ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Χρήση της μαθηματικής λογοτεχνίας για την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού

Μαρής Δημήτρης
Α.Μ. Δ201504

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Χρήστου Κωσταντίνος — Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα
Ιανουάριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Ιανουαρίου 2019 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Κ. Χρήστου (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Κ. Χρήστου (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία – έρευνα πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών με τίτλο «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».

Για την περάτωση της συγγραφής της εργασίας και της ερευνητικής διαδικασίας, σημαντική ήταν η συμβολή ορισμένων ανθρώπων, οι οποίοι στήριξαν την προσπάθεια μου.

Συγκεκριμένα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υπεύθυνο καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Κωνσταντίνο Χρήστου, ο οποίος καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας ήταν διαθέσιμος και πρόθυμος να με βοηθήσει και να με καθοδηγήσει με τις σημαντικές επισημάνσεις και τις πολύτιμες συμβουλές του για την ολοκλήρωση της ερευνητικής μου προσπάθειας.

Επίσης, εκφράζω την βαθιά ευγνωμοσύνη μου στην Αμάντα Ταξιάρχου που επιμελήθηκε το κείμενο της ιστορίας «Ταξίδι προς το μηδέν», και τη Μαγδαληνή Λάππα που εμπνεύστηκε και σχεδίασε τον φανταστικό κόσμο της ιστορίας.

Η έρευνα αυτή δεν θα μπορούσε να γίνει χωρίς την βοήθεια των δασκάλων Σαράντη Σακαρίδη και Νατάσα Κακογιαννάκη, που μου διέθεσαν με χαρά τις τάξεις τους για την έρευνα, αλλά και την διευθύντρια της Σχολής Χιλλ, Λίλυ Κορωνέλου, που μου επέτρεψε να επισκεφτώ το σχολείο τους.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ μου, το δίνω στα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα: Μήτσος, Μίννι Μάους, K2#, Αλκιβιάδης, Ευανθία Τυρόπιτου και Ειρήνη.

1 Abstract

The purpose of this study is to investigate if Mathematical Literature can improve the rational number sense. Rational numbers are a cornerstone of mathematics and mathematics education, they are the numbers that help students obtain algebraic reasoning and mediate the transition from the Natural to the Real numbers. Mathematics education research has identified great difficulties in the understanding of rational numbers and has recorded a lot of common errors and misconceptions. Numerous researches that dealt with the difficulties in Rational numbers have pointed out that for these difficulties the pre-existing knowledge of Natural numbers is responsible.

Many researchers have studied the process of moving from the concept of Natural number to the concept of the Rational number and have shown that it is a time consuming and painful process. For this transition, teaching interventions have been designed to either address the difficulties and misconceptions that arise. In the present work an attempt is made to deal with these difficulties and misunderstandings with the use of Mathematical literature.

Mathematical literature refers to the kind of literature that the author draws material from the science of mathematics. Mathematical stories are a type of mathematical literature and can be used to serve various educational purposes. A mathematical story can become a tool for the dissemination of mathematical knowledge and provide meaning to mathematical concepts and processes that appear to students totally unrelated to every day life. A mathematical story can create an appropriate learning environment within the cognitive misconceptions can be addressed.

In this work, i have written a mathematical story that deals with the concept of ordering and density of the Rational numbers in their various representations (decimal numbers and fractions). The story is called "Ταξίδι προς το Μηδέν" and consists of 11 Chapters, a total of 60 pages, which deal with the ordering of decimals, the ordering of fractions, homonymous fractions, the conversion of decimal into fraction and the density of Rational numbers. The story also includes 5 drawings (images) that represent parts of the world of the story that contain decimal numbers and fractions. The setting of the story is a world of numbers where its rules, characters, and character ideas are directly influenced by the mathematical concept of the layout and follow its mathematical principles. All the story unfolds on the axis of the Rational numbers in order for the geometry of the world to contribute to the understanding of the concept of the density of Rational numbers. As far as the plot of the story is concerned, decimal numbers and fractions are "nationals" of Natural numbers, and earlier knowledge of

students about Natural numbers acquires in the story the meaning of the "power" of the Natural numbers over the decimal numbers and fractions. The basic idea of the plot design is to change students' attitudes towards decimal numbers and fractions by making them "heroes" in a "world of Natural numbers".

For this study, questionnaires were given to 6 students of the 6th Primary, one before the reading of the story and one after, examining the ordering and the density of the Rational numbers, and individual semi-structured interviews, one before the reading of the story, and one after, in order to identify students' attitudes to the Rational numbers. The research questions of this paper concerned whether the writing of a mathematical story and its reading could: 1) help students to cope with known misconceptions in Rational numbers; and 2) improve students' attitudes to Rational numbers and in mathematics in general.

The analysis of the questionnaires and transcripts showed that the story dealt with several misconceptions in the ordering of decimal numbers and fractions, with the direct consequence of improving students' performance in the specific projects in the second questionnaire given to them. In the works on the density of Rational numbers, which is the most difficult concept or the more difficult misconception to correct, there has not been much improvement. Students' attitudes to decimal numbers became more positive and student attitudes for fractions remained neutral. The attitudes of students towards the story and its teaching goals were positive and many students said that they would like to learn mathematics with the help of mathematical stories.

Ο μόνος τρόπος να αντιμετωπίσεις τον ρεαλισμό
είναι η φαντασία…

Πίνακας περιεχομένων

1 Abstract 4
2 Περίληψη 9
3 Θεωρητικό Πλαίσιο 11
3.1 Οι ρητοί αριθμοί 11
3.1.1 Σημασία των ρητών αριθμών 11
3.1.1 Ο ορισμός της αίσθησης του ρητού αριθμού 11
3.1.2 Οι στάσεις των μαθητών προς τους ρητούς αριθμούς 12
3.1.3 Ορισμός των ρητών αριθμών 12
3.1.4 Διάταξη των ρητών αριθμών 13
3.1.5 Δυσκολίες με τους ρητούς αριθμούς 13
3.1.6 Διδακτικές παρεμβάσεις για την προκατάληψη των φυσικών 16
3.2 Μαθηματικά και λογοτεχνία 19
3.2.1 Επιστήμη και λογοτεχνικότητα 19
3.2.1 Λογοτεχνία και επιστημονικότητα 20
3.2.2 Θεωρήσεις για την σχέση θετικών επιστημών και λογοτεχνίας 21
3.2.3 Ορισμός της μαθηματικής μυθοπλασίας 23
3.2.4 Η ιστορία ως εργαλείο 23
3.2.5 Ο ρόλος της ιστορίας στην διδακτική των μαθηματικών 25
3.2.6 Διδακτικά παραδείγματα μαθηματικών ιστοριών 27
3.2.7 Η λογοτεχνική ιστορία που γράφτηκε για την παρούσα εργασία 29
3.3 Υποθέσεις έρευνας 40
4 Μεθοδολογία 42
4.1 Συμμετέχοντες 42
4.2 Ερευνητικά εργαλεία – Υλικά 42
4.3 Διαδικασία 46
5 Αποτελέσματα 48
5.1 Μαθητής 1 (Μ1) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 100% 48
5.1.1 Αποτελέσματα του μαθητή Μ1 πριν την ιστορία 48
5.1.2 Αποτελέσματα του μαθητή Μ1 μετά την ιστορία 50
5.1.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθητής Μ1) 51
5.1.4 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ1 πριν την ιστορία 51
5.1.5 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ1 μετά την ιστορία 52
5.2 Μαθήτρια 2 (Μ2) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 100% 52
5.2.1 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ2 πριν την ιστορία 52
5.2.2 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ2 μετά την ιστορία 54
5.2.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθήτρια Μ2) 55
5.2.4 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ2 πριν την ιστορία 56
5.2.5 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ2 μετά την ιστορία 56
5.3 Μαθητής 3 (Μ3) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 100% 57
5.3.1 Αποτελέσματα του μαθητή Μ3 πριν την ιστορία 57
5.3.2 Αποτελέσματα του μαθητή Μ3 μετά την ιστορία 57
5.3.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθητής Μ3) 58
5.3.4 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ3 πριν την ιστορία 60
5.3.5 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ3 μετά την ιστορία 60
5.4 Μαθήτρια 4 (Μ4) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 75% 61
5.4.1 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ4 πριν την ιστορία 61
5.4.2 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ4 μετά την ιστορία 62
5.4.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθήτρια Μ4) 63
5.4.4 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ4 πριν την ιστορία 64
5.4.5 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ4 μετά την ιστορία 65
5.5 Μαθητής 5 (Μ5) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 35% 65
5.5.1 Αποτελέσματα του μαθητή Μ5 πριν την ιστορία 65
5.5.2 Αποτελέσματα του μαθητή Μ5 μετά την ιστορία 66
5.5.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθητής Μ5) 68
5.5.4 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ5 πριν την ιστορία 69
5.5.5 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ5 μετά την ιστορία 70
5.6 Μαθήτρια 6 (Μ6) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 35% 70

5.6.1 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ6 πριν την ιστορία 70
5.6.2 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ6 μετά την ιστορία 71
5.6.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθήτρια Μ6) 72
5.6.4 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ6 πριν την ιστορία 74
5.6.5 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ6 μετά την ιστορία 74
5.7 Συνολικά ποσοστά και χαρακτηριστικά απαντήσεων μαθητών 75
6 Συζήτηση 79
Αντί επιλόγου 83
7 Βιβλιογραφία 85
8 Παράρτημα Α 88
8.1 Ερωτηματολόγιο ΑΠ «γνωστικό περιεχόμενο» 88
8.2 Ερωτηματολόγιο ΑΜ «γνωστικό περιεχόμενο» 90
8.3 Ερωτηματολόγιο ΒΠ «στάσεων» 92
8.4 Ερωτηματολόγιο ΒΜ «στάσεων» 92
9 Παράρτημα Β 93
9.1 Η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» 93
9.1.1 Το Διάστημα (3, 4] 93
9.1.2 Το τετράπλευρο του 3,51 95
9.1.3 Ο Νόμος της Διάταξης 99
9.1.4 Το τετράπλευρο του 3,888 105
9.1.5 Το “έγγραφο-άξονας” 110
9.1.6 Το ταξίδι ξεκινά 112
9.1.7 Το Σχήμα της θείας 115
9.1.8 Το σχέδιο 118
9.1.9 Το Κάστρο 3 127
9.1.10 Η Μετατροπή 133
9.1.11 Το Διάστημα (2, 3] 142

2 Περίληψη

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει το κατά πόσον η μαθηματική λογοτεχνία μπορεί καλλιεργήσει την αίσθηση του ρητού αριθμού. Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν θεμελιακή έννοια των μαθηματικών, είναι οι αριθμοί που εισάγουν τους μαθητές στην αλγεβρική σκέψη και διευκολύνουν την κατανόηση των μετέπειτα πολύ σημαντικών μαθηματικών εννοιών όπως οι πραγματικοί αριθμοί. Η διεθνής βιβλιογραφία έχει καταγράψει μεγάλες δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση των ρητών αριθμών και στην χρήση τους, καθώς και πλήθος λαθών και παρανοήσεων. Πολλές έρευνες που ασχολήθηκαν με τις δυσκολίες στους ρητούς αριθμούς επεσήμαναν ότι για τις δυσκολίες αυτές ευθύνεται η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς.

Πολλές έρευνες έχουν μελετήσει την διαδικασία της μετάβασης από την έννοια του φυσικού αριθμού στην έννοια του ρητού αριθμού και έχουν δείξει ότι είναι μία χρονοβόρα και επίπονη διαδικασία. Με στόχο αυτήν τη μετάβαση, έχουν σχεδιαστεί διδακτικές παρεμβάσεις για να αντιμετωπίσουν είτε να αποτρέψουν τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που δημιουργούνται. Στην παρούσα εργασία γίνεται μία προσπάθεια αντιμετώπισης αυτών των δυσκολιών και των παρανοήσεων με την χρήση της μαθηματικής λογοτεχνίας.

Η μαθηματική λογοτεχνία αφορά το είδος της λογοτεχνίας που ο συγγραφέας αντλεί υλικό από την επιστήμη των μαθηματικών. Οι μαθηματικές ιστορίες αποτελούν είδος της μαθηματικής λογοτεχνίας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξυπηρετήσουν διάφορους εκπαιδευτικούς σκοπούς. Μια μαθηματική ιστορία μπορεί να γίνει εργαλείο διάδοσης της μαθηματικής γνώσης και να παρέχει νόημα σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες οι οποίες φαίνονται στους μαθητές εντελώς ασύνδετες με την πραγματικότητα. Μια μαθηματική ιστορία μπορεί να δημιουργήσει ένα κατάλληλο εκπαιδευτικό περιβάλλον μέσα στο οποίο θα αντιμετωπιστούν γνωστικές παρανοήσεις.

Στην παρούσα εργασία έγινε η συγγραφή μιας μαθηματικής ιστορίας που διαπραγματεύεται την έννοια της διάταξης και της πυκνότητας των ρητών αριθμών στις διάφορες αναπαραστάσεις τους (δεκαδικοί αριθμοί και κλάσματα). Η ιστορία που γράφτηκε για την παρούσα μελέτη ονομάζεται «Ταξίδι προς το μηδέν» και αποτελείται από 11 Κεφάλαια, συνολικά 60 σελίδες, τα οποία διαπραγματεύονται τα γνωστικά αντικείμενα της διάταξη δεκαδικών, της διάταξης κλασμάτων, των ομώνυμων κλασμάτων, της μετατροπής δεκαδικού σε κλάσμα και της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Η ιστορία περιλαμβάνει και 5 σχέδια (εικόνες) τα οποία αναπαριστούν τμήματα του κόσμου της ιστορίας που βρίσκονται οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα. Η ιστορία αναφέρεται σε ένα κόσμο αριθμών όπου οι

κανόνες του, οι χαρακτήρες του και οι ιδέες των χαρακτήρων του είναι άμεσα επηρεασμένες από την μαθηματική έννοια της διάταξης και ακολουθουν τις μαθηματικές αρχές της. Όλη η ιστορία εκτυλίσσεται πάνω στο άξονα των ρητών αριθμών με σκοπό η γεωμετρία του κόσμου της ιστορίας να συνεισφέρει και στην κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Όσον αφορά την πλοκή της ιστορίας, οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι "υπήκοοι" των φυσικών αριθμών και η πρότερη γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμών, αποκτά στην ιστορία μεταφορικά το νόημα της "εξουσίας" των φυσικών έναντι των δεκαδικών αριθμών και των κλασμάτων. Η βασική ιδέα του σχεδιασμού της πλοκής της ιστορίας είναι να αλλάξει η στάση των μαθητών απέναντι στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα κάνοντας τους "ήρωες" σε ένα "κόσμο φυσικών".

Για την έρευνα δόθηκαν σε 6 μαθητές της 6ης Δημοτικού, γνωστικά ερωτηματολόγια, ένα πριν την ανάγνωση της ιστορίας και ένα μετά, που εξέταζαν την διάταξη και την πυκνότητα των ρητών και έγιναν και ατομικές ημι-δομημένες συνεντεύξεις, μία πριν την ανάγνωση της ιστορίας και μία μετά, για να αναγνωριστούν οι στάσεις των μαθητών στους ρητούς αριθμούς. Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας αφορούσαν στο αν η συγγραφή μιας μαθηματικής ιστορίας και η ανάγνωση της μπορεί: 1) να βοηθήσει τους μαθητές/τριες να αντιμετωπίσουν γνωστές παρανοήσεις στους ρητούς αριθμούς και 2) να βελτιώσει την στάση των μαθητών στους ρητούς αριθμούς και στο μάθημα των μαθηματικών γενικότερα.

Η ανάλυση των ερωτηματολογίων και των απομαγνητοφωνήσεων έδειξε ότι η ιστορία που σχεδιάστηκε αντιμετώπισε αρκετές παρανοήσεις των μαθητών στην διάταξη δεκαδικών αριθμών και στην διάταξη κλασμάτων με άμεση συνέπεια την βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα στο δεύτερο γνωστικό ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε. Στα έργα που αφορούσαν την πυκνότητα των ρητών, και που αποτελεί την πιο δύσκολη έννοια ή πιο δύσκολη παρανόηση να διορθωθεί, δεν παρουσιάστηκε μεγάλη βελτίωση. Οι στάσεις των μαθητών για τους δεκαδικούς αριθμούς έγιναν πιο θετικές και οι στάσεις των μαθητών για τα κλάσματα παρέμειναν ουδέτερες. Η στάση των μαθητών απέναντι στην ιστορία και τον διδακτικό της στόχο ήταν θετική και αρκετοί/ες δήλωσαν ότι θα ήθελαν να διδάσκονται τα μαθηματικά και με την βοήθεια των μαθηματικών ιστοριών.

3 Θεωρητικό Πλαίσιο

3.1 Οι ρητοί αριθμοί

3.1.1 Σημασία των ρητών αριθμών

Η ερευνητική κοινότητα έχει καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η καλή γνώση των ρητών αριθμών είναι απαραίτητη για τον σωστό μαθηματικό γραμματισμό (numerical literacy) των μαθητών (Hoof, Janssen, Verschaffel & Dooren, 2014). Πολλές μελέτες έχουν εστιάσει το ενδιαφέρον τους στον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους ρητούς αριθμούς (Behr, 1984; Moss & Case, 1999) και άλλες συσχετίζουν την κατανόηση των αριθμών αυτών με την γενικότερη μαθηματική κατανόηση (Hoof, Janssen, Verschaffel & Dooren, 2014). Όπως για παράδειγμα οι (Siegler et al., 2012) που συσχέτισαν την κατανόηση των μαθητών της 5^{ης} τάξης Δημοτικού στα κλάσματα με την μελλοντική απόδοση τους στην άλγεβρα στις τάξεις του Γυμνασίου.

Η κατανόηση των ρητών αριθμών απαιτεί κατανόηση των εννοιών και των ιδιοτήτων τους. Για παράδειγμα, η κατανόηση των κλασμάτων απαιτεί κατανόηση του ολόκληρου και του μέρους, της σχέσης του αριθμητή και του παρονομαστή όπως και της δημιουργίας ισοδύναμων κλασμάτων, ενώ η κατανόηση των δεκαδικών αριθμών απαιτεί κατανόηση της θέσης της υποδιαστολής αλλά και της αξίας των ψηφίων. Για να «αισθανθούν» οι μαθητές τους ρητούς αριθμούς, σύμφωνα με τα πρότυπα του *NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)* θα πρέπει να μπορούν: α) να τους συγκρίνουν και να τους διατάσσουν με ακρίβεια β) να βρίσκουν την θέση τους πάνω στην αριθμογραμμή και γ) να μπορούν να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις τους (δεκαδικός ή κλάσμα) ανάλογα με το κάθε πρόβλημα. Η κατανόηση αυτή συχνά συναντάται με τον όρο «*αίσθηση του ρητού αριθμού (Number Sense)*». Για το NCTM η αίσθηση του ρητού αριθμού θα πρέπει να καλλιεργηθεί σωστά στις τάξεις του δημοτικού σχολείου και είναι απαραίτητη στις τάξεις του γυμνασίου.

3.1.1 Ο ορισμός της αίσθησης του ρητού αριθμού

Ο όρος «*αίσθηση του αριθμού» (number sense*) ξεκίνησε να χρησιμοποιείται περιγράφοντας την γενικότερη κατανόηση του αριθμού και των λειτουργιών του (Greeno, 1991). Πιο συγκεκριμένα, αφορά την ικανότητα ευελιξίας των μαθητών με την έννοια του

αριθμού και την χρήση της κατανόησης αυτή προς την ανάπτυξη χρήσιμων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένου νοητικών υπολογισμών. Η αίσθηση του αριθμού αφορά την κατανόηση και την χρήση του μεγέθους, των ιδιοτήτων και των λειτουργιών των αριθμών (McIntosh, Reys, & Reys, 1992). Ένας ορισμός της αίσθησης του ρητού αριθμού, θα μπορούσε να είναι: "η εις βάθος εννοιολογική κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων του ρητού αριθμού (κλάσματα, δεκαδικοί) και η ικανότητα κατάλληλης χρήσης τους ανάλογα με το πλαίσιο και τα δεδομένα του κάθε προβλήματος".

3.1.2 Οι στάσεις των μαθητών προς τους ρητούς αριθμούς

Με τον όρο στάσεις οι Φιλίππου & Χρίστου, (2001) ορίζουν τις τάσεις, την προδιάθεση των μαθητών να ανταποκρίνονται με κάποιο ομοιόμορφο τρόπο, ευμενώς (θετικές στάσεις) ή δυσμενώς (αρνητικές στάσεις), έναντι συγκεκριμένων γεγονότων, ατόμων ή φορέων, αντικειμένων ή και μαθημάτων. Οπότε με τον ορισμό αυτό οι στάσεις για τους ρητούς αριθμούς είναι η προδιάθεση των μαθητών να ανταποκρίνονται με θετικό ή αρνητικό τρόπο όταν αντιμετωπίζουν τους ρητούς αριθμούς.

Οι στάσεις περιέχουν το στοιχείο της υποκειμενικής αντίληψης και αξιολόγησης βασικών παραμέτρων της κατάστασης που εξετάζεται, προέρχονται από προηγούμενες εμπειρίες, θετικές ή αρνητικές, του ατόμου και επηρεάζουν τα συναισθήματα και τη συμπεριφορά του (Καγκουρά, Σπύρου, Ιλιάδα, & Μονογύιου, 2008). Η σημασία των στάσεων σχολιάζεται από τον Husen (1967), όπου αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «*οι στάσεις των μαθητών προς τα μαθηματικά είναι σχεδόν το ίδιο σημαντικές με τη γνωστική μάθηση του αντικειμένου*».

3.1.3 Ορισμός των ρητών αριθμών

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα σύμφωνα με το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα όταν εισάγονται για πρώτη φορά οι ρητοί αριθμοί, αν και αρχικά δεν αναφέρονται με το όνομα «ρητοί», ορίζονται ως οι αριθμοί οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν στην μορφή κλάσματος α/β όπου το α και το β είναι ακέραιοι αριθμοί και το β δεν πρέπει να είναι το μηδενικό στοιχείο. Σύμφωνα με τον σχολικό ορισμό όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με την μορφή α/β είναι οι ρητοί αριθμοί. Αν δανειστούμε το παράδειγμα των Vamvakoussi και Vosniadou (2010), τότε σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό των ρητών, οι αριθμοί 0.5, 500/1000 και 1/2 ή 7/14 είναι όλοι ρητοί που όμως παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια αριθμητική τιμή. Με τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό, ο ρητός αριθμός είναι μία κλάση ισοδυναμίας του διατεταγμένου ζεύγους [α , β] έτσι ώστε 2α=β, και όλοι οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν αντιπροσώπους αυτής της κλάσης ισοδυναμίας, αποτελούν δηλαδή διαφορετικές

αναπαραστάσεις του ίδιου ρητού αριθμού. Η ενοποιημένη οπτική του μαθηματικού ορισμού ξεκαθαρίζει ότι οι 0.5, 500/1000 και 1/2 ή 7/14 δεν είναι διαφορετικοί ρητοί αριθμοί αλλά διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου ρητού αριθμού. Η οπτική αυτή πρέπει να υπάρχει στους μαθητές, έτσι ώστε να μην αντιμετωπίζουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς, σαν αριθμούς "διαφορετικούς" μεταξύ τους αλλά σαν διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού.

3.1.4 Διάταξη των ρητών αριθμών

Ξεκινώντας από την ηλικία των τριών ετών τα παιδιά έρχονται σε επαφή με την διάταξη μαθαίνοντας τις έννοιες του μεγαλύτερου και του μικρότερου. Στην συνέχεια στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, ως μαθητές/τριες πλέον, έρχονται σε επαφή με την έννοια της συγκεκριμένης θέσης σε ένα σύνολο αντικειμένων με συγκεκριμένη σχέση-θέσης μεταξύ τους. Τα διατεταγμένα αντικείμενα στην συνέχεια παίρνουν συμβολική μορφή με τα σύμβολα των φυσικών αριθμών τα οποία αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένες ποσότητες και η κατανόηση της διάταξης των ποσοτήτων "μεταφέρετε" στην κατανόηση της διάταξης των συμβόλων.

Ο ορισμός της διάταξης με μαθηματικό φορμαλισμό είναι μία σχέση ($\leq$) ορισμένη σε ένα σύνολο Α που ισχύουν οι ιδιότητες τις ανακλαστικότητας ($\alpha \leq \beta$), της αντισυμμετρικότητας (αν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$ τότε $\alpha = \beta$) και της μεταβατικότητας (αν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma$ τότε $\alpha \leq \gamma$), με α, β, γ να ανήκουν στο σύνολο, η οποία ονομάζεται μερική διάταξη. Ένα σύνολο εφοδιασμένο με την σχέση της μερικής διάταξης ονομάζεται διατεταγμένο σύνολο (έχει δηλαδή όλα τα στοιχεία του διατεταγμένα με την σχέση της διάταξης). Οι γνωστές διατάξεις για τους φυσικούς, ακέραιους, ρητούς και πραγματικούς αριθμούς, βασίζονται όλες στην παραπάνω έννοια.

Σύμφωνα με τον επίσημο οδηγό για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων» *(www.ebooks.edu.gr)*, του Υπουργείου Παιδείας η σύγκριση και η διάταξη των αριθμών αποτελούν βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος και δραστηριότητες που περιέχουν την έννοια της διάταξης θα πρέπει να χρησιμοποιούνται από τον εκπαιδευτικό σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού.

3.1.5 Δυσκολίες με τους ρητούς αριθμούς

Η έρευνα στους τομείς της γνωστικής ψυχολογίας και της διδακτικής των μαθηματικών έχει επανειλημμένως δείξει ότι δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών εμφανίζονται σε μαθητές από όλες τις τάξεις του σχολείου (Behr, 1984 ; Moss & Case, 1999 ; Cramer,

Post & delMas, 2002 ; Li, Chen & An, 2009 ; Mazzocco & Devlin, 2008) και ακόμη και σε ενήλικες (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Με την μελέτη αυτών των δυσκολιών στους ρητούς αριθμούς έχουν αναγνωριστεί αρκετές παρανοήσεις που ευθύνονται για τα λάθη που εμφανίζουν οι μαθητές στις πράξεις και στην διάταξη των ρητών. Οι παρανοήσεις αυτές εμφανίζονται και στην κλασματική αλλά και στην δεκαδική τους αναπαράσταση. Για παράδειγμα, οι μαθητές/τριες συνηθίζουν να αντιλαμβάνονται τον κλασματικό συμβολισμό α/β ως δύο ασύνδετους φυσικούς αριθμούς είτε αντιλαμβάνονται την σχέση του α και του β προσθετικά αντί για πολλαπλασιαστικά (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Θεωρούν τους δεκαδικούς με τα περισσότερα ψηφία ως αυτούς με το μεγαλύτερο μέγεθος (0.6015 > 0.61) και τα κλάσματα με τα μεγαλύτερα ψηφία στον αριθμητή και στον παρονομαστή ως τα μεγαλύτερα (3/4 < 9/13) (Moskal & Magone, 2000 ; Lamon, 1999; Moss, 2005 ; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Και όσον αφορά την εννοιολογική κατανόηση του ίδιου του συμβολισμού των ρητών αριθμών, οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται στην θεώρηση των ρητών αριθμών ως ένα σύστημα αριθμών (Killpatrick, Swafford, & Findell, 2001) και αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα ως «διαφορετικούς» αριθμούς αντί για διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού (Khoury & Zazkis, 1994).

Όταν οι μαθητές/τριες έρθουν για πρώτη φορά σε επαφή με τους ρητούς αριθμούς, οι μόνοι αριθμοί που ήδη γνωρίζουν είναι οι φυσικοί αριθμοί. Όμως οι «νέοι» αυτοί αριθμοί (ρητοί) έχουν διαφορετικό ορισμό και διαφορετικές ιδιότητες από τους γνωστούς αριθμούς (φυσικούς) που ήδη έχουν συναντήσει οι μαθητές.

Οι φυσικοί αριθμοί από την μία συνδέονται με επαναληπτικές πράξεις με την μονάδα έτσι ώστε να προκύψει ο επόμενος αριθμός και το σύνολο τους χαρακτηρίζεται από διακριτότητα (ύπαρξη μοναδικού προηγούμενου και επόμενου αριθμού), δηλαδή ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος. Η πράξη του πολλαπλασιασμού με φυσικούς αριθμούς δίνει ως αποτελέσματα φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους σε μέγεθος από τους αρχικούς και της διαίρεσης, αριθμούς μικρότερους, αντίστοιχα και στο σύνολο των φυσικών αριθμών κάθε αριθμός έχει ξεχωριστή συμβολική αναπαράσταση.

Από την άλλη στο σύνολο των ρητών αριθμών υπάρχει πυκνότητα και κανείς ρητός αριθμός δεν έχει μοναδικό επόμενο και προηγούμενο αριθμό. Επίσης ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς μπορεί κανείς να βρει άπειρους ρητούς αριθμούς και οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δίνουν αποτελέσματα είτε μικρότερα είτε μεγαλύτερα από τους αρχικούς αριθμούς, ενώ εξ ορισμού ένας ρητός αριθμός μπορεί να έχει διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις (δεκαδικοί και κλάσματα).

Οι διαφορές ανάμεσα στις ιδιότητες των ρητών και των φυσικών αριθμών σε συνδυασμό με την πρότερη γνώση των φυσικών αριθμών έχει αποδειχθεί ότι οδηγούν στις δυσκολίες,

που προαναφέρθηκαν. Συγκεκριμένα, οι Vamvakoussi και Vosniadou *(2010)* ισχυρίζονται ότι ένας από τους κύριους λόγους που οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται με τους ρητούς είναι ότι βασίζονται στην μαθηματική λογική και στα εργαλεία που έχουν αποκτήσει από τους φυσικούς αριθμούς, λογική και εργαλεία που πρέπει να προσαρμοστούν κατάλληλα για να χρησιμοποιηθούν στους ρητούς αριθμούς αλλιώς μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Η προκατάληψη, ότι οι όλοι οι αριθμοί (οπότε και οι ρητοί) έχουν τον ίδιο ορισμό και ιδιότητες με τους φυσικούς αριθμούς, ονομάζεται *προκατάληψη του φυσικού αριθμού (natural number bias)*.

Η προκατάληψη των φυσικών αριθμών οδηγεί σε αρκετές παρανοήσεις που δημιουργούνται στους μαθητές/τριες. Οι πιο συνήθεις έχουν συγκεντρωθεί από τους Hoof et al. (2014) και παρουσιάζονται στην συνέχεια.

Παρανοήσεις στην δεκαδική αναπαράσταση των ρητών αριθμών:

- Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος, Πχ. το 0,250 είναι μεγαλύτερο από το 0,34 [Παρανόηση δεκαδικών 1 (ΠΔ1)] (Resnick, et al., 1989).
- Το μηδέν στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλώνει τον αριθμό, Πχ. 2,50 είναι μεγαλύτερο από το 2,5 [Παρανόηση δεκαδικών 2 (ΠΔ2)] (Resnick, et al., 1989; Smith, Solomon, & Carey, 2005).
- Το μηδέν μπροστά από τα δεκαδικά ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού δεν δίνει διαφορετική αξία στα ψηφία του αριθμού, Πχ. 0,034 = 0,34 [Παρανόηση δεκαδικών 3 (ΠΔ3)] (Moss & Case, 1999 ; Smith, Solomon, & Carey, 2005).
- Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί, Πχ. ανάμεσα στο 0,1 και στο 0,2 δεν υπάρχουν αριθμοί [Παρανόηση δεκαδικών 5 (ΠΔ4)] (Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015).

Παρανοήσεις στην κλασματική αναπαράσταση των ρητών αριθμών:

- Το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο, Πχ. 3/4 < 5/6 αλλά και 4/3 < 5/6 [Παρανόηση κλασμάτων 1 (ΠΚ1)] (Stafylidou & Vosniadou, 2004 ; Moss J. , 2005).
- Για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό, Πχ. 1/2 = 4/5 [Παρανόηση κλασμάτων 2 (ΠΚ2)] (Ni, & Zou, 2005).

- Η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα, Πχ. 3/2 < 1 [Παρανόηση κλασμάτων 3 (ΠΚ3)] (Stafylidou & Vosniadou, 2004) και
- ανάμεσα σε δύο κλάσματα δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί, Πχ. Ανάμεσα στο 1/2 και στο 1/3 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί [Παρανόηση κλασμάτων 4 (ΠΚ4)] (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Μία παρανόηση που αφορά τον συμβολισμό των ρητών αριθμών:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί και όχι διαφορετικοί συμβολισμοί ενός ρητού αριθμού [Παρανόηση ρητών (ΠΡ1)] (Khoury & Zazkis, 1994).

Και τέλος μία παρανόηση που αφορά την πυκνότητα των ρητών:

- Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς και ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί [Παρανόηση πυκνότητας ρητών (ΠΠΡ1)] (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

3.1.6 Διδακτικές παρεμβάσεις για την προκατάληψη των φυσικών

Οι παρανοήσεις που αναφέρθηκαν, και ευθύνονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών, έχουν μελετηθεί εκτενώς και έχουν γίνει πολλές προσπάθειες αντιμετώπισης τους (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018). Εδώ συνοπτικά θα αναφερθούν τρεις από αυτές, που δείχνουν έναν τρόπο αντιμετώπισης. Η θεωρία των παραδείγμάτων που θα αναφερθούν στηρίζεται στην γνωστική ψυχολογία και στη διδακτική των μαθηματικών. Δύο από αυτές τις θεωρίες δίνουν έμφαση στις ομοιότητες ενώ η τρίτη θεωρία δίνει έμφαση στις διαφορές μεταξύ των φυσικών και των ρητών αριθμών (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018).

Το πρώτο παράδειγμα αφορά την δουλειά που έγινε από την Joan Moss και τον Robie Case, οι οποίοι ανέπτυξαν και δοκίμασαν ένα πειραματικό αναλύτικό πρόγραμμα για την εκμάθηση κλασμάτων (Moss & Case, 1999). Το αναλυτικό πρόγραμμα τους βασίστηκε στην ιδέα ότι η έννοια των φυσικών και των ρητών αριθμών έχουν διαφορετική δομή αλλά κατανοούνται με τον ίδιο τρόπο, με την χρήση δύο *σχημάτων* (εννοιολογικών δομών). Το *αριθμητικό σχήμα* (αφορά τα ψηφία, είναι λεκτικό και με διαδοχή) και το *ποσοτικό σχήμα* (αφορά την γεωμετρία, είναι αναλογικό και χωρίς διαδοχή). Στην περίπτωση των φυσικών

αριθμών, η πρώτη δομή (αριθμητικό σχήμα) αντιστοιχεί στην λεκτική μέτρηση (verbal counting) και η δεύτερη δομή (ποσοτικό σχήμα) στην εκτίμηση ποσότητας (quantity evaluation). Στην περίπτωση των ρητών αριθμών η πρώτη δομή αντιστοιχεί στον διαχωρισμό (και συγκεκριμένα τον διπλασιασμό) και η δεύτερη δομή στην εκτίμηση αναλογιών (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα των ρητών αριθμών που ανέπτυξαν οι Moss και Case, δοκιμάστηκε σε μία ομάδα μαθητών 5ης δημοτικού και τα αποτελέσματα ήταν πολύ ενθαρυντικά.

Το δεύτερο παράδειγμα αφορά την δουλειά του Robert Siegler και των συνεργατών του, οι οποίοι δίνουν και αυτοί έμφαση στις ομοιότητες μεταξύ των εννοιών των φυσικών και των ρητών αριθμών αλλά σε αντίθεση με τους Moss και Case, δίνουν έμφαση στο μέγεθος των κλασμάτων και συγκεκριμένα αντιλαμβάνονται την κατανόηση της έννοιας του αριθμού ως την κατανόηση του ότι «όλοι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν μεγέθη που μπορούν να διαταχτούν και να τους δοθούν συγκεκριμένες θέσεις στην αριθμογραμμή» (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Ο Siegler και οι συνεργάτες του ανέπτυξαν ένα πειραματικό αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο έδινε έμφαση στο μέγεθος των κλασμάτων, εστιάζοντας πρωτίστως στην αναπαράσταση, στην διάταξη και στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή. Το αναλυτικό πρόγραμμα τους δοκιμάστηκε σε μία ομάδα μαθητών 4ης δημοτικού και τα αποτελέσματα έδειξαν βελτίωση στην κατανόηση του μεγέθους των κλασμάτων (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018).

Το τρίτο παράδειγμα αφορά την θεωρία πλαισίου υπό το πρίσμα της εννοιολογικής αλλαγής (*framework theory approach to conceptual change*) (Vosniadou, 2014; Vosniadou, 1994; (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008) η οποία αναπτύχθηκε με σκοπό την περιγραφή και την κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν έννοιες ενάντια στην διαίσθηση (*counter intuitive concepts*) στα μαθηματικά και στην επιστήμη γενικότερα (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018). Τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής είναι:

1. Η απόκτηση μιας νέας γνώσης δεν είναι πάντα μία διαδικασία κατά την οποία εμπλουτίζονται οι ήδη υπάρχουσες γνωστικές εννοιολογικές δομές αλλά κάποιες φορές η απόκτηση μίας νέας γνώσης απαιτεί την πλήρη αναδιαμόρφωση και αναδιοργάνωση των δομών αυτών.
2. Η διαδικασία της αναδιοργάνωσης και αναδιαμόρφωσης της πρότερης γνώσης για την δημιουργία μίας νέας γνώσης είναι διαδικασία πιο επίπονη και δαπανηρή σε χρόνο από τον εμπλουτισμό μίας ήδη υπάρχουσας γνώσης. Επίσης είναι πιθανόν κατά την διαδικασία αυτή να δημιουργηθούν παρανοήσεις.

3. Πολλές παρανοήσεις μπορούν να αποκαλύψουν τις προσπάθειες αυτές για αναδιοργάνωση και αναδιαμόρφωση της νέας γνώσης.

Οπότε σύμφωνα με τη θεωρία αυτή πολλές από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες στους ρητούς αριθμούς οφείλονται σε μία «σύγκρουση» που δημιουργείτε μεταξύ της νέας γνώσης των ρητών και της πρότερης γνώσης των φυσικών (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Η νέα δομή που απαιτούν οι ρητοί αριθμοί αναδιοργανώνει και αναδιαμορφώνει με βίαιο τρόπο την δομή που προϋπάρχει λόγω των φυσικών αριθμών. Η διαδικασία αυτή είναι που προκαλεί συγκεκριμένες παρανοήσεις των μαθητών/τριών με τους ρητούς.

Οι αρχές της εννοιολογικής αλλαγής εφαρμόστηκαν στον σχεδιασμό πειραματικών σχολικών παρεμβάσεων με σκοπό να υποστηριχθούν μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η έρευνα των Vosniadou et al., (2001), σε μαθητές/τριες ηλικίας 10-11 χρονών, έδειξε ότι, ο κατάλληλος σχεδιασμός ενός περιβάλλοντος εκμάθησης στο μάθημα της φυσικής με την θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά γνωστικά οφέλη για τους μαθητές. Οι Vamvakoussi et al., (2003, 2004) έχοντας ως σκοπό τη καλύτερη κατανόηση της πυκνότητας και της διάταξης των ρητών αριθμών, ενθάρρυναν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν, να αξιολογήσουν, να συγκρίνουν, να κατασκευάσουν και να συζητήσουν τις αναπαραστάσεις των ρητών (κλάσματα) στο λογισμικό «Συνέργεια» (λογισμικό που ενθαρρύνει την συνεργατική μάθηση). Επίσης, οι Vamvakoussi και Vosniadou, (2012) χρησιμοποίησαν το παράδειγμα της *λαστιχένιας γραμμής (rubber band)* με σκοπό να δώσουν μία αναλογία για την πυκνότητα των ρητών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή και τέλος, ο Christou, *(2012)*, παρουσίασε στους μαθητές κοινές παρανοήσεις τους (*refutational lecture*), με σκοπό την αντιμετώπιση της παρανόησης ότι το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων (π.χ., το – στην περίπτωση του -2x) δείχνει το πρόσημο των αριθμητικών τιμών που μπορεί να πάρει η συγκεκριμένη αλγεβρική παράσταση (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018).

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί το εργαλείο της μαθηματικής ιστορίας (*mathematical story*), μέσω του οποίου θα γίνει μια προσπάθεια αντιμετώπισης των παρανοήσεων που ευθύνονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Στην συνέχεια της εργασίας θα παρουσιαστεί η σχέση μαθηματικής επιστήμης και λογοτεχνίας, η ιστορία ως διδακτικό εργαλείο και ο διδακτικός σχεδιασμός μιας ιστορίας για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων στους ρητούς αριθμούς.

Σε όλη την εργασία η χρήση των όρων “μαθηματική ιστορία” ή “ιστορία”, γίνεται με την έννοια του μύθου-διήγημα (story) και όχι με την έννοια της καταγραφής και της μελέτης γεγονότων του παρελθόντος - Ιστορία (history).

3.2 Μαθηματικά και λογοτεχνία

Με την αναφορά του όρου "Μαθηματικά και λογοτεχνία" εγείρονται άμεσα τα ερωτήματα για το εάν υπάρχουν σταθερά χαρακτηριστικά στην σχέση μαθηματικής επιστήμης και λογοτεχνίας, αν αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να αναγνωριστούν και αν γίνεται να υπάρξει συγκεκριμένη δομή πίσω από τον όρο αυτό. Τα τελευταία 40 χρόνια ο όρος "επιστήμη και λογοτεχνία" έχει σταδιακά αρχίσει να γίνεται αναγνωρίσιμος στην επιστημονική κοινότητα, με πιο γνωστή την κοινότητα *Society for Literature, Science and Art (SLSA)* που δημιουργήθηκε το 1985 και εκδίδει το περιοδικό "Configurations" το οποίο ασχολείται με τις σχέσεις μεταξύ τεχνών και επιστήμης. Το πεδίο του SLSA αποτελείται επί το πλείστο από ερευνητές της λογοτεχνίας οι οποίοι προσπαθούν κυρίως να καταγράψουν την επίδραση των επιστημονικών ιδεών στην λογοτεχνία αλλά και να διερευνήσουν τα όρια μεταξύ των δύο, ωστόσο δεν υπάρχει καθολικά αποδεκτό παράδειγμα μεθοδολογίας για την προσέγγιση του πεδίου "επιστήμη και λογοτεχνία" (Cartwright, 2007).

Η σύγκριση μεταξύ λογοτεχνίας και θετικών επιστήμων ξεκινάει και τελειώνει, συνήθως στις διαφορές των δύο, και για να αναδειχθούν ομοιότητες θέλει πολύ κόπο και μελέτη. Από την μία πλευρά οι θετικοί επιστήμονες που χρησιμοποιούν λογοτεχνικότητα στα κείμενα τους αμφισβητούνται επιστημονικά (*έλλειψη αυστηρότητας - luck of formality and rigor*) και από την άλλη οι λογοτέχνες που χρησιμοποιούν επιστήμη στα κείμενα τους εντάσσονται στην κατηγορία της επιστημονικής φαντασίας (*science fiction*) και δεν θεωρούνται κείμενα στα οποία μπορεί να βασισθεί ένας επιστήμονας. Αν εξετάσουμε ιστορικά το δίπολο θετικών επιστημών και λογοτεχνίας μπορούμε να κατανοήσουμε λίγο περισσότερο την σχέση τους.

3.2.1 Επιστήμη και λογοτεχνικότητα

Ο Πλάτωνας (427-347 π.Χ) περιλαμβάνει στα έργα του την μαθηματική επιστήμη. Ο διάλογος του "Μένων", που αφορά μία συζήτηση μεταξύ του Σωκράτη και ενός Δούλου, αποτελεί ταυτόχρονα και μία απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος ενός ισοσκελούς τριγώνου (Jowett, 1924). Παρατηρούμε λοιπόν ότι ένα μαθηματικό κείμενο της εποχής δίνεται με την μορφή διαλόγου. Η *διαλογικότητα* (*Dialogism*) είναι μια θεωρία που αναπτύχθηκε από τον Ρώσο θεωρητικό της λογοτεχνίας Μιχαήλ Μπαχτίν (1895-1975 μ.Χ). Η βασική θέση της θεωρίας είναι ότι το άτομο βρίσκεται σε ένα διαρκή διάλογο με κάτι άλλο, ένα άλλο άτομο ή τεχνούργημα (artifact) και μόνο μέσα σε αυτό το διάλογο βρίσκει νόημα. Ο Μπαχτίν πίστευε ότι το κύριο χαρακτηριστικό μίας νουβέλας είναι η διαλογικότητα, σε αντίθεση με την *μονολογικότητα* (Bakhtin, 1981), στην οποία το άτομο απευθύνεται στο κοινό χωρίς να αναμένει κάποιου είδους επιβεβαίωση ή απάντηση. Ο

Ευκλείδης (323-285 π.Χ) στα *Στοιχεία* γράφει χρησιμοποιώντας το στυλ της μονολογικότητας σε αντίθεση με τον Πλάτωνα (Heath, 1956).

Το μονολογικό στυλ του Ευκλείδη άρχισε να χρησιμοποιείται κατά κόρον στις φυσικές και μαθηματικές επιστήμες. Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (100-160 μ.Χ) έγραψε το μεγάλο επιστημονικό του έργο *Αλμαγέστη* (το μεγαλύτερο και σημαντικότερο αστρονομικό σύγγραμμα της Αρχαιότητας), το οποίο ο ίδιος είχε ονομάσει "*Μαθηματικὴ Σύνταξις*" σε μονολογικό στυλ (Ptolemy, 1984). Όμως το κείμενο το οποίο ανέτρεψε την θεωρία του Πτολεμαίου (γεωκεντρικό σύστημα) ήταν ένας φανταστικός διάλογος: *"Διάλογος του Γαλιλαίου στα δύο κύρια πλανητικά συστήματα"* (Galilei & Finocchiaro, 1997) στον οποίο συγκρίνεται το σύστημα του Πτολεμαίου με το σύστημα του Κοπέρνικου (ηλιοκεντρικό σύστημα).

Το μονολογικό στυλ επικράτησε στον κόσμο της επιστήμης και κυρίως στον μαθηματικό κόσμο. Είναι ένα στυλ που προσφέρει βεβαιότητα και αυστηρότητα σε αντίθεση με το διαλογικό που είναι ρητορικό και αβέβαιο (Crumey, 2009). Όμως η βεβαιότητα του μονολογικού στυλ είναι αυτή που δεν αφήνει περιθώρια για λάθη όπως: "*Οι παράλληλες ευθείες ποτέ δεν τέμνονται*".

Ο Ιμμάνουελ Καντ (1724-1804) όρισε την ιδιοφυΐα ως την "*εσωτερική νοητική προδιάθεση (ingenium) μέσω της οποίας η φύση δίνει τους κανόνες στην τέχνη*" *(Kant & Meredith, 1931)* και σύμφωνα με τον Crumey θα μπορούσε να μεταφραστεί ως "*ιδιοφυΐα είναι ο τρόπος όπου κάποιοι άνθρωποι μπορούν να συλλάβουν αλήθειες για την φύση, χωρίς την χρήση λογικών συνεπαγωγών*" (Crumey, 2009).

3.2.1 Λογοτεχνία και επιστημονικότητα

Ένας λογοτέχνης που πίστευε στην επιστημονικότητα της δουλειάς του ήταν ο Edgar Allan Poe (1809-1849). Ο Poe πίστευε ότι για την δημιουργία της τέχνης απαιτούνταν ακριβείς υπολογισμοί (Crumey, 2009). Η έννοια της λογικής συνεπαγωγής τον συνάρπαζε και θεωρείται ο δημιουργός των αστυνομικών ιστοριών *(detective fiction)*. Στα τελευταία 2 χρόνια της ζωής του άρχισε να ενδιαφέρεται για την αστρονομία και την κοσμολογία και το τελευταίο του βιβλίο "*Εύρηκα*", παρουσιάζει την θεωρία του για τον κόσμο (Poe, 2002). Το βιβλίο αυτό αγνοήθηκε από την επιστημονική κοινότητα ως είδος επιστημονικής φαντασίας και μη αποδεδειγμένων ισχυρισμών (crank science). Η δουλειά του Poe αναγνωρίστηκε πολύ αργότερα το 1987 και πλέον το βιβλίο του Poe "*Εύρηκα*" θεωρείται ότι περιέχει την πρώτη έγκυρη εξήγηση για το λόγο που ο ουρανός το βράδυ είναι σκοτεινός. Ο Poe στο βιβλίο του έλυσε το παράδοξο του Olber (*Olber's Paradox*), προτείνοντας ότι το σύμπαν θα πρέπει να

έχει πεπερασμένη ηλικία και πρότεινε ότι όλα θα πρέπει να ξεκίνησαν με μία έκρηξη. Ο Poe είναι έτσι ο πρώτος που πρότεινε την ιδέα του *Big Bang* (Harrison, 1987).

Ο διαχωρισμός επιστήμης και λογοτεχνίας δεν ήταν αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέχρι και τον μεσαίωνα, συγγραφείς της εποχής όπως ο Τζόφρι Σώσερ (1340-1400) και ο Δάντης Αλιγκέρι (1265-1321) χρησιμοποιούσαν επιστημονικούς όρους στα κείμενα τους χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, χωρίς ιδιαίτερη επιστημονική συνείδηση, έβλεπαν τα δύο σαν μέρος μιας γενικής-συνεκτικής εικόνας του κόσμου (Cartwright, 2007). Ωστόσο από τον 17ο αιώνα και μετά οι επιστήμες άρχισαν να διεκδικούν την επιστημολογική τους ανωτερότητα έναντι των λογοτεχνικών μέσων εύρεσης της αλήθειας (Cartwright, 2007). Τον 19ο αιώνα η ρομαντική κριτική στον ορθολογισμό του διαφωτισμού οδήγησε σε μεγάλες συζητήσεις μεταξύ λογοτεχνών-ποιητών με επαγγελματίες επιστήμονες όπως αυτήν του Άγγλου ποιητή Matthew Arnold (1822-1888 μ.Χ) με τον Άγγλο βιολόγο Thomas Henry Huxley (1825-1895) (Roos, 1977). Στο αποκορύφωμα του διχασμού αυτών των δύο "*κουλτουρών*" βρίσκεται το 1959 η ομιλία ("*Two cultures*") του Charles Percy Snow (1905-1980), Άγγλου νοβελίστα και χημικού (Snow, 2012), στην οποία γίνεται προσπάθεια να "κοπεί" κάθε δεσμός μεταξύ τους. Ο Snow στην ομιλία του διέγνωσε την απώλεια μιας κοινής κουλτούρας μεταξύ επιστήμης και λογοτεχνίας και την εμφάνιση δύο ξεχωριστών, εκείνης που εκπροσωπείται από τους επιστήμονες, αφενός, και εκείνης που εκπροσωπείται από αυτούς που ονομάζονται «λογοτεχνικοί διανοούμενοι» από την άλλη (Critchley, 2001).

3.2.2 Θεωρήσεις για την σχέση θετικών επιστημών και λογοτεχνίας

Αν και όπως αναφέραμε δεν υπάρχει μεθοδολογικό πλαίσιο για την σχέση επιστήμης-λογοτεχνίας επικρατούν δύο βασικές θεωρήσεις για την σχέση τους. Οι θεωρήσεις αυτές θα παρουσιαστούν συνοπτικά χωρίς η σειρά παρουσίασης τους να αντιπροσωπεύει τη χρονική διαδοχή της μίας έναντι της άλλης.

Η πρώτη θεώρηση έρχεται από την σχολή των κοινωνικών κονστρουκτιβιστών οι οποίοι αμφισβητούν την "ηγεμονία" της επιστήμης θεωρώντας την επιστήμη μια κοινωνική δραστηριότητα (Cartwright, 2007). Τα επιστημονικά κείμενα θεωρούνται σαν ένα είδος κειμένου (science as text). Ένας από τους βασικούς υπέρμαχους της θεώρησης αυτής είναι ο George Levine. Όπως γράφει και ο ίδιος *"...θεωρώ την επιστήμη σαν μια φτωχή μορφή πολιτιστικού λόγου" (an unpriviledged form of cultural discourse)* (Levine, 1988). Ο Levine βλέπει την επιστήμη σαν ένα είδος λόγου (discourse). Από την στιγμή που η επιστήμη θεωρηθεί σαν μια μορφή λόγου τότε αυτομάτως δεν μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή αλήθειας και μπορεί να αμφισβητηθεί και να κριθεί με κοινωνικά κριτήρια που επηρεάζουν και την λογοτεχνία (Cartwright, 2007). Υπό αυτήν την οπτική μπορούν να

“γεννηθούν” και να συζητηθούν απόψεις όπως αυτή της Luce Irigay (Γαλλίδα φεμινίστρια και φιλόσοφος) που στο βιβλίο της *“This sex which is not one”* κάνει την υπόθεση ότι η μηχανική επιστήμη έχει εξελιχθεί περισσότερο στα στερεά σώματα από ότι στα ρευστά λόγω τις σχέσης των (rigid rods) με την ανδρική φύση και των (fluids/flow) με την γυναικεία (Irigaray, 1985). Η βρετανίδα ακαδημαϊκός και κριτικός λογοτεχνίας Gillian Beer αναφέρει στην ίδια θεωρητική κατεύθυνση ότι ούτε η επιστήμη ούτε η λογοτεχνία είναι μία ολότητα, και το τι πραγματικά αποτελεί επιστήμη και τι λογοτεχνία είναι ένα θέμα συμφωνίας σε μία ιστορική περίοδο ή περιοχή (Beer, 1990). Αναφέρει επίσης ότι η αποδοχή μίας ιδέας έξω από τον άμεσο κύκλο των συνεργατών/ενδιαφερομένων είναι δύσκολη και πόσο μάλλον συστηματική. Τόσο στην επιστημονική όσο και στην δημιουργική γραφή διαβάζουμε μορφές περιγραφής μιας σκέψης (Beer, 1990). Ο Bernad Russel (1872-1970) αναφέρει ότι: *“Η συνηθισμένη γλώσσα είναι εντελώς αταίριαστη για να εκφράσει τι πραγματικά είναι η φυσική επιστήμη, αφού οι λέξεις της καθημερινής ζωής δεν είναι αρκετά αφηρημένες* (Russel, 1931). Η επιστήμη υπό αυτήν την έννοια έχει την δική της γλώσσα (αλλά παραμένει είδος γλώσσας) και απευθύνεται σε συγκεκριμένο κοινό (Beer, 1990).

Η δεύτερη θεώρηση αναγνωρίζει τον ρόλο της λογοτεχνίας ως ένα μέσο για αναστοχασμό πάνω στις επιστήμες (Naumann, 2005). Η λογοτεχνία σύμφωνα με την Naumann είναι ικανή να περιλαμβάνει ένα επίπεδο αναστοχασμού στην αναπαράσταση των επιστημονικών ιδεών χωρίς η ίδια (η λογοτεχνία) να εμπλέκεται σε μία συγκεκριμένη επιστήμη και χωρίς να αξιώνεται ότι μπορεί να την διαψεύσει. Η λογοτεχνία υπό αυτήν την έννοια “διεξάγει” έρευνα για την επιστήμη σε ένα συγκεκριμένο μέσο: στην δική της καλλιτεχνική μορφή αναπαράστασης (Naumann, 2005). Η λογοτεχνία επίσης, για την Naumann, παραμένει “μόνο” λογοτεχνία άσχετα με το πόσο πολύ αναπαριστά την κάθε επιστήμη. Τα υποκείμενα της επιστήμης μέσω της λογοτεχνίας αναπαρίστανται στον κόσμο της επιστημονικής φαντασίας και έχουν συμβολική σημασία, η γλώσσα που χρησιμοποιούν είναι αυτή της μεταφοράς και της μετωνυμίας (Naumann, 2005).

Στην έρευνα αυτή, η σχέση μαθητικών και λογοτεχνίας, μελετάται μέσα από της πρίσμα της (Naumann, 2005), αναγνωρίζοντας ένα βασικό χαρακτηριστικό αυτής της θεώρησης: *μία μαθηματική ιστορία δεν μπορεί να αντικαταστήσει τα σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια αλλά μόνο να το συμπληρώσει και να τα επεκτείνει*.

Στην συνέχεια θα γίνει μία προσπάθεια ορισμού της μαθηματικής λογοτεχνίας και του εργαλείου της ιστορίας. Επίσης θα παρουσιαστεί ο διδακτικός σχεδιασμός της ιστορίας της έρευνας, έτσι ώστε, να περιλαμβάνει τις ιδιότητες του συνόλου των ρητών (διάταξη και πυκνότητα).

3.2.3 Ορισμός της μαθηματικής μυθοπλασίας

Με τον όρο λογοτεχνία νοείται κάθε γραπτό προϊόν του έντεχνου λόγου. Θεωρείται οποιαδήποτε γραφή που έχει καλλιτεχνική ή πνευματική αξία. Ένας πολύ συνηθισμένος ορισμός της λογοτεχνίας είναι ο ορισμός της λογοτεχνικής γραφής ως γραφής που αποκλίνει από τη συνηθισμένη χρήση της γλώσσας. Αυτήν την κατεύθυνση στη μελέτη της λογοτεχνίας έδωσαν οι Ρώσοι φορμαλιστές, οι οποίοι θεωρούσαν χαρακτηριστικό της λογοτεχνίας την ιδιαίτερη οργάνωση της γλώσσας στην οποία συμπυκνώνεται η *λογοτεχνικότητα της λογοτεχνίας* (Eagleton, 1996). Η λογοτεχνία μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε *μυθοπλασία (fiction)* και *αφήγηση γεγονότων (non-fiction)*. Η μυθοπλασία είναι το είδος της αφηγηματικής γραφής στο οποίο ο συγγραφέας συνθέτει ένα πλαστό μύθο, δηλαδή ένα μύθο επινοημένο από τον συγγραφέα, με φαντασιακά στοιχεία. Αν ο συγγραφέας αντλήσει υλικό από ιστορικές περιόδους ή ιστορικά πρόσωπα στην μυθοπλασία του τότε μιλάμε για *ιστορική μυθοπλασία*. Αν αντλήσει υλικό από την ζωή ενός πραγματικού ιστορικού προσώπου τότε μιλάμε για *βιογραφική μυθοπλασία*. Ενώ αν αντλήσει υλικό από την επιστήμη των μαθηματικών τότε μπορούμε να μιλάμε για *μαθηματική μυθοπλασία*. Η βασική λειτουργία της μυθοπλασίας σύμφωνα με τον Henry James είναι να διασκεδάσει τον αναγνώστη και να του κινήσει το ενδιαφέρον. Συχνά όμως παίζει το ρόλο του να διδάξει, διαπλάσει, πείσει ή αφυπνίσει τον αναγνώστη. Είναι ένα από τα βασικά εργαλεία που τα ανθρώπινα είδη επικοινωνούν το όραμα τους για την φύση της πραγματικότητας (Holman & Harmon, 1992). Συγκεκριμένα είδη που ανήκουν στην μυθοπλασία είναι τα *μυθιστορήματα, οι ιστορίες, τα δράματα, τα αφηγηματικά ποιήματα* και οι *μύθοι*.

3.2.4 Η ιστορία ως εργαλείο

Ο Theodore Roy Sarbin (1911–2005) έδωσε τον ορισμό της ιστορίας ως:

"Μία ιστορία είναι ένας συμβολισμός ενεργειών ανθρώπινων όντων που έχει μία χρονική διάσταση. Η ιστορία έχει αρχή, μέση, και ένα τέλος...Η ιστορία αποτελείται από αναγνωρίσιμα μοτίβα γεγονότων τα οποία καλούνται πλοκή. Κεντρικό ρόλο στην δομή της πλοκής παίζουν ανθρώπινες καταστάσεις και απόπειρες αποφάσεων. " (Sarbin, 1986).

Οι ιστορίες, προηγήθηκαν της επιστήμης και της ιστορίας του φυσικού κόσμου όπως τον ξέρουμε (Ayllet, 2006). Τα παραμύθια, οι αλληγορίες, τα παιδικά ποιήματα δεν ήταν μόνο τρόποι διασκέδασης των ανθρώπων αλλά και "οχήματα" για την μετάδοση της γνώσης

και της κουλτούρας από την μία γενιά στην επόμενη. *Μέσα στις πολύχρωμες ιστορίες του παραμυθά, μπορεί να πάρει κανείς πολύτιμα μαθήματα για την ιστορία, τη θρησκεία, τη φιλοσοφία, την επιστήμη και τα μαθηματικά"* (Gandz, 1936). Οι ιστορίες κάθε γενιάς αντανακλούν τις πληροφορίες που η κάθε γενιά θεωρεί σημαντικές, τα πιστεύω της κοινωνίας και τις αξίες της (Schiro, 2004). Μια καλή ιστορία "περιλαμβάνει" όλα τα χαρακτηριστικά που μία κοινωνία θεωρεί σημαντικά και είναι επιτυχημένη όταν *"οι ακροατές είτε οι αναγνώστες της υιοθετήσουν τις αξίες της σαν αλήθεια και αλλάξουν την συμπεριφορά τους σύμφωνα με αυτήν"* (Hoogland, 1998). Οι ιστορίες έχουν την δύναμη όχι μόνο να ενημερώσουν αλλά και να δημιουργήσουν συναισθήματα στον αναγνώστη:

Ένα διψασμένο ελάφι βρήκε μια πηγή. Καθώς έπινε, είδε τη σκιά του στο νερό και χάρηκε με το μέγεθος και την ποικιλία των κεράτων του, αλλά στενοχωρήθηκε πολύ με τα πόδια του, επειδή ήταν πολύ λεπτά και ασθενικά. Ενώ τα σκεφτόταν ακόμα αυτά, φάνηκε ένα λιοντάρι και άρχισε να το κυνηγάει. Το ελάφι το έβαλε στα πόδια και άφησε πολύ πίσω το λιοντάρι. Όσο ήταν άδεντρος ο τόπος, το ελάφι γλίτωνε τρέχοντας μπροστά, όταν όμως έφτασε σ' ένα δασωμένο μέρος, τα κέρατά του μπλέχτηκαν στα κλαδιά και πιάστηκε. Λίγο πριν χάσει τη ζωή του, είπε στον εαυτό του: «Αχ, εγώ το δύστυχο, που σώθηκα απ' αυτά που νόμιζα ότι θα προδιδόμουν και χάνομαι από κείνα στα οποία πίστευα πολύ».

Αυτή είναι η πραγματική δύναμη μίας ιστορίας όχι μόνο να προκαλεί συναισθηματικά ερεθίσματα αλλά να προκαλεί συγκεκριμένα συναισθηματικά ερεθίσματα. Οι ιστορίες μας "υποδεικνύουν" πως να νιώσουμε για το περιεχόμενο τους και πως να αντιδράσουμε (*«Αχ, εγώ το δύστυχο, που σώθηκα απ' αυτά που νόμιζα ότι θα προδιδόμουν και χάνομαι από κείνα στα οποία πίστευα πολύ»*) (Egan, 2005).

Η ιστορία αποτελεί μια θεμελιώδη δομή της ανθρώπινης εμπειρίας τόσο ατομικά όσο και σε συλλογικό επίπεδο (Young, 2001) και σύμφωνα με τον Gerome Bruner (1915-2016) αποτελεί την μέθοδο εσωτερίκευσης της προσωπικής εμπειρίας (ιστορίες για τον εαυτό). Τα παιδιά μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τις ιστορίες από πολύ μικρά και αυτό μπορεί κανείς να το δει από τον τρόπο που παίζουν, φτιάχνουν φανταστικούς χαρακτήρες με συγκεκριμένους σκοπούς και αποστολές, είτε αναπαριστούν ξανά τις σκηνές της καθημερινότητας τους. Με την χρήση των ιστοριών, λειτουργούν σε κόσμους που τους βρίσκουν ενδιαφέροντες και μέσα σε αυτό το πλαίσιο εξετάζουν τον κόσμο στον οποίο ζουν και στα ερεθίσματα που αυτός τους δίνει (Hoogland, 1998). Τα παιδιά όταν φτάσουν στην ηλικία της υποχρεωτικής εκπαίδευσης έχουν ήδη "δουλέψει" χρόνια με ιστορίες δικές τους που έχουν διαβάσει είτε που έχουν ακούσει είτε που έχουν διηγηθεί. Ένα γνωστικό αντικείμενο το οποίο συνδέεται

με μία ιστορία θα αντιμετωπιστεί με φυσικό και οικείο τρόπο από τα παιδιά και θα τα βρει διαθέσιμα για νέες έννοιες και ιδέες που θα περιλαμβάνονται σε αυτό (Hoogland, 1998).

3.2.5 Ο ρόλος της ιστορίας στην διδακτική των μαθηματικών

Οι ιστορίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξυπηρετήσουν διάφορους εκπαιδευτικούς σκοπούς (Zazkis & Liljedahl, 2009). Η ιστορία μπορεί να είναι ένα εργαλείο διάδοσης της γνώσης είτε ένα εργαλείο που παρέχει νόημα σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες οι οποίες φαίνονται στους μαθητές εντελώς ασύνδετες με την πραγματικότητα (Senechal, 2006). Οι Zazkis και Liljedahl μάλιστα έδωσαν και μια ποιοτική ταξινόμηση για τους τρόπους που μία ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διδακτικούς σκοπούς (Zazkis & Liljedahl, 2009).

1. **Οι ιστορίες που θέτουν ένα ερώτημα**

   Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι ιστορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μαθηματικά προβλήματα, προβλήματα στα οποία θα πρέπει οι μαθητές να λύσουν. Στις ιστορίες αυτές θα πρέπει να χρησιμοποιείται η φυσική γλώσσα, και το λογοτεχνικό περιεχόμενο θα πρέπει να μην είναι στημένο γύρω από τις μαθηματικές έννοιες αλλά μαζί με τις μαθηματικές έννοιες (Koedinger, Alibali, & Nathan, 1999). Η ανάγκη για μαθηματικοποίηση θα πρέπει να ξεκινά από το φυσικό πρόβλημα και αυτό να γίνεται ξεκάθαρο στον μαθητή.

2. **Οι ιστορίες που συνοδεύουν ένα θέμα**

   Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι ιστορίες που αναφέρονται σε μία μαθηματική έννοια και κινούν την φαντασία των αναγνωστών για την έννοια αυτή χωρίς να αναφέρουν λεπτομέρειες (όπως τα ιστορικά παραρτήματα). Οι ιστορίες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι για να κατανοηθεί μία έννοια αλλά για να αλλάξει η στάση των μαθητών απέναντι στην έννοια αυτή και γενικότερα στα μαθηματικά (Zazkis & Liljedahl, 2009).

