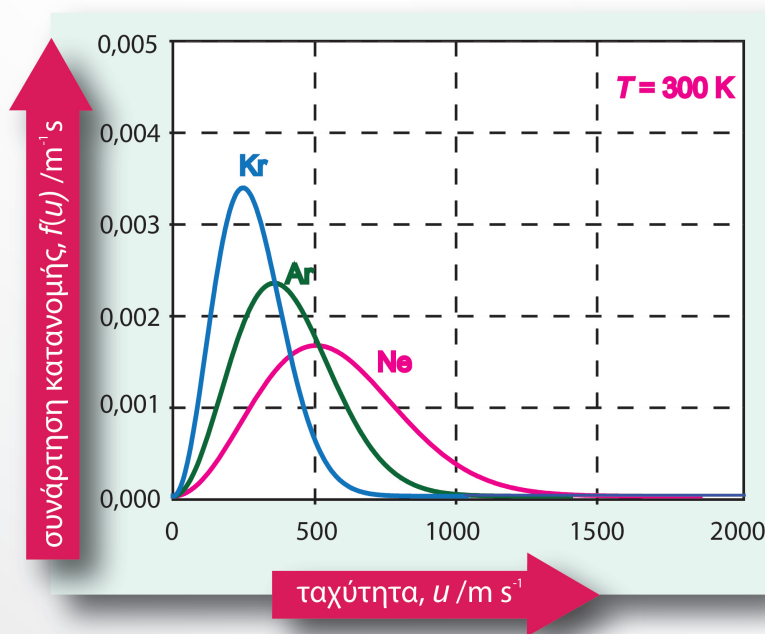




ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΕΙΑΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΧΗΜΕΙΑΣ»
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ
(ΔΙΧΗΝΕΤ)

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού μεθοδολογίας
λύσης προβλημάτων με αντικείμενο
την αέρια κατάσταση της ύλης για την Τριτοβάθμια
εκπαίδευση με τη χρήση του λογισμικού Mathematica



ΜΠΑΛΚΑΤΖΟΠΟΥΛΟΥ ΠΑΣΧΑΛΙΑ
ΧΗΜΙΚΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΔΑΚΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ



ΑΘΗΝΑ
2018



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΕΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΧΗΜΕΙΑΣ»

ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ (ΔιΧηNET)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

**Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού μεθοδολογίας λύσης προβλημάτων
με αντικείμενο την αέρια κατάσταση της ύλης για την Τριτοβάθμια
εκπαίδευση με τη χρήση του λογισμικού Mathematica**

**ΜΠΑΛΚΑΤΖΟΠΟΥΛΟΥ ΠΑΣΧΑΛΙΑ
ΧΗΜΙΚΟΣ**

ΑΘΗΝΑ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2018

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού μεθοδολογίας λύσης προβλημάτων με αντικείμενο την αέρια κατάσταση της ύλης για την Τριτοβάθμια εκπαίδευση με τη χρήση του λογισμικού
Mathematica

ΜΠΑΛΚΑΤΖΟΠΟΥΛΟΥ ΠΑΣΧΑΛΙΑ

A.M.: 131217

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Γιαννακουδάκης Ανδρέας, Καθηγητής ΑΠΘ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Γιαννακουδάκης Ανδρέας, Καθηγητής ΑΠΘ

Σιγάλας Μιχαήλ, Καθηγητής ΑΠΘ

Ακρίβος Περικλής, Καθηγητής ΑΠΘ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 16/10/2018

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία δημιουργήθηκε ένα διδακτικό βοήθημα για την αέρια κατάσταση της ύλης για τα μαθήματα της Φυσικοχημείας και της Γενικής Χημείας των Πανεπιστημιακών Τμημάτων Χημείας. Το εκπαιδευτικό υλικό που αναπτύχθηκε αφορά τα ιδανικά αέρια, τα πραγματικά αέρια, την κινητική θεωρία των αερίων και τα φαινόμενα μεταφοράς και απευθύνεται τόσο στους φοιτητές των αντίστοιχων Τμημάτων όσο και στους διδάσκοντες του μαθήματος. Το εκπαιδευτικό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί από φοιτητές και άλλων Πανεπιστημιακών Τμημάτων στα οποία διδάσκονται τα αντίστοιχα κεφάλαια της αέριας κατάστασης της ύλης. Πιο συγκεκριμένα δημιουργήθηκε ένα διδακτικό βοήθημα, το οποίο περιλαμβάνει μια σειρά από ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις και προβλήματα, τα οποία είναι όλα πλήρως απαντημένα. Η παρούσα εργασία αναδεικνύει επίσης κάποιες από τις δυνατότητες του λογισμικού Mathematica στη λύση των ασκήσεων. Κάθε απαιτούμενη μαθηματική επεξεργασία (αριθμητικές πράξεις, λύση εξισώσεων, γραφικές παραστάσεις κ.ά.) πραγματοποιήθηκε με το Wolfram Mathematica 11. Ακόμη, το Mathematica χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία απλών διαδραστικών εκπαιδευτικών λογισμικών για την καλύτερη κατανόηση της αέριας κατάστασης της ύλης.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Εκπαίδευση στη Χημεία

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: ιδανικά αέρια, πραγματικά αέρια, κινητική θεωρία αερίων, φαινόμενα μεταφοράς, Mathematica

ABSTRACT

In this project, a teaching aid was developed for the gaseous state of matter for the Physical Chemistry and General Chemistry Course of the Department of Chemistry. The educational material that was developed concerns ideal gases, real gases, kinetic theory of gases and transport processes and it applies to students and lecturers. The educational material can also be used by other university students who are taught the corresponding chapters of the gaseous state of matter. Particularly, it was developed a teaching aid that has a set of understanding questions, exercises and problems which are fully answered. This study also highlights some of the features of the Mathematica software in solving exercises. All required mathematical processing (numerical operations, solving equations, graphs, etc.) was performed with Wolfram Mathematica 11. Additionally, the software was used for the development of simple interactive Mathematica notebooks for better understanding of gaseous state of matter.

SUBJECT AREA: Chemistry Education

KEYWORDS: ideal gases, real gases, kinetic theory of gases, transport processes, Mathematica

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ανδρέα Γιαννακουδάκη για τη συνεργασία και την πολύτιμη συμβολή του στην ολοκλήρωσή της. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα δυο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τους καθηγητές κ. Μιχάλη Σιγάλα και κ. Περικλή Ακρίβο, για τις χρήσιμες συμβουλές και υποδείξεις τους. Ακόμη, ευχαριστώ την καθηγήτρια κ. Παππά - Λουΐζη Ανδριανή για τη βοήθεια που μου προσέφερε οικειοθελώς για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1. Εισαγωγή.....	1
1.2. Η διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στα Τμήματα Χημείας.....	2
1.3. Γλώσσες προγραμματισμού.....	3
1.4. Το λογισμικό Mathematica.....	4
1.5. Το λογισμικό MATLAB.....	10
1.6. Το περιεχόμενο του εκπαιδευτικού υλικού.....	10
1.7. Οι εντολές του Mathematica που χρησιμοποιήθηκαν.....	15
1.7.1. Η εντολή Plot.....	15
1.7.2. Η εντολή Solve.....	18
1.7.3. Η εντολή D.....	18
1.7.4. Η εντολή Integrate.....	18
1.7.5. Η εντολή Manipulate.....	19
1.8. Σύμβολα μεγεθών.....	20
1.9. Μεγάλοι επιστήμονες που ασχολήθηκαν με τα αέρια. Ιστορική ανασκόπηση.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΙΔΑΝΙΚΑ ΑΕΡΙΑ.....	27
2.1. Εισαγωγή.....	27
2.2. Ερωτήσεις κατανόησης.....	29
2.3. Οι νόμοι των ιδανικών αερίων με το Mathematica.....	63
2.4. Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων.....	84
2.4.1. Μετατροπές μονάδων πίεσης - Μέτρηση πίεσης.....	84
2.4.2. Νόμος του Boyle - Ισόθερμη μεταβολή.....	90
2.4.3. Νόμος του Guy - Lussac - Ισοβαρής μεταβολή.....	96
2.4.4. Νόμος του Guy - Lussac - Ισόχωρη μεταβολή.....	102
2.4.5. Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων.....	104
2.4.5.1. Υπολογισμός πίεσης, όγκου, θερμοκρασίας και ποσότητας ουσίας.....	105
2.4.5.2. Υπολογισμός μάζας και μοριακής μάζας αέριας ουσίας.....	113
2.4.5.3. Υπολογισμός μέσης μοριακής μάζας μίγματος αερίου.....	114
2.4.5.4. Υπολογισμός πυκνότητας μάζας αερίου.....	121
2.4.5.5. Υπολογισμός πλήθους μορίων αερίου - Αρχή Avogadro.....	125
2.4.6. Νόμος των μερικών πιέσεων του Dalton.....	129
2.4.7. Νόμος των μερικών όγκων των Amagat - Leduc.....	144
2.4.8. Εφαρμογή των νόμων των ιδανικών αερίων στα αερόστατα.....	147
2.4.8.1. Ανυψωτική δύναμη.....	147
2.4.9. Νόμος Laplace της βαρομετρικής πίεσης.....	151

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΑΕΡΙΑ.....161

3.1.	Εισαγωγή.....	161
3.2.	Ερωτήσεις κατανόησης.....	163
3.3.	Τα πραγματικά αέρια με το Mathematica.....	169
3.4.	Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων.....	177
3.4.1.	Παράγοντας συμπίεστικότητας.....	177
3.4.2.	Καταστατική εξίσωση van der Waals.....	181
3.4.3.	Σταθερές van der Waals - Κρίσιμες σταθερές αερίου.....	193
3.4.4.	Αρχή των αντιστοιχών καταστάσεων.....	203
3.4.5.	Καταστατική εξίσωση virial.....	211
3.4.6.	Άλλες καταστατικές εξισώσεις.....	224

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΕΡΙΩΝ - ΜΕΡΟΣ Ι.....235

4.1.	Εισαγωγή.....	235
4.2.	Ερωτήσεις κατανόησης.....	237
4.3.	Η κινητική θεωρία των αερίων με το Mathematica.....	263
4.4.	Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων.....	270
4.4.1.	Θεμελιώδης εξίσωση κινητικής θεωρίας αερίων.....	270
4.4.2.	Κινητική ενέργεια αερίων.....	274
4.4.3.	Κατανομή Maxwell των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου - Ενεργός, μέση και πιθανότερη ταχύτητα των μορίων.....	277
4.4.4.	Συχνότητα συγκρούσεων αερίου μορίου.....	292
4.4.5.	Μέση ελεύθερη διαδρομή αερίου μορίου.....	295
4.4.6.	Κρούσεις των μορίων με τοιχώματα και επιφάνειες.....	304
4.4.7.	Ταχύτητα διάπυσης αερίων - Νόμος του Graham.....	306

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΕΡΙΩΝ - ΜΕΡΟΣ ΙΙ.....317

5.1.	Εισαγωγή.....	317
5.2.	Ερωτήσεις κατανόησης.....	319
5.3.	Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων.....	329
5.3.1.	Μολαρικές θερμοχωρητικότητες αερίων.....	329
5.3.2.	Φαινόμενα μεταφοράς.....	337

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ.....355

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ359

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ - ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ - ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ.....361

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι	363
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ	367
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ	375
Σημαντικά ψηφία – Στρογγυλοποίηση.....	375
<i>ΙΙΙ.1. Κανόνες καθορισμού σημαντικών ψηφίων.....</i>	<i>375</i>
<i>ΙΙΙ.2. Σημαντικά ψηφία στους υπολογισμούς.....</i>	<i>376</i>
<i>ΙΙΙ.3. Κανόνες στρογγυλοποίησης.....</i>	<i>376</i>
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	377

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Stephen Wolfram. Ο δημιουργός του Mathematica.....	4
Εικόνα 2: Αρχείο που έχει δημιουργηθεί στο Mathematica (αρχείο nb).....	12
Εικόνα 3: Λογισμικό Mathematica.....	12
Εικόνα 4: Διαδικασία μετατροπής ενός αρχείου nb σε αρχείο cdf με τη βοήθεια του CDF Player.....	12
Εικόνα 5: Evangelista Torricelli.....	22
Εικόνα 6: Το πρώτο υδραργυρικό βαρόμετρο.....	22
Εικόνα 7: Robert Boyle.....	22
Εικόνα 8: Jacques Charles.....	23
Εικόνα 9: Joseph Louis Guy - Lussac.....	23
Εικόνα 10: Απογείωση του Guy - Lussac με αερόστατο θερμού αέρα.....	23
Εικόνα 11: Amedeo Avogadro.....	24
Εικόνα 12: John Dalton.....	24
Εικόνα 13: James Clerk Maxwell.....	24
Εικόνα 14: Ludwing Eduard Boltzmann.....	25

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Σύμβολα μεγεθών.....	20
Πίνακας 2: Τυπολόγιο για τα ιδανικά αέρια.....	28
Πίνακας 3: Μονάδες μέτρησης πίεσης.....	84
Πίνακας 4: Τυπολόγιο για τα πραγματικά αέρια.....	162
Πίνακας 5: Τυπολόγιο (1) κινητικής θεωρίας αερίων	236
Πίνακας 6: Τυπολόγιο (2) κινητικής θεωρίας αερίων.....	318
Πίνακας 7: Φαινόμενα μεταφοράς.....	338
Πίνακας 8: Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στα ιδανικά αέρια.....	356
Πίνακας 9: Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στα πραγματικά αέρια.....	356
Πίνακας 10: Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στην κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος I).....	357
Πίνακας 11: Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στην κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος II).....	357
Πίνακας 12. Ακρωνύμια και ανάπτυξή τους.....	361
Πίνακας I1: Σταθερές van der Waals αερίων.....	363
Πίνακας I2: Κρίσιμες σταθερές αερίων και θερμοκρασίες βρασμού.....	363
Πίνακας I3: Μοριακή διάμετρος (d) και ενεργός διατομή κρούσης (σ) αερίων.....	364
Πίνακας I4: Θερμοκρασίες Boyle.....	364
Πίνακας I5: Τάσεις ατμών νερού.....	364
Πίνακας I6: Σταθερές $a(i)$ αερίων.....	365
Πίνακας I7: Δεύτεροι συντελεστές virial, B	365
Πίνακας I8: Ιξώδες αερίων	366
Πίνακας I9: Θερμική αγωγιμότητα αερίων.....	366

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διαπανεπιστημιακού Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (ΔΔΠΜΣ) «Διδακτική της Χημείας και Νέες Εκπαιδευτικές Τεχνολογίες (ΔιΧηNET)» με κατεύθυνση «Σύγχρονες μέθοδοι διδασκαλίας της Χημείας».

Ο σκοπός της εργασίας είναι διπλός:

- ✓ η ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού για την αέρια κατάσταση της ύλης (ιδανικά αέρια, πραγματικά αέρια, κινητική θεωρία των αερίων, καθώς και για άλλα δεδομένα και προβλέψεις που απορρέουν από αυτήν, όπως οι μοριακές θερμοχωρητικότητες και τα φαινόμενα μεταφοράς) για την Τριτοβάθμια εκπαίδευση και
- ✓ η εφαρμογή και ανάδειξη ορισμένων μόνο δυνατοτήτων του λογισμικού Mathematica, από τις πολλές που διαθέτει, στους νόμους που διέπουν τα αέρια (δημιουργία γραφικών, λύση ασκήσεων, δημιουργία απλών εκπαιδευτικών λογισμικών) για την καλύτερη κατανόηση της αέριας κατάστασης της ύλης.

Η παρούσα εργασία έγινε με πολύ μεράκι και πολύ κόπο. Το εκπαιδευτικό υλικό που δημιουργήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία (η σειρά με την οποία αναπτύσσονται τα διάφορα κεφάλαια της ύλης, τα σύμβολα των μεγεθών που χρησιμοποιούνται κ.ά.) στηρίχτηκε σε τέσσερα θεωρητικά κεφάλαια για την αέρια κατάσταση της ύλης που σύγγραψε ο κ. Ανδρέας Γιαννακουδάκης και τα οποία στη συνέχεια μου διέθεσε.

Το θέμα της εργασίας υποδείχθηκε από τον Καθηγητή κ. Ανδρέα Γιαννακουδάκη τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για τις χρήσιμες συμβουλές και υποδείξεις του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία δημιουργήθηκε ένα διδακτικό βοήθημα για την αέρια κατάσταση της ύλης για τα Πανεπιστημιακά Τμήματα Χημείας. Η μαθηματική επεξεργασία όλων των αποτελεσμάτων της εργασίας πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του λογισμικού Mathematica. Το διδακτικό βοήθημα απευθύνεται πρωταρχικώς τόσο στους φοιτητές των Τμημάτων Χημείας όσο και στους διδάσκοντες του μαθήματος. Το παρόν βοήθημα μπορεί φυσικά να χρησιμοποιηθεί από φοιτητές και διδάσκοντες και άλλων Πανεπιστημιακών Τμημάτων, στα οποία διδάσκονται τα αντίστοιχα κεφάλαια της αέριας κατάστασης της ύλης.

Στα τμήματα Χημείας η αέρια κατάσταση της ύλης διδάσκεται στα μαθήματα της Φυσικοχημείας αλλά και της Γενικής Χημείας. Αν και το εκπαιδευτικό υλικό δημιουργήθηκε για το μάθημα της Φυσικοχημείας, εντούτοις μέρος αυτού ή όλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο μάθημα της Γενικής Χημείας.

Τα μάθημα της Φυσικοχημείας είναι βασικό μάθημα στα Προγράμματα Σπουδών των Τμημάτων Χημείας και αναμφισβήτητα αποτελεί τη βάση για την κατανόηση και πολλών άλλων μαθημάτων Χημείας που διδάσκονται οι φοιτητές κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Θεωρείται γενικά από τους φοιτητές ένα δύσκολο μάθημα, τόσο ως προς την κατανόηση εννοιών όσο και ως προς το ότι καλούνται να λύσουν διάφορες ασκήσεις και προβλήματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του μαθήματος. Είναι σημαντικό να τονιστεί για την επίλυση πολλών προβλημάτων Φυσικοχημείας απαιτείται ένα καλό μαθηματικό υπόβαθρο. Επίσης, το γεγονός ότι πολλά διδακτικά συγγράμματα διαθέτουν πολύ λίγο εποπτικό υλικό σε συνδυασμό με το ότι πολλά από αυτά είναι ταυτόχρονα και αρκετά παλιά δυσχεραίνει ακόμη περισσότερο την κατάσταση.

Όλα τα παραπάνω λοιπόν κάνουν ακόμη πιο επιτακτική την ανάγκη αναπροσαρμογής του τρόπου διδασκαλίας του μαθήματος, έτσι ώστε οι διάφορες έννοιες να γίνουν περισσότερο κατανοητές. Προς αυτή την κατεύθυνση είναι δυνατόν να συμβάλλουν ποικιλοτρόπως οι νέες εκπαιδευτικές τεχνολογίες.

Ο στόχος της εργασίας είναι διπλός:

- ✓ η ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού με ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις και προβλήματα για την αέρια κατάσταση της ύλης και
- ✓ η εφαρμογή και ανάδειξη ορισμένων μόνο δυνατοτήτων του λογισμικού Mathematica, από τις πολλές που διαθέτει, στους νόμους που διέπουν τα αέρια (δημιουργία γραφικών, λύση ασκήσεων, δημιουργία απλών εκπαιδευτικών λογισμικών) για την καλύτερη κατανόηση της αέριας κατάστασης της ύλης.

Τα κεφάλαια της αέριας κατάστασης της ύλης για τα οποία αναπτύχθηκε το εκπαιδευτικό υλικό αφορούν:

- ✓ τα ιδανικά αέρια,
- ✓ τα πραγματικά αέρια,
- ✓ την κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος I) καθώς και
- ✓ άλλα δεδομένα και προβλέψεις που απορρέουν από την κινητική θεωρία, όπως είναι οι μοριακές θερμοχωρητικότητες των αερίων και τα φαινόμενα μεταφοράς (Μέρος II).

1.2. Η διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στα Τμήματα Χημείας

Οι φοιτητές που εισάγονται στα Πανεπιστημιακά Τμήματα Χημείας είναι υποχρεωμένοι να παρακολουθήσουν το μάθημα των Μαθηματικών στο πρώτο έτος των σπουδών τους. Ένα μεγάλο μέρος της ύλης του μαθήματος που διδάσκονται οι φοιτητές αφιερώνεται στον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, καθώς επίσης και στους τρόπους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Οι γνώσεις αυτές είναι αναμφίβολα απολύτως αναγκαίες για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Πολλές φορές όμως ο χρόνος που απομένει για την εφαρμογή των γνώσεων αυτών στα πραγματικά φυσικο-χημικά προβλήματα που θα συναντήσουν οι φοιτητές στη διάρκεια των σπουδών τους είναι ελάχιστος.

Αν αναλογιστεί κάποιος ότι κανείς πλέον δεν κάνει μαθηματικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) με τον τρόπο που διδασκόμαστε στο σχολείο αλλά χρησιμοποιεί τους υπολογιστές χειρός, κανείς δεν χρησιμοποιεί το μιλιμετρέ χαρτί για τη σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης αλλά χρησιμοποιεί το Excel, γίνεται όλο και πιο κατανοητή η επιτακτική πλέον ανάγκη της ύπαρξης χρήσιμων «εργαλείων» για τη

διευκόλυνση της μαθησιακής διαδικασίας. Κατά αντιστοιχία με τα παραπάνω, το χρονοβόρο στάδιο του υπολογισμού παραγώγων και ολοκληρωμάτων, καθώς και της επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, σε πολλές περιπτώσεις, μπορεί να εξαλειφθεί αρκετά με τη χρήση κατάλληλων μαθηματικών λογισμικών. Τέτοια λογισμικά κυκλοφορούν πολλά στο εμπόριο (Mathematica, MATLAB κ.ά) και όλα στηρίζονται σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού [1-2]. Η δημιουργία των γλωσσών προγραμματισμού είναι άμεσα συνυφασμένη με την αλματώδη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και λίγο παρακάτω γίνεται μια σύντομη αναφορά σε αυτές. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε για κάθε είδους μαθηματική επεξεργασία το λογισμικό Mathematica.

1.3. Γλώσσες προγραμματισμού

Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής είναι μια μηχανή που καταλαβαίνει μια πολύ συγκεκριμένη γλώσσα, τη γλώσσα μηχανής, η οποία αναλύεται μόνο σε δύο αριθμούς, το μηδέν και το ένα (δυναμικό σύστημα). Ένα πρόγραμμα που γράφεται σε γλώσσα μηχανής αποτελείται από μια ακολουθία των δύο αυτών ψηφίων και αποτελούν τις εντολές προς τον επεξεργαστή του υπολογιστή για τη λειτουργία του. Αν και οι εντολές αυτές είναι κατανοητές στον υπολογιστή, στον άνθρωπο είναι ακατανόητες. Η ανάγκη λοιπόν επικοινωνίας του ανθρώπου με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή σε μια κοινή γλώσσα δημιούργησε τις γλώσσες προγραμματισμού [3].

Γλώσσα προγραμματισμού είναι ένα σύνολο γραμμάτων, αριθμών, λέξεων και συντομογραφικών μνημονικών σημείων που διέπονται από ειδικό συντακτικό και χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη αλγορίθμων στον υπολογιστή [3].

Οι γλώσσες προγραμματισμού χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- *Γλώσσες χαμηλού επιπέδου.* Οι γλώσσες αυτές δεν είναι εύκολα κατανοητές στον άνθρωπο και βρίσκονται πολύ κοντά στη γλώσσα μηχανής. Τα προγράμματα που είναι γραμμένα σε αυτές διαφέρουν από υπολογιστή σε υπολογιστή. Μια τέτοια γλώσσα είναι η Assembly.
- *Γλώσσες υψηλού επιπέδου.* Οι γλώσσες υψηλού επιπέδου προσεγγίζουν περισσότερο την ανθρώπινη γλώσσα από τις γλώσσες χαμηλού επιπέδου, ενώ τα προγράμματα που είναι γραμμένα σε αυτές εκτελούνται από οποιονδήποτε υπολογιστή. Το Mathematica είναι μια γλώσσα υψηλού επιπέδου, η οποία έχει

δημιουργηθεί στη C++. Άλλες γλώσσες υψηλού επιπέδου είναι οι BASIC, FORTRAN, PASCAL, C κ.ά.

Οι γλώσσες προγραμματισμού διαθέτουν είτε διερμηνέα (Interpreter) είτε μεταφραστή (Compiler). Ο διερμηνέας μεταφράζει μια-μια τις εντολές του προγράμματος στη γλώσσα μηχανής και συγχρόνως πραγματοποιείται η εκτέλεσή τους, ενώ ο μεταφραστής μεταφράζει πρώτα μεταφράζει όλες τις εντολές του πρόγραμματος και στη συνέχεια εκτελείται. Το Mathematica διαθέτει διερμηνέα για την μετατροπή του προγράμματος σε γλώσσα μηχανής, αν και οι περισσότερες γλώσσες υψηλού επιπέδου διαθέτουν μεταφραστή. Το πλεονέκτημα του διερμηνέα είναι ότι μπορούμε πολύ εύκολα να διορθώνουμε τα λάθη του προγράμματος και να το εκτελούμε εκ νέου, αποφεύγοντας έτσι τη χρονοβόρα διαδικασία της μετάφρασης [3].

1.4. Το λογισμικό Mathematica

Ο δημιουργός του Mathematica είναι ο Stephen Wolfram, ο οποίος γεννήθηκε στο Λονδίνο το 1959. Σε ηλικία μόλις 15 ετών δημοσίευσε το πρώτο του επιστημονικό άρθρο, ενώ στην ηλικία των 20 ετών του απονεμήθηκε διδακτορικός τίτλος στον τομέα της θεωρητικής Φυσικής από το πανεπιστήμιο του Caltech. Ο Wolfram ξεκίνησε την ανάπτυξη του Mathematica το 1986, ενώ η πρώτη έκδοση του λογισμικού έκανε την εμφάνισή της στην αγορά το 1988. Η επίδρασή του στα διάφορα επιστημονικά πεδία τα οποία χρησιμοποιούν ηλεκτρονικούς υπολογιστές ήταν αρκετά σημαντική [4].



Εικόνα 1. Stephen Wolfram.
Ο δημιουργός του Mathematica.

Το Mathematica είναι μια γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού και έχει κάποιες «ιδιοτροπίες» σε ότι αφορά τη σύνταξη των εντολών που διαθέτει, έτσι ώστε να εκτελεστούν. Οι εντολές του Mathematica είναι πάρα πολλές και σε καμία διπλωματική εργασία δε θα μπορούσαν να αναδειχθούν όλες του οι δυνατότητες. Αρκεί να σκεφτεί κάποιος ότι το manual του Mathematica αγγίζει σε έκταση τις 1500 σελίδες [4]. Στη συνέχεια ακολουθούν κάποια παραδείγματα εκτέλεσης εντολών με το Mathematica που σκοπό έχουν να αναδείξουν λίγες μόνο από τις δυνατότητες που έχει το λογισμικό.

Λίγες από τις δυνατότητες του Mathematica

Αριθμητικές πράξεις

```
In[1]:= 2 + 5
Out[1]= 7

In[2]:= 2^3
Out[2]= 8

In[3]:= Sqrt[9]
Out[3]= 3
```

Πρόσθεση

Υπολογισμός δύναμης

Υπολογισμός ρίζας

Για κάθε πράξη που εκτελείται εμφανίζονται οι ετικέτες In και Out. Το In εμφανίζεται όταν εισάγουμε δεδομένα και το Out όταν λαμβάνεται το αποτέλεσμα (πατώντας Shift+Enter).

Λύση εξισώσεων

```
In[1]:= f[x_] = 5 x - 10;
Solve[f[x] == 0, x]
Out[2]= {{x -> 2}}
```

Λύση πρωτοβάθμιας εξίσωσης

```
In[3]:= f[x_] = x^2 - 3 x + 2;
Solve[f[x] == 0, x]
Out[4]= {{x -> 1}, {x -> 2}}
```

Λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

```
In[5]:= f[x_] = x^3 - 0.5 x^2 + 0.03 x - 0.001;
Solve[f[x] == 0, x]
Out[6]= {{x -> 0.0317385 - 0.0358259 i},
{x -> 0.0317385 + 0.0358259 i}, {x -> 0.436523}}
```

Λύση τριτοβάθμιας εξίσωσης

Για τη λύση εξισώσεων στο Mathematica χρησιμοποιούμε διπλό ίσον.

Η εντολή *NSolve* λύνει τις εξισώσεις με αριθμητική μέθοδο ως προς τις μεταβλητές με ακρίβεια *n* σημαντικών ψηφίων.

```
In[1]:= f[x_] = 3 x - 10;
```

```
NSolve[f[x] == 0, x, 2]
```

```
Out[2]= {{x -> 3.3}}
```

```
In[3]:= f[x_] = 3 x - 10;
```

```
NSolve[f[x] == 0, x, 5]
```

```
Out[4]= {{x -> 3.3333}}
```

```
In[1]:= Solve[{5 x + y == 100, 2 x + y == 88}, {x, y}]
```

```
Out[1]= {{x -> 4, y -> 80}}
```

Λύση συστήματος εξισώσεων.

```
In[1]:= DSolve[y'[x] == x + y[x], y[x], x]
```

```
Out[1]= {{y[x] -> -1 - x + e^x C[1]}}
```

Λύση διαφορικής εξίσωσης.

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός

```
In[1]:= f[x_] = x^4 + x^3 + x^2 + x + 5;
```

```
D[f[x],{x, 1}]
```

```
Out[2]= 1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3
```

```
In[3]:= f[x_] = x^4 + x^3 + x^2 + x + 5;
```

```
D[f[x],{x, 2}]
```

```
Out[4]= 2 + 6 x + 12 x^2
```

Υπολογισμός
πρώτης
παραγώγου μίας
συνάρτησης $f(x)$.

Υπολογισμός
δεύτερης
παραγώγου μίας
συνάρτησης $f(x)$.

```
In[1]:= f[x_] = 4 x^3 + 3 x^2 + 2 x + 1;
```

```
Integrate[f[x],x]
```

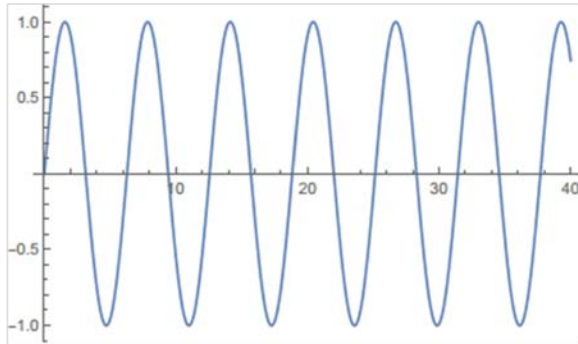
```
Out[2]= x + x^2 + x^3 + x^4
```

Υπολογισμός
ολοκληρώματος
μίας συνάρτησης
 $f(x)$.

Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

```
In[1]:= Plot[Sin[x],{x,0,40}]
```

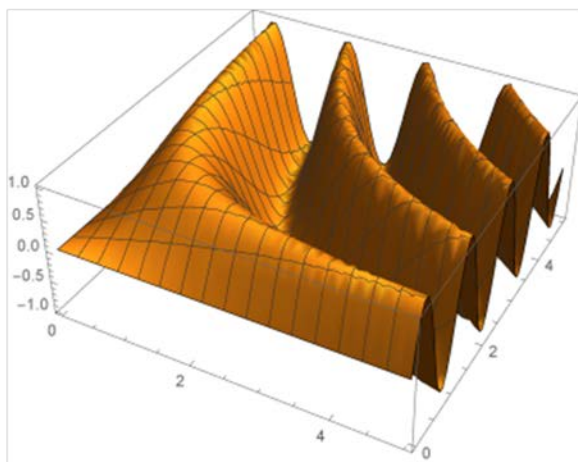
Out[1] =



Γραφική
απεικόνιση δυο
διαστάσεων μιας
συνάρτησης $f(x)$.

```
In[1]:= Plot3D[Sin[x*y],{x,0,5},{y,0,5}]
```

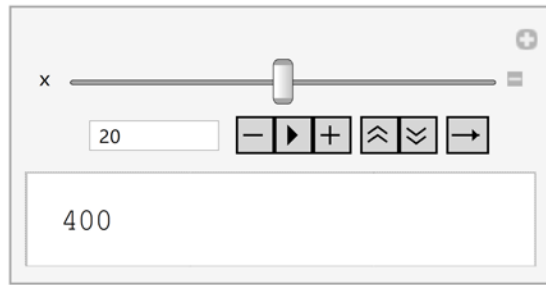
Out[1] =



Γραφική
απεικόνιση τριών
διαστάσεων μιας
συνάρτησης $f(x,y)$.

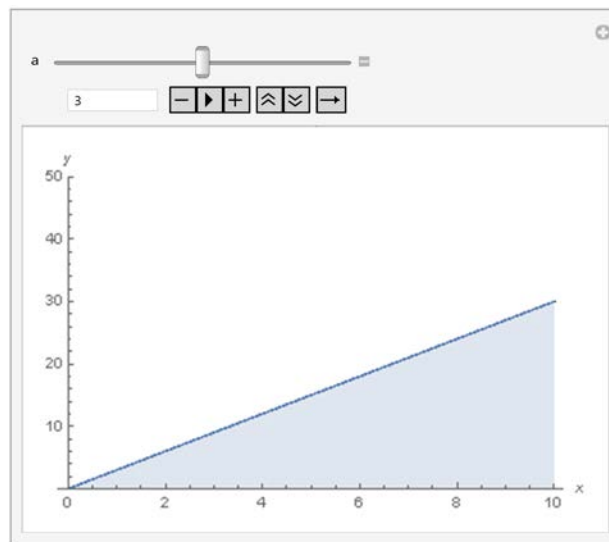
Η εντολή Manipulate

```
Manipulate[x^2, {x, 0, 40, 1}]
```



Υπολογισμός της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης $f(x)$ σε ορισμένο εύρος τιμών x και με ορισμένο βήμα μεταβολής.

```
Manipulate[Plot[a*x, {x, 0, 10}, PlotRange -> {0, 50}, AxesLabel -> {x, y}, Filling -> Bottom], {a, 1, 5, 1}, SaveDefinitions -> True]
```



Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε ορισμένο εύρος μιας μεταβλητής και με ορισμένο βήμα μεταβολής.

1.5. Το λογισμικό MATLAB

Ένα άλλο σύγχρονο μαθηματικό λογισμικό είναι το MATLAB, του οποίου το όνομα προέρχεται από τα αρχικά των αγγλικών λέξεων **MAT**rix **LAB**oratory που σημαίνει «εργαστήριο μητρών». Στο λογισμικό αυτό όλα είναι γραμμένα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να λειτουργούν με διανύσματα (vectors) και μήτρες (matrices). Τα διανύσματα και οι μήτρες χρησιμοποιούνται για να αποθηκεύονται σύνολα τιμών του ίδιου τύπου. Μια μήτρα μπορούμε να την παρομοιάσουμε με έναν πίνακα τιμών. Η δομή του λογισμικού αυτού είναι τέτοια, έτσι ώστε όλοι οι υπολογισμοί να ανάγονται τελικά σε υπολογισμούς μεταξύ πινάκων ή διανυσμάτων [5].

Το περιβάλλον του MATLAB είναι διαδραστικό και περιέχει πληθώρα ενσωματωμένων μαθηματικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων και απαιτητικών υπολογισμών.

Το MATLAB βρίσκει εφαρμογή στα Τμήματα των Μηχανικών, στα Τμήματα Θετικών Επιστημών (κυρίως στα Μαθηματικά και τη Φυσική), στην Ιατρική, καθώς και σε τομείς της βιομηχανίας [5, 6].

1.6. Το περιεχόμενο του εκπαιδευτικού υλικού

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας, όπως ήδη έχει αναφερθεί στην εισαγωγή, είναι διπλός:

- ✓ η ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού με ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις και προβλήματα για την αέρια κατάσταση της ύλης και
- ✓ η εφαρμογή και ανάδειξη ορισμένων μόνο δυνατοτήτων του λογισμικού Mathematica, από τις πολλές που διαθέτει, στους νόμους που διέπουν τα αέρια (σχεδίαση γραφικών παραστάσεων, λύση ασκήσεων, δημιουργία απλών εκπαιδευτικών λογισμικών) για την καλύτερη κατανόηση της συγκεκριμένης ύλης που διδάσκονται οι φοιτητές των Τμημάτων Χημείας στα μαθήματά τους (Φυσικοχημεία και Γενική Χημεία)

και απευθύνεται τόσο στους φοιτητές όσο και στους διδάσκοντες των αντίστοιχων μαθημάτων.

Τα κεφάλαια για τα οποία αναπτύχθηκε το εκπαιδευτικό υλικό αφορούν:

- ✓ τα ιδανικά αέρια,
- ✓ τα πραγματικά αέρια,
- ✓ την κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος I), καθώς και
- ✓ άλλα δεδομένα και προβλέψεις που απορρέουν από την κινητική θεωρία, όπως είναι οι μολαρικές θερμοχωρητικότητες των αερίων και τα φαινόμενα μεταφοράς (Μέρος II),

τα οποία συνήθως αποτελούν τα πρώτα κατά σειρά κεφάλαια που διδάσκονται οι φοιτητές στο μάθημα της Φυσικοχημείας. Η μελέτη της φύσης των αερίων αποτελεί ένα ιδανικό μέσο για την εισαγωγή στο μάθημα της Φυσικοχημείας, καθώς αυτά αποτελούν τις απλούστερες ουσίες που υπάρχουν στη φύση.

Σε κάθε ένα από τα παραπάνω κεφάλαια της αέριας κατάστασης της ύλης υπάρχει ένα εισαγωγικό μέρος στο οποίο αναφέρονται τα θέματα που αναπτύσσονται και το τυπολόγιο που χρησιμοποιήθηκε. Το εκπαιδευτικό υλικό που δημιουργήθηκε χωρίζεται εν συνεχεία σε τρία μέρη.

Στο πρώτο μέρος αναπτύχθηκαν αρχικά ερωτήσεις κατανόησης, οι οποίες είναι όλες πλήρως απαντημένες. Πολλές ερωτήσεις και απαντήσεις συνοδεύονται από κατάλληλα σχήματα για την καλύτερη κατανόηση των εκάστοτε εννοιών που αναλύονται.

Στο δεύτερο μέρος εξηγείται αναλυτικά με παραδείγματα ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να εφαρμοστούν οι δυνατότητες του Mathematica στη σχεδίαση γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που διέπουν τους νόμους των αερίων. Στα κεφάλαια αυτά, οι περισσότερες ασκήσεις, συνοδεύονται από κάποιες «Δραστηριότητες». Οι δραστηριότητες αυτές παραπέμπουν σε απλά εκπαιδευτικά λογισμικά, τα οποία υπάρχουν στο συνοδευτικό cd της διπλωματικής. Τα λογισμικά δημιουργήθηκαν όλα στο Mathematica και υπάρχουν δύο τύποι αρχείων με τις εξής καταλήξεις: nb και cdf. Οι «Δραστηριότητες» που δημιουργήθηκαν παρακινούν το φοιτητή να σχεδιάσει μια γραφική παράσταση, να υπολογίσει μια παράμετρο ή να παρατηρήσει κάτι με τη συνεχή αλλαγή κάποιας παραμέτρου. Για το λόγο αυτό οι δραστηριότητες ξεκινούν με συγκεκριμένα ρήματα: «Σχεδιάστε», «Υπολογίστε» και «Παρατηρήστε». Οι δραστηριότητες που ξεκινούν με το «Σχεδιάστε» ή το «Υπολογίστε» παραπέμπουν σε λογισμικά (αρχεία) με την κατάληξη nb,

ενώ εκείνες που ξεκινούν με το «Παρατηρήστε» παραπέμπουν σε λογισμικά (αρχεία) με την κατάληξη cdf.

Τα αρχεία με την κατάληξη nb (Εικόνα 2) είναι αρχεία που έχουν δημιουργηθεί στο Mathematica και για να μπορέσουν να λειτουργήσουν απαιτείται η εγκατάσταση του προγράμματος στον υπολογιστή (Εικόνα 3). Τα λογισμικά αυτά είναι διαδραστικά, καθώς ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να αλλάξει πολύ εύκολα κάποιες παραμέτρους και να πάρει την απάντηση που θέλει.

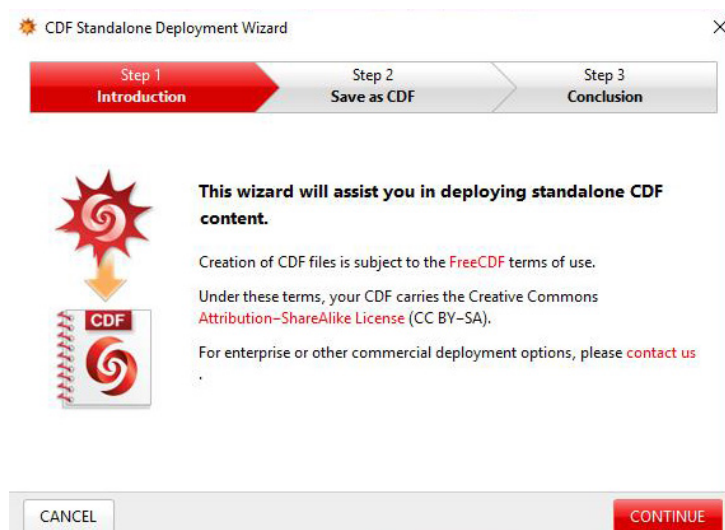


Εικόνα 2. Αρχείο που έχει δημιουργηθεί στο Mathematica (αρχείο nb).



Εικόνα 3. Λογισμικό Mathematica.

Ένα αρχείο που έχει δημιουργηθεί στο Mathematica, δηλαδή ένα αρχείο nb (notebook), είναι δυνατόν, όπου αυτό ενδείκνυται, να μετατραπεί σε μία άλλη μορφή αρχείου με την κατάληξη cdf (Εικόνα 4) και τη βοήθεια του προγράμματος CDF Player (Computable Document Format), το οποίο είναι και αυτό της εταιρίας Wolfram Mathematica και κάποιος μπορεί να το εγκαταστήσει στον υπολογιστή του ελεύθερα από το διαδίκτυο.



Εικόνα 4. Διαδικασία μετατροπής ενός αρχείου nb σε αρχείο cdf με τη βοήθεια του CDF Player.

Τα αρχεία cdf είναι δυνατό κάποιος να τα διαχειριστεί με δύο τρόπους. Εάν στον υπολογιστή είναι εγκατεστημένα και τα δυο προγράμματα, Mathematica και CDF Player, τότε το αρχείο cdf είναι δυνατό να ανοίξει και με τα δύο προγράμματα. Εάν το αρχείο ανοίξει με το Mathematica, τότε το αρχείο λειτουργεί ως αρχείο nb. Εάν όμως ανοίξει με το CDF Player, τότε δεν υπάρχει η δυνατότητα οποιασδήποτε παρέμβασης σε αυτό. Τα αρχεία cdf που ανοίγουν με το CDF Player λειτουργούν ως «ταινίες» στις οποίες μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ένα φαινόμενο με την συνεχή αλλαγή μιας μεταβλητής. Εάν στον υπολογιστή είναι εγκατεστημένο μόνο το πρόγραμμα CDF Player, τότε μπορούν να ανοίξουν μόνο τα αρχεία με την αντίστοιχη κατάληξη.

Σε κάθε ένα από τα λογισμικά στα οποία παραπέμπουν οι «Δραστηριότητες» αναφέρονται:

- ο σκοπός για τον οποίο δημιουργήθηκε,
- η μαθηματική εξίσωση στην οποία στηρίζεται το λογισμικό,
- οι παράμετροι της εξίσωσης και οι μονάδες τους,
- οι παράμετροι της εξίσωσης που είναι δυνατόν να αλλάξουν από το χρήστη και
- ο κώδικας που συντάχθηκε στο Mathematica (για τον υπολογισμό κάποιας παραμέτρου ή τη σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης). Ο κώδικας βρίσκεται μπροστά από ένα μεζ φόντο. Οι αριθμητικές τιμές που μπορεί κάποιος να μεταβάλλει είναι με χρώμα κόκκινο.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος, με τίτλο «Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων», παρατίθεται ένας μεγάλος αριθμός ασκήσεων - προβλημάτων, οι οποίες είναι όλες πλήρως απαντημένες. Οι ασκήσεις για κάθε κεφάλαιο της αέριας κατάστασης της ύλης είναι χωρισμένες σε κατηγορίες. Οι πράξεις που απαιτήθηκαν για τη λύση των ασκήσεων πραγματοποιήθηκαν όλες στο Mathematica και για κάθε άσκηση υπάρχει στο συνοδευτικό cd αντίστοιχο αρχείο nb.

Για τη λύση των ασκήσεων απαιτήθηκαν δεδομένα για διάφορα μεγέθη, όπως είναι για παράδειγμα οι τάσεις των ατμών των νερού, οι σταθερές a και b van der Waals, η κρίσιμη θερμοκρασία, η κρίσιμη πίεση κ.ά. Τα δεδομένα αυτά αντλήθηκαν κυρίως από το Handbook of Chemistry and Physics (HCP) 2012 - 2013. Οι πίνακες με τα δεδομένα αυτά παρατίθενται στο Παράρτημα I της διπλωματικής εργασίας.

Το Mathematica είναι ένα λογισμικό που χρησιμοποιείται συνήθως για τη λύση σύνθετων προβλημάτων με πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις και είναι πολύ δύσκολο να εκτελεστούν με απλό υπολογιστή χειρός (κομπιουτεράκι). Παρόλα αυτά στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μια προσπάθεια να αναδειχθούν οι δυνατότητες του λογισμικού αυτού ακόμη και για απλές μαθηματικές πράξεις που πολύ εύκολα μπορούμε να εκτελέσουμε με ένα απλό κομπιουτεράκι. Για τον λόγο αυτό κάποιες από τις ασκήσεις είναι υποδειγματικά λυμένες με δυο τρόπους: και με τον κλασικό τρόπο που όλοι γνωρίζουν αλλά και με τη χρήση του Mathematica. Ακόμη, σε κάποιες ασκήσεις γίνεται η χρήση του Mathematica σε ορισμένα μόνο σημεία της λύσης της άσκησης. Όσες ασκήσεις επιλέχθηκαν να λυθούν με το Mathematica, αναδεικνύοντας έτσι τις διάφορες δυνατότητες που έχει το λογισμικό, οι εκφωνήσεις τους βρίσκονται σε ένα τετράγωνο ροζ πλαίσιο.

Τα σχήματα που υπάρχουν στο εκπαιδευτικό υλικό που αναπτύχθηκε δημιουργήθηκαν με τη βοήθεια δύο προγραμμάτων, του Adobe Illustrator και του Wolfram Mathematica. Το Illustrator είναι ένα κορυφαίο εργαλείο σχεδίασης διανυσματικών γραφικών (vector graphics), το οποίο χρησιμοποιείται από επαγγελματίες γραφίστες. Το Mathematica είναι ένα λογισμικό, με πάρα πολλές δυνατότητες στους τομείς των μαθηματικών, όπως στην Άλγεβρα, την Ανάλυση, τον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό κ.ά [7-10].

Κάποια από τα σχήματα αυτά δημιουργήθηκαν αποκλειστικά στο Illustrator, ενώ **όσα σχήματα απεικονίζουν τη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης δημιουργήθηκαν αρχικά στο Mathematica και στη συνέχεια επεξεργάστηκαν στο Illustrator για καθαρά εποπτικούς λόγους.** Τα πρωτότυπα σχήματα που δημιουργήθηκαν αρχικά στο Mathematica παρατίθενται στο Παράρτημα II της εργασίας.

Για την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού μελετήθηκαν αρκετά βιβλία Φυσικοχημείας της ελληνικής και ξένης βιβλιογραφίας [11-24], καθώς και έγκριτα βιβλία Γενικής Χημείας [25-26]. Στα περισσότερα από αυτά, πολύ λίγες ασκήσεις είναι υποδειγματικά λυμένες. Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι ελάχιστα βιβλία περιέχουν λυμένες ασκήσεις στα φαινόμενα μεταφοράς [16, 27-28].

1.7. Οι εντολές του Mathematica που χρησιμοποιήθηκαν

Για τη δημιουργία των εκπαιδευτικών λογισμικών της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκαν κυρίως πέντε εντολές του Mathematica [8]. Οι εντολές αυτές είναι: *Plot*, *Solve*, *D*, *Integrate* και *Manipulate* και περιγράφονται συνοπτικά παρακάτω.

1.7.1. Η εντολή Plot

Η βασική εντολή του Mathematica για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι η **Plot**.

- Η σύνταξη της εντολής για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ είναι:

Plot[f[x],{x,xmin,xmax}]

Στη γενική σύνταξη της εντολής Plot, ως ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται το x . Στη θέση όμως του x μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε άλλο σύμβολο.

- Για τη σχεδίαση δύο ή περισσότερων γραφικών παραστάσεων με κοινό πεδίο ορισμού στο ίδιο γράφημα, η εντολή Plot τροποποιείται ως εξής:

Plot[{f[x],g[x],...},{x,xmin,xmax}]

- Για τη σχεδίαση δύο ή περισσότερων γραφικών παραστάσεων ακόμη και με διαφορετικό πεδίο ορισμού στο ίδιο γράφημα χρησιμοποιείται η εντολή Show ως εξής:

Show[g1, g2,...]

Η εντολή Plot μπορεί να δεχθεί επιπλέον επιλογές, οι οποίες αφορούν τη μορφοποίηση της γραφικής παράστασης.

Πληκτρολογώντας στο φύλλο εργασίας του Mathematica **??Plot** και στη συνέχεια Shift+Enter θα εμφανιστούν οι επιπλέον επιλογές που μπορεί να δεχθεί η εντολή. Από τις επιλογές αυτές θα αναφερθούν εκείνες που χρησιμοποιούνται συχνότερα.

- Η επιλογή **PlotRange** ορίζει τα σημεία που πρέπει να συμπεριληφθούν στο γράφημα.
 - Η επιλογή **PlotRange** → **Automatic** είναι η προεπιλογή του Mathematica.
 - Η επιλογή **PlotRange** → **All** σχεδιάζει όλα τα σημεία.

- Η επιλογή **PlotRange** $\rightarrow \{ymin, ymax\}$ σχεδιάζει μόνο τα σημεία που οι τιμές των τεταγμένων τους είναι μεταξύ ymin και ymax.
 - Η επιλογή **PlotRange** $\rightarrow \{\{xmin, xmax\}, \{ymin, ymax\}\}$ σχεδιάζει μόνο τα σημεία που οι τιμές των οριζόντιων και κατακόρυφων συντεταγμένων τους είναι μεταξύ xmin και xmax και ymin και ymax, αντίστοιχα.
- Όταν σχεδιάζουμε μια γραφική παράσταση συνήθως ορίζουμε ως θέση της αρχής των αξόνων το σημείο (0,0). Κατά τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με το Mathematica, η θέση της αρχής των αξόνων προσδιορίζεται βάσει υπολογισμών με τη βοήθεια ενός αλγόριθμου. Έτσι το σημείο (0,0) ορίζεται ως η θέση της αρχής των αξόνων μόνο αν βρίσκεται μέσα ή κοντά στην περιοχή σχεδίασης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Παρόλα αυτά υπάρχει η δυνατότητα με την επιλογή **AxesOrigin** να ορίζουμε το σημείο τομής των αξόνων.
- Η επιλογή **AxesOrigin** \rightarrow **Automatic** αποτελεί προεπιλογή του Mathematica. Αν το σημείο (0,0) βρίσκεται μέσα ή κοντά στην περιοχή σχεδίασης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, τότε επιλέγεται αυτό ως η θέση της αρχής των αξόνων.
 - Η επιλογή **AxesOrigin** $\rightarrow \{x, y\}$ ορίζει ως σημείο τομής των αξόνων το σημείο με συντεταγμένες (x,y).
- Η επιλογή **PlotStyle** δίνει τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε την εμφάνιση ενός γραφήματος επιλέγοντας κάθε φορά το κατάλληλο στυλ. Η επιλογή αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση σχεδίασης πολλών γραφικών παραστάσεων στο ίδιο γράφημα.
- Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μόνο στυλ, η επιλογή πρέπει να έχει τη μορφή **PlotStyle** \rightarrow **στυλ**.
 - Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες επιλογές στυλ, η επιλογή πρέπει να έχει τη μορφή **PlotStyle** $\rightarrow \{\text{στυλ1}, \text{στυλ2}, \dots\}$.
- Η επιλογή **PlotLegends** δίνει τη δυνατότητα να προσθέσουμε ετικέτες σε κάθε περιγραφή της επιλογής PlotStyle.
- Αν θέλουμε να αλλάξουμε τα προεπιλεγμένα χρώματα του Mathematica στις καμπύλες των γραφικών παραστάσεων, τότε χρησιμοποιούμε τις επιλογές RGBColor ή CMYKColor.
- Η επιλογή **PlotStyle** \rightarrow **RGBColor** [κόκκινο, πράσινο, μπλε] ορίζει την αναλογία του μίγματος κόκκινου, πράσινου και μπλε χρώματος για τη δημιουργία ενός συγκεκριμένου χρώματος. Οι τιμές για το κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα κυμαίνονται από 0 έως 1. Η επιλογή RGBColor[1,0,0] δίνει ένα καθαρά κόκκινο

χρώμα, η επιλογή `RGBColor[0,1,0]` ένα καθαρά πράσινο χρώμα, ενώ η επιλογή `RGBColor[0,0,1]` ένα καθαρά μπλε χρώμα. Όλα τα υπόλοιπα χρώματα που προκύπτουν από τους διάφορους συνδυασμούς των χρωμάτων μπορούν να επιλεγούν πολύ εύκολα από την παλέτα χρώματος του Mathematica που εμφανίζεται στο χρήστη κατά την πληκτρολόγηση της επιλογής RGB στο φύλλο εργασίας.

- Η επιλογή `PlotStyle` → **CMYKColor [κυανό, ματζέντα, κίτρινο, μαύρο]** ορίζει την αναλογία του μίγματος κυανού, ματζέντα, κίτρινου και μαύρου χρώματος για τη δημιουργία ενός συγκεκριμένου χρώματος. Οι τιμές για το κυανό, ματζέντα, κίτρινο και μαύρο χρώμα κυμαίνονται από 0 έως 1. Τα χρώματα που προκύπτουν από τους διάφορους συνδυασμούς των χρωμάτων μπορούν να επιλεγούν πολύ εύκολα από την παλέτα χρώματος του Mathematica που εμφανίζεται στον χρήστη κατά την πληκτρολόγηση της επιλογής CMYK στο φύλλο εργασίας.

- Η επιλογή `PlotLabel` → **“ετικέτα”** δίνει τη δυνατότητα να βάζουμε τίτλο στο γράφημα που σχεδιάζουμε. Η ετικέτα πρέπει να περικλείεται σε διπλά εισαγωγικά.

- Η επιλογή `AxesLabel` δίνει τη δυνατότητα να προσθέτουμε ετικέτες στους άξονες x και y του γραφήματος.
 - Η επιλογή `AxesLabel` → **None** αποτελεί προεπιλογή του Mathematica και ορίζει ότι κανένας από τους δύο άξονες δεν έχει ετικέτα.
 - Η επιλογή `AxesLabel` → **“ετικέτα”** ορίζει την εισαγωγή ετικέτας μόνο στον άξονα y.
 - Η επιλογή `AxesLabel` → **{“ετικέτα x”, “ετικέτα y”}** ορίζει ετικέτες και για τους δύο άξονες x και y.

Οι ετικέτες μπορούν να περιέχουν οποιοδήποτε σύμβολο αρκεί να περικλείονται σε διπλά εισαγωγικά.

1.7.2. Η εντολή Solve

Η βασική εντολή του Mathematica για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων είναι η εντολή Solve.

- Η γενική σύνταξη της εντολής για την επίλυση μια αλγεβρικής εξίσωσης είναι:

Solve [εξίσωση, μεταβλητή]

Οι ρίζες που υπολογίζει η εντολή Solve δίνονται με λίστα της μορφής

$\{ \{x \rightarrow x_1\}, \{x \rightarrow x_2\}, \dots \{x \rightarrow x_n\} \}$

Ο συμβολισμός $x \rightarrow x_1$ δείχνει ότι η τιμή x_1 της μεταβλητής x είναι η λύση της εξίσωσης. Αν η εξίσωση έχει n ρίζες πολλαπλότητας, κάθε μια από αυτές επαναλαμβάνεται n φορές.

- Η γενική σύνταξη της εντολής για την επίλυση μια αλγεβρικής εξίσωσης με αριθμητική μέθοδο ως προς τις μεταβλητές και με ακρίβεια n σημαντικών ψηφίων είναι η εντολή NSolve:

NSolve [εξίσωση, {μεταβλητή, n}]

- Η γενική σύνταξη της εντολής για την επίλυση συστήματος εξισώσεων είναι:

Solve [{εξίσωση 1, εξίσωση 2, ...}, {μεταβλητή 1, μεταβλητή 2, ...}]

1.7.3. Η εντολή D

Η βασική εντολή για τον υπολογισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι η εντολή D.

- Η σύνταξη της εντολής για τον υπολογισμό της νιοστής (n) παραγώγου μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι:

D [f(x), {x,n}]

1.7.4. Η εντολή Integrate

Η βασική εντολή για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης είναι η εντολή Integrate.

- Η γενική σύνταξη της εντολής για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι:

Integrate [f(x), x]

- Η γενική σύνταξη της εντολής για τον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι:

Integrate [f(x), {x, a,b}]

όπου a και b το κατώτερο και το ανώτερο όριο.

1.7.5. Η εντολή Manipulate

Η βασική εντολή του Mathematica για την συνεχή αλλαγή κάποιας μεταβλητής μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ορισμένο εύρος τιμών του x και με ορισμένο βήμα μεταβολής dx είναι η εντολή Manipulate. Τα λογισμικά που δημιουργούνται με αυτή την εντολή είναι διαδραστικά.

- Η γενική σύνταξη της εντολής για τον συνεχή υπολογισμό της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης $f(x)$ σε ορισμένο εύρος τιμών x με όρια x_{\min} και x_{\max} και βήμα μεταβολής dx είναι:

Manipulate [f(x), {x, x_{min}, x_{max}, dx}]

- Η γενική σύνταξη της εντολής για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ορισμένο εύρος τιμών x με όρια x_{\min} και x_{\max} και βήμα μεταβολής dx είναι:

Manipulate [Plot[f(x), {x, x_{min}, x_{max}, dx}]]

όπου x_{\min} και x_{\max} τα όρια του εύρους της μεταβλητής και dx το βήμα της μεταβολής.

1.8. Σύμβολα μεγεθών

Στον Πίνακα 1 αναγράφονται όλα τα σύμβολα των μεγεθών που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διπλωματική εργασία. Η μονάδα του κάθε μεγέθους εξαρτάται κάθε φορά από τον μαθηματικό τύπο που χρησιμοποιείται.

Πίνακας 1. Σύμβολα μεγεθών.

Σύμβολο	Μέγεθος
M	Μολαρική μάζα
M_r	Σχετική μοριακή μάζα
n	Ποσότητα ουσίας (mol)
m	Μάζα
V	Όγκος
V_m	Μολαρικός όγκος
ρ	Πυκνότητα μάζας
p	Πίεση
T	Απόλυτη θερμοκρασία (K)
R	Παγκόσμια σταθερά αερίων
θ	Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)
N	Αριθμός μορίων
N_A	Αριθμός Avogadro
g_n	Επιτάχυνση της βαρύτητας
x	Κλάσμα ποσότητας
a, b	Σταθερές van der Waals αερίων*
p_c	Κρίσιμη πίεση
V_c	Κρίσιμος όγκος
T_c	Κρίσιμη θερμοκρασία
ρ_c	Κρίσιμη πυκνότητα μάζας
Z	Συντελεστής συμπίεστικότητας
Z_c	Κρίσιμος συντελεστής συμπίεστικότητας
T_B	Θερμοκρασία Boyle
T_b	Θερμοκρασία βρασμού
p_r	Ανηγμένη πίεση
V_r	Ανηγμένος όγκος
T_r	Ανηγμένη θερμοκρασία
B	Δεύτερος συντελεστής virial
C	Τρίτος συντελεστής virial
c	Ενεργός ταχύτητα
\bar{c}	Μέση ταχύτητα
c^*	Πιθανότερη ταχύτητα
\bar{c}_{rel}	Σχετική μέση ταχύτητα
U_m	Ολική κινητική ενέργεια 1 mol αερίου
$\langle \varepsilon \rangle$	Μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο

u	Ταχύτητα
λ	Μέση ελεύθερη διαδρομή
k_B	Σταθερά Boltzmann
σ	Ενεργός διατομή κρούσης
d	Μοριακή διάμετρος
\mathcal{N}	Αριθμητική πυκνότητα
z	Συχνότητα συγκρούσεων
ν	Ταχύτητα διαπίδυσης
Z_W	Ροή κρούσεων
t	Χρόνος
$C_{V,m}$	Μολαρική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο
$C_{p,m}$	Μολαρική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση
γ	Λόγος γ
U	Εσωτερική ενέργεια
Q	Θερμότητα
W	Έργο
D	Συντελεστής διάχυσης
κ	Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας
η	Συντελεστής ιξώδους
J_n	Ροή μάζας
J_E	Ροή ενέργειας
c_x	Μολαρική συγκέντρωση

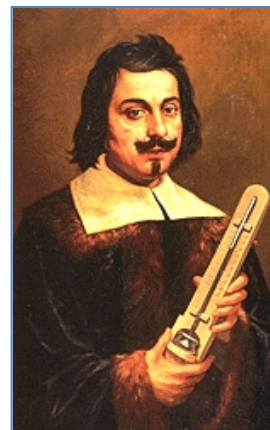
* Με a και b συμβολίζονται οι σταθερές των αερίων και για τις καταστατικές εξισώσεις Berthelot και Dieterici.

1.9. Μεγάλοι επιστήμονες που ασχολήθηκαν με τα αέρια. Ιστορική ανασκόπηση

• Evangelista Torricelli (1608-1647)

Το πρώτο βαρόμετρο, γνωστό και ως υδραργυρικό βαρόμετρο, κατασκευάστηκε το 1644 από τον Ιταλό φυσικό και μαθηματικό Evangelista Torricelli.

Ο Torricelli έκανε το εξής πείραμα: Γέμισε με υδράργυρο έναν γυάλινο σωλήνα μήκους 1 m και έκλεισε με το δάχτυλό του το στόμιο του σωλήνα. Στη συνέχεια τον αναποδογύρισε και τον τοποθέτησε σε μια λεκάνη γεμάτη με υδράργυρο. Αποσύροντας το δάχτυλό του από το στόμιο του σωλήνα παρατήρησε ότι ο υδράργυρος κατέρχεται και η στάθμη του σταθεροποιείται σε



Εικόνα 5. Evangelista Torricelli.



Εικόνα 6. Το πρώτο υδραργυρικό βαρόμετρο.

κάποιο ύψος. Αν το πείραμα αυτό

γίνει στην επιφάνεια της θάλασσας, όπου η πίεση είναι ίση με 1 atm, το ύψος της στήλης του υδραργύρου είναι ίσο με 76 cm από τη στάθμη του υδραργύρου της λεκάνης. Το πείραμα που έκανε ο Torricelli για τη μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης είναι γνωστό ως πείραμα του Torricelli. Η μονάδα μέτρησης της πίεσης Torr οφείλει την ονομασία της στον Torricelli [29].

• Robert Boyle (1627-1691)

Ο Robert Boyle ήταν Ιρλανδός χημικός, φυσικός και φιλόσοφος και ήταν ο πρώτος που διατύπωσε το νόμο της ισόθερμης μεταβολής των ιδανικών αερίων. Τα αποτελέσματα της ερευνάς του τα δημοσίευσε το 1662. Τον ίδιο νόμο 14 χρόνια αργότερα διατύπωσε και ο Γάλλος φυσικός Edme Mariotte (1620-1684) γι' αυτό και ο νόμος της ισόθερμης μεταβολής είναι γνωστός ως νόμος του Boyle Mariotte [29].



Εικόνα 7. Robert Boyle.

● Jacques Charles (1746-1823)

Ο Jacques Charles ήταν Γάλλος μαθηματικός και έγινε γνωστός επειδή ήταν ο πρώτος που διατύπωσε το νόμο της ισοβαρούς και της ισόχωρης μεταβολής. Τα αποτελέσματά του αυτά όμως, δεν τα δημοσίευσε ποτέ.

Ο Charles μαζί με τους αδερφούς Robert απογείωσαν το πρώτο μη επανδρωμένο αερόστατο στον κόσμο τον Αύγουστο του 1783. Το αέριο που χρησιμοποίησαν για την απογείωση του αεροστάτου ήταν το υδρογόνο. Τον Δεκέμβριο του ίδιου χρόνου ο Charles μαζί με τον Nicolas-Louis Robert απογειώθηκαν με το αερόστατο σε ύψος 550 μέτρων [29].



Εικόνα 8. Jacques Charles.

● Joseph Louis Guy-Lussac (1778-1850)

Ο Γάλλος χημικός και φυσικός Guy-Lussac διατύπωσε το 1802 το νόμο της ισοβαρούς και της ισόχωρης μεταβολής, αλλά τον πίστεψε σε αδημοσίευτο έργο του Jacques Charles, καθώς αυτός ήταν που διατύπωσε πρώτος το νόμο αυτό.

Ο Guy-Lussac, μαζί με τον Jaen-Baptiste Biot, το 1804 απογειώθηκε με αερόστατο θερμού αέρα σε ύψος 7016 μέτρων.

Ο Guy-Lussac έγινε επίσης γνωστός για την ανακάλυψή του ότι το νερό αποτελείται από δύο άτομα υδρογόνου και ένα άτομο οξυγόνου, καθώς επίσης και για τις μελέτες του στα μίγματα νερού και αλκοόλης. Τα αλκοολόμετρα Guy-Lussac που χρησιμοποιούνται στις μέρες μας ονομάστηκαν έτσι προς τιμήν του [29].



Εικόνα 9. Joseph Louis Guy-Lussac.



Εικόνα 10. Απογείωση του Guy-Lussac με αερόστατο θερμού αέρα.

• **Amedeo Avogadro (1776-1856)**

Ο Ιταλός χημικός και φυσικός Amedeo Avogadro διατύπωσε την γνωστή σε όλους αρχή του Avogadro. Οι μελέτες του βοήθησαν τη θεμελίωση της ατομικής θεωρίας. Ο αριθμός Avogadro πήρε το όνομά του προς τιμήν του [29].



Εικόνα 11. Amedeo Avogadro.

• **John Dalton (1766-1844)**

Ο John Dalton ήταν Άγγλος φυσικός, φαρμακοποιός και μετεωρολόγος. Υπήρξε υποστηρικτής του νόμου του Guy-Lussac που δημοσιεύτηκε το 1802 και στη συνέχεια δημοσίευσε άρθρα που σχετίζονταν με την απορρόφηση των αερίων από το νερό αλλά και από άλλα υγρά, τα οποία περιείχαν το γνωστό νόμο του Dalton των ιδανικών αερίων.



Εικόνα 12. John Dalton.

Ο Dalton έκανε επίσης μελέτες για την αχρωματοψία, η οποία κάποιες φορές αναφέρεται και ως «δαλτονισμός» προς τιμήν του [29].

• **James Clerk Maxwell (1831-1879)**

Ο Σκωτσέζος θεωρητικός φυσικός James Clerk Maxwell διατύπωσε το 1866 ανεξάρτητα από τον Edward Boltzmann την κινητική θεωρία των αερίων και για το λόγο αυτό η κατανομή ονομάζεται Maxwell- Boltzmann.

Το μεγάλο βέβαιο επίτευγμα του Maxwell ήταν η συσχέτιση διαφόρων άσχετων παρατηρήσεων, πειραμάτων και εξισώσεων ηλεκτρισμού, μαγνητισμού και οπτικής βάζοντας έτσι τα θεμέλια στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό [29].



Εικόνα 13. James Clerk Maxwell.

● **Ludwing Eduard Boltzmann (1844-1906)**

Ο Αυστριακός θεωρητικός φυσικός και φιλόσοφος Eduard Boltzmann θεωρείται ένας από τους θεμελιωτές της Στατιστικής Φυσικής και της Θερμοδυναμικής. Το 1866 πήρε το διδακτορικό του στην κινητική θεωρία των αερίων. Η κατανομή Maxwell-Boltzmann της κινητικής θεωρίας έχει ονομαστεί έτσι προς τιμήν του.

Ο Boltzmann υπήρξε επίσης ένας από τους υποστηρικτές της ατομικής θεωρίας τη στιγμή που οι άλλοι αμφισβητούσαν ακόμη και την ύπαρξη των ατόμων [29].



Εικόνα 14. Ludwing Eduard Boltzmann.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΔΑΝΙΚΑ ΑΕΡΙΑ

2.1. Εισαγωγή

Τα ιδανικά ή τέλεια αέρια (ideal or perfect gases) είναι υποθετικά αέρια για τα οποία ισχύουν δυο βασικές παραδοχές:

- τα σωματίδιά τους έχουν σχεδόν μηδενικό όγκο και
- ανάμεσα στα σωματίδιά τους δεν ασκείται καμία απολύτως δύναμη

και ισχύουν γι' αυτά οι νόμοι των ιδανικών αερίων.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκε εκπαιδευτικό υλικό για:

- ✓ το νόμο της ισόθερμης μεταβολής του Boyle,
- ✓ τους νόμους της ισοβαρούς και της ισόχωρης μεταβολής του Guy - Lussac,
- ✓ την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων,
- ✓ το νόμο των μερικών πιέσεων του Dalton,
- ✓ το νόμο των μερικών όγκων των Amagat - Leduc,
- ✓ εφαρμογές των νόμων των αερίων, όπως το πέταγμα των αεροστάτων και
- ✓ το νόμο της βαρομετρικής πίεσης του Laplace.

Στον πίνακα 2 που ακολουθεί αναγράφονται οι μαθηματικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο για την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού.

Πίνακας 2. Τυπολόγιο για τα ιδανικά αέρια.

Τυπολόγιο	
Νόμος του Boyle της ισόθερμης μεταβολής	ή $pV = \text{σταθ.}$ $p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \cdot V_{\tau\epsilon\lambda}.$
Νόμος του Guy - Lussac της ισοβαρούς μεταβολής	ή $\frac{V}{T} = \text{σταθ.}$ $\frac{V_{\alpha\rho\chi}}{T_{\alpha\rho\chi}} = \frac{V_{\tau\epsilon\lambda}}{T_{\tau\epsilon\lambda}}.$
Νόμος του Guy - Lussac της ισόχωρης μεταβολής	ή $\frac{p}{T} = \text{σταθ.}$ $\frac{p_{\alpha\rho\chi}}{T_{\alpha\rho\chi}} = \frac{p_{\tau\epsilon\lambda}}{T_{\tau\epsilon\lambda}}.$
Καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων	$pV = nRT$
Νόμος των μερικών πιέσεων του Dalton	$p_{ολ.} = p_1 + p_2 + p_2 + \dots + p_s$
Νόμος των μερικών όγκων των Amagat - Leduc	$V_{ολ.} = V_1 + V_2 + V_2 + \dots + V_s$
Νόμος της βαρομετρικής πίεσης του Laplace	$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$
Ανυψωτική δύναμη αεροστάτου	ή $F_{lf} = V_{\alpha\epsilon\rho\sigma\tau.} \cdot g_n \cdot (\rho_{\alpha\tau\mu.\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha} - \rho_{\alpha\epsilon\rho.\pi\lambda\eta\rho.})$ $F_{lf} = m \cdot g_n$

2.2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Σε ποια μεταβολή η πυκνότητα μάζας ενός αερίου παραμένει σταθερή:

α) στην ισόθερμη, β) στην ισοβαρή, γ) στην ισόχωρη, δ) σε καμία

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Η πυκνότητα μάζας ενός αερίου, και γενικότερα ενός σώματος, δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

όπου:

ρ : η πυκνότητα μάζας,

m : η μάζα και

V : ο όγκος του αερίου.

Η πυκνότητα μάζας ενός αερίου παραμένει σταθερή όταν δε μεταβάλλονται η μάζα, δηλαδή η ποσότητά του, και ο όγκος του αερίου. Στην ισόθερμη μεταβολή διατηρείται σταθερή η θερμοκρασία του αερίου, στην ισοβαρή μεταβολή η πίεση, ενώ στην ισόχωρη μεταβολή διατηρείται σταθερός ο όγκος του αερίου. Σε όλες τις παραπάνω μεταβολές διατηρείται ταυτόχρονα σταθερή και η ποσότητα του αερίου. Επομένως η πυκνότητα μάζας ενός αερίου παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια ισόχωρης μεταβολής.

2. Σε ένα δοχείο μεταβλητού όγκου υπάρχει μια ποσότητα αερίου A. Αν ελαττώσουμε τον όγκο στο μισό, υπό σταθερή θερμοκρασία, ποιος θα είναι ο λόγος των πυκνοτήτων μάζας της αρχικής και της τελικής κατάστασης του αερίου A;

Απάντηση

Αρχικά το αέριο A έχει αρχική μάζα $m_{αρχ.} = m$ και αρχικό όγκο $V_{αρχ.} = V$. Στη συνέχεια ελαττώνεται ο όγκος του δοχείου στο μισό, ενώ η μάζα του διατηρείται σταθερή. Τελικά το

αέριο Α έχει μάζα $m_{\tau\epsilon\lambda.} = m$ και τελικό όγκο $V_{\tau\epsilon\lambda.} = V/2$. Έτσι ο λόγος των πυκνοτήτων μάζας της αρχικής και της τελικής κατάστασης του αερίου Α είναι:

$$\frac{\rho_{\alpha\rho\chi.}}{\rho_{\tau\epsilon\lambda.}} = \frac{\frac{m_{\alpha\rho\chi.}}{V_{\alpha\rho\chi.}}}{\frac{m_{\tau\epsilon\lambda.}}{V_{\tau\epsilon\lambda.}}} = \frac{\frac{m}{V}}{\frac{m}{\frac{V}{2}}} = \frac{m}{V} \cdot \frac{V}{2m} = \frac{1}{2}$$

3. Από μια φιάλη που περιέχει αέριο O_2 διαφεύγει κατά λάθος μια ποσότητα. Η πυκνότητα μάζας του αερίου O_2 που παραμένει στη φιάλη:

α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερή

Απάντηση

Σωστή απάντηση: **β**

Αιτιολόγηση

Αρχικά η πυκνότητα μάζας του O_2 στη φιάλη είναι:

$$\rho_{\alpha\rho\chi.} = \frac{m_{\alpha\rho\chi.}}{V}$$

Στη συνέχεια διαφεύγει κατά λάθος μια ποσότητα O_2 από τη φιάλη. Επομένως, η τελική μάζα, $m_{\tau\epsilon\lambda.}$, του αερίου είναι μικρότερη από την αρχική μάζα, $m_{\alpha\rho\chi.}$. Όμως η ποσότητα του O_2 που απομένει στη φιάλη συνεχίζει να βρίσκεται στον ίδιο (αρχικό) όγκο, V , ο οποίος είναι ο όγκος της φιάλης. Έτσι τελικά η πυκνότητα μάζας του O_2 στη φιάλη είναι:

$$\rho_{\tau\epsilon\lambda.} = \frac{m_{\tau\epsilon\lambda.}}{V}$$

Αφού $m_{\tau\epsilon\lambda.} < m_{\alpha\rho\chi.}$, θα ισχύει $\rho_{\tau\epsilon\lambda.} < \rho_{\alpha\rho\chi.}$. Άρα μετά τη διαφυγή της ποσότητας του O_2 , το αέριο έχει μικρότερη πυκνότητα μάζας.

4. Όταν μια ποσότητα αερίου θερμαίνεται υπό σταθερό όγκο, τότε η πυκνότητα μάζας του:

α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερή

Απάντηση

Η πυκνότητα μάζας ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

και παραμένει σταθερή όταν δε μεταβάλλονται η μάζα, δηλαδή η ποσότητά του, και ο όγκος του αερίου. Όταν ορισμένη ποσότητα αερίου θερμαίνεται υπό σταθερό όγκο, τότε πραγματοποιείται μια ισόχωρη μεταβολή, όπου m και V παραμένουν σταθερά, άρα η πυκνότητα μάζας του αερίου παραμένει σταθερή.

5. Δύο αέρια A και B βρίσκονται σε δύο δοχεία με κινούμενα έμβολα και υφίστανται ισόθερμη συμπίεση. Τα αποτελέσματα του όγκου και της πίεσης των δύο αερίων δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

α) Ποιο από τα δύο αέρια A και B συμπεριφέρεται ιδανικά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Για το αέριο που συμπεριφέρεται ιδανικά, να υπολογίσετε την πίεσή του όταν ο όγκος του είναι 1 L, στην ίδια θερμοκρασία.

A		B	
V(L)	p (atm)	V(L)	p (atm)
6,0	0,7	4,5	1,2
1,5	2,8	1,5	3,0

Απάντηση

Δύο αέρια A και B βρίσκονται σε δύο δοχεία με κινούμενα έμβολα και υφίστανται ισόθερμη συμπίεση. Ένα αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά σε μια ισόθερμη μεταβολή όταν ισχύει γι' αυτό ο νόμος του Boyle, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση:

$$pV = c$$

α) Για το αέριο A ισχύει:

$$p_1V_1 = 0,7 \text{ atm} \cdot 6,0 \text{ L} = 4,2 \text{ atm}\cdot\text{L}$$

και

$$p_2V_2 = 2,8 \text{ atm} \cdot 1,5 \text{ L} = 4,2 \text{ atm}\cdot\text{L}$$

Άρα

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

Παρατηρούμε για το αέριο A ότι ισχύει ο νόμος του Boyle, άρα συμπεριφέρεται ιδανικά.

Για το αέριο Β ισχύει:

$$p_1V_1 = 1,2 \text{ atm} \cdot 4,5 \text{ L} = 5,4 \text{ atm}\cdot\text{L}$$

και

$$p_2V_2 = 3,0 \text{ atm} \cdot 1,5 \text{ L} = 4,5 \text{ atm}\cdot\text{L}$$

Άρα

$$p_1V_1 \neq p_2V_2$$

Παρατηρούμε για το αέριο Β ότι δεν ισχύει ο νόμος του Boyle, επομένως δε συμπεριφέρεται ιδανικά.

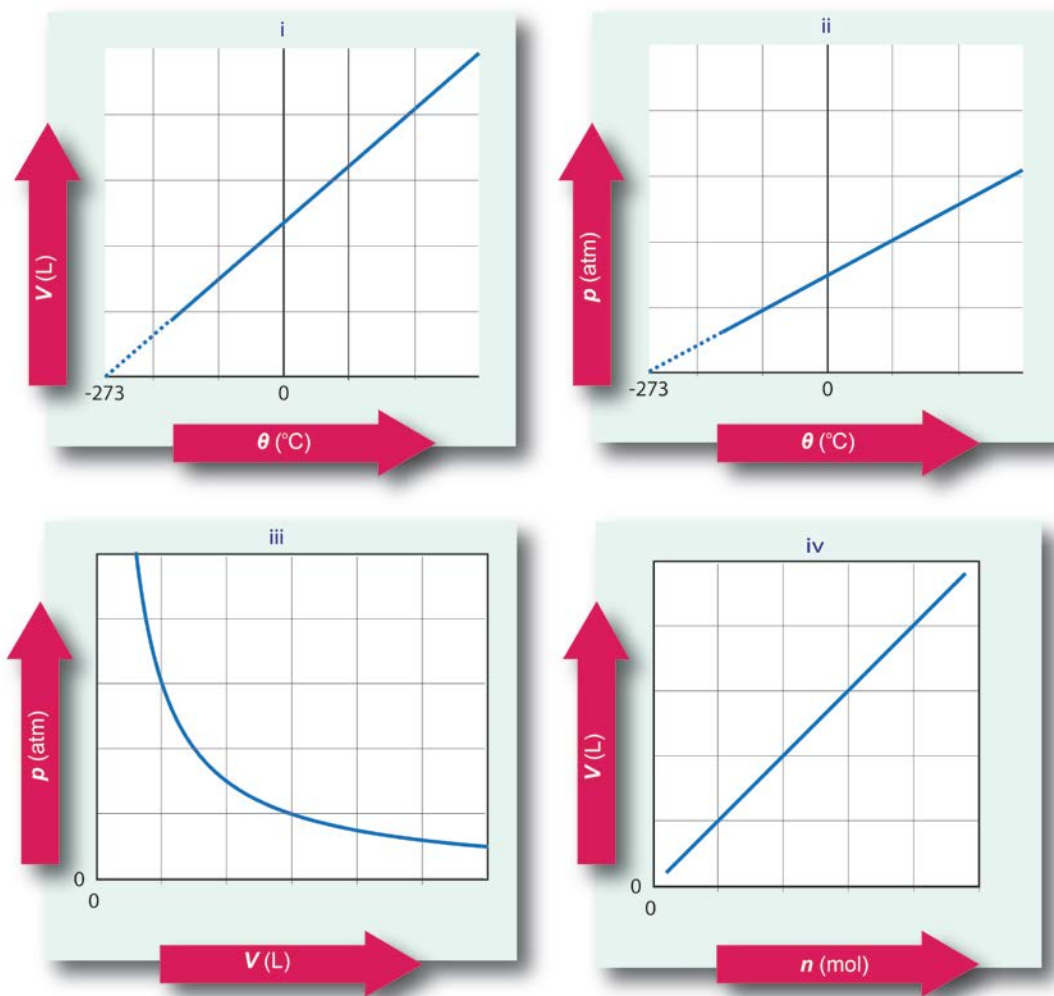
β) Για το αέριο Α που συμπεριφέρεται ιδανικά ισχύει ο νόμος του Boyle για οποιαδήποτε κατάσταση i της ισόθερμης μεταβολής του αερίου, δηλαδή ισχύει:

$$p_iV_i = 4,2 \text{ atm}\cdot\text{L}$$

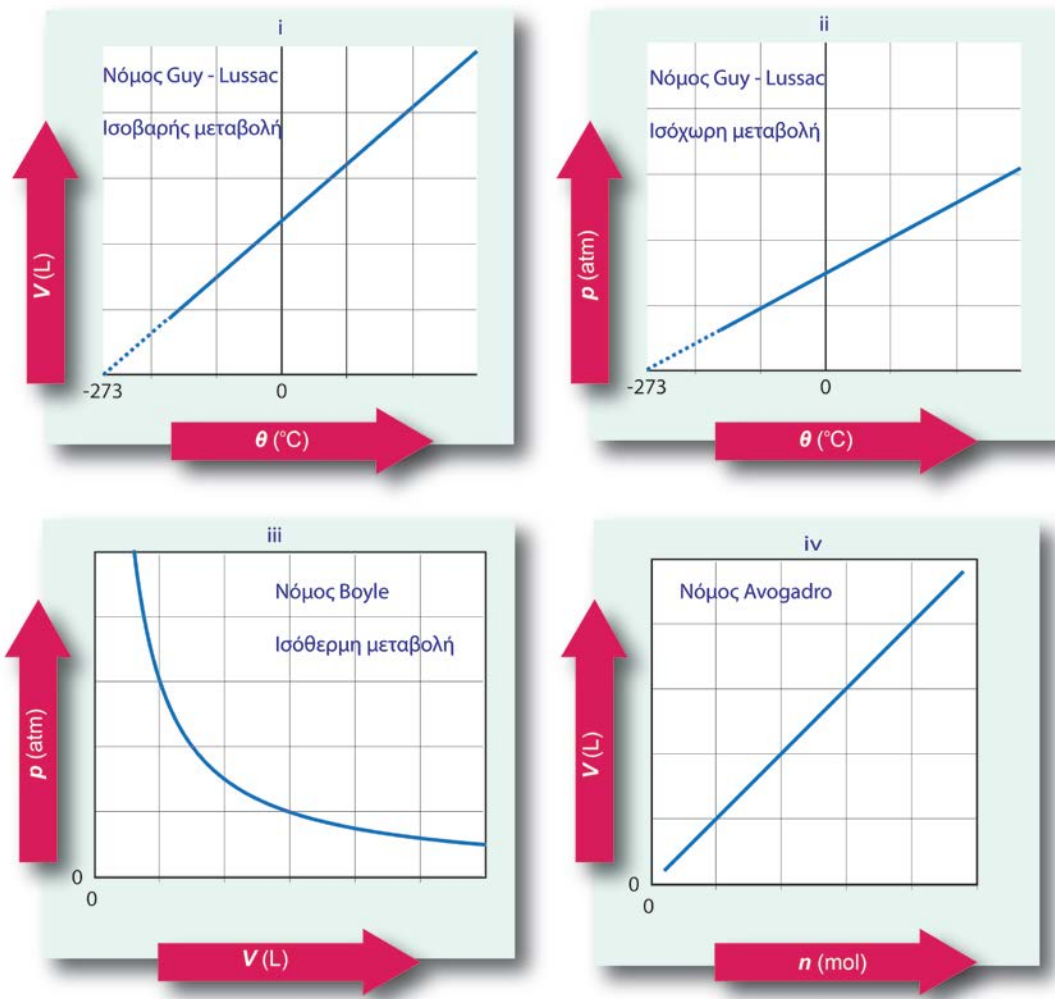
Άρα όταν ο όγκος του αερίου στην ίδια θερμοκρασία γίνει 1 L, τότε η πίεσή του θα είναι:

$$p \cdot 1 \text{ L} = 4,2 \text{ atm}\cdot\text{L} \Rightarrow p = 4,2 \text{ atm}$$

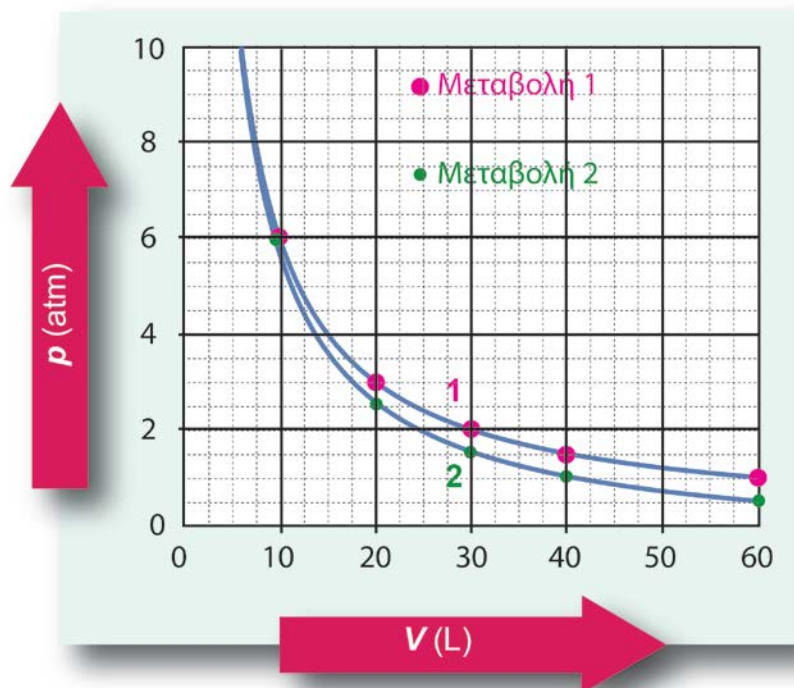
6. Στα διαγράμματα που ακολουθούν παριστάνονται τέσσερις μεταβολές αερίων που συμπεριφέρονται ιδανικά. Σε ποιους νόμους των αερίων ανταποκρίνονται;



Απάντηση



7. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει δύο μεταβολές, 1 και 2, της πίεσης σε συνάρτηση με τον όγκο ενός αερίου Α. Ποια από τις δύο μεταβολές πραγματοποιήθηκε σε σταθερή θερμοκρασία;



Απάντηση

Για να διαπιστώσουμε ποια από τις δυο μεταβολές πραγματοποιήθηκε σε σταθερή θερμοκρασία θα πρέπει να υπολογίσουμε τα γινόμενα pV της κάθε μεταβολής. Αν η τιμή του γινομένου διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της μεταβολής, τότε η μεταβολή είναι ισόθερμη (νόμος του Boyle).

Για τη μεταβολή 1:

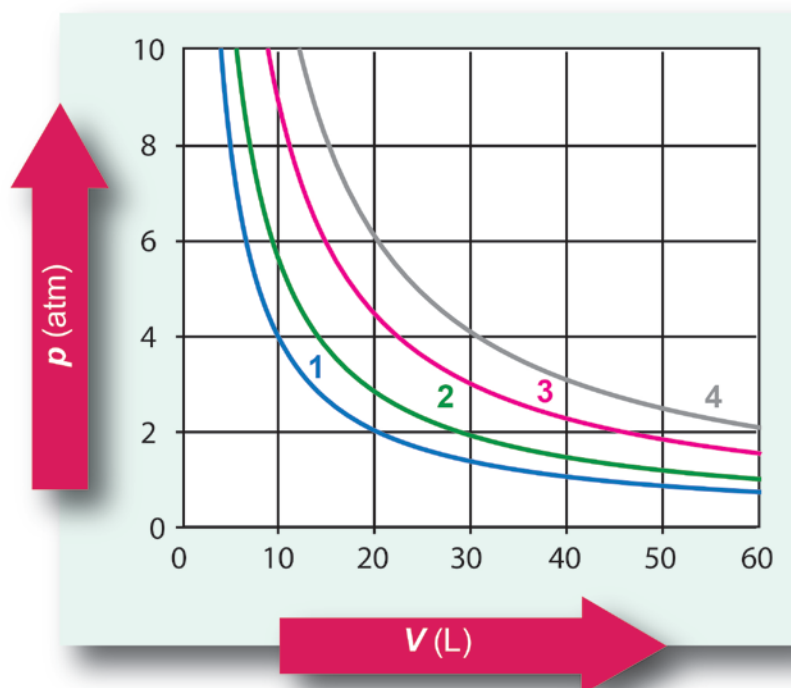
Πίεση, p (atm)	Όγκος, V (L)	pV (atm · L)
6	10	60
3	20	60
2	30	60
1,5	40	60
1	60	60

Για τη μεταβολή 2:

Πίεση, p (atm)	Όγκος, V (L)	pV (atm · L)
6	10	60
2,25	20	45
1,5	30	45
1	40	40
0,5	60	30

Σύμφωνα με τους παραπάνω πίνακες η μεταβολή που πραγματοποιήθηκε σε σταθερή θερμοκρασία είναι η μεταβολή 1 διότι σε αυτή το γινόμενο pV είναι σταθερό.

8. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνονται τέσσερις ισόθερμες μεταβολές 1, 2, 3 και 4 σε τέσσερις διαφορετικές θερμοκρασίες, T_1 , T_2 , T_3 και T_4 . Ποια από τις παρακάτω μεταβολές πραγματοποιείται σε υψηλότερη θερμοκρασία;



Απάντηση

Η γραφική παράσταση του όγκου, V , ορισμένης ποσότητας ενός ιδανικού αερίου, σε συνάρτηση με την πίεσή του, p , σε σταθερή θερμοκρασία T είναι ισοσκελής υπερβολή. Αν η ισόθερμη μεταβολή του αερίου πραγματοποιηθεί σε υψηλότερη θερμοκρασία, τότε η

κορυφή της αντίστοιχης ισοσκελούς υπερβολής απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων. Άρα η μεταβολή που πραγματοποιήθηκε σε υψηλότερη θερμοκρασία είναι η μεταβολή 4.

9. Σε δοχείο με κινούμενο έμβολο υπάρχει αέριο όγκου 6 L και υπό πίεση 2 atm, το οποίο στη συνέχεια υφίσταται μια ισόθερμη μεταβολή.

Ποια από τις ακόλουθες καταστάσεις μπορεί να είναι η τελική κατάσταση του αερίου; Να υποθέσετε ιδανική συμπεριφορά του αερίου.

