ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΓΛΩΣΣΕΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΣΑΦΗ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΑ

Τριανταφύλλου Ευάγγελος

Διδακτορική Διατριβή

Η Διδακτορική Διατριβή υλοποιήθηκε με υποτροφία του ΙΚΥ η οποία χρηματοδοτήθηκε από την πράξη «Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών για μεταπτυχιακές σπουδές δεύτερου κύκλου σπουδών» από πόρους του ΕΠ «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Επαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», 2014-2020 με τη συγχρηματοδότηση του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (Ε.Κ.Τ) και του Ελληνικού Δημοσίου

Περιεχόμενα:

1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αφορά το γλωσσικό φαινόμενο της ασάφειας. Στην φιλοσοφική γραμματεία ως ασαφείς χαρακτηρίζονται γλωσσικές εκφράσεις που διακρίνονται από ένα συγκεκριμένο σύνολο χαρακτηριστικών, όπως για παράδειγμα είναι η ύπαρξη οριακών περιπτώσεων, η ανεκτικότητα στις μικρές αλλαγές, και η, κατά τα φαινόμενα τουλάχιστον, έλλειψη σαφών ορίων ανάμεσα στις θετικές και στις αρνητικές περιπτώσεις.

Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα μια κατηγορηματική έκφραση όπως η «το x είναι κόκκινο», «ο x είναι φαλακρός» ή «το x είναι σωρός», τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι συγκεκριμένες εκφράσεις διακρίνονται από χαρακτηριστικά όπως τα παραπάνω. Σίγουρα υπάρχουν αντικείμενα που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι κόκκινα ή όχι, άνθρωποι που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι φαλακροί ή όχι, και συγκεντρώσεις άμμου που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι σωροί ή όχι. Και για τις τρεις από αυτές τις εκφράσεις υπάρχουν λοιπόν αντικείμενα που αποτελούν οριακές περιπτώσεις. Αντικείμενα για τα οποία είναι αμφίβολο αν αυτά ικανοποιούν το εκάστοτε κατηγόρημα ή όχι, οπότε προκύπτει εδώ ένα πρώτο ζήτημα στο οποίο θα πρέπει μία θεωρία περί του φαινομένου να λάβει θέση. Με άλλα λόγια θα πρέπει να ξεκαθαρίζει ποια είναι η πηγή αυτής της αμφιβολίας. Είναι απλά κάποιο είδος επιστημικού περιορισμού, είναι δηλαδή κάθε φορά απόλυτα καθορισμένο για το εκάστοτε αντικείμενο αν αυτό ικανοποιεί το κατηγόρημα ή όχι αλλά υπάρχει ένα είδος επιστημικού τείχους που εμποδίζει τους ομιλητές της γλώσσας από το να έχουν πρόσβαση στα σχετικά γεγονότα και να γνωρίσουν τι ισχύει και τι όχι; Ή ισχύει ότι στις συγκεκριμένες περιπτώσεις δεν υπάρχει καν σχετικό γεγονός ώστε να γνωρίσουν οι ομιλητές, πολύ απλά η δομή του κόσμου, της γλώσσας, ή και των δύο, δεν είναι επαρκώς καθορισμένα ώστε να προσδιορίζεται για κάθε πρόταση της γλώσσας αν αυτή είναι αληθής ή ψευδής;

Συνεχίζοντας, αν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο a που είναι κόκκινο, και ένα αντικείμενο b που είναι ελάχιστα λιγότερο κόκκινο από το προηγούμενο, σε βαθμό που πιθανώς δεν είναι δυνατό να αντιληφθούν παρατηρητές υπό κανονικές συνθήκες, ή ακόμη και με την βοήθεια μετρητικών οργάνων, τότε φαίνεται πως είμαστε υποχρεωμένοι να παραδεχτούμε πως και το b ικανοποιεί το συγκεκριμένο κατηγόρημα. Ανάλογα, αν θεωρήσουμε έναν άνθρωπο a που είναι φαλακρός, καθώς και έναν άνθρωπο b που έχει μια τρίχα παραπάνω στο κεφάλι του καθώς και παρόμοια κατανομή, τότε φαίνεται ότι θα πρέπει να θεωρήσουμε ως φαλακρό και τον b, φαίνεται παράλογο να χαρακτηρίσουμε τον a ως φαλακρό και τον b ως όχι φαλακρό. Όπως θα γράψει ο Russell:

> It is supposed that at first he was not bald (the man who went bald), that he lost his hairs one by one, and that in the end he was bald; therefore, it is argued, there must have been one hair the loss of which converted him into a bald man. This, of course, is absurd. (Russell, Bertrand [1923], p.85)

Παρομοίως και αν θεωρήσουμε έναν σωρό κόκκων άμμου a και μια συγκέντρωση κόκκων άμμου b, με παρόμοια κατανομή με την a, η οποία αποτελείται από έναν κόκκο άμμου λιγότερο σε σχέση με την a, ή στην περίπτωση που θέλουμε να κάνουμε το ενδεχόμενο της ύπαρξης σαφούς ορίου να φαίνεται ακόμη πιο παράλογο, από ένα μόριο άμμου λιγότερο. Εξάλλου, όπου και αν τίθεται ένα σαφές όριο, αυτό θα πρέπει να είναι απείρως σαφές.

Μας απασχολεί λοιπόν ένα συγκεκριμένο γλωσσικό φαινόμενο, το οποίο και θα πρέπει να διαχωρίζεται από άλλα γλωσσικά φαινόμενα που κάνουν την εμφάνισή τους όταν χρησιμοποιούμε την φυσική γλώσσα και τα οποία συχνά συγχέονται με την ασάφεια στην καθομιλουμένη, όπως είναι η αοριστία, η αμφισημία κτλ. Γιατί όμως μπορεί να είναι σημαντική η μελέτη αυτού του γλωσσικού φαινομένου; Καταρχάς, αποτελεί κοινή διαπίστωση ότι η φυσική γλώσσα βρίθει ασάφειας. Η συντριπτική πλειοψηφία των εκφράσεών της είναι ασαφείς˙ καθημερινά διατυπώνουμε επιχειρήματα εντός αυτής κάνοντας χρήση εκφράσεων που είναι ασαφείς. Μάλιστα κάποιες μορφές επιχειρημάτων φαίνεται ότι είναι ξεκάθαρα έγκυρες ακόμη και εντός ασαφών πλαισίων, για παράδειγμα φαίνεται πως από μια πρόταση της μορφής (A και B) μπορούμε να συνάγουμε πχ την A, ακόμη και αν οι προτάσεις A, B περιέχουν ασαφείς εκφράσεις. Φαίνεται λοιπόν εκ πρώτης όψεως πως έχει νόημα να ρωτήσουμε ποιες μορφές επιχειρημάτων είναι έγκυρες εντός ασαφών πλαισίων και ποιες όχι. Η μελέτη της λογικής και της σημασιολογίας των ασαφών εκφράσεων θα μας βοηθήσει κατ’ επέκταση να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο που λειτουργεί η φυσική γλώσσα, πώς είναι δυνατό να μεταδίδεται πληροφορία και να γίνονται διακρίσεις με νόημα όταν οι ομιλητές βρίσκονται σε περιβάλλον ασάφειας.

Επιπλέον, μπορεί να υποστηριχθεί ότι ακόμη και υπό συνθήκες στις οποίες οι ομιλητές κάνουν προσπάθεια να μιλήσουν με ακρίβεια, για παράδειγμα όταν κάνουν επιστήμη ή φιλοσοφία, πολλές από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούν εξακολουθούν να διακρίνονται από κάποια ασάφεια. Ας θεωρήσουμε μαθηματικές γεωμετρικές έννοιες που εκφράζονται από κατηγορήματα όπως «το x είναι επίπεδο», «το x είναι τετραγωνικού σχήματος», «το x είναι σφαιρικού σχήματος» κτλ, όταν βρισκόμαστε εντός μαθηματικών πλαισίων τότε αυτές αντιμετωπίζονται ως απολύτως ακριβείς. Χρησιμοποιούμε όμως τις ίδιες εκφράσεις και προκειμένου να χαρακτηρίσουμε φυσικά αντικείμενα, και μάλιστα από τον τρόπο που θα χαρακτηρίσουμε κάποιο φυσικό αντικείμενο θα εξαρτηθεί και ποια από τα συμπεράσματα της μαθηματικής θεωρίας θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να συνάγουμε κάποια από τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά από τα οποία αυτό μπορεί να διακρίνεται. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε μια έκταση γης, από το γεγονός ότι θεωρούμε πως αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί αληθώς ως επίπεδη και τετραγωνικού σχήματος έπεται ότι προκειμένου να υπολογίσουμε το εμβαδό της αρκεί να μετρήσουμε το μήκος κάποιας πλευράς της. Ή αν θεωρούμε πως η πρόταση «η Γη είναι σφαιρικού σχήματος» είναι αληθής τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την περιφέρειά της βασιζόμενοι στο μήκος σκιάς που αφήνουν πάσσαλοι που βρίσκονται σε διαφορετικά γεωγραφικά πλάτη.

Όμως, αν θεωρήσουμε πχ μαθηματικά αντικείμενα α, β που είναι επίπεδα, τότε αυτά θα είναι επίπεδα στον ίδιο βαθμό, ενώ για κάθε μαθηματικό αντικείμενο που μπορεί να είναι ελάχιστα λιγότερο επίπεδο από αυτά ισχύει ότι δεν είναι επίπεδο. Από μαθηματική άποψη, κάτι μπορεί να είναι επίπεδο αν και μόνο αν είναι απόλυτα επίπεδο, και αναλόγως, κάτι μπορεί να είναι σφαιρικό αν και μόνο αν είναι απόλυτα σφαιρικό, τετραγωνικού σχήματος αν και μόνο αν είναι απολύτως τετραγωνικού σχήματος κτλ. Από την άλλη, για κάθε φυσικό αντικείμενο που μπορεί να θεωρήσουμε ισχύει ότι είναι λογικά δυνατό με την ευρεία έννοα να υπάρχει αντικείμενο που είναι πιο επίπεδο από αυτό. Και ανάλογα, θα είναι λογικά δυνατό να υπάρχει αντικείμενο που είναι πιο σφαιρικό από αυτό. Έπεται άρα ότι δεν υπάρχει αντικείμενο εντός του φυσικού κόσμου που ικανοποιεί απόλυτα το κατηγόρημα ‘το x είναι επίπεδο’[1]. Καμία πρόταση αυτής της μορφής που χαρακτηρίζει κάποιο φυσικό αντικείμενο δεν είναι λοιπόν απόλυτα αληθής, οπότε αν συλλογιζόμαστε όπως και όταν βρισκόμαστε εντός σαφών πλαισίων τότε φαίνεται ότι είμαστε υποχρεωμένοι να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι αυτή πρέπει να είναι ψευδής. Αν θεωρήσουμε και πάλι την προαναφερθείσα έκταση γης, κάθε χαρακτηρισμός της ως επίπεδης, τετραγωνικού σχήματος κτλ, θα πρέπει να θεωρηθεί ως ψευδής, ανάλογα και για κάθε χαρακτηρισμό της γης ως σφαιρικού σχήματος. Καθίσταται όμως τώρα δύσκολο να δικαιολογηθεί γιατί

[1] Πως θα μπορούσε να υπάρχει κάτι που είναι πιο επίπεδο από κάτι άλλο που είναι απόλυτα επίπεδο; Πάνω στην συγκεκριμένη παρατήρηση θα βασίσει το γνωστό του επιχείρημα, με το οποίο επιχειρεί να αποδείξει ότι δεν είναι δυνατό να υπάρχει κάτι το οποίο γνωρίζουμε, ο Peter Unger, στο άρθρο του “A defense of skepticism”, Unger [1971], καθώς και στο βιβλίο του “Ignorance”, Unger [1975].

επιλέγουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό της έκτασης, ή την περιφέρεια της γης, με τον συγκεκριμένο τρόπο.

Από την άλλη, τα πράγματα γίνονται πιο απλά αν αναγνωρίσουμε ότι όταν μιλάμε για φυσικά αντικείμενα οι συγκεκριμένες εκφράσεις διακρίνονται από ασάφεια, και αρχίσουμε να περιγράφουμε τις συγκεκριμένες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ορολογία, ανάλογα με την θεώρηση περί ασάφειας που έχουμε υιοθετήσει. Αν για παράδειγμα θεωρούμε ότι στην περίπτωση των ασαφών εκφράσεων δεν έχει νόημα να μιλάμε απλά για την αλήθεια ή το ψεύδος της εκάστοτε πρότασης, αλλά για βαθμούς που αυτή μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής, τότε μπορούμε πολύ απλά να πούμε ότι ενώ μια πρόταση που χαρακτηρίζει την προαναφερθείσα έκταση γης ως επίπεδη και τετραγωνικού σχήματος δεν είναι απόλυτα αληθής, είναι παρόλα αυτά αληθής σε μεγάλο βαθμό, ή επαρκώς αληθής για τους σκοπούς μας. Ανάλογα και για μία πρόταση που χαρακτηρίζει την γη ως σφαιρικού σχήματος, παρόλο που αυτή δεν είναι απόλυτα αληθής, είναι αληθής σε βαθμό που για τον Ερατοσθένη, για παράδειγμα, ήταν ικανοποιητικός. Έπεται ότι και κάποια από τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε εφαρμόζοντας σε αυτές μαθηματικά θεωρήματα θα είναι επίσης αληθή σε μεγάλο βαθμό, και είναι ακριβώς αυτό που εν τέλει έχει σημασία όσον αφορά καθημερινές εφαρμογές όπως και οι συγκεκριμένες. Μπορεί λοιπόν να υποστηριχθεί ότι η ασάφεια παρεισφρέει ακόμα και σε πεδία που συνήθως θεωρούμε ως σαφή και ακριβή, και μάλιστα ότι η μελέτη της μπορεί να διαφωτίσει ζητήματα όπως αυτά που αφορούν την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στην φυσική ή σε διάφορα πρακτικά ζητήματα. Πρόκειται για ένα πολύ ευρύ φαινόμενο, οπότε και είμαστε δικαιολογημένοι στο να πιστεύουμε ότι αυτό έχει πολύ ευρείες συνέπειες.

Τώρα, ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό των ασαφών εκφράσεων που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι αυτές υπόκεινται σε μια κλάση παραδοξικών επιχειρημάτων, που είναι γνωστά ως επιχειρήματα τύπου σωρείτη. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα έναν σωρό από μερικούς τόνους άμμου οι οποίοι βρίσκονται συγκεντρωμένοι με κατάλληλο τρόπο σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Σίγουρα αν αφαιρέσουμε έναν κόκκο άμμου από αυτόν τότε αυτό που θα παραμείνει θα εξακολουθεί να είναι σωρός. Αν αφαιρέσουμε και πάλι έναν κόκκο άμμου τότε πάλι αυτό που θα παραμείνει θα είναι σωρός. Συνεχίζουμε αφαιρώντας κάθε φορά έναν κόκκο άμμου από τον σωρό που έχει απομείνει στο εκάστοτε στάδιο. Φαίνεται τουλάχιστον περίεργο το να θεωρήσουμε ότι θα υπάρχει κάποιο σημείο σε αυτή την διαδικασία κατά το οποίο αν αφαιρέσουμε έναν κόκκο άμμου από τον σωρό που έχει απομείνει τότε αυτό που θα προκύψει δεν θα είναι σωρός. Αν όμως θεωρήσουμε πως από το γεγονός ότι αυτό μας φαίνεται περίεργο έπεται ότι κάτι τέτοιο δεν θα μπορούσε ποτέ να συμβεί, τότε προκύπτει το συμπέρασμα ότι κάθε φορά που αφαιρούμε έναν κόκκο άμμου από την συγκέντρωση άμμου που έχει απομείνει ως εκείνο το στάδιο της διαδικασίας, αυτό που θα προκύπτει θα πρέπει και πάλι να είναι σωρός, και καταλήγουμε τελικά ότι και ένας κόκκος άμμου πρέπει επίσης να θεωρείται σωρός.

Έστω ότι ο αρχικός σωρός αποτελείται από 100000 κόκκους άμμου. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής:

$$\underline{S_{100000} \qquad S_{100000}\supset S_{99999}}$$

$$\underline{S_{99999} \qquad S_{99999}\supset S_{99998}}$$

$$\underline{S_{99998} \qquad S_{99998}\supset S_{99997}}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\underline{S_{2} \qquad S_{2}\supset S_{1}}$$

$$S_1$$

Εδώ, το εκάστοτε κατηγορηματικό σύμβολο της μορφής Sx ερμηνεύεται ως το κατηγόρημα «x κόκκοι άμμου, κατάλληλα διευθετημένοι στον χώρο αποτελούν σωρό», ενώ το εκάστοτε αριθμητικό θεωρούμε πως αποτελεί σταθερό σύμβολο της γλώσσας που αναφέρεται στην συγκέντρωση άμμου που αποτελείται από τον συγκεκριμένο αριθμό κόκκων άμμου. Ο διμελής σύνδεσμος '⊃' ερμηνεύεται ως κάποιο είδος συνεπαγωγής, τέτοιας ώστε προτάσεις της μορφής Α⊃Β να έχουν τις ίδιες συνθήκες αλήθειας με προτάσεις της φυσικής γλώσσας που έχουν την μορφή «αν *Α* τότε *Β*», όπου εδώ Α, Β είναι προτάσεις της τυπικής γλώσσας που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε την μορφή του επιχειρήματος και *Α*, *Β* εκείνες οι προτάσεις της φυσικής γλώσσας που αντιστοιχούνται σε αυτές από μια ερμηνεία της τυπικής γλώσσας. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα βήμα του επιχειρήματος, και κάθε βήμα του επιχειρήματος αντιστοιχεί σε μια εφαρμογή του κανόνα modus ponens. Πάνω από την εκάστοτε γραμμή εμφανίζονται οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται ως προκείμενες, κάτω από την γραμμή το συμπέρασμα.

Τέλος, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την πιο πάνω πλειάδα προκείμενων που έχουν μορφή συνεπαγωγής με μία μόνο προκείμενη που περιλαμβάνει καθολική ποσόδειξη, οπότε και το επιχείρημα λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\frac{S_{100000} \qquad \forall x \in \{2, 3, \ldots, 100000\}\ (Sx \supset Sx\text{-}1))}{S_1}$$

Όπου εδώ τα αντικείμενα εντός του συνόλου $\{2, 3, \ldots, 100000\}$ είναι οι συγκεντρώσεις άμμου που αποτελούνται από 2 κόκκους, 3 κόκκους κτλ. Πρόκειται για την επαγωγική μορφή του επιχειρήματος, το συμπέρασμα έπεται μέσω μιας αλληλουχίας 99999 εφαρμογών του κανόνα της συγκεκριμενοποίησης του καθολικού ποσοδείκτη καθώς και του Modus ponens.

Επιχειρήματα τύπου σωρείτη μπορούν με εντελώς ανάλογο τρόπο να διατυπωθούν και για κάθε άλλο ασαφές κατηγόρημα, και άρα για ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των εκφράσεων της φυσικής γλώσσας. Αν θεωρήσουμε έναν άνθρωπο με 150000 τρίχες ομοιόμορφα κατανεμημένες στο κεφάλι του, τότε αυτός δεν είναι φαλακρός. Αν αφαιρέσουμε από αυτόν μια τρίχα τότε αυτός θα παραμείνει μη φαλακρός. Συνεχίζοντας την διαδικασία, σε κανένα σημείο δεν φαίνεται φυσιολογικό να πούμε ότι είναι μη φαλακρός και αφαιρώντας μια τρίχα αυτός μετατρέπεται σε φαλακρό. Φαίνεται λοιπόν ότι κάθε φορά πρέπει να παραδεχτούμε ότι αυτός παραμένει μη φαλακρός, ακόμη και όταν δεν έχει μείνει ούτε μια τρίχα στο κεφάλι του. Ανάλογα και για κατηγορήματα όπως «πλούσιος», «φτωχός», «κόκκινο», «κυβικού σχήματος» κτλ. Αν θεωρήσουμε ένα φυσικό αντικείμενο κυβικού σχήματος και αφαιρέσουμε ένα μόριο από κάποια γωνία του, τότε αυτό θα παραμείνει κυβικού σχήματος, συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι το αντικείμενο να καταλήξει να είναι σφαιρικού σχήματος και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και ένα αντικείμενο σφαιρικού σχήματος έχει κυβικό σχήμα.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στα συγκεκριμένα επιχειρήματα εμφανίζονται προκείμενες που φαίνεται να είναι αληθείς, εφαρμόζονται κανόνες της λογικής που φαίνονται έγκυροι, και παρόλα αυτά καταλήγουμε σε κάποιο συμπέρασμα που είναι προφανώς ψευδές. Τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη είναι λοιπόν μια μορφή παραδόξου. Μια θεωρία που αφορά το πώς συμπεριφέρονται οι ασαφείς εκφράσεις της γλώσσας από λογική και σημασιολογική άποψη θα πρέπει άρα να είναι τέτοια ώστε να έπεται από αυτήν και ένας τρόπος αντιμετώπισης του παραδόξου.

Με ποιους τρόπους θα μπορούσε να αποκρουστεί ένα επιχείρημα αυτής της μορφής; Οι επιλογές που έχουμε φαίνεται να είναι οι εξής:

α. Να αρνηθούμε ότι το πρόβλημα ανήκει στη δικαιοδοσία της λογικής. Πρόκειται για την άποψη που κατά καιρούς φαίνεται να είχαν υιοθετήσει οι πατέρες της σύγχρονης λογικής, Frege και Russell. O Frege για παράδειγμα, στο άρθρο του 'On sense and Reference' και τις πρόσθετες σημειώσεις σε αυτό εκφράζει την άποψη ότι τα ασαφή κατηγορήματα δεν έχουν αναφορά, παράλληλα όμως, όπως ξεκαθαρίζει στο ίδιο άρθρο, θεωρεί ότι προκειμένου μια πρόταση να έχει αναφορά θα πρέπει και τα διάφορα ονόματα και κατηγορηματικές εκφράσεις που εμφανίζονται εντός αυτής να έχουν αναφορά, οπότε σε περίπτωση που το τελευταίο ισχύει η αναφορά της πρότασης θα καθορίζεται με βάση την αναφορά των εκφράσεων που εμφανίζονται εντός αυτής. Εφόσον ως αναφορά μιας πρότασης θεωρεί την αληθοτιμή της, έπεται με βάση αυτά το συμπέρασμα ότι δεν μπορεί να καθοριστεί αληθοτιμή για προτάσεις της γλώσσας που περιέχουν κάποια κατηγορηματική έκφραση που δεν έχει αναφορά, και άρα για προτάσεις της γλώσσας που περιέχουν κάποιο ασαφές κατηγόρημα. Για τον Frege όμως προτάσεις όπως αυτές πολύ απλά δεν έχουν θέση στον χώρο της λογικής,[2] και κατ' επέκταση της επιστήμης. Βασιζόμενος σε παρατηρήσεις όπως αυτές διατυπώνει ανά σημεία μια αρνητική άποψη για την φυσική γλώσσα και την καταλληλότητά της ως μέσο για να κάνει κανείς επιστήμη οπότε και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πρέπει να την αντικαταστήσουμε από μια τεχνητή, λογικά τέλεια, γλώσσα[3] εντός της οποίας θα διατυπώνονται οι διάφορες επιστημονικές θεωρίες. Τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη δείχνουν τις καταστροφικές συνέπειες που προκύπτουν όταν προσπαθούμε να εφαρμόσουμε ένα εργαλείο ακριβείας, όπως η τυπική λογική, το οποίο έχει αναπτυχθεί για τους σκοπούς της επιστήμης, ενώ βρισκόμαστε σε ένα περιβάλλον που βρίθει από

[2] Διαβάζουμε στην μετάφραση του άρθρου που εμφανίζεται στην συλλογή 'The Frege Reader', Blackwell, σελίδα 178: 'They forget that laws of logic are first and foremost laws in the realm of bedeutungen and only relate indirectly to sense. If it's a question of the truth of something –and truth is the goal of logic- we also have to inquire after bedeutungen; we have to throw aside proper names that do not designate or name an object, though they may have a sense; we have to throw away concept words that do not have a bedeutung. These are not such as, say, contain a contradiction –for there is nothing at all wrong in a concept's being empty- but such as have vague boundaries. It must be determinate for every object whether it falls under a concept or not;'
Στο άρθρο του 'The law of Inertia' θα γράψει: 'If something fails to display a sharp boundary, it cannot be recognized in logic as a concept'. Η αγγλική μετάφραση είναι από την συλλογή 'Frege, Collected papers on mathematics, logic, and philosophy', Blackwell. Το συγκεκριμένο απόσπασμα εμφανίζεται στην σελίδα 133, παράγραφο 158.

[3] Όπως γράφει στον πρόλογο του Begriffsschrift: 'To prevent anything intuitive from penetrating here unnoticed, i had to bend every effort to keep the chains of inferences free of gaps. In attempting to comply with this requirement in the strictest possible way i found the inadequacy of language to be an obstacle; no matter how unwieldy the expressions I was ready to accept, I was less and less able, as the relations became more and more complex, to attain the precision that my purpose required. This deficiency led me to the idea of the present ideography.' Αντλώ την αγγλική μετάφραση από την συλλογή άρθρων 'From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic', van Heijernoort [1967].

ασάφεια, όπως αυτό της φυσικής γλώσσας. Όπως έγραψε ο Russell στο άρθρο του 'Vagueness': 'All traditional Logic habitually assumes that precise symbols are being employed. It is therefore not applicable to this terrestrial life, but only to an imagined celestial existence'.[4]

β. Να υποστηρίξουμε ότι κάποιος από τους λογικούς κανόνες που χρησιμοποιούμε σε αυτά, και για την ακρίβεια ο κανόνας modus ponens, αφού είναι ο συγκεκριμένος κανόνας που χρησιμοποιείται και στις δύο μορφές του επιχειρήματος, δεν είναι έγκυρος όταν βρισκόμαστε σε ασαφή πλαίσια. Πρόκειται για μια επιλογή που οι περισσότερες φιλοσοφικές θεωρίες προσπαθούν να αποφύγουν. Μάλιστα, αρκετές φορές συναντά κανείς πραγματείες που κατά μία έννοια την απορρίπτουν αξιωματικά.[5] Συνήθως η δικαιολόγηση για αυτή την κίνηση δεν συνίσταται σε κάτι παραπάνω από το να υποστηριχθεί ότι ο κανόνας modus ponens δεν θα μπορούσε να μην είναι έγκυρος, ή ότι το κόστος του να υποστηρίξει κανείς ότι ο συγκεκριμένος κανόνας δεν είναι παντού έγκυρος θα ήταν πολύ μεγάλο. Κάτι τέτοιο δεν είναι όμως αρκετό. Δεν μπορούμε να αποφασίσουμε εκ των προτέρων ποιες από τις προτάσεις της γλώσσας είναι λογικά αληθείς, και ποια από τα επιχειρήματα είναι λογικά έγκυρα, για τις περιπτώσεις που οι ομιλητές βρίσκονται εντός ασαφών πλαισίων. Αυτό θα πρέπει να είναι κάτι που έπεται από μια θεωρία περί του νοήματος των ασαφών εκφράσεων, η οποία με την σειρά της θα πρέπει να βασίζεται σε συγκεκριμένες παραδοχές όσον αφορά το ποια από τα χαρακτηριστικά των ασαφών εκφράσεων είναι ουσιώδη και ποια όχι. Μια θεωρία που ανήκει στην συγκεκριμένη κατηγορία θα πρέπει φυσικά και να δικαιολογεί γιατί έχουμε τόσο ισχυρή διαίσθηση ότι ο συγκεκριμένος κανόνας είναι έγκυρος παρόλο που υπάρχουν πλαίσια εντός των οποίων αυτό δεν ισχύει.

γ. Να υποστηρίξουμε ότι η σχέση της λογικής συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας δεν είναι μεταβατική όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων. Υπάρχει δηλαδή περίπτωση όταν σχηματίζουμε μακρές αλυσίδες επιχειρημάτων, εντός των οποίων εμφανίζονται ασαφείς εκφράσεις, να καταλήξουμε σε ψευδή συμπεράσματα παρόλο που οι προκείμενες είναι αληθείς και οι κανόνες με βάση τους οποίους μεταβαίνουμε από το ένα βήμα του επιχειρήματος στο επόμενο είναι έγκυροι.

---

[4] Σελίδες 88-89.

[5] Για παράδειγμα, μια χαρακτηριστική περίπτωση είναι αυτή του Michael Dummett, που στο κλασικό άρθρο 'Wang's Paradox' γράφει: 'It therefore appears that, in order to resolve the paradox without declining to accept the induction step as true, we must either declare the rule of universal instantiation as invalid, in the presence of vague predicates, or else regard modus ponens as invalid in this context. […] But either of these seems a desperate remedy, for the validity of these rules of inference seems absolutely constitutive of the meanings of "every" and of "if".' Dummett [1996].

δ. Να υποστηρίξουμε ότι κάποιες από τις προκείμενες δεν είναι αληθείς, και άρα ότι τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη παρότι έγκυρα, δεν είναι ορθά. Η συγκεκριμένη επιλογή είναι η πιο δημοφιλής μεταξύ των φιλοσόφων που έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα της ασάφειας. Αν επικεντρωθούμε στην επαγωγική μορφή του παραδόξου τότε είναι προφανές ότι αν κάποια από τις προκείμενες δεν είναι αληθής τότε θα πρόκειται για αυτήν που έχει μορφή καθολικής ποσόδειξης. Στην μορφή του παραδόξου όπου το επιχείρημα διατυπώνεται ως μια μακρά ακολουθία εφαρμογών του κανόνα Modus ponens τότε είναι και πάλι προφανές ότι αν κάποιες προκείμενες δεν είναι αληθείς τότε θα πρόκειται για κάποιες από εκείνες που έχουν μορφή συνεπαγωγής. Δεν είναι όμως καθόλου προφανές ποιες από αυτές είναι που είναι κάθε φορά μη αληθείς, και ποιες όχι. Μια θεωρία που ανήκει σε αυτή την κατηγορία θα πρέπει λοιπόν να δικαιολογήσει γιατί ενώ οι προκείμενες του επιχειρήματος μας φαίνονται αληθείς, παρόλα αυτά κάποιες από αυτές δεν είναι. Επιπλέον, θα πρέπει να δικαιολογήσει γιατί μας είναι δύσκολο να εντοπίσουμε ποιες ακριβώς από τις προκείμενες είναι αυτές που δεν είναι αληθείς όταν το επιχείρημα είναι διατυπωμένο στην μη επαγωγική μορφή του.

ε. Τέλος, μια επιλογή που έχουμε είναι να αποδεχτούμε το επιχείρημα και κάποιες από τις συνέπειες που αυτό έχει. Αυτή είναι σίγουρα η πιο ακραία από τις διαθέσιμες επιλογές, αφού οδηγεί σε μια ριζική αποσύνδεση μεταξύ των συνθηκών αλήθειας των διαφόρων προτάσεων της γλώσσας και των συνθηκών υπό τις οποίες τις εκφέρουμε.[6]

Προκειμένου να διατυπώσουμε μια θεωρία περί ασάφειας λοιπόν, θα πρέπει να ξεκινήσουμε κάνοντας κάποιες βασικές παραδοχές περί του νοήματος των ασαφών εκφράσεων, και με βάση αυτές να προσδιορίσουμε συγκεκριμένες συνθήκες αλήθειας για τις προτάσεις της γλώσσας εντός των οποίων αυτές εμφανίζονται, καθώς και συγκεκριμένες συνθήκες εγκυρότητας για τα αντίστοιχα επιχειρήματα. Με βάση αυτά θα πρέπει και να καθορίζεται συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης του παραδόξου. Επιπλέον όμως, η θεωρία θα πρέπει όχι μόνο να εξηγεί γιατί τα επιμέρους χαρακτηριστικά των σωρειτικών επιχειρημάτων μας φαίνονται τόσο ελκυστικά, αλλά και να αφήνει χώρο για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος από τις ιδιότητες από τις οποίες φαίνεται ότι διακρίνονται οι ασαφείς εκφράσεις.

[6] Παρόλα αυτά πρόκειται για μία άποψη που έχει επίσης υποστηριχθεί από κάποιους φιλοσόφους. Κυριότερες περιπτώσεις είναι αυτή του Dummett, στο άρθρο του ‘Wang’s Paradox’ που έχουμε ήδη αναφέρει, καθώς και του Peter Unger, στο άρθρο ‘There are no ordinary things’, Unger [1979], και στο άρθρο ‘The problem of the many’, Unger [1980].

Ανάμεσα σε αυτές τις ιδιότητες είναι και το φαινόμενο της ασάφειας ανώτερης τάξης. Θα λέμε ότι μια έκφραση υπόκειται στο φαινόμενο της ασάφειας ανώτερης τάξης αν και μόνο αν κάποιοι από τους όρους που χρησιμοποιούμε προκειμένου να περιγράψουμε τα σημασιολογικά της χαρακτηριστικά θα πρέπει να είναι επίσης ασαφείς.[7] Όπως όμως και στην περίπτωση του φαινομένου της ασάφειας πρώτης τάξης, φαίνεται πως μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα περί τίνος πρόκειται απλά δίνοντας μερικά παραδείγματα.

Αν θεωρήσουμε το κατηγόρημα «το x είναι σωρός» τότε μπορούμε να περιγράψουμε κάποια από τα σημασιολογικά του χαρακτηριστικά λέγοντας ότι αυτό έχει οριακές περιπτώσεις. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι το ποια αντικείμενα είναι οριακές περιπτώσεις για το συγκεκριμένο κατηγόρημα και ποια όχι είναι ένα σαφές ζήτημα; Φαίνεται πως όχι. Φαίνεται πως θα πρέπει να υπάρχουν αντικείμενα που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι οριακές περιπτώσεις για αυτό ή όχι, να υπάρχουν δηλαδή αντικείμενα που είναι οριακές περιπτώσεις οριακής περίπτωσης σωρού. Δεν μπορούμε επομένως να θέσουμε δύο σαφείς διαχωριστικές γραμμές και να υποστηρίξουμε ότι τα αντικείμενα που βρίσκονται ανάμεσα είναι οι οριακές περιπτώσεις ενώ τα υπόλοιπα όχι, πρόκειται για μια διάκριση που θα πρέπει να γίνει επίσης με ασαφή τρόπο. Καταλήγουμε άρα ότι θα πρέπει να υπάρχουν οριακές περιπτώσεις για το κατηγόρημα «το x είναι οριακή περίπτωση σωρού», και άρα και για το μεταγλωσσικό κατηγόρημα «το x είναι οριακή περίπτωση του κατηγορήματος 'το x είναι σωρός' », οπότε λέμε ότι το κατηγόρημα «το x είναι σωρός» διακρίνεται από ασάφεια δεύτερης τάξης. Ανάλογα έπεται ότι δεν θα είναι σαφές ποια αντικείμενα είναι οριακές περιπτώσεις οριακής περίπτωσης σωρού και άρα θα πρέπει να υπάρχουν οριακές περιπτώσεις για το κατηγόρημα «το x είναι οριακή περίπτωση του κατηγορήματος 'το x είναι οριακή περίπτωση σωρού' », οπότε λέμε ότι το κατηγόρημα «το x είναι σωρός» διακρίνεται από ασάφεια τρίτης τάξης ενώ το κατηγόρημα της μεταγλώσσας «το x είναι οριακή περίπτωση του κατηγορήματος 'το x είναι σωρός' » από ασάφεια δεύτερης τάξης, και ούτω καθ' εξής. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το κατηγόρημα «το x είναι σωρός» διακρίνεται από ασάφεια δεύτερης τάξης, τότε κάποια από τα μεταγλωσσικά κατηγορήματα με βάση τα οποία περιγράφουμε τα σημασιολογικά του χαρακτηριστικά θα πρέπει να διακρίνονται τουλάχιστον από ασάφεια πρώτης τάξης, αν διακρίνεται από ασάφεια τρίτης τάξης τότε αυτά θα πρέπει να διακρίνονται τουλάχιστον από ασάφεια δεύτερης τάξης, και ούτω καθ' εξής.

[7] Όπως γράφει ο Russell στην πρώτη σελίδα του άρθρου του 'Vagueness': 'In the words of the poet: "Who speaks of vagueness should himself be vague." '.

Ανάλογα, έχουμε θεωρήσει πως ένα άλλο σημασιολογικό χαρακτηριστικό των ασαφών κατηγορημάτων είναι ότι αυτά είναι ανεκτικά στις μικρές αλλαγές. Όμως, το τι είναι μια μικρή αλλαγή και τι όχι δεν είναι ένα σαφές ζήτημα. Αν αφαιρέσουμε από ένα σωρό άμμου έναν κόκκο, τότε μας φαίνεται ότι αυτό που θα απομείνει θα είναι και πάλι σωρός. Αν αφαιρέσουμε δύο κόκκους, τότε και πάλι μας φαίνεται ότι αυτό που θα απομείνει θα είναι σωρός. Επιπλέον, θα υπάρχει αριθμός κόκκων τέτοιος ώστε αν αφαιρέσουμε τόσους κόκκους από τον σωρό αυτό που θα απομείνει δεν θα είναι σωρός. Μας φαίνεται όμως ότι δεν μπορεί να υπάρχει αριθμός a τέτοιος ώστε αν αφαιρέσουμε a κόκκους από ένα σωρό τότε αυτό που θα απομείνει δεν θα είναι σωρός, ενώ αν αφαιρέσουμε a-1 κόκκους τότε αυτό που θα απομείνει θα είναι σωρός. Αν κάνουμε μικρή αλλαγή σε κάποια μικρή αλλαγή τότε μας φαίνεται ότι αυτό που θα προκύψει θα είναι και πάλι μια μικρή αλλαγή. Έπεται ότι όχι μόνο το κατηγόρημα «το x είναι σωρός», αλλά και προτάσεις όπως «αν x κόκκοι άμμου είναι σωρός τότε x-1 κόκκοι άμμου είναι επίσης σωρός» θα είναι ανεκτικές στις μικρές αλλαγές. Τέλος, φαίνεται πως οι συγκεκριμένες εκφράσεις θα είναι όχι μόνο ανεκτικές, αλλά θα χαρακτηρίζονται και από την ύπαρξη οριακών περιπτώσεων. Θα υπάρχουν αλλαγές που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι μικρές ή όχι, και προτάσεις της μορφής «αν x κόκκοι άμμου είναι σωρός τότε x-y κόκκοι άμμου είναι επίσης σωρός» που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι αληθείς ή όχι. Ανάλογα, το κατηγόρημα «το x είναι οριακή περίπτωση» θα είναι ανεκτικό στις μικρές αλλαγές, μας φαίνεται ότι δεν θα μπορούσε να συμβεί να έχουμε μια συγκέντρωση άμμου που είναι οριακή περίπτωση για το κατηγόρημα «το x είναι σωρός», και αυτή να πάψει να είναι οριακή περίπτωση αν αφαιρέσουμε ή προσθέσουμε έναν κόκκο άμμου.

Έχουμε λοιπόν επαληθεύσει ότι κάποιοι από τους όρους που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τα χαρακτηριστικά των ασαφών εκφράσεων θα πρέπει επίσης να είναι ασαφείς. Έπεται άρα ότι θα μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αυτούς τους όρους προκειμένου να διατυπώσει επιχειρήματα τύπου σωρείτη. Πράγματι, έστω μια συγκέντρωση άμμου που είναι οριακή περίπτωση σωρού. Αν αφαιρέσουμε έναν κόκκο άμμου τότε αυτό που θα απομείνει θα παραμένει οριακή περίπτωση του κατηγορήματος «το x είναι σωρός». Δεν θα μπορούσε ένας κόκκος άμμου να κάνει την διαφορά μεταξύ οριακής και ξεκάθαρης αρνητικής περίπτωσης για το πιο πάνω κατηγόρημα. Συνεχίζουμε αφαιρώντας από την συγκέντρωση άμμου που προκύπτει και πάλι έναν κόκκο άμμου, όπως και πριν αυτό που θα απομένει θα είναι και πάλι οριακή περίπτωση για την έκφραση «το x είναι σωρός». Σε κανένα σημείο δεν φαίνεται ότι ένας κόκκος άμμου μπορεί να κάνει την διαφορά μεταξύ οριακής περίπτωσης και μη οριακής περίπτωσης σωρού. Μετά από μια σειρά βημάτων καταλήγουμε ότι και ένας κόκκος άμμου θα είναι οριακή περίπτωση της έκφρασης. Συμπέρασμα που είναι ψευδές, αφού ένας κόκκος άμμου από μόνος του ξεκάθαρα δεν ικανοποιεί το συγκεκριμένο κατηγόρημα. Ανάλογα, μπορούμε να θεωρήσουμε την διαδικασία κατά την οποία προσθέτουμε κόκκους άμμου οπότε και θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι και μια συγκέντρωση αρκετών τόνων άμμου είναι οριακή περίπτωση σωρού.

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι το επιχείρημα της προηγούμενης παραγράφου διατυπώθηκε εντός της μεταγλώσσας που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τα χαρακτηριστικά των ασαφών εκφράσεων. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήσαμε το μεταγλωσσικό κατηγόρημα «το x είναι οριακή περίπτωση του κατηγορήματος 'το x είναι σωρός' » προκειμένου να το διατυπώσουμε. Αν η γλώσσα τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της οποίας περιγράφουμε εντός της μεταγλώσσας είναι μια απλή πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει κάποιο ασαφές κατηγόρημα, στην περίπτωσή μας το κατηγόρημα «το x είναι σωρός», αλλά δεν περιέχει κάποιον μηχανισμό ώστε να μπορούν να σχηματιστούν σύνθετα κατηγορήματα με βάση αυτό, τότε το γεγονός ότι η συγκεκριμένη έκφραση χαρακτηρίζεται και από ασάφεια δεύτερης τάξης δεν θα μπορεί σε κάθε περίπτωση να εκφραστεί εντός αυτής. Πιθανώς θα μπορούμε να διατυπώσουμε εντός αυτής πρόταση από την οποία έπεται ότι υπάρχουν οριακές περιπτώσεις σωρού, ανάλογα με το αν οι νόμοι του αποκλειόμενου τρίτου και της μη αντίφασης προκύπτουν λογικά αληθείς ή όχι με βάση τις σημασιολογικές συνθήκες που αντιστοιχούμε στις εκφράσεις της γλώσσας, όχι όμως και πρόταση από την οποία έπεται ότι υπάρχουν οριακές περιπτώσεις οριακής περίπτωσης σωρού.

Αυτό αλλάζει από την στιγμή που θα εμπλουτίσουμε την γλώσσα αντικείμενο με μηχανισμούς που θα μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε προτάσεις όπως «το a είναι οριακή περίπτωση σωρού», ή «το a είναι οριακή περίπτωση οριακής περίπτωσης σωρού». Τότε το γεγονός ότι η έκφραση «το x είναι σωρός» χαρακτηρίζεται από ασάφεια ανώτερης τάξης θα μπορεί να εκφραστεί μέσω κατάλληλων προτάσεων εντός της γλώσσας αντικείμενο, δεν θα προκύπτει η ανάγκη να καταφύγουμε σε μια πιο εκφραστική μεταγλώσσα. Μπορούμε σε αυτή την περίπτωση να πούμε ότι μια έκφραση θα χαρακτηρίζεται από ασάφεια ν+1 τάξης αν και μόνο αν μια συγκεκριμένη, πιο σύνθετη, έκφραση που προκύπτει από αυτήν με τον κατάλληλο τρόπο θα χαρακτηρίζεται από ασάφεια ν τάξης. Στην περίπτωση του κατηγορήματος «το x είναι σωρός» έπεται ότι μπορούμε να πούμε πως αυτό θα χαρακτηρίζεται από ασάφεια ν+1 τάξης αν και μόνο αν το σύνθετο κατηγόρημα «το x είναι οριακή περίπτωση σωρού» χαρακτηρίζεται από ασάφεια ν τάξης.

Συχνά, η πρακτική που ακολουθείται προκειμένου να εμπλουτιστεί η γλώσσα αντικείμενο είναι να προστεθεί σε αυτήν κάποιος κατάλληλος προτασιακός τελεστής. Συνήθως πρόκειται για έναν τελεστή τον οποίο διαβάζουμε ως 'Ξεκάθαρα'. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το γεγονός ότι υπάρχουν οριακές περιπτώσεις πχ σωρού θα μπορεί υπό προϋποθέσεις να εκφραστεί εντός της γλώσσας αντικείμενο. Αν θεωρούμε ότι προτάσεις της μορφής «Αν Α τότε ξεκάθαρα Α», όπου Α πρόταση της γλώσσας, δεν είναι πάντα αληθείς τότε θα μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι υπάρχουν οριακές περιπτώσεις σωρού μέσω για παράδειγμα της πρότασης «υπάρχει αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό δεν είναι ξεκάθαρα σωρός, και δεν είναι ξεκάθαρα μη σωρός». Το γεγονός ότι υπάρχουν οριακές περιπτώσεις οριακών περιπτώσεων θα μπορεί να εκφραστεί από κάποια πρόταση όπως η «υπάρχει αντικείμενο τέτοιο ώστε δεν είναι ξεκάθαρα ξεκάθαρα σωρός, και δεν είναι ξεκάθαρα όχι ξεκάθαρα σωρός» κτλ.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια σωρειτική ακολουθία αντικειμένων για κάποιο ασαφές κατηγόρημα 'F' και έστω ότι το πεδίο δράσης των ποσοδεικτών της γλώσσας περιορίζεται στα αντικείμενα εντός της συγκεκριμένης ακολουθίας. Έστω ότι αυτή η ακολουθία είναι η a_1, a_2, …, a_{10000}. Χαρακτηρίζοντας την συγκεκριμένη ακολουθία αντικειμένων «σωρειτική» για το κατηγόρημα 'F' εννοούμε ότι το πρώτο ή το τελευταίο αντικείμενο σε αυτήν είναι ξεκάθαρα F, το τελευταίο ή πρώτο αντίστοιχα είναι ξεκάθαρα όχι F, και για κάθε αντικείμενο ισχύει ότι αυτό διαφέρει ελάχιστα ως προς τις σχετικές ιδιότητες από τα γειτονικά του εντός της ακολουθίας αντικείμενα. Στην πρώτη περίπτωση κάθε αντικείμενο είναι ελάχιστα λιγότερο F από αυτά που εμφανίζονται στις αμέσως προηγούμενες θέσεις εντός της ακολουθίας, στην δεύτερη περίπτωση ελάχιστα πιο F από αυτά. Ας θεωρήσουμε ότι όσον αφορά την ακολουθία που έχουμε θεωρήσει ισχύει ότι το a_1 είναι ξεκάθαρα F, ενώ το a_{10000} είναι ξεκάθαρα όχι F. Το γεγονός ότι μας φαίνεται πως δεν θα μπορούσε να υπάρχει αντικείμενο εντός της ακολουθίας τέτοιο ώστε αυτό να είναι F ενώ το επόμενο του δεν είναι F, είναι απόρροια των σημασιολογικών χαρακτηριστικών της έκφρασης 'F', πιο συγκεκριμένα του γεγονότος ότι αυτή διακρίνεται από ασάφεια πρώτης τάξης. Ανάλογα, το γεγονός ότι μας φαίνεται πως δεν θα μπορούσε να υπάρχει αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό να είναι ξεκάθαρα F και το επόμενο του να μην είναι ξεκάθαρα F, ή αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό να είναι ξεκάθαρα μη F και το προηγούμενο του να μην είναι ξεκάθαρα μη F, απορρέει από το γεγονός ότι η έκφραση ‘ξεκάθαρα F’ διακρίνεται από ασάφεια πρώτης τάξης, οπότε η έκφραση ‘F’ από ασάφεια δεύτερης τάξης, και ούτω καθ’ εξής. [8]

Γενικότερα, δεδομένης μιας σωρειτικής ακολουθίας για το F που περιέχει αρκετά αντικείμενα, μας φαίνεται ότι για κάθε φυσικό αριθμό n θα ισχύει πως δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο σαφές όριο μεταξύ των αντικειμένων που είναι ξεκάθαρα^n F και αυτών που δεν είναι, εφόσον για το εκάστοτε αντικείμενο εντός της σωρειτικής ακολουθίας ισχύει ότι υπάρχουν γειτονικά σε αυτό αντικείμενα τα οποία είναι επαρκώς όμοια με αυτό όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες. Εδώ, με μια έκφραση όπως για παράδειγμα η ‘ξεκάθαρα^n Α’ εννοούμε την πρόταση που προκύπτει αν μπροστά από την πρόταση Α υπάρχουν n επαναλήψεις του τελεστή ‘ξεκάθαρα’. Η σωρειτική ακολουθία της προηγούμενης παραγράφου βέβαια αποτελείται από 10000 αντικείμενα μόνο, οπότε και έπεται είτε ότι θα υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε να υπάρχει αντικείμενο εντός της ακολουθίας που είναι ξεκάθαρα^m F ενώ το επόμενο του διαφέρει επαρκώς από αυτό ώστε να μην είναι ξεκάθαρα^m F, είτε ότι δεν υπάρχουν αντικείμενα που είναι ξεκάθαρα^m F, είτε ότι κάποιο αντικείμενο θα είναι ξεκάθαρα^m F αν και μόνο αν αυτό είναι ξεκάθαρα^{m-1}F. Από κάποιο σημείο και έπειτα το πλήθος των γλωσσικών κατηγοριών που μας είναι διαθέσιμες υπερβαίνει το πλήθος των αντικειμένων εντός της ακολουθίας, οπότε μπορούμε να πούμε ότι τίθεται ένα ανώτατο επίπεδο στην ασάφεια ανώτερης τάξης που η συγκεκριμένη σωρειτική ακολουθία μπορεί να υποστηρίξει. Από αυτά βέβαια δεν έπεται ότι γενικότερα, το όριο μεταξύ των αντικειμένων που είναι ξεκάθαρα^m F και αυτών που δεν είναι ξεκάθαρα^m F είναι σαφές, αφού πάντα παραμένει λογικά δυνατό με την ευρεία έννοια να υπάρχει σωρειτική ως προς το F ακολουθία αντικειμένων που αποτελείται από περισσότερα αντικείμενα και είναι τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο διαφέρει από τα γειτονικά του σε ακόμη πιο αμελητέο βαθμό. Εξάλλου, αν θεωρήσουμε την ακολουθία αντικείμενων που αποτελείται μόνο από τα αντικείμενα a_1 και a_{10000}, χωρίς τα ενδιάμεσα αντικείμενα, τότε το πρώτο αντικείμενο εντός αυτής θα ήταν F ενώ το επόμενό του όχι F. Αυτό δεν συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο σαφές όριο μεταξύ των αντικειμένων που είναι F και αυτών που δεν είναι, αλλά μόνο ότι η ακολουθία που έχουμε θεωρήσει δεν είναι επαρκώς

[8] Από την άλλη, στην περίπτωση που θέλουμε να υποστηρίξουμε ότι προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα, όπως οι τελευταίες, δεν είναι αληθείς, εξάλλου θα μπορούσε κάποιος να πει ότι το παράδοξο του σωρείτη δείχνει ότι αρχές όπως αυτές οδηγούν σε αντιφάσεις, τότε αν το ‘F’ διακρίνεται από ασάφεια πρώτης τάξης μπορούμε να πούμε ότι παρόλο που υπάρχει αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό είναι F ενώ το επόμενο του δεν είναι, δεν υπάρχει αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό να είναι ξεκάθαρα F ενώ το επόμενό του είναι ξεκάθαρα όχι F. Αν διακρίνεται από ασάφεια δεύτερης τάξης τότε μπορούμε να πούμε ότι παρόλο που υπάρχει αντικείμενο που είναι ξεκάθαρα F ενώ το επόμενό του δεν είναι, δεν υπάρχει αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό να είναι ξεκάθαρα ξεκάθαρα F και το επόμενο του να είναι ξεκάθαρα όχι ξεκάθαρα F, και ούτω καθ’ εξής.

σωρειτική για το κατηγόρημα F, και αυτό γιατί δεν είναι αρκετά πυκνή όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες.

Μάλιστα, το ποιες ακολουθίες αντικειμένων θα είναι σωρειτικές ως προς κάποιο ασαφές κατηγόρημα της γλώσσας, και ποιες όχι, δεν μπορεί να είναι ένα σαφές ζήτημα. Κάτι που μπορεί να γίνει εμφανές αν θεωρήσουμε κάποια σωρειτική ακολουθία ως προς το κατηγόρημα «το x είναι σωρειτική ακολουθία για το F». Έστω για παράδειγμα ότι ερμηνεύουμε το κατηγορηματικό σύμβολο 'F' ως το κατηγόρημα «το x είναι σωρός». Ας θεωρήσουμε επιπλέον την ακολουθία από εκείνες τις συγκεντρώσεις κόκκων άμμου που προκύπτουν έπειτα από το εκάστοτε βήμα της διαδικασίας κατά την οποία ξεκινώντας από μια συγκέντρωση κόκκων άμμου που είναι ξεκάθαρα σωρός, απομακρύνουμε από αυτήν έναν κόκκο άμμου, και συνεχίζουμε απομακρύνοντας κάθε φορά έναν κόκκο από την συγκέντρωση που έχει προκύψει από το προηγούμενο βήμα της διαδικασίας, μέχρι η συγκέντρωση κόκκων που έχει απομείνει να είναι ξεκάθαρο ότι δεν είναι σωρός. Είναι σαφές ότι η συγκεκριμένη ακολουθία αντικειμένων θα είναι σωρειτική για το κατηγόρημα «το x είναι σωρός». Επιπλέον, φαίνεται ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία που προκύπτει από την διαδικασία κατά την οποία ξεκινώντας από το ίδιο αρχικό βήμα με πριν απομακρύνουμε τώρα δύο κόκκους στο εκάστοτε βήμα, τότε θα είναι και αυτή μια σωρειτική ακολουθία ως προς το ίδιο κατηγόρημα. Συνεχίζουμε θεωρώντας τις ακολουθίες που προκύπτουν αν στο εκάστοτε βήμα απομακρύνουμε τρεις κόκκους, τέσσερις κόκκους, και ούτω καθ' εξής. Καταλήγουμε τελικά στην διαδικασία κατά την οποία απομακρύνουμε όλους τους κόκκους του αρχικού σωρού σε ένα μόνο βήμα, οπότε και είναι ξεκάθαρο ότι η ακολουθία αντικειμένων που προκύπτει δεν είναι σωρειτική. Κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε καταλήξει σε μια σωρειτική ακολουθία που αποτελείται από σωρειτικές ακολουθίες ως προς την κατηγορηματική έκφραση «το x είναι σωρός». Φαίνεται πως για κάποιες από τις ενδιάμεσες ακολουθίες που εμφανίζονται εντός αυτής δεν θα είναι ξεκάθαρο αν αυτές είναι σωρειτικές ή όχι. Πρόκειται με την σειρά του για κάτι που είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι, όπως είχαμε παρατηρήσει, το τι είναι μια μικρή αλλαγή και τι όχι είναι επίσης ασαφές και άρα θα διακρίνεται από οριακές περιπτώσεις.

Έπεται άρα ότι όπως η έκταση κάθε ασαφούς κατηγορήματος μπορεί κατά έναν προφανή τρόπο να μεταβάλλεται ανάλογα με το πλαίσιο εντός του οποίου γίνονται οι εκφορές των ομιλητών, για παράδειγμα κάποιοι άνθρωποι μπορεί να είναι ψηλοί αν μιλάμε για ποδοσφαιριστές όχι όμως και αν μιλάμε για καλαθοσφαιριστές, το ίδιο θα ισχύει και για την έκταση του κατηγορήματος «το x είναι σωρειτική ακολουθία για το F». Ακολουθίες αντικειμένων που μπορεί να ικανοποιούν επαρκώς το συγκεκριμένο κατηγόρημα εντός κάποιου πλαισίου, μπορεί να μην το ικανοποιούν εντός κάποιου άλλου πλαισίου. Οι παρατηρήσεις της προηγούμενης παραγράφου φαίνεται να οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κάποια πεπερασμένη ακολουθία αντικειμένων μπορεί να είναι επαρκώς σωρειτική εντός κάποιου πλαισίου για κάποιο ασαφές κατηγόρημα ‘F’, και παρόλα αυτά για κάποιον διατακτικό αριθμό n αυτή να μην είναι ‘ξεκάθαρα^{n} σωρειτική’.

Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά τον τρόπο που ορίσαμε τι είναι σωρειτική ακολουθία και τι όχι. Παρατηρούμε ότι προκειμένου κάποια ακολουθία αντικειμένων να χαρακτηριστεί ως σωρειτική ακολουθία για κάποιο ασαφές κατηγόρημα F θα πρέπει μεταξύ άλλων το πρώτο ή τελευταίο αντικείμενο αυτής να είναι ξεκάθαρα F, το τελευταίο ή πρώτο αντίστοιχα να είναι ξεκάθαρα όχι F, και κάθε αντικείμενο να είναι αρκετά όμοιο με τα γειτονικά του όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες. Συνθήκες όπως αυτές εξαρτώνται από σχεσιακές εκφράσεις όπως «το x είναι αρκετά όμοιο με το y», ή «το x είναι γειτονικό του y», εκφράσεις που είναι ασαφείς, και οι εκτάσεις των οποίων κατά συνέπεια θα μεταβάλλονται ανάλογα με το πλαίσιο της συζήτησης. Κάτι μπορεί να θεωρείται αρκετά όμοιο με κάτι άλλο εντός ενός πλαισίου συζήτησης, αλλά όχι εντός ενός άλλου πλαισίου. Το σχήμα της Ιταλίας είναι αρκετά όμοιο με αυτό μιας μπότας εντός κάποιου πλαισίου, πιθανώς να μην ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση που οι ομιλητές αποφασίσουν να μιλήσουν πιο αυστηρά όμως. Μπορεί κατ’ επέκταση να υποστηριχθεί ότι ενώ είναι αρκετά όμοιο με αυτό μιας μπότας, παρόλα αυτά δεν είναι ξεκάθαρα όμοιο. Κατά παρόμοιο τρόπο, κάτι μπορεί να θεωρείται γειτονικό με κάτι άλλο εντός ενός πλαισίου, όχι όμως και εντός ενός άλλου πλαισίου όπου οι ομιλητές είναι διατεθειμένοι να κάνουν πιο λεπτομερείς διακρίσεις.

Προκύπτει τώρα το εξής ερώτημα, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία αντικειμένων που είναι επαρκώς σωρειτική για κάποιο ασαφές κατηγόρημα ‘F’, είναι δηλαδή επαρκώς πυκνή, υπάρχει κάποιο ανώτατο όριο στο επίπεδο ασάφειας από το οποίο μπορεί να χαρακτηρίζεται η συγκεκριμένη έκφραση; Υπάρχει δηλαδή το ενδεχόμενο για κάποιο επίπεδο ν και αντικείμενο α εντός της ακολουθίας η πρόταση ‘Fa’, όπου ‘a’ σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο α, να χαρακτηρίζεται μεν από ασάφεια επιπέδου n, αλλά όχι και από ασάφεια επιπέδου m, όπου m επίπεδο που έπεται του n ως προς την αρμόζουσα σχέση διάταξης, ενώ ταυτόχρονα ισχύει ότι η σωρειτική ακολουθία περιέχει επαρκή αριθμό αντικειμένων, κάθε ένα από τα οποία βρίσκεται επαρκώς κοντά στα γειτονικά του όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες; Το συγκεκριμένο ζήτημα δεν είναι ξεκάθαρο. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται πως δεν έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι η ασάφεια ανώτερης τάξης τερματίζει σε κάποιο πεπερασμένο επίπεδο. Για κάθε σωρειτική ακολουθία ως προς το F, φαίνεται λογικά δυνατό να υπάρχει άλλη, πυκνότερη ακολουθία που είναι ικανή να υποστηρίξει υψηλότερα επίπεδα ασάφειας ανώτερης τάξης.

Βέβαια, με βάση τον τρόπο που ορίζουμε τον τελεστή «ξεκάθαρα» μπορούμε να ορίσουμε και τελεστές όπως ο «ξεκάθαρα$^{\omega}$», οπότε και κάτι θα είναι πχ ξεκάθαρα$^{\omega}$κόκκινο αν και μόνο αν αυτό είναι ξεκάθαρα κόκκινο, και ξεκάθαρα ξεκάθαρα κόκκινο, και ξεκάθαρα ξεκάθαρα ξεκάθαρα κόκκινο, και ούτω καθ' εξής. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε και τελεστές όπως ο «απολύτως ξεκάθαρα» και να θεωρήσουμε ότι κάτι θα είναι απολύτως ξεκάθαρα κόκκινο αν και μόνο αν αυτό είναι κόκκινο και επιπλέον το γεγονός ότι αυτό είναι κόκκινο δεν χαρακτηρίζεται από κανένα ίχνος ασάφειας. Στην περίπτωση τελεστών όπως οι συγκεκριμένοι οι όποιες διαισθήσεις μπορεί να έχουμε όταν μιλάμε για χαμηλότερες τάξεις ασάφειας παύουν να μας καθοδηγούν. Έχουν προταθεί διάφορα επιχειρήματα προκειμένου να υποστηριχθεί ότι η όποια ασάφεια μπορεί να υπάρχει τερματίζει σε αυτά τα επίπεδα οπότε και τίθενται σαφή όρια, έχουν όμως προταθεί και επιχειρήματα προκειμένου να υποστηριχθεί το αντίθετο. Το όλο ζήτημα είναι ομιχλώδες, και δεν είναι ξεκάθαρο αν τελεστές όπως και αυτοί έχουν όντως κάποιο ανάλογο στην φυσική γλώσσα. Φαίνεται πάντως πως αν παρουσιάσουμε μια χρωματική κλίμακα που ξεκινάει από κόκκινη και καταλήγει πορτοκαλί σε κάποιους ομιλητές, και τους ρωτήσουμε ποια σημεία της θα χαρακτήριζαν ως απολύτως ξεκάθαρα κόκκινα τότε είναι εύλογο να περιμένουμε ότι οι απαντήσεις τους θα διακρίνονται από τα ίδια χαρακτηριστικά που θα διακρίνονταν και στην περίπτωση της ασάφειας πρώτης τάξης. Θα υπάρχουν σημεία που είναι οριακές περιπτώσεις για την συγκεκριμένη έκφραση ως προς τα οποία αυτοί δεν θα συμφωνούν μεταξύ τους, και στην περίπτωση που αυτοί έχουν χαρακτηρίσει κάποιο σημείο της κλίμακας ως απολύτως ξεκάθαρα κόκκινο, τότε μπορούμε να περιμένουμε ότι θα χαρακτηρίσουν με τον ίδιο τρόπο και το σημείο που αντιστοιχεί σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκος κύματος μικρότερο κατά ένα νανόμετρο.

Πάντως, ο τρόπος με τον οποίον μπορούμε, δεδομένων των τελεστών που ήδη υπάρχουν, να ορίσουμε και να προσθέσουμε στην γλώσσα νέους τελεστές φέρνει στην σκέψη το πιο κάτω απόσπασμα από το βιβλίο του Dummett για την φιλοσοφία μαθηματικών του Frege:

> To someone who has long been used to finite cardinals, and only to them, it seems obvious that there can only be finite cardinals. A cardinal number, for him, is arrived at by counting, and the very definition of an infinite totality is that it is impossible to count it. This prejudice is one that can be overcome: the

beginner can be persuaded that is makes sense, after all, to speak of the number of natural numbers. Once his initial prejudice has been overcome, the next stage is to convince the beginner that there are distinct cardinal numbers: not all infinite totalities have as many members as each other. When he is accustomed to this idea, he is extremely likely to ask, “How many transfinite cardinals are there?” How should he be answered? If it was after all, all right to ask, “How many numbers are there?”, in the sense in which “number” meant “finite cardinal”, how can it be wrong to ask the same question when “number” means “finite or transfinite cardinal”? [9]

[9] Το συγκεκριμένο απόσπασμα είναι από το βιβλίο Frege: Philosophy of Mathematics, Dummett [1991]. Εμφανίζεται στις σελίδες 315 και 316, στις οποίες ο Dummett μιλάει για το πρόβλημα της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων, και επιχειρηματολογεί ότι υπάρχουν μαθηματικές έννοιες των οποίων οι εκτάσεις είναι «indefinitely extensible». Το ίδιο απόσπασμα κάνει την εμφάνισή του και στο βιβλίο «Vagueness in Context», Shapiro [2006], στην σελίδα 129, όπου ο συγγραφέας κάνει τον παραλληλισμό μεταξύ ασάφειας ανώτερης τάξης και indefinitely extensible concepts. Η έννοια της indefinite extensibility κάνει την εμφάνισή της συχνά στην αρθρογραφία περί των διαφόρων παραδόξων, ένα παράδειγμα είναι το άρθρο «Inclosures, Vagueness and Self Reference», Priest [2010], στο οποίο ο Graham Priest συνδέει το φαινόμενο της ασάφειας με την συγκεκριμένη έννοια και επιχειρεί να δείξει ότι το παράδοξο του σωρείτη και τα διάφορα σημασιολογικά παράδοξα έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά τα οποία κωδικοποιεί μέσω του Inclosure schema.
Ο πρώτος που θα κάνει την διαπίστωση ότι ορισμένες κλάσεις αντικειμένων μπορούν να χαρακτηριστούν ως ‘indefinitely extensible’, αν και δεν θα χρησιμοποιήσει τον συγκεκριμένο χαρακτηρισμό, είναι ο Russell, στο άρθρο του με τίτλο ‘On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types’, Russell [1907], στο οποίο τον απασχολούν ζητήματα όπως αυτό στο οποίο αναφέρεται ο Dummett στο συγκεκριμένο απόσπασμα. Θα εξετάσει τρεις δυνατές θεωρίες ως απάντηση σε αυτά, για να καταλήξει τελικά στην περίφημη ‘no classes theory’. Στην σελίδα 36 του άρθρου γράφει: ‘The above considerations point to the conclusion that the contradictions result from the fact that, according to current logical assumptions, there are what we may call self-reproductive processes and classes. That is, there are some properties such that, given any class of terms all having such a property, we can always define a new term also having the property in question. Hence we can never collect all the terms having the said property into a whole; because whenever we hope to have them all, the collection which we have immediately proceeds to generate a new term also having the said property’.
Ο Dummett είναι ο πρώτος που θα χρησιμοποιήσει τον όρο ‘indefinitely extensible’ για να αναφερθεί στην συγκεκριμένη ιδιότητα. Στο άρθρο ‘The philosophical significance of Gödel’s theorem’ θα γράψει: ‘A concept is indefinitely extensible if, for any definite characterization of it, there is a natural extension of this characterization, which yields a more inclusive concept; this extension will be made according to some general principle for generating such extensions, and, typically, the extended characterization will be formulated by reference to the previous, unextended, characterisation’ (σελίδες 195-196 από ‘Truth and other Enigmas’). Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ότι στο ίδιο άρθρο ο Dummett θα συνδέσει την συγκεκριμένη ιδιότητα που μπορεί να χαρακτηρίζει κάποιες έννοιες με αυτήν της ασάφειας. Θα θεωρήσει ότι η έννοια της καλώς ορισμένης ιδιότητας των φυσικών αριθμών χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο είδος ασάφειας, το οποίο ταυτίζει με την ιδιότητα της indefinite extensibility, και θα υποστηρίξει ότι είναι ακριβώς το συγκεκριμένο γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα κάθε συνεπής αξιωματική θεωρία για τους φυσικούς αριθμούς να είναι μη πλήρης, να υπάρχουν δηλαδή προτάσεις που μπορούμε να αναγνωρίσουμε ως αληθείς, είναι όντως αληθείς, αλλά για τις οποίες η θεωρία δεν μπορεί να αποφανθεί.

Η απάντηση όμως που η ZFC θεωρία συνόλων δίνει στο πιο πάνω ερώτημα είναι ακριβώς ότι δεν υπάρχει σύνολο όλων των πληθικών αριθμών και άρα δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε πόσοι είναι αυτοί εντός των πλαισίων της, και ανάλογα για την περίπτωση των διατακτικών αριθμών. Εξάλλου, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σύνολο που περιέχει όλους τους πληθικούς αριθμούς, τότε εφόσον οι πληθικοί αριθμοί ορίζονται ως σύνολα,[10] μπορούμε να θεωρήσουμε την ένωση C όλων των αντικειμένων που περιέχονται εντός του συγκεκριμένου συνόλου. Έστω |C| ο πληθικός αριθμός του συνόλου C. Από τον τρόπο που αυτό έχει οριστεί έπεται ότι για κάθε αντικείμενο εντός του συνόλου όλων των πληθικών θα ισχύει ότι αυτό έχει πληθικότητα μικρότερη ή ίση του |C|, δηλαδή κάθε πληθικός αριθμός θα είναι μικρότερος ή ίσος του |C|. Αν θεωρήσουμε όμως το δυναμοσύνολο P(C) του συνόλου C τότε αυτό θα έχει πληθικό αριθμό $2^{|C|}$, Αποδεικνύεται όμως επιπλέον ότι η πληθικότητα $2^{|C|}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη της |C|, και άρα δεν μπορεί να περιέχεται μέσα στο σύνολο όλων των πληθικών αριθμών. Έπεται ότι αν υπάρχει σύνολο τέτοιο ώστε δεν υπάρχει πληθικός αριθμός που δεν ανήκει σε αυτό, τότε υπάρχει πληθικός αριθμός που δεν ανήκει σε αυτό. Η τελευταία πρόταση είναι όμως αντίφαση, και άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει σύνολο που περιέχει όλους τους πληθικούς αριθμούς. Δεν έχει σύμφωνα με τη θεωρία συνόλων νόημα να ρωτήσουμε «πόσοι είναι οι πληθικοί αριθμοί».

Επιστρέφοντας τώρα στην περίπτωση της ασάφειας, μπορεί κανείς εύκολα να φανταστεί ανάλογες αντιδράσεις με αυτές που περιγράφει το απόσπασμα του Dummett όταν μιλάμε για την ασάφεια ανώτερης τάξης. Μπορούμε για κάθε ασαφές κατηγόρημα να προσδιορίσουμε κάποια αντικείμενα ως αυτά που ξεκάθαρα το ικανοποιούν, κάποια άλλα ως αυτά που δεν είναι ξεκάθαρο ότι το ικανοποιούν, κτλ. Ανάλογα και για περισσότερες επαναλήψεις του τελεστή «ξεκάθαρα», μπορούμε να θεωρήσουμε πως κάποιες περιπτώσεις είναι ξεκάθαρο ότι ξεκάθαρα το ικανοποιούν ενώ για κάποιες άλλες ότι δεν

[10] Με βάση τον ορισμό του Von Neuman, οι διατακτικοί αριθμοί ορίζονται μέσω υπερπεπερασμένης αναδρομής. Το κενό σύνολο είναι λοιπόν διατακτικός αριθμός, για κάθε διατακτικό α ο διάδοχος διατακτικός α+1 ορίζεται ως η ένωση {α}∪α, ενώ τέλος για σύνολο Α διατακτικών, η ένωση όλων των στοιχείων του Α είναι επίσης διατακτικός. Έπεται ότι οι πρώτοι διατακτικοί κατά Von Neuman είναι τα σύνολα: ∅, {∅}, {∅, {∅}}, {∅, {∅}, {∅, {∅}}}, και ούτω καθ' εξής. (Βλέπε Rubin, 'Set theory for the mathematician', Holden-Day, σελίδες 175, 176, καθώς και το βιβλίο του Γιάννη Μοσχοβάκη, 'Σημειώσεις στη συνολοθεωρία', εκδόσεις Νεφέλη, σελίδες 208-209 και 218-219). Στην συνέχεια, αν θεωρήσουμε κάποιο γραμμικά διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς την σχέση διάταξης, τότε ως πληθικό αριθμό του αντιστοιχούμε τον ελάχιστο διατακτικό που είναι ισοπληθικός με αυτό (Rubin, Set theory for the mathematician, Holden-Day, σελίδα 268). Αν πχ θεωρήσουμε το σύνολο φυσικών αριθμών {0, 1}, τότε με βάση τον συγκεκριμένο ορισμό έπετει ότι ο πληθικός αριθμός του είναι το σύνολο {∅, {∅}}, αν θεωρήσουμε το σύνολο {0, 1, 2} τότε του αντιστοιχούμε το σύνολο {∅, {∅}, {∅, {∅}}}, και ούτω καθ' εξής.

είναι ξεκάθαρο ότι ξεκάθαρα το ικανοποιούν. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται πως δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο σαφές όριο μεταξύ των περιπτώσεων που ανήκουν στην εκάστοτε κατηγορία. Παρόλα αυτά, μπορούμε τελικά να ρωτήσουμε ποιες οι περιπτώσεις για τις οποίες ισχύει ότι ξεκάθαρα το ικανοποιούν, και είναι ξεκάθαρο ότι ξεκάθαρα το ικανοποιούν, και είναι ξεκάθαρο ότι είναι ξεκάθαρο ότι ξεκάθαρα το ικανοποιούν, και ούτω καθ' εξής, ή να ρωτήσουμε ποιες οι περιπτώσεις που είναι απόλυτα ξεκάθαρο ότι το ικανοποιούν. Αν από την παραδοχή ότι υπάρχουν τέτοιες περιπτώσεις έπεται το συμπέρασμα ότι μόνη δυνατότητα ώστε να προσδιορίσουμε ποιες είναι αυτές είναι να μιλήσουμε με τρόπο που συνεπάγεται την ύπαρξη σαφών ορίων, τότε θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει πως επί της ουσίας αυτό που έχουμε καταφέρει δεν είναι να αποδείξουμε ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο ανώτατο επίπεδο ασάφειας, αλλά να καταλήξουμε σε κάποιο είδος ασθενούς εις άτοπο απαγωγής όσον αφορά την δυνατότητα να οριστούν τελεστές όπως αυτοί, οπότε και πρέπει να απαντήσουμε σε ερωτήσεις όπως οι τελευταίες εντελώς ανάλογα με τον τρόπο που η θεωρία συνόλων δίνει απάντηση στο ερώτημα «πόσοι είναι οι πληθικοί αριθμοί». Βέβαια, η ύπαρξη σαφών ορίων από κάποιο επίπεδο και έπειτα δεν είναι κάτι που φαίνεται πως πρέπει να αποφεύγεται στον ίδιο βαθμό που πρέπει να αποφεύγεται και μία αντίφαση. Το γεγονός όμως παραμένει, έχουμε την διαίσθηση ότι το φαινόμενο της ασάφειας δεν συμβιβάζεται με την ύπαρξη σαφών ορίων, μια θεωρία λοιπόν που θέλει να συμβαδίσει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο με τις διαισθήσεις των ομιλητών ίσως είναι τελικά υποχρεωμένη να κάνει την παραδοχή ότι πολύ απλά δεν έχει καν νόημα να μιλάμε για περιπτώσεις που ξεκάθαρα[ω], ή απόλυτα ξεκάθαρα ικανοποιούν ή δεν ικανοποιούν το εκάστοτε ασαφές κατηγόρημα.

1.1 Πλάνο

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε αρχικά με μια κλάση σημασιολογικών θεωριών περί ασάφειας που δέχονται την λεγόμενη «αρχή της αληθοσυναρτησιακότητας», και θα προσδιορίσουμε έναν συγκεκριμένο τρόπο προκειμένου αυτές να ερμηνευτούν φιλοσοφικά που βασίζεται στην παραδοχή ότι η ασάφεια είναι ένα είδος σημασιολογικού φαινομένου. Πρόκειται για μία από τις παραδοχές στις οποίες βασίζεται η συγκεκριμένη εργασία. Θα διαπιστώσουμε ότι παρόλο που οι θεωρίες της συγκεκριμένης κατηγορίας διακρίνονται από αρκετά πλεονεκτήματα, διακρίνονται επίσης και από κάποια χαρακτηριστικά που δεν μας ικανοποιούν.

Έτσι, στο υποκεφάλαιο 2.2, θα συνεχίσουμε μελετώντας θεωρίες ασάφειας που δεν είναι αληθοσυναρτησιακές. Θα αναφέρουμε στην αρχή ένα πρόβλημα που από κάποιες απόψεις ίσως είναι παρεμφερές της ασάφειας. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πως μπορεί αυτό να συνδέεται με την ασάφεια και θα θέσουμε ένα γενικό τυπικό πλαίσιο. Βάσει αυτού θα μελετήσουμε τις διάφορες θεωρίες υπερτιμήσεων και τον τρόπο που επιλύουν το παράδοξο του σωρείτη. Στο τέλος του κεφαλαίου, θα εξετάσουμε κάποιες τροποποιήσεις που μπορεί να εισαχθούν προκειμένου να αποφύγουμε κάποια από τα χαρακτηριστικά των θεωριών υπερτιμήσεων που δεν μας ικανοποιούν.

Οδηγούμαστε έτσι στο κεφάλαιο 3, όπου αναπτύσσεται η θεώρηση που η παρούσα διατριβή υποστηρίζει. Βασιζόμενοι σε κάποιες παραδοχές περί της φύσης του φαινομένου της ασάφειας, αναπτύσσουμε ένα είδος θεωρίας υπερτιμήσεων σύμφωνα με το οποίο η σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να μην είναι μεταβατική. Θα διαπιστώσουμε ότι ορισμένες από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούμε εντός της μεταγλώσσας προκειμένου να περιγράψουμε την θεωρία πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ασαφείς. Πρόκειται για κάτι που ίσως χρειαστεί να λάβουμε υπόψη αν αποφασίσουμε να εμπλουτίσουμε την γλώσσα αντικείμενο με εκφράσεις βάσει των οποίων γίνεται να διατυπωθούν προτάσεις που χαρακτηρίζονται από ανώτερα επίπεδα ασάφειας. Χρησιμοποιούμε για αυτό μια ιεραρχία από ασαφείς γλώσσες, η σχετική διαδικασία περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 3.2. Τέλος, επιχειρούμε να εμπλουτίσουμε την προαναφερθείσα ιεραρχία με κάποιες επιπλέον εκφράσεις.

2 Μερικές από τις κυριότερες θεωρίες

2.1 Αληθοσυναρτησιακές θεωρίες

Με βάση την κλασική λογική, η μόνη επιλογή που έχουμε προκειμένου να αποκρούσουμε κάποιο επιχείρημα τύπου σωρείτη είναι να μην δεχτούμε ότι η προκείμενη του επιχειρήματος που εκφράζει ανεκτικότητα είναι αληθής. Έστω για παράδειγμα σωρειτική ακολουθία αντικειμένων α_1, α_2, …, α_{10000} και ασαφές κατηγόρημα 'F', με το α_1 να είναι ξεκάθαρα F ενώ το α_{10000} ξεκάθαρα να μην είναι, και για κάθε ζεύγος διαδοχικών αντικειμένων να ισχύει ότι αυτά διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Αν θεωρήσουμε την επαγωγική μορφή του παραδόξου τότε έπεται ότι θα πρέπει να αρνηθούμε πως η προκείμενη '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$' [11] είναι αληθής, οπότε και έπεται ότι θα είναι αληθής η '$\exists x \sim(Fx \rightarrow Fx+1)$'. Καταλήγουμε άρα ότι υπάρχει ζεύγος διαδοχικών εντός της ακολουθίας αντικειμένων α_i , α_{i+1} τέτοια ώστε να ισχύει πως το α_i είναι F ενώ το α_{i+1}, που εμφανίζεται στην επόμενη θέση εντός της ακολουθίας και άρα διαφέρει ελάχιστα από αυτό ως προς τις σχετικές ιδιότητες, δεν είναι F. Αν θεωρήσουμε την μη επαγωγική μορφή του παραδόξου, τότε θα πρέπει να υποστηρίξουμε ότι κάποια συγκεκριμένη από τις προκείμενες με μορφή συνεπαγωγής δεν είναι αληθής, οπότε και καταλήγουμε πάλι στο αντίστοιχο συμπέρασμα.

Το τελευταίο είναι σίγουρα ένα συμπέρασμα που έρχεται σε σύγκρουση με τις διαισθήσεις μας. Μια επιλογή που φαίνεται εδώ εύλογη είναι να θεωρήσουμε ότι το όλο πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός ότι μία από τις βασικές σημασιολογικές παραδοχές στις οποίες στηρίζεται η κλασική λογική είναι αυτή της δισθενείας. Σύμφωνα με την συγκεκριμένη αρχή, για κάθε πρόταση της γλώσσας θα ισχύει ότι αυτή είναι είτε αληθής, είτε ψευδής. Υπάρχουν μόνο δύο σημασιολογικές τιμές που μπορεί να αποδοθούν στην εκάστοτε πρόταση της γλώσσας, και με βάση τις οποίες περιγράφεται ο τρόπος που αυτή σχετίζεται με τον κόσμο, ανάλογα με το νόημά της και το πώς είναι αυτός διαμορφωμένος. Μπορεί είτε να ισχύει ότι ο κόσμος είναι όπως λέει η πρόταση, είτε αυτό να μην ισχύει. Με βάση την συγκεκριμένη αρχή, έπεται λοιπόν ότι αν μια πρόταση όπως η '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$' δεν

[11] Απλοποιούμε κάπως την μορφή προτάσεων που εκφράζουν ανεκτικότητα και έχουν μορφή καθολικής ποσόδειξης, ακολουθώντας μια σύμβαση που γίνεται συχνά στην βιβλιογραφία περί ασάφειας. Θα ήταν πιο σωστό να είχαμε γράψει πχ $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Fx \rightarrow Fy))$, όπου το σύμβολο 'R' αναφέρεται στον τρόπο που σχετίζονται δύο αντικείμενα αν αυτά εμφανίζονται σε διαδοχικές θέσεις εντός της σχετικής σωρειτικής ακολουθίας, έτσι ώστε αν είναι Rab τότε το a εμφανίζεται εντός της ακολουθίας ενώ το b εμφανίζεται στην αμέσως επόμενη θέση.

είναι αληθής τότε θα πρέπει να είναι ψευδής, και άρα να υπάρχει ζεύγος διαδοχικών αντικειμένων εντός της ακολουθίας τέτοιο ώστε το πρώτο από αυτά είναι F, ενώ το δεύτερο δεν είναι. Στην περίπτωση που βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων όμως, είδαμε πως υπάρχουν προτάσεις που φαίνεται ότι δεν γίνεται να ενταχθούν σε κάποια από τις δύο αυτές κατηγορίες, δεν μπορούν δηλαδή να κατηγοριοποιηθούν ως αληθείς ή ψευδείς. Λαμβάνοντας την τελευταία παρατήρηση τοις μετρητοίς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η αρχή της δισθενείας δεν είναι αληθής όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων, και άρα από το γεγονός ότι μια πρόταση όπως η παραπάνω δεν είναι αληθής δεν δικαιούμαστε να συνάγουμε το συμπέρασμα ότι αυτή είναι ψευδής.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα έναν ομιλητή, που βρίσκεται εμβαπτισμένος σε κάποιο πλαίσιο συζήτησης, και ας υποθέσουμε ότι αυτός γνωρίζει ποιο το νόημα της κατηγορηματικής έκφρασης «το x είναι κόκκινο», καθώς και όλες τις σχετικές πληροφορίες που αφορούν τον τρόπο που είναι διαμορφωμένος ο κόσμος. Του παρουσιάζουμε κάποιο αντικείμενο που είναι οριακή περίπτωση για το συγκεκριμένο κατηγόρημα, και τον ρωτάμε αν αυτό είναι κόκκινο ή όχι. Αν αυτός δεν μπορεί να απαντήσει, φαίνεται φυσιολογικό να υποθέσουμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση τα σχετικά γεγονότα πολύ απλά δεν επαρκούν ώστε να καθοριστεί αν η συγκεκριμένη πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Η τιμή αλήθειας κάποιας πρότασης της γλώσσας καθορίζεται από το νόημά της, και τον τρόπο που είναι διαμορφωμένος ο κόσμος. Αν θέλουμε να αποφύγουμε το συμπέρασμα ότι μπορεί να υπάρχουν σχετικές πληροφορίες στις οποίες δεν είναι καν δυνατό να έχει πρόσβαση κάποιος ομιλητής, και άρα δεχόμαστε ότι όλη η σχετική πληροφορία μπορεί να του είναι διαθέσιμη και παρόλα αυτός να μην μπορεί να δώσει απάντηση, τότε μόνη επιλογή είναι να συμπεράνουμε ότι η σχετική πληροφορία είναι ελλιπής και άρα δεν επαρκεί ώστε να καθοριστεί αν η σχετική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Η πιο προφανής κίνηση που μας μένει σε αυτό το σημείο είναι να αποδεχτούμε την ύπαρξη επιπλέον σημασιολογικών τιμών.

Μια δεύτερη σημασιολογική αρχή στην οποία στηρίζεται η κλασική λογική είναι αυτή της αληθοσυναρτησιακότητας. Σύμφωνα με αυτή, η τιμή αλήθειας της εκάστοτε σύνθετης πρότασης που σχηματίζεται από άλλες απλούστερες προτάσεις μέσω των προτασιακών συνδέσμων καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τις τιμές αλήθειας αυτών των απλούστερων προτάσεων. Δεδομένης της συγκεκριμένης αρχής, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σημασιολογία της γλώσσας του κλασικού προτασιακού λογισμού διέπεται από την δομή <V, D, {Fc: c∈Connective}>, όπου V το σύνολο των σημασιολογικών τιμών που μπορεί να αποδοθούν στις προτάσεις της γλώσσας, με βάση την αρχή της δισθενείας έπεται ότι είναι το σύνολο {T, F}, ενώ D ένα υποσύνολο του V που περιέχει κάποια αντικείμενα τα οποία θεωρούμε κατά μία έννοια προνομιούχα. Πρόκειται για το σύνολο των designated values, των τιμών δηλαδή που θέλουμε να διατηρούνται από το συμπέρασμα ενός επιχειρήματος, εφόσον ισχύει ότι αυτές έχουν αποδοθεί στις προκείμενες, προκειμένου αυτό να θεωρηθεί ως έγκυρο· στην περίπτωση μας είναι το σύνολο {T}. Τέλος {Fc: c∈Connective} είναι το σύνολο των συναρτήσεων αλήθειας που αντιστοιχούν στον εκάστοτε προτασιακό σύνδεσμο της γλώσσας, με τον όρο 'Connective' αναφερόμαστε στο σύνολο που περιέχει τους συγκεκριμένους συνδέσμους. Δεδομένης λοιπόν της αρχής της δισθενείας, έπεται ότι μπορούμε να περιγράψουμε την συμπεριφορά των συναρτήσεων εντός του συνόλου {Fc: c∈Connective} με βάση πίνακες αλήθειας που εξαντλούν όλες τις δυνατές περιπτώσεις, που καθορίζουν δηλαδή την τιμή της εκάστοτε συνάρτησης για κάθε δυνατό όρισμα.

Τώρα, ας θεωρήσουμε ότι οι ασαφείς εκφράσεις της γλώσσας είναι τέτοιες ώστε δεν ισχύει σε κάθε περίπτωση πως η σχετική με το νόημά τους και την δομή του κόσμου πληροφορία επαρκεί προκειμένου να καθοριστεί συγκεκριμένη τιμή αλήθειας για την εκάστοτε πρόταση εντός της οποίας κάποιες από αυτές εμφανίζονται. Θεωρούμε ότι μπορεί ανά περιπτώσεις η σχετική πληροφορία να είναι ελλιπής, και άρα να μην επαρκεί ώστε να προσδιοριστεί κάποια από τις τιμές εντός του συνόλου {T, F} ως η σημασιολογική τιμή της εκάστοτε ασαφούς πρότασης, οπότε η τελευταία δεν θα μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής, ούτε όμως και ως ψευδής. Με βάση αυτές τις παραδοχές έπεται ότι η ορθή σημασιολογία για την ασάφεια δεν θα τηρεί την αρχή της δισθενείας. Παράλληλα, αν εμμείνουμε στην άποψη ότι αυτή θα πρέπει παρόλα αυτά να τηρεί την αρχή της αληθοσυναρτησιακότητας, καταλήγουμε ότι θα πρέπει να διέπεται από κατάλληλα τροποποιημένη δομή <V, D, {Fc: c∈Connective}>, οπότε καλούμαστε να προσδιορίσουμε ποια μπορεί να είναι αυτή. Ως πρώτο βήμα για αυτό πρέπει να προσδιορίσουμε ποιο το σύνολο V. Με βάση τα όσα έχουμε πει θεωρούμε ότι πρόκειται για κάποιο γνήσιο υπερσύνολο του {T, F}, οπότε πρέπει στην συνέχεια να προσδιορίσουμε εκ νέου το σύνολο {Fc: c∈Connective}. Το τελευταίο ζήτημα μπορεί με την σειρά του να απλοποιηθεί αρκετά αν κάνουμε την παραδοχή ότι οι πίνακες αλήθειας της κλασικής λογικής είναι ορθοί για τις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες η σχετική πληροφορία επαρκεί ώστε να καθοριστεί η εκάστοτε υποπρόταση που εμφανίζεται εντός κάποιας σύνθετης πρότασης ως αληθής ή ψευδής. Αυτό γιατί μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ότι οι πίνακες αλήθειας της κλασικής λογικής είναι ελλιπείς αν η γλώσσα περιέχει ασαφείς εκφράσεις, οπότε αυτό που μένει είναι να συμπληρώσουμε κατάλληλα τις περιπτώσεις που αυτοί δεν καλύπτουν.

Όσον αφορά το σύνολο V, απλούστερη επιλογή είναι να θεωρήσουμε ότι αυτό περιέχει μια μόνο επιπλέον σημασιολογική τιμή εκτός των T και F, οπότε επεκτείνοντας εκείνους της κλασικής λογικής, καταλήγουμε στους παρακάτω πίνακες:

A	~A
T	F
F	T

$\wedge$	T		F
T	T		F
F	F		F

$\vee$	T		F
T	T		T
F	T		F

$\rightarrow$	T		F
T	T		F
F	T		T

Καλούμαστε τώρα να συμπληρώσουμε κατάλληλα τις κενές θέσεις που εμφανίζονται σε αυτούς. Αυτό θα πρέπει με την σειρά του να καθοριστεί συναρτήσει του τρόπου με τον οποίο ερμηνεύουμε την επιπλέον σημασιολογική τιμή από φιλοσοφική άποψη. Με βάση τα όσα έχουμε πει, θέτουμε ότι είναι V={T, i, F}, όπου όταν αποδίδουμε σε κάποια πρόταση την τιμή i εννοούμε ότι η τιμή αλήθειας της είναι απροσδιόριστη, η σχετική πληροφορία δεν επαρκεί ώστε αυτή να καθοριστεί ως αληθής, ή ως ψευδής. Τροποποιούμε λοιπόν την σημασιολογική δομή που αντιστοιχείται στην γλώσσα, επεκτείνοντας αρχικά το σύνολο V, παρόλα αυτά επί της ουσίας αντιμετωπίζουμε την σημασιολογική τιμή i όχι ως μια τρίτη τιμή αλήθειας που μπορεί να αποδοθεί στις προτάσεις της γλώσσας, αλλά απλά ως ένα μαθηματικό φορμαλισμό που χρησιμοποιούμε εντός της μεταγλώσσας όταν θέλουμε να πούμε ότι κάποια πρόταση της γλώσσας αντικείμενο απλώς στερείται τιμής αλήθειας.

Ξεκινώντας τώρα από τους πίνακες της σύζευξης και της διάζευξης παρατηρούμε τα εξής. Προκειμένου κάποια πρόταση της μορφής A$\wedge$B να είναι αληθής, πρέπει να είναι αληθής τόσο η πρόταση A όσο και η B, για να είναι όμως ψευδής αρκεί να είναι ψευδής μία από τις A, B. Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε κάποια πρόταση της μορφής A$\vee$B τότε προκειμένου αυτή να είναι αληθής αρκεί να είναι αληθής μία από τις A, B, προκειμένου όμως να είναι ψευδής πρέπει να είναι ψευδής τόσο η A όσο και η B. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να συμπληρώσουμε περαιτέρω τους πίνακες που αντιστοιχούν στους συγκεκριμένους συνδέσμους ως εξής:

$\wedge$	T	i	F
T	T		F
i			F
F	F	F	F

$\vee$	T	i	F
T	T	T	T
i	T		
F	T		F

Μένουν σε αυτό το σημείο τρεις κενές θέσεις στον κάθε πίνακα. Έστω λοιπόν για παράδειγμα μια σύζευξη της μορφής $A \wedge B$, και έστω ότι τόσο η πρόταση A, όσο και η B, είναι οριακές περιπτώσεις. Φαίνεται εύλογο να θεωρήσουμε ότι θα είναι τότε οριακή περίπτωση και η $A \wedge B$. Εξάλλου, μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι αν η σχετική με την τιμή αλήθειας των A και B πληροφορία είναι ελλιπής, τότε αυτή θα μπορεί να συμπληρωθεί με τρόπο ώστε αυτές να καταστούν αληθείς, αλλά θα μπορεί να συμπληρωθεί και με τρόπο ώστε κάποια από αυτές να καταστεί ψευδής, οπότε στην πρώτη από αυτές τις περιπτώσεις η σύζευξη τους θα προκύπτει αληθής, ενώ στην δεύτερη θα προκύπτει ψευδής. Ανάλογα και για την περίπτωση της διάζευξης, οπότε και έπεται το εξής:

$\wedge$	T	i	F
T	T		F
i		i	F
F	F	F	F

$\vee$	T	i	F
T	T	T	T
i	T	i	
F	T		F

Έστω τώρα μια πρόταση της μορφής $A \wedge B$, τέτοια ώστε η A είναι αληθής ενώ η B είναι οριακή περίπτωση. Αν θεωρούμε ότι η διάταξη των σημασιολογικών τιμών είναι $F<i<T$, καθώς και ότι μια σύζευξη όπως η $A \wedge B$ λαμβάνει ως σημασιολογική τιμή την ελάχιστη από τις τιμές των A, B τότε οι κενές θέσεις στον πίνακα της σύζευξης πρέπει να συμπληρωθούν με την τιμή i. Αντίστοιχα, η διάζευξη $A \vee B$ πρέπει να λαμβάνει την μέγιστη από τις τιμές των A, B οπότε και οι κενές θέσεις στον πίνακα της διάζευξης πρέπει να συμπληρωθούν με την τιμή i. Η ίδια επιλογή μπορεί πάντως να δικαιολογηθεί και με βάση τον τρόπο που έχουμε ερμηνεύσει φιλοσοφικά την συγκεκριμένη σημασιολογική τιμή. Η σημασιολογική τιμή i δηλώνει απλά μια κατάσταση ελλιπούς πληροφορίας, οπότε και έπεται από αυτό ότι ενδέχεται αυτή να συμπληρωθεί με τρόπο ώστε η πρόταση να

καταστεί αληθής, αλλά ενδέχεται και να συμπληρωθεί με τρόπο ώστε να καταστεί ψευδής. Έπεται άρα ότι αν θεωρήσουμε μια σύζευξη $A \wedge B$ με την A αληθή και την B οριακή περίπτωση τότε υπάρχει περίπτωση αυτή να καταστεί αληθής, αλλά υπάρχει περίπτωση και να καταστεί ψευδής, ανάλογα με τον τρόπο που θα προσδιοριστεί περαιτέρω η σχετική πληροφορία.

Ανάλογα συμπληρώνουμε και τις κενές θέσεις στον πίνακα της διάζευξης, οπότε καταλήγουμε τελικά στους εξής πίνακες:

∧	T	i	F
T	T	i	F
i	i	i	F
F	F	F	F

∨	T	i	F
T	T	T	T
i	T	i	i
F	T	i	F

Σε αυτό το σημείο έχουν μείνει κενές θέσεις στους πίνακες της άρνησης και της συνεπαγωγής. Όσον αφορά την άρνηση, με βάση την διάταξη των αληθοτιμών φαίνεται εύλογο η κενή θέση του πίνακα να συμπληρωθεί με την τιμή i. Εξάλλου, αν μια πρόταση A έχει την τιμή i τότε η σχετική με την τιμή αλήθειάς της πληροφορία θεωρούμε ότι είναι ελλιπής, και άρα μπορεί να διαμορφωθεί με τρόπο ώστε η A να καταστεί αληθής, οπότε και η άρνησή της θα καταστεί ψευδής, αλλά μπορεί να διαμορφωθεί και με τρόπο ώστε η A να καταστεί ψευδής, οπότε και η άρνησή της θα καταστεί αληθής. Η άρνηση της πρότασης μπορεί λοιπόν να καταστεί είτε αληθής είτε ψευδής αν η σχετική πληροφορία διαμορφωθεί περαιτέρω, οπότε πρέπει να λογίζεται και αυτή ως οριακή περίπτωση. Καταλήγουμε έτσι στον εξής πίνακα για την άρνηση:

A	~A
T	F
i	i
F	T

Έχουν τώρα μείνει τέσσερις κενές θέσεις στον πίνακα της συνεπαγωγής. Με βάση τον κλασικό πίνακα της συνεπαγωγής, διαπιστώνουμε ότι μια συνεπαγωγή της μορφής

A→B λαμβάνει την τιμή T αν και μόνο αν η σημασιολογική τιμή που αποδίδεται στην πρόταση B είναι μεγαλύτερη ή ίση, ως προς την σχετική σχέση διάταξης, από την σημασιολογική τιμή που αποδίδεται στην A. Ένας τρόπος να επεκτείνουμε την ίδια ιδέα και στην περίπτωση μας, και δεδομένου ότι έχουμε θεωρήσει ότι είναι F<i<T, είναι να θέσουμε ότι μια συνεπαγωγή της μορφής A→B θα παίρνει όπως και πριν την τιμή T αν η σημασιολογική τιμή της B είναι μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν της A, θα παίρνει την σημασιολογική τιμή F αν στην A έχει ανατεθεί η T και στην B η F, αλλιώς θα της ανατίθεται η σημασιολογική τιμή i, καταλήγουμε έτσι στον εξής πίνακα:

→	T	i	F
T	T	i	F
i	T	T	i
F	T	T	T

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι αν από την άλλη επιλέξουμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα με βάση την θέση ότι η τιμή i δηλώνει μια έλλειψη σχετικής πληροφορίας, η οποία όμως μπορεί, αναλόγως πως θα διαμορφωθούν οι σχετικές συνθήκες, και να αναιρεθεί, τότε θα πρέπει να αποδώσουμε στην πρόταση A→B την τιμή i όταν οι τιμές των A και B είναι επίσης i. Αυτό γιατί υπάρχει περίπτωση η σχετική πληροφορία να συμπληρωθεί με τρόπο ώστε η A να καταστεί αληθής και η B ψευδής, οπότε και η συνεπαγωγή θα προκύψει ψευδής, αλλά υπάρχει και περίπτωση η σχετική πληροφορία να συμπληρωθεί με άλλους τρόπους, οπότε και η συνεπαγωγή θα προκύψει αληθής. Στην περίπτωση λοιπόν που οι A, B είναι οριακές περιπτώσεις πρέπει με βάση αυτόν τον συλλογισμό να θεωρούμε ως οριακή περίπτωση και την συνεπαγωγή A→B. Καταλήγουμε με αυτόν τον τρόπο σε έναν διαφορετικό πίνακα:

→	T	i	F
T	T	i	F
i	T	i	i
F	T	T	T

Έχουμε σε αυτό το σημείο καθορίσει ως σύνολο V το {T, i, F}, και με βάση τον πίνακα που θα επιλέξουμε ως πίνακα αλήθειας για τον σύνδεσμο της συνεπαγωγής προκύπτουν δύο εναλλακτικές περιπτώσεις για το σύνολο {Fc: c$\in$Connective}. Αν θέσουμε ως σύνολο D το {T}, τότε προκύπτουν δύο διαφορετικές σημασιολογικές δομές <{T, i, F}, {T}, {$F_{\sim}$, $F_{\wedge}$, $F_{\vee}$, $F_{\rightarrow}$}>, που διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς την συνάρτηση $F_{\rightarrow}$. Μια ερμηνεία της γλώσσας, αντιστοιχεί σε κάθε προτασιακή μεταβλητή κάποια από τις τιμές εντός του συνόλου V={T, i, F}, ενώ οι σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων καθορίζονται με αναδρομικό τρόπο από αυτές των υποπροτάσεων που εμφανίζονται σε αυτές, με βάση τις συναρτήσεις εντός του συνόλου {$F_{\sim}$, $F_{\wedge}$, $F_{\vee}$, $F_{\rightarrow}$}. Αν ως συνάρτηση $F_{\rightarrow}$ επιλέξουμε αυτήν που καθορίζεται από τον πρώτο πίνακα αλήθειας, τότε καταλήγουμε στην λογική L3 του Łukasiewicz,[12] αν επιλέξουμε αυτήν που καθορίζεται από τον δεύτερο πίνακα τότε καταλήγουμε στην K3 του Kleene.[13]

Δεδομένου τώρα ότι τα δύο συστήματα διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς την τιμή που αποδίδουν σε προτάσεις της μορφής A$\rightarrow$B όταν τόσο στην A όσο και στην B έχει ανατεθεί η σημασιολογική τιμή i, έπεται ότι αυτά θα έχουν σε μεγάλο βαθμό κοινές ιδιότητες. Διαπιστώνουμε έτσι εύκολα ότι και στα δύο συστήματα, οι νόμοι του αποκλειόμενου τρίτου και της μη αντίφασης θα προκύπτουν μη έγκυροι. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε μια πρόταση A και ερμηνεία που της αποδίδει την σημασιολογική τιμή i, οπότε και διαπιστώνουμε με βάση τους κατάλληλους πίνακες αλήθειας ότι τόσο η πρόταση A$\vee$$\sim$A, όσο και η $\sim$(A$\wedge$$\sim$A) λαμβάνουν επίσης την τιμή i, η οποία δεν είναι μία από τις προνομιούχες τιμές που ανήκουν εντός του D.

Βέβαια, θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι το γεγονός πως βασικοί νόμοι της κλασικής λογικής, όπως αυτοί του αποκλειόμενου τρίτου και της μη αντίφασης,

---

[12] O Łukasiewicz φαίνεται ότι είναι ο πρώτος που θα μιλήσει για συστήματα λογικής που δέχονται παραπάνω από δύο τιμές αλήθειας, περιγράφει το σύστημα L3 στο άρθρο του O logice trójwartościowej. Ruch filozoficzny 5:170–171 (1920). Όπως γράφει στο βιβλίο του 'Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic', Oxford University Press, σελίδα 205: «Aristotle tacitly accepted the logical principle of bivalence, i.e the principle that every proposition is either true or false, […] .Discussing the contingency of a future sea battle he comes very near to the conception of a many valued logic, but he lays no stress on this great idea, and for many centuries his suggestion remained fruitless. Owing to Aristotle i was able to discover this idea in 1920 and to construct the first many valued system of logic, in opposition to the logic, hitherto known, which I called 'two valued logic' thus introducing a term now commonly accepted by logicians».
Το 1920 πάντως, θα διατυπώσει και θα μελετήσει ένα σύστημα λογικής τριών σημασιολογικών τιμών και ο Emil Post, στο άρθρο του 'Introduction to a General Theory of Elementary Propositions', Post [1920].

[13] O Kleene περιγράφει για πρώτη φορά το σύστημα K3 στο άρθρο του 'On notation for ordinal numbers' , Kleene [1938]. Το περιγράφει και πάλι στο γνωστό βιβλίο του 'Introduction to Meta-Mathematics', στο κεφάλαιο 12, που έχει τίτλο 'Partial Recursive Functions'.

προκύπτουν μη έγκυροι είναι μειονέκτημα των δύο θεωριών. Θεωρώ όμως ότι αυτό δεν είναι κάτι που μπορεί να εκληφθεί ως μειονέκτημα για τα δύο συστήματα, από το γεγονός ότι οι δύο αυτοί νόμοι προκύπτουν έγκυροι όταν βρισκόμαστε εντός του πεδίου εφαρμογής της κλασικής λογικής δεν έπεται ότι αυτοί θα είναι έγκυροι και σε περιπτώσεις που η σχετική πληροφορία δεν επαρκεί ώστε να καθοριστούν τιμές αλήθειας για κάθε πρόταση της γλώσσας, και εν πάση περιπτώσει προτάσεις που έχουν μια από τις συγκεκριμένες μορφές δεν θα προκύψουν ποτέ ψευδείς, στην χειρότερη περίπτωση μπορεί να προκύψουν απροσδιόριστες.

Παρόλα αυτά, αν λάβουμε υπόψη τους λόγους που έχουν παρακινήσει το κάθε σύστημα, και τον τρόπο που καταλήξαμε στους πίνακες αλήθειας της εκάστοτε συνάρτησης αλήθειας τότε φαίνεται πως οι συγκεκριμένοι νόμοι θα έπρεπε κανονικά να προκύπτουν έγκυροι. Στην περίπτωση της λογικής K3 για παράδειγμα, θεωρήσαμε ότι η σημασιολογική τιμή i δεν είναι απλώς μια τρίτη τιμή αλήθειας που μπορεί να χαρακτηρίζει κάποια πρόταση της γλώσσας, αλλά αντιστοιχεί στο γεγονός ότι η σχετική πληροφορία, όσον αφορά το νόημα της έκφρασης και τον τρόπο που είναι διαμορφωμένος ο κόσμος, πολύ απλά δεν επαρκεί ώστε να καθοριστεί αν αυτή είναι αληθής ή ψευδής.[14] Πολύ απλά δεν υπάρχει σχετικό Matter of fact, οπότε και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια πληθώρα τρόπων με βάση τους οποίους η σχετική πληροφορία μπορεί να καθοριστεί περαιτέρω. Όμως, όπως και αν αυτό συμβεί, φαίνεται πως οι συγκεκριμένες προτάσεις θα έπρεπε να προκύπτουν αληθείς. Έστω πάλι η πρόταση A, στην οποία αποδίδεται η σημασιολογική τιμή i, έπεται ότι η σχετική πληροφορία δεν επαρκεί για να καθοριστεί αν αυτή είναι αληθής ή ψευδής. Έστω όμως ότι αυτή διαμορφώνεται με τρόπο ώστε η πρόταση να καταστεί αληθής, η άρνησή της θα είναι τότε ψευδής, και άρα η πρόταση $A\vee\sim A$, καθώς και η $\sim(A\wedge\sim A)$ θα προκύπτουν αληθείς. Έστω από την άλλη ότι η σχετική πληροφορία διαμορφώνεται με τρόπο που καθιστά την A ψευδή. Η άρνηση της θα είναι τότε αληθής, και άρα οι προτάσεις $A\vee\sim A$ και $\sim(A\wedge\sim A)$ θα προκύπτουν και πάλι αληθείς. Το πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός ότι οι πίνακες αλήθειας που έχουμε καθορίσει αντιμετωπίζουν διαφορετικές εμφανίσεις της ίδιας πρότασης εντός κάποιας σύνθετης πρότασης που την περιέχει ως να ήταν ανεξάρτητες μεταξύ τους, οπότε και μια πρόταση της μορφής $A\vee\sim A$ αντιμετωπίζεται επί της ουσίας με τον ίδιο τρόπο όπως και η $A\vee\sim B$, ενώ αντίστοιχα η $\sim(A\wedge\sim A)$ αντιμετωπίζεται όπως και η $\sim(A\wedge\sim B)$.

[14] Με αυτόν τον τρόπο θα ερμηνεύσει το σύστημα K3 ο Stephan Korner, προκειμένου να το εφαρμόσει και να το προτείνει ως την ορθή σημασιολογική θεωρία για την ασάφεια, σε μια σειρά από δημοσιεύσεις του, κυριότερη από τις οποίες είναι το βιβλίο του με τίτλο 'Experience and Theory: An essay in the philosophy of science', Korner [1966].

