2+\mathcal{B}_3, \tag{222}$$

$$\mathcal{B}_1=\frac{1}{2}\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_2)}{(p_1\cdot k_1)}[-2(\epsilon_2^*\cdot p_2)(\epsilon_1\cdot p_1)+(p_1\cdot k_1)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)] \tag{223}$$

$$\mathcal{B}_2=\frac{1}{2}\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_1)}{(p_1\cdot k_2)}[+2(\epsilon_2^*\cdot p_1)(\epsilon_1\cdot p_2)+(p_1\cdot k_2)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)] \tag{224}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3=\frac{1}{2}\frac{(\epsilon_2^*\cdot k_1)}{(k_1\cdot k_2)}&[+(\epsilon_2^*\cdot p_1)(\epsilon_1\cdot k_2)+(\epsilon_2^*p_2)(\epsilon_1\cdot k_2)-(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(k_1\cdot p_1)\\
&-(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(k_1p_2)+(\epsilon_2^*\cdot k_1)(\epsilon_1\cdot p_1)+(\epsilon_2^*k_1)(\epsilon_1\cdot p_2)]
\end{aligned} \tag{225}$$

Άρα σε αυτή τη περίπτωση μπορουμε να επιλέξουμε

$$C_1=2(p_1\cdot k_1)\ ,\ C_2=-2(p_1\cdot k_2)\ ,\ C_3=-2(k_1\cdot k_2) \tag{226}$$

$$A_1=e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_2)\ ,\ A_2=-e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_1)\ ,\ A_3=-e\kappa(\epsilon_2^*\cdot k_1) \tag{227}$$

$$\begin{aligned}
&B_1=-2(\epsilon_2^*\cdot p_2)(\epsilon_1\cdot p_1)+(p_1\cdot k_1)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)\\
&B_2=+2(\epsilon_2^*\cdot p_1)(\epsilon_1\cdot p_2)+(p_1\cdot k_2)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)\\
&B_3=+(\epsilon_2^*\cdot p_1)(\epsilon_1\cdot k_2)+(\epsilon_2^*p_2)(\epsilon_1\cdot k_2)-(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(k_1\cdot p_1)\\
&-(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)(k_1p_2)+(\epsilon_2^*\cdot k_1)(\epsilon_1\cdot p_1)+(\epsilon_2^*k_1)(\epsilon_1\cdot p_2)
\end{aligned} \tag{228}$$

βλέπουμε ότι το άθροισμα των C μας δίνει μηδεν

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 + C_3 \\ &= 2(p_1 \cdot k_1) - 2(p_1 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot k_2) = 0 \end{aligned} \tag{229}$$

Το παραπάνω μηδενίζεται επειδή ξέρουμε πως

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2 \to (p_1 \cdot k_2) = (k_1 \cdot p_2) \tag{230}$$

και απο τη διατήρηση της τετραορμής παίρνουμε

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2 \tag{231}$$

$$\begin{aligned} &(p_1 \cdot k_1) - (k_1 \cdot k_1) - (p_2 \cdot k_1) - (k_2 \cdot k_1) = 0 \\ &(p_1 \cdot k_1) - (p_1 \cdot k_2) - (k_2 \cdot k_1) = 0 \end{aligned} \tag{232}$$

Για να βρούμε το άθροισμα των A_i αρκεί να χρησιμοποιήσουμε $p_2 = p_1 + k_1 - k_2$, και $\epsilon_1^* \cdot k_2 = 0$

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= e\kappa(\epsilon_2^* \cdot p_2) - e\kappa(\epsilon_2^* \cdot p_1) - e\kappa(\epsilon_2^* \cdot k_1) \\ &= e\kappa(\epsilon_2^* \cdot (p_1 + k_1 - k_2) - e\kappa(\epsilon_2^* \cdot p_1) - e\kappa(\epsilon_2^* \cdot k_1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{233}$$

Για τα B_i βλέπουμε ότι ο τρίτος και τέταρτος όρος του B_3 εξαφανίζουν τους δεύτερους όρους των B_1 και B_2 .Για τους υπολοιπους όρους του B_3 βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &+ (\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot k_2) + (\epsilon_2^* p_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) \\ &+ (\epsilon_2^* \cdot k_1)(\epsilon_1 \cdot p_1) + (\epsilon_2^* k_1)(\epsilon_1 \cdot p_2) \end{aligned} \tag{234}$$

$$\begin{aligned} &= +(\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_1) - (\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_2) + (\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_1) \\ &- (\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_2) + (\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_1) - (\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_1) \\ &- (\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_2) - (\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_2) \\ &= -2(\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_2) + 2(\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_1) \end{aligned} \tag{235}$$

Άρα βλέπουμε πως

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 \tag{236}$$

Οπότε το συνολικό πλάτος , με βάση τη σχέση που δείχνεται στο παράρτημα B ,παραγοντοποιείται και γράφεται :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -e\kappa \frac{2(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)}{(k_1 \cdot k_2)} \left[\frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)}{p_1 \cdot k_1} - \frac{(\epsilon_2^* \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_2)} \right] \times \\ &\times \left[\frac{-2(\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_1) + (p_1 \cdot k_1)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)}{2(p_1 \cdot k_1)} - \frac{+2(\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot k_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)}{-2(p_1 \cdot k_2)} \right] \\ &= -e\kappa \frac{2(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)}{(k_1 \cdot k_2)} \left[\frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)}{2(p_1 \cdot k_1)} - \frac{(\epsilon_2^* p_1)}{2(p_1 \cdot k_2)} \right] \times \\ &\times \left[-\frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_1)} + \frac{(\epsilon_2^* \cdot p_1)(\epsilon_1 \cdot p_2)}{(p_1 \cdot k_2)} + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) \right] \end{aligned} \tag{237}$$

,δηλαδή βρίσκουμε

$$A = \frac{\kappa}{2e} F \left[\frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)}{(p_1 \cdot k_1)} - \frac{(\epsilon_2^* \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_2)} \right] A_{compton}(S=0) \tag{238}$$

Η έκφραση μέσα στην αγκύλη για

$$\epsilon_2^{*\mu} \rightarrow \epsilon_2^{*\mu} + \lambda k_2^\mu \tag{239}$$

γίνεται

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(k_2 \cdot p_2)}{p_1 \cdot k_1} - \frac{(k_2 \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_2)} \right] \\ = & \left[\frac{(k_1 \cdot p_1)}{p_1 \cdot k_1} - \frac{(k_2 \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_2)} \right] \\ = & 0 \end{aligned} \tag{240}$$

Για την έκφραση $A_{compton}(S=0)$ έχουμε ήδη δείξει οτι είναι αναλλοίωτη (210) , οπότε το συνολικό πλάτος είναι και αυτό αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς gauge.

7.2 παρουσία φερμιονικού πεδίου

Η επόμενη περίπτωση που θα μελετήσουμε είναι αυτή της αλληλεπίδρασης ενός φερμιονίου με ένα φωτόνιο , κατα την οποία παράγεται ένα γκραβιτόνιο και ένα φερμιόνιο .Τα διαγράμματα είναι ακριβώς τα ίδια με τη προηγούμενη περίπτωση , μόνο που αντικαθιστούμε το βαθμωτό με ένα φερμιόνιο.

Για το πρώτο διαγραμμα Born παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha = & ei\frac{\kappa}{8}\overline{u}_{(p_2)}\varepsilon^{*\mu\nu}(2\eta_{\mu\nu}(\not{q} + \not{p}_2 - 2m) - (q+p_2)_\mu\gamma_\nu - \gamma_\mu(q+p_2)_\nu)\times \\ & \times \frac{(\not{q}+m)}{q^2-m^2}(-i)\gamma_\alpha\epsilon^\alpha u_{(p_1)} \\ & = +e\frac{\kappa}{8}\overline{u}_{(p_2)}(2(\epsilon^{*\mu}\epsilon^*_\mu)(\not{q}+\not{p}_2 - 2m) - \epsilon^*\cdot(2p_2+k_2)\not{\epsilon}^* - \not{\epsilon}^*\epsilon^*\cdot(2p_2+k_2))\times \\ & \times \frac{(\not{p}_1 + \not{k}_1 + m)}{2p_1k_1}\not{\epsilon}u_{(p_1)} \\ & = -e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_2)\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}^*\frac{\not{p}_1+\not{k}_1+m}{4p_1k_1}\not{\epsilon}u_{(p_1)} \end{aligned} \tag{241}$$

,με $q = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$.
Για το δευτερο Born

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\beta = & -ei\frac{\kappa}{8}\overline{u}_{(p_2)}\epsilon^\alpha\gamma_\alpha\frac{(\not{q}+m)}{q^2-m^2}\times \\ & \times(2\eta_{\mu\nu}(\not{q}+\not{p}_1 - 2m) - (q+p_1)_\mu\gamma_\nu - \gamma_\mu(q+p_1)_\nu)\varepsilon^{*\mu\nu}u_{(p_1)} \\ & = e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_1)\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_1\frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{4p_1k_2}\not{\epsilon}_2^* u_{(p_1)} \end{aligned} \tag{242}$$

οπου χρησιμοποιήσαμε $q = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$.
Για το seagull έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\gamma &= -ie\frac{\kappa}{4}\overline{u}_{(p_2)}\varepsilon^{*\mu\nu}(2\eta_{\mu\nu}\gamma_\alpha - \eta_{\alpha\mu}\gamma_\nu - \eta_{\alpha\nu}\gamma_\mu)\epsilon^\alpha u_{(p_1)} \\ &= -e\frac{\kappa}{4}i\overline{u}_{(p_2)}[2\varepsilon^{*\mu}_\mu \not{\epsilon} - \not{\epsilon}^*(\epsilon^*\epsilon) - \not{\epsilon}^*(\epsilon^*\epsilon)]u_{(p_1)} \\ &= +ie\frac{\kappa}{2}\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}^*(\epsilon^*\epsilon)u_{(p_1)}\end{aligned} \tag{243}$$

Για το γg pole έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\delta &= \overline{u}_{(p_2)}(-i)e\gamma^\gamma\frac{-\eta_{\gamma\beta}}{q^2}T^\beta u_{(p_1)} \\ &= \overline{u}_{(p_2)}(-i)e\gamma^\gamma\frac{-\eta_{\gamma\beta}}{q^2}i\kappa[\epsilon^{*\beta}((k_2\epsilon_1)(k_1\epsilon_2^*) - (k_1k_2)(\epsilon_2^*\epsilon_1)) \\ &+ \epsilon_1^\beta(k_1\epsilon_2^*)^2 - k_1^\beta(k_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)u_{(p_1)} \\ &= \overline{u}_{(p_2)}e\kappa\frac{i}{2k_1\cdot k_2}[\not{\epsilon}_2^*((k_2\cdot\epsilon_1)(k_1\cdot\epsilon_2^*) - (k_1\cdot k_2)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)) \\ &+ \not{\epsilon}_1(k_1\cdot\epsilon_2^*)^2 - \not{k}_1(k_1\cdot\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)]\end{aligned} \tag{244}$$

Τα πλάτη αυτα της φερμιονικής φωτοπαραγωγής υπολογίστηκαν πρώτη φορά απο τον Voronov [16] και συμφωνούν με αυτά που βρήκαμε εμείς. Παρατηρούμε τώρα οτι ο όρος του seagull εξουδετερώνεται με τον δεύτερο όρο του g pole .Οπότε μπορούμε πλέον να γράψουμε

$$\mathcal{B}_1 = -e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_2)\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_2^*\frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{4p_1k_1}\not{\epsilon}_1 u_{(p_1)} \tag{245}$$

$$\mathcal{B}_2 = -e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_1)\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_1\frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{-4p_1k_2}\not{\epsilon}_2^* u_{(p_1)} \tag{246}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3 &= \overline{u}_{(p_2)}e\kappa\frac{-(k_1\cdot\epsilon_2^*)}{-2k_1\cdot k_2}[\not{\epsilon}_2^*(k_2\cdot\epsilon_1) \\ &+ \not{\epsilon}_1(k_1\cdot\epsilon_2^*) - \not{k}_1(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)u_{(p_1)}]\end{aligned} \tag{247}$$