α) 4 atm και 4 L

β) 1 atm και 10 L

γ) 8 atm και 2 L

δ) 6 atm και 2 L

Απάντηση

Σωστή απάντηση: δ

Αιτιολόγηση

Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά και υφίσταται ισόθερμη μεταβολή ισχύει ο νόμος του Boyle. Έτσι το γινόμενο p_1V_1 της αρχικής κατάστασης του αερίου θα πρέπει να είναι ίσο με το γινόμενο p_2V_2 της τελικής του κατάστασης.

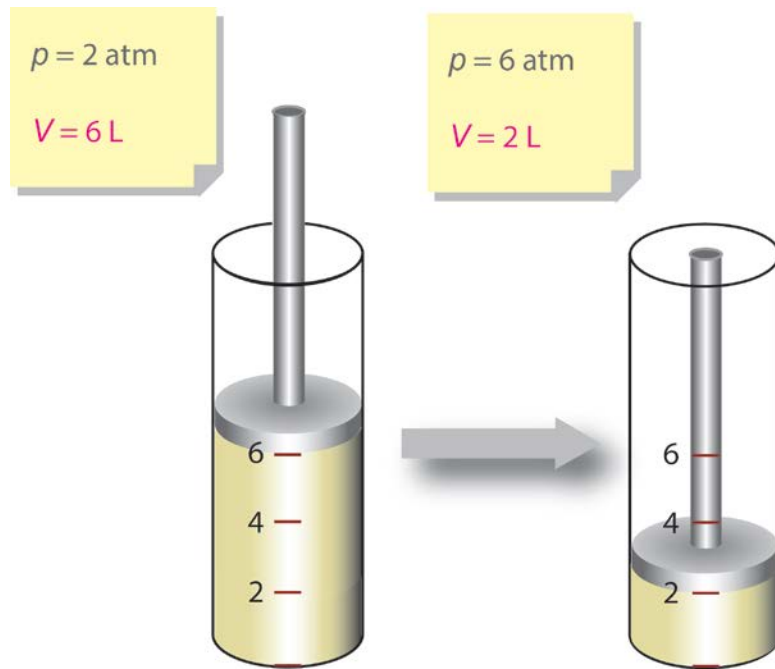
Το γινόμενο p_1V_1 της αρχικής κατάστασης έχει τιμή:

$$p_1V_1 = 2 \text{ atm} \cdot 6 \text{ L} = 12 \text{ atm}\cdot\text{L}$$

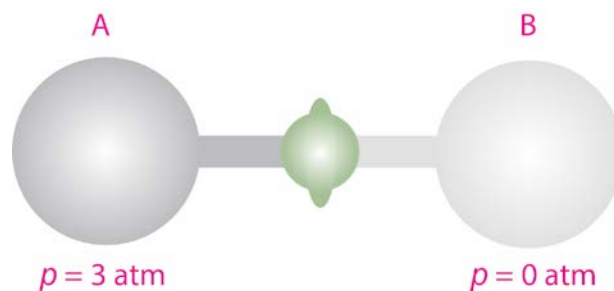
Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα γινόμενα pV των τεσσάρων μεταβολών που δίνονται:

α/α	p (atm)	V (L)	pV /(atm·L)
1	4	4	16
2	1	10	10
3	8	2	16
4	6	2	12

Από τους παραπάνω υπολογισμούς προκύπτει ότι στην τελική του κατάσταση το αέριο έχει όγκο 2 L και ασκεί πίεση 6 atm. Η μεταβολή του αερίου που πραγματοποιήθηκε φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



10. Δυο δοχεία A και B ίσου όγκου συνδέονται μεταξύ τους με λεπτό σωλήνα αμελητέου όγκου με στρόφιγγα, η οποία αρχικά είναι κλειστή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στο δοχείο A υπάρχει αέριο με πίεση 3 atm, ενώ το δοχείο B είναι κενό. Να βρεθεί η πίεση του αερίου όταν η στρόφιγγα ανοίξει. Η θερμοκρασία είναι σταθερή.

Απάντηση

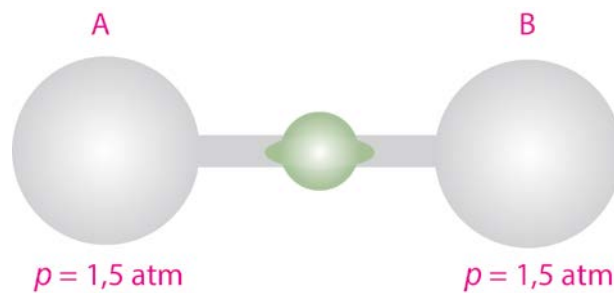
Έστω V L ο όγκος του δοχείου A και V L ο όγκος του δοχείου B. Πριν το άνοιγμα της στρόφιγγας το αέριο καταλαμβάνει όγκο V L, δηλαδή τον όγκο του δοχείου A. Μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας το αέριο καταλαμβάνει όγκο $2V$ L.

Εφόσον η ποσότητα του αερίου και η θερμοκρασία διατηρούνται σταθερά η μεταβολή είναι ισόθερμη. Από το νόμο του Boyle

$$p_{αρχ.} V_{αρχ.} = p_{τελ.} V_{τελ.}$$

προκύπτει ότι η τελική πίεση του αερίου είναι ίση με:

$$p_{\text{τελ.}} = \frac{p_{\text{αρχ.}} \cdot V_{\text{αρχ.}}}{V_{\text{τελ.}}} = \frac{3 \text{ atm} \cdot V L}{2V L} = 1,5 \text{ atm}$$



11. Η πίεση ορισμένης ποσότητας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου μεταβάλλεται υπό σταθερή θερμοκρασία. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

- α) Όταν η πίεση διπλασιάζεται, ο όγκος διπλασιάζεται.
- β) Όταν η πίεση υποδιπλασιάζεται, ο όγκος διπλασιάζεται.
- γ) Όταν η πίεση υποδιπλασιάζεται, ο όγκος υποδιπλασιάζεται.
- δ) Όταν η πίεση διπλασιάζεται, ο όγκος περιορίζεται στο ένα τέταρτο.

Απάντηση

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με το νόμο της ισόθερμης μεταβολής του Boyle ο όγκος ορισμένης μάζας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου υπό σταθερή θερμοκρασία είναι αντιστρόφως ανάλογος της πίεσης αυτού.

Άρα όταν η πίεση ορισμένης ποσότητας αερίου υποδιπλασιάζεται υπό σταθερή θερμοκρασία, τότε ο όγκος διπλασιάζεται.

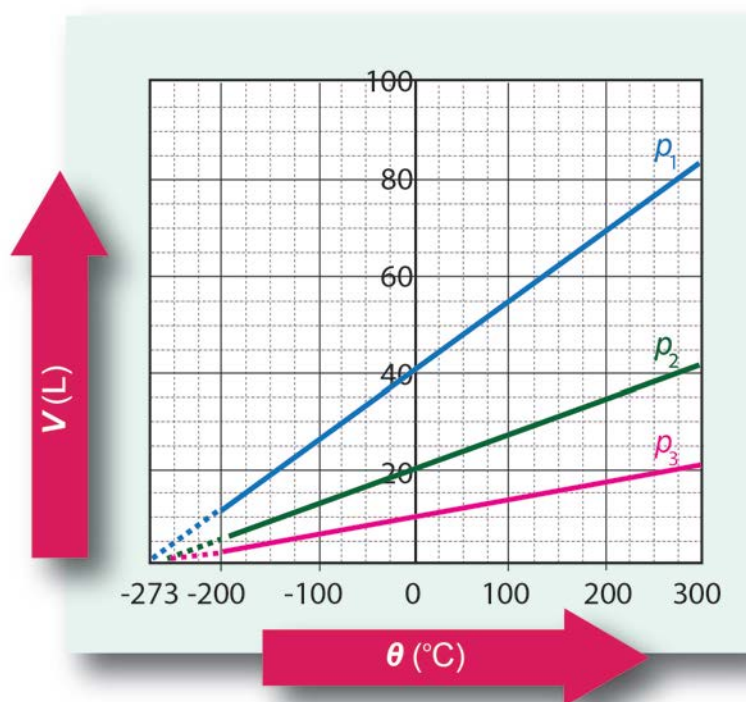
12. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τρεις μεταβολές (1, 2, 3) του όγκου, V , ενός αερίου σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία, θ , σε τρεις διαφορετικές τιμές πιέσεων p_1 , p_2 και p_3 .

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

- α) Τι είδους μεταβολές είναι οι παρακάτω;
- β) Να κατατάξετε τις τιμές πιέσεων p_1 , p_2 και p_3 από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη.

γ) Αν πραγματοποιούσαμε ακόμη μία τέτοια μεταβολή σε τιμή πίεσης $p_4 < p_1$, η κλίση της ευθείας θα ήταν μεγαλύτερη ή μικρότερη από την κλίση της ευθείας για τιμή πίεσης p_1 ;

δ) Τι κοινό έχουν οι τρεις ευθείες; Να σχολιάσετε εν συντομία το κοινό σημείο των παραπάνω ευθειών.



Απάντηση

α) Και οι τρεις μεταβολές είναι ισοβαρείς, δηλαδή πραγματοποιούνται σε σταθερή πίεση. Σύμφωνα με το νόμο του Guy - Lussac της ισοβαρούς μεταβολής, ο λόγος V/T είναι σταθερός, δηλαδή όσο αυξάνεται η θερμοκρασία $T(K)$ τόσο αυξάνεται και ο όγκος του αερίου.

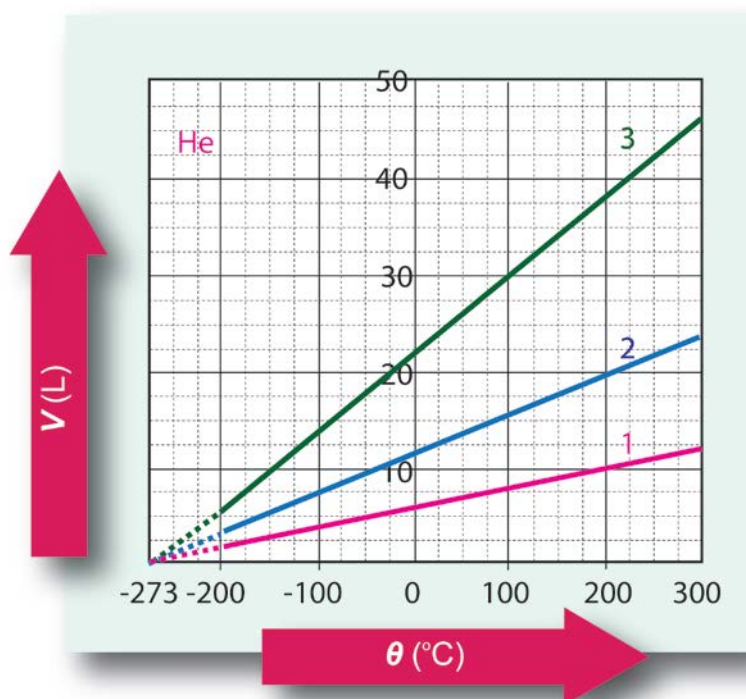
β) Αν λάβουμε υπόψη το νόμο του Boyle, η πίεση και ο όγκος ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη, δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η πίεση τόσο μικρότερος είναι ο όγκος του αερίου. Άρα η ευθεία με τη μικρότερη κλίση αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πίεση. Επομένως οι τιμές πιέσεων κατατάσσονται από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη ως εξής: p_3, p_2, p_1 .

γ) Αν πραγματοποιηθεί ακόμη μία ισοβαρής μεταβολή σε τιμή πίεσης $p_4 < p_1$, τότε η κλίση της ευθείας με πίεση p_4 θα είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ευθείας με πίεση p_1 .

δ) Και οι τρεις ευθείες καταλήγουν σε ένα κοινό σημείο. Το σημείο αυτό είναι η θερμοκρασία των -273 °C, δηλαδή η θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός. Στη θερμοκρασία

αυτή ο όγκος ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου φαίνεται ότι μηδενίζεται. Τα πραγματικά αέρια όμως σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες από τη θερμοκρασία του απολύτου μηδενός έχουν ήδη υγροποιηθεί.

13. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τρεις ισοβαρείς μεταβολές του αερίου He. Η μια από αυτές πραγματοποιήθηκε με ποσότητα 2 g He και πίεση 1 atm (μεταβολή Α). Η δεύτερη με ποσότητα 4 g He και πίεση 1 atm (μεταβολή Β), ενώ η τρίτη με ποσότητα 2 g He και πίεση 2 atm (μεταβολή Γ). Να αντιστοιχήσετε τις ευθείες 1, 2 και 3 του διαγράμματος με τις μεταβολές Α, Β και Γ.



Απάντηση

Για τις μεταβολές Α, Β και Γ θα υπολογιστεί ο όγκος του αερίου σε θερμοκρασία 0 °C ή 273 Κ.

Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι ο όγκος του αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{nRT}{p}$$

Η μεταβολή Α πραγματοποιήθηκε με ποσότητα αερίου He ίση με 2 g, δηλαδή 0,5 mol, και πίεση ίση με 1 atm. Άρα ο όγκος του He στους 273 Κ είναι ίσος με:

$$V = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 11,2 \text{ L}$$

Η μεταβολή Β πραγματοποιήθηκε με ποσότητα αερίου He ίση με 4 g, δηλαδή 1 mol, και σε πίεση 1 atm. Ο όγκος του He στους 273 K είναι ίσος με:

$$V = \frac{1 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 22,4 \text{ L}$$

Η μεταβολή Γ πραγματοποιήθηκε με ποσότητα αερίου He ίση με 2 g He, δηλαδή 0,5 mol He και σε πίεση 2 atm. Ο όγκος του He στους 273 K είναι ίσος με:

$$V = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{2 \text{ atm}} = 5,6 \text{ L}$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η ευθεία 1 αντιστοιχεί στη μεταβολή Γ, η ευθεία 2 αντιστοιχεί στη μεταβολή Α και η ευθεία 3 αντιστοιχεί στη μεταβολή Β.

14. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι «αν ορισμένος όγκος ιδανικού αερίου ψυχθεί υπό σταθερή πίεση από τους 50 °C στους 25 °C, τότε ο όγκος του αερίου θα υποδιπλασιαστεί». Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φοιτητή;

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο της ισοβαρούς μεταβολής του Gay - Lussac, ο όγκος ορισμένης μάζας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου είναι **ανάλογος** της **απόλυτης θερμοκρασίας**. Επομένως ο ισχυρισμός του φοιτητή ότι «αν ορισμένος όγκος ιδανικού αερίου ψυχθεί υπό σταθερή πίεση από τους 50 °C στους 25 °C, τότε ο όγκος του αερίου θα υποδιπλασιαστεί» δεν είναι σωστός. Ο όγκος του αερίου θα μειωθεί μιν, αλλά δεν θα υποδιπλασιαστεί.

15. Ποσότητα ιδανικού αερίου θερμαίνεται από τους 35 στους 70 °C υπό σταθερή πίεση.

Ο όγκος του αερίου:

α) αυξάνεται αλλά δε διπλασιάζεται

β) διπλασιάζεται

γ) υποδιπλασιάζεται

δ) τίποτα από τα παραπάνω

Απάντηση

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με το νόμο της ισοβαρούς μεταβολής του Gay - Lussac, ο όγκος ορισμένης μάζας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου είναι **ανάλογος** της **απόλυτης θερμοκρασίας**. Άρα αν μια ποσότητα ιδανικού αερίου θερμανθεί από τους 35 στους 70 °C υπό σταθερή πίεση, τότε ο όγκος του αερίου αυξάνεται αλλά δε διπλασιάζεται.

16. Ποσότητα ιδανικού αερίου ψύχεται υπό σταθερή πίεση από τους 400 K στους 200 K υπό σταθερή πίεση. Ο όγκος του αερίου:

α) αυξάνεται αλλά δε διπλασιάζεται

β) διπλασιάζεται

γ) υποδιπλασιάζεται

δ) τίποτα από τα παραπάνω

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με το νόμο της ισοβαρούς μεταβολής του Gay - Lussac, ο όγκος ορισμένης μάζας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου είναι **ανάλογος** της **απόλυτης θερμοκρασίας**. Άρα αν μια ποσότητα ιδανικού αερίου ψυχθεί από τους 400 K στους 200 K υπό σταθερή πίεση, τότε ο όγκος του αερίου υποδιπλασιάζεται.

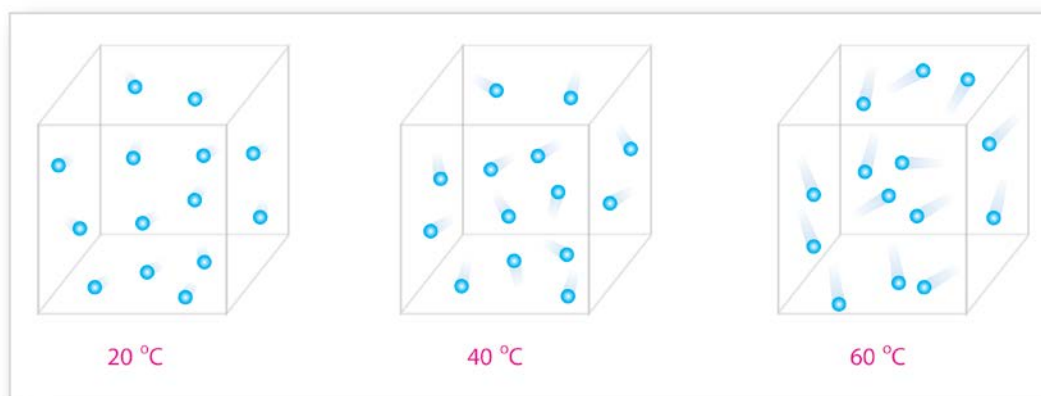
17. Ποσότητα αερίου που βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου, V , σε θερμοκρασία 20 °C θερμαίνεται αρχικά σε θερμοκρασία 40 °C και στη συνέχεια σε θερμοκρασία 60 °C. Κατά την αύξηση της θερμοκρασίας η πίεση αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερή; Σε τι διαφέρει η κίνηση των μορίων;

Απάντηση

Ποσότητα αερίου που βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου, V , σε θερμοκρασία $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ θερμαίνεται αρχικά σε θερμοκρασία $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ και στη συνέχεια σε θερμοκρασία $60\text{ }^{\circ}\text{C}$. Οι παραπάνω μεταβολές εφόσον πραγματοποιούνται υπό σταθερό όγκο είναι ισόχωρες μεταβολές.

Σύμφωνα με το νόμο της ισόχωρης μεταβολής του Gay - Lussac, η πίεση ορισμένης μάζας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας του. Άρα με την αύξηση της θερμοκρασίας θα έχουμε αύξηση της πίεσης του αερίου. Η αύξηση αυτή όμως δε θα είναι αναλογική, δηλαδή η θέρμανση του αερίου από τους 20 στους $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ θα αυξήσει μεν την πίεση του αερίου αλλά δεν θα τη διπλασιάσει.

Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται και η ταχύτητα των μορίων του αερίου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



18. Έστω τέσσερις ακριβώς ίδιες φιάλες Α, Β, Γ και Δ στην ίδια θερμοκρασία, T , και πίεση, p . Η φιάλη Α περιέχει αέριο O_2 , η φιάλη Β αέριο H_2 , η φιάλη Γ αέρια NH_3 και η φιάλη Δ αέριο CO_2 . Ποια φιάλη περιέχει τα περισσότερα mol αερίου;

Απάντηση

Σύμφωνα με την αρχή του Avogadro στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ίσοι όγκοι αερίων έχουν ίσο αριθμό μορίων, συνεπώς και ίσο αριθμό mol. Άρα όλες οι φιάλες περιέχουν τον ίδιο αριθμό mol.

19. Στην ίδια θερμοκρασία και πίεση ποιο από τα παρακάτω αέρια περιέχει τον ίδιο αριθμό μορίων με 1 L αερίου O₂;

- α) 1 L Ne (g) β) 2 L NH₃ (g)
γ) 0,5 L H₂ (g) δ) 10 L O₃ (g)

Απάντηση

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με την αρχή του Avogadro στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ίσοι όγκοι αερίων έχουν ίσο αριθμό μορίων.

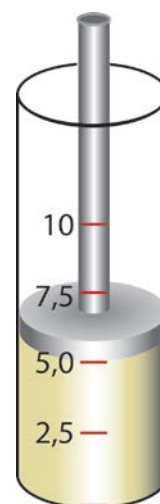
Άρα 1 L O₂ θα έχει τον ίδιο αριθμό μορίων με 1 L Ne(g).

20. Ορισμένη ποσότητα αερίου He βρίσκεται σε δοχείο με κινούμενο έμβολο σε θερμοκρασία 305 K και ασκεί πίεση 5 atm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να βρεθεί η νέα θέση του εμβόλου στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) αν η πίεση γίνει 2,5 atm σε σταθερή θερμοκρασία 305 K,
β) αν η θερμοκρασία αυξηθεί στους 610 K υπό σταθερή πίεση,
γ) αν καταναλωθούν από το δοχείο 0,5 mol He διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία και την πίεση και
δ) αν προστεθούν στο δοχείο 0,5 mol He διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία και την πίεση.

Να υποτεθεί ότι το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά.



Απάντηση

Η ποσότητα του He που υπάρχει αρχικά στο δοχείο υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση και είναι ίση με:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{5 \text{ atm} \cdot 5 \text{ L}}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 305 \text{ K}} = 1 \text{ mol}$$

α) Εφόσον η ποσότητα του αερίου και η θερμοκρασία διατηρούνται σταθερά η μεταβολή είναι ισόθερμη. Από το νόμο του Boyle

$$p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \cdot V_{\tau\epsilon\lambda}$$

προκύπτει ότι ο τελικός όγκος του αερίου είναι ίσος με:

$$V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi}}{p_{\tau\epsilon\lambda}} = \frac{5 \text{ atm} \cdot 5 \text{ L}}{2,5 \text{ atm}} = 10 \text{ L}$$

β) Εφόσον η ποσότητα του αερίου και η πίεση διατηρούνται σταθερά η μεταβολή είναι ισοβαρής. Από το νόμο του Guy - Lussac

$$\frac{V_{\alpha\rho\chi}}{T_{\alpha\rho\chi}} = \frac{V_{\tau\epsilon\lambda}}{T_{\tau\epsilon\lambda}}$$

προκύπτει ότι ο τελικός όγκος του αερίου είναι ίσος με:

$$V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{V_{\alpha\rho\chi} \cdot T_{\tau\epsilon\lambda}}{T_{\alpha\rho\chi}} = \frac{5 \text{ L}}{305 \text{ K}} \cdot 610 \text{ K} = 10 \text{ L}$$

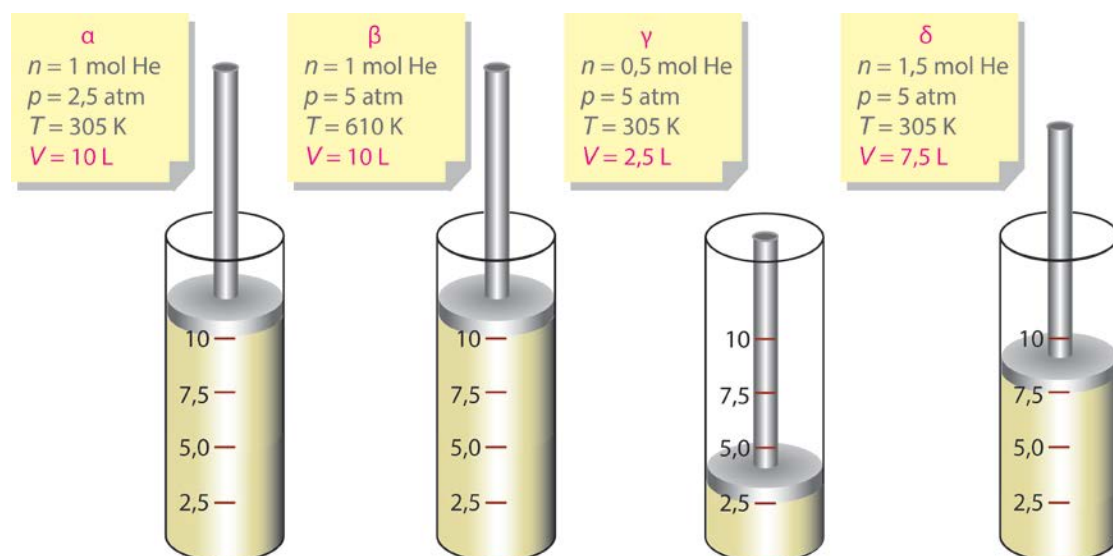
γ) Σύμφωνα με την αρχή του Avogadro ο όγκος ενός αερίου είναι ανάλογος της ποσότητας του αερίου σε σταθερή θερμοκρασία και πίεση, δηλαδή

$$\frac{n_{\alpha\rho\chi}}{V_{\alpha\rho\chi}} = \frac{n_{\tau\epsilon\lambda}}{V_{\tau\epsilon\lambda}}$$

Αν καταναλωθούν από το δοχείο 0,5 mol He, θα παραμείνουν 0,5 mol. Ο τελικός όγκος του αερίου είναι ίσος με:

$$V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{V_{\alpha\rho\chi}}{n_{\alpha\rho\chi}} \cdot n_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{5 \text{ L}}{1 \text{ mol}} \cdot 0,5 \text{ mol} = 2,5 \text{ L}$$

δ) Όμοια με την περίπτωση γ προκύπτει ότι ο τελικός όγκος του αερίου θα είναι ίσος με 7,5 L.



21. Ποια από τις παρακάτω καταστάσεις αντιπροσωπεύει την STP;

- α) 760 Torr και 0 K β) 1 Torr και 0 K
γ) 760 Torr και 0 °C δ) 1 Torr και 0 °C

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Ως συνθήκες πρότυπης θερμοκρασίας και πίεσης, STP (Standard Temperature and Pressure) έχουν οριστεί η θερμοκρασία 0 °C ή 273 K και πίεση 1 atm ή 760 Torr.

22. Ο μολαρικός όγκος των αερίων έχει την τιμή 22,4 L mol⁻¹ μόνο όταν η πίεση είναι 1 atm και η θερμοκρασία 0 °C;

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ο μολαρικός όγκος, V_m , του αερίου.

$$pV = nRT \Rightarrow p \frac{V}{n} = RT \Rightarrow pV_m = RT \Rightarrow V_m = \frac{RT}{p}$$

Ο μολαρικός όγκος, V_m , των αερίων, δηλαδή ο όγκος 1 mol, σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία 0 °C είναι 22,4 L.

$$V_m = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ L atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 22,4 \text{ L}$$

Όμως ο μολαρικός όγκος των αερίων δεν έχει την τιμή 22,4 L μόνο στις παραπάνω συνθήκες. Για παράδειγμα σε θερμοκρασία 137 °C και πίεση 1,5 atm, ο μολαρικός όγκος των αερίων έχει επίσης την ίδια τιμή.

$$V_m = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ L atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 410 \text{ K}}{1,5 \text{ atm}} = 22,4 \text{ L}$$

23. Ποιο από τα παρακάτω αέρια: H₂, O₂, O₃ και CH₄, έχει μεγαλύτερο μολαρικό όγκο στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ο μολαρικός όγκος, V_m , του αερίου.

$$pV = nRT \Rightarrow p \frac{V}{n} = RT \Rightarrow pV_m = RT \Rightarrow V_m = \frac{RT}{p}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η τιμή του μολαρικού όγκου των αερίων εξαρτάται μόνο από την πίεση και τη θερμοκρασία και όχι από το ίδιο το αέριο. Επομένως στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ο μολαρικός όγκος των αερίων: H₂, O₂, O₃ και CH₄ είναι ίδιος.

24. Σε ένα χώρο όπου η θερμοκρασία είναι 0 °C και η πίεση 1 atm γεμίζουμε τρία ακριβώς ίδια μπαλόνια Α, Β και Γ με 1 mol He, 1 mol N₂ και 1 mol CO₂, αντίστοιχα.

α) Ποιο από τα τρία μπαλόνια θα έχει μεγαλύτερο όγκο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Πόσος είναι ο όγκος αυτός;

β) Ποιο από τα τρία μπαλόνια θα έχει τη μεγαλύτερη μάζα;

γ) Το μπαλόνι Α μεταφέρεται σε ένα χώρο όπου η πίεση είναι 1 atm και η θερμοκρασία 27 °C. Πως θα μεταβληθεί ο όγκος του μπαλονιού; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

α) Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ο μολαρικός όγκος, V_m , του αερίου.

$$pV = nRT \Rightarrow p \frac{V}{n} = RT \Rightarrow pV_m = RT \Rightarrow V_m = \frac{RT}{p}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η τιμή του μολαρικού όγκου των αερίων εξαρτάται μόνο από την πίεση και τη θερμοκρασία και όχι από το ίδιο το αέριο. Επομένως στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ο μολαρικός όγκος των αερίων: He, N₂ και CO₂ θα είναι ίδιος.

Ο μολαρικός όγκος, V_m , των αερίων, δηλαδή ο όγκος 1 mol, σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία 0 °C είναι 22,4 L.

$$V_m = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 22,4 \text{ L}$$

β) Το μπαλόνι που περιέχει το αέριο με τη μεγαλύτερη μοριακή μάζα, θα ζυγίζει περισσότερο. Άρα το μπαλόνι που έχει τη μεγαλύτερη μάζα είναι το μπαλόνι Γ που περιέχει CO₂.

γ) Αν πάρουμε το μπαλόνι Α που περιέχει αέριο He και το αφήσουμε σε ένα χώρο, όπου η θερμοκρασία είναι 27 °C και η πίεση 1 atm, ο μοριακός όγκος του, δηλαδή ο όγκος 1 mol, θα αυξηθεί από 22,4 σε 24,6 L.

$$V_m = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 24,6 \text{ L}$$

25. Τέσσερις φιάλες αερίου Α, Β, Γ και Δ με όγκους 10 L, 20 L, 50 L και 100 L, αντίστοιχα, βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία T και περιέχουν η καθεμία τον ίδιο αριθμό mol ενός αερίου. Σε ποια φιάλη η πίεση του αερίου είναι μεγαλύτερη;

α) Φιάλη Α

β) Φιάλη Β

γ) Φιάλη Γ

δ) Φιάλη Δ

Απάντηση

Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Οι τέσσερις φιάλες με το αέριο περιέχουν τον ίδιο αριθμό mol και βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία T . Επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι, για n και T σταθερά, όσο μικρότερος είναι ο όγκος του αερίου, δηλαδή όσο μικρότερος είναι ο όγκος της φιάλης που περιέχεται το αέριο, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η πίεση του αερίου. Άρα η πίεση του αερίου θα είναι μεγαλύτερη στη φιάλη Α.

26. Τέσσερις ακριβώς ίδιες φιάλες αερίου Α, Β, Γ και Δ βρίσκονται σε θερμοκρασίες 250 K, 273 K, 283 K και 300 K, αντίστοιχα, και περιέχουν τον ίδιο αριθμό mol ενός αερίου. Σε ποια φιάλη η πίεση του αερίου είναι μεγαλύτερη;

α) Φιάλη Α

β) Φιάλη Β

γ) Φιάλη Γ

δ) Φιάλη Δ

Απάντηση

Σωστή απάντηση: δ

Αιτιολόγηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Οι τέσσερις φιάλες με το αέριο περιέχουν τον ίδιο αριθμό mol, έχουν τον ίδιο όγκο, V , όμως η κάθε φιάλη βρίσκεται σε διαφορετική θερμοκρασία, T . Επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι, για n και V σταθερά, όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η πίεσή του. Άρα η πίεση του αερίου θα είναι μεγαλύτερη στη φιάλη Δ διότι αυτή βρίσκεται στη μεγαλύτερη (απόλυτη) θερμοκρασία.

27. Τέσσερις ακριβώς ίδιες φιάλες Α, Β, Γ και Δ περιέχουν το ίδιο αέριο σε πίεση 5 atm, 10 atm, 15 atm και 20 atm, αντίστοιχα, και βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία. Ποια φιάλη περιέχει τα περισσότερα mol αερίου;

α) Φιάλη Α

β) Φιάλη Β

γ) Φιάλη Γ

δ) Φιάλη Δ

Απάντηση

Σωστή απάντηση: δ

Αιτιολόγηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι ο αριθμός των mol ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Οι τέσσερις φιάλες με το αέριο έχουν τον ίδιο όγκο, V , και βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία, T . Η κάθε φιάλη όμως έχει διαφορετική πίεση. Επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι, για V και T σταθερά, όσο μεγαλύτερη είναι η πίεση του αερίου, τόσο μεγαλύτερος είναι και ο αριθμός mol του αερίου που περιέχεται σ' αυτήν. Επομένως τα περισσότερα mol αερίου περιέχει η φιάλη Δ διότι αυτή έχει τη μεγαλύτερη πίεση.

28. Σε ένα κυβικό δοχείο ακμής 10 cm περιέχεται μια ποσότητα αερίου H_2 . Ίση ποσότητα αερίου H_2 περιέχεται και σε ένα σφαιρικό δοχείο διαμέτρου 10 cm. Σε ποιο από τα δύο δοχεία η πίεση του αερίου είναι μεγαλύτερη στην ίδια θερμοκρασία;

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση για την ίδια ποσότητα, n , αερίου στην ίδια θερμοκρασία, T , όσο μικρότερος είναι ο όγκος του αερίου τόσο μεγαλύτερη είναι η πίεσή του και αντίστροφα. Έτσι για τα δύο δοχεία που δίνονται θα πρέπει να υπολογιστεί ο όγκος τους.

Για το κυβικό δοχείο ακμής $a = 10$ cm, ο όγκος του είναι:

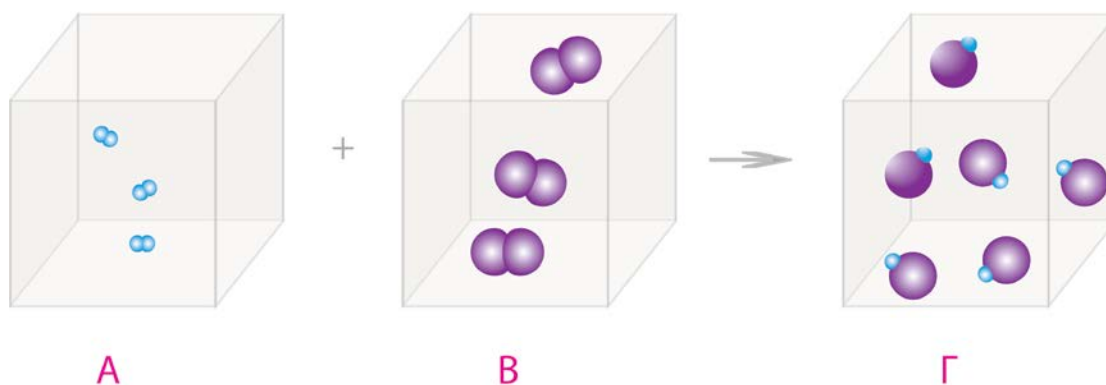
$$V = a^3 = 10^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

Για το σφαιρικό δοχείο διαμέτρου $\delta = 10$ cm, άρα ακτίνας $r = 5$ cm, ο όγκος του είναι:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 = 523,3 \text{ cm}^3$$

Επομένως η πίεση του αερίου H_2 είναι μεγαλύτερη στο σφαιρικό δοχείο διότι ο όγκος του είναι μικρότερος σε σχέση με το κυβικό δοχείο.

29. Δύο δοχεία Α και Β περιέχουν H_2 και F_2 , αντίστοιχα. Τα δύο αέρια μεταφέρονται σε ένα τρίτο δοχείο Γ, στο οποίο αντιδρούν μεταξύ τους, όπως φαίνεται παρακάτω.



Τα τρία δοχεία έχουν τον ίδιο όγκο, V , και βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία, T . Σε ποιο δοχείο A, B ή Γ το αέριο ασκεί τη μεγαλύτερη πίεση;

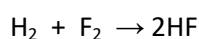
- α) Στο δοχείο A πριν την αντίδραση
- β) Στο δοχείο B πριν την αντίδραση
- γ) Στο δοχείο Γ μετά την αντίδραση
- δ) Σε όλα τα δοχεία τα αέρια ασκούν την ίδια πίεση

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Η ποσότητα (σε mol) του H_2 στο δοχείο A είναι ίδια με την ποσότητα του F_2 στο δοχείο B. Στη συνέχεια τα δύο αέρια μεταφέρονται σε ένα τρίτο δοχείο Γ και αντιδρούν μεταξύ τους σύμφωνα την αντίδραση:



Η ποσότητα του αερίου HF στο δοχείο Γ είναι διπλάσια από την ποσότητα και του αερίου A αλλά και του αερίου B, στα δοχεία A και B, αντίστοιχα.

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση για ίδιες συνθήκες V και T , όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα, n , του αερίου τόσο μεγαλύτερη είναι και η πίεση που ασκεί. Άρα το αέριο HF στο δοχείο Γ θα ασκεί τη μεγαλύτερη πίεση, η οποία θα είναι διπλάσια από αυτή του H_2 αλλά και από αυτή του F_2 .

30. Ποιος είναι ο λόγος της πυκνότητας μάζας του N_2 προς αυτή του H_2 , όταν τα δυο αέρια βρίσκονται στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας; Να υποθέσετε ότι τα δυο αέρια συμπεριφέρονται ιδανικά.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για την πυκνότητα μάζας ενός αερίου:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος της πυκνότητας μάζας του N_2 προς αυτή του H_2 , όταν τα δύο αέρια βρίσκονται στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, είναι:

$$\frac{\rho_{N_2}}{\rho_{H_2}} = \frac{\frac{pM_{N_2}}{RT}}{\frac{pM_{H_2}}{RT}} = \frac{M_{N_2}}{M_{H_2}} = \frac{28}{2} = \frac{14}{1} = 14$$

31. Ποιο από τα παρακάτω αέρια: H_2 , N_2 , Ar και CH_4 , έχει τη μεγαλύτερη πυκνότητα μάζας στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για την πυκνότητα μάζας ενός αερίου:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η πυκνότητα μάζας ενός αερίου είναι ανάλογη της μοριακής μάζας του αερίου. Επομένως στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, η πυκνότητα μάζας για μια σειρά αερίων θα είναι μεγαλύτερη για το αέριο με τη μεγαλύτερη μοριακή μάζα. Έτσι από τα αέρια H_2 , N_2 , Ar και CH_4 αυτό που έχει τη μεγαλύτερη πυκνότητα μάζας είναι το Ar .

32. Δύο αερόστατα ακριβώς ίδια γεμίζονται το ένα με H_2 και το άλλο με He . Ποιο από τα δύο μπορεί να ανυψώσει μεγαλύτερο βάρος μετεωρολογικών οργάνων; Να υποθέσετε ότι τα δυο αέρια συμπεριφέρονται ιδανικά.

Απάντηση

Δύο ακριβώς ίδια αερόστατα γεμίζονται το ένα με H_2 και το άλλο με He . Από τα δύο αερόστατα αυτό που μπορεί να ανυψώσει μεγαλύτερο βάρος, είναι εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη ανυψωτική δύναμη, F_{lf} .

Η ανυψωτική δύναμη ενός αεροστάτου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_{lf} = V_{\text{αεροστάτου}} \cdot g_n \cdot (\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πλήρωσεως}})$$

από την οποία προκύπτει ότι η ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου αυξάνεται με τη ελάττωση της πυκνότητας μάζας του αερίου με το οποίο πληρώνεται.

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για την πυκνότητα μάζας ενός αερίου η σχέση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{mRT}{VM} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

από την οποία προκύπτει ότι όταν δύο αέρια βρίσκονται στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, το αέριο με τη μικρότερη μοριακή μάζα έχει και τη μικρότερη πυκνότητα μάζας. Άρα το αερόστατο που έχει γεμιστεί με αέριο H_2 μπορεί να ανυψώσει και το μεγαλύτερο βάρος μετεωρολογικών οργάνων.

33. Η απόλυτη θερμοκρασία ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου διπλασιάζεται, υπό σταθερή πίεση. Για να αποκτήσει το αέριο την αρχική του θερμοκρασία, υπό σταθερό όγκο, πρέπει η πίεσή του:

- α) να διπλασιαστεί β) να υποδιπλασιαστεί
γ) να τετραπλασιαστεί δ) να υποτετραπλασιαστεί

Απάντηση

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση

Το αέριο υφίσταται δύο διαδοχικές μεταβολές, μια ισοβαρή και μια ισόχωρη. Έστω ότι το αέριο βρίσκεται αρχικά σε απόλυτη θερμοκρασία T , καταλαμβάνει όγκο V και ασκεί πίεση p .

Στη συνέχεια η απόλυτη θερμοκρασία T του αερίου διπλασιάζεται υπό σταθερή πίεση. Για την ισοβαρή μεταβολή εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο νόμο των Gay - Lussac για να υπολογίσουμε τον νέο όγκο του αερίου.

$$\frac{V_{\alpha\rho\chi.}}{T_{\alpha\rho\chi.}} = \frac{V_{\tau\epsilon\lambda.}}{T_{\tau\epsilon\lambda.}} \Rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda.} = V_{\alpha\rho\chi.} \frac{T_{\tau\epsilon\lambda.}}{T_{\alpha\rho\chi.}} \Rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda.} = V \frac{2T}{T} \Rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda.} = 2V$$

Ο διπλασιασμός της απόλυτης θερμοκρασίας επιφέρει διπλασιασμό του όγκου του αερίου.

Στη συνέχεια μεταβάλλεται εκ νέου η θερμοκρασία του αερίου και αποκτά την αρχική της τιμή, δηλαδή από $2T$ γίνεται T υπό σταθερό όγκο $2V$. Για την ισόχωρη μεταβολή εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο νόμο των Gay - Lussac για να υπολογίσουμε τη νέα πίεση του αερίου.

$$\frac{p_{\alpha\rho\chi.}}{T_{\alpha\rho\chi.}} = \frac{p_{\tau\epsilon\lambda.}}{T_{\tau\epsilon\lambda.}} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda.} = p_{\alpha\rho\chi.} \frac{T_{\tau\epsilon\lambda.}}{T_{\alpha\rho\chi.}} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda.} = p \frac{T}{2T} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda.} = \frac{p}{2}$$

Άρα για να αποκτήσει το αέριο την αρχική του θερμοκρασία, υπό σταθερό όγκο, πρέπει η πίεσή του να υποδιπλασιαστεί.

34. Σε δοχείο σταθερού όγκου που περιέχει 2 mol O_2 η πίεση είναι p . Αν προσθέσουμε στο δοχείο 4 mol Ar, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία, η πίεση θα γίνει:

- α) p β) $2p$
γ) $3p$ δ) $p/2$

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Δοχείο σταθερού όγκου έστω V περιέχει 2 mol αερίου O_2 , το οποίο ασκεί πίεση $p = p_{\alpha\rho\chi.}$ σε θερμοκρασία T . Η πίεση $p_{\alpha\rho\chi.}$ του αερίου σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha\rho\chi}.V &= n_{\alpha\rho\chi}.RT \Rightarrow p_{\alpha\rho\chi} = \frac{n_{\alpha\rho\chi}.RT}{V} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow p_{\alpha\rho\chi} = \frac{2RT}{V} \qquad (1)
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια στο ίδιο δοχείο προσθέτουμε 4 mol Ar. Άρα στο δοχείο θα περιέχεται τελικά ένα αέριο μίγμα αποτελούμενο από 2 mol O₂ και 4 mol Ar, δηλαδή συνολικά θα υπάρχουν στο δοχείο 6 mol αερίων συστατικών. Η τελική πίεση $p_{\tau\epsilon\lambda.}$ του αερίου μίγματος σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση θα είναι:

$$\begin{aligned}
 p_{\tau\epsilon\lambda.}V &= n_{\tau\epsilon\lambda.}RT \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda.} = \frac{n_{\tau\epsilon\lambda.}RT}{V} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda.} = \frac{6RT}{V} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda.} = 3 \frac{2RT}{V} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\
 &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_{\tau\epsilon\lambda.} = 3p_{\alpha\rho\chi}.
 \end{aligned}$$

Επομένως η πίεση στο δοχείο μετά την εισαγωγή του αερίου Ar θα τριπλασιαστεί.

35. Ίσες μάζες δύο αερίων A και B βρίσκονται σε δυο ακριβώς ίδια δοχεία, αντίστοιχα, στην ίδια θερμοκρασία. Αν ισχύει $M_A < M_B$, να δείξετε ότι $p_A > p_B$.

Απάντηση

Εφόσον έχουμε ίσες μάζες από τα αέρια A και B, θα ισχύει $m_A = m_B = m$. Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για την πίεση των αερίων A και B:

$$\begin{aligned}
 p_A V &= n_A RT \Rightarrow p_A V = \frac{m_A}{M_A} RT \Rightarrow p_A = \frac{mRT}{M_A V} \\
 p_B V &= n_B RT \Rightarrow p_B V = \frac{m_B}{M_B} RT \Rightarrow p_B = \frac{mRT}{M_B V}
 \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{\frac{mRT}{M_A V}}{\frac{mRT}{M_B V}} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{mRT M_B V}{mRT M_A V} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{M_B}{M_A}$$

Εφόσον $M_B > M_A$, τότε ισχύει και $p_A > p_B$.

36. Έστω ίσοι όγκοι αερίων SO₂ και SO₃ στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Η μάζα του SO₂ είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από τη μάζα του SO₃; Ισχύει το ίδιο και για την πυκνότητα μάζας του SO₂; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η μάζα, m , ενός αερίου είναι:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow m = \frac{pVM}{RT}$$

Εφόσον τα δύο αέρια έχουν ίσους όγκους έστω V , στις ίδιες συνθήκες πίεσης, p , και θερμοκρασίας, T , τότε σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η μάζα κάθε αερίου είναι ανάλογη της μοριακής μάζας του. Άρα η μάζα του SO_2 θα είναι μικρότερη από τη μάζα του SO_3 διότι έχει μικρότερη μοριακή μάζα, M .

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για την πυκνότητα μάζας, ρ , ενός αερίου:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό ότι όταν δύο αέρια βρίσκονται στις ίδιες συνθήκες πίεσης, p , και θερμοκρασίας, T , το αέριο με τη μικρότερη μοριακή μάζα έχει και τη μικρότερη πυκνότητα μάζας. Άρα η πυκνότητα μάζας του SO_2 θα είναι μικρότερη από αυτή του SO_3 .

37. Σε ένα δοχείο όγκου V όπου υπάρχει ποσότητα ξηραντικού μέσου εισάγεται μίγμα N_2 και υδρατμών. Τη στιγμή που εισάγεται το αέριο μίγμα στο δοχείο, η πίεση που ασκεί είναι p . Μετά πάροδο ορισμένου χρόνου, το αέριο μίγμα θα ασκεί την ίδια πίεση p ή όχι; Η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Σε ένα δοχείο όγκου V όπου υπάρχει ποσότητα ξηραντικού μέσου εισάγεται μίγμα N_2 και υδρατμών. Τη στιγμή που εισάγεται το αέριο μίγμα στο δοχείο, η πίεση που ασκεί είναι p . Το ξηραντικό που υπάρχει στο δοχείο θα δεσμεύσει ολόκληρη ή μέρος της ποσότητας των υδρατμών, επομένως τα mol του αερίου μίγματος θα μειωθούν. Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT$$

για T και V σταθερά, όσο μειώνονται τα mol του αερίου ή του αερίου μίγματος, τόσο η πίεση μειώνεται. Άρα μετά πάροδο ορισμένου χρόνου, το αέριο μίγμα θα ασκεί μικρότερη πίεση p .

38. Σε ένα κυβικό δοχείο που βρίσκεται υπό κενό σε θερμοκρασία T υπάρχει 1 mol αερίου Ar υπό πίεση p . Στη συνέχεια εισάγονται στο δοχείο 44 g ξηρού πάγου (στερεό CO_2). Θα μεταβληθεί και πόσο: α) η πίεση στο δοχείο και β) η πίεση του αερίου Ar μετά την εισαγωγή του ξηρού πάγου στο δοχείο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Σε ένα κυβικό δοχείο, έστω όγκου V , που βρίσκεται υπό κενό σε θερμοκρασία T υπάρχει 1 mol αερίου Ar, το οποίο ασκεί πίεση $p = p_{\alpha\rho\chi}$. Η αρχική πίεση $p_{\alpha\rho\chi}$ του αερίου σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} p_{\alpha\rho\chi} \cdot V &= n_{\alpha\rho\chi} \cdot RT \Rightarrow p_{\alpha\rho\chi} = \frac{n_{\alpha\rho\chi} \cdot RT}{V} \Rightarrow p_{\alpha\rho\chi} = \frac{1 \cdot RT}{V} \Rightarrow \\ &\Rightarrow p_{\alpha\rho\chi} = \frac{RT}{V} \end{aligned} \quad (1)$$

Στη συνέχεια στο ίδιο δοχείο προστίθενται 44 g ξηρού πάγου (στερεό CO_2), ο οποίος εξαχνώνεται, δηλαδή από στερεό μετατρέπεται απευθείας σε αέριο. Η ποσότητα του CO_2 που προστίθεται είναι:

$$n_{\text{CO}_2} = \frac{m_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2}} = \frac{44 \text{ g}}{44 \text{ g mol}^{-1}} = 1 \text{ mol}$$

Άρα στο δοχείο θα περιέχεται τελικά ένα αέριο μίγμα αποτελούμενο από 1 mol Ar και 1 mol CO_2 , δηλαδή στο δοχείο θα υπάρχουν συνολικά 2 mol αερίων συστατικών. Η τελική πίεση $p_{\tau\epsilon\lambda}$ του αερίου μίγματος σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση θα είναι:

$$p_{\tau\epsilon\lambda} \cdot V = n_{\tau\epsilon\lambda} \cdot RT \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{n_{\tau\epsilon\lambda} \cdot RT}{V} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda} = 2 \frac{RT}{V} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_{\tau\epsilon\lambda} = 2p_{\alpha\rho\chi}$$

Επομένως μετά την εισαγωγή του ξηρού πάγου στο δοχείο: α) η πίεση στο δοχείο θα διπλασιαστεί ενώ β) η μερική πίεση του αερίου Ar θα παραμείνει σταθερή, σύμφωνα με το νόμο των μερικών πιέσεων του Dalton.

39. Η προσθήκη ναφθαλίνης σε ένα δοχείο που περιέχει αέριο Ar, θα επηρεάσει την πίεση που ασκεί το Ar ή όχι;

Απάντηση

Η ναφθαλίνη είναι ένα στερεό, το οποίο εξαχνώνεται δηλαδή μετατρέπεται απευθείας από στερεό σε αέριο. Επομένως η προσθήκη ναφθαλίνης σε ένα δοχείο που περιέχει αέριο Ar, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση, θα αυξήσει την πίεση στο δοχείο. Παρόλα αυτά όμως η πίεση που θα ασκεί το αέριο Ar, δηλαδή η μερική πίεση του Ar (εφόσον πρόκειται πλέον για αέριο μίγμα), θα παραμείνει σταθερή, σύμφωνα με το νόμο των μερικών πιέσεων του Dalton.

40. Σε δοχείο σταθερού όγκου που περιέχει H₂ και Xe προστίθεται μια ποσότητα αερίου Ar. Τι θα συμβεί στις μερικές πιέσεις του H₂ και του Xe;

Απάντηση

Αν σε δοχείο σταθερού όγκου που περιέχει H₂ και Xe προστεθεί αέριο Ar, τότε η πίεση του αερίου μίγματος (H₂, Xe και Ar) θα αυξηθεί. Όμως οι μερικές πιέσεις του H₂ και του Xe δε θα μεταβληθούν σύμφωνα με το νόμο των μερικών πιέσεων του Dalton.

41. Ισομοριακό μίγμα N₂ και He βρίσκεται σε δοχείο όγκου V , θερμοκρασία T και ασκεί πίεση p . Η μερική πίεση p του N₂ στο μίγμα των αερίων είναι:

- | | |
|----------|---------|
| α) p | β) $2p$ |
| γ) $p/2$ | δ) $4p$ |

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Έστω x mol N₂ και x mol He, εφόσον το μίγμα είναι ισομοριακό. Το αέριο μίγμα περιέχει συνολικά $2x$ mol, βρίσκεται σε δοχείου όγκου V , σε θερμοκρασία T και ασκεί πίεση p . Η πίεση του αερίου μίγματος σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση είναι:

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{2xRT}{V} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση για το αέριο N_2 προκύπτει ότι η μερική πίεση του N_2 είναι:

$$p_{N_2}V = n_{N_2}RT \Rightarrow p_{N_2} = \frac{n_{N_2}RT}{V} \Rightarrow p_{N_2} = \frac{xRT}{V} \Rightarrow p_{N_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2xRT}{V} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_{N_2} = \frac{p}{2}$$

Άρα η μερική πίεση του N_2 στο αέριο μίγμα είναι $p/2$.

42. Αέριο μίγμα H_2 και Ar με αναλογία mol 1:2 βρίσκεται σε δοχείο όγκου V , θερμοκρασία T και ασκεί πίεση p . Η μερική πίεση του Ar στο μίγμα των αερίων είναι:

- α) $2/(3p)$ β) $(2p)/3$
 γ) $(3p)/2$ δ) $3/(2p)$

Απάντηση

Σωστή απάντηση: **β**

Αιτιολόγηση

Έστω x mol H_2 και $2x$ mol Ar , εφόσον η αναλογία mol των δύο αερίων συστατικών είναι 1:2. Το αέριο μίγμα περιέχει συνολικά $3x$ mol, βρίσκεται σε δοχείου όγκου V , σε θερμοκρασία T και ασκεί πίεση p . Η πίεση του αέριου μίγματος σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση είναι:

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{3xRT}{V} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας την καταστατική εξίσωση για το αέριο Ar προκύπτει ότι η μερική πίεση του Ar είναι:

$$p_{Ar}V = n_{Ar}RT \Rightarrow p_{Ar} = \frac{n_{Ar}RT}{V} \Rightarrow p_{Ar} = \frac{2xRT}{V} \Rightarrow p_{Ar} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3xRT}{V} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_{Ar} = \frac{2}{3}p$$

Άρα η μερική πίεση του Ar στο αέριο μίγμα είναι $(2p)/3$.

43. Δύο σφαιρικά δοχεία που συνδέονται με στρόφιγγα έχουν τον ίδιο όγκο V , την ίδια θερμοκρασία T και την ίδια πίεση p . Το δοχείο Α περιέχει Αr, ενώ το δοχείο Β περιέχει H_2 . Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες ερωτήσεις:

i) Για τις ποσότητες του Αr και του H_2 ισχύει:

α) $m_{Ar} = m_{H_2}$ β) $m_{Ar} = 2 m_{H_2}$ γ) $m_{Ar} = 20 m_{H_2}$

ii) Αν ανοίξουμε τη στρόφιγγα, η πίεση του μίγματος θα είναι:

α) p β) $2p$ γ) $p/2$

Απάντηση

i) Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Εφόσον τα δύο σφαιρικά δοχεία Α και Β έχουν τον ίδιο όγκο V , την ίδια θερμοκρασία T και την ίδια πίεση p , θα έχουν, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση, και τον ίδιο αριθμό mol Αr και H_2 , αντίστοιχα. Έστω λοιπόν n mol Αr και n mol H_2 , δηλαδή:

$$n_{Ar} = n_{H_2} \Rightarrow \frac{m_{Ar}}{M_{Ar}} = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} \Rightarrow \frac{m_{Ar}}{40} = \frac{m_{H_2}}{2} \Rightarrow 2 m_{Ar} = 40 m_{H_2} \Rightarrow m_{Ar} = 20 m_{H_2}$$

ii) Σωστή απάντηση: α

Αιτιολόγηση

Η πίεση του κάθε αερίου στο δοχείο πριν το άνοιγμα της στρόφιγγας είναι:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Αν ανοίξουμε τη στρόφιγγα το αέριο μίγμα που θα προκύψει θα έχει συνολικά $2n$ mol και θα περιέχεται σε διπλάσιο όγκο $2V$ εφόσον τα δύο δοχεία έχουν τον ίδιο όγκο. Έτσι από την καταστατική εξίσωση προκύπτει για την τελική πίεση του αερίου μίγματος:

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow p = \frac{2nRT}{2V} \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$$

Άρα η τελική πίεση του αερίου μίγματος είναι ίση με την πίεση που ασκεί το κάθε αέριο ξεχωριστά στα δύο δοχεία πριν το άνοιγμα της στρόφιγγας.

44. Σε δοχείο όγκου V υπάρχει αέριο μίγμα Ar και He για το οποίο τα κλάσματα ποσότητας των δύο αερίων συστατικών είναι ίσα. Ποια είναι η αναλογία των ποσοτήτων ουσίας του Ar και του He;

Απάντηση

Έστω n_{Ar} τα mol του Ar και n_{He} τα mol του He στο αέριο μίγμα. Ζητείται η αναλογία των ποσοτήτων ουσίας του Ar και του He, δηλαδή ο λόγος n_{Ar}/n_{He} . Δίνεται ότι στο αέριο μίγμα τα κλάσματα ποσότητας των δύο αερίων συστατικών είναι ίσα, δηλαδή:

$$x_{Ar} = x_{He} \Rightarrow \frac{n_{Ar}}{n_{Ar} + n_{He}} = \frac{n_{He}}{n_{Ar} + n_{He}} \Rightarrow n_{Ar} = n_{He} \Rightarrow \frac{n_{Ar}}{n_{He}} = \frac{1}{1}$$

Άρα η αναλογία των ποσοτήτων ουσίας του Ar και του He στο αέριο μίγμα είναι 1:1.

45. Σε δοχείο όγκου V περιέχεται αέριο μίγμα H_2 και Ar με αναλογία mol 1:3. Τα κλάσματα ποσότητας του H_2 και του Ar στο αέριο μίγμα είναι:

α) 0,5 και 0,5 β) 0,25 και 0,75

γ) 0,75 και 0,25 δ) 0,25 και 1,00

Απάντηση

Σωστή απάντηση: β

Αιτιολόγηση

Έστω y mol H_2 και $3y$ mol Ar εφόσον η αναλογία των mol των δύο συστατικών στο αέριο μίγμα είναι 1:3.

Το κλάσμα ποσότητας του H_2 στο αέριο μίγμα είναι:

$$x_{H_2} = \frac{n_{H_2}}{n_{H_2} + n_{Ar}} = \frac{y}{y + 3y} = \frac{y}{4y} = 0,25$$

Το κλάσμα ποσότητας του Ar στο αέριο μίγμα είναι:

$$x_{Ar} = \frac{n_{Ar}}{n_{H_2} + n_{Ar}} = \frac{3y}{y + 3y} = \frac{3y}{4y} = 0,75$$

Άρα τα κλάσματα ποσότητας του H_2 και του Ar στο αέριο μίγμα είναι 0,25 και 0,75, αντίστοιχα.

2.3. Οι νόμοι των ιδανικών αερίων με το Mathematica

1. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισόθερμης μεταβολής ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε θερμοκρασία 25 °C.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$pV = nRT$$

όπου

p : η πίεση (σε atm),

V : ο όγκος (σε L),

n : η ποσότητα ουσίας (mol),

T : η θερμοκρασία (σε K) και

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με 0,082 atm L mol⁻¹K⁻¹

προκύπτει ότι, για ορισμένη ποσότητα ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή θερμοκρασία (δηλαδή για n και T σταθερά), ο όγκος, V , του αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογος της πίεσης, p , αυτού (νόμος του Boyle), δηλαδή:

$$p = nRT \frac{1}{V}$$

ή

$$f(V) = nRT \frac{1}{V}$$

ή

$$f(V) = nR(273 + \theta) \frac{1}{V}$$

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της πίεσης με τον όγκο του αερίου ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του λογισμικού Mathematica τις τιμές για:

- την ποσότητα ουσίας (mol) και
- τη θερμοκρασία (°C)

του αερίου, και με τη βοήθεια της εντολής Plot σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(V)$.

Στην περίπτωση αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο όγκος V .

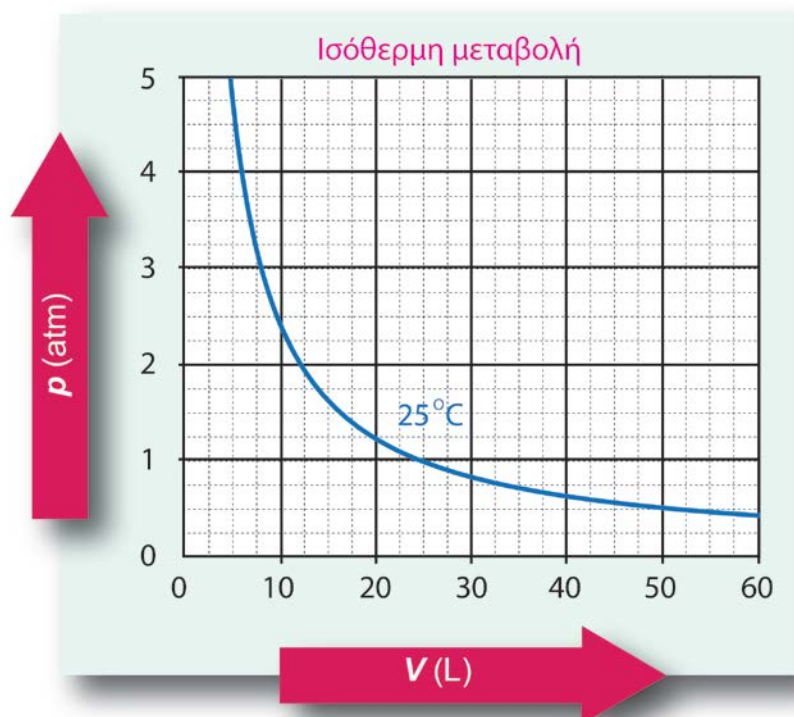
Έτσι ορίζουμε:

```

n=1.0;
θ=25;
R=0.082;
Plot[{n*R*(273+θ)/V}, {V, 0, 60}, PlotRange → {{0, 60}, {0, 5}},
AxesOrigin → {0, 0}, PlotLabel → "Ισόθερμη μεταβολή", AxesLabel →
{"V (L)", "p (atm)"}, GridLines → Automatic]

```

και παίρνουμε την γραφική παράσταση που ακολουθεί. **Η παρακάτω γραφική παράσταση, όπως και όλες οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν, σχεδιάστηκαν στο Mathematica και στη συνέχεια επεξεργάστηκαν στο Illustrator για εποπτικούς λόγους.**



Η γραφική παράσταση της πίεσης, p , ενός αερίου με τον όγκο του, V , σε σταθερή θερμοκρασία, θ , και ποσότητα αερίου, n , παριστάνει την ισόθερμη μεταβολή του αερίου και είναι ισοσκελής υπερβολή. Το χαρακτηριστικό της ισοσκελούς υπερβολής είναι ότι σε κάθε σημείο της καμπύλης το γινόμενο της τετμημένης επί την τεταγμένη του σημείου είναι σταθερό.

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε στο Mathematica την ισόθερμη καμπύλη, $p - V$, ενός ιδανικού αερίου σε μια οποιαδήποτε θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμη καμπύλη ιδανικού αερίου».

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ακόμη ότι η πίεση ενός αερίου είναι ανάλογη με το αντίστροφο του όγκου, $1/V$, του αερίου, δηλαδή

$$f\left(\frac{1}{V}\right) = nRT \frac{1}{V}$$

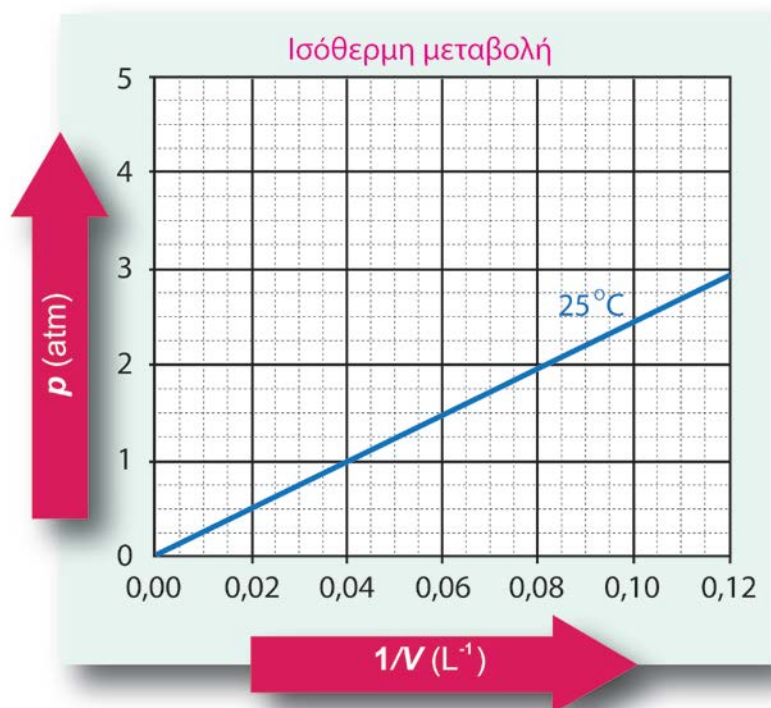
ή

$$f\left(\frac{1}{V}\right) = nR(273 + \theta) \frac{1}{V}$$

Για να παραστήσουμε γραφικά την πίεση, p , ενός αερίου με το αντίστροφο του όγκου του, $1/V$, ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica:

```
n=1.0;  
θ1=25;  
R=0.082;  
Plot[{(n*R*(273+θ1))/(1/V)}, {V, 0, 60},  
PlotRange→{{0, 0.12}, {0, 5}}, PlotStyle→{RGBColor[0, 0, 1]},  
AxesLabel→{"1/V (L-1)", "p (atm)"}, GridLines → Automatic]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



Η γραφική παράσταση της πίεσης, p , με το αντίστροφο του όγκου, $1/V$, ενός αερίου αποτελεί έναν δεύτερο τρόπο προβολής της ισόθερμης μεταβολής ενός ιδανικού αερίου.

Δραστηριότητα 2

Σχεδιάστε στο Mathematica την ισόθερμη καμπύλη, $p - 1/V$, ενός ιδανικού αερίου σε μια οποιαδήποτε θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμη καμπύλη ιδανικού αερίου 2».

Δραστηριότητα 4

Παρατηρήστε στο Mathematica πώς μεταβάλλεται η ισόθερμη καμπύλη, $p - 1/V$, ενός ιδανικού αερίου σε ένα ορισμένο εύρος θερμοκρασιών χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμη καμπύλη ιδανικού αερίου 4».

Δραστηριότητα 3

Παρατηρήστε στο Mathematica πώς μεταβάλλεται η ισόθερμη καμπύλη, $p - V$, ενός ιδανικού αερίου σε ένα ορισμένο εύρος θερμοκρασιών χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμη καμπύλη ιδανικού αερίου 3».

2. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισοβαρούς μεταβολής ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε πίεση 2 atm.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, εντελώς όμοια με την ισόθερμη μεταβολή, προκύπτει ότι για ορισμένη ποσότητα ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή πίεση (δηλαδή για n και p σταθερά), ο όγκος, V , του αερίου είναι ανάλογος της απόλυτης θερμοκρασίας, T , αυτού (νόμος του Guy - Lussac), δηλαδή:

$$V = \frac{nR}{p} T$$

ή

$$f(T) = \frac{nR}{p} T$$

ή

$$f(\theta) = \frac{nR}{p}(273 + \theta)$$

Έτσι ορίζουμε τις τιμές για:

- την ποσότητα ουσίας (mol) και
- την πίεση (atm)

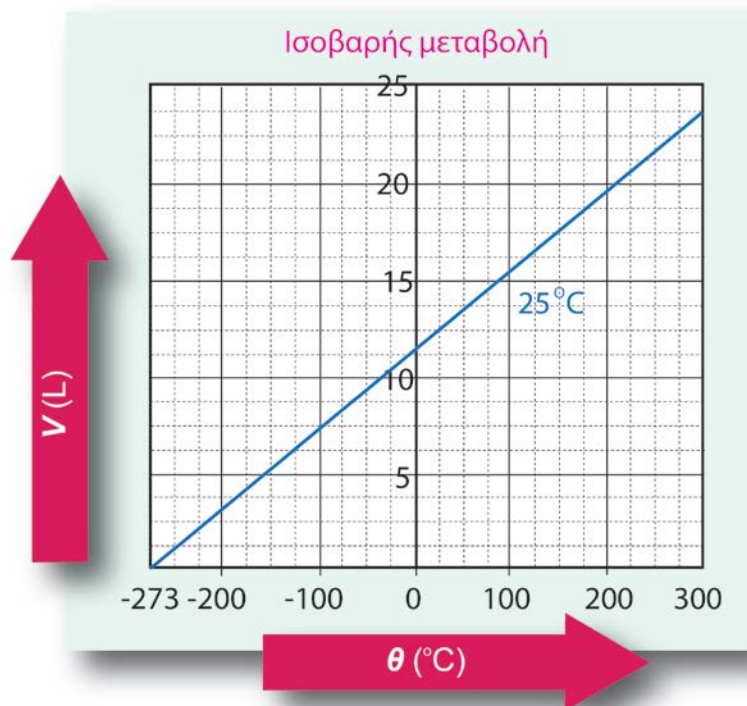
του αερίου, και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\theta)$.

Στην περίπτωση αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θερμοκρασία θ .

Έτσι ορίζουμε:

```
n=1.0;  
p=2;  
R=0.082;  
Plot[{n*R*(273+θ)/p}, {θ, -273, 300},  
PlotRange→{{-273, 300}, {0, 25}}, PlotLabel→"Ισοβαρής μεταβολή",  
AxesLabel→{"θ (°C)", "V (L)"}, GridLines → Automatic]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



Δραστηριότητα 5

Σχεδιάστε στο Mathematica την ισοβαρή καμπύλη, $V - T$, ενός ιδανικού αερίου σε μια οποιαδήποτε πίεση χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισοβαρής καμπύλη ιδανικού αερίου».

Δραστηριότητα 6

Παρατηρήστε στο Mathematica πώς μεταβάλλεται η ισοβαρής καμπύλη ενός ιδανικού αερίου σε ένα ορισμένο εύρος πιέσεων χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισοβαρής καμπύλη ιδανικού αερίου 2».

3. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισόχωρης μεταβολής ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου όταν αυτό βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου 5 L.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι για ορισμένη ποσότητα ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου το οποίο βρίσκεται υπό σταθερό όγκο (δηλαδή για n και V σταθερά), η πίεση, p , του αερίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας, T , αυτού (νόμος του Guy - Lussac), δηλαδή:

$$p = \frac{nR}{V} T$$

ή

$$f(T) = \frac{nR}{V} T$$

ή

$$f(\theta) = \frac{nR}{V} (273 + \theta)$$

Έτσι ορίζουμε τις τιμές για:

- την ποσότητα ουσίας (mol) και
- τον όγκο (L)

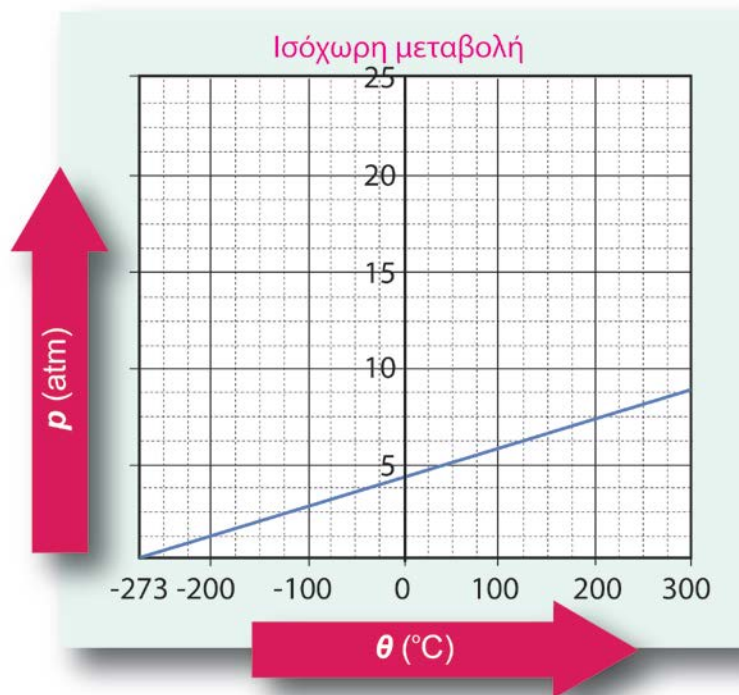
του αερίου, και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\theta)$.

Στην περίπτωση αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θερμοκρασία θ .

Έτσι ορίζουμε:

```
n=1.0;  
V=5.0;  
R=0.082;  
Plot[{n*R*(273+θ)/V},{θ,-273,300},  
PlotRange→{{0,60},{0,10}},PlotLabel→"Ισόχωρη  
μεταβολή",AxesLabel→{"θ (°C)","p(atm)"},GridLines→Automatic]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



Δραστηριότητα 7

Σχεδιάστε στο Mathematica την ισόχωρη καμπύλη, $p - T$, ενός ιδανικού αερίου για έναν οποιοδήποτε όγκο αυτού χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόχωρη καμπύλη ιδανικού αερίου».

Δραστηριότητα 8

Παρατηρήστε στο Mathematica πώς μεταβάλλεται η ισόχωρη καμπύλη ενός ιδανικού αερίου σε ένα ορισμένο εύρος όγκων του αερίου χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόχωρη καμπύλη ιδανικού αερίου 2».

4. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισόθερμες μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε θερμοκρασίες 25, 300 και 1000 °C. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία του αερίου;

Απάντηση

Η σχεδίαση δύο ή περισσότερων γραφικών παραστάσεων με το Mathematica γίνεται με την εντολή **Show**.

Σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica ορίζουμε τις τιμές των τριών θερμοκρασιών και στη συνέχεια γράφουμε τις εντολές που ακολουθούν:

```
n=1.0;
θ1=25;
θ2=300;
θ3=1000;
R=0.082;
g1=Plot[{n*R*(273+θ1)/V}, {V,0,60}, PlotRange→{{0,60},{0,10}},
PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]}, PlotLegends→{"θ1"},
AxesLabel→{"V (L)", "p (atm)"}, GridLines→Automatic];
g2=Plot[{n*R*(273+θ2)/V}, {V,0,60}, PlotRange→{{0,60},{0,10}},
PlotStyle→{RGBColor[0.5,0.5,0]}, PlotLegends→{"θ2"},
AxesLabel→{"V (L)", "p (atm)"}, GridLines→Automatic];
g3=Plot[{n*R*(273+θ3)/V}, {V,0,60}, PlotRange→{{0,60},{0,10}},
PlotStyle→{RGBColor[1,0.1,0.8]}, PlotLegends→{"θ3"},
AxesLabel→{"V (L)", "p (atm)"}, GridLines→Automatic];
Show[g1,g2,g3]
```

Αν θέλουμε να παραστήσουμε τις ισόθερμες μεταβολές του αερίου μεταβάλλοντας την πίεση, p , με το αντίστροφο του όγκου, $1/V$, του αερίου ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica τα εξής:

```
n=1.0;
θ1=25;
θ2=300;
θ3=1000;
R=0.082;
g1=Plot[{(n*R*(273+θ1))/(1/V)}, {V,0,60},
PlotRange→{{0,0.12},{0,10}}, PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]},
PlotLegends→{"θ1"}, AxesLabel→{"1/V (L-1)", "p (atm)"},
GridLines→Automatic];
g2=Plot[{(n*R*(273+θ2))/(1/V)}, {V,0,60},
PlotRange→{{0,0.12},{0,10}}, PlotStyle→{RGBColor[0.5,0.5,0]},
PlotLegends→{"θ2"}, AxesLabel→{"1/V (L-1)", "p (atm)"},
GridLines→Automatic];
```

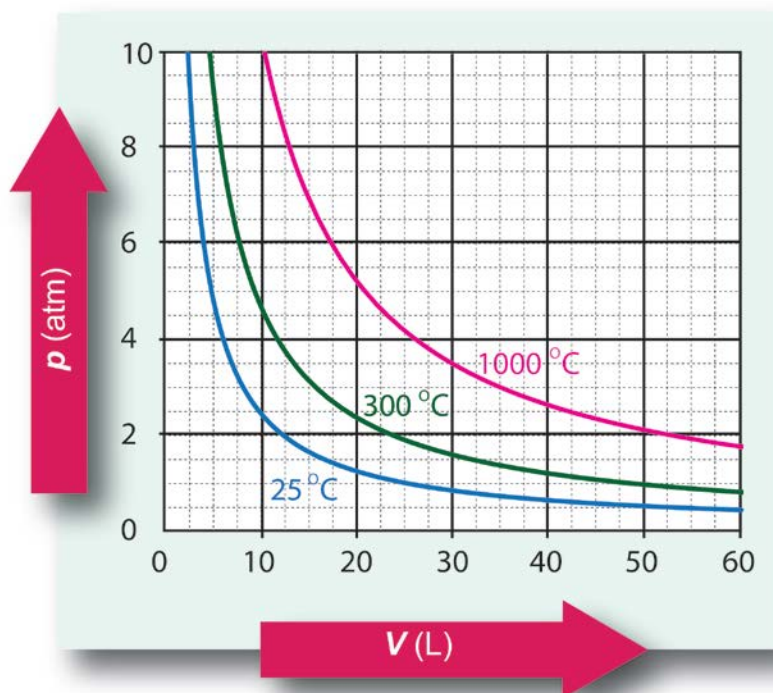


```

g3=Plot[{(n*R*(273+θ3))/(1/V)}, {V,0,60},
PlotRange→{{0,0.12},{0,10}},PlotStyle→{RGBColor[1,0.1,0.8]},
PlotLegends→{"θ3"}, AxesLabel→{" 1/V (L-1)","p (atm)"},
GridLines→Automatic];
Show[g1,g2,g3]

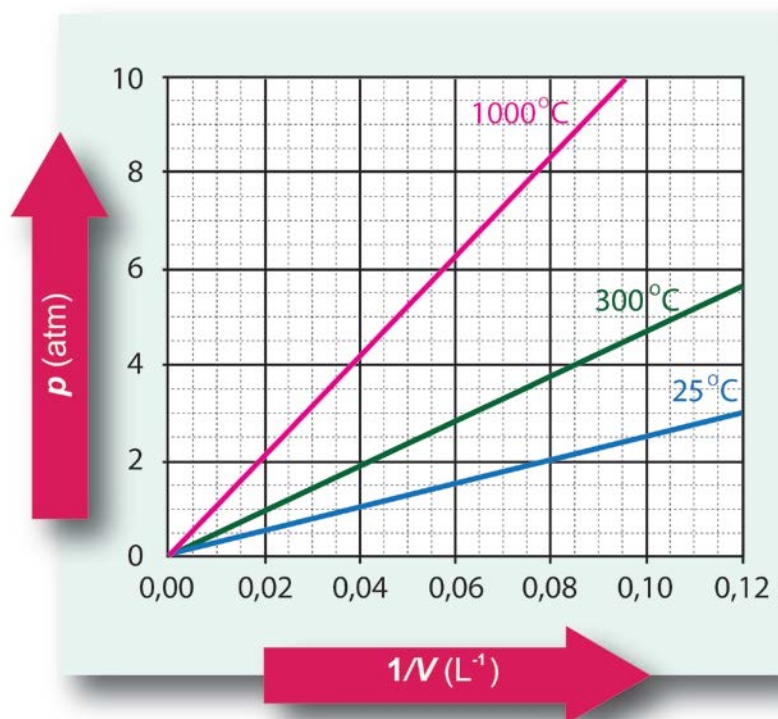
```

Η εκτέλεση της πρώτης σειράς εντολών δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



η οποία απεικονίζει τρεις ισόθερμες μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η θερμοκρασία του αερίου, η κορυφή της αντίστοιχης ισοσκελούς υπερβολής απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.

Η εκτέλεση της δεύτερης σειράς εντολών δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



από την οποία προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, η κλίση της ευθείας αυξάνεται.

Δραστηριότητα 9

Σχεδιάστε στο Mathematica τις ισόθερμες καμπύλες, $p - V$, ενός ιδανικού αερίου σε τρεις οποιεσδήποτε θερμοκρασίες χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμες καμπύλες ιδανικού αερίου».

Δραστηριότητα 10

Σχεδιάστε στο Mathematica τις ισόθερμες καμπύλες, $p - 1/V$, ενός ιδανικού αερίου σε τρεις οποιεσδήποτε θερμοκρασίες χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμες καμπύλες ιδανικού αερίου 2».

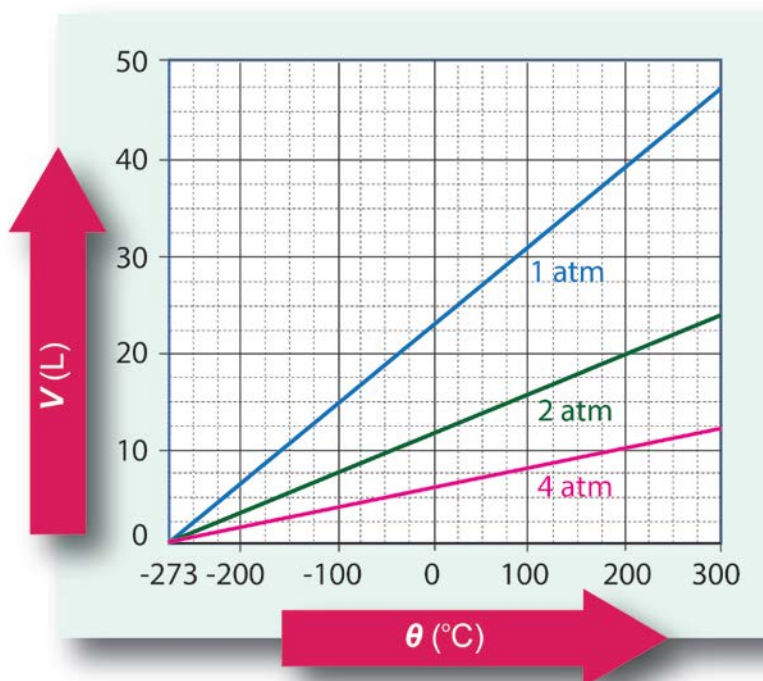
5. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισοβαρείς μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε πιέσεις 1, 2 και 4 atm. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνεται η πίεση που ασκεί το αέριο;

Απάντηση

Εντελώς όμοια με τη σχεδίαση των ισόθερμων καμπυλών στο ίδιο διάγραμμα, ορίζουμε τις τιμές των τριών πιέσεων και γράφουμε τις παρακάτω εντολές:

```
n=1.0;  
p1=1;  
p2=2;  
p3=4;  
R=0.082;  
g1=Plot[{n*R*(273+θ)/p1},{θ,-273,300},  
PlotRange→{{-273,300},{0,50}},  
PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]},PlotLegends→{"p1"},  
AxesLabel→{"θ (°C)","V (L)",GridLines→Automatic};  
g2=Plot[{n*R*(273+θ)/p2},{θ,-273,300},  
PlotRange→{{-273,300},{0,50}},  
PlotStyle→{RGBColor[0.5,0.5,0]},PlotLegends→{"p2"},  
AxesLabel→{"θ (°C)","V (L)",GridLines→Automatic};  
g3=Plot[{n*R*(273+θ)/p3},{θ,-273,300},  
PlotRange→{{-273,300},{0,50}},  
PlotStyle→{RGBColor[1,0.1,0.8]},PlotLegends→{"p3"},  
AxesLabel→{"θ (°C)","V (L)",GridLines→Automatic};  
Show[g1,g2,g3]
```

Η εκτέλεση των παραπάνω εντολών δίνει τη γραφική παράσταση που ακολουθεί



η οποία απεικονίζει τρεις ισοβαρείς μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η πίεση, η κλίση της ευθείας μειώνεται. Επίσης παρατηρούμε ότι όλες οι ισοβαρείς καμπύλες τέμνονται σε ένα σημείο, το οποίο αντιστοιχεί σε θερμοκρασία $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Δραστηριότητα 11

Σχεδιάστε στο Mathematica τις ισοβαρείς καμπύλες, $V - T$, ενός ιδανικού αερίου σε τρεις οποιεσδήποτε πιέσεις χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισοβαρείς καμπύλες ιδανικού αερίου».

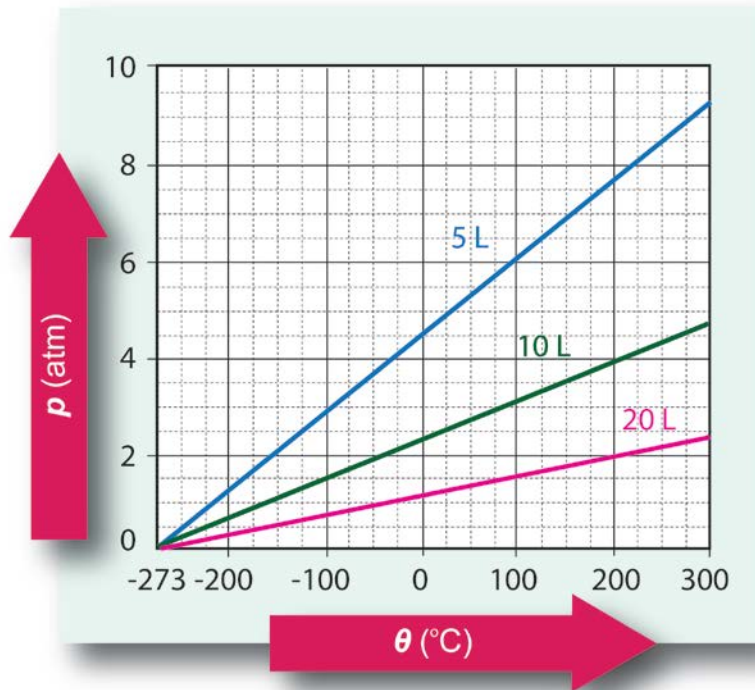
6. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισόχωρες μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου όταν αυτό βρίσκεται υπό σταθερό όγκο 5, 10 και 20 L. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνεται ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο;

Απάντηση

Ορίζουμε τις τιμές των τριών όγκων και στη γράφουμε τις εντολές που ακολουθούν:

```
n=1.0;
V1=5;
V2=10;
V3=20;
R=0.082;
g1=Plot[{n*R*(273+θ)/V1},{θ,-273,300},
PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]}, PlotLegends → {"V1"},
AxesLabel→{"θ (°C)", "p (atm)"}, GridLines→Automatic];
g2=Plot[{n*R*(273+θ)/V2},{θ,-273,300},
PlotStyle→{RGBColor[0.5,0.5,0]}, PlotLegends → {"V2"},
AxesLabel→{"θ (°C)", "p (atm)"},GridLines→Automatic];
g3=Plot[{n*R*(273+θ)/V3},{θ,-273,300},
PlotStyle→{RGBColor[1,0.1,0.8]}, PlotLegends → {"V3"},
AxesLabel→{"θ (°C)", "p (atm)"},GridLines→Automatic];
Show[g1,g2,g3]
```

Η εκτέλεση των παραπάνω εντολών δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



η οποία απεικονίζει τρεις ισόχωρες μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο, η κλίση της ισόχωρης καμπύλης μειώνεται.

Δραστηριότητα 12

Σχεδιάστε στο Mathematica τις ισόχωρες καμπύλες, $p - T$, ενός ιδανικού αερίου για τρεις οποιουσδήποτε όγκους του αερίου χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόχωρες καμπύλες ιδανικού αερίου».

7. Για να διαπιστωθεί κατά πόσο το αέριο H_2 , υπακούει στο νόμο του Boyle πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω ισόθερμες μεταβολές στους $0\text{ }^\circ\text{C}$ χρησιμοποιώντας $1\text{ mol } H_2$. Κατά τις μεταβολές αυτές μεταβαλλόταν ο όγκος του αερίου με ταυτόχρονη καταγραφή της πίεσής του. Χρησιμοποιώντας τα παρακάτω πειραματικά αποτελέσματα να υπολογίσετε το γινόμενο pV για κάθε τιμή πίεσης, p , και να κατασκευάσετε με τις τιμές αυτές ένα γράφημα $f(p) = pV$ για να διαπιστώσετε αν ισχύει ο νόμος του Boyle. Τι παρατηρείτε;

Πείραμα	p / atm	V / L
1	0,1	223,8
2	0,4	55,88
3	0,8	27,90
4	1,0	22,30
5	1,6	13,89
6	2,0	11,09

Απάντηση

Για να διαπιστωθεί κατά πόσο το αέριο H_2 υπακούει στο νόμο του Boyle πραγματοποιήθηκαν έξι ισόθερμες μεταβολές στους $0\text{ }^\circ\text{C}$ χρησιμοποιώντας $1\text{ mol } H_2$. Κατά τις μεταβολές αυτές μεταβαλλόταν ο όγκος του αερίου με ταυτόχρονη καταγραφή της πίεσής του. Για να διαπιστωθεί αν ισχύει ο νόμος του Boyle θα πρέπει το γινόμενο pV να είναι σταθερό με τη μεταβολή της πίεσης του αερίου. Χρησιμοποιώντας τα παρακάτω πειραματικά αποτελέσματα υπολογίζεται το γινόμενο pV για κάθε τιμή πίεσης, p , και κατασκευάζεται με τις τιμές αυτές ένα γράφημα $f(p) = pV$ για να διαπιστωθεί αν ισχύει ο νόμος του Boyle.

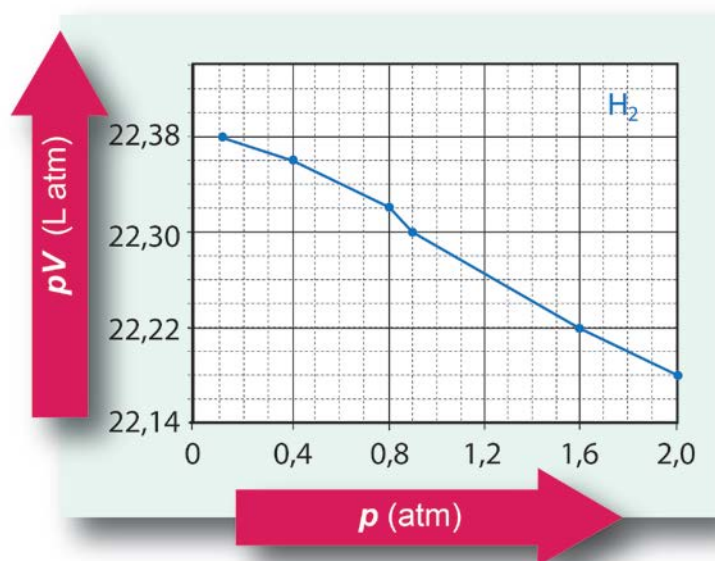
Πείραμα	p / atm	V / L	$pV / atm \cdot L$
1	0,1	223,8	22,38
2	0,4	55,88	22,35
3	0,8	27,90	22,32
4	1,0	22,30	22,30
5	1,6	13,89	22,22
6	2,0	11,09	22,18

Το γράφημα $f(p) = pV$ κατασκευάζεται εύκολα με τη βοήθεια της εντολής **ListPlot**.

Γράφουμε την παρακάτω εντολή:

```
ListPlot[{{0.1, 22.38}, {0.4, 22.35}, {0.8, 22.32}, {1.0, 22.30},  
{1.6, 22.22}, {2.0, 22.18}}, Joined → True, PlotMarkers →  
Automatic, AxesLabel → {"p", "pV"}]
```

η εκτέλεση της οποίας δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



Από το γράφημα $f(p) = pV$ γίνεται φανερό ότι δεν ισχύει ο νόμος του Boyle για το αέριο H_2 διότι το γινόμενο pV δεν παραμένει σταθερό με τη μεταβολή της πίεσης του αερίου.

8. Να γίνει η γραφική παράσταση της ποσότητας ουσίας, n , ενός αερίου σε συνάρτηση με τον όγκο του, V , σε ορισμένη πίεση και θερμοκρασία.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι σε σταθερή θερμοκρασία και πίεση (δηλαδή για T και p σταθερά), ο όγκος, V , του αερίου είναι ανάλογος της ποσότητας ουσίας (αριθμός mol), n , αυτού (αρχή του Avogadro), δηλαδή:

$$V = \frac{RT}{p} n$$

ή

$$f(n) = \frac{RT}{p} n$$

Έτσι ορίζουμε τις τιμές για:

- τη θερμοκρασία (σε K) και
- την πίεση (σε atm)

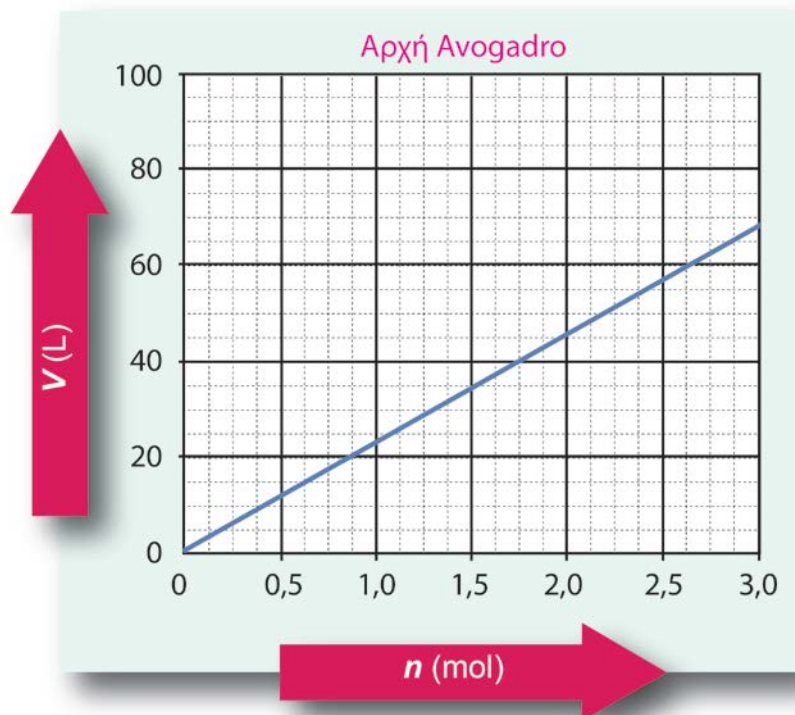
του αερίου, και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(n)$.

Στην περίπτωση αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ποσότητα ουσίας, n .

Έτσι ορίζουμε:

```
T=273.0;  
p=1.0;  
R=0.082;  
Plot[{((R*T)/p)*n},{n,0.02,10},  
PlotRange->{{0,3},{0,100}},PlotLabel->"Αρχή Avogadro",  
AxesLabel->{"n (mol)", "V (L)"},AxesOrigin->{0,0}]
```

και παίρνουμε τη γραφική παράσταση



9. Να παρασταθεί γραφικά η βαρομετρική πίεση με το ύψος θεωρώντας ότι: α) η θερμοκρασία παραμένει σταθερή με το ύψος και β) ότι η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας μειώνεται γραμμικά με το ύψος λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $T = T_0 - 0,005 z$, όπου z το ύψος (σε m) και $T_0 = 273,15$ K.

Απάντηση

Ο βαρομετρικός νόμος του Laplace εκφράζει την εξάρτηση της βαρομετρικής πίεσης με το ύψος και δείχνει ότι η ατμοσφαιρική πίεση μειώνεται εκθετικά με αυτό. Δίνεται από την εξίσωση:

$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$$

ή

$$f(z) = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$$

όπου

p : η πίεση (σε atm) σε ορισμένο ύψος z ,

p_0 : η πίεση (σε atm) στην επιφάνεια της θάλασσας,

\bar{M} : η μέση μοριακή μάζα του αέρα (σε kg mol⁻¹),

g_n : η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με 9,807 m s⁻²,

z : το ύψος (σε m),

T : η θερμοκρασία (σε K) και

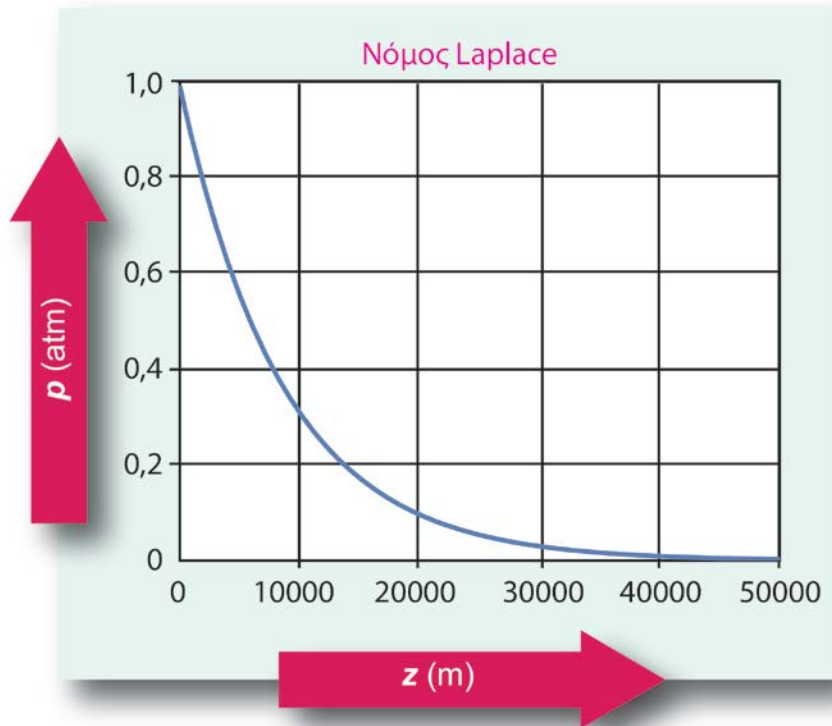
R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με 8,314 J mol⁻¹K⁻¹.

α) Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε την εξάρτηση της βαρομετρικής πίεσης με το ύψος για τα πρώτα 50 km ή 50000 m θεωρώντας σταθερή τη θερμοκρασία με το ύψος. Έτσι σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica γράφουμε την παρακάτω εντολή:

```
p0=1.0;
M=0.029;
g=9.807;
R=8.314;
T=293;

Plot[{p0*Exp[-(M*g*z)/(R*T)]}, {z, 0, 50000},
PlotRange -> {{0, 50000}, {0, 1}},
AxesLabel -> {"z (m)", "p (atm)"}]
```

και παίρνουμε τη γραφική παράσταση



β) Αν θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία μειώνεται γραμμικά με το ύψος λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση:

$$T = T_0 - 0,005 z$$

όπου z το ύψος (σε m), τότε ο βαρομετρικός τύπος του Laplace παίρνει τη μορφή:

$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / (R(T_0 - 0.005z))}$$

ή

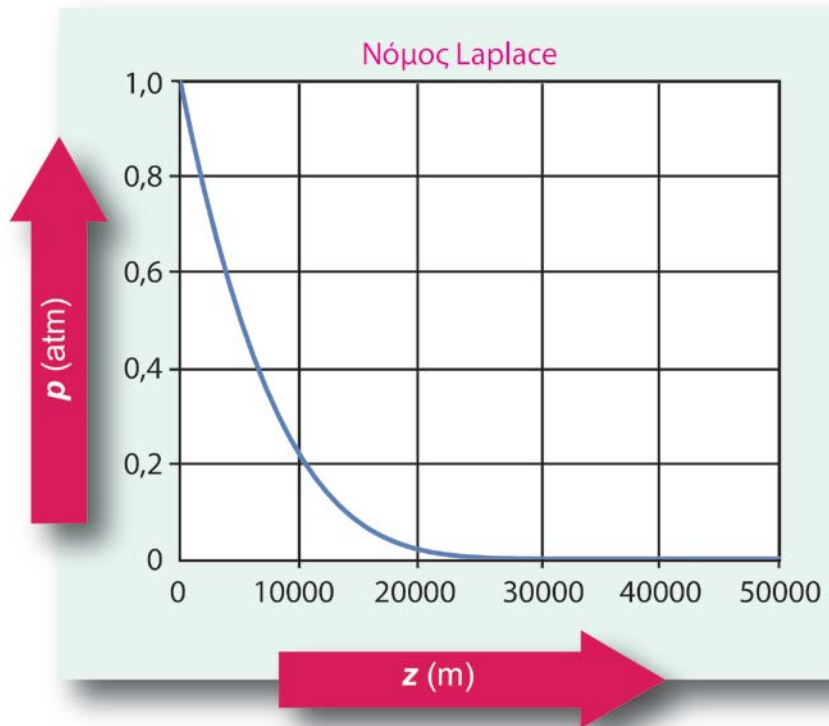
$$f(z) = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / (R(T_0 - 0.005z))}$$

Έτσι σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica γράφουμε:

```
p0=1.0;
M=0.029;
g=9.807;
R=8.314;
T0=273.15;

Plot[{p0*Exp[-(M*g*z)/(R*(T0-
0.005z))]}],{z,0,50000},PlotRange->{{0,50000},{0,1}},AxesLabel->
{"z (m)","p (atm)"}]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



10. Η πυκνότητα μάζας ενός αερίου με άγνωστη μοριακή μάζα μετρήθηκε σε διάφορες πιέσεις στους 0 °C. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Να βρεθεί η ακριβής πειραματική μοριακή μάζα του αερίου.

p /atm	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ρ /g L ⁻¹	0,8305	1,6794	2,5490	3,4340	4,3278

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για τη μοριακή μάζα ενός αερίου η σχέση (1).