Πως αντιμετωπίζουν τα δύο συστήματα το παράδοξο του σωρείτη; Έστω σωρειτική ακολουθία αντικειμένων $α_1$, $α_2$, …, $α_{10000}$ ως προς το κατηγόρημα F, όπου το $α_1$ είναι ξεκάθαρα F, ενώ το $α_{10000}$ ξεκάθαρα δεν είναι. Και έστω ερμηνεία που αντιστοιχεί στις προτάσεις Fa_1 με Fa_{4000} την τιμή T, στις προτάσεις Fa_{6000} με Fa_{10000} την τιμή F, ενώ στις Fa_{4001} με Fa_{5999} αντιστοιχεί την σημασιολογική τιμή i. Εφόσον έχουμε περιγράψει τα δύο συστήματα μόνο στο προτασιακό επίπεδο αντιμετωπίζουμε τα σύμβολα Fa_1 με Fa_{10000} ως προτασιακές μεταβλητές, θεωρούμε πως το εκάστοτε σύμβολο Fa_n μεταφράζεται εντός της φυσικής γλώσσας ως η πρόταση «το αντικείμενο που βρίσκεται στην θέση n της ακολουθίας είναι F». Ας εξετάσουμε πως αντιμετωπίζουν τα δύο συστήματα τις προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα. Έπεται με βάση τα όσα έχουμε πει ότι και για τα δύο συστήματα, οι προτάσεις $Fa_1 \rightarrow Fa_2$, $Fa_2 \rightarrow Fa_3$, …, $Fa_{3999} \rightarrow Fa_{4000}$ θα προκύπτουν αληθείς. Το ίδιο θα ισχύει και για τις $Fa_{6000} \rightarrow Fa_{6001}$, $Fa_{6001} \rightarrow Fa_{6002}$, …, $Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000}$. Όσον αφορά εκείνες από τις προτάσεις όπου μία από τις υποπροτάσεις έχει λάβει την σημασιολογική τιμή i, διαπιστώνουμε ότι και στα δύο συστήματα οι $Fa_{4000} \rightarrow Fa_{4001}$ και $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{6000}$ λαμβάνουν την τιμή i. Τα δύο συστήματα διαφωνούν όμως μεταξύ τους ως προς τις σημασιολογικές τιμές που αναθέτουν στις προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα για τις οποίες ισχύει ότι κάθε μία από τις υποπροτάσεις που εμφανίζονται σε αυτές λαμβάνουν την τιμή i. Έτσι, ενώ η K3 αναθέτει στις προτάσεις $Fa_{4002} \rightarrow Fa_{4003}$, $Fa_{4003} \rightarrow Fa_{4004}$, …, $Fa_{5998} \rightarrow Fa_{5999}$ την σημασιολογική τιμή i, η L3 θα τους αναθέτει την τιμή T. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σύστημα L3 αναθέτει σημασιολογικές τιμές στις προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα με τρόπο που δεν φαίνεται φυσιολογικός. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία προτάσεων $Fa_1 \rightarrow Fa_2$, $Fa_2 \rightarrow Fa_3$, …, $Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000}$, τότε θα αναθέτει στις πρώτες από αυτές την τιμή T, στην $Fa_{4000} \rightarrow Fa_{4001}$ την τιμή i, στις επόμενες θα αναθέτει και πάλι την τιμή T, στην $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{6000}$ θα αναθέτει την i, και στις επόμενες θα αναθέτει πάλι την τιμή T. Για κάθε ερμηνεία, θα ισχύει ότι όλες οι προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα εκτός από δύο θα είναι αληθείς. Ο τρόπος που αντιμετωπίζει τις συγκεκριμένες προτάσεις φαίνεται λοιπόν περίεργος, οπότε και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το συγκεκριμένο σύστημα είναι μάλλον ακατάλληλο για την περίπτωση της ασάφειας. Από την άλλη, η K3 αντιμετωπίζει τις συγκεκριμένες προτάσεις με τρόπο που φαίνεται φυσιολογικός, από τις $Fa_1 \rightarrow Fa_2$, $Fa_2 \rightarrow Fa_3$, …, $Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000}$, οι πρώτες θα είναι αληθείς, οι ενδιάμεσες θα λαμβάνουν την τιμή i, και οι τελευταίες θα προκύπτουν πάλι αληθείς. Τέλος, έπεται αμέσως από τους πίνακες αλήθειας ότι και στα δύο συστήματα ο κανόνας modus ponens προκύπτει έγκυρος, και εφόσον είναι D={1} η σχέση της λογικής συνεπαγωγής είναι μεταβατική. Καταλήγουμε λοιπόν ότι και για τα δύο συστήματα, ένα επιχείρημα τύπου σωρείτη θα είναι μεν έγκυρο, αλλά δεν θα είναι ορθό. Αυτό γιατί κάποιες από τις προκείμενες που εμφανίζονται σε αυτό δεν λαμβάνουν ως σημασιολογική τιμή την προνομιούχα τιμή εντός του συνόλου D.

Τώρα, ένας απλός τρόπος ώστε να επεκτείνουμε τα δύο συστήματα και για την περίπτωση μιας πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής γλώσσας, είναι να αντιμετωπίσουμε τις προτάσεις με μορφή $\forall xAx$ που περιλαμβάνουν καθολική ποσόδειξη ως ένα είδος σύζευξης, και τις προτάσεις της μορφής $\exists xAx$ που περιλαμβάνουν υπαρκτική ποσόδειξη ως ένα είδος διάζευξης. Όσον αφορά λοιπόν την επαγωγική μορφή του παραδόξου, έπεται με βάση τα όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι η πρόταση $Fa_1 \rightarrow Fa_2 \wedge Fa_2 \rightarrow Fa_3 \wedge \ldots \wedge Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000}$ θα προκύπτει απροσδιόριστη. Αν λοιπόν θεωρήσουμε, για λόγους ευκολίας, ότι πεδίο δράσης των ποσοδεικτών είναι μόνο τα αντικείμενα της σωρειτικής ακολουθίας, καταλήγουμε ότι θα προκύπτει απροσδιόριστη και η πρόταση $\forall x(F_x \rightarrow F_{x+1})$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και η επαγωγική μορφή του επιχειρήματος θα προκύπτει μη ορθή.

Επιπλέον, βλέπουμε ότι μπορούμε με βάση και τα δύο συστήματα να δώσουμε μια εξήγηση γιατί τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη, παρότι δεν είναι ορθά, μας φαίνονται τόσο επιβλητικά από διαισθητική άποψη, και γιατί οι ομιλητές έχουν την τάση να δέχονται τις προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα ως αληθείς. Το επιχείρημα μπορεί να μην είναι ορθό, παρόλα αυτά καμία από τις προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα δεν είναι ψευδής. Όλες είναι είτε αληθείς, είτε λαμβάνουν την σημασιολογική τιμή i.

Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι οι δύο θεωρίες έχουν καλή συμπεριφορά και όσον αφορά τον τρόπο που αντιμετωπίζουν προτάσεις από τις οποίες συνεπάγεται ότι υπάρχουν σαφή όρια εντός της σωρειτικής ακολουθίας. Αν εξετάσουμε τις προτάσεις $Fa_1 \wedge \sim Fa_2$, $Fa_2 \wedge \sim Fa_3$, $Fa_3 \wedge \sim Fa_4$, …., $Fa_{9999} \wedge \sim Fa_{10000}$, τότε παρατηρούμε ότι με βάση την ερμηνεία που έχουμε θεωρήσει, οι προτάσεις $Fa_1 \wedge \sim Fa_2$, $Fa_2 \wedge \sim Fa_3$, …, $Fa_{3999} \wedge \sim Fa_{4000}$, καθώς και οι $Fa_{6000} \wedge \sim Fa_{6001}$, $Fa_{6001} \wedge \sim Fa_{6002}$, …, $Fa_{9999} \wedge \sim Fa_{10000}$ θα προκύπτουν ψευδείς, ενώ για τις $Fa_{4000} \wedge \sim Fa_{4001}$, $Fa_{4001} \wedge \sim Fa_{4002}$, …, $Fa_{5999} \wedge \sim Fa_{6000}$, θα προκύπτει ότι η τιμή αλήθειας τους είναι απροσδιόριστη. Ισχύουν και εδώ οι παρατηρήσεις που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο για τις προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα. Οι προτάσεις της μορφής $Fa_n \rightarrow Fa_{n+1}$, όπου $n \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$, για τις οποίες προκύπτει ότι η τιμή αλήθειας είναι απροσδιόριστη είναι τέτοιες ώστε μπορεί να προκύψουν αληθείς, αλλά μπορεί να προκύψουν και ψευδείς, ανάλογα με τον τρόπο που θα συμπληρωθεί η σχετική πληροφορία. Αληθείς θα προκύπτουν οι προτάσεις $Fa_{4000} \wedge \sim Fa_{6000}$, $Fa_{4000} \wedge \sim Fa_{6001}$,

$Fa_{3999} \wedge \sim Fa_{6000}$, $Fa_{3999} \wedge \sim Fa_{6001}$, κτλ. Αντίστοιχα, από τις προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα ψευδείς θα προκύπτουν προτάσεις όπως οι $Fa_{4000} \rightarrow Fa_{6000}$, $Fa_{4000} \rightarrow Fa_{6001}$, $Fa_{3999} \rightarrow Fa_{6000}$, $Fa_{3999} \rightarrow Fa_{6001}$ κτλ. Τέλος, εύκολα διαπιστώνουμε ότι θα προκύπτει ότι είναι απροσδιόριστη και η τιμή αλήθειας της πρότασης $(Fa_1 \wedge \sim Fa_2) \vee (Fa_2 \wedge \sim Fa_3) \vee \ldots . \vee (Fa_{9999} \wedge \sim Fa_{10000})$. Αυτό γιατί κάποιες από τις υποπροτάσεις που συνδέονται μέσω διάζευξης θα είναι ψευδείς, ενώ οι υπόλοιπες θα είναι απροσδιόριστες.

Άλλα χαρακτηριστικά των δύο συστημάτων που αξίζει να αναφερθούν, είναι ότι καμιά πρόταση της γλώσσας δεν προκύπτει λογικά αληθής σύμφωνα με το Κ3, καθώς και ότι σύμφωνα και με τα δύο συστήματα ισχύει ότι κάθε πρόταση είναι λογική συνέπεια μιας αντίφασης. Όσον αφορά το πρώτο, μια συνέπεια είναι ότι ο σύνδεσμος της συνεπαγωγής του Κ3 προκύπτει πολύ ασθενής. Για παράδειγμα, ακόμη και προτάσεις της μορφής $A \rightarrow A$ δεν προκύπτουν λογικά αληθείς. Επιπλέον, για έγκυρο επιχείρημα της μορφής Π_1, Π_2, …, $\Pi_v \vDash \Sigma$ δεν θα ισχύει ότι είναι λογικά αληθής η πρόταση $\Pi_1 \wedge \Pi_2 \wedge \ldots \wedge \Pi_v \rightarrow \Sigma$. Προφανώς ο μετακανόνας deduction theorem δεν προκύπτει έγκυρος, αφού αν θεωρήσουμε μια πρόταση Α με σημασιολογική τιμή i τότε το επιχείρημα $A \vDash A$ προκύπτει έγκυρο, ενώ η πρόταση $A \rightarrow A$ δεν προκύπτει αληθής.

Αυτά τα χαρακτηριστικά διορθώνονται κάπως αν προτιμήσουμε να ορίσουμε τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις με μορφή $A \rightarrow B$ με βάση τον πίνακα του συστήματος L3, οπότε πλέον προτάσεις της μορφής $A \rightarrow A$ θα προκύπτουν λογικά αληθείς. Επιπλέον, θα προκύπτουν τώρα λογικά αληθείς και προτάσεις όπως η “$\sim\sim A \rightarrow A$”, καθώς και οι νόμοι de morgan διατυπωμένοι με μορφή συνεπαγωγής, προτάσεις που δεν είναι λογικά αληθείς σύμφωνα με το Κ3. Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι το L3 έχει έναν κάπως πιο ισχυρό σύνδεσμο συνεπαγωγής δεν είναι και χωρίς κάποιο κόστος, αφού όπως διαπιστώσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αυτό δεν αντιμετωπίζει με τρόπο που φαίνεται φυσιολογικός τις προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα. Πράγματι, φαίνεται δύσκολο να δικαιολογηθεί από φιλοσοφική άποψη το πώς μπορεί σε μια σωρειτική ακολουθία όπως αυτή που θεωρήσαμε πιο πάνω, κάθε φορά όλες οι προτάσεις της μορφής $Fa_n \rightarrow Fa_{n+1}$, όπου $n \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$, να προκύπτουν αληθείς, εκτός από δύο που προκύπτουν απροσδιόριστες.

Τέλος, όπως είδαμε ισχύει και για τα δύο συστήματα ότι αυτά δεν είναι δισθενή, επιπλέον, ο νόμος του αποκλειόμενου τρίτου δεν προκύπτει έγκυρος σε κάποιο από αυτά, αφού σε κάποια μοντέλα θα υπάρχουν προτάσεις της μορφής $A \vee \sim A$ που δεν προκύπτουν αληθείς. Από την άλλη, ενώ δεν προκύπτει έγκυρος ούτε ο νόμος της μη αντίφασης, θα προκύπτει έγκυρος ο κανόνας της έκρηξης. Με άλλα λόγια για προτάσεις A, B θα είναι $A\wedge\sim A\vDash B$. Πράγματι, θα ισχύει ότι $A\wedge\sim A\vDash B$ αν και μόνο αν για κάθε μοντέλο, αν ισχύει ότι η πρόταση $A\wedge\sim A$ λαμβάνει την τιμή εντός του D, τότε θα ισχύει ότι και η B λαμβάνει την ίδια τιμή. Με βάση όμως τους πίνακες αλήθειας των δύο συστημάτων διαπιστώνουμε εύκολα ότι μια πρόταση της μορφής $A\wedge\sim A$ δεν μπορεί ποτέ να προκύψει αληθής. Καταλήγουμε έτσι ότι η συνεπαγωγή της μεταγλώσσας «αν ισχύει ότι η πρόταση $A\wedge\sim A$ λαμβάνει την τιμή εντός του D, τότε θα ισχύει ότι και η B λαμβάνει την ίδια τιμή» προκύπτει αληθής, και άρα όντως θα είναι $A\wedge\sim A\vDash B$.

Τώρα, μια κριτική που ασκείται συχνά σε συστήματα όπως τα K3 και L3, είναι ότι αυτά επιβάλλουν πολύ ισχυρά δομικά χαρακτηριστικά όσον αφορά τον τρόπο που προτάσεις της γλώσσας διαμερίζονται σε αυτές που είναι αληθείς, αυτές που είναι απροσδιόριστες, και αυτές που είναι ψευδείς. Μια άλλη παρεμφερής κριτική είναι ότι ακόμη και για συστήματα όπως τα συγκεκριμένα, το σημασιολογικό τμήμα της θεωρίας κατά μία έννοια τελικά παραμένει δισθενές, αφού οι σημασιολογικές τιμές που μπορούν να αποδοθούν στις προτάσεις της γλώσσας μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, δηλαδή σε αυτές που ανήκουν στο σύνολο D και σε αυτές που δεν ανήκουν σε αυτό. Μπορούμε άρα κατά κάποιον τρόπο και πάλι να θεωρήσουμε ότι σε κάθε πρόταση της γλώσσας αποδίδεται μία εκ δύο αληθοτιμών. Για ερμηνεία της γλώσσας και πρόταση A, θα ισχύει είτε ότι η A λαμβάνει σημασιολογική τιμή που ανήκει στο D, είτε όχι.

Όσον αφορά το σύστημα K3, θεωρώ ότι και οι δύο αυτές κριτικές είναι άστοχες. Είναι αλήθεια ότι μια ερμηνεία της γλώσσας με βάση κάποια σημασιολογική θεωρία όπως αυτή του K3 θα διαμερίζει τις προτάσεις σε αληθείς, ψευδείς και απροσδιόριστες. Αν θεωρήσουμε και πάλι το παράδειγμα σωρειτικής ακολουθίας και ερμηνείας της γλώσσας που δώσαμε πιο πριν, τότε από τις ατομικές προτάσεις της γλώσσας οι Fa_1, Fa_2, …, Fa_{4000} κατατάσσονται ως αληθείς, οι Fa_{4001}, Fa_{4002}, …, Fa_{5999} απροσδιόριστες, και οι Fa_{6000}, Fa_{6001}, …, Fa_{10000} ψευδείς. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται λοιπόν ότι υιοθετώντας την συγκεκριμένη σημασιολογία το τελικό αποτέλεσμα ήταν απλά να αντικαταστήσουμε το ένα σαφές όριο που θα επέβαλε μια κλασική σημασιολογική θεωρία με δύο σαφή όρια. Παρόλα αυτά, θεωρώ ότι το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό είναι κάτι που μπορεί να δικαιολογηθεί κατάλληλα με βάση το φιλοσοφικό κομμάτι της θεωρίας.

Έχουμε μέχρι αυτό το σημείο θεωρήσει ότι η σημασιολογική τιμή i πρέπει να ερμηνεύεται όχι ως μια τρίτη τιμή αλήθειας, αλλά ως μια κατά κάποιον τρόπο προσωρινή σημασιολογική κατάσταση που δηλώνει ότι η σχετική πληροφορία δεν επαρκεί για να καθοριστεί αν η εκάστοτε πρόταση στην οποία αυτή αποδίδεται είναι αληθής ή ψευδής. Μπορούμε όμως να τροποποιήσουμε την συγκεκριμένη φιλοσοφική θεώρηση, θέτοντας ότι μέρος της σχετικής πληροφορίας είναι και οι προθέσεις των ομιλητών εντός του τρέχοντος πλαισίου συζήτησης. Κατ' αυτόν τον τρόπο έπεται ότι η θεωρία δεν αφορά απλά προτάσεις της γλώσσας, αλλά εκφορές αυτών εντός κάποιου συγκεκριμένου πλαισίου συζήτησης. Οι ομιλητές εκλέγουν ορισμένες περιπτώσεις ως αληθείς, ορισμένες ως ψευδείς, ενώ για τις υπόλοιπες αφήνουν το ζήτημα ανοικτό, οπότε και ανάλογα πως θα εξελιχθεί η συζήτηση μπορεί αν χρειαστεί να αποφανθούν για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις, να τις εκλέξουν ως αληθείς ή ως ψευδείς. Για παράδειγμα, εντός κάποιου πλαισίου συζήτησης οι ομιλητές μπορεί να έχουν εκλέξει ως πενταγωνικού σχήματος μέχρι και αντικείμενα όπως η Γαλλία, ενώ κάποια άλλα αντικείμενα ως μη πενταγωνικού σχήματος, και για τα υπόλοιπα απλά έχουν αφήσει το ζήτημα ανοικτό. Εντός κάποιου άλλου πλαισίου η πρόθεσή τους μπορεί να είναι να μιλήσουν με μεγαλύτερη αυστηρότητα, οπότε αντικείμενα όπως η Γαλλία θα εκλεγούν τώρα ως μη πενταγωνικού σχήματος, κάποια άλλα θα εκλεγούν ως πενταγωνικού, ενώ για τα υπόλοιπα το ζήτημα πολύ απλά αφήνεται ανοικτό. Οι τιμές αλήθειας που αντιστοιχούν στην εκάστοτε σύνθετη πρόταση υπολογίζονται κάθε φορά με βάση τους πίνακες αλήθειας που έχουμε ορίσει. Αν η προσοχή των ομιλητών επικεντρωθεί σε κάποιο αντικείμενο για το οποίο έχουν αφήσει το ζήτημα ανοικτό, αυτοί δεν πρόκειται πάντα να επιμείνουν ότι αυτό δεν είναι τίποτα από τα δύο, αλλά μπορεί να τροποποιήσουν την εκλογή τους εντάσσοντάς το σε μία από τις δύο διαθέσιμες κατηγορίες, οπότε και καθορίζονται εκ νέου τιμές αλήθειας για τις σύνθετες προτάσεις της γλώσσας με βάση τους συγκεκριμένους πίνακες αλήθειας.[15] Μάλιστα, μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι αν κάποια πρόταση προέκυπτε αληθής ή ψευδής με βάση την αρχική εκλογή, τότε αυτή θα προκύπτει και με τη νέα εκλογή αληθής ή ψευδής αντίστοιχα. Θεωρώ ότι με βάση τη συγκεκριμένη θεώρηση δεν προκύπτει πραγματικά κάποιο όριο μεταξύ αληθών και απροσδιόριστων, ή απροσδιόριστων και ψευδών προτάσεων, κατά τρόπο παρόμοιο που δεν θέτει όρια ένας ομιλητής που απλά εκλέγει εντός κάποιου πλαισίου ορισμένα αντικείμενα ως πχ κόκκινα, ορισμένα άλλα ως μη κόκκινα ενώ για τα υπόλοιπα αφήνει το ζήτημα ανοικτό. Το όλο ζήτημα προκύπτει από το γεγονός ότι περιγράφουμε την συμπεριφορά των ομιλητών εντός κάποιας σαφούς μεταγλώσσας.

[15] Πρόκειται για μια θεώρηση που είναι παρεμφερής αυτής που αναπτύσσει ο Scott Soames στο έβδομο κεφάλαιο του βιβλίου 'Understanding Truth', Soames [1999]. Απαριθμεί τις βασικές θέσεις της θεωρίας του στην σελίδα 209.

Όσον αφορά την δεύτερη από τις κριτικές που εξετάσαμε, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι αυτό είναι κάτι που μπορεί να υποστηριχθεί ως μειονέκτημα για κάθε σημασιολογική θεωρία που δέχεται παραπάνω από δύο σημασιολογικές τιμές. Επί της ουσίας το όλο θέμα ανάγεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούμε μια κλασική μεταγλώσσα προκειμένου να διατυπώσουμε τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις της γλώσσας αντικείμενο, οπότε μπορούμε εντός αυτής να διαχωρίσουμε μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας αντικείμενο που είναι αληθείς, και αυτών που δεν είναι. Θεωρώ όμως ότι η συγκεκριμένη κριτική είναι υπερβολική, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι χρησιμοποιούμε την κλασική μεταγλώσσα απλά ως εργαλείο προκειμένου να περιγράψουμε κάποια κατάλληλη δομή μέσω της οποίας μοντελοποιούμε τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις της γλώσσας, κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν που μια θεωρία φυσικής μοντελοποιεί κάποιο φυσικό φαινόμενο. Όπως λοιπόν δεν έπεται ότι κάθε συνέπεια της φυσικής θεωρίας θα έχει νόημα και από φυσική άποψη, δεν έπεται και ότι κάθε χαρακτηριστικό της δομής που χρησιμοποιούμε προκειμένου να περιγράψουμε τα σημασιολογικά γνωρίσματα της γλώσσας θα αντιστοιχεί σε πραγματικά γνωρίσματα της γλώσσας αντικείμενο. Η κλασσική μεταγλώσσα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος βολικής υπεραπλούστευσης, στην οποία καταφεύγουμε προκειμένου να διατυπώσουμε το σημασιολογικό τμήμα της θεωρίας. Από τον τρόπο που δικαιολογούμε φιλοσοφικά το πώς διατυπώνουμε την σημασιολογική θεωρία έπεται στην συνέχεια ποια από τα χαρακτηριστικά της είναι σχετικά με το νόημα των ασαφών εκφράσεων, και ποια όχι.

Ένα άλλο σύστημα που παρουσιάζει ενδιαφέρον, και το οποίο προκύπτει από την σημασιολογική δομή $<V, D, \{Fc: c \in \text{Connective}\}>$ του συστήματος K3 αν θέσουμε $D=\{T, i\}$ αντί για $D=\{T\}$, είναι το σύστημα LP (Logic of Paradox), του Graham Priest.[16] Το συγκεκριμένο σύστημα βασίζεται λοιπόν στην δομή $<\{T, i, F\}, \{T, i\}, \{F_{\sim}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}\}>$, όπου οι συναρτήσεις αλήθειας εντός του $\{F_{\sim}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}\}$ είναι αυτές του K3. Εφόσον οι πίνακες αλήθειας παραμένουν οι ίδιοι με του K3, έπεται και εδώ ότι για πρόταση A, η $A \vee \sim A$ και η

[16] Ο Graham Priest θα περιγράψει το σύστημα LP, ή αλλιώς Logic of Paradox, σε μια σειρά από δημοσιεύσεις, κύριες εκ των οποίων είναι το βιβλίο 'In contradiction', στο οποίο περιγράφει το σύστημα LP με βάση την σημασιολογική θεωρία για το σύστημα First Degree Entailment, καθώς και το βιβλίο 'Beyond the Limits of Thought'. Ο Priest θα υποστηρίξει σε αυτά την άποψη ότι κάποιες αντιφάσεις είναι αληθείς, και θα βασιστεί σε αυτό προκειμένου να προτείνει έναν συγκεκριμένο τρόπο αντιμετώπισης των σημασιολογικών και συνολοθεωρητικών παραδόξων. Επίσης, σε μια σειρά από άρθρα, κυριότερα εκ των οποίων είναι το 'Logic of Paradox', Priest [1979] και 'Logic of Paradox revisited', Priest [1984]. Στο συγκεκριμένο σύστημα ως την ορθή σημασιολογική θεωρία για τις ασαφείς εκφράσεις θα αναφερθεί στο άρθρο του 'Inclosures, Vagueness, and Self-Reference', Priest [2010].

$\sim(A\wedge\sim A)$ μπορεί να προκύψουν απροσδιόριστες. Παρόλα αυτά, μια διαφορά είναι ότι δεν ισχύει εδώ ο νόμος της έκρηξης, δεν ισχύει δηλαδή ότι για προτάσεις A, B θα είναι $A\wedge\sim A\vDash B$. Αυτό γιατί αν θεωρήσουμε ερμηνεία της γλώσσας που αναθέτει στην πρόταση A την σημασιολογική τιμή i ενώ κατατάσσει την B ως ψευδή, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η προκείμενη $A\wedge\sim A$ θα λάβει επίσης την τιμή i, οπότε και έπεται ότι υπάρχει περίπτωση η προκείμενη του επιχειρήματος να λάβει την προνομιούχα τιμή εντός του D και το συμπέρασμα όχι. Καταλήγουμε λοιπόν ότι τα επιχειρήματα της μορφής $A\wedge\sim A\vDash B$ δεν είναι έγκυρα σύμφωνα με το LP. Από μία αντίφαση δεν έπεται οτιδήποτε, και άρα πρόκειται για ένα paraconsistent σύστημα.

Πρέπει όμως τώρα να τροποποιηθεί ανάλογα και ο τρόπος που ερμηνεύουμε την σημασιολογική τιμή i, ώστε αυτός να είναι συμβατός με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του LP. Μια δυνατότητα είναι να θεωρήσουμε ότι το γεγονός πως κάποια πρόταση λαμβάνει την συγκεκριμένη σημασιολογική τιμή σημαίνει τώρα όχι ότι η σχετική με την αληθοτιμή της πληροφορία είναι υποκαθορισμένη, όπως στην περίπτωση του K3, αλλά υπερκαθορισμένη. Με άλλα λόγια, η σχετική πληροφορία επαρκεί για να ταξινομηθεί η συγκεκριμένη πρόταση ως αληθής, αλλά ταυτόχρονα επαρκεί και για να ταξινομηθεί ως ψευδής. Η επιλογή των συγκεκριμένων πινάκων αλήθειας δικαιολογείται και πάλι με τρόπο παρόμοιο όπως και για την περίπτωση του K3. Πιο συγκεκριμένα, προτάσεις που λαμβάνουν την τιμή i είναι και αληθείς και ψευδείς, οπότε και εξετάζουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιλυθεί η προκύπτουσα αντίφαση. Αν μια πρόταση είναι αληθής και ψευδής, τότε η σχετική πληροφορία είναι υπερκαθορισμένη, οπότε επιλύοντας κατάλληλα τις όποιες αντιφάσεις αυτή μπορεί τελικά να καταστεί απλώς αληθής, αλλά μπορεί και να καταστεί απλώς ψευδής.

Πως αντιμετωπίζει η συγκεκριμένη θεωρία το παράδοξο; Ας θεωρήσουμε και πάλι την σωρειτική ακολουθία a_1, a_2, …, a_{10000} ως προς το κατηγόρημα F, και έστω ερμηνεία της γλώσσας που αναθέτει την τιμή T στις προτάσεις Fa_1, Fa_2, …, Fa_{4000}, την τιμή i στις Fa_{4001}, Fa_{4002}, …, Fa_{5999}, και την τιμή F στις Fa_{6000}, Fa_{6001}, …, Fa_{10000}. Οι προτάσεις Fa_{4001}, Fa_{4002}, …, Fa_{5999} είναι λοιπόν αληθείς, αλλά διαφέρουν από τις Fa_{4001}, Fa_{4002}, …, Fa_{5999} αφού είναι και ψευδείς, και άρα δεν είναι απλώς αληθείς. Αν θεωρήσουμε την μη επαγωγική μορφή του παραδόξου, τότε βλέπουμε ότι όπως και στην περίπτωση του K3, από τις προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα, οι $Fa_1\rightarrow Fa_2$, $Fa_2\rightarrow Fa_3$, …, $Fa_{3999}\rightarrow Fa_{4000}$ θα λαμβάνουν την τιμή T, οι $Fa_{4000}\rightarrow Fa_{4001}$, $Fa_{4001}\rightarrow Fa_{4002}$, …, $Fa_{5999}\rightarrow Fa_{6000}$ την τιμή i, ενώ οι $Fa_{6001}\rightarrow Fa_{6002}$, $Fa_{6002}\rightarrow Fa_{6003}$, …, $Fa_{9999}\rightarrow Fa_{10000}$ την T. Έπεται από αυτό ότι οι $Fa_{4000}\rightarrow Fa_{4001}$, $Fa_{4001}\rightarrow Fa_{4002}$,

…, $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{6000}$ είναι αληθείς και ψευδείς, και άρα μέσω απλοποίησης καταλήγουμε ότι είναι αληθείς. Ανάλογα, έπεται ότι θα λάβει την τιμή i και η σύζευξη $(Fa_1 \rightarrow Fa_2) \wedge (Fa_2 \rightarrow Fa_3) \wedge \ldots \wedge (Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000})$, οπότε καταλήγουμε ότι αν αντιμετωπίσουμε τις προτάσεις καθολικής ποσόδειξης ως συζεύξεις θα λάβει την ίδια τιμή και η πρόταση $\forall x(F_x \rightarrow F_{x+1})$. Κάθε πρόταση που εκφράζει ανεκτικότητα λαμβάνει άρα κάποια από τις τιμές εντός του D, και άρα είναι αληθής, οπότε και το σύστημα δικαιολογεί επαρκώς γιατί έχουμε ισχυρή διαίσθηση ότι προτάσεις όπως αυτές είναι αληθείς. Βέβαια, δεν ισχύει για όλες τις προτάσεις αυτού του τύπου ότι αυτές είναι απλώς αληθείς, αφού κάποιες είναι αληθείς και ψευδείς.

Από την άλλη, εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο κανόνας modus ponens δεν προκύπτει έγκυρος σύμφωνα με το σύστημα LP. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε προτάσεις p, q και μοντέλο που αναθέτει στην p την τιμή i και στην q την τιμή F. Από τους πίνακες αλήθειας προκύπτει ότι η συνεπαγωγή $p \rightarrow q$ θα λάβει επίσης την τιμή i, άρα αν θεωρήσουμε το επιχείρημα $p, p \rightarrow q \vDash q$ διαπιστώνουμε ότι θα ισχύει πως κάθε προκείμενη έχει λάβει τιμή που περιέχεται στο D, ενώ το συμπέρασμα όχι. Απλά αλλάζοντας ποιες τιμές συμπεριλαμβάνουμε εντός του D λοιπόν, αλλάζει και ο τρόπος που αντιμετωπίζουμε το παράδοξο. Ενώ σύμφωνα με το σύστημα K3 ένα επιχείρημα τύπου σωρείτη δεν είναι ορθό, σύμφωνα με το LP δεν είναι έγκυρο. Βέβαια, ο κανόνας modus ponens θεωρείται ένας από τους βασικότερους της λογικής, και άρα μπορεί να υποστηριχθεί ότι το συγκεκριμένο γεγονός αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα του συστήματος. Παρόλα αυτά, αν βρισκόμαστε εντός σαφών πλαισίων, οπότε και κάθε πρόταση θα λαμβάνει αποκλειστικά κάποια από τις τιμές T, F, βλέπουμε ότι αν οι προκείμενες του επιχειρήματος είναι απλώς αληθείς τότε και το συμπέρασμα θα είναι απλώς αληθές. Το όλο θέμα με τον κανόνα modus ponens προκύπτει μόνο όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων, και αυτό σίγουρα δεν φαίνεται εξολοκλήρου παράλογο. Πιο συγκεκριμένα, αν εξετάσουμε την μη επαγωγική μορφή του παραδόξου, τότε έπεται με βάση την σωρειτική ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10000}$ και την ερμηνεία που έχουμε θεωρήσει στις προηγούμενες παραγράφους ότι για κάθε εφαρμογή modus ponens με την μορφή $Fa_n, Fa_n \rightarrow Fa_{n+1} \vDash Fa_{n+1}$ για $n \in \{1, 2, \ldots, 5999\}$ θα ισχύει ότι τόσο οι προκείμενες, όσο και το συμπέρασμα του επιχειρήματος λαμβάνουν τιμή που ανήκει στο σύνολο D. Παρόλα αυτά, για n=6000, οπότε και το επιχείρημα λαμβάνει την μορφή Fa_{6000}, $Fa_{6000} \rightarrow Fa_{6001} \vDash Fa_{6001}$, διαπιστώνουμε ότι με βάση την ερμηνεία που έχουμε θεωρήσει ότι ενώ οι προτάσεις Fa_{6000} και $Fa_{6000} \rightarrow Fa_{6001}$ προκύπτουν απροσδιόριστες, η Fa_{6001} προκύπτει ψευδής. Ο κανόνας Modus ponens υπάρχει περίπτωση να μας οδηγήσει σε συμπεράσματα που είναι ψευδή όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων.

Παρατηρώντας τις περιπτώσεις που οδηγούν σε αντιπαραδείγματα στον κανόνα Modus ponens βλέπουμε ότι, όταν δεχόμαστε πως είναι D={T, i}, αυτές προκύπτουν εξαιτίας των χαρακτηριστικών του πίνακα αλήθειας για τον σύνδεσμο της συνεπαγωγής. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε προτάσεις A, B και ερμηνεία τέτοια ώστε η A να λάβει την τιμή i ενώ η B λαμβάνει την τιμή F, τότε βλέπουμε ότι η συνεπαγωγή A→B θα λάβει όχι την τιμή F αλλά την τιμή i, οπότε και μπορούμε να σχηματίσουμε περίπτωση Modus ponens στην οποία οι προκείμενες έχουν τιμή εντός του D και το συμπέρασμα όχι. Τώρα, ένας προφανής τρόπος για να αποκαταστήσουμε την εγκυρότητα του συγκεκριμένου κανόνα είναι να τροποποιήσουμε τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής ώστε στις συγκεκριμένες περιπτώσεις η συνεπαγωγή A→B να μην λαμβάνει τιμή εντός του D. Με βάση την διάταξη T>i>F των σημασιολογικών τιμών τροποποιούμε τον πίνακα ώστε μια συνεπαγωγή της μορφής A→B να λαμβάνει την τιμή F αν η σημασιολογική τιμή της B είναι μικρότερη ως προς την σχέση διάταξης από αυτήν της A, οπότε και καταλήγουμε στο παρακάτω:

→	T	i	F
T	T	F	F
i	T	i	F
F	T	T	T

Η συγκεκριμένη αλλαγή μας οδηγεί στο σύστημα RM3,[17] το οποίο είναι όπως και το LP ένα paraconsistent σύστημα, αλλά σύμφωνα με το οποίο ο κανόνας Modus ponens είναι έγκυρος. Με βάση το συγκεκριμένο σύστημα ένα επιχείρημα τύπου σωρείτη δεν θα είναι ορθό, αφού κάποιες από τις προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα θα προκύπτουν ψευδείς. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε την σωρειτική ακολουθία και ερμηνεία των προηγούμενων παραγράφων, οι προτάσεις $Fa_1 \to Fa_2$, $Fa_2 \to Fa_3, \ldots, Fa_{3999} \to Fa_{4000}$, καθώς και οι $Fa_{6000} \to Fa_{6001}$, $Fa_{6001} \to Fa_{6002}$, …, $Fa_{9999} \to Fa_{10000}$ θα

[17] Το συγκεκριμένο σύστημα έχει περιγραφεί σε μια σειρά από δημοσιεύσεις, συχνά από ειδικούς στον χώρο της relevant logic. Είναι χαρακτηριστικό ότι περιγράφεται στον πρώτο τόμο του βιβλίου 'Entailment, the Logic of Relevance and Necessity' των Anderson και Belnap, στις σελίδες 420-426 και 469-470. Η συγκεκριμένη σειρά βιβλίων θεωρείται το κυριότερο έργο στον χώρο της relevant logic. Το σύστημα RM3 παρουσιάζει από αυτήν την οπτική κάποιο ενδιαφέρον, εφόσον μπορεί να χαρακτηριστεί ως quasi-relevant. Πιο συγκεκριμένα, ενώ δεν έχει μια σειρά από ιδιότητες που θεωρούνται ουσιώδεις προκειμένου ένα σύστημα να μπορεί να χαρακτηριστεί ως 'relevant', όπως πχ την variable sharing property, συγκεκριμένες προτάσεις που είναι από αυτή την άποψη προβληματικές, όπως προτάσεις της μορφής $A \to (B \to A)$ και $A \to ({\sim}A \to B)$, με βάση τις οποίες μπορούμε να συνάγουμε συμπεράσματα που δεν συνδέονται νοηματικά με τις εκάστοτε προκείμενες, δεν προκύπτουν λογικά αληθείς.

προκύπτουν αληθείς. Οι $Fa_{4001} \rightarrow Fa_{4002}$, $Fa_{4002} \rightarrow Fa_{4003}$, …, $Fa_{5998} \rightarrow Fa_{5999}$ θα προκύπτουν απροσδιόριστες, οπότε μπορούμε να τις ερμηνεύσουμε ως αληθείς και ψευδείς, και άρα αληθείς. Τέλος, οι $Fa_{4000} \rightarrow Fa_{4001}$ και $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{6000}$ θα προκύπτουν ψευδείς, οπότε έπεται ότι θα προκύπτει ψευδής και η $(Fa_1 \rightarrow Fa_2) \wedge (Fa_2 \rightarrow Fa_3) \wedge \ldots \wedge (Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000})$, και άρα, αν αντιμετωπίσουμε τις προτάσεις με καθολική ποσόδειξη ως ένα είδος σύζευξης, έπεται ότι θα είναι ψευδής και η $\forall x(F_x \rightarrow F_{x+1})$. Διαπιστώνουμε βέβαια ότι όπως και με την περίπτωση του L3, το σύστημα αντιμετωπίζει πλέον τις προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα στην μη επαγωγική μορφή του παραδόξου με τρόπο που φαίνεται μη φυσιολογικός. Οι πρώτες από αυτές, καθώς και οι τελευταίες θα προκύπτουν απλώς αληθείς, ενώ οι ενδιάμεσες θα προκύπτουν αληθείς και ψευδείς, εκτός από δύο που θα προκύπτουν απλώς ψευδείς.

Κατά την γνώμη μου, ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα, τόσο των συστημάτων L3, K3, όσο και των LP και RM3, είναι ότι ο σύνδεσμος της συνεπαγωγής προκύπτει σύμφωνα με αυτά πολύ ασθενής. Ειδικά στην περίπτωση του συστήματος K3, ακόμη και προτάσεις της μορφής $A \rightarrow A$ δεν προκύπτουν λογικά αληθείς. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε και πάλι την σωρειτική ακολουθία και την ερμηνεία της γλώσσας που εξετάσαμε πιο πάνω, τότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι συνεπαγωγές όπως οι $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{5998}$, $Fa_{5998} \rightarrow Fa_{5997}$, …, $Fa_{4002} \rightarrow Fa_{4001}$, $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{4001}$, $Fa_{5999} \rightarrow Fa_{4002}$, κτλ προκύπτει ότι έχουν απροσδιόριστη τιμή αλήθειας με βάση τους πίνακες των συστημάτων K3, LP και RM3. Στην περίπτωση των LP και RM3 θεωρούμε ότι από αυτό έπεται ότι οι συγκεκριμένες προτάσεις είναι αληθείς και ψευδείς, οπότε έπεται ότι είναι αληθείς. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι προτάσεις όπως αυτές θα έπρεπε σε κάθε περίπτωση να προκύπτουν απλώς αληθείς, αν για παράδειγμα θεωρήσουμε δύο αντικείμενα α, β τέτοια ώστε είναι και τα δύο οριακές περιπτώσεις για το κατηγόρημα «το x είναι κόκκινο», αλλά με το α να κατέχει τις σχετικές ιδιότητες σε βαθμό μεγαλύτερο (έστω και αμελητέα μεγαλύτερο) από το β, τότε φαίνεται πως η πρόταση «αν το β είναι κόκκινο τότε το α είναι κόκκινο» πρέπει να είναι αληθής, ακόμη και αν η «αν το α είναι κόκκινο τότε το β είναι κόκκινο» προκύπτει απροσδιόριστη. Από την άλλη, όλες οι συνεπαγωγές αυτού του τύπου προκύπτουν αληθείς σύμφωνα με το σύστημα L3. Όπως είδαμε όμως το συγκεκριμένο σύστημα έχει κάποιες συνέπειες όσον αφορά τις προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής που εκφράζουν ανεκτικότητα οι οποίες φαίνονται αντίθετες με την διαίσθηση.

Μια άλλη αντίρρηση σχετική με τον σύνδεσμο της συνεπαγωγής, η οποία μπορεί να διατυπωθεί για πολλά από τα συστήματα που κάνουν χρήση ενός πεπερασμένου πλήθους από σημασιολογικές τιμές, και την οποία συναντά κανείς συχνά στην βιβλιογραφία,[18] είναι η εξής. Ας θεωρήσουμε κάποιο σύστημα το οποίο περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων εντός του συνόλου V. Αναθέτει δηλαδή σε κάθε πρόταση της γλώσσας αντικείμενο κάποια από ένα πεπερασμένης πληθικότητας σύνολο σημασιολογικών τιμών. Έστω ότι είναι $V=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_v\}$, και έστω $p_1, p_2, \ldots, p_v, p_{v+1}$ ατομικές προτάσεις της γλώσσας. Αν θεωρήσουμε τυχούσα ερμηνεία της γλώσσας, τότε αυτή θα αναθέτει σε κάθε μία από τις προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_v, p_{v+1}$ κάποια από τις σημασιολογικές τιμές που περιλαμβάνονται εντός του $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_v\}$, οπότε και έπεται ότι πάντα τουλάχιστον δύο από τις συγκεκριμένες προτάσεις, έστω οι p_i, p_j, με $i, j \in \{1, 2, \ldots, v+1\}$, θα λαμβάνουν την ίδια σημασιολογική τιμή. Αν οι σημασιολογικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε μια συνεπαγωγή της μορφής $A \rightarrow B$ λαμβάνει ως σημασιολογική τιμή κάποια που περιέχεται εντός του D στην περίπτωση που η σημασιολογική τιμή της A ταυτίζεται με αυτήν της B,[19] έπεται ότι τόσο η συνεπαγωγή $pi \rightarrow pj$ όσο και η $pj \rightarrow pi$ θα λάβουν ως σημασιολογική τιμή μία από τις προνομιούχες που περιέχονται στο D. Αν επιπλέον ισχύει ότι αν μια πρόταση A έχει λάβει τιμή που περιέχεται στο D τότε και η $A \vee B$ λαμβάνει τιμή από το D, έπεται ότι θα πρέπει να λάβει τιμή από αυτό και η διάζευξη $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)) \vee ((p_1 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)) \vee \ldots \vee ((p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_2)) \vee ((p_2 \rightarrow p_4) \wedge (p_4 \rightarrow p_2)) \vee \ldots \vee ((p_v \rightarrow p_{v+1}) \wedge (p_{v+1} \rightarrow p_v))$, την οποία μπορούμε να γράψουμε και ως $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee \ldots \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee \ldots \vee (p_v \leftrightarrow p_{v+1})$. Έπεται από την υπόθεση ότι αυτή θα προκύπτει αληθής για κάθε ερμηνεία της γλώσσας και άρα είναι λογικά αληθής. Το τελευταίο όμως φαίνεται αντίθετο με τις διαισθήσεις μας, αν θεωρήσουμε πως η πρόταση p_1 είναι η «Η συγκέντρωση άμμου α αποτελείται από έναν κόκκο», η p_2 είναι η «Η συγκέντρωση άμμου α αποτελείται από δύο κόκκους», και ούτω καθ' εξής, τότε φαίνεται πως κάθε διπλή συνεπαγωγή της μορφής $p_n \leftrightarrow p_m$, με $n \neq m$, πρέπει να προκύπτει ψευδής, οπότε θα έπρεπε να προκύπτει ψευδής και η διάζευξη $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee \ldots \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee \ldots \vee (p_v \leftrightarrow p_{v+1})$, και επομένως όχι λογικά αληθής.

Βέβαια, το ίδιο φαινόμενο προκύπτει και στην περίπτωση της κλασικής λογικής, αν θεωρήσουμε προτάσεις p_1, p_2, p_3, και ερμηνεία της γλώσσας, τότε η διάζευξη $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_3)$ προκύπτει αληθής, οπότε και καταλήγουμε ότι κάθε πρόταση που έχει τη συγκεκριμένη μορφή θα προκύπτει λογικά αληθής, γεγονός που είναι άμεση συνέπεια του νόμου της δισθενείας. Αν όμως έχουμε θεωρήσει ότι υπάρχουν λόγοι ώστε να

[18] Για παράδειγμα, παρόμοια επιχειρήματα διατυπώνουν τόσο ο Timothy Williamson στο βιβλίο του περί ασάφειας 'Vagueness', σελίδες 111-113, όσο και ο Graham Priest στο βιβλίο του 'An introduction to non-classical Logic', σελίδες 125-127.

[19] Το σύστημα K3 δεν ικανοποιεί άρα μια από τις βασικές παραδοχές του επιχειρήματος. Αυτό γιατί υπάρχει περίπτωση κάποια συνεπαγωγή της μορφής $A \rightarrow B$ να λάβει τιμή που δεν περιέχεται στο D, παρόλο που η σημασιολογική τιμή της A ταυτίζεται με αυτήν της B. Αρκεί για να συμβεί αυτό τόσο η A όσο και η B να έχουν λάβει την τιμή i.

αμφιβάλλουμε για την ισχύ του συγκεκριμένου νόμου όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων, οπότε και έχουμε θέσει επιπλέον σημασιολογικές κατηγορίες, και έστω επιπλέον ότι η p_1 είναι αληθής, η p_2 ψευδής, ενώ η p_3 οριακή περίπτωση, καθώς και ότι οι παραδοχές της προηγούμενης παραγράφου τηρούνται, τότε διαπιστώνουμε ότι η συγκεκριμένη διάζευξη υπάρχει πλέον περίπτωση να μην είναι αληθής. Θέτοντας ως σύνολο V κάποιο σύνολο που περιέχει μια τρίτη σημασιολογική τιμή πέρα από αυτές της αλήθειας και του ψεύδους αρκεί ώστε να προκύψουν ερμηνείες της γλώσσας που καθιστούν τη συγκεκριμένη πρόταση μη αληθή. Αν θεωρήσουμε όμως τώρα προτάσεις p_1, p_2, p_3, p_4 διαπιστώνουμε εύκολα ότι δεν θα ισχύει το ίδιο και για την πρόταση $(p_1\leftrightarrow p_2)\vee(p_1\leftrightarrow p_3)\vee(p_1\leftrightarrow p_4)\vee(p_2\leftrightarrow p_3)\vee(p_2\leftrightarrow p_4)\vee(p_3\leftrightarrow p_4)$, η οποία θα εξακολουθεί να προκύπτει αληθής για κάθε τρόπο ερμηνείας της γλώσσας. Θα μπορούσε όμως να υποστηρίξει κάποιος ότι όπως η παραδοχή της ασάφειας μας οδήγησε στην ανάγκη αναθεώρησης του νόμου της δισθενείας, οπότε και προέκυψαν περιπτώσεις που καθιστούν την πρόταση $(p_1\leftrightarrow p_2)\vee(p_1\leftrightarrow p_3)\vee(p_2\leftrightarrow p_3)$ μη αληθή, κατά παρόμοιο τρόπο και η παραδοχή της ασάφειας δεύτερης τάξης θα πρέπει να μας οδηγήσει στο να θέσουμε επιπλέον σημασιολογικές κατηγορίες, οπότε και θα προκύψουν κατ’ αυτόν τον τρόπο περιπτώσεις που καθιστούν την $(p_1\leftrightarrow p_2)\vee(p_1\leftrightarrow p_3)\vee(p_1\leftrightarrow p_4)\vee(p_2\leftrightarrow p_3)\vee(p_2\leftrightarrow p_4)\vee(p_3\leftrightarrow p_4)$ μη αληθή, για παράδειγμα θα μπορούσε να ισχύει ότι η p_1 είναι αληθής, η p_4 ψευδής, η p_2 οριακή περίπτωση, και η p_3 οριακή περίπτωση οριακής περίπτωσης, οπότε και πρέπει να αναθεωρήσουμε τον τρόπο που αναθεωρήσαμε την αρχή της δισθενείας. Μια τρίτιμη σημασιολογική θεωρία απλά θα κατατάξει τόσο την p_2, όσο και την p_3, ως απροσδιόριστες, μη διαχωρίζοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο ως προς τον τρόπο που καθεμία από αυτές είναι οριακή περίπτωση. Αναδύεται λοιπόν ένα άλλο χαρακτηριστικό των συστημάτων που δέχονται τρεις τιμές εντός του V, το γεγονός ότι κατά μία έννοια αντιμετωπίζουν όλες τις οριακές περιπτώσεις ως ισότιμες. Φαίνεται όμως πως μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε λιγότερο ισχυρές και περισσότερο ισχυρές οριακές περιπτώσεις, εξάλλου μπορούμε να μιλήσουμε για ξεκάθαρες οριακές περιπτώσεις, αλλά και για οριακές περιπτώσεις οριακών περιπτώσεων.

Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό αναδύεται για κάθε περίπτωση που η πληθικότητα του συνόλου V είναι κάποιος πεπερασμένος αριθμός, η επόμενη επιλογή που έχουμε λοιπόν είναι να θέσουμε ως V κάποιο σύνολο άπειρης πληθικότητας. Μια δυνατότητα που προκύπτει είναι να θέσουμε V=[0,1], δηλαδή το κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών από το 0 έως το 1. Εξάλλου, συχνά η πρώτη απάντηση που θα δώσει κάποιος μη ενημερωμένος φιλοσοφικά ομιλητής όταν έρθει αντιμέτωπος με το παράδοξο είναι ότι πολύ απλά για κάποιες εκφράσεις δεν ισχύει ότι αυτές είτε εφαρμόζονται είτε όχι στην εκάστοτε περίσταση, αλλά ότι πολλές φορές αυτό είναι ζήτημα βαθμού, και μάλιστα ότι οι συγκεκριμένοι βαθμοί σχηματίζουν ένα είδος συνεχούς, ανάλογο αυτού των πραγματικών αριθμών. Αν για παράδειγμα διατρέξουμε από το ένα άκρο στο άλλο κάποια χρωματική κλίμακα που ξεκινά από ξεκάθαρα κόκκινη και καταλήγει με ομαλό τρόπο ξεκάθαρα πορτοκαλί, τότε φαίνεται φυσιολογικό να θεωρήσουμε ότι καθώς μεταβάλλεται το εκάστοτε σημείο που ανά πάσα στιγμή έχουμε μπροστά μας μεταβάλλεται ανάλογα και ο βαθμός κατά τον οποίο εφαρμόζονται τα κατηγορήματα «το x είναι κόκκινο» και «το x είναι πορτοκαλί». Ο βαθμός κατά τον οποίο εφαρμόζεται το πρώτο φθίνει καθώς μεταβαίνουμε από το ένα σημείο στο επόμενο, ενώ για το δεύτερο ισχύει ότι ο βαθμός κατά τον οποίο εφαρμόζεται θα αυξάνεται.

Ας δεχτούμε λοιπόν ως σύνολο V των σημασιολογικών τιμών το κλειστό διάστημα [0, 1], πρέπει να συνεχίσουμε προσδιορίζοντας το σύνολο $\{F_c: c \in \text{Connective}\}$ των συναρτήσεων αλήθειας που μια ερμηνεία της γλώσσας θα αντιστοιχεί στον εκάστοτε προτασιακό σύνδεσμο, καθώς και το σύνολο D που περιέχει τις σημασιολογικές τιμές που θεωρούμε προνομιούχες. Θέτουμε ότι $\{F_c: c \in \text{Connective}\} = \{F_{\sim}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}\}$, όπου η εκάστοτε συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το διάστημα [0, 1] και ορίζεται με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω:

- $F_{\sim}(x)=1-x$
- $F_{\wedge}(x, y)=\min(x, y)$
- $F_{\vee}(x, y)=\max(x, y)$
- $F_{\rightarrow}(x, y)=1$ αν είναι $x \leq y$, αλλιώς $F_{\rightarrow}(x, y)=1-(x-y)$

Όσον αφορά τον τρόπο που ορίσαμε την τελευταία, θεωρήσαμε ότι μια συνεπαγωγή της μορφής $A \rightarrow B$ θα είναι απόλυτα αληθής στην περίπτωση που η σημασιολογική τιμή της πρότασης B είναι μεγαλύτερη ή ίση με αυτήν της A. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η σημασιολογική τιμή της $A \rightarrow B$ θα απέχει από την απόλυτη αλήθεια όσο απέχει η σημασιολογική τιμή της B από αυτήν της A.

Τέλος, πρέπει και να προσδιορίσουμε το σύνολο D. Είναι προφανές ότι ανάλογα με την επιλογή μας θα μεταβάλλεται και ο τρόπος αντιμετώπισης του παραδόξου, κάτι που εξάλλου παρατηρήσαμε και στην περίπτωση των τρίτιμων συστημάτων. Όπως είδαμε τα συστήματα K3 και LP διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς τις τιμές που περιλαμβάνουν στο D, αλλά αυτό έχει συνέπειες όχι μόνο ως προς τον τρόπο που αυτά αντιμετωπίζουν τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη, αλλά και ως προς τον τρόπο που ερμηνεύονται από φιλοσοφική άποψη. Μια πρώτη επιλογή που έχουμε τώρα είναι να θέσουμε ότι είναι D={1}, προνομιούχος σημασιολογική τιμή είναι μόνο αυτή της απόλυτης αλήθειας. Καταλήγουμε λοιπόν στη σημασιολογική δομή <[0, 1], {1}, {$F_{\sim}$, $F_{\wedge}$, $F_{\vee}$, $F_{\rightarrow}$}>.[20] Έπεται αμέσως ότι ο κανόνας modus ponens προκύπτει έγκυρος, αν θεωρήσουμε κάποιο επιχείρημα της μορφής $A, A\rightarrow B \models B$ και υποθέσουμε ερμηνεία που αναθέτει στις προκείμενες την σημασιολογική τιμή που περιέχεται στο D, έπεται από τον τρόπο που ορίστηκε η συνάρτηση $F_{\rightarrow}$ ότι η σημασιολογική τιμή της πρότασης B θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν της A, και άρα θα ανήκει και αυτή στο σύνολο D.

Επιπλέον, διαπιστώνουμε εύκολα ότι το συγκεκριμένο σύστημα θα αντιμετωπίζει τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη ως μη ορθά. Πράγματι, ας θεωρήσουμε και πάλι την σωρειτική ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10000}$ ως προς το κατηγόρημα F, με το α_1 να είναι ξεκάθαρα F, το α_{10000} ξεκάθαρα να μην είναι, και για κάθε $i\in\{1, 2, \ldots, 10000\}$ να ισχύει ότι το α_i είναι ελάχιστα πιο F από το α_{i+1}. Ας θεωρήσουμε ερμηνεία του συστήματος που αναθέτει στην πρόταση Fa_1 την σημασιολογική τιμή 1, στην πρόταση Fa_{10000} την σημασιολογική τιμή 0, ενώ για $i\in\{2, \ldots, 9999\}$ η σημασιολογική τιμή της πρότασης Fa_i θα είναι αυτή της Fa_{i-1} μείον το 1/9999. Αν θεωρήσουμε την μη επαγωγική μορφή του επιχειρήματος, τότε βλέπουμε ότι σε κάθε προκείμενη που εκφράζει ανεκτικότητα, η μορφή της οποίας είναι $Fa_i\rightarrow Fa_{i+1}$ όπου $i\in\{1, 2, \ldots, 10000\}$, θα ανατίθεται η τιμή 1-(1/9999). Έπεται λοιπόν ότι αν θεωρήσουμε κάποιο σωρειτικό επιχείρημα, τότε οι προκείμενές του που εκφράζουν ανεκτικότητα θα λαμβάνουν σημασιολογική τιμή που δεν ανήκει στο D, και άρα το επιχείρημα αντιμετωπίζεται ως μη ορθό. Η θεωρία εξηγεί μάλιστα με ικανοποιητικό τρόπο γιατί προτάσεις αυτού του τύπου μας φαίνονται τόσο ελκυστικές από διαισθητική άποψη. Μπορεί αυτές να μην είναι απόλυτα αληθείς, βρίσκονται όμως από σημασιολογική άποψη πολύ κοντά στο να είναι απόλυτα αληθείς. Παρόλο λοιπόν που ο κανόνας Modus ponens είναι έγκυρος, όταν αυτός εφαρμόζεται σε προκείμενες που δεν είναι απόλυτα αληθείς

[20] Πρόκειται για το σύστημα $Ł_{\aleph}$ του Łukasiewicz, το πρώτο ιστορικά σύστημα λογικής που βασίζεται στην ιδέα των βαθμών αλήθειας. Για πρώτη φορά περιγράφεται στο άρθρο των Łukasiewicz, J. & A. Tarski, 1930, "Untersuchungen über den Aussagenkalkül", Comptes Rendus Des Séances de La Société Des Sciences et Des Lettres de Varsovie, Cl. III, 23(iii): 30–50.
Συστήματα βαθμών αλήθειας έχουν προταθεί πολύ συχνά ως η ορθή σημασιολογική θεωρία για την περίπτωση μιας γλώσσας που περιέχει ασαφείς εκφράσεις. Μερικά παραδείγματα που αξίζει να αναφερθούν είναι τα άρθρα των Goguen [1969], Machina [1976], Zadeh [1975], Priest [2004], καθώς και Priest [2010b]. Τέλος, το βιβλίο 'Vagueness and degrees of Truth', του Nicholas J. J. Smith.

υπάρχει περίπτωση έπειτα από έναν αριθμό βημάτων να μας οδηγήσει σε συμπέρασμα που είναι απόλυτα ψευδές.

Έχουμε όμως και άλλες επιλογές όσον αφορά το σύνολο D, θα μπορούσαμε λοιπόν να θέσουμε εναλλακτικά ότι είναι $D=\{x: x\geq \varepsilon\}$, όπου ως ε συμβολίζουμε κάποια σημασιολογική τιμή εντός του V, που μπορεί να είναι κάθε φορά διαφορετική, αλλά πάντως μεγαλύτερη του 0,5. Το εκάστοτε πλαίσιο συζήτησης καθορίζει λοιπόν κάποια ελάχιστη σημασιολογική τιμή από την οποία πρέπει να χαρακτηρίζεται κάποια πρόταση προκειμένου αυτή να θεωρείται επαρκώς αληθής από τους ομιλητές, οπότε και θεωρούμε ότι υπό κανονικές συνθήκες όταν χαρακτηρίζουμε κάποια εκφορά ως αληθή αυτό που εννοούμε είναι ότι αυτή είναι επαρκώς αληθής για τους σκοπούς μας. Όταν για παράδειγμα χαρακτηρίζουμε κάποια δεξαμενή ως κυβικού σχήματος και με βάση αυτή την παραδοχή υπολογίζουμε την χωρητικότητα της με βάση το μήκος της πλευράς της, μας αρκεί αυτή να είναι επαρκώς κυβική, και δεν μας απασχολεί το γεγονός ότι αυτή δεν είναι απόλυτα κυβική. Εξάλλου, μπορεί να υποστηριχτεί ότι δεν υπάρχει φυσικό αντικείμενο που είναι απόλυτα κυβικό, και με βάση αυτό να υποστηριχτεί ότι δεν υπάρχει φυσικό αντικείμενο α για το οποίο η πρόταση «το α είναι κυβικού σχήματος» είναι απόλυτα αληθής. Έπεται με βάση αυτά ότι ένα επιχείρημα θα είναι έγκυρο αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία της γλώσσας και πλαίσιο συζήτησης, ισχύει ότι αν είναι επαρκώς αληθείς οι προκείμενες τότε είναι επαρκώς αληθές και το συμπέρασμα.

Καταλήγουμε έτσι στην σημασιολογική δομή $<[0, 1], \{x: x\geq\varepsilon\}, \{F_{\sim}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}\}>$, οπότε και προκύπτει ένα νέο σύστημα, που αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο τα σωρειτικά επιχειρήματα. Εντός ενός πλαισίου συζήτησης οι προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα μπορεί τώρα να προκύπτουν επαρκώς αληθείς. Ο κανόνας modus Ponens όμως παύει πλέον να είναι έγκυρος, έστω για παράδειγμα προτάσεις Α, Β, ερμηνεία της γλώσσας που αναθέτει στην Α την σημασιολογική τιμή 0,9 ενώ στην Β την σημασιολογική τιμή 0,8 , και πλαίσιο συζήτησης τέτοιο ώστε ε=0,9. Έπεται ότι η σημασιολογική τιμή της πρότασης $A\rightarrow B$ θα είναι 0,9 , και άρα ένα επιχείρημα της μορφής $A, A\rightarrow B\vDash B$ υπάρχει περίπτωση να μας οδηγήσει από προκείμενες που είναι επαρκώς αληθείς σε συμπέρασμα που δεν είναι.

Οι θεωρίες του είδους έχουν αρκετά πλεονεκτήματα. Αντιμετωπίζουν το παράδοξο με ελκυστικό τρόπο και εξηγούν γιατί προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα μας φαίνονται αληθείς. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε την σωρειτική ακολουθία των προηγούμενων παραγράφων και προτάσεις όπως οι Fa_{4500} και Fa_{5500}, που λαμβάνουν από την ερμηνεία της γλώσσας ενδιάμεσους βαθμούς αλήθειας, τότε συνεπαγωγές όπως η $Fa_{5500} \rightarrow Fa_{4500}$ θα προκύπτουν απόλυτα αληθείς. Οι συγκεκριμένες θεωρίες διαχωρίζουν λοιπόν μεταξύ των προτάσεων $Fa_{4500} \rightarrow Fa_{5500}$ και $Fa_{5500} \rightarrow Fa_{4500}$. Όπως είδαμε, δεν ισχύει το ίδιο και για τα τρίτιμα σημασιολογικά συστήματα που εξετάσαμε, οπότε και είχαμε εγείρει την αντίρρηση ότι προτάσεις όπως η $Fa_{5500} \rightarrow Fa_{4500}$ φαίνεται ότι πρέπει να προκύπτουν αληθείς, ακόμη και όταν οι Fa_{5500}, Fa_{4500} είναι οριακές περιπτώσεις. Οι σημασιολογικές θεωρίες του είδους διακρίνουν μια πλούσια δομή μεταξύ εκείνων των προτάσεων που λαμβάνουν ενδιάμεσους βαθμούς αλήθειας, σε αντίθεση με τα συστήματα που δέχονται μόνο τρεις σημασιολογικές τιμές. Τέλος, ακριβώς επειδή το πλήθος των διαθέσιμων σημασιολογικών τιμών είναι μη αριθμήσιμο, προτάσεις της μορφής $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee \ldots \vee (p_2 \leftrightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_4) \vee \ldots \vee (p_v \leftrightarrow p_{v+1})$ δεν προκύπτουν λογικά αληθείς.

Έχουν βέβαια κατά καιρούς διατυπωθεί αρκετές αντιρρήσεις στις θεωρίες του είδους.[21] Καταρχάς, δεν είναι προφανές τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια πρόταση μπορεί να είναι αληθής σε ενδιάμεσους βαθμούς, πως πρέπει να ερμηνευτεί το γεγονός ότι κάποια ερμηνεία μπορεί να αποδώσει σε κάποια πρόταση της γλώσσας ως σημασιολογική τιμή έναν αριθμό όπως ο 1/π; Αν θεωρούμε ότι οι σημασιολογικές τιμές που η θεωρία αποδίδει στις προτάσεις της γλώσσας είναι βαθμοί αλήθειας, τότε θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η συγκεκριμένη πρόταση είναι αληθής σε βαθμό 1/π. Δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο τι μπορεί να σημαίνει αυτό.[22] Μια άλλη αντίρρηση που συναντά κανείς συχνά στην βιβλιογραφία

[21] Αντιρρήσεις που εμφανίζονται κυρίως στην φιλοσοφική βιβλιογραφία περί ασάφειας. Προκύπτει με αυτόν τον τρόπο ένα χάσμα μεταξύ φιλοσοφικών συμπερασμάτων και πρακτικών εφαρμογών. Ο Peter Simons γράφει σχετικά στο άρθρο του 'Supernumeration: Vagueness and Numbers': 'There is a notable bifurcation between what philosophers think and say about vagueness and what people do who have to deal with it practically. There is a widespread consensus in the philosophical literature on vagueness that fuzzy logic, which essentially includes the assignment of numerical values to represent degrees of truth of vague sentences, is a flawed method, and that some other theory is to be preferred if we are to give a correct account of vagueness. When it comes to practical applications however, for people with actual problems to solve and computers and software to hand, fuzzy logic is the overwhelmingly predominant approach. Such applications include: Geographical Information Systems, Medical Diagnostics and Treatment, Astrophysical Data, Data mining and Data fusion, Control Systems. None of this is insignificant. By philosophical lights, this work is all either mistaken or concerned with something other than vagueness. By the lights of applied science, philosophers have their heads stuck well and truly either in the clouds or in the sand, or, paraconsistently, both.', Simons [2010].

[22] Όπως χαρακτηριστικά θα γράψει ο Michael Tye, στο άρθρο του 'Vagueness, Welcome to the quicksand', Tye [1994]: 'One serious objection to this view is that it really replaces vagueness with the most refined and incredible precision' (σελίδα 11).
Ο Goguen από την άλλη, στο κλασικό άρθρο 'The logic of inexact concepts', Goguen [1969], γράφει: 'Probably, we should not expect particular numerical values of shortness to be meaningful (except 0 and 1), but rather their ordering' (σελίδα 332).
Η Delia Graff, στην διδακτορική της διατριβή με τίτλο 'The phenomena of Vagueness' (MIT, 1997), στις σελίδες 36-42, αφού παρατηρήσει ότι ο βαθμός αλήθειας κάποιας πρότασης δεν συμβαδίζει

είναι ότι δεν μπορεί να είναι αποδεκτό το γεγονός ότι προτάσεις της μορφής $A \wedge \sim A$ ενδέχεται να λάβουν σημασιολογικές τιμές που είναι μεγαλύτερες του 0. Για παράδειγμα, αν μια ερμηνεία έχει αντιστοιχίσει στην πρόταση A την σημασιολογική τιμή 0,5 τότε θα αντιστοιχεί την ίδια σημασιολογική τιμή και στην $A \wedge \sim A$. Αν θεωρούμε ότι οι συγκεκριμένες σημασιολογικές τιμές είναι βαθμοί αλήθειας, τότε πρέπει να πούμε ότι η πρόταση $A \wedge \sim A$ είναι αληθής σε βαθμό 0,5. Τι εννοούμε όμως όταν λέμε ότι μια αντίφαση είναι μισο-αληθής;

Θεωρώ πάντως ότι δεν μπορούμε να λάβουμε τις συγκεκριμένες αντιρρήσεις ως επιχειρήματα που ολοκληρωτικά αντικρούουν την θεωρία, αλλά απλώς ως ενδείξεις ότι χρειάζεται προσοχή όσον αφορά τον τρόπο που αυτή θα ερμηνευτεί από φιλοσοφική άποψη. Αυτό βέβαια μπορεί με την σειρά του να είναι κάτι που δεν είναι αμέσως προφανές πως μπορεί να γίνει, αλλά σε κάθε περίπτωση κάτι τέτοιο δεν μπορεί να παρουσιάζεται ως τελειωτικό χτύπημα κατά της θεωρίας, αφού από το γεγονός ότι είναι δύσκολο να ερμηνευτεί αυτή σωστά δεν έπεται ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο.

Όταν μελετήσαμε το σύστημα K3, αναπτύξαμε μια συγκεκριμένη φιλοσοφική θεώρηση, βάσει της οποίας δικαιολογήσαμε τους πίνακες αλήθειας της θεωρίας. Στην πορεία βέβαια διαπιστώσαμε ότι ορισμένες από τις συνέπειες της θεωρίας δεν ήταν εύκολο να συμβιβαστούν με αυτόν τον τρόπο ερμηνείας. Ένα ερώτημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι αν κάτι τέτοιο είναι παρόλα αυτά δυνατό για τις θεωρίες βαθμών αλήθειας. Αν δηλαδή οι θεωρίες του συγκεκριμένου τύπου μπορούν να συμβιβαστούν με αυτόν τον τρόπο φιλοσοφικής ερμηνείας, και άρα να δοθεί κατ' αυτόν τον τρόπο κάποια απάντηση όσον αφορά την φύση αυτού που λέμε 'βαθμό αλήθειας'. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, ξεκινάμε κάνοντας την παραδοχή ότι στην πραγματικότητα οι τιμές αλήθειας που μπορεί να ανατεθούν στις προτάσεις της γλώσσας είναι δύο, αυτές της αλήθειας και του ψεύδους, αλλά παρόλα αυτά υπάρχουν κάποιες προτάσεις για τις οποίες ισχύει ότι η σχετική πληροφορία δεν επαρκεί ώστε να προσδιοριστεί αν αυτές είναι αληθείς ή ψευδείς. Θεωρούμε όμως ότι ακόμη και για τις προτάσεις που ανήκουν στην τελευταία κατηγορία, μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ προτάσεων που είναι πιο κοντά στην αλήθεια παρά στο

πάντα με τον βαθμό ελκυστικότητας αυτής, θα εξετάσει κάποιους τρόπους με βάση τους οποίους μπορεί να ερμηνευτεί φιλοσοφικά η έννοια του βαθμού αλήθειας που χρησιμοποιούν οι συγκεκριμένες θεωρίες. Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσει το ενδεχόμενο ο βαθμός αλήθειας να είναι ένα μέτρο του πόσο όμοιος είναι ο κόσμος ως προς το πώς λέει η πρόταση ότι αυτός είναι, το ενδεχόμενο οι βαθμοί αλήθειας να αντιστοιχούν σε βαθμούς εμπιστοσύνης (degrees of confidence), και τέλος το ενδεχόμενο η έννοια του βαθμού αλήθειας μιας πρότασης να θεμελιώνεται στην αλήθεια ή ψεύδος συγκεκριμένων συγκριτικών δηλώσεων (comparative claims). Τελικά όμως δεν θα θεωρήσει κάποιον από αυτούς τους τρόπους ερμηνείας ως ικανοποιητικό.

ψεύδος, και προτάσεων για τις οποίες ισχύει το αντίστροφο, οπότε πρέπει να εξηγήσουμε πως μπορεί κάτι τέτοιο να συμβαίνει.

Αν θεωρούμε ότι υπάρχει μια πλειάδα τρόπων ώστε να συμπληρωθεί η σχετική πληροφορία, θα ισχύει για κάποιες προτάσεις που είναι οριακές περιπτώσεις ότι παρόλο που αυτές μπορεί να προκύψουν ψευδείς στην πλειοψηφία των δυνατοτήτων αυτές καθίστανται αληθείς, και για κάποιες άλλες προτάσεις ότι παρόλο που μπορεί να προκύψουν αληθείς στην πλειοψηφία των δυνατοτήτων αυτές καθίστανται ψευδείς. Προτάσεις που λαμβάνουν την τιμή 1 είναι τέτοιες ώστε η σχετική πληροφορία επαρκεί προκειμένου αυτές να καθοριστούν ως αληθείς, και άρα για κάθε τρόπο ώστε αυτή να συμπληρωθεί περαιτέρω θα ισχύει ότι παραμένουν αληθείς. Μπορούμε λοιπόν να τις χαρακτηρίσουμε ως απολύτως αληθείς. Αντίστοιχα, προτάσεις για τις οποίες η σχετική πληροφορία επαρκεί ώστε αυτές να προσδιοριστούν ως ψευδείς, θα είναι ψευδείς για κάθε τρόπο με τον οποίο αυτή μπορεί να συμπληρωθεί περαιτέρω, και άρα μπορούν να χαρακτηριστούν ως απολύτως ψευδείς. Η τιμή 1 αντιστοιχεί λοιπόν στην αλήθεια, η τιμή 0 στο ψεύδος, ενώ οι σημασιολογικές τιμές εντός του διαστήματος (0,1) είναι σύμφωνα με την συγκεκριμένη ερμηνεία απλώς ένα τέχνασμα ώστε να μοντελοποιήσουμε με μαθηματικό τρόπο το πιο πάνω φαινόμενο, και όχι κάτι που πρέπει να διαβάζουμε κυριολεκτικά. Οι σημασιολογικές τιμές που η θεωρία αποδίδει στις ατομικές προτάσεις της γλώσσας αποτελούν επί της ουσίας ένα κανονικοποιημένο μέτρο[23] επί του δυναμοσυνόλου του συνόλου που περιέχει τους τρόπους με τους οποίους η σχετική με την τιμή αλήθειας των προτάσεων της γλώσσας πληροφορία μπορεί να συμπληρωθεί. Όσο και αν φαίνεται λοιπόν περίεργο το γεγονός ότι μια ερμηνεία μπορεί να αναθέσει σε κάποια πρόταση της γλώσσας μια σημασιολογική τιμή όπως για παράδειγμα 1/π ή 1/e, αυτό πρέπει να αντιμετωπίζεται απλά ως ένα χαρακτηριστικό του μαθηματικού φορμαλισμού που χρησιμοποιούμε, και όχι ως κάτι που αντιστοιχεί σε πραγματικά σημασιολογικά γνωρίσματα της γλώσσας.

Παρατηρούμε όμως ότι και πάλι προκύπτουν δυσκολίες με κάποιες από τις συνέπειες της θεωρίας, ανάλογες με αυτές που αντιμετωπίσαμε στην περίπτωση του

[23] Ως Boolean δακτύλιο συνόλων ορίζουμε μια μη κενή κλάση R συνόλων τέτοια ώστε αν είναι $A \in R$ και $B \in R$ τότε θα ισχύει ότι $A \cup B \in R$ καθώς και $A - B \in R$. Έπεται ότι για σύνολο X, το δυναμοσύνολο P(X) θα αποτελεί έναν Boolean δακτύλιο. Ως μέτρο επί του P(X) θεωρούμε μια συνάρτηση M που σε κάθε αντικείμενο εντός του P(X) αντιστοιχεί είτε κάποιον πραγματικό αριθμό είτε το αντικείμενο που συμβολίζουμε ως $+\infty$, και για την οποία ισχύει ότι η τιμή που αντιστοιχεί στο εκάστοτε αντικείμενο εντός του P(X) είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του 0, είναι $M(\varnothing)=0$, και τέλος για αντικείμενα Ai που ανήκουν στο P(X) είναι $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} Ai)=\sum_{i=1}^{\infty} M(Ai)$. (Paul Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, σελίδες 19 και 30)

συστήματος Κ3. Αν επιλέξουμε να ερμηνεύσουμε την θεωρία με αυτόν τον τρόπο, τότε καθίσταται δύσκολο να δικαιολογηθεί το γεγονός ότι προτάσεις της μορφής $A \wedge \sim A$ μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να λάβουν σημασιολογική τιμή 0,5. Με βάση τον συγκεκριμένο τρόπο ερμηνείας, αυτό θα έπρεπε να σημαίνει ότι μια πρόταση με την συγκεκριμένη μορφή μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να είναι μια ξεκάθαρη οριακή περίπτωση. Και άρα ότι είναι εξίσου δυνατό να συμπληρωθεί η σχετική πληροφορία με τρόπο ώστε να καταστεί αυτή ψευδής, όσο και με τρόπο ώστε να καταστεί αληθής. Αυτό είναι κάτι που μπορεί να συμβεί για μια πρόταση της μορφής πχ $A \wedge \sim B$, όπου η πρόταση B δεν λέει ό,τι και η A, φαίνεται όμως πως με όποιο τρόπο και αν συμπληρωθεί η σχετική με την τιμή αλήθειας της πρότασης A πληροφορία, η πρόταση $A \wedge \sim A$ θα πρέπει να καταστεί ψευδής. Ανάλογα, στην περίπτωση του συστήματος Κ3, είδαμε ότι προτάσεις όπως αυτή μπορεί να λάβουν την τιμή i, όπου η συγκεκριμένη σημασιολογική τιμή ερμηνεύτηκε με τον ίδιο τρόπο που ερμηνεύουμε και εδώ τις ενδιάμεσες σημασιολογικές τιμές που ανήκουν στο διάστημα (0, 1). Το όλο θέμα πηγάζει από το γεγονός ότι αν δύο προτάσεις A, B λαμβάνουν την ίδια σημασιολογική τιμή, τότε μια θεωρία που σέβεται την αρχή της αληθοσυναρτησιακότητας είναι υποχρεωμένη να αντιμετωπίζει την πρόταση $A \wedge \sim A$ με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζει και την $A \wedge \sim B$. Χαρακτηριστικά όπως αυτό είναι ενδείξεις ότι αν θέλουμε να διατηρήσουμε τον συγκεκριμένο τρόπο ερμηνείας τότε θα πρέπει να προβούμε σε αλλαγές όσον αφορά τον τρόπο που υπολογίζονται οι σημασιολογικές τιμές των διαφόρων προτάσεων.

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε και πάλι την σωρειτική ακολουθία α_1, α_2, …, α_{10000} ως προς το κατηγόρημα F καθώς και την ερμηνεία της γλώσσας που προσδιορίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, τότε παρατηρούμε ότι θα ισχύει για τις προτάσεις της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$, όπου $i \in \{1, 2, …, 10000\}$, πως η σημασιολογική τιμή τους είναι κάθε φορά ίση με min[1-((i-1)/9999), i/9999]. Η συνάρτηση F(i)= min[1-((i-1)/9999), i/9999], με πεδίο ορισμού το σύνολο {1, 2, …, 10000} και πεδίο τιμών το διάστημα [0, 1], είναι αύξουσα για τις τιμές {0, 1, …, 5000}, μεγιστοποιείται για i=5000 όπου προκύπτει ίση με 5000/9999, και φθίνουσα για τις τιμές {5001, 5002, …, 10000}. Το συγκεκριμένο είναι όμως ένα χαρακτηριστικό στο οποίο δύσκολα μπορεί να δοθεί ικανοποιητική ερμηνεία. Για ποιον λόγο είναι πιο κοντά στην αλήθεια μια πρόταση σύμφωνα με την οποία υπάρχει σαφές όριο μεταξύ των αντικειμένων α_{5000} και α_{5001}, από μια πρόταση σύμφωνα με την οποία υπάρχει σαφές όριο μεταξύ πχ των α_{1000} και α_{1001}; Ταυτόχρονα, η συνεπαγωγή $Fa_{5000} \rightarrow Fa_{5001}$ θα λαμβάνει ακριβώς τον ίδιο βαθμό αλήθειας με την $Fa_{1000} \rightarrow Fa_{1001}$, φαίνεται όμως ότι θα έπρεπε να ισχύει πως όσο μεγαλύτερος ο βαθμός αλήθειας μιας πρότασης με την μορφή $A \wedge \sim B$, τόσο μικρότερος θα πρέπει να είναι αυτός μιας πρότασης με την μορφή $A \rightarrow B$.

Σύμφωνα με τον τρόπο ερμηνείας που προκρίνουμε, η σημασιολογική τιμή που αποδίδεται σε μια πρόταση της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$ θα πρέπει να αντικατοπτρίζει πόσο κοντά είναι αυτή στο να καταστεί αληθής ή ψευδής αν η σχετική πληροφορία συμπληρωθεί κατάλληλα. Με βάση αυτό όμως, δεν φαίνεται γιατί μια πρόταση αυτής της μορφής είναι πιο κοντά στην αλήθεια αν είναι i=5000 παρά αν είναι πχ i=1000. Για κάθε πρόταση της συγκεκριμένης μορφής φαίνεται πως αυτή θα καθίσταται ψευδής ως προς την συντριπτική πλειοψηφία των τρόπων με τους οποίους η σχετική πληροφορία μπορεί να συμπληρωθεί. Φαίνεται λοιπόν ότι οι προτάσεις της συγκεκριμένης μορφής θα έπρεπε να είναι για κάθε i πολύ κοντά στο ψεύδος, κατά τρόπο ανάλογο που οι συνεπαγωγές της μορφής $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$ είναι πολύ κοντά στην αλήθεια.

Προτάσεις όπως οι $Fa_{5000} \wedge \sim Fa_{5001}$, $Fa_{1000} \wedge \sim Fa_{1001}$ κτλ, είναι όμως προτάσεις της μορφής $A \wedge \sim B$. Ερχόμαστε δηλαδή αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα ανάλογο αυτού που συναντήσαμε στην περίπτωση προτάσεων της μορφής $A \wedge \sim A$. Η θεωρία αντιμετωπίζει προτάσεις όπως οι $Fa_{5000} \wedge \sim Fa_{5001}$, $Fa_{1000} \wedge \sim Fa_{1001}$ κτλ με τρόπο που δεν λαμβάνει υπόψη τις νοηματικές συνδέσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των υποπροτάσεων που εμφανίζονται εντός αυτών. Η κατάσταση όσον αφορά το συγκεκριμένο ζήτημα μπορεί να βελτιωθεί κάπως αν θεωρήσουμε πως μια πρόταση της μορφής $A \wedge B$ είναι ισοδύναμη με την $\sim(A \rightarrow \sim B)$. Θέτοντας λοιπόν ως A κάποια πρόταση Fa_i, και ως B κάποια Fa_{i+1}, όπου $i \in \{1, 2, \ldots, 9999\}$, έπεται ότι η $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$ θα είναι ισοδύναμη της $\sim(Fa_i \rightarrow \sim\sim Fa_{i+1})$,[24] της οποίας η

[24] Η συγκεκριμένη επιλογή θα έχει κάποιες ενδιαφέρουσες συνέπειες. Για παράδειγμα, θα υπάρχει πλέον περίπτωση για πρόταση A, η σύζευξη $A \wedge A$ να λαμβάνει σημασιολογική τιμή μικρότερη από αυτήν. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν $|A|$ είναι η σημασιολογική τιμή της πρότασης A, τότε αν είναι $|A|>0,5$ θα είναι $|A \wedge A|=|A|+|A|-1$, ενώ για $|A| \leq 0,5$ θα είναι $|A \wedge A|=0$. Έπεται αμέσως ότι αν πχ έχουμε $|A|=0,5$ τότε θα είναι $|A \wedge A|=0$. Αν πχ έχουμε $|A|=0,9$ τότε θα είναι $|A \wedge A|=0,8$. Αν τώρα έχουμε θεωρήσει ότι το πλαίσιο της συζήτησης καθορίζει κάποιες σημασιολογικές τιμές ως επαρκώς καλές, και έχουμε ορίσει ως έγκυρο εντός του πλαισίου κάθε επιχείρημα τέτοιο ώστε η σημασιολογική τιμή του συμπεράσματος είναι επαρκώς καλή στην περίπτωση που είναι επαρκως καλή και η σημασιολογική τιμή της σύζευξης των προκείμενων, τότε έπεται ότι ένα επιχείρημα της μορφής $A \vDash A \wedge A$ δεν είναι λογικά έγκυρο. Αρκεί να θεωρήσουμε ερμηνεία τέτοια ώστε $|A|=0,9$ και πλαίσιο τέτοιο ώστε επαρκώς καλές σημασιολογικές τιμές είναι όσες είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 0,9. Έπεται από αυτά ότι για προτάσεις A, B, αν είναι $A, A \vDash B$ τότε δεν δικαιούμαστε πάντα να συνάγουμε ότι θα είναι και $A \vDash B$. Η θεωρία που προκύπτει θα ανήκει λοιπόν σε μια ευρεία κλάση συστημάτων, χαρακτηριστικό γνώρισμα των οποίων είναι ότι δεν δέχονται τον δομικό μετά-κανόνα contraction. Παραδείγματα ανάλογων συστημάτων αποτελεί η Linear Logic, που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Jean Yves Girard στο άρθρο ‘Linear Logic’, Theoretical Computer Science, 50, pp 1-102, καθώς και το σύστημα BCK, που εμφανίζεται για πρώτη φορά στο άρθρο των A. N. Prior και C. A. Meredith, ‘Notes on the axiomatics of the propositional calculus’, Meredith [1963].

σημασιολογική τιμή είναι ίση με (1-((i-1)/9999))-(1-(i/9999)), δηλαδή ίση με 1/9999. Ανάλογη βελτίωση προκύπτει και όσον αφορά προτάσεις της μορφής $A \wedge \sim A$, αφού είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αυτές θα λαμβάνουν πλέον σημασιολογική τιμή 0.

Και πάλι όμως, αν θεωρήσουμε προτάσεις Α, Β και ερμηνεία της γλώσσας που αναθέτει σε αυτές την ίδια σημασιολογική τιμή, τότε το γεγονός ότι η θεωρία είναι αληθοσυναρτησιακή έχει ως αποτέλεσμα αυτή να αναθέτει στην $A \rightarrow B$ την ίδια σημασιολογική τιμή με αυτήν που αναθέτει στην $A \rightarrow A$, ακόμη και στην περίπτωση που οι προτάσεις Α, Β είναι ασύμβατες μεταξύ τους. Έστω για παράδειγμα ότι Α είναι η πρόταση 'ο α είναι πλούσιος', και Β η πρόταση 'ο α είναι φτωχός', όπου 'α' όνομα κάποιου που είναι οριακή περίπτωση μεταξύ των δύο. Αν θεωρήσουμε ότι η ερμηνεία αναθέτει στις δύο προτάσεις σημασιολογική τιμή 0,5, τότε η πρόταση 'αν ο α είναι πλούσιος τότε είναι φτωχός' θα προκύπτει απόλυτα αληθής, και το ίδιο θα συμβαίνει και για την πρόταση 'αν ο α είναι πλούσιος τότε ο α είναι πλούσιος'. Παρόλα αυτά, είναι εμφανές ότι αν θεωρήσουμε τους δυνατούς τρόπους ώστε να συμπληρωθεί η σχετική πληροφορία, τότε δεν θα ισχύει για κάποιον από αυτούς ότι διαψεύδει την δεύτερη πρόταση. Αντίθετα, φαίνεται ότι θα πρέπει να υπάρχουν αρκετοί τρόποι ώστε η σχετική πληροφορία να συμπληρωθεί με τρόπο που διαψεύδει την πρώτη από τις δύο προτάσεις. Ως αληθοσυναρτησιακή, η θεωρία αντιμετωπίζει τις εμφανίσεις των ανωτέρω υποπροτάσεων ως αυτές να ήταν εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Όπως είδαμε όμως, υπάρχουν βασικά χαρακτηριστικά του νοήματος των ασαφών εκφράσεων που μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για κάποιες προτάσεις, η σημασιολογική τιμή που τους αποδίδεται θα πρέπει να εξαρτάται από την σημασιολογική τιμή που αποδίδεται σε άλλες προτάσεις της γλώσσας. Παραδείγματα όπως αυτά δείχνουν πως για να είναι επαρκής μια θεωρία ως σημασιολογική θεωρία περί των ασαφών εκφράσεων, θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη το συγκεκριμένο φαινόμενο. Φαίνεται όμως ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό για μια αληθοσυναρτησιακή θεωρία.

Το όλο πρόβλημα ξεκινάει από τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε τις σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων της γλώσσας. Μια ερμηνεία της γλώσσας αποδίδει σε κάθε ατομική πρόταση κάποιον αριθμό από το διάστημα [0,1]. Προκειμένου να κάνουμε μια απόπειρα ώστε να ερμηνευτούν από φιλοσοφική άποψη οι συγκεκριμένες σημασιολογικές τιμές θεωρήσαμε ότι αυτές αντιστοιχούν σε κάποιο μέτρο επί του δυναμοσυνόλου του συνόλου των δυνατοτήτων. Οι τιμές των σύνθετων προτάσεων υπολογίζονται όμως με βάση τις συναρτήσεις εντός του συνόλου $\{F_{\sim}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}\}$, η πρώτη από τις οποίες έχει ως πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο [0,1], ενώ οι υπόλοιπες έχουν το ίδιο πεδίο τιμών αλλά ως πεδίο ορισμού το [0,1]x[0,1]. Υπολογίζονται δηλαδή με βάση συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις επί των τιμών που αντιστοιχούν στις υποπροτάσεις που τις αποτελούν, οπότε και διαπιστώσαμε ότι σε κάποιες προτάσεις αποδίδονται τιμές που δεν συμβιβάζονται με τον συγκεκριμένο τρόπο ερμηνείας, αλλά ούτε και με τις διαισθήσεις μας. Πρέπει λοιπόν να αναθεωρήσουμε τον τρόπο με βάση τον οποίο υπολογίζονται οι σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων. Μια επιλογή που διαφαίνεται σε αυτό το σημείο είναι να κρατήσουμε το διάστημα των πραγματικών αριθμών [0, 1] ως το σύνολο των σημασιολογικών τιμών που αποδίδονται στις προτάσεις της γλώσσας, διατηρώντας έτσι ένα από τα βασικά γνωρίσματα των θεωριών του είδους, αλλά να διατυπώσουμε συνθήκες με βάση τις οποίες οι σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων υπολογίζονται όχι με αριθμητικές πράξεις επί αυτών των βαθμών, αλλά με πράξεις επί συνόλων δυνατοτήτων.

Έστω λοιπόν σύνολο Q που περιέχει τις δυνατότητες ώστε να συμπληρωθεί η σχετική πληροφορία. Για πρόταση Α συμβολίζουμε ως [Α] υποσύνολο του Q που περιέχει ακριβώς εκείνους τους τρόπους που καθιστούν αληθή την Α. Θεωρούμε λοιπόν ότι στην Α αποδίδεται από την ερμηνεία της γλώσσας το [Α] και ως σημασιολογική τιμή [[Α]] της πρότασης θεωρούμε την *M*([Α])/*M*(Q), όπου *M* κάποια κατάλληλη συνάρτηση μέτρου με πεδίο ορισμού το P(Q) και πεδίο τιμών τους πραγματικούς αριθμούς. Ως σύνολο V θεωρούμε λοιπόν και πάλι το διάστημα [0, 1]. Με βάση αυτά έπεται ότι το Q-[Α] θα περιέχει εκείνες τις δυνατότητες που καθιστούν ψευδή την Α, και άρα αληθή την ∼Α. Καταλήγουμε λοιπόν ότι θα είναι [∼Α]=Q-[Α], και άρα [[∼Α]]=*M*([∼Α])=*M*(Q-[Α])/*M*(Q). Για την περίπτωση της σύζευξης ας θεωρήσουμε προτάσεις Α, Β και [Α], [Β] τα σύνολα των δυνατοτήτων που καθιστούν αληθή την Α και αληθή την Β αντίστοιχα. Θα είναι [Α∧Β]=[Α]∩[Β]. Το σύνολο λοιπόν των δυνατοτήτων που καθιστούν αληθή την Α∧Β θα είναι το σύνολο που περιέχει ακριβώς εκείνες τις δυνατότητες που καθιστούν αληθή τόσο την Α όσο και την Β. Για την περίπτωση της διάζευξης ας θεωρήσουμε μια πρόταση της μορφής Α∨Β, τότε το σύνολο των δυνατοτήτων που την καθιστούν αληθή θα περιέχει ακριβώς εκείνες τις δυνατότητες που καθιστούν αληθή την Α, ή καθιστούν αληθή την Β. Θα είναι δηλαδή [Α∨Β]=[Α]∪[Β]. Τέλος, για την περίπτωση της συνεπαγωγής ας θεωρήσουμε μια πρόταση της μορφής Α→Β, και θέτουμε ότι το [Α→Β] περιέχει ακριβώς εκείνα τα αντικείμενα που ανήκουν στο Q και για τα οποία δεν ισχύει ότι καθιστούν αληθή την Α και ψευδή την Β. Θα είναι δηλαδή [Α→Β]=Q-([Α]∩[∼Β])=Q-([Α]∩(Q-[Β])). Παρατηρούμε εδώ το εξής, έστω ότι είναι [Α]⊆[Β]. Αφού είναι [Α]⊆[Β] έπεται ότι αν κάποια δυνατότητα καθιστά αληθή την Α τότε καθιστά αληθή και την Β. Με contraposition καταλήγουμε ότι αν κάποια δυνατότητα καθιστά ψευδή την B τότε θα καθιστά ψευδή και την A. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν γίνεται να υπάρχει δυνατότητα που καθιστά αληθή την A και ψευδή την B. Θα ισχύει άρα ότι αν είναι $[A]\subseteq[B]$ τότε $[A\rightarrow B]=Q$. Έστω από την άλλη ότι είναι $[B]\subset[A]$, οπότε έπεται ότι $Q-[A]\subset Q-[B]$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο των δυνατοτήτων που κάνουν αληθή την A και ψευδή την B, δηλαδή το σύνολο $[A]\cap[\sim B]$, το οποίο ταυτίζεται με το $[A]\cap(Q-[B])$, το οποίο με την σειρά του ταυτίζεται με το $[A]-[B]$. Έπεται ότι αν είναι $[A]\subseteq[B]$ ή $[B]\subset[A]$ τότε το σύνολο των δυνατοτήτων που καθιστούν αληθή την πρόταση $A\rightarrow B$ είναι το $Q-([A]\cap(Q-[B]))$, δηλαδή το $Q-([A]-[B])$.

Έχουμε καταλήξει στις εξής συνθήκες:

- $[\sim A]=Q-[A]$
- $[A\wedge B]=[A]\cap[B]$
- $[A\vee B]=[A]\cup[B]$
- $[A\rightarrow B]= Q-([A]\cap(Q-[B]))$

Οπότε για τις σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων θα είναι:

- $[[\sim A]]=M([\sim A])/M(Q)=M(Q-[A])/M(Q)$
- $[[A\wedge B]]=M([A\wedge B])/M(Q)=M([A]\cap[B])/M(Q)$
- $[[A\vee B]]=M([A\vee B])/M(Q)=M([A]\cup[B])/M(Q)$
- $[[A\rightarrow B]]=M([A\rightarrow B])/M(Q)=M(Q-([A]\cap(Q-[B])))/M(Q)$

Κατ' αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε να μείνουμε από κάποιες απόψεις αρκετά κοντά στο όλο πνεύμα των θεωριών βαθμών αλήθειας, και επιπλέον να αποφύγουμε ορισμένες από τις συνέπειες που έρχονται σε σύγκρουση με τις διαισθήσεις μας. Παρόλα αυτά θα διαπιστώσουμε επίσης ότι έχουμε απομακρυνθεί από αυτές σε κάποια σημαντικά σημεία.

Κατ' αρχάς διαπιστώνουμε ότι αν θεωρήσουμε και πάλι την σωρειτική ακολουθία α_1, α_2, …, α_{10000} ως προς το κατηγόρημα F, προτάσεις της μορφής $Fa_i\rightarrow Fa_{i+1}$ εξακολουθούν να λαμβάνουν υψηλή σημασιολογική τιμή. Πράγματι, έστω σύνολο Q που περιέχει τις διάφορες δυνατότητες όσον αφορά το πώς μπορεί να συμπληρωθεί η σχετική πληροφορία. Με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει για την συγκεκριμένη σωρειτική ακολουθία, έπεται ότι η πρόταση Fa_i βρίσκεται ελάχιστα πιο κοντά στην αλήθεια από την Fa_{i+1}. Έπεται λοιπόν ότι κάθε δυνατότητα που καθιστά αληθή την Fa_{i+1} θα καθιστά αληθή και την Fa_i, και άρα είναι $[Fa_{i+1}]\subseteq[Fa_i]$. Θα είναι άρα $[Fa_i\rightarrow Fa_{i+1}]=Q-([Fa_i]-[Fa_{i+1}])$, οπότε και έπεται ότι η πρόταση $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$ βρίσκεται πολύ κοντά στην αλήθεια αφού εντός του ($[Fa_i]$-$[Fa_{i+1}]$) μπορεί να περιέχεται μόνο μια δυνατότητα, αυτή που καθιστά αληθή την Fa_i και ψευδή την Fa_{i+1} , οπότε και το σύνολο Q-($[Fa_i]$-$[Fa_{i+1}]$) θα διαφέρει από το Q μόνο ως προς το ότι δεν περιέχει την συγκεκριμένη δυνατότητα. Έπεται λοιπόν ότι η σημασιολογική τιμή της πρότασης $[[Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}]]=M([Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}])/M(Q)=M(Q-([Fa_i]-[Fa_{i+1}]))/M(Q)$ θα είναι πολύ κοντά στο 1 και άρα η συγκεκριμένη πρόταση είναι πολύ κοντά στην αλήθεια. Έστω από την άλλη μια πρόταση της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$. Με βάση τις συνθήκες που έχουμε δώσει έπεται ότι θα είναι $[Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}]=[Fa_i] \cap [\sim Fa_{i+1}]= [Fa_i] \cap (Q-[Fa_{i+1}])$. Επιπλέον, έπεται και πάλι σύμφωνα με τις παραδοχές μας για την σωρειτική ακολουθία ότι θα είναι $[Fa_{i+1}] \subseteq [Fa_i]$, και μάλιστα το σύνολο $[Fa_i]$-$[Fa_{i+1}]$ θα περιέχει ακριβώς μία δυνατότητα, η οποία καθιστά αληθή την Fa_i και ψευδή την Fa_{i+1}. Παρατηρούμε όμως ότι θα ισχύει $[Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}]=[Fa_i] \cap (Q-[Fa_{i+1}])=[Fa_i]-[Fa_{i+1}]$, και άρα καταλήγουμε ότι θα είναι $[[Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}]]=M([Fa_i]-[Fa_{i+1}])/M(Q)$, άρα η σημασιολογική τιμή της πρότασης θα είναι πολύ κοντά στο 0 οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$, οι προτάσεις της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$ θα είναι πολύ κοντά στο ψεύδος. Τέλος, για προτάσεις Α, Β, που ερμηνεύονται ως 'ο α είναι πλούσιος' και 'ο α είναι φτωχός' αντίστοιχα, όπου 'α' όνομα κάποιας οριακής περίπτωσης για τα συγκεκριμένα κατηγορήματα, έπεται με βάση τα όσα έχουμε πει ότι θα είναι $[[A \rightarrow A]]=1$, ενώ από την άλλη θα έχουμε $[[A \rightarrow B]]<1$.

Όσον αφορά την έννοια της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος, όπως και πριν έχουμε εδώ πολλές επιλογές. Μπορούμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε ότι ένα επιχείρημα θα είναι έγκυρο σύμφωνα με μια ερμηνεία της γλώσσας αν και μόνο αν ισχύει ότι αν οι προκείμενες του επιχειρήματος είναι αληθείς, τότε είναι και το συμπέρασμα αληθές. Θα είναι λογικά έγκυρο αν και μόνο αν είναι έγκυρο σύμφωνα με κάθε ερμηνεία της γλώσσας. Θέτουμε δηλαδή ότι είναι D=1. Προκύπτει τότε ότι ο κανόνας modus ponens θα είναι έγκυρος. Πράγματι, έστω προτάσεις Α, Β και επιχείρημα της μορφής $A, A \rightarrow B \vDash B$, και έστω ότι είναι $[[A]]=[[A \rightarrow B]]=1$ οπότε έπεται ότι θα είναι $[A]=[A \rightarrow B]=Q$. Με βάση την σημασιολογική συνθήκη για τις προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής έπεται ότι θα είναι $[A \rightarrow B]=Q$ αν και μόνο αν $[A] \subseteq [B]$, και άρα έπεται ότι θα είναι $[B]=Q$, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι θα είναι $[[B]]=1$. Σε αυτή την περίπτωση τα επιχειρήματα τύπου σωρείτη αντιμετωπίζονται ως έγκυρα μεν αλλά μη ορθά, αφού οι προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα παρότι πολύ κοντά στην αλήθεια δεν είναι παρόλα αυτά εντελώς αληθείς. Εναλλακτικά, μπορούμε όπως και πριν να θέσουμε ότι το εκάστοτε πλαίσιο συζήτησης καθορίζει κάποιον ελάχιστο βαθμό ε εντός του [0,1], και προτάσεις με σημασιολογική τιμή που είναι μεγαλύτερη αυτού του βαθμού θεωρούνται επαρκώς αληθείς, θα είναι λοιπόν $D=\{x: x\in[0,1]\wedge\varepsilon\leq x\}$. Με βάση αυτόν τον ορισμό έπεται ότι υπάρχουν ερμηνείες της γλώσσας και πλαίσιο συζήτησης τέτοια ώστε οι προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα να προκύπτουν επαρκώς αληθείς, παρόλα αυτά ο κανόνας modus ponens δεν είναι λογικά έγκυρος, αφού αν θεωρήσουμε ένα επιχείρημα της μορφής Α, $A\rightarrow B\vDash B$ τότε μπορεί να υπάρχει ερμηνεία και πλαίσιο συζήτησης τέτοια ώστε οι προκείμενες να είναι επαρκώς αληθείς σε αυτά, ενώ το συμπέρασμα δεν είναι, προκειμένου να συμβεί αυτό αρκεί να είναι $\varepsilon\leq[[A]]$, $\varepsilon\leq[[A\rightarrow B]]$ και $[[B]]\leq\varepsilon$. Ας θεωρήσουμε την σωρειτική ακολουθία α_1, α_2, …, α_{10000} και ερμηνεία της γλώσσας καθώς και πλαίσιο συζήτησης τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $\varepsilon\leq[[Fa_i]]$ αν και μόνο αν είναι i μεγαλύτερο ή ίσο του 2000, και έστω οι προτάσεις Fa_{2000} και Fa_{2001}. Θα είναι δηλαδή $[[Fa_{2001}]]<\varepsilon\leq[[Fa_{2000}]]$, άρα $M([Fa_{2001}])/M(Q) <\varepsilon\leq M([Fa_{2000}])/M(Q)$, και επιπλέον θα είναι $[[Fa_{2000}\rightarrow Fa_{2001}]]=M([Fa_1]/M(Q) \geq M([Fa_{2000}])/M(Q)\geq \varepsilon$. Έπεται με βάση αυτά ότι υπάρχει ερμηνεία και πλαίσιο τέτοια ώστε ο κανόνας modus ponens να μας οδηγεί από προκείμενες που είναι επαρκώς αληθείς σε συμπέρασμα που δεν είναι. Καταλήγουμε άρα ότι δεν είναι λογικά έγκυρος, παρόλα αυτά διαπιστώνουμε με παρόμοιο τρόπο ότι οι προτάσεις της μορφής $Fa_i\rightarrow Fa_{i+1}$ για $i\in\{1, 2, …, 10000\}$ προκύπτουν με βάση την συγκεκριμένη ερμηνεία και πλαίσιο επαρκώς αληθείς.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η θεωρία που προκύπτει με βάση τις συγκεκριμένες τροποποιήσεις καταφέρνει να διατηρήσει κάποια από τα χαρακτηριστικά των συνηθισμένων θεωριών βαθμών αλήθειας, διορθώνει κάποια από τα μειονεκτήματά τους και συμβαδίζει σε μεγαλύτερο βαθμό με την φιλοσοφική ερμηνεία που προτιμήσαμε. Παρόλα αυτά, έχουμε πλέον καταλήξει σε μια θεωρία που δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθοσυναρτησιακή, τουλάχιστον όχι χωρίς να εγκαταλείψουμε εντελώς την ιδέα των αριθμών εντός του διαστήματος [0,1] ως σημασιολογικών τιμών που αποδίδονται στις προτάσεις της γλώσσας. Οι σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων δεν υπολογίζονται απευθείας, με βάση τις σημασιολογικές τιμές των υποπροτάσεων που τις αποτελούν. Η θεωρία λειτουργεί αποδίδοντας στην κάθε πρόταση της γλώσσας, είτε αυτή είναι ατομική είτε σύνθετη, κάποιο κατάλληλα διαμορφωμένο σύνολο και στην συνέχεια η σημασιολογική τιμή της πρότασης υπολογίζεται με βάση αυτό, συγκρίνοντας το με το σύνολο των δυνατοτήτων με βάση τις οποίες η σχετική με την αλήθεια ή ψεύδος των προτάσεων της γλώσσας πληροφορία μπορεί να συμπληρωθεί. Υπάρχει έτσι περίπτωση για κάποιες προτάσεις Α, Β να είναι $[[A]]=[[B]]=0,5$ και $[[A\vee B]]=0,5$ και ταυτόχρονα, για άλλες προτάσεις Γ, Δ να είναι $[[\Gamma]]=[[\Delta]]=0,5$ και $[[\Gamma\vee\Delta]]=1$.

Η αρχική εκδοχή της θεωρίας βαθμών αλήθειας που διατυπώσαμε είχε όπως είδαμε κάποιες παράξενες συνέπειες, ανεξαρτήτως του τρόπου που την ερμηνεύει κανείς. Στην προσπάθειά μας να διορθώσουμε τις συγκεκριμένες ιδιότητές της που εκλάβαμε ως μειονεκτήματα, αλλά και να την καταστήσουμε συμβατή με την φιλοσοφική ερμηνεία της προτίμησής μας, τροποποιήσαμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται οι σημασιολογικές τιμές που αποδίδονται στις προτάσεις της γλώσσας. Με αυτόν τον τρόπο καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι τα χαρακτηριστικά του φαινομένου της ασάφειας είναι τέτοια ώστε προκειμένου να διατυπώσουμε μια επαρκή θεωρία για αυτό πρέπει είτε να εγκαταλείψουμε την αρχή της αληθοσυναρτησιακότητας, είτε την ιδέα ότι οι σημασιολογικές τιμές των προτάσεων της γλώσσας έχουν την ίδια δομή με το διάστημα των πραγματικών αριθμών [0, 1]. Στο επόμενο κεφάλαιο θα ερευνήσουμε αυτή την ιδέα σε μεγαλύτερο βάθος, χρησιμοποιώντας ως σημείο έναρξης ένα άλλο γλωσσικό φαινόμενο, που με βάση τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα μπορεί να θεωρηθεί ως παρεμφερές του φαινομένου της ασάφειας.

2.2 Μη αληθοσυναρτησιακές Θεωρίες

2.2.1 Future Contingents

Ας θεωρήσουμε την δήλωση «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία». Είναι αυτή η αληθής ή ψευδής; Θεωρούμε συνήθως ότι το αν μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής καθορίζεται από το νόημά της καθώς και τον τρόπο με τον οποίο είναι διαμορφωμένος ο κόσμος. Αρκεί ο κόσμος να είναι όπως αυτή περιγράφει ώστε να είναι αληθής, διαφορετικά θα είναι ψευδής. Όπως λέει και το γνωστό σύνθημα, «το να λέει κανείς για αυτό που είναι ότι δεν είναι, ή για αυτό που δεν είναι ότι είναι, είναι ψευδές, ενώ το να λέει για αυτό που είναι ότι είναι, ή για αυτό που δεν είναι ότι δεν είναι, είναι αληθές».[25] Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάτι ανάλογο θα ισχύει και για μια δήλωση που αφορά το μέλλον με τον ίδιο τρόπο όπως και η παραπάνω; Είναι η δομή του κόσμου, όταν γίνεται η πράξη της εκφοράς, επαρκώς διαμορφωμένη ώστε να καθορίζεται αν αυτή η δήλωση είναι αληθής ή ψευδής; Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι αυτό όντως ισχύει, η συγκεκριμένη δήλωση είναι αληθής ή ψευδής, παρόλα αυτά εμείς δεν γνωρίζουμε τι από αυτά ισχύει. Εξάλλου, αν η ναυμαχία συμβεί, φαίνεται περίεργο το να αρνηθούμε ότι η συγκεκριμένη εκφορά ήταν τελικά αληθής, και αντίστοιχα για την περίπτωση που η ναυμαχία τελικά δεν συμβεί. Η συγκεκριμένη επιλογή βέβαια, παρότι διασώζει την κλασική λογική, φαίνεται σε αρκετούς ότι είναι ακραία. Αυτό ακριβώς γιατί φαίνεται να μην είναι εύκολο να συμβιβαστεί με την άποψη ότι τα ανθρώπινα όντα έχουν ελεύθερη βούληση. Φαίνεται έτσι να οδηγεί σε μια ακραία ντετερμινιστική εικόνα περί του κόσμου.

Ίσως λοιπόν η δομή του κόσμου προς το παρόν να είναι τέτοια ώστε αυτή να μην επαρκεί για να καθοριστεί η συγκεκριμένη δήλωση ως αληθής ή ψευδής. Ο κόσμος πολύ απλά δεν φέρει αρκετή πληροφορία για αυτό και κατά συνέπεια η αληθοτιμή της υποκαθορίζεται. Βέβαια, βασική σημασιολογική αρχή της κλασικής λογικής είναι αυτή της δισθένειας, σύμφωνα με αυτή για κάθε πρόταση ισχύει ότι είναι αληθής ή ψευδής. Κάνοντας τις πιο πάνω παραδοχές παρεκκλίνουμε από την κλασική σημασιολογία, και ίσως και από την κλασική λογική.[26] Ποια είναι λοιπόν η ορθή σημασιολογία για δηλώσεις που

[25] Πρόκειται για το γνωστό απόσπασμα από το Μετά τα Φυσικά του Αριστοτέλη (1011b27).

