Τυχαίες Σειρές Fourier

Διπλωματική Εργασία

Ιωάννης Σμαΐθ

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2019

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Το αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η τυχαία διαταραχή μέσα στο χωροχρόνο και ο προσδιορισμός της αβεβαιότητας μέσω απλούστερων μοτίβων. Αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης μιας τέτοιας διαταραχής αποτελούν οι τριγωνομετρικές σειρές. Οι σειρές αυτές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που αθροίζονται ως το άπειρο.

Δηλαδή,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt))$$

στην πραγματική περίπτωση, και

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

στη μιγαδική περίπτωση, όπου $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ και $c_n \in \mathbb{C}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, 2\pi)$.

Στα μέσα του 18ου αιώνα εμφανίστηκαν στο έργο του Euler ως αναπτύγματα απλών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad x \in (0, 2\pi)$$

τότε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Στην μελέτη της ταλάντωσης προέκυψε η ανάγκη γενίκευσης των τριγωνομετρικών αυτών αναπαραστάσεων. Οι τριγωνομετρικές σειρές καθώς και οι αναπαραστάσεις συναρτήσεων μέσω αυτών μελετήθηκαν ενδελεχώς από πολλούς μαθηματικούς (D'Alembert, Bernoulli, Euler κτλ).

Όμως συνέβη στις αρχές του 19ου αιώνα ο Jean-Baptiste Fourier, ο οποίος είχε κατα νού την αναλυτική θεωρία της θερμότητας και την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας σε μια μεταλλική πλάκα, να καταφέρει να αναπαραστήσει αυθαίρετες συναρτήσεις μέσω τριγωνομετρικών σειρών οι συντελεστές των οποίων μπορούσαν να εκφραστούν μέσω ολοκληρωμάτων των αυθαίρετων συναρτήσεων.

Δηλαδή, για κατάλληλη f ορισμένη στο $(0, 2\pi)$ έχουμε

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt))$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Εμείς όμως δεν ενδιαφερόμαστε για τις αυθαίρετες συναρτήσεις αυτές που μπορούν να αναπαρασταθούν ως τριγωνομετρικές σειρές (ή σειρές Fourier), αυτό που εξετάζουμε είναι η τυχαία διαταραχή. Οι απεικονίσεις που χρησιμοποιούνται για την μελέτη της τυχαιότητας που ακολουθεί ορισμένους κανόνες δεν είναι άλλες από τις τυχαίες μεταβλητές.

Οι τυχαίες σειρές Fourier είναι οι τριγωνομετρικές σειρές που έχουν ως συντελεστές τυχαίες μεταβλητές και είναι το θέμα στο οποίο θα εστιάσουμε. Στις αρχές του 20ου αιώνα ο Steinhaus γεφυρώνοντας το χάσμα ανάμεσα στην θεωρία των πιθανότητων και το μέτρο Lebesgue έφτασε στον ορισμό της τυχαίας σειράς Fourier με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue. Σε αυτό το πλαίσιο, μια τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση καλώς ορισμένη στο $[0, 1]$ που είναι επιπλέον Lebesgue μετρήσιμη.

Γνωρίζουμε πως κάθε $x \in [0, 1]$ επιδέχεται δυαδικό ανάπτυγμα, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

όπου x_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τις τιμές 1 ή 0 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Στη συνέχεια ο Steinhaus όρισε μια οικογένεια (N_k) άπειρων ξένων ανά δύο συνόλων που αποτελείται από θετικούς ακέραιους με τον εξής τρόπο: αν $k \in \mathbb{N}$,

$$N_k = (2\mathbb{N} + 1)2^{k-1}.$$

Ύστερα όρισε την εξής οικογένεια τυχαίων μεταβλητών:

$$w_k = \sum_{n \in N_k} \frac{x_n}{2^n}.$$

Η (w_k) είναι μια οικογένεια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή το μέτρο Lebesque στο $[0, 1]$. Ο 0-1 νόμος του Kolmogorov που χρησιμοποιείται συνεχώς σε αυτήν την εργασία βρήκε την πρώτη εκδοχή του πάνω σε αυτήν την προσέγγιση από τον Steinhaus.

Με αυτά κατόρθωσε να αποδείξει πως η τυχαία σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{2\pi\omega_k} z^k$$

όπου

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1,$$

είναι σχεδόν βεβαίως πουθενά συνεχίσιμη γύρω από τον κύκλο σύγκλισης $|z| = 1$.

Αυτή ήταν μία από τις πρώτες τυχαίες σειρές Fourier. Εντούτοις, η ουσιαστική μελέτη των σειρών που γράφονται ως αθροίσματα απλών ημιτονοειδών κυμάτων (ορισμένες εκ των οποίων αποτελούν συναρτήσεις) και έχουν τυχαίους συντελεστές ξεκίνησε το 1930 με το έργο των Paley και Zygmund που είχε τον τίτλο «τυχαίες σειρές συναρτήσεων». Σε αυτήν την εργασία ερευνώνται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν διάφοροι συντελεστές ώστε να επηρεάζουν την σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς. Η μελέτη αυτή συνεχίζεται και σήμερα.

Προτού όμως αναπτύξουμε την θεωρία των τυχαίων σειρών Fourier ξεκινάμε στο δεύτερο κεφάλαιο με τη μελέτη των τυχαίων σειρών στους χώρους Banach. Η ανάλυση των τυχαίων σειρών στους χώρους Banach (όπως και των τυχαίων σειρών στους χώρους Hilbert που συζητάμε αργότερα στο ίδιο κεφάλαιο) είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης των τυχαίων σειρών Fourier όχι μονο από απόψη θεωρημάτων και προτάσεων αλλά και από την άποψη της σφαιρικής μελέτης.

Στην Παράγραφο 2.1 οι τυχαίες σειρές που παίζουν τον μεγαλύτερο πιθανοθεωρητικό ρόλο στην ανάπτυξη του θέματος μας είναι οι σειρές Rademacher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n,$$

όπου $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ και οι ϵ_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Rademacher.

Εκτός από την απόδειξη θεωρημάτων και προτάσεων για τις σειρές Rademacher εισάγεται η έννοια του πίνακα αθροισιμότητας και η έννοια της S-αθροισιμότητας. Αποδεικνύεται επίσης ότι εάν έχουμε ανεξάρτητα συμμετρικά τυχαία διανύσματα και έναν πίνακα αθροισιμότητας S και αν η σειρά των διανυσμάτων είναι S-αθροίσιμη τότε η σειρά συγκλίνει (στη συνέχεια της εισαγωγής ορίζεται τι είναι συμμετρική τυχαία μεταβλητή).

Συνεχίζοντας, στην Παράγραφο 2.2 εισάγουμε και μελετούμε τις τυχαίες σειρές στους χώρους Hilbert. Επιπροσθέτως, αναπτύσσουμε έτι περαιτέρω την S-αθροισιμότητα.

Στην Παράγραφο 2.3 αρχίζουμε για πρώτη ουσιαστικά φορά να κάνουμε λόγο για τυχαίες σειρές Fourier. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, οι τυχαίες σειρές Fourier είναι τριγωνομετρικές σειρές με συντελεστές τυχαίες μεταβλητές. Μια γενική απλή μορφή που θα μπορούσε να πάρει αυτή η σειρά είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{int}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

όπου X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ενίοτε συμμετρικές, σπανίως ισοκατανεμημένες και μιγαδικές.

Οι τυχαίες σειρές Fourier που συναντάμε, συνήθως λαμβάνουν μία από τις ακόλουθες τρεις μορφές:

(α) *Τυχαίες σειρές Rademacher.* Είναι σειρές της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n a_n e^{int},$$

όπου $\{\epsilon_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Rademacher, δηλαδή $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = 1/2$, και $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(β) *Τυχαίες σειρές Steinhaus.* Είναι σειρές της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i w_n} e^{int},$$

όπου $\{e^{2\pi i w_n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Steinhaus, δηλαδή οι w_n είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,1)$, και $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(γ) *Τυχαίες σειρές Gauss.* Είναι σειρές της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta_n e^{int},$$

όπου $\{\zeta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων κανονικών μιγαδικών τυχαίων μεταβλητών, και $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Η γενικότερη λοιπόν εκδοχή την οποία αντιμετωπίζουμε λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X_n e^{int},$$

όπου $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Steinhaus ή ακολουθία Rademacher ή κανονική μιγαδική ακολουθία. Όπως θα διαπιστώσουμε και στην Παράγραφο 2.3, οι σειρές αυτές δύνανται να λάβουν, υπό κατάλληλες συνθήκες και για διευκόλυνση των πραγμάτων, την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(nt + \varphi_n) r_n,$$

όπου (r_n) ακολουθία Rademacher και φ_n τυχαίες μεταβλητές. Σε αυτήν την παράφραφο μας απασχολούν οι γενικοί κανόνες σύγκλισης και απόκλισης των τυχαίων τριγωνομετρικών σειρών που απέδειξαν πλήρως οι Paley και Zygmund.

Στο τρίτο κεφάλαιο εστιάζουμε στα θεωρήματα που ξεκαθαρίζουν τις τυχαίες σειρές Fourier οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις από αυτές που δεν είναι.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε τρία κλασικά θεωρήματα για τυχαίες σειρές Fourier. Στην Παράγραφο 4.1 παρουσιάζουμε την απόδειξη του θεωρήματος των de Leeuw, Kahane και Katznelson: Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ακολουθία με $a_{-n} = a_n$ για κάθε n τότε υπάρχει άρτια πραγματική συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$|\widehat{f}(n)| \geqslant |a_n| \quad \text{για κάθε } \; n \in \mathbb{Z}.$$

Στην Παράγραφο 4.2 γενικεύουμε την ανισότητα του Hardy. Υπάρχει σταθερά $C \in (0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάθε $S = \{n_1 < n_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{Z}$ αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel στο μοναδιαίο κύκλο με $\mathrm{supp}(\widehat{\mu}) \subset S$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}(n_k)}{k} \leqslant C\|\mu\|.$$

Στην Παράγραφο 4.3, εξετάζουμε τις lacunary σειρές. Είθισται, όταν γίνεται λόγος για lacunary σειρά, να εννοείται μια αναλυτική συνάρτηση που δεν συνεχίζεται αναλυτικά έξω από την ακτίνα σύγκλισης. Εμείς θα εστιάσουμε στις τριγωνομετρικές lacunary σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi n_k x)) + (b_k \sin(2\pi n_k x))$$

όπου $\frac{n_k+1}{n_k} \geqslant \lambda$ για κάποια σταθερά $\lambda > 1$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Οι συντελεστές αυτής της σειράς Fourier είναι τυχαίοι αριθμοί και όχι μεταβλητές. Οι lacunary σειρές είναι αξιοσημείωτα αλλόκοτες. Η ονομασία τους προέρχεται από την λέξη lacuna, που σημαίνει κενό. Το κενό αυτό παρατηρείται ανάμεσα στους μη μηδενικούς συντελεστές του αναπτυγμάτος Taylor (ή Fourier) της σειράς. Μια ιδιαιτερότητα που εξερευνούμε και που δεν βρίσκεται σε άλλες τριγωνομετρικές σειρές είναι πως μια τέτοια σειρά συγκλίνει σε κάποιο $S \subseteq [0,1]$ με $\lambda(S) > 0$ αν και μόνο αν

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^2 < \infty.$$

Χάρη στους Salem και Zygmund έχουμε άλλο ένα ιδιαίτερο αποτέλεσμα για τις lacunary τριγωνομετρικές σειρές. Η κατανομή των τιμών μιας τέτοιας σειράς συγκλίνει στην κανονική κατανομή. Θέτοντας s_n το μερικό άθροισμα μιας lacunary σειράς και $c_k^2 = a_k^2 + b_k^2$ και

$$C_n = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2},$$

αν $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{C_n} = \infty$ και $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ τότε για κάθε $A \subset [0, 2\pi]$, όπου A μετρήσιμο και $\lambda(A) > 0$, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(\left\{x \in A : \frac{s_n(x)}{C_n} \leqslant t\right\}\right)}{\lambda(A)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-y^2}\, dy.$$

Αυτό είναι το κεντρικό οριακό θεώρημα για τα τριγωνομετρικά αθροίσματα.

Εν συνεχεία, στο πέμπτο κεφάλαιο, ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία «κίνηση Brown». Προτού εξηγήσουμε πώς συνδέεται με το θέμα των τυχαίων σειρών Fourier θα πούμε λίγα λόγια γι' αυτήν. Το 1827, καθώς μελετούσε τους κόκκους γύρης στο νερό, ο βοτανολόγος Robert Brown πρόσεξε πως μικροσκοπικά σωματίδια άλλαζαν απότομα και τυχαία διεύθυνση. Προς τιμήν του λοιπόν καλούμε κίνηση Brown το φαινόμενο κατά το οποίο η κίνηση σωματιδίων μέσα σε ένα ρευστό (υγρό ή αέριο) είναι τυχαία και εμφανίζει μικρές απότομες διακυμάνσεις. Εμάς μας ενδιαφέρει η μαθηματική περιγραφή και μοντελοποίηση όλων των φαινομένων που ακολουθούν τέτοια συμπεριφορά. Οι εφαρμογές του περιγράμματος του φαινομένου που περιγράψαμε δεν περιορίζονται μονάχα στις θετικές επιστήμες. Λόγου χάρη, η τιμή μιας μετοχής στο χρηματιστήριο ακολουθεί το μοτίβο που περιγράφεται σε γενικές γραμμές από την κίνηση Brown (το μοτίβο των μικρών απότομων διακυμάνσεων).

Η κίνηση Brown είναι η σημαντικότερη στοχαστική διαδικασία που θα αναφέρουμε και το ενδιαφέρον μας δικαιολογείται από την ιδιαίτερη συμπεριφορά που παρουσιάζει. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Η κίνηση Brown είναι σχεδόν παντού συνεχής και σχεδόν πουθενά διαφορίσιμη.

(β) Η κίνηση Brown είναι γκαουσιανή.

(γ) Κάθε κομμάτι, οσοδήποτε μικρό και αν είναι, της τροχιάς της κίνησης Brown εαν επεκταθεί μοιάζει με την συνολική τροχιά της. Όπως δηλαδή ένα μορφόκλασμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο όσο και εάν το μεγεθύνουμε.

(δ) Η κίνηση Brown, σε όποιο σημείο της τροχιάς της και αν είναι, θα αποκτήσει όλες τις τιμές της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

(ε) Η κίνηση Brown θα αποκτήσει όλες τις τιμές της ευθείας των πραγματικών αριθμών άπειρες φορές την κάθε μία.

Πώς όμως συνδέεται η κίνηση Brown με τις τυχαίες σειρές Fourier; Το 1920 ο Nobert Wiener απέδειξε πως η κίνηση Brown μπορεί να γραφτεί σαν μια τυχαία σειρά Fourier. Ύστερα, κατά το έτος 1933 συνεργάστηκε με τους Paley και Zygmund για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας των τυχαίων σειρών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, έδειξαν ότι αν B είναι μια μονοδιάσταση κίνηση Brown τότε

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n} G_n, \qquad t \in [0,1]$$

όπου $(G_n)_{n\geqslant 1}$ είναι μια ακολουθία ανεξαρτήτων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή.

Για την απόδειξη αυτής της παράστασης άλλα και για την απόδειξη της ύπαρξης της κίνησης Brown ορίζουμε τους γκαουσιανούς χώρους Hilbert. Σημειώνουμε εδώ πως αυτός δεν είναι ο συνήθης τρόπος απόδειξης της ύπαρξης της κίνησης Brown. Οι γκαουσιανοί χώροι Hilbert (ή αφηρημένοι χώροι Wiener) αναλύονται λεπτομερώς στο όγδοο κεφάλαιο της εργασίας. Προς το παρόν λέμε πως είναι οι χώροι Hilbert που εφοδιάζονται με γκαουσιανή δομή.

Η κίνηση Brown είναι ισοδύναμη μιας συνάρτησης που απεικονίζει στοιχεία του L_2 σε γκαουσιανό χώρο Hilbert. Οπόθεν προκύπτει η παράσταση της ως τυχαία τριγωνομετρική σειρά καθώς οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποτελούν βάση αυτού του γκαουσιανού χώρου Hilbert. Στο έκτο κεφάλαιο, γενικεύουμε αυτή τη διαδικασία και φτάνουμε να δείξουμε πως κάθε γκαουσιανός χώρος Hilbert επάγει ορθογώνιο ανάπτυγμα.

Για την τριγωνομετρική παράσταση της κίνησης Brown έχουμε μια άλλη πιο κατασκευαστική απόδειξη. Δείχνουμε πως δύναται να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός απείρων ορθοκανονικών συναρτήσεων με τυχαίους συντελεστές. Στο Κεφάλαιο 6 γενικέυουμε αυτήν την παράσταση και δείχνουμε πως κάθε στοχαστική διαδικασία με πεπερασμένη διακύμανση επιδέχεται τέτοιο ανάπτυγμα. Η γενική ιδέα οφείλεται στους Lévy και Ciesielski. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L^2[0,1]$ με εσωτερικό γινόμενο το

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \qquad f,g \in L^2[0,1].$$

Θεωρούμε επίσης ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ πλήρες στον χώρο $L^2[0,1]$ και μια ακολουθία $(G_n)_{n\geqslant 0}$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Θέτουμε

$$B_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} G_n \int_0^t f_n(s)\,ds, \qquad t \in [0,1].$$

Στέλνοντας το N στο άπειρο αποδεικνύουμε πως το όριο υπάρχει και είναι κίνηση Brown

$$B_t = \lim_{N\to\infty} B_N(t), \qquad t \in [0,1].$$

Στο Κεφάλαιο 6 εισάγουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Karhunen-Loève. Γνωρίζουμε από την ανάλυση Fourier ότι αν έχουμε μια πραγματική περιοδική συνάρτηση στον L^2 αυτή μπορεί να γραφτεί ως άπειρος αριθμήσιμος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης του L^2, όπου οι συντελεστές του αναπτύγματος είναι ολοκληρώματα που εξαρτώνται από την συνάρτηση. Το θεώρημα Karhunen-Loève εξασφαλίζει κάτι παρόμοιο για τις στοχαστικές διαδικασίες. Το 1943 στοχαστικές διαδικασίες με τέτοιο ορθοκανονικό ανάπτυγμα έκαναν την εμφάνιση τους για πρώτη φορά στο έργο του Kosambi. Γενικεύτηκαν όμως ορθώς τρία χρόνια αργότερα στο έργο του Karhunen και πέντε χρόνια μετά στο έργο του Loève.

Με λίγα λόγια, έχουμε πως εάν (X_t) είναι συνεχής στοχαστική διαδικασία, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, στον L^2 με συνεχή συνάρτηση διακύμανσης, τότε αυτή γράφεται ως εξής:

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t),$$

με

$$Z_n = \int_a^b X_t e_n(t)\,dt,$$

όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις κατάλληλου τελεστή στον $L^2[a,b]$ που θα ορίσουμε αυστηρά στο Κεφάλαιο 6. Στο παραπάνω ανάπτυγμα υποθέσαμε ότι η X_t έχει μηδενική μέση τιμή, όμως όπως θα αποδείξουμε αργότερα με μικρές τροποιήσεις βρίσκεται παρόμοιο ορθοκανονικό ανάπτυγμα για στοχαστικές διαδικασίες με μη μηδενική μέση τιμή.

Έχοντας στη διάθεση μας το θεώρημα Karhunen-Loève μπορούμε να παραστήσουμε την κίνηση Brown στο $[0,1]$ με έναν ακόμα τρόπο ως τυχαία σειρά Fourier:

$$B_t = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^*}{2k-1} \sin((2k-1)\pi t/2),$$

όπου

$$Z_k = \int_0^1 B_t \sqrt{2} \sin((2k-1)\pi t/2)\,dt$$

και $\lambda_k = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$, $Z_k^* = \frac{Z_k}{\sqrt{\lambda_k}}$.

Δηλαδή, το θεώρημα Karhunen-Loève μπορεί υπό κατάλληλες προϋποθέσεις να πάρει στοχαστικές διαδικασίες περιοριζόμενες σε ένα κλειστό διάστημα και να τις παραστήσει ως τυχαίες σειρές Fourier.

Στο Κεφάλαιο 7 εμφανίζεται μια διαφορετική από τις προηγούμενες τυχαία σειρά Fourier. Αν έχουμε μια στοχαστική διαδικασία X που ακολουθεί ευσταθή κατανομή και μια συνάρτηση f στον L^p, μπορούμε υπό κατάλληλες συνθήκες, διευκρινιζόμενες εντός του Κεφαλαίου 7, να δείξουμε ότι η τυχαία σειρά Fourier με συντελεστές τα γινόμενα των συντελεστών Fourier των f και X (όπου οι μεν είναι αριθμοί που εξαρτώνται από την συνάρτηση οι δε τυχαίες μεταβλητές που εξαρτώνται από την στοχαστική διαδικασία) συγκλίνει ποικιλοτρόπως στο στοχαστικό ολοκλήρωμα της f ως προς την στοχαστική διαδικασία X. Σε αυτό το σημείο όταν μιλάμε για στοχαστικό ολοκλήρωμα αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη με την έννοια της σύγκλισης κατά πιθανότητα.

Αν $f \in L^p[a,b]$, $p \in (0,\infty)$ και X είναι μια τυχαία μεταβλητή με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε μπορούμε να ορίσουμε

$$A_n(\omega) = \int_0^1 e^{-2\pi nit}\, dX(t,\omega).$$

Εδώ, A_n είναι ο συντελεστής Fourier της X και

$$a_n = \int_a^b f(t) e^{-2\pi nit}\, dt$$

είναι ο συντελεστής Fourier της f. Συμβολίζουμε με

$$\sum_{n=-m}^{m} A_n(\omega) e^{2\pi nit}$$

το μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της X και με

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n e^{2\pi nit}$$

το μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f. Εμείς θα δείξουμε πως

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n A_n(\omega) e^{2\pi niy} \to \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega).$$

Αυτή η σύγκλιση μπορεί να πάρει τη μορφή της σύγκλισης κατά πιθανότητα ή σχεδόν βεβαίως, ανάλογα με τους περιορισμούς που θα θέσουμε. Ομοίως, μπορεί να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_k(y)}{k} \to \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega)$$

όπου

$$s_k(y) = \sum_{m=-k}^{k} a_m A_m(\omega) e^{2\pi miy}.$$

Σε ορισμένα θεωρήματα η στοχαστική διαδικασία θα είναι η κίνηση Brown. Άρα, θα έχουμε μια τυχαία σειρά Fourier που θα συγκλίνει σε στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς μια άλλη τυχαία σειρά Fourier.

Στο πέμπτο κεφάλαιο ορίσαμε τους γκαουσιανούς χώρους Hilbert και αποδείξαμε πως η κίνηση Brown είναι τυχαία σειρά Fourier λόγω της ιδιαιτερότητας αυτών των χώρων. Στο έκτο κεφάλαιο καταλήγουμε να δείξουμε πως κάθε γκαουσιανός χώρος Hilbert επιδέχεται ορθογώνιο ανάπτυγμα. Αυτό το ανάπτυγμα καλείται διάσπαση σε χάος Wiener.

Στην Παράγραφο 8.1 εισάγονται και προσδιορίζονται κάποια βασικά στοιχεία γύρω από το τι είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert.

Στην Παράγραφο 8.2 αποδεικνύουμε την πρώτη μορφή της διάσπασης σε χάος Wiener. Συνοπτικά, αν H είναι ένας γκαουσιανός χώρος Hilbert ορισμένος στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και

$$P_n(H) = \{p(x_1,\ldots,x_m) : p \text{ πολυώνυμο βαθμού το πολύ } n \text{ με } x_1,\ldots,x_m \in H, m < \infty\}$$

και

$$H^{:n:} = \overline{P}_n(H) \cap \overline{P}_{n-1}(H)^{\perp},$$

τότε

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}.$$

Στην Παράγραφο 8.3 ξεκινάμε ορίζοντας το στοχαστικό ολοκλήρωμα διαφορετικά από ότι στο Κεφάλαιο 7. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε σε ένα νέο ορθογώνιο ανάπτυγμα των γκαουσιανών χώρων Hilbert, όπου οι συντελεστές του εκφράζονται μέσω ενός διαφορετικού τύπου στοχαστικού ολοκληρώματος, το οποίο λέγεται γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα:

$$I_n(f) = \int_M \cdots \int_M f \, dZ(x_1) \cdots dZ(x_n),$$

όπου Z είναι το γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του γκαουσιανού στοχαστικού ολοκληρώματος και ορίζεται σε έναν σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$, για κατάλληλα ορισμένη f, η οποία ομοιάζει με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις του αναπτύγματος σε χάος Wiener. Περισσότερα γι' αυτήν στην Παράγραφο 8.3. Για $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f).$$

Αυτό το ανάπτυγμα καλείται διάσπαση Wiener-Itô.

Στην Παράγραφο 8.4 ορίζουμε έναν ακόμα τύπο στοχαστικού ολοκληρώματος, το ολοκλήρωμα Skorohod και ένα νέο μέτρο, το φασματικό μέτρο. Κλείννουμε παραθέτοντας πλήρως ένα ακόμα ανάπτυγμα για τους γκαουσιανούς χώρους Hilbert που συνδυάζει τα παραπάνω, την διάσπαση Wiener-Skorohod για το φασματικό μέτρο.

Τέλος, στην Παράγραφο 8.5 αναφερόμαστε στον διαφορικό λογισμό των στοχαστικών διαδικασιών και την σχέση του με την ανάλυση χάους. Ο λογισμός αυτός καλείται λογισμός Malliavin και το κεντρικό αντικείμενο μελέτης του, η παράγωγος Malliavin, επιδέχεται ανάλυση χάους καθώς και ολοκλήρωμα Skorohod.

1.1 Εργαλεία από την Θεωρία Πιθανοτήτων

§1.1.1. Θεωρούμε ως χώρο πιθανότητας το κλειστό διάστημα $[0, 1]$. Τα ενδεχόμενα είναι τα υποσύνολα Borel του $[0, 1]$ και η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι το μέτρο Lebesgue του. Τυχαία μεταβλητή είναι κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, και η μέση τιμή της f είναι το ολοκλήρωμα Lebesgue της.

Για κάθε $\omega \in [0, 1]$ θεωρούμε το δυαδικό του ανάπτυγμα

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2^n}$$

για το οποίο $\beta_n = 0$ ή 1, και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$, με την εξαίρεση του $\omega = 0$: κάθε $\omega \in (0, 1]$ έχει ένα δυαδικό ανάπτυγμα με αυτήν την ιδιότητα. Μπορούμε να δούμε, με φυσιολογικό τρόπο, τις β_n ως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με

$$\mathbb{P}(\{\beta_n = 0\}) = \mathbb{P}(\{\beta_n = 1\}) = \frac{1}{2}.$$

Θεωρούμε μια 1-1 συνάρτηση $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ και για κάθε j ορίζουμε

$$\omega_j = \omega_j(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{m(n,j)}}{2^n}.$$

Τότε, οι ω_j είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, και καθεμία από αυτές είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1]$, δηλαδή, για κάθε υποδιάστημα I του $[0,1]$ ισχύει

$$\mathbb{P}(\{\omega_j \in I\}) = \lambda(I),$$

όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue.

Οι τυχαίες μεταβλητές

$$\epsilon_n = 1 - 2\beta_n$$

είναι οι τυχαίες μεταβλητές Rademacher, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές ω_j είναι οι τυχαίες μεταβλητές Steinhaus.

§1.1.2. Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, όπου $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ και $\Omega_n = [0,1]$ για κάθε n, $\mathcal{A} = \otimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ όπου $\mathcal{A}_n$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του $[0,1]$ για κάθε n, και $\mathbb{P} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_n$ όπου $\mathbb{P}_n$ είναι το μέτρο Lebesgue λ στην $\mathcal{A}_n$ για κάθε n.

Συμβολίζουμε τα σημεία του Ω με $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$, όπου $\omega_n \in [0,1]$. Η ακολουθία $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ συναρτήσεων $\omega_n : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η τυπική ακολουθία Steinhaus. Η ακολουθία $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ συναρτήσεων $\epsilon_n : \Omega \to \{-1, 1\}$ που ορίζεται από τις

$$\epsilon_n(\omega) = 1 \ \text{ αν } \omega_n \in [0, 1/2) \quad \text{και} \quad \epsilon_n(\omega) = -1 \ \text{ αν } \omega_n \in [1/2, 1]$$

είναι η τυπική ακολουθία Rademacher.

§1.1.3. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια βασικά θεωρήματα για τη μέση τιμή και τη διασπορά τυχαίων μεταβλητών $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.1.1 (Beppo-Levi). *Έστω $X_n \in L^1(\Omega)$, $X_n \geqslant 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) < \infty$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.

Θεώρημα 1.1.2 (Fubini-Jensen). *Έστω $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ και $X \in L^1(\Omega)$. Τότε,*

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 X(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)\, d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_n$$

σχεδόν βεβαίως.

Ειδικότερα, αν $\{X_n\}_{n=1}^N$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_n \in L^1(\Omega)$ και αν $\prod\limits_{n=1}^N |X_n| \in L^1(\Omega)$, τότε

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{n=1}^N X_n\Big) = \prod_{n=1}^N \mathbb{E}(X_n).$$

Θεώρημα 1.1.3 (λήμμα Borel-Cantelli)**.** *Έστω $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

(α) *Αν $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty$ τότε $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.*

(β) *Αν η $\{A_n\}$ είναι ανεξάρτητη και $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty$ τότε $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.*

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=j}^\infty A_n\right) \leqslant \sum_{n=j}^\infty \mathbb{P}(A_n) \to 0$ όταν $j \to \infty$. Αφού η $\bigcup_{n=j}^\infty A_n$ είναι φθίνουσα, παίρνουμε

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=j}^\infty A_n\Big) = 0.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ανεξάρτητη και $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{A_n^c\}_{n=1}^\infty$ είναι ανεξάρτητη και, χρησιμοποιώντας την $e^{-x} \geqslant 1 - x$, βλέπουμε ότι αν $j < k$ τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=j}^\infty A_n^c\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=j}^k A_n^c\Big) &= \prod_{n=j}^k \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=j}^k (1 - \mathbb{P}(A_n)) \\ &\leqslant \prod_{n=j}^k e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \exp\Big(-\sum_{n=j}^k \mathbb{P}(A_n)\Big) \to 0\end{aligned}$$

όταν $k \to \infty$. Άρα,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=j}^\infty A_n^c\Big) = 0$$

για κάθε $j \geqslant 1$, και έπεται ότι

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{n=j}^\infty A_n^c\Big) = 0$$

όπως θέλαμε. □

Θεώρημα 1.1.4 (0-1 νόμος του Kolmogorov)**.** *Έστω $\Omega = \prod\limits_{n=1}^\infty \Omega_n$ και X μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον Ω, που ικανοποιεί την*

$$X(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots) = X(\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n', \omega_{n+1}, \ldots)$$

για κάθε $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ και $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n'$. Τότε, η X έχει την ίδια κατανομή με σταθερά. Ειδικότερα, αν $X = \mathbf{1}_A$ τότε $\mathbb{P}(A) = 0$ ή $\mathbb{P}(A) = 1$.

Θεώρημα 1.1.5 (Markov-Chebyshev). *Αν $X \in L^1(\Omega)$ και $\alpha > 1$ τότε*

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant \alpha\,\mathbb{E}(X)\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Ειδικότερα, αν $X \in L^2(\Omega)$ και $\alpha > 1$ τότε

$$\mathbb{P}(\{X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\}) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}.$$

Θεώρημα 1.1.6 (Paley-Zygmund). *Αν $X \in L^2(\Omega)$ και $0 < \lambda < 1$ τότε*

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant \lambda\,\mathbb{E}(X)\}) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}^2(X)}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{X \geqslant \lambda\,\mathbb{E}(X)\}$. Έχουμε

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_{\Omega\setminus A}) \leqslant \mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_A) + \lambda\,\mathbb{E}(X),$$

άρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$(1-\lambda)^2\mathbb{E}^2(X) \leqslant \mathbb{E}^2(X\,\mathbf{1}_A) \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_A^2) = \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{P}(A),$$

και έπεται το ζητούμενο. □

§1.1.4. Έστω X τυχαίο διάνυσμα σε κάποιον γραμμικό χώρο. Λέμε ότι το X είναι συμμετρικό αν έχει την ίδια κατανομή με το $-X$. Θα γράφουμε $X \overset{d}{=} -X$.

Σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιούμε συχνά τις επόμενες παρατηρήσεις:

- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ είναι ανεξάρτητα συμμετρικά τυχαία διανύσματα και $\{\epsilon_n^*\}_{n=1}^\infty$ είναι μια σταθερή ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $1/2$, τότε οι ακολουθίες $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ και $\{\epsilon_n^* X_n\}_{n=1}^\infty$ έχουν την ίδια κατανομή.

- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ είναι ανεξάρτητα συμμετρικά τυχαία διανύσματα και $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Rademacher, που είναι ανεξάρτητη από τις X_n, τότε οι ακολουθίες $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ και $\{\epsilon_n X_n\}_{n=1}^\infty$ έχουν την ίδια κατανομή.

§1.1.5. Έστω Ω ένας χώρος πιθανότητας, και έστω E και F δύο σύνολα. Με τον όρο *τυχαία συνάρτηση ορισμένη στο E με τιμές στο F* εννοούμε μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στοιχεία του F^E, του συνόλου όλων των συναρτήσεων $f : E \to F$.

Μπορούμε πάντα να βλέπουμε μια τέτοια τυχαία συνάρτηση σαν μια συνάρτηση $\Phi : E \times \Omega \to F$, και να γράφουμε $y = \Phi(x, \omega)$. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν ο E είναι χώρος μέτρου, εφοδιασμένος με ένα πλήρες μέτρο μ. Τότε, το $\mu \times \mathbb{P}$ είναι πλήρες μέτρο στον $E \times \Omega$. Αν A είναι ένα υποσύνολο του $E \times \Omega$ τότε οι προτάσεις «σχεδόν για κάθε ω έχουμε $(x, \omega) \in A$ για σχεδόν κάθε x» και «σχεδόν για κάθε x έχουμε $(x, \omega) \in A$ για σχεδόν κάθε ω» είναι ισοδύναμες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τυχαίες σειρές Fourier

2.1 Τυχαίες σειρές Fourier σε χώρους Banach

Έστω B χώρος Banach, πραγματικός ή μιγαδικός. Ενδιαφερόμαστε για σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n, \tag{2.1.1}$$

όπου οι X_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον B. Ειδικότερα, ενδιαφερόμαστε για τυχαίες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \pm u_n,$$

όπου $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων στον B και οι ϵ_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Rademacher.

Στην περίπτωση που ο B είναι χώρος Hilbert, υπάρχουν απλές ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την σχεδόν παντού σύγκλιση των παραπάνω σειρών. Στη γενική περίπτωση, τυχόντος χώρου Banach, αυτό παύει να ισχύει, και απαιτείται διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα.

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας χρησιμοποιώντας μεθόδους αθροισιμότητας. Θεωρούμε έναν άπειρο βαθμωτό πίνακα

$$S = (a_{nm})_{m,n=1}^{\infty}$$

που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 1, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Ένας τέτοιος πίνακας S καλείται *πίνακας αθροισιμότητας*.

Για δεδομένη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n \in B$, θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} v_m, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Εάν όλες αυτές αθροίζονται στον B, ορίζουμε

$$w_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} v_m, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} w_n = w \in B$ τότε λέμε ότι ο w είναι το *S-άθροισμα* της $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Αν όλα τα αθροίσματα w_n υπάρχουν και η ακολουθία $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ είναι *S-φραγμένη* και ορίζουμε ως *S-φράγμα* της το $\sup_n \|w_n\|$.

Παρατηρήστε ότι αν ο S είναι ο τριγωνικός πίνακας με$a_{nm} = 1$ αν $n \geqslant m$ και $a_{nm} = 0$ αν $n < m$, τότε το w_n είναι απλώς το n-οστό μερικό άθροισμα $w_n = v_1 + \cdots + v_n$ της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ είναι φραγμένη αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη και σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε ως φράγμα της το $\sup_n \|v_1 + \cdots + v_n\|$.

Οι μέθοδοι αθροισιμότητας παίζουν βασικό ρόλο στη μελέτη των σειρών Fourier. Η μέθοδος Cesàro αντιστοιχεί στον πίνακα

$$a_{nm} = \max\Big\{0, 1 - \frac{m}{n}\Big\},$$

ενώ η μέθοδος Poisson στον πίνακα

$$a_{nm} = r_n^m, \qquad 0 < r_n < 1, \lim_{n\to\infty} r_n = 1.$$

Ορισμός 2.1.1. Το *ω-σύνολο* στο οποίο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-αθροίσιμη προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$\limsup_{p,p'\to\infty} \Big\| \sum_{m=p}^{p'} a_{nm} X_m \Big\| = 0, \qquad n = 1, 2, \dots$$

και

$$\limsup_{n,n'\to\infty} \limsup_{p\to\infty} \Big\| \sum_{m=1}^{p} (a_{nm} - a_{n'm}) X_m \Big\| = 0,$$

ενώ το *ω-σύνολο* στο οποίο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-φραγμένη προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$\limsup_{p,p'\to\infty} \Big\| \sum_{m=p}^{p'} a_{nm} X_m \Big\| = 0, \qquad n = 1, 2, \dots$$

και

$$\limsup_{n\to\infty} \limsup_{p\to\infty} \Big\| \sum_{m=1}^{p} a_{nm} X_m \Big\| < \infty.$$

Τα σύνολα αυτά είναι μετρήσιμα, συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για τα ενδεχόμενα «η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-συγκλίνουσα» και «η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-φραγμένη». Από τον 0-1 νόμο, η πιθανότητα αυτών των ενδεχομένων είναι είτε 0 ή 1. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αυτή η πιθανότητα είναι ανεξάρτητη από τον πίνακα S.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ανεξάρτητα συμμετρικά τυχαία διανύσματα σε έναν χώρο Banach B, και έστω S ένας πίνακας αθροισιμότητας. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι σχεδόν βεβαίως S-αθροίσιμη, τότε συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Αν είναι σχεδόν βεβαίως S-φραγμένη τότε είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2 χρειαζόμαστε δύο λήμματα τα οποία παρουσιάζουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον. Εισάγουμε πρώτα κάποιον συμβολισμό. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ανεξάρτητα συμμετρικά τυχαία διανύσματα σε έναν χώρο Banach X. Ορίζουμε

$$Y_m(\omega) = \sum_{n=1}^{m} X_n(\omega),$$

και

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$$

αν αυτή η σειρά συγκλίνει. Τέλος, ορίζουμε

$$M(\omega) = \sup_m \|Y_m(\omega)\|.$$

Λήμμα 2.1.3. *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Για κάθε $r > 0$ έχουμε*

$$\mathbb{P}(M(\omega) > r) \leqslant 2\mathbb{P}(\|Y(\omega)\| > r).$$

Απόδειξη. Έστω Ω_0 το σύνολο των $\omega \in \Omega$ για τα οποία η $Y(\omega)$ ορίζεται, και έστω

$$A = \{\omega \in \Omega_0 : M(\omega) > r\} \quad \text{και} \quad C = \{\omega \in \Omega_0 : \|Y(\omega)\| > r\}.$$

Χωρίζουμε το A στα ακόλουθα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\omega \in \Omega_0 : \|Y_1\| > r\}\\
A_2 &:= \{\omega \in \Omega_0 : \|Y_1\| \leqslant r, \|Y_2\| > r\}\\
A_3 &:= \{\omega \in \Omega_0 : \|Y_1\| \leqslant r, \|Y_2\| \leqslant r, \|Y_3\| > r\}\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
A_m &= \{\omega \in \Omega_0 : \|Y_1\| \leqslant r, \dots, \|Y_{m-1}\| \leqslant r, \|Y_m\| > r\}\\
\vdots\ & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Εάν $\omega \in A_m$ τότε τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα

$$Y = Y_m(\omega) + (X_{m+1}(\omega) + \cdots) \quad \text{και} \quad Y' = Y_m(\omega) - (X_{m+1}(\omega) + \cdots)$$

βρίσκεται έξω από τη μπάλα $\|x\| \leqslant r$. Αφού οι X_n είναι συμμετρικές, τα Y και Y' βρίσκονται έξω από αυτή τη μπάλα με την ίδια πιθανότητα. Δηλαδή τα $A_m \cap \{\|Y\| > r\}$ και $A_m \cap \{\|Y'\| > r\}$ έχουν το ίδιο μέτρο. Αφού η ένωσή τους είναι το A_m, παίρνουμε

$$\mathbb{P}(A_m \cap \{\|Y\| > r\}) = \mathbb{P}(A_m \cap \{\|Y'\| > r\}) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_m).$$

Με άλλα λόγια,

$$\mathbb{P}(C \cap A_m) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_m)$$

για κάθε m, και προσθέτοντας όλες αυτές τις ανισότητες παίρνουμε $\mathbb{P}(C) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(A)$, η οποία μας δίνει το ζητούμενο διότι, από την υπόθεση, $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. □

Λήμμα 2.1.4. *Για κάθε $r > 0$ και κάθε σύνολο ακεραίων Λ έχουμε*

$$\mathbb{P}(M(\omega) > r) \leqslant 2\mathbb{P}(M_\Lambda(\omega) > r),$$

όπου $M_\Lambda(\omega) = \sup\limits_{m \in \Lambda} \|Y_m(\omega)\|$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Λήμματος 2.1.3. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} D &:= \{\omega : M(\omega) > r\}, \\ E &:= \{\omega : M_\Lambda(\omega) > r\}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{\omega : \|Y_1\| > r\} \\ D_2 &:= \{\omega : \|Y_1\| \leqslant r, \|Y_2\| > r\} \\ D_3 &:= \{\omega : \|Y_1\| \leqslant r, \|Y_2\| \leqslant r, \|Y_3\| > r\} \\ &\vdots \quad \vdots \\ D_m &= \{\omega : \|Y_1\| \leqslant r, \dots, \|Y_{m-1}\| \leqslant r, \|Y_m\| > r\} \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Για κάθε $\omega \in D_m$ θέτουμε

$$\begin{aligned} M_{\Lambda,m} &= \sup_{\nu \in \Lambda, \nu \geqslant m} \|Y_\nu\|, \\ M'_{\Lambda,m} &= \sup_{\nu \in \Lambda, \nu \geqslant m} \|Y'_\nu\|, \end{aligned}$$

όπου Y'_ν είναι τα μερικά αθροίσματα της $Y' = Y_m - (X_{m+1} + \cdots)$. Λόγω συμμετρίας έχουμε

$$\mathbb{P}(M_{\Lambda,m} > r) = \mathbb{P}(M'_{\Lambda,m} > r)$$

και για κάθε $\omega \in D_n \cap E$ έχουμε $M_{\Lambda,m}(\omega) > r$, άρα $\mathbb{P}(D_n \cap E) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(D_n)$, συνεπώς

$$\mathbb{P}(E) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(D)$$

με πρόσθεση των ανισοτήτων. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Υποθέτουμε αρχικά ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-αθροίσιμη. Το πρώτο βήμα μας είναι να αντικαταστήσουμε τον πίνακα S με έναν πίνακα $T = (b_{pm})$ τέτοιον ώστε $b_{pm} = 1$ όταν $m \leqslant p$ και $b_{pm} = 0$ όταν $m > p$. Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.1.2}$$

Καθεμία από αυτές συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, και τα αθροίσματα τους $Z_n := \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m$ συγκλίνουν σε κάποιο όριο $Z := \lim_{n\to\infty} Z_n$. Για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\| \sum_{m\leqslant p} (1 - a_{nm}) X_m \Big\| > 2^{-p}\Big) < 2^{-p}$$

για αρκούντως μεγάλους $n \geqslant n_p$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η ακολουθία (n_p) είναι γνησίως αύξουσα. Αφού η (2.1.2) συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, έχουμε ότι αν το q είναι αρκετά μεγάλο, ας πούμε $q \geqslant q_p$, τότε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\| \sum_{m>q} a_{n_p m} X_m \Big\| > 2^{-p}\Big) < 2^{-p}.$$

Ορίζουμε

$$b_{pm} = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } m \leqslant p \\ a_{n_p m} & \text{ αν } p < m \leqslant q_p \\ 0 & , \text{ αν } m > q_p \end{cases}.$$

Έχουμε έτσι έναν νέο πίνακα αθροισιμότητας T, και αν εξαιρέσουμε ένα ενδεχόμενο με πιθανότητα μικρότερη από $2(2^{-\nu} + 2^{-(\nu+1)} + \cdots)$, τα πεπερασμένα αθροίσματα

$$Z'_p = \sum_{m=1}^{\infty} b_{pm} X_m$$

ικανοποιούν την

$$\|Z'_p - Z_{n_p}\| < 2 \cdot 2^{-p} \;\text{ για }\; p = \nu, \nu+1, \ldots.$$

Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι T-αθροίσιμη σχεδόν βεβαίως.

Το δεύτερο βήμα μας είναι να ορίσουμε μια αύξουσα ακολουθία ακεραίων p_j τέτοια ώστε τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{p_j} X_n$ να συγκλίνουν. Επιλέγουμε $p_1 = 1$ και $p_{j+1} = q_{p_j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Αν υποθέσουμε ότι

$$X_m = 0 \;\text{ για }\; p_j < m \leqslant p_{j+1}, \tag{2.1.3}$$

τότε

$$Z'_{p_j} = \sum_{m=1}^{p_j} X_m = \sum_{m=1}^{p_{j+1}} X_m. \tag{2.1.4}$$

Αν λοιπόν η (2.1.3) ισχύει για όλους τους j σε κάποιο άπειρο σύνολο δεικτών J, τότε τα μερικά αθροίσματα της (2.1.4) συγκλίνουν σχεδόν βεβαίως σε κάποιο όριο, καθώς το $j \to \infty$ παίρνοντας τιμές μέσα από το J. Χωρίζουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ σε δύο μέρη,

$$\sum_{n=1}^{\infty} X'_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} X''_n, \tag{2.1.5}$$

όπου

$$X'_n = X_n \quad \text{και} \quad X''_n = 0 \ \text{ αν } \ p_{2j-1} \leqslant n < p_{2j},$$

ενώ

$$X'_n = 0 \quad \text{και} \quad X''_n = X_n \ \text{ αν } \ p_{2j} \leqslant n < p_{2j+1}.$$

Παρατηρούμε ότι $2X'_n - X_n = \pm X_n$ και το ίδιο ισχύει για την $2X''_n - X_n$. Από την συμμετρία των X_n προκύπτει ότι οι δύο ακολουθίες $(2X'_n - X_n)_n$ και $(2X''_n - X_n)_n$ έχουν την ίδια κατανομή με την $(X_n)_n$, συνεπώς οι δύο σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2X'_n - X_n) \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(2X''_n - X_n)$$

έχουν την ίδια συμπεριφορά με την $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ σχεδόν βεβαίως. Έπεται ότι οι δύο σειρές της (2.1.5) είναι T-αθροίσιμες σχεδόν βεβαίως. Όμως, έχουμε δει ότι γι' αυτές τις δύο σειρές τα p_j-οστά μερικά αθροίσματα συγκλίνουν σχεδόν βεβαίως. Άρα, το ίδιο ισχύει για τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

Τώρα, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.1.3. Παρατηρούμε αρχικά ότι τα p_j-οστά μερικά αθροίσματα συγκλίνουν κατά πιθανότητα, δηλαδή για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει $j = j(\eta)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\| \sum_{p_j < m \leqslant p_k} X_m \Big\| > \eta\Big) < \eta$$

για κάθε $k > j$. Από το Λήμμα 2.1.3 έπεται ότι, για κάθε j και k,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{p_j < \ell \leqslant p_k} \Big\| \sum_{p_j < m \leqslant \ell} X_m \Big\| > \eta\Big) < 2\eta. \tag{2.1.6}$$

Εφαρμόζοντας την (2.1.6) για $\eta = \eta_\kappa = 2^{-\kappa}$, $j = j(\eta_\kappa) = j_\kappa$ και $k = j(\eta_{\kappa+1}) = j_{\kappa+1}$, όπου $\kappa = \mu, \mu+1, \ldots$, και προσθέτοντας, καταλήγουμε στο εξής: με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 4\eta_\mu$,

$$\Big\| \sum_{p_{j_\kappa} < m \leqslant \ell} X_m \Big\| \leqslant \eta_\kappa,$$

για κάθε $\kappa \geqslant \mu$ και $p_{j_\kappa} < \ell \leqslant p_{j_{\kappa+1}}$. Αφού τα p_{j_κ}-οστά μερικά αθροίσματα συγκλίνουν σχεδόν βεβαίως, η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty} X_m$ συγκλίνει με πιθανότητα οσοδήποτε κοντά στο 1, άρα συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-αθροίσιμη σχεδόν βεβαίως τότε συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε το ίδιο περίπου επιχείρημα. Υποθέτοντας ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι S-φραγμένη σχεδόν βεβαίως, ορίζουμε αρχικά μια αύξουσα ακολουθία φυσικών p_j τέτοια ώστε τα p_j-οστά μερικά αθροίσματα της σειράς να είναι φραγμένα σχεδόν βεβαίως. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $r = r(\epsilon)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_j \Big\| \sum_{m < p_j} X_m \Big\| > r\Big) < \epsilon.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1.4 για το $\Lambda = \{p_j\}$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_n \Big\| \sum_{m \leqslant n} X_m \Big\| > r\Big) < 2\epsilon.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty} X_m$ είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως. $\square$

2.1.1 Σειρές Rademacher

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n$, όπου $\{u_n\}$ είναι ακολουθία διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach B και $\{\epsilon_n\}$ είναι ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Rademacher. Εάν αυτή η σειρά συγκλίνει στον B, γράφουμε

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n.$$

Σε κάθε περίπτωση, ορίζουμε

$$V_n = \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m u_m$$

και

$$M = \sup_n \|V_n\|.$$

Η σειρά είναι φραγμένη αν $M < \infty$. Από τον 0-1 νόμο του Kolmogorov γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως ή αποκλίνει σχεδόν βεβαίως, και ότι είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως ή μη-φραγμένη σχεδόν βεβαίως. Υποθέτοντας ότι η σειρά συγκλίνει σχεδόν βεβαίως (ή είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως) θα μελετήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $\|V\|$ (ή M, αντίστοιχα).

Θεώρημα 2.1.5. *Αν η τυχαία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και ικανοποιεί την*

$$\mathbb{P}(\|V\| > r) < \frac{\alpha}{2} \tag{2.1.7}$$

για κάποιους $r > 0$ και $\alpha > 0$, τότε

$$\mathbb{P}(\|V\| > 2r) < \alpha^2. \tag{2.1.8}$$

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n$ είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως και ικανοποιεί την

$$\mathbb{P}(M > r) < \alpha \tag{2.1.9}$$

για κάποιους $r > 0$ και $\alpha > 0$, τότε

$$\mathbb{P}(M > 2r) < 2\alpha^2.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά την (2.1.7). Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.1.3 για τις $X_n = \epsilon_n u_n$, $Y_n = V_n$, $Y = V$, και από την (2.1.7) παίρνουμε την (2.1.9). Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned} A &= \{M > r\}, \\ B &= \Big\{ \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n \ \text{ συγκλίνει και } \ \|V\| > r \Big\}, \\ C &= \Big\{ \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n \ \text{ συγκλίνει και } \ \|V\| > 2r \Big\}. \end{aligned}$$

Έτσι, οι ανισότητες (2.1.7) και (2.1.9) γράφονται στη μορφή $\mathbb{P}(B) < \alpha/2$ και $\mathbb{P}(A) < \alpha$. Ορίζουμε επίσης

$$A_m = \{\|V_1\| \leqslant r, \ldots, \|V_{m-1}\| \leqslant r, \|V_m\| > r\}$$

και

$$C_m = \Big\{ \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n u_n \text{ συγκλίνει και } \Big\| \sum_{n=m}^{\infty} \epsilon_n u_n \Big\| > r \Big\}$$

για $m = 1, 2, \ldots$. Τα ενδεχόμενα A_m σχηματίζουν διαμέριση του A. Αφού το A_m εξαρτάται μόνο από τις $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m$ και το C_m εξαρτάται μόνο από τις $\epsilon_m \epsilon_{m+1}, \epsilon_m \epsilon_{m+2}, \ldots$, τα A_m και C_m είναι ανεξάρτητα για κάθε m, άρα

$$\mathbb{P}(A_m \cap C_m) = \mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(C_m).$$

Επιπλέον, από τα A_m και C έπεται το C_m. Άρα,

$$\mathbb{P}(A_m \cap C) \leqslant \mathbb{P}(A_m \cap C_m).$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C) \leqslant \mathbb{P}(A) \cdot \sup_m \mathbb{P}(C_m). \tag{2.1.10}$$

Σταθεροποιούμε m και κάποια $\epsilon_1^* = \pm 1, \ldots, \epsilon_{m-1}^* = \pm 1$. Παρατηρούμε ότι αν ισχύει το C_m τότε τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα

$$\epsilon_1^* u_1 + \cdots + \epsilon_{m-1}^* u_{m-1} \pm (\epsilon_m u_m + \epsilon_{m+1} u_{m+1} + \cdots)$$

βρίσκεται έξω από την μπάλα $\{x : \|x\| \leqslant r\}$. Αν ορίσουμε

$$A(\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_{m-1}^*) = \{\epsilon_1 = \epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_{m-1} = \epsilon_{m-1}^*\},$$

τότε

$$\mathbb{P}(A(\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_{m-1}^*) \cap C_m) \leqslant 2\mathbb{P}(A(\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_{m-1}^*) \cap B).$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}(C_m) \leqslant 2\mathbb{P}(B). \tag{2.1.11}$$

Από τις (2.1.10) και (2.1.11) παίρνουμε

$$\mathbb{P}(C) \leqslant 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) < \alpha^2,$$

και έπεται η (2.1.8).

Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Η υπόθεση μας τώρα είναι η (2.1.9), δηλαδή ότι $\mathbb{P}(A) < \alpha$. Τώρα, στη θέση των C και C_m, θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$D = \{M > 2r\}$$

και

$$D_m = \Big\{ \sup_{p \geqslant 0} \|V_{m+p} - V_{m-1}\| > r \Big\}.$$

Αντί για την (2.1.10) έχουμε τώρα την

$$\mathbb{P}(D) \leqslant \mathbb{P}(A) \sup_m \mathbb{P}(D_m),$$

και αντί για την (2.1.11) έχουμε την

$$\mathbb{P}(D_m) \leqslant 2\mathbb{P}(A).$$

Έπεται ότι $\mathbb{P}(D) \leqslant 2\mathbb{P}(A)^2 < 2\alpha^2$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα του Θεωρήματος 2.1.5 είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.1.6. *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως τότε η $\|V\|$ ανήκει στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$. Αντίστοιχα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n$ είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως τότε η M ανήκει στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Θεωρούμε μια αύξουσα συνάρτηση $\varphi(t)$, $t \in [0,\infty)$. Τότε,

$$\int_{\Omega}\varphi(\|V(\omega)\|)\,d\mathbb{P}(\omega) = -\int_0^{\infty}\varphi(t)dp(t), \tag{2.1.12}$$

όπου $p(t) = \mathbb{P}(\|V\| > t)$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιον ώστε η (2.1.7) να ισχύει με $\alpha < 1/2$. Τότε,

$$p(r) < \frac{1}{4}(2\alpha), \quad p(2r) < \frac{1}{4}(2\alpha)^2, \dots, p(2^n r) < \frac{1}{4}(2\alpha)^{2n}.$$

Συνεπώς,

$$-\int_{2^n r}^{2^{n+1}r}\varphi(t)\,dp(t) < \frac{1}{4}(2\alpha)^{2^n}\varphi(2^{n+1}r).$$

Το ολοκλήρωμα της (2.1.12) συγκλίνει αν

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\alpha)^{2^n}\varphi(2^{n+1}r) < \infty. \tag{2.1.13}$$

Ειδικότερα, αυτό ισχύει αν $\varphi(t) = t^p$, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$.

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος, αν υποθέσουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n$ είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως και θεωρήσουμε την M αντί για την $\|V\|$. □

Στην πραγματικότητα έχουμε αποδείξει κάτι ισχυρότερο από το Θεώρημα 2.1.6: η $\varphi(\|V\|)$, ή η $\varphi(M)$ αντίστοιχα, ανήκει στον $L^1(\Omega)$ αν η (2.1.13) ισχύει για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του r. Για παράδειγμα, η $\exp(\lambda\|V\|)$ ανήκει στον $L^1(\Omega)$ αν ο $\lambda > 0$ είναι αρκετά μικρός.

Είναι γενικά δύσκολο το να δώσουμε μια ακριβή συνθήκη για τα u_n η οποία να είναι ισοδύναμη με το ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n$ είναι σχεδόν βεβαίως συγκλίνουσα ή σχεδόν βεβαίως φραγμένη. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι συστέλλοντας τα u_n βελτιώνουμε πάντα τη συμπεριφορά αυτής της σειράς.

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω ότι η τυχαία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως ή είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως. Αν (λ_n) είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ – ανάλογα με τον χώρο Banach τον οποίο θεωρούμε – τότε η τυχαία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n\lambda_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως ή είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Η περίπτωση των μιγαδικών συντελεστών λ_n προκύπτει από την περίπτωση των πραγματικών συντελεστών λ_n, και γι' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$ (θεωρώντας τους $\alpha|\lambda_n|$ αντί για τους λ_n, όπου $\alpha > 0$ αρκετά μικρός). Αν οι λ_n παίρνουν μόνο τις τιμές 0 ή 1 τότε το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n\lambda_n u_n = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n u_n + \sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n(2\lambda_n - 1)u_n\Big) \tag{2.1.14}$$

και οι σειρές στο δεξιό μέλος έχουν την ίδια κατανομή. Επιπλέον, αν ορίσουμε

$$M'(\omega) = \sup_m \Big\| \sum_{n=1}^m \epsilon_n(\omega)\lambda_n u_n \Big\|,$$

τότε η (2.1.14) μας δίνει

$$\mathbb{E}(M') \leqslant \mathbb{E}(M), \tag{2.1.15}$$

και γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(M) < \infty$ από το Θεώρημα 2.1.6. Στη γενική περίπτωση, όπου $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$, γράφουμε

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_{nk}}{2^k},$$

όπου $\lambda_{nk} \in \{0, 1\}$. Τότε, τυπικά έχουμε

$$\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \lambda_{nk} u_n.$$

Θέτοντας

$$M'_k(\omega) = \sup_m \Big\| \sum_{n=1}^m \epsilon_n(\omega)\lambda_{nk} u_n \Big\|$$

και γράφοντας την (2.1.15) για κάθε M'_k αντί της M', παίρνουμε

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} M'_k \Big) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \mathbb{E}(M'_k) \leqslant \mathbb{E}(M) < \infty,$$

συνεπώς

$$\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} M'_k < \infty \;\; \text{σχεδόν βεβαίως.}$$

Έπεται ότι η $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \lambda_n u_n$ είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως. Μάλιστα, ένα επιχείρημα κυρτότητας δείχνει ότι

$$\mathbb{E}\Big(\Big\| \sum_n \epsilon_n \lambda_n u_n \Big\|^p \Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(\Big\| \sum_n \epsilon_n u_n \Big\|^p \Big) \tag{2.1.16}$$

για πεπερασμένα αθροίσματα, όταν $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$ και $p > 1$. Μπορούμε μάλιστα να επεκτείνουμε την (2.1.16) για σειρές, βασιζόμενοι στο επιχείρημα που ακολουθεί.

Υποθέτοντας ότι η $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, μπορούμε να ορίσουμε

$$M^{(\nu)}(\omega) = \sup_{m \geqslant \nu} \Big\| \sum_{n=\nu}^m \epsilon_n(\omega) u_n \Big\|$$

και

$$M'^{(\nu)}(\omega) = \sup_{m \geqslant \nu} \Big\| \sum_{n=\nu}^m \epsilon_n(\omega)\lambda_n u_n \Big\|.$$

Από την (2.1.15) έχουμε

$$\mathbb{E}(M'^{(\nu)}) \leqslant \mathbb{E}(M^{(\nu)}). \tag{2.1.17}$$

Επιπλέον, $M^{(\nu)}(\omega) \leqslant 2M(\omega)$ για κάθε ω και, σχεδόν βεβαίως, $\lim_{\nu\to\infty} M^{(\nu)} = 0$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, το δεξιό μέλος της (2.1.17) τείνει στο 0 όταν $\nu \to \infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathbb{E}(M'^{(\nu)} = 0$$

και υπάρχει ακολουθία Λ φυσικών τέτοια ώστε

$$\lim_{\nu\to\infty, \nu\in\Lambda} M'^{(\nu)} = 0$$

σχεδόν βεβαίως. Ισοδύναμα, η $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \lambda_n u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. □

2.2 Τυχαίες σειρές Fourier σε χώρους Hilbert

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δώσουμε ικανή και αναγκαία σύνθήκη για το πότε μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων σε έναν χώρο Hilbert συγκλίνει σχεδόν βεβαίως ή είναι φραγμένη σχεδόν βεβαίως.

Έστω H ένας πραγματικός ή μιγαδικός χώρος Hilbert. Συμβολίζουμε με $\langle x, y\rangle$ το εσωτερικό γινόμενο των $x, y \in H$ και με $\|x\|$ τη νόρμα του $x \in H$. Αν X και Y είναι τυχαία διανύσματα στον H τότε οι $\|X\|$, $\|Y\|$ και $\langle X, Y\rangle$ είναι τυχαίες μεταβλητές.

Αν υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y \in H$ η τυχαία μεταβλητή $\langle X, y\rangle \in L^1(\Omega)$ και

$$\mathbb{E}\,\langle X, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

γράφουμε

$$X \in L^1_H(\Omega) \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, d\omega = x$$

και λέμε ότι το $x = \mathbb{E}(X)$ είναι η μέση τιμή του X.

Αν $\|X\| \in L^2(\Omega)$ τότε γράφουμε $X \in L^2_H(\Omega)$. Αν $X \in L^2_H(\Omega)$ τότε η απεικόνιση $y \mapsto \mathbb{E}\langle X, y\rangle$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον H, συνεπώς $X \in L^1_H(\Omega)$.

Η *διασπορά* του X ορίζεται από την

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\|X - \mathbb{E}(X)\|^2$$

και δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε κάποιο σταθερό διάνυσμα στο τυχαίο διάνυσμα X:

$$\mathrm{Var}(z + X) = \mathbb{E}\|z + X - \mathbb{E}(z + X)\|^2 = \mathbb{E}\|X - \mathbb{E}(X)\|^2 = \mathrm{Var}(X).$$

Έχουμε επίσης, για κάθε $a \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Var}(aX) = \mathbb{E}\|aX - \mathbb{E}(aX)\|^2 = |a|^2\mathbb{E}\|X - \mathbb{E}(X)\|^2 = |a|^2\mathrm{Var}(X).$$

Παρατηρήστε ότι αν X και Y είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στον $L^2_H(\Omega)$ τότε

$$\mathbb{E}(\langle X, Y\rangle) = \langle \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)\rangle,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}\|(X+Y)-\mathbb{E}(X+Y)\|^2 = \mathbb{E}\|(X-\mathbb{E}(X))+(Y-\mathbb{E}(Y))\|^2\\ &= \mathbb{E}\|X-\mathbb{E}(X)\|^2 + 2\mathbb{E}(\langle X-\mathbb{E}(X), Y-\mathbb{E}(Y)\rangle) + \mathbb{E}\|Y-\mathbb{E}(Y)\|^2\\ &= \mathrm{Var}(X) + 2\langle \mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X)), \mathbb{E}(Y-\mathbb{E}(Y)\rangle + \mathrm{Var}(Y)\\ &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y).\end{aligned}$$

Σε ό,τι ακολουθεί, θεωρούμε μια ακολουθία $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον H.

Θεώρημα 2.2.1 (ανισότητα Markov-Chebyshev για χώρους Hilbert)**.** *Αν $X \in L^1_H(\Omega)$ και $\alpha > 0$ τότε*

$$\mathbb{P}(\|X\| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{E}\|X\|}{\alpha}.$$

Ειδικότερα, αν $X \in L^1_H(\Omega)$ και $\alpha > 0$ τότε

$$\mathbb{P}(\|X-\mathbb{E}(X)\| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\alpha^2}.$$

Απόδειξη. Έστω $X \in L^1_H(\Omega)$ και $\alpha > 0$. Τότε,

$$\mathbb{E}\|X\| = \int \|X\|\, d\mathbb{P} \geqslant \int_{\{\|X\|\geqslant\alpha\}} \|X\|\, d\mathbb{P} \geqslant \alpha\mathbb{P}(\|X\| \geqslant \alpha).$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{P}(\|X\| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{E}\|X\|}{\alpha}.$$

Τώρα, για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}(\|X-\mathbb{E}(X)\| \geqslant \alpha) = \mathbb{P}(\|X-\mathbb{E}(X)\|^2 \geqslant \alpha^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\|X-\mathbb{E}(X)\|^2)}{\alpha^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\alpha^2}.$$

□

2.2.1 Η ανισότητα του Kolmogorov

Υποθέτουμε ότι $X_n \in L^2_H(\Omega)$ και $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n. Θα χρησιμοποιούμε τις

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_N) = 0$$

και

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_N)$$

για κάθε N. Από την ανισότητα του Chebyshev, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}(\|X_1 + \cdots + X_N\| > r) < \frac{1}{r^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_N)).$$

Από το Λήμμα 2.1.3 έπεται ότι, στην περίπτωση που τα X_n είναι συμμετρικά τυχαία διανύσματα, έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\leqslant n\leqslant N}\|X_1+\cdots+X_n\|>r\Big)<\frac{2}{r^2}(\mathrm{Var}(X_1)+\cdots+\mathrm{Var}(X_N))$$

για κάθε $r>0$. Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα ελαφρώς καλύτερο αποτέλεσμα χωρίς να υποθέσουμε τη συμμετρία των X_n.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $X_n\in L_H^2(\Omega)$ και $\mathbb{E}(X_n)=0$ για κάθε n, τότε*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\leqslant n\leqslant N}\|X_1+\cdots+X_n\|>r\Big)<\frac{1}{r^2}(\mathrm{Var}(X_1)+\cdots+\mathrm{Var}(X_N))$$

για κάθε $r>0$ και κάθε $N\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Γράφουμε $S_n:=X_1+\cdots+X_n$ και θεωρούμε τα ξένα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}
A_1: &= \{\|S_1\|>r\},\\
A_2: &= \{\|S_1\|\leqslant r,\|S_2\|>r\},\\
\vdots & \qquad\quad \vdots\\
A_N: &= \{\|S_1\|\leqslant r,\dots,\|S_{N-1}\|\leqslant r,\|S_N\|>r\}\\
A: &= A_1\cup\cdots\cup A_N.
\end{aligned}$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n=1}^N\mathbb{P}(A_n).$$

Έχουμε

$$r^2\mathbb{P}(A_n)\leqslant\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_n}\|X_1+\cdots+X_n\|^2).$$

Θεωρώντας τις $X=\mathbf{1}_{A_n}(X_1+\cdots+X_n)$ και $Y=(X_{n+1}+\cdots+X_N)$ παρατηρούμε ότι η X εξαρτάται μόνο από τα $X_1,\dots,X_n$ ενώ η Y μόνο από τα $X_{n+1},\dots,X_N$. Συνεπώς, οι X και Y είναι ανεξάρτητες, άρα έχουμε

$$\mathbb{E}(\langle X,Y\rangle)=\langle\mathbb{E}(X),\mathbb{E}(Y)\rangle=0.$$

Αφού η X μηδενίζεται έξω από το A_n, έχουμε επίσης

$$\mathbb{E}(\langle X,Y\rangle)=\mathbb{E}(\langle X,\mathbf{1}_{A_n}Y\rangle).$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\mathbb{E}(\|X+\mathbf{1}_{A_n}Y\|^2)=\mathbb{E}(\|X\|^2)+\mathbb{E}(\|\mathbf{1}_{A_n}Y\|^2)\geqslant\mathbb{E}(\|X\|^2).$$

Έπεται ότι

$$r^2\mathbb{P}(A_n)\leqslant\mathbb{E}(\|X+\mathbf{1}_{A_n}Y\|^2)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_n}\|S_N\|^2).$$

Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες για $n=1,2,\dots,N$ παίρνουμε

$$r^2\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{E}(\|S_N\|^2),$$

που ήταν η ζητούμενη ανισότητα. □

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $X_n \in L^2_H(\Omega)$ τέτοιες ώστε $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n και $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Τότε, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Ειδικότερα, αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \pm u_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ και $Y_n := \sup_j \|S_{n+j} - S_n\|$. Παρατηρούμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\inf_n Y_n = 0$.

Έστω $r > 0$. Έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\leqslant j\leqslant k} \|S_{n+j} - S_n\| \geqslant r\Big) \leqslant \frac{1}{r^2} \sum_{i=n+1}^{n+k} \mathrm{Var}(X_i) \leqslant \frac{1}{r^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_i).$$

Αφήνοντας το $k \to \infty$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant r) \leqslant \frac{1}{r^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_i).$$

Τότε,

$$\mathbb{P}\Big(\inf_n Y_n \geqslant t\Big) \leqslant \mathbb{P}(Y_n \geqslant r) \leqslant \frac{1}{r^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_i),$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\Big(\inf_n Y_n \geqslant r\Big) = 0.$$

Τώρα,

$$\mathbb{P}\Big(\inf_n Y_n > 0\Big) = \lim_{s\to\infty} \mathbb{P}\Big(\inf_n Y_n \geqslant \frac{1}{k}\Big) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\mathbb{P}\Big(\inf_n Y_n = 0\Big) = 1,$$

το οποίο δείχνει το θεώρημα. □

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $L^2_H(\Omega)$ με $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $\sup_n \|X_n\| \leqslant r$ σχεδόν βεβαίως, για κάποιον $r > 0$, και ότι*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_n \|S_n\| < \infty\Big) > 0.$$

Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση $\mathbb{P}\Big(\sup_n \|S_n\| < \infty\Big) > 0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $r' > 0$ ώστε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_n \|S_n\| < r'\Big) > 0.$$

Ορίζουμε
$$A=\Big\{\sup_n\|S_n\|\leqslant r'\Big\}$$
και, για κάθε i,
$$A_i=\Big\{\sup_{1\leqslant n\leqslant i}\|S_n\|\leqslant r'\Big\}.$$
Τότε, $A_i\downarrow A$. Τα $\{\mathbf{1}_{A_i},\|X_{i+1}\|^2\}$ και $\{\mathbf{1}_{A_i}S_i,X_{i+1}\}$ είναι ανεξάρτητα, συνεπώς
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|S_{i+1}\|^2)&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\langle S_i+X_{i+1},S_i+X_{i+1}\rangle)\\&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|S_i\|^2)+2\mathrm{Re}(\mathbb{E}(\langle\mathbf{1}_{A_i}S_i,X_{i+1}\rangle))+\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|X_{i+1}\|^2)\\&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|S_i\|^2)+0+\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i})\mathbb{E}(\|X_{i+1}\|^2)\\&\geqslant\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|S_i\|^2)+\mathbb{P}(A)\mathrm{Var}(X_{i+1}).\end{aligned}$$
Ορίζουμε $B_i=A_i\setminus A_{i+1}$. Τότε, $\|S_{i+1}\|\leqslant\|S_i\|+\|X_{i+1}\|\leqslant r+r'$ σχεδόν βεβαίως στο B_i. Άρα,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathrm{Var}(X_{i+1})&\leqslant\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_i}\|S_{i+1}\|^2)+[\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_{i+1}}\|S_{i+1}\|^2)-\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|S_i\|^2)]\\&\leqslant(r+r')^2\mathbb{P}(B_i)+[\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_{i+1}}\|S_{i+1}\|^2)-\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}\|S_i\|^2)].\end{aligned}$$
Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες, για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Var}(X_{i+1})&\leqslant(r+r')^2+\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_n}\|S_n\|^2)\\&\leqslant(r+r')^2+(r')^2<\infty.\end{aligned}$$
Αφού $\mathbb{P}(A)>0$ και $\mathrm{Var}(X_1)=\mathbb{E}(\|X_1\|^2)\leqslant r^2$, έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $L_H^2(\Omega)$. Αν οι $\sum_{n=1}^\infty\mathbb{E}(X_n)$ και $\sum_{n=1}^\infty\mathrm{Var}(X_n)$ συγκλίνουν, τότε η $\sum_{n=1}^\infty X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $Y_n=X_n-\mathbb{E}(X_n)$. Τότε, $\mathbb{E}(Y_n)=0$ για κάθε n, και η $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ είναι επίσης ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων. Έχουμε $\mathrm{Var}(Y_n)=\mathrm{Var}(X_n)$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty\mathrm{Var}(Y_n)$ συγκλίνει, από την υπόθεση. Από το Θεώρημα 2.2.4 συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{n=1}^\infty Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, άρα και η
$$\sum_{n=1}^\infty X_n=\sum_{n=1}^\infty(Y_n+\mathbb{E}(X_n))$$
συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. □

Λήμμα 2.2.6. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων με τιμές στον H. Θεωρούμε τα τυχαία διανύσματα*
$$Z_n(t,s):=X_n(t)-X_n(s),\qquad t,s\in\Omega$$
στον $(\Omega\times\Omega,\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\mathbb{P}\times\mathbb{P})$. Τότε, η $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων, συμμετρικών τυχαίων διανυσμάτων με τιμές στον H. Αν $X_n\in L_H^1(\Omega)$ για κάθε n, τότε $Z_n\in L_H^1(\Omega\times\Omega)$ για κάθε n και
$$\mathbb{E}(Z_n)=0\quad\textit{και}\quad\mathrm{Var}(Z_n)=2\mathrm{Var}(X_n).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της ανεξαρτησίας των Z_n αρκεί να ελέγξουμε ότι αν A_j, B_j είναι υποσύνολα του Ω στην σ-άλγεβρα που παράγεται από την X_j τότε

$$(\mathbb{P}\times\mathbb{P})\Big(\bigcap_{j=1}^{n}(A_j\times B_j)\Big)=\prod_{j=1}^{n}(\mathbb{P}\times\mathbb{P})(A_j\times B_j).$$

Για την συμμετρία, θεωρούμε $B\in\mathcal{B}(H)$ και θέτουμε $A:=\{Z_n\in B\}$. Τότε,

$$A^-:=\{-Z_n\in B\}=\{(s,t):(t,s)\in A\},$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}\times\mathbb{P})(A^-)&=\iint \mathbf{1}_{A^-}(s,t)\,d\mathbb{P}(t)\,d\mathbb{P}(s)\\&=\iint \mathbf{1}_{A}(t,s)\,d\mathbb{P}(t)\,d\mathbb{P}(s)=(\mathbb{P}\times\mathbb{P})(A).\end{aligned}$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θέτουμε $X_n'(t,s):=X_n(t)$ και $X_n''(t,s):=X_n(s)$. Τότε $Z_n=X_n'-X_n''$, άρα

$$\mathbb{E}\|Z_n\|\leqslant\mathbb{E}\|X_n'\|+\mathbb{E}\|X_n''\|=2\mathbb{E}\|X_n\|.$$

Συνεπώς, $Z_n\in L_H^1(\Omega\times\Omega)$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n)&=\iint[X_n(t)-X_n(s)]\,d\mathbb{P}(t)\,d\mathbb{P}(s)\\&=\iint X_n(t)\,d\mathbb{P}(t)\,d\mathbb{P}(s)-\iint X_n(s)\,d\mathbb{P}(t)\,d\mathbb{P}(s)\\&=\mathbb{E}(X_n)-\mathbb{E}(X_n)=0.\end{aligned}$$

Τέλος, αφού οι X_n' και $-X_n''$ είναι ανεξάρτητες, έχουμε $\mathrm{Var}(Z_n)=\mathrm{Var}(X_n')+\mathrm{Var}(-X_n'')=2\mathrm{Var}(X_n)$. □

Θεώρημα 2.2.7. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $L_H^1(\Omega)$. Αν η τυχαία σειρά $\sum_{n=1}^\infty X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, και υπάρχει $r>0$ τέτοιος ώστε $\sup_n\|X_n\|\leqslant r$ σχεδόν βεβαίως, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(X_n)$ και $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}(X_n)<\infty$ συγκλίνουν.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τις Z_n όπως στο Λήμμα 2.2.6. Οι Z_n είναι ανεξάρτητες. Θεωρούμε τα σύνολα

$$C:=\Big\{\text{η }\sum_{n=1}^\infty Z_n\ \text{ συγκλίνει στον } H\Big\}\quad\text{και}\quad A:=\Big\{\text{η }\sum_{n=1}^\infty X_n\ \text{ συγκλίνει στον } H\Big\}.$$

Έχουμε $A\times A\subset C$ και από την υπόθεση ότι η $\sum_{n=1}^\infty X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως έχουμε $\mathbb{P}(A)=1$. Συνεπώς, $(\mathbb{P}\times\mathbb{P})(C)=1$.

Από την υπόθεση ότι $\sup_n\|X_n\|\leqslant r$ σχεδόν βεβαίως και την ανεξαρτησία των Z_n, βλέπουμε ότι $\sup_n\|Z_n\|\leqslant 2r$ σχεδόν βεβαίως, $\mathbb{E}(Z_n)=0$ και

$$C\subset\Big\{\sup_n\Big\|\sum_{j=1}^n Z_j\Big\|<\infty\Big\}.$$

Από το Θεώρημα 2.2.4 συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Z_n) < \infty. \tag{2.2.1}$$

Τώρα, ορίζουμε $Y_n := X_n - \mathbb{E}(X_n)$. Από την (2.2.1) και το Θεώρημα 2.2.3 βλέπουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

συγκλίνει. $\square$

Θεώρημα 2.2.8 (θεώρημα τριών σειρών του Kolmogorov)**.** *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων με τιμές στον H. Θεωρούμε $r > 0$ και ορίζουμε*

$$Y_n := X_n \cdot \mathbf{1}_{\{\|X_n\| \leqslant r\}}.$$

Τότε, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στον H αν και μόνο αν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_n) \quad \textit{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| > r)$$

συγκλίνουν.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον H διότι $Y_n = \varphi \circ X_n$, όπου $\varphi(x) = \mathbf{1}_{\{\|x\| \leqslant r\}}(x)\|x\|$. Υποθέτουμε αρχικά ότι οι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| > r)$$

συγκλίνουν. Από το Θεώρημα 2.2.5 η $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| > r) < \infty,$$

το λήμμα Borel-Cantelli μας δίνει ότι $X_n = Y_n$ τελικά με πιθανότητα 1. Άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Τότε,

$$\mathbb{P}(X_n \not\to 0) \leqslant \mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \ \text{ αποκλίνει}\Big) = 0,$$

άρα $\mathbb{P}(\limsup_n\{\|X_n\| > r\} = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $\mathbb{P}(\limsup_n\{X_n \neq Y_n\}) = 0$. Έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.

Από την $\mathbb{P}(\limsup_n\{\|X_n\| > r\} = 0$ και την ανεξαρτησία των X_n έπεται επίσης ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| > r) < \infty.$$

Τώρα, το Θεώρημα 2.2.7 δείχνει οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ συγκλίνουν. $\square$

2.2.2 Οι ανισότητες Paley-Zygmund

Θεώρημα 2.2.9 (ανισότητα Paley-Zygmund). *Έστω $X_n \in L^1_H(\Omega)$ με $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε*

$$\mathbb{E}\|X_n\|^4 \leqslant \alpha \left(\mathbb{E}(\|X_n\|^2)\right)^2$$

για κάθε n. Θεωρούμε $\beta \in (0,1)$ και ορίζουμε $c = (1-\beta)^2 \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\alpha}\right\}$. Τότε,

$$\mathbb{P}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2 \geqslant \beta \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)\Big) \geqslant c.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,\|X_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,\|X_i - \mathbb{E}(X_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\mathbb{P}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2 \geqslant \beta\,\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2\Big) \geqslant c.$$

Αν $\mathbb{E}\,\|\sum_{i=1}^n X_i\|^2 = 0$ τότε ζητάμε

$$\mathbb{P}(\|\sum_{i=1}^n X_i\|^2 \geqslant 0) \geqslant c,$$

που ισχύει τετριμμένα διότι $\|\sum_{i=1}^n X_i\|^2 \geqslant 0$ σχεδόν βεβαίως και $0 < c < 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n X_i\|^2 > 0$. Από το λήμμα των Paley-Zygmund (Θεώρημα 1.1.6) έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2 \geqslant \beta\,\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2\Big) \geqslant (1-\beta)^2 \frac{\mathbb{E}^2(\|\sum_{i=1}^n X_i\|^2)}{\mathbb{E}(\|\sum_{i=1}^n X_i\|^4)}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}^2\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2\Big) \geqslant \min\{1/3, 1/\alpha\}\,\mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^4\Big).$$

Γράφουμε

$$\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^4 = \Big(\sum_{i,j=1}^n \langle X_i, X_j\rangle\Big)^2 = \sum_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} \langle X_i, X_j\rangle\langle X_k, X_\ell\rangle,$$

και χρησιμοποιώντας την

$$\big|\mathbb{E}\,|\langle X_i, X_j\rangle\langle X_k, X_\ell\rangle|\,\big| \leqslant \mathbb{E}(\|X_r\|^2)\mathbb{E}(\|X_s\|^2)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^4\Big) &\leqslant \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\|X_i\|^4) + 6\sum_{1\leqslant r<s\leqslant n}\mathbb{E}(\|X_r\|^2)\mathbb{E}(\|X_s\|^2)\\ &\leqslant \alpha\sum_{j=1}^n \mathbb{E}^2(\|X_j\|^2) + 6\sum_{1\leqslant r<s\leqslant n}\mathbb{E}(\|X_r\|^2)\mathbb{E}(\|X_s\|^2)\\ &\leqslant \max\{\alpha,3\}\Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\|X_i\|^2\Big)^2\\ &= \max\{\alpha,3\}\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n X_i\Big\|^2\Big)^2,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. □

2.2.3 S-αθροισιμότητα σε χώρους Hilbert

Θεώρημα 2.2.10. *Έστω $S=(a_{nj})_{n,j=1}^\infty$ άπειρος πίνακας αθροισιμότητας και $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον H. Τότε,*

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^\infty X_n \;\; S-\text{αθροίσιμη}\Big) = 0 \text{ ή } 1$$

και

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^\infty X_n \;\; S-\text{φραγμένη}\Big) = 0 \text{ ή } 1.$$

Απόδειξη. Για κάθε φυσικό αριθμό m ορίζουμε

$$\mathcal{T}_m := \sigma\left(\bigcup_{j=m}^\infty \sigma(X_j)\right) \quad \text{και} \quad \mathcal{T}_\infty = \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{T}_m.$$

Σταθεροποιούμε $m\in\mathbb{N}$. Το σύνολο των $\omega\in\Omega$ για τα οποία η σειρά $\sum_{j=1}^\infty a_{nj}X_j$ συγκλίνει στον H είναι το

$$C_n := \bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{p=m}^\infty\bigcap_{q=p}^\infty\Big\{\Big\|\sum_{j=p}^q a_{nj}X_j\Big\| < \frac{1}{k}\Big\}\in\mathcal{T}_m,$$

άρα το σύνολο

$$C := \bigcap_{n=1}^\infty C_n \in \mathcal{T}_m.$$

Για κάθε $r>m$ έχουμε ότι ο $\|\sum_{j=1}^r (a_{kj}-a_{nj})X_j\|$ είναι στο διάστημα με άκρα

$$\Big\|\sum_{j=m+1}^r (a_{kj}-a_{nj})X_j\Big\| \pm \Big\|\sum_{j=1}^m (a_{kj}-a_{nj})X_j\Big\|.$$

Έχουμε επίσης

$$\lim_{k,n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^m (a_{kj}-a_{nj})X_j\Big\| = 0$$

σχεδόν βεβαίως, διότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nj} = 1$ για κάθε j. Αν ορίσουμε

$$A := C \cap \Big\{ \limsup_{k,n\to\infty} \limsup_{r\to\infty} \Big\| \sum_{j=m+1}^{r} (a_{kj} - a_{nj}) X_j \Big\| = 0 \Big\},$$

έχουμε $A \in \mathcal{T}_m$. Ομοίως, για το

$$B := C \cap \Big\{ \limsup_{n\to\infty} \limsup_{r\to\infty} \Big\| \sum_{j=m+1}^{r} a_{nj} X_j \Big\| < \infty \Big\}$$

έχουμε $B \in \mathcal{T}_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A, B \in \mathcal{T}_\infty$. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από τον 0-1 νόμο του Kolmogorov. $\square$

Θεώρημα 2.2.11. *Έστω $X_n \in L^1_H(\Omega)$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε*

$$\mathbb{E}\|X_n\|^4 \leqslant \alpha\big(\mathbb{E}\|X_n\|^2\big)^2$$

για κάθε n, και ότι υπάρχει άπειρος πίνακας αθροισιμότητας S τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \ \ S - \textit{φραγμένη} \Big) > 0.$$

Τότε, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.

Απόδειξη. Έστω $S = (a_{nj})_{n,j=1}^{\infty}$ ο πίνακας αθροισιμότητας. Θεωρούμε τυχόν $0 < \beta < 1$ και θέτουμε $\eta = (1-\beta)^2 \min\{1/3, 1/\alpha\}$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} A_{nk} &:= \Big\{ \Big\| \sum_{j=1}^{k} a_{nj} X_j \Big\|^2 \geqslant \beta \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Var}(a_{nj} X_j) \Big\}, \\ A_n &:= \limsup_{k\to\infty} A_{nk} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=p}^{\infty} A_{nk}, \\ A &:= \limsup_{n\to\infty} A_n. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{P}(A_{nk}) \geqslant \eta$ για κάθε $n, k \geqslant 1$, άρα $\mathbb{P}(A_n) \geqslant \eta$ για κάθε $n \geqslant 1$, και τελικά

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \eta > 0.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \ S - \text{φραγμένη}) = 1$, άρα υπάρχει $\omega \in A$ τέτοιο ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ να είναι S-φραγμένη. Έπεται ότι, για κάθε $n \geqslant 1$ η $\tau_n(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} X_j(\omega)$ συγκλίνει στον H, άρα υπάρχει $b \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\|\tau_n(\omega)\| \leqslant b$ για κάθε $n \geqslant 1$.

Από τον ορισμό του A υπάρχει άπειρο υποσύνολο J του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\omega \in A_n$ για κάθε $n \in J$. Όμοια, για κάθε $n \in J$, το σύνολο $\{k \in \mathbb{N} : \omega \in A_{nk}\}$ είναι άπειρο. Αφήνοντας το $k \to \infty$ μέσα από το σύνολο αυτών των k, από την ανισότητα στον ορισμό του συνόλου A_{nk} παίρνουμε

$$b^2 \geqslant \|\tau_n(\omega)\|^2 \geqslant \beta \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|^2 \mathrm{Var}(X_j)$$

για κάθε $n \in J$. Αφήνοντας το $n \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_j) \leqslant b^2/\beta.$$

Έπεται ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ και ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. □

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών. Θα χρειαστούμε μερικά στοιχειώδη λήμματα.

Λήμμα 2.2.12. *Αν $s_n \to s$ στον H τότε $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} s_k \to s$ στον H.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιον ώστε $\|s_n - s\| < \varepsilon/2$ για κάθε $n > n_0$. Υπάρχει επίσης $n_1 > n_0$ ώστε

$$\frac{1}{n_1}\Big\|\sum_{k=1}^{n_0}(s_k - s)\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $n > n_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - s\Big\| &= \Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k - s)\Big\| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\Big\|\sum_{k=1}^{n_0}(s_k - s)\Big\| + \frac{1}{n}\Big\|\sum_{k=n_0+1}^{n}(s_k - s)\Big\| \\ &\leqslant \frac{1}{n_1}\Big\|\sum_{k=1}^{n_0}(s_k - s)\Big\| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\|s_k - s\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} s_k \to s$ στον H. □

Πρόταση 2.2.13. *Έστω (a_n) ακολουθία στον H. Αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει στον H τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $s_0 = 0$ και για $k \geqslant 1$ ορίζουμε $s_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{j}$. Από την υπόθεση υπάρχει $s \in H$ ώστε $s_k \to s$. Έχουμε

$$a_j = j(s_j - s_{j-1}) = [(j+1)s_j - js_{j-1}] - s_j$$

για κάθε $j \geqslant 1$. Αθροίζοντας ως προς $j = 1, \ldots, n$ και διαιρώντας με n παίρνουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{n+1}{n}s_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j \to s - s = 0$$

καθώς το $n \to \infty$. □

Θεώρημα 2.2.14 (ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών). *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $L_H^1(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Τότε, σχεδόν βεβαίως έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) = 0.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$Y_n := \frac{1}{n}(X_n - \mathbb{E}(X_n)).$$

Τότε, $Y_n \in L_H^1(\Omega)$, οι Y_n είναι ανεξάρτητες και $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Επίσης,

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathbb{E}(\|Y_n\|^2) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_n).$$

Από την υπόθεση έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_n) < \infty$, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Τώρα, θεωρώντας οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$ για το οποίο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega)$ συγκλίνει και εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα με $a_n := X_n(\omega) - \mathbb{E}(X_n)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) \to 0$$

σχεδόν βεβαίως. □

Θεώρημα 2.2.15 (ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών). *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $L_H^1(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) = 0.$$

Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) \Big\| \geqslant \epsilon\Big) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) \Big\| \geqslant \epsilon\Big) &= \mathbb{P}\Big(\Big\| \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}(X_k)) \Big\| \geqslant n\epsilon\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\| \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) \Big\| \geqslant n\epsilon\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\| \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \Big\| \geqslant n\epsilon\Big) \\
&\leqslant \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{(n\epsilon)^2},
\end{aligned}$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k)))\Big\| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{(n\epsilon)^2}$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k) = 0.$$

□

2.3 Τυχαίες σειρές Fourier: σύγκλιση και απόκλιση

Το αντικείμενο της μελέτης μας σε αυτήν την παράγραφο είναι τυχαίες τριγωνομετρικές σειρές με συντελεστές τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{ikt},$$

όπου X_k είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ενίοτε όλες συμμετρικές, σπανίως ισοκατανεμημένες και μιγαδικές, και $t \in [0, 2\pi)$.

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} X_k e^{ikt}$$

της παραπάνω σειράς. Προφανώς, η S_n είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση ορισμένη στον τόρο. Εάν η ακολουθία S_n συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, τότε η αρχική σειρά συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Αυτή η σειρά καλείται *τυχαία σειρά Fourier*, και η ακολουθία των συντελεστών της είναι η $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Εμείς θα καταλήξουμε, ύστερα από μια σειρά θεωρημάτων, στο θεώρημα Paley-Zygmund το οποίο δίδει γενικά κριτήρια σύγκλισης και απόκλισης των τυχαίων σειρών Fourier.

Οι σειρές μας μπορούν επίσης να παίρνουν και τη μορφή

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_k e^{ikt},$$

όπου $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ακολουθία Rademacher ή ακολουθία Steinhaus ή μια ακολουθία κανονικών τυχαίων μεταβλητών με μιγαδικές τιμές.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω $x_n, \varphi_n \in \mathbb{R}$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \infty$ τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 \cos^2(nt + \varphi_n) = \infty$ σχεδόν για κάθε t.*

Απόδειξη. Αν το συμπέρασμα δεν ισχύει τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε το σύνολο

$$S = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \cos^2(nt + \varphi_n) \leqslant M \Big\}$$

να έχει μέτρο $\lambda(S) > 0$. Συνεπώς,

$$\int_S \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \cos^2(nt+\varphi_n)\, d\lambda(t) \leqslant \int_S M\, d\lambda(t) \leqslant M\lambda(S).$$

Γράφουμε

$$\cos^2(nt+\varphi_n) = \frac{1}{4}(2 + e^{-2i(nt+\varphi_n)} + e^{2i(nt+\varphi_n)})$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_S \cos^2(nt+\varphi_n)\, d\lambda(t) &= \frac{1}{4}\int_S (2 + e^{-2i(nt+\varphi_n)} + e^{2i(nt+\varphi_n)}) d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{4}\int_S (2 + e^{-2i(nt+\varphi_n)} + e^{2i(nt+\varphi_n)})\, d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2}\int_S d\lambda(t) + \frac{1}{4}\int_S e^{-2i(nt+\varphi_n)}\, d\lambda(t) + \frac{1}{4}\int_S e^{2i(nt+\varphi_n)}\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\int_S e^{2i(nt+\varphi_n)}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\int_S e^{-2i(nt+\varphi_n)}\, d\lambda(t) = 0$$

και συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \cos^2(nt+\varphi_n)\, d\lambda(t) = \frac{1}{2}\lambda(S).$$

Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει

$$\int_S \cos^2(nt+\varphi_n))\, d\lambda(t) > \frac{1}{3}\lambda(S),$$

δηλαδή

$$M\lambda(S) > \sum_{n=n_0+1}^{\infty} x_n^2 \int_S (\cos(nt+\varphi_n))^2\, d\lambda(t) > \frac{\lambda(S)}{3}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} x_n^2,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$3M > \sum_{n=n_0+1}^{\infty} x_n^2,$$

και έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Θεώρημα 2.3.2. *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \infty$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n \cos(nt+\varphi_n)$ *αποκλίνει σχεδόν βεβαίως, όπου* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ακολουθία Rademacher.*

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \cos(kt+\varphi_k)$ και θεωρούμε τα αθροίσματα Fejér

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big) x_k \cos(kt+\varphi_k) r_k.$$

Τώρα, ορίζουμε

$$a_n(t) = \Big(\sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{k}{n}\Big)^2 x_k^2\cos^2(kt+\varphi_k)\Big)^{1/2}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.1.6 για $\gamma\in(0,1)$, $\delta=\frac{1}{3}(1-\gamma^2)^2$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}(\{\sigma_n(t)\geqslant\gamma a_n(t)\})\geqslant\delta.$$

Μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=\infty$ και $A\subseteq\mathbb{T}$ με $\lambda(A)=\pi$ ώστε $a_n(t)\geqslant w_n$ για κάθε $t\in A$.

Τώρα, ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned}
B_n &= \{(\omega,t)\in\Omega\times A : |\sigma_n(t)|\geqslant\gamma w_n\},\\
B_n^\omega &= \{t\in A : (\omega,t)\in B_n\},\\
B_n^t &= \{\omega\in\Omega : (\omega,t)\in B_n\},\\
\Gamma_n &= \{\omega\in\Omega : \lambda(B_n^\omega)\geqslant\gamma\}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(B_n)=\int_A \mathbb{P}(B_n^t)\,d\lambda(t)\geqslant\lambda(A)\delta=\pi\delta.$$

Επίσης,

$$\lambda(B_n)=\int_\Omega \mathbb{P}(B_n^\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)=\int_{\Gamma_n}\mathbb{P}(B_n^\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)+\int_{\Gamma_n^c}\mathbb{P}(B_n^\omega)d\mathbb{P}(\omega),$$

άρα

$$\pi\delta\leqslant\int_{\Gamma_n}\mathbb{P}(B_n^\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)+\int_{\Gamma_n^c}\mathbb{P}(B_n^\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)\leqslant\mathbb{P}(\Gamma_n)\pi+\delta\mathbb{P}(\Gamma_n^c),$$

και έπεται ότι

$$\mathbb{P}(\Gamma_n)\geqslant\frac{\pi\delta-\delta}{\pi-\delta}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\Gamma_n)=\infty.$$

Από το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}(\limsup_n\Gamma_n)=1.$$

Επίσης,

$$\int_A|\sigma_n(t)|\,d\lambda(t)\geqslant\int_{B_n^\omega}|\sigma_n(t)|\,d\lambda(t)\geqslant\gamma w_n\lambda(B_n^\omega).$$

Από τη μονοτονία του $\limsup$ παίρνουμε

$$\limsup_n\int_A|\sigma_n(t)|\,d\lambda(t)\geqslant\limsup_n\gamma w_n\lambda(B_n^\omega).$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε τελικά ότι

$$\limsup_n\int_A|\sigma_n(t)|\,d\lambda(t)=\infty$$

για κάθε $\omega \in \limsup_n \Gamma_N$, δηλαδή σχεδόν βεβαίως. Αυτό δείχνει ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(nt + \varphi_n) r_n$$

(σχεδόν βεβαίως) δεν είναι σειρά Fourier-Stieltjes καποιου μέτρου. □

Θεώρημα 2.3.3. *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(nt + \varphi_n) r_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε συνάρτηση f που ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$ για κάθε $p \in [1, \infty)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.3 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(nt + \varphi_n) r_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε κάποια συνάρτηση f. Μένει να δείξουμε ότι, σχεδόν βεβαίως, $f \in L^p(\mathbb{T})$ για κάθε $p \in [1, \infty)$. Έστω $a > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{af(t)}) &= \mathbb{E}(e^{a \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(nt+\varphi_n) r_n}) = \mathbb{E}(\prod_{n=1}^{\infty} e^{a x_n \cos(nt+\varphi_n) r_n}) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{a x_n \cos(nt+\varphi_n) r_n}) \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} \cosh(a x_n \cos(nt + \varphi_n) r_n) \\
&\leqslant \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(a x_n \cos(nt+\varphi_n) r_n)^2}{2}} == \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(a x_n \cos(nt+\varphi_n))^2}{2}} \\
&\leqslant \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(a x_n)^2}{2}} = e^{\frac{a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την $\cosh(x) \leqslant e^{\frac{x^2}{2}}$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού

$$\mathbb{E}(f^{2k+1}(t)) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} \mathbb{E}(f^{2k}(t)) \leqslant e^{\frac{a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}.$$

Μπορούμε τώρα να θέσουμε $a^2 = \frac{2k}{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$, και έχουμε

$$\mathbb{E}(f^{2k}(t)) \leqslant (2k)! \Big(\frac{2k}{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2})^{-k} e^k \leqslant C^k k! (2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2)^k,$$

όπου C κάποια θετική σταθερά. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}(e^{af^2(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \mathbb{E}(f^{2k}(t)) \leqslant C^k \sum_{k=1}^{\infty} \Big(2a \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \Big)^k$$

και αν υποθέσουμε ότι

$$0 < 2a \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < 1$$

τότε

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^{2\pi} e^{af^2(t)} \, d\lambda(t) \Big) = \int_0^{2\pi} \mathbb{E}(e^{af^2(t)}) \, d\lambda(t) < \infty,$$

άρα

$$\int_0^{2\pi} e^{af(t)^2}\, d\lambda(t) < \infty$$

σχεδόν βεβαίως γι' αυτήν την επιλογή του a, το όποίο δείχνει ότι $f \in L_p(T)$ για κάθε $p \geqslant 1$ σχεδόν βεβαίως. $\square$

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $X_n \in L_2(\Omega)$ και*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\mathbb{E}^2(X_n)} < \infty.$$

Τότε, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει σχεδόν βεβαίως αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ συγκλίνει ή αποκλίνει αντιστοίχως.

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ συγκλίνει. Τότε, υπάρχει $C \in (0,\infty)$ ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) \leqslant C$. Ορίζουμε

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Έχουμε

$$\mathbb{P}(f = \infty) \leqslant \mathbb{P}(f > M) \leqslant \frac{\mathbb{E}(f)}{M} = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) \leqslant \frac{C}{M}$$

για κάθε $M > 0$. Στέλνοντας το M στο άπειρο παίρνουμε $\mathbb{P}(f = \infty) = 0$.

Αν τώρα η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(X_n)$ αποκλίνει, τότε θεωρούμε $\lambda \in (0,1)$ και από το Θεώρημα 1.1.6 έχουμε

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > \lambda\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)) > (1-\lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n))^2}{(\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n))^2}.$$

Αφού

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\mathbb{E}^2(X_n)} < \infty,$$

υπάρχει $A \in (0,\infty)$ ώστε

$$\frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\mathbb{E}^2(X_n)} \leqslant A,$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}(X_n^2) \leqslant A\mathbb{E}^2(X_n)$$

για κάθε n. Άρα,

$$\mathbb{E}^2(X_1 + \cdots + X_n) > \frac{\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{A}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > \lambda\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)) > \frac{(1-\lambda)^2}{A}$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty\Big) > 0.$$

Από τον 0-1 νόμο του Kolmogorov συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ αποκλίνει σχεδόν βεβαίως. $\square$

Θεώρημα 2.3.5 (Paley-Zygmund). *Υποθέτουμε ότι*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}(X_n^4)}{\mathbb{E}^2(X_n^2)} < \infty.$$

Τότε:

(α) *Αν* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ *τότε η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n \cos(nt+\varphi_n) r_n$ *συγκλίνει σχεδόν βεβαίως σε μια συνάρτηση* f *που ανήκει στον* $L^p(\mathbb{T})$ *για κάθε* $p \in [1,\infty)$.

(β) *Αν* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) = \infty$ *τότε η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n \cos(nt+\varphi_n) r_n$ *αποκλίνει σχεδόν βεβαίως και δεν είναι σειρά Fourier-Stieltjes.*

Απόδειξη. (α) Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ τότε από το Λήμμα 2.3.4 έχουμε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^2 < \infty$ σχεδόν βεβαίως. Τότε, από το Θεώρημα 2.3.3 υπάρχει f που ανήκει στον $L^p(T)$ για κάθε $p \geqslant 1$ ώστε

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(nt+\varphi_n) r_n$$

σχεδόν βεβαίως.

(β) Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) = \infty$ τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^2 = \infty$ σχεδόν βεβαίως, από το Λήμμα 2.3.4. Άρα, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n \cos(nt+\varphi_n) r_n$ αποκλίνει σχεδόν βεβαίως, και έπεται ότι δεν είναι σειρά Fourier-Stieltjes. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τυχαίες σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

3.1 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Συμβολίζουμε με $M(\mathbb{R})$ την κλάση των κανονικών Borel μέτρων $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

Πρόταση 3.1.1 (ανισότητα Bernstein). (α) *Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$ με $\mathrm{supp}|\mu| \subset [-\alpha, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$. Ορίζουμε*

$$\varphi(z) := \int e^{izu} d\mu(u), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, η φ είναι ακέραια συνάρτηση και $\|\varphi'\|_\infty \leqslant \alpha \|\varphi\|_\infty$.

(β) *Αν $\varphi(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $c_n \in \mathbb{C}$, είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N, τότε $\|\varphi'\|_\infty \leqslant N \|\varphi\|_\infty$, με ισότητα αν $\varphi(x) = \sin(Nx)$.*

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης ως προς $u \in [-\alpha, \alpha]$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi(z) = \int e^{izu} d\mu(u) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(izu)^n}{n!} \, d\mu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \Big[\int u^n d\mu(u) \Big] \, z^n.$$

Συνεπώς, η φ είναι ακέραια συνάρτηση. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} \Big[\int u^n d\mu(u) \Big] \, z^{n-1} = \int \sum_{n=0}^{\infty} iu \frac{(iuz)^n}{n!} \, d\mu(u) \\ &= \int iue^{izu} d\mu(u). \end{aligned}$$

Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ αν } |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \text{ αν } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ -\pi - x & , \text{ αν } -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Η f είναι περιττή, οπότε υπολογίζουμε τους συντελεστές ημιτόνου της για $n \in \mathbb{N}$: έχουμε

$$\begin{aligned}
b_n &:= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\Big[f(x)\frac{\cos nx}{n}\Big]\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi n}\int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi n}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi n}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\cdot 2\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2},
\end{aligned}$$

δηλαδή $b_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος και $b_n = \frac{4}{\pi n^2}(-1)^k$ αν $n = 2k+1$.

Αφού $\sum_n |b_n| < \infty$, παίρνουμε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$$

για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Επιλέγοντας $x = \pi/2$ παίρνουμε

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Αντικαθιστώντας $x = \frac{\pi}{2\alpha}u$ παίρνουμε, για κάθε $-\alpha \leqslant u \leqslant \alpha$,

$$u = \frac{8\alpha}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi u}{2\alpha}.$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \int_{[-\alpha,\alpha]} iue^{ixu}d\mu(u) \\
&= \frac{8\alpha i}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\int_{[-\alpha,\alpha]}\sin\frac{(2k+1)\pi u}{2\alpha}\cdot e^{ixu}d\mu(u) \\
&= \frac{8\alpha i}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\frac{1}{2i}\Big[\varphi\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}+x\Big) - \varphi\Big(-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}+x\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Άρα,

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{8\alpha}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\frac{1}{2}\big[2\|\varphi\|_\infty\big] = \alpha\|\varphi\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το οποίο αποδεικνύει το (α).

(β) Εφαρμόζουμε το (α) για το $\mu := \sum_{n=-N}^{N} c_n\delta_n$ και με $a := N$, όπου δ_n είναι το μέτρο Dirac στο n. Τότε, $\int e^{ixu}d\mu(u) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. $\square$

Ορισμός 3.1.2. Για κάθε $d, N \in \mathbb{N}$ γράφουμε

$$\mathbb{Z}_N^d := \Big\{ n = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : \sum_{j=1}^d |n_j| \leqslant N \Big\}.$$

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Trig}_N(\mathbb{T}^d)$ το σύνολο όλων των $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ που είναι της μορφής

$$f(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_N^d} c_n e^{int},$$

όπου $c_n \in \mathbb{C}$ και $nt := \sum_{j=1}^d n_j t_j$. Λέμε ότι κάθε τέτοια f είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο στον $\mathbb{T}^d$ βαθμού το πολύ ίσου με N.