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow M = \frac{m RT}{V p} \Rightarrow M = \frac{\rho}{p}RT \quad (1)$$

Η σχέση (1) όμως ισχύει αυστηρά μόνο για τα ιδανικά αέρια και όχι για τα πραγματικά. Σε ένα πραγματικό αέριο ο λόγος ρ/p σε σταθερή θερμοκρασία δεν είναι σταθερός, αλλά εξαρτάται από την πίεση. Ένα πραγματικό αέριο προσεγγίζει την ιδανική συμπεριφορά

μόνο στην περίπτωση που η πίεση τείνει στο μηδέν. Άρα για ένα πραγματικό αέριο η σχέση (1) παίρνει τη μορφή:

$$M = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\rho}{p} RT \quad (2)$$

Έτσι σχεδιάζουμε το διάγραμμα του λόγου ρ/p σε συνάρτηση με την πίεση, p , και προεκτείνουμε την ευθεία για να βρούμε την τιμή του λόγου ρ/p για πίεση $p = 0$.

Αρχικά υπολογίζουμε από τα δεδομένα της άσκησης τις τιμές του λόγου, ρ/p , για τις διάφορες τιμές πιέσεων, p .

p /atm	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ρ/p (g L⁻¹atm⁻¹)	4,1525	4,1985	4,2483	4,2925	4,3298

Στη συνέχεια με τη βοήθεια του Mathematica και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων κατασκευάζουμε το διάγραμμα $f(p) = \rho/p$ και βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας που προσαρμόζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα.

Έτσι σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica ορίζουμε:

```
data={ {0.2,4.1525} , {0.4,4.1985} , {0.6,4.2483} , {0.8,4.2925} , {1.0,4.3298} };
line=Fit[data, {1,x}, x]
```

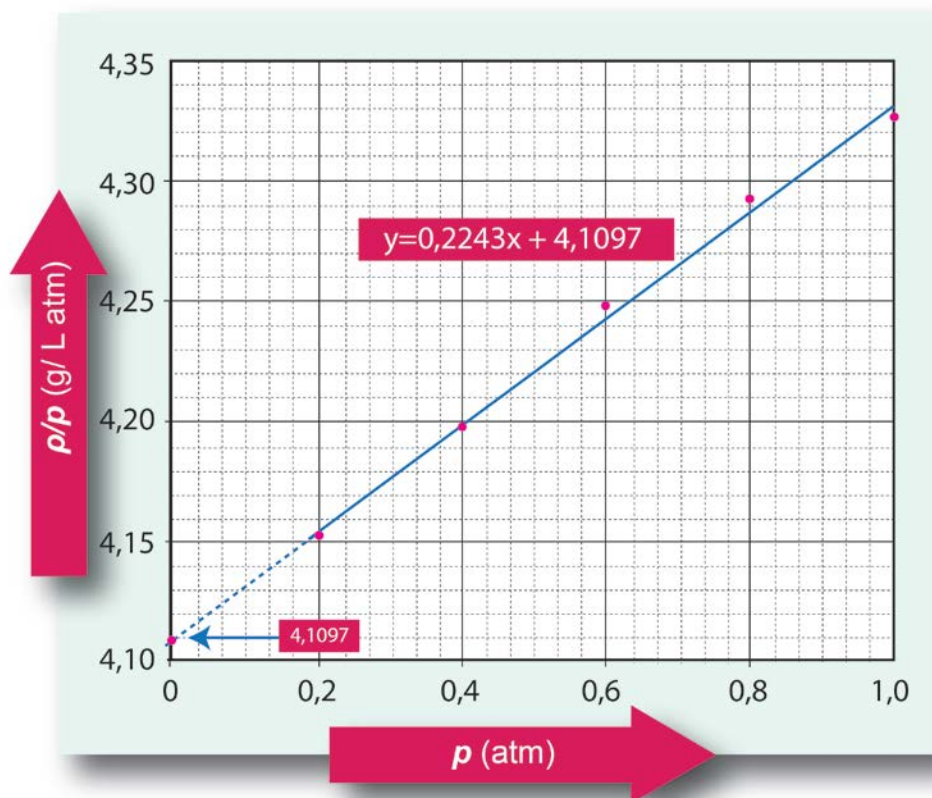
Η εκτέλεση των παραπάνω εντολών δίνει την παρακάτω εξίσωση:

$$y = 4,1097 + 0,2243x \quad (3)$$

όπου $x = p$ και $y = \rho/p$.

Το διάγραμμα $p - \rho/p$ λαμβάνεται αν στη συνέχεια ορίσουμε στο φύλλο εργασίας:

```
Show[ListPlot[data, PlotStyle->Red] , Plot[{line} , {x, 0, 1}]]
```



Από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι όταν η πίεση τείνει στο μηδέν τότε ο λόγος ρ/p έχει την τιμή 4,1097.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\rho}{p} = 4,1097$$

Έτσι αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στην εξίσωση (1) προκύπτει ότι η μοριακή μάζα του αερίου είναι:

$$M = 4,1097 \text{ g L}^{-1}\text{atm}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K} = 92 \text{ g mol}^{-1}$$

2.4. Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων

2.4.1. Μετατροπές μονάδων πίεσης - Μέτρηση πίεσης

Πολλές φορές είναι απαραίτητο να εκφράσουμε μια μονάδα πίεσης σε μια άλλη μονάδα. Στον πίνακα που ακολουθεί αναγράφονται οι κυριότερες μονάδες πίεσης, καθώς και η σχέση που συνδέει κάθε μια από αυτές με τη μονάδα πίεσης του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων SI, δηλαδή το pascal.

Πίνακας 3. Μονάδες μέτρησης πίεσης.

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
pascal (μονάδα SI)	1 Pa	$1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$
ατμόσφαιρα	1 atm	101325 Pa = 101,325 kPa
bar	1 bar	10^5 Pa
torr	1 Torr	$(101325/760)\text{Pa} \approx 133,322 \text{ Pa}$
χιλιοστά υδραργύρου	1 mm Hg	$135951 \times 980,665 \times 10^{-2} \text{ Pa} \approx 133,322 \text{ Pa}$
λίβρες ανά τετραγωνική ίντσα	1 psi	$\approx 6,894757 \times 10^3 \text{ Pa}$

Τα όργανα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης ονομάζονται **βαρόμετρα**.

1. Να μετατρέψετε σε atm τις παρακάτω τιμές πιέσεων: α) $1,8 \cdot 10^5$ Pa, β) 5,2 bar, γ) 740 Torr, δ) 632 mm Hg και ε) 1 psi.

Απάντηση

Για να μετατρέψουμε μια τιμή πίεσης από μια μονάδα σε μια άλλη, χρησιμοποιούμε τον κατάλληλο κάθε φορά συντελεστή μετατροπής που συνδέει τις δύο μονάδες.

α) Για να μετατρέψουμε τα $1,8 \cdot 10^5$ Pa σε atm χρησιμοποιούμε τον κατάλληλο συντελεστή μετατροπής ($1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$). Έτσι προκύπτει:

$$1,8 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 180000 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} \right) = 1,776 \text{ atm}$$

β) Αρχικά θα μετατρέψουμε τα bar σε Pa και αυτά στη συνέχεια σε atm.

$$5,2 \text{ bar} = 5,2 \text{ bar} \left(\frac{100000 \text{ Pa}}{1 \text{ bar}} \right) = 520000 \text{ Pa}$$

$$520000 \text{ Pa} = 520000 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} \right) = 5,132 \text{ atm}$$

Όμοια γίνονται και οι μετατροπές των υπόλοιπων τιμών πιέσεων.

γ) Ισχύει ότι $1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$. Έτσι προκύπτει:

$$740 \text{ Torr} = 740 \text{ Torr} \left(\frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ Torr}} \right) = 0,974 \text{ atm}$$

δ) Ισχύει ότι $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$. Έτσι προκύπτει:

$$632 \text{ mm Hg} = 632 \text{ mm Hg} \left(\frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mm Hg}} \right) = 0,832 \text{ atm}$$

ε) Αρχικά θα μετατρέψουμε τα psi σε Pa και αυτά στη συνέχεια σε atm.

$$1 \text{ psi} = 1 \text{ psi} \left(\frac{6894,757 \text{ Pa}}{1 \text{ psi}} \right) = 6894,757 \text{ Pa}$$

$$6894,757 \text{ Pa} = 6894,757 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} \right) = 0,068 \text{ atm}$$

2. Στην επιφάνεια της θάλασσας η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με 1 atm. Να δείξετε ότι το ύψος της στήλης του υδραργύρου ενός υδραργυρικού βαρόμετρου που βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας είναι ίσο με 76 cm ή 760 mm. Ποιο θα ήταν το ύψος της στήλης του υγρού αν αντί για τον υδράργυρο χρησιμοποιούνταν το νερό; Δίνεται ότι η πυκνότητα μάζας του Hg είναι ίση με $13,6 \text{ g cm}^{-3}$ και του νερού ίση με $1,0 \text{ g cm}^{-3}$.

Απάντηση

Η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με την υδροστατική πίεση του υγρού που υπάρχει στη γυάλινη στήλη του βαρομέτρου δηλαδή

$$p_{\text{ατμοσφ.}} = p_{\text{υδροστ.}} \quad (1)$$

Η υδροστατική πίεση του υγρού της στήλης είναι ίση με:

$$p_{\text{υδροστ.}} = \rho g_n h \quad (2)$$

όπου:

$p_{\text{υδροστ.}}$: η υδροστατική πίεση του υγρού στη στήλη (σε Pa),

ρ : η πυκνότητα μάζας του υγρού της στήλης (σε kg m^{-3}),

g_n : η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9,807 \text{ m s}^{-2}$ και

h : το ύψος της στήλης του υγρού (σε m).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$p_{\text{ατμοσφ.}} = \rho g_n h \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι το ύψος της στήλης του υγρού στη στήλη δίνεται από τη σχέση:

$$h = \frac{p_{\text{ατμοσφ.}}}{\rho g_n} \quad (4)$$

Η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας είναι ίση με 1 atm ή 101325 Pa.

Αν το υγρό της στήλης είναι ο υδράργυρος, τότε αντικαθιστώντας στη σχέση (4) προκύπτει:

$$h = \frac{101325 \text{ Pa}}{13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2}} = \frac{101325 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2}}{13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2}} = 0,76 \text{ m ή } 0,76 \text{ cm}$$

Άρα το ύψος του Hg στη στήλη είναι ίσο με 76 cm ή 760 mm Hg.

Αν αντί για τον υδράργυρο χρησιμοποιούσαμε νερό, τότε το ύψος της στήλης του θα ήταν:

$$h = \frac{101325 \text{ Pa}}{1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2}} = \frac{101325 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2}}{1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2}} = 10,33 \text{ m ή } 1033 \text{ cm}$$

3. Ένα υδραργυρικό βαρόμετρο αποτελείται από έναν γυάλινο ευθύγραμμο σωλήνα γεμάτο με Hg, ο οποίος είναι ανεστραμμένος μέσα σε λεκάνη που περιέχει Hg. Με ένα σταγονόμετρο εισάγεται μια ποσότητα νερού από τη βάση του ανεστραμμένου γυάλινου σωλήνα. Να βρεθεί πόσα χιλιοστά (mm) θα κατέλθει η στάθμη του Hg στο γυάλινο σωλήνα σε σχέση με την αρχική, στους 20, 40 και 60 °C. Να θεωρήσετε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με 1 atm. Για την εύρεση της τάσης των κορεσμένων ατμών του νερού στις διάφορες θερμοκρασίες να χρησιμοποιήσετε την ολοκληρωμένη εξίσωση Clausius - Clapeyron. Δίνεται ότι το κανονικό σημείο βρασμού του νερού είναι 100 °C και η ενθαλπία εξατμίσεως του νερού ίση με 40,7 kJ/mol.

Απάντηση

Με το υδραργυρικό βαρόμετρο είναι δυνατό να μετρηθεί η τάση ατμών διαφόρων υγρών. Ένα υδραργυρικό βαρόμετρο αποτελείται από έναν γυάλινο ευθύγραμμο σωλήνα, μήκους περίπου 1 m, γεμάτο με Hg, ο οποίος είναι ανεστραμμένος μέσα σε λεκάνη που περιέχει Hg. Επειδή η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με 1 atm, το ύψος της στήλης του Hg μέσα στο σωλήνα αρχικά είναι ίσο με 760 mm ή 76 cm. Με την εισαγωγή ορισμένης ποσότητας νερού από τη βάση του ανεστραμμένου γυάλινου σωλήνα δημιουργείται ένα μίγμα δυο υγρών μη μιγνυόμενων μεταξύ τους. Επειδή το νερό έχει μικρότερη πυκνότητα μάζας από τον υδράργυρο ανέρχεται επάνω στη στάθμη του Hg. Στη συνέχεια μόρια από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού εξατμίζονται στον κενό χώρο που υπάρχει πάνω από αυτό και ταυτόχρονα ατμοί του νερού επανέρχονται στην υγρή φάση. Κάποια στιγμή οι ταχύτητες

των δυο παραπάνω διαδικασιών, δηλαδή η εξάτμιση του υγρού και η υγροποίηση του ατμού, γίνονται ίσες και έτσι δημιουργείται μια δυναμική ισορροπία. Τη στιγμή αυτή οι ατμοί του υγρού γίνονται κορεσμένοι και ασκούν τη μέγιστη πίεση. Η πίεση που ασκούν ονομάζεται **τάση κορεσμένων ατμών** του υγρού ή απλά **τάση ατμών**. Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της τάσης των ατμών του υγρού. Λόγω λοιπόν της τάσης των ατμών του νερού, η στάθμη του Hg κατέρχεται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η τάση των κορεσμένων ατμών του νερού στις τρεις θερμοκρασίες υπολογίζεται εύκολα από την ολοκληρωμένη εξίσωση *Clausius - Clapeyron*

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Delta H_{\text{εξάτμ.}}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (1)$$

όπου:

p_1 : η τάση των ατμών του υγρού σε θερμοκρασία T_1 ,

p_2 : η τάση των ατμών του υγρού σε θερμοκρασία T_2 ,

$\Delta H_{\text{εξάτμ.}}$: η ενθαλπία εξάτμισης του υγρού και

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με $8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Το *κανονικό σημείο βρασμού* ενός υγρού είναι η θερμοκρασία στην οποία η τάση των ατμών του υγρού είναι ίση με 1 atm ή 760 mm Hg. Στο επίπεδο της θάλασσας η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με 1 atm ή 760 mm Hg.

Ως σημείο βρασμού ενός υγρού ορίζεται η θερμοκρασία στην οποία η τάση ατμών του υγρού είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση.

Την τάση ατμών του νερού στους 20 °C την υπολογίζουμε ως εξής:

Σε θερμοκρασία 100 °C, δηλαδή $T_1=373 \text{ K}$, η τάση των ατμών του νερού είναι $p_1=760 \text{ mm Hg}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) προκύπτει:

$$\ln \frac{p_2}{760 \text{ mm Hg}} = \frac{40,7 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}} \left(\frac{1}{373 \text{ K}} - \frac{1}{293 \text{ K}} \right) \Rightarrow$$

$$\ln \frac{p_2}{760 \text{ mm Hg}} = 4895,4 \text{ K} \cdot (-7,32 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}) \Rightarrow$$

$$\ln \frac{p_2}{760 \text{ mm Hg}} = -3,58 \Rightarrow$$

$$\frac{p_2}{760 \text{ mm Hg}} = e^{-3,58} \Rightarrow$$

$$p_2 = 21,1 \text{ mm Hg}$$

Επομένως στους 20 °C η τάση ατμών του νερού είναι 21,1 mm Hg. Άρα η στάθμη του Hg θα κατέλθει κατά 21,1 mm ή 2,11 cm σε σχέση με την αρχική. Το ύψος της στήλης του Hg από τη βάση του γυάλινου σωλήνα θα είναι 738,9 mm.

Όμοια υπολογίζεται η τάση των ατμών του νερού σε θερμοκρασία 40 και 60 °C. Στον πίνακα που ακολουθεί αναγράφονται οι θεωρητικές τιμές της τάσης των ατμών του νερού στους 20, 40 και 60 °C, οι οποίες υπολογίστηκαν από την εξίσωση Clausius - Clapeyron, καθώς και το ύψος της στήλης του Hg υπολογιζόμενο από τη βάση του γυάλινου σωλήνα. Στον ίδιο πίνακα αναγράφονται και οι αντίστοιχες πειραματικές τιμές αυτών.

Για τον θεωρητικό υπολογισμό της τάσης των κορεσμένων ατμών ενός υγρού χρησιμοποιείται η ολοκληρωμένη εξίσωση Clausius - Clapeyron:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Delta H_{\text{εξάτμ.}}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

Ο υπολογισμός της τάσης των ατμών ενός υγρού σε μια ορισμένη θερμοκρασία υπολογίζεται εύκολα από την εξίσωση αυτή, εφόσον είναι γνωστή η τάση των ατμών του υγρού σε μία άλλη θερμοκρασία, καθώς και η ενθαλπία εξάτμισής του.

Θερμοκρασία (°C)	Τάση ατμών (mm Hg) θεωρητική	Τάση ατμών (mm Hg) πειραματική	Ύψος στήλης Hg (mm) θεωρητικό	Ύψος στήλης Hg (mm) πειραματικό
20	21,1	17,5	738,9	742,5
40	61,4	55,3	698,6	704,7
60	157,1	149,4	602,9	610,6

2.4.2. Νόμος του Boyle - Ισόθερμη μεταβολή

Η μεταβολή του αερίου που γίνεται υπό σταθερή θερμοκρασία ονομάζεται **ισόθερμη**.

Για την ισόθερμη μεταβολή αερίου ισχύει ο νόμος του Boyle σύμφωνα με τον οποίο: «Ο όγκος, V , ορισμένης ποσότητας, n , ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή θερμοκρασία, είναι αντιστρόφως ανάλογος της πίεσης, p , αυτού»,

$$p \propto \frac{1}{V}$$

ή διαφορετικά «το γινόμενο της πίεσης επί τον όγκο ορισμένης ποσότητας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή θερμοκρασία είναι σταθερό», δηλαδή

$$[pV]_{n,\theta} = c$$

όπου c σταθερά.

Ο νόμος του Boyle δίνεται από τη μαθηματική εξίσωση:

$$p_{αρχ.} V_{αρχ.} = p_{τελ.} V_{τελ.}$$

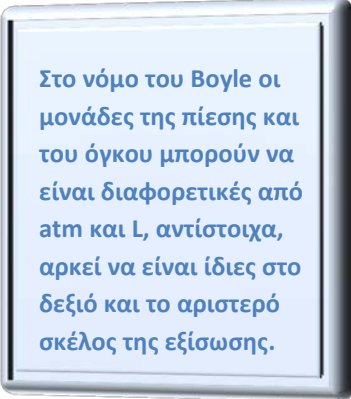
όπου:

$p_{αρχ.}$: η αρχική πίεση του αερίου (σε atm),

$V_{αρχ.}$: ο αρχικός όγκος του αερίου (σε L),

$p_{τελ.}$: η τελική πίεση του αερίου (σε atm) και

$V_{τελ.}$: ο τελικός όγκος του αερίου (σε L).



Στο νόμο του Boyle οι μονάδες της πίεσης και του όγκου μπορούν να είναι διαφορετικές από atm και L, αντίστοιχα, αρκεί να είναι ίδιες στο δεξιό και το αριστερό σκέλος της εξίσωσης.

Κατά την ισόθερμη μεταβολή ενός αερίου, το αέριο μεταβαίνει από μια αρχική κατάσταση σε μία τελική κατάσταση. Το αέριο αρχικά ασκεί πίεση $p_{αρχ.}$ και καταλαμβάνει όγκο $V_{αρχ.}$ και τελικά ασκεί πίεση $p_{τελ.}$ και καταλαμβάνει όγκο $V_{τελ.}$.

Στις ασκήσεις με το νόμο του Boyle δίνονται οι τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές ($p_{αρχ.}$, $V_{αρχ.}$, $p_{τελ.}$, $V_{τελ.}$) και ζητείται η τέταρτη. Από μαθηματική σκοπιά οι ασκήσεις αυτές δεν έχουν καμία δυσκολία, καθώς το μόνο που απαιτείται είναι η λύση μιας μαθηματικής εξίσωσης πρώτου βαθμού.

Άσκηση 4

Μια ποσότητα αερίου H_2 καταλαμβάνει όγκο 350 mL υπό πίεση 684 mm Hg. Ποιος θα είναι ο όγκος του αερίου αν η πίεση γίνει 1 atm; Η θερμοκρασία είναι σταθερή.

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$p_{αρχ.} = 684 \text{ mm Hg}$	$V_{τελ.} = ;$
$V_{αρχ.} = 350 \text{ mL}$	
$p_{τελ.} = 1 \text{ atm}$	
$\theta = \text{σταθερή}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Εφόσον η θερμοκρασία, κατά τη μεταβολή του αερίου, παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισόθερμη και ισχύει ο νόμος του Boyle.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Από το νόμο του Boyle

$$p_{αρχ.} \cdot V_{αρχ.} = p_{τελ.} \cdot V_{τελ.}$$

λύνουμε ως προς $V_{τελ.}$

$$V_{τελ.} = \frac{p_{αρχ.} \cdot V_{αρχ.}}{p_{τελ.}}$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο τελικός όγκος του αερίου είναι:

$$V_{τελ.} = \frac{684}{760} \text{ atm} \cdot 350 \text{ mL} \\ 1 \text{ atm} = 315 \text{ mL}$$

Άσκηση 4 - Λύση με τη χρήση του Mathematica

Μια ποσότητα αερίου H_2 καταλαμβάνει όγκο 350 mL υπό πίεση 684 mm Hg. Ποιος θα είναι ο όγκος του αερίου αν η πίεση γίνει 1 atm; Η θερμοκρασία είναι σταθερή.

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$p_{αρχ.} = 684 \text{ mm Hg}$	$V_{τελ.} = ;$
$V_{αρχ.} = 350 \text{ mL}$	
$p_{τελ.} = 1 \text{ atm}$	
$\theta = \text{σταθερή}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Εφόσον η θερμοκρασία, κατά τη μεταβολή του αερίου, παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισόθερμη και ισχύει ο νόμος του Boyle.

Η λύση των ασκήσεων με το νόμο του Boyle ανάγεται στη λύση μιας απλής εξίσωσης πρώτου βαθμού. Στην προκειμένη περίπτωση δίνονται οι τρεις μεταβλητές της εξίσωσης και ζητείται η τέταρτη.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης με το Mathematica.

Ανοίγουμε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica και ορίζουμε σε ένα κελί τις τιμές $p_{αρχ.}$, $V_{αρχ.}$ και $p_{τελ.}$.

Στη συνέχεια γράφουμε την εντολή NSolve, την εξίσωση του Boyle και τη μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση, στην προκειμένη περίπτωση τον τελικό όγκο, $V_{τελ.}$. Στο τέλος της εντολής NSolve πατάμε Shift + Enter και γίνεται ο υπολογισμός.

```

pαρχ = 684/760;
Vαρχ = 350;
pτελ = 1;

NSolve[pαρχ*Vαρχ==pτελ*Vτελ, Vτελ, 3]
{{Vτελ. = 315.}}

```

Άρα ο τελικός όγκος του αερίου είναι 315 mL.

5. Ορισμένη ποσότητα αερίου H₂ καταλαμβάνει όγκο 5,0 L και ασκεί πίεση 1,2 atm. α) Ποιος είναι ο όγκος που καταλαμβάνει σε πίεση 2,5 atm; β) Ποια πίεση απαιτείται για να συμπιεστεί το αέριο σε όγκο 500 cm³; Η θερμοκρασία παραμένει σταθερή.

Απάντηση

α) Εφόσον η θερμοκρασία παραμένει σταθερή, η μεταβολή του αερίου H₂ είναι ισόθερμη και ισχύει ο νόμος του Boyle.

Από το νόμο του Boyle προκύπτει ότι ο τελικός όγκος

$$p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \cdot V_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi}}{p_{\tau\epsilon\lambda}}$$

είναι

$$V_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1,2 \text{ atm} \cdot 5,0 \text{ L}}{2,5 \text{ atm}} = 2,4 \text{ L}$$

Άρα ο όγκος του αερίου H₂ σε πίεση 2,5 atm είναι 2,4 L.

β) Ισχύει: 500 cm³ = 500 mL = 0,5 L.

Από το νόμο του Boyle προκύπτει ότι η πίεση που απαιτείται

$$p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \cdot V_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow p_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{p_{\alpha\rho\chi} \cdot V_{\alpha\rho\chi}}{V_{\tau\epsilon\lambda}}$$

είναι ίση με:

$$p_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1,2 \text{ atm} \cdot 5,0 \text{ L}}{0,5 \text{ L}} = 12 \text{ atm}$$

Άρα για να συμπιεστεί ο όγκος του αερίου σε 500 cm³ απαιτούνται 12 atm.

6. Ο όγκος ενός ιδανικού αερίου αυξάνεται κατά 2,8 L σε σταθερή θερμοκρασία. Η τελική πίεση και ο τελικός όγκος του αερίου είναι 3,0 atm και 6,2 L, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η αρχική πίεση του αερίου: α) σε atm, β) σε mm Hg και γ) σε Torr.

Απάντηση

α) Ο τελικός όγκος, $V_{τελ.}$, του αερίου είναι 6,2 L. Δίνεται ότι ο όγκος του αερίου αυξάνεται σε σχέση με τον αρχικό όγκο, $V_{αρχ.}$, κατά 2,8 L. Επομένως ισχύει:

$$V_{τελ.} = V_{αρχ.} + 2,8 \text{ L}$$

ή

$$6,2 \text{ L} = V_{αρχ.} + 2,8 \text{ L}$$

δηλαδή ο αρχικός όγκος του αερίου είναι:

$$V_{αρχ.} = 6,2 \text{ L} - 2,8 \text{ L} = 3,4 \text{ L}$$

Εφόσον η θερμοκρασία παραμένει σταθερή, η μεταβολή του αερίου είναι ισόθερμη και ισχύει ο νόμος του Boyle από τον οποίο προκύπτει ότι η αρχική πίεση του αερίου

$$p_{αρχ.} \cdot V_{αρχ.} = p_{τελ.} \cdot V_{τελ.} \Rightarrow p_{αρχ.} = \frac{p_{τελ.} \cdot V_{τελ.}}{V_{αρχ.}}$$

είναι

$$p_{αρχ.} = \frac{3,0 \text{ atm} \cdot 6,2 \text{ L}}{3,4 \text{ L}} = 5,5 \text{ atm}$$

β) Ισχύει η σχέση: 1 atm = 760 mm Hg. Άρα η πίεση του αερίου σε mm Hg θα είναι:

$$p = 5,5 \text{ atm} \cdot \left(\frac{760 \text{ mm Hg}}{1 \text{ atm}} \right) = 4180 \text{ mm Hg}$$

γ) Επειδή ισχύει 1 mm Hg = 1 Torr, η πίεση του αερίου θα είναι 4180 Torr.

7. Ο όγκος ενός ιδανικού αερίου μειώνεται κατά 20 % σε σταθερή θερμοκρασία. Αν η αρχική πίεση του αερίου είναι 100 kPa, να υπολογιστεί η τελική πίεση του αερίου: α) σε kPa, β) σε atm και γ) σε Torr.

Απάντηση

α) Έστω $V_{αρχ.}$ ο αρχικός όγκος του αερίου, ο οποίος στη συνέχεια μειώνεται κατά 20 %. Έτσι ο τελικός όγκος του αερίου είναι:

$$V_{τελ.} = V_{αρχ.} - 0,2 V_{αρχ.} = 0,8 V_{αρχ.}$$

Εφόσον η μεταβολή του αερίου γίνεται σε σταθερή θερμοκρασία ισχύει ο νόμος του Boyle

$$p_{αρχ.} V_{αρχ.} = p_{τελ.} V_{τελ.}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$100 \cdot V_{αρχ.} = p_{τελ.} \cdot 0,8 V_{αρχ.} \Rightarrow p_{τελ.} = 125 \text{ kPa}$$

Άρα η τελική πίεση του αερίου είναι 125 kPa.



β) Ισχύει η σχέση: $1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 100 \text{ kPa}$. Άρα:

$$p_{τελ.} = 125 \text{ kPa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{100 \text{ kPa}} \right) = 1,25 \text{ atm}$$

γ) Ισχύει η σχέση: $1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$. Άρα:

$$p = 1,25 \text{ atm} \left(\frac{760 \text{ Torr}}{1 \text{ atm}} \right) = 950 \text{ Torr}$$

2.4.3. Νόμος του Guy-Lussac - Ισοβαρής μεταβολή

Η μεταβολή του αερίου που γίνεται υπό σταθερή πίεση ονομάζεται **ισοβαρής**.

Για την ισοβαρή μεταβολή αερίου ισχύει ο νόμος του Guy - Lussac σύμφωνα με τον οποίο:
«Ο όγκος, V , ορισμένης ποσότητας, n , ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή πίεση, είναι ανάλογος της απόλυτης θερμοκρασίας, T , αυτού»,

$$V = k_1 T$$

ή διαφορετικά «το πηλίκο του όγκου προς την απόλυτη θερμοκρασία ορισμένης ποσότητας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή πίεση είναι σταθερό», δηλαδή

$$\left[\frac{V}{T}\right]_{n,p} = k_1$$

όπου k_1 σταθερά.

Ο νόμος του Guy - Lussac της ισοβαρούς μεταβολής δίνεται από τη μαθηματική εξίσωση:

$$\frac{V_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{V_{τελ.}}{T_{τελ.}}$$

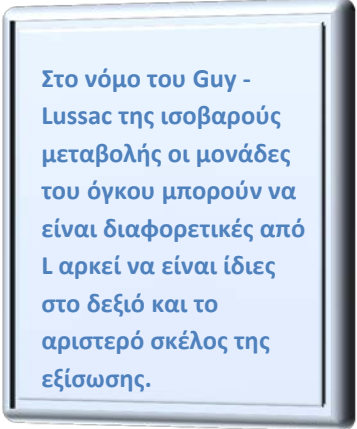
όπου:

$V_{αρχ.}$: ο αρχικός του αερίου (σε L),

$T_{αρχ.}$: η αρχική θερμοκρασία του αερίου (σε K),

$V_{τελ.}$: ο τελικός όγκος του αερίου (σε L) και

$T_{τελ.}$: η τελική θερμοκρασία του αερίου (σε K).



Στο νόμο του Guy - Lussac της ισοβαρούς μεταβολής οι μονάδες του όγκου μπορούν να είναι διαφορετικές από L αρκεί να είναι ίδιες στο δεξιό και το αριστερό σκέλος της εξίσωσης.

Κατά την ισοβαρή μεταβολή ενός αερίου, το αέριο μεταβαίνει από μια αρχική κατάσταση σε μία τελική κατάσταση. Το αέριο αρχικά καταλαμβάνει όγκο $V_{αρχ.}$ σε θερμοκρασία $T_{αρχ.}$ και τελικά καταλαμβάνει όγκο $V_{τελ.}$ σε θερμοκρασία $T_{τελ.}$.

Στις ασκήσεις με το νόμο του Guy - Lussac δίνονται οι τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές ($V_{αρχ.}$, $T_{αρχ.}$, $V_{τελ.}$, $T_{τελ.}$) και ζητείται η τέταρτη. Οι ασκήσεις στο νόμο του Guy - Lussac της ισοβαρούς, αλλά και της ισόχωρης μεταβολής, όπως θα δούμε παρακάτω, χαρακτηρίζονται από μαθηματική απλότητα, όπως ακριβώς και οι ασκήσεις στο νόμο του Boyle, καθώς το μόνο που απαιτείται είναι η λύση μιας μαθηματικής εξίσωσης πρώτου βαθμού.

8. Σε ποια θερμοκρασία πρέπει να ψυχθεί 1,2 L ενός ιδανικού αερίου αρχικής θερμοκρασίας 25 °C για να μειωθεί ο όγκος του σε 600 mL υπό σταθερή πίεση;

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$V_{αρχ.} = 1,2 \text{ L}$	$\theta_{τελ.} = ;$
$\theta_{αρχ.} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$	
$V_{τελ.} = 600 \text{ mL}$	
$p = \text{σταθερή}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Εφόσον η πίεση, κατά τη μεταβολή του αερίου, παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισοβαρής και ισχύει ο νόμος του Gay - Lussac.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Από το νόμο του Gay - Lussac

$$\frac{V_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{V_{τελ.}}{T_{τελ.}}$$

λύνουμε ως προς $T_{τελ.}$

$$T_{τελ.} = T_{αρχ.} \cdot \frac{V_{τελ.}}{V_{αρχ.}}$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$T_{τελ.} = 298 \cdot \frac{0,6 \text{ L}}{1,2 \text{ L}} = 149 \text{ K}$$

Στο νόμο του Guy - Lussac η μεταβολή του όγκου ενός αερίου είναι ανάλογη προς τη μεταβολή της απόλυτης θερμοκρασίας του. Για το λόγο αυτό η θερμοκρασία μετατρέπεται σε βαθμούς Κελβιν.

Άρα η θερμοκρασία στην οποία πρέπει να ψυχθεί το αέριο για να μειωθεί ο όγκος του στο μισό του αρχικού του όγκου είναι:

$$\frac{T_{τελ.}}{\text{K}} = \frac{\theta}{^\circ\text{C}} + 273 \Rightarrow \frac{149 \text{ K}}{\text{K}} = \frac{\theta}{^\circ\text{C}} + 273 \Rightarrow \theta = (149 - 273) \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow \theta = -124 \text{ }^\circ\text{C}$$

Άσκηση 8 - Λύση με τη χρήση του Mathematica

Σε ποια θερμοκρασία πρέπει να ψυχθεί 1,2 L ενός ιδανικού αερίου αρχικής θερμοκρασίας 25 °C για να μειωθεί ο όγκος του σε 600 mL υπό σταθερή πίεση;

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$V_{αρχ.} = 1,2 \text{ L}$	$\theta_{τελ.} = ;$
$\theta_{αρχ.} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$	
$V_{τελ.} = 600 \text{ mL}$	
$p = \text{σταθερή}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Εφόσον η πίεση, κατά τη μεταβολή του αερίου, παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισοβαρής και ισχύει ο νόμος του Gay - Lussac.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Ανοίγουμε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica και ορίζουμε σε ένα κελί τις τιμές $V_{αρχ.}$, $T_{αρχ.}$ και $V_{τελ.}$.

Στη συνέχεια γράφουμε την εντολή NSolve, την εξίσωση του Guy - Lussac και τη μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση, στην προκειμένη περίπτωση την τελική θερμοκρασία, $T_{τελ.}$. Στο τέλος της εντολής NSolve πατάμε Shift + Enter και γίνεται ο υπολογισμός.

$$\begin{aligned} V_{\alpha\rho\chi} &= 1.2; \\ T_{\alpha\rho\chi} &= 298; \\ V_{\tau\epsilon\lambda} &= 0.6; \end{aligned}$$

$$\text{NSolve}[V_{\alpha\rho\chi} * T_{\alpha\rho\chi} == V_{\tau\epsilon\lambda} * T_{\tau\epsilon\lambda}, T_{\tau\epsilon\lambda}, 3]$$

$$\{\{T_{\tau\epsilon\lambda} = 149.\}\}$$

Άρα η θερμοκρασία στην οποία πρέπει να ψυχθεί το αέριο για να μειωθεί ο όγκος του στο μισό του αρχικού του όγκου είναι:

$$\frac{T_{\tau\epsilon\lambda}}{\text{K}} = \frac{\theta}{^\circ\text{C}} + 273 \Rightarrow \frac{149 \text{ K}}{\text{K}} = \frac{\theta}{^\circ\text{C}} + 273 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = (149 - 273) ^\circ\text{C} \Rightarrow \theta = -124 ^\circ\text{C}$$

Το 0 της απόλυτης κλίμακας θερμοκρασιών ή κλίμακας Kelvin αντιστοιχεί στη θερμοκρασία των $-273,15^\circ\text{C}$.

Για τη μετατροπή μιας θερμοκρασίας της κλίμακας Celsius στην κλίμακα Kelvin ισχύει:

$$\frac{T}{\text{K}} = \frac{\theta}{^\circ\text{C}} + 273,15$$

Πολλές φορές όμως χάριν απλοποίησης στους υπολογισμούς αντί για 273,15 χρησιμοποιούμε τον αριθμό 273.

9. Ιδανικό αέριο θερμοκρασίας 320 K θερμαίνεται υπό σταθερή πίεση και ο όγκος του αυξάνεται κατά 15 %. Ποια είναι η τελική θερμοκρασία του αερίου;

Απάντηση

Έστω $V_{\alpha\rho\chi}$ ο αρχικός όγκος του αερίου. Στη συνέχεια ο όγκος του αερίου αυξάνεται κατά 15 %. Έτσι ο τελικός όγκος του αερίου γίνεται:

$$V_{\tau\epsilon\lambda} = V_{\alpha\rho\chi} + 0,15 V_{\alpha\rho\chi} = 1,15 V_{\alpha\rho\chi}.$$

Εφόσον η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισοβαρής και ισχύει ο νόμος του Gay - Lussac από τον οποίο προκύπτει ότι η τελική θερμοκρασία του αερίου

$$\frac{V_{\alpha\rho\chi}}{T_{\alpha\rho\chi}} = \frac{V_{\tau\epsilon\lambda}}{T_{\tau\epsilon\lambda}} \Rightarrow T_{\tau\epsilon\lambda} = T_{\alpha\rho\chi} \cdot \frac{V_{\tau\epsilon\lambda}}{V_{\alpha\rho\chi}}$$

είναι

$$T_{\tau\epsilon\lambda} = 320 \cdot \frac{1,15 V_{\alpha\rho\chi}}{V_{\alpha\rho\chi}} = 368 \text{ K}$$

Άρα η τελική θερμοκρασία του αερίου είναι 368 K ή 95 °C.

10. Ποσότητα αερίου Xe αρχικής θερμοκρασίας 27 °C που βρίσκεται σε δοχείο με κινούμενο έμβολο καταλαμβάνει όγκο 4,8 L και θερμαίνεται υπό σταθερή πίεση. Σε ποια θερμοκρασία ο όγκος του αερίου θα αυξηθεί κατά 1,2 L;

Απάντηση

Το αέριο Xe καταλαμβάνει αρχικά όγκο $V_{αρχ.} = 4,8$ L. Ζητείται η θερμοκρασία στην οποία ο όγκος του αερίου θα αυξηθεί κατά 1,2 L, δηλαδή η θερμοκρασία στην οποία ο τελικός όγκος του αερίου θα είναι:

$$V_{τελ.} = V_{αρχ.} + 1,2 \text{ L} = 4,8 \text{ L} + 1,2 \text{ L} = 6 \text{ L}$$

Εφόσον η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισοβαρής και ισχύει ο νόμος του Gay - Lussac από τον οποίο προκύπτει ότι η τελική θερμοκρασία του αερίου

$$\frac{V_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{V_{τελ.}}{T_{τελ.}} \Rightarrow T_{τελ.} = T_{αρχ.} \cdot \frac{V_{τελ.}}{V_{αρχ.}}$$

είναι

$$T_{τελ.} = 300 \cdot \frac{6 \text{ L}}{4,8 \text{ L}} = 375 \text{ K}$$

Άρα ο όγκος του αερίου θα αυξηθεί κατά 1,2 L σε θερμοκρασία 375 K ή 102 °C.

11. Ορισμένη ποσότητα ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου βρίσκεται σε δοχείο με κινούμενο έμβολο και καταλαμβάνει όγκο 20 L στους 25 °C. Να βρεθεί η νέα θέση του εμβόλου του δοχείου αν η θερμοκρασία του αερίου αυξηθεί στους 250 °C υπό σταθερή πίεση.

Απάντηση

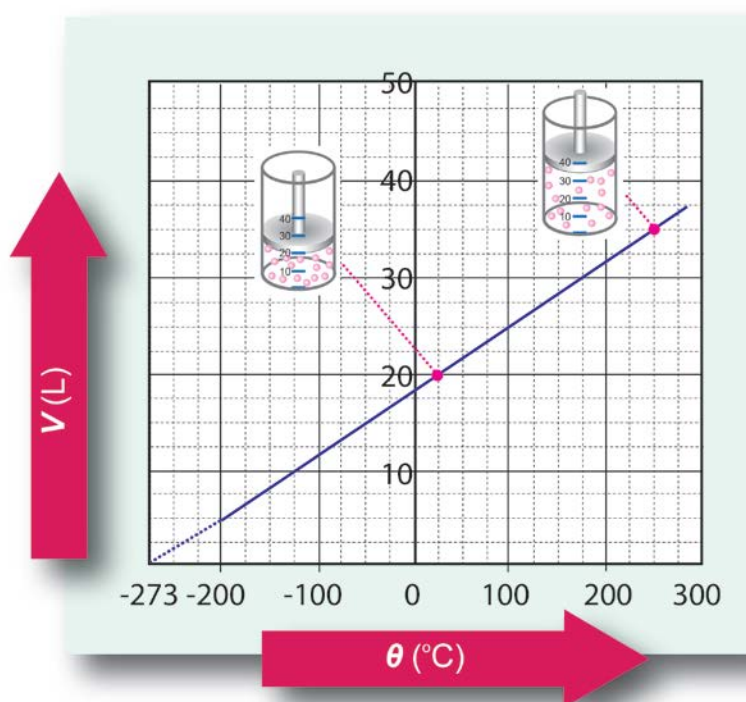
Εφόσον η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή, η μεταβολή είναι ισοβαρής και ισχύει ο νόμος του Gay - Lussac από τον οποίο προκύπτει ότι ο τελικός όγκος του αερίου

$$\frac{V_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{V_{τελ.}}{T_{τελ.}} \Rightarrow V_{τελ.} = V_{αρχ.} \cdot \frac{T_{τελ.}}{T_{αρχ.}}$$

είναι

$$V_{τελ.} = 20 \text{ L} \cdot \frac{298 \text{ K}}{523 \text{ K}} = 35 \text{ L}$$

Άρα ο τελικός όγκος του αερίου είναι 35 L και η νέα θέση του εμβόλου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



2.4.4. Νόμος του Guy - Lussac - Ισόχωρη μεταβολή

Η μεταβολή του αερίου που γίνεται υπό σταθερό όγκο ονομάζεται **ισόχωρη**.

Για την ισόχωρη μεταβολή αερίου ισχύει ο νόμος του Guy - Lussac σύμφωνα με τον οποίο:
«Η πίεση, p , ορισμένης ποσότητας, n , ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου υπό σταθερό όγκο, είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας, T , αυτού,

$$p = k_2 T$$

ή διαφορετικά το πηλίκο της πίεσης προς την απόλυτη θερμοκρασία ορισμένης ποσότητας ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε σταθερή πίεση είναι σταθερό», δηλαδή

$$\left[\frac{p}{T}\right]_{n,V} = k_2$$

όπου k_2 σταθερά.

Ο νόμος του Guy - Lussac της ισόχωρης μεταβολής δίνεται από τη μαθηματική εξίσωση:

$$\frac{p_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{p_{τελ.}}{T_{τελ.}}$$

όπου:

$p_{αρχ.}$: η αρχική πίεση του αερίου (σε atm),

$T_{αρχ.}$: η αρχική θερμοκρασία του αερίου (σε K),

$p_{τελ.}$: η τελική πίεση του αερίου (σε atm) και

$T_{τελ.}$: η τελική θερμοκρασία του αερίου (σε K).

Στο νόμο του Guy - Lussac της ισόχωρης μεταβολής οι μονάδες της πίεσης μπορούν να είναι διαφορετικές από atm αρκεί να είναι ίδιες στο δεξιό και το αριστερό σκέλος της εξίσωσης.

Κατά την ισόχωρη μεταβολή ενός αερίου, το αέριο μεταβαίνει από μια αρχική κατάσταση σε μία τελική κατάσταση. Το αέριο αρχικά ασκεί πίεση $p_{αρχ.}$ σε θερμοκρασία $T_{αρχ.}$ και τελικά ασκεί πίεση $p_{τελ.}$ σε θερμοκρασία $T_{τελ.}$.

Στις ασκήσεις αυτές δίνονται οι τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές ($p_{αρχ.}$, $T_{αρχ.}$, $p_{τελ.}$, $T_{τελ.}$) και ζητείται η τέταρτη.

12. Αέριο N_2 αρχικής θερμοκρασίας $17^\circ C$ ασκεί πίεση 798 Torr και θερμαίνεται σε δοχείο σταθερού όγκου στους $47^\circ C$. Ποια είναι η τελική πίεση του αερίου;

Απάντηση

Η μεταβολή του αερίου πραγματοποιείται σε κλειστό δοχείο, δηλαδή υπό σταθερό όγκο, άρα η μεταβολή είναι ισόχωρη και ισχύει ο νόμος της ισόχωρης μεταβολής του Gay - Lussac από τον οποίο προκύπτει ότι η τελική πίεση του αερίου

$$\frac{p_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{p_{τελ.}}{T_{τελ.}} \Rightarrow p_{τελ.} = p_{αρχ.} \cdot \frac{T_{τελ.}}{T_{αρχ.}}$$

είναι

$$p_{τελ.} = \frac{798}{760} \cdot \frac{320}{290} = 1,16 \text{ atm}$$

13. Σε δοχείο σταθερού όγκου βρίσκεται αέριο Ne υπό πίεση 2 atm. Το δοχείο ψύχεται και τελικά η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου υποδιπλασιάζεται. Ποια είναι η τελική πίεση του αερίου στο δοχείο;

Απάντηση

Έστω $T_{αρχ.}$ η αρχική θερμοκρασία του αερίου. Το δοχείο στη συνέχεια ψύχεται και η θερμοκρασία υποδιπλασιάζεται, δηλαδή γίνεται $T_{αρχ.}/2$.

Η μεταβολή του αερίου πραγματοποιείται σε κλειστό δοχείο, δηλαδή σε σταθερό όγκο, άρα η μεταβολή είναι ισόχωρη και ισχύει ο νόμος της ισόχωρης μεταβολής του Guy - Lussac από τον οποίο προκύπτει ότι η τελική πίεση του αερίου

$$\frac{p_{αρχ.}}{T_{αρχ.}} = \frac{p_{τελ.}}{T_{τελ.}} \Rightarrow p_{τελ.} = p_{αρχ.} \cdot \frac{T_{τελ.}}{T_{αρχ.}}$$

είναι

$$p_{τελ.} = 2 \cdot \frac{T_{αρχ.}}{2 T_{αρχ.}} = 1 \text{ atm}$$

2.4.5. Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

Αν συνδυάσουμε το νόμο του Boyle της ισόθερμης μεταβολής

$$[pV]_{n,\theta} = c$$

και τους νόμους της ισοβαρούς και της ισόχωρης μεταβολής του Guy - Lussac

$$\left[\frac{V}{T}\right]_{n,p} = k_1$$

$$\left[\frac{p}{T}\right]_{n,V} = k_2$$

προκύπτει ο συνδυασμένος νόμος των ιδανικών αερίων, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{pV}{T} = k$$

Για 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, ο όγκος, V , του αερίου αντιστοιχεί στο μολαρικό όγκο, V_m , και η σταθερά αναλογίας k ονομάζεται παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων και συμβολίζεται με R , δηλαδή

$$\frac{pV_m}{T} = R$$

Μολαρικός όγκος, V_m , αερίου είναι ο όγκος που καταλαμβάνει 1 mol του αερίου σε ορισμένες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας.

ή αναλογικά για περισσότερα mol αερίου, n , η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$pV = nRT \quad (1)$$

όπου:

p : η πίεση (σε atm),

V : ο όγκος (σε L),

n : η ποσότητα ουσίας (mol),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων, η οποία είναι

ίση με $0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ και

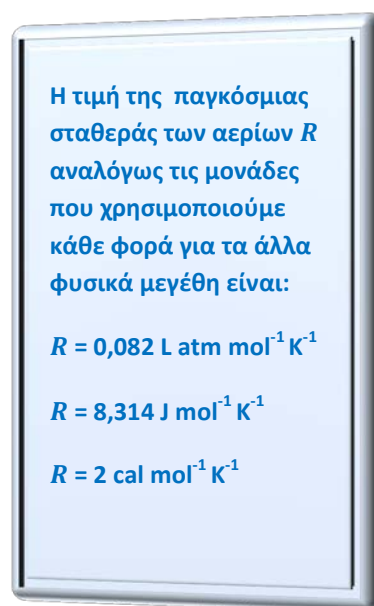
T : η θερμοκρασία (σε K).

Η ακριβής τιμή της παγκόσμιας σταθεράς των αερίων R είναι $0,0820578 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1}$. Χάριν όμως απλοποίησης στους υπολογισμούς θεωρούμε ότι $R = 0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Η εξίσωση (1) ονομάζεται **καταστατική εξίσωση** των ιδανικών αερίων.

Η καταστατική εξίσωση ισχύει και για μίγματα αερίων, των οποίων τα συστατικά συμπεριφέρονται ιδανικά.

Στη συνέχεια αναφέρονται αναλυτικά όλες οι παράμετροι που μπορούν να υπολογιστούν από την καταστατική εξίσωση με υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα.



2.4.5.1. Υπολογισμός πίεσης, όγκου, θερμοκρασίας και ποσότητας ουσίας

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

είναι δυνατό να υπολογιστούν η πίεση, p , ο όγκος, V , η θερμοκρασία, T , και η ποσότητα ουσίας, n , του αερίου από τις σχέσεις:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Άσκηση 14

Ορισμένη ποσότητα αερίου He καταλαμβάνει όγκο 550 mL στους 30 °C και ασκεί πίεση 860 mm Hg. Το αέριο μεταφέρεται σε μια φιάλη, όπου ασκεί πίεση 425 mm Hg σε θερμοκρασία 0 °C. Ποιος είναι ο όγκος της φιάλης;

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$V_1 = 550 \text{ mL}$	$V_2 = ;$
$\theta_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$	
$p_1 = 860 \text{ mm Hg}$	
$\theta_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Έστω p_1 , V_1 , θ_1 οι αρχικές συνθήκες του αερίου. Από τα δεδομένα αυτά θα υπολογιστεί η ποσότητα του αερίου. Στη συνέχεια το αέριο μεταφέρεται σε μια φιάλη, όπου ασκεί πίεση p_2 σε θερμοκρασία θ_2 . Ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο στη φιάλη είναι ο όγκος της φιάλης V_2 που είναι και ο ζητούμενος όγκος.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Η ποσότητα (mol) του αερίου He υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$$

και είναι

$$n = \frac{\left(\frac{860}{760}\right) \text{ atm} \cdot 0,55 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 303 \text{ K}} \Rightarrow n = 0,025 \text{ mol He}$$

Η παραπάνω ποσότητα του He μεταφέρεται σε μια φιάλη, στην οποία ασκεί πίεση 425 mm Hg στους 0 °C. Το αέριο μετά την εισαγωγή του στη φιάλη καταλαμβάνει πλέον τον όγκο της φιάλης, ο οποίος υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$p_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow V_2 = \frac{nRT_2}{p_2}$$

και είναι

$$V = \frac{0,025 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{\left(\frac{425}{760}\right) \text{ atm}} = 1 \text{ L}$$

Άρα ο όγκος της φιάλης στην οποία εισάγεται το αέριο είναι 1 L.

Άσκηση 14 - Λύση με τη χρήση του Mathematica

Ορισμένη ποσότητα αερίου He καταλαμβάνει όγκο 550 mL στους 30 °C και ασκεί πίεση 860 mm Hg. Το αέριο μεταφέρεται σε μια φιάλη, όπου ασκεί πίεση 425 mm Hg σε θερμοκρασία 0 °C. Ποιος είναι ο όγκος της φιάλης;

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα

$$V_1 = 550 \text{ mL}$$

$$\theta_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$p_1 = 860 \text{ mm Hg}$$

$$\theta_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$$

Ζητούμενα

$$V_2 = ;$$

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Έστω p_1, V_1, θ_1 οι αρχικές συνθήκες του αερίου. Από τα δεδομένα αυτά θα υπολογιστεί η ποσότητα του αερίου. Στη συνέχεια το αέριο μεταφέρεται σε μια φιάλη, όπου ασκεί πίεση p_2 σε θερμοκρασία θ_2 . Ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο στη φιάλη είναι ο όγκος της φιάλης V_2 που είναι και ο ζητούμενος όγκος.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Ανοίγουμε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica και ορίζουμε σε ένα κελί τις τιμές p_1, V_1, T_1 και R . Στη συνέχεια γράφουμε την εντολή NSolve, την καταστατική εξίσωση και τη μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση, δηλαδή την ποσότητα, n , του αερίου.

Αφού υπολογιστεί η ποσότητα, n , του αερίου, σε ένα δεύτερο κελί του φύλλου εργασίας ορίζουμε τις τιμές, n, p_2, T_2 και R και εντελώς όμοια υπολογίζουμε τον όγκο V_2 , δηλαδή τον ζητούμενο όγκο.

```
p1 = 860/760;  
V1 = 0.55;  
T1 = 303;  
R = 0.082;  
NSolve[p1*V1==n*R*T1,n,3]  
{ {n = 0.025} }  
  
n = 0.025  
p2 = 860/760;  
T2 = 303;  
R = 0.082;  
NSolve[p2*V2==n*R*T2,V2,3]  
{ {V2 = 1.000} }
```

15. Μια φυσαλίδα αέρα με ακτίνα 1,2 cm στον πάτο μιας λίμνης όπου η θερμοκρασία είναι 8,5 °C και η υδροστατική πίεση 2,5 atm, ανέρχεται στην επιφάνεια της λίμνης όπου η θερμοκρασία είναι 20 °C και η πίεση 1 atm. Να υπολογίσετε την ακτίνα της φυσαλίδας όταν αυτή ανέρχεται στην επιφάνεια της λίμνης.

Απάντηση

Από την ακτίνα της φυσαλίδας του αέρα στον πάτο της λίμνης μπορεί να υπολογιστεί ο όγκος του αέρα που περικλείεται σε αυτήν. Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του αέρα στη φυσαλίδα είναι:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{1,2}{100}\right)^3 = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ή } 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ L}$$

Η ποσότητα (σε mol) του αέρα της φυσαλίδας υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι

$$n = \frac{2,5 \text{ atm} \cdot 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 281,5 \text{ K}} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol αέρα}$$

Στη συνέχεια η φυσαλίδα του αέρα ανέρχεται στην επιφάνεια της λίμνης όπου η θερμοκρασία είναι 20 °C και η πίεση 1 atm.

Η ποσότητα του αέρα της φυσαλίδας στην επιφάνεια της λίμνης παραμένει ίδια, όση και στον πάτο της λίμνης. Ο όγκος όμως του αέρα της φυσαλίδας είναι διαφορετικός, υπολογίζεται εκ νέου από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

και είναι ίσος με:

$$V = \frac{7,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 19 \cdot 10^{-3} \text{ L} = 19 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Η ακτίνα της φυσαλίδας στην επιφάνεια της λίμνης υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3}{4\pi}V \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

και είναι

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V} = \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot 3,14} \cdot 19 \cdot 10^{-6}} = 0,016 \text{ m ή } 1,6 \text{ cm}$$

Άρα η ακτίνα της φυσαλίδας στην επιφάνεια της λίμνης μεγαλώνει και γίνεται 1,6 cm.

16. Να υπολογίσετε την πίεση που ασκούν 2,5 mol αερίου Xe, τα οποία καταλαμβάνουν όγκο 20 L σε θερμοκρασία 400 K και στη συνέχεια να εκφράσετε την τιμή της πίεσης σε Pa, bar και Torr.

Απάντηση

Η πίεση του αερίου μπορεί να υπολογιστεί μέσω της καταστατικής εξίσωσης:

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$$

και είναι ίση με:

$$p = \frac{2,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 400 \text{ K}}{20 \text{ L}} = 4,1 \text{ atm}$$

Για να μετατρέψουμε τις atm σε Pa χρησιμοποιούμε τον κατάλληλο συντελεστή μετατροπής (1 atm = 101325 Pa). Έτσι προκύπτει:

$$4,1 \text{ atm} = 4,1 \text{ atm} \left(\frac{101325 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} \right) = 415432,5 \text{ Pa}$$

Επίσης ισχύει ότι 1 bar = 100000 Pa. Άρα:

$$415432,5 \text{ Pa} = 415432,5 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ bar}}{100000 \text{ Pa}} \right) = 4,1 \text{ bar}$$

Ισχύει ότι 1 atm = 760 Torr. Άρα:

$$4,1 \text{ atm} = 4,1 \text{ atm} \left(\frac{760 \text{ Torr}}{1 \text{ atm}} \right) = 3116 \text{ Torr}$$

17. Μια μεγάλη κυλινδρική οβίδα αερίων περιέχει συμπιεσμένο αέριο H₂ όγκου 30 L. Εάν το αέριο αποθηκεύεται υπό πίεση 10 MPa και θερμοκρασία 22 °C, να υπολογιστεί η ποσότητα (σε g) του H₂ στον κύλινδρο.

Απάντηση

Με βάση την ισοδυναμία: 1 atm ≈ 100 kPa προκύπτει ότι 10 MPa ≈ 100 atm.

Η ποσότητα (σε mol) του H₂ στην κυλινδρική οβίδα μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι ίση με:

$$n = \frac{100 \text{ atm} \cdot 30 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 295 \text{ K}} = 124 \text{ mol}$$

Η μάζα του αερίου H_2 στην οβίδα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$n = \frac{m}{M_{H_2}} \Rightarrow m = n M_{H_2}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι είναι ίση με:

$$m = 124 \text{ mol} \cdot 2 \text{ g mol}^{-1} = 248 \text{ g}$$

18. Σε μία οβίδα περιέχεται αέριο CH_4 υπό πίεση 12 atm. Μετά την παραλαβή από αυτήν κατά διαστήματα διαφόρων ποσοτήτων CH_4 η πίεση έπεσε στις 9 atm. Να υπολογιστεί το % ποσοστό CH_4 που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το χρονικό διάστημα, κατά τη διάρκεια του οποίου η θερμοκρασία παρέμεινε σταθερή.

Απάντηση

Έστω V ο όγκος της οβίδας που περιέχει το CH_4 και T η απόλυτη θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται.

Έστω $n_{\alpha\rho\chi.}$ τα αρχικά mol του CH_4 , τα οποία ασκούν πίεση $p_{\alpha\rho\chi.}$ και $n_{\tau\epsilon\lambda.}$ τα τελικά mol του CH_4 , τα οποία ασκούν πίεση $p_{\tau\epsilon\lambda.}$. Αν εφαρμόσουμε την καταστατική εξίσωση για τα αρχικά και τα τελικά mol του CH_4 προκύπτουν οι σχέσεις:

$$p_{\alpha\rho\chi.}V = n_{\alpha\rho\chi.}RT \quad (1)$$

$$p_{\tau\epsilon\lambda.}V = n_{\tau\epsilon\lambda.}RT \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2)

$$\frac{p_{\alpha\rho\chi.}V}{p_{\tau\epsilon\lambda.}V} = \frac{n_{\alpha\rho\chi.}RT}{n_{\tau\epsilon\lambda.}RT} \Rightarrow \frac{p_{\alpha\rho\chi.}}{p_{\tau\epsilon\lambda.}} = \frac{n_{\alpha\rho\chi.}}{n_{\tau\epsilon\lambda.}}$$

και αντικαταστήσουμε προκύπτει ότι

$$\frac{12}{9} = \frac{n_{\alpha\rho\chi.}}{n_{\tau\epsilon\lambda.}} \Rightarrow n_{\tau\epsilon\lambda.} = \frac{9}{12}n_{\alpha\rho\chi.} \Rightarrow n_{\tau\epsilon\lambda.} = \frac{3}{4}n_{\alpha\rho\chi.}$$

Άρα τα mol του CH_4 που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$n_{\chi\rho\eta\sigma.} = n_{\alpha\rho\chi.} - n_{\tau\epsilon\lambda.} = n_{\alpha\rho\chi.} - \frac{3}{4}n_{\alpha\rho\chi.} = \frac{1}{4}n_{\alpha\rho\chi.}$$

Το % ποσοστό του CH_4 που χρησιμοποιήθηκε είναι ο λόγος των mol που χρησιμοποιήθηκαν προς τα αρχικά mol του CH_4 .

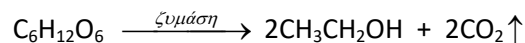
$$\% \text{ ποσοστό} = \frac{n_{\chi\rho\eta\sigma}}{n_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{4} n_{\alpha\rho\chi}}{n_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25 \%$$

Άρα χρησιμοποιήθηκε το 25 % της ποσότητας του CH₄.

19. Κατά τη διάρκεια της αλκοολικής ζύμωσης της γλυκόζης για την παρασκευή οινοπνεύματος παράγεται αέριο προϊόν που έχει όγκο 1,2 L σε θερμοκρασία 20 °C και πίεση 1 atm. Πόσος θα ήταν ο όγκος του αερίου αυτού αν η ζύμωση της γλυκόζης πραγματοποιούνταν σε θερμοκρασία 37 °C;

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια ζύμωσης της γλυκόζης το αέριο που παράγεται είναι το CO₂, σύμφωνα με την αντίδραση:



Η ποσότητα του CO₂ που παράγεται υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι

$$n = \frac{1 \text{ atm} \cdot 1,2 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,05 \text{ mol}$$

Αν η ζύμωση της γλυκόζης πραγματοποιούνταν σε θερμοκρασία 37 °C, τότε ο όγκος του CO₂, υπολογίζεται και πάλι από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

και θα είναι

$$V = \frac{0,05 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 310 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 1,27 \text{ L}$$

2.4.5.2. Υπολογισμός μάζας και μολαρικής μάζας αέριας ουσίας

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

είναι δυνατόν να υπολογιστεί η μάζα και η μολαρική μάζα μιας αέριας ουσίας.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την ποσότητα ουσίας, n , προκύπτει:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

όπου:

m : η μάζα (σε g) και

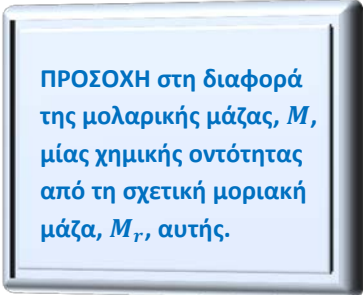
M : η μολαρική μάζα της ουσίας (σε g mol^{-1}).

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μάζα, m , μιας αέριας ουσίας υπολογίζεται από τη σχέση

$$m = \frac{pVM}{RT}$$

και η μολαρική της μάζα από τη σχέση

$$M = \frac{mRT}{pV}$$



ΠΡΟΣΟΧΗ στη διαφορά της μολαρικής μάζας, M , μίας χημικής οντότητας από τη σχετική μοριακή μάζα, M_r , αυτής.

Στο σημείο αυτό θεωρείται σκόπιμο να αναφερθεί η διαφορά της μολαρικής μάζας, M , από τη σχετική μοριακή μάζα, M_r , καθώς πολλές φορές οι δύο αυτές έννοιες χρησιμοποιούνται αδιακρίτως.

Η *σχετική μοριακή μάζα* (*relative molecular mass*), M_r , μιας χημικής ένωσης είναι ίση με το άθροισμα των σχετικών ατομικών μαζών (*relative atomic mass*), A_r , των ατόμων που συγκροτούν τη χημική ένωση. Η σχετική μοριακή μάζα είναι αδιάστατο μέγεθος, δηλαδή δεν έχει μονάδες. Για παράδειγμα η σχετική μοριακή μάζα του νερού είναι $M_r(\text{H}_2\text{O}) = 18$.

Η *μολαρική μάζα* (*molar mass*), M , μιας οποιασδήποτε χημικής οντότητας (άτομο, μόριο, ιόν) είναι η μάζα 1 mol αυτής. Για τη μολαρική μάζα μιας οντότητας X ισχύει η σχέση:

$$M_X = \frac{m_X}{n_X}$$

όπου m_X η μάζα της X και n_X τα mol αυτής.

Η μολαρική μάζα, σε αντίθεση με τη σχετική μοριακή μάζα, **δεν** είναι αδιάστατο μέγεθος. Η μονάδα της μολαρικής μάζας στο σύστημα SI είναι το kg mol^{-1} . Στην πράξη όμως η μονάδα που συνήθως χρησιμοποιείται είναι το g mol^{-1} . Για παράδειγμα η μολαρική μάζα του νερού είναι $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g mol}^{-1}$ ή $M(\text{H}_2\text{O}) = 0,018 \text{ kg mol}^{-1}$. Έτσι είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η αριθμητική τιμή της μολαρικής μάζας μιας χημικής οντότητας ταυτίζεται με τη σχετική μοριακή (ή ατομική) μάζα αυτής, μόνο όταν αυτή εκφράζεται σε μονάδες g mol^{-1} [30].

2.4.5.3. Υπολογισμός μέσης μολαρικής μάζας μίγματος αερίου

Στην περίπτωση μίγματος αερίου αναφερόμαστε στη **μέση μολαρική μάζα** του αερίου μίγματος.

Αν ένα αέριο μίγμα αποτελείται από s ιδανικά συμπεριφερόμενα αέρια σε ποσότητες $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$, τότε η μέση μολαρική μάζα, \bar{M} , του αερίου μίγματος είναι

$$\bar{M} = \frac{m}{n}$$

όπου

m : η ολική μάζα του αερίου (σε g) και

n : τα ολικά mol του αερίου μίγματος.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\bar{M} = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 + \dots + n_s M_s}{n}$$

ή

$$\bar{M} = \frac{n_1}{n} M_1 + \frac{n_2}{n} M_2 + \frac{n_3}{n} M_3 + \dots + \frac{n_s}{n} M_s$$

ή

$$\bar{M} = x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3 + \dots + x_s M_s$$

ή

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^s x_i M_i$$

δηλαδή «Η μέση μοριακή μάζα (mean molar mass), \bar{M} , μίγματος αερίων είναι ίση με το άθροισμα των γινομένων των κλασμάτων ποσότητας επί τη μοριακή μάζα του κάθε αερίου συστατικού».

20. 4,2 L SO₃ μετρημένα σε συνθήκες STP συμπιέζονται ισόθερμα σε όγκο 2,5 L. Ποια είναι η τελική πίεση του αερίου και πόσο ζυγίζουν τα 500 mL του αερίου που συμπιέστηκε;

Απάντηση

Τα 4,2 L SO₃ έχουν μετρηθεί σε συνθήκες STP, δηλαδή σε θερμοκρασία 0 °C και πίεση 1 atm. Η ποσότητα αυτή του αερίου συμπιέζεται ισόθερμα σε όγκο 2,5 L. Για την ισόθερμη μεταβολή του αερίου ισχύει ο νόμος του Boyle

$$p_{\text{αρχ.}} \cdot V_{\text{αρχ.}} = p_{\text{τελ.}} \cdot V_{\text{τελ.}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$1 \text{ atm} \cdot 4,2 \text{ L} = p_{\text{τελ.}} \cdot 2,5 \text{ L} \Rightarrow p_{\text{τελ.}} = 1,68 \text{ atm}$$

Επομένως η τελική πίεση του SO₃ είναι 1,68 atm.

Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι η μάζα του SO₃ δίνεται από τη σχέση

$$pV = n_{\text{SO}_3} RT \Rightarrow pV = \frac{m_{\text{SO}_3}}{M_{\text{SO}_3}} RT \Rightarrow m_{\text{SO}_3} = \frac{pVM_{\text{SO}_3}}{RT}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$m_{\text{SO}_3} = \frac{1,68 \text{ atm} \cdot 0,5 \text{ L} \cdot 80 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}} = 3 \text{ g}$$

Άρα τα 500 mL του SO₃ που συμπιέστηκαν ζυγίζουν 3 g.

Ως πρότυπες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης, STP (Standard Temperature and Pressure), έχουν οριστεί οι παρακάτω:

$$p = 1 \text{ atm}$$

$$T = 273,15 \text{ K}$$

21. Ποσότητα αερίου Ar ίση με 600 mg καταλαμβάνει όγκο 3,5 L στους 20 °C. Να υπολογιστεί η πίεση του αερίου.

Απάντηση

Η ποσότητα του αερίου Ar είναι 600 mg ή 0,6 g.

Η πίεση του αερίου μπορεί να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M_{Ar}} RT \Rightarrow p = \frac{mRT}{V M_{Ar}}$$

και είναι

$$p = \frac{0,6 \text{ g} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{3,5 \text{ L} \cdot 40 \text{ g mol}^{-1}} = 0,1 \text{ atm}$$

Άρα η πίεση που ασκεί το αέριο Ar είναι 0,1 atm.

22. Σε μια φιάλη όγκου 20 L περιέχεται ποσότητα αερίου O₂, το οποίο βρίσκεται υπό πίεση 10 atm στους 22 °C. Να υπολογίσετε τη μάζα του O₂ που περιέχεται στη φιάλη.

Απάντηση

Η μάζα του αερίου O₂ που βρίσκεται στη φιάλη μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} RT \Rightarrow m_{O_2} = \frac{pVM_{O_2}}{RT}$$

και είναι

$$m_{O_2} = \frac{4,1 \text{ atm} \cdot 20 \text{ L} \cdot 32 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 295 \text{ K}} = 264,6 \text{ g}$$

Άρα στη φιάλη περιέχονται 264,6 g O₂.

23. Ποσότητα 5,85 g ιδανικού αερίου A καταλαμβάνουν όγκο 1,5 L σε θερμοκρασία 27 °C και ασκούν πίεση 2 atm. Να υπολογιστεί η μοριακή μάζα του αερίου.

Απάντηση

Η μοριακή μάζα του αερίου A υπολογίζεται εύκολα από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m_A}{M_A} RT \Rightarrow M_A = \frac{mRT}{pV}$$

και είναι

$$M_A = \frac{5,85 \text{ g} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{2 \text{ atm} \cdot 1,5 \text{ L}} = 48 \text{ g mol}^{-1}$$

24. Μια φιάλη περιέχει 125 mol αερίου Ar σε θερμοκρασία 27 °C και υπό πίεση 150 atm. Μετά τη χρήση ορισμένης ποσότητας Ar, η πίεση στη φιάλη γίνεται 138 atm στους 27 °C. Να υπολογίσετε τη μάζα του Ar που χρησιμοποιήθηκε.



Απάντηση

Δίνεται ότι μια φιάλη περιέχει 125 mol Ar σε θερμοκρασία 27 °C και υπό πίεση 150 atm. Από τα δεδομένα αυτά μπορεί να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση ο όγκος της φιάλης που περιέχει το αέριο

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

και είναι

$$V = \frac{125 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{150 \text{ atm}} = 20,5 \text{ L}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιείται μια ποσότητα αερίου Ar και η πίεση στη φιάλη μειώνεται στις 138 atm. Η ποσότητα (σε mol) του Ar που παρέμεινε στη φιάλη υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι ίση με:

$$n = \frac{138 \text{ atm} \cdot 20,5 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = 115 \text{ mol}$$

Αρχικά υπήρχαν στη φιάλη 125 mol και τελικά παρέμειναν 115 mol. Άρα χρησιμοποιήθηκαν 10 mol αερίου Ar. Επομένως η ποσότητα του Ar που χρησιμοποιήθηκε

$$n = \frac{m}{M_{Ar}} \Rightarrow m_{Ar} = n M_{Ar}$$

είναι ίση με:

$$m_{Ar} = 10 \text{ mol} \cdot 40 \text{ g mol}^{-1} = 400 \text{ g}$$

25. Μια φιάλη αερίου χωρητικότητας 5 L περιέχει 42 g N₂. Αν η πίεση της φιάλης ξεπεράσει το 1 MPa, τότε η φιάλη θα εκραγεί. Να βρεθεί σε ποια θερμοκρασία θα συμβεί αυτό.

Απάντηση

Αν η πίεση της φιάλης ξεπεράσει το 1 MPa, τότε η φιάλη θα εκραγεί. Η θερμοκρασία στην οποία η φιάλη έχει πίεση 1 MPa είναι η μέγιστη θερμοκρασία στην οποία αντέχει η φιάλη χωρίς να εκραγεί. Η θερμοκρασία αυτή θα υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$$

Με βάση την ισοδυναμία: 1 atm \approx 100 kPa προκύπτει ότι 1 MPa \approx 10 atm.

Επίσης η ποσότητα (σε mol) του N₂ στη φιάλη είναι:

$$n = \frac{m}{M_{N_2}} = \frac{42 \text{ g}}{28 \text{ g mol}^{-1}} = 1,5 \text{ mol}$$

Άρα η μέγιστη θερμοκρασία στην οποία αντέχει η φιάλη χωρίς να εκραγεί είναι

$$T = \frac{10 \text{ atm} \cdot 5 \text{ L}}{1,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 406,5 \text{ K}$$

26. Ο μεταβολισμός της γλυκόζης στον οργανισμό περιγράφεται από την παρακάτω χημική εξίσωση, η οποία περιγράφει την καύση της γλυκόζης:



Να υπολογιστεί ο όγκος του CO₂ που παράγεται στους 36,5 °C και πίεση 1 atm, όταν κατά την αντίδραση καύσης καταναλώνονται 4,5 g γλυκόζης [17].

Απάντηση

Τα mol της γλυκόζης που αντιδρούν είναι:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{4,5 \text{ g}}{180 \text{ g mol}^{-1}} = 0,025 \text{ mol}$$

Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης προκύπτει ότι όταν αντιδρούν 0,025 mol C₆H₁₂O₆, τότε παράγονται 0,15 mol CO₂. Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι ο όγκος του CO₂ που παράγεται

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

είναι ίσος με:

$$V = \frac{0,025 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 309,5 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 0,63 \text{ L}$$

27. Για τον πειραματικό προσδιορισμό της μοριακής μάζας ενός πτητικού υγρού στο εργαστήριο εφαρμόστηκε η μέθοδος Dumas. Έτσι βρέθηκε ότι γυάλινη φιάλη γεμάτη με αέρα ζυγίζει 52,5328 g στους 21 °C και πίεση 1 atm. Στη συνέχεια τοποθετήθηκε στη φιάλη ποσότητα του πτητικού υγρού και εξαερώθηκε με θέρμανση σε νερό που βράζει. Η φιάλη γεμάτη με ατμούς του υγρού βρέθηκε ότι ζυγίζει 52,7136 g και τέλος η φιάλη γεμάτη με νερό ζυγίζει 202,3628 g. Να υπολογιστεί η μοριακή μάζα του υγρού αν είναι γνωστό ότι η πυκνότητα μάζας του αέρα σε συνθήκες STP είναι ίση με 1,293 g L⁻¹ [15].

Απάντηση

Από τα δεδομένα της άσκησης θα πρέπει να βρεθεί η μάζα των ατμών του υγρού και στη συνέχεια μέσω της καταστατικής εξίσωσης να υπολογιστεί η μοριακή μάζα του υγρού [15].

Δίνεται ότι:

$$m_{\text{φιάλης}} + m_{\text{H}_2\text{O}} = 202,3628 \text{ g} \quad (1)$$

και

$$m_{\text{φιάλης}} + m_{\text{αέρα}} = 52,5328 \text{ g} \quad (2)$$

Αν αφαιρέσουμε τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$m_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{αέρα}} = 150,010 \text{ g} \quad (3)$$

Επειδή η μάζα ίσου όγκου αέρα είναι αμελητέα σε σχέση με τη μάζα ίσου όγκου νερού, μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση ότι:

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = 150,010 \text{ g}$$

Και επειδή η πυκνότητα μάζας του H₂O είναι $\rho = 1 \text{ g mL}^{-1}$ προκύπτει ότι

$$V_{\text{H}_2\text{O}} = 150,010 \text{ mL}$$

Ο όγκος του νερού αντιπροσωπεύει και τον όγκο V της φιάλης στην οποία πραγματοποιούνται οι διάφορες ζυγίσεις για τον προσδιορισμό της μοριακής μάζας του πτητικού υγρού. Άρα ο όγκος της φιάλης είναι $V = 150,010 \text{ mL} \cong 150 \text{ mL} = 0,15 \text{ L}$.

Δίνεται επίσης η πυκνότητα μάζας του αέρα σε συνθήκες STP, δηλαδή σε θερμοκρασία 0°C και πίεση 1 atm . Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι η μοριακή μάζα του αέρα

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow M = \frac{\rho RT}{p}$$

είναι

$$M = \frac{\rho RT}{p} = \frac{1,293 \text{ g L}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 28,945 \text{ g mol}^{-1}$$

Επομένως η μάζα του αέρα που περιέχεται στη φιάλη όγκου $0,15 \text{ L}$

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow m = \frac{pVM}{RT}$$

είναι ίση με

$$m_{\alpha\epsilon\rho\alpha} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 0,15 \text{ L} \cdot 28,945 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 294 \text{ K}} = 0,1800 \text{ g}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η μάζα της φιάλης είναι

$$m_{\phi\iota\acute{\alpha}\lambda\eta\varsigma} = 52,5328 - 0,1800 = 52,3528 \text{ g}$$

Επίσης δίνεται ότι

$$m_{\phi\iota\acute{\alpha}\lambda\eta\varsigma} + m_{\alpha\tau\mu\acute{\omega}\nu} = 52,7136 \text{ g}$$

Άρα η μάζα των ατμών του υγρού είναι

$$m_{\alpha\tau\mu\acute{\omega}\nu} = 52,7136 - 52,3528 = 0,3608 \text{ g}$$

Έτσι η μοριακή μάζα του υγρού

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow M = \frac{mRT}{pV}$$

είναι ίση με

$$M = \frac{0,3608 \text{ g} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 294 \text{ K}}{1 \text{ atm} \cdot 0,15 \text{ L}} = 58 \text{ g mol}^{-1}$$

2.4.5.4. Υπολογισμός πυκνότητας μάζας αερίου

Ένα άλλο μέγεθος που είναι δυνατό να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT$$

είναι η πυκνότητα μάζας, ρ , μιας αέριας ουσίας.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την ποσότητα ουσίας, n , προκύπτει:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

Αναδιατάσσοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M}$$

Ο λόγος m/V είναι ίσος με την πυκνότητα μάζας, ρ , της ουσίας, δηλαδή:

$$p = \rho \frac{RT}{M}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η πυκνότητα μάζας, ρ , μιας αέριας ουσίας δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

σύμφωνα με την οποία υπολογίζεται σε g L^{-1} . Η μονάδα της πυκνότητας μάζας στο σύστημα SI είναι το kg m^{-3} . Πρακτικά όμως οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι g L^{-1} και g mL^{-1} (ή g cm^{-3}).

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει το συμπέρασμα ότι στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, η πυκνότητα μάζας, ρ , μιας αέριας ουσίας εξαρτάται μόνο από τη μοριακή μάζα, M , της ουσίας.

28. Η πυκνότητα μάζας ενός αερίου βρέθηκε ότι είναι $1,18 \text{ g L}^{-1}$ στους 300 K και σε πίεση 788 Torr . Να υπολογιστεί η μοριακή μάζα του αερίου.

Απάντηση

Η μοριακή μάζα του αερίου A μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow M = \frac{\rho RT}{p}$$

και είναι

$$M = \frac{1,18 \text{ g mol}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{\left(\frac{788}{760}\right) \text{ atm}} = 28 \text{ g mol}^{-1}$$

Άρα η μοριακή μάζα του αερίου είναι 28 g mol^{-1} .

29. Να υπολογιστεί η πυκνότητα μάζας του CO_2 στους 27°C και πίεση 765 Torr , αν υποθέσουμε ότι συμπεριφέρεται ιδανικά.

Απάντηση

Η πυκνότητα μάζας του CO_2 μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M_{\text{CO}_2}} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M_{\text{CO}_2}} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M_{\text{CO}_2}} \Rightarrow \rho = \frac{p M_{\text{CO}_2}}{RT}$$

και είναι ίση με

$$\rho = \frac{\left(\frac{765}{760}\right) \text{ atm} \cdot 44 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = 1,8 \text{ g L}^{-1}$$

Άρα η πυκνότητα μάζας του CO_2 στις παραπάνω συνθήκες είναι $1,8 \text{ g L}^{-1}$.

30. Ποια είναι η μοριακή μάζα ενός αερίου που έχει πυκνότητα μάζας $1,25 \text{ g L}^{-1}$ σε συνθήκες STP; Εάν το αέριο αποτελείται από ένα είδος ατόμων, ποιο θα μπορούσε να είναι το αέριο;

Απάντηση

Η μοριακή μάζα του αερίου μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow M = \frac{\rho RT}{p}$$

και είναι ίση με

$$M = \frac{1,25 \text{ g mol}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 28 \text{ g mol}^{-1}$$

Εφόσον το αέριο αποτελείται μόνο από ένα είδος ατόμων, είναι πιθανό το αέριο να είναι το N_2 .

31. Ένα ιδανικό αέριο έχει πυκνότητα μάζας $1,3 \text{ g L}^{-1}$ στους $27 \text{ }^\circ\text{C}$ και πίεση 1 atm . Να υπολογιστεί η πυκνότητα μάζας του αερίου σε συνθήκες STP.

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε την πυκνότητα μάζας του αερίου σε συνθήκες STP πρέπει να είναι γνωστή η μοριακή μάζα του αερίου.

Δίνεται ότι η πυκνότητα μάζας του αερίου είναι $1,3 \text{ g L}^{-1}$ στους $27 \text{ }^\circ\text{C}$ και πίεση 1 atm . Από τα δεδομένα αυτά και από την καταστατική εξίσωση υπολογίζουμε τη μοριακή μάζα του αερίου

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow M = \frac{\rho RT}{p}$$

η οποία είναι

$$M = \frac{1,3 \text{ g mol}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 32 \text{ g mol}^{-1}$$

Έτσι, από την καταστατική εξίσωση προκύπτει ότι η πυκνότητα μάζας του αερίου

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

σε συνθήκες STP (θερμοκρασία $0 \text{ }^\circ\text{C}$ και πίεση 1 atm) είναι ίση με

$$\rho = \frac{1 \text{ atm} \cdot 32 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}} = 1,4 \text{ g L}^{-1}$$

Άρα η πυκνότητα μάζας του αερίου σε συνθήκες STP είναι $1,4 \text{ g L}^{-1}$.

32. 50 L ενός αερίου A, που μετρήθηκαν στους $21 \text{ }^\circ\text{C}$ ασκούν πίεση 772 mm Hg και ζυγίζουν $67,5 \text{ g}$. α) Ποια είναι η πυκνότητα μάζας του αερίου στις συνθήκες αυτές, β) σε ποια πίεση σε θερμοκρασία $21 \text{ }^\circ\text{C}$ η πυκνότητα μάζας του γίνεται $1,5 \text{ g L}^{-1}$ και γ) ποια η πυκνότητα μάζας του αερίου σε συνθήκες STP.

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε την πυκνότητα μάζας του αερίου πρέπει να είναι γνωστή η μοριακή μάζα του αερίου.