[26] Φαίνεται βέβαια πως πρόκειται για την επιλογή που προτίμησε και ο ίδιος ο Αριστοτέλης: «Τουτέστιν, σε αυτά είναι αναγκαίο καθένα σκέλος της αντίφασης να είναι αληθές ή ψευδές, όχι όμως συγκεκριμένα το ένα ή το άλλο, αλλά όποιο τύχει· και η μια απόφανση να είναι περισσότερο αληθής, όχι όμως ήδη αληθής ή ψευδής. Είναι φανερό επομένως ότι δεν είναι αναγκαίο σε κάθε κατάφαση και άρνηση που είναι αντίθετες η μια να είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Διότι αυτό που

αφορούν το μέλλον; Μπορούμε και πάλι να ξεκινήσουμε θεωρώντας πως οι προτάσεις της γλώσσας, πέρα από αληθείς ή ψευδείς, μπορεί να λαμβάνουν και μια τρίτη αληθοτιμή, και επιπλέον πως οι αληθοτιμές των σύνθετων προτάσεων καθορίζονται αποκλειστικά και μόνο από τις αληθοτιμές των προτάσεων από τις οποίες αυτές συντίθενται. Είναι με βάση παραδοχές όπως αυτές, όσον αφορά το συγκεκριμένο πρόβλημα, που ο Łukasiewicz διατύπωσε την πρώτη τρίτιμη λογική, γνωστή ως L3, κάποιες από τις ιδιότητες της οποίας εξετάσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι πίνακες για την L3 όπως είδαμε είναι οι εξής:

~A	
1	0
i	i
0	1

A∧B	1	i	0
1	1	i	0
i	i	i	0
0	0	0	0

A∨B	1	i	0
1	1	1	1
i	1	i	i
0	1	i	0

A→B	1	i	0
1	1	i	0
i	1	1	i
0	1	1	1

Η πρόταση «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» δεν είναι λοιπόν ούτε αληθής, ούτε και ψευδής, και άρα της ανατίθεται η ενδιάμεση αληθοτιμή i. Όπως και στην περίπτωση της ασάφειας όμως, έτσι κι εδώ διαπιστώνουμε ότι κάποιες από τις συνέπειες της θεωρίας είναι τουλάχιστον προβληματικές. Μας φαίνεται για παράδειγμα πως όπως και αν εξελιχθούν τα πράγματα οι δυνατές περιπτώσεις είναι δύο, τελικά είτε θα συμβεί μια ναυμαχία αύριο, είτε όχι. Παρόλα αυτά, με βάση τους πιο πάνω πίνακες αλήθειας, η πρόταση «αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία ή δεν ισχύει ότι αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» θα πρέπει να λάβει επίσης την τιμή i. Ανάλογα, την ίδια τιμή θα λάβει και η πρόταση «αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία και δεν ισχύει ότι αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία». Μας φαίνεται όμως πως όπως και αν εξελιχθεί το μέλλον, η συγκεκριμένη δήλωση πολύ απλά θα είναι ψευδής.

Βέβαια, προς το παρόν φαίνεται πως μια εκφορά της πρότασης «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» δεν είναι ούτε αληθής, ούτε ψευδής, μεθαύριο όμως θα είναι σίγουρα κάτι από τα δύο. Η διαθέσιμη πληροφορία κατά την στιγμή που εκφέρεται η πρόταση δεν επαρκεί ώστε να καθοριστεί συγκεκριμένη αληθοτιμή για αυτή, δεν θα ισχύει το ίδιο όμως και αν περάσει επαρκές χρονικό διάστημα από την στιγμή της εκφοράς. Μάλιστα, όπως είδαμε φαίνεται πως η διαθέσιμη κατά την στιγμή της εκφοράς πληροφορία επαρκεί ώστε να καθοριστεί αληθοτιμή για μερικές από τις προτάσεις της

εφαρμόζεται για όσα ισχύουν δεν εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο και για όσα δεν ισχύουν, αλλά, όπως είπαμε, είναι δυνατόν να ισχύσουν ή να μην ισχύσουν». Περί ερμηνείας, 19a36b4.

γλώσσας στις οποίες κάποιο αληθοσυναρτησιακό σύστημα αναθέτει ενδιάμεση σημασιολογική τιμή. Ξέρουμε για παράδειγμα πως όπως και αν εξελιχθούν τα πράγματα, η άρνηση κάποιας πρότασης τελικά θα έχει την αντίθετη αληθοτιμή από αυτήν.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν πως Val(x) είναι κάποια συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε ατομική πρόταση της γλώσσας κάποια από τις τιμές 0, i, 1 ενώ σε κάθε σύνθετη πρόταση αναθέτει τη σημασιολογική τιμή που καθορίζεται με βάση τις τιμές που έχουν ανατεθεί στις υποπροτάσεις που εμφανίζονται εντός αυτής και τους πιο πάνω πίνακες. Πρόκειται δηλαδή για μια L3 ερμηνεία. ΄Εστω τώρα Val'(x) μια συνάρτηση που συμφωνεί με την Val(x) όσον αφορά τις ατομικές προτάσεις που λαμβάνουν σημασιολογική αξία ίση με 0 ή 1, αλλά σε κάθε ατομική πρόταση που λαμβάνει την τιμή i από την Val(x) αυτή αναθέτει ακριβώς μία από τις 0,1. Η Val'(x) συμπληρώνει λοιπόν τα κενά που αφήνει η Val(x), θέτουμε όμως τον επιπλέον περιορισμό ότι αυτό θα πρέπει να γίνεται με τρόπο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτή αντιστοιχεί σε κάποιο δυνατό μέλλον. Σε κάποιον δηλαδή τρόπο ώστε να συμπληρωθεί η σχετική με την αληθοτιμή των διαφόρων προτάσεων της γλώσσας πληροφορία, αντίστοιχα όπως αυτό θα είχε συμβεί εάν είχε περάσει επαρκής χρόνος ώστε να εκτυλιχτούν τα σχετικά γεγονότα. Αυτό σημαίνει ότι η Val'(x) θα πρέπει να αναθέτει τιμές στις ατομικές προτάσεις με τρόπο που σέβεται το νόημα τους και τις νοηματικές συνδέσεις μεταξύ τους, δεν αρκεί αυτή να αναθέτει σε κάθε ατομική πρόταση κάποια από τις τιμές 0, 1 στην τύχη. Υπάρχει το ενδεχόμενο το νόημα κάποιας ατομικής πρότασης Α να είναι τέτοιο ώστε αυτή να μην είναι δυνατό να είναι αληθής ταυτόχρονα με κάποια άλλη πρόταση Β, ή να είναι τέτοιο ώστε οι δύο προτάσεις να πρέπει πάντα να έχουν την ίδια αληθοτιμή κτλ. Για παράδειγμα η δήλωση «σε 24 ώρες θα έχει λιακάδα στο σημείο β» δεν φαίνεται πως θα μπορούσε να είναι ταυτόχρονα αληθής με την δήλωση «σε 24 ώρες θα έχει μουντό καιρό στο σημείο β», μια συνάρτηση που αναθέτει στις δύο αυτές δηλώσεις την τιμή 1 δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί πως αντιστοιχεί σε κάποιο δυνατό μέλλον. Όσον αφορά τις σύνθετες προτάσεις, θεωρούμε πως η Val'(x) τους αντιστοιχεί τις τιμές που καθορίζονται με βάση τους πίνακες που προκύπτουν από αυτούς του Łukasiewicz αν αγνοήσουμε τις περιπτώσεις που κάποια από τις υποπροτάσεις λαμβάνει τιμή i, με άλλα λόγια με βάση τους πίνακες της κλασικής λογικής.

Δεδομένης λοιπόν κάποιας L3 ερμηνείας, θα προκύπτει ένα σύνολο από συναρτήσεις ανάλογες της Val'(x), για κάθε μία από τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτή αντιστοιχεί σε κάποιο δυνατό μέλλον. Καλούμε το συγκεκριμένο σύνολο ως το σύνολο των αποδεκτών αποτιμήσεων, τα μέλη του συνόλου αποτιμήσεις. Έστω τώρα μια πρόταση που από κάθε συνάρτηση που ανήκει στο συγκεκριμένο σύνολο παίρνει την τιμή 1. Μπορούμε να θεωρήσουμε πως αυτή η πρόταση είναι αληθής, αφού αυτή θα επιβεβαιώνεται όπως και αν εξελιχθεί ο κόσμος μελλοντικά. Κατά παρόμοιο τρόπο, μια πρόταση που από κάθε συνάρτηση που ανήκει στο σύνολο των αποδεκτών αποτιμήσεων παίρνει την τιμή 0 μπορεί να θεωρηθεί με ασφάλεια ότι είναι ψευδής. Προτάσεις που από κάποιες αποτιμήσεις παίρνουν την τιμή 1 ενώ από κάποιες άλλες την τιμή 0 δεν είναι αληθείς, ούτε όμως και ψευδείς.

Ας θεωρήσουμε εδώ και πάλι την δήλωση «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία». Σίγουρα, θα υπάρχει κάποιο δυνατό μέλλον που την καθιστά αληθή, και παρομοίως θα υπάρχει κάποιο δυνατό μέλλον που την καθιστά ψευδή. Στο σύνολο των αποδεκτών αποτιμήσεων θα πρέπει λοιπόν να υπάρχουν αποτιμήσεις που της αναθέτουν την τιμή 1, καθώς και αποτιμήσεις που της αναθέτουν την τιμή 0. Επιπλέον, όπως και αν εξελιχθούν τα πράγματα μεθαύριο η συγκεκριμένη δήλωση θα είναι πλέον είτε αληθής, είτε ψευδής. Κάθε αποδεκτή αποτίμηση θα αναθέτει στην συγκεκριμένη δήλωση ακριβώς μία από τις τιμές 0 ή 1. Εφόσον όμως οι αποτιμήσεις αναθέτουν τιμές αλήθειας στις σύνθετες προτάσεις της γλώσσας με βάση τους κλασικούς πίνακες αλήθειας, προκύπτει ότι όσες αποτιμήσεις ανήκουν στην πρώτη κατηγορία θα αναθέτουν στην άρνηση της πρότασης την τιμή 1, ενώ όσες ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία θα αναθέτουν στην άρνησή της την τιμή 0. Σε κάθε περίπτωση η διάζευξη «αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία ή δεν ισχύει ότι αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» θα παίρνει την τιμή 1, και άρα είναι αληθής. Ανάλογα προκύπτει ότι σε κάθε αποτίμηση η πρόταση «αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία και δεν ισχύει ότι αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» θα λαμβάνει την τιμή 0, και άρα αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως ψευδής.

2.2.2 Ασάφεια

Μια από τις κεντρικές παραδοχές της παρούσας εργασίας είναι ότι υπάρχουν κάποιες ομοιότητες μεταξύ προτάσεων όπως «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» και προτάσεων όπως «Το Σ είναι σωρός», όπου ‘Σ’ όνομα που αναφέρεται σε κάποια συγκέντρωση κόκκων άμμου τέτοια ώστε οι ομιλητές της γλώσσας να μην μπορούν να αποφασίσουν αν αυτή είναι σωρός ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση φαίνεται πως το νόημα των διαφόρων εκφράσεων που αποτελούν την πρόταση είναι απόλυτα καθορισμένο. Παρόλα αυτά ο τρόπος που ο κόσμος είναι διαμορφωμένος όταν αυτή εκφέρεται δεν φέρει αρκετή πληροφορία ώστε να καθοριστεί κάποια συγκεκριμένη αληθοτιμή για κάποια εκφορά της πρότασης. Πολύ απλά δεν είναι επαρκώς διαμορφωμένος ώστε κάτι τέτοιο να είναι δυνατό. Προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο ένα είδος απροσδιοριστίας (indeterminacy). Όπως όμως υπάρχουν γεγονότα περί του κόσμου και του τρόπου που αυτός είναι διαμορφωμένος την εκάστοτε στιγμή, έτσι υπάρχουν και γεγονότα περί της γλώσσας και του τρόπου που αυτή έχει διαμορφωθεί. Και όπως μπορεί ο κόσμος να μην είναι επαρκώς διαμορφωμένος ώστε να καθοριστεί συγκεκριμένη αληθοτιμή για κάποιες εκφορές προτάσεων, έτσι μπορεί και η γλώσσα να μην είναι, από κάποιες απόψεις, επαρκώς διαμορφωμένη ώστε να καθοριστεί αληθοτιμή για κάποιες άλλες εκφορές προτάσεων. Πολύ απλά δεν έχει χρειαστεί να διαμορφωθούν από τη γλωσσική κοινότητα κανόνες που καθορίζουν για κάθε περίπτωση αν αυτή είναι σωρός ή όχι και άρα να τεθούν σαφή όρια μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Απλά δείξαμε κάποια αντικείμενα και τα χαρακτηρίσαμε σωρούς, ενώ κάποια άλλα τα χαρακτηρίσαμε ως όχι σωρούς. Ενώ όμως σε κάποιες περιπτώσεις αρκεί να κάνουμε κάτι τέτοιο και η δομή του κόσμου είναι τέτοια ώστε τελικά καθορίζεται κάποιο σαφές όριο, όταν για παράδειγμα δείχνουμε κάτι και το βαφτίζουμε «νερό» οπότε ο κόσμος είναι έτσι διαμορφωμένος ώστε καθορίζεται πως με αυτόν τον όρο αναφερόμαστε σε μια συγκεκριμένη χημική ένωση,[27] δεν ισχύει το ίδιο και για τις περιπτώσεις που μας απασχολούν. Όπως λοιπόν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές δυνατότητες όσον αφορά το μέλλον του κόσμου, έτσι μπορούμε και να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές δυνατότητες ως προς το «μέλλον» της γλώσσας.

Είναι με βάση αυτά ξεκάθαρο γιατί αν ισχύουν οι συγκεκριμένες παραδοχές που έχουμε κάνει, τότε η κλασική λογική, ή τουλάχιστον η κλασική σημασιολογία, δεν μπορεί να είναι ορθή όσον αφορά την περίπτωση κάποιας γλώσσας που περιέχει προτάσεις όπως 'το Σ είναι σωρός'. Οι αρχές της σύγχρονης κλασικής λογικής διατυπώθηκαν αυστηρά για πρώτη φορά από τους Frege και Russell, στην προσπάθειά τους να αποδείξουν ότι κάθε αληθής πρόταση μαθηματικού περιεχομένου είναι επί της ουσίας ένα είδος λογικής αλήθειας. Ως εκ τούτου, τους ενδιέφεραν κυρίως γλώσσες που είναι απολύτως διαμορφωμένες, και για τις οποίες μπορούμε άρα να κάνουμε την παραδοχή ότι οι προτάσεις τους διέπονται από παρόμοιες σημασιολογικές αρχές με αυτές που διέπουν τις προτάσεις κάποιας κλασικής τυπικής γλώσσας, οπότε και μπορούν να μεταφραστούν εντός της τελευταίας. Παρόλα αυτά, υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ του τρόπου με τον

[27] Πρόκειται για το συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξει με βάση το γνωστό νοητικό πείραμα της «δίδυμης γης» ο Hilary Putnam, στο άρθρο του 'Meaning and Reference', Putnam [1973].

οποίο διαμορφώνεται συνήθως μια μαθηματική γλώσσα και του τρόπου με τον οποίο διαμορφώνεται η φυσική γλώσσα. Μια μαθηματική γλώσσα, τόσο από συντακτική όσο και από σημασιολογική άποψη, αποτελεί προϊόν συγκεκριμένων ορισμών που καθορίζουν εξαρχής και με ακρίβεια όλα τα χαρακτηριστικά της. Μια φυσική γλώσσα από την άλλη, διαμορφώνεται με αρκετά λιγότερο ξεκάθαρο τρόπο. Πρόκειται για το προϊόν μιας διαδικασίας η οποία μπορεί να παραλληλιστεί με αυτήν της φυσικής επιλογής. Μιας διαδικασίας με βάση την οποία εξακολουθούν να διαμορφώνονται και να μεταβάλλονται βασικά χαρακτηριστικά της γλώσσας με την πάροδο του χρόνου, ακόμα μάλιστα και κατά την διάρκεια μιας συζήτησης μεταξύ δύο ομιλητών. Πράγματι, αν πχ θεωρήσουμε κάποιο αντικείμενο που είναι οριακή περίπτωση σωρού, τότε φαίνεται πως ο τρόπος που αυτό θα χαρακτηριστεί συχνά βρίσκεται στην ευχέρεια των ομιλητών. Αυτοί μπορούν ανά περίσταση, ανάλογα με το θέμα της συζήτησης και τους σκοπούς που έχουν, να το δεχτούν ως σωρό ή να το απορρίψουν, και άρα να τροποποιήσουν συγκεκριμένα από τα σημασιολογικά γνωρίσματα της γλώσσας που χρησιμοποιούν, χωρίς να δημιουργείται η εντύπωση ότι παραβιάζουν κάποια πτυχή του νοήματος της συγκεκριμένης έκφρασης. Μια φυσική γλώσσα λοιπόν, ως το προϊόν μιας συνεχώς εν εξελίξει διαδικασίας, δεν μπορεί να θεωρηθεί ως πλήρως διαμορφωμένη, ούτε από συντακτική, αλλά ούτε και από σημασιολογική άποψη, οπότε οι προτάσεις της δεν μπορούν να μεταφραστούν με πιστότητα εντός κάποιας κλασικής τυπικής γλώσσας, της οποίας βασική σημασιολογική παραδοχή είναι ότι κάθε πρόταση έχει απολύτως καθορισμένη τιμή αλήθειας.

Παρόλα αυτά, μπορούμε να κάνουμε μια απόπειρα ώστε να προσεγγίσουμε κάποια από τα χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας διαμορφώνοντας κάποια μη κλασική τυπική γλώσσα, τέτοια ώστε για κάποιες από τις προτάσεις της να υπάρχουν σημασιολογικά χαρακτηριστικά τα οποία, κατά μία έννοια, μπορούν να αντιμετωπιστούν ως μη πλήρως καθορισμένα. Λέμε «κατά μία έννοια» γιατί θα πρόκειται βέβαια και πάλι για μια τυπική γλώσσα, και άρα το γεγονός ότι κάποια σημασιολογικά χαρακτηριστικά δεν είναι πλήρως καθορισμένα για όλες τις προτάσεις της γλώσσας θα έπεται από τον τρόπο που εμείς έχουμε διατυπώσει τους σχετικούς ορισμούς εντός της σημασιολογικής θεωρίας για αυτήν, και όχι από κάποια διαδικασία όπως αυτή βάσει της οποίας διαμορφώνεται η φυσική γλώσσα. Μπορεί λοιπόν να υποστηρίξει κανείς ότι και πάλι θα δεν θα είναι δυνατό να μεταφράσουμε επακριβώς εντός της τυπικής γλώσσας προτάσεις όπως η ‘ το Σ είναι σωρός’, και άρα τα όποια συμπεράσματα στα οποία μπορεί να καταλήξουμε μελετώντας τα χαρακτηριστικά των μεταφράσεων πάλι δεν θα είναι ορθά και για την περίπτωση της φυσικής γλώσσας. Δεν υπάρχει αμφιβολία όμως ότι αν οι παραδοχές που έχουμε κάνει είναι αληθείς, τότε οι μεταφράσεις που μπορούμε να δώσουμε εντός της συγκεκριμένης τυπικής γλώσσας θα είναι σε μεγαλύτερο βαθμό πιστές στο νόημα των αρχικών προτάσεων απ' ότι οι αντίστοιχες μεταφράσεις εντός κάποιας κλασικής τυπικής γλώσσας, και αυτό σίγουρα είναι μία πρόοδος.

Θεωρούμε λοιπόν ότι είναι ακριβώς το γεγονός ότι η φυσική γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη από σημασιολογική άποψη που εξηγεί το ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε συγκεκριμένη τιμή αλήθειας για κάποια εκφορά της πρότασης «Το Σ είναι σωρός». Όπως η κατάσταση του κόσμου στο παρόν δεν φέρει αρκετή πληροφορία ώστε να καθοριστεί αν μια εκφορά της πρότασης «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» είναι αληθής ή ψευδής, έτσι και η τρέχουσα κατάσταση της γλώσσας δεν φέρει αρκετή πληροφορία ώστε να καθοριστεί αν μια εκφορά της πρότασης «Το Σ είναι σωρός» είναι αληθής ή ψευδής. Παρόλα αυτά, όπως ξέρουμε ότι τελικά η αληθοτιμή μιας εκφοράς της «Αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία» θα καθοριστεί, ίσως κατά παρόμοιο τρόπο θα καθοριστεί τελικά και η αληθοτιμή της εκφοράς «Το Σ είναι σωρός» αν η γλώσσα εξελιχθεί με συγκεκριμένο τρόπο.

Παρατηρούμε βέβαια ότι το φαινόμενο της ασάφειας είναι επίμονο. Η γλώσσα περιέχει ασαφείς εκφράσεις εδώ και χιλιάδες χρόνια, τα χαρακτηριστικά των οποίων προβληματίζουν τους φιλοσόφους κατά ένα αντίστοιχα μεγάλο χρονικό διάστημα, οι πρώτες διατυπώσεις του παραδόξου του σωρείτη αποδίδονται στους μεγαρικούς.[28] Αν η ασάφεια είναι ένα φαινόμενο που προκύπτει επειδή η φυσική γλώσσα βρίσκεται από κάποιες απόψεις σε μια ημιτελή κατάσταση τότε γιατί είναι ακόμα μαζί μας; Εφόσον όμως θεωρούμε πως η φυσική γλώσσα διαμορφώνεται μέσα από μια διαδικασία παρόμοια της φυσικής επιλογής, τότε σίγουρα θα πρέπει το συγκεκριμένο φαινόμενο να μην είναι απλά κάτι επιζήμιο και καταστροφικό, αλλά κάτι που σε πολλές περιπτώσεις είναι ωφέλιμο. Πράγματι, το ζητούμενο στην καθημερινή επικοινωνία μεταξύ των ομιλητών δεν είναι πάντα η ακρίβεια, όπως στις διάφορες μαθηματικές γλώσσες, αλλά συχνότερα η συντομία, η ευκολία, και η ευελιξία στην χρήση των διαφόρων εκφράσεων.[29] Μια φυσική γλώσσα

[28] Πιο συγκεκριμένα, ο Διογένης Λαέρτιος αναφέρει το επιχείρημα του σωρείτη ως ένα από επτά παράδοξα που είχε διατυπώσει ο Ευβουλίδης. Την συγκεκριμένη πληροφορία την αντλώ από το άρθρο του Jonathan Barnes, Medicine, Experience and Logic, Barnes [1982].

[29] Όπως θα γράψει ο Frege στον πρόλογο του Begriffsschrift: I believe that I can best make the relation of my ideography to ordinary language clear if I compare it to that which the microscope has to the eye. Because of the range of its possible uses and the versatility with which it can adapt to the most diverse circumstances, the eye is far superior to the microscope. […] But, as soon as scientific goals demand great sharpness of resolution, the eye proves to be insufficient. (Όπως είναι μεταφρασμένο στην συλλογή 'From Frege to Gödel', Van Heijenoort [1967]. Το συγκεκριμένο απόσπασμα εμφανίζεται στην σελίδα 6 του βιβλίου)

εξίσου ακριβής και πλήρως διαμορφωμένη με τις διάφορες τυπικές γλώσσες θα ήταν αφόρητα δύσκολη στην χρήση της, τόσο από την πλευρά του ομιλητή, του πομπού, όσο και από την πλευρά του ερμηνευτή, του δέκτη του σήματος που μεταδίδεται. Ο Stephen Read για παράδειγμα θα το θέσει ως εξής:

«… it will rob us of the ability to apply terms 'just by looking'. We will need to carry meters and gauges around, to know when to apply 'red' and 'tall', just as we already do for 'radioactive' and 'poisonous'».[30]

Δεν θα ήταν πλέον στην ευχέρεια των ομιλητών το να αντιμετωπίσουν κάποια εκφορά μιας πρότασης όπως η 'το Σ είναι κόκκινο' ως αληθή ή ψευδή απλά μεταβάλλοντας το επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας ανάλογα με την περίσταση. Θα μπορούσαν βέβαια και πάλι να θεωρήσουν πχ ότι το Σ είναι όντως κόκκινο αν αυτό τους εξυπηρετούσε στο εκάστοτε πλαίσιο συζήτησης, αλλά αν η γλώσσα ήταν πλήρως διαμορφωμένη και το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το όνομα 'Σ' δεν ήταν κόκκινο, αυτοί θα έκαναν λάθος. Θα συμπεριφέρονταν λοιπόν ως εάν οι σχετικές εκφορές τους ήταν αληθείς παρόλο που αυτές είναι στην πραγματικότητα ψευδείς, και μάλιστα χωρίς αυτοί να έχουν οποιαδήποτε πρόσβαση στο συγκεκριμένο γεγονός. Φαίνεται όμως ως σοβαρό μειονέκτημα για οποιαδήποτε υποψήφια θεωρία το να έχει ως συνέπεια ότι υπάρχουν περιπτώσεις που οι ίδιοι οι ομιλητές της γλώσσας μπορεί να κάνουν συστηματικά λάθος όσον αφορά τον τρόπο που αξιολογούν τις εκφορές τους και συμπεριφέρονται με βάση αυτές.

Θεωρούμε λοιπόν ότι υπάρχει κάποιο είδος εξελικτικής πίεσης ώστε η φυσική γλώσσα να παραμένει σε κατάσταση που από κάποιες απόψεις μπορεί να θεωρηθεί ημιτελής. Οι διάφορες εκφράσεις της γλώσσας αποκτούν το νόημα που έχουν από την γλωσσική κοινότητα, και τον τρόπο που αυτή τις χρησιμοποιεί, καθώς και από την δομή του κόσμου. Καλούμε κάποια πράγματα στον κόσμο γύρω μας «νερό», και η δομή του κόσμου είναι τέτοια ώστε και κάποια άλλα πράγματα να ικανοποιούν τη συγκεκριμένη έκφραση,

---

Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι ο Frege αναφέρεται εντός του Begriffsschrift και στο παράδοξο του σωρείτη, στο σημείο που πραγματεύεται την μαθηματική επαγωγή, στη σελίδα 62 της προαναφερθείσας έκδοσης: For Example, let F be the property of being a heap of beans; let f be the procedure of removing one bean from a heap of beans; so that f(a, b) means the circumstance that b contains all beans of the heap a except one and does not contain anything else. Then by means of our proposition we would arrive at the result that a single bean, or none at all, is a heap of beans if the property of being a heap of beans is hereditary in the f-sequence.
Στο ίδιο σημείο θα σκιαγραφήσει μάλιστα και μια απάντηση σε αυτό: This is not the case in general, however, since there are certain z for which F(z) cannot become a judgement on account of the indeterminateness of the notion "heap".

[30] Read, Stephen [1995].

ενώ όλα τα υπόλοιπα όχι. Κάποιες φορές όμως, φαίνεται πως αυτό δεν αρκεί. Καλούμε κάποια πράγματα κόκκινα, ή σωρούς, ή φαλακρά κτλ και κάποια άλλα πράγματα όχι κόκκινα, όχι σωρούς, όχι φαλακρά κτλ. Παρόλα αυτά, το ζήτημα εδώ μένει ανοικτό για κάποια άλλα αντικείμενα για τα οποία δεν φαίνεται να έχει καθοριστεί αν είναι κόκκινα ή όχι, σωροί ή όχι, φαλακρά ή όχι κτλ. Η δομή του κόσμου φαίνεται στις συγκεκριμένες περιπτώσεις να είναι διαφορετική, με αποτέλεσμα να απαιτείται περισσότερη δουλειά εκ μέρους των ομιλητών προκειμένου να κλείσει το κενό που φαίνεται να υπάρχει στις εκτάσεις αυτών των εκφράσεων. Για λόγους όμως όπως αυτοί που προαναφέραμε, οι ομιλητές αποφεύγουν να ενεργήσουν με τρόπο ώστε να συμβεί κάτι τέτοιο, αφού αυτό θα ήταν όχι μόνο δύσκολο αλλά θα στερούσε και από την γλώσσα σε μεγάλο βαθμό την ευχρηστία και ευελιξία της. Αντί αυτού προτιμούν να αφήσουν τα πράγματα ως έχουν, και την γλώσσα που χειρίζονται σε μια ημιτελή, και συνεχώς εξελισσόμενη, κατάσταση.

Συνοψίζοντας, θα βασιστούμε στην παραδοχή ότι το φαινόμενο της ασάφειας είναι επί της ουσίας ένα είδος σημασιολογικής απροσδιοριστίας. Θέτουμε ότι η φυσική γλώσσα είναι από κάποιες απόψεις ημιτελής, το φαινόμενο της ασάφειας προκύπτει ακριβώς επειδή αυτή δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη από σημασιολογική άποψη, δεν θέτει πάντα σαφή όρια. Επιπλέον, σε πολλές περιπτώσεις δεν φαίνεται η κοινότητα να είναι διατεθειμένη να καταβάλει την επιπλέον προσπάθεια που απαιτείται ώστε να πάψει αυτό να ισχύει. Το αποτέλεσμα είναι ότι η φυσιολογική κατάσταση για την γλώσσα είναι αυτή να βρίσκεται σε μια ημιτελή, προσωρινή, κατάσταση, ως προς την οποία υπάρχει μια πληθώρα τρόπων, συμβατών με το περιεχόμενο που οι διάφορες γλωσσικές εκφράσεις προς το παρόν έχουν, με τους οποίους θα μπορούσε η σχετική με την αλήθεια ή το ψεύδος των διαφόρων προτάσεων πληροφορία να διαμορφωθεί περαιτέρω. Αν λοιπόν θεωρούμε πως μια εκφορά που αφορά το μέλλον η οποία επιβεβαιώνεται από κάθε τρόπο με τον οποίο μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω ο κόσμος μπορεί πολύ απλά να θεωρηθεί αληθής, τότε φαίνεται πως με ανάλογο τρόπο μπορούμε να θεωρούμε ως αληθή και μια πρόταση που επιβεβαιώνεται από κάθε τρόπο με τον οποίο μπορεί η γλώσσα να διαμορφωθεί περαιτέρω.

2.2.3 Ένα τυπικό Πλαίσιο

Ας θεωρήσουμε για αρχή μια τυπική γλώσσα $\mathscr{L}$, η οποία περιέχει κάποιο πλήθος από ατομικές σταθερές και κατηγορηματικά σύμβολα. Επιπλέον, κάποια από τα κατηγορήματα της είναι ασαφή. Θεωρούμε δηλαδή ότι από σημασιολογική άποψη αυτή δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη. Υπάρχουν προτάσεις της για τις οποίες δεν μπορεί με βάση τον τρόπο που αυτή είναι διαμορφωμένη να καθοριστεί συγκεκριμένη τιμή αλήθειας. Για κάθε ασαφές κατηγόρημα που ανήκει σε αυτή θα υπάρχουν με βάση τον τρόπο που αυτή είναι διαμορφωμένη κάποια αντικείμενα που το ικανοποιούν, κάποια που δεν το ικανοποιούν, ενώ για τα υπόλοιπα δεν θα είναι καθορισμένο σε ποια κατηγορία ανήκουν. Έστω λοιπόν διατεταγμένη οκτάδα $\langle D, W, C, b, R, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}\rangle$. Εδώ, D είναι το πεδίο δράσης των ποσοδεικτών της γλώσσας και W το σύνολο των δυνατών καταστάσεων στις οποίες αυτή μπορεί να βρεθεί, απαιτούμε αυτά να είναι μη κενά σύνολα. Ως δυνατές καταστάσεις της γλώσσας θεωρούμε εκείνες που σέβονται ορισμένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του νοήματος των εκφράσεων που αυτή περιέχει, όπως αυτό είναι διαμορφωμένο. Έστω για παράδειγμα μια κατάσταση που για ασαφές κατηγόρημα F και αντικείμενα a, b τέτοια ώστε το a είναι πιο F από το b κατατάσσει το b στην έκταση του F ενώ δεν παίρνει θέση για το a, η συγκεκριμένη κατάσταση παραβιάζει βασικές παραδοχές για το νόημα της έκφρασης ‘F’ και ως εκ τούτου δεν μπορεί να συμπεριληφθεί μεταξύ των δυνατών τρόπων διαμόρφωσης της γλώσσας. Επιπλέον, οι καταστάσεις εντός του W θα πρέπει να σέβονται και τις αντίστοιχες νοηματικές συνδέσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ διαφορετικών εκφράσεων της γλώσσας. Για παράδειγμα, μια κατάσταση στην οποία κάποιος κατατάσσεται στην έκταση του “ο x είναι πλούσιος” αλλά όχι στην έκταση του “ο x είναι οικονομικά ευμαρής” δεν θα είναι αποδεκτή. Συνεχίζοντας, το C είναι ένα υποσύνολο του W που περιέχει ακριβώς εκείνες τις καταστάσεις της γλώσσας όπου αυτή είναι πλήρως διαμορφωμένη, b είναι η “τρέχουσα” κατάσταση της γλώσσας, R μια σχέση μεταξύ των αντικειμένων που ανήκουν στο W (αφήνουμε προς το παρόν ανοικτό το αν αυτή είναι διμελής, τριμελής ή κάτι άλλο) και $\sqsubseteq$ μια σχέση μερικής διάταξης στο W, θεωρούμε πως για z, w αντικείμενα που ανήκουν στο W θα είναι $z \sqsubseteq w$ αν και μόνο αν w είναι μια κατάσταση που έπεται της z όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η γλώσσα καθώς διαμορφώνεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό.[31] Τέλος, Val^{+} είναι μια διμελής συνάρτηση που σε κάθε διατεταγμένη δυάδα $\langle a, b\rangle$, όπου a αντικείμενο που ανήκει στο W και b κάποιο n-Θέσιο κατηγορηματικό σύμβολο, αναθέτει κάποιο υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου D^{n} ενώ σε κάθε διατεταγμένη δυάδα $\langle a, b\rangle$, όπου a αντικείμενο που ανήκει στο W και b είναι κάποια ατομική σταθερά τότε αναθέτει κάποιο αντικείμενο που ανήκει στο D. Η Val^{-} σε κάθε διατεταγμένη δυάδα $\langle a, b\rangle$, όπου b κατηγορηματικό σύμβολο της γλώσσας, θα αναθέτει επίσης κάποιο υποσύνολο του D^{n}. Απαιτούμε οι Val^{+}, Val^{-} να είναι τέτοιες ώστε

[31] Έπεται ότι θα είναι $\forall x(x \in C \rightarrow \forall y(y \in W \wedge x \sqsubseteq y \rightarrow x=y))$, αν κάποια διαμόρφωση είναι πλήρης, τότε μόνη διαμόρφωση που την επεκτείνει είναι ο εαυτός της.

η τομή των εκτάσεων που αποδίδουν στο εκάστοτε κατηγόρημα να είναι πάντα κενή. Επιπλέον, σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b>, αν a είναι αντικείμενο που ανήκει στο C και b n-θέσιο κατηγόρημα, οι εκτάσεις που οι Val^{+}, Val^{-} αποδίδουν σε αυτήν θα έχουν ως ένωση το D^{n}. Αν a είναι αντικείμενο που ανήκει στο W αλλά όχι στο C και b n-θέσιο κατηγόρημα τότε υπάρχει περίπτωση η ένωση των δύο εκτάσεων να είναι γνήσιο υποσύνολο του D^{n}. Πάντως, για κάθε αντικείμενο που ανήκει στο W αλλά όχι στο C θα υπάρχει κάποιο ασαφές κατηγόρημα τέτοιο ώστε η τομή των δύο εκτάσεων να είναι γνήσιο υποσύνολο του D^{n}. Τέλος, σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b>, αν b είναι ατομική σταθερά της γλώσσας τότε η Val^{+} της αναθέτει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο που ανήκει στο D. Υπάρχει λοιπόν περίπτωση δύο ατομικές σταθερές να αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο, όχι όμως μία ατομική σταθερά να αναφέρεται σε κανένα ή σε πολλά αντικείμενα. Στην περίπτωση που a_1, a_2 είναι αντικείμενα που ανήκουν στο W και b σταθερό σύμβολο θέλουμε να είναι $Val^{+}(a_1, b)= Val^{+}(a_2, b)$. Κάτι ανάλογο μπορούμε να απαιτήσουμε και για την περίπτωση των κατηγορημάτων. Πιο συγκεκριμένα αν a_1, a_2 είναι αντικείμενα που ανήκουν στο W τέτοια ώστε να είναι $a_1 \sqsubseteq a_2$ και b κατηγορηματικό σύμβολο τότε θέλουμε να είναι $Val^{+}(a_1, b) \subseteq Val^{+}(a_2, b)$ και $Val^{-}(a_1, b) \subseteq Val^{-}(a_2, b)$. Καθώς η γλώσσα διαμορφώνεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό εξαλείφονται τα διάφορα κενά που μπορεί να υπάρχουν στις εκτάσεις των εκφράσεων της. Με άλλα λόγια καθορίζεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό σε ποιες περιπτώσεις μπορεί μια έκφραση να εφαρμοστεί και σε ποιες όχι.

2.2.4 Συνθήκες Αλήθειας

Έχουμε καθορίσει τα χαρακτηριστικά της σύνολο-θεωρητικής δομής πάνω στην οποία θα βασιστούμε. Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε τις συνθήκες με βάση τις οποίες καθορίζεται ο τρόπος που η εκάστοτε πρόταση της γλώσσας σχετίζεται ως προς κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης.

Για λόγους ευκολίας ας θεωρήσουμε προς το παρόν ότι το πεδίο δράσης των ποσοδεικτών D είναι αριθμήσιμο. Επεκτείνουμε την γλώσσα με ένα αριθμήσιμο πλήθος επιπλέον ατομικών σταθερών, και θεωρούμε ερμηνεία M, η οποία είναι τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο εντός του D να ισχύει ότι υπάρχει ατομική σταθερά στην οποία αυτό ανατίθεται από την M.

Έστω αντικείμενο w που ανήκει στο σύνολο W, ως προς την M θα είναι:

- $w \vDash F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, t_1), Val^+(w, t_2), \ldots, Val^+(w, t_n)> \in Val^+(w, F)$
- $w \Dashv F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, t_1), Val^+(w, t_2), \ldots, Val^+(w, t_n)> \in Val^-(w, F)$
- $w \vDash \sim A$ αν και μόνο αν $w \Dashv A$
- $w \Dashv \sim A$ αν και μόνο αν $w \vDash A$
- $w \vDash A \wedge B$ αν και μόνο αν $w \vDash A$ και $w \vDash B$
- $w \Dashv A \wedge B$ αν και μόνο αν $w \Dashv A$ ή $w \Dashv B$
- $w \vDash A \vee B$ αν και μόνο αν $w \vDash A$ ή $w \vDash B$
- $w \Dashv A \vee B$ αν και μόνο αν $w \Dashv A$ και $w \Dashv B$

Για τον σύνδεσμο της συνεπαγωγής θέτουμε:

- $w \vDash A \rightarrow B$ αν και μόνο αν αν $w \vDash \sim A \vee B$
- $w \Dashv A \rightarrow B$ αν και μόνο αν $w \Dashv \sim A \vee B$, δηλαδή αν και μόνο αν $w \vDash A$ και $w \Dashv B$

Τέλος, πρέπει να διατυπώσουμε τις συνθήκες αλήθειας για προτάσεις που περιέχουν ποσοδείκτες.

- $w \vDash \exists x Ax$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο $o \in D$ ισχύει ότι $w \vDash A(x/c_o)$. Εδώ με το σύμβολο 'c_o' εννοούμε την ατομική σταθερά στην οποία η M' αναθέτει ως αναφορά το αντικείμενο *o*. Η έκφραση '$A(x/c_o)$' αναφέρεται στην πρόταση που προκύπτει αν σβήσουμε το ποσοδεικτικό σύμβολο στην αρχή της $\exists x Ax$ και αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x με την ατομική σταθερά c_o.
- $w \Dashv \exists x Ax$ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο $o \in D$ ισχύει ότι $w \Dashv A(x/ c_o)$
- $w \vDash \forall x Ax$ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο $o \in D$ ισχύει ότι $w \vDash A(x/ c_o)$
- $w \Dashv \forall x Fx$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο $o \in D$ ισχύει ότι $w \Dashv A(x/ c_o)$

Για αντικείμενο w που ανήκει στο W και πρόταση A της γλώσσας, θα λέμε ότι το αντικείμενο w επιβεβαιώνει την πρόταση A αν και μόνο αν είναι $w \vDash A$, ενώ θα λέμε ότι το αντικείμενο w διαψεύδει την πρόταση A αν και μόνο αν είναι $w \Dashv A$.

Οι παραπάνω συνθήκες ταυτίζονται με αυτές για το σύστημα First Degree Entailment (FDE), των Anderson και Belnap,[32] με μόνη διαφορά ότι εδώ είναι σχετικοποιημένες ως προς

[32] Η προτασιακή εκδοχή του συγκεκριμένου συστήματος περιγράφεται στον πρώτο τόμο του μνημειώδους, στον χώρο της relevant logic, 'Entailment, the Logic of Relevance and Necessity', Anderson και Belnap [1975a], στην ενότητα 15 του βιβλίου (σελίδες 150 με 161), καθώς και στην ενότητα 18 (σελίδες 180 με 205). Πρόκειται για τον βασικό πυρήνα μιας κλάσης από relevant logics που συμβαδίζουν με τις σημασιολογικές αρχές του λεγόμενου 'American Plan', βλέπε σχετικά το 7^o κεφάλαιο του βιβλίου 'Relevant Logic, A philosophical examination of inference', Read [1988], καθώς

κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας. Στην περίπτωση μας το σύστημα που προκύπτει είναι ισχυρότερο, εφόσον απαιτούμε η τομή των εκτάσεων που οι συναρτήσεις Val^+, Val^- αποδίδουν στο εκάστοτε κατηγόρημα της γλώσσας να είναι πάντα κενή, οπότε μπορεί να αποδειχτεί μέσω επαγωγής ότι για επίπεδο διαμόρφωσης w και πρόταση A θα είναι $\sim(w \vDash A \wedge w \Dashv A)$. Από την άλλη, δεν ισχύει αντίστοιχος περιορισμός και για το First Degree Entailment. Αν λοιπόν θέσουμε πως ένα επιχείρημα θα χαρακτηρίζεται ως έγκυρο αν και μόνο αν για κάθε επίπεδο διαμόρφωσης ισχύει ότι αν αυτό επιβεβαιώνει τις προκείμενες τότε επιβεβαιώνει και το συμπέρασμα, τότε καταλήγουμε πως ένα επιχείρημα πχ της μορφής $A \wedge \sim A \vDash B$ θα προκύπτει σύμφωνα με το σύστημα που έχουμε περιγράψει έγκυρο. Επιχειρήματα αυτής της μορφής δεν είναι όμως έγκυρα σύμφωνα με το First Degree Entailment. Μάλιστα, για πρόταση A και επίπεδο διαμόρφωσης w, αν διαβάσουμε την πρόταση της μεταγλώσσας ‘$w \vDash A$’ ως ‘στο επίπεδο διαμόρφωσης w η πρόταση A λαμβάνει τιμή 1’, την ‘$w \Dashv A$’ ως ‘στο επίπεδο διαμόρφωσης w η πρόταση A λαμβάνει τιμή 0’, και την ‘$\sim(w \vDash A) \wedge \sim(w \Dashv A)$’ ως ‘στο επίπεδο διαμόρφωσης w η πρόταση A λαμβάνει τιμή i’, τότε διαπιστώνουμε ότι για τυχόν επίπεδο διαμόρφωσης, οι σημασιολογικές τιμές που οι παραπάνω συνθήκες αναθέτουν στις προτάσεις της γλώσσας θα ταυτίζονται με αυτές που τους ανατίθενται από τους πίνακες αλήθειας του συστήματος K3.[33] Πράγματι, για κόσμο w και προτάσεις A, B, οι συνθήκες που έχουμε διατυπώσει οδηγούν στους εξής πίνακες:

$\sim A$	
$\vDash$	$\Dashv$
n	n
$\Dashv$	$\vDash$

$A \wedge B$	$\vDash$	n	$\Dashv$
$\vDash$	$\vDash$	n	$\Dashv$
n	n	n	$\Dashv$
$\Dashv$	$\Dashv$	$\Dashv$	$\Dashv$

$A \vee B$	$\vDash$	n	$\Dashv$
$\vDash$	$\vDash$	$\vDash$	$\vDash$
n	$\vDash$	n	n
$\Dashv$	$\vDash$	n	$\Dashv$

$A \rightarrow B$	$\vDash$	n	$\Dashv$
$\vDash$	$\vDash$	n	$\Dashv$
n	$\vDash$	n	n
$\Dashv$	$\vDash$	$\vDash$	$\vDash$

Εδώ με το σύμβολο ‘$\vDash$’ εννοούμε ότι η πρόταση που μας απασχολεί επιβεβαιώνεται από το επίπεδο w, με το σύμβολο ‘$\Dashv$’ εννοούμε ότι αυτή διαψεύδεται, ενώ με το ‘n’ εννοούμε ότι η αυτή δεν επιβεβαιώνεται από το επίπεδο διαμόρφωσης w, ούτε όμως και διαψεύδεται. Μεταφράζοντας τους παραπάνω πίνακες με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει πιο πάνω καταλήγουμε στους πίνακες του συστήματος K3. Έπεται από αυτό κατευθείαν ότι ως έχουν

και το άρθρο ‘The American Plan completed: Alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics’, Routley [1984].

[33] Μάλιστα, στην περίπτωση που απαιτούσαμε η ένωση των εκτάσεων που οι συναρτήσεις Val+, Val- αναθέτουν στο εκάστοτε κατηγόρημα της γλώσσας να είναι το D, επιτρέποντας η τομή τους να είναι μη κενή, τότε για επίπεδο διαμόρφωσης w θα ίσχυε ότι οι συγκεκριμένες συνθήκες αποδίδουν στις προτάσεις της γλώσσας σημασιολογικές τιμές που ταυτίζονται με αυτές που τους αποδίδονται σύμφωνα με τους πίνακες του συστήματος LP.

τα πράγματα για κάθε πρόταση δεν θα ισχύει ότι για κάθε ερμηνεία της γλώσσας κάθε αντικείμενο εντός του W την επιβεβαιώνει. Πράγματι, αν παρατηρήσουμε τους πιο πάνω πίνακες, βλέπουμε ότι προκειμένου αυτοί να αναθέσουν την τιμή n σε κάποια πρόταση της γλώσσας αρκεί κάθε υποπρόταση που εμφανίζεται εντός αυτής να λαμβάνει επίσης την τιμή n. Με βάση αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά ότι για οποιαδήποτε πρόταση της γλώσσας, θα ισχύει ότι αυτή λαμβάνει την τιμή n, αν κάθε ατομική πρόταση που εμφανίζεται εντός αυτής έχει επίσης λάβει την τιμή n. Για τυχούσα πρόταση A της γλώσσας λοιπόν, μπορούμε να θεωρήσουμε ερμηνεία σύμφωνα με την οποία εντός του W περιλαμβάνεται σημείο w τέτοιο ώστε για κάθε ατομική πρόταση που εμφανίζεται εντός της A ισχύει ότι της ανατίθεται η τιμή n ως προς αυτό, οπότε θα ισχύει και για την ίδια την A ότι λαμβάνει την τιμή n ως προς αυτό, και άρα υπάρχει ερμηνεία σύμφωνα με την οποία κάποιο σημείο εντός του W δεν την επιβεβαιώνει.

Τέλος, μπορεί εύκολα να αποδειχτεί, με μια επαγωγή επί της πολυπλοκότητας των προτάσεων της γλώσσας, ότι οι σχέσεις στις οποίες αναφέρονται τα σύμβολα ‘⊨’ και ‘⫤’, τις οποίες θα καλούμε ‘επιβεβαίωση’ και ‘διάψευση’ αντίστοιχα, θα είναι μονοτονικές ως προς την σχέση διάταξης ⊑ μεταξύ των σημείων που ανήκουν στο W. Με άλλα λόγια, για πρόταση A και επίπεδα διαμόρφωσης w, z, αν ισχύει ότι $w \models A$ και $w \sqsubseteq z$, τότε θα είναι $z \models A$, αντίστοιχα, αν ισχύει ότι $w \Dashv A$ και $w \sqsubseteq z$, τότε θα είναι $z \Dashv A$.

Σημειώνουμε ότι αν $w \in C$ τότε ισχύει ότι $w \models \sim A$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $w \models A$. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, οι συνθήκες για τις προτάσεις της γλώσσας μπορούν άρα να απλοποιηθούν ως εξής:

- $w \models F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, t_1), Val^+(w, t_2), \dots, Val^+(w, t_n)> \in Val^+(w, F)$
- $w \models \sim A$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $w \models A$
- $w \models A \wedge B$ αν και μόνο αν $w \models A$ και $w \models B$
- $w \models A \vee B$ αν και μόνο αν $w \models A$ ή $w \models B$
- $w \models A \rightarrow B$ αν και μόνο αν, αν $w \models A$ τότε $w \models B$
- $w \models \exists x Ax$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο $o \in D$ ισχύει ότι $w \models A(x/ c_o)$

Οι συνθήκες που έχουμε θέσει μέχρι αυτό το σημείο καθορίζουν τον τρόπο που η εκάστοτε διαμόρφωση της γλώσσας σχετίζεται με τις διάφορες προτάσεις που μπορεί να διατυπωθούν εντός αυτής. Με βάση τα όσα έχουμε πει όμως, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι κυρίως ο τρόπος που η εκάστοτε διαμόρφωση της γλώσσας θα σχετίζεται με κάποια πρόταση αν λάβουμε υπόψη κάθε δυνατό μέλλον που διέρχεται από αυτήν. Εμπλουτίζουμε λοιπόν την γλώσσα με έναν τελεστή 'Δ', κατάλληλο ώστε να μπορούν να διατυπωθούν εντός της γλώσσας αντικείμενο προτάσεις που αφορούν τους τρόπους με βάση τους οποίους αυτή μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω. Οι συνθήκες για προτάσεις που περιέχουν αυτόν τον τελεστή θα είναι οι εξής:

- $w \vDash \Delta A$ αν και μόνο αν για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z \vDash A$

Όσον αφορά τις συνθήκες ψεύδους, θέτουμε το εξής:

- $w \Dashv \Delta A$ αν και μόνο αν υπάρχει $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ και ισχύει ότι $z \Dashv A$

Με βάση τις συγκεκριμένες συνθήκες, το γεγονός ότι η $\sim\Delta A$ επιβεβαιώνεται από κάποιο σημείο w μας πληροφορεί ότι η ΔΑ δεν επιβεβαιώνεται από αυτό. Αν θεωρούμε πως το w είναι απλώς ένα προσωρινό στάδιο στην εξέλιξη της γλώσσας τότε το συγκεκριμένο γεγονός μας πληροφορεί ότι στο παρόν στάδιο ανάπτυξης δεν ισχύει πως όπως και αν εξελιχθεί η γλώσσα, όταν αυτή θα είναι πλήρως διαμορφωμένη η πρόταση Α θα επιβεβαιώνεται. Με άλλα λόγια, επί του παρόντος δεν ισχύει ότι όπως και αν διαμορφωθεί πλήρως η γλώσσα, η Α θα επιβεβαιώνεται. Αυτό βέβαια δεν αποκλείει το ενδεχόμενο σε κάποιο από τα μεταγενέστερα στάδια ανάπτυξης, όταν η γλώσσα θα έχει διαμορφωθεί σε μεγαλύτερο βαθμό, να προκύπτει ότι η συγκεκριμένη πρόταση θα επιβεβαιώνεται όταν η γλώσσα διαμορφωθεί πλήρως, όπως και αν συμβεί αυτό.

Έπεται λοιπόν ότι παύει να ισχύει η μονοτονικότητα για προτάσεις της μορφής $\sim\Delta A$. Πιο συγκεκριμένα, έστω αντικείμενο a τέτοιο ώστε το επίπεδο διαμόρφωσης w δεν αποφαίνεται αν αυτό ικανοποιεί το 'F' ή όχι, κάποιο μεταγενέστερο επίπεδο z αποφαίνεται ότι αυτό ικανοποιεί το 'F' ενώ κάποιο άλλο επίπεδο y που είναι μεν μεταγενέστερο του w αλλά τέτοιο ώστε δεν ισχύει ότι $y \sqsubseteq z$ ή $z \sqsubseteq y$ αποφαίνεται ότι αυτό δεν το ικανοποιεί. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι $w \vDash \sim\Delta Fa$, $w \sqsubseteq z$ και $z \vDash \Delta Fa$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα αντικείμενο $w \in W$ και έστω ένα ασαφές κατηγόρημα 'F' και αντικείμενο α εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών, τέτοιο ώστε δεν ισχύει ότι ($\alpha \in Val^{+}(w, F)$), ούτε ότι ($\alpha \in Val^{-}(w, F)$). Με άλλα λόγια, στο συγκεκριμένο στάδιο ανάπτυξης της γλώσσας το αντικείμενο α ανήκει στις οριακές περιπτώσεις του κατηγορήματος 'F'. Έστω ότι 'a' ατομική σταθερά της γλώσσας στην οποία ανατίθεται το αντικείμενο α. Έπεται κατευθείαν ότι δεν θα ισχύει πως $w \vDash (Fa \vee \sim Fa)$, ούτε και ότι $w \Dashv (Fa \vee \sim Fa)$. Παρόλα αυτά, διαπιστώνουμε ότι θα είναι $w \vDash \Delta(Fa \vee \sim Fa)$, καθώς και $w \vDash \Delta Fa \vee \sim\Delta Fa$, αλλά όχι και $w \vDash \Delta$

Fa $\vee\Delta\sim$ Fa. Γενικότερα, για πρόταση A θα ισχύει ότι w⊧Δ(A∨∼A) και w⊧ΔA∨∼ΔA, αλλά δεν θα ισχύει για κάθε πρόταση A ότι είναι w⊧ΔA∨Δ∼A.

Πράγματι, θα είναι:

1. w⊧Δ(Fa∨∼Fa) αν και μόνο αν για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⊧ Fa∨∼Fa
2. w⊧Δ(Fa∨∼Fa) ανν για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⊧ Fa ή z⊧ ∼Fa
3. w⊧Δ(Fa∨∼Fa) ανν για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⊧ Fa ή ∼(z⊧ Fa)
4. w⊧Δ(Fa∨∼Fa) ανν για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι Val^{+}(z, α)∈ Val^{+}(z, F) ή ∼(Val^{+}(z, α)∈ Val^{+}(z, F))

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει όμως αληθές, εφόσον η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου είναι έγκυρη εντός της μεταγλώσσας που χρησιμοποιούμε, και άρα θα ισχύει ότι w⊧Δ(Fa∨∼Fa). Γενικότερα, δεδομένης κάποιας ερμηνείας M, για κάθε πρόταση A και αντικείμενο z εντός του C θα είναι z⊧ A ή ∼(z⊧ A). Έπεται ότι για κάθε ερμηνεία θα ισχύει ότι κάθε επίπεδο διαμόρφωσης επιβεβαιώνει την Δ(A∨∼A).

Καταλήγουμε λοιπόν ότι εντός της εμπλουτισμένης γλώσσας θα εμφανίζονται προτάσεις τέτοιες ώστε για κάθε ερμηνεία ισχύει ότι κάθε σημείο εντός του W τις επιβεβαιώνει. Έπεται ότι κάθε πρόταση για την οποία ισχύει αυτό θα περιέχει εμφανίσεις του τελεστή ‘Δ’.

Επιπλέον, θα έχουμε:

1. w⊧ΔFa∨Δ∼Fa αν και μόνο αν w⊧ΔFa ή w⊧Δ∼Fa
2. w⊧ΔFa∨Δ∼Fa αν και μόνο αν για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⊧ Fa ή για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⊧∼Fa
3. w⊧ΔFa∨Δ∼Fa αν και μόνο αν για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⊧ Fa ή για κάθε z∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑z ισχύει ότι z⫤Fa

Έχουμε όμως θεωρήσει ότι το αντικείμενο α είναι οριακή περίπτωση για το F στο στάδιο w. Αρκεί λοιπόν σύμφωνα με την M να υπάρχει πλήρης διαμόρφωση z που επεκτείνει το w και επιβεβαιώνει την ‘Fa’, αλλά και πλήρης διαμόρφωση z’ που επεκτείνει το w και την διαψεύδει, προκειμένου το δεξί μέλος της τρίτης από τις πιο πάνω διπλές συνεπαγωγές να προκύπτει ψευδές.

Η συμπεριφορά της θεωρίας είναι παρόμοια και όσον αφορά τον νόμο της μη αντίφασης, εύκολα βλέπουμε ότι ως προς το παράδειγμα που έχουμε θεωρήσει θα είναι $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$. Πράγματι:

1. $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$ αν και μόνο αν για κάθε $z\in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w\sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z\models(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$
2. $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$ ανν για κάθε $z\in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w\sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z\Dashv(Fa\wedge\sim Fa)$
3. $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$ ανν για κάθε $z\in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w\sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z\Dashv Fa$ ή $z\Dashv\sim Fa)$
4. $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$ ανν για κάθε $z\in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w\sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z\Dashv Fa$ ή $z\models Fa$
5. $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$ ανν για κάθε $z\in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w\sqsubseteq z$ ισχύει ότι $Val^{+}(z, \alpha)\in Val^{-}(z, F)$ ή $Val^{+}(z, \alpha)\in Val^{+}(z, F)$

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει όμως αληθές, αφού το σύνολο C περιέχει ακριβώς εκείνες της καταστάσεις της γλώσσας όπου αυτή είναι πλήρως διαμορφωμένη. Άρα θα ισχύει και ότι $w\models\Delta(\sim(Fa\wedge\sim Fa))$. Το τελευταίο μπορεί όμως να γενικευτεί, για ερμηνεία της γλώσσας, πρόταση A και επίπεδο διαμόρφωσης που ανήκει στο C, θα ισχύει με βάση τις συνθήκες που έχουμε θέσει ότι αυτό είτε επιβεβαιώνει την A, είτε την διαψεύδει. Έπεται ότι για κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα ισχύει ότι κάθε επίπεδο διαμόρφωσης επιβεβαιώνει την $\Delta(\sim(A\wedge\sim A))$.

Ας δούμε τώρα πως συμπεριφέρεται ο σύνδεσμος της συνεπαγωγής με βάση τις σημασιολογικές συνθήκες που έχουμε διατυπώσει. Έστω σωρειτική ακολουθία α_1, α_2, …, α_{10000} ως προς κάποιο κατηγόρημα 'F' της γλώσσας, με το α_1 ξεκάθαρα να το ικανοποιεί, το α_{10000} ξεκάθαρα να μην το ικανοποιεί, και κάθε αντικείμενο να είναι ελάχιστα λιγότερο F σε σχέση με αυτά που εμφανίζονται στις αμέσως προηγούμενες θέσεις εντός της ακολουθίας. Έστω επιπλέον ότι η γλώσσα περιέχει ονόματα a_1, a_2, …, a_{10000} που αναφέρονται στο εκάστοτε αντικείμενο που φέρει τον ίδιο δείκτη, και ερμηνεία της γλώσσας τέτοια ώστε τα αντικείμενα α_1, α_2, …, α_{4000} εντάσσονται στην έκταση του F όταν η γλώσσα βρίσκεται στο επίπεδο διαμόρφωσης w, τα α_{6000}, α_{6001}, …, α_{10000} εντάσσονται στην αντιέκταση, ενώ για τα υπόλοιπα το ζήτημα μένει ανοικτό. Τέλος, έστω ότι εντός του C περιέχονται διαμορφώσεις της γλώσσας που θέτουν σαφές όριο για κάθε δυνατή περίπτωση που προκύπτει με βάση το w. Όσον αφορά τις διάφορες προτάσεις της μορφής $Fa_i\rightarrow Fa_j$ με $i, j\in\{1, 2, …, 10000\}$, τότε με βάση τα όσα έχουμε πει είναι εμφανές ότι δεν προκύπτει κάτι καινούργιο σε σχέση με το σύστημα K3. Ας στραφούμε λοιπόν σε σχετικές προτάσεις που περιέχουν τόσο τον σύνδεσμο της συνεπαγωγής, όσο και τον τελεστή ‘Δ’.

Αν θεωρήσουμε μια πρόταση της μορφής $\Delta(Fa_i \rightarrow Fa_j)$, με $i, j \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$, τότε θα είναι:

1. $w \vDash \Delta(Fa_i \rightarrow Fa_j)$ αν και μόνο αν
2. για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z \vDash Fa_i \rightarrow Fa_j$ ανν
3. για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι αν $z \vDash Fa_i$ τότε $z \vDash Fa_j$

Από την άλλη θα είναι $w \vDash {\sim}\Delta(Fa_i \rightarrow Fa_i)$ αν και μόνο αν για κάποιο $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z \vDash Fa_i$ και ${\sim}(z \vDash Fa_j)$, άρα αν και μόνο αν είναι $Val^+(z, a_i) \in Val^+(z, F)$ και $Val^+(z, a_j) \in Val^-(z, F)$, ενώ θα είναι $w \vDash \Delta{\sim}(Fa_i \rightarrow Fa_i)$ αν και μόνο αν για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $Val^+(z, a_i) \in Val^+(z, F)$ και $Val^+(z, a_j) \in Val^-(z, F)$. Το επίπεδο διαμόρφωσης w θα επιβεβαιώνει τις συνεπαγωγές της μορφής $\Delta(Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$ και πάλι για $i \in \{1, 2, \ldots, 3999\} \cup \{6000, \ldots, 9999\}$, και θα επιβεβαιώνει αυτές με μορφή $\Delta{\sim}(Fa_i \rightarrow Fa_j)$ για $i \in \{1, 2, \ldots, 4000\}$ και $j \in \{6000, 6001, \ldots, 10000\}$.

Έχει εδώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο τρόπος που ο τελεστής αλληλεπιδρά με τους ποσοδείκτες της γλώσσας. Προκύπτουν εδώ ζητήματα εύρους (scope) των ποσοδεικτών εντός της εκάστοτε πρότασης, αφού υπάρχουν πολλές δυνατές θέσεις του τροπικού τελεστή σε σχέση με τον ποσοδείκτη και τον σύνδεσμο της άρνησης. Παρατηρούμε έτσι ότι θα είναι $w \vDash \Delta\exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx+1)$, αλλά δεν θα ισχύει πάντα ότι $w \vDash \exists x\Delta{\sim}(Fx \rightarrow Fx+1)$. Πράγματι, ξεκινώντας από την πρώτη περίπτωση, βλέπουμε ότι είναι:

1. $w \vDash \Delta\exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $z \vDash \exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx+1)$
2. $w \vDash \Delta\exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx+1)$ ανν για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι, για κάποιο αντικείμενο $\alpha_i \in D$ με a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αυτό και a_{i+1} σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο που είναι επόμενό του στην σωρειτική ακολουθία είναι $z \vDash {\sim}(Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$
3. $w \vDash \Delta\exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx+1)$ ανν για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι, για κάποιο αντικείμενο $a_i \in D$ με a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αυτό και a_{i+1} σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο που είναι επόμενό του στην σωρειτική ακολουθία είναι $z \vDash Fa_i$ και $z \Dashv Fa_{i+1}$

4. $w \vDash \Delta\exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ ανν για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι, για κάποιο αντικείμενο $a_i \in D$ με a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αυτό και a_{i+1} σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο που είναι επόμενό του στην σωρειτική ακολουθία είναι $Val^{+}(z, a_i) \in Val^{+}(z, F)$ και $Val^{+}(z, a_{i+1}) \in Val^{-}(z, F)$.

Το δεξί μέλος της τελευταίας πρότασης θα προκύπτει όμως αληθές για κάθε ερμηνεία της γλώσσας, αφού κάθε αντικείμενο που ανήκει στο σύνολο C είναι πλήρες και άρα δεν αφήνει κενό στις εκτάσεις των εκφράσεων της γλώσσας.

Τώρα, όσον αφορά την δεύτερη περίπτωση, θα έχουμε:

1. $w \vDash \exists x\Delta{\sim}(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο $\alpha_i \in D$ με a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αυτό και a_{i+1} σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο που είναι επόμενό του στην σωρειτική ακολουθία, θα ισχύει ότι για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ θα είναι $z \vDash {\sim}(Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$
2. $w \vDash \exists x\Delta{\sim}(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο $\alpha_i \in D$ με a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αυτό και a_{i+1} σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο που είναι επόμενό του στην σωρειτική ακολουθία, θα ισχύει ότι για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ θα είναι $z \vDash Fa_i$ και $z \Dashv Fa_{i+1}$
3. $w \vDash \exists x\Delta{\sim}(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο $\alpha_i \in D$ με a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αυτό και a_{i+1} σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο που είναι επόμενό του στην σωρειτική ακολουθία, θα ισχύει ότι για κάθε $z \in C$ τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ θα είναι $Val^{+}(z, a_i) \in Val^{+}(z, F)$ και $Val^{+}(z, a_{i+1}) \in Val^{-}(z, F)$.

Εύκολα διαπιστώνουμε όμως ότι το δεξί μέλος της τελευταίας πρότασης δεν είναι αληθές με βάση την ερμηνεία της γλώσσας που έχουμε θεωρήσει. Για κάθε ζεύγος αντικειμένων α_i, α_{i+1} που εμφανίζονται εντός της σωρειτικής ακολουθίας θα ισχύει ότι υπάρχει πλήρης διαμόρφωση που επεκτείνει την w και θέτει και τα δύο εντός της έκτασης του F ή υπάρχει τέτοια διαμόρφωση που θέτει και τα δύο εντός της αντιέκτασης του F.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε αντικείμενο w που ανήκει στο σύνολο W, τότε αυτό θα επιβεβαιώνει την πρόταση '$\Delta\exists x{\sim}(Fx \rightarrow Fx{+}1)$', αλλά όχι την '$\exists x\Delta{\sim}(Fx \rightarrow Fx{+}1)$'. Όντως, όπως και αν έχει, όταν η γλώσσα θα έχει διαμορφωθεί πλήρως, τότε για κάποιο αντικείμενο εντός της σωρειτικής ακολουθίας θα ισχύει ότι αυτό ικανοποιεί το 'F' ενώ το επόμενο από αυτό αντικείμενο όχι. Δεν θα ισχύει όμως ότι υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο εντός της σωρειτικής ακολουθίας, τέτοιο ώστε όπως και αν διαμορφωθεί περαιτέρω η γλώσσα, όταν αυτή θα έχει διαμορφωθεί πλήρως αυτό θα ικανοποιεί το ‘F’ ενώ το επόμενο από αυτό αντικείμενο όχι.

2.2.5 Θεωρίες Υπερτιμήσεων

Ας θεωρήσουμε τώρα επίπεδο διαμόρφωσης b της γλώσσας. Αν δεχόμαστε ότι θα είναι πάντα δυνατό η γλώσσα να διαμορφωθεί περαιτέρω με τρόπο ώστε να εξαλειφθούν πλήρως τα κενά στις εκτάσεις των διαφόρων εκφράσεων της, τότε φαίνεται εύλογο και να υποστηρίξουμε πως στην περίπτωση της ασάφειας το είδος τροπικότητας που εκφράζει ο τελεστής ‘Δ’ αντιστοιχεί στην έννοια της αλήθειας. Πράγματι, κατά τρόπο ανάλογο που κάποια εκφορά πρότασης που αφορά το μέλλον φαίνεται πως θα πρέπει να λογίζεται αληθής αν ισχύει ότι για κάθε δυνατό τρόπο περαιτέρω εξέλιξης των πραγμάτων αυτή τελικά θα επαληθεύεται, φαίνεται πως θα πρέπει να λογίζεται αληθής ως προς το b και πρόταση A για την οποία ισχύει ότι για κάθε δυνατό τρόπο περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας αυτή τελικά θα επιβεβαιώνεται. Θα λέμε λοιπόν πως μια πρόταση A είναι αληθής ως προς κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας αν και μόνο αν η ΔA επαληθεύεται από αυτό. [34]

Πλέον, εφόσον η απλή έννοια της αλήθειας ταυτίζεται με αυτή που εκφράζει ο τελεστής ‘Δ’ , μπορούμε να αφαιρέσουμε τον τελευταίο από την γλώσσα. Ως ερμηνεία της γλώσσας μπορεί να θεωρηθεί μια διατεταγμένη επτάδα <D, W, C, b, $\sqsubseteq$, Val^+, Val^->. Εδώ, τα μέλη της διατεταγμένης επτάδας γίνονται κατανοητά με τον τρόπο που έχουμε ήδη

[34] Πρόκειται επί της ουσίας για τον ορισμό αλήθειας που προτείνουν οι διάφορες θεωρίες γνωστές ως ‘θεωρίες υπερτιμήσεων’. Τα κυριότερα άρθρα όσον αφορά την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου στην μελέτη του φαινομένου της ασάφειας είναι τα ‘Vagueness, Truth and Logic’, Fine [1975], ‘Wang’s Paradox’, Dummett [1996], και ‘General Semantics’, Lewis [1970]. Η ιδέα στην οποία βασίζονται οι συγκεκριμένες θεωρίες εμφανίζεται για πρώτη φορά στο βιβλίο του Henry Mehlberg ‘The Reach of Science’, Toronto, University of Toronto Press. Οι πρώτες θεωρίες του τύπου, διατυπωμένες με αυστηρό τρόπο, θα εμφανιστούν στα άρθρα ‘Singular Terms, truth value gaps and free Logic’, Van Fraasen [1966] και ‘Presupposition, implication and self-reference’, Van Fraasen [1968]. Ο Van Fraasen τις διατυπώνει όμως όχι για να μελετήσει το φαινόμενο της ασάφειας, αλλά αυτό των ονομάτων χωρίς αναφορά, καθώς και αυτό των αυτό-αναφορικών προτάσεων.

περιγράψει. Ως b θεωρούμε κάποιο προνομιούχο σημείο εντός του W-C, αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως η τρέχουσα κατάσταση της γλώσσας. Κάποιες φορές θα το καλούμε βάση, αν και αφήνουμε ανοικτό το ενδεχόμενο να υπάρχουν σημεία που αυτό επεκτείνει. Οι συνθήκες επιβεβαίωσης και απόρριψης μιας πρότασης από κάποιο σημείο ορίζονται όπως και αυτές για τις προτάσεις που δεν περιέχουν τον τελεστή 'Δ' στο γενικότερο μοντέλο. Τώρα, θα λέμε ότι μια πρόταση είναι αληθής σε κάποιο σημείο w εντός του W αν και μόνο αν αυτή επιβεβαιώνεται από κάθε σημείο εντός του C που επεκτείνει το w. Θα λέμε ότι είναι ψευδής σε κάποιο σημείο w εντός του W αν και μόνο αν αυτή διαψεύδεται από κάθε σημείο εντός του C που επεκτείνει το w. Διακρίνουμε λοιπόν μεταξύ των εννοιών της αλήθειας και του ψεύδους κάποιας πρότασης ως προς σημείο, και αυτές της επιβεβαίωσης και της διάψευσης αυτής ως προς σημείο. Πρέπει εδώ να προβούμε σε επιπλέον διευκρινίσεις προκειμένου να αποφύγουμε την περίπτωση η σημασιολογική συνθήκη για την αλήθεια μιας πρότασης σε κάποιο σημείο να προκύπτει vacuously true αν αυτό είναι τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν σημεία εντός του C που να το επεκτείνουν. Ο πιο απλός τρόπος για να αποφευχθεί αυτό είναι να θεωρήσουμε ότι για κάθε σημείο εντός του W θα υπάρχουν σημεία εντός του C που το επεκτείνουν. Τέλος, μια πρόταση θα είναι αληθής σύμφωνα με κάποια ερμηνεία της γλώσσας αν και μόνο αν αυτή είναι αληθής στην βάση, ενώ θα είναι ψευδής αν και μόνο αν αυτή είναι ψευδής στην βάση.

Υπό τις παρούσες συνθήκες, και εφόσον τα σημεία εντός του C συμπεριφέρονται κλασικά, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι όλες οι ταυτολογίες της κλασικής λογικής θα προκύπτουν αληθείς σε κάθε μοντέλο. Μάλιστα, προκύπτει ότι ισχύει κάτι ισχυρότερο. Μια πρόταση Α θα είναι κλασική ταυτολογία αν και μόνο αν αυτή είναι αληθής σε κάθε μοντέλο της γλώσσας. Σκιαγραφούμε εδώ ένα επιχείρημα περί αυτού. Πράγματι, έστω μια πρόταση Α που σύμφωνα με την κλασική λογική είναι ταυτολογία, έστω επιπλέον κάποιο τυχόν μοντέλο Μ της γλώσσας, έπεται ότι η Α θα επιβεβαιώνεται από κάθε σημείο εντός του C και άρα θα είναι αληθής στο Μ. Αφού το Μ είναι απλά κάποιο τυχόν μοντέλο της γλώσσας έπεται ότι η Α θα είναι αληθής σε κάθε μοντέλο της γλώσσας. Για την άλλη κατεύθυνση θέλουμε να δείξουμε ότι αν μια πρόταση είναι αληθής σε κάθε μοντέλο της γλώσσας τότε αυτή θα είναι κλασική ταυτολογία. Αρκεί να θεωρήσουμε πλαίσιο της γλώσσας τέτοιο ώστε το W περιέχει μόνο ένα σημείο, το οποίο επιπλέον ανήκει στο C. Θεωρούμε ως βάση του πλαισίου το συγκεκριμένο σημείο. Το συγκεκριμένο πλαίσιο είναι η εκφυλισμένη περίπτωση πλαισίου της γλώσσας στην οποία ισχύει ότι W=C={b}. Τα διάφορα μοντέλα που προκύπτουν από τους τρόπους που είναι δυνατό να οριστούν οι συναρτήσεις Val^{+}, Val^{-} εντός του συγκεκριμένου πλαισίου αντιστοιχούν στα διάφορα μοντέλα της κλασικής λογικής. Για την ακρίβεια, κάθε κλασικό μοντέλο μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κάποιο μοντέλο εντός του εκφυλισμένου πλαισίου. Έστω λοιπόν πρόταση Α που είναι αληθής σε κάθε μοντέλο της γλώσσας, έπεται ότι αυτή θα είναι αληθής και σε κάθε ερμηνεία που μπορεί να οριστεί επί του εκφυλισμένου πλαισίου και άρα σε κάθε κλασικό μοντέλο. Καταλήγουμε λοιπόν ότι αν μια πρόταση είναι αληθής σε κάθε μοντέλο της γλώσσας τότε αυτή είναι κλασική ταυτολογία.

Έπεται με βάση αυτά ότι και ο νόμος του αποκλειόμενου τρίτου θα είναι σύμφωνα με την θεωρία λογική αλήθεια. Κάθε πρόταση της μορφής $A \vee \sim A$ θα είναι σύμφωνα με την θεωρία αληθής. Όπως διαπιστώσαμε και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, για κάθε ερμηνεία της γλώσσας και σημείο w είναι $w \vDash \Delta(A \vee \sim A)$. Αυτό ισχύει λοιπόν ακόμη και όταν η πρόταση Α είναι οριακή περίπτωση. Για κάθε δυνατό μέλλον της γλώσσας, ισχύει ότι τελικά η Α θα καταστεί αληθής ή ψευδής. Παρόλα αυτά, είχαμε διαπιστώσει επίσης ότι δεν θα ισχύει πάντα ότι $w \vDash \Delta A \vee \Delta \sim A$, με άλλα λόγια θα υπάρχουν προτάσεις της γλώσσας για τις οποίες δεν ισχύει ότι για κάθε μέλλον της γλώσσας αυτές τελικά θα καταστούν αληθείς ή ότι για κάθε μέλλον αυτές τελικά θα καταστούν ψευδείς. Πράγματι, υπάρχουν προτάσεις που μπορεί να προκύψουν αληθείς αν η γλώσσα διαμορφωθεί με συγκεκριμένο τρόπο, αλλά μπορεί και να προκύψουν ψευδείς, αν αυτή διαμορφωθεί με κάποιον άλλο τρόπο. Έχουμε καταφέρει έτσι, κάνοντας χρήση του τελεστή 'Δ', να εκφράσουμε εντός της γλώσσας αντικείμενο το γεγονός ότι παρόλο που η θεωρία επιβεβαιώνει την αρχή του αποκλειόμενου τρίτου δεν είναι δισθενής. Υπάρχουν προτάσεις που μπορεί ως προς κάποιο τρόπο περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας να καταστούν αληθείς, ως προς κάποιον άλλο να καταστούν ψευδείς, αλλά σε κάθε περίπτωση αυτές θα καταστούν τελικά κάτι από τα δύο.

Σε αυτό το σημείο προκύπτει το ερώτημα, δεδομένης κάποιας ερμηνείας της γλώσσας, πότε είναι μια πρόταση Α συνέπεια κάποιου συνόλου προτάσεων Β εντός ενός μοντέλου; Έστω λοιπόν μοντέλο Μ, μια προφανής επιλογή, εφόσον θεωρούμε ότι η ιδιότητα της αλήθειας ταυτίζεται με την επιβεβαίωση από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση, είναι να θέσουμε ότι η πρόταση Α θα έπεται από το σύνολο προτάσεων Γ αν και μόνο αν ισχύει ότι αν όλες οι προτάσεις εντός του Γ είναι αληθείς τότε και η πρόταση Α θα είναι αληθής. Με άλλα λόγια, αν οι προτάσεις εντός του Γ επιβεβαιώνονται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τότε και η Α θα επιβεβαιώνεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση. Αν συμβολίσουμε το γεγονός ότι η πρόταση Α έπεται από τις προτάσεις εντός του Γ ως '$\Gamma \vDash A$', τότε έχουμε ότι $\Gamma \vDash A$

ανν $[\forall x \forall \gamma\ (\in(\gamma, \Gamma) \to (\ (\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)\ ) \to x \vDash \gamma)\ )] \to [\forall x((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash A)]$,[35] παρατηρούμε ότι βασικό χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης συνθήκης είναι το scope που λαμβάνουν οι ποσοδείκτες που δεσμεύουν την μεταβλητή ‘x’ σε σχέση με την κεντρική συνεπαγωγή της πρότασης. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει ότι $\Gamma \vDash A$ ανν $\forall x\ [(\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)\ ) \to (\ \forall \gamma\ (\in(\gamma, \Gamma) \to x \vDash \gamma) \to x \vDash A)]$, όπου ο ποσοδείκτης που δεσμεύει την μεταβλητή ‘x’ παίρνει wide scope σε σχέση με την κεντρική συνεπαγωγή. Σύμφωνα με την συγκεκριμένη διατύπωση, η πρόταση Α θα έπεται από το σύνολο προτάσεων Γ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση αν όλες οι προτάσεις εντός του Γ επιβεβαιώνονται από αυτό τότε και η πρόταση Α θα επιβεβαιώνεται από αυτό.[36] Μια πιθανή αντίρρηση στην συγκεκριμένη συνθήκη είναι ότι αυτή επί της ουσίας δεν κάνει χρήση της έννοιας της αλήθειας, όπως την κατανοούμε εδώ.[37] Αντί αυτής, ο συγκεκριμένος ορισμός βασίζεται αποκλειστικά στην έννοια της επιβεβαίωσης από κάποιο πλήρες σημείο, και ως εκ τούτου ανάγει την συγκεκριμένη έννοια σε πρωταρχικής σημασίας αντί για αυτήν της αλήθειας. Βέβαια, δεδομένου ότι στο σημείο που βρισκόμαστε η γλώσσα δεν περιέχει κάποιον τελεστή ‘Δ’, που να εκφράζει εντός της γλώσσας αντικείμενο την ιδιότητα της επιβεβαίωσης από κάθε πλήρες σημείο, προκύπτει με βάση ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό της προηγούμενης παραγράφου ότι για όποιον ορισμό και αν επιλέξουμε, μια πρόταση Α θα έπεται αυτών που ανήκουν στο σύνολο Β αν και μόνο αν αυτή είναι κλασική συνέπεια των συγκεκριμένων προτάσεων, και άρα οι δύο ορισμοί υπό τις παρούσες συνθήκες συμπίπτουν. Τέλος, θα λέμε ότι η Α είναι λογική συνέπεια των προτάσεων εντός του συνόλου Β αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε μοντέλο της γλώσσας αυτή έπεται των συγκεκριμένων προτάσεων.

Πώς αντιμετωπίζει η συγκεκριμένη θεωρία το παράδοξο του σωρείτη; Με βάση τα όσα έχουμε πει παραπάνω έπεται ότι, όποιον ορισμό περί εγκυρότητας και αν έχουμε επιλέξει, ο κανόνας modus ponens θα προκύπτει έγκυρος. Επιπλέον, έπεται εύκολα ότι η

[35] Ο Williamson, στο γνωστό του βιβλίο περί ασάφειας, καλεί την έννοια εγκυρότητας που προκύπτει με βάση τον συγκεκριμένο ορισμό ως ‘Global Validity’.

[36] Ο Williamson καλεί την έννοια που έπεται από τον συγκεκριμένο ορισμό ως ‘Local Validity’, εισάγει την διάκριση μεταξύ Local και Global Validity στην σελίδα 150 του βιβλίου του ‘Vagueness’. Θα υποστηρίξει ότι η έννοια της Global Validity είναι πιο συνεπής με τον ισχυρισμό που κάνουν αρκετοί υποστηρικτές της συγκεκριμένης κλάσης θεωριών ότι η έννοια της αλήθειας ταυτίζεται με αυτήν της υπεραλήθειας. Ισχυρισμό που υποστηρίζει για παράδειγμα η Rosanna Keefe στο βιβλίο της ‘Theories of Vagueness’, Keefe [2000].

[37] Παρόλα αυτά αρκετοί από τους μελετητές που έχουν προτείνει θεωρίες του είδους, θα υποστηρίξουν πως είναι ο συγκεκριμένος ορισμός που προσδιορίζει την ορθή έννοια εγκυρότητας. Για παράδειγμα ο Michael Dummett, στο άρθρο του Wang’s Paradox, που έχουμε προαναφέρει, καθώς και οι Vann McGee και Brian McLaughlin στο άρθρο ‘Distinctions without a Difference’, McGee και McLaughlin [1995].

σχέση λογικής συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας θα είναι μεταβατική. Πράγματι, έστω τυχούσα ερμηνεία και ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε πως ένα επιχείρημα είναι έγκυρο ως προς ερμηνεία της γλώσσας αν και μόνο αν το συμπέρασμα είναι αληθές ως προς αυτή στην περίπτωση που και οι προκείμενες είναι. Έστω επιπλέον προτάσεις Α, Β, Γ τέτοιες ώστε να είναι $A \vDash B$ και $B \vDash \Gamma$. Έπεται ότι αν η πρόταση Α είναι αληθής για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τότε και η πρόταση Β θα είναι αληθής για κάθε σημείο που επιβεβαιώνει την βάση. Παρομοίως, έχουμε ότι αν η πρόταση Β είναι αληθής για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τότε και η πρόταση Γ θα είναι αληθής για κάθε σημείο που επιβεβαιώνει την βάση. Εφόσον η μεταγλώσσα που χρησιμοποιούμε είναι κλασική, έπεται από την μεταβατικότητα της συνεπαγωγής ότι θα ισχύει πως αν η πρόταση Α είναι αληθής για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τότε και η πρόταση Γ θα είναι αληθής για κάθε σημείο που επιβεβαιώνει την βάση και άρα καταλήγουμε ότι θα είναι $A \vDash \Gamma$. Οι περιπτώσεις όπου έχουμε παραπάνω από μία προκείμενες είναι παρόμοιες. Ας θεωρήσουμε σε αυτό το σημείο μια σωρειτική ακολουθία αντικειμένων α_1, α_2, …, α_{10000} ως προς το κατηγόρημα ‘F’, τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο εντός αυτής είναι πιο F από τα επόμενά του, και έστω για λόγους ευκολίας ερμηνεία της γλώσσας που περιλαμβάνει εντός του D αυτά τα αντικείμενα και μόνο. Επιπλέον έστω ότι a_1, a_2, …, a_{10000} είναι σταθερά σύμβολα της γλώσσας τέτοια ώστε κάθε ένα από αυτά αναφέρεται στο αντίστοιχα αριθμημένο αντικείμενο της ακολουθίας. Διαπιστώνουμε καταρχάς ότι η πρόταση ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ θα προκύπτει ψευδής. Πράγματι, έχουμε:

1. Η πρόταση ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ είναι ψευδής αν και μόνο αν είναι ψευδής στην βάση
2. Η πρόταση ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ είναι ψευδής αν και μόνο αν κάθε πλήρες σημείο w που επεκτείνει την βάση την απορρίπτει
3. Η πρόταση ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ είναι ψευδής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο w που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο $\alpha_\iota \in D$, με a_i ατομική σταθερά που αναφέρεται σε αυτό δεν ισχύει ότι $w \vDash F(a_i) \rightarrow F(a_{i+1})$
4. Η πρόταση ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ είναι ψευδής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο w που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο $\alpha_\iota \in D$, με a_i ατομική σταθερά που αναφέρεται σε αυτό ισχύει ότι $w \vDash F(a_i)$ και δεν ισχύει ότι $w \vDash F(a_{i+1})$

Η πρόταση όμως στο δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι αληθής αφού κάθε πλήρες σημείο θα θέτει κάποιο σαφές όριο σε κάποιο σημείο της σωρειτικής ακολουθίας και άρα για κάθε πλήρες σημείο θα υπάρχει κάποιο αντικείμενο εντός αυτής που είναι F ενώ το επόμενό του δεν είναι. Καταλήγουμε λοιπόν ότι όντως η πρόταση

‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ είναι ψευδής σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία οπότε και γίνεται προφανές πως αυτή απαντά στην επαγωγική μορφή του παραδόξου. Το επιχείρημα είναι έγκυρο, εφόσον αντιστοιχεί σε μια μορφή επιχειρήματος που σύμφωνα με την θεωρία είναι έγκυρη, αλλά παρόλα αυτά δεν είναι ορθό, αφού η προκείμενη που εκφράζει ανεκτικότητα είναι ψευδής.

Πώς απαντά η θεωρία στην μη επαγωγική μορφή του παραδόξου; Σε αυτή την περίπτωση, το επιχείρημα δεν διατυπώνεται σαν μια αλληλουχία εφαρμογών του κανόνα modus ponens όπου στο κάθε βήμα χρησιμοποιούμε μια πρόταση που περιέχει καθολική ποσόδειξη ως την προκείμενη που εκφράζει ανεκτικότητα, αλλά σαν μια αλληλουχία εφαρμογών του κανόνα όπου η αντίστοιχη προκείμενη κάθε φορά είναι μια απλή συνεπαγωγή, ξεχωριστή για το κάθε βήμα. Δεδομένης λοιπόν της πιο πάνω σωρειτικής ακολουθίας, οι προκείμενες που εκφράζουν ανεκτικότητα εντός του εκάστοτε βήματος στο επιχείρημα θα είναι οι προτάσεις ‘$Fa_1 \rightarrow Fa_2$’, ‘$Fa_2 \rightarrow Fa_3$’,…, ‘$Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000}$’. Τώρα, το πρώτο που διαπιστώνουμε εδώ είναι ότι καμία από τις συγκεκριμένες προτάσεις δεν θα είναι ψευδής, αφού καμιά από αυτές δεν θα διαψεύδεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση. Μάλιστα, στην ακολουθία ‘$Fa_1 \rightarrow Fa_2$’, ‘$Fa_2 \rightarrow Fa_3$’,…, ‘$Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000}$’, κάποιες από τις πρώτες προτάσεις καθώς και κάποιες από τις τελευταίες θα είναι αληθείς. Παρόλα αυτά, κάποιες από τις ενδιάμεσες προτάσεις δεν θα είναι αληθείς και ως εκ τούτου το επιχείρημα και πάλι δεν θα είναι ορθό.

Βέβαια, έπεται ότι αν ξεκινήσουμε να διατρέχουμε την συγκεκριμένη ακολουθία προτάσεων από τα αριστερά προς τα δεξιά, οι πρώτες από τις προτάσεις που θα συναντήσουμε θα είναι αληθείς, μετά από κάποιον αριθμό βημάτων όμως θα συναντήσουμε κάποια πρώτη πρόταση που δεν θα είναι αληθής. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για πρόταση A, ερμηνεία της γλώσσας, και διαμόρφωση w θα είναι $w \vDash (\Delta A \vee \sim \Delta A)$. Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει σε αυτό το σημείο ότι κατ’ αυτόν τον τρόπο η θεωρία θέτει σαφή όρια μεταξύ των προτάσεων και άρα αναγνωρίζει κάποια σαφή όρια για το κατηγόρημα ‘F’. Παρόλο που δεν θέτει σαφές όριο μεταξύ των προτάσεων που είναι αληθείς, και αυτών που είναι ψευδείς, θέτει σαφές όριο μεταξύ των προτάσεων που είναι αληθείς και αυτών που δεν είναι, οπότε κάνει την εμφάνισή του το πρόβλημα της ασάφειας ανώτερης τάξης. Η γλώσσα αντικείμενο δεν είναι προς το παρόν αρκετά εκφραστική ώστε να μπορούμε να μιλήσουμε για το συγκεκριμένο φαινόμενο εντός αυτής. Μπορεί όμως να γίνει αν επαναφέρουμε εντός αυτής κάποιον τελεστή ανάλογο του ‘Δ’, έστω λοιπόν ότι προσθέτουμε έναν τελεστή $\mathcal{Definitely}$, τροποποιώντας κατάλληλα τον ορισμό με βάση τον οποίο καθορίζεται ποιες συμβολοσειρές θεωρούνται προτάσεις, και θέτοντας τις κατάλληλες σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις που τον περιέχουν. Για σημείο w εντός του W και πρόταση A, θέτουμε το εξής:

- w⊧ $\mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν για κάθε σημείο z που ανήκει στο C τέτοιο ώστε να είναι b⊑z ισχύει ότι z⊧A [38]

Το πρώτο που παρατηρούμε σε αυτό το σημείο είναι ότι πλέον ορισμένοι κλασικοί μετακανόνες παύουν να είναι έγκυροι σύμφωνα με την θεωρία, αν έχουμε ορίσει ένα επιχείρημα ως έγκυρο αν και μόνο αν το συμπέρασμά του είναι αληθές στην περίπτωση που και οι προκείμενές του είναι.

Πράγματι, βλέπουμε καταρχάς ότι με βάση τον συγκεκριμένο ορισμό εγκυρότητας, για πρόταση A, το επιχείρημα A⊧ $\mathcal{Definitely}$A είναι έγκυρο.

Όντως, έστω ότι η πρόταση A είναι αληθής, έπεται ότι κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση θα την επιβεβαιώνει, οπότε καταλήγουμε κατευθείαν από τις συνθήκες αλήθειας για προτάσεις που περιέχουν τον συγκεκριμένο τελεστή ότι και η πρόταση $\mathcal{Definitely}$ A θα είναι αληθής στην βάση και άρα αληθής.

Από την άλλη όμως, διαπιστώνουμε ότι η πρόταση A$\rightarrow\mathcal{Definitely}$A δεν θα είναι αληθής. Πράγματι, η συγκεκριμένη πρόταση θα είναι αληθής αν και μόνο αν είναι αληθής στην βάση, και άρα αν και μόνο αν κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση την επιβεβαιώνει. Έστω τώρα πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση και το οποίο δεν την επιβεβαιώνει, αφού αυτό είναι πλήρες έπεται ότι θα την διαψεύδει και άρα αυτό θα επιβεβαιώνει την A και θα διαψεύδει την $\mathcal{Definitely}$A. Εφόσον η διάψευση σε ένα πλήρες σημείο συμπεριφέρεται ως Boolean άρνηση, και με βάση τις παραπάνω σημασιολογικές συνθήκες, καταλήγουμε ότι για να συμβεί το τελευταίο αρκεί να υπάρχει πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση και το οποίο δεν επιβεβαιώνει την A. Άρα, για να μην είναι αληθής η συγκεκριμένη πρόταση με μορφή συνεπαγωγής αρκεί να υπάρχει πλήρες σημείο που επιβεβαιώνει την A ενώ κάποιο άλλο πλήρες σημείο δεν την επιβεβαιώνει. Αυτό είναι κάτι που μπορεί όμως να συμβεί, αρκεί πχ στην θέση της A να θέσουμε κάποια ατομική πρόταση που είναι οριακή περίπτωση στην βάση.

[38] Ο συγκεκριμένος ορισμός διαφέρει από τον αντίστοιχο για τον τελεστή ‘Δ’ μόνο ως προς το γεγονός ότι η σημασιολογική τιμή που με βάση αυτόν αποδίδεται σε κάποια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}$A ως προς κάποιο σημείο w, δεν εξαρτάται από το τελευταίο.

Από τα παραπάνω, καταλήγουμε λοιπόν ότι ο μετακανόνας conditional proof δεν είναι πλέον έγκυρος με βάση τον συγκεκριμένο ορισμό περί εγκυρότητας. Δηλαδή, από ένα επιχείρημα της μορφής Α, Β⊧Γ δεν μπορούμε να συνάγουμε ότι θα είναι και Α⊧Β→Γ.

Από την άλλη, αν έχουμε ορίσει ένα επιχείρημα ως έγκυρο αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν οι προκείμενες του επιχειρήματος επιβεβαιώνονται από αυτό τότε θα επιβεβαιώνεται και το συμπέρασμα, ο συγκεκριμένος μετακανόνας θα παραμένει έγκυρος.

Πράγματι, έστω ότι είναι Α, Β⊧Γ αλλά όχι Α⊧Β→Γ. Από το πρώτο έπεται ότι για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση, αν αυτό επιβεβαιώνει τις προτάσεις Α και Β, τότε αυτό θα επιβεβαιώνει και την πρόταση Γ. Έχουμε υποθέσει όμως ότι δεν ισχύει Α⊧Β→Γ, και άρα υπάρχει πλήρες σημείο που επιβεβαιώνει την Α, αλλά όχι την Β→Γ. Αφού το σημείο είναι πλήρες έπεται ότι το συγκεκριμένο σημείο θα διαψεύδει την Β→Γ και άρα θα επιβεβαιώνει την Β και θα διαψεύδει την Γ. Άρα αυτό το σημείο θα επιβεβαιώνει την Α και την Β αλλά όχι την Γ. Έχουμε όμως ότι Α, Β⊧Γ και άρα κάθε σημείο που επιβεβαιώνει την Α και την Β θα πρέπει να επιβεβαιώνει και την Γ. Καταλήγουμε λοιπόν ότι θα ισχύει Α⊧Β→Γ.

Άλλοι μετακανόνες που προκύπτουν μη έγκυροι με βάση τον ορισμό της εγκυρότητας ως διατήρηση της αλήθειας είναι οι κανόνες argument by cases, reduction ad absurdum και contraposition.

Πράγματι, έστω ο κανόνας contraposition. Όπως είδαμε ένα επιχείρημα της μορφής Α⊧ $\mathcal{Definitely}$Α είναι έγκυρο. Από ένα επιχείρημα της συγκεκριμένης μορφής όμως δεν μπορούμε να συνάγουμε ότι θα είναι και $\sim\mathcal{Definitely}$Α⊧~Α.

Όντως, έστω ότι η προκείμενη του επιχειρήματος είναι αληθής, έχουμε ότι η πρόταση $\sim\mathcal{Definitely}$Α θα είναι αληθής στην βάση, και άρα με βάση τις σημασιολογικές συνθήκες για προτάσεις που περιέχουν τον συγκεκριμένο τελεστή έπεται ότι θα υπάρχει πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση και δεν επιβεβαιώνει την πρόταση Α. Για να είναι αληθές το συμπέρασμα όμως θα πρέπει η πρόταση ~Α να είναι αληθής στην βάση και άρα κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση να την επιβεβαιώνει, οπότε και δεν θα επιβεβαιώνει την Α. Το γεγονός ότι υπάρχει πλήρες σημείο που δεν επιβεβαιώνει την Α δεν αρκεί όμως για να συνάγουμε ότι κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση δεν επιβεβαιώνει την συγκεκριμένη πρόταση.

Ποιος είναι όμως ο λόγος που η συγκεκριμένη μορφή του κανόνα παύει να είναι έγκυρη μόλις προσθέσουμε στην γλώσσα έναν τελεστή ‘*Definitely*’ με τις παραπάνω σημασιολογικές συνθήκες, και εφόσον έχουμε ορίσει την έννοια της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος ως διατήρηση της αλήθειας; Με βάση τον ορισμό περί λογικής εγκυρότητας, για προτάσεις A, B, έχουμε ότι θα είναι $A \vDash B$ αν και μόνο αν, αν η πρόταση A επιβεβαιώνεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τότε και η πρόταση B θα επιβεβαιώνεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση. Το contrapositive της πρότασης που εμφανίζεται στο δεξί τμήμα της παραπάνω διπλής συνεπαγωγής είναι: αν υπάρχει πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τέτοιο ώστε η πρόταση B να διαψεύδεται από αυτό τότε θα υπάρχει πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση ώστε η πρόταση A να διαψεύδεται από αυτό και άρα καταλήγουμε ότι αυτό θα ισχύει αν και μόνο αν είναι $A \vDash B$. Αν όμως θεωρήσουμε το contrapositive της πρότασης της μεταγλώσσας που εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της διπλής συνεπαγωγής, δηλαδή την πρόταση ‘$\sim B \vDash \sim A$’, έπεται ότι αυτή θα είναι αληθής αν και μόνο αν αν η πρόταση B διαψεύδεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τότε και η πρόταση A θα διαψεύδεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση, και αυτό δεν είναι κάτι που ισχύει αν και μόνο αν είναι $A \vDash B$. Προκύπτει λοιπόν μια ασυμμετρία μεταξύ των contrapositive μορφών των προτάσεων που εμφανίζονται στα δύο μέλη της διπλής συνεπαγωγής.

Ο λόγος που προκύπτει αυτή η ασυμμετρία έχει να κάνει με τις διαφορές μεταξύ των δύο προτάσεων σε contrapositive μορφή όσον αφορά το scope που λαμβάνει ο τελεστής της άρνησης. Πράγματι, αν την γράψουμε με πιο τυπικό τρόπο, έχουμε ότι $A \vDash B$ ανν $[\forall x ((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash A))] \to [\forall x((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash B)]$ ανν $\sim[\forall x((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash B)] \to \sim [\forall x ((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash A))]$. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι δύο τελεστές της άρνησης λαμβάνουν wide scope ως προς τους δύο καθολικούς ποσοδείκτες. Από την άλλη, θα έχουμε $\sim B \vDash \sim A$ ανν $[\forall x ((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash \sim B))] \to [\forall x((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(b,x)) \to x \vDash \sim A)]$, εδώ κάθε εμφάνιση του συνδέσμου της άρνησης παίρνει narrow scope ως προς τον εκάστοτε καθολικό ποσοδείκτη. Το αποτέλεσμα είναι ότι η αλήθεια της πρότασης $A \vDash B$ δεν αρκεί για να εγγυηθεί την αλήθεια της $\sim B \vDash \sim A$. Ποιος όμως είναι ο λόγος που η αλήθεια της $A \vDash B$ εγγυάται την αλήθεια της $\sim B \vDash \sim A$ όταν η γλώσσα δεν περιέχει τον τελεστή ‘*Definitely*’; Όπως έχουμε αποδείξει πιο πάνω, η σχέση λογικής συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας είναι κλασική όταν η τελευταία δεν περιέχει τελεστή ‘*Definitely*’. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι είναι $A \vDash B$ και επιπλέον, ένα πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση, τότε εφόσον αυτό θα είναι κλειστό ως προς την κλασική σχέση λογικής συνέπειας (logical consequence), έπεται ότι αν επιβεβαιώνει την πρόταση A τότε θα επιβεβαιώνει και την B, ενώ αν διαψεύδει την B θα διαψεύδει και την A. Αν λοιπόν ισχύει για κάθε πλήρες σημείο ότι αυτό διαψεύδει την B, τότε κάθε πλήρες σημείο θα διαψεύδει και την A, και άρα θα είναι ~B ⊧~A.

Από την άλλη, αν είχαμε επιλέξει τον άλλο ορισμό εγκυρότητας θα είχαμε ότι A⊧B αν και μόνο αν ∀x ((∈(x, C)∧ ⊑(b,x))→(x⊧A→ x⊧B)). Έστω λοιπόν w ένα τυχόν πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση, με modus ponens καταλήγουμε ότι θα είναι w⊧A→ w⊧B και άρα αφού η μεταγλώσσα που χρησιμοποιούμε είναι κλασική έπεται ότι ~(w⊧B)→ ~(w⊧A), αφού το w είναι πλήρες σημείο έπεται ότι w⊧~B→w⊧~A. Τέλος, με conditional proof και universal generalization καταλήγουμε ότι θα είναι ∀x ((∈(x, C)∧ ⊑(b,x))→(x⊧~B→ x⊧~A)), το τελευταίο όμως ισχύει αν και μόνο αν είναι ~B ⊧~A και άρα καταλήξαμε ότι αν ισχύει A⊧B τότε μπορούμε να συνάγουμε ότι ~B ⊧~A, ακόμη και αν εντός των A, B εμφανίζεται ο τελεστής '$\mathcal{Definitely}$'.

Πριν προχωρήσουμε και στις άλλες περιπτώσεις, σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πρώτον ότι η σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας θα παραμένει μεταβατική και μετά τον εμπλουτισμό της γλώσσας με τον τελεστή '$\mathcal{Definitely}$', όποιον από τους δύο ορισμούς και αν έχουμε επιλέξει, και δεύτερον ότι ο κανόνας της απλοποίησης (simplification) είναι έγκυρος, και πάλι ανεξαρτήτως του ορισμού περί εγκυρότητας που χρησιμοποιούμε.

Για την περίπτωση του κανόνα reductio ad absurdum τώρα, έστω το επιχείρημα A∧~$\mathcal{Definitely}$ A ⊧ $\mathcal{Definitely}$ A καθώς και το A∧~$\mathcal{Definitely}$ A ⊧ ~$\mathcal{Definitely}$ A. Ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο πρώτο, αφού είναι A⊧ $\mathcal{Definitely}$ A και η σχέση λογικής συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας είναι μεταβατική έχουμε από αυτό και το επίσης έγκυρο A∧~$\mathcal{Definitely}$A⊧A ότι θα είναι A∧~$\mathcal{Definitely}$A⊧ $\mathcal{Definitely}$ A. Έχουμε λοιπόν ότι A∧~$\mathcal{Definitely}$ A ⊧ $\mathcal{Definitely}$ A καθώς και A∧~$\mathcal{Definitely}$ A ⊧ ~$\mathcal{Definitely}$ A. Παρατηρούμε ότι παρόλα αυτά η πρόταση ~(A∧~$\mathcal{Definitely}$ A) δεν είναι απαραίτητα αληθής. Πράγματι, έστω ότι αυτή είναι ψευδής, έπεται ότι θα υπάρχει πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση και την διαψεύδει, και άρα θα επιβεβαιώνει την A∧~$\mathcal{Definitely}$ A. Έπεται ότι αυτό θα επιβεβαιώνει την A, αλλά ταυτόχρονα θα διαψεύδει την $\mathcal{Definitely}$ A οπότε θα υπάρχει άλλο πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση και το οποίο δεν επιβεβαιώνει την Α. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε ως Α κάποια πρόταση που είναι οριακή περίπτωση στην βάση.

Τέλος, ας θεωρήσουμε την περίπτωση του κανόνα argument by cases. Έστω τα επιχειρήματα Α⊧ $\mathcal{Definitely}$ Α ∨ $\mathcal{Definitely}$ ~Α και ~Α⊧ $\mathcal{Definitely}$ Α ∨$\mathcal{Definitely}$ ~Α, παρατηρούμε ότι αυτά είναι έγκυρα. Πράγματι, έστω ότι κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση επιβεβαιώνει την Α, από τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις που περιέχουν τον τελεστή έπεται ότι η πρόταση $\mathcal{Definitely}$ Α θα επιβεβαιώνεται από την βάση και άρα από κάθε πλήρες σημείο που την επεκτείνει. Έπεται λοιπόν ότι κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση επιβεβαιώνει και την $\mathcal{Definitely}$ Α ∨ $\mathcal{Definitely}$ ~Α. Η περίπτωση της δεύτερης μορφής επιχειρήματος είναι ανάλογη. Παρόλα αυτά, το επιχείρημα Α∨~Α ⊧ $\mathcal{Definitely}$ Α ∨ $\mathcal{Definitely}$ ~Α δεν προκύπτει έγκυρο. Πράγματι, έστω ότι η προκείμενη είναι αληθής και το συμπέρασμα όχι. Έπεται ότι η πρόταση Α∨~Α θα είναι αληθής στην βάση, και άρα κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση θα την επιβεβαιώνει. Επιπλέον, θα υπάρχει πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση τέτοιο ώστε η πρόταση $\mathcal{Definitely}$ Α ∨ $\mathcal{Definitely}$ ~Α δεν θα επιβεβαιώνεται σε αυτό. Με άλλα λόγια, δεν θα ισχύει ότι κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση επιβεβαιώνει την Α ή κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση διαψεύδει την Α. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί, αρκεί να θεωρήσουμε ως Α κάποια πρόταση που είναι οριακή περίπτωση στην βάση.

Το γεγονός ότι ο κανόνας argument by cases δεν προκύπτει έγκυρος παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού αντικατοπτρίζει ακριβώς το γεγονός ότι ενώ η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου είναι σύμφωνα με την θεωρία έγκυρη, αφού επιβεβαιώνεται από κάθε πλήρες σημείο, η σημασιολογία της γλώσσας δεν είναι δισθενής. Ένα από τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου διαχωρισμού, είναι ότι μια διάζευξη μπορεί να είναι αληθής, στην περίπτωσή μας η Α∨~Α χωρίς κάποια συγκεκριμένη από τις υπό-προτάσεις που εμφανίζονται σε αυτήν να είναι αληθής, και άρα χωρίς να είναι αληθής η Α ή να είναι αληθής η ~Α οπότε και δεν θα είναι αληθής η $\mathcal{Definitely}$ Α ∨ $\mathcal{Definitely}$ ~Α, αφού ο τρόπος που έχουμε ορίσει τις σημασιολογικές συνθήκες για τον τελεστή '$\mathcal{Definitely}$' είναι τέτοιος ώστε αυτός να αντικατοπτρίζει εντός της γλώσσας αντικείμενο την έννοια της αλήθειας μιας πρότασης στην βάση.

Τώρα, το γεγονός ότι μια πρόταση της μορφής Α∨~Α μπορεί με βάση την συγκεκριμένη σημασιολογική θεωρία να προκύπτει αληθής ενώ ταυτόχρονα καμιά από τις υπό-προτάσεις που εμφανίζονται σε αυτήν δεν είναι αληθής αντικατοπτρίζει με την σειρά του ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό της θεωρίας. Σύμφωνα με αυτή οι προτασιακοί σύνδεσμοι της γλώσσας δεν συμπεριφέρονται με αληθοσυναρτησιακό τρόπο. Πράγματι, για πρόταση A που είναι οριακή περίπτωση στην βάση, η διάζευξη $A \vee A$ θα προκύπτει ότι δεν είναι ούτε αληθής, ούτε ψευδής, παράλληλα όμως, η διάζευξη $A \vee \sim A$ θα προκύπτει αληθής, παρόλο που οι προτάσεις που την αποτελούν έχουν ίδιες τιμές αλήθειας με αυτές που αποτελούν την πρώτη διάζευξη. Έπεται λοιπόν ότι το αν μια σύνθετη πρόταση είναι αληθής ή ψευδής δεν είναι πάντα δυνατό να καθοριστεί με βάση το αν είναι αληθείς ή ψευδείς οι διάφορες υπό-προτάσεις που την αποτελούν.

Βέβαια, αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι όταν μιλάμε στην μεταγλώσσα δεν διακρίνουμε μεταξύ των προτάσεων για τις οποίες ισχύει ότι αυτές δεν επιβεβαιώνονται, αλλά ούτε και διαψεύδονται, από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση. Απλά τις χαρακτηρίζουμε ως προτάσεις που δεν είναι ούτε αληθείς, ούτε ψευδείς. Έστω όμως Cb το σύνολο των καταστάσεων όπου η γλώσσα είναι πλήρως διαμορφωμένη και οι οποίες είναι τέτοιες ώστε να επεκτείνουν την βάση. Παρατηρούμε ότι η διατεταγμένη τετράδα <P(Cb), $\cap$, $\cup$, ′ >, όπου P(Cb) είναι το δυναμοσύνολο του Cb, $\cap$ η διμελής συνάρτηση της τομής δύο συνόλων, $\cup$ η διμελής συνάρτηση της ένωσης και ′ η μονομελής συνάρτηση του συμπληρώματος, είναι μια άλγεβρα Boole. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μιλήσουμε για τιμές αλήθειας αποδίδοντας ως βαθμό αλήθειας της εκάστοτε πρότασης της γλώσσας το μέλος του P(Cb) που περιέχει τα πλήρη σημεία που επεκτείνουν την βάση και επιβεβαιώνουν τη συγκεκριμένη πρόταση, και μόνο αυτά. Καταλήγουμε έτσι και πάλι σε μια θεωρία παρεμφερή της θεωρίας που μελετήσαμε στο τέλος του κεφαλαίου για τις αληθοσυναρτησιακές θεωρίες, όταν μελετήσαμε εναλλακτικούς τρόπους ώστε να διατυπωθεί μια θεωρία βαθμών αλήθειας. Μια πρόταση θα είναι απόλυτα αληθής αν βαθμός της είναι το μέλος του P(Cb) που περιέχει όλα τα πλήρη σημεία που επεκτείνουν την βάση. Απόλυτα ψευδής αν βαθμός της είναι το κενό σύνολο. Οι υπόλοιπες προτάσεις θα λαμβάνουν κάποιον ενδιάμεσο βαθμό αλήθειας. Επιπλέον, καθορίζεται μια διάταξη σε αυτές αφού η σχέση του υποσυνόλου θα είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο P(Cb). Αποκαθίσταται έτσι μια μορφή αληθοσυναρτησιακότητας, πράγματι, ο βαθμός αλήθειας μιας πρότασης της μορφής $A \vee \sim A$ για παράδειγμα θα ορίζεται ως η ένωση του βαθμού αλήθειας της A με αυτόν της $\sim A$. Αν A είναι κάποια πρόταση που είναι οριακή περίπτωση στην βάση, τότε κάποια από τα πλήρη σημεία που επεκτείνουν την βάση θα την επιβεβαιώνουν, ενώ τα υπόλοιπα θα την απορρίπτουν. Έπεται ότι η ένωση των δύο βαθμών αλήθειας θα είναι εκείνο το μέλος του P(Cb) που περιέχει όλα τα πλήρη σημεία που επεκτείνουν την βάση, και άρα η πρόταση $A \vee \sim A$ είναι απόλυτα αληθής. Δεν ισχύει το ίδιο και για την πρόταση $A \vee A$ όμως. Πράγματι, η ένωση του βαθμού αλήθειας της πρότασης Α με τον εαυτό του, θα είναι πάλι ο ίδιος βαθμός, έπεται ότι η πρόταση $A \vee A$ θα έχει τον ίδιο βαθμό αλήθειας με την Α.

