Θεωρία Νηματικών Δεσμών και η εφαρμογή τους στις Συμμετρίες

Λεωνίδας Καρπαθόπουλος

Εθνικό Καποδιστριακό πανεπιστήμιο
Τμήμα Φυσικής,
τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομιάς και Μηχανικής

Ιανουάριος 2019

Επταμελής εξεταστική Επιτροπή

Οι κάτωθι βεβαιώνουν ότι έλαβαν γνώση και πιστοποιούν την επάρκεια της διατριβής μου με τίτλο: «Θεωρία Νηματικών Δεσμών και η εφαρμογή τους στις Συμμετρίες» που εκπονήθηκε από τον Λεωνίδα Καρπαθόπουλο προκειμένου να του απονεμηθεί το Διδακτορικό Δίπλωμα Φυσικών Επιστημών.

Ημερομηνία εξέτασης: 14/1/2019

Η τριμελής συμβουλευτική επιτροπή που αποτελείται από τους:

- Αφ. Καθηγητή, Μιχάλη Τσαμπαρλή (κύριος επιβλέπων)
- Αναπληρωτή Καθηγητή, Θεοχάρη Αποστολάτο
- Καθηγητή, Πέτρο Ιωάννου

Τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής που αποτελείται από τους:

- Καθηγητή, Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη
- Καθηγητή, Νικόλαο Τετράδη
- Καθηγητή, Απόστολο Μαστιχιάδη
- Αναπληρωτή Καθηγητή, Νεκτάριο Βλαχάκη

Στην οικογένεια μου

Περίληψη

Η συμμετρία μίας διαφορικής εξίσωσης αποτελεί ένα σημειακό μετασχηματισμό ο οποίο αφήνει αναλλοίωτες την οικογένεια των λύσεων της διαφορικήε εξίσωσης. Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι συμμετριών των διαφορικών εξισώσεων: Οι συμμετρίες Lie, οι Noether και οι Cartan. Εάν ο σημειακός μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα στο θεσεογραφικό χώρο τότε η συμμετρία αποτελεί μία σημειακή συμμετρία, διαφορετικά καλείται δυναμική συμμετρία (dynamical symmetry).

Εκτός από αυτούς τους τύπους των συμμετριών των διαφορικών εξισώσεων υπάρχει και ένας ακόμα τύπος γεωμετρικών συμμετριών προερχόμενες από τα διανυσματικά πεδία X τα οποία αποτελούν λύση των εξισώσεων της μορφής $L_X A = B$, όπου το A αποτελεί ένα γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο καθορίζεται μέσω της μετρικής και το B είναι ένα τανυστικό πεδίο με τον ίδιο αριθμό και τύπο δεικτών με αυτούς του A. Τέτοιοι τύποι συμμετριών αποτελούν τα διανυσματικά πεδία Killing, (Killing vectors), το ομοθετικό διανυσματικό πεδιο, (Homothetic Killing vector), τα σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing, (Conformal Killing vectors) κ.α..

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή μελετώνται οι συμμετρίες Lie, Noether και Cartan των εξισώσεων κίνησης, διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ενός δυναμικού συστήματος. Επεκτείνουμε προηγούμενα αποτελέσματα κατά τα οποία οι συμμετρίες των διαφορικών εξισώσεων συσχετίζονται με τις γεωμετρικές συμμετρίες της μετρικής όπως αυτή καθορίζεται μέσω της κινητικής ενέργειας (kinetic metric) στην περίπτωση μη αυτόνομων δυναμικών συστημάτων που παρουσιάζουν γραμμική απόσβεση.

Εφαρμόζουμε τις συμμετρίες Cartan στην Κοσμολογία βαθμωτού πεδίου (scalar field Cosmology) χρησιμοποιώντας τη δισδιάστατη minisuperspace συνάρτηση Lagrange και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις Δυναμικού για τις οποίες τα επαγόμενα δυναμικά συστήματα είναι ολοκληρώσιμα. Σε κάθε περίπτωση προσδιορίζουμε την αντίστοιχη αναλυτική λύση.

Τέλος, αναπτύσσεται μια συστηματική μεθοδολογία μέσω της οποίας προσδιορίζονται όλα τα τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα διαφορικών εξισώσεων, χωρίς τη χρήση συμμετριών αλλά χρησιμοποιώντας γεωμετρικές μεθόδους. Ακόμα, δείχνουμε πως κάθε τέτοιο πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να προκύψει ως ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα Noether μέσω της χρήσης του αντίστροφου Θεωρήματος της Noether. Γι αυτό τον σκοπό εφαρμόζουμε την παραπάνω μεθοδολογία σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ευχαριστίες

Για τη συγγραφή και υποστήριξη αυτής της διδακτορικής διατριβής οφείλω να ευχαριστήσω τους παρακάτω.

Τον Καθηγητή και επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής Μιχάλη Τσαμπαρλή που με εισήγαγε στο πεδίο της διαφορικής γεωμετρίας, της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας και με καθοδοδήγησε σε όλη τη διάρκεια της έρευνας μου.

Τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Ανδρόνικο Παλιαθανάση, ο οποίος με βοήθησε ιδιαιτέρως στην εφαρμογή της έρευνας μου στις διαφορικές εξισώσεις, τη θεωρία Γενικής Σχετικότητας και την Κοσμολογία.

Τα υπόλοιπα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής μου και συγκεκριμένα τον Αναπληρωτή Καθηγητή Θεοχάρη Αποστολάτο και τον Καθηγητή Πέτρο Ιωάννου, για τις παρατηρήσεις και την βοήθεια τους.

Τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής μου, τον Καθηγητή Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη, τον Καθηγητή Νικόλαο Τετράδη, τον Καθηγητή Απόστολο Μαστιχιάδη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Νεκτάριο Βλαχάκη για τα εύστοχα σχόλια τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για όλη τους την υποστήριξη.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σύνοψη

Σε αυτήν τη διδακτορική διατριβή μελετάμε τις συμμετρίες των διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης στον χώρο της εφαπτόμενης δέσμης. Συγκεκριμένα, μελετάμε τη σύνδεση των σημειακών συμμετριών Lie και Noether που ορίζονται στον θεσεογραφικό χώρο με τις συμμετρίες της μετρικής του χώρου στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση. Στη συνέχεια, μελετάμε σημειακούς μετασχηματισμούς οι οποίοι λαμβάνουν χώρα στον χώρο θέσεων και ταχυτήτων, τον οποίο αποκαλούμε εφαπτόμενη πολλαπλότητα και εξετάζουμε τη σύνδεση τους με τις συμμετρίες της μετρικής. Μέσω δύο θεωρημάτων, προσδιορίζουμε όλες τις σημειακές συμμετρίες Lie και Noether που επιδέχονται κάποια δυναμικά, μη αυτόνομα συστήματα. Ακόμα, εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία του Cartan (γενικευμένες συμμετρίες Noether) στην Κοσμολογία, στην περίπτωση της τροποποιημένης τηλεπαράλληλης θεωρίας ανώτερης τάξης (Higher-order modified teleparallel theory) . Συγκεκριμένα προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις δυναμικού για συστήματα που περιγράφονται μέσω μίας δισδιάστατης Minisuperspace συνάρτησης Lagrange υπό την προϋπόθεση ότι αυτά επιδέχονται contact Cartan συμμετρίες. Τέλος, προσδιορίζουμε τα αναλλοίωτα των δυναμικών εξισώσεων χωρίς τη χρήση του θεωρήματος της Noether ή άλλων τύπων συμμετριών αναδεικνύοντας το γεωμετρικό χαρακτήρα αυτής της προσέγγισης.

Πιο αναλυτικά η δομή της διδακτορικής διατριβής είναι η ακόλουθη.

1.2 Σύνοψη κεφαλαίων

Στο Κεφάλαιο 2 παρατίθενται οι παραγωγίσεις που χρησιμοποιούμε σε αυτήν τη διδακτορική διατριβή. Αναπτύσσονται, οι βασικές έννοιες της θεωρίας των νηματικών δεσμών μέσω της οποίας περιγράφονται οι δομές στην εφαπτόμενη δέσμη. Συγκεκριμένα ορίζεται η διαδικασία «ανύψωσης» ενός γεωμετρικού αντικειμένου στην εφαπτόμενη πολλαπλότητα, ενώ ορίζονται τα δομικά γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία χρησιμοποιούμε για την περιγραφή των συστημάτων σύμφωνα με τη θεωρία των νηματικών δεσμών. Στη συνέχεια, προσδιορίζεται η συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη και προτείνεται η μεθοδολογία σύμφωνα με την οποία, ο χώρος διασπάται σε δύο κατανομές, την οριζόντια και την κατακόρυφη. Σύμφωνα με αυτήν τη μεθοδολογία, καταλήγουμε στην Lagrangian περιγραφή ενός Μηχανικού συστήματος και στις εξισώσεις κίνησης αυτού. Τέλος, παράγουμε τις εξισώσεις Helmholtz για συντηρητικά συστήματα, μέσω της χρήσης των γεωμετρικών ιδιοτήτων της δεύτερης διαφορικής μορφής του Cartan όταν αυτή εκφράζεται στην μη ολόνομη βάση (dt, θ^i, ψ^i).

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η έννοια της συμμετρίας και εστιάζουμε τη μελέτη μας στα είδη των συμμετριών που χρησιμοποιούμε. Στη συνέχεια γενικεύεται η έννοια της συμμετρίας και μελετώνται τα τανυστικά πεδία Killing και τα σύμμορφα τανυστικά πεδία Killing δεύτερης τάξης. Τέλος προτείνουμε μία διαδικασία εύρεσης σύμμορφων διανυσματικών πεδίων που αφορούν χώρους μίας $1 + (n - 1)$ διασπάσιμης μετρικής, την οποία εφαρμόζουμε στη περίπτωση των Bianchi I χωρόχρονων.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται οι συμμετρίες που λαμβάνουν χώρα στην εφαπτόμενη πολλαπλότητα. Αρχικά περιγράφονται οι δυναμικές συμμετρίες μέσω του τυπικού φορμαλισμού και παρατίθενται οι ιδιότητες τους. Στη συνέχεια μελετούνται οι δυναμικές συμμετρίες εκφρασμένες στην ολόνομη βάση (Γ, H_a, V_a), ενώ παρατίθεται η συνθήκη συμμετρίας για σύστημα που υπόκειται σε μία γενικευμένη δύναμη. Ακόμα, γίνεται η μελέτη των συνθηκών αυτών εκφρασμένες στην ολόνομη βάση και διακρίνουμε περιπτώσεις για τις οποίες εξάγουμε το σύστημα εξισώσεων του οποίου η λύση παράγει τις δυναμικές συμμετρίες της μορφής που έχει υποτεθεί. Τέλος μελετούνται οι γενικευμένες συμμετρίες Noether καθώς και οι συμμετρίες Cartan και αποδεικνύεται η ταύτιση μεταξύ των δύο ορισμών (στην περίπτωση ολόνομων συστημάτων).

Στο Κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται η εκτενής μελέτη των σημειακών συμμετριών Lie και Noether που επιδέχεται μία κατηγορία μη αυτόνομων δυναμικών συστημάτων. Διατυπώνουμε δύο θεωρήματα, σύμφωνα με τα οποία υπολογίζουμε τις σημειακές συμμετρίες Lie και Noether των εξισώσεων κίνησης του δυναμικού συστήματος συσχετίζοντας τες με τις συμμετρίες που επιδέχεται η μετρική. Ακόμα, αποδεικνύουμε την ισοδυναμία μεταξύ ενός συστήματος που παρουσιάζει γραμμική απόσβεση, με ένα δυναμικό σύστημα που είναι χρονικά εξαρτώμενο. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω θεωρήματα στη μελέτη των περιπτώσεων του αρμονικού ταλαντωτή και του δυναμικού Kepler για χώρο Ευκλείδειας μετρικής. Κατόπιν, εφαρμόζουμε τα δύο θεωρήματα στην περίπτωση του γενικευμένου χρονικά εξαρτώμενου κεντρικού δυναμικού για κίνηση που λαμβάνει χώρα τόσο στην Ευκλείδεια μετρική, όσο και σε χώρο σταθερής καμπυλότητας και προσδιορίζουμε τις συμμετρίες Lie και Noether. Τέλος, μελετάμε την περίπτωση του χρονοεξαρτώμενου αρμονικού ταλαντωτή, σε χώρο σταθερής καμπυλότητας και προσδιορίζουμε τις αντίστοιχες συμμετρίες Lie και Noether.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε τις συμμετρίες Cartan για μηχανικό σύστημα που περιγράφεται μέσω μίας Minisuperspace Lagrangian. Συγκεκριμένα, προσδιορίζονται όλες οι contact συμμετρίες που προέρχονται από ένα τανυστικό πεδίο Killing δεύτερης τάξης και αποτελούν συμμετρίες Cartan, προσδιορίζοντας έτσι τις συναρτήσεις δυναμικού που επιδέχονται τα Λαγκρατζιανά αυτά συστήματα. Στη συνέχεια, μέσω των διατηρητικών νόμων που αυτά επιδέχονται αποδεικνύουμε την ολοκληρωσιμότητα των δυναμικών εξισώσεων και όπου είναι εφικτό γράφουμε τη λύση σε κλειστή μορφή.

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των συμμετριών και των τανυστών Killing για πολλαπλότητες Riemann. Συγκεκριμένα, παρατίθενται κάποια νέα αποτελέσματα μέσω των οποίων κατασκευάσουμε τανυστικά πεδία Killing δεύτερης τάξης χρησιμοποιώντας τις των συμμετρίες της κινηματικής μετρικής (collineations). Στη συνέχεια μελετάμε τη σχέση μεταξύ των συμμετριών αυτών και των τετραγωνικών διατηρητικών νόμων (πρώτα ολοκληρώματα). Τέλος εφαρμόζουμε την προσέγγιση μας στην περίπτωση ενός δισδιάστατου ολόνομου συστήματος, αναλύουμε τα αποτελέσματα μας και εξάγουμε τα συμπεράσματα μας.

Στο Κεφάλαιο 8 παρατίθενται τα συμπεράσματα μας, ενώ γίνεται μία αναφορά για την μελλοντική έρευνα μας.

Κεφάλαιο 2

Γεωμετρικές δομές στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζονται οι παραγωγίσεις, καθώς και οι γεωμετρικές δομές στην εφαπτόμενη δέσμη. Συγκεκριμένα, στην ενότητα 2.1 ορίζονται, η συναλλοίωτη παραγώγιση, οι παραγωγίσεις των p-διαφορικών μορφών και μέσω αυτών ορίζεται η παραγωγίση Lie. Ακόμα, ορίζουμε τον μεταθέτη Schouten-Nijenhuis που αποτελεί γενίκευση του μεταθέτη Lie. Στην ενότητα 2.2, ορίζονται οι γεωμετρικές δομές όπως το διανυσματικό πεδίο ροής του Hamilton. Στη συνέχεια ορίζονται οι διαφορετικοί τρόποι ανύψωσης ενός γεωμετρικού αντικειμένου (lifts), στην εφαπτόμενη δέσμη καθώς και η συνοχή σε αυτή. Κατόπιν, αποδεικνύουμε ότι η εφαπτόμενη δέσμη διασπάται σε δύο υπό-χώρους, την οριζόντια και κατακόρυφη κατανομή ενώ γίνεται η διάκριση μεταξύ ασθενούς horizontal lift και strong horizontal lift.
Στην ενότητα 2.2.2 ορίζονται οι διαφορικές μορφές του Cartan και με τη χρήση αυτών διατυπώνονται οι εξισώσεις Euler-Lagrange για ολόνομο σύστημα το οποίο υπόκειται σε μη συντηρητικές δυνάμεις. Όταν αυτές μηδενίζονται παράγονται οι εξισώσεις του Helmholtz οι οποίες περιγράφουν το αντίστροφο πρόβλημα της Μηχανικής.

2.1 Παραγωγίσεις

Ορισμός 2.1.1 *Η παράγωγος Lie ενός τανυστκού πεδίου $T \in F^n_m(M)$ τάξης (n,m) ως προς το διανυσματικό πεδίο $X = X \in F^1_0(M)$, ορίζεται με τη σχέση:*

$$\begin{aligned} L_X T &= X^k T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_p,k} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_p} \\ &\quad - \left(X^{i_1}_{,k} T^{ki_2\cdots i_k}_{j_1\cdots j_p} + \cdots + X^{i_k}_{,k} T^{i_2\cdots i_{k-1}k}_{j_1\cdots j_p} \right) \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_p} \\ &\quad + \left(X^k_{,j_1} T^{i_1\cdots i_k}_{kj_2\cdots j_p} + \cdots + X^k_{,j_p} T^{i_1\cdots i_k}_{j_2\cdots j_{p-1}k} \right) \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_p}. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} L_X f &= X^k f_{,k} \\ L_X Y &= [X,Y] = \left(X^j Y^i_{,j} - Y^j X^i_{,j} \right) \frac{\partial}{\partial q^i} \\ L_X a &= \left(X^j a_{i,j} + X^j_{,i} a_j \right) dq^i, \end{aligned}$$

για κάθε συνάρτηση f, ανταλλοίωτο πεδίο Y και συναλλοίωτο πεδίο a τα οποία ορίζονται στη πολλαπλότητα M.

Ορισμός 2.1.2 *Έστω p-διαφορική μορφή* $\omega \in F_P^0\left(M\right)$ *που δίνεται από τη σχέση* $\omega = \omega_{i_1 \cdots \omega_{i_p}} dq^{i_1} \curlywedge \cdots \curlywedge dq^{i_p}$[1]. *Η εξωτερική παράγωγος* d *της p-διαφορικής μορφής, είναι η* $p+1$ *διαφορική μορφή* $d\omega \in F_{p+1}^1\left(M\right)$ *η οποία ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης*

$$d\omega = \omega_{i_1 \cdots i_p, i_{p+1}} dq^{i_{p+1}} \curlywedge dq^{i_1} \curlywedge \cdots \curlywedge dq^{i_p}.$$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{aligned} d^2 &= 0 \\ d\left(a \curlywedge \beta\right) &= da \curlywedge \beta + \left(-1\right)^m a \curlywedge d\beta, \end{aligned}$$

όπου $a \in F_p^0\left(M\right)$ *και* $\beta \in F_m^0\left(M\right)$.

Για μια συνάρτηση $f \in F_0^0\left(M\right)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} df &= f_{,i} dq^i \\ d\left(df\right) &= 0. \end{aligned}$$

Η πράξη $i_\bullet$ της αντιπαραγώγισης δίνεται από τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 2.1.3 *Έστω p-διαφορική μορφή* $\omega \in F_p^0\left(m\right)$*, με αναπαράσταση* $\omega = \omega_{i_1 \cdots \omega_{i_p}} dq^{i_1} \curlywedge \cdots \curlywedge dq^{i_p}$ *και διανυσματικό πεδίο* $X \in F_0^1\left(M\right)$*. Ορίζουμε την (p-1)-διαφορική μορφή μέσω της σχέσης*

$$i_X\omega\left(Y_1, \cdots, Y_{p-1}\right) = \omega\left(X, Y_1, \cdots, Y_{p-1}\right),$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο $Y_1, \cdots Y_{p-1}$.

Η αντιπαραγώγιση έχει την ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας

$$i_X i_Y = -i_Y i_X$$

Ορισμός 2.1.4 *Η Lie παραγώγιση κατά μήκος ενός διανυσματικού πεδίου* $X \in F_0^1\left(M\right)$*, μίας p-διαφορικής μορφής* $\omega \in F_p^0\left(M\right)$ *δίνεται από την ταυτότητα του Cartan*

$$L_X\omega = i_X d\omega + d\left(i_X\omega\right)$$

και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \left[L_X, d\right] &= 0 \\ \left[L_X, i_Y\right] &= \left[i_X, L_Y\right] = i_{[X,Y]}, \end{aligned}$$

όπου $X, Y \in F_0^1\left(M\right)$,

Ορισμός 2.1.5 *Η συναλλοίωτη παραγώγιση ενός διανυσματικού πεδίου* $X = X \in F_0^1\left(M\right)$*, που δρα πάνω σε ένα τανυστικό πεδίο* $T \in F_n^m\left(M\right)$ *ορίζεται με τη σχέση*

$$\begin{aligned} \nabla_X T &= X^k T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_p, k} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_p} \\ &+ \left(\Gamma^{i_1}_{km} T^{m i_2 \cdots i_k}_{j_2 \cdots j_p} + \cdots + \Gamma^{i_k}_{km} T^{i_2 \cdots i_{k-1} m}_{j_2 \cdots j_p}\right) \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_p} \\ &- \left(\Gamma^m_{k j_1} T^{i_1 \cdots i_k}_{m j_2 \cdots l_p} + \cdots + \Gamma^m_{k j_p} T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots l_{p-1} m}\right) \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_p} \end{aligned}$$

[1] Με $\curlywedge$ συμβολίζουμε το αντισυμμετρικό τανυστικό γινόμενο δύο διαφορικών μορφών

$$dx \curlywedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx$$

Για μία συνάρτηση f, ένα ανταλλοίωτο πεδίο Y και ένα συναλλοίωτο πεδίο a ισχύει:

$$
\begin{aligned}
\nabla_X f &= X^k f_{,k} \\
\nabla_X Y &= \left(X^k Y^i_{,k} + X^j Y^k \Gamma^i_{jk}\right) \frac{\partial}{\partial q^i} \\
\nabla_X a &= \left(X^k a_{i,k} + X^j \Gamma^k_{ij} a_k\right) dq^i,
\end{aligned}
$$

Ορισμός 2.1.6 *Έστω $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots Y_m \in F^1_0(M)$ διανυσματικά πεδία ορισμένα στη πολλαπλότητα M. Ορίζουμε το μεταθέτη Schouten-Nijenhuis μέσω της σχέσης*

$$
\begin{aligned}
W &= [X_1 \otimes \cdots \otimes X_n, Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m]_{SN} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] X_1 \otimes \cdots \otimes X_{i-1} \otimes X_{i+1} \cdots X_n \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_{j-1} \otimes Y_{j+1} \otimes \cdots \otimes Y_m,
\end{aligned}
$$

όπου το $W \in F_0^{m+n-1}(M)$ είναι ένα τανυστικό πεδίο διάστασης $m+n-1$.

2.2 Γεωμετρικές δομές στην εφαπτόμενη δέσμη

Για ένα δυναμικό σύστημα, m βαθμών ελευθερίας $\left(q^k\right)$ θεωρούμε δύο χώρους:
α. Το θεσεογραφικό χώρο (configuration space) ως τη διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης m με τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\left(q^k\right)$
β. Το χώρο των θέσεων και ταχυτήτων (evolution space) ως την εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$ της πολλαπλότητας M.

Ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$
\begin{aligned}
\pi &: R \times TM \longmapsto R \times M \\
\pi_0 &: R \times TM \longmapsto R
\end{aligned}
$$

έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
\pi &: \left(t, q^k, \dot{q}^k\right) = \left(t, q^k\right) \\
\pi_0 &: \left(t, q^k, \dot{q}^k\right) = t
\end{aligned}
$$

Κατόπιν, ορίζουμε τις γεωμετρικές δομές στην εφαπτόμενη δέσμη.

Ορισμός 2.2.1 *Το διανυσματικό πεδίο ροής του Hamilton Γ, της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης ($SODE$)*

$$\ddot{q}^i = F^i\left(t, q^k, \dot{q}^k\right), \tag{2.1}$$

ορίζεται με τη σχέση:

$$\Gamma \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i\left(t, q^k, \dot{q}^k\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \tag{2.2}$$

Το διανυσματικό πεδίο $\Gamma_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$, όπου Γ^i_{jk} τα σύμβολα Christofel, αποτελεί το γεννήτορα των γεωδαισιακών εξισώσεων

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k = 0$$

Ορισμός 2.2.2 *Ορίζουμε τις διαφορικές μορφές συνοχής (Contact forms), σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$\theta^i_1 = dq^i - \dot{q}^i dt \tag{2.3}$$
$$\theta^i_2 = d\dot{q}^i - F^i dt. \tag{2.4}$$

Συνέπεια 2.2.3 *Οι Contact forms ικανοποιούν τις παρακάτω ταυτότητες*

$$i_\Gamma dt = 1 \tag{2.5}$$
$$i_\Gamma \theta^i_1 = 0 \tag{2.6}$$
$$i_\Gamma \theta^i_2 = 0, \tag{2.7}$$

Πρόταση 2.2.4 *Κάθε διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$, το οποίο ικανοποιεί τις σχέσεις (2.5)-(2.7) αποτελεί ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης.*
Απόδειξη. *Έστω το διανυσματικό πεδίο $\tilde{\Gamma} = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \tilde{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$. Τότε από τη σχέση (2.5) προκύπτει ότι*

$$i_{\tilde{\Gamma}} dt = \gamma_0 = 1.$$

Μέσω της (2.6) έχουμε

$$i_{\tilde{\Gamma}} \theta_1^i = \gamma^i - \gamma_0 \dot{q}^i = 0 \overset{\gamma_0 = 1}{\Longrightarrow} \gamma^i = \dot{q}^i$$

Η σχέση (2.7) δίνει $i_{\tilde{\Gamma}} \theta_2^i = \tilde{\gamma}^i - \gamma_0 \tilde{\gamma}^i = 0$. Επομένως η έκφραση του $\tilde{\Gamma}$ είναι $\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \tilde{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$. Αυτή ταυτίζεται με τη σχέση (2.1) και παράγει τις εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{q}^i = \tilde{\gamma}^i.$$

■

Έστω $X \in F_0^1 (R \times M)$ ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην πολλαπλότητα $R \times M$ με αναπαράσταση $X = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i}$. Τότε ορίζουμε τα ακόλουθα πεδία.

Ορισμός 2.2.5 *Το Vertical lift X^V, του διανυσματικού πεδίου X στην εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$ ορίζεται με τη σχέση*

$$X^V = \left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Ορισμός 2.2.6 *Η πρώτη επέκταση (first prolongation) $X^{[1]}$, του διανυσματικού πεδίου X στην εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$ ορίζεται με τη σχέση*

$$X^{[1]} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\dot{\eta} - \dot{\xi} \dot{q}^i\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

όπου το σύμβολο • ισοδυναμεί με την ολική χρονική παράγωγο έτσι ώστε για κάθε συνάρτηση $f\left(t, q^k, \dot{q}^k\right)$ ισχύει:

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i}.$$

Συνέπεια 2.2.7 *Το $X^{[1]}$ ισοδύναμα γράφεται*

$$X^{[1]} = \xi \Gamma + \left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

όπου $\frac{d}{dt}\left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) = \dot{\eta}^i - \dot{\xi} \dot{q}^i - \xi F^i$.

Ορισμός 2.2.8 *Το Complete lift X^C, του διανυσματικού πεδίου X στην εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$ δίνεται μέσω της σχέσης*

$$X^C \equiv X^{[1]} - (i_X dt)\, \Gamma = \left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

Στην ειδική περίπτωση που $\xi \equiv 0$, το first prolongation ταυτίζεται με το Complete lift X^C.

Ορισμός 2.2.9 *Το Horizontal lift, X^H ενός διανυσματικού πεδίου X στην εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$ ορίζεται με τη σχέση*

$$X^H = \frac{1}{2}\left(L_{X^V} \Gamma + X^C\right).$$

Πρόταση 2.2.10 *Ισχύει*

$$X^H = \left(\eta^i - \xi \dot{q}^i\right) H_i,$$

όπου $H_i = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
X^H &= \frac{1}{2}\left(L_{X^V}\Gamma + X^C\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \Gamma\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right)\\
&= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\\
&= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)H_i
\end{aligned}$$

■

Ορισμός 2.2.11 *Ορίζουμε το Dilation πεδίο, ή διαφορετικά πεδίο Liouville, το διανυσματικό πεδίο* $\Delta \in F_0^1(TM)$ *που δίνεται από τη σχέση*

$$\Delta = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^V = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Ορισμός 2.2.12 *Ορίζουμε το* $(1,1)$ *τανυστικό πεδίο* S *Almost tangent structure με τη σχέση*

$$S = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\otimes\theta_1^i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\otimes\left(dq^i - \dot{q}^i dt\right),$$

Τα διανυσματικά πεδία Δ, Γ που είναι ορισμένα στην εφαπτόμενη δέσμη συνδέονται με το τανυστικό πεδίο S σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta = S\circ\Gamma,$$

βλέπε [146] και ορίζουν το vertical lift ενός διανυσματικού πεδίου X στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη μέσω της σχέσης $X^V = S\circ X^{[1]}$.

Η Lie παραγώγιση του S κατά μήκος του Γ δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}
L_\Gamma S &= -\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\otimes\left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\otimes\left(d\dot{q}^i - F^i dt\right)\\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\otimes\left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\otimes\left(d\dot{q}^i - F^i dt - \frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\left(dq^j - \dot{q}^j dt\right)\right)\\
&= -H_i\otimes\theta^i + V_i\otimes\psi^i, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

όπου

$$\theta^i = \left(dq^i - \dot{q}^i dt\right),\ \psi^i = d\dot{q}^i - \frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}dq^j + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j - F^i\right)dt \qquad (2.9)$$

$$H_i = \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, V_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \qquad (2.10)$$

Η βάση $\left(dt, \psi^i, \theta^i \equiv \theta_1^i\right)$ αποτελεί τη συζηγή (conjugate) βάση της διανυσματικής βάσης (Γ, H_i, V_i) στην εφαπτόμενη δέσμη $R\times TM$ και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$i_\Gamma dt = 1,\ i_\Gamma\theta^i = 0,\ i_\Gamma\psi^i = 0$$

$$i_{H_i}dt = 0,\ i_{H_i}\theta^j = \delta_i^j,\ i_{H_i}\psi^j = 0$$

$$i_{V_i}dt = 0,\ i_{V_i}\theta^j = 0,\ i_{V_i}\psi^j = \delta_i^j$$

Μέσω αυτών των σχέσεων αλλά και της έκφρασης του πεδίου $L_\Gamma S$ όπως αυτό δίνεται από τη σχέση (2.8) προκύπτει ότι το το $L_\Gamma S$ ορίζει μία συνοχή στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη.

Λήμμα 2.2.13 *Για το πεδίο* $L_\Gamma S$ *ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες*

$$
\begin{aligned}
(L_\Gamma S)\circ X^V &= X^i \frac{\partial}{\partial \dot q^i} = X^V \\
(L_\Gamma S)\circ X^H &= -X^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\right)+\frac{1}{2}X^j\frac{\partial F^i}{\partial \dot q^j}\otimes\frac{\partial}{\partial \dot q^i} = -X^i\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{1}{2}X^i\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^j} = -X^H \\
(L_\Gamma S)\circ \Gamma &= -\left(\dot q^i-\dot q^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\right)+\left(F^i-F^i\right)\frac{\partial}{\partial \dot q^i} = 0
\end{aligned}
$$

2.2.1 Συνοχή στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη $R\times TM$

Σε αυτήν την ενότητα ακολουθούμε τους Sarlet et.al. [1]. Η συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη TM ορίζεται μέσω της σχέσης $J_0 = L_\Gamma S_0$, όπου $S_0 \in T_1^1(TM)$ η σχεδόν εφαπτόμενη δομή που δίνεται από τη σχέση $S_0 = dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot q^i}$ και $\Gamma = \dot q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial \dot q^i}$, βλέπε [145].

Ισχύει ότι $(L_\Gamma S_0)^2 = I$. Επομένως, τα $(L_\Gamma S_0 - I)\circ(L_\Gamma S_0 + I) = 0$ ορίζουν δύο κάθετα επίπεδα (Horizontal & Vertical).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, στην περίπτωση της χρονοεξαρτώμενης εφαπτόμενης δέσμης αποδεικνύουμε τα παρακάτω:

Πρόταση 2.2.14 *Ισχύουν οι ταυτότητες*

$$
\begin{aligned}
(L_\Gamma S)^2 &= I - \Gamma\otimes dt \\
(L_\Gamma S)^3 &= L_\Gamma S.
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. *Για την πρώτη σχέση έχουμε ότι:*

$$
\begin{aligned}
(L_\Gamma S)^2 &= (L_\Gamma S)\circ(L_\Gamma S) \\
&= \left(-\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\right)\otimes\left(dq^i-\dot q^i dt\right)+\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\otimes\left(d\dot q^i - F^i dt\right)\right) \\
&\quad \circ\left(-\left(\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial F^r}{\partial \dot q^k}\frac{\partial}{\partial \dot q^r}\right)\otimes\left(dq^k-\dot q^k dt\right)+\frac{\partial}{\partial \dot q^k}\otimes\left(d\dot q^k - F^k dt\right)\right) \\
&= \delta_i^k\left(\frac{\partial}{\partial q^k}+\frac{\partial F^r}{\partial \dot q^k}\frac{\partial}{\partial \dot q^r}\right)\otimes\left(dq^i-\dot q^i dt\right)-\delta_j^k\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^k}\otimes\left(dq^i-\dot q^i dt\right)+\delta_i^k\frac{\partial}{\partial \dot q^k}\otimes\left(d\dot q^i-F^i dt\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\right)\otimes\left(dq^i-\dot q^i dt\right)-\frac{\partial F^j}{\partial \dot q^i}\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\otimes\left(dq^i-\dot q^i dt\right)+\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\otimes\left(d\dot q^i-F^i dt\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q^i}\otimes dq^i+\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\otimes d\dot q^i-\left(\dot q^i\frac{\partial}{\partial q^i}+F^i\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\right)\otimes dt \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\otimes dt+\frac{\partial}{\partial q^i}\otimes dq^i+\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\otimes d\dot q^i-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot q^i\frac{\partial}{\partial q^i}+F^i\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\right)\otimes dt
\end{aligned}
$$

Επομένως $(L_\Gamma S)^2 = I - \Gamma\otimes dt$.

Για τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
(L_\Gamma S)^3 &= (L_\Gamma S)^2\circ(L_\Gamma S) \\
&= (I-\Gamma\otimes dt)\circ(L_\Gamma S) \\
&= L_\Gamma S,
\end{aligned}
$$

αφού ισχύει ότι $(L_\Gamma S)\circ\Gamma = 0$. ■

Ορισμός 2.2.15 *Η σχέση* $(L_\Gamma S)^3 - L_\Gamma S = 0$*, υποδηλώνει ότι το τανυστικό πεδίο* $(L_\Gamma S)$ *ορίζει μία* $f(3,-1)$ *γεωμετρική δομή, τάξης* $2m$ *η οποία έχει τις ιδιότητες [2]*

$$
\begin{aligned}
l &= (L_\Gamma S)^2 \\
m &= -(L_\Gamma S)^2 + I
\end{aligned}
$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} l^2 &= l \\ m^2 &= m \\ ml &= lm \\ l+m &= I. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $l = (L_\Gamma S)^2 = I - \Gamma \otimes dt$ και $m = \Gamma \otimes dt$. Επομένως

$$\begin{aligned} l^2 &= (L_\Gamma S)^4 = (I - \Gamma \otimes dt) \circ (I - \Gamma \otimes dt) = I - 2\Gamma \otimes dt + \Gamma \otimes dt = I - \Gamma \otimes dt = (L_\Gamma S)^2 = l \\ m^2 &= (\Gamma \otimes dt) \circ (\Gamma \otimes dt) = (\Gamma \otimes dt) = m \\ lm &= (I - \Gamma \otimes dt) \circ (\Gamma \otimes dt) = \Gamma \otimes dt - \Gamma \otimes dt = 0 \\ ml &= (\Gamma \otimes dt) \circ (I - \Gamma \otimes dt) = \Gamma \otimes dt - \Gamma \otimes dt = 0 \\ l+m &= I - \Gamma \otimes dt + \Gamma \otimes dt = I \end{aligned}$$

■

Συνέπεια 2.2.16 *Για τα τανυστικά πεδία l, m ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\begin{aligned} l \circ \frac{\partial}{\partial t} &= (I - \Gamma \otimes dt) \circ \frac{\partial}{\partial t} = -\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} - F^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \\ m \circ \frac{\partial}{\partial t} &= (\Gamma \otimes dt) \circ \frac{\partial}{\partial t} = \Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \\ l \circ \frac{\partial}{\partial q^i} &= (I - \Gamma \otimes dt) \circ \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \\ m \circ \frac{\partial}{\partial q^i} &= (\Gamma \otimes dt) \circ \frac{\partial}{\partial q^i} = 0 \\ l \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} &= (I - \Gamma \otimes dt) \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \\ m \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} &= (\Gamma \otimes dt) \circ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} = 0. \end{aligned}$$

Ορισμός 2.2.17 *Ορίζουμε τα τανυστικά πεδία $P, Q \in T_1^1(TM)$ στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη ως τα πεδία $P = \frac{1}{2}(I - L_\Gamma S + \Gamma \otimes dt)$ και $Q = \frac{1}{2}(I + L_\Gamma S - \Gamma \otimes dt)$ όπου $I \in T_1^1(TM)$ είναι ο μοναδιαίος ταυτοτικός τανυστής στην εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$.*

Πρόταση 2.2.18 *Τα πεδία P, Q ορίζουν αντιστοίχως, την οριζόντια και την κατακόρυφη κατανομή στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη $R \times TM$ οι οποίες είναι ορθοκανονικές και συμπληρωματικές.*
Απόδειξη. *Για την ορθοκανονικότητα ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} P \circ Q &= \frac{1}{2}(I - L_\Gamma S + \Gamma \otimes dt) \frac{1}{2}(I + L_\Gamma S - \Gamma \otimes dt) \\ &= \frac{1}{4}\left(I + L_\Gamma S - \Gamma \otimes dt + \Gamma \otimes dt - \Gamma \otimes dt - L_\Gamma S - (L_\Gamma S)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(I + L_\Gamma S - \Gamma \otimes dt + \Gamma \otimes dt - \Gamma \otimes dt - L_\Gamma S + \Gamma \otimes dt - I) \\ &= 0, \end{aligned}$$

επομένως, οι δύο κατανομές P και Q είναι ορθοκανονικές. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}(I + \Gamma \otimes dt - L_\Gamma S) + \frac{1}{2}(I + L_\Gamma S - \Gamma \otimes dt) = I \equiv H \oplus V,$$

άρα οι δύο κατανομές P και Q είναι και συμπληρωματικές στην πολλαπλότητα $R \times TM$ και συνθέτουν τον χώρο.
■

Στις φυσικές συντεταγμένες $\left(t,q^i,\dot{q}^i\right)$ η οριζόντια κατανομή έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$\begin{aligned}
P &\equiv \frac{1}{2}\left(I+\Gamma\otimes dt-L_\Gamma S\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}\otimes dt+\frac{\partial}{\partial q^i}\otimes dq^i+\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\otimes d\dot{q}^i+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+F^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right)\otimes dt \\ +\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\otimes\left(dq^i-\dot{q}^i dt\right)-\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\otimes\left(d\dot{q}^i-F^i dt\right)\end{array}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\left(F^i-\frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right)\otimes dt+2\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\otimes dq^i\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\left(F^i-\frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right)\otimes dt+\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\otimes dq^i\\
&= dt\otimes H_t+dq^i\otimes H_i.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η οριζόντια κατανομή αποτελείται από δύο επιμέρους κατανομές.

$$P=H_t\otimes dt+H_i\otimes dq^i,$$

όπου

$$H_t=\frac{\partial}{\partial t}+\left(F^i-\frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

είναι το ασθενές (weak) Horizontal lift της συνιστώσας ∂_t [1,2] και

$$H_i=\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j},$$

το ασθενές (weak) Horizontal lift της συνιστώσας ∂_i [1,2].

Λήμμα 2.2.19 *Τα δύο Horizontal lifts, συνδέονται με το διανυσματικό πεδίο Γ, μέσω της ακόλουθης σχέσης*

$$H_t=\Gamma-\dot{q}^i H_i.$$

Απόδειξη.

$$H_t=\frac{\partial}{\partial t}+\left(F^i-\frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+F^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}-\dot{q}^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}=\Gamma-\dot{q}^i H_i$$

■

Ορισμός 2.2.20 *Μέσω αυτής της σχέσης, ορίζουμε το ισχυρό (strong) Horizontal lift για τις συνιστώσες ∂_t,∂_i με τις σχέσεις:*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^H &= -\dot{q}^i H_i\\
\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^H &= H_i.
\end{aligned}$$

Ορισμός 2.2.21 *Το ισχυρό Horizontal lift ενός διανυσματικού πεδίου $X\in T^1R\times M$ με αναπαράσταση $X=\xi\frac{\partial}{\partial t}+\eta^i\frac{\partial}{\partial q}$, δίνεται από τη σχέση:*

$$X^H=\left(\eta^i-\xi\dot{q}^i\right)H_i,$$

και το ασθενές Horizontal lift δίνεται από τη σχέση

$$X^{H'}=\xi\Gamma+\left(\eta^i-\xi\dot{q}^i\right)H_i.$$

Συνέπεια 2.2.22 *Παρατηρούμε, ότι το strong Horizontal lift ταυτίζεται με αυτό που δίνει ο Crampin στον ορισμό του, σύμφωνα με τον οποίο:*

$$X^H = \frac{1}{2}\left(L_{X^V}\Gamma + X^C\right) = P \circ X^C.$$

Απόδειξη. *Έστω* $X = \xi\partial_t + \eta^i\partial_i$. *Τότε ισχύει ότι:*

$$\begin{aligned} X^V &= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i} \\ X^C &= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}. \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L_{X^V}\Gamma &= X^V\left(\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(X^V\left(F^i\right) - \Gamma\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i} \\ &= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial F^i}{\partial\dot{q}^j} - \Gamma\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(L_{X^V}\Gamma + X^C\right) &= \frac{1}{2}\left(2\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial F^i}{\partial\dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\right) \\ &= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^j}\right) \\ &= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)H_i. \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε δείξει ότι $P = H_t \otimes dt + H_i \otimes dq^i$. *Επομένως,*

$$\begin{aligned} P \circ X^C &= \left(H_t \otimes dt\right)\circ X^C + \left(H_i \otimes dq^i\right)\circ X^C \\ &= \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)H_i, \end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι οι δύο ορισμοί ταυτίζονται. ■

Συνέπεια 2.2.23 *Το ασθενές Horizontal lift δίνεται από τη σχέση*

$$X^{H'} = P \circ X = \xi\Gamma + \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)H_i$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} X^{H'} &= P \circ X \\ &= \xi H_t + \eta^i H_i \\ &= \xi\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(F^i - \frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial\dot{q}^j}\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\right) + \eta^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^j}\right) \\ &= \xi\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + F^i\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\right) + \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^j}\right) \\ &= \xi\Gamma + \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)H_i. \end{aligned}$$

■

Η κατακόρυφη κατανομή έχει την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} Q &\equiv \frac{1}{2}\left(I - \Gamma\otimes dt + L_\Gamma S\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}\otimes dt + \frac{\partial}{\partial q^i}\otimes dq^i + \frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\otimes d\dot{q}^i - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + F^i\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\right)\otimes dt \\ -\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial F^j}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^j}\right)\otimes\left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) + \frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\otimes\left(d\dot{q}^i - F^i dt\right) \end{array}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\otimes\left(d\dot{q}^i + \left(\frac{1}{2}\dot{q}^j\frac{\partial F^i}{\partial\dot{q}^j} - F^i\right)dt - \frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial\dot{q}^j}\otimes dq^j\right) \\ &= V_i \otimes \psi^i \end{aligned}$$

Συνέπεια 2.2.24 *Έστω το διανυσματικό πεδίο* $X = \xi\partial_t + \eta^i\partial_i \in F^1(R\times M)$. *Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\begin{aligned} Q\circ X^H &= 0 \\ Q\circ X^V &= X^V. \end{aligned}$$

2.2.2 Lagrangian Μηχανική στη χρονοεξαρτώμενη εφαπτόμενη δέσμη

Η Lagrangian $L\left(t,q^k,\dot{q}^k\right) = T - V$ όπου T η κινητική ενέργεια του συστήματος και V η συνάρτηση δυναμικού είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στην εφαπτόμενη δέσμη. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνονται από τη σχέση:

$$E_L(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i\left(t,q^k,\dot{q}^k\right),$$

όπου Q_i οι γενικευμένες (μη διατηρητικές) δυνάμεις που δρουν στο δυναμικό σύστημα και $E_i(L) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}$. Αντικαθιστώντας την L προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k + V^{;i} = Q^i. \tag{2.11}$$

Για τη γεωμετρική διατύπωση των εξισώσεων Euler-Lagrange ορίζουμε τις ακόλουθες διαφορικές μορφές:

$$\theta_L = S\circ dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\theta_1^i, \tag{2.12}$$

$$\omega_L = d\theta_L + dL \curlywedge dt. \tag{2.13}$$

Οι παραπάνω διαφορικές μορφές, καλούνται διαφορικές μορφές του Cartan $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης αντίστοιχα.

Πρόταση 2.2.25 *Η 2-μορφή* ω_L *στη βάση* $\left(dt,\theta_1^i,\theta_2^i\right)$ *δίνεται από τη σχέση*

$$\omega_L = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)dt \curlywedge \theta_1^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}\theta_1^j \curlywedge \theta_1^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}\theta_2^j \curlywedge \theta_1^i,$$

και στη βάση $\left(dt,\theta^i,\psi^i\right)$ *γράφεται*

$$\omega_L = E_i(L)\,dt \curlywedge \theta^i + \beta_{ij}\theta^j \curlywedge \theta^i + \gamma_{ij}\psi^j \curlywedge \theta^i,$$

όπου

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} \\ \beta_{ij} &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i} + \frac{1}{2}\gamma_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^j}\right) \end{aligned}$$

Απόδειξη. *Στη βάση* $\left(dt,dq^i,d\dot{q}^i\right)$ *έχουμε ότι* $\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dq^i - \dot{q}^i dt$. *Άρα, για τη δεύτερη διαφορική μορφή του*

Cartan έχουμε:

$$\begin{aligned}
\omega_L &= d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \curlywedge \theta_1^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \curlywedge dt + dL \curlywedge dt \\
&= d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \curlywedge dq^i - \dot{q}^i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \curlywedge dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \curlywedge dt + dL \curlywedge dt \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} dt \curlywedge dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j \curlywedge dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \curlywedge dq^i - \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j \curlywedge dt - \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \curlywedge dt \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \curlywedge dt + \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i \curlywedge dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \curlywedge dt \\
&= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + F^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge dq^i + \dot{q}^j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right) dt \curlywedge dq^i \\
&\quad - F^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} dt \curlywedge dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j \curlywedge dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \curlywedge dq^i - \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \curlywedge dt \\
&= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge dq^i + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right) \dot{q}^j dt \curlywedge dq^i \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \curlywedge dq^i - F^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} dt \curlywedge dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j \curlywedge dq^i - \dot{q}^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \curlywedge dt.
\end{aligned}$$

Στη βάση $\left(dt, \theta_1^i, \theta_2^i\right)$ *ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
dq^i &= \theta_1^i + \dot{q}^i dt, \\
d\dot{q}^i &= \theta_2^i + F^i dt.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές, στη μορφή του ω_L *και επειδή ισχύει ότι* $dt \curlywedge dt = 0$ *παίρνουμε:*

$$\begin{aligned}
\omega_L &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge \left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right) \dot{q}^j dt \curlywedge \left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \left(\theta_1^j + \dot{q}^j dt\right) \curlywedge \left(\theta_1^i + \dot{q}^i dt\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\theta_2^j \curlywedge \left(\theta_1^i + \dot{q}^i dt\right) - \dot{q}^i \left(\theta_2^j + F^j dt\right) \curlywedge dt\right).
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\omega_L &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge \theta_1^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \theta_2^j \curlywedge \theta_1^i + \\
&+ \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \theta_1^j \curlywedge \theta_1^i + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}\right) \dot{q}^j dt \curlywedge \theta_1^i \\
&= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge \theta_1^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \theta_1^j \curlywedge \theta_1^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \theta_2^j \curlywedge \theta_1^i.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα στη βάση $\left(dt, \theta^i \psi^i\right)$ *έχουμε ότι* $\theta_1^i = \theta^i$ *και* $\theta_2^i = \psi^i + \frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\theta^j$. *Επομένως το* ω_L *μετασχηματίζεται ως εξής:*

$$\omega_L = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge \theta^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \theta^j \curlywedge \theta^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\psi^j + \frac{1}{2}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^k}\theta^k\right) \curlywedge \theta^i.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\omega_L &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dt \curlywedge \theta^i + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^j}\right) \theta^j \curlywedge \theta^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \psi^j \curlywedge \theta^i \\
&= E_i(L)\, dt \curlywedge \theta^i + \beta_{ij} \theta^j \curlywedge \theta^i + \gamma_{ij} \psi^j \curlywedge \theta^i,
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \\ \beta_{ij} &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + \frac{1}{2}\gamma_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{q}^j}\right)\end{aligned}$$

■

Πρόταση 2.2.26 *Οι εξισώσεις Euler Lagrange συναρτήσει της 2-διαφορικής μορφής ω_L γράφονται*

$$i_\Gamma \omega_L = Q \tag{2.14}$$

όπου $Q = Q_i \theta_1^i$.
Απόδειξη. *Χρησιμοποιώντας τις ταυτοτικές σχέσεις* $i_\Gamma dt = 0$, $i_\Gamma \theta_1^i = i_\Gamma \theta_2^i = 0$, *έχουμε:*

$$\begin{aligned}i_\Gamma \omega_L &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) i_\Gamma \left(dt \curlywedge \theta_1^i\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right) i_\Gamma \left(\theta_1^j \curlywedge \theta_1^i\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right) i_\Gamma \left(\theta_2^j \curlywedge \theta_1^i\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\left(i_\Gamma dt \theta_1^i - i_\Gamma \theta_1^i dt\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right)\left(i_\Gamma \theta_1^j \theta_1^i - i_\Gamma \theta_1^i \theta_1^j\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right)\left(i_\Gamma \theta_2^j \theta_1^i - i_\Gamma \theta_1^i \theta_2^j\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\theta_1^i \\ &= Q_i \theta_1^i = Q.\end{aligned}$$

■

Συνέπεια 2.2.27 *Στην περίπτωση που $Q_i = 0$, δηλαδή όταν οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα είναι διατηρητικές, τότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι $i_\Gamma \omega_L = 0$.*

2.2.3 Το αντίστροφο προβλήμα της Μηχανικής Lagrange

Το αντίστροφο πρόβλημα της Μηχανικής Lagrange αφορά τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε, οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης να προκύπτουν απο μια Lagrangian. Προκειμένου να λύσουμε αυτό το πρόβλημα εκφράζουμε το ω_L στη μη ολόνομη βάση (dt, θ^i, ψ^i) όπου

$$\begin{gathered}\theta^i = \theta_1^i = dq^i - \dot{q}^i dt \\ \psi^i = d\dot{q}^i - F^i dt + A_j^i \theta^j,\end{gathered}$$

και μέσω των γεωμετρικών ιδιοτήτων που ικανοποιεί αυτή προσδιορίζονται οι συνθήκες Helmholtz[2] οι οποίες ισοδυναμούν με την ύπαρξη μιας Lagrangian (H Lagrangian δεν είναι μοναδική!) βλέπε [2].

Έχουμε ότι

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) + L dt$$

H εξωτερική παράγωγος d της διαφορικής μορφής θ_L είναι:

$$\begin{aligned}d\theta_L &= \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} dt \wedge \theta^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j \wedge \theta^i \\ &\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^j \wedge \theta^i + \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i \wedge dt.\end{aligned}$$

[2] Θεωρούμε Λαγκραντζιανό σύστημα στο οποίο ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, οπότε $Q_i = 0$ και οι εξισώσεις Lagrange είναι $i_\Gamma \omega_L = 0$.