Από την καταστατική εξίσωση υπολογίζουμε τη μοριακή μάζα του αερίου

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M_A} RT \Rightarrow M_A = \frac{mRT}{pV}$$

η οποία είναι

$$M_A = \frac{67,5 \text{ g} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 294 \text{ K}}{\left(\frac{772}{760}\right) \text{ atm} \cdot 50 \text{ L}} = 32 \text{ g mol}^{-1}$$

α) Η πυκνότητα μάζας του αερίου A στις συνθήκες που δίνονται υπολογίζεται εύκολα από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M_A} RT \Rightarrow p = \frac{m RT}{V M_A} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M_A} \Rightarrow \rho = \frac{p M_A}{RT}$$

και είναι

$$\rho = \frac{\left(\frac{772}{760}\right) \text{ atm} \cdot 32 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 294 \text{ K}} = 1,3 \text{ g L}^{-1}$$

β) Η πυκνότητα μάζας του αερίου A γίνεται ίση με $1,5 \text{ g L}^{-1}$ σε πίεση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M_A} RT \Rightarrow p = \frac{m RT}{V M_A} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M_A}$$

ίση με

$$p = \frac{1,5 \text{ g L}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 294 \text{ K}}{32 \text{ g mol}^{-1}} = 1,13 \text{ atm}$$

γ) Οι συνθήκες STP είναι θερμοκρασία $0 \text{ }^\circ\text{C}$ και πίεση 1 atm . Έτσι, η πυκνότητα μάζας του αερίου

$$\rho = \frac{p M_A}{RT}$$

είναι ίση με

$$\rho = \frac{1 \text{ atm} \cdot 32 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}} = 1,4 \text{ g L}^{-1}$$

2.4.5.5. Υπολογισμός πλήθους μορίων αερίου - Αρχή Avogadro

Από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT$$

υπολογίζεται επίσης και το πλήθος των μορίων, N , ενός αερίου.

Η ποσότητα ουσίας, n , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$n = \frac{N}{N_A}$$

όπου N_A ο γνωστός αριθμός Avogadro, ο οποίος

είναι ίσος με $6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει:

$$pV = \frac{N}{N_A}RT$$

και λύνοντας ως προς N , προκύπτει ότι το πλήθος των μορίων ενός αερίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = \frac{pVN_A}{RT}$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει η αρχή του Avogadro.

Υπενθυμίζεται ότι η αναλογία των mol αερίων ουσίων είναι ίση με την αναλογία των όγκων τους. Π.χ. αν σε ένα αέριο μίγμα περιέχονται n_A mol A και n_B mol B, τότε:

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{V_A}{V_B}$$

όπου V_A και V_B , οι όγκοι των δυο αερίων A και B.

Στις ασκήσεις, χάριν απλοποίησης στους υπολογισμούς, θεωρούμε ότι ο αριθμός Avogadro είναι ίσος με:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Αρχή Avogadro

Ίσοι όγκοι ιδανικά συμπεριφερόμενων αερίων στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων.

33. Να βρεθεί ο αριθμός των μορίων του N_2 που υπάρχουν σε ένα μικρό σφαιρικό δοχείο διαμέτρου 6 cm στους 127 °C και πίεση 1 atm.

Απάντηση

Για να βρούμε τον αριθμό των μορίων, N , που περιέχονται σε ορισμένο όγκο αερίου υπό ορισμένες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, αντικαθιστούμε στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων την ποσότητα, n , του αερίου με N/N_A .

όπου: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, ο αριθμός Avogadro.

Έτσι η καταστατική εξίσωση γίνεται:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{N}{N_A}RT \Rightarrow N = \frac{pVN_A}{RT}$$

Για να βρεθεί, όμως, ο αριθμός των μορίων, N , πρέπει πρώτα να υπολογιστεί ο όγκος του αερίου, ο οποίος είναι ίσος με τον όγκο του δοχείου που το περιέχει. Ο όγκος του σφαιρικού δοχείου είναι:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{3}{100} \text{ m}\right)^3 = 113 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ή } 113 \cdot 10^{-3} \text{ L}$$

Έτσι ο αριθμός των μορίων, N , του αερίου N_2 είναι:

$$N = \frac{pVN_A}{RT} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 113 \cdot 10^{-3} \text{ L} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 400 \text{ K}} = 20,7 \cdot 10^{20}$$

34. Φιάλη όγκου 1 L περιέχει αέριο προπάνιο σε θερμοκρασία 27 °C και υπό πίεση 2 atm. Να βρεθεί ο αριθμός των μορίων του προπανίου ανά cm^3 στις παραπάνω συνθήκες.

Απάντηση

Ο αριθμός των μορίων του προπανίου υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{N}{N_A}RT \Rightarrow N = \frac{pVN_A}{RT}$$

και είναι

$$N = \frac{pVN_A}{RT} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = 4,9 \cdot 10^{22}$$

Ο αριθμός αυτός των μορίων περιέχεται σε όγκο αερίου ίσο με 1 L ή 1000 cm³, δηλαδή όσο ο όγκος της φιάλης. Στην άσκηση όμως ζητείται ο αριθμός των μορίων του προπανίου ανά cm³. Άρα υπάρχουν 4,9·10¹⁹ μόρια προπανίου ανά cm³.

35. Πόσο όγκο καταλαμβάνουν τα 25 · 10²³ μόρια He στους 27 °C και πίεση 1 atm;

Απάντηση

Ο όγκος που καταλαμβάνουν τα μόρια του He υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT \Rightarrow V = \frac{NRT}{pN_A}$$

και είναι

$$V = \frac{25 \cdot 10^{23} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{1 \text{ atm} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 102,1 \text{ L}$$

36. Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των mol και των μορίων ενός ισομοριακού και ιδανικά συμπεριφερόμενου μίγματος CO₂ και N₂, το οποίο βρίσκεται σε δοχείο όγκου 1 L υπό πίεση 1,5 atm και σε θερμοκρασία 27 °C.

Απάντηση

Έστω x mol CO₂ και x mol N₂. Έτσι τα ολικά mol του αερίου μίγματος είναι 2x mol.

Αντικαθιστώντας για το αέριο μίγμα στην καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT$$

προκύπτει ότι:

$$1,5 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L} = 2x \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K} \Rightarrow x = 0,03 \text{ mol}$$

Άρα το αέριο μίγμα αποτελείται από 0,03 mol CO₂ και 0,03 mol N₂ και τα ολικά mol του μίγματος είναι:

$$n_{ολ.} = n_{CO_2} + n_{N_2} = 0,03 + 0,03 = 0,06 \text{ mol}$$

Ο αριθμός των μορίων του αερίου μίγματος υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT \Rightarrow N = \frac{pVN_A}{RT}$$

και είναι

$$N = \frac{pVN_A}{RT} = \frac{1,5 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = 3,7 \cdot 10^{22}$$

37. Να βρεθεί ο αριθμός των μορίων που περιέχονται σε 10 L αέριου μίγματος αν θεωρηθεί ότι αποτελείται από N_2 και O_2 , με κλάσματα όγκου $\varphi(N_2) = 80\%$ και $\varphi(O_2) = 20\%$, καθώς και η πυκνότητα μάζας αυτού σε g L^{-1} στους 20°C και υπό πίεση 1 atm , εάν το αέριο μίγμα συμπεριφέρεται ιδανικά.

Απάντηση

Ο αριθμός των μορίων στο αέριο μίγμα υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{N}{N_A}RT \Rightarrow N = \frac{pVN_A}{RT}$$

και είναι

$$N = \frac{pVN_A}{RT} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 10 \text{ L} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 2,5 \cdot 10^{23}$$

Η πυκνότητα μάζας του αέριου μίγματος υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{\bar{M}}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{\bar{M}} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{\bar{M}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p\bar{M}}{RT}$$

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι για τον υπολογισμό της πυκνότητας μάζας του αέριου μίγματος απαιτείται η μέση μοριακή μάζα του μίγματος, η οποία είναι ίση με:

$$\bar{M} = \frac{n_{O_2}}{n_{ολ.}} M_{O_2} + \frac{n_{N_2}}{n_{ολ.}} M_{N_2} = \frac{V_{O_2}}{V_{ολ.}} M_{O_2} + \frac{V_{N_2}}{V_{ολ.}} M_{N_2} = \frac{20}{100} \cdot 32 + \frac{80}{100} \cdot 28 = 28,8 \text{ g mol}^{-1}$$

Άρα η πυκνότητα μάζας του αέριου μίγματος είναι:

$$\rho = \frac{p\bar{M}}{RT} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 28,8 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 1,2 \text{ g L}^{-1}$$

Ως κλάσμα όγκου (volume fraction), φ , ορίζεται ο λόγος του όγκου της διαλυμένης ουσίας προς το συνολικό όγκο του διαλύματος [30].

Η % v/v έκφραση περιεκτικότητας των διαλυμάτων (υγρών και αερίων) είναι πλέον γνωστή ως κλάσμα όγκου, φ , και εκφράζει την % κατ' όγκο σύσταση, δηλαδή εκφράζει τον όγκο σε mL της διαλυμένης ουσίας σε 100 mL του διαλύματος. Π.χ. αν ένα αέριο μίγμα περιέχει 20% O_2 , τότε το κλάσμα όγκου του O_2 στο μίγμα είναι $\varphi(O_2) = 20\%$ ή $\varphi(O_2) = 0,2$.

2.4.6. Νόμος των μερικών πιέσεων του Dalton

Στα μίγματα ιδανικά συμπεριφερόμενων αερίων κάθε συστατικό διατηρεί τις ίδιες ιδιότητες, όπως πριν την ανάμιξή του με τα υπόλοιπα συστατικά του μίγματος, δηλαδή κάθε αέριο συστατικό συμπεριφέρεται ανεξάρτητα από την παρουσία των άλλων. Για την ολική πίεση, p , του αέριου μίγματος βρέθηκε από τον Dalton ότι:

«Η ολική πίεση μίγματος ιδανικά συμπεριφερόμενων αερίων είναι ίση με το άθροισμα των μερικών πιέσεων των συστατικών του μίγματος σε σταθερή θερμοκρασία».

Η μερική πίεση αερίου σε ένα μίγμα αερίων είναι η πίεση που θα ασκούσε το αέριο αν καταλάμβανε μόνο του όλο τον όγκο του δοχείου στην ίδια θερμοκρασία.

Έστω ένα αέριο μίγμα που αποτελείται από s ιδανικά συμπεριφερόμενα αέρια σε ποσότητες $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ και βρίσκεται σε δοχείο όγκου V . Σύμφωνα με το νόμο του Dalton για την ολική πίεση, p , του μίγματος ισχύει η σχέση:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_s$$

όπου $p_1, p_2, p_3, \dots, p_s$ οι μερικές πιέσεις των συστατικών του μίγματος.

Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ισχύει για το μίγμα των αερίων, δηλαδή

$$pV = nRT \quad (1)$$

όπου n ο συνολικός αριθμός mol του μίγματος δηλαδή

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s$$

αλλά και για κάθε αέριο συστατικό, i , του μίγματος, δηλαδή

$$p_i V = n_i RT \quad (2)$$

όπου n_i ο αριθμός των mol του.

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{p}{p_i} = \frac{n}{n_i}$$

ή

$$p_i = \frac{n_i}{n} p \quad (3)$$

Το πηλίκο του αριθμού των mol ενός αέριου συστατικού i του μίγματος προς τον συνολικό αριθμό των mol των συστατικών του μίγματος ονομάζεται *κλάσμα ποσότητας* και συμβολίζεται με x_i , δηλαδή

$$x_i = \frac{n_i}{n} \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει η μερική πίεση ενός αέριου συστατικού μίγματος ότι δίνεται από τη σχέση:

$$p_i = x_i p$$

δηλαδή «*Η μερική πίεση ενός αερίου σε ένα μίγμα ιδανικά συμπεριφερόμενων αερίων είναι ίση με το γινόμενο του κλάσματος ποσότητας του αερίου επί την ολική πίεση του αέριου μίγματος*».

Οι μερικές πιέσεις, p_1 και p_2 , δυο συστατικών του μίγματος 1 και 2 είναι:

$$p_1 = \frac{n_1 RT}{V} \quad (5)$$

$$p_2 = \frac{n_2 RT}{V} \quad (6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει η σχέση:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

δηλαδή «*ο λόγος των μερικών πιέσεων των συστατικών του μίγματος είναι ίσος με το λόγο των mol αυτών*».

Στις ασκήσεις με το νόμο του Dalton συνήθως ζητείται η μερική πίεση αερίου σε ένα μίγμα, καθώς επίσης και η ολική πίεση του μίγματος. Επίσης είναι δυνατό να ζητείται ο λόγος των μερικών πιέσεων δύο συστατικών του μίγματος ή ο λόγος της μερικής πίεσης ενός συστατικού προς την ολική πίεση του μίγματος.

Μία άλλη κατηγορία ασκήσεων στις οποίες βρίσκει εφαρμογή ο νόμος του Dalton είναι για τη μέτρηση της τάσης των ατμών ενός αέριου συστατικού που παράγεται από μία χημική αντίδραση, με τη χρήση ειδικής συσκευής. Από την τάση ατμών του συστατικού

Το άθροισμα των κλασμάτων ποσότητας όλων των αερίων σε ένα μίγμα είναι ίσο με τη μονάδα.

Για ένα αέριο μίγμα αποτελούμενο από s συστατικά, θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^s x_i = 1$$

υπολογίζεται στη συνέχεια με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης ο όγκος του αερίου που παράχθηκε από τη χημική αντίδραση.

38. Σε δοχείο όγκου V περιέχεται μίγμα δύο αερίων A και B που δεν αντιδρούν μεταξύ τους. Αν η μερική πίεση του αερίου A είναι διπλάσια από τη μερική πίεση του B και η ολική πίεση του μίγματος είναι 1,5 atm, να υπολογιστούν οι μερικές πιέσεις των αερίων A και B.

Απάντηση

Έστω p_A η μερική πίεση του αερίου A και p_B η μερική πίεση του αερίου B.

Η μερική πίεση του αερίου A είναι διπλάσια από τη μερική πίεση του αερίου B, δηλαδή ισχύει:

$$p_A = 2p_B \quad (1)$$

Η ολική πίεση του μίγματος των δύο αερίων είναι 1,5 atm, δηλαδή ισχύει:

$$p_A + p_B = 1,5 \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $p_A = 1$ atm και $p_B = 0,5$ atm.

39. Σε δύο σφαιρικά δοχεία όγκου V_A και V_B , που συνδέονται μεταξύ τους με στρόφιγγα, υπάρχουν n_A και n_B mol των αερίων A και B, αντίστοιχα. Τα αέρια στα δύο σφαιρικά δοχεία έχουν την ίδια πίεση p και βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία T . Να δείξετε ότι, μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας, η ολική πίεση του μίγματος των δύο αερίων είναι ίση με p [17].

Απάντηση

Για το αέριο A ισχύει:

$$p_A V_A = n_A RT \quad (1)$$

Για το αέριο B ισχύει:

$$p_B V_B = n_B RT \quad (2)$$

Επίσης ισχύει

$$p_A = p_B = p \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3) προκύπτει η σχέση:

$$\frac{p_A V_A}{p_B V_B} = \frac{n_A}{n_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{n_A}{n_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_A + V_B} = \frac{n_A}{n_A + n_B} \Rightarrow \frac{n_A + n_B}{V_A + V_B} = \frac{n_A}{V_A} \quad (4)$$

Όταν ανοίξει η στρόφιγγα που συνδέει τα δοχεία, τα δύο αέρια θα καταλαμβάνουν τον όγκο των δύο δοχείων, ο οποίος είναι ίσος με $V_A + V_B$. Η ολική πίεση του μίγματος των αερίων είναι ίση με το άθροισμα των μερικών πιέσεων των αερίων Α και Β, επομένως:

$$p_{ολ.} = p_A + p_B \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4) προκύπτει ότι:

$$p_{ολ.} = p_A + p_B = \frac{n_A RT}{V_A + V_B} + \frac{n_B RT}{V_A + V_B} = \frac{n_A + n_B}{V_A + V_B} RT = \frac{n_A}{V_A} RT = p_A = p$$

40. Σε μια φιάλη υπάρχει ορισμένη μάζα m g ενός ιδανικού αερίου Α υπό πίεση p_1 . Στην ίδια φιάλη προσθέτουμε μάζα ίση με $m/2$ g ενός ιδανικού αερίου Β και το αέριο μίγμα ασκεί πίεση ίση με p_2 . Αν για τις μοριακές μάζες των δύο αερίων Α και Β ισχύει $M_A = 10 M_B$, να βρεθεί:

α) ο λόγος των πιέσεων p_1/p_2 και

β) ο λόγος των μερικών πιέσεων των δυο αερίων Α και Β στο αέριο μίγμα.

Απάντηση

α) Αρχικά στο δοχείο υπάρχει μόνο το αέριο Α. Η μάζα του είναι ίση με $m_A = m$ g και η πίεση που ασκεί είναι ίση με $p_A = p_1$.

Για το αέριο Α ισχύει:

$$p_A V = n_A RT \Rightarrow p_A V = \frac{m_A}{M_A} RT \Rightarrow p_A = \frac{m_A RT}{M_A V} \quad (1)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $m_A = m$, $p_A = p_1$ και $M_A = 10 M_B$ η σχέση (1) γίνεται:

$$p_1 = \frac{m RT}{10 M_B V} \quad (2)$$

Στη συνέχεια στο ίδιο δοχείο προστίθεται μάζα ίση με $m_B = m / 2$ g ενός ιδανικού αερίου Β και η ολική πίεση των δύο αερίων στο δοχείο γίνεται ίση με p_2 .

Για το αέριο μίγμα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 p_2 V &= n_{ολ.} RT \Rightarrow p_2 V = \left(\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B} \right) RT \Rightarrow p_2 V = \left(\frac{m}{10 M_B} + \frac{\frac{m}{2}}{M_B} \right) RT \Rightarrow \\
 \Rightarrow p_2 V &= \left(\frac{m}{10 M_B} + \frac{m}{2 M_B} \right) RT \Rightarrow p_2 V = \left(\frac{m}{10 M_B} + \frac{5m}{10 M_B} \right) RT \Rightarrow p_2 V = \frac{6mRT}{10 M_B} \Rightarrow \\
 \Rightarrow p_2 &= \frac{6mRT}{10 M_B V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{mRT}{10 M_B V}}{\frac{6mRT}{10 M_B V}} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{6} \quad (4)$$

β) Η ολική πίεση του αερίου μίγματος είναι ίση με το άθροισμα των μερικών πιέσεων, p_A και p_B , των συστατικών Α και Β του μίγματος, δηλαδή $p_2 = p_A + p_B$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η μερική πίεση p_B του αερίου Β είναι:

$$\begin{aligned}
 p_B &= p_2 - p_A \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \\
 \Rightarrow p_B &= 6p_1 - p_1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow p_B &= 5p_1
 \end{aligned}$$

Επομένως ο λόγος των μερικών πιέσεων, p_A και p_B , των αερίων Α και Β είναι:

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{p_1}{5p_1} = \frac{1}{5}$$

41. Να υπολογιστεί η μάζα καθενός από τα συστατικά αέριου μίγματος που αποτελείται από N_2 και Xe και περιέχεται σε φιάλη όγκου 2,5 L. Η μερική πίεση του Xe είναι 350 Torr και η ολική πίεση του μίγματος 740 Torr στους 25 °C.

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο του Dalton η ολική πίεση ενός αέριου μίγματος είναι ίση με το άθροισμα των μερικών πιέσεων των αερίων συστατικών του, δηλαδή:

$$p_{ολ.} = p_{N_2} + p_{Xe}$$

Η ολική πίεση και η μερική πίεση του Xe είναι γνωστές, άρα η μερική πίεση του N_2 είναι:

$$p_{N_2} = p_{ολ.} - p_{Xe} = 740 - 350 = 390 \text{ mm Hg}$$

Η μάζα κάθε συστατικού του αέριου μίγματος υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow m = \frac{pVM}{RT}$$

Έτσι για το αέριο Xe :

$$m_{Xe} = \frac{pVM_{Xe}}{RT} = \frac{\left(\frac{350}{760}\right) \text{ atm} \cdot 2,5 \text{ L} \cdot 131 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}} = 6,17 \text{ g Xe}$$

Για το αέριο N_2 :

$$m_{N_2} = \frac{pVM_{N_2}}{RT} = \frac{\left(\frac{390}{760}\right) \text{ atm} \cdot 2,5 \text{ L} \cdot 28 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}} = 1,47 \text{ g } N_2$$

Άρα το αέριο μίγμα περιέχει 6,17 g Xe και 1,47 g N_2 .

42. Σε δύο σφαιρικά δοχεία όγκου 1 L και 1,5 L, αντίστοιχα, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με στρόφιγγα, εισάγονται αέριο Ar και αέριο He υπό πίεση 0,75 atm και 1,17 atm, αντίστοιχα, στην ίδια θερμοκρασία. Να υπολογιστεί μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας: α) η μερική πίεση των συστατικών του μίγματος, β) η ολική πίεση και γ) το κλάσμα ποσότητας του κάθε αερίου συστατικού του μίγματος.

Απάντηση

α) Αν ανοίξουμε τη στρόφιγγα, ο όγκος που θα καταλαμβάνουν τα δύο αέρια είναι ο ολικός όγκος των δύο σφαιρικών δοχείων, δηλαδή

$$V_{\text{τελ.}} = 1 \text{ L} + 1,5 \text{ L} = 2,5 \text{ L}$$

και η πίεση που θα ασκεί το κάθε αέριο στο μίγμα που προκύπτει είναι ίση με τη μερική πίεση του κάθε αερίου.

Εφόσον κατά το άνοιγμα της στρόφιγγας η θερμοκρασία είναι σταθερή, η μεταβολή είναι ισόθερμη και ισχύει ο νόμος του Boyle.

Από το νόμο του Boyle για το αέριο Ar προκύπτει για τη μερική πίεση του Ar ότι ισχύει η σχέση:

$$p_{\text{αρχ.,Ar}} \cdot V_{\text{αρχ.,Ar}} = p_{\text{τελ.,Ar}} \cdot V_{\text{τελ.,Ar}} \Rightarrow p_{\text{τελ.,Ar}} = \frac{p_{\text{αρχ.,Ar}} \cdot V_{\text{αρχ.,Ar}}}{V_{\text{τελ.,Ar}}}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι είναι:

$$p_{\text{τελ.,Ar}} = \frac{0,75 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L}}{2,5 \text{ L}} = 0,3 \text{ atm}$$

Όμοια για τη μερική πίεση του He ισχύει η σχέση:

$$p_{\text{τελ.,He}} = \frac{p_{\text{αρχ.,He}} \cdot V_{\text{αρχ.,He}}}{V_{\text{τελ.,He}}}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι είναι:

$$p_{\text{τελ.,He}} = \frac{1,170 \text{ atm} \cdot 1,5 \text{ L}}{2,5 \text{ L}} = 0,7 \text{ atm}$$

β) Η ολική πίεση του αερίου μίγματος που προκύπτει μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας θα είναι σύμφωνα με το νόμο του Dalton ίση με τις μερικές πιέσεις των αερίων συστατικών του μίγματος, δηλαδή

$$p_{\text{ολ.}} = p_{\text{τελ.,Ar}} + p_{\text{τελ.,He}} = 0,3 \text{ atm} + 0,7 \text{ atm} = 1,0 \text{ atm}$$

γ) Το κλάσμα ποσότητας, x_i , ενός συστατικού σε ένα μίγμα είναι ίσο με το λόγο του αριθμού των mol του συστατικού προς το άθροισμα των mol όλων των συστατικών του μίγματος ή διαφορετικά ο λόγος της μερικής πίεσης του συστατικού στο μίγμα προς την ολική πίεση του μίγματος

$$x_i = \frac{n_i}{n_{ολ.}} = \frac{p_i}{p_{ολ.}}$$

Το κλάσμα ποσότητας του αερίου Ar είναι

$$x_{Ar} = \frac{n_{Ar}}{n_{ολ.}} = \frac{p_{Ar}}{p_{ολ.}} = \frac{0,3}{1,0} = 0,3$$

Και επειδή το άθροισμα των κλασμάτων ποσότητας όλων των συστατικών ενός μίγματος είναι πάντοτε ίσο με τη μονάδα, δηλαδή

$$x_{Ar} + x_{He} = 1$$

προκύπτει ότι το κλάσμα ποσότητας του He είναι

$$x_{He} = 1 - x_{Ar} = 1 - 0,3 = 0,7$$

43. Δύο σφαιρικά δοχεία A και B περιέχουν αέριο Ar και συνδέονται μεταξύ τους με στρόφιγγα, η οποία αρχικά είναι κλειστή. Το δοχείο A έχει όγκο 1 L, θερμοστατείται σε θερμοκρασία 10 °C και το αέριο που υπάρχει στο εσωτερικό του ασκεί πίεση 2,4 atm. Το δοχείο B έχει διπλάσιο όγκο από το δοχείο A, θερμοστατείται στους 44 °C και το αέριο ασκεί πίεση 5,2 atm. Στη συνέχεια ανοίγεται η στρόφιγγα και τα δύο δοχεία θερμοστατούνται σε θερμοκρασία 25 °C. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το αέριο Ar στα δυο δοχεία μετά την αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας.

Απάντηση

Αρχικά θα υπολογιστεί η ποσότητα του αερίου Ar που περιέχεται στα δοχεία A και B πριν το άνοιγμα της στρόφιγγας.

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει για την ποσότητα του αερίου

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ποσότητα (mol) του Ar στο δοχείο A είναι:

$$n_A = \frac{2,4 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L}}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}} = 0,1 \text{ mol}$$

και στο δοχείο B:

$$n_B = \frac{5,2 \text{ atm} \cdot 2 \text{ L}}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 317 \text{ K}} = 0,4 \text{ mol}$$

Μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας το αέριο Ar θα εξαπλωθεί ομοιόμορφα στο χώρο και των δύο δοχείων.

Η ολική ποσότητα του Ar είναι:

$$n = n_A + n_B = 0,1 \text{ mol} + 0,4 \text{ mol} = 0,5 \text{ mol}$$

Ο όγκος που θα καταλαμβάνει το αέριο Ar είναι ο όγκος των δύο δοχείων και είναι ίσος με:

$$V = V_A + V_B = 1 \text{ L} + 2 \text{ L} = 3 \text{ L}$$

Ο χώρος των δύο δοχείων μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας θερμοστατείται στους 25 °C ή 298 K. Η πίεση που ασκεί το αέριο μετά την αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι είναι ίση με:

$$p = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}}{3 \text{ L}} = 4,1 \text{ atm}$$

44. Δύο σφαιρικά δοχεία A και B περιέχουν αέριο He και συνδέονται μεταξύ τους με στρόφιγγα, η οποία αρχικά είναι κλειστή. Το δοχείο A, θερμοστατείται σε θερμοκρασία 27 °C και το αέριο που υπάρχει στο εσωτερικό του ασκεί πίεση 4 atm. Το δοχείο B έχει διπλάσιο όγκο από το δοχείο A, θερμοστατείται στους 327 °C και το αέριο ασκεί πίεση 2 atm. Στη συνέχεια ανοίγεται η στρόφιγγα και τα δύο δοχεία συνεχίζουν να θερμοστατούνται το καθένα στην αρχική του θερμοκρασία.

α) Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το αέριο He στα δυο δοχεία μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας.

β) Να υπολογιστούν οι όγκοι των δύο δοχείων A και B και τα mol του αερίου σε κάθε δοχείο μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας, αν και στα δυο δοχεία περιέχονται συνολικά 3 mol του αερίου.

Απάντηση

α) Έστω n_A τα mol του αερίου στο δοχείο A και n_B τα mol του αερίου στο δοχείο B. Επειδή ο όγκος του δοχείου B είναι διπλάσιος από τον όγκο του δοχείου A, έστω $V_A = V$ L ο όγκος του δοχείου A και $V_B = 2V$ L ο όγκος του δοχείου B.

Πριν το άνοιγμα της στρόφιγγας

Για το αέριο στο δοχείο A ισχύει:

$$p_A V_A = n_A R T_A \quad (1)$$

ενώ για το αέριο στο δοχείο B:

$$p_B V_B = n_B R T_B \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{p_A V_A}{p_B V_B} = \frac{n_A R T_A}{n_B R T_B} &\Rightarrow \frac{4 \text{ atm} \cdot V \text{ L}}{2 \text{ atm} \cdot 2V \text{ L}} = \frac{n_A \cdot 300 \text{ K}}{n_B \cdot 600 \text{ K}} \Rightarrow 1 = \frac{n_A}{2n_B} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n_B = 0,5 n_A \end{aligned} \quad (3)$$

Τα ολικά mol του αερίου στα δύο δοχεία είναι:

$$\begin{aligned} n_{ολ.} = n_A + n_B &\stackrel{(3)}{\Rightarrow} n_{ολ.} = n_A + 0,5n_A \Rightarrow \\ &\Rightarrow n_{ολ.} = 1,5 n_A \end{aligned} \quad (4)$$

Μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας

Έστω n'_A τα mol του αερίου στο δοχείο A και n'_B τα mol του αερίου στο δοχείο B.

Έστω p'_A η πίεση του αερίου στο δοχείο A και p'_B η πίεση του αερίου στο δοχείο B. Επειδή τα δυο δοχεία συγκοινωνούν μεταξύ τους μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας ισχύει:

$$p'_A = p'_B \quad (5)$$

Για το αέριο στο δοχείο A ισχύει:

$$p'_A V_A = n'_A R T_A \quad (6)$$

ενώ για το αέριο στο δοχείο B:

$$p'_B V_B = n'_B R T_B \quad (7)$$

Για τα mol του αερίου στο δοχείο B ισχύει:

$$n'_B = n_{ολ.} - n'_A \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} n'_B = 1,5 n_A - n'_A \quad (8)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (6) και (7) και αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\frac{p'_A V_A}{p'_B V_B} = \frac{n'_A R T_A}{n'_B R T_B} \stackrel{(8)}{\Rightarrow} \frac{p'_A V_A}{p'_B V_B} = \frac{n'_A R T_A}{(1,5 n_A - n'_A) R T_B} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \frac{V_L}{2V_L} = \frac{n'_A \cdot 300 \text{ K}}{(1,5 n_A - n'_A) \cdot 600 \text{ K}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{n'_A}{2(1,5 n_A - n'_A)} \Rightarrow n'_A = 1,5 n_A - n'_A \Rightarrow 2n'_A = 1,5 n_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n'_A = 0,75 n_A \quad (9)$$

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει επίσης ότι:

$$n'_B = 1,5 n_A - 0,75 n_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n'_B = 0,75 n_A \quad (10)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (6) και αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\frac{p_A}{p'_A} = \frac{n_A}{n'_A} \stackrel{(9)}{\Rightarrow} \frac{4 \text{ atm}}{p'_A} = \frac{n_A}{0,75 n_A} \Rightarrow p'_A = 3 \text{ atm}$$

Άρα η πίεση p'_A του αέριου He μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας στο δοχείο A είναι 3 atm. Και επειδή οι πιέσεις στα δύο δοχεία είναι ίσες ισχύει ότι και η πίεση p'_B είναι 3 atm.

β) Δίνεται ότι στα δύο δοχεία A και B υπάρχουν συνολικά 3 mol αέριου He.

Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$n_{ολ.} = 1,5 n_A \Rightarrow 3 = 1,5 n_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_A = 2 \text{ mol} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (9) και (11) προκύπτει:

$$n'_A = 0,75 n_A \Rightarrow n'_A = 0,75 \cdot 2 \text{ mol} \Rightarrow n'_A = 1,5 \text{ mol}$$

και από τις σχέσεις (10) και (11):

$$n'_B = 0,75 n_A \Rightarrow n'_B = 0,75 \cdot 2 \text{ mol} \Rightarrow n'_B = 1,5 \text{ mol}$$

Άρα μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας υπάρχουν 1,5 mol αερίου στο δοχείο A και 1,5 mol αερίου στο δοχείο B.

Από τη σχέση (6) προκύπτει ότι ο όγκος του δοχείου A είναι ίσος με:

$$V_A = \frac{n'_A R T_A}{p'_A} = \frac{1,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ L atm mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3 \text{ atm}} = 12,3 \text{ L}$$

Επειδή ο όγκος του δοχείου Β είναι διπλάσιος από τον όγκο του δοχείου Α προκύπτει ότι:

$$V_B = 24,6 \text{ L}$$

45. Αέριο μίγμα υδρογονανθράκων αποτελείται από προπάνιο και βουτάνιο. Το μίγμα αυτό βρίσκεται σε φιάλη όγκου 500 cm³ σε θερμοκρασία 25 °C και υπό πίεση 100 kPa. Εάν η μάζα του αερίου στη φιάλη είναι 1,09 g, να υπολογιστεί η % σε mol σύσταση του μίγματος.

Απάντηση

Επειδή δεν είναι γνωστός ο αριθμός των mol του κάθε συστατικού στο αέριο μίγμα, υποθέτουμε ότι έστω x mol προπανίου και y mol βουτανίου. Ο ολικός αριθμός των mol του αερίου μίγματος υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση:

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι

$$n = \frac{1 \text{ atm} \cdot 0,5 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}} = 0,02 \text{ mol}$$

Επομένως ισχύει η σχέση:

$$x + y = 0,02 \quad (1)$$

Επίσης δίνεται ότι η μάζα του αερίου στη φιάλη είναι ίση με 0,95 g. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} m_{\text{μικμ.}} &= m_{\text{προπ.}} + m_{\text{βουτ.}} \Rightarrow m_{\text{μικμ.}} = n_{\text{προπ.}} M_{\text{προπ.}} + n_{\text{βουτ.}} M_{\text{βουτ.}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1,09 = 44x + 58y \end{aligned} \quad (2)$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) πραγματοποιείται πολύ εύκολα με το Mathematica.

Έτσι σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica ορίζουμε τα εξής:

```
Solve[ {x+y==0.02&&44x+58y==1.09} , {x,y} ]
{{x->0.005,y->0.015}}
```

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $x = 0,005$ και $y = 0,015$. Άρα το μίγμα περιέχει 0,005 mol προπάνιο και 0,015 mol βουτάνιο.

Έτσι η % σύσταση σε mol του μίγματος σε προπάνιο και βουτάνιο είναι:

$$\% \text{ προπάνιο} = \frac{n_{\text{προπ.}}}{n_{\text{ολ.}}} \cdot 100 = \frac{0,005}{0,02} \cdot 100 = 25 \%$$

$$\% \text{ βουτάνιο} = \frac{n_{\text{βουτ.}}}{n_{\text{ολ.}}} \cdot 100 = \frac{0,015}{0,02} \cdot 100 = 75 \%$$

46. Ποσότητα στερεού χλωρικού καλίου (KClO_3) θερμαίνεται σε δοκιμαστικό σωλήνα και διασπάται σύμφωνα με την παρακάτω αντίδραση:



Το αέριο οξυγόνο που παράγεται συλλέγεται μέσω ειδικής συσκευής σε ανεστραμμένο δοκιμαστικό σωλήνα γεμάτο με νερό σε θερμοκρασία 20°C και πίεση 783,4 Torr. Αν ο όγκος του αερίου που συλλέγεται είναι 0,36 L, να υπολογιστεί η μερική πίεση του O_2 στο αέριο που συλλέγεται, καθώς και η μάζα του KClO_3 που διασπάστηκε αρχικά. Δίνεται ότι η τάση ατμών του νερού στους 20°C ίση με 21,4 Torr.

Απάντηση

Το αέριο O_2 που παράγεται κατά τη διάσπαση του KClO_3 συλλέγεται μέσω ειδικής συσκευής σε ανεστραμμένο δοκιμαστικό σωλήνα γεμάτο με νερό. Το αέριο O_2 συνυπάρχει με υδρατμούς, η πίεση (τάση ατμών) των οποίων εξαρτάται από τη θερμοκρασία στην οποία εκτελείται το πείραμα. Ισχύει:

$$p_{\text{ατμ.}} = p_{\text{O}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow p_{\text{O}_2} = p_{\text{ατμ.}} - p_{\text{H}_2\text{O}}$$

Έτσι η μερική πίεση του O_2 είναι:

$$p_{\text{O}_2} = 783,4 - 21,4 = 762 \text{ Torr}$$

Ο αριθμός των mol του O_2 που παράγεται υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι:

$$n = \frac{\left(\frac{762}{760}\right) \text{ atm} \cdot 0,36 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,015 \text{ mol}$$

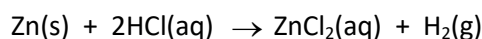
Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης διάσπασης είναι φανερό ότι για να παραχθούν 0,015 mol O₂ πρέπει να αντιδράσουν 0,01 mol KClO₃. Άρα η μάζα του KClO₃ που διασπάστηκε αρχικά είναι ίση με:

$$m = nM_{KClO_3} \Rightarrow m = 0,01 \text{ mol} \cdot 122,5 \text{ g mol}^{-1} = 1,225 \text{ g}$$

47. Σε στερεό δείγμα Zn καθαρότητας 97 % προστίθεται περίσσεια υδροχλωρικού οξέος, οπότε αντιδρά με αυτό μόνο ο Zn και παράγεται αέριο H₂. Το αέριο που παράγεται συλλέγεται μέσω ειδικής συσκευής σε ανεστραμμένο δοκιμαστικό σωλήνα γεμάτο με νερό. Εάν το αέριο H₂ που παράγεται έχει όγκο 270 mL σε θερμοκρασία 25 °C και πίεση 773,8 mm Hg, να υπολογιστεί η μάζα του αρχικού δείγματος. Δίνεται ότι η τάση ατμών του νερού στους 25 °C ίση με 23,8 mm Hg.

Απάντηση

Ο Zn που υπάρχει στο δείγμα αντιδρά με το HCl σύμφωνα με την αντίδραση:



Το αέριο H₂ που παράγεται συλλέγεται μέσω ειδικής συσκευής σε ανεστραμμένο δοκιμαστικό σωλήνα γεμάτο με νερό. Το αέριο H₂ συνυπάρχει με υδρατμούς, η πίεση (τάση ατμών) των οποίων εξαρτάται από τη θερμοκρασία στην οποία εκτελείται το πείραμα. Ισχύει:

$$p_{\text{ατμ.}} = p_{\text{H}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow p_{\text{H}_2} = p_{\text{ατμ.}} - p_{\text{H}_2\text{O}}$$

Έτσι η μερική πίεση του H₂ είναι

$$p_{\text{H}_2} = 773,8 - 23,8 = 750 \text{ mm Hg}$$

Ο αριθμός των mol του H₂ που παράγεται υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

και είναι

$$n = \frac{\left(\frac{750}{760}\right) \text{ atm} \cdot \left(\frac{270}{1000}\right) \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}} = 0,01 \text{ mol}$$

Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης είναι φανερό ότι αντέδρασαν 0,01 mol Zn, των οποίων η μάζα είναι ίση με:

$$m = n A_{Zn} \Rightarrow m = 0,01 \text{ mol} \cdot 65 \text{ g mol}^{-1} = 0,65 \text{ g}$$

Εφόσον η καθαρότητα του δείγματος Zn είναι 97 %, μάζα του αρχικού δείγματος είναι:

$$m_{\text{δειγμ.}} = \frac{100}{97} \cdot 0,65 = 0,67 \text{ g}$$

2.4.7. Νόμος των μερικών όγκων των Amagat - Leduc

Ο νόμος των Amagat - Leduc των αερίων, γνωστός και ως νόμος των μερικών όγκων, είναι ανάλογος με το νόμο των μερικών πιέσεων του Dalton.

Σύμφωνα με το νόμο των Amagat - Leduc «ο ολικός όγκος αερίου μίγματος ισούται με το άθροισμα των μερικών όγκων των συστατικών του».

Έστω ένα αέριο μίγμα που αποτελείται από s ιδανικά συμπεριφερόμενα αέρια σε ποσότητες $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$. Έτσι σύμφωνα με το νόμο των Amagat - Leduc ισχύει για το συνολικό όγκο του μίγματος η σχέση:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_s$$

όπου $V_1, V_2, V_3, \dots, V_s$ οι μερικοί όγκοι των συστατικών του μίγματος.

Ο μερικός όγκος συστατικού αερίου μίγματος είναι ο όγκος που θα καταλάμβανε μόνο του αν ασκούσε πίεση ίση με την ολική πίεση του μίγματος στην ίδια θερμοκρασία.

Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ισχύει για το μίγμα των αερίων, δηλαδή

$$pV = nRT \quad (1)$$

όπου n ο συνολικός αριθμός των mol του μίγματος δηλαδή

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s$$

αλλά και για κάθε αέριο συστατικό, i , του μίγματος, δηλαδή

$$pV_i = n_iRT \quad (2)$$

όπου n_i ο αριθμός των mol του.

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο λόγος του όγκου του αερίου μίγματος προς τον μερικό όγκο ενός συστατικού του είναι ίσος με το λόγο των mol αυτών στην ίδια θερμοκρασία δηλαδή:

$$\frac{V}{V_i} = \frac{n}{n_i}$$

ή

$$V_i = \frac{n_i}{n} V$$

Οι μερικοί όγκοι, V_1 και V_2 , δυο συστατικών του μίγματος 1 και 2 είναι:

$$V_1 = \frac{n_1 RT}{p} \quad (3)$$

$$V_2 = \frac{n_2 RT}{p} \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει η σχέση:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

δηλαδή «ο λόγος των μερικών όγκων των συστατικών του μίγματος είναι ίσος με το λόγο των mol αυτών».

Στις ασκήσεις με το νόμο των Amagat - Leduc συνήθως ζητείται ο μερικός όγκος αερίου σε ένα μίγμα, καθώς επίσης και ο ολικός όγκος του μίγματος. Επίσης είναι δυνατό να ζητείται ο λόγος των μερικών όγκων δύο συστατικών του μίγματος ή ο λόγος του μερικού όγκου ενός συστατικού προς τον ολικό όγκο του μίγματος.

48. Αέριο μίγμα αποτελείται από 0,1 mol H₂ και 0,4 mol Ne και ασκεί πίεση 1 atm στους 20 °C. Να υπολογιστεί ο όγκος του αερίου μίγματος καθώς και οι μερικοί όγκοι των συστατικών του.

Απάντηση

Το αέριο μίγμα αποτελείται από 0,5 mol αερίων συστατικών. Ο όγκος του αερίου μίγματος υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

και είναι ίσος με

$$V = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 12,0 \text{ L}$$

Οι μερικοί όγκοι των δύο συστατικών του μίγματος υπολογίζονται από την καταστατική εξίσωση

$$pV_i = n_i RT \Rightarrow V_i = \frac{n_i RT}{p}$$

και είναι

$$V_{H_2} = \frac{0,1 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 2,4 \text{ L}$$

και

$$V_{Ne} = \frac{0,4 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 9,6 \text{ L}$$

2.4.8. Εφαρμογή των νόμων των ιδανικών αερίων στα αερόστατα

Η λέξη αερόστατο προέρχεται από τις ελληνικές λέξεις «αήρ» και «στατός» και είναι ένα πτητικό μέσο που αιωρείται όταν το μπαλόνι του πληρώνεται, δηλαδή γεμίζεται, με αέριο μικρότερης πυκνότητας μάζας από αυτήν του ατμοσφαιρικού αέρα. Τα αερόστατα συνήθως



λειτουργούν με θερμό ατμοσφαιρικό αέρα, η διαφορά θερμοκρασίας του οποίου συντηρείται με φλόγιστρο στο κάτω μέρος του αεροστάτου, ή άλλα αέρια, όπως ήλιο και υδρογόνο. Τα αερόστατα είναι δυνατό να μεταφέρουν ανθρώπους, ζώα, κάμερες, μετεωρολογικά όργανα. Το βάρος του φορτίου που μπορεί να μεταφέρει ένα αερόστατο εξαρτάται από το αέριο πληρώσεως που χρησιμοποιείται και κατ' επέκταση από την ανυψωτική δύναμη αυτού.

2.4.8.1. Ανυψωτική δύναμη

Η ανυψωτική δύναμη (F_{lf} , lifting force) αεροστάτου είναι το φορτίο που μπορεί να ανυψώσει και εξαρτάται από τη διαφορά στην πυκνότητα μάζας του αερίου με το οποίο γεμίζεται το μπαλόνι του αεροστάτου από εκείνη του ατμοσφαιρικού αέρα, τον οποίο εκτοπίζει για να ανυψωθεί και μονάδα μέτρησής της είναι το Newton (N).

Η ανυψωτική δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$$F_{lf} = V_{\text{αεροστάτου}} \cdot g_n \cdot (\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πληρώσεως}})$$

ή

$$F_{lf} = m \cdot g_n$$

όπου:

$V_{\text{αεροστάτου}}$: ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου (σε m^3) σε ορισμένο ύψος,

g_n : η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9,807 \text{ m s}^{-2}$,

$\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}}$: η πυκνότητα μάζας του ατμοσφαιρικού αέρα (σε kg m^{-3}),

$\rho_{\text{αερίου πληρώσεως}}$: η πυκνότητα μάζας του αερίου (σε kg m^{-3}) με το οποίο πληρώνεται (γεμίζεται) το μπαλόνι του αεροστάτου για να ανυψωθεί και

m : τα kg μάζας που μπορεί να ανυψώσει το αερόστατο.

Στις ασκήσεις αυτές είναι δυνατό να ζητείται η ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου, το βάρος του φορτίου που μπορεί να μεταφέρει, ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου, καθώς και η πυκνότητα μάζας του αερίου πληρώσεως του αεροστάτου.

49. Ένα αερόστατο γεμίζεται α) με αέριο He και β) με αέριο H₂ και φτάνει σε ύψος όπου η πίεση είναι 0,95 atm. Αν η ακτίνα του μπαλονιού του στο ύψος αυτό είναι 3 m, να υπολογιστεί η ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου. Να θεωρηθεί ότι ο ατμοσφαιρικός αέρας αποτελείται από 78% N₂, 21% O₂ και 1% Ar και ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή και ίση με 293 K.

Απάντηση

α) Η ανυψωτική δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$$F_{lf} = V_{\text{αεροστάτου}} \cdot g_n \cdot (\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πληρώσεως}})$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η πυκνότητα μάζας ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

από την οποία θα υπολογιστεί η πυκνότητα μάζας του ατμοσφαιρικού αέρα και του αερίου He.

Ο ατμοσφαιρικός αέρας είναι μίγμα με μέση μοριακή μάζα

$$\begin{aligned} \bar{M} &= x_{N_2} M_{N_2} + x_{O_2} M_{O_2} + x_{Ar} M_{Ar} \Rightarrow \\ \bar{M} &= 0,78 \cdot 28,02 + 0,21 \cdot 32 + 0,01 \cdot 39,95 \Rightarrow \\ \bar{M} &= 29 \text{ g mol}^{-1} \end{aligned}$$

Η πυκνότητα μάζας του αέρα είναι:

$$\rho_{\text{αέρα}} = \frac{0,95 \text{ atm} \cdot 29 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 1,15 \text{ g L}^{-1} = 1,15 \text{ kg m}^{-3}$$

και η πυκνότητα μάζας του He:

$$\rho_{He} = \frac{0,95 \text{ atm} \cdot 4 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,16 \text{ g L}^{-1} = 0,16 \text{ kg m}^{-3}$$

Αν το μπαλόνι του αεροστάτου θεωρηθεί σφαιρικό, ο όγκος του δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

και είναι

$$V = \frac{4}{3}\pi(3 \text{ m})^3 = \frac{4}{3}3,14 \cdot 27 \text{ m}^3 = 113,04 \text{ m}^3$$

Άρα η ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου είναι:

$$F_{lf} = 113,04 \text{ m}^3 \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2}(1,15 \text{ kg m}^{-3} - 0,16 \text{ kg m}^{-3}) = 1097,5 \text{ N}$$

β) Όμοια υπολογίζεται και η ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου, όταν για τη λειτουργία του χρησιμοποιείται αέριο H_2 .

Η πυκνότητα μάζας του H_2 είναι:

$$\rho_{\text{H}_2} = \frac{0,95 \text{ atm} \cdot 2 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,08 \text{ g L}^{-1} = 0,08 \text{ kg m}^{-3}$$

Άρα η ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου είναι:

$$F_{lf} = 113,04 \text{ m}^3 \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2}(1,15 \text{ kg m}^{-3} - 0,08 \text{ kg m}^{-3}) = 1186,2 \text{ N}$$

50. Φορτίο μάζας 500 kg είναι απαραίτητο να μεταφερθεί με τη βοήθεια αερόστατου, το οποίο ανυψώνεται με τη βοήθεια αερίου He. Να υπολογιστεί ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου όταν αυτό φτάνει σε ύψος, όπου η πίεση είναι 0,92 atm. Να θεωρηθεί ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή και ίση με 293 K και ότι ο ατμοσφαιρικός αέρας έχει μοριακή μάζα 29 g mol^{-1} . Να θεωρήσετε αμελητέο το βάρος του αεροστάτου.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι η πυκνότητα μάζας ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

από την οποία θα υπολογιστεί η πυκνότητα μάζας του αέρα και του He.

Η πυκνότητα μάζας του αέρα είναι:

$$\rho_{\text{αέρα}} = \frac{0,92 \text{ atm} \cdot 29 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 1,11 \text{ g L}^{-1} = 1,11 \text{ kg m}^{-3}$$

και η πυκνότητα μάζας του He:

$$\rho_{He} = \frac{0,92 \text{ atm} \cdot 4 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,15 \text{ g L}^{-1} = 0,15 \text{ kg m}^{-3}$$

Η σχέση που μας δίνει την ανυψωτική δύναμη του αεροστάτου είναι:

$$F_{lf} = V_{\text{αεροστάτου}} \cdot g_n \cdot (\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πληρώσεως}})$$

με αναδιάταξη της οποίας προκύπτει ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου.

$$\frac{F_{lf}}{g_n} = V_{\text{αεροστάτου}} \cdot (\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πληρώσεως}}) \Rightarrow$$

$$m = V_{\text{αεροστάτου}} \cdot (\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πληρώσεως}}) \Rightarrow$$

$$V_{\text{αεροστάτου}} = \frac{m}{\rho_{\text{ατμοσφαιρικού αέρα}} - \rho_{\text{αερίου πληρώσεως}}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου είναι:

$$V_{\text{αεροστάτου}} = \frac{500 \text{ kg}}{1,11 \text{ kg m}^{-3} - 0,15 \text{ kg m}^{-3}} \Rightarrow$$

$$V_{\text{αεροστάτου}} = \frac{500 \text{ kg}}{0,96 \text{ kg m}^{-3}} \Rightarrow$$

$$V_{\text{αεροστάτου}} = 520,8 \text{ m}^3$$

51. Στην επιφάνεια της θάλασσας όπου η θερμοκρασία είναι 293 K και η πίεση 1 atm, το μπαλόνι ενός αεροστάτου, το οποίο θεωρείται σφαιρικό, έχει ακτίνα 2 m και περιέχει αέριο He. Να υπολογιστεί: α) η μάζα του αερίου He και β) η μεταβολή του όγκου του μπαλονιού όταν φτάσει σε ύψος όπου η θερμοκρασία είναι 263 K και η πίεση 0,6 atm.

Απάντηση

Ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

και στην επιφάνεια της θάλασσας είναι:

$$V = \frac{4}{3} \pi (2 \text{ m})^3 = \frac{4}{3} 3,14 \cdot 8 \text{ m}^3 = 33,493 \text{ m}^3$$

α) Η μάζα του αερίου He υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow m = \frac{pVM}{RT}$$

και είναι:

$$m_{He} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 33493 \text{ L} \cdot 4 \text{ g mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 5576,1 \text{ g ή } 5,5761 \text{ kg}$$

β) Ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου όταν αυτό φτάσει σε ύψος όπου η πίεση είναι 0,6 atm και η θερμοκρασία 263 K υπολογίζεται από το συνδυαστικό νόμο των ιδανικών αερίων

$$\frac{p_a V_a}{T_a} = \frac{p_\tau V_\tau}{T_\tau} \Rightarrow V_\tau = \frac{p_a V_a T_\tau}{p_\tau T_a}$$

και είναι

$$V_\tau = \frac{1 \text{ atm} \cdot 33493 \text{ L} \cdot 263 \text{ K}}{0,6 \text{ atm} \cdot 293 \text{ K}} = 50106 \text{ L ή } 50,106 \text{ m}^3$$

Άρα ο όγκος του μπαλονιού του αεροστάτου μεταβάλλεται κατά:

$$50,106 \text{ m}^3 - 33,493 \text{ m}^3 = 16,613 \text{ m}^3$$

2.4.9. Νόμος Laplace της βαρομετρικής πίεσης

Η σχέση που εκφράζει το νόμο της καθ' ύψος κατανομής της βαρομετρικής πίεσης, γνωστή και ως βαρομετρικός τύπος του Laplace, δίνει τη βαρομετρική πίεση με το ύψος. Η σχέση αυτή δείχνει ότι η ατμοσφαιρική πίεση μειώνεται εκθετικά με το ύψος και είναι

$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$$

όπου:

p : η βαρομετρική πίεση (σε atm) σε ύψος z ,

p_0 : η βαρομετρική πίεση (σε atm) στο επίπεδο της θάλασσας,

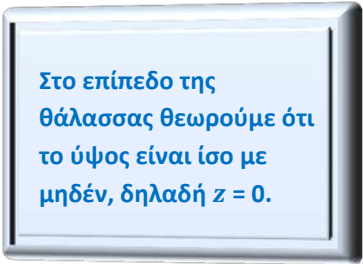
z : το ύψος (σε m),

\bar{M} : η μέση μοριακή μάζα του αέρα (σε kg mol^{-1}),

g_n : η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9,807 \text{ m s}^{-2}$,

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με $8,314 \text{ J K}^{-1}\text{mol}^{-1}$ και

T : η απόλυτη θερμοκρασία (σε K).



Στο επίπεδο της θάλασσας θεωρούμε ότι το ύψος είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $z = 0$.

Στις ασκήσεις αυτές συνήθως ζητείται να υπολογιστεί η βαρομετρική πίεση σε ορισμένο ύψος z .

52. Να βρεθεί η βαρομετρική πίεση σε ύψος 2,5, 5 και 10 km. Να θεωρηθεί ότι η πίεση στο επίπεδο της θάλασσας είναι $p_0 = 1 \text{ atm}$ και ότι η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με 10°C . Δίνεται η μέση μοριακή μάζα του αέρα ίση με $0,029 \text{ kg mol}^{-1}$.

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$z_1 = 2,5 \text{ km}$	$p_1 = ;$
$z_2 = 5 \text{ km}$	$p_2 = ;$
$z_3 = 10 \text{ km}$	$p_3 = ;$
$\theta = 10^\circ\text{C}$	
$p_0 = 1 \text{ atm}$	
$\bar{M} = 0,029 \text{ kg mol}^{-1}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Ζητείται η βαρομετρική πίεση σε ύψος 2,5 km, 5 km και 10 km, δηλαδή σε ύψος $z_1 = 2500 \text{ m}$, $z_2 = 5000 \text{ m}$ και $z_3 = 10000 \text{ m}$ και σε θερμοκρασία $T = 283 \text{ K}$. Η βαρομετρική πίεση στα διάφορα ύψη υπολογίζεται από το νόμο του Laplace

$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$$

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Σε ύψος $z_1 = 2500 \text{ m}$ η βαρομετρική πίεση είναι

$$p_1 = 1 \text{ atm} \cdot e^{-\frac{0,029 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2} \cdot 2500 \text{ m}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}} = 0,74 \text{ atm}$$

Όμοια υπολογίζεται ότι σε ύψος $z_2 = 5000 \text{ m}$ η βαρομετρική πίεση είναι $p_2 = 0,55 \text{ atm}$, ενώ σε ύψος $z_3 = 10000 \text{ m}$ είναι $p_3 = 0,30 \text{ atm}$.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το υψόμετρο, η βαρομετρική πίεση μειώνεται.

Άσκηση 52 - Λύση με τη χρήση του Mathematica

Να βρεθεί η βαρομετρική πίεση σε ύψος 2,5, 5 και 10 km. Να θεωρηθεί ότι η πίεση στο επίπεδο της θάλασσας είναι $p_0 = 1 \text{ atm}$ και ότι η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με 10°C . Δίνεται η μέση μοριακή μάζα του αέρα ίση με $0,029 \text{ kg mol}^{-1}$.

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα

$$z_1 = 2,5 \text{ km}$$

$$z_2 = 5 \text{ km}$$

$$z_3 = 10 \text{ km}$$

$$\theta = 10^\circ\text{C}$$

$$p_0 = 1 \text{ atm}$$

$$\bar{M} = 0,029 \text{ kg mol}^{-1}$$

Ζητούμενα

$$p_1 = ;$$

$$p_2 = ;$$

$$p_3 = ;$$

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Ζητείται η βαρομετρική πίεση σε ύψος 2,5 km, 5 km και 10 km, δηλαδή σε ύψος $z_1 = 2500 \text{ m}$, $z_2 = 5000 \text{ m}$ και $z_3 = 10000 \text{ m}$ και σε θερμοκρασία $T = 283 \text{ K}$. Η βαρομετρική πίεση στα διάφορα ύψη υπολογίζεται από το νόμο του Laplace

$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z/RT}$$

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Ανοίγουμε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica και ορίζουμε σε ένα κελί τις τιμές p_0 , \bar{M} , T , g_n , z και R . Στη συνέχεια γράφουμε την εντολή NSolve, την εξίσωση του Laplace και τη μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση, δηλαδή την πίεση, p .

```

p0=1;
M=0.029;
T=283;
gn=9.807;
z=2500;
R=8.314;
NSolve[p==p0*Exp[-(M*gn*z)/(R*T)],p,3]
{{p = 0.739199}}

```

Η βαρομετρική πίεση σε ύψος $z_1 = 2500$ m είναι $p_1 = 0,74$ atm.

Όμοια υπολογίζεται η πίεση και σε άλλο υψόμετρο. Στο παραπάνω λογισμικό θέτουμε στη συνέχεια διαδοχικά όπου z τις τιμές 5000 m και 10000 m και εκτελούμε τους υπολογισμούς. Έτσι σε ύψος $z_2 = 5000$ m η βαρομετρική πίεση είναι $p_2 = 0,55$ atm, ενώ σε ύψος $z_3 = 10000$ m είναι $p_3 = 0,30$ atm.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το υψόμετρο, η βαρομετρική πίεση μειώνεται.

53. Να βρεθούν οι μερικές πιέσεις των συστατικών του ατμοσφαιρικού αέρα σε ύψος α) 1000 m και β) 5000 m. Να θεωρηθεί ότι ο ατμοσφαιρικός αέρας αποτελείται μόνο από N_2 , O_2 και Ar , με κλάσματα ποσότητας $x(N_2) = 0,78$, $x(O_2) = 0,21$ και $x(Ar) = 0,01$. Να θεωρηθεί επίσης ότι η πίεση στο επίπεδο της θάλασσας είναι $p_0 = 1$ atm και ότι η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με 10 °C.

Απάντηση

Ζητούνται οι μερικές πιέσεις των συστατικών του ατμοσφαιρικού αέρα σε ύψος $z_1 = 1000$ m και $z_2 = 5000$ m σε θερμοκρασία $T = 293$ K. Αρχικά θα υπολογιστεί η βαρομετρική πίεση στα ύψη 1000 m και 5000 m χρησιμοποιώντας τον τύπο του Laplace

$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$$

και στη συνέχεια θα υπολογιστούν οι μερικές πιέσεις των συστατικών του στο αντίστοιχο ύψος χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$p_i = x_i p$$

όπου:

p_i : η μερική πίεση του συστατικού,

p : η ολική πίεση του μίγματος και

x_i : το κλάσμα ποσότητας του συστατικού.

α) Σε ύψος $z_1 = 1000$ m η βαρομετρική πίεση είναι:

$$p_1 = 1 \text{ atm} \cdot e^{-\frac{0,029 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2} \cdot 1000 \text{ m}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}} = 0,89 \text{ atm}$$

Οι μερικές πιέσεις του N_2 , του O_2 και του Ar είναι:

$$p_{N_2} = 0,78 \cdot 0,89 = 0,69 \text{ atm}$$

$$p_{O_2} = 0,21 \cdot 0,89 = 0,19 \text{ atm}$$

$$p_{Ar} = 0,01 \cdot 0,89 = 0,01 \text{ atm}$$

β) Όμοια σε ύψος $z_2 = 5000$ m η βαρομετρική πίεση είναι:

$$p_2 = 1 \text{ atm} \cdot e^{-\frac{0,029 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2} \cdot 5000 \text{ m}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}} = 0,56 \text{ atm}$$

Οι μερικές πιέσεις του N_2 , του O_2 και του Ar είναι:

$$p_{N_2} = 0,78 \cdot 0,56 = 0,44 \text{ atm}$$

$$p_{O_2} = 0,21 \cdot 0,56 = 0,11 \text{ atm}$$

$$p_{Ar} = 0,01 \cdot 0,56 = 0,01 \text{ atm}$$

54. Να υπολογιστεί η διαφορά πίεσης μεταξύ της κορυφής και της βάσης μιας εργαστηριακής στήλης αερίου ύψους 20 m και θερμοκρασίας 20 °C [16].

Απάντηση

Αν θεωρήσουμε ότι η βάση της στήλης βρίσκεται στο επίπεδο της επιφάνειας της θάλασσας, δηλαδή σε ύψος $z_1 = 0$, τότε η κορυφή της θα βρίσκεται σε ύψος $z_2 = 20$ m. Με τον τύπο του Laplace θα υπολογιστούν οι βαρομετρικές πιέσεις στα ύψη z_1 και z_2 .

Σε ύψος $z_1 = 0$ m η βαρομετρική πίεση είναι:

$$p_1 = 1 \text{ atm} \cdot e^{-\frac{0,029 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2} \cdot 0 \text{ m}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}} = 1 \text{ atm}$$

Σε ύψος $z_2 = 20$ m η βαρομετρική πίεση είναι:

$$p_2 = 1 \text{ atm} \cdot e^{-\frac{0,029 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2} \cdot 20 \text{ m}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}} = 0,9976 \text{ atm}$$

Άρα η διαφορά πίεσης μεταξύ της κορυφής και της βάσης της στήλης

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

είναι

$$\Delta p = 1 \text{ atm} - 0,9976 \text{ atm} = 0,0024 \text{ atm}$$

Όπως φαίνεται η διαφορά πίεσης είναι πάρα πολύ μικρή και αυτός είναι ο λόγος που κατά τους εργαστηριακούς προσδιορισμούς θεωρούμε την ατμοσφαιρική πίεση σταθερή.

Άσκηση 55

Να υπολογίσετε τη βαρομετρική πίεση σε ύψος 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 και 50 km και στη συνέχεια να σχεδιάσετε με τη βοήθεια του Mathematica ένα γράφημα το οποίο να δείχνει πώς μεταβάλλεται η βαρομετρική πίεση με το ύψος. Να θεωρήσετε ότι η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με 293 K. Δίνεται η μέση μοριακή μάζα του ατμοσφαιρικού αέρα $0,029 \text{ kg mol}^{-1}$.

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$z_1 = 0 \text{ km}$	$p_1 = ;$
$z_2 = 1 \text{ km}$	$p_2 = ;$
.....
.....
$z_{15} = 50 \text{ km}$	$p_{15} = ;$
$T = 293 \text{ K}$	
$p_0 = 1 \text{ atm}$	
$\bar{M} = 0,029 \text{ kg mol}^{-1}$	

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Ζητείται η βαρομετρική πίεση σε ύψος 0, 1, 2, 3..... 50 km και $T = 293$ K. Η βαρομετρική πίεση στα διάφορα ύψη υπολογίζεται από το νόμο του Laplace

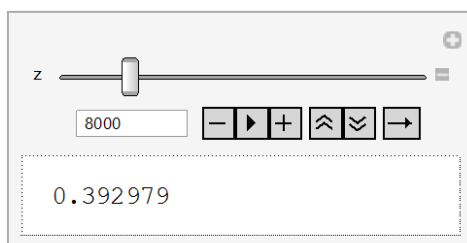
$$p = p_0 e^{-\bar{M}g_n z / RT}$$

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

Ανοίγουμε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica και ορίζουμε σε ένα κελί τις τιμές p_0 , \bar{M} , T , g_n , z και R . Στη συνέχεια γράφουμε την εντολή NSolve, την εξίσωση του Laplace και τη μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση, δηλαδή την πίεση, p .

```
p0=1;  
M=0.029;  
T=293;  
gn=9.807;  
z=2500;  
R=8.314;  
Manipulate[p0*Exp[-  
(M*gn*z)/(R*T)], {z, 0, 50000, 1000}, SaveDefinitions->True]
```

Η εκτέλεση της παραπάνω εντολής δίνει την παρακάτω εικόνα.



Μετακινώντας με το ποντίκι του υπολογιστή τη μπάρα μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τη βαρομετρική πίεση από 0 μέχρι 50000 m με βήμα 1000 m.

Τα αποτελέσματα αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί.

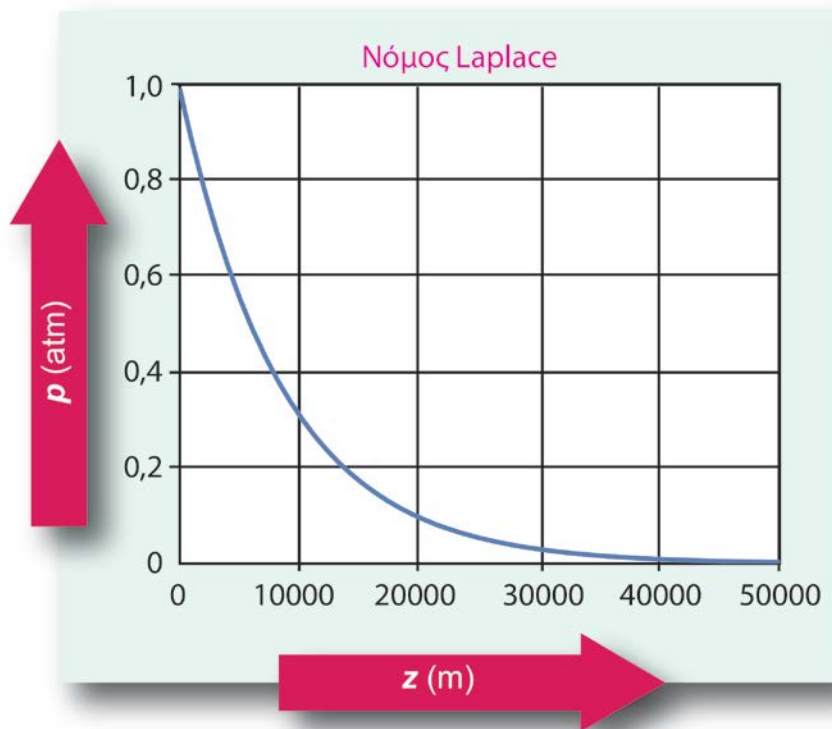
Ύψος z (m)	Βαρομετρική πίεση p (atm)
0	1
1000	0,889808
2000	0,791758
3000	0,704512
4000	0,62688
5000	0,557803
6000	0,496337
7000	0,441645
8000	0,392979
9000	0,349676
10000	0,311144
20000	0,096811
30000	0,030122
40000	0,009372
50000	0,002916

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε την εξάρτηση της βαρομετρικής πίεσης με το ύψος για τα πρώτα 50 km ή 50000 m. Έτσι γράφουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica την παρακάτω εντολή:

```
p0=1.0;
M=0.029;
gn=9.807;
R=8.314;
T=293;

Plot[{p0*Exp[-(M*gn*z)/(R*T)]}, {z,0,50000},
PlotRange -> {{0,50000},{0,1}},
AxesLabel -> {"z (m)", "p (atm)"}]
```

και παίρνουμε τη γραφική παράσταση



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΑΕΡΙΑ

3.1. Εισαγωγή

Τα πραγματικά αέρια που υπάρχουν στη φύση δεν υπακούουν στους νόμους των ιδανικών αερίων, καθώς γι' αυτά δεν ισχύουν οι δυο βασικές παραδοχές των ιδανικών αερίων. Τα μόρια των πραγματικών αερίων καταλαμβάνουν κάποιον όγκο και ανάμεσα στα μόριά τους ασκούνται δυνάμεις. Το γεγονός αυτό επιβάλλει την τροποποίηση της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων, ως προς την πίεση και τον όγκο. Για να είμαστε ακριβείς, τα πραγματικά αέρια προσεγγίζουν την ιδανική συμπεριφορά μόνο όταν βρίσκονται σε συνθήκες υψηλής θερμοκρασίας και χαμηλής πίεσης.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται για τα πραγματικά αέρια τα εξής:

- ✓ ο παράγοντας συμπιεστικότητας,
- ✓ η καταστατική εξίσωση van der Waals,
- ✓ οι σταθερές van der Waals,
- ✓ η αρχή των αντιστοίχων καταστάσεων,
- ✓ η καταστατική εξίσωση virial, καθώς και
- ✓ άλλες καταστατικές εξισώσεις (Berthelot και Dieterici).

Στον πίνακα 3 που ακολουθεί αναγράφονται οι μαθηματικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο για την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού.

Πίνακας 4. Τυπολόγιο για τα πραγματικά αέρια.

Τυπολόγιο	
Συντελεστής συμπιεστικότητας	ή $Z = \frac{pV}{nRT}$ $Z = \frac{pV_m}{RT}$
Καταστατική εξίσωση van der Waals	$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$
Κρίσιμα δεδομένα	$p_c = \frac{a}{27 b^2} \quad T_c = \frac{8 a}{27 R b} \quad V_c = 3b$
	$\rho_c = \frac{m_{(1 \text{ mol})}}{V_c} = \frac{M}{V_m}$
	$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c}$
Ανηγγμένη καταστατική εξίσωση	$\left(p_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(3V_r - 1) = 8T_r$
Ανηγγμένα δεδομένα	$p_r = \frac{p}{p_c} \quad T_r = \frac{T}{T_c} \quad V_r = \frac{V}{V_c}$
Καταστατική εξίσωση virial	ή $pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots\right)$ $pV_m = RT(1 + B'p + C'p^2 + \dots)$
Καταστατική εξίσωση Berthelot	$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{TV_m^2}$
Καταστατική εξίσωση Dieterici	$p = \frac{RT}{V_m - b} e^{-a/RTV_m}$

3.2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Το κριτήριο απόκλισης ενός αερίου από την ιδανική συμπεριφορά είναι η τιμή:

- α) της πίεσής του
- β) του όγκου του
- γ) του παράγοντα συμπιεστικότητας
- δ) τίποτα από τα παραπάνω

Απάντηση

Σωστή απάντηση: γ

Αιτιολόγηση

Το κριτήριο απόκλισης ενός αερίου από την ιδανική συμπεριφορά είναι η τιμή του παράγοντα συμπιεστικότητας. Όσο περισσότερο αποκλίνει η τιμή του παράγοντα συμπιεστικότητας ενός αερίου από τη μονάδα τόσο το αέριο αποκλίνει από την ιδανική συμπεριφορά.

2. Ο παράγοντας συμπιεστικότητας, Z , των αερίων σε πολύ χαμηλές πιέσεις και υψηλές θερμοκρασίες έχει τιμή:

- α) $Z > 1$
- β) $Z < 1$
- γ) $Z \approx 1$
- δ) $Z = 0$

Απάντηση

Ο παράγοντας συμπιεστικότητας, Z , των αερίων σε πολύ χαμηλές πιέσεις έχει τιμή $Z \approx 1$ διότι στις συνθήκες αυτές το αέριο τείνει στην ιδανική συμπεριφορά.

3. Τι σημαίνει πρακτικά για ένα αέριο ότι ο παράγοντας συμπιεστικότητας έχει τιμή $Z > 1$ ή $Z < 1$ σε σχέση με ένα ιδανικό αέριο και τι είδους δυνάμεις (ελκτικές ή απωστικές) επικρατούν μεταξύ των μορίων του αερίου σε κάθε περίπτωση;

Απάντηση

Όταν ο συντελεστής συμπεστικότητας ενός αερίου είναι $Z < 1$ υπερισχύουν οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, οι οποίες μειώνουν το μολαρικό όγκο του αερίου σε σχέση με εκείνον που θα είχε εάν το αέριο συμπεριφερόταν ιδανικά. Αντίθετα, όταν ο συντελεστής συμπεστικότητας ενός αερίου είναι $Z > 1$, τότε υπερισχύουν οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, οι οποίες αυξάνουν το μολαρικό όγκο του αερίου σε σχέση με εκείνον που θα είχε το αέριο εάν συμπεριφερόταν ιδανικά.

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) δικαιολογώντας την απάντησή σας, όπου αυτό απαιτείται.

- α) Η παράμετρος a της εξίσωσης van der Waals έχει την ίδια τιμή για όλα τα αέρια.
- β) Η παράμετρος b της εξίσωσης van der Waals σχετίζεται με το μέγεθος των μορίων.
- γ) Η παράμετρος a της εξίσωσης van der Waals αναπαριστά την ισχύ των απωστικών αλληλεπιδράσεων, ενώ η παράμετρος b αναπαριστά την ισχύ ελκτικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μορίων.
- δ) Ο όγκος που καταλαμβάνουν τα μόρια ενός πραγματικού αερίου είναι μεγαλύτερος από τον όγκο που καταλαμβάνουν τα μόρια ενός ιδανικού αερίου.
- ε) Οι σταθερές a και b της εξίσωσης van der Waals εξαρτώνται από τη θερμοκρασία.
- στ) Στη θερμοκρασία Boyle, T_B , ένα αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά.

Απάντηση

- α) Λάθος. Η σταθερά van der Waals a έχει διαφορετική τιμή για κάθε αέριο.
- β) Σωστό
- γ) Λάθος. Η παράμετρος a της εξίσωσης van der Waals αναπαριστά την ισχύ των ελκτικών αλληλεπιδράσεων, ενώ η παράμετρος b αναπαριστά την ισχύ απωστικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μορίων.
- δ) Λάθος. Ο όγκος που καταλαμβάνουν τα μόρια ενός πραγματικού αερίου είναι μικρότερος από τον όγκο που καταλαμβάνουν τα μόρια ενός ιδανικού αερίου.
- ε) Λάθος. Οι σταθερές a και b της εξίσωσης van der Waals είναι ανεξάρτητοι από τη θερμοκρασία.
- στ) Σωστό

5. Οι σταθερές παράμετροι a και b των καταστατικών εξισώσεων Berthelot και Dieterici έχουν την ίδια τιμή με τις σταθερές a και b της εξίσωσης van der Waals;

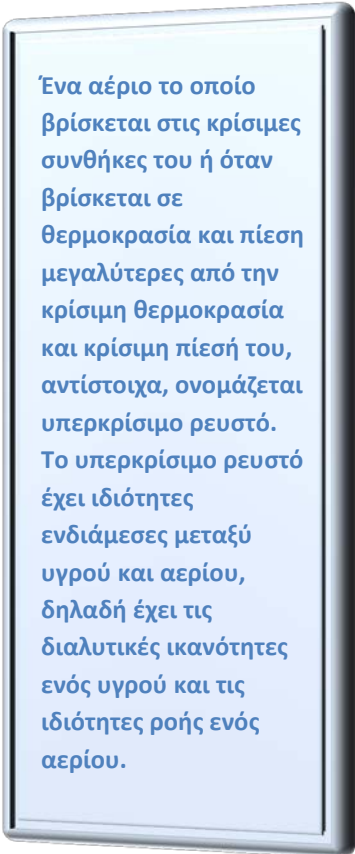
Απάντηση

Οι τιμές των σταθερών παραμέτρων a και b της εξίσωσης van der Waals διαφέρουν από αυτές των καταστατικών εξισώσεων Berthelot και Dieterici.

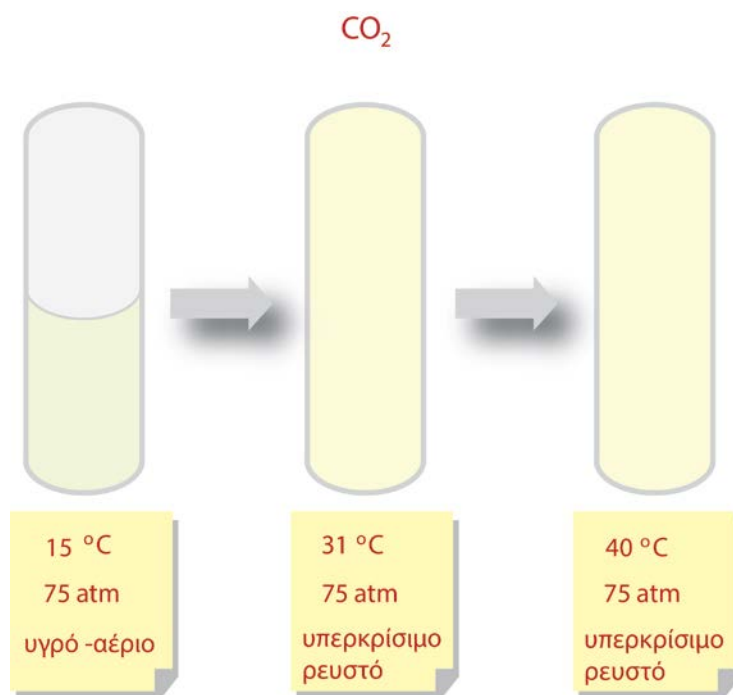
6. Σε διάφανο δοχείο περιέχεται ποσότητα CO_2 και ασκεί πίεση 75 atm. Να εξηγήσετε τι θα συμβεί αν αυξήσουμε τη θερμοκρασία από τους 15 °C στους 31 °C και έπειτα στους 40 °C. Δίνεται η κρίσιμη θερμοκρασία του CO_2 ότι είναι 31 °C και η κρίσιμη πίεση αυτού 72,8 atm.

Απάντηση

Στους 15 °C, δηλαδή σε θερμοκρασία μικρότερη της κρίσιμης, και πίεση 75 atm, δηλαδή μεγαλύτερη της κρίσιμης πίεσης, συνυπάρχει υγρό με αέριο CO_2 . Στη συνέχεια η θερμοκρασία αυξάνεται στους 31 °C. Λίγο πριν φτάσει στη θερμοκρασία αυτή, δηλαδή στους 30 °C, τα όρια των δύο φάσεων γίνονται δυσδιάκριτα και οι τιμές των πυκνοτήτων μάζας της υγρής και της αέριας φάσης πλησιάζουν μεταξύ τους. Στη θερμοκρασία των 31 °C ο μηνίσκος πλέον εξαφανίζεται και οι πυκνότητες μάζας του υγρού και του αερίου εξισώνονται πλήρως. Το αέριο που προκύπτει στην κρίσιμη θερμοκρασία ονομάζεται υπερκρίσιμο ρευστό. Η αύξηση της θερμοκρασίας στους 40 °C δεν επηρεάζει τη φυσική κατάσταση του CO_2 , δηλαδή παραμένει ως υπερκρίσιμο ρευστό.



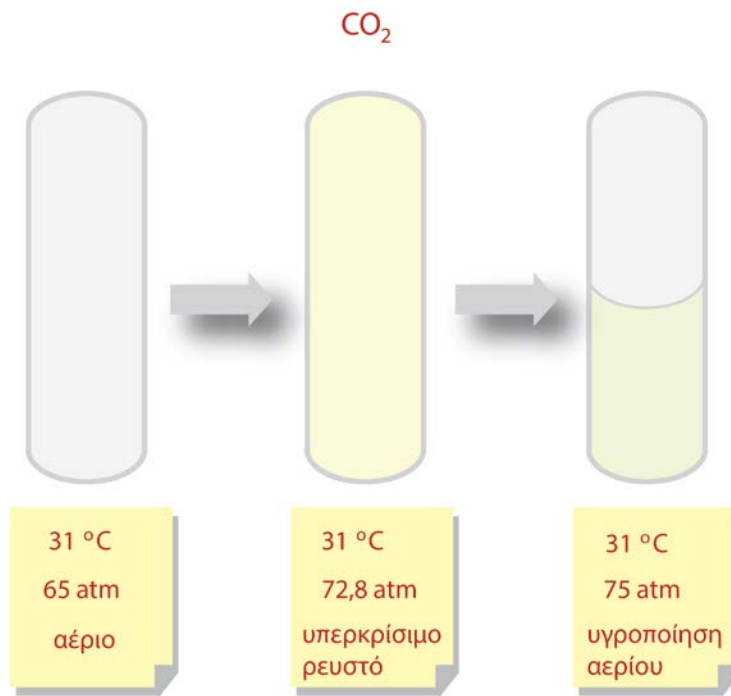
Ένα αέριο το οποίο βρίσκεται στις κρίσιμες συνθήκες του ή όταν βρίσκεται σε θερμοκρασία και πίεση μεγαλύτερες από την κρίσιμη θερμοκρασία και κρίσιμη πίεσή του, αντίστοιχα, ονομάζεται υπερκρίσιμο ρευστό. Το υπερκρίσιμο ρευστό έχει ιδιότητες ενδιάμεσες μεταξύ υγρού και αερίου, δηλαδή έχει τις διαλυτικές ικανότητες ενός υγρού και τις ιδιότητες ροής ενός αερίου.



7. Σε διάφανο δοχείο περιέχεται ποσότητα CO_2 σε σταθερή θερμοκρασία 31 °C. Να βρεθεί η φυσική κατάσταση του CO_2 αν ασκηθεί πίεση ίση με: α) 65 atm, β) 72,8 atm και γ) 75 atm. Δίνεται η κρίσιμη θερμοκρασία του CO_2 ότι είναι 31 °C και η κρίσιμη πίεση αυτού 72,8 atm.

Απάντηση

Το CO_2 βρίσκεται στην κρίσιμη θερμοκρασία του και αρχικά ασκείται πίεση ίση με 65 atm, δηλαδή πίεση μικρότερη της κρίσιμης πίεσής του. Επομένως αρχικά το CO_2 βρίσκεται σε αέρια κατάσταση. Στη συνέχεια η πίεση που ασκεί το αέριο αυξάνεται και γίνεται ίση με την κρίσιμη πίεση αυτού, δηλαδή 72,8 atm. Τη χρονική αυτή στιγμή το CO_2 βρίσκεται στις κρίσιμες συνθήκες του και είναι υπερκρίσιμο ρευστό. Αμέσως μετά η πίεση του CO_2 αυξάνεται ακόμη περισσότερο και γίνεται ίση με 75 atm. Τη στιγμή αυτή το υπερκρίσιμο ρευστό αρχίζει να υγροποιείται και αρχίζει να φαίνεται ο μηνίσκος που χωρίζει τις δύο φάσεις.



Υπενθυμίζεται ότι κρίσιμη θερμοκρασία, T_c , είναι η θερμοκρασία, πάνω από την οποία το αέριο δε μπορεί να υγροποιηθεί οσηδήποτε μεγάλη πίεση και αν ασκηθεί σε αυτό και κρίσιμη πίεση, p_c , είναι η ελάχιστη πίεση που απαιτείται να ασκηθεί στο αέριο για να υγροποιηθεί, όταν αυτό βρίσκεται στην κρίσιμη θερμοκρασία.

8. Τα αέρια τα οποία δε μπορούν να υγροποιηθούν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι γνωστά ως «μόνιμα αέρια». Με ποιο τρόπο μπορούν να υγροποιηθούν τα αέρια αυτά;

Απάντηση

Τα αέρια που είναι γνωστά ως «μόνιμα αέρια» δε μπορούν να υγροποιηθούν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος διότι έχουν πολύ χαμηλή κρίσιμη θερμοκρασία. Τα αέρια αυτά μπορούν να υγροποιηθούν μόνο σε θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης θερμοκρασίας τους.

9. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι: «το αέριο N_2 μπορεί να υγροποιηθεί σε θερμοκρασία περιβάλλοντος αρκεί να συμπιεστεί πολύ». Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φοιτητή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας, αν είναι γνωστό ότι η κρίσιμη θερμοκρασία του N_2 είναι 126 K.

Απάντηση

Ένα αέριο μπορεί να υγροποιηθεί μόνο σε θερμοκρασίες μικρότερες από την κρίσιμη θερμοκρασία του. Η κρίσιμη θερμοκρασία του N_2 είναι 126 K, δηλαδή $-147\text{ }^\circ\text{C}$. Επομένως το N_2 μπορεί να υγροποιηθεί μόνο σε θερμοκρασίες μικρότερες από $-147\text{ }^\circ\text{C}$. Άρα ο ισχυρισμός του φοιτητή ότι: «το αέριο N_2 μπορεί να υγροποιηθεί σε θερμοκρασία περιβάλλοντος αρκεί να συμπιεστεί πολύ» είναι λανθασμένος.



10. Να εξηγήσετε γιατί η αέρια NH_3 μπορεί να υγροποιηθεί σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, ενώ το αέριο O_2 όχι. Δίνεται ότι η κρίσιμη θερμοκρασία της NH_3 και του O_2 είναι 405 K και 154 K, αντίστοιχα.

Απάντηση

Ένα αέριο μπορεί να υγροποιηθεί μόνο σε θερμοκρασίες μικρότερες από την κρίσιμη θερμοκρασία του. Η κρίσιμη θερμοκρασία της NH_3 είναι 405 K, δηλαδή $132\text{ }^\circ\text{C}$. Άρα σε θερμοκρασίες μικρότερες από $132\text{ }^\circ\text{C}$, επομένως και σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος, η NH_3 μπορεί να υγροποιηθεί. Αντίθετα, η κρίσιμη θερμοκρασία του O_2 είναι 154 K, δηλαδή $-119\text{ }^\circ\text{C}$. Έτσι το αέριο O_2 μπορεί να υγροποιηθεί μόνο σε θερμοκρασίες μικρότερες από $-119\text{ }^\circ\text{C}$. Για το λόγο αυτό το O_2 δεν είναι δυνατό να υγροποιηθεί σε θερμοκρασία περιβάλλοντος οσηδήποτε πίεση και αν ασκηθεί σε αυτό.

11. Για ένα αέριο van der Waals ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας, Z_c , θεωρητικά έχει την τιμή $3/8$. Πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η τιμή του Z_c πολλών αερίων πλησιάζει την τιμή αυτή, ενώ για μερικά άλλα, όπως του H_2O , διαφέρει αρκετά από την τιμή $3/8$. Που οφείλεται αυτό;

Απάντηση

Η τιμή του κρίσιμου παράγοντα συμπιεστικότητας, Z_c , για ένα αέριο που υπακούει στην καταστατική εξίσωση van der Waals αποτελεί ένα από τα κριτήρια σύζευξης των μορίων μιας ουσίας. Οι ουσίες που εμφανίζουν το φαινόμενο της σύζευξης μεταξύ των μορίων τους στην υγρή ή την αέρια κατάσταση έχουν Z_c , ο οποίος διαφέρει σημαντικά από την τιμή $3/8$. Η τιμή του κρίσιμου παράγοντα συμπιεστικότητας του H_2O διαφέρει σημαντικά από την τιμή $3/8$ διότι τα μόριά του εμφανίζουν το φαινόμενο της σύζευξης.

3.3. Τα πραγματικά αέρια με το Mathematica

1. Να παρασταθεί γραφικά η ισόθερμη van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών μοριακού του όγκου από 0,05 έως 0,8 L mol⁻¹ και σε θερμοκρασία 268,15 K. Δίνονται για το CO₂ οι σταθερές van der Waals $a = 3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0429 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση van der Waals για 1 mol αερίου

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

όπου

p : η πίεση (σε atm),

V_m : ο μοριακός όγκος (σε L mol⁻¹),

T : η θερμοκρασία (σε K),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με 0,082 atm L mol⁻¹ K⁻¹ και

a και b : οι σταθερές van der Waals του αερίου σε atm L² mol⁻² και L mol⁻¹, αντίστοιχα,

προκύπτει ότι η πίεση που ασκεί το αέριο σε σταθερή θερμοκρασία είναι συνάρτηση του μοριακού του όγκου, V_m , δηλαδή

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

ή

$$f(V_m) = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

Για να σχεδιάσουμε την παραπάνω γραφική παράσταση ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica τις τιμές για:

- τη θερμοκρασία και
- τις σταθερές van der Waals a και b

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε στο Mathematica την ισόθερμη van der Waals για ένα οποιοδήποτε αέριο σε ορισμένη θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμη van der Waals 1».

του αερίου, και με τη βοήθεια της εντολής **Plot** σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(V_m)$.

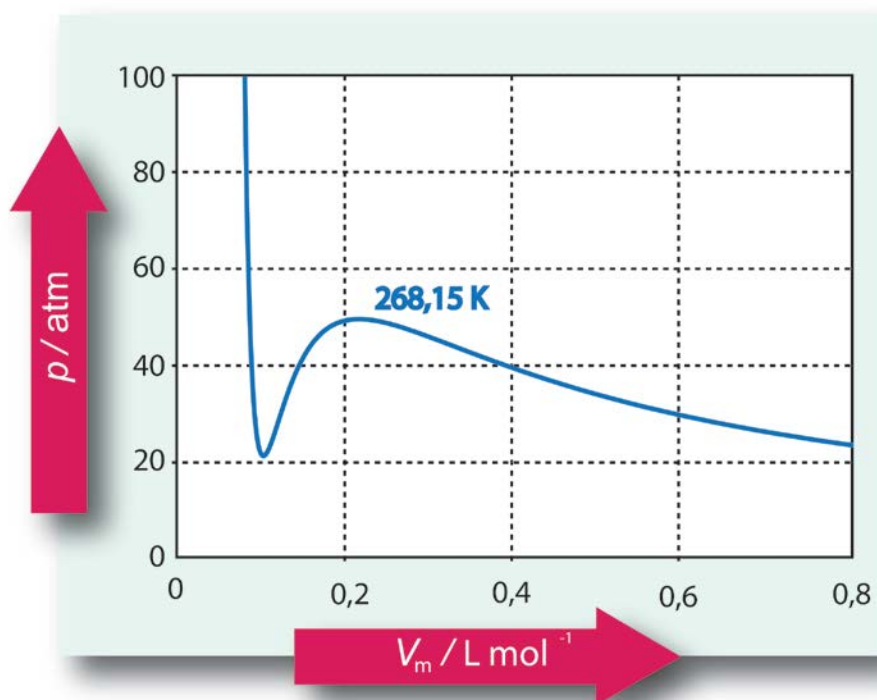
Δραστηριότητα 2

Παρατηρήστε στο Mathematica πως μεταβάλλεται η ισόθερμη van der Waals για ένα οποιοδήποτε αέριο σε ορισμένο εύρος θερμοκρασιών χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμη van der Waals 2».