3. **Οι ιστορίες που εισάγουν μια νέα έννοια**

   Για αρκετές μαθηματικές έννοιες που εισάγονται στο σχολείο γίνεται συνήθως μια μικρή εισαγωγή για τον μαθηματικό που εισήγαγε την ιδέα ή για τον τρόπο που την

εισήγαγε (Mazur & Pecic, 2005). Όμως η ιστορία αυτήν δεν χρησιμοποιείται για να διδαχθεί η έννοια παρά μόνο σαν ιστορική περίληψη. Σύμφωνα με τον Egan, (2005) *"όλη η γνώση είναι ανθρώπινη γνώση"* και οι μαθητές όταν γνωρίσουν μια νέα ιδέα μέσα από την πραγματική ιστορία που ανακαλύφθηκε η έννοια, μπορούν να καταλάβουν το βαθύτερο νόημα της έννοιας.

4. Οι ιστορίες που διερευνούν ένα θέμα

Η χρήση ιστοριών όπως το *"Εύρηκα"*, ή *"ο μύθος της Διδούς"* (*πάρε όση γη μπορείς να τυλίξεις με ένα δέρμα ζώου*) που με κατάλληλες μετατροπές μπορούν να δημιουργήσουν ένα διερευνητικό μαθηματικό πρόβλημα όπου οι μαθητές θα πρέπει να βοηθήσουν τον πρωταγωνιστή να λύσει τον γρίφο/πρόβλημα του μύθου.

5. Οι ιστορίες που εξηγούν μία έννοια

Η χρήση μιας ιστορίας με σκοπό την κατανόηση κάποιας μαθηματικής διαδικασίας ή αλγορίθμου. Σε αυτές τις ιστορίες, οι ήρωες, λύνουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ή γρίφο και μαζί με αυτούς και ο αναγνώστης.

6. Οι ιστορίες που εισάγουν μία δραστηριότητα

Οι δραστηριότητες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στον να κατανοηθεί μία έννοια που τα παιδιά ήρθαν σε επαφή μέσω μίας ιστορίας (Murphy, 1999). Σύμφωνα με τον Shiro, (2004) υπάρχουν τρία διαφορετικά επίπεδα στα οποία ζητείται στους μαθητές να ασχοληθούν με το μαθηματικό αντικείμενο μίας ιστορίας. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές παρατηρούν τι κάνουν οι χαρακτήρες της ιστορίας με το μαθηματικό αντικείμενο χωρίς να υπάρχει εξήγηση, στο επόμενο επίπεδο οι μαθητές "βλέπουν" τον χαρακτήρα της ιστορίας να ασχολείται με το μαθηματικό αντικείμενο χωρίς αυτοί να συμμετέχουν και στο τρίτο επίπεδο ζητείται από τους ίδιους τους μαθητές να βοηθήσουν τον χαρακτήρα της ιστορίας - να συμμετέχουν στα μαθηματικά της ιστορίας. Οι ιστορίες "προκαλούν" δραστηριότητες μέσα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι χαρακτήρες της. Τα προβλήματα αυτά "πρέπει" να λυθούν ώστε

να εξελιχθεί η πλοκή της. Η τριβή με το μαθηματικό αντικείμενο είναι τρόπος εμπλοκής στην ιστορία.

Το εργαλείο της ιστορίας έχει χρησιμοποιηθεί από ερευνητές και εκπαιδευτικούς σε διάφορες διδακτικές παρεμβάσεις (Usnick & McCarthy, 1998 ; Bintz, 2002 ; Sriraman, 2003 ; Martinie & Bay-Williams, 2003 ; Copple & bredekamp, 2009). Σκοπός στις παρεμβάσεις αυτές ήταν η ιστορία να παρέχει συμπληρωματικό ρόλο, σε συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα, είτε να αποτελέσει αφορμή για δραστηριότητες επέκτασης. Στην συνέχεια παρατίθενται δύο παραδείγματα διδακτικής χρήσης μαθηματικών ιστοριών των οποίων ο σχεδιασμός έγινε βάση ερευνών και τα αποτελέσματα αποτέλεσαν υλικό δημοσιεύσεων.

3.2.6 Διδακτικά παραδείγματα μαθηματικών ιστοριών

3.2.6.1 Round the Rug Math: Adventures in Problem Solving

Σύμφωνα με τα πρότυπα του Εθνικού συμβουλίου των δασκάλων των μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics (NTCM-2000)) είναι ευθύνη του δασκάλου: α) να κάνει την σύνδεση μεταξύ άλλων γνωστικών αντικειμένων και μαθηματικών και β) να βοηθήσει τους μαθητές να δουν και να βιώσουν πως οι μαθηματικές ιδέες συνδέονται μεταξύ τους και να χτίσουν την σχέση αυτή ενισχύοντας μία ολοκληρωμένη γνώση (Casey, Erkut, Ceder, & Young, 2008). Η σειρά βιβλίων *"Round the Rug Math"* σχεδιάστηκε για να καλύπτει τους δύο αυτούς στόχους του NTCM. Η σειρά αυτή είναι μία συμπληρωματική σειρά μαθηματικών βιβλίων για τις τάξης του νηπιαγωγείου μέχρι την β' δημοτικού που γράφτηκαν με την οικονομική υποστήριξη του National Science Foundation (NSF) και στοχεύουν στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης, των μοτίβων και των γεωμετρικών δεξιοτήτων. Η σειρά αποτελείται από 6 βιβλία βασισμένα στην ερευνητική δουλειά των Copple et al., (2009), με κάθε βιβλίο να εστιάζει σε μία διαφορετική μαθηματική έννοια. Τα βιβλία συνδυάζουν μαθηματικές έννοιες με hands-on πρακτική και προφορική αφήγηση (oral storytelling) (Casey, Kersh, & Young, 2004).

Στην σειρά *"Round the Rug Math"* η αφήγηση γίνεται με την μορφή επικών περιπετειών με επεισόδια. Ο τρόπος αυτός γραφής εξασφαλίζει τις μαθηματικές έννοιες να διδαχθούν σε συνέχεια με ένα συστηματικό τρόπο (Casey, Kersh, & Young, 2004). Οι ιστορίες καλύπτονται σε διάρκεια 6-8 μαθημάτων έτσι ώστε να γίνει εμβάθυνση σε κάθε μαθηματική έννοια. Οι χαρακτήρες των ιστοριών πρέπει να αντιμετωπίσουν πολλές περιπέτειες με την κάθε νέα περιπέτεια-δραστηριότητα να συσχετίζεται με τις παλιές. Κάθε μάθημα παρουσιάζεται με την μορφή ενός νέου προβλήματος που οι μαθητές πρέπει να βοηθήσουν

τους χαρακτήρες να λυθεί ώστε η ιστορία να συνεχιστεί. Η σειρά των βιβλίων αυτών μελετήθηκε μερικά χρόνια αργότερα από τους Casey et al., (2008) με σκοπό να αναλυθεί για το αν η χρήση της ιστορίας ευνοεί τις γεωμετρικές δεξιότητες παιδιών νηπιαγωγείου σε περιοχές με ανθρώπους διαφορετικών πολιτιστικών χαρακτηριστικών (culturally diverse backgrounds). Τα αποτελέσματα των ερευνών έδειξαν ότι οι μαθηματικές ιστορίες είναι αποτελεσματικές και ιδιαίτερα για μαθητές από φτωχότερες οικονομικά περιοχές, επίσης παρουσίασε ότι οι μαθηματικές ιστορίες ωφελούν περισσότερο τα κορίτσια από ότι τα αγόρια ανεξάρτητα από το γεωμετρικό αντικείμενο (Casey, Erkut, Ceder, & Young, 2008).

3.2.6.2 Flatland: Η Επιπεδοχώρα

Η Επιπεδοχώρα *(Flatland: A Romance of Many Dimensions)* αποτελεί το πιο γνωστό κείμενο του είδους της μαθηματικής λογοτεχνίας και είναι ένα από τα βιβλία που ουσιαστικά δημιούργησαν το είδος της μαθηματικής λογοτεχνίας.

Η Επιπεδοχώρα είναι μία σατυρική νουβέλα από τον Άγγλο δάσκαλο Edwin Abbott Abbott (1838-1926) που εκδόθηκε το 1884 στην Αγγλία *(Abbott, 2006)*. Η ιστορία αφορά ένα τετράγωνο με ανησυχίες που περιγράφει τον αυστηρά δομημένο και ιεραρχημένο κόσμο των δύο διαστάσεων στον οποίο ζει. Τα σπίτια είναι χωρίς παράθυρα, πενταγωνικά (τα τρίγωνα τα απαγόρευσε η Πολεοδομία, ενώ τετράγωνα συναντά κανείς μόνο σε υποβαθμισμένες αγροτικές περιοχές). Οι γυναίκες είναι απλές ευθείες γραμμές και βρίσκονται στη βάση της κοινωνικής πυραμίδας (λόγω του σχήματος τους μπορούν να γίνουν αόρατες, οπότε και θεωρούνται ανυπόληπτες). Κάθε κοινωνική τάξη έχει ένα σχήμα: στρατιώτες και εργάτες είναι ισοσκελή τρίγωνα, οι μικροαστοί ισόπλευρα τρίγωνα, οι ανώτερες τάξεις και οι επιστήμονες τετράγωνα, πεντάγωνα και γενικά κανονικά πολύγωνα με αριθμό πλευρών ανάλογο της θέσης τους και τέλος οι ιερείς είναι κύκλοι. Στο δεύτερο μέρος της ιστορίας ο ήρωας μας, το μελαγχολικό τετράγωνο ταξιδεύει και εξερευνά περισσότερες διαστάσεις.

Το πιο σημαντικό στοιχείο του βιβλίου είναι ότι από τεχνικής άποψης η σύλληψη του Abbott δεν έχει μαθηματικά λάθη ή αντιφάσεις κάνοντας την Επιπεδοχώρα έναν κόσμο δομικά πιθανό. Η αφιέρωση που κάνει ο ήρωας μας στους κατοίκους του χώρου, δηλώνει την προσωπική ευχή του Abbott προς τους αναγνώστες του βιβλίου:

"Αφιερώνεται στους κατοίκους του χώρου από έναν ταπεινό κάτοικο της Επιπεδοχώρας με την ελπίδα ότι, όπως εκείνος μυήθηκε στα μυστήρια των 3 διαστάσεων, ενώ προηγουμένως ήταν ενήμερος μόνο των 2, έτσι και οι πολίτες εκείνης της περιοχής του Σύμπαντος θα

στρέψουν τις φιλοδοξίες τους όλο και ψηλότερα, στα μυστικά των 4, 5 ή ακόμα και 6 διαστάσεων.”

Το βιβλίο αυτό χρησιμοποιήθηκε από τον Sriraman, (2003) σαν ένα διδακτικό εργαλείο ώστε να προκαλέσει την τριβή μαθητών, ηλικίας 13-15 ετών, με τις κοινωνικές νόρμες που έχει η κοινωνία αλλά και με την μαθηματική έννοια της διάστασης. Επίσης δημιούργησε το κατάλληλο πλαίσιο για να γίνουν συζητήσεις για τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες όπως την Minkowskian χώρο-χρονική γεωμετρία και την Fractal γεωμετρία (Sriraman, 2003). Η τριβή των μαθητών με τον κόσμο της Επιπεδοχώρας οδήγησε στο να ζητήσουν την συνέχεια της ιστορίας. Η “συνέχεια” της Επιπεδοχώρας η Flatterland είναι ένα βιβλίο που γράφτηκε το 2001 από τον μαθηματικό Ian Stewart, (2010). Η Flatterland προκαλεί τους αναγνώστες της να πάνε “πέρα” από τον κόσμο της Επιπεδοχώρας και να έρθουν σε επαφή με φαινόμενα σε περισσότερες από τέσσερις διαστάσεις.

Ο Sriraman, (2004) χρησιμοποίησε το βιβλίο της Flattterland εκπαιδευτικά με σκοπό α) οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με μη-διαισθητικά μαθηματικά, β) περισσότεροι μαθητές να εξοικειωθούν με τις διαστάσεις και γ) περισσότεροι μαθητές να εξοικειωθούν με την γεωμετρία fractal. Τα πρώτα 5 κεφάλαια του βιβλίου διαβάστηκαν σε διάρκεια δύο μηνών το 2002 και συζητήθηκαν με τους μαθητές. Κάθε παρασκευή σε μαθήματα 50-λεπτών συζητούνταν οι ιδέες του βιβλίου του Sriraman, (2004). Στην παρέμβαση αυτή δεν έγινε στατιστική ανάλυση όμως οι μαθητές ανυπομονούσαν να έρθει η μέρα της ανάγνωσης/συζήτησης και 4 μαθητές/τριές μετά την παρέμβαση των δύο μηνών συζήτησαν με την δασκάλα τους για το πως μπορούν να ακολουθήσουν μία μαθηματική καριέρα (Sriraman, 2004).

Στα διδακτικά παραδείγματα που αναφέραμε χρησιμοποιήθηκαν ιστορίες που δημιουργήθηκαν για τον σκοπό της παρέμβασης, όπως στην περίπτωση των Copple et al., (2009), είτε ήδη υπάρχουσες ιστορίες όπως στην περίπτωση του Sriraman, (2003 , 2004) που χρησιμοποίησε την Flatland και μετέπειτα την Flatterland. Στην παρούσα εργασία έγινε συγγραφή μιας ιστορίας με σκοπό να χρησιμοποιηθεί στην διδακτική παρέμβαση της μελέτης της εργασίας στο γνωστικό αντικείμενο των ρητών αριθμών.

3.2.7 Η λογοτεχνική ιστορία που γράφτηκε για την παρούσα εργασία

Η ιστορία που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία ονομάζεται «Ταξίδι προς το Μηδέν» και συγγραφέας είναι ο ίδιος ο ερευνητής. Η ιστορία αυτή αναφέρεται σε ένα φανταστικό κόσμο «Το βασίλειο του Άρπλας» στον οποίο ζουν όλοι οι ρητοί αριθμοί

(φυσικοί, δεκαδικοί και κλάσματα). Στον κόσμο αυτό οι φυσικοί αριθμοί βρίσκονται στην ανώτερη κλίμακα της ιεραρχίας και διοικούν τους υπόλοιπους αριθμούς. Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι υπεύθυνοι για την συντήρηση των κτισμάτων του βασιλείου (γεωμετρικά σχήματα) και για την γραφειοκρατία (διάταξη - πράξεις) και τα κλάσματα είναι αυτά που επιβάλλουν την θέληση των φυσικών (φρουρά - αστυνομία). Η γεωμετρία του κόσμου είναι ο μονοδιάστατος άξονας πάνω στον οποίο κατοικούν όλοι οι αριθμοί. Η πλοκή της ιστορίας αφορά τρεις δεκαδικούς αριθμούς που αποφασίζουν ενάντια στο καθήκον τους να κάνουν ένα ταξίδι προς το Μηδέν. Ολόκληρη η ιστορία παρατίθεται στο Παράρτημα Β.

3.2.7.1 Κριτήρια Zazkis & Liljedahl

Η ιστορία που συγγράφηκε στην παρούσα μελέτη μπορεί να θεωρηθεί διδακτικό εργαλείο με βάση τα κριτήρια των Zazkis et al., (2009), που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 2.2.5, για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που πρέπει να διαθέτει μια ιστορία. Ειδικότερα, σύμφωνα με τους Zazkis et al., (2009), η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν»:

Θέτει ένα ερώτημα: Τα μαθηματικά προβλήματα είναι ενσωματωμένα στην ιστορία και είναι ρεαλιστικά και όχι τεχνητά, υπό την έννοια ότι αποτελούν φυσικά προβλήματα του κόσμου στον οποίο ζουν οι χαρακτήρες και προκύπτουν αναγκαία λόγω των κανόνων του κόσμου της ιστορίας. Συγκεκριμένα οι αριθμοί στο βασίλειο του Άρπλας, οφείλουν πάντα να γνωρίζουν την σωστή τους θέση στον Άξονα (γιατί εκεί μένουν), θέση η οποία είναι προκαθορισμένη από την μαθηματική διάταξη. Οπότε χωρίς γνώση των κανόνων της μαθηματικής διάταξης οι χαρακτήρες της ιστορίας δεν μπορούν να ταξιδεύουν προς συγκεκριμένα μέρη. Ο αναγνώστης/τρια αν θέλει να καταλάβει τον κόσμο που ζουν οι χαρακτήρες, προς τα που ταξιδεύουν και που βρίσκονται κάθε φορά, θα πρέπει να καταλάβει την διάταξη των ρητών.

Συνοδεύει ένα θέμα: Η ιστορία αναφέρεται σε ένα κόσμο αριθμών όπου οι κανόνες του, οι χαρακτήρες του και οι ιδέες των χαρακτήρων είναι άμεσα επηρεασμένες από την μαθηματική σκέψη και ακολουθουν μαθηματικές αρχές. Ένας αναγνώστης της ιστορίας για να κατανοήσει τον βασίλειο του Άρπλας θα πρέπει να διαπραγματευτεί τις μαθηματικές ιδέες που τον αποτελούν. Η δομή της ιστορίας εξασφαλίζει ότι οι αναγνώστες που θα παρασυρθούν από την πλοκή της, αυτομάτως θα εμπλακούν με τις μαθηματικές ιδέες.

Εισαγάγει μία νέα ιδέα: Κάποιοι αναγνώστες μπορεί να συναντήσουν κάποιες μαθηματικές έννοιες τις οποίες δεν τις γνωρίζουν, όπως δεκαδικοί με περισσότερα των δύο δεκαδικών ψηφίων, ισοδύναμα κλάσματα, πυκνότητα ρητών. Όμως εκ' κατασκευής της ιστορίας όλες οι μαθηματικές έννοιες έχουν λόγο για τον οποίο βρίσκονται εκεί και δεν εισάγονται με αυθαίρετο τρόπο. Η διάταξη των ρητών είναι ζητούμενο των χαρακτήρων για τους δικούς τους προσωπικούς λόγους και όχι για την γνώση αυτή καθαυτή. Με τον τρόπο αυτό οι αναγνώστες θα μπορέσουν να κατανοήσουν ένα βαθύτερο λόγο (έστω και τεχνητό) για τον οποίο μπορεί να χρειάζεται μια μαθηματική έννοια όπως η διάταξη.

Εμπλέκει με ένα θέμα: Η ιστορία διαπραγματεύεται το συγκεκριμένο θέμα της διάταξης ρητών, παρουσιάζοντας τον άξονα των αριθμών και τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες του κάθε αριθμού, στοχεύοντας έτσι στην εννοιολογική κατανόηση των φυσικών, των δεκαδικών και των κλασμάτων.

Εξηγεί μία έννοια: Η ιστορία εξελίσσεται σε ορισμένα σημεία με τέτοιο τρόπο ώστε η κατανόηση κάποιας μαθηματικής έννοιας περνά μέσα από την ανάγκη των ηρώων για την επίλυση ενός προβλήματος. Για παράδειγμα σε κάποιο σημείο για να γίνει κατανοητός ο λόγος θέσης των κλασμάτων στον άξονα, οι χαρακτήρες της ιστορίας θα πρέπει να κατανοήσουν την έννοια «ομώνυμα κλάσματα».

Εισάγει μία δραστηριότητα: Η ιστορία αυτή αφήνει ερωτήματα στους αναγνώστες της αλλά δεν περιμένει απαντήσεις από αυτούς για να εξελιχθεί. Όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διδακτικό σκοπό από δασκάλους για τον σχεδιασμό μίας μετέπειτα δραστηριότητας, βασισμένης πάνω στην ιστορία, έτσι ώστε να εμπεδωθεί η έννοια της διάταξης των ρητών είτε οι ιδιότητες των αριθμών.

3.2.7.2 Η διδακτική σχεδίαση της ιστορίας για την διάταξη ρητών

Η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» σχεδιάστηκε κατάλληλα έτσι ώστε να διαπραγματεύεται την διάταξη και την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Η ιστορία αφορά ένα κόσμο όπου "κυριαρχείται" από τους φυσικούς αριθμούς. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (natural number bias), αποκτά στην ιστορία μεταφορικά το νόημα της "εξουσίας των φυσικών έναντι των υπολοίπων αριθμών". Στόχος της ιστορίας είναι να "φέρει αντιμέτωπους" τους μαθητές με την ίδια τους την προκατάληψη. Στον *«Κόσμο των φυσικών*

δεν υπάρχει χώρος για δεκαδικούς και κλάσματα». Οι μαθητές/τριες πρέπει να αντιληφθούν ότι και *«οι δεκαδικοί όπως και τα κλάσματα έχουν ψυχή»*, είναι δηλαδή οι ρητοί αριθμοί, που έχουν τις δικές τους ξεχωριστές ιδιότητες. Βασική ιδέα το σχεδιασμού της ιστορίας είναι να αλλάξει η στάση των μαθητών απέναντι στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα κάνοντας τους "ήρωες" σε ένα "κόσμο φυσικών".

Το δεύτερο πολύ βασικό χαρακτηριστικό του κόσμου της ιστορίας είναι η γεωμετρία του. Ο άξονας των αριθμών, πάνω στον οποίο "κατοικούν" όλοι οι αριθμοί. Πάνω στον άξονα των αριθμών βρίσκονται οι δεκαδικοί τα κλάσματα και οι φυσικοί σε ξεχωριστές και συγκεκριμένες θέσεις. Με την χρήση της αριθμογραμμής στην ιστορία δίνονται οι έννοιες των διαστημάτων και το που ανήκουν οι ρητοί αριθμοί. Με την χρήση των διαστημάτων στην ιστορία, γίνεται μία προσπάθεια να δοθεί μία "εικόνα" της γεωμετρίας των διατεταγμένων αριθμών. Η "εικόνα" αυτή θεωρούμε ότι μπορεί να συνεισφέρει στην κατανόηση της "αίσθησης" του ρητού αριθμού *(rational number sense)*.

Οι Vosniadou et al., (2001), έδωσαν τα χαρακτηριστικά του σχεδιασμού που πρέπει να διαθέτει ένα διδακτικό περιβάλλον ώστε να μπορεί να επιφέρει στους μαθητές εννοιολογική αλλαγή. Η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» μπορεί να χαρακτηριστεί ως περιβάλλον μάθησης, σύμφωνα με τους Vosniadou et al., (2001), γιατί:

- Καλύπτει εννοιολογικά μεγάλος μέρος της διδακτέας ύλης του επίσημου αναλυτικού προγράμματος στο αντικείμενο της διάταξης των ρητών, δεδομένου ότι περιλαμβάνει τις έννοιες της διάταξης μεταξύ δεκαδικών, διάταξης μεταξύ κλασμάτων και διάταξης μεταξύ δεκαδικών και κλασμάτων.
- Διαχωρίζει την έννοιες που περιλαμβάνονται στην διάταξη ρητών (δεκαδικούς και κλάσματα), υπό την έννοια του ότι προσπαθεί να διδάξει πρώτα τις ιδιότητες των δεκαδικών και της διάταξης τους, μετά τις ιδιότητες των κλασμάτων και της διάταξης τους, και τέλος να τις εννοποιήσει στην διάταξη των ρητών.
- Προσπαθεί να «χτίσει» την νέα γνώση των ρητών πάνω στην πρότερη γνώση των φυσικών αριθμών και να διαπραγματευτεί γνωστές παρανοήσεις που εγείρονται κατά την διαδικασία.
- Παρέχει ένα «λογοτεχνικό περιβάλλον» που μπορεί να παρακινήσει τους μαθητές να διαπραγματευτούν τις έννοιες της διάταξης των ρητών εκτός των στενών διδακτικών πλαισίων του σχολείου.
- Παρέχει αναλυτικές μαθηματικές διαδικασίες (αλγορίθμους) που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στην διάταξη δεκαδικών και κλασμάτων και περιλαμβάνει αναπαραστάσεις του κόσμου του διαστήματος (σχέδια) που μπορούν να δώσουν μία εικόνα της πυκνότητας και της διάταξης των ρητών.

- Έχει σχεδιαστεί με σκοπό να αντιμετωπίσει τις γνωστές παρανοήσεις των μαθητών, από την προκατάληψη του φυσικών, ως απορίες των ίδιων των ηρώων τις ιστορίας με σκοπό να προκαλέσει την γνωστική σύγκρουση.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται επιλεγμένα αποσπάσματα της ιστορίας (βλ. Παράρτημα Β), με σκοπό να παρουσιαστεί ο τρόπος που η ιστορία αντιμετωπίζει τις παρανοήσεις στην διάταξη και στην πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Διάταξη δεκαδικών:

Το κεφάλαιο «Ο Νόμος της διάταξης» (βλ. Παράρτημα Β – Ενότητα 8.1.3) έχει σχεδιαστεί κατάλληλα, ώστε να αντιμετωπιστούν οι παρανοήσεις που συναντούν οι μαθητές στην διάταξη των δεκαδικών αριθμών (Παρανοήσεις ΠΔ1-ΠΔ4, βλ. Ενότητα 2.1.2). Στο κεφάλαιο αυτό ο 3,622 (χαρακτήρας της ιστορίας) προσπαθεί να εξηγήσει στον 3,618 (χαρακτήρας της ιστορίας), μέσα από ένα διάλογο, πως να βρίσκει την θέση του, πως δηλαδή να συγκρίνεται με άλλους δεκαδικούς. Η βασική μέθοδος σύγκρισης γίνεται μέσα από τα διαστήματα αριθμών:

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

«Σωστά. Και τώρα, βρες μου ποιος Δεκαδικός είναι στη μέση του Διαστήματος (3,5 , 3,6)».

«Λοιπόν, αν θυμάμαι σωστά, πρέπει να είναι η 3,55, που είναι κοντά στον 3,51, που πρόσφατα του επιδιόρθωσα το τετράγωνό του».

Ο 3,622 κοίταξε με νόημα τον 3,618, σα να του είχε δώσει μια απάντηση… Ο 3,618 από την άλλη, κοίταξε λίγο περίεργα τα νούμερα τα δικά του κι αυτά του 3,622.

«Νομίζω πως κάτι κατάλαβα. Για να βρεθώ ανάμεσα σε δύο Δεκαδικούς, σα να χρειάζομαι το νούμερο 5, ε;»

«Ακριβώς! Και τώρα, ποιος Δεκαδικός είναι σε μεγαλύτερη θέση, ο 3,5 ή ο 3,55;» ρώτησε ο 3,622.

«Η 3,55 είναι, αφού, όπως είπαμε, είναι στη μέση του Διαστήματος (3,5 , 3,6), οπότε είναι μετά από τον 3,5 και πριν από τον 3,6».

Ο 3,618 σταμάτησε να μιλά, και το ξανασκέφτηκε.

«Μα, έτσι όπως το λέω τώρα, η 3,55 είναι σε μεγαλύτερη θέση από τον 3,5 και σε μικρότερη θέση από τον 3,6, αλλά, αυτό που με ζορίζει είναι ότι το 55 είναι μεγαλύτερο από το 6. Πώς γίνεται λοιπόν;»

«Σκέψου το ως εξής: Το πρώτο ψηφίο πριν την υποδιαστολή σου λέει σε ποιο Διάστημα μένεις. Εμείς οι δύο λόγου χάριν, μένουμε μετά το Κάστρο 3 και πριν το Κάστρο 4, οπότε αναγκαστικά, έχουμε και οι δυο μας, το 3 πριν την υποδιαστολή. Μετά την υποδιαστολή, μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε νούμερο, αλλά πάντως για να

ανήκουμε στο Διάστημα (3, 4], πριν την υποδιαστολή μας, πρέπει να έχουμε οπωσδήποτε 3».

«Ναι, ισχύει αυτό», συμφώνησε ο 3,618.

«Όσο για τα υπόλοιπα ψηφία, μετά την υποδιαστολή» συνέχισε ο 3,622, «μας λένε σε ποια γειτονιά μένουμε ακριβώς. Εγώ, επί παραδείγματι, ο 3,622, μένω στο Διάστημα (3, 4], όπως εσύ. Το πρώτο ψηφίο μου μετά την υποδιαστολή, δηλαδή το 6 μου, δηλώνει ότι μένω στη γειτονιά ανάμεσα στο 3,5 και στο 3,7, αφού το 6 είναι ανάμεσα στο 5 και στο 7. Όσο για το δεύτερο ψηφίο μου μετά την υποδιαστολή, δηλαδή το 2 μου, δηλώνει ότι μένω στη γειτονίτσα ανάμεσα στο 3,61 και 3,63, αφού το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και στο 3. Καταλαβαίνεις πού το πάω;»

…….

Σκοπός στο παραπάνω απόσπασμα είναι να μπορεί να βρει ο μαθητής/τρια την θέση ενός δεκαδικού ανάμεσα σε δύο φυσικούς και ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό μπορούν εύκολα να συγκριθούν δεκαδικοί που δεν ανήκουν στο ίδιο διάστημα φυσικών (Πχ. 3,5 και 4,2) αλλά και δύο δεκαδικοί που ανήκουν στο ίδιο διάστημα φυσικών (Πχ. Ανάμεσα στο 3,5 και στο 3,7). Στην συνέχεια η ιδέα επεκτείνεται και σε μεγαλύτερες δεκαδικές αξίες και (Πχ. ανάμεσα στο 3,55 και στο 3,6). Στο σημείο αυτό αντιμετωπίζονται οι παρανοήσεις: «Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος [Παρανόηση δεκαδικών 1 (ΠΔ1)]» και η παρανόηση «ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί [Παρανόηση δεκαδικών 5 (ΠΔ4)]».

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

«Σωστά το λες, γι' αυτό και εγώ έχω κι έναν άλλο τρόπο που δουλεύει πάντα: Απλά πρέπει να πλησιάσεις τον άλλο Δεκαδικό και να σταθείς δίπλα του, να έτσι!»

Ο 3,622 έκατσε τόσο κοντά στον 3,618, ώστε να ακουμπάει ο ένας την υποδιαστολή του στον άλλο:

3,622

3,618

«Συγχαρητήρια! Τώρα που σταθήκαμε έτσι, δες λίγο τα ψηφία μας και σκέψου το».

«Ο.κ., το έπιασα! Άμα κάτσουμε έτσι, αρχικά βλέπω αν είμαστε στο ίδιο Διάστημα (3 και 3). Μετά την υποδιαστολή, κοιτάζω και βλέπω δύο 6, άρα αρχίζω να σκέφτομαι ότι μένουμε κοντά. Μετά κοιτάω ότι εγώ έχω 1, ενώ εσύ έχεις 2, οπότε 2> 1, άρα μένεις σε μεγαλύτερη θέση! Σωστό;»

«Το έπιασες! Το πρόβλημα, βέβαια, με αυτό τον τρόπο είναι ότι πρέπει να κολλήσεις του άλλου Δεκαδικού σα στενός κορσές για να καταλάβεις τι γίνεται!»

«Χα χα» γέλασαν και οι δύο Δεκαδικοί.

……

Στο παραπάνω απόσπασμα παρουσιάζεται μια μεθοδολογία για το πως μπορούν να συγκριθούν δύο δεκαδικοί χρησιμοποιώντας τις αξίες των ψηφίων. Στο σημείο αυτό αντιμετωπίζονται οι παρανοήσεις: «Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος [Παρανόηση δεκαδικών 1 (ΠΔ1)]» και «το μηδέν μπροστά από τα δεκαδικά ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού δεν δίνει διαφορετική αξία στα ψηφία του αριθμού [Παρανόηση δεκαδικών 3 (ΠΔ3)]».

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

«Εγώ στην αρχή το σκεφτόμουνα αλλιώς: Αφού ο 3,51, ο 3,512 και η 3,627 έχουν περισσότερα δεκαδικά από τον 3,5 και είναι σε μεγαλύτερη θέση, τότε, όλοι οι Δεκαδικοί με περισσότερα δεκαδικά ψηφία μετά την υποδιαστολή από έναν άλλο Δεκαδικό, είναι σε μεγαλύτερη θέση από αυτόν».

«Καλή σκέψη, αλλά το πρόβλημα εδώ είναι ότι δεν ισχύει πάντα αυτό που σκέφτηκες. Εξαρτάται από την γειτονιά ή το Διάστημα που βρίσκεσαι. Δηλαδή, εσύ, ο 3,618 μένεις σε μικρότερη θέση από τον 3,8 κι ας έχεις πιο πολλά δεκαδικά μετά την υποδιαστολή σου».

«Ναι, κατάλαβα. Αν κάτσω δίπλα του -και το έκανε εικόνα στο μυαλό του- τότε έχουμε και οι δύο το 3, αλλά το 6 είναι μικρότερο από το 8, οπότε, ότι νούμερα και να έχει μετά, είναι σίγουρα πιο μετά σε θέση από μένα! Όμως, στάσου τώρα, έχω μια απορία. Αν κάτσω εγώ δίπλα στον 3,6 τι γίνεται;»

……

Στο παραπάνω απόσπασμα αντιμετωπίζεται με άμεσο τρόπο η παρανόηση «Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος [Παρανόηση δεκαδικών 1 (ΠΔ1)]», δεδομένου ότι αναφέρεται ρητά ως παρανόηση του πρωταγωνιστή.

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

Όμως, στάσου τώρα, έχω μια απορία. Αν κάτσω εγώ δίπλα στον 3,6 τι γίνεται;»

«Κοίτα, εκεί τα πράγματα φαίνονται πολύπλοκα, αλλά δεν είναι. Φαντάσου σας δίπλα-δίπλα» είπε ο 3,622.

Ο 3,618 σκέφτηκε τους δύο Δεκαδικούς δίπλα-δίπλα:

3,6

3,618

«Εγώ έχω 1, κι ο άλλος δεν έχει τίποτα! Τι γίνεται σ' αυτήν την περίπτωση;»

«Σ' αυτήν την περίπτωση, φίλε μου, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει ένα νούμερο, όποιο κι αν είναι αυτό, σε αντίθεση με τον άλλον, που είναι σα να έχει Μηδέν, σα να είναι ο 3,60, κι όπως ξέρεις 1 > 0» είπε με νόημα και σηκώθηκε από τη ρίζα που καθόταν.

……

Τέλος στο παραπάνω απόσπασμα αντιμετωπίζεται η παρανόηση «το μηδέν στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλώνει τον αριθμό [Παρανόηση δεκαδικών 2 (ΠΔ2)]».

Διάταξη κλασμάτων:

Το κεφάλαιο «Το σχέδιο» (βλ. Παράρτημα Β – Ενότητα 8.1.8) έχει σχεδιαστεί ώστε να αντιμετωπιστούν οι παρανοήσεις που συναντούν οι μαθητές στην διάταξη των κλασμάτων (Παρανοήσεις ΠΚ1-ΠΚ4, βλ. Ενότητα 2.1.2). Στο κεφάλαιο αυτό συναντιούνται οι βασικοί χαρακτήρες της ιστορίας ο 3,618 ο 3,622 και η 3,141 προσπαθούν να βρουν την θέση των κλασμάτων στον άξονα. Ο τρόπος που η ιστορία προσεγγίζει τα κλάσματα είναι πάλι μέσα από την θέση τους στα διαστήματα φυσικών αριθμών και συγκεκριμένα μέσα από την σχέση αριθμητή και παρονομαστή:

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

«Αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τι είπαμε ότι γίνεται;» συνέχισε ο 3,618, παραδεχόμενος αυτές τις ονομασίες.

«Όχι, είπα ότι όλα τα Κλάσματα που έχω συναντήσει στο Διάστημα μας έχουν τον αριθμητή τους μεγαλύτερο από τον παρονομαστή τους, άρα μάλλον αυτό είναι χαρακτηριστικό του Διαστήματός μας» συνέχισε ο 3,622.

«Γιατί; Έχεις δηλαδή ακούσει για Κλάσματα που ο αριθμητής τους είναι μικρότερος από τον παρονομαστή;» παρατήρησε ο 3,618.

«Ναι, για παράδειγμα, ένα φημισμένο Κλάσμα του Άρπλας είναι ο 1/2. Δεν ξέρω αν έχεις δει τις αφίσες και το αφιέρωμα που είχαν κάνει πέρυσι στο Σώμα των Κλασμάτων. Εκεί, ήταν ο 1/2 μαζί με τον Φυσικό 1 κι ο τίτλος ήταν: "*Αφιέρωμα στον 1/2, το δεξί χέρι του Μονάς*: *του ισχυρότερου Φυσικού!"*» είπε ο

3,622.

«Έχεις δίκιο, είχα ξεχάσει αυτό το “αφιέρωμα”!» είπε ο 3,618, ειρωνικά.

«Επομένως, τα Κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή είναι στο Διάστημα (0, 1];» ρώτησε ο 3,618 γενικεύοντας.

«Ναι, αυτό νομίζω πως ισχύει…»

«Άρα, τα Κλάσματα που έχουν μεγαλύτερο αριθμητή από παρονομαστή δεν είναι στο (0, 1]!» συμπέρανε ο 3,618.

…….

Στο απόσπασμα αυτό όλα τα κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή τοποθετούνται στο διάστημα (0,1) και κατευθείαν διατάσσονται ως μικρότερα από τα κλάσματα που βρίσκονται στα υπόλοιπα διαστήματα (1 , 2) ή (2 , 3), κτλ. Οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζονται εδώ είναι: «Το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο» [Παρανόηση κλασμάτων 1 (ΠΚ1)] και «η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα» [Παρανόηση κλασμάτων 3 (ΠΚ3)].

(Απόσπασμα ιστορίας)

…….

«Εξηγείται, σύμφωνα με αυτά που είπαμε πριν, δηλαδή, στο 18/5 το 5 είναι 3 φορές μικρότερο από το 18, αλλά όχι 4 φορές μικρότερο, ενώ στο 18/4 το 4 είναι 4 φορές μικρότερο από το 18, αλλά όχι 5 φορές» απάντησε ο 3,622 ενοχλημένος.

«Οπότε, το κλάσμα 18/5 ανήκει στο διάστημα (3, 4], ενώ το κλάσμα 18/4 ανήκει στο διάστημα (4, 5]. Τώρα, είσαι εντάξει;» ολοκλήρωσε ο 3,622.

«Αμέ, τώρα τα λες ωραία», απάντησε ο 3,618.

…….

Στο παραπάνω απόσπασμα δίνεται ο τρόπος να βρεθεί η θέση ενός κλάσματος ανάμεσα σε δύο φυσικούς. Ταυτόχρονα αντιμετωπίζεται η παρανόηση «Το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο [Παρανόηση κλασμάτων 1 (ΠΚ1)]».

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

«Σκεφτείτε τα 2 Κλάσματα που μιλούσαν. Από τη μια έχουμε το 7/2 με το 11/3, κι από την άλλη, τα άλλα 2 Κλάσματα που αναφέρθηκαν, το 21/6 με το 22/6. Ενώ τα 11/3 και 7/2 δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τα 21/6 και 22/6 έχουν…» είπε η 3,141.

«Μα τι σχέση έχει αυτό; Αυτά είναι άλλα Κλάσματα» διέκοψε ο 3,618.

«Είναι σίγουρα άλλα Κλάσματα;» ρώτησε με νόημα η 3,141.

«Τι εννοείς;» εξακολουθούσε να μην καταλαβαίνει ο 3,618.

«Αααα, τώρα κατάλαβα!» αναφώνησε ο 3,622.

«Δες την σχέση που υπάρχει στον αριθμητή και στον παρονομαστή των 7/2 και 21/6» συνέχισε η 3,141.

«Απ' ό,τι βλέπω, το 21/6 έχει τριπλάσιο αριθμητή και τριπλάσιο παρονομαστή από το 7/2, αυτό λες;» είπε ο 3,618.

«Ναι, ακριβώς αυτό!» είπε γελαστή η 3,141.

«Πάλι δε βρίσκω όμως τι σχέση έχει αυτό…» είπε με απόγνωση ο 3,618.

«Μην απογοητεύεσαι, σκέψου τώρα για τα 11/3 και 22/6 με τον ίδιο τρόπο» τον παρότρυνε.

«Το 22 είναι διπλάσιο του 11, όπως και το 6 του 3, αυτό θες;» είπε ο 3,618.

«Ναι, τέλεια, 3,618!»

«Νομίζω πως ξέρω πού το πάει η 3,141» είπε ο 3,622. «Σκέψου ότι δεν υπάρχει πραγματικά το 21/6!»

«Τι εννοείτε "δεν υπάρχει 21/6";» ρώτησε ο 3,618.

«Δεν υπάρχει διαφορά στη θέση του 21/6 με τη θέση του 7/2. Μπορεί ν' ακούγεται τρελό, αλλά ίσως έτσι εξηγείται η "Ομώνυμος αναφορά". Όταν 2 Κλάσματα δεν έχουν ίδιο αριθμητή ή παρονομαστή, δεν μπορούν να καταλάβουν εύκολα ποιο είναι σε μεγαλύτερη θέση, οπότε, μ' αυτόν τον τρόπο μπορούν. Νομίζω λοιπόν, ότι η 3,141 υποθέτει ότι το 7/2 και το 21/6 έχουν την ίδια θέση. Το 21/6 είναι άλλη μορφή του 7/2, όπως μάλλον και το 22/6 του 11/3. Σωστά;» είπε ο 3,622.

……

Στο παραπάνω απόσπασμα γίνεται μια προσπάθεια να δοθεί ο τρόπος κατασκευής ομώνυμων κλασμάτων και μέσα από την διαδικασία να αντιμετωπιστεί η παρανόηση «για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό [Παρανόηση κλασμάτων 2 (ΠΚ2)]».

Διάταξη δεκαδικών και κλασμάτων:

Το κεφάλαιο «Η μετατροπή» (βλ. Παράρτημα Β – Ενότητα 8.1.10) έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να αντιμετωπιστεί η βασική παρανόηση που συναντούν οι μαθητές στην διάταξη των ρητών «Οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί και όχι διαφορετικοί συμβολισμοί ενός ρητού αριθμού» (Παρανόηση ρητών ΠΡ1 , βλ. Ενότητα 2.1.2).

Στο κεφάλαιο αυτό οι βασικοί χαρακτήρες της ιστορίας μαθαίνουν την διαδικασία της «Μετατροπής», που δίνει τον τρόπο ώστε ένας δεκαδικός να γίνει κλάσμα. Με την γνώση της διαδικασίας αυτής δίνεται με ρητό τρόπο ότι «κάθε κλάσμα είναι ένας δεκαδικός». Επίσης στο τέλος του κεφαλαίου οι χαρακτήρες χρησιμοποιούν την γνώση της διαδικασίας της μετατροπής ώστε να φτιάξουν έναν άξονα αριθμών που πάνω θα βρίσκονται όλοι οι ρητοί αριθμοί (κλάσματα και δεκαδικοί). Στο σχέδιο του «άξονα» αντιμετωπίζεται ξανά η παρανόηση διάταξης ρητών (Παρανόηση ΠΡ1, βλ. Ενότητα 2.1.2), δεδομένου ότι αναφέρεται ότι «ανάμεσα σε δεκαδικούς βρίσκεις κλάσματα και ανάμεσα σε κλάσματα δεκαδικούς».

Πυκνότητα ρητών:

Αν και δεν γίνεται ρητή αναφορά για την πυκνότητα των ρητών στο βιβλίο, σε όλα τα κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάζεται μια "εικόνα πολλών αριθμών" δίπλα σε άλλους αριθμούς, μέσα σε διαστήματα φυσικών, που βρίσκονται με την σειρά τους μέσα σε άλλα διαστήματα κλασμάτων και δεκαδικών. Μάλιστα για την κατασκευή ενός «χάρτη του άξονα» (αριθμογραμμή) ο 3,622 (βασικός χαρακτήρας του βιβλίου) προσπαθεί να βρει ένα τρόπο να τοποθετήσει όλους τους αριθμούς στον άξονα χωρίς να πρέπει να τους μετρήσει:

(Απόσπασμα ιστορίας)

……

«Η ετήσια απογραφή του Κάστρου! Γίνεται μία φορά το χρόνο και σκοπός της είναι να βρεθεί η σωστή θέση όλων των Δεκαδικών και όλων των Κλασμάτων του Διαστήματος. Μόλις βρεθεί η θέση τους, πρέπει να καταγραφεί σωστά σε ένα "έγγραφο-άξονα", σύμφωνα με το Νόμο της Διάταξης. Μετά, το έγγραφο αυτό παραδίδεται στον Φυσικό του Κάστρου. Βάσει του εγγράφου αυτού, ο Φυσικός μπορεί να γνωρίζει, ανά πάσα στιγμή, με μαθηματική ακρίβεια τη θέση των υπηκόων του, στο Διάστημά του».

«Ατελείωτη δουλειά! Και πως βρίσκεις σωστά τη θέση όλων αυτών **των άπειρων Δεκαδικών; Κι όλων αυτών των άπειρων Κλασμάτων**;» θαύμασε ο 3,618.

«Μα, γι' αυτό και διαρκεί ένα έτος η κάθε απογραφή! Τι νόμισες; Θεωρητικοί Δεκαδικοί του Κάστρου όλο τον χρόνο κινούνται αδιάκοπα στο Διάστημα και προσπαθούν να απομνημονεύσουν τη θέση Δεκαδικών και Κλασμάτων. Μετά, την αναφέρουν στον υπεύθυνο της απογραφής και αυτός προσπαθεί να τους τοποθετήσει στο "έγγραφο-άξονα", σύμφωνα με τα λεγόμενα», εξήγησε ο 3,622.

«**Πω, πω, πόση φασαρία**..» αναφώνησε ο 3,618.

«Άσε… Κι όπως καταλαβαίνεις, αν γίνουν μετακινήσεις στον άξονα, ή αν κάποιοι Δεκαδικοί μετατραπούν σε Κλάσματα, η δουλειά αυτή πρέπει να ξαναγίνει.... **Είναι απίστευτα χρονοβόρα διαδικασία…**»

…….

Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι αναφορά στην έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών γίνεται έστω και με μη ρητό τρόπο σε πολλά σημεία του βιβλίου με σκοπό οι μαθητές/τριες να μπορέσουν να αντιληφθούν την απειρία των ρητών και να αντιμετωπιστεί η παρανόηση «ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς και ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν πεπερασμένου αριθμοί (Παρανόηση πυκνότητας ρητών (ΠΠΡ1)), βλ. Ενότητα 2.1.2».

3.3 Υποθέσεις έρευνας

Η παρούσα μελέτη αφορά τον σχεδιασμό και την συγγραφή μιας ιστορίας με διδακτικό στόχο την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών στους ρητούς αριθμούς. Ο διδακτικός σχεδιασμός της μαθηματικής ιστορίας, «Ταξίδι προς το μηδέν» αφορά το γνωστικό αντικείμενο της διάταξης των δεκαδικών αριθμών και των κλασμάτων, αλλά και της πυκνότητας του συνόλου των ρητών αριθμών.

Πριν την ανάγνωση της ιστορίας, δόθηκε στους μαθητές/τριες ένα ερωτηματολόγιο που εξέταζε άμεσα τις παρανοήσεις στους ρητούς αριθμούς (Παρανοήσεις ΠΔ1-ΠΔ4, ΠΚ1-ΠΚ4, ΠΡ1 και ΠΠΡ1 (βλ. Ενότητα 2.1.2)) και αναμένονταν να εμφανιστούν σε μεγάλο ποσοστό λανθασμένες απαντήσεις εξαιτίας των παρανοήσεων αυτών. Επίσης πριν την ανάγνωση της ιστορίας έγινε και μια συνέντευξη με σκοπό να αναγνωριστούν οι στάσεις των μαθητών στους ρητούς αριθμούς.

Μετά την ανάγνωση της ιστορίας, δόθηκε στους μαθητές/τριες ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο που εξέταζε ξανά τις παρανοήσεις στους ρητούς αριθμούς (Παρανοήσεις ΠΔ1-ΠΔ4, ΠΚ1-ΠΚ4, ΠΡ1 και ΠΠΡ1 (βλ. Ενότητα 2.1.2)) και έγινε και μία δεύτερη σειρά ατομικών συνεντεύξεων που εξέταζε ξανά τις στάσεις των μαθητών. Από τα ευρήματα του δεύτερου ερωτηματολογίου και των δεύτερων συνεντεύξεων αναμένονταν:

α) Να εμφανιστούν λιγότερες λανθασμένες απαντήσεις στο δεύτερο ερωτηματολόγιο και αρκετές από τις παρανοήσεις που εμφανίζονται στο πρώτο ερωτηματολόγιο να διορθωθούν.

β) Να αναπτυχθούν θετικότερες στάσεις για τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα.

4 Μεθοδολογία

4.1 Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το σχολικό έτος 2018-2019 κατά την διάρκεια των μηνών Νοέμβριο-Δεκέμβριο σε Δημοτικό σχολείο των Αθηνών στην περιοχή του κέντρου της Αθήνας. Συμμετείχαν 6 παιδιά που φοιτούσαν στην τάξη της ΣΤ' δημοτικού, εκ των οποίων τα 3 ήταν αγόρια και τα 3 κορίτσια. Οι ηλικίες των μαθητών της έρευνας κυμαίνονταν από 11-12 χρόνια. Το σχολείο στο οποίο έγινε η διδακτική παρέμβαση είναι ιδιωτικό και η μητρική γλώσσα των παιδιών είναι η ελληνική. Τα παιδιά συμμετείχαν οικειοθελώς στην έρευνα, που τους ανακοινώθηκε κατά την διάρκεια της σχολικής ώρας των μαθηματικών σε συνεργασία με τους διδάσκοντες της τάξης τους. Η οικειοθελής συμμετοχή των μαθητών στην έρευνα, δηλώνει εξαρχής ότι οι συμμετέχοντες δεν ανήκουν στο μέσο όρο των μαθητών ενός δημοτικού σχολείου και έχουν περισσότερη αυτοπεποίθηση για τις μαθηματικές τους ικανότητες.

4.2 Ερευνητικά εργαλεία – Υλικά

Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν τα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΒΠ (πριν την ανάγνωση της ιστορίας) και τα ΑΜ και ΒΜ (μετά την ανάγνωση της ιστορίας) (βλ. Παράρτημα Α). Τα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ χρησιμοποιήθηκαν για να μελετήσουν το γνωστικό αντικείμενο της διάταξης των ρητών πριν και μετά την ιστορία ενώ τα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις με σκοπό να μελετηθούν οι στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά πριν και μετά την ιστορία, αντίστοιχα.

Οι ερωτήσεις του Ερωτηματολογίου ΑΠ έχουν ακριβώς την ίδια δομή και των ίδιο αριθμό υποερωτημάτων με αυτές του Ερωτηματολογίου ΑΜ. Αυτό που αλλάζει στο ερωτηματολόγιο ΑΜ είναι τα παραδείγματα (βλ. Παράρτημα Α). Η αλλαγή στα παραδείγματα του ερωτηματολογίου ΑΠ, διατηρεί το πλήθος και το είδος των υποερωτημάτων και ταυτόχρονα εξασφαλίζει ότι οι απαντήσεις των μαθητών δεν θα στηρίζονται στην μνήμη τους από την συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου ΑΠ. Τα ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ περιλαμβάνουν 7 ερωτήσεις που αφορούν την διάταξη και την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Οι ερωτήσεις αποτελούνται από έργα συμβατά και μη-συμβατά με την προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Ο όρος *Συμβατά (Congruent),* αφορά τα έργα στα οποία η προκατάληψη των φυσικών αριθμών δεν οδηγεί σε εσφαλμένο

συμπέρασμα (Πχ: 0,25 > 0,24 διότι για τους φυσικούς αριθμούς 25 και 24 ισχύει ότι 25 > 24). Ενώ ο όρος *μη-Συμβατά (Incongruent),* αφορά τα έργα στα οποία η προκατάληψη των φυσικών αριθμών οδηγεί σε εσφαλμένο συμπέρασμα (Πχ: 0,25 > 0,3 διότι για τους φυσικούς αριθμούς 25 και 3 ισχύει ότι 25 > 3) (Van Hoof, Janssen, Verschaffel, & Dooren, 2014).

Οι ερωτήσεις που περιέχονται στο ερωτηματολόγιο του γνωστικού περιεχομένου ΑΠ, προέρχονται από ερωτηματολόγιο που σχεδιάστηκε από τους Van Hoof et al., (2014) και αποτέλεσε ερευνητικό εργαλείο για την χαρτογράφηση της κατανόησης των ρητών αριθμών σε συνάρτηση με την ηλικία, για ηλικίες Δημοτικού (6 - 12 ετών) και Γυμνασίου (ηλικίες 12 - 15 ετών). Το ερωτηματολόγιο των Van Hoof et al., *(2014)* περιλαμβάνει ερωτήσεις με έργα Συμβατά και μη-Συμβατά που μελετούν την κατανόηση α) του μεγέθους των αριθμών, β) της πυκνότητας των ρητών αριθμών και γ) των πράξεων με ρητούς. Το ερωτηματολόγιο ΑΠ, που δόθηκε στους μαθητές/τριες, παρατίθεται στο Παράρτημα Α – Ενότητα 7.1.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι 7 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΠ και ενδεικτικά μερικά Συμβατά και μη-Συμβατά έργα τους:

- **Ερώτηση ΑΠ.1**: Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:
  - Ι) *4,4 ή 4,5* (Συμβατό έργο) και ΙΙΙ) *0,36 ή 0,5* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΠ.2** Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:
  - *3,02 < 3,2 < 3,682* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΠ.3** Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:
  - Ι) *2/5 ή 8/7* (Συμβατό έργο) και ΙΙΙ) *3/2 ή 9/8* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΠ.4** Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:
  - *1/7 < 5/6 < 4/4 < 4/3* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΠ.5** Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:
  - *1/5 < 0,316 < 4/10 < 0,5 < 1 < 7/4 < 2,301 < 2,32 < 10/3 < 4* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΠ.6** Παρακάτω βλέπετε ζευγάρια αριθμών. Για κάθε ζευγάρι, γράψτε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς. Αν πιστεύετε ότι δεν υπάρχει αριθμός, γράψτε: δεν υπάρχει αριθμός.
  - *Ι) 8,15 και 8,9* (μη-Συμβατό έργο) και *V) 2,5 και 2,7* (Συμβατό)
- **Ερώτηση ΑΠ.7** Πόσοι αριθμοί βρίσκονται ανάμεσα στους:
  - *ΙΙ) 1,42 και 1,43* (μη-Συμβατό)

Οι ερωτήσεις ΑΠ.2, ΑΠ.4, ΑΠ.5 και ΑΠ.7 αποτελούνται μόνο από μη-Συμβατά έργα. Η ερώτηση ΑΠ.1 έχει δύο Συμβατά έργα και 3 μη-Συμβατά, η ερώτηση ΑΠ.3 έχει 4 Συμβατά και 6 μη-Συμβατά έργα και η ερώτηση ΑΠ.6 έχει 2 Συμβατά και 4 μη-Συμβατά έργα.

Το ερωτηματολόγιο ΑΜ περιλαμβάνει τις ίδιες ερωτήσεις με διαφορετικά παραδείγματα, με τα έργα του όμως να διατηρούν ακριβώς τον αριθμό και το είδος των Συμβατών και των μη-Συμβατών έργων:

- **Ερώτηση ΑΜ.1**: Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:
  - Ι) *6,3 ή 6,4* (Συμβατό έργο) και ΙΙΙ) *0,6 ή 0,47* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΜ.2** Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:
  - *5,02 < 5,2 < 5,682* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΜ.3** Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:
  - Ι) *3/4 ή 9/6* (Συμβατό έργο) και ΙΙΙ) *4/3 ή 10/9* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΜ.4** Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:
  - *1/8 < 6/7 < 5/5 < 5/4* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΜ.5** Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:
  - *1/6 < 3/10 < 0,316 < 0,6 < 1 < 1,301 < 1,32 < 9/4 < 10/3 < 6* (μη-Συμβατό έργο)
- **Ερώτηση ΑΜ.6** Παρακάτω βλέπετε ζευγάρια αριθμών. Για κάθε ζευγάρι, γράψτε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς. Αν πιστεύετε ότι δεν υπάρχει αριθμός, γράψτε: δεν υπάρχει αριθμός.
  - *Ι) 6,45 και 6,9* (μη-Συμβατό έργο) και *V) 9,4 και 9,6* (Συμβατό)
- **Ερώτηση ΑΜ.7** Πόσοι αριθμοί βρίσκονται ανάμεσα στους:
  - *ΙΙ) 7,34 και 7,35* (μη-Συμβατό)

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΒΠ του οποίου οι ερωτήσεις χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για τις πρώτες ημι-δομημένες συνεντεύξεις με τους μαθητές. Οι ερωτήσεις αυτές σχεδιάστηκαν από τον ερευνητή κατάλληλα για το γνωστικό αντικείμενο των ρητών, με βάση ερωτήσεις από τα ερωτηματολόγια των Shoenfeld, (1989) και Lim et al., (2013).

- **Ερώτηση ΒΠ.1:** Το κουδούνι χτυπά για μέσα και ξεκινάει το μάθημα, μπαίνεις στην τάξη και κοιτάς το πρόγραμμα σου γιατί δεν θυμάσαι τι μάθημα έχετε στην ώρα που ξεκινά. Βλέπεις Μαθηματικά. Τι σκέφτεσαι;
- **Ερώτηση ΒΠ.2:** Ξεκινάει το μάθημα των μαθηματικών και ο δάσκαλος σας λέει: Α) Σήμερα θα ασχοληθούμε με τους φυσικούς αριθμούς και θα κάνουμε ασκήσεις. Β) Σήμερα θα ασχοληθούμε με τους δεκαδικούς αριθμούς και θα κάνουμε ασκήσεις. Γ) Σήμερα θα ασχοληθούμε με τα κλάσματα και θα κάνουμε ασκήσεις. Τι προτιμάς και γιατί;
- **Ερώτηση ΒΠ.3: (γίνονται 2 ερωτήσεις από τις 3, ανάλογα με την ΒΠ.2)** Α) Γιατί δεν διάλεξες τους φυσικούς Αριθμούς; Β) Γιατί δεν διάλεξες τους δεκαδικούς Αριθμούς; Γ) Γιατί δεν διάλεξες τα κλάσματα;
- **Ερώτηση ΒΠ.4:** Ποιοι αριθμοί νομίζεις ότι δυσκολεύουν τα περισσότερα παιδιά στην τάξη σου; Αν ένας/μία συμμαθήτρια σου ζητούσε βοήθεια γιατί δεν καταλαβαίνει τους αριθμούς αυτούς, τι συμβουλή θα του/της έδινες για να τον/την βοηθήσεις;

Η ερώτηση ΒΠ.1 σκοπό έχει να εξετάσει την στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα το μαθηματικών γενικότερα. Η ερώτηση ΒΠ.2 εξετάζει την προτίμηση των μαθητών ως προς τους φυσικούς, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα. Η ερώτηση ΒΠ.3 διερευνά την αιτία μη προτίμησης των φυσικών, των δεκαδικών είτε των κλασμάτων. Τέλος, η ερώτηση ΒΠ.4 έχει ως σκοπό να ανιχνευθούν οι ιδιότητες που οι μαθητές θεωρούν δύσκολες στους συγκεκριμένους αριθμούς.

Τέλος παρουσιάζονται οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΒΜ οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για τις δεύτερες ημιδομημένες συνεντεύξεις με τους μαθητές. Για τον σχεδιασμό των ερωτήσεων αυτών λήφθηκαν υπόψιν οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΒΜ αλλά και το λογοτεχνικό περιεχόμενο της ιστορίας.

- **Ερώτηση ΒΜ.1:** Πως σου φάνηκε η ιστορία που διάβασες;
- **Ερώτηση ΒΜ.2:** Τι σου άρεσε πιο πολύ στην ιστορία;
- **Ερώτηση ΒΜ.3:** Θυμάσαι μερικούς χαρακτήρες τις ιστορίας; Ποιοι σου άρεσαν περισσότερο; Γιατί;
- **Ερώτηση ΒΜ.4:** Πιστεύεις ότι η ιστορία που διάβασες μπορεί να βοηθήσει ένα/μία συμμαθητή/τρια σου που δεν έχει καταλάβει τους δεκαδικούς; Πως;
- **Ερώτηση ΒΜ.5:** Πιστεύεις ότι η ιστορία που διάβασες μπορεί να βοηθήσει ένα/μία συμμαθητή/τρια σου που δεν έχει καταλάβει τα κλάσματα; Πως;
- **Ερώτηση ΒΜ.6:** Θα ήθελες να χρησιμοποιούνται τέτοιες ιστορίες στην διδασκαλία των μαθηματικών; Πως πιστεύεις ότι μπορεί να βοηθήσει αυτό;

Η ερώτηση ΒΜ.1 ζητά να κρίνουν οι μαθητές την μαθηματική ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» ως προς το λογοτεχνικό της περιεχόμενο. Η ερώτηση ΒΜ.2 διερευνά αν οι μαθητές διάβασαν όντως την ιστορία και αν θυμούνται λεπτομέρειες, και μπορούν να τις επισημάνουν, από αυτήν ενώ η ερώτηση ΒΜ.3 εξετάζει την προτίμηση των μαθητών ως προς τους χαρακτήρες της ιστορίας (φυσικοί, δεκαδικοί, κλάσματα). Η ερώτηση ΒΜ.4 εξετάζει αν οι μαθητές θεωρούν ότι κατανόησαν περισσότερο την έννοια των δεκαδικών και τις ιδιότητες τους και η ερώτηση ΒΜ.5 εξετάζει αν οι μαθητές θεωρούν ότι κατανόησαν περισσότερο την έννοια των κλασμάτων και τις ιδιότητες τους. Τέλος η ερώτηση ΒΜ.6 ζητά από τα παιδιά να κρίνουν την μαθηματική ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» ως προς τον διδακτικό της χαρακτήρα.

4.3 Διαδικασία

Έγιναν τρεις επισκέψεις στο σχολικό περιβάλλον στις δύο τάξεις της ΣΤ' δημοτικού του σχολείου. Η πρώτη επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον έγινε στις 13 Νοεμβρίου, η δεύτερη στις 15 Νοεμβρίου και η τρίτη και τελευταία στις 12 Δεκεμβρίου.

Στην πρώτη επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον έγινε εισαγωγή στην μαθηματική λογοτεχνία. Τονίστηκε ότι μια μαθηματική ιστορία δεν απευθύνεται αποκλειστικά στους «άριστους» μαθητές αλλά σε όλους τους μαθητές που τους αρέσει να διαβάζουν λογοτεχνία. Αναφέρθηκε ότι σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας δεν είναι να κρίνει τους μαθητές ως προς το επίπεδο τους στα μαθηματικά αλλά αντίθετα ζητά από τους μαθητές να κρίνουν αυτοί την ιστορία για το πόσο μπορεί να τους βοηθήσει στο μάθημα των μαθηματικών. Σε αυτό βοήθησαν και οι δύο δάσκαλοι των τάξεων οι οποίοι πριν την επίσκεψη στο σχολείο έκαναν μία εισαγωγή στα παιδιά ώστε να ξέρουν περίπου τι να περιμένουν. Η εισαγωγή των δασκάλων έγινε σε συνεννόηση με τον ερευνητή. Οι μαθητές/τριες που έδειξαν ενδιαφέρον για την έρευνα (10 στο σύνολο) ενημερώθηκαν ότι θα ακολουθήσει κλήρωση για την τελική επιλογή των 6 ατόμων που απαιτούνταν για την έρευνα. Σε συνεννόηση με τους διδάσκοντας επιλέχτηκαν 6 μαθητές/τριες (3 αγόρια και 3 κορίτσια) με γνώμονα τις διαφορετικές επιδόσεις τους στα μαθηματικά και την λογοτεχνία. Από τα 6 παιδιά που επιλέχθηκαν τελικά, ο ερευνητής σε συνεννόηση με το σχολείο ζήτησε την συγκατάθεση των γονιών τους για τα ερωτηματολόγια και την συνεντεύξεις που θα ακολουθούσαν.

Στην δεύτερη επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον, οι 6 μαθητές/τριες που επιλέχθηκαν οδηγήθηκαν σε ένα διαφορετικό χώρο του σχολείου όπου τους δόθηκε το πρώτο ερωτηματολόγιο του γνωστικού περιεχομένου, Ερωτηματολόγιο ΑΠ (βλ. Παράρτημα Α – Ενότητα 7.1), ώστε να κριθούν οι γνώσεις τους για τους ρητούς αριθμούς πριν διαβάσουν την ιστορία. Όταν δόθηκε το Ερωτηματολόγιο ΑΠ στους μαθητές, γνωστοποιήθηκε ότι το

γνωστικό αντικείμενο της μαθηματικής ιστορίας είναι οι ρητοί αριθμοί και οι απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο θα βοηθήσουν τον ερευνητή να κατανοήσει τον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν τους ρητούς αριθμούς ώστε να βελτιώσει περαιτέρω την ιστορία του. Λέχθηκε ξανά ότι δεν κρίνονταν οι ικανότητες τους στο μάθημα των μαθηματικών και τα ερωτηματολόγια δεν θα δίνονταν ούτε θα συζητιούνταν με τον δάσκαλο τους. Για την συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου ΑΠ δόθηκε στους μαθητές χρόνος 30 λεπτά, στα οποία θα έπρεπε ο καθένας/μία να δουλέψει μόνος/η χωρίς να συνεννοούνται μεταξύ. Μετά την συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου ΑΠ, έγιναν ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις σε όλους τους μαθητές με άξονες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου στάσεων ΒΠ (βλ. Παράρτημα Α – Ενότητα 7.3). Οι συνεντεύξεις είχαν μέση διάρκεια τα 6 λεπτά. Στο τέλος των ημιδομημένων συνεντεύξεων οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν ότι θα έχουν στην διάθεση τους το χρονικό διάστημα του ενός μήνα για να διαβάσουν την ιστορία και τους δόθηκε ένα αντίτυπο της ιστορίας «Ταξίδι προς το Μηδέν».

Στην τρίτη και τελευταία επίσκεψη στο σχολικό περιβάλλον μετά από σχεδόν ένα μήνα (χρόνος που δόθηκε στους μαθητές για να διαβάσουν την ιστορία), οι 6 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα οδηγήθηκαν σε μία διαφορετική αίθουσα και τους δόθηκε το ερωτηματολόγιο ΑΜ (βλ. Παράρτημα Α – Ενότητα 7.2) με χρόνο συμπλήρωσης ξανά τα 30 λεπτά όπως και στην περίπτωση του ερωτηματολογίου ΑΠ. Μετά την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ΑΜ ακολούθησαν ατομικές συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΒΜ (βλ. Παράρτημα Α – Ενότητα 7.4) του οποίου βασικός στόχος ήταν να αναγνωρίσει τυχόν αλλαγές στην στάση των μαθητών απέναντι στους ρητούς αριθμούς και συγκεκριμένα στις αναπαραστάσεις τους, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα.

5 Αποτελέσματα

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν επιλεγμένες απαντήσεις των μαθητών/τριών στα γνωστικά ερωτηματολόγια αλλά και στις δύο ημιδομημένες συνεντεύξεις. Σε κάθε μαθητή/τρια ξεχωριστά θα παρουσιαστούν ενδεικτικές απαντήσεις του/της στα ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ και μέρη των απαντήσεων του/της στις συνεντεύξεις. Ο τρόπος παρουσίασης των απαντήσεων θα γίνει ατομικά ανά μαθητή/τρια πριν και μετά την ιστορία έτσι ώστε α) να αναγνωριστούν αλλαγές στο γνωστικό επίπεδο και στις παρανοήσεις στα μη συμβατά έργα και β) να αναγνωριστούν αλλαγές στις στάσεις απέναντι στους δεκαδικούς και τα κλάσματα.