Λήμμα 3.1.3. *Για κάθε $f \in \mathrm{Trig}_N(\mathbb{T}^d)$ με πραγματικές τιμές υπάρχει d-κύβος I με μήκος ακμής $1/N$ τέτοιος ώστε*

$$|f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $b \in \mathbb{R}^d$ και ορίζουμε $\epsilon_j := \mathrm{sgn} D_j f(b)$, όπου D_j είναι ο τελεστής της μερικής παραγώγου ως προς την j-οστή συντεταγμένη. Θέτουμε επίσης $\epsilon := (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d)$. Αφού η f παίρνει πραγματικές τιμές, έχουμε $\epsilon \in \mathbb{R}^d$. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $\varphi(u) := f(b + u\epsilon)$. Δηλαδή,

$$\varphi(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N^d} c_n \exp\Big(i \sum_{j=1}^d n_j b_j \Big) \cdot \exp\Big(iu \sum_{j=1}^d n_j \epsilon_j \Big),$$

που είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο στον $\mathbb{T}$ βαθμού το πολύ ίσου με N, διότι

$$\Big| \sum_{j=1}^d \epsilon_j n_j \Big| \leqslant N$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_N^d$. Επίσης, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $\varphi'(u) = \sum_{j=1}^d D_j f(b + u\epsilon)\epsilon_j$, άρα

$$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^d |D_j f(b)|.$$

Από το (β) της Πρότασης 3.1.1 έχουμε

$$\sum_{j=1}^d |D_j f(b)| \leqslant N \|f\|_\infty \tag{3.1.1}$$

για κάθε $b \in \mathbb{R}^d$. Επιλέγουμε $a \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $|f(a)| = \|f\|_\infty$, και ορίζουμε

$$I := \Big\{ x \in \mathbb{R}^d : |x_j - a_j| \leqslant \frac{1}{2N} \ \text{ για κάθε } j = 1, 2, \ldots, d \Big\}.$$

Για να ελέγξουμε το ζητούμενο, σταθεροποιούμε $x \in I$ και ορίζουμε

$$g(t) := f(a + t(x - a)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε,

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{d} D_j f(a + t(x-a))(x_j - a_j),$$

άρα η (3.1.1) μας δίνει

$$|g'(t)| \leqslant \frac{1}{2N} N \|f\|_\infty = \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Άρα,

$$|f(x) - f(a)| = |g(1) - g(0)| = \Big| \int_0^1 g'(t)\, dt \Big| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Έπεται ότι $|f(x)| \geqslant |f(a)| - \frac{1}{2}\|f\|_\infty = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$. $\square$

3.2 Μέτρα που προσδιορίζονται από τις ροπές τους

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την $\int e^{tx} d|\mu|(x) < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τότε, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α) *$\int x^n d\mu(x) = 0$ για κάθε $n \geqslant 0$.*

(β) *Το σύνολο $\big\{ t \in \mathbb{R} : \int e^{tx} d\mu(x) = 0 \big\}$ έχει φραγμένο άπειρο υποσύνολο.*

(γ) *$\mu = 0$.*

Απόδειξη. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ και $N \geqslant 1$ έχουμε ότι η

$$\Big| \sum_{n=0}^{N} \frac{(zx)^n}{n!} \Big| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{|zx|^n}{n!} \leqslant e^{|zx|} \leqslant e^{|z|x} + e^{-|z|x}$$

ανήκει στον $L^1(|\mu|)$ σαν συνάρτηση του x, από την υπόθεση. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έπεται ότι η

$$f(z) := \int e^{zx} d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int x^n d\mu(x) \tag{3.2.1}$$

είναι ακέραια συνάρτηση. Άρα το (α) συνεπάγεται το (β). Αν ισχύει το (β) τότε από το θεώρημα μοναδικότητας για ολόμορφες συναρτήσεις και την (3.2.1) έχουμε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, άρα

$$\widehat{\mu}(t) = \int e^{-itx} d\mu(x) = f(-it) = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $\mu = 0$. Άρα, το (β) συνεπάγεται το (γ). Τέλος, είναι προφανές ότι το (γ) συνεπάγεται το (α). $\square$

Παράδειγμα 3.2.2. Υπάρχει μη μηδενικό $\mu \in M(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\int |x|^n d\mu(x) < \infty$ και $\int x^n d\mu(x) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Με άλλα λόγια, ένα μέτρο στην κλάση $M(\mathbb{R})$ δεν προσδιορίζεται απαραίτητα από τις ροπές του.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια μη μηδενική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, έχει συμπαγή φορέα, και μηδενίζεται σε μια περιοχή του 0. Ορίζουμε $\mu \in M(\mathbb{R})$ μέσω της $\mu := \widehat{f}\lambda$. Τότε, $\mu \neq 0$. Όμως, η n-οστή παράγωγος της f είναι ίση με

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (ix)^n e^{itx}\widehat{f}(x)\,dx = \frac{i^n}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x^n e^{itx}\widehat{f}(x)\,dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Αφού η f και όλες οι παράγωγοί της μηδενίζονται στο 0, βλέπουμε ότι

$$0 = f^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n \widehat{f}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι άρτια, τότε $\overline{\widehat{f}} = \widehat{f}$, άρα το μ παίρνει πραγματικές τιμές και τα θετικά μέτρα $\mu^+ \neq \mu^-$ έχουν τις ίδιες ροπές: για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\int x^n d\mu^+(x) = \int x^n d\mu^-(x).$$

Πόρισμα 3.2.3. *Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *$\int e^{tx} d|\mu|(x) < \infty$ και $\int e^{tx} d\mu(x) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

(β) *$\mu = \nu_1^1$, η τυπική κανονική κατανομή στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu = \nu_1^1$. Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{tx} d\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2} dx \\ &= e^{t^2/2}\mu(\mathbb{R}) = e^{t^2/2},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταφορές.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε το (α) και ορίζουμε $\varrho := \mu - \nu_1^1$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.1 (α) και τον υπολογισμό της προηγούμενης παραγράφου συμπεραίνουμε ότι $\varrho = 0$. □

3.3 Υποκανονικές κατανομές

Ορισμός 3.3.1. *Υποκανονική κατανομή* είναι ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\int e^{tx} d\mu(x) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Με τον όρο *υποκανονική τυχαία μεταβλητή* εννοούμε μια πραγματική τυχαία μεταβλητή που έχει υποκανονική κατανομή. Με τον όρο *υποκανονική ακολουθία* εννοούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων υποκανονικών τυχαίων μεταβλητών.

Παραδείγματα 3.3.2. (α) Έστω ν_α η κανονική κατανομή στο $\mathbb{R}$ με μέση τιμή 0 και διασπορά $\alpha \geqslant 0$. Τότε, αν $\alpha > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{tx} d\nu_\alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2\alpha} dx \\ &= \frac{e^{\alpha t^2/2}}{\sqrt{2\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2/2\alpha} dx \\ &= e^{\alpha t^2/2}\nu_\alpha(\mathbb{R}) = e^{\alpha t^2/2}.\end{aligned}$$

Άρα, η ν_α είναι υποκανονική αν και μόνο αν $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (παρατηρήστε ότι $\nu_0 = \delta_0$, το μέτρο Dirac στο 0).

(β) Έστω $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ η κατανομή Rademacher. Από την ανισότητα $\cosh t \leqslant e^{t^2/2}$, η οποία ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι

$$\int e^{tc} d\mu(x) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) = \cosh t \leqslant e^{t^2/2},$$

άρα το μ είναι υποκανονική κατανομή.

(γ) Έστω μ η ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ για κάποιον $\alpha > 0$. Για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{tx} d\mu(x) &= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{tx} dx = \frac{1}{2\alpha t}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \\ &= \frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{2k}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα $(2k+1)! \geqslant k!2^k$ βλέπουμε ότι αν $0 < \alpha \leqslant 1$ τότε το μ είναι υποκανονική κατανομή.

Πρόταση 3.3.3. *Αν η X είναι υποκανονική τυχαία μεταβλητή, τότε $\mathbb{E}(X) = 0$ και $\mathrm{Var}(X) \leqslant 1$.*

Απόδειξη. Έστω μ η κατανομή της X. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!} = e^{t^2/2} \geqslant \int e^{tx} d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int x^n d\mu(x).$$

Έπεται ότι

$$\Big(\int x\, d\mu(x)\Big)t + \Big(\int x^2 d\mu(x)\Big)\frac{t^2}{2!} \leqslant \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

καθώς το $t \to 0$. Διαιρώντας με $t > 0$ και αφήνοντας το $t \to 0$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}(X) = \int x\, d\mu(x) \leqslant 0.$$

Διαιρώντας με $t < 0$ και αφήνοντας το $t \to 0$ παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι

$$\mathbb{E}(X) = \int x\, d\mu(x) = 0.$$

Τώρα έχουμε

$$\Big(\int x^2 d\mu(x)\Big)\frac{t^2}{2!} \leqslant \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

οπότε διαιρώντας με t^2 και αφήνοντας το $t \to 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Var}(X) = \int x^2 d\mu(x) \leqslant 1$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω X πραγματική τυχαία μεταβλητή με $|X| \leqslant 1$ σχεδόν βεβαίως και $\mathbb{E}(X) = 0$. Τότε,*

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leqslant \cosh t \tag{3.3.1}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα, η X είναι υποκανονική. Αν ισχύει ισότητα για κάποιο $t \neq 0$ στην (3.3.1), τότε η X είναι τυχαία μεταβλητή Rademacher και έχουμε ισότητα στην (3.3.1) για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = e^t\big(\cosh t - \mathbb{E}(e^{tX})\big)$ και θεωρούμε την $Y = 1 + X$. Τότε,

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2} - \mathbb{E}(e^{tY}).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue ελέγχουμε ότι

$$f'(t) = e^{2t} - \mathbb{E}(Ye^{tY}).$$

Αφού $\mathbb{E}(Y) = 1$, έχουμε

$$f'(t) = \mathbb{E}\Big(Y(e^{2t} - e^{tY})\Big). \tag{3.3.2}$$

Αφού $0 \leqslant Y \leqslant 2$ σχεδόν βεβαίως, έπεται ότι: για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε σχεδόν βεβαίως

$$Y\big(e^{2t} - e^{tY}\big) \geqslant 0. \tag{3.3.3}$$

Άρα, $f' \geqslant 0$ και η f είναι αύξουσα στο $[0, \infty)$. Ειδικότερα, για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε $f(t) \geqslant f(0) = 0$, δηλαδή η (3.3.1) ισχύει για κάθε $t \geqslant 0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο $t = t_0 > 0$ έχουμε ισότητα στην (3.3.1). Τότε, $f(t_0) = f(0) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, t_0]$. Συνεπώς, $f'(t_0) = 0$ και από τις (3.3.2) και (3.3.3) συμπεραίνουμε ότι $Y(e^{2t_0} - e^{t_0 Y}) = 0$ σχεδόν βεβαίως. Άρα,

$$\mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 2) = 1.$$

Αφού $\mathbb{E}(X) = 0$, έχουμε $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$, άρα η X είναι τυχαία μεταβλητή Rademacher.

Αφού η $-X$ ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις με την X, έχουμε πλέον δείξει ότι, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}(e^{-tX}) = \mathbb{E}(e^{t(-X)}) \leqslant \cosh t,$$

και αν ισχύει ισότητα για κάποιο $t > 0$, τότε η $-X$ (άρα και η X) είναι τυχαία μεταβλητή Rademacher. $\square$

Παραδείγματα 3.3.5. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.4 μπορούμε να δούμε διάφορα σημαντικά παραδείγματα υποκανονικών τυχαίων μεταβλητών:

(α) Σταθεροποιούμε $n > 1$. Έστω Z μιγαδική τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\big(Z = e^{2\pi i k/n}\big) = \frac{1}{n}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $|Z| \leqslant 1$ σχεδόν βεβαίως και

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik/n} = \frac{e^{2\pi in/n}-1}{n(e^{2\pi i/n}-1)} = 0.$$

Από το Θεώρημα 3.3.4 συμπεραίνουμε ότι οι $\mathrm{Re}(Z)$ και $\mathrm{Im}(Z)$ είναι υποκανονικές. Παρατηρήστε ότι αν ο n είναι περιττός τότε η $\mathrm{Re}(Z)$ δεν είναι συμμετρική.

(β) Έστω s μια τυχαία μεταβλητή Steinhaus, δηλαδή η κατανομή της s είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Θεωρούμε την $Z = e^{2\pi is}$. Τότε, $|Z| \leqslant 1$ σχεδόν βεβαίως και

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 e^{2\pi it}dt = 0.$$

Από το Θεώρημα 3.3.4 βλέπουμε ότι οι $\mathrm{Re}(Z) = \cos(2\pi s)$ και $\mathrm{Im}(Z) = \sin(2\pi s)$ είναι υποκανονικές.

3.4 Ομοιόμορφη νόρμα τυχαίων τριγωνομετρικών πολυωνύμων

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $\{X_j\}_{j=1}^p$ υποκανονική ακολουθία και $f_1,\ldots,f_p \in \mathrm{Trig}_N(\mathbb{T}^d)$. Ορίζουμε*

$$F := \sum_{j=1}^p X_j f_j, \qquad s := \sum_{j=1}^p \|f_j\|_\infty^2,$$

και

$$M := \|F\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}^d} |F(t)|.$$

Τότε, για κάθε $s>0$,

$$\mathbb{P}\Big(M \geqslant 18(sd\log N)^{1/2}\Big) \leqslant \frac{1}{N^{2d}}.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που οι f_j παίρνουν πραγματικές τιμές, οπότε και η F παίρνει πραγματικές τιμές. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{T}^d$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(e^{\alpha F(t)}\big) &= \mathbb{E}\Big(\prod_{j=1}^p e^{\alpha f_j(t)X_j}\Big) = \prod_{j=1}^p \mathbb{E}\big(e^{\alpha f_j(t)X_j}\big)\\ &\leqslant \prod_{j=1}^p e^{\alpha^2 f_j^2(t)/2} \leqslant e^{\alpha^2 s/2}.\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με λ το μέτρο Haar στον $\mathbb{T}^d$. Από το Λήμμα 3.1.3, για το τυχαίο κλειστό σύνολο

$$A := \Big\{t\in\mathbb{T}^d : |F(t)| \geqslant \frac{1}{2}M\Big\}$$

έχουμε

$$\lambda(A) \geqslant \frac{1}{c}, \quad \text{όπου } c := (2\pi N)^d.$$

Συνεπώς, για κάθε $\alpha > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\mathbb{E}\big(e^{\alpha M/2}\big) &\leqslant \mathbb{E}\Big(\int_A e^{\alpha M/2} d\lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(\int_A (e^{\alpha F} + e^{-\alpha F})\, d\lambda\Big)\\ &\leqslant \mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{T}^d} (e^{\alpha F} + e^{-\alpha F})\, d\lambda\Big) = \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{E}(e^{\alpha F} + e^{-\alpha F})\, d\lambda\\ &\leqslant 2e^{\alpha^2 s/2}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι, για κάθε $\alpha, \beta > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(M \geqslant \alpha s + \frac{2}{\alpha}\log(2\beta c)\Big) &\leqslant \mathbb{E}\Big(\exp\Big[\frac{\alpha}{2}\Big(M - \alpha s - \frac{2}{\alpha}\log(2\beta c)\Big)\Big]\Big)\\ &\leqslant \mathbb{E}\big(e^{\alpha M/2}\big)e^{-\alpha^2 s/2}\cdot\frac{1}{2\beta c} \leqslant \frac{1}{\beta}.\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε $\beta > \frac{1}{2c}$ και $\alpha := \big(\frac{1}{s}\log(2\beta c)\big)^{1/2}$, παίρνουμε

$$\mathbb{P}\Big(M \geqslant 3\sqrt{s\log(2\beta c)}\Big) \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

Για τη μιγαδική περίπτωση, θεωρούμε τις

$$M_1 := \|\mathrm{Re}F\|_\infty, \qquad s_1 := \sum_{j=1}^p \|\mathrm{Re}f_j\|_\infty^2$$

και

$$M_2 := \|\mathrm{Im}F\|_\infty, \qquad s_2 := \sum_{j=1}^p \|\mathrm{Im}f_j\|_\infty^2.$$

Παρατηρούμε ότι $M \leqslant M_1+M_2$ και $s_k \leqslant s$, $k=1,2$. Αφού από την $M \geqslant 2\alpha$ έπεται ότι είτε $M_1 \geqslant \alpha$ ή $M_2 \geqslant \alpha$, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα που δείξαμε στην πραγματική περίπτωση παίρνουμε

$$\mathbb{P}\Big(M \geqslant 6\sqrt{s\log(2\beta c)}\Big) \leqslant \frac{2}{\beta} \tag{3.4.1}$$

για κάθε $\beta > \frac{1}{2c}$.

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Αν $N = 1$ τότε το συμπέρασμα ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε ότι $N \geqslant 2$ και επιλέγουμε $\beta = 2N^{2d}$. Τότε, $2\beta c = 4N^{2d}(2\pi N)^d \leqslant (8\pi N^3)^d$ και αφού $\log(8\pi) < \log(32) = 5\log 2 \leqslant 5\log N$, έχουμε

$$\log(2\beta c) \leqslant d(\log(8\pi) + 3\log N) < 9d\log N.$$

Από την (3.4.1) έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.4.2. *Έστω $N > 1$ και $\{c_n\}_{n=-N}^N$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών που δεν είναι όλοι ίσοι με 0. Τότε, υπάρχει επιλογή προσήμων $\epsilon_n \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}\Big|\sum_{n=-N}^N \epsilon_n c_n e^{int}\Big| < 18\Big(\sum_{n=-N}^N |c_n|^2\log N\Big)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.4.1 με $d = 1$, $f_n := c_n e^{int}$, $\{X_n\}_{n=-N}^{N}$ μια ακολουθία Rademacher. Έχουμε $s = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$, οπότε η πιθανότητα με την οποία ισχύει το συμπέρασμα είναι μεγαλύτερη ή ίση από $1 - \frac{1}{N^2} \geqslant \frac{3}{4}$. □

Πόρισμα 3.4.3 (Littlewood-Salem)**.** *Έστω $N > 1$ και $a_1, \ldots, a_N$ πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι όλοι ίσοι με 0. Υπάρχουν $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \Big| \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt + \varphi_n) \Big| < 18 \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \log N \Big)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 3.4.2 με $c_n := a_n$ για $n = 1, 2, \ldots, N$ και $c_n = 0$ αλλιώς, παίρνουμε μια επιλογή προσήμων ϵ_n τέτοια ώστε

$$\Big| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n e^{int} \Big| < 18 \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \log N \Big)^{1/2}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τώρα, επιλέγουμε $\varphi_n = 0$ ή π ανάλογα με το αν το πρόσημο ϵ_n είναι 1 ή -1, και στη συνέχεια θεωρούμε τα πραγματικά μέρη. □

3.5 Τυχαίες συναρτήσεις στον $C(\mathbb{T})$

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ υποκανονική ακολουθία και $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Θέτουμε*

$$s_j := \Big(\sum_{2^j \leqslant n < 2^{j+1}} a_n^2 \Big)^{1/2}.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $u_j > 0$ τέτοιοι ώστε $u_j \geqslant u_{j+1}$ και $s_j \leqslant u_j$ για κάθε j, και ότι $\sum_{j=1}^{\infty} u_j < \infty$. Τότε, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \cos(nt + \varphi_n) \tag{3.5.1}$$

είναι σχεδόν βεβαίως η σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $F \in C(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Θέτουμε $N_k := 2^{2^k}$ για κάθε $k \geqslant 0$. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.4.1 για τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$F_k(t) := \sum_{N_k \leqslant n < N_{k+1}} a_n X_n \cos(nt + \varphi_n),$$

με $M_k := \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_k(t)| = \|F_k\|_\infty$ και

$$s := \sum_{N_k \leqslant n < N_{k+1}} a_n^2 = \sum_{2^k \leqslant j < 2^{k+1}} s_j^2 \leqslant 2^k u_{w^k}^{2^k}.$$

Έχουμε $(s \log N_{k+1})^{1/2} \leqslant 2^{k+1} u_{2^k}$, άρα το Θεώρημα 3.4.1 μας δίνει

$$\mathbb{P}\Big(M_k \geqslant 36 \cdot 2^k u_{2^k} \Big) \leqslant \frac{1}{N_{k+1}^2}.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_k \{M_k \geqslant 36 \cdot 2^k u_{2^k}\}\Big) = 0. \tag{3.5.2}$$

Έχουμε

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j < \infty \quad \text{και} \quad 2^k u_{2^k} \leqslant 2 \sum_{2^{k-1}<j\leqslant 2^k} u_j,$$

άρα $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k} < \infty$. Από την (3.5.2) βλέπουμε ότι $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty\right) = 1$, άρα εφαρμόζεται το κριτήριο Weierstrass και έχουμε ότι, σχεδόν βεβαίως, η

$$F(t) := a_1 X_1 \cos(t+\varphi_1) + \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) \tag{3.5.3}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$. Συνεπώς, έχουμε σχεδόν βεβαίως ότι $F \in C(\mathbb{T})$. Όταν η (3.5.3) συγκλίνει ομοιόμορφα, μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της F, οι οποίοι δίνονται από την (3.5.1). Άρα, η (3.5.1) είναι η σειρά Fourier κάποιας $F \in C(\mathbb{T})$ σχεδόν βεβαίως. $\square$

Ορισμός 3.5.2. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Το *μέτρο συνέχειας* ω_f της f ορίζεται από την

$$\omega_f(h) := \sup_{|s-t|\leqslant h} |f(s) - f(t)|, \qquad h > 0.$$

Συμβολίζουμε επίσης με $C^{(k)}(\mathbb{T})$, $k \geqslant 1$, την κλάση των k-φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ για τις οποίες η $f^{(k)}$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 3.5.3. *Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις, άρα και το συμπέρασμα, του Θεωρήματος 3.5.1. Υποθέτουμε επίσης ότι $s_j = O(2^{-\beta j} j^{-\gamma})$, όπου οι $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε είτε $\beta = 0$ και $\gamma > 1$ ή $\beta > 0$. Τότε, σχεδόν βεβαίως όταν $h \downarrow 0$ ισχύουν τα εξής:*

(α) *Αν $\beta = 0$ και $\gamma > 1$ τότε $\omega_F(h) = O(|\log h|^{1-\gamma})$.*

(β) *Αν $0 < \beta < 1$ τότε $\omega_F(h) = O(h^{\beta} |\log h|^{\frac{1}{2}-\gamma})$.*

(γ) *Αν $\beta = 1$ και $\gamma < 1/2$ τότε $\omega_F(h) = O(h|\log h|^{1-\gamma})$.*

(δ) *Αν $\beta = 1$ και $1/2 < \gamma \leqslant 1$ τότε $\omega_F(h) = O(h|\log h|^{1/2})$.*

(ε) *Αν είτε $\beta = 1$ και $\gamma > 1$ ή $\beta > 1$, τότε η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $\omega_F(h) = O(h)$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.5.4. *Έστω $\{x_j\}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\liminf \frac{x_{j+1}}{x_j} > 1$. Τότε, υπάρχει $C > 0$ ώστε*

$$\sum_{j=1}^{p} x_j < C x_p$$

για κάθε $p \geqslant 1$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\vartheta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\liminf \frac{x_{j+1}}{x_j} > \vartheta > 1$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_{j+1} > \vartheta x_j$ για κάθε $j \geqslant k$. Συνεπώς, για κάθε $p > j \geqslant k$ έχουμε

$$\frac{x_j}{x_p} = \prod_{i=j}^{p-1} \frac{x_i}{x_{i+1}} < \prod_{i=j}^{p-1} \frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta^{p-j}}.$$

Τότε, για κάθε $p > k$,

$$\frac{1}{x_p} \sum_{j=k}^{p} x_j < \sum_{j=k}^{p} \frac{1}{\vartheta^{p-j}} < \frac{1}{\vartheta^p} \sum_{j=0}^{p} \vartheta^j = \frac{1}{\vartheta^p} \frac{\vartheta^{p+1}-1}{\vartheta - 1} < \frac{\vartheta}{\vartheta - 1}.$$

Από την $x_p > \vartheta^{p-k} x_k$, $p > k$, βλέπουμε επίσης ότι $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = \infty$. Συνεπώς,

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{p} x_j \leqslant \frac{\vartheta}{\vartheta - 1}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{p} x_j < C$$

για κάθε $p \geqslant 1$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.3. Σταθεροποιούμε $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Ορίζουμε $n_0 = 0$, $N_0 = 1$, και για $k \geqslant 1$,

$$n_k := p2^{k-1} \quad \text{και} \quad N_k := 2^{n_k}.$$

Για κάθε $k \geqslant 0$ θεωρούμε την

$$F_k(t) := \sum_{N_k \leqslant n < N_{k+1}} a_n X_n \cos(nt + \varphi_n).$$

Έχουμε

$$F_0'(t) = \sum_{n=1}^{N_1 - 1} n a_n X_n \cos\Big(nt + \varphi_n + \frac{\pi}{2}\Big),$$

από το θεώρημα μέσης τιμής παίρνουμε

$$\omega_{F_0}(h) \leqslant h\|F_0'\|_\infty,$$

και

$$\omega_F(h) \leqslant h\|F_0'\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} 2\|F_k\|_\infty. \tag{3.5.4}$$

Παρατηρήστε ότι η $F - F_0 = \sum_{k=1}^\infty F_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν η παραπάνω σειρά των νορμών συγκλίνει, και ότι αν αυτή η τελευταία σειρά αποκλίνει τότε δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα.

Ορίζουμε

$$a := 18\Big(\sum_{n=1}^{N_1-1} n^2 a_n^2 \log N_1\Big)^{1/2} \quad \text{και} \quad b_k := 18\Big(\sum_{N_k\leqslant n<N_{k+1}} a_n^2 \log N_{k+1}\Big)^{1/2}.$$

Από το Θεώρημα 3.4.1,

$$\mathbb{P}\left(\|F_0'\|_\infty \geqslant a\right) \leqslant \frac{1}{N_1^2}$$

και, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left(\|F_k\|_\infty \geqslant b_k\right) \leqslant \frac{1}{N_{k+1}^2}.$$

Άρα, το ενδεχόμενο

$$A_p := \{\|F_0'\|_\infty < a\} \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{\|F_k\| < b_k\}\Big)$$

ικανοποιεί την

$$\mathbb{P}(A_p^c) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2p+k-1}} = \frac{1}{2^{2p-1}},$$

διότι $2n_k = p \cdot 2^k \geqslant 2p + k - 1$ για κάθε $k \geqslant 1$.

Στη συνέχεια δίνουμε φράγματα για τους a και b_k. Οι διάφορες σταθερές C_j που θα εμφανιστούν παρακάτω μπορεί να εξαρτώνται από τους β και γ, όχι όμως από τους p και k.

Για τον a γράφουμε

$$\begin{aligned} a &\leqslant 18\Big(p\sum_{j=1}^{p} \sum_{2^{j-1}\leqslant n<2^j} n^2 a_n^2\Big)^{1/2} \leqslant 18\Big(p\sum_{j=1}^{p} 2^{2j} s_{j-1}^2\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C_1\Big(p\sum_{j=1}^{p} 2^{2j(1-\beta)} j^{-2\gamma}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $0 \leqslant \beta < 1$ τότε εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.5.4 με $x_j = 2^{2j(1-\beta)} j^{-2\gamma}$, οπότε $\frac{x_{j+1}}{x_j} \to 2^{2(1-\beta)}$, και παίρνουμε
$$a < C_2 p^{\frac{1}{2}-\gamma} 2^{p(1-\beta)}.$$

- Αν $\beta \geqslant 1$ και $\gamma < 1/2$ τότε
$$\sum_{j=1}^{p} j^{-2\gamma} = O\Big(\int_1^p x^{-2\gamma} dx\Big),$$
άρα $a < C_3 p^{1-\gamma}$.

- Αν $\beta \geqslant 1$ και $\gamma > 1/2$ τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2\gamma}$ συγκλίνει, άρα $a < C_4\sqrt{p}$.

Στη συνέχεια δίνουμε φράγματα για τους b_k, $k \geqslant 1$: Έχουμε

$$\begin{aligned} b_k &\leqslant 18\Big(n_{k+1}\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1}\sum_{2^j\leqslant n<2^{j+1}} a_n^2\Big)^{1/2} = 18\Big(n_{k+1}\sum_{n_k\leqslant j<n_{k+1}} s_j^2\Big)^{1/2} \\ &< C_5\Big(p\cdot 2^k\sum_{n_k\leqslant j<n_{k+1}} 2^{-2\beta_j} j^{-2\gamma}\Big)^{1/2} < C_6(p\cdot 2^k)^{\frac{1}{2}-\gamma}\Big(\sum_{j=p\cdot 2^{k-1}}^{p\cdot 2^k-1} 2^{-2j\beta}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα και πάλι τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\beta > 0$ τότε

$$\Big(\sum_{j=p\cdot 2^{k-1}}^{p\cdot 2^k} 2^{-2j\beta}\Big)^{1/2} \leqslant C_7 2^{-p\beta 2^{k-1}}$$

  και, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2^{\beta p}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha k}\cdot 2^{-p\beta 2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha k} 2^{-\beta p(2^{k-1}-1)} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha k} 2^{-\beta(2^{k-1}-1)} =: C_8(\alpha,\beta) < \infty \end{aligned}$$

  από το κριτήριο λόγου. Επιλέγοντας $\alpha := \frac{1}{2}-\gamma$ βλέπουμε ότι αν $\beta > 0$ τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < C_9 p^{\frac{1}{2}-\gamma}\cdot 2^{-p\beta}.$$

- Αν $\beta = 0$ και $\gamma > 1$ τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)}(p\cdot 2^k)^{1/2} = \sqrt{p}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\gamma)},$$

  και η τελευταία σειρά, η οποία δεν εξαρτάται από το p, συγκλίνει, άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < C_{10} p^{1-\gamma}.$$

Θεωρούμε $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ και ορίζουμε $h_p := 2^{-p}$. Τότε,

$$p = |\log_2 h_p| = \frac{|\log h_p|}{\log 2},$$

άρα οι προηγούμενες εκτιμήσεις μας εξασφαλίζουν μια σταθερά $C < \infty$, ανεξάρτητη από το p, τέτοια ώστε στο ενδεχόμενο A_p να έχουμε από την (3.5.4)

$$\omega_F(h_p) \leqslant h_p a + \sum_{k=1}^{\infty} 2b_k < C h_p^{\beta}|\log h_p|^{\delta}$$

για κάθε $p \geqslant 2$, όπου:

$$\begin{aligned}
\delta &= 1-\gamma \ \text{ αν } \beta = 0 \ \text{ και } \gamma > 1,\\
\delta &= \frac{1}{2}-\gamma \ \text{ αν } 0<\beta<1,\\
\delta &= 1-\gamma \ \text{ αν } \beta = 1 \ \text{ και } \gamma < \frac{1}{2},\\
\delta &= \frac{1}{2} \ \text{ αν } \beta = 1 \ \text{ και } \frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$A := \bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcap_{p=q}^{\infty} A_p.$$

Αφού $\mathbb{P}(A_p^c) < 2^{1-2p}$, από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{P}(A^c)=0$.

Θεωρούμε την $\varphi(h) := h^{\beta}|\log h|^{\delta}$. Για κάθε $\omega\in A$ έχουμε ότι υπάρχει $q(\omega)\geqslant 2$ τέτοιος ώστε για κάθε $p\geqslant q(\omega)$ να ισχύει $\omega_F(h_p)\leqslant C\varphi(h_p)$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $h_0\leqslant 1$ τέτοιος ώστε η φ να είναι αύξουσα στο $(0,h_0)$. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi'(h) &= \beta h^{\beta-1}(-\log h)^{\delta} - h^{\beta-1}\delta(-\log h)^{\delta-1}\\
&= h^{\beta-1}|\log h|^{\delta-1}[-\beta\log h-\delta],
\end{aligned}$$

άρα, αν $\beta=0$ (οπότε και $\delta<0$) μπορούμε να επιλέξουμε $h_0=1$, ενώ αν $\beta>0$ μπορούμε να πάρουμε $h_0=\min\{1,e^{-\delta/\beta}\}$ και τότε $\varphi'(h)>0$ για κάθε $0<h<h_0$. Αφού

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(h)}{\varphi(h/2)} = 2^{\beta}\in[1,2],$$

υπάρχει $0<\eta<h_0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $0<h<\eta$ να έχουμε $\varphi(h)<3\varphi(h/2)$. Τώρα, για κάθε $\omega\in A$ και h τέτοιον ώστε $0<h<\eta$ και $h<2^{-q(\omega)}$, επιλέγουμε ακέραιο $p\geqslant q(\omega)$ τέτοιον ώστε $\frac{1}{2}h_p = h_{p+1} < h \leqslant h_p$ και παίρνουμε

$$\omega_F(h)\leqslant \omega_F(h_p)\leqslant C\varphi(h_p)\leqslant 3C\varphi(h_{p+1})\leqslant 3C\varphi(h).$$

Έχουμε έτσι αποδείξει τα (α)-(δ) και μένει να δείξουμε το (ε).

Παραγωγίζοντας τυπικά, θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nX_n\cos\Big(nt+\varphi_n+\frac{\pi}{2}\Big). \tag{3.5.5}$$

Έχουμε

$$\Big(\sum_{2^{j-1}\leqslant n<2^j}(na_n)^2\Big)^{1/2}\leqslant 2^js_{j-1} = O\big(j^{-\gamma}\cdot 2^{-j(\beta-1)}\big),$$

άρα, αν είτε $\beta=1$ και $\gamma>1$ ή $\beta>1$, τότε το Θεώρημα 3.5.1 μας εξασφαλίζει ότι η (3.5.5) είναι σχεδόν βεβαίως η σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $G\in C(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$G_1(x) := \int_0^x G(t)\,dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη βλέπουμε ότι οι G_1 και F έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, άρα $G_1 = F$. Συνεπώς, $F' = G_1' = G \in C(\mathbb{T})$. Δηλαδή, έχουμε σχεδόν βεβαίως ότι $F \in C^{(1)}(\mathbb{T})$. $\square$

Ορισμός 3.5.5. Έστω $\alpha > 0$. Η κλάση Λ_α ή $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ των συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν *συνθήκη Lipschitz τάξης* α αποτελείται από τις συναρτήσεις που ικανοποιούν τα παρακάτω:

(i) Αν $0 < \alpha \leqslant 1$, ζητάμε να υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|f(u) - f(v)| \leqslant M|u-v|^\alpha$ για κάθε $u, v \in \mathbb{T}$.

(ii) Αν $k < \alpha \leqslant k+1$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ ζητάμε να ισχύουν οι $f \in C^{(k)}(\mathbb{T})$ και $f^{(k)} \in \Lambda_{\alpha-k}$.

Πρόταση 3.5.6. *Για κάθε $0 < \alpha \leqslant 1$ έχουμε $f \in \Lambda_\alpha$ αν και μόνο αν $\omega_f(h) = O(h^\alpha)$ όταν $h \downarrow 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $C < \infty$ τέτοιοι ώστε $\omega_f(h) \leqslant Ch^\alpha$ για κάθε $h \in (0, \delta)$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > 2\pi/\delta$. Για κάθε $0 \leqslant u < v < 2\pi$ θέτουμε $u_j = u + \frac{j}{n}(v-u)$ και παίρνουμε

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |f(u_j) - f(u_{j-1})| \leqslant n \cdot \omega_f\Big(\frac{v-u}{n}\Big) < n^{1-\alpha} \cdot C|u-v|^\alpha.$$

Θέτοντας $M := n^{1-\alpha}C$ βλέπουμε ότι $f \in \Lambda_\alpha$. Η άλλη κατεύθυνση είναι απλή. $\square$

Πρόταση 3.5.7. *Αν $0 < \alpha < \gamma < \infty$ τότε $\Lambda_\gamma \subset \Lambda_\alpha$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς τον ακέραιο $k \geqslant 0$ για τον οποίο $k < \gamma \leqslant k+1$. Υποθέτουμε ότι $0 < \alpha < \gamma$ και $f \in \Lambda_\gamma$. Αν $k = 0$ τότε έχουμε $\lim_{h\downarrow 0} h^{\gamma-\alpha} = 0$, άρα $\omega_f(h) = o(h^\alpha)$ διότι $\omega_f(h) = O(h^\gamma)$.

Υποθέτουμε ότι $k \geqslant 1$. Τότε, $(f')^{(k-1)} = f^{(k)} \in \Lambda_{(\gamma-1)-(k-1)}$, άρα $f' \in \Lambda_{\gamma-1}$. Άρα, αν $\alpha > 1$ η επαγωγική υπόθεση μας δίνει ότι $f' \in \Lambda_{\alpha-1}$, απ' όπου έπεται ότι $f \in \Lambda_\alpha$, ενώ αν $\alpha \leqslant 1$ έχουμε $f \in C^{(1)}(\mathbb{T}) \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_\alpha$. $\square$

Πόρισμα 3.5.8. *Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.1 και ότι $s_j = O(2^{-\beta j})$ για κάποιον $\beta > 0$. Τότε, για κάθε $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $f \in \Lambda_\alpha$ σχεδόν βεβαίως.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.3 για τον β και για $\gamma = 0$. Χρησιμοποιώντας την $|\log h|^{1/2} \leqslant |\log h|$ για $0 < h < 1/e$, βλέπουμε ότι αν $0 < \beta \leqslant 1$ τότε σχεδόν βεβαίως ισχύει

$$\omega_f(h) = O(h^\beta |\log h|) \qquad \text{καθώς } h \downarrow 0. \tag{3.5.6}$$

Όμως, αφού $0 < \alpha < \beta$, έχουμε

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{h^\beta |\log h|}{h^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\beta-\alpha}} = 0,$$

άρα

$$h^\beta |\log h| < h^\alpha \ \text{ αν } \ 0 < h < \delta_\alpha.$$

Συνεπώς, $\omega_f(h) = O(h^\alpha)$, και η Πρόταση 3.5.6 μας δίνει ότι $F \in \Lambda_\alpha$ για κάθε $0 < \alpha < \beta$ όταν ισχύει η (3.5.6), και ειδικότερα αν $0 < \beta \leqslant 1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\beta > 1$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $k < \beta \leqslant k+1$. Παραγωγίζουμε τυπικά k φορές τη σειρά Fourier της F και παίρνουμε, για κατάλληλους $\psi_n \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n X_n \cos(nt + \varphi_n + \psi_n). \tag{3.5.7}$$

Τότε,

$$\Big(\sum_{2^{j-1} \leqslant n < 2^j} (n^k a_n)^2 \Big)^{1/2} \leqslant 2^{jk} s_{j-1} = O(2^{-(\beta-k)j}).$$

Αφού $0 < \beta - k \leqslant 1$, από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι, σχεδόν βεβαίως, η σειρά (3.5.7) είναι σειρά Fourier κάποιας $G \in \Lambda_{\alpha-k}$ αν $k < \alpha < \beta$.

Έστω G_k η k-οστή παράγουσα (με $G_k(0) = F(0)$) της G. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη k φορές βλέπουμε ότι οι G_k και F έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, άρα $F = G_k \in C^{(k)}(\mathbb{T})$ και $F^{(k)} = G \in \Lambda_{\alpha-k}$ όταν $k < \alpha < \beta$. Από τον Ορισμό 3.5.5 αυτό σημαίνει ότι $F \in \Lambda_\alpha$ αν $k < \alpha < \beta$. Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \alpha \leqslant k$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε όσα έχουμε δείξει ως τώρα για τον $\alpha' = \frac{k+\beta}{2}$, το οποίο δείχνει ότι $F \in \Lambda_{\alpha'}$. Τότε, από την Πρόταση 3.5.7 παίρνουμε ότι $F \in \Lambda_\alpha$, διότι $\alpha < \alpha'$. $\square$

Παράδειγμα 3.5.9. Αν $\beta > 0$ και $|a_n| = O(1/n^{\beta+\frac{1}{2}})$, τότε σχεδόν βεβαίως έχουμε $F \in \Lambda_\alpha$ για κάθε $0 < \alpha < \beta$. Πράγματι, αν για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $|a_n| \leqslant C/n^{\beta+\frac{1}{2}}$ τότε

$$s_j = \Big(\sum_{2^j \leqslant n < 2^{j+1}} a_n^2 \Big)^{1/2} \leqslant \Big(2^j \cdot \frac{C^2}{2^{j(\beta+1)}} \Big)^{1/2} = \frac{C}{2^{\beta j}},$$

και μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 3.5.8.

Παρατηρήστε ότι αν $a_n := 1/\sqrt{n}$ και $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Rademacher, τότε αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$ έχουμε σχεδόν βεβαίως ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \cos(nt + \varphi_n)$$

αποκλίνει σχεδόν παντού και δεν είναι σειρά Fourier κάποιου $\mu \in M(\mathbb{T})$. Αυτό δείχνει ότι στο προηγούμενο παράδειγμα δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση $|a_n| = O(1/n^{\beta+\frac{1}{2}})$ για $\beta > 0$ με την αντίστοιχη υπόθεση για $\beta = 0$.

Παρατηρήσεις 3.5.10. Τρία κλασικά αποτελέσματα για τις κλάσεις Λ_α είναι τα ακόλουθα:

(α) Αν $f \in \Lambda_\alpha$ και $0 < \alpha \leqslant 1$, τότε

$$s_j = \Big(\sum_{2^j \leqslant |n| < 2^{j+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \Big)^{1/2} = O(2^{-\alpha j}).$$

(β) Αν $f \in \Lambda_\alpha$ και $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ τότε $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ [Bernstein, 1914].

(γ) Αν $0 < \alpha < 1$ και αν $|\widehat{f}(n)| = O(1/|n|^{1+\alpha})$ όταν $|n| \to \infty$, τότε $f \in \Lambda_\alpha$ [Lorentz, 1948].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ειδικά θέματα

4.1 Το θεώρημα των de Leeuw-Kahane-Katznelson

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος των de Leeuw, Kahane και Katznelson.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *με* $a_{-n} = a_n$ *για κάθε* n. *Υπάρχει άρτια πραγματική συνάρτηση* $f \in C(\mathbb{T})$ *τέτοια ώστε*

$$|\widehat{f}(n)| \geqslant |a_n| \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Το πιθανοθεωρητικό μέρος της απόδειξης βρίσκεται στο πρώτο λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω* $N \in \mathbb{N}$ *και* $y_0, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την* $2\sum_{n=0}^N y_n^2 \leqslant 1$. *Θεωρούμε τον διακριτό κύβο* $E_2^{N+1} = \{-1,1\}^{N+1}$ *και γράφουμε* $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N)$ *για το τυπικό σημείο του* E_2^{N+1}. *Ορίζουμε* $H : E_2^{N+1} \to \mathbb{R}$ *με*

$$H(\epsilon) := 2\sum_{n=0}^N \epsilon_n y_n.$$

Τότε, για κάθε $\alpha > 0$ *έχουμε*

$$\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\epsilon\in E_2^{N+1}} \cosh(2\alpha H(\epsilon)) \leqslant e^{4\alpha^2}.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από την στοιχειώδη ανισότητα

$$\cosh x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2^k \cdot k!} = e^{x^2/2}, \tag{4.1.1}$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\epsilon \in E_2^{N+1}} \cosh(2\alpha H(\epsilon)) &= \frac{1}{2^{N+1}} \Big[\frac{1}{2} \sum_{\epsilon \in E_2^{N+1}} e^{2\alpha H(\epsilon)} + \frac{1}{2} \sum_{\epsilon \in E_2^{N+1}} e^{-2\alpha H(\epsilon)} \Big] \\
&= \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\epsilon \in E_2^{N+1}} e^{2\alpha H(\epsilon)} \\
&= \sum_{\epsilon \in E_2^{N+1}} \prod_{n=0}^{N} \frac{e^{4\alpha \epsilon_n y_n}}{2} \\
&= \prod_{n=0}^{N} \Big(\frac{e^{4\alpha y_n}}{2} + \frac{e^{-4\alpha y_n}}{2} \Big) \leqslant \prod_{n=0}^{N} e^{(4\alpha y_n)^2/2} \\
&= \exp\Big(\sum_{n=0}^{N} 8\alpha^2 y_n^2 \Big) = \exp\Big(4\alpha^2 \sum_{n=0}^{N} 2y_n^2 \Big) \leqslant e^{4\alpha^2},
\end{aligned}$$

αφού $2\sum_{n=0}^{N} y_n^2 \leqslant 1$. □

Λήμμα 4.1.3. *Έστω $\alpha > 0$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n = x_{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και*

$$\ell := \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2 \Big)^{1/2} < \infty.$$

Υπάρχουν πραγματικές άρτιες συναρτήσεις $g \in C(\mathbb{T})$ και $h \in L_2(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε:

(α) $\|g\|_\infty \leqslant 4\alpha\ell$.

(β) $\|h\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{e}\frac{1}{\alpha e^{2\alpha^2}}\ell$, *και*

(γ) $|\widehat{g}(n) + \widehat{h}(n)| = |x_n|$ *για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 4\alpha)^2 e^{-2\alpha x}$, $x \geqslant 0$. Έχουμε

$$f'(x) = 2\alpha(x - 4\alpha)(4\alpha + \alpha^{-1} - x)e^{-2\alpha x},$$

άρα η f' είναι μη αρνητική στο $[4\alpha, 4\alpha + \alpha^{-1}]$ και μικρότερη ή ίση από 0 στο $[4\alpha + \alpha^{-1}, \infty)$. Συνεπώς, για κάθε $x \geqslant \alpha$,

$$f(x) \leqslant f(4\alpha + \alpha^{-1}) = (\alpha e)^{-2} e^{-8\alpha^2}. \tag{4.1.2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\kappa(x) := \frac{((|x| - 4\alpha)^+)^2}{\cosh(2\alpha x)},$$

όπου $t^+ := \max\{t, 0\}$ για $t \in \mathbb{R}$. Η κ είναι συνεχής, άρτια και μηδενίζεται στο $[-4\alpha, 4\alpha]$, παίρνει λοιπόν μέγιστη τιμή σε κάποιο $c > 4\alpha$. Ορίζουμε $\eta := (e^{2\alpha c}/2\cosh(2\alpha c))^{1/2}$. Τότε $0 < \eta < 1$ και $\kappa(x) \leqslant \kappa(c) = 2\eta^2 f(c)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την (4.1.2) έπεται ότι

$$\kappa(x) \leqslant 2\eta^2 (\alpha e)^{-2} e^{-8\alpha^2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.1.3}$$

Για την απόδειξη του λήμματος μπορούμε, κανονικοποιώντας, να υποθέσουμε ότι

$$\ell^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2 = x_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1.$$

Αφού $\eta < 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε

$$\frac{\sqrt{2}}{e}\eta(\alpha e^{2\alpha^2})^{-1} + \delta < \frac{\sqrt{2}}{e}(\alpha e^{2\alpha^2})^{-1}. \tag{4.1.4}$$

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$2\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2 < \delta^2. \tag{4.1.5}$$

Ορίζουμε $y_0 = x_0/2$, $y_n = x_n \cos nt$ για $n \geqslant 1$ και $t \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1.2 γι' αυτά τα y_n. Ολοκληρώνοντας την ανισότητα που μας δίνει το λήμμα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{\epsilon\in E_2^{N+1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cosh\Big(2\alpha\Big(\epsilon_0 x_0 + \sum_{n=1}^{N} 2\epsilon_n x_n \cos nt\Big)\Big) \leqslant e^{4\alpha^2}.$$

Συνεπώς, υπάρχει $\epsilon \in E_2^{N+1}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cosh\Big(2\alpha\Big(\epsilon_0 x_0 + \sum_{n=1}^{N} 2\epsilon_n x_n \cos nt\Big)\Big) \leqslant e^{4\alpha^2}.$$

Δηλαδή, για κάποια επιλογή προσήμων, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$\varphi_0(t) := \pm x_0 + 2\sum_{n=1}^{N} \pm x_n \cos nt \tag{4.1.6}$$

ικανοποιεί την

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cosh(2\alpha\varphi_0(t))\, dt \leqslant e^{4\alpha^2}.$$

Από την (4.1.3), για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\big((|\varphi_0(t)| - 4\alpha)^+\big)^2 \leqslant 2\eta^2(\alpha e)^{-2}e^{-8\alpha^2}\cosh(2\alpha\varphi_0(t)),$$

άρα

$$\begin{aligned} \Big\|(|\varphi_0| - 4\alpha)^+\Big\|_2^2 &\leqslant 2\eta^2(\alpha e)^{-2}e^{-8\alpha^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\alpha\varphi_0(t))\, dt \\ &\leqslant 2\eta^2(\alpha e)^{-2}e^{-8\alpha^2}\cdot e^{4\alpha^2} \\ &= 2\eta^2(\alpha e)^{-2}e^{-4\alpha^2}. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Θεωρούμε $\varphi_1 \in L_2(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την

$$\varphi_1(t) \sim 2\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \cos nt. \tag{4.1.8}$$

Ορίζουμε

$$g := \varphi_0 - (|\varphi_0| - 4\alpha)^+ \mathrm{sgn}(\varphi_0) \tag{4.1.9}$$

και

$$h := \varphi_1 + (|\varphi_0| - 4\alpha)^+ \mathrm{sgn}(\varphi_0). \tag{4.1.10}$$

Οι g και h είναι κι αυτές πραγματικές και άρτιες. Αφού η g είναι συνεχής σε καθένα από τα ανοικτά σύνολα $\{|\varphi_0| < 4\alpha\}$, $\{\varphi_0 > 0\}$ και $\{\varphi_0 < 0\}$, συμπεραίνουμε ότι $g \in C(\mathbb{T})$. Επίσης, παρατηρούμε ότι:

- αν $|\varphi_0| \leqslant 4\alpha$ τότε $|g| = |\varphi_0| \leqslant 4\alpha$,
- αν $\varphi_0 > 4\alpha$ τότε $g = \varphi_0 - (\varphi_0 - 4\alpha) = 4\alpha$, και
- αν $\varphi_0 < -4\alpha$ τότε $g = \varphi_0 + (-\varphi_0 - 4\alpha) = -4\alpha$,

άρα $|g| \leqslant 4\alpha$ παντού. Αφού $\ell = 1$, έχουμε αποδείξει το (i).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις (4.1.10), (4.1.7), (4.1.8) και την ταυτότητα του Parseval, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|h\|_2 &\leqslant \left\|(|\varphi_0| - 4\alpha)^+\right\|_2 + \|\varphi_1\|_2 \\ &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{e}\eta(\alpha e^{2\alpha^2})^{-1} + \Big(2\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2\Big)^{1/2} \\ &< \frac{\sqrt{2}}{e}\eta(\alpha e^{2\alpha^2})^{-1} + \delta < \frac{\sqrt{2}}{e}(\alpha e^{2\alpha^2})^{-1},\end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει το (ii), πάλι λόγω της υπόθεσης ότι $\ell = 1$. Τέλος, $g + h = \varphi_0 + \varphi_1$ από τις (4.1.9) και (4.1.10). Άρα, από τις (4.1.6) και (4.1.8) βλέπουμε ότι $\widehat{g}(n) + \widehat{h}(n) = \pm x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Σταθεροποιούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς p, q που ικανοποιούν τις

$$0 < p < \min\{8, q\}, \quad \sqrt{2} \leqslant (1 - e^{-p})e^{9-p-q}, \tag{4.1.11}$$

και ορίζουμε

$$S_k := \sum_{j=0}^{k-1} e^{-jp}, \qquad k \geqslant 1. \tag{4.1.12}$$

Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε $p = 1$ και $q = 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε επίσης ότι $a_n \geqslant 0$ και $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 = 1$.

Θα ορίσουμε, επαγωγικά, πραγματικές, άρτιες συναρτήσεις $G_k \in C(\mathbb{T})$ και $h_k \in L_2(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε

$$|\widehat{G_k}(n) + \widehat{h_k}(n)| \geqslant \frac{a_n}{S_k} \tag{4.1.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και

$$\|h_k\|_2 \leqslant \frac{\gamma}{S_k e^{qk}}, \tag{4.1.14}$$

όπου $\gamma := e^{q-5}$. Παρατηρήστε ότι $S_1 = 1$, άρα το δεξιό μέλος της (4.1.14) για $k = 1$ είναι ίσο με e^{-5}. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.1.2 με $\alpha = \sqrt{2}$ βρίσκουμε πραγματικές, άρτιες συναρτήσεις $G_1 \in C(\mathbb{T})$ και $h_1 \in L_2(\mathbb{T})$ που ικανοποιούν τις (4.1.13), (4.1.14) με $k = 1$, και

$$\|G_1\|_\infty \leqslant 4\sqrt{2}. \tag{4.1.15}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ορίσει τις G_k και h_k, έτσι ώστε να ισχύουν οι (4.1.13) και (4.1.14). Ορίζουμε

$$A_k := \Big\{ n \in \mathbb{Z} : |\widehat{G_k}(n)| \leqslant \frac{a_n}{S_{k+1}} \Big\}. \tag{4.1.16}$$

Έχουμε $-A_k = A_k$, διότι η G_k είναι άρτια συνάρτηση, και για κάθε $n \in A_k$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις (4.1.13), (4.1.16) και (4.1.12), βλέπουμε ότι

$$|\widehat{h_k}(n)| \geqslant |\widehat{G_k}(n) + \widehat{h_k}(n)| - |\widehat{G_k}(n)| \geqslant \frac{a_n}{S_k} - \frac{a_n}{S_{k+1}} = \frac{a_n e^{-pk}}{S_k S_{k+1}}.$$

Άρα, $a_n/S_{k+1} \leqslant S_k e^{pk} |\widehat{h_k}(n)|$. Συνεπώς, από την ανισότητα Bessel και την (4.1.14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Big[\sum_{n \in A} (2a_n/S_{k+1})^2 \Big]^{1/2} &\leqslant 2S_k e^{pk} \|h_k\|_2 \leqslant 2S_k e^{pk} \cdot \frac{\gamma}{S_k e^{qk}} \\ &= \frac{2\gamma}{e^{(q-p)k}}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.1.2 με $\alpha = 2k$ βλέπουμε ότι υπάρχουν πραγματικές, άρτιες συναρτήσεις $g_{k+1} \in C(\mathbb{T})$ και $h_{k+1} \in L_2(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε

$$\|g_{k+1}\|_\infty \leqslant 8k \cdot \frac{2\gamma}{e^{(q-p)k}} = \frac{16\gamma k}{e^{(q-p)k}}, \tag{4.1.17}$$

$$\|h_{k+1}\|_2 \leqslant \sqrt{2}(2ke^{1+8k^2})^{-1} \cdot \frac{2\gamma}{e^{(q-p)k}} \leqslant \frac{\sqrt{2}\gamma}{e^{1+8k^2+(q-p)k}}, \tag{4.1.18}$$

και

$$g_{k+1}(t) + h_{k+1}(t) \sim \sum_{n \in A} \pm 2a_n S_{k+1}^{-1} e^{int}. \tag{4.1.19}$$

Για να δείξουμε ότι η (4.1.14) ισχύει για τον $k+1$, παρατηρούμε ότι

$$8k^2 + (q-p)k = q(k+1) + 8k^2 - pk - q \geqslant q(k+1) + 8 - p - q$$

από την (4.1.11), και ότι $S_{k+1}(1 - e^{-p}) < 1$ από την (4.1.12). Από την (4.1.18) και, μετά, την (4.1.11) βλέπουμε ότι

$$\|h_{k+1}\|_2 \leqslant \frac{\gamma}{S_{k+1} e^{q(k+1)}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1 - e^{-p}) e^{9-p-q}} \leqslant \frac{\gamma}{S_{k+1} e^{q(k+1)}},$$

το οποίο αποδεικνύει την (4.1.14) για τον $k+1$.