Ορίζουμε:

```
a=3.610;  
b=0.0429;  
T=268.15;  
R=0.082;  
Plot[ { (R*T)/(Vm-b) -  
a/(Vm2) }, {Vm, 0.05, 0.8}, PlotRange -> {{0, 0.8}, {0, 100}}, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"Vm/L mol-1", "p /atm"}, GridLines -> Automatic]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



2. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισόθερμες van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών του μολαρικού του όγκου από 0,05 έως 0,8 L mol⁻¹ και σε θερμοκρασίες 263,15 K, 304,19 K και 353,15 K. Δίνονται για το CO₂ οι σταθερές van der Waals $a = 3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0429 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica

ορίζουμε:

- τις τιμές των τριών θερμοκρασιών,
- τις τιμές των σταθερών van der Waals του αερίου και
- το εύρος των τιμών του μολαρικού όγκου (στην εντολή Plot).

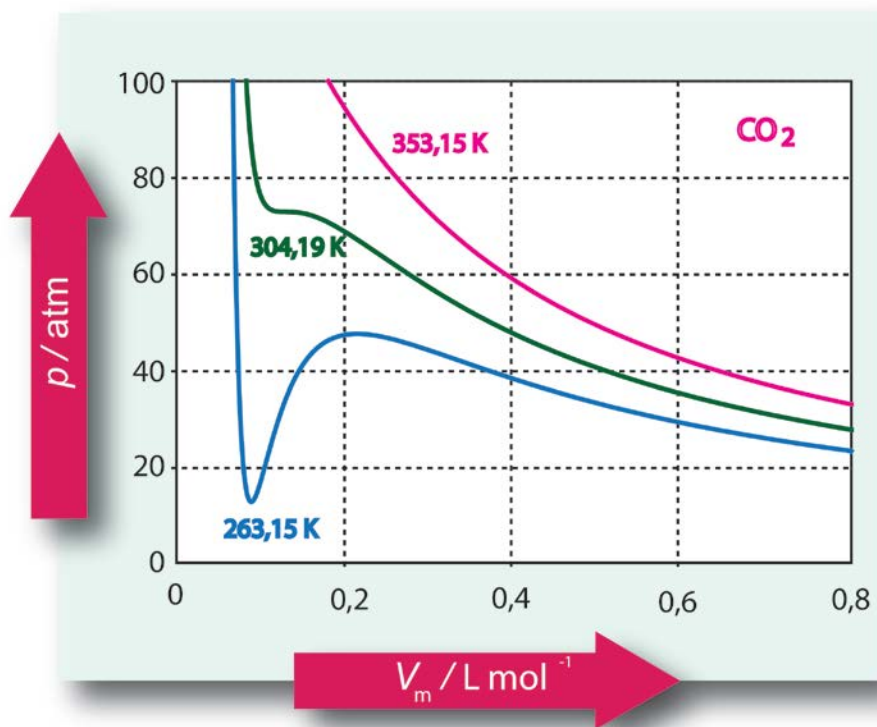
Δραστηριότητα 3

Σχεδιάστε στο Mathematica στο ίδιο διάγραμμα τις ισόθερμες van der Waals για ένα οποιοδήποτε αέριο σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ισόθερμες van der Waals».

Ορίζουμε:

```
a=3.610;
b=0.0429;
T1=263.15;
T2=304.19;
T3=353.15;
R=0.082;
g1=Plot[{{(R*T1)/(Vm-b))-
a/(Vm2)},{Vm,0.05,0.8},PlotRange→{{0,0.8},{0,100}},PlotStyle
→{RGBColor[0,0,1]} PlotLegends → {"
T1"},,AxesOrigin→{0,0},AxesLabel→{"Vm /L mol-1", "p
/atm"},GridLines → Automatic];
g2=Plot[{{(R*T2)/(Vm-b))-
a/(Vm2)},{Vm,0.05,0.8},PlotRange→{{0,0.8},{0,100}},PlotStyle
→{RGBColor[0,0,1]}, PlotLegends → {" T2"},
AxesOrigin→{0,0},AxesLabel→{"Vm /L mol-1", "p /atm"},GridLines
→ Automatic];
g3=Plot[{{(R*T3)/(Vm-b))-
a/(Vm2)},{Vm,0.05,0.8},PlotRange→{{0,0.8},{0,100}},,
PlotLegends → {" T3"},
PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]},AxesOrigin→{0,0},AxesLabel→{"Vm
/L mol-1", "p /atm"},GridLines → Automatic];
Show[g1,g2,g3]
```

Η εκτέλεση των παραπάνω εντολών δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



3. Να παρασταθεί γραφικά η ισόθερμη της ανηγμένης εξίσωσης van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών ανηγμένου μολαρικού όγκου από 0,6 έως 8 και σε ανηγμένη θερμοκρασία 0,90.

Απάντηση

Από την ανηγμένη εξίσωση van der Waals

$$\left(p_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(3V_r - 1) = 8T_r$$

όπου

p_r : η ανηγμένη πίεση,

V_r : ο ανηγμένος μολαρικός όγκος και

T_r : η ανηγμένη θερμοκρασία

προκύπτει ότι η ανηγμένη πίεση του αερίου σε ορισμένη ανηγμένη θερμοκρασία είναι συνάρτηση του ανηγμένου μολαρικού του όγκου, V_r , δηλαδή

$$p_r = \frac{8T_r}{3V_r - 1} - \frac{3}{V_r^2}$$

ή

$$f(V_r) = \frac{8T_r}{3V_r - 1} - \frac{3}{V_r^2}$$

Για να σχεδιάσουμε την παραπάνω γραφική παράσταση ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica την τιμή της ανηγμένης θερμοκρασίας του αερίου και με τη βοήθεια της εντολής Plot σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(V_r)$.

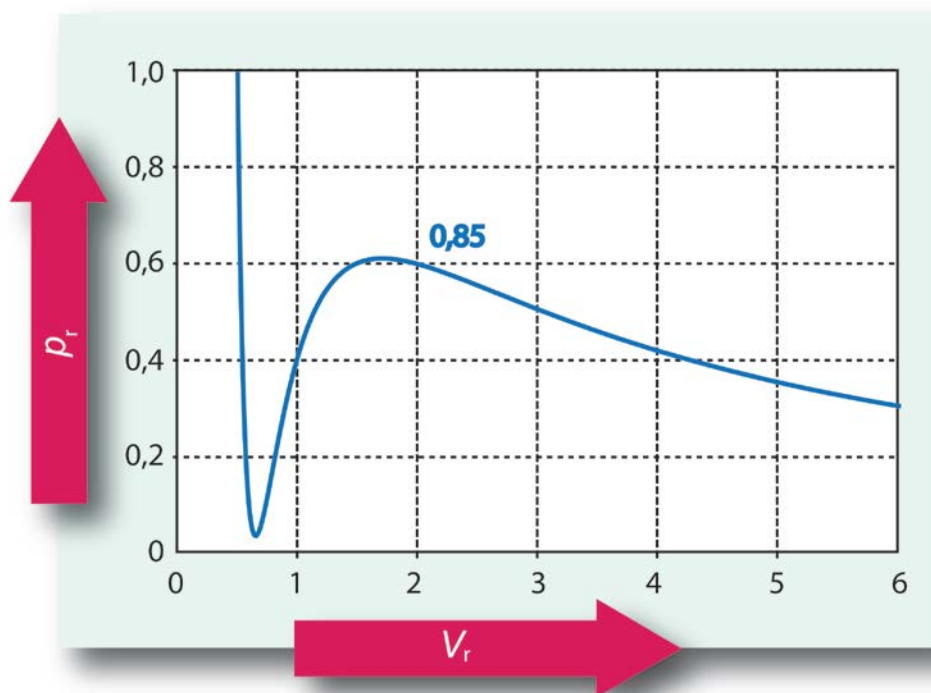
Δραστηριότητα 4

Σχεδιάστε στο Mathematica την ανηγμένη ισόθερμη van der Waals για ένα οποιοδήποτε αέριο σε ορισμένη θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ανηγμένη ισόθερμη van der Waals».

Ορίζουμε:

```
Tr=0.85;  
Plot[{(8Tr/(3Vr-1)) -  
(3/Vr2)}, {Vr, 0.35, 6}, PlotRange→{{0, 6}, {0, 1}},  
AxesLabel→{"Vr", "pr"}, AxesOrigin→{0, 0}, GridLines →  
Automatic]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



4. Να παρασταθούν γραφικά οι ισόθερμες της ανηγμένης εξίσωσης van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών ανηγμένου μοριακού του όγκου από 0,35 έως 8 και σε ανηγμένες θερμοκρασίες 0,85, 0,95, 1,00, 1,05 και 1,15.

Απάντηση

Σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica ορίζουμε:

- τις τιμές των πέντε ανηγμένων θερμοκρασιών και
- το εύρος των τιμών του ανηγμένου μοριακού όγκου (στην εντολή Plot).

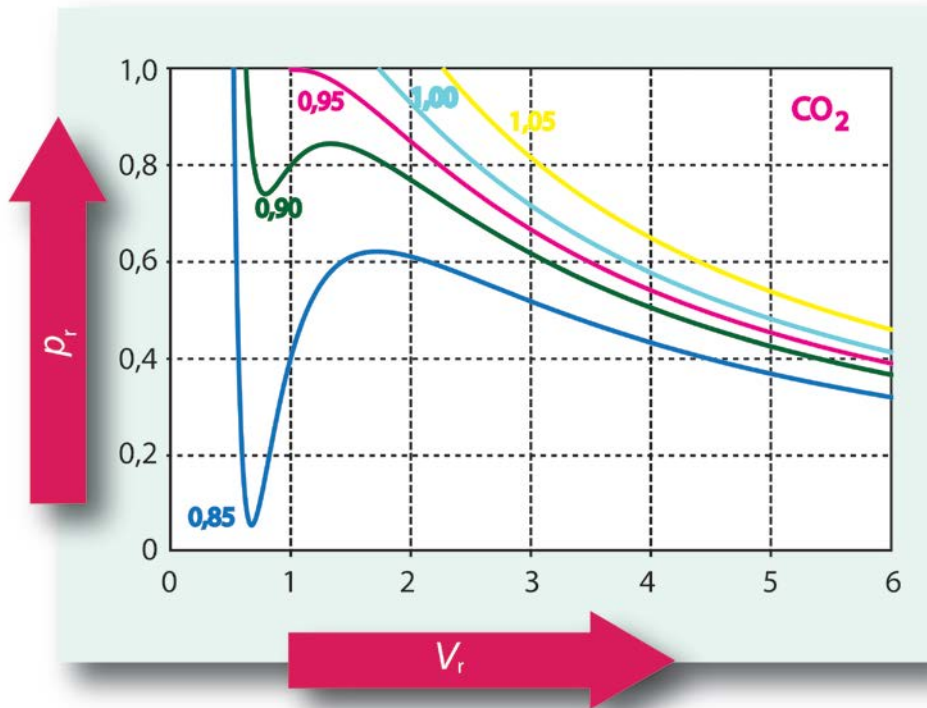
Δραστηριότητα 5

Σχεδιάστε στο Mathematica στο ίδιο διάγραμμα τις ανηγμένες ισόθερμες van der Waals για ένα οποιοδήποτε αέριο σε πέντε ανηγμένες θερμοκρασίες χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Ανηγμένες ισόθερμες van der Waals».

Ορίζουμε:

```
Tr,1=0.85;
Tr,2=0.95;
Tr,3=1.00;
Tr,4=1.05;
Tr,5=1.15;
g1=Plot[{(8Tr,1/(3Vr-1))-
(3/Vr2)}, {Vr, 0.35, 6}, PlotRange→{{0, 6}, {0, 100}},
AxesLabel→{"Vr", "pr"}, AxesOrigin→{0, 0}];
g2=Plot[{(8Tr,2/(3Vr-1))-
(3/Vr2)}, {Vr, 0.35, 6}, PlotRange→{{0, 6}, {0, 100}},
AxesLabel→{"Vr", "pr"}, AxesOrigin→{0, 0}];
g3=Plot[{(8Tr,3/(3Vr-1))-
(3/Vr2)}, {Vr, 0.35, 6}, PlotRange→{{0, 6}, {0, 100}},
AxesLabel→{"Vr", "pr"}, AxesOrigin→{0, 0}];
g4=Plot[{(8Tr,4/(3Vr-1))-
(3/Vr2)}, {Vr, 0.35, 6}, PlotRange→{{0, 6}, {0, 100}},
AxesLabel→{"Vr", "pr"}, AxesOrigin→{0, 0}];
g5=Plot[{(8Tr,5/(3Vr-1))-
(3/Vr2)}, {Vr, 0.35, 6}, PlotRange→{{0, 6}, {0, 100}},
AxesLabel→{"Vr", "pr"}, AxesOrigin→{0, 0}];
Show[g1, g2, g3, g4, g5]
```

Η εκτέλεση των παραπάνω εντολών δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



5. Η εξάρτηση του δεύτερου συντελεστή virial, B , των αερίων δίνεται από την παρακάτω μαθηματική εξίσωση:

$$B / \text{cm}^3 \text{mol}^{-1} = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

η οποία ισχύει για ένα ορισμένο εύρος θερμοκρασιών για κάθε αέριο. Να υπολογιστεί ο δεύτερος συντελεστής virial, B , για το CO_2 σε θερμοκρασίες 220, ..., 1100 K, ανά 1 K, χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση. Δίνεται ότι $T_0 = 298,15$ K και οι σταθερές $a(i)$ για το CO_2 , $a(1) = -9$, $a(2) = -288$ και $a(3) = -118$.

Απάντηση

Η εξάρτηση του δεύτερου συντελεστή virial, B , από τη θερμοκρασία δίνεται από την εξίσωση:

$$B / \text{cm}^3 \text{mol}^{-1} = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

ή

$$B(T) = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

ή

$$f(T) = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

δηλαδή ο συντελεστής virial, B , είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας στην οποία βρίσκεται το αέριο.

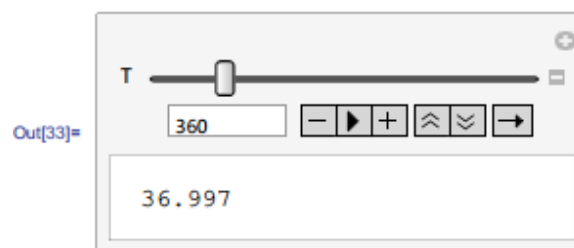
Για να υπολογίσουμε τις τιμές του συντελεστή B στις διάφορες θερμοκρασίες ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica τις τιμές:

- των σταθερών $a(i)$ του αερίου,
- της σταθεράς T_0 και
- το εύρος θερμοκρασιών (στην εντολή Manipulate) για το οποίο μπορούν να υπολογιστούν οι σταθερές B του αερίου.

Ορίζουμε:

```
a(1)=-9;
a(2)=-288;
a(3)=-118;
a(4)=0;
a(5)=0;
T0=298.15;
Manipulate[a(1)*((T0/T)-1)^0+a(2)*((T0/T)-1)^1+a(3)*((T0/T)-1)^2+a(4)*((T0/T)-1)^3+a(5)*((T0/T)-1)^4, {T, 220, 1100, 1}, SaveDefinitions->True]
```

και παίρνουμε την παρακάτω εικόνα:



Μετακινώντας τη μπάρα δεξιά ή αριστερά υπολογίζεται ο συντελεστής virial, B , για κάθε θερμοκρασία από 220 K έως 1100 K ανά 1K.

Παρατηρούμε ότι η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της τιμής του δεύτερου συντελεστή virial, B .

Δραστηριότητα 6

Υπολογίστε στο Mathematica τους συντελεστές virial B για κάποιο άλλο αέριο χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Υπολογισμός συντελεστών virial B » και τις τιμές των σταθερών $a(i)$ των αερίων του Παραρτήματος I.

3.4. Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων

3.4.1. Παράγοντας συμπιεστικότητας

Τα πραγματικά αέρια πλησιάζουν την ιδανική συμπεριφορά μόνο όταν αυτά βρίσκονται σε χαμηλές πιέσεις και υψηλές θερμοκρασίες. Το κριτήριο της απόκλισης ενός πραγματικού αερίου από την ιδανική συμπεριφορά είναι ο παράγοντας συμπιεστικότητας, Z , και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{pV_m}{RT}$$

ή

$$Z = \frac{pV}{nRT}$$

όπου:

p : η πίεση (σε atm),

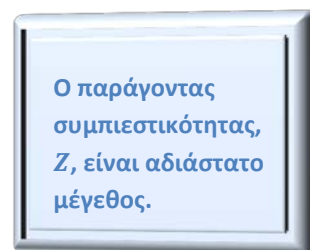
V_m : ο μοριακός όγκος (σε L mol⁻¹),

V : ο όγκος (σε L),

n : η ποσότητα ουσίας (mol),

T : η θερμοκρασία (σε K) και

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με 0,082 atm L mol⁻¹K⁻¹.



Για ένα ιδανικό αέριο ο παράγοντας συμπιεστικότητας έχει τιμή ίση με $Z = 1$. Για ένα πραγματικό αέριο όσο η τιμή του Z αποκλίνει από τη μονάδα τόσο αυτό αποκλίνει από την ιδανική συμπεριφορά.

Στις ασκήσεις της κατηγορίας αυτής είναι δυνατό να ζητείται να υπολογιστεί:

α) ο παράγοντας συμπιεστικότητας, Z , ενός αερίου,

β) αν ένα αέριο αποκλίνει από την ιδανική συμπεριφορά,

γ) ένα από τα μεγέθη της εξίσωσης που σχετίζονται με τον Z , δηλαδή p , V_m , V , n , T .

1. Ποσότητα αερίου He ίση με 2 mol στους 350 K ασκεί πίεση 21,28 Μpa και καταλαμβάνει όγκο 250 mL. Να υπολογιστεί ο παράγοντας συμπίεστικότητας του αερίου He στις παραπάνω συνθήκες.

Απάντηση

Αρχικά μετατρέπουμε την πίεση σε atm.

$$p = 21,28 \cdot 10^6 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} \right) = 210 \text{ atm}$$

Ο παράγοντας συμπίεστικότητας, Z , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$Z = \frac{pV_m}{RT}$$

ή

$$Z = \frac{pV}{nRT}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο παράγοντας συμπίεστικότητας στις συνθήκες που δίνονται είναι:

$$Z = \frac{210 \text{ atm} \cdot 0,25 \text{ L}}{2 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 350 \text{ K}} = 0,91$$

2. Ποσότητα αερίου CO₂ ίση με 0,2 mol ασκεί πίεση 15 atm στους 293 K. Να υπολογιστεί ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο αν είναι γνωστό ότι ο παράγοντας συμπίεστικότητας του CO₂ στις παραπάνω συνθήκες είναι 0,95.

Απάντηση

Ο παράγοντας συμπίεστικότητας, Z , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{pV_m}{RT}$$

από την οποία προκύπτει ότι ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο στις συνθήκες που δίνονται είναι:

$$V = \frac{nRTZ}{p} = \frac{0,2 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K} \cdot 0,95}{15 \text{ atm}} = 0,3 \text{ L}$$

3. Ένα αέριο ασκεί πίεση ίση με 20 atm στους 283 K. Να υπολογιστεί ο παράγοντας συμπίεστικότητας του αερίου αν υποτεθεί ότι ο μολαρικός όγκος του αερίου είναι: α) 20 % μικρότερος και β) 20 % μεγαλύτερος από αυτόν που θα καταλάμβανε το αέριο αν παρουσίαζε ιδανική συμπεριφορά. Ποιες δυνάμεις (ελκτικές ή απωστικές) επικρατούν στις παραπάνω δύο περιπτώσεις;

Απάντηση

Μολαρικός όγκος, V_m , αερίου είναι ο όγκος που καταλαμβάνει 1 mol αερίου σε ορισμένες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας.

Αν το αέριο παρουσίαζε ιδανική συμπεριφορά θα ίσχυε η καταστατική εξίσωση

$$pV_{m,ιδαν.} = RT$$

από την οποία προκύπτει ότι ο μολαρικός όγκος του αερίου στους 283 K υπό πίεση 20 atm είναι:

$$V_{m,ιδαν.} = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}}{20 \text{ atm}} = 1,16 \text{ L}$$

Το αέριο όμως δεν παρουσιάζει ιδανική συμπεριφορά και ο πραγματικός μολαρικός του όγκος είναι διαφορετικός από αυτόν που θα είχε αν παρουσίαζε ιδανική συμπεριφορά.

α) Ο μολαρικός όγκος του αερίου είναι 20% μικρότερος από αυτόν που θα είχε αν παρουσίαζε ιδανική συμπεριφορά, δηλαδή

$$V_{m,πραγμ.} = V_{m,ιδαν.} - 0,2 V_{m,ιδαν.} = 0,8 V_{m,ιδαν.}$$

και είναι ίσος με:

$$V_{m,πραγμ.} = 0,8 \cdot 1,16 = 0,928 \text{ L}$$

Άρα ο συντελεστής συμπίεστικότητας του αερίου είναι ίσος με:

$$Z = \frac{pV_{m,πραγμ.}}{RT} = \frac{20 \text{ atm} \cdot 0,928 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}} = 0,8$$

Όταν ο συντελεστής συμπίεστικότητας ενός αερίου είναι $Z < 1$ υπερσχύουν οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, οι οποίες μειώνουν το μολαρικό όγκο του αερίου σε σχέση με εκείνον που θα είχε εάν το αέριο συμπεριφερόταν ιδανικά [16].

β) Όμοια όταν ο μολαρικός όγκος του αερίου είναι 20% μεγαλύτερος από αυτόν που θα είχε αν παρουσίαζε ιδανική συμπεριφορά, είναι

$$V_{m,πραγμ.} = V_{m,ιδαν.} + 0,2 V_{m,ιδαν.} = 1,2 V_{m,ιδαν.}$$

και είναι ίσος με:

$$V_{m,πραγμ.} = 1,2 \cdot 1,16 \text{ L} = 1,392 \text{ L}$$

Άρα

$$Z = \frac{pV_{m,πραγμ.}}{RT} = \frac{20 \text{ atm} \cdot 1,392 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 283 \text{ K}} = 1,2$$

Όταν ο συντελεστής συμπίεστικότητας ενός αερίου είναι $Z > 1$ υπερισχύουν οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, οι οποίες αυξάνουν το μοριακό όγκο του αερίου σε σχέση με εκείνον που θα είχε εάν το αέριο συμπεριφερόταν ιδανικά [16].

4. Ορισμένη ποσότητα αερίου H_2 καταλαμβάνει όγκο 2 L και ασκεί πίεση ίση με 50 atm στους 273 K. Ο συντελεστής συμπίεστικότητας, Z , του H_2 στις παραπάνω συνθήκες είναι 1,1. Να υπολογιστεί ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο H_2 στους 423 K, αν ασκεί πίεση ίση με 200 atm και ο συντελεστής συμπίεστικότητας είναι 1,5.

Απάντηση

Ο συντελεστής συμπίεστικότητας, Z , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$Z = \frac{pV}{nRT}$$

από την οποία προκύπτει ότι η ποσότητα του αερίου H_2 είναι

$$n = \frac{pV}{ZRT} = \frac{50 \text{ atm} \cdot 2 \text{ L}}{1,1 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}} = 4 \text{ mol}$$

Έτσι ο όγκος του αερίου όταν είναι υπό πίεση 200 atm στους 423 K είναι

$$V = \frac{nRTZ}{p} = \frac{4 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 423 \text{ K} \cdot 1,5}{200 \text{ atm}} = 1 \text{ L}$$

3.4.2. Καταστατική εξίσωση van der Waals

Τα ιδανικά αέρια είναι υποθετικά αέρια για τα οποία ισχύουν δύο παραδοχές:

- ο όγκος που καταλαμβάνουν τα μόριά τους είναι αμελητέος και
- μεταξύ των μορίων τους δεν ασκείται καμία δύναμη.

Οι δυο παραπάνω παραδοχές δεν ισχύουν για τα πραγματικά αέρια και γι' αυτό στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων πρέπει να γίνουν δύο διορθώσεις. Η πρώτη διόρθωση αφορά τον όγκο που καταλαμβάνουν τα μόρια του πραγματικού αερίου και η δεύτερη στην πίεση που ασκεί το αέριο διότι οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των μορίων του αερίου δεν είναι αμελητέες. Ο van der Waals έκανε τις παραπάνω δυο διορθώσεις και κατέληξε στην παρακάτω εξίσωση, η οποία είναι γνωστή ως καταστατική εξίσωση van der Waals

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

όπου:

p : η πίεση (σε atm),

V : ο όγκος (σε L),

n : η ποσότητα ουσίας (mol),

T : η θερμοκρασία (σε K),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με 0,082 atm L mol⁻¹K⁻¹ και

a και b : οι σταθερές van der Waals του αερίου σε atm L² mol⁻² και L mol⁻¹, αντίστοιχα.

Για ποσότητα αερίου ίση με 1 mol η παραπάνω εξίσωση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

όπου:

V_m : ο μοριακός όγκος του αερίου (σε L mol⁻¹).

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας συνήθως ζητείται να υπολογιστεί:

- η πίεση, p ,
- ο όγκος, V , ή
- η θερμοκρασία, T ,

του αερίου.

Ο υπολογισμός της πίεσης ή της θερμοκρασίας ενός αερίου van der Waals είναι αρκετά εύκολος. Αντίθετα, ο υπολογισμός του όγκου του αερίου απαιτεί τη λύση μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, η οποία λύνεται πολύ δύσκολα. Η τριτοβάθμια εξίσωση λύνεται πολύ εύκολα με τη χρήση του λογισμικού Mathematica. Από τις τρεις λύσεις της εξίσωσης μόνο η μία έχει φυσική σημασία, ενώ οι άλλες δύο λύσεις είναι μιγαδικές και απορρίπτονται.

5. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκούν 9,6 g O₂ σε φιάλη όγκου 2 L στους 273 K αν υποτεθεί ότι το αέριο συμπεριφέρεται: α) ως ιδανικό και β) ως αέριο van der Waals. Δίνονται για το αέριο O₂ οι σταθερές van der Waals $a = 1,364 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0319 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Τα mol του αερίου O₂ είναι

$$n = \frac{m}{M} = \frac{9,6 \text{ g}}{32 \text{ g mol}^{-1}} = 0,3 \text{ mol}$$

α) Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά υπακούει στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

από την οποία προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από την εξίσωση

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η πίεση του αερίου O₂ στους 273 K είναι

$$p = \frac{0,3 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{2 \text{ L}} = 3,358 \text{ atm}$$

β) Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ως αέριο van der Waals ισχύει η ομώνυμη καταστατική εξίσωση, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

Αναδιατάσσοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η πίεση του αερίου στους 273 K είναι:

$$p = \frac{0,3 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{2 \text{ L} - 0,3 \text{ mol} \cdot 0,0319 \text{ L mol}^{-1}} - 1,364 \text{ atm L}^2\text{mol}^{-2} \frac{(0,3 \text{ mol})^2}{(2 \text{ L})^2} = 3,343 \text{ atm}$$

6. Να υπολογιστεί ο μοριακός όγκος του αερίου Ar στους 313 K αν ασκεί πίεση ίση με 40 atm αν υποτεθεί ότι το αέριο συμπεριφέρεται: α) ως ιδανικό και β) ως αέριο van der Waals. Δίνονται για το αέριο Ar οι σταθερές van der Waals $a = 1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,032 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Βήμα 1. Καταγράφουμε σε ένα πίνακα τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης.

Δεδομένα

$$p = 40 \text{ atm}$$

$$T = 313 \text{ K}$$

$$a = 1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$$

$$b = 0,032 \text{ L mol}^{-1}$$

Ζητούμενα

$$V_{m,ιδαν.} = ;$$

$$V_{m,πραγμ.} = ;$$

Βήμα 2. Αναλύουμε τα δεδομένα της άσκησης.

Δίνονται η πίεση, η θερμοκρασία και οι σταθερές van der Waals του αερίου και ζητείται ο μοριακός όγκος, V_m , του αερίου, δηλαδή ο όγκος που κατέχει 1 mol του αερίου σε ορισμένες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, αν αυτό συμπεριφέρεται ως ιδανικό και ως αέριο van der Waals.

Βήμα 3. Λύση της άσκησης.

α) Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά υπακούει στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

ή

$$pV_m = RT$$

από την οποία προκύπτει ότι ο μοριακός όγκος του αερίου H_2 στους 273 K, υπό πίεση 2,5 atm είναι

$$V_m = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 313 \text{ K}}{40 \text{ atm}} = 0,642 \text{ L}$$

β) Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ως αέριο van der Waals υπακούει στην ομώνυμη καταστατική εξίσωση, η οποία με απλές πράξεις μετατρέπεται στην εξίσωση (1), η οποία είναι τρίτου βαθμού:

$$\begin{aligned} \left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) &= nRT \Rightarrow \left(\frac{pV^2 + an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \Rightarrow \\ &\Rightarrow pV^3 - npbV^2 + an^2V - an^3b = nRTV^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow pV^3 - (npb + nRT)V^2 + an^2V - an^3b = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow V^3 - n\left(b + \frac{RT}{p}\right)V^2 + \frac{an^2}{p}V - \frac{an^3b}{p} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Για 1 mol H_2 είναι:

$$i) \quad n\left(b + \frac{RT}{p}\right) = (1 \text{ mol})\left(0,032 \text{ L mol}^{-1} + \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 313 \text{ K}}{40 \text{ atm}}\right) = 0,6736 \text{ L}$$

$$ii) \quad \frac{an^2}{p} = \frac{(1,337 \text{ atm L}^2\text{mol}^{-2})(1 \text{ mol})^2}{40 \text{ atm}} = 0,0334 \text{ L}^2$$

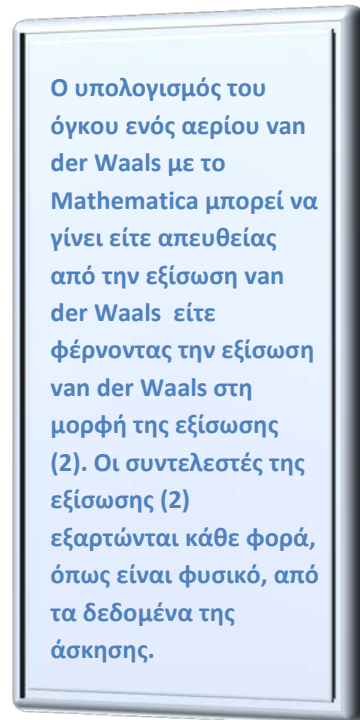
$$iii) \frac{an^3b}{p} = \frac{(1,337 \text{ atm L}^2\text{mol}^{-2})(1 \text{ mol})^3(0,032 \text{ L mol}^{-1})}{40 \text{ atm}} = 0,0011 \text{ L}^3$$

Αν θέσουμε με $x = V/L$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$x^3 - 0,6736x^2 + 0,0334x - 0,0011 = 0 \quad (2)$$

Η παραπάνω τριτοβάθμια εξίσωση είναι πολύ δύσκολο να λυθεί. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε για τη λύση της το λογισμικό Mathematica.

Σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica γράφουμε την εξίσωση (2) και τη λύνουμε με τη βοήθεια της εντολής **Solve**.



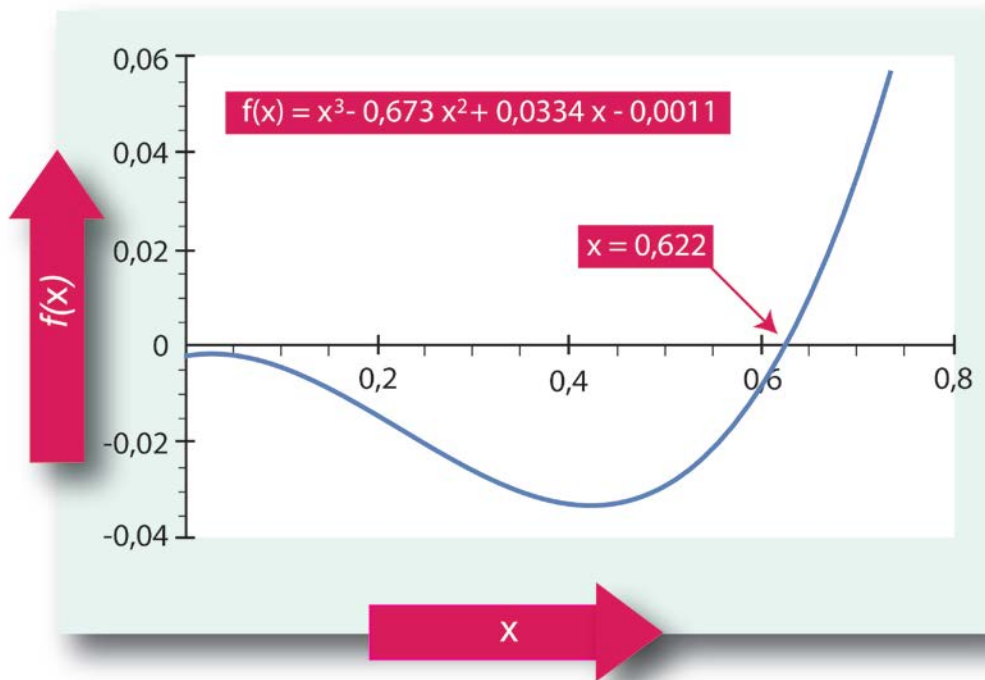
```
f[x_]=x^3-0.673x^2+0.0334x-0.0011
Solve[f[x]==0,x]
-0.0011+0.0334x-0.673x^2+x^3
{{x→0.0254212-0.0334933i},{x→0.0254212+0.0334933i},
{x→0.622158}}
```

Από τις τρεις λύσεις της εξίσωσης η μία μόνο είναι πραγματική:

$$x = 0,622 \text{ L}$$

Επομένως ο μοριακός όγκος του H_2 στις συνθήκες αυτές είναι $0,622 \text{ L mol}^{-1}$.

Αν παραστήσουμε γραφικά τη συνάρτηση της εξίσωσης (2) θα πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η τριτοβάθμια εξίσωση έχει μόνο μία λύση. Για $f(x) = 0$, τότε $x = 0,622$.



Δραστηριότητα 7

Υπολογίστε με τη βοήθεια του Mathematica τον όγκο ενός αερίου van der Waals απευθείας από την ομώνυμη καταστατική εξίσωση χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Υπολογισμός όγκου αερίου van der Waals 1».

Δραστηριότητα 8

Υπολογίστε με τη βοήθεια του Mathematica τον όγκο ενός αερίου van der Waals από την ομώνυμη καταστατική εξίσωση αφού πρώτα με πράξεις τη μετατρέψετε σε μία μορφή της εξίσωσης (2) και στη συνέχεια λύστε γραφικά την τριτοβάθμια εξίσωση χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Υπολογισμός όγκου αερίου van der Waals 2».

7. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκούν 0,5, 1, 2 και 4 mol O₂ σε φιάλη όγκου 2 L στους 273 K, 293 K και 473 K αν υποτεθεί ότι το αέριο συμπεριφέρεται: α) ως ιδανικό και β) ως αέριο van der Waals, καθώς και η % απόκλιση της τιμής της πίεσης που προκύπτει από την εξίσωση van der Waals και την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων. Δίνονται για το αέριο O₂ οι σταθερές van der Waals $a = 1,364 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0319 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

α) Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά υπακούει στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

από την οποία προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από την εξίσωση

$$p = \frac{nRT}{V}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι η πίεση ποσότητας 0,5 mol αερίου O₂ στους 273 K είναι

$$p = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{2 \text{ L}} = 5,60 \text{ atm}$$

β) Για το αέριο ισχύει η καταστατική εξίσωση van der Waals

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

με αναδιάταξη της οποίας προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι η πίεση που ασκούν 0,5 mol O₂ στους 273 K είναι

$$p = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{2 \text{ L} - 0,3 \text{ mol} \cdot 0,0319 \text{ L mol}^{-1}} - 1,364 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2} \frac{(0,5 \text{ mol})^2}{(2 \text{ L})^2} = 5,56 \text{ atm}$$

Η % απόκλιση της τιμής της πίεσης που προκύπτει από την καταστατική εξίσωση van der Waals από αυτήν που προκύπτει από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων υπολογίζεται από τη σχέση

$$\% \text{ απόκλιση} = \frac{p_{\text{ιδαν.}} - p_{\text{πραγμ.}}}{p_{\text{ιδαν.}}} \cdot 100$$

και είναι

$$\% \text{ απόκλιση} = \frac{5,60 - 5,56}{5,60} \cdot 100 = 0,72 \%$$

Όμοια υπολογίζονται οι πιέσεις για 1, 2 και 4 mol O₂ στους 293 K και 473 K είτε αυτό συμπεριφέρεται ιδανικά είτε ως αέριο van der Waals, καθώς και οι τιμές της % απόκλισης των τιμών των πιέσεων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν.

	<i>p</i> _{ιδαν.} (atm)		
	273 K	293 K	473 K
0,5 mol	5,60	6,01	9,70
1 mol	11,19	12,01	19,39
2 mol	22,39	24,03	38,79
4 mol	44,77	48,05	77,57

	<i>p</i> _{πραγμ.} (atm)		
	273 K	293 K	473 K
0,5 mol	5,56	5,97	9,69
1 mol	11,03	11,87	19,37
2 mol	21,76	23,45	38,70
4 mol	42,37	45,87	77,40

	% απόκλιση		
	273 K	293 K	473 K
0,5 mol	0,72	0,62	0,08
1 mol	1,43	1,22	0,14
2 mol	2,80	2,38	0,22
4 mol	5,37	4,54	0,22

Από τα αποτελέσματα των παραπάνω πινάκων παρατηρούμε για την % απόκλιση της τιμής της πίεσης ενός πραγματικού αερίου από την ιδανική συμπεριφορά τα εξής:

- Η αύξηση της ποσότητας του αερίου σε σταθερή θερμοκρασία αυξάνει την % απόκλιση της τιμής της πίεσής του από την ιδανική συμπεριφορά.
- Η αύξηση της θερμοκρασίας του αερίου, ενώ η ποσότητά του παραμένει σταθερή, μειώνει κατά πολύ την % απόκλιση της τιμής της πίεσής του από την ιδανική συμπεριφορά. Αυτό άλλωστε είναι αναμενόμενο, καθώς τα πραγματικά αέρια

προσεγγίζουν την ιδανική συμπεριφορά σε υψηλές θερμοκρασίες και χαμηλές πιέσεις. Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι όσο μικρότερη είναι η ποσότητα του αερίου, τόσο μικρότερη είναι και η % απόκλιση.

8. Να υπολογιστεί ο μολαρικός όγκος των αερίων He, H₂, N₂, Cl₂, O₃, CO₂, SO₂, SO₃, NH₃, CH₄, C₂H₆ και C₆H₆ στους 273 K, 473 K και 673 K και πίεση 1 atm, αν υποτεθεί ότι τα αέρια συμπεριφέρονται: α) ως ιδανικά και β) ως αέρια van der Waals. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα. Οι σταθερές van der Waals *a* και *b* των αερίων δίνονται στον Πίνακα Ι1 του Παραρτήματος Ι.

Απάντηση

Ο μολαρικός όγκος του αερίου υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση van der Waals με τη βοήθεια του λογισμικού «Υπολογισμός όγκου αερίου van der Waals 1». Τα αποτελέσματα αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί. Από τα αποτελέσματα του πίνακα παρατηρούμε ότι ο μολαρικός όγκος ενός αερίου van der Waals **δεν** είναι πάντοτε μικρότερος από τον αντίστοιχο μολαρικό όγκο ενός ιδανικού αερίου στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Υπάρχουν κάποιες συνθήκες κατά τις οποίες ο μολαρικός όγκος του πραγματικού αερίου είναι μεγαλύτερος από αυτόν του ιδανικού αερίου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής συμπίεσιμότητας του αερίου είναι $Z > 1$ και υπερσχύουν οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων του, οι οποίες αυξάνουν το μολαρικό όγκο του αερίου σε σχέση με εκείνον που θα είχε εάν το αέριο συμπεριφερόταν ιδανικά. Αντίθετα, όταν ο συντελεστής συμπίεσιμότητας ενός αερίου είναι $Z < 1$ υπερσχύουν οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, οι οποίες μειώνουν το μολαρικό όγκο του αερίου σε σχέση με εκείνον που θα είχε εάν το αέριο συμπεριφερόταν ιδανικά.

		273 K	273 K	473 K	473 K	673 K	673 K	273 K	473 K	673 K
	a	$V_{m,ιδαν.}$	$V_{m,πραγμ.}$	$V_{m,ιδαν.}$	$V_{m,πραγμ.}$	$V_{m,ιδαν.}$	$V_{m,πραγμ.}$	% σφάλμα	% σφάλμα	% σφάλμα
He	0,0341	22,386	22,4083	38,786	38,8089	55,186	55,2092	0,0995	0,0590	0,0420
H ₂	0,242	22,386	22,4017	38,786	38,8063	55,186	55,2081	0,0701	0,0523	0,0400
N ₂	1,352	22,386	22,3644	38,786	38,7899	55,186	55,2002	0,0966	0,0101	0,0257
CH ₄	2,273	22,386	22,3275	38,786	38,7705	55,186	55,1879	0,2620	0,0399	0,0034
CO ₂	3,61	22,386	22,2671	38,786	38,7358	55,186	55,1635	0,5340	0,1296	0,0408
NH ₃	4,17	22,386	22,2359	38,786	38,7155	55,186	55,1475	0,6750	0,1821	0,0698
C ₂ H ₆	5,507	22,386	22,2038	38,786	38,7091	55,186	55,1514	0,8206	0,1987	0,0627
Cl ₂	6,26	22,386	22,1584	38,786	38,6786	55,186	55,1268	1,0272	0,2777	0,1074
SO ₂	6,775	22,386	22,1375	38,786	38,6678	55,186	55,12	1,1225	0,3057	0,1197
C ₆ H ₆	18,57	22,386	21,6524	38,786	38,4235	55,186	54,9682	3,3881	0,9434	0,3962

9. Να υπολογιστεί η πυκνότητα μάζας της αέριας NH_3 στους 373 K και πίεση 500 kPa, αν υποτεθεί ότι υπακούει στην καταστατική εξίσωση van der Waals. Δίνονται οι σταθερές van der Waals για την NH_3 , $a = 4,17 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0371 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Η πίεση της αέριας NH_3 σε atm είναι:

$$p = 500 \cdot 10^3 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} \right) = 4,93 \text{ atm}$$

Η καταστατική εξίσωση van der Waals για 1 mol αερίου δίνεται από την εξίσωση:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$$

η οποία με απλές πράξεις μετατρέπεται σε μια εξίσωση τρίτου βαθμού:

$$\begin{aligned} \left(\frac{pV_m^2 + a}{V_m^2} \right) (V_m - b) &= RT \Rightarrow \\ \Rightarrow pV_m^3 - pbV_m^2 + aV_m - ab &= RTV_m^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_m^3 - \left(b + \frac{RT}{p} \right) V_m^2 + \frac{a}{p} V_m - \frac{ab}{p} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Οι συντελεστές της τριτοβάθμιας εξίσωσης με αντικατάσταση είναι:

$$i) \left(b + \frac{RT}{p} \right) = \left(0,0317 \text{ L mol}^{-1} + \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 373 \text{ K}}{4,93 \text{ atm}} \right) = 6,2354 \text{ L mol}^{-1}$$

$$ii) \frac{a}{p} = \frac{4,17 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{4,93 \text{ atm}} = 0,8450 \text{ L}^2 \text{ mol}^{-2}$$

$$iii) \frac{ab}{p} = \frac{(4,17 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2})(0,0317 \text{ L mol}^{-1})}{4,93 \text{ atm}} = 0,0314 \text{ L}^3 \text{ mol}^{-3}$$

Αν θέσουμε με $x = V_m/\text{L mol}^{-1}$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$x^3 - 6,2354x^2 + 0,8450x - 0,0314 = 0$$

Από τις τρεις λύσεις της εξίσωσης η μία μόνο είναι πραγματική: $x = 6,0976$

Επομένως ο μοριακός όγκος της NH_3 στις συνθήκες αυτές είναι $6,0976 \text{ L mol}^{-1}$.

Έτσι η πυκνότητα μάζας της NH_3 είναι:

$$\rho = \frac{m_{(1 \text{ mol})}}{V_{(1 \text{ mol})}} = \frac{M}{V_m} = \frac{17 \text{ g mol}^{-1}}{6,0976 \text{ L mol}^{-1}} = 2,7880 \text{ g L}^{-1}$$

10. Ποσότητα ίση με 2 mol Kr βρίσκεται σε δοχείο όγκου 1 L. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία στην οποία η πίεση του Kr είναι ίση με το 90 % της ιδανικής, υποθέτοντας ότι το Kr συμπεριφέρεται ως αέριο van der Waals. Δίνονται οι σταθερές van der Waals για το Kr, $a = 5,125 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0106 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Αν το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά, τότε η πίεσή του, $p_{ιδαν.}$, από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων είναι:

$$p_{ιδαν.} = \frac{nRT}{V} \quad (1)$$

Αν το αέριο συμπεριφέρεται ως αέριο van der Waals, τότε η πίεσή του, $p_{πραγμ.}$, από την καταστατική εξίσωση van der Waals είναι:

$$p_{πραγμ.} = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2} \quad (2)$$

Η πίεση του Kr είναι ίση με το 90 % της ιδανικής πίεσης, δηλαδή:

$$p_{πραγμ.} = 0,9 p_{ιδαν.} \quad (3)$$

και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) στη σχέση (3) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2} &= 0,9 \frac{nRT}{V} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{RT}{V - nb} - \frac{an}{V^2} &= 0,9 \frac{nRT}{V} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot T}{1 \text{ L} - 2 \text{ mol} \cdot 0,0106 \text{ L mol}^{-1}} - \frac{5,125 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2} \cdot 2 \text{ mol}}{(1 \text{ L})^2} &= 0,9 \cdot \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot T}{1 \text{ L}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= 1027 \text{ K} \end{aligned}$$

Άρα η πίεση του Kr είναι ίση με το 90 % της ιδανικής όταν η θερμοκρασία γίνεται 1027 K.

3.4.3. Σταθερές van der Waals – Κρίσιμες σταθερές αερίου

- Ο σύνογκος b (σταθερά van der Waals) ενός αερίου μορίου είναι τετραπλάσιος του συνολικού γεωμετρικού όγκου αυτού και δίνεται από τη σχέση

$$b = 4 \left(\frac{1}{6} \pi d^3 N_A \right)$$

όπου d η μοριακή διάμετρος, η οποία είναι ίση με $d = 2r$, όπου r η ακτίνα του μορίου.

Με λίγα λόγια η σταθερά van der Waals, b , είναι ένα μέτρο του μεγέθους του μορίου. Στις ασκήσεις αυτές συνήθως δίνεται η σταθερά b και ζητείται η μοριακή διάμετρος, d , ή η ακτίνα του μορίου, r .

- Οι κρίσιμες σταθερές ενός αερίου, δηλαδή η κρίσιμη θερμοκρασία, T_c , η κρίσιμη πίεση, p_c , και ο κρίσιμος όγκος, V_c , συνδέονται με τις σταθερές van der Waals, a και b , του αερίου με τις παρακάτω σχέσεις:

$$T_c = \frac{8a}{27Rb}$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2}$$

$$V_c = 3b$$

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας είναι δυνατό να δίνονται οι κρίσιμες σταθερές του αερίου και να ζητούνται οι σταθερές van der Waals αυτού ή το αντίστροφο.

- Άλλα κρίσιμα μεγέθη που είναι δυνατόν να ζητείται να υπολογιστούν είναι ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας και η κρίσιμη πυκνότητα μάζας [11, 14] ενός αερίου.

Ο συντελεστής συμπιεστικότητας, Z , ενός αερίου, όταν αυτό βρίσκεται στις κρίσιμες συνθήκες του ονομάζεται κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας, Z_c , και δίνεται από τη σχέση:

$$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c} = \frac{3}{8}$$

Ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας, Z_c , έχει την τιμή $3/8$ για όλα τα αέρια που δεν παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύζευξης.

Η πυκνότητα μάζας, ρ , ενός αερίου, όταν αυτό βρίσκεται στις κρίσιμες συνθήκες του ονομάζεται κρίσιμη πυκνότητα μάζας, ρ_c , και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_c = \frac{m}{V_c}$$

όπου

m : η μάζα του αερίου ίση με τη μοριακή μάζα σε g διότι ο κρίσιμος όγκος του αερίου εκφράζεται ανά mol και

V_c : ο κρίσιμος όγκος του αερίου.

11. Οι σταθερές van der Waals για το αέριο Ar είναι $a = 1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0320 \text{ L mol}^{-1}$. Να εκφράσετε τις παραπάνω σταθερές σε μονάδες του συστήματος SI.

Απάντηση

Οι μονάδες του συστήματος SI για τα μεγέθη που ενδιαφέρουν στην προκειμένη περίπτωση δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Μέγεθος	Μονάδα
Πίεση	Pa
Όγκος	m^3
Ποσότητα ουσίας	mol

Έτσι

$$\text{atm} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{mol}^{-1} = 101325 \text{ Pa} \cdot (10^{-3} \text{ m}^3)^2 \cdot \text{mol}^{-1} = 0,101325 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-1}$$

και

$$\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} = (10^{-3} \text{ m}^3) \text{ mol}^{-1} = 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

Άρα οι σταθερές van der Waals a και b σε μονάδες του συστήματος SI είναι:

$$a = 1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-1} = 1,337 \cdot 0,101325 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-1} = 0,135 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-1}$$

$$b = 0,0320 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,0320 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

12. Η σταθερά a van der Waals για το CO_2 έχει την τιμή $3,658 \text{ bar L}^2 \text{ mol}^{-2}$. Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της σταθεράς a σε μονάδες $\text{atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$.

Απάντηση

Για να μετατρέψουμε τα bar σε atm χρησιμοποιούμε τους κατάλληλους συντελεστές μετατροπής. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

Αρχικά θα μετατρέψουμε τα bar σε Pa:

$$3,658 \text{ bar} = 3,658 \text{ bar} \left(\frac{10^5 \text{ Pa}}{1 \text{ bar}} \right) = 3658 \cdot 10^2 \text{ Pa}$$

και στη συνέχεια τα Pa σε atm:

$$3658 \cdot 10^2 \text{ Pa} = 3658 \cdot 10^2 \text{ Pa} \left(\frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} \right) = 3,610 \text{ atm}$$

Άρα η σταθερά a είναι ίση με $3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$.

13. Δίνονται οι σταθερές van der Waals για το αέριο N_2 , $a = 1,352 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0387 \text{ L mol}^{-1}$. Να υπολογιστούν οι κρίσιμες σταθερές του N_2 .

Απάντηση

Οι κρίσιμες σταθερές ενός αερίου συνδέονται με τις σταθερές van der Waals αυτού με τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_c = 3b \quad (1)$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2} \quad (2)$$

$$T_c = \frac{8a}{27Rb} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών a και b του αερίου στις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ο κρίσιμος όγκος, η κρίσιμη πίεση και η κρίσιμη θερμοκρασία του N_2 είναι:

$$V_c = 3 \cdot 0,0387 \text{ L mol}^{-1} = 0,1161 \text{ L mol}^{-1}$$

$$p_c = \frac{1,352 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{27 (0,0387 \text{ L mol}^{-1})^2} = 33,43 \text{ atm}$$

$$T_c = \frac{8 \cdot 1,352 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{27 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0387 \text{ L mol}^{-1}} = 126,2 \text{ K}$$

14. Να υπολογιστεί η ακτίνα ενός μορίου O₂ αν είναι γνωστό ότι η τιμή της σταθεράς *b* van der Waals είναι ίση με *b* = 0,0319 L mol⁻¹.

Απάντηση

Ο σύνογκος *b* (σταθερά van der Waals) ενός αερίου μορίου είναι τετραπλάσιος του συνολικού γεωμετρικού όγκου αυτού και δίνεται από τη σχέση

$$b = 4 \left(\frac{1}{6} \pi d^3 N_A \right)$$

όπου *d* η μοριακή διάμετρος, η οποία είναι ίση με *d* = 2*r*, όπου *r* η ακτίνα του μορίου.

Από την παραπάνω σχέση με απλές πράξεις προκύπτει ότι η ακτίνα του μορίου δίνεται από τη σχέση

$$b = 4 \left(\frac{1}{6} \pi d^3 N_A \right) \Rightarrow b = \frac{4}{6} \pi (2r)^3 N_A \Rightarrow b = \frac{16}{3} \pi r^3 N_A \Rightarrow r^3 = \frac{3b}{16 \pi N_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{3b}{16 \pi N_A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει ότι η ακτίνα του μορίου του O₂ είναι

$$r = \left(\frac{3 \cdot 0,0319 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}}{16 \cdot 3,14 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,47 \cdot 10^{-9} \text{ dm} = 1,47 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,147 \text{ nm}$$

15. Να υπολογιστεί η ακτίνα ενός μορίου N₂ αν είναι γνωστό ότι ο κρίσιμος όγκος του είναι *V_c* = 90 cm³ mol⁻¹.

Απάντηση

Η σταθερά *b* van der Waals ενός αερίου συνδέεται με τον κρίσιμο όγκο ενός αερίου με τη σχέση

$$b = \frac{V_c}{3}$$

από την οποία με αντικατάσταση προκύπτει ότι η σταθερά b του N_2 είναι

$$b = \frac{90 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}}{3} = 30 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1} = 0,03 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

Η σταθερά b του μορίου συνδέεται με την ακτίνα του μορίου με τη σχέση

$$r = \left(\frac{3b}{16 \pi N_A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

από την οποία με αντικατάσταση προκύπτει ότι η ακτίνα του μορίου του N_2 είναι

$$r = \left(\frac{3 \cdot 0,03 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}}{16 \cdot 3,14 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,44 \cdot 10^{-9} \text{ dm} = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,144 \text{ nm}$$

16. Οι κρίσιμες σταθερές για το CO_2 είναι $p_c = 72,785 \text{ atm}$ και $V_c = 94 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$. Να υπολογιστούν οι σταθερές van der Waals του CO_2 .

Απάντηση

Η σταθερά b van der Waals ενός αερίου συνδέεται με τον κρίσιμο όγκο του με τη σχέση

$$b = \frac{V_c}{3} \quad (1)$$

από την οποία με αντικατάσταση προκύπτει ότι είναι ίση με

$$b = \frac{94 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}}{3} = 31,3 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1} = 0,031 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1} = 0,031 \text{ L mol}^{-1}$$

Οι σταθερές van der Waals ενός αερίου συνδέονται με την κρίσιμη πίεση αυτού με τη σχέση

$$a = 27 p_c b^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (2) προκύπτει ότι η σταθερά a δίνεται από τη σχέση

$$a = 27 p_c \left(\frac{V_c}{3} \right)^2 = 3 p_c V_c^2$$

και είναι

$$a = 3 \cdot (72,785 \text{ atm}) (0,094 \text{ L mol}^{-1})^2 = 2,088 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$$

17. Να υπολογιστούν ο κρίσιμος όγκος και η κρίσιμη πυκνότητα μάζας του αερίου CO₂, αν η κρίσιμη πίεση αυτού είναι 72,785 atm και η κρίσιμη θερμοκρασία 304,13 K.

Απάντηση

Από τον κρίσιμο συντελεστή συμπίεστικότητας, Z_c , ενός αερίου προκύπτει ότι ο κρίσιμος όγκος του αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$Z_c = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{p_c V_c}{RT_c} = \frac{3}{8} \Rightarrow V_c = \frac{3 RT_c}{8 p_c}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο κρίσιμος όγκος του CO₂ είναι:

$$V_c = \frac{3}{8} \cdot \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 304,13 \text{ K}}{72,785 \text{ atm}} = 0,128 \text{ L mol}^{-1} \text{ ή } 128 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

Η κρίσιμη πυκνότητα μάζας ενός αερίου, ρ_c , είναι η πυκνότητα που έχει το αέριο στις κρίσιμες συνθήκες του και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_c = \frac{m}{V_c}$$

όπου

m : η μάζα του αερίου ίση με τη μοριακή μάζα σε g διότι ο κρίσιμος όγκος του αερίου εκφράζεται ανά mol και

V_c : ο κρίσιμος όγκος του αερίου.

Έτσι αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η κρίσιμη πυκνότητα μάζας του CO₂ είναι

$$\rho_c = \frac{44 \text{ g}}{128 \text{ cm}^3} = 0,344 \text{ g cm}^{-3}$$

18. Να υπολογιστεί ο συντελεστής συμπίεστικότητας ενός αερίου van der Waals, αν είναι γνωστό ότι ο μοριακός όγκος του αερίου είναι 0,9 L mol⁻¹ σε θερμοκρασία 500 K. Δίνεται ότι ο κρίσιμος όγκος του αερίου είναι 122 cm³ mol⁻¹ και η κρίσιμη πίεση 77,809 atm.

Απάντηση

Η σταθερά b van der Waals ενός αερίου συνδέεται με τον κρίσιμο όγκο του με τη σχέση

$$b = \frac{V_c}{3} \quad (1)$$

από την οποία με αντικατάσταση προκύπτει ότι είναι

$$b = \frac{122 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}}{3} = 41 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1} = 0,041 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1} = 0,041 \text{ L mol}^{-1}$$

Οι σταθερές van der Waals ενός αερίου συνδέονται με την κρίσιμη πίεση αυτού με τη σχέση

$$a = 27 p_c b^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (2) προκύπτει ότι η σταθερά a δίνεται από τη σχέση

$$a = 27 p_c \left(\frac{V_c}{3}\right)^2 = 3 p_c V_c^2$$

και είναι

$$a = 3 (77,809 \text{ atm}) (0,122 \text{ L mol}^{-1})^2 = 3,474 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$$

Η καταστατική εξίσωση van der Waals για 1 mol αερίου είναι

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

από την οποία με απλές πράξεις προκύπτει ότι η πίεση του αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι είναι ίση με:

$$p = \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 500 \text{ K}}{0,9 \text{ L mol}^{-1} - 0,041 \text{ L mol}^{-1}} - \frac{3,474 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{(0,9 \text{ L mol}^{-1})^2} = 44,92 \text{ atm}$$

Έτσι ο συντελεστής συμπίεσης, Z , του αερίου είναι:

$$Z = \frac{pV_m}{RT} = \frac{44,92 \text{ atm} \cdot 0,9 \text{ L mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 500 \text{ K}} = 0,99$$

19. Η κρίσιμη θερμοκρασία του Ar είναι 150,68 K και η κρίσιμη πίεση αυτού 47,994 atm. Να βρεθεί: α) ο κρίσιμος όγκος του αερίου, β) η κρίσιμη πυκνότητα μάζας του, γ) η ακτίνα ενός μορίου Ar και δ) η πίεση που ασκούν 8 g Ar αν καταλαμβάνουν όγκο 3 L στους 27 °C. Να υποθέσετε ότι το αέριο συμπεριφέρεται ως αέριο van der Waals.

Απάντηση

α) Η κρίσιμη πίεση και η κρίσιμη θερμοκρασία του αερίου συνδέονται με τις σταθερές van der Waals αυτού με τις παρακάτω σχέσεις:

$$p_c = \frac{a}{27 b^2} \quad (1)$$

$$T_c = \frac{8 a}{27 R b} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\begin{aligned} 47,994 \text{ atm} &= \frac{a}{27 b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= 1295,8 b^2 \text{ atm} \end{aligned} \quad (3)$$

ενώ από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} 150,68 \text{ K} &= \frac{8 a}{27 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot b} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= 41,7 b \text{ atm L mol}^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$\frac{a}{a} = \frac{1295,8 b^2 \text{ atm}}{41,7 b \text{ atm L mol}^{-1}} \Rightarrow b = 0,032 \text{ L mol}^{-1}$$

και αντικαθιστώντας την τιμή της σταθεράς b στην εξίσωση (4) είναι:

$$\Rightarrow a = 41,7 \cdot 0,032 \text{ L mol}^{-1} \text{ atm L mol}^{-1} \Rightarrow a = 1,334 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$$

Έτσι ο κρίσιμος όγκος του αερίου είναι:

$$V_c = 3b = 3 \cdot 0,032 \text{ L mol}^{-1} = 0,096 \text{ L mol}^{-1} \text{ ή } 96 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

β) Η κρίσιμη πυκνότητα μάζας του Ar είναι

$$\rho_c = \frac{m}{V_c} = \frac{40 \text{ g}}{96 \text{ cm}^3} = 0,41 \text{ g cm}^{-3}$$

γ) Η ακτίνα ενός αερίου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$r = \left(\frac{3b}{16 \pi N_A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ακτίνα του μορίου του Ar είναι:

$$r = \left(\frac{3 \cdot 0,032 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}}{16 \cdot 3,14 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,47 \cdot 10^{-7} \text{ dm} = 1,47 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 14,7 \text{ nm}$$

δ) Τα mol του Ar που υπάρχουν στο δοχείο είναι:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{8 \text{ g}}{40 \text{ g mol}^{-1}} = 0,2 \text{ mol}$$

Αναδιατάσσοντας την καταστατική εξίσωση van der Waals προκύπτει ότι η πίεση ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι η πίεση του αερίου είναι:

$$p = \frac{0,2 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3 \text{ L} - 0,2 \text{ mol} \cdot 0,032 \text{ L mol}^{-1}} - 1,334 \text{ atm L}^2 \text{mol}^{-2} \frac{(0,2 \text{ mol})^2}{(3 \text{ L})^2} = 1,64 \text{ atm}$$

20. Η κρίσιμη πίεση και ο κρίσιμος όγκος του Ar είναι 47,994 atm και 75 cm³ mol⁻¹, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί: α) η κρίσιμη θερμοκρασία του Ar υποθέτοντας ότι υπακούει στην εξίσωση van der Waals και β) το % σφάλμα στο θεωρητικό υπολογισμό της κρίσιμης θερμοκρασίας, αν η πειραματική τιμή της κρίσιμης θερμοκρασίας του Ar είναι 150,687 K.

Απάντηση

α) Για τα αέρια van der Waals ισχύει για τον κρίσιμο συντελεστή συμπίεσης η σχέση

$$Z_c = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{p_c V_c}{RT_c} = \frac{3}{8}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η κρίσιμη θερμοκρασία T_c του Ar είναι

$$T_c = \frac{8p_c V_c}{3R} = \frac{8 \cdot 47,994 \text{ atm} \cdot 0,075 \text{ L mol}^{-1}}{3 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1}} = 117 \text{ K}$$

β) Το % σφάλμα στον θεωρητικό υπολογισμό της T_c δίνεται από τη σχέση

$$\% \text{ σφάλμα} = \frac{|T_{c,θεωρ.} - T_{c,πραγμ.}|}{T_{c,θεωρ.}} \cdot 100$$

και είναι

$$\% \text{ σφάλμα} = \frac{|117 - 150,687|}{117} \cdot 100 = 28,8 \%$$

21. Οι κρίσιμες σταθερές για το He είναι $p_c = 2,244 \text{ atm}$, $T_c = 5,1953 \text{ K}$ και $V_c = 57 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ και οι αντίστοιχες κρίσιμες σταθερές για το H_2O είναι $p_c = 217,715 \text{ atm}$, $T_c = 647,10 \text{ K}$ και $V_c = 56 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$. Να δείξετε αν τα παραπάνω αέρια παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύζευξης στα μόριά τους χρησιμοποιώντας ως κριτήριο τον κρίσιμο συντελεστή συμπίεστικότητας.

Απάντηση

Ο κρίσιμος συντελεστής συμπίεστικότητας, Z_c , δίνεται από τη σχέση:

$$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c} \quad (1)$$

και θεωρητικά ισχύει ότι για όλα τα αέρια που δεν παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύζευξης έχει τιμή ίση με:

$$Z_c = \frac{3}{8} = 0,375$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει ότι ο κρίσιμος συντελεστής συμπίεστικότητας του He είναι ίσος με:

$$Z_c = \frac{2,244 \text{ atm} \cdot 0,057 \text{ L mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 5,1953 \text{ K}} = 0,30$$

ενώ ο κρίσιμος συντελεστής συμπίεστικότητας του H_2O είναι ίσος με:

$$Z_c = \frac{217,715 \text{ atm} \cdot 0,056 \text{ L mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 647,10 \text{ K}} = 0,23$$

Γενικά η τιμή του κρίσιμου συντελεστή συμπίεστικότητας για τα αέρια που δεν παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύζευξης στα μόριά τους έχει τιμή περίπου 0,3 και όχι 0,375, όπως προβλέπει η ανηγμένη εξίσωση van der Waals [14]. Για το νερό παρατηρούμε μεγάλη απόκλιση της τιμής του Z_c και από την θεωρητική τιμή αλλά και από την πειραματική τιμή. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη δεσμών υδρογόνου στα μόρια του νερού.

3.4.4. Αρχή των αντιστοιχών καταστάσεων

- Σύμφωνα με την αρχή των αντιστοιχών καταστάσεων: «Ίσες ποσότητες (mol) πραγματικών αερίων που καταλαμβάνουν τον ίδιο ανηγμένο όγκο στην ίδια ανηγμένη θερμοκρασία ασκούν την ίδια ανηγμένη πίεση».

Η ανηγμένη εξίσωση van der Waals δίνεται από την παρακάτω μαθηματική εξίσωση:

$$\left(p_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(3V_r - 1) = 8T_r$$

όπου:

p_r : η ανηγμένη πίεση,

V_r : ο ανηγμένος όγκος και

T_r : η ανηγμένη θερμοκρασία.

Οι αδιάστατες ανηγμένες μεταβλητές ενός αερίου προκύπτουν διαιρώντας την πραγματική τιμή της μεταβλητής με την αντίστοιχη κρίσιμη σταθερά και δίνονται από τις σχέσεις:

$$p_r = \frac{p}{p_c}$$

$$V_r = \frac{V}{V_c}$$

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας είναι δυνατόν να ζητείται να υπολογιστεί η πίεση, ο όγκος ή η θερμοκρασία ενός αερίου, το οποίο βρίσκεται σε αντίστοιχη κατάσταση με κάποιο άλλο αέριο. Ακόμη είναι δυνατόν να ζητείται να υπολογιστεί η πίεση, ο όγκος ή η θερμοκρασία ενός αερίου από ανηγμένα δεδομένα του αερίου, μέσω της ανηγμένης καταστατικής εξίσωσης. Να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι για τον υπολογισμό του όγκου ενός αερίου από την ανηγμένη καταστατική εξίσωση προκύπτει, όπως και στην καταστατική εξίσωση van der Waals, μια εξίσωση τρίτου βαθμού, η οποία μπορεί να λυθεί εύκολα με το Mathematica.

- Συνέπεια του θεωρήματος των αντιστοιχών καταστάσεων αποτελεί ο κανόνας του Gulberg, σύμφωνα με τον οποίο «όλα τα κανονικά υγρά έχουν το ίδιο σημείο ζέσεως, όταν αυτό εκφράζεται ως ανηγμένη θερμοκρασία». Δηλαδή ο λόγος της κανονικής θερμοκρασίας

βρασμού προς την αντίστοιχη κρίσιμη θερμοκρασία για όλες τις ουσίες, που δεν παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύζευξης, είναι ο ίδιος [14]. Ο Gulberg βρήκε ότι:

$$\frac{T_b}{T_c} = 0,64$$

όπου

T_b : η κανονική θερμοκρασία βρασμού του υγρού και

T_c : η κρίσιμη θερμοκρασία του.

Ο κανόνας του Gulberg ισχύει για ένα υγρό όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη.

Στις ασκήσεις αυτές είναι δυνατόν να ζητείται:

- α) να υπολογιστεί το κανονικό σημείο βρασμού μιας ουσίας και
- β) να βρεθεί αν τα μόρια ενός αερίου (και γενικότερα μιας ουσίας) παρουσιάζουν το φαινόμενο της σύζευξης.

22. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία και η πίεση ποσότητας 1 mol αερίου H_2 που είναι σε αντίστοιχη κατάσταση με ίση ποσότητα αερίου N_2 σε θερμοκρασία 400 K και πίεση 5 atm. Δίνονται οι κρίσιμες θερμοκρασίες για το H_2 και το N_2 ίσες με 33,14 και 126,192 K και οι κρίσιμες πιέσεις ίσες με 12,794 και 33,456 atm, αντίστοιχα.

Απάντηση

Σύμφωνα με την αρχή των αντιστοιχών καταστάσεων η ανηγμένη πίεση και η ανηγμένη θερμοκρασία του N_2 είναι ίση με την ανηγμένη πίεση και ανηγμένη θερμοκρασία του H_2 .

Η ανηγμένη πίεση, p_r , του N_2 είναι:

$$p_r = \frac{p}{p_c} = \frac{5 \text{ atm}}{33,456 \text{ atm}} = 0,15$$

η οποία είναι ίση με την ανηγμένη πίεση του H_2 . Από τη σχέση της ανηγμένης πίεσης προκύπτει ότι η πίεση του αερίου H_2 είναι ίση με:

$$p = p_r p_c = 0,15 \cdot 12,794 \text{ atm} = 1,912 \text{ atm}$$

Η ανηγμένη θερμοκρασία, T_r , του N_2 είναι:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{400 \text{ K}}{126,192 \text{ K}} = 3,17$$

η οποία είναι ίση με την ανηγμένη θερμοκρασία του H_2 . Από τη σχέση της ανηγμένης θερμοκρασίας προκύπτει ότι η θερμοκρασία του αερίου H_2 είναι ίση με:

$$T = T_r T_c = 3,17 \cdot 33,14 \text{ K} = 105,0 \text{ K}$$

23. Να υπολογιστεί ο παράγοντας συμπίεστικότητας για το αέριο Xe σε ανηγμένη πίεση 1,85 και ανηγμένη θερμοκρασία 1,45. Δίνεται η κρίσιμη πίεση του Xe 57,656 atm, η κρίσιμη θερμοκρασία 289,733 K και ο κρίσιμος όγκος $118 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$.

Απάντηση

Ο παράγοντας συμπίεστικότητας, Z , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$Z = \frac{pV_m}{RT}$$

και για να υπολογιστεί είναι απαραίτητη η πίεση, η θερμοκρασία και ο μοριακός όγκος του αερίου.

Από τις σχέσεις της ανηγμένης πίεσης, p_r , και της ανηγμένης θερμοκρασίας, T_r ,

$$p_r = \frac{p}{p_c}$$

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

προκύπτει ότι η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου είναι

$$p = p_r p_c = 1,85 \cdot 57,656 \text{ atm} = 106,66 \text{ atm}$$

και

$$T = T_r T_c = 1,45 \cdot 289,733 \text{ K} = 420,11 \text{ K}$$

Η ανηγμένη εξίσωση van der Waals

$$\left(p_r + \frac{3}{V_r^2} \right) (3V_r - 1) = 8T_r$$

με απλές πράξεις μετατρέπεται σε μια εξίσωση τρίτου βαθμού:

$$\begin{aligned} 3p_r V_r - p_r + \frac{9}{V_r} - \frac{3}{V_r^2} &= 8T_r \Rightarrow \\ \Rightarrow 3p_r V_r^3 - p_r V_r^2 + 9V_r - 3 - 8T_r V_r^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3p_r V_r^3 - (p_r + 8T_r) V_r^2 + 9V_r - 3 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_r^3 - \left(\frac{p_r + 8T_r}{3p_r} \right) V_r^2 + \frac{3}{p_r} V_r - \frac{1}{p_r} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Οι συντελεστές της τριτοβάθμιας εξίσωσης με αντικατάσταση είναι:

$$i) \frac{p_r + 8T_r}{3p_r} = \frac{1,85 + 8 \cdot 1,45}{3 \cdot 1,85} = 2,4234$$

$$ii) \frac{3}{p_r} = \frac{3}{1,85} = 1,6216$$

$$iii) \frac{1}{p_r} = \frac{1}{1,85} = 0,5405$$

Αν θέσουμε με $x = V_r$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$x^3 - 2,4234x^2 + 1,6216x - 0,5405 = 0$$

Από τις τρεις λύσεις της εξίσωσης η μία μόνο είναι πραγματική:

$$x = 1,6331$$

Επομένως ο ανηγμένος όγκος του N_2 στις συνθήκες αυτές είναι:

$$V_r = 0,6331$$

και ο μοριακός όγκος του αερίου:

$$V_m = V_r V_c = 0,6331 \cdot 0,118 \text{ L mol}^{-1} = 0,0747 \text{ L mol}^{-1}$$

Επομένως ο συντελεστής συμπίεσιμότητας του αερίου είναι:

$$Z = \frac{pV_m}{RT} = \frac{106,66 \text{ atm} \cdot 0,0747 \text{ L}}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 420,11 \text{ K}} = 0,23$$

24. Να βρεθεί ο μοριακός όγκος του N_2 σε ανηγμένη πίεση 0,95 και ανηγμένη θερμοκρασία 1,25. Δίνεται ο κρίσιμος όγκος του N_2 , $V_c = 90 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$.

Απάντηση

Η ανηγμένη εξίσωση van der Waals

$$\left(p_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(3V_r - 1) = 8T_r$$

με απλές πράξεις μετατρέπεται σε μια εξίσωση τρίτου βαθμού:

$$\begin{aligned} 3p_r V_r - p_r + \frac{9}{V_r} - \frac{3}{V_r^2} &= 8T_r \Rightarrow \\ \Rightarrow 3p_r V_r^3 - p_r V_r^2 + 9V_r - 3 - 8T_r V_r^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3p_r V_r^3 - (p_r + 8T_r) V_r^2 + 9V_r - 3 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_r^3 - \left(\frac{p_r + 8T_r}{3p_r}\right) V_r^2 + \frac{3}{p_r} V_r - \frac{1}{p_r} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Οι συντελεστές της τριτοβάθμιας εξίσωσης με αντικατάσταση είναι:

$$i) \frac{p_r + 8T_r}{3p_r} = \frac{0,95 + 8 \cdot 1,25}{3 \cdot 0,95} = 3,8421$$

$$ii) \frac{3}{p_r} = \frac{3}{0,95} = 3,1579$$

$$iii) \frac{1}{p_r} = \frac{1}{0,95} = 1,0526$$

Αν θέσουμε με $x = V_r$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$x^3 - 3,8421x^2 + 3,15796x - 1,0526 = 0$$

Από τις τρεις λύσεις της εξίσωσης η μία μόνο είναι πραγματική:

$$x = 2,8694$$

Επομένως ο ανηγμένος όγκος του N_2 στις συνθήκες αυτές είναι:

$$V_r = 2,8694$$

και ο μοριακός όγκος του αερίου:

$$V_m = V_r V_c = 2,8694 \cdot 0,09 \text{ L mol}^{-1} = 0,2582 \text{ L mol}^{-1}$$

25. Να υπολογιστεί το κανονικό σημείο βρασμού του CO_2 , αν είναι γνωστό ότι οι σταθερές van der Waals για το CO_2 είναι $a = 3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0429 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Η κρίσιμη θερμοκρασία του CO_2 είναι:

$$T_c = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8 \cdot 3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{27 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0429 \text{ L mol}^{-1}} = 304,06 \text{ K}$$

Έτσι από τον τύπο του Gulberg η κανονική θερμοκρασία βρασμού του CO_2 είναι:

$$T_b = 0,64 T_c = 0,64 \cdot 304,06 \text{ K} = 194,6 \text{ K}$$

26. Αν οι σταθερές van der Waals για το αέριο Ar είναι $a = 1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0320 \text{ L mol}^{-1}$, να υπολογιστούν: α) οι κρίσιμες σταθερές του Ar, β) η κρίσιμη πυκνότητα μάζας και γ) η τιμή του παράγοντα συμπιεστικότητας, Z , του Ar σε ανηγμένη πίεση 1,85 και ανηγμένη θερμοκρασία 1,75.

Απάντηση

α) Οι κρίσιμες σταθερές ενός αερίου συνδέονται με τις σταθερές van der Waals αυτού με τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_c = 3b \quad (1)$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2} \quad (2)$$

$$T_c = \frac{8a}{27Rb} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές a και b του αερίου στις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ο κρίσιμος όγκος, η κρίσιμη πίεση και η κρίσιμη θερμοκρασία του N_2 είναι:

$$\begin{aligned} V_c &= 3 \cdot 0,0320 \text{ L mol}^{-1} = 0,096 \text{ L mol}^{-1} \\ p_c &= \frac{1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{27 (0,0320 \text{ L mol}^{-1})^2} = 48,36 \text{ atm} \\ T_c &= \frac{8 \cdot 1,337 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{27 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0320 \text{ L mol}^{-1}} = 150,9 \text{ K} \end{aligned}$$

β) Η κρίσιμη πυκνότητα μάζας ενός αερίου, ρ_c , είναι η πυκνότητα που έχει το αέριο στις κρίσιμες συνθήκες του και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_c = \frac{m}{V_c}$$

όπου

m : η μάζα του αερίου ίση με τη μοριακή μάζα σε g διότι ο κρίσιμος όγκος του αερίου εκφράζεται ανά mol και

V_c : ο κρίσιμος όγκος του αερίου.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η κρίσιμη πυκνότητα μάζας του Ar είναι

$$\rho_c = \frac{40 \text{ g}}{96 \text{ cm}^3} = 0,41 \text{ g cm}^{-3}$$

γ) Ο συντελεστής συμπίεστικότητας, Z , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$Z = \frac{pV_m}{RT}$$

και για να υπολογιστεί είναι απαραίτητη η πίεση, η θερμοκρασία και ο μοριακός όγκος του αερίου.

Από τις σχέσεις της ανηγμένης πίεσης, p_r , και της ανηγμένης θερμοκρασίας, T_r ,

$$p_r = \frac{p}{p_c}$$

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

προκύπτει ότι η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου είναι

$$p = p_r p_c = 1,85 \cdot 48,36 \text{ atm} = 89,47 \text{ atm}$$

και

$$T = T_r T_c = 1,75 \cdot 150,9 \text{ K} = 264,1 \text{ K}$$

Η καταστατική εξίσωση van der Waals για 1 mol αερίου είναι

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

η οποία με απλές πράξεις μετατρέπεται σε μια εξίσωση τρίτου βαθμού:

$$\begin{aligned} \left(\frac{pV_m^2 + a}{V_m^2}\right)(V_m - b) &= RT \Rightarrow \\ \Rightarrow pV_m^3 - pbV_m^2 + aV_m - ab &= RTV_m^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_m^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)V_m^2 + \frac{a}{p}V_m - \frac{ab}{p} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Οι συντελεστές της τριτοβάθμιας εξίσωσης με αντικατάσταση είναι:

$$i) \left(b + \frac{RT}{p}\right) = \left(0,0320 \text{ L mol}^{-1} + \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 264,1 \text{ K}}{89,47 \text{ atm}}\right) = 0,2740 \text{ L mol}^{-1}$$

$$ii) \frac{a}{p} = \frac{1,337 \text{ atm L}^2 \text{mol}^{-2}}{89,47 \text{ atm}} = 0,0150 \text{ L}^2 \text{mol}^{-2}$$

$$iii) \frac{ab}{p} = \frac{(1,337 \text{ atm L}^2 \text{mol}^{-2})(0,0320 \text{ L mol}^{-1})}{89,47 \text{ atm}} = 0,0005 \text{ L}^3 \text{mol}^{-3}$$

Αν θέσουμε με $x = V_m/L \text{ mol}^{-1}$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$x^3 - 0,2740x^2 + 0,0150x - 0,0005 = 0$$

Από τις τρεις λύσεις της εξίσωσης η μία μόνο είναι πραγματική:

$$x = 0,2149$$

Επομένως ο μοριακός όγκος του Ar στις συνθήκες αυτές είναι $0,2149 \text{ L mol}^{-1}$.

27. Να δείξετε αν ισχύει ο κανόνας του Gulberg για το N_2 και το H_2O και να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματα. Τα σημεία βρασμού του N_2 και του H_2O είναι $77,35 \text{ K}$ και $373,12 \text{ K}$, αντίστοιχα. Δίνονται οι σταθερές van der Waals για το N_2 , $a = 1,352 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0387 \text{ L mol}^{-1}$ και για το H_2O , $a = 5,464 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0305 \text{ L mol}^{-1}$.

Απάντηση

Η κρίσιμη θερμοκρασία του N_2 είναι:

$$T_c = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8 \cdot 1,352 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{27 \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0387 \text{ L mol}^{-1}} = 126,2 \text{ K}$$

Έτσι ο λόγος T_b/T_c είναι ίσος με:

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{77,35 \text{ K}}{126,2 \text{ K}} = 0,61$$

Η τιμή του παραπάνω λόγου πλησιάζει αρκετά την τιμή 0,64, άρα για το N_2 ισχύει ικανοποιητικά ο κανόνας του Gulberg.

Όμοια για το H_2O είναι:

$$T_c = 647,3 \text{ K}$$

και

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{373,12 \text{ K}}{647,3 \text{ K}} = 0,58$$

Στην περίπτωση του H_2O η τιμή του λόγου T_b/T_c αποκλίνει αρκετά από την τιμή 0,64 και στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει ο κανόνας του Gulberg. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στο νερό παρουσιάζεται το φαινόμενο της σύζευξης μεταξύ των μορίων του.

3.4.5. Καταστατική εξίσωση virial

Η καταστατική εξίσωση virial για 1 mol αερίου περιγράφεται από την εξίσωση:

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right)$$

όπου:

p : η πίεση (σε atm),

V_m : ο μοριακός όγκος (σε L mol⁻¹),

T : η θερμοκρασία (σε K),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με 0,082 atm L mol⁻¹K⁻¹,

B : ο δεύτερος συντελεστής virial και

C : τρίτος συντελεστής virial (κ.ο.κ).

Μια ισοδύναμη έκφραση της καταστατικής εξίσωσης virial είναι και η παρακάτω:

$$pV_m = RT(1 + B'p + C'p^2 + \dots)$$

όπου:

B' : ο δεύτερος συντελεστής virial και

C' : ο τρίτος συντελεστής virial (κ.ο.κ).

Οι συντελεστές virial συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις:

$$B' = \frac{B}{RT}$$

$$C' = \frac{C}{RT}$$

.....

Από τις δυο ισοδύναμες εκφράσεις της καταστατικής εξίσωσης virial προκύπτει ότι ο παράγοντας συμπιεστικότητας υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$Z = \frac{pV_m}{RT} \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right)$$

ή

$$Z = \frac{pV_m}{RT} (1 + B'p + C'p^2 + \dots)$$

Οι συντελεστές virial εξαρτώνται από τη θερμοκρασία και μεταβάλλονται συνεχώς με αυτή. Γενικά, ο συντελεστής B έχει αρνητικές τιμές σε χαμηλές θερμοκρασίες και αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, οπότε γίνεται μηδέν και στη συνέχεια αποκτά θετικές τιμές. Η θερμοκρασία στην οποία ο συντελεστής virial B γίνεται μηδέν, $B(T) = 0$, ονομάζεται **θερμοκρασία Boyle**, T_B . Στη θερμοκρασία αυτή το αέριο συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο και υπακούει στο νόμο του Boyle σε μια σχετικά ευρεία περιοχή χαμηλών πιέσεων. Στη θερμοκρασία αυτή η μερική παράγωγος $(\partial Z/\partial p)_T$ γίνεται μηδέν καθώς η πίεση τείνει στο μηδέν, $p \rightarrow 0$, δηλαδή

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T = 0$$

Στη θερμοκρασία αυτή το αέριο συμπεριφέρεται σχεδόν ιδανικά και η καταστατική του εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$pV_m \approx RT_B$$

Οι ασκήσεις της κατηγορίας αυτής περιλαμβάνουν θεωρητικές αποδείξεις σχέσεων, καθώς και αριθμητικές ασκήσεις. Στις αριθμητικές ασκήσεις είναι δυνατόν να ζητείται να υπολογιστεί η πίεση, ο όγκος, η θερμοκρασία ή οι συντελεστές virial ενός αερίου που υπακούει στην καταστατική εξίσωση virial. Επίσης είναι δυνατόν να ζητείται να βρεθεί η θερμοκρασία Boyle ενός αερίου.

28. Να αποδειχθεί ότι: α) η καταστατική εξίσωση van der Waals και β) η καταστατική εξίσωση virial ανάγονται στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων όταν η πίεση τείνει στο μηδέν.

Απάντηση

α) Η καταστατική εξίσωση van der Waals (για 1 mol αερίου) δίνεται από τη σχέση

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$$

και με απλές πράξεις μετατρέπεται στη σχέση

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1) με τον όρο V_m/RT και κάνοντας απλές πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{pV_m}{RT} &= \left(\frac{V_m}{RT}\right)\left(\frac{RT}{V_m - b}\right) - \left(\frac{V_m}{RT}\right)\left(\frac{a}{V_m^2}\right) \Rightarrow \\ \frac{pV_m}{RT} &= \left(\frac{V_m}{V_m - b}\right) - \left(\frac{a}{RTV_m}\right) \Rightarrow \\ Z &= \left(\frac{V_m}{V_m - b}\right) - \left(\frac{a}{RTV_m}\right) \Rightarrow \\ Z &= \left(1 - \frac{b}{V_m}\right)^{-1} - \left(\frac{a}{RTV_m}\right)\end{aligned}\quad (2)$$

Επειδή ισχύει: $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$

θα ισχύει και:

$$\left(1 - \frac{b}{V_m}\right)^{-1} = 1 + \frac{b}{V_m} + \left(\frac{b}{V_m}\right)^2 + \dots \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη σχέση (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned}Z &= 1 + \frac{b}{V_m} + \left(\frac{b}{V_m}\right)^2 + \dots - \frac{a}{RTV_m} \Rightarrow \\ Z &= 1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right)\left(\frac{1}{V_m}\right) + \left(\frac{b}{V_m}\right)^2 + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

Αντικαθιστώντας το μοριακό όγκο, V_m , με τον όρο RT/p η σχέση (4) γίνεται:

$$Z = 1 + \frac{p}{RT}\left(b - \frac{a}{RT}\right) + \left(\frac{b}{RT}\right)^2 p^2 + \dots \quad (5)$$

Το όριο του συντελεστή συμπίεσης, Z , καθώς η πίεση τείνει στο μηδέν, $p \rightarrow 0$, είναι:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(1 + \frac{p}{RT}\left(b - \frac{a}{RT}\right) + \left(\frac{b}{RT}\right)^2 p^2 + \dots\right) = 1$$

Άρα $Z = 1$. Η σχέση αυτή ισχύει όταν το αέριο παρουσιάζει ιδανική συμπεριφορά. Άρα η καταστατική εξίσωση van der Waals ανάγεται στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων όταν η πίεση τείνει στο μηδέν [24].

β) Η καταστατική εξίσωση virial (για 1 mol αερίου) δίνεται από τη σχέση

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots\right)$$

η οποία με απλές πράξεις μετατρέπεται στην εξίσωση (6):

$$\frac{pV_m}{RT} = 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \Rightarrow$$

$$Z = 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας το μολαρικό όγκο, V_m , με τον όρο RT/p η σχέση (6) γίνεται:

$$Z = 1 + \frac{B}{RT}p + \frac{C}{(RT)^2}p^2 + \dots \quad (7)$$

Το όριο του συντελεστή συμπίεστικότητας, Z , καθώς η πίεση τείνει στο μηδέν, $p \rightarrow 0$, είναι:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(1 + \frac{B}{RT}p + \frac{C}{(RT)^2}p^2 + \dots \right) = 1$$

Επομένως $Z = 1$. Η σχέση αυτή ισχύει όταν το αέριο παρουσιάζει ιδανική συμπεριφορά. Άρα η καταστατική εξίσωση virial ανάγεται στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων όταν η πίεση τείνει στο μηδέν.

29. Να υπολογιστεί από την καταστατική εξίσωση virial η πίεση που ασκεί 1 mol Xe όταν καταλαμβάνει δοχείο όγκου 2 L σε θερμοκρασία 293 K. Δίνεται ο δεύτερος συντελεστής virial για το Ar, $B = -134,6 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$. Να θεωρηθεί αμελητέος κατά τους υπολογισμούς ο τρίτος συντελεστής virial.

Απάντηση

Από την καταστατική εξίσωση virial

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right)$$

ή

$$p = \frac{RT}{V_m} \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right)$$

και θεωρώντας αμελητέο τον τρίτο συντελεστή virial, προκύπτει ότι η πίεση που ασκεί 1 mol Xe όταν καταλαμβάνει δοχείο όγκου 2 L στους 293 K είναι:

$$p = \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{2 \text{ L mol}^{-1}} \left(1 - \frac{134,6 \cdot 10^{-3} \text{ L mol}^{-1}}{2 \text{ L mol}^{-1}} \right) = 11,2 \text{ atm}$$

30. Για το αέριο CH₄ ο δεύτερος συντελεστής virial, B , στους 20 °C έχει την τιμή $B = -45 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$.

α) Να υπολογιστεί η πίεση που ασκούν 24 g CH₄ τα οποία βρίσκονται σε φιάλη όγκου 3 L στους 20 °C χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση virial

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right)$$

καθώς επίσης και ο συντελεστής συμπιεστικότητας του αερίου στις συνθήκες αυτές.

β) Να υπολογιστεί ο όγκος που καταλαμβάνουν 24 g CH₄ υπό πίεση 10 atm στους 20 °C χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση virial

$$pV_m = RT(1 + B'p + C'p^2 + \dots)$$

καθώς επίσης και ο συντελεστής συμπιεστικότητας του αερίου στις συνθήκες αυτές.

Να θεωρηθούν αμελητέοι κατά τους υπολογισμούς οι τρίτοι συντελεστές virial. Επίσης να ληφθεί υπόψη ότι μεταξύ των σταθερών B και B' ισχύει η σχέση $B' = B/RT$.

γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα με εκείνα που προκύπτουν από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων [22].

Απάντηση

Τα mol του CH₄ είναι:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{24 \text{ g}}{16 \text{ g mol}^{-1}} = 1,5 \text{ mol}$$

α) Για να υπολογιστεί η πίεση του CH₄ από την καταστατική εξίσωση virial

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right) \quad (1)$$

θα πρέπει να είναι γνωστός ο μοριακός όγκος, V_m , του CH₄ ο οποίος είναι:

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{3 \text{ L}}{1,5 \text{ mol}} = 2 \text{ L mol}^{-1}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) και θεωρώντας αμελητέο τον τρίτο συντελεστή virial προκύπτει:

$$p \cdot (2 \text{ L mol}^{-1}) = 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K} \left(1 - \frac{45 \cdot 10^{-3} \text{ L mol}^{-1}}{2 \text{ L mol}^{-1}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow p = 11,743 \text{ atm}$$

Άρα η πίεση που ασκούν τα 24 g CH₄ είναι 11,743 atm.

Ο συντελεστής συμπίεστικότητας του CH₄ είναι:

$$Z = \frac{pV_m}{RT} = \frac{11,743 \text{ atm} \cdot 2 \text{ L mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,977$$

β) Ο συντελεστής virial B' είναι:

$$B' = \frac{B}{RT} = -\frac{45 \cdot 10^{-3} \text{ L mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = -1,9 \cdot 10^{-3} \text{ atm}^{-1}$$

Από την καταστατική εξίσωση virial

$$pV_m = RT(1 + B'p + C'p^2 + \dots)$$

με αντικατάσταση και θεωρώντας αμελητέο τον τρίτο συντελεστή virial προκύπτει:

$$10 \text{ atm} \cdot V_m = 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}(1 - 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ atm}^{-1} \cdot 10 \text{ atm}) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_m = 2,36 \text{ L mol}^{-1}$$

Άρα ο μοριακός όγκος του CH₄ είναι 2,36 L mol⁻¹.

Ο συντελεστής συμπίεστικότητας του CH₄ είναι:

$$Z = \frac{pV_m}{RT} = \frac{10 \text{ atm} \cdot 2,36 \text{ L mol}^{-1}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,981$$

γ) Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

για την α περίπτωση προκύπτει ότι η πίεση είναι:

$$p = \frac{1,5 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{3 \text{ L}} = 12,013 \text{ atm}$$

ενώ για τη β περίπτωση ο μοριακός όγκος είναι:

$$V_m = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{10 \text{ atm}} = 2,40 \text{ L mol}^{-1}$$

Στην α περίπτωση η απόκλιση της τιμής της πίεσης από την ιδανική συμπεριφορά είναι:

$$\% \text{ απόκλιση} = \frac{p_{ιδαν.} - p_{πραγμ.}}{p_{ιδαν.}} \cdot 100 = \frac{12,013 \text{ atm} - 11,743 \text{ atm}}{11,743 \text{ atm}} \cdot 100 = 2,3 \%$$

ενώ στη β περίπτωση η απόκλιση του μοριακού όγκου είναι:

$$\% \text{ απόκλιση} = \frac{V_{m,ιδαν.} - V_{m,πραγμ.}}{V_{m,ιδαν.}} \cdot 100 = \frac{2,40 \text{ L mol}^{-1} - 2,36 \text{ L mol}^{-1}}{2,40 \text{ L mol}^{-1}} \cdot 100 = 1,7 \%$$

Παρατηρούμε στην α περίπτωση ότι ο συντελεστής συμπιεστικότητας αποκλίνει περισσότερο από τη μονάδα σε σχέση με την περίπτωση β. Για το λόγο αυτό η % απόκλιση στην πραγματική πίεση του αερίου σε σχέση με την ιδανική συμπεριφορά είναι λίγο μεγαλύτερη από την % απόκλιση του μοριακού όγκου του αερίου από την ιδανική συμπεριφορά στην περίπτωση β.

31. Στους 400 K και πίεση 40 atm ο παράγοντας συμπιεστικότητας ενός αερίου είναι 0,84. Να υπολογιστεί ο δεύτερος συντελεστής virial, B , του αερίου στις συνθήκες αυτές. Να θεωρηθεί αμελητέος κατά τον υπολογισμό ο τρίτος συντελεστής virial. Επίσης να ληφθεί υπόψη ότι μεταξύ των σταθερών B και B' ισχύει η σχέση $B' = B/RT$.