Επανερχόμενοι τώρα στις ιδιότητες του τελεστή ‘ $\mathcal{Definitely}$ ‘, πρέπει σε αυτό το σημείο να προσδιορίσουμε σε ποια τροπικά αξιώματα υπακούει ο συγκεκριμένος τελεστής. Παρατηρούμε κατ’ αρχάς ότι αν θεωρήσουμε τυχόν μοντέλο της γλώσσας, το αντίστοιχο του αξιώματος Μ,[39] δηλαδή κάθε πρόταση $\mathcal{Definitely}\ A \rightarrow A$ όπου Α είναι πρόταση της γλώσσας, θα προκύπτει αληθής. Πράγματι:

1. Μια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}\ A \rightarrow A$ θα είναι αληθής αν και μόνο αν είναι αληθής στην βάση, άρα
2. Μια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}\ A \rightarrow A$ θα είναι αληθής αν και μόνο αν επιβεβαιώνεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση
3. Μια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}\ A \rightarrow A$ θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν αυτό επιβεβαιώνει την $\mathcal{Definitely}$ Α, τότε θα επιβεβαιώνει την Α
4. Μια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}\ A \rightarrow A$ θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση επιβεβαιώνει την Α, τότε και αυτό θα επιβεβαιώνει την Α

Το δεξί μέλος της τελευταίας πρότασης με μορφή διπλής συνεπαγωγής είναι όμως προφανώς αληθές και άρα καταλήγουμε ότι όντως η πρόταση $\mathcal{Definitely}\ A \rightarrow A$ θα προκύπτει αληθής.

[39] Πρόκειται για το αξιωματικό σχήμα $\Box A \rightarrow A$ της τροπικής λογικής. Το ίδιο αξιωματικό σχήμα, αναφέρεται συχνά και ως Τ. Συγγραφείς όπως ο Garson το αναφέρουν ως αξίωμα Μ, για παράδειγμα στο βιβλίο του ‘Modal Logic for Philosophers’, Garson [2013]. Από την άλλη, σε βιβλία όπως το ‘Introduction to Modal Logic’, Cresswell and Hughes [1996], καθώς και το ‘An introduction to modal logic’, Lemmon [1977], το αναφέρουν ως αξίωμα Τ. Όπως γράφει ο Lemmon, στο άρθρο του ‘New Foundations for Lewis Modal Systems’, Lemmon [1957], η επέκταση του βασικού συστήματος Κ με το συγκεκριμένο αξίωμα μελετήθηκε αρχικά από τους Gödel και Frey, και ο τελευταίος το καλεί σύστημα Τ. Από την άλλη, ο Von Wright, στο άρθρο του ‘An essay in Modal Logic’ μελέτησε ως σύστημα Μ εκείνο που προκύπτει από το Κ με την προσθήκη ως αξιώματος του σχήματος $A \rightarrow \Diamond A$. Πρόκειται για ένα αξίωμα που, όσον αφορά την έννοια που μας απασχολεί, έχει διαισθητική προφάνεια, και η μελέτη του οποίου χαρακτηρίζεται από μακρά ιστορία. Όπως σχολιάζει ο Αριστοτέλης στο ‘Περί Ερμηνείας’ (αντλώ το απόσπασμα από την μετάφραση στα αγγλικά του Ackrill): ‘It is clear from what has been said that what is of necessity is in actuality, so that, if the things which always are are prior, then also actuality is prior to capability’ (13^{o} κεφάλαιο, 23a21). Σύμφωνα με τους σχολαστικούς του μεσαίωνα: ‘Ab oportere ad esse valet consequentia’.

Στη συνέχεια διαπιστώνουμε ότι προτάσεις της μορφής *Definitely* Α → *Definitely* *Definitely* Α[40] όπου Α είναι πρόταση της γλώσσας, θα προκύπτουν επίσης αληθείς για τυχόν μοντέλο της γλώσσας. Πράγματι:

1. Μια πρόταση της μορφής *Definitely* Α → *Definitely* *Definitely* Α θα είναι αληθής αν και μόνο αν είναι αληθής στην βάση, άρα
2. Μια πρόταση της μορφής *Definitely* Α → *Definitely* *Definitely* Α θα είναι αληθής αν και μόνο αν επιβεβαιώνεται από κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση
3. Μια πρόταση της μορφής *Definitely* Α → *Definitely* *Definitely* Α θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν αυτό επιβεβαιώνει την πρόταση *Definitely* Α τότε θα επιβεβαιώνει και την *Definitely* *Definitely* Α

[40] Πρόκειται φυσικά για το αντίστοιχο του τροπικού αξιώματος S4, που έχει πάρει το όνομα του από το γνωστό σύστημα του C. I. Lewis, το οποίο και περιγράφει στο δεύτερο παράρτημα του βιβλίου 'Symbolic Logic', Lewis and Langford [1959], που συνέγραψε μαζί με τον Cooper H. Langford. Ως γνωστόν, κίνητρο του Lewis ήταν να αναπτύξει ένα σύστημα που περιέχει κάποιον κατάλληλο σύνδεσμο συνεπαγωγής, τέτοιον ώστε να αποφεύγονται τα λεγόμενα 'παράδοξα της υλικής συνεπαγωγής', όπως αυτά προκύπτουν εντός του συστήματος των Principia Mathematica των Russell και Whitehead. Η γνωστή μορφή του αξιώματος εμφανίζεται πρώτη φορά στο άρθρο του Gödel, 'An Interpretation of the Intuitionistic Propositional Calculus' στο οποίο χρησιμοποιεί ως βάση τον συνήθη προτασιακό λογισμό, τον οποίο και επεκτείνει με τα αξιώματα $\Box A \rightarrow A$, $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ και $\Box A \rightarrow \Box\Box A$, καθώς και με τον κανόνα necessitation, οπότε και καταλήγει σε ένα σύστημα ισοδύναμο του συστήματος S4 του Lewis, εντός του οποίου μπορούν να μεταφραστούν κατάλληλα οι διάφορες προτάσεις του ιντουισιονιστικού προτασιακού συστήματος του Heyting, αν διαβάζουμε τις προτάσεις της μορφής $\Box A$ ως 'η Α αποδεικνύεται'.
Έχει πάντως υποστηριχτεί ότι αρχές ανάλογες του S4 έχουν εμφανιστεί στον φιλοσοφικό στοχασμό και παλαιότερα.
Ο Arthur Prior για παράδειγμα, στο άρθρο του 'Diodoran Modalities', Prior [1955], θα μελετήσει τον τρόπο που ο μεγαρικός φιλόσοφος Διόδωρος όριζε τις έννοιες του δυνατού και του αναγκαίου, και θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αυτές οδηγούν σε ένα σύστημα ανάλογο του S4. Ο Διόδωρος όριζε ως δυνατό αυτό που ή είναι, ή κάποια στιγμή θα είναι αληθές, αναγνωρίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο και μία χρονική συνιστώσα στην έννοια της λογικής δυνατότητας. Σημειώνοντας ότι η Διοδώρεια έννοια της proposition δεν ταυτίζεται με την σύγχρονη έννοια, ο Prior διατυπώνει ένα αξιωματικό σύστημα, και με βάση το αξίωμα 'αν πρόκειται να ισχύσει ότι αν πρόκειται να ισχύσει ότι p, τότε πρόκειται να ισχύσει ότι p' καταλήγει ότι εντός του Διοδώρειου συστήματος θα έπεται σαν θεώρημα κάθε πρόταση της μορφής $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$, προτάσεις που είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από το σχήμα S4 του Gödel.
Τέλος, ο Jack Macintosh, στο άρθρο 'Theological and Scientific applications of the notion of necessity in the mediaeval and early modern periods', που περιλαμβάνεται στο βιβλίο 'Logical Modalities from Aristotle to Carnap, the story of necessity', Cambridge University Press, θα υποστηρίξει ότι ο Robert Boyle (γνωστός μεταξύ άλλων και από τον νόμο αερίων του Boyle στην χημεία), βασίζεται στην συγκεκριμένη αρχή προκειμένου να υποστηρίξει ότι αν είναι δυνατό να υπάρχει θεός, τότε είναι δυνατό να υπάρχουν θαύματα, κάτι που χρησιμοποιεί στην συνέχεια ως προκείμενη σε επιχείρημα που διατυπώνει, σύμφωνα με το οποίο από το γεγονός ότι είναι δυνατό να υπάρχει θεός πρέπει να συμπεράνουμε πως υπάρχει θεός (σελίδες 165 με 167 του βιβλίου).

4. Μια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}$ A $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση επιβεβαιώνει την A τότε κάθε πλήρες σημείο που επεκτείνει την βάση επιβεβαιώνει την $\mathcal{Definitely}$ A

Όπως και πριν, το δεξί μέλος της παραπάνω πρότασης με μορφή διπλής συνεπαγωγής είναι αληθές, και άρα η πρόταση $\mathcal{Definitely}$ A $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A όντως προκύπτει αληθής. Κατά παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι και η πρόταση που αντιστοιχεί στο τροπικό αξίωμα S5, δηλαδή η πρόταση $\sim\mathcal{Definitely}$ $\sim$A $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\sim\mathcal{Definitely}$ $\sim$A, θα είναι αληθής.

Ενώ όμως το γεγονός ότι το αξίωμα M προκύπτει αληθές φαίνεται να είναι μια επιθυμητή ιδιότητα, δεν ισχύει το ίδιο και με το γεγονός ότι τα αξιώματα S4 και S5 προκύπτουν αληθή. Σίγουρα, αν θεωρήσουμε ένα ασαφές κατηγόρημα, πχ το κατηγόρημα “το x είναι σωρός”, καθώς και μια σωρειτική ακολουθία αντικειμένων για αυτό, τότε όπως φαίνεται ότι δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο εντός της ακολουθίας τέτοιο ώστε αυτό να είναι σωρός ενώ το επόμενό του δεν είναι, έτσι φαίνεται και ότι δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο αντικείμενο τέτοιο ώστε αυτό να είναι ξεκάθαρα σωρός ενώ το επόμενό του όχι. Φαίνεται ότι όπως υπάρχουν αντικείμενα που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι σωρός ή όχι, έτσι θα πρέπει να υπάρχουν και αντικείμενα που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι ξεκάθαρα σωρός ή όχι. Παρομοίως, όπως υπάρχουν αντικείμενα που είναι οριακές περιπτώσεις σωρού φαίνεται ότι θα πρέπει να υπάρχουν και αντικείμενα που είναι οριακές περιπτώσεις οριακής περίπτωσης σωρού. Πρόκειται για ισχυρές διαισθήσεις, που όμως έρχονται σε αντίθεση με το γεγονός ότι αξιώματα όπως τα S4 και S5 προκύπτουν αληθή.

Εφόσον τώρα θεωρούμε ότι η συμπεριφορά του τελεστή ‘$\mathcal{Definitely}$’ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να συμβαδίζει με τις συγκεκριμένες διαισθήσεις, έπεται ότι πρέπει να τροποποιήσουμε την σημασιολογική συνθήκη για τις προτάσεις που τον περιέχουν. Ένας προφανής τρόπος είναι, σε αναλογία με τις αντίστοιχες περιπτώσεις στην τροπική λογική, να προσθέσουμε μια διμελή σχέση R μεταξύ των αντικειμένων που ανήκουν στο σύνολο W του εκάστοτε πλαισίου. Ως μοντέλο της γλώσσας λοιπόν θα θεωρούμε μια διατεταγμένη οκτάδα <D, W, C, b, ⊑, R, Val^+, Val^->, όπου R είναι μια διμελής σχέση μεταξύ των αντικειμένων που ανήκουν στο W. Στην συνέχεια, προσδιορίζοντας περαιτέρω τις ιδιότητες της σχέσης R, μπορούμε να καθορίσουμε σε μεγάλο βαθμό τις ιδιότητες του τελεστή

Definitely. Ένας τρόπος ώστε να διατυπώσουμε τις σημασιολογικές συνθήκες για προτάσεις που περιέχουν τον συγκεκριμένο τελεστή είναι ο εξής:

- w⊨ *Definitely* A αν και μόνο αν για κάθε σημείο z τέτοιο ώστε να είναι wRz ισχύει ότι z⊨A

Ένας τρόπος για να ερμηνεύσουμε την σχέση R από φιλοσοφική άποψη είναι να θεωρήσουμε ότι για σημεία w, w' εντός του W θα είναι wRw' αν και μόνο αν η κατάσταση w' είναι ένας αποδεκτός τρόπος διαμόρφωσης της γλώσσας σύμφωνα με την κατάσταση w. Καταστάσεις οι οποίες δεν διαφωνούν σε μεγάλο βαθμό με την w όσον αφορά τις εκτάσεις και αντιεκτάσεις των διαφόρων κατηγορηματικών εκφράσεων της γλώσσας θα είναι σύμφωνα με αυτή αποδεκτές. Έπεται λοιπόν ότι η σχέση R θα πρέπει να είναι αυτοπαθής, δηλαδή για κάθε αντικείμενο x εντός του W θα ισχύει ότι xRx. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι το αξίωμα M παραμένει αληθές, παρά τις τροποποιήσεις στην σημασιολογική συνθήκη για προτάσεις που περιέχουν τον τελεστή '*Definitely* '. Επιπλέον, δεν θα ισχύει ότι η συγκεκριμένη σχέση είναι μεταβατική, αφού αν θεωρήσουμε αντικείμενα w, w', w'' μπορεί το w' να είναι αποδεκτή κατάσταση σύμφωνα με το w, και παρομοίως το w'' σύμφωνα με το w', αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι θα ισχύει και πως το w'' είναι αποδεκτή κατάσταση σύμφωνα με το w. Μπορεί το w' να μην διαφωνεί σε μεγάλο βαθμό με το w, και το w'' με το w' αλλά παρόλα αυτά το w'' να διαφωνεί σε μεγάλο βαθμό όσον αφορά τις εκτάσεις και αντιεκτάσεις των κατηγορηματικών εκφράσεων της γλώσσας από το w. Έπεται λοιπόν ότι με βάση τη νέα σημασιολογική συνθήκη και τις συγκεκριμένες ιδιότητες της σχέσης R τα αξιώματα S4 και S5 δεν θα προκύπτουν πλέον ως αληθή. Πράγματι, η πρόταση 4 της πιο πάνω απόδειξης για παράδειγμα θα διαμορφώνεται τώρα ως εξής:

1. Μια πρόταση της μορφής *Definitely* A $\rightarrow$ *Definitely Definitely* A θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο w που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν κάθε σημείο που σχετίζεται με το w μέσω της R επιβεβαιώνει την A τότε κάθε πλήρες σημείο που σχετίζεται με το w μέσω της R επιβεβαιώνει την *Definitely* A, η οποία είναι ισοδύναμη με την
2. Μια πρόταση της μορφής *Definitely* A $\rightarrow$ *Definitely Definitely* A θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε πλήρες σημείο w που επεκτείνει την βάση ισχύει ότι αν κάθε πλήρες σημείο w' που σχετίζεται με το w μέσω της R επιβεβαιώνει την A τότε για κάθε πλήρες σημείο w' που σχετίζεται με το w μέσω της R θα ισχύει ότι κάθε πλήρες σημείο w'' που σχετίζεται με το w' μέσω της R επιβεβαιώνει την A

Εφόσον όμως δεν ισχύει ότι η σχέση R είναι μεταβατική, το δεξί μέλος της πιο πάνω πρότασης με μορφή διπλής συνεπαγωγής θα υπάρχει περίπτωση να προκύπτει ότι είναι ψευδές. Καταλήγουμε λοιπόν ότι το αξίωμα S4 όντως δεν θα είναι αληθές σε κάθε μοντέλο της γλώσσας. Η συγκεκριμένη διατύπωση της σημασιολογικής συνθήκης για προτάσεις που περιέχουν τον τελεστή δεν έχει λοιπόν κάποιες από τις ανεπιθύμητες ιδιότητες της αρχικής διατύπωσης. Βέβαια, μια αντίρρηση φιλοσοφικού περιεχομένου που θα μπορούσε κάποιος να εγείρει είναι ότι με βάση αυτή την διατύπωση αυτό που έχει τελικά σημασία όσον αφορά την σχέση R είναι ποια από τα αντικείμενα εντός του C σχετίζονται μεταξύ τους ως προς αυτήν και ποια όχι. Τα αντικείμενα εντός του C όμως θεωρούμε πως αντιστοιχούν σε καταστάσεις της γλώσσας όπου αυτή είναι πλέον πλήρως διαμορφωμένη και ως εκ τούτου δεν θα έπρεπε να έχει σημασία ποιες από τις πλήρεις καταστάσεις είναι επαρκώς όμοιες μεταξύ τους και ποιες όχι. Αν θεωρήσουμε ότι η γλώσσα έχει διαμορφωθεί πλήρως και είναι στην κατάσταση c, τότε για κάθε άλλη κατάσταση εντός του C θα ισχύει ότι αυτή δεν είναι η ορθή διαμόρφωση της γλώσσας, ανεξαρτήτως του πόσο όμοια είναι με την c ή όχι. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό εισάγει ένα είδος αστάθειας μεταξύ των αντικειμένων εντός του C που θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι επί της ουσίας ισοδυναμεί με την παραδοχή ότι κάποια από τα χαρακτηριστικά που έπονται από το φαινόμενο της ασάφειας δεν εξαλείφονται πλήρως καθώς η γλώσσα διαμορφώνεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό. Αυτό με τη σειρά του μπορεί να υποστηριχθεί ότι δείχνει πως η ασάφεια είναι ένα χαρακτηριστικό της γλώσσας που δεν συνδέεται με το αν αυτή είναι πλήρως διαμορφωμένη ή όχι, με άλλα λόγια ότι πρόκειται για δύο διαφορετικά φαινόμενα, που δεν συνδέονται μεταξύ τους. Θα μπορούσαμε ενδεχομένως, τροποποιώντας κατάλληλα την αντίστοιχη σημασιολογική συνθήκη, να αποφύγουμε τις συγκεκριμένες αντιρρήσεις.

2.2.5.1 Κάποια χαρακτηριστικά της Θεωρίας που θεωρώ ως μειονεκτήματα

Όπως έχουμε δει μέχρι αυτό το σημείο, οι θεωρίες του συγκεκριμένου τύπου διακρίνονται από μια σειρά χαρακτηριστικών που μπορεί να θεωρηθούν ως πλεονεκτήματα, ειδικά αν τις συγκρίνει κανείς με τις διάφορες αληθοσυναρτησιακές θεωρίες που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Είδαμε σε αυτό ότι θεωρίες όπως αυτές των βαθμών αλήθειας, όταν αυτές αντιμετωπίζονται με καθαρά αληθοσυναρτησιακό τρόπο, έχουν κάποιες συνέπειες που δύσκολα μπορεί να συμβιβαστούν με τις γλωσσικές διαισθήσεις και να δικαιολογηθούν από φιλοσοφική άποψη. Ένα παράδειγμα που εξετάσαμε, ήταν ο τρόπος που απονέμονται από κάποιες θεωρίες του είδους βαθμοί αλήθειας στις διάφορες προτάσεις που εκφράζουν ανεκτικότητα, σε σύγκριση με τον τρόπο που αυτοί απονέμονται στις διάφορες προτάσεις που εκφράζουν την ύπαρξη σαφών ορίων. Για σωρειτική ακολουθία $α_1$, $α_2$, …, $α_{10000}$ ως προς κατηγόρημα ‘F’, με το πρώτο αντικείμενο να είναι ξεκάθαρα F ενώ το τελευταίο ξεκάθαρα δεν είναι, είχαμε διαπιστώσει ότι προτάσεις της μορφής $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$, με $i \in \{1, 2, …, 10000\}$ θα λαμβάνουν σταθερά βαθμό αλήθειας πολύ κοντά στο 1. Από την άλλη όμως, προτάσεις της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$, θα λαμβάνουν χαμηλό βαθμό για i κοντά στο 1, βαθμό που είναι κοντά στο 0,5 για i που είναι γύρω στο 5000, και έπειτα πάλι χαμηλό βαθμό για i κοντά στο 10000. Αντίστοιχα, αν αντιμετωπίσουμε την καθολική ποσόδειξη ως ένα είδος σύζευξης και την υπαρκτική ποσόδειξη ως ένα είδος διάζευξης θα προκύπτει ότι ενώ η πρόταση ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$’ θα λαμβάνει βαθμό που βρίσκεται πολύ κοντά στο 1, η πρόταση ‘$\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$’ θα λαμβάνει βαθμό κοντά στο 0,5.

Αυτό είναι σίγουρα μια πολύ περίεργη συνέπεια, ενώ σύμφωνα με την θεωρία κάθε πρόταση που εκφράζει ανεκτικότητα βρίσκεται από σημασιολογική άποψη πάντα πολύ κοντά στο να είναι απόλυτα αληθής, προτάσεις σύμφωνα με τις οποίες υπάρχουν σαφή όρια μπορεί να είναι ακόμα και μισοαληθείς, να βρίσκονται δηλαδή ακριβώς στην μέση μεταξύ αλήθειας και ψεύδους. Είδαμε ότι προβλήματα όπως αυτό μπορούν πάντως να διορθωθούν αν αλλάξουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η σημασιολογική τιμή που η θεωρία αποδίδει στην εκάστοτε πρόταση της γλώσσας. Παρέμεναν όμως προβλήματα που μπορούσαν να επιλυθούν μόνο προβαίνοντας σε αλλαγές που είχαν ως συνέπεια η θεωρία να παύει να είναι αληθοσυναρτησιακή, εκτός και αν είμαστε διατεθειμένοι να εγκαταλείψουμε την ιδέα των αριθμών ως βαθμών αλήθειας. Πάντως, μπορούμε σε αυτό το σημείο να δούμε ότι η θεωρία στην οποία είχαμε καταλήξει ήταν τελικά ένα είδος θεωρίας υπερτιμήσεων εφοδιασμένη με μια συνάρτηση μέτρου επί του συνόλου των αποσαφηνίσεων της γλώσσας.

Τώρα, όπως είδαμε, σύμφωνα με τις θεωρίες υπερτιμήσεων προτάσεις της μορφής $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$ για $i \in \{1, 2, …, 10000\}$ θα προκύπτει ότι δεν είναι αληθείς. Βέβαια δεν θα προκύπτει και ότι αυτές είναι ψευδείς. Από την άλλη είδαμε ότι προτάσεις όπως η ‘$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$ θα προκύπτουν ψευδείς, και ανάλογα, προτάσεις όπως η ‘$\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$’ θα προκύπτουν αληθείς. Τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά είναι κατά την γνώμη μου μειονεκτήματα της θεωρίας. Αν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο που είναι ξεκάθαρα σωρός άμμου, καθώς και την διαδικασία σε κάθε βήμα της οποίας αφαιρούμε από το αντικείμενο που έχει προκύψει από το προηγούμενο βήμα ένα μόριο άμμου, τότε φαίνεται αντίθετο στην διαίσθηση τόσο να υποστηρίξουμε ότι κάποια πρόταση της μορφής «Αν το αντικείμενο που προέκυψε στο i βήμα της διαδικασίας είναι σωρός τότε το αντικείμενο που προκύπτει αφαιρώντας από αυτό ένα μόριο άμμου είναι και πάλι σωρός» δεν είναι αληθής, όσο και το να υποστηρίξουμε ότι ισχύει πως υπάρχει κάποιο σημείο της διαδικασίας στο οποίο ένα μόριο άμμου κάνει την διαφορά μεταξύ σωρού και μη σωρού. Θα μπορούσε βέβαια να σταθεί κανείς στο γεγονός ότι όπως είχαμε διαπιστώσει, για ερμηνεία της γλώσσας και επίπεδο διαμόρφωσης αυτής θα ισχύει μεν ότι επιβεβαιώνεται η '$\Delta\exists x\sim(Fx\rightarrow Fx+1)$' αλλά μπορεί να μην ισχύει το ίδιο και για την '$\exists x\Delta\sim(Fx\rightarrow Fx+1)$'. Από το γεγονός λοιπόν ότι είναι $\Delta\exists x\sim(Fx\rightarrow Fx+1)$ δεν έπεται ότι θα ισχύει και πως $\exists x\Delta\sim(Fx\rightarrow Fx+1)$. Και πάλι όμως, το να υποστηρίξει κανείς ότι το νόημα των ασαφών εκφράσεων είναι τέτοιο ώστε ενώ μεν επαρκεί για να καθοριστεί σαφές όριο μεταξύ σωρού και μη σωρού, παρόλα αυτά δεν επαρκεί και για να προσδιοριστεί ποια η θέση του τελευταίου, εξακολουθεί σε κάθε περίπτωση να ακούγεται παράξενο. Το "incredulous stare"[41] φαίνεται μια πολύ πιθανή αντίδραση σε απόψεις όπως αυτές. Σύμφωνα με τις θεωρίες του είδους ισχύει ότι για κάθε i η πρόταση $\sim(Fa_i\rightarrow Fa_{i+1})$ δεν είναι αληθής, παρόλα αυτά είναι αληθής η '$\exists x\sim(Fx\rightarrow Fx+1)$'. Είναι όμως ακριβώς επειδή ισχύει το πρώτο που έχουμε την εντύπωση ότι δεν μπορεί να ισχύει το δεύτερο. Ίσως βέβαια η συγκεκριμένη εντύπωση μας δημιουργείται επειδή αγνοούμε την ασάφεια από την οποία διακρίνονται ορισμένες από τις εκφράσεις εντός των συγκεκριμένων προτάσεων και συλλογιζόμαστε ως εάν να βρισκόμασταν εντός σαφών πλαισίων. Από την άλλη όμως είναι η ασάφεια του κατηγορήματος 'F' που μας έχει προηγουμένως οδηγήσει στο να θεωρήσουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει κάποιο i τέτοιο ώστε η πρόταση της μορφής $\sim(Fa_i\rightarrow Fa_{i+1})$ να είναι αληθής. Όπως θα γράψει ο Williamson: "In effect, the explanation is that we ignore vagueness, making semantic assumptions appropriate only if 'heap' were not vague. The trouble with the explanation is that it assumes that we do not ignore vagueness at a different point."[42]

Το όλο ζήτημα μπορεί να γίνει κάπως πιο προσιτό στην διαίσθηση μέσω του παραλληλισμού μεταξύ δυνατοτήτων ως προς την μελλοντική εξέλιξη του κόσμου και δυνατοτήτων ως προς την περαιτέρω διαμόρφωση της γλώσσας. Ίσως μας μπερδεύει το γεγονός ότι όποιο ζεύγος αντικειμένων εντός της σωρειτικής ακολουθίας και αν

[41] Πρόκειται για την γνωστή φράση που χρησιμοποίησε ο David Lewis για να περιγράψει την πρώτη αντίδραση που προκαλεί συνήθως η φιλοσοφική του θεώρηση περί δυνατών κόσμων, γνωστή ως 'Modal Realism'. Σημεία στα οποία εμφανίζεται αυτή η φράση μπορεί κανείς να βρει τόσο στο βιβλίο του 'Counterfactuals', στην σελίδα 86, όσο και στο μεταγενέστερο 'On the Plurality of Worlds', στις σελίδες 133, 135 και 165.

[42] Timothy Williamson, 'Vagueness', σελίδα 154.

θεωρήσουμε, θα υπάρχει δυνατότητα περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας τέτοια ώστε και τα δύο αντικείμενα να κατατάσσονται στην ίδια από τις δύο κατηγορίες, οπότε θεωρούμε ότι μια πρόταση όπως η '$\exists x \sim (Fx \rightarrow Fx+1)$' δεν μπορεί να είναι αληθής. Και πάλι όμως, το γεγονός ότι για κάθε αντικείμενο υπάρχει μέλλον τέτοιο ώστε αν αυτό είναι F τότε να είναι F και το επόμενό του ως προς την ακολουθία φαίνεται πολύ ασθενές ώστε να εξηγήσει γιατί μας φαίνεται ότι για κάθε αντικείμενο δεν θα μπορούσε να ισχύει ότι αυτό είναι F και το επόμενό του όχι. Τελικά η απορία παραμένει, μήπως από το γεγονός ότι δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί που μπορεί να βρίσκεται το όποιο σαφές όριο θα έπρεπε να είχαμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αυτό πολύ απλά δεν υπάρχει; Η θεωρία αδυνατεί να εξηγήσει γιατί εκείνες οι προκείμενες εντός κάποιου σωρειτικού επιχειρήματος που εκφράζουν ανεκτικότητα μας φαίνονται αληθείς, και κατά συνέπεια γιατί τα διάφορα επιχειρήματα σωρειτικού τύπου μας φαίνονται τόσο ελκυστικά και δύσκολο να αποκρουστούν.

Βέβαια, η απλή εκδοχή της θεωρίας αρκείται σε μια διαμέριση των προτάσεων της γλώσσας σε τρεις κατηγορίες, αυτές που είναι αληθείς, αυτές που είναι ψευδείς, και αυτές που είναι τίποτα από τα δύο. Τα πράγματα φαίνονται εκ πρώτης όψεως κάπως καλύτερα αν εξετάσουμε την εφοδιασμένη με μέτρο επί του συνόλου των αποσαφηνίσεων εκδοχή της θεωρίας, αφού μας δίνεται έτσι η δυνατότητα να προβούμε σε μια πιο λεπτομερή και πλούσια κατηγοριοποίηση των προτάσεων της γλώσσας ως προς τα σημασιολογικά τους χαρακτηριστικά. Βλέπουμε τώρα ότι οι προτάσεις $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$ παρόλο που δεν είναι τελείως αληθείς θα λαμβάνουν σημασιολογική τιμή που τις τοποθετεί πολύ κοντά στην αλήθεια, οπότε μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα τις διαισθήσεις των ομιλητών με βάση τις συγκεκριμένες τροποποιήσεις. Από την άλλη όμως, η πρόταση '$(Fa_1 \rightarrow Fa_2) \wedge (Fa_2 \rightarrow Fa_3) \wedge \ldots \wedge (Fa_{9999} \rightarrow Fa_{10000})$', και άρα και η '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$' θα προκύπτει ότι είναι απόλυτα ψευδείς, και αυτό είναι όπως είδαμε κάτι που επίσης φαίνεται αντίθετο στις διαισθήσεις των ομιλητών. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ενώ προτάσεις της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$ θα προκύπτει ότι βρίσκονται πολύ κοντά στο ψεύδος, η '$(Fa_1 \wedge \sim Fa_2) \vee (Fa_2 \wedge \sim Fa_3) \vee \ldots \vee (Fa_{9999} \wedge \sim Fa_{10000})$' καθώς και η '$\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$' θα προκύπτει ότι είναι απόλυτα αληθείς.

Πρόκειται για χαρακτηριστικά της θεωρίας που προκύπτουν λόγω του τρόπου με βάση τον οποίο υπολογίζονται οι σημασιολογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων. Έτσι, αν θεωρήσουμε προτάσεις A, B, και έστω [[A]], [[B]] οι σημασιολογικές τιμές τους, τότε ενώ στην περίπτωση των απλών βαθμών αλήθειας είχαμε θέσει ότι $F_\wedge([[A]], [[B]])=\min([[A]],$

[[B]]) και $F_\vee$([[A]], [[B]])=max([[A]], [[B]]), στην περίπτωση των τροποποιημένων συνθηκών είχαμε θέσει $[[A\wedge B]]=M([A\wedge B])/M(Q)= M([A]\cap[B])/M(Q)$ και $[[A\vee B]]=M([A\vee B])/M(Q)= M([A]\cup[B])/M(Q)$. Είχαμε με αυτόν τον τρόπο καταφέρει να διορθώσουμε κάποια προβληματικά χαρακτηριστικά της αληθοσυναρτησιακής εκδοχής της θεωρίας βαθμών αλήθειας, διαπιστώνουμε όμως ότι έχουν προκύψει άλλα χαρακτηριστικά, που φαίνονται εξίσου προβληματικά. Με βάση την μη αληθοσυναρτησιακή συνθήκη για τις προτάσεις με μορφή σύζευξης έπεται ότι αν θεωρήσουμε δύο προτάσεις A, B που βρίσκονται πολύ κοντά στην αλήθεια, υπάρχει περίπτωση η πρόταση $A\wedge B$ να βρίσκεται πιο μακριά από την αλήθεια, τόσο σε σχέση με την A, όσο και σε σχέση με την B. Ενώνοντας λοιπόν πολλές προτάσεις που βρίσκονται από σημασιολογική άποψη πολύ κοντά στην αλήθεια μέσω του συνδέσμου της σύζευξης, υπάρχει περίπτωση η πρόταση που προκύπτει να είναι τελικά απόλυτα ψευδής. Οπότε, αντιμετωπίζοντας προτάσεις που περιλαμβάνουν καθολική ποσόδειξη κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν που η θεωρία αντιμετωπίζει προτάσεις με μορφή σύζευξης, καταλήγουμε να χαρακτηρίζουμε την ‘$\forall x(Fx\rightarrow Fx+1)$’ ως απόλυτα ψευδή. Κατά παρόμοιο τρόπο, αν οι A, B είναι πολύ κοντά στο ψεύδος, υπάρχει περίπτωση η $A\vee B$ να βρίσκεται πλησιέστερα στην αλήθεια, τόσο σε σχέση με την A, όσο και σε σχέση με την B. Υπάρχει άρα περίπτωση ενώνοντας πολλές προτάσεις που βρίσκονται πολύ κοντά στο ψεύδος μέσω του συνδέσμου της διάζευξης να προκύψει κάποια πρόταση που είναι απόλυτα αληθής. Αντιμετωπίζοντας προτάσεις που περιλαμβάνουν υπαρκτική ποσόδειξη κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν που η θεωρία αντιμετωπίζει προτάσεις με μορφή διάζευξης, καταλήγουμε να χαρακτηρίζουμε την ‘$\exists x(Fx\wedge\sim Fx+1)$’ ως απόλυτα αληθή.

Σε κάθε περίπτωση, είναι εμφανές ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να εξηγηθεί για την εκάστοτε μορφή σωρειτικού επιχειρήματος γιατί αυτή μας φαίνεται ελκυστική. Για την περίπτωση της μη επαγωγικής μορφής του παραδόξου μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι τα επιχειρήματα του τύπου είναι μεν έγκυρα, αλλά μη ορθά, και ο λόγος που μας φαίνονται ελκυστικά είναι ότι παρόλο που η εκάστοτε προκείμενη που εκφράζει ανεκτικότητα δεν είναι αληθής, αυτή είναι πολύ κοντά στην αλήθεια. Αν όμως θεωρήσουμε την επαγωγική μορφή του παραδόξου, τότε ενώ πρέπει πάλι να υποστηρίξουμε ότι τα επιχειρήματα της συγκεκριμένης μορφής είναι μη ορθά, πρέπει να υποστηρίξουμε ταυτόχρονα ότι η επαγωγική προκείμενη σε αυτά είναι απόλυτα ψευδής, οπότε και η θεωρία αδυνατεί να εξηγήσει από μόνη της γιατί τα επιχειρήματα με αυτή την μορφή μας φαίνεται δύσκολο να αποκρουστούν.

Συνοψίζοντας, είδαμε ότι σύμφωνα με τις θεωρίες του είδους κάποιες προτάσεις που συνεπάγονται την ύπαρξη σαφών ορίων, όπως η '$\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$', προκύπτουν απόλυτα αληθείς, και μάλιστα αυτό συμβαίνει χωρίς να υπάρχει κάποια συγκεκριμένη πρόταση που προκύπτει από αυτή μέσω συγκεκριμενοποίησης του υπαρκτικού ποσοδείκτη και που να είναι επίσης αληθής. Ακόμη χειρότερα, προκύπτει ταυτόχρονα ότι κάθε πρόταση που προκύπτει από αυτή μέσω συγκεκριμενοποίησης θα βρίσκεται από σημασιολογική άποψη πολύ κοντά στο ψεύδος. Αντίστοιχα, κάποιες προτάσεις που εκφράζουν το γεγονός ότι οι ασαφείς εκφράσεις είναι ανεκτικές, όπως η '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$' θα προκύπτουν ψευδείς, παρόλο που δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη πρόταση που να προκύπτει από αυτή μέσω συγκεκριμενοποίησης του καθολικού ποσοδείκτη που να είναι επίσης ψευδής. Μάλιστα, αν η θεωρία κάνει χρήση κάποιας συνάρτησης μέτρου επί του συνόλου των αποσαφηνίσεων, θα προκύπτει ότι οι προτάσεις που προκύπτουν από αυτή μέσω συγκεκριμενοποίησης βρίσκονται από σημασιολογική άποψη πολύ κοντά στην αλήθεια.

Θα μπορούσε όμως να υποστηριχθεί ότι από το γεγονός ότι κάθε πρόταση της μορφής $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$ για $i \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$ προκύπτει ότι είναι πολύ κοντά στην αλήθεια θα έπρεπε να έπεται ότι η '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$' είναι επίσης πολύ κοντά στην αλήθεια. Και από το γεγονός ότι κάθε πρόταση της μορφής $Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1}$ για $i \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$ είναι πολύ κοντά στο ψεύδος θα έπρεπε να έπεται ακριβώς ότι η πρόταση '$\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$' είναι επίσης πολύ κοντά στο ψεύδος. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα κάποιους ομιλητές, εμβαπτισμένους εντός ενός πλαισίου συζήτησης, και έστω ότι ένας από αυτούς εκφέρει μια πρόταση όπως η «υπάρχει αριθμός n μορίων άμμου, τέτοιος ώστε n μόρια άμμου κατάλληλα τοποθετημένα στον χώρο αποτελούν σωρό, και n-1 μόρια άμμου διευθετημένα με τον ίδιο τρόπο δεν αποτελούν σωρό». Σύμφωνα με τις θεωρίες υπερτιμήσεων αυτή η πρόταση είναι αληθής, παρόλο που δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος αριθμός n για τον οποίο μπορούμε να πούμε ότι η πρόταση που προκύπτει υποκαθιστώντας τον είναι αληθής. Παρόλα αυτά προτάσεις όπως αυτή φαίνεται σύμφωνα με τις διαισθήσεις μας ότι είναι ψευδείς, και υποστηρίζω ότι ο λόγος για αυτό είναι ακριβώς ότι είναι αδύνατο να προσδιοριστεί κάποιος συγκεκριμένος αριθμός τέτοιος ώστε να την επαληθεύει. Ανάλογα, προτάσεις όπως «για κάθε αριθμό n ισχύει ότι αν n μόρια άμμου κατάλληλα τοποθετημένα στον χώρο είναι σωρός, τότε και n-1 μόρια άμμου διευθετημένα με τον ίδιο τρόπο είναι σωρός», παρόλο που με βάση τις θεωρίες υπερτιμήσεων είναι ψευδείς, μας φαίνεται ότι είναι αληθείς. Σύμφωνα με τις θεωρίες υπερτιμήσεων, προτάσεις όπως αυτή είναι ψευδείς, παρόλο που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε συγκεκριμένο αριθμό n για τον οποίο αυτή διαψεύδεται. Είναι ξεκάθαρο όμως ότι με βάση τις διαισθήσεις μας, προτάσεις όπως αυτή φαίνεται να είναι αληθείς, και υποστηρίζω ότι ο λόγος για αυτό είναι ακριβώς το γεγονός ότι είναι αδύνατο να προσδιοριστεί συγκεκριμένος αριθμός n για τον οποίο αυτή διαψεύδεται. Όπως είδαμε βέβαια, μπορεί να δοθεί δικαιολόγηση με βάση τις θεωρίες του τύπου γιατί οι διαισθήσεις μας μπορεί ανά περιπτώσεις να πέφτουν τόσο έξω. Αν όμως υιοθετήσουμε την μεθοδολογική αρχή ότι μια σημασιολογική θεωρία θα πρέπει να σέβεται κατά το μέγιστο δυνατό βαθμό τις γλωσσικές διαισθήσεις των ομιλητών, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο είναι μια θεωρία σύμφωνα με την οποία η πρώτη από τις προηγούμενες προτάσεις είναι ψευδής ακριβώς γιατί δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί συγκεκριμένη περίπτωση που την επιβεβαιώνει, ενώ η δεύτερη από αυτές είναι αληθής ακριβώς γιατί δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί συγκεκριμένη περίπτωση που την διαψεύδει. Μόνο στην περίπτωση που αποδειχτεί ότι είναι αδύνατο να διατυπωθεί τέτοια θεωρία μπορούμε να δεχτούμε ως ορθή κάποια θεωρία που αντιμετωπίζει ως λαθεμένες κάποιες από τις βασικότερες διαισθήσεις των ομιλητών. Εξάλλου, είναι ακριβώς οι τελευταίες που συνιστούν και τον κύριο όγκο των δεδομένων που έχουμε όσον αφορά το προς εξήγηση φαινόμενο.

2.2.6 Προσδοκία (Anticipation, Expectation)

Στο κλασικό του άρθρο *Vagueness, Truth and Logic*, ο Kit Fine σχολιάζει εν συντομία πως θα μπορούσε με βάση την έννοια του Specisification space[43] να διατυπωθεί ένα anticipatory account όσον αφορά τις συνθήκες αλήθειας των προτάσεων στο εκάστοτε σημείο του χώρου. Πιο συγκεκριμένα, προκύπτει το πρόβλημα ότι αν δεν δεχόμαστε πως είναι πάντα δυνατό η γλώσσα να εξελιχθεί περαιτέρω με τρόπο ώστε να κλείσουν τα κενά που μπορεί να διακρίνουν τις εκτάσεις των ασαφών κατηγορημάτων σε κάποιο σημείο του χώρου, τότε η σημασιολογική συνθήκη για προτάσεις της μορφής ΔΦ υπάρχει περίπτωση να προκύπτει vacuously true[44] στα συγκεκριμένα σημεία. Έπεται ότι προτάσεις για τις οποίες δεν υπάρχει πλήρης διαμόρφωση της γλώσσας που επεκτείνει την βάση και τις επαληθεύει θα προκύπτουν αληθείς.

[43] Στην περίπτωση μας, ως specisification space μπορούμε να θεωρήσουμε την διατεταγμένη δυάδα $\langle W, \sqsubseteq \rangle$. Πρόκειται για την δομή που σχηματίζεται από τις διάφορες καταστάσεις της γλώσσας και τον τρόπο που αυτές σχετίζονται μεταξύ τους.

[44] Αν ως μεταγλώσσα θεωρήσουμε αυτή της κλασικής πρωτοβάθμιας λογικής, ενισχυμένη με τα διθέσια κατηγορηματικά σύμβολα ‘$\vDash$’, ‘$\sqsubseteq$’ καθώς και το ‘$\in$’ της θεωρίας συνόλων, τότε η συνθήκη διατυπώνεται ως εξής: $w \vDash \Delta\Phi \leftrightarrow \forall x((\in(x, C) \wedge \sqsubseteq(w,x)) \rightarrow x \vDash \Phi)$. Τα σύμβολα ‘$\leftrightarrow$’, ‘$\rightarrow$’ είναι αυτά της διπλής υλικής συνεπαγωγής και υλικής συνεπαγωγής αντίστοιχα.

Φαίνεται όμως απόλυτα λογικό να θεωρήσει κανείς ότι υπάρχουν διαμορφώσεις της γλώσσας τέτοιες ώστε καμία πλήρης διαμόρφωση αυτής δεν τις επεκτείνει. Πράγματι, δεδομένου ενός σημείου εντός του W, είναι πάντα δυνατό η μεταγενέστερη εξέλιξη της γλώσσας να είναι τέτοια ώστε αυτή να καταστεί τελικά πλήρως διαμορφωμένη; Πρόκειται για μια πολύ ισχυρή δέσμευση. Αν λοιπόν δεν είμαστε πρόθυμοι να δεχτούμε κάτι τέτοιο, θεωρούμε δηλαδή ότι για τυχόν σημείο εντός του W-C υπάρχει το ενδεχόμενο να μην υπάρχουν σημεία εντός του C που να το επεκτείνουν, μπορούμε αντί της συνηθισμένης συνθήκης για προτάσεις της μορφής ΔΦ να διατυπώσουμε ένα anticipatory account για τις συνθήκες αλήθειας αυτών των προτάσεων. Σύμφωνα με αυτό, ένα σημείο του χώρου θα επιβεβαιώνει κάποια πρόταση της μορφής ΔΦ αν και μόνο αν επιβεβαιώνει την ┐┐Φ, όπου '┐' είναι το σύμβολο για την ιντουισιονιστική άρνηση. Έχουμε λοιπόν:

1. w⊧ΔΦ αν και μόνο αν w⊧┐┐Φ
2. w⊧ΔΦ ανν για κάθε z∈W τέτοιο ώστε w⊑z δεν ισχύει ότι z⊧┐Φ
3. w⊧ΔΦ ανν για κάθε z∈W τέτοιο ώστε w⊑z υπάρχει y∈W τέτοιο ώστε z⊑y και είναι y⊧Φ

Αφήνουμε το ζήτημα των συνθηκών ψεύδους για τις προτάσεις της συγκεκριμένης μορφής ανοικτό προς το παρόν.[45]

Αν βέβαια δεχόμαστε ότι για κάθε σημείο εντός του W είναι δυνατό να κλείσουν τα κενά που αυτό μπορεί να αφήνει στις εκτάσεις των διαφόρων εκφράσεων, τότε οι δύο τρόποι ώστε να οριστούν οι συνθήκες επιβεβαίωσης για προτάσεις της μορφής ΔΦ συμπίπτουν.

Πράγματι, έστω ότι για τυχόν σημείο w ισχύει ότι για κάθε y∈C τέτοιο ώστε να είναι w⊑y ισχύει ότι y⊧Φ. Έστω τυχόν σημείο z τέτοιο ώστε w⊑z, θέλουμε τώρα κάποιο σημείο x εντός του W τέτοιο ώστε να επεκτείνει το z και επιπλέον να είναι x⊧Φ. Αρκεί να θεωρήσουμε ως x κάποιο σημείο εντός του C που είναι μεταγενέστερο του z. Έχουμε θεωρήσει ότι τέτοιο σημείο θα υπάρχει. Λόγω της μεταβατικότητας της σχέσης ⊑, το σημείο αυτό θα είναι μεταγενέστερο και του w και άρα θα είναι x⊧Φ.

Αντίστροφα, θέλουμε να δείξουμε ότι αν για τυχόν σημείο w ισχύει ότι για κάθε σημείο z τέτοιο ώστε w⊑z υπάρχει y με z⊑y και y⊧Φ, τότε θα ισχύει ότι για κάθε x∈C τέτοιο ώστε w⊑x θα είναι x⊧Φ. Έστω λοιπόν τυχόν x∈C τέτοιο ώστε w⊑x, πολύ απλά εφόσον το x είναι

[45] Μια ενδιαφέρουσα επιλογή θα ήταν για παράδειγμα να θέσουμε ότι είναι w⫤ΔΦ αν και μόνο αν w⊧┐Φ, οπότε και το σύστημα που προκύπτει θα αποτελεί επί της ουσίας μια ιδιόμορφη παραλλαγή των συνθηκών αλήθειας της ιντουισιονιστικής λογικής.

πλήρες ισχύει ότι το μόνο σημείο που έπεται αυτού με βάση την σχέση $\sqsubseteq$ είναι ο εαυτός του. Όμως από υπόθεση έχουμε ότι για κάθε σημείο z που έπεται του w θα υπάρχει σημείο που έπεται αυτού και επιβεβαιώνει την Φ. Άρα, εφόσον $w \sqsubseteq x$ θα υπάρχει σημείο που έπεται του x και επιβεβαιώνει την Φ. Όμως, μόνο σημείο που έπεται του x είναι το ίδιο το x, έχουμε ότι το x θα επιβεβαιώνει την Φ.

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν για κάθε σημείο εντός του W-C υπάρχουν σημεία εντός του C που το επεκτείνουν, τότε οι δύο τρόποι ορισμού για τις συνθήκες επιβεβαίωσης προτάσεων της μορφής ΔΦ συμπίπτουν. Παρόλα αυτά προκύπτουν διαφορές αν τροποποιήσουμε τον δεύτερο τρόπο ορισμού ώστε να λαμβάνει υπόψη μόνο αντικείμενα που ανήκουν στο W-C. Ας προσθέσουμε σε αυτό το σημείο έναν τελεστή '$\mathcal{E}$ ' στην γλώσσα αντικείμενο προκειμένου να διαχωρίζουμε εύκολα μεταξύ των δύο τύπων τροπικότητας. Θα μπορούσαμε να θέσουμε ως συνθήκη επιβεβαίωσης για προτάσεις της μορφής $\mathcal{E}\Phi$ το εξής:

- Αν το w ανήκει στο W-C τότε είναι $w \vDash \mathcal{E}\Phi$ ανν για κάθε $z \in$W-C τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ υπάρχει $y \in$W-C τέτοιο ώστε $z \sqsubseteq y$ και είναι $y \vDash \Phi$.

Παρατηρούμε ότι με βάση την συγκεκριμένη διατύπωση, οι συνθήκες για τις προτάσεις της μορφής $\mathcal{E}$Α ορίζονται μόνο για σημεία στα οποία η γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη. Από πρακτική άποψη ο λόγος που προχωρήσαμε σε αυτή την κίνηση είναι ώστε να αποφύγουμε το ενδεχόμενο οι προτάσεις της συγκεκριμένης μορφής να προκύπτουν vacuously true στα σημεία όπου η γλώσσα είναι πλήρως διαμορφωμένη, αφού για σημείο w εντός του C δεν θα υπάρχει $z \in$W-C τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$. Από φιλοσοφική άποψη, μπορούμε να δικαιολογήσουμε την συγκεκριμένη ιδιοτροπία στην διατύπωση του ορισμού βασιζόμενοι στην παρατήρηση ότι υπάρχει μια ποιοτική διαφορά μεταξύ των αντικειμένων εντός του W-C και αυτών εντός του C. Τα αντικείμενα εντός του W-C θεωρούμε πως αντιστοιχούν σε δυνατές καταστάσεις της γλώσσας όπου αυτή δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, καταστάσεις που πρέπει να αντιμετωπίζονται ως προσωρινές, ενδιάμεσοι σταθμοί στην πορεία εξέλιξης και διαμόρφωσης της γλώσσας. Ως εκ τούτου, τα συγκεκριμένα αντικείμενα θα επιβεβαιώνουν και προτάσεις των οποίων οι συνθήκες αλήθειας θα καθορίζονται ως ένα βαθμό από τις «μεταγενέστερες» καταστάσεις της γλώσσας, από τον τρόπο με τον οποίο αυτή θα εξελιχθεί αν διαμορφωθεί περαιτέρω. Ο τελεστής '$\mathcal{E}$ ' αντικατοπτρίζει αυτήν ακριβώς την ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα συγκεκριμένα σημεία. Από την άλλη, τα αντικείμενα εντός του C αντιστοιχούν σε δυνατές καταστάσεις της γλώσσας όπου αυτή έχει διαμορφωθεί πλήρως, πρέπει λοιπόν να αντιμετωπίζονται όχι ως προσωρινές καταστάσεις, όχι ως ενδιάμεσοι σταθμοί, αλλά ως τελικοί προορισμοί στην διαδικασία διαμόρφωσης της γλώσσας. Πολύ απλά δεν υπάρχουν δυνατές καταστάσεις που είναι γνήσια μεταγενέστερες ως προς αυτά. Τα συγκεκριμένα σημεία άρα δεν θα χαρακτηρίζονται από το ίδιο είδος αστάθειας όπως αυτό που χαρακτηρίζει εκείνα που ανήκουν στο W-C. Είναι ακριβώς αυτή η ασυμμετρία μεταξύ ενδιάμεσου σταθμού και τελικού προορισμού που μας οδήγησε στο να διατυπώσουμε τις συνθήκες για προτάσεις της μορφής $\mathcal{E}$ A με τρόπο ώστε αυτές να ορίζονται μόνο για σημεία στα οποία η γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη.

Διαπιστώνουμε ότι με βάση αυτόν τον ορισμό θα υπάρχει περίπτωση για σημείο x εντός του W-C και πρόταση A να είναι $x\vDash\Delta A$ αλλά όχι $x\vDash\mathcal{E}A$.

Πράγματι, έστω κατηγόρημα ‘F’, ατομική σταθερά ‘a’, και ερμηνεία της γλώσσας σύμφωνα με την οποία ισχύει για επίπεδο διαμόρφωσης x ότι αντικείμενο α είναι η μόνη οριακή περίπτωση για το συγκεκριμένο κατηγόρημα, υπάρχουν αντικείμενα εντός του C που επεκτείνουν το x και θέτουν το α είτε στην έκταση είτε στην αντιέκταση του ‘F’, και τέλος ως αναφορά της ατομικής σταθεράς ‘a’ ανατίθεται το αντικείμενο α. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι $x\vDash \Delta(Fa\vee{\sim}Fa)$. Παρόλα αυτά δεν θα ισχύει ότι $x\vDash\mathcal{E}(Fa\vee{\sim}Fa)$. Αυτό γιατί το μόνο αντικείμενο εντός του W-C που έπεται του x μέσω της σχέσης $\sqsubseteq$ είναι το ίδιο το x. Και δεν υπάρχει σημείο εντός του W-C που να έπεται αυτού μέσω της σχέσης $\sqsubseteq$ τέτοιο ώστε να επιβεβαιώνει ή να απορρίπτει την ‘Fa’. Εφόσον λοιπόν θεωρούμε ότι το συγκεκριμένο μοντέλο είναι αποδεκτό τότε προκύπτει αντιπαράδειγμα. Το συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα βασίζεται στην υπόθεση ότι μπορεί να υπάρχουν αντικείμενα εντός του W-C για τα οποία μόνο αντικείμενο εντός του W-C που το επεκτείνει είναι ο εαυτός του. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ερμηνεία της γλώσσας τέτοια ώστε το πεδίο δράσης των ποσοδεικτών είναι κάποιο πεπερασμένο σύνολο και σημείο x εντός του W-C τέτοιο ώστε ανάμεσα στα αντικείμενα που είναι σε αυτό οριακές περιπτώσεις για το ‘F’ να είναι και το a, τότε θα υπάρχει αντικείμενο εντός του W-C που επεκτείνει το x τέτοιο ώστε το a είναι οριακή περίπτωση για αυτό, και τέτοιο ώστε τα κενά που αυτό αφήνει στις εκτάσεις των διαφόρων εκφράσεων δεν γίνεται να κλείσουν παρά μόνο με το να καταστήσουμε την γλώσσα απολύτως σαφή. Έπεται ότι δεν ισχύει για κάθε αντικείμενο εντός του W-C που επεκτείνει το x ότι θα υπάρχει αντικείμενο εντός του W-C τέτοιο ώστε να επιβεβαιώνει την $Fa\vee{\sim}Fa$ και άρα δεν θα είναι $x\vDash\mathcal{E}(Fa\vee{\sim}Fa)$.

Υπάρχουν λοιπόν ερμηνείες της γλώσσας τέτοιες ώστε να είναι b⊨ Δ(Fa∨~Fa) αλλά όχι b⊨$\mathcal{E}$(Fa∨~Fa), και άρα υπάρχει περίπτωση η $\mathcal{E}$(Fa∨~Fa) να μην είναι αληθής ενώ η Δ(Fa∨~Fa) είναι, οπότε συμπεραίνουμε ότι οι δύο τύποι τροπικότητας δεν συμπίπτουν.

Μια άλλη επιλογή θα ήταν να θέσουμε ως συνθήκη επιβεβαίωσης για προτάσεις της μορφής $\mathcal{E}$Φ το εξής:

- Αν το w ανήκει στο W-C τότε είναι w⊨$\mathcal{E}$Φ ανν για κάθε z∈W-C τέτοιο ώστε w⊑z υπάρχει y∈W τέτοιο ώστε z⊑y και είναι y⊨ Φ.

Με βάση την συγκεκριμένη διατύπωση, το γεγονός ότι κάποιο σημείο w που ανήκει στο W-C επιβεβαιώνει κάποια πρόταση $\mathcal{E}$A μας ενημερώνει ότι όπως και αν εξελιχθεί περαιτέρω η γλώσσα χωρίς να διαμορφωθεί πλήρως, τότε θα είναι πάντα δυνατό αυτή να διαμορφωθεί περαιτέρω με τρόπο ώστε να επιβεβαιώνεται η πρόταση A.

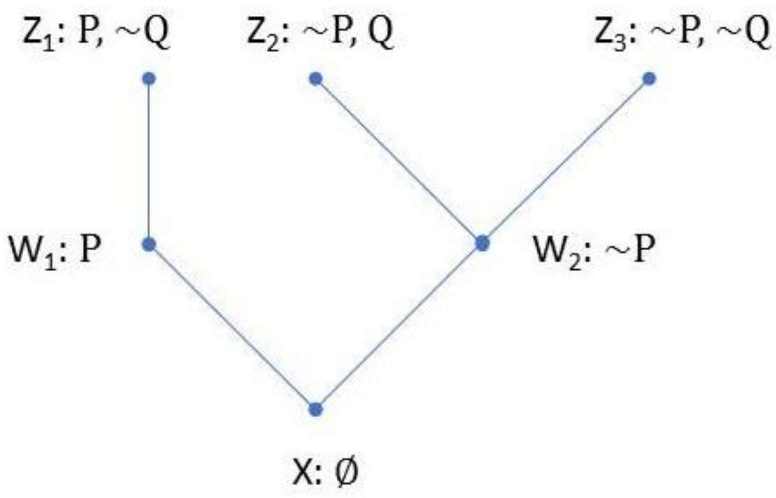
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι θα υπάρχει τώρα περίπτωση για σημείο x εντός του W-C και πρόταση A να είναι x⊨$\mathcal{E}$A αλλά όχι x⊨ΔA. Πράγματι, αρκεί για αυτό να θεωρήσουμε ερμηνεία της γλώσσας τέτοια ώστε ατομική πρόταση p είναι η μόνη οριακή περίπτωση ως προς το x, και σύμφωνα με την οποία υπάρχουν σημεία w, z που ανήκουν στο W, επεκτείνουν το x, και είναι τέτοια ώστε το w επιβεβαιώνει την p ενώ το z την διαψεύδει. Θα είναι τότε x⊨$\mathcal{E}$p, αλλά δεν θα ισχύει και ότι x⊨Δp.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να απλοποιηθούν στο εξής:

- Αν το w ανήκει στο W-C τότε είναι w⊨$\mathcal{E}$Φ ανν για κάθε z∈W-C τέτοιο ώστε w⊑z ισχύει ότι ~(z⫤Φ).

Πράγματι, έστω σημείο w που ανήκει στο W-C, για την μία κατεύθυνση θέλουμε να δείξουμε ότι αν για κάθε z∈W-C τέτοιο ώστε w⊑z υπάρχει y∈W τέτοιο ώστε z⊑y και είναι y⊨ Φ, τότε θα ισχύει ότι για κάθε z∈W-C τέτοιο ώστε w⊑z είναι ~(z⫤Φ). Αποδεικνύουμε το contrapositive, έστω λοιπόν ότι δεν ισχύει ότι για κάθε z∈W-C τέτοιο ώστε w⊑z είναι ~(z⫤Φ). Άρα, θα υπάρχει κάποιο αντικείμενο w' εντός του W-C τέτοιο ώστε w⊑w' και w'⫤Φ. Θα ισχύει λοιπόν ότι για κάθε αντικείμενο r εντός του W τέτοιο ώστε w'⊑r θα είναι r⫤Φ. Άρα θα ισχύει ότι υπάρχει αντικείμενο εντός του W-C τέτοιο ώστε για κάθε αντικείμενο x εντός του W που το επεκτείνει θα είναι x⫤Φ και άρα x⊭Φ. Καταλήγουμε λοιπόν ότι όντως δεν θα ισχύει πως για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε $z \sqsubseteq y$ και είναι $y \vDash \Phi$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση τώρα, παρατηρούμε ότι υπάρχει περίπτωση να προκύπτει αντιπαράδειγμα. Πράγματι, έστω γλώσσα L της οποίας ατομικές προτάσεις είναι οι P, Q και έστω ερμηνεία αυτής που αποτελείται από ακριβώς τα σημεία x, w_1, w_2 εντός του W-C, και ακριβώς τα z_1, z_2, z_3 εντός του C, τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση θα ισχύει για το αντικείμενο x ότι υπάρχει μη πλήρες αντικείμενο που το επεκτείνει, τέτοιο ώστε για κάθε αντικείμενο που επεκτείνει το τελευταίο, δεν ισχύει ότι αυτό θα επιβεβαιώνει την Q. Πρόκειται για το αντικείμενο w_1. Παρόλα αυτά, ισχύει ότι κάθε μη πλήρες αντικείμενο που επεκτείνει το x δεν διαψεύδει την Q. Βέβαια, βλέπουμε ότι το συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα βασίζεται ακριβώς στο γεγονός ότι δεν υπάρχει πλήρες αντικείμενο που να επεκτείνει το w_1 και επιπλέον να επιβεβαιώνει την πρόταση Q. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το τι θα ισχύει σύμφωνα με την θεωρία καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το ποια μοντέλα θεωρούμε πως είναι αποδεκτά ως προς το φαινόμενο που θέλουμε να μελετήσουμε. Αυτό με την σειρά του θα πρέπει να καθοριστεί με βάση τα όσα έπονται από το φιλοσοφικό τμήμα της θεωρίας.



Αν βέβαια δεν δεχόμαστε ότι μοντέλα στα οποία προκύπτουν αντιπαραδείγματα όπως αυτό είναι αποδεκτά, θεωρούμε δηλαδή ότι για σημείο w που ανήκει στο W-C και για τυχούσα πρόταση A που είναι οριακή περίπτωση σε αυτό θα πρέπει να ισχύει ότι υπάρχουν αντικείμενα εντός του C που επεκτείνουν το w και επιβεβαιώνουν την A καθώς και αντίστοιχα αντικείμενα που την διαψεύδουν, τότε έπεται ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Καταλήγουμε σε αυτή την περίπτωση ότι για σημείο w που ανήκει στο W-C και πρόταση Φ θα ισχύει ότι για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε $z \sqsubseteq y$ και είναι $y \models \Phi$ αν και μόνο αν για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $\sim(z \dashv \Phi)$.

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να εξετάσουμε κάποιες από τις συνέπειες του τελευταίου από τους τρόπους ώστε να οριστούν οι συνθήκες επιβεβαίωσης για προτάσεις της μορφής $\mathcal{E}$Α. Έστω λοιπόν και πάλι η σωρειτική ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10000}$ ως προς το κατηγόρημα ‘F’. Έχουμε θεωρήσει ότι το πρώτο αντικείμενο είναι ξεκάθαρα F, το τελευταίο είναι ξεκάθαρα όχι F, και κάθε αντικείμενο διαφέρει από τα γειτονικά του σε ελάχιστο βαθμό όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες. Έστω πρόταση της μορφής $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$, όπου $i \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$, και διαμόρφωση w που ανήκει στο W-C. Θα είναι:

1. $w \models \mathcal{E}(Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$ ανν
2. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \dashv (Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$, ανν
3. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \models Fa_i \wedge z \dashv Fa_{i+1}$, ανν
4. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $Val^+(z, \alpha_i) \in Val^+(z, F)$ και $Val^+(z, \alpha_{i+1}) \in Val^-(z, F)$

Η τελευταία πρόταση όμως θα προκύπτει αληθής ανεξαρτήτως του τρόπου που έχουμε ερμηνεύσει την γλώσσα, άρα όντως θα ισχύει ότι $w \models \mathcal{E}(Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι θα είναι:

1. $w \models \mathcal{E}(Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1})$ ανν
2. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \dashv (Fa_i \wedge \sim Fa_{i+1})$, ανν
3. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι [$z \dashv Fa_i$ ή $z \dashv \sim Fa_{i+1}$], ανν
4. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι [$z \dashv Fa_i$ ή $z \models Fa_{i+1}$], ανν
5. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $\sim(z \dashv Fa_i)$ και $\sim(z \models Fa_{i+1})$, ανν
6. για κάθε $z \in W\text{-}C$ τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι $\sim(Val^+(z, \alpha_i) \in Val^-(z, F))$ και $\sim(Val^+(z, \alpha_{i+1}) \in Val^+(z, F))$

Η τελευταία πρόταση υπάρχει όμως περίπτωση για κάποιους δείκτες i να μην προκύπτει αληθής με βάση ερμηνεία της γλώσσας. Πράγματι, αρκεί για αυτό να θεωρήσουμε ερμηνεία σύμφωνα με την οποία υπάρχει σημείο z που επεκτείνει το w και το οποίο ανήκει στο W-C και είναι τέτοιο ώστε να θέτει τα α_i, α_{i+1} στην αντιέκταση του ‘F’, ή να θέτει και τα δύο αντικείμενα στην έκταση του ‘F’, ή πολύ απλά δεν αποφαίνεται για κάποιο από αυτά ως προς την συγκεκριμένη έκφραση. Το όλο θέμα ανάγεται στο ποια αντικείμενα μπορεί να περιέχονται εντός του συνόλου W-C. Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε και ότι προτάσεις όπως η '$\mathcal{E}(\forall x(Fx \rightarrow Fx+1))$' θα επιβεβαιώνονται, ενώ δεν θα ισχύει το ίδιο και για προτάσεις όπως η '$\mathcal{E}(\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1))$'.

Φαίνεται λοιπόν εκ πρώτης όψεως ότι οι συνθήκες αλήθειας για προτάσεις που περιέχουν τον συγκεκριμένο τελεστή διακρίνονται από κάποια χαρακτηριστικά που έχουμε θεωρήσει ως επιθυμητά. Ίσως έχει λοιπόν νόημα να ερευνήσουμε παραπέρα την έννοια που αυτός εκφράζει. Όπως θεωρώντας ότι η έννοια της αλήθειας μιας πρότασης A ως προς κάποια διαμόρφωση w της γλώσσας ταυτίζεται με αυτήν της επιβεβαίωσης της ΔA από την w καταλήξαμε στις διάφορες θεωρίες υπερτιμήσεων, θα μπορούσαμε τώρα να υποστηρίξουμε ότι η A θα είναι αληθής στο w αν και μόνο αν αυτό επιβεβαιώνει την $\mathcal{E}$A, και να προχωρήσουμε ερευνώντας τα χαρακτηριστικά της θεωρίας που προκύπτει.

Βέβαια, θα πρέπει σε αυτή την περίπτωση να τροποποιήσουμε κατάλληλα και τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης για προτάσεις με μορφή σύζευξης ή συνεπαγωγής, αφού με βάση αυτές που προς το παρόν έχουμε θέσει προκύπτει το ενδεχόμενο για πρόταση A και αντικείμενο w που ανήκει στο W-C να ισχύει ότι $w \vDash \mathcal{E}A$ και $w \vDash \mathcal{E}{\sim}A$. Πράγματι, έστω πρόταση της μορφής $B \wedge \Gamma$, θα είναι $w \vDash \mathcal{E}(B \wedge \Gamma)$ αν και μόνο αν για κάθε $z \in$W-C τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι ${\sim}(z \Dashv B \wedge \Gamma)$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $z \in$W-C τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι ${\sim}(z \Dashv B \vee z \Dashv \Gamma)$. Θα είναι $w \vDash \mathcal{E}({\sim}(B \wedge \Gamma))$ αν και μόνο αν για κάθε $z \in$W-C τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι ${\sim}(z \vDash (B \wedge \Gamma))$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $z \in$W-C τέτοιο ώστε $w \sqsubseteq z$ ισχύει ότι ${\sim}(z \vDash B \wedge z \vDash \Gamma)$. Αρκεί λοιπόν να θεωρήσουμε ερμηνεία της γλώσσας σύμφωνα με την οποία υπάρχει σημείο w που ανήκει στο W-C τέτοιο ώστε για κάθε σημείο εντός του W-C που το επεκτείνει ισχύει ότι αυτό δεν διαψεύδει κάποια από τις Β, Γ, και επιπλέον κάθε φορά που κάποιο τέτοιο σημείο επιβεβαιώνει μία από τις δύο προτάσεις τότε η άλλη θα είναι οριακή περίπτωση ως προς αυτό, οπότε θα είναι $w \vDash \mathcal{E}A$ και $w \vDash \mathcal{E}{\sim}A$. Το τελευταίο δεν είναι κάτι που αναγκαστικά πρέπει να θεωρηθεί ως προβληματικό, εξάλλου αν θεωρήσουμε για παράδειγμα κάποια ερμηνεία συστήματος τροπικής λογικής μπορεί κάλλιστα να ισχύει ότι κάποιος κόσμος επιβεβαιώνει τόσο την $\Diamond A$ όσο και την $\Diamond{\sim}A$. Το όλο ζήτημα εξαρτάται λοιπόν από τον τρόπο που θα ερμηνεύσουμε τον τελεστή '$\mathcal{E}$'. Υπό τις παρούσες όμως συνθήκες, ιδιότητες όπως αυτές καθιστούν δύσκολο κάθε εγχείρημα ώστε να ταυτιστεί η έννοια που αυτός εκφράζει με αυτήν της αλήθειας, αφού τότε θα πρέπει να είμαστε προετοιμασμένοι να υποστηρίξουμε ότι μπορεί για κάποιες προτάσεις να ισχύει ότι τόσο αυτές όσο και οι αρνήσεις τους είναι αληθείς.

Συνοψίζοντας, μια από τις βασικότερες εκ των παραδοχών πάνω στις οποίες έχουμε μέχρι αυτό το σημείο βασιστεί, είναι ότι η ασάφεια είναι ένα είδος σημασιολογικού φαινομένου. Έχουμε θεωρήσει ότι η φυσική γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη από σημασιολογική άποψη και κατά συνέπεια υπάρχει μια πλειάδα δυνατοτήτων όσον αφορά τον τρόπο που αυτή μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω. Έχουμε επιπλέον επισημάνει πως αν η παραδοχή που έχουμε κάνει είναι ορθή, τότε πρόκειται για ένα γλωσσικό φαινόμενο που μπορεί να χαρακτηριστεί συγγενικό και να παραλληλιστεί με αυτό των future contingents, εκφορών μη αναγκαίων προτάσεων που αφορούν το μέλλον, όπως για παράδειγμα της «αύριο θα συμβεί μια ναυμαχία». Το αν μια εκφορά της τελευταίας είναι αληθής ή ψευδής φαίνεται πως θα πρέπει να είναι κάτι που εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο θα έχει διαμορφωθεί ο κόσμος την επόμενη μέρα μετά την πράξη της εκφοράς. Είναι κάτι που εξαρτάται από το μέλλον του κόσμου, και μπορούμε κατά ανάλογο τρόπο να πούμε πως το αν μια εκφορά κάποιας πρότασης που περιέχει ασαφείς εκφράσεις είναι αληθής ή όχι εξαρτάται από το “μέλλον” της γλώσσας. Τους διαφορετικούς τρόπους με βάση τους οποίους αυτή μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω. Έχει όμως πλέον προκύψει το εξής ερώτημα, ποιες ακριβώς είναι αυτές οι διαμορφώσεις; Διαπιστώσαμε ότι διαφορετικές απαντήσεις στο τελευταίο ερώτημα οδηγούν και σε διαφορετικές απαντήσεις ως προς το ποια είναι τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των ασαφών εκφράσεων. Ποιες ακριβώς δυνατότητες, όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους είναι δυνατό να διαμορφωθεί περαιτέρω η γλώσσα, πρέπει να λάβουμε υπόψη προκειμένου να προσδιορίσουμε τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των ασαφών εκφράσεων, και ποιες όχι;

3 Μια εναλλακτική προσέγγιση.

Ας θεωρήσουμε γλώσσα $\mathcal{L}^0$, και έστω για αρχή ότι αυτή περιέχει μόνο το κατηγορηματικό σύμβολο F, ονόματα a_1, a_2, …, $a_{2000000}$, τους συνήθεις προτασιακούς συνδέσμους $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, τα συνήθη ποσοδεικτικά σύμβολα $\exists$, $\forall$, παρενθέσεις (,), καθώς και ένα αριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών x, x_1, x_2, …, y, z, … κτλ. Έστω επίσης σωρειτική ακολουθία αντικειμένων α_1, α_2, …, $\alpha_{2000000}$ τέτοια ώστε το αντικείμενο α_1 είναι ξεκάθαρα κόκκινο, το αντικείμενο $\alpha_{2000000}$ είναι ξεκάθαρα πορτοκαλί, και κάθε αντικείμενο εντός αυτής είναι ελάχιστα λιγότερο κόκκινο από το αντικείμενο που εμφανίζεται στην προηγούμενη θέση, σε βαθμό που οι ομιλητές δεν μπορούν να διακρίνουν ως προς το χρώμα αντικείμενα που βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας, ούτε υπό κανονικές συνθήκες, ούτε και με την βοήθεια μετρητικών οργάνων.[46] Έστω επιπλέον ότι αναφορά του ονόματος a_1 είναι το αντικείμενο α_1, του ονόματος a_2 το α_2 κτλ, ενώ το κατηγορηματικό σύμβολο 'F' το ερμηνεύουμε ως το κατηγόρημα «το x είναι κόκκινο». Τέλος, θεωρούμε πως το εύρος δράσης των ποσοδεικτών της γλώσσας είναι τα αντικείμενα της παραπάνω σωρειτικής ακολουθίας και μόνο.

Έπεται ότι η πρόταση 'Fa_1' της γλώσσας $\mathcal{L}^0$ θα μεταφράζεται εντός της φυσικής γλώσσας ως «το αντικείμενο α_1 είναι κόκκινο», η πρόταση 'Fa_2' ως «το αντικείμενο α_2 είναι κόκκινο» κτλ. Τώρα, το κατηγόρημα «το x είναι κόκκινο» είναι ασαφές, υπάρχουν δηλαδή αντικείμενα που είναι κόκκινα, αντικείμενα που δεν είναι κόκκινα, αλλά και αντικείμενα για τα οποία δεν είναι ξεκάθαρο αν αυτά είναι κόκκινα ή όχι.[47] Όπως έχουμε δει, χαρακτηριστικό των ασαφών κατηγορημάτων είναι ότι το όποιο νόημα τους είναι τέτοιο ώστε προκαλεί στους ομιλητές της γλώσσας την τάση να δέχονται ως αληθείς συγκεκριμένες διαισθήσεις που αφορούν τις συνθήκες αλήθειας προτάσεων που τα περιέχουν. Για παράδειγμα, οι προτάσεις «αν το α_1 είναι κόκκινο τότε και το α_2 είναι κόκκινο», «αν το α_2 είναι κόκκινο τότε και το α_3 είναι κόκκινο» κτλ μας φαίνονται αληθείς. Κατά παρόμοιο τρόπο μας φαίνονται αληθείς προτάσεις όπως «δεν ισχύει ότι το α_1 είναι κόκκινο και το α_2 δεν είναι», «δεν υπάρχει αντικείμενο μεταξύ των α_1, …, $\alpha_{2000000}$ τέτοιο ώστε αυτό να είναι κόκκινο ενώ το επόμενο δεν είναι», «για κάθε αντικείμενο μεταξύ των

---

[46] Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος κύματος του φωτός που ανακλάται από το αντικείμενο α_1 είναι 700 νανόμετρα, και για αντικείμενα α_i, α_{i+1} με $i\geq 1$ ισχύει ότι το μήκος κύματος που ανακλάται από το αi είναι κατά 0,00005nm μεγαλύτερο από αυτό του α_{i+1}, τότε το α_1 θα είναι ξεκάθαρα κόκκινο, το α2000000 ξεκάθαρα πορτοκαλί, και η συντριπτική πλειοψηφία των διαθέσιμων οργάνων μέτρησης δεν θα μπορεί να διακρίνει μεταξύ διαδοχικών εντός της ακολουθίας αντικειμένων ως προς το μήκος κύματος του φωτός που αυτά ανακλούν.

[47] Παρόλο που χρησιμοποιούμε την συγκεκριμένη πρόταση για να περιγράψουμε το φαινόμενο της ασάφειας, δεν θεωρούμε πως αυτή αντιστοιχεί σε ορισμό του φαινομένου.

α_1, …, $\alpha_{2000000}$ αν αυτό είναι κόκκινο τότε είναι κόκκινο και το επόμενο» κτλ. Από την άλλη, υπάρχει περίπτωση να μην μας φαίνονται αληθείς προτάσεις όπως «ισχύει ότι το $\alpha_{1000000}$ είναι κόκκινο ή δεν ισχύει ότι είναι κόκκινο», «για κάθε αντικείμενο μεταξύ των α_1, …, $\alpha_{2000000}$ ισχύει ότι αυτό είναι κόκκινο ή δεν ισχύει ότι αυτό είναι κόκκινο» κτλ.

Οι σύνθετες προτάσεις στις οποίες αναφέρεται η προηγούμενη παράγραφος μεταφράζονται εντός της γλώσσας $\mathcal{L}^0$ ως '$Fa_1 \rightarrow Fa_2$', '$Fa_2 \rightarrow Fa_3$', '$\sim(Fa_1 \wedge \sim Fa_2)$', '$\sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$, '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$', '$Fa_{1000000} \vee \sim Fa_{1000000}$', '$\forall x(Fx \vee \sim Fx)$' αντίστοιχα. Αν λοιπόν θέλουμε να υπάρχει η μέγιστη δυνατή αντιστοιχία μεταξύ των συνθηκών αλήθειας των προτάσεων της γλώσσας $\mathcal{L}^0$ και των διαισθήσεων των ομιλητών της φυσικής γλώσσας, τότε θα πρέπει οι σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις της γλώσσας να είναι τέτοιες ώστε οι πέντε πρώτες από τις πιο πάνω προτάσεις να προκύπτουν αληθείς, ενώ για τις δύο τελευταίες ενδέχεται να θέλουμε να προκύπτουν ψευδείς ή χωρίς αληθοτιμή.

Προκύπτει σε αυτό το σημείο το ερώτημα ποια ακριβώς είναι τα αίτια, ποιο ακριβώς είναι το χαρακτηριστικό των ασαφών κατηγορημάτων που έχει ως αποτέλεσμα οι ομιλητές της γλώσσας να έχουν τις συγκεκριμένες διαισθήσεις. Η προσέγγιση που θα αναπτυχθεί εδώ στηρίζεται στην παραδοχή ότι σε κάθε μία από τις πιο πάνω περιπτώσεις προτάσεων που θεωρούνται αληθείς, αυτό που καθοδηγεί τις διαισθήσεις των ομιλητών είναι το γεγονός ότι δεν είναι δυνατό[48] οι συγκεκριμένες προτάσεις να διαψευστούν χωρίς παράλληλα να μεταβληθεί ουσιωδώς το νόημα κάποιων από τις εκφράσεις που τις αποτελούν.

Ας θεωρήσουμε για αρχή προτάσεις που περιέχουν ποσόδειξη, όπως για παράδειγμα οι '$\sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$, '$\forall x \sim(Fx \wedge \sim Fx+1)$', '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$'. Υποστηρίζω ότι οι συγκεκριμένες προτάσεις μας φαίνονται αληθείς ακριβώς γιατί δεν είναι δυνατό η συζήτηση μεταξύ δύο ομιλητών που βρίσκονται υπό κανονικές συνθήκες να εξελιχθεί με τρόπο ώστε να βρεθεί, να δειχτεί, ένα αντικείμενο τέτοιο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτό αποτελεί αντιπαράδειγμα σε αυτές. Αν για παράδειγμα ένας ομιλητής εκφέρει κατά την διάρκεια μιας συζήτησης την πρόταση «για κάθε ένα από τα αντικείμενα της σωρειτικής ακολουθίας, ισχύει ότι αν αυτό είναι κόκκινο τότε και το επόμενο από αυτό αντικείμενο θα είναι κόκκινο» τότε πως θα μπορούσε κάποιος συνομιλητής του να τον αντικρούσει; Θα έπρεπε αυτός να επισημάνει δύο αντικείμενα τα οποία βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις εντός της σωρειτικής ακολουθίας και για τα οποία δέχονται και οι δύο ότι το πρώτο είναι

[48] Αφήνουμε προς το παρόν ανοικτό το ζήτημα του ποιο είναι το είδος δυνατότητας στο οποίο αναφερόμαστε εδώ.

κόκκινο ενώ το δεύτερο δεν είναι. Με βάση όμως τα όσα έχουμε πει για την σωρειτική ακολουθία που έχουμε θεωρήσει, καταλήγουμε ότι οι ομιλητές δεν θα μπορούν υπό τις συνθήκες που διεξάγεται η συζήτηση να ξεχωρίσουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες αντικείμενα που βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις εντός αυτής. Όποιο λοιπόν ζεύγος διαδοχικών αντικειμένων και αν δείξει ο συνομιλητής, αυτό θα είναι τέτοιο ώστε τα αντικείμενα που το αποτελούν δεν θα γίνεται να διακριθούν μεταξύ τους από παρατηρησιακή άποψη ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Θεωρώ πως έπεται από αυτό ότι η πρόταση που εξέφερε ο ομιλητής δεν γίνεται υπό τις παρούσες συνθήκες να αντικρουστεί, και πως είναι ακριβώς η συγκεκριμένη ιδιότητα που οδηγεί τους ομιλητές της γλώσσας να την αντιμετωπίζουν ως αληθή.

Τώρα, μια από τις βασικές παραδοχές που έχουμε κάνει μέχρι εδώ είναι ότι η γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, και ότι τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των διαφόρων γλωσσικών εκφράσεων καθορίζονται συναρτήσει των τρόπων με βάση τους οποίους αυτή μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω. Με βάση τις παρατηρήσεις της προηγούμενης παραγράφου καταλήγουμε όμως στο συμπέρασμα ότι υπό κανονικές συνθήκες οι ομιλητές δεν αντιμετωπίζουν όλους τους δυνατούς τρόπους περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας ως ισότιμους μεταξύ τους. Όταν αυτοί βρίσκονται εντός ενός συνηθισμένου πλαισίου συζήτησης, τότε συμπεριφέρονται με τρόπο που δείχνει ότι δεν αντιλαμβάνονται κάποιον τρόπο διαμόρφωσης ως αποδεκτό εάν αυτός κατατάσσει σε διαφορετικές κατηγορίες αντικείμενα που δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες. Αυτό δεν σημαίνει βέβαια ότι η γλώσσα δεν είναι δυνατό να διαμορφωθεί πλήρως, παρόλα αυτά μόνος τρόπος για να γίνει κάτι τέτοιο είναι οι ομιλητές να θεσπίσουν κάποιο όριο, και είμαστε δικαιολογημένοι να περιμένουμε ότι σε μία τέτοια περίπτωση η γλωσσική τους συμπεριφορά θα άλλαζε σε μη αμελητέο βαθμό. Θα είχαν πάψει να χρησιμοποιούν την έκφραση με τον ίδιο τρόπο όπως και όταν βρίσκονται εντός συνηθισμένων πλαισίων, και θεωρώ ότι από το γεγονός αυτό πρέπει να συμπεράνουμε πως κατ' αυτόν τον τρόπο θα είχαν τελικά επιφέρει μια μη αμελητέα αλλαγή στο νόημα της έκφρασης.

Κάνουμε λοιπόν σε αυτό το σημείο την παραδοχή πως πρόκειται για μία βασική συνιστώσα του νοήματος των ασαφών εκφράσεων ότι αντικείμενα που διαφέρουν μεταξύ τους σε ελάχιστο βαθμό ως προς τις σχετικές ιδιότητες δεν επιτρέπεται να κατατάσσονται σε διαφορετικές κατηγορίες. Εφόσον θεωρούμε ότι η γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, αρχές όπως αυτή παίζουν καθοδηγητικό ρόλο όσον αφορά τον τρόπο που η γλώσσα μπορεί όσο οι ομιλητές βρίσκονται υπό κανονικές συνθήκες να διαμορφωθεί περαιτέρω. Όπως παρατηρήσαμε βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν είναι λογικά δυνατό η γλώσσα να διαμορφωθεί πλήρως. Αλλά ότι το τελευταίο δεν μπορεί να γίνει χωρίς να παραβιαστεί μια από τις βασικές αρχές που διέπουν ορισμένες από τις εκφράσεις που αυτή περιέχει, και άρα χωρίς να αλλάξει ουσιαστικά ο τρόπος που οι ομιλητές χρησιμοποιούν τις συγκεκριμένες εκφράσεις. Θέτοντας λοιπόν την συγκεκριμένη αρχή ως καθοδηγητική για τον τρόπο με τον οποίο η γλώσσα μπορεί να διαμορφώνεται όταν οι ομιλητές βρίσκονται υπό κανονικές συνθήκες, και δεδομένου ότι αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να μελετήσουμε τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των ασαφών εκφράσεων ακριβώς όταν βρισκόμαστε υπό αυτές τις συνθήκες, προκύπτει ένας περιορισμός στο ποιες από τις λογικά δυνατές διαμορφώσεις της γλώσσας πρέπει τελικά η σημασιολογική θεωρία να λαμβάνει υπόψη.

Τίθεται βέβαια το ερώτημα ποια η σχέση μεταξύ καθοδηγητικών αρχών όπως αυτές που έχουμε προαναφέρει, των υπόλοιπων πτυχών του νοήματος των ασαφών εκφράσεων, καθώς και των εκτάσεων που αντιστοιχούνται σε αυτές ως προς κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας. Προκύπτουν εδώ πολλές δυνατότητες, χωρίς παράλληλα να είμαστε αναγκασμένοι να υποστηρίξουμε κάποια συγκεκριμένη από αυτές. Μπορούμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε ότι όταν μιλάμε για επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας εννοούμε τους διάφορους τρόπους ώστε με βάση την δομή του κόσμου να αποδοθούν εκτάσεις στις εκφράσεις της γλώσσας που είναι συμβατοί με το νόημα αυτών, όπως αυτό είναι διαμορφωμένο. Το νόημα μιας ασαφούς έκφρασης είναι τέτοιο που ως αποτέλεσμα η έκταση της υποκαθορίζεται, και κατά συνέπεια προκύπτει μια πλειάδα τρόπων ώστε αυτή να καθοριστεί περαιτέρω με τρόπο που να συμβαδίζει με εκείνες από τις συνιστώσες του νοήματος που δρουν ως καθοδηγητικές αρχές. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε πως υπάρχει συνιστώσα του νοήματος που μεταβάλλεται ανάλογα με το επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας και σύμφωνα με την οποία καθορίζεται κάθε φορά συγκεκριμένη έκταση και αντιέκταση για την κάθε έκφραση ανάλογα με την δομή του κόσμου. Παρόλα αυτά άλλες συνιστώσες παραμένουν ανεξάρτητες του επιπέδου διαμόρφωσης, και με βάση αυτές καθορίζεται ποιοι τρόποι ώστε αυτό να μεταβληθεί είναι αποδεκτοί και ποιοι όχι. Κάποιες συνιστώσες του νοήματος μεταβάλλονται λοιπόν ανάλογα με το επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας και κάποιες όχι.[49] Επιλέγουμε πάντως να μην

[49] Ο τρόπος που σε αυτό το σημείο διαχωρίζουμε μεταξύ συνιστωσών του νοήματος κάποιας έκφρασης που είναι ανεξάρτητες του επιπέδου διαμόρφωσης της γλώσσας και συνιστωσών που δεν είναι θυμίζει μια κλάση σημασιολογικών θεωριών που εντάσσονται κάτω από την ταμπέλα ‘two

πάρουμε θέση όσον αφορά το συγκεκριμένο ζήτημα όσο ισχύει ότι δεν προκύπτει ανάγκη να επιλέξουμε κάτι από τα δύο με βάση την προσέγγιση που ακολουθούμε.

Η προσέγγιση που θα αναπτύξουμε βασίζεται λοιπόν σε μια αντιστροφή ορισμένων από τα συμπεράσματα που προκύπτουν σύμφωνα με τις διάφορες θεωρίες υπερτιμήσεων. Είδαμε ότι οι συγκεκριμένες θεωρίες αντιμετωπίζουν τα διάφορα επιχειρήματα σωρειτικού τύπου ως μη ορθά. Αν θεωρήσουμε την επαγωγική μορφή του παραδόξου, τότε έπεται από τους συγκεκριμένους τύπους θεωριών ότι η επαγωγική προκείμενη, δηλαδή η πρόταση '$\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$', δεν είναι αληθής. Προκύπτει μάλιστα ότι αυτή θα είναι ψευδής, παρόλο που σύμφωνα με την θεωρία δεν είναι εφικτό να εντοπίσουμε κάποια συγκεκριμενοποίησή της που να διαψεύδεται. Θεωρούμε όμως ότι το γεγονός πως δεν είναι εφικτό να εντοπίσουμε κάποια συγκεκριμενοποίησή της που να διαψεύδεται είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό που προκύπτει από τον τρόπο που είναι δομημένο το νόημα της ασαφούς έκφρασης 'F', και μάλιστα ότι το συμπέρασμα στο οποίο πρέπει να καταλήξουμε με βάση αυτά είναι πολύ απλά πως η συγκεκριμένη πρόταση είναι αληθής.

Όσον αφορά προτάσεις που δεν περιέχουν ποσοδεικτικές εκφράσεις, όπως για παράδειγμα οι '$Fa_1 \rightarrow Fa_2$', '$Fa_2 \rightarrow Fa_3$', '$\sim(Fa_1 \wedge \sim Fa_2)$', θα θεωρήσουμε κατά παρόμοιο τρόπο ότι αυτές είναι αληθείς ακριβώς γιατί δεν είναι δυνατό να αντικρουστούν. Δεν είναι δηλαδή δυνατό, όσο οι ομιλητές βρίσκονται υπό κανονικές συνθήκες, η συζήτηση να εξελιχθεί με τρόπο ώστε να θεωρηθεί ότι τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται τα σταθερά σύμβολα που εμφανίζονται σε αυτές αποτελούν αντιπαράδειγμα για αυτές. Ας θεωρήσουμε ότι κάποιος ομιλητής εκφέρει την πρόταση «αν το α_1 είναι κόκκινο τότε και το α_2 είναι κόκκινο», και έστω ότι οι ομιλητές είναι διατεθειμένοι να μιλήσουν με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια μπορούν υπό τις παρούσες συνθήκες, χωρίς όμως να νομοθετήσουν κάποιο όριο. Όπως και αν εξελιχθεί η συζήτηση, δεν θα είναι δυνατό όσο ισχύουν οι αυτές

dimensional semantics', γνωστότερη εκ των οποίων είναι η θεωρία περί δεικτικών εκφράσεων (indexicals) του David Kaplan. O Kaplan διατυπώνει την συγκεκριμένη θεωρία στο άρθρο του 'Demonstratives', που περιλαμβάνεται στο βιβλίο 'Themes from Kaplan', Oxford University Press, σελίδες 481 με 563. Πιο συγκεκριμένα, ο Kaplan διαχωρίζει μεταξύ δύο συνιστωσών όσον αφορά το νόημα των εκφράσεων κάποιας φυσικής γλώσσας. Η μία από αυτές, το Content της έκφρασης, καθορίζει την έκταση που αντιστοιχεί σε αυτήν ως προς κάποιον δυνατό κόσμο. Η δεύτερη, το Character, είναι η συνιστώσα του νοήματος με βάση την οποία καθορίζεται ποιο το Content της έκφρασης ως προς κάποιο πλαίσιο εκφοράς.
Παρά τις ομοιότητες όμως, στην περίπτωσή μας δεν έχουμε θεωρήσει ότι οι συνιστώσες που έχουμε διαχωρίσει αλληλεπιδρούν με αυτόν τον τρόπο. Δεν έχουμε θεωρήσει ότι κάποιες από τις συνιστώσες καθορίζουν τις υπόλοιπες, απλά ότι κάποιες από αυτές δρουν ως καθοδηγητικές αρχές ως προς τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να εξελιχθεί η συζήτηση όσο οι ομιλητές βρίσκονται υπό κανονικές συνθήκες.

οι προϋποθέσεις να θεωρηθεί ότι τα αντικείμενα $α_1$ και $α_2$ διαψεύδουν τη συγκεκριμένη πρόταση, αφού έχουμε κάνει την παραδοχή ότι αυτά διαφέρουν μεταξύ τους σε αμελητέο βαθμό ως προς τις σχετικές ιδιότητες, και ότι ως εκ τούτου είναι πανομοιότυπα μεταξύ τους από παρατηρησιακή άποψη ως προς αυτές. Έπεται ότι υπό αυτές τις συνθήκες δεν θα είναι δυνατό μια εκφορά της συγκεκριμένης πρότασης να αντικρουστεί από κάποιον συνομιλητή. Θεωρώ πως αυτό έχει ως συνέπεια οι ομιλητές να συμπεριφέρονται με τρόπο που δείχνει ότι την εκλαμβάνουν ως αληθή, και πως από το γεγονός αυτό πρέπει να συνάγουμε ότι η συγκεκριμένη πρόταση όντως είναι αληθής. [50]

Ας επικεντρωθούμε σε αυτό το σημείο στην περίπτωση του συνδέσμου της συνεπαγωγής. Αν εξετάσουμε τις συνθήκες αλήθειας για τον σύνδεσμο της υλικής συνεπαγωγής στην κλασική λογική, τότε βλέπουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πως αυτές βασίζονται στην ιδέα ότι μια πρόταση με μορφή συνεπαγωγής είναι αληθής αν και μόνο αν ισχύει ότι αυτή δεν διαψεύδεται, κάτι που συμβαίνει όταν το ηγούμενό της είναι αληθές και το επόμενο ψευδές.[51] Με άλλα λόγια, στην περίπτωση μιας συνεπαγωγής όπως

[50] Θα μπορούσε βέβαια σε αυτό το σημείο να αντιτείνει κάποιος ότι υπάρχει το ενδεχόμενο κάποια πρόταση να μην είναι αληθής, και οι συνθήκες να είναι τέτοιες ώστε οι ομιλητές παρόλα αυτά να συμπεριφέρονται σαν αυτή να ήταν αληθής. Τι είδους συνθήκες θα μπορούσαν όμως να οδηγήσουν στο να προκύψει αυτό; Το αν μια πρόταση είναι αληθής ή όχι καθορίζεται από το νόημά της και την δομή του κόσμου. Το νόημα μιας έκφρασης καθορίζεται με την σειρά του μεταξύ άλλων και από τον τρόπο που συμπεριφέρεται και σκέφτεται η γλωσσική κοινότητα. Ενδέχεται λοιπόν οι παράγοντες που καθορίζουν το νόημα μιας έκφρασης να είναι τόσο πολύπλοκοι που κανένας ομιλητής δεν θα βρεθεί ποτέ σε θέση να τους γνωρίσει στην εντέλεια, και άρα να γνωρίσει στην εντέλεια το νόημα της έκφρασης. Πρόκειται ακριβώς για την άποψη που υποστηρίζουν όσοι θεωρούν ότι η ασάφεια είναι ένα επιστημικό φαινόμενο. Κύριοι υποστηρικτές της συγκεκριμένης άποψης περί ασάφειας είναι οι Timothy Williamson και Roy Sorensen. Βλέπε Williamson [1994], καθώς και Sorensen [2001]. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, παρόλο που καθορίζονται όρια για την κάθε κατηγορηματική έκφραση της γλώσσας, οι ομιλητές σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να γνωρίσουν που ακριβώς βρίσκονται αυτά. Επιπλέον, από την στιγμή που θα δεχτούμε κρυμμένα όρια στις εκτάσεις των διαφόρων γλωσσικών εκφράσεων, φαίνεται πως οδηγούμαστε στην άποψη ότι η γλώσσα είναι πλήρως διαμορφωμένη. Όπως θα γράψει ο Williamson στο βιβλίο του: “Once hidden lines are admitted, why should a line between truth and falsity not be one of them?”(σελίδα 201). Έπεται λοιπόν ότι θα υπάρχει κάποια πρόταση με μορφή σαν αυτή της προηγούμενης παραγράφου που είναι ψευδής, και παρόλα αυτά οι ομιλητές θα συμπεριφέρονται σαν αυτή να είναι αληθής, ή τουλάχιστον μη ψευδής. Η συγκεκριμένη άποψη υποστηρίζει λοιπόν ότι η γλώσσα όχι μόνο είναι πλήρως διαμορφωμένη, αλλά και ότι η σημασιολογική δομή της είναι τόσο πολύπλοκη που κανένας ομιλητής δεν μπορεί να βρεθεί στην θέση να την γνωρίζει στην εντέλεια.

[51] Ιδέα που όπως φαίνεται για πρώτη φορά θα διατυπώσει ξεκάθαρα ο Φίλων από τα Μέγαρα. Όπως θα γράψει ο Σέξτος ο Εμπειρικός στο βιβλίο του ‘Προς Λογικούς’ (αντλώ το απόσπασμα από την αγγλική μετάφραση του Richard Belt, Cambridge University Press) : ‘Philo, for example, said that the conditional is true when it does not begin with a true proposition and finish with a false one, so that a conditional, according to him, is true in three ways and false in one way.’ (Βιβλίο 2, 113). Αν θεωρούμε πως ένα επιχείρημα είναι έγκυρο αν και μόνο αν το συμπέρασμα είναι αληθές στην περίπτωση που και οι προκείμενες είναι, τότε πρόκειται για τον ασθενέστερο τρόπο ώστε να ορίσουμε τις συνθήκες αλήθειας για προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής ώστε επιχειρήματα με μορφή ‘Αν Α τότε Β, αλλά Α, άρα Β’ να προκύπτουν έγκυρα.

η ‘$Fa_1 \rightarrow Fa_2$’, αυτή θα είναι αληθής αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι το αντικείμενο $α_1$ είναι F και το $α_2$ δεν είναι, οπότε μπορούμε εναλλακτικά να πούμε ότι θα είναι αληθής αν και μόνο αν τα συγκεκριμένα αντικείμενα δεν αποτελούν αντιπαράδειγμα σε αυτή. Βέβαια, οι σημασιολογικές συνθήκες της κλασικής πρωτοβάθμιας λογικής βασίζονται στις παραδοχές ότι η γλώσσα την οποία αφορούν είναι πλήρως διαμορφωμένη, απολύτως ακριβής και περιέχει αποκλειστικά εκφράσεις που συμπεριφέρονται με εκτασιακό τρόπο. Η αλήθεια ή ψεύδος των διαφόρων προτάσεων της γλώσσας αξιολογείται λοιπόν σε ένα μόνο σημείο (ή αλλιώς, κόσμο), και επιπλέον απουσιάζει από αυτές κάθε δείγμα ασάφειας. Προκύπτει έτσι ότι υπάρχουν τρεις τρόποι, όσον αφορά το πώς είναι διαμορφωμένες οι σημασιολογικές τιμές των υποπροτάσεων που εμφανίζονται εντός αυτής, με τους οποίους μπορεί μια συνεπαγωγή να είναι αληθής και ένας με τον οποίο μπορεί αυτή να είναι ψευδής, και κάθε φορά το νόημα των διαφόρων εκφράσεων σε συνδυασμό με τη δομή του κόσμου είναι τέτοια ώστε να ισχύει ακριβώς ένας από αυτούς.

Από την άλλη, για την περίπτωση ασαφούς γλώσσας και ομιλητών που βρίσκονται υπό κανονικές συνθήκες, έπεται με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει ότι προκειμένου να διαπιστώσουμε αν υπάρχει το ενδεχόμενο κάποια πρόταση με μορφή συνεπαγωγής να διαψευστεί ή όχι, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και εκείνους από τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω η γλώσσα που συμβαδίζουν με τις συνιστώσες του νοήματος που δρουν ως καθοδηγητικές αρχές. Ας θεωρήσουμε και πάλι κάποια πρόταση όπως πχ η ‘$Fa_1 \rightarrow Fa_2$’. Υπάρχει το ενδεχόμενο η γλώσσα να διαμορφωθεί με τρόπο ώστε να θεωρηθεί από τους ομιλητές ότι τα αντικείμενα $α_1$, $α_2$ αποτελούν αντιπαράδειγμα σε αυτήν, χωρίς παράλληλα να έχει παραβιαστεί κάποια από τις αρχές που διέπουν το νόημα της κατηγορηματικής έκφρασης ‘F’; Αν δεν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε φαίνεται ότι είμαστε δικαιολογημένοι να θεωρούμε την συγκεκριμένη πρόταση ως αληθή. Αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών που δεδομένης κάποιας κατάστασης w της γλώσσας δεν βρίσκονται ούτε στην έκταση, ούτε και στην αντιέκταση του F δεν είναι σίγουρο σε κάθε περίπτωση ότι μπορεί να γίνουν αποδεκτά ως αντιπαράδειγμα. Γενικεύοντας, μπορούμε να θεωρήσουμε πως μια πρόταση με μορφή συνεπαγωγής θα είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε τρόπο περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας ισχύει ότι δεν προκύπτει αντιπαράδειγμα σε αυτή, παρά μόνο αν αυτός παραβιάζει κάποιες από τις βασικές αρχές που διέπουν το νόημα των εκφράσεων που εμφανίζονται εντός αυτής. Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε μια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$, θεωρούμε ότι αυτή θα είναι αληθής αν και μόνο αν σε κάθε αποδεκτή περίπτωση που η γλώσσα έχει διαμορφωθεί περαιτέρω έτσι ώστε η Α να επιβεβαιώνεται, δεν θα ισχύει ότι η Β θα διαψεύδεται.[52] Όσον αφορά τις συνθήκες ψεύδους από την άλλη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$ θα είναι ψευδής αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό τρόπο περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας ισχύει ότι η Α θα επιβεβαιώνεται και η Β θα διαψεύδεται.

[52] Αν κοιτάξουμε λίγο πιο κάτω από το απόσπασμα που αναφέρουμε στην προηγούμενη υποσημείωση, τότε βλέπουμε ότι ο Σέξτος γράφει το εξής: 'Diodorus, on the other hand, says that a conditional is true which neither was nor is able to begin with a true one and finish with a false one' (Προς Λογικούς, Βιβλίο 2, 115). Πρόκειται για μια άποψη που εκ μίας πρώτης όψεως θυμίζει τους συλλογισμούς που μας οδήγησαν στις συνθήκες που έχουμε διατυπώσει.
Ο Arthur Prior, στο άρθρο του 'Diodoran Modalities', Prior [1955], θα μελετήσει ένα σύστημα χρονικής τροπικής λογικής εξοπλισμένο με τελεστές 'M' και 'L', τους οποίους διαβάζουμε ως 'είτε ισχύει, είτε θα ισχύσει ότι' και 'ισχύει, και πάντα θα ισχύει ότι', οι οποίοι αντιστοιχούν στον τρόπο που αντιλαμβανόταν τις έννοιες της αναγκαιότητας και της δυνατότητας ο Διόδωρος. Εντός του συγκεκριμένου συστήματος, η συνεπαγωγή του Φίλωνα αντιστοιχεί στις προτάσεις της μορφής Cpq, ή αλλιώς $p \supset q$, ενώ του Διόδωρου σε προτάσεις της μορφής LCpq ή LNKpNq, δηλαδή $L(p \supset q)$, ή $L\sim(p \wedge \sim q)$ αντίστοιχα. Στις ομιλίες John Locke του 1955, που εκδόθηκαν με τον τίτλο 'Time and Modality', ο Prior θα σκιαγραφήσει μια απόδειξη βάσει της οποίας έπεται ότι το συγκεκριμένο σύστημα έχει αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με το σύστημα S4 του C. I Lewis, στο οποίο θα αναφερθούμε και παρακάτω. Με βάση την παραδοχή ότι μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ χρονικών στιγμών, θα αναπτύξει μια σημασιολογική θεώρηση σύμφωνα με την οποία σε κάθε πρόταση αντιστοιχούνται ως σημασιολογικές τιμές άπειρες δυαδικές ακολουθίες της μορφής 011001… , ανάλογα με το αν κάποια εκφορά αυτής στην εκάστοτε χρονική στιγμή θα ήταν αληθής ή όχι. Θα προχωρήσει κάνοντας το ίδιο και για προτάσεις της μορφής Mp και Lp. Έτσι, αν σε κάποια πρόταση p έχει αντιστοιχηθεί τιμή της μορφής 011010000… που από κάποιο σημείο και έπειτα έχει μόνο μηδενικά, τότε στην πρόταση Mp θα αντιστοιχηθεί η τιμή 111110000…, ενώ στην Lp η τιμή 000000000… . Αν στην p έχει αντιστοιχηθεί τιμή 100101111… , η οποία συνεχίζει μόνο με εμφανίσεις μονάδων, τότε στην πρόταση Mp θα αντιστοιχηθεί η τιμή 111111111…, ενώ στην Lp η τιμή 000001111… και ούτω καθ' εξής.
Επανερχόμενοι τώρα στον Σέξτο, έχει ενδιαφέρον ότι αυτός θα αναφέρει τις απόψεις που αποδίδει στους Φίλωνα και Διόδωρο και στο έργο του 'Outlines of Scepticism', στο δεύτερο βιβλίο, παράγραφοι 110 με 112, και επιπλέον θα αναφέρει δύο ακόμη απόψεις όσον αφορά το ζήτημα των ορθών σημασιολογικών συνθηκών για προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής. Για την μία από αυτές γράφει λίγο πιο κάτω: 'Those who introduce connectedness say that a conditional is sound when the opposite of its consequent is incompatible with its antecedent'. Άποψη που έχει ενδιαφέρον και από ιστορική άποψη, εφόσον έχει υποστηριχθεί ότι πρόκειται για την άποψη του Χρύσιππου, με βάση ένα απόσπασμα από το μερικώς μόνο σωζόμενο έργο του Κικέρωνα 'De fato' (παράγραφος 12). Όπως αναφέρει ο Σέξτος, στο έργο του 'Against the Grammarians' (παράγραφος 309) ο Καλλίμαχος είχε γράψει ένα Επίγραμμα σύμφωνα με το οποίο (το παραθέτω σε αγγλική μετάφραση): 'Even the crows on the roofs caw about the nature of conditionals'.

3.1 Σημασιολογικές Συνθήκες

Διατυπώνουμε εδώ με μεγαλύτερη αυστηρότητα τις σημασιολογικές συνθήκες που αντιστοιχούν στις διάφορες προτάσεις της γλώσσας. Από αυτό το σημείο και έπειτα, θα θεωρούμε πως η γλώσσα $\mathcal{L}^0$ περιέχει ένα αριθμήσιμο πλήθος κατηγορηματικών συμβόλων, ατομικών σταθερών και μεταβλητών, τους προτασιακούς συνδέσμους $\to$, $\sim$, το ποσοδεικτικό σύμβολο $\forall$, καθώς και παρενθέσεις (,). Ως ερμηνεία θα θεωρούμε μια διατεταγμένη πεντάδα $<D, W, \sqsubseteq, Val^+, Val^->$. Εδώ, D είναι το domain της γλώσσας, W το σύνολο των δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί η γλώσσα και $\sqsubseteq$ μια σχέση μερικής διάταξης στο W. Θεωρούμε πως για z, w αντικείμενα που ανήκουν στο W θα είναι $z \sqsubseteq w$ αν και μόνο αν w είναι μια κατάσταση που έπεται της z όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η γλώσσα καθώς διαμορφώνεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό. Τέλος, Val^+ είναι μια διμελής συνάρτηση που σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b>, όπου a αντικείμενο που ανήκει στο W και b κάποιο n-Θέσιο κατηγορηματικό σύμβολο, αναθέτει κάποιο υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου D^n, σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b>, όπου a αντικείμενο που ανήκει στο W και b είναι κάποια ατομική σταθερά αναθέτει κάποιο αντικείμενο που ανήκει στο D, και σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b> όπου a αντικείμενο που ανήκει στο W και b αντικείμενο που ανήκει στο D αναθέτει το b. Η Val^- σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b>, όπου b κατηγορηματικό σύμβολο της γλώσσας, θα αναθέτει επίσης κάποιο υποσύνολο του D^n, ενώ αν b δεν είναι κατηγορηματικό σύμβολο τότε δεν της αναθέτει τίποτα. Απαιτούμε οι Val^+, Val^- να είναι τέτοιες ώστε η τομή των εκτάσεων που αποδίδουν στο εκάστοτε κατηγόρημα να είναι πάντα κενή. Επιπλέον, σε κάθε διατεταγμένη δυάδα <a, b>, αν a είναι αντικείμενο που ανήκει στο W και b σαφές n-θέσιο κατηγόρημα, οι εκτάσεις που οι Val^+, Val^- αποδίδουν σε αυτήν θα έχουν ως ένωση το D^n. Γενικότερα πάντως, αν a είναι αντικείμενο που ανήκει στο W και b n-θέσιο κατηγόρημα τότε υπάρχει περίπτωση η ένωση των δύο εκτάσεων να είναι γνήσιο υποσύνολο του D^n. Πάντως, για ασαφές n-θέσιο κατηγόρημα b θα υπάρχουν αντικείμενα που ανήκουν στο W τέτοια ώστε η ένωση των δύο εκτάσεων σε αυτά να είναι γνήσιο υποσύνολο του D^n. Στην περίπτωση που a_1, a_2 είναι αντικείμενα που ανήκουν στο W τέτοια ώστε να είναι $a_1 \sqsubseteq a_2$ και b ατομική σταθερά θέλουμε να είναι $Val^+(a_1, b) = Val^+(a_2, b)$. Κάτι ανάλογο μπορούμε να απαιτήσουμε και για την περίπτωση των κατηγορημάτων. Πιο συγκεκριμένα αν a_1, a_2 είναι αντικείμενα που ανήκουν στο W τέτοια ώστε να είναι $a_1 \sqsubseteq a_2$ και b κατηγορηματικό σύμβολο τότε θέλουμε να είναι $Val^+(a_1, b) \subseteq Val^+(a_2, b)$ και $Val^-(a_1, b) \subseteq Val^-(a_2, b)$. Καθώς η γλώσσα διαμορφώνεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό εξαλείφονται τα διάφορα κενά που μπορεί να υπάρχουν στις εκτάσεις των εκφράσεών της. Με άλλα λόγια καθορίζεται σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό σε ποιες περιπτώσεις μπορεί μια έκφραση να εφαρμοστεί και σε ποιες όχι.