Για κάθε μαθητή/τρια θα σχηματιστεί ένα ατομικό προφίλ ανάλογα με τις επιδόσεις του/της στα γνωστικά ερωτηματολόγια και τις απαντήσεις του/της στα ερωτηματολόγια στάσεων. Για το γνωστικό επίπεδο θα δοθούν οι χαρακτηρισμοί: α) χαμηλή επίδοση (ΧΕ) όταν εμφανίζονται ποσοστά σωστών απαντήσεων μικρότερα του 30%, β) μέτρια επίδοση (ΜΕ) όταν εμφανίζονται ποσοστά σωστών απαντήσεων 30% - 60%, υψηλή επίδοση (ΥΕ) όταν εμφανίζονται ποσοστά σωστών απαντήσεων 60% - 80% και δ) εξαιρετική επίδοση (ΕΕ) όταν εμφανίζονται ποσοστά σωστών απαντήσεων μεγαλύτερα του 80%.

Η ανάλυση γίνεται ανά μαθητή/τρια γιατί η έρευνα προσπαθεί να αναγνωρίσει όλες τις τυχόν αλλαγές στις παρανοήσεις του/της κάθε μαθητή/τριας στους ρητούς αριθμούς, (Παρανοήσεις ΠΔ1-ΠΔ4, ΠΚ1-ΠΚ4, ΠΡ1 και ΠΠΡ1, βλ. Ενότητα 2.1.2) αλλά και στις στάσεις απέναντι στους αριθμούς, οπότε μία συγκεντρωτική παρουσίαση αποτελεσμάτων θα έχανε αυτήν τη λεπτομέρεια. Τέλος το δείγμα των μαθητών/τριών είναι αρκετά μικρό (6 μαθητές/τριες) ώστε μία στατιστική μελέτη να έχει αξιόπιστα αποτελέσματα.

Σημειώνεται ότι από τους 6 μαθητές/τριες που συμμετείχαν στην έρευνα μόνο οι 3 μαθητές διάβασαν ολόκληρη την ιστορία ενώ οι άλλοι τρεις διάβασαν ένα κομμάτι της ιστορίας. Οπότε στην συνέχεια στα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν, πρέπει να ληφθεί υπόψιν το ποσοστό ανάγνωσης της ιστορίας από τον/την κάθε μαθητή/τρια.

5.1 Μαθητής 1 (Μ1) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 100%

5.1.1 Αποτελέσματα του μαθητή Μ1 πριν την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 (πάνω μέρος), ο Μ1 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΠ με ποσοστό 33% και δεν δίνει απάντηση στο 2% των απαντήσεων.

Τα λάθη του Μ1 στην διάταξη δεκαδικών εμφανίζονται στα μη συμβατά έργα και όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2 (πάνω μέρος) ευθύνονται στις παρανοήσεις ότι το μηδέν

προσδίδει μέγεθος στον δεκαδικό αριθμό (0,30 > 0,3) (Παρανόηση ΠΔ2) και ότι τα περισσότερα ψηφία στον δεκαδικό αριθμό προσδίδουν μέγεθος (0,36 > 0,5 και 2,0687986 > 2,621) (Παρανόηση ΠΔ1).

Στον Πίνακα 2 (πάνω μέρος), στην διάταξη κλασμάτων, ο Μ1, θεώρησε λανθασμένα ότι 1/14 = 2/16. Εδώ εμφανίζεται η παρανόηση ότι για να δημιουργηθεί ένα ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και στον παρονομαστή τον ίδιο αριθμό (Παρανόηση ΠΚ2). Λανθασμένα ο Μ1 θεωρεί ότι ο αριθμητής του 2/16 απέχει 2 μονάδες από το 1/14, και παρατηρεί ότι το 14 απέχει από το 16 άλλες 2 μονάδες, οπότε λανθασμένα προκύπτει ότι 1/14 = 2/16. Στα μη συμβατά έργα τα λάθη του Μ1 υποδηλώνουν ότι έχει την παρανόηση ότι τα μεγαλύτερα ψηφία σε ένα κλάσμα μεγαλώνουν το κλάσμα (Παρανόηση ΠΚ1). Επίσης λόγω της λανθασμένης διάταξης (1/7 < 4/3 < 5/6 < 4/4) φαίνεται ότι ο Μ1 έχει την παρανόηση ότι το 4/4 (δηλαδή η μονάδα) είναι το μεγαλύτερο από όλα τα κλάσματα (Παρανόηση ΠΚ3). Από την διάταξη που χρησιμοποίησε ο Μ1 στους ρητούς (0,5 < 0,316 < 1/5 < 4/10 < 1 < 2,32 < 2,301 < 7/4 < 10/3 < 4) εμφανίζεται ξανά η παρανόηση ότι ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι ο μεγαλύτερος (Παρανόηση ΠΔ1). Επίσης από την διάταξη ρητών και συγκεκριμένα τις διατάξεις 0,316 <1/5 και 2,301 < 7/4, φαίνεται ότι ο Μ1 δεν μπορεί να συγκρίνει κλάσματα με δεκαδικούς.

Απαντήσεις	***Διάταξη δεκαδικών***		***Διάταξη κλασμάτων***		***Διάταξη ρητών***	***Πυκνότητα Ρητών***		***Σύνολο***
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	
Σωστές	40%	100%	44%	0%	0%	50%	0%	**33%**
Λάθος	60%	0%	44%	100%	100%	50%	100%	65%
Καμία απάντηση	0%	0%	11%	0%	2%	0%	0%	2%
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	
Σωστές	100%	100%	89%	100%	0%	50%	0%	**63%**
Λάθος	0%	0%	11%	0%	100%	17%	50%	25%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	33%	50%	12%

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων του μαθητή Μ1 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ.

Στον Πίνακα 2 (πάνω μέρος), στην ερώτηση ΑΠ.6 βρίσκει λανθασμένα αριθμό ανάμεσα στους δεκαδικούς 8,15 και 8,9 (τον 8,12) που ενισχύει την παρανόηση περισσότερα ψηφία μεγαλύτερος δεκαδικός (Παρανόηση ΠΔ1). Τέλος από τις απαντήσεις του Μ1 στα έργα ΑΠ.6 και ΑΠ.7 αναδεικνύεται η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο δεδομένου ότι θεωρεί ότι δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στους δεκαδικούς 3,49 και 3,50, όπως και στα κλάσματα 1/8 και 1/9 (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1)

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*	
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	4,5 > 4,4 0,40 > 0,25		2/5 < 8/7 **1/14 = 2/16**			2,5 < 2,6 < 2,7 1/4 < 2/4 < 3/4	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	**0,30 > 0,3** **0,36 > 0,5** 3,02 < 3,2 < 3,682		5/10 < 5/4 **7/2 < 7/9** **3/2 < 8/9** **1/7<4/3<5/6<4/4**		**0,5<0,316** **0,316<1/5**	**8,9 < 8,12 < 8,15** **3,49 < ΔΥΑ < 3,50** **1/8 > ΔΥΑ >1/9** **Ανάμεσα στο 1,42 και 1,43 δεν υπάρχει αριθμός**	
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	6,4 > 6,3 0,42 > 0,37		3/4 < 9/6 **1/13 > 2/15**			9,4 < 9,5 < 9,6 1/5 < 2/5 < 3/5	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,50 = 0,5 0,47 < 0,6 5,02 < 5,2 < 5,350		4/3 > 10/9 6/11 < 6/5 8/2 > 8/9 1/8 < 6/7 < 5/5 < 5/4		**0,6 < 1/6** **10/3 < 9/4**	6,45 < 6,50 < 6,9 **1/6 > ΔΥΑ >1/7**	

Πίνακας 2: Επιλεγμένα παραδείγματα από τις απαντήσεις του μαθητή Μ1 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ. Με έντονα γράμματα συμβολίζονται παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων. Όπου ΔΥΑ ο μαθητής έβαλε την επιλογή «δεν υπάρχει αριθμός».

5.1.2 Αποτελέσματα του μαθητή Μ1 μετά την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 (κάτω μέρος), ο Μ1 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις του Ερωτηματολογίου ΑΜ με ποσοστό 63% σε αντίθεση με το ερωτηματολόγιο ΑΠ όπου απαντά με ποσοστό 33% (βελτίωση 30%) και δεν δίνει απάντηση στο 12% των ερωτήσεων.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 (κάτω μέρος), ο Μ1 δεν έκανε κανένα λάθος στις ερωτήσεις διάταξης ΑΜ.1 και ΑΜ.2 σε αντίθεση με τις αντίστοιχες ερωτήσεις του Πίνακα 1 (πάνω μέρος), όπου εμφάνισε αρκετά λάθη στα μη συμβατά έργα. Επίσης παρατηρείτε βελτίωση και στις ερωτήσεις ΑΜ.3 και ΑΜ.4 σε σχέση με τις ερωτήσεις ΑΠ.3 και ΑΠ.4. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2 (κάτω μέρος) από την διάταξη που χρησιμοποίησε ο Μ1 στους ρητούς (0,316 < 0,6 < 1/6 < 1 < 1,301 < 10/3 < 9/4 < 6) και από τις απαντήσεις του στα μη συμβατά έργα της ερώτησης ΑΜ.1 γίνεται αντιληπτό ότι η παρανόηση (ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι ο μεγαλύτερος (Παρανόηση ΠΔ1)), φαίνεται να εξαλείφεται. Όμως από την διάταξη 0,6 <1/6 και 10/3 < 9/4, φαίνεται ότι ο Μ1 δεν μπορεί ακόμη να συγκρίνει κλάσματα με δεκαδικούς. Τέλος από τις απαντήσεις του Μ1 στις ερωτήσεις ΑΜ.6 και ΑΜ.7 φαίνεται ότι η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο παραμένει (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1).

5.1.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθητής Μ1)

Ο Μ1 στην πρώτη συνέντευξη εμφανίστηκε αρκετά συνεσταλμένος, χωρίς να μιλάει πολύ. Από την αρχή της συνέντευξης φάνηκε διστακτικός με τις απαντήσεις του. Φαίνεται στις απαντήσεις που δίνει ότι σκέφτεται αρκετά πριν απαντήσει για το τι θα απαντήσει. Δηλώνει ότι του αρέσουν τα μαθηματικά με διακριτικό τρόπο, αν και κάποιες μέρες βαριέται να τα διαβάσει, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά.

Δηλώνει την προτίμηση του για τους φυσικούς αριθμούς, αν και αρχικά δεν ξέρει την ονομασία "Φυσικοί αριθμοί", λόγω του ότι τους θεωρεί τους πιο εύκολους αριθμούς «*Εεεε, γιατί είναι πανεύκολοι*». Από τους δεκαδικούς αριθμούς προτιμά τα κλάσματα και αυτό διότι «*Εεεε, τους δεκαδικούς δεν τους θυμάμαι…*». Αναφέρει χαρακτηριστικά ότι αυτό που τον μπερδεύει στους δεκαδικούς αριθμούς είναι τα δεκαδικά ψηφία μετά το κόμμα και η αξίες τους «*πότε μπαίνει 3 και πότε 03… (διαφορά 2,3 και 2,03)*».

Ο Μ1 στην δεύτερη συνέντευξη εμφανίστηκε αρκετά πιο χαλαρός από την πρώτη συνέντευξη με περισσότερη όρεξη για να μιλήσει. Φάνηκε να του αρέσει η ιδέα της ιστορίας και ο τρόπος που οι μαθητικές ιδέες μπλέκονταν με την πλοκή της. Όταν ερωτήθηκε από τον ερευνητή για το αν πιστεύει ότι η ιστορία που διάβασε μπορεί να βοηθήσει κάποιον που δεν έχει καταλάβει τους δεκαδικούς ο Μ1 απάντησε «*Αρκετά*». Και σαν παράδειγμα ανέφερε ότι στο ερωτηματολόγιο ΑΠ «*δεν κατάλαβα τίποτα στην αρχή μετά κατάλαβα καλύτερα…*» εννοώντας το ερωτηματολόγιο ΑΜ. Συγκεκριμένα ανέφερε ότι στους δεκαδικούς τον βοήθησε «*Να καταλάβω πως διατάσσονται και τέτοια…*». Όσον αφορά τα κλάσματα ανέφερε ότι «*Τα ήξερα τα περισσότερα…*» και ότι δεν έχει πρόβλημα να τοποθετήσει κλάσματα στον άξονα.

Ολοκλήρωσε αναφέροντας ότι τέτοιες ιστορίες πιστεύει ότι θα βοηθούσαν άλλους μαθητές να καταλάβουν πως διατάσσονται οι δεκαδικοί και τα κλάσματα.

5.1.4 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ1 πριν την ιστορία

Οι απαντήσεις που δίνει στην συνέντευξη του, ο Μ1, συνάδουν με τις παρανοήσεις που διακρίνονται στο γνωστικό ερωτηματολόγιο ΑΠ. Ο Μ1 δυσκολεύεται αρκετά και με την διάταξη δεκαδικών αλλά και με την διάταξη κλασμάτων (βλ. Πίνακα 1 (πάνω μέρος)). Ο Μ1 δεν αναγνωρίζει την πυκνότητα των ρητών και οι παρανοήσεις λόγω φυσικών αριθμών εμφανίζονται σε όλες σχεδόν τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΠ. Για τον Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας, βάση των ποσοστών σωστών απαντήσεων δίνεται ο χαρακτηρισμός: Μέτρια επίδοση 34% (ΜΕ).

Η στάση του μαθητή απέναντι για τα μαθηματικά πριν την ανάγνωση της φαίνεται σχεδόν φοβική, και όπως αναφέρει χαρακτηριστικά «*Σκέφτομαι….Εεεε προσπαθώ να υπολογίσω πόσο μεγάλη θα είναι η ώρα… (του μαθήματος)*» . Όσον αφορά τους δεκαδικούς και τα κλάσματα αναφέρει χαρακτηριστικά «*Εεεε τους δεκαδικούς δε τους θυμάμαι και τους Φυσικούς δεν τους ξέρω….*» και για ασκήσεις θα επέλεγε μόνο τους φυσικούς γιατί όπως αναφέρει «*Εεεε γιατί είναι πανεύκολοι..*». Ο φόβος του Μ1 για τους δεκαδικούς και τα κλάσματα φαίνεται να ευθύνεται σε μεγάλο ποσοστό στην μη κατανόηση του.

5.1.5 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ1 μετά την ιστορία

Συνοψίζοντας από τις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο ΑΜ ο Μ1 μετά την ιστορία βελτιώνεται στην διάταξη δεκαδικών αλλά και στην διάταξη κλασμάτων και τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων μειώνονται αρκετά. Στην διάταξη ρητών συνεχίζει να δυσκολεύεται και μετά την ανάγνωση της ιστορίας καθώς φαίνεται να μην μπορεί να συγκρίνει εύκολα κλάσματα και δεκαδικούς. Τέλος στις ερωτήσεις που εξετάζουν την πυκνότητα των ρητών τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων παραμένων σταθερά. Για τον Μ1 μετά την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: υψηλή επίδοση 63% (ΥΕ).

Από τις απαντήσεις που δίνει στην δεύτερη συνέντευξη του, ο Μ1, μπορεί κανείς να αντιληφθεί ότι η αυτοπεποίθηση του έχει ανέβει «*Μου άρεσε που είναι ζωντανοί οι αριθμοί, που είχε πλάκα, που ήταν οι δεκαδικοί, οι φυσικοί, ο ναός του μηδενός…*» και η στάση του για τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα έχει γίνει πιο θετική και μέρος του φόβου έχει εξαλειφθεί αφού για τους δεκαδικούς αναφέρει «*(Η ιστορία) με βοήθησε αρκετά…., να καταλάβω πως διατάσσονται και τέτοια*» και για τα κλάσματα αναφέρει «*Τα ήξερα τα περισσότερα*» . Ο Μ1 πλέον δεν δυσκολεύεται τόσο με τους δεκαδικούς και τα κλάσματα και το αναγνωρίζει.

5.2 Μαθήτρια 2 (Μ2) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 100%

5.2.1 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ2 πριν την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3 (πάνω μέρος), η Μ2 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις με ποσοστό 63%. Τα λάθη της Μ2 εμφανίζονται στην διάταξη κλασμάτων, όπου, θεώρησε λανθασμένα ότι 1/14 = 2/16 (βλ. Πίνακα 4 (πάνω μέρος)). Εδώ εμφανίζεται η παρανόηση ότι για να δημιουργηθεί ένα ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και στον παρονομαστή τον ίδιο αριθμό (Παρανόηση ΠΚ2). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4 (πάνω

μέρος), από την διάταξη που χρησιμοποίησε η Μ2 στους ρητούς (0,316 < 0,5 < 2,301 < 2,32 < 1/5 < 4/10 < 1 < 7/4 < 10/3 < 4) εμφανίζεται η παρανόηση ότι διατάσσει τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα χωριστά. Συγκεκριμένα διατάσσει τους αριθμούς σε ομάδες, ξεκινάει διατάσσοντας πρώτα τους δεκαδικούς αριθμούς (με σωστό τρόπο) και μετά τα κλάσματα (με σωστό τρόπο) σε ομάδες. Η Μ2 αντιλαμβάνεται τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως "διαφορετικούς" αριθμούς, αντί για διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού, οπότε τα διαφορετικά "είδη" αριθμών διατάσσονται χωριστά (Παρανόηση ΠΡ1).

Τέλος από τις απαντήσεις της Μ2 στα έργα ΑΠ.6 και ΑΠ.7 (Πίνακας 4 (πάνω μέρος)) αναδεικνύεται η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1) δεδομένου ότι θεωρεί ότι δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στους δεκαδικούς 3,49 και 3,50 και στα κλάσματα 1/3 και 2/3, αν και βρίσκει σωστά το κλάσμα 4/8 ανάμεσα στα 1/8 και 2/8 (1/8 > 4/8 > 1/9). Έτσι και στην ερώτηση Α.7 η Μ2 απάντησε λανθασμένα ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς 1,4 και 1,9 υπάρχουν μόνο οι δεκαδικοί 1,5, 1,6 1,7 και 1,8 και ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς 1,42 και 1,43 δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

Απαντήσεις	***Διάταξη δεκαδικών***		***Διάταξη κλασμάτων***		***Διάταξη ρητών***	***Πυκνότητα Ρητών***		***Σύνολο***
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	
Σωστές	100%	100%	89%	100%	0%	50%	0%	**63%**
Λάθος	0%	0%	11%	0%	100%	50%	100%	37%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	
Σωστές	83%	100%	100%	100%	0%	50%	0%	**62%**
Λάθος	17%	0%	0%	0%	100%	50%	100%	38%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Πίνακας 3: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων της μαθήτριας Μ2 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ.

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*	
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	4,5 > 4,4 0,40 > 0,25		2/5 < 8/7 **1/14 = 2/16**			2,5 < 2,6 < 2,7 1/4 < 2/4 < 3/4	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,30 = 0,3 0,36 < 0,5 3,02 < 3,2 < 3,682		5/10 < 5/4 7/2 > 7/9 3/2 > 8/9 1/7<5/6<4/4<4/3		**2,32 < 1/5**	8,9 > 8,27 > 8,15 **3,49 < ΔΥΑ < 3,50** **1/3 > ΔΥΑ >2/3** 1/8 > 4/8 > 1/9	
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	**6,3 > 6,4** 0,42 > 0,37		3/4 < 9/6 1/13 < 2/15			9,4 < 9,5 < 9,6 1/5 < 2/5 < 3/5	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,50 = 0,5 0,47 < 0,6 5,02 < 5,2 < 5,350		4/3 > 10/9 6/11 < 6/5 8/2 > 8/9 1/8<6/7<5/5<5/4		**0,6 < 1/6** 10/3 > 9/4	6,45 < 6,73 < 6,9 **1,29 < ΔΥΑ < 1,30** **3/5 < ΔΥΑ < 4/5** **1/6 > ΔΥΑ >1/7**	

Πίνακας 4: Επιλεγμένα παραδείγματα από τις απαντήσεις της μαθήτριας Μ2 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ. Με έντονα γράμματα συμβολίζονται παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων. Όπου ΔΥΑ η μαθήτρια έβαλε την επιλογή «δεν υπάρχει αριθμός».

5.2.2 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ2 μετά την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3 (κάτω μέρος), συνολικά η Μ2 απάντησε σωστά στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΜ με ποσοστό 62% πολύ κοντά στα ποσοστά του ερωτηματολόγιου ΑΠ όπου απαντά με ποσοστό 63%.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3 (κάτω μέρος), η Μ2 δεν κάνει λάθη στις ερωτήσεις δεν κάνει λάθη στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών εκτός από την απάντηση: 6,3 > 6,4 (βλ Πίνακα 4 (κάτω μέρος)), η οποία μπορεί να θεωρηθεί λάθος απροσεξίας, βάση των υπόλοιπων απαντήσεων της, και όχι λάθος λόγω παρανόησης. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4 (κάτω μέρος), από την διάταξη που χρησιμοποίησε η Μ2 στους ρητούς (0,316 < 0,6 < 1/6 < 3/10 < 1 < 1,301 < 1,32 < 9/4 < 10/3 < 6) γίνεται αντιληπτό ότι η παρανόηση (οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικά σύνολα οπότε διατάσσονται ανά ομάδες), φαίνεται να εξαλείφεται (Παρανόηση ΠΡ1). Όμως από την διάταξη 0,6 < 1/6, φαίνεται ότι η Μ2 έχει μια δυσκολία ακόμη στην σύγκριση κλασμάτων με δεκαδικούς. Τέλος από τις απαντήσεις της στις ερωτήσεις ΑΜ.6 και ΑΜ.7 φαίνεται ότι η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο παραμένει (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1).

5.2.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθήτρια Μ2)

Στην πρώτη συνέντευξη η Μ2 φαίνεται να είναι ένα κορίτσι με αυτοπεποίθηση και πίστη στις δυνατότητές της. Αναφέρει ότι αντιμετωπίζει θετικά τα μαθηματικά και όπως αναφέρει *«…κυρίως αισθάνομαι χαρά γιατί μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά»*.

Όπως και τα περισσότερα παιδιά στην πρώτη συνέντευξη η Μ2 αναφέρει ότι προτιμά τα κλάσματα από τους δεκαδικούς αριθμούς, χαρακτηρίζοντας όμως τους φυσικούς αριθμούς τους πιο εύκολους. Αυτό που της αρέσει περισσότερο στα κλάσματα είναι η αναπαράσταση τους «*απλά μου φαίνονται, ας πούμε, λίγο πιο…., μου αρέσει και ο τρόπος που είναι γραμμένοι, των κλασμάτων…*». Όταν σκέφτεται κλάσματα της έρχεται στο μυαλό το παράδειγμα με την πίτσα και τα κομμάτια που κόβεις «*Γιατί κάθε φορά, ας πούμε, που λέω κλάσμα μου έρχονται συνήθως πράγματα που τα κόβεις στην μέση*».

Όταν αναφέρει την λέξη "δεκαδικός" στο μυαλό της έρχεται ο φυσικός αριθμός 10 «*Εεεεμμμ, κυρίως μου έρχεται το δέκα (10), να πω την αλήθεια… χαχα (γελάει)*». Καταλαβαίνει ότι είναι περίεργο που της έρχεται το 10 στο μυαλό και γελάει με αυτό. Η Μ2 είναι στο στάδιο που «βλέπει» ότι δεν έχει άμεση σχέση το 10 με τους δεκαδικούς (δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι σκέφτεται τα δεκαδικά κλάσματα) αλλά δεν παύει η εικόνα να της «έρχεται» στο μυαλό κάθε φορά που αναφέρει δεκαδικός.

Αντιλαμβάνεται την σημασία της υποδιαστολής στους δεκαδικούς και αναγνωρίζει τον κίνδυνο να "συμπεριφερθεί" στα δέκατα και στα εκατοστά ενός δεκαδικού σαν να ήταν μονάδες και δεκάδες «*Ας πούμε, θα της έλεγα να προσέξει που είναι το κόμμα….αν πχ, βλέπεις από την μία, ας πούμε, και έχει 6,25 και από την άλλη, 6,100 κάτι, ας πούμε*» και πιο μετά αναφέρει *«…μπορεί οι αριθμοί ας πούμε από το 6 να είναι περισσότεροι, αλλά αυτό ας πούμε δεν ισχύει…γιατί όσες φορές και να ναι ο αριθμός, δεν, ας πούμε 6,2 και 6,100 κάτι, άρα…»*.

Η Μ2 στην δεύτερη συνέντευξη εμφανίστηκε με αρκετή αυτοπεποίθηση όπως και στην πρώτη συνέντευξη. Δήλωσε ότι της άρεσε η ιστορία διότι «μου άρεσε ας πούμε ο τρόπος που έδειχνε όλη την θεωρία, των μαθηματικών που έχουμε κάνει από την αρχή της 6ης μέχρι τώρα, με ένα πάρα πολύ ωραίο και διασκεδαστικό τρόπο». Η Μ2 πιστεύει ότι η ιστορία μπορεί να βοηθήσει έναν/μία συμμαθητή/τρια της να καταλάβει τους δεκαδικούς γιατί όπως δήλωσε *« (εγώ) κατάλαβα πως μπορούμε να τοποθετήσουμε κλάσματα και δεκαδικούς, ανάλογα με το ποιο είναι μεγαλύτερο και ποιο είναι μικρότερο…κατάλαβα λίγο περισσότερο πως κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα…και ναι πιστεύω ότι μπορεί να βοηθήσει γιατί το λέει όλο αρκετά απλοϊκά, ώστε να το καταλάβει ένας μαθητής*». Τέλος αναφέρει ότι θα ήθελε να χρησιμοποιούνται τέτοιες ιστορίες παράλληλα με το μάθημα των μαθηματικών:

Μ2: Εγώ ας πούμε σε κάθε νέο κεφάλαιο που ξεκινούσαμε στα μαθηματικά, θα διάβαζα και ένα ανάλογο κεφάλαιο από το βιβλίο, το οποίο θα μιλούσε κυρίως για αυτό το θέμα.

Ερευνητής: και μετά θα το συζητούσατε με τα παιδιά;
Μ2: Ναι.

5.2.4 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ2 πριν την ιστορία

Οι απαντήσεις που δίνει στην πρώτη συνέντευξη, η Μ2, συνάδουν με τις απαντήσεις της στο Ερωτηματολόγιο ΑΠ. Η Μ2 δεν δυσκολεύεται με την διάταξη δεκαδικών ούτε με την διάταξη κλασμάτων, αν και θεωρεί τους δεκαδικούς και τα κλάσματα διαφορετικά σύνολα αριθμών. Επίσης η Μ2 δεν έχει κατανοήσει την πυκνότητα των ρητών και οι παρανοήσεις της εμφανίζονται στα μη συμβατά έργα των ερωτήσεων (ΑΠ.6 και ΑΠ.7) (βλ. Πίνακα 4 (πάνω μέρος)). Για την Μ2 πριν την ανάγνωση της ιστορίας, σύμφωνα με τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων της, δίνεται ο χαρακτηρισμός: υψηλή επίδοση 63% (ΥΕ).

Η στάση της Μ2 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είναι θετική απέναντι στα μαθηματικά «*κυρίως αισθάνομαι χαρά γιατί μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά*» γενικότερα με επιφυλάξεις για τους δεκαδικούς αριθμούς στους οποίους φοβάται ότι μπορεί να κάνει λάθος στην διάταξη αν δεν προσέξει «*θα έλεγα να προσέξει που είναι το κόμμα (σε μία μαθήτρια που δεν καταλαβαίνει)….αν Πχ: βλέπεις από την μία, ας πούμε, και έχει 6,25 και από την άλλη, 6,100 κάτι (Πχ. 6,125) ας πούμε*».

5.2.5 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ2 μετά την ιστορία

Συνοψίζοντας από τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο ΑΜ η Μ2 μετά την ιστορία διατηρεί τα ίδια υψηλά επίπεδα γνώσεις στην διάταξη δεκαδικών και κλασμάτων και φαίνεται από την διάταξη της στην ερώτηση ΑΜ.5 ότι ξεπέρασε την παρανόηση ότι οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί και διατάσσονται ξεχωριστά. Τέλος στις ερωτήσεις που εξετάζουν την πυκνότητα των ρητών τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων παραμένουν τα ίδια. Για την Μ2, μετά την ανάγνωση της ιστορίας, σύμφωνα με τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων της, δίνεται ξανά ο χαρακτηρισμός: υψηλή επίδοση 62% (ΥΕ).

Από τις απαντήσεις που δίνει στην συνέντευξη, η Μ2, μπορεί κανείς να αντιληφθεί ότι η αυτοπεποίθηση της στα μαθηματικά έχει ανέβει ακόμη περισσότερο «*Μου φάνηκε πάρα πολύ ωραία, μου άρεσε ας πούμε ο τρόπος που έδειχνε όλη την θεωρία, των μαθηματικών που έχουμε κάνει από την αρχή της 6ης μέχρι τώρα, με ένα πάρα πολύ ωραίο και διασκεδαστικό τρόπο*». Επίσης η στάση της για τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα έχει γίνει ακόμη πιο θετική «*Καταρχήν κατάλαβα πως μπορούμε να τοποθετήσουμε κλάσματα και δεκαδικούς, ανάλογα με το ποιο είναι μεγαλύτερο και ποιο είναι μικρότερο…κατάλαβα λίγο περισσότερο*

πως κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα…και ναι πιστεύω ότι μπορεί να βοηθήσει γιατί το λέει όλο αρκετά απλοϊκά, ώστε να το καταλάβει ένας μαθητής». Τέλος δίνει τις δικές της οδηγίες για το πως θα μπορούσε να γίνει ένα μάθημα μαθηματικών με χρήση ιστορίας πιο κατανοητό «*Εγώ ας πούμε σε κάθε νέο κεφάλαιο που ξεκινούσαμε στα μαθηματικά, θα διάβαζα και ένα ανάλογο κεφάλαιο από το βιβλίο, το οποίο θα μιλούσε κυρίως για αυτό το θέμα*», που δείχνει ότι αποτίμησε θετικά την συμβολή της ιστορίας στην κατανόηση της.

5.3 Μαθητής 3 (Μ3) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 100%

5.3.1 Αποτελέσματα του μαθητή Μ3 πριν την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5 (πάνω μέρος), συνολικά ο Μ3 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις με ποσοστό 81%. Τα λάθη του Μ3 εμφανίζονται μόνο στις ερωτήσεις ΑΠ.6 και ΑΠ.7, που από τις απαντήσεις, στον Πίνακα 6 (πάνω μέρος), αναδεικνύεται και σε αυτόν η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο (Παρανοήσεις ΠΚ4 και ΠΠΡ1). Όπως όμως φαίνεται στον Πίνακα 6 (πάνω μέρος), σε αντίθεση με τους υπόλοιπους μαθητές, ο Μ3 είναι ο μόνος που μπορεί να βρει αριθμό ανάμεσα στους δεκαδικούς 3,49 και 3,50. Στην ερώτηση ΑΠ.7 ο Μ3 απάντησε λανθασμένα ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς 1,42 και 1,43 υπάρχουν 10 δεκαδικοί, απάντηση που αναδεικνύει μεγαλύτερη κατανόηση για την πυκνότητα των ρητών.

5.3.2 Αποτελέσματα του μαθητή Μ3 μετά την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5 (κάτω μέρος), συνολικά ο Μ3 απάντησε σωστά στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΜ με ποσοστό 67%, χαμηλότερο ποσοστό από αυτό που σημείωσε στο ερωτηματολόγιο ΑΠ όπου απάντησε με ποσοστό 81%. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 6 (κάτω μέρος) το λάθος του Μ3, που ρίχνει τα ποσοστά του στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, γίνεται στην διάταξη ρητών της ερώτησης ΑΜ.5. Ενώ στο ερωτηματολόγιο ΑΠ διάταξε σωστά: $2,32 < 10/3$, στο ερωτηματολόγιο ΑΜ διατάσσει: $10/3 < 1,301$. Από το λάθος αυτό φαίνεται ότι δεν υπάρχει ακόμη πλήρης κατανόηση της αίσθησης του μεγέθους των κλασμάτων και ανά περιπτώσεις μπορεί να οδηγήσει τον Μ3 σε λάθη. Στην πυκνότητα των ρητών ο Μ3 εξακολουθεί να βρίσκει πεπερασμένο αριθμό ρητών ανάμεσα σε δύο ρητούς (Παρανόηση ΠΠΡ1) και σε κάποιες περιπτώσεις να απαντά ότι δεν υπάρχει κανένας. Η διακριτότητα των ρητών ως παρανόηση ενυπάρχει ακόμη στον Μ3.

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*		*Σύνολο*
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	
Σωστές	100%	100%	100%	100%	100%	67%	0%	**81%**
Λάθος	0%	0%	0%	0%	0%	17%	100%	17%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	17%	0%	2%
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	
Σωστές	100%	100%	100%	100%	0%	67%	0%	**67%**
Λάθος	0%	0%	0%	0%	100%	33%	100%	33%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Πίνακας 5: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων του μαθητή Μ3 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ.

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*	
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	4,5 > 4,4 0,40 > 0,25		2/5 < 8/7 1/14 < 2/16			2,5 < 2,6 < 2,7 1/4 < 2/4 < 3/4	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,30 = 0,3 0,36 < 0,5 3,02 < 3,2 < 3,682		5/10 < 5/4 7/2 > 7/9 3/2 > 8/9 1/7<5/6<4/4<4/3		1/5 < 0,316 7/4 < 2,301	8,9 > 8,17 > 8,15 3,49 < 3,491 < 3,50 **1/8 > 2/8 > 1/9** **Ανάμεσα στο 1,42 και 1,43 βρίσκονται 10 αριθμοί**	
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	6,3 < 6,4 0,42 > 0,37		3/4 < 9/6 1/13 < 2/15			9,4 < 9,5 < 9,6 1/5 < 2/5 < 3/5	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,50 = 0,5 0,47 < 0,6 5,02 < 5,2 < 5,350		4/3 > 10/9 6/11 < 6/5 8/2 > 8/9 1/8<6/7<5/5<5/4		**3/10 < 1/6** **10/3<1,301**	6,45 < 6,46 < 6,9 1,29 < 1,291 < 1,30 **1/6 > ΔΥΑ >1/7** **Ανάμεσα στους 7,34 και 7,35 υπάρχουν 10 αριθμοί**	

Πίνακας 6: Επιλεγμένα παραδείγματα από τις απαντήσεις του μαθητή Μ3 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ. Με έντονα γράμματα συμβολίζονται παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων. Όπου ΔΥΑ ο μαθητής έβαλε την επιλογή «δεν υπάρχει αριθμός».

5.3.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθητής Μ3)

Όπως φαίνεται στην πρώτη συνέντευξη ο Μ3 είναι ένα αγόρι με πολύ μεγάλη αυτοπεποίθηση και πίστη στις δυνατότητες του, ειδικά στα μαθηματικά. Αναφέρει ότι σκέφτεται τα μαθηματικά με θετικό τρόπο «*συγκεκριμένα για τα μαθηματικά μάλλον καλά*

πράγματα». Αναφέρει ότι δεν συναντά δυσκολία στους δεκαδικούς και στα κλάσματα και προσπαθεί να δώσει την εντύπωση ότι έχει μεγάλη άνεση με τους αριθμούς αυτούς. Στην ερώτηση του ερευνητή για το αν υπάρχει κάτι που σε δυσκολεύει με τους αριθμούς αυτούς ο Μ3 αναφέρει χαρακτηριστικά: «*Εεεεε, υποθέτω…, κάτι υπάρχει αλλά δεν μου έρχεται τώρα…*».

Ο Μ3 είναι ο μόνος που καταλαβαίνει την ονομασία των φυσικών αριθμών «*οι ολόκληροι, οι ακέραιοι*» και πάραυτα δεν τους επιλέγει ως αγαπημένους αριθμούς, αντιθέτως προτιμά τα κλάσματα και τους δεκαδικούς, ενώ αναγνωρίζει τους φυσικούς ως πιο εύκολους, γιατί του φαίνονται πιο «ενδιαφέροντες». Πιστεύει ότι οι δεκαδικοί αριθμοί δυσκολεύουν τα περισσότερα παιδιά στην τάξη του γιατί «*έχουν το κόμμα και είναι 0,1 , 0,01 όσα μηδενικά θες από πίσω και κάνει το ίδιο*» και θα έλεγε σε ένα φίλο του που δυσκολεύεται με αυτούς να προσέξει «*πόσα μηδενικά υπάρχουν μετά το κόμμα, πριν το κόμμα, αν είναι δηλαδή 0,1 ή 0,01 που έχει κόμμα*».

Αντιλαμβάνεται τα κλάσματα ως «πίτσες» που χωρίζουμε σε κομμάτια και παίρνουμε κάποια. Για τα κλάσματα με μεγαλύτερο αριθμητή αντιλαμβάνεται ότι «Θα έχουμε πιο πολλές πίτσες».

Στην δεύτερη συνέντευξη ο Μ3 βρίσκει την ιστορία που διάβασε «*πολύ ωραία, ωραία γραμμένη, με ωραία πλοκή*». Στην ερώτηση στο τι του άρεσε περισσότερο στην ιστορία που διάβασε απαντά «*γενικά το θέμα μου άρεσε*» και του άρεσε ο πρωταγωνιστής της ιστορίας περισσότερο σαν χαρακτήρας διότι «*είναι σχεδόν έτοιμος για τα πάντα*» παρόλο που «*ζορίζεται στα μαθηματικά*».

Ο Μ3 πιστεύει ότι η ιστορία μπορεί να βοηθήσει στους δεκαδικούς αριθμούς και στα κλάσματα και συγκεκριμένα αναφέρει ότι αυτό που τον ενδιέφερε περισσότερο στην ιστορία ήταν ο τρόπος που κάνεις τους δεκαδικούς αριθμούς κλάσματα:

Μ3: Ας πούμε πως τους κάνεις κλάσματα που αυτό δεν το κατάλαβα και πάρα πολύ καλά…

Ερευνητής: Πως κάνεις τον δεκαδικό κλάσμα;

Μ3: Ναι, και το κλάσμα δεκαδικό.

Ερευνητής: Τι περίπου κατάλαβες;

Μ3: (γελάει) στο περίπου…λοιπόν, ένα παράδειγμα που βγάζεις την υποδιαστολή και βάζεις μηδενικά ας πούμε, στους δεκαδικούς να τους κάνεις κλάσματα.

Ερευνητής: Δεκαδικούς που;, σε ποιο βάζεις;

Μ3: Στα ψηφία μετά την υποδιαστολή

Ερευνητής: Στον παρονομαστή ή στον αριθμητή, πχ αν θες να το κάνεις κλάσμα..

Μ3: Αν είναι 3,6…

Ερευνητής: Ναι;

Μ3: Βάζεις μηδενικά στο 6.

Ερευνητής: Ναι;

Μ3: Ως παρονομαστή αν δεν κάνω λάθος…

Ερευνητής: Ναι, πόσα μηδενικά θα βάλεις για να κάνεις το 3,6 κλάσμα

Μ3: 1 για κάθε ψηφίο μετά την υποδιαστολή.

Ερευνητής: Ναι, ας πούμε, οπότε 36/10;

Μ3: Ναι…

Ο Μ3 φαίνεται από τον παραπάνω διάλογο ότι έχει κατανοήσει ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί δεν είναι διαφορετικά σύνολα αλλά διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών και βρίσκεται στο στάδιο να κατανοήσει την μετατροπή δεκαδικού σε κλάσμα και το αντίστροφο. Να σημειωθεί εδώ, ότι η μετατροπή από κλάσμα σε δεκαδικό και το αντίστροφο δεν έχει διδαχθεί ακόμη στην τάξη του Μ3.

5.3.4 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ3 πριν την ιστορία

Η μεγάλη αυτοπεποίθηση του Μ3 στην συνέντευξη συνάδει με τις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο ΑΠ. Ο Μ3 δεν δυσκολεύεται στην διάταξη δεκαδικών ούτε στην διάταξη κλασμάτων. Επίσης είναι ο μόνος που απαντά σωστά την ερώτηση ΑΠ.5 (βλ. Πίνακα 5 (κάτω μέρος)) με την διάταξη ρητών και ο μόνος που βρίσκει δεκαδικό αριθμό ανάμεσα στο 3,49 και 3,50 (βλ. Πίνακα 6 (πάνω μέρος)). Αν και δεν έχει κατανοήσει την πυκνότητα των ρητών βρίσκεται πιο κοντά από τους υπόλοιπους μαθητές καθώς ψάχνει αριθμούς σε μεγαλύτερα δεκαδικά (βλ. Πίνακα 6 (πάνω μέρος)). Για τον Μ3 πριν την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: άριστη επίδοση 81% (ΑΕ).

Η στάση του μαθητή απέναντι στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα είναι θετική αν και φαίνεται ότι όποιες δυσκολίες έχει τις κρύβει καλά και σε ερωτήσεις του ερευνητή για τις δυσκολίες των αριθμών, απαντάει με αφηρημένο τρόπο: *Ερ: «Υπάρχει κάτι στα μαθηματικά που σου χαλάει την διάθεση; Απ: «Υποθέτω…», Ερ: «Τι δεν σου αρέσει στους δεκαδικούς;» Απ: «Δεν μου έρχεται τώρα…» και Ερ: «Γιατί δεν προτιμάς του δεκαδικούς;» Απ: «Δεν ξέρω »*.

5.3.5 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ3 μετά την ιστορία

Ο Μ3, όπως φάνηκε ήδη και από το ερωτηματολόγιο ΑΠ, δεν δυσκολεύεται στην διάταξη δεκαδικών ούτε στην διάταξη κλασμάτων. Από τις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο ΑΜ παρατηρείται όμως ότι δεν έχει κατανοήσει ακόμη καλά το μέγεθος των κλασμάτων και την πυκνότητα των ρητών αλλά συνεχίζει να βρίσκεται πιο κοντά στην κατανόηση τους, σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές. Έχει καλή διαίσθηση για το μέγεθος

των κλασμάτων και μπορεί να βρει αριθμούς ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δεκαδικούς αριθμούς. Ο Μ3 με την ανάγνωση της ιστορίας προσπάθησε να καταλάβει την μετατροπή από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο, γεγονός που δείχνει ότι είναι σε πολύ καλό δρόμο στο να κατανοήσει πολύ καλά το σύνολο των ρητών αριθμών. Για τον Μ3 μετά την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: υψηλή επίδοση 67% (ΥΕ).

Η στάση του μαθητή απέναντι στους δεκαδικούς αριθμούς παραμένει θετική αφού δεν αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα και με την δεύτερη συνέντευξη αποκαλύπτεται ότι στα κλάσματα φοβάται ότι μπορεί να κάνει λάθη. Στην ερώτηση του ερευνητή για την αναγνώριση του μεγέθους ενός κλάσματος: «*για τα κλάσματα είχες καταλάβει πως τα βρίσκουμε, σε ποιο διάστημα είναι;*» ο Μ3 απαντά: «*Λοιπόν, πάνω κάτω, όχι και πολύ καλά..*». Η απάντηση αυτή του Μ3 δικαιολογεί το λάθος στην διάταξη των ρητών (3/10 < 1/6). Η αποκάλυψη των δυσκολιών του Μ3 στα κλάσματα στην δεύτερη συνέντευξη με απαντήσεις όπως: «*Γενικά όλο το θέμα το οποίο ήταν μπερδεμένο (μιλώντας για τοποθέτηση κλασμάτων στο διάστημα)*», μπορεί να θεωρηθεί ως αναγνώριση μίας αδυναμίας του και προσπάθεια εξάλειψης της, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως θετική εξέλιξη για τον Μ3.

5.4 Μαθήτρια 4 (Μ4) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 75%

5.4.1 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ4 πριν την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 7 (πάνω μέρος), η Μ4 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις με ποσοστό 57%. Τα λάθη της Μ4 εμφανίζονται στις ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων, διάταξης ρητών και πυκνότητας ρητών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 8 (πάνω μέρος), η Μ4, στην ερώτηση ΑΠ.3, φαίνεται να επιλέγει απάντηση ανάλογα με το μέγεθος του παρονομαστή, συγκεκριμένα φαίνεται να έχει την παρανόηση ότι μικρότερος παρονομαστής συνεπάγεται μικρότερο κλάσμα ανεξάρτητα από την τιμή του αριθμητή. Επίσης, απαντά λανθασμένα ότι 3/2 = 9/8. Εδώ παρουσιάζεται ξανά η παρανόηση ότι για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω στον αριθμητή και στον παρονομαστή την ίδια ποσότητα (3+6 = 9 και 2+6 = 8 οπότε 3/2 = 9/8) (Παρανόηση ΠΚ2) .

Στην διάταξη ρητών η Μ4 φαίνεται να μην κατανοεί το μέγεθος των κλασμάτων. Συγκεκριμένα, διάταξε τα κλάσματα και τους δεκαδικούς με την σειρά: 0,316 < 0,5 < 2,301 < 2,32 < 4/10 < 1/5 < 1 = 4 < 10/3 < 7/4. Από την διάταξη αυτή παρατηρείται ξανά η παρανόηση ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι διαφορετικά σύνολα αριθμών (Παρανόηση ΠΡ1). Επίσης στην διάταξη, η Μ4 θεωρεί ότι 1 = 4. Εδώ υπάρχει η παρανόηση ότι στο σύνολο των κλασμάτων οι φυσικοί αριθμοί είναι το ολόκληρο ενώ το κλάσμα είναι

ένα κομμάτι του ολόκληρου, οπότε με την λογική αυτή όλοι οι φυσικοί στο σύνολο των κλασμάτων αναπαριστούν ένα ολόκληρο κλάσμα α/α.

Τέλος από τις απαντήσεις της Μ4 στα έργα που αφορούν την πυκνότητα των ρητών αναδεικνύεται η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1).

Απαντήσεις	***Διάταξη δεκαδικών***		***Διάταξη κλασμάτων***		***Διάταξη ρητών***	***Πυκνότητα Ρητών***		***Σύνολο***
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	
Σωστές	100%	100%	67%	100%	0%	33%	0%	**57%**
Λάθος	0%	0%	33%	0%	100%	67%	100%	43%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	
Σωστές	60%	100%	78%	100%	0%	50%	0%	**55%**
Λάθος	40%	0%	22%	0%	100%	50%	100%	45%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Πίνακας 7: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων της μαθήτριας Μ4 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ.

5.4.2 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ4 μετά την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 7 (κάτω μέρος), η Μ4 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΜ με ποσοστό 55%, ποσοστό που είναι πολύ κοντά στο ποσοστό σωστών απαντήσεων του ερωτηματολογίου ΑΠ (57%). Τα λάθη της Μ4 εμφανίζονται στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων, στις ερωτήσεις διάταξης ρητών αλλά και στις ερωτήσεις πυκνότητας ρητών. Η Μ4, εμφανίζει λάθη στην διάταξη δεκαδικών στο ερωτηματολόγιο ΑΜ, αν και στο ερωτηματολόγιο ΑΠ απάντησε σωστά στα έργα αυτά (βλ. Πίνακα 7). Εδώ αποδεικνύεται η αδυναμία στην κατανόηση δεκαδικών που δήλωσε η Μ4 στην πρώτη συνέντευξη. Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 8 (κάτω μέρος), εμφανίζεται ξανά η παρανόηση ότι για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω στον αριθμητή και στον παρονομαστή την ίδια ποσότητα (Παρανόηση ΠΚ2) και στην διάταξη ρητών η Μ4 φαίνεται να μην κατανοεί το μέγεθος των κλασμάτων. Συγκεκριμένα διάταξε τα κλάσματα και τους δεκαδικούς με την σειρά: $0,306 < 0,6 < 1,301 < 1,32 < 3/10 < 1/6 < 1 < 6 < 9/4 < 10/3$. Από την διάταξη αυτή παρατηρείται ξανά η παρανόηση ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι διαφορετικά σύνολα αριθμών (Παρανόηση ΠΡ1). Επίσης, η Μ4 δεν θεωρεί πλέον ότι $1 = 6$ και επιλέγει σωστά $1 < 6$. Εδώ φαίνεται να ξεπερνά την παρανόηση ότι στο σύνολο των κλασμάτων όλοι οι φυσικοί αναπαριστούν ένα ολόκληρο κλάσμα α/α.

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*	
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	4,5 > 4,4 0,40 > 0,25		**2/5 > 8/7** **1/14 > 2/16** **3/2 = 9/8**			2,5 < 2,6 < 2,7 1/4 < 2/4 < 3/4	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,30 = 0,3 0,36 < 0,5 3,02 < 3,2 < 3,682		5/10 < 5/4 7/2 > 7/9 3/2 > 8/9 1/7 < 5/6 < 4/4 < 4/3		**2,32 < 4/10** **4/10 < 1/5** **1=4**	**8,9 > ΔΥΑ > 8,15** **3,49 < ΔΥΑ < 3,50** **1/8 > ΔΥΑ > 1/9** **Ανάμεσα στο 1,42 και 1,43 δεν βρίσκονται αριθμοί**	
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	6,3 < 6,4 0,42 > 0,37		3/4 < 9/6 **1/13 > 2/15** **4/3 = 10/9**			9,4 < 9,5 < 9,6 1/5 < 2/5 < 3/5	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	**0,50 > 0,5** 0,47 < 0,6 5,02 < 5,2 < 5,350		6/11 < 6/5 8/2 > 8/9 1/8 < 6/7 < 5/5 < 5/4		**3/10 < 1/6** **6 < 9/4**	6,45 < 6,5 < 6,9 **1,29 < ΔΥΑ < 1,30** **1/6 > 6/6 >1/7** **Ανάμεσα στους 7,34 και 7,35 δεν υπάρχουν αριθμοί**	

Πίνακας 8: Επιλεγμένα παραδείγματα από τις απαντήσεις της μαθήτριας Μ4 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ. Με έντονα γράμματα συμβολίζονται παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων. Όπου ΔΥΑ, η μαθήτρια έβαλε την επιλογή «δεν υπάρχει αριθμός ».

5.4.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθήτρια Μ4)

Στην πρώτη συνέντευξη η Μ4 εμφανίζεται συνεσταλμένη και δείχνει ότι της αρέσουν τα μαθηματικά. Στην ερώτηση τι συναισθήματα νιώθεις όταν έχετε μαθηματικά η απάντηση της είναι «*σχετικά χαρά*» αλλά και κάποιες φορές δυσκολεύεται με τα μαθηματικά «*ελάχιστες φορές βαριέμαι*».

Η Μ4 είναι από τα λίγα παιδιά που αναφέρει ότι προτιμά τους δεκαδικούς από τους υπόλοιπους αριθμούς. Αναφέρει ότι ο λόγος που προτιμά τους δεκαδικούς είναι για να δοκιμάσει τις ικανότητες της σε αυτούς «προτιμώ τώρα, να τους κάνω άλλη μία να τους τεστάρω». Εξηγεί ότι δεν τους καταλαβαίνει καλά και ότι έχει καιρό να ασχοληθεί μαζί τους. Στην ερώτηση για το τι θέλει να θυμηθεί από τους δεκαδικούς η απάντηση της είναι να καταλάβει καλύτερα την διάταξη «*θέλω να καταλάβω καλύτερα ποιο είναι μεγαλύτερο όταν είναι 1,313 ή 1,31*». Απαντάει ειλικρινά ότι δεν είναι σίγουρη για το ποιος δεκαδικός είναι μεγαλύτερος όταν έχουν πολλά ψηφία ενώ όταν οι δεκαδικοί έχουν μόνο δέκατα δεν μπερδεύεται. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι δεν έχει καταλάβει την διάταξη δεκαδικών και θέλει να την καταλάβει καλύτερα. Στην ερώτηση του ερευνητή αν δεν καταλαβαίνει από τους 3,5 και 3,6 ποιος είναι μεγαλύτερος, απαντά «*όχι, Πχ. (δεν καταλαβαίνω τους) 3,45 και 3,113..*».

Στην δεύτερη συνέντευξη η Μ4 αναφέρει ότι βρήκε την ιστορία που διάβασε «*ωραία, αν και δεν πρόλαβα να την διαβάσω όλη*». Στην ερώτηση στο τι της άρεσε περισσότερο στην ιστορία που διάβασε απαντά: «*Μου άρεσε που μάθαινε καινούργια πράγματα ο πρωταγωνιστής, και ήθελε να ταξιδέψει…*». Θυμάται αρκετούς χαρακτήρες από την ιστορία και της άρεσε ο πρωταγωνιστής της ιστορίας περισσότερο «*γιατί ήταν λίγο πιο περιπετειώδης και μάθαινε πράγματα…*».

Η Μ4 πιστεύει ότι η ιστορία μπορεί να βοηθήσει στους δεκαδικούς αριθμούς και ισχυρίζεται ότι την βοήθησε στο να καταλάβει την διάταξη δεκαδικών:

Μ4: Εμένα προσωπικά με βοήθησε λίγο να καταλάβω, την διαφορά ανάμεσα στους δεκαδικούς…

Ερευνητής: Την διαφορά ανάμεσα στους δεκαδικούς;

Μ4: Ποιος είναι μεγαλύτερος και ποιος είναι μικρότερος.

Ερευνητής: Α, για πες, για εξήγησε το αυτό να το καταλάβω και εγώ..

Μ4: Εμ, όταν πχ ο πρώτος αριθμός μετά το κόμμα είναι ο ίδιος με έναν άλλο, κοιτάμε τον επόμενο αν είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος και βλέπουμε ποιος είναι πιο μικρός…

Ερευνητής: Ενώ μπερδευόσουνα πριν από αυτό;

Μ4: Ε ναι, κάποιες φορές, ναι.

Ερευνητής: Ωραία τέλεια, δηλαδή, από το 2,5 και το 2,40 ποιος είναι μεγαλύτερος;

Μ4: Το 2,5…

Ερευνητής: Ωραία αυτό το μπέρδευες πιο παλιά λίγο περισσότερο;

Μ4: Ναι

Η Μ4 στην διάταξη κλασμάτων ισχυρίζεται ότι κατάλαβε λίγο πιο πολύ πιο είναι μεγαλύτερο κλάσμα αλλά όπως λέει για την διάταξη κλασμάτων «δεν το έχω τόσο δύσκολο», εννοώντας την διάταξη δεκαδικών. Τέλος πιστεύει για την ιστορία ότι «εμένα με βοήθησε και πιστεύω ότι θα βοηθήσει και άλλους…».

5.4.4 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ4 πριν την ιστορία

Η Μ4, όπως φάνηκε από το ερωτηματολόγιο ΑΠ, δυσκολεύεται αρκετά στην διάταξη κλασμάτων και όπως αναφέρει στην πρώτη συνέντευξη θεωρεί ότι δεν έχει καταλάβει καλά ούτε την διάταξη δεκαδικών: «*Εεεε θέλω να καταλάβω καλύτερα πως είναι μεγαλύτερο όταν είναι 1,313 ή 1,31..*» αν και οι απαντήσεις που δίνει στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών είναι σωστές. Στην διάταξη ρητών δυσκολεύεται αρκετά και θεωρεί και αυτή ότι οι δεκαδικοί είναι διαφορετικοί αριθμοί από τα κλάσματα. Στην διάταξη δεκαδικών φαίνεται να τα πηγαίνει καλύτερα από την διάταξη κλασμάτων και στην πυκνότητα ρητών η γνώση της είναι ελλιπής δεδομένου ότι θεωρεί ότι δεν υπάρχει αριθμός ούτε ανάμεσα στους δεκαδικούς

8,15 και 8,9. Για την Μ4 πριν την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: μέτρια επίδοση 57,14% (ΜΕ).

Όσον αφορά την στάση της για τους αριθμούς, η Μ4 δηλώνει τον φόβο της για τυχόν λάθη στην διάταξη δεκαδικών *«..θέλω να καταλάβω ποιο είναι μεγαλύτερο όταν είναι 1,313 ή 1,31»* γιατί ανησυχεί ότι μπορεί να κάνει εύκολα λάθος όταν μεταχειρίζεται δεκαδικούς: *Ερ: «Όταν αρχίσουν να μπαίνουν περισσότερα δεκαδικά σε μπερδεύει;» Απ: «Ναι»*.

5.4.5 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ4 μετά την ιστορία

Η Μ4, όπως φάνηκε από το ερωτηματολόγιο ΑΜ, συνεχίζει να δυσκολεύεται στην διάταξη κλασμάτων και τα λάθη της στην διάταξη δεκαδικών αναδεικνύουν ότι οι παρανοήσεις στους δεκαδικούς, ενυπάρχουν και δεν έχουν εξαλειφθεί, παρότι στο ερωτηματολόγιο ΑΠ είχε απαντήσει σωστά σε όλα τα έργα της διάταξης δεκαδικών (βλ. Πίνακα 7 (πάνω μέρος)). Έτσι ο ισχυρισμός της στην πρώτη συνέντευξη ότι δεν έχει καταλάβει καλά την διάταξη δεκαδικών αποκτά βάση. Στην διάταξη ρητών συνεχίζει δυσκολεύεται αρκετά και θεωρεί ακόμη ότι οι δεκαδικοί είναι διαφορετικοί αριθμοί από τα κλάσματα (Παρανόηση ΠΡ1), όπως φαίνεται από τις απαντήσεις της στην Ερώτηση ΑΜ.5 (βλ. Πίνακα 8 (κάτω μέρος)). Τέλος στην πυκνότητα ρητών η γνώση της παραμένει ελλιπής, αν και πλέον μπορεί βρίσκει αριθμούς ανάμεσα στους δεκαδικούς 6,45 και 6,9 (Παρανόηση ΠΔ4). Για την Μ4 μετά την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ξανά ο χαρακτηρισμός (Μέτρια επίδοση 55,40%).

Όσον αφορά την στάση της για τους αριθμούς μετά το μέρος της ιστορίας που διάβασε, η Μ4 πιστεύει ότι η ιστορία την βοήθησε να καταλάβει την διάταξη δεκαδικών «Εμένα προσωπικά με βοήθησε λίγο να καταλάβω, την διαφορά ανάμεσα στους δεκαδικούς…(εννοεί ποιος είναι μεγαλύτερος και ποιος μικρότερος)». Παρότι αυτό δεν μεταφράζεται στις απαντήσεις της, δείχνει ότι φοβάται λιγότερο τις πράξεις με τους δεκαδικούς: Ερ: «Ωραία αυτό το μπέρδευες πιο παλιά λίγο περισσότερο; (διάταξη των δεκαδικών 2,5 και 2,40)» Απ: «Ναι», οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι η στάση της για τους δεκαδικούς έχει γίνει θετικότερη.

5.5 Μαθητής 5 (Μ5) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 35%

5.5.1 Αποτελέσματα του μαθητή Μ5 πριν την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 9 (πάνω μέρος), ο Μ5 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις με ποσοστό 5%. Τα λάθη του Μ5 εμφανίζονται σε όλες τις ερωτήσεις διάταξης και στις ερωτήσεις της πυκνότητας ρητών. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 10 (πάνω μέρος), ο Μ5, έχει την παρανόηση ότι τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία δίνουν μεγαλύτερο δεκαδικό αριθμό

(Παρανόηση ΠΔ1) και ότι το μηδέν προσδίδει μέγεθος στον δεκαδικό αριθμό (Παρανόηση ΠΔ2). Ο Μ5 στα κλάσματα φαίνεται να έχει την παρανόηση ότι ο μικρότερος παρονομαστής συνεπάγεται και μικρότερο κλάσμα ανεξάρτητα από την τιμή του αριθμητή. Ο Μ5 απαντάει λανθασμένα στην ερώτηση για την διάταξη των ρητών και συγκεκριμένα διατάσσει τα κλάσματα και τους δεκαδικούς με την σειρά: 0,5 < 0,316 < 4/10 < 1/5 < 7/4 < 10/3 < 1 < 2,32 < 2,301 < 4. Στην διάταξη αυτή επιβεβαιώνονται οι παρανοήσεις που εμφανίζονται στα προηγούμενα έργα και εμφανίζεται το λάθος 7/4 < 10/3 < 1, που βασίζεται στην παρανόηση ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα (Παρανόηση ΠΚ3). Τέλος από τις απαντήσεις του Μ5 στα έργα που αφορούν την πυκνότητα των ρητών αναδεικνύεται η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1).

5.5.2 Αποτελέσματα του μαθητή Μ5 μετά την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 9 (κάτω μέρος), ο Μ5 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΜ με ποσοστό 40%, ποσοστό που είναι λίγο καλύτερο από το ποσοστό των σωστών απαντήσεων του ερωτηματολογίου ΑΠ (35,71%). Ξανά ο Μ5 εμφανίζει λάθη στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων, όπως και στις ερωτήσεις διάταξης και πυκνότητας ρητών.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 10 (κάτω μέρος), ο Μ5 εμφανίζει ξανά την παρανόηση στους δεκαδικούς ότι τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία συνεπάγονται μεγαλύτερο δεκαδικό (Παρανόηση ΠΔ1) και φαίνεται ότι η παρανόηση, ότι το μηδέν προσδίδει μέγεθος στον δεκαδικό, εξαλείφεται (Παρανόηση ΠΔ2). Ο Μ5 διατάσσει τα κλάσματα και τους δεκαδικούς με την σειρά: 0,6 < 0,316 <1 < 1,32 < 1,302 < 6 < 1/6 < 3/10 < 9/4 < 10/3. Από την διάταξη αυτή παρατηρείται η παρανόηση ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι διαφορετικά σύνολα αριθμών (Παρανόηση ΠΡ1). Επίσης δεν θεωρεί πλέον ότι 1 = 6 και επιλέγει σωστά 1 < 6. Εδώ φαίνεται να ξεπερνά την παρανόηση ότι στο σύνολο των κλασμάτων όλοι οι φυσικοί αναπαριστούν ένα ολόκληρο κλάσμα α/α. Τέλος από τις απαντήσεις του Μ5 στα έργα που αφορούν την πυκνότητα των ρητών αναδεικνύεται ξανά η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο.

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*		*Σύνολο*
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	
Σωστές	40%	100%	67%	100%	0%	50%	0%	**51%**
Λάθος	60%	0%	33%	0%	100%	50%	100%	49%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	
Σωστές	60%	0%	89%	100%	0%	33%	0%	**40%**
Λάθος	40%	100%	11%	100%	0%	67%	100%	60%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Πίνακας 9: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων του μαθητή Μ5 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ

Ενδεικτικές απαντήσεις στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ (Μαθητής Μ5)							
Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*	
	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	4,5 > 4,4 0,40 > 0,25		**2/5 > 8/7** **1/14 > 2/16** 3/2 > 9/8			2,5 < 2,6 < 2,7 1/4 < 2/4 < 3/4	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	**0,30 > 0,3** **0,36 > 0,5** 3,02 < 3,2 < 3,682		5/10 < 5/4 7/2 > 7/9 3/2 > 8/9 1/7<5/6<4/4<4/3		**4/10 < 1/5** **10/3 < 1**	**8,9 < 8,13 < 8,15** **3,49 < ΔΥΑ < 3,50** **1/8 > ΔΥΑ > 1/9** **Ανάμεσα στο 1,42 και 1,43 δεν βρίσκονται αριθμοί**	
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	6,3 < 6,4 0,42 > 0,37		3/4 < 9/6 **1/13 > 2/15**			9,4 < 9,5 < 9,6 1/5 < 2/5 < 3/5	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	0,50 = 0,5 **0,47 > 0,6** **5,02 > 5,2 > 5,350**		4/3 > 10/9 6/11 < 6/5 8/2 > 8/9 1/8<6/7<5/5<5/4		**0,6 < 0,316** **1,32 > 1,301** **6 < 1/6**	**6,45 > 6,12 > 6,9** **1,29 < ΔΥΑ < 1,30** **1/6 > ΔΥΑ >1/7** **Ανάμεσα στους 7,34 και 7,35 υπάρχει 1 αριθμός**	

Πίνακας 10: Επιλεγμένα παραδείγματα από τις απαντήσεις του μαθητή Μ5 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ. Με έντονα γράμματα συμβολίζονται παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων. Όπου ΔΥΑ, ο μαθητής έβαλε την επιλογή «δεν υπάρχει αριθμός».

5.5.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθητής Μ5)

Όπως φαίνεται από την πρώτη συνέντευξη ο Μ5 φαίνεται να μην έχει πολύ αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά και θεωρεί ότι υπάρχουν ασκήσεις και συγκεκριμένα θέματα στα μαθηματικά που δεν τα καταφέρνει. Χαρακτηριστικά λέει: «*Το τι σκέφτομαι εξαρτάται από το τι κάνουμε αυτήν την περίοδο στα μαθηματικά*» και στην συνέχεια αναφέρει «*Ας πούμε ένα κομμάτι που μου αρέσει πολύ στα μαθηματικά είναι όταν κάνουμε για το ΕΚΠ και για τον ΜΚΔ. Τότε σχετικά χαίρομαι που έχω μαθηματικά, αλλά αν έχουμε πχ, …δεν ξέρω…*».

Ο Μ5 αναφέρει ρητά ότι τον δυσκολεύουν τα κλάσματα και προτιμά να δουλεύει με δεκαδικούς. Αναφέρει και αυτός ότι οι φυσικοί είναι οι πιο εύκολοι αλλά προτιμά τους δεκαδικούς «*πιστεύω οι φυσικοί (πιο εύκολοι) αλλά για μένα είναι πιο ενδιαφέροντες οι δεκαδικοί*». Στον παρακάτω απόσπασμα της συνέντευξης ο Μ5 εξηγεί τον λόγο που δεν του αρέσουν τα κλάσματα:

Μ5: Κυρίως να καταλάβω αν ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από κάποιο άλλο. Με μπερδεύει πχ, ένα παράδειγμα να δώσω…
Ερευνητής: Ναι…;
Μ5: Το 1/2 είναι ουσιαστικά το μισό.
Ερευνητής: Ναι;
Μ5: Εεε, αυτό πιστεύω είναι μεγαλύτερο από το 1/3.
Ερευνητής: Ναι.
Μ5: Αυτό λίγο με δυσκολεύει, να το σκεφτώ έτσι ακριβώς…
Ερευνητής: Ενώ αν κάνεις δεκαδικούς; Το 1/2 πως είναι δεκαδικός;
Μ5: Είναι 0,5.
Ερευνητής: Και το 1/3 πόσο είναι περίπου;
Μ5: Εμ, είναι 0,2;

Αναφέρει ότι τα περισσότερα παιδιά στην τάξη του δυσκολεύονται με τους δεκαδικούς και αυτό που κανείς πρέπει να προσέξει στους δεκαδικούς είναι οι αξίες των ψηφίων «*Εμ, θα του έλεγα να προσέξει που είναι οι δεκάδες οι μονάδες σε σχέση…, αυτό*».