Τώρα, ορίζουμε $G_{k+1} := G_k + g_{k+1}$, και από την (4.1.17) βλέπουμε ότι

$$\|G_{k+1} - G_k\|_\infty \leqslant \frac{16\gamma k}{e^{(q-p)k}}. \tag{4.1.20}$$

Επιπλέον, αν $n \in \mathbb{Z} \setminus A$, από τις (4.1.19) και (4.1.16) βλέπουμε ότι

$$|\widehat{G_{k+1}}(n) + \widehat{h_{k+1}}(n)| = |\widehat{G_k}(n) + \widehat{g_{k+1}}(n) + \widehat{h_{k+1}}(n)| = |\widehat{G_k}(n)| \geqslant \frac{a_n}{S_{k+1}}.$$

Αν $n \in A$ τότε, πάλι από τις (4.1.19) και (4.1.16) βλέπουμε ότι

$$|\widehat{G_{k+1}}(n) + \widehat{h_{k+1}}(n)| \geqslant |\widehat{g_{k+1}}(n) + \widehat{h_{k+1}}(n)| - |\widehat{G_k}(n)| \geqslant \frac{2a_n}{S_{k+1}} - \frac{a_n}{S_{k+1}} = \frac{a_n}{S_{k+1}}.$$

Άρα, η (4.1.13) ισχύει για τον $k+1$ και στις δύο περιπτώσεις, και αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Από τις (4.1.10) και (4.1.1), οι G_k συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποια $G \in C(\mathbb{T})$. Η G είναι πραγματική, άρτια συνάρτηση, και από τις (4.1.15), (4.1.20) και (4.1.14) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|G\|_\infty &\leqslant \|G_1\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k+1} - G_k\|_\infty \\
&\leqslant 4\sqrt{2} + 16\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{(q-p)k}} \\
&= 4\sqrt{2} + 16\gamma e^{-q+p}(1 - e^{-q+p})^{-2} \\
&= 4\sqrt{2} + 16 e^{p-5}(1 - e^{-q+p})^{-2}.
\end{aligned}$$

Επίσης, από τις (4.1.14) και (4.1.12) έχουμε $\|h_k\|_2 \to 0$. Συνεπώς, αφήνοντας το $k \to \infty$ στην (4.1.13) βλέπουμε ότι

$$|\widehat{G}(n)| \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{a_n}{S_k} = a_n(1 - e^{-p})$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θέτουμε $f := (1 - e^{-p})^{-1} G$. □

Οι συντελεστές $\widehat{f}(n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, όμως πολύ σπάνια είναι όλοι μη αρνητικοί. Πράγματι, αν $\widehat{f}(j) \geqslant 0$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, τότε $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j) < \infty$, και όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα θα πρέπει να ισχύει $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$.

Θεώρημα 4.1.4. *Αν $h \in L_\infty(\mathbb{T})$ και $\widehat{h}(j) \geqslant 0$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, τότε $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(j) < \infty$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πυρήνα του Fejér

$$K_n(t) := \sum_{j=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|j|}{n+1}\Big) e^{ijt} = \frac{1}{n+1} \Big(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t}\Big)^2.$$

Παρατηρήστε ότι αν $n \geqslant p \geqslant 0$ τότε

$$\begin{aligned}\sum_{j=-p}^{p}\Big(1-\frac{|j|}{n+1}\Big)\widehat{h}(j) &\leqslant \sum_{j=-n}^{n}\Big(1-\frac{|j|}{n+1}\Big)\widehat{h}(j)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)h(t)\,dt\\ &\leqslant \|h\|_\infty\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt\\ &= \|h\|_\infty.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{j=-p}^{p}\widehat{h}(j) \leqslant \|h\|_\infty$$

για κάθε $p \geqslant 0$. □

4.2 Η ανισότητα Hardy για την L_1-νόρμα εκθετικών αθροισμάτων

Με $M(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τη συνήθη άλγεβρα συνέλιξης των μέτρων Borel στον μοναδιαίο κύκλο. Για κάθε $\mu \in M(\mathbb{T})$ και $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\,d\mu(t)$$

τον συντελεστή Fourier του συναρτησοειδούς μ. Εάν επιπλέον ισχύει $\widehat{\mu}(n) = 0$ για κάθε $n < 0$ τότε το μ καλείται μέτρο αναλυτικού τύπου.

Η νόρμα του μ ορίζεται ως εξής:

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1}\Big|\int_{\mathbb{T}} f(t)\,d\mu(t)\Big|.$$

Αν το μ είναι θετικό μέτρο, τότε $\|\mu\| = \mu(\mathbb{T})$. Συμβολίζουμε τον χώρο των μέτρων αναλυτικού τύπου με $H^1(\mathbb{T})$.

Η γενική ιδέα είναι να ορίσουμε τον χώρο του Hardy όχι για συντελεστές Fourier συναρτήσεων αλλά για συντελεστές Fourier μέτρων. Γνωρίζουμε ότι ο $H^1(\mathbb{T})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{T})$ και $f \in H^1(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε $n < 0$.

Παρατηρήσεις 4.2.1. (α) Αν $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$ τότε $\widehat{(\mu+\nu)}(n) = \widehat{\mu}(n) + \widehat{\nu}(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(β) Αν $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$ και $a \in \mathbb{C}$ τότε $\widehat{(a\mu)}(n) = a\widehat{\mu}(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αν $\mu \in M(\mathbb{T})$ τότε $|\widehat{\mu}(n)| \leqslant \|\mu\|$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Μπορούμε να ορίσουμε την συνέλιξη μεταξύ μέτρων, καθώς και μεταξύ μέτρου και συνάρτησης, θέτοντας

$$(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)\,d\mu(t)$$

για κάθε $\mu \in M(\mathbb{T})$ και κάθε f Borel μετρήσιμη.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση με $h \in L^2(\mathbb{T})$, $\mathrm{Re}(h) \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(h) \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $\mathrm{supp}(\widehat{h}) \subset \mathbb{Z}^-$. Τότε:*

(α) $e^{-h} \in L^\infty(\mathbb{T})$ *και* $\mathrm{supp}(\widehat{e^{-h}}) \subset \mathbb{Z}$.

(β) $\|e^{-h} - 1\|_2 \leqslant \|h\|_2$.

Απόδειξη. (α) Άμεσο.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|e^{-h} - 1\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} |e^{-h(t)} - 1|^2 \, dt = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{e^{-h(t)} - 1}{h(t)} \right|^2 |h(t)|^2 \, dt \leqslant \int_{\mathbb{T}} |h(t)|^2 \, dt \\ &= \|h\|_2^2,\end{aligned}$$

άρα

$$\|e^{-h} - 1\|_2 \leqslant \|h\|_2.$$

Χρησιμοποιήσαμε την εξής ανισότητα: αν $z \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$, τότε $\left|\frac{e^{-z}-1}{z}\right| \leqslant 1$. □

Η ανισότητα του Hardy για τα μέτρα αναλυτικού τύπου είναι το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.3. *Αν $\mu \in H^1(\mathbb{T})$ τότε $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}(k)}{k+1} \leqslant \pi \|\mu\|$.*

Θα παρουσιάσουμε την ακόλουθη γενίκευση.

Θεώρημα 4.2.4 (γενίκευση ανισότητας Hardy)**.** *Υπάρχει $C \in (0, \infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $S = \{n_1 < n_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{Z}$ και κάθε $\mu \in M(\mathbb{T})$ με $\mathrm{supp}(\widehat{\mu}) \subset S$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widehat{\mu}(n_k)|}{k} \leqslant C\|\mu\|.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} S_0 &= \{n_1\}, \\ S_1 &= \{n_2 < n_3 < n_4 < n_5\}, \\ S_2 &= \{n_6 < \cdots < n_{21}\}, \\ S_3 &= \{n_{22} < \cdots < n_{85}\}. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε επ' άπειρον αυτή τη διαδικασία: δηλαδή, κάθε S_n, $n \geqslant 0$ περιέχει 4^n όρους. Τα S_n είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του S και

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ απαιτώντας να ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $\widehat{p_i}(n) = 0$, όταν $n \notin S_i$.

- $|\widehat{p_i}(n)| = \frac{1}{4^i}$, όταν $n \in S_i$.
- $\widehat{p_i}(n)\widehat{\mu}(n) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Μπορούμε να γράψουμε

$$|p_i| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\vartheta}.$$

Εν συνεχεία ορίζουμε

$$g_i(\vartheta) = \frac{1}{4}\Big\{c_0 + 2\sum_{-\infty}^{-1} c_n e^{in\vartheta}\Big\}.$$

Έχουμε

$$\|p_i\|_2^2 = \int |p_i(t)|^2\,dt = \sum |\widehat{p_i}(n)|^2 = \frac{1}{2^{2i}},$$

άρα

$$\|p_i\|_2 = \frac{1}{2^i}.$$

Συνεπώς,

$$\|g_i\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}\|p_i\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2^i} < 3\frac{1}{2^{i+3}}.$$

Τώρα, ορίζουμε $f_0 = \frac{1}{5}p_0$, και επαγωγικά,

$$f_{i+1} = f_i e^{-g_{i+1}} + \frac{1}{5}p_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Αφού $\mathrm{Re}(g_i) = \frac{1}{4}|p_i|$ και, εκ κατασκευής $|p_i| \leqslant 1$, συνδυαστικά, επειδή $g_i \in L^2(\mathbb{T})$, $\mathrm{Re}(g_i) \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $\mathrm{Re}(g_i) \geqslant 0$, από το Θεώρημα 4.2.2 έχουμε $\varepsilon^{-g_i} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Άρα, $f_i \in L^\infty(\mathbb{T})$ για κάθε $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Επειδή $|S_i| = 4^i$ και, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $e^{-x/4} + x/5 \leqslant 1$, βλέπουμε ότι

$$\|f_i\|_\infty \leqslant 1$$

για κάθε $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Επειδή $\mathrm{supp}(\widehat{g_i}) \subset \mathbb{Z}^-$, έχουμε επίσης $\mathrm{supp}\big(\{e^{-g_i}\}\big) \subset \mathbb{Z}^-$.

Έστω $m \in \mathbb{N}$ με $m \leqslant i$ και $n \in S_i$. Έχουμε

$$f_m = \frac{1}{5}p_m + \frac{1}{5}p_{m-1}e^{-g_m} + \cdots + \frac{1}{5}p_1 e^{-\sum_{k=2}^m g_k} + \frac{1}{5}p_0 e^{-\sum_{k=1}^m g_k},$$

άρα

$$\begin{aligned}\widehat{f_m}(n) - \frac{1}{5}\widehat{p_i}(n) &= \widehat{\Big\{\frac{p_i}{5}e^{-\sum_{k=i+1}^m g_k - 1}\Big\}}(n) + \widehat{\Big\{\frac{p_{i+1}}{5}e^{-\sum_{k=i+2}^m g_k - 1}\Big\}}(n)\\ &\quad + \cdots + \widehat{\Big\{\frac{p_{m-1}}{5}e^{-g_m - 1}\Big\}}(n),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\Big|\widehat{f_m}(n) - \frac{1}{5}\widehat{p_i}(n)\Big| \leqslant \frac{1}{5}\Big(\|p_i\|_2\Big\|\sum_{k=i+1}^m g_k\Big\|_2 + \|p_{i+1}\|_2\Big\|\sum_{k=i+1}^m g_k\Big\|_2 + \cdots + \|p_{m-1}\|_2\|g_m\|_2\Big)$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την Πρόταση 5.1.1.

Άρα,

$$\Big|\widehat{f_m}(n) - \frac{1}{5}\widehat{p_i}(n)\Big| \leqslant \frac{3}{10}\Big(\frac{1}{4^{i+1}} + \frac{1}{4^{i+2}} + \cdots\Big) = \frac{1}{10\cdot 4^i} \leqslant \frac{|\widehat{p_i}(n)|}{10}.$$

Για $i \in \mathbb{N}$ και $n_k \in S_i$ έχουμε $3k > 4^i$, άρα

$$|\widehat{p_i}(n_k)| = \frac{1}{4^i} > \frac{1}{3k}\mathrm{Re}(\widehat{f_m}\widehat{\mu})(n_k) \geqslant \frac{1}{10}\widehat{p_i}(n_k)\widehat{\mu}(n_k)$$

οπότε για $n_k \in S_i$ και $i \leqslant m$ έχουμε

$$\mathrm{Re}(\widehat{f_m}\widehat{\mu})(n_k) \geqslant \frac{1}{30k}|\widehat{\mu}(n_k)|.$$

Θέτουμε

$$A_m = \bigcup_{k=0}^{m} S_k.$$

Εαν υποθέσουμε ότι το μ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε

$$|(f*\mu)(0)| \leqslant \|f\|_\infty \|\mu\|_1 = \|\mu\|_1.$$

Επίσης,

$$|(f*\mu)(0)| = \Big|\sum_{n\in A_m} \widehat{f_m}(n)\widehat{\mu}(n)\Big|.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}(n_k)}{k} \leqslant 30\|\mu\|_1$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο μ με $\mathrm{supp}(\widehat{\mu}) \subseteq S$. Με ένα σπιχείρημα προσέγγισης παίρνουμε την ίδια ανισότητα για κάθε $\mu \in M(\mathbb{T})$ με $\mathrm{supp}(\widehat{\mu}) \subseteq S$. □

Θεώρημα 4.2.5 (εικασία Littlewood)**.** *Έστω p μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με $p(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k t}$, όπου $\{n_1 < \ldots < n_m\} \subset \mathbb{Z}$ και $|c_k| \geqslant 1$ για κάθε k. Τότε,*

$$\|p\|_1 \geqslant \frac{1}{c}\log m,$$

όπου c θετική σταθερά.

Απόδειξη. Άμεσα προκύπτει ότι $\widehat{p}(n) = c_n$, άρα $|\widehat{p}(n)| \geqslant 1$ για κάθε n. Ξέρουμε επίσης ότι

$$\log m \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

Άρα,

$$\|p\|_1 \geqslant \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{m}\frac{|c_k|}{k} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{m}\frac{|\widehat{p}(n_k)|}{k},$$

δηλαδή

$$c\|p\|_1 \geqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{|\widehat{p}(n_k)|}{k} \geqslant \log m.$$

□

Αυτό επίσης δείχνει ότι εαν έχουμε $\mu \in M(\mathbb{T})$ και $\{n_1 < \ldots < n_m\} \subset \mathbb{Z}$ με $\widehat{\mu}(n_k) = c_k$, όπου $|c_k| \geqslant 1$ για κάθε k και $\widehat{\mu}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^-$, τότε

$$\|\mu\|_1 \geqslant \frac{1}{c} \log m.$$

4.3 Lacunary τριγωνομετρικές σειρές

Γενικά, lacunary συνάρτηση είναι μια αναλυτική συνάρτηση που δεν επεκτείνεται συνεχώς έξω απο τον δίσκο στον οποίο αναπαρίσταται ως δυναμοσειρά. Πρώτος την ανέφερε, χώρις να το αποδείξει, ο Riemann ως παράδειγμα συνάρτησης που είναι παντού συνεχής μα πουθενά διαφορίσιμη.

Η σειρά Taylor μιας lacunary συνάρτησης είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$$

και η σειρά Fourier της lacunary συνάρτησης είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi n_k x) + b_k \sin(2\pi n_k x)),$$

όπου υπάρχει $\lambda > 1$ με $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ καλείται lacunary ακολουθία. Ένα συνηθισμένο παράδειγμα μας δίνει η $n_k = 2^k$.

Θα καταλήξουμε στο κεντρικό οριακό θεώρημα για τριγωνομετρικές σειρές. Δηλαδή, ότι η «κατανομή τιμών» της σειράς συγκλίνει στην κανονική κατανομή. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ από το κριτήριο του λόγου. Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα σημαντικό θεώρημα, το θεώρημα του Hadamard, που ακριβώς επειδή έπαιξε σημαντικό ρόλο στη μελέτη των lacunary σειρών καλείται η lacunary συνθήκη του Hadamard.

Θεώρημα 4.3.1 (Hadamard gap theorem). *Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με $a_n = 0$ όταν $n = n_k$, όπου (n_k) lacunary ακολουθία, και έστω ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Τότε, η f δεν επεκτείνεται αναλυτικά έξω από το μοναδιαίο δίσκο.*

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω λ_k lacunary ακολουθία και f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο μοναδιαίο κύκλο. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο και $\widehat{f}(m) = a_m$ όταν $m = \lambda_k$ ενώ $\widehat{f}(m) = 0$ όταν $m \neq \lambda_k$, τότε*

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{f}(\lambda_k)\lambda_k = 0.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε πως η f είναι διαφορίσιμη στο 0. Αντικαθιστώντας την f με την

$$g(t) = f(t) - f(0)\cos t - f'(0)\sin t = f(t) - f(0)\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - f'(0)\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

μπορούμε να υποθέσουμε πως $f'(0) = f(0) = 0$.

Εξ υποθέσεως, $\widehat{f}(m) = a_m$ όταν $m = \lambda_k$ και $\widehat{f}(m) = 0$ όταν $m \neq \lambda_k$. Έχουμε

$$1 \leqslant |m - \lambda_k| < \min\{A - 1, 1 - A^{-1}\}\lambda_k$$

άρα $\widehat{f}(m) = 0$, όπου $A > 1$ ώστε $\lambda_{k+1} \geqslant A\lambda_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $\lfloor \min\{A-1, 1-A^{-1}\}\lambda_{k_0} \rfloor = 2N_0$ τότε $\frac{1}{N_0^2} < \epsilon$ και

$$\sup_{|x|<N_0^{-\frac{1}{4}}} \Big| \frac{f(x)}{x} \Big| < \epsilon.$$

Για $k \geqslant k_0$ και $2N = \min\{A-1, 1-A^{-1}\}\lambda_k$ έχουμε $N \geqslant N_0$.

Για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο K_N βαθμού $2N$ με $\widehat{K}_N(0) = 1$ έχουμε

$$\widehat{f}(\lambda_k) = \int_{|x|\leqslant \frac{1}{2}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον πυρήνα του Féjer

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=-k}^{k} e^{isx}$$

ώστε να επιλέξουμε κατάλληλο τριγωνομετρικό πολυώνυμο με τον εξής τρόπο:

$$K_N = \Big(\frac{F_N}{\|F_N\|_{L^2}} \Big)^2.$$

Έχουμε

$$\|F_N\|_2^2 = \sum_{i=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|i|}{N+1} \Big)^2 = 1 + \frac{N(2N+1)}{3(N+1)} > \frac{N}{3}$$

και

$$F_N(x)^2 \leqslant \Big(\frac{1}{(N+1)4x^2} \Big)^2, \qquad |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$K_N(x) \leqslant \frac{3}{16N^3x^4}.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\lambda_k \widehat{f}(\lambda_k) &= \lambda_k \int_{|x|\leqslant \frac{1}{2}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx \\
&= \lambda_k \int_{|x|\leqslant N^{-1}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx + \lambda_k \int_{N^{-1}<|x|\leqslant N^{-\frac{1}{4}}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx \\
&\quad + \lambda_k \int_{N^{-\frac{1}{4}}<|x|\leqslant \frac{1}{2}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx.
\end{aligned}$$

Εν συνεχεία θέτουμε

$$\begin{aligned}
I_1(k) &= \lambda_k \int_{|x|\leqslant N^{-1}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx, \\
I_2(k) &= \lambda_k \int_{N^{-1}<|x|\leqslant N^{-\frac{1}{4}}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx, \\
I_3(k) &= \lambda_k \int_{N^{-\frac{1}{4}}<|x|\leqslant \frac{1}{2}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i \lambda_k x} dx.
\end{aligned}$$

Έχουμε $\|K_N\|_1 = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$|I_1(k)| \leqslant \frac{\lambda_k}{N} \sup_{|x|<N^{-1}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{(2N+1)\epsilon}{\min\{A-1, 1-A^{-1}\}N}$$

και

$$|I_2(k)| \leqslant \frac{3\lambda_k}{16N^3} \sup_{|x|<N^{-\frac{1}{4}}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \int_{N^{-1}<|x|\leqslant N^{-\frac{1}{4}}} \frac{dx}{x^3} \leqslant \frac{3\lambda_k}{16N} \sup_{|x|<N^{-\frac{1}{4}}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| < C_1\epsilon,$$

όπου C_1 θετική σταθερά. Τέλος,

$$|I_3(k)| \leqslant \frac{3}{16N^3} \frac{1}{N^{-\frac{1}{4}}} \int_{N^{-\frac{1}{4}}<|x|\leqslant \frac{1}{2}} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{3}{16N^2}\|f\|_1 < \frac{3\epsilon}{16}\|f\|_1.$$

Έπεται ότι, για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$|\lambda_k \widehat{f}(\lambda_k)| \leqslant |I_1(k)| + |I_2(k)| + |I_3(k)| < C_2\epsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Θεώρημα 4.3.3. *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση στο μοναδιαίο κύκλο που είναι πουθενά παραγωγίσιμη.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2\pi i 3^k t}.$$

Η f είναι 1-περιοδική και, επειδή η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα, είναι και συνεχής. Προς άτοπο, αν για κάποιο $t_0 \in \mathbb{T}$ υπάρχει η $f'(t_0)$ τότε, από την προηγούμενη πρόταση,

$$\lim_{k\to\infty} 3^k \widehat{f}(3^k) = 0.$$

Όμως,

$$3^k \widehat{f}(3^k) = 3^k 2^{-k} = \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

άρα $\lim_{k\to\infty} (\frac{3}{2})^k = \infty$, και έπεται ότι $\lim_{k\to\infty} 3^k \widehat{f}(3^k) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω ότι μια lacunary σειρά είναι σειρά Fourier μιας $f \in L_1(T)$. Τότε, η σειρά συγκλίνει σχεδόν παντού στην f.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(2\pi n_k x) + b_k \sin(2\pi n_k x))$$

και

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(t).$$

Για $f \in L_1(T)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(t) = f(t)$$

σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Γράφουμε

$$|S_{n_m} - \sigma_{n_m}| = \Big|\frac{n_m S_{n_m}}{n_m} - \frac{S_0 + \cdots + S_{n_m - 1}}{n_m}\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n_m} \frac{n_i}{m}(|a_{n_i}| + |b_{n_i}|).$$

Αφού $f \in L_1(T)$, από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$ και $\widehat{f}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k| + |b_k| < \varepsilon$ για κάθε $k \geqslant n_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |S_{n_m} - \sigma_{n_m}| &\leqslant M \sum_{i=1}^{n_0} \frac{n_i}{n_m} + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{n_m} \leqslant M \frac{M n_0 n_{n_0}}{n_m} + \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1} \\ &< 2\varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \end{aligned}$$

για αρκούντως μεγάλα m. □

Θεώρημα 4.3.5. *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi n_k x) + b_k \sin(2\pi n_k x))$ *συγκλίνει για κάθε* x *σε κάποιο* $S \subseteq [0,1]$ *με* $\lambda(S) > 0$ *αν και μόνο αν* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) < \infty$.

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Εάν $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^2 < \infty$ τότε $f \in L^2(\mathbb{T})$, όπου $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi n_k x) + b_k \sin(2\pi n_k x))$, άρα η σειρά συγκλίνει σχεδόν παντού.

($\Longrightarrow$) Έστω $S \subseteq [0,1]$ με $\lambda(S) > 0$. Τότε, υπάρχει $M \in (0,\infty)$ ώστε τα μερικά αθροίσματα $S_m(x) = \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos(2\pi n_k x) + b_k \sin(2\pi n_k x))$ να ικανοποιούν την $|S_m(t)| \leqslant M$ για κάθε $t \in S$ και $m \in \mathbb{N}$.

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi n_k x)) + (b_k \sin(2\pi n_k x))$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(2\pi n_k x + \vartheta_k).$$

Αντίστοιχα, γράφουμε $S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \cos(2\pi n_k x + \vartheta_k)$, όπου $c_k^2 = a_k^2 + b_k^2$.

Έστω $m \geqslant n$. Θεωρούμε $A \subseteq S$ και ολοκληρώνουμε σε αυτό: έχουμε

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} c_k \cos(2\pi n_k x + \vartheta_k)\Big| \leqslant 2M,$$

άρα

$$\int_A (s_n(x) - s_{m-1}(x))^2 \, d\lambda(x) \leqslant 4M^2 \lambda(A).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_A \Big(\sum_{k=n}^{m} c_k \cos(2\pi n_k x + \vartheta_k)\Big)^2 d\lambda(x) &= \sum_{k=n}^{m} \int_A (c_k \cos(2\pi n_k x + \vartheta_k))^2 d\lambda(x) \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{k,l=n \\ k>l}}^{m} \int_A (c_k c_l \cos(2\pi n_k x + \vartheta_k)) \cos(2\pi n_l x + \vartheta_l)) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε

$$\gamma_k = \int_A \cos(2\pi kx)\, d\lambda(x)$$
$$\delta_k = \int_A \sin(2\pi kx)\, d\lambda(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\int_A (c_k\cos(2\pi n_k x+\vartheta_k))^2 d\lambda(x) &= \sum_{k=n}^{m}\Big(\frac{1}{2}c_k^2+\frac{1}{2}\int_A (c_k^2\cos(2(2\pi n_k x+\vartheta_k)))d\lambda(x)\Big)\\ &= \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{2}c_k^2(1+\gamma_{n_k}^2\cos(\vartheta_k)-\delta_{n_k}^2\sin(\vartheta_k))\\ &\geqslant \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{2}c_k^2(1-|\gamma_{n_k}^2|-|\delta_{n_k}^2|).\end{aligned}$$

Για την $f=\mathbf{1}_A$ έχουμε $a_n(f)=\gamma_n$ και $b_n(f)=\delta_n$, άρα για κάθε $m\geqslant m_0$ παίρνουμε

$$\sum_{k=n}^{m}\int_A (c_k\cos(2\pi n_k x+\vartheta_k))^2 d\lambda(x) \geqslant \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{m}c_k^2.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}&2\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}\int_A (c_kc_l\cos(2\pi n_k x+\vartheta_k))\cos(2\pi n_l x+\vartheta_l))d\lambda(x)\\ &\quad=\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}\int_A (c_kc_l\cos((2\pi n_k+n_l)x+(\vartheta_k+\vartheta_l))+\cos((2\pi n_k-n_l)x+(\vartheta_k-\vartheta_l)))d\lambda(x)\\ &\quad=\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}c_kc_l(\gamma_{n_k+n_l}\cos(\vartheta_k+\vartheta_l)-\delta_{n_k+n_l}\sin(\vartheta_k+\vartheta_l)\\ &\qquad+\gamma_{n_k+n_l}\cos(\vartheta_k-\vartheta_l)-\delta_{n_k+n_l}\sin(\vartheta_k-\vartheta_l)).\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\epsilon_{k,l}=(\gamma_{n_k+n_l}\cos(\vartheta_k+\vartheta_l)-\delta_{n_k+n_l}\sin(\vartheta_k+\vartheta_l)++\gamma_{n_k+n_l}\cos(\vartheta_k-\vartheta_l)-\delta_{n_k+n_l}\sin(\vartheta_k-\vartheta_l)).$$

Τότε,

$$\epsilon_{k,1}^2\leqslant 2(\gamma_{n_k+n_l}^2+\delta_{n_k+n_l}^2+\gamma_{n_k-n_l}^2+\delta_{n_k-n_l}^2)\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}|c_kc_l\epsilon_{k,l}|\leqslant\Big(\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}c_k^2c_l^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}\epsilon_{k,l}^2\Big)^{1/2}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Παρατηρούμε ότι

$$\Big(\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}c_k^2c_l^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}\epsilon_{k,l}^2\Big)^{1/2}\leqslant\sum_{k=N}^{m}c_k^2\Big(\sum_{\substack{k,l=n\\k>l}}^{m}\epsilon_{k,l}^2\Big)^{1/2}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ συγκλίνει. Αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\sum_{\substack{k,l=n\\ k>l}}^{\infty} \epsilon_{k,l}^2$$

συγκλίνει. Διότι, εάν συγκλίνει, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{m} c_k^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=N}^{m} c_k^2 &\\
&\leqslant \sum_{k=n}^{m}\int_A (c_k\cos(2\pi n_k x+\vartheta_k))^2 d\lambda(x)\\
&+2\sum_{\substack{k,l=n\\ k>l}}^{m}\int_A (c_k c_l\cos(2\pi n_k x+\vartheta_k))\cos(2\pi n_l x+\vartheta_l))d\lambda(x)\\
&\leqslant 4M^2\lambda(A).
\end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι

$$\epsilon_{k,l}^2 \leqslant 2(\gamma_{n_k+n_l}^2+\delta_{n_k+n_l}^2+\gamma_{n_k-n_l}^2+\delta_{n_k-n_l}^2).$$

Επίσης, υπάρχει $\lambda\in(1,\infty)$ ώστε $\frac{n_k+1}{n_k}\geqslant\lambda$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Έστω $r,s\in\mathbb{N}$ με $k>r\geqslant s$ και $k>l$. Τότε, αν $n_k+n_l=n_r+n_s$ έχουμε $n_k+n_r\geqslant(\lambda^{k-r}-1)n_r>n_{r-1}>n_s-n_l$ αν αν $\lambda>\frac{1}{\lambda^{k-r}-1}$, το οποίο ισχύει αν το $k-r$ είναι αρκετά μεγάλο συναρτήσει του λ. Συνεπώς, το $k-r$ είναι φραγμένο, άρα το $r-s$ είναι φραγμένο.

Μένει τώρα να δείξω ότι η $\sum_{k=N}^{\infty}\gamma_n^2$ συγκλίνει, το οποίο ισχύει γιατί αυτό είναι το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών Fourier της L^2-συνάρτησης $\mathbf{1}_A$. □

Θεώρημα 4.3.6 (Salem-Zygmund). *Έστω μία lacunary τριγωνομετρική σειρά και s_n τα μερικά της αθροίσματα. Ορίζουμε*

$$c_k^2=a_k^2+b_k^2$$

και

$$C_n=\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k^2\Big)^{1/2}.$$

Αν $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{C_n}=0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\infty$, τότε για κάθε μετρήσιμο $A\subset[0,2\pi]$ με $\lambda(A)>0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda\Big(\{x\in A:\frac{s_n(x)}{C_n}\leqslant t\}\Big)}{\lambda(A)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-y^2}\,dy.$$

Απόδειξη. Υπάρχει $\lambda>1$ με $\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Για απλότητα υποθέτουμε ότι $\lambda>3$ και ότι $b_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi]$ με $\lambda(A)>0$. Τώρα, θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής F, περιορισμένη στο A, της $X_n(t)=\frac{s_n(t)}{C_n}$. Έχουμε $X_n\sim N(0,1)$ αν και μόνο αν

$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$, όπου X τυπική γκαουσιανή με $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\varphi_{X_n}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{it\xi}\, dF(t) &= \frac{1}{\lambda(A)} \int_A e^{iX_n(t)\xi}\, d\lambda(t)\\ &= \int_A \varepsilon^{\frac{i}{C_n}\sum_{k=1}^n a_k \cos(n_k t)\xi}\, d\lambda(t)\\ &= \int_A \prod_{k=1}^n e^{\frac{i}{C_n} a_k \cos(n_k t)\xi}\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $M \in (0,\infty)$ και $|\xi| \leqslant M$. Έχουμε $e^z = (1+z)e^{\frac{1}{2}z^2 + o(z^2)}$ καθώς $z \to 0$. Αφού

$$\prod_{k=1}^n e^{o\left(\left(\frac{a_k}{C_n}\cos(n_k t)\xi\right)^2\right)} = e^{o\left(\left(M^2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{C_n^2}\cos(n_k t)\right)\right)} = e^{o(1)},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_A \prod_{k=1}^n e^{\frac{i}{C_n} a_k \cos(n_k t)\xi}\, d\lambda(t)\\ &\qquad = e^{o(1)} \frac{1}{\lambda(A)} \int_A \prod_{k=1}^n \Big(1 + i\xi + \frac{a_k}{C_n}\cos(n_k t)\Big) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_k}{C_n}\cos(n_k t)\xi\right)^2}\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έχουμε $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$C_n = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n c_n^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}.$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{C_n^2} = 2.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_k}{C_n}\cos(n_k t)\xi\right)^2} &= \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{a_k \xi}{C_n}\right)^2} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{a_k^2 \cos(2n_k t)\xi^2}{C_n^2}\right)}\\ &= e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{1}{4}\left(\frac{a_k^2\cos(2n_k t)\xi^2}{C_n^2}\right)}.\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\sigma_n(t) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{4}\Big(\frac{a_k^2\cos(2n_k t)}{C_n^2}\Big).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\lambda(\{t \in A : |\sigma_n(t)| \geqslant n^{-\frac{1}{5}}\}) &\leqslant n^{-\frac{2}{5}} \int_A |\sigma_n(t)|^2\, d\lambda(t)\\ &= N^{-\frac{2}{5}} \sum_{k=1}^n \frac{\pi a_k^4}{8C_n^4} \leqslant n^{-\frac{2}{5}}\sqrt{n}\pi\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^2 \frac{1}{8C_n^4}\\ &= \frac{n^{-\frac{2}{5}}\sqrt{n}\pi C_n^4}{8C_n^4} = \frac{\pi n^{-10}}{8} = O(N^{-\frac{1}{5}})\end{aligned}$$

από την ταυτότητα Parseval και την $\sum_{k=1}^n a_k^4 \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2 = \sqrt{n}C_n^4$. Άρα,

$$\Big|\int_A \prod_{k=1}^n \Big(1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big)e^{\sigma_n(t)\xi^2}\,d\lambda(t)\Big|$$
$$\leqslant \int_A \prod_{k=1}^n \Big|1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big|e^{O(1)}\,d\lambda(t) + \int_{\{t\in A:|\sigma_n|\geqslant n^{-\frac{1}{5}}\}} \prod_{k=1}^n \Big|1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big|e^{O(n^{-\frac{1}{5}})}\,d\lambda(t).$$

Τώρα, έχουμε

$$\prod_{k=1}^n \Big|1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big| \leqslant \prod_{k=1}^n e^{(\frac{a_k}{C_n}\xi)^2} \leqslant e^{2M^2}$$

από την γνωστή ανισότητα

$$|1+it| \leqslant e^{t^2}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\int_A \prod_{k=1}^n \Big|1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big|e^{O(1)}\,d\lambda(t) \leqslant e^{2M^2}\lambda(A)e^{O(1)}.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\prod_{k=1}^n \Big(1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big) = 1+\sum_{k=1}^\infty \widehat{f}(k)\cos(kt),$$

όπου $\widehat{f}$ είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης στα αριστερά, που εξαρτάται από το ξ. Έχουμε

$$\int_A \prod_{k=1}^n \Big(1+\frac{i\xi\cos(n_kt)}{C_n}\Big)\,d\lambda(t) = \lambda(A) + \int_A \sum_{k=1}^\infty \widehat{f}(k)\cos(kt)\,d\lambda(t)$$
$$= \lambda(A) + \sum_{k=1}^\infty \widehat{f}(k)\int_A \cos(kt)\,d\lambda(t).$$

Θα δείξουμε ότι $\widehat{f}(k) = O(1)$ για κάθε φιξαρισμένο $k\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του $\cos(kx)$ είναι

$$O\Big(\sum_{\substack{k_1<\cdots<k_s\\ k=n_{k_1}+\cdots+n_{k_s}}} i\xi\frac{a_{k_1}}{C_n}\cdots i\xi\frac{a_{k_s}}{C_n}\Big).$$

Όμως, επειδή έχουμε εξ αρχής υποθέσει ότι $\lambda \geqslant 3$, δεν υπάρχει αριθμός που να έχει δυο αναπαραστάσεις της μορφής

$$\pm n_{k_1} \pm \cdots \pm n_{k_s}.$$

Από την υπόθεση, $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, άρα

$$\Big|\frac{a_k}{C_n}\Big| < \varepsilon$$

για αρκούντως μεγάλα N.

Επομένως, στο άθροισμα του $O(\cdot)$ υπάρχει το πολύ ένας όρος $O(1)$. Άρα, $\widehat{f}(k) = O(1)$ για κάθε φιξαρισμένο $k\in\mathbb{N}$.

Μένει να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{i\xi\cos(n_k t)}{C_n}\Big)\,d\lambda(t)=\lambda(A).$$

Όμως,

$$\Big|\int_A \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{i\xi\cos(n_k t)}{C_n}\Big)\,d\lambda(t)-\lambda(A)\Big| = O(1)+\sum_{k=L}^{\infty}|\widehat{f}(k)|\Big|\int_A \cos(kt)\,d\lambda(t)\Big|$$

για κάθε φιξαρισμένο k. Επίσης,

$$O(1)+\sum_{k=L}^{\infty}|\widehat{f}(k)|\Big|\int_A \cos(kt)\,d\lambda(t)\Big| \leqslant \Big(\sum_{k=L}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=L}^{\infty}\Big|\int_A \cos(kt)\,d\lambda(t)\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

όπου πάλι κάναμε χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz. Από τον τρόπο ορισμού των σειρών έχουμε

$$\Big|\int_A \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{i\xi\cos(n_k t)}{C_n}\Big)\,d\lambda(t)-\lambda(A)\Big| < O(1),$$

άρα ισχύει το αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 4.3.7. *Έστω $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, όπου $n_k\sim\mathbb{U}[A_k,A_k+B]$ με $A_{k+1}-A_k\geqslant B+2$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Τότε,*

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}(\sin(n_k x)-\mathbb{E}(\sin(n_k x)))\longrightarrow F,$$

όπου

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}\left(1-\frac{4\sin(\frac{Bx}{2})^2}{B^2x^2}\right)}\,d\mu(x)$$

και

$$\mu(A)=\frac{1}{\pi}\int_A\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)^2\,dx.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\varphi_k(x)=\sin(n_k x)-\mathbb{E}(\sin(n_k x))$ και $T_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x)$. Επειδή $A_{k+1}-A_k\geqslant B+2$ και

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ax)\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)^2\,dx=0$$

για κάθε $|a|>2$ και οι φ_k είναι ορθογώνιες στον $L^2_\mu(\mathbb{R})$, άρα υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε

$$\|T_M-T_{N^3}\|_2\leqslant\frac{c}{\sqrt{N}},\qquad \text{αν } N^3\leqslant M\leqslant(N+1)^3.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $T_{N^3}\xrightarrow{d}F$, $\mathbb{P}$-σχεδόν παντού. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_k(x)=\mathbb{E}(\sin(n_k x)&=\frac{1}{B}\int_{A_k}^{A_k+B}\sin(tx)\,dt\\ &=\frac{1}{Bx}(\cos(A_k x)-\cos((A_k+B)x)=\frac{2\sin(Bx/2)}{Bx}\sin((A_k+B/2)x),\end{aligned}$$

και

$$\mathbb{E}(\cos(2N_k x)) = \frac{1}{B}\int_{A_k}^{A_k+B} \cos(2tx)\,dt = \frac{\sin(Bx)}{Bx}\cos((2A_k+B)x).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi_k(x))^2 &= \mathbb{E}(\sin^2 n_k x) - \lambda_k^2(x) = \frac{1}{2}(1-\mathbb{E}(\cos(2N_k x))) - \lambda_k^2(x)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sin(Bx)}{2Bx}\cos((2A_k+B)x) - \frac{4\sin^2(Bx)}{B^2x^2}\sin(A_k+\frac{B}{2})\\ &= \frac{1}{2} - \frac{2\sin^2(Bx/2)}{B^2x^2} + \Big(\frac{2\sin^2(Bx/2)}{B^2x^2} - \frac{\sin(Bx)}{2Bx}\Big)\cos((2A_k+B)x).\end{aligned}$$

Από τις $A_{k+1} - A_k \geqslant B+2$ και στοιχειώδεις τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε ότι η $\cos((2A_k + B)x)$ είναι ορθογώνια στον $L^2_\mu(\mathbb{R})$, άρα η $\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos((2A_k+B)x)}{k}$ συγκλίνει μ-σχεδόν παντού. Από το λήμμα του Kronecker έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \cos((2A_k+B)x) = 0$$

μ-σχεδόν παντού, άρα

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\varphi_k(x))^2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4\sin^2(Bx/2)}{B^2x^2}\Big)$$

μ-σχεδόν παντού.

Η $(\varphi_k^2(x) - \mathbb{E}(\varphi_k^2(x)))_{k=1}^\infty$ είναι ανεξάρτητη, ομοιόμορφα φραγμένη με μέση τιμή 0, οπότε εφαρμόζουμε τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\varphi_k^2(x) - \mathbb{E}(\varphi_k^2(x))) = 0$$

$\mathbb{P}$-σχεδόν παντού. Άρα, μ-σχεδόν παντού ως προς x έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4\sin^2(Bx/2)}{B^2x^2}\Big)$$

$\mathbb{P}$-σχεδόν παντού.

Από το θεώρημα Fubini έχουμε $\mathbb{P}$-σχεδόν παντού

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4\sin^2(Bx/2)}{B^2x^2}\Big)$$

μ-σχεδόν παντού ως προς x.

Έστω τώρα $\lambda\in\mathbb{R}$. Από τις $|\varphi_k(z)| \leqslant z$ και $e^z = (1+z)e^{\left(\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right)}$ καθώς το $z\to 0$, παίρνουμε

$$e^{\frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}} = \Big(1 + \frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big)e^{\frac{-\lambda^2\varphi_k^2(x)}{N} + +o(\frac{\lambda^2\varphi_k^2(x)}{N})}$$

καθώς το $N \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς x. Άρα, η χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\begin{aligned}\Phi_{T_N}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x)}\, d\mu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x,\omega)}\, d\mu(x)\end{aligned}$$

του T_N ως προς τον χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\Phi_{T_N}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N}\Big(1 + \frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big) e^{-(1+o(1))\frac{\lambda^2}{2N}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k^2(x))}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)^2\, dx.$$

Θέτουμε

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4\sin^2(Bx/2)}{B^2x^2}\Big).$$

Από τις $1 + x \leqslant e^x$ και $|\varphi_k(x)| \leqslant 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|\prod_{k=1}^{N}\Big(1 + \frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big)\Big| &= \prod_{k=1}^{N}\Big(1 + \frac{\lambda^2\varphi_k^2(x)}{N}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2N}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k^2(x)}\\ &\leqslant e^{2\lambda^2},\end{aligned}$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\mathbb{P}$-σχεδόν παντού έχουμε

$$\Phi_{T_N}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N}\Big(1 + \frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big) e^{\frac{-\lambda^2\widehat{g}(x)}{2}}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\, dx + o(1).$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της F είναι η

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}\left(1 - \frac{4\sin(Bx/2)^2}{B^2x^2}\right)}\, d\mu(x),$$

επομένως για να δείξουμε ότι $T_{N^3} \xrightarrow{d} F$, $\mathbb{P}$-σχεδόν παντού αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma_{N^3} \to 0$ σχεδόν παντού, $\mathbb{P}$-σχεδόν παντού, όπου

$$\Gamma_N = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(1 + \frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big) - 1\Big) e^{\frac{-\lambda^2 g(x)}{2}}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\, dx.$$

Έχουμε

$$\mathbb{E}|\Gamma_N|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big)-1\Big)\prod_{k=1}^{N}\Big(\Big(1+\frac{i\lambda\varphi_k(y)}{\sqrt{N}}\Big)-1\Big)e^{\frac{-\lambda^2 g(x)}{2}}e^{\frac{-\lambda^2 g(y)}{2}}\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Η $\{\varphi_k\}$ είναι ανεξάρτητη και $\mathbb{E}(\varphi_k(x)) = \mathbb{E}(\varphi_k(y)) = 0$, άρα

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big)-1\Big)\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(\frac{i\lambda\varphi_k(y)}{\sqrt{N}}\Big)-1\Big)\Big)\\
&=\mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}\Big)\Big(1-\frac{i\lambda\varphi_k(y)}{\sqrt{N}}\Big)\Big)-1\\
&=\mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{i\lambda\varphi_k(x)}{\sqrt{N}}-\frac{i\lambda\varphi_k(y)}{\sqrt{N}}+\frac{\lambda^2}{N}\varphi_k(x)\varphi_k(y)\Big)\Big)-1\\
&=\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)\Big)-1,
\end{aligned}$$

όπου $\psi_k(x,y) = \mathbb{E}(\varphi_k(x)\varphi_k(y))$. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\Gamma_N|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)\Big)-1\Big)e^{-\frac{\lambda^2 g(x)}{2}-\frac{\lambda^2 g(y)}{2}}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)\Big)-1\Big|\,d\mu(x)\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

Από τις $|\psi_k(x,y)| \leqslant 4$ και $|\log(1+x)-x| \leqslant Cx^2$ για κάθε $|x| \leqslant 1$, όπου $C>0$ σταθερά, για αρκούντως μεγάλα N έχουμε

$$\Big|\log\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)\Big)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)\Big)\Big| \leqslant \frac{16C\lambda^4}{N}.$$

Θέτοντας τώρα

$$G_N(x,y) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $G_N(x,y) \leqslant 4\lambda^2$, έχουμε

$$\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{\lambda^2}{N}\psi_k(x,y)\Big) = e^{G_N(x,y)+O(\lambda^2/N)} = 1+O(|G_N(x,y|)+O1/N).$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}|\Gamma_N|^2 \leqslant C_1\Big(\frac{1}{N}+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|G_N(x,y)|\,d\mu(x)\,d\mu(y)\Big)$$

για κάποια σταθερά $C_1>0$.

Χρησιμοποιώντας πάλι τις $A_{k+1}-A_k \geqslant B+2$ και $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ax)(\frac{\sin(x)}{x})^2\,dx = 0$ για $|a|>2$, για κάθε $\lambda_1 \in [A_k, A_k+B]$ και $\lambda_2 \in [A_l, A_l+B]$ με $k \neq l$ έχουμε ότι οι $\sin(\lambda_1 x)$ και $\sin(\lambda_2 x)$ είναι ορθογώνιες στον $L^2_\mu(\mathbb{R})$. Άρα, οι φ_k και φ_l είναι ορθογώνιες στον $L^2_\mu(\mathbb{R})$. Από την

$$\psi_k(x,y)\psi_l(x,y) = \mathbb{E}(\varphi_k(x)\varphi_l(x)\varphi_k(y)\varphi_l(y))$$

έπεται ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(x,y)\psi_l(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)=0$$
για κάθε $k\neq l$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz συμπεραίνουμε ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|G_N(x,y)|\,d\mu(x)\,d\mu(y)=O(N^{-\frac{1}{2}}).$$
Επομένως,
$$\mathbb{E}|\Gamma_N|^2=O(N^{-\frac{1}{2}}),$$
άρα
$$\sum_{N\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|\Gamma_{N^3}|^2<\infty$$
$\mathbb{P}$-σχεδόν παντού. Εν τέλει, $\Gamma_{N^3}\to 0$ $\mathbb{P}$-σχεδόν παντού. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τυχαίες Σειρές Fourier και κίνηση Brown

5.1 Κίνηση Brown

Κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener καλείται μια στοχαστική διαδικασία ορισμένη σε συνεχή χρόνο (στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{R}^n$) αν έχει τις ακόλουθες τέσσερις ιδιότητες:

(α) $B(0) = 0$.

(β) Η $B(t)$ είναι σχεδόν παντού συνεχής.

(γ) Η $\{B(t)\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(δ) $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ για κάθε $t > s \in \mathbb{R}_{>0}$.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών στο $\mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Ορίζουμε*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Τότε,

(α) $\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i > a\right) \leqslant 2\mathbb{P}(S_n > a)$.

(β) $\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i > a\right) \leqslant 2\mathbb{P}(S_n > a + 2b) - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > b)$.

(γ) $\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > a\right) \leqslant 2\mathbb{P}(|S_n| > a)$.

Απόδειξη. (α) Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{S_1 > a\} \\
A_2 &= \{S_1 \leqslant a, S_2 > a\} \\
A_3 &= \{S_1 \leqslant a, S_2 \leqslant a, S_3 > a\} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
A_n &= \{S_1 \leqslant a, S_2 \leqslant a, \ldots, S_{n-1} \leqslant a, S_n > a\},
\end{aligned}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε επίσης

$$A = \Big\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i > a \Big\}.$$

Προφανώς, τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ αποτελούν μια διαμέριση του A. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\Big(A \cap (\{S_n \leqslant a\} \cup \{S_n > a\})\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(A \cap \Big(\{S_n \leqslant a\}\Big)\Big) + \mathbb{P}\Big(A \cap \{S_n > a\}\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \{S_n \leqslant a\}\Big) + \mathbb{P}(\{S_n > a\}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n \leqslant a\}) + \mathbb{P}(\{S_n > a\}).
\end{aligned}$$

Για $i \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n \leqslant a\}) &\leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_i - S_n > 0\}) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(S_i - S_n > 0) \\
&= \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(S_i - S_n < 0) = \mathbb{P}(A_i \cap \{S_i - S_n < 0\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a\}),
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a\}) + \mathbb{P}(S_n > a) \\
&= \mathbb{P}(S_n > a) + \mathbb{P}(S_n > a) = 2\mathbb{P}(S_n > a).
\end{aligned}$$

(β) Για $i \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a + 2b\}) - \mathbb{P}(X_i > b) \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a + 2b\} \cap \{X_i \leqslant b\}).$$

Πράγματι,

$$A_i \cap \{S_n > a + 2b\} \cap \{X_i \leqslant b\} \subseteq A_i \cap \{S_n - S_i > b\} \cap \{X_i \leqslant b\},$$

άρα

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a + 2b\} \cap \{X_i \leqslant b\}) &\leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n - S_i > b\} \cap \{X_i \leqslant b\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n - S_i < -b\} \cap \{X_i \leqslant b\}).
\end{aligned}$$

Για κάθε $\omega \in A_i \cap \{S_n - S_i < -b\} \cap \{X_i \leqslant b\}$ έχουμε

$$S_{i-1}(\omega) \leqslant a, X_i(w) \leqslant b$$

και επομένως

$$S_n(\omega) < S_i(\omega) - b = S_{i-1}(\omega) + X_i(\omega) - b \leqslant a + 0.$$

Συνεπώς,

$$A_i \cap \{S_n - S_i < -b\} \cap \{X_i \leqslant b\} \subseteq A_i \cap \{S_n < a\},$$

άρα

$$\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n - S_i < -b\} \cap \{X_i \leqslant b\}) \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n < a\}).$$

Τότε,

$$\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a + 2b\}) - \mathbb{P}(X_i > b) \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a + 2b\} \cap \{X_i \leqslant b\}) \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap \{S_n < a\}),$$

δηλαδή

$$\mathbb{P}(A \cap \{S_n < a\}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n > a + 2b\}) - \mathbb{P}(X_i > b)),$$

και επίσης έχουμε

$$\mathbb{P}(A \cap \{S_n < a\}) \geqslant \mathbb{P}(S_n > a + 2b).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(S_n > a + 2b) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > b).$$

(γ) Θέτουμε

$$B = \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} S_i > a \right\}.$$

Τότε,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| > a \Big) = \mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \leqslant 2\mathbb{P}(S_n > a) + 2\mathbb{P}(-S_n > a) = 2\mathbb{P}(|S_n| > a).$$

□

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω B μια κίνηση Brown στο $\mathbb{R}$ και $a, t_0 \in [0, \infty)$. Τότε, για κάθε $t \in (0, \infty)$ ισχύουν τα εξής:*

(α) $\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s) > a\right) = 2\mathbb{P}(B(t) > a)$.

(β) $\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |B(s + t_0) - B(t_0)| > a\right) \leqslant 2\mathbb{P}(|B(t + t_0) - B(t_0)| > a)$.

Απόδειξη. (α) Έστω $t \in (0, \infty)$ και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$X_i = B\Big(\frac{i}{2^n} t\Big) - B\Big(\frac{i-1}{2^n} t\Big)$$

για $i \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Η $\{X_i\}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών.

Θέτουμε

$$S_m = X_1 + \cdots + X_m \stackrel{d}{=} B\Big(\frac{m}{2^n}t\Big).$$

Από το Θεώρημα 5.1.1 έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n} B\Big(\frac{i}{2^n}t\Big) > a\Big) \leqslant \mathbb{P}(B(t) > a).$$

Στέλνοντας το n στο άπειρο έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} B(rt) > a\Big) \leqslant 2\mathbb{P}(B(t) > a).$$

Αφού η $t \mapsto B(t)$ είναι συνεχής, για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t > 0$ έχουμε $\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B(s,\omega) > a$ αν και μόνο αν $\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} B(rt,\omega) > a$. Έπεται η $\leqslant$ στο (α).

Έστω $b \in (0,\infty)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i > b) &= \mathbb{P}\Big(B\Big(\frac{t}{2^n} > b\Big)\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{t}}{2^{n/2}}B(1) > b\Big)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\Big(B(1)^4 > \frac{2^{2n}b^4}{t^2}\Big)\\
&\leqslant \frac{t^2}{2^{2n+1}b^4}\mathbb{E}(B(1)^4)\\
&= \frac{3t^2}{2^{2n+1}b^4}.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\beta = \frac{1}{n}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.1.1. Έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B(s) > a\Big) \geqslant \mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n} B\Big(\frac{i}{2^n}t\Big) > a\Big) \geqslant 2\mathbb{P}(B(t) > a + 2/n) - \frac{3t^2n^4}{2^{n+1}}.$$

Στέλνοντας το n στο άπειρο και από τη μονοτονία του ορίου βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B(s) > a\Big) \geqslant 2\mathbb{P}(B(t) > a)$$

και έχουμε την αντίστροφη ανισότητα του (α).