Ισχύει ακόμα ότι:

$$\begin{aligned} dq^i &= \theta^i + \dot{q}^i dt \\ d\dot{q}^i &= \psi^i + F^i dt - A^i_j \theta^j . \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα $dq^i, d\dot{q}^i$ στην αρχική μορφή του ω_L έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \omega_L &= \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} dt \wedge \theta^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \left(\theta^j + \dot{q}^j dt\right) \wedge \theta^i \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\psi^j + F^j dt - A^j_k \theta^k\right) \wedge \theta^i + \frac{\partial L}{\partial q^i} \left(\theta^i + \dot{q}^i dt\right) \wedge dt. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\omega_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} F^j \right) dt \wedge \theta^i + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} A^k_j \right) \theta^j \wedge \theta^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \psi^j \wedge \theta^i .$$

Οι εξισώσεις Lagrange δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Gamma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= 0 \Longleftrightarrow \\ \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + F^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως ο πρώτος όρος μηδενίζεται ταυτοτικά και το ω_L δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_L = g_{ij} \psi^j \wedge \theta^i + B_{ij} \theta^j \wedge \theta^i ,$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} &= g_{ij} \\ B_{(ij)} &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^{(j} \partial \dot{q}^{i)}} - g_{k(i} A^k_{j)} = 0. \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες των διαφορικών μορφών έχουμε:

$$L_\Gamma \omega_L = i_\Gamma d\omega_L + d\left(i_\Gamma \omega_L\right).$$

Επειδή η διαφορική φόρμα ω_L είναι exact $d\omega_L = 0$ και $L_\Gamma \omega_L = d\left(i_\Gamma \omega_L\right) = 0$ (λόγω του ότι $i_\Gamma \omega_L = 0$). Επομένως:

$$\begin{aligned} L_\Gamma \left(g_{ij} \psi^j \wedge \theta^i + B_{ij} \theta^j \wedge \theta^i \right) &= \Gamma\left(g_{ij}\right) \psi^j \wedge \theta^i + g_{ij} \left(L_\Gamma \psi^j \wedge \theta^i + \psi^j \wedge L_\Gamma \theta^i \right) \\ &+ \Gamma\left(B_{ij}\right) \theta^j \wedge \theta^i + B_{ij} \left(L_\Gamma \theta^j \wedge \theta^i + \theta^j \wedge L_\Gamma \theta^i \right) \\ &= \Gamma\left(g_{ij}\right) \psi^j \wedge \theta^i + g_{ij} \left(\lambda^j_k \theta^k - A^j_k \left(\psi^k - A^k_r \theta^r \right) \right) \wedge \theta^i \\ &+ g_{ij} \psi^j \wedge \left(\psi^i - A^i_k \theta^k \right) + \Gamma\left(B_{ij}\right) \theta^j \wedge \theta^i \\ &+ B_{ij} \left(\psi^j - A^j_k \theta^k \right) \wedge \theta^i + B_{ij} \theta^j \wedge \left(\psi^i - A^i_k \theta^k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_\Gamma \omega_L &= \Gamma\left(g_{ij}\right) \psi^j \wedge \theta^i + g_{ik} \lambda^k_j \theta^j \wedge \theta^i \\ &- g_{ik} A^k_j \psi^j \wedge \theta^i + g_{ik} A^k_r A^r_j \theta^j \wedge \theta^i + g_{ij} \psi^j \wedge \psi^i \\ &- g_{kj} A^k_i \psi^j \wedge \theta^i + \Gamma\left(B_{ij}\right) \theta^j \wedge \theta^i + B_{ij} \psi^j \wedge \theta^i \\ &- B_{ik} A^k_j \theta^j \wedge \theta^i + B_{ij} \theta^j \wedge \psi^i - B_{kj} A^k_i \theta^j \wedge \theta^i \end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει:

$$\begin{aligned}
L_{\Gamma}\omega &= \left(\Gamma\left(g_{ij}\right) - g_{ik}A^k_j - g_{kj}A^k_i + B_{ij} - B_{ji}\right)\psi^j \wedge \theta^i \\
&+ \left(g_{ik}\lambda^k_j + g_{ik}A^k_r A^r_j + \Gamma\left(B_{ij}\right) - B_{ik}A^k_j - B_{kj}A^k_i\right)\theta^j \wedge \theta^i \\
&+ g_{ij}\psi^j \wedge \psi^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{[ij]} &= 0 \text{ δηλαδή το } g_{ij} \text{ είναι συμμετρικό.} \\
\Gamma\left(g_{ij}\right) - g_{ik}A^k_j - g_{kj}A^k_i + B_{ij} - B_{ji} &= 0 \\
g_{ik}\lambda^k_j + g_{ik}A^k_r A^r_j + \Gamma\left(B_{ij}\right) - B_{ik}A^k_j - B_{kj}A^k_i &= 0.
\end{aligned}$$

Επειδή το πεδίο g_{ij} είναι συμμετρικό, από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε:

$$\Gamma\left(g_{[ij]}\right) - g_{[i|k|}A^k_{j]} - g_{k[j}A^k_{i]} + 2B_{[ij]} = 0 \Longleftrightarrow B_{[ij]} = 0$$

Εξ' ορισμού ισχύει ότι $B_{(ij)} = 0$ οπότε $B_{ij} = 0$ και το ω_L ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\omega_L = g_{ab}g_{ij}\psi^j \wedge \theta^i$$

και οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
g_{[ij]} &= 0 \\
\Gamma\left(g_{ij}\right) - g_{ik}A^k_j - g_{kj}A^k_i &= 0 \\
g_{ik}\lambda^k_j + g_{ik}A^k_r A^r_j &= 0.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η εξωτερική παράγωγος της δεύτερης διαφορικής μορφής ω_L του Cartan μηδενίζεται. Επομένως,

$$\begin{aligned}
d\omega_L &= g_{ij,s}dt \wedge \psi^j \wedge \theta^i + g_{ij,k}dq^k \wedge \psi^j \wedge \theta^i + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{q}^k}d\dot{q}^k \wedge \psi^j \wedge \theta^i \\
&+ g_{ij}d\psi^j \wedge \theta^i + g_{ij}\psi^j \wedge d\theta^i.
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
d\psi^j &= d\left(d\dot{q}^j + A^j_k\theta^k - F^j dt\right) = dA^j_k \wedge \theta^k - dF^j \wedge dt \\
d\theta^i &= d\left(dq^i - \dot{q}^i dt\right) = -d\dot{q}^i \wedge dt.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
d\theta^i &= -\psi^i \wedge dt - F^i dt \wedge dt + A^i_j\theta^j \wedge dt \\
&= -\psi^i \wedge dt + A^i_j\theta^j \wedge dt \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ij}\psi^j \wedge d\theta^i &= -g_{ij}\psi^i \wedge dt \wedge \psi^j + g_{ij}A^i_k\theta^k \wedge dt \wedge \psi^j \\
&= g_{ij}A^i_k\theta^k \wedge dt \wedge \psi^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\psi^j &= A^j_{k,s}dt \wedge \theta^k + A^j_{k,r}dq^r \wedge \theta^k + \frac{\partial A^j_k}{\partial \dot{q}^r}d\dot{q}^r \wedge \theta^k \\
&- \frac{\partial F}{\partial q^k}dq^k \wedge dt - \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}^k}d\dot{q}^k \wedge dt \\
&= A^j_{k,s}dt \wedge \theta^k + A^j_{k,r}dq^r \wedge \theta^k + \frac{\partial A^j_k}{\partial \dot{q}^r}d\dot{q}^r \wedge \theta^k \\
&- \frac{\partial F}{\partial q^k}dq^k \wedge dt + 2A^j_k d\dot{q}^k \wedge dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{ij}d\psi^j\wedge\theta^i &= g_{ij}A^j_{k,s}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}A^j_{k,r}dq^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&+g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial\dot q^r}d\dot q^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i-g_{ij}\frac{\partial F}{\partial q^k}dq^k\wedge dt\wedge\theta^i\\
&+2g_{ij}A^j_kd\dot q^k\wedge dt\wedge\theta^i
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τα

$$
\begin{aligned}
dq^i &= \theta^i+u^idt\\
d\dot q^i &= \psi^i+F^idt-A^i_j\theta^j
\end{aligned}
$$

βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
g_{ij}d\psi^j\wedge\theta^i &= g_{ij}A^j_{k,s}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}A^j_{k,r}\theta^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&+u^rg_{ij}A^j_{k,r}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial\dot q^r}\left(\psi^r+F^rdt-A^r_m\theta^m\right)\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&-g_{ij}\frac{\partial F}{\partial q^k}\theta^k\wedge dt\wedge\theta^i-g_{ij}\frac{\partial F}{\partial q^k}\dot q^kdt\wedge dt\wedge\theta^i\\
&+2g_{ij}A^j_k\left(\psi^k+F^kdt-A^k_r\theta^r\right)\wedge dt\wedge\theta^i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & g_{ij}d\psi^j\wedge\theta^i=g_{ij}A^j_{k,s}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}A^j_{k,r}\theta^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&+u^rg_{ij}A^j_{k,r}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial\dot q^r}\psi^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&-g_{ij}\frac{\partial F}{\partial q^k}\theta^k\wedge dt\wedge\theta^i+g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial u^r}F^rdt\wedge\theta^k\wedge\theta^i-g_{ij}A^r_m\frac{\partial A^j_k}{\partial\dot q^r}\theta^m\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&+2g_{ij}A^j_k\psi^k\wedge dt\wedge\theta^i-2g_{ij}A^j_kA^k_r\theta^r\wedge dt\wedge\theta^i
\end{aligned}
$$

Ακόμα, ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
g_{ij,k}dq^k\wedge\psi^j\wedge\theta^i+\frac{\partial g_{ij}}{\partial\dot q^k}d\dot q^k\wedge\psi^j\wedge\theta^i &= g_{ij,k}\theta^k\wedge\psi^j\wedge\theta^i+g_{ij,k}\dot q^kdt\wedge\psi^j\wedge\theta^i\\
&+\frac{\partial g_{ij}}{\partial\dot q^k}\left(\psi^k+F^kdt-A^k_r\theta^r\right)\wedge\psi^j\wedge\theta^i
\end{aligned}
$$

Τότε, το $d\omega_L$ γράφεται:

$$
\begin{aligned}
d\omega_L &= g_{ij,s}dt\wedge\psi^j\wedge\theta^i+g_{ij,k}\theta^k\wedge\psi^j\wedge\theta^i+g_{ij,k}u^kdt\wedge\psi^j\wedge\theta^i\\
&+\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\psi^k\wedge\psi^j\wedge\theta^i+\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}F^kdt\wedge\psi^j\wedge\theta^i-A^k_r\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\theta^r\wedge\psi^j\wedge\theta^i+g_{ij}A^i_k\theta^k\wedge dt\wedge\psi^j\\
&+g_{ij}A^j_{k,s}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}A^j_{k,r}\theta^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i+u^rg_{ij}A^j_{k,r}dt\wedge\theta^k\wedge\theta^i+g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial u^r}\psi^r\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&-g_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial q^k}\theta^k\wedge dt\wedge\theta^i+g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial u^r}F^rdt\wedge\theta^k\wedge\theta^i-g_{ij}A^r_m\frac{\partial A^j_k}{\partial u^r}\theta^m\wedge\theta^k\wedge\theta^i\\
&+2g_{ij}A^j_k\psi^k\wedge dt\wedge\theta^i-2g_{ij}A^j_kA^k_r\theta^r\wedge dt\wedge\theta^i
\end{aligned}
$$

Συγκεντρώνοντας όρους έχουμε:

$$\begin{aligned} d\omega_L &= \left(\Gamma\left(g_{ij}\right) + g_{kj}A^k_i - 2g_{ik}A^k_j\right) dt \wedge \psi^j \wedge \theta^i + \\ &+ \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{q}^k}\psi^k \wedge \psi^j \wedge \theta^i + \left(g_{ij,k} - A^r_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{q}^r} - g_{ir}\frac{\partial A^r_k}{\partial \dot{q}^j}\right)\theta^k \wedge \psi^j \wedge \theta^i \\ &+ \left(g_{ij}A^j_{k,s} + g_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial q^k} + g_{ij}\frac{\partial A^j_k}{\partial \dot{q}^r}F^r + 2g_{ij}A^j_r A^r_k + u^r g_{ij}A^j_{k,r}\right) dt \wedge \theta^k \wedge \theta^i \\ &+ \left(g_{ij}A^j_{k,r} - g_{ij}A^m_r \frac{\partial A^j_k}{\partial \dot{q}^m}\right)\theta^r \wedge \theta^k \wedge \theta^i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Οι όροι των παρενθέσεων μηδενίζονται. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η συνθήκη:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{q}^j}$$

Επομένως, το ω_L γράφεται και

$$\omega_L = g_{ij}\psi^j \wedge \theta^i,$$

ενώ προκύπτουν οι συνθήκες του Helmholtz:

$$\begin{aligned} g_{[ij]} &= 0 \\ \Gamma\left(g_{ij}\right) - g_{ik}A^k_j - g_{kj}A^k_i &= 0 \\ g_{ik}\lambda^k_j + g_{ik}A^k_r A^r_j &= 0 \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{q}^j} \end{aligned}$$

όπου:

$$\lambda^k_j = F^k_{,j} + \Gamma\left(A^k_j\right).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αυτές μπορούν να οριστούν (είναι ισοδύναμες) μέσω των ακόλουθων ιδιοτήτων της διαφορικής μορφής ω_L:

$$\begin{aligned} i_\Gamma \omega_L &= 0 \\ L_\Gamma \omega_L &= 0 \\ d\omega_L &= 0. \end{aligned}$$

Τέλος, η σχέση $d\omega_L = 0$ συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} g_{kj}A^k_i + g_{jk}A^k_i - g_{ik}A^k_j &= 0 \\ g_{j(i,k)} - A^r_{(k}\frac{\partial g_{i)j}}{\partial \dot{q}^r} - g_{r(i}\frac{\partial A^r_{k)}}{\partial \dot{q}^j} &= 0 \\ g_{j(i}A^j_{k),s} + g_{j(i}\frac{\partial F^j}{\partial q^{k)}} + g_{j(i}\frac{\partial A^j_{k)}}{\partial \dot{q}^r}F^r + 2g_{j(i}A^r_{k)}A^j_r + u^r g_{j(i}A^j_{k),r} &= 0 \\ g_{j(i}A^j_{k,r)} - g_{j(i}A^m_r\frac{\partial A^j_{k)}}{\partial \dot{q}^m} &= 0. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Συμμετρίες μετρικής

3.1 Εισαγωγή

Στο παρών κεφάλαιο αναπτύσουμε την έννοια των συμμετριών μιας ποπλλαπλότητας Riemann. Στην ενότητα 3.2 επισημαίνουμε τα κυριότερα είδη συμμετριών της μετρικής που χρησιμοποιούμε. Στη συνέχεια, γενικεύουμε την έννοια της συμμετρίας χρησιμοποιώντας τα τανυστικά πεδία Killing καθώς και τα σύμμορφα τανυστικά πεδία Killing. Συγκεκριμένα, ακολουθούμε τη μεθοδολογία των Barnes και Rani [31] για την κατασκευή των τανυστικών πεδίων Killing μέσω των Killing και Conformal Killing διανυσματικών πεδίων. Η εύρεση των σύμμορφων διανυσματικών πεδίων μιας μετρικής δεν είναι πάντοτε μία εύκολη διαδικασία. Για τις 1+(n-1) διασπάσιμες μετρικές η γενική απάντηση έχει δοθεί στις [8], [17]. Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των [8], [17] και υπολογίζουμε τους σύμμορφους τανυστές Killing δεύτερης τάξης στη περίπτωση των Bianchi I χωρόχρονων, βλέπε [32].

3.2 Κατηγορίες συμμετριών

Η Διαφορική Γεωμετρία μελετά τις ιδιότητες των δομών κάτω από κάποιου είδους, «παράλληλης μεταφοράς» μέσω της οποίας χαρακτηρίζονται οι ιδιότητες ενός γεωμετρικού αντικείμενου. Στη γλώσσα της Διαφορικής Γεωμετρίας κάθε παράλληλη μεταφορά αντιστοιχεί σε μια παραγώγιση που εκφράζεται σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η έννοια της συμμετρίας ενός γεωμετρικού αντικειμένου υποδηλώνει ότι το συγκεκριμένο αντικείμενο, παραμένει αμετάβλητο κάτω από τη συγκεκριμένη δράση. Η παράλληλη μεταφορά κατά μήκος των ολοκληρωτικών γραμμων ενός διανυσματικού πεδίου η οποία αφήνει τις συνιστώσες ενός γεωμετρκού αντικειμένου αμετάβλητες οδηγεί στην παραγώγιση Lie και είναι η παραγώγιση που χρησιμοποποιούμε στη μελέτη των συμμετριών.

Το θεμελειακό γεωμετρικό αντικείμενο της Riemannian γεωμετρίας είναι η μετρική. Οι συμμετρίες της μετρικής καθορίζονται μέσω της ποσότητας $L_X g_{ij} = 0$, όπου X το διανυσματικό πεδίο ως προς το οποίο γίνεται η παραγώγιση Lie. Μέσω της μετρικής ορίζονται και άλλα γεωμετρικά αντικείμενα, όπως τα σύμβολα Christofell Γ^i_{jk}, που αποτελούν τις συνιστώσες της συνοχής Riemann, ο τανυστής του Riemann R^i_{jkl}, ο τανυστής του Ricci $R_{ij} = R^k_{ikj}$ καθώς και άλλα. Για κάθε από ένα από αυτά τα πεδία μπορούμε να ορίσουμε και την αντίστοιχη εξίσωση συμμετρίας $L_X \Gamma^i_{jk} = 0$, $L_X R^i_{jkl} = 0$ κ.ο.κ. και γενικότερα μέσω της εξίσωσης

$$L_X A = 0,$$

όπου A είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο και X ο γεννήτορας της συμμετρίας αυτού. Μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της συμμετρίας χαλαρώνοντας το δεξί μέλος και γράφοντας

$$L_X A = B.$$

Σύμφωνα με αυτήν την εξίσωση, το γεωμετρικό αντικείμενο A κάτω από τη δράση της Lie παραγώγου κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου X, μετασχηματίζεται στο γεωμετρικό αντικείμενο B.

Στον πίνακα 3.1 παραθέτουμε τα είδη των συμμετριών που χρησιμοποιούμε [33]:

Τύπος συμμετρίας	**Εξίσωση συμμετρίας**	**Συνθήκη**
Projective collineation	$L_X\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\phi_{;k} + \delta^i_k\phi_{;j}$	
Special projective collineation	$L_X\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\phi_{;k} + \delta^i_k\phi_{;j}$	$\phi_{;ij} = 0$
Affine collineation	$L_X\Gamma^i_{jk} = 0$	
Homothetic motion	$L_X g_{ab} = 2\rho g_{ab}$	$\rho = const$
Motion	$L_X g_{ab} = 0$	
Special Conformal collineation	$L_X\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\sigma_{;k} + \delta^i_k\sigma_{;j} - g_{jk}g^{il}\sigma_{;l}$	$\sigma_{;ij} = 0$
Special Conformal motion	$L_X g_{ab} = 2\sigma g_{ij}$	$\sigma_{;ij} = 0$
Conformal collineation	$L_X\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\sigma_{;k} + \delta^i_k\sigma_{;j} - g_{jk}g^{il}\sigma_{;l}$	
Conformal motion	$L_X g_{ab} = 2\sigma g_{ab}$	$\sigma = \frac{1}{n}X^k_{;k}$

Πίνακας 3.1: Συμμετρίες

Ορισμός 3.2.1 *Η χαρακτηριστική ποσότητα $L_X g_{ij}$ των συμμετριών της γεωμετρίας Riemman αναλύεται σε ανάγωγα μέρη ως ακολούθως*

$$L_X g_{ij} = 2\psi g_{ij} + H_{ij},$$

όπου η συνάρτηση ψ ονομάζεται σύμμορφος παράγοντας (conformal factor) της μετρικής και H_{ij} αποτελεί είναι ένας άιχνος συμμετρικός τανυστής.

Ως συνέπεια του παραπάνω ορισμού χαρακτηρίζουμε τα ψ και H_{ij} για κάθε περίπτωση συμμετρίας ως ακολούθως:

- Killing vector:
$$\psi = 0,\ H_{ij} = 0$$
- Homethetic vector:
$$\psi = const,\ H_{ij} = 0$$
- Special Conformal Killing vector:
$$\psi_{;ij} = 0,\ H_{ij} = 0$$
- Conformal Killing vector:
$$H_{ij} = 0$$
- Affine Collineation vector:
$$\psi_{;i} = 0,\ H_{ij;k} = 0$$
- Projective collineation
$$\psi = \frac{n+1}{n}\sigma + c_0,\ H_{ij;k} = \frac{n}{2(n+1)}\left(g_{jk}\psi_{;i} + g_{ki}\psi_{;j} - \frac{2}{n}g_{ij}\psi_{;k}\right)$$
- Special Projective collineation:
$$\psi = \frac{n+1}{n}\sigma + c_0,\ \psi g_{ij} + cH_{ij} = const,\ \sigma_{;ij} = 0,\ H_{ij;k} = \frac{n}{2(n+1)}\left(g_{jk}\psi_{;i} + g_{ki}\psi_{;j} - \frac{2}{n}g_{ij}\psi_{;k}\right),$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το διανυσματικό πεδίο Killing ορίζεται μέσω της σχέσης,

$$L_X g_{ij} = 0.$$

Ισοδύναμα, αυτή γράφεται:

$$L_X g_{ij} = X^k g_{ij,k} + X^k_{,i}g_{kj} + X^k_{,j}g_{ik} = 0.$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι $g_{ij;k} = g_{ij,k} - g_{ir}\Gamma^r_{jk} - g_{jr}\Gamma^r_{ki} = 0$ και χρησιμοποιώντας τη συναλλοίωτη παραγώγιση, καταλήγουμε στη σχέση:

$$L_X g_{ij} = X_{(i;j)} = 0.$$

Αυτή η σχέση συνδέει την παραγώγιση Lie με τη συναλλοίωτη παραγώγιση σε μία πολλαπλότητα.

3.2.1 Τανυστικά πεδία Killing

Ορισμός 3.2.2 *Το συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο* $K \in F_n^0(M)$ *ορισμένο στην πολλαπλότητα* M *ονομάζεται τανυστικό πεδίο Killing (Killing tensor) εάν και μόνο εάν*

$$K_{(i_1 \cdots i_n;j)} = 0.$$

Μπορεί να δειχτεί ότι κάθε Killing tensor ικανοποιεί τη σχέση:

$$[K, g_{ij}]_{SN} = 0.$$

Όπως έχει ήδη δειχτεί, βλέπε [31], [34], [170], [35], η σημασία της ύπαρξης των Killing tensors στη Γεωμετρική Μηχανική, είναι ότι οδηγούν σε πρώτα ολοκληρώματα της κίνησης.

Παράδειγμα 3.2.3 *Έστω ολόνομο δυναμικό σύστημα με* n *βαθμούς ελευθερίας το οποίο κινείται ελεύθερα έτσι ώστε η κινητική του ενέργεια να δίνεται από τη σχέση* $T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$. *Η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι οι γεωδαισιακές* $\frac{d^2 q^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k = 0$, *όπου* τ *η αφινική παράμετρος. Το βαθμωτό πεδίο* $I = K_{i_1 \cdots i_n} \frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau}$, *αποτελεί σταθερά της κίνησης, είναι μια σταθερά της κίνησης εάν και μόνον εάν ο τανυστής* $K_{i_1 \cdots i_n}$ *είναι ένας Killing tensor.*

Απόδειξη. *Το* I *αποτελεί σταθερά της κίνησης εφόσον* $\Gamma(I) = 0$, *όπου* $\Gamma = \frac{d}{d\tau}$ *είναι το διανυσματικό πεδίο Euler. Υπολογίζουμε*

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}\left(K_{i_1 \cdots i_n} \frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau} \right) \\ &= K_{i_1 \cdots i_n, i_{n+1}} \underbrace{\frac{dq^{i_{n+1}}}{d\tau} \frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau}}_{n+1 \ terms} + n K_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} \underbrace{\frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{d^2 q^{i_j}}{d\tau^2} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau}}_{n \ terms}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τους όρους $\frac{d^2 q^{i_j}}{d\tau^2}$ *με την εξίσωση των γεωδαισιακών έχουμε:*

$$\frac{dI}{d\tau} = K_{i_1 \cdots i_n, i_{n+1}} \underbrace{\frac{dq^{i_{n+1}}}{d\tau} \frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau}}_{n+1 \ terms} - n K_{i_1 \cdots j \cdots i_n} \Gamma^j_{i_{n+1} i_{n+2}} \underbrace{\frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau} \frac{dq^{i_{n+1}}}{d\tau} \frac{dq^{i_{n+2}}}{d\tau}}_{n+1 \ terms}.$$

Η συναλλοίωτη παραγώγιση δίνει:

$$\frac{dI}{d\tau} = K_{i_1 \cdots i_n; i_{n+1}} \underbrace{\frac{dq^{i_{n+1}}}{d\tau} \frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau}}_{n+1 \ terms}$$

Άρα, η συνθήκη ύπαρξης πρώτου ολοκληρώματος $\frac{dI}{d\tau} = 0$ *είναι:*

$$K_{i_1 \cdots i_n; i_{n+1}} \frac{dq^{i_{n+1}}}{d\tau} \frac{dq^{i_1}}{d\tau} \cdots \frac{dq^{i_n}}{d\tau} = 0.$$

από όπου προκύπτει $K_{(i_1 \cdots i_n; i_{n+1})} = 0$. *Επομένως, το τανυστικό πεδίο* $K_{i_1 \cdots i_n}$ *αποτελεί ένα τανυστικό πεδίο Killing.*
■

Τα τανυστικά πεδία Killing που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι αυτά της $2^{ης}$ τάξης γιατί οδηγούν σε τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα. Οι τανυστές $2^{ης}$ τάξης Killing κατηγοριοποιούνται σε δύο κατηγορίες. Στους αναγώγιμους (reducible) Killing tensors, οι οποίοι κατασκευάζονται με γινόμενα διανυσματικών πεδίων Killing και τους μη αναγώγιμους (irreducible) Killing tensors [31]. Στο παρακάτω θεώρημα ακολουθούμε τους Barnes και Rani [31].

Θεώρημα 3.2.4 *Έστω Riemannian μετρική, διάστασης n η οποία επιδέχεται N Killing vectors. Τότε κάθε reducible Killing tensor κατασκευάζεται μέσω της σχέσης*

$$K_{ij} = a_0 g_{ij} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\eta^I_{(i}\eta^J_{j)},$$

όπου a_0, a_{IJ} σταθερές με $I \leq J$.

Απόδειξη. Το συμμετρικό μέρος της συναλλοίωτης παραγώγισης του K_{ij} δίνει:

$$\begin{aligned}
K_{(ij;k)} &= a_0 g_{(ij;k)} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{((i}\eta^J_{j))}\right)_{;k)} \\
&= a_0 g_{(ij;k)} + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{(i}\eta^J_{j} + \eta^I_{(j}\eta^J_{i}\right)_{;k)} \\
&= a_0 g_{(ij;k)} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{(i}\eta^J_{j}\right)_{;k)} \\
&= \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{(i;k}\eta^j_{j)} + \eta^I_{(i}\eta^J_{j;k)}\right).
\end{aligned}$$

Επειδή τα η^I, η^J είναι διανυσματικά πεδία Killing προκύπτει ότι $K_{(ij;k)} = 0$. Επομένως, το K_{ij} περιγράφει έναν τανυστή Killing 2ης τάξης. ■

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι δεν είναι όλοι οι τανυστές γραμμικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Κάθε μετρική επιδέχεται $N(N+1)/2$ διανυσματικά πεδία Killing, το μέγιστο. Επομένως, μέγιστος ο αριθμός των reducible Killing tensors είναι $1 + N(N+1)/2$

Επίσης, για Riemannian μετρική διάστασης n, σημειώνουμε τα παρακάτω [33].

- Κάθε σύμμορφα επίπεδη μετρική, επιδέχεται το μέγιστο $\frac{n(n+1)}{2}$ Killing.
- Όταν η μετρική επιδέχεται $\frac{n(n+1)}{2}$ διανυσματικά πεδία Killing, ονομάζεται maximally symmetric space.
- Η μετρική, επιδέχεται τον μέγιστο αριθμό των $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ γραμμικά ανεξάρτητων τανυστών Killing.
- Κάθε σύμμορφα-επίπεδη μετρική επιδέχεται $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ γραμμικά ανεξάρτητους τανυστές Killing.

Από τις δύο τελευταίες προκύπτει ότι, όλοι οι τανυστές Killing 2ης τάξης για σύμμορφα ορισμένη μετρική είναι reducible.

Για παράδειγμα, η δισδιάστατη Ευκλείδεια μετρική, $ds^2_E = dx^2 + dy^2$ επιδέχεται 3 διανύσματα Killing. Ως εκ τούτου, είναι επίπεδη και επομένως επιδέχεται $\frac{2\cdot 3^2\cdot 4}{12} = 6$ τανυστές Killing οι οποίοι κατασκευάζονται μέσω των διανυσμάτων Killing. Αυτά, είναι τα gradient $\eta^1 = \partial_x, \eta^2 = \partial_y$ και ο γεννήτορας των στροφών $\eta_3 = y\partial_x - x\partial_y$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.4, έχουμε τους παρακάτω Killing tensors για την δισδιάστατη Ευκλείδεια μετρική

$$\begin{aligned}
K^{11}_{ab} &= \eta^1_{(a}\eta^1_{b)} \\
K^{12}_{ab} &= \eta^1_{(a}\eta^2_{b)} \\
K^{13}_{ab} &= \eta^1_{(a}\eta^3_{b)} \\
K^{22}_{ab} &= \eta^2_{(a}\eta^2_{b)} \\
K^{23}_{ab} &= \eta^2_{(a}\eta^3_{b)}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η μετρική ds^2_E, κατασκευάζεται με γραμμικό συνδυασμό των K^{11}_{ab}, K^{22}_{ab}.

3.2.2 Σύμμορφα τανυστικά πεδία Killing

Σύμφωνα με τους Rani και Barnes [31], έχουμε ότι:

Ορισμός 3.2.5 *Ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο $Q \in F_n^0(M)$ ορισμένο στην πολλαπλότητα M, ορίζει ένα σύμμορφο τανυστικό πεδίο Killing (Conformal Killing tensor), όταν*

$$Q_{(ij;k)} = \rho_{(k}g_{ij)},$$

όπου

$$\rho_i = \frac{1}{n+2}K^j_{j;i} + \frac{2}{n+2}K^j_{i,j}$$

- Όταν $\rho_k = 0$ το Q_{ij} διαμορφώνεται σε ένα τανυστικό πεδίο Killing.
- Όταν $\rho_k \neq 0$ το Q_{ij} ονομάζεται σύμμορφος κανονικός (proper Conformal) τανυστής Killing. Στην ειδική περίπτωση που το συναλλοίωτο πεδίο ρ_k ορίζει ένα διάνυσμα Killing, τότε το Q_{ij} καλείται ομοθετικό (homothetic) τανυστικό πεδίο Killing, ενώ όταν ο σύμμορφος τανυστής είναι άιχνος συνεπάγεται ότι

$$\rho_i = \frac{2}{n+2}K^j_{i,j}.$$

- Όταν $\rho_k = \rho_{;k}$ [1] τότε το Q_{ij} ονομάζεται σύμμορφος βαθμωτός τανυστής Killing (gradient Conformal Killing tensor).

Οι σύμμορφοι τανυστές Killing μπορούν να κατασκευαστούν μέσω της χρήσης των σύμμορφων διανυσματικών πεδίων Killing σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.6 *Έστω Riemannian μετρική, διάστασης n που επιδέχεται N σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing η_I με ϕ_I, τον σύμμορφο παράγονται ο οποίος δίνεται από τη σχέση $\phi_I = \frac{1}{n}\eta^k_{Ik;i}$. Τότε κάθε συναλλοίωτο πεδίο 2ης τάξης, το οποίο δίνεται από την εξίσωση*

$$Q_{ij} = \lambda g_{ij} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\eta^I_{(i}\eta^J_{j)},$$

ορίζει ένα σύμμορφο τανυστικό πεδίο Killing, με

$$\rho_k = \lambda_{;k} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\phi^I\eta^J_k + \phi^J\eta^I_k\right),$$

και a_{IJ} σταθερές, όπου $I \leq J$.

Απόδειξη. Το συμμετρικό μέρος της συναλλοίωτης παραγώγισης του Q_{ij} δίνει:

$$\begin{aligned}
Q_{(ij;k)} &= \left(\lambda g_{(ij)}\right)_{;k)} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{((i}\eta^J_{j)}\right)_{;k)} \\
&= \lambda g_{(ij;k)} + \lambda_{;(k}g_{ij)} + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{(i}\eta^J_j + \eta^I_{(j}\eta^J_i\right)_{;k)} \\
&= \lambda_{;(k}g_{ij)} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{(i}\eta^J_j\right)_{;k)} \\
&= \lambda_{;(k}g_{ij)} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\eta^I_{(i;k}\eta^J_{j)} + \eta^I_{(i}\eta^J_{j;k)}\right).
\end{aligned}$$

[1] Δηλαδή το conformal KV προέρχεται από τη συναλλοίωτη παραγώγιση ενός βαθμωτού πεδίου ρ

Ωστόσο, τα σύμμορφα διανυσματικά πεδία η^I, η^J ικανοποιούν τη σχέση $\eta^{I,J}_{(i;j)} = \phi^{I,J} g_{ij}$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Q_{(ij;k)} &= \lambda_{;(k} g_{ij)} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\phi^I g_{(ik}\eta^J_{j)} + \phi^J g_{(jk}\eta^I_{i)}\right) \\ &= \left(\lambda_{;(k} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\left(\phi^I \eta^J_{(k} + \phi^J \eta^I_{(k}\right)\right) g_{ij)} \\ &= \rho_{(k} g_{ij)}, \end{aligned}$$

με $\rho_k = \lambda_{;k} + \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} a_{IJ}\left(\phi^I \eta^J_k + \phi^J \eta^I_k\right)$. Συνεπάγεται ότι, το Q_{ij} περιγράφει έναν σύμμορφο τανυστή Killing. ■

Συνέπεια 3.2.7 *Σύμφωνα με το θεώρημα (3.2.6), έχουμε ότι το τανυστικό πεδίο K_{ij}, το οποίο δίνεται από τη σχέση:*

$$K_{ij} = Q_{ij} - \rho g_{ij} = \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=I}^{N} a_{IJ}\eta^I_{(i}\eta^J_{j)},$$

όπου ρ βαθμωτό πεδίο, τέτοιο ώστε $\rho_{;i} = \frac{1}{n+2}K^j_{j;i} + \frac{2}{n+2}K^j_{i,j}$ · ορίζει τις συνιστώσες ενός τανυστή Killing.

Μέσω της παραπάνω, είναι προφανές ότι διαμορφώνεται ο μηχανισμός εύρεσης των μη τετριμμένων τανυστών Killing, ακόμα και σε περιπτώσεις μετρικής για την οποία η εύρεση τους καθίσταται δύσκολη ακόμα και με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων όπως το Maple ή το Mathematica. Ωστόσο, ο προσδιορισμός των σύμμορφων διανυσματικών πεδίων Killing, δεν είναι πάντοτε εύκολος. Η απάντηση σε αυτό το πρόβλημα, στην περίπτωση μίας διασπάσιμης, $1 + (n-1)$ $(n \geq 3)$ Riemannian μετρικής, δίνεται στην ακόλουθη ενότητα, βλέπε [32].

3.3 Σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing, διασπάσιμης 1+(n-1) μετρικής

Σύμφωνα με παλαιότερες δημοσιεύσεις, βλέπε [3] και [4], τα μοντέλα τύπου Bianchi περιγράφουν χωρικά ομογενείς μετρικές, οι οποίες επιδέχονται μιά ομάδα G_3 δρώντας πάνω σε χωρικές υπερεπιφάνειες.

Σε αυτού του τύπου τις μετρικές, συμπεριλαμβάνονται οι μη ισοτροπικές μετρικές. Αυτές, αποτελούν γενίκευση των Friedman-Robertson-Walker (FRW) μετρικών, οι οποίες έχουν εκτενώς χρησιμοποιηθεί στην έρευνα για τις ανισοτροπίες του αρχέγονου σύμπαντος και την εξέλιξη του σε σχέση με την παρούσα ισοτροπία, βλέπε [5] και [6]. Ο απλούστερος τύπος αυτών των μετρικών αποτελούν τα μοντέλα Bianchi I για τα οποία η G_3 είναι η Αβελιανή ομάδα των μετατοπίσεων (translations) του τρισδιάστατου Ευκλείδειου E^3. Στο σύστημα συντεταγμένων $[t, x, y, z]$ η μετρική των Bianchi I μοντέλων δίνεται από τη σχέση:

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)\,dx^2 + B^2(t)\,dy^2 + C^2(t)\,dz^2, \tag{3.1}$$

όπου $A(t), B(t), C(t)$ είναι συναρτήσεις που εξαρτώνται από το χρόνο με τα αντίστοιχα KVs να είναι $\{\partial_x, \partial_y, \partial_y\}$. Στην περίπτωση που τα μέτρα των δύο εκ των τριών συναρτήσεων είναι ίσα, π.χ. $A^2(t) = B^2(t)$, τότε ο χωρόχρονος Bianchi I (3.1) απλοποιείται στην κατηγορία των Locally Rotational Symmetric (LRS) μοντέλων, βλέπε [3].

Όπως προαναφέραμε, ένα CKV X ορίζεται μέσω της σχέσης $L_X g_{ij} = 2\psi g_{ij}$ και απλοποιείται σε Killing όταν $(\psi = 0)$, σε Homothetic HV, όταν $(\psi_{;i} = 0)$ και σε special CKV, όταν $(\psi_{;ij} = 0)$.

Η επίδραση αυτών των διανυσματικών πεδίων είναι εμφανής σε όλα τα επίπεδα στη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας, δηλαδή στη γεωμετρία την κινηματική και τη δυναμική. Όσον αφορά τη γεωμετρία, η ύπαρξη των CKVs μας δίνει τη δυνατότητα επιλογής ενός συστήματος συντεταγμένων, στο οποίο η μετρική μπορεί να απλοποιηθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να απαλειφθεί μία συνιστώσα της, βλέπε [7], [8]. Όσον αφορά την κινηματική τα CKVs επιβάλουν συνθήκες πάνω στις κινηματικές μεταβλητές (περιστροφή, μεγέθυνση, ίχνος) και παράγουν τα γνωστά αποτελέσματα, βλέπε [9–11] και [13]. Τέλος, όσον αφορά τη δυναμική, τα CKVs χρησιμοποιούνται έχουν διάφορες εφαρμογές, όπως για παράδειγμα την αναζήτηση νέων λύσεων των εξισώσεων πεδίου με μεγαλύτερη φυσική σημασία, βλέπε [12–15] και [16]. Επομένως, γίνεται σαφής ο λόγος για τον οποίο είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη σύμμορφη άλγεβρα της μετρικής του χώρου.

Από το [17] έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.3.1 *Μία διασπάσιμη* $1+(n-1)$ $(n\geq 3)$, *Riemannian μετρική* [2],

$$ds^2 = g_{ij}dq^i \otimes dq^j = \varepsilon dt^2 + h_{\mu\nu}dq^\mu dq^\nu, \tag{3.2}$$

επιδέχεται ένα proper CKV X *αν και μόνο αν, η* $n-1$ *μετρική* $h_{\mu\nu}$, *επιδέχεται ένα gradient proper CKV* ξ. *Συγκεκριμένα τα δύο διανυσματικά πεδία συσχετίζονται σύμφωνα με την εξίσωση:*

$$X = -\frac{\varepsilon}{p}\dot{\lambda}(t)\,\psi\left(q^k\right)\partial_t + \frac{1}{p}\lambda(t)\,\xi\left(q^j\right) + H,$$

όπου το p *είναι μία μη μηδενική σταθερά, το* ψ *είναι ο σύμμορφος παράγοντας του CKV* ξ^μ, *που ικανοποιεί τη συνθήκη* $\psi_{;\mu\nu} = p\psi h_{\mu\nu}$. *Η χρονική συνάρτηση* $\lambda(t)$, *δίνεται μέσω της λύσης της δ.ε.* $\ddot{\lambda}(t) + \varepsilon p\lambda(t) = 0$, *όπου με την τελεία συμβολίζουμε τη χρονική παράγωγο. Το* H^i *αποτελεί, είτε KV, είτε HV της* $n-1$ *μετρικής* $h_{\mu\nu}$.

Σύμφωνα με αυτήν την πρόταση, μέσω, ενός proper CKV της n-1 μετρικής $h_{\mu\nu}$ κατασκευάζονται δύο proper CKVs για την n μετρική g_{ij}. Τα σύμμορφα βαθμωτά διανύσματα Killing της $(n-1)$ μετρικής ικανοποιούν τη σχέση $\psi_{;\mu\nu} = p\psi h_{\mu\nu}$. Στην ειδική περίπτωση που το βαθμωτό πεδίο του Ricci της $(n-1)$ μετρικής είναι σταθερό, τότε αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$R = p(n-1)(n-2),\ n\geq 3$$

Ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 3.3.2 *Ο χώρος με μετρική* $g_{\mu\nu}$ *είναι σύμμορφα επίπεδος, αν και μόνο αν ο* $(n-1)$ *χώρος με μετρική* h_{ij} *αποτελεί χώρο σταθερής καμπλυλότητας.*

Απόδειξη.

Ευθύ

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η ανάλυση του τανυστή καμπυλότητας, βλέπε [3], είναι

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2}\left(g_{c[a}R_{b]d} + g_{d[b}R_{a]c}\right) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}g_{abcd}, \tag{3.3}$$

όπου $g_{abcd} = g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}$, ενώ η διάσταση του χώρου είναι $n\geqslant 4$. Επιπλέον, για κάθε $1+(n-1)$ διασπώμενο χώρο ισχύει ότι [3],

$$\overset{n}{R}_{abcd} = \delta^\alpha_a\delta^\beta_b\delta^\gamma_c\delta^\sigma_d \overset{n-1}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\sigma}; \qquad \overset{n}{R}_{ab} = \delta^\alpha_a\delta^\beta_b \overset{n-1}{R}{}_{\alpha\beta}; \qquad \overset{n}{R} = \overset{n-1}{R}. \tag{3.4}$$

Επομένως,

<u>$n=5$</u>

Υποθέτοντας ότι η μετρική g_{ab} είναι σύμμορφα επίπεδη, τότε $C_{abcd}=0$. Αντικαθιστώντας $\overset{n}{R}_{abcd}$, $\overset{n}{R}_{ab}$, $\overset{n}{R}$ στη σχέση (3.3) και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $C_{abcd}=0$ έχουμε ότι:

$$\overset{n-1}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2}{n-2}\left(g_{\gamma[\alpha}\overset{n-1}{R}_{\beta]\delta} + g_{\delta[\beta}\overset{n-1}{R}_{\alpha]\gamma}\right) - \frac{\overset{n-1}{R}}{(n-1)(n-2)}g_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{3.5}$$

όπου $g_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\gamma}$. Από την εξίσωση (3.3), καταλήγουμε ότι $\overset{n-1}{C}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$ (γιατί $n-1\geqslant 4$) και επομένως ο $n-1$ χώρος είναι σύμμορφα επίπεδος. Η συστολή με $g^{\alpha\gamma}$ δίνει:

$$\overset{n-1}{R}{}_{\alpha\beta} = \frac{\overset{n-1}{R}}{n-1}g_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

Επομένως, ο $(n-1)$ χώρος αποτελεί και αυτός χώρο Einstein. Ακολουθώντας τον Eisenhart, [30], καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο $n-1$ χώρος, είναι χώρος σταθερής καμπυλότητας. Για τον υπολογισμό της σταθεράς p, αντικαθιστώντας τη σχέση (3.6) στην εξίσωση (3.3), έχουμε ότι:

$$\overset{n-1}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{\overset{n-1}{R}}{(n-1)(n-2)}g_{\alpha\beta\gamma\sigma}. \tag{3.7}$$

[2]Οι ελληνικοί δείκτες εκτείνονται από 1 έως n και οι λατινικοί από 0 έως n

Ο χώρος διάστασης n, είναι σύμμορφα επίπεδος και επιδέχεται CKVs. Σύμφωνα με την πρόταση 3.3.1, τα CKVs προσδιορίζονται μέσω των gradient CKVs του $(n-1)$ χώρου μέσω της σχέσης $\psi_{;\mu\nu} = p\psi h_{\mu\nu}$. Η ταυτότητα του Ricci για τα gradient CKVs $\psi_{,\mu}$ δίνει:

$$\psi_{|\mu\nu\sigma} - \psi_{|\mu\sigma\nu} = \overset{n-1}{R}{}_{\sigma\nu\mu\delta}\psi^{,\delta}. \tag{3.8}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.7) και $\psi_{;\mu\nu} = p\psi h_{\mu\nu}$, στην εξίσωση (3.8) παρατηρούμε ότι:

$$\left[\frac{\overset{n-1}{R}}{(n-1)(n-2)} + p\right] g_{\alpha\beta\gamma\delta}\psi^{,\delta} = 0. \tag{3.9}$$

Απο αυτήν έχουμε:

$$\overset{n-1}{R} = -p(n-1)(n-2), \tag{3.10}$$

και

$$p = -\frac{\overset{n-1}{R}}{(n-1)(n-2)}.$$

$\underline{n=4}$

Σε αυτή τν περίπτωση, μέσω της σχέσης (3.3) η εξίσωση (3.5) γράφεται:

$$\overset{3}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(g_{\gamma[\alpha}\overset{3}{R}_{\beta]\delta} + g_{\delta[\beta}\overset{3}{R}_{\alpha]\gamma}\right) - \frac{\overset{3}{R}}{6}g_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{3.11}$$

όπου οι ελληνικοί δείκτες, παίρνουν τις τιμές 1,2,3. Η συστολή με $g^{\alpha\gamma}$ δίνει:

$$\overset{3}{R}_{\beta\delta} = \frac{\overset{3}{R}}{3}g_{\beta\delta}. \tag{3.12}$$

Αυτή, υποδηλώνει ότι η τρισδιάστατη μετρική, είναι μετρική ενός χώρου Einstein. Για να αποδείξουμε ότι ο τριδιάστατος χώρος Einstein, αποτελεί χώρο σταθερής καμπυλότητας $\overset{3}{R} = const$ πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι είναι σύμμορφα επίπεδος. Αυτό γίνεται με τη χρήση του τανυστή Cotton-York, βλέπε [30]. Αρκεί να δείξουμε ότι εάν $C^{\alpha}_{\beta} = 0$ τότε ο χώρος είναι σύμμορφα επίπεδος. Ισχύει ότι:

$$C^{\alpha}_{\beta} = 2\varepsilon^{\alpha\gamma\delta}\left(\overset{3}{R}_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}g_{\beta\gamma}\overset{3}{R}\right)_{;\delta}.$$

Αντικαθιστώντας το $\overset{3}{R}_{\beta\delta}$ μέσω της σχέσης (3.12) βρίσκουμε ότι:

$$C^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\gamma\delta}g_{\beta\gamma}\overset{3}{R}_{;\delta}. \tag{3.13}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε το $\overset{3}{R}_{\beta\delta}$ από τη σχέση (3.12) στην (3.11) και βρίσκουμε ότι:

$$\overset{3}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(g_{\gamma[\alpha}\overset{3}{R}_{\beta]\delta} + g_{\delta[\beta}\overset{3}{R}_{\alpha]\gamma}\right) - \frac{\overset{3}{R}}{6}g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\overset{3}{R}}{6}g_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{3.14}$$

Η ταυτότητα του Ricci για βαθμωτά CKVs $\psi_{,\mu}$ δίνει:

$$\psi_{|\mu\nu\sigma} - \psi_{|\mu\sigma\nu} = \overset{3}{R}_{\sigma\nu\mu\delta}\psi^{,\delta} = -\frac{\overset{3}{R}}{6}g_{\mu\nu\sigma\delta}\psi^{,\delta}. \tag{3.15}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.7) και $\psi_{;\mu\nu} = p\psi h_{\mu\nu}$ από την εξίσωση (3.8) έχουμε ότι:

$$\left[\frac{\overset{3}{R}}{6} + p\right] g_{\alpha\beta\gamma\sigma}\psi^{,\delta} = 0, \tag{3.16}$$

από την οποία συνεπάγεται ότι $\overset{3}{R}_{;\delta} = 0$. Επομένως $C^{\alpha}_{\beta} = 0$.

<u>$n = 3$</u>

Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι ο χώρος $3 - 1 = 2$ είναι σύμμορφα επίπεδος, επομένως, επιδέχεται gradient CKVs. Αυτό συνεπάγεται ότι η καμπυλότητα είναι σταθερή. Άρα ο χώρος είναι χώρος σταθερής καμπυλότητας.

Αντίστροφο:

Έστω ότι ο $(n-1)$ υπό-χώρος του διασπάσιμου $1 + (n-1)$ χώρου ο οποίος δίνεται μέσω της (3.2), αποτελεί χώρο σταθερής καμπυλότητας. Αυτό συνεπάγεται ότι ο χώρος είναι σύμμορφα επίπεδος και μέσω των σχέσεων (3.3),(3.4), προκύπτει ότι ο $1 + (n-1)$ χώρος είναι σύμμορφα επίπεδος, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης 3.3.2. ■

Πρόταση 3.3.3 *Η μετρική ενός χώρου σταθερής καμπυλότητας διάστασης n, επιδέχεται $n+1$ Killing βαθμωτά διανυσματικά πεδία.*

Σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση, μία διασπώμενη $1 + (n-1)$, μετρική μπορεί να ταξινομείται σε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με τα σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing που επιδέχεται. Επομένως, έχουμε:

1. Ο $1 + (n-1)$ χώρος είναι σύμμορφα επίπεδος. Τότε η $(n-1)$ μετρική δεν είναι σύμμορφα επίπεδη και η $1 + (n-1)$ μετρική επιδέχεται $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ CKVs.
2. Ο $1 + (n-1)$ χώρος, δεν είναι σύμμορφα επίπεδος. Τότε ο $(n-1)$ χώρος, δεν αποτελεί χώρο σταθερής καμπυλότητας.

Για έναν χώρο ο οποίος είναι σύμμορφα συσχετισμένος με έναν $1 + (n-1)$ διασπάσιμο χώρο, η διαδικασία εύρεσης των CKVs παραμένει η ίδια και στις δύο περιπτώσεις, καθώς, ισχύει ότι όλοι οι σύμμορφοι χώροι, επιδέχονται την ίδια σύμμορφη άλγεβρα.

Καταλήγουμε ότι, η παράμετρος σύμφωνα με την οποία κατηγοριοποιούνται οι $1 + (n-1)$ χώροι που επιδέχονται σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing είναι η σταθερότητα, ή μη, της καμπυλότητας του Ricci, του $n-1$ χώρου. Μέσω αυτού, αλλά και των παραπάνω προτάσεων είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε όλους τους χώρους, τύπου Bianchi I, οι οποίοι επιδέχονται σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing.