Όπως και πριν θα πάρουμε τους εξής όρους

$$C_1 = 2(p_1\cdot k_1)\ ,\ C_2 = -2(p_1\cdot k_2)\ ,\ C_3 = -2(k_1\cdot k_2) \tag{248}$$

$$A_1 = e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_2)\ ,\ A_2 = -e\kappa(\epsilon_2^*\cdot p_1)\ ,\ A_3 = -e\kappa(\epsilon_2^*\cdot k_1) \tag{249}$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}^*(\not{p}_1 + \not{k}_1 + m)\not{\epsilon}u_{(p_1)}$$

$$B_2 = +\frac{1}{2}\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}(\not{p}_2 - \not{k}_1 + m)\not{\epsilon}^*u_{(p_1)}$$

$$B_3 = \overline{u}_{(p_2)}(\not{\epsilon}_2^*(k_2\cdot\epsilon_1) + \not{\epsilon}_1(k_1\cdot\epsilon_2^*) - \not{k}_1(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)u_{(p_1)})$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 \tag{250}$$

Παίρνουμε

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 = -\frac{1}{2}\overline{u}_{(p_2)}(\not\epsilon^*(\not p_1 + \not k_1 + m)\not\epsilon \\ - \not\epsilon(\not p_2 - \not k_1 + m)\not\epsilon^*)u_{(p_1)} \end{aligned} \tag{251}$$

επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι,

$$\begin{aligned} &\overline{u}_{(p_2)}[\not\epsilon_2^*(\not p_1 + m)\not\epsilon_1 - \not\epsilon_1(\not p_2 + m)\not\epsilon_2^*]u_{(p_1)} \\ &= \overline{u}_{(p_2)}[-\not\epsilon_2^*\not\epsilon_1(\not p_1 - m) + (\not p_2 - m)\not\epsilon_1\not\epsilon_2^* \\ &+ 2\not\epsilon_2^*(p_1 \cdot \epsilon_1) - 2(p_2 \cdot \epsilon_1)\not\epsilon_2^*]u_{(p_1)} \\ &= \overline{u}_{(p_2)}[2\not\epsilon_2^*(p_1 \cdot \epsilon_1) - 2(p_1 \cdot \epsilon_1)\not\epsilon_2^* + 2(k_2 \cdot \epsilon_1) - 2(k_1 \cdot \epsilon_1)\not\epsilon_2^*]u_{(p_1)} \\ &= 2(k_2 \cdot \epsilon_1)\not\epsilon_2^* \end{aligned} \tag{252}$$

Ακόμη βλέπουμε πως,

$$\begin{aligned} &\not\epsilon_2^*\not k_1\not\epsilon_1 + \not\epsilon_1\not k_1\not\epsilon_2^* \\ &= -\not k_1\not\epsilon_2^*\not\epsilon_1 + 2(k_1 \cdot \epsilon_2^*)\not\epsilon_1 + \not\epsilon_1\not k_1\not\epsilon_2^* \\ &= \not k_1\not\epsilon_1\not\epsilon_2^* - 2\not k_1(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) + 2(k_1 \cdot \epsilon_2^*)\not\epsilon_1 + \not\epsilon_1\not k_1\not\epsilon_2^* \\ &= -\not\epsilon_1\not k_1\not\epsilon_2^* + \not\epsilon_1\not k_1\not\epsilon_2^* - 2\not k_1(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) + 2(k_1 \cdot \epsilon_2^*)\not\epsilon_1 \\ &= -2\not k_1(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) + 2(k_1 \cdot \epsilon_2^*)\not\epsilon_1 \end{aligned} \tag{253}$$

Αρα στο τέλος χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} &B_1 + B_2 \\ &= -\frac{1}{2}\overline{u}_{(p_2)}(\not\epsilon^*(\not p_1 + \not k_1 + m)\not\epsilon - \not\epsilon(\not p_2 - \not k_1 + m)\not\epsilon^*)u_{(p_1)} \\ &= +\not k_1(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) - (k_1 \cdot \epsilon_2^*)\not\epsilon_1 - (k_2 \cdot \epsilon_1)\not\epsilon_2^* \\ &= -B_3 \end{aligned} \tag{254}$$

Επομένως ,το συνολικό πλάτος της φερμιονικής φωτοπαραγωγής παραγοντοποιείται και γίνεται:

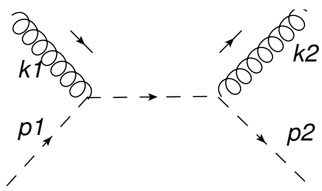
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f = -\frac{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)}{(k_1 \cdot k_2)} e\kappa \left[\frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)}{p_1 \cdot k_1} - \frac{(\epsilon_2^* p_1)}{(p_1 \cdot k_2)}\right] \times \\ \times \left[\frac{1}{4}\not\epsilon_2^*\frac{\not p_1 + \not k_1 + m}{(p_1 \cdot k_1)}\not\epsilon - \frac{1}{4}\not\epsilon\frac{\not p_2 - \not k_1 + m}{(p_1 \cdot k_2)}\not\epsilon_2^*\right] \\ = -\frac{\kappa}{2e}F\left[\frac{(\epsilon_2^* \cdot p_2)}{(p_1 \cdot k_1)} - \frac{(\epsilon_2^* \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_2)}\right] M_{Compton}(S = \frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{255}$$

Όμοια με πρίν απο τη μορφή της έκφρασης στις αγκύλες και δεδομένης της (214), μπορούμε να δούμε ,ότι και το πλάτος της φερμιονικής φωτοπαραγωγής είναι gauge αναλλοίωτο

8 Βαρυτική σκέδαση Compton

8.1 παρουσία βαθμωτού πεδίου

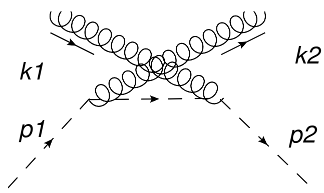
Η βαρυτική σκέδαση Compton είναι μια αρκετά πιο πολύπλοκη διεργασία απο τη φωτοπραγωγή ,και αυτό οφείλεται στο ότι εμφανίζεται το three graviton vertex. Η σκέδαση αυτή υπολογίστηκε πρώτη φορά απο τους Gross , Jackiw [17]. Για το πρώτο διάγραμμα Born βρίσκουμε



$$= \mathcal{A}_a,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_a = (\frac{-i\kappa}{2})^2 \epsilon^{\mu\nu} (p_{1\mu} q_\nu + q_\mu p_{1\nu} - \eta_{\mu\nu}(p_1 \cdot q - m^2)) \times \\
(p_{2\rho} q_\sigma + q_\rho p_{2\sigma} - \eta_{\rho\sigma}(p_2 \cdot q - m^2)) \frac{i}{q^2 - m^2} \\
= -\frac{k^2}{4} \epsilon^{\mu\nu} (p_{1\mu} p_{1\nu} + p_{1\mu} k_{1\nu} + p_{1\mu} p_{1\nu} + k_{1\mu} p_{1\nu}) \times \\
\times (p_{2\rho} p_{2\sigma} + p_{2\rho} k_{2\sigma} + p_{2\rho} p_{2\sigma} + k_{2\rho} p_{2\sigma}) \epsilon^{*\rho\sigma} \frac{i}{p_1^2 + 2p_1 k_1 + k_1^2 - m^2} \\
= -\frac{\kappa^2}{4} \frac{2(\epsilon_1 p_1)^2 2(\epsilon_2^* p_2)^2}{2(p_1 k_1)} \\
= -\kappa^2 \frac{(\epsilon_1 p_1)^2 (\epsilon_2^* p_2)^2}{2(p_1 k_1)}
\end{aligned} \tag{256}$$

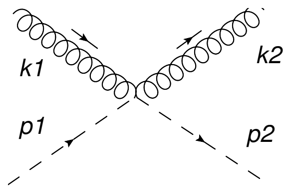
Για το δεύτερο διάγραμμα Born βρίσκουμε



$$= \mathcal{A}_b,$$

$$\mathcal{A}_b = (\frac{-i\kappa}{2})^2\epsilon^{\mu\nu}(p_{2\mu}q_\nu + q_\mu p_{2\nu} - \eta_{\mu\nu}(p_2\cdot q - m^2))\times$$
$$(p_{1\rho}q_\sigma + q_\rho p_{1\sigma} - \eta_{\rho\sigma}(p_1\cdot q - m^2))\frac{i}{q^2-m^2}$$
$$= -\frac{k^2}{4}\epsilon^{\mu\nu}(p_{2\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}k_{1\nu} + p_{2\mu}p_{2\nu} + k_{1\mu}p_{2\nu})\times$$
$$\times\,(p_{1\rho}p_{1\sigma} + p_{1\rho}k_{2\sigma} + p_{1\rho}p_{1\sigma} + k_{2\rho}p_{1\sigma})\epsilon^{*\rho\sigma}\frac{i}{p_1^2 - 2p_1k_2 + k_2^2 - m^2}$$
$$= -\frac{\kappa^2}{4}\frac{2(\epsilon_1 p_2)^2 2(\epsilon_2^* p_1)^2}{-2(p_1k_2)}$$
$$= +\kappa^2\frac{(\epsilon_1 p_2)^2(\epsilon_2^* p_1)^2}{2(p_1k_2)} \tag{257}$$

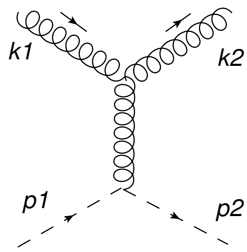
Για το seagull



$$= \mathcal{A}_c,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_c =& i\frac{\kappa^2}{4}\varepsilon^{\mu\nu}[(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\kappa} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda})(p_1\cdot p_2 - m^2)\\
&+ \eta_{\nu\lambda}(p_{1\mu}p_{2\kappa} + p_{1\kappa}p_{2\mu}) + \eta_{\mu\kappa}(p_{1\lambda}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\lambda})\\
&+ \eta_{\mu\lambda}(p_{1\nu}p_{2\kappa} + p_{1\kappa}p_{2\nu}) + \eta_{\nu\kappa}(p_{1\lambda}p_{2\mu} + p_{1\mu}p_{2\lambda})\\
&- \eta_{\mu\nu}(p_{1\lambda}p_{2\kappa} + p_{1\kappa}p_{2\lambda}) - \eta_{\lambda\kappa}(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu})]\varepsilon^{*\lambda\kappa}\\
=& i\frac{\kappa^2}{4}[(\epsilon_1\epsilon_1)(\epsilon_2^*\epsilon_2^*) - (\epsilon_1\epsilon_2^*)^2 - (\epsilon_1\epsilon_2^*)^2)(p_1\cdot p_2 - m^2)\\
&+ 2(\epsilon_2^*\epsilon_1)((p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1))\\
&+ 2(\epsilon_2^*\epsilon_1)((p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1))\\
&- (\epsilon_1\epsilon_1)((p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*) + (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*))\\
&- (\epsilon_2^*\epsilon_2^*)((p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_1) + (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_1))]\\
=& i\kappa^2[(\epsilon_2^*\cdot\epsilon)(p_1\cdot\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + (\epsilon_2^*\cdot\epsilon)(p_1\cdot\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)\\
&- \frac{1}{2}(k_1\cdot p_1)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)^2 + \frac{1}{2}(k_1\cdot p_2)(\epsilon_2^*\cdot\epsilon_1)^2]\end{aligned} \tag{258}$$

Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με το g pole διάγραμμα το οποίο και περιέχει το 3 graviton vertex ,το οποίο λόγω της πολυπλοκότητας του (171 όροι) [18]θα το πάρουμε έτοιμο απο τη βιβλιογραφία , που το δίνει στη πιο απλή μορφή του [19] . Επίσης, για τη καλύτερη παρουσίαση των πράξεων θα το χωρήσουμε σε πέντε μέρη. Η πλήρης μορφή του μπορεί να βρεθεί στο παράρτημα Α



$$= \mathcal{A}_d$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{d1}^{\gamma\delta} =& - i\frac{\kappa}{2}\varepsilon_1^{\mu\nu}[(I_{\mu\nu,\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma})(k^\beta k^\alpha + (k-q)^\beta(k-q)^\alpha + q^\beta q^\alpha - \frac{3}{2}\eta^{\beta\alpha}q^2)]\times \\
& \times \varepsilon_2^{*\rho\sigma}\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}) \\
=& i\kappa[-\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(k_1\cdot q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2 - \frac{1}{4}q^2\eta^{\gamma\delta}(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2 - k_1^\gamma k_1^\delta(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2 - k_1^\gamma k_1^\delta(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2 \\
& + \frac{1}{2}k_1^\delta q^\gamma(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2 + \frac{1}{2}k_1^\gamma q^\delta(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2 - q^\gamma q^\delta(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2]
\end{aligned} \tag{259}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{d2}^{\gamma\delta} =& - i\kappa\varepsilon_1^{\mu\nu}q_\lambda q_\kappa[I^{\lambda\kappa,}{}_{\mu\nu}I^{\beta\alpha,}{}_{\rho\sigma} + I^{\lambda\kappa,}{}_{\rho\sigma}I^{\beta\alpha,}{}_{\mu\nu} - I^{\lambda\beta,}{}_{\mu\nu}I^{\kappa\alpha,}{}_{\rho\sigma} - I^{\kappa\alpha,}{}_{\mu\nu}I^{\lambda\beta,}{}_{\rho\sigma}]\times \\
& \varepsilon_2^{*\rho\sigma}\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}) \\
=& i\kappa[-\epsilon_2^{*\gamma}\epsilon_2^{*\delta}(q\cdot\epsilon_1)^2 - \epsilon_1^\gamma\epsilon_1^\delta(q\cdot\epsilon_2^*)^2 - (\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\eta^{\gamma\delta}(q\cdot\epsilon_1)(q\cdot\epsilon_2^*) \\
& + \epsilon_2^\gamma\epsilon_1^\gamma(q\cdot\epsilon_1)(q\cdot\epsilon_2^*) + \epsilon_1^\gamma\epsilon_2^\delta(q\cdot\epsilon_1)(q\cdot\epsilon_2)]
\end{aligned} \tag{260}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{d3}^{\gamma\delta} =& - i\frac{\kappa}{2}\varepsilon_1^{\mu\nu}[q_\lambda q^\beta(\eta_{\mu\nu}I^{\lambda\alpha,}{}_{\rho\sigma} + \eta_{\rho\sigma}I^{\lambda\alpha,}{}_{\mu\nu}) + q_\lambda q^\alpha(\eta_{\mu\nu}I^{\lambda\beta,}{}_{\rho\sigma} + \eta_{\rho\sigma}I^{\lambda\beta,}{}_{\mu\nu}) \\
& - q^2(\eta_{\mu\nu}I^{\beta\alpha,}{}_{\rho\sigma} + \eta_{\rho\sigma}I^{\beta\alpha,}{}_{\mu\nu}) - \eta^{\beta\alpha}q^\lambda q^\kappa(\eta_{\mu\nu}I_{\rho\sigma,\lambda\kappa} + \eta_{\rho\sigma}I_{\mu\nu,\lambda\kappa}]\times \\
& \times \varepsilon_2^{*\rho\sigma}\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}) \\
=& 0
\end{aligned} \tag{261}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{d4}^{\gamma\delta} =& - i\frac{\kappa}{2}\varepsilon_1^{\mu\nu}[2q^\lambda(I^{\kappa\alpha,}{}_{\rho\sigma}I_{\mu\nu,\lambda\kappa}(k-q)^\beta + I^{\kappa\beta,}{}_{\rho\sigma}I_{\mu\nu,\lambda\kappa}(k-q)^\alpha \\
& - I^{\kappa\alpha,}{}_{\mu\nu}I_{\rho\sigma,\lambda\kappa}k^\beta - I^{\kappa\beta,}{}_{\mu\nu}I_{\rho\sigma,\lambda\kappa}k^\alpha + q^2(I^{\kappa\beta,}{}_{\mu\nu}I_{\rho\sigma,\kappa}{}^\alpha + I_{\mu\nu,\kappa}{}^\alpha I^{\kappa\beta,}{}_{\rho\sigma}) \\
& + \eta^{\beta\alpha}q^\lambda q_\kappa(I_{\mu\nu,\lambda\rho}I^{\rho\kappa,}{}_{\rho\sigma} + I_{\rho\sigma,\lambda\rho}I^{\rho\kappa,}{}_{\mu\nu})]\times \\
& \varepsilon_2^{*\rho\sigma}\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}) \\
=& i\kappa\Big[\frac{1}{2}q^2\eta^{\gamma\delta}(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2 + (\epsilon_1\epsilon_2^*)\eta^{\gamma\delta}(k_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_1) - \epsilon_2^{*\gamma}k_1^\delta(\epsilon_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_1) - \epsilon_2^{*\delta}k_1^\gamma(\epsilon_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_1) \\
& + \epsilon_1^\gamma k_1^\delta(\epsilon_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_2^*) + \epsilon_1^\delta k_1^\gamma(\epsilon_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_2^*) - \frac{1}{2}q^2\epsilon_2^\gamma\epsilon_1^\delta(\epsilon_1\epsilon_2^*) - \frac{1}{2}q^2\epsilon_1^\gamma\epsilon_2^{*\delta}(\epsilon_1\epsilon_2^*) \\
& + \epsilon_2^{*\gamma}q^\delta(\epsilon_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_1) + \epsilon_2^{*\delta}q^\gamma(\epsilon_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_1)\Big]
\end{aligned} \tag{262}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\gamma\delta}_{d5} =& -i\frac{\kappa}{2}\varepsilon_1^{\mu\nu}\Bigg\{(k_1^2+(k_1-q)^2)\big[I_{\alpha\beta}{}^{\mu\sigma}I_{\gamma\delta\sigma}{}^{\nu}+I_{\gamma\delta}{}^{\mu\sigma}I_{\alpha\beta\sigma}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma\delta}\big]\\ &-\Big(I_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}k_1^2+I_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta}(k_1-q)^2\Big)\Bigg\}\times\varepsilon_2^{*\rho\sigma}\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}+\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}-\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta})\\ =&0 \end{aligned}\tag{263}$$

Το $d5$ μηδενίζεται αφού έχουμε

$$k_1 = k_2 + q \to (k_1-q)^2 = (k_2)^2 = 0 \tag{264}$$

καθώς τα εξωτερικά γκραβιτόνια είναι ελεύθερα. Το συνολικό πλάτος του διαγράμματος δίνεται απο

$$\mathcal{A}_d = [\mathcal{A}^{\gamma\delta}_{d1}+\mathcal{A}^{\gamma\delta}_{d2}+\mathcal{A}^{\gamma\delta}_{d3}+\mathcal{A}^{\gamma\delta}_{d4}+\mathcal{A}^{\gamma\delta}_{d5}]\frac{i}{q^2}\frac{i}{2}\kappa(\eta_{\gamma\delta}(p_1\cdot p_2-m^2)-p_{1\gamma}p_{2\delta}-p_{1\delta}p_{2\gamma}) \tag{265}$$

μαζεύοντας τους όρους με $(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}&i\frac{\kappa^2}{q^2}[-\frac{1}{2}m^2(k_1q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-(k_1p_1)(k_1p_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2+\frac{1}{2}(k_1p_2)(p_1q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2\\ &+\frac{1}{2}(k_1p_1)(p_2q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-\frac{1}{2}m^2q^2(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-(p_1q)(p_2q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2+\frac{3}{4}q^2(p_1p_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2]\\ =&i\frac{\kappa^2}{q^2}[-\frac{1}{2}m^2(k_1q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-m^2(k_1q)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2+\frac{3}{2}(k_1q)m^2(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2\\ &+\frac{3}{2}(k_1q)(p_1k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-\frac{3}{2}(k_1q)(p_2k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-(p_1k_1)(p_2k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2+(p_1k_1)^2(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2\\ &+(p_2k_1)^2(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-(p_2k_1)(p_1k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-(k_1p_1)(p_2k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2\\ &+\frac{1}{2}(k_1p_2)(p_1k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2-\frac{1}{2}(k_1p_2)^2(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2+\frac{1}{2}(k_1p_1)(p_2k_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2\\ &-\frac{1}{2}(k_1p_1)^2]\\ =&i\frac{\kappa^2}{q^2}(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2[-(k_1p_1)^2-(k_1p_2)^2+(k_1p_2)(p_1k_1)]\\ =&-\frac{1}{4}i\frac{\kappa^2}{q^2}(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)^2[4(k_1p_1)^2+4(k_1p_2)^2-4(k_1p_2)(p_1k_1)]\end{aligned}\tag{266}$$

οι όροι χωρίς $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*)$ δίνουν :

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\kappa^2}{q^2}[(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2*)(q\epsilon)^2 - (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)^2 + (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(q\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)\\
&+ (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(q\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)]\\
=&i\frac{\kappa^2}{q^2}[-(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)^2 + 2(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_1) - (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)^2\\
&- (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)^2 + 2(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_2^*) - (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)^2\\
&+ (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)^2(p_2\epsilon_2^*) - (p_1\epsilon_2^*)^2(p_2\epsilon_1)^2 - (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)\\
&+ (p_1\epsilon_2)^2(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*) + (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)^2(p_2\epsilon_1) - (p_1\epsilon_1)^2(p_2\epsilon_2^*)^2\\
&- (p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1) + (p_1\epsilon_1)^2(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_2^*)]\\
=&i\frac{\kappa^2}{q^2}[-(p_1\epsilon_1)^2(p_2\epsilon_2^*)^2 - (p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1) + 2(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_1)]\\
=&-\frac{1}{4}i\frac{\kappa^2}{q^2}[4(p_1\epsilon_1)^2(p_2\epsilon_2^*)^2 4(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1) - 8(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_1)]
\end{aligned}
\tag{267}
$$

και τέλος οι όροι που έχουν ένα $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*)$ είναι :

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\kappa^2}{q^2}[m^1(k_1\epsilon_2^*)(q\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (k_1p_2)(p_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (k_1p_1)(p_2\epsilon_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&+ (k_1p_2)(p_1\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (k_1p_1)(p_2\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - \frac{1}{2}q^2(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&- \frac{1}{2}q^2(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (p_1\epsilon_2)(p_2q)(q\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (p_1q)(p_2\epsilon_2^*)(q\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&- (p_1p_2)(q\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)]\\
=&i\frac{\kappa^2}{q^2}[m^2(k_1\epsilon_2)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - m^2(k_1\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (k_1p_2)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&+ (k_1p_2)(p_1\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (k_1p_1)(p_2\epsilon_2)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (k_1p_1)(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&+ (k_1p_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (k_1p_2)(p_1\epsilon_1)(p_1\epsilon_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (k_1p_1)(p_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&- (k_1p_1)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (k_1k_2)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (k_1k_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&+ (p_1\epsilon_2^*)m^2(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (p_1\epsilon_2^*)(p_2p_1)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (p_1\epsilon_2^*)m^2(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&+ (p_1\epsilon_2^*)(p_2p_1)(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (p_1p_2)(p_2\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - m^2(p_2\epsilon_2)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&- (p_1p_2)(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + m^2(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (p_1p_2)(p_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\\
&+ (p_1p_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + (p_1p_2)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - (p_1p_2)(p_1\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)]\\
=&i\frac{\kappa^2}{q^2}[-2(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot\epsilon_2^*)(p_2\cdot\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) + 2(k_1\cdot p_1)(p_2\cdot\epsilon_2^*)(p_1\cdot\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)]\\
=&i-\frac{1}{4}\frac{\kappa^2}{q^2}[+8(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot\epsilon_2^*)(p_2\cdot\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*) - 8(k_1\cdot p_1)(p_2\cdot\epsilon_2^*)(p_1\cdot\epsilon_1)(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)]
\end{aligned}
\tag{268}
$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το συνολικό πλάτος θα πρέπει να αφομοιόσουμε το seagull στα άλλα τρία διαγράμματα.Συγκεκριμένα το γράφουμε ως εξής