Στην δεύτερη συνέντευξη ο Μ5 αναφέρει ότι του φάνηκε ενδιαφέρουσα η ιστορία αν και διάβασε λιγότερο από το 40% της ιστορίας. Όπως αναφέρει και ο ίδιος «*Μου φάνηκε αρκετά ενδιαφέρον, μου άρεσε έτσι που το γράψατε που…οι αριθμοί κινούνται και μιλάνε και οι εκφράσεις που λέγατε ότι…(λέει διαλόγους από το βιβλίο), μου άρεσε και ο τρόπος που ήταν γραμμένο*». Στην ερώτηση αν πιστεύει ότι η ιστορία θα βοηθούσε μαθητές που δεν έχουν

καταλάβει τους δεκαδικούς απαντάει: «*Ε εμένα δεν ξέρω αν με βοήθησε πολύ αλλά, πιστεύω ότι το σημείο…(αναφέρει ένα σημείο της ιστορίας στο οποίο αναφέρεται το πως βρίσκεις την θέση ενός δεκαδικού), μπορεί να βοηθήσει..*». Ο ερευνητής τον ρωτά αν αυτόν τον βοήθησε με ένα παράδειγμα:

Ερευνητής: Εσένα σε βοήθησε να καταλάβεις κάτι που δεν είχες καταλάβει στους δεκαδικούς;
Μ5: Δεν ξέρω δεν είμαι σίγουρος…Νομίζω πως ναι…
Ερευνητής: Δηλαδή ας πούμε από το 2,5 και το 2,40, ποιο είναι μεγαλύτερο;
Μ5: Το 2,40.

Από την απάντηση του Μ5 φαίνεται ξεκάθαρα ότι δεν βοηθήθηκε από το κομμάτι που διάβασε από την ιστορία. Στην συνέχεια ο Μ5 αναφέρει ότι στα κλάσματα δεν τον βοήθησε αφού δεν πρόλαβε να προχωρήσει μέχρι αυτό το σημείο στην ιστορία. Στο τέλος της συνέντευξης ο Μ5 δήλωσε πως θα ήθελε να χρησιμοποιούνται οι ιστορίες για την διδασκαλία των μαθηματικών αλλά όπως ανέφερε: «*λογικά θα έδινα κάποια ιστορία αλλά όχι πολύ μεγάλη, κάτι που να χωράει στα πλαίσια του μαθήματος…*».

5.5.4 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ5 πριν την ιστορία

Ο Μ5, όπως φάνηκε από το ερωτηματολόγιο ΑΠ, δυσκολεύεται αρκετά και στην διάταξη δεκαδικών αλλά και στην διάταξη κλασμάτων και όπως αναφέρει στην πρώτη συνέντευξη θεωρεί ότι δεν έχει καταλάβει καλά ούτε την διάταξη δεκαδικών: *Ερ: «άμα βάλεις και άλλα νούμερα, πεις ας πούμε το 3,514 και το 3,502;» Απ: «τότε μπορεί να μπερδευτώ…»* ούτε των κλασμάτων: «*Αυτά είναι αρκετά δύσκολα (για τα κλάσματα)*». Στην διάταξη των ρητών δυσκολεύεται αρκετά όπως φαίνεται και στην Ερώτηση Α.5 του Πίνακα 10 και θεωρεί ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα. Τέλος στην πυκνότητα ρητών η γνώση του είναι και εδώ περιορισμένη δεδομένου ότι δεν συμπληρώνει σωστά κανένα μη συμβατό έργο. Για τον Μ5 πριν την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: μέτρια επίδοση 51% (ΜΕ).

Ο Μ5 έχει αρνητική στάση απέναντι στα κλάσματα, αφού αναφέρει ότι δεν του αρέσουν: «*Δεν θα πως ότι μου προκαλούν ενδιαφέρον ούτε όχι, απλά αυτά είναι αρκετά δύσκολα*» και ο λόγος φαίνεται να είναι ότι δεν μπορεί να υπολογίσει ακριβώς την ποσότητα τους. Για αυτόν είναι ποσότητες που τις μεταχειρίζεται στο περίπου και δεν είναι σίγουρος για την διάταξη τους. Αντίθετα στους δεκαδικούς φαίνεται να νιώθει πιο σίγουρος στο πως του μεταχειρίζεται: «*Δεν ξέρω πως να το εξηγήσω…βασικά δεν είναι κάτι συγκεκριμένο που κάνει να μου αρέσουν οι δεκαδικοί απλά…*».

5.5.5 Χαρακτηριστικά του μαθητή Μ5 μετά την ιστορία

Ο Μ5, όπως φάνηκε και από το ερωτηματολόγιο ΑΜ, συνεχίζει να δυσκολεύεται στην διάταξη δεκαδικών και κλασμάτων. Παρότι στην δεύτερη συνέντευξη αναφέρει ότι μάλλον τον βοήθησε η ιστορία στην διάταξη δεκαδικών: «*Δεν ξέρω δεν είμαι σίγουρος…Νομίζω πως ναι…*», από τις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο ΑΜ αλλά και από το παράδειγμα που τον ρωτά ο ερευνητής στην συνέντευξη, φαίνεται ότι δεν αληθεύει: *Ερ: «Ποιο είναι μεγαλύτερο το 2,5 ή το 2,40», Απ: «το 2,40»*. Στην διάταξη ρητών συνεχίζει να δυσκολεύεται αρκετά και θεωρεί ότι οι δεκαδικοί είναι διαφορετικοί αριθμοί από τα κλάσματα (βλ. Πίνακα 10, ερώτηση ΑΜ.5). Τέλος στην πυκνότητα ρητών η παρανόηση της διακριτότητας εμφανίζεται σε όλες τις απαντήσεις του, αν και μετά την ανάγνωση της ιστορίας απαντά ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς 7,34 και 7,35 υπάρχει ένας αριθμός χωρίς να μπορεί να τον βρει. Συνοψίζοντας, για τον Μ5 μετά την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: μέτρια επίδοση 40% (ΜΕ).

Από το μικρό κομμάτι της ιστορίας που διάβασε ο Μ5 φαίνεται ότι η αρνητική στάση του για τους δεκαδικούς και τα κλάσματα δεν άλλαξε ουσιαστικά: «*εμένα δεν με βοήθησε πολύ.. (εννοεί η ιστορία)*», αν και δήλωσε ότι κατάλαβε περισσότερο τους δεκαδικούς αριθμούς.

5.6 Μαθήτρια 6 (Μ6) – ποσοστό ανάγνωσης ιστορίας 35%

5.6.1 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ6 πριν την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11 (πάνω μέρος), η Μ6 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις με ποσοστό 26%. Τα λάθη της Μ6 εμφανίζονται σε όλες τις ερωτήσεις διάταξης και στις ερωτήσεις της πυκνότητας ρητών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 12 (πάνω μέρος), η Μ6 έχει την παρανόηση ότι το μηδέν προσδίδει μέγεθος στον δεκαδικό αριθμό (Παρανόηση ΠΔ3) και από την απάντηση της στην ερώτηση ΑΠ.4 δείχνει να έχει την παρανόηση ότι το 4/4 (δηλαδή η μονάδα) είναι το μεγαλύτερο από όλα τα κλάσματα (Παρανόηση ΠΚ3). Στα κλάσματα φαίνεται να έχει την παρανόηση ότι ο μικρότερος παρονομαστής συνεπάγεται μικρότερο κλάσμα ανεξάρτητα από την τιμή του αριθμητή. Επίσης, η Μ6 απαντάει λανθασμένα στην ερώτηση για την διάταξη των ρητών και συγκεκριμένα διατάσσει τα κλάσματα και τους δεκαδικούς με την σειρά: $4/10 < 1/5 < 7/4 < 10/3 < 0,316 < 0,5 < 1 < 2,301 < 2,32 < 4$. Στην διάταξη αυτή επιβεβαιώνονται οι παρανοήσεις που εμφανίζονται και στα προηγούμενα έργα, η παρανόηση ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα αποτελούν διαφορετικούς αριθμούς (Παρανόηση ΠΡ1) και από τις απαντήσεις της, $4/10 < 1/5$ και $10/3 < 0,316$, γίνεται αντιληπτή η ελλιπής κατανόηση της στις ποσότητες των κλασμάτων. Τέλος από τις

απαντήσεις της Μ6 στα έργα που αφορούν την πυκνότητα των ρητών αναδεικνύεται η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1).

	Ερώτηση ΑΠ.1	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	
Απαντήσεις	***Διάταξη δεκαδικών***		***Διάταξη κλασμάτων***		***Διάταξη ρητών***	***Πυκνότητα Ρητών***		***Σύνολο***
Σωστές	80%	0%	67%	0%	0%	33%	0%	**26%**
Λάθος	20%	100%	33%	100%	100%	67%	100%	74%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	Ερώτηση ΑΜ.1	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	
Σωστές	80%	0%	89%	100%	0%	33%	0%	**43%**
Λάθος	20%	100%	11%	0%	100%	67%	100%	57%
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Πίνακας 11: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων της μαθήτριας Μ6 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ.

5.6.2 Αποτελέσματα της μαθήτριας Μ6 μετά την ιστορία

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11 (κάτω μέρος), η Μ6 απαντάει σωστά στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΑΜ με ποσοστό 43%, ποσοστό αρκετά καλύτερο από το ποσοστό των σωστών απαντήσεων του ερωτηματολογίου ΑΠ (26%). Η Μ6 εμφανίζει ξανά λάθη στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών αριθμών και μόνο ένα λάθος στις ερωτήσεις διάταξης κλασμάτων. Η Μ6 απαντά λάθος στην ερώτηση διάταξης των ρητών αλλά και στις ερωτήσεις που εξετάζουν την πυκνότητα.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 12 (κάτω μέρος), εμφανίζεται ξανά η παρανόηση ότι το μηδέν αλλάζει μέγεθος στον δεκαδικό (Παρανόηση ΠΔ3) και από την διάταξη κλασμάτων και δεκαδικών: $0,316 < 0,6 < 3/10 < 1/6 < 1 < 1,302 < 1,32 < 9/4 < 10/3 < 6$ εμφανίζονται οι παρανοήσεις ότι τα κλάσματα με τον μικρότερο παρονομαστή είναι μικρότερα ($3/10 < 1/6$). Από τον τρόπο που διατάσσει τους ρητούς η Μ6 φαίνεται ότι ξεπερνά την παρανόηση που εμφάνισε στο ερωτηματολόγιο ΑΠ ότι οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα αποτελούν διαφορετικούς αριθμούς μεταξύ τους (Παρανόηση ΠΡ1), αφού τους διατάσσει σύμφωνα με το μέγεθος τους και όχι σύμφωνα με το αν είναι κλάσμα ή δεκαδικός. Τέλος από τις απαντήσεις της στα έργα που αφορούν την πυκνότητα των ρητών αναδεικνύεται ξανά η παρανόηση της θεώρησης των ρητών αριθμών ως ένα διακριτό σύνολο (Παρανοήσεις ΠΔ4, ΠΚ4 και ΠΠΡ1).

Απαντήσεις	*Διάταξη δεκαδικών*		*Διάταξη κλασμάτων*		*Διάταξη ρητών*	*Πυκνότητα Ρητών*	
	Ερώτηση ΑΠ.1	*Ερώτηση ΑΠ.2*	*Ερώτηση ΑΠ.3*	*Ερώτηση ΑΠ.4*	*Ερώτηση ΑΠ.5*	*Ερώτηση ΑΠ.6*	*Ερώτηση ΑΠ.7*
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	4,5 > 4,4 0,40 > 0,25		**2/5 > 8/7** **1/14 > 2/16** 3/2 > 9/8			2,5 < 2,6 < 2,7 1/4 < 2/4 < 3/4	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	**0,30 < 0,3** 0,36 < 0,5 **3,2 > 3,02 > 3,682**		5/10 < 5/4 **7/2 < 7/9** 3/2 > 8/9 **1/7<5/6<4/3<4/4**		**4/10 < 1/5** **10/3 < 0,316**	**8,9 < 8,10 < 8,15** **3,49 < ΔΥΑ < 3,50** **1/8 > ΔΥΑ > 1/9** **Ανάμεσα στο 1,42 και 1,43 δεν βρίσκονται αριθμοί**	
	Ερώτηση ΑΜ.1	*Ερώτηση ΑΜ.2*	*Ερώτηση ΑΜ.3*	*Ερώτηση ΑΜ.4*	*Ερώτηση ΑΜ.5*	*Ερώτηση ΑΜ.6*	*Ερώτηση ΑΜ.7*
Παραδείγματα απαντήσεων σε Συμβατά έργα	6,3 < 6,4 0,42 > 0,37		3/4 < 9/6 **1/13 > 2/15**			9,4 < 9,5 < 9,6 1/5 < 2/5 < 3/5	
Παραδείγματα απαντήσεων σε μη Συμβατά έργα	**0,50 < 0,5** 0,47 < 0,6 **5,2 > 5,02 > 5,350**		4/3 > 10/9 6/11 < 6/5 8/2 > 8/9 1/8 < 6/7 < 5/5 < 5/4		**0,6 < 3/10** **3/10 < 1/6** 1,301 < 1,32	**6,45 > 6,10 > 6,9** **1,29 < ΔΥΑ < 1,30** **1/6 > ΔΥΑ >1/7** **Ανάμεσα στους 7,34 και 7,35 υπάρχει 1 αριθμός**	

Πίνακας 12: Επιλεγμένα παραδείγματα από τις απαντήσεις της μαθήτριας Μ6 στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ. Με έντονα γράμματα συμβολίζονται παραδείγματα λανθασμένων απαντήσεων. Όπου ΔΥΑ, η μαθήτρια έβαλε την επιλογή «δεν υπάρχει αριθμός».

5.6.3 Ανάλυση απομαγνητοφωνήσεων στα Ερωτηματολόγια ΒΠ και ΒΜ (Μαθήτρια Μ6)

Από την πρώτη συνέντευξη φαίνεται ότι η Μ6 είναι ένα κορίτσι με χιούμορ και αυτοσαρκασμό. Σε αντίθεση με τους υπόλοιπους/ες συμμετέχοντες αναφέρει ξεκάθαρα ότι δεν της αρέσουν τα μαθηματικά και παραδέχεται ότι της προκαλούν αρκετές δυσκολίες.

Ερευνητής: Βλέπεις Μαθηματικά. Τι σκέφτεσαι;

Μ6: Πότε θα τελειώσει… (γελάει).

Ερευνητής: (Γελάει) δηλαδή δεν σου αρέσουν τα μαθηματικά;

Μ6: Όχι.

Ερευνητής: Καθόλου;

Μ6: Μμμ, εντάξει λίγο.

Ερευνητής: Σε δυσκολεύουν;

Μ6: Ναι.

Στην ερώτηση του ερευνητή για το ποιοι αριθμοί σου αρέσουν, η Μ6 απαντά ότι της αρέσουν οι φυσικοί αριθμοί γιατί είναι οι μόνοι που δεν την μπερδεύουν. Αναφέρει ότι οι δεκαδικοί την δυσκολεύουν στην διάταξη και ότι ενώ μπορεί να διατάξει δεκαδικούς με διαφορετικές μονάδες (4,5 και 5,2) δεν μπορεί να διατάξει εύκολα δύο δεκαδικούς που έχουν τις ίδιες μονάδες (5,3 και 5,4).

Στα κλάσματα συναντά εξίσου δυσκολίες «*Δεν θυμάμαι είναι 3/4, το 3 τι είναι, τα κομμάτια που κόβουμε ή…*», επίσης αναφέρει ότι σε κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή ξέρει τι να κάνει:

Ερευνητής: Το ξέρεις. Ποιο είναι ποιο μεγάλο το 1/2 ή το 1/3;
Μ6: Το 1/2.

Όμως όταν στα κλάσματα που μελετάει, ο αριθμητής γίνεται μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε αναφέρει χαρακτηριστικά ότι δεν καταλαβαίνει «*Το 3/4 το κόβουμε σε 4 κομμάτια και παίρνουμε τα 3, τα 5; (εννοεί ότι δεν καταλαβαίνει το 5/4)*».

Στην δεύτερη συνέντευξη η Μ6 αναφέρει ότι παρότι δεν διάβασε όλη την ιστορία της άρεσε. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι της άρεσε ότι οι χαρακτήρες προσπαθούσαν να βρουν ένα εύκολο τρόπο για να διατάξουν τους δεκαδικούς αριθμούς σε ένα διάστημα. Στην ερώτηση για το αν η ιστορία που διάβασε μπορεί να βοηθήσει κάποιον που δεν έχει καταλάβει τους δεκαδικούς αριθμούς έγινε ο παρακάτω διάλογος:

Ερευνητής: Πιστεύεις ότι αυτή η ιστορία που διάβασες, όσο διάβασες, μπορεί να βοηθήσει ένα συμμαθητή σου που κάνει δεκαδικούς;
Μ6: Ναι.
Ερευνητής: Πως μπορεί να βοηθήσει;
Μ6: Μπορεί να βοηθήσει ποιος είναι ο μεγαλύτερος, πως να το βρίσκεις…
Ερευνητής: Εσύ κατάλαβες καλύτερα ποιος είναι ο μεγαλύτερος δεκαδικός με αυτήν την ιστορία;
Μ6: Ναι.
Ερευνητής: Για πες ποιος είναι ο μεγαλύτερος, πως βρίσκεις τον μεγαλύτερο;
Μ6: Είναι ας πούμε ο 3,50 και ο 3,8.
Ερευνητής: Ναι, ποιος είναι ο μεγαλύτερος;
Μ6: Ο 3,8 επειδή είναι πιο κοντά στο 4.
Ερευνητής: Τέλεια! Ωραία…Άρα κατάλαβες αυτό…πολύ ωραία, αυτό δεν το είχες καταλάβει πριν;
Μ6: Όχι

Από αυτόν τον διάλογο εμφανίζεται η κατανόηση της Μ6 για το πως τοποθετούμε έναν δεκαδικό πάνω στον άξονα, κατανόηση που όπως ισχυρίζεται δεν υπήρχε πριν την ανάγνωση της ιστορίας.

Στα κλάσματα η Μ6 αναφέρει ότι δεν την βοήθησε η ιστορία, δεδομένου ότι δεν διάβασε και την ιστορία στο σημείο που διαπραγματεύεται τα κλάσματα. Στην ερώτηση του ερευνητή για το πως θα χρησιμοποιούσε αυτή την ιστορία στο μάθημα των μαθηματικών, απάντησε «*όπως το κάνατε εσείς, που μας βάλατε στην αρχή ένα τέτοιο (ερωτηματολόγιο), και μετά που το είχαμε διαβάσει άλλο ένα (ερωτηματολόγιο)… και μετά αν δεν βοηθούσε να βρεις*

έναν άλλο τρόπο…» και στο αν θα ήθελε και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα στα μαθηματικά να υπήρχαν ιστορίες απάντησε «*Ναι γιατί με αυτά (τα άλλα θέματα μαθηματικών) δεν είμαι τόσο καλή…*».

5.6.4 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ6 πριν την ιστορία

Η Μ6, όπως φάνηκε από το ερωτηματολόγιο ΑΠ, δυσκολεύεται στην διάταξη δεκαδικών αλλά και στην διάταξη κλασμάτων και όπως αναφέρει στην πρώτη συνέντευξη: «με μπερδεύουν (για τους δεκαδικούς γενικά)» και για τα κλάσματα «*με μπερδεύουν ας πούμε αν είναι 5 πάνω και 4 κάτω (αναφέρει ότι δεν καταλαβαίνει τα κλάσματα με μεγαλύτερο αριθμητή από παρονομαστή)*». Στην διάταξη ρητών, όπως φάνηκε στις απαντήσεις της στον Πίνακα 12 (πάνω μέρος), δυσκολεύεται αρκετά με τις ποσότητες των κλασμάτων και πως μπορεί να τα συγκρίνει με τους δεκαδικούς, επίσης θεωρεί ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα. Τέλος στην πυκνότητα ρητών η γνώση της είναι ελλιπής δεδομένου ότι δεν συμπληρώνει σωστά κανένα μη συμβατό έργο. Συνοψίζοντας, για την Μ6 πριν την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: χαμηλή επίδοση 26% (ΧΕ).

Η στάση της Μ6 απέναντι στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα και γενικότερα τα μαθηματικά είναι ξεκάθαρα αρνητική *Ερ: «βλέπεις μαθηματικά τι σκέφτεσαι;» Απ: «πότε θα τελειώσει (εννοεί το μάθημα)»*. Χαρακτηριστικό της αρνητικής αυτής στάσης είναι ότι η Μ6 ήταν η μόνη που δυσανασχέτησε όταν τους δόθηκε το ερωτηματολόγιο ΑΠ: «*Αυτό που κάνουμε τώρα δεν με δυσκολεύει…… αλλά το φυλλάδιο που μας δώσατε πριν με τα κλάσματα και τους δεκαδικούς, που δεν τα θυμόμουνα… (εννοεί ότι δυσκολεύτηκε)*».

5.6.5 Χαρακτηριστικά της μαθήτριας Μ6 μετά την ιστορία

Η Μ6, όπως φάνηκε από το ερωτηματολόγιο ΑΜ, δυσκολεύεται στην διάταξη δεκαδικών αλλά τα πήγε καλύτερα στην διάταξη κλασμάτων. Όπως αναφέρει στην δεύτερη συνέντευξη θεωρεί ότι κατάλαβε καλύτερα την διάταξη δεκαδικών «*Μπορεί να βοηθήσει (εννοεί η ιστορία) ποιος είναι ο μεγαλύτερος (εννοεί δεκαδικός), πως να το βρίσκεις…*» αν και τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου δεν επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό της. Στα κλάσματα αν και δε την βοήθησε η ιστορία όπως αναφέρει «*Πιο πολύ δεκαδικούς… (από κλάσματα)*» τα πήγε αρκετά καλύτερα. Στην διάταξη ρητών δυσκολεύεται ακόμη αρκετά με τις ποσότητες των κλασμάτων και πως μπορεί να τα συγκρίνει με τους δεκαδικούς. Η Μ6 στο δεύτερο ερωτηματολόγιο σταμάτησε να θεωρεί ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα. Στην διάταξη ρητών έχει βελτιώσει και εκεί την κατανόηση της και στην πυκνότητα ρητών η γνώση της παραμένει ελλιπής δεδομένου ότι δεν συμπληρώνει σωστά

κανένα μη συμβατό έργο. Για την Μ6 μετά την ανάγνωση της ιστορίας δίνεται ο χαρακτηρισμός: μέτρια επίδοση 43% (ΜΕ).

Όσον αφορά την στάση της Μ6 απέναντι στους δεκαδικούς αριθμούς, από τον διάλογο που παρουσιάστηκε στην δεύτερη απομαγνητοφώνηση, έγινε αισθητά θετικότερη αφού η Μ6 ισχυρίζεται ότι μπόρεσε να καταλάβει καλύτερα που βρίσκεται κάθε δεκαδικός και γιατί είναι μεγαλύτερος από κάποιον άλλο. Επίσης η Μ6 θα χρησιμοποιούσε την ιστορία ως εργαλείο για την κατανόηση στα μαθηματικά: «*Βασικά όπως το κάνατε εσείς, που μας βάλατε στην αρχή ένα τέτοιο (ερωτηματολόγιο), και μετά που το είχαμε διαβάσει άλλο ένα (ερωτηματολόγιο)… και μετά αν δεν βοηθούσε να βρεις έναν άλλο τρόπο…*» για να καταλάβει και άλλες μαθηματικές έννοιες που δεν έχει καταλάβει: «*Ναι γιατί με αυτά (άλλες ενότητες στα μαθηματικά) δεν είμαι τόσο καλή…(ενώ με τους δεκαδικούς είναι πλέον καλή)*».

5.7 Συνολικά ποσοστά και χαρακτηριστικά απαντήσεων μαθητών

Στον Πίνακα 13, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα ποσοστά των σωστών, των λανθασμένων και των χωρίς απάντηση, απαντήσεων ανά ερώτηση στο ερωτηματολόγιο ΑΠ (βλ. Πίνακας 13 (πάνω)) και στο ερωτηματολόγιο ΑΜ (βλ. Πίνακα 13 (κάτω)).

Συνολικά στο ερωτηματολόγιο ΑΜ το ποσοστό σωστών απαντήσεων είναι 55% σε αντίθεση με το ποσοστό του ερωτηματολογίου ΑΠ πριν την ανάγνωση της ιστορίας που είναι 52%. Μετά την ιστορία υπάρχει μία αύξηση της τάξεως του 3%. Στις ερωτήσεις που αφορούν την διάταξη δεκαδικών ΑΜ.1 και ΑΜ.2 μετά την ανάγνωση της ιστορίας έχουμε σωστές απαντήσεις σε ποσοστό 73% σε αντίθεση με το ερωτηματολόγιο ΑΠ (ΑΠ.1 και ΑΠ.2) πριν την ανάγνωση της ιστορίας που εμφανίστηκε ποσοστό σωστών απαντήσεων 80%. Εδώ παρατηρείται πτώση της επίδοσης των μαθητών μετά την ανάγνωση της ιστορίας. Το αποτέλεσμα αυτό επηρεάζεται από τις απαντήσεις των μαθητών Μ4, Μ5 και Μ6 οι οποίοι δεν διάβασαν ολόκληρη την ιστορία. Αν κοιτάξουμε το ποσοστό σωστών απαντήσεων των μαθητών Μ1, Μ2 και Μ3 στις ερωτήσεις αυτές αγγίζει το 93% μετά την ιστορία και 80% πριν την ιστορία. Στις ερωτήσεις που αφορούν την διάταξη κλασμάτων, ΑΠ.3 και ΑΠ.4 πριν την ιστορία, εμφανίζεται ποσοστό σωστών απαντήσεων 69% και μετά την ιστορία στις ερωτήσεις ΑΜ.3 και ΑΜ.4 εμφανίζεται ποσοστό σωστών απαντήσεων της τάξης του 95%.

Στην ερώτηση που αφορά την διάταξη ρητών, ερώτηση ΑΠ.5 (Διατάξτε τους παρακάτω αριθμούς: $1/5 < 0,316 < 4/10 < 0,5 < 1 < 7/4 < 2,301 < 2,32 < 10/3 < 4$) απάντησε σωστά μόνο ένας μαθητής (ποσοστό επιτυχίας 16%) ενώ στην ΑΜ.5 (Διατάξτε τους παρακάτω αριθμούς: $1/6 < 3/10 < 0,316 < 0,6 < 1 < 1,301 < 1,32 < 9/4 < 10/3 < 6$), δεν απάντησε κανείς μαθητής σωστά (ποσοστό επιτυχίας 0%). Στις απαντήσεις των μαθητών, στην ερώτηση ΑΠ.5 (πριν την ιστορία), εμφανίστηκαν περισσότερες παρανοήσεις από τις

απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση μετά την ανάγνωση της ιστορίας (ΑΜ.5), παρόλα αυτά, σωστά δεν συμπληρώθηκε από κανέναν/καμία μαθητή/τρια.

Όσον αφορά τις ερωτήσεις που εξέταζαν την πυκνότητα, στην ΑΠ.6 (πριν την ιστορία) εμφανίστηκε το ίδιο ποσοστό σωστών απαντήσεων 47% όπως και στην ερώτηση ΑΜ.6 (μετά την ιστορία), ενώ στις δύο ερωτήσεις ΑΜ.7 και ΑΠ.7 δεν δόθηκε καμία σωστή απάντηση.

Απαντήσεις	***Ερώτηση ΑΠ.1***	***Ερώτηση ΑΠ.2***	***Ερώτηση ΑΠ.3***	***Ερώτηση ΑΠ.4***	***Ερώτηση ΑΠ.5***	***Ερώτηση ΑΠ.6***	***Ερώτηση ΑΠ.7***	***Σύνολο***
Σωστές	77%	83%	72%	67%	17%	47%	0%	**52%**
Λάθος	23%	17%	25%	33%	83%	50%	100%	**47%**
Καμία απάντηση	0%	0%	2%	0%	0%	3%	0%	**1%**
Απαντήσεις	***Ερώτηση ΑΜ.1***	***Ερώτηση ΑΜ.2***	***Ερώτηση ΑΜ.3***	***Ερώτηση ΑΜ.4***	***Ερώτηση ΑΜ.5***	***Ερώτηση ΑΜ.6***	***Ερώτηση ΑΜ.7***	***Σύνολο***
Σωστές	80%	67%	91%	100%	0%	47%	0%	**55%**
Λάθος	20%	33%	9%	0%	100%	47%	100%	**44%**
Καμία απάντηση	0%	0%	0%	0%	0%	6%	0%	**1%**

Πίνακας 13: Συγκεντρωτικά ποσοστά απαντήσεων ανά ερώτηση όλων των μαθητών/τριών στα Ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ.

Οι μαθητές χωρίζονται σε δύο ομάδες, σε αυτούς/ες που διάβασαν ολόκληρη την ιστορία (Μαθητές Μ1, Μ2 και Μ3) και σε αυτούς/ες που δεν διάβασαν όλη την ιστορία (Μαθητές Μ4, Μ5 και Μ6).

Για τους μαθητές Μ1, Μ2 και Μ3 που διάβασαν όλη την ιστορία μπορούν να βγουν τα συμπεράσματα:

Γνωστικά:

- Ο Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση 33% (ΜΕ) και μετά την ανάγνωση της ιστορίας υψηλή επίδοση 63% (ΥΕ). Ο Μ1 φάνηκε να ξεπερνά τις περισσότερες παρανοήσεις, όπως: α) το μηδέν στο τέλος του δεκαδικούς αλλάζει το μέγεθος του αριθμού (Παρανόηση ΠΔ2), β) τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία συνεπάγονται μεγαλύτερο δεκαδικό αριθμό (Παρανόηση ΠΔ1), γ) η

μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα (Παρανόηση ΠΚ3) και δ) ότι τα μεγαλύτερα ψηφία σε ένα κλάσμα μεγαλώνουν το κλάσμα (Παρανόηση ΠΚ1).

- Η Μ2 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε υψηλή επίδοση 63% (ΥΕ) όπως και μετά την ανάγνωση της ιστορίας, 62% (ΥΕ). Η Μ2 φαίνεται να ξεπέρασε τις παρανοήσεις: α) ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί (Παρανόηση ΠΡ1) και β) ότι μπορώ να κατασκευάσω ένα ισοδύναμο κλάσμα προσθέτοντας ή αφαιρώντας από τον παρονομαστή και αριθμητή τον ίδιο αριθμό (Παρανόηση ΠΚ2).
- Ο Μ3 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε άριστη επίδοση 81,00% (ΑΕ) και μετά την ανάγνωση της ιστορίας είχε υψηλή επίδοση 67% (ΥΕ). Ο Μ3 δήλωσε ότι κατάλαβε πως να μετατρέπει κλάσματα σε δεκαδικούς και αντίστροφα, γνώση που δεν έχει διδαχθεί ακόμη στο σχολείο.

Στάσεις:

- Ο Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας αντιμετώπιζε με αρνητική στάση τους αριθμούς και τα μαθηματικά γενικότερα ενώ μετά την ανάγνωση της ιστορίας η στάση του έγινε πιο θετική, και δήλωσε ότι: *«οι αριθμοί έγιναν πιο ζωντανοί, οι δεκαδικοί, οι φυσικοί,…, και είχε πλάκα»*.
- Η Μ2 και πριν και μετά την ιστορία είχε θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και μετά την ιστορία δήλωσε πως της «*…φάνηκε πάρα πολύ ωραία, …. ο τρόπος που έδειχνε όλη την θεωρία, των μαθηματικών που έχουμε κάνει από την αρχή της 6ης μέχρι τώρα, με ένα πάρα πολύ ωραίο και διασκεδαστικό τρόπο»*.
- Η στάση του Μ3 ήταν θετική και πριν και μετά την ιστορία για τα μαθηματικά. Μετά την ιστορία δήλωσε πως η ιστορία του φάνηκε *«Ωραία γραμμένη, με ωραία πλοκή»* και του άρεσε ο πρωταγωνιστής που «*ήταν σχεδόν έτοιμος για τα πάντα*» αλλά «*ζορίζεται στα μαθηματικά*». Πριν την ανάγνωση της ιστορίας ο Μ3 δήλωσε πως δεν είχε καμία απορία. Μετά από την ιστορία ο Μ3 ανέφερε κάποιες απορίες του με ενδιαφέρον για να τις κατανοήσει. Εδώ φαίνεται πως η ιστορία του ελάττωσε το φόβο να ρωτήσει κάτι που δεν καταλάβαινε.

Ενώ για αυτούς/ες που δεν διάβασαν ολόκληρη την ιστορία μπορούν να βγουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

Γνωστικά:

- Η Μ4 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση 57% (ΜΕ) και μετά την ανάγνωση είχε μέτρια επίδοση 55% (ΜΕ). Η Μ4 ξεπέρασε τις παρανοήσεις ότι α) τα μεγαλύτερα ψηφία συνεπάγονται μεγαλύτερο κλάσμα (Παρανόηση ΠΚ1) και β) ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί ισούνται με την μονάδα στο σύνολο των κλασμάτων.
- Ο Μ5 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση 36% (ΜΕ) και μετά ξανά μέτρια επίδοση 40% (ΜΕ) αλλά με υψηλότερα ποσοστά. Ο Μ5 φαίνεται πως ξεπέρασε τις παρανοήσεις ότι α) το μηδέν αλλάζει το μέγεθος του δεκαδικού αριθμού (Παρανόηση ΠΔ2), β) τα μεγαλύτερα ψηφία συνεπάγονται μεγαλύτερο κλάσμα (Παρανόηση ΠΚ1) και γ) οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί (Παρανόηση ΠΡ1).
- Η Μ6 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε χαμηλή επίδοση 26% (ΧΕ) και μετά την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση 43% (ΜΕ). Η Μ6 ξεπέρασε τις παρανοήσεις ότι α) η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα (Παρανόηση ΠΚ3) και β) οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί (Παρανόηση ΠΡ1).

Στάσεις:

- Η στάση της Μ4 έγινε θετικότερη για τους δεκαδικούς και δήλωσε μετά την ανάγνωση της ιστορίας ότι της άρεσε στην ιστορία που ο πρωταγωνιστής *«μάθαινε καινούργια πράγματα»*.
- Η στάση του Μ5 παρέμεινε ουδέτερη απέναντι στην διάταξη «*Ε εμένα δεν ξέρω αν με βοήθησε πολύ*» και έγινε λίγο πιο θετική για μαθηματικά γενικότερα «*Μου φάνηκε αρκετά ενδιαφέρον, μου άρεσε έτσι που το γράψατε που…οι αριθμοί κινούνται και μιλάνε…*».
- Η στάση της Μ6 από αρνητική έγινε θετική για τους δεκαδικούς αριθμούς και δήλωσε ότι την παρακίνησε να προσπαθήσει να καταλάβει. Χαρακτηριστικά ανέφερε μόνη της ένα σημείο της ιστορίας που ένας χαρακτήρας βρίσκει έναν εύκολο τρόπο να διατάξει τους δεκαδικούς αριθμούς, τονίζοντας ότι αν και δεν κατάλαβε η ίδια τον τρόπο, της άρεσε πολύ το σημείο εκείνο. Ο χαρακτήρας που της άρεσε πιο πολύ ήταν ο πρωταγωνιστής γιατί «*ήθελε να κάνει πράγματα*».

6 Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκε το αν η μαθηματική λογοτεχνία μπορεί να καλλιεργήσει την αίσθηση του ρητού αριθμού και πιο συγκεκριμένα αν ο σχεδιασμός μιας μαθηματικής ιστορίας μπορεί να αντιμετωπίσει γνωστές παρανοήσεις των μαθητών αλλά και να βελτιώσει την στάση των μαθητών αυτών στους ρητούς αριθμούς.

Η σχέση λογοτεχνίας και θετικών επιστήμων έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές ανά τα χρόνια και έχουν παρουσιαστεί αρκετές μελέτες που προσπαθούν να αναγνωρίσουν σταθερά χαρακτηριστικά στην σχέση αλλά και στην διαφορά των δύο (Cartwright, 2007). Εξετάζοντας ιστορικά την σχέση των δύο έγινε φανερό ότι ο διαχωρισμός θετικών επιστημών και λογοτεχνίας έγινε σχετικά πρόσφατα, ξεκίνησε τον 17ο αιώνα με την διεκδίκηση της επιστημολογικής ανωτερότητα των θετικών επιστημόνων και κορυφώθηκε τον 19ο αιώνα με την ρομαντική κριτική στον ορθολογισμό του διαφωτισμού (Cartwright, 2007). Αν και υπήρχαν πάντα διαφορές στον τρόπο σύνταξης ενός κειμένου, ο Πλάτωνας χρησιμοποιούσε το διαλογικό στυλ, που σύμφωνα με τον Bakhtin, (1981), αποτελεί χαρακτηριστικό του λογοτεχνικού λόγου ενώ ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε το μονολογικό στυλ (Heath, 1956), που αποτελεί τον σημερινό τρόπο γραφής των επιστημονικών κειμένων, οι διαφορές αυτές δεν ήταν αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέχρι και τον μεσαίωνα, εφόσον συγγραφείς της εποχής όπως ο Τζόφρι Σώσερ και ο Δάντης Αλιγκέρι χρησιμοποιούσαν με άνεση επιστημονικούς όρους σε λογοτεχνικά κείμενα (Crumey, 2009). Οι διαφορές μεταξύ του επιστημονικού και του λογοτεχνικού λόγου υπάρχουν και αναγνωρίζονται από όλες τις θεωρίες (Cartwright, 2007), όμως όπως στηρίζει η Naumann, (2005), ποτέ δεν ήταν στόχος της λογοτεχνίας να ανήκει στο επιστημονικό είδος και να διαψεύσει την επιστήμη και τις επιστημονικές ιδέες. Αυτό που η λογοτεχνία μπορεί έχει ως στόχο είναι να αποτελέσει ένα μέσο για αναστοχασμό επάνω στις επιστήμες (Naumann, 2005). Η λογοτεχνία μπορεί να περιλαμβάνει ένα επίπεδο αναστοχασμού στην αναπαράσταση των επιστημονικών ιδεών και υπό αυτήν την έννοια μπορεί να “διεξάγει” έρευνα για την επιστήμη στο δικό της μέσο καλλιτεχνικής αναπαράστασης (Naumann, 2005).

Μέσα από το πρίσμα της Naumann, (2005), οι μαθηματικές ιστορίες ως κομμάτι της μαθηματικής λογοτεχνίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο για την αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών, αναγνωρίζοντας ως βασικό χαρακτηριστικό της χρήσης αυτής ότι μία μαθηματική ιστορία δεν μπορεί να αντικαταστήσει το σχολικό μαθηματικό εγχειρίδιό ούτε να το διαψεύσει αλλά μόνο να το συμπληρώσει και να το επεκτείνει.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έδειξαν ότι πράγματι οι μαθηματικές ιστορίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υποστηρίξουν και να επεκτείνουν την διδασκαλία ενός

γνωστικού αντικειμένου και συγκεκριμένα ότι, μια μαθηματική ιστορία, που σχεδιάστηκε για να διαπραγματευτεί το γνωστικό αντικείμενο των ρητών αριθμών μπορεί να βοηθήσει στην αντιμετώπιση των γνωστικών παρανοήσεων που εγείρονται στους ρητούς αριθμούς. Μέσα από τον φανταστικό κόσμο της ιστορίας οι ρητοί αριθμοί απέκτησαν "εικόνα" και "νόημα" και οι ιδιότητες της διάταξης των ρητών, ως νόμοι του κόσμου της ιστορίας, ώθησαν τον πρωταγωνιστή μαζί με τους αναγνώστες να τις "σεβαστούν" και να τις κατανοήσουν. Η νοηματοδότηση αυτή, είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό που πρέπει να διαθέτει ένα περιβάλλον μάθησης το οποίο θα παρακινήσει τους μαθητές να διαπραγματευτούν τις έννοιες της διάταξης των ρητών εκτός των στενών διδακτικών πλαισίων του σχολείου (Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou, & Papademetriou, 2001).

Η ιστορία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία ονομάζεται «Ταξίδι προς το μηδέν» και γράφτηκε από τον ερευνητή. Η ιστορία αυτή δόθηκε σε έξι μαθητές/τριες της 6^{ης} τάξης του Δημοτικού σχολείου με σκοπό να εξεταστούν οι παρανοήσεις και οι στάσεις των μαθητών στους ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας ως ερευνητικά εργαλεία γνωστικά ερωτηματολόγια και ατομικές ημι-δομημένες συνεντεύξεις σε δύο χρόνους (πριν και μετά την ανάγνωση της ιστορίας). Τα αποτελέσματα της εργασίας υποστήριξαν σε κάποιο βαθμό τις υποθέσεις και πιο συγκεκριμένα ανά ερευνητικό ερώτημα.

Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο γνωστικό ερωτηματολόγιο, μετά την ανάγνωση της ιστορίας, ήταν λίγο μεγαλύτερο από το ποσοστό των σωστών απαντήσεων του πρώτου γνωστικού ερωτηματολογίου, πριν την ανάγνωση της ιστορίας. Η διαφορά αυτή στα ποσοστά των σωστών απαντήσεων μεταξύ των δύο ερωτηματολογίων δεν ήταν αρκετά μεγάλη για να βγουν ασφαλή συμπεράσματα και το δείγμα ήταν σχετικά μικρό για να δοθεί ιδιαίτερη βάση στις τιμές των ποσοστών αυτών. Αυτό που απασχόλησε περισσότερο την έρευνα, πέρα από τα ποσοστά επιτυχίας, ήταν η αντιμετώπιση συγκεκριμένων παρανοήσεων που οφείλονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών, που εμφανίστηκαν στα μη-Συμβατά έργα των γνωστικών ερωτηματολογίων.

Τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών έδειξαν ότι η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν» κατάφερε να αντιμετωπίσει παρανοήσεις των μαθητών που επηρεάζουν την διάταξη στους ρητούς αριθμούς και οφείλονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Η μόνη παρανόηση που δεν διορθώθηκε ριζικά από κανέναν/καμία μαθητή/τρια ήταν η παρανόηση της διακριτότητας των ρητών αριθμών. Μόνο ένας μαθητής φάνηκε ότι είχε κατανοήσει ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν και άλλοι, όχι άπειροι αλλά περισσότεροι του ενός ρητοί, αλλά αυτή του η γνώση ήταν προγενέστερη της ιστορίας και παρέμεινε και μετά την ανάγνωση της. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με πολλές έρευνες, που αναφέρουν ότι, τις μεγαλύτερες δυσκολίες τις αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μη-Συμβατά ερωτήματα που αφορούν την πυκνότητα των ρητών (Christou, 2015 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010

; Van Hoof, Janssen, Verschaffel, & Dooren, 2014). Η μη-αντιμετώπιση της συγκεκριμένης παρανόησης ίσως οφείλεται στον σχεδιασμό της ιστορίας. Σε κανένα κεφάλαιο στην ιστορία δεν αναφέρεται ρητά η πυκνότητα των ρητών αλλά υποννοείται από τον σχεδιασμό του κόσμου της ιστορίας. Οπότε μία βελτίωση της ιστορίας θα ήταν να βρεθεί ένας τρόπος να αναφερθεί ρητά η πυκνότητα, στοιχείο που ίσως βοηθήσει στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων αυτών.

Πριν την ανάγνωση της ιστορίας η πλειοψηφία των μαθητών είχαν αρνητικές στάσεις απέναντι στους ρητούς αριθμούς. Ο αρνητισμός αυτός προέρχονταν από ένα γενικό φόβο στα μαθηματικά: «*Σκέφτομαι….Εεεε προσπαθώ να υπολογίσω πόσο μεγάλη θα είναι η ώρα… (του μαθήματος)*» και «*σκέφτομαι, πότε θα τελειώσει (εννοεί το μάθημα)*», είτε από δυσκολίες που αντιμετώπιζαν στους δεκαδικούς ή στα κλάσματα: «*Όταν αρχίσουν να μπαίνουν περισσότερα δεκαδικά με μπερδεύει*», «*Εεεε, θέλω να καταλάβω καλύτερα ποιο είναι μεγαλύτερο όταν είναι 1,313 ή 1,31..*» και «*αυτά είναι αρκετά δύσκολα (για τα κλάσματα)*».

Αυτή η αρνητική στάση των μαθητών φάνηκε να ξεπερνιέται μετά την ανάγνωση της ιστορίας και ο αρνητισμός απέναντι στα μαθηματικά αντικαταστάθηκε από σχετικό ενθουσιασμό: *«οι αριθμοί έγιναν πιο ζωντανοί, οι δεκαδικοί, οι φυσικοί,…, και είχε πλάκα»* και από αυτοπεποίθηση: «*μου άρεσε ο πρωταγωνιστής γιατί ήθελε να κάνει πράγματα*» και «*γιατί μάθαινε πράγματα*». Οι μαθητές που είχαν θετική στάση και πριν την ανάγνωση της ιστορίας δήλωσαν ότι τους άρεσε «*η πλοκή της ιστορίας*», και θα ήθελαν να χρησιμοποιείται στην διδασκαλία γιατί πιστεύουν ότι μπορεί να βοηθήσει: «*εγώ ας πούμε σε κάθε νέο κεφάλαιο που ξεκινούσαμε στα μαθηματικά, θα διάβαζα και ένα ανάλογο κεφάλαιο από το βιβλίο, το οποίο θα μιλούσε κυρίως για αυτό το θέμα*». Ένα πολύ θετικό αποτέλεσμα της ιστορίας ήταν το ότι βοήθησε τον μαθητή με τις καλύτερες επιδόσεις στο ερωτηματολόγιο Α, να παραδεχτεί ότι έχει κάποιες απορίες ακόμη στα κλάσματα. Η παραδοχή αυτή που έγινε μόνο μετά την ανάγνωση της ιστορίας ήταν το πρώτο και πιο σημαντικό βήμα για την κατανόηση των αποριών του. Ένας από τους μαθητές θεώρησε ότι η ιστορία δεν τον βοήθησε πολύ και η στάση του παρέμεινε αρνητική για τους ρητούς. Ο μαθητής αυτός διάβασε ένα πολύ μικρό μέρος της ιστορίας και μάλιστα τις τελευταίες μέρες της διορίας που είχε δοθεί. Αν και δεν μπήκε βαθιά στην πλοκή της ιστορίας και δεν διαπραγματεύτηκε με όλες τις μαθηματικές έννοιες μέσα σε αυτήν, ανέφερε: «*Ε, εμένα δεν ξέρω αν με βοήθησε πολύ αλλά, πιστεύω ότι το σημείο…(αναφέρει ένα σημείο της ιστορίας στο οποίο αναφέρεται το πως βρίσκεις την θέση ενός δεκαδικού), μπορεί να βοηθήσει..*».

Στην μελέτη αυτή έγινε φανερό ότι η μαθηματική λογοτεχνία μπορεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Στον σχεδιασμό της ιστορίας «Ταξίδι προς το μηδέν», στόχος ήταν να δημιουργηθεί ένα περιβάλλον μάθησης μέσα στο οποίο οι μαθηματικές έννοιες θα βρίσκονται εκεί “φυσικά” όπως και οι χαρακτήρες μια ιστορίας. Σχεδιάστηκε με σκοπό οι παρανοήσεις των μαθητών να είναι απορίες των ηρώων της και τα λάθη των ηρώων να οδηγούν και αυτούς και τον αναγνώστη σε γνωστικές συγκρούσεις.

Όπως αναφέρει ο Hoogland, (1998), μια καλή ιστορία είναι επιτυχημένη όταν *"οι αναγνώστες της υιοθετήσουν τις αξίες της σαν αλήθεια και αλλάξουν την συμπεριφορά τους σύμφωνα με αυτήν"*, έτσι και στο «Ταξίδι προς το μηδέν» οι δεκαδικοί αριθμοί προσπαθούν να ξεφύγουν από την προκατάληψη του ότι οι φυσικοί είναι οι μόνοι αριθμοί και μαζί με αυτούς προσπαθούν και οι μαθητές/τριες να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις που ευθύνονται σε αυτήν την προκατάληψη των φυσικών.

Η μαθηματική λογοτεχνία μπορεί πραγματικά να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, ωστόσο η επιτυχία της εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον σχεδιασμό της, ώστε το γνωστικό αντικείμενο να συνδεθεί με την πλοκή της, και από την σωστή οργάνωση της γλώσσας που χρησιμοποιείται, δηλαδή την *λογοτεχνικότητα της λογοτεχνίας* (Eagleton, 1996). Αν οι δύο αυτοί στόχοι δεν επιτευχθούν τότε μια μαθηματική ιστορία μπορεί να γίνει αυτό που ο Levine χαρακτήρισε ως "*φτωχή μορφή πολιτιστικού λόγου"* (Levine, 1988).

Στην παρούσα μελέτη είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι το δείγμα ήταν αρκετά μικρό, δεδομένου ότι αποφασίστηκε να γίνει μία ποιοτική μελέτη ανά μαθητή, και ως συνέπεια τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων από έξι μαθητές δεν μπορούν να είναι αρκετά αξιόπιστα και γενικεύσιμα. Επίσης ο χρόνος που δόθηκε στους μαθητές/τριες για την ανάγνωση της ιστορίας ήταν ένας μήνας λόγω του σχεδιασμού της μελέτης, με αποτέλεσμα κάποιοι από τους μαθητές να μην ολοκληρώσουν την ανάγνωση όλης της ιστορίας. Ακόμη και από αυτούς που ισχυρίστηκαν ότι ολοκλήρωσαν την ανάγνωση της ιστορίας δεν υπάρχει αποδεδειγμένος τρόπος να ελεγχθεί ο ισχυρισμός τους αυτός. Ο διαφορετικός χρόνος που απαιτεί ο κάθε μαθητής για τη ανάγνωση μιας ιστορίας όπως και η διαφορετική προσοχή/συγκέντρωση του κάθε μαθητή κατά την ανάγνωση είναι δύο ευρύτερα προβλήματα της διδακτικής μεθόδου της λογοτεχνίας. Τέλος είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι μαθητές/τριες κατά την διάρκεια της ανάγνωσης της ιστορίας, διδάχθηκαν στις τάξεις τους το γνωστικό αντικείμενο των κλασμάτων. Αν και το χρονικό διάστημα που διδάχθηκαν τις έννοιες (20 ημέρες), είναι αρκετά μικρό για να θεωρηθεί ότι κατανόησαν πλήρως την έννοια του κλάσματος μέσω της διδασκαλίας, θα πρέπει να αναγνωριστεί ότι κάποιες παρανοήσεις στα κλάσματα ίσως και να διορθώθηκαν λόγω της σχολικής διδασκαλίας.

Μια μελέτη που θα είχε ενδιαφέρον, ως συνέχεια της παρούσας εργασίας, θα ήταν να διερευνηθεί το κατά πόσον τα διδακτικά αποτελέσματα μιας τέτοιας ιστορίας έχουν θετικά αποτελέσματα σε μεγαλύτερο εύρος (διαφορετικά σχολεία δημόσια και ιδιωτικά) και σε μεγαλύτερο πλήθος μαθητών (ποσοτική μελέτη). Επίσης θα μπορούσε να μελετηθεί περαιτέρω ο τρόπος σχεδιασμού μιας ιστορίας ώστε να μπορούν να ενσωματωθούν πολλά και διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα.

Οι μαθηματικές ιστορίες μπορούν να αποτελέσουν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον εκπαιδευτικό με την χρήση τους ως βοηθητικό διδακτικό εργαλείο στο μάθημα των μαθηματικών. Όπως ανέφερε και μία μαθήτρια στην συνέντευξη της, σε κάθε γνωστικό

αντικείμενο, εκτός από την διδασκαλία, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν συγκεκριμένα αποσπάσματα ιστοριών που διαπραγματεύονται τις σχετικές μαθηματικές έννοιες. Πέρα από την χρήση των μαθηματικών ιστοριών που υπάρχουν διαθέσιμες, οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να σχεδιάσουν και τις δικές τους ιστορίες οι οποίες θα περιλαμβάνουν το γνωστικό αντικείμενο που θέλουν να διδάξουν αλλά και θα λαμβάνουν υπόψιν και το κοινωνικό υπόβαθρο των μαθητών που θα την διαβάσουν.

Μια σημαντική παιδαγωγική εφαρμογή της μαθηματικής λογοτεχνίας θα μπορούσε να είναι η δημιουργία λεσχών ανάγνωσης στο σχολικό περιβάλλον [βλ. Θαλής και φίλοι (https://thalesandfriends.org/el/)], με θεματικές από το είδος της μαθηματικής λογοτεχνίας, στις οποίες θα διαβάζονται αποσπάσματα βιβλίων και θα γίνεται συζήτηση για τις μαθηματικές έννοιες που περιλαμβάνονται. Μια ακόμη παιδαγωγική εφαρμογή θα ήταν η χρήση της τεχνολογίας και των ψηφιακών περιβαλλόντων από τους εκπαιδευτικούς για την δημιουργία ψηφιακών ιστοριών (*digital narrative learning environments*), με την χρήση ήδη υπάρχοντος λογοτεχνικού υλικού είτε με την δημιουργία νέου. Όπως αναφέρει και η Ayllet, *(2006),* τα ψηφιακά περιβάλλοντα μπορούν να κάνουν τους μαθητές να εμπλακούν περισσότερο με τις μαθητικές έννοιες μέσω της συμμετοχής τους στην εξέλιξη μιας μαθηματικής ιστορίας (δια-δραστικές μαθηματικές ιστορίες).

Αντί επιλόγου

Η Επιπεδοχώρα (Flatland) αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα του είδους της μαθηματικής λογοτεχνίας και έχει χρησιμοποιηθεί διδακτικά και έχει μελετηθεί ερευνητικά περισσότερες φορές σε σχέση με κάθε άλλο βιβλίο που ανήκει στο είδος της μαθηματικής λογοτεχνίας. Ο σχεδιασμός του βιβλίου είναι υποδειγματικός ώστε από την μία να μην έχει μαθηματικά λάθη και αντιφάσεις και από την άλλη να αποτελεί λογοτεχνικά έναν κόσμο που μπορούν να βρουν νόημα οι αναγνώστες. Η δομική διαφορά της Επιπεδοχώρας σε σχέση με τα υπόλοιπα λογοτεχνικά βιβλία του είδους, είναι ότι η πλοκή της ιστορίας βασίζεται στις μαθηματικές έννοιες και στην κατανόηση τους και δεν τις συνοδεύει απλά. Τα κίνητρα του πρωταγωνιστή, οι επιθυμίες του και ο λόγος δράσης του, βασίζονται όλα στην μαθηματική κατανόηση και δεν είναι ανεξάρτητα από αυτήν. Ένας αναγνώστης που δεν κατανοεί τις μαθηματικές ιδέες της Επιπεδοχώρας δεν καταλαβαίνει ούτε "που βρίσκεται" ο πρωταγωνιστής ούτε "γιατί" συμπεριφέρεται με συγκεκριμένο τρόπο, και με άλλα λόγια δεν μπορεί να κατανοήσει καθόλου την πλοκή της ιστορίας.

Οι πιο πολλές ερευνητικές εργασίες που μελετούν την επίδραση της μαθηματικής λογοτεχνίας συνήθως χρησιμοποιούν ήδη-υπάρχουσες λογοτεχνικές ιστορίες, όπως αυτήν

της Επιπεδοχώρας. Αυτό γίνεται αρχικά γιατί η Επιπεδοχώρα καταφέρνει, όπως αναφέρθηκε, να συνδέσει την πλοκή με το μαθηματικό αντικείμενο αλλά και γιατί ο ερευνητής-εκπαιδευτικός δεν έχει στην διάθεση του πολλές μαθηματικές ιστορίες. Αυτό έχει ως συνέπεια να προσαρμόζεται συχνά με το γνωστικό αντικείμενο που μελετούν οι ήδη λιγοστές υπάρχουσες μαθηματικές ιστορίες και να μην ερευνά διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Εδώ εμφανίζεται το πλεονέκτημα της συγγραφής μιας νέας μαθηματικής ιστορίας.

Η συγγραφή δίνει την δυνατότητα στον συγγραφέα να περιλάβει το γνωστικό αντικείμενο της αρεσκείας του, μαζί με τις ιδιότητες και τα σημεία ενδιαφέροντος που θέλει αυτός/η να δώσει έμφαση. Επίσης στον σχεδιασμό μιας ιστορίας μπορεί να γίνει κατάλληλη χρήση λογοτεχνικού λόγου λαμβάνοντας υπόψιν το κοινωνικό υπόβαθρο της τάξης που θα δοθεί η ιστορία αλλά και της εποχής που ζουν τα παιδιά. Μέσα από τον σχεδιασμό μιας μαθηματικής ιστορίας, πέρα από τα διδακτικά οφέλη στους μαθητές ωφελείται και ο συγγραφέας, ο οποίος μπαίνει στην διαδικασία της αποδόμησης των μαθηματικών εννοιών και της προσπάθειας σύνδεσης τους με το λογοτεχνικό περιεχόμενο. Μία λογοτεχνική ιστορία για να είναι πετυχημένη, εκτός των άλλων, θα πρέπει να έχει χαρακτήρες που έχουν λόγο για τις πράξεις τους. Ο λόγος αυτός θα πρέπει να είναι εμφανής στους αναγνώστες της ιστορίας και κατανοητός. Υπό αυτήν την σκοπιά ο συγγραφέας θα πρέπει να μπει στην διαδικασία να δώσει λόγο και νόημα σε διαδικασίες όπως τα ομώνυμα κλάσματα ή την διάταξη· γιατί να θέλουμε δύο κλάσματα να είναι ομώνυμα· χρησιμεύει κάπου αυτό· γιατί μας αφορά εμάς· γιατί είναι σημαντικό. Αυτές είναι ερωτήσεις που κάθε εκπαιδευτικός έχει συναντήσει στην διδασκαλία του από μαθητές και είναι αυτές οι ίδιες ερωτήσεις που θα πρέπει να αντιμετωπίσει ως συγγραφέας μιας μαθηματικής ιστορίας, έτσι ώστε ο αναγνώστης να θέλει να διαβάσει την ιστορία του και μαζί να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες που αυτή περιλαμβάνει. Η διαδικασία της συγγραφής είναι χρονοβόρα και δύσκολη αλλά τα οφέλη της είναι μεγάλα για τον εκπαιδευτικό-συγγραφέα αλλά και για τον μαθητή-αναγνώστη.

7 Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση:

Abbott, E. A. (2006). Flatland: A romance of many dimensions. *OUP Oxford*.

Ayllet, R. (2006). And they both lived happily ever after. *Technology-mediated narrative enviroments for learning*, 5-25.

Bakhtin, M. M. (1981). The dialogic imagination, ed. by Michael Holquist, trans. by caryl Emerson and Michael Holquist. *Austin: University of Texas Press*, 263, 14.

Balakrishnan, C. (2008). Teaching secondary school mathematics through storytelling . *(Unpublished doctoral dissertation) Simon Fraser University*.

Beer, G. (1990). Translation or transformation? The relations of literature and science. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 44(1), 81-99.

Behr, M. W. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.

Bintz, W. P. (2002). Using literature to support mathematical thinking in middle school. *Middle School Journal*, 34(2), 25-32.

Cartwright, J. (2007). Science and Literature: Towards a conceptual framework. *Science & education*, 16(2), 115-139.

Casey, B., Erkut, S., Ceder, I., & Young, J. M. (2008). use of storytelling context to improve girls' and boys' geometry skills in Kindergarden. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 29(1), 29-48.

Casey, B., Kersh, J. E., & Young, J. M. (2004). Storytelling sagas: An effective medium for teaching early childhood mathematics. *Early Childhood research Quarterly*, 19(1), 167-172.

Christou, K. P. (2012). Helping students remedy the phenomenal sign bias: The case of a refutational lecture. In C. Prachalias (Ed.). *Proceedings of the 8th International Conference on Education*, 643-648.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, 47(5), 747-758.

Copple, C., & bredekamp, S. (2009). Developmentally appropriate practive in early childhood programs serving children from birth through age 8. *ERIC*.

Cramer, K. A., Post, T. R., & & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 111-144.

Critchley, S. (2001). Continental Philosophy: A Very Short Introduction. *Oxford University Press*.

Crumey, A. (2009). Mathematics and literature. *Mathknow*, 9-25.

Doorman, M. (2009). Primas wp3-Materials: Teaching and professional development materials for IBL.

Eagleton, T. (1996). Literary theory: An introduction. *University of Minnesota Press*.

Egan, K. (1997). The educated mind: How cognitive tools shape our understanding. *University of Chicago Press*.

Egan, K. (2005). An imaginative approach to teaching. *San Francisco*.

Galilei, G., & Finocchiaro, M. A. (1997). Galileo on the world systems: a new abridged translation and guide. *Univ of California Press*.

Gandz, S. (1936). Mene Mene Tekel Upharsin: a Chapter in Babylonian Mathematics. *Isis*, 26(1), 82-94.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, 170-218.

Griffiths, R., & Clyne, M. (1991). The Power of story: Its role in learning mathematics. *Mathematics Teaching*, 135(2), 42-45.

Harrison, E. (1987). Darkness at night: A riddle of the Universe. *Harvard University Press*.

Heath, T. L. (1956). The thirteen books of Euclid's Elements. *Courier Corporation*.

Holman, C. H., & Harmon, W. (1992). A handbook to literature.

Hoof, J. V., Janssen, R., Verschaffel, L., & Dooren, W. V. (2014). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: towards a comprehensive test instrument. *ZDM Mathematics Education*, 9.

Hoogland, C. (1998). Educational uses of story: Reclaiming story as art. *Canadian Journal of Education/Revue canadienne de l'education*, 79-95.

Husen, T. (1967). Vol. 1, New York: International study of achievement in mathematics. *Vol. 1, New York:*.

Irigaray, L. (1985). This sex which is not one. *Cornell University Press*.

Jowett, B. (1924). The Dialogues of Plato. *London, Oxford University Press*, Vol. I11.

Kant, I., & Meredith, J. C. (1931). The critique of judgement. *Alex Catalogue*.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representantions: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 191-204.
Killpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. *Washington, DC: National Academy Press*.
Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M. (1999). A developmental model of algebra solving: Trade-offs between grounded and abstract representations. *ERIC*.
Lamon, S. J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. *Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum*.
Levine, G. (1988). Darwin and the novelists: patterns of science in Victorian fiction. *University of Chicago Press*.
Li, Y., Chen, X., & & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinesem Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 41, 908-826.
Lim, S. Y., & Chapman, E. (2013). Development of a short form of the attitudes toward mathematics inventory. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 145-164.
Martinie, S. L., & Bay-Williams, J. M. (2003). Using literature to engage Students in proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(3), 142-148.
Mazur, B., & Pecic, P. (2005). On mathematics, imagination & the beauty of numbers. *Daedalus*, 134(2), 124-130.
Mazzocco, M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11, 681-691.
McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.
Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making Sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics*, (43), 313-335.
Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M.S. Donovan & J.D. Bransford (Eds.). *How students learn: Mathematics in the classroom, DC: National Academic Press*, 121-162.
Moss, J., & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147.
Murphy, S. J. (1999). Learning Math through Stories. *School Library Journal*, 45(3), 122-123.
Naumann, B. (2005). Introduction: Science and Literature. *Science in context*, 18(4), 511-523.
Ni, Y. &. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
Poe, E. A. (2002). Eureka. *Hesperus*.
Ptolemy, C. (1984). Ptolemy's Almagest, translated and annotated by GJ Toomer. *Springer-Verlag*.
Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, 8-27.
Roos, D. A. (1977). Matthew Arnold and Thomas Henry Huxley: Two Speeches at the Royal Academy. *1881 and 1883, Modern Philology*, 74(3), 316-324.
Russel, B. (1931). The scientific outlook.
Sarbin, T. R. (1986). Narrative psychology: The storied nature of human conduct. *Praeger Publishers/Greewood Publishing Group*.
Schiro, M. S. (2004). Oral storytelling and teaching mathematics: Pedagogical and multicultural perspectives. *SAGE publications*.
Schoenfeld, A. (1989). Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355.
Senechal, M. (2006). Mathematics and narrative at mykonos. *The Mathematical Intelligencer*, 28(2), 24-33.
Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., & al., e. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *23*, 691-697.
Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296.
Smith, C. L., Solomon, G. E., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, 101-140.
Snow, C. P. (2012). The two cultures. *Cambridge University Press*.
Sriraman, B. (2003). Mathematics and Literature: Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam? *Australian Mathematics Teacher, The,*, 59(4), 26.
Sriraman, B. (2004). Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to Advanced Mathematical Ideas and Philosophy. *Australian Mathematics Teacher*, 60(1), 17-23.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.
Stewart, I. e. (2010). Flatterland: Like Flatland, only more so.
Usnick, V., & McCarthy, J. (1998). Turning adolescents onto mathematics through literature. *Middle School Journal*, 29(4), 50-54.
Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions, Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and instruction*, 28(2), 181-209.
Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 265-284.
Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging Psychological and Educational Research on Rational Number Knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 84-106.
Vamvakoussi, X., Kargiotakis, G., Kollias, V., Mamalougos, N. G., & Vosniadou, S. (2003). Collaborative modelling of rational numbers. In B. Wasson, S. Ludvigsen, & U. Hoppe (Eds.). *Designing for change in networked learning environments: Proceedings of the International Conference on Computer Support for Collaborative Learning*, 103-107.
Vamvakoussi, X., Kargiotakis, G., Kollias, V., Mamalougos, N., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A CSCL environment to facilitate conceptual change. M. Gregoriadou, A. Raptis, S. Vosniadou, & C. Kynigos (Eds.). *Proceedings of the 4th Hellenic Conference with International Participation of the Hellenic Scientific Association of Information and Communications Technologies in Education*, 407-409.
Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 31, 344-355.
Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, 90(1), 39-56.
Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. In S. Vosniadou (Guest Ed.). *Conceptual Change [Special issue], Learning and Instruction*, 4, 45-69.
Vosniadou, S. (2001). On the nature of naı¨ve physics. *In M. Limon, & L. Mason (Eds.), Reframing the processes of conceptual change. Kluwer Academic Publishers.*
Vosniadou, S. (2003). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. *In G. M. Sinatra, & P. R. Pintrich(Eds.), Intentional conceptual change. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.*
Vosniadou, S. (2014). Examining cognitive development from a conceptual change point of view: The framework theory approach. *European Journal of Developmental Psychology*, 11, 645-661.
Vosniadou, S., C., I., Dimitrakopoulou, A., & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and instruction*, 11(4-5), 381-419.
Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.). *Handbook of reasearch on conceptual change*, 3-34.
Young, K., & Saver, J. L. (2001). The neurology of narrative. *SubStance*, 30(1), 72-84.
Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). teaching mathematics as storytelling. *Sense Publishers*.