(β) Θέτουμε

$$X_i = B\Big(\frac{i}{2^n}t + t_0\Big) - B\Big(\frac{i-1}{2^n}t + t_0\Big)$$

για $i \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{2^n} X_i \stackrel{d}{=} B(t + t_0) - B(t_0).$$

Ύστερα, εφαρμόζουμε το (γ) του Θεωρήματος 5.1.1 και παίρνουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |B(s + t_0) - B(t_0)| > a\Big) \leqslant 2\mathbb{P}(|B(t + t_0) - B(t_0)| > a).$$

$\square$

Θεώρημα 5.1.3 (Paley-Wiener-Zygmund). *Έστω B κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σύνολο*

$$A = \Big\{ \limsup_{t \to s} \Big| \frac{B(t) - B(s)}{t - s} \Big| < \infty \ \text{ για κάποιο } s \in (0, \infty) \Big\}.$$

Τότε, υπάρχει S που ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με $A \subseteq S$ και $\mathbb{P}(S) = 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus S$ η $t \mapsto B(t, \omega)$ να είναι πουθενά διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Έστω $i \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε το εξής σύνολο:

$$\begin{aligned} S_n = \Big\{ \omega \in \Omega : \ & \text{υπάρχει } s \in [0, n] \ \text{ ώστε } |B(t, w) - B(s, w)| \leqslant i|t - s| \\ & \text{για κάθε } t \in (0, \infty) \ \text{ και } |t - s| \leqslant \frac{5}{n} \Big\}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε επίσης

$$\begin{aligned} S = \{ \omega \in \Omega : \ & \text{υπάρχουν } s \in (0, \infty) \ \text{ και } \delta > 0 \ \text{ ώστε } |B(t, \omega) - B(s, \omega)| \leqslant i|t - s| \\ & \text{για κάθε } t \in (0, \infty) \ \text{ και } |t - s| \leqslant \delta \Big\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $S_n \subseteq S_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $\{S_n\}$ είναι αύξουσα. Επιπλέον,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ με $1 \leqslant k \leqslant n^2$ θέτουμε

$$I_n^k := \Big\{ \frac{k - 1 + j}{n} : j = 0, 1, 2, 3, 4 \Big\}$$

και

$$D_n := \bigcup_{k=1}^{n^2} \Big\{ \omega \in \Omega : |B(r + 1/n) - B(r)| \leqslant \frac{9i}{n} \ \text{ για κάθε } r \in I_n^k \Big\}.$$

Παρατηρήστε ότι $D_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $S_n \subseteq D_n$. Έστω $\omega \in S_n$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $s \in [0, n]$ ώστε $|B(t, \omega) - B(s, \omega)| \leqslant i|t - s|$ για κάθε $t \in (0, \infty)$ και $|t - s| \leqslant \frac{5}{n}$. Μπορούμε να επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{k-1}{n} \leqslant s < \frac{k}{n}$. Έχουμε $s < n$, άρα $k \leqslant n^2$. Τότε, για κάθε $r \in I_n^k$ έχουμε

$$\Big| r + \frac{1}{n} - s \Big| \leqslant \frac{5}{n}.$$

Οπότε,

$$|B(r + 1/n, \omega) - B(r, \omega)| \leqslant i(|r + 1/n - s| + |r - s|) \leqslant \frac{9i}{n},$$

άρα $\omega \in D_n$.

Παρατηρούμε ότι $S \subseteq \liminf D_n$. Εάν θεωρήσουμε ένα $\omega \in S$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\omega \in S_n$ για κάθε $n \geqslant N$. Όμως, $S_n \subseteq D_n$, άρα $S \subseteq \liminf D_n$.

Επειδή $B(t) \overset{d}{=} \sqrt{t}B(1)$ και $B(r+1/n) - B(r) \overset{d}{=} B(1/n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_n) &\leqslant n^2 \mathbb{P}\Big(|B(1/n)| \leqslant \frac{9i}{n}\Big)^5 \\
&= n^2 \mathbb{P}\Big(|B(1)| \leqslant \frac{9i}{\sqrt{n}}\Big)^5 \\
&= n^2 \Big((2\pi)^{-d/2} \int_{\{\|x\| \leqslant 9i/\sqrt{n}\}} e^{-\|x\|^2}\, dx\Big)^5 \\
&\leqslant n^2 \Big((2\pi)^{-d/2} \Big(\frac{9i}{\sqrt{n}}\Big)^d \lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leqslant 1\}\Big)^5 \\
&= O\Big(\frac{1}{n^{\frac{5d-4}{2}}}\Big) \to 0
\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

Άρα,

$$\mathbb{P}(\liminf D_n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=N}^{\infty} D_n\Big) \leqslant \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

Εν συνεχεία θεωρούμε το $i \in \mathbb{N}$, που είχαμε αρχικά σταθεροποιήσει, ως μη σταθερό, και ορίζουμε S_i να είναι το S εξαρτώμενο απο το i.

Ορίζουμε $D = \liminf D_n$ και κάνουμε το ίδιο με το D_i. Τώρα, θεωρούμε τα εξής σύνολα:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \quad \text{και} \quad F = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i.$$

Οπότε, έχουμε $E \subseteq F$ και $\mathbb{P}(F) = 0$. □

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω B κίνηση Brown στο $\mathbb{R}$ και $0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) = \infty\Big) = 1$$

και

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) = -\infty\Big) = 1.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $t_0 = 0$ και $X_n = B(t_n) - B(t_{n-1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών. Ορίζουμε

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Τότε,

$$S_n = B(t_n),$$

και επειδή $X_n \overset{d}{=} -X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) < \infty\Big) = \mathbb{P}\Big(\inf_{n\geqslant 1} B(t_n) > -\infty\Big).$$

Από τον 0-1 νόμο του Kolmogorov έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) < \infty\Big) = 0 \ \text{ ή } 1.$$

Προς άτοπο θεωρούμε ότι

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) < \infty\Big) = 1.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) < \infty\Big) \cap \Big(\inf_{n\geqslant 1} B(t_n) > -\infty\Big)\Big)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) < \infty\Big) + \mathbb{P}\Big(\inf_{n\geqslant 1} B(t_n) > -\infty\Big)\\
&\quad - \mathbb{P}\Big(\Big(\sup_{n\geqslant 1} B(t_n) < \infty\Big) \cup \Big(\inf_{n\geqslant 1} B(t_n) > -\infty\Big)\Big)\\
&\quad = 1 + 1 - 1 = 1,
\end{aligned}$$

άρα υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{1}{2} < \mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 1} |B(t_n)| < p\Big).$$

Για αρκούντως μεγάλα n έχουμε

$$1/2 < \mathbb{P}(\{|B(t_n)| < p\}) = \mathbb{P}\Big(\Big\{|B(1)| < \frac{p}{\sqrt{t_n}}\Big\}\Big) \leqslant \frac{\mathbb{E}|B(1)|}{\sqrt{t_n}},$$

όπου

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}|B(1)|}{\sqrt{t_n}} = 0.$$

Δηλαδή $\frac{1}{2} < 0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Ορισμός 5.1.5 (γκαουσιανός χώρος Hilbert)**.** Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X στον $\mathbb{R}^n$. Η X καλείται γκαουσιανή εάν ακολουθεί κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{E}(X) = 0$. Γκαουσιανός χώρος Hilbert ή αφηρημένος χώρος Wiener καλείται ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$, που κάθε στοιχείο του είναι γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Εμείς δουλεύουμε στους πραγματικούς γκαουσιανούς χώρους Hilbert, σε αυτό το κεφάλαιο.

Θεώρημα 5.1.6. *Έστω B κίνηση Brown στο $\mathbb{R}$. Τότε, υπάρχουν πραγματικός χώρος Hilbert H και μια γραμμική ισομετρία $T : L^2 \to H$ που είναι επίσης επιμορφισμός, ώστε $B(t) = T(\mathbf{1}_{[0,t)})$ σχεδόν για κάθε $t > 0$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k)}$, για $n \in \mathbb{N}$, όπου $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$.

Ορίζουμε επίσης $X_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, και

$$T(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k.$$

Τώρα, θεωρούμε το σύνολο A όλων των συναρτήσεων f αυτής της μορφής. Έτσι, η $T : A \to L^2(\Omega)$ είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση.

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές που ορίζονται από την

$$X_k = B(t_k - t_{k-1}) \overset{d}{=} \sqrt{t_k - t_{k-1}}B(1)$$

για $k = 1, \ldots, n$. Οι X_k είναι ανεξάρτητες και

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(T(f)) = 0.$$

Για κάθε $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iuT(f)}) &= \mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{n} e^{iua_k X_k}\Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(e^{iua_k X_k}\big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(e^{iua_k\sqrt{t_k - t_{k-1}}B(1)}\big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(e^{-\frac{(ua_k\sqrt{t_k - t_{k-1}})^2}{2}}\Big) \\
&= e^{-\frac{1}{2}u^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2(t_k - t_{k-1})}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η $T(f)$ είναι γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με $\mathrm{Var}(T(f)) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2(t_k - t_{k-1})$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_2^2 &= \mathbb{E}(|T(f)|^2) = \mathrm{Var}(T(f)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2(t_k - t_{k-1}) = \int_0^\infty |f(t)|^2\,dt \\
&= \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Επομένως, η T είναι γραμμική ισομετρία με $\mathrm{Dom}(T) = A \subset L^2((0,\infty))$ και $\mathrm{Im}(T) = T(A) \subseteq L^2(\Omega)$, και κάθε στοιχείο του συνόλου $T(A)$ είναι γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Έχουμε $\overline{A}^{\|\cdot\|_2} = L^2(0,\infty)$. Θέτουμε $H = \overline{T(A)}^{\|\cdot\|_2} \subseteq L^2(\Omega)$. $\square$

Παρατήρηση 5.1.7 (παράσταση κίνησης Brown ως τυχαία σειρά Fourier)**.** Έστω $I \subset (0,\infty)$ διάστημα. Ο χώρος $L^2(I)$ έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Έστω $t > 0$. Έχουμε $\mathbf{1}_{[0,t]} \in H$, όπου H είναι ο πραγματικός γκαουσιανός χώρος Hilbert που ορίσαμε προηγουμένως, δηλαδή $H = \overline{T(A)}^{\|\cdot\|_2}$. Άρα,

$$\mathbf{1}_{[0,t]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(t)e_n,$$

στον $L^2[0,1]$, απ' όπου έχουμε

$$B(t) = T(\mathbf{1}_{[0,t]}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(t)T(e_n)$$

στον H σχεδόν βεβαίως. Για κάθε $t \in (0,1)$, μπορούμε να θεωρήσουμε την $B'(t)$ ως παράγωγο της $B(t)$: έχουμε

$$B'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(e_n)e_n(t).$$

Η $B'(t)$ καλείται λευκός θόρυβος. Έχουμε

$$\int_0^t B'(s)ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T(e_n)\int_0^t e_n(s)ds,$$

δηλαδή

$$B(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n E_n(t)$$

όπου $\xi_n = T(e_n)$ και

$$E_n(t) = \int_0^t e_n(s)ds.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε τριγωνομετρική βάση στον $L^2[0,1]$, την

$$1, \sqrt{2}\cos 2\pi t, \sqrt{2}\sin 2\pi t, \ldots, \sqrt{2}\cos 2\pi nt, \sqrt{2}\sin 2\pi nt,$$

έχουμε τυχαία σειρά Fourier.

Θεώρημα 5.1.8. *Έστω B κίνηση Brown στο $\mathbb{R}$ και έστω $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Τότε:*

(i) $B_t \sim N(0,t)$.

(ii) *Η B_1 ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή.*

(iii) $B(a^2t) \overset{d}{=} aB_t$ *και* $B_t \overset{d}{=} \sqrt{t}B_1$, $a \in \mathbb{R}$.

(iv) $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t,s\}$.

(v) $\mathbb{E}(e^{iuB_t}) = e^{\frac{-tu^2}{2}}$.

Απόδειξη. (i) Για $t > 0$ έχουμε $B_t - B_0 \sim N(0, t-0)$ και $B_0 = 0$. Συνεπώς, $B_t \sim N(0,t)$.
(ii) Θέτουμε $t = 1$ και χρησιμοποιούμε το (i).
(iii) Από το (i) έχουμε $B(a^2t) \sim N(0, a^2t)$. Αφού $B_t \sim N(0,t)$ παίρνουμε $aB_t \sim N(0, a^2t)$ από γνωστή ιδιότητα της κανονικής κατανομής. Ομοίως, $B_1 \sim N(0,1)$. Άρα,

$$\sqrt{t}B_1 \sim N(0,t).$$

(iv) Έστω $t > s$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}(B_tB_s) - \mathbb{E}(B_t)\mathbb{E}(B_s) = \mathbb{E}(B_tB_s)\\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s + B_sB_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s)\mathbb{E}(B_s) + \mathbb{E}(B_s^2)\\ &= t \cdot 0 + s = s.\end{aligned}$$

(v) Άμεσο, καθώς η B_t ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. □

Θεώρημα 5.1.9 (Νόμος των μέγαλων αριθμών για την κίνηση Brown)**.** *Έστω B_t κίνηση Brown με $t \in [0, \infty)$. Τότε,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{B_t}{t} = 0$$

σχεδόν βεβαίως.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\frac{B_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(B_k - B_{k-1}).$$

Για κάθε k θέτουμε $X_k = B_k - B_{k-1}$. Οι X_k είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, άρα ισχύει ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mathbb{E}(X_k) = 0$$

σχεδόν βεβαίως, συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(B_k - B_{k-1}) = 0$$

σχεδόν βεβαίως. Εαν τώρα δείξουμε πως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[n,n+1]} |B_t - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big) < \infty,$$

τότε από το πρώτο λήμμα Borel-Canteli συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{P}(A_n) = 0$, όπου

$$A_n = \Big\{\sup_{t\in[n,n+1]} |B_t - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big\},$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. Από την ανισότητα του Kolmogorov έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0<k\leqslant 2^m} |B_{n+k2^{-m}} - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big) \leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\mathbb{E}(B_{n+1} - B_n)^2 = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{\sup_{0<k\leqslant 2^m} |B_{n+k2^{-m}} - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\} = \Big\{\sup_{t\in[n,n+1]} |B_t - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big\}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[n,n+1]} |B_t - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big\{\sup_{0<k\leqslant 2^m} |B_{n+k2^{-m}} - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big\}\Big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{0<k\leqslant 2^m} |B_{n+k2^{-m}} - B_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Θεώρημα 5.1.10. *Έστω B_t κίνηση Brown με $t \in [0, \infty)$. Τότε,*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty$$

και

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Έστω $a > 0$. Ορίζουμε $A_n = \{B_n > a\sqrt{n}\}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\limsup A_n) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big)\\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $B_n \overset{d}{=} \sqrt{n}B_1$, άρα $\frac{B_n}{\sqrt{n}} \overset{d}{=} B_1$ και παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1 > a),$$

όπου $\mathbb{P}(B_1 > a) > 0$.

Μπορούμε να γράψουμε την κίνηση Brown ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή ως εξής:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} (B_k - B_{k-1})$$

για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\limsup \frac{B_n}{\sqrt{n}} > a$ αν και μόνο αν $\limsup \frac{B_n - B_{n_0}}{\sqrt{n}} > a$. Από τον 0-1 νόμο του Kolmogorov παίρνουμε $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, άρα

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

σχεδόν παντού. Επειδή η $-B_t$ είναι επίσης κίνηση Brown, έχουμε

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{-B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$$

σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t\to\infty} \frac{-(-B_t)}{\sqrt{t}} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{-B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

σχεδόν παντού. □

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την κίνηση Brown. Αρχικά θα την αναπαραστήσουμε ως γραμμικό συνδυασμό απείρων ορθοκανονικών συναρτήσεων (αυτό, όταν γενικεύεται για τις στοχαστικές διαδικασίες καλείται ανάπτυγμα Karhunen-Loève) και θα καταλήξουμε στην παράσταση που κατασκεύασε ο Norbert Wiener που αποτελεί τυχαία σειρά Fourier.

Η ιδέα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι των Levy-Ciesielski. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L^2[0,1]$ με εσωτερικό γινόμενο το

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \qquad f,g\in L^2[0,1].$$

Έστω $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον χώρο $L^2[0,1]$ και $(G_n)_{n\geqslant 0}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Θέτουμε

$$B_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} G_n \int_0^t \varphi_n(s)ds, \qquad t\in[0,1].$$

Θα δείξουμε ότι το $\lim_{N\to\infty} B_N(t)$ υπάρχει και είναι κίνηση Brown για $t\in[0,1]$.

Θεώρημα 5.1.11. *Το $\lim_{N\to\infty} B_N(t)$ υπάρχει για κάθε $t\in[0,1]$ στον L^2. Επιπλέον, γράφοντας $B(t)=\lim_{N\to\infty} B_N(t)$, έχουμε:*

(α) $B(0)=0$.

(β) *Η B έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

(γ) $B_t - B_s \sim N(0,\,t-s)$ *για κάθε $t>s\in\mathbb{R}_{>0}$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_N(t)^2) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{m,n=0}^{N-1} G_nG_m \int_0^t \varphi_n(s)ds\int_0^t \varphi_m(r)dr\Big)\\
&= \sum_{m,n=1}^{N-1} \mathbb{E}(G_nG_m)\int_0^t \varphi_n(s)ds\int_0^t \varphi_m(r)dr\\
&= \sum_{n=1}^{N-1}\Big(\int_0^t \varphi_n(s)ds\Big)^2,
\end{aligned}$$

και στέλνοντας το n στο άπειρο, από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}(B_N(t)^2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^t \varphi_n(s)ds\Big)^2\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\langle \mathbf{1}_{[0,t)},\varphi_n\rangle^2 = \langle \mathbf{1}_{[0,t)},\mathbf{1}_{[0,t)}\rangle = t.
\end{aligned}$$

Άρα, το όριο του $B_N(t)$ υπάρχει στον L^2. Άρα, συγκλίνει κατά πιθανότητα.

Ομοίως για $s<t$ και $u<v$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((B(t)-B(s))(B(v)-B(u)\big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle \mathbf{1}_{[0,t)}-\mathbf{1}_{[0,s)},\varphi_n\rangle\langle \mathbf{1}_{[0,v)}-\mathbf{1}_{[0,u)},\varphi_n\rangle\\
&= \langle \mathbf{1}_{[s,t)},\mathbf{1}_{[u,v)}\rangle,
\end{aligned}$$

όπου

$$\langle \mathbf{1}_{[s,t)}, \mathbf{1}_{[u,v)} \rangle = \begin{cases} t-s, & [s,t)=[u,v) \\ 0, & [s,t)\bigcap[u,v)=\emptyset \\ (u\wedge t - u\vee s)^+, & \text{γενικά} \end{cases}$$

Για κάθε $s,t,u,v \in \mathbb{R}$ με $0 \leqslant s < t \leqslant u < v$ και $\xi,\eta \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\xi(B(t)-B(s))+i\eta(B(v)-B(u))}) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big(e^{\sum_{n=0}^{N-1} i\xi\langle \mathbf{1}_{[s,t)},\varphi_n\rangle G_n + i\eta\langle \mathbf{1}_{[u,v)},\varphi_n\rangle G_n}\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big(e^{i(\sum_{n=0}^{N-1} \xi\langle \mathbf{1}_{[s,t)},\varphi_n\rangle + \eta\langle \mathbf{1}_{[u,v)},\varphi_n\rangle)G_n}\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big(e^{(i\xi\langle \mathbf{1}_{[s,t)},\varphi_n\rangle + i\eta\langle \mathbf{1}_{[u,v)},\varphi_n\rangle)G_n}\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big(e^{-\frac{1}{2}|\xi\langle \mathbf{1}_{[s,t)},\varphi_n\rangle + \eta\langle \mathbf{1}_{[u,v)},\varphi_n\rangle|^2}\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big(-\frac{1}{2}e^{\sum_{n=0}^{N-1}(\xi^2\langle \mathbf{1}_{[s,t)},\varphi_n\rangle^2 + \eta^2\langle \mathbf{1}_{[u,v)},\varphi_n\rangle^2)}\Big) \\
&\qquad \times \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big(-e^{\sum_{n=0}^{N-1} \xi\eta\langle \mathbf{1}_{[s,t)},\varphi_n\rangle\langle \mathbf{1}_{[u,v)},\varphi_n\rangle}\Big) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\xi^2(t-s)}e^{-\frac{1}{2}\eta^2(v-u)}.
\end{aligned}$$

Άρα, για $\eta = 0$ έχουμε $B(t)-B(s) \sim N(0,t-s)$. Για $\eta=0$, $s=0$ και αντικαθιστώντας το t με $t-s$ έχουμε $B(t-s)\sim N(0,t-s)$. Η $B(t)-B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $B(v)-B(u)$, καθώς τα ξ,η ήταν αυθαίρετα, και

$$B(0) = \lim_{N\to\infty} B_N(0) = \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

□

Δεν έχουμε δείξει πως το μονοπάτι $t \mapsto B(t,\omega)$ είναι συνεχές σχεδόν παντού. Συνεπώς, δεν έχουμε ακόμα κίνηση Brown. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ενα ειδικό πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. Εισάγουμε την οικογένεια συναρτήσεων Haar H_{2^j+k} και την οικογένεια συναρτήσεων Schauder S_{2^j+k}. Για $n=0$ και $n=2^j+k$, $j\geqslant 0$, $k=0,1,\cdots,2^j-1$ οι συναρτήσεις Haar ορίζονται ως $H_0(t)=1$ και

$$H_{2^j+k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{στο } [\frac{k}{2^j}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}) \\ -2^{\frac{j}{2}}, & \text{στο } [\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^j}) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις Schauder ορίζονται ως $S_0(t)=t$ και

$$S_{2^j+k}(t) = \langle \mathbf{1}_{[0,t)}, H_{2^j+k}\rangle.$$

Έχουμε επίσης $\mathrm{supp}(S_n) = \mathrm{supp}(H_n)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 H_n(t)dt = 0, \qquad n \geqslant 1$$

και
$$H_{2^j+k}H_{2^j+l} = S_{2^j+k}S_{2^j+l} = 0, \qquad j \geqslant 0, k \neq l.$$
Οι συναρτήσεις Schauder S_{2^j+k} είναι τριγωνικές συναρτήσεις με φορέα το $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ και μέγιστη τιμή $\frac{1}{2}2^{-\frac{j}{2}}$. Όταν κάνουμε λόγο για τριγωνικές συναρτήσεις εννοούμε αυτές που η γραφική τους παράσταση είναι ένα τρίγωνο.

Οι συναρτήσεις Haar είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2[0,1]$, δηλαδή
$$\langle H_n, H_m\rangle = \int_0^1 H_n(t)H_m(t)dt = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n\end{cases}$$
και αποτελούν βάση του $L^2[0,1]$.

Θεώρημα 5.1.12. *Υπάρχουν χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ και ακολουθία $(G_n)_{n\geqslant 0}$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών ώστε η*
$$B(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\omega)\langle \mathbf{1}_{[0,t)}, H_n\rangle, \qquad t\in[0,1]$$
να είναι κίνηση Brown.

Απόδειξη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα και να επιλέξουμε την οικογένεια συναρτήσεων Haar ως το πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2[0,1]$. Ως χώρο πιθανότητας θα χρησιμοποιήσουμε έναν χώρο στον οποίον ορίζονται αριθμήσιμες το πλήθος ανεξάρτητες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές $(G_n)_{n\geqslant 0}$ από την κατασκευή της $B(t)$.

Συνεπώς μας μένει μόνο να δείξουμε ότι το μονοπάτι $t\mapsto B(t,\omega)$ είναι συνεχές σχεδόν βεβαίως. Εκ κατασκευής η
$$B_N(t,\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} G_n(\omega)\langle \mathbf{1}_{[0,t)}, H_n\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} G_n(\omega)S_n(t)$$
είναι συνεχής σχεδόν παντού σαν συνάρτηση του t.

Αρκεί να βρούμε μια υπακολουθία της $(B_N(t))_{N\geqslant 0}$ που να συγκλίνει ομοιόμορφα στην $B(t)$. Ο τρόπος απόδειξης μοιάζει με εκείνον της απόδειξης της πληρότητας των χώρων L^p. Ορίζουμε
$$\Delta_j(t) = B_{2^{j+1}}(t) - B_{2^j}(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} G_{2^j+k}S_{2^j+k}(t).$$
Αν $k\neq l$ τότε $S_{2^j+k}S_{2^j+l}=0$. Άρα,
$$\begin{aligned}|\Delta_j(t)|^4 &= \sum_{k,l,p,q=0}^{2^j-1} G_{2^j+k}G_{2^j+l}G_{2^j+p}G_{2^j+q}S_{2^j+k}(t)S_{2^j+l}(t)S_{2^j+p}(t)S_{2^j+q}(t)\\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} G_{2^j+k}^4|S_{2^j+k}(t)|^4\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2^j-1} G_{2^j+k}^4 2^{-2j},\end{aligned}$$

άρα

$$\sup_{t\in[0,1]} |\Delta_j(t)|^4 \leqslant \sum_{k=0}^{2^j-1} G_{2^j+k}^4 2^{-2j},$$

και

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |\Delta_j(t)|^4\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}(G_{2^j+k}^4) 2^{-2j}.$$

Επειδή $G_n \sim N(0,1)$ έχουμε $\mathbb{E}(G_n^4) = 3$. Άρα,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |\Delta_j(t)|^4\Big) \leqslant 3\sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-2j} = 3\sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-2j} = 3\cdot 2^{-j}.$$

Έστω $N > n$. Τότε, από την ανισότητα Minkowski στον $L^4(\mathbb{P})$,

$$\begin{aligned}\Big\|\sup_{t\in[0,1]} |B_{2^N}(t) - B_{2^n}(t)|\Big\|_{L^4} &\leqslant \Big\|\sum_{j=n+1}^{N} \sup_{t\in[0,1]} |B_{2^j}(t) - B_{2^{j-1}}(t)|\Big\|_{L^4}\\ &\leqslant \sum_{j=n+1}^{N} \Big\|\sup_{t\in[0,1]} |\Delta_j(t)|\Big\|_{L^4}\\ &\leqslant 3^{\frac14}\sum_{j=n+1}^{N} 2^{-\frac{j}{4}}.\end{aligned}$$

Στέλνοντας το N και το n στο άπειρο βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος τείνει στο 0.

Τώρα, από το λήμμα Fatou,

$$\Big\|\liminf_{n,N\to\infty}\sup_{t\in[0,1]} |B_{2^N}(t) - B_{2^n}(t)|\Big\|_{L^4} \leqslant \liminf_{n,N\to\infty}\Big\|\sup_{t\in[0,1]} |B_{2^N}(t) - B_{2^n}(t)|\Big\|_{L^4} = 0,$$

άρα υπάρχει $B\subset\Omega$ ώστε $\mathbb{P}(B) = 1$ και

$$\liminf_{n,N\to\infty}\sup_{t\in[0,1]} |B_{2^N}(\omega,t) - B_{2^n}(\omega,t)| = 0$$

για κάθε $\omega\in B$.

Από την πληρότητα του χώρου των συνεχών συναρτήσεων μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $(B_{2^j}(\omega,t))_{j\geqslant 1}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $t\in[0,1]$ στην $B(t,\omega)$. Επειδή όμως η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη έπεται ότι η $B(t,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε $\omega\in B$. Ορίζουμε

$$\breve{B}(t,\omega) = \begin{cases} B(t,\omega), & \omega\in B\\ 0, & \omega\notin B\end{cases}$$

Επειδή $\mathbb{P}(\Omega\setminus B) = 0$, το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για την $\breve{B}$, και έπεται ότι η $\breve{B}(t,\omega)$ αποτελεί κίνηση Brown για $t\in[0,1]$. $\square$

Κλείνουμε με την τριγωνομετρική κατασκευή του Wiener για την κινηση Brown στο διάστημα $[0,1]$. Δηλαδή, δείχνουμε ότι η κίνηση Brown είναι τυχαία σειρά Fourier στο διάστημα $[0,1]$.

Θεώρημα 5.1.13. *Έστω B μονοδιάστατη κίνηση Brown. Τότε,*

$$B(t,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi t)}{n}G_n(\omega),\qquad t\in[0,1],$$

όπου $(G_n)_{n\geqslant 0}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταλβητών που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$B_N(t,\omega)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n\pi t)}{n}G_n(\omega).$$

Από τα προηγούμενα θεωρήματα αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $(B_{2^n})_{n\geqslant 1}$ είναι Cauchy στον $L^2(\mathbb{P})$ ομοιόμορφα ως προς $t\in[0,1]$. Ορίζουμε όπως πριν

$$\Delta_j(t)=B_{2^{j+1}}(t)-B_{2^j}(t).$$

Τότε, από την $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$ έχουμε

$$|\Delta_j(t)|^2=\Big(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{\sin(k\pi t)}{k}G_k(\omega)\Big)^2\leqslant\Big|\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{\varepsilon^{ik\pi t}}{k}G_k(\omega)\Big|^2.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}|\Delta_j(t)|^2&\leqslant\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{e^{ik\pi t}e^{-il\pi t}}{kl}G_kG_l\\&=\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{G_k^2}{k^2}+2\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\sum_{l=2^j+1}^{k-1}\frac{e^{ik\pi t}e^{-il\pi t}}{kl}G_kG_l\\&=\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{G_k^2}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\frac{e^{im\pi t}}{l(l+m)}G_kG_{l+m}\\&\leqslant\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{G_k^2}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\Big|\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\frac{G_lG_{l+m}}{l(l+m)}\Big|,\end{aligned}$$

όπου $m=k-l$. Άρα,

$$\sup_{t\in[0,1]}|\Delta_j(t)|^2\leqslant\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{G_k^2}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\Big|\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\frac{G_lG_{l+m}}{l(l+m)}\Big|,$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,1]}|\Delta_j(t)|^2&\leqslant\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{\mathbb{E}(G_k^2)}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\frac{G_lG_{l+m}}{l(l+m)}\Big|\Big)\\&\leqslant\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{\mathbb{E}(G_k^2)}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\mathbb{E}\sqrt{\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\Big(\frac{G_lG_{l+m}}{l(l+m)}\Big)^2},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,1]}|\Delta_j(t)|^2\Big) &\leqslant \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{1}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\sqrt{\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\mathbb{E}\Big(\frac{G_lG_{l+m}}{l(l+m)}\Big)^2}\\
&\leqslant \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{1}{k^2}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\sqrt{\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\frac{1^2}{l^2(l+m)^2}}\\
&\leqslant \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}\frac{1}{2^{2j}}+2\sum_{m=1}^{2^j-1}\sqrt{\sum_{l=2^j+1}^{2^{j+1}-m}\frac{1}{2^{2j}2^{2j}}}\\
&\leqslant 2^j2^{-2j}+2\cdot 2^j\sqrt{2^j2^{-4j}}\\
&\leqslant 3\cdot 2^{-\frac{j}{2}}.
\end{aligned}$$

Για $N>n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big\|\sup_{t\in[0,1]}|B_{2^N}(t)-B_{2^n}(t)|\Big\|_2 &\leqslant \Big\|\sum_{j=n+1}^{N}\sup_{t\in[0,1]}|B_{2^j}(t)-B_{2^{j-1}}(t)|\Big\|_2\\
&\leqslant \sum_{j=n+1}^{N}\Big\|\sup_{t\in[0,1]}|\Delta_j(t)|\Big\|_2\\
&\leqslant \sqrt{3}\sum_{j=n+1}^{N}2^{-\frac{j}{4}}.
\end{aligned}$$

Στέλνοντας το n και το N στο άπειρο βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος τείνει στο άπειρο. Από το λήμμα Fatou,

$$\Big\|\liminf_{n,N\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|B_{2^N}(t)-B_{2^n}(t)|\Big\|_2\leqslant\liminf_{n,N\to\infty}\Big\|\sup_{t\in[0,1]}|B_{2^N}(t)-B_{2^n}(t)|\Big\|_2=0,$$

άρα υπάρχει $B\subset\Omega$ ώστε $\mathbb{P}(B)=1$ και

$$\liminf_{n,N\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|B_{2^N}(\omega,t)-B_{2^n}(\omega,t)|=0$$

για κάθε $\omega\in B$.

Από την πληρότητα του χώρου των συνεχών συναρτήσεων μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $(B_{2^j}(\omega,t))_{j\geqslant1}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $t\in[0,1]$ στην $B(t,\omega)$. Επειδή όμως η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη έπεται ότι η $B(t,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε $\omega\in B$. Ορίζουμε

$$\breve{B}(t,\omega)=\begin{cases}B(t,\omega), & \omega\in B\\ 0, & \omega\notin B\end{cases}$$

Επειδή $\mathbb{P}(\Omega\setminus B)=0$, το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για την $\breve{B}$. Έπεται ότι η $\breve{B}(t,\omega)$ αποτελεί κίνηση Brown για κάθε $t\in[0,1]$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θεώρημα Karhunen-Loève

Το θεώρημα Karhunen-Loève παίζει για τις στοχαστικές διαδικασίες τον ρόλο που παίζουν οι σειρές Fourier για τις περιοδικές συναρτήσεις. Στόχος μας είναι η παράσταση στοχαστικών διαδικασιών ως απείρων συνδυασμών ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Ενώ στις σειρές Fourier οι συντελεστές είναι φιξαρισμένοι αριθμοί και το ανάπτυγμα της βάσης αποτελείται απο συναρτήσεις τύπου sin και cos, στο θεώρημα Karhunen-Loève το ανάπτυγμα της βάσης εξαρτάται απο την στοχαστική διαδικασία. Οι ορθογώνιες συναρτήσεις που αποτελούν την βάση της στοχαστικής διαδικασίας εξαρτώνται από την συνδιακύμανση της στοχαστικής διαδικασίας.

Έστω H χώρος Hilbert. Στο κεφάλαιο αυτό όταν κάνουμε λόγο για συμπαγή τελεστή εννοούμε ένα τελεστή που ορίζεται από την υποακολουθιακή συμπάγεια. Δηλαδή, ο $A : H \to H$ είναι συμπαγής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ η $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

6.1 Ολοκληρωτικοί τελεστές και το θεώρημα Mercer

Εάν $A : H \to H$ είναι φραγμένος τελεστής τότε μπορούμε να ορίσουμε τον $A_\lambda = A - \lambda I$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ – ο τελεστής αυτός καλείται τελεστής Fredholm. Θέτουμε $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : A_\lambda \text{ αντιστρέψιμος}\}$ και $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$. Ένα $x \in H$ με $x \neq 0$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του A αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $Ax = \lambda x$. Αν το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A τότε το λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A. Το σύνολο $\{x \in H : Ax = \lambda x\}$ καλείται ιδιόχωρος. Στην περίπτωση που ο H είναι χώρος συναρτήσεων (π.χ. ο L^2) τα ιδιοδιανύσματα καλούνται ιδιοσυναρτήσεις.

Ορίζουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή Hilbert-Schmidt $A : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ με

$$A(f)(t) = \int_a^b R(t,s)f(s)\,ds,$$

όπου $t \in [a,b]$ και $R : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 6.1.1. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής Hilbert-Schmidt A είναι γραμμικός, φραγμένος και για κάθε $f \in L^2[a,b]$ η Af είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Ο A είναι γραμμικός: Έστω $f, g \in L^2[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} A(\alpha f + \beta g)(t) &= \int_a^b R(t,s)(\alpha f + \beta g)(s)\,ds = \alpha \int_a^b R(t,s) f(s)\,ds + \beta \int_a^b R(t,s) g(s)\,ds \\ &= \alpha (Af)(t) + \beta (Ag)(t). \end{aligned}$$

Ο A είναι φραγμένος: Έστω $f \in L^2[a,b]$. Επειδή η συνάρτηση R είναι συνεχής στο συμπαγές $[a,b]\times[a,b]$ το $\max_{t,s\in[a,b]} |R(t,s)|$ υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός, τον οποίο συμβολίζουμε με M. Επίσης, για ευκολία στις πράξεις, γράφουμε για $t \in [a,b]$

$$R_t(s) = R(t,s), \qquad s \in [a,b].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |(Af)(t)| &= \Big| \int_a^b R(t,s) f(s)\,ds \Big| \leqslant \int_a^b |R(t,s)||f(s)|\,ds = \|R_t f\|_1 \leqslant \|R_t\|_2 \|f\|_2 \\ &\leqslant M\sqrt{b-a}\|f\|_2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\{f\in L^2[a,b]: f\neq 0\}} \frac{\|Af\|_2}{\|f\|_2} = \sup_{\{f\in L^2[a,b]: f\neq 0\}} \frac{\left(\int_a^b (Af)^2(t)\,dt\right)^{1/2}}{\|f\|_2} \\ &\leqslant \sup_{\{f\in L^2[a,b]: f\neq 0\}} \frac{M\sqrt{b-a}\|f\|_2}{\|f\|_2} = M\sqrt{b-a}. \end{aligned}$$

Η Af είναι συνεχής: Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{t\to t_0}(Af)(t) = (Af)(t_0)$. Έχουμε

$$|(Af)(t) - (Af)(t_0)| = \Big| \int_a^b R(t,s) f(s)\,ds - \int_a^b R(t_0,s) f(s)\,ds \Big| = \Big| \int_a^b (R(t,s) - R(t_0,s)) f(s)\,ds \Big|$$

άρα

$$\lim_{t\to t_0} |(Af)(t) - (Af)(t_0)| = \Big| \lim_{t\to t_0} \int_a^b (R(t,s) - R(t_0,s)) f(s)\,ds \Big|.$$

Παρατηρούμε πως

$$\lim_{t\to t_0} (R(t,s) - R(t_0,s)) f(s) = (R(t_0,s) - R(t_0,s)) f(s) = 0.$$

Επίσης,

$$|(R(t,s) - R(t_0,s)) f(s)| \leqslant |f(s)|(|(R(t,s)| + |R(t_0,s)|) \leqslant |f(s)| 2M.$$

Όμως, επειδή $f \in L^2[a,b]$ και $L^2[a,b] \subset L^1[a,b]$, έχουμε $2M|f| \in L^1[a,b]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης καταλήγουμε στο εξής:

$$\lim_{t\to t_0} |(Af)(t) - (Af)(t_0)| = \Big| \int_a^b \lim_{t\to t_0} (R(t,s) - R(t_0,s)) f(s)\,ds \Big| = \Big| \int_a^b 0\,ds \Big| = 0.$$

□

Πόρισμα 6.1.2. *Οι ιδιοσυναρτήσεις του ολοκληρωτικού τελεστή Hilbert-Schmidt A που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές είναι συνεχείς στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ιδιοσυνάρτηση g του τελεστή A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$. Τότε, $\lambda g(t) = (Ag)(t)$ εξ ορισμού, άρα $g(t) = \frac{1}{\lambda}(Ag)(t)$. Από την συνέχεια του τελεστή Hilbert-Schmidt που αποδείξαμε προηγουμένως έχουμε το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 6.1.3. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής Hilbert-Schmidt A είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη της συμπάγειας του τελεστή Hilbert-Schmidt θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Arzelà-Ascoli: αν έχουμε $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C[a, b]$ ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχή, τότε υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνάρτηση που ανήκει στον $C[a, b]$.

Έστω τώρα $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2[a, b]$. Θέτουμε

$$y_k(t) = A(f_k)(t) = \int_a^b R(t, s) f_k(s)\, ds.$$

Ελέγχουμε ότι κάθε y_k ομοιόμορφα φραγμένη: Από το Θεώρημα 6.1.1 ξέρουμε πως

$$|y_k(t)| \leqslant \|f_k\|_2 M\sqrt{b-a}.$$

Επίσης ξέρουμε πως υπάρχει N σταθερό, ανεξάρτητο από το k, ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k\|_2 \leqslant N$. Άρα,

$$|y_k(t)| \leqslant NM\sqrt{b-a} < \infty$$

για κάθε k, t, και έπεται ότι η (y_k) είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Ελέγχουμε επίσης ότι η (y_k) είναι ισοσυνεχής: έχουμε

$$\begin{aligned}
|y_k(t_1) - y_k(t_2)| &= \Big| \int_a^b R(t_1, s) f_k(s)\, ds - \int_a^b R(t_2, s) f_k(s)\, ds \Big| \\
&= |\int_a^b (R(t_1, s) - R(t_2, s)) f_k(s)\, ds| \leqslant \int_a^b |R(t_1, s) - R(t_2, s)||f_k(s)|\, ds \\
&\leqslant \Big(\int_a^b |R(t_1, s) - R(t_2, s)|^2\, ds \Big)^{1/2} \|f_k\|_2 \\
&\leqslant N \Big(\int_a^b |R(t_1, s) - R(t_2, s)|^2\, ds \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση R είναι συνεχής στο $[a, b] \times [a, b]$ έχουμε πως είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$ ώστε αν $\|(t_1, s_1) - (t_2, s_2)\| < \delta$ τότε $|R(t_1, s_1) - R(t_2, s_2)| < \epsilon$. Μπορούμε όμως από το πυθαγόρειο θεώρημα να γράφουμε την παραπάνω σχέση διαφοροτρόπως: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$ ώστε αν $|t_1 - t_2| < \delta$ τότε $|R(t_1, s) - R(t_2, s)| < \epsilon$ για κάθε $s \in [a, b]$. Άρα, αν $|t_1 - t_2| < \delta$ τότε

$$|y_k(t_1) - y_k(t_2)| \leqslant N \Big(\int_a^b \epsilon^2\, ds \Big)^{1/2} = \epsilon N\sqrt{b-a},$$

και έπεται ότι η (y_k) είναι ισοσυνεχής.

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Arzelà-Ascoli και βρίσκουμε υπακολουθία $y_{k_m} \overset{\text{ομ}}{\to} y$, όπου $y \in C[a,b]$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m > N$ τότε $|y_{k_m}(s) - y(s)| < \epsilon$ για κάθε $s \in [a,b]$.

Επειδή $C[a,b] \subset L^2[a,b]$, μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\|y_{k_m} - y\|_2 = \Big(\int_a^b |y_{k_m}(s) - y(s)|^2\, ds\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_a^b \epsilon^2\, ds\Big)^{1/2} = \epsilon\sqrt{b-a},$$

άρα $y_{k_m} \overset{L^2}{\to} y$. □

Ορισμός 6.1.4. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $R : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι *συμμετρική* αν $R(t,s) = R(s,t)$ για κάθε $t, s \in [a,b]$. Παρατηρήστε ότι αν η $R(t,s)$ είναι συνεχής και συμμετρική τότε ο τελεστής

$$A(f)(t) = \int_a^b R(t,s) f(s)\, ds$$

είναι επίσης συμμετρικός.

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω $R : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και συμμετρική. Ο τελεστής*

$$A(f)(t) = \int_a^b R(t,s) f(s)\, ds$$

είναι μη αρνητικός αν και μόνο αν για κάθε $f \in C[a,b]$ ισχύει

$$\int_a^b \int_a^b R(t,s) f(s) f(t)\, dsdt \geqslant 0.$$

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω πως

$$\int_a^b \int_a^b R(t,s) f(t) f(s)\, dt\, ds \geqslant 0$$

για κάθε $f \in C[a,b]$. Τότε,

$$\int_a^b \int_a^b R(t,s) e(t) e(s)\, dt\, ds \geqslant 0,$$

όπου e ιδιοσυνάρτηση του A που αντιστοιχεί σε μια μη μηδενική ιδιοτιμή του λ. Από το Πόρισμα 6.1.2 έχουμε $e \in C[a,b]$. Τώρα,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b \int_a^b R(t,s) e(t) e(s)\, dt\, ds &= \int_a^b e(s) \int_a^b R(t,s) e(t)\, dt\, ds \\ &= \int_a^b e(s) \lambda e(s)\, ds = \lambda \int_a^b e(s)^2\, ds = \lambda \|e\|_2^2. \end{aligned}$$

Μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή είναι μη μηδενική, και επειδή $e \geqslant 0$ έχουμε $\lambda \geqslant 0$.

($\Longrightarrow$) Έστω πως κάθε ιδιοτιμή λ του A είναι μη αρνητική. Τότε, αν $f \in C[a,b]$, από το Θεώρημα 6.1.8 έχουμε $f = h + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ όπου $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση για τον χώρο που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του συμμετρικού συμπαγή τελστή A (e_n είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n, $c_n = \langle f, e_n\rangle_2$ και $h \in \mathrm{Ker}(A)$). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b R(t,s)f(t)f(s)\,dt\,ds &= \int_a^b f(s)\int_a^b R(t,s)f(t)\,dt\,ds\\ &= \int_a^b f(s)(Af)(s)\,ds = \langle f, Af\rangle_2 = \Big\langle h + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, Af\Big\rangle_2\\ &= \langle h, Af\rangle_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle e_n, Af\rangle_2 = \langle Ah, f\rangle_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle Ae_n, f\rangle_2\\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle Ae_n, f\rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\langle e_n, f\rangle_2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\lambda_n \geqslant 0.\end{aligned}$$

□

Ορισμός 6.1.6. Μια συνάρτηση $R : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται *θετικά ημιορισμένη* αν

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i)R(t_i,t_j)f(t_j) \geqslant 0$$

για όλες τις δυνατές επιλογές $t_1,\dots,t_n \in [a,b]$ και κάθε συνεχή $f : [a,b]\to\mathbb{R}$.

Θεώρημα 6.1.7. *Έστω $R : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, συμμετρική και θετικά ημιορισμένη συνάρτηση. Τότε, όλες οι ιδιοτιμές του ολοκληρωτικού τελεστή Hilbert-Schmidt A είναι μη αρνητικές.*

Απόδειξη. Έστω $f \in C[a,b]$ και $\int_a^b\int_a^b R(t,s)f(t)f(s)\,dt\,ds$ το σύνηθες ολοκλήρωμα Riemann. Ορίζουμε

$$S_n(\Delta) = \sum_{i,j=1}^{n} f(t_i)R(t_i,t_j)f(t_j),$$

για κάθε διαμέριση $\Delta = \{a = t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b\}$ του $[a,b]$. Η R είναι θετικά ημιορισμένη, άρα $S_n(\Delta) \geqslant 0$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\Delta) \geqslant 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_a^b\int_a^b R(t,s)f(t)f(s)\,dt\,ds \geqslant 0$$

και συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές από το Θεώρημα 5.3.5. □

Θεώρημα 6.1.8. *Έστω $A : H \to H$ συμπαγής συμμετρικός γραμμικός τελεστής. Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση για τον χώρο που παράγεται απο τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A. Έστω $x \in H$ και h η προβολή του x στον $\mathrm{Ker}(A)$. Τότε,*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n + h.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε πως η $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ συγκλίνει στον H. Λόγω της ορθοκανονικότητας των $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 < \infty.$$

Θέτοντας

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_m\rangle|^2,$$

εφόσον το όριο $\lim_{m\to\infty} s_m$ υπάρχει, η (s_m) είναι Cauchy. Από την ορθοκανονικότητα των $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, για $m > n$ έχουμε

$$\Big\| \sum_{i=n}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i \Big\|^2 = \sum_{i=n}^{m} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Στέλνοντας το n και το m στο άπειρο έχουμε πως η $\sum_{n=1}^{m}\langle x, e_n\rangle e_n$ είναι Cauchy, άρα λόγω πληρότητας συγκλίνει. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} x &= x + h - h + \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n \\ &= \Big(h + \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\Big) + \Big(x - h - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\Big). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$y = x - h - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

Θέλουμε να δείξουμε πως το y είναι ορθογώνιο στην ορθοκανονική βάση, δηλαδή

$$\langle y, e_n\rangle = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \langle y, e_n\rangle &= \langle x, e_n\rangle - \langle h, e_n\rangle - \Big\langle \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle e_m, e_n \Big\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \langle x, e_n\rangle = 0 \end{aligned}$$

και $\langle h, e_n\rangle = 0$ επειδή $h \in \mathrm{Ker}(A)$ και $e_n \perp \mathrm{Ker}(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\Big\langle \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle e_m, e_n \Big\rangle = \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle\langle e_m, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle.$$

Τώρα θα δείξουμε πως $y \perp \mathrm{Ker}(A)$. Έστω $z \in \mathrm{Ker}(A)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \langle y, z\rangle &= \langle x, z\rangle - \langle h, z\rangle - \Big\langle \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, z\rangle e_m, e_n \Big\rangle \\ &= \langle x, z\rangle - \langle h, z\rangle = \langle x - h, z\rangle = 0 \end{aligned}$$

αφού αν $\dim \mathrm{Ker}(A) = k$ θεωρούμε βάση $\{u_1, \dots, u_k\}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\Big\langle \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle e_m, z \Big\rangle &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle \langle e_m, z \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle \Big\langle e_m, \sum_{i=1}^{k} \langle z, u_i \rangle u_i \Big\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle \sum_{i=1}^{k} \langle z, u_i \rangle \langle e_m, u_i \rangle = 0.\end{aligned}$$

Άρα το y είναι ορθογώνιο σε όλα τα ιδιοδιανύσματα του A. Όμως αυτά τα ιδιοδιανύσματα παράγουν τον H. Επομένως, από την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου το y είναι ορθογώνιο σε όλα τα στοιχεία του H, συμπεριλαμβανομένου του εαυτού του. Έπεται ότι $y = 0$. Όμως,

$$y = x - h - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

και εν τέλει έχουμε

$$x = h + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

□

Θεώρημα 6.1.9 (θεώρημα Mercer). *Έστω $R : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, συμμετρική και θετικά ημιορισμένη συνάρτηση. Έστω A ο αντίστοιχος ολοκληρωτικός τελεστής Hilbert-Schmidt και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση για τον χώρο που παράγεται απο τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A. Αν e_n είναι τα ιδιοδιανύσματα και λ_n οι αντίστοιχες ιδιοτιμές, τότε*

$$R(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t), \qquad s, t \in [a, b]$$

και

(α) *η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ συγκλίνει απόλυτα,*

(β) *η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $R(s, t)$,*

(γ) *η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ συγκλίνει στην $R(s, t)$ στον $L^2([a, b] \times [a, b])$.*

Απόδειξη. **Βήμα 1**. Θα δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει στην $R(s, t)$ στον $L^2([a, b])$ για κάθε μεταβλητή χωριστά. Από το προηγούμενο θεώρημα, για κάθε $s \in [a, b]$, θεωρώντας την R ως συνάρτηση του t έχουμε

$$R(s, t) = h(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) e_n(t),$$

όπου $h \in \mathrm{Ker}(A)$ και

$$c_n(s) = \langle R, e_n \rangle = \int_a^b R(t, s) e_n(t)\, dt = \lambda_n e_n(s).$$

Πάλι από το προηγούμενο θεώρημα, η

$$R(s, t) = h(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) e_n(t)$$

συγκλίνει στην $R(s,t)$ στον $L^2[a,b]$.

Τώρα σταθεροποιούμε $s \in [a,b]$ και ορίζουμε $h_s(t) = h(t,s)$. Θα αποδείξουμε ότι $h_s(t) = 0$ στον L^2. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b R(s,t)h(t,s)\,dt = \langle R, h\rangle = \Big\langle \Big(h + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\Big), h\Big\rangle \\
&= \langle h, h\rangle + \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, h\Big\rangle = \|h\|_2^2 + \Big\langle \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} c_n e_n, h\Big\rangle \\
&= \|h\|_2^2 + \lim_{m\to\infty} \Big\langle \sum_{n=1}^{m} c_n e_n, h\Big\rangle = \|h\|_2^2 + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} c_n \langle e_n, h\rangle \\
&= \|h\|_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b c_n(s)h(s,t)e_n(t)\,dt \\
&= \|h\|_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) \int_a^b h(s,t)e_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Τα ιδιοδιανύσματα ενός γραμμικού συμμετρικού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια, άρα

$$\int_a^b h(s,t)e_n(t)\,dt = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $h_s(t) = 0$ στον $L^2[a,b]$, και έπεται ότι

$$R(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s)e_n(t).$$

Από την L^2 σύγκλιση του αναπτύγματος του R έπεται η συγκλιση του $R(s,t)$ στον $L^2([a,b])$ για κάθε μεταβλητή χωριστά.

Βήμα 2. Δείχνουμε ότι, για κάθε $t \in [a,b]$ ισχύει $R_n(t,t) \geqslant 0$, όπου

$$R_n(s,t) = R(s,t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(s)e_k(t).$$

Γράφουμε

$$R_n(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(s)e_k(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(s)e_k(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k(s)e_k(t).$$

Έχουμε L^2 σύγκλιση για κάθε μεταβλητή. Για κάθε $f \in L^2[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b R_n(t,s) f(s) f(t)\, ds\, dt &= \langle f, \langle R_n, f\rangle\rangle \\
&= \Big\langle f(t), \Big\langle \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k(s) e_k(t), f(s)\Big\rangle\Big\rangle \\
&= \Big\langle f(t), \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k(t) \langle e_k(s), f(s)\rangle\Big\rangle \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k, f\rangle \langle f, e_k\rangle \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k, f\rangle^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

εφόσον $\lambda_k \geqslant 0$. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $t_0 \in [a,b]$ ώστε $R_n(t_0,t_0) < 0$. Λόγω συνέχειας υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για (s,t) στη γειτονιά του (t_0,t_0) να ισχύει $R_n(s,t) \leqslant -\varepsilon < 0$.

Έστω τώρα ότι αυτή η γειτονιά είναι ένα τετράγωνο που περιγράφεται από τις $t_0 - \alpha < s$, $t < t_0 + \alpha$. Ορίζουμε

$$w(s) = \begin{cases} 1, & s \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχουμε $w \in L^2[a,b]$ και

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b R_n(t,s) w(s) w(t)\, ds\, dt &= \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} R_n(t,s)\, ds\, dt \\
&\leqslant -\varepsilon \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} ds\, dt \\
&\leqslant -4\varepsilon\alpha^2 < 0,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού για κάθε $f \in L^2[a,b]$ έχουμε

$$\int_a^b \int_a^b R_n(t,s) f(s) f(t)\, ds\, dt \geqslant 0.$$

Βήμα 3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ συγκλίνει απόλυτα και η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη ως προς t για κάθε φιξαρισμένο s και αντίστροφα.

Από το δεύτερο βήμα έχουμε

$$R_n(t,t) = R(t,t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(s)^2 \geqslant 0.$$

Άρα, από την συνέχεια της R στο συμπαγές $[a,b] \times [a,b]$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)^2 \leqslant R(t,t) \leqslant \max_{t,s\in[a,b]} |R(t,s)| < \infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε
$$M = \max_{t,s \in [a,b]} |R(t,s)|.$$
Τότε,
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(s)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(s)^2 \leqslant M < \infty.$$
Η σειρά είναι θετική και φραγμένη, άρα συγκλίνει για κάθε t. Οπότε, λόγω πληρότητας είναι Cauchy. Έχουμε
$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} \lambda_k |e_k(s)e_k(t)| &= \Big| \sum_{k=n}^{m} \sqrt{\lambda_k}|e_k(s)|\,\sqrt{\lambda_k}|e_k(t)| \Big| \\
&\leqslant \Big(\sum_{k=n}^{m} (\sqrt{\lambda_k}|e_k(s)|)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=n}^{m} (\sqrt{\lambda_k}|e_k(t)|)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k^2(s) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k^2(t) \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k^2(s) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k e_k^2(t) \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sqrt{M} \Big(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k^2(s) \Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$
Στέλνοντας το m και το n στο άπειρο παίρνουμε
$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} \lambda_k |e_k(s)e_k(t)| = 0$$
για κάθε σταθερό s, ομοιόμορφα ως προς t.