3.3.1 Σύμμορφα διανύσματα Killing για τους χώρους τύπου Bianchi I

Στη μετρική ενός χωρόχρονου, τύπου Bianchi I, πραγματοποιούμε τον μετασχηματισμό $dt = C(\tau)\, d\tau$ και τότε η μετρική γράφεται:

$$ds^2 = C^2(\tau)\left(dz^2 + ds^2_{(3)}\right), \tag{3.17}$$

όπου $ds^2_{(3)}$ είναι η τρισδιάστατη μετρική του υπό-χώρου, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$ds^2_{(3)} = -d\tau^2 + B_1^2(\tau)dy^2 + A_1^2(\tau)dx^2, \tag{3.18}$$

με $A_1^2(\tau) = \frac{A^2(\tau)}{C^2(\tau)}$, $B_1^2(\tau) = \frac{B^2(\tau)}{C^2(\tau)}$. Πραγματοποιώντας έναν δεύτερο μετασχηματισμό, $d\tau = B_1^2(\bar{\tau})\, d\bar{\tau}$ και $\Gamma^2(\bar{\tau}) = \frac{A_1^2(\bar{\tau})}{B_1^2(\bar{\tau})}$, η τρισδιάστατη μετρική (3.18), γίνεται:

$$ds^2_{(3)} = B_1^2(\bar{\tau})ds^2_{1+2}, \tag{3.19}$$

όπου

$$ds^2_{1+2} = dy^2 + ds^2_{(2)}, \tag{3.20}$$

και

$$ds^2_{(2)} = -d\bar{\tau}^2 + \Gamma^2(\bar{\tau})dx^2. \tag{3.21}$$

Η δισδιάστατη μετρική (3.21) είναι σύμμορφα επίπεδη [3]. Πράγματι, σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $d\bar{\tau} = \Gamma(\hat{\tau})\, d\hat{\tau}$, η μετρική $ds^2_{(2)}$ παίρνει τη μορφή

$$ds^2_{(2)} = \Gamma^2(\hat{\tau})(-d\hat{\tau}^2 + dx^2). \tag{3.22}$$

Δηλαδή, η δισδιάστατη μετρική $\eta_{AB} = diag\,(-1,1)$, επιδέχεται τρία KVs.

$$\mathbf{P}_{\hat{\tau}} = \partial_{\hat{\tau}} \qquad \mathbf{P}_x = \partial_x \qquad \mathbf{r} = x\partial_{\hat{\tau}} + \hat{\tau}\partial_x, \tag{3.23}$$

και ένα gradient HV

$$\mathbf{H} = \hat{\tau}\partial_{\hat{\tau}} + x\partial_x \ , \ \psi_H = 1. \tag{3.24}$$

Το βαθμωτό πεδίο του Ricci $R_{(2)}$, της δισδιάστατης μετρικής της σχέσης (3.21) είναι:

$$R_{(2)} = 2\frac{\Gamma_{,\bar{\tau}\bar{\tau}}}{\Gamma}. \tag{3.25}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.2, η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η διασπώμενη μετρική $(1+2)$ -που δίνεται από τη σχέση (3.20) - και συνεπώς η τρισδιάστατη μετρική ds^2_3 να είναι σύμμορφα επίπεδες, είναι, η δισδιάστατη μετρική της σχέσης (3.22), να αποτελεί τη μετρική ενός χώρου σταθερής καμπυλότητας. Θέτοντας, $R_{(2)} = const. = 2c$, παίρνουμε ότι $\Gamma_{,\bar{\tau}\bar{\tau}} = c\Gamma$.

Στην περίπτωση που η μετρική ds^2_3, είναι μία μετρική χώρου σταθερής καμπυλότητας τότε το αντίστροφο της Πρότασης 3.3.2, δίνει ότι η μετρική ds^2_{1+3}, είναι σύμμορφα επίπεδη. Αυτό συνεπάγεται ότι το ίδιο ισχύει και για τη μετρική ds^2.

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι τα Bianchi I μοντέλα που επιδέχονται CKVs ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες

Κατηγορία Α: Συμπεριλαμβάνει όλους τους χωρόχρονους τύπου Bianchi I, οι οποίοι είναι σύμμορφα επίπεδοι. Σε αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.2 ισχύει ότι η τρισδιάστατη μετρική $ds^2_{(3)}$, είναι μετρική χώρου σταθερής καμπυλότητας και οι συναρτήσεις $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$ είναι κανονικοποιημένες.

Κατηγορία Β: Συμπεριλαμβάνει όλους τους χώρους τύπου Bianchi I, οι οποίοι δεν είναι σύμμορφα επίπεδοι, επομένως και η διασπώμενη μετρική, δεν είναι σύμμορφα επίπεδη. Σύμφωνα με το αντίστροφο της Πρότασης 3.3.2, η τρισδιάστατη μετρική $ds^2_{(3)}$, δεν αποτελεί μετρική χώρου σταθερής καμπυλότητας.

Αυτή η κατηγορία χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες.

Υποκατηγορία Β1: Η μετρική $ds^2_{(3)}$, δεν είναι σύμμορφα επίπεδη. Τότε το βαθμωτό πεδίο του Ricci της δισδιάστατης μετρικής δεν είναι σταθερό $R_{(2)} \neq const.$

Υποκατηγορία Β2: Η τρισδιάστατη μετρική $ds^2_{(3)}$, είναι σύμμορφα επίπεδη. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.2, η δισδιάστατη μετρική $ds^2_{(2)}$, αποτελεί μετρική χώρου σταθερής καμπυλότητας και επομένως, $R_{(2)} = const.$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις μετρικές τύπου Bianchi I, καθώς και τα CKVs που αντιστοιχούν σε αυτές. Οι περιπτώσεις στις οποίες ισχύει ότι $A_1 = B_1 \Leftrightarrow \Gamma = const.$, οδηγούν σε τοπικά περιστρεφόμενους χωροχρόνους (LRS), τα CKVs των οποίων δίνονται στο [17].

Κατηγορία Α: Οι σύμμορφα επίπεδοι χωρόχρονοι τύπου Bianchi I

Για τη μετρική της σχέσης (3.17), απαιτούμε να μηδενίζεται ο τανυστής του Weyl. Τότε, οι συναρτήσεις A_1, B_1 ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες.

$$A_1\ddot{B}_1 + B_1\ddot{A}_1 - 2\dot{A}_1\dot{B}_1 = 0 \tag{3.26}$$
$$A_1\ddot{B}_1 - 2B_1\ddot{A}_1 + \dot{A}_1\dot{B}_1 = 0 \tag{3.27}$$
$$\ddot{A}_1 B_1 - 2A_1\ddot{B}_1 + \dot{A}_1\dot{B}_1 = 0, \tag{3.28}$$

όπου η τελεία συμβολίζει την παραγώγιση ως προς τη συντεταγμένη τ. Παρατηρούμε ότι δύο εκ των τριών εξισώσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.26)-(3.28) προκύπτει ότι η τριδιάστατη μετρική της σχέσης (3.18) είναι μετρική χώρου σταθερής καμπυλότητας, με $R_{(3)} = 6\varepsilon a^2$, όπου $\varepsilon = \pm 1$ και $a \neq 0$, κάποια σταθερά. Υπάρχουν μόνο δύο τέτοιοι χωρόχρονοι. Ο χωρόχρονος RT και ο χωρόχρονος ART, βλέπε [18,19] οι οποίοι σε ισόχρονες συντεταγμένες είναι αντίστοιχα:

$$ds^2_{RT} = -dt^2 + \sin^2(t/a)dx^2 + \cos^2(t/a)dy^2 + dz^2, \tag{3.29}$$

[3] Κάθε δισδιάστατη μετρική είναι σύμμορφα επίπεδη.

$$ds^2_{ART} = -dt^2 + \sinh^2(t/a)dx^2 + \cosh^2(t/a)dy^2 + dz^2. \tag{3.30}$$

Αυτές, αποτελούν (1+3) διασπώμενες μετρικές, των οποίων η τρισδιάστατη μετρική, είναι σταθερής καμπυλότητας. Οι χώροι αυτοί, επιδέχονται σύμμορφη άλγεβρα 15 διαστάσεων και Killing άλγεβρα 7 διαστάσεων, βλέπε [17]. Αυτές δίνονται στους πίνακες της ενότητας 3.3.2.

Κατηγορία Β: Οι μη σύμμορφα επίπεδοι χωρόχρονοι τύπου Bianchi I.

Σε αυτήν την κατηγορία διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη σταθερότητα ή μη του βαθμωτού πεδίου Ricci της δισδιάστατης μετρικής, που δίνεται από τη σχέση (3.22). Δηλαδή, όταν $R_{(2)} = const$ ή όταν $R_{(2)} \neq const$.

Υποκατηγοριά Β.Ι $R_{(2)} \neq const$.

Σε αυτήν την περίπτωση, ενδιαφερόμαστε μόνο για τα KVs και το HV της μετρικής $ds^2_{(2)}$, αφού εάν υπήρχε κάποιο proper CKV, το οποίο θα ικανοποιούσε τη συνθήκη (3.2), της Πρότασης 3.3.1, τότε ο χώρος θα αποτελούσε χώρο σταθερής καμπυλότητας. Από όλα τα ̏Κ̋ς, που επιδέχεται η μετρική $d\hat{s}^2_{(2)} = (-d\hat{\tau}^2 + dx^2)$, ικανοποιούν τη συνθήκη, μόνο εκείνα που δεν περιέχουν όρους $f(\hat{\tau})g(x)\partial_{\hat{\tau}}$, με $f(\hat{\tau}) \neq \hat{\tau}$. Γνωρίζουμε ότι κάθε δισδιάστατη μετρική $d\hat{s}^2_{(2)}$, επιδέχεται απεριόριστο αριθμό από CKVs. Ωστόσο, τα διανυσματικά πεδία, τα οποία δεν περιέχουν όρους $f(\hat{\tau})g(x)\partial_{\hat{\tau}}$, με $f(\hat{\tau}) \neq \hat{\tau}$, είναι τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{P}_{\hat{\tau}}$ και το$\mathbf{H}$.

Ο σύμμορφος παράγοντας του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{P}_{\hat{\tau}}$, της μετρικής $ds^2_{(2)}$, είναι:

$$\psi(\mathbf{P}_{\hat{\tau}}) = \Gamma_{,\bar{\tau}}.$$

Κάτω από την απαίτηση $\psi(\mathbf{P}_{\hat{\tau}}) = 0$ (για τα KVs), έχουμε ότι $A_1^2 = B_1^2$. Δηλαδή, παίρνουμε την περίπτωση των LRS χωρόχρονων την οποία και αγνοούμε. Εάν απαιτήσουμε $\psi(\mathbf{P}_{\hat{\tau}}) = const$, τότε συνεπάγεται ότι $\Gamma_{,\bar{\tau}\bar{\tau}} = 0$. Μέσω της σχέσης (3.25), καταλήγουμε ότι $R_{(2)} = 0$, ωστόσο αυτό αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση. Επομένως το $\mathbf{P}_{\hat{\tau}}$ απορρίπτεται.

Ο σύμμορφος παράγοντας του $\mathbf{H}$, είναι:

$$\psi(\mathbf{H}) = \Gamma_{,\bar{\tau}} \int \frac{d\bar{\tau}}{\Gamma} + 1. \tag{3.31}$$

Η απαίτηση ώστε αυτό να αποτελεί διάνυσμα Killing, της δισδιάστατης μετρικής $ds^2_{(2)}$, δίνει $\hat{\tau}\Gamma_{,\hat{\tau}} + \Gamma = 0$. Άρα, $\Gamma(\hat{\tau}) = \frac{\Gamma_0}{\hat{\tau}}$ και επομένως, $R_{(2)} = const.$, που επίσης, είναι άτοπο. Τελικά, η απαίτηση ώστε το διάνυσμα $\mathbf{H}$ να είναι ταυτόχρονα HV, με σύμμορφο $\alpha_2 (\neq 0)$, δίνει:

$$\Gamma = c_1 \hat{\tau}^{\alpha_2 - 1}, \tag{3.32}$$

όπου $c_1 = const$. Αυτό γίνεται αποδεκτό, μόνο στην περίπτωση που $\alpha_2 \neq 1$ [4] και σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.1, παράγει το ακόλουθο HV, της (1+2) μετρικής (3.20):

$$\mathbf{H}_1 = \alpha_2 y \partial_y + \hat{\tau}\partial_{\hat{\tau}} + x\partial_x, \tag{3.33}$$

με σύμμορφο παράγοντα:

$$\psi(\mathbf{H}_1) = \alpha_2. \tag{3.34}$$

Αυτό το διάνυσμα, είναι ένα non-gradient CKV της μετρικής (3.19). Ο σύμμορφος παράγοντας του οποίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\psi}(\mathbf{H}_1) = \hat{\tau}(\ln A_1)_{,\hat{\tau}} + \alpha_2. \tag{3.35}$$

Ενδιαφερόμαστε για τα KVs και τα HVs [5] και επομένως μελετάμε την πιθανότητα το CKV, να απλοποιείται σε κάποιο KV ή HV.

Εάν το $\mathbf{H}_1$ είναι διάνυσμα Killing, τότε $\bar{\psi}(\mathbf{H}_1) = 0$ και επομένως $A_1 = c_2\hat{\tau}^{-\alpha_2}$. Από τις σχέσεις (3.22) και (3.32) προκύπτει ότι $B_1 = \frac{c_1 c_2}{\hat{\tau}}$. Αυτή συνεπάγεται ότι, $\hat{\tau} = c_3 e^{\tau/c}$, όπου $c = c_1 c_2$.
Τελικά, παίρνουμε το παρακάτω διάνυσμα Killing:

$$X_{B_1} = \alpha_2 y \partial_y + c\partial_\tau + x\partial_x \tag{3.36}$$

[4] Τότε αποφεύγουμε την LRS περίπτωση

[5] Όπως δείχνουμε στην ενότητα 3.3.2, τα gradient CKVs της μορφής $\lambda(\xi)_{|\alpha\beta} = p\lambda(\xi)g_{\alpha\beta}$ υποδηλώνουν ότι η τριδιάστατη μετρική (3.19), είναι μετρική χώρου σταθερής καμπυλότητας

για την τρισδιάστατη μετρική:

$$ds^2_{(3)} = -d\tau^2 + c_2^2 c_3^{-2\alpha_2} e^{-2\alpha_2\tau/c} dy^2 + \left(\frac{c}{c_3}\right)^2 e^{-2\tau/c} dx^2. \tag{3.37}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.1 το διάνυσμα αυτό, είναι επίσης, διανύσμα Killing της μετρικής $ds^2_{1+3} = dz^2 + ds^2_{(3)}$. Ως εκ τούτου, αποτελεί proper CKV της μετρικής (3.17), με σύμμορφο παράγοντα [6]

$$\psi(X_{B_1}) = c(C\,(t))_{,t}. \tag{3.38}$$

Η μετρική ds^2 της σχέσης (3.17), περιγράφει μια οικογένεια μετρικών τύπου Bianchi I, οι οποίες είναι παραμετροποιημένες ως προς τη συνάρτηση $C(t)$.

Όταν το $\mathbf{H}_1$, γίνεται HV, τότε η εξίσωση (3.35), δίνει

$$\hat{\tau}(\ln A_1)_{,\hat{\tau}} + \alpha_2 = \alpha_3 \Leftrightarrow A_1 = c_2 \hat{\tau}^{\alpha_3 - \alpha_2}, \tag{3.39}$$

και

$$B_1 = c_1 c_2 \hat{\tau}^{\alpha_3 - 1}, \tag{3.40}$$

όπου $\alpha_3 = const.$. Επομένως,

$$\hat{\tau} = \left(\frac{\alpha_3}{c_1 c_2}\right)^{1/\alpha_3} \tau^{1/\alpha_3}, \tag{3.41}$$

και καταλήγουμε στο CKV:

$$X_{B_1} = \alpha_2 y \partial_y + \alpha_3 \tau \partial_\tau + x \partial_x + \alpha_3 z \partial_z, \tag{3.42}$$

της Bianchi I μετρικής:

$$ds^2 = C^2(\tau)\left[dz^2 - d\tau^2 + c_2^2 \left(\frac{\alpha_3}{c_1 c_2}\right)^{2\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_3}} \tau^{2\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_3}} dy^2 + c_1^2 c_2^2 \left(\frac{\alpha_3}{c_1 c_2}\right)^{2\frac{(\alpha_3-1)}{\alpha_3}} \tau^{2\frac{(\alpha_3-1)}{\alpha_3}} dx^2\right], \tag{3.43}$$

με σύμμορφο παράγοντα:

$$\psi(X_{B_2}) = \alpha_3\left[1 + \tau(\ln|C|)_{,\tau}\right]. \tag{3.44}$$

Υποκατηγορία B.II: $R_{(2)} = const$

Τότε, διακρίνουμε τις υπό-περιπτώσεις $R_{(2)} = 0$ και $R_{(2)} \neq 0$.

Όταν $R_{(2)} = 0$, από την εξίσωση (3.25), έχουμε ότι:

$$\Gamma = b_0 \bar{\tau} \Leftrightarrow B_1 = b_0 \bar{\tau} A_1. \tag{3.45}$$

Η εξίσωση (3.45), συνεπάγεται ότι η τρισδιάστατη μετρική της σχέσης (3.20) [7], έχει τη μορφή

$$ds^2_{1+2} = dy^2 - d\bar{\tau}^2 + \bar{\tau}^2 dx^2. \tag{3.46}$$

Τα CKVs της τρισδιάστατης επίπεδης μετρικής $ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2$ έχουν βρεθεί, [26]. Πραγματοποιώντας τον μετασχηματισμό ($\tilde{t} = \bar{\tau}\cosh x, \tilde{x} = \bar{\tau}\sinh x, \tilde{y} = y$), προκύπτει η τριδιάστατη μετρική της σχέσης (3.46). Αυτή έχει την ακόλουθη σύμμορφη άλγεβρα Killing (αγνοούμε τα KVs ∂_x, ∂_y; $i = 1, 2, 3, 4\cdot$ $\alpha = 1, 2, 3$):

- *Τέσσερα KVs*

$$\mathbf{X}_1 = \cosh x \partial_{\bar{\tau}} - \frac{\sinh x}{\bar{\tau}} \partial_x$$

$$\mathbf{X}_2 = \sinh x \partial_{\bar{\tau}} - \frac{\cosh x}{\bar{\tau}} \partial_x$$

$$\mathbf{X}_3 = y \sinh x \partial_{\bar{\tau}} - y \frac{\cosh x}{\bar{\tau}} \partial_x + \bar{\tau} \sinh x \partial_y$$

[6] Έχουμε ότι $\partial_\tau = A_1 \partial_t$)

[7] Αγνοούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα b_0

$$\mathbf{X}_4 = y\cosh x\partial_{\bar{\tau}} - y\frac{\sinh x}{\bar{\tau}}\partial_x + \bar{\tau}\cosh x\partial_y,$$

- *ένα gradient HV*

$$\mathbf{X}_7 = \bar{\tau}\partial_{\bar{\tau}} + y\partial_y \ , \ \psi(\mathbf{X}_7) = 1, \tag{3.47}$$

- *τρία special CKVs*

$$\mathbf{X}_8 = (y^2+\bar{\tau}^2)\cosh x\partial_{\bar{\tau}} + \frac{\bar{\tau}^2-y^2}{\bar{\tau}}\sinh x\partial_x + 2y\bar{\tau}\cosh x\partial_y$$

$$\mathbf{X}_9 = (y^2+\bar{\tau}^2)\sinh x\partial_{\bar{\tau}} + \frac{\bar{\tau}^2-y^2}{\bar{\tau}}\cosh x\partial_x + 2y\bar{\tau}\sinh x\partial_y$$

$$\mathbf{X}_{10} = 2\bar{\tau}y\partial_{\bar{\tau}} + (y^2+\bar{\tau}^2)\partial_y,$$

με τους αντίστοιχους σύμμορφους παράγοντες:

$$\psi(\mathbf{X}_8) = 2\bar{\tau}\cosh x \ , \ \psi(\mathbf{X}_9) = 2\bar{\tau}\sinh x \ , \ \psi(\mathbf{X}_{10}) = 2y. \tag{3.48}$$

Αυτά τα διανυσματικά πεδία, αποτελούν ταυτόχρονα CKVs τη μετρικής (3.19), αλλά με διαφορετικούς σύμμορφους παράγοντες:

$$\psi'(\mathbf{X}_A) = \mathbf{X}_A(\ln A_1) + \psi(\mathbf{X}_A), \tag{3.49}$$

όπου $A = 1, 2, ..., 10$.
Τα διανύσματα $\mathbf{X}_A$, που ικανοποιούν τη σχέση $\psi'(\mathbf{X}_A) = const.$, είναι τα KVs και το HV, τα οποία δεν περιέχουν όρους της μορφής $f(\bar{\tau})g(x)\partial_{\bar{\tau}}$. Η μοναδική τέτοια περίπτωση είναι αυτή του HV $\mathbf{X}_7$.

Στην περίπτωση που το $\mathbf{X}_7$ είναι KV της μετρικής (3.19), συνεπάγεται ότι $B_1 = const.$ και επομένως την αγνοούμε. Θέτουμε $\psi'(\mathbf{X}_A) = \alpha_4$ και παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{X}_7$, γράφεται $\mathbf{X}_7 = \alpha_4\tau\partial_\tau + y\partial_y$. Το διάνυσμα αυτό, είναι το HV της τρισδιάστατης μετρικής:

$$ds^2 = -d\tau^2 + b_1^2\left(\frac{\alpha_4}{b_1}\right)^{2\frac{\alpha_4-1}{\alpha_4}}\tau^{2\frac{\alpha_4-1}{\alpha_4}}dy^2 + \alpha_4^2\tau^2dx^2 \tag{3.50}$$

,με σύμμορφο παράγοντα α_4. Το διάνυσμα αυτό, αποτελεί το HV της 1+3 μετρικής $ds^2_{1+3} = dz^2 + ds^2_{(3)}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$X_{B_3} = \alpha_4\tau\partial_\tau + y\partial_y + \alpha_4z\partial_z. \tag{3.51}$$

Η Bianchi I μετρική της σχέσης (3.50) και το CKV (3.51) προέρχονται από τη μετρική της σχέσης (3.43) και του CKV που δίνεται από την εξίσωση (3.42), θέτοντας $a_1 = 0$ και μεταθέτοντας τις συντεταγμένες x, y. Συνεπώς, δεν αποτελεί νέα περίπτωση.

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία, για την περίπτωση κατά την οποία $R_{(2)} \neq 0$, προκύπτει ότι δεν υπάρχουν άλλες μετρικές τύπου Bianchi I, που επιδέχονται CKVs.

Επομένως, όσον αφορά την υποκατηγορία B.II καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν δύο οικογένειες μετρικών ανάλογα με τη συνάρτηση $C(\tau)$. Κάθε μία από αυτές επιδέχεται ένα proper CKV. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

Μετρική B_1 με $(\alpha_1 \neq 0, 1 \ , \ c \neq 0)$

$$ds^2 = C^2(\tau)\left[-d\tau^2 + e^{-\frac{2}{c}\tau}dx^2 + e^{-\frac{2\alpha_1}{c}\tau}dy^2 + dz^2\right]. \tag{3.52}$$

Αυτή επιδέχεται το CKV

$$X_{B_1} = c\partial_\tau + x\partial_x + \alpha_1y\partial_y, \tag{3.53}$$

με σύμμορφο παράγοντα $\psi(X_{B_1})$, που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\psi(X_{B_1}) = c\left(\ln|C|\right)_{,\tau}. \tag{3.54}$$

Μετρική B_2 ,ε $(\alpha_2 \neq 0, 1)$ και $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$

$$ds^2 = C^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \tau^{2\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}dx^2 + \tau^{2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}}dy^2 + dz^2\right]. \tag{3.55}$$

Αυτή επιδέχεται το CKV

$$X_{B_2} = \alpha_2 \tau \partial_\tau + \alpha_1 y \partial_y + x\partial_x + \alpha_2 z \partial_z, \tag{3.56}$$

με τον σύμμορφο παράγοντα $\psi(X_{B_2})$, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση

$$\psi(X_{B_2}) = \alpha_2 \left[1 + \tau(\ln|C|)_{,\tau}\right]. \tag{3.57}$$

Παρατηρούμε ότι το CKV X_{B_1}, της μετρικής B_1 μετατρέπεται σε HV, όταν $(\ln|C|)_{,\tau} = \psi_0$, δηλαδή όταν $C(\tau) = e^{\psi_0 \tau}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η μετρική της σχέσης (3.52) γράφεται (γιατί $e^{\psi_0\tau} = t$)

$$ds^2 = -dt^2 + t^{-\frac{2}{c\psi_0}} dx^2 + t^{-\frac{2a_1}{c\psi_0}} dy^2 + t^2 dz, \tag{3.58}$$

όπου θέσαμε $e^{\psi_0\tau} = t$. Ακόμα, η μετρική B_2 επιδέχεται ένα HV, όταν $C(\tau) = \tau^{\psi_0 - 1}$. Τότε η μετρική (3.55) παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\frac{\alpha_2 - 1}{\psi_0 \alpha_2}} dx^2 + t^{2\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\psi_0\alpha_2}} dy^2 + t^{2\frac{(\psi_0 - 1)}{\psi_0}} dz^2. \tag{3.59}$$

Συμπερασματικά, από τις μετρικές (3.58) και (3.59) προκύπτει ότι οι μετρικές τύπου Bianchi I της σχέσης (3.1), που επιδέχονται ένα proper HV είναι εκείνες, των οποίων οι συνιστώσες ακολουθούν κατανομή νόμου δύναμης.

3.3.2 Η σύμμορφη άλγεβρα των RT και ART μετρικών

Τα οκτώ proper CKVs της RT μετρικής είναι:

$$X_{(k)\mu} = a^2 A_{k,\mu} \ \ , \ X_{(k)z} = -a^2 A_{k,z} \tag{3.60}$$

$$X_{(k+4)\mu} = a^2 B_{k,\mu} \ , \ X_{(k+4)z} = -a^2 B_{k,z}, \tag{3.61}$$

όπου $\mu = t, x, y$, με τους αντίστοιχους σύμμορφους παράγοντες:

$$\psi_{X_k} = A_k \ , \ \psi_{X_{k+4}} = B_k. \tag{3.62}$$

Τα πεδία A_k, B_k, δίνονται μέσω των σχέσεων:

$$A_k = \cos(\frac{\tau}{a}) \left\{ \cosh(\frac{y}{a}) \left[\sin(\frac{z}{a}), \cos(\frac{z}{a})\right], \sinh(\frac{y}{a}) \left[\sin(\frac{z}{a}), \cos(\frac{z}{a})\right] \right\} \tag{3.63}$$

$$B_k = \sin(\frac{\tau}{a}) \left\{ \cosh(\frac{x}{a}) \left[\sin(\frac{z}{a}), \cos(\frac{z}{a})\right], \sinh(\frac{x}{a}) \left[\sin(\frac{z}{a}), \cos(\frac{z}{a})\right] \right\}. \tag{3.64}$$

Αντίστοιχα, τα οκτώ CKVs της ART μετρικής είναι

$$Y_{(k)\mu} = -a^2 \bar{A}_{k,\mu} \ \ , \ Y_{(k)z} = a^2 \bar{A}_{k,z} \tag{3.65}$$

$$Y_{(k+4)\mu} = -a^2 \bar{B}_{k,\mu} \ , \ Y_{(k+4)z} = a^2 \bar{B}_{k,z}, \tag{3.66}$$

όπου $\mu = t, x, y$. με τους αντίστοιχους σύμμορφους παράγοντες:

$$\psi_{Y_k} = A_k \ , \ \psi_{Y_{k+4}} = B_k. \tag{3.67}$$

Τα πεδία $\bar{A}_k, \bar{B}_k$, είναι

$$\bar{A}_k = \cosh(\frac{\tau}{a}) \left\{ \cos(\frac{y}{a}) \left[\sinh(\frac{z}{a}), \cosh(\frac{z}{a})\right], \sin(\frac{y}{a}) \left[\sinh(\frac{z}{a}), \cosh(\frac{z}{a})\right] \right\} \tag{3.68}$$

$$\bar{B}_k = \sinh(\frac{\tau}{a}) \left\{ \cos(\frac{x}{a}) \left[\sinh(\frac{z}{a}), \cosh(\frac{z}{a})\right], \sin(\frac{x}{a}) \left[\sinh(\frac{z}{a}), \cosh(\frac{z}{a})\right] \right\}. \tag{3.69}$$

Στους πίνακες 3.2 και 3.3 δίνουμε τη μορφή των CKVs, της RT και της ART μετρικής αντιστοίχως.

Επιπλέον, η RT μετρική (3.29), επιδέχεται μία Killing άλγεβρα επτά διαστάσεων. Τα τρία από αυτά είναι τα KVs $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$, ενώ τα υπόλοιπα είναι:

$$\xi_{4,RT} = \sinh(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \cot(\frac{\tau}{a})\sinh(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_x + \tan(\frac{\tau}{a})\sinh(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_y$$

$$\xi_{5,RT} = \sinh(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \cot(\frac{\tau}{a})\sinh(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_x + \tan(\frac{\tau}{a})\sinh(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_y$$
$$\xi_{6,RT} = \cosh(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \cot(\frac{\tau}{a})\cosh(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_x + \tan(\frac{\tau}{a})\cosh(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_y$$
$$\xi_{7,RT} = \cosh(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \cot(\frac{\tau}{a})\cosh(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_x + \tan(\frac{\tau}{a})\cosh(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_y$$

Ομοίως, για την ART μετρική της σχέσης (3.30), τα εναπομείναντα KVs είναι τα ακόλουθα:

$$\xi_{4,ART} = \sin(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \coth(\frac{\tau}{a})\sin(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_x + \tanh(\frac{\tau}{a})\cos(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_y$$
$$\xi_{5,ART} = \sin(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \coth(\frac{\tau}{a})\sin(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_x + \tanh(\frac{\tau}{a})\cos(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_y$$
$$\xi_{6,ART} = \cos(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \coth(\frac{\tau}{a})\cos(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_x - \tanh(\frac{\tau}{a})\sin(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_y$$
$$\xi_{7,ART} = \cos(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_\tau - \coth(\frac{\tau}{a})\cos(\frac{y}{a})\cosh(\frac{x}{a})\partial_x - \tanh(\frac{\tau}{a})\sin(\frac{y}{a})\sinh(\frac{x}{a})\partial_y$$

Πίνακας 3.2: Proper CKVs of the RT spacetime (3.29)

X	X_τ	X_x	X_y	X_z	δνφορμαλ φαςτορ ψ
X_1	$a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$\frac{a\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	$-a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$
X_2	$a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$\frac{a\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	$a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$
X_3	$a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$\frac{a\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	$-a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$
X_4	$a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$\frac{a\cosh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	$a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{y}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$
X_5	$-a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$-a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	$\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$
X_6	$-a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	$\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$
X_7	$-a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$-a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	$\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$
X_8	$-a\cos\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$a\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{z}{a}\right)$	$\sin\left(\frac{\tau}{a}\right)\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\cos\left(\frac{z}{a}\right)$

Πίνακας 3.3: Τα proper CKVs, της ART μετρικής (3.30)

X	X_τ	X_x	X_y	X_z	δνφορμαλ φαςτορ ψ
X_1	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$\frac{a\sin\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)}$	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_2	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$\frac{a\sin\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)}$	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_3	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$-\frac{a\cos\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)}$	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_4	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$	0	$-\frac{a\cos\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)}$	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{y}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$	$\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{y}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_5	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{a\sin\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_6	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{a\sin\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\cos\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_7	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$	$-\frac{a\cos\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{a}\right)$
X_8	$a\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$	$-\frac{a\cos\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)}$	0	$a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$

Κεφάλαιο 4

Συμμετρίες στην εφαπτόμενη πολλαπλότητα

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε τις δυναμικές συμμετρίες, όπου οι συνιστώσες του γεννήτορα της συμμετρίας έχουν εξάρτηση από την ταχύτητα, στον εφαπτόμενο χώρο μέσω μονοπαραμετρικών μετασχηματισμων. Ορίζουμε τη συνθήκη ύπαρξης δυναμικής συμμετρίας και στη συνέχεια, για κάποιες κατηγορίες προβλημάτων εκφράζουμε τη συνθήκη ύπαρξης δυναμικής συμμετρίας στη μη ολόνομη βάση του εφαπτόμενου χώρου με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων η επίλυση του οποίου δίνει την μορφή των γεννητόρων της δυναμικής συμμετρίας.

Στην περίπτωση των σημειακών συμμετριών Lie όπου δεν υπάρχει εξάρτηση από την ταχύτητα ο γεννήτορας της συμμετρίας δρα στο θεσεογραφικό χώρο και το σύνολο των συμμετριών σχηματίζουν μια κλειστή άλγεβρα Lie. Στη συνέχεια, μελετάμε τις γενικευμένες συμμετρίες Noether και τις συμμετρίες Cartan και, εκτός των άλλων, δείχνουμε ότι στην περίπτωση ολόνομων διατηρητικών συστημάτων, τα δύο είδη συμμετρίας ταυτίζονται.

4.1 Δυναμικές συμμετρίες μέσω τυπικού φορμαλισμού

Έστω οι συναρτήσεις $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$ οι οποίες καθορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων στη δέσμη B_p. Οι δυναμικές συμμετρίες είναι μονοπαραμετρικοί μετασχηματισμοί στο χώρο της δέσμης B_P, της μορφής:

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y, y', \ldots, y^{(p)}, \varepsilon), \ldots, \bar{y^p} = \bar{y^p}(x, y, y', \ldots, y^{(p)}, \varepsilon), \tag{4.1}$$

όπου ε η απειροελάχιστη παράμετρος (infinitesimal parameter). Οι νέες συντεταγμένες $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^p$, είναι αυθαίρετες λείες συναρτήσεις (smooth functions) του ορίσματος τους, περιορισμένες από τις εφαπτομενικές συνθήκες (tangency conditions): :

$$\bar{y}^{(i)} = \frac{d\bar{y}^{(i-1)}}{d\bar{x}^{(i-1)}}, \text{ με } i = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.2}$$

Κάθε συνάρτηση $\bar{y}^{(i)}$ αποτελεί συνάρτηση των $x, y, y', \ldots, y^p$, επομένως αυτές οι συνθήκες παρουσιάζουν μία ανακολουθία διότι η συνάρτηση $\bar{y}^{(i)}$, θα αποτελεί συνάρτηση των $x, y, y', \ldots, y^{(p)}, y^{(p+1)}$, αν η $\bar{y}^{(i-1)}$ αποτελεί συνάρτηση των $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$. Ένας τρόπος να παρακάμψουμε αυτήν την ασυνέπεια είναι ο ακόλουθος. Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση $y^{(p+1)} = \omega(x, y^i, y^{i\prime}, \ldots, y^{i(p)})$ της οποίας τη συμπεριφορά επιθυμούμε να μελετήσουμε κάτω από τη δράση σημειακών μετασχηματισμών σε μία δέσμη, έστω B_q. Όμως, αυτό δεν είναι εφικτό για τυχαίο q, λόγω της ύπαρξης των εφαπτομενικών συνθηκών. Ωστόσο, κατά την ειδική περίπτωση κατά την οποία $q = p$ αυτό είναι δυνατό γιατί λόγω αυτών των εφαπτομένων συνθηκών ο όρος $y^{(p+1)}$ μπορεί να αντικατασταθεί με την ποσότητα $\omega(x, y^i, y^{i\prime}, \ldots, y^{i(p)})$.

Σε αυτή την περίπτωση, οι συνθήκες της σχέσης (4.2) ικανοποιούνται για κάθε $i = 1, ..., p$ και μας επιτρέπουν να αναζητήσουμε τις Lie συμμετρίες της διαφορικής εξίσωσης κάτω από την επίδραση τέτοιων σημειακών μετασχηματισμών. Αυτοί οι μετασχηματισμοί καλούνται **Δυναμικές συμμετρίες** (dynamical symmetries) της δ.ε..

Στη συνέχεια, εισάγουμε τη μεταβλητή z^k που συμβολίζει όλες τις μεταβλητές $y, y', \ldots, y^{(p)}$, όπου το k παίρνει τις τιμές $0, 1, ..., p$. Μέσω αυτού του φορμαλισμού έχουμε ότι $\omega = \omega\left(x, z^k\right)$ και τότε η δ.ε. γράφεται στη συμπαγή μορφή $y^{(p+1)} = \omega(x, z^k)$. Το διάνυσμα $\mathbf{X}$, ορισμένο στη δέσμη B_p, αποτελεί τον γεννήτορα των σημειακών μετασχηματισμών σε αυτόν τον χώρο [1]:

$$\mathbf{X} = \xi(x, z^l)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, z^l)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^1(x, z^l)\frac{\partial}{\partial y'} + ... + \eta^p(x, z^l)\frac{\partial}{\partial y^{(p)}}, \tag{4.3}$$

ή σε συμπαγή μορφή

$$\mathbf{X} = \xi(x, z^l)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^k(x, z^l)\frac{\partial}{\partial z^k}m \tag{4.4}$$

όπου ο δείκτης l, στο όρισμα των συναρτήσεων ξ, η παίρνει την ίδια τιμή με το k.

Ο γραμμικός τελεστής Γ που σχετίζεται από τη δ.ε. με τη σχέση

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + ... + y^{(p-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(p-1)}} + \omega\frac{\partial}{\partial y^{(p)}} = \frac{\partial}{\partial x} + a^k(x, z^k)\frac{\partial}{\partial z^k}, \tag{4.5}$$

όπου $a^k(x, z^k)$, είναι μία εκ των συναρτήσεων $y', y'', ..., y^{(p-1)}, \omega(x, z^k)$ είναι το Euler vector (διαφορετικά Hamilton vector) που έχουμε προαναφέρει. Συνεπώς, για κάθε συνάρτηση $f(x, y^i, y^{i\prime}, \ldots, y^{i(p)})$, ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:

$$\mathbf{\Gamma} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + ... + y^{(p-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(p-1)}} + \omega\frac{\partial}{\partial y^{(p)}}\right) f = \frac{df}{dx} + (\omega - y^{(p+1)})\frac{\partial}{\partial y^{(p)}}. \tag{4.6}$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $y^{(p+1)}$ μέσω της δ.ε. καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathbf{\Gamma} f = \frac{df}{dx}. \tag{4.7}$$

Ακολουθώντας τον ορισμό για τις Lie συμμετρίες, βλέπε, [35], [184], ορίζουμε τη συμμετρία Lie μίας δ.ε. της μορφής $y^{(p+1)} = \omega(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$, ως τον γεννήτορα της δυναμικής συμμετρίας της σχέσης (4.4) (ή αντίστοιχα της σχέσης (4.3)) και ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}] = \lambda(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\mathbf{\Gamma}, \tag{4.8}$$

με $\lambda\left(x, z^k\right)$ μία συνάρτηση της οποίας η μορφή καθορίζεται πλήρως από την ίδια τη συνθήκη. Η σχέση (4.8) δίνει (όπως ακριβώς και στην περίπτωση των σημειακών συμμετριών Lie) τις $(p+1)$ συνθήκες:

$$-\mathbf{\Gamma}\xi = \lambda \tag{4.9}$$

$$\eta^k = \mathbf{\Gamma}\eta^{k-1} - y^{(k)}\mathbf{\Gamma}\xi \qquad k = 1, \ldots, p \tag{4.10}$$

$$\mathbf{X}\omega - \mathbf{\Gamma}\eta^p = -\omega\mathbf{\Gamma}\xi, \tag{4.11}$$

στις οποίες έχουμε αντικαταστήσει το $y^{(p+1)}$, με $\omega(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.7) η οποία ισχύει για κάθε συνάρτηση $f(x, z^k)$.

Σύμφωνα με αυτά, στην περίπτωση ενός χώρου Riemann, μετρικής g_{ij} διάστασης n και εφαπτόμενης δέσμης $R \times TM$, στο σύστημα συντεταγμένων $(t, q^k \dot{q}^k)$ έχουμε:

$$X = \xi\left(t, q, \dot{q}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^a\frac{\partial}{\partial q^a} + X^{\bar{a}}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \tag{4.12}$$

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a\frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a\left(t, q^k, \dot{q}^k\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a},$$

ενώ η συνθήκη για δυναμική συμμετρία $[\mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}] = \lambda\left(t, q^k, \dot{q}^k\right)\mathbf{\Gamma}$ δίνει

$$-\mathbf{\Gamma}\xi = \lambda \tag{4.13}$$

$$X^{\bar{a}} = \mathbf{\Gamma}\left(\eta^a\right) - \dot{q}^a\mathbf{\Gamma}\xi \qquad k = 1, \ldots, p \tag{4.14}$$

$$\mathbf{X}\omega^a - \mathbf{\Gamma}\eta^a = -\omega^a\mathbf{\Gamma}\xi \tag{4.15}$$

[1] Δεν αποτελεί την p-οστή επέκταση του διανυσματικού πεδίου στη βασική πολλαπλότητα, αλλά ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο είναι ορισμένο απ' ευθείας στη δέσμη B_p!

Παράδειγμα 4.1.1 *Βρείτε τη συνθήκη δυναμικής συμμετρίας, όπως αυτή δίνεται μέσω της εξίσωσης (4.8) για την περίπτωση της δ.ε. $2^{ης}$ τάξης (SODE) $y'' = \omega(x, y, y')$.*

Λύση 4.1.2 *Η γενική μορφή του διανυσματικού πεδίου* $\mathbf{X}$*, το οποίο αποτελεί γεννήτορα δυναμικής συμμετρίας για τη (SODE) είναι:*

$$\mathbf{X} = \xi(x, y, y')\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y} + \eta^1(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y'},$$

ενώ ο γραμμικός τελεστής Γ *δίνεται από τη σχέση:*

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \omega(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{\Gamma}) &= \mathbf{X}(1)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{X}(y')\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{X}(\omega(x, y, y'))\frac{\partial}{\partial y'} \\ &= \eta^1\frac{\partial}{\partial y} + (\xi\omega,_x + \eta\omega,_y + \eta^1\omega,_{y'})\frac{\partial}{\partial y'} \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Gamma}(\xi)\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{\Gamma}(\eta)\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{\Gamma}(\eta^1)\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Επομένως, η συνθήκη δυναμικής συμμετρίας δίνει:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}] &= \eta^1\frac{\partial}{\partial y} + (\xi\omega,_x + \eta\omega,_y + \eta^1\omega,_{y'})\frac{\partial}{\partial y'} - \mathbf{\Gamma}(\xi)\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{\Gamma}(\eta)\frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{\Gamma}(\eta^1)\frac{\partial}{\partial y'} \\ &= \lambda(x, y, y')\left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \omega(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y'}\right) \end{aligned}$$

από την οποία έχουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\mathbf{\Gamma}(\xi) && (4.16) \\ \eta^1 &= \mathbf{\Gamma}(\eta) - y'\mathbf{\Gamma}(\xi) && (4.17) \\ 0 &= \xi\omega,_x + \eta\omega,_y + \eta^1\omega,_{y'} - \mathbf{\Gamma}(\eta^1) + \omega\mathbf{\Gamma}(\xi). \end{aligned}$$

Από την πρώτη σχέση προσδιορίζουμε τη μορφή της συνάρτησης λ*, ενώ από τη δεύτερη, τη συνιστώσα* η^1*. Η συνθήκη για τη δυναμική συμμετρία Lie δίνεται μέσω της τελευταίας εξίσωσης η οποία γράφεται:*

$$\xi\omega,_x + \eta\omega,_y + [\mathbf{A}(\eta) - y'\mathbf{A}(\xi)]\,\omega,_{y'} - \mathbf{A}\mathbf{A}(\eta) + y'\mathbf{A}\mathbf{A}(\xi) + 2\omega\mathbf{A}(\xi) = 0. \tag{4.18}$$

Επισημαίνουμε ότι η συνιστώσα η^k δεν αποτελεί την $k-$ επέκταση του διανυσματικού πεδίου X μίας τυπικής συμμετρίας Lie του θεσεογραφικού χώρου, στο σύστημα συντεταγμένων (x, y), αλλά τον γεννήτορα $\tilde{X}$ μίας δυναμικής συμμετρίας η οποία ορίζεται απευθείας στη δέσμη B_P, στο σύστημα συντεταγμένων (x, y, y'). Στην ειδική περίπτωση όπου $\tilde{X} = X^{[k]}$, τότε η συνάρτηση η^k αποτελεί την $k-$οστή επέκταση του διανυσματικού πεδίου X.

Όταν έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, έστω $y^{i(p+1)} = \omega^i(x, z^k)$, όπου ο δείκτης i μετρά τον αριθμό των εξισώσεων (της ίδιας τάξης) και ο δείκτης $k = 1, ..., p$ παίρνει και αυτός τις ίδιες τιμές για όλες τις δ.ε., τότε, όσα προαναφέραμε εξακολουθούν να ισχύουν με τη διαφορά ότι αντί για $\omega(x, y, y')$, γράφουμε $\omega^i(x, z^k)$. Με αυτά τα δεδομένα, η συνθήκη για την ύπαρξη δυναμικής συμμετρίας είναι:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\mathbf{A}(\xi) && (4.19) \\ \eta^{i[k]} &= \mathbf{A}(\eta^{i[k-1]}) - y'\mathbf{A}(\xi) && (4.20) \\ \mathbf{X}\omega^i - \mathbf{A}(\eta^{i[p]}) &= -\omega^i\mathbf{A}(\xi), && (4.21) \end{aligned}$$

όπου ο γεννήτορας της συμμετρίας δίνεται από τη σχέση (4.3) και ο γραμμικός τελεστής Γ από τη σχέση (4.5).

Οι δυναμικές συμμετρίες καθορίζονται μόνο από την απαίτηση (4.21). Για να αποδειχθεί αυτό, χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα την περίπτωση μίας δ.ε. $2^{ης}$ για την οποία η συνθήκη για την ύπαρξη δυναμικής συμμετρίας δίνεται μέσω της (4.18). Σε αυτή την εξίσωση, οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι συναρτήσεις $\xi(x, y, y'), \eta^i(x, y, y')$ και αυτό που χρειαζόμαστε είναι η ύπαρξη μίας ακόμα εξίσωσης έτσι ώστε να μπορέσουμε προσδιορίσουμε αυτές τις συναρτήσεις. Επομένως, μας δίνεται η ελευθερία να επιλέξουμε μια συνθήκη βαθμίδας (gauge), δηλαδή μία επιπλέον εξίσωση, την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να επιλύσουμε το πρόβλημα. Μία τέτοια συνθήκη, αποτελεί η $\xi = 0$ και αυτό γιατί η παράμετρος ξ, δεν υπεισέρχεται στη συνθήκη δυναμικής συμμετρίας. Μέσω αυτής, η συνθήκη συμμετρίας απλοποιείται σημαντικά και ο γεννήτορας της παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{X} = \eta^k(x, z^l)\frac{\partial}{\partial z^k}. \tag{4.22}$$

Ωστόσο, αυτή αποτελεί μόνο μια επιλογή και κάθε άλλη είναι επιτρεπτή στο βαθμό που την καθιστά χρήσιμη στην επίλυση του συστήματος.

4.1.1 Ιδιότητες των δυναμικών συμμετριών

Η ελευθερία βαθμίδας στην επιλογή του γεννήτορα δυναμικής συμμετρίες έχει πολλαπλή επίδραση πάνω στις δυναμικές συμμετρίες μίας δ.ε. Έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

1. Αν, σε μία δυναμική συμμετρία μίας δ.ε. προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο του αντίστοιχου τελεστή $\mathbf{\Gamma}$, τότε το νέο διανυσματικό πεδίο που προκύπτει αποτελεί και αυτό δυναμική συμμετρία.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \rho(x, z^k)\mathbf{\Gamma}$, διανυσματικό πεδίο ορισμένο στη δέσμη B_p. Τότε:

$$[\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{\Gamma}] = [\mathbf{X} + \rho(x, z^k)\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}] = [\mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}] + \mathbf{X}(\rho)\Gamma = -\lambda\Gamma + \mathbf{X}(\rho)\Gamma = \tilde{\lambda}\Gamma.$$

■

2. Έστω $\phi^k(x, z^l)$, με $k = 1, 2, ..., p$ να είναι τα p γραμμικά ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του γραμμικού τελεστή Γ, τότε ισχύει ότι:

$$\mathbf{\Gamma}\phi^k = 0,\ k = 1, 2, ..., p. \tag{4.23}$$

Υποθέτοντας ότι $\xi = 0$ και χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\phi^k(x, z^k)$ σαν σύστημα συντεταγμένων (κανονικές συντεταγμένες), τότε ο γραμμικός τελεστής Γ παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.24}$$

και ο γεννήτορας της δ.ε. στη δέσμη B_p γράφεται:

$$\mathbf{X} = \phi^k(x, z^l)\frac{\partial}{\partial \phi^k}. \tag{4.25}$$

Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων (και σύμφωνα με τη συνθήκη $\xi = 0$), η συνθήκη ύπαρξης της δυναμικής συμμετρίας της σχέσης (4.8) γράφεται:

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial x} = 0. \tag{4.26}$$

Δηλαδή, τα πρώτα ολοκληρώματα $\phi^k = \phi^k(z^l)$, είναι ανεξάρτητα της μεταβλητής x. Τα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial \phi^k}$, αποτελούν μία βάση στον χώρο των γεννητόρων των δυναμικών συμμετριών της δ.ε. η οποία εξαρτάται από την επιλογή των πρώτων ολοκληρωμάτων ϕ^k. Αυτή η βάση διαθέτει την ιδιότητα, ότι τα στοιχεία της μετατίθενται με τον γραμμικό τελεστή Γ, της αντίστοιχης συνήθους δ.ε.. Τότε, η λύση της δ.ε. σε αυτές τις συντεταγμένες είναι:

$$y = f(x, \phi^1, ..., \phi^p). \tag{4.27}$$

Η αλλαγή της σταθεράς ϕ^k, αντιστοιχεί λύσεις σε λύσεις. Επομένως, και αυτή αποτελεί έναν τελεστή δυναμικής συμμετρίας. Ωστόσο, αυτή η αλλαγή είναι αρκετά σύνθετη αν τα πρώτα ολοκληρώματα ϕ^k, με $k = 1, ..., p$, αντικατασταθούν από συναρτήσεις που περιέχουν τις συντεταγμένες $x, y, y^{(k)}$. Ο μεταθέτης μεταξύ δύο γεννητόρων δυναμικής συμμετρίας (για την ίδια δ.ε. με $\xi = 0$), $\mathbf{X}_I$, $\mathbf{X}_J$ έχει τη γενική μορφή:

$$[\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_J] = C^k_{IJ}(\phi^l)\mathbf{X}_k, \tag{4.28}$$

όπου οι ποσότητες $C^k_{IJ}(\phi^l)$, αποτελούν συναρτήσεις των ϕ^l. Σύμφωνα με αυτό, οι γεννήτορες δυναμικών συμμετριών μίας δ.ε., δεν σχηματίζουν απαραιτήτως μία άλγεβρα Lie πεπερασμένης διάστασης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε συντεταγμένη $\{x, z^k\}$ και επομένως έχουμε τα παρακάτω:

Μία συνήθης δ.ε. βαθμού $p+1$ επιδέχεται p γραμμικά ανεξάρτητους γεννήτορες δυναμικής συμμετρίας X_k και ο γενικευμένος γεννήτορας της δυναμικής συμμετρίας της συνήθους δ.ε. αποτελεί γραμμικό συνδυασμό αυτών και του Γ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{X} = \rho\mathbf{A} + F^k(\phi^l)\mathbf{X}_k, \tag{4.29}$$

όπου οι συντελεστές αποτελούν αυθαίρετες συναρτήσεις των πρώτων ολοκληρωμάτων ϕ^k.