Προκειμένου να διατυπώσουμε τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις της γλώσσας θα διακρίνουμε μεταξύ τριών διαφορετικών τρόπων με τους οποίους κάποιο σημείο εντός του W μπορεί να σχετίζεται με κάποια πρόταση. Έστω ότι τα σύμβολα ⊨, ⫤, ⊫ αντιστοιχούν σε αυτούς τους τρόπους. Οι δύο πρώτες σχέσεις αφορούν τον τρόπο με τον οποίο το εκάστοτε δυνατό σημείο του W, ως μία προσωρινή κατάσταση της γλώσσας, ως μία στιγμή στην πορεία διαμόρφωσης της τελευταίας, σχετίζεται με κάποια πρόταση. Έτσι, ένα σημείο εντός του W θεωρούμε ότι μπορεί να επιβεβαιώνει μια πρόταση, οπότε και σχετίζεται με αυτήν μέσω της σχέσης στην οποία αναφέρεται το σύμβολο '⊨', μπορεί να την διαψεύδει, οπότε σχετίζεται μέσω αυτής στην οποία αναφέρεται το '⫤', ή μπορεί να μην σχετίζεται με κανέναν από τους δύο τρόπους με αυτήν. Ένας τρόπος ώστε να κατανοήσουμε τις συγκεκριμένες σχέσεις καλύτερα είναι να θεωρήσουμε ότι όταν οι ομιλητές εισέρχονται εντός ενός πλαισίου συζήτησης, η οποία συζήτηση μπορεί πχ να αφορά τα αντικείμενα εντός του δωματίου που βρίσκονται, προχωρούν στην δημιουργία μιας βάσης δεδομένων[53] καταχωρώντας κάποια αντικείμενα σε συγκεκριμένες κατηγορίες, κάποια άλλα σε άλλες κατηγορίες, ενώ για κάποια αντικείμενα μπορεί να αφήνουν το ζήτημα ανοικτό ως προς κάποιες κατηγορίες. Η όλη διαδικασία καθοδηγείται από χαρακτηριστικά του νοήματος των εκφράσεων που μπορεί να αντιστοιχούν στην εκάστοτε κατηγορία. Κατά την διάρκεια της συζήτησης οι ομιλητές μπορεί να τροποποιήσουν την βάση δεδομένων, είτε προσθέτοντας αντικείμενα σε κάποια κατηγορία, είτε αφαιρώντας από αυτήν. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για δυνατές καταστάσεις της βάσης δεδομένων, κάθε τέτοια κατάσταση θεωρούμε πως αντιστοιχεί σε μια δυνατή διαμόρφωση της γλώσσας. Ανάλογα με τον τρόπο που είναι διαμορφωμένος ο κόσμος, η εκάστοτε κατάσταση της βάσης θα φέρει κάποια πληροφορία για αυτόν, πληροφορία που μπορεί να υποστηρίζει κάποια πρόταση, οπότε και αυτή θα σχετίζεται με την συγκεκριμένη κατάσταση μέσω της σχέσης στην οποία αναφερόμαστε με το σύμβολο '⊨', μπορεί να την αντικρούει, οπότε και θα σχετίζεται με την συγκεκριμένη κατάσταση μέσω της σχέσης '⫤', ή τέλος μπορεί μεν να μην την υποστηρίζει αλλά ούτε και να την αντικρούει. Η σχέση στην

[53] Η αναφορά σε βάσεις δεδομένων είναι κάτι που συμβαίνει αρκετά συχνά στον χώρο της Λογικής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα από τον χώρο της φιλοσοφικής λογικής είναι το άρθρο 'A useful four-valued Logic', Belnap [1977]. Σε αυτό ο Belnap ερευνά ποιος ο ορθός τρόπος ώστε να συνάγουμε συμπεράσματα με βάση τα δεδομένα που περιέχονται εντός κάποιας βάσης δεδομένων, δεδομένου ότι αυτή μπορεί να περιέχει και δεδομένα που είναι αντιφατικά μεταξύ τους και θέλουμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο αυτά να μας οδηγήσουν σε μη σχετικά (irrelevant) συμπεράσματα. Θα καταλήξει τελικά σε μια τετράτιμη λογική, που ταυτίζεται με το σύστημα First Degree Entailment.

οποία αναφέρεται το σύμβολο '⊫' από την άλλη, εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο το εκάστοτε σημείο του W σχετίζεται με κάποια πρόταση της γλώσσας όταν λαμβάνουμε υπόψη και κάθε τρόπο περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας που συνάδει με τις καθοδηγητικές συνιστώσες του νοήματος των εκφράσεων της. Αν δηλαδή λάβουμε υπόψη κάθε αποδεκτό τρόπο με τον οποίο μπορεί να συμπληρωθεί περαιτέρω η βάση δεδομένων. Θεωρούμε πως από αυτές τις σχέσεις είναι η τελευταία που παίζει και τον πιο ουσιώδη ρόλο όταν οι ομιλητές εκφέρουν προτάσεις και επιχειρηματολογούν εντός ασαφών πλαισίων.[54]

Με βάση αυτά θέτουμε τα εξής:

- $w \dashv F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, t_1), Val^+(w, t_2), \ldots, Val^+(w, t_n)> \in Val^-(w, F)$
- $w \vDash F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, t_1), Val^+(w, t_2), \ldots, Val^+(w, t_n)> \in Val^+(w, F)$
- $w \dashv \sim A$ αν και μόνο αν $w \vDash A$
- $w \vDash \sim A$ αν και μόνο αν $w \dashv A$
- $w \dashv A \rightarrow B$ αν και μόνο αν είναι $w \vDash A$ και $w \dashv B$
- $w \vDash A \rightarrow B$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $w \vDash A$ και $w \dashv B$

Δίνουμε έμφαση στις συνθήκες διάψευσης για τις προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής. Με βάση τον παραλληλισμό που έχουμε κάνει μεταξύ καταστάσεων της γλώσσας και καταστάσεων μιας βάσης δεδομένων, στηριζόμαστε στην ιδέα ότι η πληροφορία που η βάση δεδομένων φέρει όταν βρίσκεται σε μια κατάσταση w αντικρούει μια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$ αν και μόνο αν υποστηρίζει την A και αντικρούει την B. Από την άλλη θεωρούμε πως από το γεγονός ότι όταν βρίσκεται σε μια κατάσταση w η βάση δεν περιέχει πληροφορία που αντικρούει κάποια πρόταση με μορφή $A \rightarrow B$, πρέπει να συνάγουμε ότι η διαθέσιμη σε αυτήν πληροφορία υποστηρίζει την συγκεκριμένη πρόταση. Ανά πάσα στιγμή, η βάση δεδομένων φέρει πληροφορία που μπορεί να αντικρούει κάποιες προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής, που δρα δηλαδή ως αντιπαράδειγμα σε αυτές. Πρόκειται για ένα είδος μνήμης εντός της οποίας αποθηκεύονται αντιπαραδείγματα για τις προτάσεις του είδους. Αν για κάποια πρόταση με τη συγκεκριμένη μορφή δεν ισχύει ότι η βάση

[54] Οι μεσαιωνικοί, επηρεασμένοι από τις απόψεις των Φίλωνα και Διόδωρου, διαχώριζαν μεταξύ συνεπαγωγών των οποίων η τιμή αλήθειας μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο και συνεπαγωγών για τις οποίες αυτό δεν ισχύει, και μιλούσαν για consequentia ut nunc από την μία μεριά και consequentia simplex από την άλλη. Συχνά αναφερόντουσαν στο πρώτο είδος ως consequentia vulgares, δεδομένου ότι θεωρούσαν πως αφορά την γλώσσα κυρίως ως προς τον τρόπο που αυτή χρησιμοποιείται εντός της καθημερινότητας, παρά όπως όταν κάποιος κάνει επιστήμη.

δεδομένων περιέχει πληροφορία που την αντικρούει, θεωρούμε ότι η διαθέσιμη πληροφορία είναι τέτοια που την υποστηρίζει.

Θα συντομογραφούμε προτάσεις της μορφής $\sim(A\rightarrow\sim B)$ ως $A\wedge B$, ενώ προτάσεις της μορφής $\sim A\rightarrow B$ ως $A\vee B$.

Τώρα, για τις περιπτώσεις προτάσεων που περιέχουν ποσοδείκτες θέτουμε:

- $w\Dashv\forall xAx$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $w\Dashv<\forall x, Ax>$
- $w\vDash\forall xAx$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $w\vDash<\forall x, Ax>$

Θα συντομογραφούμε προτάσεις της μορφής $\sim\forall x\sim Ax$ ως $\exists xAx$.

Με την συμβολοσειρά '$<\forall x,\ Ax>$', που εμφανίζεται στους παραπάνω ορισμούς, αναφερόμαστε στην υβριδική πρόταση[55] που αντιστοιχεί στην πρόταση $\forall xAx$.

Ως ατομικό υβριδικό τύπο θα θεωρούμε κάθε διατεταγμένο σύνολο της μορφής $<F^n, <o^1, o^2, \ldots, o^n>>$, όπου '$F^n$' n-θέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της γλώσσας και $<o^1, o^2, \ldots, o^n>$ διατεταγμένη n-άδα τέτοια ώστε κάθε ένα από τα $o^1, o^2, \ldots, o^n$ είναι είτε σύμβολο μεταβλητής της γλώσσας, είτε αντικείμενο που ανήκει στο D.

Ως σύνθετους υβριδικούς τύπους θα θεωρούμε κάθε διατεταγμένη τριάδα της μορφής $<\rightarrow, A, B>$, όπου '$\rightarrow$' το σύμβολο συνεπαγωγής της γλώσσας, ενώ τα A, B είναι υβριδικοί τύποι, κάθε διατεταγμένη δυάδα της μορφής $<\sim, A>$, όπου '$\sim$' το σύμβολο άρνησης της γλώσσας και A υβριδικός τύπος, και κάθε διατεταγμένη δυάδα της μορφής $<\forall x, A>$, όπου '$\forall x$' η αντίστοιχη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας και A υβριδικός τύπος. Κάθε αντικείμενο που δεν εντάσσεται σε κάποια από αυτές τις περιπτώσεις θα θεωρούμε πως δεν είναι υβριδικός τύπος.

Θα θεωρούμε πως κάποια εμφάνιση της μεταβλητής x σε θέση μετά το κόμμα εντός υβριδικού τύπου της μορφής $<\forall x, A>$, όπου A υβριδικός τύπος, είναι δεσμευμένη, αλλιώς

[55] Πρόκειται για μια έννοια που αποτελεί παραλλαγή αντίστοιχης έννοιας που χρησιμοποιεί ο Raymond M. Smullyan στο βιβλίο του 'First Order Logic', Smullyan [1995]. Πιο συγκεκριμένα, ο Smullyan ορίζει στις σελίδες 46 και 47 την έννοια της U-Formula, την οποία και χρησιμοποιεί στην συνέχεια προκειμένου να διατυπώσει συνθήκες αλήθειας για προτάσεις με μορφή ποσόδειξης.
Η ίδια έννοια χρησιμοποιείται και στο 'Modal Logic for Philosophers', Garson [2013]. Ο Garson διατυπώνει τους ανάλογους ορισμούς στην σελίδα 277, καλεί όμως τα συγκεκριμένα αντικείμενα ως 'Hybrid Formulas'.

θα θεωρούμε ότι είναι ελεύθερη. Συμβολίζουμε ως ‘$[Ax]^{o}_{x}$’ τον υβριδικό τύπο που προκύπτει από τον υβριδικό τύπο A αν αντικαταστήσουμε κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x εντός αυτού με το αντικείμενο o. Θα λέμε πως κάποιος υβριδικός τύπος είναι υβριδική πρόταση αν και μόνο αν δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις κάποιας μεταβλητής.

Δεδομένης κάποιας ερμηνείας της γλώσσας, μπορούμε σε κάθε τύπο αυτής να αντιστοιχήσουμε μια συγκεκριμένη υβριδική πρόταση ως εξής:

Σε κάθε ατομικό τύπο της μορφής $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, όπου ‘F’ n-θέσια κατηγορηματική έκφραση και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι είτε ατομικές σταθερές της γλώσσας είτε μεταβλητές, αντιστοιχούμε τον υβριδικό τύπο <F, <$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$>>, όπου <$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$> διατεταγμένη n-άδα τέτοια ώστε για κάθε i με $1 \leq i \leq n$, ισχύει ότι αν a_i είναι μεταβλητή τότε το α_i είναι η ίδια μεταβλητή, ενώ αν a_i είναι ατομική σταθερά τότε α_i είναι το αντικείμενο εντός του D που αντιστοιχείται σε κάθε ζεύγος της μορφής <w, a_i>, όπου w αντικείμενο που ανήκει εντός του W, από την Val^{+}.

Σε κάθε τύπο της μορφής A→B αντιστοιχούμε τον υβριδικό τύπο <→, <A>, <B>>, όπου <A> ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στο τύπο A, ενώ <B> ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο B.

Σε κάθε τύπο της μορφής ~A αντιστοιχούμε τον υβριδικό τύπο <~, <A>>, όπου <A> ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο A.

Σε κάθε τύπο της μορφής ∀xAx αντιστοιχούμε τον υβριδικό τύπο <∀x, <Ax>>, όπου <Ax> ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο Ax.

Μπορούμε με βάση αυτά να θεωρήσουμε ότι για πρόταση A της γλώσσας, η υβριδική πρόταση <A> που αντιστοιχεί σε αυτήν αντικατοπτρίζει με συνολοθεωρητικό τρόπο την πληροφορία που εκφράζεται μέσω της A.

Εφόσον θεωρούμε ότι ο τρόπος που η γλώσσα είναι διαμορφωμένη μπορεί να υποστηρίζει ή να αντικρούει κάποια πρόταση της γλώσσας, και κατά συνέπεια την πληροφορία που εκφράζεται μέσω αυτής, φαίνεται εύλογο να γενικεύσουμε και να θεωρήσουμε ότι αυτός θα υποστηρίζει ή θα αντικρούει και την εκάστοτε κλειστή υβριδική πρόταση που μπορεί να σχηματιστεί βάσει της γλώσσας και κάποιας ερμηνείας αυτής.

Θέτουμε άρα ότι θα είναι:

- Για ατομική υβριδική πρόταση $<F^n, <o^1, o^2, \ldots, o^n>>$ θα είναι $w \Dashv <F^n, <o^1, o^2, \ldots, o^n>>$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, o^1), Val^+(w, o^2), \ldots, Val^+(w, o^n)> \in Val^-(w, F^n)$

Από την άλλη, θα είναι:

- $w \vDash <F^n, <o^1, o^2, \ldots, o^n>>$ αν και μόνο αν $< Val^+(w, o^1), Val^+(w, o^2), \ldots, Val^+(w, o^n)> \in Val^+(w, F^n)$

Για υβριδικές προτάσεις A, B θα είναι:

- $w \Dashv <\sim, A>$ αν και μόνο αν $w \vDash A$
- $w \vDash <\sim, A>$ αν και μόνο αν $w \Dashv A$
- $w \Dashv <\rightarrow, A, B>$ αν και μόνο αν είναι $w \vDash A$ και $w \Dashv B$
- $w \vDash <\rightarrow, A, B>$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $z \vDash A$ και $z \Dashv B$

Αν Ax είναι υβριδικός τύπος που περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x και μόνο, οπότε έπεται ότι ο υβριδικός τύπος $<\forall x, Ax>$ θα είναι υβριδική πρόταση, τότε θα είναι:

- $w \Dashv <\forall x, Ax>$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο o εντός του D ισχύει ότι $w \Dashv [Ax]^{o}_{x}$
- $w \vDash <\forall x, Ax>$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o εντός του D είναι $w \Dashv [Ax]^{o}_{x}$

Με βάση αυτά, θα λέμε ότι κάποιο σημείο w επιβεβαιώνει, ή υποστηρίζει, την πρόταση ή υβριδική πρόταση A αν και μόνο αν ισχύει ότι $w \vDash A$, ενώ θα λέμε ότι το w διαψεύδει, ή αντικρούει, την A αν και μόνο αν ισχύει ότι $w \Dashv A$.

Τέλος, για σημείο w και πρόταση A θέτουμε:

- Αν το w είναι φυσιολογικό τότε ισχύει ότι $w \Vdash A$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό z που ανήκει στο W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \Dashv A$. [Συμβολικά: (το w είναι φυσιολογικό)$\rightarrow$ ($w \Vdash A \leftrightarrow \forall z$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z$) $\rightarrow \sim$($z \Dashv A$)))]

Θα λέμε ότι η πρόταση A είναι αληθής στο σημείο w αν και μόνο αν ισχύει ότι $w \Vdash A$. Θα λέμε ότι η πρόταση A είναι λογικά αληθής αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία της γλώσσας ισχύει ότι η A είναι αληθής σε κάθε φυσιολογικό σημείο.

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες αλήθειας για τις προτάσεις της γλώσσας βασίζονται όχι μόνο στις ιδιότητες της σχέσης $\sqsubseteq$ μεταξύ των αντικειμένων του W και αυτές των συναρτήσεων Val^+, Val^-, αλλά και στις ιδιότητες των κατηγορημάτων της μεταγλώσσας «το x είναι αποδεκτό» και «το x είναι φυσιολογικό», καθώς και τον τρόπο που αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η διατύπωση που έχουμε δώσει ορίζει τις συνθήκες αλήθειας για τις διάφορες προτάσεις της γλώσσας μόνο ως προς εκείνα τα σημεία που χαρακτηρίζονται ως φυσιολογικά.

Όπως έχουμε πει, το W περιέχει δυνατούς τρόπους διαμόρφωσης της γλώσσας. Εντός των τελευταίων εντάσσουμε και περιπτώσεις στις οποίες η γλώσσα έχει διαμορφωθεί πλήρως, αρκεί αυτές να σέβονται εκείνες τις βασικές αρχές που διέπουν το νόημα των ασαφών εκφράσεων που ο Kit Fine καλεί 'Penumbral Connections'.[56] Με λίγα λόγια, αν θεωρήσουμε για παράδειγμα δύο αντικείμενα α, β τέτοια ώστε το πρώτο είναι πιο κόκκινο από το δεύτερο, τότε θεωρούμε πως δεν μπορεί να κατατάσσεται μεταξύ των δυνατών τρόπων διαμόρφωσης της γλώσσας κάποια περίπτωση που θέτει το β ως κόκκινο ενώ το α όχι, ή που θέτει το β ως κόκκινο ενώ το α ως πχ πορτοκαλί.

Συνεχίζοντας, πρέπει να προσδιορίσουμε πως ερμηνεύουμε τα μεταγλωσσικά κατηγορήματα «το x είναι αποδεκτό» και «το x είναι φυσιολογικό» από φιλοσοφική άποψη. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό ας θεωρήσουμε έναν ομιλητή της γλώσσας $\mathcal{L}^0$ τον οποίο εμβαπτίζουμε σε κάποιο πλαίσιο συζήτησης. Εντός αυτού τίθενται κάποια όρια στην ακρίβεια με την οποία οι ομιλητές είναι διατεθειμένοι να μιλήσουν, ή στο πόσο ακριβείς μπορούν να είναι οι εκφορές τους. Αν οι ομιλητές έχουν συμφωνήσει ότι πχ η Γαλλία είναι πενταγωνικού σχήματος, ή ότι η Ιταλία έχει σχήμα μπότας,[57] τότε μπορούμε να

[56] Στο άρθρο του 'Vagueness, Truth and Logic'.

[57] Το παράδειγμα της Γαλλίας θα το αναφέρει πρώτος ο Austin, σε ομιλίες που έδωσε στο Harvard το 1955, Austin [1962]. Στην σελίδα 142 διαβάζουμε: 'Suppose that we confront "France is hexagonal" with the facts, in this case, I suppose, with France, is it true or false?'. Στόχος του Austin είναι να δείξει πως ό,τι μπορεί να είναι αυτό που σε συνδυασμό με την δομή του κόσμου καθορίζει κάποια τιμή αλήθειας, αυτό θα πρέπει να είναι κάτι που μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με την περίσταση. Λίγο πιο κάτω θα καταλήξει: 'How can one answer this question, whether it is true or false that France is hexagonal? It is just rough, and that is the right and final answer to the question of the relation of "France is hexagonal" to France. It is a rough description; it is not a true or false one'. Αναφερόμενος στο ίδιο παράδειγμα, ο Strawson θα ρωτήσει στο άρθρο του 'Austin and "Locutionary Meaning" ', που έχει δημοσιευτεί στην συλλογή άρθρων 'Entity and Identity: And other Essays', Oxford University Press: 'But why should Austin refuse "true" and "false" a place even in a right and final answer? Couldn't we say "It's roughly true that France is hexagonal"? ' (σελίδα 211).
Το ίδιο παράδειγμα, και επιπλέον και αυτό της Ιταλίας, θα χρησιμοποιήσει ο David Lewis στο γνωστό άρθρο του 'Scorekeeping in a Language Game', Lewis [1979], σελίδες 339-359. Στην σελίδα 352 γράφει: 'When is a sentence true enough?[…] This is itself a vague matter. More Important for our present purposes, it is something that depends on context. What is true enough on one occasion is

συμπεράνουμε ότι τα τρέχοντα επίπεδα ακριβείας της συζήτησης κυμαίνονται σε χαμηλό επίπεδο, οπότε για πολλά αντικείμενα αυτοί θα επιλέγουν να μην τα διακρίνουν μεταξύ τους ως προς το σχήμα μέσω των εκφορών που κάνουν, παρόλο που μπορούν ενδεχομένως να τα διακρίνουν από παρατηρησιακή άποψη. Από την άλλη, υπάρχει περίπτωση οι ομιλητές να προσπαθούν να διακρίνουν μεταξύ αντικειμένων κατά τον μέγιστο βαθμό που τους επιτρέπουν τα αισθητήρια όργανά τους, ή τα όποια όργανα μέτρησης μπορεί αυτοί να χρησιμοποιούν. Και σε αυτή την περίπτωση όμως, θα υπάρχουν αντικείμενα που αυτοί δεν μπορούν να διακρίνουν μεταξύ τους αφού όχι μόνο τα αισθητήρια όργανά τους, αλλά και το όποιο όργανο μέτρησης χρησιμοποιούν θα διακρίνεται από κάποια μέγιστη ακρίβεια. Θα υπάρχουν λοιπόν αντικείμενα που οι ομιλητές δεν μπορούν να διακρίνουν μεταξύ τους ως προς τις σχετικές ιδιότητες από παρατηρησιακή άποψη και άρα δεν πρόκειται να τα διακρίνουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες ούτε μέσω των εκφορών τους.

Θεωρούμε λοιπόν πως με βάση το πλαίσιο της συζήτησης και την συμπεριφορά των ομιλητών εντός αυτού καθορίζεται κάποια διαμόρφωση της γλώσσας, κάποια κατάσταση της κοινής βάσης δεδομένων, και επιπλέον, ποιοι από τους δυνατούς τρόπους ώστε αυτή να διαμορφωθεί περαιτέρω συνάδουν με τις συνιστώσες του νοήματος που δρουν ως καθοδηγητικές αρχές.[58] Προκειμένου κάποιος δυνατός τρόπος διαμόρφωσης της γλώσσας να ταξινομηθεί ως αποδεκτός θα πρέπει να μην αποφαίνεται με διαφορετικό τρόπο για αντικείμενα που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι, ή δεν μπορούν, να διακρίνουν μεταξύ τους ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Ως μη αποδεκτούς θα θεωρούμε εκείνους από τους δυνατούς τρόπους διαμόρφωσης της γλώσσας για τους οποίους αυτό δεν ισχύει. Ένας δυνατός τρόπος διαμόρφωσης θα είναι λοιπόν αποδεκτός αν και μόνο αν δεν κάνει διακρίσεις που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι να δεχτούν εντός του τρέχοντος πλαισίου συζήτησης.

---

not true enough on another. The standards of precision in force are different from one conversation to another, and may change in the course of a single conversation. Austin's "France is hexagonal" is a good example of a sentence that is true enough for many contexts, but not true enough for many others. Under low standards of precision is acceptable. Raise the standards and it loses its acceptability'.

[58] Ο Kit Fine, αναφερόμενος στα συστατικά του νοήματος των ασαφών εκφράσεων που καλεί 'penumbral connections', θα γράψει στο γνωστό του άρθρο (σελίδα 275): 'If language is like a tree, then penumbral connection is the seed from which the tree grows. For it provides an initial repository of truths that are to be retained throughout all growth'. Θεωρούμε ότι οι αρχές που καλούμε 'καθοδηγητικές' έχουν έναν ανάλογο ρόλο. Μπορούμε βέβαια να διαμορφώσουμε την γλώσσα αναθέτοντας στις διάφορες εκφράσεις της εκτάσεις που σέβονται την πρώτη ομάδα αρχών, αλλά όχι την δεύτερη. Θέτουμε όμως ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει χωρίς να τροποποιηθεί σε σημαντικό βαθμό το νόημα των ασαφών εκφράσεων που αυτή περιέχει.

Ας θεωρήσουμε ασαφή κατηγορηματική έκφραση 'F', εντός πλαισίου συζήτησης οι ομιλητές συμφωνούν μεταξύ τους και κατατάσσουν κάποια από τα αντικείμενα που ανήκουν στο πεδίο δράσης των ποσοδεικτών στην έκταση του 'F', κάποια άλλα τα κατατάσσουν στην αντιέκταση του 'F', ενώ για τα υπόλοιπα αφήνουν το ζήτημα ανοικτό, οπότε κατ' αυτόν τον τρόπο μεταβαίνουν προσωρινά σε κάποιο σημείο w που ανήκει στο W. Αυτό θα πρέπει να είναι αποδεκτός τρόπος διαμόρφωσης της γλώσσας, μάλιστα θα ισχύει ότι κάποιοι από τους τρόπους ώστε η τελευταία να διαμορφωθεί περαιτέρω, σε σχέση με το w, θα είναι αποδεκτοί, ενώ κάποιοι δεν θα είναι. Τα επίπεδα ακριβείας της συζήτησης καθορίζουν μέχρι ποιον βαθμό οι ομιλητές είναι διατεθειμένοι, ή μπορούν, να διακρίνουν μεταξύ αντικειμένων ως προς τις σχετικές ιδιότητες οπότε καθορίζεται έτσι ποιες από τις επεκτάσεις του w είναι αποδεκτές και ποιες είναι μη αποδεκτές.

Τέλος, θέτουμε πως ένα υποσύνολο από τους αποδεκτούς τρόπους διαμόρφωσης της γλώσσας θα είναι και φυσιολογικοί. Θεωρούμε πως πρόκειται για τις καταστάσεις στις οποίες μεταβαίνουν οι ομιλητές κατά την διάρκεια μιας συζήτησης που διεξάγεται υπό κανονικές συνθήκες. Από πρακτική άποψη, ένας λόγος που χρησιμοποιούμε τη συγκεκριμένη μεταγλωσσική έκφραση είναι ότι προκύπτει το ενδεχόμενο για δυνατή κατάσταση x της γλώσσας που είναι αποδεκτή να μην υπάρχει δυνατή κατάσταση που την επεκτείνει και είναι επίσης αποδεκτή. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αν ισχύει για πρόταση A ότι η x δεν την επιβεβαιώνει, αλλά ούτε την διαψεύδει, τότε θα προκύπτουν αληθείς ως προς το x, τόσο η A, όσο και η ~A. Πρόκειται για μια συνέπεια που, εκτός και αν ασπαζόμαστε την άποψη που είναι γνωστή ως 'διαληθισμός' (dialetheism),[59] θέλουμε να αποφύγουμε. Βέβαια, διαμορφώσεις όπως η x είναι ακραίες περιπτώσεις, πολύ απλά, για κάθε αντικείμενο που είναι οριακή περίπτωση ως προς κάποια έκφραση σε αυτή, δεν υπάρχει αποδεκτή επέκταση που το εντάσσει εντός της έκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης, ούτε και αποδεκτή επέκταση που το εντάσσει εντός της αντιέκτασης. Μόνος τρόπος ώστε να διαμορφωθεί περαιτέρω η γλώσσα είναι να παραβιαστούν οι αρχές που έχουμε έως τώρα θεωρήσει ως καθοδηγητικές, πρόκειται λοιπόν για μια μη κανονική κατάσταση. Θεωρούμε ότι τέτοιες καταστάσεις δεν μπορεί να θεωρηθούν ως φυσιολογικές, εξάλλου δεν τηρείται σε αυτές ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα που μπορεί να προσφέρει το φαινόμενο της ασάφειας, που είναι ότι προσδίδει στην γλώσσα μια ευκαμψία, δίνοντας στους ομιλητές μια πληθώρα αποδεκτών δυνατοτήτων ως προς τον τρόπο με τον οποίο αυτή μπορεί να

[59] Πρόκειται για την άποψη σύμφωνα με την οποία υπάρχουν προτάσεις που είναι αληθείς και ψευδείς. Άποψη που έχουν, μεταξύ άλλων, υποστηρίξει ο Graham Priest, στα βιβλία του 'Beyond the limits of thought' και 'In contradiction' που έχουμε ήδη αναφέρει και σε άλλη υποσημείωση, καθώς και ο Jc Beall, στο βιβλίο του 'Spandrels of Truth', Beall [2009].

διαμορφωθεί, ανάλογα με τον τρόπο που εξελίσσεται η συζήτηση. Θέτουμε λοιπόν σε αυτό το σημείο ότι για να είναι ένας αποδεκτός τρόπος διαμόρφωσης και φυσιολογικός θα πρέπει για κάθε αντικείμενο εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της γλώσσας και κατηγορηματική έκφραση της γλώσσας να ισχύει ότι αν δεν υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που το εντάσσει εντός της έκτασης αυτής τότε να υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που το εντάσσει εντός της αντιέκτασης της, και αν δεν υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που το εντάσσει εντός της αντιέκτασης τότε να υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που το εντάσσει εντός της έκτασης της. Πολύ απλά, για να μπορεί ένας αποδεκτός τρόπος διαμόρφωσης να θεωρηθεί ως φυσιολογικός θα πρέπει να ισχύει ότι η γλώσσα είναι επαρκώς μη διαμορφωμένη σε αυτόν. Όσον αφορά την διαμόρφωση w, που έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη παράγραφο, αυτή θα πρέπει να είναι ένας φυσιολογικός τρόπος διαμόρφωσης, οπότε με βάση το πλαίσιο της συζήτησης θα καθορίζεται για κάποιες προτάσεις της γλώσσας ότι αυτές είναι αληθείς ως προς αυτό, ενώ για κάποιες άλλες ότι αυτές είναι ψευδείς ως προς αυτό.

Συνοψίζοντας, για κάθε δυνατή κατάσταση της γλώσσας θα πρέπει να ισχύει ότι αυτή σέβεται εκείνες από τις βασικές αρχές που διέπουν το νόημα των διαφόρων ασαφών εκφράσεων τις οποίες καλούμε, ακολουθώντας τον Kit Fine, 'penumbral connections'. Θεωρούμε ότι μια δυνατή διαμόρφωση θα είναι αποδεκτή ως προς ένα πλαίσιο συζήτησης αν και μόνο αν δεν κάνει διακρίσεις που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι, ή δεν έχουν την δυνατότητα να κάνουν εντός αυτού. Τέλος, ως φυσιολογικές θεωρούμε εκείνες τις καταστάσεις ως προς τις οποίες υπάρχουν πολλοί αποδεκτοί τρόποι περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας, πολλές εναλλακτικές όσον αφορά τον τρόπο εξέλιξης αυτής. Σε σχέση με μία τέτοια κατάσταση θα υπάρχουν μεν ατομικές προτάσεις που αυτή δεν επιβεβαιώνει ή διαψεύδει, αλλά για κάθε τέτοια πρόταση θα ισχύει ότι υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω εξέλιξης που την επιβεβαιώνει ή την διαψεύδει. Το εκάστοτε πλαίσιο συζήτησης θα καθορίζει λοιπόν ποιες από τις καταστάσεις εντός του W είναι αποδεκτές και ποιες όχι, ποιες από τις αποδεκτές καταστάσεις είναι φυσιολογικές, και αυτό σε συνδυασμό με τις ιδιότητες του εκάστοτε μοντέλου της γλώσσας θα καθορίζει ποιες προτάσεις της είναι αληθείς, και ποιες ψευδείς, ανάλογα με το επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας.

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε κανείς να θέσει το ερώτημα αν είναι σαφές ποιες οι δυνατές καταστάσεις της γλώσσας, ή ποιες από αυτές είναι κάθε φορά αποδεκτές. Ως μια πρώτη πηγή ασάφειας μπορούν να θεωρηθούν οι ίδιες οι penumbral connections μεταξύ των εκφράσεων της γλώσσας. Πράγματι, προκειμένου μια διαμόρφωση να κατατάσσεται σε αυτές που θεωρούμε δυνατές θα πρέπει να σέβεται τις συγκεκριμένες νοηματικές συνδέσεις μεταξύ των εκφράσεων της γλώσσας, όπως έχουμε πει αν κάποιο αντικείμενο α ικανοποιεί για παράδειγμα το κατηγόρημα «το x είναι κόκκινο», και κάποιο άλλο αντικείμενο β είναι σαφώς πιο κόκκινο από το α, τότε μια διαμόρφωση της γλώσσας στην οποία το α θεωρείται κόκκινο ενώ αφήνει το ζήτημα ανοικτό για το β, ή το κατατάσσει ως πορτοκαλί, δεν μπορεί να θεωρείται δυνατή με βάση τα χαρακτηριστικά του νοήματος της συγκεκριμένης έκφρασης, όπως αυτό έχει διαμορφωθεί. Τι ισχύει όμως για την περίπτωση που το β είναι ελάχιστα πιο κόκκινο, σε βαθμό που ίσως οι ομιλητές δεν μπορούν να διακρίνουν, από το α; Οφείλουμε να κατατάξουμε μια διαμόρφωση που δέχεται το α ως κόκκινο ενώ αφήνει ανοικτό το ζήτημα για το β ανάμεσα στις δυνατές διαμορφώσεις της γλώσσας; Αν ναι, τότε τι ισχύει για μια άλλη διαμόρφωση που διαφέρει ως προς αυτή στο ότι αφήνει ανοικτό το ζήτημα για κάποια αντικείμενο γ που είναι ελάχιστα πιο κόκκινο από το β;

Πέρα από αυτό όμως, θα πρέπει να παραδεχτούμε πως υπάρχει και ασάφεια ως προς το ποιες είναι οι αποδεκτές καταστάσεις της γλώσσας. Το ποιες είναι αυτές, και άρα ποια τα αντικείμενα εντός του W που θεωρούνται αποδεκτά, καθορίζεται από το για ποια αντικείμενα εντός του D ισχύει ότι οι ομιλητές μπορούν ή είναι διατεθειμένοι να τα διακρίνουν μεταξύ τους ως προς τις ιδιότητες που είναι την κάθε φορά σχετικές, και για ποια ισχύει ότι αυτοί δεν μπορούν ή δεν είναι διατεθειμένοι να κάνουν κάτι τέτοιο. Όπως αναφέραμε, ένα σημείο w που κατατάσσει ένα αντικείμενο α στην έκταση του κατηγορήματος ‘F’, ενώ κάποιο αντικείμενο β το οποίο οι ομιλητές δεν μπορούν ή δεν θέλουν να διακρίνουν από το α ως προς τις σχετικές ιδιότητες το κατατάσσει στην αντιέκταση του ‘F’ δεν μπορεί να είναι μια αποδεκτή κατάσταση της γλώσσας για το συγκεκριμένο πλαίσιο συζήτησης, δεν μπορεί να ικανοποιεί το κατηγόρημα «το x είναι αποδεκτό». Αρκεί όμως σε αυτό το σημείο να ρωτήσουμε το εξής, ισχύει για κάθε ζεύγος αντικειμένων εντός του D ότι οι ομιλητές είτε θα τα διαχωρίζουν μεταξύ τους ως προς τις σχετικές ιδιότητες είτε θα τα θεωρούν επαρκώς όμοια ως προς αυτές; Ή υπάρχει περίπτωση για κάποια ζεύγη αντικειμένων αυτοί να διακρίνουν ως προς αυτές τα δύο αντικείμενα μεταξύ τους, για κάποια ζεύγη όχι, και για κάποια άλλα ζεύγη να αφήνουν το ζήτημα ανοικτό; Να είναι δηλαδή κάποια ζεύγη οριακές περιπτώσεις για την συγκεκριμένη έκφραση; Συνέπεια του τελευταίου θα ήταν ότι δεν θα είναι πάντα ξεκάθαρο ποιες από τις δυνατές διαμορφώσεις της γλώσσας είναι αποδεκτές. Σε κάθε πλαίσιο συζήτησης θα υπάρχουν κάποιες οριακές περιπτώσεις για την συγκεκριμένη έκφραση. Έπεται από αυτά ότι πρέπει να αντιμετωπίσουμε την μεταγλωσσική κατηγορηματική έκφραση «το w είναι μια αποδεκτή κατάσταση της γλώσσας» ως ασαφή.

Τώρα, τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των προτάσεων της γλώσσας αντικείμενο θα εξαρτώνται από αυτά των προτάσεων της μεταγλώσσας, την οποία και έχουμε μέχρι εδώ αντιμετωπίσει ως ένα μείγμα της γλώσσας της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής και των ελληνικών. Εφόσον κάποιες από τις εκφράσεις της μεταγλώσσας είναι ασαφείς, έπεται ότι όταν συλλογιζόμαστε εντός αυτής γύρω από τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της γλώσσας αντικείμενο θα πρέπει να το κάνουμε σύμφωνα με την λογική που θεωρούμε ότι διέπει τις ασαφείς εκφράσεις. Στο σημείο που βρισκόμαστε όμως, δεν έχουμε ακόμη προσδιορίσει ποια μπορεί να είναι αυτή, ποια είναι δηλαδή η ορθή λογική για μια γλώσσα που περιέχει ασαφείς εκφράσεις. Έχουμε ξεκινήσει κάνοντας κάποιες παραδοχές γύρω από το φαινόμενο της ασάφειας, και με βάση αυτές, χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια είναι η ορθή λογική όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων, διατυπώσαμε συγκεκριμένους συλλογισμούς γύρω από την σημασιολογία των ασαφών εκφράσεων προσπαθώντας ακριβώς να εντοπίσουμε ποια μπορεί να είναι αυτή.

Προς το παρόν φαίνεται ότι δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να επαναδιατυπώσουμε τους συλλογισμούς αυτούς σε κάποια μεταγλώσσα η λογική της οποίας μπορεί τελικά να προκύψει ότι δεν είναι κατάλληλη για τις περιπτώσεις που βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων. Για λόγους ευκολίας, μπορούμε ως μια πρώτη προσέγγιση να χρησιμοποιήσουμε μια σαφή μεταγλώσσα, και να προσδιορίσουμε τις συνθήκες αλήθειας των προτάσεων της γλώσσας αντικείμενο εντός αυτής. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι η μεταγλώσσα είναι ακριβώς αυτή της κλασικής πρωτοβάθμιας λογικής,[60] ενισχυμένη με κάποια σύμβολα της θεωρίας συνόλων, ενώ η μεταθεωρία είναι αυτή της θεωρίας συνόλων ZFC. Σε κάθε κατηγορηματική έκφραση της μεταγλώσσας θα αντιστοιχείται ως έκταση κάποιο σύνολο, το ίδιο θα συμβαίνει άρα και για το κατηγόρημα «το w είναι μια αποδεκτή κατάσταση της γλώσσας» παρόλο που έχουμε θεωρήσει πως το

[60] Πρόκειται εξάλλου για την συνήθη πρακτική που ακολουθείται απ’ όσους προτείνουν ή μελετούν κάποιο μη κλασικό σύστημα λογικής. Οι σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις της γλώσσας, παρότι μη κλασικές, διατυπώνονται εντός κάποιας κλασικής μεταγλώσσας, και οι σημασιολογικοί υπολογισμοί εντός αυτής γίνονται βάσει κάποιας κλασικής μεταθεωρίας. Έχουν γίνει βέβαια και κάποιες προσπάθειες ώστε οι διάφοροι σημασιολογικοί υπολογισμοί για μια μη κλασική γλώσσα να γίνουν εντός της αντίστοιχης μη κλασικής μεταγλώσσας, βάσει κάποιας κατάλληλης μη κλασικής μεταθεωρίας. Ο Michael Dummett για παράδειγμα, θα ασχοληθεί με το συγκεκριμένο ζήτημα, από την σκοπιά της ιντουισιονιστικής λογικής, στο κεφάλαιο 5 (υποκεφάλαιο 5.6) του βιβλίου του ‘Elements of Intuitionism’, Dummett [1977]. Με το ίδιο ζήτημα, όσον αφορά άλλα μη κλασικά συστήματα όμως, ασχολείται το άρθρο ‘Non-classical Metatheory for non-classical logics’, Bacon [2013], καθώς και το ‘Sorites Paradoxes and the Semantics of Vagueness’, Tye [1994].

τελευταίο πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ασαφές. Υπό αυτές τις συνθήκες μπορούμε να τροποποιήσουμε την έννοια του μοντέλου της γλώσσας, ώστε αντί για μια διατεταγμένη πεντάδα $<D, W, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$, να θεωρούμε ως μοντέλο της γλώσσας μια διατεταγμένη επτάδα $<D, W, A, \Phi, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$, όπου A το σύνολο που περιέχει ακριβώς εκείνα τα αντικείμενα του W που κατατάσσουμε ως αποδεκτά, και Φ ακριβώς εκείνα τα αντικείμενα του A που κατατάσσουμε ως φυσιολογικά. Σε αυτή την περίπτωση δεν θα μπορούμε πλέον να υποστηρίξουμε πως το εκάστοτε μοντέλο της γλώσσας καθορίζει, σε συνδυασμό με το πλαίσιο της συζήτησης, τις συνθήκες αλήθειας των διαφόρων προτάσεων, αλλά θα πρέπει να υποστηρίξουμε ότι αυτές καθορίζονται αποκλειστικά από το μοντέλο της γλώσσας, το οποίο με την σειρά του προσδιορίζεται από το πλαίσιο της συζήτησης.

Τα παραπάνω βέβαια θα έχουν και κάποιες συνέπειες που μπορεί υπό προϋποθέσεις να είναι αρνητικές. Πρώτα απ' όλα, το γεγονός ότι αντιστοιχούμε απλώς κάποιο σύνολο ως έκταση της μεταγλωσσικής έκφρασης «το w είναι μια αποδεκτή κατάσταση της γλώσσας» συνεπάγεται ότι θα τίθεται ένα σαφές όριο όσον αφορά το ποιες από τις δυνατές καταστάσεις της γλώσσας είναι αποδεκτές, παρόλο που φαίνεται ότι στην πραγματικότητα αυτό δεν μπορεί να είναι ένα σαφές ζήτημα. Εφόσον η συγκεκριμένη μεταγλωσσική έκφραση εμπλέκεται στον τρόπο που διατυπώνουμε τις συνθήκες αλήθειας για τις προτάσεις της γλώσσας, προκύπτει το ενδεχόμενο το χαρακτηριστικό αυτό να αντικατοπτρίζεται εντός της γλώσσας αντικείμενο από συγκεκριμένες προτάσεις που η θεωρία συμπεριλαμβάνει μεταξύ αυτών που είναι αληθείς. Δεύτερον, παρατηρούμε ότι δεν θα είναι δυνατό να εκφραστεί εντός της μεταγλώσσας το νόημα των διαφόρων εκφράσεων της γλώσσας αντικείμενο που είναι ασαφείς. Δεν θα μπορούμε δηλαδή να μεταφράσουμε στην μεταγλώσσα τις διάφορες εκφορές που κάνουμε όταν χρησιμοποιούμε την γλώσσα αντικείμενο. Έπεται ότι δεν μπορούμε να διατυπώσουμε εντός αυτής προτάσεις όπως «Η 'α' είναι αληθής αν και μόνο αν A», όπου 'α' κάποιο κατάλληλο όνομα για πρόταση P της γλώσσας αντικείμενο, και A μετάφραση της τελευταίας εντός της μεταγλώσσας.[61] Τέλος, στην περίπτωση που θεωρούμε ως μοντέλα της γλώσσας διατεταγμένες επτάδες της

[61] Δεν θα ικανοποιείται λοιπόν η περίφημη convention T, τουλάχιστον χωρίς τροποποιήσεις. Σύμφωνα με αυτή: 'A Formally correct definition of the symbol "Tr", formulated in the metalanguage, will be called an adequate definition of truth if it has the following consequences:

(a) All sentences which are obtained from the expression "x∈Tr if and only if p" by substituting for the symbol "x" a structural-descriptive name of any sentence of the language in question and for the symbol "p" the expression which forms the translation of this sentence into the metalanguage;

(b) The sentence "for any x, if x∈Tr then x∈Sentence '

Από το άρθρο του Alfred Tarksi, 'The concept of truth in Formalized Languages', σελίδα 188, όπως είναι δημοσιευμένο στην συλλογή άρθρων 'Logic, Semantics, Metamathematics'.

μορφής $<D, W, A, \Phi, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$, όπου Α σύνολο, τότε δεν θα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μεταξύ αυτών βρίσκεται και το intended μοντέλο της γλώσσας αντικείμενο.

Η πρόθεσή μας όμως είναι να χρησιμοποιήσουμε την κλασική λογική σαν μία σκάλα που θα μας επιτρέψει να εντοπίσουμε ποια είναι η ορθή λογική της ασάφειας με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει, και την οποία μπορούμε στην συνέχεια να κλωτσήσουμε,[62] ή τουλάχιστον να παραμερίσουμε. Συνέπειες όπως οι παραπάνω αποφεύγονται αν επιμείνουμε ότι ως μοντέλα της γλώσσας θεωρούμε διατεταγμένες πεντάδες της μορφής $<D, W, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$. Μπορούμε τότε να υποστηρίξουμε ότι η μεταγλώσσα που χρησιμοποιούμε είναι μεν ασαφής, αλλά κάποιο τμήμα της, το οποίο μπορούμε επακριβώς να προσδιορίσουμε, είναι σαφές οπότε και όσο βρισκόμαστε εντός αυτού μπορούμε να συλλογιζόμαστε με βάση τις αρχές της κλασικής λογικής. Το Intended μοντέλο της γλώσσας βρίσκεται μεταξύ εκείνων των δομών που είναι μοντέλα σύμφωνα με την σημασιολογική θεωρία, αλλά είμαστε υποχρεωμένοι να παραδεχτούμε πως ένα μοντέλο δεν φέρει αρκετή πληροφορία ώστε να μπορεί με βάση αυτό να προσδιοριστεί για κάθε πρόταση της γλώσσας αντικείμενο αν αυτή είναι αληθής ή ψευδής ως προς κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης. Αυτό είναι κάτι που θα εξαρτάται μεταξύ άλλων και από τις συνθήκες αλήθειας προτάσεων της μεταγλώσσας που είναι ασαφείς, και άρα από το επίπεδο διαμόρφωσης της τελευταίας, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, όπως και το επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας αντικείμενο, επίσης καθορίζεται από το πλαίσιο της συζήτησης.

Τώρα, μέχρι αυτό το σημείο δεν έχουμε μιλήσει για τον τρόπο που θα οριστεί η έννοια της εγκυρότητας ως προς μοντέλο για τις διάφορες μορφές επιχειρημάτων. Συνήθως, ένα επιχείρημα ορίζεται ως έγκυρο εντός κάποιου μοντέλου αν και μόνο αν σε κάθε σημείο του μοντέλου ισχύει ότι το συμπέρασμα του επιχειρήματος διατηρεί κάποια επιθυμητή ιδιότητα στην περίπτωση που αυτή χαρακτηρίζει τις προκείμενες. Η συγκεκριμένη ιδιότητα μπορεί να είναι αυτή της αλήθειας, του μη ψεύδους, κάπου συγκεκριμένου βαθμού αλήθειας κτλ. Στην περίπτωση της κλασικής λογικής πρόκειται για αυτήν της αλήθειας.[63] Θεωρούμε δηλαδή μια μορφή επιχειρήματος έγκυρη ως προς κάποια ερμηνεία αν και μόνο αν το συμπέρασμα είναι αληθές ως προς αυτήν στην περίπτωση που είναι αληθείς ως προς αυτήν και όλες οι προκείμενες. Αυτό είναι όμως ισοδύναμο με το να

---

[62] Χρησιμοποιούμε εδώ για τους δικούς μας σκοπούς την γνωστή φράση του Wittgenstein, από το έργο του 'Tractatus Logico-Philosophicus'. Στην προτελευταία παράγραφο (6.54) γράφει: 'He must, so to speak, throw away the ladder after he has climbed up it'. Αντλώ το απόσπασμα από την αγγλική μετάφραση, εκδόσεις Routledge Classic.

[63] Που στην συγκεκριμένη περίπτωση ταυτίζεται φυσικά με αυτήν του μη ψεύδους.

θεωρήσουμε ότι μια μορφή επιχειρήματος είναι έγκυρη ως προς κάποια ερμηνεία αν και μόνο αν ισχύει ότι αν όλες οι προκείμενες είναι αληθείς ως προς αυτήν, τότε το συμπέρασμα δεν είναι ψευδές ως προς αυτήν. Προσαρμόζοντας την τελευταία διατύπωση στις παραδοχές που έχουμε κάνει, θέτουμε ότι θα θεωρούμε πως ένα επιχείρημα είναι έγκυρο ως προς κάποιο μοντέλο και πλαίσιο συζήτησης αν και μόνο αν σε κάθε φυσιολογικό σημείο ισχύει ότι αυτό δεν πρόκειται να αντικρουστεί, αν η γλώσσα διαμορφωθεί περαιτέρω με αποδεκτό τρόπο. Θα λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι λογικά έγκυρο αν και μόνο αν αυτό είναι έγκυρο ως προς κάθε μοντέλο και πλαίσιο συζήτησης. Επιπλέον, θεωρούμε πως το σημείο στίξης ',' της μεταγλώσσας συνδυάζει τις προκείμενες με τον ίδιο τρόπο που τις συνδυάζει και ο σύνδεσμος της σύζευξης εντός της γλώσσας αντικείμενο. Με βάση αυτά η έννοια της εγκυρότητας εντός κάποιου μοντέλου και πλαισίου συζήτησης ορίζεται ως εξής:

- Για προτάσεις $Π_1$, $Π_2$, .., $Π_ν$ και πρόταση Σ, θα είναι $Π_1, Π_2, \ldots, Π_ν |\!\vDash Σ$ αν και μόνο αν για κάθε φυσιολογικό σημείο w εντός του W ισχύει ότι για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \vDash Π_1 \wedge Π_2 \wedge \ldots \wedge Π_ν$ και $z \Dashv Σ$. [Συμβολικά: $\forall w \forall z$(το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z) \rightarrow \sim((z \vDash Π_1 \wedge Π_2 \wedge \ldots \wedge Π_ν) \wedge (z \Dashv Σ))))$]

Το πρώτο που παρατηρούμε με βάση τον συγκεκριμένο ορισμό είναι ότι η σχέση συνέπειας (consequence relation) μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας προκύπτει ότι δεν είναι πάντα μεταβατική. Πράγματι, έστω προτάσεις Α, Β, Γ τέτοιες ώστε να ισχύει ότι $Α |\!\vDash Β$ και $Β |\!\vDash Γ$, και έστω ότι δεν ισχύει πως $Α |\!\vDash Γ$. Έχουμε ότι είναι $Α |\!\vDash Β$ αν και μόνο αν $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z) \rightarrow \sim((z \vDash Α) \wedge (z \Dashv Β))))$, $Β |\!\vDash Γ$ αν και μόνο αν $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z) \rightarrow \sim((z \vDash Β) \wedge (z \Dashv Γ))))$ και $Α |\!\vDash Γ$ αν και μόνο αν $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z) \rightarrow \sim((z \vDash Α) \wedge (z \Dashv Γ))))$. Έστω ότι το τελευταίο δεν ισχύει, θα έχουμε λοιπόν $\exists w \exists z$((το w είναι φυσιολογικό)$\wedge$ (το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z \wedge (z \vDash Α \wedge z \Dashv Γ))$. Γίνεται οι προτάσεις $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z) \rightarrow \sim((z \vDash Α) \wedge (z \Dashv Β))))$, $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z) \rightarrow \sim((z \vDash Β) \wedge (z \Dashv Γ))))$ και $\exists w \exists z$((το w είναι φυσιολογικό) $\wedge$ (το z είναι αποδεκτό) $\wedge$ $w \sqsubseteq z \wedge (z \vDash Α \wedge z \Dashv Γ))$ να αληθεύουν ταυτόχρονα; Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε ότι η γλώσσα περιέχει ως μόνα μη λογικά σύμβολα το κατηγορηματικό 'F' και τις ατομικές σταθερές 'a_1', 'a_2', 'a_3' , 'a_4', 'a_5', και έστω μοντέλο τέτοιο ώστε το D περιέχει ακριβώς τα αντικείμενα $α_1$, $α_2$, $α_3$, $α_4$, $α_5$ ενώ το W περιέχει ακριβώς τα αντικείμενα w, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, για τα οποία ισχύει ότι όλα κατατάσσονται ως αποδεκτά. Επιπλέον, θέτουμε ότι είναι $Val^{+}(w, a_1)=\alpha_1$, $Val^{+}(w, a_2)=\alpha_2$, $Val^{+}(w, a_3)=\alpha_3$, $Val^{+}(w, a_4)=\alpha_4$, $Val^{+}(w, a_5)=\alpha_5$ και $Val^{+}(w, F)= \{\alpha_1\}$, $Val^{-}(w, F)=\{\alpha_5\}$, $Val^{+}(w_1, F)= \{\alpha_1\}$, $Val^{-}(w_1, F)=\{\alpha_4, \alpha_5\}$, $Val^{+}(w_2, F)=\{\alpha_1\}$, $Val^{-}(w_2, F)=\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, $Val^{+}(w_3, F)=\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $Val^{-}(w_3, F)=\{\alpha_4, \alpha_5\}$, $Val^{+}(w_4, F)=\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $Val^{-}(w_4, F)=\{ \alpha_5\}$, $Val^{+}(w_5, F)=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, και $Val^{-}(w_5, F)=\{\alpha_5\}$. Βάσει των όσων έχουμε πει, από τα αντικείμενα εντός του W θα κατατάσσονται ως φυσιολογικά τα w, w_1, w_4. Μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε εύκολα ότι θα έχουμε πχ $Fa_1|\!\models Fa_2$, $Fa_2|\!\models Fa_3$ αλλά όχι $Fa_1|\!\models Fa_3$. Το συγκεκριμένο μοντέλο αντιστοιχεί σε κάποια κατάσταση στην οποία τα αντικείμενα α_1, α_2, α_3 σχηματίζουν μια ακολουθία με το α_1 να είναι περισσότερο F από το α_2 και το α_2 περισσότερο F από το α_3. Επιπλέον, οι ομιλητές δεν μπορούν, η δεν θέλουν με βάση τα επίπεδα ακρίβειας της συζήτησης, να διακρίνουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες το αντικείμενο α_1 από το α_2, ή το α_2 από το α_3 αλλά παρόλα αυτά μπορούν να διακρίνουν το α_1 από το α_3. Από την άλλη, αν θεωρήσουμε τα επιχειρήματα $Fa_3|\!\models Fa_2$, $Fa_2|\!\models Fa_1$ τότε θα έπεται και ότι $Fa_3|\!\models Fa_1$, η μεταβατικότητα της σχέσης συνέπειας δεν παραβιάζεται εδώ αφού κάθε σημείο εντός του W αν θέτει εντός της έκτασης κάποιο αντικείμενο θα θέτει εντός αυτής και κάθε αντικείμενο που προηγείται, και ανάλογα αν θέτει κάποιο αντικείμενο εντός της αντιέκτασης θα θέτει εντός αυτής και αυτά που έπονται. Οπότε δεν είναι δυνατό να διαψευστεί το $Fa_3|\!\models Fa_1$. Τέλος, η σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας παραμένει μεταβατική όταν βρισκόμαστε εντός σαφών πλαισίων. Πράγματι, αν είμαστε εντός σαφών πλαισίων τότε είναι $A|\!\models B$ αν και μόνο αν $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z$) $\rightarrow$ (($z \models$ A)$\rightarrow$($z \models$B)))) και $B|\!\models \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z$) $\rightarrow$ (($z \models$ B) $\rightarrow$ ($z \models \Gamma$)))) όπου '$\rightarrow$ ' είναι ο σύνδεσμος της συνεπαγωγής της μεταγλώσσας, με άλλα λόγια πρόκειται για τον σύνδεσμο της υλικής συνεπαγωγής. Έχουμε λοιπόν ότι αν είναι $A|\!\models B$ και $B|\!\models \Gamma$ έπεται ότι θα ισχύει ότι $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z$) $\rightarrow$ (($z \models$ A)$\rightarrow$($z \models$B)))) καθώς και ότι $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z$) $\rightarrow$ (($z \models$ B) $\rightarrow$ ($z \models \Gamma$)))). Έστω λοιπόν w' , z' τυχόντα σημεία του W και επιπλέον έστω ότι αυτά είναι τέτοια ώστε να ισχύει ότι το w' είναι φυσιολογικό, το z' είναι αποδεκτό και επιπλέον είναι $w' \sqsubseteq z'$, έπεται ότι θα είναι ($z' \models$ A)$\rightarrow$($z' \models$B) και ($z' \models$ B) $\rightarrow$ ($z' \models \Gamma$) και άρα λόγω της μεταβατικότητας του συνδέσμου της υλικής συνεπαγωγής θα είναι ($z' \models$ A)$\rightarrow$($z' \models \Gamma$). Αποβάλλοντας τις υποθέσεις έπεται ότι θα ισχύει πως $\forall w \forall z$((το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq z$) $\rightarrow$ (($z \models$ A) $\rightarrow$ ($z \models \Gamma$)))) και άρα θα έχουμε $A|\!\models \Gamma$.

Σημειώνουμε ότι με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει οι σχέσεις της επιβεβαίωσης και της διάψευσης δεν θα είναι πλήρως μονοτονικές ως προς την σχέση μερικής διάταξης μεταξύ των φυσιολογικών αποδεκτών σημείων του W:

Λήμμα Μονοτονικότητας για $\vDash$, $\Dashv$: Η διμελής σχέση $\Dashv$ μεταξύ των σημείων που ανήκουν στο W και των προτάσεων της γλώσσας που είναι ατομικές είναι μονοτονική ως προς την σχέση $\sqsubseteq$, και αν A, B είναι ατομικές προτάσεις της γλώσσας τότε το ίδιο θα ισχύει και για τις προτάσεις της μορφής $\sim$A, ή A$\rightarrow$B, ή $\forall$xAx. Με άλλα λόγια για πρόταση Γ που έχει κάποια από τις παραπάνω μορφές θα ισχύει ότι $\forall w \forall z((w \sqsubseteq z \wedge w \Dashv \Gamma) \rightarrow z \Dashv \Gamma)$

Πράγματι, η περίπτωση των ατομικών προτάσεων έπεται κατευθείαν από τον τρόπο με τον οποίο έχουν οριστεί οι συναρτήσεις Val^{+}, Val^{-}. Μάλιστα, όσον αφορά τις ατομικές προτάσεις της γλώσσας θα ισχύει ότι είναι μονοτονική ως προς την σχέση $\sqsubseteq$ και η σχέση της επιβεβαίωσης. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έπονται κατευθείαν από τους ορισμούς που έχουμε δώσει.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η σχέση της διάψευσης θα είναι για κάποιες περιπτώσεις μονοτονική ως προς την σχέση διάταξης $\sqsubseteq$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, ακόμη και υπό τις ίδιες προϋποθέσεις, δεν θα ισχύει το ίδιο και για την περίπτωση της επιβεβαίωσης. Πράγματι, έστω για παράδειγμα κατηγόρημα F της γλώσσας και αντικείμενα α, β. Αρκεί να θεωρήσουμε μοντέλο τέτοιο ώστε για κάποιο αντικείμενο w εντός του W το β είναι οριακή περίπτωση για το F, ενώ κάποιο άλλο αντικείμενο z εντός του W, τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$, θέτει το β εντός της αντιέκτασης του F. Από την άλλη, έστω ότι το α ικανοποιεί το F τόσο σύμφωνα με το w, όσο και σύμφωνα με το z. Αν θεωρήσουμε ότι a, b είναι σταθερά σύμβολα της γλώσσας στα οποία το συγκεκριμένο μοντέλο αναθέτει ως αναφορά τα αντικείμενα α, β αντίστοιχα, τότε έπεται ότι θα είναι $w \vDash Fa \rightarrow Fb$, αλλά όχι $z \vDash Fa \rightarrow Fb$.

Λήμμα μονοτονικότητας για $\Vdash$: Η διμελής σχέση $\Vdash$ μεταξύ των φυσιολογικών σημείων που ανήκουν στο W και των προτάσεων της γλώσσας είναι μονοτονική ως προς την σχέση μερικής διάταξης $\sqsubseteq$. Με άλλα λόγια για πρόταση A ισχύει ότι $\forall w \forall z$(((το w είναι φυσιολογικό) $\wedge$ (το z είναι φυσιολογικό)) $\rightarrow$ ($(w \sqsubseteq z \wedge w \Vdash A) \rightarrow z \Vdash A$)).

Πράγματι, έστω φυσιολογικό σημείο w και πρόταση A τέτοια ώστε να είναι $w \Vdash A$, θα έχουμε $\forall$x(((το x είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq x$)$\rightarrow\sim$($x \Dashv A$)). Έστω επιπλέον φυσιολογικό σημείο z τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει πως $z \Vdash A$, έπεται από τον αντίστοιχο ορισμό ότι θα είναι $\exists$x((το x είναι αποδεκτό)$\wedge$ $z \sqsubseteq x \wedge x \Dashv A$). Έστω z' ένα σημείο που συγκεκριμενοποιεί τον υπαρκτικό ποσοδείκτη, μέσω απλοποίησης έπεται ότι θα είναι $z'\dashv A$. Όμως, από την μεταβατικότητα της σχέσης $\sqsubseteq$ προκύπτει ότι θα είναι $w\sqsubseteq z'$ και άρα αφού είναι $\forall x(($ (το x είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w\sqsubseteq x$ $)\rightarrow\sim($ $x\dashv A$ $))$ έπεται μέσω συγκεκριμενοποίησης του καθολικού ποσοδείκτη και modus ponens ότι δεν θα ισχύει πως $z'\dashv A$, κάτι που αντιφάσκει με όσα έπονται από την υπόθεση ότι μπορεί να υπάρχει αποδεκτό σημείο που επεκτείνει το w και το οποίο είναι τέτοιο ώστε η πρόταση A να μην είναι αληθής σε αυτό. Καταλήγουμε ότι θα είναι $z\VDash A$.

Αποδεικνύουμε τώρα το εξής:

Εγκυρότητα modus ponens: Ο κανόνας modus ponens (A, $A\rightarrow B \VDash B$) είναι έγκυρος.

Πράγματι, για μοντέλο $\mathcal{M}$ θα είναι A, $A\rightarrow B \VDash B$ αν και μόνο αν $\forall w\forall z($ (το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w\sqsubseteq z$) $\rightarrow$ $\sim($ $(z\models A\wedge A\rightarrow B)\wedge(z\dashv B))))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w\forall z($ (το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w\sqsubseteq z$) $\rightarrow$ $\sim($ $(z\models \sim(A\rightarrow\sim(A\rightarrow B)))\wedge(z\dashv B)$))). Έστω ότι το τελευταίο δεν ισχύει, τότε θα έχουμε $\exists w\exists z($ (το w είναι φυσιολογικό) $\wedge$ (το z είναι αποδεκτό) $\wedge$ $w\sqsubseteq z \wedge z\models \sim(A\rightarrow\sim(A\rightarrow B))\wedge z\dashv B$). Έστω w', z' σημεία που συγκεκριμενοποιούν τους υπαρκτικούς ποσοδείκτες. Θα έχουμε λοιπόν ότι το w' θα είναι φυσιολογικό, το z' θα είναι αποδεκτό, και επιπλέον θα ισχύει ότι $w'\sqsubseteq z'$, $z'\models \sim(A\rightarrow\sim(A\rightarrow B))$ και $z'\dashv B$. Συνεχίζοντας έχουμε $z'\models \sim(A\rightarrow\sim(A\rightarrow B))$ αν και μόνο αν $z'\dashv (A\rightarrow\sim(A\rightarrow B))$, ανν $z'\models A$ και $z'\dashv \sim(A\rightarrow B)$, ανν $z'\models A$ και $z'\models (A\rightarrow B)$. Με βάση τον τρόπο που έχουμε ορίσει τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης, θα είναι $z'\models (A\rightarrow B)$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $z'\models A$ και $z'\dashv B$. Τώρα, από την υπόθεση έπεται ότι θα είναι $z'\models \sim(A\rightarrow\sim(A\rightarrow B))$ και άρα $z'\models A$ οπότε δεν ισχύει ότι $z'\dashv B$. Το τελευταίο όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι όπως έχουμε δείξει πιο πριν θα πρέπει λόγω της υπόθεσης να είναι $z'\dashv B$. Καταλήξαμε έτσι ότι θα ισχύει πως $\forall w\forall z($ (το w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ (((το z είναι αποδεκτό)$\wedge$ $w\sqsubseteq z$) $\rightarrow$ $\sim($ $(z\models \sim(A\rightarrow\sim(A\rightarrow B)))\wedge(z\dashv B)$))) και άρα ο κανόνας A, $A\rightarrow B \VDash B$ όντως προκύπτει έγκυρος.

Ας θεωρήσουμε τώρα σωρειτική ακολουθία αντικειμένων α_1, α_2, …, α_{10000} ως προς το κατηγόρημα F, στην οποία το κάθε αντικείμενο είναι ελάχιστα πιο F από τα επόμενα του, και έστω συνηθισμένο πλαίσιο συζήτησης που την αφορά και εντός του οποίου ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο της ακολουθίας οι ομιλητές δεν θέλουν ή δεν μπορούν να το διακρίνουν από τα γειτονικά του ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Διαπιστώνουμε ότι βάσει αυτού του πλαισίου οι προτάσεις $Fa_1\rightarrow Fa_2$, $Fa_2\rightarrow Fa_3$, …, $Fa_{9999}\rightarrow Fa_{10000}$, όπου εδώ θεωρούμε πως τα σύμβολα a_1, a_2, …, a_{10000} είναι σταθερά σύμβολα που αναφέρονται στα αντικείμενα α_1, α_2, …, α_{10000} αντίστοιχα, θα προκύπτουν αληθείς ως προς το εκάστοτε φυσιολογικό σημείο εντός του W. Το ίδιο θα ισχύει και για προτάσεις όπως οι $\forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$, $\forall x{\sim}(Fx \wedge {\sim}Fx{+}1)$, όχι όμως και για προτάσεις όπως οι $\exists x(Fx \rightarrow {\sim}Fx{+}1)$, $\exists x(Fx \wedge {\sim}Fx{+}1)$ κτλ. Πράγματι, έστω για λόγους ευκολίας ότι το D περιέχει μόνο τα αντικείμενα της σωρειτικής ακολουθίας, για φυσιολογικό σημείο w και την πρόταση $\forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ θα έχουμε:

1. $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \Dashv \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ άρα
2. $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \Dashv <\forall x, <\rightarrow, <F, x>, <F, x{+}1>>>$
3. $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \Dashv [<\rightarrow, <F, x>, <F, x{+}1>>]^{oi}{}_{x}$
4. $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \Dashv <\rightarrow, <F, o_i>, <F, o_{i+1}>>$
5. $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \models <F, o_i> \wedge z \Dashv <F, o_{i+1}>$
6. $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $Val^+(z, o_i) \in Val^+(z, F) \wedge Val^+(z, o_{i+1}) \in Val^-(z, F)$

Η πρόταση στο δεξί μέλος της παραπάνω διπλής συνεπαγωγής είναι όμως αληθής, αφού οι ομιλητές δεν μπορούν εντός του συγκεκριμένου πλαισίου συζήτησης να διακρίνουν μεταξύ αντικειμένων που καταλαμβάνουν γειτονικές θέσεις εντός της σωρειτικής ακολουθίας ως προς τις σχετικές ιδιότητες, και άρα μια διαμόρφωση της γλώσσας που θα έκανε τέτοιου είδους διακρίσεις δεν μπορεί να είναι αποδεκτή. Έπεται λοιπόν ότι όντως θα είναι $w \VDash \forall x(Fx \rightarrow Fx{+}1)$.

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για κάθε φυσιολογικό σημείο εντός του W θα ισχύει ότι η πρόταση $\exists x(Fx \wedge {\sim}Fx{+}1)$ προκύπτει ψευδής σε αυτό. Πράγματι, αυτό προκύπτει κατευθείαν από τους ορισμούς που έχουμε δώσει.

Αν κάνουμε τους ανάλογους σημασιολογικούς υπολογισμούς, τότε για φυσιολογικό σημείο w που ανήκει στο W θα έχουμε:

1. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \dashv \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$, άρα έχουμε ότι
2. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \vDash \exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$
3. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \vDash \sim\forall x \sim(Fx \wedge \sim Fx+1)$
4. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \dashv \forall x \sim(Fx \wedge \sim Fx+1)$
5. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι $z \dashv \langle \forall x, \langle \sim, \langle \sim, \langle \rightarrow, \langle F, x\rangle, \langle \sim, \langle \sim, \langle F, x+1\rangle\rangle\rangle\ \rangle\rangle\rangle\rangle$
6. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \dashv [\langle \sim, \langle \sim, \langle \rightarrow, \langle F, x\rangle, \langle \sim, \langle \sim, \langle F, x+1\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle]^{oi}_{x}$
7. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \dashv \langle \sim, \langle \sim, \langle \rightarrow, \langle F, oi \rangle, \langle \sim, \langle \sim, \langle F, oi+1\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle$
8. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \vDash \langle \sim, \langle \rightarrow, \langle F, oi\rangle, \langle \sim, \langle \sim, \langle F, oi+1\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle$
9. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \dashv \langle \rightarrow, \langle F, oi\rangle, \langle \sim, \langle \sim, \langle F, oi+1\rangle\rangle\rangle\rangle$
10. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \vDash \langle F, oi\rangle \wedge z \dashv \langle \sim, \langle \sim, \langle F, oi+1\rangle\rangle\rangle$
11. $w \Vdash \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \vDash \langle F, oi\rangle \wedge z \vDash \langle \sim, \langle F, oi+1\rangle\rangle$

12. $w|\!\models \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $z \models \langle F, o_i \rangle \wedge z \dashv \langle F, o_{i+1} \rangle$
13. $w|\!\models \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$ αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτό αντικείμενο z εντός του W τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$ δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o_i εντός του D είναι $Val^+(z, o_i) \in Val^+(z, F) \wedge Val^+(z, o_{i+1}) \in Val^-(z, F)$

Για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε και στην περίπτωση της πρότασης $\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$ όμως, η πρόταση στο δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι αληθής. Έπεται άρα ότι όντως $w|\!\models \sim\exists x(Fx \wedge \sim Fx+1)$. Οι αποδείξεις για τις άλλες προτάσεις στις οποίες αναφερθήκαμε είναι ανάλογες.

Σε αυτό το σημείο έχει γίνει πλέον εμφανές πώς αντιμετωπίζεται το παράδοξο του σωρείτη από τη συγκεκριμένη θεωρία. Ο κανόνας modus ponens είναι σύμφωνα με την θεωρία έγκυρος, και άρα αφού η μορφή του είναι σύμφωνα με την θεωρία έγκυρη έπεται ότι και το εκάστοτε βήμα του επιχειρήματος θα είναι έγκυρο. Επιπλέον, οι προκείμενες που χρησιμοποιούμε είναι αληθείς, και άρα το εκάστοτε βήμα του επιχειρήματος είναι ορθό. Παρόλα αυτά, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία η σχέση συνέπειας μεταξύ προτάσεων δεν είναι πάντα μεταβατική όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων.[64] Αυτό σημαίνει ότι

[64] Θεωρίες λογικής σύμφωνα με τις οποίες ορίζεται κάποιο είδος σχέσης συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας που δεν είναι μεταβατική έχουν προταθεί αρκετές φορές στο παρελθόν. Ιστορικά, η πρώτη περίπτωση τέτοιας θεωρίας φαίνεται ότι είναι αυτή που διατυπώνει ο Bernard Bolzano, στο μνημειώδες έργο του ‘Wissenschaftslehre’ (Theory of Science). Σε αυτό, πέρα από το να ορίσει μια σχέση λογικής συνέπειας με τρόπο που θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι είναι στο ίδιο πνεύμα με τον ορισμό που θα δώσει ο Tarksi, διατυπώνει και μια σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας την οποία καλεί ‘Abfolge’, και την οποία θα μεταφράζουμε ως ‘θεμελίωση’ στα ελληνικά, και ως ‘grounding’ στα αγγλικά. Ακολουθώντας τον Αριστοτέλη (Αναλυτικά Ύστερα, I.13), ο Bolzano θα διακρίνει μεταξύ αποδείξεων που δείχνουν ότι το συμπέρασμα είναι αληθές, και αποδείξεων που δείχνουν γιατί αυτό ισχύει, και θα θεωρήσει ότι στην δεύτερη περίπτωση κυρίαρχο ρόλο παίζει η σχέση της θεμελίωσης. Δίνει μάλιστα ιδιαίτερη σημασία στην τελευταία, γράφει χαρακτηριστικά στην παράγραφο 198: ‘Of all the relations that hold between truths, the one most worthy of attention in my opinion is that of ground and consequence, by virtue of which certain propositions are the ground of certain other propositions, and the latter their consequences’ (Από την αγγλική μετάφραση των Jan Berg και Burnham Terrell, D. Reidel Publishing Company). Διαπιστώνει όμως ότι η σχέση της θεμελίωσης δεν είναι μεταβατική, στην παράγραφο 213 γράφει: ‘It seems to me, that the relationship of ground and consequence is of such a kind that one cannot say of a consequence of a consequence, just because it is a consequence of a consequence, that is the consequence of the ground of its ground, without altering the concept’.
Για λόγους που μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ανάλογοι, αρκετοί φιλόσοφοι που εργάζονται στον χώρο της Relevant Logic θα προτείνουν συστήματα λογικής σύμφωνα με τα οποία η σχέση λογικής συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας δεν είναι πάντα μεταβατική. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούν ότι προκειμένου μια πρόταση B να έπεται κάποιας άλλης πρότασης A, θα πρέπει να

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους διάφορους έγκυρους κανόνες για να συνάγουμε συμπεράσματα, αλλά για κάποιες περιπτώσεις όταν βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μεγάλες αλυσίδες επιχειρημάτων. Έτσι, με βάση την ερμηνεία των σελίδων 129-130 διαπιστώνουμε για παράδειγμα ότι παρόλο που είναι Fa_1, $Fa_1 \rightarrow Fa_2 \Vdash Fa_2$, καθώς και Fa_2, $Fa_2 \rightarrow Fa_3 \Vdash Fa_3$, δεν ισχύει ότι Fa_1, $Fa_1 \rightarrow Fa_2$, $Fa_2 \rightarrow Fa_3 \Vdash Fa_3$. Το μήκος των αλυσίδων που μπορούμε να σχηματίσουμε θα εξαρτάται κάθε φορά από το πλαίσιο της συζήτησης και τα επίπεδα ακριβείας που αυτό καθορίζει, αφού με βάση αυτό καθορίζεται ποιες από τις δυνατές καταστάσεις της γλώσσας είναι αποδεκτές, και ποιες φυσιολογικές. Σε ένα χαλαρό πλαίσιο συζήτησης οι αλυσίδες που θα μπορούμε να σχηματίσουμε θα είναι αρκετά μεγαλύτερου μήκους από αυτές εντός ενός πλαισίου στο οποίο οι ομιλητές προσπαθούν ώστε οι εκφορές τους να χαρακτηρίζονται από την μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Και αυτό γιατί στην δεύτερη περίπτωση, μια αλυσίδα επιχειρημάτων θα είναι πολύ πιο εύκολο να αντικρουστεί απ' ότι στην πρώτη περίπτωση.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε πάλι την πιο πάνω σωρειτική ακολουθία α_1, α_2, …, α_{10000} ως προς το κατηγόρημα F. Έστω ότι στην παρούσα κατάσταση οι ομιλητές έχουν προσωρινά

υπάρχει μεταξύ τους και κάποια νοηματική σύνδεση. Για προτάσεις όμως Α, Β, Γ, προκύπτει το ενδεχόμενο να υπάρχει νοηματική σύνδεση μεταξύ των Α, Β, να υπάρχει αντίστοιχη σύνδεση μεταξύ των Β, Γ, να μην υπάρχει όμως μεταξύ των Α, Γ. Χαρακτηριστικά της προσέγγισης, είναι τα άρθρα 'Entailment', Geach [1970], 'Entailment and Deducibility', Smiley [1958], και 'Relatedness and Implication', Epstein [1979]. Έχει πάντως ενδιαφέρον ο τρόπος που οι θεωρίες της συγκεκριμένης προσέγγισης αντιμετωπίζουν το επιχείρημα του C. I Lewis (πρόκειται για μια μορφή επιχειρήματος γνωστή ήδη από τον μεσαίωνα, η πρώτη διατύπωση του δίνεται από τον Alexander Necham, στο έργο του 'De naturis rerum', που γράφτηκε στις αρχές του 13ου αιώνα μΧ), σύμφωνα με το οποίο μπορούμε με βάση κάποια αντίφαση να συνάγουμε οποιαδήποτε πρόταση, σε σύγκριση με τον τρόπο που αυτό αντιμετωπίζεται από τις διάφορες 'ορθόδοξες' θεωρίες relevant logic, της σχολής των Anderson και Belnap. Έστω λοιπόν ότι ισχύει $A \wedge \sim A$, μέσω απλοποίησης έπεται Α, με βάση τους κανόνες για την διάζευξη έπεται $A \vee B$, από την υπόθεση όμως έπεται μέσω και πάλι απλοποίησης ότι θα είναι $\sim A$, και τελικά μέσω διαζευκτικού συλλογισμού καταλήγουμε από τις $A \vee B$ και $\sim A$ στην Β. Σύμφωνα με τις θεωρίες των Anderson και Belnap, ο κανόνας του διαζευκτικού συλλογισμού δεν είναι έγκυρος, κάτι που προκύπτει από το γεγονός ότι η σημασιολογία των διαφόρων συστημάτων αυτής της σχολής δέχεται 'κόσμους' που επιβεβαιώνουν αντιφάσεις, οπότε μπλοκάρεται κατ' αυτόν τον τρόπο το τελευταίο βήμα του επιχειρήματος, αφού από το γεγονός ότι ισχύει ότι $A \vee B$ και $\sim A$ δεν δικαιούμαστε να συνάγουμε ότι Α. Θεωρίες όπως του Smiley από την άλλη, επιτρέπουν να συνάγουμε από την $A \wedge \sim A$ την Β καθώς και την $\sim A$, άρα επιτρέπουν από την $A \wedge \sim A$ να καταλήξουμε στην $(A \vee B) \wedge \sim A$, επιτρέπουν από την τελευταία να συνάγουμε την Β, δεν μας επιτρέπουν όμως να ενώσουμε τις δύο τελευταίες συναγωγές ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι από την $A \wedge \sim A$ έπεται ότι Β.

Όσον αφορά το φαινόμενο της ασάφειας, θεωρίες που προτείνουν κάποια σχέση συνέπειας που δεν είναι πάντα μεταβατική έχουν μεταξύ άλλων προταθεί από τον Elia Zardini, στην διδακτορική του διατριβή, με τίτλο 'Living on the slippery slope: The nature, sources and logic of Vagueness', University of St. Andrews, και στο άρθρο 'A model for Tolerance', Zardini [2008], καθώς και από τους Cobreros, Egre, Ripley και van Rouij στο άρθρο 'Tolerant, Classical, Strict'.

Τέλος, όσον αφορά τα σημασιολογικά παράδοξα, αξίζει να αναφερθούν τα άρθρα Ripley [2012], και Ripley [2013].

συμφωνήσει και κατατάσσουν τα αντικείμενα $α_1$, …, $α_{4000}$ ως F ενώ τα $α_{6000}$, …, $α_{10000}$ ως όχι F, και για τα υπόλοιπα έχουν αφήσει το ζήτημα ανοικτό. Έστω επιπλέον ότι οι ομιλητές βρίσκονται σε ένα χαλαρό πλαίσιο συζήτησης, στο οποίο δεδομένου κάποιου αντικειμένου που ανήκει στην ακολουθία αυτοί δεν το διαχωρίζουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες από τα 500 αντικείμενα που έπονται αυτού, ούτε και από τα 500 που προηγούνται από αυτό. Δεδομένου λοιπόν ότι το αντικείμενο $α_{4000}$ είναι F δεν θα είναι δυνατό να αντικρουστούν, χωρίς να αλλάξουν τα επίπεδα ακριβείας και άρα το πλαίσιο συζήτησης, αλυσίδες που καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι και το a_{4001}, ή το $α_{4002}$, …, ή το $α_{4500}$ είναι F. Αυτό γιατί μια κατάσταση της γλώσσας που διαχωρίζει για παράδειγμα μεταξύ του a_{4000} και του a_{4400}, επιβεβαιώνοντας την πρόταση «το $α_{4000}$ είναι F» και διαψεύδοντας παράλληλα την πρόταση «το $α_{4400}$ είναι F» δεν θα είναι αποδεκτή στο τρέχον πλαίσιο. Από την άλλη, αν υποθέσουμε ότι οι ομιλητές προσπαθούν να μιλήσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια, και ότι δεδομένου ενός αντικειμένου εντός της ακολουθίας αυτοί δεν το διαχωρίζουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες από πχ τα 100 αντικείμενα που έπονται και τα 100 που προηγούνται, τότε μια αλυσίδα που καταλήγει πχ στο συμπέρασμα ότι το $α_{4400}$ ή το $α_{4500}$ είναι F θα μπορεί να αντικρουστεί αφού η προαναφερθείσα κατάσταση της γλώσσας θα είναι εδώ αποδεκτή.

Σε κάθε περίπτωση πάντως, οι ομιλητές θα μπορούν να σχηματίζουν αλυσίδες επιχειρημάτων μέχρι κάποιου μήκους χωρίς να είναι δυνατό αυτές να αντικρουστούν εντός του πλαισίου συζήτησης. Βέβαια, όπως παρατηρήσαμε και πριν, δεδομένου ενός πλαισίου συζήτησης το ζήτημα του μέχρι ποιο μήκος θα μπορεί να φτάσει μια αλυσίδα χωρίς να γίνεται αυτή να αντικρουστεί θα είναι ασαφές. Παρόλα αυτά, αν έχουμε επιλέξει ως μια πρώτη προσέγγιση να διατυπώσουμε την σημασιολογική θεωρία εντός μιας σαφούς μεταγλώσσας, και κάνοντας χρήση μιας κλασικής μεταθεωρίας, μια από τις συνέπειες που έπονται είναι ότι θα τίθεται ένα σαφές όριο στο μήκος που μια αλυσίδα μπορεί να φτάσει εντός του εκάστοτε πλαισίου συζήτησης χωρίς αυτή να γίνεται να αντικρουστεί. Θα μπορούσε βέβαια κανείς να υποστηρίξει ότι όντως το εκάστοτε πλαίσιο συζήτησης καθορίζει κάποιο σαφές όριο, και η εντύπωση περί του αντιθέτου προκύπτει από το γεγονός ότι πολλές φορές οι ομιλητές μπορεί να αλλάξουν πλαίσιο κατά την διάρκεια μιας συζήτησης. Θεωρούμε όμως πως η πραγματική αιτία των συγκεκριμένων διαισθήσεων είναι το γεγονός ότι το ζήτημα του ποιες είναι οι αποδεκτές καταστάσεις της γλώσσας, και ποιες οι φυσιολογικές, εντός κάποιου πλαισίου θα είναι ασαφές. Κατά συνέπεια, για να μπορέσουμε να περιγράψουμε εντός της μεταγλώσσας τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της γλώσσας αντικείμενο θα πρέπει η πρώτη, κατά παρόμοιο τρόπο με την δεύτερη, να μην είναι πλήρως διαμορφωμένη.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μία σαφή μεταμεταγλώσσα $\mathcal{L}^2$, και ας προσπαθήσουμε εντός αυτής να περιγράψουμε τις σημασιολογικές συνθήκες για τις διάφορες προτάσεις ασαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^1$. Ως ερμηνεία της τελευταίας θα θεωρούμε μια διατεταγμένη πεντάδα $<D^1, W^1, \sqsubseteq, Val^+, Val^->$, όπου τα μέλη της γίνονται κατανοητά με τον συνηθισμένο τρόπο. Εντός του συνόλου D^1 θεωρούμε πως περιέχονται οι διάφορες δυνατές καταστάσεις (αποδεκτές και μη) της γλώσσας αντικείμενο $\mathcal{L}^0$, και οι εκφράσεις της τελευταίας. Η $\mathcal{L}^1$ περιέχει κατάλληλα ονόματα για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$, κατηγορήματα «το x είναι έκφραση της $\mathcal{L}^0$», «το x είναι πρόταση της $\mathcal{L}^0$», «το x είναι αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$», «το x είναι φυσιολογικό επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$», σχεσιακά σύμβολα '$\vDash$', '$\Dashv$', '$\Vvdash$', και ούτω καθ' εξής. Εντός του W περιέχονται οι διάφορες δυνατές καταστάσεις της $\mathcal{L}^1$.

Ας εμβαπτίσουμε τώρα κάποιους ομιλητές εντός ενός πλαισίου συζήτησης για σωρειτική ακολουθία αντικειμένων α_1, α_2, …, α_{10000} για το κατηγόρημα 'F' της $\mathcal{L}^0$. Αυτοί συμφωνούν προσωρινά και κατατάσσουν κάποια αντικείμενα της ακολουθίας ως F ενώ κάποια άλλα ως μη F και ως εκ τούτου μεταβαίνουν σε κάποια φυσιολογική κατάσταση της $\mathcal{L}^0$. Επιπλέον, συμφωνούν προσωρινά ότι δεν μπορούν να διαχωρίσουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες αντικείμενα τα οποία απέχουν λιγότερες από 100 διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας, ενώ μπορούν να διαχωρίσουν αντικείμενα που απέχουν περισσότερες από 200 διαδοχικές θέσεις εντός της ακολουθίας. Για τις ενδιάμεσες αποστάσεις αφήνουν το ζήτημα ανοικτό. Καθορίζεται λοιπόν προσωρινά για κάποιες καταστάσεις της $\mathcal{L}^0$ ότι αυτές κατατάσσονται ως αποδεκτές, ενώ για κάποιες άλλες ότι κατατάσσονται ως μη αποδεκτές. Μια κατάσταση που θέτει εντός της έκτασης του 'F' ένα αντικείμενο και ταυτόχρονα θέτει εντός της αντιέκτασης κάποιο άλλο αντικείμενο που είναι μεν λιγότερο F αλλά το οποίο απέχει λιγότερες από 100 θέσεις από το προηγούμενο εντός της ακολουθίας θα κατατάσσεται ως μη αποδεκτή. Μια κατάσταση που εντάσσει κάποια αντικείμενα εντός της έκτασης του 'F', ενώ για κάθε αντικείμενο που εντάσσει εντός της αντιέκτασης ισχύει ότι θα απέχει τουλάχιστον 200 θέσεις εντός της ακολουθίας από το εκάστοτε αντικείμενο που έχει τεθεί στην έκταση του F θα είναι αποδεκτή. Θεωρούμε ότι μεταξύ των αποδεκτών καταστάσεων θα υπάρχει και κατάσταση w που αντιστοιχεί στον τρόπο που οι ομιλητές έχουν προσωρινά ταξινομήσει κάποια από τα αντικείμενα εντός της ακολουθίας ως F ή ως μη F.

Κατ' αυτόν τον τρόπο οι ομιλητές μεταβαίνουν σε κάποια κατάσταση w της $\mathcal{L}^0$ και ταυτόχρονα σε κάποιο φυσιολογικό σημείο w' εντός του W^1 σύμφωνα με το οποίο το w ικανοποιεί το κατηγόρημα "το x είναι φυσιολογικό". Επιπλέον, κάποιες προτάσεις της μορφής “το w είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$ “, όπου ‘w’ σταθερό σύμβολο που αναφέρεται σε αντικείμενο εντός του D^1 θα επιβεβαιώνονται από το w’, ενώ κάποιες άλλες προτάσεις αυτής της μορφής θα διαψεύδονται από αυτό. Με άλλα λόγια, στο σημείο w’, η γλώσσα $\mathcal{L}^1$ θα είναι διαμορφωμένη με τρόπο που ορισμένα αντικείμενα εντός του D^1 θα εντάσσονται στην έκταση του κατηγορήματος “το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$”, ορισμένα άλλα στην αντιέκτασή του, ενώ για τα υπόλοιπα το ζήτημα θα μένει ανοικτό. Συναρτήσει αυτού θα καθορίζεται για κάποια αντικείμενα εντός του D^1 ότι ανήκουν στην έκταση του κατηγορήματος “το x είναι μια φυσιολογική κατάσταση της $\mathcal{L}^0$” ως προς το w’. Θα προκύπτει έτσι μια πληθώρα τρόπων με βάση τους οποίους η $\mathcal{L}^1$ μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω. Παράλληλα, αντιμετωπίζουμε στο τρέχον στάδιο την μεταγλώσσα $\mathcal{L}^2$ της $\mathcal{L}^1$ ως κλασική, θεωρούμε λοιπόν πως το τρέχον πλαίσιο συζήτησης καθορίζει για κάποιο συγκεκριμένο σύνολο δυνατών καταστάσεων της $\mathcal{L}^1$ ότι αυτές είναι οι αποδεκτές, και για κάποιο υποσύνολο αυτών, που καθορίζεται με τον τρόπο που έχουμε προαναφέρει, ότι είναι φυσιολογικές. Δεδομένης άρα κάποιας ερμηνείας $<D^0, W^0, \sqsubseteq, Val^+, Val^->$ της $\mathcal{L}^0$, κάποιας ερμηνείας $<D^1, W^1, \sqsubseteq, Val^+, Val^->$ της $\mathcal{L}^1$ και ενός πλαισίου συζήτησης, καθορίζεται κάποιο υποσύνολο του W^1 ως εκείνο που περιέχει ακριβώς τις αποδεκτές καταστάσεις της $\mathcal{L}^1$ και κάποιο υποσύνολο αυτού ως εκείνο που περιέχει ακριβώς εκείνες τις καταστάσεις της $\mathcal{L}^1$ που είναι φυσιολογικές. Αυτό με την σειρά του καθορίζει τις συνθήκες αλήθειας των διαφόρων προτάσεων της $\mathcal{L}^1$ που περιέχουν τα κατηγορήματα “το x είναι αποδεκτό” και “το x είναι φυσιολογικό” δεδομένου κάποιου επιπέδου διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, και το κάθε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ καθορίζει με την σειρά του τις συνθήκες αλήθειας για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ συναρτήσει του εκάστοτε επιπέδου διαμόρφωσης της τελευταίας.

Θεωρούμε λοιπόν ότι ‘F’ κατηγόρημα της $\mathcal{L}^0$, ‘a’ σταθερό σύμβολο αυτής, $<D^0, W^0, \sqsubseteq, Val^+, Val^->$ ερμηνεία της $\mathcal{L}^0$ και $<D^1, W^1, \sqsubseteq, Val^+, Val^->$ ερμηνεία της μη πλήρως διαμορφωμένης μεταγλώσσας $\mathcal{L}^1$, ενώ από την άλλη η μεταμεταγλώσσα $\mathcal{L}^2$ είναι πλήρως διαμορφωμένη. Έστω επίσης πλαίσιο συζήτησης εντός του οποίου οι ομιλητές συζητούν για την πιο πάνω σωρειτική ακολουθία, και έστω ότι αυτοί μεταβαίνουν στην κατάσταση w της $\mathcal{L}^0$ και ταυτόχρονα στην κατάσταση w’ της $\mathcal{L}^1$, έπεται με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει ότι τα συγκεκριμένα σημεία θα πρέπει να κατατάσσονται ως φυσιολογικά.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε και να υπολογίσουμε συνθήκες αλήθειας προτάσεων της $\mathcal{L}^0$ λαμβάνοντας υπόψη και την διαμόρφωση της $\mathcal{L}^1$.

Στα παρακάτω, οι εκθέτες στις παρενθέσεις δείχνουν σε ποια γλώσσα ανήκει η πρόταση που αυτές περιέχουν. Για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι οι $\mathcal{L}^0$ και $\mathcal{L}^1$ περιέχουν όνομα για κάθε αντικείμενο εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών τους.

Θα είναι:

1. $[w' \Vdash [$ (w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow [\forall z$ ((z είναι αποδεκτό)$\wedge\in(z, W)\wedge\sqsubseteq(w, z))\rightarrow \sim(z\dashv Fa))^1 \rightarrow (w\Vdash Fa)^1\,]^1\,]^1\,]^2$ αν και μόνο αν είναι
2. [Για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w'\sqsubseteq z'$ ισχύει ότι $\sim$ ($z'\vDash$(w είναι φυσιολογικό) και $z'\dashv[\forall z(($ (z είναι αποδεκτό)$\wedge\in(z, W)\wedge\sqsubseteq(w, z))\rightarrow\sim(z\dashv Fa)\,)^1 \rightarrow\ (w\Vdash Fa)^1\ ]^1)\,]^2$ αν και μόνο αν
3. [Για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w'\sqsubseteq z'$ ισχύει ότι $\sim$ ($z'\vDash$(w είναι φυσιολογικό) και $z'\vDash\forall z(($ (z είναι αποδεκτό)$\wedge\in(z, W)\wedge\sqsubseteq(w, z))\rightarrow\sim(z\dashv Fa)\,)$ και $z'\dashv(w\Vdash Fa)^1\ )\ ]^2$ αν και μόνο αν
4. [Για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w'\sqsubseteq z'$ ισχύει ότι $\sim$ ($z'\vDash$(w είναι φυσιολογικό) και $z'\vDash\forall z(($ (z είναι αποδεκτό)$\wedge\in(z, W)\wedge\sqsubseteq(w, z))\rightarrow \sim(Val^+(z,a)\in Val^-(z, F))\,)$ και $z'\dashv(w\Vdash Fa)^1\,)\ \ ]^2$ αν και μόνο αν
5. [Για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w'\sqsubseteq z'$ ισχύει ότι $\sim$ ($z'\vDash$(w είναι φυσιολογικό) και για κάθε ατομική σταθερά c της $\mathcal{L}^1$ είναι $\sim[\ z'\vDash($ (c είναι αποδεκτό)$\wedge\ \in(W, (c))\wedge\ \sqsubseteq(w, (c))\ )$ και $z'\dashv\sim(Val^+((c),a)\in Val^-((c), F)\ )]^2$ και $z'\dashv(w\Vdash Fa)^1\,)\ \ ]^2$ αν και μόνο αν
6. [Το w' είναι φυσιολογικό και για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w'\sqsubseteq z'$ ισχύει ότι $\sim$ ($z'\vDash$(w είναι φυσιολογικό) και για κάθε ατομική σταθερά c της $\mathcal{L}^1$ ισχύει ότι $\sim[\ z'\vDash($ (c είναι αποδεκτό)$\wedge\ \in(W, (c))\wedge\ \sqsubseteq(w, (c))\ )$ και $z'\vDash(Val^+((c),a)\in Val^-((c), F)\ )]^2$ και $z'\dashv(w\Vdash Fa)^1\ )\ ]^2$ αν και μόνο αν
7. [Το w' είναι φυσιολογικό και για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w'\sqsubseteq z'$ ισχύει ότι ($\sim z'\vDash$(w είναι φυσιολογικό)) ή για κάποια ατομική σταθερά c της $\mathcal{L}^1$ ισχύει ότι είναι $[z'\vDash(($c είναι αποδεκτό)$\wedge\ \in(W, (c))\wedge\ \sqsubseteq(w, (c))\ )$ και $z'\vDash(Val^+((c),a)\in Val^-((c), F)\ )]^2$ ή $\sim(z'\dashv(w\Vdash Fa)^1)^2\ ]^2$

Ας υποθέσουμε εδώ ότι η πρόταση 1 είναι αληθής. Εξετάζοντας την πρόταση 7 παρατηρούμε ότι η υποπρόταση που εμφανίζεται εντός της δεύτερης αγκύλης έχει μορφή διάζευξης. Το δεύτερο μέλος της διάζευξης είναι η πρόταση " για κάποια ατομική σταθερά c της $\mathcal{L}^1$ ισχύει ότι είναι $[z'\vDash(($c είναι αποδεκτό)$\wedge\ \in(W, (c))\wedge\ \sqsubseteq(w, (c))\ )$ και $z'\vDash(Val^+((c),a)\in Val^-((c), F)\ )]^2$". Ας θεωρήσουμε τυχόν αποδεκτό σημείο z' που επεκτείνει το w' τέτοιο ώστε για κάθε ατομική σταθερά c της $\mathcal{L}^1$ δεν είναι [$z' \models$((c είναι αποδεκτό) $\wedge$ ($\in$(W, (c))$\wedge$ $\sqsubseteq$(W, (c))) και $z' \models$ (Val^+((c),a)$\in Val^-$((c), F))]. Με άλλα λόγια σύμφωνα με την z' δεν υπάρχει κατάσταση της $\mathcal{L}^0$ που είναι αποδεκτή, επεκτείνει την κατάσταση w, και κατατάσσει το αντικείμενο της σωρειτικής ακολουθίας στο οποίο αναφέρεται το σταθερό σύμβολο 'a' στην αντιέκταση του κατηγορήματος 'F'. Επιπλέον, έστω ότι σύμφωνα με το w' η κατάσταση w είναι φυσιολογική. Αυτό είναι κάτι που θα πρέπει να ισχύει, αφού θεωρούμε ότι εντός του τρέχοντος πλαισίου συζήτησης οι ομιλητές έχουν μεταβεί στο σημείο w' και ταυτόχρονα στο w. Θα πρέπει λοιπόν το w' να είναι φυσιολογικό, και επιπλέον να κατατάσσει το w στην έκταση του κατηγορήματος "το x είναι φυσιολογικό". Εφόσον το συγκεκριμένο κατηγόρημα ανήκει στην μεταγλώσσα $\mathcal{L}^1$, έπεται με βάση τις συνθήκες που έχουμε θέσει για τις γλώσσες $\mathcal{L}^0$ και $\mathcal{L}^1$ ότι κάθε σημείο που επεκτείνει το w' θα κατατάσσει την w ως φυσιολογική. Θα ισχύει λοιπόν και για την z' ότι αυτή κατατάσσει την w ως φυσιολογική οπότε καταλήγουμε με διαζευκτικό συλλογισμό (disjunctive syllogism) ότι θα ισχύει πως $\sim(z' \Dashv (w \Vdash Fa)^1)^2$. Έπεται ότι αν για κάθε αποδεκτή επέκταση της w' ισχύει ότι δεν υπάρχει κατάσταση της $\mathcal{L}^0$ που είναι αποδεκτή, επεκτείνει την κατάσταση w, και κατατάσσει το αντικείμενο της σωρειτικής ακολουθίας στο οποίο αναφέρεται το σταθερό σύμβολο 'a' στην αντιέκταση του κατηγορήματος 'F' τότε θα είναι [Το w' είναι φυσιολογικό και για κάθε αποδεκτό z' που ανήκει στο W^1 τέτοιο ώστε να είναι $w' \sqsubseteq z'$ ισχύει ότι $\sim(z' \Dashv (w \Vdash Fa)^1)^2$ $]^2$, το οποίο μπορούμε να γράψουμε και ως $(w' \Vdash (w \Vdash Fa)^1)^2$.

Τι σημαίνει το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε; Όπως είδαμε, το σημείο w' κατατάσσει κάποια αντικείμενα που ανήκουν στο D^1, στην έκταση του κατηγορήματος "το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$". Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη έκταση αντιμετωπίζεται εδώ ως προσωρινή, απλά μια έκταση που ανατίθεται προσωρινά στο συγκεκριμένο κατηγόρημα όταν η ασαφής μεταγλώσσα $\mathcal{L}^1$ βρίσκεται στο επίπεδο διαμόρφωσης w'. Κατά παρόμοιο τρόπο κατατάσσει κάποια από τα αντικείμενα που ανήκουν στο D^1 στην αντιέκταση του κατηγορήματος "το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$", ενώ για τα υπόλοιπα αφήνει το ζήτημα ανοικτό. Εφόσον η $\mathcal{L}^1$ δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, το αν η πρόταση '$w \Vdash Fa$' είναι αληθής ή ψευδής στο συγκεκριμένο σημείο θα εξαρτάται από το πώς την αντιμετωπίζουν οι αποδεκτές καταστάσεις της $\mathcal{L}^1$ που το επεκτείνουν. Επιπλέον, ισχύει ότι μια κατάσταση της $\mathcal{L}^1$ που κατατάσσει κάποια κατάσταση w της $\mathcal{L}^0$ στην έκταση του κατηγορήματος "το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$", ενώ ταυτόχρονα κατατάσσει στην αντιέκταση του ίδιου κατηγορήματος μια άλλη κατάσταση w' της $\mathcal{L}^0$ που με βάση τα επίπεδα ακριβείας της συζήτησης δεν μπορεί να διακριθεί από την w, θα πρέπει να κατατάσσεται ως μη αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^1$. Αν λοιπόν δεν υπάρχει αποδεκτή κατάσταση που επεκτείνει το w′ τέτοια ώστε ανάμεσα στα αντικείμενα που αυτή κατατάσσει στην έκταση του “το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$” να υπάρχει και κάποιο που επεκτείνει το w και θέτει το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το σταθερό σύμβολο ‘a’ της $\mathcal{L}^0$ στην αντιέκταση του κατηγορήματος ‘F’, τότε η πρόταση ‘w$\Vdash$Fa’ θα προκύπτει αληθής στο w′. Με άλλα λόγια, η ‘w$\Vdash$Fa’ θα προκύπτει αληθής στο w′ αν η ‘Fa’ δεν γίνεται να διαψευστεί από αποδεκτή επέκταση του w, με όποιον αποδεκτό τρόπο και αν διαμορφωθεί περαιτέρω η έκταση του κατηγορήματος “το x είναι αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$“.

Κατά παρόμοιο τρόπο, αν είναι [w′$\Vdash$ [(w είναι φυσιολογικό) $\rightarrow$ [$\exists$z ((z είναι αποδεκτό)$\wedge\in$(z, W)$\wedge\sqsubseteq$(w, z) $\wedge$ z$\dashv$Fa $)^1$ $\rightarrow$ $\sim$(w$\Vdash$Fa$)^1$ $]^1$ $]^1$ $]^2$ τότε θα προκύπτει ότι αν ισχύει για κάθε αποδεκτή επέκταση του w′ ότι ανάμεσα στα αντικείμενα που αυτή κατατάσσει στην έκταση του “το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$” υπάρχει και κάποιο που επεκτείνει το w και θέτει το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το σταθερό σύμβολο ‘a’ της $\mathcal{L}^0$ στην αντιέκταση του κατηγορήματος ‘F’ τότε η ‘w$\Vdash$Fa’ είναι ψευδής στο w′. Με άλλα λόγια, η ‘w$\Vdash$Fa’ είναι ψευδής στο w′ αν η ‘Fa’ γίνεται πάντα να διαψευστεί από αποδεκτή επέκταση του w, με όποιον αποδεκτό τρόπο και αν διαμορφωθεί περαιτέρω η έκταση του κατηγορήματος “το x είναι αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$“. Τέλος, αν για κάποιες αποδεκτές επεκτάσεις του w′ ισχύει ότι ανάμεσα στα αντικείμενα που αυτές κατατάσσουν στην έκταση του “το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$” υπάρχει κάποιο που επεκτείνει το w και θέτει το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το σταθερό σύμβολο ‘a’ της $\mathcal{L}^0$ στην αντιέκταση του κατηγορήματος ‘F’, ενώ για κάποιες άλλες αποδεκτές επεκτάσεις του w′ ισχύει ότι κάθε ένα από τα αντικείμενα που αυτές κατατάσσουν στην έκταση του “το x είναι μια αποδεκτή κατάσταση της $\mathcal{L}^0$” και επεκτείνει το w δεν θέτει το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το σταθερό σύμβολο ‘a’ της $\mathcal{L}^0$ στην αντιέκταση του κατηγορήματος ‘F’, τότε η ‘w$\Vdash$Fa’ δεν θα προκύπτει αληθής στο w′, αλλά ούτε και ψευδής. Με βάση αυτά, θα έχουμε ότι κάποιες από τις προτάσεις με μορφή όπως αυτή της ‘w$\Vdash$Fa’ θα προκύπτουν αληθείς στο w′, κάποιες ψευδείς, ενώ για κάποιες άλλες το ζήτημα θα μένει ανοικτό.

3.1.1 Περαιτέρω μελέτη του συστήματος

Επιστρέφοντας τώρα στο επίπεδο της γλώσσας $\mathcal{L}^0$, πρέπει να προσδιορίσουμε περαιτέρω ποιες προτάσεις είναι λογικά αληθείς και ποιες μορφές επιχειρημάτων λογικά έγκυρες. Καταρχάς το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι, σε παραλληλία με την περίπτωση της σχέσης λογικής συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας, δεν ισχύει η μεταβατικότητα της συνεπαγωγής. Με άλλα λόγια, για προτάσεις Α, Β, Γ της γλώσσας, δεν θα ισχύει ότι ένα επιχείρημα της μορφής $A \to B,\ B \to \Gamma \Vdash A \to \Gamma$ δεν μπορεί ποτέ να αντικρουστεί, και άρα δεν θα ισχύει ότι η συγκεκριμένη μορφή επιχειρήματος είναι λογικά έγκυρη.

Πράγματι, για μοντέλο $\mathcal{M}$ θα είναι $A \to B,\ B \to \Gamma \Vdash A \to \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w((w$ φυσιολογικό$) \to \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \to \sim((z \vDash A \to B \wedge B \to \Gamma) \wedge (z \dashv A \to \Gamma)))$. Έστω w φυσιολογικό σημείο, τότε η πρόταση '$\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \to \sim((z \vDash A \to B \wedge B \to \Gamma) \wedge (z \dashv A \to \Gamma)))$' μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \to \sim((z \vDash \sim((A \to B) \to \sim (B \to \Gamma)) \wedge (z \dashv A \to \Gamma)))$ και άρα ως $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \to \sim((z \dashv ((A \to B) \to \sim (B \to \Gamma)) \wedge (z \dashv A \to \Gamma)))$. Το τελευταίο με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με την $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \to \sim((z \vDash (A \to B) \wedge z \vDash (B \to \Gamma)) \wedge (z \dashv A \to \Gamma)))$. Καταλήξαμε λοιπόν ότι δεδομένου ενός φυσιολογικού σημείου w, θα είναι $A \to B,\ B \to \Gamma \Vdash A \to \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \to \sim((z \vDash (A \to B) \wedge z \vDash (B \to \Gamma)) \wedge (z \dashv A \to \Gamma)))$. Στο συγκεκριμένο σημείο είναι πλέον εμφανές ότι μπορεί να υπάρξουν περιπτώσεις για τις οποίες το δεξί μέλος αυτής της πρότασης με μορφή διπλής συνεπαγωγής προκύπτει ψευδές. Πράγματι, όπως και στην περίπτωση της σχέσης συνέπειας, αρκεί να θεωρήσουμε ότι η γλώσσα περιέχει ως μόνα μη λογικά σύμβολα το κατηγορηματικό 'F' και τις ατομικές σταθερές 'a_1', 'a_2', 'a_3' , 'a_4', 'a_5', καθώς και την ερμηνεία που περιγράφουμε στις σελίδες 129-130. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα ισχύει ότι $w \vDash F\alpha_1 \to F\alpha_2$, αφού δεν υπάρχει αποδεκτό αντικείμενο που επεκτείνει το w τέτοιο ώστε αυτό να επιβεβαιώνει την $F\alpha_1$ και να διαψεύδει την $F\alpha_2$. Κατά παρόμοιο τρόπο, θα ισχύει ότι $w \vDash F\alpha_2 \to F\alpha_3$. Παρόλα αυτά, δεν θα ισχύει ότι $w \vDash F\alpha_1 \to F\alpha_3$ αφού το w_2 είναι αποδεκτό, επεκτείνει το w, και επιπλέον επιβεβαιώνει την $F\alpha_1$ ενώ ταυτόχρονα διαψεύδει την $F\alpha_3$.