Βήμα 4. Ισχύει η ισότητα
$$R(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$$
κατα σημείο.

Από το πρώτο βήμα έχουμε
$$R(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$$
στον $L^2[a,b]$ για κάθε μεταβλητή χωριστά. Σταθεροποιούμε $s \in [a,b]$. Από το τρίτο βήμα υπάρχει $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ να συγκλίνει στην G ομοιόμορφα ως προς t, άρα και στον L^2. Τότε, για κάθε $s \in [a,b]$,
$$R_s(t) = R(s,t) = G_s(t) = G(s,t).$$
Από το Πόρισμα 6.1.2, οι $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συνεχείς. Άρα, η G είναι το ομοιόμορφο όριο των συνεχών συναρτήσεων $g_m(t) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$.

Άρα η G_s είναι συνεχής, όπως και η R_s. Συνεπώς, η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$ συγκλίνει στην $R(s,t)$, ομοιόμορφα ως προς t και κατά σημείο ως προς s.

Με παρόμοια επιχείρημα η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς s και κατά σημείο ως προς t στην $R(s,t)$.

Βήμα 5 (θεώρημα Dini). Έστω $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b])$ και $g \in C([a,b])$ ώστε $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in [a,b]$, και $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε, $g_n \to g$ ομοιόμορφα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $U_n = \{x \in [a,b] : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon\}$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = [a,b]$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $\cup_{k=1}^{m} U_{n_k} = [a,b]$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_1 < \cdots < n_m$. Αφού η (g_n) είναι αύξουσα, η (U_n) είναι επίσης αύξουσα, άρα

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k} = U_{n_m}.$$

Τότε, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $|g_{n_m}(x) - g(x)| < \varepsilon$. Λόγω μονοτονίας, για κάθε $n \geqslant n_m$ και $x \in [a,b]$ έχουμε $|g_{n_m}(x) - g(x)| < \varepsilon$. Άρα, $g_n \to g$ ομοιόμορφα.

Βήμα 6. Συνδυάζουμε τα παραπάνω. Από το τέταρτο βήμα έχουμε

$$R(s,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^2(s)$$

κατά σημείο στο $[a,b]$. Θεωρούμε την

$$g_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^2(s).$$

Η g_n είναι συνεχής και αύξουσα εκ κατασκευής, και

$$\lim_{n\to\infty} g_n(s) = R(s,s)$$

για κάθε $s \in [a,b]$. Από το θεώρημα Dini, $g_n(s) \to R(s,s)$ ομοιόμορφα.

Τώρα,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k(s) e_k(t)\Big|^2 &\leqslant \sum_{k=n}^{m} (\sqrt{\lambda_k} e_k(s))^2 \sum_{k=n}^{m} (\sqrt{\lambda_k} e_k(t))^2 \\ &< M \sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k(s)^2.\end{aligned}$$

Στέλνοντας το n και το m στο άπειρο βλέπουμε ότι το άθροισμα πηγαίνει στο 0 ομοιόμορφα ως προς t. Άρα,

$$R(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(s) e_n(t)$$

ομοιόμορφα ως προς και τις δυο μεταβλητές. Η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[a,b] \times [a,b]$ μας δίνει την σύγκλιση στον $L^2([a,b] \times [a,b])$. $\square$

6.2 Θεώρημα Karhunen-Loève

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει ροπή δεύτερης τάξης αν $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$ και ότι είναι κεντραρισμένη αν $\mathbb{E}(X) = 0$.

Έστω X, Y πραγματικές τυχαίες μεταβλητές με ροπή δεύτερης τάξης στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}|XY| \leqslant (\mathbb{E}|X|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}|Y|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι οι X, Y είναι κεντραρισμένες. Τότε,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}|X|^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}|Y|^2$$

και

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY).$$

Ο χώρος $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ των κλάσεων ισοδυναμίας τυχαίων μεταβλητών είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$, νόρμα την $\|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}|X|^2}$ και απόσταση των X και Y την $\|X - Y\|_2$.

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ υπεραριθμήσιμο σύνολο δεικτών και $\{X_t, t \in I\}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με ροπές δεύτερης τάξης. Μπορούμε τότε να ορίσουμε την συνάρτηση συνδιακύμανσης $K_X(t, r) : I \times I \to \mathbb{R}$ με

$$K_X(t, r) = \mathbb{E}(X_t X_r),$$

και επειδή $\mathbb{E}|X_t X_r| < \infty$, η συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι $I = [a, b]$.

Θεώρημα 6.2.1. *Η συνάρτηση συνδιακύμανσης είναι συμμετρική και θετικά ημιορισμένη.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$K_X(r, t) = \mathbb{E}|X_r X_t| = \mathbb{E}|X_t X_r| = K_X(t, r)$$

για κάθε $t, r \in [a, b]$.

Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε όλες τις δυνατές n-άδες $t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$ και για κάθε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i) K_X(t_i, t_j) f(t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} f(t_i) \mathbb{E}(X_{t_i} X_{t_j}) f(t_j) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i) X_{t_i} X_{t_j} f(t_j) \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(t_i) X_{t_i} \Big(\sum_{j=1}^{n} X_{t_j} f(t_j) \Big) \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(t_i) X_{t_i} \sum_{j=1}^{n} X_{t_j} f(t_j) \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(t_i) X_{t_i} \Big)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 6.2.2. *Αν $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $K_X : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε*

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b g(t)X_t dt \int_a^b h(r)X_r dr\Big) = \int_a^b \int_a^b g(t)h(r)K_X(t,r)\,dt\,dr.$$

Επιπλέον,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b g(t)X_t dt\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_a^b h(r)X_r dr\Big) = 0.$$

Λήμμα 6.2.3. *Αν $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $K_X : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε, για κάθε $t \in [a,b]$,*

$$\mathbb{E}\Big(X_t \int_a^b h(r)X_r dr\Big) = \int_a^b h(r)K_X(t,r)\,dr.$$

Το θεώρημα Karhunen-Loève αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Mercer.

Θεώρημα 6.2.4 (Θεώρημα Karhunen-Loève)**.** *Έστω $\{X_t, t \in [a,b]\}$ οικογένεια συνεχών κεντραρισμένων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών με ροπές δεύτερης τάξης, και με συνεχή συνάρτηση συνδιακύμανσης. Τότε, για κάθε $t \in [a,b]$ έχουμε το ανάπτυγμα*

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t)$$

με

$$Z_n = \int_a^b X_t e_n(t) dt,$$

όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του ολοκληρωτικού τελεστή Hilbert-Schmidt

$$(Af)(t) = \int_a^b K_X(t,r)f(r)dr$$

στον $L^2[a,b]$. Η ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ καλείται βάση Karhunen-Loève και είναι ορθοκανονική βάση για τον χώρο που παράγεται απο τις ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A. Επιπροσθέτως, οι Z_n είναι ορθογώνιες, $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{E}(Z_n^2) = \lambda_n$, όπου λ_n είναι η ιδιοτιμή με ιδιοσυνάρτηση e_n. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t)$ συγκλίνει στην X_t στον L^2 και ομοιόμορφα ως προς t.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A είναι συνεχείς. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$Z_n = \int_a^b X_t e_n(t) dt.$$

Η Z_n είναι καλώς ορισμένη, και

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\Big(\int_a^b X_t e_n(t) dt\Big) = \int_a^b \mathbb{E}(X_t) e_n(t) dt = 0,$$

ενώ

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n Z_m) &= \mathbb{E}\Big(\int_a^b X_t e_n(t)dt \int_a^b X_s e_m(s)ds\Big)\\
&= \int_a^b \int_a^b \mathbb{E}(X_s X_t) e_n(t) e_m(s)\, ds\, dt\\
&= \int_a^b e_n(t) \int_a^b K_X(s,t) e_m(s)\, ds\, dt\\
&= \lambda_m \int_a^b e_n(t) e_m(t) dt\\
&= \lambda_m \delta_{mn}.
\end{aligned}$$

Ειδικότερα, οι Z_n είναι ορθογώνιες και

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n Z_n) = \lambda_n \delta_{nn} = \lambda_n.$$

Θέτουμε

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n Z_k e_k(t).$$

Τότε,

$$\mathbb{E}|S_n(t) - X_t|^2 = \mathbb{E}(S_n(t)^2 - 2S_n(t)X_t + X_t^2) = \mathbb{E}(S_n(t)^2) - 2\mathbb{E}(S_n(t)X_t) + \mathbb{E}(X_t^2).$$

Αναπτύσσουμε τον κάθε όρο χωριστά. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n(t)^2) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n Z_k e_k(t) \sum_{l=1}^n Z_l e_l(t)\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{k,l=1}^n e_k(t) e_l(t) Z_k Z_l\Big)\\
&= \sum_{k,l=1}^n e_k(t) e_l(t) \mathbb{E}(Z_k Z_l)\\
&= \sum_{k,l=1}^n e_k(t) e_l(t) \lambda_{kl} \delta_{kl}\\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(t)^2.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}(S_n(t)X_t) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n Z_k e_k(t) X_t\Big) = \sum_{k=1}^n e_k(t) \mathbb{E}(Z_k X_t)$$

και

$$\mathbb{E}(X_t^2) = K_X(t,t).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}|S_n(t) - X_t|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(t)^2 - 2\sum_{k=1}^n e_k(t)\mathbb{E}(Z_k X_t) + K_X(t,t).$$

Όμως,

$$\mathbb{E}(Z_k X_t) = \mathbb{E}\Big(X_t \int_a^b X_s e_k(s) ds\Big) = \int_a^b K_x(t,s) e_k(s) ds = \lambda_k e_k(t),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|S_n(t) - X_t|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)^2 + K_X(t,t)\\ &= K_X(t,t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)^2.\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Mercer

$$\lim_{n\to\infty} \Big(K_X(t,t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)^2\Big) = 0$$

ομοιόμορφα ως προς $t \in [a,b]$. □

Παρατήρηση 6.2.5. Υπάρχει και εναλλακτικός ορισμός του αναπτύγματος Karhunen-Loève. Εαν θεωρήσουμε τις $Y_n = \frac{Z_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ τότε

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} Y_n e_n(t)$$

και

$$\mathbb{E}(Y_n) = 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}(Y_n) = 1.$$

Παρατήρηση 6.2.6. Στην περίπτωση που η X_t δεν είναι κεντραρισμένη, θεωρούμε την $Y_t = X_t - \mathbb{E}(X_t)$ η οποία έχει ανάπτυγμα Karhunen-Loève, και παίρνουμε

$$X_t = \mathbb{E}(X_t) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t).$$

Παρατηρήσεις 6.2.7. (i) Αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Karhunen-Loève τότε

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2 = K_X(t,t) - 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(t)^2.$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{Var}(X_t)\, dt &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(t)^2\, dt\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \lambda_n e_n(t)^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_a^b e_n(t)^2\, dt\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό καλείται συνολική διακύμανση.

Ορισμός 6.2.8. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική βάση του $L^2[a,b]$ και X_t τυχαία μεταβλητή που επιδέχεται ανάπτυγμα Karhunen-Loève στον $L^2(\Omega)$ με

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(t),$$

όπου

$$A_n = \int_a^b X_t f_n(t) dt.$$

Θέτουμε

$$S_{n,t} = \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t).$$

Καλούμε μέσο τετραγωνικό σφάλμα την $\mathbb{E}(X_t - S_{n,t})^2$ και θεωρούμε το

$$E_n^2(f_k) = \int_a^b \mathbb{E}(X_t - S_{n,t})^2 dt$$

που είναι το συνολικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα αναφορικά με την ορθοκανική βάση στην οποία το X_t προβάλλεται, για κάθε $t \in [a,b]$.

Θεώρημα 6.2.9. *Ισχύει η ταυτότητα*

$$E_n^2(f_k) = \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2) dt - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \int_a^b K_X(r,s) f_k(r) f_k(s)\, dr\, ds.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
E_n^2(f_k) &= \int_a^b \mathbb{E}(X_t - S_{n,t})^2\, dt \\
&= \mathbb{E} \int_a^b \Big(X_t - \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t) \Big)^2 dt \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_a^b \Big(X_t^2 - 2X_t \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t) + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t) \Big)^2 \Big) dt \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_a^b X_t^2\, dt \Big) - 2\mathbb{E}\Big(\int_a^b X_t \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t) dt \Big) + \mathbb{E}\Big(\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(t) \Big)^2 dt \Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2) dt - 2\mathbb{E}\Big(\int_a^b \sum_{k=1}^{n} X_t A_k f_k(t) dt \Big) + \mathbb{E}\Big(\int_a^b \sum_{i,j=1}^{n} A_i A_j f_i(t) f_j(t) dt \Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2) dt - 2\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k \int_a^b X_t f_k(t) dt \Big) + \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} A_i A_j \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt \Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2) dt - 2\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \Big) + \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} A_i A_j \delta_{ij} \Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2) dt - 2\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \Big) + \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2) dt - \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \Big).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
E_n^2(f_k) &= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2)dt - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(A_k^2) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2)dt - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\int_a^b X_r f_k(r)\, dr \int_a^b X_s f_k(s)\, ds\Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2)dt - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\int_a^b \int_a^b X_r X_s f_k(r) f_k(s)\, dr\, ds\Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2)dt - \sum_{k=1}^n \Big(\int_a^b \int_a^b \mathbb{E}(X_r X_s) f_k(r) f_k(s)\, dr\, ds\Big) \\
&= \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2)dt - \sum_{k=1}^n \int_a^b \int_a^b K_X(r,s) f_k(r) f_k(s)\, dr\, ds.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.2.10 (ανισότητα Etemadi)**.** *Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $a \geqslant 0$. Θέτουμε $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$ για $m \leqslant n$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant m\leqslant n} |S_m| \geqslant 3a\Big) \leqslant 3 \max_{1\leqslant m\leqslant n} \mathbb{P}(|S_m| \geqslant a).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{|S_1| \geqslant 3a\} \\
\vdots &= \ \vdots \\
A_n &= \{|S_1| < 3a, |S_2| < 3a, \dots, |S_{n-1}| < 3a, |S_n| \geqslant 3a\}
\end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ξένα ανα δύο. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant m\leqslant n} |S_m| \geqslant 3a\Big) &\leqslant \mathbb{P}\Big(\{|S_n| \geqslant a\} \cup \bigcup_{m=1}^{n-1} (A_m \cap \{|S_n| < a\})\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant a\}) + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_m \cap \{|S_n| < a\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant a\}) + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_m \cap \{|S_n - S_m| > 2a\}) \\
&= \mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant a\}) + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(\{|S_n - S_m| > 2a\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant a\}) + \max_{1\leqslant m\leqslant n} \mathbb{P}(\{|S_n - S_m| > 2a\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant a\}) + \max_{1\leqslant m\leqslant n} (\mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant a\}) + \mathbb{P}(\{|S_m| \geqslant a\})) \\
&\leqslant 3 \max_{1\leqslant m\leqslant n} \mathbb{P}(\{|S_m| \geqslant a\}).
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.2.11. *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει κατά πιθανότητα τότε συγκλίνει σχεδόν βεβαίως.*

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ και συμβολίζουμε με S την τυχία μεταβλητή για την οποία $S_n \xrightarrow{p} S$. Η S_n είναι Cauchy κατά πιθανότητα, άρα για τυχόν $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_{n+j} - S_n| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}\Big(|S_{n+j} - S + S - S_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\ &\leqslant \mathbb{P}\Big(|S_{n+j} - S| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(|S_n - S| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big),\end{aligned}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\geqslant 1} \mathbb{P}(|S_{n+j} - S_n| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Από την ανισότητα Etemadi,

$$\mathbb{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_{n+j} - S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 3 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\Big(|S_{n+j} - S_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

Άρα,

$$\mathbb{P}(\sup_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 3 \sup_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(|S_{n+k} - S_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\Big),$$

και, για κάθε $\varepsilon > 0$, επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\geqslant 1} \mathbb{P}(|S_{n+j} - S_n| \geqslant \varepsilon) = 0$$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Θέτουμε

$$E_{n,\varepsilon} = \Big\{ \sup_{k,j\geqslant n} |S_j - S_k| > 2\varepsilon \Big\}$$

και

$$E_\varepsilon = \bigcap_{\varepsilon>0} E_{n,\varepsilon}.$$

Τότε,

$$\mathbb{P}(E_\varepsilon) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{\varepsilon>0} E_{n,\varepsilon}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Το σύνολο $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+} E_q$ περιέχει το σύνολο στο οποίο η S_n δεν είναι Cauchy και

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+} E_q\Big) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^+} \mathbb{P}(E_q) = 0.$$

Άρα, η S_n είναι Cauchy με πιθανότητα 1 και λόγω πληρότητας είναι σχεδόν παντού συγκλίνουσα. □

Πόρισμα 6.2.12. *Έστω $t \in [a, b]$. Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t)$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στην X_t.*

Απόδειξη. Η Z_n είναι ακολουθία ανεξαρτήτων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, άρα οι $Z_n e_n(t)$ είναι επίσης ανεξάρτητες. Η $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t)$ συγκλίνει κατα πιθανότητα διότι αν $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n - X_t)^2 = 0$ τότε $S_n \xrightarrow{p} X_t$, όπου $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k e_k(t)$, και $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n - X_t)^2 = 0$ από το θεώρημα Karhunen-Loève.

Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, η $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n e_n(t)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στην X_t. □

Θεώρημα 6.2.13. *Το ανάπτυγμα Karhunen-Loève της κίνησης Brown στο* $[0,1]$ *είναι*

$$B_t = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^*}{2k-1} \sin((2k-1)\pi t/2),$$

όπου

$$Z_k = \int_0^1 B_t \sqrt{2} \sin((2k-1)\pi t/2) dt,$$

και $\lambda_k = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$, $Z_k^* = \frac{Z_k}{\sqrt{\lambda_k}}$. *Η μέση τετραγωνική σύγκλιση είναι σχεδόν βέβαιη.*

Απόδειξη. Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του ολοκληρωτικού τελεστή

$$(Af)(s) = \int_0^1 K_B(s,t) f(t) dt,$$

όπου $f \in L^2[0,1]$ και $K_B(s,t)$ είναι η συνάρτηση συνδιακύμανσης της κίνησης Brown. Έχουμε δει ότι

$$K_B(s,t) = \mathbb{E}(B_s B_t) = \min\{s,t\}.$$

Αν

$$\int_0^1 \min\{s,t\} e(t) dt = \lambda e(s),$$

γράφοντας

$$\int_0^1 \min\{s,t\} e(t) dt = \int_0^s t e(t) dt + \int_s^1 s e(t) dt$$

και παραγωγίζοντας ως προς s παίρνουμε

$$s e(s) + \int_s^1 e(t) dt - s e(s) = \lambda e'(s),$$

άρα

$$\int_s^1 e(t) dt = \lambda e'(s).$$

Ξαναπαραγωγίζοντας, παίρνουμε

$$-e(s) = \lambda e''(s),$$

που είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda x^2 + 1 = 0$ και ρίζες $x = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$. Άρα η λύση της είναι

$$e(s) = a \sin\Big(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\Big) + b \cos\Big(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\Big).$$

Στην περίπτωση που $\lambda = 0$ έχουμε $e(s) = \lambda e''(s) = 0$, άρα το 0 δεν είναι ιδιοτιμή.

Για $s = 0$ έχουμε $e(0) = b$ με $e(0) = \int_0^1 \min\{0,t\} e(t) dt = 0$, άρα $b = 0$ και

$$e(s) = a \sin\Big(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\Big).$$

Για $s = 1$,

$$e'(1) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e(t) dt = 0.$$

Αφού

$$0 = e'(1) = \frac{d}{ds}\big(e(s)\big)|_{s=1} = \frac{a}{\sqrt{\lambda}}\cos\Big(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big|_{s=1} = \frac{a}{\sqrt{\lambda}}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big),$$

βλέπουμε ότι αν υπάρχει μη τετριμμένη λύση ($a \neq 0$) έχουμε

$$\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big) = 0.$$

Δηλαδή

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\pi}{2} + k\pi = \pi\frac{2k-1}{2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Άρα, $\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$ είναι οι θετικές ιδιοτιμές και $e_k(s) = a\sin\big(\pi s\frac{2k-1}{2}\big)$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, όπου a είναι μια σταθερά κανονικοποίησης.

Τότε,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2} &= \|\sin((2k-1)\pi s/2)\|_2^2 = \int_0^1 \sin^2((2k-1)\pi s/2)dt \\
&= \frac{2}{(2k-1)\pi}\int_0^{\frac{(2k-1)\pi}{2}} \sin^2(z)dz = \frac{2}{(2k-1)\pi}\int_0^{\frac{(2k-1)\pi}{2}} \frac{1-\cos(2z)}{2}dz \\
&= \frac{1}{(2k-1)\pi}\int_0^{(2k-1)\pi} \frac{1-\cos(u)}{2}du \\
&= \frac{1}{2(2k-1)\pi}\int_0^{(2k-1)\pi} (1-\cos(u))du \\
&= \frac{1}{2(2k-1)\pi}((2k-1)\pi - \sin((2k-1)\pi)) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

άρα

$$a = \|\sin\big((2k-1)\pi s/2\big)\|_2^{-1} = \sqrt{2}.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
(Ae_k)(s) &= \int_0^s t\sqrt{2}\sin((2k-1)\pi t/2)dt + s\sqrt{2}\int_s^1 \sin((2k-1)\pi t/2)dt \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2(2k-1)^2}\int_0^{(2k-1)\pi s/2} z\sin(z)dz + \frac{2\sqrt{2}s}{\pi(2k-1)}\int_{(2k-1)\pi s/2}^{(2k-1)\pi/2} \sin(z)dz \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2(2k-1)^2}\Big(-z\cos(z)\Big|_0^{\frac{(2k-1)\pi}{2}s} + \int_0^{\frac{(2k-1)\pi}{2}s} \cos(z)dz\Big) \\
&\qquad - \frac{2\sqrt{2}}{\pi(2k-1)}\cos(z)\Big|_{\frac{(2k-1)\pi}{2}s}^{\frac{(2k-1)\pi}{2}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2}s}{\pi(2k-1)}\cos((2k-1)\pi s/2) + \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2(2k-1)^2}\sin((2k-1)\pi s/2) \\
&\qquad + \frac{2\sqrt{2}s}{\pi(2k-1)}\cos((2k-1)\pi s/2) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2(2k-1)^2}\sin((2k-1)\pi s/2) = \lambda_k e(s).
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Karhunen-Loève, αν ορίσουμε

$$Z_k^* = \int_0^1 B_t \sqrt{2} \sin((2k-1)\pi t/2) dt$$

έχουμε

$$B_t = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^*}{2k-1} \sin((2k-1)\pi t/2).$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Τυχαίες σειρές Fourier και στοχαστικό ολοκλήρωμα

7.1 Τυχαίες σειρές Fourier και στοχαστικό ολοκλήρωμα

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, και $X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής στοχαστική διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Για κάθε $f \in C[a, b]$ θεωρούμε το στοχαστικο ολοκλήρωμα με την έννοια της σύγκλισης κατά πιθανότητα. Το στοχαστικο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t)\, dX(t, \omega)$$

υπάρχει και είναι τυχαία μεταβλητή.

Ορίζουμε

$$A_n(\omega) = \int_0^1 e^{-2\pi nit}\, dX(t, \omega),$$

όπου $\{e^{-2\pi nit} : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικό σύνολο. Οι A_n είναι οι συντελεστές Fourier της X.

Η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\omega) e^{2\pi nit}$$

είναι το ανάπτυγμα Fourier-Stieltjes της X.

Εμείς θα ασχοληθούμε με την συμπεριφορά της τυχαίας σειράς Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n A_n(\omega) e^{2\pi nit}.$$

Ορισμός 7.1.1. Μια στοχαστική διαδικασία καλείται ευσταθής με δείκτη α αν για κάθε $c > 0$ η στοχαστική διαδικασία $(cX_{tc^{-\alpha}})_{t \geqslant 0}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με την $(X_t)_{t \geqslant 0}$.

Ορισμός 7.1.2. Μια τυχαία συνάρτηση $f(t,\omega)$ είναι διαφορίσιμη κατά πιθανότητα στο $t = t_0$ αν υπάρχει τυχαία συνάρτηση $g(t,\omega)$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{f(t_0+h,\omega) - f(t_0,\omega)}{h} - g(t,\omega)\Big| > \delta\Big) = 0.$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη στοχαστικού ολοκληρώματος για μια νέα κλάση συναρτήσεων. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 7.1.3. *Έστω $f \in C^1[a,b]$ και X συμμετρική ευσταθής στοχαστική διαδικασία με δείκτη $\alpha \in (0,2]$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f(t)\, dX(t,\omega)\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\varepsilon^\alpha}\int_a^b |f(t)|^\alpha\, dt$$

όπου $C > 0$ σταθερά.

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω X συμμετρική ευσταθής στοχαστική διαδικασία με δείκτη $\alpha \in (1,2)$ και $f \in L^p[a,b]$, όπου $p \geqslant 1$. Τότε, το*

$$\int_a^b f(t)\, dX(t,\omega)$$

ορίζεται με την έννοια της σύγκλισης κατά πιθανότητα.

Απόδειξη. Ξέρουμε πως $\overline{C^1[a,b]}^{\|\cdot\|_p} = L^p[a,b]$. Οπότε, για $f \in L^p[a,b]$ υπάρχει $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C^1[a,b]$ ώστε

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b |f(t) - f_m(t)|^p\, d(t) = 0.$$

Αφού

$$\|f_m - f_n\|_p \leqslant \|f_m - f\|_p + \|f - f_n\|_p,$$

στέλνοντας το n και το m στο άπειρο έχουμε

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_m - f_n\|_p = 0.$$

Δηλαδή, η $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Τώρα θα δείξουμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f_n(t)\, dX(t,\omega)$$

είναι Cauchy κατά πιθανότητα. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f_n(t)\, dX(t,\omega) - \int_a^b f_m(t)\, dX(t,\omega)\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\varepsilon^\alpha}\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^\alpha\, dt$$

κάνοντας χρήση του Λήματος 7.1.3.

Στέλνοντας το m και το n στο άπειρο βλέπουμε άμεσα ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι Cauchy κατά πιθανότητα. Άρα, λόγω πληρότητας έχουμε την σύγκλιση κατά πιθανότητα. Δηλαδή, υπάρχει τυχαία μεταβλητή Y ώστε, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f_n(t)\, dX(t,\omega) - Y\Big| > \varepsilon\Big) = 0.$$

Η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Θεωρούμε $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ με

$$\lim_{n\to\infty}\|f-g_n\|_p=0.$$

Πάλι έχουμε

$$\|f_n-g_n\|_p\leqslant\|f_n-f\|_p+\|f-g_n\|_p,$$

άρα στέλνοντας ξανά το n στο άπειρο έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-g_n\|_p=0.$$

Με παρόμοια εφαρμογή του Λήματος 7.1.3 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f_n(t)\,dX(t,\omega)-\int_a^b g_n(t)\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon\Big)=0.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το Y να είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα της $f\in L^p[a,b]$. □

Λήμμα 7.1.5. *Έστω $f\in L^p[a,b]$ με $p\geqslant 1$ και X συμμετρική ευσταθής στοχαστική διαδικασία με δείκτη $\alpha\in(1,2)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f(t)\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon\Big)\leqslant\frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_a^b|f(t)|^\alpha\,dt,$$

όπου $C>0$ σταθερά και $\varepsilon>\delta>0$.

Απόδειξη. Ξέρουμε πως $\overline{C^1[a,b]}^{\|\cdot\|_p}=L^p[a,b]$. Οπότε, για $f\in L^p[a,b]$ υπάρχει $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}\subseteq C^1[a,b]$ ώστε

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b|f(t)-f_m(t)|^p\,d(t)=0.$$

Έστω $\varepsilon>\varepsilon^*>0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f(t)\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon\Big)&=\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b (f(t)-f_m(t)+f_m(t))\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon\Big)\\&\leqslant\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b (f(t)-f_m(t))\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon^*\Big)+\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f_m(t)\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon-\varepsilon^*\Big).\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 7.1.4,

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b (f(t)-f_m(t))\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon^*\Big)=0.$$

Από το Λήμμα 7.1.3,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f_m(t)\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon-\varepsilon^*\Big)\leqslant\frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_a^b|f_m(t)|^\alpha\,dt,$$

όπου $\delta=\varepsilon-\varepsilon^*$, άρα

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\int_a^b f_m(t)\,dX(t,\omega)\Big|>\varepsilon-\varepsilon^*\Big)\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha}\int_a^b|f_m(t)|^\alpha\,dt.$$

Επίσης,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha} \int_a^b |f_m(t)|^\alpha \, dt = \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha} \int_a^b |f(t)|^\alpha \, dt.$$

Συνδυαστικά,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int_a^b f(t)\, dX(t,\omega)\Big| > \varepsilon\Big) &\leqslant \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int_a^b (f(t) - f_m(t))\, dX(t,\omega)\Big| > \varepsilon^*\Big) \\ &\quad + \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int_a^b f_m(t)\, dX(t,\omega)\Big| > \varepsilon - \varepsilon^*\Big) \\ &= 0 + \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\delta^\alpha} \int_a^b |f(t)|^\alpha \, dt. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 7.1.6. *Έστω $f \in L^p[0,1]$ με $p \geqslant 1$ και $a_n = \widehat{f}(n)$. Έστω $X(t,\omega)$ συμμετρική ευσταθής στοχαστική διαδικασία με δείκτη $\alpha \in (1,2)$ και περίοδο 1. Τότε,*

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y} \xrightarrow{P} \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega),$$

όπου

$$A_n(\omega) = \int_0^1 e^{-2\pi n i t}\, dX(t,\omega).$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$S_n(y,\omega) = \sum_{k=-n}^{n} a_k A_k(\omega) e^{2\pi k i y}$$

και

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi k i t}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} S_n(y,\omega) &= \sum_{k=-n}^{n} a_k A_k(\omega) e^{2\pi k i y} = \sum_{k=-n}^{n} a_k \int_0^1 e^{-2\pi k i t}\, dX(t,\omega) e^{2\pi k i y} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi k i (y-t)}\, dX(t,\omega) = \int_0^1 S_n(f)(y-t)\, dX(t,\omega). \end{aligned}$$

Έστω $\delta > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(\Big| \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega) - S_n(y,\omega)\Big| > \delta\Big) \\ &\qquad = \mathbb{P}\Big(\Big| \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega) - \int_0^1 S_n(f)(y-t)\, dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big) \\ &\qquad = \mathbb{P}\Big(\Big| \int_0^1 (f(y-t) - S_n(f)(y-t))\, dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big) \\ &\qquad \leqslant \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\varepsilon^\alpha} \int_0^1 |f(y-t) - S_n(f)(y-t)|^\alpha \, dt \end{aligned}$$

για κάποιο $\varepsilon < \delta$, από το Λήμμα 7.1.3.

Από γνωστό θεώρημα των τριγωνομετρικών σειρών, για κάθε $f \in L^p([0,1])$, $p \geqslant 1$ και $\alpha > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(y-t) - S_n(f)(y-t)|^\alpha dt = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega) - S_n(y,\omega) \Big| > \delta \Big) = 0.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y} \xrightarrow{p} \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega).$$

$\square$

Θεώρημα 7.1.7. *Έστω $f \in L^p[0,1]$ με $p \geqslant 1$ και $a_n = \widehat{f}(n)$. Έστω $X(t,\omega)$ συμμετρική ευσταθής στοχαστική διαδικασία με δείκτη $\alpha \in (1,2)$ και περίοδο 1. Θέτουμε*

$$A_n(\omega) = \int_0^1 e^{-2\pi n i t}\, dX(t,\omega).$$

Αν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |na_n|^2 < \infty$ τότε η $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y}$ είναι διαφορίσιμη κατα πιθανότητα.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$S(y,\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A_k(\omega) e^{2\pi k i y}.$$

Από το θεώρημα Riesz-Fischer υπάρχει $g \in L^2[0,1]$ ώστε

$$na_n = \int_0^1 e^{-2\pi n i t} g(t)\, dt.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{S(y+h,\omega) - S(y,\omega)}{h} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A_k(\omega) \frac{(e^{2\pi k i (y+h)} - e^{2\pi k i y})}{h} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A_k(\omega) e^{2\pi i k y} \frac{(e^{2\pi k i h} - 1)}{h} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi k i a_k A_k(\omega) e^{2\pi i k y} \frac{(e^{2\pi k i h} - 1)}{2\pi k i h}.\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$b_n = na_n \frac{(e^{2\pi k i h} - 1)}{2\pi n i h}.$$

Τότε,

$$\frac{S(y+h,\omega) - S(y,\omega)}{h} = 2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k A_k(\omega) e^{2\pi i k y}$$

και

$$b_n = na_n \frac{(e^{2\pi k i h} - 1)}{2\pi n i h} = na_n \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} e^{-2\pi n i t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} g(y-t) dt e^{-2\pi n i y}\, dy.$$

Άρα, οι b_n είναι συντελεστές Fourier ενός ολοκληρώματος που είναι απολύτως συνεχές και ανήκει στον L^p. Από το Θεώρημα 7.1.4 έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y} \xrightarrow{p} \int_0^1 \frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)du\, dX(t,\omega).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S(y+h,\omega)-S(y,\omega)}{h} - \int_0^1 g(y-t)\,dX(t,\omega)\Big| \geqslant \delta\Big)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S(y+h,\omega)-S(y,\omega)}{h} - \int_0^1 \frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)du\,dX(t,\omega)\\
&\qquad\quad + \int_0^1 \frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)du\,dX(t,\omega) - \int_0^1 g(y-t)\,dX(t,\omega)\Big| \geqslant \delta\Big)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(\Big|\int_0^1 \frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)du\,dX(t,\omega) - \int_0^1 g(y-t)\,dX(t,\omega)\Big| \geqslant \delta\Big)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(\Big|\int_0^1 \Big(\frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)du - g(y-t)\Big)\,dX(t,\omega)\Big| \geqslant \delta\Big)\\
&\quad \leqslant \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\varepsilon^\alpha}\int_a^b \Big|\Big(\frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)du - g(y-t)\Big)\Big|^\alpha\,dt
\end{aligned}$$

με εφαρμογή του Λήμματος 7.1.3 για $\delta > \varepsilon > 0$. Τώρα θέτουμε $v = -\frac{u}{h}$, οπότε $dv = -\frac{du}{h}$ και ορίζουμε $K_\alpha = \frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\varepsilon^\alpha}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{C2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\varepsilon^\alpha}\int_a^b \Big|\Big(\frac{1}{h}\int_{-h}^0 g(y-t-u)d(u) - g(y-t)\Big)|^\alpha\,dt\\
&\qquad = K_\alpha \int_0^1 \Big|\Big(\int_1^0 g(y-t-hv)(-h)dv - g(y-t)\Big)\Big|^\alpha\,dt\\
&\qquad = K_\alpha \int_0^1 \Big|\Big(\int_0^1 g(y-t-hv)dv - g(y-t)\Big)\Big|^\alpha\,dt.
\end{aligned}$$

Γράφουμε την ποσότητα αυτή στη μορφή

$$
\begin{aligned}
K_\alpha \int_0^1 & \Big|\Big(\int_0^1 g(y-t-hv)dv - g(y-t)\Big)\Big|^\alpha dt \\
&= K_\alpha \int_y^{y+1} \Big|\Big(\int_0^1 g(x+hv)dv - g(x)\Big)\Big|^\alpha (-1)\, dx \\
&= -K_\alpha \int_0^{-1} \Big|\Big(\int_0^1 g(x+hv)dv - g(x)\Big)\Big|^\alpha dx \\
&= K_\alpha \int_{-1}^{0} \Big|\Big(\int_0^1 g(x+hv)dv - g(x)\Big)\Big|^\alpha dx \\
&= K_\alpha \int_0^1 \Big|\Big(\int_0^1 g(z-1+hv)dv - g(z-1)\Big)\Big|^\alpha dz \\
&= K_\alpha \int_0^1 \Big|\Big(\int_0^1 g(z+hv)dv - g(z)\Big)\Big|^\alpha dz \\
&= K_\alpha \int_0^1 \Big|\Big(\int_0^1 g(z+hv)dv - \int_0^1 g(z)dv\Big)\Big|^\alpha dz \\
&= K_\alpha \int_0^1 \Big|\int_0^1 (g(x+hv)-g(x))dv\Big|^\alpha dx \\
&\leqslant K_\alpha \int_0^1 \Big(\int_0^1 |g(x+hv)-g(x)|dv\Big)^\alpha dx \\
&\leqslant K_\alpha \int_0^1 \int_0^1 |g(x+hv)-g(x)|^\alpha dv\, dx.
\end{aligned}
$$

Έχουμε $g \in L^2$, άρα $g \in L^p$ για κάθε $p \leqslant 2$. Συνεπώς,

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 |g(x+hv)-g(x)|^\alpha dx = 0$$

και από την μονοτονία του ορίου παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S(y+h,\omega)-S(y,\omega)}{h} - \int_0^1 g(y-t)\, dX(t,\omega)\Big| \geqslant \delta\Big) = 0.$$

□

Θεώρημα 7.1.8. *Έστω $X(t,\omega)$ κίνηση Brown με περίοδο 1, $X(0,\omega)=0$ και $f \in L^2[0,1]$. Οι A_n και a_n έχουν το ίδιο νόημα που είχαν στο προηγούμενο θεώρημα. Τότε,*

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y} \to \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega)$$

σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Θέτουμε πάλι

$$S_n(y,\omega) = \sum_{k=-n}^{n} a_k A_k(\omega) e^{2\pi k i y}$$

και

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi kit}.$$

Όπως πριν, έχουμε

$$S_n(y,\omega) = \int_0^1 S_n(f)(y-t)\,dX(t,\omega).$$

Όμως, για κάθε $f \in L^2[0,1]$ και κάθε κίνηση Brown X,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^1 f(t)\,dX(t,\omega)\Big) = \sigma^2 \int_0^1 |f(t)|^2\,dt,$$

όπου σ^2 θετική σταθερά. Άρα,

$$\mathbb{E}\Big|S_n(y,\omega) - \int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)\Big|^2 = \sigma^2 \int_0^1 |S_n(f)(y-t) - f(y-t)|^2\,dt.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |S_n(f)(y-t) - f(y-t)|^2\,d(t) = 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|S_n(y,\omega) - \int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)\Big|^2 = 0.$$

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ισχυροποιήσουμε το αποτέλεσμα. Ξέρουμε ότι αν $f \in C[a,b]$ και X είναι τυπική κίνηση Brown τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)\,dX(t,\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση κάποια θετική σταθερά. Δηλαδή, η

$$A_n(\omega) = \int_0^1 e^{-2\pi nit}\,dX(t,\omega)$$

είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση κάποια θετική σταθερά.

Επίσης, για μια στοχαστική διαδικασία Y με ορθογώνιες προσαυξήσεις και για κάθε $f, g \in L^2[a,b]$,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b f(t)\,dY(t,\omega)\overline{\int_a^b g(t)\,dY(t,\omega)}\Big) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Η τυπική κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία με ορθογώνιες προσαυξήσεις και για $m \neq n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_n(\omega)\overline{A_m(\omega)}) &= \mathbb{E}\Big(\int_0^1 e^{-2\pi nit}\,dX(t,\omega)\overline{\int_0^1 e^{-2\pi mit}\,dX(t,\omega)}\Big)\\ &= \int_0^1 e^{-2\pi(n-m)it}\,dt = 0.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}|a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\Big|a_n \int_0^1 e^{2\pi n i(y-t)}\, dX(t,\omega)\Big|^2$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |a_n|^2\, d(t).$$

Επειδή $f \in L^2([0,1])$, έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 < \infty,$$

άρα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}|a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y}|^2 < \infty.$$

Άρα, το $S_n(y,\omega)$ είναι άθροισμα τυχαίων μεταβλητών που είναι ανεξάρτητες, έχουν κανονική κατανομή και το άθροισμα των διακυμάνσεων τους είναι πεπερασμένο.

Από το θεώρημα Kolmogorov,

$$S_n(y,\omega) \to \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega)$$

σχεδόν παντού. □

Θεώρημα 7.1.9. *Έστω $f \in L^1[0,1]$ και $X(t,\omega)$ συμμετρική ευσταθής στοχαστική διαδικασία με δείκτη $\alpha = 1$ και περίοδο 1. Ορίζουμε*

$$A_n(\omega) = \int_0^1 e^{-2\pi n i t}\, dX(t,\omega)$$

και

$$a_n = \widehat{f}(n).$$

Τότε,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(y) \xrightarrow{p} \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega),$$

όπου $s_k(y) = \sum_{m=-k}^{k} a_m A_m(\omega) e^{2\pi m i y}$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$S_n(y,\omega) = \sum_{k=-n}^{n} a_k A_k(\omega) e^{2\pi k i y},$$

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi k i t},$$

$$\sigma_n(y,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k(y,\omega)}{n},$$

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k(f)(t)}{n}.$$

Έχουμε δείξει ότι
$$S_n(y,\omega) = \int_0^1 S_n(f)(y-t)\,dX(t,\omega),$$
άρα
$$\begin{aligned}\sigma_n(y,\omega) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(y,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 S_k(f)(y-t)\,dX(t,\omega)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(y-t)\,dX(t,\omega) = \int_0^1 \sigma_n(f)(y-t)\,dX(t,\omega).\end{aligned}$$
Έπεται ότι
$$\sigma_n(y,\omega) - \sigma_m(y,\omega) = \int_0^1 (\sigma_n(f)(y-t) - \sigma_m(f)(y-t))\,dX(t,\omega).$$
Για $\alpha = 1$ εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.1.3 και έχουμε
$$\mathbb{P}(|\sigma_n(y,\omega) - \sigma_m(y,\omega)| > \delta) \leqslant \frac{2C}{\delta}\int_0^1 (\sigma_n(f)(y-t) - \sigma_m(f)(y-t))\,dt.$$

Ξέρουμε ότι αν $f \in L^1[0,1]$ τότε $\sigma_n(f) \xrightarrow{L^1} f$, και επειδή η $\sigma_n(f)$ είναι συγκλίνουσα στον $L^1[0,1]$ έπεται πως είναι Cauchy στον $L^1([0,1])$. Άρα,
$$\lim_{m,n\to\infty}\int_0^1 |\sigma_n(f)(y-t) - \sigma_m(f)(y-t)|\,dt = 0$$
και συμπεραίνουμε ότι η $\sigma_n(y,\omega)$ συγκλίνει κατά πιθανότητα. Γράφουμε
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\Big|\sigma_n(y,\omega) - \int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big)\\ &\qquad = \mathbb{P}\Big(\Big|\int_0^1 \sigma_n(f)(y-t)\,dX(t,\omega) - \int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big)\\ &\qquad = \mathbb{P}\Big(\Big|\int_0^1 (\sigma_n(f)(y-t) - f(y-t))\,dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big).\end{aligned}$$
Εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 7.1.3 έχουμε
$$\mathbb{P}\Big(\Big|\int_0^1 (\sigma_n(f)(y-t) - f(y-t))\,dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big) \leqslant \frac{2C}{\delta}\int_0^1 |\sigma_n(f)(y-t) - f(y-t)|\,dt,$$
και επειδή $\sigma_n(f) \xrightarrow{L^1} f$ παίρνουμε
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\sigma_n(f)(y-t) - f(y-t)|\,dt = 0,$$
δηλαδή
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\sigma_n(y,\omega) - \int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)\Big| > \delta\Big) = 0.$$

□

Θεώρημα 7.1.10. *Έστω $f \in L^p[0,1]$, όπου $p \in (0,1)$, με $\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n+1) - \widehat{f}(n)| < \infty$. Τότε, $S_n(f) \xrightarrow{p} f$.*

Θεώρημα 7.1.11. *Έστω $f \in L^p(0,1)$ με $p \in (0,1)$ και X συμμετρική stable στοχαστική διαδικασία με δείκτη $a \in (1,2)$. Τα A_n και a_n έχουν το ίδιο νόημα με πριν.*

Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$, τότε

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n A_n(\omega) e^{2\pi n i y} \xrightarrow{p} \int_0^1 f(y-t)\, dX(t,\omega).$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη του στοχαστικού ολοκληρώματος $\int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)$, όπου $f \in L^p((0,1))$ με $p \in (0,1)$ με την έννοια της σύγκλισης κατά πιθανότητα.

Ξέρουμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(y-t)\,dX(t,\omega)$, όπου $f \in C(0,1)$, υπάρχει με την έννοια της σύγκλισης κατά πιθανότητα σύγκλισης. Αφού $L^p[0,1] = \overline{C[0,1]}$, για $f \in L^p(0,1)$ υπάρχει $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1]$ ώστε

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b |f(t) - f_m(t)|^p\, dt = 0,$$

και $\|f_m - f_n\|_p \leqslant \|f_m - f\|_p + \|f - f_n\|_p$. Στέλνοντας το n και το m στο άπειρο έχουμε

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_p = 0.$$

Δηλαδή, η $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Με εφαρμογή του Λήμματος 7.1.3 προκύπτει ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι Cauchy κατά πιθανότητα και από πληρότητα συγκλίνει κατα πιθανότητα.

Θεωρούμε $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ με

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_p = 0.$$

Πάλι έχουμε

$$\|f_n - g_n\|_p \leqslant \|f_n - f\|_p + \|f - g_n\|_p,$$

άρα στέλνοντας ξανά το n στο άπειρο έχουμε $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_p = 0$. Με παρόμοια εφαρμογή του Λήματος 7.1.3 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int_a^b f_n(t)\, dX(t,\omega) - \int_a^b g_n(t)\, dX(t,\omega) \Big| > \epsilon \Big) = 0.$$

Ακολουθώντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 7.1.6 παίρνουμε άμεσα το αποτέλεσμα. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ανάλυση σε χάος Wiener

8.1 Γκαουσιανοί χώροι Hilbert

Στο πέμπτο κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε την έννοια του γκαουσιανού χώρου Hilbert για να δώσουμε στην κίνηση Brown ένα ορθογώνιο ανάπτυγμα, το οποίο είχε την μορφή της τυχαίας σειράς Fourier. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι κάθε γκαουσιανός χώρος Hilbert επάγει ορθογώνιο ανάπτυγμα. Αυτό το ανάπτυγμα καλείται ανάλυση σε χάος Wiener και χρησιμοποιείται για την μελέτη της αβεβαιότητας.

Ορισμός 8.1.1 (γκαουσιανός χώρος Hilbert)**.** Γκαουσιανός γραμμικός χώρος είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος τυχαίων μεταβλητών, που είναι ορισμένες σε έναν χωρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ώστε καθεμία από αυτές τις τυχαίες μεταβλητές να είναι γκαουσιανή με μέση τιμή 0.

Παρατηρούμε ότι κάθε γκαουσιανός γραμμικός χώρος είναι υπόχωρος του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ εφοδιασμένος με τη νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο του L^2.

Γκαουσιανός χώρος Hilbert καλείται κάθε γκαουσιανός γραμμικός χώρος που είναι πλήρης. Ισοδύναμα, κάθε γκαουσιανός γραμμικός χώρος που είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert.

Θεώρημα 8.1.2. *Αν $G \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ είναι γκαουσιανός γραμμικός χώρος, τότε η κλειστή του θήκη $\overline{G}$ στον L^2 είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert.*

Απόδειξη. Έστω $X \in \overline{G}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η X έχει κανονική κατανομή και $\mathbb{E}(X) = 0$. Αφού $X \in \overline{G}$, υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ ώστε $X_n \xrightarrow{L_2} X$. Ξέρουμε ότι αν $X_n \xrightarrow{L_2} X$ τότε $X_n \xrightarrow{d} X$. Αν $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$, τότε $\sigma_n^2 = \mathbb{E}(X_n^2) \to \sigma^2 := \mathbb{E}(X^2)$ καθώς το $n \to \infty$. Επειδή $N(0, \sigma_n^2) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, έπεται ότι η X έχει κανονική κατανομή με $\mathbb{E}(X) = 0$ και διασπορά $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$. □

Θεώρημα 8.1.3. *Έστω $p \in (0, \infty)$. Κάθε γκαουσιανός γραμμικός χώρος G είναι υπόχωρος του L^p. Έπεται ότι όλες οι L^p τοπολογίες συμπιπτουν στον G, άρα συμπίπτουν με την τοπολογία της σύγκλισης κατά πιθανότητα. Επιπλέον, η κλειστή θήκη $\overline{G}$ του G στον L^p είναι γκαουσιανός χώρος*

Hilbert. Ειδικότερα, κάθε γκαουσιανός χώρος Hilbert είναι κλειστός υπόχωρος κάθε L^p χώρου, $0 < p < \infty$.

Απόδειξη. Έστω X γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(X) = 0$. Τότε,

$$\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt{2}\Big(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\Big)^{\frac{1}{p}}\|X\|_2.$$

Άρα, κάθε ακολουθία Cauchy του G σε κάποιον L^p είναι ακολουθία Cauchy σε κάθε άλλον L^p, το οποίο δίνει ότι οι κλειστές θήκες στις δυο τοπολογίες συμπίπτουν.

Επιπλέον, έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον G ώστε $X_n \xrightarrow{p} X$, όπου X τυχαία μεταβλητή. Τότε, $X_n - X_m \xrightarrow{p} 0$, και επειδή οι $X_n - X_m \in G$ είναι γκαουσιανές έχουμε $\|X_n - X_m\|_2 \to 0$. Έπεται ότι η (X_n) είναι ακολουθία Cauchy στον L^2, και λόγω πληρότητας συγκλίνει στην X στον L^2. □

Θεώρημα 8.1.4. *Κάθε σύνολο τυχαίων μεταβλητών σε έναν γκαουσιανό γραμμικό χώρο έχει κοινή κανονική κατανομή.*

Απόδειξη. Έστω $X_1, \ldots, X_n \in G$, όπου G είναι γκαουσιανός γραμμικός χώρος. Αν $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ τότε $\sum_{i=1}^n r_i X_i \in G$, άρα η $\sum_{i=1}^n r_i X_i$ έχει κανονική κατανομή. □

Παραδείγματα 8.1.5. (α) Έστω $(X_a)_{a\in A}$ άπειρο ή πεπερασμένο σύνολο ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών που έχουν τυπική κανονική κατανομή. Ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος

$$\left\{\sum_a b_a X_a : \sum_a b_a^2 < \infty\right\}$$

είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert.

(β) Έστω B_t κίνηση Brown με $t \in [0, \infty)$. Ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από τις B_t είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert. Αργότερα θα δούμε ότι τα στοιχεία του χώρου αυτού μπορούν να παρασταθούν ως στοχαστικά ολοκληρώματα συναρτήσεων του L^2.

Ορισμός 8.1.6. Ένας γκαουσιανός χώρος Hilbert ο οποίος έχει δείκτες από έναν πραγματικό χώρο Hilbert H είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert εφοδιασμένος με την γραμμική ισομετρία $h \mapsto X_h$ από τον H στον G. Ένα γκαουσιανό πεδίο σε έναν πραγματικό χώρο Hilbert H είναι μια γραμμική ισομετρία $h \mapsto X_h$ του H σε κάποιον γκαουσιανό χώρο Hilbert.

Το παράδειγμα (β) πιο πάνω είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert με δείκτες από τον $L^2([0,\infty))$ και ορίζει την ισομετρία Itô (λεπτομέρειες θα δοθούν αργότερα).

Θεώρημα 8.1.7. *Αν H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert τότε υπάρχει ένας γκαουσιανός χώρος Hilbert με δείκτες από τον H, άρα υπάρχει ένα γκαουσιανό πεδίο στον H.*

Απόδειξη. Έστω H πραγματικός χώρος Hilbert, $(e_a)_{a\in A}$ ορθοκανονική βάση στον H, και $(X_a)_{a\in A}$ ένα σύνολο ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών με το ίδιο σύνολο δεικτών. Θεωρούμε τον γκαουσιανό χώρο Hilbert

$$G = \left\{\sum_a b_a X_a : \sum_a b_a^2 < \infty\right\}.$$

Η απεικόνιση $\sum_a b_a e_a \mapsto \sum_a b_a X_a$ είναι ισομετρία απο τον H στον G. Έπεται ότι ο G είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert με δείκτες από τον H. □

Θεώρημα 8.1.8. *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές με κοινή κανονική κατανομή και μέση τιμή 0. Τότε,*

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \sum \prod_k \mathbb{E}(X_{i_k} X_{j_k}),$$

όπου το άθροισμα παίρνεται πάνω από όλες τις διαμερίσεις του $\{1, \ldots, n\}$ σε ξένα ζεύγη $\{i_k, j_k\}$.

Απόδειξη. Η μέση τιμή $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n)$ είναι ο συντελεστής των $t_1 \cdots t_n$ στο ανάπτυγμα Taylor της

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^n e^{t_i X_i}\Big) &= \mathbb{E}\Big(e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i}\Big) = e^{\frac{1}{2}\| \sum_{i=1}^n t_i X_i \|_2^2} \\
&= e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} t_i t_j \mathbb{E}(X_i X_j)} = e^{\sum_{i<j} t_i t_j \mathbb{E}(X_i X_j)} \\
&= \prod_{i<j} e^{t_i t_j \mathbb{E}(X_i X_j)} = \prod_{i<j} (1 + t_i t_j \mathbb{E}(X_i X_j)),
\end{aligned}$$

το οποίο δίνει το συμπέρασμα. □

Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για τους μιγαδικούς γκαουσιανούς χώρους. Μια μιγαδική τυχαία μεταβλητή καλείται γκαουσιανή εάν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος έχουν κοινή κανονική κατανομή. Η κατανομή μιας μιγαδικής γκαουσιανής μεταβλητής Z προσδιορίζεται από τις $\mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z))$, $\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z))$, $\mathrm{Var}(\mathrm{Im}(Z))$ και $\mathrm{Cov}(\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z))$.