Έστω λεία συνάρτηση $F(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i})$ στη δέσμη B_m, όπου $\dot{q}^{(r)i} = \dfrac{dq^{(r-1)i}}{dt}$, $r = 1, \ldots, m$. Η F καλείται αναλλοίωτο, κάτω από τη δράση του γεννήτορα της δυναμικής συμμετρίας $\mathbf{X}$, στη δέσμη B_m και δίνεται από τη σχέση (4.4) (ισοδύναμα, από τη σχέση (4.3)) όταν:

$$\mathbf{X}F = 0. \tag{4.30}$$

4.2 Οι δυναμικές συμμετρίες στη μη ολόνομη βάση

Σε αυτήν την ενότητα παράγουμε τις συνθήκες συμμετρίας εκφρασμένες στη μη ολονόμη βάση $\{\Gamma, H_a, V_a\}$, όπου έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a\frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} && (4.31)\\ H_a &= \frac{\partial}{\partial q^a} - \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} && (4.32)\\ V_a &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. && (4.33) \end{aligned}$$

Οι μεταθέτες αυτών δίνουν:

$$\begin{aligned} [H_a, H_b] &= -R^c_{dab}\dot{q}^d V_c\\ [V_a, H_b] &= -\Gamma^a_{bc}V_c\\ [V_a, V_b] &= 0. \end{aligned}$$

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την ολόνομη βάση του εφαπτόμενου χώρου είναι ότι όταν ο γεννήτορας εκφράζεται σε αυτή τη βάση, συμπεριλαμβάνει το Γ και συνεπώς είναι πιο κατάλληλος για την περιγραφή των δυναμικών συμμετριών. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο γεννήτορας της συμμετρίας δίνεται από τη σχέση:

$$X = \sigma\Gamma + \lambda^a H_a + \mu^a V_a. \tag{4.34}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sigma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a\frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\right) + \lambda^a\left(\frac{\partial}{\partial q^a} - \Gamma^c_{bc}\dot{q}^b\frac{\partial}{\partial \dot{q}^c}\right) + \mu^a\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\\ &= \sigma\frac{\partial}{\partial t} + (\sigma\dot{q}^a + \lambda^a)\frac{\partial}{\partial q^a} + \left(\sigma\omega^a - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. && (4.35) \end{aligned}$$

Ο γεννήτορας της συμμετρίας $\mathbf{X}$ στη βάση $(\partial_t, \partial_{q^a}, \partial_{\dot{q}^a})$ δίνεται από την εξίσωση (4.12). Από τη σχέση (4.35), έχουμε:

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma && (4.36)\\ \eta^a &= \sigma\dot{q}^a + \lambda^a && (4.37)\\ X^{\bar{a}} &= \sigma\omega^a - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a. && (4.38) \end{aligned}$$

Επομένως, οι συνθήκες δυναμικής συμμετρίας, που δίνεται από τις εξισώσεις (4.13)-(4.15), γράφονται:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\Gamma(\sigma) & (4.39)\\ \sigma\omega^a - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a &= \Gamma(\sigma\dot{q}^a + \lambda^a) - \Gamma(\sigma)\dot{q}^a & (4.40)\\ \mathbf{X}(\omega^a) &= \Gamma(\sigma\omega^a - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a) - \Gamma(\sigma)\omega^a. & (4.41) \end{aligned}$$

Η δεύτερη δίνει[2] :

$$\begin{aligned} \sigma\omega^a - \lambda^a\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a &= \Gamma(\sigma)\dot{q}^a + \sigma\omega^a + \Gamma(\lambda^a) - \Gamma(\sigma)\dot{q}^a \Rightarrow\\ \mu^a &= \Gamma(\lambda^a) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b. & (4.42) \end{aligned}$$

Αναλύοντας το δεξί μέλος της τρίτης σχέσης, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega^a) &= \Gamma(\sigma\omega^a - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a) - \Gamma(\sigma)\omega^a\\ &= \Gamma(\sigma)\,\omega^a + \sigma\Gamma(\omega^a) - \Gamma(\lambda^c)\,\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma(\Gamma^a_{bc})\,\dot{q}^b\\ &\quad -\lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b + \Gamma(\mu^a) - \Gamma(\sigma)\omega^a\\ &= \sigma\Gamma(\omega^a) - \Gamma(\lambda^c)\,\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma(\Gamma^a_{bc})\,\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b + \Gamma(\mu^a)\\ \mathbf{X}(\omega^a) &= \sigma\Gamma(\omega^a) - \left(\mu^c - \lambda^i\Gamma^c_{ji}v^j\right)\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma(\Gamma^a_{bc})\,\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b + \Gamma(\mu^a) \end{aligned}$$

ή:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega^a) &= \sigma\Gamma(\omega^a) - \left(\mu^c - \lambda^i\Gamma^c_{ji}\dot{q}^j\right)\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma(\Gamma^a_{bc})\,\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b + \Gamma(\mu^a)\\ &= \sigma\Gamma(\omega^a) - \mu^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \lambda^i\Gamma^c_{ji}\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^j - \lambda^c\Gamma(\Gamma^a_{bc})\,\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b + \Gamma(\mu^a). & (4.43) \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι η τελική μορφή των εξισώσεων, σχετικά με τη ύπαρξη δυναμικής συμμετρίας στη μη ολόνομη βάση, είναι:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\Gamma(\sigma) & (4.44)\\ \mu^a &= \Gamma(\lambda^a) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b & (4.45)\\ \mathbf{X}(\omega^a) &= \sigma\Gamma(\omega^a) - \mu^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \lambda^i\Gamma^c_{ji}\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^j - \lambda^c\Gamma(\Gamma^a_{bc})\,\dot{q}^b - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b + \Gamma(\mu^a). & (4.46) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η συνθήκης (4.46) εξαρτάται από τη δ.ε. $\ddot{q}^a = \omega^a\left(t, q^k, \dot{q}^k\right)$, δηλαδή από τη μορφή του ω^a. Για περαιτέρω διερεύνηση της θα πρέπει να γνωρίζουμε- υποθέσουμε τη μορφή του ω^a.

4.2.1 Η συνθήκη της δυναμικής συμμετρίας για γενικευμένη δύναμη $F^a\left(t, q^k, \dot{q}^k\right)$

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε την περίπτωση των εξισώσεων κίνησης για σύστημα το οποίο βρίσκεται κάτω από τη δράση μίας γενικευμένης δύναμης $F^a(t, q, \dot{q}^a)$. Τότε οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από τη σχέση:

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = F^a. \tag{4.47}$$

Επομένως $\omega^a = F^a(t, q, \dot{q}) - \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την αναλυτική μορφή των συνθηκών ύπαρξης δυναμικής συμμετρίας, εκφρασμένες στη μη ολόνομη βάση, για το συγκεκριμένο ω^a .

Το αριστερό μέλος της συνθήκης (4.46) μέσω της (4.35) δίνει:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega^a) &= \sigma\frac{\partial}{\partial t}\omega^a + \left(\sigma\dot{q}^i + \lambda^i\right)\frac{\partial}{\partial q^i}\omega^a + \left(\sigma\omega^i - \lambda^c\Gamma^i_{bc}\dot{q}^b + \mu^i\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}\omega^a\\ &= -\sigma\Gamma^a_{bc,t}\dot{q}^b\dot{q}^c + \sigma F^a_{,t} + \left(\sigma\dot{q}^i + \lambda^i\right)\left(-\Gamma^a_{bc,i}\dot{q}^b\dot{q}^c + F^a_{,i}\right)\\ &\quad + \left(\sigma\omega^i - \lambda^c\Gamma^i_{bc}\dot{q}^b + \mu^i\right)\left(-2\Gamma^a_{(id)}\dot{q}^d + F^a_{,\dot{i}}\right). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\omega^a = F^a(t, q, \dot{q}) - \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c$ παίρνουμε:

$$\left(\sigma v^i + \lambda^i\right)\left(-\Gamma^a_{bc,i}\dot{q}^b\dot{q}^c + F^a_{,i}\right) = -\sigma\Gamma^a_{bc,d}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d - \lambda^d\Gamma^a_{bc,d}\dot{q}^b\dot{q}^c + \sigma F^a_{,b}\dot{q}^b + \lambda^b F^a_{,b}$$

[2] Ισχύει η σχέση $\Gamma\left(\dot{q}^a\right) = \omega^a\left(t, q^k, \dot{q}^k\right)$

$$\begin{aligned}&\left(-\sigma\Gamma^i_{bc}\dot q^b\dot q^c+\sigma F^i-\lambda^c\Gamma^i_{bc}\dot q^b+\mu^i\right)\left(-2\Gamma^a_{(id)}\dot q^d+F^a_{,\dot i}\right)\\&=2\sigma\Gamma^k_{bc}\Gamma^a_{(kd)}\dot q^b\dot q^c\dot q^d+\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\sigma\Gamma^d_{bc}F^a_{,\dot d}\right)\dot q^b\dot q^c\\&-\left(2\left(\sigma F^c+\mu^c\right)\Gamma^a_{(bc)}+\lambda^cF^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bc}\right)\dot q^b+\left(\sigma F^b+\mu^b\right)F^a_{,\dot b}.\end{aligned}$$

Παραγοντοποιώντας την παραπάνω ως προς τις ταχύτητες έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\omega^a)&=\sigma\left(2\Gamma^k_{bc}\Gamma^a_{(kd)}-\sigma\Gamma^a_{bc,d}\right)\dot q^b\dot q^c\dot q^d\\&+\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\lambda^d\Gamma^a_{bc,d}-\sigma\Gamma^d_{bc}F^a_{,\dot d}-\sigma\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot q^b\dot q^c\\&-\left(2\left(\sigma F^c+\mu^c\right)\Gamma^a_{(bc)}+\lambda^cF^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bc}-\sigma F^a_{,b}\right)\dot q^b\\&+\left(\sigma F^b+\mu^b\right)F^a_{,\dot b}+\lambda^bF^a_{,b}+\sigma F^a_{,t}.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης (4.46) δίνει:

$$\begin{aligned}\sigma\Gamma\left(\omega^a\right)&=-\sigma\Gamma^a_{bc,t}\dot q^b\dot q^c+\sigma F^a_{,t}-\sigma\Gamma^a_{bc,d}\dot q^b\dot q^c\dot q^d+\sigma F^a_{,b}\dot q^b-2\sigma\Gamma^a_{(bc)}\omega^b\dot q^c+\sigma F^a_{,\dot b}\omega^b\\&=-\sigma\Gamma^a_{bc,t}\dot q^b\dot q^c+\sigma F^a_{,t}-\sigma\Gamma^a_{bc,d}\dot q^b\dot q^c\dot q^d+\sigma F^a_{,b}\dot q^b-\left(2\sigma\Gamma^a_{(bc)}\dot q^c-F^a_{,\dot b}\right)\omega^b\\&=-\sigma\Gamma^a_{bc,t}\dot q^b\dot q^c+\sigma F^a_{,t}-\sigma\Gamma^a_{bc,d}\dot q^b\dot q^c\dot q^d+\sigma F^a_{,b}\dot q^b-\sigma\left(2\Gamma^a_{(kc)}\dot q^c-F^a_{,\dot k}\right)\left(-\Gamma^k_{bd}\dot q^b\dot q^d+F^k\right)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\Gamma\left(\omega^a\right)&=\left(-\sigma\Gamma^a_{bc,d}+2\sigma\Gamma^a_{(kc)}\Gamma^k_{bd}\right)\dot q^b\dot q^c\dot q^d-\sigma\left(F^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bc}+\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot q^b\dot q^c\\&+\sigma\left(F^a_{,b}-2F^c\Gamma^a_{(bc)}\right)\dot q^b+\sigma F^a_{,t}+\sigma F^a_{,\dot b}F^b.\end{aligned}\tag{4.49}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (4.48),(4.49) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\left(\omega^a\right)-\sigma\Gamma\left(\omega^a\right)&=\left[\left(2\sigma\Gamma^k_{bc}\Gamma^a_{(kd)}-\sigma\Gamma^a_{bc,d}\right)-\left(-\sigma\Gamma^a_{bc,d}+2\sigma\Gamma^a_{(kc)}\Gamma^k_{bd}\right)\right]\dot q^b\dot q^c\dot q^d\\&+\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\lambda^d\Gamma^a_{bc,d}-\sigma\Gamma^d_{bc}F^a_{,\dot d}-\sigma\Gamma^a_{bc,t}+\sigma F^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bc}+\sigma\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot q^b\dot q^c\\&+\left(-2\left(\sigma F^c+\mu^c\right)\Gamma^a_{(bc)}-\lambda^cF^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bc}+\sigma F^a_{,b}-\sigma\left(F^a_{,b}-2F^c\Gamma^a_{(bc)}\right)\right)\dot q^b\\&+\left(\sigma F^b+\mu^b\right)F^a_{,\dot b}+\lambda^bF^a_{,b}+\sigma F^a_{,t}-\sigma F^a_{,t}-\sigma F^a_{,\dot b}F^b.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Για τους όρους $\lambda^c\Gamma\left(\Gamma^a_{bc}\right)\dot q^b,\ \lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b$ έχουμε:

$$\lambda^c\Gamma\left(\Gamma^a_{bc}\right)\dot q^b=\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}\dot q^b+\lambda^d\Gamma^a_{bd,c}\dot q^b\dot q^c$$

$$\lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b=-\lambda^d\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}\dot q^b\dot q^c+\lambda^c\Gamma^a_{bc}F^b.$$

Αντικαθιστώντας στην (4.50), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}&-\mu^c\Gamma^a_{bc}\dot q^b+\lambda^d\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}\dot q^b\dot q^c-\lambda^c\Gamma\left(\Gamma^a_{bc}\right)\dot q^b-\lambda^c\Gamma^a_{bc}\omega^b+\Gamma\left(\mu^a\right)\\=\ &\left(\lambda^d\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}+\lambda^d\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}-\lambda^d\Gamma^a_{bd,c}\right)\dot q^b\dot q^c\\&-\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}+\mu^c\Gamma^a_{bc}\right)\dot q^b-\lambda^c\Gamma^a_{bc}F^b+\Gamma\left(\mu^a\right).\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση (4.50) γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\left(\omega^a\right)-\sigma\Gamma\left(\omega^a\right)&=\Gamma\left(\mu^a\right)+\left(\lambda^d\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}+\lambda^d\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}-\lambda^d\Gamma^a_{bd,c}\right)\dot q^b\dot q^c\\&-\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}+\mu^c\Gamma^a_{bc}\right)\dot q^b-\lambda^c\Gamma^a_{bc}F^b.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.50) και (4.51) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(2\sigma\Gamma^k_{bc}\Gamma^a_{(kd)}-\sigma\Gamma^a_{bc,d}\right)-\left(-\sigma\Gamma^a_{bc,d}+2\sigma\Gamma^a_{(kc)}\Gamma^k_{bd}\right)\right]\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\\
&+\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\lambda^d\Gamma^a_{bc,d}-\sigma\Gamma^d_{bc}F^a_{,\dot{d}}-\sigma\Gamma^a_{bc,t}+\sigma F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}+\sigma\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\\
&+\left(-2\left(\sigma F^c+\mu^c\right)\Gamma^a_{(bc)}-\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}+\sigma F^a_{,b}-\sigma\left(F^a_{,b}-2F^c\Gamma^a_{(bc)}\right)\right)\dot{q}^b\\
&+\left(\sigma F^b+\mu^b\right)F^a_{,\dot{b}}+\lambda^b F^a_{,b}+\sigma F^a_{,t}-\sigma F^a_{,t}-\sigma F^a_{,\dot{b}}F^b\\
=\;&\Gamma\left(\mu^a\right)+\left(\lambda^d\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}+\lambda^d\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}-\lambda^d\Gamma^a_{bd,c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c-\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}+\mu^c\Gamma^a_{bc}\right)\dot{q}^b-\lambda^c\Gamma^a_{bc}F^b
\end{aligned}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης γράφεται:

$$\begin{aligned}
lhs \;=\;&\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\lambda^d\Gamma^a_{bc,d}+\sigma F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}-\sigma\Gamma^d_{bc}F^a_{,\dot{d}}-\sigma\Gamma^a_{bc,t}+\sigma\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\\
&+\left(-2\left(\sigma F^c+\mu^c\right)\Gamma^a_{(bc)}-\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}+\sigma F^a_{,b}-\sigma F^a_{,b}+2\sigma F^c\Gamma^a_{(bc)}\right)\dot{q}^b\\
&+\left(\sigma F^b+\mu^b\right)F^a_{,\dot{b}}+\lambda^b F^a_{,b}+\sigma F^a_{,t}-\sigma F^a_{,t}-\sigma F^a_{,\dot{b}}F^b,
\end{aligned}$$

ύστερα από πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}
lhs \;=\;&\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\lambda^d\Gamma^a_{bc,d}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\\
&-\left(2\mu^c\Gamma^a_{(bc)}+\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}\right)\dot{q}^b\\
&+\mu^b F^a_{,\dot{b}}+\lambda^b F^a_{,b}.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το δεξί μέλος γράφεται

$$rhs=\Gamma\left(\mu^a\right)+\left(\lambda^d\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}+\lambda^d\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}-\lambda^d\Gamma^a_{bd,c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c-\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}+\mu^c\Gamma^a_{bc}\right)\dot{q}^b-\lambda^c\Gamma^a_{bc}F^b.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους σύμφωνα με τις δυνάμεις των $\dot{q}^a$ για κάθε μέλος βρίσκουμε την αναλυτική μορφή της συνθήκης (4.46) στη μη ολόνομη βάση. Επομένως:

$$\begin{aligned}
0 \;=\;&\left(2\lambda^d\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\lambda^d\Gamma^a_{bc,d}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c-\left(\lambda^d\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}+\lambda^d\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}-\lambda^d\Gamma^a_{bd,c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\\
&+\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}+\mu^c\Gamma^a_{bc}\right)\dot{q}^b-\left(2\mu^c\Gamma^a_{(bc)}+\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}\right)\dot{q}^b\\
&+\mu^b F^a_{,\dot{b}}+\lambda^b F^a_{,b}-\Gamma\left(\mu^a\right)+\lambda^c\Gamma^a_{bc}F^b.
\end{aligned}$$

Έπειτα από πράξεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
0 \;=\;&\lambda^d\left(2\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{(kc)}-\Gamma^a_{bc,d}-\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{bk}-\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}+\Gamma^a_{bd,c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\\
&+\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}+\mu^c\Gamma^a_{bc}-2\mu^c\Gamma^a_{(bc)}-\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}\right)\dot{q}^b\\
&+\mu^b F^a_{,\dot{b}}+\lambda^b F^a_{;b}-\Gamma\left(\mu^a\right).
\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας τα πρόσημα και απλοποιώντας την παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 \;=\;&\lambda^d\left(\Gamma^a_{bc,d}-\Gamma^a_{bd,c}+\Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc}-\Gamma^k_{bd}\Gamma^a_{kc}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\\
&-\left(\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}-\mu^c\Gamma^a_{(bc)}-\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}\right)\dot{q}^b\\
&-\mu^b F^a_{,\dot{b}}-\lambda^b F^a_{;b}+\Gamma\left(\mu^a\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\Gamma\left(\mu^a\right)+\lambda^d R^a_{bdc}\dot{q}^b\dot{q}^c+\left(\mu^c\Gamma^a_{bc}+\lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc}-\lambda^c\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot{q}^b-\lambda^b F^a_{;b}-\mu^b F^a_{,\dot{b}}=0, \tag{4.52}$$

όπου

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \xi & (4.53)\\
\lambda^a &= \eta^a - \sigma\dot{q}^a & (4.54)\\
\mu^a &= \Gamma(\lambda^a) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b. & (4.55)
\end{aligned}
$$

Σε αυτό το σημείο συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με αυτά της υπάρχουσας βιβλιογραφίας και διακρίνουμε περιπτώσεις:

i. Για την εξίσωση γεωδαισιακών θέτουμε $F^a = 0$ και $\Gamma^a_{bc,t} = 0$

$$\Gamma\left(\mu^a\right) + \lambda^d R^a_{bdc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \mu^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b = 0. \tag{4.56}$$

Αυτή είναι η περίπτωση που μελετάται από τους Prince και Crampin, βλέπε [36] . Όπως αναφέρουν, στην περίπτωση των σημειακών, Lie συμμετριών, αυτές οι συνθήκες είναι πλήρως επιλύσιμες. Πράγματι, οι Τσαμπαρλής και Παλιαθανάσης, βλέπε [184] προσδιόρισαν όλες τις συμμετρίες Lie, των γεωδαισιακών σε ενα χώρο Riemann.

ii. Συντηρητικές δυνάμεις: $F^a = -V^{;a}$ και $\Gamma^a_{bc,t} = 0$

$$\Gamma\left(\mu^a\right) + \lambda^d R^a_{bdc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \mu^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \lambda^b V^{;a}_{;b} = 0. \tag{4.57}$$

Στην εργασία μας, βλέπε [37], έχουμε προσδιορίσει όλες τις συμμετρίες Lie και Noether, για τρισδιάστατα Νευτώνεια συστήματα, ενώ τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται για Νευτώνεια συστήματα κάθε διάστασης.

iii. Αφινική περίπτωση: $F^a = -a\dot{q}^a$

$$\Gamma\left(\mu^a\right) + \lambda^d R^a_{bdc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \left(\mu^c\Gamma^a_{bc} - \lambda^c\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot{q}^b + \lambda^b a_{,b}\dot{q}^a + a\mu^a = 0. \tag{4.58}$$

Αυτή είναι η περίπτωση ενός συστήματος που βρίσκεται υπό την επίδραση μίας στατικής δύναμης Lorentz σε H/M πεδίο, βλέπε [38].

4.2.2 Δυναμικές συμμετρίες κάτω από την επίδραση γενικευμένης δύναμης $F(t, q^a, \dot{q}^a)$, στην ολόνομη βάση

Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε τη συνθήκη ύπαρξης δυναμικής συμμετρίας, για τη συνήθη διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης εκπεφρασμένη στην κανονική βάση $(\partial_t, \partial_i, \partial_{\dot{i}})$ της επεκταμένης εφαπτόμενης δέσμης $R \times TM$. Για την αναδιατύπωση της εξίσωσης (4.58) στην κανονική βάση, κάνουμε χρήση των σχέσεων (4.36)- (4.38) και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \xi\\
\lambda^a &= \eta^a - \dot{q}^a\xi
\end{aligned}
$$

$$\mu^a = \Gamma(\lambda^a) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b = \Gamma\left(\eta^a - \xi\dot{q}^a\right) + \left(\eta^c - v^c\xi\right)\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b.$$

Στη συνέχεια, εκφράζουμε τις συνιστώσες σ, λ, μ^a, μέσω των $\xi, \eta, \dot{q}^a$. Τα σ, λ, αποτελούν συναρτήσεις των $\xi, \eta, \dot{q}^a$ και το μόνο που απομένει, είναι η συνιστώσα μ^a. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mu^a &= \eta^a_{,t} + \eta^a_{,b}\dot{q}^b + \eta^a_{,\dot{k}}\omega^k - \delta^a_b\xi_{,t}\dot{q}^b - \delta^a_b\xi_{,c}\dot{q}^b\dot{q}^c - \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\omega^k\dot{q}^b - \xi\omega^a + \left(\eta^c - v^c\xi\right)\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\\
&= \eta^a_{,t} + \eta^a_{,b}\dot{q}^b - \eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \eta^a_{,\dot{k}}F^k - \delta^a_b\xi_{,t}\dot{q}^b - \delta^a_b\xi_{,c}\dot{q}^b\dot{q}^c + \xi\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c - \xi F^a\\
&\quad + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d - \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}F^k\dot{q}^b + \left(\eta^c - v^c\xi\right)\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\\
&= \eta^a_{,t} + \eta^a_{,b}\dot{q}^b - \eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \eta^a_{,\dot{k}}F^k - \delta^a_b\xi_{,t}\dot{q}^b - \delta^a_b\xi_{,c}\dot{q}^b\dot{q}^c - \xi F^a\\
&\quad + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d - \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}F^k\dot{q}^b + \eta^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\\
&= \eta^a_{,t} + \eta^a_{,\dot{k}}F^k - \xi F^a + \left(\eta^a_{,b} + \eta^c\Gamma^a_{bc} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)\dot{q}^b\\
&\quad - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d,
\end{aligned}
$$

επομένως,

$$
\begin{aligned}
\mu^a &= \eta^a_{,t} + \eta^a_{,\dot{k}}F^k - \xi F^a + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)\dot{q}^b\\
&\quad - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d.
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης (4.58).

Ο όρος $\Gamma\left(\mu^a\right)$ γράφεται:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\mu^a\right) \quad = \quad & \eta^a_{,tt} + \eta^a_{,tb}\dot{q}^b + \eta^a_{,t\dot{k}}\omega^k + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,t} + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,b}\dot{q}^b + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,\dot{r}}\omega^r \\
& - \left(\xi F^a\right)_{,t} - \left(\xi F^a\right)_{,b}\dot{q}^b - \left(\xi F^a\right)_{,\dot{r}}\omega^r \\
& + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,t}\dot{q}^b + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,c}\dot{q}^b\dot{q}^c \\
& + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,\dot{r}}\omega^r\dot{q}^b + \left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)\omega^r \\
& - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,t}\dot{q}^b\dot{q}^c - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,d}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
& - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}\omega^r\dot{q}^b\dot{q}^c - 2\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{(rc)} + \delta^a_{(r}\xi_{,c)}\right)\omega^r\dot{q}^c \\
& + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,t}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,e}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,\dot{r}}\omega^r\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
& + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\omega^b\dot{q}^c\dot{q}^d + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\dot{q}^b\omega^c\dot{q}^d + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\dot{q}^b\dot{q}^c\omega^d
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας το $\omega^m = -\Gamma^m_{ns}v^n v^s + F^m$, σε αυτή τη σχέση παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\mu^a\right) \quad = \quad & \eta^a_{,tt} + \eta^a_{,tb}\dot{q}^b - \eta^a_{,t\dot{k}}\Gamma^k_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \eta^a_{,t\dot{k}}F^k + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,t} \\
& - \left(\xi F^a\right)_{,t} - \left(\xi F^a\right)_{,\dot{r}}F^r - \left(\xi F^a\right)_{,b}\dot{q}^b + \left(\xi F^a\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c \\
& + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,b}\dot{q}^b - \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,\dot{r}}F^r \\
& + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,t}\dot{q}^b + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,c}\dot{q}^b\dot{q}^c \\
& - \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{cd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,\dot{r}}F^r\dot{q}^b \\
& - \left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)\Gamma^r_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)F^r \\
& - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,t}\dot{q}^b\dot{q}^c - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,d}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
& + \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{de}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}F^r\dot{q}^b\dot{q}^c \\
& + 2\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{(rc)} + \delta^a_{(r}\xi_{,c)}\right)\Gamma^r_{bd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d - 2\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{(rb)} + \delta^a_{(r}\xi_{,b)}\right)F^r\dot{q}^b \\
& + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,t}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,e}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e \\
& - \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{ef}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e\dot{q}^f + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,\dot{r}}F^r\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
& - \left(\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{eb} + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{rd}\Gamma^r_{ec} + \delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cr}\Gamma^r_{ed}\right)\dot{q}^e\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
& + \left(\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cb}F^a + 2\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{dc}F^d\right)\dot{q}^b\dot{q}^c
\end{aligned}
$$

Συλλέγοντας τους όρους, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\mu^{a}\right) \quad = \quad & \eta^{a}_{,tt}+\eta^{a}_{,t\dot{k}}F^{k}-\left(\xi F^{a}\right)_{,t}+\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}F^{k}\right)_{,t}+\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}F^{k}-\xi F^{a}\right)_{,\dot{r}}F^{r} \\
&+\left(\eta^{a}_{;r}-\delta^{a}_{r}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)F^{r} \\
&+\dot{q}^{b}\left(\begin{array}{c} \eta^{a}_{,tb}+\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}F^{k}\right)_{,b}-\left(\xi F^{a}\right)_{,b}+\left(\eta^{a}_{;b}-\delta^{a}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)_{,t} \\ +\left(\eta^{a}_{;b}-\delta^{a}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)_{,\dot{r}}F^{r}-2\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{(rb)}+\delta^{a}_{(r}\xi_{,b)}\right)F^{r} \end{array}\right) \\
&+\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\left(\begin{array}{c} -\eta^{a}_{,t\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}-\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}F^{k}\right)_{,\dot{r}}\Gamma^{r}_{bc}+\left(\eta^{a}_{;b}-\delta^{a}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)_{,c} \\ -\left(\eta^{a}_{;r}-\delta^{a}_{r}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)\Gamma^{r}_{bc} \\ -\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{a}_{b}\xi_{,c}\right)_{,t}-\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{a}_{b}\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}F^{r} \\ +\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cb}F^{a}+2\delta^{a}_{b}\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{dc}F^{d}+\left(\xi F^{a}\right)_{,\dot{r}}\Gamma^{r}_{bc} \end{array}\right) \\
&+\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{d}\left(\begin{array}{c} -\left(\eta^{a}_{;b}-\delta^{a}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)_{,\dot{r}}\Gamma^{r}_{cd}-\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{a}_{b}\xi_{,c}\right)_{,d} \\ +2\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{(rc)}+\delta^{a}_{(r}\xi_{,c)}\right)\Gamma^{r}_{bd}+\left(\delta^{a}_{b}\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cd}\right)_{,t}+\left(\delta^{a}_{b}\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cd}\right)_{,\dot{r}}F^{r} \end{array}\right) \\
&+\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{d}\dot{q}^{e}\left(\left(\eta^{a}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{a}_{b}\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}\Gamma^{r}_{de}+\left(\delta^{a}_{b}\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cd}\right)_{,e}-\xi_{,\dot{k}}\left(\Gamma^{k}_{cd}\Gamma^{a}_{eb}+2\delta^{a}_{b}\Gamma^{k}_{rd}\Gamma^{r}_{ec}\right)\right) \\
&+\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{d}\dot{q}^{e}\dot{q}^{f}\left(-\delta^{a}_{b}\xi_{,\dot{k}\dot{r}}\Gamma^{k}_{cd}\Gamma^{r}_{ef}\right). \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

Ο όρος $\lambda^{d}R^{a}_{bdc}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}$ γίνεται:

$$\lambda^{d}R^{a}_{bdc}v^{b}v^{c}=\left(\eta^{d}-\xi v^{d}\right)R^{a}_{bdc}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}=\eta^{d}R^{a}_{bdc}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}. \qquad (4.61)$$

Αντίστοιχα, για τον όρο $\left(\mu^{c}\Gamma^{a}_{bc}\right)\dot{q}^{b}$ παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
\mu^{r}\Gamma^{a}_{br}v^{b} \quad = \quad & \left(\eta^{r}_{,t}+\eta^{r}_{,\dot{k}}F^{k}-\xi F^{r}\right)\Gamma^{a}_{br}\dot{q}^{b}+\Gamma^{a}_{rc}\left(\eta^{r}_{;b}-\delta^{r}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)\dot{q}^{b}\dot{q}^{c} \\
&-\Gamma^{a}_{dr}\left(\eta^{r}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{a}_{b}\xi_{,c}\right)v^{b}v^{c}v^{d}+\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cd}\Gamma^{a}_{eb}v^{b}v^{c}v^{d}v^{e}.
\end{aligned}
$$

Οι όροι $\left(\lambda^{c}F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}\right)\dot{q}^{b}$, $\left(-\lambda^{c}\Gamma^{a}_{bc,t}\right)\dot{q}^{b}$ δίνουν:

$$\lambda^{c}F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}\dot{q}^{b}=\eta^{c}F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}\dot{q}^{b}-\xi F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}.$$

$$-\lambda^{c}\Gamma^{a}_{bc,t}\dot{q}^{b}=-\eta^{c}\Gamma^{a}_{bc,t}\dot{q}^{b}+\xi\Gamma^{a}_{bc,t}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}.$$

Επομένως, ο όρος $\left(\mu^{c}\Gamma^{a}_{bc}+\lambda^{c}F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}-\lambda^{c}\Gamma^{a}_{bc,t}\right)\dot{q}^{b}$ γράφεται:

$$
\begin{aligned}
& \left(\mu^{c}\Gamma^{a}_{bc}+\lambda^{c}F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}-\lambda^{c}\Gamma^{a}_{bc,t}\right)\dot{q}^{b} \\
= \quad & \left(\left(\eta^{r}_{,t}+\eta^{r}_{,\dot{k}}F^{k}-\xi F^{r}\right)\Gamma^{a}_{br}+\eta^{c}F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}-\eta^{c}\Gamma^{a}_{bc,t}\right)\dot{q}^{b} \\
&+\left(\Gamma^{a}_{rc}\left(\eta^{r}_{;b}-\delta^{r}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)-\xi F^{a}_{,\dot{d}}\Gamma^{d}_{bc}+\xi\Gamma^{a}_{bc,t}\right)\dot{q}^{b}\dot{q}^{c} \\
&-\Gamma^{a}_{dr}\left(\eta^{r}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{r}_{b}\xi_{,c}\right)\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{d}+\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cd}\Gamma^{a}_{eb}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{d}\dot{q}^{e}. \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

Για τον όρο $\left(-\lambda^{b}F^{a}_{;b}\right)$, ισχύει ότι:

$$-\lambda^{b}F^{a}_{;b}=-\eta^{b}F^{a}_{;b}+\xi F^{a}_{;b}\dot{q}^{b}, \qquad (4.63)$$

ενώ ο όρος $-\mu^{b}F^{a}_{,\dot{b}}$ γράφεται:

$$
\begin{aligned}
-\mu^{b}F^{a}_{,\dot{b}} \quad = \quad & -F^{a}_{,\dot{r}}\left(\eta^{r}_{,t}+\eta^{r}_{,\dot{k}}F^{k}-\xi F^{r}\right)-F^{a}_{,\dot{r}}\left(\eta^{r}_{;b}-\delta^{r}_{b}\left(\xi_{,t}+\xi_{,\dot{k}}F^{k}\right)\right)\dot{q}^{b} \\
&+F^{a}_{,\dot{r}}\left(\eta^{r}_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{bc}+\delta^{r}_{b}\xi_{,c}\right)\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}-F^{a}_{,\dot{b}}\xi_{,\dot{k}}\Gamma^{k}_{cd}\dot{q}^{b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{d}. \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.59)-(4.64) καταλήγουμε ότι η συνθήκη δυναμικής συμμετρίας, στην ολόνομη βάση της συνήθους δ.ε. $\omega^m = -\Gamma^m_{ns}\dot{q}^n\dot{q}^s + F^m(t,q^a,\dot{q}^a)$, είναι:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \eta^a_{,tt} + \eta^a_{,t\dot{k}}F^k - (\xi F^a)_{,t} + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,t} + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k - \xi F^a\right)_{,\dot{r}} F^r \\
& + \left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)F^r - \eta^b F^a_{;b} - F^a_{,\dot{r}}\left(\eta^r_{,t} + \eta^r_{,\dot{k}}F^k - \xi F^r\right) \\
& + \dot{q}^b \left(\begin{array}{c}
\eta^a_{,tb} + \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k\right)_{,b} - (\xi F^a)_{,b} + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,t} \\
+ \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,\dot{r}} F^r \\
-2\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{(rb)} + \delta^a_{(r}\xi_{,b)}\right)F^r + \left(\eta^r_{,t} + \eta^r_{,\dot{k}}F^k - \xi F^r\right)\Gamma^a_{br} \\
+\eta^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc} - \eta^c\Gamma^a_{bc,t} + \xi F^a_{;b} - F^a_{,\dot{r}}\left(\eta^r_{;b} - \delta^r_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)
\end{array}\right) \\
& + \dot{q}^b\dot{q}^c \left(\begin{array}{c}
-\eta^a_{,t\dot{k}}\Gamma^k_{bc} - \left(\eta^a_{,\dot{k}}F^k - \xi F^a\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{bc} + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,c} \\
-\left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)\Gamma^r_{bc} - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,t} \\
-\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}F^r + \xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cb}F^a + 2\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{dc}F^d \\
+\eta^d R^a_{bdc} + \Gamma^a_{rc}\left(\eta^r_{;b} - \delta^r_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right) - \xi F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc} + \xi\Gamma^a_{bc,t} + F^a_{,\dot{r}}\left(\eta^r_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^r_b\xi_{,c}\right)
\end{array}\right) \\
& + \dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \left(\begin{array}{c}
-\left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\left(\xi_{,t} + \xi_{,\dot{k}}F^k\right)\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{cd} - \left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,d} \\
+2\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{(rc)} + \delta^a_{(r}\xi_{,c)}\right)\Gamma^r_{bd} + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,t} + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,\dot{r}}F^r \\
-\Gamma^a_{dr}\left(\eta^r_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^r_b\xi_{,c}\right) - F^a_{,\dot{b}}\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}
\end{array}\right) \\
& + \dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e \left(\begin{array}{c}
\left(\eta^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bc} + \delta^a_b\xi_{,c}\right)_{,\dot{r}}\Gamma^r_{de} + \left(\delta^a_b\xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\right)_{,e} \\
-\xi_{,\dot{k}}\left(\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{eb} + 2\delta^a_b\Gamma^k_{rd}\Gamma^r_{ec}\right) + \xi_{,\dot{k}}\Gamma^k_{cd}\Gamma^a_{eb}
\end{array}\right) \\
& + \dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e\dot{q}^f\left(-\delta^a_b\xi_{,\dot{k}\dot{r}}\Gamma^k_{cd}\Gamma^r_{ef}\right). \qquad (4.65)
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε τη σχέση εξάρτησης των συνιστωσών $\xi(t,q^a,\dot{q}^a), \eta^m(t,q^a,\dot{q}^a), F^m(t,q^a,\dot{q}^a)$, από τις ταχύτητες $\dot{q}^a$.

4.2.3 Σημειακές συμμετρίες Lie, συστήματος που βρίσκεται υπό την επίδραση γενικευμένης δύναμης $F(t,q^a,\dot{q}^a)$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\xi(t,q), \eta^a(t,q)$ και η σχέση (4.65) δίνει:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \eta^a_{,tt} - (\xi F^a)_{,t} - \xi F^a_{,\dot{r}}F^r + \left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\xi_{,t}\right)F^r - \eta^b F^a_{;b} - F^a_{,\dot{r}}\left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right) \\
& + \dot{q}^b \left(\begin{array}{c}
\eta^a_{,tb} - (\xi F^a)_{,b} + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\xi_{,t}\right)_{,t} - 2\delta^a_{(r}\xi_{,b)}F^r + \left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right)\Gamma^a_{br} \\
+\eta^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc} - \eta^c\Gamma^a_{bc,t} + \xi F^a_{;b} - F^a_{,\dot{r}}\left(\eta^r_{;b} - \delta^r_b\xi_{,t}\right)
\end{array}\right) \\
& + \dot{q}^b\dot{q}^c \left(\begin{array}{c}
\xi F^a_{,\dot{r}}\Gamma^r_{bc} + \left(\eta^a_{;b} - \delta^a_b\xi_{,t}\right)_{,c} - \left(\eta^a_{;r} - \delta^a_r\xi_{,t}\right)\Gamma^r_{bc} - \delta^a_b\xi_{,ct} \\
+\eta^d R^a_{bdc} + \Gamma^a_{rc}\left(\eta^r_{;b} - \delta^r_b\xi_{,t}\right) - \xi F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc} + \xi\Gamma^a_{bc,t} + F^a_{,\dot{r}}\delta^r_b\xi_{,c}
\end{array}\right) \\
& + \dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\left(-\delta^a_b\xi_{,cd} + 2\delta^a_{(r}\xi_{,c)}\Gamma^r_{bd} - \Gamma^a_{dr}\delta^r_b\xi_{,c}\right).
\end{aligned}
$$

Μετά από πράξεις, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
0 &= \eta^a_{,tt} - \mathcal{L}_\eta F^a - 2\xi_{,t}F^a - \xi F^a_{,\dot r}F^r - F^a_{,\dot r}\left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right) - \xi F^a_{,t} \\
&+\dot q^b \left(\begin{array}{c} 2\eta^a_{,t|b} - \left(2\xi_{,b}\delta^a_r + \delta^a_b \xi_{,r}\right)F^r - \delta^a_b \xi^a_{,tt} \\ -\eta^c \Gamma^a_{bc,t} - F^a_{,\dot r}\left(\eta^r_{;b} - \eta^c \Gamma^r_{bc} - \delta^r_b \xi_{,t}\right) \end{array}\right) \\
&+\dot q^b \dot q^c \left(L_\eta \Gamma^a_{(bc)} - 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} + \xi \Gamma^a_{bc,t} + F^a_{,\dot b}\xi_{,c}\right) \\
&+\dot q^b \dot q^c \dot q^d \left(-\delta^a_b \xi_{;cd}\right).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις δύο πιο σημαντικές μορφές για το πεδίο της δύναμης, F^a.

α. Η δύναμη είναι της μορφής: $F^a = F^a_k(t, q^a)\dot q^k$ Σε αυτήν την περίπτωση, η συνθήκη δυναμικής συμμετρίας (4.66) γράφεται:

$$\begin{aligned}
0 &= \eta^a_{,tt} - \mathcal{L}_\eta \left(\dot q^b F^a_b\right) - \dot q^b \left(2\xi_{,t}F^a_b + \xi F^a_r F^r_b - \xi F^a_{b,t}\right) - F^a_r\left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right) \\
&+\dot q^b \left(2\eta^a_{,t|b} - \dot q^c F^r_c \left(2\xi_{,b}\delta^a_r + \delta^a_b \xi_{,r}\right) - \delta^a_b \xi^a_{,tt} - \eta^c \Gamma^a_{bc,t} - F^a_r\left(\eta^r_{;b} - \eta^c\Gamma^r_{bc} - \delta^r_b \xi_{,t}\right)\right) \\
&+\dot q^b \dot q^c \left(\mathcal{L}_\eta \Gamma^a_{(bc)} - 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} + \xi\Gamma^a_{bc,t} + F^a_b \xi_{,c}\right) \\
&+\dot q^b \dot q^c \dot q^d \left(-\delta^a_b \xi_{;cd}\right).
\end{aligned}$$

Μέσω αυτής, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις [3]

$$\begin{aligned}
0 &= \eta^a_{,tt} - \dot q^b L_\eta F^a_b - \dot q^b \left(2\xi_{,t}F^a_b + \xi F^a_r F^r_b - \xi F^a_{b,t} - \eta^c_{,b}F^a_c\right) - F^a_r\left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right) \\
&+\dot q^b \left(2\eta^a_{,t|b} - \dot q^c F^r_c \left(2\xi_{,b}\delta^a_r + \delta^a_b \xi_{,r}\right) - \delta^a_b \xi^a_{,tt} - \eta^c \Gamma^a_{bc,t} - F^a_r\left(\eta^r_{;b} - \eta^c\Gamma^r_{bc} - \delta^r_b \xi_{,t}\right)\right) \\
&+\dot q^b \dot q^c \left(L_\eta \Gamma^a_{(bc)} - 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} + \xi\Gamma^a_{bc,t} + F^a_b \xi_{,c}\right) \\
&+\dot q^b \dot q^c \dot q^d \left(-\delta^a_b \xi_{;cd}\right)
\end{aligned}$$

$$\eta^a_{,tt} - F^a_r\left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right) = 0 \tag{4.67}$$

$$2\eta^a_{,t|b} - \delta^a_b \xi_{,tt} - \eta^c \Gamma^a_{bc,t} + F^a_b \xi_{,t} - L_\eta F^a_b = 0 \tag{4.68}$$

$$L_\eta \Gamma^a_{(bc)} - 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} + \xi \Gamma^a_{(bc),t} + F^a_{(b}\xi_{,c)} - F^r_{(c}\left(2\xi_{,b)}\delta^a_{|r|} + \delta^a_{b)}\xi_{,|r|}\right) = 0 \tag{4.69}$$

$$\delta^a_{(b}\xi_{;cd)} = 0 \tag{4.70}$$

Ακόμα, υποθέτοντας ότι οι συνιστώσες της συνοχής δεν εξαρτώνται από το χρόνο t, δηλαδή $\Gamma^i_{jk,t} = 0$, τότε αυτές απλοποιούνται στις:

$$\eta^a_{,tt} - F^a_r\left(\eta^r_{,t} - \xi F^r\right) = 0 \tag{4.71}$$

$$2\eta^a_{,t|b} - \delta^a_b \xi^a_{,tt} + F^a_b \xi_{,t} - L_\eta F^a_b = 0 \tag{4.72}$$

$$L_\eta \Gamma^a_{(bc)} - 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} - F^r_{(c}\left(\xi_{,b)}\delta^a_r + \delta^a_{b)}\xi_{,r}\right) = 0 \tag{4.73}$$

$$\xi_{;(cd)} = 0 \tag{4.74}$$

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι το διανυσματικό πεδίο $\xi^{;a}$, είναι ένα βαθμωτό διανυσματικό πεδίο Killing της μετρικής.

[3] Ισχύει ότι:

$$L_\eta\left(\dot q^b F^a_b\right) = (L_\eta \dot q^b)F^a_b + \dot q^b L_n F^a_b = \dot q^b L_n F^a_b - \dot q^c \eta^b_{,c}F^a_b$$

β. Η δύναμη είναι της μορφής $F^a(t,q^a)$ και $\Gamma^a_{bc,t}=0$

Τότε, η σχέση (4.66), απλοποιείται σημαντικά και δίνει:

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^a_{,tt} - L_\eta F^a - 2\xi_{,t}F^a - \xi F^a_{,t} \\ &\quad + \dot{q}^b\left(2\eta^a_{,t|b} - \left(2\xi_{,b}\delta^a_r + \delta^a_b\xi_{,r}\right)F^r - \delta^a_b\xi^a_{,tt} - \eta^c\Gamma^a_{bc,t}\right) \\ &\quad + \dot{q}^b\dot{q}^c\left(L_\eta\Gamma^a_{(bc)} - 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} + \xi\Gamma^a_{bc,t}\right) \\ &\quad + \dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d\left(-\delta^a_{(b}\xi_{;cd)}\right). \end{aligned}$$

Άρα, προκύπτουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\eta^a_{,tt} - L_\eta F^a - 2\xi_{,t}F^a - \xi F^a_{,t} = 0 \tag{4.75}$$

$$2\eta^a_{,t|b} - \left(2\xi_{,b}\delta^a_r + \delta^a_b\xi_{,r}\right)F^r - \delta^a_b\xi_{,tt} - \eta^c\Gamma^a_{bc,t} = 0 \tag{4.76}$$

$$L_\eta\Gamma^a_{(bc)} = \eta^a_{;(bc)} - \eta^d R^a_{(bc)d} = 2\delta^a_{(b}\xi_{,c)t} - \xi\Gamma^a_{bc,t} \tag{4.77}$$

$$\delta^a_{(b}\xi_{;cd)} = 0. \tag{4.78}$$

Παρατηρούμε ότι συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συνθήκες ύπαρξης συμμετριών Lie, όπως αυτές έχουν βρεθεί από τους Τσαμπαρλή και Παλιαθανάση, βλέπε [4] [184] Σε αυτήν την περίπτωση, μέσω της εξίσωσης (4.78), προκύπτει ότι το διάνυσμα $\xi_{,a}(q^a)$, είναι ένα βαθμωτό πεδίο Killing (gradient Killing vector). Μέσω της (4.77), προκύπτει ότι το διάνυσμα η^a, αποτελεί μια ειδική προβολική συμμετρία (special Projective collineation).