Ελληνική:

Καγκουρά, Θ., Σπύρου, Π., Ιλιάδα, Η., & Μονογύιου, Α. (2008). Αλλαγή των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. *10ο ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ, ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΚΥΠΡΟΥ, "ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ"*, 195.
Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών. *Κείμενα παιδείας: συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών χ.τ.: Ατραπός.*

8 Παράρτημα Α

8.1 Ερωτηματολόγιο ΑΠ «γνωστικό περιεχόμενο»

Ερώτηση ΑΠ.1: Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:

I) 4,4 ή 4,5 II) 0,3 ή 0,30 III) 0,36 ή 0,5 IV) 2,621 ή 2,0687986
V) 0,25 ή 0,40

Ερώτηση ΑΠ.2: Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:

3,682 3,2 3,02

Μικρότερος		*Μεγαλύτερος*

Ερώτηση ΑΠ.3: Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:

I) $\frac{2}{5}$ ή $\frac{8}{7}$ II) $\frac{1}{14}$ ή $\frac{2}{16}$ III) $\frac{3}{2}$ ή $\frac{9}{8}$ IV) $\frac{14}{19}$ ή $\frac{13}{10}$ V) $\frac{3}{2}$ ή $\frac{8}{9}$
VI) $\frac{5}{10}$ ή $\frac{5}{4}$ VII) $\frac{7}{2}$ ή $\frac{7}{9}$ VIII) $\frac{2}{6}$ ή $\frac{3}{6}$ X) $\frac{5}{2}$ ή $\frac{7}{2}$

Ερώτηση ΑΠ.4: Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:

$\frac{5}{6}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{4}{3}$

Μικρότερος			*Μεγαλύτερος*

Ερώτηση ΑΠ.5: Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:

0,5 $\frac{7}{4}$ $\frac{1}{5}$ 2,32 $\frac{4}{10}$ $\frac{10}{3}$ 2,301 0,316 1 4

Μικρότερος									*Μεγαλύτερος*

Ερώτηση ΑΠ.6: Παρακάτω βλέπετε ζευγάρια αριθμών. Για κάθε ζευγάρι, γράψτε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο αυτούς αριθμούς. Αν πιστεύετε ότι δεν υπάρχει αριθμός, γράψτε: δεν υπάρχει αριθμός.

8,15 και 8,9 ……

3,49 και 3,50 ……

$\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$ ……

$\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{9}$ ……

2,5 και 2,7 ……

$\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ ……

Ερώτηση ΑΠ.7:

Πόσοι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ των 1,4 και 1,9;

……

Πόσοι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ των 1,42 και 1,43;

……

8.2 Ερωτηματολόγιο ΑΜ «γνωστικό περιεχόμενο»

Ερώτηση ΑΜ.1: Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:

I) 6,3 ή 6,4 II) 0,50 ή 0,5 III) 0,6 ή 0,47 IV) 3,421 ή 3,234567
V) 0,42 ή 0,37

Ερώτηση ΑΜ.2: Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:

5,02 5,2 5,350

Μικρότερος		*Μεγαλύτερος*

Ερώτηση ΑΜ.3: Κυκλώστε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αν θεωρείτε ότι είναι το ίδιο μεγάλοι, κυκλώστε και τους δύο:

I) $\frac{3}{4}$ ή $\frac{9}{6}$ II) $\frac{1}{13}$ ή $\frac{2}{15}$ III) $\frac{4}{3}$ ή $\frac{10}{9}$ IV) $\frac{15}{20}$ ή $\frac{14}{11}$ V) $\frac{4}{3}$ ή $\frac{9}{10}$
VI) $\frac{6}{11}$ ή $\frac{6}{5}$ VII) $\frac{8}{2}$ ή $\frac{8}{9}$ VIII) $\frac{2}{7}$ ή $\frac{3}{7}$ X) $\frac{6}{2}$ ή $\frac{8}{2}$

Ερώτηση ΑΜ.4: Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:

$\frac{6}{7}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{5}{5}$

Μικρότερος			*Μεγαλύτερος*

Ερώτηση ΑΜ.5: Βάλτε στην σειρά τους παρακάτω αριθμούς. Αν θεωρείτε ότι κάποιοι από αυτούς είναι το ίδιο μεγάλοι, βάλτε τους στο ίδιο κουτί:

0,6 0,316 1 6 $\frac{10}{3}$ $\frac{1}{6}$ 1,32 $\frac{3}{10}$ $\frac{9}{4}$ 1,301

Μικρότερος									*Μεγαλύτερος*

Ερώτηση ΑΜ.6: Παρακάτω βλέπετε ζευγάρια αριθμών. Για κάθε ζευγάρι, γράψτε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο αυτούς αριθμούς. Αν πιστεύετε ότι δεν υπάρχει αριθμός, γράψτε: δεν υπάρχει αριθμός.

I) 6,45 και 6,9

……

II) 1,29 και 1,30

……

III) $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$

……

IV) $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{7}$

……

V) 9,4 και 9,6

……

VI) $\frac{1}{5}$ και $\frac{3}{5}$

……

Ερώτηση ΑΜ.7:

I) Πόσοι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ των 2,1 και 2,9;

……

II) Πόσοι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ των 7,34 και 7,35;

……

8.3 Ερωτηματολόγιο ΒΠ «στάσεων»

Ερώτηση ΒΠ.1: Το κουδούνι χτυπά για μέσα και ξεκινάει το μάθημα. Μπαίνεις στην τάξη και κοιτάς το πρόγραμμα σου γιατί δεν θυμάσαι τι μάθημα έχετε στην ώρα που ξεκινά. Βλέπεις Μαθηματικά. Τι σκέφτεσαι;

Ερώτηση ΒΠ.2: Ξεκινάει το μάθημα των μαθηματικών και ο/η δάσκαλος/α σας λέει:

Α) Σήμερα θα ασχοληθούμε με τους φυσικούς αριθμούς και θα κάνουμε ασκήσεις.

Β) Σήμερα θα ασχοληθούμε με τους δεκαδικούς αριθμούς και θα κάνουμε ασκήσεις.

Γ) Σήμερα θα ασχοληθούμε με τα κλάσματα και θα κάνουμε ασκήσεις.

Τι προτιμάς και γιατί;

Ερώτηση ΒΠ.3: (γίνονται 2 ερωτήσεις από τις 3, ανάλογα με την ΒΠ.2)

Α) Γιατί δεν διάλεξες τους φυσικούς Αριθμούς;

Β) Γιατί δεν διάλεξες τους δεκαδικούς Αριθμούς;

Γ) Γιατί δεν διάλεξες τα κλάσματα;

Ερώτηση ΒΠ.4: Ποιοι αριθμοί νομίζεις ότι δυσκολεύουν τα περισσότερα παιδιά στην τάξη σου; Αν ένας/μία συμμαθήτρια σου ζητούσε βοήθεια γιατί δεν καταλαβαίνει τους αριθμούς αυτούς, τι συμβουλή θα του/της έδινες για να τον/την βοηθήσεις;

8.4 Ερωτηματολόγιο ΒΜ «στάσεων»

Ερώτηση ΒΜ.1: Πως σου φάνηκε η ιστορία που διάβασες;

Ερώτηση ΒΜ.2: Τι σου άρεσε πιο πολύ στην ιστορία;

Ερώτηση ΒΜ.3: Θυμάσαι μερικούς χαρακτήρες τις ιστορίας; Ποιοι σου άρεσαν περισσότερο; Γιατί;

Ερώτηση ΒΜ.4: Πιστεύεις ότι η ιστορία που διάβασες μπορεί να βοηθήσει ένα/μία συμμαθητή/τρια σου που δεν έχει καταλάβει τους δεκαδικούς; Πως;

Ερώτηση ΒΜ.5: Πιστεύεις ότι η ιστορία που διάβασες μπορεί να βοηθήσει ένα/μία συμμαθητή/τρια σου που δεν έχει καταλάβει τα κλάσματα; Πως;

Ερώτηση ΒΜ.6: Θα ήθελες να χρησιμοποιούνται τέτοιες ιστορίες στην διδασκαλία των μαθηματικών; Πως πιστεύεις ότι μπορεί να βοηθήσει αυτό;

9 Παράρτημα Β

9.1 Η ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν»

9.1.1 Το Διάστημα (3, 4]

Η μια από τις τέσσερις πλευρές του Σχήματος άνοιξε. Ο Δεκαδικός μπήκε μέσα βιαστικά κι άναψε το φως. Άλλη μια δύσκολη μέρα δουλειάς στο Διάστημά του είχε τελειώσει κι επιτέλους, μετά από πολλές ώρες, γυρνούσε στο Σχήμα του. Ξεφορτώθηκε την τσάντα με τα εργαλεία του, κρεμώντας την στη μοναδική καρέκλα που υπήρχε μπροστά από το τετράγωνο τραπέζι του. Το φαγητό που 'χε ξεμείνει εκεί από την προηγούμενη μέρα, είχε αρχίσει ήδη να μυρίζει άσχημα. Αλλά και στο πάτωμα έβλεπες παρατημένα σύνεργα της δουλειάς, μαζί μ' αποφάγια. Τα παράθυρα του Σχήματός του είχαν μείνει σφαλιστά, εδώ και μέρες, εξού κι η αφόρητη κλεισούρα.

Ο Δεκαδικός άνοιξε τα παράθυρα για να φρεσκάρει τον αέρα, τράβηξε όμως τις κουρτίνες για να μην βλέπει την πλευρά του διπλανού Σχήματος που του έκρυβε τη θέα και του προκαλούσε απίστευτη θλίψη... Κοιτάζοντας πάλι το τετράπλευρό του, που ήταν σκέτο αχούρι, διαπίστωσε ότι είχε να καθαρίσει τουλάχιστον ένα μήνα. Όχι πως του άρεσε να ζει μες τη βρώμα, ούτε κι ήθελε όμως να περνά πολλές ώρες μέσα στο Σχήμα του. Προτιμούσε να τριγυρνά έξω, στο Διάστημά του. Οπότε, η βρωμιά κι η ακαταστασία αποτελούσαν καλούς λόγους για να μην μένει καθόλου παραπάνω απ' όσο έπρεπε στο Σχήμα του. Γυρνούσε εκεί μόνο όταν ήταν τόσο κουρασμένος, που αναζητούσε απλώς ένα μέρος για να κοιμηθεί.

Πέταξε από πάνω του τα ρούχα της δουλειάς και μ' ένα άλμα ξάπλωσε ανάσκελα στο κρεβάτι του. «Ουφ!» αναστέναξε ανακουφισμένος, μόλις ένιωσε τη ζεστασιά του κρεβατιού του.

Το βλέμμα του πήγε κατευθείαν ψηλά, στις αφίσες που είχε κολλημένες στο ταβάνι του τετραπλεύρου του. *"Την υποδιαστολή σας και τα μάτια σας"* έγραφε η μία. Δίπλα της είχε κολλήσει αυτήν που έγραφε *"Δεκαδική εργασία και χαρά"*. Από κάτω τους, η συλλεκτική αφίσα που έγραφε με χρυσά γράμματα *"Φυσικός σημαίνει ευκολία και δύναμη"*.

Και βέβαια, η νεοαποκτηθείσα αφίσα του, η *"Μετατροπή: Μπορείς και συ να γίνεις ένα Κλάσμα!"*. Έδειχνε ένα Κλάσμα που σε κοιτούσε κατά-νούμερα με την γραμμή του Κλάσματός του, κι από πίσω του στεκόταν ο Φυσικός 4, που το κρατούσε από τα νούμερα χαμογελώντας. Αυτή η τελευταία αφίσα τον ανατρίχιαζε τόσο, που τον εκμηδένιζε. Κάθε φορά που την έβλεπε, ένιωθε την υποδιαστολή του ανάμεσα στο 3 και το 6 να τον σφίγγει στην μέση, τόσο πολύ, που δυσκολευόταν να πάρει ανάσα. Εννοείται ότι ευχαρίστως θα ξεφορτωνόταν όλες τις αφίσες, αν τα Κλάσματα δεν έκαναν συχνά επισκέψεις στα Σχήματα των Δεκαδικών για "τυπικούς ελέγχους", όπως έλεγαν, οπότε οι αφίσες έπρεπε να βρίσκονται εκεί για να αποδεικνύουν "καλή διαγωγή".

«Είμαι ο 3,618 (τρία κόμμα εξακόσια δεκαοκτώ) και πρέπει να υπακούω τους Φυσικούς», μουρμούρισε ειρωνικά, αλλάζοντας τη φωνή του σα να δίνει αναφορά σε Κλάσμα. Μετά έκλεισε τα μάτια του και γύρισε πλευρά, ώστε να μπορέσει να κοιμηθεί.

Στο Διάστημα που άνηκε ο 3,618 έμεναν κι άλλοι πολλοί Δεκαδικοί σαν κι αυτόν, όπως άλλωστε και σε κάθε Διάστημα του βασιλείου του Άρπλας. Οι Δεκαδικοί είχαν συγκεκριμένη δουλειά ανάλογα με τις

“δυνατότητες” τους, τις οποίες βέβαια τις καθόριζε μια ειδική επιτροπή από τα Κάστρα των Φυσικών.

Το Άρπλας ήταν ένα αχανές βασίλειο γεμάτο Κάστρα Φυσικών και Διαστήματα τα οποία εκτείνονταν όσο μπορούσε να δει το μάτι. Ανάμεσα σε δύο Κάστρα Φυσικών υπήρχε πάντα ένα Διάστημα στο οποίο έμεναν αμέτρητοι, άπειροι θα έλεγες, Δεκαδικοί.

Τα Κάστρα των Φυσικών ήταν τεράστια γεωμετρικά Σχήματα, σχεδιασμένα από τους ίδιους τους Φυσικούς. Σε κάθε Κάστρο υπέρτατη εξουσία ήταν ο αντίστοιχος Φυσικός και κάθε Κάστρο ήταν υπεύθυνο για το Διάστημα πριν από αυτό έως το Κάστρο του προηγούμενου Φυσικού! Για παράδειγμα, ο Φυσικός 3 εξουσίαζε από το Κάστρο 3 το Διάστημα (2, 3] χωρίς προφανώς το Φυσικό Κάστρο 2, το οποίο ανήκε στη δικαιοδοσία του Φυσικού 2. Ο Φυσικός 2 με τη σειρά του εξουσίαζε το Διάστημα (1, 2], και πάει λέγοντας... Στο Διάστημα του 3,618 ανήκαν όλοι οι Δεκαδικοί που βρίσκονταν ανάμεσα στα Κάστρα 3 και 4. Ο Φυσικός που εξουσίαζε το Διάστημα αυτό, ήταν ο Φυσικός 4. Κάθε Φυσικό Κάστρο δε, είχε υπό τον έλεγχο του ακριβώς τον ίδιο αριθμό από αμέτρητους Δεκαδικούς!

Οι δουλειές που ήταν υποχρεωμένοι να κάνουν οι Δεκαδικοί δεν ήταν πολλές, ήταν ωστόσο αρκετά απαιτητικές. Για την ακρίβεια, οι Δεκαδικοί μπορούσαν να επιλέξουν μόνο μεταξύ δύο επαγγελμάτων: πρακτικών ή θεωρητικών.

Οι “πρακτικοί Δεκαδικοί” ήταν υπεύθυνοι για τις πιο απλές πράξεις στο Διάστημά τους, ήτοι: λείανση Σχημάτων, λείανση και ευθυγράμμιση δρόμων, ακόνισμα γωνιών και κορυφών, καθαρισμός των ατελειών. Εξυπακούεται ότι κάθε πρακτικός Δεκαδικός είχε την ευθύνη της συντήρησης του Σχήματός του, στο Διάστημα που διέμενε.

Οι “Θεωρητικοί Δεκαδικοί” από την άλλη, δούλευαν στο αρμόδιο Φυσικό Κάστρο του Διαστήματος τους. Εκεί έκαναν όλες τις απαραίτητες πράξεις για τυχόν αλλαγές αριθμητικών τιμών, μετακινήσεις στο Διάστημα, διευθετήσεις νομικών ζητημάτων μεταξύ των δύο Φυσικών Κάστρων του Διαστήματος, αιτήσεις και σχεδιασμό νέων Σχημάτων, καθώς και γεωμετρικές κι αριθμητικές απογραφές. Όλα αυτά έπρεπε να τα παρουσιάζουν, σε μηνιαία βάση, στον Φυσικό του Κάστρου τους.

Ο 3,618 ήταν ένας πρακτικός Δεκαδικός και ασχολούνταν κυρίως με τη συντήρηση Σχημάτων στο Διάστημα (3, 4]. Από τη θέση 3,618 που έμενε, το τετράγωνο Κάστρο 4 ήταν αρκετά κοντά και φαινόταν ολοκάθαρα με τις τέσσερις γωνίες του και τις τέσσερις πλευρές του, ενώ λίγο πιο μακριά, κοιτώντας προς την αντίθετη πλευρά, διέκρινε ξεκάθαρα το τρίγωνο Κάστρο 3.

9.1.2 Το τετράπλευρο του 3,51

Εκείνο το πρωί ο 3,618 είχε ξυπνήσει πολύ νωρίς γιατί η Κυρία 3,45 -που έμενε λίγο πιο πριν από αυτόν- είχε κάτι κορυφές λίγο φαγωμένες στο πίσω μέρος του τετράπλευρου της, με αποτέλεσμα να εισχωρεί υγρασία και να της καταστρέφει την ταπετσαρία. Το Σχήμα της είχε μια πολύ όμορφη αυλή με πάμπολλα λουλούδια και τόσα αναρριχητικά φυτά που είχαν στην κυριολεξία εξαφανίσει τη μία πλευρά του. Παρόλο που στο Διάστημα (3, 4] με νόμο από τον ίδιο τον Φυσικό 4, απαγορευόταν να καλύπτεις το γεωμετρικό σου Σχήμα με οποιοδήποτε τρόπο. Κάθε γεωμετρικό Σχήμα έπρεπε να διακρίνεται ξεκάθαρα από όλες τις πλευρές του, αν κάποιος ήθελε να αναζητήσει την θέση του. Βέβαια, καθώς η Κυρία 3,45 ήταν πολύ ευγενική κι είχε πάντα τον τρόπο της, τούμπαρε τα Κλάσματα που περνούσαν για έλεγχο, πείθοντάς τα πως αναζητά την πρώτη ευκαιρία για να καθαρίσει τις πλευρές της.

Σχεδόν μια ώρα πάλευε ο 3,618 με τα εργαλεία του για να λειάνει την πλευρά του τετράπλευρου της που είχε φαγωθεί από την υγρασία και την πολυκαιρία.

«Κυρία μου, πρέπει να κλαδεύετε πιο συχνά τα αναρριχητικά σας γιατί δημιουργούν υγρασία στην πλευρά αυτή και τρώγονται οι κορυφές της».

«Είναι πολύ σοβαρό;» ρώτησε η Κυρία 3,45 με αγωνία.

«Δε μου φαίνεται να δημιουργεί ακόμη πρόβλημα στη στατικότητα του Σχήματος σας, αλλά σίγουρα, αν τη δει κάποιο Κλάσμα, θα έχετε μπελάδες, να το ξέρετε», είπε ο 3,618.

«Σ' ευχαριστώ πολύ, παιδί μου. Θες να σου φέρω κάτι να πιεις; Μια πορτοκαλάδα, λίγο νερό;»

«Όχι ευχαριστώ, έχω αρκετή δουλειά σήμερα και πρέπει τα ψηφία μου να είναι ελαφριά! Μόλις τελειώσω με τις κορυφές σας, έχω να επισκευάσω και την στέγη του 3,51 εδώ παραδίπλα. Όπως καταλαβαίνετε είναι επικίνδυνο», είπε και χαμογέλασε.

«Ο καλύτερος μάστορας της περιοχής είσαι», είπε επαινετικά η Κυρία 3,45. «Να ξέρεις, όποιος με ρωτήσει σε διαφημίζω!»

Ο 3,618 χαμογέλασε λίγο αμήχανα και χωρίς να πει τίποτα έσκυψε για να δει αν είχε πετύχει σωστά την ευθυγράμμιση.

«Πόσο μήκος την έκανες αυτήν την φορά;»

«Μμμ, πρέπει να είναι περίπου στα 3,2 μέτρα και απ' ό,τι βλέπω είναι ίση με τις άλλες τρεις πλευρές, με ακρίβεια 2^{ου} Δεκαδικού, οπότε είμαστε εντάξει».

Ο 3,618 είχε τρομερή γεωμετρική διαίσθηση, μπορούσε να “δει” ίσες πλευρές και γωνίες κατευθείαν και πάντα χωρίς μέτρηση κατασκεύαζε πλευρές και γωνίες σχεδόν ίσες με ακρίβεια έως και 3^{ου} Δεκαδικού! Αν και δεν ήταν πολύ καλός στις μαθηματικές πράξεις ούτε στους ακριβείς αναλυτικούς μαθηματικούς υπολογισμούς, η σχεδόν άριστη μαθηματική του διαίσθηση τον βοηθούσε να αντιλαμβάνεται και να λύνει πολύ δύσκολά μαθηματικά προβλήματα, που άλλοι Δεκαδικοί δεν έμπαιναν καν στον κόπο να προσπαθήσουν. Ούτε ο ίδιος μπορούσε να εξηγήσει πώς η μαθηματική λύση που έδινε ήταν συνήθως η σωστή. Βασικά, ήταν σαν κάτι από μέσα του να τον έκανε να νιώθει σίγουρος για την απάντηση του. Ο τρόπος που έλυνε τα προβλήματα ήταν, θα έλεγες, σκέτη μαγεία!

Λίγο παραδίπλα έστεκε το Σχήμα του 3,51. Η στέγη του ήταν σε άριστη κατάσταση, οι κορυφές του όσο μυτερές έπρεπε κι η ευθυγράμμισή του με ακρίβεια 4^{ου} Δεκαδικού, αλλά ήταν τόσο τελειομανής που ήθελε το τετράπλευρό του πάντα στην εντέλεια. Κάθε Κλάσμα που περνούσε από εκεί κοντά, του επαινούσε το Σχήμα κι ο 3,51 κορδωνόταν από περηφάνια.

Στο Διάστημα (3, 4] τα Σχήματα που έμεναν όλοι οι Δεκαδικοί ήταν τετράπλευρα. Τα Σχήματα κάθε Διαστήματος καθορίζονταν από τον Φυσικό που έλεγχε το κάθε Διάστημα. Για παράδειγμα, στο Διάστημα (3, 4] όπου εξουσίαζε ο Φυσικός 4, οι Δεκαδικοί και τα Κλάσματα έμεναν σε τετράπλευρα Σχήματα (4 γωνίες, όχι απαραίτητα ίσες), στο Διάστημα (4, 5], που εξουσίαζε ο Φυσικός 5, σε πεντάγωνα Σχήματα (5 γωνίες), στο Διάστημα (5, 6] που εξουσίαζε ο Φυσικός 6 σε εξάγωνα Σχήματα (6 γωνίες) και πάει λέγοντας… (και πάει λέγοντας γωνίες…).

Ο 3,618 ανέβηκε στη στέγη του 3,51 και με τα εργαλεία του μετρούσε και διόρθωνε ακόμη και τις παραμικρές ατέλειες. Από εκεί πάνω μπορούσε να δει καθαρά το Κάστρο 4 που φαινόταν στον ορίζοντα. Ήταν ένα τεράστιο τετράγωνο που οι κορυφές του έσκιζαν τον αέρα και οι πλευρές του ήταν πέρα για πέρα ίσες. Ακόμη και τα πολύ έμπειρα μάτια του 3,618 δεν μπορούσαν να δουν ατέλειες σ' αυτό το Σχήμα. Οι πλευρές του ήταν τόσο λείες που όταν το φως έπεφτε πάνω, καθρέφτιζαν όλο το Διάστημα (3, 4]. Ήταν μια πραγματικά εκπληκτική κατασκευή! Καθώς κατέβαινε από τη στέγη ο 3,618, αναλογιζόταν πόσο κόπο ήθελε να κατασκευαστεί ένα τέλειο Σχήμα, σαν αυτό που έλαμπε εκεί κοντά τους.

Ο 3,51 πέτυχε τον 3,618 να κοιτάζει απορροφημένος το Κάστρο 4. Τον πλησίασε, τον ακούμπησε στο 6 του και θαυμάζοντας κι ο ίδιος την πραγματικά εκπληκτική δημιουργία αναφώνησε:

«Ένα από τα θαύματα των Φυσικών, το τέλειο τετράγωνο!»

Ο 3,618 του απαντά με σοβαρό ύφος:

«Ναι, είναι θαυμάσιο έργο, πράγματι! Δεν μπορώ να φανταστώ τι μεγαλόπνοο σχεδιασμό και πόση δουλειά απαιτεί ένα τέτοιο τέλειο Σχήμα. Σίγουρα, τα πρώτα χρόνια του αρχικού σχεδιασμού, οι πρακτικοί Δεκαδικοί θα είχαν μεγάλο ταλέντο και πολύ κέφι για να κάνουν κάτι τόσο μαθηματικά σωστό».

Ο 3,51 ένιωσε κάποια ένταση στην ατμόσφαιρα. Δεν ήξερε πολλά για τον αρχικό σχεδιασμό, οπότε συμφώνησε:

«Ναι σίγουρα, οι Φυσικοί ξέρουν να βρίσκουν πάντα τους καλύτερους Δεκαδικούς για κάθε δουλειά!»

«Ναι, βέβαια, τα πάντα, ώστε να μην κάνουν καμιά δουλειά οι ίδιοι», είπε αγανακτισμένος ο 3,618.

«Δεν είναι κι εύκολη δουλειά το να διοικείς», είπε χαμογελαστός ο 3,51, προσπαθώντας να ελαφρύνει την κουβέντα.

«Ας μην το συζητήσουμε τώρα αυτό», είπε ο 3,618 νευριασμένα, «έχω δουλειά να κάνω».

«Καλά ντε, πώς κάνεις έτσι; Πάω να δω την απέναντι πλευρά, μήπως χρειάζεται λίγη ακόμη λείανση, και θα σου πω».

Ο 3,618 σταμάτησε να τρίβει, σηκώθηκε και σιωπηλός πήρε μια βαθιά ανάσα. Ήξερε ότι ο 3,51 ήταν λάτρης των Φυσικών και δεν είχε νόημα να τσακώνεται μαζί του, αλλά δεν μπορούσε να το χωνέψει. Πώς γίνεται ένας Δεκαδικός να θαυμάζει τους Φυσικούς λες κι είναι πια τόσο σπουδαίοι; «Κάποια στιγμή εμείς οι Δεκαδικοί πρέπει να συνειδητοποιήσουμε τη δύναμή μας και να πάρουμε αυτά που μας αξίζουν», διαπίστωνε, θαυμάζοντας πάλι τη μεγαλοπρέπεια του τετράγωνου Κάστρου 4.

«Δεκαδικέ, τι χαζεύεις εκεί;», ακούστηκε μια αυστηρή φωνή από μακριά.

Ο 3,618 γύρισε να δει από πού ερχόταν αυτή η φωνή. Ήταν ένα Κλάσμα!

Τα Κλάσματα ήταν αυτά που επέβαλαν τον Νόμο των Φυσικών στο βασίλειο του Άρπλας: κάθε Διάστημα, εκτός από άπειρους Δεκαδικούς, είχε και άπειρα Κλάσματα. Τα Κλάσματα ήταν κατ' ουσία Δεκαδικοί, οι οποίοι -μετά από ειδική εκπαίδευση στο αντίστοιχο Φυσικό Κάστρο του Διαστήματός τους- γίνονταν Κλάσματα μέσα από μια τελετή χρίσματος. Η τελετή αυτή είναι γνωστή και ως Μετατροπή και γινόταν παρουσία του Φυσικού του Κάστρου και ενός κληρικού. Η Μετατροπή θεωρούνταν ιερή και για το λόγο αυτό ελάχιστοι μόνο Θεωρητικοί Δεκαδικοί είχαν καταφέρει να τη δουν με τα ίδια τους τα νούμερα.

Ακόμη κι όσοι την είχαν δει όμως, φοβόντουσαν πάρα πολύ να μιλήσουν. Κυκλοφορούσαν διάφορες φήμες για το πώς ένας Δεκαδικός γίνεται Κλάσμα, αλλά κανείς Δεκαδικός δεν ήξερε πραγματικά τον ακριβή τρόπο. Τα Κλάσματα υπάγονταν στο εκάστοτε Διάστημα, όπως ακριβώς και οι Δεκαδικοί.

Ο 3,618 λοιπόν, γυρνώντας, αντικρίζει δύο νούμερα, ένα 7 πάνω σε ένα 2 και μία γραμμή ανάμεσά τους.

«Είναι ένα Κλάσμα, ο 7/2 (επτά δεύτερα)», διαπίστωσε, ξύνοντας την υποδιαστολή του με απορία, μιας κι ήταν η πρώτη φορά που έβλεπε το συγκεκριμένο Κλάσμα στη γειτονιά.

«Έχω την αίσθηση ότι γνωριζόμαστε από κάπου;» είπε στο Κλάσμα ο 3,618, όταν είχε πλησιάσει πλέον αρκετά κοντά.

Ο 3,51 πετάχτηκε ξαφνικά από την πάνω δεξιά κορυφή του τετράπλευρου: «Μα και βέβαια τον ξέρεις 3,618! Ο Κύριος Κλάσμα 7/2 είναι που πήρε πολύ πρόσφατα τη Μετατροπή του και είναι το νέο Κλάσμα της γειτονιάς μας και μέλος της προσωπικής φρουράς του Κάστρου 4».

«Φτάνει!» είπε ο 7/2, κι ο 3,51 ξεροκατάπιε.

«Μπορώ να συστηθώ και μόνος μου, δε νομίζεις Δεκαδικέ; Αν και μου αρέσει το Κύριος σαν προσφώνηση».

«Μα και βέβαια, με συγχωρείτε, Κύριε» είπε ο 3,51, χρησιμοποιώντας πληθυντικό.

«Εσύ, μικρέ Δεκαδικέ…»

«Ποιος, εγώ;» είπε ο 3,618.

«Ναι εσύ, τι κοιτάς και δε δουλεύεις; Ξέρεις ότι υπάρχει πολλή δουλειά σ' αυτή τη γειτονιά και δεν πρόκειται να γίνει μόνη της….»

«Ναι, μάλιστα» είπε προσεκτικά ο 3,618, μιας κι ο 7/2 είχε πλησιάσει πλέον πολύ κοντά και του έριχνε ένα ολόκληρο 7 στο μπόι!

«Εδώ, κοιτάζω το Κάστρο 4 και τις φοβερές αναλογίες του», είπε με το βλέμμα του ακόμη μαγνητισμένο ψηλά στο 7 του 7/2.

«Είναι ένα από τα φυσικά κατασκευάσματα. Εννοείται ότι θα ήταν τέλειες οι αναλογίες του!» είπε το Κλάσμα, σαν να το είχε σχεδιάσει μόνο του.

«Όντως εντυπωσιακό! Ίσως κάποτε, με πολλή δουλειά, να κατάφερνα και γω να φτιάξω ένα τέτοιο Σχήμα…» είπε ο 3,618 τεντώνοντας τα νούμερα του.

Ο 3,51 έντρομος κοίταξε τον 7/2, που άρχισε να γελάει τόσο δυνατά, ώστε κι οι τριγύρω Δεκαδικοί βγήκαν από τα τετράπλευρα τους για να δουν τι συνέβαινε:

«Χα χο χι, χα χου χα», κρατούσε τη γραμμή του Κλάσματός του, που τρανταζόταν απ' τα γέλια. Μετά, σταματώντας απότομα, στράφηκε με δολοφονικό βλέμμα στον 3,618:

«Αυτό που θα σου πω, να το ακούσεις καλά: Όλοι εσείς οι Δεκαδικοί είστε ικανοί μόνο για να εκτελείτε διαταγές, μόνο γι' αυτό, τίποτα άλλο! Είστε δειλοί κι ανάξιοι ακόμη και για να πιάνετε στο στόμα σας κάτι τόσο τέλειο, όπως ένα Φυσικό κατασκεύασμα. Να ξέρετε πάντα τη θέση σας! Και κομμένα τα χαζά όνειρα που δε βοήθησαν κανέναν, ποτέ και πουθενά. Οι Φυσικοί κυβερνούν κι οι Δεκαδικοί υπηρετούν και αυτό είναι Θεώρημα. Μάλλον, είναι κάτι παραπάνω από Θεώρημα, είναι Αξίωμα!»

Ο 3,618 κοιτούσε το Κλάσμα σοβαρός και δεν μιλούσε.

«Έχεις να πεις κάτι επ' αυτού, μικρέ;», ρώτησε το Κλάσμα διατηρώντας τον αυστηρό του τόνο, χαμηλώνοντας ωστόσο κάπως την ένταση της φωνής του. Οι γύρω Δεκαδικοί που είχαν βγει έξω, κοιτούσαν τη σκηνή χωρίς να μιλούν.

«Ναι!» κι ο τρόπος που κοιτούσε τον 7/2 δήλωνε σιγουριά, σα να μην έχει ακούσει τίποτα από αυτά

που είχε μόλις πει το Κλάσμα.

Ο 3,51 πετάχτηκε και μπαίνοντας μπροστά στον 3,618 είπε:

«Ας μην εκνευριζόμαστε τώρα, δεν υπάρχει λόγος. Όλοι ξέρουμε ότι αυτά που λέτε είναι σωστά Κύριε 7/2, κανείς δε διαφωνεί μαζί σας. Ο 3,618 είναι ένας τίμιος Δεκαδικός που κάνει σωστά τη δουλειά του και, σας διαβεβαιώ, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα εδώ!»

Ξαφνικά η σκηνή διακόπηκε από μια άλλη φωνή:

«Γεια χαρά σύντροφε, τι κάνεις;». Ήταν το Κλάσμα 11/3 που είχε ακούσει από μακριά φωνές και πλησίασε να ελέγξει την κατάσταση. Περπατούσε χαμογελαστό, με χαλαρό βηματισμό προς το μέρος του 7/2 και των δύο Δεκαδικών.

Ο 7/2 κατακεραύνωσε τον 11/3, φωνάζοντάς του:

«Ομωνύμως παρουσιάσου!»

Ο 11/3 γούρλωσε τα ψηφία του και πλησίασε αμέσως τον 7/2 χωρίς να βγάλει ήχο, μετά τεντώθηκε χτυπώντας το 3 του κάτω δυνατά. Ο 7/2 πλησίασε κι αυτός με τη σειρά του τον 11/3, χτύπησε κάτω το 2 του και στάθηκε ακίνητος. Τα δύο Κλάσματα ήταν σε απόσταση αναπνοής και στέκονταν τεντωμένα με τα νούμερα τους ευθυγραμμισμένα πλήρως. Μόλις η χορευτική αυτή τελετουργία έλαβε τέλος, ο 11/3 φώναξε με δυνατή φωνή, σαν ο 7/2 να βρισκόταν 2 θέσεις μακρύτερα και να μην μπορούσε να τον ακούσει:

«Αναφέρομαι από τη θέση 11/3 στη θέση 7/2».

«Τι ΕΚΠ έχεις να δηλώσεις;», φώναξε ο 7/2.

«Δηλώνω ΕΚΠ 6», του απάντησε.

«Ομωνύμως αναφέρσου!»

«Ομωνύμως αναφέρομαι ως 22/6 στη θέση 21/6 και συγκρίνομαι».

«Πολύ καλά!»

Ο 3,618 κοιτούσε με απορία τα δύο Κλάσματα να απευθύνονται το ένα στο άλλο και να αναφέρονται σε πράξεις που δεν κατανοούσε. Βάσει όσων μπορούσε να συμπεράνει από τον διάλογο αυτό, μιλούσαν για θέσεις Κλασμάτων. Μόνο που δεν μπορούσε να καταλάβει τι ρόλο έπαιζαν τα Κλάσματα 22/6 και 21/6 στη συνομιλία αυτή…

Ο 7/2 συνέχισε να μιλά στον 11/3 χαμηλώνοντας αισθητά την φωνή του: «Όταν συναντάς ένα άλλο Κλάσμα, πρέπει να παρουσιάζεσαι! Μην το ξεχνάς, είναι πολύ σημαντικό!».

«Ναι, με συγχωρείς, σύντροφε. Απλά ήμουν λίγο χαλαρός… Δε θα επαναληφθεί».

«Εμείς τα Κλάσματα πρέπει να είμαστε συνεπή και σωστά με τη θέση μας, αλλιώς οι Δεκαδικοί θα έχουν κάθε λόγο να αμφισβητούν το Νόμο της Διάταξης!»

«Ναι σύντροφε, έχεις απόλυτο δίκιο. Αν δεν σε πειράζει θα συνεχίσω την περιπολία μου στο Διάστημα, αφού έχεις τον απόλυτο έλεγχο της κατάστασης εδώ», είπε χαμογελώντας κακιασμένα στους δύο Δεκαδικούς.

«Βεβαίως, μπορείς να φύγεις. Πού είχαμε μείνει λοιπόν;» ρώτησε ο 7/2 με ειρωνικό ύφος τους δύο Δεκαδικούς.

Ο 3,618 δίχως ν' απαντήσει, παραμέρισε τον 3,51 και κοίταξε σοβαρά τον 7/2. Ο 3,51 δαγκώθηκε, έβλεπε πως η συνομιλία αυτή δεν θα εξελισσόταν σε κάτι καλό και δεν είχε καμία διάθεση να μπλέξει με Κλάσματα… Ο 3,618 επιβεβαιώνοντας τους φόβους τους 3,51 είπε με θράσος στον 7/2:

«Ο μόνος τρόπος να δεχτώ ότι οι Δεκαδικοί είναι κατώτεροι από τους Φυσικούς είναι να δω μια απόδειξη, μια μαθηματική απόδειξη! Αφού αυτό δεν το έχω δει ακόμη, μπορώ να σκέφτομαι ό,τι θέλω!»

«Ακούστε το καλά όλοι», είπε ο 3,618 φωνάζοντας όσο πιο δυνατά μπορούσε, «μπορώ και θα φτιάξω

το πιο τέλειο Σχήμα απ' όλα! Ένα Σχήμα τόσο τέλειο που θα ξεπερνά όλα τα Σχήματα των Φυσικών!»

Ο 7/2 αστραπιαία σήκωσε το 7 του και χτύπησε με μανία τον 3,618 και τον 3,51 που ήταν δίπλα του. Οι δυο Δεκαδικοί σωριάστηκαν στο έδαφος. Όλοι οι Δεκαδικοί τριγύρω, χωρίς να βγάζουν ήχο, παρακολουθούσαν τη σκηνή με τα ψηφία τους γουρλωμένα. Δεν μπορούσαν να πιστέψουν ότι ο 3,618 είχε ξεστομίσει τέτοιο πράγμα μπροστά σε ένα Κλάσμα…

Ο 7/2 κοίταζε τους δυο Δεκαδικούς που κείτονταν στο έδαφος και συνέχιζε νευριασμένος:

«Καταλαβαίνεις τη δύναμη που έχει ένα Κλάσμα, μικρέ; Καταλαβαίνεις; Μπορώ να σε χτυπήσω, μπορώ να σε σκοτώσω, μπορώ να κάνω ό,τι θέλω μαζί σου! Κι όχι μόνο εσένα, αλλά κι όποιον Δεκαδικό γουστάρω και κανείς δεν θα πει κουβέντα. Ούτε καν οι Δεκαδικοί που μας κοιτούν εδώ γύρω, και ξέρεις γιατί; Γιατί είμαι ένα Κλάσμα, κι αυτός είναι ένας Κανόνας, ένας απαράβατος Κανόνας. Παρατήρησε λίγο τους Δεκαδικούς που μας χαζεύουν: Όλοι τους δειλοί κι ανίσχυροι. Κι αυτό το ξέρουν πολύ καλά, γι' αυτό κοιτάζουν μόνο τη δουλειά τους. Οπότε, μικρούλη, κράτα τις μεγάλες ιδέες για τον εαυτό σου!»

Μετά, το Κλάσμα απομακρύνθηκε καμαρωτό, φωνάζοντας να τον ακούσουν όλοι:

«Από εδώ και στο εξής, όταν απευθύνεστε σ' ένα Κλάσμα, θα μιλάτε στον πληθυντικό. Μάθετε τη θέση σας, δεχτείτε τη μοίρα σας κι όλα θα γίνουν ευκολότερα. Στο βασίλειο του Άρπλας δεν υπάρχει χώρος για χαζά όνειρα! Με λένε Κύριο Κλάσμα 7/2, με κάπα κεφαλαίο!»

Ο 3,618 ήταν στο χώμα και κοιτούσε τον 7/2 να απομακρύνεται. Από το χτύπημα, πονούσαν όλα του τα ψηφία. «Αυτό το Κλάσμα είναι όντως πολύ δυνατό», σκέφτηκε. Μετά είδε τον 3,51 που ήταν κι εκείνος στο έδαφος, χωρίς να μπορεί να κουνήσει νούμερο.

«Έεε, 3,51 είσαι καλά;» ρώτησε ο 3,618. Ο 3,51 κούνησε λίγο το 3 του και μετά έμεινε και πάλι ακίνητος. Ο 3,618 σήκωσε το βλέμμα ψηλά στον ουρανό και κοίταξε το τετράγωνο Κάστρο 4 και μετά γύρισε από την άλλη πλευρά και κοίταξε το τρίγωνο Κάστρο 3.

«Αυτή είναι λοιπόν η πραγματικότητα;» αναρωτήθηκε, με την φωνή του 7/2, να αντηχεί, ακόμα στ' αυτιά του. Αμέσως έκλεισε τα μάτια του, εκεί, όπως ήταν πεσμένος, πάνω στον άξονα.

9.1.3 Ο Νόμος της Διάταξης

Βασική υποχρέωση κάθε Δεκαδικού στο βασίλειο του Άρπλας ήταν να προσέχει, έτσι ώστε να βρίσκει πάντα σωστά τη θέση του ανάμεσα στους υπόλοιπους Δεκαδικούς. Αυτό οριζόταν στον περίφημο νόμο της Διάταξης που θέσπισαν οι Φυσικοί αριθμοί τα πρώτα χρόνια της δημιουργίας των αριθμών.

Ο Νόμος αυτός, μεταξύ άλλων, όριζε ότι κατά τις βραδινές ώρες του βασιλείου οι Δεκαδικοί θα έπρεπε να βρίσκονται στα Σχήματα τους. Οι Φυσικοί έπρεπε, ανά πάσα στιγμή, να γνωρίζουν πού βρίσκεται κάθε Δεκαδικός υπήκοος τους, σε περίπτωση που χρειάζονταν τις υπηρεσίες του. Επίσης, κάθε Δεκαδικός, όσο μακριά κι αν δούλευε τη μέρα, έπρεπε προφανώς να γνωρίζει τη σωστή θέση του, ώστε να μπορεί να επιστρέψει το βράδυ.

Ο Νόμος της Διάταξης ίσχυε και για τα Κλάσματα, όσον αφορά τη σωστή τους θέση, αλλά, αντίθετα από τους Δεκαδικούς, τα Κλάσματα είχαν την δυνατότητα να κινούνται τη νύχτα στο Διάστημα, επιβλέποντας για Δεκαδικούς παραβάτες του νόμου.

Όπως όλοι οι Δεκαδικοί, έτσι κι ο Δεκαδικός 3,618 στο Διάστημα (3, 4], έπρεπε να γνωρίζει την ακριβή του θέση. Ότι δηλαδή βρισκόταν ανάμεσα στους Δεκαδικούς 3,6 και 3,7, ακριβέστερα, ανάμεσα στους Δεκαδικούς 3,61 και 3,62, και για να μην πολυλογούμε, επακριβώς στη θέση 3,618.

«Πόσο δύσκολο μπορεί να είναι να διατηρώ σωστά τη θέση μου;» σκέφτηκε ο 3,618, όταν διάβασε για πρώτη φορά τον Νόμο της Διάταξης.

Στη συνέχεια όμως, κατάλαβε ότι μόνο απλή υπόθεση δεν ήταν... Οι περισσότεροι Δεκαδικοί, για να γλιτώσουν από τον κόπο του να προσπαθούν συνέχεια να θυμούνται τη θέση τους, έμεναν όλη μέρα στο Σχήμα τους. Κανείς δεν ήθελε να ξεμείνει έξω κάποιο βράδυ "κατά λάθος", μ' αυτά τα Κλάσματα που περιπολούσαν!

Από την αρχή της ύπαρξής του, ο 3,618 δεν άντεχε ούτε καν στην ιδέα να μένει όλη τη μέρα στο τετράπλευρό του. Είχε βαλθεί να κινείται συνεχώς στο Διάστημα (3, 4] και να γνωρίζει νέους Δεκαδικούς. Άλλωστε, η δουλειά του, ως πρακτικός, τον βοηθούσε να ταξιδεύει συχνά για να επισκευάσει κάποιο γεωμετρικό Σχήμα. Το πρόβλημα όμως, ήταν ότι αυτή ακριβώς η συχνή μετακίνηση, του δημιουργούσε αρκετά ζητήματα με τη θέση του. Έτσι, προκειμένου να βρίσκει σωστά τη θέση του, έβαζε σημάδια στα διάφορα γεωμετρικά Σχήματα που είχε επισκευάσει κατά καιρούς, και, με τα σημάδια αυτά, προσπαθούσε να ξαναγυρίσει σωστά στο Σχήμα του. Παρ' όλες τις δυσκολίες που συναντούσε με το Νόμο της Διάταξης, δεν έπαυε να τριγυρνά συνέχεια στο Διάστημα, επισκευάζοντας Σχήματα και κάνοντας νέους Δεκαδικούς φίλους.

Ήταν απ' τις πρώτες μέρες που είχε ξεκινήσει τη δουλειά της συντήρησης γεωμετρικών Σχημάτων, σε γειτονιές πιο μακρινές από τη δική του. Δούλευε σ' ένα καινούργιο Χάιτεκ τετράπλευρο πάνω από 6 ώρες. Το τετράπλευρο εκείνο είχε πραγματικά τα μαύρα του τα χάλια.

Ο ιδιοκτήτης του είχε δει στα πολιτιστικά νέα του Διαστήματος "νέες ιδέες" αρχιτεκτονικής απ' το Διάστημα (0, 1], την πρωτεύουσα του Άρπλας. Το έβαλε πείσμα και προσέλαβε κάποιους καλούς Δεκαδικούς του Διαστήματος να κάνουν τις ιδέες αυτές Σχήμα. Το δημιούργημα εκείνων των πρακτικών βέβαια, ο θεός του Άρπλας να το κάνει Σχήμα! Ήταν ένα σκέτο γεωμετρικό λάθος. Ο πρώτος μικροσεισμός σίγουρα θα γκρέμιζε κάποια πλευρά του… Έτσι, όταν ο ιδιοκτήτης του πληροφορήθηκε ότι ο 3,618 ήταν από τους καλύτερους πρακτικούς του Διαστήματος, τον κάλεσε να σώσει την κατάσταση.

Καθώς ο 3,618 δούλευε, προσπαθώντας να συγκρατήσει τα νεύρα του με τις κακοτεχνίες που έβλεπε, άκουσε από μέσα τον ιδιοκτήτη και δυο φίλους του να μιλούν, όχι και με τα καλύτερα λόγια, για έναν άλλο Δεκαδικό.

«Εγώ πραγματικά, δεν μπορώ να καταλάβω πώς στέκεται ακόμη όρθιος ο 3,888, αυτός ο γέρο-Δεκαδικός… Τα νούμερα του ίσα που καταλαβαίνεις τι γράφουν πλέον!» έλεγε ο ένας.

«Άσε που είναι γκρινιάρης και περίεργος. Μόλις με δει, με βρίζει σου λέω!» επαύξανε ο άλλος.

«Να δεις που κάποια μέρα θα του πέσει καμιά πλευρά στο κεφάλι και πραγματικά θα ησυχάσουμε από δαύτον!» ολοκλήρωσε ο τρίτος.

«Κάθονται αραχτοί και δε δίνουν δεκάρα για το πώς συντηρούνται σωστά οι κορυφές ενός τετράπλευρου… Μπορούν να κάθονται έτσι με τις ώρες και να τα λένε…» σκεφτόταν ο 3,618 εκνευρισμένος. Δεν είχε καμία διάθεση να τους ακούει να κουτσομπολεύουν, οπότε προσπάθησε να τελειώσει γρήγορα με το τετράπλευρό τους. Παρότι είχε ξεκινήσει με πολλή όρεξη τη δουλειά, δεν μπορούσε να βγάλει από το μυαλό του τον 7/2 και όσα είχαν συμβεί στο τετράπλευρο του 3,51.

«Γιατί πρέπει να υπακούσω ένα Κλάσμα; Και να κάνω μάλιστα ό,τι μου λέει! Ε, όχι κύριε Κλάσμα, με κάπα κεφαλαίο, δεν έχεις δίκιο…»

Αυτά σκέφτονταν καθώς σμίλευε την τελευταία κορυφή του Χάιτεκ Σχήματος… «Κραπ, κρουπ, κροπ!» Η κορυφή του Σχήματος ήταν έτοιμη. Κοφτερή, σαν καινούργια. Ο 3,618 σηκώθηκε, και φώναξε στον

ιδιοκτήτη του Σχήματος:

«Τέλειωσα, φεύγω τώρα».

«Ο.κ., ελπίζω να έκανες καλή δουλειά εσύ…», απάντησε με αγένεια ο Δεκαδικός ιδιοκτήτης.

Ο 3,618 έβαλε τα εργαλεία του στην τσάντα και, χωρίς να πει κουβέντα, την κρέμασε υπό διαστολής και ξεκίνησε.

«Ε, 3,618, δεν είναι προς τα εκεί η θέση σου!» του φώναξε ειρωνικά ο Δεκαδικός του Σχήματος.

«Δεν πάω στο Σχήμα μου», του απάντησε κοφτά ο 3,618 και συνέχισε να απομακρύνεται από το τετράπλευρο με γοργό βήμα.

* * * * *

Περπατούσε αρκετή ώρα. Είχε προσπεράσει τη θέση 3,89 και πριν την θέση 3,92 συνάντησε τον Δεκαδικό 3,622, που καθόταν λαχανιασμένος κάτω από μια ρίζα. Ο 3,622 τον κοίταξε για μια στιγμή και του φώναξε:

«Ε συ, 3,618, σαν πολύ μακριά δεν είσαι απ' τη θέση σου;»

Ο 3,618 κοντοστάθηκε και κοίταξε τριγύρω…

«Ναι, η αλήθεια είναι ότι έχω χαθεί λίγο, αλλά νομίζω πως πάω καλά τώρα», είπε.

«Πας προς το Κάστρο του Φυσικού 4, φαντάζομαι, ε;», ρώτησε ο 3,622.

«Ναι!»

Ο 3,622 τον κοίταξε λίγο χωρίς να μιλά, κι ο 3,618 ανταπέδωσε το βλέμμα. Ο 3,622 έξυσε λίγο τα νούμερα του και τον ρώτησε:

«Είσαι Θεωρητικός Δεκαδικός του Κάστρου;»

«Όχι, πρακτικός είμαι».

«Το ξέρεις ότι δεν μπορείς να μπεις στο Κάστρο 4, έτσι;»

«Θα ζητήσω να με αφήσουν να μπω στο Κάστρο. Έχω λόγο!» είπε αποφασιστικά ο 3,618.

«Επιτρέπεται να ρωτήσω, ποιος είναι ο λόγος;» είπε με χαλαρή φωνή ο 3,622, μήπως τον ηρεμήσει κάπως.

«Θα προκαλέσω τον Φυσικό 4 σε μονομαχία!» απάντησε ο 3,618, χωρίς να σαλέψει ούτε νούμερο.

Ο 3,622 γούρλωσε τα ψηφία του και προσπάθησε να καταλάβει, αν ο Δεκαδικός εννοούσε αυτό που μόλις είχε ξεστομίσει.

«Έχει ζέστη σήμερα και μάλλον περπατάς αρκετή ώρα έτσι;»

«Έχει αρκετή ζέστη όντως, αλλά τι σχέση έχει αυτό τώρα;»

«Μα, μονομαχία με τον Φυσικό 4; Πώς σου ήρθε;»

«Θα προκαλέσω τον Φυσικό 4 σε μονομαχία κατασκευής γεωμετρικού Σχήματος. Όποιος από τους δυο μας φτιάξει το καλύτερο τετράπλευρο, παίρνει τον τίτλο του καλύτερου σχεδιαστή του Διαστήματος!» απάντησε με σιγουριά.

«Τι λες 3,61; Έχεις χάσει εντελώς τη μαθηματική λογική σου; Πώς γίνεται να φτιάξεις ένα καλύτερο Σχήμα από τον Φυσικό 4; Σκέψου ότι αυτός είναι που έχει κατασκευάσει το τέλειο τετράγωνο 4!»

«Θα βάλω τα δυνατά μου και θα τα καταφέρω!» απάντησε με θράσος ο 3,618.

«Επίσης, τι σε κάνει να πιστεύεις ότι θα δεχτεί τη μονομαχία; Το πιο πιθανό είναι τα Κλάσματα-

φρουροί του Κάστρου να σε συλλάβουν με το που θα ξεστομίσεις αυτή σου την τρελή απαίτηση. Δεν υπάρχει καμία περίπτωση να γίνει αυτή η μονομαχία. Εξ ορισμού, 3,618, εξ ορισμού είσαι χαμένος!».

«Δε θα μου πεις εσύ τι είμαι, "εξ ορισμού" μάλιστα!»

«Ηρέμησε λίγο, άκουσε με: Μήπως να επέστρεφες στη θέση σου σήμερα και να το ξανασκεφτείς;. Κάτι ξέρω και γω, δουλεύω καιρό στο Κάστρο 4…» είπε ήπια ο 3,622.

Ο 3,618 έξυσε το 3 του…

«Τι θα αλλάξει αν έρθω αύριο; Ο μόνος τρόπος, είναι να μονομαχήσω με τον Φυσικό 4, τι σήμερα, τι αύριο…», είπε με λίγο πιο χαλαρό ύφος.

«Ο μόνος τρόπος για ποιο πράγμα;»

«Ο μόνος τρόπος να δείξουμε στους Φυσικούς και στα Κλάσματα ότι δεν είμαστε κατώτεροι τους. Ο μόνος τρόπος να δείξουμε τι αξίζουμε!»

«Σε καταλαβαίνω, αλλά αν πας έτσι στο Κάστρο 4, απλώς θα μπεις φυλακή. Πώς θα βοηθήσεις τους Δεκαδικούς έτσι; Θες να πάμε προς την θέση σου και να το συζητήσουμε στο δρόμο;» ρώτησε ο 3,622, προσπαθώντας να κατευνάσει τον 3,618.

«Ίσως έχεις δίκιο, πρέπει σκεφτώ ένα σχέδιο για το πώς θα μπω στο Κάστρο 4! Εσύ δεν είπες ότι δουλεύεις στο Κάστρο 4;» τον ρώτησε με νόημα.

«Καλά, πάμε τώρα προς το Σχήμα σου και βλέπουμε» απάντησε ο 3,622, προσπερνώντας την ερώτηση του 3,618.

«Ωραία, από εδώ δεν πάμε;» ρώτησε ο 3,618, δείχνοντας τη θέση 3,91.

«Όχι, η θέση σου είναι από την άλλη πλευρά».

«Τώρα μπερδεύτηκα 3,622. Η θέση μου, η 3,618, δεν είναι μεγαλύτερη από την θέση 3,91;» ρώτησε όλο απορία.

«Καλά, μέχρι εδώ πως έφτασες;»

«Εύκολα. Το Κάστρο 4 είναι αρκετά μεγάλο και φαίνεται από μακριά! Ξέχασα όμως, να βάλω σημάδια για το γυρισμό», είπε αναστενάζοντας.

«Λοιπόν, άκου: Θα σου πω εγώ πώς βρίσκω τη θέση μου, κι ίσως σε βοηθήσει. Αν, για παράδειγμα, ήσουν ο Δεκαδικός 3,5, τότε θα ήσουν σε μεγαλύτερη ή σε μικρότερη θέση από τον 3;» ρώτησε ο 3,622.

«Ο 3,5 είναι στη μέση του Διαστήματος (3, 4], τον ξέρω αυτόν τον Δεκαδικό, αν κι έχω να τον δω πολύ καιρό. Ξέρω ακριβώς πού μένει, μένει σε μεγαλύτερη θέση από τον Φυσικό 3 και σε θέση μικρότερη από τον Φυσικό 4. Για την ακρίβεια, μένει στη μέση του Διαστήματος (3, 4] επακριβώς».

«Ωραία, σκέψου τώρα τη γειτονιά που μένεις. Από τον Δεκαδικό 3,5 μέχρι την Δεκαδικό 3,7 -που πέρασες πριν από αρκετή ώρα- ποιος Δεκαδικός βρίσκεται στη μέση;»

Ο 3,618 έφερε στο μυαλό του τη γειτονιά του κι έβαλε όλους τους Δεκαδικούς νοητά στη θέση τους.

«Ναι, είναι ο 3,6. Αυτός μένει κοντά σε μένα».

«Σωστά. Και τώρα, βρες μου ποιος Δεκαδικός είναι στη μέση του Διαστήματος (3,5 , 3,6)».

«Λοιπόν, αν θυμάμαι σωστά, πρέπει να είναι η 3,55, που είναι κοντά στον 3,51, που πρόσφατα του επιδιόρθωσα το τετράγωνό του».

Ο 3,622 κοίταξε με νόημα τον 3,618, σα να του είχε δώσει μια απάντηση… Ο 3,618 από την άλλη, κοίταξε λίγο περίεργα τα νούμερα τα δικά του κι αυτά του 3,622.

«Νομίζω πως κάτι κατάλαβα. Για να βρεθώ ανάμεσα σε δύο Δεκαδικούς, σα να χρειάζομαι το νούμερο 5, ε;»

«Ακριβώς! Και τώρα, ποιος Δεκαδικός είναι σε μεγαλύτερη θέση, ο 3,5 ή ο 3,55;» ρώτησε ο 3,622.

«Η 3,55 είναι, αφού, όπως είπαμε, είναι στη μέση του Διαστήματος (3,5 , 3,6), οπότε είναι μετά από τον 3,5 και πριν από τον 3,6».

Ο 3,618 σταμάτησε να μιλά, και το ξανασκέφτηκε.

«Μα, έτσι όπως το λέω τώρα, η 3,55 είναι σε μεγαλύτερη θέση από τον 3,5 και σε μικρότερη θέση από τον 3,6, αλλά, αυτό που με ζορίζει είναι ότι το 55 είναι μεγαλύτερο από το 6. Πώς γίνεται λοιπόν;»

«Σκέψου το ως εξής: Το πρώτο ψηφίο πριν την υποδιαστολή σου λέει σε ποιο Διάστημα μένεις. Εμείς οι δύο λόγου χάριν, μένουμε μετά το Κάστρο 3 και πριν το Κάστρο 4, οπότε αναγκαστικά, έχουμε και οι δυο μας, το 3 πριν την υποδιαστολή. Μετά την υποδιαστολή, μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε νούμερο, αλλά πάντως για να ανήκουμε στο Διάστημα (3, 4], πριν την υποδιαστολή μας, πρέπει να έχουμε οπωσδήποτε 3».

«Ναι, ισχύει αυτό», συμφώνησε ο 3,618.

«Όσο για τα υπόλοιπα ψηφία, μετά την υποδιαστολή» συνέχισε ο 3,622, «μας λένε σε ποια γειτονιά μένουμε ακριβώς. Εγώ, επί παραδείγματι, ο 3,622, μένω στο Διάστημα (3, 4], όπως εσύ. Το πρώτο ψηφίο μου μετά την υποδιαστολή, δηλαδή το 6 μου, δηλώνει ότι μένω στη γειτονιά ανάμεσα στο 3,5 και στο 3,7, αφού το 6 είναι ανάμεσα στο 5 και στο 7. Όσο για το δεύτερο ψηφίο μου μετά την υποδιαστολή, δηλαδή το 2 μου, δηλώνει ότι μένω στη γειτονίτσα ανάμεσα στο 3,61 και 3,63, αφού το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και στο 3. Καταλαβαίνεις πού το πάω;»

«Νομίζω ότι καταλαβαίνω, αλλά μου φαίνεται πολύς κόπος, κάθε φορά που βλέπω έναν Δεκαδικό, να πρέπει να σκέφτομαι σε ποια γειτονιά μένει, προκειμένου να καταλάβω αν είναι σε μεγαλύτερη ή μικρότερη θέση από μένα» είπε ο 3,618 απελπισμένος.

«Σωστά το λες, γι' αυτό και γω έχω κι έναν άλλο τρόπο που δουλεύει πάντα: Απλά πρέπει να πλησιάσεις τον άλλο Δεκαδικό και να σταθείς δίπλα του, να έτσι!»

Ο 3,622 έκατσε τόσο κοντά στον 3,618, ώστε να ακουμπάει ο ένας την υποδιαστολή του στον άλλο:

3,622

3,618

«Συγχαρητήρια! Τώρα που σταθήκαμε έτσι, δες λίγο τα ψηφία μας και σκέψου το».

«Ο.κ., το έπιασα! Άμα κάτσουμε έτσι, αρχικά βλέπω αν είμαστε στο ίδιο Διάστημα (3 και 3). Μετά την υποδιαστολή, κοιτάζω και βλέπω δύο 6, άρα αρχίζω να σκέφτομαι ότι μένουμε κοντά. Μετά κοιτάω ότι εγώ έχω 1, ενώ εσύ έχεις 2, οπότε 2> 1, άρα μένεις σε μεγαλύτερη θέση! Σωστό;»

«Το έπιασες! Το πρόβλημα, βέβαια, με αυτό τον τρόπο είναι ότι πρέπει να κολλήσεις του άλλου Δεκαδικού σα στενός κορσές για να καταλάβεις τι γίνεται!»

«Χα χα» γέλασαν και οι δύο Δεκαδικοί.

«Σιγά-σιγά πάντως, γίνεται ευκολότερη η αναγνώριση μιας θέσης και δεν πρέπει να κάτσεις δίπλα στον άλλο Δεκαδικό. Το κάνεις με το μάτι!»

«Ευχαριστώ», είπε χαρούμενος ο 3,618, που είχε καταλάβει ένα μαθηματικό τρόπο για να σκέφτεται τη θέση του.

«Εγώ στην αρχή το σκεφτόμουνα αλλιώς: Αφού ο 3,51, ο 3,512 και η 3,627 έχουν περισσότερα δεκαδικά από τον 3,5 και είναι σε μεγαλύτερη θέση, τότε, όλοι οι Δεκαδικοί με περισσότερα δεκαδικά ψηφία μετά την υποδιαστολή από έναν άλλο Δεκαδικό, είναι σε μεγαλύτερη θέση από αυτόν».

«Καλή σκέψη, αλλά το πρόβλημα εδώ είναι ότι δεν ισχύει πάντα αυτό που σκέφτηκες. Εξαρτάται από την γειτονιά ή το Διάστημα που βρίσκεσαι. Δηλαδή, εσύ, ο 3,618 μένεις σε μικρότερη θέση από τον 3,8 κι ας έχεις πιο πολλά δεκαδικά μετά την υποδιαστολή σου».

«Ναι, κατάλαβα. Αν κάτσω δίπλα του -και το έκανε εικόνα στο μυαλό του- τότε έχουμε και οι δύο το

3, αλλά το 6 είναι μικρότερο από το 8, οπότε, ότι νούμερα και να έχει μετά, είναι σίγουρα πιο μετά σε θέση από μένα! Όμως, στάσου τώρα, έχω μια απορία. Αν κάτσω εγώ δίπλα στον 3,6 τι γίνεται;»

«Κοίτα, εκεί τα πράγματα φαίνονται πολύπλοκα, αλλά δεν είναι. Φαντάσου σας δίπλα-δίπλα» είπε ο 3,622.

Ο 3,618 σκέφτηκε τους δύο Δεκαδικούς δίπλα-δίπλα:

3,6

3,618

«Εγώ έχω 1, κι ο άλλος δεν έχει τίποτα! Τι γίνεται σ' αυτήν την περίπτωση;»

«Σ' αυτήν την περίπτωση, φίλε μου, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει ένα νούμερο, όποιο κι αν είναι αυτό, σε αντίθεση με τον άλλον, που είναι σα να έχει Μηδέν, σα να είναι ο 3,60, κι όπως ξέρεις 1 > 0» είπε με νόημα και σηκώθηκε από τη ρίζα που καθόταν.

Ο 3,622 άρχισε να κουνάει τα νούμερα του το καθένα ξεχωριστά, βγάζοντας περίεργους ήχους…

«Χοπ χοπ…! Κάθομαι εδώ αρκετή ώρα, και με όλη αυτήν την κουβέντα, πιάστηκα! Πρέπει να κάνω αυτές τις ασκήσεις 3 φορές τη μέρα, γιατί δουλεύω καθιστός στο Κάστρο όλη την ώρα. Κάνω κακό στη στάση των αριθμών μου έτσι. Χοπ!» ξανάπε, ξεκινώντας τις διατάσεις.

«Θες να σου δείξω δυο ασκήσεις για τη σωστή στάση των νούμερών σου;» ρώτησε ο 3,618.

«Ναι, εννοείται» απάντησε, σταματώντας την άσκηση που έκανε.

«Λοιπόν, λέγεται γυμναστική μεταμόρφωσης και κάνει πολύ καλό στην ενδυνάμωση των ψηφίων σου κι επίσης αυξάνει την ελαστικότητα της υποδιαστολής σου!» είπε με σοβαρό ύφος.

«Πρώτα, πιέζεις όλα σου τα νούμερα πάνω στο τελευταίο σου ψηφίο, να έτσι…» είπε και κόλλησε τα νούμερα του 3, 6 και 1 πάνω στο 8 του.

«Μετά, προσπαθείς να τα ανεβάσεις πάνω του. Και τέλος, μ' ένα τέντωμα στηρίζεσαι εντελώς σ' αυτό, να έτσι!»

Ο 3,622 είχε μείνει με ανοικτό το 6 του. Δεν πίστευε αυτό που έβλεπε, ο 3,618 είχε ανεβάσει όλα του τα νούμερα πάνω στο 8, και ισορροπούσε!

3

,

6

1

8

«Τώρα είμαι ένα Κλάσμα», είπε με χαλαρή φωνή για να μη χάσει την ισορροπία του.

Ο 3,622 έσκασε στα γέλια με τη μίμησή του αυτή.

«Μη γελάς, είναι φοβερή άσκηση αυτή για να ενδυναμώσεις κάθε νούμερο ξεχωριστά», είπε ο 3,618, συνεχίζοντας την παρουσίαση.

Ο 3,622 έριχνε τόσο γέλιο με το θέαμα που έβλεπε, που είχαν αρχίσει να πονάνε τα ψηφία του.

Κατόπιν, απτόητος ο 3,618 κατέβηκε από το 8 του και πήρε θέση για την επόμενη άσκηση. «Λοιπόν, η επόμενη άσκηση είναι για ευλυγισία. Πρέπει να μπορείς να ακουμπήσεις το 3 σου στο τελευταίο σου ψηφίο. Να, κάπως έτσι», είπε ακουμπώντας το 3 του στο 8 του.

Ο 3,622 σταμάτησε να γελάει και προσπαθούσε να καταλάβει πώς είχε καταφέρει να ακουμπήσει το 3 του στο 8 του. Το έβλεπε, αλλά δεν το πίστευε!

«Σκοπός είναι να βγάλεις όλο τον αέρα από τα ψηφία σου, ώστε να μπορέσεις να στρίψεις», είπε με περίεργη φωνή, αφού ταυτόχρονα προσπαθούσε να μην πάρει ανάσα και μεγαλώσουν πάλι τα ψηφία του.

«Μετά ακουμπάς το 3 στο έδαφος και το 8 σου μόνο, βλέπεις;» συνέχισε την άσκηση ο 3,618.