Βλέπουμε λοιπόν, και εξάλλου είναι εμφανές από τον τρόπο που έχουν διατυπωθεί οι αντίστοιχες σημασιολογικές συνθήκες, ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση μεταξύ των ιδιοτήτων που διέπουν την σχέση λογικής συνέπειας της γλώσσας και αυτών που διέπουν τον σύνδεσμο της συνεπαγωγής. Φαίνεται άρα ότι και ο μετά-κανόνας conditional proof θα πρέπει να προκύπτει έγκυρος, για προτάσεις Α, Β, Γ της γλώσσας θα ισχύει δηλαδή ότι $A, B \Vdash \Gamma$ αν και μόνο αν $A \Vdash B \rightarrow \Gamma$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι θα είναι $A, B \Vdash \Gamma$ αν και μόνο αν ισχύει πως $\forall w($ $(w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \vDash A \wedge B) \wedge (z \dashv \Gamma))))$. Δηλαδή $\forall w($ $(w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \vDash \sim(A \rightarrow \sim B)) \wedge (z \dashv \Gamma))))$ και άρα $\forall w((w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \dashv (A \rightarrow \sim B)) \wedge (z \dashv \Gamma))))$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την πρόταση $\forall w((w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \vDash A) \wedge (z \vDash B) \wedge (z \dashv \Gamma))))$. Από την άλλη, θα είναι $A \Vdash B \rightarrow \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w((w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \vDash A) \wedge (z \dashv B \rightarrow \Gamma))))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w((w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \vDash A) \wedge (z \vDash B) \wedge (z \dashv \Gamma))))$, και άρα αν και μόνο αν είναι $A \Vdash B \rightarrow \Gamma$.

Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι για τυχούσα φυσιολογική διαμόρφωση w και πρόταση Α, δεν θα ισχύει ότι η $A \wedge \sim A$ προκύπτει αληθής ως προς αυτή. Θα είναι $w \Vdash A \wedge \sim A$ αν και μόνο αν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \dashv A \wedge \sim A))$, ανν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \dashv \sim(A \rightarrow \sim\sim A)))$, ανν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \vDash (A \rightarrow \sim\sim A)))$, ανν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(\sim(z \vDash A \wedge z \dashv A)))$, $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow (z \vDash A \wedge z \dashv A))$. Το τελευταίο όμως είναι κάτι που εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι ψευδές, εξετάζοντας τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης για τις διάφορες μορφές προτάσεων. Μάλιστα, η πρόταση $\sim(A \wedge \sim A)$ θα είναι πάντα αληθής ως προς φυσιολογικό επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας. Πράγματι, θα είναι $w \Vdash \sim(A \wedge \sim A)$ αν και μόνο αν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \dashv \sim(A \wedge \sim A)))$, ανν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \vDash \sim(A \rightarrow \sim\sim A)))$, ανν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \dashv (A \rightarrow \sim\sim A)))$, ανν $\forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim(z \vDash A \wedge z \dashv A))$. Το τελευταίο όμως έπεται μέσω επαγωγής ως προς την πολυπλοκότητα της πρότασης Α, με βάση τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης που έχουμε ορίσει για τις διάφορες μορφές προτάσεων της γλώσσας, ότι είναι αληθές. Με ανάλογο τρόπο έπεται ότι θα είναι πάντα αληθείς ως προς φυσιολογικό επίπεδο διαμόρφωσης και προτάσεις της μορφής $A \vee \sim A$.

Εξετάζουμε τώρα ποιες άλλες μορφές επιχειρημάτων προκύπτουν έγκυρες με βάση την σημασιολογία που έχουμε διατυπώσει.

Contraposition: Ο κανόνας $A \rightarrow B \Vdash \sim B \rightarrow \sim A$ προκύπτει έγκυρος.

Πράγματι, θα είναι $A \rightarrow B \Vdash \sim B \rightarrow \sim A$ αν και μόνο αν $\forall w($ $(w$ φυσιολογικό$) \rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge (z$ αποδεκτό$) \rightarrow \sim((z \vDash A \rightarrow B) \wedge (z \dashv \sim B \rightarrow \sim A))))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w($ $(w$

φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((\sim(z\vDash A\wedge z\Dashv B)\wedge(z\Dashv B\wedge z \vDash A))))$. Είναι όμως προφανές ότι η πρόταση ‘$\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((\sim(z\vDash A\wedge z\Dashv B)\wedge(z\Dashv B\wedge z \vDash A))))$’ είναι αληθής και άρα καταλήγουμε ότι όντως θα είναι $A\to B\mid\vDash\sim B\to\sim A$.

Ανάλογα έχουμε και ότι:

Μετακανόνας Contraposition: Είναι $A, B\mid\vDash\Gamma$ αν και μόνο αν $A, \sim\Gamma \mid\vDash\sim B$

Πράγματι, είναι $A, B\mid\vDash\Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash A\wedge B)\wedge(z\Dashv\Gamma))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash\sim(A\to\sim B))\wedge(z\Dashv\Gamma))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim(z\vDash A \wedge z\vDash B \wedge z\Dashv\Gamma)))$. Από την άλλη έχουμε ότι $A, \sim\Gamma \mid\vDash\sim B$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash A\wedge\sim\Gamma)\wedge(z\Dashv\sim B))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash \sim (A\to\sim\sim\Gamma))\wedge(z\Dashv\sim B))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim(z\vDash A \wedge z\Dashv\Gamma \wedge z\vDash B)))$. Άρα όντως είναι $A, B\mid\vDash\Gamma$ αν και μόνο αν $A, \sim\Gamma \mid\vDash\sim B$.

Simplification: Οι κανόνες $A\wedge B\mid\vDash A$ και $A\wedge B\mid\vDash B$ προκύπτουν έγκυροι.

Πράγματι, έχουμε $A\wedge B\mid\vDash A$ αν και μόνο αν είναι $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash A\wedge B)\wedge(z\Dashv A))))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash \sim(A\to\sim B))\wedge(z\Dashv A))))$, που μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash A\wedge z\vDash B))\wedge(z\Dashv A))))$. Το τελευταίο όμως είναι αληθές, άρα όντως θα έχουμε $A\wedge B\mid\vDash A$. Ανάλογα και για το $A\wedge B\mid\vDash B$.

Addition: Οι κανόνες $A\mid\vDash A\vee B$ και $B\mid\vDash A\vee B$ προκύπτουν έγκυροι.

Θα είναι $A\mid\vDash A\vee B$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash A)\wedge(z\Dashv A\vee B))))$ που μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα ως $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim((z\vDash A)\wedge(z\Dashv \sim A\to B))))$ και το οποίο θα ισχύει αν και μόνο αν είναι $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\to\forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\to \sim(z\vDash A\wedge z\Dashv A\wedge z\Dashv B)))$. Το τελευταίο είναι ξεκάθαρα αληθές, άρα όντως θα είναι $A\mid\vDash A\vee B$. Ανάλογα και για το $B\mid\vDash A\vee B$.

Σύζευξη στις προκείμενες: Αν είναι $A, B\mid\vDash\Delta$ τότε θα ισχύει και ότι $A, B\wedge\Gamma \mid\vDash\Delta$, και αν είναι $A, \Gamma\mid\vDash\Delta$ τότε θα ισχύει και ότι $A, B\wedge\Gamma \mid\vDash\Delta$.

Θα είναι A, B⊫Δ αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ∼((z⊧ A∧B)∧(z⫤ Δ)))), δηλαδή αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ∼((z⊧ ∼(A→∼B))∧(z⫤ Δ)))) που γράφεται ισοδύναμα ως ∀w((w φυσιολογικό)→∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ∼((z⊧A∧ z⊧B))∧(z⫤ Δ)))). Έστω από την άλλη ότι δεν ισχύει πως A, B∧Γ ⊫Δ, θα είναι άρα ∃w((w φυσιολογικό)∧∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧((z⊧ A∧(B∧Γ)∧(z⫤ Δ)))) που είναι ισοδύναμο με ∃w((w φυσιολογικό)∧∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧((z⊧ A∧ z⊧ B∧ z⊧Γ)∧(z⫤ Δ)))). Έστω c φυσιολογικό σημείο που συγκεκριμενοποιεί τον παραπάνω υπαρκτικό ποσοδείκτη, και c' που συγκεκριμενοποιεί τον δεύτερο υπαρκτικό ποσοδείκτη και άρα είναι αποδεκτό και επεκτείνει το c. Τότε θα είναι c'⊧ A∧ c'⊧ B∧ c'⊧Γ ∧ c'⫤ Δ, άρα c'⊧ A∧ c'⊧ B∧ c'⫤ Δ. Από την ∀w((w φυσιολογικό)→∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ∼((z⊧A∧ z⊧B))∧(z⫤ Δ)))) με συγκεκριμενοποίηση των καθολικών ποσοδεικτών και modus ponens έχουμε ότι θα είναι ∼(c'⊧A∧ c'⊧B∧c'⫤ Δ), κάτι που αντιφάσκει με την c'⊧ A∧ c'⊧ B∧ c'⫤ Δ. Καταλήγουμε λοιπόν ότι όντως αν είναι A, B⊫Δ τότε θα είναι και A, B∧Γ ⊫Δ. Ανάλογα και για την άλλη περίπτωση.

Διάζευξη στο συμπέρασμα: Αν είναι A, B⊫Δ τότε θα ισχύει και ότι A, B⊫Δ∨Γ, και αν είναι A, B⊫Γ τότε θα ισχύει και ότι A, B⊫Δ∨Γ.

Θα είναι A, B⊫Δ αν και μόνο αν ως ∀w((w φυσιολογικό)→∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ∼((z⊧A∧ z⊧B))∧(z⫤ Δ)))). Έστω από την άλλη ότι δεν ισχύει πως A, B⊫Δ∨Γ οπότε έπεται ότι θα είναι ∃w((w φυσιολογικό)∧∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧((z⊧ A∧B)∧(z⫤ Δ∨Γ)))), το οποίο είναι ισοδύναμο με την ∃w((w φυσιολογικό)∧∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧((z⊧ ∼(A→∼B))∧(z⫤ ∼Δ→Γ)))), το οποίο με την σειρά του είναι ισοδύναμο με την ∃w((w φυσιολογικό)∧∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧((z⊧ A∧ z⊧ B))∧(z⫤Δ∧ z⫤Γ)))). Έστω φυσιολογικό σημείο c που συγκεκριμενοποιεί τον πρώτο από τους πιο πάνω υπαρκτικούς ποσοδείκτες, και σημείο c' που συγκεκριμενοποιεί τον δεύτερο υπαρκτικό ποσοδείκτη και άρα είναι αποδεκτό και επεκτείνει το c. Έπεται ότι θα είναι c'⊧ A ∧ c'⊧ B ∧ c'⫤Δ ∧ c'⫤Γ, άρα θα είναι c'⊧ A ∧ c'⊧ B ∧ c'⫤Δ. Από την ∀w((w φυσιολογικό)→∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ∼((z⊧A∧ z⊧B))∧(z⫤ Δ)))) έπεται όμως με συγκεκριμενοποίηση των καθολικών ποσοδεικτών και modus ponens ότι θα είναι ∼(c'⊧A ∧ c'⊧B ∧ c'⫤ Δ), που αντιφάσκει με την c'⊧ A ∧ c'⊧ B ∧ c'⫤Δ. Θα ισχύει άρα ότι αν A, B⊫Δ τότε A, B⊫Δ∨Γ. Ανάλογα και για την άλλη περίπτωση.

De Morgan: Οι παρακάτω κανόνες προκύπτουν έγκυροι.

α. A∨B⊫∼(∼A∧∼B)

β. $A \wedge B \Vdash \sim(\sim A \vee \sim B)$

γ. $\sim(A \vee B) \Vdash \sim A \wedge \sim B$

δ. $\sim(A \wedge B) \Vdash \sim A \vee \sim B$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση α. Θα είναι $A \vee B \Vdash \sim(\sim A \wedge \sim B)$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash A \vee B) \wedge (z \dashv \sim(\sim A \wedge \sim B)))))$, το οποίο γράφεται ισοδύναμα $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash \sim A \rightarrow B) \wedge (z \dashv \sim(\sim(\sim A \rightarrow \sim\sim B))))))$. Αυτό με την σειρά του θα ισχύει αν και μόνο αν είναι $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash \sim A \rightarrow B) \wedge (z \dashv (\sim A \rightarrow \sim\sim B)))))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(\sim(z \dashv A \wedge z \dashv B) \wedge (z \dashv A \wedge z \dashv B))))$. Το τελευταίο όμως είναι προφανώς αληθές. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι ανάλογες.

Double Negation Introduction: Ο κανόνας $A \Vdash \sim\sim A$ είναι έγκυρος.

Πράγματι, θα είναι $A \Vdash \sim\sim A$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash A) \wedge (z \dashv \sim\sim A))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash A) \wedge (z \dashv A))))$, που είναι προφανώς αληθές.

Double Negation Elimination: Ο κανόνας $\sim\sim A \Vdash A$ είναι έγκυρος.

Θα είναι $\sim\sim A \Vdash A$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash \sim\sim A) \wedge (z \dashv A))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z \vDash A) \wedge (z \dashv A))))$, που είναι προφανώς αληθές.

Άρνηση στις Προκείμενες: Θα ισχύει ότι $A \Vdash B \vee \Gamma$ αν και μόνο αν $A, \sim B \Vdash \Gamma$

Πράγματι, έχουμε ότι θα είναι $A \Vdash B \vee \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z \vDash A \wedge z \dashv (B \vee \Gamma))))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z \vDash A \wedge z \dashv (\sim B \rightarrow \Gamma))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z \vDash A \wedge z \dashv B \wedge z \dashv \Gamma)))$. Από την άλλη, θα είναι $A, \sim B \Vdash \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z \vDash (A \wedge \sim B) \wedge z \dashv \Gamma)))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z \vDash \sim(A \rightarrow \sim\sim B) \wedge z \dashv \Gamma)))$, αν και μόνο αν αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w \sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z \vDash A \wedge z \dashv B \wedge z \dashv \Gamma)))$. Έπεται ότι θα είναι $A \Vdash B \vee \Gamma$ αν και μόνο αν $A, \sim B \Vdash \Gamma$.

Άρνηση στο Συμπέρασμα: Θα ισχύει ότι $A \wedge B \Vdash \Gamma$ αν και μόνο αν $A \Vdash \Gamma \vee \sim B$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι θα είναι Α∧Β|⊨Γ αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧ Α∧Β ∧ z⫤Γ))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧ ~(Α→~Β) ∧ z⫤Γ))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧Α ∧ z⊧Β ∧ z⫤Γ))). Από την άλλη, θα είναι Α|⊨Γ ∨ ~Β αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧Α ∧ z⫤(Γ ∨ ~Β)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧Α ∧ z⫤(~ Γ → ~Β)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧Α ∧ z⫤Γ ∧ z⊨Β))). Καταλήγουμε άρα ότι όντως θα ισχύει ότι Α∧Β|⊨Γ αν και μόνο αν Α|⊨Γ ∨ ~Β.

Adjunction: Ο κανόνας Α, Β|⊨Α∧Β είναι έγκυρος.

Πράγματι, αυτό έπεται τετριμμένα από τους ορισμούς που έχουμε δώσει.

Βλέπουμε κατ' αυτόν τον τρόπο ότι η λογική που προκύπτει έγκυρη με βάση την σημασιολογική θεωρία που έχουμε δώσει δέχεται ως έγκυρους αρκετούς κανόνες που είναι έγκυροι και σύμφωνα με την κλασική λογική, και για των οποίων την εγκυρότητα φαίνεται με βάση τις διαισθήσεις μας ότι δεν έχουμε λόγους να αμφιβάλλουμε για τις περιπτώσεις που βρισκόμαστε εντός ασαφών πλαισίων. Επιπλέον, με βάση τις σημασιολογικές συνθήκες που έχουμε διατυπώσει, όπως διαπιστώσαμε προκύπτει έγκυρο το deduction theorem. Από το συγκεκριμένο γεγονός έπεται ότι και οι προτάσεις που προκύπτουν από τις μορφές επιχειρημάτων που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του '|⊨' με το σύμβολο '→' και κάθε εμφάνιση του σημείου στίξης ',' με το σύμβολο '∧' θα είναι αληθείς σε κάθε φυσιολογικό σημείο.

Παρατηρούμε τώρα το εξής:

Distributivity of conjunction: Ο κανόνας Α∧(Β∨Γ)|⊨(Α∧Β)∨(Α∧Γ) δεν προκύπτει έγκυρος.

Έχουμε τα εξής, θα είναι Α∧(Β∨Γ)|⊨(Α∧Β)∨(Α∧Γ) αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧Α∧(Β∨Γ) ∧ z⫤(Α∧Β)∨(Α∧Γ)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧~(Α→~(~Β→Γ)) ∧ z⫤~(~(Α→~Β))→ ~(Α→~Γ)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧Α∧~(z⫤Β∧ z⫤Γ) ∧ ~(z⊧Α∧ z⊧Β)∧ ~(z⊧Α∧ z⊧Γ)))). Προκειμένου το τελευταίο να μην ισχύει, αρκεί να έχουμε ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ (z⊧Α∧~(z⫤Β∧ z⫤Γ) ∧ ~(z⊧Α∧ z⊧Β)∧ ~(z⊧Α∧ z⊧Γ)))). Αρκεί όμως για αυτό να θεωρήσουμε μοντέλο τέτοιο ώστε σημείο c να είναι φυσιολογικό, και να υπάρχει αποδεκτό σημείο c' που το επεκτείνει τέτοιο ώστε να είναι c’⊨A, ενώ οι προτάσεις B, Γ να είναι οριακές περιπτώσεις ως προς αυτό. Έπεται λοιπόν ότι δεν θα ισχύει πάντα ότι A∧(B∨Γ)⊫(A∧B)∨(A∧Γ), και άρα ο συγκεκριμένος κανόνας δεν προκύπτει έγκυρος.

Από την άλλη, ο κανόνας (A∧B)∨(A∧Γ)⊫A∧(B∨Γ) είναι έγκυρος.

Πράγματι, θα είναι (A∧B)∨(A∧Γ)⊫A∧(B∨Γ) αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊨(A∧B)∨(A∧Γ) ∧ z⫤ A∧(B∨Γ)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊨~~(A→~B)→~(A→~Γ) ∧ z⫤ ~(A→~ (B→ ~Γ))))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(~(z⊨(A→~B)∧ z⊨ (A→~Γ)) ∧ ~(z⊨A∧ z⊨ (~B→ Γ))))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(~(~(z⊨A∧z⊨B)∧ ~(z⊨A∧z⊨Γ)) ∧ ~(z⊨A∧ ~(z⫤B ∧ z⫤Γ))))). Έστω λοιπόν ότι το τελευταίο δεν ισχύει, θα είναι ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ (~(~(z⊨A∧z⊨B)∧ ~(z⊨A∧z⊨Γ)) ∧ ~(z⊨A∧ ~(z⫤B ∧ z⫤Γ))))). Έστω c, c’ σημεία που συγκεκριμενοποιούν τον πρώτο και δεύτερο αντίστοιχα από τους πιο πάνω υπαρκτικούς ποσοδείκτες. Θα ισχύει ότι ((c φυσιολογικό)∧ (c⊑c’ ∧ (c’ αποδεκτό)∧ (~(~(c’⊨A∧c’⊨B)∧ ~(c’⊨A∧c’⊨Γ)) ∧ ~(c’⊨A∧ ~(c’⫤B ∧ c’⫤Γ))))), και με simplification έχουμε (~(~(c’⊨A∧c’⊨B)∧ ~(c’⊨A∧c’⊨Γ)) ∧ ~(c’⊨A∧ ~(c’⫤B ∧ c’⫤Γ))). Θα ισχύει λοιπόν ότι ~(~(c’⊨A∧c’⊨B)∧ ~(c’⊨A∧c’⊨Γ)), καθώς και ότι ~(c’⊨A∧ ~(c’⫤B ∧ c’⫤Γ)). Από το πρώτο έπεται ότι θα είναι (c’⊨A∧c’⊨B)∨ (c’⊨A∧c’⊨Γ), ενώ από το δεύτερο έπεται ότι ~(c’⊨A)∨ (c’⫤B ∧ c’⫤Γ)). Έστω ότι ισχύει πως ~(c’⊨A), αν είναι (c’⊨A∧c’⊨B) τότε έχουμε (c’⊨A)∧ ~(c’⊨A), και ανάλογα αν είναι (c’⊨A∧c’⊨Γ). Άρα αν είναι ~(c’⊨A) έπεται ότι θα είναι ~((c’⊨A∧c’⊨B)∨ (c’⊨A∧c’⊨Γ)). Έστω από την άλλη ότι είναι (c’⫤B ∧ c’⫤Γ), αν είναι (c’⊨A∧c’⊨B) τότε καταλήγουμε ότι (c’⫤B ∧ c’⊨B), ενώ αν είναι (c’⊨A∧c’⊨Γ) τότε καταλήγουμε ότι (c’⫤Γ ∧ c’⊨Γ). Έπεται ότι αν είναι (c’⫤B ∧ c’⫤Γ) τότε ~(c’⊨A)∨ (c’⫤B ∧ c’⫤Γ)). Καταλήξαμε λοιπόν ότι δεν μπορεί να ισχύει ότι ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ (~(~(z⊨A∧z⊨B)∧ ~(z⊨A∧z⊨Γ)) ∧ ~(z⊨A∧ ~(z⫤B ∧ z⫤Γ))))), και άρα όντως θα ισχύει ότι (A∧B)∨(A∧Γ)⊫A∧(B∨Γ).

Επιπλέον, προκύπτει και ότι ο κανόνας (A∨B)∧(A∨Γ)⊫A∨(B∧Γ) δεν είναι έγκυρος.

Πράγματι, θα είναι (A∨B)∧(A∨Γ)⊫A∨(B∧Γ) αν και μόνο αν ισχύει ότι ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊨(A∨B)∧(A∨Γ) ∧ z⫤ A∨(B∧Γ)))), που θα ισχύει αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊨~((~A→B)→~(A→~Γ)) ∧ z⫤ ~A→~(B→~Γ)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~((z⊨ (~A→B)∧ z⊨ (A→~Γ)) ∧ z⫤ A∧ z⊨ (B→~Γ)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~((~ (z⫤ A∧ z⫤B)∧ ~(z⫤A∧ z⫤Γ)) ∧ z⫤ A∧ ~(z⊧B∧ z⊧Γ)))). Προκειμένου αυτό να μην ισχύει αρκεί να έχουμε ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ ((~ (z⫤ A∧ z⫤B)∧ ~(z⫤A∧ z⫤Γ)) ∧ z⫤ A∧ ~(z⊧B∧ z⊧Γ)))). Ας θεωρήσουμε λοιπόν μοντέλο με σημεία c, c' που συγκεκριμενοποιούν τον πρώτο και δεύτερο αντίστοιχα από τους πιο πάνω υπαρκτικούς ποσοδείκτες, θέλουμε να είναι ((~ (c'⫤ A∧ c'⫤B)∧ ~(c'⫤A∧ c'⫤Γ)) ∧ c'⫤ A∧ ~(c'⊧B∧ c'⊧Γ)). Για να ισχύει αυτό, αρκεί το μοντέλο να είναι τέτοιο ώστε το c' να διαψεύδει την πρόταση A, αλλά οι προτάσεις B, Γ να είναι οριακές περιπτώσεις ως προς αυτό. Καταλήγουμε ότι υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει ότι (A∨B)∧(A∨Γ)⫤⊨A∨(B∧Γ).

Από την άλλη, διαπιστώνουμε το επόμενο:

Distributivity of Disjunction: Ο κανόνας A∨(B∧Γ)⫤⊨(A∨B)∧(A∨Γ) είναι έγκυρος.

Θα είναι A∨(B∧Γ)⫤⊨(A∨B)∧(A∨Γ) αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧ A∨(B∧Γ) ∧ z⫤(A∨B)∧(A∨Γ)))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(z⊧ ~A→~(B→~Γ) ∧ z⫤~((~A→B)→ ~ (~A→Γ))))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(~ (z⫤A∧z⊨(B→~Γ)) ∧ ~(z⊨(~A→B)∧z⫤ ~ (~A→Γ))))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(~ (z⫤A∧z⊨(B→~Γ)) ∧ ~(z⊨(~A→B)∧z⫤ ~ (~A→Γ))))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(~ (z⫤A∧~(z⊨B∧ z⊨Γ)) ∧ ~(~(z⫤A∧ z⫤B)∧ ~ (z⫤A∧ z⫤Γ))))). Έστω τώρα ότι το τελευταίο δεν ισχύει, θα είναι λοιπόν ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ (~ (z⫤A∧~(z⊨B∧ z⊨Γ)) ∧ ~(~(z⫤A∧ z⫤B)∧ ~ (z⫤A∧ z⫤Γ))))), το οποίο θα ισχύει αν και μόνο αν ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ (~ (z⫤A)∨(z⊨B∧ z⊨Γ)) ∧ ((z⫤A∧ z⫤B)∨ (z⫤A∧ z⫤Γ))))). Έστω λοιπόν σημεία c, c' που συγκεκριμενοποιούν των πρώτο και δεύτερο αντίστοιχα από τους πιο πάνω υπαρκτικούς ποσοδείκτες. Θα έχουμε λοιπόν ότι είναι (c φυσιολογικό)∧(c⊑c' ∧ (c' αποδεκτό)∧ (~ (c'⫤A)∨(c'⊨B∧ c'⊨Γ)) ∧ ((c'⫤A∧ c'⫤B)∨ (c'⫤A∧ c'⫤Γ))))). Θέλουμε άρα να είναι (~ (c'⫤A)∨(c'⊨B∧ c'⊨Γ)) ∧ ((c'⫤A∧ c'⫤B)∨ (c'⫤A∧ c'⫤Γ))), έστω ότι ισχύει πως ~ (c'⫤A)∨(c'⊨B∧ c'⊨Γ)), και έστω ότι ισχύει ότι ~ (c'⫤A), έπεται ότι δεν θα ισχύει ότι (c'⫤A∧ c'⫤B), και επιπλέον δεν θα ισχύει ότι (c'⫤A∧ c'⫤Γ), άρα δεν θα ισχύει ότι (c'⫤A∧ c'⫤B)∨ (c'⫤A∧ c'⫤Γ). Έστω από την άλλη ότι ισχύει πως (c'⊨B∧ c'⊨Γ), έπεται ότι δεν θα ισχύει πως (c'⫤A∧ c'⫤B), και δεν θα ισχύει πως (c'⫤A∧ c'⫤Γ), οπότε καταλήγουμε ότι δεν θα ισχύει ότι (c'⫤A∧ c'⫤B)∨ (c'⫤A∧ c'⫤Γ). Με disjunctive syllogism έπεται ότι αν ισχύει ότι ~ (c'⫤A)∨(c'⊨B∧ c'⊨Γ)) τότε δεν θα ισχύει ότι (c'⫤A∧ c'⫤B)∨ (c'⫤A∧ c'⫤Γ), και με ανάλογο τρόπο έπεται και το αντίστροφο. Καταλήγουμε λοιπόν ότι δεν ισχύει $(\sim(c'\dashv A)\vee(c'\vDash B\wedge c'\vDash \Gamma))\wedge(((c'\dashv A\wedge c'\dashv B)\vee (c'\dashv A\wedge c'\dashv \Gamma)))$, και άρα δεν ισχύει ότι $\exists w($ (w φυσιολογικό)$\wedge\exists z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\wedge(\sim(z\dashv A\wedge\sim(z\vDash B\wedge z\vDash \Gamma))\wedge\sim(\sim(z\dashv A\wedge z\dashv B)\wedge\sim(z\dashv A\wedge z\dashv \Gamma))))$. Άρα θα είναι $A\vee(B\wedge\Gamma)|\!\vDash(A\vee B)\wedge(A\vee\Gamma)$.

Ένας από τους λόγους που ο κανόνας distributivity of conjunction, καθώς και ο κανόνας $(A\vee B)\wedge(A\vee\Gamma)|\!\vDash A\vee(B\wedge\Gamma)$ δεν προκύπτουν έγκυροι οφείλεται στο γεγονός ότι σύμφωνα με την θεωρία, μια διάζευξη της μορφής $A\vee B$ μπορεί να επιβεβαιώνεται από κάποιο σημείο, χωρίς να ισχύει το ίδιο και για κάποια από τις προτάσεις Α ή Β.[65] Αυτό έχει ως συνέπεια και το επόμενο:

Argument by Cases: Ο κανόνας $A\vee B, A\rightarrow\Gamma, B\rightarrow\Gamma|\!\vDash \Gamma$ δεν είναι έγκυρος.

Πράγματι, θα είναι $A\vee B, A\rightarrow\Gamma, B\rightarrow\Gamma|\!\vDash \Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow\forall z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\rightarrow\sim(z\models(A\vee B)\wedge(A\rightarrow\Gamma)\wedge(B\rightarrow\Gamma)\wedge z\dashv\Gamma)))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow\forall z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\rightarrow\sim(z\models(A\vee B)\wedge z\models(A\rightarrow\Gamma)\wedge z\models(B\rightarrow\Gamma)\wedge z\dashv\Gamma)))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow\forall z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\rightarrow\sim(z\models(\sim A\rightarrow B)\wedge z\models(A\rightarrow\Gamma)\wedge z\models(B\rightarrow\Gamma)\wedge z\dashv\Gamma)))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow\forall z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\rightarrow\sim(\sim(z\dashv A\wedge z\dashv B)\wedge\sim(z\vDash A\wedge z\dashv\Gamma)\wedge\sim(z\vDash B\wedge z\dashv\Gamma)\wedge z\dashv\Gamma)))$. Το τελευταίο δεν θα ισχύει αν και μόνο αν $\exists w($ (w φυσιολογικό)$\wedge\exists z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\wedge(\sim(z\dashv A\wedge z\dashv B)\wedge\sim(z\vDash A\wedge z\dashv\Gamma)\wedge\sim(z\vDash B\wedge z\dashv\Gamma)\wedge z\dashv\Gamma)))$. Προκειμένου όμως να ισχύει το τελευταίο, αρκεί να θεωρήσουμε μοντέλο τέτοιο ώστε αυτό περιέχει εντός του W σημείο c που είναι φυσιολογικό και τέτοιο ώστε να υπάρχει σημείο c' που το επεκτείνει και το οποίο είναι αποδεκτό, και τέτοιο ώστε να απορρίπτει την πρόταση Γ ενώ από την άλλη οι προτάσεις Α, Β είναι οριακές περιπτώσεις για αυτό. Έπεται ότι θα ισχύει ότι $\sim(c'\dashv A\wedge c'\dashv B)$, αφού οι Α, Β είναι οριακές περιπτώσεις ως προς το c', $\sim(z\vDash A\wedge z\dashv\Gamma)$ αφού η Α είναι οριακή περίπτωση για το c', $\sim(z\vDash B\wedge z\dashv\Gamma)$ αφού η Β είναι οριακή περίπτωση για το c', και τέλος $c'\dashv\Gamma$. Υπάρχει λοιπόν περίπτωση να μην ισχύει ότι $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow\forall z(w\sqsubseteq z\wedge($z αποδεκτό$)\rightarrow\sim(\sim(z\dashv A\wedge z\dashv B)\wedge\sim(z\vDash A\wedge z\dashv\Gamma)\wedge\sim(z\vDash B\wedge z\dashv\Gamma)\wedge z\dashv\Gamma)))$, και άρα ο κανόνας $A\vee B, A\rightarrow\Gamma, B\rightarrow\Gamma|\!\vDash \Gamma$ δεν είναι έγκυρος.

Έπεται λοιπόν κατευθείαν και το επόμενο:

---

[65] Οπότε έπεται από αυτό ότι για σημείο w και προτάσεις Α, Β υπάρχει περίπτωση να είναι $w|\!\vDash A\vee B$ χωρίς να είναι ταυτόχρονα και $w|\!\vDash A$ ή $w|\!\vDash B$. Αν προσθέσουμε στην γλώσσα αντικείμενο κάποιον τελεστή 'Δ', τέτοιον ώστε να είναι $w\vDash\Delta A$ αν και μόνο αν $w|\!\vDash A$ και $w\dashv\Delta A$ αν και μόνο αν $w|\!\vDash\sim A$, τότε το χαρακτηριστικό αυτό θα αντιστοιχούσε στο γεγονός ότι μπορεί για σημείο w και προτάσεις Α, Β να είναι $w\vDash\Delta(A\vee B)$, χωρίς παράλληλα να ισχύει ότι $w\vDash\Delta A$ ή $w\vDash\Delta B$. Κατά ανάλογο τρόπο που στην τροπική λογική υπάρχει περίπτωση για κόσμο z να είναι $z\vDash\Box(A\vee B)$ χωρίς παράλληλα να είναι $z\vDash\Box A$ ή $z\vDash\Box B$.

Argument by Cases (Μορφή μετακανόνα): Υπάρχει περίπτωση να ισχύει ότι $A,B|\!\models\Gamma$, να ισχύει ότι $\Delta, E|\!\models\Gamma$, και να μην ισχύει ότι $A\vee\Delta, B, E|\!\models\Gamma$.

Πράγματι, είναι $A,B|\!\models\Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models A\wedge z\models B)\wedge z\Dashv\Gamma)))$, είναι $\Delta, E|\!\models\Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models\Delta\wedge z\models E)\wedge z\Dashv\Gamma)))$, και είναι $A\vee\Delta$, B, $E|\!\models\Gamma$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models A\vee\Delta \wedge z\models B\wedge z\models E)\wedge z\Dashv\Gamma)))$, δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models (\sim A\rightarrow\Delta)\wedge z\models B\wedge z\models E)\wedge z\Dashv\Gamma)))$, που θα ισχύει αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(\sim(z\Dashv A\wedge z\Dashv\Delta)\wedge z\models B\wedge z\models E)\wedge z\Dashv\Gamma)))$. Έστω ότι ισχύει πως $A,B|\!\models\Gamma$ και $\Delta, E|\!\models\Gamma$, αλλά δεν ισχύει ότι $A\vee\Delta$, B, $E|\!\models\Gamma$. Θα είναι λοιπόν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models A\wedge z\models B)\wedge z\Dashv\Gamma)))$, $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models\Delta\wedge z\models E)\wedge z\Dashv\Gamma)))$ και $\exists w($ (w φυσιολογικό)$\wedge \exists z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\wedge(\sim(z\Dashv A\wedge z\Dashv\Delta)\wedge z\models B\wedge z\models E)\wedge z\Dashv\Gamma)))$. Μπορούμε όμως εύκολα να θεωρήσουμε μοντέλο τέτοιο ώστε οι τρεις τελευταίες προτάσεις να είναι ταυτόχρονα αληθείς. Αρκεί αυτό να είναι τέτοιο ώστε για κάθε φυσιολογικό σημείο ισχύει ότι για κάθε αποδεκτή επέκταση του δεν ισχύει ότι αυτή επιβεβαιώνει τις Α, Β και διαψεύδει την Γ, και δεν ισχύει ότι αυτή επιβεβαιώνει τις Δ, Ε και διαψεύδει την Γ, αλλά παρόλα αυτά υπάρχει φυσιολογικό σημείο και αποδεκτή επέκταση αυτού τέτοια ώστε οι προτάσεις Α, Δ είναι οριακές περιπτώσεις σε αυτή, οι Β, Ε επιβεβαιώνονται, και η Γ διαψεύδεται.

Παρόλο λοιπόν που ισχύει ότι $A\vee B$, $A\vee B\rightarrow\Gamma |\!\models \Gamma$, δεν ισχύει ότι $A\vee B$, $A\rightarrow\Gamma$, $B\rightarrow\Gamma|\!\models \Gamma$.

Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε και ότι θα ισχύει πως το επιχείρημα $A\vee B\rightarrow\Gamma |\!\models (A\rightarrow\Gamma)\wedge(B\rightarrow\Gamma)$ είναι έγκυρο, ενώ από την άλλη το $(A\rightarrow\Gamma)\wedge(B\rightarrow\Gamma) |\!\models A\vee B\rightarrow\Gamma$ δεν θα είναι.

Πράγματι, έχουμε ότι θα είναι $A\vee B\rightarrow\Gamma |\!\models (A\rightarrow\Gamma)\wedge(B\rightarrow\Gamma)$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models A\vee B\rightarrow\Gamma)\wedge z\Dashv(A\rightarrow\Gamma)\wedge(B\rightarrow\Gamma))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim((z\models (\sim A\rightarrow B)\rightarrow\Gamma)\wedge z\Dashv\sim((A\rightarrow\Gamma)\rightarrow\sim(B\rightarrow\Gamma)))))$, αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(\sim(\sim(z\Dashv A\wedge z\Dashv B)\wedge z\Dashv\Gamma)\wedge \sim(\sim (z\models A\wedge z\Dashv\Gamma)\wedge\sim(z\models B\wedge z\Dashv\Gamma)))))$. Το τελευταίο όμως είναι αληθές, πράγματι, έστω ότι αυτό δεν ισχύει, τότε θα είναι $\exists w($ (w φυσιολογικό)$\wedge \exists z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\wedge(\sim(\sim(z\Dashv A\wedge z\Dashv B)\wedge z\Dashv\Gamma)\wedge \sim(\sim (z\models A\wedge z\Dashv\Gamma)\wedge\sim(z\models B\wedge z\Dashv\Gamma)))))$. Έστω c, c' σημεία που συγκεκριμενοποιούν τον πρώτο και δεύτερο αντίστοιχα από τους πιο πάνω υπαρκτικούς ποσοδείκτες. Έπεται ότι θα είναι (c φυσιολογικό)$\wedge$ $(c\sqsubseteq c'$ $\wedge$ (c' αποδεκτό)∧(~(~(c'⫤A∧ c'⫤B) ∧ c'⫤Γ)∧ ~(~ (c'⊨A∧ c'⫤Γ)∧~(c'⊨B∧ c'⫤Γ))), και άρα με simplification καταλήγουμε ότι θα είναι ~(~(c'⫤A∧ c'⫤B) ∧ c'⫤Γ)∧ ~(~ (c'⊨A∧ c'⫤Γ)∧~(c'⊨B∧ c'⫤Γ))). Θα ισχύει λοιπόν ότι ~(~(c'⫤A∧ c'⫤B) ∧ c'⫤Γ), που είναι ισοδύναμο με την (c'⫤A∧ c'⫤B) ∨ ~(c'⫤Γ), και επιπλέον θα ισχύει ότι ~(~ (c'⊨A∧ c'⫤Γ)∧~(c'⊨B∧ c'⫤Γ)), που είναι ισοδύναμο με την (c'⊨A∧ c'⫤Γ) ∨ (c'⊨B∧ c'⫤Γ). Εφόσον είναι (c'⫤A∧ c'⫤B) ∨ ~(c'⫤Γ), ας υποθέσουμε ότι ισχύει πως (c'⫤A∧ c'⫤B), άρα θα είναι c'⫤A και c'⫤B, αν είναι c'⊨A∧ c'⫤Γ τότε έπεται ότι c'⫤A και c'⊨A που όμως δεν μπορεί να ισχύει αφού το c' είναι αποδεκτό, αν είναι c'⊨B∧ c'⫤Γ τότε έπεται ότι c'⫤B και c'⊨B που δεν μπορεί να ισχύει για τους ίδιους λόγους. Ας υποθέσουμε από την άλλη ότι είναι ~(c'⫤Γ), αν είναι c'⊨A∧ c'⫤Γ τότε έχουμε ότι ~(c'⫤Γ) και c'⫤Γ, και το ίδιο αν είναι c'⊨B∧ c'⫤Γ. Έπεται ότι δεν μπορεί να ισχύει ότι ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧(~(~(z⫤A∧ z⫤B) ∧ z⫤Γ)∧ ~(~ (z⊨A∧ z⫤Γ)∧~(z⊨B∧ z⫤Γ))))), και άρα όντως θα είναι A∨B →Γ ⊫ (A→Γ)∧(B→Γ).

Από την άλλη, το επιχείρημα (A→Γ)∧(B→Γ) ⊫ A∨B →Γ δεν είναι έγκυρο. Πράγματι, έχουμε ότι είναι (A→Γ)∧(B→Γ) ⊫ A∨B →Γ αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~((z⊨(A→Γ)∧(B→Γ))∧z⫤ A∨B →Γ))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~((z⊨~((A→Γ)→~(B→Γ)))∧z⫤ (~A→B) →Γ))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~((z⊨~((A→Γ)→~(B→Γ)))∧z⫤ (~A→B) →Γ))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(~(z⊨A∧z⫤Γ)∧~(z⊨B∧z⫤Γ)∧~(z⫤A∧z⫤B) ∧ z⫤Γ))). Το τελευταίο όμως μπορεί να μην είναι αληθές, πράγματι, δεν θα είναι αληθές αν και μόνο αν ισχύει ότι ∃w((w φυσιολογικό)∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)∧ (~(z⊨A∧z⫤Γ)∧~(z⊨B∧z⫤Γ)∧~(z⫤A∧z⫤B) ∧ z⫤Γ))). Έστω c, c' σημεία που συγκεκριμενοποιούν τον πρώτο και δεύτερο αντίστοιχα από τους πιο πάνω υπαρκτικούς ποσοδείκτες, θα είναι (c φυσιολογικό)∧ c⊑c' ∧ (c' αποδεκτό)∧ ~(z⊨A∧z⫤Γ)∧~(z⊨B∧z⫤Γ)∧~(z⫤A∧z⫤B) ∧ z⫤Γ . Μπορούμε όμως εύκολα να θεωρήσουμε μοντέλο που καθιστά την τελευταία αληθή, αρκεί τα σημεία c, c' να είναι τέτοια ώστε το c' να μην αποφαίνεται για τις προτάσεις A και B, αλλά να διαψεύδει την Γ.

Όπως έχουμε σημειώσει και παραπάνω, οι τελευταίες από τις ιδιότητες της θεωρίας προκύπτουν γιατί υπάρχει περίπτωση κάποιο αποδεκτό σημείο να επιβεβαιώνει μια διάζευξη της μορφής A∨B χωρίς ταυτόχρονα να επιβεβαιώνει κάποια από τις A, B. Έπεται άρα ότι υπάρχει περίπτωση μια πρόταση με μορφή A∨B να προκύπτει αληθής χωρίς ταυτόχρονα να είναι αληθής κάποια από τις A ή B. Έχουμε βασιστεί στην παραδοχή ότι το φαινόμενο της ασάφειας συνδέεται ουσιωδώς με το γεγονός ότι η γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, οπότε και υπάρχει μια πληθώρα αποδεκτών τρόπων με βάση τους οποίους αυτή μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω. Κάποια από τα χαρακτηριστικά του νοήματος των προτάσεων που περιέχουν ασαφείς εκφράσεις μπορούν λοιπόν να παραλληλιστούν με χαρακτηριστικά μη αναγκαίων προτάσεων που αφορούν το μέλλον. Όμως, για κάποιες διαζεύξεις προτάσεων που αναφέρονται στο μέλλον θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι μια εκφορά τους μπορεί να είναι αληθής χωρίς ταυτόχρονα να ισχύει ότι η εκφορά κάποιας από τις υποπροτάσεις που την αποτελούν θα είναι επίσης αληθής. Φαίνεται για παράδειγμα ότι αν εκφέρουμε μια πρόταση όπως η «αύριο θα συμβεί ή αύριο δεν θα συμβεί μια μάχη», τότε η εκφορά μας θα είναι αληθής, ακόμα και αν θεωρούμε ότι δεν ισχύει το ίδιο και όταν εκφέρουμε κάποια από τις «αύριο θα συμβεί μια μάχη» ή «αύριο δεν θα συμβεί μια μάχη». Πράγματι, θα μπορούσε κάποιος να επιχειρηματολογήσει ότι κάποια εκφορά της «αύριο θα συμβεί ή αύριο δεν θα συμβεί μια μάχη» πρέπει να λογίζεται ως αληθής ακριβώς γιατί όπως και αν διαμορφωθεί ο κόσμος αύριο, κάποια από τις υπό-προτάσεις που την αποτελούν θα επιβεβαιώνεται. Μια εκφορά κάποιας πρότασης που επιβεβαιώνεται από κάθε δυνατό μέλλον φαίνεται πως πρέπει να λογίζεται ως αληθής.

Στην περίπτωσή μας, έχουμε θεωρήσει ότι μια πρόταση της μορφής $A\lor B$ επί της ουσίας αποτελεί συντομογραφία της $\sim A\to B$. Προκειμένου λοιπόν η υπάρχουσα, με βάση το επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας και την δομή του κόσμου, πληροφορία να διαψεύδει την συγκεκριμένη πρόταση θα πρέπει να ισχύει ότι αυτή υποστηρίζει την $\sim A$ και διαψεύδει την B, με άλλα λόγια αυτή να διαψεύδει τόσο την A όσο και την B. Από την άλλη, έχουμε θεωρήσει πως αν το τελευταίο δεν ισχύει τότε το συμπέρασμα στο οποίο πρέπει να καταλήξουμε είναι ότι η υπάρχουσα πληροφορία υποστηρίζει την συγκεκριμένη πρόταση. Έπεται ότι προκειμένου μια πρόταση όπως η $A\lor\sim A$ να διαψευστεί θα πρέπει η διαθέσιμη πληροφορία όχι μόνο να υποστηρίζει την A, αλλά και την διαψεύδει. Με βάση όμως τις συνθήκες που έχουμε θέσει, δεν υπάρχει δυνατό επίπεδο διαμόρφωσης ως προς το οποίο να ισχύει κάτι τέτοιο, για κάθε αποδεκτό τρόπο διαμόρφωσης της γλώσσας η διαθέσιμη πληροφορία θα είναι τέτοια ώστε δεν θα ισχύει ότι αυτή υποστηρίζει τόσο την A όσο και την άρνησή της, προτάσεις της μορφής $A\lor\sim A$ θα επιβεβαιώνονται λοιπόν πάντα, και άρα θα προκύπτουν αληθείς ως προς κάθε φυσιολογικό επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας.

Τέλος, όσον αφορά τους κανόνες που εμπλέκουν προτάσεις στις οποίες εμφανίζονται ποσοδεικτικές εκφράσεις, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι κανόνες universal instantiation και particular generalization, δηλαδή οι μορφές επιχειρημάτων $\forall xA \Dashv\vDash A(x/c)$ και $A \Dashv\vDash \exists xA(c/x)$ αντίστοιχα, προκύπτουν έγκυροι. Κατά παρόμοιο τρόπο προκύπτουν έγκυροι και οι ποσοδεικτικοί κανόνες de morgan:

α. $\exists xA \Dashv\vDash \sim\forall x\sim A$

β. $\forall xA \Dashv\vDash \sim\exists x\sim A$

γ. $\sim\exists xA \Dashv\vDash \forall x\sim A$

δ. $\sim\forall xA \Dashv\vDash \exists x\sim A$

Πράγματι, οι περιπτώσεις α, β έπονται άμεσα από τους ορισμούς που έχουμε δώσει.

Για την περίπτωση γ έχουμε:

Θα είναι $\sim\exists xA \Dashv\vDash \forall x\sim A$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\models\sim\exists xA \wedge z\Dashv \forall x\sim A$))), αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\Dashv\exists xA \wedge z\Dashv \forall x\sim A$))), αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\Dashv\sim\forall x\sim A \wedge z\Dashv \forall x\sim A$))), $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\vDash\forall x\sim A \wedge z\Dashv \forall x\sim A$))), αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\vDash<\forall x, <\sim,<A>> \wedge z\Dashv<\forall x, <\sim, A>>$))), αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim($ για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι $z\Dashv[<\sim, <A, x>>]^{o}_{x}$ και για κάποιο αντικείμενο o' που ανήκει στο D είναι $z\Dashv[<\sim, <A, x>>]^{o'}_{x}$))), αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim($ για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι $z\Dashv<\sim, <A, o>>$ και για κάποιο αντικείμενο o' που ανήκει στο D είναι $z\Dashv<\sim, <A, o'>>$))), αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim($ για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι $z\vDash<A, o>$ και για κάποιο αντικείμενο o' που ανήκει στο D είναι $z\vDash<A, o'>$))). Η τελευταία πρόταση είναι όμως προφανώς αληθής, άρα καταλήγουμε ότι όντως θα ισχύει πως $\sim\exists xA \Dashv\vDash \forall x\sim A$.

Η περίπτωση δ έπεται με ανάλογο τρόπο.

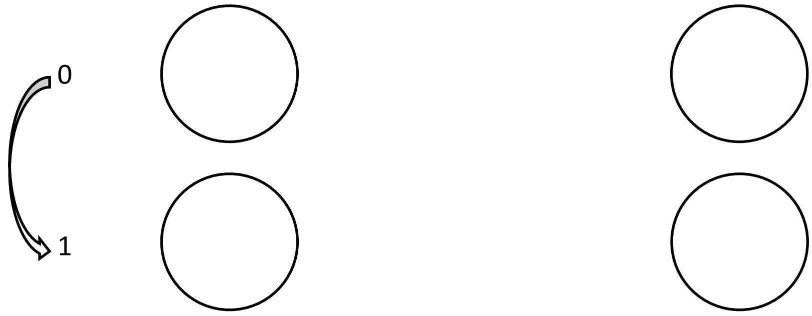
Από την άλλη, παρατηρούμε ότι δεν θα είναι $\forall xA \Dashv\vDash \exists xA$ ή $\forall xA \rightarrow \exists xA$.

Πράγματι, έστω ερμηνεία Μ της γλώσσας, και έστω ότι σύμφωνα με αυτή ισχύει ότι στον τύπο Α αντιστοιχεί ο υβριδικός τύπος <A>. Θα είναι $\forall xA \Dashv\vDash \exists xA$ αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\models\forall xA \wedge z\Dashv \exists xA$))), δηλαδή αν και μόνο αν $\forall w($ (w φυσιολογικό)$\rightarrow \forall z(w\sqsubseteq z \wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow \sim(z\models<\forall x, <A>> \wedge z\Dashv <\exists x, <A>>$))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤[<A, x>]$^{o}_{x}$ ∧ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z⊨[<A, x>]$^{o'}_{x}$))), αν και μόνο αν ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤<A, o> ∧ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z⊨<A, o'>))). Το τελευταίο δεν θα ισχύει αν και μόνο αν είναι ∃w((w φυσιολογικό) ∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό) ∧ για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤<A, o> ∧ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z⊨<A, o'>)). Έστω λοιπόν κατηγορηματική έκφραση 'F' της γλώσσας, και για λόγους ευκολίας ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι το μόνο κατηγορηματικό σύμβολο που περιέχεται εντός αυτής. Θεωρούμε ερμηνεία M της γλώσσας τέτοια ώστε εντός του W περιέχεται αντικείμενο x που δεν εντάσσει κάποιο αντικείμενο από αυτά που περιέχονται στο D εντός της έκτασης ή της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης, αντικείμενο x_1 το οποίο κατατάσσει κάθε αντικείμενο του D εντός της έκτασης του F, και αντικείμενο x_2 το οποίο κατατάσσει κάθε αντικείμενο του D εντός της αντιέκτασης του F. Επιπλέον, τα x, x_1, x_2 εντάσσονται εντός του A, οπότε προκύπτει ότι το x πληροί τις προϋποθέσεις ώστε να εντάσσεται εντός του Φ. Με βάση αυτά θα προκύπτει ότι σύμφωνα με την M είναι ∃w((w φυσιολογικό) ∧ ∃z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό) ∧ για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤<F, o> ∧ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z⊨<F, o'>)), πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση που το σημείο x συγκεκριμενοποιεί και τους δύο υπαρκτικούς ποσοδείκτες προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι αυτό ισχύει.

Βέβαια, σημεία όπως το x είναι ακραίες περιπτώσεις, θα μπορούσαμε λοιπόν να θεσπίσουμε για παράδειγμα ότι αντικείμενα όπως αυτό δεν επιτρέπεται να χαρακτηρίζονται ως αποδεκτά από ερμηνεία της γλώσσας, θέτοντας ότι για να χαρακτηριστεί κάποιο αντικείμενο ως αποδεκτό θα πρέπει για κάθε κατηγορηματική έκφραση της γλώσσας να ισχύει ότι αυτό θέτει κάποια αντικείμενα εντός της έκτασης της ή κάποια αντικείμενα εντός της αντιέκτασης της, ή εναλλακτικά πως θα πρέπει κάθε φορά να ισχύουν και τα δύο. Σε αυτή την περίπτωση, θα ισχύει όσον αφορά την έκφραση 'F' ότι ∀w((w φυσιολογικό)→ ∀z(w⊑z ∧ (z αποδεκτό)→ ~(για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤<A, o> ∧ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z⊨<A, o'>))). Ας υποθέσουμε όμως τώρα ότι η γλώσσα που έχουμε θεωρήσει περιέχει και διθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο 'R', ατομική σταθερά 'a', και έστω η πρόταση ∀xRax. Διαπιστώνουμε ότι θα υπάρχει περίπτωση κάποια πρόταση όπως πχ η '∀xRax→∃xRax' να μην προκύπτει αληθής. Πράγματι, έστω ερμηνεία Μ', τέτοια ώστε εντός του D περιέχονται αντικείμενα α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, ενώ εντός των W και A αντικείμενα x, x_1, x_2. Το x εντάσσει εντός της έκτασης της έκφρασης 'F' το α_1, ενώ εντός της αντιέκτασης το α_5, εντός της έκτασης της 'R' κάθε ζεύγος της μορφής $<\alpha_1, y>$, όπου y αντικείμενο εντός του D, ενώ εντός της αντιέκτασης κάθε ζεύγος της μορφής $<\alpha_5, y>$. Το x_1 εντάσσει εντός της έκτασης της 'F' το α_1 ενώ εντός της αντιέκτασης τα α_3, α_4, α_5, εντός της έκτασης της 'R' κάθε ζεύγος της μορφής $<\alpha_1, y>$, εντός της αντιέκτασης κάθε ζεύγος της μορφής $<\alpha_3, y>$, ή $<\alpha_4, y>$, ή $<\alpha_4, y>$, ή $<\alpha_5, y>$. Τέλος, το x_2 εντάσσει εντός της έκτασης της 'F' τα α_1, α_2, α_3 ενώ εντός της αντιέκτασης το α_5, εντός της έκτασης της 'R' κάθε ζεύγος της μορφής $<\alpha_1, y>$, $<\alpha_2, y>$, ή $<\alpha_3, y>$εντός της αντιέκτασης κάθε ζεύγος της μορφής $<\alpha_5, y>$. Με βάση αυτά το αντικείμενο x θα πληροί τις προϋποθέσεις προκειμένου να μπορεί να χαρακτηριστεί ως φυσιολογικό, και άρα θεωρούμε πως αυτό, και μόνο αυτό, εντάσσεται εντός του Φ. Διαπιστώνουμε εδώ εύκολα ότι θα είναι $\forall$w((w φυσιολογικό)$\rightarrow$ $\forall$z(w$\sqsubseteq$z $\wedge$ (z αποδεκτό)$\rightarrow$ $\sim$(για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤$<F, o>$ $\wedge$ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z$\models$$<F, o'>$))). Από την άλλη, θα είναι $\exists$w((w φυσιολογικό) $\wedge$ $\exists$z(w$\sqsubseteq$z $\wedge$ (z αποδεκτό) $\wedge$ για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D δεν είναι z⫤$<R, <\alpha2, o>>$ $\wedge$ για κάθε αντικείμενο o' που ανήκει στο D δεν είναι z$\models$$<R, <\alpha2, o'>>$)). Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε για παράδειγμα την περίπτωση που ο αρχικός υπαρκτικός ποσοδείκτης συγκεκριμενοποιείται από το σημείο x ενώ ο δεύτερος υπαρκτικός ποσοδείκτης από το σημείο x_1 προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι αυτό ισχύει.

3.1.2 Δέντρα

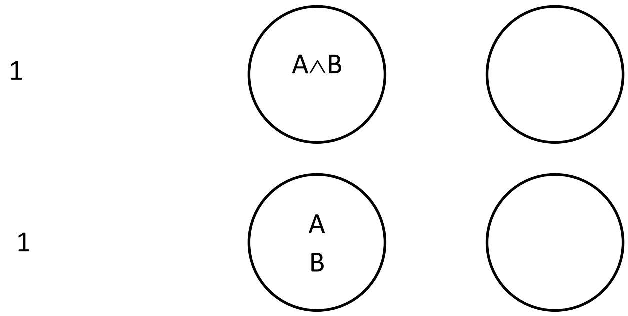
Με βάση τις σημασιολογικές συνθήκες που έχουμε διατυπώσει μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε συντακτικούς κανόνες για αποδείξεις σε μορφή δέντρου. Οι δύο πρώτοι κόμβοι του δέντρου θα είναι πάντα της παρακάτω μορφής:



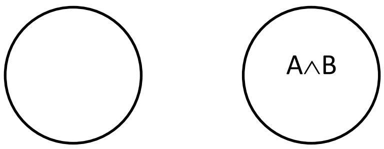
Εδώ κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μία σειρά. Η ρίζα του δέντρου θα παίρνει λοιπόν πάντα την παραπάνω μορφή. Δεδομένου λοιπόν κάποιου επιχειρήματος, θα γράφουμε τις προκείμενες στον κύκλο του επιπέδου 1 που βρίσκεται στα αριστερά, το συμπέρασμα στον κύκλο του επιπέδου 1 που βρίσκεται στα δεξιά. Εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά στο επίπεδο 0 θα μπορούμε να γράψουμε μόνο ατομικές προτάσεις, για τις οποίες μάλιστα θα πρέπει να ισχύει ότι αυτές περιέχονται και στον κύκλο που βρίσκεται στα αριστερά στο επόμενο επίπεδο. Αντίστοιχα και για τον κύκλο που βρίσκεται στα δεξιά στο επίπεδο 0. Θα θεωρούμε πως ένα κλαδί του δέντρου κλείνει αν και μόνο αν υπάρχει πρόταση που βρίσκεται τόσο εντός κάποιου συγκεκριμένου κύκλου όσο και δίπλα του, ή αλλιώς αν υπάρχει πρόταση που βρίσκεται τόσο εντός κύκλου στα αριστερά όσο και εντός κύκλου στα δεξιά.

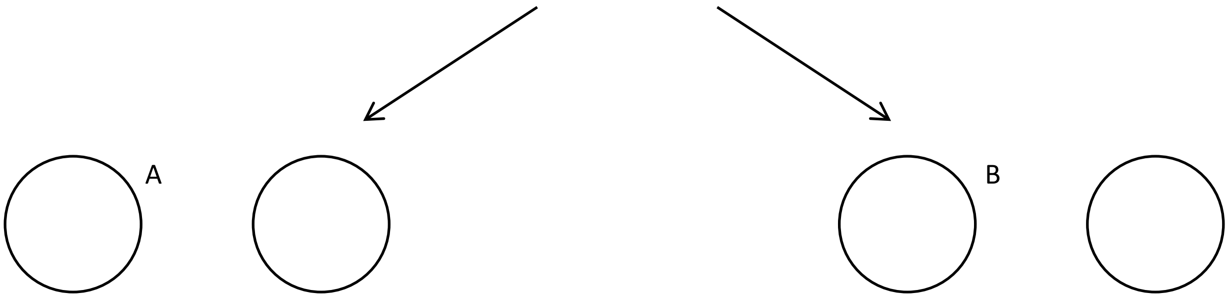
Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε τους κανόνες για τις διάφορες προτάσεις της γλώσσας, ανάλογα με την μορφή που αυτές έχουν.

Για τις προτάσεις με μορφή σύζευξης θέτουμε:

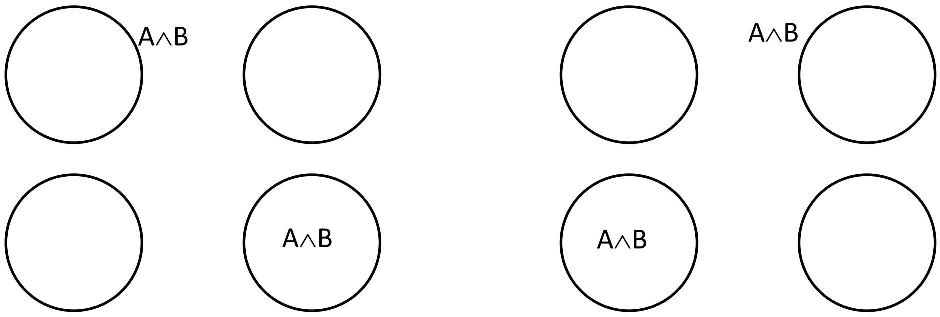


καθώς και:

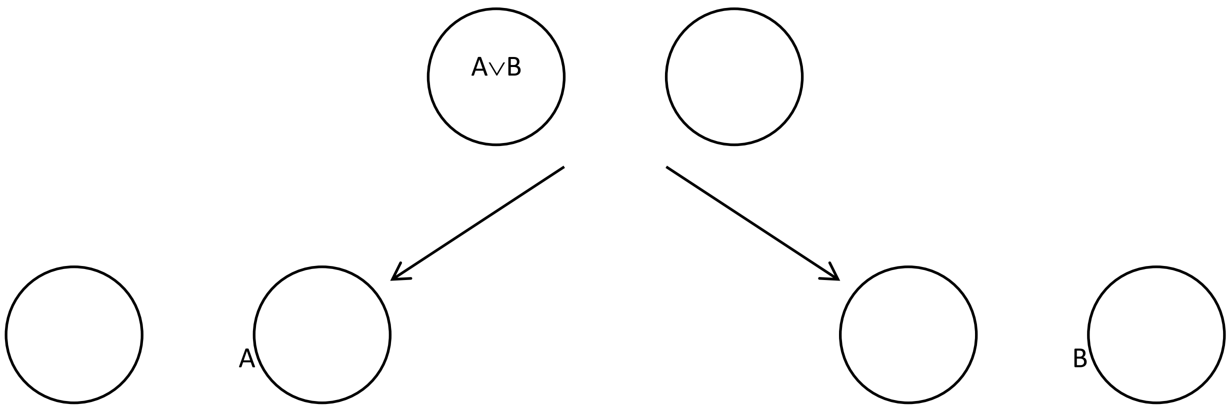




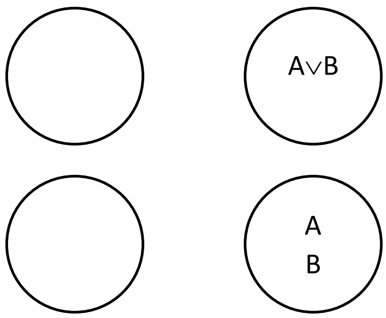
Γενικά, θεωρούμε για κάθε κανόνα ότι το επίπεδο των κύκλων είναι 1. Για τις περιπτώσεις που μια πρόταση με μορφή σύζευξης βρίσκεται δίπλα σε κάποιον κύκλο, τότε έχουμε:



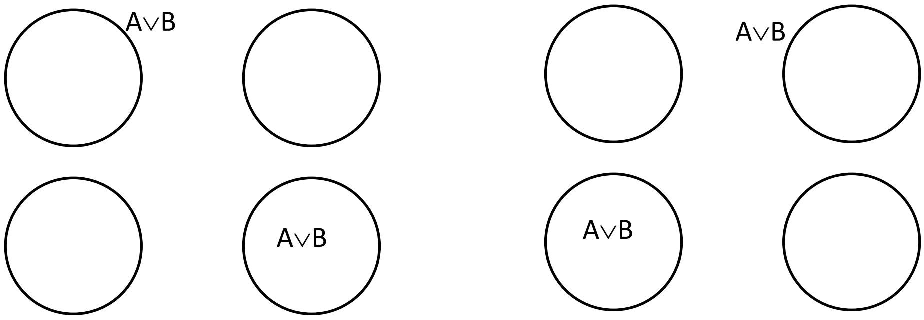
Για τις προτάσεις με μορφή διάζευξης έχουμε:



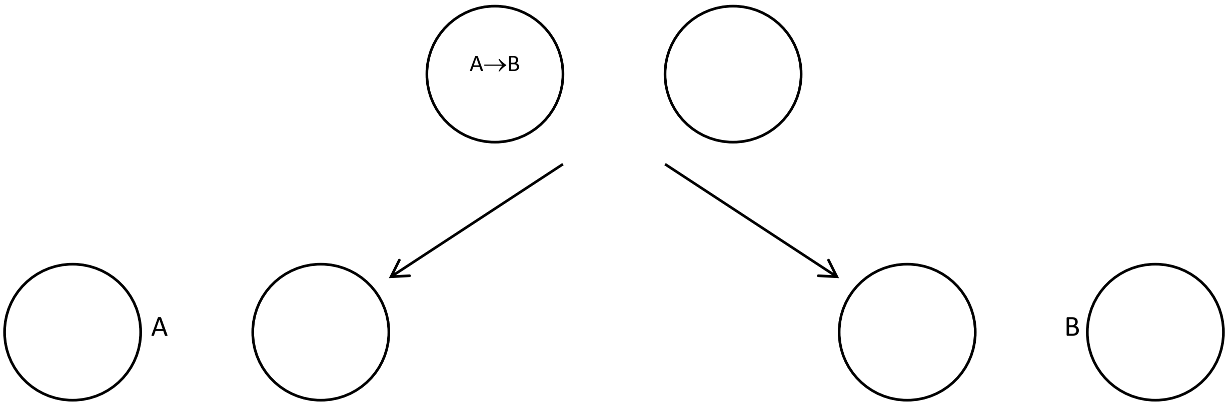
Και:



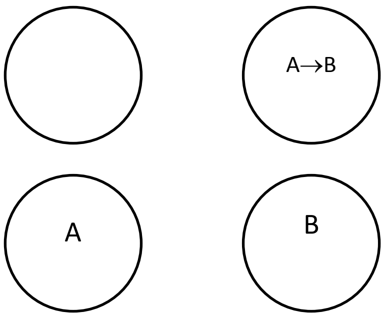
Οι περιπτώσεις που κάποια πρόταση με την συγκεκριμένη μορφή βρίσκεται δίπλα σε κάποιον κύκλο είναι παρόμοιες με αυτές για την σύζευξη:



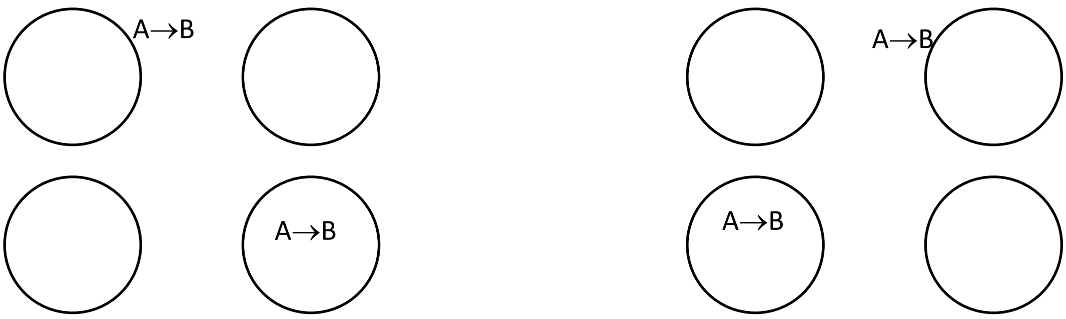
Για την συνεπαγωγή έχουμε:



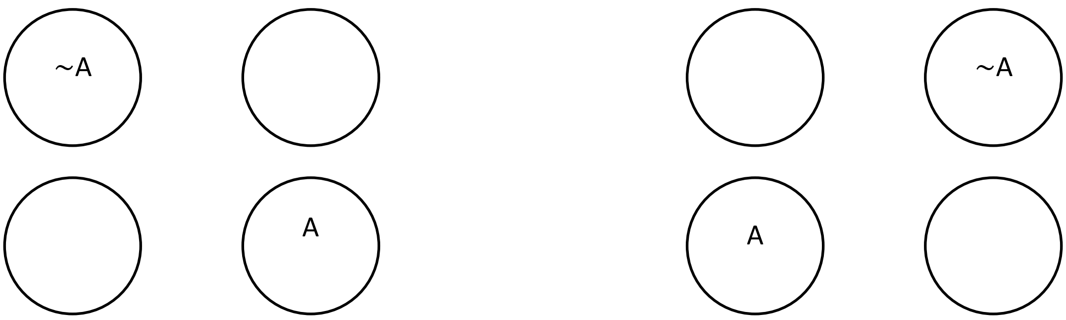
και:

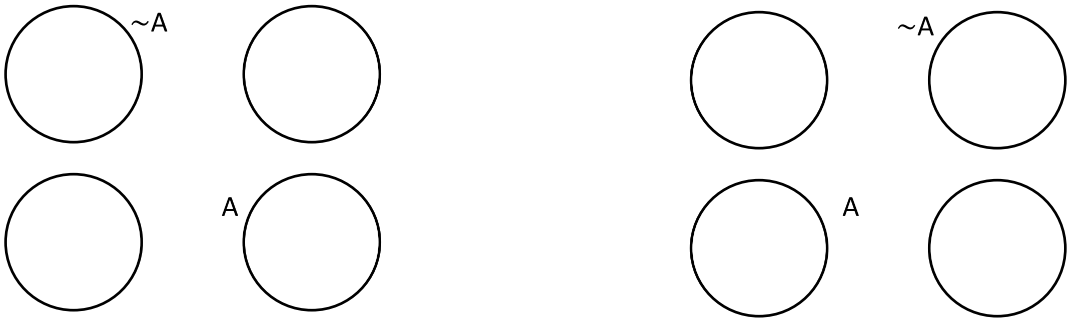


καθώς και:

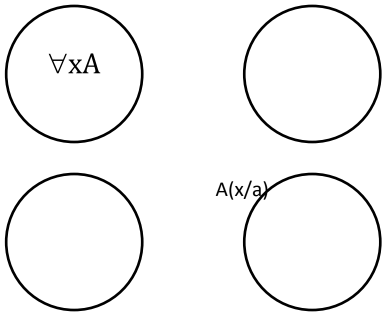


Ενώ για την άρνηση θα έχουμε τους εξής τέσσερις κανόνες:

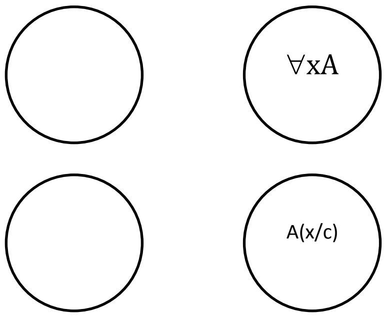




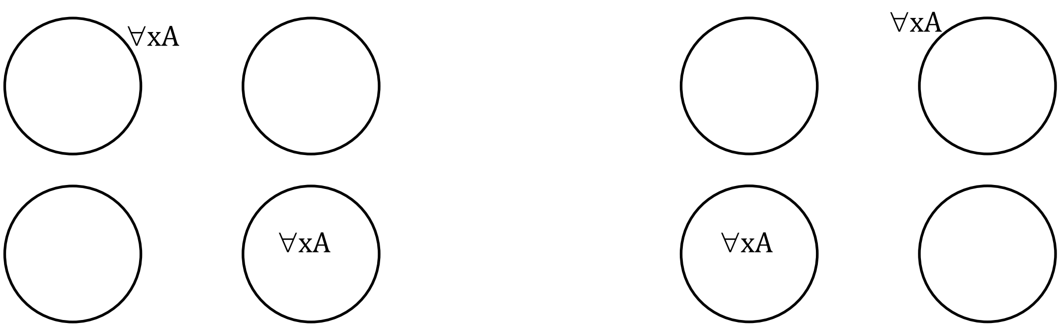
Για τις προτάσεις με μορφή καθολικής ποσόδειξης, θέτουμε τα εξής:



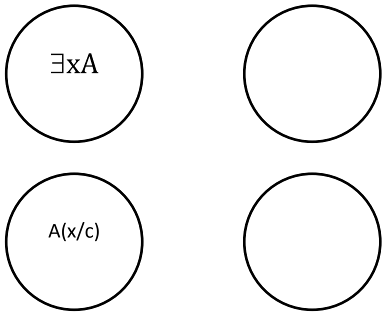
Επίσης θα είναι:



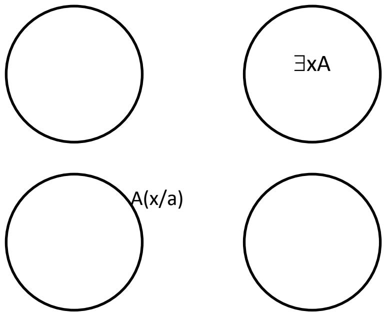
Καθώς και:



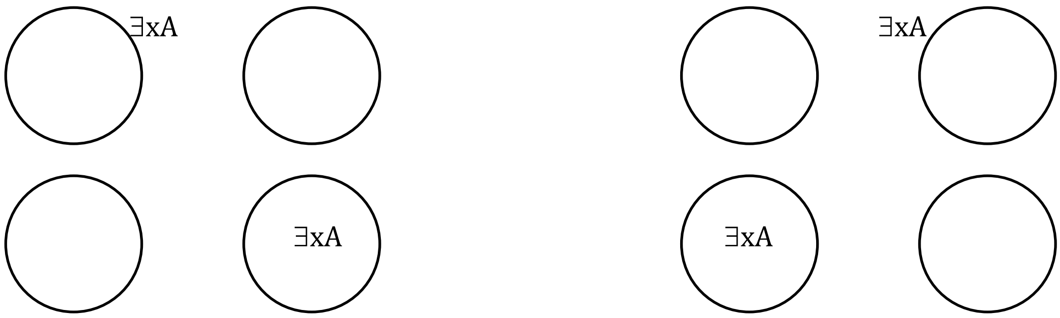
Για τις προτάσεις με μορφή υπαρκτικής ποσόδειξης, θέτουμε:



Καθώς και:

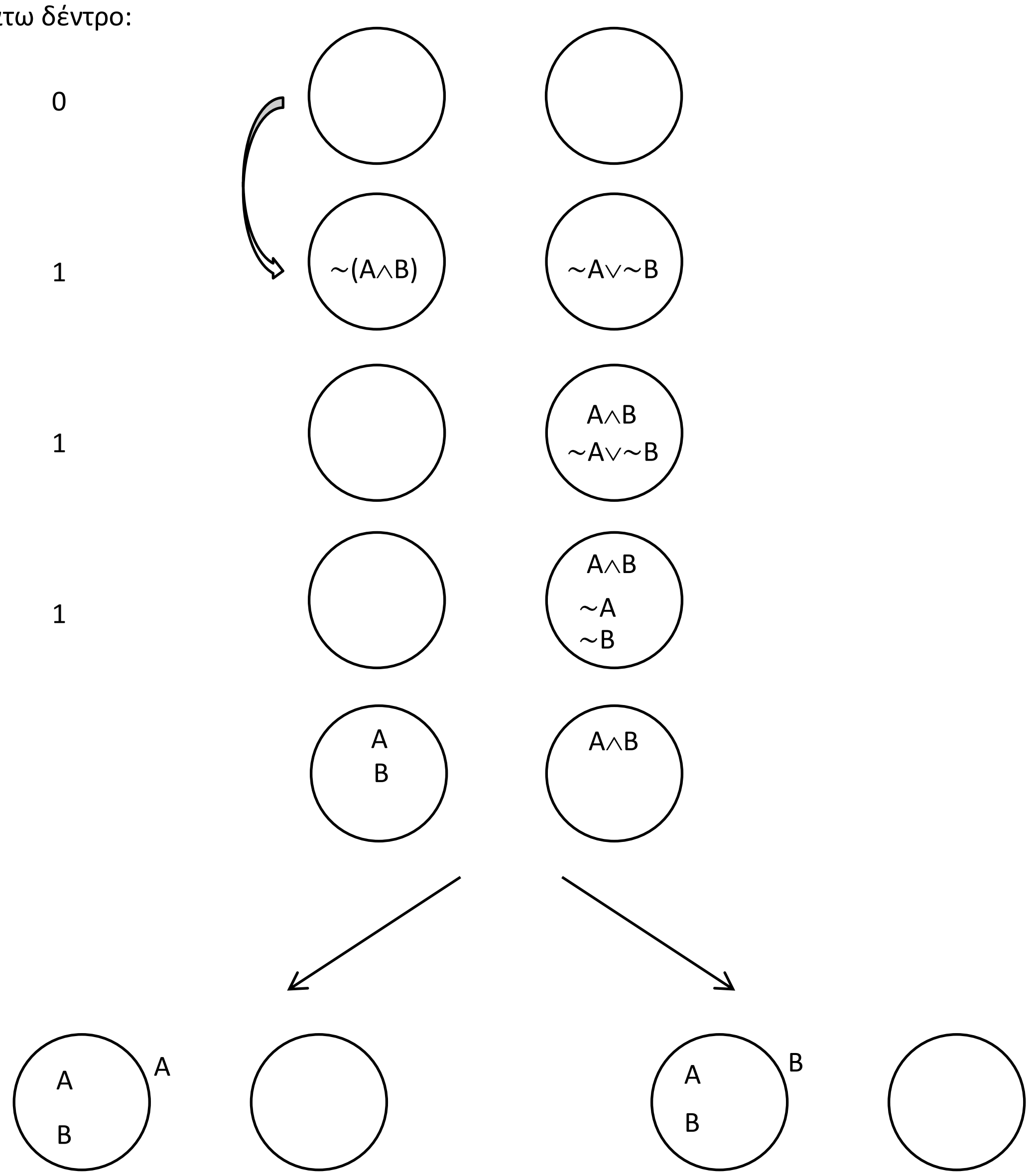


Τέλος, θα είναι:



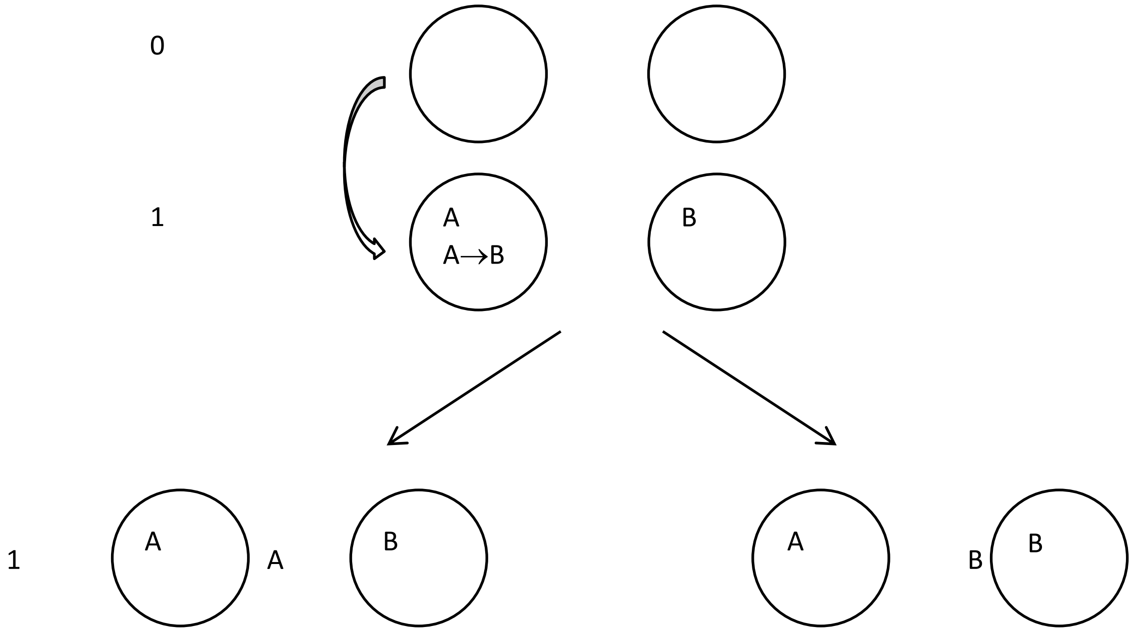
Με την συμβολοσειρά A(x/s) αναφερόμαστε στην πρόταση που προκύπτει από την ‘∀xAx’ ή την ‘∃xAx’ αν διαγράψουμε το αρχικό ποσοδεικτικό σύμβολο και αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που δεσμεύεται από αυτό με το σταθερό σύμβολο ‘s’. Στα παραπάνω, με το σύμβολο ‘a’ αναφερόμαστε σε οποιοδήποτε σταθερό σύμβολο ήδη εμφανίζεται στον συγκεκριμένο κλάδο του δέντρου, ενώ αν δεν υπάρχει τέτοιο τότε αυτό μπορεί να είναι κάποιο νέο σταθερό σύμβολο. Από την άλλη, με το σύμβολο ‘c’ αναφερόμαστε σε κάποιο σταθερό σύμβολο που δεν εμφανίζεται ήδη στο συγκεκριμένο κλαδί.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε με βάση την συγκεκριμένη μέθοδο ότι θα είναι πχ ~(A∧B)⊢ ~A∨~B. Πράγματι, σύμφωνα με τους κανόνες που έχουμε ορίσει προκύπτει το παρακάτω δέντρο:



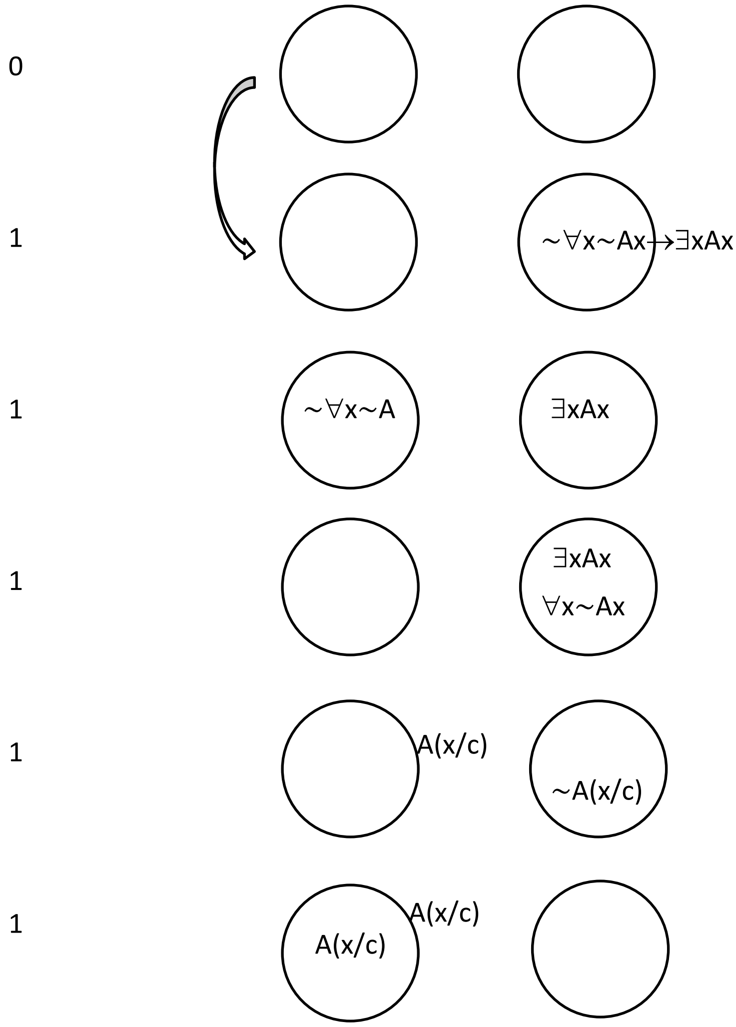
Οπότε σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι σύμφωνα με τους κανόνες που έχουμε θέσει, και οι δύο κλάδοι χαρακτηρίζονται ως κλειστοί. Άρα όντως ισχύει ότι ~(A∧B)⊢~A∨~B.

Αντίστοιχα βλέπουμε ότι θα είναι και A, A→B⊢B. Πράγματι, θα έχουμε:



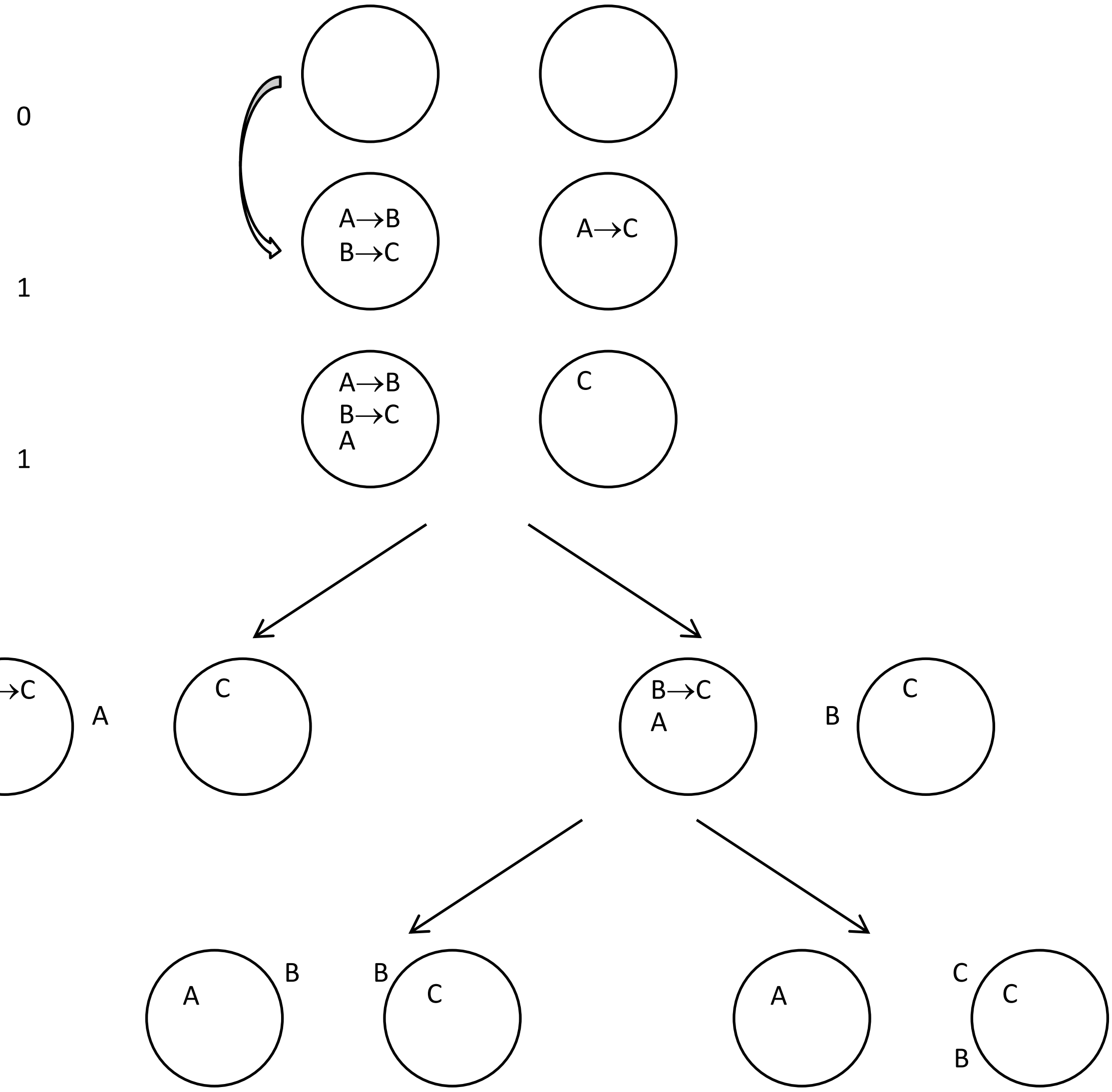
Οπότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι και οι δύο κλάδοι του δέντρου είναι κλειστοί.

Παρομοίως διαπιστώνουμε και ότι θα ισχύει πως ⊢~∀x~Ax→∃xAx. Πράγματι:



Ο παραπάνω κλάδος θεωρείται όμως κλειστός, με βάση τους κανόνες που έχουμε θέσει.

Από την άλλη, βλέπουμε ότι δεν θα είναι $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$. Πράγματι:



Οπότε παρατηρούμε εύκολα ότι ο κλάδος που καταλήγει σε εκείνο από τα αμέσως παραπάνω φύλλα που βρίσκεται στα αριστερά είναι ανοικτός.

Συνεχίζουμε δίνοντας αποδείξεις ορθότητας και πληρότητας για το συγκεκριμένο συντακτικό σύστημα. Για τις ανάγκες της απόδειξης, θα θεωρούμε ότι οι ερμηνείες της γλώσσας είναι διατεταγμένες επτάδες της μορφής <D, W, Απ, Φ, ⊑, Val^+, Val^->, όπου εδώ συμβολίζουμε το υποσύνολο του W που περιέχει τα αποδεκτά επίπεδα διαμόρφωσης ως 'Απ'.

Ξεκινάμε με την απόδειξη ορθότητας. Ορίζουμε το εξής:

Θα λέμε ότι κάποια ερμηνεία M της γλώσσας είναι πιστή σε κάποιο κλάδο ενός δέντρου αν και μόνο αν σε κάθε αριθμό που εμφανίζεται στα αριστερά του δέντρου μπορούμε να αντιστοιχήσουμε αντικείμενο του W, με τρόπο τέτοιο ώστε για κάθε τρέχον επίπεδο του κλάδου ισχύει ότι για κάθε πρόταση που βρίσκεται εντός του αριστερού κύκλου το αντικείμενο εντός του W που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο αριθμό την επιβεβαιώνει, και για κάθε πρόταση που βρίσκεται εντός του κύκλου στα δεξιά, το αντικείμενο εντός του W που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο αριθμό την διαψεύδει, ενώ για πρόταση που βρίσκεται που βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά δεν την επιβεβαιώνει, και για πρόταση που βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά δεν την διαψεύδει. Τέλος, για αριθμούς που εμφανίζονται στα αριστερά του δέντρου και συνδέονται με βέλος, θα πρέπει ο αριθμός που βρίσκεται στην αρχή του βέλους να αντιστοιχείται σε αντικείμενο που βρίσκεται εντός του Φ, ενώ ο αριθμός που βρίσκεται στην μύτη του βέλους θα πρέπει να αντιστοιχείται σε αντικείμενο που βρίσκεται εντός του A και επεκτείνει το προηγούμενο.

Θέλουμε τώρα να αποδείξουμε ότι για τυχόν κλάδο δέντρου και ερμηνεία που είναι πιστή σε αυτόν, αν επεκτείνουμε τον κλάδο εφαρμόζοντας κάποιον από τους συντακτικούς κανόνες που έχουμε ορίσει, τότε θα υπάρχει ερμηνεία που είναι πιστή τουλάχιστον σε έναν από τους κλάδους που έχουν προκύψει.

Η απόδειξη θα γίνει μέσω επαγωγής ως προς την πολυπλοκότητα των προτάσεων.

Έστω για αρχή η περίπτωση της σύζευξης:

Ας θεωρήσουμε κλάδο δέντρου τέτοιο ώστε ο κύκλος στα αριστερά περιέχει πρόταση της μορφής $A \wedge B$, και έστω ερμηνεία M που είναι πιστή σε αυτόν. Έπεται ότι αυτή περιέχει εντός του συνόλου W αντικείμενα w_0 και w_1, τέτοια ώστε το πρώτο ανήκει στο Φ, το δεύτερο στο Απ και επεκτείνει το πρώτο, και το δεύτερο αντικείμενο επιβεβαιώνει τις προτάσεις εντός του κύκλου στα αριστερά, μεταξύ των οποίων και η $A \wedge B$, και διαψεύδει τις προτάσεις εντός του κύκλου στα δεξιά. Θα είναι $w_1 \models A \wedge B$ αν και μόνο αν $w_1 \models \sim(A \rightarrow \sim B)$, ανν $w_1 \dashv (A \rightarrow \sim B)$, ανν $w_1 \models A$ και $w_1 \dashv \sim B$, ανν $w_1 \models A$ και $w_1 \models B$. Αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο κανόνα για την σύζευξη, τότε ο αρχικός κλάδος επεκτείνεται με δύο νέους κύκλους, τέτοιους ώστε ο κύκλος στα αριστερά περιέχει τις προτάσεις Α και Β. Από τον ορισμό έπεται ότι η ερμηνεία Μ θα είναι πιστή στην επέκταση του κλάδου. Έστω από την άλλη η περίπτωση που η πρόταση βρίσκεται εντός του κύκλου στα δεξιά. Έπεται ότι το w1 θα διαψεύδει την $A\wedge B$, άρα θα είναι $w_1 \dashv A\wedge B$ αν και μόνο αν $w_1 \dashv \sim(A\rightarrow \sim B)$, ανν $w_1 \vDash A\rightarrow \sim B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A\wedge$ $w_1 \dashv \sim B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A\wedge$ $w_1 \vDash B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A$ ή δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash B$. Έστω ότι δεν ισχύει πως $w_1 \vDash A$, αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο κανόνα στο δέντρο, τότε θα προκύψει διακλάδωση, η επέκταση προς τα αριστερά θα τοποθετεί την πρόταση Α ανάμεσα στους δύο κύκλους, ενώ αυτή προς τα δεξιά θα τοποθετεί στην ίδια θέση την πρόταση Β. Έπεται με βάση τους ορισμούς ότι η Μ θα είναι πιστή στην επέκταση προς τα αριστερά. Αν από την άλλη δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash B$, τότε η Μ θα είναι πιστή στην επέκταση προς τα δεξιά. Τέλος, έστω ότι κάποια πρόταση της μορφής $A\wedge B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, έπεται ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash A\wedge B$. Με βάση τους ορισμούς, αυτό σημαίνει ότι θα είναι $w_1 \dashv A\wedge B$. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου ο κλάδος επεκτείνεται με δύο κύκλους, και η συγκεκριμένη πρόταση τοποθετείται εντός του κύκλου στα δεξιά. Έπεται ότι η Μ θα είναι πιστή στον συγκεκριμένο κλάδο, όπως αυτός διαμορφώνεται ύστερα από την επέκταση. Η περίπτωση που κάποια πρόταση της μορφής $A\wedge B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά είναι ανάλογη.

Συνεχίζουμε με την περίπτωση της διάζευξης:

Θεωρούμε κλάδο δέντρου τέτοιο ώστε ο κύκλος στα αριστερά περιέχει πρόταση της μορφής $A\vee B$, και έστω όπως παραπάνω ερμηνεία Μ που είναι πιστή σε αυτόν. Θα είναι $w_1 \vDash A\vee B$ αν και μόνο αν $w_1 \vDash \sim A\rightarrow B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash \sim A$ και $w_1 \dashv B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv A$ και $w_1 \dashv B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv A$ ή δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv B$. Αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο κανόνα στο δέντρο, τότε θα προκύψει διακλάδωση, η επέκταση προς τα αριστερά θα τοποθετεί την πρόταση Α ανάμεσα στους δύο κύκλους, η επέκταση προς τα δεξιά θα τοποθετεί στην ίδια θέση την Β. Αν δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv A$ τότε έπεται ότι η Μ είναι πιστή στην επέκταση προς τα αριστερά, αν δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv B$ τότε η Μ θα είναι πιστή στην επέκταση προς τα δεξιά. Από την άλλη, αν η $A\vee B$ βρίσκεται εντός του κύκλου στα δεξιά, τότε θα είναι $w_1 \dashv A\vee B$. Όμως, θα είναι $w_1 \dashv A\vee B$ αν και μόνο αν $w_1 \dashv \sim A\rightarrow B$, ανν $w_1 \vDash \sim A$ και $w_1 \dashv B$, ανν $w_1 \dashv A$ και $w_1 \dashv B$. Αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο κανόνα, τότε το δέντρο θα επεκταθεί με δύο κύκλους, με τρόπο ώστε αυτός στα δεξιά θα περιέχει τόσο την Α όσο και την Β. Με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει, έπεται ότι η Μ θα είναι πιστή στον νέο κλάδο. Τέλος, έστω ότι κάποια πρόταση της μορφής $A\vee B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, έπεται ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash A\vee B$. Με βάση τους ορισμούς, αυτό σημαίνει ότι θα είναι $w_1 \Dashv A \vee B$. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου, τότε ο κλάδος επεκτείνεται με δύο κύκλους, και η συγκεκριμένη πρόταση τοποθετείται εντός του κύκλου στα δεξιά. Έπεται ότι η M θα είναι πιστή στον συγκεκριμένο κλάδο, όπως αυτός διαμορφώνεται ύστερα από την επέκταση. Η περίπτωση που κάποια πρόταση της μορφής $A \vee B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά είναι ανάλογη.

Για την περίπτωση της συνεπαγωγής:

Θεωρούμε κλάδο δέντρου τέτοιο ώστε ο κύκλος στα αριστερά περιέχει πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$, και έστω όπως παραπάνω ερμηνεία M που είναι πιστή σε αυτόν. Θα είναι $w_1 \vDash A \rightarrow B$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A$ και $w_1 \Dashv B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A$ ή δεν ισχύει ότι $w_1 \Dashv B$. Αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο κανόνα στο δέντρο, τότε προκύπτει διακλάδωση, η επέκταση προς τα αριστερά θα τοποθετεί την πρόταση A ανάμεσα στους δύο κύκλους, η επέκταση προς τα δεξιά θα κάνει το ίδιο για την πρόταση B. Αν λοιπόν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A$ τότε η M θα είναι πιστή στην επέκταση προς τα αριστερά, αν δεν ισχύει ότι $w_1 \Dashv B$ τότε θα είναι πιστή στην επέκταση προς τα δεξιά. Για την άλλη περίπτωση, έστω ότι η $A \rightarrow B$ βρίσκεται εντός κύκλου στα δεξιά. Θα είναι $w_1 \Dashv A \rightarrow B$ αν και μόνο αν $w_1 \vDash A$ και $w_1 \Dashv B$. Αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο συντακτικό κανόνα τότε ο κλάδος θα επεκταθεί με δύο κύκλους, εντός αυτού στα αριστερά θα περιέχεται η A, εντός αυτού στα δεξιά θα περιέχεται η B. Έπεται ότι η M θα είναι πιστή στην επέκταση που προκύπτει. Τέλος, έστω ότι κάποια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, έπεται ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash A \rightarrow B$. Με βάση τους ορισμούς, αυτό σημαίνει ότι θα είναι $w_1 \Dashv A \rightarrow B$. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου, τότε ο κλάδος επεκτείνεται με δύο κύκλους, και η συγκεκριμένη πρόταση τοποθετείται εντός του κύκλου στα δεξιά. Έπεται ότι η M θα είναι πιστή στον συγκεκριμένο κλάδο, όπως αυτός διαμορφώνεται ύστερα από την επέκταση. Η περίπτωση που κάποια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά είναι ανάλογη.

Για την περίπτωση της άρνησης:

Θεωρούμε κλάδο δέντρου τέτοιο ώστε ο κύκλος στα αριστερά περιέχει πρόταση της μορφής $\sim A$, και έστω όπως παραπάνω ερμηνεία M που είναι πιστή σε αυτόν. Θα είναι $w_1 \vDash \sim A$ αν και μόνο αν $w_1 \Dashv A$. Αν εφαρμόσουμε τον κατάλληλο κανόνα δέντρου τότε είναι προφανές ότι η M θα είναι πιστή στην επέκταση που προκύπτει. Παρομοίως και για την περίπτωση που η πρόταση $\sim A$ βρίσκεται εντός του κύκλου στα δεξιά. Τέλος, έστω ότι κάποια πρόταση της μορφής $\sim A$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, έπεται ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash \sim A$. Με βάση τους ορισμούς, αυτό σημαίνει ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \Dashv A$. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου, τότε ο κλάδος επεκτείνεται με δύο κύκλους, και η συγκεκριμένη πρόταση τοποθετείται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά. Έπεται ότι η M θα είναι πιστή στον συγκεκριμένο κλάδο, όπως αυτός διαμορφώνεται ύστερα από την επέκταση. Η περίπτωση που κάποια πρόταση της μορφής $\sim A$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά είναι ανάλογη.

Έχουν μείνει οι περιπτώσεις των κανόνων για τους ποσοδείκτες.

Έστω κλάδος δέντρου τέτοιος ώστε ο κύκλος στα αριστερά περιέχει πρόταση της μορφής $\forall xA$, και έστω όπως παραπάνω ερμηνεία M που είναι πιστή σε αυτόν. Έπεται ότι θα είναι $w_1 \vDash \forall xA$, και άρα θα είναι $w_1 \vDash <\forall x, <A>>$, όπου $<\forall x, <A>>$ η υβριδική πρόταση που αντιστοιχεί στην πρόταση $\forall xA$, και $<A>$ ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο A, οπότε έπεται ότι για κάθε αντικείμενο ob εντός του D δεν θα είναι $w_1 \Dashv [<A>]^{ob}_{x}$. Έστω τώρα ότι εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο κανόνα προκύπτει επέκταση του κλάδου, τέτοια ώστε δίπλα στον κύκλο στα δεξιά θα εμφανίζεται πρόταση A(x/a), που προκύπτει από την $\forall xA$ σβήνοντας τον ποσοδείκτη, και αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που αυτός δεσμεύει με το σταθερό σύμβολο ‘a’, το οποίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σταθερό σύμβολο εμφανίζεται εντός του κλάδου, ή κάποιο σύμβολο που εμφανίζεται για πρώτη φορά στο συγκεκριμένο επίπεδο, αν δεν υπάρχουν σε αυτόν άλλα σταθερά σύμβολα. Η M θα αναθέτει στην ατομική σταθερά ‘a’ κάποιο αντικείμενο (ob) εντός του D. Με βάση τα όσα έχουμε πει δεν θα είναι $w_1 \Dashv [<A>]^{(ob)}_{x}$, έπεται όμως από τους ορισμούς που έχουμε δώσει ότι ο συγκεκριμένος υβριδικός τύπος θα αντιστοιχεί στην πρόταση A(x/a). Γενικότερα, έπεται επαγωγικά ότι αν A τύπος της γλώσσας, και $<A>$ υβριδικός τύπος που δεδομένης κάποιας ερμηνείας αντιστοιχεί σε αυτόν, τότε αν b σταθερά της γλώσσας στην οποία η συγκεκριμένη ερμηνεία αναθέτει ως αναφορά το αντικείμενο β, θα ισχύει ότι στον τύπο A(x/b), που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x με την σταθερά b, αντιστοιχεί ο τύπος $[<A>]^{\beta}_{x}$. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχτεί μέσω επαγωγής ότι για πρόταση A, υβριδική πρόταση $<A>$ και αντικείμενο w εντός του W, αν ισχύει ότι η υβριδική πρόταση $<A>$ αντιστοιχεί στην A τότε θα είναι $w \vDash A$ αν και μόνο αν $w \vDash <A>$, και θα είναι $w \Dashv A$ αν και μόνο αν $w \Dashv <A>$. Καταλήγουμε ότι δεν θα είναι $w_1 \Dashv$ A(x/a). Συμπεραίνουμε ότι η M θα είναι πιστή στην επέκταση του κλάδου που προέκυψε.

Από την άλλη, ας θεωρήσουμε ότι ο αρχικός κλάδος περιέχει κάποια πρόταση της μορφής $\forall xA$ εντός του κύκλου στα δεξιά, και έστω ερμηνεία M που είναι πιστή σε αυτόν. Έπεται ότι θα είναι $w_1 \Dashv \forall xA$, άρα θα είναι $w_1 \Dashv <\forall x, <A>>$, όπου $<\forall x, <A>>$ η υβριδική πρόταση που αντιστοιχεί στην '$\forall xA$', ενώ $<A>$ ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο 'Α'. Έπεται ότι για κάποιο αντικείμενο ob εντός του D θα είναι $w_1 \Dashv [<A>]^{ob}_x$. Εφαρμόζοντας τώρα τον κατάλληλο συντακτικό κανόνα θα προκύψει επέκταση του κλάδου, τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα δεξιά θα περιέχεται πρόταση $A(x/c)$, που προκύπτει από την $\forall xA$ σβήνοντας τον ποσοδείκτη, και αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που αυτός δεσμεύει με το σταθερό σύμβολο 'c', το οποίο και θα πρέπει να είναι κάποιο σύμβολο που δεν έχει ήδη εμφανιστεί σε κάποιο προηγούμενο επίπεδο του κλάδου. Ας θεωρήσουμε ερμηνεία Μ' η οποία διαφέρει από την Μ μόνο ως προς το γεγονός ότι σύμφωνα με αυτήν είναι $Val^+(w_1, c)=obj$. Έπεται ότι σύμφωνα με την Μ' στην $A(x/c)$ θα αντιστοιχεί ο υβριδικός τύπος $[<A>]^{obj}_x$, και άρα εφόσον είναι $w_1 \Dashv [<A>]^{obj}_x$ θα είναι με βάση τα όσα έχουμε πει και $w_1 \Dashv A(x/c)$. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι θα υπάρχει ερμηνεία που είναι πιστή στην επέκταση του κλάδου που προέκυψε.

Οι περιπτώσεις για τους αντίστοιχους κανόνες για προτάσεις της μορφής $\exists xA$ είναι ανάλογες.

Έχουν μείνει οι περιπτώσεις που κάποια πρόταση που περιλαμβάνει ποσόδειξη εμφανίζεται δίπλα σε κάποιον κύκλο. Έστω λοιπόν ότι ο αρχικός κλάδος τοποθετεί κάποια πρόταση της μορφής $\forall xA$ δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, και έστω ερμηνεία Μ που είναι πιστή σε αυτόν. Θα είναι $w_1 \vDash \forall xA$ αν και μόνο αν είναι $w_1 \vDash <\forall x, <A>>$, όπου $<A>$ ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο Α και $<\forall x, <A>>$ η υβριδική πρόταση που αντιστοιχεί στην πρόταση $\forall xA$, και άρα αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο ob εντός του D δεν είναι $w_1 \Dashv [<A>]^{ob}_x$. Έπεται ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash \forall xA$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο ob εντός του D ισχύει ότι $w_1 \Dashv [<A>]^{ob}_x$, και αφού η Μ είναι πιστή στον αρχικό κλάδο έπεται ότι σύμφωνα με αυτήν για κάποιο αντικείμενο obj εντός του D ισχύει ότι $w_1 \Dashv [<A>]^{obj}_x$, βάσει των ορισμών που έχουμε δώσει έπεται ότι θα είναι $w_1 \Dashv \forall xA$. Τώρα, εφαρμόζοντας στο δέντρο τον κατάλληλο συντακτικό κανόνα θα προκύψει επέκταση του κλάδου, τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα δεξιά εμφανίζεται η πρόταση $\forall xA$. Καταλήγουμε ότι η Μ θα είναι πιστή στην επέκταση που έχει προκύψει, και άρα υπάρχει ερμηνεία που είναι πιστή στον κλάδο, όπως αυτός έχει διαμορφωθεί.

Από την άλλη, έστω ότι ο αρχικός κλάδος τοποθετεί κάποια πρόταση της μορφής $\forall xA$ δίπλα στον κύκλο στα δεξιά, και έστω ερμηνεία Μ που είναι πιστή σε αυτόν. Θα είναι $w_1 \Dashv \forall xA$ αν και μόνο αν είναι $w_1 \Dashv <\forall x, A>$, όπου $<A>$ ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο Α και <$\forall$x, <A>> η υβριδική πρόταση που αντιστοιχεί στην πρόταση $\forall$xA, και άρα αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο ob εντός του D είναι $w_1 \dashv [\text{<A>}]^{ob}{}_x$. Έπεται ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \dashv \forall xA$ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο ob εντός του D δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv [\text{<A>}]^{ob}{}_x$, και αφού η M είναι πιστή στον αρχικό κλάδο έπεται ότι για κάθε αντικείμενο ob εντός του D δεν ισχύει ότι $w_1 \dashv [\text{<A>}]^{ob}{}_x$, οπότε βάσει των ορισμών που έχουμε δώσει καταλήγουμε ότι θα είναι $w_1 \vDash \forall xA$. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο συντακτικό κανόνα θα προκύψει επέκταση του κλάδου, τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα αριστερά εμφανίζεται η πρόταση $\forall$xA και άρα συμπεραίνουμε ότι η ερμηνεία M θα είναι πιστή στην επέκταση του κλάδου που έχει προκύψει.

Οι αντίστοιχες περιπτώσεις για τις προτάσεις με μορφή υπαρκτικής ποσόδειξης είναι ανάλογες.