4.2.4 Δυναμικές συμμετρίες $\xi = B_b(t,q)\dot{q}^b$, $\eta^a = A^a_b(t,q)\dot{q}^b$ συστήματος υπό γενικευμένη δύναμη $F^a(t,q,\dot{q})$

Μελετάμε την περίπτωση κατά την οποία, οι συνιστώσες ξ,η^a, του γεννήτορα της δυναμικής συμμετρίας $\mathbf{X} = \xi\partial_t + \eta^a\partial_a + X^{\bar{a}}\partial_{\dot{a}}$ έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\xi = B_b(t,q)\dot{q}^b \tag{4.87}$$

$$\eta^a = A^a_b(t,q)\dot{q}^b, \tag{4.88}$$

όπου το B_b, είναι ένα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο και το A^a_b, είναι κάποιο $(1,1)$, τανυστικό πεδίο. Όπως έχουμε προαναφέρει, η συνθήκη για την ύπαρξη δυναμικής συμμετρίας είναι $[\mathbf{X},\mathbf{\Gamma}] = \lambda\Gamma$, όπου $\mathbf{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a\frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a\frac{\partial}{\partial\dot{q}^a}$ και $\mathbf{X} = \sigma\Gamma + \lambda^a H_a + \mu^a V_a$. Σύμφωνα με αυτές, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma \\ \eta^a &= \sigma\dot{q}^a + \lambda^a \\ X^{\bar{a}} &= \sigma\omega^a - \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b + \mu^a. \end{aligned}$$

[4] Για την περίπτωση, των συμμετριών Lie, οι συγγραφείς καταλήγουν στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$L_\eta F^i + 2\xi_{,t}F^i + \eta^i{}_{,tt} = 0 \tag{4.79}$$

$$\left(\xi_{,k}\delta^i_j + 2\xi_{,j}\delta^i_k\right)F^k + 2\eta^i{}_{,t|j} - \xi_{,tt}\delta^i_j = 0 \tag{4.80}$$

$$L_\eta\Gamma^i_{(jk)} = 2\xi_{,t(j}\delta^i_{k)} \tag{4.81}$$

$$\xi_{(,i|j}\delta^k_{r)} = 0. \tag{4.82}$$

Ενώ, όταν $F^i = 0$, καταλήγουμε στις εξισώσεις που περιγράφουν τις Lie συμμετρίες των γεωδαισιακών εξισώσεων:

$$\eta^i{}_{,tt} = 0 \tag{4.83}$$

$$2\eta^i{}_{,t|j} - \xi_{,tt}\delta^i_k = 0 \tag{4.84}$$

$$L_\eta\Gamma^i_{jk} - 2\xi_{,t(j}\delta^i_{k)} = 0 \tag{4.85}$$

$$\xi_{(,j|k}\delta^i_{d)} = 0. \tag{4.86}$$

Ακόμα, οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από την εξίσωση $\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = F^a(t,q,\dot{q})$. Σύμφωνα με αυτήν, βρίσκουμε ότι $\omega^a = F^a(q,\dot{q}) - \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c$. Τέλος, η συνθήκη για την ύπαρξη δυναμικής συμμετρίας της σχέσης (4.52) δίνει:

$$\Gamma\left(\mu^a\right) + \lambda^d R^a_{bdc}\dot{q}^b\dot{q}^c + \left(\mu^c\Gamma^a_{bc} + \lambda^c F^a_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc} - \lambda^c\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot{q}^b - \lambda^b F^a_{;b} - \mu^b F^a_{,\dot{b}} = 0,$$

όπου

$$\begin{aligned}
\lambda^a &= \eta^a - \dot{q}^a\xi \\
\mu^a &= \Gamma(\lambda^a) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα ξ, η^a έχουμε ότι:

$$\lambda^a = \eta^a - \sigma\dot{q}^a = A^a_b\dot{q}^b - \delta^a_c B_b\dot{q}^b\dot{q}^c \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
\mu^a &= \Gamma(\lambda^a) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b \\
&= \Gamma\left(A^a_b\dot{q}^b\right) - \Gamma\left(\delta^a_c B_b\dot{q}^b\dot{q}^c\right) + \lambda^c\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b \\
&= A^a_{b,t}\dot{q}^b + \left(A^a_{b,c} - A^a_k\Gamma^k_{bc}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c + A^a_b F^b \\
&\quad -\delta^a_c B_{b,t}\dot{q}^b\dot{q}^c - \delta^a_c B_{b,d}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d + 2\delta^a_{(c}B_{k)}\Gamma^k_{bd}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c\dot{q}^b \\
&\quad + \left(A^k_c v^c - \delta^k_c B_d v^c v^d\right)\Gamma^a_{bk}\dot{q}^b \\
&= A^a_b F^b + \left(A^a_{b,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c\right)\dot{q}^b + \left(A^a_{b,c} + A^k_b\Gamma^a_{ck} - A^a_k\Gamma^k_{bc} - \delta^a_c B_{b,t}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c \\
&\quad + \left(-\delta^a_c B_{b,d} + 2\delta^a_{(c}B_{k)}\Gamma^k_{bd} - \delta^k_c B_d\Gamma^a_{bk}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
&= A^a_b F^b + \left(A^a_{b,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c\right)\dot{q}^b + \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c \\
&\quad - \left(\delta^a_c B_{b,d} - \delta^a_c B_k\Gamma^k_{bd} - B_c\Gamma^a_{bd} + B_d\Gamma^a_{bc}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d
\end{aligned}$$

$$\mu^a = A^a_b F^b + \left(A^a_{b,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c\right)v^b + \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)v^b v^c - \delta^a_c B_{b;d}v^b v^c v^d \tag{4.90}$$

Στη συνέχεια, για να μελετήσουμε περαιτέρω τη συνθήκη δυναμικής συμμετρίας (4.52), υπολογίζουμε τους επιμέρους όρους από τους οποίους παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\mu^a\right) \\
&\quad = \left(A^a_b F^b\right)_{,t} + F^k\left(A^a_d F^d_{,k} + A^a_d F^d_{,\dot{k}} + A^a_{k,t} - 2\delta^a_{(d}B_{k)}F^d\right) \\
&\quad + \begin{pmatrix} \left(A^a_c F^c\right)_{,b} + \left(A^a_{b,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c\right)_{,t} \\ +2\left(A^a_{(b;c)} - \delta^a_{(c}B_{b),t} - \delta^a_{(k}B_{b)}F^k_{,\dot{c}}\right)F^c \end{pmatrix}\dot{q}^b \\
&\quad + \begin{pmatrix} -A^a_k F^k_{,\dot{d}}\Gamma^d_{bc} + \left(A^a_{b,t} - 2\delta^a_{(d}B_{b)}F^d\right)_{,c} \\ -\left(A^a_{k,t} - 2\delta^a_{(d}B_{k)}F^d\right)\Gamma^k_{bc} + \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)_{,t} - 6\delta^a_{(c}B_{b;d)}F^d \end{pmatrix}\dot{q}^b\dot{q}^c \\
&\quad + \begin{pmatrix} \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)_{,d} - 2\left(A^a_{(k;c)} - \delta^a_{(c}B_{k),t}\right)\Gamma^k_{bd} \\ +2\delta^a_{(k}B_{b)}F^k_{,\dot{e}}\Gamma^e_{cd} - \left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,t} \end{pmatrix}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d \\
&\quad - \left(\left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,e} - 6\delta^a_{(c}B_{k;d)}\Gamma^k_{be}\right)\dot{q}v^b\dot{q}^c\dot{q}^d\dot{q}^e
\end{aligned}$$

$$\lambda^d R^a_{bdc}\dot{q}^b\dot{q}^c = A^k_d R^a_{bkc}\dot{q}^b\dot{q}^c\dot{q}^d$$

$$
\begin{aligned}
\left(\mu^c\Gamma^a_{bc} + \lambda^c F^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bc} - \lambda^c\Gamma^a_{bc,t}\right)\dot q^b &= A^k_c F^c \Gamma^a_{bk}\dot q^b \\
&+ \left(\left(A^k_{c,t} - 2\delta^k_{(d}B_{c)}F^d\right)\Gamma^a_{bk} + A^k_c F^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bk} - A^k_c\Gamma^a_{bk,t}\right)\dot q^b \dot q^c \\
&+ \left(\left(A^k_{d;c} - \delta^k_c B_{d,t}\right)\Gamma^a_{bk} + \delta^k_c B_d \Gamma^a_{bk,t} - B_c F^a_{,\dot k}\Gamma^k_{bd}\right)\dot q^b\dot q^c\dot q^d \\
&- B_{c;d}\Gamma^a_{be}\dot q^b\dot q^c\dot q^d\dot q^e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda^b F^a_{;b} &= -A^c_b F^a_{;c}\dot q^b + B_b F^a_{;c}\dot q^b\dot q^c \\
-\mu^b F^a_{,\dot b} &= -A^c_b F^b - \left(A^c_{b,t} - 2\delta^c_{(d}B_{b)}F^d\right)F^a_{,\dot c}\dot q^b \\
&\quad -\left(A^d_{b;c} - \delta^d_c B_{b,t}\right)F^a_{,\dot d}\dot q^b\dot q^c + B_{b;d}F^a_{,\dot c}\dot q^b\dot q^c\dot q^d
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.52) προκύπτει:

$$
c_0 + c^a_b v^b + c^a_{bc}v^b v^c + c^a_{bcd}v^b v^c v^d + c^a_{bcde}v^b v^c v^d v^e = 0, \tag{4.91}
$$

όπου:

$$
c_0 = \left(A^a_b F^b\right)_{,t} + F^k\left(A^a_d F^d_{,k} + A^a_d F^d_{,\dot k} + A^a_{k,t} - 2\delta^a_{(d}B_{k)}F^d\right) - A^c_b F^b \tag{4.92}
$$

$$
c^a_b = \begin{array}{c} \left(A^a_c F^c\right)_{;b} + A^a_{b,tt} - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c_{,t} - 4\delta^a_{(c}B_{b),t}F^c \\ +2\left(A^a_{(b;c)} - \delta^a_{(d}B_{b)}F^d_{,\dot c} + \delta^d_{(c}B_{b)}F^a_{,\dot d}\right)F^c - A^c_b F^a_{;c} - A^c_{b,t}F^a_{,\dot c} \end{array} \tag{4.93}
$$

Η συνιστώσα c^a_{bc} παρουσίαζει συμμετρικότητα στην εναλλαγή των δεικτών b, c. Άρα:

$$
\begin{aligned}
\left(A_{b;c}\right)_{,t} &= A^a_{b,ct} + A^k_{c,t}\Gamma^a_{bk} - A^a_{k,t}\Gamma^k_{bc} + A^k_c\Gamma^a_{bk,t} - A^a_k\Gamma^k_{bc,t} \Leftrightarrow \\
\left(A_{b;c}\right)_{,t} + A^a_{b,ct} + A^k_{c,t}\Gamma^a_{bk} - A^a_{k,t}\Gamma^k_{bc} &= 2\left(A_{b;c}\right)_{,t} - 2A^k_c\Gamma^a_{bk,t} + 2A^a_k\Gamma^k_{bc,t}
\end{aligned}
$$

$$
2\delta^a_{(d}B_{b);c} = 2\delta^a_{(d}B_{b),c} - 2\delta^a_{(d}\Gamma^k_{b)c}B_k
$$

$$
6\delta^a_{(c}B_{b;d)}F^d = \left(\delta^a_d B_{b;c}F^d + 2\delta^a_c B_{(b;d)}\right)F^d.
$$

Ο όρος c^a_{bc} γράφει:

$$
\begin{aligned}
c^a_{bc} &= \left(\begin{array}{c} -A^a_k F^k_{,\dot d}\Gamma^d_{bc} + \left(A^a_{b,t} - 2\delta^a_{(d}B_{b)}F^d\right)_{,c} \\ -\left(A^a_{k,t} - 2\delta^a_{(d}B_{k)}F^d\right)\Gamma^k_{bc} + \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)_{,t} - 6\delta^a_{(c}B_{b;d)}F^d \\ +\left(A^k_{c,t} - 2\delta^k_{(d}B_{c)}F^d\right)\Gamma^a_{bk} + A^k_c F^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bk} - A^k_c\Gamma^a_{bk,t} + B_b F^a_{;c} - \left(A^d_{b;c} - \delta^d_c B_{b,t}\right)F^a_{,\dot d} \end{array}\right) \\
&= -A^a_k F^k_{,\dot d}\Gamma^d_{bc} + \left(A^a_{b,c} - A^a_k\Gamma^k_{bc} + A^k_c\Gamma^a_{bk}\right)_{,t} \\
&\quad -2\delta^a_{(d}B_{b),c}F^d - 2\delta^a_{(d}B_{b)}F^d_{,c} + 2\delta^a_{(d}B_{k)}F^d\Gamma^k_{bc} + \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)_{,t} \\
&\quad -B_{b;c}F^a - 2\delta^a_c B_{(b;d)}F^d - 2\delta^k_{(d}B_{c)}F^d\Gamma^a_{bk} + A^a_k\Gamma^k_{bc,t} \\
&\quad -2A^k_c\Gamma^a_{bk,t} + A^k_c F^a_{,\dot d}\Gamma^d_{bk} + B_b F^a_{;c} - \left(A^d_{b;c} - \delta^d_c B_{b,t}\right)F^a_{,\dot d},
\end{aligned}
$$

και σε πιο συμπαγή μορφή:

$$
\begin{aligned}
c^a_{(bc)} &= -A^a_k F^k_{,\dot d}\Gamma^d_{(bc)} + 2A^a_{(b;c),t} - \left(B_d F^d\right)_{;(b}\delta^a_{c)} - 2B_{(b;c)}F^a - \delta^a_{(c}B_{b),t,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b;d)}F^d + A^a_k\Gamma^k_{(bc),t} \\
&\quad -2A^k_{(c}\Gamma^a_{b)k,t} + A^k_{(c}\Gamma^d_{b)k}F^a_{,\dot d} - \left(A^d_{(b;c)} - \delta^d_{(c}B_{b),t}\right)F^a_{,\dot d}
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, υποθέτοντας ότι η συνοχή Γ^a_{bc} της μετρικής του χώρου δεν εξαρτάται από τις συναρτήσεις ταχυτήτων [5] τότε έχουμε ότι:

$$
F^a_{;\dot d} \equiv F^a_{,\dot d}
$$

[5] Αυτή η παραδοχή δεν ισχύει για χώρο Finsler

και οι συνιστώσες $c^a_{(bc)}$ γράφονται:

$$\begin{aligned} c^a_{(bc)} &= -A^a_k F^k_{;\dot{d}} \Gamma^d_{(bc)} - \left(B_d F^d\right)_{;(b}\delta^a_{c)} - 2B_{(b;c)}F^a + \left(2A^a_{(b;c)} - \delta^a_{(c}B_{b),t}\right)_{,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b;d)}F^d + A^a_k \Gamma^k_{(bc),t} \\ &\quad -2A^k_{(c}\Gamma^a_{b)k,t} + A^k_{(c}\Gamma^d_{b)k}F^a_{;\dot{d}} - \left(A^d_{(b;c)} - \delta^d_{(c}B_{b),t}\right)F^a_{;\dot{d}}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Ο όρος c^a_{bcd}, είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των δεικτών b, c, d. Αυτός γράφεται:

$$\begin{aligned} c^a_{bcd} &= \left(A^a_{b;c} - \delta^a_c B_{b,t}\right)_{,d} - 2\left(A^a_{(k;c)} - \delta^a_{(c}B_{k),t}\right)\Gamma^k_{bd} + 2\delta^a_{(k}B_{b)}F^k_{,\dot{e}}\Gamma^e_{cd} - \left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,t} + A^k_d R^a_{bkc} \\ &+ \left(A^k_{d;c} - \delta^k_c B_{d,t}\right)\Gamma^a_{bk} + \delta^k_c B_d \Gamma^a_{bk,t} - B_c F^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bd} + B_{b;d}F^a_{,\dot{c}} \end{aligned}$$

Επισημαίνουμε ότι:

$$\left(A^a_{b;c}\right)_{,d} = A^a_{b;cd} - A^k_{b;c}\Gamma^a_{kd} + A^a_{k;c}\Gamma^k_{bd} + A^a_{b;k}\Gamma^k_{cd}$$

$$A^a_{(b;cd)} = \left(A^a_{(b;c}\right)_{,d)} + A^k_{(b;c}\Gamma^a_{d)k} - A^a_{k;(c}\Gamma^k_{bd)} - A^a_{(c;|k|}\Gamma^k_{bd)}$$

$$-\left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,t} = -\delta^a_c B_{b,dt} + \left(\delta^a_c B_k \Gamma^k_{bd}\right)_{,t}$$

$$c^a_{bcd} = \begin{array}{c} A^a_{b;cd} + A^k_d R^a_{bkc} - \left(\delta^a_c B_{b,d}\right)_{,t} + \delta^a_c B_{k,t}\Gamma^k_{bd} + B_{c,t}\Gamma^a_{bd} - B_{d,t}\Gamma^a_{bc} + B_d \Gamma^a_{bc,t} \\ -\left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,t} + 2\delta^a_{(k}B_{b)}F^k_{,\dot{e}}\Gamma^e_{cd} + B_d F^a_{;c} + B_{b;d}F^a_{,\dot{c}} - B_c F^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bd} \\ + \left(A^k_{d;c} - \delta^k_c B_{d,t}\right)\Gamma^a_{bk} + \delta^k_c B_d \Gamma^a_{bk,t} - B_c F^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{bd}, \end{array}$$

ή

$$\begin{aligned} c^a_{(bcd)} &= \left(A^a_{(b;c,d)} - A^a_{k;(c}\Gamma^k_{bd)} - A^a_{(c;|k|}\Gamma^k_{bd)} + A^k_{(d;c}\Gamma^a_{b)k}\right) - A^k_{(d}R^a_{bc)k} \\ &\quad -\delta^a_{(c}B_{b,d)t} + B_{k,t}\Gamma^k_{(bd}\delta^a_{c)} + \Gamma^a_{(bd}B_{c),t} + B_{(b}\Gamma^e_{cd)}F^a_{,\dot{e}} \\ &\quad +\delta^a_{(b}\Gamma^e_{cd)}B_k F^k_{,\dot{e}} - \delta^a_{(c}B_{b;d),t} - \Gamma^a_{(bc}B_{d),t} + B_{(d}\Gamma^a_{bc),t} - F^a_{,\dot{k}}\Gamma^k_{(bd}B_{c)} + B_{(b;d}F^a_{,\dot{c})}. \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} c^a_{(bcd)} &= A^a_{(b;cd)} - A^k_{(d}R^a_{bc)k} - 2\delta^a_{(c}B_{b;d),t} \\ &\quad -B_k\left(\delta^a_{(c}\Gamma^k_{bd),t} - \delta^k_{(d}\Gamma^a_{bc),t}\right) + \delta^a_{(b}\Gamma^e_{cd)}B_k F^k_{;\dot{e}} + B_{(b;d}F^a_{;\dot{c})} \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει η σχέση $B_{k;\dot{e}} = B_{k,\dot{e}} - B_r\Gamma^r_{k\dot{e}} \equiv 0$, έχουμε ότι $\delta^a_{(b}\Gamma^e_{cd)}B_k F^k_{;\dot{e}} = \delta^a_{(b}\Gamma^e_{cd)}\left(B_k F^k\right)_{;\dot{e}}$.Επομένως, προκύπτει ότι η συνιστώσα $c^a_{(bcd)}$ γράφεται:

$$\begin{aligned} c^a_{(bcd)} &= A^a_{(b;cd)} - A^k_{(d}R^a_{bc)k} - 2\delta^a_{(c}B_{b;d),t} \\ &\quad -B_k\left(\delta^a_{(c}\Gamma^k_{bd),t} - \delta^k_{(d}\Gamma^a_{bc),t}\right) + \delta^a_{(b}\Gamma^e_{cd)}\left(B_k F^k\right)_{;\dot{e}} + B_{(b;d}F^a_{;\dot{c})} \end{aligned} \tag{4.95}$$

Τέλος, ο όρος c^a_{bcde}, παρουσιάζει συμμετρία στους δείκτες b, c, d, e, και δίνει:

$$\begin{aligned} c^a_{bcde} &= -\left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,e} + \delta^a_c B_{k;d}\Gamma^k_{be} + \delta^a_k B_{c;d}\Gamma^k_{be} + \delta^a_d B_{k;c}\Gamma^k_{be} - B_{c;d}\Gamma^a_{be} \\ &= -\left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,e} + \delta^a_c B_{k;d}\Gamma^k_{be} + B_{c;d}\Gamma^a_{be} + \delta^a_d B_{k;c}\Gamma^k_{be} - B_{c;d}\Gamma^a_{be} \\ &= -\left(\delta^a_c B_{b;d}\right)_{,e} + \delta^a_c B_{k;d}\Gamma^k_{be} + \delta^a_d B_{k;c}\Gamma^k_{be} \\ &= -\delta^a_c B_{b;de}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$c^a_{(bcde)} = -\delta^a_{(c}B_{b;de)}. \tag{4.96}$$

Οι εξισώσεις (4.92),(4.93),(4.94),(4.95),(4.96), αποτελούν τις συνθήκες ύπαρξης δυναμικής συμμετρίας όταν οι συνιστώσες ξ, η^a, του γεννήτορα της συμμετρίας έχουν γραμμική εξάρτηση από τις ταχύτητες, ενώ το σύστημα βρίσκεται κάτω από την επίδραση κάποιας γενικευμένης δύναμης $F^a(t,q,\dot{q})$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.96), είναι ανεξάρτητη της μορφής της γενικευμένης δύναμης. Επομένως ισχύει για κάθε $F(t,q,\dot{q})$. Η σχέση (4.96) δίνει

$$B_{(b;de)} = 0.$$

Αυτή υποδηλώνει ότι το διανυσματικό πεδίο B^a, αποτελεί μία αφινική συμμετρία (affine collineation). Ως εκ τούτου, είναι λογικό να υποθέσει κανείς ότι το $B^a(q)$, είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής t.

Πράγματι, μέσω της παρακάτω ταυτότητας:

$$B_{a;bc} = g_{ad}L_B\Gamma^d_{bc} + R_{abcd}B^d,$$

προκύπτει ότι

$$B_{(a;bc)} = g_{d(a}L_B\Gamma^d_{bc)}.$$

Άρα,

$$g_{d(a}L_B\Gamma^d_{bc)} = 0 \Rightarrow L_B\Gamma^d_{bc} = 0$$

η οποία υποδηλώνει ότι το διάνυσμα B^a, αποτελεί αφινική συμμετρία. Αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα των Maartens και Taylor, βλέπε [39]. Εκεί, δείχνουν, ότι για επίπεδο χώρο, η συνθήκη αφινικής συμμετρίας είναι $B_{(a,bc)} = 0$, επομένως το τανυστικό πεδίο $B_{a;b}$ είναι ένας Killing tensor.

Για επίπεδους χώρους οι ACs είναι

$$B_a = C_{abc}q^bq^c + M_{ab}q^b + N_a,$$

όπου οι C_{abc}, M_{ab}, N_a είναι σταθερές. Ωστόσο, σε χώρους μη μηδενικής καμπυλότητας, οι αφινικές συμμετρίες πρέπει να υπολογιστούν.[6]

Συμπερασματικά,
το διανυσματικό πεδίο B^a, καθορίζεται πλήρως από τη γεωμετρία της μετρικής του χώρου στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση. Επιπλέον, το B^a, είναι ανεξάρτητο των δυνάμεων που δρουν στο σύστημα. Αντιθέτως, η παρουσία (ή μη) των δυνάμεων παίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του τανυστικού πεδίου A^a_b. Τέλος, οι εξισώσεις (4.92)-(4.95), διαχωρίζονται σε επιπλέον εξισώσεις/ συνθήκες λόγω της εξάρτησης τους από τις μεταβλητές $t, q^a, \dot{q}^a$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μελετάμε δύο περιπτώσεις. Αυτή, των γεωδαισιακών, $F^i = 0$ και την περίπτωση κατά την οποία, οι δυνάμεις είναι ανεξάρτητες της ταχύτητας.

α. Δυναμικές συμμετρίες των γεωδαισιακών εξισώσεων
Γι αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τις συνθήκες (4.92),(4.93),(4.94),(4.95), όπου θέτουμε $F^a = 0$. Τότε:

Ο όρος c_0, δεν δίνει κάποια συνθήκη.

Ο όρος c^a_b δίνει:

$$A^a_{b,tt} = 0 \tag{4.97}$$

Ο όρος $c^a_{(bc)}$ δίνει:

$$\left(2A^a_{(b;c)} - \delta^a_{(c}B_{b),t}\right)_{,t} + A^a_k\Gamma^k_{bc,t} - 2A^k_{(c}\Gamma^a_{b)k,t} = 0 \tag{4.98}$$

Ο όρος $c^a_{(bcd)}$ δίνει:

$$A^a_{(b;cd)} - A^k_{(d}R^a_{bc)k} - 2\left(\delta^a_{(c}B_{b;d)}\right)_{,t} + B_k\left(\delta^k_r\delta^a_{(c} - \delta^k_{|r|}\delta^a_{c}\right)\Gamma^r_{bd),t} = 0 \tag{4.99}$$

Στην ειδική περίπτωση που το ξ, δεν εξαρτάται από το χρόνο, δηλαδή, $B^a(q)$ με το B^a να είναι μία αφινική συμμετρία, υποθέτουμε ότι $\Gamma^r_{bd,t} = 0$ κα παράγουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$A^a_{b,tt} = 0$$

$$A^a_{(b;c),t} = 0 \tag{4.100}$$

$$A^a_{(b;cd)} - A^k_{(d}R^a_{bc)k} = 0. \tag{4.101}$$

[6] Σημειώνουμε ότι οι ACs είναι γνωστές σε πολλές περιπτώσεις.

Για τη συνιστώσα η^a του διανυσματικού πεδίου $\eta^a\partial_a$, μέσω της εξίσωσης (4.97), έχουμε:

$$A^a_b = C^a_b(q)t + \tilde{C}^a_b(q). \tag{4.102}$$

Από τη συνθήκη (4.100), έχουμε:

$$C^a_{(b;c)}(q) = 0. \tag{4.103}$$

Τότε, η εξίσωση (4.101) δίνει:

$$\tilde{C}^a_{(b;cd)} - (C^k_{(d}(q)t + \tilde{C}^k_{(d}(q))R^a_{bc)k} = 0,$$

μέσω της οποίας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^a_{(b;cd)} - \tilde{C}^k_d R^a_{bc)k} &= 0 && (4.104)\\ C^k_{(d}R^a_{bc)k} &= 0. && (4.105) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (4.101) γράφεται:

$$A_{a(b;cd)} - A^k_{(d}R_{|a|bc)k} = 0,$$

μέσω της οποίας συνεπάγεται:

$$A_{(ab;cd)} = 0$$

και

$$\begin{aligned} C_{(ab;cd)} &= 0\\ \tilde{C}_{(ab;cd)} &= 0\\ R_{[a(b]c)k}A^k_{d)} &= 0 \end{aligned}$$

Μία ειδική λύση της εξίσωσης $A_{(ab;cd)} = 0$, είναι ο A_{ab}, να αποτελεί σύμμορφο τανυστή Killing. Τότε, προκύπτει ένα επιπλέον πεδίο εφαρμογής των σύμμορφων τανυστών Killing, το οποίο αφορά τις δυναμικές συμμετρίες. Σε αυτήν την περίπτωση, τόσο ο C_{ab} όσο και ο $\tilde{C}_{ab}$, περιγράφουν σύμμορφα τανυστικά πεδία Killing, τα οποία επιπλέον, πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες (4.104) και (4.105).

β. Δυναμικές συμμετρίες για συστήματα υπό την επίδραση δυνάμεων της μορφής $F = F(t, q)$

Σε αυτή την περίπτωση η γενικευμένη δύναμη παίρνει τη μορφή $F^a_{,\dot{b}} = 0$ και οι εξισώσεις (4.92),(4.93),(4.94),(4.95) γράφονται:

$$\left(A^a_b F^b\right)_{,t} + F^k\left(A^a_d F^d_{,k} + A^a_{k,t} - 2\delta^a_{(d}B_{k)}F^d\right) - A^c_b F^b = 0$$

$$(A^a_c F^c)_{;b} + A^a_{b,tt} - 2\delta^a_{(c}B_{b)}F^c_{,t} - 4\delta^a_{(c}B_{b),t}F^c + 2A^a_{(b;c)}F^c - A^c_b F^a_{;c} = 0$$

$$A^a_{(b;c),t} - \left(B_d F^d\right)_{;(b}\delta^a_{c)} - 2B_{(b;c)}F^a + \left(A^a_{(b;c)} - \delta^a_{(c}B_{b),t}\right)_{,t} - 2\delta^a_{(c}B_{b;d)}F^d + A^a_k\Gamma^k_{(bc),t} - 2A^k_{(c}\Gamma^a_{b)k,t} = 0$$

$$A^a_{(b;cd)} - A^k_{(d}R^a_{bc)k} - 2\delta^a_{(c}B_{b;d),t} - B_k\left(\delta^a_{(c}\Gamma^k_{bd),t} - \delta^k_{(d}\Gamma^a_{bc),t}\right) = 0$$

$$B_{(b;de)} = 0.$$

Όπως αναμένονταν, το διανυσματικό πεδίο B^a, αποτελεί αφινική συμμετρία, ενώ το τανυστικό πεδίο A^a_b, πρέπει να ικανοποιεί τις υπόλοιπες συνθήκες. Από αυτές, συμπεραίνουμε ότι ο τανυστής A^a_b, εξαρτάται από πλήθος διαφορετικών παραμέτρων και ως εκ τούτου είναι αδύνατον να προσδιοριστεί για κάθε πρόβλημα.

4.3 Γενικευμένες συμμετρίες Noether

Έστω δυναμικό σύστημα, ορισμένο στη δέσμη B_m, του οποίου η κίνηση περιγράφεται μέσω της Lagrangian $L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i})$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα δράσης της Lagrangian $A(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i})$, μέσω της σχέσης:

$$A(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i})dt. \tag{4.106}$$

Τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.3.1 *Το συναρτησοειδές που δίνεται από την εξίσωση (4.106), επιδέχεται μία γενικευμένη συμμετρία Noether , με γεννήτορα* $\mathbf{X}$*, ο οποίος δίνεται από τη σχέση (4.4), όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες:*

1. *Το συναρτησοειδές μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση:*
$$\bar{A}(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, \ddot{\bar{q}}^i, ..., \bar{q}^{(m)i}) = \bar{A}(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) + A_0(\epsilon), \tag{4.107}$$
όπου η ποσότητα $A_0(\epsilon)$*, είναι σταθερά που εξαρτάται από την παράμετρο* ϵ *και* $\bar{q}^i = q^i + X^i\epsilon + O(\epsilon^2)$.

2. *Ο σημειακός μετασχηματισμός του* $\mathbf{X}$*, στην πολλαπλότητα* B_m*, παράγει ένα ορισμένο ολοκλήρωμα (**zero end point variation**).*

Η σταθερά $A_0(\epsilon)$, γράφεται μέσω του ολοκληρώματος:

$$A_0(\epsilon) = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(t, q^i)}{dt}dt,$$

όπου η $f(t, q^i)$ περιγράφει μία λεία συνάρτηση.

Έστω $\mathbf{X}$, ένας σημειακός μετασχηματισμός ορισμένος στη δέσμη B_m, έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i} &\rightarrow \bar{t}, \bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, \ddot{\bar{q}}^i, ..., \bar{q}^{(m)i} \\ L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) &\rightarrow L(\bar{t}, \bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, \ddot{\bar{q}}^i, ..., \bar{q}^{(m)i}). \end{aligned}$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} &\bar{A}(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, \ddot{\bar{q}}^i, ..., \bar{q}^{(m)i}) - \bar{A}(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{t}, \bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, \ddot{\bar{q}}^i, ..., \bar{q}^{(m)i})d\bar{t} - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i})dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) + \epsilon\mathbf{X}L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) + \cdots\right][dt + \epsilon\frac{d\xi}{dt}dt + \cdots] \\ &- \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i, \dot{q}^i)dt \\ &= \epsilon\int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{X}L(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}) + \frac{d\xi}{dt}L\right]dt + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη, σύμφωνα με την οποία ο σημειακός μετασχηματισμός $\mathbf{X}$, αποτελεί μία γενικευμένη συμμετρία Noether:

$$\mathbf{X}L + \frac{d\xi}{dt}L = \frac{df}{dt}, \qquad f = f(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i}). \tag{4.108}$$

Σύμφωνα με αυτήν, ο γεννήτορας του μετασχηματισμού $\mathbf{X}$, ορίζει μία συμμετρία Noether, εάν υπάρχει συνάρτηση $f(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, ..., q^{(m)i})$, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (4.108). Τότε, ο γεννήτορας της συμμετρίας $\mathbf{X}$, παράγει ένα γενικευμένο σημειακό μετασχηματισμό, στη δέσμη B_m και δρα πάνω στο συναρτησοειδές[7]

[7]Αυτό δεν σχετίζεται με τις ιδιότητες του ως γεννήτορας της συμμετρίας.

$A(q^i,\dot{q}^i,\ddot{q}^i,...,q^{(m)i})$ μετασχηματίζοντας το. Στη συνέχεια, εστιάζουμε στην περίπτωση με $m=2$, δηλαδή για Λαγραντζιανές της μορφής $L(t,q^i,\dot{q}^i,\ddot{q}^i)$. Κατόπιν, προσδιορίζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης το οποίο καλείται γενικευμένο αναλλοίωτο της Noether συμμετρίας (**generalized Noether invariant**).

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(f-L\xi)\\
&=\frac{df}{dt}-\frac{dL}{dt}\xi-L\frac{d\xi}{dt}=\mathbf{X}^{[2]}L+\frac{d\xi}{dt}L-\frac{dL}{dt}\xi-L\frac{d\xi}{dt}=\mathbf{X}^{[2]}L-\frac{dL}{dt}\xi\\
&=\left(\xi\partial_t+\eta^i\partial_{q^i}+G^{[1]i}\partial_{q^{(2)i}}+G^{[2]i}\partial_{q^{(3)i}}\right)L-\frac{dL}{dt}\xi\\
&=\left(\xi\partial_t+\eta^i\partial_{q^i}+\left[\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]+q^{(2)}\xi\right]\partial_{q^{(1)i}}+\left[\frac{d^2}{dt^2}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]+q^{(3)i}\xi\right]\partial_{q^{(2)i}}\right)L\\
&-\left(\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^i}q^{(1)i}+\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}q^{(2)i}+\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}q^{(3)i}\right)\xi\\
&=\xi\partial_t L-\frac{\partial L}{\partial t}\xi+q^{(2)}\xi\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}-\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}q^{(2)i}\xi+q^{(3)i}\xi\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}-\xi q^{(3)i}\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\\
&+\left(\eta^i-\xi q^{(1)i}\right)\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}+\frac{d^2}{dt^2}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\\
&=\left(\eta^i-\xi q^{(1)i}\right)\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{d}{dt}\left\{\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right\}-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right)\\
&+\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right\}-\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\\
&=\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}+\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right\}-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}\\
&-\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\\
&=\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}+\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right\}-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}\\
&-\frac{d}{dt}\left\{\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\right\}+\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\\
&=\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left[\eta-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}+\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\right\}\\
&+\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}\right)+\frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}.
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(f-L\xi-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}-\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}+\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\right)\\
&=\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\right\}.
\end{aligned}
$$

Το δεξί μέλος, ορίζει τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την Lagrangian $L(t,q^i,q^{(1)i},q^{(2)i})$. Άρα, η ποσότητα,

$$
I_2=f-L\xi-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\left[\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}\right)\right]-\frac{d}{dt}\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}=constant, \tag{4.109}
$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Ακολουθώντας, την ίδια μεθοδολογία μπορούμε να προσδιορίσουμε το αναλλοίωτο της Noether, για την περίπτωση που η Lagrangian περιέχει όρους ανώτερης τάξης.

Από τη σχέση(4.109), θέτοντας $m=1$, δηλαδή $\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}=0$ το πρώτο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$
I_1=f-L\xi-\left[\eta^i-q^{(1)i}\xi\right]\frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}, \tag{4.110}
$$

και ταυτίζεται με αυτό του κλασσικού θεωρήματος της Noether:

4.4 Συμμετρίες Cartan

Έστω σύστημα, n βαθμών ελευθερίας εκφρασμένο μέσω του συστήματος συντεταγμένων $(q^i, \dot{q}^i)$, στον χώρο των θέσεων και των ταχυτήτων, που ταυτίζεται με την εφαπτόμενη πολλαπλότητα $R \times TM$. Η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται από την καμπύλη $q^i(t)$, όπου η συνάρτηση t, αποτελεί το όρισμα των συναρτήσεων θέσεων, στο θεσεογραφικό χώρο. Με $L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t))$, συμβολίζουμε τη συνάρτηση Lagrange, του δυναμικού συστήματος και υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι συντηρητικές (και πιθανώς, χρονικά εξαρτώμενες), έτσι ώστε οι εξισώσεις Lagrange $i_\Gamma \omega_L = 0$, να περιγράφουν τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Ορισμός 4.4.1 *Ο γεννήτορας $\mathbf{X}$, ενός σημειακού μετασχηματισμού, αποτελεί συμμετρία Cartan μία συνάρτησης Lagrange L, όταν ικανοποιείται η συνθήκη:*

$$L_X \theta_L = df, \tag{4.111}$$

όπου $\theta_L = Ldt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\theta_1^i$, είναι η πρώτη μορφή του Cartan και f, η συνάρτηση βαθμίδας. Τότε, το πρώτο ολοκλήρωμα Cartan, δίνεται από τη σχέση:

$$I_1 = f - L\xi - \left[\eta^i - \dot{q}^i \xi\right] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{4.112}$$

ενώ ο γεννήτορας της συμμετρίας $\mathbf{X}$, είναι ταυτόχρονα και δυναμική συμμετρία των εξισώσεων κίνησης.

Έχουμε ήδη δείξει ότι το $\mathbf{X} = \xi\partial_t + \eta^i\partial_{q^i} + \left(\dot{\eta}^i - \dot{\xi}\dot{q}^i\right)\partial_{\dot{q}^i}$, στη βάση $\left(\partial_t, \partial_{q^i}, \partial_{\dot{q}^i}\right)$, μετασχηματίζεται στο διάνυσμα $\mathbf{X} = \xi\Gamma + \left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)\partial_{q^i} + \Gamma\left(\dot{\eta}^i - \dot{\xi}\dot{q}^i\right)\partial_{\dot{q}^i}$, εκφρασμένο στη βάση $\left(\Gamma, \partial_{q^i}, \partial_{\dot{q}^i}\right)$.

Τότε, το αριστερό μέλος της συνθήκης 4.111, γράφεται

$$\begin{aligned}
L_X\theta_L &= X(L)\,dt + L\left(i_X dt\right) + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\left(i_X\theta_1^i\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} i_X d\theta_1^i \\
&= X(L)\,dt + L\left(i_X dt\right) + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\left(i_X\theta_1^i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} i_X\left(\theta_2^i \wedge dt\right) \\
&= X(L)\,dt + Ld\xi + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\left(\eta^i - \dot{q}^i dt\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi\theta_2^i.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
X(L)\,dt + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + Ld\left(i_X dt\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\left(i_X\theta_1^i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} X\left(\dot{q}^i\right)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi\theta_2^i &= df \Leftrightarrow \\
X(L)\,dt + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + Ld\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi\theta_2^i &= df,
\end{aligned}$$

η οποία στη βάση $\left(dt, \theta_1^i, \theta_2^i\right)$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
& X(L)\,dt + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + L\left(\dot{\xi}dt + \frac{\partial \xi}{\partial q^i}\theta_1^i + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^i}\theta_2^i\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)dt \\
& + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\theta_1^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\theta_2^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}\left(\eta^i - \xi\dot{q}^i\right)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi\theta_2^i \\
= {} & \dot{f}dt + \frac{\partial f}{\partial q^i}\theta_1^i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i}\theta_2^i.
\end{aligned}$$

Μετά από πράξεις απλοποιείται, στην ακόλουθη έκφραση

$$\begin{aligned}
& X(L)\,dt + X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\theta_1^i + L\left(\dot{\xi}dt + \frac{\partial \xi}{\partial q^i}\theta_1^i + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^i}\theta_2^i\right) \\
& + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\theta_1^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\theta_2^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi\theta_2^i \\
= {} & \dot{f}dt + \frac{\partial f}{\partial q^i}\theta_1^i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i}\theta_2^i
\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, η συνθήκη ύπαρξης μίας συμμετρίας Cartan, διασπάται στις επιμέρους συνθήκες:

$$dt \quad : \quad X(L) + L\dot{\xi} = \dot{f} \tag{4.113}$$

$$\theta_1^i \quad : \quad X\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + L\frac{\partial \xi}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right) = \frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{4.114}$$

$$\theta_2^i \quad : \quad L\frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right) = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.115}$$

Η εξίσωση 4.113, περιγράφει τη συνθήκη για την ύπαρξη συμμετρίας Noether. Αυτή, οδηγεί στο πρώτο ολοκλήρωμα I_1, το οποίο δίνεται στην (4.112).

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\xi\dot{L} + \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + L\dot{\xi} &= \dot{f} \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dt}\left(\xi L + \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial q^i} - \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= \dot{f}
\end{aligned}$$

ή αλλιώς

$$\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(f - \xi L - \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right). \tag{4.116}$$

Ωστόσο, μέσω του αριστερού μέλους ισχύει ότι $i_\Gamma\omega_L = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0$ (για συντηρητικό σύστημα) και επομένως η ποσότητα $I_1 = f - \xi L - \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$, αποτελεί πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης.

Η εξίσωση (4.114) γράφεται

$$\begin{aligned}
\xi\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i} + \frac{d}{dt}\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} + \\
+L\frac{\partial \xi}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right) &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \xi\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(L\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\right) + \\
+\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial \dot{q}^j}\right) + \frac{d}{dt}\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial f}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

ή αλλιώς

$$\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial \dot{q}^j}\right) + \frac{d}{dt}\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial I_1}{\partial q^i} \tag{4.117}$$

αφού για κάθε διατηρητικό σύστημα Lagrange ισχύει ότι $\xi\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) = 0$ και $I_1 = f - \xi L - \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$.

Η εξίσωση (4.115) γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}(L\xi) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right) &= \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} \Leftrightarrow \\
-\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(f - L\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\right)
\end{aligned}$$

ή τελικά

$$-\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial I_1}{\partial \dot{q}^i}, \tag{4.118}$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση του Cartan, βλέπε [35] και ισοδυναμεί με το αντίστροφο θεώρημα της Noether.

Συμπερασματικά, για συντηρητικά συστήματα Lagrange, των οποίων οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από την εξίσωση $i_{\Gamma}\omega_L = 0$, έχουμε ότι το βαθμωτό πεδίο I_1, αποτελεί πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης ενώ παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση του γεννήτορα της συμμετρίας Cartan.

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$X(I) = \xi\Gamma(I_1) + \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial I_1}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{\partial I_1}{\partial \dot{q}^i}.$$

Αντικαθιστώντας, τις σχέσεις 4.117) , (4.118) και επειδή το I_1 παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση του Euler field (ή αλλιώς Hamilton field) Γ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} X(I) \quad = \quad & \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\left(\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial\dot{q}^j}\right) + \frac{d}{dt}\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^j\partial\dot{q}^i}\right) \\ & -\frac{d}{dt}\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial\dot{q}^j}\right) = 0$. Επομένως,

$$X(I) = \left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\frac{d}{dt}\left(\eta^j - \xi\dot{q}^j\right)\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^j\partial\dot{q}^i} - \frac{d}{dt}\left(\eta^i - \dot{q}^i\xi\right)\left(\eta^j - \dot{q}^j\xi\right)\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j} = 0,$$

λόγω συμμετρίας στους δείκτες i, j.

Σύμφωνα με τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι οι Cartan συμμετρίες ταυτίζονται με τις Noether για την περίπτωση ενός συντηρητικού, ολόνομου συστήματος. Η πρόταση αυτή συμφωνεί με αυτήν των Sarlet και Cantrijin, βλέπε [163].

Κεφάλαιο 5

Σημειακές συμμετρίες Lie και Noether για μη αυτόνομα (χρονοεξαρτώμενα) δυναμικά συστήματα

Εισαγωγή

Οι εξισώσεις κίνησης για τα Νευτώνεια δυναμικά συστήματα προέρχονται από τον δεύτερο νόμου του Newton και η μορφή τους εξαρτάται από τη δύναμη που ασκείται σε αυτά. Αυτό ισχύει τόσο στην περίπτωση της Ειδικής Σχετικότητας μέσω της γενίκευσης του δεύτερου νόμου του Newton για τη Minkowskian μετρική, όσο και στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας. Όλες αυτές οι μη-κβαντικές θεωρίες μοιράζονται δύο στοιχειώδη χαρακτηριστικά. Μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (την εξίσωση κίνησης) και μία Riemannian πολλαπλότητα στην οποία λαμβάνει χώρα η κίνηση. Η δ.ε. κίνησης επιδέχεται συγκεκριμένες σημειακές συμμετρίες Lie και Noether, οι οποίες και την χαρακτηρίζουν, βλέπε [40], [41]. Επίσης η μετρική του χώρου χαρακτηρίζεται από τις συμμετρίες που επιδέχεται (KVs, HV, CKVs, AC, PCs), βλέπε [42]. Το ερώτημα που προκύπτει είναι η συσχέτιση των εξισώσεων κίνησης και των συμμετριών που διαμορφώνουν τη μετρική του χώρου, βλέπε [43–51] και άλλους.

Σε αυτό, το Κεφάλαιο ακολουθούμε τη μεθοδολογία των Τσαμπαρλή και Παλιαθάναση, βλέπε [57], [58], [186] και επεκτείνουμε τα αποτελέσματα τους στην περίπτωση ολόνομων δυναμικών συστημάτων υπό τη δράση δυνάμεων που προέρχονται από χρονοεξαρτώμενο δυναμικό, βλέπε [52]. Διατυπώνουμε δύο θεωρήματα, σύμφωνα με τα οποία υπολογίζουμε τις σημειακές συμμετρίες Lie και Noether των εξισώσεων κίνησης του δυναμικού συστήματος, σύμφωνα με τις συμμετρίες που επιδέχεται η μετρική.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε αυτά τα θεωρήματα στην περίπτωση του χρονοεξαρτώμενου αρμονικού ταλαντωτή, βλέπε [59, 60], [171] και αυτήν του χρονοεξαρτώμενου δυναμικού Kepler, βλέπε [61], για Ευκλείδεια μετρική. Κατόπιν, εφαρμόζουμε τα δύο θεωρήματα στην περίπτωση του γενικευμένου χρονικά εξαρτώμενου κεντρικού δυναμικού όταν η κίνηση λαμβάνει χώρα τόσο στην Ευκλείδια μετρική, όσο και σε χώρο σταθερής καμπυλότητας και προσδιορίζουμε τις συμμετρίες Lie και Noether. Τέλος, μελετάμε την περίπτωση του χρονοεξαρτώμενου αρμονικού ταλαντωτή, σε χώρο σταθερής καμπυλότητας και προσδιορίζουμε τις αντίστοιχες συμμετρίες Lie και Noether. Ποιο αναλυτικά εργαζόμαστε ως εξής.

Στην ενότητα 5.1 αποδεικνύουμε το θεώρημα μέσω του οποίου προσδιορίζουμε τις συμμετρίες Lie, χρησιμοποιώντας τις ειδικές προβολικές συμμετρίες (special Projective Collineations) της μετρικής. Αυτές οι συμμετρίες, συνοδεύονται από συνθήκες/περιορισμούς που περιέχουν τη συνάρτηση του δυναμικού, η οποία με τη σειρά της καθορίζει το δυναμικό σύστημα.

Στην ενότητα 5.2 αποδεικνύουμε το θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο επιλύουμε τις συνθήκες Noether μέσω της ομοθετικής άλγεβρας που επιδέχεται η μετρική (δηλαδή, μέσω των KVs και του HV) και των περιορισμών που επιβάλλονται από τις εξισώσεις που περιέχουν τη συνάρτηση δυναμικού.

Στην ενότητα 5.3 αποδεικνύουμε την ισοδυναμία ενός συστήματος που παρουσιάζει γραμμική απόσβεση με ένα δυναμικό σύστημα που είναι χρονικά εξηρτημένο. Στη συνέχεια μέσω των δύο θεωρημάτων που έχουμε διατυπώσει, προσδιορίζουμε τις συμμετρίες Lie και Noether για δυναμικά συστήματα που παρουσιάζουν γραμμική απόσβεση.

Στην ενότητα 5.4 εφαρμόζουμε τα θεωρήματα, τόσο σε ήδη γνωστά προβλήματα όσο και σε νέα. Τέλος, στην ενότητα 5.5 διατυπώνουμε τα συμπεράσματα μας.

5.1 Συμμετρίες Lie για μία κατηγορία μη αυτόνομων συστημάτων

Έστω μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα με συνάρτηση δυναμικού της μορφής $W(t,x) = \omega(t)\, V(x),$. Τότε οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k + \omega(t)\, V^{,i} = 0 \quad , \omega_{,t}V^{,i} \neq 0, V(x^i). \tag{5.1}$$

Οι Τσαμπαρλής και Παλιαθανάσης, βλέπε [57], έχουν προσδιορίσει όλες τις συμμετρίες Lie που επιδέχεται κάποιο σύστημα του οποίου οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από τη σχέση:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k + \sum_{m=0}^{n} P^i_{j_1\ldots j_m}\dot{x}^{j_1}\ldots\dot{x}^{j_m} = 0, \tag{5.2}$$

όπου Γ^i_{jk} είναι οι συνιστώσες της συνοχής σε έναν αφινικό χώρο και $P^i_{j_1\ldots j_m}(t,x)$, είναι λείες πολυώνυμικες συναρτήσεις, συμμετρικές στην εναλλαγή των δεικτών $j_1 ... j_m$. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (5.1) και (5.2) προκύπτει ότι $P^i \neq 0$ ενώ οι υπόλοιποι P- όροι μηδενίζονται. Τότε οι συνθήκες ύπαρξης σημειακής συμμετρίας Lie παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$L_\eta P^i + \xi P^i{}_{,t} + 2\xi_{,t}\, P^i + \eta^i{}_{,tt} = 0 \tag{5.3}$$

$$\left(\xi_{,k}\,\delta^i_j + 2\xi_{,j}\,\delta^i_k\right) P^k + 2\eta^i{}_{,t|j} - \xi_{,tt}\,\delta^i_j = 0 \tag{5.4}$$

$$L_\eta \Gamma^i_{(jk)} = 2\xi_{,t(j}\,\delta^i_{k)} \tag{5.5}$$

$$\xi_{(,i|j}\delta^k_{r)} = 0, \tag{5.6}$$

όπου $X = \xi(t,x^j)\partial_t + \eta^i(t,x^j)\partial_{x^i}$ είναι ο γεννήτορας της συμμετρίας.

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην περίπτωση που μελετάμε θεωρούμε ότι

$$P^i\left(t,x^k\right) = \omega(t)\, V^{,i}\left(x^k\right).$$

οπότε οι συνθήκες ύπαρξης συμμετρίας Lie των εξισώσεων κίνησης (5.1) είναι οι ακόλουθες

$$\omega L_\eta V^{,i} + \xi\omega_{,t}V^{,i} + 2\omega\xi_{,t}\, V^{,i} + \eta^i{}_{,tt} = 0 \tag{5.7}$$

$$\omega\left(\xi_{,k}\,\delta^i_j + 2\xi_{,j}\,\delta^i_k\right) V^{,k} + 2\eta^i{}_{,t|j} - \xi_{,tt}\,\delta^i_j = 0 \tag{5.8}$$

$$L_\eta \Gamma^i_{(jk)} = 2\xi_{,t(j}\,\delta^i_{k)} \tag{5.9}$$

$$\xi_{(,i|j}\delta^k_{r)} = 0. \tag{5.10}$$

Στη συνέχεια λύνουμε ο σύστημα αυτών των εξισώσεων ακολουθώντας ανάλογη μέθοδο με τη λύση του αντίστοιχου συστήματος ενός αυτόνομου συστήματος (βλέπε [57]). Διατυπώνουμε τη λύση στο ακόουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.1 *Οι σημειακές συμμετρίες Lie ενός χρονοεξαρτώμενου δυναμικού συστήματος με εξίσωσης κίνησης:*

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k + \omega(t)\, V^{,i} = 0 \quad , \ \omega_{,t} \neq 0, \tag{5.11}$$

προέρχονται από τις ειδικές προβολικές συμμετρίες (special PCs) της μετρικής g_{ij}, του χώρου Riemann στον οποίο λαμβάνει χώρα η κίνηση. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. Οι συμμετρίες Lie προέρχονται από τη αφινική άλγεβρα Y^i της μετρικής. Τότε διακρίνουμε δύο υπό- περιπτώσεις:

I.1. Η συνάρτηση $\omega(t)$, δίνεται από τη σχέση: $\omega(t) = \frac{1}{(d_1 t + d_2)^2}$.

Τότε, οι σημειακές συμμετρίες Lie, για σύστημα με συνάρτηση δυναμικού $V(x^i)$, προέρχονται από το διάνυσμα:

$$X = (d_1 t + d_2)\,\partial_t \tag{5.12}$$

I.2. Οι συμμετρίες Lie για $\omega(t) \neq \frac{1}{(d_1 t + d_2)^2}$ παράγονται από το διανυσματικό πεδίο:

$$X = (d_1 t + d_2)\,\partial_t + a_1 Y^i, \tag{5.13}$$

όπου οι σταθερές a_1, d_1, ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$(d_1 t + d_2)(\ln\omega)_{,t} = d_1 - 2d_2.$$

Η συνάρτηση του δυναμικού ικανοποιεί τη σχέση

$$a_1 L_Y V^{,i} + d_1 V^{,i} = 0. \tag{5.14}$$

II. Οι συμμετρίες Lie προέρχονται από τα βαθμωτά KVs και/ ή το βαθμωτό HV Y^i της μετρικής, όπου $Y^i \neq V^{,i}$. Τότε, ο γεννήτορας της συμμετρίας Lie, δίνεται από τη σχέση:

$$X = D(t)\,\partial_t + T(t) Y^i \partial_i, \tag{5.15}$$

όπου οι συναρτήσεις $D(t), T(t)$, προσδιορίζονται μέσω των εξισώσεων:

$$D(\ln\omega)_{,t} + 2D_{,t} = d_0 T \tag{5.16}$$

$$T_{,tt} = m\omega T, \tag{5.17}$$

ενώ το βαθμωτό διανυσματικό πεδίο $V^{,i}$ ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$L_Y V^{,i} + d_0 V^{,i} + m Y^i = 0. \tag{5.18}$$

III. Οι σημειακές συμμετρίες Lie προέρχονται από το διανυσματικό πεδίο, $Y^i = kV^{,i}$ το οποίο είναι είτε βαθμωτό KV, είτε βαθμωτό HV της μετρικής. Τότε, ο γεννήτορας της συμμετρίας δίνεται από τη σχέση:

$$X = D(t)\,\partial_t + T(t) Y^i \partial_i, \tag{5.19}$$

όπου οι συναρτήσεις $D(t), T(t)$, ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$D(\ln\omega)_{,t} + 2D_{,t} + \frac{k}{\omega} T = 0 \tag{5.20}$$

$$D_{,tt} = 2\psi T_{,t}, \tag{5.21}$$

όπου $\psi = 0$, για κάθε KV και $\psi = 1$, για το H˝.

IV. Οι σημειακές συμμετρίες Lie προέρχονται από το proper special PC διάνυσμα Y^i. Τότε, ο γεννήτορας της συμμετρίας δίνεται από τη σχέση:

$$X = (C(t) S_J + D(t))\,\partial_t + T(t) S_J V^{,i} \partial_i, \tag{5.22}$$

όπου οι συναρτήσεις $C(t), D(t), T(t)$, ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$D(\ln\omega)_{,t} + \frac{2D_{,t}}{T} = 0 \tag{5.23}$$

$$D_{,tt} = 0 \tag{5.24}$$

$$\frac{C}{T}(\ln\omega)_{,t} + 2\frac{C_{,t}}{T} + \frac{\lambda}{\omega T} T_{,tt} = \lambda_1 \tag{5.25}$$

$$T_{,t} = a_7 \omega C \tag{5.26}$$

$$C_{,t} = a_0 T, \tag{5.27}$$

ενώ το βαθμωτό διανυσματικό πεδίο $V^{,i}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$V^{i},\ \textit{βαθμωτό HV}$$

$$S_{J,j}V^{,j} - \lambda_1 S_J = 0 \tag{5.28}$$

$$\left(S_{J,k}\delta^i_j + 2S_{J},_j\,\delta^i_k\right)V^{,k} + a_7\left(2Y^{;i}_{J\;;\;j} - a_0 S_J\delta^i_j\right) = 0, \tag{5.29}$$

όπου $S^{;i}_{J}$, είναι τα βαθμωτά KVs της μετρικής.

Στην επόμενη ενότητα, μελετάμε τις σημειακές συμμετρίες Noether.