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_c =& i\kappa^2[\frac{1}{2}(\epsilon_2^* \cdot \epsilon)(p_1 \cdot \epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + \frac{1}{2}(\epsilon_2^* \cdot \epsilon)(p_1 \cdot \epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1) \\
&- \frac{1}{8}(k_1 \cdot p_1)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)^2 + \frac{1}{8}(k_1 \cdot p_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)^2]+ \\
& i\kappa^2[\frac{1}{2}(\epsilon_2^* \cdot \epsilon)(p_1 \cdot \epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + \frac{1}{2}(\epsilon_2^* \cdot \epsilon)(p_1 \cdot \epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1) \\
&- \frac{3}{8}(k_1 \cdot p_1)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)^2 + \frac{3}{8}(k_1 \cdot p_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)^2]
\end{aligned} \tag{269}
$$

και απο εδώ η πρώτη αγκύλη θα πάει στα δύο πρώτα και η δεύτερη στο g pole με αποτέλεσμα

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 =& i\frac{\kappa^2}{4}\frac{-4(\epsilon_1 p_1)^2(\epsilon_2^* p_2)^2 + 4(\epsilon_1 p_1)(\epsilon_2^* p_2)(p_1 k_1)(\epsilon_2^*) - (\epsilon_2^*\epsilon_1)^2(p_1 k_1)^2}{2(p_1 k_1)} \\
=& - i\frac{\kappa^2}{4}\frac{[2(\epsilon_1 p_1)(\epsilon_2^* p_2) - (\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_1 k_1)]^2}{2(p_1 k_1)}
\end{aligned} \tag{270}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_2 =& i\frac{k^2}{4}\frac{4(\epsilon_2^* p_1)^2(\epsilon_1 p_2)^2 + 4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_2 k_1) + (\epsilon_2^*\epsilon_1)^2(p_2 k_1)^2}{2(p_2 k_1)} \\
=& i\frac{k^2}{4}\frac{[2(\epsilon_2^* p_1)(\epsilon_1 p_2) + (\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_2 k_1)]^2}{2(p_2 k_1)}
\end{aligned} \tag{271}
$$

το μέρος του seagull που περισσεύει μπορεί να γραφτεί ως

$$
\begin{aligned}
& i\kappa^2[\frac{1}{2}(\epsilon_2^* \cdot \epsilon)(p_1 \cdot \epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + \frac{1}{2}(\epsilon_2^* \cdot \epsilon)(p_1 \cdot \epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1) \\
&- \frac{3}{8}(k_1 \cdot p_1)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)^2 + \frac{3}{8}(k_1 \cdot p_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1)^2] \\
=& \frac{1}{8(k_1 k_2)}[4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(k_1 k_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) + 4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(k_1 k_2)(p_2\epsilon_1) \\
&- 3(k_1 p_1)(k_1 k_2)(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2 + 3(k_1 p_2)(k_2 k_1)(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2] \\
=& i\kappa^2\frac{1}{8(k_1 k_2)}[4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(k_1 p_1)(p_1\epsilon)(p_2\epsilon_2^*) - 4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(k_1 p_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*) \\
&+ 4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(k_1 p_1)(p_2\epsilon_1) - 4(\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(k_1 p_2)(p_2\epsilon_1) \\
&- 3(k_1 p_1)^2(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2 + 3(k_1 p_1)(k_1 p_2)(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2 \\
&+ 3(k_1 p_2)(p_1 k_1)(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2 - 3(k_1 p_2)^2(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2]
\end{aligned} \tag{272}
$$

το οποίο όταν προστεθεί στο g pole δίνει

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3 =&\frac{1}{4}\frac{i\kappa^2}{-2(k_1k_2)}[-(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2(k_1p_1)^2-4(\epsilon_1\epsilon_2^*)(k_1p_1)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)\\
&-4(\epsilon_1\epsilon_2^*)(k_1p_2)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)-2(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2(k_1p_1)(k_1p_2)+4(\epsilon_1\epsilon_2^*)(k_1p_1)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)\\
&+4(\epsilon_1\epsilon_2^*)(k_1p_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2(k_1p_2)^2-4(p_1\epsilon_2^*)^2(p_2\epsilon_1)^2\\
&+8(p_1\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)-4(p_1\epsilon_1)^2(p_2\epsilon_2^*)^2]\\
=&\frac{-i\kappa^2}{4}\frac{[(p_2k_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+(p_1k_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+2(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)-2(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)]^2}{-2(k_1p_2)}
\end{aligned} \tag{273}$$

Μπορούμε να διαλέξουμε για τα C_i να είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά του graviton photoproduction για A_i και B_i

$$A_i^{gs}=\kappa^2B_i^{\gamma s}\,,\;B_i^{gs}=-\frac{B_i^{\gamma s}}{4} \tag{274}$$

Για τα οποία έχουμε ήδη δείξει ότι

$$\sum_i A_i=\sum_i B_i=\sum_i C_i=0 \tag{275}$$

Άρα το συνολικό πλάτος παραγοντοποιείται και γίνεται

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{Comptonsg(S=0)} =&\frac{-\kappa^2}{4}\frac{2(p_1\cdot k_1)(p_1\cdot k_2)}{(k_1\cdot k_2)}\left[\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_2)(\epsilon_1\cdot p_1)}{(p_1\cdot k_1)}-\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_1)(\epsilon_1\cdot p_2)}{(p_1\cdot k_2)}-(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\right]^2\\
=&\frac{\kappa^2}{8e^4}F[\mathcal{A}_{Compton(S=0)}]^2
\end{aligned} \tag{276}$$

8.2 παρουσία φερμιονικού πεδίου

Στη περίπτωση οπου το γκραβιτόνιο αλληλεπιδρά με φερμιονικά πεδία τα διαγράμματα που εμφανίζονται θα είναι ακριβώς τα ίδια. Για το πρώτο διαγραμμα Born

$$\begin{aligned}
M_a =& \overline{u}_{(p_2)}\varepsilon^{*\rho\sigma}i^2\kappa^2\frac{1}{64}[2\eta_{\rho\sigma}(\not p_2+\not q-2m)-(p_2+q)_\rho\gamma_\sigma-\gamma_\rho(p_2+q)_\sigma]\times\\
&\times\frac{1}{\not q-m}[2\eta_{\mu\nu}(\not p_1+\not q-2m)-(p_1+q)_\mu\gamma_\nu-\gamma_\mu(p_1+q)\nu]\epsilon^{\mu\nu}u_{(p_1)}\\
=&-\frac{\kappa^2}{64}\overline{u}_{(p_2)}[-4(p_2\epsilon_2^*)\not\epsilon_2^*]\frac{1}{\not q-m}[-4(p_1\epsilon_1)\not\epsilon_1]u_{(p_1)}\\
=&-\frac{\kappa^2}{4}\overline{u}_{(p_2)}\frac{(p_1\cdot\epsilon_1)(p_2\cdot\epsilon_2^*)\not\epsilon_2^*(\not p_1+\not k_1+m)\not\epsilon_1}{2(p_1\cdot k_1)}u_{(p_1)}
\end{aligned} \tag{277}$$

Για το δεύτερο διαγραμμα Born βρίσκουμε,

$$
\begin{aligned}
M_b &= \overline{u}_{(p_2)}\varepsilon^{\mu\nu}i^2\kappa^2\frac{1}{64}[2\eta_{\mu\nu}(\not{p}_2+\not{q}-2m)-(p_2+q)_\mu\gamma_\nu-\gamma_\mu(p_2+q)_\nu]\times \\
&\times\frac{1}{\not{q}-m}[2\eta_{\rho\sigma}(\not{p}_1+\not{q}-2m)-(p_1+q)_\rho\gamma_\sigma-\gamma_\sigma(p_1+q)_\rho]\epsilon^{*\rho\sigma}u_{(p_1)} \\
&= -\frac{\kappa^2}{64}\overline{u}_{(p_2)}[-4(p_2\epsilon_1)\not{\epsilon}_1]\frac{1}{\not{q}-m}[-4(p_1\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_2^*]u_{(p_1)} \\
&= \frac{\kappa^2}{4}\overline{u}_{(p_2)}\frac{(p_2\cdot\epsilon_1)(p_1\cdot\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_1(\not{p}_1+\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_2^*}{2(p_2\cdot k_1)}u_{(p_1)} \qquad (278)
\end{aligned}
$$

Για το seagull,

$$
\begin{aligned}
M_c =&\kappa^2\overline{u}_{(p_2)}\Big[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\not{p}_1+\not{p}_2)-m)\frac{1}{2}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}+\eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}-\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}) \\
&-\frac{1}{16}[\eta^{\alpha\beta}(\gamma^\gamma(p_1+p_2)^\delta+\gamma^\delta(p_1+p_2)^\gamma)+\eta^{\gamma\delta}(\gamma^\alpha(p_1+p_2)^\beta+\gamma^\beta(p_1+p_2)^\alpha)] \\
&+\frac{3}{16}(p_1+p_2)_\epsilon\gamma^\xi(I^{\xi\phi,\alpha\beta}I_\phi^{\epsilon,\gamma\delta}+I^{\xi\phi,\gamma\delta}I_\phi^{\epsilon,\alpha\beta}) \\
&+\frac{i}{16}\epsilon^{\rho\sigma\eta\lambda}\gamma_\lambda\gamma_5(I^{\alpha\beta}_{,\eta\nu}I^{\gamma\delta}_{,\sigma\nu}k_{2\rho}-I^{\gamma\delta}_{,\eta\nu}I^{\alpha\beta}_{,\sigma\nu}k_{1\rho})\Big]\varepsilon_{1\alpha\beta}\varepsilon^*_{2\gamma\delta}u_{(p_1)} \\
=&\kappa^2\overline{u}_{(p_2)}\Big[\frac{3}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_1(p_1+p_2)\cdot\epsilon_2^*+\frac{3}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_2^*(p_1+p_2)\cdot\epsilon_1-\frac{1}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_2^*\not{\epsilon}_1\not{k}_2 \\
&+\frac{1}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_1\not{\epsilon}_2^*\not{k}_1+\frac{1}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2\not{k}_2-\frac{1}{16}\not{k}_1(\epsilon_2^*\epsilon_1)^2 \\
&+\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*(k_2\epsilon_1)(\epsilon_2^*\epsilon_1)-\frac{1}{16}(k_1\epsilon_2^*)(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_1\Big]u_{(p_1)} \\
=&\kappa^2\overline{u}_{(p_2)}\Big[\frac{3}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_1(p_1+p_2)\cdot\epsilon_2^*+\frac{3}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not{\epsilon}_2^*(p_1+p_2)\cdot\epsilon_1-\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*(\epsilon_1k_2)(\epsilon_1\epsilon_2^*) \\
&+\frac{1}{16}(k_1\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_1(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\frac{1}{16}(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_2^*\not{k}_2\not{\epsilon}_1-\frac{1}{16}(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_1\not{k}_1\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)} \qquad (279)
\end{aligned}
$$

. Οι όροι απο το seagull που θα απορροφηθούν απο τα Bohr διαγράμματα είναι οι

$$
\overline{u}_{(p_2)}\Big[+\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*\not{k}_2\not{\epsilon}_1-\frac{1}{16}\not{\epsilon}_1\not{k}_1\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)} \qquad (280)
$$