,6 1

3 8

«Τώρα είμαι σαν ένα τετράπλευρο» είπε, διατηρώντας τη στήριξή του, μαζί με την περίεργη εκείνη φωνή.

Ο 3,622 συνέχιζε να γελάει και να φωνάζει «Μπράβο, μπράβο...!»

Δεν ήξερε αν γελούσε περισσότερο με τη στάση του 3,618 αυτή καθαυτή ή με την αστεία φωνή που απαιτούσε αυτή η στάση!

Ο 3,618 πήρε μια βαθιά ανάσα και μεγαλώνοντας τα ψηφία του πάλι, στάθηκε κανονικά.

«Τώρα η σειρά σου», είπε κοιτάζοντας τον 3,622.

«Δεν υπάρχει περίπτωση να μπορέσω εγώ να κάνω αυτές τις στάσεις».

«Η αλήθεια είναι πως είναι λίγο δύσκολες ασκήσεις για αρχή, αλλά, αν προσπαθήσεις να τις εφαρμόσεις, θα δεις μεγάλη διαφορά στα ψηφία σου. Θα νιώσεις πραγματικά καλύτερα, ειδικά το 6 σου... Μιλάμε για πραγματική ευεξία!» είπε με σιγουριά κι αυτοπεποίθηση για τη γυμναστική που είχε εφεύρει.

«Εντάξει, σου υπόσχομαι πως, όταν πάω το βράδυ στο Σχήμα μου, θα προσπαθήσω να τις κάνω και βλέπουμε…» είπε γελαστός ο 3,622.

Το άπλετο φως του ήλιου έδινε μια ζεστασιά στο Διάστημα και δημιουργούσε μια αίσθηση ασφάλειας και ξεγνοιασιάς στους δύο Δεκαδικούς, που κάθονταν πια κάτω από τη ρίζα, απολαμβάνοντας σιωπηλοί την ομορφιά της μέρας.

9.1.4 Το τετράπλευρο του 3,888

Μετά από λίγο, με χαλαρή φωνή, και εμφανώς πιο ήρεμος πλέον, ο 3,618 είπε:

«Απ' ό,τι καταλαβαίνω, εσύ θα έπρεπε να βρίσκεσαι στην θέση 3,622. Άρα, σύμφωνα με αυτά που είπαμε, είσαι και συ αρκετά μακριά από την θέση σου! Κι αφού ξέρεις να βρίσκεις τη θέση σου, τι δουλειά έχεις εσύ εδώ;»

«Είμαι κι εγώ μακριά από τη θέση μου. Πήγαινα στο Κάστρο 4, όπως σου είπα, εκεί δουλεύω. Βλέπεις, είμαι ένας Θεωρητικός Δεκαδικός».

«Είσαι ο πρώτος Θεωρητικός που γνωρίζω. Πόσο καιρό δουλεύεις εκεί;» είπε ο 3,618.

«Είμαι αρκετό καιρό στη "Θεωρητική Υπηρεσία" του Κάστρου 4. Στην αρχή ήμουν πολύ ενθουσιασμένος μ' αυτή μου τη θέση. Ήθελα να γυρίσω όλο το Σχήμα του, από κορυφή σε κορυφή. Όμως, τα πράγματα δεν είναι έτσι απλά στα Κάστρα των Φυσικών. Έχουμε πολλή δουλειά και δε μας μένει σχεδόν καθόλου ελεύθερος χρόνος…»

«Οπότε, εσύ θα μπορούσες να με βάλεις κρυφά στο Κάστρο 4…» συμπέρανε ο 3,618, επαναφέροντας στο προσκήνιο τη μονομαχία με τον Φυσικό 4.

«Δε γίνεται! Να ξέρεις ότι υπάρχουν ξεχωριστά τμήματα στο κάθε Κάστρο, και στο μόνο τμήμα που επιτρέπεται να κινούμαστε εμείς οι Θεωρητικοί είναι το "Δεκαδικό Τμήμα", όπου δουλεύουν αμέτρητοι Δεκαδικοί. Επίσης, στο Κάστρο έχει πάρα πολλά Κλάσματα για να μπορέσει να περάσει ένας Δεκαδικός εντελώς απαρατήρητος!» είπε ξεφυσώντας ο 3,622.

Ο 3,618 άκουγε με ορθάνοικτα νούμερα την περιγραφή του 3,622.

«Σκέψου ότι στο δικό μου τμήμα, το "Τμήμα απογραφής ζημιών", ούτε κι εγώ δεν έχω καταφέρει να μετρήσω πόσους Θεωρητικούς εργαζόμενους έχει… Ο Φυσικός αριθμός 4 βρίσκεται στην κεντρική αίθουσα του Κάστρου. Αλλά, και να θέλεις να μπεις εκεί, εγώ δεν έχω πρόσβαση!»

«Οπότε, πρέπει να βρω ένα σχέδιο για να μπω μέσα…», σκέφτηκε μεγαλόφωνα ο 3,618.

«Βλέπω πως κουβαλάς εργαλεία μαζί σου, οπότε μάλλον ήσουν σε κάποια επισκευή;» ρώτησε ο 3,622, αλλάζοντας κουβέντα. Μετά ξεκίνησε να περπατάει σε χαλαρό ρυθμό προς τη θέση του.

«Ναι, έτσι είναι… Ήμουν σ' ένα τετράπλευρο για επισκευές. Μου πήρε σχεδόν έξι ώρες…» απάντησε ο 3,618, ακολουθώντας τον 3,622.

«Και καλά, μετά αποφάσισες να τελειώσεις τη μέρα με μια μονομαχία;»

«Δεν άντεξα άλλο, το σκεφτόμουν όλη μέρα σήμερα…» απάντησε ο 3,618, που δεν ένιωσε την ειρωνεία του 3,622.

Ο δρόμος ανηφόριζε και οι δύο Δεκαδικοί είχαν μόλις περάσει τη θέση 3,8.

«Κοίτα, 3,618, αυτό το Σχήμα έχει τα μαύρα του τα χάλια!» είπε ο 3,622, δείχνοντας ένα τετράπλευρο στην κορυφή του μικρού λόφου.

«Αα, ώστε αυτό είναι το τετράπλευρο…», συνειδητοποίησε ο 3,618, κοιτάζοντας το μισογκρεμισμένο Σχήμα.

«Θα ήθελες να επισκεφτούμε αυτόν το Δεκαδικό, 3,622;» ρώτησε ο 3,618, κοιτάζοντας το Σχήμα.

«Τι εννοείς; Ξέρεις ποιος μένει εδώ;»

«Ναι ξέρω, ο 3,888. Κι απ' ό,τι άκουσα, είναι ένας πολύ ενδιαφέρων Δεκαδικός! Πάμε να τον γνωρίσουμε;» ξαναρώτησε χαμογελώντας.

«Δεν είμαι τώρα για επίσκεψη, 3,618. Αύριο θα πρέπει να βρίσκομαι από νωρίς στο Κάστρο 4. Ξεκινάει η ετήσια απογραφή για τους Δεκαδικούς και τα Κλάσματα του Διαστήματος (3, 4] και φέτος είμαι υπεύθυνος εγώ!» είπε με χαρά, αλλά και λίγο άγχος ο 3,622.

«Τι απογραφή;», ρώτησε με ενδιαφέρον ο 3,618.

«Η ετήσια απογραφή του Κάστρου! Γίνεται μία φορά το χρόνο και σκοπός της είναι να βρεθεί η σωστή θέση όλων των Δεκαδικών και όλων των Κλασμάτων του Διαστήματος. Μόλις βρεθεί η θέση τους, πρέπει να καταγραφεί σωστά σε ένα "έγγραφο-άξονα", σύμφωνα με το Νόμο της Διάταξης. Μετά, το έγγραφο αυτό παραδίδεται στον Φυσικό του Κάστρου. Βάσει του εγγράφου αυτού, ο Φυσικός μπορεί να γνωρίζει, ανά πάσα στιγμή, με μαθηματική ακρίβεια τη θέση των υπηκόων του, στο Διάστημά του».

«Ατελείωτη δουλειά! Και πως βρίσκεις σωστά τη θέση όλων αυτών των άπειρων Δεκαδικών; Κι όλων αυτών των άπειρων Κλασμάτων;» θαύμασε ο 3,618.

«Μα, γι' αυτό και διαρκεί ένα έτος η κάθε απογραφή! Τι νόμισες; Θεωρητικοί Δεκαδικοί του Κάστρου όλο τον χρόνο κινούνται αδιάκοπα στο Διάστημα και προσπαθούν να απομνημονεύσουν τη θέση Δεκαδικών και Κλασμάτων. Μετά, την αναφέρουν στον υπεύθυνο της απογραφής και αυτός προσπαθεί να τους τοποθετήσει στο "έγγραφο-άξονα", σύμφωνα με τα λεγόμενα», εξήγησε ο 3,622.

«Πω, πω, πόση φασαρία..» αναφώνησε ο 3,618.

«Άσε… Κι όπως καταλαβαίνεις, αν γίνουν μετακινήσεις στον άξονα, ή αν κάποιοι Δεκαδικοί μετατραπούν σε Κλάσματα, η δουλειά αυτή πρέπει να ξαναγίνει.... Είναι απίστευτα χρονοβόρα διαδικασία…»

«Και φέτος είσαι υπεύθυνος εσύ για την απογραφή, ε; Καημένε…» είπε συμπονετικά ο 3,618.

«Ευτυχώς όμως, νομίζω πως βρήκα έναν εύκολο τρόπο να συμπληρώσω το "έγγραφο-άξονα" για τη θέση των Δεκαδικών υπηκόων του Διαστήματος. Θυμάσαι που σου είπα, πώς να βρίσκεις ποιος Δεκαδικός είναι

σε μικρότερη θέση και ποιος σε μεγαλύτερη, συγκρίνοντάς τους;»

«Ναι, εννοείται πως το θυμάμαι!»

«Ε, τώρα μ' αυτόν τον τρόπο μπορώ να συμπληρώσω όλες τις θέσεις των Δεκαδικών στο "έγγραφο-άξονα", χωρίς να χρειάζεται να στέλνω Θεωρητικούς Δεκαδικούς να απομνημονεύουν τη θέση. Κι έτσι, είμαι σίγουρος ότι έχω -με μαθηματική ακρίβεια- τη σωστή θέση όλων των Δεκαδικών στον άξονα», είπε ο 3,622.

«Μπράβο, πολύ καλή η ιδέα σου!»

«Έτσι, στέλνω Θεωρητικούς Δεκαδικούς να βρουν τη θέση μόνο των Κλασμάτων του Διαστήματος… Γλιτώνουμε δηλαδή τη μισή δουλειά! Κι είμαι, πραγματικά, πολύ χαρούμενος που βρήκα αυτόν τον τρόπο! Αύριο, που θα παρουσιάσω το "έγγραφο-άξονα" στον Φυσικό 4, θα του αναλύσω τον τρόπο σκέψης μου».

«Μπράβο σου, 3,622, είσαι φοβερός στα μαθηματικά! Αλλά, δε σε πειράζει να δουλεύεις για τον Φυσικό 4; Αυτόν τον ίδιο Φυσικό που θεωρεί εμάς τους Δεκαδικούς κατώτερους;» ρώτησε σοβαρός ο 3,618.

«Ξέρεις, δε σκοπεύω να δουλεύω για πολύ ακόμη στο Κάστρο 4. Σκέφτομαι αύριο να ζητήσω μετάθεση στο Κάστρο 1. Εκεί, μένει ο ισχυρότερος Φυσικός αριθμός, ο 1. Να ξέρεις, ότι για τον 1, δουλεύουν οι καλύτεροι Θεωρητικοί Δεκαδικοί του βασιλείου του Άρπλας! Είναι το όνειρο μου να δουλέψω με τους καλύτερους Θεωρητικούς Δεκαδικούς του Άρπλας…» του εκμυστηρεύτηκε ο 3,622.

«Στο Κάστρο 1; Πρέπει να είναι μεγάλο ταξίδι μέχρι εκεί….», είπε ο 3,618. «Το Κάστρο 1...» σκέφτηκε.

«Ναι, γι' αυτό σου λέω: Δεν είμαι για επισκέψεις τώρα… Άσε που σε λίγες ώρες νυχτώνει και θα πρέπει να βρισκόμαστε κι οι δύο μας στις θέσεις μας!» είπε ο 3,622 αυστηρά.

«Μα, δε θ' αργήσουμε καθόλου. Μια απλή επίσκεψη θα κάνουμε! Έλα, προλαβαίνουμε, θα σου κάνει καλό να χαλαρώσεις και συ λίγο, πριν την μεγάλη μέρα..» επέμεινε ο 3,618.

«Καλά, τότε. Πάμε λίγο γρήγορα», υποχώρησε ο 3,622, ενώ από μέσα του προσπαθούσε να αναλύσει πώς και συμφώνησε να πάει σ' ένα άγνωστο σχήμα μ' έναν Δεκαδικό που μόλις είχε γνωρίσει. Ίσως επειδή η συζήτησή τους για τη Διάταξη ήταν ενδιαφέρουσα. Ή γιατί ποτέ του δεν είχε συναντήσει άλλον τόσο αυθόρμητο Δεκαδικό. Ή ακόμη, γιατί, σε κάποια στοιχεία, του θύμιζε τον ίδιο του το δεκαδικό εαυτό!

Περπατώντας οι δυο τους βιαστικά, χωρίς να μιλούν, έφτασαν στο τετράπλευρο του 3,888. Βρισκόταν σε λόφο κι είχε θέα όλου σχεδόν του Διαστήματος (3, 4]. Από κει, μπορούσες να δεις μέχρι το Κάστρο 3.

Ο 3,888 ήταν ένας γέρος Δεκαδικός κι ήταν αυτό που λέμε "κλασσικός", ή για την ακρίβεια "τυπικός" Δεκαδικός: Τόσο πολυλογάς, που, όποτε συναντούσε έναν Δεκαδικό -και πόσο μάλλον νεαρό-, δεν έχανε την ευκαιρία να του αραδιάσει όλη την ιστορία της μαθηματικής ύπαρξής του. Μιλούσε νοσταλγικά για τον τρόπο που συμπεριφέρονταν οι παλιοί Δεκαδικοί και για το πόσο έχουν αλλάξει πια οι πράξεις… Ο Δεκαδικός κόσμος έλεγε για τον 3,888 ότι για κάθε θέμα είχε κι από μια ιστορία.

Το Σχήμα του 3,888 ξεχώριζε από μακριά. Ήταν ένα παλιό νεοκλασικό τετράπλευρο, το οποίο είχε να συντηρηθεί χρόνια… Οι κορυφές του είχαν χάσει σε τέτοιο βαθμό το ακόνισμά τους, που δεν ξεχώριζαν, παρά μόνο αν ήξερες που να κοιτάξεις. Η στατικότητα είχε επηρεαστεί σε τέτοιο βαθμό, που με τον παραμικρό σεισμό το τετράπλευρο του θα άρχιζε να κυλάει στο λόφο και να αλλάζει βάσεις. Όσο για τα παράθυρα, είχαν τόση σκόνη, ώστε για να δεις το Δεκαδικό που έμενε μέσα, έπρεπε να καταβάλεις τρομερή προσπάθεια.

«Κοίτα! Δεν είναι φοβερά εδώ; Φαίνεται όλη η γειτονιά μου, μέχρι την θέση μου σχεδόν», είπε ο 3,618 που μόλις είχε φτάσει στο λόφο λαχανιασμένος.

«Ναι», είπε ο 3,622, όταν κατάφερε ν' ανέβει κι αυτός το λόφο.

«Να, δες! Εκεί ακριβώς είναι η γειτονιά μου», είπε ο 3,618.

«Ναι, βλέπω», έκανε δήθεν πως συμφωνούσε ο 3,622, αν και ήξερε πολύ καλά ότι η κατεύθυνση που

του υποδείκνυε ο 3,618 δεν είχε καμία απολύτως σχέση με τη σωστή θέση του. Χρειαζόταν σίγουρα αρκετή εξάσκηση, για να μάθει να βρίσκει σωστά τις θέσεις.

«Ωραία λοιπόν, ας χτυπήσουμε!» είπε ο 3,618 και τράβηξε ένα μοχλό στην μπροστινή πλευρά του τετράπλευρου.

Ο 3,622 πήγε να τον σταματήσει από το να τραβήξει κατευθείαν τον μοχλό, αλλά δεν πρόλαβε. Αμέσως έκανε να κρυφτεί πίσω από μια πλευρά του Σχήματος, γιατί δεν ήταν καθόλου προετοιμασμένος γι' αυτήν τη συνάντηση.

Μετά τον ήχο του κουδουνιού, ακούστηκε μια χαλαρή και γαλήνια φωνή μέσα από το Σχήμα:

«Με ποιόν Δεκαδικό έχω την τιμή να ομιλώ;»

«Με τον 3,618 και τον 3,622, Κύριε 3,888» είπε ο 3,618 όσο πιο ευγενικά μπορούσε.

«Περιμένετε λίγο, έντιμοι Δεκαδικοί μου. Σας ανοίγω σε μισό λεπτό, απομακρυνθείτε όμως λίγο από την πλευρά που θα ανοίξω, μην τραυματιστείτε».

Ο 3,622 αναγκαστικά βγήκε από την κρυψώνα του, έπιασε από την υποδιαστολή τον 3,618 και τον τράβηξε απότομα προς τα δεξιά, ώστε να μπορέσει ν' ανοίξει η πλευρά.

Προηγήθηκε ένα μακρόσυρτο τρίξιμο κι εμφανίστηκε ένα 3 και στη συνέχεια ένα 8 κι ένα 88, με μια αχνή υποδιαστολή που χανόταν ανάμεσα στην καμπύλη του 3 και του 8.

«Καλώς ήρθατε, αγαπητοί μου Δεκαδικοί» είπε με προφορά ευγενούς. «Είμαι ο 3,888 (τρία κόμμα οκτακόσια ογδόντα οκτώ), σε τι οφείλω την απόλυτη τιμή της επισκέψεως σας;»

«Άκουσα ότι ξέρετε πολλές ενδιαφέρουσες ιστορίες και δεν μπορούσα να κρατηθώ. Ήρθα να τις ακούσω όλες!» είπε φωναχτά ο 3,618.

«Κατά βάση, παρατηρήσαμε ότι το τετράπλευρό σας είναι σε μια ορισμένη κατάσταση και χρειάζεται μια κάποια συντήρηση. Ο 3,618 από δω, είναι ένας πολύ καλός πρακτικός, με ειδίκευση στη συντήρηση γεωμετρικών Σχημάτων» είπε ο 3,622 βρίσκοντας στο άψε-σβήσε μια καλή δικαιολογία για την επίσκεψή τους.

«Καιρό είχα να συναντήσω έναν τόσο αυθόρμητο νέο», είπε ο 3,888 γελαστός, κοιτάζοντας τον 3,618. «Ευχαριστώ πολύ και τους δύο σας για το ενδιαφέρον, αλλά είμαι συναισθηματικά δεμένος με το τετράπλευρο μου. Γι' αυτό και δεν το επισκευάζω τόσα χρόνια. Αυτή κι αν είναι μια ενδιαφέρουσα ιστορία, γι' αυτούς που τους αρέσουν οι ιστορίες… Περάστε μέσα, αν θέλετε, παρακαλώ!»

Το τετράπλευρο του 3,888 από μέσα ήταν πολύ περιποιημένο, με πολλούς πίνακες και δυο μεγάλες βιβλιοθήκες, μία στην κάθε πλευρά. Στη μία βιβλιοθήκη υπήρχαν φωτογραφίες του 3,888 σε διάφορα μέρη του Διαστήματος που είχε επισκεφτεί.

«Θα μπορούσα να κοιτάξω τις φωτογραφίες σας, Κύριε 3,888;» ρώτησε διακριτικά ο 3,622 και πλησίασε για να βλέπει καλύτερα.

«Ναι, ευχαρίστως».

«Έχετε ένα πολύ ωραίο Σχήμα, Κύριε. Ξέρετε μου αρέσει και μένα να διαβάζω», συνέχισε ο 3,622.

«Αλήθεια; Και τι σου αρέσει να διαβάζεις περισσότερο;»

«Να, τώρα, διαβάζω ένα βιβλίο για την Αρχή της ύπαρξης των Δεκαδικών. Από πού καταγόμαστε εμείς οι Δεκαδικοί και που πάμε...» είπε ο 3,622 διστακτικά.

«Και προς τα πού θα θέλατε να πάτε, εσείς οι δύο μικροί Δεκαδικοί φίλοι;» ρώτησε ο 3,888.

«Σήμερα γνωριστήκαμε, αλλά ναι, γίναμε φίλοι» είπε με ενθουσιασμό ο 3,618.

«Εσύ, μικρέ της παρέας», είπε ο 3,888 στον 3,618 «σου αρέσουν και σένα τα ταξίδια;»

«Ναι, πάρα πολύ!»

«Εδώ, στις φωτογραφίες σας, Κύριε 3,888, βλέπω ότι έχετε ταξιδέψει αρκετά..» τους διέκοψε ο 3,622.

«Να, σ’ αυτήν εδώ, σα να είστε στο Κάστρο 3, και πολύ κοντά μάλιστα.. Σαν να βρίσκεστε στη θέση 3,1, τόσο κοντά φαίνεται το Κάστρο 3, απίστευτο!»

«Αχ, τι μου θύμισες.. Αυτό ήταν ένα μεγάλο ταξίδι που είχα κάνει νέος, όταν και τα τρία 8 μου με βαστούσαν ακόμη. Εκεί, είμαι κοντά στην θέση 2,9 και γυρίζω προς τα πίσω. Αν θυμάμαι καλά, βέβαια», είπε νοσταλγικά ο 3,888.

«Δηλαδή, έχετε πάει πέρα από το Κάστρο 3;» ρώτησε ο 3,622 με θαυμασμό.

Ο 3,618 γούρλωσε τα δεκαδικά του ψηφιά μόλις άκουσε τον 3,622 και αμέσως προσπάθησε να καταλάβει τι είχε μόλις πει ο 3,888. «Θέση 2,9», σκέφτηκε.

«Έχετε πάει στο Διάστημα (2, 3]!» συνειδητοποίησε ο 3,618.

«Ναι, εκείνο το ταξίδι μου ήταν από τα μεγαλύτερα που έχω κάνει. Φανταστείτε ότι, όταν ξεκίνησα, σκόπευα να φτάσω στον Ναό του 0 (Μηδενός)».

Ο 3,618 κοίταξε τον 3,622 και μετά ξανά τον 3,888 με απορία.

«Ώστε δε γνωρίζετε τίποτα για τον Ναό του 0, ε;» είπε ο 3,888 κοιτάζοντας τον 3,618.

«Το βιβλίο που διαβάζω γράφει κάποια πράγματα για τον Ναό του 0. Είναι το μέρος όπου κρύβονται οι μεγάλες αλήθειες για τις μαθηματικές αρχές. Οι αρχές της ύπαρξης και της Διάταξης. Όλες κρύβονται εκεί!» είπε ο 3,622.

Ο 3,618 δε μιλούσε. Ήταν πραγματικά εκστασιασμένος. Είχε μόλις γνωρίσει ένα Δεκαδικό που είχε πάει πέρα από το Κάστρο 3! Και, σαν να μην έφτανε αυτό, μάθαινε ότι υπάρχει ένα μέρος όπου κρύβονται όλα τα μυστικά του Άρπλας, ο Ναός του Μηδενός! Δεν ήξερε αν τα νούμερα του ήταν ικανά για να αντέξουν αυτήν την συγκίνηση.… Η υποδιαστολή του κόντευε να πετάξει από τη χαρά του!

«Εμ, εσείς Κύριε 3,888, έχετε πάει στον Ναό του 0;» ρώτησε με τρεμάμενη φωνή.

«Όχι, το ήθελα πολύ, αλλά δεν κατάφερα να φτάσω μέχρι εκεί. Το ταξίδι ήταν μεγάλο και δύσκολο, κι έτσι αναγκάστηκα να γυρίσω πίσω. Ξέρεις τι είναι να περάσεις από 3 Κάστρα Φυσικών; Και πόσο μάλλον από το Κάστρο 1… Τι μου θυμίζεις.. Εγώ κατάφερα να φτάσω μέχρι το Κάστρο 2, αλλά όχι και να το περάσω», είπε ο 3,888.

«Πως περνούσατε από τα Κάστρα;» ρώτησε ο 3,622.

«Παράνομα;» συνέχισε συνωμοτικά ο 3,618.

«Είχα ένα έγγραφο, το οποίο μου επέτρεπε να ταξιδέψω για ορισμένες μέρες στο Άρπλας, συγκεκριμένα στο Διάστημα (2, 4]. Λόγω του ότι ήμουν ερευνητής σε μια μελέτη των Φυσικών για περίεργους Δεκαδικούς».

«Τι εννοείτε “περίεργους Δεκαδικούς”;» ρώτησε ο 3,618.

«Κάποιες φορές, εμφανίζονται στα Διαστήματα κάποιοι Δεκαδικοί, στους οποίους δεν μπορείς να διακρίνεις καθαρά πόσα ακριβώς δεκαδικά ψηφία έχουν. Επρόκειτο για μια έρευνα που την ξεκίνησε ο Φυσικός 1. Έπρεπε όλοι οι Φυσικοί, σε όλα τα Διαστήματα, να βρουν αυτούς τους ιδιαίτερους Δεκαδικούς και να τους καλέσουν στα Κάστρα τους. Εγώ, όπως και πολλοί άλλοι Δεκαδικοί, ψάχναμε τέτοιους Δεκαδικούς και κατόπιν ενημερώναμε τους Φυσικούς για την ύπαρξή τους», εξήγησε ο 3,888.

«Και τι τους έκαναν αυτούς τους Δεκαδικούς μετά;» ρώτησε ο 3,618.

«Αυτό δεν το γνωρίζω. Λογικά, θα εξετάζονταν ως προς την ιδιομορφία τους αυτή και θα επέστρεφαν στη θέση τους, φαντάζομαι».

«Εσείς όμως, που ταξιδέψατε μέχρι το Κάστρο 2, μάθατε κάτι περισσότερο για τον Ναό του 0;» επανέφερε την κουβέντα ο 3,622.

«Δεν ξέρω να σου πω με σιγουριά κάτι για τον Ναό του 0. Συμπεραίνω όμως, ότι, αν κάποιος γνωρίζει

τα μυστήρια του Άρπλας, τότε σίγουρα θα βρίσκεται εκεί!»

Οι 2 Δεκαδικοί έμειναν για λίγα δευτερόλεπτα ακίνητοι να αναλογίζονται τι μυστήρια μπορεί να κρύβει άραγε ο Ναός του 0.

«Θέλετε να σας φέρω λίγο τσάι;. Τόση ώρα είστε εδώ και δε σας προσέφερα κάτι…», διέκοψε τη σιωπή ο 3,888.

Οι δύο Δεκαδικοί έγνεψαν καταφατικά.

«Ε, 3,622, είδες που σου είπα να έρθουμε;» είπε με νόημα ο 3,618, όταν ο 3,888 χάθηκε στην κουζίνα του τετράπλευρου του.

Ο 3,622, που δεν είχε ξαναδεί τέτοια ζέση στα ψηφία του καινούριου του φίλου, ήταν πια σίγουρος ότι αυτή η έκφραση έκρυβε περιπέτειες…

9.1.5 Το "έγγραφο-άξονας"

Μια βδομάδα μετά την επίσκεψή τους στον Κύριο 3,888, ο 3,622 καθόταν στο γραφείο του, μέσα στο τετράπλευρο του, κρατώντας το 3 του στεναχωρημένος. Δεν μπορούσε να χωνέψει αυτό που του είχε συμβεί. Είχε παρουσιάσει αυτό-νουμέρως το "έγγραφο-άξονα" στον Φυσικό 4!

Όμως, η συνάντησή τους δεν είχε εξελιχθεί όπως εκείνος περίμενε. Αντί να πάρει τα συγχαρητήρια για την ιδέα της Διάταξης των Δεκαδικών που είχε επινοήσει, ο Φυσικός 4, μόλις έμαθε τον τρόπο που είχε φτιάξει το έγγραφο, διέταξε να τον συλλάβουν αμέσως! "Παράβαση καθήκοντος" η ετυμηγορία… Ο 3,622 ήταν καταδικασμένος να καταλήξει στη φυλακή του Κάστρου. Ευτυχώς, λόγω έντιμου πρότερου δεκαδικού βίου, γλίτωσε την φυλάκιση. Έχασε όμως, μια και καλή, την θέση του ως Θεωρητικός Δεκαδικός του Κάστρου 4.

Όλα τριγύριζαν στο μυαλό του ξανά και ξανά. Κάτω από τα νούμερά του υπήρχαν μαύροι κύκλοι από την αυπνία. Κι από την πολλή του στεναχώρια, ούτε να κοιμηθεί δεν μπορούσε. Πόσο μάλλον να βρει το θάρρος για να βγει έξω από το Σχήμα του. Αν τυχόν συναντούσε κάποιον γείτονα; Τι θα του έλεγε; Πως θα παραδεχόταν σε όλους τους γνωστούς του Δεκαδικούς ότι δεν δουλεύει πια στο Κάστρο 4; Με τι νούμερα θα αντίκριζε τους Θεωρητικούς του Κάστρου που κάποτε δούλευαν μαζί; Ντρεπόταν τόσο πολύ... Μα να τον διαγράψουν;

«Δεν υπάρχει κάτι χειρότερο να μου συμβεί. Όλα τελείωσαν...» σκεφτόταν. *«Τι μου μένει πια; Να γίνω ένας πρακτικός Δεκαδικός; Και μετά; Όλη μου η ζωή από την αρχή; Ουφ!»*, ξεφύσηξε με απογοήτευση και σηκώθηκε να φτιάξει έναν σκέτο καφέ, μήπως συνέλθει.

«Γκλιν γκλον, γκλιν γκλον» ακούστηκε το κουδούνι. Ο 3,622 έσυρε τα ταλαιπωρημένα του νούμερα μέχρι την πόρτα.

«Ποιος να είναι τώρα; Αν είναι κανείς Θεωρητικός;» σκέφτηκε ο 3,622.

«Πού χάθηκες εσύ και σε ψάχνω;» φώναξε απ' έξω ο Δεκαδικός φίλος του.

«Α, εσύ είσαι, 3,618….» είπε με βραχνιασμένη φωνή ο 3,622.

«Τι έγινε; Πώς είσαι έτσι; Όλα καλά;» έκανε τη μια ερώτηση μετά την άλλη ο 3,618.

«Θες να περάσεις μέσα; Μην έχω ανοιχτή την πλευρά και μας ακούνε όλοι», είπε ο 3,622 κοιτάζοντας τριγύρω στη γειτονιά.

«Ο ναός του 0! Το Κάστρο 1!» συνέχισε ακάθεκτος ο 3,618, μπουκάροντας στο τετράπλευρο του 3,622.

«Τα σκεφτόμουν όλα αυτά αυτήν την εβδομάδα...»

«Μπράβο σου» είπε ανέκφραστα ο 3,622.

«Δεν θα προκαλέσω τελικά σε μονομαχία τον Φυσικό 4. Μου άλλαξες γνώμη!» είπε με χαρά ο 3,618.

«Καλό αυτό», απάντησε με λυπημένο ύφος ο 3,622.

«Εσύ τελικά, τι έχεις»; ρώτησε ο 3,618.

«Θες όντως να μάθεις; Καταστροφή! Με το που είπα την ιδέα μου για την Διάταξη των Δεκαδικών, ο Φυσικός 4 εξοργίστηκε. Με κατηγόρησε για "παράβαση καθήκοντος". Όχι μόνο δεν εφαρμόστηκε η ιδέα μου για την απογραφή, αλλά έχασα και τη θέση μου από Θεωρητικός του Κάστρου…» είπε ο 3,622.

«Απίστευτο! Αφού η ιδέα σου ήταν φοβερή… Τι εννοείς "παράβαση καθήκοντος";» ρώτησε έντονα ο 3,618, σαν να είχαν απολύσει τον ίδιο.

«Όπως μου είπε ο Φυσικός 4, έπρεπε να κάνω την ετήσια απογραφή, σύμφωνα με τις οδηγίες. Έπρεπε να τις ακολουθήσω κατά γράμμα. "Δεν είσαι εσύ ο αρμόδιος για να αποφασίζει, εγώ είμαι!" μου είπε, και λίγο έλειψε να με συλλάβουν. Τη γλίτωσα λόγω καλής διαγωγής. Είμαι εντελώς βλάκας που άλλαξα τις οδηγίες του Φυσικού, πήγαινα όντως γυρεύοντας…» είπε, έτοιμος να κλάψει ο 3,622.

«Εννοείται πως είσαι βλάκας! Αλλά όχι γι' αυτό που νομίζεις. Είσαι βλάκας γιατί επιτρέπεις σ' έναν Φυσικό αριθμό να σου πει τι είσαι ικανός να κάνεις και τι όχι! Γι' αυτό και μόνο…» είπε ο 3,618, κοιτάζοντας σοβαρός τον 3,622.

«Τι θα κάνω τώρα; Το όνειρο μου; Πάει… Χάθηκε! Τι θα κάνω;» είπε με δάκρυα στα νούμερά του ο 3,622.

«Χαίρομαι που ρωτάς. Γιατί γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ήρθα σήμερα…», είπε ο 3,618 και χαμογέλασε.

«Μια βδομάδα τώρα, σκέφτομαι αυτό που μου είπες, κι είχες δίκιο. Ο μόνος τρόπος να αποδείξω ότι δεν είμαστε κατώτεροι από τους Φυσικούς, δεν είναι να μονομαχήσω με τον Φυσικό 4. Αλλά, με τον 1, τον δυνατότερο Φυσικό απ' όλους. Τότε, και μόνο τότε, θα δουν οι Φυσικοί την αξία μας… Αν ένας από εμάς μπορέσει, τότε σίγουρα μπορούν κι άλλοι. Η εξουσία των Φυσικών στο Άρπλας θα καταρρεύσει…. Κι οι Δεκαδικοί θα αναγνωριστούν!» εξήγησε ο 3,618.

Ο 3,622, δεδομένης και της κατάστασής του, ένιωθε, αυτή τη φορά, να τον αγγίζουν τα μεγάλα σχέδια του φίλου του.

«Ωραία, μακάρι να τα καταφέρεις! Εγώ όμως τι σχέση έχω μ' αυτό;» ρώτησε.

«Ποιο είναι το όνειρο σου 3,622;»

«Δεν έχει καμία αξία το όνειρο μου, δεν κατάλαβες τίποτα απ' αυτά που σου είπα.... Δεν μπορώ πια να πάω ως Θεωρητικός ούτε καν στο Κάστρο 4! Ποιο Κάστρο 1 μου τσαμπουνάς; Με τον πόνο μου παίζεις;»

«Θες να έρθεις μαζί μου στο Κάστρο 1; Ή μάλλον, θες να έρθεις μαζί μου πέρα από το Κάστρο 1; Στον Ναό του Μηδενός;» πρότεινε αποφασιστικά ο 3,618.

«Μήπως δεν άκουσα καλά;» σκεφτόταν ο 3,622.

«Στον Ναό του Μηδενός! Εκεί μέσα θα βρούμε τα μυστικά του κόσμου. Από πού προήλθαμε και προς τα πού οδεύουμε! Θα ανακαλύψουμε τί σημαίνει να είσαι Δεκαδικός! Ποια η πραγματική σημασία της ύπαρξής μας…» συνέχιζε ο 3,618.

«Τώρα, κάνεις σα Δεκαδικός που μόλις ξεκίνησε να υπάρχει…. Δεν ξέρεις ότι στον δρόμο προς τον Ναό του 0, βρίσκονται 3 Κάστρα Φυσικών αριθμών; Αν ήταν τρέλα να πας στο Κάστρο 4, το να πάμε στο Κάστρο 1 -ή ακόμη μακρύτερα, στον Ναό του Μηδενός- τι νομίζεις πως είναι; Θα σου πω εγώ, σκέτη

αυτοκτονία είναι!» είπε εκνευρισμένος ο 3,622.

«Δεν είμαι πια Θεωρητικός Δεκαδικός, το κατάλαβες; Και, με κάποιον τρόπο, θα πρέπει να περάσουμε τρία ολόκληρα Κάστρα. Με κάποιον τρόπο μη νόμιμο… Τι δεν καταλαβαίνεις;» συνέχισε ο 3,622. Πραγματικά, αν φορούσε ρούχα, θα είχε βγει από αυτά…

«Γι' αυτό έχω εσένα, έναν θεωρητικό Δεκαδικό, για να λύσεις κάθε μαθηματικό πρόβλημα που θα βρεθεί στο δρόμο μας!» είπε γελώντας ο 3,618.

«Είσαι τρελός. Δεν ξέρω γιατί σου μιλάω ακόμη!»

«Λοιπόν, πότε να περάσω να σε πάρω; Σε καμιά βδομάδα; Ή λες καλύτερα, να φεύγαμε σε 2-3 μέρες; Τι λες;» ρώτησε ο 3,618, εννοώντας κάθε του λέξη.

«Το ταξίδι προς το Ναό του 0 θέλει να έχεις τα νούμερα σου δεκατέσσερα, κι εσύ είσαι πολύ απερίσκεπτος για ένα τέτοιο ταξίδι» προσπάθησε να τον συνεφέρει ο 3,622.

«Σύμφωνοι, θα είμαι σοβαρός. Είμαι σίγουρος πως εσύ ο ίδιος θα φροντίσεις να είμαστε προσεκτικοί. Άλλος ένας λόγος να πάμε μαζί!» χάρηκε ο 3,618.

«Αα, εσύ θα τρελάνεις και μένα στο τέλος! Ωραία, έστω ότι έρχομαι μαζί σου. Πώς ακριβώς θα περάσουμε τα Κάστρα των Φυσικών; Είμαι σίγουρος ότι δεν έχεις το παραμικρό σχέδιο», είπε με σιγανή φωνή ο 3,622, μην τους ακούσει κανένα Κλάσμα απ' έξω.

«Γι' αυτό είμαστε δύο, γι' αυτό είμαστε ομάδα. Για να σκεφτούμε έναν, τουλάχιστον, τρόπο. Έχουμε άλλωστε 2-3 μέρες περιθώριο. Όλο και κάτι θα μας έρθει!» είπε απτόητος ο 3,618.

«Αποκλείεται, σου λέω φοβάμαι πάρα πολύ για κάτι τέτοιο…».

«Στον Ναό του 0 θα λυθούν όλες σου οι απορίες και θα πάψεις πια να φοβάσαι. Στον ναό του 0!» είπε ο 3,618 και χοροπηδώντας βγήκε από την ανοικτή πλευρά του τετράπλευρου.

Ο 3,622 είχε μείνει στήλη άλατος και προσπαθούσε να καταλάβει αν συμφώνησε ποτέ σε κάτι τόσο επικίνδυνο. Ο 3,618 πισωγύρισε και ρώτησε συνωμοτικά τον μελλοντικό του συνταξιδιώτη:

«Στο Σχήμα του 3,888, παρατήρησες μια κορνίζα περίεργη;»

«Ξέρω ποια λες, την οβάλ. Τη "*Μηδέν θαυμάζειν!"*...» είπε ο 3,622, που δεν του ξέφευγαν κάτι τέτοια.

«Κατάλαβες εσύ τι σημαίνει;» ρώτησε ο 3,618.

«Να θαυμάζεις το Μηδέν; Ξέρω κι εγώ…» είπε ο 3,622.

Ο 3,618 κοντοστάθηκε λίγο. Τον κάλυπτε - δεν τον κάλυπτε η απάντηση… Είχε όμως τροφή για σκέψη.. Και για δράση… Έριξε μια γρήγορη ματιά στο τρίγωνο Κάστρο 3 που φαίνονταν από μακριά να σκίζει τον ουρανό με την μυτερή του κορυφή. Μετά, με σταθερό ρυθμό, τα ψηφία του χάθηκαν πίσω από ένα τετράπλευρο της γειτονιάς του 3,622.

9.1.6 Το ταξίδι ξεκινά

Ο ήλιος βρισκόταν ψηλά στον ουρανό του Άρπλας, στη γνωστή του θέση, και, όταν το φως του άρχιζε να χαμηλώνει, στο βασίλειο του Άρπλας έπεφτε η νύχτα. Ο ήλιος στο βασίλειο του Άρπλας είχε σταθερή θέση, όπως όλοι οι αριθμοί άλλωστε. Βρισκόταν πάνω από τον άξονα και φώτιζε όλα τα Διαστήματα και όλα τα Κάστρα των Φυσικών. Αυτό βέβαια γίνονταν τη μέρα, γιατί τη νύχτα ο ήλιος έσβηνε και στο Διάστημα απλωνόταν το απόλυτο σκοτάδι. Φεγγάρι δεν υπήρχε στο βασίλειο του Άρπλας και τη νύχτα δεν μπορούσες να δεις τίποτα, αν δεν είχες φως μαζί σου.

Ο 3,622 είχε κρεμάσει ένα μικρό φακό στην κορυφή του 6 του για να βλέπουν στο σκοτάδι που απλωνόταν βαθύ στην τεράστια σκιά του τρίγωνου Κάστρου 3. Η ώρα που άρχιζε να σβήνει ο ήλιος ήταν ιδανική για να ξεκινήσουν, καθώς όλα τα αδιάκριτα δεκαδικά βλέμματα κοιμούνταν τον ύπνο του δικαίου. Παρόλα αυτά, έπρεπε να περπατούν προσεκτικά και να έχουν πάντα το νου τους για περιπολίες Κλασμάτων.

Πίσω, στα Σχήματά τους, είχαν αφήσει δεκαδικές απεικονίσεις τους, ώστε αν κάποιος περαστικός, Δεκαδικός ή Κλάσμα, περνούσε από έξω, να νομίζει ότι βρίσκονται ακόμη στη θέση τους. Επιπλέον, ο 3,618 φρόντισε να μη βάλει κάποια επισκευή ή χτίσιμο γεωμετρικού Σχήματος στο πρόγραμμά του, ώστε να μην τον αναζητήσουν.

Οι δυο Δεκαδικοί περπατούσαν προς το Κάστρο του Φυσικού 3. Είχε περάσει αρκετή ώρα, χωρίς να μιλούν. Σκέφτονταν κι οι δύο το μεγάλο ταξίδι που μόλις είχε ξεκινήσει. Το φως του φακού έπεφτε πάνω στα τετράπλευρα της περιοχής και οι σκιές τους γεννούσαν διάφορα γεωμετρικά Σχήματα, που καθώς προχωρούσαν άλλαζαν μορφή και μέγεθος.

«Περπατάμε αρκετή ώρα, δε νομίζεις; Πού λες να βρισκόμαστε;» ρώτησε ο 3,618 που είχε αρχίσει να αποπροσανατολίζεται κάπως. Με το λιγοστό φως δεν μπορούσε να αναγνωρίσει τα σημάδια που είχε βάλει τη μέρα για να βρίσκει τον δρόμο του.

«Δεν έχουμε ακόμη περάσει το μέσο του Διαστήματός μας», είπε ο 3,622, «άρα πού θα έλεγες ότι είμαστε;»

«Είμαστε πριν το 3,5;» είπε ο 3,618.

Ο 3,622 έγνεψε καταφατικά.

Εκεί που περπατούσαν, συνάντησαν ένα τετράπλευρο διαφορετικό από τα άλλα. Ήταν μακρόστενο και η πάνω πλευρά του ξεπερνούσε σε ύψος όλα τα τετράπλευρα της περιοχής.

«Αυτό είναι το Σχήμα του 3,5. Άκουσα ότι πρόσφατα κατατάχθηκε στην υπηρεσία των Κλασμάτων», ψιθύρισε ο 3,622.

«Γιατί να θέλει ένας Δεκαδικός να γίνει Κλάσμα δηλαδή;» αναρωτήθηκε πάλι ο 3,618.

«Μη μιλάς δυνατά, μπορεί να μας ακούσει ο 3,5 και να έχουμε μπλεξίματα» είπε ο 3,622 κοιτάζοντας τον 3,618 με έντονο ύφος.

«Προσωπικά, δεν καταλαβαίνω γιατί το λες αυτό. Είναι το όνειρο αρκετών Δεκαδικών να γίνουν Κλάσματα. Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να υπηρετήσουν καλύτερα κι από πιο κοντά τους Φυσικούς. Άσε που αρκετά Κλάσματα μπορούν έτσι να μείνουν στα Κάστρα, ως μέλη της προσωπικής φρουράς των Φυσικών. Φαντάσου ότι ακόμη κι εμείς οι Θεωρητικοί, που είμαστε όλη μέρα για δουλειά στα Κάστρα των Φυσικών, δεν κοιμόμαστε εκεί το βράδυ. Ποιοι θεωρητικοί δηλαδή; Πρώην θεωρητικοί…» είπε ο 3,622.

Ο 3,618 κοίταξε τα παράθυρα του μακρόστενου Σχήματος και σοβάρεψε αμέσως. Το φως ήταν ανοιχτό και τα παράθυρα είχαν κάγκελα. Οι πλευρές του ήταν τέλειες, οι κορυφές του μυτερές κι οι γωνίες του πέρα για πέρα ορθές. Τα κάγκελα των παραθύρων ήταν παράλληλα με τις πλευρές του. Το τετράπλευρο αυτό

δεν έμοιαζε σαν μια συνηθισμένη δουλειά πρακτικού του Διαστήματος, ήταν πραγματικά αψεγάδιαστο! Αλλά ποιος πρακτικός Δεκαδικός είχε άραγε τέτοιες ικανότητες και δεν τον ήξερε; Κοίταξε τα παράθυρα προσεκτικά για να δει αν κάποιος ήταν μέσα και μετά άρχισε να κατευθύνεται προσεκτικά προς το Σχήμα.

«Έε, πού πας;» του φώναξε ο 3,622.

Όμως ο 3,618 είχε απορροφηθεί πλήρως από την περιέργειά του να δει από κοντά το Κλάσμα που κατοικούσε στο τέλειο αυτό Σχήμα.

«Έειιι, μπορεί να μας δουν! Μη μ' αφήνεις μόνο εδώ τώρα…» και χωρίς να μπορεί να κάνει κάτι ο 3,622, τον ακολούθησε γεμάτος άγχος. Πλησίασε τον 3,618, που είχε φτάσει στο αριστερό παράθυρο, και προσεκτικά κοίταξαν μαζί μέσα στο Σχήμα.

Το εσωτερικό του ήταν διακοσμημένο με μια απλή ταπετσαρία σε κίτρινο χρώμα. Στους τοίχους υπήρχαν χάρτες με τα Κάστρα των Φυσικών από το 1 έως το 5. Το τραπέζι ήταν άδειο και είχε πάνω μόνο ένα ποτήρι μισοάδειο. Η κουζίνα φαινόταν σκοτεινή και μπροστά από την τραπεζαρία είχε το καθιστικό. Τίποτα περίεργο δεν υπήρχε σε αυτό το Σχήμα. *«Τακτοποιημένο και σωστό Σχήμα Κλάσματος»*, σκέφτηκε ο 3,622.

Ο 3,618 κοίταζε κάτι συγκεκριμένο. Πάνω από το τζάκι υπήρχαν 4 πίνακες. Οι 2 είχαν ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο, ενώ οι άλλοι 2 είχαν από ένα περίεργο Σχήμα, που ο ίδιος δεν γνώριζε. «Γιατί να έχει αυτούς τους πίνακες άραγε;» μουρμούρισε μετά από λίγο.

«Αυτός εκεί, είναι ένας λεπτομερέστατος χάρτης του τετράγωνου Κάστρου 4. Ξέρω τα σχέδια απ' έξω…» είπε σιγανά ο 3,622.

Ξαφνικά, ακούστηκε το καζανάκι κι η πόρτα της τουαλέτας άνοιξε. Από μέσα βγήκε ένα Κλάσμα. Οι δυο Δεκαδικοί έσκυψαν αμέσως για να μην τους δει ο ψηλός ένοικος και κοιτάχτηκαν έντρομοι.

«Νομίζω ότι δεν μας είδε», ψιθύρισε φοβισμένος ο 3,622.

Ο 3,618 είχε γουρλωμένα ψηφία και δεν έλεγε λέξη. Ο 3,622 τον έπιασε από την υποδιαστολή του και, σέρνοντάς τον, απομακρύνθηκαν σιγά-σιγά. Όταν έφτασαν σε αναγκαία και ικανή απόσταση, ο 3,622 είπε με σιγανή φωνή:

«Καλά, εσύ τι έπαθες ξαφνικά; Δεν έχεις ξαναδεί Κλάσμα στη ζωή σου; Κάνεις σα να είδες φάντασμα… Μη φοβάσαι, δεν μας είδε».

Μόλις τα ψηφία του σαστισμένου 3,618 επανήλθαν στη φυσιολογική μορφή τους, είπε:

«Το Κλάσμα αυτό το γνωρίζω, είναι ο 7/2!»

«Αλήθεια, ξέρεις αυτό το Κλάσμα;» ρώτησε ο 3,622.

«Ναι, αλλά δεν ήξερα ότι είναι ο 3,5 και ότι μένει εδώ».

«Ήξερα ότι αρχικά έμενε σ' ένα πιο χαμηλό τετράπλευρο, αλλά μετά τη Μετατροπή του σε Κλάσμα, άλλαξε το Σχήμα του. Βασικά, το έκανε πιο μακρύ για να ξεχωρίζει στη γειτονιά… Ίσως και για να χωράει πιο άνετα, ως Κλάσμα πια, εκεί μέσα» είπε ο 3,622, απομακρυνόμενος από το τετράπλευρο.

«Τώρα δηλαδή, πρέπει να φωνάζουμε τον 3,5 "7/2";» ρώτησε ο 3,618, ακολουθώντας τον φίλο του.

«Ναι. Είναι λίγο περίεργο, από τη μια στιγμή στην άλλη, ένας Δεκαδικός να αλλάζει όνομα και μορφή, αλλά έτσι είναι η Μετατροπή».

«Τι ξέρεις για τη Μετατροπή των Δεκαδικών σε Κλάσματα, πέρα από την αλλαγή μορφής και ονόματος;» τον ρώτησε ο 3,618.

«Κοίτα, οι Δεκαδικοί που αποφασίζουν να καταταγούν στην υπηρεσία Κλασμάτων των Φυσικών, πρέπει να περάσουν τη διαδικασία μύησης. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την εκπαίδευση των Δεκαδικών από Κλάσματα. Η εκπαίδευση γίνεται στα Κάστρα των Φυσικών, όπου, εσώκλειστοι οι Δεκαδικοί, χωρίς να μπορούν να δουν άλλον Δεκαδικό για 1 μήνα, λαμβάνουν την ειδική εκπαίδευση των Κλασμάτων», εξηγούσε ο

3,622.

Ο 3,618 τον άκουγε, φέρνοντας εμπρός του ολοζώντανη τη σκηνή όπου ο 7/2 τον κοίταζε υπεροπτικά, όταν ο 3,618 ήταν πεσμένος στο έδαφος. Τα λόγια του 7/2 ακούγονταν βροντερά μέσα στο μυαλό του, ξανά και ξανά *«Καταλαβαίνεις τη δύναμη που έχει ένα Κλάσμα, μικρέ;»*.

«Η μύηση ολοκληρώνεται με μια τελετή που γίνεται στην κεντρική αίθουσα του Κάστρου με παρόντες τον Φυσικό και κληρικούς από το Ναό του Μηδενός. Η Μετατροπή του Δεκαδικού σε Κλάσμα διαρκεί μερικές ώρες και μετά ο Δεκαδικός είναι έτοιμος να επιστρέψει στην θέση του, ως ένα νέο Κλάσμα στην υπηρεσία των Φυσικών», συνέχιζε με διδακτικό τόνο ο 3,622.

«Βέβαια, κι αυτά που ξέρω είναι όλα στο περίπου. Η αλήθεια είναι δεν έχω δει ποτέ με τα ίδια μου τα ψηφία τη διαδικασία αυτή. Επομένως, δεν θα ήταν μαθηματικώς ορθό να βασιζόμαστε σε φήμες για να κατανοήσουμε τη Μετατροπή. Πρέπει να μάθουμε ακριβώς πώς γίνεται…» είπε σκεπτικός ο 3,622.

* * * * *

Είχε περάσει αρκετή ώρα που περπατούσαν στο Διάστημα, τα ψηφία τους είχαν αρχίσει να βαραίνουν. Η γειτονιά των τετράπλευρων, χωρίς φως, ήταν τρομαχτική. Παντού ξεπρόβαλλαν γωνίες κι εύκολα μπορούσε κάποιος να τραυματιστεί, αν ήταν έστω λίγο αφηρημένος.

«Πότε θα κάνουμε την πρώτη στάση;» είπε ο 3,618, «Πείνασα!»

«Κάνε λίγο υπομονή», είπε λαχανιασμένος ο 3,622, «εδώ κοντά πρέπει να μένει η θεία της φίλης που σου έλεγα. Η θέση της είναι στο 3,11. Λέω να κάνουμε εκεί την πρώτη μας στάση. Και να σκεφτούμε ένα σχέδιο για να περάσουμε και από το Κάστρο 3... Έχω χρόνια να έρθω εδώ, αλλά, αφού μόλις περάσαμε το 3,15, είμαστε αρκετά κοντά· για την ακρίβεια, λιγότερο από 0,05 κοντά».

Ο 3,618 δεν πολυκαταλάβαινε τις πράξεις που έκανε στο μυαλό του ο 3,622, αλλά ήταν χαρούμενος που ο νέος του φίλος ήταν τόσο καλός στις μαθηματικές πράξεις.

«Ορίστε», είπε ο 3,622 «εδώ μένει η θεία!» κι αμέσως τράβηξε το μοχλό στην αριστερή πλευρά του τετράπλευρου της.

9.1.7 Το Σχήμα της θείας

Η πόρτα άνοιξε και μια Δεκαδικός με διαπεραστική φωνή τους υποδέχτηκε.

«Καλώς τους!» είπε στον 3,622, ρίχνοντας ταυτόχρονα μια ματιά στον 3,618.

«Περάστε μέσα, άντε… Βλέπω έφερες και παρέα…»

Αμέσως μετά, χωρίς να περιμένει απάντηση κατευθύνθηκε προς το εσωτερικό του Σχήματος. Ο 3,622 έκανε νόημα στον 3,618 να κλείσει την πλευρά του τετράπλευρου και να τον ακολουθήσει. Ο 3,618 προσπάθησε να κλείσει την πλευρά του Σχήματος καθώς κοιτούσε την Δεκαδικό που κινούνταν κάνοντας περίεργες ταλαντωτικές κινήσεις προς το κέντρο του σπιτιού.

Το Σχήμα της θείας ήταν πολύ ευρύχωρο, *«παλιά, αλλά καλή κατασκευή»* σκέφτηκε ο 3,618. Οι πλευρές από μέσα ήταν καλυμμένες με μία ροζ παλιομοδίτικη ταπετσαρία, την οποία διακοσμούσαν μικρά άσπρα και κίτρινα τρίγωνα, που μέσα τους είχαν άλλα μικρότερα τρίγωνα κι αυτά με τη σειρά τους άλλα, και ούτω καθεξής. Το μοτίβο αυτό προσέδιδε επιπλέον βάθος στο χώρο, μιας και δύσκολα διέκρινες πού αρχίζει και πού τελειώνει.

«Σας αρέσει η ταπετσαρία μου; Είναι τύπου φράκταλ και την είχα κάνει ειδική παραγγελία από το Διάστημα (2, 3]…» είπε περήφανη η θεία.

Το τετράπλευρό της είχε δύο παράθυρα, ένα σε κάθε πλευρά, και μια τεράστια καμινάδα στο κέντρο της πάνω πλευράς. Στο κέντρο του Σχήματος της, κάτω από την καμινάδα, βρισκόταν τώρα η θεία, μαζί με μια άλλη Δεκαδικό, η οποία φαινόταν αρκετά εξοικειωμένη με το χώρο. Μαζί, οι δυο Δεκαδικές, μαγείρευαν σε μια μεγάλη τετράγωνη κατσαρόλα.

«Είμαι η 3,141, η ανιψιά της. Χαίρομαι για τη γνωριμία» είπε, κοιτώντας κυρίως τον 3,618.

«Ελάτε προς το κέντρο, τι στέκεστε στη γωνία;»

Ο 3,618 κι ο 3,622 χαμογέλασαν κι ανταπέδωσαν τους επίσημους χαιρετισμούς. Μετά που έσπασε κάπως ο πάγος, πλησίασαν προς την κατσαρόλα.

«Τι φτιάχνετε εκεί;» ρώτησε ο 3,618 με περιέργεια.

«Προσπαθούμε να φτιάξουμε μια μαθηματική σούπα, αλλά, κάπου στο τέλος, τη χάνουμε τη συνταγή. Οι γευστικές εξισώσεις είναι 3 και τα μαθηματικά άγνωστα υλικά είναι 4, οπότε έχουμε καταλήξει σ' ένα άλυτο μαθηματικό πιάτο...» είπε η 3,141.

Η θεία, δίχως να σηκώσει το βλέμμα της, συνέχιζε να ανακατεύει τη σούπα, προσπαθώντας να βρει το λάθος.

«Η θεία είναι φημισμένη για τη μαθηματική της μαγειρική», ενημέρωσε ο 3,622 τον 3,618, ο οποίος δεν είχε ιδέαν μαγειρικής.

«Μπορεί το βασίλειο του Άρπλας να έχει άπειρους Δεκαδικούς, λίγοι όμως φημίζονται για τη μαγειρική τους τέχνη, όπως η θεία. Σκέψου, 3,618, ότι έχει μαγειρέψει για τους πιο ισχυρούς Φυσικούς…»

«Χι, χι, χι! Νομίζω ότι μόλις βρήκα πώς θα λύσω αυτό το πιάτο!» είπε η θεία, που τόση ώρα άκουγε σιωπηλή να την εκθειάζουν.

«Πρέπει, είτε να προσθέσω μία γευστική εξίσωση, που αυτό βέβαια θα έκανε το πιάτο πολύ σύνθετο, είτε να αφαιρέσω ένα άγνωστο υλικό, που θα έκανε το πιάτο πολύ βαρετό...Μμμμ, ανιψιά, πιάσε μου το βάζο με τα γευστικές εξισώσεις!»

Η 3,141 της έδωσε από το ράφι ένα βάζο που έγραφε f(x) πάνω. Η θεία το άνοιξε και το μύρισε. Μετά, έβγαλε από μέσα την κατάλληλη γευστική εξίσωση και την πέταξε δυναμικά στην τετράγωνη κατσαρόλα. Το μίγμα αμέσως δημιούργησε μια δεξιόστροφη δίνη, ενώ μια θεσπέσια μυρωδιά άρχισε να αναδύεται σ' ολόκληρο το τετράπλευρο. Τότε, η θεία άρχισε ν' ανακατεύει δυνατά τη σούπα, με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού, ώσπου αυτή άρχισε ν' αλλάζει χρώμα. Η μεγάλη δίνη έδωσε τη θέση της σε χιλιάδες άλλες μικρότερες, μέχρι που το μείγμα ηρέμησε. Η θεία κοίταξε την επιφάνεια του υγρού κι όταν αυτή κόπασε τελείως, είπε με σιγανή φωνή: «Όπερ έδει δείξαι!»

Ο 3,618 ένιωσε τα ψηφία του να ριγούν από αυτόν τον μυστικισμό που συνόδευε τη μαγειρική της θείας. *«Είναι συγκινητικό»* σκέφτηκε.

Η θεία, αφού δοκίμασε με την τετράγωνη κουτάλα της, χαμογέλασε ικανοποιημένη και καπάκωσε την κατσαρόλα, μην της κρυώσει το αποτέλεσμα. «Ανιψιά, βγάλε το καλό σερβίτσιο να υποδεχτούμε σωστά τους επισκέπτες μας!» είπε με χαρά.

* * * * *

«Λοιπόν, πώς σας φαίνεται;» ρώτησε χαμογελαστή η θεία.

«Θεία, είναι τέλειο, όπως πάντα», είπε επιβραβεύοντάς την η 3,141.

«Φοβερή!» συμφώνησαν κι οι δύο Δεκαδικοί.

«Εσύ 3,141, τι σου αρέσει να κάνεις;» ρώτησε ο 3,618 κάπως άβολα, έτσι για ν' ανοίξει κουβέντα. Και, χωρίς να περιμένει απάντηση, έχωσε μια τόσο μεγάλη κουταλιά στο στόμα του, που κόντεψε να πνιγεί.

«Εεε, τώρα, κάνω παρέα στη θεία μου αυτόν τον καιρό» είπε η 3,141 αποφεύγοντας από ντροπή το βλέμμα του.

«Διαβάζει, διαβάζει βιβλία όλη μέρα. Για τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες και τη φιλοσοφία. Σωστή βιβλιοφάγος! Η βιβλιοθήκη της κοντεύει να μη χωράει πια στο δωμάτιό της» είπε η θεία.

«Προσπαθώ με το ζόρι να της μάθω λίγη μαθηματική μαγειρική, αλλά αυτή έχει δώσει την καρδιά της στα βιβλία. Λογικά, θα γίνει Θεωρητικός Δεκαδικός κάποια στιγμή».

«Αα, τι ωραία! Κι εγώ Θεωρητικός είμαι. Ή μάλλον ήμουνα…» είπε ο 3,622 κι από χαρούμενο το 3 του έγινε σκυθρωπό.

«Γιατί δεν είσαι πια;» ρώτησε η 3,141.

«Έκανα ένα λάθος και μ' έδιωξαν από το Κάστρο 4, όπου δούλευα» απάντησε κοιτάζοντας κάτω.

«Κανένα λάθος δεν έκανε, απλά δεν μπορούσαν να καταλάβουν πόσο έξυπνος είναι!» πετάχτηκε ο 3,618.

«Καλά τώρα, εσύ τι θα έλεγες;» είπε ο 3,622 κοιτάζοντας επικριτικά τον 3,618.

«Όπως και να ᾽χει, λυπάμαι» είπε ευγενικά η 3,141.

«Μη στεναχωριέσαι, αγόρι μου. Λάθη κάνουν μόνο όσοι προσπαθούν!» είπε η θεία.

«Βασικά, δεν έκανα κάποιο μαθηματικό λάθος. Απλώς πρότεινα κάτι, που δεν έπρεπε να το προτείνω», είπε ο 3,622, εμφανώς πιο ανακουφισμένος από τις προηγούμενες μέρες. Η αλήθεια είναι ότι με τη βοήθεια του συνοδοιπόρου του, είχε αρχίσει να ξαναβρίσκει την αυτοπεποίθηση του.

«Πάμε προς τον Ναό του 0», είπε ο 3,618 συνεχίζοντας την κουβέντα.

«Στον Ναό του 0!» είπε η 3,141 και τα νούμερα της γούρλωσαν, ξεχνώντας αμέσως τις ντροπές.

«Ναι! Φοβερό;» είπε ο 3,618.

«Χμ… Είναι δύσκολο το ταξίδι που αποφασίσατε να κάνετε. Είστε σίγουροι γι' αυτό;» είπε η θεία.

Ο 3,622 κοίταξε τον 3,618 με σοβαρό ύφος. Η ερώτηση της θείας χτύπησε ευαίσθητη χορδή. Κι ο ίδιος δεν είχε πάψει στιγμή να προβληματίζεται για την απερισκεψία τους. Αντιθέτως, ο 3,618, με το κουτάλι στο στόμα του, μούγκρισε καταφατικά. Δεν τον ανησυχούσε η ερώτηση της θείας. Ήθελε μόνο να καταλάβει πώς έγινε τόσο νόστιμο αυτό το φαγητό, οπότε προσπαθούσε να συγκεντρωθεί 100% στην κάθε κουταλιά.

«Μπορώ να έρθω κι εγώ μαζί σας;» ρώτησε σοβαρά η 3,141.

Ο 3,622, σκανάροντάς την, προσπάθησε να καταλάβει αν είχε ακούσει καλά. «Δε γίνεται να έρθεις μαζί μας, είναι πολύ επικίνδυνο. Επίσης, εσύ είσαι εδώ με τη θεία σου για να την προσέχεις, μη γίνεσαι απερίσκεπτη!»

«Θες πραγματικά να έρθεις;», ρώτησε ο 3,618 μπουκωμένος.

«Ναι, έχω διαβάσει τόσα και τόσα για τον Ναό του Μηδενός!» απάντησε με λαχτάρα η 3,141.

«Άσε που για τις εξετάσεις που δίνεις για να γίνεις Θεωρητικός έχω ακόμη μήνες, κι έχω διαβάσει όλη

την ύλη, τρεις φορές ήδη!»

«Μπορεί να σε βοηθήσει και ο 3,622 κατά τη διάρκεια του ταξιδιού μας, με τις πιο *sos* ερωτήσεις!», συμπλήρωσε ο 3,618 κοιτώντας με λύπη το πιάτο του που άδειαζε.

Ο 3,622 απ' την άλλη, είχε μείνει με το 3 ανοιχτό. *«Από πού κι ως πού έγινε κι η 3,141 μέλος της ομάδας;»* σκεφτόταν.

Η 3,141, λες και διάβαζε τη σκέψη του 3,622, επανήλθε στην πραγματικότητα και κοίταξε τη θεία της, περιμένοντας την έγκριση της.

«Προσωπικά, δε χρειάζομαι ντάντεμα. Δεν γέρασα δα ακόμη! Να πας, παιδί μου, κανένα πρόβλημα. Αρκεί να προσέχετε ο ένας τον άλλο, ε;» είπε η θεία χαμογελαστή.

Ο 3,622 κάρφωνε τη θεία, όσο εκείνη μιλούσε, προσπαθώντας να βρει τι του θυμίζει. *«Αυτό είναι, είναι τόσο απερίσκεπτη όσο κι ο 3,618! Σίγουρα δεν ανήκουν στην ίδια οικογένεια;»* σκεφτόταν, ενώ ξεψήφισε ένα σιγανό «Ε ρε, πού έμπλεξα!»

«Καιρό είχα να φάω τόσο ωραία! Σ' ευχαριστούμε, θεία» είπε ο 3,618.

Αμέσως σηκώθηκε από το τραπέζι και, κοιτάζοντας τους δύο δεκαδικούς του φίλους, έκανε την επίμαχη ερώτηση «Πότε ξεκινάμε;»

Ο 3,622 χαμογέλασε ειρωνικά, σα να ήξερε ήδη την απάντηση. Η 3,141 έσκασε ένα μεγάλο χαμόγελο. Κι η θεία πετάχτηκε να φέρει κάτι απ' την κουζίνα της:

«Περιμένετε, να φέρω πρώτα το μαθηματικό γλυκό!»

9.1.8 Το σχέδιο

Οι τρεις Δεκαδικοί κάθονταν ξανά στο τραπέζι, απολαμβάνοντας το γλυκό τους κι ένα ρόφημα, που μόλις είχε φτιάξει η θεία.

«Οπότε, τι κάνουμε τώρα;» ρώτησε η 3,141. «Ποιο είναι το σχέδιο;»

«Αρχικά, ας είμαστε ψύχραιμοι. Πρέπει πάντως, να οργανώσουμε ένα σχέδιο για να περάσουμε από το Κάστρο 3», είπε ο 3,622, χαϊδεύοντας απαλά το 6 του.