5.2 Συμμετρίες Noether για μία κατηγορία μη αυτόνομων συστημάτων

Έστω σωματίδιο που κινείται σε χώρο με μετρική g_{ij}, κάτω από την επίδραση συνάρτησης δυναμικού $V\left(t,x^k\right)$. Τότε η Lagrangian που περιγράφει τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα είναι:

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - V\left(t,x^k\right). \tag{5.30}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X} = \xi\left(t,x^k\right)\partial_t + \eta^i\left(t,x^k\right)\partial_{x^i}$, ορισμένο σε αυτό το χώρο, αποτελεί σημειακή συμμετρία Noether της συνάρτησης Lagrange εάν ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{X}^{[1]}L + \frac{d\xi}{dt}L = \frac{df}{dt}, \tag{5.31}$$

όπου $\mathbf{X}^{[1]} = \xi\left(t,x^k\right)\partial_t + \eta^i\left(t,x^k\right)\partial_{x^i} + \left(\frac{d\eta^i}{dt} - \dot{x}^i\frac{d\xi}{dt}\right)\partial_{\dot{x}^i}$, είναι η πρώτη επέκταση του $\mathbf{X}$.
Ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους είναι:

$$\begin{aligned} X^{[1]}L &= \left(\xi\partial_t + \eta^i\partial_{x^i} + \left(\frac{d\eta^k}{dt} - \dot{x}^k\frac{d\xi}{dt}\right)\partial_{\dot{x}^k}\right)\left(\frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - V\left(t,x^k\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \eta^k g_{ij,k}\dot{x}^i\dot{x}^j + 2\frac{\partial\eta^i}{\partial t}g_{ij}\dot{x}^j + \frac{\partial\eta^i}{\partial x^r}g_{ik}\dot{x}^k\dot{x}^r + \\ +\frac{\partial\eta^j}{\partial x^r}g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^r - 2g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\frac{\partial\xi}{\partial t} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x^k}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k - 2V_{,k}\eta^k - 2\xi V_{,t} \end{array}\right). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους δίνει:

$$\left(\xi_{,t} + \dot{x}^r\xi_{,r}\right)\left(\frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - V\right) = \frac{1}{2}\left(\xi_{,t}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - 2V\xi_{,t} + g_{ij}\xi_{,k}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k - 2\dot{x}^k\xi_{,k}V\right). \tag{5.33}$$

Το δεξί μέλος γράφεται:

$$\frac{df}{dt} = f_t + \dot{x}^k f_{,k}. \tag{5.34}$$

Αντικαθιστώντας τα ανωτέρω, στην εξίσωση (5.31) και παραγοντοποιώντας την ως προς τις συναρτήσεις $\dot{x}^k$, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$V_{,k}\eta^k + V\xi_{,t} + \xi V_{,t} = -f_{,t} \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial\eta^i}{\partial t}g_{ij} - \xi_{,j}V = f_{,j} \tag{5.36}$$

$$L_\eta g_{ij} = 2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)g_{ij} \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^k} = 0. \tag{5.38}$$

Η εξίσωση (5.37), υποδηλώνει ότι $\xi = \xi\left(t\right)$ και το σύστημα των εξισωσεων απλοποιείται στο ακόλουθο:

$$L_{\eta}g_{ij} = 2\left(\frac{1}{2}\xi_{,t}\right)g_{ij} \tag{5.39}$$

$$V_{,k}\eta^{k} + V\xi_{,t} + \xi V_{,t} = -f_{,t} \tag{5.40}$$

$$\eta_{i,t} = f_{,i}. \tag{5.41}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (5.39) - (5.41), το δυναμικό της μορφής:

$$V\left(t, x^{k}\right) = \omega\left(t\right)V\left(x^{k}\right) \tag{5.42}$$

αυτές γράφονται:

$$L_{\eta}g_{ij} = 2\left(\frac{1}{2}\xi_{,t}\right)g_{ij} \tag{5.43}$$

$$V_{,k}\eta^{k} + \left(\xi_{,t} + \left(\ln\omega\right)_{,t}\xi\right)V = -\frac{f_{,t}}{\omega} \tag{5.44}$$

$$\eta_{i,t} = f_{,i}. \tag{5.45}$$

Οι εξισώσεις (5.43)-(5.45) αποτελούν τις συνθήκες προκειμένου το μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα που θεωρήσαμε να επιδέχεται συμμετρίες Noether. Η λύση του συστήματος δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω δυναμικό σύστημα του οποίου η Lagrangian είναι:*

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^{i}\dot{x}^{j} - \omega\left(t\right)V\left(x^{k}\right)\ ,\ \omega_{,t} \neq 0. \tag{5.46}$$

Τότε, για τις σημειακές συμμετρίες Noether που προέρχονται από την ομοθετική άλγεβρα της μετρικής (δηλαδή, τα KVs και το HV) διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. Οι σημειακές συμμετρίες Noether προέρχονται από τα KVs και το HV Y^{i}.
Τότε, ο γεννήτορας της συμμετρίας και η συνάρτηση της Noether αντίστοιχα, είναι:

$$X = \left(2a_{1}\psi_{Y}t + d_{1}\right)\partial_{t} + a_{1}Y^{i}\partial_{i}\ ,\ \ f = c_{2}\int\omega dt, \tag{5.47}$$

όπου οι σταθερές της κίνησης δίνονται από τη σχέση:

$$\left(\ln\omega\right)_{,t}\left(2\psi_{Y}t + d_{2}\right) = d_{1}, \tag{5.48}$$

ενώ η συνάρτηση δυναμικού $V(x^{i})$, ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$V_{,k}Y^{k} + d_{2}V + c_{2} = 0. \tag{5.49}$$

Με ψ_{Y} συμβολίζουμε μία σταθερά, όπου για τα KVs ισούται με μηδέν, ενώ για το HV είναι μη μηδενική (και χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με 1)

II *Οι συμμετρίες Noether προέρχονται από τα gradient KVs και/ ή το gradient HV $Y^{;i}$:.*
Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.
II.1. Το $V^{,i}$, δεν αποτελεί gradient HV. Τότε, ο γεννήτορας της συμμετρίας και η συνάρτηση Noether αντίστοιχα, είναι:

$$X = \xi(t)\partial_{t} + T(t)S_{J}^{i}\partial_{i}\ ,\ f = T_{,t}S, \tag{5.50}$$

όπου ο δείκτης J, αναφέρεται στο πλήθος των gradient KVs που επιδέχεται η μετρική. Οι συναρτήσεις $\xi(t), T(t)$, καθώς και οι σταθερές υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων:

$$\xi_{,t} = 2\psi_{Y}T \tag{5.51}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{T_{,tt}}{T} = m \tag{5.52}$$

$$\frac{1}{T}\left(\ln\omega\right)_{,t}\xi = d_{1} \tag{5.53}$$

$$\frac{1}{T}\frac{K_{,t}}{\omega} = k, \tag{5.54}$$

ενώ η συνάρτηση δυναμικού ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$V_{,k}Y^{k}+2\psi_{Y}V+d_{1}V+mS+k=0. \tag{5.55}$$

II.b. Το $V^{,i}$, αποτελεί gradient KV της μετρικής. Τότε ο γεννήτορας της συμμετρίας και η αντίστοιχη συνάρτηση Noether, έχουν την έκφραση:

$$X=\xi(t)\partial_{t}+T(t)V^{i}\partial_{i}\ ,\ f=T_{,t}S+K\left(t\right). \tag{5.56}$$

Οι συναρτήσεις $\xi(t),T(t)$, υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\xi_{,t}=2\psi_{Y}T \tag{5.57}$$

$$\lambda\frac{1}{T}\frac{T_{,tt}}{\omega}+\frac{\left(\ln\omega\right)_{,t}\xi}{T}=d_{2} \tag{5.58}$$

$$\frac{1}{T}\frac{K_{,t}}{\omega}=k, \tag{5.59}$$

ενώ η συνάρτηση δυναμικού $V(x^{i})$, πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$V_{,k}Y^{k}+(2\psi_{Y}+d_{2})V+k=0. \tag{5.60}$$

5.3 Η σχέση ισοδυναμίας μεταξύ ενός δυναμικού συστήματος με γραμμική απόσβεση και ενός χρονικά εξαρτώμενου δυναμικού συστήματος

Έστω δυναμικό σύστημα ορισμένο σε χώρο Riemann, με μετρική g_{ij} το οποίο βρίσκεται κάτω από την επίδραση μίας γραμμικής δύναμης με απόσβεση, της μορφής $\phi\left(t\right)\dot{x}^{i}$, και μίας συντηρητικής δύναμης που προέρχεται από συνάρτηση δυναμικού $V\left(x^{i}\right)$. Τότε η εξίσωση κίνησής του περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{d^{2}x^{i}}{dt^{2}}+\Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{dx^{k}}{dt}+\phi\left(t\right)\frac{dx^{i}}{dt}+V^{,i}=0. \tag{5.61}$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό, $t\rightarrow s=S(t)$, η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\frac{d^{2}x^{i}}{ds^{2}}+\Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}+\frac{1}{\left(\frac{dS(t)}{dt}\right)^{2}}\left(\left(\frac{d^{2}S\left(t\right)}{dt^{2}}\right)+\phi\left(t\right)\frac{dS\left(t\right)}{dt}\right)\frac{dx^{i}}{ds}+\frac{1}{\left(\frac{dS(t)}{dt}\right)^{2}}V^{,i}=0. \tag{5.62}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση $S(t)$, με την απαίτηση:

$$\left(\frac{d^{2}S\left(t\right)}{dt^{2}}\right)+\phi\left(t\right)\frac{dS\left(t\right)}{dt}=0. \tag{5.63}$$

και η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^{2}x^{i}}{ds^{2}}+\Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}+\frac{1}{\left(\frac{dS(t)}{dt}\right)^{2}}V^{,i}=0. \tag{5.64}$$

Η λύση της εξίσωσης (5.63) είναι $S(t)=\int e^{-\int\phi(t)dt}dt$. Επειδή η συνάρτηση $S(t)$, αποτελεί προϊόν σημειακού μετασχηματισμού, πρέπει να υπάρχει αντίστροφη, ώστε $t=S^{-1}\left(s\right)\quad,\ S\left(S^{-1}\left(s\right)\right)=s$. Επομένως, η εξίσωση κίνησης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d^{2}x^{i}}{ds^{2}}+\Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}+\left(\frac{dS^{-1}\left(s\right)}{ds}\right)^{2}V^{,i}=0. \tag{5.65}$$

Θέτοντας,

$$\omega(s) = \left(\frac{dS^{-1}(s)}{ds}\right)^2, \tag{5.66}$$

η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \omega(s)V^{,i} = 0 \tag{5.67}$$

Αυτή ταυτίζεται με την εξίσωση (5.1). Επομένως, εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε κάθε σημειακή συμμετρία Lie και Noether, για τα δυναμικά συστήματα με γραμμική απόσβεση, των οποίων οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από την εξίσωση (5.61).

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τα παραπάνω στη περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με γραμμική απόσβεση σε χώρο σταθερής καμπυλότητας. Η εξίσωση κίνησης περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \omega(t)x^i = 0 \;,\; \omega(t) = \frac{\gamma^2}{t^2}. \tag{5.68}$$

Τότε, μέσω της σχέσης (5.66), ορίζουμε τον μετασχηματισμό:

$$\left(\frac{dS^{-1}(t)}{dt}\right) = \frac{\gamma}{t} \to S^{-1}(t) = \gamma \ln t = s. \tag{5.69}$$

Η συνάρτηση $S(t)$, είναι $1:1$. Επομένως έχει αντίστροφη η οποία είναι:

$$t = e^{\frac{1}{\gamma}s}. \tag{5.70}$$

Άρα:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)\left(\gamma\frac{d(\ln t)}{dt}\right)^2 + \frac{dx^i}{ds}\left(\gamma\frac{d^2}{dt^2}(\ln t)\right).$$

Η εξίσωση (5.68), γράφεται:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{\gamma^2}{t^2} - \frac{dx^i}{ds}\frac{\gamma}{t^2} + \frac{\gamma^2}{t^2}x = 0,$$

ή αλλιώς:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} - \frac{1}{\gamma}\frac{dx^i}{ds} + x^i = 0, \tag{5.71}$$

η οποία περιγράφει την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ταλαντωτής με χρονική εξάρτιση επιδέχεται τις ίδιες σημειακές συμμετρίες (Lie και Noether) με τον αρμονικό ταλαντωτή που παρουσιάζει γραμμική απόσβεση, βλέπε [62, 63].

5.4 Εφαρμογές - Παραδείγματα

Σε αυτήν την ενότητα εφαρμόζουμε τα παραπάνω σε γνωστά συστήματα και προσδιορίζουμε τις σημειακές συμμετρίες (Lie και Noether) που επιδέχονται

5.4.1 Δυναμικά συστήματα με χρονικά εξαρτώμενο κεντρικό δυναμικό

Θεωρούμε χρονικά εξαρτώμενο κεντρικό δυναμικό της μορφής $V(t,r) = \omega(t)\frac{1}{n}r^n$ για δυναμικό σύστημα που κινείται σε Ευκλείδειο χώρο και προσδιορίζουμε τις σημειακές συμμετρίες (Lie και Noether). Η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι:

$$\ddot{x}^i + \omega(t)\frac{1}{n}r^n x^i = 0 \;,\; (n \neq 0, -2, 2). \tag{5.72}$$

Η περίπτωση με $n = 2$, αντιστοιχεί στον αρμονικό ταλαντωτή, ενώ όταν $n = -2$ παρουσιάζεται ανωμαλία (singular case). Τέλος, όταν $n = 1$, παίρνουμε την περίπτωση του δυναμικού Kepler.

Συμμετρίες Lie

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.1 από το οποίο προκύπτει ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα βρίσκει εφαρμογή μόνο η περίπτωση II. Η συνθήκη (5.16) ικανοποιείται από τα μη βαθμωτά KVs X_{IJ} όταν $d_1 = 0$ και το βαθμωτό HV H^i για $d_1' = (2-n)$. Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες συμμετρίες Lie:

$$X = a_1 \left(d_2 t + d_3\right) \partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i,$$

όπου οι σταθερές d_2, d_3 πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\left(d_2 t + d_3\right) \left(\ln \omega\right)_{,t} = (2-n) - 2d_2.$$

Αυτό συμβαίνει όταν $\omega(t) = t^a$, , με $a \neq -2$, ή αλλοιώς $\left(\ln \omega\right)_{,t} = \frac{a}{t}$. Σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε $d_3 = 0$ και $d_2 = \frac{(2-n)}{a+2}$. Επομένως, καταλήγουμε στις σημειακές συμμετρίες Lie:

$$X = a_1 \left(\frac{(2-n)}{a+2} t\right) \partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i,$$

όταν $\omega(t) = t^a$, με $a \neq -2$. Μετά από πράξεις έχουμε ότι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός που προέρχεται από τον γεννήτορα της συμμετρίας Lie και αντιστοιχεί στην παράμετρο a_1 έχει το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\frac{r^{(2-n)}}{t^{(a+2)}} = \text{constant}. \tag{5.73}$$

Συνεπώς, όταν $\omega(t) = t^a$, όπου $a \neq -2$ παίρνουμε τον γενικευμένο τρίτο νόμο του Kepler για την περίπτωση ενός χρονοεξαρτώμενου κεντρικού δυναμικού, $V(t,r) = t^a r^{n-2}$, $(a \neq -2, n \neq 0, -2, 2)$.

Συμμετρίες Noether

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.2 για τη συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{1}{n}r^n, \tag{5.74}$$

και από την πρώτη περίπτωση αυτού έχουμε.

Η συνθήκη (5.49) ικανοποιείται από τα non gradient KVs X_{IJ} , όταν $d_1 = 0$ και από το gradient HV H^i , όταν $d_1 = (n+2)$. Σύμφωνα με αυτά, καταλήγουμε στον παρακάτω γεννήτορα συμμετρίας Noether:

$$X = a_1 \left(2t + d_2\right) \partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i,$$

όπου η σταθερά d_2, ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\left(\ln \omega\right)_{,t} \left(2t + d_2\right) = -\left(n+2\right).$$

Αυτό είναι εφικτό μόνο όταν $\omega(t) = t^{-\frac{n+2}{2}}$. Δηλαδή $\left(\ln \omega\right)_{,t} = -\frac{n+2}{2t}$ και $d_2 = 0$. Τότε, παίρνουμε τις σημειακές συμμετρίες Noether:

$$X = a_1 2t\partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i.$$

Αυτές είναι Lie όταν $a = -\frac{n+2}{2}$ και $n \neq 4$.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $\omega(t) = t^{-\frac{n+2}{2}}$, τα διατηρούμενα ρεύματα Noether είναι:

$$\begin{aligned} I_0 &= X^i_{IJ}\dot{x}_i \\ I_1 &= 2t\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{n}r^n\right) - H^i\dot{x}_i. \end{aligned}$$

Η συμμετρία Noether που αντιστοιχεί στην παράμετρο a_1 δίνει το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\frac{r^2}{t} = \text{constant}, \tag{5.75}$$

το οποίο προέρχεται από την εξίσωση (5.73), εάν θέσουμε $a = -\frac{n+2}{2}$.

5.4.2 Το δυναμικό σύστημα με $W(r) = \omega(t) r^{-4}$

Αυτό το δυναμικό σύστημα αποτελεί μία ειδική περίπτωση του προαναφερθέντος παραδείγματος την οποία είχαμε αγνοήσει στην παραπάνω ανάλυση. Οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από την εξίσωση:

$$\ddot{x}^i + \omega(t) x^i r^{-4} = 0. \tag{5.76}$$

Συμμετρίες Lie

Σύμφωνα με το θεώρημα 5.1 και συγκεκριμένα την περίπτωση II, έχουμε ότι η συνθήκη (5.16), ικανοποιείται από τα μη βαθμωτά KVs X_{IJ} για $d_1 = 0$ και το βαθμωτό HV όταν H^i , $d_1' = 4$. Επομένως, οι συμμετρίες Lie είναι:

$$X = a_1 (d_2 t + d_3) \partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i,$$

όπου οι σταθερές d_2, d_3, ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$(d_2 t + d_3)(\ln \omega)_{,t} = 4 - 2d_2.$$

Αυτό είναι εφικτό μόνον εάν $\omega(t) = t^a$, $a \neq -2$ και $d_3 = 0$, $d_2 = \frac{4}{a+2}$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι σημειακές συμμετρίες Lie παράγονται από το διάνυσμα:

$$X = a_1 \left(\frac{4}{a+2} t\right) \partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i. \tag{5.77}$$

Η συμμετρία Lie που αντιστοιχεί στην παράμετρο a_1, δίνει τη διατηρήσιμη ποσότητα

$$\frac{r^4}{t^{(a+2)}} = \text{σταθερό}, \tag{5.78}$$

που αποτελεί γενίκευση του νόμου του Kepler.

Μέσω της περίπτωσης III προκύπτει η επιπλέον συμμετρία Lie, η οποία προέρχεται από το βαθμωτό HV $H^{,i}$ όταν θέσουμε $d_1 = 4$, $m = 0$. Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (5.19) - (5.21) υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $D(t), T(t)$ και προσδιορίζουμε τη σημειακή συμμετρία Lie της σχέσης (5.18). Όταν $\omega(t) = t^a$, $a \neq -2$ έχουμε ότι:

$$T(t) = c_1 \ , \quad D(t) = \frac{4c_1}{a+2} t,$$

η οποία απορρίπτεται καθώς έχουμε υποθέσει ότι $T_{,t} \neq 0$.

Οι συμμετρίες Lie για το δυναμικό της μορφής $V(t,r) = t^a r^{-4}$ $a \neq -2$, έχουν την ίδια άλγεβρα με αυτή στην περίπτωση του κεντρικού δυναμικού της μορφής $V(t,r) = t^a r^{-n}$.

Συμμετρίες Noether

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}r^{-2}. \tag{5.79}$$

Από το θεώρημα 5.2 και την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι η συνθήκη (5.49), ικανοποιείται από τα μη βαθμωτά KVs X_{IJ} όταν $d_1 = 0$ και το HV H^i για $d_1 = 0$. Επομένως έχουμε τις ακόλουθες συμμετρίες Noether:

$$X = a_1 (2t + d_2) \partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right) \partial_i,$$

όπου η σταθερά d_2 ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(\ln \omega)_{,t} (2t + d_2) = 0.$$

Αυτή όμως είναι αδύνατη. Επομένως, η Lagrangian δεν επιδέχεται κάποια συμμετρία Noether.

Από τη δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος έχουμε ότι το σύστημα επιδέχεται σημειακή συμμετρία Noether, η οποία προέρχεται από το βαθμωτό HV H^i όταν $d_1 = 0$, $m = 0$. Τότε, το σύστημα των εξισώσεων (5.51) - (5.53) επιδέχεται την τετριμμένη λύση $\omega(t)$ =σταθερά. Άρα και σε αυτήν την περίπτωση η Lagrangian δεν επιδέχεται κάποια συμμετρία Noether.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι η Lagrangian (5.79), επιδέχεται τις συμμετρίες Noether:

$$X = X_{IJ}$$

όπου τα αντίστοιχα διατηρούμενα ρεύματα δίνονται από την εξίσωση:

$$I_0 = X^i_{IJ}\dot{x}_j.$$

Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις κεντρικού δυναμικού, δεν υπάρχει κάποια συνάρτηση $\omega(t)$, σύμφωνα με την οποία η Lagrangian επιδέχεται κάποια συμμετρία Noether.

5.4.3 Το χρονοεξαρτώμενο δυναμικό σύστημα Kepler $W(r) = \omega(t)r^{-2}$

Αυτή η περίπτωση είναι η δεύτερη ειδική περίπτωση για το γενικευμένο κεντρικό δυναμικό. Στην περίπτωση της Ευκλείδειας μετρικής, οι σημειακές συμμετρίες Lie έχουν προσδιοριστεί από τον Prince, βλέπε [61]. Ωστόσο, στην περίπτωση δυναμικού συστήματος Kepler, όταν η κίνηση πραγματοποιείται σε χώρο σταθερής καμπυλότητας, βλέπε [64] οι συμμετρίες Lie και Noether δεν έχουν ακόμα βρεθεί.

Σημειακές συμμετρίες Lie

Η εξίσωση κίνησης δίνεται μέσω της:

$$\ddot{x}^i + x^i\frac{\omega(t)}{r^2} = 0. \tag{5.80}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.1.1 σύμφωνα με το οποίο διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση II
Η συνθήκη (5.16) ικανοποιείται από τα μη βαθμωτά KVs X_{IJ}, όταν $d_1 = 0$ και από το HV H^i, όταν $d_1' = 3$. Επομένως, έχουμε τις ακόλουθες συμμετρίες Lie:

$$X = a_1(d_2 t + d_3)\partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right)\partial_i,$$

στην οποία οι σταθερές d_2, d_3, ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$(d_2 t + d_3)(\ln\omega)_{,t} = 3 - 2d_2.$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύση μόνο όταν $\omega(t) = t^a$ $(a \neq -2)$, $d_3 = 0, d_2 = \frac{3}{a+2}$. Συνεπώς, παίρνουμε την ακόλουθη συμμετρία Lie:

$$X = a_1\left(\frac{3}{a+2}t\right)\partial_t + \left(a_0 X_{IJ} + a_1 H^i\right)\partial_i,$$

με $\omega(t) = t^a$ $(a \neq -2)$.

Κάτω από τη δράση του σημειακού μετασχηματισμού που αντιστοιχεί στην παράμετρο a_1, οδηγεί στη διατήρηση της ακόλουθης ποσότητας:

$$\frac{r^3}{t^{(a+2)}} = \text{constant}, \tag{5.81}$$

η οποία αποτελεί γενίκευση του τρίτου νόμου του Kepler

Οι περιπτώσεις III και IV δεν δίνουν επιπλέον σημειακές συμμετρίες Lie.

Συμμετρίες Noether

Η Lagrangian μέσω τις οποίας παράγονται οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$L = \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + r^{-1}. \tag{5.82}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.2 και διακρίνουμε περιπτώσεις.

Περίπτωση I

Η συνθήκη (5.49) ικανοποιείται από τα μη βαθμωτά KVs X_{IJ} , όταν $d_1 = 0$ και από το HV H^i , όταν $d_1 = q$. Επομένως, παράγονται οι ακόλουθες σημειακές συμμετρίες Noether:

$$X = a_1\left(2t + d_2\right)\partial_t + \left(a_0X_{IJ} + a_1H^i\right)\partial_i$$

όπου η παράμετρος d_2 πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\left(\ln\omega\right)_{,t}\left(2t + d_2\right) = -1.$$

Αυτό συμβαίνει όταν $\omega\left(t\right) = t^{-\frac{1}{2}}$, δηλαδή όταν οταν $\left(\ln\omega\right)_{,t} = -\frac{1}{2t}$ και $d_2 = 0$. Τότε, η συμμετρία Noether είναι:

$$X = a_1 2t\partial_t + \left(a_0X_{IJ} + a_1H^i\right)\partial_i,$$

με $\omega\left(t\right) = t^{-\frac{1}{2}}$.

Η περίπτωση II δεν δίνει άλλες συμμετρίες Noether.

Τα πρώτα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στις συμμετρίες Noether είναι:

$$I_0 = X^i_{IJ}\dot{x}_i \tag{5.83}$$

$$I_1 = 2t\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - r^{-1}\right) - H^i\dot{x}_i. \tag{5.84}$$

Η συμμετρία Noether που σχετίζεται με την παράμετρο a_1 παράγει τη διατηρούμενη ποσότητα (τρίτος νόμος του Kepler):

$$\frac{r^2}{t} = \text{constant}, \tag{5.85}$$

το οποίο ταυτίζεται με την εξίσωση (5.81), όταν $a = -\frac{1}{2}$.

Στην περίπτωση κατά την οποία $\omega\left(t\right) = t^{\frac{1}{2}}$, το δυναμικό του Kepler δίνει τον ίδιο αριθμό συμμετριών (Lie και Noether) με αυτές του σκληρόνομου συστήματος (χρονοανεξάρτητο σύστημα). Τέλος, οι συμμετρίες Noether παραμένουν ίδιες και στις δύο περιπτώσεις.

5.4.4 Χρονοεξαρτώμενος αρμονικός ταλαντωτής στον Ευκλείδειο χώρο

Τέλος, μελετάμε την περίπτωση του χρονοεξαρτώμενου αρμονικού ταλαντωτή στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου. Αυτή η περίπτωση έχει μελετηθεί εκτενώς μέσω της καθιερωμένης προσέγγισης του Lie, βλέπε [60], [171]. Εμείς χρησιμοποιούμε το θεώρημα 5.1.1 και εξάγουμε τα αποτελέσματα αυτά εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της προβολικής άλγεβρας του Ευκλείδειου χώρου. Έχουμε ότι η εξίσωση κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$\ddot{x}^i + \omega\left(t\right)x = 0\ ,\quad \omega\left(t\right) \neq \frac{1}{4t^2}. \tag{5.86}$$

Η προβολική άλγεβρα για τον Ευκλείδειο χώρο αποτελείται από τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία:

$$S_I^{,i} : \text{gradient KV}\ ,\ \mathbf{X}_{IJ} : \text{nongradient KV}$$
$$H^{,i} : \text{gradient HV}\ \ ,\ A_I^i : \text{Affine Collineation}$$
$$P_I^i : \text{special PC}.$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αυτά γράφονται:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_I &= S_I^{;i}\partial_i \Rightarrow S_I = \delta_I^i \; i = 1,2,...,n \\
\mathbf{X}_{IJ} &= \delta_{[I}^a \delta_{J]}^b x_a \partial_b \\
\mathbf{H} &= x^i \partial_i \;\; \Rightarrow H{=}\frac{1}{2}\left(x^i x_i\right) \\
\mathbf{A}_I &= S_I S_I^{;i}\partial_i = x_I \delta_I^i \partial_i \;\; \Rightarrow A_I^i = x_I \delta_I^i \\
\mathbf{P}_I &= S_I \mathbf{H} = x_I x^i \partial_i \Rightarrow P_I^i = x_I x^i .
\end{aligned}$$

Μέσω του θεωρήματος 5.1.1 διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

Περίπτωση II

Η συνθήκη (5.16) ικανοποιείται από το διάνυσμα X_{IJ} όταν $d_1 = 0$, από το $H^{,i}$ όταν $d_1' = 0$ και από το διάνυσμα A^i όταν $d_1^{''} = 0$. Από την εξίσωση (5.17) προκύπτει ότι $D(t) = 0$. Επομένως μέσω της σχέσης (5.15) προκύπτουν οι παρακάτω γεννήτορες σημειακών συμμετριών Lie:

$$X = \left(l_1 H^{,i} + l_2 X_{IJ} + l_3 A^i\right)\partial_i . \tag{5.87}$$

Περίπτωση III

Διακρίνουμε δύο υπό-περιπτώσεις:

Περίπτωση III.1 Ελέγχουμε κατά πόσον τα βαθμωτά KVs $S_I^{;i}$ $J = 1,2,\ldots,n$ παράγουν κάποιο διάνυσμα συμμετρίας για $m = -1$, $d_0 = 0$. Τότε, υπολογίζουμε ότι $D(t) = 0$, ενώ η συνάρτηση $T(t)$ προσδιορίζεται από την επίλυση της δ.ε.:

$$T_{,tt} = -\omega(t) T. \tag{5.88}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε τους γεννήτορες των σημειακών συμμετριών Lie:

$$X = T(t)\, S_J^{;i}\partial_i . \tag{5.89}$$

Περίπτωση III.2

Επειδή το διανυσματικό πεδίο προερχόμενο από το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή ταυτίζεται με το βαθμωτό HV παίρνουμε τη σημειακή συμμετρία Lie:

$$X = D(t)\,\partial_t + T(t)\, V^{,i}\partial_i , \tag{5.90}$$

όπου οι συναρτήσεις $D(t), T(t)$, αποτελούν λύσεις του συστήματος των εξισώσεων:

$$D\left(\ln\omega\right)_{,t} + 2D_{,t} + \frac{1}{\omega}T_{,tt} = 0 \tag{5.91}$$

$$2T_{,t} - D_{,tt} = 0. \tag{5.92}$$

Περίπτωση IV. Μέσω της εξίσωσης (5.23) προκύπτει ότι $D(t) = 0$, και $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Αυτό συνεπάγεται ότι $a_0 = 1$. Επομένως, οι συναρτήσεις $C(t), T(t)$ προσδιορίζονται μέσω του συστήματος των εξισώσεων (5.24)-(5.25). Τότε:

$$\frac{C}{T}\left(\ln\omega\right)_{,t} + \frac{2C_{,t}}{T} + \frac{1}{\omega(t)}\frac{T_{,tt}}{T} = 1 \tag{5.93}$$

$$T_{,t} = -\omega(t) C \tag{5.94}$$

$$C_{,t} = T. \tag{5.95}$$

Σύμφωνα με αυτά, οι γεννήτορες των συμμετριών Lie είναι:

$$X = C(t)\, S_J \partial_t + T(t)\, S_J V^{,i}\partial i .$$

Ο αριθμός των συμμετριών που επιδέχεται η μετρική είναι $N^2 - 1$, $N = n + 2$, με n τη διάσταση του χώρου. Άρα, η άλγεβρα που επιδέχεται η μετρική είναι διάστασης $sl(n+2, R)$, γεγονός που σημαίνει ότι το σύστημα είναι μέγιστα συμμετρικό (maximally symmetric). Επομένως το σύστημα ισοδυναμεί με αυτό ενός ελεύθερου σωματιδίου, βλέπε [60], [171].

5.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο γενικεύτηκε η δουλεία των Παλιαθάναση και Τσαμπαρλή που αφορά τον συσχετισμό ανάμεσα στις συμμετρίες των δ.ε. και τις συμμετρίες της μετρικής του χώρου στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση.

Συγκεκριμένα οι συγγραφείς, βλέπε [57], μελέτησαν τη σύνδεση μεταξύ των προβολικών συμμετριών και των συμμετριών ενός αυτόνομου συστήματος εξισώσεων κίνησης για σύστημα, έστω $(1 \times m)$, του οποίου η κίνηση πραγματοποιείται σε ένα γενικευμένο αφινικό χώρο κάτω από τη δράση ενός αυτόνομου δυναμικού. Παρόμοιες μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί για την περίπτωση των $(n \times 1)$ γραμμικών εξισώσεων, οι οποίες έχουν συσχετιστεί με τη σύμμορφη άλγεβρα του υποκείμενου χώρου, βλέπε [56]. Πρόσφατα, ανακαλύφθηκε ότι για ένα σύστημα σχεδόν-γραμμικών (quasilinear) εξισώσεων, $(n \times m)$ συστημάτων, με $m > 1$ παρατηρήθηκε ότι οι σημειακές συμμετρίες συσχετίζονται με τη σύμμορφη άλγεβρα του χώρου των ανεξάρτητων μεταβλητών, βλέπε [186]. Παρόλα αυτά, το σύστημα των $(1 \times m)$, μη αυτόνομων εξισώσεων δεν είχε επιλυθεί μέσω της μεθοδολογίας των προηγούμενων εργασιών.

Διατυπώσαμε δύο θεωρήματα τα οποία αποδεικνύουν ότι οι Lie και Noether σημειακές συμμετρίες ενός δυναμικού συστήματος κινούμενο σε μετρική χώρου Riemann κάτω τη δράση ενός χρονοεξαρτώμενου δυναμικού της μορφής $W(t,x) = \omega(t)V(x)$ δίνονται μέσω των συμμετριών της μετρικής του χώρου και έναν αριθμό εξισώσεων-περιορισμών στις οποίες εμπλέκονται τόσο το δυναμικό, όσο και οι συνιστώσες του γεννήτορα της συμμετρίας. Εφαρμόσαμε τα θεωρήματα αυτά στην περίπτωση της κίνησης σε Ευκλείδειο χώρο και προσδιορίσαμε τις σημειακές συμμετρίες Lie και Noether, για τις περιπτώσεις του χρονοεξαρτώμενου κεντρικού δυναμικού και του χρονοεξαρτώμενου αρμονικού ταλαντωτή. Επίσης, αποδείξαμε ότι τα θεωρήματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των δυναμικών συστημάτων που παρουσιάζουν γραμμική απόσβεση. Τέλος, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάθε σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, για τα οποία οι συνιστώσες της συνοχής της μετρικής ορίζονται μέσω μίας γενικευμένης συνοχής Γ^i_{jk}.

Αυτή η γεωμετρική προσέγγιση αποτελεί μία εναλλακτική γεωμετρική μέθοδο για τη μελέτη των συμμετριών των διαφορικών εξισώσεων. Είναι χρήσιμη, καθότι σύμφωνα με τη διαφορική Γεωμετρία, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την πιθανή άλγεβρα Lie που επιδέχεται το σύστημα και να εξαχθούν οι συμμετρίες της μετρικής. Ωστόσο, πέρα από το τεχνικό κομμάτι της μεθοδολογίας επισημαίνουμε τον ισχυρό συσχετισμό μεταξύ της γεωμετρίας και των συμμετριών / ιδιοτήτων των δυναμικών συστημάτων.

Κεφάλαιο 6

Συμμετρίες Cartan και εφαρμογή τους στην Κοσμολογία

Εισαγωγή

Για την επεξήγηση των πρόσφατων κοσμολογικών παρατηρήσεων έχει εισαχθεί ένα πλήθος μηχανισμών, βλέπε [65–68]. Συγκεκριμένα, η παρατηρούμενη επιτάχυνση (late-time acceleration) του σύμπαντος αποδίδεται σε μία νέα πηγή ύλης η οποία καλείται σκοτεινή ενέργεια. Για τη σκοτεινή ενεργεία έχουν προταθεί αρκετά μοντέλα, μεταξύ των οποίων βαθμωτά πεδία (μοντέλα πεμπτουσίας, πεδία phantom , k-essence), ρευστά με χρονικά μεταβαλλόμενες καταστατικές εξισώσεις (Chaplygin gases) κ.ο.κ. [70–86]. Ωστόσο, κάποια από αυτά τα μοντέλα που περιγράφουν τη σκοτεινή ενέργεια, είναι γεωμετρικής προέλευσης. Σε αυτά τα σενάρια ή σκοτεινή ενέργεια αντιστοιχεί σε νέους βαθμούς ελευθερίας των εξισώσεων πεδίου οι οποίες εισάγονται τροποποιώντας τις εξισώσεις του Einstein της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας (Γ.Θ.Σ.). Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τη περίπτωση των κβαντικών διορθώσεων στη Γ.Θ.Σ. μέσω της χρήσης αναλλοίωτων ανώτερης τάξης (higher-order invariants) όπως πολυώνυμα που περιέχουν το βαθμωτό πεδίο του Ricci, τον όρο Gauss Bonnet καθώς και άλλα. Τα παραπάνω οδήγησαν στις λεγόμενες f-θεωρίες σύμφωνα με τις οποίες, μία συνάρτηση $f(X)$ εισάγεται στη δράση Einstein- Hilbert στην οποία το πεδίο X αποτελεί ένα γεωμετρικό αναλλοίωτο [87–103].

Η δράση Einstein-Hilbert δεν αποτελεί τη μοναδική περίπτωση δράσης, από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις πεδίου της Γ.Θ.Σ. Ο φορμαλισμός Palatini [104] και το τηλεπαράλληλο ισοδύναμο της Γ.Θ.Σ. (teleparallel equivalent of GR (TEGR)) [105] αποτελούν δύο εναλλακτικές μεθόδους μεταβολής οι οποίες κάτω από ορισμένους περιορισμούς οδηγούν στη Γ.Θ.Σ. [106, 107]. Σύμφωνα με την TEGR, το βαθμωτό ισοδύναμο T της συνοχής 'Weitzenb' αποτελεί την Λαγκραντζιανή πυκνότητα των εξισώσεων πεδίου, ενώ σύμφωνα με τον φορμαλισμό του Palatini τόσο ή μετρική, όσο και η συνοχή μεταβάλλονται ανεξάρτητα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, δείχνουμε ότι οι δυναμικές εξισώσεις μπορούν να γραφτούν μέσω της χρήσης μιας σημειακής Λαγκραντζιανής, η οποία περιγράφει το κλασικό ανάλογο της κίνησης δύο σωματιδίων τα οποία αλληλεπιδρούν μέσω ενός ενεργού δυναμικού. Ο κινητικός όρος της Λαγκραντζιανής περιγράφει τους βαθμούς ελευθερίας που αφορούν το χωρόχρονο και το πεδίο, ενώ το ενεργό δυναμικό καθορίζει τους βαθμούς ελευθερίας της εξέλιξης του νέου βαθμωτού πεδίου. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις ειδικές μορφές του ενεργού δυναμικού σύμφωνα με την απαίτηση οι εξισώσεις του πεδίου να περιγράφουν ολοκληρώσιμα συστήματα Liouville έτσι ώστε οι λύσεις των εξισώσεων Hamilton-Jacobi να γράφονται σε κλειστή μορφή. Αυτό είναι εφικτό αφού προσδιορίσουμε τους περιορισμούς οι οποίοι πρέπει να επιβληθούν στο σύστημα, οι οποίοι ισοδυναμούν με την ύπαρξη αναλλοίωτων (conservation laws). Κατόπιν χρησιμοποιούμε αυτές τις διατηρήσιμες ποσότητες και αποδεικνύουμε την Liouville ολοκληρωσιμότητα των συστημάτων με τη χρήση των συμμετριών.

Οι συμμετρίες, δηλαδή οι μετασχηματισμοί κάτω απο την δράση των οποίων ένας αριθμός διαφορικών εξισώσεων παραμένει αναλλοίωτος, αποτελούν κύρια μεθοδολογία για τον προσδιορισμό των διατηρητικών νόμων και την εύρεση των λύσεων των εξισώσεων. Οι συμμετρίες Lie αποτελούν την πιο συνηθισμένη περίπτωση συμμετριών και έχουν εφαρμοστεί σε πληθώρα προβλημάτων με σκοπό την εύρεση των ακριβών λύσεων τόσο στο κλασικό, όσο και στο κβαντικό επίπεδο [118–124]. Στη περίπτωση των μοντέλων βαρύτητας, τα οποία περιγράφονται μέσω μια σημειακής Λαγκραντζιανής, υπάρχει ένας ειδικός τύπος συμμετριών Lie, η δράση των οποίων πάνω στο ολοκλήρωμα δράσης, το αφήνουν αναλλοίωτο. Αυτές οι συμμετρίες καλούνται συμμετρίες Noether, οι οποίες σύμφωνα με το ομώνυμο θεώρημα, επιτρέπουν το προσδιορισμό των πρώτων ολοκληρωμάτων των εξισώσεων κίνησης [125–143]. Στην παρούσα ενότητα, για τον προσδιορισμό των γεννητόρων των συμμετριών των εξισώσεων πεδίου εργαζόμαστε σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Cartan. Οι συμμετρίες Cartan στηρίζονται στο γεγονός ότι η 1- διαφορική μορφή του Cartan παραμένει αναλλοίωτη και καθορίζεται απ΄ ευθείας από την Λαγκραντζιανή και τους μετασχηματισμούς οι οποίοι λαμβάνουν χώρα στην εφαπτόμενη πολλαπλότητα [144,145,147],και [163]. Για ολόνομα δυναμικά συστήματα, οι συμμετρίες Cartan είναι ισοδύναμες με τις γενικευμένες συμμετρίες Noether (generalized Noether symmetries) [148], ωστόσο, στη περίπτωση μη διατηρητικών ολόνομων συστημάτων, η κατάσταση διαφοροποιείται [149].

6.1 Minisuperspace περιγραφή

Σύμφωνα με το [108] κατασκευάζουμε μια σημειακή Λαγκραντζιανή τέτοια ώστε οι εξισώσεις πεδίου να προέρχονται από την αρχή της ελάχιστης δράσης Hamilton. Αυτή η Λαγκραντζιανή συνάρτηση δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{L}\left(N,a,\dot{a},\phi,\dot{\phi}\right)=-\frac{6}{N}a\dot{a}^{2}+\frac{6}{N}a^{2}\dot{a}\dot{\phi}-Na^{3}V\left(\phi\right)-2\rho_{m0}Na^{-3w_{m}}, \tag{6.1}$$

Παρατηρούμε ότι η Λαγκραντζιανή παρουσιάζει ανωμαλία (singular Lagrangian) διότι ο Hessian πίνακας $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{a}\partial\dot{\phi}}$ μηδενίζεται. Αυτό είναι κάτι που αναμένονταν καθώς οι εξισώσεις πεδίου επιδέχονται παραγώγους δεύτερης τάξης των μεταβλητών (a,ϕ), ενώ η μεταβλητή N παράγει την εξίσωση-περιορισμό $G_0^0=T_0^0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $N=N\left(a,\phi\right)$. Τότε, οι εξισώσεις πεδίου περιγράφουν την εξέλιξη της κίνησης ενός σωματιδίου το οποίο κινείται σε έναν δισδιάστατο χώρο κάτω από την επίδραση ενός ενεργού δυναμικού. Μέσω του κινητικού όρου της εξίσωσης (6.1) κατασκευάζουμε την minisuperspace μετρική $\chi_{ij}=\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{a}\partial\dot{\phi}}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}$, ενώ το ενεργό δυναμικό δίνεται από την σχέση

$$V_{eff}\left(a,\phi\right)=Na^{3}V\left(\phi\right)+2\rho_{m0}Na^{-3w_{m}}. \tag{6.2}$$

Τέλος η συνθήκη-περιορισμός που δίνεται από την σχέση

$$3H^{2}=3H\dot{\phi}+\frac{1}{2}V\left(\phi\right)+\rho_{m}, \tag{6.3}$$

αντιστοιχεί στο αναλλοίωτο του Hamilton, αφού οι εξισώσεις πεδίου είναι χρονοανεξάρτητες (αυτόνομες). Συγκεκριμένα, λόγω της συνθήκης περιορισμού η Χαμιλτονιανή μηδενίζεται. Στην περίπτωση κατά την οποία $w_m=1$ τότε η πηγή ύλης καλείται σκληρό ρευστό (stiff fluid) και αυτό αποδίδεται γεωμετρικά σε ένα επιπλέον βαθμό ελευθερίας, δηλαδή αντιστοιχεί σε επιπλέον βαθμωτά πεδία. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται έτσι ώστε να επεκτείνουμε την ανάλυση μας στη περίπτωση μοντέλων Bianchi I στο κενό. Στη συνέχεια, εξάγουμε τις εξισώσεις πεδίου στη περίπτωση που το σύμπαν περιγράφεται από ένα μοντέλο Bianchi I στο κενό. Δείχνουμε πως η Λαγκραντζιανή (6.1) περιγράφει τις εξισώσεις πεδίου για αυτό το σύμπαν, όταν η πυκνότητα ρ_{m0} συσχετίζεται με ολοκληρωτικές σταθερές για τις ανισότροπες παραμέτρους του μη-ομογενούς χωρόχρονου.

6.1.1 Bianchi I

Το γραμμικό στοιχείο της Bianchi I μετρικής, μέσω της χρήσης των μεταβλητών Misner γράφεται,

$$ds^{2}=-N^{2}\left(t\right)dt^{2}+a^{2}\left(t\right)\left(e^{-2\beta_{+}(t)}dx^{2}+e^{\beta_{+}(t)+\sqrt{3}\beta_{-}(t)}dy^{2}+e^{\beta_{+}(t)-\sqrt{3}\beta_{-}(t)}dy^{2}\right). \tag{6.4}$$

Αυτό το γραμμικό στοιχείο επιδέχεται μια Αβελιανή ομάδα Killing τριών διαστάσεων. Οι συναρτήσεις β_+, β_- καλούνται παράμετροι ανισοτροπίας [117].

Θεωρούμε τη διαγώνια βάση

$$h_{\mu}^{i}(t)=\mathrm{diag}(N\left(t\right),a(t)e^{-\beta_{+}(t)},a(t)e^{\frac{1}{2}\left(\beta_{+}(t)+\sqrt{3}\beta_{-}(t)\right)},a(t)e^{\frac{1}{2}\left(\beta_{+}(t)-\sqrt{3}\beta_{-}(t)\right)}), \tag{6.5}$$

μέσω της οποίας υπολογίζουμε την αναλλοίωτη ποσότητα

$$T = \left(-6\left(\frac{\dot{a}}{aN}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\beta}_+}{N}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\beta}_-}{N}\right)^2 \right) \tag{6.6}$$

και η αντίστοιχη Λαγκραντζιανή δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\mathcal{L}\left(N, a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}\right) = -\frac{6}{N}a\dot{a}^2 + \frac{3}{2}Na^{-3}\left(\frac{a^3\dot{\beta}_+}{N}\right)^2 + \frac{3}{2}Na^{-3}\left(\frac{a^3\dot{\beta}_-}{N}\right)^2 + \frac{6}{N}a^2\dot{a}\dot{\phi} - Na^3V(\phi). \tag{6.7}$$

Για την Λαγκραντζιανή (6.7) παρατηρούμε ότι οι ποσότητες

$$\Phi_+ = \left(\frac{a^3\dot{\beta}_+}{N}\right) \text{ και } \Phi_- = \left(\frac{a^3\dot{\beta}_-}{N}\right), \tag{6.8}$$

αποτελούν διατηρήσιμα μεγέθη κατά την κίνηση και ικανοποιούν την εξίσωση $\frac{d\Phi_\pm}{dt} = 0$, το οποίο σημαίνει ότι μέσω της εφαρμογής των νόμων διατήρησης, το δυναμικό σύστημα απλοποιείται στην Friedman Robertson Walker (FRW) Λαγκραντζιανή (6.1) όπου $\rho_{m0} = \rho_{m0}(\Phi_+, \Phi_-)$ και $w_m = 1$.

6.2 Φορμαλισμός Cartan και συμμετρίες

Επειδή τα συστήματα για τα οποία ενδιαφερόμαστε είναι δεύτερης τάξης θεωρούμε μία Λαγκραντζιανή συνάρτηση της μορφής $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(t, x^j, \dot{x}^j\right)$, όπου το t συμβολίζει την ελεύθερη μεταβλητή και με $x^i(t)$ συμβολίζουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές. Με τη χρήση της τελείας συμβολίζουμε την ολική παράγωγο ως προς t.

Από την μεταβολή της δράσης $S = \int Ldt$, προκύπτουν οι εξισώσεις Euler Lagrange $E_L(L) = 0$ όπου $E_L = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}$ είναι το διανυσματικό πεδίο Euler. Ακόμα υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις πεδίου γράφονται στη μορφή

$$\ddot{x}^i = \Lambda^i\left(t, x^j, u^j\right),$$

όπου $u^i = \dot{x}^j$. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο A που αποτελεί τον γεννήτορα των εξισώσεων κίνησης του Λαγκραντζιανού συστήματος και καλείται πεδίο ροής Hamilton (Hamiltonian flow) με την σχέση

$$A = \partial_t + u^i\partial_i + \Lambda^i\partial_{u^i}$$

όπου το $\Lambda^i = \Lambda^i\left(t, x^j, u^j\right)$ καθορίζεται μέσω της συνθήκης

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^i\partial u^j}\Lambda^j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^i\partial x^j}u^j - \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^i\partial t}. \tag{6.9}$$

Θεωρούμε την ακόλουθη βάση στη συνεφαπτόμενη δέσμη

$$\left(de^1, de^2, de^3\right) = \left(dx^i - u^idt\ ,\ du^i - \Lambda^idt\ ,\ dt\right), \tag{6.10}$$

Σημειώνουμε ότι, το διανυσματικό πεδίο $A = \partial_t + u^i\partial_i + \Lambda^i\partial_{u^i}$ έχει την ιδιότητα [1] $i_A\left(de^1, de^2, de^3\right) = (0,0,0)$. Κάθε κλειστή διαφορική μορφή df γράφεται χρησιμοποιώντας σε αυτήν τη βάση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(dx^i - u^idt\right) + \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(du^i - \Lambda^idt\right) + A(f)\,dt. \tag{6.11}$$

Στην συνέχεια εισάγουμε την 1-διαφορική μορφή του Cartan θ [163]

$$\theta = \mathcal{L}dt + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^i}\left(dx^i - u^idt\right). \tag{6.12}$$

[1] Ο τελεστής i_A συμβολίζει την πράξη της αντιπαραγώγισης ως προς το πεδίο του Hamilton.

Στην Χαμιλτονιανή μηχανική, το θ αποτελεί την αντίστροφη απεικόνιση (pullback) κάτω από την δράση του μετασχηματισμού Legendre της 1-διαφορικής μορφής $u_i dx^i - Hdt$, όπου με H συμβολίζουμε την Hamiltonian. Μέσω της θ οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$i_A\left(d\theta\right) = 0. \tag{6.13}$$

$d\theta$ είναι η 2-διαφορική μορφή του Cartan η οποία έχει την ακόλουθη μορφή (6.10)

$$d\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i \partial u^j}\left[\left(dx^j - u^j dt\right) \curlywedge \left(dx^i - u^i dt\right) + \left(du^i - \Lambda^i dt\right) \curlywedge \left(dx^j - u^j dt\right)\right], \tag{6.14}$$

όπου με $\curlywedge$ συμβολίζουμε το αντισυμμετρικό τανυστικό γινόμενο wedge product.

Συνεπώς, εάν υπάρχει μια συνάρτηση f, τέτοια ώστε οι δύο 1-Cartan μορφές ικανοποιούν την σχέση

$$\bar{\theta} - \theta = df, \tag{6.15}$$

τότε οι θ και $\bar{\theta}$ περιγράφουν τις ίδιες εξισώσεις, και αυτό διότι εξ′ ορισμού ισχύει ότι $d\left(\bar{\theta} - \theta\right) = d^2 f \equiv 0$. Στον εφαπτόμενο χώρο θεωρούμε τον σημειακό μετασχηματισμό

$$\left(\bar{t}, \bar{x}^i, \bar{u}^i\right) = \left(t + \varepsilon\xi\left(t, x^j, u^j\right), x^i + \varepsilon\eta^i\left(t, x^j, u^j\right), u^i + \varepsilon\zeta^i\left(t, x^j, u^j\right)\right) \tag{6.16}$$

ο οποίος παράγεται από το διανυσματικό πεδίο

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \eta^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta^i\frac{\partial}{\partial u^i}. \tag{6.17}$$

Το διανυσματικό πεδίο X αποτελεί συμμετρία Cartan της Λαγκραντζιανής L εάν

$$L_X\left(d\theta\right) = 0, \tag{6.18}$$

όπου με L_X συμβολίζουμε την Lie παραγώγιση κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου X.