Θέλουμε με βάση αυτά να δείξουμε ότι αν είναι $\Sigma \vdash A$ τότε θα ισχύει πως $\Sigma \Vdash A$, όπου εδώ με το σύμβολο '$\Vdash$' αναφερόμαστε στην έννοια της λογικής εγκυρότητας, που δεν είναι δηλαδή σχετικοποιημένη ως προς κάποια συγκεκριμένη ερμηνεία της γλώσσας, με το σύμβολο 'Σ' αναφερόμαστε σε κάποιο σύνολο προτάσεων, και με το σύμβολο 'A' αναφερόμαστε σε κάποια πρόταση. Δείχνουμε το contrapositive, έστω λοιπόν ότι δεν ισχύει πως $\Sigma \Vdash A$. Θα υπάρχει λοιπόν ερμηνεία M της μορφής <D, W, Απ, Φ, $\sqsubseteq$, Val^+, Val^->, τέτοια ώστε για αντικείμενο w_0 του W που ανήκει στο Φ θα υπάρχει αντικείμενο w_1 του W που ανήκει στο Απ και το επεκτείνει, τέτοιο ώστε να είναι $w_1 \vDash \Sigma$, όπου με αυτή την συμβολοσειρά εννοούμε ότι το σημείο w_1 επιβεβαιώνει κάθε μία από τις προτάσεις που περιλαμβάνονται στο Σ, και $w_1 \dashv A$. Ας προσπαθήσουμε να δείξουμε δεν ισχύει πως $\Sigma \vdash A$. Έστω λοιπόν δέντρο που αποτελείται από τα δύο πρώτα επίπεδα, τέτοιο ώστε ο κύκλος του δεύτερου επιπέδου που βρίσκεται στα αριστερά περιέχει όλες τις προτάσεις που περιέχονται εντός του Σ, και ο κύκλος που βρίσκεται στα δεξιά περιέχει την πρόταση A. Με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει, η M θα είναι πιστή στον συγκεκριμένο κλάδο. Έχουμε αποδείξει όμως, ότι για κάθε επέκταση που μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας κάποιον κανόνα δέντρου θα υπάρχει ερμηνεία τέτοια ώστε αυτή θα είναι πιστή τουλάχιστον σε έναν από τους νέους κλάδους. Από τον τρόπο με τον οποίο έχουμε ορίσει πότε ένας κλάδος θεωρείται κλειστός έπεται ότι για κάθε επέκταση που μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας κάποιον κανόνα δέντρου θα ισχύει για κάποιον από τους νέους κλάδους ότι αυτός είναι ανοικτός. Καταλήγουμε άρα ότι δεν θα ισχύει ότι $\Sigma \vdash A$, και άρα αν είναι $\Sigma \vdash A$ τότε θα ισχύει πως $\Sigma \Vdash A$.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη πληρότητας. Αρχικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ας θεωρήσουμε δέντρο τέτοιο ώστε υπάρχει κλάδος του που είναι ανοικτός. Θα θεωρούμε για κάποια ερμηνεία ότι αυτή αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο ανοικτό κλάδο αν και μόνο αν πρόκειται για διατεταγμένη επτάδα $<D, W, A\pi, \Phi, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$, τέτοια ώστε εντός του D περιέχονται τα σταθερά σύμβολα που εμφανίζονται στον συγκεκριμένο κλάδο, εντός του W περιέχονται αντικείμενα w_0 και w_1, εντός του Απ περιέχεται το w_1, εντός του Φ το w_0, και είναι $w_0 \sqsubseteq w_1$. Σε κάθε σταθερό σύμβολο της γλώσσας που εμφανίζεται εντός του κλάδου ανατίθεται ως αναφορά ο εαυτός του. Για σταθερό σύμβολο 'a' και κατηγορηματικό σύμβολο 'F' της γλώσσας, ισχύει ότι $Val^{+}(w_0, a) \in Val^{+}(w_0, F)$ αν και μόνο αν η πρόταση 'Fa' περιέχεται εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά στο επίπεδο 0, ισχύει ότι $Val^{+}(w_0, a) \in Val^{-}(w_0, F)$ αν και μόνο αν η πρόταση 'Fa' περιέχεται εντός του κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά στο επίπεδο 0, ισχύει ότι $Val^{+}(w_1, a) \in Val^{+}(w_1, F)$ αν και μόνο αν η πρόταση 'Fa' περιέχεται εντός κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά σε κάποιο επίπεδο διαφορετικό του 0, ισχύει ότι $Val^{+}(w_1, a) \in Val^{-}(w_1, F)$ αν και μόνο αν η πρόταση 'Fa' περιέχεται εντός κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά σε κάποιο επίπεδο διαφορετικό του 0. Ανάλογα και για περιπτώσεις ατομικών προτάσεων που περιέχουν n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα, όπου $n \geq 2$. Τέλος, αν αυτό είναι απαραίτητο, προσθέτουμε στα W και Απ επιπλέον κόσμους με τρόπο ώστε το w_0 να πληροί τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει προκειμένου αυτό να κατατάσσεται ως φυσιολογικό.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε μέσω επαγωγής ως προς την πολυπλοκότητα των προτάσεων της γλώσσας, ότι για πρόταση Α και ανοικτό κλάδο Β εντός του οποίου αυτή εμφανίζεται, και ο οποίος είναι τέτοιος ώστε έχει εφαρμοστεί σε αυτόν κάθε κανόνας δέντρου που θα μπορούσε να εφαρμοστεί, αν θεωρήσουμε ερμηνεία που αντιστοιχεί σε αυτόν τότε θα ισχύει ότι αν η πρόταση Α βρίσκεται εντός του κύκλου στα αριστερά στο επίπεδο 0 τότε θα είναι $w_0 \vDash A$, ενώ αν βρίσκεται εντός του κύκλου στα δεξιά στο επίπεδο 0 τότε θα είναι $w_0 \Dashv A$. Τέλος, αν βρίσκεται εντός κύκλου στα αριστερά σε επίπεδο διάφορο του 0 τότε θα είναι $w_1 \vDash A$, αν βρίσκεται εντός κύκλου στα δεξιά σε επίπεδο διάφορο του 0 τότε θα είναι $w_1 \Dashv A$, αν βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά για επίπεδο διάφορο του 0 τότε δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A$, και αν βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά τότε δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv A$.

Πράγματι, η περίπτωση για τις ατομικές προτάσεις έπεται άμεσα από τους ορισμούς που έχουμε δώσει.

Συνεχίζουμε με την περίπτωση της σύζευξης:

Έστω ανοικτός κλάδος Κ που έχει συμπληρωθεί, ερμηνεία Μ που αντιστοιχεί σε αυτόν, και έστω ότι σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $A \wedge B$ εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά. Εφόσον ο κλάδος είναι συμπληρωμένος, κάθε κανόνας που θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε αυτόν έχει εφαρμοστεί, έπεται ότι θα υπάρχει σε αυτόν κύκλος που βρίσκεται στα αριστερά, σε επίπεδο διάφορο του 0, τέτοιος ώστε περιέχει την πρόταση Α και την πρόταση Β. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την Μ θα είναι $w_1 \vDash A$ και $w_1 \vDash B$. Επιπλέον, θα είναι $w_1 \vDash A \wedge B$ αν και μόνο αν $w_1 \vDash \sim(A \rightarrow \sim B)$, ανν $w_1 \Dashv (A \rightarrow \sim B)$, ανν $w_1 \vDash A \wedge$ $w_1 \Dashv \sim B$, ανν $w_1 \vDash A \wedge$ $w_1 \vDash B$. Έπεται άρα ότι θα είναι $w_1 \vDash A \wedge B$. Έστω από την άλλη ότι κάποια πρόταση της μορφής $A \wedge B$ εμφανίζεται εντός του κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά, σε κάποιο επίπεδο διάφορο του 0. Έπεται ότι είτε θα υπάρχει κύκλος εντός του κλάδου Κ που βρίσκεται στα δεξιά και περιέχει την πρόταση Α, είτε θα υπάρχει τέτοιος κύκλος που περιέχει την πρόταση Β. Έστω ότι ισχύει το πρώτο, από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την Μ, δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A$. Θα είναι όμως $w_1 \Dashv A \wedge B$ αν και μόνο αν $w_1 \Dashv \sim(A \rightarrow \sim B)$, ανν $w_1 \vDash (A \rightarrow \sim B)$, ανν $\sim$ ($w_1 \vDash A \wedge$ $w_1 \vDash B$), ανν $\sim$ ($w_1 \vDash A$)$\vee$ $\sim$($w_1 \vDash B$). Έπεται άρα ότι θα είναι $w_1 \Dashv A \wedge B$. Τέλος, αν η $A \wedge B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά για επίπεδο διάφορο του 0, τότε αφού ο κλάδος Κ είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα εμφανίζεται σε αυτόν κύκλος στα δεξιά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει την συγκεκριμένη πρόταση. Κατά συνέπεια, θα εμφανίζεται στον ίδιο κλάδο και κύκλος στα αριστερά, τέτοιος ώστε εμφανίζεται δίπλα του η πρόταση Α, ή η πρόταση Β. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την Μ δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A$, ή δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash B$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σύμφωνα με αυτήν δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A \wedge B$. Από την άλλη, αν η $A \wedge B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά για επίπεδο διάφορο του 0, τότε αφού ο κλάδος Κ είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα εμφανίζεται σε αυτόν κύκλος στα αριστερά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει την συγκεκριμένη πρόταση, και άρα κύκλος στα αριστερά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει τόσο την πρόταση Α, όσο και την πρόταση Β. Έπεται ότι σύμφωνα με την Μ θα είναι $w_1 \vDash A$ και $w_1 \vDash B$, οπότε καταλήγουμε ότι σύμφωνα με αυτήν δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv A \wedge B$.

Για την περίπτωση της διάζευξης έχουμε:

Θεωρούμε ανοικτό κλάδο Κ που έχει συμπληρωθεί, ερμηνεία Μ που αντιστοιχεί σε αυτόν, και έστω ότι σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $A \vee B$ εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά. Εφόσον ο κλάδος είναι συμπληρωμένος, κάθε κανόνας που θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε αυτόν έχει εφαρμοστεί και άρα θα υπάρχει σε αυτόν κύκλος που βρίσκεται στα δεξιά, σε επίπεδο διάφορο του 0, τέτοιος ώστε η πρόταση A εμφανίζεται δίπλα του, ή τέτοιος ώστε να εμφανίζεται εκεί η πρόταση B. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την M δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv A$ ή δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv B$. Επιπλέον, θα είναι $w_1 \vDash A \vee B$ αν και μόνο αν $w_1 \vDash \sim A \rightarrow B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \Dashv A$ ή δεν ισχύει ότι $w_1 \Dashv B$. Έπεται άρα ότι θα είναι $w_1 \vDash A \vee B$. Έστω από την άλλη ότι κάποια πρόταση της μορφής $A \vee B$ εμφανίζεται εντός του κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά, σε κάποιο επίπεδο διάφορο του 0. Έπεται ότι θα υπάρχει κύκλος εντός του κλάδου K που βρίσκεται στα δεξιά και περιέχει την πρόταση A, καθώς και την πρόταση B. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι θα είναι $w_1 \Dashv A$ και $w_1 \Dashv B$. Θα είναι όμως $w_1 \Dashv A \vee B$ αν και μόνο αν $w_1 \Dashv \sim A \rightarrow B$, ανν $w_1 \vDash \sim A \wedge$ $w_1 \Dashv B$, ανν $w_1 \Dashv A$ και $w_1 \Dashv B$. Έπεται άρα ότι θα είναι $w_1 \Dashv A \vee B$. Τέλος, αν η $A \vee B$ βρίσκεται δίπλα σε κύκλο στα αριστερά για επίπεδο διάφορο του 0, τότε αφού ο κλάδος K είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα εμφανίζεται σε αυτόν κύκλος στα δεξιά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει την συγκεκριμένη πρόταση. Κατά συνέπεια, θα εμφανίζεται στον ίδιο κλάδο και κύκλος στα δεξιά, τέτοιος ώστε εμφανίζεται εντός αυτού η πρόταση A και η πρόταση B. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την M θα είναι $w_1 \Dashv A$, και $w_1 \Dashv B$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σύμφωνα με αυτήν δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A \vee B$. Από την άλλη, αν η $A \vee B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά για επίπεδο διάφορο του 0, τότε αφού ο κλάδος K είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα εμφανίζεται σε αυτόν κύκλος στα αριστερά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει την συγκεκριμένη πρόταση, και άρα κύκλος στα δεξιά με επίπεδο διάφορο του 0 τέτοιος ώστε η A εμφανίζεται δίπλα του, ή τέτοιος ώστε εμφανίζεται στο ίδιο σημείο η B. Έπεται ότι σύμφωνα με την M δεν θα είναι $w_1 \Dashv A$, ή δεν θα είναι $w_1 \Dashv B$, οπότε καταλήγουμε ότι σύμφωνα με αυτήν δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv A \vee B$.

Για την περίπτωση της συνεπαγωγής:

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, θεωρούμε ανοικτό κλάδο K που έχει συμπληρωθεί, ερμηνεία M που αντιστοιχεί σε αυτόν, και υποθέτουμε ότι σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$ εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά. Εφόσον ο κλάδος είναι συμπληρωμένος, κάθε κανόνας που θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε αυτόν έχει εφαρμοστεί και άρα θα υπάρχει σε αυτόν κύκλος που βρίσκεται στα αριστερά, σε επίπεδο διάφορο του 0, τέτοιος ώστε η πρόταση A εμφανίζεται δίπλα του, ή κύκλος που βρίσκεται στα δεξιά τέτοιος ώστε να εμφανίζεται δίπλα του η πρόταση B. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την M δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A$ ή δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv B$. Επιπλέον, θα είναι $w_1 \vDash A \rightarrow B$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A \wedge w_1 \Dashv B$, ανν δεν ισχύει ότι $w_1 \vDash A$, ή δεν ισχύει ότι $w_1 \Dashv B$. Έπεται άρα ότι θα είναι $w_1 \vDash A \rightarrow B$. Έστω από την άλλη ότι κάποια πρόταση της μορφής $A \rightarrow B$ εμφανίζεται εντός του κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά, σε κάποιο επίπεδο διάφορο του 0. Έπεται ότι θα υπάρχει κύκλος εντός του κλάδου Κ που βρίσκεται στα αριστερά και περιέχει την πρόταση Α, ενώ ο κύκλος που βρίσκεται στα δεξιά του περιέχει την πρόταση Β. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι θα είναι $w_1 \vDash A$ και $w_1 \Dashv B$, οπότε έπεται άμεσα ότι θα είναι $w_1 \Dashv A \rightarrow B$. Τέλος, αν η $A \rightarrow B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα αριστερά για επίπεδο διάφορο του 0, τότε αφού ο κλάδος Κ είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα εμφανίζεται σε αυτόν κύκλος στα δεξιά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει την συγκεκριμένη πρόταση. Κατά συνέπεια, θα εμφανίζεται στον ίδιο κλάδο και κύκλος στα αριστερά, τέτοιος ώστε εμφανίζεται εντός αυτού η πρόταση Α, ενώ στον κύκλο στα δεξιά του εμφανίζεται η πρόταση Β. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι σύμφωνα με την Μ θα είναι $w_1 \vDash A$, και $w_1 \Dashv B$, και άρα δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash A \rightarrow B$. Από την άλλη, αν η $A \rightarrow B$ βρίσκεται δίπλα στον κύκλο στα δεξιά για επίπεδο διάφορο του 0, τότε αφού ο κλάδος Κ είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα εμφανίζεται σε αυτόν κύκλος στα αριστερά με επίπεδο διάφορο του 0 που περιέχει την συγκεκριμένη πρόταση, και άρα κύκλος στα αριστερά με επίπεδο διάφορο του 0 τέτοιος ώστε η Α εμφανίζεται δίπλα του, ή κύκλος στα δεξιά τέτοιος ώστε εμφανίζεται δίπλα του η Β. Έπεται ότι σύμφωνα με την Μ δεν θα είναι $w_1 \vDash A$, ή δεν θα είναι $w_1 \Dashv B$, οπότε καταλήγουμε ότι σύμφωνα με αυτήν δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv A \rightarrow B$.

Για την περίπτωση της άρνησης:

Θεωρούμε ανοικτό κλάδο Κ που έχει συμπληρωθεί, ερμηνεία Μ που αντιστοιχεί σε αυτόν, και υποθέτουμε ότι σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $\sim A$ εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά. Κάθε κανόνας δέντρου που θα μπορούσε να εφαρμοστεί στον κλάδο Κ έχει εφαρμοστεί, και άρα θα υπάρχει κύκλος που βρίσκεται στα δεξιά σε επίπεδο διάφορο του 0, τέτοιος ώστε περιέχει την πρόταση Α. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι θα είναι $w_1 \Dashv A$, και άρα $w_1 \vDash \sim A$, που είναι και το ζητούμενο. Εντελώς ανάλογη είναι και η περίπτωση που κάποια πρόταση της μορφής $\sim A$ εμφανίζεται εντός κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά. Τέλος, αν σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $\sim A$ δίπλα σε κύκλο βρίσκεται στα αριστερά, έπεται ότι θα υπάρχει κύκλος αντίστοιχου επιπέδου στα δεξιά τέτοιος ώστε η Α εμφανίζεται δίπλα του. Σύμφωνα με την Μ δεν θα ισχύει ότι $w_1 \Dashv A$, και αφού είναι $w_1 \vDash \sim A$ αν και μόνο αν $w_1 \Dashv A$, καταλήγουμε ότι δεν θα ισχύει ότι $w_1 \vDash \sim A$, που είναι και το ζητούμενο. Με ανάλογο τρόπο έπεται και το ζητούμενο για την περίπτωση που κάποια πρόταση της μορφής ∼A εμφανίζεται δίπλα σε κύκλο στα δεξιά με επίπεδο διάφορο του 0.

Έχουν μείνει οι περιπτώσεις των προτάσεων που περιέχουν ποσόδειξη.

Έστω ανοικτός κλάδος K που έχει συμπληρωθεί, ερμηνεία M που αντιστοιχεί σε αυτόν, και έστω ότι σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής ∀xA εντός του κύκλου που βρίσκεται στα αριστερά. Θεωρούμε ότι ο K είναι τέτοιος ώστε κάθε κανόνας δέντρου που θα μπορούσε να είχε εφαρμοστεί σε αυτόν έχει εφαρμοστεί. Έπεται ότι για επόμενο επίπεδο του κλάδου θα ισχύει ότι δίπλα στον κύκλο στα δεξιά εμφανίζεται πρόταση της μορφής A(x/a), που προκύπτει από την ∀xA σβήνοντας τον ποσοδείκτη, και αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που αυτός δεσμεύει με το σταθερό σύμβολο 'a', το οποίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σταθερό σύμβολο εμφανίζεται εντός του κλάδου, ή κάποιο σύμβολο που εμφανίζεται για πρώτη φορά στο συγκεκριμένο επίπεδο, αν δεν υπάρχουν σε αυτόν άλλα σταθερά σύμβολα. Εφόσον ο κλάδος είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι για κάθε σταθερό σύμβολο 'con' που εμφανίζεται σε αυτόν, θα ισχύει είτε ότι υπάρχει κύκλος στα δεξιά σε επίπεδο διάφορο του 0, δίπλα στον οποίο εμφανίζεται πρόταση A(x/con). Από επαγωγική υπόθεση όμως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι για κάθε τέτοια πρόταση δεν θα είναι w_1⫤ A(x/con). Έστω <A> ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο A βάσει της M, αφού έχουμε θεωρήσει ότι εντός του συνόλου D περιέχονται οι σταθερές που εμφανίζονται στον κλάδο K και μόνο, έπεται ότι σε κάθε πρόταση της μορφής A(x/con) θα αντιστοιχεί η υβριδική πρόταση $[<A>]^{con}{}_{x}$, και άρα αφού δεν είναι w_1⫤A(x/con), δεν θα είναι και w_1⫤$[<A>]^{con}{}_{x}$. Καταλήγουμε ότι σύμφωνα με την ερμηνεία M θα ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο ob εντός του D δεν είναι w_1⫤$[<A>]^{ob}{}_{x}$, και άρα θα είναι w_1⊨<∀x, <A>>. Με βάση τα όσα έχουμε πει θα προκύπτει ότι σύμφωνα με την M ο υβριδικός τύπος <∀x, <A>> αντιστοιχεί στην πρόταση ∀xA, και άρα θα είναι w_1⊨∀xA.

Έστω από την άλλη ότι κάποια πρόταση της μορφής ∀xA περιέχεται εντός κύκλου που βρίσκεται στα δεξιά, σε κάποιο επίπεδο διάφορο του 0. Έπεται ότι θα υπάρχει κύκλος στα δεξιά που περιέχει κάποια πρόταση της μορφής A(x/c), που προκύπτει από την ∀xA σβήνοντας τον ποσοδείκτη, και αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που αυτός δεσμεύει με το σταθερό σύμβολο 'c', το οποίο και θα πρέπει να είναι κάποιο σύμβολο που δεν έχει ήδη εμφανιστεί σε κάποιο προηγούμενο στάδιο του κλάδου. Από επαγωγική υπόθεση θα είναι w_1⫤ A(x/c) και άρα αν ισχύει ότι στο σύμβολο 'c' ανατίθεται ως αναφορά το αντικείμενο ob, θα ισχύει ότι w_1⫤$[<A>]^{ob}{}_{x}$, όπου <A> ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο Α, έπεται ότι θα είναι $w_1 \dashv <\forall x, <A>>$, και αφού η υβριδική πρόταση $<\forall x, <A>>$ αντιστοιχεί στην πρόταση $\forall x A$, έπεται με βάση τις σημασιολογικές συνθήκες που έχουμε ορίσει ότι θα είναι $w_1 \dashv \forall x A$.

Οι περιπτώσεις που αντιστοιχούν στις προτάσεις με υπαρκτική ποσόδειξη είναι ανάλογες.

Έχουν τώρα μείνει εκείνες από τις περιπτώσεις στις οποίες εμφανίζεται κάποια πρόταση με καθολική ή υπαρκτική ποσόδειξη δίπλα σε κύκλο με επίπεδο διάφορο του 0. Έστω λοιπόν ανοικτός κλάδος Κ που έχει συμπληρωθεί, ερμηνεία Μ που αντιστοιχεί σε αυτόν, και έστω ότι σε επίπεδο διάφορο του 0 εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $\forall x A$ δίπλα σε κύκλο που βρίσκεται στα αριστερά. Εφόσον ο κλάδος είναι συμπληρωμένος, έπεται ότι θα υπάρχει σε αυτόν και κύκλος στα δεξιά, με επίπεδο διάφορο του 0, τέτοιος ώστε θα εμφανίζεται εντός του πρόταση της μορφής $A(x/c)$, που προκύπτει από την $\forall x A$ σβήνοντας τον ποσοδείκτη, και αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που αυτός δεσμεύει με το σταθερό σύμβολο ‘c’, το οποίο και θα πρέπει να είναι κάποιο σύμβολο που δεν έχει ήδη εμφανιστεί σε κάποιο προηγούμενο στάδιο του κλάδου. Από επαγωγική υπόθεση και με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει έπεται ότι, εφόσον ο κλάδος Κ είναι ανοικτός, θα ισχύει πως $w_1 \dashv A(x/c)$. Έστω ότι $<A>$ ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο Α βάσει της Μ, έπεται ότι θα υπάρχει εντός του D αντικείμενο c, πρόκειται πολύ απλά για την συγκεκριμένη σταθερά, τέτοιο ώστε θα ισχύει ότι $w_1 \dashv [<A>]^{c}_{x}$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash <\forall x, <A>>$ και άρα εφόσον η υβριδική πρόταση $<\forall x, <A>>$ αντιστοιχεί βάσει της Μ στην πρόταση $\forall x A x$, καταλήγουμε ότι δεν θα ισχύει πως $w_1 \vDash \forall x A x$.

Έστω από την άλλη ότι κάποια πρόταση της μορφής $\forall x A$ εμφανίζεται δίπλα σε κύκλο που βρίσκεται στα δεξιά με επίπεδο διάφορο του 0. Ο κλάδος Β είναι συμπληρωμένος, και άρα για κάθε σταθερό σύμβολο ‘a’ που εμφανίζεται σε αυτόν, θα υπάρχει είτε κύκλος που βρίσκεται στα δεξιά, με επίπεδο διάφορο του 0, και τέτοιος ώστε θα εμφανίζεται δίπλα του η πρόταση $A(x/a)$, που προκύπτει από την $\forall x A$ σβήνοντας τον ποσοδείκτη, και αντικαθιστώντας κάθε εμφάνιση της μεταβλητής που αυτός δεσμεύει με το σταθερό σύμβολο ‘a’. Από επαγωγική υπόθεση, και αφού ο κλάδος Κ είναι ανοικτός, έπεται για κάθε τέτοια πρόταση ότι σύμφωνα με την Μ δεν θα ισχύει ότι $w_1 \dashv A(x/a)$. Αν $<A>$ ο υβριδικός τύπος που αντιστοιχεί στον τύπο Α, τότε βάσει της Μ θα ισχύει ότι στην πρόταση $A(x/a)$ αντιστοιχεί η υβριδική πρόταση $[<A>]^{\alpha}_{x}$ όπου α το αντικείμενο που η Μ αναθέτει στο ‘a’, και άρα δεν θα ισχύει ότι $w_1 \dashv [<A>]^{\alpha}_{x}$. Αφού εντός του D περιέχονται οι ατομικές σταθερές που εμφανίζονται εντός του συγκεκριμένου κλάδου και μόνο, έπεται πως για κάθε αντικείμενο ob εντός του D δεν θα ισχύει ότι $w_1 \mathrel{=\!\!|} [\langle A \rangle]^{ob}_{x}$. Καταλήγουμε κατ' αυτόν τον τρόπο ότι σύμφωνα με την M θα ισχύει ότι $w_1 \models \langle \forall x, \langle A \rangle \rangle$ και άρα αφού βάσει αυτής στην πρόταση $\forall x A x$ αντιστοιχεί η υβριδική πρόταση $\langle \forall x, \langle A \rangle \rangle$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι θα είναι $w_1 \models \forall x A x$.

Οι αντίστοιχες περιπτώσεις για τις προτάσεις με υπαρκτική ποσόδειξη είναι ανάλογες.

Θέλουμε με βάση αυτά να δείξουμε ότι αν για σύνολο προτάσεων Σ, και πρόταση A είναι $\Sigma \mid\!\models A$, τότε θα είναι και $\Sigma \vdash A$. Δείχνουμε το contrapositive, έστω λοιπόν ότι δεν ισχύει πως $\Sigma \vdash A$, και έστω δέντρο τέτοιο ώστε στην ρίζα του εμφανίζονται δύο κύκλοι επιπέδου 1, τέτοιοι ώστε εντός αυτού στα αριστερά εμφανίζεται κάθε πρόταση που περιλαμβάνεται στο σύνολο Σ, και εντός αυτού στα δεξιά εμφανίζεται η πρόταση A. Έστω επίσης ότι στο συγκεκριμένο δέντρο έχει εφαρμοστεί κάθε κανόνας που θα μπορούσε να εφαρμοστεί. Εφόσον δεν ισχύει πως $\Sigma \vdash A$, έπεται ότι θα υπάρχει συμπληρωμένος κλάδος K που είναι ανοικτός. Θεωρούμε ερμηνεία M που αντιστοιχεί σε αυτόν, αυτή θα είναι της μορφής $\langle D, W, A\pi, \Phi, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-} \rangle$, όπου εντός του D περιέχονται τα σταθερά σύμβολα που εμφανίζονται στον συγκεκριμένο κλάδο, εντός του W περιέχονται αντικείμενα w_0 και w_1, όπου το w_1 ανήκει στο Απ, ενώ το w_0 ανήκει στο Φ, και είναι $w_0 \sqsubseteq w_1$. Με βάση αυτά που αποδείξαμε πιο πάνω όμως, έπεται ότι θα είναι $w_1 \models \Sigma$, το συγκεκριμένο σημείο επιβεβαιώνει δηλαδή κάθε πρόταση που ανήκει στο σύνολο Σ, και ταυτόχρονα είναι $w_1 \mathrel{=\!\!|} A$. Καταλήγουμε έτσι ότι υπάρχει ερμηνεία, τέτοια ώστε για κάποιο φυσιολογικό σημείο ισχύει ότι υπάρχει αποδεκτό σημείο που το επεκτείνει, τέτοιο ώστε αυτό επιβεβαιώνει κάθε πρόταση εντός του συνόλου Σ ενώ διαψεύδει την πρόταση A. Έπεται ότι σύμφωνα με αυτήν την ερμηνεία δεν θα ισχύει ότι $\Sigma \mid\!\models A$, και άρα η συγκεκριμένη μορφή επιχειρήματος δεν θα είναι λογικά έγκυρη. Που είναι και το ζητούμενο.

Έχουμε με βάση όλα αυτά καταλήξει στο συμπέρασμα ότι για σύνολο προτάσεων Σ, και πρόταση A θα είναι $\Sigma \vdash A$, αν και μόνο αν είναι $\Sigma \mid\!\models A$.

3.1.3 Natural Deduction στο στυλ του Fitch

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να διατυπώσουμε και συντακτικούς κανόνες για αποδείξεις σε μορφή natural deduction. Έστω προτάσεις A, B, θέτουμε τους εξής κανόνες:

Υπόθεση:

$A \qquad\qquad A$

Επανάληψη:

$A \qquad\qquad A$

$B \qquad\qquad B$

$A \qquad\qquad A$

Modus Ponens:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Conditional Proof:

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}}{A \to B}$$

Double Negation Elimination:

$$\frac{\sim\sim A}{A} \qquad \frac{\sim\sim A}{A}$$

Double Negation Introduction:

$$\frac{A}{\sim\sim A} \qquad \frac{A}{\sim\sim A}$$

Indirect Proof:

$$\frac{\begin{array}{l} \sim A \\ \perp \end{array}}{A} \qquad \frac{\begin{array}{l} \sim A \\ \perp \end{array}}{A}$$

Proof of Derivability:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \sim A \end{array}}{\perp} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ \sim A \end{array}}{\perp}$$

Disjunction Introduction:

$$\frac{A}{A\vee B}$$

Disjunction Elimination:

{A∨B

{A	{B
{Γ	{Γ

{Γ

Disjunctive Syllogism:

$$\frac{\begin{array}{c}A\vee B\\ \sim A\end{array}}{B}$$

Conjunction Introduction:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{A\wedge B}$$

Conjunction Elimination:

$$\frac{A\wedge B}{A} \qquad \frac{A\wedge B}{B}$$

De Morgan:

$$\frac{\sim(A\vee B)}{\sim A\wedge\sim B}$$

De Morgan:

$$\frac{\sim(A\wedge B)}{\sim A\vee\sim B}$$

Επιπλέον, θέτουμε τα εξής:

$$\frac{\begin{array}{c}\sim(A\wedge B)\\ A\end{array}}{\sim B} \qquad \frac{\sim(A\rightarrow B)}{A\wedge\sim B} \qquad \frac{\sim(A\wedge B)}{A\rightarrow\sim B}$$

Τέλος, όσον αφορά τους ποσοδείκτες θα είναι:

Universal Introduction:

$$\frac{Ac}{\forall x A x}$$

Universal Elimination:

$$\frac{\forall x A x}{Aa}$$

Existential Introduction:

$$\frac{Aa}{\exists x A x}$$

Existential Elimination:

$$\frac{\begin{array}{l} \exists x A x \\ \begin{array}{|l} Ac \\ B \end{array} \end{array}}{B} \qquad \frac{\begin{array}{l} \exists x A x \\ \begin{array}{|l} Ac \\ B \end{array} \end{array}}{B}$$

Καθώς και:

$$\frac{\begin{array}{l} \sim\forall x A x \\ \begin{array}{|l} \sim Ac \\ B \end{array} \end{array}}{B} \qquad \frac{\begin{array}{l} \sim\forall x A x \\ \begin{array}{|l} \sim Ac \\ B \end{array} \end{array}}{B} \qquad \frac{\sim\exists x A x}{\sim Aa}$$

Όπου με το σύμβολο ‘a’ αναφερόμαστε σε ατομική σταθερά της γλώσσας που μπορεί να έχει ήδη εμφανιστεί σε προηγούμενο βήμα της απόδειξης, είτε σε νέα ατομική σταθερά. Με το σύμβολο ‘c’ αναφερόμαστε σε ατομική σταθερά που δεν εμφανίζεται εντός του συμπεράσματος του σχετικού κανόνα ή της ποσοδεικτικής πρότασης στις προκείμενες αυτού, αν υπάρχει τέτοια, ή εντός προηγούμενης υπόθεσης μέσα στην οποία αυτά εμφανίζονται.

Έχουμε εμπλουτίσει την γλώσσα αντικείμενο με το σύμβολο ‘⊥’, δεδομένου επιχειρήματος που καταλήγει σε αυτό, θα λέμε ότι οι προκείμενες του επιχειρήματος οδηγούν σε αντίφαση.

Λαμβάνοντας τον τρόπο που έχουμε ορίσει τους διάφορους προτασιακούς συνδέσμους της γλώσσας, θα θεωρούμε όσον αφορά το προτασιακό τμήμα της θεωρίας ως βασικούς τους κανόνες της σελίδας 181. Από την άλλη, όσον αφορά το ποσοδεικτικό τμήμα αυτής, θα θεωρούμε ως βασικούς τους κανόνες Universal Introduction και Universal Elimination. Κάθε άλλος κανόνας μπορεί να προκύψει από αυτούς, μέσω της κατάλληλης κάθε φορά απόδειξης.

Κάθε φορά που εφαρμόζουμε κάποιον από τους κανόνες μπορούμε να επιλέξουμε να εφαρμόσουμε εκδοχή του που προκύπτει αφαιρώντας κάποιες από τις αγκύλες που εμφανίζονται δίπλα σε προκείμενες. Αν αφαιρέσουμε την αγκύλη από κάποια συγκεκριμένη προκείμενη τότε κάνουμε το ίδιο και για τις υπόλοιπες από τις επαναλήψεις της ίδιας πρότασης ως προκείμενη για τις οποίες ισχύει ότι δεν εντάσσονται εντός διαφορετικής υπόθεσης. Σε κάθε περίπτωση, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκδοχή κανόνα που προκύπτει αφαιρώντας αγκύλη από προκείμενη μέσω της οποίας αρχίζει υπόθεση, ούτε και εκδοχή κανόνα που προκύπτει προσθέτοντας αγκύλη σε κάποια προκείμενη. Στην περίπτωση κανόνα όπου το συμπέρασμα συνοδεύεται από αγκύλη και ισχύει ότι η ίδια πρόταση εμφανίζεται με αγκύλη και στην τελευταία γραμμή υπόθεσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε και την εκδοχή του κανόνα που προκύπτει αφαιρώντας την αγκύλη από το συμπέρασμα καθώς και τις αγκύλες δίπλα από κάθε εμφάνιση της ίδιας πρότασης στο τέλος υπόθεσης. Σε κάθε άλλη περίπτωση δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε εκδοχή που προκύπτει αφαιρώντας αγκύλη από το συμπέρασμα. Από την άλλη, κάθε φορά που εφαρμόζουμε κάποιον κανόνα μπορούμε να επιλέξουμε να εφαρμόσουμε εκδοχή του που προκύπτει αν προσθέσουμε αγκύλη δίπλα στο συμπέρασμα.

Ως σημείο εκκίνησης για την εκάστοτε απόδειξη θεωρούμε μια λίστα από τις προκείμενες του προς απόδειξη επιχειρήματος. Για σύνολο προτάσεων Π και πρόταση Σ, θα γράφουμε $\Pi_{ND}\vdash\Sigma$ αν και μόνο αν υπάρχει εντός του συστήματος απόδειξη με προκείμενες τις προτάσεις εντός του Π και συμπέρασμα την Σ, οι προκείμενες θα πρέπει να μην συνοδεύονται από αγκύλη, το συμπέρασμα μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη, αλλά μπορεί και όχι.

Μπορούμε με βάση αυτά να δώσουμε αποδείξεις για τις διάφορες προτάσεις ή επιχειρήματα που μπορούμε να διατυπώσουμε εντός της γλώσσας αντικείμενο. Πράγματι, διαπιστώνουμε για παράδειγμα ότι θα είναι:

1.	$\sim(A\wedge B)$	Προκείμενη
2.	$\sim(\sim A\vee\sim B)$	Υπόθεση
3.	$\sim(A\wedge B)$	Επανάληψη
4.	$\sim\sim A\wedge\sim\sim B$	Από 2, με de Morgan
5.	$\sim\sim A$	Από 4, με conjunction elimination
6.	$\sim\sim B$	Από 4, με conjunction elimination
7.	A	Από 5, με double negation elimination (DNE)
8.	B	Από 5, με double negation elimination
9.	{ $\sim B$	Από 3 και 7
10.	$\perp$	Από 8 και 9
11.	{ $\sim A\vee\sim B$	Από 2 και 10

Για προτάσεις Α, Β θα γράφουμε $A\vdash B$ αν και μόνο αν υπάρχει εντός του συστήματος απόδειξη με προκείμενη την Α και συμπέρασμα {Β. Με βάση την πιο πάνω απόδειξη προκύπτει ότι δεδομένου του κανόνα $\sim(A\vee B)\vdash\sim A\wedge\sim B$ μπορούμε να συνάγουμε τον $\sim(A\wedge B)\vdash\sim A\vee\sim B$.

Ανάλογα διαπιστώνουμε πχ ότι θα είναι $\vdash\sim\forall x\sim Ax\rightarrow\exists xAx$, πράγματι:

1.	$\sim(\sim\forall x\sim Ax\rightarrow\exists xAx)$	Υπόθεση
2.	$\sim\forall x\sim Ax\wedge\sim\exists xAx$	Από 1
3.	$\sim\forall x\sim Ax$	Από 2, με conjunction elimination
4.	$\sim\exists xAx$	Από 2, με conjunction elimination
5.	$\sim\sim Ac$	Από 3
6.	Ac	Από 5, με DNE
7.	{ $\sim Ac$	Από 4
8.	$\perp$	Από 6 και 7
9.	$\perp$	Από 8
10.	{ $\sim\forall x\sim Ax\rightarrow\exists xAx$	Από 1 και 9

Από την άλλη, διαπιστώνουμε ότι δεν θα ισχύει ότι $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$. Πράγματι, ας κάνουμε μια απόπειρα για απόδειξη:

1.	$A \rightarrow B$	Προκείμενη
2.	$B \rightarrow C$	Προκείμενη
3.	| $\sim(A \rightarrow C)$	Υπόθεση
4.	| $A \wedge \sim C$	Από 3
5.	| A	Από 4, με conjunction elimination
6.	| $\sim C$	Από 4, με conjunction elimination
7.	| $A \rightarrow B$	Επανάληψη
8.	| { B	Από 5, 7, με modus ponens
9.	| $B \rightarrow C$	Επανάληψη

Οπότε σε αυτό το σημείο διαπιστώνουμε ότι η απόδειξη δεν μπορεί να συνεχιστεί, αφού δεν είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τον κανόνα modus ponens στις γραμμές 8, 9 προκειμένου να συναγάγουμε ως συμπέρασμα την πρόταση C, κάτι που θα μας επέτρεπε τελικά να συναγάγουμε ως συμπέρασμα την πρόταση $A \rightarrow C$. Αν εξετάσουμε την μορφή του κανόνα, τότε βλέπουμε ότι δεν εμφανίζεται αγκύλη δίπλα στην ελάσσονα προκείμενη. Επιπλέον, με βάση τα όσα έχουμε πει, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την εκδοχή του κανόνα που προκύπτει αν προσθέσουμε αγκύλη δίπλα σε κάποια προκείμενη. Ανάλογα αποτυγχάνουν και απόπειρες προς απόδειξη με κάποιον άλλο τρόπο.

Κατά παρόμοιο τρόπο βλέπουμε και ότι η σχέση στην οποία αναφερόμαστε με το σύμβολο '$\vdash_{ND}$' δεν θα είναι πάντα μεταβατική. Πράγματι, έστω προτάσεις Α, Β, Γ, και έστω για παράδειγμα ότι είναι $A, A \rightarrow B \vdash_{ND} B$, και $B, B \rightarrow \Gamma \vdash_{ND} \Gamma$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι παρόλο που ισχύουν αυτά, δεν θα είναι και $A, A \rightarrow B, B \rightarrow \Gamma \vdash_{ND} \Gamma$.

Συνεχίζοντας, μπορούμε να αποδείξουμε την ορθότητα του συστήματος natural deduction που έχουμε περιγράψει. Θέλουμε να δείξουμε ότι δεδομένης κάποιας απόδειξης εντός του συστήματος, θα ισχύει για κάθε ερμηνεία $<D, W, A\pi, \Phi, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$ της γλώσσας ότι για κάθε αντικείμενο εντός του συνόλου Φ, θα ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο εντός του Απ που το επεκτείνει, δεν ισχύει ότι αυτό επαληθεύει τις προκείμενες και δεν επαληθεύει το συμπέρασμα. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η συγκεκριμένη ερμηνεία επαληθεύει την απόδειξη. Για σημείο w εντός του Απ και πρόταση Π που εμφανίζεται εντός της απόδειξης και η οποία δεν συνοδεύεται από αγκύλη θα λέμε ότι το w επαληθεύει την Π αν και μόνο αν αυτό την επιβεβαιώνει. Αν από την άλλη η Π συνοδεύεται από αγκύλη τότε θα λέμε ότι το w την επαληθεύει αν και μόνο αν αυτό δεν την διαψεύδει.

Έστω τώρα κάποια απόδειξη εντός του συστήματος, και το αρχικό τμήμα που αποτελείται από τις πρώτες i γραμμές αυτής, όπου $i \geq 1$. Θα λέμε ότι αυτό είναι το βήμα i της συγκεκριμένης απόδειξης. Έστω ότι $Π_i$ είναι η λίστα της μορφής $<\pi_1, \pi_2, \{, \pi_3, \ldots, \{, \pi_\nu>$ εντός της οποίας περιλαμβάνονται οι προτάσεις που εμφανίζονται ως προκείμενες στις γραμμές που το βήμα i της συγκεκριμένης απόδειξης περιλαμβάνει, καθώς και οι προτάσεις που εμφανίζονται στην αρχική γραμμή των υποθέσεων που είναι ακόμα ενεργές στο επίπεδο i. Αν κάποια από αυτές τις προτάσεις συνοδεύεται εντός της απόδειξης από αγκύλη τότε η $Π_i$ περιέχει εμφάνιση του συμβόλου της αγκύλης μία θέση πριν από την πρόταση. Επιπλέον, έστω ότι Σi είναι λίστα της μορφής $<\sigma>$ ή $<\{, \sigma>$, εντός της οποίας περιέχεται η πρόταση που εμφανίζεται στην γραμμή i της απόδειξης, ή μία αγκύλη και έπειτα η πρόταση που εμφανίζεται στην γραμμή i της απόδειξης αν ισχύει ότι αυτή συνοδεύεται στην συγκεκριμένη γραμμή από αγκύλη. Για βήμα i κάποιας απόδειξης, όπου $i \geq 1$, ερμηνεία $<D, W, Απ, Φ, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$ της γλώσσας και σημείο w εντός του Απ, θα λέμε ότι το τελευταίο επαληθεύει την λίστα Πi αν και μόνο αν για κάθε πρόταση που εμφανίζεται εντός αυτής ισχύει ότι αν στην προηγούμενη θέση της λίστας δεν εμφανίζεται αγκύλη τότε το w την επιβεβαιώνει, ενώ αν στην προηγούμενη θέση εμφανίζεται αγκύλη τότε το w δεν την διαψεύδει. Παρομοίως και για την λίστα $Σ_i$. Θα λέμε ότι ερμηνεία $<D, W, Απ, Φ, \sqsubseteq, Val^{+}, Val^{-}>$ επαληθεύει το βήμα i κάποιας απόδειξης αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο εντός του συνόλου Φ ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο εντός του Απ που το επεκτείνει, δεν ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την λίστα $Π_i$ και δεν επαληθεύει την λίστα $Σ_i$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι δεδομένης κάποιας απόδειξης εντός του συστήματος, θα ισχύει ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας την επαληθεύει. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε αρχικό τμήμα αυτής ισχύει πως αυτό επαληθεύεται από κάθε ερμηνεία της γλώσσας.

Προφανώς θα ισχύει για κάθε ερμηνεία της γλώσσας ότι αυτή επαληθεύει το βήμα i κάποιας απόδειξης αν η πρόταση που εμφανίζεται στην γραμμή i είναι προκείμενη της απόδειξης.

Εξετάζουμε τώρα διαδοχικά τους διάφορους κανόνες του συστήματος. Ας ξεκινήσουμε από τον κανόνα που καλούμε ‘Υπόθεση’, και έστω ότι αυτός εφαρμόζεται στην γραμμή n κάποιας απόδειξης, οπότε αρχίζει σε αυτήν νέα κάθετος εντός της οποίας εμφανίζεται πρόταση Α η οποία μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη, αλλά μπορεί και όχι. Έστω ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση, έπεται ότι αν είναι $\Pi_{n-1}=\langle....\rangle$, όπου η λίστα $\langle....\rangle$ μπορεί να είναι κενή αλλά μπορεί και όχι, τότε θα είναι $\Pi_n=\langle...., \{, A\rangle$, και $\Sigma_n=\langle\{, A\rangle$, οπότε καταλήγουμε κατευθείαν στο συμπέρασμα ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας επαληθεύει το βήμα n. Ανάλογα και για την περίπτωση που η Α δεν συνοδεύεται από αγκύλη.

Συνεχίζοντας, εξετάζουμε τον κανόνα της επανάληψης, έστω λοιπόν ότι αυτός εφαρμόζεται στην γραμμή n κάποιας απόδειξης. Έπεται ότι στην γραμμή n εμφανίζεται πρόταση Α δεξιά από κάθετο η οποία αρχίζει στην γραμμή n-i, δίπλα από πρόταση Β. Η Α επανεμφανίζεται εντός της απόδειξης και σε γραμμή n-j που προηγείται της έναρξης της καθέτου, και οι Α, Β μπορεί να συνοδεύονται από αγκύλη, μπορεί όχι, ή μπορεί να μην συνοδεύεται η Α και να συνοδεύεται η Β. Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση, και έστω ότι η λίστα Π_{n-j} είναι της μορφής $\langle... \rangle$. Η λίστα Σ_{n-j} θα είναι της μορφής $\langle\{, A\rangle$, και από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει το βήμα n-j της απόδειξης. Από την άλλη, η λίστα Π_n θα είναι της μορφής $\langle..., \{, B\rangle$, και κάποιο αρχικό τμήμα της θα ταυτίζεται με την Π_{n-j} , ενώ η λίστα Σ_n θα είναι η $\langle\{, A\rangle$. Έπεται από αυτά ότι για κάθε ερμηνεία της γλώσσας, για κάθε αντικείμενο εντός του συνόλου Φ ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο εντός του Απ που το επεκτείνει δεν θα ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την Π_{n-j} και δεν επαληθεύει την Σ_{n-j} , άρα δεν θα ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την Π_{n-j} και δεν επαληθεύει την Σ_n, οπότε δεν θα ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την Π_n και δεν επαληθεύει την Σ_n που είναι και το ζητούμενο. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις του κανόνα είναι ανάλογες.

Έστω τώρα ότι στην γραμμή n κάποιας απόδειξης εφαρμόζεται ο κανόνας Modus ponens οπότε δεδομένων προτάσεων Β, $B\to\Gamma$ που εμφανίζονται σε προηγούμενες γραμμές εντός της απόδειξης, από τις οποίες η $B\to\Gamma$ μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη αλλά μπορεί και όχι, εμφανίζεται στην γραμμή n ως συμπέρασμα η πρόταση Γ συνοδευόμενη από αγκύλη. Ας θεωρήσουμε ότι στην περίπτωσή μας η πρόταση $B\to\Gamma$ δεν συνοδεύεται από αγκύλη, και έστω ότι η Β εμφανίζεται στην γραμμή n-i, ενώ η $B\to\Gamma$ εμφανίζεται στην γραμμή n-j. Από την μορφή του κανόνα έπεται ότι είτε και οι τρεις προτάσεις εμφανίζονται δίπλα στην ίδια κάθετο, είτε και οι τρεις εμφανίζονται χωρίς κάθετο, οπότε θα είναι $\Pi_{n-i} = \Pi_{n-j} = \Pi_n$, και επιπλέον, η λίστα Σ_{n-i} θα είναι της μορφής $\langle B\rangle$, η Σ_{n-j} θα είναι της μορφής $\langle B\to\Gamma\rangle$, και η Σ_n θα είναι της μορφής $\langle\{, \Gamma\rangle$. Από επαγωγική υπόθεση έπεται ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει το βήμα n-i της απόδειξης, καθώς και το n-j. Καταλήγουμε με βάση αυτά ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει και το βήμα n. Πράγματι, έστω ότι το τελευταίο δεν ισχύει. Για κάθε ερμηνεία της γλώσσας λοιπόν, θα ισχύει για κάθε αντικείμενο εντός του Φ ότι για κάθε αντικείμενο εντός του Απ που το επεκτείνει δεν ισχύει ότι το τελευταίο επαληθεύει την $Π_{n-i}$ και δεν επαληθεύει την $Σ_{n-i}$, και δεν ισχύει ότι επαληθεύει την $Π_{n-j}$ και δεν επαληθεύει την $Σ_{n-j}$. Με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει, εφόσον έχουμε θεωρήσει ότι η Β→Γ δεν συνοδεύεται από αγκύλη, και αφού είναι $Π_{n-i} = Π_{n-j} = Π_n$, έπεται ότι για κάθε τέτοιο σημείο δεν θα ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την $Π_n$ και δεν επιβεβαιώνει την Β, και επιπλέον, δεν θα ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την $Π_n$ και δεν επιβεβαιώνει την Β→Γ. Από την άλλη, έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει ερμηνεία της γλώσσας σύμφωνα με την οποία για σημείο εντός του Φ θα υπάρχει σημείο εντός του Απ που το επεκτείνει που επαληθεύει την $Π_n$ αλλά δεν επαληθεύει την $Σ_n$, οπότε έπεται ότι το συγκεκριμένο σημείο θα επαληθεύει την $Π_n$ και θα διαψεύδει την Γ. Αυτό θα επαληθεύει λοιπόν τόσο την Β όσο και την Β→Γ, και άρα θα ισχύει ότι επιβεβαιώνει την Β, και δεν θα ισχύει ότι επιβεβαιώνει την Β και διαψεύδει την Γ. Καταλήγουμε ότι το συγκεκριμένο σημείο θα πρέπει να διαψεύδει την Γ, και ταυτόχρονα να μην την διαψεύδει. Αυτό όμως είναι κάτι που δεν μπορεί να συμβεί, οπότε συμπεραίνουμε ότι η υπόθεση που κάναμε δεν μπορεί να είναι αληθής. Η περίπτωση που η Β→Γ συνοδεύεται από αγκύλη έπεται άμεσα από αυτά καθώς και τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον κανόνα conditional proof, και έστω απόδειξη τέτοια ώστε η πρόταση που εμφανίζεται στην γραμμή n αυτής προκύπτει μέσω του συγκεκριμένου κανόνα. Η πρόταση στην οποία αναφερόμαστε θα είναι της μορφής Β→Γ, και μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη αλλά μπορεί και όχι. Σε προηγούμενο βήμα n-i θα αρχίζει κάθετος δεξιά της οποίας θα εμφανίζεται η πρόταση Β. Το βήμα n-1 θα είναι το τελευταίο που η συγκεκριμένη κάθετος καλύπτει, και σε αυτό θα εμφανίζεται η πρόταση Γ, που μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη αλλά μπορεί και όχι. Έστω ότι στην περίπτωση μας τόσο η Β→Γ όσο και η Γ συνοδεύονται από αγκύλη. Έστω επίσης ότι η λίστα $Π_{n-i-1}$ είναι της μορφής <…>, όπου η λίστα <…> μπορεί να είναι κενή αλλά μπορεί και όχι. Έπεται ότι η $Π_{n-i}$ είναι της μορφής <…, Β> και μάλιστα το τμήμα της πριν την εμφάνιση της πρότασης Β ταυτίζεται με την $Π_{n-i-1}$. Καταλήγουμε ότι θα είναι $Π_{n-i} = Π_{n-1}$, η λίστα $Σ_{n-1}$ θα είναι της μορφής <{, Γ >, και από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει το βήμα n-1 της απόδειξης. Άρα, για κάθε ερμηνεία της γλώσσας, για κάθε αντικείμενο εντός του Φ και κάθε σημείο εντός του Απ που το επεκτείνει δεν θα ισχύει ότι το τελευταίο επαληθεύει την $Π_{n-1}$ και δεν επαληθεύει την $Σ_{n-1}$, δηλαδή δεν θα ισχύει ότι αυτό επαληθεύει την $Π_{n-i-1}$, επιβεβαιώνει την Β, και διαψεύδει την Γ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι θα είναι $Π_{n-i-1}=Π_n$ και η $Σ_n$ είναι της μορφής <{, Β→Γ >, θέλουμε με βάση αυτά να δείξουμε ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει το βήμα n της απόδειξης. Έστω λοιπόν ότι το τελευταίο δεν ισχύει, έστω δηλαδή ότι υπάρχει ερμηνεία σύμφωνα με την οποία για κάποιο αντικείμενο εντός του Φ υπάρχει αντικείμενο εντός του Απ που το επεκτείνει και το οποίο επαληθεύει την Π_n και δεν επαληθεύει την Σ_n . Με άλλα λόγια το συγκεκριμένο αντικείμενο θα επαληθεύει την Π_{n-i-1} και δεν θα επαληθεύει την Σ_n, δηλαδή θα επαληθεύει την Π_{n-i-1} και θα διαψεύδει την $B \rightarrow \Gamma$, δηλαδή θα επαληθεύει την Π_{n-i-1} , θα επιβεβαιώνει την Β και θα διαψεύδει την Γ. Με βάση τα όσα έχουμε πει, το συγκεκριμένο σημείο θα πρέπει να επιβεβαιώνει την Β και να διαψεύδει την Γ, και ταυτόχρονα να μην ισχύει ότι αυτό επιβεβαιώνει την Β και διαψεύδει την Γ. Έπεται ότι η υπόθεση δεν μπορεί να είναι αληθής. Ανάλογα έπονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Ας εξετάσουμε και κάποιες από τις περιπτώσεις που περιλαμβάνουν ποσόδειξη. Έστω για αρχή ο κανόνας universal elimination, και έστω απόδειξη στην γραμμή n της οποίας εμφανίζεται πρόταση Aa, συνοδευόμενη από αγκύλη έπειτα από εφαρμογή του συγκεκριμένου κανόνα. Έπεται ότι σε γραμμή n-i θα εμφανίζεται πρόταση $\forall xAx$ η οποία μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη, αλλά μπορεί και όχι. Έστω ότι στην περίπτωσή μας ισχύει το πρώτο, θα είναι $\Pi_n=\Pi_{n-i}$, Σ_n=<{, Aa>, και Σ_{n-i}=<{, $\forall xAx$>. Από επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει το βήμα n-i της απόδειξης. Θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας θα επαληθεύει και το βήμα n της απόδειξης. Έστω λοιπόν ότι το τελευταίο δεν ισχύει, θεωρούμε λοιπόν ότι υπάρχει ερμηνεία σύμφωνα με την οποία για κάποιο αντικείμενο εντός του Φ θα ισχύει ότι υπάρχει αντικείμενο εντός του Απ που το επεκτείνει, και το οποίο επαληθεύει την Π_n και δεν επαληθεύει την Σ_n, με άλλα λόγια επαληθεύει την Π_n και διαψεύδει την Aa. Με βάση τα όσα έχουμε πει θα ισχύει για το συγκεκριμένο αντικείμενο ότι αν αυτό επαληθεύει την Π_{n-i} τότε θα επαληθεύει την Σ_{n-i} , δηλαδή αν επαληθεύει την Π_n τότε θα επαληθεύει την Σ_{n-i} , και άρα συμπεραίνουμε ότι αυτό επαληθεύει την Σ_{n-i} , δηλαδή δεν διαψεύδει την $\forall xAx$. Με βάση τις συνθήκες που έχουμε δώσει, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αυτό θα πρέπει να διαψεύδει την $\forall xAx$ και ταυτόχρονα να μην την διαψεύδει, άρα η υπόθεση είναι ψευδής. Ανάλογα έπεται και η περίπτωση που η πρόταση $\forall xAx$ δεν συνοδεύεται από αγκύλη.

Από την άλλη, ας θεωρήσουμε τον κανόνα universal introduction, και έστω ότι αυτός εφαρμόζεται στη γραμμή n αυτής, οπότε εμφανίζεται εκεί πρόταση $\forall xAx$, ενώ σε γραμμή n-i της απόδειξης εμφανίζεται πρόταση Ac, που μπορεί να συνοδεύεται από αγκύλη αλλά μπορεί και όχι, και όπου η ατομική σταθερά c δεν εμφανίζεται εντός της $\forall xAx$ ή σε προηγούμενο σημείο υπόθεσης εντός της οποίας εντάσσονται οι συγκεκριμένες προτάσεις. Ας υποθέσουμε ότι στην περίπτωση που μας απασχολεί η πρόταση Ac δεν συνοδεύεται από αγκύλη. Με βάση τα όσα έχουμε πει, ας θεωρήσουμε ότι είναι $\Pi_{n-i}=\langle\ldots\rangle$, όπου η λίστα $\langle\ldots\rangle$ μπορεί να είναι κενή, αλλά μπορεί και όχι. Θα είναι $\Sigma_{n-i}=\langle Ac\rangle$, $\Pi_n=\Pi_{n-i}=\langle\ldots\rangle$, και $\Sigma_n=\langle\forall xAx\rangle$. Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι κάθε ερμηνεία της γλώσσας επαληθεύει το βήμα n-i της απόδειξης. Θέλουμε να δείξουμε ότι θα συμβαίνει το ίδιο και για το βήμα n αυτής, οπότε ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Θα υπάρχει λοιπόν ερμηνεία M της γλώσσας σύμφωνα με την οποία για κάποιο αντικείμενο εντός του Φ ισχύει ότι υπάρχει αντικείμενο w εντός του Απ που το επεκτείνει, και το οποίο επαληθεύει την Π_n και δεν επαληθεύει την Σ_n, με άλλα λόγια επαληθεύει την Π_n και δεν επιβεβαιώνει την $\forall xAx$. Έστω ότι σύμφωνα με την M ισχύει ότι στον τύπο A αντιστοιχεί ο υβριδικός τύπος $\langle A\rangle$, εφόσον το w δεν επιβεβαιώνει την $\forall xAx$, έπεται ότι δεν θα επιβεβαιώνει και την υβριδική πρόταση $\langle\forall x, \langle A\rangle\rangle$, και άρα θα υπάρχει αντικείμενο ob εντός του D τέτοιο ώστε σύμφωνα με την M να είναι $w\Dashv[\langle A\rangle]^{ob}_{x}$. Ας θεωρήσουμε τώρα ερμηνεία M' που διαφέρει από την M το πολύ όσον αφορά την αναφορά που αυτή αναθέτει στο σταθερό σύμβολο 'c', και έστω ότι η M' αναθέτει στο τελευταίο το αντικείμενο ob. Σύμφωνα με την M' η υβριδική πρόταση $[\langle A\rangle]^{ob}_{x}$ θα αντιστοιχεί στην Ac και άρα, αφού θα είναι $w\Dashv[\langle A\rangle]^{ob}_{x}$ καταλήγουμε πως σύμφωνα με την M' θα είναι και $w\Dashv Ac$. Τώρα, σύμφωνα με την M το σημείο w θα επαληθεύει την Π_n και άρα αφού είναι $\Pi_n=\Pi_{n-i}$ έπεται ότι θα επαληθεύει και την Π_{n-i}. Με βάση όμως τα όσα έχουμε πει προκύπτει ότι η σταθερά c δεν εμφανίζεται εντός της Π_{n-i} , και άρα θα ισχύει και σύμφωνα με την M' ότι αυτό επαληθεύει την Π_{n-i} , οπότε προκύπτει από επαγωγική υπόθεση ότι θα πρέπει σύμφωνα με την M' να είναι και $w\models Ac$. Καταλήγουμε κατ' αυτόν τον τρόπο ότι η υπόθεση που κάναμε είναι ψευδής, και άρα θα ισχύει για κάθε ερμηνεία της γλώσσας ότι αυτή επαληθεύει και το βήμα n της απόδειξης. Η περίπτωση που η πρόταση Ac συνοδεύεται από αγκύλη είναι ανάλογη.

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε την εγκυρότητα και των υπόλοιπων κανόνων του συστήματος, και άρα συμπεραίνουμε ότι για προτάσεις A, B, αν είναι $A\vdash_{ND}B$ τότε θα είναι και $A\Vdash B$.

Τώρα, ας εξετάσουμε και πάλι το σύστημα δέντρων που έχουμε περιγράψει στην αρχή του κεφαλαίου. Παρατηρούμε ότι δεδομένου κάποιου δέντρου, μπορεί σε κάθε κλάδο εντός αυτού να αντιστοιχηθεί διατεταγμένο σύνολο της μορφής $\langle A, B, \{, C, \{, D\rangle$, το οποίο περιγράφει την δομή του κλάδου μέχρι κάποιο σημείο. Πράγματι, έστω για παράδειγμα το δέντρο της σελίδας 165, με βάση το οποίο αποδεικνύεται η εγκυρότητα των επιχειρημάτων της μορφής $\sim(A\wedge B)\vdash \sim A\vee\sim B$. Η δομή των δύο κλάδων του δέντρου από το επίπεδο 1 και μετά μπορεί να περιγραφεί από τις λίστες $\langle\sim(A\wedge B)$, $\sim(\sim A\vee\sim B)$, $\sim(A\wedge B)$, $\sim(\sim A\vee\sim B)$,

~(A∧B), ~~A, ~~B, A, B, ~(A∧B), A, B, {, ~A> και <~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~~A, ~~B, A, B, ~(A∧B), A, B, {, ~B>. Επί της ουσίας, θέτουμε εντός της λίστας τις προτάσεις που εμφανίζονται εντός του κλάδου από το πρώτο επίπεδο και έπειτα, αν κάποια πρόταση εμφανίζεται εντός του κύκλου στα αριστερά τότε αυτή τίθεται εντός της λίστας αυτούσια, αν εμφανίζεται εντός του κύκλου στα δεξιά τότε τίθεται εντός της λίστας η άρνησή της, αν εμφανίζεται έξω από τον κύκλο στα αριστερά τότε τίθεται εντός της λίστας μια αγκύλη και η άρνηση της πρότασης, αν εμφανίζεται έξω από τον κύκλο στα δεξιά τότε τίθεται εντός της λίστας μια αγκύλη και η ίδια η πρόταση. Θα χαρακτηρίζουμε μια λίστα με τέτοια μορφή ως αντιφατική αν και μόνο αν ισχύει είτε ότι εντός αυτής εμφανίζεται τόσο μια πρόταση A όσο και η υπο ακολουθία {, ~A, είτε μια πρόταση ~A και η υπο ακολουθία {, A, είτε μια πρόταση A καθώς και η ~A, είτε τέλος μπορούμε με βάση τις προτάσεις εντός της λίστας να κατασκευάσουμε εντός του συστήματος natural deduction επιχείρημα που οδηγεί σε συμπέρασμα που είναι αντίφαση. Η λίστα <~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~~A, ~~B, A, B, ~(A∧B), A, B, {, ~A> για παράδειγμα είναι αντιφατική, αφού εντός αυτής εμφανίζεται τόσο η πρόταση A, όσο και η ακολουθία χαρακτήρων {,~A. Εύκολα βλέπουμε ότι με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει, για δέντρο που είναι κλειστό θα ισχύει ότι κάθε λίστα που αντιστοιχεί σε ολόκληρο κλάδο θα είναι αντιφατική. Αφού το δέντρο είναι κλειστό έπεται ότι σε κάποιο επίπεδο εντός του κλάδου θα υπάρχει πρόταση A που εμφανίζεται τόσο εντός κάποιου από τους κύκλους όσο και δίπλα του, ή θα εμφανίζεται τόσο εντός του ενός κύκλου όσο και εντός του άλλου. Έπεται ότι εντός της λίστας που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο κλάδο θα ισχύει είτε ότι εμφανίζεται η A και η ακολουθία {, ~A, είτε ότι εμφανίζεται η ~A και η ακολουθία {, A, είτε ότι εμφανίζεται τόσο η A όσο και η ~A. Καταλήγουμε ότι σε κάθε περίπτωση η λίστα θα ανήκει στο σύνολο εκείνων που χαρακτηρίζουμε ως αντιφατικές.

Τώρα, δεδομένου ενός δέντρου που είναι κλειστό και κλάδου που ανήκει σε αυτό, θα θεωρούμε ως αρχικό τμήμα της λίστας που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο κλάδο κάθε υπό-λίστα αυτής που αντιστοιχεί σε αρχικό τμήμα του κλάδου. Έστω λοιπόν αρχικό τμήμα της <~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~~A, ~~B, A, B, ~(A∧B), A, B, {, ~A>, πχ η λίστα <~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~(~A∨~B), ~(A∧B), ~~A, ~~B, A, B>, παρατηρούμε ότι αυτή θα είναι επίσης αντιφατική, αφού μπορούμε με βάση αυτή να κατασκευάσουμε επιχείρημα που οδηγεί σε αντίφαση. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε το παρακάτω:

1. ~(A∧B) Προκείμενη
2. ~(~A∨~B) Προκείμενη

3.	$\sim(A \wedge B)$	Προκείμενη
4.	$\sim(\sim A \vee \sim B)$	Προκείμενη
5.	$\sim(A \wedge B)$	Προκείμενη
6.	$\sim\sim A$	Προκείμενη
7.	$\sim\sim B$	Προκείμενη
8.	A	Προκείμενη
9.	B	Προκείμενη
10.	$\{\sim A$	Από 5 και 9
11.	$\perp$	Από 8 και 10

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μπορεί να κατασκευαστεί εντός του συστήματος natural deduction απόδειξη που οδηγεί σε αντίφαση για κάθε αρχικό τμήμα της λίστας. Πράγματι, έστω η υπό-λίστα $<\sim(A \wedge B), \sim(\sim A \vee \sim B)>$, αρκεί να εξετάσουμε τα βήματα 2 έως 10 της απόδειξης στην αρχή της σελίδας 185 για να διαπιστώσουμε ότι μπορεί να κατασκευαστεί επιχείρημα που με βάση αυτές τις προκείμενες οδηγεί σε αντίφαση.

Θα λέμε ότι μια λίστα έπεται από κάποια άλλη αν και μόνο αν ισχύει ότι κάθε απόδειξη που μπορεί να κατασκευαστεί εντός του συστήματος natural deduction με βάση την πρώτη, μπορεί να κατασκευαστεί και με βάση την δεύτερη. Έπεται ότι αν μια λίστα Α είναι αντιφατική και έπεται από κάποια λίστα Β, τότε θα είναι αντιφατική και η Β.

Προκύπτει τώρα το ερώτημα, αν θεωρήσουμε δέντρο που είναι κλειστό και λίστα που αντιστοιχεί σε κλάδο αυτού, ισχύει ότι κάθε αρχικό τμήμα της λίστας είναι αντιφατικό; Προκειμένου να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι αν ισχύει ότι μια λίστα που αντιστοιχεί σε τμήμα κλάδου ενός δέντρου είναι αντιφατική, τότε κάθε αρχικό τμήμα της θα είναι επίσης αντιφατικό. Η απόδειξη προχωρά εξετάζοντας κάθε έναν από τους κανόνες που μπορεί να εφαρμοστούν προκειμένου να προκύψει το εκάστοτε τμήμα του κλάδου.

Ας θεωρήσουμε ότι εντός κλάδου εμφανίζεται πρόταση της μορφής $A \wedge B$, σε κύκλο που βρίσκεται στα αριστερά. Μπορούμε να επεκτείνουμε τον κλάδο προσθέτοντας στο τέλος αυτού δύο νέους κύκλους, και θέτοντας εντός του κύκλου στα αριστερά τις προτάσεις Α και Β. Η λίστα που αντιστοιχεί στον κλάδο που προκύπτει θα είναι της μορφής $<\ldots, A \wedge B, \ldots, A, B, \ldots>$, και έστω ότι $<\ldots, A \wedge B, \ldots>$ το αρχικό τμήμα της που αντιστοιχεί στον κλάδο από τον οποίο ξεκινήσαμε, έστω επίσης ότι με βάση την $<\ldots, A \wedge B, \ldots, A, B, \ldots>$ μπορεί να κατασκευαστεί απόδειξη που οδηγεί σε κάποια αντίφαση. Η $<\ldots, A \wedge B, \ldots, A, B, \ldots>$ θα διαφέρει από την <…, A∧B, …> μόνο όσον αφορά το γεγονός ότι στις τελευταίες θέσεις της εμφανίζονται οι προτάσεις A, B, καθώς και προτάσεις που επανεμφανίζονται και σε προηγούμενες θέσεις και οι οποίες θα περιέχονται και στην <…, A∧B, …>. Εφόσον είναι A∧B/A και A∧B/B, έπεται ότι θα μπορεί να κατασκευαστεί απόδειξη που οδηγεί σε αντίφαση και με βάση την <…, A∧B, …>.

Από την άλλη, ας υποθέσουμε ότι στο αρχικό στάδιο εμφανίζεται πρόταση της μορφής A∧B εντός του κύκλου στα δεξιά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου προκύπτει διακλάδωση, στο τέλος του ενός από τους κλάδους που προκύπτουν θα εμφανίζεται η πρόταση A δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, στο τέλος του άλλου κλάδου θα εμφανίζεται η πρόταση B δίπλα στον κύκλο στα αριστερά. Στον πρώτο από αυτούς θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ~(A∧B), …, {, ~A, …>, στον δεύτερο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ~(A∧B), …, {, ~B, …>, στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα <…, ~(A∧B), …>. Έστω ότι και οι δύο από αυτές τις λίστες είναι αντιφατικές, έπεται ότι θα είναι Π, ~(A∧B), {~A /⊥, και Π, ~(A∧B), {~A /⊥ όπου Π προκείμενες διάφορες της ~(A∧B) που προκύπτουν από την λίστα <…, ~(A∧B), …> με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει. Έπεται ότι θα είναι Π, ~(A∧B)/A και Π, ~(A∧B)/B, ταυτόχρονα όμως, θα είναι Π, ~(A∧B)/~A∨~B και άρα Π, ~(A∧B)/(~A∨~B)∧A∧B. Από το τελευταίο, έπεται ότι θα είναι Π, ~(A∧B)/B και Π, ~(A∧B)/{~B, άρα Π, ~(A∧B)/⊥, που είναι και το ζητούμενο.

Έστω τώρα ότι στο αρχικό στάδιο εμφανίζεται πρόταση της μορφής A∧B δίπλα στον κύκλο στα αριστερά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου προκύπτει επέκταση του κλάδου, τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα δεξιά περιέχεται η πρόταση A∧B. Στην συγκεκριμένη επέκταση θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, {, ~(A∧B), …, ~(A∧B), …>, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, {, ~(A∧B),…>. Η <…, {, ~(A∧B), …, ~(A∧B), …> θα διαφέρει από την <…, {, ~(A∧B),…> όσον αφορά το γεγονός ότι στις τελευταίες θέσεις της εμφανίζεται η πρόταση ~(A∧B) χωρίς να προηγείται εμφάνιση αγκύλης, και όσον αφορά το γεγονός ότι περιέχει επιπλέον εμφανίσεις προτάσεων που εμφανίζονται και εντός της <…, {, ~(A∧B),…>. Έστω ότι η λίστα <…, {, ~(A∧B), …, ~(A∧B), …> οδηγεί σε αντίφαση, έπεται ότι θα είναι Π, {~(A∧B), ~(A∧B)/⊥, όπου Π οι υπόλοιπες από τις προκείμενες που προκύπτουν από την λίστα <…, {, ~(A∧B),…> με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει.

Παρατηρούμε ότι είναι $\{\sim(A\wedge B)/\sim A\vee\sim B$, και ταυτόχρονα έχουμε:

1.	$\sim A\vee\sim B$	Προκείμενη
2.	$\{\ A\wedge B$	Υπόθεση
3.	A	Από 2
4.	B	Από 2
5.	$\sim\sim A$	Από 3
6.	$\sim\sim B$	Από 4
7.	$\{\sim B$	Από 1 και 5
8.	$\perp$	Από 4 και 7
9.	$\sim(A\wedge B)$	Από 2 και 8

Έπεται από αυτό ότι θα είναι $\{\sim(A\wedge B)/\sim(A\wedge B)$, και άρα θα είναι Π, $\{\sim(A\wedge B)/\perp$, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και η λίστα $<\ldots, \{, \sim(A\wedge B),\ldots>$ θα οδηγεί σε αντίφαση.

Τέλος, έστω ότι στο αρχικό στάδιο εμφανίζεται πρόταση της μορφής $A\wedge B$ δίπλα στον κύκλο στα δεξιά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα δέντρου προκύπτει επέκταση του κλάδου, τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα αριστερά περιέχεται η πρόταση $A\wedge B$. Στην συγκεκριμένη επέκταση θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής $<\ldots, \{, A\wedge B, \ldots, A\wedge B, \ldots>$, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής $<\ldots, \{, A\wedge B,\ldots>$. Η $<\ldots, \{, A\wedge B, \ldots, A\wedge B, \ldots>$ θα διαφέρει από την $<\ldots, \{, A\wedge B,\ldots>$ όσον αφορά το γεγονός ότι στις τελευταίες θέσεις της εμφανίζεται η πρόταση $A\wedge B$ χωρίς να προηγείται εμφάνιση αγκύλης, και όσον αφορά το γεγονός ότι περιέχει επιπλέον εμφανίσεις προτάσεων που εμφανίζονται και εντός της $<\ldots, \{, A\wedge B,\ldots>$. Έστω τώρα ότι η λίστα $<\ldots, \{, A\wedge B, \ldots, A\wedge B, \ldots>$ οδηγεί σε αντίφαση, έπεται ότι θα είναι Π, $\{A\wedge B, A\wedge B/\perp$, όπου Π οι υπόλοιπες από τις προκείμενες που προκύπτουν από την $<\ldots, \{, A\wedge B,\ldots>$. Προκύπτει εύκολα όμως ότι θα είναι $\{A\wedge B/A\wedge B$, και άρα θα είναι Π, $\{A\wedge B/\perp$, οπότε η $<\ldots, \{, A\wedge B,\ldots>$ θα οδηγεί σε αντίφαση.

Για την περίπτωση της διάζευξης, ας υποθέσουμε ότι στο αρχικό στάδιο εμφανίζεται εντός κύκλου στα αριστερά πρόταση με μορφή $A\vee B$. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα, προκύπτει διακλάδωση, στον έναν από τους δύο κλάδους θα εμφανίζεται η πρόταση A δίπλα στον κύκλο στα δεξιά, στον άλλο κλάδο θα εμφανίζεται στην ίδια θέση η B. Στους δύο κλάδους που προκύπτουν θα αντιστοιχούν λίστες της μορφής $<\ldots, A\vee B, \ldots, \{, A, \ldots>$ και $<\ldots, A\vee B, \ldots, \{, B, \ldots>$ αντίστοιχα, ενώ στον κλάδο που αντιστοιχεί στο αρχικό στάδιο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής $<\ldots, A\vee B, \ldots>$. Η τελευταία θα διαφέρει από τις προηγούμενες με βάση τον τρόπο που έχουμε περιγράψει και πιο πάνω. Έστω τώρα ότι οι λίστες <…, A∨B, …, {, A, …> και <…, A∨B, …, {, B, …> οδηγούν σε αντίφαση, έπεται ότι θα είναι Π, A∨B, {A / ⊥ και Π, A∨B, {B / ⊥, όπου Π οι προκείμενες εκτός της A∨B που μπορεί να προκύψουν από την <…, A∨B, …>. Έπεται ότι θα είναι Π, A∨B / ~A και Π, A∨B / ~B, και ταυτόχρονα θα είναι Π, A∨B / A∨B. Θα έχουμε άρα Π, A∨B / (A∨B)∧~A∧~B, και άρα θα είναι Π, A∨B / ~B και Π, A∨B / {B, οπότε συμπεραίνουμε ότι θα είναι Π, A∨B / ⊥, και άρα η <…, A∨B, …> θα οδηγεί σε αντίφαση, που είναι και το ζητούμενο.

Από την άλλη, αν ισχύει ότι στο αρχικό στάδιο η πρόταση A∨B εμφανίζεται εντός του κύκλου στα δεξιά, τότε εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα θα προκύψει επέκταση τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα δεξιά θα περιέχονται οι προτάσεις A και B. Η λίστα που αντιστοιχεί στην επέκταση θα είναι της μορφής <…, ~(A∨B), …, ~A, ~B, …>, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ~(A∨B), …>. Έστω ότι η <…, ~(A∨B), …, ~A, ~B, …> οδηγεί σε αντίφαση, έπεται ότι θα είναι Π, ~(A∨B), ~A, ~B / ⊥, όπου Π ορίζεται με τρόπο παρόμοιο όπως και πριν. Είναι όμως ~(A∨B) / ~A και ~(A∨B) / ~B οπότε θα είναι Π, ~(A∨B) / ⊥, που είναι και το ζητούμενο.

Αν αρχικά εμφανίζεται πρόταση της μορφής A∨B δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, τότε εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα προκύπτει επέκταση τέτοια ώστε η A∨B εμφανίζεται εντός του κύκλου στα δεξιά. Στην επέκταση θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, {, ~(A∨B), …, ~(A∨B), …>, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, {, ~(A∨B), …>. Έστω ότι η <…, {, ~(A∨B), …, ~(A∨B), …> οδηγεί σε αντίφαση, έπεται ότι θα είναι Π, {~(A∨B), ~(A∨B) / ⊥, όπου Π παρομοίως με πριν. Παρατηρούμε ότι είναι {~(A∨B) / ~A, {~(A∨B) / ~B, και άρα {~(A∨B) / ~A∧~B.

Επιπλέον, θα είναι:

1.	~A∧~B	Προκείμενη
2.	│ {A∨B	Υπόθεση
3.	│ ~A	Από 1
4.	│ ~B	Από 1
5.	│ {B	Από 2 και 3
6.	│ ⊥	Από 4 και 5
7.	~(A∨B)	Από 2 και 6

Οπότε καταλήγουμε ότι είναι $\sim A\wedge\sim B$ / $\sim(A\vee B)$, άρα θα είναι $\{\sim(A\vee B)$ / $\sim(A\vee B)$ οπότε καταλήγουμε ότι θα είναι Π, $\{\sim(A\vee B)$ / $\perp$, που σημαίνει ότι η λίστα $<\ldots, \{, \sim(A\vee B), \ldots>$ οδηγεί σε αντίφαση.

Τέλος, αν πρόταση της μορφής $A\vee B$ εμφανίζεται αρχικά δίπλα στον κύκλο στα δεξιά, τότε εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα θα προκύψει επέκταση τέτοια ώστε εντός του κύκλου στα αριστερά θα περιέχεται η $A\vee B$. Στην επέκταση θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής $<\ldots, \{, A\vee B, \ldots, A\vee B, \ldots>$, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής $<\ldots, \{, A\vee B, \ldots>$. Έστω ότι η $<\ldots, \{, A\vee B, \ldots, A\vee B, \ldots>$ οδηγεί σε αντίφαση, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι είναι $\{A\vee B$ / $A\vee B$ και άρα αν είναι $\{A\vee B, A\vee B$ / $\perp$ θα είναι και $\{A\vee B$ / $\perp$.

Συνεχίζουμε με την περίπτωση της συνεπαγωγής, έστω λοιπόν ότι στο αρχικό στάδιο εμφανίζεται πρόταση της μορφής $A\to B$ εντός του κύκλου στα αριστερά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα προκύπτει διακλάδωση, στον έναν από τους δύο κλάδους θα εμφανίζεται η πρόταση Α δίπλα στον κύκλο στα αριστερά, ενώ στον άλλον θα εμφανίζεται η πρόταση Β δίπλα στον κύκλο στα δεξιά. Έπεται ότι στον έναν από τους δύο κλάδους θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής $<\ldots, A\to B, \ldots, \{, \sim A, \ldots>$ ενώ στον άλλον θα αντιστοιχεί λίστα με μορφή $<\ldots, A\to B, \ldots, \{, B, \ldots>$, στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα με μορφή $<\ldots, A\to B, \ldots>$. Έστω ότι οι λίστες $<\ldots, A\to B, \ldots, \{, \sim A, \ldots>$ και $<\ldots, A\to B, \ldots, \{, B, \ldots>$ οδηγούν σε αντίφαση. Έπεται ότι θα είναι $\Pi, A\to B, \{\sim A$ / $\perp$ και $\Pi, A\to B, \{B$ / $\perp$, όπου Π ορίζεται με τρόπο παρόμοιο με προηγουμένως. Αφού είναι $\Pi, A\to B, \{\sim A$ / $\perp$ έπεται ότι θα είναι και $\Pi, A\to B$ / A, και αφού είναι $\Pi, A\to B, \{B$ / $\perp$ έπεται ότι θα είναι και $\Pi, A\to B$ / $\sim B$. Θα είναι όμως $\Pi, A\to B$ / $A\to B$, και άρα $\Pi, A\to B$ / $(A\to B)\wedge A$, άρα $\Pi, A\to B$ / $\{B$. Καταλήξαμε άρα ότι είναι $\Pi, A\to B$ / $\sim B$ και $\Pi, A\to B$ / $\{B$, άρα $\Pi, A\to B$ / $\perp$, οπότε η λίστα $<\ldots, A\to B, \ldots>$ θα οδηγεί επίσης σε αντίφαση, που είναι και το ζητούμενο.

Η περίπτωση που στο αρχικό στάδιο εμφανίζεται πρόταση της μορφής $A\to B$ εντός του κύκλου στα δεξιά έπεται εύκολα από το γεγονός ότι είναι $\sim(A\to B)$ / $A\wedge\sim B$.

Έστω τώρα η περίπτωση που πρόταση της μορφής $A\to B$ εμφανίζεται αρχικά δίπλα στον κύκλο στα αριστερά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα προκύπτει επέκταση τέτοια ώστε η πρόταση $A\to B$ εμφανίζεται εντός του κύκλου στα δεξιά. Η λίστα που αντιστοιχεί στον κλάδο που προκύπτει θα είναι της μορφής $<\ldots, \{, \sim(A\to B), \ldots, \sim(A\to B), \ldots>$, ενώ η λίστα που αντιστοιχεί στον αρχικό κλάδο θα είναι της μορφής $<\ldots, \{, \sim(A\to B), \ldots>$. Έστω ότι η $<\ldots,$

{, ~(A→B), …, ~(A→B), …> οδηγεί σε αντίφαση, οπότε είναι Π, {~(A→B), ~(A→B) / ⊥ όπου Π παρομοίως με πριν.

Παρατηρούμε ότι θα είναι:

1.	{~(A→B)	Προκείμενη
2.	{ ~~(A→B)	Υπόθεση
3.	{ A→B	Από 2
4.	A∧~B	Από 1
5.	A	Από 4
6.	~B	Από 4
7.	{B	Από 3 και 5
8.	⊥	Από 6 και 7
9.	~(A→B)	Από 2 και 8

Έπεται άρα ότι θα είναι {~(A→B) / ~(A→B) και άρα θα είναι Π, {~(A→B) / ⊥, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχική λίστα <…, {, ~(A→B), …> οδηγεί σε αντίφαση, που είναι και το ζητούμενο.

Έστω τέλος η περίπτωση που πρόταση της μορφής A→B εμφανίζεται αρχικά δίπλα στον κύκλο στα δεξιά. Εφαρμόζοντας τον κανόνα που αρμόζει προκύπτει επέκταση που περιέχει την πρόταση A→B εντός του κύκλου στα αριστερά. Στον κλάδο που προκύπτει αφού εφαρμόσουμε τον κανόνα θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, {, A→B, …, A→B, …>, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, {, A→B, …>. Έστω ότι η <…, {, A→B, …, A→B, …> οδηγεί σε αντίφαση, έπεται ότι θα είναι Π, {A→B, A→B / ⊥, όπου Π παρόμοια όπως και πριν. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι θα είναι {A→B / A→B, και άρα θα είναι Π, {A→B / ⊥, οπότε θα οδηγεί σε αντίφαση και η λίστα <…, {, A→B, …>, που είναι και το ζητούμενο.

Οι περιπτώσεις που αντιστοιχούν στην άρνηση προκύπτουν με προφανή κάθε φορά τρόπο, οπότε προχωρούμε στις περιπτώσεις που αντιστοιχούν στους ποσοδείκτες.

Έστω λοιπόν ότι στο αρχικό στάδιο κάποια πρόταση της μορφής ∀xAx εμφανίζεται εντός του κύκλου στα αριστερά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα προκύπτει επέκταση τέτοια ώστε δίπλα στον κύκλο στα δεξιά εμφανίζεται πρόταση Aa, όπου ‘a’ σταθερό σύμβολο που είτε εμφανίζεται ήδη εντός του κλάδου, είτε εμφανίζεται τώρα για πρώτη φορά. Στον κλάδο που προκύπτει θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ∀xAx, …, {, Aa, … >, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ∀xAx, …>. Έστω ότι η λίστα <…, ∀xAx, …, {, Aa, … > οδηγεί σε αντίφαση, θα είναι λοιπόν Π, ∀xAx, {Aa / ⊥, όπου Π παρόμοια όπως συνήθως. Με βάση τους κανόνες που έχουμε θέσει για το σύστημα natural deduction έπεται ότι θα είναι ∀xAx / {Aa, και άρα θα είναι Π, ∀xAx / ⊥, οπότε θα οδηγεί σε αντίφαση και η λίστα <…, ∀xAx, …>, που είναι και το ζητούμενο.

Έστω από την άλλη ότι κάποια πρόταση της μορφής ∀xAx εμφανίζεται αρχικά εντός του κύκλου στα δεξιά, εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα προκύπτει επέκταση που περιέχει εντός του κύκλου στα δεξιά πρόταση της μορφής Ac, όπου ‘c’ σταθερό σύμβολο που εμφανίζεται για πρώτη φορά στο συγκεκριμένο σημείο. Στον κλάδο που προκύπτει θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ∼∀xAx, …, ∼Ac, …>, ενώ στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, ∼∀xAx, …>. Ας υποθέσουμε ότι η λίστα <…, ∼∀xAx, …, ∼Ac, …> οδηγεί σε αντίφαση, θα είναι δηλαδή Π, ∼∀xAx, ∼Ac / ⊥, όπου Π παρόμοια με προηγουμένως. Αφού είναι Π, ∼∀xAx, ∼Ac / ⊥, έπεται ότι θα έχουμε Π, ∼∀xAx / {Ac. Παρατηρούμε τώρα όσον αφορά το τελευταίο επιχείρημα ότι το σταθερό σύμβολο ‘c’ εμφανίζεται για πρώτη φορά εντός της πρότασης Ac, οπότε θα είναι {Ac / {∀xAx και άρα Π, ∼∀xAx / {∀xAx. Από την άλλη όμως, θα είναι και Π, ∼∀xAx / ∼∀xAx και άρα Π, ∼∀xAx / ⊥, οπότε θα ισχύει και για την λίστα <…, ∼∀xAx, …> ότι αυτή οδηγεί σε αντίφαση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο αρχικό στάδιο, κάποια πρόταση της μορφής ∀xAx βρίσκεται στο δίπλα στον κύκλο στα αριστερά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα προκύπτει επέκταση τέτοια ώστε η ίδια πρόταση εμφανίζεται εντός του κύκλου στα δεξιά. Η λίστα που αντιστοιχεί στην επέκταση θα είναι της μορφής <…, {, ∼∀xAx, …, ∼∀xAx , …>, ενώ η λίστα που αντιστοιχεί στον αρχικό κλάδο θα είναι της μορφής <…, {, ∼∀xAx, …>. Έστω ότι η <…, {, ∼∀xAx, …, ∼∀xAx, …> οδηγεί σε αντίφαση, με βάση τους κανόνες που έχουμε θέσει έπεται:

1.	{∼∀xAx	Προκείμενη
2.		∼Ac	Υπόθεση, από 1
3.			{∀xAx	Υπόθεση
4.			{Ac	Από 3
5.			⊥	Από 2 και 4
6.		∼∀xAx	Από 3 και 5
7.	∼∀xAx	Συμπέρασμα, από 1 και 6

οπότε καταλήγουμε ότι είναι $\{\sim\forall xAx$ / $\sim\forall xAx$, και άρα στο συμπέρασμα πως θα ισχύει και για την λίστα $<\ldots, \{, \sim\forall xAx, \ldots>$ ότι αυτή οδηγεί σε αντίφαση.

Τέλος, έστω ότι αρχικά ισχύει πως εμφανίζεται κάποια πρόταση της μορφής $\forall xAx$ δίπλα σε κύκλο που βρίσκεται στα δεξιά. Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα, προκύπτει επέκταση τέτοια ώστε η ίδια πρόταση εμφανίζεται εντός του κύκλου στα αριστερά. Η λίστα που αντιστοιχεί στην επέκταση θα είναι της μορφής $<\ldots, \{, \forall xAx, \ldots, \forall xAx, \ldots>$, ενώ η λίστα που αντιστοιχεί στον αρχικό κλάδο θα είναι της μορφής $<\ldots, \{, \forall xAx, \ldots>$. Έστω ότι η $<\ldots, \{, \forall xAx, \ldots, \forall xAx, \ldots>$ οδηγεί σε αντίφαση, θα είναι Π, $\{\forall xAx, \forall xAx$ / $\bot$, όπου Π παρομοίως όπως συνήθως. Παρατηρούμε όμως ότι θα είναι:

1.	$\{\forall xAx$	Προκείμενη
2.	$\mid\ \sim\forall xAx$	Υπόθεση
3.	$\mid\ \mid\ \sim Ac$	Από 2
4.	$\mid\ \mid\ \{Ac$	Από 1
5.	$\mid\ \mid\ \bot$	Από 3 και 4
6.	$\mid\ \bot$	Από 5
7.	$\sim\sim\forall xAx$	Από 2 και 6
8.	$\forall xAx$	Από 8

Οπότε συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει πως $\{\forall xAx$ / $\forall xAx$, και άρα αν είναι Π, $\{\forall xAx, \forall xAx$ / $\bot$ τότε θα είναι και Π, $\{\forall xAx$ / $\bot$. Καταλήγουμε κατ’ αυτόν τον τρόπο στο συμπέρασμα ότι θα οδηγεί σε αντίφαση και η λίστα $<\ldots, \{, \forall xAx, \ldots>$, που είναι και το ζητούμενο.

Όσον αφορά τις περιπτώσεις που αφορούν την υπαρκτική ποσόδειξη, παρατηρούμε ότι θα είναι:

1.	$\exists xAx$	Προκείμενη
2.	$\mid\ \{\sim\sim\forall x\sim Ax$	Υπόθεση
3.	$\mid\ \{\forall x\sim Ax$	Από 2
4.	$\mid\ \mid\ Ac$	Από 1
5.	$\mid\ \mid\ \{\sim Ac$	Από 3
6.	$\mid\ \mid\ \bot$	Από 4 και 5
7.	$\mid\ \bot$	Από 6
8.	$\sim\forall x\sim Ax$	Από 2 και 7

Καθώς και:

1.	~∀x~Ax	Προκείμενη
2.	│ {~∃xAx	Υπόθεση
3.	│ │ ~~Ac	Από 1
4.	│ │ Ac	Από 3
5.	│ │ {~ Ac	Από 2
6.	│ ⊥	Από 4 και 5
7.	⊥	Από 6
8.	∃xAx	Από 2 και 7

Προκύπτει λοιπόν εντός του συστήματος ότι θα είναι ∃xAx / ~∀x~Ax και ~∀x~Ax / ∃xAx, ενώ με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι θα είναι και {∃xAx / {~∀x~Ax και {~∀x~Ax / {∃xAx, και άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι περιπτώσεις που αφορούν την υπαρκτική ποσόδειξη θα ανάγονται σε αυτές της καθολικής ποσόδειξης.

Έστω λοιπόν κάποιο ολοκληρωμένο κλειστό δέντρο, το οποίο έχει κατασκευαστεί με βάση τους κανόνες που έχουμε περιγράψει. Με βάση τα όσα έχουμε δείξει, έπεται πρώτον ότι κάθε λίστα που αντιστοιχεί σε ολόκληρο κλάδο του δέντρου θα οδηγεί σε αντίφαση, με άλλα λόγια θα μπορεί να κατασκευαστεί εντός του συστήματος natural deduction απόδειξη με κατάλληλες προκείμενες που οδηγεί σε αντίφαση, και δεύτερον ότι κάθε αρχικό τμήμα αυτής της λίστας, δηλαδή κάθε υπό λίστα που αντιστοιχεί σε αρχικό τμήμα του κλάδου στον οποίο αντιστοιχεί η αρχική λίστα, θα οδηγεί επίσης σε αντίφαση.

Έπεται όμως από αυτά ότι σε κάθε απόδειξη μέσω δέντρου, θα αντιστοιχεί απόδειξη για το ίδιο επιχείρημα ή πρόταση και εντός του συστήματος natural deduction. Πράγματι, έστω κλειστό δέντρο που περιέχει αρχικά στο επίπεδο 1 πρόταση A εντός του κύκλου στα αριστερά, και πρόταση B εντός του κύκλου στα δεξιά. Στον αρχικό κλάδο θα αντιστοιχεί λίστα της μορφής <…, A, ~B, …>, και με βάση τα όσα έχουμε πει έπεται ότι αφού όλοι οι κλάδοι του δέντρου είναι κλειστοί η συγκεκριμένη λίστα θα οδηγεί σε αντίφαση. Μπορούμε άρα εντός του συστήματος natural deduction να κατασκευάσουμε επιχείρημα με την παρακάτω μορφή:

A

$\sim$B

⋮

⋮

$\perp$

{B

Συμπεραίνουμε ότι θα είναι $A \vdash B$ εντός του συστήματος natural deduction, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το τελευταίο είναι πλήρες. Πράγματι, για προτάσεις A, B, αν είναι $A|\vDash B$ τότε θα υπάρχει απόδειξη για το συγκεκριμένο επιχείρημα εντός του συστήματος δέντρων που έχουμε περιγράψει. Δεδομένης αυτής μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε απόδειξη και εντός του συστήματος natural deduction. Με άλλα λόγια, αν είναι $A|\vDash B$ τότε θα είναι $A \vdash_{Tree} B$, και αν είναι $A \vdash_{Tree} B$ τότε θα είναι $A \vdash_{ND} B$. Άρα, αν είναι $A|\vDash B$ τότε θα είναι $A \vdash_{ND} B$, που είναι και το ζητούμενο.

3.2 Προσθέτοντας στην γλώσσα τον τελεστή '*Definitely*'.

Ας θεωρήσουμε σε αυτό το σημείο και πάλι την σωρειτική ακολουθία $α_1$, $α_2$, …, $α_{10000}$ ως προς το κατηγόρημα 'F' όπου για κάθε αντικείμενο που εμφανίζεται σε αυτήν ισχύει ότι αυτό είναι πιο F από τα επόμενά του, και διαφέρει ελάχιστα από τα γειτονικά του ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Έχουμε παρατηρήσει ότι μια από τις συνέπειες που έπονται από το γεγονός ότι έχουμε διατυπώσει τις σημασιολογικές συνθήκες για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ εντός μιας σαφούς μεταγλώσσας είναι ότι για επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ θα ισχύει για κάποιες από τις προτάσεις που εμφανίζονται στην αρχή της ακολουθίας προτάσεων Fa_1, Fa_2, …, Fa_{10000} ότι αυτές είναι αληθείς ως προς αυτό, ενώ οι προτάσεις που έπονται αυτών θα προκύπτουν μη αληθείς. Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να θεωρήσει ότι με αυτόν τον τρόπο κάθε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ θέτει ένα σαφές όριο μεταξύ των προτάσεων που είναι αληθείς σε αυτό και αυτών που είναι μη αληθείς. Αυτό βέβαια δεν μπορεί να εκφραστεί εντός της γλώσσας αντικείμενο, εφόσον αυτή δεν διαθέτει Boolean τελεστή άρνησης, ή κάποιον κατάλληλο προτασιακό τελεστή.

Μεταβαίνοντας όμως ένα επίπεδο παραπάνω, και θεωρώντας πως και η μεταγλώσσα $\mathcal{L}^1$ δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη προσέξαμε ότι το σαφές όριο που περικλείει ακριβώς εκείνες τις προτάσεις που είναι αληθείς στο w θα διαχέεται σε μια ζώνη, αφού υπάρχουν πλέον πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί η μεταγλώσσα να διαμορφωθεί περαιτέρω, και οι συνθήκες αλήθειας των προτάσεων της γλώσσας αντικείμενο εξαρτώνται από αυτές των προτάσεων της μεταγλώσσας. Αν σε αυτήν την περίπτωση διατρέξουμε την παραπάνω ακολουθία προτάσεων από τα αριστερά προς τα δεξιά τότε κάποιες από τις προτάσεις που εμφανίζονται σε αυτήν θα προκύπτουν οριακές περιπτώσεις ως προς την έκφραση «η πρόταση x είναι αληθής στο επίπεδο διαμόρφωσης w», ανάλογα με τον τρόπο και τον βαθμό που είναι διαμορφωμένη η $\mathcal{L}^1$. Κατ' επέκταση, μπορούμε να προβλέψουμε ότι κάτι ανάλογο θα συμβαίνει και με την περίπτωση των επιχειρημάτων. Θεωρώντας πάλι την πιο πάνω σωρειτική ακολουθία αντικειμένων, δεν θα προκύπτει τώρα ότι υπάρχει κάποιο σαφές μήκος μέχρι το οποίο θα μπορεί μια αλυσίδα επιχειρημάτων να φτάσει χωρίς να είναι δυνατό αυτή να αντικρουστεί και μετά από το οποίο αυτή θα γίνεται να αντικρουστεί, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που η μεταγλώσσα είναι πλήρως διαμορφωμένη. Αντί αυτού, θα υπάρχει κάποιο μήκος μέχρι το οποίο μπορεί μια αλυσίδα να φτάσει και μέχρι το οποίο αυτή δεν θα μπορεί να αντικρουστεί, κάποιο μεγαλύτερο μήκος μετά το οποίο αυτή θα μπορεί να αντικρουστεί, και μια ενδιάμεση ζώνη το μήκος της οποίας θα εξαρτάται από τον βαθμό και τον τρόπο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$. Επιχειρήματα των οποίων το μήκος θα εντάσσεται εντός αυτής της ενδιάμεσης ζώνης δεν θα είναι ξεκάθαρο αν μπορούν να αντικρουστούν ή όχι εντός του τρέχοντος πλαισίου συζήτησης.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να εμπλουτίσουμε την γλώσσα αντικείμενο προσθέτοντας σε αυτή κάποιον τελεστή '$\mathcal{Definitely}$', και ας θεωρήσουμε κάποια πρόταση της μορφής Fa. Μια επιλογή, όσον αφορά τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης, είναι να θέσουμε ότι για σημείο w θα είναι w⊨$\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν κάθε αποδεκτό σημείο επιβεβαιώνει την Fa, ενώ θα είναι w⫤$\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν για κάποιο αποδεκτό σημείο ισχύει ότι αυτό διαψεύδει την Fa.

Όσον αφορά τις περιπτώσεις που η Fa συνοδεύεται από δύο επαναλήψεις του τελεστή '$\mathcal{Definitely}$', αφού έχουμε θεωρήσει ότι δεν μπορεί να είναι πάντα ξεκάθαρο αν κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας είναι αποδεκτό ή όχι, φαίνεται εύλογο να θεωρήσουμε ότι θα είναι w⊨$\mathcal{Definitely}\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν ισχύει ότι κάθε όχι ξεκάθαρα μη αποδεκτό σημείο επιβεβαιώνει την Fa, ενώ από την άλλη ότι θα είναι w⫤$\mathcal{Definitely}\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν αν υπάρχει σημείο που δεν είναι ξεκάθαρα όχι αποδεκτό το οποίο διαψεύδει την Fa. Διακρίσεις όπως αυτές όμως δεν μπορούν να γίνουν εντός της σαφούς μεταγλώσσας. Αντιμετωπίζοντας την έκφραση 'το x είναι αποδεκτό' ως σαφή έπεται ότι κάτι θα είναι αποδεκτό αν και μόνο αν είναι ξεκάθαρα αποδεκτό, αν και μόνο αν είναι ξεκάθαρα ξεκάθαρα αποδεκτό, αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι είναι ξεκάθαρα όχι αποδεκτό, αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι είναι ξεκάθαρο ότι δεν ισχύει πως δεν είναι ξεκάθαρο ότι δεν ισχύει ότι είναι αποδεκτό, και ούτω καθ' εξής. Οι διακρίσεις που σκοπεύουμε να εκφράσουμε μέσω των σχετικών τελεστών πολύ απλά καταρρέουν.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το w είναι φυσιολογικό, με βάση αυτά θα είναι:

1. w⊩$\mathcal{Definitely}$ Fa $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτή επέκταση x του w είναι ~(x⊨$\mathcal{Definitely}$ Fa $\wedge$ x⫤$\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fa)
2. w⊩$\mathcal{Definitely}$ Fa $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτή επέκταση x του w είναι ~([κάθε αποδεκτό σημείο επιβεβαιώνει την Fa] $\wedge$ [κάποιο όχι ξεκάθαρα μη αποδεκτό σημείο διαψεύδει την Fa])

3. w⊮$\mathcal{Definitely}$ Fa $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fa αν και μόνο αν για κάθε αποδεκτή επέκταση x του w είναι ~([κάθε αποδεκτό σημείο επιβεβαιώνει την Fa] $\wedge$ [κάποιο αποδεκτό σημείο διαψεύδει την Fa])

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα είναι όμως πάντα αληθές, και άρα καταλήγουμε ότι θα είναι w⊮$\mathcal{Definitely}$ Fa $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fa. Κατά παρόμοιο τρόπο θα προκύπτει ότι η $\forall$x($\mathcal{Definitely}$ Fx $\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fx) είναι επίσης αληθής. Δεν μπορεί δηλαδή να υπάρχουν οριακές περιπτώσεις όσον αφορά το αν κάτι είναι ξεκάθαρα F, ή όσον αφορά το αν κάτι είναι ξεκάθαρα ξεκάθαρα F, και ούτω καθ' εξής. Πρόκειται όμως για συνέπειες που έρχονται σε αντίθεση με τις γλωσσικές διαισθήσεις που έχουμε, είναι εμφανές ότι δεν μπορεί να είναι πάντα ξεκάθαρο αν κάτι είναι πχ ξεκάθαρα κόκκινο, ή να είναι πάντα ξεκάθαρο αν κάτι είναι ξεκάθαρα σωρός, και ούτω καθ' εξής.

Βλέπουμε κατ' αυτόν τον τρόπο πως το γεγονός ότι η μεταγλώσσα θέτει σαφή όρια μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να αντικατοπτρίζεται εντός της γλώσσας αντικείμενο, με αποτέλεσμα συγκεκριμένες προτάσεις της τελευταίας να προκύπτουν σύμφωνα με την θεωρία αληθείς. Από την άλλη, εξετάζοντας την απόδειξη της προηγούμενης σελίδας διαπιστώνουμε ότι θα είχαμε καταλήξει σε διαφορετικά συμπεράσματα αν οι αντίστοιχοι σημασιολογικοί υπολογισμοί είχαν πραγματοποιηθεί με τρόπο που σέβεται και λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι ορισμένες από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούμε προκειμένου να περιγράψουμε τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της γλώσσας αντικείμενο πρέπει κανονικά να λογίζονται ως ασαφείς. Φαίνεται λοιπόν ότι αν η σημασιολογική θεωρία είναι διατυπωμένη εντός κάποιας σαφούς μεταγλώσσας τότε διατρέχουμε τον κίνδυνο κάποιες από τις συνέπειες της θεωρίας πολύ απλά να μην είναι ορθές.

Μια από τις επιλογές που έχουμε είναι φυσικά αυτή της συνεχούς φιλοσοφικής επαγρύπνησης προκειμένου να διαχωρίζουμε μεταξύ χαρακτηριστικών της θεωρίας που όντως έπονται από τις ιδιότητες των ασαφών εκφράσεων, και χαρακτηριστικών της θεωρίας που έπονται από το γεγονός ότι αυτή είναι διατυπωμένη εντός κάποιας σαφούς μεταγλώσσας. Μια άλλη επιλογή είναι αυτή της κατάλληλης κάθε φορά αναθεώρησης της σημασιολογικής θεωρίας καθώς και της γλώσσας εντός της οποίας αυτή διατυπώνεται, ανάλογα με τα επίπεδα ασάφειας που εμπλέκονται στους σημασιολογικούς υπολογισμούς που σκοπεύουμε να πραγματοποιήσουμε.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την αρχική γλώσσα $\mathcal{L}^0$ που δεν περιέχει τον τελεστή ‘$\mathcal{Definitely}$’, και έστω ερμηνεία <D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$> αυτής. Εμπλουτίζουμε συντακτικά την $\mathcal{L}^0$, προσθέτοντας σε αυτή τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^0$, οπότε και προκύπτει έτσι μια νέα γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime}$. Ως ερμηνεία της τελευταίας θεωρούμε και πάλι την <D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$>, θέτουμε πως όπως και αν είναι διαμορφωμένη η $\mathcal{L}^{0\prime}$ μια πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}$A θα επιβεβαιώνεται αν και μόνο αν κάθε αποδεκτός τρόπος διαμόρφωσης της γλώσσας επιβεβαιώνει την A, ενώ θα διαψεύδεται αν και μόνο αν υπάρχει αποδεκτός τρόπος που την διαψεύδει. Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0\prime}$ ως αποδεκτά ή μη αποδεκτά κατασκευάζουμε ασαφή γλώσσα $\mathcal{L}^1$, η οποία περιέχει εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της τις δυνατές διαμορφώσεις της $\mathcal{L}^0$, τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ και τις υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει της $\mathcal{L}^0$ και της ερμηνείας <D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$>. Η $\mathcal{L}^1$ περιέχει τις ασαφείς κατηγορηματικές εκφράσεις «το x είναι αποδεκτό», «το x είναι φυσιολογικό» και «Δx», τα ίδια λογικά σύμβολα που περιέχει και η $\mathcal{L}^0$, και παρενθέσεις. Ως ερμηνεία της $\mathcal{L}^1$ θεωρούμε διατεταγμένη πεντάδα της μορφής <D^1, W^1, $\sqsubseteq^1$, $Val^{(1)+}$, $Val^{(1)-}$>, αντιλαμβανόμαστε το W^1 ως το σύνολο που περιέχει τους δυνατούς τρόπους ταξινόμησης των αντικειμένων εντός του W^0 ως αποδεκτά ή μη αποδεκτά. Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w’ της $\mathcal{L}^1$ η $Val^{(1)+}$ θα θέτει εντός των εκτάσεων των εκφράσεων «το x είναι αποδεκτό» και «το x είναι φυσιολογικό» ορισμένα από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$, ενώ η $Val^{(1)-}$ θα θέτει εντός της αντιέκτασής τους ορισμένα από τα υπόλοιπα, καθώς και κάθε αντικείμενο εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών που δεν είναι επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$. Αυτό θα πρέπει να γίνεται με τρόπο που σέβεται το νόημα των διαφόρων εκφράσεων της $\mathcal{L}^1$ και τις νοηματικές συνδέσεις μεταξύ τους (penumbral connections). Για παράδειγμα, αν κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ κατατάσσεται ως αποδεκτό, θεωρούμε πως θα πρέπει να ισχύει το ίδιο και για επίπεδο διαμόρφωσης που διαφέρει από το πρώτο μόνο όσον αφορά το γεγονός ότι καθορίζεται ως προς αυτό λίγο μεγαλύτερο κενό μεταξύ της έκτασης και της αντιέκτασης κάποιας κατηγορηματικής έκφρασης της $\mathcal{L}^0$. Όσον αφορά την έκφραση «Δx», η $Val^{(1)+}$ θα θέτει δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w’ της $\mathcal{L}^1$ εντός της έκτασης της έκφρασης κάθε πρόταση της $\mathcal{L}^0$ για την οποία ισχύει ότι κάθε αντικείμενο που το w’ κατατάσσει ως αποδεκτό την επιβεβαιώνει καθώς και κάθε υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^0$ και της <D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$> για την οποία ισχύει το ίδιο. Η $Val^{(1)-}$ θα θέτει εντός της αντιέκτασης της ίδιας έκφρασης κάθε πρόταση της $\mathcal{L}^0$ για την οποία ισχύει ότι υπάρχει αντικείμενο που το w' κατατάσσει ως αποδεκτό και την διαψεύδει, κάθε υβριδική πρόταση για την οποία ισχύει το ίδιο, καθώς και όλα τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$.

Περιγράφουμε τα συντακτικά χαρακτηριστικά των $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^1$, καθώς και τις διατεταγμένες πεντάδες <D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$>, <D^1, W^1, $\sqsubseteq^1$, $Val^{(1)+}$, $Val^{(1)-}$> εντός της μεταγλώσσας που χρησιμοποιούμε, την οποία αντιμετωπίζουμε ως σαφή και άρα θεωρούμε ότι διέπεται από τους κανόνες της κλασικής λογικής. Καλούμε την τελευταία $\mathcal{L}^M$. Με βάση αυτά θα προσδιορίζουμε εντός της $\mathcal{L}^M$ τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των προτάσεων που ανήκουν στην $\mathcal{L}^{0\prime}$, την επέκταση δηλαδή της αρχικής γλώσσας $\mathcal{L}^0$, ανάλογα με το επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0\prime}$ και της $\mathcal{L}^1$. Για πρόταση A της $\mathcal{L}^0$ θα γράφουμε εντός της $\mathcal{L}^M$ ότι <w, w'>$\vDash$ $\mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο εντός του W^0 που κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w' επιβεβαιώνει την A. Θα γράφουμε <w, w'>$\Dashv$ $\mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν κάποιο αντικείμενο εντός του W^0 που κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w' απορρίπτει την A. Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w' της $\mathcal{L}^1$ θα υπάρχει πλέον περίπτωση επίπεδο διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^0$ να προκύπτει οριακή περίπτωση ως προς την έκφραση «το x είναι αποδεκτό». Δεν θα είναι λοιπόν πάντα ξεκάθαρο αν το επίπεδο διαμόρφωσης w είναι αποδεκτό. Παρόλα αυτά, αν χρειαστεί να χαρακτηρίσουμε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ όπως το w' ως αποδεκτό ή μη αποδεκτό δεν έχουμε σε αυτό το σημείο άλλη επιλογή παρά μόνο να το κάνουμε εντός της $\mathcal{L}^M$. Καταυτόν τον τρόπο, το ζήτημα του αν κάποιο αντικείμενο όπως το w' είναι αποδεκτό ή όχι θα προκύπτει ως ξεκάθαρο, και κατά συνέπεια θα φαίνεται ως ξεκάθαρο το αν το εκάστοτε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ είναι ξεκάθαρα αποδεκτό ή όχι. Με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει όμως, η $\mathcal{L}^{0\prime}$ δεν θα περιέχει εκφράσεις τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των οποίων εξαρτώνται από το ποια επίπεδα διαμόρφωσης εντός του W^0 μπορούν να ταξινομηθούν ως ξεκάθαρα αποδεκτά και ποια όχι.