«Γιατί να μην προσπαθήσουμε να περάσουμε κρυφά το βράδυ;» ρώτησε ο 3,618, καθώς έπινε το ζεστό του μέσα σε απόλυτη ευτυχία.

«Μα καλά, εσύ που ανήκεις; Νομίζεις ότι ο οποιοσδήποτε Δεκαδικός μπορεί να μπει στα Κάστρα των Φυσικών με το έτσι θέλω…» είπε ο 3,622.

«Μα εσύ δούλευες στο Κάστρο 4. Δεν είσαι τυχαίος Δεκαδικός… Κάτι θα σκεφτείς!» απάντησε ο 3,618.

Η 3,141 κοίταζε κι αυτή τον 3,622 με αγωνία.

«Ούτε να το σκέφτεστε… Ακόμη κι αν μπορούσαμε με κάποιο πλαστό έγγραφο να μπούμε στο Κάστρο 3, μετά από λίγο θα μας ξεσκέπαζαν. Και τότε, δε θέλω ούτε να φανταστώ πού θα καταλήγαμε!»

«Τέλεια ιδέα! Μπράβο σου 3,622, είσαι πανέξυπνος! Πώς μπορούμε να ετοιμάσουμε ένα τέτοιο έγγραφο, ώστε να περάσουμε από το Κάστρο 3 το συντομότερο;» είπε ο 3,618 σα να καθόταν σ' αναμμένα κάρβουνα.

«Ο ενθουσιασμός σου, αγαπητέ 3,618, θα μας οδηγήσει σε προβλήματα…» πήγε να τον επιπλήξει ο 3,622.

«Που θα τα λύσουμε μαζί!» συμπλήρωσε ο 3,618.

Ο 3,622 πήρε μια βαθιά ανάσα. Μετά, έξυσε λίγο το 3 του σκεπτικός. Ύστερα από λίγο, σουφρώνοντας κάπως, «Υπάρχει μόνο ένα έγγραφο που θα μπορούσε να μας βάλει στο Κάστρο.

«Τι έγγραφο είναι αυτό;» ρώτησε η 3,141.

«Θυμάσαι 3,618, γιατί με απέλυσαν από το Κάστρο 4;»

«Γιατί είσαι έξυπνος και δεν ήθελαν να το παραδεχτούν!» απάντησε ο 3,618.

«Πρακτικά, γιατί με απέλυσαν; Θυμάσαι;» ξαναρώτησε ο 3,622.

«Γιατί έφτιαξες ένα "έγγραφο-αξίνα" με μαθηματικές πράξεις που δεν καταλάβαιναν;» είπε αβέβαια ο 3,618.

«"Έγγραφο-άξονα" έφτιαξα! Και, ναι, χρησιμοποίησα ένα μαθηματικό τρόπο για να βρω τη θέση των Δεκαδικών του Διαστήματος…» απάντησε ο 3,622, εκνευρισμένος που ο 3,618 δεν είχε δώσει βάση στη δουλειά του.

«Α ναι… "έγγραφο-άξονα", μπράβο!» είπε ο 3,618.

«Ε, μ' αυτό το έγγραφο, μάλλον, μπορούμε να μπούμε στο Κάστρο 3…»

«Μα, τι είναι αυτό το "έγγραφο-άξονας";» ρώτησε με φανερό ενδιαφέρον η 3,141.

«Δίκιο έχεις, 3,141. Ας το πάρουμε απ' την αρχή. Μια φορά το χρόνο γίνεται απογραφή όλων των Δεκαδικών και των Κλασμάτων που ζουν στο Διάστημα. Η απογραφή αυτή γίνεται από το υπεύθυνο Κάστρο του Διαστήματος. Το τελικό έγγραφο που περιέχει τη θέση όλων των Δεκαδικών και των Κλασμάτων του Διαστήματος ονομάζεται "έγγραφο-άξονας".

«Και γιατί αυτό μας βάζει στο Κάστρο 3;» ρώτησε πάλι η 3,141.

«Για τα γεωμετρικά Σχήματα που βρίσκονται στις θέσεις (3, 3,1], δηλαδή, πολύ κοντά στο Κάστρο 3, αλλά στη δικαιοδοσία του Κάστρου 4, όπως καταλαβαίνεις, απαιτείται συνεννόηση των δύο Κάστρων. Οι ακριβείς θέσεις αυτών των Σχημάτων βρίσκονται στο "έγγραφο-άξονα", οπότε, βάσει αυτού του εγγράφου, το Κάστρο 4 αναφέρει τις θέσεις στο Κάστρο 3, για τη μετέπειτα σωστή συνεργασία τους.

«Α, μάλιστα… Κι εσύ 3,622, έφτιαξες αυτό το έγγραφο; Ουάου, φοβερός!» είπε με θαυμασμό η 3,141.

«Στα λόγια μου έρχεσαι» συμφώνησε με την 3,141 ο 3,618.

«Οπότε, ξαναφτιάχνεις το έγγραφο και μπαίνουμε στο Κάστρο 3!» ο 3,618 παρακίνησε τον 3,622.

«Δεν είναι έτσι απλά τα πράγματα. Το έγγραφο αυτό το έφτιαξα την τελευταία φορά με τη βοήθεια των Θεωρητικών του Κάστρου 4. Αυτοί μου υπέδειξαν τις ακριβείς θέσεις όλων των Δεκαδικών και των Κλασμάτων του Διαστήματος, τις οποίες τις βρήκαν αυτο-νουμέρως, κατά την διάρκεια ενός ολόκληρου χρόνου!»

«Μα καλά, εσύ δεν έχεις βρει ένα μαθηματικό τρόπο να υπολογίζεις τη θέση των Δεκαδικών του Διαστήματος;»

«Ναι, εντάξει, τη θέση των Δεκαδικών μπορούμε να την βρούμε στο Διάστημα. Το θέμα είναι, τι κάνουμε με τη θέση των Κλασμάτων. Δεν έχω ιδέα πώς μπορούμε να βρούμε με μαθηματικό τρόπο την θέση των Κλασμάτων...» απάντησε σκεφτικός ο 3,622.

«Μπορείτε να μου κάνετε και μένα μια μικρή περίληψη; Πώς βρίσκεις τη θέση των Δεκαδικών στο Διάστημα;» ρώτησε η 3,141.

«Κάθε Δεκαδικός, ως γνωστόν, έχει υποδιαστολή. Και βέβαια, ψηφία πριν και μετά την υποδιαστολή»

ξεκίνησε ο 3,622.

«Οι αριθμοί πριν την υποδιαστολή μας λένε σε ποιο Διάστημα μένει ο/η κάθε Δεκαδικός. Για παράδειγμα, στο Διάστημα (3, 4] όλοι οι Δεκαδικοί έχουν αριστερά από την υποδιαστολή τους…»

«Το 3, ξέρω» διέκοψε η 3,141.

«Ακριβώς. Οπότε, αν κάναμε απογραφή στο Διάστημα (4, 5], θα βλέπαμε ότι όλοι οι Δεκαδικοί που μένουν εκεί έχουν τον αριθμό 4 αριστερά από την υποδιαστολή και λοιπά…»

Η 3,141 έγνεψε καταφατικά, σα να καταλάβαινε ακριβώς τι λέει ο 3,622.

«Τώρα, μας μένουν οι αριθμοί μετά την υποδιαστολή, δεξιά από αυτήν δηλαδή…» συνέχισε ο 3,622.

«Από αυτόν τον αριθμό εξαρτάται και η θέση του Δεκαδικού στο Διάστημα, έτσι;» ρώτησε η 3,141.

«Εμ, τί εννοείς;» ρώτησε ο 3,622.

Ο 3,618 ακολουθούσε το συλλογισμό των δύο Δεκαδικών με δυσκολία.

«Αν μετά την υποδιαστολή, ο αριθμός είναι μεγαλύτερος, τότε ο Δεκαδικός μένει πιο κοντά στο 4. Να, δες εμάς: στον 3,618 ο αριθμός δεξιά του είναι ο 618. Σε σένα, 3,622, ο αριθμός δεξιά σου είναι ο 622, ενώ σε μένα, στην 3,141 ο αριθμός δεξιά είναι ο 141. Εγώ δηλαδή, μένω πιο κοντά στο Κάστρο 3 από εσάς. Μετά είναι ο 3,618, και μετά εσύ 3,622, αφού 141<618<622. Αυτό δεν είναι;» ρώτησε η 3,141 με σιγουριά.

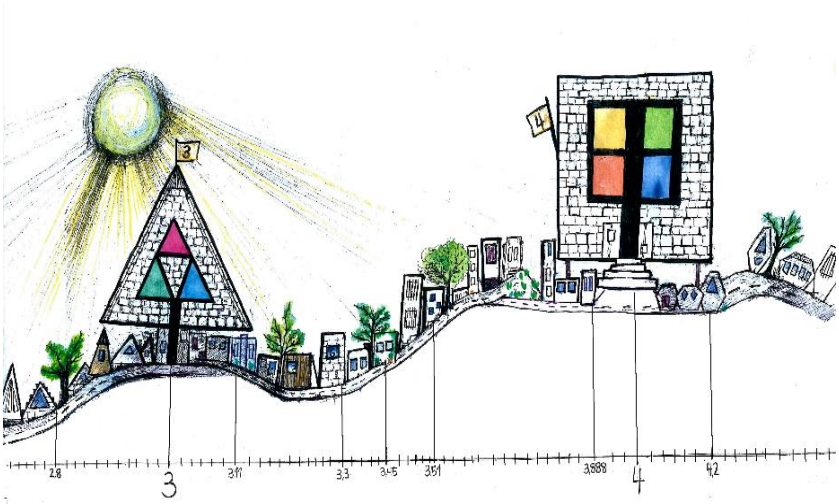
«Ναι, αυτό είναι!» απάντησε ο 3,622 εντυπωσιασμένος.

«Η 3,141 το έπιασε πιο γρήγορα από μένα» αναφώνησε χαμογελώντας ο 3,618.

Και συνέχισε, «Τέλεια, οπότε μπορούμε να φτιάξουμε το "έγγραφο-άξονα" και να βάλουμε για αρχή τους Δεκαδικούς στη σωστή τους θέση! Μετά, βλέπουμε για τα Κλάσματα».

* * * * *

Οι τρεις Δεκαδικοί έκατσαν και μετά από λίγη ώρα έβαλαν στο έγγραφο όλους τους Δεκαδικούς του Διαστήματος (3, 4]. Ο 3,622 σηκώθηκε κατόπιν από το τραπέζι και κοίταξε το έγγραφο που είχαν φτιάξει, από μακριά.



«Ναι, νομίζω είναι σωστό αυτό που φτιάξαμε. Τώρα μένει να βάλουμε στον άξονα και τα Κλάσματα. Πώς όμως θα το κάνουμε αυτό;» αναρωτήθηκε, κοιτάζοντας και τους άλλους δύο.

«Λέτε, στα Κλάσματα να μπορείς να βρεις τη θέση τους, όπως και στους Δεκαδικούς; Εγώ πάντως, δεν έχω ιδέα πώς να βρω τη θέση ενός Κλάσματος, εκτός αν θυμάμαι ακριβώς ποιος Δεκαδικός ήταν… Αλλά δεν έχω και τόσο καλή μνήμη» είπε ο 3,618.

«Λογικά, αφού με τη Μετατροπή οι Δεκαδικοί ενός Διαστήματος γίνονται Κλάσματα, τότε τα Κλάσματα που συναντάμε στο Διάστημα (3, 4] είναι σίγουρα Δεκαδικοί που ανήκουν στο Διάστημα αυτό» είπε με χαλαρή φωνή η 3,141.

«Αααα ναι, σωστά!» συμφώνησε ο 3,618.

«Καλά, ξέρεις κι εσύ τι είναι η Μετατροπή;» ρώτησε ο 3,622 την 3,141.

«Ναι, έχω διαβάσει κάτι βιβλία για τη φρουρά των Κλασμάτων, που έπεσαν στα χέρια μου. Έτσι, τυχαία, μη φανταστείτε…» είπε ντροπαλά η 3,141.

Ο 3,622 κοίταζε την 3,141 με σκεπτικό ύφος, όσο εκείνη μιλούσε. Κάτι δεν του πήγαινε καλά σ' αυτά που έλεγε, αλλά δεν μπορούσε να καταλάβει τι.

Μετά, έξυσε λίγο το 3 του και είπε: «Με τα Κλάσματα του Διαστήματός μας, έχω παρατηρήσει δύο πράγματα: Το πρώτο είναι ότι ο παρονομαστής τους είναι μικρότερος από τον αριθμητή τους. Ή, αν το πεις αλλιώς, ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους. Και το δεύτερο…»

«Κάτσε, τι είναι αυτά που λες; Τι είναι αριθμητής και τι παρονομαστής;» διέκοψε ο 3,618 όλο απορία.

«Ουφ!» ξεφύσηξε ο 3,622, που έπρεπε να επαναλάβει πράγματα γνωστά.

«Έχεις παρατηρήσει ότι τα Κλάσματα έχουν δύο νούμερα κι ανάμεσα τους μία γραμμούλα, ναι;» ρώτησε, κάνοντας τη φωνή του παιδική.

«Ναι, αυτό το ξέρω» απάντησε με χαρά ο 3,618, παίρνοντας το ρόλο του μαθητή.

«Ο αριθμητής είναι το νούμερο που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή του Κλάσματος και ο παρονομαστής είναι το νούμερο που βρίσκεται κάτω από τη γραμμή του Κλάσματος» διέκοψε η 3,141.

Ο 3,622 την κοίταξε εκνευρισμένος που τον διέκοπτε, κι η 3,141 απέφυγε με τρόπο το βλέμμα του.

«Καλά, και γιατί λέγονται έτσι; Θα μπορούσαμε να λέμε το πάνω νούμερο και το κάτω…» συνέχισε απτόητος ο 3,618.

«Δεν είμαι σίγουρος για τα ονόματα αυτά …» είπε ο 3,622 σκεφτικός και κοίταξε την 3,141 αναζητώντας βοήθεια.

«Δεν έχω ιδέα εγώ, μη με κοιτάς» είπε η 3,141.

«Αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τι είπαμε ότι γίνεται;» συνέχισε ο 3,618, παραδεχόμενος αυτές τις ονομασίες.

«Όχι, είπα ότι όλα τα Κλάσματα που έχω συναντήσει στο Διάστημα μας έχουν τον αριθμητή τους μεγαλύτερο από τον παρονομαστή τους, άρα μάλλον αυτό είναι χαρακτηριστικό του Διαστήματός μας» συνέχισε ο 3,622.

«Γιατί; Έχεις δηλαδή ακούσει για Κλάσματα που ο αριθμητής τους είναι μικρότερος από τον παρονομαστή;» παρατήρησε ο 3,618.

«Ναι, για παράδειγμα, ένα φημισμένο Κλάσμα του Άρπλας είναι ο 1/2. Δεν ξέρω αν έχεις δει τις αφίσες και το αφιέρωμα που είχαν κάνει πέρυσι στο Σώμα των Κλασμάτων. Εκεί, ήταν ο 1/2 μαζί με τον Φυσικό 1 κι ο τίτλος ήταν: "*Αφιέρωμα στον ½, το δεξί χέρι του Μονάς: του ισχυρότερου Φυσικού!"*» είπε ο 3,622.

«Έχεις δίκιο, είχα ξεχάσει αυτό το "αφιέρωμα"!» είπε ο 3,618, ειρωνικά.

«Επομένως, τα Κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή είναι στο Διάστημα (0, 1];» ρώτησε ο 3,618 γενικεύοντας.

«Ναι, αυτό νομίζω πως ισχύει…»

«Άρα, τα Κλάσματα που έχουν μεγαλύτερο αριθμητή από παρονομαστή δεν είναι στο (0, 1]!» συμπέρανε ο 3,618.

«Ναι, κι αυτό ίσως ισχύει, αλλά δεν είμαι 100% σίγουρος» είπε ο 3,622.

«Ωραία. Και το δεύτερο που έχεις παρατηρήσει, τι είναι;» ρώτησε ο 3,618 με ανυπομονησία.

«Κοίτα, αυτό ίσως το παρατηρήσετε κι εσείς, τώρα που ξέρετε την σχέση αριθμητή-παρονομαστή. Μπορείτε να μου πείτε 3 Κλάσματα από το Διάστημα μας; Τρία Κλάσματα τυχαία, δεν έχει σημασία».

«Το 16/5, ας πούμε» είπε η 3,141.

«Λοιπόν… Μια στιγμή, κάτσε να θυμηθώ. Το 18/5, που μένει πολύ κοντά σε μένα. Και βέβαια, δεν θα μπορούσε να λείπει ο 7/2, που τον γνώρισα όταν επισκεύαζα το τετράγωνο του 3,51» είπε ο 3,618.

«Παρατηρείτε κάτι κοινό στα τρία αυτά Κλάσματα;» τους ρώτησε ο 3,622.

«Ναι», απάντησε γρήγορα η 3,141.

«Τι να παρατηρήσουμε; Τα νούμερα δεν έχουν κάποια σχέση, το ένα έχει 16, το άλλο 18, το άλλο 7. Τι σχέση έχουν αυτά μεταξύ τους;» είπε ο 3,618.

«Στο κάθε Κλάσμα, ίσως…» είπε η 3,141.

«Οι αριθμητές μεταξύ τους δεν έχουν κάποια σχέση» συμφώνησε ο 3,622, διακόπτοντας την 3,141.

«Τα νούμερα 2, 5 και 5, οι παρονομαστές δηλαδή, πάλι δε φαίνεται να έχουν κάποια σχέση. Δηλαδή, τα δύο Κλάσματα έχουν το 5, αλλά το τρίτο δεν έχει 5. Οπότε;» ρώτησε ο 3,618.

«Αν δεν κοιτάξεις του αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους, αλλά τη σχέση που έχει κάθε αριθμητής με κάθε παρονομαστή στο κάθε Κλάσμα, μπορείς να δεις κάποια σχέση;» τους βοήθησε περισσότερο ο 3,622.

«Ναι, αυτό είναι!» πετάχτηκε η 3,141.

Ο 3,618 σταμάτησε να μιλά και τα νούμερα του στάθηκαν απόλυτα ακίνητα. Μετά από παύση 5 ολόκληρων δευτερολέπτων, είπε: «Κατάλαβα κι εγώ! Τώρα εξηγούνται πολλά για τα Κλάσματα του Διαστήματος (3, 4]. Στο 16/5, το πρώτο Κλάσμα που ανέφερε η 3,141, ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή του. Το θέμα όμως, είναι όχι μόνο αν είναι μεγαλύτερος, αλλά πόσο μεγαλύτερος. Έτσι λοιπόν, στο 16/5 ο αριθμητής, το 16, είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή 5, και μάλιστα, είναι μεγαλύτερο περισσότερο από 3 φορές το 5, γιατί 16 > 3 x 5. Επίσης είναι και μικρότερο από 4 φορές το 5, γιατί 16 < 4 x 5. Αυτό συμβαίνει και στο 16/5 και στο 18/5 και στο 7/2, όπου ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή περισσότερο από 3 φορές και λιγότερο από 4 φορές. Σωστά;» κατέληξε ενθουσιασμένος ο 3,618.

«Ναι, πολύ σωστά!» απάντησε ο 3,622. «Αυτό παρατήρησα κι εγώ, ίσως έχει να κάνει με τη θέση τους στο κάθε Διάστημα».

«Ενδιαφέρον…», συμφώνησε κι η 3,141.

«Οπότε, ένα Κλάσμα στο Διάστημα (2, 3], θα έχει αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή του. Συγκεκριμένα, ο αριθμητής θα είναι περισσότερο από 2 φορές μεγαλύτερος και λιγότερο από 3 φορές μικρότερος από τον παρονομαστή. Έτσι μπορείς να βρεις τι Κλάσματα υπάρχουν σε κάθε Διάστημα! Είσαι πολύ έξυπνος πραγματικά, 3,622» είπε με περισσότερο ενθουσιασμό ο 3,618.

Ο 3,622, ξύνοντας την υποδιαστολή του, σκέφτηκε *«Ναι, σωστά και στο (2, 3] θα ισχύει μάλλον ο ίδιος κανόνας…»* και κοιτάζοντας τον 3,618, σκέφτηκε *«Δεν ήξερε τον κανόνα που σκέφτηκα εγώ, κι όχι μόνο τον βρήκε αμέσως, αλλά τον επέκτεινε και στα άλλα Διαστήματα. Φοβερό!»*

«Όμως, πώς συγκρίνουμε τη θέση των Κλασμάτων 16/5, 18/5 και 7/2; Παρότι είναι στο ίδιο Διάστημα;» ρώτησε η 3,141 προβληματισμένη.

«Λες να έχει σχέση αυτό με το "Ομωνύμως αναφέρσου!";» είπε με δυνατή φωνή ο 3,618, μιμούμενος τα Κλάσματα που είχε δει να αναφέρονται το ένα στο άλλο.

«Είσαι τρελός; Τι φωνάζεις; Θα μας ακούσει κανένα Κλάσμα του Διαστήματος και τότε, ποιος μας

σώζει….» τον επανέφερε στην τάξη ο 3,622.

«Ίσως έχει σχέση αυτό που κάνουν μεταξύ τους τα Κλάσματα;» είπε σιγανά τώρα ο 3,618, κοιτώντας την 3,141.

«Εγώ, το μόνο που ξέρω για την "Ομώνυμο αναφορά", το έχω διαβάσει σε βιβλία κανονισμών του Κάστρου 4. Είναι μια διαδικασία, ώστε τα Κλάσματα να βρίσκουν τη σχετική τους θέση» είπε ο 3,622.

«Εμένα, μου έτυχε να δω 2 Κλάσματα να κάνουν αυτή την αναφορά μπροστά μου, αλλά δεν κατάλαβα και πολλά. Ήταν ο 7/2 κι ο 11/3, κι ο 11/3 αναφερόταν στον 7/2. Με παραξένεψε ότι μιλούσαν για 2 άλλα Κλάσματα που δεν ήταν εκεί, το 21/6 και το 22/6….» είπε ο 3,618.

«Ορίστε», συνέχισε ο 3,622, «για τα Κλάσματα 21/6 και 22/6 ξέρω ότι το 22/6 είναι σε μεγαλύτερη θέση από το 21/6. Και γενικότερα, ξέρω ότι δύο Κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή ή αριθμητή μπορούμε να τα συγκρίνουμε ευκολότερα. Αν μεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, όπως τα 21/6 και 22/6, τότε κοιτάμε τον αριθμητή τους: Το Κλάσμα με τον μεγαλύτερο αριθμητή μένει και στη μεγαλύτερη θέση. Ενώ, αν έχουν ίδιο αριθμητή, το Κλάσμα με τον μεγαλύτερο παρονομαστή μένει και στη μικρότερη θέση. Για παράδειγμα, το 18/5 μένει πριν από το 18/4, κατάλαβες;» ρώτησε ο 3,622.

«Μάλιστα. Κι από πού το ξέρεις αυτό;» τον αμφισβήτησε ελαφρώς ο 3,618.

«Εξηγείται, σύμφωνα με αυτά που είπαμε πριν, δηλαδή, στο 18/5 το 5 είναι 3 φορές μικρότερο από το 18, αλλά όχι 4 φορές μικρότερο, ενώ στο 18/4 το 4 είναι 4 φορές μικρότερο από το 18, αλλά όχι 5 φορές» απάντησε ο 3,622 ενοχλημένος.

«Οπότε, το κλάσμα 18/5 ανήκει στο διάστημα (3, 4], ενώ το κλάσμα 18/4 ανήκει στο διάστημα (4, 5]. Τώρα, είσαι εντάξει;» ολοκλήρωσε ο 3,622.

«Αμέ, τώρα τα λες ωραία», απάντησε ο 3,618.

Η 3,141 χαμογέλασε με το ύφος του 3,622. *«Τι γλυκούληδες που είναι αυτοί οι δύο…»* σκέφτηκε από μέσα της, και μπήκε κι η ίδια στη συζήτηση.

«Όταν, τα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τα πράγματα είναι πιο εύκολα, διότι ο παρονομαστής χωράει σίγουρα περισσότερες φορές σε ένα μεγαλύτερο αριθμητή. Για παράδειγμα, το 6/5 είναι σίγουρα σε μικρότερη θέση από το 7/5» συμπλήρωσε η 3,141, κοιτώντας τον 3,618.

«Ναι, εντάξει», συμφώνησε ο 3,618. Πήρε μια βαθιά ανάσα ανακούφισης, αφού πλέον καταλάβαινε όντως, και συνέχισε σε πιο χαλαρό τόνο.

«Οπότε, η σύγκριση είναι εύκολη όταν τα κλάσματα έχουν είτε ίδιο παρονομαστή είτε ίδιο αριθμητή, όπως είπες 3,622. Με τα 7/2 και 11/3 όμως, πώς ξέρουμε ποιο μένει σε μεγαλύτερη θέση; Και τι μπορεί να είναι η "Ομώνυμος αναφορά";»

Κανείς από τους τρεις Δεκαδικούς δε μίλησε, για κάμποση ώρα. Κάποια στιγμή, η 3,141 χαμογέλασε ντροπαλά.

«Τι έγινε;» ρώτησε ο 3,618.

«Εμμ, νομίζω πως βρήκα την απάντηση που ψάχνετε…» είπε η 3,141.

«Άντε λοιπόν, λέγε», είπε εναγωνίως ο 3,618.

«Σκεφτείτε τα 2 Κλάσματα που μιλούσαν. Από τη μια έχουμε το 7/2 με το 11/3, κι από την άλλη, τα άλλα 2 Κλάσματα που αναφέρθηκαν, το 21/6 με το 22/6. Ενώ τα 11/3 και 7/2 δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τα 21/6 και 22/6 έχουν…» είπε η 3,141.

«Μα τι σχέση έχει αυτό; Αυτά είναι άλλα Κλάσματα» διέκοψε ο 3,618.

«Είναι σίγουρα άλλα Κλάσματα;» ρώτησε με νόημα η 3,141.

«Τι εννοείς;» εξακολουθούσε να μην καταλαβαίνει ο 3,618.

«Αααα, τώρα κατάλαβα!» αναφώνησε ο 3,622.

«Δες την σχέση που υπάρχει στον αριθμητή και στον παρονομαστή των 7/2 και 21/6» συνέχισε η 3,141.

«Απ' ό,τι βλέπω, το 21/6 έχει τριπλάσιο αριθμητή και τριπλάσιο παρονομαστή από το 7/2, αυτό λες;» είπε ο 3,618.

«Ναι, ακριβώς αυτό!» είπε γελαστή η 3,141.

«Πάλι δε βρίσκω όμως τι σχέση έχει αυτό…» είπε με απόγνωση ο 3,618.

«Μην απογοητεύεσαι, σκέψου τώρα για τα 11/3 και 22/6 με τον ίδιο τρόπο» τον παρότρυνε.

«Το 22 είναι διπλάσιο του 11, όπως και το 6 του 3, αυτό θες;» είπε ο 3,618.

«Ναι, τέλεια, 3,618!»

«Νομίζω πως ξέρω πού το πάει η 3,141» είπε ο 3,622. «Σκέψου ότι δεν υπάρχει πραγματικά το 21/6!»

«Τι εννοείτε "δεν υπάρχει 21/6";» ρώτησε ο 3,618.

«Δεν υπάρχει διαφορά στη θέση του 21/6 με τη θέση του 7/2. Μπορεί ν' ακούγεται τρελό, αλλά ίσως έτσι εξηγείται η "Ομώνυμος αναφορά". Όταν 2 Κλάσματα δεν έχουν ίδιο αριθμητή ή παρονομαστή, δεν μπορούν να καταλάβουν εύκολα ποιο είναι σε μεγαλύτερη θέση, οπότε, μ' αυτόν τον τρόπο μπορούν. Νομίζω λοιπόν, ότι η 3,141 υποθέτει ότι το 7/2 και το 21/6 έχουν την ίδια θέση. Το 21/6 είναι άλλη μορφή του 7/2, όπως μάλλον και το 22/6 του 11/3. Σωστά;» είπε ο 3,622.

«Ναι, αυτό σκέφτηκα. Θεωρώ ότι το 7/2, προκειμένου να συγκριθεί με το 11/3, πολλαπλασίασε τον αριθμητή του και τον παρονομαστή του με το 3 του 11/3. Δηλαδή, 7 x 3 = 21 και 2 x 3 = 6. Έτσι, ο 7/2 έγινε 21/6! Το 11/3, με τη σειρά του, πολλαπλασίασε αριθμητή και παρονομαστή με το 2 του 7/2 και έγινε 22/6!» εξήγησε η 3,141.

«Απίστευτο! Κι έτσι δηλαδή, γίνανε Κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή πλέον… Κι άρα συγκρίνονται εύκολα!» θαύμασε ο 3,618.

«Αυτή είναι μάλλον η "Ομώνυμος αναφορά" μεταξύ δύο Κλασμάτων. Ένας τρόπος που 2 Κλάσματα αλλάζουν μορφή και γίνονται 2 άλλα Κλάσματα, διατηρώντας ωστόσο την ίδια θέση. Κι έχοντας πια ίδιο παρονομαστή, μπορούν εύκολα να συγκριθούν!» κατέληξε ο 3,622, ενθουσιασμένος κι αυτός.

«Χμμ... Γι' αυτό στον καυγά με τον 7/2, ο 11/3 ήρθε από μεγαλύτερες θέσεις…» είπε σκεφτικός ο 3,618.

«Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι ο 22/6, δηλαδή ο 11/3, είναι σε μεγαλύτερη θέση από τον 21/6, δηλαδή τον 7/2».

«Ποιον καυγά με τον 7/2;» ρώτησε ο 3,622.

«Άστο αυτό τώρα, μεγάλη ιστορία και χωρίς καλό τέλος. Και κάτι τελευταίο, αν ο παρονομαστής γίνει ίδιος με τον αριθμητή, τι γίνεται;» το γύρισε πάλι στη μαθηματική συζήτηση ο 3,618.

«Δεν έχω ιδέα. Δεν έχω δει ποτέ τέτοιο Κλάσμα» είπε ο 3,622. «Εσύ;» κοίταξε την 3,141.

«Πριν, είπαμε ότι άμα ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή, τότε το Κλάσμα μένει στο Διάστημα (0, 1]. Σωστά;» πετάχτηκε ο 3,618

«Σωστά», συμφώνησε ο 3,622.

«Άμα ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή τότε ανάλογα με το πόσες φορές μεγαλύτερος είναι, μένει και στο ανάλογο Διάστημα, αλλά πάντα μετά το Κάστρο 1, σωστά;» ρώτησε ο 3,618.

«Πάλι σωστά» επιβεβαίωσε ο 3,622.

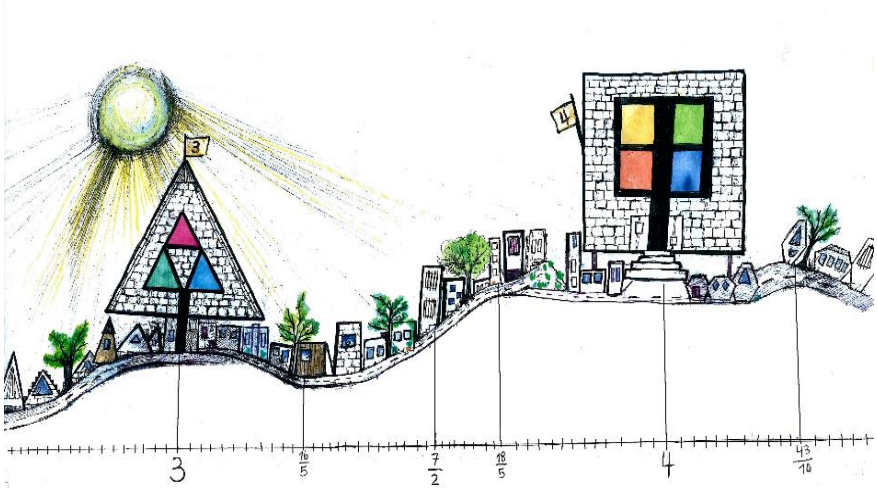
«Άρα, αν ο παρονομαστής είναι ίδιος με τον αριθμητή, τότε το Κλάσμα μένει στο Κάστρο 1;» έθεσε ένα σοβαρό ερώτημα ο 3,618.

«Κοίτα, έχει νόημα αυτό που λες, αλλά πώς γίνεται δεν έχω ιδέα. Στα Κάστρα μένουν μόνιμα μόνο οι Φυσικοί κι η προσωπική τους φρουρά από Κλάσματα, αλλά νομίζω ότι αυτά τα Κλάσματα είναι από το Διάστημα που ελέγχει ο κάθε Φυσικός…» είπε μετά από σοβαρή σκέψη ο 3,622.

«Ναι, εκεί πρέπει να μένουν λογικά» συμφώνησε η 3,141.

«Είναι όμως περίεργο αυτό… Τέλος πάντων, μπορεί να μην έχει σημασία τώρα. Απλώς μου ήρθε σα σκέψη», είπε ο 3,618.

«Οπότε, βρήκαμε τον τρόπο να συγκρίνουμε τα Κλάσματα μεταξύ τους και να τα βάζουμε στη σωστή θέση στον άξονα. Στο Διάστημα (3, 4] βρίσκονται όλα τα Κλάσματα που ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος περισσότερο από 3 φορές και λιγότερο από 4 φορές από τον παρονομαστή. Γενικά πάντως, αν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο Κλάσματα ως προς τη θέση τους, προσπαθούμε να βρούμε σε ποιο διάστημα ανήκουν, βάσει της σχέσης του αριθμητή και του παρονομαστή, όπως προείπαμε. Αν ανήκουν στο ίδιο διάστημα, και δεν είναι ομώνυμα, τότε, εφαρμόζοντας την "ομώνυμη αναφορά" θα μπορέσουμε να τα συγκρίνουμε πιο εύκολα» είπε συνοψίζοντας ο 3,622.



«Τέλεια, τώρα μπορούμε να φτιάξουμε τον άξονα με τα Κλάσματα και τους Δεκαδικούς για το Διάστημα (3, 4]!» βιάστηκε ο 3,618.

«Αυτό φαίνεται απλό, αλλά δεν είναι», τον έκοψε ο 3,622.

«Έχουμε τον τρόπο να φτιάξουμε το έγγραφο με όλους τους Δεκαδικούς, εφόσον βρήκαμε τρόπο να τους βάλουμε όλους στη θέση τους. Έχουμε τον τρόπο να το φτιάξουμε και με όλα τα Κλάσματα, αλλά δεν έχουμε ακόμη τον τρόπο να βάλουμε Δεκαδικούς και Κλάσματα μαζί στο ίδιο έγγραφο».

«Γιατί όμως; Αν βάζαμε τους Δεκαδικούς όλους στη σωστή σειρά τους και μετά ξεκινήσουμε και βάλουμε όλα τα Κλάσματα;» πρότεινε προβληματισμένος ο 3,618.

«Έστω ότι φτιάχνουμε τον άξονα και τοποθετούμε όλους τους Δεκαδικούς. Το πρώτο Κλάσμα πού ακριβώς να το βάλουμε, με τους Δεκαδικούς τριγύρω; Πρέπει να ξέρουμε τη σχετική του θέση με τους άλλους Δεκαδικούς. Έτσι δεν είναι;» είπε ο 3,622.

«Αν είναι σε διαφορετικά Διαστήματα, ξέρουμε τη σχετική τους θέση!» πετάχτηκε η 3,141.

Οι δύο Δεκαδικοί την κοίταξαν, κάνοντας της νόημα να εξηγήσει αυτό που είχε πει.

«Λέω, ότι αφού ξέρουμε από τη σχέση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή σε ποιο Διάστημα βρίσκεται το κάθε Κλάσμα, τότε, αν ένα Κλάσμα είναι στο Διάστημα (2, 3], είναι σίγουρα σε μεγαλύτερη θέση

από έναν Δεκαδικό που είναι στο Διάστημα (0, 1], και σίγουρα σε μικρότερη θέση από έναν άλλο Δεκαδικό που είναι στο Διάστημα (3, 4]. Κι επειδή μπορούμε να βρούμε ποιοι Δεκαδικοί ανήκουν σε κάθε Διάστημα, μπορούμε να συγκρίνουμε τη θέση του Κλάσματος αυτού και των Δεκαδικών από τα άλλα Διαστήματα» εξήγησε η 3,141.

«Έχεις απόλυτο δίκιο», συμφώνησε ο 3,622 «αλλά, αν ένα Κλάσμα κι ένας Δεκαδικός είναι στο ίδιο Διάστημα, τότε πώς τους συγκρίνουμε; Για παράδειγμα, τον 7/2 και τον 3,618 πού τους βάζουμε;» είπε ο 3,622 κοιτάζοντας τον 3,618 για να κόψει αντιδράσεις.

«Έχεις δίκιο 3,622. Δεν το είχα σκεφτεί αυτό. Λες δηλαδή ότι πρέπει να μπορούμε να συγκρίνουμε και Δεκαδικούς και Κλάσματα απο το ίδιο Διάστημα; Σωστά;» ρώτησε η 3,141.

«Αυτό ακριβώς, και ποιον τρόπο έχουμε να το κάνουμε αυτό;»

«Αν βάζαμε το ένα έγγραφο πάνω στο άλλο;» πρότεινε ο 3,618.

«Τι εννοείς;» ρώτησε ο 3,622.

«Απλό, θα φτιάξουμε πρώτα το τοποθετώντας μόνο τους Δεκαδικούς ανάμεσα στα Κάστρα 3 και 4. Μετά, θα φτιάξουμε ένα άλλο "έγγραφο-άξονα" μόνο με τα Κλάσματα ανάμεσα στα Κάστρα 3 και 4. Τέλος, θα κολλήσουμε το ένα Κάστρο 3 πάνω στο άλλο 3 και το ένα Κάστρο 4 πάνω στο άλλο 4. Με διάφανο χαρτί θα φαίνονται σαν να είναι ένα έγγραφο. Έτσι, θα έχουμε ένα "έγγραφο-άξονα" με όλα τα Κλάσματα και τους Δεκαδικούς σωστά πάνω του!» είπε χαμογελώντας ο 3,618.

«Τέλεια ιδέα!» αναφώνησε η 3,141.

«Ναι, όντως, καλή ιδέα είναι. Αν τα δει ένα άπειρο κλασματικό μάτι δεν θα καταλάβει τίποτα. Αν πέσουμε όμως σε έμπειρο Θεωρητικό και καταλάβει την απάτη; Πώς θα περάσουμε το Κάστρο;» προβληματίστηκε ο 3,622.

«Ας μπούμε πρώτα στο Κάστρο, κι ύστερα βλέπουμε. Κάποιον τρόπο θα βρούμε να περάσουμε, χωρίς να χρειαστεί να παραδώσουμε το "έγγραφο-άξονα" στους Θεωρητικούς…» είπε ο 3,618.

«Ουφ… Άντε και πες ότι τα καταφέρνουμε μέσα στο Κάστρο, μετά από την άλλη πλευρά πώς θα βγούμε; Αφού δεν ανήκουμε στο Διάστημα (2, 3], είναι μαθηματικά βέβαιο ότι θα μας καταλάβουν» είπε ο 3,622.

«Αυτό, αφήστε το πάνω μου!» ακούστηκε η φωνή της θείας από την κουζίνα.

* * * * *

«Έτοιμο το έγγραφο. Μόλις τέλειωσα και τις παραμικρές λεπτομέρειες. Έβαλα το "έγγραφο-άξονα" με τους Δεκαδικούς ακριβώς πάνω από το "έγγραφο-άξονα" με τα Κλάσματα και τα κόλλησα, όπως είπαμε. Μπορείτε πλέον να αναφέρεστε σε μένα ως τον επικεφαλής του Τμήματος Απογραφών του Διαστήματος (3, 4]» είπε ο 3,622 με επίσημη φωνή και κορδωμένα ψηφία.

Ο 3,618 κι η 3,141 γέλασαν και χτύπησαν τα νούμερα τους, ευχαριστημένοι με τον νέο ρόλο του 3,622 «Μπράβο, συγχαρητήρια!»

Ο 3,622 συνέχισε σοβαρός κι απερίσπαστος από τις επευφημίες τους: «Εσείς είστε οι πιστοί βοηθοί μου. Δουλειά σας είναι να έχετε έτοιμο, ανά πάσα στιγμή, οποιοδήποτε συμπληρωματικό έγγραφο χρειαστεί. Πιστεύω ότι, εκτός απροόπτου, θα δουλέψει αυτό το σχέδιο. Το μόνο που με απασχολεί ακόμα είναι πώς θα κινηθούμε κρυφά στο Κάστρο 3 και πώς θα βγούμε από τη μεριά του Διαστήματος (2, 3]. Και οι δύο είσοδοι

του Κάστρου ελέγχονται από Κλάσματα της προσωπικής φρουράς του Φυσικού 3…»

«Το δεύτερο αφήστε το σε μένα, είπα!» ξεπρόβαλε η θεία από την κουζίνα της.

Κρατούσε έναν μεγάλο άσπρο σάκο, που απορούσες πώς μπορούσε και τον σήκωνε Δεκαδικός. Τον έσυρε και μετά τον ακούμπησε στο τραπέζι. «Ετοιμαστείτε κατάλληλα για το ταξίδι σας και ξεκινάμε!» είπε η θεία.

«Τι εννοείται *ξεκινάμε*;» ρώτησε ο 3,622.

«Η θεία θα μαγειρέψει για την τελετή της Μετατροπής, που θα γίνει αύριο στο Κάστρο 3» είπε χαμογελαστή η 3,141.

«Για την τελετή της Μετατροπής!» είπαν μαζί φωναχτά ο 3,622 κι ο 3,618.

«Ναι, η θεία είναι η επίσημη μαγείρισσα του Κάστρου 3. Αυτή μαγειρεύει σ' όλες τις σπουδαίες εκδηλώσεις του Κάστρου. Οργανικά υπάγεται στο Κάστρο 4, αλλά η φήμη της είναι τόσο καλή, που το Κάστρο 3 τη δανείζεται πάντα στις ξεχωριστές τελετές» εξήγησε η ανιψιά της.

«Τέλεια… Ομαδικό ταξίδι στο Κάστρο 3! Άντε λοιπόν, τι περιμένουμε;» είπε ανυπόμονος ο 3,618.

«Πρώτα απ' όλα, θέλω να μελετήσετε τον χάρτη του Κάστρου 3» είπε η θεία, ανοίγοντας μπροστά τους ένα μεγάλο τετράγωνο κομμάτι από παλιό χαρτί.

«Μέχρι το απόγευμα, που θα έχετε χωνέψει σωστά, μελετήστε τον χάρτη και βρείτε ένα σχέδιο για το πώς θα κινηθείτε μέσα, ώστε να μην σας πάρουν χαμπάρι. Η τελετή της Μετατροπής θα γίνει το βράδυ. Μέχρι τότε πρέπει να βρισκόμαστε μέσα στο Κάστρο 3, γιατί οι πόρτες του Κάστρου κλείνουν όσο διαρκεί η Μετατροπή» εξήγησε η σούπερ θεία, κι έσπευσε να σφαλίσει τα παράθυρα του τετράπλευρου της.

9.1.9 Το Κάστρο 3

Η δεκαδική παρέα βρισκόταν συν-νούμερη στη θέση 3,01. Από εκεί, σε απόσταση αναπνοής, έβλεπαν το μεγαλειώδες ισόπλευρο τρίγωνο Κάστρο 3. Ο 3,618 είχε σηκώσει το 3 του εδώ και ώρα, και περπατούσε χωρίς να βλέπει πού πατάει. Παρατηρούσε το τρίγωνο Κάστρο και θαύμαζε τις αναλογίες του. Η πάνω κορυφή του τριγώνου ήταν τόσο ψηλή, που χανόταν μέσα στα σύννεφα.

«Μόνο και μόνο η συντήρηση αυτού του Σχήματος, θα πρέπει να ήταν δουλειά αμέτρητων Δεκαδικών» σκέφτηκε. «Κι επικίνδυνη δουλειά… Αν κάποιος έπεφτε από τις πλευρές ή από την πάνω κορυφή, ήταν σίγουρα χαμένος!»

Η κάτω κορυφή του τριγώνου βρισκόταν κι αυτή αρκετά ψηλά, ρίχνοντας τη σκιά της σ' ένα τμήμα του Διαστήματος (3, 4]. Ο μόνος τρόπος για να μπει κανείς στο ιπτάμενο τρίγωνο Κάστρο, ήταν ακριβώς από τη θέση 3. Εκεί, υπήρχαν δύο ανελκυστήρες: ο ένας αποτελούσε την είσοδο/έξοδο του Κάστρου 3 για το Διάστημα (3, 4], κι ο άλλος την είσοδο/έξοδο του Κάστρου 3 για το Διάστημα (2, 3]. Ανάμεσα στους δυο ανελκυστήρες υπήρχε μια τεράστια ευθεία, η οποία εμπόδιζε την επικοινωνία των 2 αυτών Διαστημάτων. Για να πάει κάποιος σ' ένα από τα 2 Διαστήματα δηλαδή, περνούσε αναγκαστικά μέσα από το Κάστρο 3. Έξω απ' τον κάθε ανελκυστήρα δε, στέκονταν Κλάσματα-φρουροί, το ένα δίπλα στο άλλο, που έλεγχαν ποιος έμπαινε ή έβγαινε από το Κάστρο 3.

Όλοι μαζί οι Δεκαδικοί είχαν καταστρώσει ένα σχέδιο κι ένιωθαν έτοιμοι, καθώς πλησίαζαν τον ανελκυστήρα. Μπροστά περπατούσε η θεία με τον σάκο της, και, λίγο πιο πίσω, σα χωριστή παρέα, προχωρούσε με σίγουρο βήμα ο επικεφαλής του Τμήματος Συντηρήσεων Σχημάτων, ο 3,622, μαζί με τους δύο Δεκαδικούς ακολούθους του, τον 3,618 και την 3,141.

«Αλτ, Δεκαδικοί! Αναφέρετε το λόγο της επισκέψεως σας!» φώναξε το ένα Κλάσμα-φρουρός.

Οι Δεκαδικοί σταμάτησαν και η θεία προχώρησε πρώτη. «Γεια σας, παιδιά. Ήρθα να μαγειρέψω για το βράδυ», είπε με οικειότητα.

«Τι καλό θα μας φτιάξεις σήμερα;» ρώτησε ο 61/20, προσπαθώντας να μαζέψει τα σάλια του.

«Δεκαδικέ 3,11, δώσε μας, σε παρακαλώ, το απαραίτητο έγγραφο για να επισκεφτείς το Κάστρο», είπε αυστηρά ο 76/25 που στεκόταν δίπλα.

«Ορίστε, καλέ μου» είπε η θεία κι έδωσε την πρόσκληση της. «Μην ψάχνεις, το γράφει κάτω-κάτω *"Υπεύθυνη Σεφ της Μετατροπής – Δεκαδικός 3,11"*»

«Ωραία, μπορείτε να περάσετε. Έχετε άδεια παραμονής στο Κάστρο, μέχρι το τέλος της Μετατροπής. Όλα πρέπει να είναι έτοιμα ως τότε, γιατί, όπως ξέρετε, κατά τη διάρκεια της τελετής διακόπτεται η λειτουργία των ανελκυστήρων», είπε με σοβαρό ύφος ο 76/25.

«Ναι καλέ μου, το ξέρω. Μην ανησυχείς, όλα θα είναι έτοιμα στην ώρα τους» τον διαβεβαίωσε η θεία και προχώρησε στην είσοδο του ανελκυστήρα.

«Κάτι τελευταίο, Δεκαδικέ 3,11» τη σταμάτησε ο 76/25, πατώντας το κουμπί που κρατάει ανοιχτές τις πόρτες του θαλάμου. «Τι κουβαλάς στον σάκο; Απ' όσο ξέρω, όλα τα υλικά για την Τελετή βρίσκονται στο Κάστρο».

Ο 3,622, που έβλεπε τη σκηνή, ξεροκατάπιε.

«Έχω μαζί μου τα βάζα με τα Χ άγνωστα υλικά, συνταγές για τις σωστές αναλογίες, την τετράγωνη κουτάλα μου και την τετράγωνη χύτρα μου. Δηλαδή, τα ελάχιστα απαραίτητα εργαλεία μου για το μαγείρεμα, δεν μπορώ χωρίς αυτά!» είπε, πάντα άνετη, η θεία.

«Εντάξει, μπορείς να συνεχίσεις…»

«Ευχαριστώ» είπε η θεία, πατώντας το μπουτόν του ανελκυστήρα. Η πόρτα ξεκίνησε αργά να κλείνει..

«Μια στιγμή!» είπε πάλι ο 76/25, βάζοντας τη γραμμή του Κλάσματός του, ανάμεσα στα πορτάκια.

Ο 3,622 είχε αρχίσει να ιδρώνει.

«Η σούπα που έφτιαξες στην τελευταία Μετατροπή, μου άρεσε πολύ. Λες να την ξαναφτιάξεις;» τη ρώτησε ο κλασματικός Φρουρός.

«Πιστεύω ότι η σημερινή συνταγή μου θα είναι νοστιμότερη!» απάντησε μ' αυτοπεποίθηση η θεία και

ξαναπάτησε το κουμπί για να κλείσει, επιτέλους, η πόρτα.

Ο ανελκυστήρας, μ' έναν τσιριχτό ήχο, ξεκίνησε να ανεβαίνει γρήγορα προς την κάτω πλευρά του τρίγωνου Κάστρου.

«Οι επόμενοι Δεκαδικοί, πλησιάστε και αναφέρετε το λόγο της επισκέψεως σας!» φώναξε ο Φρουρός 61/20.

Ο 3,622 πήρε μια βαθιά ανάσα. «Τώρα τα δύσκολα» σκέφτηκε, «η σειρά μας…», κάνοντας νόημα στον 3,618 και την 3,141 να τον ακολουθήσουν.

«Είμαι ο επικεφαλής του Τμήματος Απογραφής του Διαστήματος (3, 4]» είπε με στιβαρή φωνή ο 3,622. «Έχω να παραδώσω αυτό εδώ» είπε, δίνοντας το "έγγραφο-άξονα" στα 2 Κλάσματα.

«Μάλιστα», είπε ο 76/25, καθώς διάβαζε σοβαρός το έγγραφο.

Ο 61/20 από την άλλη, κοιτούσε διερευνητικά την 3,141 σαν κάτι να μην του καθότανε, αλλά μόλις τον κάρφωσε ο 3,618, τράβηξε αμέσως το βλέμμα του.

«Δε νομίζεις ότι είναι κακή στιγμή να παραδώσεις το έγγραφο αυτό, λίγο πριν ξεκινήσει η Μετατροπή;» συνέχισε σοβαρός ο 76/25.

«Είναι υποχρέωση μου από τον Φυσικό 4 να παραδώσω τα απαραίτητα έγγραφα στον Φυσικό 3. Ο κύριος 3 δεν θα ήθελε, σε καμία περίπτωση, να αργήσουν αυτές οι αναφορές. Άλλωστε, μέχρι να ξεκινήσει η Μετατροπή, η παράδοση θα έχει γίνει». Ο 3,622 μιλούσε με τόση σιγουριά, φαινομενικά, αν και κατά βάθος, με χίλια ζόρια συγκρατούσε τον εαυτό του να μην καταρρεύσει από το άγχος.

«Μάλιστα, πρόκειται για θέμα υψίστης σημασίας δηλαδή», κατέληξε ο 76/25, σα να καταλάβαινε τη σοβαρότητα του θέματος.

«Άδεια έχετε για τους 2 ακολούθους σας;» ρώτησε ο 61/20.

«Βεβαίως, ορίστε» είπε ο 3,622, που είχε έρθει απόλυτα οργανωμένος.

«Μάλιστα, όλα φαίνονται εντάξει. Μην αργήσετε να εξέλθετε από το Κάστρο, πριν ξεκινήσει η Μετατροπή» είπε ο 76/25 και παρέδωσε το έγγραφο στον 3,622.

Ο 3,622 το έδωσε στον 3,618 και προχώρησε προς τον ανελκυστήρα. Πίεσε το κουμπί για να ανοίξουν οι πόρτες. Από μέσα βγήκαν δύο Θεωρητικοί Δεκαδικοί. Ο ένας κοίταξε λίγο περίεργα τον 3,622 και μετά τον 3,618 και την 3,141. «3,622 είναι λίγο αργά για να μπεις τώρα στο Κάστρο δεν νομίζεις;» τον ρώτησε ο Θεωρητικός, σαν τον γνωρίζει από κάπου.

«Ναι, αλλά έχω μια δουλειά που δεν αναβάλλεται. Θα κάνω όσο το δυνατόν γρηγορότερα» ξεροκατάπιε ο 3,622.

«Απλά κάντε γρήγορα, γιατί έχετε λίγο χρόνο στη διάθεση σας» πρόσθεσε κι ο άλλος Θεωρητικός.

Μετά, οι 2 Θεωρητικοί Δεκαδικοί κατευθύνθηκαν με γρήγορο βήμα προς το Διάστημα (3, 4].

Ο 3,622 μπήκε με την ακολουθία του στον ανελκυστήρα, που με τον ίδιο τσιριχτό ήχο, άρχισε ν' ανεβαίνει αργά προς τα πάνω. Ο 3,618 είχε κολλήσει το 3 του στη τζαμένια πλευρά του ασανσέρ και χάζευε την εκπληκτική θέα του Διαστήματος (3, 4]. Τα τετράπλευρα του Διαστήματος φαίνονταν τόσο όμορφα, αλλά και τόσο μικρά από ψηλά! Όσο ανέβαιναν, τα Σχήματα γίνονταν μικρές τελείες κι οι Δεκαδικοί που πηγαινοέρχονταν, έμοιαζαν με σκόνη που την παίρνει ο αέρας στο Διάστημα…

«Τα Κλάσματα που είδαμε, σε ποιο Διάστημα ανήκαν;» ρώτησε ο 3,618 τον 3,622.

«Μόνος σου σκέφτηκες τον τρόπο να το βρίσκεις, οπότε δε θα σου πω αυτήν την φορά» είπε χαμογελώντας ο 3,622.

«Για να δούμε λοιπόν, ήταν ο 76/25 κι ο 61/20. Για το πρώτο Κλάσμα το 25 χωράει στο 76 τρείς φορές (αφού 3 x 25 = 75) και όχι τέσσερις (μιας και 4 x 25 = 100). οπότε ανήκει στο Διάστημα (3, 4]. Το ίδιο ισχύει

και για το Κλάσμα 61/20. Τα νούμερα τους είναι πολύ μεγάλα και φαίνεται σαν να ανήκουν σε άλλο Διάστημα, αλλά τελικά, δεν είναι αυτό που μετράει», σκέφτηκε μεγαλόφωνα ο 3,618.

«Ακριβώς, τα Κλάσματα που φρουρούν το Κάστρο 3 ανήκουν και στο Διάστημα (3, 4] και στο Διάστημα (2, 3]. Τα Κλάσματα όμως, απ' αυτή τη μεριά του ανελκυστήρα, ανήκουν προφανώς στο (3, 4].

Καθώς ο ανελκυστήρας ελάττωσε ταχύτητα κι άρχισε να πλησιάζει προς τη βάση του Τριγώνου, οι 3 Δεκαδικοί έβλεπαν, από πολύ κοντά πια, την κάτω πλευρά του Κάστρου 3. Ήταν μια απολύτως λεία μαύρη πλευρά, που απορροφούσε όλο το φως του ήλιου κι έδινε ένα πολύ τρομαχτικό τόνο στην ατμόσφαιρα.

«Ντιν ντον…. Καλώς ήρθατε στο Κάστρο 3!» ακούστηκε μια κοφτερή φωνή από το μεγάφωνο του ανελκυστήρα. Οι πόρτες άνοιξαν και οι 3 Δεκαδικοί πάτησαν στο Κάστρο.

Ο διάδρομος που περπατούσαν ήταν γεμάτος Δεκαδικούς και Κλάσματα που πηγαινοέρχονταν με βιασύνη. Οι πλευρές του Κάστρου 3 ήταν κι από μέσα μαύρες κι η αίσθηση ήταν αποπνικτική. Ο 3,618 όμως, ήταν τόσο ενθουσιασμένος που βρισκόταν επιτέλους μέσα στο Κάστρο, που δεν είχε κανένα αρνητικό συναίσθημα. Η 3,141 επίσης κοιτούσε τριγύρω μ' ενδιαφέρον, αλλά σε αντίθεση με τον 3,618, περπατούσε συγκρατημένη. Ο 3,622 είχε αρχίσει να ιδρώνει και προσπαθούσε με κόπο να διατηρήσει το ευθυτενές περπάτημα, που άρμοζε στη θέση του Επιθεωρητή.

Καθώς περπατούσαν, στα δεξιά τους άρχισε να ξεπροβάλει ένα διαφορετικό χρώμα από το μαύρο που δέσποζε ως τότε, ένα μπλε τριγωνουάζ φως. Ο 3,618 κοίταξε σα μαγεμένος προς το μπλε φως και παρατήρησε την επιγραφή πάνω από το φως με τα έντονα γράμματα: *Αίθουσα Β΄ «Είσοδος Δεκαδικών – Έξοδος Κλασμάτων».*

«Εδώ εκπαιδεύονται οι Δεκαδικοί που θέλουν να γίνουν Κλάσματα» είπε με σιγανή φωνή ο 3,622.

Ο 3,618 κοίταξε σκεπτικός την πόρτα της αίθουσας και την επιγραφή από πάνω. Δύο Κλάσματα φυλούσαν την είσοδο.

«Εσύ 3,622, έχεις μπει σ' αυτήν την αίθουσα;» ψιθύρισε.

«Όχι, δεν έχω μπει. Νομίζω ότι δεν υπάρχει και κανείς Δεκαδικός που να μπήκε στην αίθουσα αυτή και να εξήλθε ως Δεκαδικός πάλι. Η εκπαίδευση που περνούν οι νεοσύλλεκτοι Δεκαδικοί είναι πολύ σκληρή», είπε με σοβαρή φωνή ο 3,622.

Η 3,141 ένιωσε μια ανατριχίλα να τη διαπερνά κι ο 3,618 έσφιξε τα νούμερα του με θυμό. Καθώς προσπερνούσαν την αίθουσα Β, ο 3,622 ρώτησε τους 3 Δεκαδικούς αν θυμούνται το σχέδιο.

«Λοιπόν, όπως είχαμε πει, σε λίγο θα συναντήσουμε την αίθουσα R. Η αίθουσα R είναι τα κεντρικά γραφεία που δουλεύουν όλοι οι Θεωρητικοί του Κάστρου 3. Μέσα στην αίθουσα θα σε ακολουθήσουμε, χωρίς να κάνουμε περίεργες κινήσεις» είπε η 3,141 και κοιτούσε τον 3,622.

«Μετά, μέσα στην αίθουσα, θα κατευθυνθούμε προς το γραφείο εποπτείας Δεκαδικών Σχημάτων κι εκεί, δίπλα στο γραφείο εποπτείας, βρίσκεται η πόρτα που οδηγεί στην κεντρική αίθουσα το Κάστρου» συνέχισε ο 3,618.

«Στην κεντρική αίθουσα θα βρίσκεται η θεία, η οποία θα βάλει, δήθεν, φωτιά στην κουζίνα. Με το που θα ανακοινωθεί η φωτιά από τα μεγάφωνα, θα επικρατήσει, λογικά, πανικός. Μέσα στον πανικό, θα πρέπει να μπούμε γρήγορα στην αίθουσα και να κρυφτούμε, με τη βοήθεια της θείας, που θα μας βάλει σε ένα σάκο με μαγειρικά υλικά. Εκεί, μέσα στον σάκο, θα περιμένουμε να τελειώσει η τελετή της Μετατροπής και να βγούμε από το Κάστρο από την μεριά του Διαστήματος (2, 3]» ολοκλήρωσε η 3,141.

«Τέλεια το θυμάστε», είπε ο 3,622 και ξεκίνησε να περπατάει με πιο γρήγορο ρυθμό.

«Ελάτε, πάμε λίγο γρήγορα γιατί δεν έχουμε πολύ χρόνο μέχρι να ξεκινήσει η τελετή και να κλείσουν οι πόρτες».

Οι 3 Δεκαδικοί περπάτησαν με γοργό βήμα και μετά από λίγο συνάντησαν την είσοδο της αίθουσας R. Πάνω από την κόκκινη αίθουσα R, είδαν την επιγραφή:

"Δεν θέλει τρόπο, θέλει κόπο!"

Στην είσοδο, ο 3,622 έδωσε με βιασύνη το χαρτί που δικαιολογούσε την παρουσία τους στα Κλάσματα-φύλακες και μετά από ένα σύντομο έλεγχο μπήκαν μέσα.

Η μεγάλη κόκκινη αίθουσα R αποκαλύφθηκε μπροστά στα νούμερα τους. Ο θόρυβος από τις γραφομηχανές και τις συνομιλίες ήταν εκκωφαντικός! Όπου κι αν κοίταζες έβλεπες μικρές ουρές Δεκαδικών και γραφεία με τεράστιες στοίβες από χαρτιά. Οι Δεκαδικοί κινούνταν πάνω-κάτω σαν τρελοί και όλοι μιλούσαν φωναχτά, λες κι είχαν κουφαθεί εντελώς. Τα γραφεία εξυπηρέτησης ήταν όλα τρίγωνα και από πάνω τους είχαν φωτεινές επιγραφές με δεκαδικά νούμερα τα οποία αναβόσβηναν κι άλλαζαν, κάνοντας ήχους. Σκέτη τρέλα!

Ο 3,618 και η 3,141 είχαν πάθει σοκ από τον θόρυβο και την ένταση που υπήρχε σ' εκείνο το τρίγωνο κι είχαν πλησιάσει κοντά ο ένας στην άλλη, φοβισμένοι. Ο 3,622 από την άλλη, έδειχνε να μην ενοχλείται καθόλου από όλη αυτήν την βαβούρα, και μάλιστα χαμογελούσε ελαφρά σαν να βρισκόταν στο περιβάλλον του.

«Τι ωραία που είναι η οργάνωση και η τάξη, ε;» είπε ο 3,622 κοιτώντας τους δυο Δεκαδικούς φίλους του που είχαν λουφάξει σε μια γωνιά.

«Μην κάθεστε εκεί, ελάτε δίπλα μου, θα καταλάβουν ότι δεν είστε του χώρου!» τους είπε αυστηρά.

Οι δύο Δεκαδικοί πλησίασαν τελικά, προσπαθώντας να δείχνουν ανενόχλητοι από τον πανικό αυτό.

«Ακολουθήστε με προς το γραφείο εποπτείας» είπε ξανά ο 3,622 και κινήθηκε με χορευτικές κινήσεις, αποφεύγοντας επιδέξια τους Θεωρητικούς Δεκαδικούς που έτρεχαν πέρα-δώθε, από το ένα γραφείο στο άλλο.

Ο 3,618 και η 3,141 πάλι τον ακολούθησαν, προσπαθώντας κι οι ίδιοι –όχι με την ίδια χάρη και επιτυχία- να περάσουν μέσα από τους Θεωρητικούς Δεκαδικούς που κινούνταν σαν τρελοί.

Ξαφνικά, ακούστηκε από τα μεγάφωνα ένας μεταλλικός ήχος και στη συνέχεια ακολούθησε η ανακοίνωση του Κάστρου: «Η τελετή της Μετατροπής θα ξεκινήσει σε 30 λεπτά ακριβώς. Παρακαλούνται όλοι οι Θεωρητικοί Δεκαδικοί του Κάστρου να κλείσουν γρήγορα όλες τις ανοικτές υποθέσεις τους. Οι έξοδοι του Κάστρου κλείνουν σε 15 λεπτά. Κατά την διάρκεια της Μετατροπής στην αίθουσα RGB επιτρέπεται να

παρευρίσκονται μόνο η προσωπική φρουρά και οι Δεκαδικοί νεοσύλλεκτοι».

Μετά, ακολούθησε ο ίδιος μεταλλικός ήχος και τα μεγάφωνα σίγησαν.

* * * * *

Ο 3,622 έστεκε στην ουρά στο γραφείο εποπτείας με τους 3,618 και 3,141 ακριβώς πίσω του. Μπροστά τους βρίσκονταν άλλοι δυο Δεκαδικοί. Ήταν τρίτοι κι οσονούπω πλησίαζε η σειρά τους. Ο 3,622 κοίταξε την 3,141 και της ζήτησε το "έγγραφο-άξονα".

«Δεν το έχω εγώ, το έδωσα στον 3,618 πριν», είπε ψιθυριστά.

Ο 3,622 κοίταξε αμέσως τον 3,618 και του έκανε νόημα να του δώσει το έγγραφο, σηκώνοντας το 3 του προς το μέρος του.

«Κάτσε να δω, πού το έβαλα πριν… Α να, το βρήκα. Ουπς… Έχουμε ένα θεματάκι 3,622» είπε ο 3,618.

Ο 3,622 κοίταξε έντρομος τον 3,618 και τον ρώτησε με σιγανή φωνή ποιο ήταν το πρόβλημα.

«Το έβαλα δίπλα στο νερό που είχα πάρει μαζί μου και η κόλλα πότισε. Πλέον είναι δύο έγγραφα… Επίσης, κάποια νούμερα έχουν σβηστεί…»

«Ο επόμενος και τελευταίος να προσέλθει!» φώναξε ο Θεωρητικός που βρίσκονταν πίσω από το τρίγωνο γραφείο της εποπτείας, και πίεσε το κουμπί για να αλλάξει η φωτεινή επιγραφή πάνω από το γκισέ σε *"3,622"*.

Ο 3,622 είχε χάσει τη μιλιά του μ' αυτό που είχε συμβεί. Στέκονταν τόσο ακίνητος, σα να τον είχε πάρει ο ύπνος.

«Ο επόμενος, είπα!» φώναξε ο Θεωρητικός.

Η 3,141 πλησίασε και σκούντηξε τον 3,622 μπας και συνέλθει. Αμέσως κοίταξε τον Θεωρητικό πίσω από το γκισέ με χαμόγελο, για να κερδίσουν λίγο χρόνο.

Ο 3,622 ανασυντάχθηκε και προσπάθησε με όσο πιο σταθερή φωνή μπορούσε να πει:

«Μας συγχωρείτε λίγο κύριε Θεωρητικέ, εδώ οι ακόλουθοί μου δεν βρίσκουν το έγγραφο. Δώστε μας λίγο χρόνο…».

Μετά τους τράβηξε λίγο παραπέρα για να μπορούν να μιλήσουν πιο άνετα. «Τι κάνουμε τώρα; Αλήθεια μας το έκανες αυτό, 3,618!; Τώρα είμαστε χαμένοι. Θα μας πάρουν χαμπάρι και ποιος μας σώζει….»

«Με συγχωρείς, δεν το σκέφτηκα ότι είναι τόσο ευαίσθητο αυτό το χαρτί», είπε ο 3,618 ξύνοντας το 8 του.

«Η Μετατροπή ξεκινάει σε 10 λεπτά», ακούστηκε ο ήχος από τα μεγάφωνα.