Επειδή $L_X\left(d\theta\right) = d\left(L_X\theta\right)$ καταλήγουμε ότι η συνθήκη για την ύπαρξη μίας συμμετρίας Cartan είναι [145]

$$L_X\left(d\theta\right) = 0 \text{ ή } L_X\left(\theta\right) = df \tag{6.19}$$

όπου με f συμβολίζουμε μια συνάρτηση ορισμένη στην εφαπτόμενη δέσμη. Η τελευταία συνθήκη αντιστοιχεί στο πρώτο θεώρημα της Noether και η συνάρτηση f συχνά χαρακτηρίζεται λανθασμένα ως συνάρτηση βαθμίδας (gauge function). Η συνάρτηση f είναι ένας συνοριακός όρος ο οποίος έχει εισαχθεί προκειμένου να επιτραπούν, οι απειροελάχιστες μεταβολές του ολοκληρώματος δράσης. Αυτές παράγονται από την απειροελάχιστη μεταβολή του συνόρου που προέρχεται από τον μετασχηματισμό της μεταβλητής του ολοκληρώματος της δράσης. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ταυτοτική σχέση $L_X\theta = i_X\left(d\theta\right) + d\left(i_X\theta\right)$, προκύπτει ότι εάν το διανυσματικό πεδίο X αποτελεί μία συμμετρία Cartan τότε $L_X\theta = 0$ και

$$i_A d\left(f - i_X\theta\right) = 0, \tag{6.20}$$

το οποίο σημαίνει ότι η ποσότητα $\left(f - i_X\theta\right)$ διατηρείται κάτα την κίνηση. Η σχέση (6.20) περιγράφει το δεύτερο θεώρημα της Noether. Τελικά, εάν το X αποτελεί συμμετρία Cartan, τότε $i_{[A,X]}d\theta = i_A L_X d\theta - L_X\left(i_A d\theta\right)$ και επομένως $L_X\left(i_A d\theta\right) = 0$. Η τελευταία συνθήκη υποδηλώνει ότι οι εξισώσεις κίνησης παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από την δράση των συμμετριών Cartan οι οποίες σχηματίζουν μία υπό-άλγεβρα των Lie συμμετριών του δυναμικού συστήματος.

6.2.1 Συμμετρίες των σημειακών Λαγκραντζιανών συναρτήσεων

Έστω η Λαγκραντζιανή συνάρτηση $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ij}\left(x^j\right)u^i u^j - V\left(x^k\right)$ τότε η 1-διαφορική μορφή του Cartan είναι

$$\theta = \left(\frac{1}{2}g_{ij}u^i u^j - V\right)dt + g_{ij}u^j\left(dx^i - u^i dt\right) \tag{6.21}$$

Ακόμα, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $X = \xi\partial_t + \eta^i\partial_i + \zeta^i\partial_{u^i}$ και απαιτούμε να είναι γεννήτορας συμμετρίας Cartan. Ταυτόχρονα, το X αποτελεί συμμετρία Lie, επομένως η συνιστώσα ζ^i δεν είναι ανεξάρτητη αλλά εκφράζεται αποκλειστικά μέσω των συναρτήσεων ξ, η^i και των παραγώγων αυτών[2]

$$\zeta^i = \eta^i_{,t} + u^k\eta^i_{,k} + \Lambda^k\eta^i_{,u^k} - u^i\left(\xi_{,t} + u^k\xi_{,k} + \Lambda^k\xi_{,u^k}\right). \tag{6.22}$$

Από τη συνθήκη συμμετρίας (6.19) έχουμε

$$\begin{aligned} L_X\theta &= \left[g_{ij,k}\eta^k u^j + g_{ij}\zeta^j\right]dx^i + g_{ij}u^j\eta^i_{,k}dx^k - \frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j\xi_{,k}dx^k + \\ &+ \left[-g_{ij}u^i\zeta^j - \frac{1}{2}g_{ij,k}\eta^k u^iu^j + g_{ij}u^j\eta^i_{,t} - \frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j\xi_{,t} - \eta^kV_k\right]dt + \\ &+ \left[g_{ij}u^j\eta^i_{,u^k} - \frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j\xi^i_{,u^k}\right]du^k \\ &= f_{,t}dt + f_{,i}dx^i + f_{,u^k}du^k \end{aligned}$$

μέσω της οποίας προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\left[g_{ij,k}\eta^k u^j + g_{ij}\zeta^j\right]\delta^i_r + g_{ij}u^j\eta^i_{,k}\delta^k_r - \frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j\xi_{,k}\delta^k_r - f_{,r} = 0. \tag{6.23}$$

$$-g_{ij}u^i\zeta^j - \frac{1}{2}g_{ij,k}\eta^k u^iu^j + g_{ij}u^j\eta^i_{,t} - \frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j\xi_{,t} - f_{,t} - \eta^kV_k = 0. \tag{6.24}$$

$$g_{ij}u^j\eta^i_{,u^k} - \frac{1}{2}g_{ij}u^iu^j\xi^i_{,u^k} - f_{,u^k} = 0. \tag{6.25}$$

Συγκεκριμένες μορφές των συναρτήσεων ξ και η^i απλοποιούν το παραπάνω σύστημα με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η επίλυση αυτού.

Σημειακοί μετασχηματισμοί

Σε αυτή την περίπτωση οι συναρτήσεις ξ και η είναι ανεξάρτητες των ταχυτήτων u^i και η συνθήκη συμμετρίας παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$V_{,k}\eta^k + V\xi_{,t} + f_{,t} = 0 \ \ , \ \ \eta^i_{,t}g_{ij} - \xi_{,j}V - f_{,j} = 0 \tag{6.26}$$

$$L_\eta g_{ij} - \xi_{,t}g_{ij} = 0 \ \ , \ \ \xi_{,i} = 0 \ \ , \ \ f_{,u^k} = 0 \tag{6.27}$$

της οποίας η γενική λύση δίνεται στο [57]. Σε αυτή τη περίπτωση η διατηρήσιμη ποσότητα είναι γραμμική ως προς τις ταχύτητες u^i.

Συμμετρίες ανώτερης τάξης

Όταν οι συνιστώσες ξ και η^i είναι συναρτήσεις των u^i τότε αποκαλούνται συμμετρίες ανώτερης τάξης. Μία συγκεκριμένη κατηγορία αυτών των συμμετριών ανώτερης τάξης αποτελούν οι συμμετρίες contact για τις οποίες ισχύει οτι οι συνιστώσες ξ και η^i είναι γραμμικές ως προς τις ταχύτητες u^i. Σε αυτή τη περίπτωση και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\xi = 0$ και $\eta^i = K^i{}_j\left(t, x^k\right)u^j$. Τότε οι συνθήκες συμμετρίας γράφονται

$$K_{(ij),t} = 0 \ \ , \ \ K_{(is;j)} = 0 \tag{6.28}$$

$$g_{ij}V^kK^j_k + f_{,i} = 0 \ \ , \ \ f_{,t} = 0 \ , \ \ f_{,u^k} = 0. \tag{6.29}$$

Με ανάλογο τρόπο οι συνθήκες συμμετρίας παράγονται για κάθε συνιστώσα η^i, ανεξαρτήτως της εξάρτησης της από τις συναρτήσεις u^i. Γενικεύοντας, είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι εάν το η^i είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς τα u^i τότε και οι αντίστοιχες συνθήκες συμμετρίας είναι πολυώνυμα της τάξης $(n+1)$ ως προς τα u^i.

$$K_{(irs;j)} = 0 \ \ , \ \ K_{(irs),t} = 0 \tag{6.30}$$

$$V^kK_{(iks)} = 0 \ \ , \ \ f = 0. \tag{6.31}$$

[2] Αυτό είναι εφικτό για ολόνομα διατηρητικά συστήματα.

Ενώ οι σημειακές συμμετρίες σχηματίζουν άλγεβρα Lie οι συμμετρίες ανώτερης τάξης διαφοροποιούνται ως ένα βαθμό. Για παράδειγμα, εάν $K_{(1)}$, $K_{(2)}$ είναι τανυστικά πεδία δεύτερης τάξης οι οποίοι παράγουν δύο contact συμμετρίες με αντίστοιχες συναρτήσεις $f_{(1)}$ και $f_{(2)}$ τότε προκύπτει ότι

$$\left[K_{(1)}, K_{(2)}\right]_{SN}(V_k) + \left[f_{(1);i}, f_{(2);j}\right] = K^{ijk}V_k + \left[f_{(1);i}, f_{(2);j}\right] \tag{6.32}$$

όπου με $\left[K_{(1)}, K_{(2)}\right]_{SN}$ συμβολίζουμε μεταθέτη Schouten-Nijenhuis. Ως αποτέλεσμα αυτού έχουμε ότι το τανυστικό πεδίο K^{ijk} παράγει μία τετραγωνική συμμετρία ανώτερης τάξης εάν και μόνο αν $\left[f_{(1);i}, f_{(2);j}\right] = 0$. Ως εκ τούτου, μέσω του μεταθέτη δύο συμμετριών ανώτερης τάξης παράγεται μια συμμετρία ανώτερης τάξης.

Στην ειδική περίπτωση που οι συνοριακοί όροι των contact ή των non-contact συμμετριών ανώτερης τάξης μηδενίζονται, δηλαδή $f_{(1)} = f_{(2)} = 0$, συνεπάγεται ότι η Λαγκραντζιανή $\mathcal{L}$ επιδέχεται τις διατηρήσιμες ποσότητες I_A, I_B, που ορίζονται από τις σχέσεις

$$I_A = K_{ij_1...j_a}u^iu^{j_1}...u^{j_a}\ ,\ I_B = T_{ij_1...j_b}u^iu^{j_1}...u^{j_b} \tag{6.33}$$

με $a, b > 1$, τότε και η ποσότητα

$$I_S = S_{ij_1...j_c}u^iu^{j_1}...u^{j_c}\ ,\ c = a + b - 1 \tag{6.34}$$

αποτελεί διατηρήσιμη ποσότητα, με $\mathbf{S} \equiv [\mathbf{K}, \mathbf{T}]_{SN}$.

Στην ακόλουθη ενότητα, προσδιορίζουμε τις παραμέτρους των εξισώσεων πεδίου έτσι ώστε αυτές να επιδέχονται συμμετρίες Cartan. Αυτές με τη σειρά τους δίνουν διατηρήσιμες ποσότητες μέσω των οποίων, αποδεικνύουμε την ολοκληρωσιμότητα των εξισώσεων πεδίου και όταν αυτό είναι εφικτό, τότε γράφουμε τη λύση σε κλειστή μορφή.

6.3 Συμμετρίες και αναλυτικές λύσεις

Θεωρούμε τη Λαγκραντζιανή (6.1) και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $N(t) = a^{3w_m}$. Με αυτόν τον τρόπο απορροφούμε τον όρο που προέρχεται από το ρευστό μέσα στην minisuperspace μετρική απλοποιώντας τους υπολογισμούς μας. Τότε η 1-διαφορική μορφή του Cartan η οποία περιγράφει τις εξισώσεις πεδίου είναι

$$\begin{aligned}\theta = &\left(-6a^{1-3w_m}\dot{a}^2 + 6a^{2-3w_m}\dot{a}\dot{\phi} - a^{3(1+w_m)}V(\phi) + 2\rho_{m0}\right)dt+ \\ &+\left(-12a^{1-3w_m}\dot{a} + 6a^{2-3w_m}\dot{\phi}\right)(da - \dot{a}dt) + \left(6a^{2-3w_m}\dot{a}\right)\left(d\phi - \dot{\phi}dt\right),\end{aligned} \tag{6.35}$$

και το διανυσματικό πεδίο του Hamilton είναι

$$\begin{aligned}A = &\frac{\partial}{\partial t} + \dot{a}\frac{\partial}{\partial a} + \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial \phi} + \left((3w-2)\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{a^{1+6w}}{6}V_{,\phi}\right)\partial_{\dot{a}}+ \\ &+\left(3(w-1)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{a^{6w}(3(w+1)V + 2V_{,\phi})}{6}\right)\partial_{\dot{\phi}}.\end{aligned} \tag{6.36}$$

Οι εξισώσεις πεδίου έχουν τέσσερις βαθμούς ελευθερίας $\left(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}\right)$, με τη συνθήκη-περιορισμό, τη συνθήκη διατήρησης της ¨ενέργειας ' να μηδενίζεται, δηλαδή η Hamiltonian $H = 0$. Επομένως, ο προσδιορισμός μίας ακόμα διατηρούμενης ποσότητας αρκεί για την απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας των εξισώσεων πεδίου, όπως έχει οριστεί από τον Liouville [3]. Σημειώνουμε ότι ο δεύτερος νόμος διατήρησης πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητος από την Hamiltonian.

Ένα σημαντικό ερώτημα αποτελεί ποια είδη συμμετριών πρέπει να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να προσδιοριστούν τα ολοκληρώσιμα συστήματα. Για παράδειγμα, υπάρχουν διαφορετικά συστήματα που επιδέχονται σημειακές συμμετρίες και διαφορετικά που επιδέχονται συμμετρίες ανώτερης τάξης. Ωστόσο αυτοί οι δύο τύποι συστημάτων δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και τα συστήματα που επιδέχονται σημειακές συμμετρίες συμπεριλαμβάνονται σε αυτά που επιδέχονται συμμετρίες ανώτερης τάξης. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας το αντίστροφο πρόβλημα για την κατασκευή του γεννήτορα συμμετρίας από την διατηρήσιμη ποσότητα.

Το αντίστροφο πρόβλημα υποδηλώνει ότι εάν το βαθμωτό πεδίο Φ αποτελεί μια σταθερά της κίνησης για ένα σύστημα με την 1-διαφορική μορφή Cartan θ, τότε υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο X τέτοιο ώστε $L_X\theta =$

[3]Με την έννοια της ολοκληρωσιμότητας εννοούμε Liouville ολοκληρωσιμότητα.

$d\left(F+i_{X}\theta\right)$ και επομένως, το X αποτελεί συμμετρία Cartan, ενώ κάθε διανυσματικό πεδίο της μορφής $Y = X+\lambda A$ επίσης, αποτελεί συμμετρία Cartan το οποίο παράγει την ίδια διατηρήσιμη ποσότητα. Επομένως, όλες οι σημειακές συμμετρίες παράγουν διατηρήσιμες ποσότητες οι οποίες είναι γραμμικές ως προς τις ταχύτητες. Ωστόσο οποιαδήποτε συνάρτηση που διατηρείται κατά τη κίνηση αποτελεί νόμο διατήρησης, πράγμα που σημαίνει ότι εάν Φ_P είναι μία διατηρήσιμη ποσότητα η οποία παράγεται από μία σημειακή συμμετρία, τότε η ποσότητα $\Phi_C = \left(\Phi_P\right)^2$ αποτελεί διατηρήσιμη ποσότητα προερχόμενη από μια contanct συμμετρία. Αυτό, δείχνει τον λόγο που προτιμάμε να εργαζόμαστε με συμμετρίες ανώτερης τάξης και πιο συγκεκριμένα με συμμετρίες Cartan οι οποίες προέρχονται από contact μετασχηματισμούς. Στη συνέχεια, παρακάμπτουμε τους υπολογισμούς για την εξαγωγή των Cartan συμμετριών και των αντίστοιχων αναλλοίωτων που παράγονται από αυτές παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα μας.

6.3.1 Κατηγοριοποίηση συμμετριών Cartan

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαφορές τόσο στα δυναμικά, όσο και στις διατηρούμενες ποσότητες μεταξύ των περιπτώσεων $w_m \neq 1$ και $w_m = 1$.

Μη σκληρό ρευστό $w_m \neq 1$

Όταν $w_m \neq 1$ βρίσκουμε ότι τα βαθμωτά δυναμικά πεδία για τα οποία οι εξισώσεις πεδίου επιδέχονται συμμετρίες Cartan προερχόμενες από μετασχηματισμούς contact είναι τα ακόλουθα

$$V_A\left(\phi\right) = V_1\phi + V_0, \tag{6.37}$$

$$V_B\left(\phi\right) = V_1 e^{-3\left(w_m+1\right)\phi} + V_2 e^{-6w_m\phi}. \tag{6.38}$$

και

$$V_C\left(\phi\right) = V_1 e^{-3\left(1+w_m\right)\phi} + V_2 e^{-\frac{3}{2}\left(3+w_m\right)} \tag{6.39}$$

Η διατηρήσιμη ποσότητα που αντιστοιχεί στο δυναμικό $V_A\left(\phi\right)$ είναι

$$I_A = a^{4-6w_m}\dot{a}^2 + \frac{V_1}{18}a^6 \tag{6.40}$$

ενώ για το δυναμικό $V_B\left(\phi\right)$ η επιπλέον διατηρήσιμη ποσότητα είναι η ακόλουθη

$$I_B = \left(\frac{\dot{a}-a\dot{\phi}}{a}\right)^2 + \frac{\left(w_m-1\right)}{6w_m}V_2\left(ae^{-\phi}\right)^{6w_m} \quad \text{για } w_m \neq 0, \tag{6.41}$$

ή

$$I_B^0 = \left(\frac{\dot{a}}{a}-\dot{\phi}\right)^2 - V_2\left(\ln a - \phi\right) \quad \text{για } w_m = 0. \tag{6.42}$$

Για το δυναμικό $V_C\left(\phi\right)$ έχουμε τη διατηρήσιμη ποσότητα

$$\begin{aligned} I_C = {} & a^{1-3w_m}\left(2+3\left(1-w_m\right)\left(\phi-\ln a\right)\right)\dot{a}^2 - 3a^{2-3w_m}\left(1+\left(1-w_m\right)\left(\phi-\ln a\right)\right)\dot{a}\dot{\phi} + \\ & + a^{3\left(1-w_m\right)}\dot{\phi}^2 + \frac{V_1}{6\left(1+w_m\right)}\left(2+3\left(w_m^2-1\right)\left(\ln a-\phi\right)\right)a^{3\left(1+w_m\right)}e^{-3\left(1+w_m\right)\phi} + \\ & + \frac{V_2}{6}\left(1+3\left(1-w_m\right)\left(\phi-\ln a\right)\right)a^{3\left(1+w_m\right)}e^{-\frac{3}{2}\left(3+w_m\right)\phi}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Σκληρό ρευστό $w_m = 1$

Όταν $w_m = 1$, δηλαδή, όταν η πηγή ύλης προέρχεται από σκληρό ρευστό, η συμμετρική ανάλυση δίνει το δυναμικό

$$V_D = V_1 e^{-3\phi}, \tag{6.44}$$

και το δυναμικό $V_A\left(\phi\right)$ το οποίο δίνεται από τη σχέση (6.37).

Ακολούθως, τα αναλλοίωτα είναι οι ποσότητες I_A η οποία δίνεται μέσω της σχέσης (6.40) και

$$I_D = \left(2\frac{\dot{a}}{a}-\dot{\phi}\right)^2 - \frac{2}{3}V_1 a^6 e^{-3\phi}, \tag{6.45}$$

Συνεχίζουμε με την κατασκευή της αναλυτικής λύσης των εξισώσεων πεδίου.

6.3.2 Αναλυτικές λύσεις

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να περιγράψουμε την λύση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Συνήθως, όταν αναφερόμαστε σε μία λύση εννοούμε ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη συνάρτηση η οποία συσχετίζει τις εξαρτώμενες και τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Εάν αυτή η συνάρτηση επιδέχεται λιγότερες ελεύθερους παραμέτρους από τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος τότε χαρακτηρίζεται ως μία ειδική λύση, δίοτι αποτελεί λύση για συγκεκριμένες οικογένειες αρχικών συνθηκών.

Ωστόσο η ύπαρξη μίας τέτοιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε εφικτή. Για παράδειγμα η λύση της εξίσωσης Abel δεν μπορεί να γραφτεί πάντοτε σε κλειστή μορφή. Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της λύσης ενός δυναμικού συστήματος αποτελεί η εύρεση του αντίστοιχου απλοποιημένου reduced συστήματος. Εάν αυτό το απλοποιημένο σύστημα μπορεί να ολοκληρωθεί και η λύση του να γραφτεί μέσω αυτών των ολοκληρωμάτων, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την κλειστή λύση του αρχικού συστήματος,ωστόσο αυτό δεν είναι γενικότερα εφικτό.

Αναλογιζόμενοι το πρόβλημα μας, πρέπει να μειώσουμε τις εξισώσεις πεδίου σε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Πράγματι, η συνθήκη- περιορισμός και ο διατηρητικός νόμος που προσδιορίσαμε, αρκούν για να αποτελέσουν τη λύση των εξισώσεων πεδίου. Ωστόσο, για να απλοποιήσουμε την έκφραση τους ακολουθούμε την μεθοδολογία των Hamilton-Jacobi, για περισσότερα σχετικά με την ολοκλήρωση ενός δισδιάστατου συστήματος με την μέθοδο των Hamilton-Jacobi (βλέπε [150, 151]).

Δυναμικό $V_A(\phi)$

Για την περίπτωση του δυναμικού $V_A(\phi)$ χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης. Για να τις απλοποιήσουμε πραγματοποιούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$a = e^{\chi} \ , \ \phi = \chi + \psi \tag{6.46}$$

και οι εξισώσεις πεδίου γίνονται

$$6e^{3(1-w_m)\chi}\dot{\chi}\dot{\psi} - e^{3(1+w_m)\chi}\left(V_0 + V_1(\chi+\psi)\right) - 2\rho_{m0} = 0 \tag{6.47}$$

$$\ddot{\chi} + 3(1-w_m)\dot{\chi}^2 + V_1 e^{6w_m\chi} = 0 \tag{6.48}$$

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{6}e^{3w_m\chi}\left(V_1 + 3(1+w_m)\left(V_0 + V_1(\chi+\psi)\right)\right) = 0. \tag{6.49}$$

Εστιάζουμε στην εξίσωση (6.48) η οποία είναι αυτή που καθορίζει τον παράγοντα κλίμακας. Αυτή, μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με τον παρακάτω τρόπο

$$\dot{\chi}^2 = \frac{1}{3}e^{-6(1-w_m)\chi}\left(3\chi_0 - V_1 e^{6\chi}\right), \tag{6.50}$$

Σύμφωνα με αυτήν υπολογίζουμε τη συνάρτηση του Hubble και παίρνουμε,

$$H^2(a) = a^{-6w_m}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\chi_0 a^{-6} - \frac{V_1}{3}\right). \tag{6.51}$$

Αυτό σημαίνει ότι το V_1 αποτελεί την κοσμολογική σταθερά και η σταθερά ολοκλήρωσης χ_0 είναι η ενεργειακή πυκνότητα του σκληρού ρευστού η οποία έχει εισαχθεί από τη θεωρία, ανακαλώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση του Hubble ορίζεται από τη σχέση $H(t) = \frac{1}{N}\frac{\dot{a}}{a}$

Δυναμικό $V_B(\phi)$

Για το δεύτερο δυναμικό $V_B(\phi)$, επιλέγουμε να εργαστούμε σε νέο σύστημα συντεταγμένων

$$\phi = \ln a + \psi \tag{6.52}$$

στο οποίο η λύση της εξίσωσης των Hamilton Jacobi για $w_m \neq 0$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} S(a,\psi) = & \frac{\sqrt{6}a^{3(1-w_m)}\sqrt{V_2(1-w_m)e^{-6w_m\psi} + 6w_m I_B}}{3\sqrt{w_m}(1-w_m)} \\ & - \sqrt{6w_m}\int \frac{2\rho_{m0}e^{3w_m\psi} + V_1 e^{-3\psi}}{\sqrt{6w_m I_B e^{6w_m\psi} + V_2(1-w_m)}}d\psi \ , \ w_m \neq 0 \end{aligned} \tag{6.53}$$

το οποίο δείχνει ότι το σύστημα επιδέχεται μια επιφάνεια Lie.

Στις νέες συντεταγμένες το απλοποιημένο σύστημα γράφεται

$$a^{2-3w_m}\dot{a} = \frac{p_\psi}{6}\ ,\ a^{2-3w_m}\dot{\psi} = \frac{p_a}{6a^2}. \tag{6.54}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η πηγή ύλης είναι η σκόνη, δηλαδή όταν $w_m = 0$, τότε η λύση της εξίσωσης των Hamilton Jacobi παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$S(a,\psi) = 2a^3\sqrt{\left(I_B^0 - V_2\psi\right)} + \frac{4\rho_{m0}}{V_2}\sqrt{\left(I_B^0 - V_2\psi\right)} + \frac{2}{\sqrt{3V_2}}D\left(\sqrt{\frac{3\left(I_B^0 - V_2\psi\right)}{V_2}}\right) \tag{6.55}$$

όπου με $D(x)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση Dawson, $D(x) = e^{-x^2}\int e^{x^2}dx^2$.

Για $w_m = 0$, δηλαδή $N(t) = 1$, το απλοποιημένο σύστημα που δίνεται από την εξίσωση (6.54) με τη χρήση της εξίσωσης (6.55) γίνεται

$$6a^2\dot{a} = -\frac{2\rho_{m0} + V_1 e^{-3\psi}}{\sqrt{\left(I_B^0 - V_2\psi\right)}}\ ,\ \dot{\psi} = \sqrt{\left(I_B^0 - V_2\psi\right)} \tag{6.56}$$

επομένως

$$\psi(t) = \frac{I_B^0}{V_2} - \frac{V_2}{4}(t - t_0)^2 \tag{6.57}$$

και

$$a^3 = \frac{2\rho_{m0}}{(-V_2)}\ln t + \frac{1}{2}\frac{V_1 e^{-3\frac{I_B^0}{V_2}}}{(-V_2)}Ei\left(\frac{3}{4}(-V_2)\,t^2\right) \tag{6.58}$$

με $Ei(t)$ την εκθετική συνάρτηση ολοκλήρωσης. Τέλος, όταν κυριαρχεί ο όρος $Ei(t)$ τότε η συνάρτηση κλίμακας προσεγγίζεται μέσω του όρου

$$a(t) \simeq \exp\left(a_1 t^2\right). \tag{6.59}$$

Δυναμικό $V_C(\phi)$

Πραγματοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$a = r^{\frac{1}{3(1-w_m)}}\ ,\ \phi = \frac{1}{3(1-w_m)}\ln(r) + \psi \tag{6.60}$$

και η εξίσωση των Hamilton Jacobi γράφεται

$$(w_m - 1)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right) - 4\rho_{m0} - 2V_1 e^{-3(1+w_m)\psi} - \frac{2V_2}{\sqrt{r}}e^{-\frac{3}{2}(3+w_m)\psi} = 0. \tag{6.61}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(1 - w_m)\,p_\psi\ ,\ \dot{\psi} = \frac{1}{2}(1 - w_m)\,p_r. \tag{6.62}$$

Επομένως, η δράση είναι

$$\begin{aligned} S(u,v) = {} & \frac{2\sqrt{2r}e^{-\frac{3}{2}(1+w_m)\psi}\sqrt{V_1(1-w_m) + 2e^{3(1+w)\psi}(1+w_m)\left(3I_C - (1 - 3\psi(w-1))\rho_{m0}\right)}}{\sqrt{3}\sqrt{(1+w_m)(w_m-1)}} + \\ & + \int \frac{6V_2\sqrt{(1+w)}e^{\frac{3}{2}(1+w_m)\psi}}{\sqrt{6}\sqrt{V_1(1-w_m) + 2e^{3(1+w)\psi}(1+w_m)\left(3I_C - (1-3\psi(w-1))\rho_{m0}\right)}}d\psi. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Στην οριακή περίπτωση όπου $\rho_{m0} = 0$ και $I_{BC} = 0$, η δράση παίρνει την απλούστερη μορφή

$$S(u,v) = \frac{2\sqrt{2V_1 r}e^{-\frac{3}{2}\psi(1+w_m)}}{3\left(1 - w_m^2\right)} - \frac{\sqrt{2}(1+w_m)V_2 e^{-3\psi}}{\sqrt{3V_1(1-w_m^2)}}. \tag{6.64}$$

Μέσω αυτής της δράσης, για ρευστό με σκόνη (dust) παίρνουμε το παρακάτω απλοποιημένο σύστημα

$$\dot{r}=\frac{\sqrt{6}V_2}{2\sqrt{V_1}}e^{-3\psi}-\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}\psi}\sqrt{V_1 r}\ ,\ \dot{\psi}=\frac{\sqrt{2V_1}}{\sqrt{r}}e^{-\frac{3}{2}\psi} \tag{6.65}$$

από το οποίο παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές του r και κατ΄ επέκταση για μεγάλες τιμές του παράγοντα κλίμακας $\dot{\psi}\simeq 0$, που σημαίνει ότι

$$\dot{r}\simeq c_1-c_2\sqrt{r}, \tag{6.66}$$

τότε, η συνάρτηση του Hubble προσεγγίζεται μέσω της τιμής

$$H\left(a\right)\simeq\left(c_1 a^{-3(1-w_m)}-c_2 a^{\frac{-3(1-w_m)}{2}}\right). \tag{6.67}$$

Δυναμικό $V_D\left(\phi\right)$

Για το τελευταίο δυναμικό όταν $w_m=1$, βρίσκουμε το κανονικό σύστημα συντεταγμένων

$$a=e^{\chi}\quad,\quad \phi=2\chi+\psi \tag{6.68}$$

στις οποίες το απλοποιημένο σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\dot{\chi}=\frac{p_\psi}{6}\ ,\ \dot{\psi}=\frac{p_\chi-2p_\psi}{6}. \tag{6.69}$$

Η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)-6e^{-3\psi}V_1-12\rho_{m0}=0, \tag{6.70}$$

ενώ η διατηρήσιμη ποσότητα είναι

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)^2=36\bar{I}_D. \tag{6.71}$$

Μέσω αυτής βρίσκουμε ότι η δράση γράφεται

$$\begin{aligned}S\left(\chi,\psi\right)=\sqrt{\bar{I}_{D0}}\chi+\frac{\sqrt{\bar{I}_D}}{2}\psi+\frac{\sqrt{\left(\bar{I}_D-48\rho_{m0}\right)+24V_1e^{-3\psi}}}{3}+\\-\frac{\sqrt{\left(\bar{I}_D-48\rho_{m0}\right)}}{3}\operatorname{arctan}h\left(\frac{\sqrt{\left(\bar{I}_D-48\rho_{m0}\right)+24V_1e^{-3\psi}}}{\sqrt{\left(\bar{I}_D-48\rho_{m0}\right)}}\right).\end{aligned} \tag{6.72}$$

Η λύση των εξισώσεων πεδίου γράφονται σε κλειστή μορφή και τότε υπολογίζουμε τη συνάρτηση κλίμακας η οποία δίνεται από τη σχέση

$$a\left(t\right)=a_0e^{\omega_0 t}\left(1-6V_1\omega_1e^{-3\omega_1 t}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{6.73}$$

όπου τα ω_0, ω_1 σχετίζονται με τις ποσότητες $\bar{I}_D$ και ρ_{m0}. Από την παραπάνω λύση, παρατηρούμε ότι η late time λύση είναι εκθετική, $a\left(t\right)\simeq a_0e^{\omega_0 t}$ για $\omega_1>0$, και για $N\left(t\right)=$σταθ., δηλαδή, $w_m=0$, η λύση αντιστοιχεί στο de Sitter σύμπαν με $\Omega_{m0}=0$.

Όταν $\omega_0=\omega_1$ και $w_m=0$, μέσω της σχέσης (6.73) βρίσκουμε ότι η κλειστή μορφή της συνάρτησης του Hubble συναρτήσει του παράγοντα κλίμακας δίνεται από τη σχέση

$$H\left(a\right)=\frac{1}{12\left(a_0\right)^3\left(-V_1\right)}+2\omega_0a^{-3}+\frac{\sqrt{1+24\left(a_0\right)^3\omega_0\left(-V_1\right)a^{-3}}}{12\left(a_0\right)^3\left(-V_1\right)}. \tag{6.74}$$

Αυτή η συνάρτηση Hubble χρησιμοποιείται σαν toy μοντέλο για τη μελέτη της late time επιτάχυνσης του σύμπαντος.

Κεφάλαιο 7

Τετραγωνικά ολοκληρώματα και συμμετρίες

Εισαγωγή

Στα τέλη του 19ου αιώνα ο Sophus Lie, δημοσίευσε την εργασία του πάνω στη θεωρία των ομάδων μετασχηματισμών, βλέπε [121–123]. Συγκεκριμένα, εισήγαγε την ιδέα των μετασχηματισμών κάτω από τη δράση των οποίων συναρτήσεις και γεωμετρικά αντικείμενα παραμένουν αναλλοίωτα. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου οδήγησε σε νέα, σημαντικά αποτελέσματα στον χώρο των διαφορικών εξισώσεων.

Μία συμμετρία Lie μίας διαφορικής εξίσωσης, η οποία παράγεται από το διανυσματικό πεδίο $X = \xi(t,q,\dot{q})\partial_t + \eta^a(t,q,\dot{q})\partial_{q^a}$, είναι ένας σημειακός μετασχηματισμός στην πολλαπλότητα των πιδάκων (jet bundle) $J^1\left\{t,q^a,\dot{q}\right\}$ ο οποίος διατηρεί τη μορφή των εξισώσεων και μετασχηματίζει τις λύσεις σε λύσεις. Στο παρών κεφάλαιο, μελετάμε διαφορικές εξισώσεις που περιγράφονται από την εξίσωση

$$\ddot{q}^a = \omega^a(t,q,\dot{q}). \tag{7.1}$$

Η εξίσωση (7.1), καθορίζει το διανυσματικό πεδίο του Hamilton Γ, στην Jet bundle $J^1\left\{t,q^a,\dot{q}\right\}$, σύμφωνα με την εξίσωση

$$\Gamma = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a\frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. \tag{7.2}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μαθηματική συνθήκη ώστε ένα διανυσματικό πεδίο, $X^{[1]} = \xi(t,q,\dot{q})\partial_t + \eta^a(t,q,\dot{q})\partial_{q^a} + \left(\dot{\eta}^a - \dot{q}^a\dot{\xi}\right)\partial_{\dot{q}^a}$, στην $J^1\left\{t,q^a,\dot{q}\right\}$, να αποτελεί συμμετρία Lie της δ.ε. (7.1) είναι να υπάρχει μία συνάρτηση $\lambda\left(t,q,\dot{q}\right)$, τέτοια ώστε

$$[X^{[1]},\Gamma] = \lambda(t,q,\dot{q})\Gamma. \tag{7.3}$$

Μπορεί να δειχθεί, ότι οι συμμετρίες Lie που επιδέχεται η εξίσωση (7.1) συνθέτουν μία άλγεβρα Lie. Εάν ο σημειακός μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα στην πολλαπλότητα βάσης $\{t,q^a\}$, τότε το διάνυσμα με τις συνιστώσες $(\xi(t,q),\, \eta^a(t,q))$, καλείται σημειακή συμμετρία Lie. Εάν ο σημειακός μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα στην πολλαπλότητα των jets $J^1\left\{t,q^a,\dot{q}\right\}$, τότε καλείται δυναμική συμμετρία Lie. Συνήθως κανείς μέσω της έκφρασης συμμετρία Lie, αναφέρεται στις σημειακές συμμετρίες Lie. Ωστόσο, στη βιβλιογραφία μπορούν να βρεθούν διάφοροι τύποι δυναμικών συμμετριών, όπως οι συμμετρίες contact, μη-κλασικές συμμετρίες (nonclassical symmetries), συμμετρίες επιφάνειας (invariant surface symmetries) κ.α., βλέπε [157–161]. Στην περίπτωση των δυναμικών συμμετριών Lie, υπάρχει ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας ο οποίος μπορεί να απαλειφθεί εισάγοντας μία νέα συνθήκη. Σε αυτή την περίπτωση οι συμμετρίες καλούνται δυναμικές συμμετρίες βαθμιδας (gauged dynamical symmetries). Σύμφωνα με αυτές, η συνθήκη βαθμίδας που συνήθως θεωρείται είναι η $\xi = 0$, έτσι ώστε ο γεννήτορας παίρνει την απλοποιημένη μορφή $X^{[1]} = \eta^a(t,q,\dot{q})\partial_{q^a} + \Gamma(\eta^a)(t,q,\dot{q})\partial_{\dot{q}^a}$. Αυτή είναι και η συνθήκη βαθμίδας που υποθέτουμε παρακάτω.

Στην περίπτωση που οι δυναμικές εξισώσεις (7.1) προέρχονται από μία συνάρτηση Lagrange $L\left(t,q,\dot{q}\right)$, τότε η Emmy Noether [162] έδειξε [1] ότι εάν μία συμμετρία Lie της δ.ε. (7.1) αφήνει αναλλοίωτο το ολοκλήρωμα δράσης

[1] Για μία εναλλακτική απόδειξη του πρώτου θεωρήματος της Noether, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην εργασία [44].

$S=\int L\left(t,q,\dot{q}\right)dt$, δηλαδή $X\left(S\right)=\lambda S$, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $\Phi\left(t,q,\dot{q}\right)$, η οποία δίνεται από την έκφραση

$$\Phi\left(t,q,\dot{q}\right)=\xi\left(\dot{q}^{a}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{a}}-L\right)-\eta^{a}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{a}}+f \tag{7.4}$$

τέτοια ώστε $\Gamma\left(\Phi\right)=0$, γεγονός που καταδεικνύει ότι η συνάρτηση Φ αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (7.1). Αυτές οι ειδικές συμμετρίες Lie καλούνται συμμετρίες Noether. Για μία σημειακή συμμετρία Noether έχουμε την επιπλέον ιδιότητα ότι $X(\Phi)=\lambda\Phi$, το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση Φ αποτελεί ένα αναλλοίωτο πρώτο ολοκλήρωμα. Η συνθήκη για την ύπαρξη μίας τέτοιας σημειακής συμμετρίας Noether, βλέπε [163,164] δίνεται μέσω της εξίσωσης:

$$X^{[1]}L+\frac{d\xi}{dt}L=\frac{df}{dt}. \tag{7.5}$$

Η συνθήκη (7.5), καλείται **συνθήκη Noether**. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι σημειακές συμμετρίες Noether, συνθέτουν μία υπό-άλγεβρα της πεπερασμένης άλγεβρας Lie των σημειακών συμμετριών Lie. Η συνάρτηση f, της εξίσωσης (7.5) καλείται συνήθως συνάρτηση βαθμίδας (gauge function). Αυτό ωστόσο, όπως έχουμε δει στα προηγούμενα αποτελεί λανθασμένη ορολογία [2].

Επειδή, οι δυναμικές εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν είναι συνήθως δεύτερης τάξης, επικεντρωνόμαστε στα τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα. Ο κύριος λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τις συμμετρίες Noether είναι για να προσδιορίσουμε ολοκληρώματα Noether τα οποία στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε για να απλοποιήσουμε το σύστημα των εξισώσεων και αν υπάρχουν αρκετά από πρώτα ολοκληρώματα, να προσδιορίσουμε την αναλυτική λύση των δυναμικών εξισώσεων

Απαραίτητες συνθήκες για μία σημειακή συμμετρία Noether είναι:

a. Να υπάρχει μία συνάρτηση Lagrange $L\left(t,q,\dot{q}\right)$, μέσω της οποίας περιγράφονται οι δυναμικές εξισώσεις πεδίου (εξισώσεις κίνησης).

b. Για αυτήν τη συνάρτηση Lagrange, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη (7.5).

Ωστόσο, σε κάθε δυναμικό σύστημα δεν αντιστοιχεί μία μοναδική συνάρτηση Lagrange. Αυτό συνεπάγεται ότι είναι πιθανό να υπάρχουν μη-ισοδύναμες συναρτήσεις Lagrange (να μην διαφέρουν κατά το απόλυτο διαφορικό μίας συνάρτησης), που περιγράφουν τις ίδιες δυναμικές εξισώσεις, οι οποίες ωστόσο επιδέχονται διαφορετικές συμμετρίες Noether, βλέπε [166–168]. Επομένως καθίσταται σαφές, ότι όταν αναφερόμαστε σε μία συμμετρία Noether ενός δυναμικού συστήματος πρέπει πάντοτε να αναφέρουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange. Προσφάτως, έχουν προταθεί πολλές προσεγγίσεις, βλέπε [169–175], έτσι ώστε να μπορέσουν προσδιοριστούν τα πρώτα ολοκληρώματα των δυναμικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, κάποιοι από τους συγγραφείς, αποκαλούν τα πρώτα ολοκληρώματα που βρίσκουν non-Noetherian. Ως τέτοια αναφέρονται, το τετραγωνικό ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στο σύστημα του Kepler, το διανυσματικό πεδίο Runge-Lenz μπορούν να κατασκευαστούν από το πρώτης τάξης αναλλοίωτο μίας συμμετρίας κλίμακας (scale symmetry), βλέπε [171], ενώ ο Crampin στην εργασία του [170], αποκαλεί το διανυσματικό πεδίο Runge-Lenz κρυμμένη συμμετρία (hidden symmetry). Ωστόσο ο χαρακτηρισμός του διανυσματικού πεδίου Runge-Lenz, ως αποτέλεσμα ενός non-Noetherian διατηρητικού νόμου δεν είναι ακριβής. Το διάνυσμα Runge-Lenz, δεν μπορεί να κατασκευαστεί κατ΄ ευθείαν μέσω της σχέσης (7.4) μόνο με τη χρήση σημειακών συμμετριών Noether για τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος Kepler. Ωστόσο, μπορεί να παραχθεί εάν χρησιμοποιηθούν contact συμμετρίες, βλέπε [177]. Ένα επιπλέον παράδειγμα αποτελεί το αναλλοίωτο του Lewis για το σύστημα των Ermakov-Pinney, βλέπε [178–180], για το οποίο υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις οι οποίες καταλήγουν σε ταυτόσημα αποτελέσματα. Τα αναλλοίωτα των Runge-Lenz και Lewis διαφέρουν από τα αναλλοίωτα της στροφορμής καθότι πρόκειται για τετραγωνικούς νόμους διατήρησης.

Η δική μας προσέγγιση έχει ως εξής. Θεωρούμε μία συνάρτηση $I(t,q^{a},\dot{q}^{a})$, η οποία είναι ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού, γραμμικό ως προς τις ταχύτητες με συντελεστές οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές t,q^{a}. Στη συνέχεια απαιτούμε ότι το I ικανοποιεί τη συνθήκη ύπαρξης πρώτου ολοκληρώματος, δηλαδή,

$$\frac{dI}{dt}=0. \tag{7.6}$$

[2] Μία ενδιαφέρουσα μελέτη πάνω στο θεώρημα της Noether, στην οποία αποσαφηνίζονται οι διάφορες παρερμηνείες που συναντώνται στη βιβλιογραφία μπορούν να απαντηθούν στην εργασία [165]

Χρησιμοποιώντας τις δυναμικές εξισώσεις, προσδιορίζουμε τις συνθήκες που ικανοποιούν οι συντελεστές του I, η λύση των οποίων παράγει όλα τα πιθανά τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα της δοθείσας μορφής των δυναμικών εξισώσεων. Όταν οι δυναμικές εξισώσεις προέρχονται από μία συνήθη συνάρτηση Lagrange, τότε είμαστε σε θέση να ορίσουμε την κινητική μετρική $\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^j}$ και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη βαθμίδας $\xi = 0$ είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη συνιστώσα η^i, του γεννήτορα του σημειακού μετασχηματισμού, μέσω της συνθήκης Cartan

$$\eta^i(t, q^i, \dot{q}^i) = -\gamma^{ij} \frac{\partial I_2}{\partial \dot{q}^j}. \tag{7.7}$$

Τότε, το διάνυσμα που παράγει τη συμμετρία Noether, η οποία επιδέχεται το πρώτο ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση

$$X^{[1]} = \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \mathbf{\Gamma}(\eta^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \tag{7.8}$$

όπου Γ είναι το διανυσματικό πεδίο του Euler (ή Hamilton) της εξίσωσης (7.2). Θεωρώντας τη συνάρτηση Lagrange να είναι η κινητική ενέργεια, μπορούμε πάντοτε, μέσω του ανωτέρου φορμαλισμού να ερμηνεύσουμε ένα πρώτο ολοκλήρωμα μέσω μίας αντίστοιχης συμμετρίας Noether. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης αποτελούν γενίκευση των αποτελεσμάτων των Τσαμπαρλή και Παλιαθανάση, βλέπε [183, 184] για σημειακές συμμετρίες και αυτά των Crampin και Kalotas, βλέπε [170, 177], για μία οικογένεια τετραγωνικών πρώτων ολοκληρωμάτων.

Επίσης, μελετάμε τη σχέση ανάμεσα στις συμμετρίες που παράγουν τα τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα και τις συμμετρίες της γεωμετρίας της κινηματικής μετρικής, όπως αυτή καθορίζεται μέσω των δυναμικών εξισώσεων. Αυτή η μετρική ορίζει μία γεωμετρία στο χώρο των λύσεων η οποία επιδέχεται συγκεκριμένες γεωμετρικές συμμετρίες (collineations). Είναι επομένως φυσικό να περιμένει κανείς ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των Lie και των Noether συμμετριών των δυναμικών εξισώσεων και των συμμετριών (collineations) της κινηματικής μετρικής.

Μελέτες αυτού του προβλήματος έχουν πραγματοποιηθεί από τους Katzin και Levine, βλέπε [181, 182], Aminova [45, 46] και άλλους. Μία πιο πρόσφατη μελέτη που δίνει την πλήρη απάντηση έχε δωθεί στα [183, 184], όπου έχει αποδειχθεί ότι οι *σημειακές* συμμετρίες Lie των δυναμικών εξισώσεων προέρχονται από την ειδική προβολική άλγεβρα της κινηματικής μετρικής, ενώ αντίστοιχα, οι Noether προέρχονται από την ομοθετική άλγεβρα αυτής. Ωστόσο, δεν υπάρχει ένα τέτοιο ισχυρό αποτέλεσμα για την περίπτωση των δυναμικών συμμετριών (Lie και Noether). Έχουν εξαχθεί, παρόμοια αποτελέσματα, για την περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, [185–188] καθώς και για την περίπτωση διαταραγμένων συναρτήσεων Lagrange, βλέπε [189]. Ακόμα, αποτελέσματα που να αφορούν συναρτήσεις Lagrange που παρουσιάζουν ανωμαλία (singular Lagrangians), οι οποίες αφορούν συστήματα με δεσμούς μπορούν να βρεθούν στα [190, 191].

Η δομή αυτού του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη. Στην ενότητα 7.1, παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των συμμετριών και των τανυστών Killing για πολλαπλότητες Riemann. Παρουσιάζονται κάποια νέα αποτελέσματα τα οποία μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε τανυστικά πεδία Killing δεύτερης τάξης μέσω των collineations. Στην ενότητα 7.2, μελετάμε τη σχέση μεταξύ των συμμετριών αυτών της κινηματικής μετρικής και των τετραγωνικών πρώτων ολοκληρωμάτων. Στην ενότητα 7.3, εφαρμόζουμε τα γενικευμένα αποτελέσματα στην περίπτωση ενός δισδιάστατου ολόνομου συστήματος. Τέλος, στην ενότητα 7.4, αναλύουμε τα αποτελέσματα μας και εξάγουμε τα συμπεράσματα μας.

7.1 Συμμετρίες και τανυστικά πεδία Killing 2ης τάξης

Έστω χώρος Riemann V^n, με μετρική g_{ab}. Έστω $\mathbf{\Omega}(x^c)$, ένα γραμμικό γεωμετρικό αντικείμενο[3] στον V^n, το οποίο κάτω από τη δράση του απειροελάχιστου μετασχηματισμού $x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, \varepsilon\right)$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον κανόνα

$$\bar{\mathbf{\Omega}}\left(\mathbf{\Omega}, x^c, x^{c'}\right) = J\left(x^c, x^{c'}\right) ... J\left(x^c, x^{c'}\right) \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Xi}\left(x^c, x^{c'}\right), \tag{7.9}$$

όπου τι $J\left(x^c, x^{c'}\right)$ συμβολίζει τον Ιακωβιανό πίνακα του μετασχηματισμού.

[3] Με τον όρο γεωμετρικό αντικείμενο αναφερόμαστε σε μία ποσότητα ορισμένη στον χώρο V^n, όχι απαραίτητα τανυστικό πεδίο, η οποία υπακούει σε έναν συγκεκριμένο κανόνα μετασχηματισμού.

Μία συμμετρία (collineation) ενός γεωμετρικού αντικειμένου $\mathbf{\Omega}\left(x^c\right)$ κάτω από τη δράση ενός απειροελάχιστου μετασχηματισμού $x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, \varepsilon\right)$ που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο$X\left(x^c\right)$ ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\mathbf{\Psi}\left(x^c\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\bar{\mathbf{\Omega}}\left(\mathbf{\Omega}, x^{a'}\left(x^b, \varepsilon\right)\right) - \mathbf{\Omega}\left(x^b\right)}{\varepsilon}, \tag{7.10}$$

όπου το Ψ έχει τον ίδιο αριθμό δεικτών και συμμετριών αυτών με το $\mathbf{\Omega}$. Το δεξί μέλος αυτής της σχέσης αποτελεί τον ορισμό της παραγώγου Lie του X, επομένως η σχέση (7.10) γράφεται απλούστερα ως

$$\mathcal{L}_X \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Psi}.$$

Οι συμμετρίες (collineations) που εμπλέκουν γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία προέρχονται από τη μετρική, g_{ab}, όπως τα σύμβολα Christofell Γ^a_{bc}, ο τανυστής Ricci κ.τ.λ. παίζουν σημαίνοντα ρόλο στη διαμόρφωση της μαθηματικής δομής μιας Riemannian πολλαπλότητας V^n και στις ιδιότητες των δυναμικών συστημάτων που ορίζονται στην πολλαπλότητα V^n.

7.1.1 Συμμετρίες του μετρικού τανυστή

Στο παρόν κεφάλαιο εστιάζουμε την προσοχή μας σε δύο οικογένειες γεωμετρικών συμμετριών (collineations). Η πρώτη οικογένεια αφορά τις σύμμορφες κινήσεις οι οποίες καθορίζονται μέσω της συνθήκης

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = 2\psi\left(x^c\right) g_{ab}, \tag{7.11}$$

όπου το διανυσματικό πεδίο X, καλείται σύμμορφο διάνυσμα Killing (CKV) και η συνάρτηση $\psi(x^c)$, σύμμορφος παράγοντας. Αποδεικνύεται ότι $\psi = \frac{1}{\dim V^n} X^c{}_{;c}$. Όταν $\psi_{;ij} = 0$, $\psi_{,i} = 0$ με $\psi \neq 0$ και $\psi = 0$, τότε το CKV παίρνει την ειδική μορφή ενός special CKV, ενός ομοθετικού διανύσματος (HV) και ενός διανύσματος Killing (KV) αντίστοιχα.