Απάντηση

Η καταστατική εξίσωση virial:

$$pV_m = RT(1 + B'p + C'p^2 + \dots) \quad (1)$$

με αναδιάταξη μετατρέπεται στην εξίσωση:

$$\frac{pV_m}{RT} = (1 + B'p + C'p^2 + \dots) \quad (2)$$

και επειδή

$$Z = \frac{pV_m}{RT} \quad (3)$$

από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει η σχέση:

$$Z = 1 + B'p + C'p^2 + \dots \quad (4)$$

και θεωρώντας αμελητέο τον τρίτο συντελεστή virial η σχέση (4) γίνεται:

$$Z = 1 + B'p \quad (5)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (5) προκύπτει ότι ο δεύτερος συντελεστής virial, B' , είναι:

$$0,84 = 1 + B' \cdot 40 \text{ atm} \Rightarrow B' = -0,004 \text{ atm}^{-1}$$

Από τη σχέση που συνδέει τους δύο συντελεστές virial, B και B' :

$$B' = \frac{B}{RT}$$

προκύπτει ότι

$$B = B'RT = -0,004 \text{ atm}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 400 \text{ K} = -0,1312 \text{ L mol}^{-1}$$

32. Να υπολογιστεί ο δεύτερος συντελεστής virial, B , για το Ar σε θερμοκρασίες 100, 200, ..., 1000 K χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση

$$B / \text{cm}^3 \text{mol}^{-1} = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση του συντελεστή virial, B , σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία. Δίνεται ότι $T_0 = 298,15$ K και οι συντελεστές $a(i)$ για το Ar, $a(1) = -16$, $a(2) = -60$, $a(3) = -9,7$ και $a(4) = -1,5$.

Απάντηση

Η εξάρτηση του δεύτερου συντελεστή virial, B , από τη θερμοκρασία δίνεται από την εξίσωση

$$B / \text{cm}^3 \text{mol}^{-1} = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής B για θερμοκρασία 100 K είναι:

$$\begin{aligned} B &= a(1) \left[\frac{T_0}{T} - 1 \right]^{1-1} + a(2) \left[\frac{T_0}{T} - 1 \right]^{2-1} + a(3) \left[\frac{T_0}{T} - 1 \right]^{3-1} + a(4) \left[\frac{T_0}{T} - 1 \right]^{4-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= -16 \left[\frac{298,15}{100} - 1 \right]^0 - 60 \left[\frac{298,15}{100} - 1 \right]^1 - 9,7 \left[\frac{298,15}{100} - 1 \right]^2 - 1,5 \left[\frac{298,15}{100} - 1 \right]^3 \Rightarrow \\ B &= -16 - 118,89 - 38,08 - 11,67 \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= -184,646 \text{ cm}^3 \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Όμοια υπολογίζονται οι τιμές του B και στις υπόλοιπες θερμοκρασίες.

Ένας πιο εύκολος τρόπος για να υπολογιστούν σύντομα οι τιμές του B σε όλες τις ζητούμενες θερμοκρασίες είναι η χρήση του λογισμικού Mathematica.

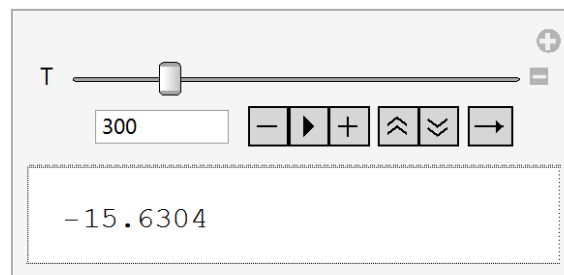
Σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica ορίζουμε τις τιμές:

- των σταθερών $a(i)$ του αερίου,
- της σταθεράς T_0 και
- το εύρος θερμοκρασιών (στο τέλος της εντολής Manipulate) για το οποίο μπορούν να υπολογιστούν οι σταθερές B του αερίου.

Έτσι ορίζουμε:

```
a(1)=-16;  
a(2)=-60;  
a(3)=-9.7;  
a(4)=-1.5;  
T0=298.15;  
Manipulate[a(1)*((T0/T)-1)^0+a(2)*((T0/T)-1)^1+a(3)*((T0/T)-  
1)^2+a(4)*((T0/T)-1)^3,{T,100,1000,100},SaveDefinitions→True]
```

και παίρνουμε την παρακάτω εικόνα:



Μετακινώντας τη μπάρα δεξιά ή αριστερά υπολογίζεται ο συντελεστής virial, B , για κάθε θερμοκρασία από 100 K έως 1000 K ανά 100 K.

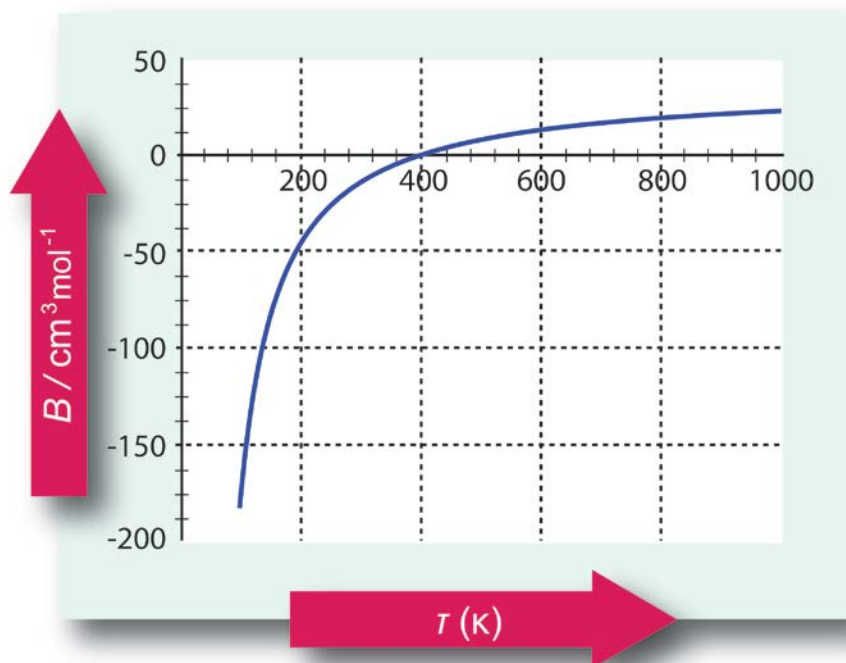
Τα αποτελέσματα αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί. Παρατηρούμε ότι η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της τιμής του δεύτερου συντελεστή virial, B .

T/K	$B / \text{cm}^3\text{mol}^{-1}$
100	- 184,646
200	- 47,958
300	- 15,630
400	- 1,326
500	6,739
600	11,921
700	15,531
800	18,192
900	20,234
1000	21,851

Για να σχεδιαστεί το διάγραμμα του συντελεστή virial, B , σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica:

```
a(1)=-16;  
a(2)=-60;  
a(3)=-9.7;  
a(4)=-1.5;  
a(5)=0;  
T0=298.15;  
Plot[a(1)*((T0/T)-1)^0+a(2)*((T0/T)-1)^1+a(3)*((T0/T)-1)^2+a(4)*((T0/T)-1)^3+a(5)*((T0/T)-1)^4,{T,100,1000},PlotRange→{{0,1000},{-200,50}},PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]},AxesLabel→{"T (K)", "B (cm3mol-1)"}]
```

Η εκτέλεση των παραπάνω εντολών δίνει την παρακάτω γραφική παράσταση



33. Να εξαχθεί η σχέση υπολογισμού της θερμοκρασίας Boyle για ένα αέριο που υπακούει στην καταστατική εξίσωση van der Waals σε συνάρτηση με τις σταθερές a , b και R [24].

Απάντηση

Η καταστατική εξίσωση van der Waals (για 1 mol αερίου)

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

με απλές πράξεις μετατρέπεται στη σχέση

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1) με τον όρο V_m/RT και κάνοντας απλές πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{pV_m}{RT} &= \left(\frac{V_m}{RT}\right)\left(\frac{RT}{V_m - b}\right) - \left(\frac{V_m}{RT}\right)\left(\frac{a}{V_m^2}\right) \Rightarrow \\ \frac{pV_m}{RT} &= \left(\frac{V_m}{V_m - b}\right) - \left(\frac{a}{RTV_m}\right) \Rightarrow \\ Z &= \left(\frac{V_m}{V_m - b}\right) - \left(\frac{a}{RTV_m}\right) \Rightarrow \\ Z &= \left(1 - \frac{b}{V_m}\right)^{-1} - \left(\frac{a}{RTV_m}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Επειδή ισχύει: $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$

θα ισχύει και:

$$\left(1 - \frac{b}{V_m}\right)^{-1} = 1 + \frac{b}{V_m} + \left(\frac{b}{V_m}\right)^2 + \dots \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη σχέση (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \frac{b}{V_m} + \left(\frac{b}{V_m}\right)^2 + \dots - \frac{a}{RTV_m} \Rightarrow \\ Z &= 1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right)\left(\frac{1}{V_m}\right) + \left(\frac{b}{V_m}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Στη θερμοκρασία Boyle ο δεύτερος συντελεστής virial είναι μηδέν, $B(T) = 0$, και η μερική παράγωγος $(\partial Z/\partial p)_T$ γίνεται μηδέν καθώς η πίεση τείνει στο μηδέν, $p \rightarrow 0$, δηλαδή

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_T = 0 \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας το μοριακό όγκο, V_m , με τον όρο RT/p , η σχέση (4) γίνεται:

$$Z = 1 + \frac{p}{RT} \left(b - \frac{a}{RT}\right) + \left(\frac{b}{RT}\right)^2 p^2 + \dots \quad (6)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (6) ως προς την πίεση, υπό σταθερή θερμοκρασία, προκύπτει η σχέση:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{RT} \left(b - \frac{a}{RT}\right) + 2 \left(\frac{b}{RT}\right)^2 p + \dots \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (5) και (7) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_T &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{RT_B} \left(b - \frac{a}{RT_B}\right) &= 0 \Rightarrow \\ b - \frac{a}{RT_B} &= 0 \Rightarrow \\ b &= \frac{a}{RT_B} \Rightarrow \\ T_B &= \frac{a}{Rb} \end{aligned}$$

34. Αν οι σταθερές van der Waals για το Ne είναι $a = 0,205 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0167 \text{ L mol}^{-1}$, να υπολογιστεί η θερμοκρασία Boyle αυτού.

Απάντηση

Η θερμοκρασία Boyle, T_B , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$T_B = \frac{a}{Rb}$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$T_B = \frac{0,205 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0167 \text{ L mol}^{-1}} = 149,7 \text{ K}$$

35. Να υπολογίσετε τις θερμοκρασίες Boyle των αερίων He, H₂, CH₄ και CO₂ και να τις συγκρίνετε με τις πειραματικές τιμές, οι οποίες είναι 25 K, 110 K, 509 K και 713 K, αντίστοιχα. Να θεωρηθεί ότι τα αέρια υπακούουν στην καταστατική εξίσωση van der Waals. Οι σταθερές van der Waals των αερίων δίνονται στον Πίνακα I1 του Παραρτήματος I.

Απάντηση

Η θερμοκρασία Boyle, T_B , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$T_B = \frac{a}{Rb}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει ότι η θερμοκρασία Boyle του αερίου He είναι:

$$T_B = \frac{0,0341 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0238 \text{ L mol}^{-1}} = 17,5 \text{ K}$$

Το % σφάλμα στο θεωρητικό υπολογισμό της T_B δίνεται από τη σχέση

$$\% \text{ σφάλμα} = \frac{|T_{B,\text{θεωρ.}} - T_{B,\text{πειρ.}}|}{T_{B,\text{θεωρ.}}} \cdot 100$$

και είναι

$$\% \text{ σφάλμα} = \frac{|25 - 17,5|}{17,5} \cdot 100 = 42,9 \%$$

Όμοια υπολογίζεται η T_B και το σφάλμα από την πειραματική τιμή και για τα υπόλοιπα αέρια. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	$T_{B,\text{θεωρ.}} \text{ (K)}$	$T_{B,\text{πειρ.}} \text{ (K)}$	% σφάλμα
He	17,5	25	42,9
H ₂	111,4	110	1,2
CO ₂	1026,2	509	50,4
CH ₄	643,1	713	10,9

3.4.6. Άλλες καταστατικές εξισώσεις

Άλλες καταστατικές εξισώσεις που έχουν προταθεί για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός πραγματικού αερίου είναι οι εξισώσεις Berthelot και Dieterici.

Η καταστατική εξίσωση Berthelot δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{TV_m^2}$$

Η καταστατική εξίσωση Dieterici δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} e^{-a/RTV_m}$$

Οι σταθερές a και b των παραπάνω καταστατικών εξισώσεων έχουν διαφορετικές τιμές από τις σταθερές van der Waals, a και b .

36. Να εξαγάγετε τις σχέσεις των κρίσιμων δεδομένων ενός αερίου που υπακούει στην καταστατική εξίσωση Berthelot σε συνάρτηση με τις σταθερές a και b του αερίου και στη συνέχεια να δείξετε ότι ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας για ένα αέριο που υπακούει στην παραπάνω εξίσωση έχει την τιμή $Z_c = 3/8$.

Απάντηση

Η καταστατική εξίσωση Berthelot δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{TV_m^2} \quad (1)$$

Η πρώτη παράγωγος της πίεσης ως προς τον όγκο της εξίσωσης (1) είναι:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T = -\frac{RT}{(V_m - b)^2} + \frac{2a}{TV_m^3} \quad (2)$$

Η δεύτερη παράγωγος της εξίσωσης (1), δηλαδή η πρώτη παράγωγος της εξίσωσης (2) είναι:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m}\right)_T = \frac{2RT}{(V_m - b)^3} - \frac{6a}{TV_m^4} \quad (3)$$

Η κρίσιμη ισόθερμη εμφανίζει ένα σημείο καμπής, το οποίο εμφανίζεται όταν η κλίση και η καμπυλότητα είναι μηδέν, δηλαδή όταν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της πίεσης με τον όγκο μηδενίζονται. Στην κρίσιμη ισόθερμη η πίεση του αερίου είναι ίση με την κρίσιμη πίεση, p_c , ο όγκος ίσος με τον κρίσιμο όγκο, V_c , και η θερμοκρασία ίση με την κρίσιμη θερμοκρασία, T_c , του αερίου.

Έτσι για τη σχέση (2) ισχύει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial V_m} \right)_T &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} + \frac{2a}{T_c V_c^3} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{RT_c}{(V_c - b)^2} &= \frac{2a}{T_c V_c^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Για τη σχέση (3) ισχύει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m} \right)_T &= 0 \Rightarrow \\ \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} - \frac{6a}{T_c V_c^4} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} &= \frac{6a}{T_c V_c^4} \end{aligned} \quad (5)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{RT_c}{(V_c - b)^2}}{\frac{2RT_c}{(V_c - b)^3}} &= \frac{\frac{2a}{T_c V_c^3}}{\frac{6a}{T_c V_c^4}} \Rightarrow \frac{V_c - b}{2} = \frac{V_c}{3} \Rightarrow 3V_c - 3b = 2V_c \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_c = 3b \end{aligned} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6) στη σχέση (4) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{RT_c}{(3b - b)^2} &= \frac{2a}{T_c (3b)^3} \Rightarrow \\ \frac{RT_c}{(2b)^2} &= \frac{2a}{T_c (3b)^3} \Rightarrow \\ \frac{RT_c}{4b^2} &= \frac{2a}{27 T_c b^3} \Rightarrow \\ \frac{RT_c}{4} &= \frac{2a}{27 T_c b} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$T_c^2 = \frac{8a}{27Rb} \Rightarrow$$

$$T_c = \frac{2}{3} \left(\frac{2a}{3Rb} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6) και (7) στη σχέση (1) προκύπτει:

$$p_c = \frac{1}{12} \left(\frac{2aR}{3b^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας, Z_c , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c} \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (9) τις σχέσεις (6), (7) και (8) που συνδέουν τις κρίσιμες σταθερές ενός αερίου με τις σταθερές Berthelot a και b προκύπτει για τον κρίσιμο συντελεστή συμπιεστικότητας:

$$Z_c = \frac{\frac{1}{12} \left(\frac{2aR}{3b^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3b}{R \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2a}{3Rb} \right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow Z_c = \frac{\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2} \sqrt{a} \sqrt{R}}{\sqrt{3} \sqrt{b^3}} b}{R \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3} \sqrt{R} \sqrt{b}}} \Rightarrow Z_c = \frac{3R\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{a}\sqrt{b^3}}{8R\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{a}\sqrt{b^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_c = \frac{3}{8}$$

37. Να εξαγάγετε τις σχέσεις των κρίσιμων δεδομένων ενός αερίου που υπακούει στην καταστατική εξίσωση Dieterici σε συνάρτηση με τις σταθερές a και b του αερίου και στη συνέχεια να δείξετε ότι ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας για ένα αέριο που υπακούει στην παραπάνω εξίσωση έχει την τιμή $Z_c = 2e^{-2}$.

Απάντηση

Η καταστατική εξίσωση Dieterici δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} e^{-a/RTV_m} \quad (1)$$

Η πρώτη παράγωγος της πίεσης ως προς τον όγκο της εξίσωσης (1) είναι:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_m} \right)_T = -\frac{RT}{(V_m - b)^2} e^{-\frac{a}{RTV_m}} + \left(-\frac{a}{RT} \left(-\frac{1}{V_m^2} \right) \right) e^{-\frac{a}{RTV_m}} \frac{RT}{(V_m - b)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T &= -\frac{RT}{(V_m - b)^2} e^{-\frac{a}{RTV_m}} + \left(\frac{a}{RTV_m^2}\right) e^{-\frac{a}{RTV_m}} \frac{RT}{(V_m - b)} \Rightarrow \\
\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T &= \frac{RT}{(V_m - b)} e^{-\frac{a}{RTV_m}} \left(\frac{a}{RTV_m^2} - \frac{1}{(V_m - b)}\right) \Rightarrow \\
\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T &= p \left(\frac{a}{RTV_m^2} - \frac{1}{(V_m - b)}\right) \tag{2}
\end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος της εξίσωσης (1), δηλαδή η πρώτη παράγωγος της εξίσωσης (2) είναι:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m}\right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T \left(\frac{a}{RTV_m^2} - \frac{1}{(V_m - b)}\right) + \left(-\frac{2a}{RTV_m^3} + \frac{1}{(V_m - b)^2}\right) p \Rightarrow \\
\left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m}\right)_T &= p \left(\frac{a}{RTV_m^2} - \frac{1}{(V_m - b)}\right)^2 + p \left(-\frac{2a}{RTV_m^3} + \frac{1}{(V_m - b)^2}\right) \Rightarrow \\
\left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m}\right)_T &= p \left(\frac{a}{RTV_m^2} - \frac{1}{(V_m - b)}\right)^2 + p \left(-\frac{2a}{RTV_m^3} + \frac{1}{(V_m - b)^2}\right) \Rightarrow \\
\left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m}\right)_T &= p \left[\left(\frac{a}{RTV_m^2} - \frac{1}{(V_m - b)}\right)^2 - \frac{2a}{RTV_m^3} + \frac{1}{(V_m - b)^2}\right] \tag{3}
\end{aligned}$$

Η κρίσιμη ισόθερμη εμφανίζει ένα σημείο καμπής, το οποίο εμφανίζεται όταν η κλίση και η καμπυλότητα είναι μηδέν, δηλαδή όταν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της πίεσης με τον όγκο μηδενίζονται. Στην κρίσιμη ισόθερμη η πίεση του αερίου είναι ίση με την κρίσιμη πίεση, p_c , ο όγκος ίσος με τον κρίσιμο όγκο, V_c , και η θερμοκρασία ίση με την κρίσιμη θερμοκρασία, T_c , του αερίου.

Έτσι για τη σχέση (2) ισχύει:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T &= 0 \Rightarrow \\
p_c \left(\frac{a}{RT_c V_c^2} - \frac{1}{(V_c - b)}\right) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{a}{RT_c V_c^2} - \frac{1}{(V_c - b)} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{a}{RT_c V_c^2} &= \frac{1}{V_c - b} \Rightarrow \\
a &= \frac{RT_c V_c^2}{V_c - b} \tag{4}
\end{aligned}$$

Για τη σχέση (3) ισχύει:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 V_m}\right)_T = 0 \Rightarrow$$

$$p \left[\left(\frac{a}{RT_c V_c^2} - \frac{1}{V_c - b} \right)^2 - \frac{2a}{RT_c V_c^3} + \frac{1}{(V_c - b)^2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a}{RT_c V_c^2} - \frac{1}{V_c - b} \right)^2 - \frac{2a}{RT_c V_c^3} + \frac{1}{(V_c - b)^2} = 0 \Rightarrow$$

και αντικαθιστώντας τη σταθερά a από την εξίσωση (4)

$$\left(\frac{1}{RT_c V_c^2} \left(\frac{RT_c V_c^2}{V_c - b} \right) - \frac{1}{V_c - b} \right)^2 - \frac{2}{RT_c V_c^3} \left(\frac{RT_c V_c^2}{V_c - b} \right) + \frac{1}{(V_c - b)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{V_c - b} - \frac{1}{V_c - b} \right)^2 - \frac{2}{V_c(V_c - b)} + \frac{1}{(V_c - b)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{V_c} = \frac{1}{V_c - b} \Rightarrow$$

$$V_c = 2V_c - 2b \Rightarrow$$

$$V_c = 2b \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5) στη σχέση (4) προκύπτει ότι η σχέση με την οποία η σταθερά a συνδέεται με τις κρίσιμες σταθερές του αερίου προκύπτει αντικαθιστώντας τη σχέση (5) στη σχέση (4):

$$a = \frac{RT_c V_c^2}{V_c - b} \Rightarrow$$

$$a = \frac{RT_c V_c^2}{\left(V_c - \frac{V_c}{2} \right)} \Rightarrow$$

$$a = \frac{RT_c V_c^2}{\left(\frac{V_c}{2} \right)} \Rightarrow$$

$$a = 2RT_c V_c^2 \quad (6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει η σχέση που συνδέει την κρίσιμη θερμοκρασία, T_c , με τις σταθερές a και b και είναι:

$$T_c = \frac{a}{2RV_c} \Rightarrow$$

$$T_c = \frac{a}{2R \cdot 2b} \Rightarrow$$

$$T_c = \frac{a}{4Rb} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5) και (7) στη σχέση (1) προκύπτει η σχέση που συνδέει την κρίσιμη πίεση, p_c , ενός αερίου με τις σταθερές a και b αυτού.

$$p_c = \frac{RT_c}{V_c - b} e^{-\frac{a}{RT_c V_c}} \Rightarrow$$

$$p_c = \frac{R \left(\frac{a}{4Rb} \right)}{2b - b} e^{-\frac{a}{R \left(\frac{a}{4Rb} \right) 2b}} \Rightarrow$$

$$p_c = \frac{a}{4e^2 b^2} \quad (8)$$

Ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας, Z_c , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c} \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (9) τις σχέσεις (5), (7) και (8) που συνδέουν τις κρίσιμες σταθερές ενός αερίου με τις σταθερές Dieterici a και b προκύπτει για τον κρίσιμο συντελεστή συμπιεστικότητας:

$$Z_c = \frac{\frac{a}{4e^2 b^2} 2b}{R \frac{a}{4Rb}} \Rightarrow Z_c = \frac{\frac{a}{2e^2 b}}{\frac{a}{4b}} \Rightarrow Z_c = \frac{4ab}{2e^2 ab} \Rightarrow Z_c = \frac{2}{e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_c = 2e^{-2}$$

Άσκηση 37 - Λύση με τη χρήση του Mathematica

Να εξαγάγετε τις σχέσεις των κρίσιμων δεδομένων ενός αερίου που υπακούει στην καταστατική εξίσωση Dieterici σε συνάρτηση με τις σταθερές a και b του αερίου και στη συνέχεια να δείξετε ότι ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας για ένα αέριο που υπακούει στην παραπάνω εξίσωση έχει την τιμή $Z_c = 2e^{-2}$.

Απάντηση

Η καταστατική εξίσωση Dieterici δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} e^{-a/RTV_m} \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της εξίσωσης (1) ανοίγουμε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica και σε ένα κελί ορίζουμε:

$$f[V_m] = \frac{R \times T}{V_m - b} e^{-\frac{a}{R \times T \times V_m}};$$

$$D\left[\frac{R \times T}{V_m - b} e^{-\frac{a}{R \times T \times V_m}}, \{V_m, 1\}\right]$$

Η εκτέλεση της παραπάνω εντολής δίνει την παράσταση:

$$-\frac{e^{-\frac{a}{R T V_m}} R T}{(-b + V_m)^2} + \frac{a e^{-\frac{a}{R T V_m}}}{V_m^2 (-b + V_m)}$$

η οποία είναι η πρώτη παράγωγος της καταστατικής εξίσωσης Dieterici.

Για να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης (1) ορίζουμε σε ένα άλλο κελί του φύλλου εργασίας:

$$D\left[\frac{R \times T}{V_m - b} e^{-\frac{a}{R \times T \times V_m}}, \{V_m, 2\}\right]$$

Η εκτέλεση της παραπάνω εντολής δίνει την παράσταση:

$$\frac{2 e^{-\frac{a}{R T V_m}} R T}{(-b + V_m)^3} - \frac{2 a e^{-\frac{a}{R T V_m}}}{V_m^2 (-b + V_m)^2} + \frac{R T \left(\frac{a^2 e^{-\frac{a}{R T V_m}}}{R^2 T^2 V_m^4} - \frac{2 a e^{-\frac{a}{R T V_m}}}{R T V_m^3} \right)}{-b + V_m}$$

η οποία είναι η δεύτερη παράγωγος της καταστατικής εξίσωσης Dieterici.

Η κρίσιμη ισόθερμη εμφανίζει ένα σημείο καμπής, το οποίο εμφανίζεται όταν η κλίση και η καμπυλότητα είναι μηδέν, δηλαδή όταν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της πίεσης με τον όγκο μηδενίζονται. Έτσι για να βρούμε τη σχέση που ισχύει για τον κρίσιμο όγκο και την κρίσιμη θερμοκρασία θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων. Σε ένα άλλο κελί του φύλλου εργασίας ορίζουμε:

$$\text{Solve} \left[\left\{ -\frac{e^{-\frac{a}{RTV_m}} RT}{(-b + V_m)^2} + \frac{a e^{-\frac{a}{RTV_m}}}{V_m^2 (-b + V_m)} = 0, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2 e^{-\frac{a}{RTV_m}} RT}{(-b + V_m)^3} - \frac{2 a e^{-\frac{a}{RTV_m}}}{V_m^2 (-b + V_m)^2} + \frac{RT \left(\frac{a^2 e^{-\frac{a}{RTV_m}}}{R^2 T^2 V_m^4} - \frac{2 a e^{-\frac{a}{RTV_m}}}{RTV_m^3} \right)}{-b + V_m} = 0 \right\}, \right. \\ \left. \{V_m, T\} \right]$$

Η εκτέλεση της παραπάνω εντολής δίνει ότι ο κρίσιμος όγκος και η κρίσιμη θερμοκρασία δίνονται από τη σχέση:

$$\left\{ \left\{ V_m \rightarrow 2b, T \rightarrow \frac{a}{4bR} \right\} \right\}$$

Στην κρίσιμη ισόθερμη η πίεση του αερίου είναι ίση με την κρίσιμη πίεση, p_c , ο όγκος ίσος με τον κρίσιμο όγκο, V_c , και η θερμοκρασία ίση με την κρίσιμη θερμοκρασία, T_c , του αερίου. Έτσι, αντικαθιστώντας τον κρίσιμο όγκο και την κρίσιμη θερμοκρασία στην εξίσωση (1) προκύπτει η σχέση που ισχύει για την κρίσιμη πίεση.

Σε ένα κελί του φύλλου εργασίας ορίζουμε:

$$V_{m,c} = 2 \times b; \\ T_c = a / (4 R \times b); \\ p_c = \frac{R \times T_c}{V_{m,c} - b} e^{-\frac{a}{R \times T_c \times V_{m,c}}}$$

Εκτελώντας την παραπάνω εντολή βρίσκουμε ότι η κρίσιμη πίεση, p_c , είναι ίση με:

$$\frac{a}{4 b^2 e^2}$$

Ο κρίσιμος συντελεστής συμπίεστικότητας, Z_c , ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) τις σχέσεις των κρίσιμων σταθερών του αερίου προκύπτει ο κρίσιμος συντελεστής συμπίεστικότητας.

Έτσι σε ένα άλλο κελί ορίζουμε:

$$V_{m,c} = 2 \times b;$$

$$T_c = a / (4 R \times b);$$

$$P_c = \frac{a}{4 e^2 b^2};$$

$$Z_c = \frac{P_c \times V_{m,c}}{R \times T_c}$$

Η εκτέλεση της παραπάνω εντολής δίνει ότι ο κρίσιμος συντελεστής συμπιεστικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{2}{e^2}$$

Παρατηρούμε ότι η εύρεση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της καταστατικής εξίσωσης Dieterici, καθώς και η λύση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν, απαιτούν πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις. Οι διαδικασίες αυτές απλοποιούνται κατά πολύ χρησιμοποιώντας το Mathematica και τις εντολές D και Solve για την εύρεση των παραγώγων και τη λύση του συστήματος των εξισώσεων, αντίστοιχα.

38. Η κρίσιμη θερμοκρασία και ο κρίσιμος όγκος της NH_3 είναι $T_c = 405,56 \text{ K}$ και $V_c = 69,8 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$, αντίστοιχα. Να υπολογιστούν οι σταθερές παράμετροι a και b των καταστατικών εξισώσεων: α) van der Waals, β) Berthelot και γ) Dieterici.

Απάντηση

Η κρίσιμη θερμοκρασία και ο κρίσιμος όγκος ενός αερίου συνδέονται με τις σταθερές a και b των καταστατικών εξισώσεων van der Waals, Berthelot και Dieterici με τις σχέσεις που αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Καταστατική εξίσωση	Κρίσιμη θερμοκρασία	Κρίσιμος όγκος
Van der Waals	$T_c = \frac{8a}{27Rb}$	$V_c = 3b$
Berthelot	$T_c = \frac{2}{3} \left(\frac{2a}{3bR} \right)^{\frac{1}{2}}$	$V_c = 3b$
Dieterici	$T_c = \frac{a}{4Rb}$	$V_c = 2b$

Αντικαθιστώντας τις τιμές της κρίσιμης θερμοκρασίας και του κρίσιμου όγκου της NH_3 προκύπτουν οι τιμές των σταθερών a και b .

Καταστατική εξίσωση	Σταθερά a	Σταθερά b
Van der Waals	$2,611 \text{ atm L}^2\text{mol}^{-2}$	$0,023 \text{ L mol}^{-1}$
Berthelot	$1059,1 \text{ atm L}^2\text{mol}^{-2}$	$0,023 \text{ L mol}^{-1}$
Dieterici	$4,642 \text{ atm L}^2\text{mol}^{-2}$	$0,035 \text{ L mol}^{-1}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΕΡΙΩΝ – ΜΕΡΟΣ Ι

4.1. Εισαγωγή

Η κινητική θεωρία των αερίων είναι μια από τις πιο σημαντικές θεωρίες στη φυσικοχημεία και αυτό διότι με πολύ απλές και λιτές παραδοχές εξάγονται ποιοτικά αλλά και ποσοτικά συμπεράσματα. Η κινητική θεωρία των αερίων συνδέει τις μακροσκοπικές ιδιότητες ενός αερίου με τις ιδιότητες των σωματιδίων του, σε ότι αφορά την κίνησή τους και τη σύγκρουσή τους με τα υπόλοιπα μόρια του αερίου.

Η κινητική θεωρία των αερίων προϋποθέτει τις εξής βασικές παραδοχές:

- Ένα αέριο αποτελείται από έναν πολύ μεγάλο αριθμό σωματιδίων τα οποία βρίσκονται σε μια συνεχή άτακτη κίνηση, με την ίδια πιθανότητα κίνησης προς όλες τις κατευθύνσεις. Η παραδοχή αυτή είναι γνωστή ως *αρχή του μοριακού χάους*.
- Κατά τις κινήσεις και κρούσεις των σωματιδίων ισχύουν οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής.
- Τα σωματίδια του αερίου αλληλεπιδρούν μόνο μέσω σύντομων (όχι συχνών) κρούσεων μεταξύ τους, οι οποίες είναι ελαστικές.

Το εκπαιδευτικό υλικό που αναπτύχθηκε για το κεφάλαιο της κινητικής θεωρίας των αερίων περιλαμβάνει:

- ✓ την εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων,
- ✓ την κινητική ενέργεια των μορίων ενός αερίου,
- ✓ την κατανομή Maxwell των ταχυτήτων των αέριων μορίων,
- ✓ τη συχνότητα συγκρούσεων,
- ✓ τη μέση ελεύθερη διαδρομή, καθώς και
- ✓ τη ροή κρούσεων των μορίων ενός αερίου και
- ✓ το νόμο του Graham.

Στον πίνακα 4 που ακολουθεί αναγράφονται οι μαθηματικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο για την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού.

Πίνακας 5. Τυπολόγιο (1) κινητικής θεωρίας αερίων.

Τυπολόγιο	
Εξίσωση κινητικής θεωρίας αερίων	$p = \frac{1}{3} \frac{N m c^2}{V}$
Μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο	$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{N} nRT = \frac{3}{2} \frac{1}{N_A} RT$
Ολική κινητική ενέργεια 1 mol αερίου	$U_m = \frac{3}{2} RT$
Ενεργός ταχύτητα	$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$
Μέση ταχύτητα	$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$
Πιθανότερη ταχύτητα	$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
Σχετική μέση ταχύτητα	$\bar{c}_{rel} = 2^{1/2} \bar{c}$
Συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell	$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$
Μέση ελεύθερη διαδρομή	ή $\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N}$
Συχνότητα συγκρούσεων	$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$
Νόμος διαπίδυσης του Graham	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$

4.2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να αποδειχθεί με την εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων ότι η πίεση που ασκούν 2 mol H_2 είναι διπλάσια από την πίεση που ασκεί 1 mol H_2 στις ίδιες συνθήκες V και T .

Απάντηση

Η εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m c^2}{V}$$

όπου:

p : η πίεση του αερίου,

N : ο αριθμός των μορίων του αερίου,

m : η μάζα ενός μορίου του αερίου,

c : η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου και

V : ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο.

Έστω p_1 η πίεση που ασκεί 1 mol αερίου H_2 , N_1 ο αριθμός των μορίων του και c_1 η ενεργός ταχύτητα των μορίων του. Εφαρμόζοντας την εξίσωση της κινητικής θεωρίας για 1 mol αερίου H_2 προκύπτει η σχέση:

$$p_1 = \frac{1}{3} \frac{N_1 m c_1^2}{V} \quad (1)$$

Όμοια, έστω p_2 η πίεση που ασκούν 2 mol αερίου H_2 , N_2 ο αριθμός των μορίων του και c_2 η ενεργός ταχύτητα των μορίων του. Εφαρμόζοντας την εξίσωση της κινητικής θεωρίας για 2 mol αερίου H_2 προκύπτει η σχέση:

$$p_2 = \frac{1}{3} \frac{N_2 m c_2^2}{V} \quad (2)$$

Για το ίδιο αέριο στην ίδια θερμοκρασία, οι ενεργές ταχύτητες των μορίων τους, c_1 και c_2 , θα είναι ίσες, δηλαδή $c_1 = c_2 = c$.

Η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου είναι:

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Ο αριθμός των μορίων 1 mol H₂ είναι $N_1 = N$ και των 2 mol H₂ είναι $N_2 = 2N$.

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{1}{3} \frac{N_1 m c_1^2}{V}}{\frac{1}{3} \frac{N_2 m c_2^2}{V}} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{N_1 c_1^2}{N_2 c_2^2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος των πιέσεων των αερίων είναι

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{N c^2}{2 N c^2} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = 2p_1$$

δηλαδή η πίεση που ασκούν 2 mol αερίου H₂ είναι διπλάσια από την πίεση που ασκεί 1 mol αερίου H₂ στις ίδιες συνθήκες V και T .

2. Ποιο από τα αέρια H₂ και He έχει μεγαλύτερη ενεργό ταχύτητα c , μέση ταχύτητα \bar{c} και πιθανότερη ταχύτητα c^* στην ίδια θερμοκρασία;

Απάντηση

α) Η ενεργός ταχύτητα, c , η μέση ταχύτητα, \bar{c} , και η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου δίνονται από τις σχέσεις:

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογες με την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας, M , του αερίου. Έτσι για δύο διαφορετικά αέρια στην ίδια θερμοκρασία, T , μεγαλύτερη ενεργό, μέση και πιθανότερη ταχύτητα έχουν τα μόρια του αερίου με τη μικρότερη μοριακή μάζα. Άρα η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων

του H_2 είναι μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες ταχύτητες των μορίων του He στην ίδια θερμοκρασία.

3. Να βρεθεί ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των αερίων: α) H_2 και He και β) H_2 και N_2 , στην ίδια θερμοκρασία.

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

α) Η ενεργός ταχύτητα των μορίων του H_2 σε μια ορισμένη θερμοκρασία T , είναι

$$c_{H_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}} \quad (1)$$

ενώ η ενεργός ταχύτητα των μορίων του He στην ίδια θερμοκρασία T , είναι

$$c_{He} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των αερίων H_2 και He είναι

$$\frac{c_{H_2}}{c_{He}} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}}}{\sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}}} = \frac{\sqrt{M_{He}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41$$

β) Όμοια ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των αερίων H_2 και N_2 στην ίδια θερμοκρασία T , είναι

$$\frac{c_{H_2}}{c_{N_2}} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}}}{\sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}}} = \frac{\sqrt{M_{N_2}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14} = 3,74$$

4. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει την ενεργό και τη μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου με την πιθανότερη ταχύτητα αυτού στην ίδια θερμοκρασία.

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (1)$$

Η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (2)$$

Η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι η σχέση που συνδέει την ενεργό και την πιθανότερη ταχύτητα των μορίων ενός αερίου στην ίδια θερμοκρασία είναι

$$\frac{c}{c^*} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT}{M}}} \Rightarrow \frac{c}{c^*} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = 1,837 c^*$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η σχέση που συνδέει τη μέση και την πιθανότερη ταχύτητα των μορίων ενός αερίου στην ίδια θερμοκρασία είναι

$$\frac{\bar{c}}{c^*} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\sqrt{\frac{2RT}{M}}} \Rightarrow \frac{\bar{c}}{c^*} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{\bar{c}}{c^*} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{\bar{c}}{c^*} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \bar{c} = 2\pi^{-\frac{1}{2}} c^* \Rightarrow \bar{c} = 1,128 c^*$$

5. Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε ένα δοχείο σε θερμοκρασία 400 K. Αν η θερμοκρασία αυξηθεί στους 900 K, να υπολογιστεί ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων του αερίου στις δύο θερμοκρασίες.

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου σε θερμοκρασία T_1 είναι

$$c_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}} \quad (1)$$

και σε θερμοκρασία T_2

$$c_2 = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου σε δύο διαφορετικές θερμοκρασίες είναι

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\frac{3RT_1}{M}}}{\sqrt{\frac{3RT_2}{M}}} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

Οπότε για $T_1 = 400 \text{ K}$ και $T_2 = 900 \text{ K}$ είναι

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{900}} = \frac{2}{3}$$

6. «Η σχετική ατομική μάζα μονοατομικού αερίου A είναι ίση με το ένα δέκατο της σχετικής ατομικής μάζας μονοατομικού αερίου B, επομένως η ενεργός ταχύτητα του αερίου A είναι ίση με το ένα δέκατο της ενεργού ταχύτητας του αερίου B στην ίδια θερμοκρασία». Είναι σωστός ή λανθασμένος ο παραπάνω ισχυρισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Εφόσον πρόκειται για μονοατομικά αέρια η σχετική ατομική τους μάζα είναι ίση με τη σχετική μοριακή μάζα τους, δηλαδή $A_{r,A} = M_{r,A}$ και $A_{r,B} = M_{r,B}$. Επίσης για τις μοριακές μάζες των δυο αερίων ισχύει: $M_B = 10 M_A$.

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Η ενεργός ταχύτητα των μορίων του A σε ορισμένη θερμοκρασία T είναι

$$c_A = \sqrt{\frac{3RT}{M_A}} \quad (1)$$

ενώ αυτή των μορίων του B στην ίδια θερμοκρασία T είναι

$$c_B = \sqrt{\frac{3RT}{M_B}} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων A και B είναι ίσος με

$$\frac{c_A}{c_B} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{M_A}}}{\sqrt{\frac{3RT}{M_B}}} = \frac{\sqrt{M_B}}{\sqrt{M_A}}$$

Οπότε για $M_B = 10 M_A$

$$\frac{c_A}{c_B} = \frac{\sqrt{M_B}}{\sqrt{M_A}} = \frac{\sqrt{10M_A}}{\sqrt{M_A}} = \sqrt{10} = 3,16$$

Άρα η ενεργός ταχύτητα των μορίων του A είναι 3,16 φορές μεγαλύτερη από την ενεργό ταχύτητα των μορίων του B στην ίδια θερμοκρασία.

Επομένως ο ισχυρισμός ότι «η ενεργός ταχύτητα του A είναι ίση με το ένα δέκατο της ενεργού ταχύτητας του B στην ίδια θερμοκρασία» είναι λανθασμένος.

7. Να συγκρίνετε την ολική κινητική ενέργεια 1 mol O_2 με αυτή 1 mol O_3 στην ίδια θερμοκρασία.

Απάντηση

Η ολική κινητική ενέργεια 1 mol αερίου, U_m , δίνεται από τη σχέση

$$U_m = \frac{3}{2}RT$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ολική κινητική ενέργεια 1 mol οποιουδήποτε αερίου είναι ίδια στην ίδια θερμοκρασία. Άρα η ολική κινητική ενέργεια 1 mol O₂ είναι ίση με την ολική κινητική ενέργεια 1 mol O₃.

8. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι: «Η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο ενός αερίου διπλασιάζεται αν διπλασιαστεί η θερμοκρασία, η οποία μετρήθηκε στην κλίμακα Celsius». Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φοιτητή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m c^2 \quad (1)$$

ενώ η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων του από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) προκύπτει

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{3RT}{M}} \right)^2 = \frac{3mR}{2M} T \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) συμπεραίνεται ότι η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Επομένως η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο διπλασιάζεται όταν διπλασιαστεί η απόλυτη θερμοκρασία (κλίμακα Kelvin) του αερίου και όχι η θερμοκρασία, η οποία έχει μετρηθεί στην κλίμακα Celsius. Άρα ο ισχυρισμός ότι: «Η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο ενός αερίου διπλασιάζεται αν διπλασιαστεί η θερμοκρασία, η οποία μετρήθηκε στην κλίμακα Celsius» είναι λανθασμένος.

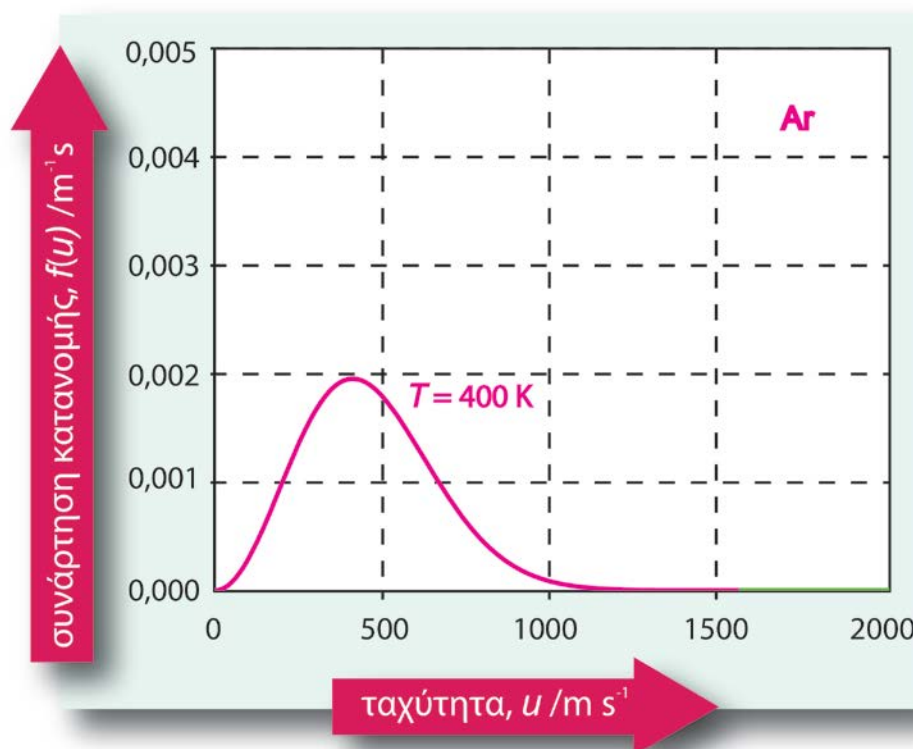
9. Τα μόρια ενός αερίου κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Τα μόρια ενός αερίου δεν κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα. Οι ταχύτητες των μορίων του αερίου είναι πολύ διαφορετικές και κυμαίνονται σε ένα ευρύ διάστημα τιμών, καθώς οι συγκρούσεις μεταξύ των μορίων του αερίου ανακατανέμουν συνεχώς τις ταχύτητές τους. Οι ταχύτητες των μορίων ενός αερίου σε ορισμένη θερμοκρασία υπολογίζονται από τη συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

10. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η καμπύλη κατανομής των ταχυτήτων για το αέριο Ar σε ορισμένη θερμοκρασία T . Να εξηγήσετε για ποιο λόγο το κλάσμα των μορίων του αερίου που κινείται α) με πολύ μικρές ταχύτητες και β) με πολύ μεγάλες ταχύτητες, είναι μικρό.



Απάντηση

Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell

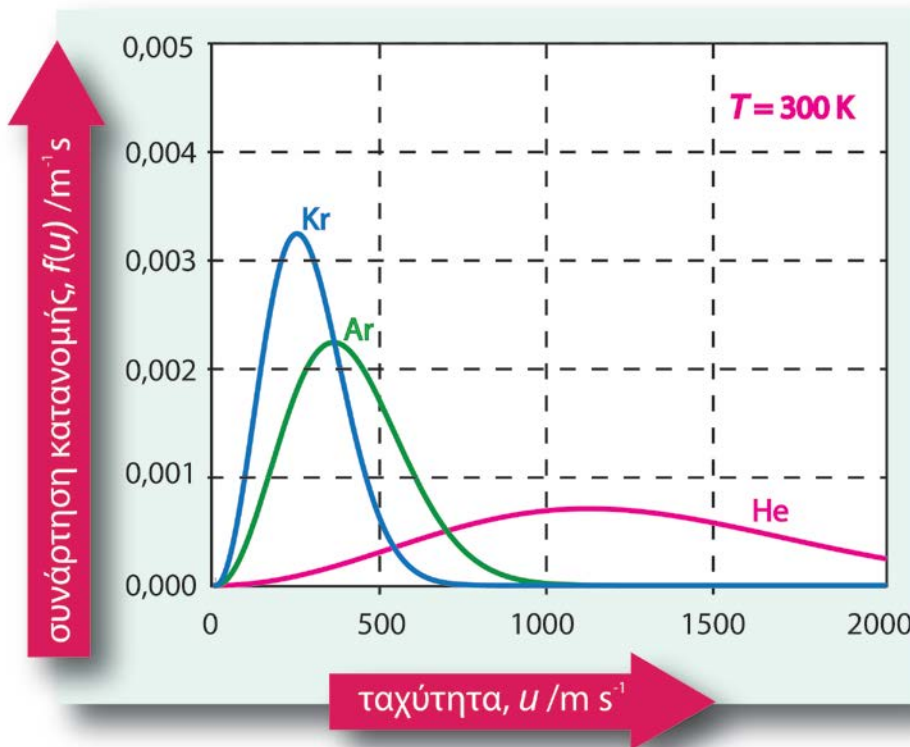
$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

υπολογίζει το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που έχουν ορισμένη ταχύτητα u .

α) Από τη συνάρτηση κατανομής $f(u)$ προκύπτει ότι το κλάσμα των μορίων που κινούνται με πολύ μικρές ταχύτητες u είναι πολύ μικρό διότι όταν η ταχύτητα u τείνει στο μηδέν, τότε και ο όρος u^2 τείνει στο μηδέν.

β) Η συνάρτηση κατανομής $f(u)$ περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται με τον όρο $e^{-Mu^2/2RT}$. Από τον όρο αυτό προκύπτει ότι το κλάσμα των μορίων που κινούνται με πολύ μεγάλες ταχύτητες u , θα είναι επίσης μικρό διότι ο όρος e^{-u^2} γίνεται πολύ μικρός, όταν το u^2 γίνεται πολύ μεγάλο.

11. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων για τα αέρια He, Ar και Kr σε ορισμένη θερμοκρασία T , οι οποίες δείχνουν ότι όσο μεγαλύτερη μάζα έχουν τα μόρια των αερίων τόσο μικρότερες είναι οι ταχύτητές τους και μάλιστα περιορίζεται το κύριο εύρος της διακύμανσης των ταχυτήτων τους. Να εξηγήσετε για ποιο λόγο δεν είναι πιθανό να βρεθούν «βαριά» μόρια αερίου με μεγάλες ταχύτητες.



Απάντηση

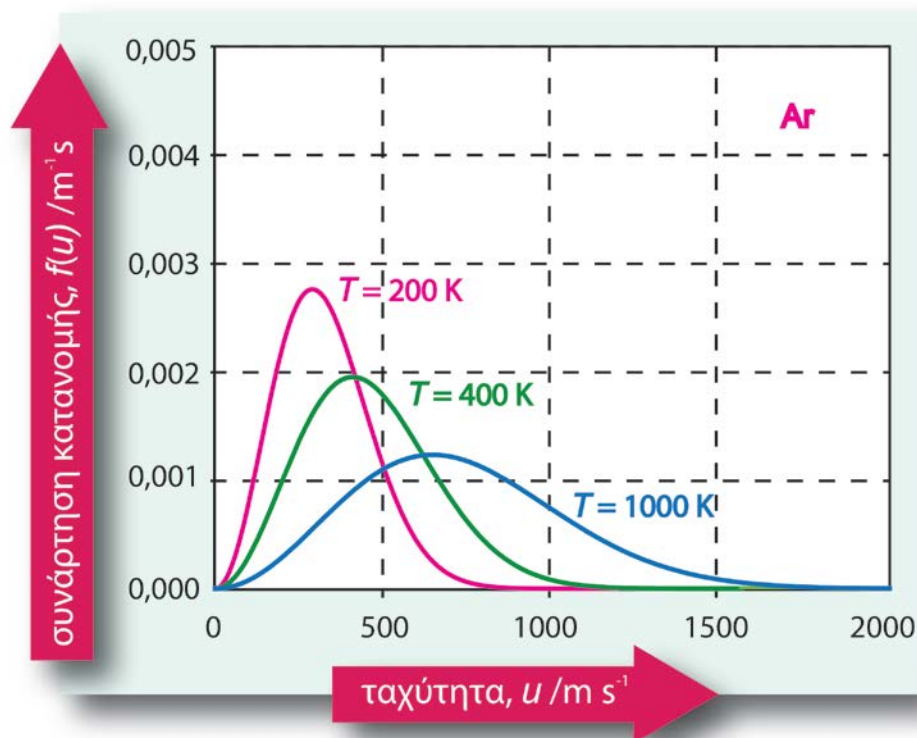
Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

υπολογίζει το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που έχουν ορισμένη ταχύτητα u .

Τα «βαριά» μόρια έχουν μεγάλη μοριακή μάζα, M . Η συνάρτηση κατανομής $f(u)$ περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται από τον όρο $e^{-Mu^2/2RT}$. Ο όρος $M/2RT$ στον εκθέτη της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης, ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το u^2 , είναι μεγάλος, όταν η μοριακή μάζα, M , του αερίου είναι μεγάλη. Έτσι η εκθετική συνάρτηση τείνει πιο γρήγορα στο μηδέν, όταν η μοριακή μάζα του αερίου είναι μεγάλη [16]. Για το λόγο αυτό είναι απίθανο να βρεθούν «βαριά» μόρια αερίου με μεγάλες ταχύτητες.

12. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων για το αέριο Ar σε διάφορες θερμοκρασίες. Οι καμπύλες δείχνουν ότι με την αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνεται το ποσοστό των μορίων που κινούνται με μεγαλύτερες ταχύτητες. Να εξηγήσετε για ποιο λόγο το ποσοστό των μορίων ενός αερίου που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες είναι μεγάλο σε υψηλές θερμοκρασίες.



Απάντηση

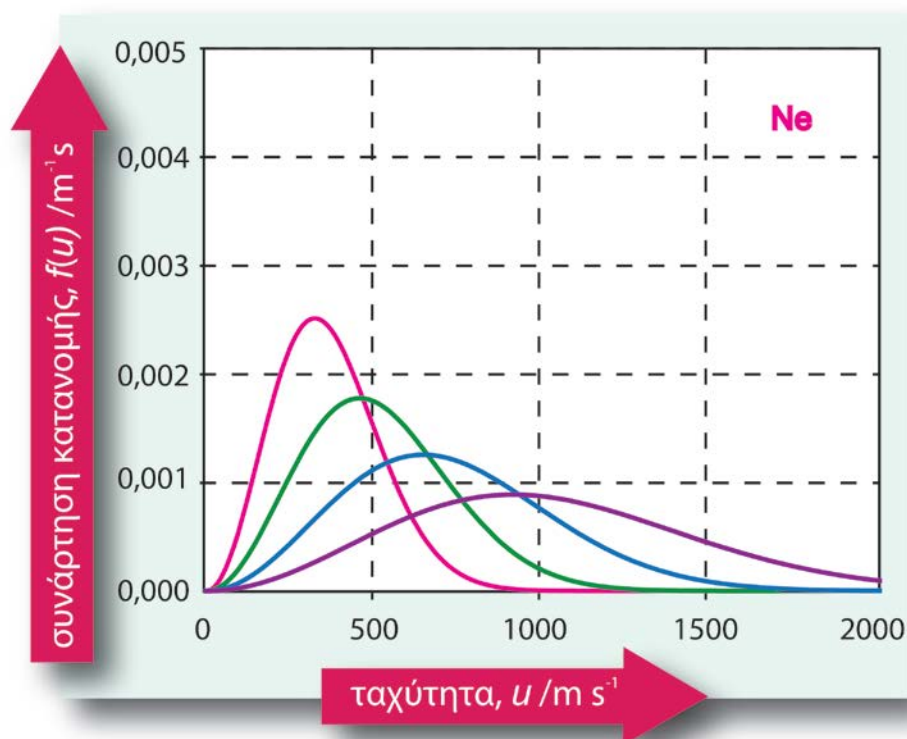
Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

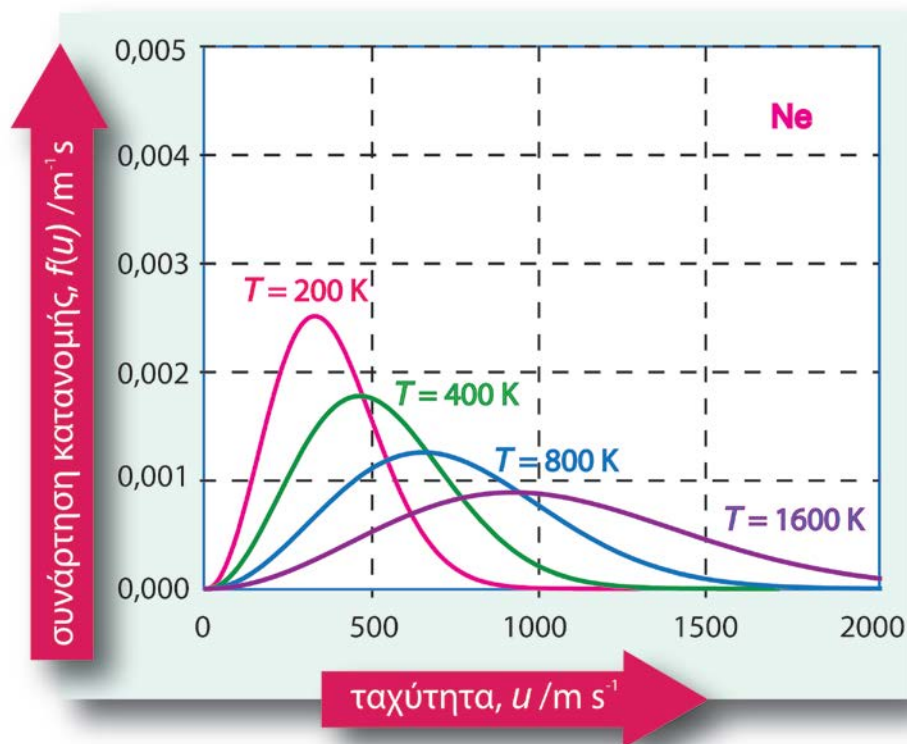
υπολογίζει το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που έχουν ορισμένη ταχύτητα u .

Η συνάρτηση κατανομής $f(u)$ περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται από τον όρο $e^{-Mu^2/2RT}$. Όταν η θερμοκρασία ενός αερίου είναι υψηλή, τότε ο όρος $M/2RT$ στον εκθέτη της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης $e^{-Mu^2/2RT}$, είναι μικρός. Έτσι, η φθίνουσα εκθετική συνάρτηση τείνει πιο αργά στο μηδέν καθώς το u αυξάνεται, όταν η θερμοκρασία του αερίου είναι μεγάλη παρά όταν είναι μικρή [16]. Έτσι προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το ποσοστό των μορίων ενός αερίου που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες είναι μεγαλύτερο σε υψηλές παρά σε χαμηλές θερμοκρασίες.

13. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων για το αέριο Ne σε τέσσερις διαφορετικές θερμοκρασίες (200, 400, 800 και 1600 K). Να αντιστοιχήσετε τις θερμοκρασίες στις καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων.

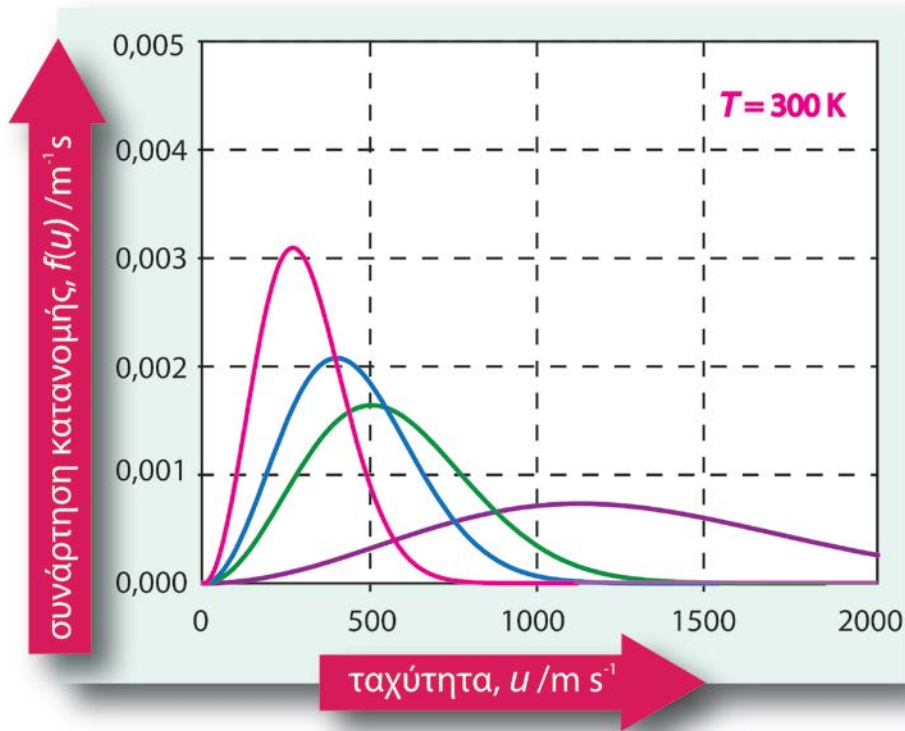


Απάντηση



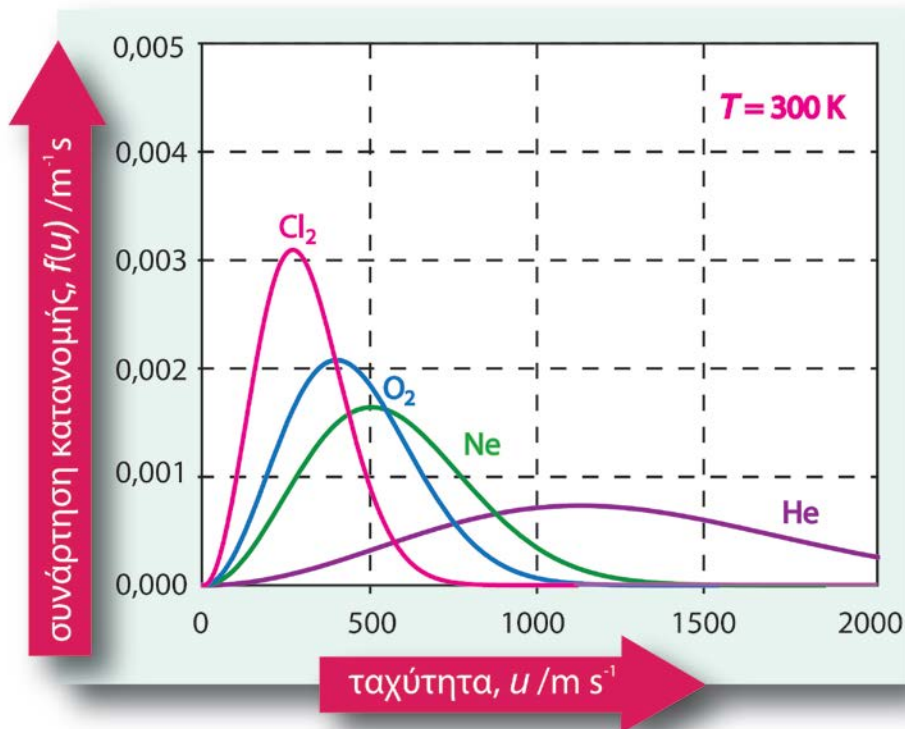
Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία το συγκριτικά μεγαλύτερο ποσοστό των μορίων του αερίου κινούνται με μεγαλύτερες ταχύτητες. Άρα η καμπύλη με το μεγαλύτερο εύρος αντιστοιχεί στην υψηλότερη θερμοκρασία.

14. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων για τέσσερα διαφορετικά αέρια (He , Ne , O_2 , Cl_2) σε θερμοκρασία 300 K . Να αντιστοιχήσετε τα αέρια στις καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων.



Απάντηση

Όσο μεγαλύτερη μοριακή μάζα έχουν τα μόρια των αερίων τόσο μικρότερες είναι οι ταχύτητές τους και περιορίζεται το κύριο εύρος της διακύμανσης των ταχυτήτων τους. Άρα η καμπύλη με το μικρότερο εύρος αντιστοιχεί στο αέριο με τη μεγαλύτερη μοριακή μάζα.

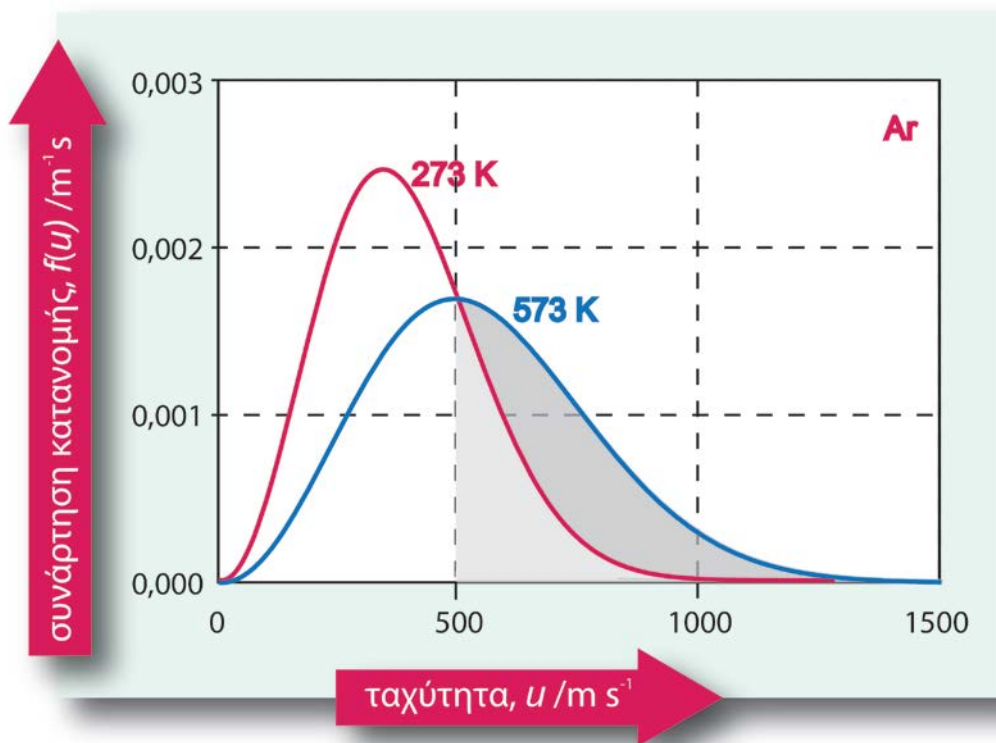


15. Να συγκρίνετε το κλάσμα των μορίων του Ar που κινούνται με ταχύτητες μεγαλύτερες από 500 m s^{-1} στους 273 K και 573 K.

Απάντηση

Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell υπολογίζει το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που έχουν ορισμένη ταχύτητα u και περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται από τον όρο $e^{-Mu^2/2RT}$. Όταν η θερμοκρασία ενός αερίου είναι υψηλή, τότε ο όρος $M/2RT$ στον εκθέτη της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης $e^{-Mu^2/2RT}$, είναι μικρός. Έτσι, η φθίνουσα εκθετική συνάρτηση τείνει πιο αργά στο μηδέν καθώς το u αυξάνεται, όταν η θερμοκρασία του αερίου είναι μεγάλη παρά όταν είναι μικρή [16]. Έτσι προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το ποσοστό των μορίων ενός αερίου που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες είναι μεγαλύτερο σε υψηλές παρά σε χαμηλές θερμοκρασίες.

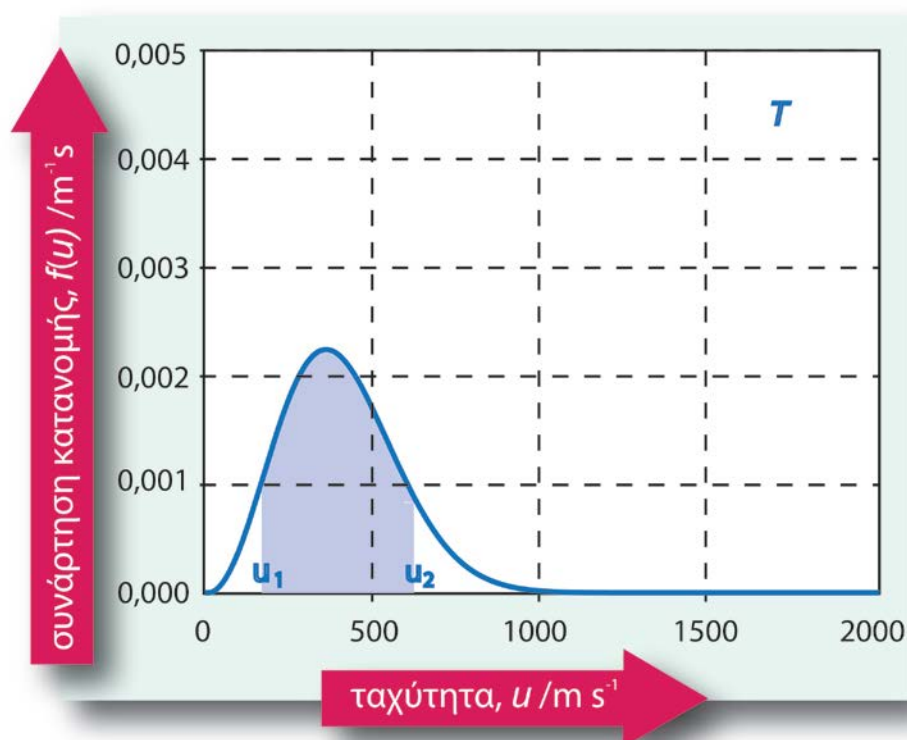
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι καμπύλες κατανομής των ταχυτήτων των μορίων του Ar σε θερμοκρασία 273 K και 573 K. Από το γράφημα γίνεται φανερό ότι το κλάσμα των μορίων του Ar που κινούνται με ταχύτητες μεγαλύτερες από 500 m s^{-1} είναι αρκετά μεγαλύτερο (σχεδόν διπλάσιο) όταν αυτό βρίσκεται σε θερμοκρασία 573 K.



16. Με ποιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα ένα μόριο αερίου να κινείται με ταχύτητα στο διάστημα από u_1 έως u_2 ;

Απάντηση

Η πιθανότητα ένα μόριο αερίου να κινείται με ταχύτητα στο διάστημα από u_1 έως u_2 είναι ίση με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατανομής των ταχυτήτων του Maxwell στα δύο όρια του διαστήματος. Το ολοκλήρωμα που υπολογίζεται αντιστοιχεί στο εμβαδόν της καμπύλης μεταξύ των δύο ορίων των ταχυτήτων (περιοχή με σκίαση στο σχήμα).



17. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) δικαιολογώντας την απάντησή σας, όπου αυτό απαιτείται.

α) Η πιθανότερη ταχύτητα αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας και την ελάττωση της μοριακής μάζας, ενώ ταυτόχρονα διευρύνεται το εύρος της κατανομής.

β) Όσο μεγαλύτερη μοριακή μάζα έχουν τα μόρια των αερίων τόσο μεγαλύτερες είναι οι ταχύτητές τους.

γ) Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης κατανομής των ταχυτήτων.

δ) Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου είναι μικρότερη από την ενεργό ταχύτητα των μορίων σε ορισμένη θερμοκρασία.

ε) Η συνάρτηση κατανομής των ταχυτήτων αποκτά φυσική σημασία μόνο όταν πολλαπλασιαστεί με το εύρος ενός διαστήματος ταχυτήτων.

στ) Τα μόρια αερίου με μεγάλη μοριακή μάζα είναι απίθανο να κινούνται με μικρές ταχύτητες.

ζ) Η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου είναι ανάλογη της θερμοκρασίας και αντιστρόφως ανάλογη της μοριακής μάζας του.

η) Η απόλυτη θερμοκρασία είναι ένα μέτρο της μέσης κινητικής ενέργειας της χαοτικής κίνησης των μορίων ενός αερίου.

Απάντηση

α) Σωστό. Από τη σχέση που δίνει την πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

προκύπτει ότι η πιθανότερη ταχύτητα αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας και την ελάττωση της μοριακής μάζας, ενώ ταυτόχρονα διευρύνεται το εύρος της κατανομής.

β) Λάθος. Όσο μεγαλύτερη μοριακή μάζα έχουν τα μόρια των αερίων τόσο μικρότερες είναι οι ταχύτητές τους. Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται από τον όρο $e^{-Mu^2/2RT}$. Ο όρος $Mu^2/2RT$ του εκθέτη της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης τείνει πιο γρήγορα στο μηδέν, όταν η μοριακή μάζα του αερίου είναι μεγάλη. Για το λόγο αυτό είναι απίθανο να βρεθούν «βαριά» μόρια αερίου με μεγάλες ταχύτητες.

γ) Λάθος. Η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων ενός αερίου αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης κατανομής των ταχυτήτων.

δ) Σωστό. Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

ενώ η μέση ταχύτητα των μορίων του από τη σχέση

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8RT}{3,14M}} = \sqrt{\frac{2,54RT}{M}}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις προκύπτει ότι η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου είναι μικρότερη από την ενεργό ταχύτητα των μορίων σε ορισμένη θερμοκρασία.

ε) Σωστό. Η συνάρτηση κατανομής των ταχυτήτων αποκτά φυσική σημασία μόνο όταν πολλαπλασιαστεί με το εύρος ενός διαστήματος ταχυτήτων.

στ) Λάθος. Τα μόρια αερίου με μεγάλη μοριακή μάζα είναι απίθανο να κινούνται με μεγάλες ταχύτητες. Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται από τον όρο $e^{-Mu^2/2RT}$. Ο όρος $Mu^2/2RT$ του εκθέτη της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης τείνει πιο γρήγορα στο μηδέν, όταν η μοριακή μάζα του αερίου είναι μεγάλη. Για το λόγο αυτό είναι απίθανο να βρεθούν «βαριά» μόρια αερίου με μεγάλες ταχύτητες.

ζ) Λάθος. Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

από την οποία προκύπτει ότι η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της (απόλυτης) θερμοκρασίας και αντιστρόφως ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας του.

η) Σωστό. Η απόλυτη θερμοκρασία είναι ένα μέτρο της μέσης κινητικής ενέργειας της хаοτικής κίνησης των μορίων ενός αερίου.

18. Πως θα μεταβληθεί η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αέριου μορίου αν αυξηθεί η θερμοκρασία;

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας και αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης του αερίου.

Αν το αέριο βρίσκεται σε δοχείο μεταβλητού όγκου, δηλαδή υπό σταθερή πίεση, όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, T , τόσο αυξάνεται και η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του αερίου. Αντίθετα, αν το αέριο βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου, τότε όσο αυξάνεται η θερμοκρασία T , τόσο αυξάνεται και η πίεση, p , δηλαδή το πηλίκο T/p είναι σταθερό. Επομένως στην περίπτωση αυτή η μέση ελεύθερη διαδρομή δεν μεταβάλλεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

19. Πως μεταβάλλεται η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός μορίου αν αυξηθεί η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του;

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

ή

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \mathcal{N}}$$

όπου:

d : η μοριακή διάμετρος του μορίου και

\mathcal{N} : η αριθμητική πυκνότητα των μορίων.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αέριου μορίου καθορίζεται από την αριθμητική πυκνότητα των μορίων που υπάρχουν στον ίδιο χώρο και μάλιστα είναι αντιστρόφως ανάλογη αυτής. Έτσι, η αύξηση της αριθμητικής πυκνότητας των μορίων ενός αερίου προκαλεί ελάττωση της μέσης ελεύθερης διαδρομής τους.

20. Όταν η πυκνότητα μάζας ορισμένης μάζας ενός αερίου παραμένει σταθερή, πως μεταβάλλεται η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του αερίου με τη μεταβολή της απόλυτης θερμοκρασίας;

Απάντηση

Από τη σχέση που δίνει την πυκνότητα μάζας, ρ , ενός αερίου

$$\rho = \frac{m}{V}$$

προκύπτει ότι αυτή παραμένει σταθερή όταν ο όγκος του αερίου παραμένει σταθερός, δηλαδή όταν το αέριο βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου.

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αερίου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Σε δοχείο σταθερού όγκου όσο αυξάνεται η απόλυτη θερμοκρασία T , τόσο αυξάνεται και η πίεση, p , ενώ όσο μειώνεται η θερμοκρασία T , τόσο μειώνεται και η πίεση, p , δηλαδή το πηλίκο T/p και στις δύο περιπτώσεις είναι σταθερό. Επομένως, η μέση ελεύθερη διαδρομή δε μεταβάλλεται με τη μεταβολή της απόλυτης θερμοκρασίας.

21. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι: «Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αερίου σωματιδίου της ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της θάλασσας είναι ίδια με αυτή ενός αερίου σωματιδίου σε ύψος 100 km από την επιφάνεια της θάλασσας». Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φοιτητή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Η πίεση της ατμόσφαιρας μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του υψόμετρου και η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του αέρα γίνεται μικρότερη, δηλαδή ο αέρας γίνεται αραιότερος. Σύμφωνα με τη σχέση

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \mathcal{N}}$$

προκύπτει ότι η μείωση της αριθμητικής πυκνότητας των μορίων, \mathcal{N} , προκαλεί αύξηση της μέσης ελεύθερης διαδρομής, λ , των μορίων ενός αερίου. Άρα ο ισχυρισμός του φοιτητή ότι «Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αερίου σωματιδίου της ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της

θάλασσας είναι ίδια με αυτή ενός αέριου σωματιδίου σε ύψος 100 km από την επιφάνεια της θάλασσας» είναι λανθασμένος.

22. Πως μεταβάλλεται: α) η μέση ελεύθερη διαδρομή και β) η συχνότητα συγκρούσεων των μορίων ενός αερίου αν αυτό συμπιεστεί ισόθερμα;

Απάντηση

Κατά την ισόθερμη συμπίεση ενός αερίου αυξάνεται η πίεση του αερίου, ενώ η θερμοκρασία του παραμένει σταθερή.

α) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης σε σταθερή θερμοκρασία. Επομένως κατά την ισόθερμη συμπίεση του αερίου, η αύξηση της πίεσης προκαλεί ελάττωση της μέσης ελεύθερης διαδρομής των μορίων του.

β) Η συχνότητα συγκρούσεων, z , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι ανάλογη της πίεσης και αντιστρόφως ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Επομένως κατά την ισόθερμη συμπίεση του αερίου, όσο αυξάνεται η πίεση τόσο αυξάνεται και η συχνότητα συγκρούσεων των μορίων του.

23. Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία T και ασκεί πίεση p . Να εξηγήσετε τι επίδραση θα έχει ο διπλασιασμός της πίεσης του αερίου: α) στη μέση ελεύθερη διαδρομή και β) στη συχνότητα συγκρούσεων των μορίων του αερίου.

Απάντηση

α) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης σε σταθερή θερμοκρασία. Επομένως κατά τον διπλασιασμό της πίεσης του αερίου, η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων υποδιπλασιάζεται.

β) Η συχνότητα συγκρούσεων, z , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι ανάλογη της πίεσης και αντιστρόφως ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Επομένως κατά τον διπλασιασμό της πίεσης του αερίου, η συχνότητα συγκρούσεων των μορίων διπλασιάζεται.

24. Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου V . Να εξηγήσετε τι επίδραση θα έχει ο διπλασιασμός της απόλυτης θερμοκρασίας του αερίου: α) στη μέση ελεύθερη διαδρομή και β) στη συχνότητα συγκρούσεων των μορίων του αερίου.

Απάντηση

α) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αερίου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας και αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης. Σε δοχείο σταθερού όγκου ο διπλασιασμός της απόλυτης θερμοκρασίας T , επιφέρει διπλασιασμό της πίεσης, p , δηλαδή το πηλίκο T/p είναι σταθερό. Επομένως, η μέση ελεύθερη διαδρομή δε μεταβάλλεται.

β) Η συχνότητα συγκρούσεων, z , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

από την οποία προκύπτει ότι είναι ανάλογη της πίεσης και αντιστρόφως ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας, T . Σε δοχείο σταθερού όγκου ο διπλασιασμός της θερμοκρασίας T , επιφέρει διπλασιασμό της πίεσης, p , δηλαδή το πηλίκο T/p είναι σταθερό. Επομένως, η συχνότητα συγκρούσεων των μορίων δε μεταβάλλεται.

25. Τρία ίδια δοχεία στην ίδια θερμοκρασία και πίεση περιέχουν το πρώτο αέριο Ne, το δεύτερο αέριο H₂ και το τρίτο αέριο O₃.

α) Ποιο δοχείο περιέχει μεγαλύτερο αριθμό μορίων αερίου;

β) Ποιο από τα αέρια έχει τη μεγαλύτερη ενεργό ταχύτητα; Να κατατάξετε τα αέρια κατά αυξανόμενη ενεργό ταχύτητα.

γ) Πως μεταβάλλεται η ενεργός ταχύτητα των μορίων αν διπλασιαστεί η απόλυτη θερμοκρασία;

Απάντηση

α) Σύμφωνα με την αρχή του Avogadro, ίσοι όγκοι αερίων στην ίδια θερμοκρασία και πίεση περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων. Επομένως τα τρία δοχεία περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων.

β) Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας, M , του αερίου. Έτσι για διαφορετικά αέρια στην ίδια θερμοκρασία, T , μεγαλύτερη ενεργό ταχύτητα έχουν τα μόρια του αερίου με τη μικρότερη μοριακή μάζα. Άρα τη μεγαλύτερη ενεργό ταχύτητα έχουν τα μόρια του αερίου H₂.

Τα τρία αέρια κατατάσσονται κατά σειρά αυξανόμενης ενεργού ταχύτητας ως εξής: O₃, Ne, H₂.

γ) Η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου σε θερμοκρασία T_1 είναι

$$c_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}} \quad (1)$$

και σε θερμοκρασία T_2

$$c_2 = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου σε δύο διαφορετικές θερμοκρασίες είναι

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\frac{3RT_1}{M}}}{\sqrt{\frac{3RT_2}{M}}} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

και αντικαθιστώντας όπου $T_1 = T$ και $T_2 = 2T$ προκύπτει ότι η τιμή του παραπάνω λόγου είναι

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ή

$$c_2 = \sqrt{2}c_1 \Rightarrow c_2 = 1,41 c_1$$

δηλαδή αν διπλασιαστεί η απόλυτη θερμοκρασία, η ενεργός ταχύτητα των μορίων των αερίων γίνεται 1,41 φορές μεγαλύτερη.

26. Σε ένα δοχείο Α περιέχονται n mol αερίου H_2 και σε ένα άλλο δοχείο Β n mol αερίου He. Το γινόμενο pV για τα δύο αέρια στα δύο δοχεία έχει την ίδια τιμή στην ίδια θερμοκρασία. Να βρεθεί ο λόγος των τιμών c^2 των δύο αερίων.

Απάντηση

Από την εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων

$$p = \frac{1}{3} \frac{Nmc^2}{V}$$

προκύπτει ότι ο όρος c^2 είναι ίσος με

$$c^2 = \frac{3pV}{Nm}$$

Στο δοχείο Α περιέχονται n mol αερίου H_2 και στο δοχείο Β περιέχονται n mol αερίου He. Ίσοι αριθμοί mol αερίων περιέχουν ίσους αριθμούς μορίων, N . Άρα ο αριθμός των μορίων του H_2 είναι ίσος με τον αριθμό των μορίων του He.

Το γινόμενο pV για τα δύο αέρια στην ίδια πάντα θερμοκρασία έχει επίσης την ίδια τιμή.

Η μάζα ενός μορίου οποιουδήποτε αερίου είναι ίση με τη μοριακή μάζα του αερίου προς τον αριθμό του Avogadro, δηλαδή

$$m = \frac{M}{N_A}$$

Ο όρος c^2 για το αέριο H_2 είναι

$$c_{H_2}^2 = \frac{3pV}{N \frac{M_{H_2}}{N_A}} \quad (1)$$

και για το αέριο He

$$c_{He}^2 = \frac{3pV}{N \frac{M_{He}}{N_A}} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο λόγος των τιμών c^2 των δύο αερίων

$$\frac{c_{H_2}^2}{c_{He}^2} = \frac{\frac{3pV}{N \frac{M_{H_2}}{N_A}}}{\frac{3pV}{N \frac{M_{He}}{N_A}}} = \frac{\frac{3pVN_A}{NM_{H_2}}}{\frac{3pVN_A}{NM_{He}}} = \frac{M_{He}}{M_{H_2}}$$

είναι

$$\frac{c_{H_2}^2}{c_{He}^2} = \frac{4}{2} = 2$$

27. Να βρεθεί ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδυσης των αερίων: α) H_2 και O_2 και β) H_2S και NH_3 στις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας.

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο διαπίδυσης του Graham, η ταχύτητα διαπίδυσης, v , ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας του.

Για δύο αέρια ισχύει η σχέση

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$$

α) Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδυσης των αερίων H_2 και O_2 είναι ίσος με

$$\frac{v_{H_2}}{v_{O_2}} = \frac{\sqrt{M_{O_2}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt{16} = 4$$

δηλαδή τα μόρια του H_2 διαπιδύουν με τετραπλάσια ταχύτητα από ότι τα μόρια του O_2 .

β) Όμοια για τα αέρια NH_3 και H_2S είναι

$$\frac{v_{NH_3}}{v_{H_2S}} = \frac{\sqrt{M_{H_2S}}}{\sqrt{M_{NH_3}}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \sqrt{2} = 1,41$$

δηλαδή τα μόρια της NH_3 διαπιδύουν με ταχύτητα 1,41 φορές μεγαλύτερη από τα μόρια του H_2S .

28. Στα άκρα ενός γυάλινου σωλήνα τοποθετούνται κομμάτια από βαμβάκι. Το βαμβάκι στο αριστερό άκρο του σωλήνα έχει εμποτιστεί με υδατικό διάλυμα HCl , ενώ το βαμβάκι στο δεξιό άκρο του σωλήνα έχει εμποτιστεί με υδατικό διάλυμα NH_3 . Έπειτα από λίγη ώρα σε κάποιο σημείο στο εσωτερικό του γυάλινου σωλήνα παρατηρείται ένα λευκό θόλωμα, το οποίο σιγά σιγά επικαλύπτει το εσωτερικό του σωλήνα.

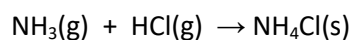
α) Να εξηγήσετε τι είναι και πως προκύπτει το λευκό θόλωμα που παρατηρείται στο εσωτερικό του σωλήνα.

β) Σε ποιο σημείο του σωλήνα (αριστερά, δεξιά ή στο κέντρο) εμφανίζεται αρχικά το λευκό θόλωμα;

γ) Αν η απόσταση μεταξύ των δύο άκρων του σωλήνα είναι 100 cm, να βρεθεί σε πόσα cm από το αριστερό άκρο του σωλήνα θα εμφανιστεί αρχικά το λευκό θόλωμα.

Απάντηση

α) Το βαμβάκι στο αριστερό άκρο του σωλήνα έχει εμποτιστεί με υδατικό διάλυμα HCl . Το αέριο HCl αρχίζει να διαχέεται προς τα δεξιά στον εσωτερικό σωλήνα. Αντίστοιχα, το βαμβάκι στο δεξιό άκρο του σωλήνα έχει εμποτιστεί με υδατικό διάλυμα NH_3 . Η αέρια NH_3 αρχίζει να διαχέεται προς τα αριστερά στο εσωτερικό του σωλήνα. Κάποια χρονική στιγμή τα δύο αέρια συναντώνται και αντιδρούν μεταξύ τους σύμφωνα με την αντίδραση:



Το λευκό θόλωμα στο εσωτερικό του σωλήνα είναι το NH_4Cl που σχηματίζεται.

β) Σύμφωνα με το νόμο διαπίδυσης του Graham, η ταχύτητα διαπίδυσης, v , ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας του.

Για δύο αέρια ισχύει η σχέση

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$$

Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδυσης των αερίων HCl και NH_3 είναι ίσος με

$$\frac{v_{HCl}}{v_{NH_3}} = \frac{\sqrt{M_{NH_3}}}{\sqrt{M_{HCl}}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{36,5}} = 0,68$$

ή

$$v_{HCl} = 0,68 v_{NH_3}$$

δηλαδή η ταχύτητα διαπίδωσης του HCl είναι μικρότερη από την ταχύτητα διαπίδωσης της NH₃. Άρα το λευκό θόλωμα θα εμφανιστεί αρχικά στην αριστερή πλευρά του σωλήνα γιατί η NH₃ διαπιδύει γρηγορότερα.

γ) Έστω x cm η απόσταση από το αριστερό άκρο του σωλήνα όπου εμφανίζεται αρχικά το λευκό θόλωμα.

Από την τιμή του λόγου των ταχυτήτων διαπίδωσης των αερίων HCl και NH₃

$$\frac{v_{HCl}}{v_{NH_3}} = 0,68$$

προκύπτει ότι

$$\frac{\frac{x_{HCl}}{t}}{\frac{x_{NH_3}}{t}} = 0,68 \Rightarrow \frac{x_{HCl}}{x_{NH_3}} = 0,68 \Rightarrow \frac{x}{100 - x} = 0,68 \Rightarrow x = 0,68 (100 - x) \Rightarrow$$

$$x = 68 - 0,68x \Rightarrow x + 0,68x = 68 \Rightarrow 1,68x = 68 \Rightarrow x = 40,48 \text{ cm}$$

Άρα σε απόσταση $x = 40,48$ cm από το αριστερό άκρο του σωλήνα θα εμφανιστεί αρχικά το λευκό θόλωμα.

4.3. Η κινητική θεωρία των αερίων με το Mathematica

1. Να σχεδιάσετε με τη βοήθεια του Mathematica την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για το Ne στους 400 K.

Απάντηση

Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell δίνεται από τη μαθηματική σχέση:

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

όπου:

u : η ταχύτητα των μορίων (σε m s^{-1}),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με $8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$,

M : η μολαρική μάζα (σε kg mol^{-1}) και

T : η θερμοκρασία (σε K) του αερίου.

Για να σχεδιάσουμε την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για το αέριο Ne στους 400 K ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica τις τιμές για:

- την μολαρική μάζα του αερίου και
- τη θερμοκρασία

και με τη βοήθεια της εντολής **Plot** σχεδιάζουμε την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων.