οι οποίοι μπορούν να γραφτούν ως

$$
\begin{aligned}
&(\epsilon_1\epsilon_2^*)\overline{u}_{(p_2)}\Big[+\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*\not{k}_2\not{\epsilon}_1-\frac{1}{16}\not{\epsilon}_1\not{k}_1\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)}\\
=&(\epsilon_1\epsilon_2^*)\overline{u}_{(p_2)}\Big[\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*(\not{k}_1+\not{p}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}_1-\frac{1}{16}\not{\epsilon}_1(\not{p}_2+\not{k}_2-\not{p}_1)\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)}\\
=&(\epsilon_1\epsilon_2^*)\overline{u}_{(p_2)}\Big[\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*(\not{k}_1+\not{p}_1+m)\not{\epsilon}_1-\frac{1}{16}\not{\epsilon}_1(-m+\not{k}_2-\not{p}_1)\not{\epsilon}_2^*-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_1-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_1)\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)}\\
=&(\epsilon_1\epsilon_2^*)\overline{u}_{(p_2)}\Big[\frac{1}{16}\not{\epsilon}_2^*(\not{k}_1+\not{p}_1+m)\not{\epsilon}_1+\frac{1}{16}\not{\epsilon}_1(+\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^*-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_1-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_1)\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)}\\
=&\overline{u}_{(p_2)}\Big[\frac{\not{\epsilon}_2^*(\not{k}_1+\not{p}_1+m)\not{\epsilon}_1(p_1k_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)}{16(p_1k_1)}+\frac{\not{\epsilon}_1(+\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^*(p_1k_2)(\epsilon_1\epsilon_2^*)}{16(p_2k_1)}\\
&-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_1-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not{\epsilon}_2^*\Big]u_{(p_1)}
\end{aligned}
$$

Για το g pole διάγραμμα έχουμε

$$
\begin{aligned}
M_d=&\Big[\mathcal{A}_{d1}^{\gamma\delta}+\mathcal{A}_{d2}^{\gamma\delta}+\mathcal{A}_{d3}^{\gamma\delta}+\mathcal{A}_{d4}^{\gamma\delta}+\mathcal{A}_{d5}^{\gamma\delta}\Big]\frac{i}{q^2}\overline{u}_{(p_2)}\times\\
&\times\frac{-i\kappa}{2}\Big[\frac{1}{4}(\gamma^\rho(p_1+p_2)^\sigma+\gamma^\sigma(p_1+p_2)^\rho)-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\frac{1}{2}(\not{p}_1+\not{p}_2)-m)\Big]
\end{aligned}
\tag{281}
$$

οι όροι που προκύπτουν με $(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2$

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}_{(p_2)}\frac{(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2}{q^2}\Big[-\frac{1}{4}\not{k}_1(k_1p_1)+\frac{1}{8}\not{q}(k_1p_1)-\frac{1}{4}\not{k}_1(k_1p_2)+\frac{1}{8}\not{q}(k_1p_2)-\frac{1}{2}m(k_1q)\\
&\qquad+\frac{1}{8}\not{p}_1(k_1q)+\frac{1}{8}\not{p}_2(k_1q)+\frac{1}{8}\not{k}_1(p_1q)-\frac{1}{4}\not{q}(p_1q)+\frac{1}{8}\not{k}_1(p_2q)\\
&\qquad-\frac{1}{4}\not{q}(p_2q)-\frac{1}{2}mq^2+\frac{5}{16}\not{p}_1q^2+\frac{5}{16}\not{p}_2q^2\Big]u_{(p_1)}\\
=&\,\overline{u}_{(p_2)}\frac{(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2}{q^2}\Big[\frac{3}{2}m(k_1k_2)-\frac{3}{4}(k_1k_2)\not{p}_1+\frac{1}{8}\not{k}_2(k_1p_1)-\frac{1}{4}(k_1p_1)\not{k}2-\frac{3}{4}\not{p}_2(k_1k_2)\\
&\qquad+\frac{1}{8}(k_1p_2)\not{k}_2-\frac{1}{4}\not{k}_2(k_1p_2)-\frac{1}{4}\not{k}_1(k_1p_1)+\frac{1}{8}\not{k}_1(k_1p_1)\\
&\qquad-\frac{1}{4}\not{k}_1(k_1p_2)-\frac{1}{8}(k_1p_2)\not{k}_2\Big]u_{(p_1)}\\
=&\,\overline{u}_{(p_2)}\frac{(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2}{q^2}\Big[-\frac{1}{4}\not{k}_1k_1\cdot(p_1+p_2)\Big]u_{(p_1)}
\end{aligned}
\tag{282}
$$

οι όροι που δεν έχουν κάποιο $(\epsilon_1\epsilon_2^*)$ όρο είναι:

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{q^2}\Big[-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(p_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)^2-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(p_2\epsilon_2)(q\epsilon_1)^2-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(p_1\epsilon_1)(q\epsilon_2)^2-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(p_2\epsilon_1)(q\epsilon_2^*)^2\\
&\qquad+\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(p_1\epsilon_1)(q\epsilon_1)(q\epsilon_2)+\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(p_1\epsilon_2)(q\epsilon_2)(q\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(q\epsilon_1)(q\epsilon_2)\\
&\qquad+\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(p_2\epsilon_2)(q\epsilon_1)(q\epsilon_2)\Big]u_{(p_1)}\\
&=\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{q^2}\Big[-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(p_1\epsilon_1)(k_1\epsilon_2)^2-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(p_2\epsilon_1)(k_1\epsilon_2)^2-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(p_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)^2-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(p_2\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)^2\\
&\qquad\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_1)-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2)-\frac{1}{4}\not{\epsilon}_2(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_1)\\
&\qquad\frac{1}{4}\not{\epsilon}_1(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)\Big]u_{(p_1)} \qquad (283)\\
&=\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{4q^2}\Big[-2\not{\epsilon}_1(k_1\epsilon_2)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)+2\not{\epsilon}_1(k_1\epsilon_2)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)\\
&\qquad-2\not{\epsilon}_2(k_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)(p_1\epsilon_1)+2\not{\epsilon}_2(k_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2)(p_2\epsilon_1)\Big]u_{(p_1)} \qquad (284)
\end{aligned}$$

Οι όροι που έχουν ένα $(\epsilon_2^*\epsilon_1)$ και κάποιον κινητικό όρο (p_1,k_1,p_2,k_2) συζευγμένο με κάποιον γ πίνακα:

$$\begin{aligned}
&=\overline{u}_{(p_2)}\frac{(\epsilon_1\epsilon_2^*)}{q^2}\Big[m(k_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)-\frac{1}{4}\not{p}_1(k_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)-\frac{1}{4}\not{p}_2(k_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)-\frac{1}{4}\not{k}_1(p_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)\\
&\qquad-\frac{1}{4}\not{k}_1(p_2\epsilon_2)(q\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not{q}(p_2\epsilon_2)(q\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not{k}_1(p_1\epsilon_1)(q\epsilon_2)+\frac{1}{4}\not{k}_1(p_1\epsilon_1)(q\epsilon_2)\\
&\qquad-\frac{1}{4}\not{p}_1(q\epsilon_1)(q\epsilon_2)-\frac{1}{4}\not{p}_2(q\epsilon_1)(q\epsilon_2)+\frac{1}{4}\not{q}(p_1\epsilon_2)(q\epsilon_1)\Big]u_{(p_1)}\\
&=\overline{u}_{(p_2)}\frac{(\epsilon_1\epsilon_2^*)}{q^2}\Big[-m(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)+\frac{1}{2}\not{p}_1(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)+\frac{1}{2}\not{p}_2(k_1\epsilon_2)(k_2\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not{k}_1(k_1\epsilon_2)(p_1\epsilon_1)\\
&\qquad+\frac{1}{4}\not{k}_1(k_1\epsilon_2)(p_2\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not{k}_2(k_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2)+\frac{1}{4}\not{k}_2(k_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2)\Big]u_{(p_1)}\\
&=\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{4q^2}\Big[-2\not{k}_2(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+2\not{k}_2(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\Big]u_{(p_1)} \qquad (285)
\end{aligned}$$

Οι όροι με ένα $(\epsilon_2^*\epsilon_1)$ και $\not\epsilon_1, \not\epsilon_2^*$

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}_{(p_2)}\frac{(\epsilon_1\epsilon_2^*)}{q^2}\Big[-\frac{1}{8}\not\epsilon_2^*(p_1\epsilon_1)q^2-\frac{1}{8}\not\epsilon_1(p_1\epsilon_2)q^2-\frac{1}{8}\not\epsilon_2(p_2\epsilon_1)q^2-\frac{1}{8}\not\epsilon_1(p_2\epsilon_2^*)q^2(\epsilon_1\epsilon_2^*)\\
&\qquad-\frac{1}{4}\not\epsilon_2^*(q\epsilon_1)(k_1p_1)-\frac{1}{4}\not\epsilon_2^*(k_1p_2)(q\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not\epsilon_2^*(p_1q)(q\epsilon_1)+\frac{1}{4}\not\epsilon_2^*(p_2q)(q\epsilon_1)\\
&\qquad+\frac{1}{4}\not\epsilon_1(k_1p_1)(q\epsilon_2)+\frac{1}{4}\not\epsilon_1(p_2k_1)(q\epsilon_2^*)\Big]u_{(p_1)}\\
&\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{4q^2}\Big[+\not\epsilon_2^*(k_1p_1)(k_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\not\epsilon_2^*(k_1p_2)(k_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\\
&\qquad+\not\epsilon_1(k_1\epsilon_2)(k_1p_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\not\epsilon_1(k_1\epsilon_2^*)(k_1p_2)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\Big]u_{(p_1)}\\
&\qquad+\overline{u}_{(p_2)}\Big[-\frac{1}{8}\not\epsilon_1(p_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)-\frac{1}{8}\not\epsilon_1(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\\
&\qquad-\frac{1}{8}\not\epsilon_2^*(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)-\frac{1}{8}\not\epsilon_2^*(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\Big]u_{(p_1)}
\end{aligned}
\tag{286}
$$

οι τέσσερεις τελευταίοι όροι προέκυψαν απο την αντικατάσταση του q^2 στον παρανομαστή με $-2k_1k_2$ και ακυρώνουν τους όρους που έχουν περισσέψει απο το seagull.Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}_{(p_2)}\Big[-\frac{1}{8}\not\epsilon_1(p_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)-\frac{1}{8}\not\epsilon_1(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)-\frac{1}{8}\not\epsilon_2^*(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\\
&\quad-\frac{1}{8}\not\epsilon_2^*(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not\epsilon_1-\frac{2}{16}(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not\epsilon_2^*\\
&\quad+\frac{1}{16}(k_1\epsilon_2^*)\not\epsilon_1(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\frac{3}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not\epsilon_1(p_1+p_2)\cdot\epsilon_2^*+\frac{3}{16}(\epsilon_2^*\epsilon_1)\not\epsilon_2^*(p_1+p_2)\cdot\epsilon_1\\
&\quad-\frac{1}{16}\not\epsilon_2^*(\epsilon_1k_2)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\Big]u_{(p_1)}\\
&=\overline{u}_{(p_2)}\Big[-\frac{1}{16}\not\epsilon_1(p_2\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\frac{1}{16}\not\epsilon_1(p_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\frac{1}{16}\not\epsilon(k_1\epsilon_2^*)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\\
&\quad-\frac{1}{16}\not\epsilon_2^*(p_2\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\frac{1}{16}\not\epsilon_2^*(p_1\epsilon_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)-\frac{1}{16}\not\epsilon_2^*(\epsilon_1k_2)(\epsilon_1\epsilon_2^*)\Big]u_{(p_1)}\\
&\quad=0
\end{aligned}
\tag{287}
$$

Οι όροι που έχουν μείνει απο το g pole μαζεμένοι δίνουν:

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{4q^2}\Big[-2\not\epsilon_1(k_1\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)+2\not\epsilon_1(k_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)-2\not\epsilon_2^*(k_2\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_1)\\
&\qquad+2\not\epsilon_2^*(k_2\epsilon_1)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)-\not k_1(k_1p_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2-\not k_1(p_2k_1)(\epsilon_1\epsilon_2^*)^2\\
&\qquad-2\not k_2(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)+2\not k_2(\epsilon_2^*\epsilon_1)(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)+\not\epsilon_2^*(\epsilon_2^*\epsilon_1)(k_1p_1)(k_2\epsilon_1)\\
&\qquad+\not\epsilon_2^*(\epsilon_1\epsilon_2^*)(k_1p_2)(k_2\epsilon_1)+\not\epsilon_1(k_1\epsilon_2^*)(k_1p_1)(\epsilon_2^*\epsilon_1)+\not\epsilon_1(k_1\epsilon_2^*)(k_1p_2)(\epsilon_2^*\epsilon_1)\Big]u_{(p_1)}\\
&=\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{4q^2}\Big[2(\epsilon_1p_2)(\epsilon_2^*p_1)-2(\epsilon_1p_1)(\epsilon_2^*p_2)+(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_1k_1)+(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_2k_1)\Big]\times\\
&\qquad\times\Big[\not\epsilon_1(\epsilon_2^*k_1)+\not\epsilon_2^*(\epsilon_1k_2)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not k_2\Big]u_{(p_1)}
\end{aligned}
\tag{288}
$$

Οπότε πλέον μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\kappa^2}{8}\overline{u}_{(p_2)}\frac{-\not{\epsilon}_2^*(\not{p}_1+\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_1[2(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_1k_1)]}{2(p_1\cdot k_1)}u_{(p_1)} \tag{289}$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\kappa^2}{8}\overline{u}_{(p_2)}\frac{\not{\epsilon}_1(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^*[-2(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_2k_1)]}{-2(p_2\cdot k_1)}u_{(p_1)} \tag{290}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3 =& \frac{\kappa^2}{4}\overline{u}_{(p_2)}\frac{1}{-2(k_1k_2)}\Big[2(\epsilon_1p_2)(\epsilon_2^*p_1)-2(\epsilon_1p_1)(\epsilon_2^*p_2)+(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_1k_1)+(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_2k_1)\Big]\times\\ &\times\Big[\not{\epsilon}_1(\epsilon_2^*k_1)+\not{\epsilon}_2^*(\epsilon_1k_2)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)\not{k}_2\Big]u_{(p_1)}\end{aligned} \tag{291}$$

Τώρα με βάση τη σχέση που αποδείξαμε για τη περίπωση $\gamma f \to gf$

$$\begin{aligned}&\overline{u}_{(p_2)}[\not{\epsilon}_1(k_1\epsilon_2^*)-\not{k}_2(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\not{\epsilon}_2^*(k_2\epsilon_1)]u_{(p_1)}\\ =&\frac{1}{2}\overline{u}_{(p_2)}[\not{\epsilon}_2^*(\not{p}_1+\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_1-\not{\epsilon}_1(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^*]u_{(p_1)}\end{aligned} \tag{292}$$

Γίνεται εμφανές οτι άμα επιλέξουμε

$$C_1 = 2(p_1k_1)\,,\, C_2 = -2(p_2k_1)\,,\, C_3 = -2(k_1k_2), \tag{293}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}[2(p_1\epsilon_1)(p_2\epsilon_2^*)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_1k_1)], \tag{294}$$

$$A_2 = \frac{1}{4}[-2(p_1\epsilon_2^*)(p_2\epsilon_1)-(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_2k_1)], \tag{295}$$

$$A_3 = \frac{1}{4}[2(\epsilon_1p_2)(\epsilon_2^*p_1)-2(\epsilon_1p_1)(\epsilon_2^*p_2)+(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_1k_1)+(\epsilon_1\epsilon_2^*)(p_2k_1)] \tag{296}$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}\kappa^2\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_2^*(\not{p}_1+\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_1u_{(p_1)} \tag{297}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_1(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^*u_{(p_1)} \tag{298}$$

$$B_3 = \overline{u}_{(p_2)}[\not{\epsilon}_1(k_1\epsilon_2^*)-\not{k}_2(\epsilon_1\epsilon_2^*)+\not{\epsilon}_2^*(k_2\epsilon_1)]u_{(p_1)} \tag{299}$$

και προκύπτει οτι

$$\sum_i A_i = \sum_i B_i = \sum_i C_i = 0 \tag{300}$$

Οπότε το συνολικό πλάτος παραγοντοποιείται και γίνεται

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{gfCompton(S=\frac{1}{2})} =& -\frac{\kappa^2}{8}\frac{(k_1\cdot p_1)(p_2\cdot k_1)}{(k_1\cdot k_2)}\left[\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_2)(\epsilon_1\cdot p_1)}{(p_1\cdot k_1)}-\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_1)(\epsilon_1\cdot p_2)}{(p_1\cdot k_2)}-(\epsilon_1\cdot\epsilon_2^*)\right]\times\\ &\times\left[\frac{-\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_2^*(\not{p}_1+\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_1u_{(p_1)}}{2(p_1\cdot k_1)}+\frac{\overline{u}_{(p_2)}\not{\epsilon}_1(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^*u_{(p_1)}}{2(p_2\cdot k_1)}\right]\\ \mathcal{M}_{gfCompton(S=\frac{1}{2})} =& \frac{\kappa^2}{8e^4}F\Big[\mathcal{A}_{Compton(S=0)}\Big]\Big[\mathcal{M}_{Compton(S=\frac{1}{2})}\Big]\end{aligned} \tag{301}$$

9 Συμπεράσματα και σχόλια

Ξεκινήσαμε κατασκευάζοντας τις Covariant Λαγκρανζιανές του βαθμωτού πεδίου , και του ανυσματικού .Κάναμε το ίδιο για τη περίπτωση του φερμιονικού χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό Tetrad . Στη συνέχεια , βρήκαμε τη μορφή που παίρνουν οι Λαγκρανζιανές των προαναφερθέντων , καθώς και του βαρυτικού πεδίου στο ασθενές βαρυτικό όριο , όπου αναπτύξαμε τη μετρική κοντά στην Ευκλίδεια μετρική και απο εκεί εξάγαμε του κανόνες Feynman των αλληλεπιδράσεων.στερα απαιτώντας gauge και Lorentz αναλλοιότητα, δείξαμε, ότι τα παρακάτω πλάτη μετάβασης τεσσάρων σωμάτων παραγοντοποιούνται και παίρνουν τη μορφή:

$$\mathcal{M}_{gs\to\gamma s} = -\sqrt{\frac{a_g}{4a}}F\left[\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_2)}{(p_1\cdot k_1)} - \frac{(\epsilon_2^*\cdot p_1)}{(p_1\cdot k_2)}\right]\times\mathcal{M}_{\gamma s} \tag{302}$$

$$\mathcal{M}_{gf\to\gamma f} = -\sqrt{\frac{a_g}{4a}}F\left[\frac{(\epsilon_2^*\cdot p_2)}{(p_1\cdot k_1)} - \frac{(\epsilon_2^*\cdot p_1)}{(p_1\cdot k_2)}\right]\times\mathcal{M}_{\gamma f} \tag{303}$$

$$\mathcal{M}_{gs} = \frac{a_g}{8a}F\Big[M_{\gamma s}\Big]\times\Big[\mathcal{M}_{\gamma s}\Big] \tag{304}$$

$$\mathcal{M}_{gf} = \frac{a_g}{8a}F\Big[M_{\gamma s}\Big]\times\Big[\mathcal{M}_{\gamma f}\Big] \tag{305}$$

Η παραπάνω σύνδεση των πλατών της Κβαντικής Σχετικότητας με τα πλάτη της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής στο ασθενές όριο φαίνεται, να είναι απλώς ένα μικρό παρακλάδι μιας μεγαλύτερης συσχέτησης των θεωριών βαρύτητας με τις θεωρίες βαθμήδας. Καθώς πλεόν γνωρίζουμε πως συσχετήσεις προκύπτουν και απο άλλες αφετηρίες όπως πχ η λεγόμενη Ads/CFT correspondence [25]ή τα KLT relations [6].Επίσης, αξίζει να σημειωθεί οτι τα τελευταία χρόνια έχει σχηματιστεί ένα ολόκληρο ερευνητικό πεδίο, που μπορεί ,να μπει κάτω απο τη ταμπέλα ¨Gravity as a Double Copy of Gauge Theory¨[26] και ασχολείται με ταυτότητες που προκύπτουν ανάμεσα σε πλάτη μετάβασης θεωρίων βαθμίδας και βαρυτικών .

Το κατα πόσο αυτή η συσχέτιση συνδέεται με τη φύση της βαρύτητας, ή είναι ¨απλά ένα μαθηματικό τρίκ¨ (διάλεξη L.Susskind), μένει απλώς να το δούμε.

Α΄ Κανόνες Feynman

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε το σύνολο των κανόνων feynman
Εξωτερικά σωμάτια:
Εισερχόμενα σωμάτια

$$spin0 \qquad 1 \tag{306}$$

$$spin\frac{1}{2} \qquad u_p \tag{307}$$

$$spin1 \qquad \epsilon_\nu \tag{308}$$

$$spin2 \qquad \varepsilon_{\mu\nu} \tag{309}$$

Εξερχόμενα σωμάτια

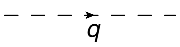
$$spin0 \qquad 1 \tag{310}$$

$$spin\frac{1}{2} \qquad \overline{u}_p \tag{311}$$

$$spin1 \qquad \epsilon^*_\nu \tag{312}$$

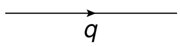
$$spin2 \qquad \varepsilon^*_{\mu\nu} \tag{313}$$

Διαδότες πεδίων :
Διαδότης βαθμωτού πεδίου



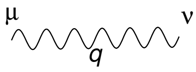
$$= \frac{i}{q^2 - m^2} \tag{314}$$

Διαδότης φερμιονικού πεδίου



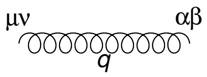
$$= \frac{i}{\not{q} - m} \tag{315}$$

Διαδότης φωτονίου στη βαθμίδα Feynman



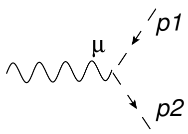
$$= \frac{-i\eta^{\nu\nu}}{q^2} \tag{316}$$

Διαδότης γκραβιτόνιου στην αρμονική βαθμίδα



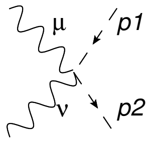
$$= \frac{i}{2}\frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}}{q^2} \tag{317}$$

Κανόνες Αλληλεπίδρασης
vertex 2 βαθμωτών - 1 φωτόνιου



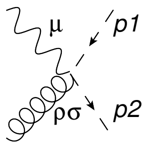
$$= -ie(p_1 + p_2)^\mu \tag{318}$$

vertex 2 βαθμωτών - 2 φωτόνιων



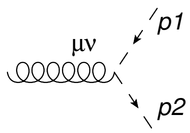
$$= 2ie^2\eta^{\gamma\delta} \tag{319}$$

vertex 2 βαθμωτών - 1 φωτόνιου - 1 γκραβιτόνιου



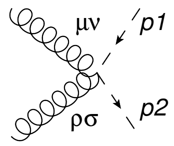
$$= ie\kappa[\mathcal{P}^{\rho\sigma\mu\nu}(p_1+p_2)_\mu] \tag{320}$$

vertex 2 βαθμωτών - 1 γκραβιτόνιου



$$= -\frac{i\kappa}{2}\Big[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - \eta^{\mu\nu}((p_1p_2) - m^2)\Big] \tag{321}$$

vertex 2 βαθμωτών - 2 γκραβιτόνιων

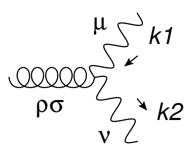


$$= V^{\mu\nu\rho\sigma}$$

οπου ,

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu\rho\sigma} =& i\kappa^2\bigg[\Big(I^{\mu\nu\alpha\delta}I_\delta^{\rho\sigma\beta} - \frac{1}{4}(\eta^{\mu\nu}I^{\rho\sigma\alpha\beta} + \eta^{\rho\sigma}I^{\mu\nu\alpha\beta})\Big)(p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{2\alpha}p_{1\beta}) \\ &- \frac{1}{2}(I^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma})((p_1\cdot p_2) - m^2)\bigg] \end{aligned} \tag{322}$$