Η δεύτερη οικογένεια συμμετριών, είναι οι προβολικές συμμετρίες (PC), οι οποίες καθορίζονται μέσω της συνθήκης

$$L_X \Gamma^a_{bc} = 2\delta^a_{(b}\phi_{,c)}\,, \tag{7.12}$$

όπου $\phi\left(x^c\right)$, είναι μία τυχαία συνάρτηση. Στην περίπτωση κατά την οποία $\phi_{;ij} = 0$, με $\phi_{,i} \neq 0$ ή $\phi = 0$ η PC παίρνει την ειδική μορφή μίας special PC ή μίας αφινικής συμμετρίας affine collineation (AC) αντίστοιχα. Μία AC, η οποία δεν είναι KV ή HV καλείται γνήσια (proper) AC.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $L_\eta \Gamma^a_{bc} = \eta^a_{;bc} - R^a_{bcd}\eta^d$, ξαναγράφουμε τη συνθήκη (7.12) και έχουμε

$$X^a_{;(bc)} - 2\delta^a_{(b}\phi_{,c)} = R^a_{bcd} X^d. \tag{7.13}$$

Σύμφωνα με αυτήν, προκύπτει ότι

$$X_{(a;b} - 2g_{ab}\phi)_{;c)} = 0. \tag{7.14}$$

Ένας τανυστής Killing (KT) K, ορίζεται μέσω της συνθήκης

$$\left[K, g_{ab}\right]_{SN} = 0 \tag{7.15}$$

ή ισοδύναμα

$$K_{(a_1\ldots a_k;c)} = 0 \tag{7.16}$$

όπου με $[,]_{SN}$, συμβολίζουμε τον μεταθέτη Schouten-Nijenhuis, ο οποίος αποτελεί γενίκευση της παραγώγου Lie για πεδία ανώτερης τάξης. Εάν το K είναι ένα διανυσματικό πεδίο τότε ο μεταθέτης $[,]_{SN}$, απλοποιείται στην παράγωγο Lie και ο KT δίνει τη θέση του στο σε ένα KV. Από τη σχέση (7.14), προκύπτει ότι το τανυστικό πεδίο $C_{ab} = X_{(a;b)} - 2g_{ab}\phi$, είναι ένας τανυστής Killing δεύτερης τάξης. Επομένως, γίνεται σαφές ότι οι προβολικές συμμετρίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να κατασκευαστούν τανυστικά πεδία Killing.

Στην ειδική περίπτωση που ο τανυστής Killing C_{ab}, προέρχεται από ένα διανυσματικό πεδίο L^a, σύμφωνα με τη σχέση $C_{ab} = L_{(a;b)}$, ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $M_a = L_a - X_a$, όπου το X^a είναι μια PC και ικανοποιεί την εξίσωση

$$M_{(a;b)} = -2\phi g_{ab},$$

από την οποία προκύπτει ότι το διανυσματικό πεδίο M^a είναι ένα CKV με σύμμορφο παράγοντα $-\phi$.

Επομένως, εάν ένας χώρος επιδέχεται m CKVs M^a και m PCs X^a, έτσι ώστε ο σύμμορφος παράγοντας είναι μείον $(-)$ ο προβολικός παράγοντας, κατασκευάζουμε m δισδιάστατους KTs της μορφής $C_{ab} = L_{(a;b)}$, όπου $L_a = M_a + \eta_a$.

Μέσω της συνθήκης (7.14) έχουμε ότι μία αφινική συμμετρία (AC) η^a ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\eta_{(a;bc)} = 0.$$

Επομένως το τανυστικό πεδίο $C_{ab} = \eta_{(a;b)}$ ορίζει έναν τανυστή δεύτερης τάξης. Καταλήγουμε ότι από s (για παράδειγμα) proper ACs n^a που επιδέχεται μία μετρική κατασκευάζουμε s KTs $C_{ab} = \eta_{(a;b)}$.

7.1.2 Τανυστικά πεδία Killing και συμμετρίες

Για τους KTs ορισμένους σε έναν χώρο V^n, μετρικής Riemann έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα. Έστω V^n μία Riemannian ή ψεύδο-Riemannian πολλαπλότητα διάστασης n. Τότε:

1. Οι KTs m βαθμού, που ορίζονται στον V^n σχηματίζουν ένα γραμμικό χώρο διάστασης μικρότερης ή ίσης του
$$\frac{(n+m-1)!(n+m)!}{(n-1)!m!n!(m+1)!},$$
όπου η ισότητα ισχύει εάν και μόνον εάν ο V^n, αποτελεί έναν χώρο σταθερής καμπυλότητας [192].

2. Ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων τανυστικών πεδίων Killing δεύτερης τάξης που μπορούν να οριστούν σε μία πολλαπλότητα Riemann διάστασης n, είναι $n(n+1)^2(n+2)/12$ και αυτό αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο χώρος να είναι χώρος σταθερής καμπυλότητας, βλέπε [193–195].

3. Στην περίπτωση επίπεδου χώρου, οι τανυστές Killing χαρακτηρίζονται ως reducible γιατί μπορούν να κατασκευαστούν μέσω γινομένων διανυσματικών πεδίων Killing βλέπε [196].

Από τα παραπάνω σχετικά με τους τανυστές Killing δεύτερης τάξης ορισμένους σε χώρο V^n, συμπεραίνουμε τα ακόλουθα

α. Εάν ο χώρος επιδέχεται m βαθμωτά KVs S_J $(J = 1, 2, ..., m)$ και r μη-βαθμωτά KVs M_A $(A = 1, 2, ..., r)$ τότε κατασκευάζουμε $m^2 + mr = m(m + r)$ KTs δεύτερης τάξης (εξαιρουμένης της μετρικής), της μορφής $C_{ab} = L_{(a;b)}$ όπου
$$L_a = S_I S_{J,a} + S_I M_{Aa}. \tag{7.17}$$

β. Εάν ο χώρος επιδέχεται επιπλέον k proper PCs n^a, με προβολικό παράγοντα ϕ και k CKVs G_a με σύμμορφο παράγοντα $-\phi$ τότε κατασκευάζουμε επιπλέον k KTs δεύτερης τάξης της μορφής $C_{ab} = L_{(a;b)}$, όπου
$$L_a = G_a + \eta_a.$$

ς. Τέλος, εάν ο χώρος επιδέχεται r proper ACs τότε κατασκευάζουμε επιπλέον r KTs.

Συνοψίζουμε αυτά τα αποτελέσματα στην παρακάτω πρόταση

Πρόταση 7.1.1 *Σε έναν χώρο V^n, τα διανυσματικά πεδία της μορφής*
$$L_a = c_1 KV_a + c_2 PC_a + c_3 AC_a + c_{1I} S_{I,a} + c_{2IJ} S_I S_{J,a} + 2c_{IA} S_I M_{Aa} \tag{7.18}$$
όπου τα proper PCs είναι CKVs τέτοια ώστε ο σύμμορφος παράγοντας έχει αντίθετο πρόσημο από τον προβολικό παράγοντα, οι AC_a είναι proper και τα KV_a είναι τα μη βαθμωτά KVs τα οποία παράγουν τους KTs δεύτερης τάξης της μορφής $C_{ab} = L_{(a;b)}$. Στην περίπτωση που ο χώρος είναι μέγιστα συμμετρικός (maximally symmetric spaces) τότε αυτός δεν επιδέχεται proper PCs και proper ACs. Επομένως, τα μόνα διανυσματικά πεδία που χρειάζονται είναι τα KVs
$$L_a = c_1 KV_a + c_{1I} S_{I,a} + c_{2IJ} S_I S_{J,a} + 2c_{3IA} S_I M_{Aa}. \tag{7.19}$$
Τα KVs δίνουν το τετριμμένο τανυστή Killing $C_{ab} = 0$ ενώ το HV παράγει το μετρικό τανυστή $C_{ab} = g_{ab}$. Αυτά τα διανυσματικά πεδία παράγουν όλους τους τανυστές KTs $C_{ab} = L_{(a;b)}$ ενός επίπεδου χώρου. Τα διανυσματικά πεδία $S_I S_{J,a}$ και $S_I M_{Aa}$ είναι βαθμωτά gradient και μη βαθμωτά ACs, αντίστοιχα.

Σημειώνουμε ότι στη γενική περίπτωση ενός χώρου V^n ο οποίος δεν είναι επίπεδος, οι KTs δεύτερης τάξης δεν είναι όλοι reducible και κατ΄ επέκταση η σχέση $C_{ab} = L_{(a;b)}$, δεν έχει την παραπάνω λύση.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση στην περίπτωση του δισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου, E^2 και κατασκευάζουμε τους KTs που αυτός επιδέχεται. Ο E^2 επιδέχεται δύο βαθμωτά K˝ς ∂_x, ∂_y, των οποίων οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι x, y αντίστοιχα και ένα μη-βαθμωτό KV (τον γεννήτορα στροφών) $y\partial_x - x\partial_y$. Μέσω αυτών των KVs κατασκευάζουμε $2(2+1) = 6$ proper KTs. Από την εξίσωση (7.19) έχουμε

$$\begin{aligned} L_a &= c_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_{211}x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{212}x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_{221}y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + c_{222}y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2c_{311}x\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + 2c_{312}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

η οποία μπορεί να γραφεί

$$L^a = \begin{pmatrix} Ax + 2axy + 2\beta x^2 + c_8 y + c_{11} \\ By + 2ay^2 + 2\beta xy + c_{10}x + c_9 \end{pmatrix}. \tag{7.20}$$

Η μορφή του τανυστή Killing $C_{ab} = L_{(a;b)}$ στον χώρο E^2 είναι

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} L_{xx} & \frac{1}{2}(L_{xy} + L_{yx}) \\ \frac{1}{2}(L_{xy} + L_{yx}) & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + 2ay & C - ax - \beta y \\ C - ax - \beta y & B + 2\beta y \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

όπου η σταθερά C ικανοποιεί τη σχέση $C = \frac{c_8 + c_{10}}{2}$.

7.2 Τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα και συμμετρίες

Έστω ένα ολόνομο δυναμικό σύστημα, ορισμένο σε χώρο Riemann, το οποίο περιγράφεται μέσω της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = Q^a\left(t, q^c\right), \tag{7.22}$$

όπου με $\Gamma^a_{bc}\left(q^c\right)$, συμβολίζουμε τα σύμβολα Christofell τα οποία ορίζονται μέσω της κινηματικής μετρικής (δηλαδή, την κινητική ενέργεια) του συστήματος. Οι εξωτερικές δυνάμεις Q^a, δίνονται από τη σχέση

$$Q_a = -V_{,a} + F_a \tag{7.23}$$

όπου με $V^{,a}$ συμβολίζουμε τις συντηρητικές δυνάμεις που προέρχονται από τη συνάρτηση δυναμικού $V(t, q^c)$ και $F^a(q)$ είναι οι μη συντηρητικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα. Γι αυτό το σύστημα μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση Lagrange (υποθέτοντας ότι είναι κανονική)

$$L\left(t, q^c, \dot{q}^c\right) = \frac{1}{2}\gamma_{ab}\left(q^c\right)\dot{q}^a\dot{q}^b - V(t, q^c). \tag{7.24}$$

και γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης (7.22) στη μορφή $E_a\left(L\right) = F_a$, όπου $E_a = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial}{\partial q^a}$, είναι το διανυσματικό πεδίο Euler-Lagrange.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I = K_{ab}(t, q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b + K_a(t, q^c)\dot{q}^a + K(t, q^c), \tag{7.25}$$

η οποία είναι τετραγωνική ως προς τις ταχύτητες και απαιτούμε να αποτελεί πρώτο ολοκλήρωμα των δυναμικών εξισώσεων, δηλαδή, να ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dI}{dt} = 0$ modulo τις εξισώσεις κίνησης (7.22). Μέσω αυτής της προσέγγισης, προσδιορίζουμε όλα τα τετραγωνικά ολοκληρώματα της εξίσωσης (7.22) της ανωτέρω μορφής. Αυτή η προσέγγιση βασίζεται μόνο στις δυναμικές εξισώσεις (7.22) και όχι στο θεώρημα της Noether το οποίο απαιτεί μία (μη-μοναδική) συνάρτηση Lagrange. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση δεν είναι καινοτόμα. Φαίνεται να έχει εισαχθεί αρχικά από τον Darboux, βλέπε [197] και αργότερα χρησιμοποιήθηκε από τον Wittaker, βλέπε [198] , όπου και οι δύο είχαν θεωρήσει την περίπτωση αυτόνομων Νευτώνειων συντηρητικών συστημάτων, με δύο βαθμούς ελευθερίας, προσδιορίζοντας τις συναρτήσεις δυναμικού $V(q)$ για τις οποίες τα συστήματα αυτά επιδέχονται τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα διαφορετικά της Χαμιλτονιανής συνάρτησης (Ενέργειας του συστήματος). Η πλήρης απάντηση στο πρόβλημα δόθηκε αργότερα από τον G. Thompson, βλέπε [199] και για επεκτάσεις αυτής, βλέπε τις εργασίες [200–202] καθώς και τις αναφορές αυτών.

Η απαίτηση $\frac{dI}{dt}=0$, συνεπάγεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 0 &= K_{(ab;c)}\dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c + \left(K_{ab,t}+K_{a;b)}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b \\ &+ (K_{a,t}+K_{,a})\dot{q}^a - 2K_{ar}\delta_b^{(r}F^{a)}\dot{q}^b \\ &+ K_{,t} - K_aF^a. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Αναλύοντας το παραπάνω ως προς τις δυνάμεις των ταχυτήτων παίρνουμε τις συνθήκες

$$K_{(ab;c)}=0 \tag{7.27}$$

$$K_{(a;b)}=-K_{ab,t} \tag{7.28}$$

$$K_{,b}+K_{b,t}-2K_{ab}F^a=0 \tag{7.29}$$

$$K_{,t}=K_aF^a. \tag{7.30}$$

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι αυτές οι συνθήκες απλοποιούνται στη συνθήκη Noether (7.5) όταν $F^a=0$ και $X=\left(K_b^a\dot{q}^b+K^a\right)\partial_a$ και στην ασθενή συνθήκη Noether όταν

$$X^{[1]}L+\frac{d\xi}{dt}L+\eta^aF_a=\frac{df}{dt}, \tag{7.31}$$

η οποία είναι επίσης γνωστή ως εξίσωση Noether-Bessel-Hagen (NBH) [203] , όπου $F^a\neq 0$.

Η επίλυση των συνθηκών (7.27) - (7.30) παράγει όλα τα τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα της σχέσης (7.22), της μορφής (7.25).

Αυτές οι εξισώσεις έχουν βρεθεί ξανά και έχουν επιλυθεί για συγκεκριμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα οι Kalotas et al. [177] θεωρούν την περίπτωση όπου $F^a=0$ και $K^a=0$.. Αντίστοιχα, οι συγγραφείς στην εργασία [204] θεωρούν την περίπτωση όπου $K^a\neq 0$, και $K_{ab}=g\left(t\right)\gamma_{ab}$ για σημειακές συμμετρίες, όπου το K^a είναι το HV ή κάποιο KV της μετρικής γ_{ab} και $g_{,t}$ είναι ο ομοθετικός παράγοντας του K^a.

Στη γενική περίπτωση που μελετάμε θεωρούμε ότι το τανυστικό πεδίο K_{ab} είναι ένας τανυστής Killing της μορφής $K_{ab}(t,q)=g(t)C_{ab}(q)$, όπου $C_{ab}(q^a)$ είναι ένας γενικευμένος τανυστής Killing που επιδέχεται η κινηματική μετρική. Τότε, από την εξίσωση (7.28) προκύπτει ότι:

$$K_a(t,q)=f(t)L_a(q)+B_a(q), \tag{7.32}$$

από την οποία παίρνουμε τις ακόλουθες συνθήκες

$$f(t)L_{(a;b)}+B_{(a;b)}+g_{,t}C_{ab}=0, \tag{7.33}$$

$$K_{,b}+f_{,t}L_b-2g(t)C_{ab}F^a=0, \tag{7.34}$$

$$f(t)L_aF^a+B_aF^a-K_{,t}=0. \tag{7.35}$$

Μέσω της ανάλυσης που προηγήθηκε στην προηγούμενη ενότητα βλέπουμε ότι η εξίσωση (7.33) είναι και αυτή μία γεωμετρική συνθήκη. Συγκεκριμένα, συσχετίζει τον τανυστή Killing C_{ab} με τα διανυσματικά πεδία L^a και B^b. Αυτά περιγράφονται από τις εξισώσεις (7.18) ή (7.19) της Πρότασης 7.1.1. Συμπεραίνουμε ότι τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα της εξίσωσης (7.25) με μη μηδενικό γραμμικό όρο, υπάρχουν μόνο εάν ο χώρος μετρικής Riemann επιδέχεται μία μη-τετριμμένη προβολική άλγεβρα, γεγονός που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας reducible τανυστής Killing, ο οποίος κατασκευάζεται από τις γεωμετρικές συμμετρίες (collineations) σύμφωνα με τη μεθοδολογία της ενότητας 7.1.

7.3 Εφαρμογή

Θεωρούμε το αυτόνομο δισδιάστατο δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται μέσω των διαφορικών εξισώσεων

$$\ddot{x} = F_1(x,y) \quad \text{και} \quad \ddot{y} = F_2(x,y), \tag{7.36}$$

όπου $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ είναι τυχαίες λείες συναρτήσεις. Προκειμένου να ορίσουμε την κινηματική μετρική του συστήματος, θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, συνοδευόμενη από τις εξωτερικές δυνάμεις των εξισώσεων Euler-Lagrange της μορφής $Q^i = (F_1, F_2)$ (σύμφωνα με την εξίσωση (7.22)). Για αυτήν τη συνάρτηση Lagrange, η κινηματική μετρική παίρνει τη μορφή $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$, δηλαδή είναι η Ευκλείδεια δισδιάστατη μετρική. Ακόμα έχουμε ότι $V = 0$ και $Q^i = (F_1, F_2)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση όπου $g(t) = c_0 t + c_1$ ($c_0 \neq 0$). Επίσης παίρνουμε ότι $B_a = 0$. Τότε η σχέση (7.33) δίνει $f(t) = -c_0$ και $C_{ab} = L_{(a;b)}$. Μέσω της πρότασης 7.1.1, προκύπτει ότι το διανυσματικό πεδίο L_a δίνεται από τη σχέση (7.20)και ο τανυστής Killing C_{ab}, δίνεται μέσω της εξίσωσης (7.21), δηλαδή

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} A + 2ay & \frac{C}{2} - ax - \beta y \\ \frac{C}{2} - ax - \beta y & B + 2\beta x \end{pmatrix}, \tag{7.37}$$

όπου $C = c_8 + c_{10}$.

Από τη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του βαθμωτού K έχουμε ότι $K_{;[ab]} = 0$ και τότε

$$c_0 t \left(2C_{[a|c}\gamma^{(c}_{d|}F^{d)}\right)_{;b]} = 0 \Rightarrow \left(C_{[a|c}\gamma^{(c}_{d|}F^{d)}\right)_{;b]} = 0 \Rightarrow C_{ac}\gamma^{(c}_{d}F^{d)} = m(q)_{,a} \quad , \tag{7.38}$$

όπου το $m(q)$ είναι μία συνάρτηση. Από τη δεύτερη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας $K_{;[at]}$ προκύπτει ότι

$$L_b F^b = -2m(q). \tag{7.39}$$

Απομένει η εφαρμογή των συνθηκών (7.34) , (7.35) οι οποίες σε αυτήν την περίπτωση γράφονται

$$2(c_0 t + c_1)m + K_{,a} = 0 \tag{7.40}$$

$$K_{,t} - 2c_0 m = 0. \tag{7.41}$$

Μέσω της δεύτερης εξίσωσης έχουμε ότι $K = 2c_0 mt + C_1$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη, βρίσκουμε ότι $2(c_0 t + c_1)m + 2c_0 m = 0$, από την οποία συνεπάγεται ότι $m = 0$. Ως συνέπεια αυτής έχουμε ότι $K = 0$ και επομένως το διάνυσμα L_a είναι κάθετο στο διανυσματικό πεδίο F^a. Επιπλέον, το διανυσματικό πεδίο F^a υπόκειται στη συνθήκη $C_{ac}\gamma^{(c}_{d}F^{d)} = 0$, η οποία ισοδύναμα γράφεται $C_{ac}F^c = 0$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} A + 2ay & \frac{C}{2} - ax - \beta y \\ \frac{C}{2} - ax - \beta y & B + 2\beta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0$$

Προκειμένου η λύση μας να είναι μη-τετριμμένη απαιτούμε ότι $detC_{ab} = 0$, μέσω της οποίας καταλήγουμε στη συνθήκη

$$(A + 2ay)(B + 2\beta x) - \left(\frac{C}{2} - ax - \beta y\right)^2 = 0.$$

Από αυτή συνεπάγεται ότι

$$a = \beta = 0, AB = \frac{1}{4}C^2,$$

$$AF_1 + \frac{C}{2}F_2 = 0.$$

Μία λύση του συστήματος αυτού είναι η $A = B = \frac{C}{2}$ και $F_1 = -F_2$.

Για αυτήν τη λύση έχουμε ότι $L^a = \begin{pmatrix} Ax + c_8 y + c_{11} \\ By + c_{10}x + c_9 \end{pmatrix}$, σύμφωνα με τη οποία καταλήγουμε ότι το διάνυσμα L_a

προκύπτει από το άθροισμα των μη-proper ACs (A,B) του μη-βαθμωτού KV ($c_8, c_{10} = -c_8$) και των βαθμωτών KVs (c_{11}, c_9). Η συνθήκη $L_b F^b = 0$, υποδηλώνει ότι ($A = B$)

$$(Ax + c_8 y + c_{11}) - (Ay + c_{10}x + c_9) = 0 \Rightarrow A = c_{10} = c_8, c_9 = c_{11},$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με το ότι $C = c_8 + c_{10} = 2A = 2B$. Τότε $L^a = (A(x+y) + c_9)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Μέσω της παραπάνω έχουμε ότι

$$K_{ab} = (c_0 t + c_1)\begin{pmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & A \end{pmatrix} = A\,(c_0 t + c_1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_a = -c_0 L^a = -c_0 \begin{pmatrix} Ax + Ay + c_9 \\ Ay + Ax + c_9 \end{pmatrix}.$$

οπότε καταλήγουμε στο πρώτο ολοκλήρωμα

$$I = A\Big((c_0 t + c_1)(\dot{x} + \dot{y})^2 - c_0 (x\dot{x} + y\dot{y} + y\dot{x} + x\dot{y})\Big) - c_0 c_9 (\dot{x} + \dot{y}).$$

Καταλήγουμε ότι το ολόνομο δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται μέσω των εξισώσεων

$$\ddot{x} = F_1(x,y) \quad kai \quad \ddot{y} = -F_1(x,y) \tag{7.42}$$

επιδέχεται το τετραγωνικό πρώτο ολοκλήρωμα

$$I = A(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c_0 (A(x+y) + c_9)(\dot{x} + \dot{y})$$

για κάθε συνάρτηση $F_1(x,y)$.

Για να παρουσιάσουμε τη δυναμική της παραπάνω μεθοδολογίας, θεωρούμε μία διαφορετική λύση των εξισώσεων θεωρούμε και πάλι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (7.36) Γι αυτό το δισδιάστατο Ευκλείδειο σύστημα παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (7.33)-(7.35) ικανοποιούνται όταν $B^a = y\partial_x - x\partial_y$ και $L^a = x\partial_x$. Τότε, μέσω της εξίσωσης (7.33) έχουμε ότι $C_{ab} = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ωιτη $g_{,t} = \frac{1}{c_0} f$.

Άρα, οι σχέσεις (7.34), (7.35) δίνουν

$$K_{,x} + c_0 g_{,tt} x - 2g(t) F_1(x,y) = 0, \quad K_{,y} = 0 \quad , \tag{7.43}$$

$$c_0 g_{,t}(F_1(x,y)) + yF_1(x,y) - xF_2(x,y) - K_{,t} = 0. \tag{7.44}$$

Στη συνέχεια υποθέτοντας ότι $g_{,t} = 0$, δηλαδή $g(t) = \frac{1}{c_0}$, τότε το παραπάνω σύστημα παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$K_{,x} - \frac{2}{c_0} F_1(x,y) = 0, \quad K_{,y} = 0 \quad , \tag{7.45}$$

$$(F_1(x,y)) + yF_1(x,y) - xF_2(x,y) - K_{,t} = 0. \tag{7.46}$$

Μέσω αυτού έχουμε ότι $K = v(x) + n(t)$, και

$$F_1(x,y) = \frac{1}{2c_0} v_{,x}(x) \text{ και } F_2(x,y) = c_0 \frac{yv(x)_{,x}}{2x} + \frac{n_{,t}(t)}{x}. \tag{7.47}$$

Από αυτές συνάγουμε ότι οι δυναμικές εξισώσεις περιγράφονται μέσω των σχέσεων

$$\ddot{x} = \frac{c_0}{2} v_{,x}(x) \ , \ \ddot{y} = \frac{c_0 yv(x)_{,x} + 2n_{,t}(t)}{2x} \tag{7.48}$$

και επιδέχονται το τετραγωνικό ολοκλήρωμα

$$I = -\frac{1}{c_0}\dot{x}^2 + y\dot{x} - x\dot{y} + v(x) + n(t). \tag{7.49}$$

Εργαζόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο είναι πιθανό να κατηγοριοποιήσουμε όλους τους τύπους των δυναμικών συστημάτων της μορφής (7.36) τα οποία επιδέχονται τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα χωρίς τη χρήση του θεωρήματος της Noether ή άλλους τύπους συμμετριών, παρά μόνο, χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες (collineations) της κινηματικής μετρικής. Ουσιαστικά, η λύση της εξίσωσης $dI/dt = 0$ είναι θέμα της γεωμετρίας.

7.4 Συμπεράσματα

Στο παρών κεφάλαιο μελετήθηκε η σχέση μεταξύ των συμμετριών (collineations) της κινηματικής μετρικής και της ύπαρξης πρώτων ολοκληρωμάτων για αυτόνομα συστήματα σχεδόν γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Επανεξετάσαμε προηγούμενα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας και παράξαμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων του οποίου η λύση παράγει όλα τα τετραγωνικά ολοκληρώματα που αυτό επιδέχεται.

Ο στόχος αυτής της μελέτης ήταν να αποσαφηνίσουμε ότι τα πρώτα ολοκληρώματα δεν είναι απαραίτητα αποτέλεσμα των συμμετριών Noether, αλλά κυρίως πεδίο εφαρμογής της γεωμετρίας. Ως εκ τούτου, ο χαρακτηρισμός κάποιων πρώτων ολοκληρωμάτων ως 'non-Noetherian' είναι χωρίς νόημα.

Συγκεκριμένα, η γεωμετρία για ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να οριστεί μέσω της κινηματικής μετρικής. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη πρώτων ολοκληρωμάτων των δυναμικών εξισώσεων είναι η ύπαρξη γεωμετρικών συμμετριών (collineations) της κινηματικής μετρικής. Κατά μία έννοια, το δυναμικό σύστημα ¨περιορίζεται' από την ίδια γεωμετρία που αυτό δημιουργεί, καθώς οι συμμετρίες (collineations) που επιδέχεται είναι αυτές που παράγουν τα πρώτα ολοκληρώματα και ως εκ τούτου προσδιορίζουν την εξέλιξη του.

Οι νέες μαθηματικές σχέσεις που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 7.1 σχετικά με την κατασκευή των KTs μέσω της χρήσης των προβολικών συμμετριών καταδεικνύει τη σημασία της γεωμετρίας για την ύπαρξη των συμμετριών Lie/Noether. Αυτό σημαίνει ότι, δουλεύοντας με τις γεωμετρικές συμμετρίες της κινηματικής μετρικής είναι πιθανόν να εξάγουμε πληροφορίες σχετικά με την ύπαρξη τετραγωνικών ολοκληρωμάτων δίχως να πραγματοποιήσουμε τη τυπική διαδικασία εύρεσης τους μέσω της προσέγγισης Lie.

Κεφάλαιο 8

Επίλογος

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετήθηκαν τα δυναμικά συστήματα στην εφαπτόμενη πολλαπλότητα μέσω της χρήσης των νηματικών δεσμών. Ορίστηκαν οι διαφορετικοί τρόποι ανύψωσης γεωμετρικών αντικειμένων στην εφαπτόμενη πολλαπλότητα ενώ προτάθηκε μία μεθοδολογία σύμφωνα με την οποία η εφαπτόμενη δέσμη διαχωρίζεται σε δύο επιμέρους αμοιβαία κάθετες κατανομές. Μέσω αυτών προέκυψαν και τα strong/ weak horizontal lifts. Μέσω της θεωρίας των νηματικών δεσμών περιγράφουμε πλήρως τις δυναμικές εξισώσεις ενός Lagrangian συστήματος, ενώ στην περίπτωση όπου $Q_i = 0$ προσδιορίσαμε γεωμετρικά το αντίστροφο πρόβλημα της Μηχανικής και αναπαράγαμε τις συνθήκες του Helmoholtz. Επιπλέον, μελετήθηκαν οι δυναμικές συμμετρίες Lie και Noether και παράγαμε το σύστημα των εξισώσεων που μέσω της επίλυσης του, αυτές προσδιορίζονται. Αποδείξαμε δύο θεωρήματα για τον προσδιορισμό των σημειακών συμμετριών Lie και Noether στην περίπτωση κάποιων μη αυτόνομων Νευτώνειων συστημάτων το δυναμικό των οποίων εξαρτάται από το χρόνο. Αυτά τα θεωρήματα αποτελούν γενίκευση των θεωρημάτων των Τσαμπαρλή και Παλιαθανάση για την εύρεση των συμμετριών Lie και Noether στην περίπτωση των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων. Επιπλέον, εφαρμόσαμε το θεώρημα του Cartan για χώρο FLRW και μέσω ενός Minisuperspace μοντέλου προσδιορίσαμε όλα τα δυναμικά συστήματα που επιδέχονται συμμετρίες Contact, δηλαδή συμμετρίες που προέρχονται από ένα τανυστικό πεδίο Killing δεύτερης τάξης της κινηματικής μετρικής. Ακόμα, μέσω των διατηρητικών νόμων (πρώτα ολοκληρώματα) αποδείξαμε την Liouville ολοκληρωσιμότητα του συστήματος Lagrange και όπου ήταν εφικτό προσδιορίσαμε την αναλυτική λύση. Τέλος κατορθώσαμε να αποδεσμεύσουμε την έννοια της συμμετρίας από τα πρώτα ολοκληρώματα. Η θέση μας είναι ότι τα πρώτα ολοκληρώματα δεν είναι απαραίτητα αποτέλεσμα των συμμετριών Noether, παρά αποτελούν πεδίο εφαρμογής της γεωμετρίας. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη πρώτων ολοκληρωμάτων δεύτερης τάξης των δυναμικών εξισώσεων είναι η ύπαρξη γεωμετρικών συμμετριών (collineations) της κινηματικής μετρικής. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το δυναμικό σύστημα «περιορίζεται» από την ίδια γεωμετρία που αυτό δημιουργεί, καθώς οι συμμετρίες που επιδέχεται η κινηματική μετρική είναι αυτές που παράγουν τα πρώτα ολοκληρώματα και προσδιορίζουν την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος.

Στην μέλλον σχεδιάζουμε να επεκτείνουμε τη γεωμετρική ανάλυση των συνθηκών ύπαρξης συμμετρίας όπως αυτές δίνονται από τις εξισώσεις (7.33) - (7.35) του Κεφαλαίου 7, έτσι ώστε να κατανοήσουμε εις βάθος πως συσχετίζεται η γεωμετρία με τον όρο-δύναμης F^a. Αυτή η ανάλυση θα μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τις γεωμετρικές ιδιότητες των ολοκληρωτικών μοντέλων και πιθανώς μία γεωμετρική τους ταξινόμηση αναλόγως με το εάν τα Χαμιλτονιανά συστήματα είναι διαχωρίσιμα ή μη (separable/non-separable), βλέπε [205]. Εξίσου σημαντικό βήμα αποτελεί η γενική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (7.33) - (7.35) μέσω του οποίου παράγονται όλα τα τετραγωνικά πρώτα ολοκληρώματα των δυναμικών εξισώσεων (7.22) της μορφής (7.25).

Βιβλιογραφία

[1] W. Sarlet, A. Vandecasteele, F. Cantrijn, E. Mart?nez Differential Geometry and its Applications 5 pp 171-203 (1995).

[2] M. de Leon and P.R. Rodrigues, Mathematics Studies 158 North-Holland, Amsterdam (1989).

[3] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge, Cambridge University Press, 1980)

[4] R.M. Wald, *General Relativity* (Chicago University Press, 1984)

[5] K.C. Jacobs, Astrophys J **151 (**1968) 431; Astrophys J **153** (1968) 661

[6] F. Hoyle and J.V. Narlikar, Proc R Soc **A273** (1963) 1; C.W. Misner, Ap. J. **151** (1968) 431

[7] A.Z. Petrov, *Einstein Spaces* Pergamon, (Oxford University Press, 1969)

[8] M. Tsamparlis, Class.Quantum Grav **15** (1998) 2901

[9] R. Maartens, D.P. Mason and M. Tsamparlis, J. Math. Phys. **27** (1986) 2987

[10] D.P. Mason and R.J Maartens, Math. Phys. **28** (1986) 2511

[11] R. Maartens, S.D. Maharaj and B.O.J. Tupper Class.Quantum Grav **12(**1995) 2577; R. Maartens, S.D. Maharaj and B.O. J. Tupper Class.Quantum Grav **13 (**1996) 317

[12] A.A. Coley and B.O.J. Tupper, Class.Quantum Grav **7 (**1990) 1961

[13] A.A. Coley and B.O.J. Tupper, Class.Quantum Grav **7 (**1990) 2195

[14] A.A. Coley and B.O.J. Tupper, Math. Phys. **33** (1992)1754

[15] A.A. Coley and B.O.J. Tupper, Class.Quantum Grav **11 (**1994) 2553

[16] L. Herrera, J. Ponce de Leon J.Math.Phys **26 (**1985) 2332; L. Herrera, J. Ponce de Leon J.Math.Phys **26 (**1985) 2018

[17] P.S. Apostolopoulos and M. Tsamparlis, Class. Quantum Grav. **18** (2001) 3775-3790

[18] M.J.Rebouças and J. Tiommo, Phys. Rev. D **28** (1983) 1251

[19] M.J. Rebouças and A.F.F. Teixeira, J.Math.Phys **33(**1992) 2855

[20] L. Defrise-Carter, Commun.Math.Phys. **40** (1975) 273

[21] G.S. Hall and J.D. Steele, J.Math.Phys 1991 **32 (**1991) 1847

[22] R. Maartens and C. M. Mellin Class.Quantum Grav **13 (**1996) 1571.

[23] C.B.G. McIntosh and J.D. Steele, Class. Quantum Grav. 8 (1991) 1173

[24] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge 1973)

[25] M. Tsamparlis, D. Nikolopoulos and P. S. Apostolopoulos, Class. Quantum Grav. **15** (1998) 2909

[26] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick *Analysis, Manifolds and Physics* (Amsterdam: North Holland 1977)

[27] G.F.R. Ellis in Cargese Lectures in Physics, Vol 6, edited by E.Schatznan (Gordon and Breach, New York, 1971)

[28] B.K. Datta, Nuovo Cimento **36** (1965) 109

[29] G.J. Rosen, Math Phys **3** (1962) 313

[30] L.P. Eisenhart *Riemannian Geometry* (Princeton University Press, Princeton 1964)

[31] Raffaele Rani et al Class. Quantum Grav. 20 1929 (2003)

[32] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis, L. Karpathopoulos Gen Relativ Gravit (2015) 47: 15.

[33] A. Paliathanasis, Phd thesis EKPA http://hdl.handle.net/10442/hedi/35217

[34] A. Koutras, Class. Quantum Grav., 9, 1573 (1992).

[35] H. Stephani, M. MacCallum Cambridge University Press (1989)

[36] Prince, G.E., Crampin, M. Gen Relativ. Gravit. 16: 921. (1984)

[37] Michael Tsamparlis, A. Paliathanasis, L. Karpathopoulos, J. Phys. A: Math. Theor. 45 275201 (2012)

[38] N Kallinikos, E Meletlidou, J. Phys. A: Math. Theor. 46 305202 (2013)

[39] R. Maartens, D. R. Taylor International Journal of Theoretical Physics, Vol. 33, No. 8, (1994)

[40] S. Lie, *Differentialgleichungen*, AMS Chelsea Publishing, New York **14** (1967).

[41] H. Stephani, Differential Equations: Their Solutions using Symmetry, Cambridge University Press, New York, (1989)

[42] K.L. Duggal and R.Sharma, Symmetries of Spacetimes and Riemannian Manifolds, Kluwer Academic Press, (1999)

[43] G.H. Katzin and J. Levine, J. Math. Phys. **15,** 1460 (1974)

[44] G.H. Katzin and J. Levine, J. Math. Phys. 17, 1345 (1976)

[45] A.V. Aminova, Sbornik Mathematics **186** (12), 1711 (1995)

[46] A.V. Aminova, Tensor, N.S. **65,** 68, (2000)

[47] T. Feroze, F.M. Mahomed and A. Qadir, Nonlinear Dynamics **65,** 74 (2006)

[48] A.H. Bokhari, A.H. Kara, A.R. Kashif and F.D. Zaman, Inter. Jour. Theor. Phys. **45**, 1063 (2006)

[49] A.H. Bokhari and A.H. Kara ,Gen Rel. Grav. 39, 2053 (2007)

[50] U. Camci, Gen. Rel. Grav. 46, 1824 (2014)

[51] U. Camci, EPJC 74, 3201 (2014)

[52] L. Karpathopoulos, A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, Journal of Mathematical Physics 58, 082901 (2017)

[53] Y. Bozhkov and I.L. Freire, J. Differential Equations 249, 872 (2010)

[54] A. Paliathanasis, M. Tsamparlis and M.T. Mustafa, IJGMMP 12, 1550033 (2015)

[55] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis and A. Qadir, IJGMMP 12, 1550003 (2015)

[56] S. Jamal, A.H. Kara, A.H. Bokhari, Canadian Journal of Physics, 90, 667 (2012)

[57] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Gen. Rel. Grav. 43, 1861 (2011)

[58] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis IJGMMP 11, 1450037 (2014)

[59] J.R. Ray, J. Phys A.: Math. Gen., **13**, 1969 (1980)

[60] P.G.L. Leach, J Physics A: Math. Gen. **13**, 1991 (1980)

[61] G.E. Prince and C.J. Eliezer J. Phys A.: Math. Gen. **14**, 587 (1981)

[62] F.M. Mahomed, A.H. Kara and P.G.L. Leach, J. Math. Anal. Appl., **178**, 116 (1993)

[63] J.M. Cervero and J. Villarroel, J. Phys A.: Math. Gen., **17**, 1777 (1984)

[64] V.V. Kozlov and O.A. Harin, Celestial. Mech. Dynam. Astronom., **54**, 393 (1992)

[65] M. Tegmark et al., Astrophys. J. **606,** 702 (2004).

[66] M. Kowalski et al., Astrophys. J. **686,** 749 (2008).

[67] E. Komatsu et al., Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 330 (2009).

[68] P. A. R. Ade et al., (Planck Collaboration), Astron. Astroph. **594,** A13 (2016).

[69] T. Clifton, P.G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Phys. Rept. **513,** 1 (2012).

[70] B. Ratra and P.J.E Peebles, Phys. Rev. D **37,** 3406 (1988).

[71] P.G. Ferreira and M. Joyce, Phys. Rev. D **58**, 023503 (1998).

[72] J.M. Overduin and F.I. Cooperstock, Phys. Rev. D **58,** 043506 (1998).

[73] E.V Linder, Phys. Rev. D. **70,** 023511 (2004).

[74] J.A.S. Lima, Braz. J. Phys. **34,** 194 (2004).

[75] V. Sahni, Lect. Notes Phys. **653,** 141 (2004).

[76] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, Phys. Lett. B **511,** 265 (2001).

[77] N. Chow and J. Khoury, Phys. Rev. D **80**, 024037 (2009).

[78] J.D. Barrow and P. Saich, Class. Quant. Grav. **10,** 279 (1993).

[79] A.W. Brookfield, C. van de Bruck, D.F. Mota and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. Lett. **96,** 061301 (2006).

[80] M.C. Bento, O. Bertolami and A.A. Sen, Phys. Rev. D **66,** 043507 (2002).

[81] J.D. Barrow, Phys. Rev. D 85, 047503 (2012).

[82] D. Panigrahi and S. Chatterjee, JCAP 05, 052 (2016).

[83] N. Cruz, S. Lepe and F. Pena, Phys. Lett. B 663, 338 (2008).

[84] M. Cruz, N. Cruz and S. Lepe, Phys. Lett. B 769, 159 (2017).

[85] R. Lazkoz, G. Leon and I. Quiros, Phys. Lett. B **649,** 103 (2007).

[86] G. Leon and E. N. Saridakis, JCAP **0911**, 006 (2009).

[87] H.A. Buchdahl, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **150,** 1 (1970).

[88] T.P. Sotiriou and V. Faraoni Rev. Mod. Phys. **82,** 451 (2010).

[89] S. Nojiri and S.D. Odintsov, Phys. Rep. **505,** 59 (2011).

[90] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Rev. D **75,** 084031 (2007).

[91] B. Li, J.D. Barrow and D.F. Mota, Phys. Rev. D **76,** 044027 (2007).

[92] S. Nojiri and S.D. Odintsov, Phys. Lett. B **631**, 1 (2005).

[93] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov and S. Zerbini, Phys. Rev. D **73**, 084007 (2006).

[94] A. De Felice, J.-M. Gerard and T. Suyama, Phys. Rev. D **82,** 063526 (2010).

[95] T. Harko, F.S.N. Lobo, S. Nojiri and S.D. Odintsov, Phys. Rev. D **84,** 024020 (2011)

[96] T. Clifton, Class. Quant. Grav. **23**, 7445 (2006).

[97] J.A. Leach, S. Carloni and P.K.S. Dunsky, Class. Quant. Grav. **23,** 4915 (2006).

[98] T. Clifton, Class. Quant. Grav. **24,** 5073 (2007).

[99] J.D. Barrow and T. Clifton, Class. Quantum Grav. 23 (2006) L1.

[100] T. Wang, Phys. Rev. D 84, 024042 (2011).

[101] G.J. Olmo, Int. J. Mod. Phys. D **20,** 413 (2011).

[102] C. Xu, E.N. Saridakis and G. Leon, JCAP **12,** 005 (2012).

[103] G. Leon, E.N. Saridakis, JCAP **15,** 031 (2015).

[104] A. Palatini, Rend. Circ. Mat. Palermo. **43**, 203 (1919).

[105] A. Einstein 1928, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. p. 217; ibid p. 224.

[106] M. Tsamparlis, J. Math. Phys. 19, 555 (1978).

[107] J.W. Maluf, Annalen der Physik 525, 339 (2013).

[108] A. Paliathanasis, Phys. Rev. D 95, 064062 (2017).

[109] A. Paliathanasis, JCAP **08**, 027 (2017) [arXiv:1706.02662].

[110] R. Myrzakulov, EPJC 72, 1 (2012)

[111] S. Bahamonde, C.G. Bohmer and M. Wright, Phys. Rev. D 92, 104042 (2015)

[112] M. Krššák and E.N. Saridakis, Class. Quant. Grav. 33, 115009 (2016)

[113] C. Brans and R.H. Dicke, Phys. Rev. **124,** 195 (1961).

[114] J. O'Hanlon, Phys. Rev. Lett. **29** 137 (1972).

[115] S. Capozziello and M. Francaviglia, Gen. Relativ. Grav. 40, 357 (2008)

[116] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri and S.D. Odintsov, Astroph. Sp. Sci. 342, 155 (2012)

[117] M.P. Jr. Rayan and L.C. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton University Press, Princeton (1975).

[118] S.D. Maharaj, P.G.L. Leach and R. Maartens, Gen. Relativ. Gravit. 23, 261 (1991).

[119] P.G.L. Leach, R. Maartens and S.D. Maharaj, Int. J. Non. Mech. 24, 575 (1992).

[120] M.C. Kewyama, K.S. Govinder, and S.D. Maharaj, J. Math. Phys., **53** 033707 (2012).

[121] T. Christodoulakis, N. Dimakis, P.A. Terzis, B. Vakili, E. Melas, Th. Grammenos, Phys. Rev. D 89, 044031 (2014).

[122] N. Dimakis, A. Karagiorgos, T. Pailas, P.A. Terzis and T. Christodoulakis, Phys. Rev. D 95, 086016 (2017).

[123] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Class. Quantum Grav. 29, 015006 (2012).

[124] A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, S. Basilakos and J.D. Barrow, Phys. Rev. D 93, 043528 (2016).

[125] K. Rosquist and C. Uggla, J. Math. Phys. **32** 3412 (1991).

[126] S. Capozziello, G. Marmo, C. Rubano and P. Scudellaro, Int. J. Mod. Phys. D **6** 491 (1997).

[127] B. Vakili, Phys. Lett. B **664**, 16 (2008).

[128] Y. Zhang, Y.-G. Gong, Z.-H. Zhu, Phys. Lett. B **688**, 13 (2010).

[129] S. Basilakos, M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Phys. Rev. D **83** 103512 (2011).

[130] H. M. Sadjadi, Phys. Lett. B **718**, 270 (2012).

[131] K. Atazadeh and F. Darabi, EPJC **72,** 2016 (2012).

[132] H. Dong, J. Wang and X. Meng, EPJC **73,** 2543 (2013).

[133] B. Vakili, Phys. Lett. B **738** 488 (2014).

[134] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, Phys. Rev. D **90**, 043529 (2014).

[135] A. Paliathanasis, S. Basilakos, E.N. Saridakis, S. Capozziello, K. Atazadeh, F. Darabi and M. Tsamparlis, Phys. Rev. D 89, 104042 (2014).

[136] A. Paliathanasis, M. Tsamparlis and S. Basilakos, Phys. Rev. D 90, 103524 (2014).

[137] Petros A. Terzis, N. Dimakis and T. Christodoulakis, Phys. Rev. D **90**, 123543 (2014).

[138] T. Christodoulakis, N. Dimakis, P.A. Terzis and G. Doulis, Phys. Rev. D **90** 024052 (2014).

[139] A. Zampeli, T. Pailas, Petros A. Terzis and T. Christodoulakis, JCAP **16**, no.05 066 (2016).

[140] A. Paliathanasis, Class. Quantum Gravit. **33**, 075012 (2016).

[141] N. Dimakis, A. Giacomini, S. Jamal, G. Leon and A. Paliathanasis, Phys.Rev. D 95, 064031 (2017).

[142] G. Papagiannopoulos, J.D. Barrow, S. Basilakos, A. Giacomini and A. Paliathanasis, Phys. Rev. D 95, 024021 (2017).

[143] S. Bahamonde and S. Capozziello, EPJC 77, 107 (2017).

[144] M. Crampin, Int. J. Theor. Phys. 16, 741 (1977).

[145] M. Crampin, J. Phys. A: Math. Gen. 16, 3755 (1983).

[146] M Crampin et al. J. Phys. A: Math. Gen. 17 1437 (1984).

[147] M. Crampin, Phys. Lett. A **79,** 138 (1980).

[148] G. Marmo and N. Mukunda, Nuov. Cim. B **92,** 1 (1986).

[149] M. Crampin and T. Mestdag, IJGMMP **8,** 897 (2011).

[150] C. Daskaloyannis and K. Ypsilantis, J. Math. Phys. 47, 042904 (2006).

[151] A. Ankiewicz and C. Pask, J. Phys. A: Math. Gen. 16, 4203 (1983).

[152] A. Giacomini, S. Jamal, G. Leon, A. Paliathanasis and J. Saavedra, Phys. Rev. D **95**, no. 12, 124060 (2017).

[153] N. Suzuki et.al, Astrophys. J. 746 85 (2012).

[154] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D, 72, 123519 (2005).

[155] H. Akaike, IEEE Transactions of Automatic Control, **19**, 716 (1974).

[156] J. Wainwright and G.F.R. Ellis (eds). Dynamical Systems in Cosmology. Cambridge University Press: Cambridge, UK. (1997) 343 p. Chapter 5.

[157] G. Bluman, Math. Com. Mod. 18, 1 (1993)

[158] V. Grassi, R.A. Leo, G. Soliani and T. Tempesta, Physica A: Stat. Mech. Appl. 286, 79 (2000)

[159] P.J. Olver, J. Non. Math. Phys. 9, 164 (2002)

[160] P.A. Clarkson, Math. Com. Mod. 18, 45 (1993)

[161] K.S. Govinder and P.G.L. Leach, J. Phys. A: Math. Gen. 28, 5349 (1995)

[162] E. Noether, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235, (1918) (translated in English by M.A. Tavel [physics/0503066])

[163] W. Sarlet and F. Cantrijin, J. Phys. A: Math. Gen. 14, 479 (1981)

[164] W. Sarlet and F. Cantrijin, SIAM Review 23, 467 (1981)

[165] G.P. Flessas, P.G.L. Leach and S. Cotsakis, Can. J. Phys. 73, 543 (1995)

[166] M.C. Nucci and P.G.L. Leach, J. Non. Math. Phys. 9, 110 (2002)

[167] M.C. Nucci and P.G.L. Leach, Phys. Scr. 78, 065011 (2008)

[168] M.C. Nucci and K.M. Tamazhmani, J. Non. Math. Phys. 17, 167 (2010)

[169] S.A. Hojman, J. Math. Phys. A: Math. Gen. 24, L291 (1992)

[170] M. Crampin, Rep. Math. Phys. 20, 31 (1984)

[171] G. Prince, C. Eliezer, J. Phys. A: Math. Gen. 13, 815 (1980)

[172] P.G.L. Leach and V.M. Govinder, Lett. A 133, 289 (1988)

[173] C. Clementi and M. Pettini, Celest. Mech. Dyn. Astron. 84, 263 (2002)

[174] B.D. Vujanovic, Int. J. Non-Linear Mech. 30, 783 (1995)

[175] B. Vujanovic, Int. J. Non-Linear Mech. 13, 185 (1978)

[176] S. Moyo and P.G.L. Leach, J. Phys. A: Math. Gen. 35, 5333 (2002)

[177] T.M. Kalotas and B.G. Wybourne, J. Phys. A: Math. Gen. 15, 2077 (1982)

[178] H.R. Lewis, Phys. Rev. Lett. 18, 510 (1967)

[179] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, J. Phys. A: Math. Theor. 45, 275202 (2012)

[180] S. Moyo and P.G.L. Leach, J. Phys. A: Math. Gen. 35, 5333 (2002)

[181] G.H. Katzin and J. Levine, J. Math. Phys. 9, 8 (1968)

[182] G.H. Katzin and J. Levine, J. Math. Phys. 22, 1878 (1981)

[183] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Nonlinear Dynamics 62, 203 (2010)

[184] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Gen. Relativ. Gravit. 42, 2957 (2010)

[185] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, J. Geom. Phys. 62, 2443 (2012)

[186] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, J. Geom. Phys. 107, 45 (2016)

[187] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, J. Geom. Phys. 124, 165 (2018)

[188] Y. Bozhkov and I.L. Freire, J. Diff. Eq. 249, 872 (2010)

[189] A. Paliathanasis and S. Jamal, J. Geom. Phys. 124, 300 (2018)

[190] T. Christodoulakis, N. Dimakis and P.A Terzis, J. Phys. A 47, 095202 (2014)

[191] P.A. Terzis, N. Dimakis, T. Christodoulakis, A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, J. Geom. Phys. 101, 52 (2016)

[192] E. G. Kalnins and W. M. Miller, SIAM J. Math. Anal. 11, 1001 (1980)

[193] T.Y. Thomas, Proc N.A.S. 32, 10 (1946)

[194] C.D.J. Collinson, J. Phys. A: Gen. Phys. 4, 756 (1965)

[195] D. Garfinkle and E.N. Glass, Class. Quantum Grav. 27, 095004 (2010)

[196] G. Thompson, J. Math. Phys. 27, 2693 (1986)

[197] G. Darboux, Archives Neerlandaises **6,** 371 (1901)

[198] E.T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies (Cambridge Mathematical Library) (1937)

[199] G. Thompson, J. Phys. A: Math. Gen. 17, 985 (1984)

[200] C. Daskaloyannis and Y. Tanoudis, J. Math. Phys. 48, 072108 (2007)

[201] E.G. Kalnins, J.M. Kress, W. Jr. Miller and S. Post, Sigma 5, 008 (2009)

[202] Y. Chen, E.G. Kalnins and W. Jr. Miller, Sigma 11, 088 (2015)

[203] D. Djukic, Int. J. Non-linear Mechanics 479, (1973)

[204] L. Karpathopoulos, A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, J. Math. Phys. 58, 082901 (2017)

[205] E.G. Kalnins, Seperation of variables for Riemannian spaces of constant curvature, Longman Scientific & Technical, New York, (1986)