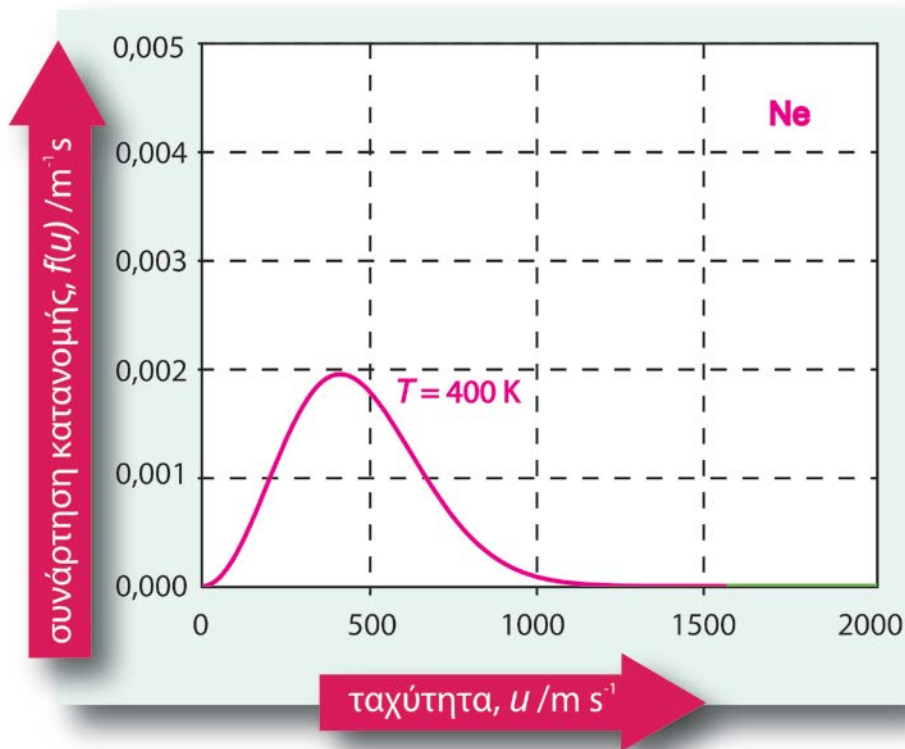
Ορίζουμε:

```
M=0.04;  
T=400;  
R=8.314;  
Plot[{4π*(M/(2π*R*T))^1.5*(u^2)*Exp[(M*(u^2))/(2R*T)]}, {u, 0,  
2000}, PlotRange→{{0, 2000}, {0, 0.0025}}, AxesLabel→{"ταχύτητα u/  
ms-1", "συνάρτηση κατανομής f(u)/ m-1s"}, GridLines → Automatic]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε στο Mathematica την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για ένα οποιοδήποτε αέριο σε ορισμένη θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Καμπύλη κατανομής ταχυτήτων αερίου σε ορισμένη θερμοκρασία».



Δραστηριότητα 2

Παρατηρήστε στο Mathematica την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για ένα οποιοδήποτε αέριο σε διάφορες θερμοκρασίες μεταξύ ενός εύρους θερμοκρασιών χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Καμπύλη κατανομής ταχυτήτων αερίου σε ορισμένο εύρος θερμοκρασιών».

2. Να σχεδιάσετε με τη βοήθεια του Mathematica τις καμπύλες κατανομής ταχυτήτων: α) για το Kr στους 200, 400 και 800 K και β) για τα αέρια Ne, Ar και Kr στους 300 K.

Απάντηση

α) Για να σχεδιάσουμε στο ίδιο γράφημα τις καμπύλες κατανομής ταχυτήτων για το ίδιο αέριο σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica τις τιμές για:

- την μοριακή μάζα του αερίου και
- τις τρεις θερμοκρασίες

και με τη βοήθεια των εντολών **Plot** και **Show** σχεδιάζουμε τις καμπύλες κατανομής στο ίδιο γράφημα.

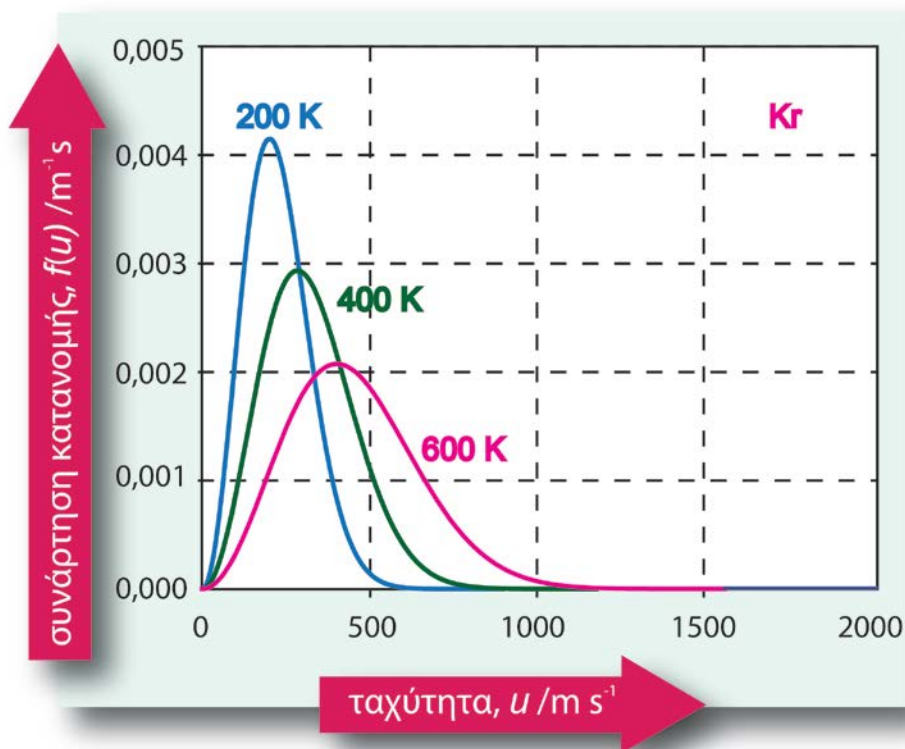
Δραστηριότητα 3

Σχεδιάστε στο Mathematica στο ίδιο διάγραμμα τις καμπύλες κατανομής ταχυτήτων για ένα οποιοδήποτε αέριο σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Καμπύλες κατανομής ταχυτήτων ενός αερίου σε τρεις θερμοκρασίες».

Ορίζουμε:

```
M=0.0838;  
R=8.314;  
T1=200;  
T2=400;  
T3=800;  
g1=Plot[4π*(M/(2π*R*T1))^1.5*(u^2)*Exp[-(M*(u^2))/(2R*T1)],{u,0,2000},PlotRange->{{0,2000},{0,0.005}},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]},PlotLegends->{"T1"},AxesLabel->{"ταχύτητα u/ms-1","συνάρτηση κατανομής f(u)/m-1s"},GridLines->Automatic];  
g2=Plot[4π*(M/(2π*R*T2))^1.5*(u^2)*Exp[-(M*(u^2))/(2R*T2)],{u,0,2000},PlotRange->{{0,2000},{0,0.005}},PlotStyle->{RGBColor[0.5,0.5,0]},PlotLegends->{"T2"},AxesLabel->{"ταχύτητα u/ms-1","συνάρτηση κατανομής f(u)/m-1s"},GridLines->Automatic];  
g3=Plot[4π*(M/(2π*R*T3))^1.5*(u^2)*Exp[-(M*(u^2))/(2R*T3)],{u,0,2000},PlotRange->{{0,2000},{0,0.005}},PlotStyle->{RGBColor[1,0.1,0.8]},PlotLegends->{"T3"},AxesLabel->{"ταχύτητα u/ms-1","συνάρτηση κατανομής f(u)/m-1s"},GridLines->Automatic];  
Show[g1,g2,g3]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



β) Για να σχεδιάσουμε στο ίδιο γράφημα τις καμπύλες κατανομής ταχυτήτων για τρία διαφορετικά αέρια σε μια ορισμένη θερμοκρασία ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica τις τιμές για:

- τις μοριακές μάζες των αερίων και
- τη θερμοκρασία

και με τη βοήθεια των εντολών **Plot** και **Show** σχεδιάζουμε τις καμπύλες κατανομής στο ίδιο γράφημα.

Δραστηριότητα 4

Σχεδιάστε στο Mathematica στο ίδιο διάγραμμα τις καμπύλες κατανομής ταχυτήτων για τρία διαφορετικά αέρια σε μια ορισμένη θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Καμπύλες κατανομής ταχυτήτων τριών αερίων στην ίδια θερμοκρασία».

Ορίζουμε:

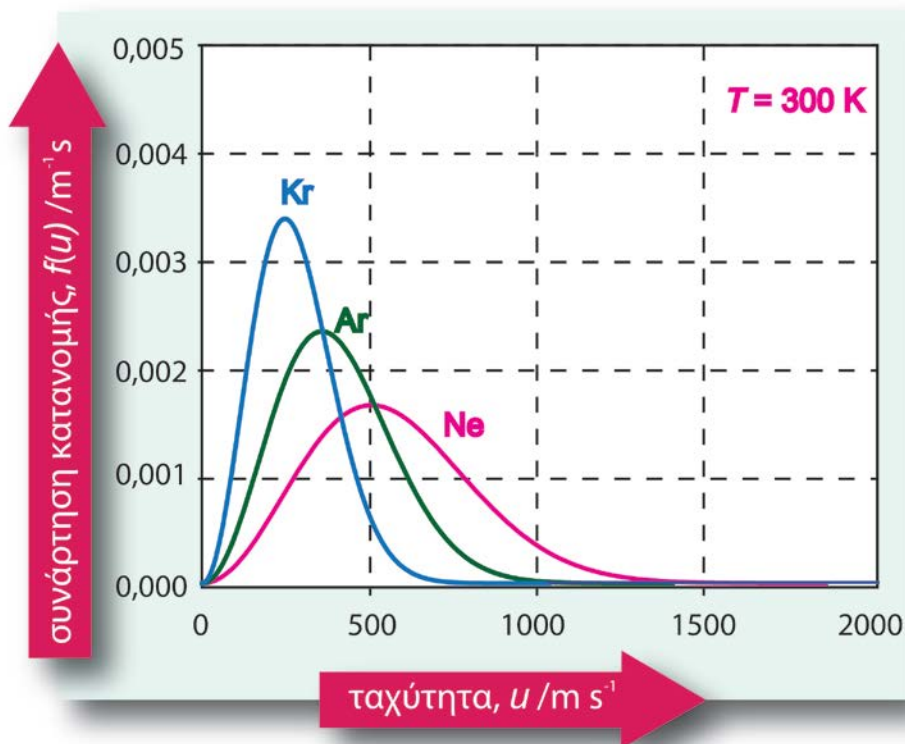
```
M1=0.020 ;
M2=0.040 ;
M3=0.0838 ;
T=300 ;
R=8.314 ;
```

```

g1=Plot[4π*(( M1/(2π*R*T))^1.5)*(u^2)*Exp[-
(M1*(u^2))/(2R*T)],{u,0,2000},PlotRange →{{0,2000},{0,0.004}},
PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]},PlotLegends →{"M1"},
AxesLabel→{"ταχύτητα u/ ms-1","συνάρτηση κατανομής f(u)/ m-1s"},GridLines → Automatic];
g2=Plot[4π*(( M2/(2π*R*T))^1.5)*(u^2)*Exp[-
(M2*(u^2))/(2R*T)],{u,0,2000},PlotRange →{{0,2000},{0,0.004}},
PlotStyle →{RGBColor[0.5,0.5,0]},PlotLegends →{"M2"},
AxesLabel→{"ταχύτητα u/ ms-1","συνάρτηση κατανομής f(u)/ m-1s"},GridLines → Automatic];
g3=Plot[4π*(( M3/(2π*R*T))^1.5)*(u^2)*Exp[-
(M3*(u^2))/(2R*T)],{u,0,2000},PlotRange →{{0,2000},{0,0.004}},
PlotStyle →{RGBColor[1,0.1,0.8]},PlotLegends →{"M3"},
AxesLabel→{"ταχύτητα u/ ms-1","συνάρτηση κατανομής f(u)/ m-1s"}
GridLines → Automatic];
Show[g1,g2,g3]

```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



3. Να σχεδιάσετε την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για ένα αέριο σε ορισμένη θερμοκρασία και στην καμπύλη να φαίνονται η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων του αερίου.

Απάντηση

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για το αέριο Ne στους 300 K.

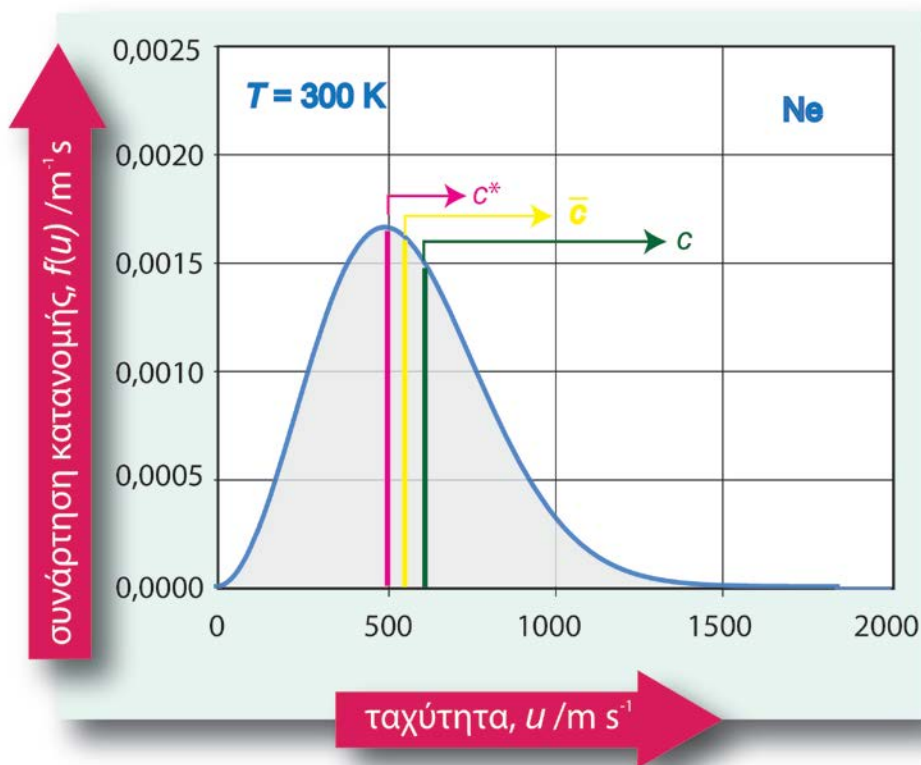
Σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica ορίζουμε:

- τη μολαρική μάζα, M , του αερίου και
- τη θερμοκρασία, T .

Στη συνέχεια ορίζουμε:

```
M=0.02;  
R=8.314;  
T=300;  
f[u_]=4π*((M/(2π*R*T))^1.5)*(u^2)*Exp[-(M*(u^2))/(2R*T)];  
  
g1=Plot[f[u],{u,0,2000},PlotRange→{{0,2000},{0,0.0025}},  
PlotLegends→{"f(u)"},GridLines→Automatic,Filling→Axis];  
c*=Sqrt[(2*R*T)/M];  
g2=ListPlot[{{c*,0},{c*,f[c*]}},PlotStyle→{CMYKColor[0,1,0,0]},  
PlotJoined→True,PlotLegends→{"c*"},GridLines→Automatic];  
c̄=Sqrt[(8*R*T)/(π*M)];  
g3=ListPlot[{{c̄,0},{c̄,f[c̄]}},PlotStyle→{CMYKColor[0,0,1,0]},  
PlotJoined→True,PlotLegends→{"c̄"},GridLines→Automatic];  
c=Sqrt[(3*R*T)/M];  
g4=ListPlot[{{c,0},{c,f[c]}},PlotJoined→True,  
PlotLegends→{"c"},GridLines→Automatic];  
Show[g1,g2,g3,g4]
```

και παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



Η κόκκινη γραμμή εντός της καμπύλης δείχνει την τιμή της πιθανότερης ταχύτητας, c^* , και αντιστοιχεί στο μέγιστο σημείο της καμπύλης. Η κίτρινη γραμμή αντιστοιχεί στη μέση ταχύτητα των μορίων του αερίου, \bar{c} , ενώ η πράσινη γραμμή στην ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου, c .

Δραστηριότητα 5

Παρατηρήστε στο Mathematica πώς μεταβάλλεται η θέση της ενεργού, της μέσης και της πιθανότερης ταχύτητας των μορίων ενός αερίου στην καμπύλη κατανομής ταχυτήτων:

α) με τη μεταβολή της θερμοκρασίας χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Διάγραμμα τριών ταχυτήτων 1» και

β) με τη μεταβολή της μοριακής μάζας και της θερμοκρασίας χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Διάγραμμα τριών ταχυτήτων 2».

Δραστηριότητα 6

Υπολογίστε στο Mathematica την τιμή της ενεργού, της μέσης και της πιθανότερης ταχύτητας των μορίων ενός αερίου σε ορισμένη θερμοκρασία χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Υπολογισμός ενεργού, μέσης και πιθανότερης ταχύτητας των μορίων ενός αερίου σε ορισμένη θερμοκρασία».

4.4. Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων

4.4.1. Θεμελιώδης εξίσωση κινητικής θεωρίας αερίων

Η θεμελιώδης εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m c^2}{V}$$

όπου:

p : η πίεση του αερίου (σε Pa),

N : ο αριθμός των μορίων του αερίου,

m : η μάζα ενός μορίου του αερίου (σε kg),

c : η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου (σε m s^{-1}) και

V : ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο (σε m^3).

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Με την εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων είναι δυνατόν να ζητείται να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί ένα αέριο σε κάποιο δοχείο, με την προϋπόθεση ότι αυτό συμπεριφέρεται ιδανικά, ή κάποια παράμετρος που συνδέεται με την πίεση στην ίδια εξίσωση, όπως η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου.

1. Ένα κυβικό δοχείο ακμής 1 m περιέχει 5 mol αερίου O₂ σε θερμοκρασία 300 K. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το αέριο στα τοιχώματα του δοχείου.

Απάντηση

Η εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m c^2}{V} \quad (1)$$

Η μάζα, m , ενός μορίου του αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$m = \frac{M}{N_A} \quad (2)$$

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (3)$$

Ο όγκος του κυβικού δοχείου στο οποίο βρίσκεται το αέριο δίνεται από τη σχέση:

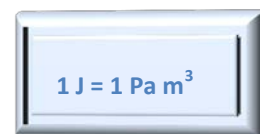
$$V = a^3 \quad (4)$$

όπου a η ακμή του κυβικού δοχείου.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2), (3) και (4) στη σχέση (1) προκύπτει για την πίεση που ασκεί το αέριο στα τοιχώματα του δοχείου η σχέση (5).

$$p = \frac{1}{3} \frac{N \cdot \frac{M}{N_A} \left(\sqrt{\frac{3RT}{M}} \right)^2}{a^3} \Rightarrow p = \frac{1}{3} \frac{nM \frac{3RT}{M}}{a^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p = \frac{nRT}{a^3} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών προκύπτει ότι η πίεση του αερίου είναι ίση με:



1 J = 1 Pa m³

$$p = \frac{5 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{(1 \text{ m})^3} = \frac{12471 \text{ J}}{1 \text{ m}^3} = \frac{12471 \text{ Pa m}^3}{1 \text{ m}^3} = 12471 \text{ Pa}$$

2. Να υπολογιστεί η ενεργός ταχύτητα και η πίεση που ασκεί 1 mol αερίου N_2 σε θερμοκρασία 293 K αν αυτό βρίσκεται: α) σε κυβικό δοχείο ακμής 10 cm και β) σε σφαιρικό δοχείο διαμέτρου 10 cm, χρησιμοποιώντας την εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων.

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

και είναι ίση με

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{0,028 \text{ kg mol}^{-1}}} = 510,9 \text{ m s}^{-1}$$

Η εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m c^2}{V}$$

όπου:

p : η πίεση του αερίου,

N : ο αριθμός των μορίων του αερίου,

m : η μάζα ενός μορίου του αερίου,

c : η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου και

V : ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο.

Η μάζα ενός μορίου N_2 είναι ίση με $m = M/N_A$, όπου M η μοριακή μάζα του N_2 και N_A , ο αριθμός του Avogadro. Έτσι η εξίσωση της κινητικής θεωρίας γίνεται

$$p = \frac{1}{3} \frac{N M c^2}{N_A V}$$

α) Αν το αέριο βρίσκεται σε κυβικό δοχείο ακμής $a = 10 \text{ cm}$, ο όγκος του δοχείου είναι

$$V = a^3 = (10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

Εφόσον στο δοχείο περιέχεται 1 mol N_2 , ο αριθμός των μορίων N του N_2 είναι $6,022 \cdot 10^{23}$.

Έτσι η πίεση που ασκεί το αέριο είναι

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 510,9^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 2436000 \text{ Pa} = \frac{2436000}{101325} \text{ atm} = 24,0 \text{ atm}$$

β) Αν το αέριο βρίσκεται σε σφαιρικό δοχείο διαμέτρου 10 cm, ο όγκος του δοχείου είναι

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} 3,14 \cdot (5 \text{ cm})^3 = 523,3 \text{ cm}^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Εφόσον στο δοχείο περιέχεται 1 mol N_2 , ο αριθμός των μορίων N του N_2 είναι $6,022 \cdot 10^{23}$.

Έτσι η πίεση που ασκεί το αέριο είναι

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 510,9^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = 4872000 \text{ Pa} = \frac{4872000}{101325} \text{ atm} = 48,1 \text{ atm}$$

4.4.2. Κινητική ενέργεια αερίων

Η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο, δηλαδή το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μορίων προς τον αριθμό όλων των μορίων, N , του αερίου, δίνεται από την εξίσωση

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{N} nRT = \frac{3}{2} \frac{1}{N_A} RT$$

Η ολική κινητική ενέργεια των μορίων 1 mol αερίου, U_m , δίνεται από την εξίσωση

$$U_m = \frac{3}{2} RT$$

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας είναι δυνατό να ζητείται να υπολογιστεί η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο ή η ολική κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου, καθώς και παραμέτρους που συνδέονται με τις παραπάνω σχέσεις, όπως η θερμοκρασία και η ποσότητα του αερίου.

3. Να βρεθεί: α) η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο και β) η ολική κινητική ενέργεια των μορίων 1 mol He, N₂ και CO₂ σε θερμοκρασίες 200, 400, 600 και 800 K.

Απάντηση

α) Η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο, δηλαδή το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μορίων προς τον αριθμό όλων των μορίων, N , του αερίου, δίνεται από την εξίσωση

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{N} nRT = \frac{3}{2} \frac{1}{N_A} RT$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι προφανές ότι η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο ενός αερίου είναι ανεξάρτητη από τη φύση του αερίου (μολαρική μάζα, βαθμοί ελευθερίας του αερίου), δηλαδή έχει την ίδια τιμή για οποιοδήποτε αέριο. Επομένως η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο των αερίων He, N₂ και CO₂ στην ίδια θερμοκρασία έχει την ίδια τιμή.

Έτσι για θερμοκρασία $T = 200$ K η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο είναι

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{N_A} RT = \frac{3}{2} \frac{1}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 200 \text{ K} = 4,142 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Εντελώς όμοια υπολογίζεται η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο των αερίων και για τις υπόλοιπες θερμοκρασίες. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Θερμοκρασία, T (K)	Μέση κινητική ενέργεια, $\langle \varepsilon \rangle$ (J)
200	$4,142 \cdot 10^{-21}$
400	$8,284 \cdot 10^{-21}$
600	$1,243 \cdot 10^{-20}$
800	$1,657 \cdot 10^{-20}$

Η μέση κινητική ενέργεια των μορίων ενός αερίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας.

β) Η ολική κινητική ενέργεια των μορίων 1 mol αερίου, U_m , δίνεται από την εξίσωση

$$U_m = \frac{3}{2}RT$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι προφανές ότι η ολική κινητική ενέργεια των μορίων 1 mol αερίου είναι ανεξάρτητη από τη φύση του αερίου (μολαρική μάζα, βαθμοί ελευθερίας του αερίου), δηλαδή έχει την ίδια τιμή για οποιοδήποτε αέριο. Επομένως η ολική κινητική ενέργεια των μορίων 1 mol των αερίων He, N₂ και CO₂ στην ίδια θερμοκρασία έχει την ίδια τιμή.

Έτσι για θερμοκρασία $T = 200$ K η ολική κινητική ενέργεια των μορίων 1 mol αερίου είναι

$$U_m = \frac{3}{2}8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 200 \text{ K} = 2494,2 \text{ J mol}^{-1}$$

Εντελώς όμοια υπολογίζεται η ολική κινητική ενέργεια των αερίων και για τις υπόλοιπες θερμοκρασίες. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Θερμοκρασία, T (K)	Ολική κινητική ενέργεια 1 mol αερίου, U_m (J)
200	2494,2
400	4988,4
600	7482,6
800	9976,8

Η ολική κινητική ενέργεια 1 mol αερίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας.

4. Ένα δοχείο όγκου 1 L περιέχει αέριο O₂ υπό πίεση 5 atm. Να υπολογιστεί η ποσότητα του O₂ που υπάρχει στο δοχείο αν η μέση κινητική ενέργεια ενός μορίου O₂ είναι 5,2·10⁻²¹ J.

Απάντηση

Η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο, δηλαδή το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μορίων προς τον αριθμό όλων των μορίων, N , του αερίου, δίνεται από την εξίσωση

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{N_A} RT$$

Αν είναι γνωστή η μέση κινητική ενέργεια ενός μορίου του αερίου, τότε από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η θερμοκρασία στην οποία το αέριο έχει μια ορισμένη τιμή μέσης κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{2N_A \langle \varepsilon \rangle}{3R}$$

Έτσι η θερμοκρασία στην οποία το αέριο O₂ έχει μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο ίση με 5,22·10⁻²¹ J είναι

$$T = \frac{2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 5,22 \cdot 10^{-21} \text{ J}}{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 251,1 \text{ K}$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT$$

προκύπτει ότι η ποσότητα ενός αερίου σε ορισμένες συνθήκες p , V και T δίνεται από τη σχέση

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Άρα η ποσότητα του αερίου O₂ που υπάρχει στο δοχείο είναι

$$n = \frac{5 \text{ atm} \cdot 1 \text{ L}}{0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 251,1 \text{ K}} = 0,24 \text{ mol}$$

4.4.3. Κατανομή Maxwell των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου - Ενεργός, μέση και πιθανότερη ταχύτητα των μορίων

Τα μόρια ενός αερίου δεν κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα, u . Η ταχύτητά τους κυμαίνεται σε ένα ευρύ διάστημα τιμών. Ο J.C. Maxwell βρήκε μια μαθηματική σχέση, $f(u)$, η οποία εκφράζει την κατανομή των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου. Η μαθηματική αυτή έκφραση, $f(u)$, γνωστή και ως συνάρτηση κατανομής των ταχυτήτων του Maxwell, υπολογίζει το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που έχουν ορισμένη ταχύτητα u και δίνεται από τη σχέση

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

όπου:

u : η ταχύτητα των μορίων (σε m s^{-1}),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με $8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$,

M : η μολαρική μάζα (σε kg mol^{-1}) και

T : η θερμοκρασία (σε K) του αερίου.

Σε ασκήσεις αυτής της κατηγορίας είναι δυνατό να ζητηθεί ο υπολογισμός του κλάσματος των μορίων ενός αερίου που κινείται σε ένα ορισμένο εύρος ταχυτήτων, από u_1 έως u_2 . Το κλάσμα αυτό των μορίων του αερίου είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη της συνάρτησης κατανομής και τον άξονα των ταχυτήτων από u_1 έως u_2 και είναι ίσο με το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

Για την επίλυση πολλών προβλημάτων της κινητικής θεωρίας των αερίων χρησιμοποιούνται η ενεργός ταχύτητα, c , η μέση ταχύτητα, \bar{c} , και η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων του αερίου, οι οποίες προκύπτουν από τη συνάρτηση κατανομής των ταχυτήτων του Maxwell, και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

όπου:

c : η ενεργός ταχύτητα (σε m s^{-1}),

\bar{c} : η μέση ταχύτητα (σε m s^{-1}),

c^* : η πιθανότερη ταχύτητα (σε m s^{-1}),

M : η μοριακή μάζα του αερίου (σε kg mol^{-1}),

T : η θερμοκρασία (σε K) και

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με $8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Ένα άλλο μέγεθος που επίσης προκύπτει από την κατανομή ταχυτήτων του Maxwell και είναι χρήσιμο για την επίλυση ορισμένων ασκήσεων είναι η σχετική μέση ταχύτητα, \bar{c}_{rel} , των μορίων και δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c}_{rel} = 2^{1/2} \bar{c}$$

5. Να υπολογιστεί το κλάσμα των μορίων του He στους 200 K που έχουν ταχύτητες από 200 έως 400 m s^{-1} χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell και τη βοήθεια του Mathematica.

Απάντηση

Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Maxwell δίνεται από τη μαθηματική σχέση:

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Mu^2/2RT}$$

όπου:

u : η ταχύτητα των μορίων (σε m s^{-1}),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων ίση με $8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$,

M : η μοριακή μάζα (σε kg mol^{-1}) και

T : η θερμοκρασία (σε K) του αερίου.

Το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που κινούνται με ταχύτητες από u_1 έως u_2 είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη της συνάρτησης κατανομής ταχυτήτων και τον άξονα των ταχυτήτων από τιμές u_1 έως u_2 . Το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με το ολοκλήρωμα:

$$\int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

Για να υπολογίσουμε το κλάσμα των μορίων ενός αερίου που κινούνται σε ορισμένο εύρος ταχυτήτων ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica:

- τη μοριακή μάζα, M , του αερίου,
- τη θερμοκρασία, T , και
- τα όρια του εύρους των ταχυτήτων, u_1 και u_2 .

Στη συνέχεια γράφουμε τη συνάρτηση του Maxwell και υπολογίζουμε το ζητούμενο κλάσμα μορίων.

Δραστηριότητα 7

Υπολογίστε το κλάσμα των μορίων ενός αερίου σε ένα οποιοδήποτε εύρος ταχυτήτων χρησιμοποιώντας το λογισμικό «Υπολογισμός κλάσματος μορίων αερίου».

Για να υπολογίσουμε το κλάσμα των μορίων του αερίου He που κινούνται με ταχύτητες από 200 έως 400 $m s^{-1}$ στους 200 K ορίζουμε σε ένα φύλλο εργασίας του Mathematica:

```
M=0.004;
R=8.314;
T=200;
u1=200;
u2=400;
f[u_]=4π ((M/(2π×R×T))^(3/2)) u^2 Exp[(-M*u^2)/(2R*T)];
∫[u1]^(u2) f[u] du
0.0489415
```

6. Να βρεθεί η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων του He σε θερμοκρασία 300, 600 και 900 K.

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , η μέση ταχύτητα, \bar{c} , και η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Για το αέριο He σε θερμοκρασία $T = 300 \text{ K}$, η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα είναι ίσες με:

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1367,7 \text{ m s}^{-1}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1260,1 \text{ m s}^{-1}$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1116,7 \text{ m s}^{-1}$$

Στους μαθηματικούς τύπους με τους οποίους υπολογίζουμε την ενεργό, τη μέση και την πιθανότερη ταχύτητα των μορίων ενός αερίου, η μολαρική μάζα, M , του αερίου πρέπει να είναι σε μονάδες kg mol^{-1} και όχι σε g mol^{-1} . Στην περίπτωση αυτή η αριθμητική τιμή της μολαρικής μάζας του αερίου ΔΕΝ ταυτίζεται με τη σχετική μοριακή μάζα, M_r , αυτού.

Όμοια υπολογίζεται η ενεργός, μέση και πιθανότερη ταχύτητα του αερίου He στους 600 και 900 K. Τα αποτελέσματα στις τρεις θερμοκρασίες δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	300 K	600 K	900 K
$c \text{ (m s}^{-1}\text{)}$	1367,7	1934,2	2369,0
$\bar{c} \text{ (m s}^{-1}\text{)}$	1260,4	1782,0	2182,6
$c^* \text{ (m s}^{-1}\text{)}$	1116,7	1579,3	1934,2

Η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων του αερίου αυξάνονται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

7. Να υπολογιστούν οι λόγοι των ενεργών, μέσων και πιθανότερων ταχυτήτων των μορίων α) He και H₂, β) He και Ar, γ) O₂ και CH₄ στους 273, 473 και 673 K. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Απάντηση

Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η ενεργός, μέση και πιθανότερη ταχύτητα των αερίων He, H₂, Ar, O₂ και CH₄ στους 273, 473 και 673 K.

Η ενεργός ταχύτητα, c , η μέση ταχύτητα, \bar{c} , και η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Για το αέριο He σε θερμοκρασία $T = 273$ K, η ενεργός, η μέση και η πιθανότερη ταχύτητα είναι ίσες με:

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1304,7 \text{ m s}^{-1}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1202,1 \text{ m s}^{-1}$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1065,3 \text{ m s}^{-1}$$

Εντελώς όμοια υπολογίζονται οι ταχύτητες και των υπόλοιπων αερίων στους 273, 473 και 673 K. Τα αποτελέσματα στις τρεις θερμοκρασίες δίνονται στους παρακάτω πίνακες.

Ενεργός ταχύτητα, c				
	M (kg mol ⁻¹)	273 K	473 K	673 K
He	0,004	1304,7	1717,4	2048,5
H ₂	0,002	1845,2	2428,8	2897,1
Ar	0,040	412,6	543,1	647,8
O ₂	0,032	461,3	607,2	724,3
CH ₄	0,016	652,4	858,7	1024,3

Μέση ταχύτητα, \bar{c}				
	M (kg mol ⁻¹)	273 K	473 K	673 K
He	0,004	1202,1	1582,2	1887,3
H ₂	0,002	1700,0	2237,6	2669,1
Ar	0,040	380,1	500,4	596,8
O ₂	0,032	425,0	559,4	667,3
CH ₄	0,016	601,0	791,1	943,7

Πιθανότερη ταχύτητα, c^*				
	M (kg mol ⁻¹)	273 K	473 K	673 K
He	0,004	1065,3	1402,2	1672,6
H ₂	0,002	1506,6	1983,1	2365,4
Ar	0,040	336,9	443,4	528,9
O ₂	0,032	376,6	495,8	591,4
CH ₄	0,016	532,6	701,1	836,3

Στους πίνακες που ακολουθούν αναγράφονται οι τιμές του λόγου των ενεργών ταχυτήτων των μορίων: α) He και H₂, β) He και Ar και γ) O₂ και CH₄, σε θερμοκρασίες 273, 473 και 673 Κ.

Κλάσμα ενεργών ταχυτήτων			
	He/H ₂	He/Ar	O ₂ /CH ₄
273 K	0,7	3,2	0,7
473 K	0,7	3,2	0,7
673 K	0,7	3,2	0,7

Κλάσμα μέσων ταχυτήτων			
	He/H ₂	He/Ar	O ₂ /CH ₄
273 K	0,7	3,2	0,7
473 K	0,7	3,2	0,7
673 K	0,7	3,2	0,7

Κλάσμα πιθανότερων ταχυτήτων			
	He/H ₂	He/Ar	O ₂ /CH ₄
273 K	0,7	3,2	0,7
473 K	0,7	3,2	0,7
673 K	0,7	3,2	0,7

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του λόγου των ενεργών, μέσων και πιθανότερων ταχυτήτων για ένα ορισμένο ζεύγος αερίων έχουν όλες την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε θερμοκρασία.

8. Σε τρεις ίδιες φιάλες Α, Β και Γ που βρίσκονται σε θερμοκρασία 20 °C περιέχονται τρία διαφορετικά αέρια (Ar, N₂ και O₂), χωρίς όμως να είναι γνωστό ποιο αέριο περιέχεται σε καθεμία από τις τρεις φιάλες. Για τα αέρια στις φιάλες Α, Β και Γ είναι γνωστό ότι η ενεργός ταχύτητα των μορίων τους είναι 477 m s⁻¹, 427 m s⁻¹ και 510 m s⁻¹, αντίστοιχα. Να βρεθεί ποιο αέριο περιέχει η κάθε φιάλη.

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορεί να υπολογιστεί η μοριακή μάζα ενός αερίου αν είναι γνωστή η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου σε μια ορισμένη θερμοκρασία. Έτσι προκύπτει για τη μοριακή μάζα ενός αερίου η σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow c^2 = \frac{3RT}{M} \Rightarrow M = \frac{3RT}{c^2}$$

Οι μοριακές μάζες των αερίων, των οποίων τα μόρια έχουν ενεργό ταχύτητα $c_A = 477 \text{ m s}^{-1}$, $c_B = 427 \text{ m s}^{-1}$ και $c_\Gamma = 510 \text{ m s}^{-1}$ σε θερμοκρασία 293 K και βρίσκονται στα δοχεία A, B και Γ αντίστοιχα, είναι

$$M_A = \frac{3RT}{c_A^2} = \frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{477^2 \text{ m}^2\text{s}^{-2}} = 0,032 \text{ kg mol}^{-1}$$

$$M_B = \frac{3RT}{c_B^2} = \frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{427^2 \text{ m}^2\text{s}^{-2}} = 0,040 \text{ kg mol}^{-1}$$

$$M_\Gamma = \frac{3RT}{c_\Gamma^2} = \frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{510^2 \text{ m}^2\text{s}^{-2}} = 0,028 \text{ kg mol}^{-1}$$

Άρα το δοχείο A περιέχει O_2 , το δοχείο B περιέχει Ar και το δοχείο Γ αέριο N_2 .

9. Να βρεθεί η θερμοκρασία στην οποία η ενεργός ταχύτητα των μορίων του H_2 είναι ίδια με την ενεργό ταχύτητα των μορίων του Ar στους 600 K. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία:
α) υπολογίζοντας την ενεργό ταχύτητα των μορίων του Ar και β) χωρίς να υπολογιστεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του Ar.

Απάντηση

α) Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων του Ar στους 600 K είναι

$$c_{Ar} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{Ar}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 611,6 \text{ m s}^{-1}$$

Η θερμοκρασία στην οποία η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός αερίου έχει μια ορισμένη τιμή δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow c^2 = \frac{3RT}{M} \Rightarrow T = \frac{c^2 M}{3R}$$

Έτσι η θερμοκρασία στην οποία η ενεργός ταχύτητα των μορίων του H_2 είναι ίδια με την ενεργό ταχύτητα των μορίων του Ar είναι

$$T = \frac{c^2 M_{H_2}}{3R} = \frac{611,6^2 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \cdot 0,002 \text{ kg mol}^{-1}}{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 30 \text{ K}$$

β) Εφόσον η ενεργός ταχύτητα των μορίων του Ar στους 600 K είναι ίση με την ενεργό ταχύτητα των μορίων του H₂ στη ζητούμενη θερμοκρασία T_x, ισχύει

$$c_{Ar} = c_{H_2} \Rightarrow \sqrt{\frac{3RT}{M_{Ar}}} = \sqrt{\frac{3RT_x}{M_{H_2}}} \Rightarrow \frac{3RT}{M_{Ar}} = \frac{3RT_x}{M_{H_2}} \Rightarrow T_x = T \frac{M_{H_2}}{M_{Ar}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ζητούμενη θερμοκρασία είναι

$$T_x = 600 \text{ K} \cdot \frac{0,002 \text{ kg mol}^{-1}}{0,040 \text{ kg mol}^{-1}} = 30 \text{ K}$$

10. Ένα αέριο A βρίσκεται σε θερμοκρασία 10 °C. Πόσο θα πρέπει να αυξηθεί η θερμοκρασία του αερίου έτσι ώστε να διπλασιαστεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου;

Απάντηση

Έστω c η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου A σε θερμοκρασία $T = 283 \text{ K}$. Για να διπλασιαστεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου A και να γίνει $c' = 2c$ θα πρέπει η θερμοκρασία του αερίου να αυξηθεί κατά ΔT , δηλαδή θα βρίσκεται σε θερμοκρασία $T + \Delta T$. Από τη σχέση των ενεργών ταχυτήτων των μορίων στις δύο θερμοκρασίες προκύπτει ότι

$$c' = 2c \Rightarrow \sqrt{\frac{3R(T + \Delta T)}{M}} = 2 \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow \frac{3R(T + \Delta T)}{M} = 4 \frac{3RT}{M} \Rightarrow T + \Delta T = 4T \Rightarrow \Delta T = 3T$$

Άρα για να διπλασιαστεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του αερίου A θα πρέπει η θερμοκρασία του αερίου να αυξηθεί κατά

$$\Delta T = 3 \cdot 283 \text{ K} = 849 \text{ K}$$

11. Να βρεθεί η θερμοκρασία στην οποία: α) η ενεργός ταχύτητα, β) η μέση ταχύτητα και γ) η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων του N₂ είναι ίση με 500 m s⁻¹.

Απάντηση

α) Από τη σχέση που δίνει την ενεργό ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

προκύπτει ότι η θερμοκρασία στην οποία το αέριο έχει μια ορισμένη τιμή ενεργού ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow c^2 = \frac{3RT}{M} \Rightarrow T = \frac{c^2 M}{3R}$$

Άρα η θερμοκρασία στην οποία τα μόρια του αερίου N_2 έχουν ενεργό ταχύτητα ίση με 500 m s^{-1} είναι

$$T = \frac{500^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1}}{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 280,7 \text{ K}$$

β) Από τη σχέση που δίνει τη μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

προκύπτει ότι η θερμοκρασία στην οποία το αέριο έχει μια ορισμένη τιμή μέσης ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \Rightarrow (\bar{c})^2 = \frac{8RT}{\pi M} \Rightarrow T = \frac{(\bar{c})^2 \pi M}{8R}$$

Άρα η θερμοκρασία στην οποία τα μόρια του αερίου N_2 έχουν μέση ταχύτητα 500 m s^{-1} είναι

$$T = \frac{500^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \cdot 3,14 \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1}}{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 330,6 \text{ K}$$

γ) Η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

από την οποία προκύπτει ότι η θερμοκρασία στην οποία το αέριο έχει μια ορισμένη τιμή πιθανότερης ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \Rightarrow (c^*)^2 = \frac{2RT}{M} \Rightarrow T = \frac{(c^*)^2 M}{2R}$$

Άρα η θερμοκρασία στην οποία τα μόρια του αερίου N_2 έχουν πιθανότερη ταχύτητα ίση με 500 m s^{-1} είναι

$$T = \frac{500^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1}}{2 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 421,0 \text{ K}$$

12. Η πυκνότητα μάζας ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, το οποίο ασκεί πίεση 0,8 atm στους 20 °C, είναι 1,6 g L⁻¹. Να υπολογιστεί: α) η ενεργός ταχύτητα, β) η μέση ταχύτητα και γ) η πιθανότερη ταχύτητα των μορίων του αερίου στην παραπάνω θερμοκρασία.

Απάντηση

Η ενεργός, μέση και πιθανότερη ταχύτητα των μορίων ενός αερίου σε μια ορισμένη θερμοκρασία υπολογίζονται εύκολα με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η μοριακή μάζα του αερίου.

Η μοριακή μάζα του αερίου μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow M = \frac{\rho RT}{p}$$

και είναι ίση με

$$M = \frac{1,6 \text{ g mol}^{-1} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{0,8 \text{ atm}} = 48 \text{ g mol}^{-1}$$

α) Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

και είναι ίση με

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{0,048 \text{ kg mol}^{-1}}} = 390,2 \text{ m s}^{-1}$$

β) Η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και είναι ίση με

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,048 \text{ kg mol}^{-1}}} = 359,5 \text{ m s}^{-1}$$

γ) Η πιθανότερη ταχύτητα, c^* , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

και είναι ίση με

$$c^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{0,048 \text{ kg mol}^{-1}}} = 318,6 \text{ m s}^{-1}$$

13. Να υπολογιστεί η μέση και η ενεργός ταχύτητα των μορίων ενός ιδανικού αερίου A σε ορισμένη θερμοκρασία T αν η πυκνότητα μάζας του αερίου στην ίδια θερμοκρασία είναι $0,2 \text{ g L}^{-1}$ υπό πίεση 1 atm .

Απάντηση

Η ενεργός ταχύτητα, c , και η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων ενός αερίου δίνονται από τις σχέσεις

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (1)$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι για να υπολογιστεί η ενεργός και η μέση ταχύτητα των μορίων του αερίου, θα πρέπει να είναι γνωστή είτε η μοριακή μάζα, M , του αερίου και η θερμοκρασία, T , είτε ο λόγος T/M .

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει ότι:

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{mRT}{VM} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \frac{T}{M} = \frac{p}{\rho R}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος T/M είναι ίσος με:

$$\frac{T}{M} = \frac{1 \text{ atm}}{0,2 \text{ g L}^{-1} \cdot 0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 61 \text{ g}^{-1}\text{mol K} \quad (3)$$

Στις σχέσεις (1) και (2) η μοριακή μάζα, M , του αερίου έχει μονάδες kg mol^{-1} και όχι g mol^{-1} που έχει στην καταστατική εξίσωση. Για να μπορέσει να αντικατασταθεί η σχέση (3) στις σχέσεις (1) και (2) θα πρέπει να γίνει η κατάλληλη μετατροπή. Έτσι η σχέση (3) γίνεται:

$$\frac{T}{M} = 61 \text{ g}^{-1}\text{mol K} = \frac{61}{0,001 \text{ kg mol}^{-1}\text{K}^{-1}} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η ενεργός και η μέση ταχύτητα του αερίου στη θερμοκρασία T είναι ίσες με:

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 61}{0,001 \text{ kg mol}^{-1}\text{K}^{-1}}} = 1233,5 \text{ m s}^{-1}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 61}{3,14 \cdot 0,001 \text{ kg mol}^{-1}\text{K}^{-1}}} = 1136,4 \text{ m s}^{-1}$$

14. Ποσότητα 0,2 mol αερίου Ar ασκούν πίεση 1 Μρα και καταλαμβάνουν όγκο 1 L. Να βρεθεί η ενεργός και η μέση ταχύτητα των μορίων του Ar.

Απάντηση

Η ενεργός και η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου μπορούν να υπολογιστούν αν είναι γνωστή η θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται το αέριο.

Η θερμοκρασία του αερίου υπολογίζεται εύκολα από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$$

και είναι ίση με

$$T = \frac{\frac{1000000}{101325} \text{ atm} \cdot 1 \text{ L}}{0,2 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 601,8 \text{ K}$$

Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

και είναι ίση με

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 601,8 \text{ K}}{0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 612,6 \text{ m s}^{-1}$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και είναι ίση με

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 601,8 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 564,4 \text{ m s}^{-1}$$

15. Αν η θερμοκρασία ενός αερίου αυξηθεί: α) από τους 300 K στους 400 K, β) από τους 300 K στους 600 K και γ) από τους 300 K στους 900 K, να υπολογιστεί η % μεταβολή της ενεργού και της μέσης ταχύτητας των μορίων του αερίου.

Απάντηση

Έστω c_1 η ενεργός ταχύτητα του αερίου σε μια αρχική θερμοκρασία T_1 και c_2 η ενεργός ταχύτητα του αερίου σε μια τελική θερμοκρασία T_2 .

Η % μεταβολή της ενεργού ταχύτητας των μορίων ενός αερίου κατά την αύξηση της θερμοκρασίας από T_1 σε T_2 είναι ίση με:

$$\% \text{ μεταβολή} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \cdot 100 = \frac{\sqrt{\frac{3RT_2}{M}} - \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}}{\sqrt{\frac{3RT_1}{M}}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{\frac{3R}{M}} \sqrt{T_2} - \sqrt{\frac{3R}{M}} \sqrt{T_1}}{\sqrt{\frac{3R}{M}} \sqrt{T_1}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}} \cdot 100$$

Έστω \bar{c}_1 η μέση ταχύτητα του αερίου σε μια αρχική θερμοκρασία T_1 και \bar{c}_2 η μέση ταχύτητα του αερίου σε μια τελική θερμοκρασία T_2 .

Η % μεταβολή της μέσης ταχύτητας των μορίων ενός αερίου κατά την αύξηση της θερμοκρασίας από T_1 σε T_2 είναι ίση με:

$$\% \text{ μεταβολή} = \frac{\bar{c}_2 - \bar{c}_1}{\bar{c}_1} \cdot 100 = \frac{\sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} - \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}}}{\sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{\frac{8R}{\pi M}} \sqrt{T_2} - \sqrt{\frac{8R}{\pi M}} \sqrt{T_1}}{\sqrt{\frac{8R}{\pi M}} \sqrt{T_1}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}} \cdot 100$$

Παρατηρούμε ότι η % μεταβολή της ενεργού ταχύτητας είναι ίση με την % μεταβολή της μέσης ταχύτητας των μορίων του αερίου κατά την αύξηση της θερμοκρασίας του αερίου από μια αρχική θερμοκρασία T_1 σε μια τελική θερμοκρασία T_2 .

α) Κατά την αύξηση της θερμοκρασίας ενός αερίου από τους 300 K στους 400 K, η % μεταβολή της ενεργού ταχύτητας (αλλά και της μέσης ταχύτητας) είναι ίση με:

$$\% \text{ μεταβολή} = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{400} - \sqrt{300}}{\sqrt{300}} \cdot 100 = \frac{20 - 17,32}{17,32} \cdot 100 = 15,47 \%$$

β) Κατά την αύξηση της θερμοκρασίας ενός αερίου από τους 300 K στους 600 K, η % μεταβολή της ενεργού ταχύτητας (αλλά και της μέσης ταχύτητας) είναι ίση με:

$$\% \text{ μεταβολή} = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{600} - \sqrt{300}}{\sqrt{300}} \cdot 100 = \frac{24,49 - 17,32}{17,32} \cdot 100 = 41,39 \%$$

γ) Κατά την αύξηση της θερμοκρασίας ενός αερίου από τους 300 K στους 900 K, η % μεταβολή της ενεργού ταχύτητας (αλλά και της μέσης ταχύτητας) είναι ίση με:

$$\% \text{ μεταβολή} = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{900} - \sqrt{300}}{\sqrt{300}} \cdot 100 = \frac{30 - 17,32}{17,32} \cdot 100 = 73,21 \%$$

4.4.4. Συχνότητα συγκρούσεων αέριου μορίου

Δυο μόρια αερίου συγκρούονται μεταξύ τους όταν τα κέντρα των δυο μορίων έρχονται σε απόσταση ίση με d . Στην κινητική θεωρία η παράμετρος d ονομάζεται διάμετρος σύγκρουσης των μορίων, η οποία είναι ίση με τη μοριακή διάμετρο. Η συχνότητα με την οποία συμβαίνουν οι κρούσεις των μορίων ενός αερίου καλείται **συχνότητα συγκρούσεων**, z , και δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

όπου:

σ : η ενεργός διατομή κρούσης του αερίου (σε m^2), η οποία είναι ίση με πd^2 ,

\bar{c}_{rel} : η σχετική μέση ταχύτητα (σε m s^{-1}) των μορίων του αερίου,

p : η πίεση του αερίου (σε $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$),

T : η θερμοκρασία (σε K) του αερίου και

k_B : η σταθερά Boltzmann ίση με $1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

16. Να βρεθεί πόσες φορές θα συγκρουστεί ένα άτομο He με άλλα άτομα He, σε χρονικό διάστημα 1 s, καθώς κινείται μέσα σε αέριο δείγμα He, που βρίσκεται υπό πίεση 1 atm και θερμοκρασία 298 K. Δίνεται η μοριακή διάμετρος του He $d = 2,15 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Απάντηση

Η συχνότητα συγκρούσεων, z , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

Όπως είναι φανερό από την παραπάνω σχέση, για να υπολογιστεί η συχνότητα συγκρούσεων θα πρέπει να είναι γνωστή η σχετική μέση ταχύτητα, καθώς και η ενεργός διατομή κρούσης του He.

Η σχετική μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c}_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για τα άτομα του He στη θερμοκρασία των 298 K είναι ίση με:

$$\bar{c}_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1776,1 \text{ m s}^{-1}$$

Υπενθυμίζεται ότι $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του He είναι

$$\sigma = \pi d^2 = 3,14 \cdot (2,15 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2 = 0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Άρα η συχνότητα συγκρούσεων ενός ατόμου He στη θερμοκρασία των 298 K είναι

$$z = \frac{(0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1776,1 \text{ m s}^{-1})(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-2})}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})(298 \text{ K})} = 6,4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

17. Να βρεθεί ο αριθμός των συγκρούσεων ενός μορίου N_2 με άλλα μόρια σε χρονικό διάστημα 1 s, καθώς κινείται μέσα σε αέριο δείγμα N_2 σε θερμοκρασία 293 K και πίεση: α) 10 atm, β) 1 atm, γ) 0,1 atm και δ) 1 μαtm. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του N_2 $\sigma = 0,43 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Ο αριθμός των συγκρούσεων ενός μορίου προς το χρονικό διάστημα που αυτές συμβαίνουν ονομάζεται συχνότητα συγκρούσεων, z . Η συχνότητα συγκρούσεων, z , των μορίων ενός αερίου σύμφωνα με την κινητική θεωρία των αερίων δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

Για να υπολογιστεί η συχνότητα συγκρούσεων θα πρέπει να είναι γνωστή η σχετική μέση ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c}_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για τα μόρια του N_2 στη θερμοκρασία των 293 K είναι ίση με:

$$\bar{c}_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1}}} = 665,6 \text{ m s}^{-1}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του N_2 είναι

$$\sigma = 0,43 \text{ nm}^2 = 0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

α) Για πίεση 10 atm η συχνότητα συγκρούσεων ενός μορίου N₂ στη θερμοκρασία των 293 K είναι

$$z = \frac{(0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(665,6 \text{ m s}^{-1})(10 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(293 \text{ K})} = 0,72 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

β) Για πίεση 1 atm

$$z = \frac{(0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(665,6 \text{ m s}^{-1})(1 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(293 \text{ K})} = 0,072 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

γ) Για πίεση 0,1 atm

$$z = \frac{(0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(665,6 \text{ m s}^{-1})(0,1 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(293 \text{ K})} = 0,0072 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

δ) Για πίεση 1 μatm = 10⁻⁶ atm

$$z = \frac{(0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(665,6 \text{ m s}^{-1})(10^{-6} \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(293 \text{ K})} = 0,72 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η συχνότητα συγκρούσεων των μορίων υπό σταθερή θερμοκρασία αυξάνεται με την αύξηση της πίεσης.

4.4.5. Μέση ελεύθερη διαδρομή αέριου μορίου

Ως **μέση ελεύθερη διαδρομή**, λ , των μορίων ενός αερίου ορίζεται η μέση τιμή των αποστάσεων που διανύει ένα μόριο μεταξύ δυο διαδοχικών συγκρούσεων με άλλα μόρια και δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{z}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη συχνότητα συγκρούσεων, z , προκύπτει η σχέση:

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{\frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}}$$

και επειδή $\bar{c}_{rel} = \sqrt{2}\bar{c}$ προκύπτουν τελικά για τη μέση ελεύθερη διαδρομή οι παρακάτω σχέσεις:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

ή

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \mathcal{N}}$$

όπου:

p : η πίεση του αερίου (σε $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$),

T : η θερμοκρασία του αερίου (σε K),

k_B : η σταθερά Boltzmann ίση με $1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$,

σ : η ενεργός διατομή κρούσης του αερίου (σε m^2),

d : η μοριακή διάμετρος του μορίου (σε m) και

\mathcal{N} : η αριθμητική πυκνότητα των μορίων.

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας ζητείται συνήθως να υπολογιστεί είτε η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του αερίου είτε η πίεση που ασκεί το αέριο.

18. Να βρεθεί η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός ατόμου Ne, καθώς κινείται μέσα σε ένα αέριο δείγμα Ne, που βρίσκεται σε θερμοκρασία 298 K και υπό πίεση: α) 0,1 atm και β) 1 atm. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του Ne $\sigma = 0,20 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του Ne είναι

$$\sigma = 0,20 \text{ nm}^2 = 0,20 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

α) Έτσι η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός ατόμου Ne σε πίεση 0,1 atm είναι

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})(298 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,20 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(0,1 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-2})} \\ &= 143,6 \cdot 10^{-8} \text{ m} \end{aligned}$$

β) Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός ατόμου Ne σε πίεση 1 atm είναι

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})(298 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,20 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-2})} = 14,36 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αέριου μορίου μειώνεται με την αύξηση της πίεσης σε σταθερή θερμοκρασία.

19. Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το Ar σε θερμοκρασία 293 K όταν η μέση ελεύθερη διαδρομή του είναι 1 mm. Δίνεται η μοριακή διάμετρος του Ar $d = 0,366 \text{ nm}$.

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η πίεση που ασκεί το αέριο δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma \lambda}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του He είναι

$$\sigma = \pi d^2 = 3,14 \cdot (0,366 \cdot 10^{-9} \text{m})^2 = 0,42 \cdot 10^{-18} \text{m}^2$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι η πίεση που ασκεί το αέριο είναι

$$p = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})(293 \text{K})}{\sqrt{2}(0,42 \cdot 10^{-18} \text{m}^2)(10^{-3} \text{m})} = 6,8 \text{ Pa ή } 0,00006 \text{ atm}$$

20. Δείγμα αερίου Ar βρίσκεται υπό πίεση 1 atm και θερμοκρασία 300 K. Στη συνέχεια η θερμοκρασία του αερίου διπλασιάζεται και γίνεται 600 K. Να βρεθεί η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός ατόμου Ar, καθώς κινείται μέσα στο αέριο δείγμα Ar θεωρώντας ότι το αέριο βρίσκεται: α) σε δοχείο σταθερού όγκου και β) σε δοχείο μεταβλητού όγκου με κινούμενο έμβολο. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του Ar $\sigma = 0,64 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του Ar είναι

$$\sigma = 0,64 \text{ nm}^2 = 0,64 \cdot 10^{-18} \text{m}^2$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός ατόμου Ar σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία 300 K είναι

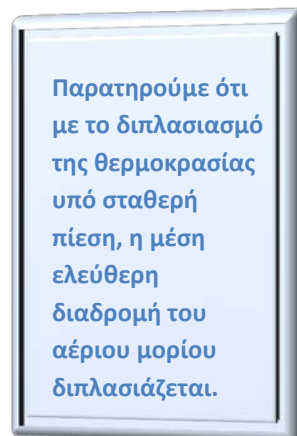
$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})(300 \text{K})}{\sqrt{2}(0,64 \cdot 10^{-18} \text{m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2})} = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{m}$$

Στη συνέχεια η θερμοκρασία του αερίου διπλασιάζεται και γίνεται 600 K.

α) Σε δοχείο σταθερού όγκου όσο αυξάνεται η θερμοκρασία T , τόσο αυξάνεται και η πίεση, p , δηλαδή το πηλίκο T/p είναι σταθερό. Επομένως, η μέση ελεύθερη διαδρομή δε μεταβάλλεται με το διπλασιασμό της θερμοκρασίας και παραμένει ίση με $4,5 \cdot 10^{-8} \text{m}$.

β) Σε δοχείο μεταβλητού όγκου, δηλαδή σε σταθερή πίεση, p , όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, T , τόσο αυξάνεται και η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων ενός αερίου. Έτσι σε θερμοκρασία 600 K και πίεση 1 atm η μέση ελεύθερη διαδρομή του μορίου είναι:

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(600 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,64 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$



21. Σε ένα δοχείο σταθερού όγκου 1 L και σε θερμοκρασία 298 K βρίσκεται αέριο CO₂. Να βρεθεί η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός μορίου CO₂, καθώς κινείται μέσα στο δοχείο, αν η ποσότητα του CO₂ στο δοχείο είναι: α) 0,1 mol, β) 0,2 mol και γ) 1 mol. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του CO₂ $\sigma = 0,64 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αερίου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \mathcal{N}}$$

όπου:

d : η μοριακή διάμετρος του μορίου και

\mathcal{N} : η αριθμητική πυκνότητα των μορίων.

Για να υπολογιστεί η μέση ελεύθερη διαδρομή του CO₂ θα πρέπει να είναι γνωστή η μοριακή διάμετρος του, καθώς επίσης και η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του.

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , ενός αερίου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\sigma = \pi d^2$$

από την οποία προκύπτει ότι η μοριακή διάμετρος του μορίου είναι

$$d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μοριακή διάμετρος του CO₂ είναι

$$d = \sqrt{\frac{0,64 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2}{3,14}} = 0,45 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Η αριθμητική πυκνότητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{N} = \frac{N}{V} = \frac{nN_A}{V}$$

όπου:

N : ο αριθμός των μορίων του αερίου,

N_A : ο αριθμός Avogadro,

n : ο αριθμός mol του αερίου και

V : ο όγκος του δοχείου που περιέχει το αέριο.

α) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του CO_2 όταν στο δοχείο περιέχονται 0,1 mol CO_2 είναι

$$\mathcal{N} = \frac{0,1 \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{10^{-3} \text{ m}^3} = 6,022 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Άρα η μέση ελεύθερη διαδρομή του CO_2 είναι

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (0,45 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}} = 0,18 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Όμοια υπολογίζονται η αριθμητική πυκνότητα και η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του CO_2 στις περιπτώσεις β και γ. Τα αποτελέσματα αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ποσότητα CO_2 (mol)	Αριθμητική πυκνότητα, \mathcal{N} (m^{-3})	Μέση ελεύθερη διαδρομή, λ (m)
0,1	$6,022 \cdot 10^{25}$	$0,18 \cdot 10^{-7}$
0,2	$12,04 \cdot 10^{25}$	$0,09 \cdot 10^{-7}$
1,0	$60,22 \cdot 10^{25}$	$0,018 \cdot 10^{-7}$

Παρατηρούμε ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή του αερίου μορίου ελαττώνεται καθώς αυξάνεται η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του.

22. Η σταθερά b van der Waals του αερίου Cl_2 είναι $0,0542 \text{ L mol}^{-1}$. Να βρεθεί η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του Cl_2 στους 293 K υπό πίεση: α) 1 atm και β) 0,01 atm.

Απάντηση

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

όπου σ η ενεργός διατομή κρούσης του αερίου.

Παρακάτω περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να υπολογιστεί η ενεργός διατομή κρούσης του αέριου μορίου, έχοντας ως δεδομένο τη σταθερά van der Waals του αέριου μορίου.

Ο σύνογκος b (σταθερά van der Waals) ενός αέριου μορίου είναι τετραπλάσιος του συνολικού γεωμετρικού όγκου αυτού και δίνεται από τη σχέση

$$b = 4 \left(\frac{1}{6} \pi d^3 N_A \right)$$

όπου d η μοριακή διάμετρος του μορίου.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$d = \left(\frac{6b}{4\pi N_A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μοριακή διάμετρος του Cl_2 είναι

$$d = \left(\frac{6 \cdot 0,0542 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}}{4 \cdot 3,14 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,35 \cdot 10^{-8} \text{ dm} = 0,035 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Άρα η ενεργός διατομή κρούσης του Cl_2 είναι

$$\sigma = \pi d^2 = 3,14 \cdot (0,035 \cdot 10^{-7} \text{ m})^2 = 38 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Έτσι αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση προκύπτει ότι:

α) Σε πίεση 1 atm η μέση ελεύθερη διαδρομή του Cl_2 είναι

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(293 \text{ K})}{\sqrt{2}(38 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 7,32 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

β) Σε πίεση 0,01 atm η μέση ελεύθερη διαδρομή του Cl₂ είναι

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(293 \text{ K})}{\sqrt{2}(38 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(0,01 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 7,32 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

23. Στο διαστημικό χώρο μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν 5 άτομα H ανά m³. Αν η μέση θερμοκρασία του διαστήματος είναι 3 K να υπολογιστεί: α) η ενεργός ταχύτητα των ατόμων του H, β) η πίεση που ασκεί το υδρογόνο στο διάστημα, γ) η μέση ταχύτητα των ατόμων του H και δ) η μέση ελεύθερη διαδρομή των ατόμων του H στο διάστημα. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του H $\sigma = 0,23 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

α) Η ενεργός ταχύτητα, c , των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

και είναι ίση με

$$c = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 3 \text{ K}}{0,001 \text{ kg mol}^{-1}}} = 273,5 \text{ m s}^{-1}$$

β) Η πίεση που ασκεί το H στο διάστημα υπολογίζεται από την εξίσωση της κινητικής θεωρίας των αερίων, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m c^2}{V}$$

Η μάζα ενός μορίου H₂ είναι ίση με $m = M/N_A$, όπου M η μοριακή μάζα του H και N_A ο αριθμός του Avogadro. Έτσι η εξίσωση της κινητικής θεωρίας γίνεται

$$p = \frac{1}{3} \frac{N M c^2}{N_A V}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η πίεση που ασκεί το H στο διάστημα είναι

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 0,001 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 273,5^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 1 \text{ m}^3} = 2,1 \cdot 10^{-19} \text{ Pa} = \frac{2,1 \cdot 10^{-19}}{101325} \text{ atm} = 2 \cdot 10^{-24} \text{ atm}$$

γ) Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και είναι ίση με

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 3 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,001 \text{ kg mol}^{-1}}} = 252,0 \text{ m s}^{-1}$$

δ) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

και είναι ίση με

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(3 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,23 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(2 \cdot 10^{-24} \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})} = 6,2 \cdot 10^{14} \text{ m}$$

24. Να βρεθεί πόσες φορές θα συγκρουστεί ένα μόριο O_2 του ατμοσφαιρικού αέρα με άλλα μόρια, σε χρονικό διάστημα 1 s, καθώς και η μέση ελεύθερη διαδρομή σε υψόμετρο 0, 20 και 50 km από την επιφάνεια της θάλασσας. Θεωρήστε ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή και ίση με 293 K. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του O_2 $\sigma = 0,40 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Η συχνότητα συγκρούσεων, z , των μορίων ενός αερίου σύμφωνα με την κινητική θεωρία των αερίων δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{\sigma \bar{c}_{rel} p}{k_B T}$$

Για να υπολογιστεί η συχνότητα συγκρούσεων θα πρέπει να είναι γνωστή η σχετική μέση ταχύτητα.

Η σχετική μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{c}_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για τα μόρια του O_2 στη θερμοκρασία των 293 K είναι ίση με:

$$\bar{c}_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,032 \text{ kg mol}^{-1}}} = 622,7 \text{ m s}^{-1}$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του N_2 είναι

$$\sigma = 0,40 \text{ nm}^2 = 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Για να βρεθεί η συχνότητα συγκρούσεων ενός μορίου O_2 σε υψόμετρο 0, 20 και 50 km από την επιφάνεια της θάλασσας, καθώς και η μέση ελεύθερη διαδρομή του αέριου μορίου, θα πρέπει να είναι γνωστή η πίεση στα παραπάνω υψόμετρα. Η πίεση της ατμόσφαιρας σε διάφορα υψόμετρα υπολογίζεται από τον τύπο του Laplace

$$p = p_0 e^{-\overline{M} g_n z / RT}$$

• Σε ύψος $z = 0$ η βαρομετρική πίεση είναι

$$p = 1 \text{ atm} \cdot e^{-\frac{0,029 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 9,807 \text{ m s}^{-2} \cdot 0 \text{ m}}{8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}} = 1 \text{ atm}$$

Η συχνότητα συγκρούσεων ενός μορίου O_2 είναι

$$z = \frac{(0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(622,7 \text{ m s}^{-1})(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(293 \text{ K})} = 6,2 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

και η μέση ελεύθερη διαδρομή

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(293 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 7,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Όμοια υπολογίζονται η συχνότητα συγκρούσεων και η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του O_2 και στα άλλα υψόμετρα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ύψος (m)	Συχνότητα συγκρούσεων, z (s^{-1})	Μέση ελεύθερη διαδρομή, λ (m)
0	$6,2 \cdot 10^9$	$7,1 \cdot 10^{-8}$
20000	$6,1 \cdot 10^8$	$7,3 \cdot 10^{-7}$
50000	$1,8 \cdot 10^7$	$23,2 \cdot 10^{-6}$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα συγκρούσεων του αέριου μορίου μειώνεται με την αύξηση του υψόμετρου (καθώς μειώνεται η βαρομετρική πίεση), ενώ η μέση ελεύθερη διαδρομή αυξάνεται.

4.4.6. Κρούσεις των μορίων με τοιχώματα και επιφάνειες

Ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος που προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων είναι ο αριθμός των κρούσεων με μια επιφάνεια ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **ροή κρούσεων**, Z_W , και δίνεται από τη σχέση:

$$Z_W = \frac{p}{(2\pi mk_B T)^{\frac{1}{2}}}$$

όπου:

p : η πίεση του αερίου (σε $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$),

T : η θερμοκρασία του αερίου (σε K),

m : η μάζα ενός μορίου του αερίου (σε kg) και

k_B : η σταθερά Boltzmann ίση με $1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

25. Ένα λεπτό έλασμα με διαστάσεις $1\text{cm} \cdot 1\text{cm}$ βρίσκεται μέσα σε αέριο Ne που βρίσκεται υπό πίεση 1 atm και σε θερμοκρασία 293 K . Να βρεθεί ο αριθμός των συγκρούσεων των ατόμων του Ne με αυτή την επιφάνεια σε χρόνο 15 s .

Απάντηση

Ο αριθμός των μορίων που προσκρούουν στη μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου καλείται ροή κρούσεων, Z_W , και δίνεται από τη σχέση

$$Z_W = \frac{p}{(2\pi mk_B T)^{\frac{1}{2}}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$Z_W = \frac{(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{\left(2 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{0,010 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}\right) (1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(293 \text{ K})\right)^{\frac{1}{2}}} = 4,93 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Στα 2 cm^2 , που είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του ελάσματος και για χρονική περίοδο 15 s , οι συγκρούσεις που θα έχουν συμβεί είναι:

$$(2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(4,93 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1})(15 \text{ s}) = 14,8 \cdot 10^{24}$$

26. Μια στερεή επιφάνεια με διαστάσεις $2\text{cm} \cdot 3\text{cm}$ είναι εκτεθειμένη σε αέριο Ar σε θερμοκρασία 298 K. Αν η πίεση που ασκεί το αέριο είναι: α) 10 atm, β) 1 atm και γ) 0,1 atm να βρεθεί ο αριθμός των συγκρούσεων των ατόμων του Ar με αυτή την επιφάνεια σε χρόνο 20 s.

Απάντηση

Ο αριθμός των μορίων που προσκρούουν στη μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου καλείται ροή κρούσεων, Z_W , και δίνεται από τη σχέση

$$Z_W = \frac{p}{(2\pi mk_B T)^{\frac{1}{2}}}$$

α) Η ροή κρούσεων για πίεση 10 atm είναι:

$$Z_W = \frac{(10 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{\left(2 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{0,040 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}\right) (1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(298 \text{ K})\right)^{\frac{1}{2}}} = 2,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Στα 12 cm^2 , που είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του ελάσματος και για χρονική περίοδο 20 s, οι συγκρούσεις που θα έχουν συμβεί είναι:

$$(12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(2,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1})(20 \text{ s}) = 5,9 \cdot 10^{26}$$

β) Η ροή κρούσεων για πίεση 1 atm είναι:

$$Z_W = \frac{(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{\left(2 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{0,040 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}\right) (1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(298 \text{ K})\right)^{\frac{1}{2}}} = 2,4 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Στα 12 cm^2 , που είναι το εμβαδό της επιφάνειας του ελάσματος και για χρονική περίοδο 20 s, οι συγκρούσεις που θα έχουν συμβεί είναι:

$$(12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(0,77 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1})(20 \text{ s}) = 5,9 \cdot 10^{25}$$

γ) Η ροή κρούσεων για πίεση 0,1 atm είναι:

$$Z_W = \frac{(0,1 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})}{\left(2 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{0,040 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}\right) (1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(298 \text{ K})\right)^{\frac{1}{2}}} = 2,4 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Στα 12 cm^2 , που είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του ελάσματος και για χρονική περίοδο 20 s , οι συγκρούσεις που θα έχουν συμβεί είναι:

$$(12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(0,077 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1})(20 \text{ s}) = 5,9 \cdot 10^{24}$$

Παρατηρούμε ότι με την ελάττωση της πίεσης του αερίου ελαττώνεται ο αριθμός των συγκρούσεων των μορίων του Ar με τη στερεή επιφάνεια.

4.4.7. Ταχύτητα διαπίδυσης αερίων - Νόμος του Graham

Η τάση που έχουν τα αέρια να εξαπλώνονται ομοιόμορφα σε όλο το χώρο μέσα στον οποίο βρίσκονται ονομάζεται **διαπίδυση**.

Για τη διαπίδυση των αερίων ισχύει ο νόμος του Graham, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: «*Η ταχύτητα διαπίδυσης ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της πυκνότητας μάζας ή της μοριακής μάζας του*».

Για δύο αέρια 1 και 2 που βρίσκονται στην ίδια πίεση και θερμοκρασία ισχύει η σχέση

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}} = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}}$$

όπου:

v : η ταχύτητα διαπίδυσης,

M : η μοριακή μάζα και

ρ : η πυκνότητα μάζας του αερίου.

Ένα ανάλογο φαινόμενο με τη διαπίδυση των αερίων είναι αυτό της έκχυσης ή διαφυγής των αερίων. Ως **έκχυση** ή **διαφυγή** καλείται η διόδος αερίου υπό μορφή ρεύματος δια μέσου μικρής οπής ή λεπτής σχισμής.

Όταν ένα αέριο που βρίσκεται υπό πίεση p και θερμοκρασία T διαχωρίζεται από έναν πρακτικά κενό εξωτερικό χώρο με μια μικρή σχετικά οπή εμβαδού A_o , τότε ο ρυθμός διαφυγής των μορίων προς τον εξωτερικό χώρο μέσω της οπής στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή η ταχύτητα διαφυγής των μορίων είναι ίση με τη ροή κρούσεων, Z_W , επί το εμβαδό της οπής, A_o .

$$\text{Ταχύτητα διαφυγής} = Z_W A_o = \frac{p}{(2\pi m k_B T)^{\frac{1}{2}}} A_o$$

ή

$$\text{Ταχύτητα διαφυγής} = Z_W A_o = \frac{p N_A}{(2\pi MRT)^{\frac{1}{2}}} A_o$$

Το φαινόμενο της διαφυγής των αερίων βρίσκει εφαρμογή στα στοιχεία Knudsen, τα οποία είναι ειδικά δοχεία στα οποία προσδιορίζεται η τάση ατμών στερεών ή υγρών ουσιών.

27. Να υπολογιστεί ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδυσης, καθώς και ο λόγος των πυκνοτήτων μάζας των μορίων: α) H₂ και He, β) H₂ και N₂, γ) O₂ και N₂, δ) CO₂ και SO₂, ε) NH₃ και H₂S, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο διαπίδυσης του Graham, η ταχύτητα διαπίδυσης, v , ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα της πυκνότητας μάζας ή της μοριακής μάζας του.

Για δύο αέρια 1 και 2 ισχύει η σχέση

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}} = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}}$$

α) Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδυσης των αερίων H₂ και He είναι ίσος με

$$\frac{v_{H_2}}{v_{He}} = \frac{\sqrt{M_{He}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

Ο λόγος των πυκνοτήτων μάζας των αερίων H₂ και He είναι ίσος με το λόγο των ταχυτήτων διαπίδυσης

$$\frac{v_{H_2}}{v_{He}} = \frac{\sqrt{\rho_{He}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{M_{He}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{\rho_{He}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}} \Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{\rho_{He}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}} \Rightarrow 2^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_{He}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_{He}}{\rho_{H_2}} = 4$$

Όμοια υπολογίζονται οι παραπάνω λόγοι και για τα αέρια των περιπτώσεων β, γ, δ και ε.

β) Για τα αέρια H₂ και N₂

$$\frac{v_{H_2}}{v_{N_2}} = \frac{\sqrt{M_{N_2}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = 3,7$$

και

$$\frac{v_{H_2}}{v_{N_2}} = \frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{M_{N_2}}}{\sqrt{M_{H_2}}} = \frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}} \Rightarrow 3,7 = \frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}} \Rightarrow 3,7^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{H_2}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_{N_2}}{\rho_{H_2}} = 13,7$$

γ) Για τα αέρια O₂ και N₂

$$\frac{v_{O_2}}{v_{N_2}} = \frac{\sqrt{M_{N_2}}}{\sqrt{M_{O_2}}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{32}} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{16}} = \frac{3,7}{4} = 0,9$$

και

$$\frac{v_{O_2}}{v_{N_2}} = \frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{O_2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{M_{N_2}}}{\sqrt{M_{O_2}}} = \frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{O_2}}} \Rightarrow 0,9 = \frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{O_2}}} \Rightarrow 0,9^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_{N_2}}}{\sqrt{\rho_{O_2}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_{N_2}}{\rho_{O_2}} = 0,81$$

δ) Για τα αέρια CO₂ και SO₂

$$\frac{v_{CO_2}}{v_{SO_2}} = \frac{\sqrt{M_{SO_2}}}{\sqrt{M_{CO_2}}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{44}} = 1,2$$

και

$$\frac{v_{CO_2}}{v_{SO_2}} = \frac{\sqrt{\rho_{SO_2}}}{\sqrt{\rho_{CO_2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{M_{SO_2}}}{\sqrt{M_{CO_2}}} = \frac{\sqrt{\rho_{SO_2}}}{\sqrt{\rho_{CO_2}}} \Rightarrow 1,2 = \frac{\sqrt{\rho_{SO_2}}}{\sqrt{\rho_{CO_2}}} \Rightarrow 1,2^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_{SO_2}}}{\sqrt{\rho_{CO_2}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_{SO_2}}{\rho_{CO_2}} = 1,44$$

ε) Για τα αέρια NH₃ και H₂S

$$\frac{v_{NH_3}}{v_{H_2S}} = \frac{\sqrt{M_{H_2S}}}{\sqrt{M_{NH_3}}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \sqrt{2} = 1,4$$

και

$$\frac{v_{NH_3}}{v_{H_2S}} = \frac{\sqrt{\rho_{H_2S}}}{\sqrt{\rho_{NH_3}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{M_{H_2S}}}{\sqrt{M_{NH_3}}} = \frac{\sqrt{\rho_{H_2S}}}{\sqrt{\rho_{NH_3}}} \Rightarrow 1,4 = \frac{\sqrt{\rho_{H_2S}}}{\sqrt{\rho_{NH_3}}} \Rightarrow 1,4^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_{H_2S}}}{\sqrt{\rho_{NH_3}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_{H_2S}}{\rho_{NH_3}} = 1,96$$

28. Να υπολογιστεί ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδωσης των ισοτόπων: α) ^1H και ^2H , β) ^{235}U και ^{238}U , κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο διαπίδωσης του Graham, η ταχύτητα διαπίδωσης, v , ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας του.

Για δύο αέρια 1 και 2 ισχύει η σχέση

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$$

α) Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδωσης των ισοτόπων ^1H και ^2H είναι ίσος με

$$\frac{v_{^1\text{H}}}{v_{^2\text{H}}} = \frac{\sqrt{M_{^2\text{H}}}}{\sqrt{M_{^1\text{H}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = 1,41$$

β) Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδωσης των ισοτόπων ^{235}U και ^{238}U είναι ίσος με

$$\frac{v_{^{238}\text{U}}}{v_{^{235}\text{U}}} = \frac{\sqrt{M_{^{238}\text{U}}}}{\sqrt{M_{^{235}\text{U}}}} = \frac{\sqrt{238}}{\sqrt{235}} = 1,006$$

29. Ένα αέριο A χρειάζεται διπλάσιο χρόνο για να διαπιδύσει από μια οπή από αυτόν που χρειάζεται για να διαπιδύσει από την ίδια οπή ίση ποσότητα αέριας NH_3 . Να βρεθεί η μοριακή μάζα του αερίου A.

Απάντηση

Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδωσης των αερίων A και NH_3 είναι ίσος με

$$\frac{v_A}{v_{\text{NH}_3}} = \frac{\frac{x_A}{t_A}}{\frac{x_{\text{NH}_3}}{t_{\text{NH}_3}}} = \frac{\sqrt{M_{\text{NH}_3}}}{\sqrt{M_A}}$$

όπου x_A και x_{NH_3} είναι οι αποστάσεις που διανύουν τα αέρια A και NH_3 σε χρόνους t_A και t_{NH_3} , αντίστοιχα, και M_A και M_{NH_3} οι μοριακές μάζες τους. Επειδή τα δύο αέρια διαπιδύουν από την ίδια οπή, οι αποστάσεις που διανύουν τα δύο αέρια, x_A και x_{NH_3} , είναι ίσες, δηλαδή $x_A = x_{\text{NH}_3}$. Επίσης δίνεται ότι το αέριο A χρειάζεται διπλάσιο χρόνο για να

διαπιδύσει από την οπή από αυτόν που χρειάζεται για να διαπιδύσει από την ίδια οπή ίση ποσότητα αέριου NH_3 , δηλαδή $t_A = 2t_{\text{NH}_3}$. Έτσι ο παραπάνω λόγος γίνεται

$$\frac{t_{\text{NH}_3}}{t_A} = \frac{\sqrt{M_{\text{NH}_3}}}{\sqrt{M_A}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

$$\frac{t_{\text{NH}_3}}{2t_{\text{NH}_3}} = \frac{\sqrt{M_{\text{NH}_3}}}{\sqrt{M_A}}$$

προκύπτει ότι η μοριακή μάζα του αερίου A είναι

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{M_A}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{17}{M_A} \Rightarrow M_A = 68 \text{ g mol}^{-1}$$

30. Σε μια φιάλη περιέχεται αέριο, το οποίο μπορεί να είναι H_2 ή CO_2 . Αν το αέριο αυτό χρειάζεται το $\frac{1}{4}$ του χρόνου για να διαπιδύσει από μια οπή από αυτήν που χρειάζεται για να διαπιδύσει από την ίδια οπή ίση ποσότητα αερίου O_2 , να βρεθεί: α) ποιο από τα δύο αέρια, H_2 ή CO_2 περιέχει η φιάλη και β) το λόγο των πυκνοτήτων μάζας του O_2 και του αερίου που περιέχει η φιάλη.

Απάντηση

α) Έστω A το αέριο που περιέχει η φιάλη, το οποίο μπορεί να είναι H_2 ή CO_2 . Ο λόγος των ταχυτήτων διαπίδυσης των αερίων A και O_2 είναι ίσος με

$$\frac{v_A}{v_{\text{O}_2}} = \frac{\frac{x_A}{t_A}}{\frac{x_{\text{O}_2}}{t_{\text{O}_2}}} = \frac{\sqrt{M_{\text{O}_2}}}{\sqrt{M_A}}$$

όπου x_A και x_{O_2} είναι οι αποστάσεις που διανύουν τα αέρια A και O_2 σε χρόνους t_A και t_{O_2} , αντίστοιχα, και M_A και M_{O_2} οι μοριακές μάζες τους. Επειδή τα δύο αέρια διαπιδύουν από την ίδια οπή, οι αποστάσεις που διανύουν τα δύο αέρια, x_A και x_{O_2} , είναι ίσες, δηλαδή $x_A = x_{\text{O}_2}$. Επίσης δίνεται ότι το αέριο A χρειάζεται το $\frac{1}{4}$ του χρόνου για να διαπιδύσει από την οπή από αυτόν που χρειάζεται για να διαπιδύσει από την ίδια οπή ίση ποσότητα αέριου NH_3 , δηλαδή $t_A = t_{\text{O}_2}/4$. Έτσι ο παραπάνω λόγος γίνεται

$$\frac{t_{\text{O}_2}}{t_A} = \frac{\sqrt{M_{\text{O}_2}}}{\sqrt{M_A}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

$$\frac{t_{O_2}}{4} = \frac{\sqrt{M_{O_2}}}{\sqrt{M_A}}$$

προκύπτει ότι η μοριακή μάζα του αερίου A είναι

$$4 = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{M_A}} \Rightarrow 16 = \frac{32}{M_A} \Rightarrow M_A = 2 \text{ g mol}^{-1}$$

Άρα η φιάλη περιέχει αέριο H₂.

β) Με βάση το νόμο του Graham ισχύει η σχέση

$$\frac{\rho_{O_2}}{\rho_{H_2}} = \frac{\sqrt{M_{O_2}}}{\sqrt{M_{H_2}}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος των πυκνοτήτων μάζας του O₂ και του H₂ είναι ίσος με

$$\frac{\rho_{O_2}}{\rho_{H_2}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{16}}{\sqrt{2}} = 4$$

31. Ορισμένος όγκος αερίου O₂ διαπιδύει από μια οπή σε χρόνο 4 min. Να βρεθεί ο χρόνος διαπίδυσης: α) ίσου όγκου αερίου He από την οπή και β) ισομοριακού μίγματος Ar και N₂, κάτω από τις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας.

Απάντηση

α) Σύμφωνα με το νόμο διαπίδυσης του Graham, η ταχύτητα διαπίδυσης, v , ενός αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα της μοριακής μάζας του.

Έτσι για τα αέρια O₂ και He ισχύει η σχέση

$$\frac{v_{O_2}}{v_{He}} = \frac{\sqrt{M_{He}}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

ή

$$\frac{x_{O_2}}{t_{O_2}} = \frac{\sqrt{M_{He}}}{\sqrt{M_{O_2}}} \frac{x_{He}}{t_{He}}$$

όπου x_{O_2} και x_{He} είναι οι αποστάσεις που διανύουν τα αέρια O₂ και He σε χρόνους t_{O_2} και t_{He} , αντίστοιχα, και M_{O_2} και M_{He} οι μοριακές μάζες τους. Επειδή τα δύο αέρια διαπιδύουν

από την ίδια οπή, οι αποστάσεις που διανύουν τα δύο αέρια, x_{O_2} και x_{He} , είναι ίσες, δηλαδή $x_{O_2} = x_{He}$. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{t_{He}}{t_{O_2}} = \frac{\sqrt{M_{He}}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

$$\frac{t_{He}}{4} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{32}}$$

προκύπτει ότι ο χρόνος διαπίδυσης του αέριου He είναι

$$t_{He} = \frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{32}} = \frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 2}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ min}$$

β) Το αέριο μίγμα Ar και N_2 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αέριο A με μέση μοριακή μάζα

$$\bar{M}_A = x_{Ar}M_{Ar} + x_{N_2}M_{N_2}$$

όπου:

x_{Ar} : το κλάσμα ποσότητας του Ar και

x_{N_2} : το κλάσμα ποσότητας του N_2 στο αέριο μίγμα.

Επειδή το μίγμα είναι ισομοριακό ισχύει $x_{Ar} = x_{N_2} = 0,5$. Άρα η μέση μοριακή μάζα του αέριου μίγματος είναι

$$\bar{M}_A = 0,5 \cdot 40 + 0,5 \cdot 28 = 34$$

Έτσι για τα αέρια O_2 και A ισχύει η σχέση

$$\frac{v_{O_2}}{v_A} = \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

ή

$$\frac{x_{O_2}}{t_{O_2}} = \frac{x_A}{t_A} = \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

όπου x_{O_2} και x_A είναι οι αποστάσεις που διανύουν τα αέρια O_2 και A σε χρόνους t_{O_2} και t_A , αντίστοιχα, και M_{O_2} και \bar{M}_A οι μοριακές μάζες τους. Επειδή τα δύο αέρια διαπιδύουν από την ίδια οπή, οι αποστάσεις που διανύουν τα δύο αέρια, x_{O_2} και x_A , είναι ίσες, δηλαδή $x_{O_2} = x_A$. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{t_A}{t_{O_2}} = \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

$$\frac{t_A}{4} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{32}}$$

προκύπτει ότι ο χρόνος διαπίδυσης του αέριου A είναι

$$t_A = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{32}} = 1,03 \text{ min}$$

Άρα ο χρόνος διαπίδυσης του αέριου μίγματος Ar και N₂ είναι 1,03 min.

32. Ορισμένος όγκος O₂ διαπιδύει από μια οπή σε χρόνο 3 min, ενώ ίσος όγκος μίγματος CO₂ και N₂ διαπιδύει από την ίδια οπή, κάτω από τις ίδιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, σε χρόνο 2 min. Να βρεθεί το κλάσμα όγκου του N₂ στο αέριο μίγμα.

Απάντηση

Το αέριο μίγμα CO₂ και N₂ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αέριο A με μέση μοριακή μάζα

$$\bar{M}_A = x_{CO_2} M_{CO_2} + x_{N_2} M_{N_2}$$

όπου:

x_{CO_2} : το κλάσμα ποσότητας του CO₂ και

x_{N_2} : το κλάσμα ποσότητας του N₂ στο αέριο μίγμα.

Αν το κλάσμα ποσότητας του CO₂ στο αέριο μίγμα είναι y , τότε το κλάσμα ποσότητας του N₂ είναι $1 - y$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\bar{M}_A = y \cdot 44 + (1 - y) \cdot 28 = 16y + 28$$

Έτσι για τα αέρια O₂ και A ισχύει η σχέση

$$\frac{v_{O_2}}{v_A} = \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

ή

$$\frac{x_{O_2}}{t_{O_2}} = \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

όπου x_{O_2} και x_A είναι οι αποστάσεις που διανύουν τα αέρια O_2 και A σε χρόνους t_{O_2} και t_A , αντίστοιχα, και M_{O_2} και \bar{M}_A οι μοριακές μάζες τους. Επειδή τα δύο αέρια διαπιδύουν από την ίδια οπή, οι αποστάσεις που διανύουν τα δύο αέρια, x_{O_2} και x_A , είναι ίσες, δηλαδή $x_{O_2} = x_A$. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{t_A}{t_{O_2}} = \frac{\sqrt{M_A}}{\sqrt{M_{O_2}}}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

$$\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{16y + 28}}{\sqrt{32}}$$

προκύπτει

$$\frac{4}{9} = \frac{16y + 28}{32} \Rightarrow y = 0,25$$

Άρα το κλάσμα ποσότητας του N_2 στο μίγμα είναι $x_{N_2} = 0,75$ και το κλάσμα όγκου, $\varphi(N_2) = 0,75$.

33. Τα στοιχεία Knudsen χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της τάσης των ατμών στερεών και υγρών ουσιών. Ένα τέτοιο στοιχείο Knudsen χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της τάσης ατμών του Hg στους 630 °C. Αποσφραγίζεται η μικρή κυκλική οπή διαμέτρου 0,6 mm και οι ατμοί του Hg που διαφεύγουν από την οπή υγροποιούνται εκ νέου πάνω σε μια πολύ ψυχρή επιφάνεια. Βρέθηκε ότι μετά από χρόνο 5 min η ποσότητα του υγρού Hg που συλλέχθηκε είναι 0,537 g. Να βρεθεί η τάση των ατμών του Hg στη θερμοκρασία που έγινε το πείραμα.

Απάντηση

Η τάση των ατμών του Hg, δηλαδή η πίεση που ασκούν οι ατμοί του, είναι σταθερή, διότι οι ατμοί που διαφεύγουν από τη μικρή οπή αναπληρώνονται συνεχώς. Επομένως η ταχύτητα διαφυγής είναι σταθερή και δίνεται από την εξίσωση

$$\text{Ταχύτητα διαφυγής} = Z_W A_o = \frac{p N_A}{(2\pi MRT)^{\frac{1}{2}}} A_o$$

Η ποσότητα Δq που διαφεύγει σε χρονικό διάστημα Δt είναι $\Delta q = Z_W A_o m \Delta t$,

όπου A_o είναι το εμβαδό της διατομής

$$\text{δηλαδή } A_o = \pi(0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 = 2,827 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

και q είναι η μάζα του Hg που έχει συλλεχθεί σε χρόνο Δt .

Επομένως

$$\Delta q = \frac{p N_A}{(2\pi MRT)^{\frac{1}{2}}} A_o m \Delta t = \frac{p N_A}{(2\pi MRT)^{\frac{1}{2}}} A_o \frac{M}{N_A} \Delta t$$

οπότε

$$p = \left(\frac{2\pi RT}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta q}{A_o \Delta t}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση

$$p = \left(\frac{2 \cdot 3,14 \cdot (8,314 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}) (903 \text{ K})}{0,2006 \text{ kg mol}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{0,537 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{2,827 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot 300 \text{ s}} = 3,1 \text{ kPa}$$

ή

$$3,1 \text{ kPa} = 0,03 \text{ atm} = 22,8 \text{ Torr}$$

Άρα η τάση ατμών του Hg στους 630 °C είναι 22,8 Torr.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΕΡΙΩΝ – ΜΕΡΟΣ II

5.1. Εισαγωγή

Το εκπαιδευτικό υλικό που αναπτύχθηκε για το δεύτερο μέρος της κινητικής θεωρίας των αερίων περιλαμβάνει:

- ✓ Αρχή ισοκατανομής ενέργειας, βαθμοί ελευθερίας κίνησης αερίου
- ✓ Μολαρικές θερμοχωρητικότητες αερίων
- ✓ Φαινόμενα μεταφοράς της ποσότητας μιας ιδιότητας ενός ιδανικού αερίου
- ✓ Μεταφορά ύλης, συντελεστής διάχυσης αερίου
- ✓ Μεταφορά ενέργειας, συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας αερίου
- ✓ Μεταφορά ορμής, συντελεστής ιξώδους αερίου

Στον πίνακα 5 που ακολουθεί αναγράφονται οι μαθηματικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο για την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού.

Πίνακας 6. Τυπολόγιο (2) κινητικής θεωρίας αερίων.

Τυπολόγιο	
Λόγος γ	$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$
Ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε ένα αέριο	$u = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$
	ή
	$u = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$
Ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε ένα αέριο	ή
	$u = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}$
Ροή μορίων	$J_N = -D \frac{dN}{dz}$
Ροή μάζας	$J_n = -D \frac{dc_x}{dz}$
Ροή ενέργειας	$J_E = -\kappa \frac{dT}{dz}$
Ροή ορμής	$J_{P_x} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$
Συντελεστής διάχυσης	$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$
Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας	$\kappa = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} C_{v,m} c_x$
	ή
Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας	$\kappa = \frac{1}{3} \bar{c} C_{v,m} \sigma N_A$
	ή
Συντελεστής ιξώδους	$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m N$
	ή
Συντελεστής ιξώδους	$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} M c_x$
	ή

5.2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να συγκρίνετε τις ενέργειες των μορίων των παρακάτω αερίων: α) He και Ar, β) He και O₂, γ) Ne και CO₂, δ) H₂ και O₂, ε) N₂ και O₃, στ) O₃ και CO₂, ζ) NH₃ και UF₆.

Απάντηση

Τα άτομα στα μονοατομικά αέρια, όπως π.χ. He, Ar, Kr, Xe κ.ά. έχουν 3 βαθμούς ελευθερίας κίνησης. Η ενέργεια των ατόμων οφείλεται μόνο στη μεταφορική τους κίνηση και είναι ίση με:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Τα άτομα των διατομικών, τριατομικών και πολυατομικών αερίων, όπως π.χ. O₂, N₂, Cl₂, CO₂, UF₆ κ.ά., εκτός από τη μεταφορική ενέργεια διαθέτουν και περιστροφική ενέργεια κίνησης.