Εναλλακτικά, προσδιορίζεται από δύο μιγαδικές και μία πραγματική παράμετρο. Αυτές είναι οι $\mathbb{E}(Z)$,

$$\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Z))^2 = \mathrm{Var}(\mathrm{Re}(Z)) - \mathrm{Var}(\mathrm{Im}(Z)) + 2i\mathrm{Cov}(\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z))$$

και

$$\mathbb{E}|Z - \mathbb{E}(Z)|^2 = \mathrm{Var}(\mathrm{Re}(Z)) + \mathrm{Var}(\mathrm{Im}(Z)).$$

Εάν Z είναι μια μιγαδική γκαουσιανή μεταβλητή με $\mathbb{E}(Z) = 0$, είναι δηλαδή «κεντραρισμένη», τότε η κατανομή της Z προσδιορίζεται μόνο από τις $\mathbb{E}(Z^2)$ και $\mathbb{E}(|Z|^2)$.

Τέλος, μια μιγαδική γκαουσιανή μεταβλητή Z καλείται συμμετρική εάν $Z \overset{d}{=} \lambda Z$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$.

Θεώρημα 8.1.9. *Έστω Z μια μιγαδική γκαουσιανή μεταβλητή. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Z είναι συμμετρική.*

(ii) $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = 0$.

(iii) $\mathbb{E}(Z) = 0$, $\mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z))^2 = \mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z))^2$ *και* $\mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z)\mathrm{Im}(Z)) = 0$.

(iv) $Z = X + iY$, *όπου X και Y ανεξάρτητες πραγματικές γκαουσιανές μεταβλητές με την ίδια διασπορά.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία (α) $\iff$ (β) είναι άμεση, καθώς $\mathbb{E}(\lambda Z) = \lambda \mathbb{E}(Z)$ και $\mathbb{E}(\lambda Z)^2 = \lambda^2 \mathbb{E}(Z)^2$, ενώ $\mathbb{E}|\lambda Z|^2 = \mathbb{E}(Z)^2$ για $|\lambda| = 1$.

Η ισοδυναμία (β) $\iff$ (γ) προκύπτει από την ισότητα

$$\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Z))^2 = \mathrm{Var}(\mathrm{Re}(Z)) - \mathrm{Var}(\mathrm{Im}(Z)) + 2i\mathrm{Cov}(\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z)).$$

Η ισοδυναμία (γ) $\iff$ (δ) είναι άμεση. □

Ορισμός 8.1.10. Τυπική μιγαδική γκαουσιανή μεταβλητή είναι μια συμμετρική μιγαδική γκαουσιανή μεταβλητή με $\mathbb{E}|Z|^2 = 1$.

Μια πεπερασμένη οικογένεια μιγαδικών τυχαίων μεταβλητών $\{Z_i : i = 1, \dots, n\}$ είναι από κοινού κανονική εάν η $\sum_i a_i Z_i$ είναι κανονική για κάθε επιλογή συντελεστών $a_i \in \mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της από κοινού κανονικής οικογένειας μιγαδικών τυχαίων μεταβλητών $\{Z_i : i = 1, \dots, n\}$ έχουμε ισοδύναμα ότι η οικογένεια $\{\mathrm{Re}(Z_i), \mathrm{Im}(Z_i) : i = 1, \dots, n\}$ πραγματικών τυχαίων μεταβλητών είναι από κοινού κανονική. Αν ισχύει αυτό, τότε η οικογένεια $\{Z_i, \overline{Z_i} : i = 1, \dots, n\}$ είναι επίσης από κοινού κανονική.

Μπορούμε να μιγαδικοποιήσουμε έναν πραγματικό γκαουσιανό χώρο G ως εξής: Θέτουμε

$$G_{\mathbb{C}} = G + iG = \{X + iY : X, Y \in G\} = \{Z : \mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z) \in G\}.$$

Εν γένει, αν έχουμε έναν μιγαδικό χώρο K γκαουσιανών μεταβλητών με μέση τιμή 0, τότε ο χώρος $\mathrm{Re}(K)$ των πραγματικών μερών όλων των τυχαίων μεταβλητών που ανήκουν στον K είναι πραγματικός γκαουσιανός χώρος με την μιγαδικοποίηση του $\mathrm{Re}(K)$ να είναι μεγαλύτερη απο τον K ως προς την ιδιότητα του περιέχεσθαι. Δηλαδή, $K \subseteq (\mathrm{Re}(K))_{\mathbb{C}}$, όπου $(\mathrm{Re}(K))_{\mathbb{C}} = \mathrm{Re}(K) + i\mathrm{Re}(K)$.

Επιπλέον, έχουμε ότι εάν γράψουμε $\overline{K} = \{\overline{Z} : Z \in K\}$ τότε έχουμε

$$(\mathrm{Re}(K))_{\mathbb{C}} = K + \overline{K}.$$

Παρατήρηση 8.1.11. Έστω K μιγαδικός γραμμικός χώρος μιγαδικών γκαουσιανών μεταβλητών με μέση τιμή 0. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο K είναι η μιγαδικοποίηση κάποιου πραγματικού γκαουσιανού χώρου.

(ii) $K = (\mathrm{Re}(K))_{\mathbb{C}}$.

(iii) $K = \overline{K}$.

(iv) Αν $Z \in K$ τότε $\overline{Z} \in K$.

(v) Αν $Z \in K$ τότε $\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z) \in K$.

Παρατήρηση 8.1.12. Έστω K μιγαδικός γραμμικός χώρος μιγαδικών γκαουσιανών μεταβλητών με μέση τιμή 0. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο K είναι χώρος συμμετρικών μιγαδικών γκαουσιανών μεταβλητών.

(ii) Οι K και $\overline{K}$ είναι ορθογώνιοι.

(iii) $(\mathrm{Re}(K))_{\mathbb{C}} = K \oplus \overline{K}$, και το ευθύ άθροισμα είναι ορθογώνιο.

(iv) Αν $Z \in K$ τότε οι $\mathrm{Re}(Z)$ και $\mathrm{Im}(Z)$ είναι ανεξάρτητες.

(v) Η πραγματική γραμμική απεικόνιση $Z \mapsto \sqrt{2}\mathrm{Re}(Z)$ είναι ισομετρία του K στον $\mathrm{Re}(K)$.

Σε αυτό το σημείο θα εισάγουμε κάποια στοιχεία από την κβαντική θεωρία πεδίου. Λόγω της συχνής χρήσης της ισότητας

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \sum \prod_k \mathbb{E}(X_{i_k} X_{j_k})$$

του προηγούμενου θεωρήματος, υπάρχει η ανάγκη για την καλύτερη παράσταση αυτού του αθροίσματος. Αυτή η ανάγκη αναπαράστασης οδηγεί στα διαγράμματα του Feynman.

Ορισμός 8.1.13. Διάγραμμα Feynman βαθμού n και τάξης r (όπου $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) είναι το γράφημα που αποτελείται από ένα σύνολο n κορυφών και ένα σύνολο r ακμών χωρίς κοινά τελικά σημεία. Άρα, υπάρχουν r ξένα ζεύγη κορυφών, καθένα από τα οποία ενώνεται μέσω μιας ακμής, και $n - 2r$ μη συνδεδεμένες κορυφές. Το διάγραμμα του Feynnman είναι πλήρες αν $r = \frac{n}{2}$ και μη πλήρες αν $r < \frac{n}{2}$.

Λέμε ότι ένα διάγραμμα Feynman είναι labelled από n τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας αν είναι διάγραμμα Feynman βαθμού n με κορυφές $1, \ldots, n$, όπου σκεφτόμαστε την μεταβλητή X_i να αντιστοιχεί στην κορυφή i.

Η τιμή ενός labelled διαγράμματος Feynman γ με ακμές (i_k, j_k), $k = 1, \ldots, r$ και μη συνδεδεμένες κορυφές $\{i : i \in A\}$ είναι η ποσότητα

$$u(\gamma) = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{E}(X_{i_k} X_{j_k}) \prod_{i \in A} X_i.$$

Παρατηρούμε ότι ενώ η τιμή ενός labelled διαγράμματος Feynman είναι τυχαία μεταβλητή, η τιμή ενός πλήρους διαγράμματος Feynman είναι αριθμός. Αν γ είναι διάγραμμα Feynman τότε θα συμβολίζουμε τον βαθμό του με $n(\gamma)$ και την τάξη του με $r(\gamma)$. Από εδώ και στο εξής όταν θα κάνουμε λόγο για labelled διαγράμματα Feynman θα εννοούμε αυτά τα οποία είναι labelled από γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\frac{n!}{2^{\frac{r}{2}} r!(n-2r)!}$ διαφορετικά διαγράμματα Feynman τάξης r τα οποία είναι labelled από n τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$, όπου $0 \leqslant 2r \leqslant n$.

Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό υπόβαθρο των διαγραμμάτων Feynman μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το προηγούμενο θεώρημα.

Θεώρημα 8.1.14. *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές με κοινή κανονική κατανομή και μέση τιμή 0. Τότε,*

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\gamma} u(\gamma),$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω από όλα τα πλήρη διαγράμματα Feynman γ που είναι labelled από τις $X_1, \ldots, X_n$.

8.2 Ανάπτυγμα σε χάος Wiener

Έστω H γκαουσιανός χώρος Hilbert ορισμένος σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε πως κάθε τυχαία μεταβλητή που ανήκει στον H ανήκει επίσης στον L^p για κάθε $p \in (0, \infty)$. Παρατηρούμε ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο τυχαίων μεταβλητών του H ανήκει στον L^2, λόγω ανισότητας Hölder.

Ορισμός 8.2.1. Έστω $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ορίζουμε

$$P_n(H) = \{p(x_1, \dots, x_m) : p \text{ πολυώνυμο με } \deg(p) \leqslant n, x_1, \dots, x_m \in H, m < \infty\}.$$

Ο $P_n(H)$ είναι γραμμικός χώρος και θεωρούμε την κλειστή του θήκη $\overline{P}_n(H)$ στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ορίζουμε επίσης

$$H^{:n:} = \overline{P}_n(H) \ominus \overline{P}_{n-1}(H) = \overline{P}_n(H) \cap \overline{P}_{n-1}(H)^{\perp}.$$

Για $n = 0$ θεωρούμε τον χώρο $H^{:0:} = \overline{P}_0(H)$ των σταθερών πολυωνύμων. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τον $H^{:-1:} = \overline{P}_{-1}(H) = \{0\}$. Γράφουμε $H^n_{\mathbb{R}}$ και $H^n_{\mathbb{C}}$ για τις πραγματικές και μιγαδικές περιπτώσεις αντίστοιχα.

Παρατήρηση 8.2.2. Έστω H γκαουσιανός χώρος Hilbert. Τότε:

(α) $H^{:0:}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ και $H^{:0:}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

(β) $H^{:1:}_{\mathbb{R}} = H$ και $H^{:1:}_{\mathbb{C}} = H + iH$.

(γ) $H^{:n:}_{\mathbb{C}} = H^{:n:}_{\mathbb{R}} + iH^{:n:}_{\mathbb{R}}$.

Παρατήρηση 8.2.3. Αν $x_1, \dots, x_n \in H$ τότε υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\eta_1, \dots, \eta_l$ ώστε κάθε $x_1, \dots, x_n$ να μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\eta_1, \dots, \eta_l$. Τότε, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση των $x_1, \dots, x_n$ μπορεί να γραφτεί ως πολυωνυμική συνάρτηση των $\eta_1, \dots, \eta_l$ του ιδίου το πολύ βαθμού. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε στον ορισμό του $P_n(H)$ ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ είναι ορθοκανονικές.

Παρατήρηση 8.2.4. Εάν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης τότε ο $P_n(H)$ συμπίπτει με τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n για κάποια φιξαρισμένη ορθοκανονική βάση $x_1, \dots, x_n$ του H. Συνεπώς, ο $P_n(H)$ έχει επίσης πεπερασμένη διάσταση. Έπεται ότι $\overline{P}_n(H) = P_n(H)$.

Στην περίπτωση που η διάσταση του H είναι άπειρη, τότε αυτό δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε πως $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον H τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k^2$ ανήκει στον $\overline{P}_2(H)$, όμως δεν είναι πολυώνυμο για κανένα πεπερασμένο σύνολο μεταβλητών του H.

Παρατήρηση 8.2.5. Έστω G πυκνό υποσύνολο ενός γκαουσιανού χώρου Hilbert H. Για παράδειγμα, το G μπορεί να είναι οποιοσδήποτε γκαουσιανός γραμμικός χώρος και ο H η πλήρωση του. Έστω τώρα ένα πολυώνυμο p. Ορίζουμε μια απεικόνιση $T : H^m \to L^2$ με $T(x_1, \dots, x_m) = p(x_1, \dots, x_m)$. Η T είναι συνεχής και ο $P_n(G)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $P_n(H)$. Άρα,

$$\overline{P}_n(H) = \overline{P_n(H)} = \overline{P_n(G)}.$$

Εκ κατασκευής, η ακολουθία $\{\overline{P}_n(H)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων του L^2. Οι χώροι $H^{:n:}$ είναι ορθογώνιοι, άρα

$$\overline{P}_n(H) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^{:k:}$$

και έπεται ότι

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^{:k:} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{P}_n(H)}.$$

Λήμμα 8.2.6. *Αν $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ και $\mathbb{E}(Xe^{-ih}) = 0$ για κάθε $h \in H$ τότε $X = 0$ σχεδόν βεβαίως.*

Απόδειξη. Έστω πως ο H είναι πεπερασμένης διάστασης και παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_m$. Έστω επίσης μ η κατανομή των $(x_1, \ldots, x_m)$. Σε αυτήν την περίπτωση, μια τυχαία μεταβλητή $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ μπορεί να γραφτεί ως $f(x_1, \ldots, x_m)$, όπου $f \in L^1(\mathbb{R}^m, \mu)$. Δηλαδή, για κάθε $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, με $h = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ έχουμε

$$\begin{aligned}
0 + \mathbb{E}(Xe^{-ih}) &= \mathbb{E}\Big(f(x_1, \ldots, x_m) e^{-i\sum_{i=1}^m t_i x_i}\Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, x_m) e^{-i\sum_{i=1}^m t_i x_i} d\mu(x) \\
&= \widehat{fd\mu}(x_1, \ldots, x_m),
\end{aligned}$$

άρα

$$\widehat{fd\mu}(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Έπεται ότι $fd\mu = 0$, άρα $f = 0$ μ-σχεδόν παντού. Δηλαδή, $X = f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ σχεδόν βεβαίως.

Τώρα, υποθέτουμε ότι ο H είναι απειροδιάστατος. Τότε, υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο γκαουσιανών μεταβλητών $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ώστε η X ναι είναι μετρήσιμη στην σ-άλγεβρα που παράγεται απο αυτές. Θεωρούμε τον υπόχωρο H_n που παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_n$ και θέτουμε

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{F}(H_n).$$

Έχουμε $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}(H_n), \mathbb{P})$. Για κάθε $h \in H_n$ έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)e^{-ih}) = \mathbb{E}(Xe^{-ih}) = 0.$$

Από την πεπερασμένη περίπτωση συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = 0.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L^1} X$ καθώς $n \to \infty$. Άρα, $X = 0$. □

Θεώρημα 8.2.7. *Οι χώροι $H^{:k:}$, $k \geqslant 0$ είναι κλειστοί, ορθογώνιοι υπόχωροι του $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Επιπλέον,*

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^{:k:} = L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P}),$$

όπου $\mathcal{F}(H)$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές στον H.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$G = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{P}_n(H)}.$$

Εκ κατασκευής, έχουμε $\overline{P}_n(H) \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$. Άρα, $G \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$.

Όμως, ξέρουμε ότι

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^{:k:} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{P}_n(H)}.$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει το αντίστροφο. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι αν $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ και η X είναι κάθετη στον G τότε $X = 0$.

Εάν δείξουμε ότι αυτό ισχύει στη μιγαδική περίπτωση τότε από την Παρατήρηση 8.2.2 ισχύει και για την πραγματική περίπτωση. Αν τώρα $h \in H$ τότε

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{|h|^k}{k!} \leqslant 1 + e^{|h|} \leqslant 1 + e^h + e^{-h}.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στον L^2 έχουμε ότι $\sum_{k=0}^{n} \frac{(ih)^k}{k!} \to e^{ih}$ καθώς $n \to \infty$. Αφού $X_k \in P_n(H) \subset G$ έχουμε $e^{ih} \in G$ για κάθε $h \in H$. Συνεπώς, επειδή η X είναι κάθετη στον G έχουμε

$$\mathbb{E}(Xe^{-ih}) = \langle X, e^{ih} \rangle = 0.$$

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Πόρισμα 8.2.8. *Έστω H γκαουσιανός χώρος Hilbert ο οποίος παράγει την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Τότε, ο $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ έχει ορθοκανονικό ανάπτυγμα της μορφής*

$$L^2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}.$$

Αυτό το ανάπτυγμα του L^2 καλείται ανάλυση σε χάος Wiener. Για κάθε $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ μπορούμε να γράψουμε

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$$

με $X_n \in H^{:n:}$. Το ανάπτυγμα αυτό καλείται επίσης ανάλυση σε χάος Wiener. Καλούμε τον $\overline{P}_n(H)$ *χάος n-οστής τάξης* και κάθε στοιχείο του καλείται *στοιχείο χάους n-οστής τάξης*. Επίσης, καλούμε τον $H^{:n:}$ *ομογενές χάος n-οστής τάξης* και τα στοιχεία του *ομογενή στοιχεία χάους n-οστής τάξης*. Θέτουμε

$$P(H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n(H).$$

Ο $P(H)$ καλείται *πολυωνυμικός χώρος* των στοιχείων του H και τα στοιχεία του *πολυωνυμικές μεταβλητές*. Επίσης θέτουμε

$$\overline{P}_*(H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{P}_n(H) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{:n:}.$$

Ο $\overline{P}_*(H)$ είναι ο χώρος όλων των στοιχείων του $L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ που έχουν πεπερασμένο ανάπτυγμα χάους.

Παρατήρηση 8.2.9. Αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε $\overline{P}_*(H) = P(H)$. Στην περίπτωση που ο H είναι απειροδιάστατος, έχουμε $\overline{P}_*(H) \supset P(H)$. Από το Θεώρημα 8.2.7 βλέπουμε ότι ο $\overline{P}_*(H)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$.

Θεώρημα 8.2.10. *Αν $p \in (0,\infty)$ τότε ο $P(H)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^p(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$.*

Απόδειξη. Οι πολυωνυμικές μεταβλητές ανήκουν στον L^p λόγω της ανισότητας Hölder. Αν $p \in [1,\infty)$ τότε $(L^p)^* = L^q$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, και ακολουθώντας την λογική της απόδειξης του Θεωρήματος 8.2.7 παίρνουμε το αποτέλεσμα. Αν $p \in (0,1)$ τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο καθώς ο $L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^p(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$. □

Θεώρημα 8.2.11. *Αν $p \in (0,\infty)$ τότε το σύνολο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των εκθετικών τύπου e^h με $h \in H$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^p(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$. Επίσης το σύνολο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των εκθετικών τύπου e^{ih} με $h \in H$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^p(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$. Τέλος, το σύνολο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των εκθετικών τύπου e^z με $z \in H_C$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$.*

Απόδειξη. Προφανώς, οι εκθετικές συναρτήσεις ανήκουν στον L^p. Ξεκινάμε με τη μιγαδική περιπτώση. Μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι $p \in [1,\infty)$ και συμβολίζουμε με q τον συζυγή εκθέτη του p. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $z = 1$ ή i και η $X \in L^q_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ ικανοποιεί την $\mathbb{E}(Xe^{ih}) = 0$ για κάθε $h \in H$ τότε $X = 0$.

Αν $z = i$ τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο από το λήμμα.

Στην περίπτωση που $z = 1$, επειδή για κάθε $h \in H$ έχουμε $t \cdot h \in H$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε $\mathbb{E}(Xe^{th}) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης, παρατηρούμε πως αν $h \in H$ τότε η απεικόνιση $z \mapsto \mathbb{E}(Xe^{zh})$ είναι ακέραια. Άρα, αν αυτή η συνάρτηση μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ τότε μηδενίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$, και ειδικότερα για $z = i$. Άρα, $\mathbb{E}(Xe^{ih}) = 0$ για κάθε $h \in H$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από την περίπτωσξ που δείξαμε.

Τέλος, στην πραγματική περίπτωση (για $z = 1$) το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την μιγαδική περίπτωση. □

Ορισμός 8.2.12. Για κάθε $n \geqslant 0$ συμβολίζουμε με π_n την ορθογώνια προβολή του L^2 στον $H^{:n:}$. Με $\pi_{\leqslant n}$ συμβολίζουμε την ορθογώνια προβολή του L^2 στον $\bigoplus_{k=0}^n H^{:k:}$.

Ειδικότερα, θέτουμε $\pi_0(X) = \mathbb{E}(X)$ και $\pi_n = \pi_{\leqslant n} = 0$ όταν $n < 0$. Έπεται ότι

$$\pi_{\leqslant n} = \sum_{k=0}^{n} \pi_k.$$

Ξέρουμε ότι για κάθε $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ μπορούμε να γράψουμε $X = \sum_{n=0}^\infty X_n$ με $X_n \in H^{:n:}$ – όπως είπαμε, αυτή είναι η ανάλυση σε χάος Wiener. Μπορούμε τώρα να της δώσουμε την εξής μορφή:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(X),$$

όπου το άθροισμα συγκλίνει στον L^2. Εκ κατασκευής έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{\leqslant n} X = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(X) = X$$

στον L^2.

8.3 Ανάλυση Wiener-Itô

Θεωρούμε τώρα μια τυπική κίνηση Brown B_t με $0 \leqslant t < \infty$. Συμβολίζουμε με $H = H(B)$ τον γκαουσιανό χώρο Hilbert που παράγεται από την $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \geqslant 0}$. Δηλαδή, η σ-άλγεβρα που παράγεται από τον H είναι η ίδια με αυτήν που παράγεται από την κίνηση Brown:

$$\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(\mathcal{B}).$$

Έστω τώρα $t, s \geqslant 0$ με $t > s$. Τότε, $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. Άρα,

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s = \mathbb{E}(B_t B_s).$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(B_t B_s) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(x)\mathbf{1}_{[0,s]}(x)dx.$$

Επομένως, η γραμμική απεικόνιση $I : \sum a_i \mathbf{1}_{[0,t_i]} \mapsto \sum a_i B_{t_i}$ είναι ισομετρία από τον υπόχωρο του $L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty))$ που αποτελείται από τις κλιμακωτές συναρτήσεις σε έναν γκαουσιανό χώρο που παράγεται απο την κίνηση Brown.

Όμως ξέρουμε ότι οι κλιμακωτές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty))$, άρα μπορούμε να επεκτείνουμε την ισομετρία στη μορφή $I : L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty)) \to H$. Αυτή η ισομετρία είναι γνωστή ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô και γράφεται ως εξής:

$$I(f) = \int_0^\infty f(t)dB_t.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.1. *Αν $H = \left\{\int_0^\infty f(t)dB_t : f \in L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty))\right\}$, η απεικόνιση $I : L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty)) \mapsto H$ με*

$$I(f) = \int_0^\infty f(t)dB_t$$

είναι ισομετρία επί.

Έχουμε μία ακόμα κατασκευή της κίνησης Brown. Παρατηρούμε πως κάθε οικογένεια $(B_t)_{t\geqslant 0}$ τυχαίων μεταβλητών που έχουν μέση τιμή 0, από κοινού κανονική κατανομή, και ικανοποιούν την $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t, s\}$ είναι κίνηση Brown. Εμείς κατασκευάσαμε την κίνηση Brown αντιστρέφοντας την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή θεωρήσαμε ισομετρία $I : L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty)) \to H$ όπου H γκαουσιανός χώρος Hilbert και ορίσαμε $B_t = I(\mathbf{1}_{[0,t]})$.

Θεωρούμε ορθοκανονική βάση $(e_n)_{n=1}^\infty$ στον $L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty))$ και ακολουθία $(X_n)_{n=1}^\infty$ ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Ορίζουμε

$$I(f) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \langle f, e_n\rangle X_n = \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_0^\infty f e_n dt\Big) X_n.$$

Τότε,

$$B_t = \sum_{n=1}^\infty E_n(t) X_n$$

με

$$E_n(t) = \int_0^t e_n(s)ds.$$

Ορισμός 8.3.2. Αν $x_1, \ldots, x_n \in H$ όπου H γκαουσιανός χώρος Hilbert, τότε το $: x_1 \cdots x_n :\in H^{:n:}$ καλείται γινόμενο Wick και ορίζεται ως εξής:

$$: x_1 \cdots x_n := \pi_n(x_1 \cdots x_n).$$

Στην περίπτωση $n = 0$ έχουμε

$$::= 1 \in H^{:0:}.$$

Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται στο μιγαδικό πεδίο μέσω της γνωστής μιγαδικοποίησης ενός γκαουσιανού χώρου Hilbert. Μάλιστα, μπορούμε πάλι για κάθε χώρο Hilbert να ορίσουμε το γενικό γινόμενο Wick ως εξής:

$$X \odot Y = \pi_{m+n}(XY),$$

όπου $X \in H^{:n:}$ και $Y \in H^{:m:}$ με $n, m \in \mathbb{N}$. Ένα τέτοιο γινόμενο υπάρχει καθώς $XY \in L^2$. Αυτό ισχύει γιατί οι X, Y είναι πολυωνυμικές μεταβλητές του $P(H)$.

Ορισμός 8.3.3. Αν H_1 και H_2 είναι χώροι Hilbert τότε ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $H_1 \otimes H_2$ που είναι χώρος Hilbert, εφοδιασμένος με μια διγραμμική απεικόνιση $H_1 \times H_2 \to H_1 \otimes H_2$, όπου $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \otimes f_2 \in H_1 \times H_2$ έτσι ώστε

$$\langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_2 \rangle.$$

Επιπλέον, η κλειστή γραμμική θήκη της εικόνας αυτής της απεικόνισης είναι ο $H_1 \otimes H_2$. Ομοίως ορίζεται το τανυστικό γινόμενο πεπερασμένων το πλήθος χώρων Hilbert, και ειδικότερα η τανυστική n-οστή δύναμη του H η οποία συμβολίζεται με $H^{\otimes n}$.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το συμμετρικό τανυστικό γινόμενο $H^{\odot n}$ για έναν χώρο Hilbert. Θεωρούμε μια πλειογραμμική απεικόνιση $H \times \cdots \times H \to H^{\odot n}$ με $(f_1, \ldots, f_n) \mapsto f_1 \odot \cdots \odot f_n$, ως εξής:

$$\langle f_1 \odot \cdots \odot f_n, g_1 \odot \cdots \odot g_n \rangle = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \langle f_i, g_{\pi(i)} \rangle,$$

όπου S_n είναι η συμμετρική ομάδα. Επίσης, η κλειστή γραμμική θήκη της εικόνας της απεικόνισης είναι ο $H^{\odot n}$, όπου $H^{\odot 1} = H$.

Ο πολλαπλασιασμός

$$(f_1 \odot \cdots \odot f_n) \odot (f_{n+1} \odot \cdots \odot f_{n+m}) = f_1 \odot \cdots \odot f_{n+m}$$

επεκτείνεται σε συνεχή διγραμμικό τελεστή $H^{\odot n} \times H^{\odot m} \to H^{\odot n+m}$. Άρα, το ευθύ άθροισμα

$$\Gamma_*(H) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{\odot n}$$

έχει τη δομή μεταθετικής άλγεβρας και καλείται συμμετρική τανυστική άλγεβρα του H. Η πλήρωση του είναι ο χώρος Hilbert

$$\Gamma(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\odot n}$$

ο οποίος καλείται συμμετρικός χώρος Fock στον H.

Καταλήγουμε στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.4. *Έστω H γκαουσιανός χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $x_1 \odot \cdots \odot x_n \mapsto : x_1 \cdots x_n :$ ορίζει ισομετρία από τον $H^{\odot n}$ στον $H_{\mathbb{R}}^{:n:}$. Παίρνοντας μαζί όλους τους $n \in \mathbb{N}$, αυτές οι απεικονίσεις ορίζουν έναν ισομορφισμό αλγεβρών ανάμεσα στην συμμετρική τανυστική άλγεβρα $\Gamma_*(H)$ και τον $\overline{P}_{*\mathbb{R}}(H)$ με το γενικευμένο γινόμενο Wick. Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτήν την ισομετρία απο τον χώρο Fock $\Gamma(H)$ επί του $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{\mathbb{R}}^{:n:} = L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$.*

Εφόσον η $I : L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty)) \to H$ είναι ισομετρία, η τανυστική δύναμη $I^{\odot n}$ είναι ισομετρία από τον $L^2_{\mathbb{R}}([0,\infty))^{\odot n}$ στον $H^{\odot n}$. Μέσω γνωστού θεωρήματος ο $H^{\odot n}$ ταυτίζεται με τον $H_{\mathbb{R}}^{:n:}$. Ομοίως για την μιγαδική περίπτωση

Μπορούμε να ταυτίσουμε τον χώρο $L^2([0,\infty))^{\odot n}$ με τον χώρο των συμμετρικών συναρτήσεων $L^2([0,\infty), \frac{1}{n!}dx)$. Ορίζουμε

$$D_n = \{(t_1, \ldots, t_n) : 0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty\}.$$

Όταν γράφουμε $L^2(D_n)$ θεωρούμε το D_n εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω πληροφορίες έχουμε:

Θεώρημα 8.3.5. *Για κάθε $n \geqslant 0$ υπάρχει ισομετρία $I_n : L^2(D_n) \to H^{:n:}$ ώστε*

$$I_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n) = : \int f_1 dB \cdots \int f_n dB :$$

όπου το γινόμενο $f_1 \odot \cdots \odot f_n$ ορίζεται ως εξής:

$$(f_1 \odot \cdots \odot f_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_{\pi(i)}).$$

Θεωρούμε το I_n ως πολλαπλό ολοκλήρωμα Itô. Έστω $\mathcal{F}_t$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\{B_s : s \leqslant t\}$. Μια συνάρτηση X_t με $t \geqslant 0$ είναι στοιχειώδης προβλέψιμη διαδιακασία εάν μπορεί να γραφτεί σαν πεπερασμένο άθροισμα ως εξής:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N} Y_i \mathbf{1}_{(t_i,u_i]}(t), \tag{8.3.1}$$

όπου, για κάθε $i \in \{1, \ldots, N\}$, η Y_i είναι τυχαία μεταβλητή μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$, $0 \leqslant t_i < u_i$.

Ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της στοιχειώδους προβλέψιμης διαδιακασίας (8.3.1) ως εξής:

$$\int_0^\infty X_t dB_t = \sum_{i=1}^{N} Y_i (B_{u_i} - B_{t_i}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\Big| \int_0^\infty X_t dB_t \Big|^2 = \int_0^\infty \mathbb{E}|X_t|^2 dB_t.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον χώρο Π^2, το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων προβλέψιμων διαδικασιών, ως την κλειστότητα του συνόλου των στοιχειωδών προβλέψιμων διαδικασιών στον $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, dt, d\mathbb{P})$. Τώρα, επεκτείνουμε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος στον Π^2 μέσω συνέχειας.

Άρα, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty X_t dB_t$$

ορίζεται στον L^2 ως τυχαία μεταβλητή για κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία, και ισχύει η

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^\infty X_t dB_t\Big|^2 = \int_0^\infty \mathbb{E}|X_t|^2 dB_t.$$

Αν έχουμε μια στοιχειώδη προβλέψιμη διαδικασία

$$X_t = \sum_{i=1}^N Y_i \mathbf{1}_{(t_i,u_i]}(t),$$

τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_0^\infty X_t dB_t\Big) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^N Y_i(B_{u_i} - B_{t_i})\Big) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(Y_i(B_{u_i} - B_{t_i})) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(B_{u_i} - B_{t_i}) = 0
\end{aligned}$$

Λόγω συνέχειας, αυτό ισχύει για κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία.

Έστω $F \in L^2(D_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$F_t(t_1,\dots,t_{n-1}) = \begin{cases} F(t_1,\dots,t_{n-1},t) & ,0 < t_1 < t_2 < \cdots < t \\ 0 & ,\text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εκ κατασκευής, $F_t \in L^2(D_{n-1})$ σχεδόν για κάθε t και

$$\int \|F_t\|^2_{L^2(D_{n-1})} dt = \|F\|^2_{L^2(D_n)}.$$

Άρα, μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $t \mapsto I_{n-1}(F_t)$.

Θεώρημα 8.3.6. *Αν $n \in \mathbb{N}$ και $F \in L^2(D_n)$ τότε η $t \mapsto I_{n-1}(F_t)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία και*

$$I_n(F) = \int_0^\infty I_{n-1}(F_t) dB_t.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που η F είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \subset D_n$, όπου $0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < \cdots < b_{n-1} \leqslant a_n < b_n$. Για κάθε $(t_1,\dots,t_n) \in D_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}_{(a_1,b_1]} \odot \cdots \odot \mathbf{1}_{(a_n,b_n]})(t_1,\dots,t_n) &= \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(a_i,b_i]}(t_{\pi(i)}) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(a_i,b_i]}(t_i) = F(t_1,\dots,t_n).
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\int \mathbf{1}_{(a_i,b_i]} dB = B_{b_i} - B_{a_i},$$

και αυτές οι τυχαίες μεταβλητές είναι ορθογώνιες. Έπεται ότι

$$I_n(F) =: \int \mathbf{1}_{(a_1,b_1]} dB \cdots \int \mathbf{1}_{(a_n,b_n]} dB :=: \prod_{i=1}^{n} (B_{b_i} - B_{a_i}) := \prod_{i=1}^{n} (B_{b_i} - B_{a_i}).$$

Επίσης, $F_t = 0$ εκτός αν $t \in (a_n, b_n]$, και σε αυτήν την περίπτωση

$$F_t = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{(a_i,b_i]}.$$

Από τον υπολογισμό του $I_n(F)$ έχουμε

$$I_{n-1}(F_t) = \prod_{i=1}^{n-1} (B_{b_i} - B_{a_i}) \mathbf{1}_{(a_n,b_n]}(t).$$

Για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ οι B_{b_i}, B_{a_i} είναι $\mathcal{F}_{a_n}$ μετρήσιμες, έχουμε μια στοιχειώδη προβλέψιμη διαδικασία, και

$$\int_0^\infty I_{n-1}(F_t) dB_t = \prod_{i=1}^{n-1} (B_{b_i} - B_{a_i}) = I_n(F).$$

Συνεπώς, έχουμε το συμπέρασμα για κάθε F που είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων τέτοιου τύπου διαστημάτων. Όμως ξέρουμε πως οι απλές αυτές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^2(D_n)$, και το γενικό αποτέλεσμα έπεται λόγω συνέχειας, επειδή οι I_n και I_{n-1} είναι ισομετρίες, άρα

$$\int_0^\infty \mathbb{E}|I_{n-1}(F_t)|^2 dt = \int_0^\infty \|F_t\|^2_{L^2(D_{n-1})} dt = \|F_t\|^2_{L^2(D_n)}.$$

$\square$

Πόρισμα 8.3.7. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $F \in L^2(D_n)$ τότε*

$$I_n(F) = \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}.$$

Έπεται ότι το I_n είναι μια ισομετρία του $L^2(D_n)$ στον $H^{:n:}$. Η απεικόνιση

$$(F_n)_{n=0}^\infty \mapsto F_0 + \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F_n(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}$$

είναι ισομετρία του $\bigoplus_{n=0}^\infty L^2(D_n)$ επί του $L^2(\Omega, \mathcal{F}(B), \mathbb{P})$.

Θεώρημα 8.3.8. *Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $X_t \mapsto I(X_t) = \int_0^\infty X_t dB_t$ είναι μια ισομετρία που απεικονίζει των χώρο Π^2 των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων προβλέψιμων στοχαστικών διαδικασιών στον*

$$L_0^2(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathbb{P}) = \{X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(B), \mathbb{P}) : \mathbb{E}(X) = 0\}.$$

Συνεπώς, αν $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathbb{P})$ τότε

$$X = \mathbb{E}(X) + \int_0^\infty Y_t dB_t$$

για κάποια, μονοσήμαντα ορισμένη, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία Y_t.

Απόδειξη. Έχουμε δει πως η απεικόνιση I είναι μια ισομετρία από τον χώρο Hilbert Π^2 στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}(B), \mathbb{P})$, και επειδή $\mathbb{E}(\int_0^\infty X_t dB_t) = 0$ έχουμε $I(X_t) \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}(B), \mathbb{P})$. Η εικόνα $\mathrm{Im}(I)$ στον $L_0^2(\Omega, \mathcal{F}(B), \mathbb{P})$ είναι κλειστή, και αρκεί να δείξουμε πως είναι πυκνή.

Έστω $X \in H^{:n:}$, $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 8.3.5 έχουμε $X = I_n(F)$ για κάποια $F \in L^2(D_n)$. Από το Θεώρημα 8.3.6, $X = I(I_{n-1}(F_t))$ με $I_{n-1}(F_t) \in \Pi^2$, άρα $H^{:n:} \subseteq \mathrm{Im}(I)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όμως, έχουμε $L_0^2 = \bigoplus_{n=1}^\infty H^{:n:}$ από το Θεώρημα 8.3.4. □

Θεώρημα 8.3.9. *Έστω H_t κλειστός υπόχωρος του $H(B)$ που παράγεται από το $\{B_s : s \leqslant t\}$ και έστω*

$$D_{n,t} = \{(t_1, \dots, t_n) : 0 < t_1 < \cdots < t_n < t\}.$$

Τότε, η I_n περιορίζεται σε μια ισομετρία από τον $L^2(D_{n,t})$ επί του $H_t^{:n:}$, και η $\bigoplus_{n=0}^\infty I_n$ περιορίζεται σε μια ισομετρία από τον $\bigoplus_{n=0}^\infty L^2(D_{n,t})$ επί του $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Αν $X = \sum_{n=0}^\infty I_n(F_n) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ με $F_n \in L^2(D_n)$, τότε

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t) = \sum_{n=0}^\infty I_n(F_n \mathbf{1}_{D_{n,t}}).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως η I_1 απεικονίζει τον $L_\mathbb{R}^2(D_{1,t}) = L_\mathbb{R}^2([0,t))$ επί του H_t. Από το Θεώρημα 8.3.5 και το Θεώρημα 8.3.4 για τον H_t, η I_n απεικονίζει τον $L^2(D_{n,t}) = L^2(D_{1,t})^{\odot n}$ στον $H_t^{:n:}$ και η $\bigoplus_{n=0}^\infty I_n$ απεικονίζει τον $\bigoplus_{n=0}^\infty L^2(D_{n,t})$ στον $\bigoplus_{n=0}^\infty H_t^{:n:} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Αν τώρα $X = \sum_{n=0}^\infty I_n(F_n)$ τότε η $\sum_{n=0}^\infty I_n(F_n \mathbf{1}_{D_{n,t}})$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο Y του $L^2(\mathcal{F}_t)$.

Αν $Z \in L^2(\mathcal{F}_t)$ τότε $Z = \sum_{n=0}^\infty I_n(G_n)$, όπου $G_n \in L^2(D_{n,t})$, άρα

$$\mathbb{E}(YZ) = \sum_{n=0}^\infty \int_{D_n} F_n \mathbf{1}_{D_{n,t}} G_n = \sum_{n=0}^\infty \int_{D_n} F_n G_n = \mathbb{E}(XZ)$$

δηλαδή $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$, καθώς η Z ήταν αυθαίρετη. □

Πόρισμα 8.3.10. *Αν $F \in L^2(D_n)$ τότε το*

$$X_t = \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}$$

είναι το martingale $\mathbb{E}(I_n(F)|\mathcal{F}_t)$.

Προηγουμένως ορίσαμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα και είδαμε πως είναι ισομετρία από έναν χώρο L^2 σε έναν γκαουσιανό χώρο Hilbert. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του στοχαστικού ολοκληρώματος για να ορίσουμε στοχαστικό ολοκλήρωμα σε γενικούς χώρους μέτρου.

Ορισμός 8.3.11. Ένα γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα σε έναν χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$ είναι μια γραμμική ισομετρία $I : L_\mathbb{R}^2(M, \mathcal{M}, \mu) \to H$, όπου H γκαουσιανός χώρος Hilbert.

Θέτουμε $\mathcal{M}_\mu = \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) < \infty\}$.

Ορισμός 8.3.12. Ένα γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο στον χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$ είναι μια οικογένεια $Z(A)$, $A \in \mathcal{M}_\mu$, τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κάποιον κοινό χώρο πιθανότητας ώστε:

(α) Αν $A \in \mathcal{M}_\mu$ τότε $Z(A) \sim N(0, \mu(A))$.

(β) Αν $A_1, \dots, A_n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανα δύο συνόλων στην $\mathcal{M}_\mu$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $Z(A_i)$ είναι ανεξάρτητες και

$$Z\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n Z(A_i)$$

σχεδόν βεβαίως.

Παρατήρηση 8.3.13. Η πεπερασμένη προσθετικότητα που υποθέσαμε είναι ισοδύναμη της σ-προσθετικότητας. Πράγματι, αν $(A_i)_{i=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων ώστε $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{M}_\mu$ τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big|Z\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) - \sum_{i=1}^n Z(A_i)\Big|^2 &= \mathbb{E}\Big|Z\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big)\Big|^2 \\ &= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big),\end{aligned}$$

όμως

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|Z\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) - \sum_{i=1}^n Z(A_i)\Big|^2 = 0,$$

συνεπώς

$$\sum_{i=1}^\infty Z(A_i) \overset{L^2}{=} Z\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big).$$

Από την ανεξαρτησία έχουμε και σύγκλιση σχεδόν παντού βεβαίως.

Θεώρημα 8.3.14. *Αν $I : L^2_{\mathbb{R}}(M, \mathcal{M}, \mu) \to H$ είναι ένα γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα, τότε το $Z(A) = I(\mathbf{1}_A)$ για $A \in \mathcal{M}_\mu$ ορίζει γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο στον $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Αντίστροφα, κάθε γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο αντιστοιχεί κατ' αυτόν τον τρόπο σε ένα μοναδικό γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Z(A) = I(\mathbf{1}_A)$ για κάθε $A \in \mathcal{M}_\mu$, όπου I γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα από τον $L^2_{\mathbb{R}}(M, \mathcal{M}, \mu)$ σε γκαουσιανό χώρο Hilbert.

(i) Έστω $A \in \mathcal{M}_\mu$. Τότε, $Z(A) = I(\mathbf{1}_A) \sim N(0, \mu(A))$.

(ii) Έστω $A_1,\dots,A_n$ πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανα δύο συνόλων στην $\mathcal{M}_\mu$. Τότε,

$$\begin{aligned} Z(\bigcup_{i=1}^n A_i) &= I\Big(\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\Big) = I\Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n I(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n Z(A_i). \end{aligned}$$

Έστω τώρα $i,j\in\{1,\dots,n\}$ με $i\neq j$. Τότε,

$$\mathrm{Cov}(Z(A_i),Z(A_j)) = \int \mathbf{1}_{A_i}\mathbf{1}_{A_j} = 0.$$

Άρα, οι $Z(A_i),Z(A_j)$ είναι ανεξάρτητες.

Αντίστροφα, θεωρούμε ένα γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο $A\mapsto Z(A)$. Αν $f=\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{1}_{A_i}$, όπου $A_i\in\mathcal{M}_\mu$, είναι ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση, ορίζουμε

$$I(f)=\sum_{i=1}^n c_iZ(A_i).$$

Το $I(f)$ είναι καλώς ορισμένο και είναι ανεξάρτητο της συγκεκριμένης αναπαράστασης, επειδή το γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο πληρεί την ιδιότητα (ii).

Μπορούμε στην αναπαράσταση αυτή να επιλέξουμε τα A_i να είναι ξένα ανά δύο. Σε αυτήν την περίπτωση το $I(f)$ εκφράζεται ως ένα άθροισμα ανεξάρτητων γκαουσιανών μεταβλητών με μέση τιμή 0. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}(I(f)) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n c_iZ(A_i)\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(c_iZ(A_i)) = 0$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(I(f)) &= \mathbb{E}(I(f)^2) - \mathbb{E}(I(f))^2 = \mathbb{E}(I(f)^2) = \sum_{i=1}^n c_i^2\mathbb{E}(Z(A_i)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2\mu(A_i) = \int f^2 d\mu. \end{aligned}$$

Άρα, το I είναι γραμμμική ισομετρία από τον υπόχωρο των απλών συναρτήσεων του $L^2_{\mathbb{R}}(M,\mathcal{M},\mu)$ στον γκαουσιανό γραμμικό χώρο $G=\{I(f): f \ \text{απλή}\}$.

Από το Θεώρημα 8.1.2, ο $\overline{G}$ είναι γκαουσιανός χώρος Hilbert. Επειδή οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον L^2 μπορούμε να επεκτείνουμε το I από τον $L^2_{\mathbb{R}}(M,\mathcal{M},\mu)$ στον $\overline{G}$. Εκ κατασκευής του, το $Z(A)$ προσδιορίζει μονοσήμαντα το στοχαστικό ολοκλήρωμα I. □

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί σε ένα γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο Z συμβολίζεται ως εξής: $f\mapsto\int f dZ$.

Παρατήρηση 8.3.15. Μια οικογένεια $Z(A)$, $A\in\mathcal{M}_\mu$, τυχαίων μεταβλητών είναι γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο αν και μόνο αν οι μεταβλητές είναι από κοινού γκαουσιανές με μέση τιμή 0 και

$$\mathrm{Cov}(Z(A),Z(B)) = \mu(A\cap B), \qquad A,B\in\mathcal{M}_\mu.$$

Παρατήρηση 8.3.16. Από το Θεώρημα 8.1.7 υπάρχει ένα γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα σε κάθε χώρο μέτρου. Επομένως, υπάρχει επίσης ένα γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο σε κάθε χώρο μέτρου. Όλα τα γκαουσιανά στοχαστικά μέτρα που είναι ορισμένα στον ίδιο χώρο μέτρο έχουν την ίδια κατανομή.

Παράδειγμα 8.3.17. Έστω B μια κίνηση Brown ορισμένη στο $\mathbb{R}_+$. Αυτή ορίζει ένα γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int f dB$ στον $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$, που επάγει γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο B στον $(\mathbb{R}_+, dt)$ με

$$B((s,t]) = B_t - B_s, \qquad 0 \leqslant s < t < \infty.$$

Μπορούμε μέσω των τανυστικών γινόμενων να ορίσουμε τα πολλαπλά στοχαστικά ολοκληρώματα. Μπορούμε επίσης να επεκτείνουμε την ισομετρία I από τον $L^2_{\mathbb{C}}(M, \mathcal{M}, \mu)$ στον $H_{\mathbb{C}}$. Άρα, δεν έχει σημασία αν χρησιμοποιούμε πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς.

Από την Πρόταση 8.3.4 παίρνουμε θεώρημα ανάλογο με το Θεώρημα 8.3.5. Στα παρακάτω, ο χώρος $L^2(M^n, \mathcal{M}^{\odot n}, \mu^{\odot n})$ είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών συναρτήσεων στον $L^2(M^n, \mu^{\odot n}) = L^2(M^n, \frac{1}{n!}\mu^{\odot n})$.

Θεώρημα 8.3.18. *Έστω $I : L^2_{\mathbb{R}_+}(M, \mathcal{M}, \mu) \to H$ γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα σε έναν σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου. Τότε υπάρχουν ισομετρίες $\widehat{I}_n : L^2(M^n, \mathcal{M}^{\odot n}, \mu^{\odot n}) \to H^{:n:}$, $n \in \mathbb{N}$, και $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{I}_n : \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(M^n, \mathcal{M}^{\odot n}, \mu^{\odot n}) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ ώστε*

$$\widehat{I}_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n) =: I(f_1) \cdots I(f_n) : .$$

Αν η I είναι επί τότε και οι $\widehat{I}_n$ και $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{I}_n$ είναι επί.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την $\widehat{I}_n$ στον $L^2(M^n, \mathcal{M}^n, \mu^n)$ μέσω συμμετρικοποίησης. Για κάθε συνάρτηση f στο M^n και κάθε στοιχείο της συμμετρικής ομάδας $\pi \in S_n$ ορίζουμε

$$(f \circ \pi)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Επιπροσθέτως, ορίζουμε

$$\mathrm{Sym}(f) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} f \circ \pi.$$

Για $f \in L^2(M^n)$ αυτή είναι η ορθογώνια προβολή της f στον υπόχωρο των συμμετρικών συναρτήσεων. Άρα, μπορούμε να ορίσουμε $\widehat{I}_n$ στον $L^2(M^n)$ με

$$\widehat{I}_n(f) = \widehat{I}_n(\mathrm{Sym}(f))$$

και έχουμε

$$\mathbb{E}|\widehat{I}_n(f)|^2 = \frac{1}{n!} \int_{M^n} |\mathrm{Sym}(f)|^2 d\mu^n \leqslant \frac{1}{n!} \int_{M^n} |f|^2 d\mu^n.$$

Αν $M = [0, \infty)$ τότε το $\widehat{I}_n$ είναι το πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα με πεδίο ορισμού $D_n \subset [0, \infty)^n$ που μπορεί να θεωρηθεί ως το $n!$-οστό του συνολικού χώρου γινομένου $[0, \infty)^n$.

Έτσι όπως έχουμε κάνει την γενίκευση του στοχαστικού ολοκληρώματος δεν μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο υποσύνολο. Επομένως, θεωρούμε το $\widehat{I}_n$ ως $\frac{1}{n!}$ φορές επί το πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα στο M^n. Ορίζουμε

$$I_n(f) = n!\widehat{I}_n(f), \qquad f \in L^2(M^n).$$

Αν τώρα Z είναι το γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο που αντιστοιχεί στο I, μέσω του Θεωρήματος 8.3.14 γράφουμε το $I_n(f)$ ως

$$\int_M \cdots \int_M f(x_1, \dots, x_n) dZ(x_1) \cdots dZ(x_n)$$

ή, για συντομία,

$$\int_{M^n} f dZ^n.$$

Έχουμε

$$\int_A f dZ^n = \int_{M^n} f \mathbf{1}_A dZ^n$$

όταν το $A \subseteq M^n$ είναι μετρήσιμο. Τότε,

$$I_n(f) = \int_{M^n} f dZ^n = n! \widehat{I}_n(\mathrm{Sym}(f)) = \sum_{\pi \in S_n} \widehat{I}_n(f \circ \pi).$$

Ειδικότερα, για $f_1, \dots, f_n \in L^2(M)$,

$$\begin{aligned} \int_M \cdots \int_M f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) dZ(x_1) \cdots dZ(x_n) &= \widehat{I}_n\Big(\sum_{\pi \in S_n} f_1(x_{\pi(1)}) \cdots f_n(x_{\pi(n)}) \Big) \\ &= \widehat{I}_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n) \\ &= : \int_M f_1 dZ \cdots \int_M f_n dZ : . \end{aligned}$$

Συλλέγουμε όλες αυτές τις παρατηρήσεις στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.19. *Έστω Z ένα γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο σε έναν σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Έστω H ο γκαουσιανός χώρος που παράγεται από το $\{Z(A)\}$. Τότε, η απεικόνιση $f \mapsto I_n(f)$, όπου*

$$I_n(f) = \int_M \cdots \int_M f dZ(x_1) \cdots dZ(x_n) = \int_{M^n} f dZ^n,$$

είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^2(M^n, \mu^n)$ στον $H^{:n:}$, όπου $H^{:n:} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, τέτοιος ώστε, για κάθε $f_1, \dots, f_n \in L^2(M, \mu)$,

$$\int_M \cdots \int_M f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) dZ(x_1) \cdots dZ(x_n) = : \int_M f_1 dZ \cdots \int_M f_n dZ : .$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big| \int_M \cdots \int_M f dZ(x_1) \cdots dZ(x_n) \Big|^2 &= n! \int_{M^n} |\mathrm{Sym}(f)|^2 d\mu^n \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \int_{M^n} \overline{f} f \circ \pi d\mu^n \leqslant n! \int_{M^n} |f|^2 d\mu^n, \end{aligned}$$

και το ολοκλήρωμα $I_n(f)$ απεικονίζει τον υπόχωρο των συμμετρικών συναρτήσεων του $L^2(M^n)$ ισομορφικά επί του $H^{:n:}$. Επομένως, κάθε τυχαία μεταβλητή $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ έχει μοναδικό ανάπτυγμα

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^n} f dZ^n,$$

όπου κάθε f_n είναι συμμετρική συνάρτηση στο M^n και

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{M^n} |f_n|^2 d\mu^n = \mathbb{E}|X|^2 < \infty.$$

Σημειώνουμε πως το ολοκλήρωμα

$$\int_M \cdots \int_M f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) dZ(x_1) \cdots dZ(x_n)$$

ισοδυναμεί με γινόμενο Wick και οχι κανονικό γινόμενο.

Θεώρημα 8.3.20. *Έστω B_t, $t \geqslant 0$ κίνηση Brown. Αν $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ τότε*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} f\, dB^n = \int_{D_n} \tilde{f} dB_{t_1} \cdots dB_{t_n},$$

όπου

$$\tilde{f} = n!\mathrm{Sym}(f) = \sum_{\pi} f \circ \pi.$$

Ειδικότερα, αν $f = 0$ εκτός του D_n, τότε

$$\int_{D_n} f dB_{t_1} \cdots dB_{t_n} = \int_{\mathbb{R}_+^n} f dB^n = \int_{D_n} f dB^n.$$

Απόδειξη. Η $\tilde{f}$ είναι συμμετρική συνάρτηση στον $L^2(\mathbb{R}_+^n)$, άρα $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{B}^{\odot n}, dt^{\odot n})$. Η $\tilde{f}$ και ο περιορισμός της στο D_n αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του $L^2(\mathbb{R}_+, dt)^{\odot n}$. Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \cdots \int_{\mathbb{R}_+^n} f dB(t_1) \cdots dB(t_n) = \widehat{I}_n(\tilde{f})$$

και

$$\widehat{I}_n(\tilde{f}) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{t_2} \tilde{f} dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}.$$

Αν $f = 0$ στο D_n^c τότε $\tilde{f} = f$ στον D_n. Έπεται ότι

$$\int_{D_n} f dB_{t_1} \cdots dB_{t_n} = \int_{\mathbb{R}_+^n} f dB^n = \int_{D_n} f dB^n.$$

□

8.4 Ανάλυση Wiener-Skorohod

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε το πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô. Τώρα θα επεκτείνουμε το πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα σε τυχαίες συναρτήσεις. Αυτή η γενίκευση εισήχθη το 1975 από τον Anatoliy Skorokhod και καλείται ολοκλήρωμα Skorohod.