vertex 2 φωτονίων - 1 γκραβιτόνιου

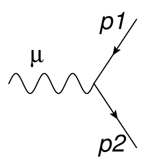


$$= V_2^{\rho\sigma\mu\nu}$$

οπου,

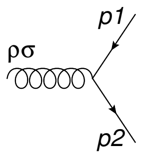
$$\begin{aligned} V_2^{\rho\sigma\mu\nu} =& i\kappa\Big[\mathcal{P}^{\rho\sigma\mu\nu}(k_1\cdot k_2) + \frac{1}{2}\Big(\eta^{\rho\sigma}k_1^\nu k_2^\mu + \eta^{\mu\nu}(k_1^\rho k_2^\sigma + k_1^\sigma k_2^\rho) \\ &- (k_2^\mu k_1^\sigma\eta^{\rho\nu} + k_2^\mu k_1^\rho\eta^{\sigma\nu} + k_2^\rho k_1^\nu\eta^{\sigma\nu} + k_2^\sigma k_1^\nu\eta^{\rho\mu})\Big)\Big] \end{aligned} \tag{323}$$

vertex 2 φερμιονίων - 1 φωτονίου



$$= -ie\gamma_\mu \tag{324}$$

vertex 2 φερμιονίων - 1 γκραβιτόνιου

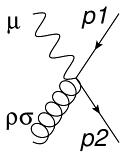


$$= V_3^{\rho\sigma}$$

οπου,

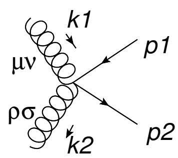
$$V_3^{\rho\sigma} = \frac{-i\kappa}{2}\Big[\frac{1}{4}(\gamma^\rho(p_1+p_2)^\sigma + \gamma^\sigma(p_1+p_2)^\rho) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\frac{1}{2}(\not{p}_1+\not{p}_2) - m)\Big] \quad (325)$$

vertex 2 φερμιονίων - 1 γκραβιτόνιου - 1 φωτονίου



$$= -\frac{i}{4}e\kappa[2\eta_{\rho\sigma}\gamma_\mu - \eta_{\mu\rho}\gamma_\sigma - \eta_{\mu\sigma}\gamma_\rho] \quad (326)$$

vertex 2 φερμιονίων - 2 γκραβιτόνιων

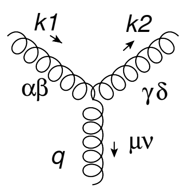


$$= V_4^{\mu\nu\rho\sigma}$$

όπου,

$$\begin{aligned} V_4^{\mu\nu\rho\sigma} =& i\kappa^2\Big[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\not{p}_1+\not{p}_2)-m)\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{16}[\eta^{\mu\nu}(\gamma^\rho(p_1+p_2)^\sigma + \gamma^\sigma(p_1+p_2)^\rho) \\ &+ \eta^{\rho\sigma}(\gamma^\mu(p_1+p_2)^\nu + \gamma^\nu(p_1+p_2)^\mu))] + \frac{3}{16}(p_1+p_2)_\alpha\gamma^\beta(I^{\beta\gamma\mu\nu}I_\gamma^{\alpha\rho\sigma} + I^{\beta\gamma\rho\sigma}I_\gamma^{\alpha\mu\nu}) \\ &+ \frac{i}{16}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\gamma_\lambda\gamma_5(I^{\mu\nu}_{\gamma\delta}I^{\rho\sigma}_{\beta\delta}k_{2\alpha} - I^{\rho\sigma}_{\gamma\delta}I^{\mu\nu}_{\beta\delta}k_{1\alpha})\Big] \end{aligned} \quad (327)$$

vertex 3 γκραβιτόνιων



$$= V_{5\,\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}(k_1, q)$$

όπου,

$$
\begin{aligned}
V5^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta}(k_1,q) = &-\frac{i\kappa}{2}\times\Bigg(\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma\delta}\Bigg[k_1^\mu k_1^\nu+(k_1-q)^\mu(k_1-q)^\nu+q^\mu q^\nu-\frac{3}{2}\eta^{\mu\nu}q^2\Bigg]\\
&+2q_\lambda q_\sigma\Bigg[I_{\alpha\beta}{}^{\sigma\lambda}I_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}+I_{\gamma\delta}{}^{\sigma\lambda}I_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}-I_{\alpha\beta}{}^{\mu\sigma}I_{\gamma\delta}{}^{\nu\lambda}-I_{\gamma\delta}{}^{\mu\sigma}I_{\alpha\beta}{}^{\nu\lambda}\Bigg]\\
&+\Bigg[q_\lambda q^\mu\Bigg(\eta_{\alpha\beta}I_{\gamma\delta}{}^{\nu\lambda}+\eta_{\gamma\delta}I_{\alpha\beta}{}^{\nu\lambda}\Bigg)+q_\lambda q^\nu\left(\eta_{\alpha\beta}I_{\gamma\delta}{}^{\mu\lambda}+\eta_{\gamma\delta}I_{\alpha\beta}{}^{\mu\lambda}\right)\\
&-q^2\left(\eta_{\alpha\beta}I_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}-\eta_{\gamma\delta}I_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\right)-\eta^{\mu\nu}q_\sigma q_\lambda\left(\eta_{\alpha\beta}I_{\gamma\delta}{}^{\sigma\lambda}+\eta_{\gamma\delta}I_{\alpha\beta}{}^{\sigma\lambda}\right)\Bigg]\\
&+\Bigg[2q_\lambda\big(I_{\alpha\beta}{}^{\lambda\sigma}I_{\gamma\delta\sigma}{}^{\nu}(k_1-q)^\mu+I_{\alpha\beta}{}^{\lambda\sigma}I_{\gamma\delta\sigma}{}^{\mu}(k_1-q)^\nu-I_{\gamma\delta}{}^{\lambda\sigma}I_{\alpha\beta\sigma}{}^{\nu}k_1^\mu-I_{\gamma\delta}{}^{\lambda\sigma}I_{\alpha\beta\sigma}{}^{\mu}k_1^\nu\big)\\
&+q^2\left(I_{\alpha\beta\sigma}{}^{\mu}I_{\gamma\delta}{}^{\nu\sigma}+I_{\alpha\beta}{}^{\nu\sigma}I_{\gamma\delta\sigma}{}^{\mu}\right)+\eta^{\mu\nu}q_\sigma q_\lambda\left(I_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}I_{\gamma\delta\rho}{}^{\sigma}+I_{\gamma\delta}{}^{\lambda\rho}I_{\alpha\beta\rho}{}^{\sigma}\right)\Bigg]\\
&+\Bigg\{(k_1^2+(k_1-q)^2)\big[I_{\alpha\beta}{}^{\mu\sigma}I_{\gamma\delta\sigma}{}^{\nu}+I_{\gamma\delta}{}^{\mu\sigma}I_{\alpha\beta\sigma}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma\delta}\big]\\
&-\left(I_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}k_1^2+I_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta}(k_1-q)^2\right)\Bigg\}\Bigg).
\end{aligned}
\tag{328}
$$

Β΄ Σχέση παραγοντοποίησης

Θέλουμε να αποδείξουμε πως κάθε πλάτος της μορφής

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i B_i}{C_i} \tag{329}$$

για το οποίο ισχύει πως

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = \sum_{i=1}^{3} B_i = \sum_{i=1}^{3} C_i = 0 \tag{330}$$

παραγοντοποιείται και παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{M} = -\frac{C_1 C_2}{C_3}\Big(\frac{A_1}{C_1} - \frac{A_2}{C_2}\Big)\Big(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_2}{C_2}\Big) \tag{331}$$

Προκειμένου να το δείξουμε ξεκινάμε με την (331)

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} =& \Big(-\frac{C_1C_2A_1}{C_3C_1} + \frac{C_1C_2A_2}{C_3C_2}\Big)\Big(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_2}{C_2}\Big) \\
=& -\frac{C_2A_1B_1}{C_3C_1} + \frac{C_2A_1B_2}{C_3C_2} + \frac{C_1A_2B_1}{C_3C_1} - \frac{C_1A_2B_2}{C_3C_2} \\
=& \frac{B_1(C_1A_2 - C_2A_1)}{C_3C_1} + \frac{B_2(C_2A_1 - C_1A_2)}{C_3C_2} \\
=& \frac{C_3B_1(C_1A_2 - C_2A_1) - C_1B_2(C_1A_2 - C_2A_1)}{C_1C_2C_3} \\
=& \frac{(C_1A_2 - C_2A_1)(C_2B_1 - C_1B_2)}{C_1C_2C_3}
\end{aligned} \tag{332}$$

και παίρνουμε την

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} =& \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i B_i}{C_i} \\
=& \frac{A_1B_1}{C_1} + \frac{A_2B_2}{C_2} + \frac{(-A_1 - A_2)(-B_1 - B_2)}{C_3} \\
=& \frac{A_1B_1C_2C_3 + A_2B_2C_1C_3 + (A_1 + A_2)(B_1 + B_2)C_1C_2}{C_1C_2C_3} \\
=& \frac{A_1C_2(B_1C_3 + B_1C_1 + B_2C_1) + A_2C_1(B_2C_3 + B_1C_2 + B_2C_2)}{C_1C_2C_3} \\
=& \frac{A_1C_2(-B_1C_2 + B_2C_1) + A_2C_1(-B_2C_1 + B_1C_2)}{C_1C_2C_3} \\
=& \frac{(A_1C_2 - B_2C_1)(A_2C_1 - A_1C_2)}{C_1C_2C_3}
\end{aligned} \tag{333}$$

Οπότε , όντως οι δύο εκφράσεις είναι ισοδύναμες.Η Παραπάνω σχέση παραγοντοποίησης , μπορεί με παρόμοιο τρόπο να δειχθεί, ότι ισχύει και για κυκλικές μεταθέσεις των i.

Γ΄ πίνακες γ

Απόδειξη της σχέσης :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \gamma^\mu g^{\nu\rho} + \gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} + i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 \tag{334}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε τη παραπάνω σχέση ,ξεκινάμε απο τη σχέση αντιμετάθεσης των γ πινάκων

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \rightarrow \tag{335}$$

$$\gamma^\nu\gamma^\rho = 2\eta^{\nu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\nu \tag{336}$$

την οποία αν το πολλαπλασιάσουμε απο αριστερά με γ^μ μας δίνει

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho &= \gamma^\mu\left(2g^{\nu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\nu\right)\\ &= 2\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\end{aligned} \tag{337}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας $\gamma^\mu\gamma^\rho = 2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\mu$ παίρνουμε

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = 2\gamma^\mu g^{\nu\rho} - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho} + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu \tag{338}$$

ξανά αν αντικαταστήσουμε $\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$ η εξίσωση γίνεται

$$\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^\mu g^{\nu\rho} - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho} + \gamma^\rho 2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \tag{339}$$

Τώρα ξεκινάμε απο την ισότητα

$$6i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu \tag{340}$$

η οποία με τη βοήθεια της (339) γίνεται

$$\begin{aligned}6i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 = 2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\\ +\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - 2\gamma^\mu g^{\nu\rho} + 2\gamma^\nu g^{\mu\rho} - 2\gamma^\rho g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{341}$$

αν πάλι χρησιμοποιήσουμε την (339) , και αφού εναλλάξουμε τους δείκτες έτσι ώστε να γράφεται

$$\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu = 2\gamma^\nu g^{\rho\mu} - 2\gamma^\rho g^{\nu\mu} + 2\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu \tag{342}$$

η ισότητα γίνεται

$$6i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 = 2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + 2\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - 4\gamma^\mu g^{\nu\rho} \tag{343}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε πάλι για τελευταιά φορά τη εξίσωση (339) στη μορφή

$$\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho = 2\gamma^\rho g^{\mu\nu} - 2\gamma^\mu g^{\rho\nu} + 2\gamma^\nu g^{\rho\mu} - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu \tag{344}$$