Τα διατομικά μόρια των αερίων έχουν ενέργεια περιστροφής μόνο όταν περιστρέφονται γύρω από τους δυο άξονες, γ και z και η συνολική τους ενέργεια είναι ίση με:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} k_B T$$

Τα τριατομικά και πολυατομικά μόρια των αερίων έχουν ενέργεια περιστροφής και ως προς τον τρίτο άξονα, δηλαδή τον z, και η συνολική τους ενέργεια είναι ίση με:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{6}{2} k_B T$$

Έτσι:


α) $\varepsilon_{He} = \varepsilon_{Ar}$, β) $\varepsilon_{He} < \varepsilon_{O_2}$, γ) $\varepsilon_{Ne} < \varepsilon_{CO_2}$, δ) $\varepsilon_{H_2} = \varepsilon_{O_2}$, ε) $\varepsilon_{N_2} < \varepsilon_{O_3}$, στ) $\varepsilon_{O_3} = \varepsilon_{CO_2}$, ζ) $\varepsilon_{NH_3} = \varepsilon_{UF_6}$

2. Να βρεθούν: α) οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης, β) η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο, $C_{V,m}$ και γ) η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, $C_{p,m}$ για τα παρακάτω αέρια: H_2 , He, Ne, ατμοί Hg, N_2 , O_2 , Cl_2 , ατμοί Br_2 , O_3 , CO, CO_2 , NH_3 , CH_4 , UF_6 .

Απάντηση

Ισχύουν γενικά τα εξής για τα αέρια:

Αέριο με μονοατομικά μόρια

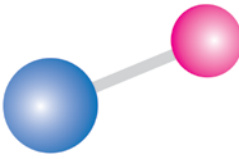


3 Βαθμοί ελευθερίας κίνησης

$$C_{V,m} = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 12,5 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 3 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$C_{p,m} = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 20,8 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 5 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Αέριο με διατομικά μόρια

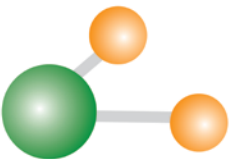


5 Βαθμοί ελευθερίας κίνησης

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 20,8 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 5 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$C_{p,m} = \frac{7}{2}R = \frac{7}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 29,1 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 7 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Αέριο με τριατομικά μόρια



6 Βαθμοί ελευθερίας κίνησης

$$C_{V,m} = \frac{6}{2}R = \frac{6}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 24,9 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 6 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$C_{p,m} = \frac{8}{2}R = \frac{8}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 33,3 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} = 8 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Έτσι:

Αέριο	Βαθμοί ελευθερίας	$C_{V,m}$ (cal mol ⁻¹ K ⁻¹)	$C_{p,m}$ (cal mol ⁻¹ K ⁻¹)
H ₂	5	5	7
He	3	3	5
Ne	3	3	5
ατμοί Hg	3	3	5
N ₂	5	5	7
O ₂	5	5	7
Cl ₂	5	5	7
ατμοί Br ₂	5	5	7
O ₃	6	6	8
CO	5	5	7
CO ₂	6	6	8
NH ₃	6	6	8
CH ₄	6	6	8
UF ₆	6	6	8

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) δικαιολογώντας την απάντησή σας, όπου αυτό απαιτείται.

α) Τα άτομα του Ar έχουν πέντε βαθμούς ελευθερίας κίνησης.

β) Η ενέργεια των μορίων του CO₂ οφείλεται στη μεταφορική και περιστροφική τους κίνηση και έχουν πέντε βαθμούς ελευθερίας κίνησης.

γ) Σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες τα μόρια των αερίων έχουν επιπλέον βαθμούς ελευθερίας κίνησης από αυτούς που προβλέπει η κινητική θεωρία των αερίων.

Απάντηση

α) Λάθος. Τα μονοατομικά αέρια, όπως το Ar, έχουν ενέργεια που οφείλεται μόνο στη μεταφορική τους κίνηση και έχουν τρεις βαθμούς ελευθερίας κίνησης.

β) Σωστό

γ) Σωστό

4. Να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται ο συντελεστής διάχυσης ενός αερίου με την αύξηση:
α) της θερμοκρασίας και β) της πίεσης.

Απάντηση

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$$

όπου

λ : η μέση ελεύθερη διαδρομή και

\bar{c} : η μέση ταχύτητα των μορίων.

α) Η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της θερμοκρασίας, όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Επειδή ο συντελεστής διάχυσης είναι ανάλογος με τη μέση ταχύτητα των μορίων, με την αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνεται και ο συντελεστής διάχυσης.

β) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , των μορίων είναι αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης, όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Επειδή ο συντελεστής διάχυσης είναι ανάλογος με την μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων, με την αύξηση της πίεσης ελαττώνεται ο συντελεστής διάχυσης.

5. Γιατί ο ρυθμός διάχυσης των μικρών αέριων μορίων είναι ταχύτερος από αυτόν των μεγάλων μορίων;

Απάντηση

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$$

Επειδή η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων ελαττώνεται με την αύξηση της μοριακής μάζας του αερίου, όπως φαίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

προκύπτει ότι και ο συντελεστής διάχυσης αυξάνεται με την ελάττωση της μοριακής μάζας του αερίου. Άρα το φαινόμενο της διάχυσης εξελίσσεται ταχύτερα για μόρια με μικρή μοριακή μάζα.

6. Ο συντελεστής διάχυσης του He είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον αντίστοιχο του CO₂;

Απάντηση

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, όπως προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$$

Επειδή η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων ελαττώνεται με την αύξηση της μοριακής μάζας του αερίου, όπως φαίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

προκύπτει ότι ο συντελεστής διάχυσης του He θα είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή διάχυσης του CO₂.

7. Να εξηγήσετε γιατί ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ενός διατομικού αερίου είναι μεγαλύτερος από αυτόν ενός μονοατομικού αερίου.

Απάντηση

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , όπως προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A}$$

όπου

\bar{c} : η μέση ταχύτητα των μορίων,

$C_{V,m}$: ο συντελεστής μοριακής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο του αερίου,

σ : η ενεργός διατομή κρούσης των μορίων και

N_A : ο αριθμός του Avogadro.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , είναι ανάλογος της μοριακής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο, $C_{V,m}$.

Επειδή η τιμή της $C_{V,m}$ για ένα διατομικό αέριο είναι μεγαλύτερη από εκείνη ενός μονοατομικού αερίου προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ενός διατομικού αερίου είναι μεγαλύτερος από εκείνον ενός μονοατομικού αερίου.

8. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι «τα μόρια του Ar έχουν μεγαλύτερο συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας από τα μόρια του CO₂». Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φοιτητή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , είναι ανάλογος της μοριακής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο, $C_{V,m}$.

Επειδή η τιμή της $C_{V,m}$ για ένα πολυατομικό αέριο είναι μεγαλύτερη από εκείνη ενός μονοατομικού αερίου προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του CO₂ είναι μεγαλύτερος από εκείνον του Ar.

Άρα ο ισχυρισμός του φοιτητή ότι «τα μόρια του Ar έχουν μεγαλύτερο συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας από τα μόρια του CO₂» είναι λανθασμένος.

9. Πως εξαρτάται ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ενός αερίου από την αύξηση της πίεσης;

Απάντηση

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} C_{V,m} c_x$$

όπου

λ : η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων,

\bar{c} : η μέση ταχύτητα των μορίων,

$C_{V,m}$: ο συντελεστής μοριακής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο του αερίου και

c_x : η μοριακή συγκέντρωση του αερίου (σε mol m⁻³).

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , των μορίων είναι αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης του αερίου, όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

και επειδή η μοριακή συγκέντρωση, c_x , είναι ανάλογη της πίεσης, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας είναι τελικά ανεξάρτητος της πίεσης του αερίου.

10. Να εξηγήσετε πως μεταβάλλεται ο συντελεστής ιξώδους ενός αερίου με την αύξηση:

α) της θερμοκρασίας και β) της πίεσης.

Απάντηση

Ο συντελεστής ιξώδους, η , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, όπως προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N}$$

όπου

λ : η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων,

\bar{c} : η μέση ταχύτητα των μορίων,

m : η μάζα ενός μορίου του αερίου και

\mathcal{N} : η αριθμητική πυκνότητα των μορίων του αερίου.

α) Η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της θερμοκρασίας, όπως φαίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Άρα επειδή ο συντελεστής ιξώδους είναι ανάλογος με τη μέση ταχύτητα των μορίων προκύπτει ότι με την αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνεται και ο συντελεστής ιξώδους.

β) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , των μορίων είναι αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης του αερίου, όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Επειδή, όμως, η αριθμητική πυκνότητα, \mathcal{N} , των μορίων είναι ανάλογη της πίεσης του αερίου, ο συντελεστής ιξώδους είναι τελικά ανεξάρτητος της πίεσης αυτού.

11. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι «ο συντελεστής ιξώδους ενός αερίου είναι ανάλογος της αριθμητικής τους πυκνότητας, η οποία είναι ανάλογη της πίεσης που ασκεί το αέριο, άρα και ο συντελεστής ιξώδους του αερίου είναι ανάλογος της πίεσης». Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φοιτητή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Ο συντελεστής ιξώδους, η , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, όπως προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής ιξώδους ενός αερίου είναι ανάλογος της αριθμητικής πυκνότητας, \mathcal{N} , των μορίων του, η οποία είναι πράγματι ανάλογη της πίεσης του αερίου.

Επειδή όμως η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , των μορίων είναι αντιστρόφως ανάλογη της πίεσης του αερίου, όπως φαίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

τελικά ο συντελεστής ιξώδους, η , είναι ανεξάρτητος της πίεσης του αερίου.

Άρα ο ισχυρισμός του φοιτητή ότι «ο συντελεστής ιξώδους ενός αερίου είναι ανάλογος της αριθμητικής τους πυκνότητας, η οποία είναι ανάλογη της πίεσης που ασκεί το αέριο, άρα και ο συντελεστής ιξώδους του αερίου είναι ανάλογος της πίεσης» είναι λανθασμένος.

12. Να εξαχθεί η μαθηματική σχέση που συνδέει: α) το συντελεστή διάχυσης με το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, β) το συντελεστή διάχυσης με το συντελεστή ιξώδους και γ) το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας με το συντελεστή ιξώδους ενός αερίου.

Απάντηση

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , και ο συντελεστής ιξώδους, η , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σύμφωνα με την κινητική θεωρία των αερίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} \quad (1)$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A} \quad (2)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N} \quad (3)$$

Με αναδιάταξη της σχέσης (2) προκύπτει η σχέση (4):

$$\bar{c} = \frac{3\kappa\sigma N_A}{C_{V,m}} \quad (4)$$

Με αναδιάταξη της σχέσης (1) προκύπτει η σχέση (5):

$$\bar{c} = \frac{3D}{\lambda} \quad (5)$$

α) Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στη σχέση (1) προκύπτει η σχέση μεταξύ του συντελεστή διάχυσης και του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} \Rightarrow D = \frac{1}{3} \lambda \frac{3\kappa\sigma N_A}{C_{V,m}} \Rightarrow D = \frac{\lambda\sigma N_A}{C_{V,m}} \kappa$$

β) Αντικαθιστώντας τη σχέση (5) στη σχέση (3) προκύπτει η σχέση μεταξύ του συντελεστή διάχυσης και του συντελεστή ιξώδους:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N} \Rightarrow \eta = \frac{1}{3} \lambda \frac{3D}{\lambda} m \mathcal{N} \Rightarrow \eta = m \mathcal{N} D$$

γ) Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στη σχέση (3) προκύπτει η σχέση μεταξύ του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας και του συντελεστή ιξώδους:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N} \Rightarrow \eta = \frac{1}{3} \lambda \frac{3k\sigma N_A}{C_{V,m}} m \mathcal{N} \Rightarrow \eta = \frac{\lambda \sigma N_A m \mathcal{N}}{C_{V,m}} \kappa$$

5.3. Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων

5.3.1. Μολαρικές θερμοχωρητικότητες αερίων

Μολαρική θερμοχωρητικότητα μιας ουσίας ονομάζεται το ποσό της θερμότητας που απαιτείται για να ανέλθει η θερμοκρασία ποσότητας 1 mol της ουσίας κατά 1 K. Η τιμή της μολαρικής θερμοχωρητικότητας εξαρτάται από το αν η μεταβολή της θερμοκρασίας πραγματοποιείται υπό σταθερή πίεση ή υπό σταθερό όγκο. Αν η μεταβολή της θερμοκρασίας πραγματοποιηθεί υπό σταθερή πίεση, τότε η μολαρική θερμοχωρητικότητα συμβολίζεται $C_{p,m}$, ενώ αν πραγματοποιηθεί υπό σταθερό όγκο συμβολίζεται $C_{V,m}$.

Ο λόγος των δυο μολαρικών θερμοχωρητικοτήτων, $C_{p,m}/C_{V,m}$, ονομάζεται λόγος γ του αερίου, δηλαδή

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$$

Ένας απλός τρόπος υπολογισμού του λόγου γ ενός αερίου είναι η μέτρηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου, u , στο αέριο χρησιμοποιώντας την εξίσωση των Newton - Laplace, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$u = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

όπου:

p : η πίεση και

ρ : η πυκνότητα μάζας του αερίου.

Αντικαθιστώντας το λόγο p/ρ από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$u = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

ή

$$u = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}$$

Οι τιμές των μοριακών θερμοχωρητικοτήτων, $C_{p,m}$ και $C_{v,m}$, για τα αέρια προκύπτουν από την κινητική θεωρία των αερίων και οι τιμές τους αναγράφονται στο σχήμα που ακολουθεί.

Αέριο με μονοατομικά μόρια



3 Βαθμοί ελευθερίας κίνησης

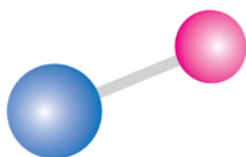
$$\text{Ενέργεια κίνησης} = 3 \frac{k_B T}{2}$$

$$C_{v,m} = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 12,5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 3 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$C_{p,m} = \frac{5}{2} R = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 5 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\gamma = 1,67$$

Αέριο με διατομικά μόρια



5 Βαθμοί ελευθερίας κίνησης

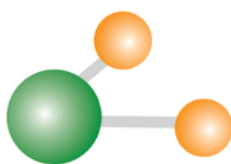
$$\text{Ενέργεια κίνησης} = 5 \frac{k_B T}{2}$$

$$C_{v,m} = \frac{5}{2} R = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 5 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$C_{p,m} = \frac{7}{2} R = \frac{7}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 29,1 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 7 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\gamma = 1,40$$

Αέριο με τριατομικά μόρια



6 Βαθμοί ελευθερίας κίνησης

$$\text{Ενέργεια κίνησης} = 6 \frac{k_B T}{2}$$

$$C_{v,m} = \frac{6}{2} R = \frac{6}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 24,9 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 6 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$C_{p,m} = \frac{8}{2} R = \frac{8}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 33,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\gamma = 1,33$$

$$C_{p,m} - C_{v,m} = R$$

Σχέση Mayer

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$$

Λόγος γ

Υπενθυμίζεται ότι:
1 cal = 4,184 J

1. Να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα στους 27 °C. Να θεωρηθεί ότι ο αέρας αποτελείται μόνο από δύο αέρια N₂ και O₂ και ότι η μέση μοριακή μάζα του είναι 0,029 kg mol⁻¹.

Απάντηση

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, u , σε ένα αέριο υπολογίζεται εύκολα από τον τύπο των Newton - Laplace:

$$u = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

όπου

T : η θερμοκρασία του αερίου (σε K),

R : η παγκόσμια σταθερά των αερίων (σε J mol⁻¹ K⁻¹),

M : η μοριακή μάζα του αερίου (σε kg mol⁻¹) και

γ : ο λόγος των δυο μοριακών θερμοχωρητικοτήτων, $C_{p,m}/C_{v,m}$.

Εφόσον θεωρείται ότι ο αέρας αποτελείται μόνο από δυο διατομικά αέρια, N₂ και O₂, τότε θα αντιμετωπιστεί ως ένα διατομικό αέριο. Έτσι ο λόγος γ για τον αέρα είναι ίσος με:

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{7 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}}{5 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 1,40$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση των Newton - Laplace προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι ίση με:

$$u = \sqrt{1,40 \frac{8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{0,029 \text{ kg mol}^{-1}}} = 347 \text{ m s}^{-1}$$

2. Ποσότητα αερίου H₂ ίση με 1 mol βρίσκεται σε θερμοκρασία 300 K και θερμαίνεται υπό σταθερό όγκο. Κατά τη διάρκεια της μεταβολής μεταφέρονται στο αέριο 1 kJ ενέργειας. Να υπολογιστεί: α) το έργο που παράγεται κατά τη μεταβολή, β) η τελική θερμοκρασία του αερίου και γ) η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια του αερίου. Να υποτεθεί ότι το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά.

Απάντηση

α) Κατά τη διάρκεια μιας ισόχωρης μεταβολής επειδή δεν υπάρχει μεταβολή στον όγκο του αερίου, το έργο, W , που παράγεται είναι μηδέν δηλαδή

$$W = p\Delta V = 0$$

και όλη η ενέργεια που προσφέρεται στο αέριο αυξάνει την εσωτερική του ενέργεια.

Για τη λύση των ασκήσεων 2 και 3 απαιτείται να χρησιμοποιηθεί ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής.

β) Κατά τη διάρκεια της ισόχωρης μεταβολής, η ενέργεια που μεταφέρεται στο αέριο με θερμότητα, Q_V , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_V = nC_{V,m}\Delta T \quad (1)$$

όπου:

n : η ποσότητα (σε mol) του αερίου,

$C_{V,m}$: η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο του αερίου και

ΔT : η μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της μεταβολής του αερίου.

Η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο, $C_{V,m}$, ενός διατομικού αερίου είναι ίση με:

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$1000 \text{ J} = 1 \text{ mol} \cdot 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (T_{\text{τελ.}} - 300 \text{ K}) \Rightarrow$$

$$1000 \text{ J} = 20,8 \text{ J K}^{-1} \cdot (T_{\text{τελ.}} - 300 \text{ K}) \Rightarrow$$

$$1000 \text{ J} = 20,8 \text{ J K}^{-1} \cdot T_{\text{τελ.}} - 6240 \text{ J} \Rightarrow$$

$$1000 + 6240 = 20,8 \text{ K}^{-1} \cdot T_{\text{τελ.}} \Rightarrow$$

$$20,8 \text{ K}^{-1} \cdot T_{\text{τελ.}} = 7240 \Rightarrow$$

$$T_{\text{τελ.}} = 348 \text{ K}$$

Άρα η τελική θερμοκρασία του αερίου είναι 348 K.

γ) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου υπολογίζεται από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, ο οποίος εκφράζεται μαθηματικά από την παρακάτω σχέση:

$$\Delta U = Q + W \quad (2)$$

όπου:

ΔU : η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου,

Q : η θερμότητα που παρέχεται στο αέριο και

W : το έργο που πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια της μεταβολής.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει:

$$\Delta U = 1000 \text{ J} + 0 = 1000 \text{ J}$$

Άρα 1 mol αερίου H_2 αυξάνει την εσωτερική ενέργειά του κατά 1000 J.

3. Ποσότητα αερίου Ar ίση με 1 mol βρίσκεται σε δοχείο με κινούμενο έμβολο και θερμαίνεται υπό σταθερή πίεση από τους 300 στους 400 K. Να υπολογιστεί: α) η ενέργεια που μεταφέρεται στο αέριο με τη θερμότητα, β) η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και γ) το έργο που καταναλώνεται κατά τη διάρκεια της μεταβολής. Να υποτεθεί ότι το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά.

Απάντηση

α) Κατά τη διάρκεια της ισοβαρούς μεταβολής, η ενέργεια που μεταφέρεται στο αέριο με θερμότητα, Q_p , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_p = nC_{p,m}\Delta T \quad (1)$$

όπου:

n : η ποσότητα (σε mol) του αερίου,

$C_{p,m}$: η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση του αερίου και

ΔT : η μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της μεταβολής του αερίου.

Η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, $C_{p,m}$, ενός μονοατομικού αερίου είναι ίση με:

$$C_{p,m} = C_{v,m} + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$Q_{p,m} = 1 \text{ mol} \cdot 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (400 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 2080 \text{ J}$$

Άρα η ενέργεια που μεταφέρεται στο αέριο Ar με θερμότητα είναι ίση με 2080 J.

β) Σε μία ισόχωρη μεταβολή όταν η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται από $T_{αρχ.}$ σε $T_{τελ.}$ επειδή δεν μεταβάλλεται ο όγκος του αερίου, δεν πραγματοποιείται έργο και όλη η ενέργεια που προσφέρεται στο αέριο χρησιμοποιείται για να αυξηθεί η εσωτερική του ενέργεια. Σε μία αντίστοιχη ισοβαρή μεταβολή κατά την οποία η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται επίσης από $T_{αρχ.}$ σε $T_{τελ.}$, ένα μέρος της ενέργειας που προσφέρεται στο αέριο χρησιμοποιείται για να μεταβληθεί ο όγκος του αερίου, επομένως πραγματοποιείται κάποιο έργο και το υπόλοιπο χρησιμοποιείται για να αυξηθεί η εσωτερική ενέργεια του αερίου. Επειδή η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός αερίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θερμοκρασία του αερίου συνεπάγεται ότι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός αερίου κατά τη διάρκεια μιας ισοβαρούς μεταβολής είναι ίδια με τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου κατά τη διάρκεια της αντίστοιχης ισόχωρης μεταβολής.

Επομένως, στην προκειμένη περίπτωση, για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου αρκεί να υπολογίσουμε τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας κατά τη διάρκεια της αντίστοιχης ισόχωρης μεταβολής, στην οποία η θερμοκρασία αυξάνεται από 300 σε 400 K.

Από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής

$$\Delta U = Q + W \quad (2)$$

όπου:

Από θερμοδυναμική άποψη η εσωτερική ενέργεια, U , είναι εκτατική ιδιότητα. Στα φυσικοχημικά φαινόμενα σημασία έχουν μόνο οι μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας, ΔU .

Π.χ. ένα αέριο μεταβαίνει από μία κατάσταση A σε μία κατάσταση B. Στην κατάσταση A η εσωτερική ενέργεια του αερίου είναι U_A , και στην κατάσταση B, U_B . Αυτό που έχει σημασία σε αυτή την περίπτωση είναι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου:

$$\Delta U = U_B - U_A$$

Γενικά η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός συστήματος είναι ανεξάρτητη του τρόπου με τον οποίο ένα σύστημα μεταβαίνει από μία αρχική κατάσταση A σε μία τελική κατάσταση B.

ΔU : η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου,

Q : η θερμότητα που παρέχεται στο αέριο και

W : το έργο που πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια της μεταβολής

επειδή το παραγόμενο έργο κατά τη διάρκεια της ισόχωρης μεταβολής είναι μηδέν προκύπτει:

$$\Delta U = Q_V \quad (3)$$

Κατά τη διάρκεια της ισόχωρης μεταβολής, η ενέργεια που μεταφέρεται στο αέριο με θερμότητα, Q_V , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_V = nC_{V,m}\Delta T \quad (4)$$

όπου:

n : η ποσότητα (σε mol) του αερίου,

$C_{V,m}$: η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο του αερίου και

ΔT : η μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της μεταβολής του αερίου.

Η μοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο, $C_{V,m}$, ενός μονοατομικού αερίου είναι ίση με:

$$C_{V,m} = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 12,5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) προκύπτει:

$$Q_V = 1 \text{ mol} \cdot 12,5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (400 \text{ K} - 300 \text{ K}) \Rightarrow \\ Q_V = 1250 \text{ J}$$

Άρα 1 mol αερίου Ar αυξάνει την εσωτερική ενέργειά του κατά 1250 J.

Επομένως η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου κατά τη διάρκεια της ισοβαρούς μεταβολής είναι

$$\Delta U = 1250 \text{ J}$$

γ) Το έργο που πραγματοποιείται κατά την ισοβαρή μεταβολή υπολογίζεται από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής

$$\Delta U = Q + W \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) προκύπτει:

$$1250 \text{ J} = 2080 \text{ J} + W \Rightarrow$$

$$W = - 830 \text{ J}$$

Άρα κατά τη διάρκεια της ισοβαρούς μεταβολής καταναλώνεται έργο ίσο με 830 J.

5.3.2. Φαινόμενα μεταφοράς

Στα φαινόμενα μεταφοράς πραγματοποιείται μεταφορά ποσότητας μιας φυσικής ιδιότητας, όπως η ύλη, η ενέργεια, η ορμή κ.ά. από μια περιοχή ενός αέριου συστήματος σε μία άλλη περιοχή αυτού.

Τα φαινόμενα μεταφοράς διέπονται από την ίδια γενική εξίσωση:

$$J_Q = -L \frac{dY}{dz}$$

όπου:

J_Q : η ροή της ποσότητας της φυσικής ιδιότητας Q , σε μονάδες $Q \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$,

L : σταθερά αναλογίας και

$\frac{dY}{dz}$: η κλίση (ή βαθμίδα μεταβολής) της ποσότητας της φυσικής ιδιότητας ή μιας άλλης σχετικής φυσικής ιδιότητας ως προς z .

Στον πίνακα 6 αναγράφονται συνοπτικά για τρία φαινόμενα μεταφοράς τα εξής:

- Η φυσική ιδιότητα που μεταφέρεται.
- Ο μαθηματικός τύπος με τον οποίο υπολογίζεται η ροή της ποσότητας της φυσικής ιδιότητας που μεταφέρεται.
- Οι μονάδες της ροής.
- Η σταθερά αναλογίας που συνδέει τη ροή της ποσότητας της φυσικής ιδιότητας με την κλίση (ή βαθμίδα μεταβολής) της φυσικής ιδιότητας που μεταφέρεται.
- Η κλίση (ή βαθμίδα μεταβολής) της φυσικής ιδιότητας.

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας είναι δυνατό να ζητείται να υπολογιστεί ο συντελεστής διάχυσης, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ή ο συντελεστής ιξώδους ενός αερίου από δεδομένα όπως η ενεργός διατομή κρούσης ή η μοριακή διάμετρος του αερίου.

Επίσης είναι δυνατό να ζητείται να υπολογιστεί η ροή μιας φυσικής ποσότητας, όπως η ροή ενέργειας ή η ροή μάζας κατά τη μεταφορά ενός αερίου από μια περιοχή αυτού σε μια άλλη.

Πίνακας 7. Φαινόμενα μεταφοράς.

Μεταφορά ποσότητας φυσικής ιδιότητας	Ροή	Μονάδες ροής	Σταθερά αναλογίας - Τύποι	Κλίση (ή βαθμίδα μεταβολής)
Υλη	$J_N = -D \frac{dN}{dz}$ <p>ή</p> $J_n = -D \frac{dc_x}{dz}$	$\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$	<p>Συντελεστής διάχυσης, D</p> <hr/> $D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$	$\frac{dN}{dz}$ <p>ή</p> $\frac{dc_x}{dz}$
Ενέργεια	$J_E = -\kappa \frac{dT}{dz}$	$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$	<p>Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ</p> <hr/> $\kappa = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} C_{V,m} c_x$ <p>ή</p> $\kappa = \frac{1}{3} \bar{c} C_{V,m} \sigma N_A$	$\frac{dT}{dz}$
Ορμή	$J_{P_x} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	<p>Συντελεστής ιξώδους, η</p> <hr/> $\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m N$ <p>ή</p> $\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} M c_x$	$\frac{dv_x}{dz}$

4. Να υπολογιστεί ο συντελεστής διάχυσης του He στους 25 °C και πίεση 1 atm, 10 atm και 100 atm. Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του He, $\sigma = 0,15 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Για τον υπολογισμό του συντελεστή διάχυσης θα πρέπει αρχικά να υπολογιστούν η μέση ταχύτητα, \bar{c} , και η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , των μορίων του αερίου.

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το He στους 298 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1255,9 \text{ m s}^{-1}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του He είναι:

$$\sigma = 0,15 \text{ nm}^2 = 0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αερίου μορίου δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει η μέση ελεύθερη διαδρομή του He.

- Για πίεση 1 atm

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(298 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

- Για πίεση 10 atm

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(298 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(10 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

- Για πίεση 100 atm

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(298 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(100 \cdot 1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ο συντελεστής διάχυσης του He.

- Για πίεση 1 atm

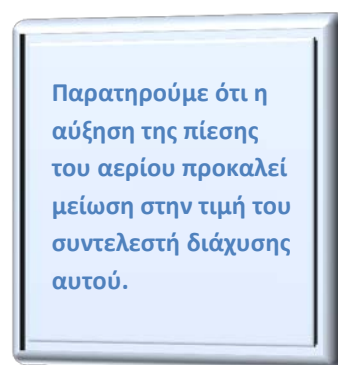
$$D = \frac{1}{3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 1255,9 \text{ m s}^{-1} = 8,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- Για πίεση 10 atm

$$D = \frac{1}{3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot 1255,9 \text{ m s}^{-1} = 8,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- Για πίεση 100 atm

$$D = \frac{1}{3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1255,9 \text{ m s}^{-1} = 8,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$



5. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το συντελεστή διάχυσης ενός αερίου με τη θερμοκρασία σε σταθερή: α) πίεση και β) αριθμητική πυκνότητα.

Απάντηση

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} \quad (1)$$

Για να βρεθεί η σχέση που συνδέει το συντελεστή διάχυσης του αερίου με τη θερμοκρασία θα πρέπει να είναι γνωστή η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , και η μέση ταχύτητα των μορίων, \bar{c} , του αερίου.

Η μέση ταχύτητα, \bar{c} , των μορίων δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (2)$$

α) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2) και (3) στη σχέση (1) προκύπτει η σχέση που συνδέει το συντελεστή διάχυσης του αερίου με τη θερμοκρασία σε σταθερή πίεση, p .

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} &\Rightarrow D = \frac{1}{3} \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \Rightarrow D = \frac{1}{3} \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p} \frac{\sqrt{2} \sqrt{4} \sqrt{R} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi} \sqrt{M}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow D = \frac{2}{3} \frac{k_B R^{1/2}}{\sigma p \pi^{1/2} M^{1/2}} T^{3/2} \end{aligned}$$

β) Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \mathcal{N}} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) και (4) στη σχέση (1) προκύπτει η σχέση που συνδέει το συντελεστή διάχυσης του αερίου με τη θερμοκρασία υπό σταθερή αριθμητική πυκνότητα, \mathcal{N} .

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} &\Rightarrow D = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \mathcal{N}} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \Rightarrow D = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \mathcal{N}} \frac{\sqrt{2} \sqrt{4} \sqrt{R} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi} \sqrt{M}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow D = \frac{2}{3} \frac{R^{1/2}}{\pi^{3/2} M^{1/2} \mathcal{N}} T^{1/2} \end{aligned}$$

6. Να υπολογιστεί ο συντελεστής διάχυσης του Ar στους 500 K αν η μοριακή διάμετρος, d , του Ar είναι $3,58 \cdot 10^{-10}$ m.

Απάντηση

Για να υπολογιστεί ο συντελεστής διάχυσης του αερίου θα πρέπει πρώτα να υπολογιστούν η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , και η μέση ταχύτητα των μορίων, \bar{c} , του αερίου.

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του Ar είναι

$$\sigma = \pi d^2 = 3,14 \cdot (3,58 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2 = 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή του Ar είναι ίση με:

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(500 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 12 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το Ar στους 500 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 500 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 514,4 \text{ m s}^{-1}$$

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής διάχυσης του Ar είναι:

$$D = \frac{1}{3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 514,4 \text{ m s}^{-1} = 205,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

7. Να βρεθεί ο λόγος των συντελεστών διάχυσης δύο αερίων Α και Γ στην ίδια θερμοκρασία και πίεση.

Απάντηση

Έστω D_A ο συντελεστής διάχυσης του αερίου Α και D_Γ ο συντελεστής διάχυσης του αερίου Γ στην ίδια θερμοκρασία, T , και πίεση, p . Ο λόγος D_A/D_Γ είναι ίσος με:

$$\frac{D_A}{D_\Gamma} = \frac{\frac{1}{3} \lambda_A \bar{c}_A}{\frac{1}{3} \lambda_\Gamma \bar{c}_\Gamma} \Rightarrow \frac{D_A}{D_\Gamma} = \frac{\frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma_A p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_A}}}{\frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma_\Gamma p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_\Gamma}}} \Rightarrow \frac{D_A}{D_\Gamma} = \frac{\sigma_\Gamma \sqrt{M_\Gamma}}{\sigma_A \sqrt{M_A}}$$

8. Να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του Ar σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία 300 K. Δίνεται ότι η ενεργός διατομή κρούσης του Ar είναι $\sigma = 0,40 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A} \quad (1)$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

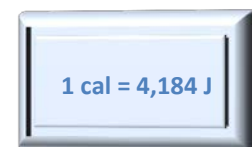
και για το Ar στους 300 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 398,5 \text{ m s}^{-1}$$

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, $C_{V,m}$, του Ar (μονοατομικό αέριο) είναι $3 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Έτσι αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του Ar είναι:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{398,5 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}}{3 \cdot 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{398,6 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \cdot 4,184 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}}{3 \cdot 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \kappa = 0,0069 \text{ J K}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \end{aligned}$$



9. Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του He στους 400 K είναι $0,1896 \text{ J K}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Να υπολογιστεί η ενεργός διατομή κρούσης του.

Απάντηση

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A} \quad (1)$$

Με αναδιάταξη της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του μορίου δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\kappa N_A} \quad (2)$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το He στους 400 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 400 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1455,0 \text{ m s}^{-1}$$

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, $C_{V,m}$, του He (μονοατομικό αέριο) είναι $3 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Έτσι αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει ότι η ενεργός διατομή κρούσης του He είναι:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1455,0 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ cal mol}^{-1}\text{K}^{-1}}{3 \cdot 0,1896 \text{ J K}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{1455,0 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \cdot 4,184 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}}{3 \cdot 0,1896 \text{ J K}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma &= 0,05 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

10. Να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του O_2 στους 300 K αν η μοριακή διάμετρος, d , του O_2 είναι ίση με $3,55 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Απάντηση

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A} \quad (1)$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το O_2 στους 300 K είναι ίση με

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,032 \text{ kg mol}^{-1}}} = 445,5 \text{ m s}^{-1}$$

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, $C_{V,m}$, του O_2 (μονοατομικό αέριο) είναι $5 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Υπενθυμίζεται ότι $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$.

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του O_2 είναι

$$\sigma = \pi d^2 = 3,14 \cdot (3,55 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2 = 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Έτσι αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του O_2 είναι:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{445,5 \text{ m s}^{-1} \cdot 5 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}}{3 \cdot 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \kappa = \frac{445,6 \text{ m s}^{-1} \cdot 5 \cdot 4,184 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}}{3 \cdot 0,40 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \kappa = 0,0130 \text{ J K}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

11. Ο συντελεστής ιξώδους του He είναι 199 μΡ στους 300 Κ. Να υπολογιστεί η ενεργός διατομή κρούσης του He αν υποθέσουμε ότι αυτό συμπεριφέρεται ιδανικά.

Απάντηση

Για να υπολογιστεί η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του He θα πρέπει αρχικά να υπολογιστεί η μέση ελεύθερη διαδρομή του μορίου.

Ο συντελεστής ιξώδους, η , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, όπως προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N} \quad (1)$$

με αναδιάταξη της οποίας προκύπτει η σχέση:

$$\lambda = \frac{3\eta}{\bar{c} m \mathcal{N}} \quad (2)$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το He στους 300 Κ είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,004 \text{ kg mol}^{-1}}} = 1260,1 \text{ m s}^{-1}$$

Η μάζα m του μορίου δίνεται από τη σχέση:

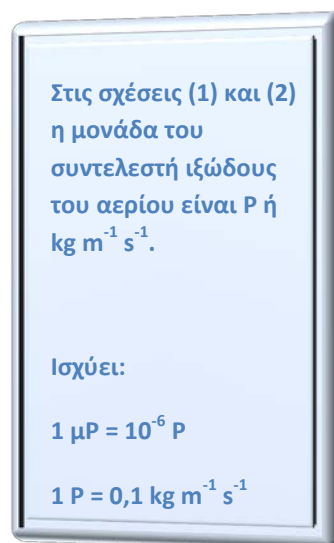
$$m = \frac{M}{N_A}$$

και είναι ίση με:

$$m = \frac{0,004 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Η αριθμητική πυκνότητα, \mathcal{N} , ενός αερίου εφόσον αυτό συμπεριφέρεται ιδανικά υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} pV = nRT &\Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT \Rightarrow p = \frac{N RT}{V N_A} \Rightarrow p = \frac{\mathcal{N} RT}{N_A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} = \frac{p N_A}{RT} \end{aligned} \quad (3)$$



και αντικαθιστώντας στη σχέση (3) προκύπτει ότι είναι ίση με:

$$\mathcal{N} = \frac{1 \text{ atm} \cdot (6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 300\text{K}} =$$
$$= 0,245 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{L}} = 0,245 \cdot 10^{23} \frac{1}{10^{-3}\text{m}^3} = 0,245 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} = 2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή του μορίου είναι ίση με:

$$\lambda = \frac{3 \cdot (199 \cdot 10^{-6} \text{ p})}{(1260,1 \text{ m s}^{-1}) \cdot (6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3})} \Rightarrow$$
$$\lambda = \frac{3 \cdot (199 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1})}{(1260,1 \text{ m s}^{-1}) \cdot (6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3})} = 2,91 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Για τη μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αέριου μορίου ισχύει η σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

με αναδιάταξη της οποίας προκύπτει ότι η ενεργός διατομή κρούσης δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \lambda p}$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ενεργός διατομή κρούσης είναι ίση με:

$$\sigma = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(300 \text{ K})}{\sqrt{2}(2,91 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})} = 0,1 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

12. Το ιξώδες του Ar είναι 22,7 μPa · s στους 300 K. Να υπολογιστεί η μοριακή διάμετρος, d , του Ar, αν υποθέσουμε ιδανική συμπεριφορά.

Απάντηση

Για να υπολογιστεί η μοριακή διάμετρος του μορίου θα πρέπει αρχικά να υπολογιστεί η μέση ελεύθερη διαδρομή του μορίου και στη συνέχεια η ενεργός διατομή κρούσης του, σ . Ο συντελεστής ιξώδους, η , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου, όπως προκύπτει από την κινητική θεωρία των αερίων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N} \quad (1)$$

με αναδιάταξη της οποίας προκύπτει η σχέση:

$$\lambda = \frac{3\eta}{\bar{c} M \mathcal{N}} \quad (2)$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το Ar στους 300 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 398,5 \text{ m s}^{-1}$$

Η μάζα m του μορίου δίνεται από τη σχέση:

$$m = \frac{M}{N_A}$$

και είναι ίση με:

$$m = \frac{0,040 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Η αριθμητική πυκνότητα, \mathcal{N} , ενός αερίου εφόσον αυτό συμπεριφέρεται ιδανικά υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} pV = nRT &\Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT \Rightarrow p = \frac{N RT}{V N_A} \Rightarrow p = \frac{\mathcal{N} RT}{N_A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} = \frac{p N_A}{RT} \end{aligned} \quad (3)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (3) προκύπτει ότι είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{1 \text{ atm} \cdot (6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = \\ &= 0,245 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{L}} = 0,245 \cdot 10^{23} \frac{1}{10^{-3} \text{ m}^3} = 0,245 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} = 2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή του μορίου είναι ίση με:

$$\lambda = \frac{3 \cdot (227 \cdot 10^{-6} \text{ P})}{(398,5 \text{ m s}^{-1}) \cdot (6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) \cdot (2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3})} \Rightarrow$$

Στις σχέσεις (1) και (2) η μονάδα του συντελεστή εξώδους του αερίου είναι P ή $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Ισχύει:

$$1 \mu\text{P} = 10^{-6} \text{ P}$$

$$1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa s} = 0,1 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$1 \mu\text{Pa s} = 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot (227 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1})}{(398,5 \text{ m s}^{-1}) \cdot (6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) \cdot (2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3})} = 1,05 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Για τη μέση ελεύθερη διαδρομή ενός αέριου μορίου ισχύει:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

Αναδιατάσσοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ενεργός διατομή κρούσης δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \lambda p}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ενεργός διάμετρος κρούσης είναι ίση με:

$$\sigma = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(300 \text{ K})}{\sqrt{2}(1,05 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 0,3 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Η μοριακή διάμετρος του Ar υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma = \pi d^2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$$

και είναι ίση με:

$$d = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2}{3,14}} = 0,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

13. Να υπολογιστεί ο συντελεστής ιώδους του Ne στους 400 K. Δίνεται ότι η ενεργός διατομή κρούσης του Ne είναι $\sigma = 0,20 \text{ nm}^2$.

Απάντηση

Ο συντελεστής ιώδους, η , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} m \mathcal{N} \quad (1)$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή του Ne είναι ίση με:

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1})(400 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,20 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2})} = 19 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το Ne στους 400 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 400 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,020 \text{ kg mol}^{-1}}} = 650,7 \text{ m s}^{-1}$$

Η μάζα m του μορίου δίνεται από τη σχέση:

$$m = \frac{M}{N_A}$$

και είναι ίση με:

$$m = \frac{0,020 \text{ kg mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 3,32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Η αριθμητική πυκνότητα, \mathcal{N} , ενός αερίου εφόσον αυτό συμπεριφέρεται ιδανικά υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} pV = nRT &\Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT \Rightarrow p = \frac{N RT}{V N_A} \Rightarrow p = \frac{\mathcal{N} RT}{N_A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} = \frac{p N_A}{RT} \end{aligned} \quad (2)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει ότι είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{1 \text{ atm} \cdot (6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{0,082 \text{ L atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 400 \text{ K}} = \\ &= 0,184 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{L}} = 0,184 \cdot 10^{23} \frac{1}{10^{-3} \text{ m}^3} = 0,184 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} = 1,84 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει ότι ο συντελεστής ιξώδους του Ar είναι:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{3} (19 \cdot 10^{-8} \text{ m}) \cdot (650,7 \text{ m s}^{-1}) \cdot (3,32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) \cdot (1,84 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}) = \\ &= 25,0 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} = 250 \cdot 10^{-6} \text{ P} = 250 \mu\text{P} \end{aligned}$$

14. Να υπολογιστεί η ροή ενέργειας που πραγματοποιείται μέσω ενός δείγματος N_2 όταν η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι $2,5 \text{ K m}^{-1}$. Η μέση θερμοκρασία του δείγματος είναι 250 K . Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του N_2 , $\sigma = 0,43 \text{ nm}^2$ [16].

Απάντηση

Η ροή ενέργειας, J_E , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$J_E = -\kappa \frac{dT}{dz} \quad (1)$$

όπου:

κ : ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του αερίου (σε $\text{J K}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$) και

dT/dz : η βαθμίδα της θερμοκρασίας (σε K m^{-1}).

Για να υπολογιστεί η ροή της ενέργειας θα πρέπει αρχικά να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας στους 250 K .

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, κ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\bar{c} C_{V,m}}{\sigma N_A} \quad (2)$$

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το N_2 στους 250 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 323 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,028 \text{ kg mol}^{-1}}} = 434,8 \text{ m s}^{-1}$$

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, $C_{V,m}$, του N_2 (διατομικό αέριο) είναι $5 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του He είναι:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{434,8 \text{ m s}^{-1} \cdot 5 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{3 \cdot 0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{434,8 \text{ m s}^{-1} \cdot 5 \cdot 4,184 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{3 \cdot 0,43 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \kappa = 0,0117 \text{ J K}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Έτσι, η ροή ενέργειας, αντικαθιστώντας στη σχέση

(1) είναι:

$$J_E = -0,0117 \text{ J K}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1} \cdot 2,5 \text{ K m}^{-1} = -0,029 \text{ J m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Η φυσική σημασία του αρνητικού προσήμου στη ροή ενέργειας είναι ότι η θερμότητα μεταφέρεται από μια περιοχή υψηλότερης σε μια περιοχή χαμηλότερης θερμοκρασίας.

15. Να υπολογιστεί η ροή μάζας λόγω διάχυσης αερίου Ar στους 293 K και πίεση 1 atm στο εσωτερικό ενός σωλήνα αν αποκατασταθεί βαθμίδα πίεσης ίση με 10^4 Pa m^{-1} . Δίνεται η ενεργός διατομή κρούσης του Ar, $\sigma = 0,15 \text{ nm}^2$ [16].

Απάντηση

Η ροή μάζας, J_n , αερίου λόγω διάχυσης δίνεται από τη σχέση:

$$J_n = -D \frac{dc_x}{dz} \quad (1)$$

όπου:

D : ο συντελεστής διάχυσης του αερίου (σε $\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$) και

dc_x/dz : η βαθμίδα της μοριακής συγκέντρωσης (σε mol m^{-1}).

Εφόσον το αέριο συμπεριφέρεται ιδανικά, αντικαθιστώντας στη σχέση (1) τη μοριακή συγκέντρωση του αερίου προκύπτει η σχέση (2).

$$\begin{aligned} J_n = -D \frac{dc_x}{dz} &\Rightarrow J_n = -D \frac{d\left(\frac{p}{RT}\right)}{dz} \Rightarrow \\ &\Rightarrow J_n = -\frac{D}{RT} \frac{dp}{dz} \end{aligned} \quad (2)$$

Για να υπολογιστεί η ροή μάζας του αερίου θα πρέπει να είναι γνωστός ο συντελεστής διάχυσης του αερίου στις δεδομένες συνθήκες.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή διάχυσης θα πρέπει αρχικά να υπολογιστούν η μέση ταχύτητα, \bar{c} , και η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , των μορίων του αερίου.

Η μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

και για το Ar στους 293 K είναι ίση με:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{3,14 \cdot 0,040 \text{ kg mol}^{-1}}} = 393,8 \text{ m s}^{-1}$$

Η ενεργός διατομή κρούσης, σ , του Ar είναι

$$\sigma = 0,15 \text{ nm}^2 = 0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή, λ , ενός αέριου μορίου δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

και για το He είναι ίση με:

$$\lambda = \frac{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1})(293 \text{ K})}{\sqrt{2}(0,15 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2)(1,01325 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-2})} = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ο συντελεστής διάχυσης, D , ενός ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c}$$

και για το He είναι ίσος με:

$$D = \frac{1}{3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 393,8 \text{ m s}^{-1} = 2,47 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

Έτσι αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει ότι η ροή μάζας του αερίου είναι ίση με:

$$\begin{aligned} J_n &= - \frac{2,47 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}}{8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} \cdot 10^4 \text{ Pa m}^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow J_n &= - \frac{2,47 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}}{8,314 \text{ Pa m}^3 \text{ mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} \cdot 10^4 \text{ Pa m}^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow J_n &= - 10^{-4} \text{ mol m}^{-2}\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ

Στην παρούσα εργασία δημιουργήθηκε εκπαιδευτικό υλικό για την αέρια κατάσταση της ύλης για την Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Τα κεφάλαια για τα οποία αναπτύχθηκε το εκπαιδευτικό υλικό είναι τα ιδανικά αέρια, τα πραγματικά αέρια, η κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος Ι), καθώς για άλλα δεδομένα και προβλέψεις που απορρέουν από αυτήν, όπως είναι οι μολαρικές θερμοχωρητικότητες των αερίων και τα φαινόμενα μεταφοράς (Μέρος ΙΙ). Το υλικό που αναπτύχθηκε για κάθε ένα από τα κεφάλαια που προαναφέρθηκαν περιλαμβάνει:

- ✓ Μια σειρά από ερωτήσεις κατανόησης, οι οποίες είναι όλες πλήρως απαντημένες.
- ✓ Μια σειρά από ασκήσεις με τις οποίες προσεγγίζονται οι νόμοι των αερίων με το λογισμικό Mathematica. Δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Mathematica στη σχεδίαση γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων, στις οποίες υπακούουν τα αέρια. Οι ασκήσεις αυτές συνοδεύονται από κάποιες «Δραστηριότητες», οι οποίες παραπέμπουν σε απλά διαδραστικά εκπαιδευτικά λογισμικά.
- ✓ Μια σειρά από ασκήσεις και προβλήματα, τα οποία είναι όλα υποδειγματικά απαντημένα. Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται η μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων.

Το παραπάνω εκπαιδευτικό υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί από φοιτητές και διδάσκοντες. Για όσους λοιπόν χρησιμοποιήσουν το υλικό αυτό προτείνεται να μελετήσουν όλες τις ερωτήσεις, καθώς επίσης και όλες τις ασκήσεις στις οποίες εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε το Mathematica για την προσέγγιση των νόμων των αερίων. Τα απλά εκπαιδευτικά λογισμικά που δημιουργήθηκαν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την καλύτερη κατανόηση της αέριας κατάστασης της ύλης.

Για το τελευταίο μέρος του εκπαιδευτικού υλικού που αναπτύχθηκε, για κάθε κεφάλαιο της αέριας κατάστασης της ύλης, με τίτλο «Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων και προβλημάτων», δημιουργήθηκαν συνολικά 141 ασκήσεις και προβλήματα. Στις περισσότερες από τις ασκήσεις αυτές υπολογίζεται μια διαφορετική παράμετρος. Έτσι για το μέρος αυτό του εκπαιδευτικού υλικού προτείνεται στους πίνακες 8, 9, 10 και 11 που ακολουθούν να μελετηθούν οπωσδήποτε οι παρακάτω ασκήσεις.

Πίνακας 8. Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στα ιδανικά αέρια.

Ιδανικά αέρια	
Μετατροπές μονάδων πίεσης - Μέτρηση πίεσης	1, 2, 3
Νόμος του Boyle - Ισόθερμη μεταβολή	4, 6, 7
Νόμος του Guy-Lussac - Ισοβαρής μεταβολή	8, 11
Νόμος του Guy-Lussac - Ισόχωρη μεταβολή	13
Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων	14, 15, 16, 18, 20, 23, 27, 32, 33, 36, 37
Νόμος των μερικών πιέσεων του Dalton	39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48
Νόμος των μερικών όγκων των Amagat - Leduc	49
Εφαρμογή των νόμων των ιδανικών αερίων στα αερόστατα	50, 51, 52
Νόμος Laplace της βαρομετρικής πίεσης	53, 54, 56

Πίνακας 9. Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στα πραγματικά αέρια.

Πραγματικά αέρια	
Παράγοντας συμπιεστικότητας	1, 3, 4
Καταστατική εξίσωση van der Waals	5, 6, 8, 9, 10
Σταθερές van der Waals - Κρίσιμες σταθερές αερίου	13, 14, 15, 16, 17, 20, 21
Αρχή των αντιστοιχών καταστάσεων	22, 23, 25, 27
Καταστατική εξίσωση virial	28, 30, 31, 32, 33, 35
Άλλες καταστατικές εξισώσεις	36, 37, 38

Πίνακας 10. Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στην κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος I).

Κινητική θεωρία αερίων (Μέρος I)	
Θεμελιώδης εξίσωση κινητικής θεωρίας αερίων	1, 2
Κινητική ενέργεια αερίων	3
Κατανομή Maxwell των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου - Μοριακές ταχύτητες	5, 6, 9, 10, 12, 13, 15
Συχνότητα συγκρούσεων αέριου μορίου	17
Μέση ελεύθερη διαδρομή αέριων μορίων	20, 21, 22, 24
Κρούσεις των μορίων με τοιχώματα και επιφάνειες	26
Ταχύτητα διαπίδυσης αερίων - Νόμος του Graham	27, 32, 33

Πίνακας 11. Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα για μελέτη στην κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος II).

Κινητική θεωρία αερίων (Μέρος II)	
Μολαρικές θερμοχωρητικότητες αερίων	1, 2, 3
Φαινόμενα μεταφοράς	4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία δημιουργήθηκε ένα διδακτικό βοήθημα για την αέρια κατάσταση της ύλης για τα Πανεπιστημιακά Τμήματα Χημείας. Η μαθηματική επεξεργασία όλων των αποτελεσμάτων της εργασίας πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του λογισμικού Mathematica. Το διδακτικό βοήθημα απευθύνεται πρωταρχικώς τόσο στους φοιτητές των Τμημάτων Χημείας όσο και στους διδάσκοντες του μαθήματος. Το παρόν βοήθημα μπορεί φυσικά να χρησιμοποιηθεί από φοιτητές και διδάσκοντες και άλλων Πανεπιστημιακών Τμημάτων, στα οποία διδάσκονται τα αντίστοιχα κεφάλαια της αέριας κατάστασης της ύλης.

Τα κεφάλαια της ύλης για τα οποία αναπτύχθηκε το εκπαιδευτικό υλικό αφορούν τα ιδανικά αέρια, τα πραγματικά αέρια, την κινητική θεωρία των αερίων (Μέρος I), καθώς και για άλλα δεδομένα και προβλέψεις που απορρέουν από αυτήν, όπως οι μοριακές θερμοχωρητικότητες των αερίων και τα φαινόμενα μεταφοράς (Μέρος II).

Στην εργασία αυτή αναδείχθηκαν επίσης ορισμένες από τις πολλές δυνατότητες που διαθέτει το λογισμικό Mathematica. Έτσι, για οποιαδήποτε μαθηματική επεξεργασία απαιτήθηκε (μαθηματικές πράξεις, σχεδίαση γραφικών παραστάσεων κ.ά.) χρησιμοποιήθηκε το Mathematica 11 της εταιρίας Wolfram.

Για την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού μελετήθηκαν πολλά βιβλία Φυσικοχημείας της ελληνικής και ξένης βιβλιογραφίας, βιβλία Γενικής Χημείας, καθώς και βιβλία που αφορούν τη λειτουργία του λογισμικού Mathematica.

Πιο συγκεκριμένα, για τα τέσσερα κεφάλαια της αέριας κατάστασης της ύλης που προαναφέρθηκαν, δημιουργήθηκαν ερωτήσεις κατανόησης, οι οποίες είναι όλες πλήρως απαντημένες. Πολλές ερωτήσεις συνοδεύονται από κατάλληλα σχήματα για καλύτερη κατανόηση αυτών.

Στη συνέχεια, κάθε ένα από τα παραπάνω κεφάλαια προσεγγίστηκε με το Mathematica. Έτσι, δημιουργήθηκε μια σειρά από ασκήσεις, οι οποίες είναι όλες πλήρως απαντημένες, στις οποίες εξηγείται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να σχεδιαστούν γραφικές παραστάσεις στο Mathematica. Οι μαθηματικές συναρτήσεις που επιλέχθηκαν αφορούν τους νόμους των ιδανικών αερίων, τους νόμους των πραγματικών αερίων και τη συνάρτηση κατανομής των ταχυτήτων των αερίων μορίων του Maxwell. Οι περισσότερες από αυτές τις ασκήσεις συνοδεύονται από κάποιες «Δραστηριότητες», οι οποίες παραπέμπουν σε απλά διαδραστικά εκπαιδευτικά λογισμικά που υπάρχουν στο συνοδευτικό cd της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης για κάθε κεφάλαιο δημιουργήθηκε ένας μεγάλος αριθμός ασκήσεων και προβλημάτων, τα οποία είναι όλα υποδειγματικά απαντημένα. Σε όλους τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε στους μαθηματικούς τύπους η μονάδα του κάθε μεγέθους. Οι ασκήσεις σε κάθε κεφάλαιο είναι χωρισμένες σε κατηγορίες και περιλαμβάνουν κλασικές αλλά και νέες ασκήσεις. Αξίζει να αναφερθεί ότι δημιουργήθηκαν και ασκήσεις που αφορούν τα φαινόμενα μεταφοράς, καθώς ελάχιστα βιβλία της ελληνικής και ξένης βιβλιογραφίας περιέχουν λυμένες τέτοιες ασκήσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ - ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

Πίνακας 12. Ακρωνύμια και ανάπτυξή τους

MATLAB	MATrix LABoratory
CDF	Computable Document Format
HCP	Handbook of Chemistry and Physics

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Πίνακας Ι1. Σταθερές van der Waals αερίων

Αέριο	$a/(\text{bar L}^2 \text{mol}^{-2})$	$b/(10^{-2} \text{L mol}^{-1})$
Ar	1,355	3,20
Cl ₂	6,343	5,42
CO	1,472	3,95
CO ₂	3,658	4,29
H ₂	0,2452	2,65
H ₂ O	5,537	3,05
H ₂ S	4,544	4,34
He	0,0346	2,38
Kr	5,193	1,06
N ₂	1,370	3,87
Ne	0,208	1,67
NH ₃	4,225	3,71
O ₂	1,382	3,19
SO ₂	6,865	5,68
Xe	4,192	5,16
CH ₄	2,303	4,31
C ₂ H ₄	4,612	5,82
C ₂ H ₆	5,580	6,51
C ₆ H ₆	18,82	11,93

Δεδομένα: HCP 93rd Edition, 2012-2013

Πίνακας Ι2. Κρίσιμες σταθερές αερίων και θερμοκρασίες βρασμού

Αέριο	T_c/K	p_c/atm	$V_c/(\text{cm}^3 \text{mol}^{-1})$	T_b/K
Ar	150,687	4,863	75	87,302
Br ₂	588	10,34	127	332,0
CO	132,86	3,494	93	81,7
CO ₂	304,13	7,375	94	194,6
F ₂	144,41	5,1724	66	85,04
H ₂	33,14	1,2964	65	20,388
H ₂ O	647,10	22,06	56	373,12
HCl	324,7	8,31	81	188
He	5,1953	0,22746	57	4,222
H ₂ S	373,1	9,00	99	213,60
Kr	209,48	5,525	91	119,735
N ₂	126,192	3,39	90	77,355
Ne	44,49	2,6786	42	27,097
NH ₃	405,56	11,357	69,8	239,82
NO	180	6,48	58	121,41
O ₂	154,581	5,043	73	90,188
O ₃	261,1	5,57	89	161,80
SO ₂	430,64	7,884	122	263,10
SO ₃	491,0	8,2	127	317,7
UF ₆	505,8	4,66	250	329,65
Xe	289,733	5,842	118	165,051

Δεδομένα: HCP 93rd Edition, 2012-2013

Πίνακας Ι3. Μοριακή διάμετρος (d) και ενεργός διατομή κρούσης (σ) αερίων

Αέριο	$d / (10^{-10} \text{ m})$	$\sigma / (10^{-18} \text{ nm}^2)$
Αέρας	3,66	0,42
Ar	3,58	0,40
CO ₂	4,53	0,64
H ₂	2,71	0,23
He	2,15	0,15
Kr	4,08	0,52
N ₂	3,70	0,43
NH ₃	4,32	0,59
Ne	2,54	0,20
O ₂	3,55	0,40
Xe	4,78	0,72

Δεδομένα d : HCP 93rd Edition, 2012-2013

Οι τιμές σ υπολογίστηκαν με την εξίσωση $\sigma = \pi d^2$

Πίνακας Ι4. Θερμοκρασίες Boyle

Αέριο	T_B / K
H ₂	110
He	25
Ne	127
Ar	410
N ₂	327
O ₂	405
CO ₂	713
CH ₄	509

J.S. Winn, Physical Chemistry, HarperCollins, New York, 1994

Πίνακας Ι5. Τάσεις ατμών νερού

Θερμοκρασία (°C)	p / kPa
0,01	0,61165
10	1,2282
20	2,3393
25	3,1699
30	4,2470
40	7,3849
50	12,352
60	19,946
70	31,201
80	47,414
90	70,182
100	101,42
110	143,38
120	198,67
130	270,28
140	361,54
150	476,16
160	618,23

Δεδομένα: HCP 93rd Edition, 2012-2013

Πίνακας Ι6. Σταθερές $a(i)$ αερίων

Σταθερές $a(i)$ αερίων για τον υπολογισμό των συντελεστών virial, B , με την εξίσωση:

$$B / \text{cm}^3 \text{mol}^{-1} = \sum_{i=1}^n a(i) [(T_0/T) - 1]^{i-1}$$

Αέριο	Εύρος θερμοκρασιών	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$a(4)$	$a(5)$
Ar	100 - 1000	-16	-60	-9,7	-1,5	
H ₂	15 - 400	15,4	-9	-0,21		
Cl ₂	210 - 900	-303	-555	9	329	68
H ₂ O	300 - 1200	-1158	-5157	-10301	-10597	-4415
He	2 - 700	12,44	-1,25			
Kr	110 - 700	-51	-118	-29	-5	
N ₂	75 - 700	-4,3	-55,7	-11,8		
Ne	60 - 600	10,8	-7,5	-0,4		
O ₂	90 - 400	-16	-62	-8	-3	
Xe	160 - 650	-130	-262	-87		
CH ₄	110 - 600	-43	-114	-19	-7	
CO	210 - 480	-9	-58	-18		
CO ₂	220 - 1100	-127	-288	-118		
C ₂ H ₆	200 - 600	-184	-376	-143	-54	

Δεδομένα: HCP 93rd Edition, 2012-2013

Πίνακας Ι7. Δεύτεροι συντελεστές virial, B

Αέριο	$B / (\text{cm}^3 \text{mol}^{-1})$					
	100 K	200 K	300 K	400 K	500 K	600 K
Ar	-184,646	-47,958	-15,630	-1,327	36,740	11,921
CH ₄		-104,349	-42,298	-15,089	0,386	10,434
CO ₂			-125,228	-61,318	-29,965	-11,977
H ₂	-3,258	10,933	15,455	17,678		
He	9,963	11,827	12,448	12,758	12,945	13,069
Kr	-437,581	-116,484	-50,273	-22,752	-7,761	1,661
N ₂	-161	-34,477	-3,957	9,118	16,263	20,735
Ne	-5,632	7,023	10,846	12,684	13,763	14,472
O ₂	-193,604	-48,708	-15,618	-0,682		
Xe	-990,745	-279,529	-128,388	-68,929	-38,409	-20,211

Οι τιμές των συντελεστών B υπολογίστηκαν με την εξίσωση του Πίνακα Ι6.

Πίνακας 18. Ιξώδες αερίων

Αέριο	η / ($\mu\text{Pa s}$)					
	100 K	200 K	300 K	400 K	500 K	600 K
Αέρας	7,1	13,3	18,5	23,1	27,1	30,8
Ar	8,1	15,9	22,7	28,6	33,9	38,8
H ₂	4,1	6,8	8,9	10,9	12,8	14,5
D ₂	5,9	9,6	12,6	15,4	17,9	20,3
H ₂ O			9,8	13,4	17,3	21,4
NH ₃			10,2	14,0	17,9	21,7
He	9,6	15,1	19,9	24,3	28,3	32,2
Kr		17,4	25,5	32,9	39,6	45,8
NO		13,8	19,2	23,8	28,0	31,9
N ₂	7,0	12,9	17,9	22,2	26,1	29,6
N ₂ O		10,0	15,0	19,8	24,1	27,9
Ne	14,4	24,1	31,9	38,6	44,8	50,6
O ₂	7,7	14,7	20,7	25,8	30,5	34,7
Xe		15,7	23,2	30,5	37,2	43,5
CO	6,7	12,9	17,8	22,1	25,8	29,1
CO ₂		10,1	15,0	19,7	24,0	28,0
CH ₄	3,9	7,7	11,1	14,2	17,0	19,5

Δεδομένα: HCP 93rd Edition, 2012-2013

Πίνακας 19. Θερμική αγωγιμότητα αερίων

Αέριο	κ / ($\text{mW m}^{-1} \text{K}^{-1}$)					
	100 K	200 K	300 K	400 K	500 K	600 K
Αέρας	9,5	18,5	26,4	33,5	39,9	46,0
Ar	6,3	12,4	17,7	22,4	26,5	30,3
H ₂	68,2	132,8	186,6	230,9	270,9	309,1
H ₂ O			18,6	26,1	35,6	46,2
D ₂ O			18,2	26,6	36,3	47,6
NH ₃			25,1	37,2	53,1	68,6
He	74,7	118,3	155,7	189,6	221,4	251,6
Kr		6,5	9,5	12,3	14,8	17,1
NO		17,8	25,9	33,1	39,6	46,2
N ₂	9,4	18,3	26,0	32,8	39,0	44,8
N ₂ O		9,8	17,4	26,0	34,1	41,8
Ne	22,3	37,4	49,4	59,9	69,5	78,5
O ₂	9,1	18,2	26,5	34,0	41,0	47,7
Xe		3,7	5,5	7,2	8,8	10,3
CO			25,0	32,3	39,2	45,7
CO ₂		9,6	16,8	25,2	33,5	41,6
CH ₄	10,4	21,8	34,4	50,0	68,4	88,6

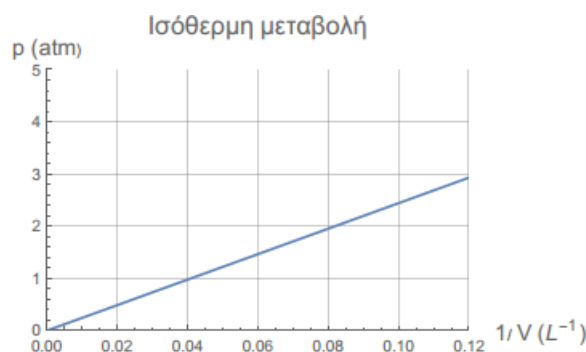
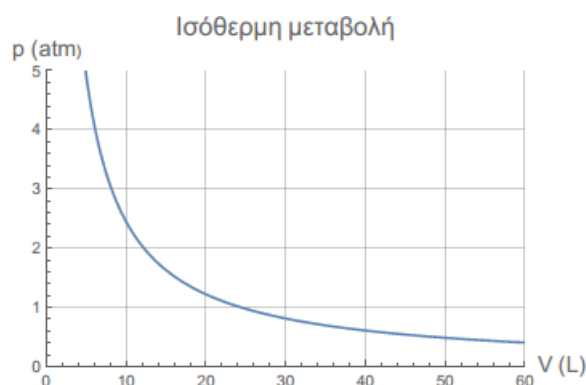
Δεδομένα: HCP 93rd Edition, 2012-2013

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

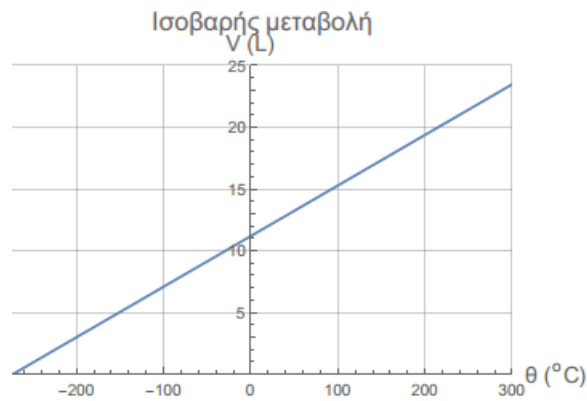
Τα σχήματα των παραγράφων 2.3, 3.3 και 4.3, όπως ήδη έχει αναφερθεί στην εισαγωγή της διπλωματικής εργασίας, δημιουργήθηκαν αρχικά στο λογισμικό Mathematica και στη συνέχεια επεξεργάστηκαν στο Illustrator για καθαρά εποπτικούς λόγους. Τα πρωτότυπα σχήματα που δημιουργήθηκαν αρχικά στο Mathematica και οι εκφωνήσεις των αντίστοιχων ασκήσεων δίνονται σε αυτό το παράρτημα.

2.3. Οι νόμοι των ιδανικών αερίων με το Mathematica

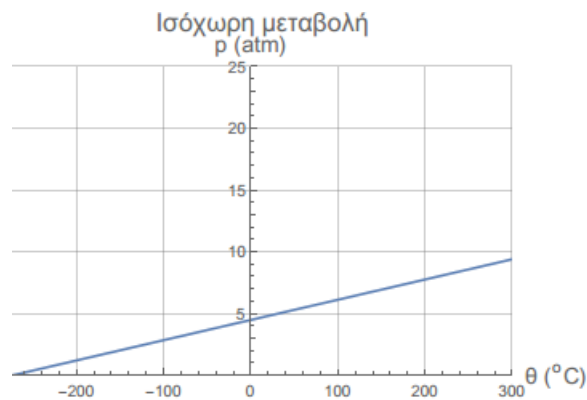
1. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισόθερμης μεταβολής ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε θερμοκρασία 25 °C.



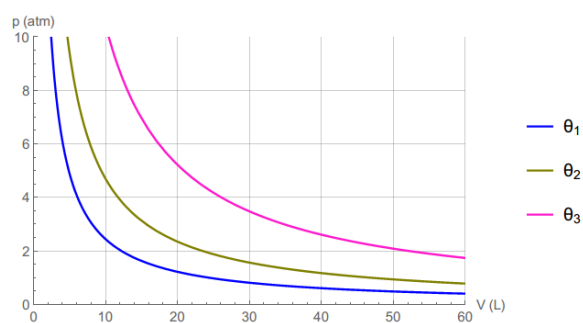
2. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισοβαρούς μεταβολής ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε πίεση 2 atm.

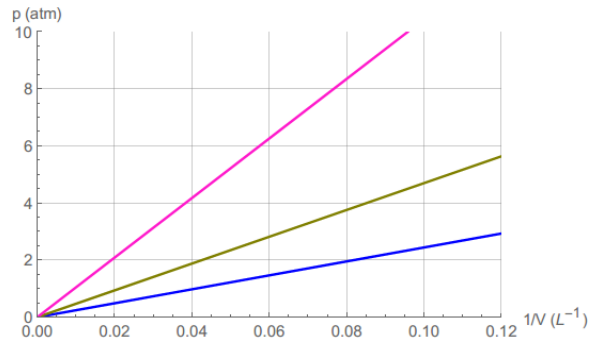


3. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισόχωρης μεταβολής ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου όταν αυτό βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου 5 L.

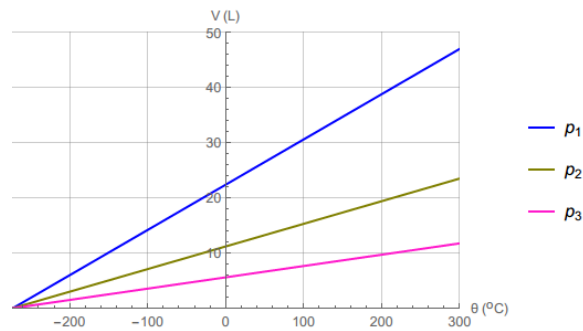


4. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισόθερμες μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε θερμοκρασίες 25, 300 και 1000 $^{\circ}\text{C}$. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία του αερίου;

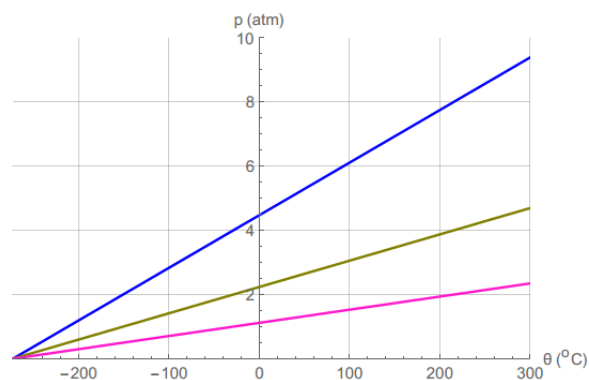




5. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισοβαρείς μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου σε πιέσεις 1, 2 και 4 atm. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνεται η πίεση που ασκεί το αέριο;

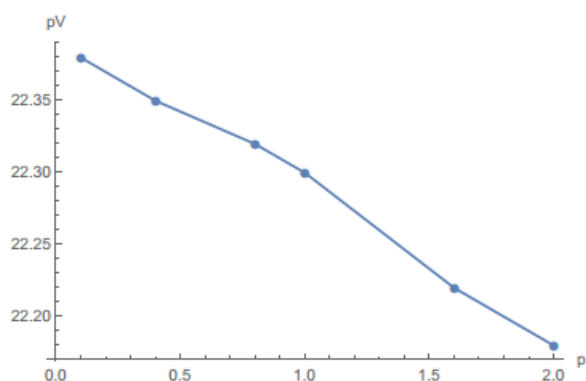


6. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισόχωρες μεταβολές 1 mol ιδανικά συμπεριφερόμενου αερίου όταν αυτό βρίσκεται υπό σταθερό όγκο 5, 10 και 20 L. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνεται ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο;

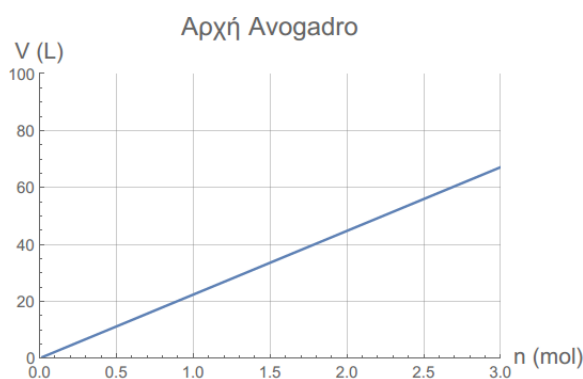


7. Για να διαπιστωθεί κατά πόσο το αέριο H_2 , υπακούει στο νόμο του Boyle πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω ισόθερμες μεταβολές στους $0\text{ }^\circ\text{C}$ χρησιμοποιώντας $1\text{ mol } H_2$. Κατά τις μεταβολές αυτές μεταβαλλόταν ο όγκος του αερίου με ταυτόχρονη καταγραφή της πίεσής του. Χρησιμοποιώντας τα παρακάτω πειραματικά αποτελέσματα να υπολογίσετε το γινόμενο pV για κάθε τιμή πίεσης, p , και να κατασκευάσετε με τις τιμές αυτές ένα γράφημα $f(p) = pV$ για να διαπιστώσετε αν ισχύει ο νόμος του Boyle. Τι παρατηρείτε;

Πείραμα	p / atm	V / L
1	0,1	223,8
2	0,4	55,88
3	0,8	27,90
4	1,0	22,30
5	1,6	13,89
6	2,0	11,09

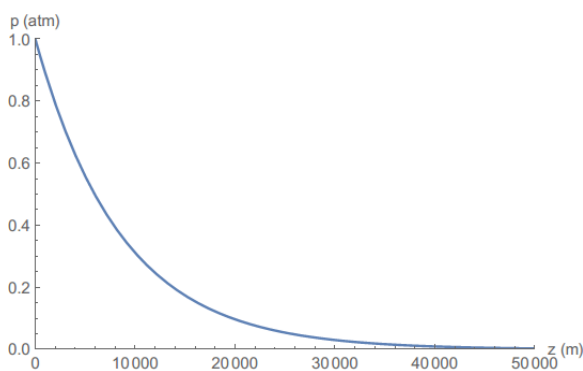


8. Να γίνει η γραφική παράσταση της ποσότητας ουσίας, n , ενός αερίου σε συνάρτηση με τον όγκο του, V , σε ορισμένη πίεση και θερμοκρασία.

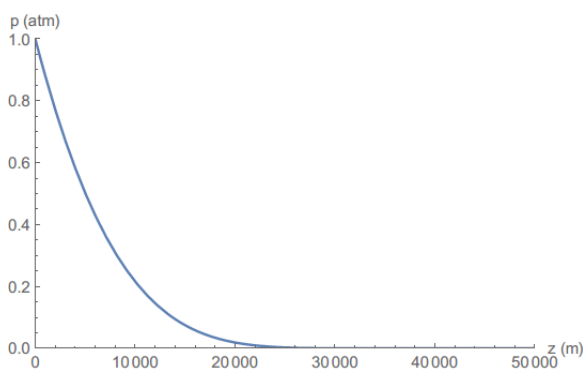


9. Να παρασταθεί γραφικά η βαρομετρική πίεση με το ύψος θεωρώντας ότι: α) η θερμοκρασία παραμένει σταθερή με το ύψος και β) ότι η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας μειώνεται γραμμικά με το ύψος λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $T = T_0 - 0,005 z$, όπου z το ύψος (σε m) και $T_0 = 273,15$ K.

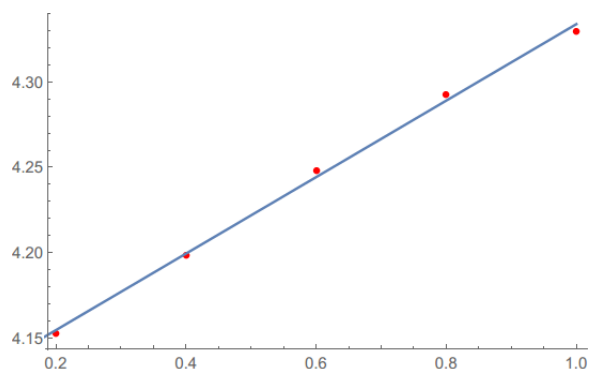
α)



β)

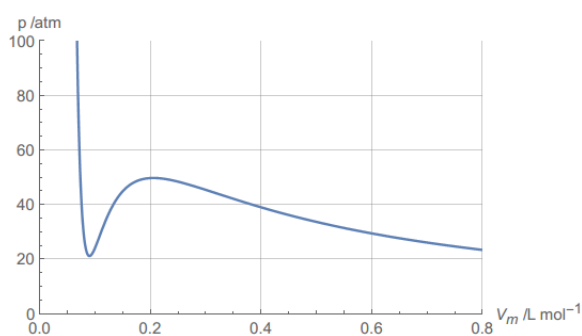


10. Η πυκνότητα μάζας ενός αερίου με άγνωστη μοριακή μάζα μετρήθηκε σε διάφορες πιέσεις στους 0 °C. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Να βρεθεί η ακριβής πειραματική μοριακή μάζα του αερίου.

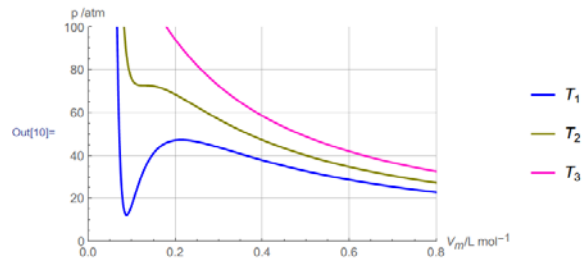


3.3. Οι νόμοι των πραγματικών αερίων με το Mathematica

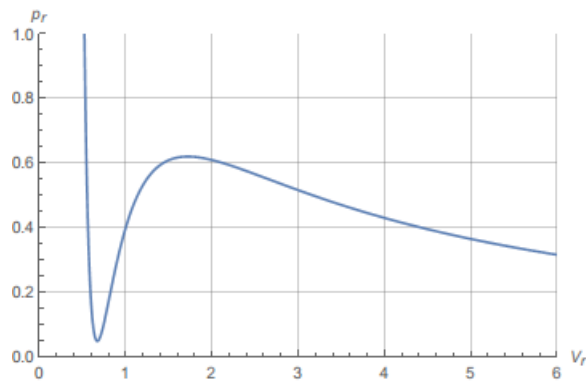
1. Να παρασταθεί γραφικά η ισόθερμη van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών μοριακού του όγκου από 0,05 έως 0,8 L mol⁻¹ και σε θερμοκρασία 268,15 K. Δίνονται για το CO₂ οι σταθερές van der Waals $a = 3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0429 \text{ L mol}^{-1}$.



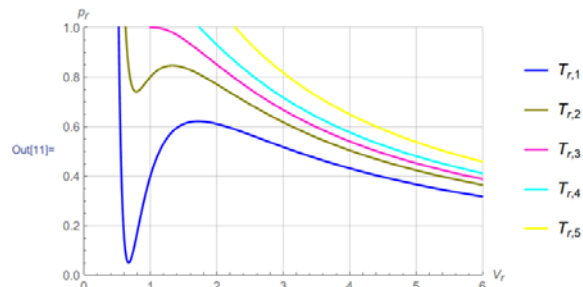
2. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα οι ισόθερμες van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών του μοριακού του όγκου από 0,05 έως 0,8 L mol⁻¹ και σε θερμοκρασίες 263,15 K, 304,19 K και 353,15 K. Δίνονται για το CO₂ οι σταθερές van der Waals $a = 3,610 \text{ atm L}^2 \text{ mol}^{-2}$ και $b = 0,0429 \text{ L mol}^{-1}$.



3. Να παρασταθεί γραφικά η ισόθερμη της ανηγμένης εξίσωσης van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών ανηγμένου μοριακού του όγκου από 0,6 έως 8 και σε ανηγμένη θερμοκρασία 0,90.

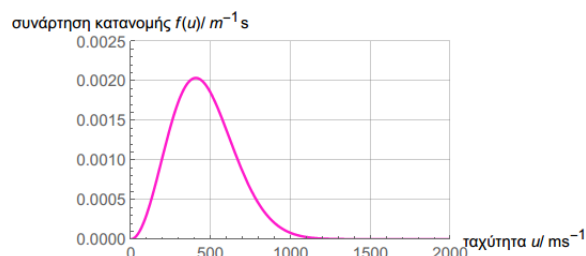


4. Να παρασταθούν γραφικά οι ισόθερμες της ανηγμένης εξίσωσης van der Waals 1 mol CO₂ στην περιοχή τιμών ανηγμένου μοριακού του όγκου από 0,35 έως 8 και σε ανηγμένες θερμοκρασίες 0,85, 0,95, 1,00, 1,05 και 1,15.



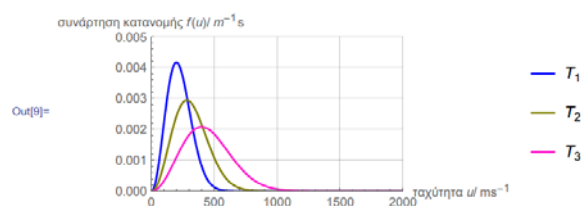
4.3. Η κινητική θεωρία των αερίων με το Mathematica

1. Να σχεδιάσετε με τη βοήθεια του Mathematica την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για το Ne στους 400 K.

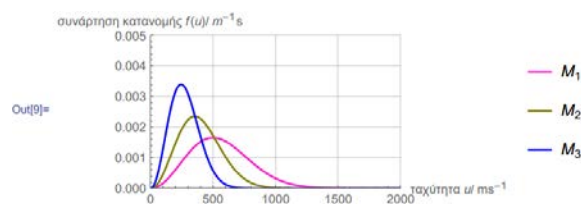


2. Να σχεδιάσετε με τη βοήθεια του Mathematica τις καμπύλες κατανομής ταχυτήτων: α) για το Kr στους 200, 400 και 800 K και β) για τα αέρια Ne, Ar και Kr στους 300 K.

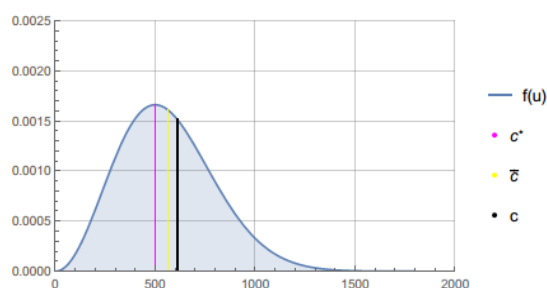
α)



β)



3. Να σχεδιάσετε την καμπύλη κατανομής ταχυτήτων για ένα αέριο σε ορισμένη θερμοκρασία και στην καμπύλη να φαίνονται η ενεργός, μέση και πιθανότερη ταχύτητα του αερίου.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

Σημαντικά ψηφία - Στρογγυλοποίηση

Οι αριθμοί που προκύπτουν από μετρήσεις ή έπειτα από αριθμητικές πράξεις πρέπει να γράφονται σύμφωνα με τους κανόνες καθορισμού σημαντικών ψηφίων και στρογγυλοποίησης [26, 31].

ΙΙΙ.1. Κανόνες καθορισμού σημαντικών ψηφίων

1. Όλα τα μη μηδενικά ψηφία είναι σημαντικά. Π.χ. ο αριθμός 12345 έχει πέντε σημαντικά ψηφία.
2. Όλα τα μηδενικά που βρίσκονται ανάμεσα σε σημαντικά ψηφία είναι σημαντικά. Π.χ. ο αριθμός 102034 έχει έξι σημαντικά ψηφία.
3. Το μηδενικά ψηφία πριν ή μετά την υποδιαστολή αν δεν προηγείται άλλο σημαντικό ψηφίο δεν είναι ποτέ σημαντικά. Π.χ. ο αριθμός 0,78 έχει δύο σημαντικά ψηφία, ενώ ο αριθμός 0,01 έχει ένα σημαντικό ψηφίο.
4. Τα μηδενικά στο τέλος ενός αριθμού είναι σημαντικά μόνο αν ο αριθμός περιλαμβάνει υποδιαστολή. Π.χ. ο αριθμός 12300 έχει τρία σημαντικά ψηφία, ενώ ο αριθμός 0,2000 έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία.
5. Όταν ένας αριθμός γράφεται με επιστημονική μορφή, τότε ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων καθορίζεται από τον μη εκθετικό όρο. Π.χ. ο αριθμός $2,78 \cdot 10^{-3}$ έχει τρία σημαντικά ψηφία.
6. Κατά τον υπολογισμό του λογάριθμου ενός αριθμού, το αποτέλεσμα έχει τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα είναι τα σημαντικά ψηφία του αρχικού αριθμού.
Π.χ. ο λογάριθμος $\log(5,2 \cdot 10^{-3}) = -2,28$.
7. Οι φυσικές σταθερές, όπως π.χ. η παγκόσμια σταθερά των αερίων, R , ο αριθμός Avogadro, N , οι σχετικές ατομικές μάζες, A_r , κ.ά. χρησιμοποιούνται με όλα τα ψηφία που δίνονται στους πίνακες.

III.2. Σημαντικά ψηφία στους υπολογισμούς

1. Στην πρόσθεση και την αφαίρεση, το αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία.
2. Στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, το αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα ο αριθμός με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία.
3. Όταν ένας υπολογισμός περιλαμβάνει δύο ή περισσότερα στάδια, καλό είναι να διατηρείται τουλάχιστον ένα μη σημαντικό ψηφίο στις ενδιάμεσες απαντήσεις.

III.3. Κανόνες στρογγυλοποίησης

1. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού γίνεται μέχρι το πρώτο αβέβαιο ψηφίο.
2. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού γίνεται αυξάνοντας κατά μία μονάδα το τελευταίο ψηφίο που παραμένει, αν ο αριθμός που απαλείφεται είναι μεγαλύτερος από 5, 50, 500 κ.ά.
3. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού γίνεται μειώνοντας κατά μία μονάδα το τελευταίο ψηφίο που παραμένει, αν ο αριθμός που απαλείφεται είναι μικρότερος από 5, 50, 500 κ.ά.
4. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού γίνεται προς το πλησιέστερο άρτιο τελευταίο ψηφίο που παραμένει, αν ο αριθμός που απαλείφεται είναι ακριβώς ίσος με 5, 50, 500 κ.ά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ellis Horowitz, *Βασικές αρχές γλωσσών προγραμματισμού*, Δεύτερη Αμερικάνικη Έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 1993
2. Adam Brooks Webber (Μετάφραση - Επιστημονική Επιμέλεια: Γ. Φ. Γεωργακόπουλος, Ι. Παπαδόγγονας), *Σύγχρονες γλώσσες προγραμματισμού. Μια πρακτική εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009
3. Καραμπετάκης Νικόλαος, Σταματάκης Στυλιανός, Ψωμόπουλος Ευάγγελος, *Μαθηματικά & Προγραμματισμός στο Mathematica*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 2004
4. Stephen Wolfram, *The Mathematica Book*, 5th Edition, Wolfram Media, 2003
5. STORMY ATTAWAY (Επιστημονική επιμέλεια ελληνικής έκδοσης: Τατιάνα Ταμπουρατζή, Δώρα Σούλιου), *MATLAB. Μια πρακτική εισαγωγή στον προγραμματισμό και την επίλυση προβλημάτων*, 3^η Αμερικάνικη Έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2013
6. Κ. Παπαοδυσσεύς, Κ. Καλοβρέκτης, Ν. Μυλωνάς, *MATLAB. Εισαγωγή & Εφαρμογές για Μηχανικούς*, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2017
7. Παπαδάκης Κωνσταντίνος, *Εισαγωγή στο Mathematica*, 2^η Έκδοση, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, Θεσσαλονίκη, 2003
8. EUGENE DON, Ph.D., *MATHEMATICA SCHAUM'S*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2005
9. Π. Νικήτας, *Σημειώσεις στη Mathematica*, Θεσσαλονίκη 2009
10. Richard E. Crandall, *Mathematica for the Sciences*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1991
11. Δ.Α. Γιαννακουδάκη, Γ.Α. Σταλίδη, Ι.Α. Μουμτζή, *Ασκήσεις και Εφαρμογές Φυσικής Χημείας*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο, Θεσσαλονίκη 1977
12. Ν.Α. Κατσάνου, *Φυσικοχημεία Βασική Θεώρηση*, 3^η Έκδοση Συμπληρωμένη, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1993
13. Δ.Α. Γιαννακουδάκης, Π.Δ. Γιαννακουδάκης, *Επίτομη Φυσικοχημεία*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 1996
14. Π.Μ. Καραμπίνας, Γ.Ι. Κοκκινίδης, Α.Γ. Αναστόπουλος - Τζαμαλής, Γ.Χ. Ριτζούλης, *Σημειώσεις Φυσικής Χημείας Καταστάσεων της Ύλης και Θερμοδυναμικής*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Εκδόσεων, Θεσσαλονίκη 1998
15. Π. Γιαννακουδάκης, Ν. Μισαηλίδης, Γ. Ριτζούλης, *Ασκήσεις Φυσικής Χημείας*, Εκδόσεις ΠΗΓΑΣΟΣ, Θεσσαλονίκη 2002

16. Peter Atkins, Julio de Paula (Μετάφραση: Σ. Αναστασιάδης, Γ.Ν. Παπαθεοδώρου, Σ. Φαράντος, Γ. Φυτάς, Κ. Δελληγιάννης, Ν. Κοπιδάκης, Γ. Κωτσόπουλος, Σ. Πυρπασόπουλος, Π. Παπαγιαννακόπουλος, Μ. Κοσμάς), *Φυσικοχημεία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2014
17. Raymond Chang, *Physical Chemistry with Applications to Biological Systems*, Second Edition, Macmillan Pub. Co., 1981
18. Gilbert W. Castellan, *Physical Chemistry*, Third Edition, Addison Wesley Publishing Company, 1983
19. Josef P. Novak, Stanislav Labik, Ivona Malijevska, *Physical Chemistry in Brief*, Institute of Chemical Technology, Prague, Faculty of Chemical Engineering, 2005
20. Thomas Engel, Philip Reid, *Physical Chemistry*, 1st Edition, Pearson Benjamin Cummings, 2006
21. Robert G. Mortimer, *Physical Chemistry*, Third Edition, ELSEVIER AP, 2008
22. Ira N. Levine, *Physical Chemistry*, Sixth Edition, Mc Graw Hill, 2009
23. David W. Ball, *Physical Chemistry*, Second Edition, GENGAGE Learning, 2015
24. Keith J. Laidler, John H. Meiser, Bryan C. Sanctuary, *Physical Chemistry, Problems and Solutions*, Electronic Edition, MCH Multimedia Inc.,
25. Darrell D. Ebbing, Steven D. Gammon, *General Chemistry*, Houghton Mifflin Company, 2009
26. Theodore L. Brown, Eugene H. LeMay, Bruce E. Bursten, Catherine J. Murphy, Patrick M. Woodward, Matthew W. Stoltzfus (Μετάφραση: Περικλής Ακρίβος, Επιμέλεια: Περικλής Ακρίβος), *Χημεία: Η κεντρική επιστήμη*, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2015
27. Christie John Geankoplis, *Transport Processes and Separation Process Principles*, Fourth Edition, PRENTICE HALL, 2003
28. Brodkey Robert S., Hershey Harry C., *Φαινόμενα μεταφοράς: μια ενοποιημένη προσέγγιση*, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2012
29. el.m.wikipedia.org
30. Δ.Γ. Θεμελής, *Βασικές Αρχές Αναλυτικής Χημείας*, 4^η Έκδοση, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 2015
31. Α.Ν. Βουλγαρόπουλος, Γ.Α. Ζαχαριάδης, Ι.Α. Στράτης, *Εισαγωγή στην Ποσοτική Χημική Ανάλυση*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 1999