Αρχικά θεωρούμε ένα γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$I : L^2_{\mathbb{R}}(M, \mathcal{M}, \mu) \to H$$

σε έναν σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου. Στη συνέχεια παίρνουμε το γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο από το Θεώρημα 8.3.14. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το I είναι επιμορφισμός.

Έστω $t \mapsto X_t$ τυχαία συνάρτηση που ανήκει στον $L^2(M, \mathcal{M}, \mu; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)) = L^2(M \times \Omega, \mathcal{M} \times \mathcal{F}(H), \mu \times P)$. Δηλαδή, η μετρήσιμη συνάρτηση $M \to L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)$ ικανοποιεί την $\int_M \mathbb{E}|X_t|^2 d\mu(t) < \infty$.

Εν συνεχεία, θεωρούμε $X_t \in H^{:n:}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t \in M$. Από το Θεώρημα 8.3.18 έχουμε $X_t = \widehat{I_n}(f_t)$ για κάποια $f_t \in L^2(M^n, \mathcal{M}^{\odot n}, \mu^{\odot n})$. Τώρα, ορίζουμε $F_t = \frac{1}{n!} f_t$, οπότε

$$X_t = I_n(F_t) = \int_{M_n} F_t \, dZ^n,$$

και ορίζουμε

$$F(t_1, \ldots, t_{n+1}) = F_{t_{n+1}}(t_1, \ldots, t_n),$$

όπου $(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in M^{n+1}$. Αφού η I_n^{-1} είναι συνεχής, η απεικόνιση $t \mapsto F_t = I_n^{-1}(X_t)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση από το M στον $L^2(M^n, \mu^n)$, και συμπεραίνουμε ότι η F είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο M^{n+1}.

Παρατηρούμε ότι $F \in L^2(M^{n+1}, \mu^{n+1})$ επειδή

$$\int_{M^{n+1}} |F|^2 \, d\mu^{n+1} = \int_{M^{n+1}} \|F_t\|^2_{L^2(M^n, \mu^n)} \, d\mu(t) = \int_M \frac{1}{n!} \mathbb{E}|X_t|^2 \, d\mu(t).$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Skorohod της $X_t \in H^{:n:}$:

$$\int_M X_t dZ(t) = \int F dZ^{n+1} \in H^{:n+1:}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\mathbb{E}\Big| \int_M X_t dZ(t) \Big|^2 \leqslant (n+1)! \int_{M+1} |F|^2 d\mu^{n+1} = (n+1) \int_M \mathbb{E}|X_t|^2 d\mu.$$

Στην γενική περίπτωση που $X_t \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P}))$, θεωρούμε το γνωστό ορθογώνιο ανάπτυγμα (ανάλυση σε χάος Wiener) και ορίζουμε το ολοκλήρωμα Skorohod: για $X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(X_t)$, ορίζουμε

$$\int_M X_t dZ(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_M \pi_n(X_t) dZ(t).$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται μόνο στην περίπτωση που το άθροισμα ορίζεται στον L^2.

Θεώρημα 8.4.1. *Το ολοκλήρωμα Skorohod*

$$\int_M X_t dZ(t)$$

ορίζεται ως τυχαία μεταβλητή στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ για τυχαίες συναρτήσεις X_t σε έναν πυκνό υπόχωρο του $L^2(M, \mathcal{M}, \mu; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P}))$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) *Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό. Δηλαδή,*

$$\int (aX_t + bY_t) dZ(t) = a \int X_t dZ(t) + b \int Y_t dZ(t).$$

(ii) *Το πεδίο ορισμού περιέχει κάθε συνάρτηση X_t για την οποία*

$$|||X|||^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_M \mathbb{E}|\pi_n(X_t)|^2 d\mu(t) = \int_M (\langle \mathcal{N}X_t, X_t\rangle + \|X_t\|^2)d\mu(t) < \infty,$$

όπου $\mathcal{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$, *και*

$$\mathbb{E}\Big|\int_M X_t dZ(t)\Big|^2 \leqslant |||X|||^2.$$

(iii) *Αν* $f \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ *είναι ντετερμινιστική συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα Skorohod της* f *ισοδυναμεί με το γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα. Δηλαδή,*

$$I(f) = \int f dZ.$$

(iv) *Αν* $n \in \mathbb{N}$ *και* $F \in L^2(M^n, \mu^n)$, *τότε*

$$\int_{M_n} F dZ^n = \int_M \cdots \int_M F(t_1, \ldots, t_n) dZ(t_1)\cdots dZ(t_n),$$

όπου $\int_{M_n} FdZ^n$ *είναι το πολλαπλό ολοκλήρωμα Itô και*

$$\int_M \cdots \int_M F(t_1, \ldots, t_n) dZ(t_1)\cdots dZ(t_n)$$

είναι το ολοκλήρωμα Skorohod. Άρα, αν $F_t(t_1, \ldots, t_{n-1}) = F(t_1, \ldots, t_{n-1}, t)$, *τότε*

$$\int_M \int_{M^{n-1}} F_t dZ^{n-1} dZ(t) = \int_{M_n} F dZ^n.$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι

$$\mathbb{E}\Big|\int_M X_t dZ(t)\Big|^2 \leqslant (n+1)\int_M \mathbb{E}|X_t|^2 d\mu,$$

όπου $\int_M X_t dZ(t) = \int F dZ^{n+1}$ και $\int_M X_t dZ(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_M \pi_n(X_t)dZ(t)$, έχουμε

$$\mathbb{E}\Big|\int_M X_t dZ(t)\Big|^2 \leqslant |||X|||^2 < \infty.$$

Τώρα, από την $|||X|||^2 < \infty$ έχουμε ότι αν $X \in L^2(M; \overline{P}_n(H))$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και αν το σύνολο όλων αυτών των X είναι πυκνό στον $L^2(M; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P}))$ τότε το πεδίο ορισμού του ολοκληρώματος Skorohod είναι πυκνό.

Αν $f \mapsto f_t$ είναι ντετερμινιστική συνάρτηση στον $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$, τότε $f_t \in H^{:0:}$ για κάθε t, άρα $f_t = I_0(f_t)$ και έχουμε $F(t) = F_t = f_t$, και επειδή ορίσαμε $\int_M X_t dZ(t) = \int F dZ^{n+1}$ προκύπτει ότι $\int f dZ(t) = I(f)$.

Για $n = 2$ έχουμε

$$\int_M \int_M F_t dZ^1 dZ(t) = \int_{M^2} F dZ^2$$

άμεσα από τον ορισμό. Για $n \in \mathbb{N}$ με $n > 2$ το αποτέλεσμα προκύπτει από συμμετρικοποίηση σε αυτές τις συντεταγμένες. Εν τέλει, η

$$\int_{M_n} F dZ^n = \int_M \cdots \int_M F(t_1, \ldots, t_n) dZ(t_1) \cdots dZ(t_n)$$

προκύπτει με επαγωγή. □

Το επόμενο θεώρημα που παρέχεται χωρίς απόδειξη περιγράφει ακόμα πιο αποτελεσματικά τη σύνδεση του ολοκληρώματος Skorohod με το γινόμενο Wick.

Θεώρημα 8.4.2. *Έστω $X \in \overline{P}_*(H)$ και $f \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$. Τότε,*

$$\int_M f(t) X dZ_t = X \odot \int_M f(t) dZ_t.$$

Από εδώ και στο εξής όταν κάνουμε λόγο για κίνηση Brown, θα εννοούμε μια τυπική κίνηση Brown B_t με $t \geqslant 0$. Στην Παράγραφο 8.1 ορίσαμε το ολοκλήρωμα $\int X_t dB_t$ για τετραγωγικά ολοκληρώσιμες προβλέψιμες στοχαστικές διαδικασίες. Τώρα θα δείξουμε πως το ολοκλήρωμα Skorohod επεκτείνει το ολοκλήρωμα Itô.

Θεώρημα 8.4.3. *Έστω B_t, $t \geqslant 0$ τυπική κίνηση Brown και X_t τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε το ολοκλήρωμα Skorohod $\int X_t dB_t$ υπάρχει και ισοδυναμεί με το ολοκλήρωμα Itô που ορίσαμε στην Παράγραφο 8.1.*

Απόδειξη. Γι' αυτήν την απόδειξη θα κάνουμε χρήση του εξής συμβολισμού:

$$\int_{(I)} : \text{ολοκλήρωμα Itô στο } [0,\infty),$$
$$\int_{(S)} : \text{ολοκλήρωμα Skorohod στο } [0,\infty).$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $F_n \in L^2(D_n)$. Ορίζουμε

$$F_{n,t}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} 0 & , t_{n-1} \geqslant t \\ F_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$X_{n,t} = I_{n-1}(F_{n,t}).$$

Από το Θεώρημα 8.3.6 η $t \mapsto X_{n,t}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία με ολοκλήρωμα Itô

$$\int_{(I)} X_{n,t} dB_t = I_n(F_n).$$

Επιπλέον, από τα Θεωρήματα 8.3.7 και 8.3.18 έχουμε

$$\int_{(S)} X_{n,t} dB_t = I_n(F_n).$$

Δηλαδή, τα ολοκληρώματα Itô και Skorohod συμπίπτουν στις $X_{n,t}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία X_t. Θέτουμε

$$Y = \int_{(I)} X_{n,t} dB_t \quad \text{και} \quad Y_n = \pi_n(Y).$$

Παρατηρούμε πως, από το Θεώρημα 8.3.8,

$$Y_0 = \pi_0(Y) = \mathbb{E}(Y) = 0,$$

και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα 8.3.5, $Y_n = I_n(F_n)$ για κάποια $F_n \in L^2(D_n)$.

Εκ κατασκευής της $X_{n,t}$, και πάλι από το Θεώρημα 8.3.5,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{E}|X_{n,t}|^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \|F_{n,t}\|_{L^2(D_{n-1})} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n\|_{L^2(D_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|Y_n|^2 = \mathbb{E}|Y|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} X_{n,t}$ συγκλίνει στον L^2 σχεδόν για κάθε t. Γράφουμε επομένως

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,t}.$$

Το άθροισμα αυτό συγκλίνει επίσης στον $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, dt, d\mathbb{P})$, άρα η Z_t είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη προβλέψιμη διαδικασία και ορίζεται το ολοκλήρωμα Itô

$$\begin{aligned}
\int_{(I)} Z_t dB_t &= \int_{(I)} \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,t} dB_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(I)} X_{n,t} dB_t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n = Y = \int_{(I)} X_t dB_t.
\end{aligned}$$

Από τη μοναδικότητα στο Θεώρημα 8.3.8 έχουμε

$$X_t = Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,t}$$

σχεδόν βεβαίως.

Εκ κατασκευής του ολοκληρώματος Skorohod έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{(S)} X_t dB_t &= \int_{(S)} \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,t} dB_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(S)} X_{n,t} dB_t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(I)} X_{n,t} dB_t = \int_{(I)} \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,t} dB_t \\
&= \int_{(I)} X_t dB_t.
\end{aligned}$$

□

Μία από τις σημαντικότερες διαφορές μεταξύ των ολοκληρωμάτων Itô και Skorohod βρίσκεται στο ολοκλήρωμα μιας σταθερής συνάρτησης σε ένα διάστημα. Δηλαδή, το

$$\int_a^b X dB_t = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[a,b]}(t) X dB_t$$

είναι εν γένει διάφορο του

$$X \int_0^\infty dB_t = X(B_b - B_a).$$

Αν αντικαταστήσουμε το γινόμενο με το γινόμενο Wick τότε έχουμε ισότητα, όπως αναφέραμε στο Θεώρημα 8.4.2. Στην περίπτωση της κίνησης Brown αυτό το αποτέλεσμα παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 8.4.4. *Έστω $X \in \overline{P}_*(H)$ και $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. Τότε,*

$$\int_0^\infty f(t) X dB_t = X \odot \int_0^\infty f(t) dB_t.$$

Πόρισμα 8.4.5. *Αν $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), \mathbb{P})$ και $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ τότε*

$$\int_0^\infty f(t) X dB(t) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\int_0^\infty f dB \Big) \odot \pi_n(X)$$

με την έννοια ότι το ολοκλήρωμα Skorohod υπάρχει αν και μόνο αν η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει στον L^2, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\sum_{n=0}^\infty \Big\| \Big(\int_0^\infty f dB \Big) \odot \pi_n(X) \Big\|_2^2 < \infty.$$

Παράδειγμα 8.4.6. Ορίζουμε τυχαία μεταβλητή X_t ως εξής:

$$X_t = \begin{cases} B_2 - B_1 & , 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ B_0 - B_1 & , 1 < t \leqslant 2 \\ 0 & , t > 2 \end{cases}$$

Τότε

$$\int_0^\infty X(t) dB_t = (B_2 - B_1) \odot (B_1 - B_0) + (B_0 - B_1) \odot (B_2 - B_1) = 0.$$

Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε την έννοια του μιγαδικού γκαουσιανού στοχαστικού μέτρου το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε για να καταλήξουμε σε γενίκευση του ορθογωνίου αναπτύγματος Wiener-Itô. Προηγουμένως, υποθέσαμε ότι αν έχουμε εναν γκαουσιανό χώρο Hilbert H και χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$ τότε υπάρχει μια ισομετρία από τον $L^2_{\mathbb{R}}(M, \mathcal{M}, \mu)$ στον H. Μια τέτοια ισομετρία επεκτείνεται κατά τρόπο μοναδικό σε μια ισομετρία από τον $L^2_{\mathbb{C}}(M, \mathcal{M}, \mu)$ στον $H_{\mathbb{C}}$. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις μιγαδικών ισομετριών που δεν επάγονται από πραγματικές ισομετρίες. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές από αυτές.

Ορισμός 8.4.7. Μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα σε ένα χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$ είναι γραμμική ισομετρία $I : L^2_{\mathbb{C}}(M, \mathcal{M}, \mu) \to H_{\mathbb{C}}$, όπου $H_{\mathbb{C}}$ είναι η μιγαδικοποίηση κάποιου γκαουσιανού χώρου Hilbert H.

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε το μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο.

Ορισμός 8.4.8. Ένα μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο σε έναν χώρο μέτρου $(M, \mathcal{M}, \mu)$ είναι μια οικογένεια $Z(A)$, $A \in \mathcal{M}_\mu = \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) < \infty\}$, τυχαίων μεταβλητών με κοινή μιγαδική γκαουσιανή κατανομή και μέση τιμή 0, ώστε για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_\mu$,

$$\mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) = \mu(A \cap B).$$

Παρατηρήσεις 8.4.9. (α) Στην περίπτωση που η $Z(A)$ είναι πραγματική τυχαία μεταβλητή, ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με αυτόν της πραγματικής περίπτωσης.

(β) Αν το Z είναι μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο τότε, για κάθε πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_\mu$, όπως και στην πραγματική περίπτωση έχουμε

$$Z\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n Z(A_i)$$

σχεδόν βεβαίως. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big|Z\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) - \sum_{i=1}^n Z(A_i)\Big|^2 &= \mathbb{E}\Big|Z\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big)\Big|^2 \\ &= \mathbb{E}|Z(\emptyset)|^2 = \mathbb{E}(0) = 0.\end{aligned}$$

Αργότερα θα δούμε παραδείγματα όπου οι τυχαίες μεταβλητές $Z(A_1), \ldots, Z(A_n)$ στη μιγαδική περίπτωση είναι ανεξάρτητες ενώ οι πραγματικές δεν είναι.

(γ) Εν αντιθέσει προς την πραγματική περίπτωση, στην περίπτωση του μιγαδικού γκαουσιανού στοχαστικού μέτρου η κατανομή του μέτρου δεν προσδιορίζεται από τον χώρο μέτρου. Για παράδειγμα, αν το $Z(A)$ είναι πραγματικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο, τότε τα $Z(A)$ και $iZ(A)$ είναι δύο μιγαδικά γκαουσιανά στοχαστικά μέτρα.

Εύκολα βλέπουμε πως τα αρχικά αποτελέσματα της Παραγράφου 6.3 επεκτείνονται στην μιγαδική περίπτωση χωρίς δυσκολία. Αυτά συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8.4.10. *Έστω $(M, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υπάρχει μια απεικόνιση που είναι αντιστοιχία μεταξύ των γκαουσιανών στοχαστικών ολοκληρωμάτων και μιγαδικών γκαουσιανών στοχαστικών μέτρων στον $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Η απεικόνιση αυτή δίνεται από την*

$$Z(A) = I(\mathbf{1}_A), \qquad A \in \mathcal{M}_\mu.$$

Δοθέντος ενός μιγαδικού γκαουσιανού στοχαστικού ολοκληρώματος ή μέτρου μπορούμε να ορίσουμε ισομετρίες $\widehat{I}_n : L^2_{\mathbb{C}}(M^n, \mathcal{M}^{\odot n}, \mu^{\odot n}) \to H^{:n:}_{\mathbb{C}}$ και πολλαπλά ολοκληρώματα $I_n : L^2_{\mathbb{C}}(M^n, \mu^n) \to H^{:n:}_{\mathbb{C}}$ ώστε να ισχύουν τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 8.3.18, 8.3.19 και 8.4.1 στην μιγαδική περίπτωση.

Παράδειγμα 8.4.11. Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ καλείται θετικά ορισμένη αν για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ και $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^n f(x_i - x_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0.$$

Το *θεώρημα Bochner* εξασφαλίζει ότι αν f είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση που είναι συνεχής στο 0 με $f(0)=1$, τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$f(t)=\int e^{itx}d\mu(x).$$

Θεωρούμε μια πραγματική στάσιμη γκαουσιανή διαδικασία $(X_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ με $\mathbb{E}(X_n)=0$ για κάθε n. Σε αυτήν την περίπτωση, $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=r(i-j)$ για κάποια συνάρτηση r. Εάν θεωρήσουμε μια μιγαδική πεπερασμένη ακολουθία $(z_i)_{i=1}^{n}$, τότε

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z_j}r(i-j)=\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\Big)\geqslant 0.$$

Από το θεώρημα Bochner υπάρχει μοναδικό πεπερασμένο θετικό μέτρο μ στο $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$ ώστε

$$r(n)=\widehat{\mu}(n)=\int_{\mathbb{T}} e^{int}d\mu(t),\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Αυτό το μέτρο καλείται *φασματικό μέτρο* της $(X_n)_{n=-\infty}^{\infty}$. Παρατηρούμε πως, για κάθε $m,n\in\mathbb{Z}$,

$$\langle e^{int},e^{imt}\rangle_{L^2(\mu)}=\int_{\mathbb{T}} e^{int-imt}d\mu(t)=r(n-m)=\mathbb{E}(X_nX_m)=\mathbb{E}(X_n\overline{X_m}).$$

Άρα, η απεικόνιση $I:\sum a_ne^{int}\mapsto\sum a_nX_n$ είναι ισομετρία από τον χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $H_{\mathbb{C}}$, όπου H είναι ο γκαουσιανός χώρος που παράγεται από την $(X_n)_{n=-\infty}^{\infty}$.

Αν η $f\in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ είναι ορθογώνια στα τριγωνομετρικά πολυώνυμα, τότε

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}d\mu(t)=\langle f,e^{int}\rangle_{L^2(\mu)}=0,\qquad n\in\mathbb{Z},$$

δηλαδή $\widehat{fd\mu}=0$ και έπεται ότι $f=0$ μ-σχεδόν παντού.

Επομένως, λόγω της πυκνότητας των απλών συναρτήσεων στον $L^2(\mu)$ μπορούμε να επεκτείνουμε την ισομετρία I από τον $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ στον $H_{\mathbb{C}}$. Δηλαδή, συνοπτικά, είναι ένα μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό ολοκλήρωμα. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε Z αντί για μ. Συνολικά, έχουμε

$$X_n=r(n)=\widehat{\mu}(n)=\int_{\mathbb{T}} e^{int}dZ(t).$$

Το Z καλείται *στοχαστικό φασματικό μέτρο* που αντιστοιχεί στο X_n. Μια και η r είναι συμμετρική, έπεται πως το στοχαστικό φασματικό μέτρο είναι συμμετρικό και η $f\mapsto f(-x)$ είναι ισομετρία του $L^2(\mu)$ επί τον εαυτό της.

Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός συζυγής είναι μια αντιγραμμική ισομετρία στον $L^2(\mu)$ και στον $H_{\mathbf{C}}$. Άρα, η απεικόνιση

$$f\mapsto I'(f)=\overline{I(\overline{f(-x)})}$$

είναι γραμμική ισομετρία από τον $L^2(\mu)$ στον H. Επειδή όμως η X_n είναι πραγματική γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία, έχουμε

$$I'(e^{inx})=\overline{I(\overline{e^{-inx}})}=\overline{X_n}=X_n=I(e^{inx}),$$

δηλαδή $I' = I$ στον χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, άρα οι δύο απεικονίσεις ταυτίζονται για κάθε συνάρτηση στον $L^2(\mu)$. Καταλήγουμε δηλαδή στην

$$\overline{I(f)} = I(\overline{f(-x)}).$$

Με επανάληψη των παραπάνω μπορούμε να έχουμε τα ίδια αποτελέσματα για την στάσιμη γκαουσιανή διαδικασία στον $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, το φασματικό μέτρο και το στοχαστικό φασματικό μέτρο μπορούν τώρα να οριστούν στον $\mathbb{T}^d$. Αν η $t \mapsto X_t$ είναι συνεχής κατά πιθανότητα βλέπουμε πως το επιχείρημα είναι έγκυρο για την γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία στον $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, το φασματικό μέτρο και το στοχαστικό φασματικό μέτρο ορίζονται στον $\mathbb{R}^d$.

Παρατήρηση 8.4.12. Μπορούμε να γενικεύσουμε τα πραπάνω αποτελέσματα ακόμα και για συνεχείς γκαουσιανές διαδικασίες σε οποιαδήποτε τοπικά συμπαγή αβελιανή ομάδα, όπου το φασματικό μέτρο ορίζεται στη δυική ομάδα και η e^{inx} αντικαθίσταται από το ζεύγος $\langle x, \chi \rangle = \chi(x)$ (ζεύγος ομάδας και της δυϊκής της).

Τώρα ορίζουμε

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

για κάθε υποσύνολο A μιας αβελιανής ομάδας. Σε ό,τι ακολουθεί, η Γ είναι η ομάδα $\mathbb{Z}^d$ ή $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, και η $\widehat{\Gamma}$ είναι η δυϊκή της ομάδα αντιστοίχως.

Θεώρημα 8.4.13. *Αν $(X_t)_{t \in \Gamma}$ είναι πραγματική στάσιμη γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία στην Γ που είναι συνεχής κατα πιθανότητα, τότε υπάρχει μοναδικό συμμετρικό πεπερασμένο θετικό Borel μέτρο στην $\widehat{\Gamma}$, το φασματικό μέτρο, και ένα μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο Z στην $(\widehat{\Gamma}, \mathcal{B}, \mu)$ ώστε*

$$X_t = \int_{\widehat{\Gamma}} e^{itx} dZ(x), \qquad t \in \Gamma.$$

Επιπλέον, για κάθε $f \in L^2(\widehat{\Gamma}, \mu)$,

$$\overline{\int f(x) dZ(x)} = \int \overline{f(-x)} dZ(x).$$

Ειδικότερα, $\overline{Z(A)} = Z(-A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) = \mu(A \cap B)$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$, και

$$\mathbb{E}(Z(A)Z(B)) = \mu(A \cap (-B))$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$.

Απόδειξη. Μένει μόνο να δείξουμε ότι $\overline{Z(A)} = Z(-A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $\mathbb{E}(Z(A)Z(B)) = \mu(A \cap (-B))$ για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$.

Θεωρούμε την $f = \mathbf{1}_A$, όπου $A \in \mathcal{B}$. Έχουμε $f \in L^2(\widehat{\Gamma}, \mu)$ και

$$\overline{\int f(x) dZ(x)} = \int \overline{f(-x)} dZ(x),$$

άρα $\overline{Z(A)} = Z(-A)$.

Τώρα, $\mathbb{E}(Z(A)Z(B)) = \mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(-B)}) = \mu(A \cap (-B))$. □

Παρατήρηση 8.4.14. Αν $f \in L^1(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ τότε

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{f}(x)dZ(x) = I\Big(\int_{\Gamma} f(t)e^{itx}dt\Big) = \int_{\Gamma} f(t)I(e^{itx})dt = \int_{\Gamma} f(t)X_t dt.$$

Οπότε, αν $f \to \overline{f}$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, δηλαδή

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-d}\widehat{f}(-x) & x \in \mathbb{R}^d \\ \widehat{f}(-x) & x \in \mathbb{Z}^d \end{cases}$$

για κατάλληλη f έχουμε

$$\int_{\widehat{\Gamma}} f dZ = \int_{\Gamma} \overline{f}(t)X_t dt.$$

Παράδειγμα 8.4.15. Έστω Z και μ ορισμένα όπως πριν. Θεωρούμε $A, B \in \mathcal{B}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z(A))\mathrm{Im}(Z(B))) &= \frac{1}{4i}\mathbb{E}\big((Z(A) + \overline{Z(A)})(Z(B) - \overline{Z(B)})\big) \\ &= \frac{1}{4i}(\mu(A \cap (-B)) + \mu(A \cap B) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap (-B))) = 0, \end{aligned}$$

άρα οι οικογένειες $(\mathrm{Re}(Z(A)))_{A\in\mathcal{B}}$ και $(\mathrm{Im}(Z(A)))_{A\in\mathcal{B}}$ είναι ανεξάρτητες.

Ομοίως,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z(A)))^2 = \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(A \cap (-A)))$$

και

$$\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z(A)))^2 = \frac{1}{2}(\mu(A) - \mu(A \cap (-A))),$$

δηλαδή οι $\mathrm{Re}(Z(A))$ και $\mathrm{Im}(Z(A))$ είναι ανεξάρτητες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0.

Θεώρημα 8.4.16. *Έστω μ συμμετρικό πεπερασμένο θετικό μέτρο στην $\widehat{\Gamma}$. Τότε υπάρχει στάσιμη γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία με φασματικό μέτρο μ. Επίσης υπάρχει ένα μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο στην $(\widehat{\Gamma}, \mu)$ που ικανοποιεί την*

$$\overline{Z(A)} = Z(-A), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλειστή θήκη V στον $L^2(\mu)$ του συνόλου των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\sum_t a_t e^{itx}$ όπου $a_t \in \mathbb{R}$. Ο V είναι πραγματικός χώρος Hilbert και από το Θεώρημα 8.1.7 υπάρχουν γκαουσιανός χώρος Hilbert H και ισομετρία $I : V \to H$.

Ορίζοντας $X_t = I(e^{itx})$ παίρνουμε

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \langle e^{itx}, e^{isx}\rangle_{L^2(\mu)} = \int e^{itx}e^{-isx}d\mu = \widehat{\mu}(t-s).$$

Δηλαδή, η X_t είναι μια στάσιμη γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία με φασματικό μέτρο μ. Η X_t είναι πραγματική εκ κατασκευής και η απεικόνιση $t \mapsto X_t$ είναι συνεχής επειδή η απεικόνιση $t \mapsto e^{itx}$ είναι συνεχής στον $L^2(\mu)$.

Όσον αφορά τον τελευταία ισχυρισμό, υπάρχει μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο $(\widehat{\Gamma}, \mu)$ με $\overline{Z(A)} = Z(-A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$, από το Θεώρημα 8.4.13. □

Θεώρημα 8.4.17. *Έστω μ συμμετρικό πεπερασμένο μέτρο και Z μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο στην $\widehat{\Gamma}$ ώστε*

$$\mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) = \mu(A \cap B) \quad \textit{και} \quad \mathbb{E}(Z(A)Z(B)) = \mu(A \cap (-B))$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$, ή ισοδύναμα,

$$\overline{Z(A)} = Z(-A) \quad \textit{και} \quad \mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) = \mu(A \cap B)$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$. Τότε, το

$$X_t = \int_{\widehat{\Gamma}} e^{itx} dZ(x), \qquad t \in \Gamma$$

ορίζει μια πραγματική στάσιμη γκαουσιανή διαδικασία που είναι συνεχής στον L^2.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως αν $\overline{Z(A)} = Z(-A)$, $A \in \mathcal{B}$, τότε για κάθε $f \in L^2(\widehat{\Gamma}, \mu)$ έχουμε

$$\overline{\int f(x) dZ(x)} = \int \overline{f(-x)} dZ(x)$$

λόγω συνέχειας. Άρα,

$$\overline{X_t} = \overline{\int_{\widehat{\Gamma}} e^{itx}} = \int_{\widehat{\Gamma}} \overline{e^{-itx}} dZ(x) = \int_{\widehat{\Gamma}} e^{itx} dZ(x) = X_t.$$

Δηλαδή, η X_t είναι πραγματική γκαουσιανή διαδικασία. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 8.4.16 έχουμε την συνέχεια και την στασιμότητα της X_t. □

Τελειώνουμε με την ανάλυση Wiener-Itô για το φασματικό μέτρο.

Θεώρημα 8.4.18. *Αν $(X_t)_{t \in \Gamma}$ είναι πραγματική γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία στο Γ που είναι συνεχής κατα πιθανότητα, τότε υπάρχει, από το Θεώρημα 8.4.13, μοναδικό συμμετρικό πεπερασμένο θετικό Borel μέτρο στο $\widehat{\Gamma}$, το φασματικό μέτρο, και ένα μιγαδικό γκαουσιανό στοχαστικό μέτρο Z στον $(\widehat{\Gamma}, \mathcal{B}, \mu)$ ώστε*

$$X_t = \int_{\widehat{\Gamma}} e^{itx} dZ(x), \qquad t \in \Gamma.$$

Αν H είναι ο γκαουσιανός χώρος Hilbert που παράγεται από την $(X_t)_{t \in \Gamma}$, τότε η απεικόνιση

$$f \mapsto \int_{\widehat{\Gamma}^n} f dZ^n$$

απεικονίζει τον χώρο $L^2_{\mathbb{C}}(\widehat{\Gamma}^n, \mu^n)$ επί του χώρου $H^{:n:}_{\mathbb{C}}$. Επίσης,

$$\mathbb{E}\Big| \int f dZ^n \Big|^2 \leqslant n! \int |f|^2 d\mu^n.$$

Στην περίπτωση που η f είναι συμμετρική συνάρτηση, έχουμε

$$\mathbb{E}\Big| \int f dZ^n \Big|^2 = n! \int |f|^2 d\mu^n.$$

Επιπροσθέτως,

$$\overline{\int_{\widehat{\Gamma^n}} f(x)dZ^n(x)} = \int_{\widehat{\Gamma^n}} \overline{f(-x)}dZ^n(x).$$

Στην περίπτωση που $f(-x) = \overline{f(x)}$ *στην* $\widehat{\Gamma}^n$, *το στοχαστικό ολοκλήρωμα* $\int f(x)dZ^n(x)$ *είναι πραγματική τυχαία μεταβλητή.*

Κάθε $X \in L_{\mathbb{C}^2}(\Omega, \mathcal{F}((X_t)_{t\in\Gamma}), \mathbb{P})$ *έχει μοναδική αναπαράσταση*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\widehat{\Gamma}^n} f_n dZ^n,$$

όπου f_n *μιγαδική συμμετρική συνάρτηση στην* Γ^n *και*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\widehat{\Gamma}^n} |f_n|^2 d\mu^n = \mathbb{E}|X|^2 < \infty.$$

Η X *είναι πραγματική αν και μόνο αν* $f_n(-x) = \overline{f_n(x)}$ *σχεδόν παντού, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 8.4.13 και της μιγαδικής περίπτωσης του Θεωρήματος 8.3.19. Για να δείξουμε ότι

$$\overline{\int_{\widehat{\Gamma}^n} f(x)dZ^n(x)} = \int_{\widehat{\Gamma}^n} \overline{f(-x)}dZ^n(x)$$

παίρνουμε ως f την $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$. Από το Θεώρημα 8.4.13 έχουμε

$$\int_M \cdots \int_M f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) dZ(x_1)\cdots dZ(x_n) =: \int_M f_1 dZ \cdots \int_M f_n dZ :$$

και από το Θεώρημα 6.4.7 έχουμε

$$\overline{\int f(x)dZ(x)} = \int \overline{f(-x)}dZ(x).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το αποτέλεσμα. Τώρα η υπόλοιπη διαδικασία είναι προφανής. □

8.5 Λογισμός Malliavin και χάος Wiener

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε τις απαρχές ενός νέου είδους λογισμού, του λογισμού των μεταβολών στις στοχαστικές διαδικασίες, κυρίως στις εφαρμογές που έκαναν χρήση του ολοκληρώματος Skorohod. Ο λογισμός αυτός μελετά την διαφορισιμότητα των στοχαστικών διαδικασιών και καλείται λογισμός Malliavin. Μιλώντας πιο πρακτικά, μπορεί για παράδειγμα να επιθυμούμε να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της τιμής μιας μετοχής σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Στην εισαγωγή της εργασίας κάναμε λόγο για την υπόθεση πως η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής ακολουθεί την συμπεριφορά της κίνησης Brown. Εντούτοις, δεν μπορούμε να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της κίνησης Brown καθώς στο πέμπτο κεφάλαιο αποδείξαμε πως η κίνηση Brown είναι σχεδόν πουθενά διαφορίσιμη. Λόγω δηλαδή της γρήγορης κλίσης της δεν μπορούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη μιας μετοχής (ή την εξέλιξη οποιουδήποτε φαινομένου που ακολουθεί κίνηση Brown) χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό ορισμό του ρυθμού αλλαγής. Προκύπτει επομένως η ανάγκη εύρεσης μιας νέας μεθόδου παραγώγισης. Αυτή την ανάγκη ικανοποιεί η παράγωγος Malliavin. Θα ορίσουμε αυτή την παράγωγο ως τον ρυθμό αλλαγής που παράγει μια διαταραχή που προκαλείται από την κίνηση Brown.

Έστω B_t κίνηση Brown με τιμές στο $\mathbb{R}$, ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : 0 \leqslant s \leqslant t\})$. Ο $L^2[0,T]$, $T > 0$ είναι χώρος Hilbert με νόρμα την

$$\|h\|^2_{L^2[0,T]} = \int_0^T |h(t)|^2 \, dt.$$

Θεωρούμε το σύνολο $L^2(\Omega \times [0,T])$ των στοχαστικών διαδικασιών που ορίζονται στο $\Omega \times [0,T]$ και ικανοποιούν την

$$\|u_t\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T |u(t,\omega)|^2 \, dt \Big) < \infty,$$

και ορίζουμε

$$B(h) = \int_0^T h(t) \, dB_t, \qquad h \in L^2[0,T].$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$ την κλάση των ομαλών τυχαίων μεταβλητών της μορφής

$$F = f(B(h_1), \dots, B(h_n)),$$

όπου $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $h_1, \dots, h_n \in L^2[0,T]$. Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{S}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε την παράγωγο Malliavin. Για κάθε $F \in \mathcal{S}$ ορίζουμε

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(h_1), \dots, B(h_n)) h_i(t).$$

Ο D_t είναι ένας τελεστής που απεικονίζει τυχαίες μεταβλητές, όλες εκ των οποίων επιδέχονται ανάπτυγμα χάους, σε στοχαστικές διαδικασίες, δηλαδή

$$D : \mathcal{S} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T]).$$

Θέτουμε

$$\|F\|_{1,2} = \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|D_t F\|_{L^2(\Omega\times[0,T])}.$$

Επιπλέον, θέτουμε $\mathcal{D}^{1,2} = \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{1,2}}$. Τότε, ο $D : \mathcal{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ είναι μη φραγμένος τελεστής με πυκνό πεδίο ορισμού.

Η D όπως ορίστηκε είναι πράγματι παράγωγος αφού είναι γραμμική, ικανοποιεί τον κανόνα της αλυσίδας και τον κανόνα του γινομένου. Αναλυτικότερα,

(i) Η D είναι γραμμική: για κάθε $F, G \in \mathcal{D}^{1,2}$,

$$D_t(\alpha F + G) = \alpha D_t(F) + D_t(G).$$

(ii) Η D ικανοποιεί τον κανόνα της αλυσίδας:

$$D_t(f(F)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(F) D_t F_i$$

για κάθε $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $F = (F_1, \dots, F_n)$, όπου $F_i \in \mathcal{D}^{1,2}$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

(iii) Η D ικανοποιεί τον κανόνα του γινομένου:

$$D_t(FG) = FD_t(G) + GD_t(F)$$

για κάθε $F, G \in \mathcal{D}^{1,2}$ ώστε $FG \in \mathcal{D}^{1,2}$.

Παραθέτουμε τώρα κάποια πιο πρακτικά παραδείγματα για την κατανόηση της παραγώγισης Malliavin.

Παραδείγματα 8.5.1. (α) Έστω $B(h) = \int_0^T h(t)\,dB_t, h \in L^2[0,T]$. Τότε,

$$D_t(B(h)) = D_t\Big(\int_0^T h(t)\,dB_t\Big) = h(t)$$

από τον ορισμό της παραγώγου Malliavin.
(β) Έχουμε

$$D_t(B_s) = D_t\Big(\int_0^s \mathbf{1}_{\{t\leqslant s\}}\,dB_t\Big) = \mathbf{1}_{\{t\leqslant s\}}.$$

(γ) Έχουμε

$$D_t(f(B_s)) = f'(B_s)\mathbf{1}_{\{t\leqslant s\}}$$

από τον κανόνα της αλυσίδας.

Είδαμε πώς συνδέεται η κίνηση Brown με την παράγωγο Malliavin. Στη συνέχεια θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Skorohod ως τον συζυγή τελεστή της παραγώγου Malliavin και θα καταλήξουμε στο ότι είναι το ίδιο με αυτό που ορίσαμε στην Παράγραφο 8.4.

Έστω λοιπόν $u \in L^2(\Omega\times[0,T])$. Ορίζουμε το πεδίο του συζυγούς τελεστή του $D : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega\times[0,T])$ ως εξής:

$$\mathrm{Dom}(\delta) = \Big\{u \in L^2(\Omega\times[0,T]) : \Big|\mathbb{E}\Big(\int_0^T D_tFu_t\,dt\Big)\Big| \leqslant c(u)\|F\|_{L^2(\Omega)},\ \text{για κάθε } F \in \mathcal{D}^{1,2}\Big\}$$

και $\delta : \mathrm{Dom}(\delta) \subset L^2(\Omega\times[0,T]) \to L^2(\Omega)$ είναι ο τελεστής που ορίζεται από την

$$\langle F, \delta(u)\rangle_{L^2} = \langle D_tF, u\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])},$$

δηλαδή,

$$\mathbb{E}(F\delta(u)) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T D_tFu_t\,dt\Big).$$

Ο δ είναι κλειστός μη φραγμένος τελεστής που απεικονίζει τετραγωνικά ολοκληρώσιμες διαδικασίες σε τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές. Παρατηρήστε ότι $\mathbb{E}(\delta(u)) = 0$ για κάθε $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ αφού η παράγωγος Malliavin μιας σταθεράς είναι 0.

Θεώρημα 8.5.2. *Έστω $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ και $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ ώστε $Fu \in L^2(\Omega\times[0,T])$. Τότε,*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_t(Fu_t)\,dt.$$

Δηλαδή, η Fu είναι Skorohod ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$F(\delta(u)) - \int_0^T D_t(Fu_t)\,dt \in L^2(\Omega).$$

Απόδειξη. Έστω $G = g(B(G_1), \ldots, B(G_n))$ ομαλή συνάρτηση στην $\mathcal{S}$, όπου $g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα και $G_1, \ldots, G_n \in L^2[0,T]$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(GF\delta(u)) &= \mathbb{E}\Big(\int_0^T D_t(GF)u_t\,dt\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(G\int_0^T D_tFu_t\,dt\Big) + \mathbb{E}\Big(\int_0^T (D_tG)Fu_t\,dt\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(G\int_0^T D_tFu_t\,dt\Big) + \mathbb{E}(G\delta(Fu)).\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 8.5.3. Για $t_0 \in [0,T]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\delta(B(t_0)) &= B(t_0)\delta(\mathbf{1}) - \int_0^T D_t(B(t_0))\,dt = B(t_0)B(T) - \int_0^T \mathbf{1}_{\{t\leqslant t_0\}}\,dt\\ &= B(t_0)B(T) - t_0.\end{aligned}$$

Πόρισμα 8.5.4. *Έστω $u(t,\omega)$ στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T u^2(t,\omega)\,dt\Big) < \infty,$$

και η $u(t,\omega)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη για κάθε $t \in [0,T]$. Τότε, $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ και

$$\delta(u) = \int_0^T u(t,\omega)\,dB_t.$$

Θα δώσουμε την απόδειξη και θα την ισχυροποιήσουμε παρακάτω.

Στον λογισμό Malliavin, η παράγωγος του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα η συνάρτηση αυτή καθεαυτή όπως στον συνήθη διαφορικό λογισμό. Παραθέτουμε ως παράδειγμα τον υπολογισμό της παραγώγου Malliavin ενός ολοκληρώματος Skorohod:

$$D_t(\delta(B(t_0))) = D_t(B(t_0)B(T) - t_0) = B(t_0)\mathbf{1}_{[0,T]}(t) + B(T)\mathbf{1}_{[0,t_0]}(t) = B(t_0) + B(T)\mathbf{1}_{[0,t_0]}(t).$$

Θα εξετάσουμε τώρα την σχέση της παραγώγου Malliavin με την ανάλυση χάους.

Έστω $F \in L^2(\Omega)$. Από την ανάλυση Wiener-Itô έχουμε $F = \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n)$ με $f_n \in L^2(S_m)$, όπου

$$S_m = \{(t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n : 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant T\}$$

και

$$I_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \ldots, t_n)\,dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}.$$

Ορίζοντας

$$L_s^2([0,T]^n) = \Big\{g : [0,T]^n \to \mathbb{R} : \int_0^T \cdots \int_0^T g^2(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1 \cdots dt_n < \infty\Big\}$$

για κάθε $F \in L^2(\Omega)$ μπορούμε να γράψουμε $F = \sum_{n=0}^\infty I_n(g_n)$ με $g_m \in L_s^2([0,T]^n)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 8.5.5. *Έχουμε $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ αν και μόνο αν $\sum_{m=1}^{\infty} mm!\|g_m\|^2_{L^2(T^m)} < \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση,*

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(g_m(\cdot, t)).$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση που $F = I_n(f_n)$ με f_n στο σύνολο των απλών συναρτήσεων στο T^n που μηδενίζονται στο $A_n := \{(t_1, \dots, t_n) \in T^n : \text{ υπάρχουν } i \neq j \text{ με } t_i = t_j\}$, τότε προφανώς

$$D_t F = n I_{n-1}(g_n(\cdot, t)).$$

Αν τώρα $F \in \mathcal{D}^{1,2}$, έχουμε $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ με $f_n \in L^2(T^n)$ συμμετρικές. Ορίζουμε

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} I_n(f_n), \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Καθώς $N \to \infty$ η F_N συγκλίνει στην F στον $L^2(\Omega)$. Επομένως, καθώς $N \to \infty$ η DF_N συγκλίνει στην DF στον $L^2(\Omega; H)$.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $I_n(f_n)$ είναι το όριο της ακολουθίας $(I_n(f_n^k))_{k\in\mathbb{N}}$ στον $L^2(\Omega)$, όπου οι f_n^k ανήκουν στο σύνολο των απλών συναρτήσεων στο T^n που μηδενίζονται στο A_n, και η ακολουθία $(f_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f_n στον $L^2(T^n)$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως, η $D(I_n(f_n^k))$ συγκλίνει στην $D(I_n(f_n))$ στον $L^2(\Omega; H)$ καθώς $k \to \infty$. Επιπροσθέτως, η ακολουθία $I_{n-1}(f_n^k(\cdot, *))$ συγκλίνει στην $I_{n-1}(f_n(\cdot, *))$ στον $L^2(\Omega; H)$ καθώς $k \to \infty$. Τώρα, το αποτέλεσμα προκύπτει από την γραμμικότητα του D. □

Θεώρημα 8.5.6. *Αν $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$, από την ανάλυση Wiener-Itô ανάλυση χάους έχουμε*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t))$$

με $f_n \in L^2(T^{n+1})$ συμμετρική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ αν και μόνο αν η

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$, όπου

$$\tilde{f}_n(t_1, \dots, t_n, t) = \frac{1}{n+1}\Big(f_n(t_1, \dots, t_n, t) + \sum_{i=1}^{n} f_n(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n, t_i)\Big).$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $g \in L^2(T^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_T u_t D_t(I_n(g))\, dt\Big) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_T \mathbb{E}(I_m(f_m(\cdot, t)) n I_{n-1}(g(\cdot, t))\, dt \\
&= n \int_T \mathbb{E}(I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot, t)) I_{n-1}(g(\cdot, t)))\, dt \\
&= n(n-1)! \int_T \langle f_{n-1}(\cdot, t) g(\cdot, t)\rangle_{L^2(T^{n-1})}\, dt \\
&= n! \langle f_{n-1}, g\rangle_{L^2(T^n)} = n! \langle \tilde{f_{n-1}}, g\rangle_{L^2(T^n)} \\
&= \mathbb{E}(I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g)).
\end{aligned}$$

Έστω $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Τότε, από την κατασκευή του συζυγούς τελεστή δ, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in L^2(T^n)$ συμμετρική, έχουμε

$$\mathbb{E}(\delta(u) I_n(g)) = \mathbb{E}(\langle u, D(I_n(g))\rangle_H) = \mathbb{E}(I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g)).$$

Δηλαδή, η $I_n(g)$ είναι η προβολή του $\delta(u)$ στον n-οστό χώρο χάους $H^{:n:}$. Άρα, η $\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ συγκλίνει στην $\delta(u)$ στον $L^2(\Omega)$.

Αντίστροφα, έστω πως η σειρά συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$ και έστω S το άθροισμα της. Ορίζουμε

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} I_n(g_n)$$

με $g_n \in L^2(T^n)$ συμμετρική και $N \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\mathbb{E}\Big(\int_T u_t D_t F_N \, dt\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g_n)).$$

Ειδικότερα,

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\int_T u_t D_t F_N \, dt\Big)\Big| \leqslant \|S\|_{L^2(\Omega)} \|F_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

Έστω $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ με $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n)$, όπου $g_n \in L^2(T^n)$ συμμετρική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, καθώς $N \to \infty$ η F_N συγκλίνει στην F στον $L^2(\Omega)$ και η DF_N συγκλίνει στην DF στον $L^2(\Omega; H)$. Άρα,

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\int_T u_t D_t F \, dt\Big)\Big| \leqslant \|S\|_{L^2(\Omega)} \|F_N\|_{L^2(\Omega)}$$

και έπεται ότι $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. □

Θεώρημα 8.5.7. *Αν $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία, τότε $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ και*

$$\delta(u) = \int_a^b u(s)\, dB_s.$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση που η u είναι απλή έχουμε $u_t = \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$, όπου $F_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ με $a \leqslant t_1 < \cdots < t_{n+1} \leqslant b$.

Στην περίπτωση που $F_i \in \mathcal{D}^{1,2}$ έχουμε $F_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \in \mathrm{Dom}(\delta)$ και

$$\delta(F_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(\cdot)) = F_i \delta(\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(\cdot)) - \int_t D_t F_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\, dt = F_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Στην γενική περίπτωση, λόγω πυκνότητας και λόγω του ότι ο δ είναι κλειστός τελεστής, έχουμε πάλι το αποτέλεσμα. Επομένως, $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ και

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{n} F_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Από την άλλη πλευρά, ξέρουμε πως οι απλές στοχαστικές διαδικασίες είναι πυκνές στις στοχαστικές διαδικασίες που ανήκουν στον $L^2(\Omega \times [0,T])$. Από την $\delta(u) = \sum_{i=1}^{n} F_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))$ έχουμε ότι το $\delta(u_n)$ είναι το ολοκλήρωμα Itô της u_n και συγκλίνει στο ολοκλήρωμα Itô της u στον $L^2(\Omega)$. Επειδή ο δ είναι κλειστός τελεστής έχουμε $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ και $\delta(u) = \int_a^b u(s)\, dB_s$. □

Τέλος, θα δούμε πώς χρησιμοποιείται η παράγωγος Malliavin στην στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου $(X_t)_{t\in[0,T]}$ στοχαστική διαδικασία, $X_0 = x$ αρχική συνθήκη, με $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, συνεχώς διαφορίσιμη με φραγμένη παράγωγο και τέτοια ώστε, για κάποιον $K \in (0, \infty)$,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant K|x - y|$$

και

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, y)| \leqslant K(1 + |x|)$$

για κάθε t, x, y.

Ολοκληρώνοντας την στοχαστική διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u)\, du + \int_0^t \sigma(u, X_u)\, dB_u.$$

Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε την παράγωγο Malliavin της $(X_t)_{t\in[0,T]}$:

$$\begin{aligned}
D_s(X_t) &= D_s\Big(\int_0^t b(u, X_u)\, du\Big) + D_s\Big(\int_0^t \sigma(u, X_u)\, dB_u\Big)\\
&= \int_0^t b'(u, X_u)D_s(X_u)\, du + \int_0^t \sigma'(u, X_u)D_s(X_u)\, dB_u + \int_0^t \sigma(u, X_u)D_s(dB_u)\\
&= \int_0^t b'(u, X_u)D_s(X_u)\mathbf{1}_{\{s\leqslant u\}}\, du + \int_0^t \sigma'(u, X_u)D_s(X_u)\mathbf{1}_{\{s\leqslant u\}}\, dB_u + \sigma(s, X_s)\\
&= \int_s^t b'(u, X_u)D_s(X_u)\, du + \int_s^t \sigma'(u, X_u)D_s(X_u)\, dB_u + \sigma(s, X_s),
\end{aligned}$$

άρα

$$D_s(X_t) = \sigma(s, X_s) \exp\Big(\int_s^t (b' - (\sigma')^2/2)\, du + \int_s^t \sigma'\, dB_u\Big).$$

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο

$$Y_t = \frac{\partial X_t}{\partial x}$$

η οποία είναι επίσης στοχαστική διαδικασία:Η $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = b'(t, X_t)Y_t\, dt + \sigma'(t, X_t)Y_t\, dB_t$$

με $Y_0 = 1$. Από τον υπολογισμό της παραγώγου Malliavin της $(X_t)_{t\in[0,T]}$ έχουμε

$$Y_t = \exp\Big(\int_s^t (b' - (\sigma')^2/2)\, du + \int_s^t \sigma'\, dB_u\Big).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$D_s(X_t) = \frac{Y_t}{Y_s}\sigma(s, X_s)\mathbf{1}_{\{s\leqslant t\}}.$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε διάφορες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 8.5.8 (γεωμετρική κίνηση Brown)**.** Θεωρούμε την

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t$$

με $X_0 = x$, όπου μ, σ σταθερές. Έχουμε

$$dY_t = \mu Y_t \, dt + \sigma Y_t \, dB_t, \qquad Y_0 = 1,$$

άρα $Y_t = \frac{X_t}{x}$ και

$$D_s(X_t) = \frac{X_t}{X_s} \sigma X_s = \sigma X_t.$$

Παράδειγμα 8.5.9 (διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck)**.** Θεωρούμε την

$$dX_t = -kX_t \, dt + \sigma \, dB_t$$

με $X_0 = x$, όπου $k, \sigma > 0$. Έχουμε

$$dY_t = -kY_t \, dt, \qquad Y_0 = 1,$$

άρα $Y_t = e^{-kt}$ και $D_s(X_t) = e^{-k(t-s)}\sigma$.

Βιβλιογραφία

[1] J-P. Kahane, *Some random series of functions*. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[2] J-P. Kahane, *A century of interplay between Taylor series, Fourier series and Brownian motion*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), no. 3, 257-279.

[3] K. R. Stromberg, *Probability for analysts*, Lecture notes prepared by Kuppusamy Ravindran. Chapman & Hall Probability Series. Chapman & Hall, New York, 1994.

[4] O. C. McGehee, L. Pigno and B. Smith, *Hardy's inequality and the Littlewood conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **5** (1981), no. 1, 71-72.

[5] O. C. McGehee, L. Pigno and B. Smith, *Hardy's inequality and the L_1 norm of exponential sums*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 3, 613-618.

[6] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2014.

[7] A. Bazarova, I. Berkes and M. Raseta, *On trigonometric sums with random frequencies*, Studia Sci. Math. Hungar. **55** (2018), no. 1, 141-152.

[8] A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), no. 3, 435-446.

[9] R. Salem and A. Zygmund, *Some properties of trigonometric series whose terms have random signs*, Acta Math. **91** (1954), 245-301.

[10] R. L. Schilling and L. Partzsch, *Brownian motion. An introduction to stochastic processes*, Second edition. De Gruyter Graduate. De Gruyter, Berlin, 2014.

[11] C. Nayak, S. Pattanayak and M. Mishra, *Random Fourier-Stieltjes series associated with stable process*, Tohoku Math. J. (2) **39** (1987), no. 1, 1-15.

[12] S. Janson, Gaussian Hilbert spaces, Cambridge Tracts in Mathematics, 129. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[13] L. Wang, *Malliavin Calculus and its applications to Finance*, MSc Thesis.

[14] G. Giordano, *The Karhunen-Loève Theorem*, MSc Thesis.