η ισότητα παίρνει τη μορφή

$$3i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\nu g^{\rho\mu} - \gamma^\mu g^{\nu\rho} \tag{345}$$

Χρησιμοποιόντας $\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} 3i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 &= \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu g^{\rho\mu} - \gamma^\mu g^{\nu\rho} \\ &= 2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \gamma^\rho g^{\mu\nu} - 3\gamma^\mu g^{\nu\rho} + \gamma^\nu g^{\mu\rho} \end{aligned} \tag{346}$$

Αν αντικαταστήσουμε $\gamma^\nu\gamma^\rho = 2g^{\nu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\nu$ βρίσκουμε τη τελική μορφή της ισότητας , την οποία και θέλαμε να αποδείξουμε

$$3i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 = 3\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 3\gamma^\mu g^{\nu\rho} + 3\gamma^\nu g^{\mu\rho} - 3\gamma^\rho g^{\mu\nu} \tag{347}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \gamma^\mu g^{\nu\rho} + \gamma^\rho g^{\mu\nu} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} + i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5 \tag{348}$$

Δ΄ πίνακας Γ_μ

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\gamma^{\nu}_{;\mu} = \Gamma_\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \Gamma_\mu \tag{349}$$

όπου με $\gamma^{\nu}_{;\mu}$ συμβολίζουμε το covariant derivative δηλαδή,

$$\gamma^{\nu}_{;\mu} = \gamma^{\nu}_{\mu} + \gamma^\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu} \tag{350}$$

Ξεκινάμε απο τη σχέση μετάθεσης των γ πινάκων

$$\gamma_\alpha \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\rho} \tag{351}$$

και παίρνοντας το covariant derivative

$$\gamma_{\alpha;\mu}\gamma_\alpha \gamma\rho;\mu + \gamma_{\rho;\mu}\gamma_\alpha + \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_{\alpha;\mu} = 0 \tag{352}$$

πολλαπλασιάζοντας με γ^α απο τα αριστερά και δεδομένου οτι $\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4$ βρίσκουμε

$$\gamma^\alpha \gamma_{\alpha;\mu}\gamma_\rho + 4\gamma_{\rho;\mu} + \gamma^\alpha \gamma_{\rho;\mu}\gamma_\alpha + \gamma^\alpha \gamma_\rho \gamma_{\alpha;\mu} \tag{353}$$

όμως έχουμε απο τη σχέση μετάθεσης των γ πινάκων

$$\gamma^\alpha \gamma_\rho \gamma_{\rho;\mu} = -\gamma_\rho \gamma^\alpha \gamma_{\alpha;\mu} + \gamma_{\rho;\mu} \tag{354}$$

οπότε η σχέση (353) γίνεται

$$6\gamma_{\rho;\mu} + \gamma^\alpha \gamma_{\rho;\mu}\gamma_\alpha = \gamma_\rho(\gamma^\alpha \gamma_{\alpha;\mu}) - (\gamma^\alpha \gamma_{\alpha;\mu})\gamma_\rho \tag{355}$$

τώρα αν εκφράσουμε το covariant derivative του γ συναρτήσει των πεδίων , με βάση το ότι το διαφορικό του πίνακα γ στον ευκλίδειο χώρο είναι μηδέν και δεδομένου των σχέσεων

$$\gamma_\rho = b_{\rho\delta}\overline{\gamma}_\delta \tag{356}$$

$$\overline{\gamma}_\delta = b_{\sigma\delta}\gamma^\sigma \tag{357}$$

$$(b_{\rho\delta}\overline{\gamma}_\delta)_{,\mu} = b_{\rho\delta,\mu}\overline{\gamma}_\delta \tag{358}$$

βρίσκουμε

$$\gamma_{\rho;\mu} = \gamma_{\rho,\mu} - \Gamma_{\sigma,\rho\mu}\gamma^\sigma = (b_{\rho\delta,\mu}b_{\sigma\delta} - \Gamma_{\sigma,\rho\mu)}\gamma^\sigma \tag{359}$$

και πολλαπλασιάζοντας απο τα δεξιά και αριστερά με γ^a

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha \gamma_{\rho;\mu}\gamma_\alpha =&(b_{\rho\delta,\mu}b_{\sigma\delta} - \Gamma_{\sigma,\rho\mu})\gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma_\alpha \\
=&(b_{\rho\delta,\mu}b_{\sigma\delta} - \Gamma_{\sigma,\rho\mu})(-\gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\sigma + 2\gamma^\alpha \delta^{\sigma}_{\alpha}) \\
=&(b_{\rho\delta,\mu}b_{\sigma\delta} - \Gamma_{\sigma,\rho\mu})(-2\gamma^\sigma) \\
=&-2\gamma_{\rho;\mu}
\end{aligned} \tag{360}$$

αντικαθιστώντας στη (355)

$$\gamma_{\rho;\mu} = \gamma_\rho(\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu}) - (\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu})\gamma_\rho \tag{361}$$

και συγκρίνοντας με την αρχική εξίσωση

$$\gamma_{\rho;\mu} = \gamma_\rho(-\Gamma_\mu) - (-\Gamma)\gamma_\rho \tag{362}$$

βλέπουμε πως

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu} = \frac{1}{4}\gamma_{\alpha;\mu}\gamma^\alpha \tag{363}$$

η τελευταία ισότητα προκύπτει απο

$$(\gamma_\alpha\gamma^\alpha)_{;\mu} = 0 = \gamma_{\alpha;\mu}\gamma^\alpha + \gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu} \tag{364}$$

Μία εναλλακτική μορφή του Γ_μ η οποία θα μας βοηθήσει στο ανάπτυγμα της λαγκρανζιανής στο ασθενές όριο μπορεί να βρεθεί κατα τον ακόλουθο τρόπο.

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu =& \frac{1}{4}\gamma_{\alpha;\mu}\gamma^\alpha = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu} \\ &= \frac{1}{8}(\gamma_{\alpha;\mu}\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\mu})\end{aligned} \tag{365}$$

και απο τη σχέση(359)

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu =& \frac{1}{8}(b_{\alpha\delta,\mu}b_{\alpha\sigma}\gamma^\alpha - \Gamma_{\alpha,\delta\mu})\gamma^\sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha b_{\alpha\delta,\mu}b_{\alpha\sigma}\gamma^\sigma - \gamma^\alpha\Gamma_{\alpha,\delta\mu}\gamma^\sigma \\ =& \frac{1}{4}(b_{\alpha\delta,\mu}b_{\alpha\sigma} + \Gamma_{\alpha,\delta\mu})\underline{\gamma^\sigma\gamma^\alpha}\end{aligned} \tag{366}$$

άμα τώρα αντικαταστίσουμε με τους γ πίνακες του Ευκλίδειου χώρου παίρνουμε

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4}(b_{\lambda\alpha,\mu}a_{\lambda\beta} + \Gamma_{\lambda,\mu\delta}a_{\delta\alpha}a_{\lambda\beta})\underline{\overline{\gamma}_\alpha\overline{\gamma}_\beta} \tag{367}$$

Εμάς μας ενδιαφέρει η ποσότητα που έχει τη μορφή

$$\frac{1}{2}(\Gamma_\mu\gamma^\mu + \gamma^\mu\Gamma_\mu) \tag{368}$$

η οποία με βάση τη παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\Gamma_\mu\gamma^\mu + \gamma^\mu\Gamma_\mu) \\ =& \frac{1}{8}(b_{\beta\delta,\mu}b_{\delta\alpha} + \Gamma_{\beta,\mu\alpha})(\underline{\gamma^\alpha\gamma^\beta}\gamma^\mu + \gamma^\mu\underline{\overline{\gamma}^\alpha\gamma^\beta}) \\ =& \frac{1}{4}b_{\alpha\mu,\beta}a_{\alpha\nu}a_{\beta\rho}\underline{\overline{\gamma}_\mu\overline{\gamma}_\nu\overline{\gamma}_\rho}\end{aligned} \tag{369}$$

ο όρος $\Gamma_{\beta,\mu\alpha}$ εξαφανίστηκε καθώς πρόκειται για συμμετρικό όρο στην εναλλαγή των δεικτών $\mu\alpha$ και δίνει μηδέν οταν πολλαπλασιάζεται με το $\underline{\overline{\gamma}_\mu\overline{\gamma}_\nu\overline{\gamma}_\rho}$ το οποίο είναι αντισυμμετρικό

Αναφορές

[1] Newton, Isaac. Philosophiae naturalis principia mathematica. Vol. 1. G. Brookman, 1833.

[2] Einstein, Albert. "Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie." Annalen der Physik 354.7 (1916): 769-822.

[3] Davidson, M. C. (1920). IX. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 220(571-581), 291-333.

[4] Rovelli, C., 2002. Notes for a brief history of quantum gravity. In The Ninth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes) (pp. 742-768).

[5] Donoghue, John F., Mikhail M. Ivanov, and Andrey Shkerin. "EPFL lectures on general relativity as a quantum field theory." arXiv preprint arXiv:1702.00319 (2017).

[6] Kawai, Hideyuki, David C. Lewellen, and S-HH Tye. "A relation between tree amplitudes of closed and open strings." Nuclear Physics B 269.1 (1986): 1-23.

[7] Goebel, C. J., Halzen, F., Leveille, J. P. (1981). Angular zeros of Brown, Mikaelian, Sahdev, and Samuel and the factorization of tree amplitudes in gauge theories. Physical Review D, 23(11), 2682.

[8] Weinberg, Steven. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. Vol. 1. New York: Wiley, 1972.

[9] Gupta, Suraj N. "Quantization of Einstein's gravitational field: linear approximation." Proceedings of the Physical Society. Section A 65.3 (1952): 161.

[10] Faddeev, Ludvig D., and Victor N. Popov. "Feynman diagrams for the Yang-Mills field." Physics Letters B 25, no. 1 (1967): 29-30.

[11] Zee, Anthony. Quantum field theory in a nutshell. Princeton university press, 2010.

[12] Scadron, Michael D. Advanced quantum theory. World Scientific Publishing Company, 2006.

[13] Choi, Seong-Youl, J. S. Shim, and Hyunmi S. Song. "Factorization and polarization in linearized gravity." Physical Review D 51.6 (1995): 2751.

[14] Choi, S. Y., J. S. Shim, and H. S. Song. "Factorization of gravitational Compton scattering amplitude in the linearized version of general relativity." Physical Review D 48.6 (1993): 2953.

[15] Holstein, Barry R. "Graviton physics." American journal of physics 74.11 (2006): 1002-1011.

[16] Voronov, N. A. "Gravitational Compton effect and photoproduction of gravitons by electrons." Sov. Phys. JETP 37 (1973): 953.

[17] Gross, David J., and Roman Jackiw. "Low-energy theorem for graviton scattering." Physical Review 166.5 (1968): 1287.

[18] DeWitt, Bryce S. "Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory." Physical Review 162, no. 5 (1967): 1239.

[19] Donoghue JF. Leading quantum correction to the Newtonian potential. Physical Review Letters. 1994 May 9;72(19):2996

[20] Srednicki, Mark. Quantum field theory. Cambridge University Press, 2007.

[21] Huggins, Elisha R. Quantum mechanics of the interaction of gravity with electrons: theory of a spin-two field coupled to energy. Diss. California Institute of Technology, 1962.

[22] Bjerrum-Bohr, Niels Emil Jannik. "Quantum gravity, effective fields and string theory." arXiv preprint hep-th/0410097 (2004).

[23] Chapman, Tim C., and Darryl J. Leiter. "On the generally covariant Dirac equation." American Journal of Physics 44.9 (1976): 858-862.

[24] Coulter, C. Alton. "Spin-1/2 Particles in a Gravitational Field." American Journal of Physics 35.7 (1967): 603-610.

[25] Maldacena, Juan. "The large-N limit of superconformal field theories and supergravity." International journal of theoretical physics 38.4 (1999): 1113-1133.

[26] Elvang, Henriette, and Yu-tin Huang. "Scattering amplitudes." arXiv preprint arXiv:1308.1697 (2013).