Αμέσως μετά την ανακοίνωση, ένα Κλάσμα με σοβαρό ύφος πλησίασε τους τρεις φίλους:

«Ακολουθήστε με, σας παρακαλώ».

Η 3,141 κοίταξε έντρομη τον 3,622, ο οποίος είχε αποδεχθεί την μοίρα του ανέκφραστος. Ακολούθησαν το Κλάσμα, το οποίο τους οδήγησε σε ένα δωμάτιο δίπλα από το γραφείο εποπτείας. Ξεκλείδωσε την πόρτα και τους έκανε νόημα να περάσουν μέσα. Η πόρτα του δωματίου έγραφε *"Αίθουσα Αναμονής"*.

«Μείνετε εδώ, γιατί σε λίγο ξεκινά η Μετατροπή. Μόλις τελειώσει η τελετή, θα έρθω να σας πάρω εγώ ο ίδιος και θα συνεχίσετε τη δουλειά σας με τον Θεωρητικό». Μετά, κλείδωσε την πόρτα κι απομακρύνθηκε.

Ξαφνικά ακούστηκε από τα μεγάφωνα της αίθουσας η σειρήνα κι η ανακοίνωση: «Κίνδυνος, κίνδυνος! Ανίχνευση καπνού στην αίθουσα RGB, εκκενώστε άμεσα!»

«Αυτό ήταν το σινιάλο της θείας για να μπούμε στην αίθουσα RGB. Το σχέδιο μας καταστράφηκε..», είπε ο 3,622 και ξεφύσηξε στενάχωρα.

9.1.10 Η Μετατροπή

Με το που ακούστηκε η ανακοίνωση για τη φωτιά, επικράτησε ένας πανικός στο Κάστρο. Όλοι μαζί οι Θεωρητικοί Δεκαδικοί κατευθύνθηκαν τρέχοντας προς τις εξόδους. Αποτέλεσμα της άτακτης αυτής φυγής ήταν να γεμίσουν οι έξοδοι με νούμερα και ψηφία, ώστε να μην μπορεί κανείς να κουνήσει. Μάταια τα Κλάσματα των εισόδων της αίθουσας R προσπαθούσαν να βάλουν τους Θεωρητικούς σε ουρές, για να γίνει πιο ομαλά η έξοδος. Όλοι φώναζαν κι επικράτησε ο τέλειος πανικός.

Οι 3 Δεκαδικοί είχαν αποκλειστεί, κλειδωμένοι μέσα στην αίθουσα αναμονής.

«Η θεία θα μας περιμένει τώρα στην είσοδο της αίθουσας RGB για να μας βάλει μέσα….», είπε η 3,141 στεναχωρημένη.

Ο 3,622 είχε κάτσει στο έδαφος με το 3 να κοιτάζει κάτω, και δεν μιλούσε καν. Ο 3,618 πάλι, είχε σηκωθεί και κοιτούσε τριγύρω την αίθουσα αναμονής.

Η θεία, αφού περίμενε για ώρα τους Δεκαδικούς μετά το σινιάλο, επέστρεψε στην κουζίνα της κεντρικής αίθουσας RGB του Κάστρου με άδειο σάκο. Ήταν αγχωμένη για το τι μπορούσε να έχει συμβεί στους μικρούς Δεκαδικούς, αλλά έπρεπε να συμπεριφέρεται φυσιολογικά, ώστε να μη δημιουργήσει περισσότερη αναταραχή. Όλα τα φαγητά για την τελετή ήταν σχεδόν έτοιμα. Εκείνη καθόταν πίσω από τον πάγκο της κι έφτιαχνε τη διακόσμηση σ' ένα πιάτο. Μπροστά από τον πάγκο, βρίσκονταν 2 Κλάσματα της προσωπικής φρουράς του Φυσικού 3:

«Σύμφωνα με τα λεγόμενα σας, κυρία μου, ένα μαγειρικό υλικό έπιασε κατά λάθος στη φωτιά κι ως εκ τούτου ενεργοποιήθηκαν οι ανιχνευτές καπνού της κουζίνας, σωστά;» ρώτησε το ένα Κλάσμα, καθώς σημείωνε στο μπλοκάκι του τις απαντήσεις που του έδινε η θεία.

«Πολύ σωστά, αφού σας το ξαναείπα… Ένα μαγειρικό ατύχημα ήταν, το οποίο πολύ σύντομα τέθηκε υπό έλεγχο. Κι ευτυχώς, πείτε του Κυρίου 3, όλα τα πιάτα για την εκδήλωση είναι σώα και αβλαβή!» απάντησε η θεία.

«Ωραία λοιπόν, αφού το πρόβλημα διευθετήθηκε, θα ενημερώσω τη Διεύθυνση», είπε το άλλο Κλάσμα, κι έκαναν και τα 2 μεταβολή για να φύγουν.

Πίσω, στην αίθουσα αναμονής οι 3 Δεκαδικοί κάθονταν και μιλούσαν.

«Πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να βγούμε από εδώ», είπε ο 3,618.

«Τι δεν καταλαβαίνεις; Το σχέδιο απέτυχε. Δεν μπορούμε πια να μπούμε στην κουζίνα κι η θεία δεν έχει ιδέα πού είμαστε… Άσε που, μετά τη Μετατροπή, το Κλάσμα θα μας πάει πίσω στον Θεωρητικό κι εμείς δε θα έχουμε κανένα έγγραφο να του παραδώσουμε. Έτσι θα μας συλλάβουν και το ταξίδι μας θα έχει τελειώσει… Τα έλεγα εγώ να μην ονειροπολείς… Τα έλεγα, αλλά πού…», συνέχισε το χαβά του, ο 3,622.

«Σας μυρίζει κάτι;» διέκοψε ο 3,618.

«Η φωτιά που έβαλε η θεία στην κουζίνα θα είναι», απάντησε η 3,141.

«Ναι, αλλά μυρίζει πολύ έντονα… Μια στιγμή...», είπε ο 3,618 και κινήθηκε προς τη μία πλευρά της αίθουσας.

Μετά, άλλαξε κατεύθυνση. Περιπλανήθηκε λίγο στην αίθουσα προσπαθώντας να μυρίσει: «Σνιφ, σνιφ… Πιο κοντά, σνιφ, σνιφ, να από εδώ!». Στάθηκε μπροστά σε δυο χάρτινα κουτιά, πάνω σε μια βιβλιοθήκη. «Να, πίσω από εδώ έρχεται….» είπε και μετακίνησε το ένα κουτί. Έτσι, αποκαλύφθηκε ένας τρίγωνος αεραγωγός του δωματίου.

Ο 3,618 συγκεντρώθηκε και πλησίασε στον αεραγωγό. Μετά, τράβηξε το κάλυμμά του και μπήκε μέσα. Οι άλλοι δυο Δεκαδικοί πλησίασαν και κοίταξαν μέσα. Ύστερα από λίγο, ακούστηκε από το βάθος η φωνή του 3,618: «Ελάτε παιδιά, να δείτε τι βρήκα!»

Οι δυο Δεκαδικοί μπήκαν στον αεραγωγό κι ακολούθησαν τη μυρωδιά, ώσπου συνάντησαν τον 3,618 πάνω από μια έξοδο του αεραγωγού με απίστευτη θέα: τη θεία να στολίζει με y αγνώστους μια βελουτέ μαθηματική σούπα!

«Τα καταφέραμε», είπε με σιγανή φωνή η 3,141. Έλεγξε πρώτα για Κλάσματα στην κουζίνα κι αμέσως φώναξε ψιθυριστά τη θεία της.

Η θεία για να τους κρύψει από τυχόν κλασματικά βλέμματα, τους έχωσε και τους τρεις σ' ένα ντουλάπι του πάγκου της. «Όλα καλά παιδιά, τι έγινε εκεί μέσα;» ρώτησε με αγωνία.

«Μια χαρά θεία, τα καταφέραμε!» είπε ο 3,618.

«Το 6 μου κοπάνησε άσχημα και πονάω, έτσι που πέσαμε από τον αεραγωγό» γκρίνιαξε ο 3,622 τρίβοντας το νούμερο του.

«Κι εγώ μια χαρά είμαι, θεία» είπε η 3,141.

«Μέχρι να τελειώσει η τελετή θα είστε εδώ μέσα, ασφαλείς. Όταν τελειώσει η τελετή, θα σας εξηγήσω το σχέδιο για να φύγετε από το Κάστρο. Προς το παρόν όμως, θέλω να κάτσετε εδώ για να είστε καλυμμένοι. Εσύ που είσαι πιο σοβαρός 3,622, πρόσεχε τους!» είπε η θεία κλείνοντας το ντουλάπι.

«Το ξέρετε ότι δεν μπορούμε να κάτσουμε εδώ καταχωνιασμένοι, μέχρι να τελειώσει η Μετατροπή, έτσι;» είπε ο 3,622 μέσα στο σκοτάδι.

«Στο μυαλό μου είσαι…», απάντησε ο 3,618. «Πρέπει να δούμε τη Μετατροπή. Είναι μεγάλη ευκαιρία!»

«Δεν εννοούσα αυτό… Τον θεό σου δεν έχεις, ρε 3,618! Αλλά ότι στο τέλος της Μετατροπής, πρέπει να είμαστε πίσω στο δωμάτιο αναμονής. Έτσι κι επιστρέψει το Κλάσμα και δεν μας βρει, θα μας ψάχνει σ' όλο το Κάστρο…» είπε σοβαρός ο 3,622.

«Έχει δίκιο ο 3,622», είπε η 3,141.

«Επίσης θα πρέπει να παραδώσουμε το "έγγραφο-άξονα", το οποίο δεν έχουμε!»

«Πω, πω, τί θα κάνουμε;» αναρωτήθηκε δυνατά ο 3,622.

* * * * *

Είχε περάσει λίγη ώρα που οι τρεις φίλοι ήταν μέσα στον σκοτεινό ντουλάπι. Ο σαματάς απ' έξω είχε κοπάσει και στην κουζίνα επικρατούσε σχετική ησυχία.

«Μπορείς να πάρεις το πρώτο τρόλεϊ με τα ποτά για την κεντρική αίθουσα. Μετά, έλα να πάρεις και το δεύτερο», ακούστηκε ξαφνικά η θεία.

«Θα στείλω έναν σύντροφο να παραλάβει το δεύτερο τρόλεϊ, γιατί εγώ πρέπει να βοηθήσω στη σωστή στοίχιση των νεοσύλλεκτων Κλασμάτων όπου να 'ναι…», της απάντησε κάποιος ευγενικά.

«Ό,τι θες, αγόρι μου, απλά στείλε ένα άλλο Κλάσμα μέσα! Μην το ξεχάσεις! Αυτά τα ποτά θα έπρεπε

ήδη να είναι μέσα, σε λίγο αρχίζει η Μετατροπή και δεν πρέπει να κάνουμε φασαρία με τους δίσκους», είπε η θεία με γλυκό ύφος.

Ο 3,618 σκούντησε τον 3,622: «Έ παιδιά, θέλετε να δούμε από κοντά την Μετατροπή; Έχω μία φοβερή ιδέα!» είπε ενθουσιωδώς.

«Ε, αν είναι δυνατόν! Καταλαβαίνεις ότι δεν έχουμε σκεφτεί ακόμα τρόπο να ξαναφτιάξουμε το έγγραφο;» του απάντησε ο 3,622.

«Και γιατί δεν το φτιάχνουμε ξανά, με τον ίδιο τρόπο;» απόρησε ο 3,618.

«Δεν έχουμε το κατάλληλο χαρτί για να βάλουμε τα δύο έγγραφα το ένα πάνω στο άλλο. Η 3,141 μπορεί να ξαναφτιάξει το έγγραφο για τη θέση των Κλασμάτων κι εγώ για τους Δεκαδικούς… Αλλά με το χαρτί που έχει εδώ, στην κουζίνα. Το χαρτί αυτό δεν είναι ημιδιάφανο. Αν βάλουμε το ένα έγγραφο πάνω στο άλλο όπως είχαμε κάνει, το από κάτω έγγραφο δεν θα φαίνεται καθόλου… Πρέπει αναγκαστικά να φτιάξουμε το έγγραφο σ' ένα χαρτί και δεν έχουμε ιδέα πώς συγκρίνουμε Κλάσματα με Δεκαδικούς για να το κάνουμε αυτό… Καταλαβαίνεις το πρόβλημα που έχουμε τώρα; Θες να σκεφτείς κι εσύ κάτι να βοηθήσεις;»

«Ναι αμέ, κάτι θα σκεφτούμε…» απάντησε ο 3,618 αφηρημένα. Έμεινε σιωπηλός προσπαθώντας ν' ακούσει κάτι που γινόταν έξω από το ντουλάπι του.

«Το περίμενα ότι δεν θα είχες κανένα σχέδιο», είπε ο 3,622.

Ξαφνικά, χωρίς καμία προειδοποίηση, ο 3,618 άρπαξε τον 3,622 από το 2 του και την 3,141 από το 1 της. Τους κοίταξε με τεντωμένα τα ψηφία του. Οι δυο Δεκαδικοί τρόμαξαν από την απότομη επιθετική κίνηση του 3,618 κι έμειναν ακίνητοι.

«Μετράω στο τρία!» είπε ο 3,618.

«Έναااااα, δύοοοο, ….».

Ο χρόνος είχε παγώσει για τον 3,622 που κοιτούσε τον 3,618 να μετράει σε αργή κίνηση. Τα νούμερα του ήταν έτοιμα να σκάσουν από την αγωνία. Έσφιξε τα δύο έγγραφα στα για να μην τα ξαναχάσει. Κοίταξε στιγμιαία την 3,141, η οποία τον κοιτούσε κι αυτή τρομαγμένη. Κανείς τους δεν ήξερε τι σχεδίαζε ο 3,618, που τους κρατούσε σφιχτά από τα νούμερα.

«Τρίااα!» φώναξε ο 3,618, πηδώντας μαζί με τους δυο Δεκαδικούς έξω από το ντουλάπι.

Όλα έγιναν τόσο γρήγορα, που μέχρι να καταλάβουν τι είχε συμβεί βρέθηκαν ξανά σε ένα σκοτεινό μέρος, με τον 3,618 να τους κοιτάει χαμογελαστός.

«Αυτό ήταν, τα καταφέραμε!» είπε ο 3,618, αφήνοντας πια τα νούμερα τους.

Ο 3,622 δεν μπορούσε να μιλήσει από το σοκ. Η 3,141 κοιτούσε γύρω της για να καταλάβει πού βρίσκονταν. Μια κουρτίνα γύρω τους, τους έκρυβε το φως. Δίπλα τους, υπήρχαν δοχεία με μαθηματικά συστατικά για χυμό, κρασί και αναψυκτικά.

«Πού βρισκόμαστε;» ρώτησε η 3,141 με σιγανή φωνή.

«Θα δείτε σε λίγο» είπε ο 3,618, και στηρίχθηκε σ' ένα δοχείο με μεταβλητές για καροτοχυμό.

Ο 3,622 κοιτούσε τις κουρτίνες να κινούνται και τη μεταλλική επιφάνεια που πατούσαν να τρέμει. Απ' έξω ακούγονταν φωνές, που δεν μπορούσες να διακρίνεις τι έλεγαν. Μετά από λίγο, το πάτωμα σταμάτησε να τρέμει και οι φωνές που ακούγονταν ησύχασαν επίσης.

«Τώρα, μπορούμε προσεχτικά να κοιτάξουμε αν είμαστε σε καλό σημείο», είπε με σιγανή φωνή ο 3,618. Η 3,141, με προσεχτικές κινήσεις, άνοιξε λίγο την κουρτίνα και οι τρεις Δεκαδικοί κοίταξαν έξω.

Το φως που διαπέρασε τις κουρτίνες αποκάλυψε ένα εκπληκτικό θέαμα. Ακριβώς μπροστά τους, βρίσκονταν Κλάσματα που είχαν στοιχιστεί τέλεια μεταξύ τους, σχηματίζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα. Όλα κοιτούσαν προς την ίδια κατεύθυνση, όπου υπήρχε μια σκηνή. Μπροστά από τα Κλάσματα ήταν Δεκαδικοί, οι

οποίοι σχημάτιζαν κι αυτοί ένα μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα. Οι Δεκαδικοί κοιτούσαν κι αυτοί μπροστά, προς τη σκηνή. Ανάμεσα στη σκηνή και στα στοιχισμένα Κλάσματα και τους Δεκαδικούς υπήρχε σχηματισμένο ένα περίεργο κλειστό Σχήμα, χωρίς καθόλου γωνίες, που έμοιαζε με παραμορφωμένο μηδενικό. Πίσω από το ιδιαίτερο αυτό Σχήμα, πάνω στη σκηνή, βρίσκονταν τέσσερα Κλάσματα, 2 από την αριστερή μεριά και 2 από τη δεξιά, ενώ στη μέση δέσποζε ένας άδειος χρυσός θρόνος. Οι πλευρές της αίθουσας ήταν απόλυτα λευκές και αυτό γεννούσε την αίσθηση του απέραντου. Στην κορυφή της αίθουσας έγραφε: "*Μετά τους Φυσικούς, το χάος!"*

Όλοι οι Δεκαδικοί και τα Κλάσματα της αίθουσας ήταν σιωπηλοί και ακίνητοι. Ο 3,618 κοίταζε και τα νούμερα του έλαμπαν από ενθουσιασμό μ' όλα αυτά που έβλεπε. Η 3,141 κι ο 3,622 είχαν ξεπεράσει το αρχικό τους σοκ και είχαν ανοίξει τα νούμερα τους για να ρουφήξουν το επιβλητικό θέαμα.

«Αυτή είναι η αίθουσα RGB και είναι όπως ακριβώς μου την είχαν περιγράψει!» είπε ο 3,622 εντυπωσιασμένος.

«Τα κατάφερες, 3,618!» είπε χαρούμενος.

Την απόλυτη σιγή της αίθουσας διαδέχθηκε μια δυνατή μουσική από τα μεγάφωνα. Η μουσική ανήγγειλε το σπουδαίο γεγονός: Δεξιά από τη σκηνή και πίσω από τα 2 Κλάσματα της φρουράς, πρόβαλε σιγά-σιγά ένα νούμερο. Ο αργός βηματισμός του, πρόδιδε και τη μεγάλη ηλικία του. Στην αρχή, ξεχώρισε ένα 0, κι αυτό ήταν που έκανε τον 3,618 να βγάλει το 3 του εντελώς έξω από την κουρτίνα. Αμέσως, ο 3,622 με γρήγορες κινήσεις τον ξανατράβηξε μέσα. Μετά το 0, ξεπρόβαλε μια υποδιαστολή.

«Δεκαδικός από το Διάστημα (0, 1]!» είπε ο 3,618.

«Τι δουλειά έχει αυτός εδώ;» ρώτησε πάλι.

Ο 3,622 και η 3,141 ανασήκωσαν τα νούμερα τους με άγνοια.

Την υποδιαστολή ακολούθησε ένα ακόμη 0 και μετά ένα 5. Ο Δεκαδικός κρατούσε σκήπτρο, που είχε κι αυτό το ίδιο σχήμα, χωρίς γωνίες, πάνω του. Ο Δεκαδικός 0,05 με αργά βήματα και χρησιμοποιώντας το σκήπτρο του ως μπαστούνι, πλησίασε τον θρόνο και στάθηκε δίπλα του. Η μουσική των μεγαφώνων αμέσως έγινε εντονότερη. Τότε, από την αριστερή πλευρά της σκηνής βγήκε ο Φυσικός 3 κι έκατσε στον θρόνο.

Ο Φυσικός 3 ήταν εκθαμβωτικός, οι αναλογίες του νούμερού του ήταν ζηλευτές και το χρυσό χρώμα του μοναδικού του ψηφίου ήταν γυαλιστερό, σαν από χρυσάφι. Ο 3,618 δεν είχε ξαναδεί ποτέ στη ζωή του Φυσικό αριθμό. Ήταν πιο λαμπερός απ' όλους τους Δεκαδικούς που είχε συναντήσει – και δεν ήταν λίγοι... Η 3,141 κοιτούσε το 3 της και μετά τον Φυσικό 3 και μετά ξανά το 3 της… Δεν μπορούσε να πιστέψει ότι παρότι είχαν το ίδιο νούμερο και οι δύο τους, ο Φυσικός ήταν τόσο διαφορετικός, τόσο αρχοντικός… Ο 3,622 ήταν κι αυτός εντυπωσιασμένος, αλλά προσπαθούσε να μετριάζει τον ενθουσιασμό του και να κρατάει την κουρτίνα κλειστή, μην τους πάρουν χαμπάρι.

Μόλις ο Φυσικός 3 ξεπρόβαλλε στην αίθουσα, όλα τα Κλάσματα χτύπησαν τη γραμμή του κλάσματος τους σε προσοχή. Η μουσική σταμάτησε και τα μεγάφωνα μετέδωσαν το μήνυμα του καλωσορίσματος: «Ξεκινάει η τελετή της Μετατροπής: Όλα τα υποψήφια Κλάσματα να κάνουν ένα βήμα εμπρός και να λάβουν θέση!»

«Δεν το πιστεύω ότι θα δούμε την τελετή της Μετατροπής!» είπε ο 3,618 στον 3,622, που ένιωθε απολύτως τον ενθουσιασμό του.

«Είμαστε σε τρόλεϊ σερβιρίσματος, έτσι;» ρώτησε η 3,141, κοιτάζοντας με νόημα τον 3,618.

Εκείνος κοκκίνισε λίγο και προσπάθησε να αλλάξει κουβέντα:

«Ε 3,622, έχε το νου σου κι εσύ, για να καταλάβουμε επιτέλους πώς δουλεύει αυτή η Μετατροπή!»

Ο Φυσικός 3 έκατσε στο θρόνο του και μόλις η ανακοίνωση τελείωσε κοίταξε τα Κλάσματα της

φρουράς, κάνοντας νεύμα για την έναρξη της τελετής. Ένα Κλάσμα της φρουράς προπορεύτηκε από τα υπόλοιπα κι ανακοίνωσε: «Η Μετατροπή ξεκινά. Παρακαλείται η σειρά Μετατροπής των υποψήφιων Κλασμάτων να τηρηθεί με σοβαρότητα!». Μετά, επέστρεψε στη θέση του.

Ο πρώτος Δεκαδικός από τα δεξιά ήταν ο 2,61, ο οποίος, με την έναρξη της τελετής, έκανε βήματα προς τα μπροστά και μπήκε στο κέντρο του Σχήματος που βρισκόταν στο έδαφος, μπροστά από τους Δεκαδικούς υποψηφίους. Μόλις πήγε στο κέντρο του Σχήματος, έκατσε ακίνητος.

Οι τρεις φίλοι, μέσα από τις κουρτίνες του τρόλεϊ, παρατηρούσαν προσεκτικά κάθε κίνηση του 2,61.

«Στάσου, αυτό στο έδαφος δεν είναι το Σχήμα της αφίσας στο σπίτι του 3,888;» ρώτησε ο 3,618.

«Έχεις δίκιο! Πώς δεν το συνδύασα αυτό; Ναι όντως, αυτό είναι!» απάντησε ο 3,622, έχοντας το βλέμμα του κολλημένο στην τελετή.

Ο Δεκαδικός 0,05 πήγε μπροστά από τον 2,61, έξω από το Σχήμα, έκατσε ακίνητος και σήκωσε το σκήπτρο του στον αέρα.

«Εγώ, ο Δεκαδικός απεσταλμένος ιερέας του Ναού του 0, παρουσία του Φυσικού 3, σε καλώ να μετατραπείς σε Κλάσμα μέσα στο ιερό Σχήμα του κύκλου!» είπε ο 0,05 αγγίζοντας με το σκήπτρο του τον 2,61.

«Κύκλος; Ιερέας;» ψέλλισαν ταυτόχρονα ο 3,618 κι ο 3,622.

Τότε, ένα Κλάσμα πλησίασε το Σχήμα του κύκλου, μέσα στο οποίο βρισκόταν ο 2,61 και του έδωσε μια γραμμή κλάσματος. Με τη σειρά του, ο 2,61 έβγαλε την υποδιαστολή του και την έδωσε στο Κλάσμα που απομακρύνθηκε. Ο Δεκαδικός στεκόταν τώρα χωρίς υποδιαστολή, με μια γραμμή κλάσματος από κάτω του:
261/

Ο Ιερέας 0,05 συνέχισε: «Είθε η θεία χάρις του Φυσικού 1, η πάντοτε το Δεκαδικό θεραπεύουσα και τα ελλείποντα αναπληρούσα, προχειρίζεται τον 2,61 εις Κλάσμα. Ευξώμεθα ουν υπέρ αυτού, ίνα έλθει επ'αυτόν η Χάρις του 0!».

Μόλις ο Ιερέας του 0 ολοκλήρωσε την ευχή, ως δια μαγείας θα έλεγες, εμφανίστηκαν δύο 0 και ένα 1. Τα τρία ψηφία 1, 0 και 0 μπήκαν κάτω από τη γραμμή κλάσματος του 261, κι έτσι το νέο Κλάσμα ήταν πια οντότητα: 261/100!

Στη συνέχεια, ο Φυσικός 3, αφού σηκώθηκε από τον θρόνο του, απήγγειλε τον χαιρετισμό του στο νέο Κλάσμα: «Με τη δύναμη του δυνατότερου Φυσικού του Άρπλας, του Φυσικού 1, και με την ευλογία του Ναού του 0, ξεκινήσαμε την πρώτη επιτυχημένη μας Μετατροπή. Ένας αδύναμος Δεκαδικός, ο 2,61, μετατράπηκε σε παντοδύναμο Κλάσμα. Από τούδε, ο 2,61 είναι ο 261/100! Ζήτω οι Φυσικοί!» είπε με δυνατή φωνή.

«Ζήτωωω!» απάντησαν όλα μαζί τα Κλάσματα, που ήταν παρόντα στην αίθουσα.

Οι τρεις Δεκαδικοί, μέσα από το καρότσι σερβιρίσματος, είχαν μείνει άφωνοι. Ο 3,618 σκέφτηκε: *«2 x 100 = 200 και 3 x 100 = 300, άρα το 261/100 ανήκει στο διάστημα (2, 3], που είναι βέβαια λογικό, αφού πρόκειται για τον 2,61».*

«Τώρα εξηγούνται όλα, 3,622», είπε ο 3,618. «Έτσι γίνεται λοιπόν η Μετατροπή, έτσι ένας Δεκαδικός γίνεται Κλάσμα… Απίστευτο και ταυτόχρονα τόσο στενάχωρο… Για να γίνει Κλάσμα ένας Δεκαδικός δέχεται ν' απαρνηθεί το μόνο πράγμα που του δίνει την υπόστασή του: Την υποδιαστολή του, για μια γραμμή Κλάσματος!»

Ο 3,622 κούνησε το 3 του καταφατικά: «Έτσι είναι 3,618, αυτή είναι η πραγματική θυσία που υποβάλλεσαι για να αποκτήσεις την εξουσία Κλάσματος… Πρέπει να μπορείς να απαρνηθείς την ίδια σου τη δεκαδική φύση. Μόνο όταν απαρνηθείς και το τελευταίο χαρακτηριστικό που σε κάνει Δεκαδικό, μόνο τότε μπορείς να λέγεσαι Κλάσμα!»

«Εντωμεταξύ, η Μετατροπή έχει την ευλογία και του Ναού του Μηδενός, αφού στον παρονομαστή

πήρε 2 μηδενικά, αλλά και του Φυσικού 1, αφού μπροστά από τα μηδενικά μπήκε και το 1!» συμπλήρωσε η 3,141.

«Ναι, ακριβώς. Κι όπως τόνισε ο ιερέας *"όχι οποιουδήποτε Φυσικού αλλά του δυνατότερου Φυσικού, του Φυσικού 1"*!» είπε ο 3,622.

«Και το Σχήμα αυτό στο έδαφος, χωρίς καθόλου γωνίες, λέγεται κύκλος, *"Ιερός κύκλος"*, όπως είπε ο ιερέας», συνέχισε ο 3,622 με το γνωστό διδακτικό του ύφος.

«Εγώ πάλι, δεν καταλαβαίνω γιατί μπαίνει στον παρονομαστή ένα 1 και δύο 0; Από πού κι ως πού;» ρώτησε ο 3,618.

«Μη βιάζεσαι 3,618, θα δούμε κι άλλες μετατροπές στη συνέχεια. Μόνο να έχουμε τα νούμερα μας 14, ώστε να καταλάβουμε τη διαδικασία…» συμβούλεψε ο 3,622.

Όντως, στη συνέχεια, μπήκε στον Ιερό κύκλο μια άλλη Δεκαδικός, η 2,5. Ο ιερέας, πλησίασε πάλι τον κύκλο, σήκωσε το ραβδί του και ξεκίνησε από την αρχή την τελετή. Ξανά, ένα άλλο Κλάσμα πλησίασε την 2,5, εκείνη του έδωσε την υποδιαστολή της και πήρε την γραμμή του.

«Ευξώμεθα ουν υπέρ αυτού, ίνα έλθει επ'αυτήν η Χάρις του 0…» έψαλλε ο ιερέας, όπως και πριν. Όμως αυτή τη φορά, εμφανίστηκε 1 μηδενικό μετά το 1, κι όχι δύο 0, όπως πριν. Τα 0 και 1 μπήκαν με τον ίδιο τρόπο στον παρονομαστή και η 2,5 μετατράπηκε στο Κλάσμα 25/10!

Ο 3,622 κι ο 3,618 αλληλοκοιτάχτηκαν με νόημα και συνέχισαν να προσέχουν την τελετή. Η 3,141 όμως, τους κοίταξε με απορία: «Εγώ, σε αντίθεση με εσάς, δεν κατάλαβα. Θέλετε να με βοηθήσετε λίγο;»

«Επίτρεψε μου 3,618 να δώσω εγώ τις εξηγήσεις», είπε ο 3,622 και συνέχισε: «Πριν, αν παρατήρησες, ο 2,61 έγινε 261/100. Από πού δηλαδή έφυγε η υποδιαστολή του;»

Η 3,141 σκέφτηκε λίγο και απάντησε «Μετά το πρώτο νούμερο, όπως όλοι οι Δεκαδικοί. Όλοι οι Δεκαδικοί, που ξέρω τουλάχιστον, εκεί έχουν την υποδιαστολή, ανάμεσα στο πρώτο νούμερο και στο δεύτερο».

«Σωστά», απάντησε ο 3,622 «αλλά ποια είναι η διαφορά του 2,61 και της 2,5 πέρα από τα διαφορετικά νούμερα;»

«Μμμμ, άλλη μια διαφορά, πέρα από τα νούμερα, είναι το πόσα νούμερα: ο 2,61 έχει 2 νούμερα μετά την υποδιαστολή του, ενώ η 2,5 έχει 1 νούμερο, μετά τη δικιά της. Να μια διαφορά!» παρατήρησε η 3,141.

«Τέλεια!» απάντησε ο 3,622. «Σκέψου τώρα, πόσα μηδενικά πήρε ο 2,61 για να γίνει Κλάσμα και πόσα η 2,5;»

«Αααα μάλιστα, κατάλαβα», είπε η 3,141. «Επομένως, για να μετατραπείς σε κλάσμα, όσα δεκαδικά ψηφία έχεις μετά την υποδιαστολή, τόσα μηδενικά θα πάρεις στον παρονομαστή. Δηλαδή, ο 2,61 γίνεται 261/100 (δύο δεκαδικά, οπότε δύο μηδενικά) και η 2,5 γίνεται 25/10 (ένα δεκαδικό, οπότε κι ένα μηδενικό). Έτσι;» ολοκλήρωσε η 3,141.

«Μπράβο σου 3,141!» την επαίνεσε ο 3,618.

«Άρα εσύ 3,618, αν γινόσουν Κλάσμα, θα ήσουν ο 3618/1000. Σωστά;»

«Πολύ σωστά!» επιβεβαίωσε ο 3,622.

«Αυτό δε θα γίνει ποτέ!» είπε ο 3,618 νευριασμένος κι έκλεισε την κουρτίνα.

Η 3,141 και ο 3,622 τρόμαξαν από την αντίδραση του φίλου τους.

«Είμαι περήφανος που είμαι Δεκαδικός και δεν θέλω να αλλάξω! Θα δείτε όταν φτάσουμε στο Κάστρο 1 και νικήσω τον Φυσικό 1! Θα αποδείξω σε όλους ότι οι Δεκαδικοί είναι ισάξιοι, και, μη σας πω, ανώτεροι από τους Φυσικούς και τα Κλάσματα! Θα το δείτε!» ξεσπάθωσε ο 3,618.

«Εντάξει, χαλάρωσε, δε σου είπε και κάτι η 3,141. Ένα παράδειγμα έφερε, για να δει απλώς αν κατάλαβε τη Μετατροπή. Δε σου είπε κανείς να γίνεις Κλάσμα…» προσπάθησε να τον ηρεμήσει ο 3,622.

«Ναι, συγγνώμη, δεν ήθελα να σε προσβάλλω…» του είπε η 3,141.

Ο 3,618 δεν τους απάντησε, μόνο άνοιξε τις κουρτίνες και συνέχισε να κοιτάζει τη Μετατροπή.

Ο Φυσικός 3 είχε σηκωθεί πάλι από τον θρόνο του, αλλά αυτή τη φορά, πριν απαγγείλει τον χαιρετισμό του στο νέο Κλάσμα, πλησίασε λίγο πιο μπροστά κι αναφώνησε: «Κλάσμα 25/10, απλοποιήσου αμέσως με το 5!»

Τότε, το Κλάσμα 25/10 μεταμορφώθηκε σε 5/2! Κι αμέσως μετά, το Κλάσμα 5/2 βγήκε από τον κύκλο και η τελετή συνεχίστηκε.

Οι 3 Δεκαδικοί κοιτούσαν ο ένας τον άλλο με απορία.

«Τι έγινε τώρα;» είπε ο 3,622. «Ποιος κατάλαβε; Πώς ο 25/10 έγινε 5/2;»

Ο 3,618 άρχισε να γελάει, μετά κοίταξε τον 3,622 κι είπε: «Ένα πράγμα θα σου πω: *Ομωνύμως αναφέρσου*!» είπε, προσποιούμενος τη φωνή Κλάσματος.

Η 3,141 κοίταξε τον 3,622, ο οποίος δεν μιλούσε, αλλά προσπαθούσε να σκεφτεί.

«Φανταστείτε ότι αυτό που μόλις έγινε είναι σαν την ομώνυμο αναφορά, αλλά αντίστροφα!» είπε ενθουσιασμένος ο 3,618.

Ο 3,622 συνέχισε να σκέφτεται, αλλά τώρα δυνατά: «Δηλαδή, ομώνυμος αναφορά… Θες να πεις μάλλον ότι το 25/10 και το 5/2 είναι τα ίδια Κλάσματα. Δηλαδή υπάρχει ένας αριθμός, όπως και την άλλη φορά, που κάνει το 25/10 να γίνει 5/2, ε;»

«Ναι, αυτό ακριβώς!» απάντησε ο 3,618.

«Αααα, νομίζω πως κατάλαβα. Το 5 είναι 5 φορές μικρότερο από το 25 (25:5=5) και το 2 είναι 5 φορές μικρότερο από το 10 (10:5=2). Οπότε, το 5/2 είναι το ίδιο Κλάσμα με το 25/10!» κατέληξε ο 3,622.

«Αυτό ακριβώς!» είπε ο 3,618. «Μόνο που στην προκειμένη περίπτωση, αντί να πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό, διαιρέσαμε. Απλοποίηση σημαίνει να παίρνεις Κλάσμα με ίδια θέση, όπως και στην ομώνυμο αναφορά, αλλά με τον μικρότερο δυνατό αριθμητή και παρονομαστή!»

«Καλά, κάνετε φοβερό δίδυμο εσείς οι δυο… Δεν έχουμε να φοβηθούμε τίποτα!» είπε η 3,141.

«Ναι, εννοείται», είπε ενθουσιασμένος ο 3,618.

«Ωραία, ναι, αλλά τώρα πώς γυρνάμε στην κουζίνα; Αν θυμάστε, πριν τελειώσει η Μετατροπή θα πρέπει να είμαστε στο δωμάτιο υποδοχής…» είπε ο 3,622, που ξανά-αγχώθηκε.

«Δεν μπορεί, κάπου εδώ κοντά θα είναι η θεία…», είπε ο 3,618, βγάζοντας διακριτικά το 3 του έξω από την κουρτίνα.

«Είσαι φοβερός 3,618, πραγματικά απίστευτος! Είναι δυνατόν να μη σκέφτηκες πώς θα φύγουμε από εδώ;» είπε φουρκισμένος ο 3,622.

«Δεν έφτασα το σχέδιο μέχρι εδώ, απλά μου φάνηκε καλή ιδέα να δούμε τη Μετατροπή!» απάντησε χαμογελαστός. «Τώρα θα βρούμε κι ένα σχέδιο για να φύγουμε», είπε ο 3,618.

«Απίστευτα ανώριμος!» συνέχισε ο 3,622.

Η 3,141 παρατηρούσε απλώς τη σκηνή, προσπαθώντας να σκεφτεί κι εκείνη έναν τρόπο να φύγουν κάπως από την αίθουσα αυτή που είχαν παγιδευτεί.

Ένα τσιριχτό, αλλά σιγανό «Ψιτ;» τους διέκοψε. Οι 3 Δεκαδικοί κοίταξαν προς τη μεριά που ακούστηκε ο ήχος. Ο 3,618 ετοιμάστηκε, σηκώνοντας το 8 του, να χτυπήσει όποιον θα έμπαινε στο τρόλεϊ.

«Ε, ψιτ!» ξανακούστηκε. Η 3,141 προσπάθησε να αφουγκραστεί μέσα από την κουρτίνα, αλλά η κουρτίνα άνοιξε απότομα κι αποκάλυψε τη θεία.

«Τόση ώρα σας ψάχνω… Δεν σας είπα να μην κουνηθείτε από την κουζίνα;» τους κατσάδιασε εκείνη.

«Μπορείς να μας πας πίσω στην κουζίνα, θεία;» ικέτευσε η 3,141.

Εννοείται ότι μετά από λίγα δευτερόλεπτα, η θεία βρήκε τρόπο να τους σύρει αθόρυβα ως την κουζίνα. Με το που έφτασαν, οι 3 Δεκαδικοί βγήκαν από το τρόλεϊ και της εξήγησαν τα νέα δεδομένα που είχαν προκύψει.

«Μάλιστα. Και τώρα ποιό είναι το σχέδιο;» ρώτησε η θεία.

«Σίγουρα πρέπει να επιστρέψουμε στην αίθουσα αναμονής της αίθουσας R. Και να σκεφτούμε έναν τρόπο για να φύγουμε μετά από αυτήν…» είπε σκεπτικός ο 3,622.

«Αν βγείτε από την αίθουσα R, από την άλλη πλευρά της, έχω τρόπω να σας φυγαδεύσω…», είπε η θεία. «Απλά θα πρέπει, το πολύ 20 λεπτά μετά τη Μετατροπή, να είστε έξω από την αίθουσα R, στο σημείο του ραντεβού. Εδώ ακριβώς να είστε!» τους είπε, δείχνοντας στον χάρτη το σημείο του ραντεβού.

Οι 3 Δεκαδικοί έγνεψαν καταφατικά κι άρχισαν να σκαρφαλώνουν με τη σειρά στον αεραγωγό.

«Και βέβαια, αυτή τη φορά ακολουθήστε το σχέδιο πιστά….», τους προειδοποίησε η θεία, κατευθυνόμενη -μαζί με το άδειο τρόλεϊ- πίσω στην αίθουσα RGB.

* * * * *

Μέσα στην αίθουσα υποδοχής πια, οι 3 Δεκαδικοί προσπαθούσαν να σκεφτούν έναν τρόπο διαφυγής από την αίθουσα R.

«Λοιπόν, το μόνο που μένει τώρα είναι να φτιάξουμε το "έγγραφο-άξονα" στα γρήγορα, και μετά να βγούμε απλά από την άλλη έξοδο της αίθουσας R», είπε ο 3,618 κοιτάζοντας τον 3,622.

«Και πώς θα το κάνουμε αυτό, έξυπνε;» ρώτησε ο 3,622.

«Με την Μετατροπή, αυτό ήταν το στοιχείο που μας έλειπε…» απάντησε η 3,141.

Οι τρεις φίλοι κοιτάχτηκαν χωρίς να μιλούν και χαμογέλασαν. Συνειδητοποίησαν πως η Μετατροπή ήταν το τελευταίο κομμάτι του παζλ. Με εργαλείο τη Μετατροπή μπορούσαν πλέον να φτιάξουν το έγγραφο που θα είχε τις σωστές θέσεις όλων των Δεκαδικών και των Κλασμάτων μαζί!

«Πρέπει να είμαστε πολύ ακριβείς, γιατί, ακόμη και το παραμικρό μας λάθος, ο Θεωρητικός Δεκαδικός του γραφείου θα το καταλάβει. Δεν πρέπει να αμφισβητήσει την αυθεντικότητα του εγγράφου μας. Αλλιώς, θα βρεθούμε κατευθείαν, προς απολογία, ενώπιον του Φυσικού 3. Η πλαστογραφία τιμωρείται με φυλάκιση στο βασίλειο του Άρπλας!» είπε ο 3,622.

Έτσι, μαζί οι 3 Δεκαδικοί φίλοι, γνωρίζοντας πια τη διαδικασία της Μετατροπής, μετέτρεψαν νοητά όλους τους Δεκαδικούς σε Κλάσματα, ώστε να μπορούν να τους συγκρίνουν εύκολα με τα Κλάσματα του άξονα. Μέσα σε λίγη ώρα, με ομαδική δουλειά, ολοκλήρωσαν το "έγγραφο-άξονα": Δεκαδικοί και Κλάσματα, διατεταγμένα όλα στον ίδιο άξονα!

* * * * *

Η τελετή στην αίθουσα RGB έφτανε προς το τέλος της. Όλοι οι Δεκαδικοί υποψήφιοι είχαν εξαφανιστεί και τη θέση τους είχαν πάρει Κλάσματα. Στο δωμάτιο, μόνη Δεκαδικός πια η θεία, η οποία περίμενε υπομονετικά το πέρας της τελετής.

Όταν κι ο τελευταίος Δεκαδικός μετατράπηκε σε Κλάσμα, ένα από τα Κλάσματα της προσωπικής φρουράς του Φυσικού 3 προχώρησε και στάθηκε μπροστά στην νέα τάξη των Κλασμάτων του Διαστήματος (2, 3].

«Ακολουθεί ο όρκος των Κλασμάτων!» φώναξε, κι όλα τα Κλάσματα στην αίθουσα χτύπησαν προσοχή αμέσως.

«Ορκίζομαι να φυλάττω πίστη στο Διάστημα μου..» ξεκίνησε να διαβάζει τον όρκο το Κλάσμα.

«Ορκίζομαι!» απάντησε σύσσωμο το νέο σώμα των Κλασμάτων.

«Ορκίζομαι υπακοή στον Νόμο της Διάταξης…»

«Ορκίζομαι!»

«Ορκίζομαι να υπερασπίζομαι, με πίστη και αφοσίωση, μέχρις εσχάτου χιλιοστού της γραμμής του Κλάσματος μου, το Ισόπλευρο τρίγωνο…»

«Ορκίζομαι!»

«Ορκίζομαι να υπακούω τον Φυσικό 3 και να εκτελώ πρόθυμα τις διαταγές του…»

«Ορκίζομαι!»

«Υπερηφάνεια και τιμή στα νέα Κλάσματα του (2 , 3]!» φώναξε τέλος το Κλάσμα, κι όλα τα Κλάσματα της αίθουσας άρχισαν να πανηγυρίζουν και να επευφημούν.

Ο Φυσικός 3 και ο Ιερέας 0,05, μετά την τελετή, έφυγαν από τη σκηνή, συνοδευόμενοι από την προσωπική φρουρά του 3. Όλα τα Κλάσματα άρχισαν να κατευθύνονται προς τον μπουφέ της αίθουσας, όπου τα φαγητά είχαν σερβιριστεί από τα Κλάσματα-βοηθούς και τον Σεφ του Κάστρου 3, την Δεκαδικό 3,11. Τα μεγάφωνα της αίθουσας άρχισαν να παίζουν μια χαρμόσυνη μουσική και όλα τα Κλάσματα περίμεναν με ανυπομονησία να γευθούν τις νέες δημιουργίες της θείας.

* * * * *

Η πόρτα στην αίθουσα αναμονής ξεκλείδωσε και το Κλάσμα μπήκε μέσα, κρατώντας ένα ποτήρι με καροτοχυμό.

«Η τελετή της Μετατροπής έλαβε τέλος. Ακολουθήστε με προς το γραφείο εποπτείας», είπε το Κλάσμα στους τρεις Δεκαδικούς.

Ο 3,622 έγνεψε καταφατικά κι όλοι μαζί οι Δεκαδικοί ακολούθησαν το Κλάσμα έξω από το δωμάτιο. Μετά από λίγο έφτασαν στο γραφείο, κι ο 3,622 πλησίασε τον θεωρητικό Δεκαδικό που βρισκόταν ήδη στη θέση του.

«Χαίρετε! Είμαι ο επικεφαλής του Τμήματος Συντηρήσεων Τετράπλευρων του Διαστήματος (3, 4]», είπε με επισημότητα ο 3,622. «Είμαι εδώ για την απογραφή που αφορά τα γεωμετρικά Σχήματα των θέσεων (3, 4]».

«Ωραία», απάντησε ο Θεωρητικός, «προσκομίστε τα απαραίτητα έγγραφα, και γρήγορα σας παρακαλώ».

«Δώστε μου τα απαραίτητα έγγραφα» είπε ο 3,622 στους Δεκαδικούς ακόλουθούς του. Η 3,141 έψαξε στην τσάντα της και παρέδωσε το "έγγραφο-άξονα". Ο 3,622 κοίταξε το ρολόι πάνω στο γραφείο του Θεωρητικού και σκέφτηκε «Έχουμε ακόμη 8 λεπτά, μέχρι το ραντεβού με την θεία».

Ο Θεωρητικός Δεκαδικός πήρε στα χέρια του το έγγραφο κι άρχισε να το εξετάζει. Οι 3 Δεκαδικοί τον κοίταζαν στα νούμερα, περιμένοντας εναγωνίως την απάντησή του.

«Μμμμ, δεν είναι σωστό…»

«Συγγνώμη, τι εννοείτε;» ρώτησε έντρομος ο 3,622.

«Λείπει μια υπεύθυνη δήλωση του *Νόμου Διάταξης 105 (περί Σχημάτων)*, την έχετε μαζί σας;» ρώτησε αυστηρά ο Θεωρητικός.

Ο 3,622, ανακουφισμένος, έκανε νόημα στον 3,618. Αυτός έψαξε τον χαρτοφύλακά του κι έδωσε το απαραίτητο έγγραφο, χωρίς καθυστέρηση αυτή τη φορά.

«Καλώς… Περιμένετε λίγο να συμπληρώσω τη φόρμα. Αφού βάλετε την υπογραφή σας, μπορείτε να φύγετε» είπε ο Θεωρητικός, συμπληρώνοντας ταυτόχρονα την εν λόγω φόρμα.

Ο 3,622 κοίταξε πάλι το ρολόι. Φανερά αγχωμένος ένευσε στην 3,141, η οποία όμως του χαμογέλασε και του έδωσε να καταλάβει ότι όλα θα πάνε καλά.

«Είστε έτοιμοι», είπε ο Θεωρητικός και παρέδωσε την φόρμα στον 3,622, υποδεικνύοντάς του τον χώρο για την υπογραφή.

Ο 3,622 αμέσως έσκυψε κι έβαλε την υπογραφή του.

«Ευχαριστώ πολύ», είπε ο Θεωρητικός.

Οι 3 Δεκαδικοί έφυγαν βιαστικά από το γραφείο και βγήκαν από την άλλη έξοδο της αίθουσας R, όπως ακριβώς είχε πει η θεία. Το σχέδιο τους είχε λειτουργήσει άψογα! Τώρα έμενε απλώς να επιτελέσει η θεία το δικό της κομμάτι…

9.1.11 Το Διάστημα (2, 3]

Λίγο παραδίπλα από την έξοδο της αίθουσας R, υπήρχε ένα τρόλεϊ άδειο, χωρίς κανέναν τριγύρω του, το οποίο έγραφε πάνω του *Διάστημα (2, 3]*.

«Ελάτε από δω!» είπε ο 3,618 κι έτρεξε γρήγορα προς το τρόλεϊ. Χωρίς δεύτερη σκέψη μπήκε μέσα, αφού κανένα Κλάσμα δεν ήταν γύρω τους. Οι 2 Δεκαδικοί τον ακολούθησαν άμεσα.

Όλοι μαζί πάλι, οι 3 Δεκαδικοί κάθονταν ήσυχοι και περίμεναν. Είχε περάσει αρκετή ώρα κι οι φωνές τον Κλασμάτων απ' έξω ακούγονταν πιο λίγο και πιο αδύναμα. Μιας κι η Μετατροπή είχε τελειώσει από ώρα, το Κάστρο 3 επέστρεφε σιγά-σιγά στους κανονικούς του ρυθμούς.

Ξαφνικά το καρότσι τραντάχτηκε, σαν κάποιος να το άγγιξε. Οι 3 Δεκαδικοί κοιτάχτηκαν χωρίς να βγάλουν κιχ, προσπαθώντας να μαντέψουν ποιος μπορεί να είναι. Τότε ακούστηκε μια γνώριμη σιγανή φωνή, αυτή της θείας:

«Σε λίγο θα κατεβείτε με τον ανελκυστήρα κάτω, στο Διάστημα (2, 3]. Εγώ, δυστυχώς, αν και θα το ήθελα πολύ, δεν μπορώ να συνεχίσω την περιπέτεια αυτή μαζί σας. Η θέση μου είναι στο Διάστημα (3, 4] κι εκεί θα επιστρέψω. Στο τέλος του ανελκυστήρα όμως, θα σας παραλάβει ένας πολύ καλός μου φίλος. Είναι ένας πρακτικός Δεκαδικός, που τον γνώρισα πριν πολλά χρόνια εδώ, στο Κάστρο 3. Θα σας οδηγήσει στο Σχήμα του. Από εκεί θα πρέπει να βρείτε ένα νέο σχέδιο για να συνεχίσετε το ταξίδι σας. Είμαι πολύ χαρούμενη που σας βοήθησα και που σας γνώρισα, έστω και για λίγο, 3,618 και 3,622… Θέλω να προσέχετε ο ένας τον άλλο, κι η άλλη τον έναν! Ανιψιά μου, να θυμάσαι πάντα ότι η θεία σου σ' αγαπάει πολύ!»

Μετά, παύση. Κι αμέσως, σε δυνατή πλέον ένταση: «Έι, εσείς παιδιά. Μπορείτε να με βοηθήσετε μ' αυτό εδώ το τρόλεϊ; Πολύ βαρύ για την ηλικία μου..», ζήτησε βοήθεια η θεία.

«Ναι, εννοείται θεία! Το σημερινό φαγητό σου ήταν πραγματικά 5-νόστιμο!»

«Να είστε καλά, παιδιά. Ευχαρίστησή μου να σερβίρω τα γενναία Κλάσματα του Διαστήματός μας!»

Τα Κλάσματα κορδώθηκαν και τα δύο από περηφάνια.

«Λοιπόν, σύρετε αυτό το τρόλεϊ μέχρι τον ανελκυστήρα, προς το Διάστημα (2, 3], έξω από την αίθουσα G. Εγώ έχω αρκετή δουλειά τώρα με το συμμάζεμα… Να μείνω ήσυχη;» είπε η θεία.

«Εννοείται θεία. Αλλά τι δουλειά έχει το τρόλεϊ εκεί; Η θέση του δεν είναι στην κουζίνα;» ρώτησε με απορία ένα Κλάσμα.

«Έχεις απόλυτο δίκιο, καλό μου. Στη σημερινή Μετατροπή όμως, επειδή είχαμε πολλά υποψήφια κλάσματα, δανειστήκαμε μερικά καρότσια από το Κάστρο 2, τα οποία και πρέπει να τα επιστρέψουμε! Πηγαίνετε αυτό μόνο εσείς, και τα άλλα τα επιστρέφω αργότερα. Εντάξει; Είστε ελεύθερα από μένα!»

«Εγώ είμαι αρκετά κουρασμένη και θέλω να πάω στην αίθουσα G να ξεκουραστώ» είπε το ένα Κλάσμα για να τη σκαπουλάρει.

«Εντάξει, θα το τσουλήσω εγώ», είπε το άλλο Κλάσμα, τραβώντας προς τον ανελκυστήρα.

Οι 3 Δεκαδικοί, κρυμμένοι μέσα στο καρότσι, προσπαθούσαν να μη βγάλουν μιλιά, παρότι ήθελαν να σκάσουν στα γέλια με το πόσο έξυπνα την είχε φέρει η θεία στα Κλάσματα!

Το τρόλεϊ περνούσε τώρα έξω από την αίθουσα G. Οι 3 φίλοι προσπαθούσαν να μην κάνουν τον παραμικρό θόρυβο. Το Κλάσμα που έσπρωχνε το καρότσι σφύριζε ένα εμβατήριο. Όταν έφτασε ακριβώς έξω από την αίθουσα G, το καρότσι σταμάτησε.

Από την αίθουσα G δεν ακουγόταν σχεδόν τίποτα. Στην αίθουσα αυτή βρίσκονταν οι κοιτώνες όλων των Κλασμάτων του Κάστρου κι η ώρα ήταν περασμένη. Μετά από το ξέφρενο πάρτι στην αίθουσα RGB, όλα τα Κλάσματα, τελεμένα από το ποτό και το φαγητό, είχαν πέσει για ύπνο. Το Κλάσμα που οδηγούσε το τρόλεϊ ρώτησε με σιγανή φωνή:

«Εσείς σύντροφοι, τι κάνετε ξύπνιοι; Τι συζητάτε τόσο αργά;»

«Να εδώ, μιλάμε για την εκπαίδευση των Κλασμάτων. Λέμε ότι δεν είναι όπως παλιά. Εγώ θυμάμαι στη δική μου εποχή… Τότε ήταν πραγματική εκπαίδευση για Κλάσματα, όχι όπως τώρα… Αυτή είναι εκπαίδευση για Δεκαδικούς!» απάντησε ένα Κλάσμα.

«Εκεί φτάσαμε, κατάλαβες;» είπε το άλλο Κλάσμα.

«Έχετε απόλυτο δίκιο, σύντροφοι. Τώρα όλα έχουν γίνει εύκολα… Νέα τάξη Κλασμάτων, τι να πεις;» απάντησε η οδηγός του τρόλεϊ.

«Αμ το άλλο; Ακούσατε για το Κλάσμα στο Διάστημα (3, 4] που ζήτησε Μετάταξη στο Διάστημα (2, 3];» είπε το ένα Κλάσμα.

«Γίνεται αυτό;» ρώτησε με απορία η οδηγός.

«Εννοείται! Ελάχιστα Κλάσματα ζητούν Μετάταξη, γιατί φεύγουν από το Διάστημά τους και μένουν πλέον σε ένα άλλο… Καταλαβαίνεις συντρόφισσα, είναι δύσκολο να αλλάξεις θέση και δουλειά...» απάντησαν μαζί οι δύο φωνές.

«Μα καλά, ποιο Κλάσμα θέλει να αλλάξει Διάστημα και να έρθει στο δικό μας;» επέμεινε η οδηγός.

«Νομίζω είναι ο 7/2, συντρόφισσα».

Οι Δεκαδικοί φίλοι μέσα στο τρόλεϊ τέντωσαν τα νούμερα τους για ν' ακούσουν καλύτερα. Ξαφνικά, αυτή η συζήτηση μεταξύ των Κλασμάτων είχε αποκτήσει ενδιαφέρον.

«Ο 7/2; Σε ποιο Διάστημα ήταν αυτός δηλαδή;»

«Ο 7/2 διορίστηκε πριν από ένα μήνα στην προσωπική φρουρά του Κάστρου 4, αλλά ζήτησε απευθείας Μετάταξη! Απ' ό,τι διάβασα, λόγω εξαιρετικών ικανοτήτων, κατάφερε να πάρει τη Μετάταξη, αμέσως μετά τον διορισμό του».

«Μάλιστα… Και δηλαδή τώρα, μετά την Μετάταξη, θα έρθει στο (2, 3];»

«Ακριβώς! Μετά την Μετάταξη θα λάβει άλλη θέση προφανώς, αλλά δεν έχω ιδέα ποια… Αλήθεια, εσύ θα έκανες ποτέ σου Μετάταξη, συντρόφισσα; Εμείς το σκεφτόμαστε. Ίσως είναι καλή λύση να πάρεις Μετάταξη σε ένα Κάστρο λίγο πιο κοντά στο 1. Έχει τα θετικά της η πρωτεύουσα…»

«Να μου λείπει, σύντροφοι. Εμένα μου αρέσει η θέση μου και το Κάστρο 3 και δεν το κουνάω από εδώ!» είπε και χαμογέλασε η οδηγός. «Λοιπόν, φεύγω τώρα, γιατί πρέπει να πάω και το τρόλεϊ αυτό στον ανελκυστήρα. Χάρηκα που τα είπαμε, πάντως».

«Γεια χαρά! Άντε και να τα ξαναπούμε σύντομα, όχι πάλι στην επόμενη Μετατροπή», είπε το ένα Κλάσμα, κι όλοι μαζί γέλασαν πνιχτά, μην ξυπνήσουν τα κοιμώμενα Κλάσματα.

Ο 3,618 καθόταν σκεφτικός μέσα στο καρότσι, χωρίς να μιλάει.

«Σκέφτεσαι πάλι τον 7/2, ε; Σαν πολύ δεν τον συναντάμε αυτόν τελευταία;» ρώτησε ο 3,622.

«Νομίζω πως το συγκεκριμένο Κλάσμα θα το συναντήσουμε αρκετές φορές στο ταξίδι μας και πρέπει να προσέχουμε», απάντησε ο 3,618.

«Ναι, όπως όλα τα Κλάσματα, έτσι και αλλιώς», συμπλήρωσε η 3,141.

«Όχι, είναι διαφορετικό. Έχω μία περίεργη αίσθηση κινδύνου μ' αυτό το Κλάσμα, από την πρώτη κιόλας στιγμή. Είμαι σίγουρος πως θα τον ξανασυναντήσουμε κάπου σύντομα», είπε ο 3,618 αρκετά σοβαρός, κοιτάζοντας τους δύο φίλους του, που σοβάρεψαν κι αυτοί.

Μετά από λίγο σταμάτησαν κι άκουσαν το Κλάσμα να πατά το κουμπί του ασανσέρ. Ο ανελκυστήρας κατέφτασε και το Κλάσμα έσπρωξε το τρόλεϊ μέσα.

«Τα καταφέραμε!» είπε χαρούμενη η 3,141, μόλις έκλεισαν οι πόρτες του ασανσέρ.

«Φοβερή η Μετατροπή! Τι συναισθήματα… Ο Κύκλος, ο Ιερέας, ο Φυσικός… Απίστευτο!» είπε ο 3,618.

«Καταλάβατε τι κάναμε;» ρώτησε με θαυμασμό ο 3,622. «Βρήκαμε μαζί έναν τρόπο, ένα μαθηματικό τρόπο, για να κατανοήσουμε το νόμο της Διάταξης! Τώρα μπορούμε να βρίσκουμε την θέση Κλάσματος ή Δεκαδικού πάνω στον άξονα. Όπου κι αν είναι! Ίσως, κανείς Θεωρητικός στο Άρπλας, δεν ξέρει αυτό που εμείς

γνωρίζουμε…»

Και συνέχισε, συνοψίζοντας, λες και διάβαζε τις καρτέλες ενός "*power point"* που μόλις είχε φτιάξει:

- Για να βρούμε σε ποιο Διάστημα ανήκει ο κάθε Δεκαδικός, κοιτάμε το ψηφίο που βρίσκεται πριν την υποδιαστολή. Ανάλογα με τα Διαστήματα που ανήκουν δύο Δεκαδικοί, μπορούμε να συγκρίνουμε τη θέση τους. Δηλαδή, ο Δεκαδικός 1,22 ανήκει στο Διάστημα (1, 2), ο 3,618 ανήκει στο Διάστημα (3,4), ο 4,622 ανήκει στο Διάστημα (4, 5), και πάει λέγοντας. Άρα: 1,22 < 3,618 < 4,622 < 26,1
- Αν δυο Δεκαδικοί ανήκουν στο ίδιο Διάστημα, τότε σε μεγαλύτερη θέση είναι εκείνος που, το νούμερο, αμέσως μετά την υποδιαστολή του, είναι μεγαλύτερο. Αν δύο Δεκαδικοί έχουν και το επόμενο νούμερο μετά την υποδιαστολή ίδιο, συνεχίζουμε κοιτώντας το επόμενο.
  Παράδειγμα: 3,01 < 3,11 < 3,141 < 3,618 < 3,622 < 3,7

- Για να βρούμε σε ποιο Διάστημα ανήκει ένα Κλάσμα, κοιτάμε την σχέση αριθμητή και παρονομαστή. Αν ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή, τότε το Κλάσμα ανήκει στο Διάστημα (0, 1), ενώ, αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, το Κλάσμα ανήκει σε κάποιο άλλο Διάστημα.

- Ανάλογα με το πόσες φορές ο παρονομαστής είναι μικρότερος του αριθμητή, βρίσκουμε σε ποιο Διάστημα ανήκει το Κλάσμα. Για παράδειγμα, το 7/2, ανήκει στο Διάστημα (3, 4), αφού το τριπλάσιο του παρονομαστή είναι μικρότερο από τον αριθμητή (3 x 2 < 7) και το τετραπλάσιο του παρονομαστή είναι μεγαλύτερο από τον αριθμητή (4 x 2 > 7).

- Για να συγκρίνουμε τη θέση δύο Κλασμάτων, βρίσκουμε σε ποιο Διάστημα ανήκουν, και συγκρίνουμε τα Διαστήματα. Δηλαδή, το 7/2 ανήκει στο Διάστημα (3, 4) και το 23/11 ανήκει στο Διάστημα (2, 3). Οπότε: 7/2 > 23/11

- Αν δύο ή περισσότερα Κλάσματα είναι ομώνυμα, τότε, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή. Π.χ. 8/2 > 7/2 > 6/2

- Αν δύο ή περισσότερα Κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, τότε, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον μικρότερο παρονομαστή. Π.χ. 7/2 > 7/3 > 7/6

- Αν δύο ή περισσότερα Κλάσματα ανήκουν στο ίδιο Διάστημα, για να τα συγκρίνουμε: α) αν είναι ομώνυμα, κοιτάμε τους αριθμητές τους, και β) αν είναι ετερώνυμα, τότε τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και κατόπιν τα συγκρίνουμε (ομώνυμος αναφορά).

- Αν έχουμε Δεκαδικούς και Κλάσματα που δεν βρίσκονται στο ίδιο Διάστημα και θέλουμε να τους συγκρίνουμε, κοιτάμε τα Διαστήματα. Π.χ. το 9/2 ανήκει στο Διάστημα (4, 5), το 1/2 ανήκει στο Διάστημα (0, 1) και ο 3,618 ανήκει στο Διάστημα (3, 4). Άρα: 1/2 < 3,618 < 9/2

- Αν έχουμε Δεκαδικούς και Κλάσματα που ανήκουν στο ίδιο Διάστημα, τότε, για να τα συγκρίνουμε, χρησιμοποιούμε την Μετατροπή, είτε σε Κλάσματα, είτε σε Δεκαδικούς. Π.χ. το Κλάσμα 76/25 ανήκει στο Διάστημα (3, 4), όπως και το Κλάσμα 3141/1000, όπως και το Κλάσμα 7/2, όπως κι ο Δεκαδικός 3,618.

  Δηλαδή:

76/25 και 3141/1000 και 7/2 και 3,618

Μετά την Μετατροπή τους σε Κλάσματα, γίνονται:

76/25 και 3141/1000 και 7/2 και 3618/1000

Και αν κάνουμε ομώνυμο αναφορά:

3040/1000 < 3141/1000 < 3500/1000 < 3618/1000

Ενώ, αν κάνουμε τη Μετατροπή σε Δεκαδικούς, τότε τα Κλάσματα 76/25 και 3141/1000 και 7/2 και 3,618 γίνονται:

3,04 < 3,141 < 3,5 < 3,618.

* * * * *

Ο ανελκυστήρας κατέβαινε προς το Διάστημα (2, 3] κι ο 3,618 με την 3,141 είχαν ανοίξει την κουρτίνα του τρόλεϊ και χάζευαν τη θέα. Ο 3,622 έδινε τη διάλεξη του για τον νόμο της Διάταξης και ξεκαθάριζε όλες τις πιθανές υποπεριπτώσεις ενθουσιασμένος. Το φεγγάρι είχε πέσει και το σκοτάδι ήταν βαθύ. Από τα τρίγωνα Σχήματα του Διαστήματος (2, 3] διακρίνονταν μόνο κάποιες μυτερές κορυφές από ψηλά. Αν και το θέαμα με τις κορυφές στο σκοτάδι ήταν αρκετά τρομακτικό, οι 3 Δεκαδικοί φίλοι ένιωθαν απίστευτα όμορφα και θετικά!

Μετά από λίγο, η πόρτα του ανελκυστήρα άνοιξε ξανά και τα Κλάσματα-φρουροί του Κάστρου από τη μεριά (2, 3], έβγαλαν το τρόλεϊ έξω και το άφησαν κοντά στη θέση 2,99. Δεν πέρασαν ούτε 5 λεπτά κι ένας Δεκαδικός ήρθε και παρέλαβε το τρόλεϊ, δείχνοντας τα απαραίτητα χαρτιά στα Κλάσματα. Ο νέος Δεκαδικός οδηγός τους, τους έσπρωχνε με αργό και σταθερό βηματισμό μακριά από το Κάστρο 3.

Οι 3 Δεκαδικοί μέσα στο καρότσι, ακόμη δεν μπορούσαν να μιλήσουν, τίποτα όμως δεν τους εμπόδιζε να σκέφτονται… Θυμήθηκαν τα Κλάσματα και τους Δεκαδικούς που συνάντησαν. Τον 3,888 που με τις ιστορίες του, τους έφερε πιο κοντά στην πραγμάτωση του σχεδίου τους. Την τρισχαριτωμένη θεία, που χωρίς αυτήν δεν θα κουνούσαν ρούπι… Με τη σκέψη τους, μιας και δεν μπορούσαν ακόμη με λόγια, της φώναζαν *«αντίο»* κι *«ευχαριστώ»*!

Ο 3,622, σ' ένα ξέσπασμα, άρχισε να κλαίει γοερά, παρασύροντας και την 3,141, που τον πήρε αγκαλιά. Ο 3,618 τους κοιτούσε και χαμογελούσε, με δάκρυα στα νούμερα κι αυτός. Είχαν ήδη περάσει το Κάστρο 3 και το ταξίδι τους προς το ναό του 0 από όνειρο είχε γίνει πια πραγματικότητα!

ΤΕΛΟΣ