Ας θεωρήσουμε τώρα την επέκταση $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$ της $\mathcal{L}^{0\prime}$, που προκύπτει προσθέτοντας στην τελευταία τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A, όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^{0\prime}$. Η $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$ θα περιέχει προτάσεις που μπορούν να εκφράσουν μέχρι και ασάφεια τρίτης τάξης, οπότε προκειμένου να περιγράψουμε την σημασιολογία της θα χρησιμοποιήσουμε όχι μόνο την ασαφή γλώσσα $\mathcal{L}^1$, αλλά και μια επιπλέον ασαφή γλώσσα $\mathcal{L}^2$. Εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της τελευταίας θα περιέχονται οι δυνατές διαμορφώσεις και οι προτάσεις της $\mathcal{L}^1$, καθώς και οι υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής και της ερμηνείας $<D^1, W^1, \sqsubseteq^1, Val^{(1)+}, Val^{(1)-}>$. Μεταξύ των εκφράσεων της $\mathcal{L}^2$ θα περιλαμβάνονται τα ασαφή κατηγορήματα «το x είναι αποδεκτό», «το x είναι φυσιολογικό» και «Δx». Ως ερμηνεία της $\mathcal{L}^2$ θεωρούμε διατεταγμένη πεντάδα της μορφής $<D^2, W^2, \sqsubseteq^2, Val^{(2)+}, Val^{(2)-}>$, όπου αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα εντός του W^2 ως τους δυνατούς τρόπους ώστε να ταξινομηθεί κάποιο αντικείμενο που ανήκει στο W^1 ως αποδεκτό ή μη αποδεκτό, ενώ οι $Val^{(2)+}$, $Val^{(2)-}$ ορίζονται με τρόπο ανάλογο των $Val^{(1)+}$, $Val^{(1)-}$. Δεδομένης λοιπόν κάποιας τριάδας της μορφής $<<D^0, W^0, \sqsubseteq^0, Val^{(0)+}, Val^{(0)-}>, <D^1, W^1, \sqsubseteq^1, Val^{(1)+}, Val^{(1)-}>, <D^2, W^2, \sqsubseteq^2, Val^{(2)+}, Val^{(2)-}>>$, σημείων w, w', w'' με $w \in W^0$, $w' \in W^1$, $w'' \in W^2$, και πρότασης της μορφής $\mathcal{Definitely}\mathcal{Definitely}$ A που εμφανίζεται εντός της $\mathcal{L}^{0''}$, θα γράφουμε εντός της $\mathcal{L}^M$ ότι $<w, w', w''> \vDash$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο εντός του W^1 που κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w'' επιβεβαιώνει την $\mathcal{Definitely}$A. Θα γράφουμε $<w, w', w''> \Dashv$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν κάποιο αντικείμενο εντός του W^1 που κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w'' απορρίπτει την $\mathcal{Definitely}$A.

Γενικότερα, αν θεωρήσουμε ακολουθία γλωσσών $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0'}$, $\mathcal{L}^{0''}$, … , όπου για κάθε γλώσσα $\mathcal{L}^{0i}$ που εμφανίζεται εντός αυτής ισχύει ότι αυτή περιέχει τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A, όπου Α πρόταση της $\mathcal{L}^{0(i-1)}$, προκειμένου να περιγράψουμε με επαρκή τρόπο την σημασιολογία της εκάστοτε γλώσσας που εμφανίζεται εντός αυτής θα κάνουμε κάθε φορά χρήση μιας κατάλληλης ιεραρχίας γλωσσών,[66] η οποία σχηματίζεται με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει. Η ιεραρχία που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0'}$, $\mathcal{L}^{0''}$, … θα εκτείνεται κάθε φορά ένα επίπεδο επιπλέον της ιεραρχίας που χρησιμοποιούμε

[66] Ένας τρόπος ώστε να ερμηνευτεί η συγκεκριμένη ακολουθία γλωσσών, και η ακολουθία που σχηματίζεται από τις σημασιολογικές δομές που αντιστοιχούν σε κάθε μία από αυτές, είναι να θεωρήσουμε ότι η κλάση των σημασιολογικών τιμών που μπορεί να αποδοθούν στις προτάσεις της γλώσσας ενδέχεται σε κάποιες περιπτώσεις να έχει κοινά χαρακτηριστικά με έννοιες που μπορούν να ταξινομηθούν ως indefinitely extensible. Προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο μια δυναμική εικόνα περί των σημασιολογικών χαρακτηριστικών της γλώσσας. Πολύ απλά, για κάθε περιγραφή της κλάσης των σημασιολογικών τιμών που η θεωρία αποδίδει στις προτάσεις της γλώσσας, θα υπάρχουν εκφράσεις τέτοιες ώστε κάθε απόπειρα εμπλουτισμού της γλώσσας με συγκεκριμένες προτάσεις εντός των οποίων αυτές εμφανίζονται θα οδηγεί στην ανάγκη να αναγνωρίσουμε μια ευρύτερη κλάση ως αυτή των σημασιολογικών τιμών. Στην περίπτωση μας πρόκειται για ένα χαρακτηριστικό που διακρίνει τις προτάσεις που περιέχουν τον τελεστή '$\mathcal{Definitely}$'. Ως σημασιολογικές τιμές για την περίπτωση της $\mathcal{L}^0$ θεωρούμε τα αντικείμενα εντός του W^0, ως σημασιολογικές τιμές για την περίπτωση της $\mathcal{L}^{0'}$ θεωρούμε τα αντικείμενα εντός του $W^0 x W^1$, και ούτω καθ' εξής.
Σε μια παρόμοια ιδέα, σε σύνδεση όμως με τα σημασιολογικά παράδοξα, βασίζεται και ο Roy T. Cook, στο άρθρο του 'Embracing revenge: On the indefinite extendibility of Language', που εμφανίζεται στην συλλογή άρθρων 'Revenge of the Liar, New essays on the paradox', edited by J.C Beall, Oxford University Press.

για την γλώσσα που εμφανίζεται στην προηγούμενη θέση της ακολουθίας. Κάθε ασαφής γλώσσα $\mathcal{L}^i$, με i≥1, που εμφανίζεται στην ιεραρχία που αντιστοιχεί στο εκάστοτε βήμα της ακολουθίας, θα περιέχει εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της τις δυνατές διαμορφώσεις της γλώσσας που εμφανίζεται ένα επίπεδο πριν από αυτήν, τις προτάσεις αυτής, καθώς και τις υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής και της ερμηνείας $<D^{(i-1)}, W^{(i-1)}, \sqsubseteq^{(i-1)}, Val^{(i-1)+}, Val^{(i-1)-}>$. Ως εκφράσεις της θα περιέχει τα συνήθη λογικά σύμβολα, παρενθέσεις, και κατηγορηματικές εκφράσεις «το x είναι αποδεκτό», «το x είναι φυσιολογικό» και «Δx». Ως ερμηνεία της $\mathcal{L}^i$ θεωρούμε διατεταγμένη πεντάδα της μορφής $<D^i, W^i, \sqsubseteq^i, Val^{(i)+}, Val^{(i)-}>$, όπου εντός του W^i περιέχονται οι δυνατοί τρόποι ώστε να χαρακτηριστεί αντικείμενο εντός του $W^{(i-1)}$ ως αποδεκτό ή μη αποδεκτό. Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w^i της $\mathcal{L}^i$ η $Val^{(i)+}$ θα θέτει εντός της έκτασης της εκάστοτε από τις εκφράσεις «το x είναι αποδεκτό» και «το x είναι φυσιολογικό» ορισμένα από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{(i-1)}$, ενώ η $Val^{(i)-}$ θα θέτει εντός της αντιέκτασης ορισμένα από τα υπόλοιπα, καθώς και όλες τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{(i-1)}$. Όσον αφορά την έκφραση «Δx», δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w^i της $\mathcal{L}^i$ η $Val^{(i)+}$ θα θέτει εντός της έκτασης της έκφρασης εκείνες από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{(i-1)}$, καθώς και εκείνες από τις υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής και της ερμηνείας της, που επιβεβαιώνονται από κάθε αντικείμενο που το w^i κατατάσσει ως αποδεκτό, ενώ η $Val^{(i)-}$ θα θέτει εντός της αντιέκτασης κάθε πρόταση για την οποία ισχύει ότι υπάρχει αντικείμενο που το w^i κατατάσσει ως αποδεκτό και την διαψεύδει, κάθε υβριδική πρόταση για την οποία ισχύει το ίδιο, καθώς και όλα τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{(i-1)}$.

Η πολυπλοκότητα της δομής που προκύπτει μας υποχρεώνει τώρα να αναθεωρήσουμε κατάλληλα τα χαρακτηριστικά βάσει των οποίων κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης γλώσσας $\mathcal{L}^i$ που εμφανίζεται εντός της ιεραρχίας θα κατατάσσεται ως αποδεκτό ή μη αποδεκτό, φυσιολογικό ή μη φυσιολογικό, από επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας που έπεται εντός της ιεραρχίας. Θεωρούμε ότι το γεγονός πως μια δυνατή διαμόρφωση w^i της $\mathcal{L}^i$ κατατάσσεται ως αποδεκτή από επίπεδο διαμόρφωσης w^{i+1} της $\mathcal{L}^{(i+1)}$ θα πρέπει να αντιστοιχεί στο γεγονός ότι σύμφωνα με το w^{i+1}, το w^i δεν διακρίνει μεταξύ αντικειμένων που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι ή δεν μπορούν σε καμία περίπτωση να διακρίνουν μεταξύ τους ως προς τις σχετικές ιδιότητες εντός του συγκεκριμένου πλαισίου. Σε κάθε περίπτωση, επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^i$ που θέτει σαφές όριο μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης ασαφούς έκφρασης θα θεωρούμε πως κάνει διακρίσεις αυτού του τύπου, και άρα απαιτούμε να κατατάσσεται πάντα ως μη αποδεκτό.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τις $\mathcal{L}^{0''}$, $\mathcal{L}^{1}$, $\mathcal{L}^{2}$, και έστω w επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0''}$, w′ της $\mathcal{L}^{1}$, και w′′ της $\mathcal{L}^{2}$. Δεδομένου του επιπέδου w′, κάποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0''}$ θα χαρακτηρίζονται ως αποδεκτά, και κάποια άλλα ως μη αποδεκτά. Κάθε φορά θα πρέπει φυσικά να πληρούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε αυτά να χαρακτηριστούν ως τέτοια, αντικείμενα για παράδειγμα ως προς τα οποία η $\mathcal{L}^{0''}$ είναι πλήρως διαμορφωμένη θα χαρακτηρίζονται ως μη αποδεκτά, αντικείμενα που κάνουν διακρίσεις που οι ομιλητές είναι διατεθειμένοι εντός του τρέχοντος πλαισίου να δεχτούν θα χαρακτηρίζονται ως αποδεκτά, ενώ για κάποια άλλα αντικείμενα το ζήτημα θα μένει ανοικτό. Παρόλα αυτά, είναι εμφανές ότι αν χαρακτηρίσουμε το w′ ως αποδεκτό, τότε θα μπορούμε να θεωρήσουμε και επίπεδα διαμόρφωσης που διαφέρουν ελάχιστα από αυτό ως επίσης αποδεκτά. Για παράδειγμα αν x είναι επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0''}$ για το οποίο το w′ δεν αποφαίνεται, ισχύει ότι το x δεν δέχεται ως αποδεκτές διακρίσεις που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι να κάνουν, και αυτό διαφέρει ελάχιστα από αντικείμενο που το w′ κατατάσσει ως αποδεκτό, τότε φαίνεται εύλογο να θεωρήσουμε ότι θα μπορούσε να καταταχθεί ως αποδεκτό και επίπεδο διαμόρφωσης z′ που διαφέρει από το w′ μόνο όσον αφορά το γεγονός ότι κατατάσσει ως αποδεκτό και το x. Έπεται κατ’ αυτόν τον τρόπο ότι κάποια διαμόρφωση όπως η w′′ της $\mathcal{L}^{2}$ θα μπορεί για παράδειγμα να θέτει ως αποδεκτά τα w′, z′ καθώς και επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1}$ που διαφέρουν ελάχιστα ως προς αυτά και σέβονται τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει ως απαραίτητες, ως μη αποδεκτά θα θέτει επίπεδα που διαφέρουν σε έντονο βαθμό ως προς αυτά ή παραβιάζουν κάποιες από αυτές, ενώ για κάποια άλλα αντικείμενα δεν θα αποφαίνεται.

Κατά ανάλογο τρόπο θα πρέπει να αναθεωρήσουμε και τις συνθήκες που κάποια διαμόρφωση θα πρέπει απαραιτήτως να πληροί προκειμένου αυτή να μπορεί να χαρακτηριστεί ως ‘φυσιολογική’. Όσον αφορά τα επίπεδα διαμόρφωσης της γλώσσας $\mathcal{L}^{0}$ είχαμε θέσει ότι για αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης w αυτής, τότε προκειμένου αυτό να χαρακτηριστεί ως φυσιολογικό θα πρέπει να ισχύει ότι για κάθε κατηγορηματική έκφραση F της γλώσσας είναι $\forall ob[ob\in D^0\rightarrow [\forall x(x\in W^0\wedge w\sqsubseteq x\wedge(x \text{ αποδεκτό})\rightarrow\sim(Val^+(x, ob)\in Val^-(x, F)))\rightarrow\exists x(x\in W^0\wedge w\sqsubseteq x\wedge(x \text{ αποδεκτό})\wedge(Val^+(x, ob)\in Val^+(x, F)))]]$ καθώς και $\forall ob[ob\in D^0\rightarrow[\forall x(x\in W^0\wedge w\sqsubseteq x\wedge(x \text{ αποδεκτό})\rightarrow\sim(Val^+(x, ob)\in Val^+(x, F)))\rightarrow\exists x(x\in W^0\wedge w\sqsubseteq x\wedge(x \text{ αποδεκτό})\wedge(Val^+(x, ob)\in Val^-(x, F)))]]$. Επί της ουσίας, προκειμένου κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0}$, και άρα και των γλωσσών που έπονται εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^{0}$, $\mathcal{L}^{0'}$, $\mathcal{L}^{0''}$, … , να χαρακτηριστεί ως φυσιολογικό θα πρέπει να ισχύει ότι αυτή είναι επαρκώς μη διαμορφωμένη ως προς αυτό, με τρόπο ώστε αν για κάποια ατομική πρόταση της γλώσσας ισχύει ότι δεν υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που την διαψεύδει, τότε θα υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που την επιβεβαιώνει, και αν δεν υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που την επιβεβαιώνει τότε θα υπάρχει αποδεκτός τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης που την διαψεύδει. Ανάλογα θα πρέπει να ισχύουν και για τις γλώσσες που έπονται εντός της εκάστοτε ιεραρχίας. Έστω για παράδειγμα τέτοια γλώσσα $\mathcal{L}^{i}$, και w^{i} επίπεδο διαμόρφωσης αυτής, προκειμένου κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^{i-1}$ να κατατάσσεται από αυτήν ως φυσιολογικό θα πρέπει να ισχύει ότι για κάθε κατηγορηματική έκφραση F που ανήκει στην $\mathcal{L}^{i-1}$ είναι $\forall y[y\in D^{i-1} \rightarrow [\forall x(x\in W^{i-1}\wedge w\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w^{i}, \text{αποδεκτό}) \rightarrow \sim(y\in Val^{(i-1)-}(x, F)))\rightarrow\exists x(x\in W^{i-1}\wedge w\sqsubseteq x \wedge x\in Val^{i+}(w^{i}, \text{αποδεκτό}) \wedge(y\in Val^{(i+1)+}(x, F)))]]$ καθώς και $\forall y[y\in D^{i-1} \rightarrow[\forall x(x\in W^{i-1}\wedge w\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w^{i}, \text{αποδεκτό})\rightarrow \sim(y\in Val^{(i-1)+}(x, F)))\rightarrow\exists x(x\in W^{i-1}\wedge w\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w^{i}, \text{αποδεκτό}) \wedge(y\in Val^{(i-1)-}(x, F)))]]$. Αντικείμενο εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^{i}$ που δεν είναι επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{i-1}$ θα κατατάσσεται πάντα εντός της αντιέκτασης της έκφρασης ‘x φυσιολογικό’.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τις γλώσσες $\mathcal{L}^{1}$, $\mathcal{L}^{2}$, εντός του D^{1} θα περιέχονται οι προτάσεις, τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0}$, και οι υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής, κάθε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1}$ θα χαρακτηρίζει κάποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0}$ ως αποδεκτά, και κάποια ως μη αποδεκτά. Αντίστοιχα, εντός του D^{2} θα περιέχονται τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1}$, οι προτάσεις της, και οι υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής. Κάθε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{2}$ θα χαρακτηρίζει κάποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1}$ ως αποδεκτά, και κάποια ως μη αποδεκτά. Έστω λοιπόν επίπεδο διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^{2}$, και επίπεδο διαμόρφωσης z της $\mathcal{L}^{1}$ που κατατάσσεται από το w ως αποδεκτό. Προκειμένου το τελευταίο να κατατάσσεται από το w και ως φυσιολογικό θα πρέπει να ισχύει ότι $\forall y[y\in D^{1} \rightarrow[\forall x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό})\rightarrow\sim(y\in Val^{1-}(x, \Delta x)))\rightarrow \exists x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x \wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό}) \wedge(y\in Val^{1+}(x, \Delta x)))]]$, καθώς και $\forall y[y\in D^{1} \rightarrow[\forall x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό})\rightarrow \sim(y\in Val^{1+}(x, \Delta x)))\rightarrow\exists x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό}) \wedge(y\in Val^{1-}(x, \Delta x)))]$. Θα πρέπει λοιπόν για κάθε πρόταση A της $\mathcal{L}^{0}$ να είναι $[\forall x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό})\rightarrow\sim(\exists y(y\in W^{0}\wedge y\in Val^{i+}(x, \text{αποδεκτό})\wedge y\Dashv A)))\rightarrow \exists x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x \wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό}) \wedge(\forall y(y\in W^{0}\wedge y\in Val^{i+}(x, \text{αποδεκτό})\rightarrow y\vDash A)))]$, καθώς και $[\forall x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό})\rightarrow\sim(\forall y(y\in W^{0}\wedge y\in Val^{i+}(x, \text{αποδεκτό})\rightarrow y\vDash A)))\rightarrow\exists x(x\in W^{1}\wedge z\sqsubseteq x\wedge x\in Val^{i+}(w, \text{αποδεκτό}) \wedge(\exists y(y\in W^{0}\wedge y\in Val^{i+}(x, \text{αποδεκτό})\wedge y\Dashv A)))]$.

Τώρα, καμία από τις γλώσσες εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, … δεν θα είναι ικανή να εκφράσει κάθε πεπερασμένο επίπεδο ασάφειας. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι κάθε μία από αυτές αντιστοιχεί σε κάποιο κομμάτι ασαφούς γλώσσας $\mathcal{L}^0*$, όπου το σύνολο των προτάσεων της τελευταίας ορίζεται με τον συνήθη αναδρομικό τρόπο, οπότε για πρόταση Α της $\mathcal{L}^0*$ ισχύει ότι και η $\mathcal{Definitely}$Α θα είναι πρότασή της. Κάθε μία από τις γλώσσες εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, … μπορεί λοιπόν να αντιμετωπιστεί ως μια υπό-γλώσσα της $\mathcal{L}^0*$, δηλαδή ως μια γλώσσα τέτοια ώστε το σύνολο των προτάσεών της αποτελεί γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των προτάσεων της $\mathcal{L}^0*$. Γλώσσες που έπονται στην ακολουθία αποτελούν ένα όλο και μεγαλύτερο τμήμα της $\mathcal{L}^0*$, και μπορούν να εκφράσουν όλο και ανώτερα επίπεδα ασάφειας. Μεταβαίνοντας κάθε φορά σε κάποια γλώσσα που εμφανίζεται σε επόμενη θέση της ακολουθίας καθίσταται έτσι δυνατό να προσεγγίσουμε τα συντακτικά χαρακτηριστικά της $\mathcal{L}^0*$ σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό. Κατά ανάλογο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ή όλο και πιο πλούσια σημασιολογική δομή που αντιστοιχεί στην εκάστοτε γλώσσα της ιεραρχίας μας δίνει την δυνατότητα να προσεγγίσουμε τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της $\mathcal{L}^0*$ σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό. Θα υπάρχει μάλιστα κάποιος διατακτικός αριθμός γ τέτοιος ώστε για $\delta \geq \gamma$ να είναι $\mathcal{L}^{0\delta}=\mathcal{L}^0*$, και μάλιστα θα είναι $\gamma=\omega$.

3.2.1 Σημασιολογικά χαρακτηριστικά της $\mathcal{L}^0*$.

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε θεωρήσει ότι η ασάφεια είναι ένα είδος σημασιολογικής απροσδιοριστίας. Η γλώσσα δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, οπότε και υπάρχει μια πληθώρα δυνατών τρόπων ώστε αυτή να διαμορφωθεί επιπλέον. Παρόλα αυτά δεν ισχύει για κάθε δυνατό τρόπο περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας ότι αυτός είναι αποδεκτός. Ποιες από τις συγκεκριμένες δυνατότητες είναι αποδεκτές και ποιες όχι θα καθορίζεται εντός του εκάστοτε πλαισίου συζήτησης. Αν θεωρήσουμε λοιπόν μια φυσιολογική διαμόρφωση w της γλώσσας, αυτή θα θέτει ορισμένα αντικείμενα εντός της έκτασης του εκάστοτε ασαφούς κατηγορήματος, ορισμένα άλλα εντός της αντιέκτασης, ενώ για τα υπόλοιπα θα αφήνει το ζήτημα ανοικτό. Με βάση τις συνθήκες που έχουμε θέσει, μια πρόταση θα κατατάσσεται ως αληθής στο w αν και μόνο αν δεν υπάρχει τρόπος περαιτέρω διαμόρφωσης της γλώσσας ο οποίος είναι αποδεκτός και διαψεύδει την συγκεκριμένη πρόταση.

Τώρα, συνήθως ένα μη κλασικό σύστημα λογικής περιγράφεται από σημασιολογική άποψη εντός μιας σαφούς μεταγλώσσας. Πρόκειται για την συνήθη πρακτική και όσον αφορά τις διάφορες μη κλασικές θεωρίες περί ασάφειας. Μπορούμε λοιπόν να ξεκινήσουμε χρησιμοποιώντας κάποια μεταγλώσσα που είναι σαφής. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα τίθεται ένα σαφές όριο όσον αφορά το ποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της γλώσσας αντικείμενο είναι αποδεκτά. Ερευνώντας τις συνέπειες της θεωρίας διαπιστώσαμε ότι αυτή περιγράφει το φαινόμενο της ασάφειας με τρόπο που μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητικός όσο δεν είναι δυνατό να διατυπωθούν εντός της γλώσσας αντικείμενο προτάσεις που χαρακτηρίζονται από ασάφεια ανώτερης τάξης. Τα πράγματα αλλάζουν όμως αν εμπλουτίσουμε την γλώσσα με τον κατάλληλο προτασιακό τελεστή. Τότε, το γεγονός ότι η μεταγλώσσα που χρησιμοποιούμε είναι σαφής θα υπάρχει περίπτωση να αντικατοπτρίζεται εντός της γλώσσας που μελετούμε μέσω συγκεκριμένων προτάσεων που προκύπτουν αληθείς. Για παράδειγμα, διαπιστώσαμε ότι, αναλόγως του τρόπου που θα οριστούν οι ανάλογες συνθήκες, θα υπάρχει περίπτωση προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$ Fa$\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ Fa να προκύπτουν πάντα αληθείς. Με βάση τους ορισμούς που έχουμε προτιμήσει, προτάσεις της συγκεκριμένης μορφής επί της ουσίας εκφράζουν εντός της γλώσσας αντικείμενο ακριβώς το γεγονός ότι δεν υπάρχουν οριακές περιπτώσεις για το μεταγλωσσικό κατηγόρημα 'το x είναι αποδεκτό'.

Φαίνεται όμως ότι το ποιες από τις δυνατότητες διαμόρφωσης της γλώσσας αντικείμενο είναι αποδεκτές και ποιες όχι δεν μπορεί να είναι ένα σαφές ζήτημα. Το κατηγόρημα «το x είναι αποδεκτό» πρέπει λοιπόν να αντιμετωπίζεται ως ασαφές. Έπεται ότι πρέπει να θεωρήσουμε πως η γλώσσα που το περιέχει δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη, και άρα κατά παρόμοιο τρόπο με την γλώσσα αντικείμενο, θα προκύπτουν μια σειρά από δυνατότητες περαιτέρω διαμόρφωσης αυτής, κάποιες από τις οποίες είναι αποδεκτές και κάποιες όχι. Συνεχίζουμε άρα εμπλουτίζοντας την $\mathcal{L}^0$ με τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A, όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^0$, και παρεμβάλλοντας κατάλληλα μια ασαφή γλώσσα $\mathcal{L}^1$ που περιέχει κατηγόρημα «το x είναι αποδεκτό» μεταξύ της γλώσσας αντικείμενο και της σαφούς μεταγλώσσας. Μια διαμόρφωση w' της $\mathcal{L}^1$ θα εντάσσει κάποιες από τις δυνατές διαμορφώσεις της $\mathcal{L}^0$ στην έκταση του κατηγορήματος «το x είναι αποδεκτό», κάποιες στην αντιέκταση, ενώ για τις υπόλοιπες το ζήτημα θα μένει ανοικτό. Η μεταγλώσσα εντός της οποίας περιγράφουμε τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της νέας γλώσσας καθώς και της γλώσσας αντικείμενο παραμένει όμως σαφής, και προκειμένου να χαρακτηρίσουμε κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ ως αποδεκτό ή ως μη αποδεκτό δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να το κάνουμε εντός αυτής. Ενώ λοιπόν σύμφωνα με την συγκεκριμένη σημασιολογική δομή μπορεί για κάποια διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0$ να μην είναι ξεκάθαρο αν αυτή είναι αποδεκτή ή όχι, θα είναι ξεκάθαρο αν είναι ξεκάθαρα αποδεκτή ή όχι.

Κάθε φορά που επεκτείνουμε κάποια γλώσσα από συντακτική άποψη, παρεμβάλλουμε μια επιπλέον ασαφή γλώσσα εντός της ιεραρχίας, επεκτείνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την δομή με βάση την οποία προσδιορίζονται τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των διαφόρων εκφράσεων της. Σε κάθε μία από τις γλώσσες που εμφανίζονται εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$,… , αντιστοιχείται λοιπόν μια κατάλληλη ιεραρχία από γλώσσες, κάθε μία από τις οποίες χαρακτηρίζει τις δυνατές διαμορφώσεις της γλώσσας που βρίσκεται ένα επίπεδο κάτω από αυτή ως αποδεκτές ή μη αποδεκτές. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$ που εμφανίζεται στην παραπάνω δομή, εντός αυτής θα μπορούν να διατυπωθούν μέχρι και προτάσεις που διακρίνονται από ασάφεια τρίτης τάξης. Για να περιγράψουμε την σημασιολογία της χρησιμοποιούμε την ιεραρχία ασαφών γλωσσών $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$. Αντίστοιχα, εντός της $\mathcal{L}^{0\prime\prime\prime}$ θα μπορούν να διατυπωθούν μέχρι και προτάσεις που διακρίνονται από ασάφεια τέταρτης τάξης, και προκειμένου να προσδιορίσουμε τα σημασιολογικά της χαρακτηριστικά θα χρησιμοποιούμε την ιεραρχία $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$.

Στο όριο της συγκεκριμένης διαδικασίας καταλήγουμε σε γλώσσα $\mathcal{L}^{0*}$. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$,…, $\mathcal{L}^{0*}$ γλωσσών που προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο. Η γλώσσα $\mathcal{L}^0$ θα περιέχει ένα σύνολο ατομικών προτάσεων της μορφής Fa όπου F κάποιο κατηγόρημα της γλώσσας ενώ a κάποιο σταθερό σύμβολο αυτής, καθώς και τις σύνθετες προτάσεις που μπορεί να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τους προτασιακούς συνδέσμους και τους ποσοδείκτες που αυτή περιέχει. Προτάσεις δηλαδή της μορφής Α→Β, ∼Α κτλ. Η γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime}$ θα περιέχει εκτός από αυτές και προτάσεις όπως *Definitely*Α, *Definitely* (Α→Β), *Definitely*(∼Α) κτλ, προτάσεις δηλαδή που σχηματίζονται εφαρμόζοντας τον τελεστή '*Definitely* ' στις προτάσεις της γλώσσας $\mathcal{L}^0$. Επιπλέον όμως , θα περιέχει και τις διάφορες προτάσεις που σχηματίζονται από αυτές μέσω των προτασιακών συνδέσμων και ποσοδεικτών, προτάσεις δηλαδή όπως οι *Definitely*Α→Α, ∀x*Definitely*Α κτλ. Παρομοίως, η γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$ θα περιέχει όχι μόνο τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0\prime}$ αλλά και αυτές που μπορούν να σχηματιστούν εφαρμόζοντας τον τελεστή '*Definitely*' σε αυτές, προτάσεις δηλαδή όπως οι *DefinitelyDefinitely*Α, *DefinitelyDefinitely*(Α→Β),

$\mathcal{Definitely}$ ($\mathcal{Definitely}$ A→A) κτλ. Επιπλέον, θα περιέχει και τις προτάσεις που μπορεί να σχηματιστούν από αυτές μέσω των προτασιακών συνδέσμων καθώς και των ποσοδεικτών, προτάσεις δηλαδή όπως $\mathcal{Definitely}$ A→ $\mathcal{Definitely}\mathcal{Definitely}$A κτλ. Κατά παρόμοιο τρόπο προσδιορίζεται και το σύνολο των προτάσεων που περιέχει η εκάστοτε γλώσσα $\mathcal{L}^{0n}$, όπου n κάποιος φυσικός αριθμός, που εμφανίζεται εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^{0}$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$,… . Αυτή θα περιέχει τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0n-1}$, αυτές που σχηματίζονται εφαρμόζοντας τον τελεστή ‘$\mathcal{Definitely}$ ’ σε εκείνες, καθώς και όσες προκύπτουν από όλες αυτές μέσω των προτασιακών συνδέσμων και των ποσοδεικτών. Τέλος, το σύνολο των προτάσεων της $\mathcal{L}^{0}$* θα καθορίζεται ως η ένωση όλων των συνόλων προτάσεων των γλωσσών που εμφανίζονται στην ακολουθία $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, … .

Συνεχίζουμε αναθέτοντας σε κάθε πρόταση της γλώσσας $\mathcal{L}^{0}$* δείκτες, αναλόγως σε ποια από τις $\mathcal{L}^{0}$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, … εμφανίστηκε αυτή για πρώτη φορά. Έτσι, αναθέτουμε στις προτάσεις της γλώσσας $\mathcal{L}^{0}$ δείκτη 0, ενώ στις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0\prime}$ που δεν ανήκουν στην $\mathcal{L}^{0}$ αναθέτουμε δείκτη 1. Γενικότερα, για γλώσσα $\mathcal{L}^{0n}$, όπου n κάποιος φυσικός αριθμός, αναθέτουμε δείκτη n σε εκείνες από τις προτάσεις της που δεν ανήκουν στην $\mathcal{L}^{0n-1}$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}$ ($\mathcal{Definitely}$A→A), όπου A είναι πρόταση της $\mathcal{L}^{0}$, τότε ο τρόπος που σχηματίστηκε αυτή μπορεί να δηλωθεί ως εξής: ($\mathcal{Definitely}$ (($\mathcal{Definitely}$ A)$_1$→(A)$_0$)$_1$)$_2$, όπου ο δείκτης που αντιστοιχεί στην εκάστοτε υποπρόταση εμφανίζεται αμέσως μετά την δεξιά από τις παρενθέσεις που την περικλείουν. Ανάλογα, αν θεωρήσουμε πρόταση της μορφής $\mathcal{Definitely}$A→ $\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A τότε θα αναθέτουμε δείκτες στις υποπροτάσεις της ως εξής: (($\mathcal{Definitely}$ A)$_1$→ ($\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A)$_2$)$_2$. Γενικότερα, για πρόταση A που εμφανίζεται για πρώτη φορά εντός της γλώσσας $\mathcal{L}^{0n}$ θα είναι ($\mathcal{Definitely}$ (($\mathcal{Definitely}$ A)$_{n+1}$→(A)$_n$)$_{n+1}$)$_{n+2}$, και (($\mathcal{Definitely}$ A)$_{n+1}$→ ($\mathcal{Definitely}$ $\mathcal{Definitely}$ A)$_{n+2}$)$_{n+2}$.

Ας θεωρήσουμε σε αυτό το σημείο την γλώσσα που προκύπτει στο όριο της ακολουθίας $\mathcal{L}^{0}$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime\prime}$, … , με άλλα λόγια την $\mathcal{L}^{0}$*, καθώς και την άπειρη ιεραρχία $\mathcal{L}^{1}$, $\mathcal{L}^{2}$, $\mathcal{L}^{3}$, … από γλώσσες που αντιστοιχεί σε αυτήν.

Ως ερμηνεία της ιεραρχίας $\mathcal{L}^{0}$*, $\mathcal{L}^{1}$, $\mathcal{L}^{2}$, $\mathcal{L}^{3}$, … θα θεωρούμε κάθε άπειρο διατεταγμένο σύνολο της μορφής <<D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$>, <D^1, W^1, $\sqsubseteq^1$, $Val^{(1)+}$, $Val^{(1)-}$>, <D^2, W^2, $\sqsubseteq^2$, $Val^{(2)+}$, $Val^{(2)-}$>, … >, τα στοιχεία του οποίου ορίζονται με τον τρόπο που έχουμε περιγράψει.

Κάθε σύνολο της μορφής W^i περιέχει τους διάφορους δυνατούς τρόπους βάσει των οποίων το εκάστοτε αντικείμενο εντός του $W^{(i-1)}$ μπορεί ταξινομηθεί ως αποδεκτό ή μη αποδεκτό. Κάθε σύνολο της μορφής D^i καθορίζεται πλήρως από το $W^{(i-1)}$ και τις εκφράσεις της $\mathcal{L}^{(i-1)}$. Κάθε συνάρτηση της μορφής $Val^{(i)+}$ ή $Val^{(i)-}$ καθορίζεται σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει από τα D^i και W^i.

Θα κατατάσσουμε κάθε υβριδικό τύπο που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^0$ και της ερμηνείας $<D^0, W^0, \sqsubseteq^0, Val^{(0)+}, Val^{(0)-}>$ ως υβριδικό τύπο που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^0$* και της $<<D^0, W^0, \sqsubseteq^0, Val^{(0)+}, Val^{(0)-}>, <D^1, W^1, \sqsubseteq^1, Val^{(1)+}, Val^{(1)-}>, <D^2, W^2, \sqsubseteq^2, Val^{(2)+}, Val^{(2)-}>, \ldots >$. Επιπλέον, για <A>, <B> υβριδικούς τύπους της $\mathcal{L}^0$* που προκύπτουν βάσει της συγκεκριμένης ερμηνείας της ιεραρχίας, τότε θα κατατάσσουμε ως υβριδικό τύπο που προκύπτει βάσει αυτής και κάθε διατεταγμένο ζεύγος της μορφής <$\mathcal{Definitely}$, <A>>, κάθε διατεταγμένο ζεύγος της μορφής <~, <A>> ή της μορφής <∀x, <A>>, και κάθε διατεταγμένη τριάδα της μορφής <→, <A>, <B>>. Αν A είναι τύπος της $\mathcal{L}^0$* στον οποίο αντιστοιχείται ο υβριδικός τύπος <A>, τότε θα θεωρούμε πως στον τύπο $\mathcal{Definitely}$A της $\mathcal{L}^0$* αντιστοιχείται ο υβριδικός τύπος <$\mathcal{Definitely}$, <A>>, ενώ η αντιστοίχηση μεταξύ σύνθετων τύπων και σύνθετων υβριδικών τύπων γίνεται όπως και πριν. Για πρόταση A της $\mathcal{L}^0$* με δείκτη i, θα ισχύει ότι αναθέτουμε τον ίδιο δείκτη και στην υβριδική πρόταση <A> που της αντιστοιχείται, καθώς και σε κάθε υβριδική πρόταση που διαφέρει από την <A> το πολύ όσον αφορά τα αντικείμενα που εμφανίζονται εντός αυτής.

Ως επίπεδο διαμόρφωσης της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, … θεωρούμε ένα άπειρο διατεταγμένο σύνολο <w, w', w'', …> όπου w επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$* , w' επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, w'' επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^2$ κτλ.

Έστω λοιπόν διαμόρφωση <w, w', w'', …> της ιεραρχίας, A πρόταση της $\mathcal{L}^0$*, και <A> η υβριδική πρόταση που αντιστοιχεί σε αυτήν. Για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$* θα ισχύουν τα εξής:

- Για ατομική πρόταση $(F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_0$ θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash (F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_0$ αν και μόνο αν $< Val^{0+}(w, t_1), Val^{0+}(w, t_2), \ldots, Val^{0+}(w, t_n)> \in Val^{0+}(w, F)$
- Για ατομική πρόταση $(F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_0$ θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \dashv (F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_0$ αν και μόνο αν $< Val^{0+}(w, t_1), Val^{0+}(w, t_2), \ldots, Val^{0+}(w, t_n)> \in Val^{0-}(w, F)$
- Για πρόταση $(\mathcal{Definitely}\ A)_n$, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 1, θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash (\mathcal{Definitely}\ A)_n$ αν και μόνο αν $\forall x(x \in Val^{n+}(w^n,$

αποδεκτό)$\rightarrow$ (<…,x ,…>$\vDash$(A)$_{n-1}$)), όπου με την συμβολοσειρά <…, x,…> αναφερόμαστε στην διαμόρφωση της ιεραρχίας που προκύπτει από την <w, w', w'', …> αν στην θέση του $w^{(n-1)}$ θέσουμε την διαμόρφωση x της $\mathcal{L}^{(n-1)}$.

- Για πρόταση ($\mathcal{Definitely}$ A)$_n$, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 1, θα είναι <w, w', w'', …>$\Dashv$($\mathcal{Definitely}$ A)$_n$ αν και μόνο αν $\exists$x(x$\in$Val^{n+}(w^n, αποδεκτό) $\wedge$ (<…,x ,…>$\Dashv$(A)$_{n-1}$))

Για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις θέτουμε:

- Για υβριδική πρόταση <F, <$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, …, $\mathcal{O}_n$>>$_0$ θα είναι <w, w', w'', …>$\vDash$<F, <$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, …, $\mathcal{O}_n$>>$_0$ αν και μόνο αν < Val^{0+}(w, $\mathcal{O}_1$), Val^{0+}(w, $\mathcal{O}_1$), …, Val^{0+}(w, $\mathcal{O}_1$)> $\in$ Val^{0+}(w, F)
- Θα είναι <w, w', w'', …>$\Dashv$<F, <$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, …, $\mathcal{O}_n$>>$_0$ αν και μόνο αν < Val^{0+}(w, $\mathcal{O}_1$), Val^{0+}(w, $\mathcal{O}_1$), …, Val^{0+}(w, $\mathcal{O}_1$)> $\in$ Val^{0-}(w, F)
- Για υβριδική πρόταση <$\mathcal{Definitely}$, <A>>$_n$, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 1, θα είναι <w, w', w'', …>$\vDash$<$\mathcal{Definitely}$, <A>>$_n$ αν και μόνο αν $\forall$x(x$\in$Val^{n+}(w^n, αποδεκτό)$\rightarrow$ <…,x ,…>$\vDash$<A>), όπου με την συμβολοσειρά <…, x,…> αναφερόμαστε στην διαμόρφωση της ιεραρχίας που προκύπτει από την <w, w', w'', …> αν στην θέση του $w^{(n-1)}$ θέσουμε την διαμόρφωση x της $\mathcal{L}^{(n-1)}$.
- Θα είναι <w, w', w'', …>$\Dashv$<$\mathcal{Definitely}$, <A>>$_n$ αν και μόνο αν $\exists$x(x$\in$Val^{n+}(w^n, αποδεκτό) $\wedge$ <…,x ,…>$\Dashv$<A>)

Έστω A, B προτάσεις της $\mathcal{L}^0$*και n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Για τις σύνθετες προτάσεις της $\mathcal{L}^0$*, δηλαδή τις σύνθετες προτάσεις που εμφανίζονται στην εκάστοτε θέση εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime\prime}$, … θα ισχύουν τα εξής:

- <w, w', w'', …>$\vDash$(A$\rightarrow$B)$_n$ αν και μόνο αν ~(<w, w', w'', …>$\vDash$(A)$_m$ $\wedge$ <w, w', w'', …>$\Dashv$(B)$_\kappa$), όπου k, m$\leq$n, ανάλογα με το σε ποια θέση εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime\prime}$, … σχηματίστηκαν πρώτη φορά οι προτάσεις A, B. (Παρατηρούμε ότι πάντα τουλάχιστον ένας από τους δύο δείκτες k, m θα είναι ίσος με n).
- <w, w', w'', …>$\Dashv$(A$\rightarrow$B)$_n$ αν και μόνο αν (<w, w', w'', …>$\vDash$(A)$_m$ $\wedge$ <w, w', w'', …>$\Dashv$(B)$_k$), όπου k, m$\leq$n.
- <w, w', w'', …>$\vDash$(~A)$_n$ αν και μόνο αν <w, w', w'', …>$\Dashv$(A)$_n$

- $<w, w', w'', \ldots>\dashv(\sim A)_n$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots>\vDash(A)_n$
- $<w, w', w'', \ldots>\vDash(\forall xA(\ldots x\ldots))_n$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots>\vDash<\forall x, A(\ldots x\ldots)>_n$
- $<w, w', w'', \ldots>\dashv(\forall xA(\ldots x\ldots))_n$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots>\dashv<\forall x, A(\ldots x\ldots)>_n$

Συντομογραφούμε τις προτάσεις της μορφής $(\sim(A\rightarrow\sim B))_n$, $(\sim A\rightarrow B)_n$, και $(\sim\forall x\sim Ax)_n$ ως $(A\wedge B)_n$, $(A\vee B)_n$ και $(\exists xAx)_n$ αντίστοιχα.

Τέλος, αν A, B είναι υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν με βάση την $\mathcal{L}^0$*, θα είναι:

- $<w, w', w'', \ldots>\vDash<\rightarrow, A, B>_n$ αν και μόνο αν $\sim(<w, w', w'', \ldots>\vDash A \wedge <w, w', w'', \ldots>\dashv B)$
- $<w, w', w'', \ldots>\dashv<\rightarrow, A, B>_n$ αν και μόνο αν $(<w, w', w'', \ldots>\vDash A \wedge <w, w', w'', \ldots>\dashv B)$
- $<w, w', w'', \ldots>\vDash<\sim, A>_n$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots>\dashv A$
- $<w, w', w'', \ldots>\dashv<\sim, A>_n$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots>\vDash A$
- $<w, w', w'', \ldots>\vDash<\forall x, A(\ldots x\ldots)>_n$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o εντός του D^0 είναι $<w, w', w'', \ldots>\dashv[\ A(\ldots x\ldots)]^{o}_{x}$
- $<w, w', w'', \ldots>\dashv<\forall x, A(\ldots x\ldots)>_n$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο o εντός του D^0 ισχύει ότι $<w, w', w'', \ldots>\dashv[\ A(\ldots x\ldots)]^{o}_{x}$

Όσον αφορά την έννοια της αλήθειας επεκτείνουμε τους ορισμούς που διατυπώσαμε για την $\mathcal{L}^0$. Για πρόταση A με δείκτη n, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 0, θα ισχύει το εξής:

- Αν η διαμόρφωση $<w, w', w'', \ldots>$ της ιεραρχίας είναι τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο w^i, με $1\leq i\leq(n+1)$, που εμφανίζεται εντός αυτής ισχύει ότι αυτό κατατάσσει το w^{i-1} ως φυσιολογικό, τότε θα είναι $<w, w', w'', \ldots>\Vdash(A)_n$ αν και μόνο αν $[\forall x^n\forall x^{n-1}\ \ldots\forall x(x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1},$ αποδεκτό$)\ \wedge\ x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n,$ αποδεκτό$)\wedge\ \ldots\ \wedge\ x\in Val^{1+}(x',$ αποδεκτό$)\ \wedge\ w^n\sqsubseteq x^n\wedge\ w^{n-1}\sqsubseteq x^{n-1}\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ w\sqsubseteq x)\rightarrow(\sim<x, x', \ldots, x^n , w^{n+1},\ldots>\dashv(A)_n)\ )\ ]$, όπου εδώ με την συμβολοσειρά $<x, x', \ldots, x^n , w^{n+1},\ldots>$ αναφερόμαστε στην διαμόρφωση της ιεραρχίας που προκύπτει από την $<w, w', w'', \ldots>$ αν στην θέση του w^n θέσουμε την διαμόρφωση x^n της $\mathcal{L}^n$, στην θέση του w^{n-1} την διαμόρφωση x^{n-1} της $\mathcal{L}^{n-1}$ κτλ.

Θα διαβάζουμε μια πρόταση της μορφής $<w, w', w'', \ldots>\Vdash(A)$ ως «η πρόταση A είναι αληθής ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης $<w, w', w'', \ldots>$ της ιεραρχίας».

Για πρόταση A με δείκτη n, θα λέμε ότι αυτή είναι λογικά αληθής αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία της ιεραρχίας ισχύει ότι για κάθε επίπεδο διαμόρφωσης $<w, w', w'', \dots>$ αυτής, τέτοιο ώστε κάθε αντικείμενο w^i, με $1 \leq i \leq (n+1)$, που εμφανίζεται εντός αυτού και κατατάσσει το w^{i-1} ως φυσιολογικό, ισχύει ότι $<w, w', w'', \dots> \Vdash (A)$.

Σε αυτό το σημείο ας θεωρήσουμε για παράδειγμα μια πρόταση της μορφής $\mathcal{D}\mathit{efinitely}A \rightarrow A$ [67] που ανήκει στην $\mathcal{L}^0*$, και έστω i ο δείκτης της πρότασης. Παρατηρούμε ότι όσον αφορά τους δείκτες θα είναι $((\mathcal{D}\mathit{efinitely}A)_i \rightarrow (A)_{i-1})_i$. Έστω επιπλέον $<w, w', w'', \dots>$ επίπεδο διαμόρφωσης της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$,… , τέτοιο ώστε για κάθε n, με $1 \leq n \leq (i+1)$ ισχύει ότι το w^n κατατάσσει το w^{n-1} ως φυσιολογικό.

Θα ισχύουν τα εξής:

[67] Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι για διαμόρφωση $<w, w', w'', \dots>$ της ιεραρχίας τέτοια ώστε για κάθε n, με $1 \leq n \leq (i+1)$ ισχύει ότι το w^n κατατάσσει το w^{n-1} ως φυσιολογικό, πρόταση A με δείκτη i, πρόταση B με δείκτη j, και $n = \max(i, j)+1$, θα είναι $<w, w', w'', \dots> \Vdash \mathcal{D}\mathit{efinitely}(A \rightarrow B) \rightarrow (\mathcal{D}\mathit{efinitely}A \rightarrow \mathcal{D}\mathit{efinitely}B)$ αν και μόνο αν $[\forall x^n \forall x^{n-1} \dots \forall x(x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge \dots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \dots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', \dots, x^n, w^{n+1}, \dots> \Dashv (\mathcal{D}\mathit{efinitely}(A \rightarrow B) \rightarrow (\mathcal{D}\mathit{efinitely}A \rightarrow \mathcal{D}\mathit{efinitely}B))_n))]$,
αν και μόνο αν $[\forall x^n \forall x^{n-1} \dots \forall x(x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge \dots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \dots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim(<x, x', \dots, x^n, w^{n+1}, \dots> \vDash \mathcal{D}\mathit{efinitely}(A \rightarrow B) \wedge <x, x', \dots, x^n, w^{n+1}, \dots> \Dashv (\mathcal{D}\mathit{efinitely}A \rightarrow \mathcal{D}\mathit{efinitely}B))))]$,
αν και μόνο αν $[\forall x^n \forall x^{n-1} \dots \forall x(x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge \dots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \dots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim([\forall y(y \in Val^{n+}(x^n$, αποδεκτό$) \rightarrow \sim(<x, x', \dots, y, x^n, w^{n+1}, \dots> \vDash A \wedge <x, x', \dots, y, x^n, w^{n+1}, \dots> \Dashv B))] \wedge [\forall y(y \in Val^{n+}(x^n$, αποδεκτό$)) \rightarrow (<x, x', \dots, y, x^n, w^{n+1}, \dots> \vDash A))] \wedge [\exists y(y \in Val^{n+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge (<x, x', \dots, y, x^n, w^{n+1}, \dots> \Dashv B))]))]$. Διαπιστώνουμε όμως εύκολα ότι το τελευταίο είναι αληθές.
Τέλος, έστω ότι για πρόταση A με δείκτη n ότι αυτή είναι λογικά αληθής. Με άλλα λόγια, για τυχούσα ερμηνεία της ιεραρχίας θα ισχύει ότι για κάθε διαμόρφωση $<w, w', w'', \dots>$ της ιεραρχίας τέτοια ώστε για κάθε i, με $1 \leq i \leq (n+1)$ ισχύει ότι το w^i κατατάσσει το w^{i-1} ως φυσιολογικό, είναι $[\forall x^n \forall x^{n-1} \dots \forall x(x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge \dots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \dots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', \dots, x^n, w^{n+1}, \dots> \Dashv (A)_n))]$. Έστω από την άλλη ότι δεν είναι λογικά αληθής η $\mathcal{D}\mathit{efinitely}A$, έπεται ότι για κάποια ερμηνεία της ιεραρχίας θα υπάρχει διαμόρφωση $<z, z', z'', \dots>$ της ιεραρχίας όπως η παραπάνω τέτοια ώστε να είναι $[\exists x^{n+1} \exists x^n \dots \exists x((x^{n+1} \in Val^{(n+2)+}(z^{n+2}$, αποδεκτό$) \wedge x^n \in Val^{(n+1)+}(x^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge \dots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge z^{n+1} \sqsubseteq x^{n+1} \wedge z^n \sqsubseteq x^n \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x) \wedge (\exists y^n(y^n \in Val^{(n+1)+}(x^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge (<x, x', \dots, y^n, x^{n+1}, z^{n+2}, \dots> \Dashv A)))))]$. Το αν το τελευταίο μπορεί να είναι αληθές ή όχι θα εξαρτάται από τις συνθήκες που πρέπει να τηρούνται από την εκάστοτε ερμηνεία της ιεραρχίας. Αν θεωρούμε ότι για αποδεκτή διαμόρφωση y κάποιας από τις γλώσσες της ιεραρχίας θα πρέπει πάντα να ισχύει ότι υπάρχει φυσιολογική διαμόρφωση w που αυτή επεκτείνει, τότε δεδομένου ότι η A είναι λογικά αληθής δεν θα μπορεί να ισχύει ότι $[\exists x^{n+1} \exists x^n \dots \exists x((x^{n+1} \in Val^{(n+2)+}(z^{n+2}$, αποδεκτό$) \wedge x^n \in Val^{(n+1)+}(x^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$) \wedge \dots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge z^{n+1} \sqsubseteq x^{n+1} \wedge z^n \sqsubseteq x^n \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x) \wedge (\exists y^n(y^n \in Val^{(n+1)+}(x^{n+1}$, αποδεκτό$) \wedge (<x, x', \dots, y^n, x^{n+1}, z^{n+2}, \dots> \Dashv A)))))]$ και άρα θα είναι λογικά αληθής και η $\mathcal{D}\mathit{efinitely}A$. Από την άλλη, αν δεν επιβάλλουμε τέτοιον περιορισμό στις ερμηνείες της ιεραρχίας τότε θα μπορεί η A να είναι λογικά αληθής, χωρίς ταυτόχρονα να ισχύει το ίδιο και για την $\mathcal{D}\mathit{efinitely}A$.

1. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \Vdash (\mathit{Definitely}A\rightarrow A)_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x(\, (x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim \langle x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (\mathit{Definitely}A\rightarrow A)_i)\,)$
2. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \Vdash (\mathit{Definitely}A\rightarrow A)_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x(\, (x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim (\langle x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (\mathit{Definitely}A)_i \wedge \langle x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1})\,)\,)$
3. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \Vdash (\mathit{Definitely}A\rightarrow A)_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x(\, (x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim (\, \forall y^{i-1}(y^{i-1} \in Val^{i+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\, \langle x, x', \ldots, y^{i-1}, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1}) \wedge \langle x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1})\,)\,)$

Το τελευταίο όμως μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι ισχύει για κάθε δείκτη i. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει δείκτης i τέτοιος ώστε να μην ισχύει ότι $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x(\, (x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim (\, \forall y^{i-1}(y^{i-1} \in Val^{i+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\, \langle x, x', \ldots, y^{i-1}, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1}) \wedge \langle x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1})\,)\,)$, θα έχουμε ότι $\exists x^i \exists x^{i-1} \ldots \exists x(\, (x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \wedge \forall y^{i-1}(y^{i-1} \in Val^{i+}(x^i, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\, \langle x, x', \ldots, y^{i-1}, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1}) \wedge \langle x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1})$. Έστω λοιπόν c^i, c^{i-1}, …, c', c σημεία που συγκεκριμενοποιούν τους αντίστοιχους υπαρκτικούς ποσοδείκτες, τέτοια ώστε ισχύει ότι , $(c^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge c^{i-1} \in Val^{(i)+}(c^i, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge c \in Val^{1+}(c', \text{αποδεκτό}) \wedge w^i \sqsubseteq c^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq c^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq c)$. Θα είναι $\forall y^{i-1}(y^{i-1} \in Val^{(i)+}(c^i, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\, \langle c, c', \ldots, y^{i-1}, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1}) \wedge \langle c, c', \ldots, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1}$. Από το πρώτο μέλος της σύζευξης θα έχουμε $\forall y^{i-1}(y^{i-1} \in Val^{(i)+}(c^i, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\, \langle c, c', \ldots, y^{i-1}, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1})$ και άρα με universal instantiation και modus ponens έπεται ότι $(\, \langle c, c', \ldots, c^{i-1}, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1})$, από το δεύτερο μέλος της σύζευξης όμως έπεται ότι $\langle c, c', \ldots, c^{i-1}, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1}$. Μπορεί όμως να αποδειχτεί επαγωγικά ότι για κάθε διαμόρφωση της ιεραρχίας θα ισχύει ότι δεν υπάρχει πρόταση της γλώσσας που αυτή τόσο επιβεβαιώνει όσο και διαψεύδει. Καταλήγουμε άρα ότι δεν μπορεί να υπάρχει διαμόρφωση της ιεραρχίας ώστε να ισχύει πως $\langle c, c', \ldots, c^{i-1}, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \vDash (A)_{i-1}$ καθώς και $\langle c, c', \ldots, c^{i-1}, c^i, w^{i+1}, \ldots\rangle \Dashv (A)_{i-1}$. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε διαμόρφωση $\langle w, w', w'', \ldots\rangle$ της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$,… και τυχόν δείκτη i θα ισχύει ότι $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \Vdash (\mathit{Definitely}A\rightarrow A)_i$.

Έστω από την άλλη μια πρόταση της μορφής *Definitely*A$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely*A , και έστω ότι i ο δείκτης της πρότασης. Όσον αφορά τους δείκτες των υποπροτάσεων, έπεται ότι θα είναι ((*Definitely*$(A)_{i-2})_{i-1}\rightarrow$(*Definitely* (*Definitely*$(A)_{i-2})_{i-1})_i$)$_i$. Έστω επιπλέον <w, w', w'', …> μια διαμόρφωση της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$,… τέτοια ώστε για κάθε n, με $1\leq n\leq(i+1)$ ισχύει ότι το w^n κατατάσσει το w^{n-1} ως φυσιολογικό. Θα έχουμε:

1. <w, w', w'', …>$\Vdash$(*Definitely*A$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely*A)$_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i\forall x^{i-1}\ldots\forall x((x^i\in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό) $\wedge\ x^{i-1}\in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό)$\wedge\ldots\wedge\ x\in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό) $\wedge\ w^i\sqsubseteq x^i\wedge\ w^{i-1}\sqsubseteq x^{i-1}\wedge\ldots\wedge\ w\sqsubseteq x)\rightarrow(\sim$ <x, …, x^{i-1}, x, w^{i+1}, …> $\dashv$(*Definitely*A$\rightarrow$ *Definitely Definitely*A)$_i$))
2. <w, w', w'', …>$\Vdash$(*Definitely*A$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely*A)$_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i\forall x^{i-1}\ldots\forall x((x^i\in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό) $\wedge\ x^{i-1}\in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό)$\wedge\ldots\wedge\ x\in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό) $\wedge\ w^i\sqsubseteq x^i\wedge\ w^{i-1}\sqsubseteq x^{i-1}\wedge\ldots\wedge\ w\sqsubseteq x)\rightarrow($ $\sim$(<x, …, x^{i-1}, x, w^{i+1}, …>$\vDash$(*Definitely*A)$_{i-1}\wedge$ <x, …, x^{i-1}, x, w^{i+1}, …>$\dashv$(*DefinitelyDefinitely*A)$_i$))
3. <w, w', w'', …>$\Vdash$(*Definitely*A$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely*A)$_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i\forall x^{i-1}\ldots\forall x((x^i\in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό) $\wedge\ x^{i-1}\in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό)$\wedge\ldots\wedge\ x\in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό)$\wedge\ w^i\sqsubseteq x^i\wedge\ w^{i-1}\sqsubseteq x^{i-1}\wedge\ldots\wedge\ w\sqsubseteq x)\rightarrow\ \sim($ ($\forall y^{i-2}(y^{i-2}\in Val^{(i-1)+}(x^{i-1}$, αποδεκτό)$\rightarrow$ (<x, …, y^{i-2}, x^{i-1}, x^i, w^{i+1}, …>$\vDash(A)_{i-2}$)))) $\wedge\ \exists z^{i-1}(z^{i-1}\in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό) $\wedge$ (<x, …, z^{i-1}, x^i, w^{i+1}, …>$\dashv$(*Definitely*A)$_{i-1}$))))
4. <w, w', w'', …>$\Vdash$(*Definitely*A$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely*A)$_i$ αν και μόνο αν $\forall x^i\forall x^{i-1}\ldots\forall x((x^i\in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό) $\wedge\ x^{i-1}\in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό)$\wedge\ldots\wedge\ x\in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό)$\wedge\ w^i\sqsubseteq x^i\wedge\ w^{i-1}\sqsubseteq x^{i-1}\wedge\ldots\wedge\ w\sqsubseteq x)\rightarrow\ \sim($ ($\forall y^{i-2}(y^{i-2}\in Val^{(i-1)+}(x^{i-1}$, αποδεκτό)$\rightarrow$ (<x, …, y^{i-2}, x^{i-1} , x^i, w^{i+1}, …>$\vDash(A)_{i-2}$)))) $\wedge\ \exists z^{i-1}(z^{i-1}\in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό) $\wedge\ \exists z^{i-2}$ $(z^{i-2}\in Val^{(i-1)+}(z^{i-1}$, αποδεκτό) $\wedge$ (<x, …, z^{i-2}, z^{i-1}, x^i, w^{i+1}, …>$\dashv(A)_{i-2}$))))

Μπορεί όμως να αποδειχτεί ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής υπάρχει περίπτωση να είναι ψευδές, δίνοντας αντιπαράδειγμα για κάποιον δείκτη i. Πράγματι, έστω η πρόταση (*Definitely* Fa$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely* Fa)$_2$, τότε αυτή θα είναι αληθής αν και μόνο αν $\forall x''\forall x'\forall x($ $(x''\in Val^{(3)+}(w'''$, αποδεκτό) $\wedge\ x'\in Val^{(2)+}(x''$, αποδεκτό)$\wedge$ $x\in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό) $\wedge\ w''\sqsubseteq x''\wedge\ w'\sqsubseteq x'\wedge\ w\sqsubseteq x)\rightarrow\ \sim($ ($\forall y(y\in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό)$\rightarrow$ (<y, x', x'', w''', …>$\vDash(A)_{n-2}$)))) $\wedge\ \exists z'(z'\in Val^{(2)+}(x''$, αποδεκτό) $\wedge\ \exists z(z\in Val^{1+}(z'$, αποδεκτό) $\wedge$ (<z, z', x'', w''', …>$\dashv(A)_{n-2}$)))). Έπεται ότι προκειμένου η *Definitely* Fa$\rightarrow$*DefinitelyDefinitely* Fa να μην είναι αληθής αρκεί να είναι $\exists x''\exists x'\exists x($ $(x''\in Val^{(3)+}(w'''$, αποδεκτό) $\wedge\ x'\in Val^{(2)+}(x''$, αποδεκτό)$\wedge$ x$\in$Val^{1+}(x', αποδεκτό) $\wedge$ w'' $\sqsubseteq$x''$\wedge$ w' $\sqsubseteq$x'$\wedge$ w $\sqsubseteq$x)$\wedge$ (($\forall$y(y$\in$Val^{1+}(x', αποδεκτό)$\rightarrow$ (<y, x', x'', w''', …>$\vDash$(A)$_{n-2}$)))) $\wedge$ $\exists$z'(z'$\in$Val$^{(2)+}$(x'', αποδεκτό) $\wedge$ $\exists$z(z$\in$Val^{1+}(z', αποδεκτό) $\wedge$ (<z, z', x'', w''', …>$\Dashv$(A)$_{n-2}$)))). Αρκεί άρα να θεωρήσουμε μοντέλο τέτοιο ώστε υπάρχουν σημεία c'', c', c τέτοια ώστε (c''$\in$Val$^{(3)+}$(w''', αποδεκτό) $\wedge$ c'$\in$Val$^{(2)+}$(x'', αποδεκτό)$\wedge$ c$\in$Val^{1+}(x', αποδεκτό)$\wedge$ w'' $\sqsubseteq$c''$\wedge$ w' $\sqsubseteq$c'$\wedge$ w $\sqsubseteq$c), σύμφωνα με το c' κάθε αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0$* επιβεβαιώνει την 'Fa', παρόλα αυτά σύμφωνα με το c'' υπάρχει αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^1$ σύμφωνα με την οποία υπάρχει αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0$* που διαψεύδει την 'Fa'. Έπεται λοιπόν ότι δεν θα είναι πάντα ξεκάθαρο αν κάτι είναι ξεκάθαρα F, και άρα το αξίωμα S4, σε αντίθεση με το αξίωμα M που εξετάσαμε προηγουμένως, δεν θα είναι πάντα αληθές.

Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι προτάσεις της μορφής ~A$\vee$A ή ~(A$\wedge$~A), όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^0$*, θα είναι πάντα αληθείς. Παρατηρούμε μάλιστα ότι οι συνθήκες αλήθειας προτάσεων όπως αυτές δεν θα εξαρτώνται από επίπεδα διαφορετικά από αυτό στο οποίο αυτές σχηματίστηκαν. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την ~A$\vee$A και έστω ότι ο δείκτης αυτής είναι i, θα είναι $((\sim(A)_i)_i \vee (A)_i)_i$, έστω επιπλέον <w, w', w'', …> μια τυχούσα διαμόρφωση της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$,… τέτοια ώστε για κάθε w^n να ισχύει ότι το w^{n+1} επιβεβαιώνει πως αυτό είναι φυσιολογικό, θα είναι:

1. <w, w', w'', …>$\Vdash$~A$\vee$A αν και μόνο αν <w, w', w'', …>$\Vdash$~~A$\rightarrow$A
2. <w, w', w'', …>$\Vdash$ ~~A$\rightarrow$A αν και μόνο αν $\forall$x$^i\forall$x^{i-1} …$\forall$x((x$^i\in$Val$^{(i+1)+}$(w^{i+1}, αποδεκτό) $\wedge$ x$^{i-1}\in$Val$^{(i)+}$(x^i, αποδεκτό)$\wedge$ … $\wedge$ x$\in$Val^{1+}(x', αποδεκτό) $\wedge$ w^i $\sqsubseteq$x$^i\wedge$ w^{i-1} $\sqsubseteq$x^{i-1} $\wedge$ … $\wedge$ w $\sqsubseteq$x)$\rightarrow$(~ <x, x', …, x^i, w^{i+1},…> $\Dashv$~~A$\rightarrow$A))
3. <w, w', w'', …>$\Vdash$ ~~A$\rightarrow$A αν και μόνο αν $\forall$x$^i\forall$x^{i-1} …$\forall$x((x$^i\in$Val$^{(i+1)+}$(w^{i+1}, αποδεκτό) $\wedge$ x$^{i-1}\in$Val$^{(i)+}$(x^i, αποδεκτό)$\wedge$ … $\wedge$ x$\in$Val^{1+}(x', αποδεκτό) $\wedge$ w^i $\sqsubseteq$x$^i\wedge$ w^{i-1} $\sqsubseteq$x^{i-1} $\wedge$ … $\wedge$ w $\sqsubseteq$x)$\rightarrow$(~ (<x, x', …, x^i, w^{i+1},…> $\vDash$~~A $\wedge$ <x, x', …, x^i, w^{i+1},…>$\Dashv$A)))
4. <w, w', w'', …>$\Vdash$ ~~A$\rightarrow$A αν και μόνο αν $\forall$x$^i\forall$x^{i-1} …$\forall$x((x$^i\in$Val$^{(i+1)+}$(w^{i+1}, αποδεκτό) $\wedge$ x$^{i-1}\in$Val$^{(i)+}$(x^i, αποδεκτό)$\wedge$ … $\wedge$ x$\in$Val^{1+}(x', αποδεκτό) $\wedge$ w^i $\sqsubseteq$x$^i\wedge$ w^{i-1} $\sqsubseteq$x^{i-1} $\wedge$ … $\wedge$ w $\sqsubseteq$x)$\rightarrow$(~ (<x, x', …, x^i, w^{i+1},…> $\vDash$A $\wedge$ <x, x', …, x^i, w^{i+1},…>$\Dashv$A)))

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι όμως κάτι που μπορεί να αποδειχτεί ότι ισχύει για κάθε δείκτη i, αφού για κάθε γλώσσα που εμφανίζεται εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime\prime}$, … έχουμε θεωρήσει πως δεν υπάρχει δυνατή διαμόρφωση που ταυτόχρονα επιβεβαιώνει και διαψεύδει μια πρόταση.

Παρόλα αυτά, πάντα θα υπάρχει περίπτωση για πρόταση Α της $\mathcal{L}^0*$, να προκύπτει ότι αυτή δεν είναι ούτε αληθής, ούτε και ψευδής, σε επίπεδο διαμόρφωσης <w, w', w'', …>, της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$,… . Πράγματι, έστω ότι ο δείκτης της πρότασης είναι i, τότε αυτή θα είναι αληθής στο συγκεκριμένο επίπεδο διαμόρφωσης αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \dashv A))$, ενώ θα είναι ψευδής αν και μόνο αν είναι $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \vDash A))$, αρκεί λοιπόν το wi+1 να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $\exists x^i \exists x^{i-1} \ldots \exists x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \wedge (\sim <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \dashv A))$ και επιπλέον να ισχύει ότι $\exists x^i \exists x^{i-1} \ldots \exists x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \wedge (\sim <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \vDash A))$.

Όσον αφορά τις προτάσεις της μορφής $(\sim(A \wedge \sim A))_i$ έχουμε:

1. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash \sim(A \wedge \sim A)$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots> \Vdash \sim\sim(A \rightarrow \sim\sim A)$
2. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash \sim\sim(A \rightarrow \sim\sim A)$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \dashv \sim\sim(A \rightarrow \sim\sim A)))$
3. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash \sim\sim(A \rightarrow \sim\sim A)$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \dashv (A \rightarrow \sim\sim A)))$
4. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash \sim\sim A \rightarrow A$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim (<x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \vDash A \wedge <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \dashv \sim\sim A)))$
5. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash \sim\sim A \rightarrow A$ αν και μόνο αν $\forall x^i \forall x^{i-1} \ldots \forall x((x^i \in Val^{(i+1)+}(w^{i+1}$, αποδεκτό$) \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(x^i$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{1+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge w^i \sqsubseteq x^i \wedge w^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim (<x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \vDash A \wedge <x, x', \ldots, x^i, w^{i+1}, \ldots> \dashv A)))$

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι όμως κάτι που μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγικό τρόπο ότι είναι αληθές. Καταλήξαμε έτσι ότι οι νόμοι του αποκλειόμενου τρίτου και της μη αντίφασης θα είναι λογικά αληθείς.

Ας θεωρήσουμε σε αυτό το σημείο την συνήθη ακολουθία αντικειμένων $α_1, α_2, …, α_{10000}$ που είναι σωρειτική ως προς ένα ασαφές κατηγόρημα 'F', με το $α_1$ να είναι ξεκάθαρα F και το $α_{10000}$ ξεκάθαρα να μην είναι. Τότε, με βάση την θεωρία θα έπεται ότι προτάσεις της γλώσσας αντικείμενο που εκφράζουν ανεκτικότητα, όπως για παράδειγμα κάθε πρόταση της μορφής $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$, όπου a_i σταθερό σύμβολο που αναφέρεται στο αντικείμενο $α_i$, θα προκύπτουν αληθείς. Το ίδιο θα ισχύει και για προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1}$. Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι ισχύουν τα εξής:

1. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash (\mathcal{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1})_1$ αν και μόνο αν $\forall x' \forall x((x' \in Val^{(2)+}(w'', αποδεκτό) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', w'', \ldots> \dashv (\mathcal{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1})_1))$
2. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash (\mathcal{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1})_1$ αν και μόνο αν $\forall x' \forall x((x' \in Val^{(2)+}(w'', αποδεκτό) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim (<x, x', w'', \ldots> \vDash (\mathcal{Definitely}\ Fa_i)_1 \wedge <x, x', w'', \ldots> \dashv (\mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1})_1))$
3. $<w, w', w'', \ldots> \Vdash (\mathcal{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1})_1$ αν και μόνο αν $\forall x' \forall x((x' \in Val^{(2)+}(w'', αποδεκτό) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\forall y((y \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \rightarrow <y, x', w'', \ldots> \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge (<z, x', w'', \ldots> \dashv (Fa_{i+1})_0)))$

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα είναι όμως αληθές. Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει πως $\forall x' \forall x((x' \in Val^{(2)+}(w'', αποδεκτό) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\forall y((y \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \rightarrow <y, x', w'', \ldots> \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge (<z, x', w'', \ldots> \dashv (Fa_{i+1})_0)))$. Θα είναι $\exists x' \exists x((x' \in Val^{(2)+}(w'', αποδεκτό) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \wedge (\forall y((y \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \rightarrow <y, x', w'', \ldots> \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x', αποδεκτό) \wedge (<z, x', w'', \ldots> \dashv (Fa_{i+1})_0)))$. Έστω λοιπόν μοντέλο της γλώσσας και c, c' σημεία που συγκεκριμενοποιούν τους ανωτέρω υπαρκτικούς ποσοδείκτες και τέτοια ώστε να είναι $(c' \in Val^{(2)+}(w'', αποδεκτό) \wedge c \in Val^{(1)+}(c', αποδεκτό) \wedge w' \sqsubseteq c' \wedge w \sqsubseteq c) \wedge (\forall y((y \in Val^{(1)+}(c', αποδεκτό) \rightarrow <y, c', w'', \ldots> \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(c', αποδεκτό) \wedge (<z, c', w'', \ldots> \dashv (Fa_{i+1})_0)))$. Έστω σημείο ζ που συγκεκριμενοποιεί τον πιο πάνω υπαρκτικό ποσοδείκτη, έπεται ότι θα είναι $ζ \in Val^{(1)+}(c', αποδεκτό) \wedge (<ζ, c', w'', \ldots> \dashv (Fa_{i+1})_0)$. Εφόσον όμως είναι $(\forall y((y \in Val^{(1)+}(c', αποδεκτό) \rightarrow <y, c', w'', \ldots> \vDash (Fa_i)_0)$, έπεται ότι θα ισχύει πως $<ζ, c', w'', \ldots> \vDash (Fa_i)_0$. Καταλήξαμε άρα ότι το c' θα δέχεται ως αποδεκτό σημείο ζ που επιβεβαιώνει την Fa_i ενώ διαψεύδει την Fa_{i+1}. Μια από τις παραδοχές που έχουμε κάνει όμως είναι ότι δεδομένου ενός πλαισίου συζήτησης, επίπεδα διαμόρφωσης που κλείνουν τελείως το κενό μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης ασαφούς έκφρασης και άρα κάνουν διακρίσεις που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι να υποστηρίξουν θα πρέπει να κατατάσσονται ως μη αποδεκτά από τα επίπεδα διαμόρφωσης της γλώσσας που έπεται εντός της ιεραρχίας. Έπεται λοιπόν ότι για ερμηνεία της ιεραρχίας που σέβεται τις παραδοχές που έχουμε κάνει δεν θα ισχύει ότι $\exists x'\exists x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\wedge$ $(\forall y($ $(y\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)\rightarrow <y, x', w'',\ldots>\vDash (Fa_i)_0$ $)$ $\wedge$ $\exists z(z\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)\wedge($ $< z, x', w'',\ldots>\Dashv (Fa_{i+1})_0))$ $)$, και άρα η πρόταση $\mathit{Definitely}$ $Fa_i\rightarrow$ $\mathit{Definitely}$ Fa_{i+1} θα προκύπτει αληθής ως προς το $<w, w', w'', \ldots>$.

Θα είναι επίσης:

1. $<w, w', w'', \ldots>\mid\!\vDash[\forall x(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\rightarrow(\sim<x, x', w'',\ldots>\Dashv($ $\forall x(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)$ $)_1)$ $)$
2. $<w, w', w'', \ldots>\mid\!\vDash[\forall xi(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\rightarrow(\sim<x, x', w'',\ldots>\Dashv(<\forall x, <\rightarrow, <\mathit{Definitely}, <F, x>>, <\mathit{Definitely}, <F, x{+}1>>> >$ $)_1)$ $)$
3. $<w, w', w'', \ldots>\mid\!\vDash[\forall xi(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\rightarrow$ $(\sim[$ για κάποιο αντικείμενο oi εντός του D^0 ισχύει ότι $<x, x', w'',\ldots>\Dashv([$ $<\rightarrow, <\mathit{Definitely}, <F, x>>, <\mathit{Definitely}, <F, x{+}1>>>]^{oi}_{xi}$ $)_1$ $])$ $)$
4. $<w, w', w'', \ldots>\mid\!\vDash[\forall x(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\rightarrow$ $(\sim[$ για κάποιο αντικείμενο oi εντός του D^0 ισχύει ότι $<x, x', w'',\ldots>\Dashv(<\rightarrow, <\mathit{Definitely}, <F, o_i >>, <\mathit{Definitely}, <F, o_{i+1} >>>$ $)_1$ $])$ $)$
5. $<w, w', w'', \ldots>\mid\!\vDash[\forall x(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\rightarrow$ $(\sim[$ για κάποιο αντικείμενο oi εντός του D^0 ισχύει ότι $[<x, x', w'',\ldots>\vDash(<\mathit{Definitely}, <F, o_i >>)_1 \wedge <x, x', w'',\ldots>\Dashv(<\mathit{Definitely}, <F, o_{i+1} >>)_1]$ $])$ $)$
6. $<w, w', w'', \ldots>\mid\!\vDash[\forall x(\mathit{Definitely}\ Fx\rightarrow \mathit{Definitely}\ Fx{+}1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x($ $(x'\in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x\in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x)\rightarrow$ $(\sim[$ για κάποιο αντικείμενο oi εντός του D^0 ισχύει ότι $[$ $\forall y(y\in Val^{1+}(x',$ αποδεκτό$)\rightarrow <y, x', w'',\ldots>\vDash (<F, o_i >)_0$ $)$ $\wedge$ $\exists y(y\in Val^{1+}(x',$ αποδεκτό$)$ $\wedge$ $<y, x', w'',\ldots>\Dashv (<F, o_{i+1} >)_0$ $)$ $]$ $])$ $)$

7. $<w, w', w'', \dots> \Vdash [\forall x($*Definitely* $Fx \rightarrow$ *Definitely* $Fx+1)]_1$ αν και μόνο αν $\forall x'\forall x(\ (x' \in Val^{(2)+}(w'',$ αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$) \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim[$ για κάποιο αντικείμενο oi εντός του D^0 ισχύει ότι $[\ \forall y(y \in Val^{1+}(x',$ αποδεκτό$) \rightarrow Val^{0+}(y, o_i) \in Val^{0+}(y, F)) \wedge \exists y(y \in Val^{1+}(x',$ αποδεκτό$) \wedge Val^{0+}(y, o_{i+1}) \in Val^{0-}(y, F)\ )\ ]\ ])\ )$

Οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε με τρόπο ανάλογο όπως και για την προηγούμενη περίπτωση ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα είναι αληθές.

Ανάλογα με την περίπτωση προτάσεων της μορφής *Definitely* $Fa_i \rightarrow$ *Definitely* Fa_{i+1} θα ισχύουν και για προτάσεις όπως της μορφής *DefinitelyDefinitely*$Fa_i \rightarrow$ *DefinitelyDefinitely*Fa_{i+1}, και ούτω καθ' εξής. Πράγματι, θα είναι:

1. $<w, w', w'', \dots> \Vdash ($ *Definitely Definitely* $Fa_i \rightarrow$ *Definitely Definitely* $Fa_{i+1})_2$ αν και μόνο αν $\forall x''\forall x'\forall x(\ (x'' \in Val^{(3)+}(w''',$ αποδεκτό$) \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$) \wedge w'' \sqsubseteq x'' \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\sim <x, x', x'', w''' \dots> \dashv ($ *Definitely Definitely* $Fa_i \rightarrow$ *Definitely Definitely* $Fa_{i+1})_2)\ )$
2. $<w, w', w'', \dots> \Vdash ($ *Definitely Definitely* $Fa_i \rightarrow$ *Definitely Definitely* $Fa_{i+1})_2$ αν και μόνο αν $\forall x''\forall x'\forall x(\ (x'' \in Val^{(3)+}(w''',$ αποδεκτό$) \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$) \wedge w'' \sqsubseteq x'' \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow (\ \sim(<x, x', x'', w''', \dots> \vDash ($*Definitely Definitely* $Fa_i)_2 \wedge <x, x', x'', w''', \dots> \dashv ($ *Definitely Definitely* $Fa_{i+1})_2)\ )$
3. $<w, w', w'', \dots> \Vdash ($ *Definitely Definitely* $Fa_i \rightarrow$ *Definitely Definitely* $Fa_{i+1})_2$ αν και μόνο αν $\forall x''\forall x'\forall x(\ (x'' \in Val^{(3)+}(w''',$ αποδεκτό$) \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$) \wedge w'' \sqsubseteq x'' \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\ \forall y'(y' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \rightarrow <x, y', x'', w''', \dots> \vDash ($*Definitely* $Fa_i)_1\ ) \wedge \exists z'(z' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \wedge (\ <x, z', x'', w''', \dots> \dashv ($*Definitely* $Fa_{i+1})_1))\ )$
4. $<w, w', w'', \dots> \Vdash ($ *Definitely Definitely* $Fa_i \rightarrow$ *Definitely Definitely* $Fa_{i+1})_2$ αν και μόνο αν $\forall x''\forall x'\forall x(\ (x'' \in Val^{(3)+}(w''',$ αποδεκτό$) \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$) \wedge w'' \sqsubseteq x'' \wedge w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\ \forall y'(\ y' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \rightarrow \forall y(y \in Val^{(1)+}(y',$ αποδεκτό$) \rightarrow <y, y', x'', w''', \dots> \vDash (Fa_i)_0)\ ) \wedge \exists z'(z' \in Val^{(2)+}(x'',$ αποδεκτό$) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(z',$ αποδεκτό$) \wedge <z, z', x'', w''', \dots> \dashv (Fa_{i+1})_0\ ))))$

Οπότε με ανάλογο τρόπο όπως και πριν διαπιστώνουμε ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα είναι αληθές. Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει πως $\forall x''\forall x'\forall x((x''\in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό}) \wedge x'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})\wedge w''\sqsubseteq x''\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x) \rightarrow\sim(\forall y'(y'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό})\rightarrow\forall y(y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})\rightarrow <y, y', x'', w''', \ldots>\vDash(Fa_i)_0)) \wedge \exists z'(z'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό})\wedge \exists z(z\in Val^{(1)+}(z', \text{αποδεκτό})\wedge <z, z', x'', w''', \ldots>\mathrel{=\!\!|}(Fa_{i+1})_0))))$, έπεται ότι θα είναι $\exists x''\exists x'\exists x((x''\in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό}) \wedge x'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})\wedge w''\sqsubseteq x''\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x) \wedge \forall y'(y'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό})\rightarrow\forall y(y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})\rightarrow <y, y', x'', w''', \ldots>\vDash(Fa_i)_0)) \wedge \exists z'(z'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό})\wedge\exists z(z\in Val^{(1)+}(z', \text{αποδεκτό})\wedge <z, z', x'', w''', \ldots>\mathrel{=\!\!|}(Fa_{i+1})_0)))$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν σημεία c'', c', c που συγκεκριμενοποιούν τους αντίστοιχους από τους αρχικούς τρεις υπαρκτικούς ποσοδείκτες. Θα πρέπει να είναι $c''\in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό})$, $w''\sqsubseteq c''$, $\forall y'(y'\in Val^{(2)+}(c'', \text{αποδεκτό})\rightarrow \forall y(y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})\rightarrow <y, y', c'', w''', \ldots>\vDash(Fa_i)_0))$, και $\exists z'(z'\in Val^{(2)+}(c'', \text{αποδεκτό})\wedge \exists z(z\in Val^{(1)+}(z', \text{αποδεκτό}) \wedge <z, z', c'', w''', \ldots>\mathrel{=\!\!|}(Fa_{i+1})_0))$. Έστω d' σημείο που συγκεκριμενοποιεί τον προηγούμενο υπαρκτικό ποσοδείκτη, θα είναι άρα $d'\in Val^{(2)+}(c'', \text{αποδεκτό})$ και $\exists z(z\in Val^{(1)+}(d', \text{αποδεκτό})\wedge <z, d', c'', w''', \ldots>\mathrel{=\!\!|}(Fa_{i+1})_0)$, οπότε αν θεωρήσουμε και σημείο e που συγκεκριμενοποιεί τον τελευταίο υπαρκτικό ποσοδείκτη θα έχουμε $e\in Val^{(1)+}(d', \text{αποδεκτό})$ και $<e, d', c'', w''', \ldots>\mathrel{=\!\!|}(Fa_{i+1})_0$. Είναι όμως $\forall y'(y'\in Val^{(2)+}(c'', \text{αποδεκτό})\rightarrow \forall y(y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})\rightarrow <y, y', c'', w''', \ldots>\vDash(Fa_i)_0))$ οπότε θα είναι $<e, d', c'', w''', \ldots>\vDash(Fa_i)_0$. Το c'' δέχεται λοιπόν ως αποδεκτή μια διαμόρφωση της γλώσσας $\mathcal{L}^1*$ σύμφωνα με την οποία υπάρχει αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0*$ που κλείνει τελείως το κενό μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης ασαφούς έκφρασης, και άρα διακρίνει μεταξύ αντικειμένων που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι ή δεν μπορούν να διακρίνουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Έχουμε όμως θεωρήσει ότι κάθε διαμόρφωση όπως η τελευταία θα πρέπει να κατατάσσεται πάντα ως μη αποδεκτή. Έπεται άρα ότι για ερμηνεία της ιεραρχίας που σέβεται τις παραδοχές που έχουμε κάνει, δεν θα ισχύει ότι $\exists x''\exists x'\exists x((x''\in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό}) \wedge x'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})\wedge w''\sqsubseteq x''\wedge w'\sqsubseteq x'\wedge w\sqsubseteq x) \wedge \forall y'(y'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό})\rightarrow\forall y(y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})\rightarrow <y, y', x'', w''', \ldots>\vDash(Fa_i)_0)) \wedge \exists z'(z'\in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό})\wedge\exists z(z\in Val^{(1)+}(z', \text{αποδεκτό})\wedge <z, z', x'', w''', \ldots>\mathrel{=\!\!|}(Fa_{i+1})_0)))$, και άρα θα είναι $<w, w', w'', \ldots>\Vdash(\mathcal{Definitely}\ \mathcal{Definitely}\ Fa_i\rightarrow \mathcal{Definitely}\ \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1})_2$.

Τέλος, πρέπει να προσδιορίσουμε πότε θα θεωρούμε πως ένα επιχείρημα που είναι διατυπωμένο εντός της γλώσσας $\mathcal{L}^0*$ είναι λογικά έγκυρο. Επί της ουσίας, για πεπερασμένο σύνολο προτάσεων Α και πρόταση Β, θεωρούμε πως το επιχείρημα με προκείμενες αυτές που ανήκουν στο Α και συμπέρασμα το Β θα είναι λογικά έγκυρο αν και μόνο αν η συνεπαγωγή $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_v) \rightarrow B$, όπου α_1, α_2, …, α_v είναι ακριβώς οι προτάσεις που ανήκουν στο Α και μόνο αυτές, είναι λογικά αληθής. Έπεται ότι κατά παρόμοιο τρόπο με τις προτάσεις της γλώσσας, θα αναθέτουμε δείκτες και στα διάφορα επιχειρήματα που μπορούν να διατυπωθούν εντός αυτής, ανάλογα με το ποιο είναι το στάδιο εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime\prime}$, … στο οποίο αυτά μπορούν για πρώτη φορά να διατυπωθούν. Πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης ενός επιχειρήματος θα ταυτίζεται με τον μέγιστο συντελεστή i από τους δείκτες των προτάσεων που το αποτελούν. Ορίζουμε την εγκυρότητα επιχειρήματος ως προς ερμηνεία της ιεραρχίας με τον εξής τρόπο:

- Για προτάσεις Π_1, Π_2, .., Π_v που ανήκουν στην $\mathcal{L}^0$* και πρόταση Σ που ανήκει στην $\mathcal{L}^0$*, θα είναι $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_v \Vdash \Sigma)_n$ αν και μόνο αν για κάθε επίπεδο διαμόρφωσης <w, w′, w′′, … > της ιεραρχίας τέτοιο ώστε για κάθε i, όπου $1 \leq i \leq (n+1)$, ισχύει ότι το w^i κατατάσσει το w^{i-1} ως φυσιολογικό, είναι $[\forall x^n \forall x^{n-1} \ldots \forall x(\ (x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\langle x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots \rangle \vDash (\Pi_1 \wedge \Pi_2 \wedge \ldots \wedge \Pi_v)_m \wedge \langle x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots \rangle \Dashv (\Sigma)_k))]$, όπου $m,k \leq n$, και m ο μέγιστος από τους συντελεστές i που εμφανίζονται στους δείκτες των προτάσεων Π_1, Π_2, .., Π_v.

Οπότε διαπιστώνουμε ότι η σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας θα υπάρχει περίπτωση να είναι μη μεταβατική και για περιπτώσεις που περιέχουν τον τελεστή ‘*Definitely*‘.

Πράγματι, έστω προτάσεις *Definitely* Α, *Definitely* Β, και *Definitely* Γ, και ας υποθέσουμε ότι ο δείκτης των προτάσεων Α, Β, Γ είναι 0. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ισχύει *Definitely* Α $\Vdash$*Definitely* Β, καθώς και ότι *Definitely* Β $\Vdash$*Definitely* Γ. Για διαμόρφωση <w, w′, w′′, …> της γλωσσικής ιεραρχίας, τέτοια ώστε το w′′ κατατάσσει ως φυσιολογικό το w′ και το w′ κατατάσσει ως φυσιολογικό το w, θα ισχύει ότι $[\forall x^1 \forall x(\ (w^2 \vDash (x^1\ \text{Αποδεκτό}) \wedge x^1 \vDash (x\ \text{Αποδεκτό}) \wedge w^1 \sqsubseteq x^1 \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\langle x, x^1, w^2, \ldots \rangle \vDash (\mathit{Definitely}\ A) \wedge \langle x, x^1, w^2, \ldots \rangle \Dashv (\mathit{Definitely}\ B)\ )\ )]$, που θα ισχύει αν και μόνο αν $[\forall x^1 \forall x(\ (x^1 \in Val^{(2)+}(w^2, \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x^1, \text{αποδεκτό}) \wedge w^1 \sqsubseteq x^1 \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\ \forall y(y \in Val^{(1)+}(x^1, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\langle y, x^1, w^2, \ldots \rangle \vDash (A)_0)\ ) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x^1, \text{αποδεκτό}) \wedge (\langle z, x^1, w^2, \ldots \rangle \Dashv (B)_0))))]$. Επιπλέον, αφού είναι *Definitely* Β $\Vdash$*Definitely* Γ θα έχουμε $[\forall x^1 \forall x(\ (x^1 \in Val^{(2)+}(w^2, \text{αποδεκτό}) \wedge$

$x \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge w^1 \sqsubseteq x^1 \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(\forall y(y \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, x^1, w^2, \ldots >\vDash (B)_0)) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge (<z, x^1, w^2, \ldots >\Dashv (\Gamma)_0))))]$.

Αρκεί τώρα να θεωρήσουμε ερμηνεία της ιεραρχίας και επίπεδο διαμόρφωσης <w, w', w'', ...> αυτής όπως το αντίστοιχο της προηγούμενης παραγράφου, τέτοιο ώστε το w'' κατατάσσει ως αποδεκτό σημείο c' σύμφωνα με το οποίο κάθε αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0*$ επιβεβαιώνει την Α, και το οποίο κατατάσσει ως αποδεκτό σημείο c που επιβεβαιώνει την Α και διαψεύδει την Γ. Ταυτόχρονα, το w'' κατατάσσει ως μη αποδεκτό κάθε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1*$ που δέχεται ως αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0*$ που επιβεβαιώνει την Α και διαψεύδει την Β, ή επιβεβαιώνει την Β και διαψεύδει την Γ. Έπεται από αυτά ότι θα είναι $\mathcal{Definitely}$ Α $\Vdash \mathcal{Definitely}$ Β, καθώς και $\mathcal{Definitely}$ Β $\Vdash \mathcal{Definitely}$ Γ. Πράγματι, έστω για παράδειγμα ότι δεν ισχύει το πρώτο, τότε θα είναι $[\exists x^1 \exists x$ ($(x^1 \in Val^{(2)+}(w^2$, αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge c^1 \sqsubseteq x^1 \wedge c \sqsubseteq x) \wedge \forall y(y \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, x^1, w^2, \ldots >\vDash (A)_0))) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge (<z, x^1, w^2, \ldots >\Dashv (B)_0)))]$. Έστω λοιπόν σημεία b, b' που συγκεκριμενοποιούν τους δύο αρχικούς υπαρκτικούς ποσοδείκτες. Θα είναι ($(b^1 \in Val^{(2)+}(w^2$, αποδεκτό$) \wedge b \in Val^{(1)+}(b^1$, αποδεκτό$) \wedge c^1 \sqsubseteq b^1 \wedge c \sqsubseteq b) \wedge \forall y(y \in Val^{(1)+}(b^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, b^1, c^2, \ldots >\vDash (A)_0)) \wedge \exists z(y \in Val^{(1)+}(b^1$, αποδεκτό$) \wedge <z, b^1, c^2, \ldots >\Dashv (B)_0))$. Έστω τώρα σημείο d που συγκεκριμενοποιεί τον προηγούμενο υπαρκτικό ποσοδείκτη, θα είναι $d \in Val^{(1)+}(b^1$, αποδεκτό$) \wedge (<d, b^1, w^2, \ldots >\Dashv (A)_0)$, εφόσον όμως είναι $\forall y(y \in Val^{(1)+}(b^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, b^1, w^2, \ldots >\vDash (B)_0)$), έπεται ότι θα έχουμε $<d, b^1, w^2, \ldots >\vDash (B)_0$. Καταλήγουμε άρα ότι το w'' θα δέχεται ως αποδεκτό σημείο b' που δέχεται ως αποδεκτό σημείο d που διακρίνει μεταξύ των Α και Β. Από υπόθεση όμως, η ερμηνεία που έχουμε θεωρήσει είναι τέτοια ώστε το w'' θα κατατάσσει κάθε σημείο με τις ιδιότητες του b' ως μη αποδεκτό. Έπεται άρα ότι δεν θα ισχύει πως $[\exists x^1 \exists x$ ($(x^1 \in Val^{(2)+}(w^2$, αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge c^1 \sqsubseteq x^1 \wedge c \sqsubseteq x) \wedge \forall y(y \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, x^1, w^2, \ldots >\vDash (A)_0))) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge (<z, x^1, w^2, \ldots >\Dashv (B)_0)))]$. Από την άλλη όμως, θα είναι $[\exists x^1 \exists x$ ($(x^1 \in Val^{(2)+}(w^2$, αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge c^1 \sqsubseteq x^1 \wedge c \sqsubseteq x) \wedge \forall y(y \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, x^1, w^2, \ldots >\vDash (A)_0))) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(x^1$, αποδεκτό$) \wedge (<z, x^1, w^2, \ldots >\Dashv (\Gamma)_0)))]$, πράγματι, συγκεκριμενοποιούμε τους αρχικούς υπαρκτικούς ποσοδείκτες με τα c, c' οπότε έχουμε ($(c^1 \in Val^{(2)+}(w^2$, αποδεκτό$) \wedge c \in Val^{(1)+}(c^1$, αποδεκτό$) \wedge c^1 \sqsubseteq c^1 \wedge c \sqsubseteq c) \wedge \forall y(y \in Val^{(1)+}(c^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, c^1, w^2, \ldots >\vDash (A)_0)) \wedge \exists z(z \in Val^{(1)+}(c^1$, αποδεκτό$) \wedge (<z, c^1, w^2, \ldots >\Dashv (\Gamma)_0))$). Συγκεκριμενοποιούμε τον υπαρκτικό ποσοδείκτη με το σημείο c, οπότε καταλήγουμε ότι έχουμε ($(c^1 \in Val^{(2)+}(c^2$, αποδεκτό$) \wedge c \in Val^{(1)+}(c^1$, αποδεκτό$) \wedge c^1 \sqsubseteq c^1 \wedge c \sqsubseteq c) \wedge \forall y(y \in Val^{(1)+}(c^1$, αποδεκτό$) \rightarrow (<y, c^1, w^2, \ldots >\vDash (A)_0)) \wedge c \in Val^{(1)+}(c^1$, αποδεκτό$) \wedge (<c, c^1, w^2, \ldots >\Dashv (\Gamma)_0)))$). Η τελευταία πρόταση θα είναι όμως αληθής ως προς ερμηνεία της ιεραρχίας για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις που έχουμε θέσει, και άρα υπάρχει περίπτωση να ισχύει ότι $\mathcal{D}efinitely$ Α ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Β καθώς και ότι $\mathcal{D}efinitely$ Β ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Γ, και ταυτόχρονα να μην ισχύει ότι $\mathcal{D}efinitely$ Α ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Γ.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα κάποια σωρειτική ακολουθία αντικειμένων $α_1$, $α_2$, …, $α_{100000}$ ως προς κατηγορηματική έκφραση ‘F’, τέτοια ώστε το $α_1$ είναι ξεκάθαρα F, το $α_{100000}$ είναι ξεκάθαρα όχι F, και κάθε αντικείμενο είναι σε αμελητέο βαθμό λιγότερο F από αυτό που προηγείται εντός της ακολουθίας. Ας θεωρήσουμε ότι η γλώσσα $\mathcal{L}^0$* περιέχει ως μόνο κατηγορηματικό σύμβολο το ‘F’, καθώς και ατομικές σταθερές a_1, a_2, …, a_{100000}. Θεωρούμε ερμηνεία της ιεραρχίας που αναθέτει σε κάθε μία από αυτές τις ατομικές σταθερές το αντίστοιχο από τα αντικείμενα που εμφανίζονται εντός της σωρειτικής ακολουθίας, και σύμφωνα την οποία υπάρχει επίπεδο διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^0$* που κατατάσσει εντός της έκτασης του ‘F’ τα αντικείμενα $α_1$, $α_2$, …, $α_{45000}$, ενώ εντός της αντιέκτασης τα $α_{55000}$, $α_{55001}$, …, $α_{100000}$. Επιπλέον, έστω ότι σύμφωνα με την συγκεκριμένη ερμηνεία υπάρχει επίπεδο διαμόρφωσης w’ της $\mathcal{L}^1$* που εντάσσει εντός της έκτασης της έκφρασης ‘το x είναι αποδεκτό’ κάθε επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$* που επιβεβαιώνει ως F τουλάχιστον τα $α_1$, $α_2$, …, $α_{35000}$, διαψεύδει ως F τουλάχιστον τα $α_{65000}$, $α_{65001}$, …, $α_{100000}$ και αφήνει κενό μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης του ‘F’ τουλάχιστον 5000 αντικειμένων. Με βάση τα όσα έχουμε πει, το w’ θα κατατάσσει το w ως αποδεκτό, και μάλιστα θα το κατατάσσει και ως φυσιολογικό. Τέλος, έστω ότι σύμφωνα με την συγκεκριμένη ερμηνεία υπάρχει αντικείμενο w’’ που κατατάσσει ως φυσιολογικό το w’. Έπεται με βάση αυτά ότι παρόλο που θα είναι πχ $\mathcal{D}efinitely$ Fa_{35000} ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Fa_{35001} , $\mathcal{D}efinitely$ Fa_{35001} ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Fa_{35002} , … , $\mathcal{D}efinitely$ Fa_{40000} ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Fa_{40001} , δεν θα ισχύει και ότι $\mathcal{D}efinitely$ Fa_{35000} ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Fa_{40001}.

Ανάλογα αντιπαραδείγματα μπορούν να βρεθούν και για μορφές επιχειρημάτων εντός των οποίων εμφανίζονται προτάσεις με περισσότερες επαναλήψεις του συγκεκριμένου τελεστή.

Τέλος, παρατηρούμε ότι θα είναι [$\mathcal{D}efinitely$ Α, ($\mathcal{D}efinitely$ Α$\rightarrow$ $\mathcal{D}efinitely$ Β)] ⊫$\mathcal{D}efinitely$ Β, όπου $\mathcal{D}efinitely$ Α, $\mathcal{D}efinitely$ Α$\rightarrow$ $\mathcal{D}efinitely$ Β , $\mathcal{D}efinitely$ Β προτάσεις της $\mathcal{L}^0$* με δείκτη n, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Αυτό είναι κάτι που έπεται κατευθείαν, εφόσον έχουμε διαπιστώσει ότι η γενική μορφή του κανόνα προκύπτει έγκυρη. Πράγματι, βλέπουμε ότι θα είναι:

1. [[$\mathcal{Definitely}$ A, ($\mathcal{Definitely}$ A$\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ B)] $\Vdash$$\mathcal{Definitely}$ B] αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε επίπεδο διαμόρφωσης <w, w', w'', … > της ιεραρχίας τέτοιο ώστε για κάθε i, όπου $1 \leq i \leq (n+1)$, ισχύει ότι το w^i κατατάσσει το w^{i-1} ως φυσιολογικό, είναι [$\forall x^n \forall x^{n-1} \ldots \forall x($ $(x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$)$ $\wedge \ldots \wedge$ $x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)$ $\wedge$ $w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \vDash$ $\mathcal{Definitely}$ A $\wedge$ $<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \vDash$($\mathcal{Definitely}$ A$\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ B) $\wedge$ $<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \Dashv$ $\mathcal{Definitely}$ B))]
2. [[$\mathcal{Definitely}$ A, ($\mathcal{Definitely}$ A$\rightarrow$ $\mathcal{Definitely}$ B)] $\Vdash$$\mathcal{Definitely}$ B] αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε επίπεδο διαμόρφωσης <w, w', w'', … > της ιεραρχίας τέτοιο ώστε για κάθε i, όπου $1 \leq i \leq (n+1)$, ισχύει ότι το w^i κατατάσσει το w^{i-1} ως φυσιολογικό, είναι [$\forall x^n \forall x^{n-1} \ldots \forall x($ $(x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)$ $\wedge$ $x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$)$ $\wedge \ldots \wedge$ $x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)$ $\wedge$ $w^n \sqsubseteq x^n \wedge w^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \ldots \wedge w \sqsubseteq x) \rightarrow \sim(<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \vDash$ $\mathcal{Definitely}$ A $\wedge \sim(<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \vDash$$\mathcal{Definitely}$ A $\wedge$ $<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \Dashv$$\mathcal{Definitely}$ B) $\wedge$ $<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n, w^{n+1}, \ldots> \Dashv$ $\mathcal{Definitely}$ B))]

Οπότε και διαπιστώνουμε ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές.

3.2.2 Κάποιες τροποποιήσεις για τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της $\mathcal{L}^0$*.

Ξεκινήσαμε περιγράφοντας ορισμένα από τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των προτάσεων της $\mathcal{L}^0$ εντός κάποιας σαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^M$, και ορίσαμε βάσει αυτών κάποιο κατηγόρημα αλήθειας, σχετικοποιημένο ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$. Πιο συγκεκριμένα, θέσαμε ότι για πρόταση A της $\mathcal{L}^0$ και επίπεδο διαμόρφωσης w, θα λέμε ότι η A είναι αληθής ως προς το w αν και μόνο αν ισχύει ότι κάθε αποδεκτή επέκταση αυτού δεν την διαψεύδει. Στην συνέχεια διαπιστώσαμε ότι αν εμπλουτίσουμε την τελευταία με κάποιον τελεστή '$\mathcal{Definitely}$', τότε, στην περίπτωση που τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των προτάσεων εντός των οποίων αυτός εμφανίζεται εξαρτώνται από το μεταγλωσσικό κατηγόρημα 'το x είναι αποδεκτό', προκύπτει η ανάγκη αναθεώρησης της σημασιολογικής δομής που αντιστοιχείται σε αυτήν έτσι ώστε να λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι το συγκεκριμένο κατηγόρημα είναι ασαφές. Πολύ απλά, αν υπάρχουν επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι αποδεκτά ή όχι τότε φαίνεται ότι θα πρέπει να υπάρχουν και περιπτώσεις αντικειμένων που δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι ξεκάθαρα F, όπου 'F' κάποια ασαφής κατηγορηματική έκφραση της $\mathcal{L}^0$. Αν η σημασιολογία δεν λαμβάνει υπόψη το γεγονός αυτό τότε θα κατατάσσει ως αληθείς προτάσεις της γλώσσας αντικείμενο που φαίνεται ότι θα έπρεπε να λογίζονται ως μη αληθείς. Εξάλλου, παρόλο που υπάρχουν περιπτώσεις αντικειμένων που για παράδειγμα είναι ξεκάθαρα κόκκινα, ξεκάθαρα φαλακρά, ξεκάθαρα πλούσια κτλ, είναι εμφανές ότι δεν θα είναι πάντα ξεκάθαρο αν κάτι ανήκει σε αυτές τις περιπτώσεις.

Έπεται όμως, με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει, ότι εφόσον δεχόμαστε ότι δεν θα είναι πάντα ξεκάθαρο αν κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας είναι αποδεκτό θα πρέπει να δεχτούμε ότι δεν θα είναι πάντα ξεκάθαρο και για την εκάστοτε πρόταση της γλώσσας αντικείμενο αν αυτή είναι αληθής ως προς κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$. Δεδομένου όμως ότι χαρακτηρίζουμε τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ ως αληθείς ή ψευδείς ως προς το εκάστοτε επίπεδο διαμόρφωσης εντός της σαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^M$, είμαστε υποχρεωμένοι να μιλάμε με τρόπο που υποδεικνύει ότι αντιμετωπίζουμε το σχετικό ζήτημα ως σαφές, και κατά συνέπεια προκύπτει όπως και πριν το ενδεχόμενο να πρέπει να δεχτούμε για κάποιες από τις προτάσεις που διατυπώνουμε εντός της μεταγλώσσας ότι αυτές είναι αληθείς, παρόλο που έχουμε ισχυρή διαίσθηση ότι πρέπει να αντιμετωπίζονται ως μη αληθείς.

Ας θεωρήσουμε σωρειτική ακολουθία $α_1$, $α_2$, …, $α_{10000}$ ως προς κάποιο κατηγόρημα ‘F’, με το πρώτο αντικείμενο να είναι ξεκάθαρα F ενώ το τελευταίο ξεκάθαρα όχι F, και ερμηνεία της γλώσσας τέτοια ώστε φυσιολογικό αντικείμενο w κατατάσσει στην έκταση του F τα αντικείμενα $α_1$, $α_2$, …, $α_{4000}$, ενώ στην αντιέκταση τα $α_{6000}$, $α_{6001}$, …, $α_{10000}$. Έστω επίσης ότι εντός της σαφούς μεταγλώσσας χαρακτηρίζουμε κάθε επέκταση του w που αφήνει κενό τουλάχιστον 500 αντικειμένων μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης ως αποδεκτή. Αν τώρα θεωρήσουμε την ακολουθία προτάσεων της μεταγλώσσας $w \Vdash$‘Fa_1’, $w \Vdash$‘Fa_2’, …, $w \Vdash$‘Fa_{10000}’, όπου a_1, a_2, a_{10000} ονόματα που αναφέρονται στα αντικείμενα $α_1$, $α_2$, …, $α_{10000}$ αντίστοιχα, τότε θα προκύπτει ότι οι πρώτες 4500 από αυτές είναι αληθείς, ενώ οι υπόλοιπες μη αληθείς. Για κάθε μία από αυτές τις προτάσεις θα είναι λοιπόν απόλυτα ξεκάθαρο αν αυτή είναι αληθής ή όχι, κάτι που φαίνεται ότι δεν θα έπρεπε να ισχύει αν για κάποιες επεκτάσεις του w δεν είναι ξεκάθαρο κατά πόσο αυτές είναι αποδεκτές. Τέλος, θα προκύπτει ότι η πρόταση $w \Vdash$‘Fa_{4500}’$\rightarrow$ $w \Vdash$‘Fa_{4501}’ είναι ψευδής, και άρα το σωρειτικό επιχείρημα που αντιστοιχεί στην πιο πάνω ακολουθία προτάσεων θα χαρακτηρίζεται ως μη ορθό. Θα υπάρχει λοιπόν διαφωνία μεταξύ της γλώσσας αντικείμενο και της γλώσσας εντός της οποίας μιλάμε για τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των προτάσεών της όσον αφορά το σημείο στο οποίο εντοπίζεται το σφάλμα στα διάφορα επιχειρήματα σωρειτικού τύπου.

Τώρα, επεκτείνοντας την $\mathcal{L}^0$ με ορισμένες προτάσεις εντός των οποίων εμφανίζεται ο τελεστής ‘$\mathcal{Definitely}$’ και αναθεωρώντας την σημασιολογική δομή βάσει της οποίας καθορίζονται τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της εκάστοτε πρότασης, καταλήξαμε σε ένα πρώτο στάδιο στην ιεραρχία $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^1$. Περιγράφουμε ορισμένα από τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των ασαφών γλωσσών $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^1$, εντός της σαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^M$, με τρόπο που μας επιτρέπει να ορίσουμε βάσει αυτών ένα κατηγόρημα αλήθειας για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0\prime}$, σχετικοποιημένο ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης της ιεραρχίας $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^1$. Μπορούμε λοιπόν εντός της $\mathcal{L}^M$ να χαρακτηρίσουμε κάποιες από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0\prime}$ ως αληθείς ή ψευδείς ως προς επίπεδο διαμόρφωσης της ιεραρχίας, και να μιλήσουμε στη συνέχεια για τα χαρακτηριστικά των προτάσεων της $\mathcal{L}^{0\prime}$ ανάλογα με το αν αυτές εντάσσονται σε κάποια από αυτές τις κατηγορίες ή όχι.

Προκύπτει όμως πλέον και μια άλλη δυνατότητα, δεδομένου ότι για κάποιες από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0\prime}$ θα ισχύει ότι οι συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης τους θα εξαρτώνται από το επίπεδο διαμόρφωσης μόνο της $\mathcal{L}^0$, είναι εμφανές ότι αν εμπλουτίσουμε κατάλληλα την $\mathcal{L}^1$ τότε θα μπορούμε να διατυπώνουμε προτάσεις και συλλογισμούς που αφορούν κάποια από τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά ορισμένων εκ των προτάσεων της $\mathcal{L}^{0\prime}$ εντός της $\mathcal{L}^1$, αντί εντός της $\mathcal{L}^M$. Παρακάμπτουμε έτσι κατά κάποιον τρόπο κάποιες από τις συνέπειες που έπονται από το γεγονός ότι η τελευταία είναι σαφής.

Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό αφαιρούμε το σχεσιακό σύμβολο '$x \Vdash y$' από την $\mathcal{L}^M$, και επεκτείνουμε την $\mathcal{L}^1$ με ατομικές σταθερές για την εκάστοτε πρόταση της $\mathcal{L}^{0\prime}$ εντός της οποίας δεν εμφανίζεται ο τελεστής '$\mathcal{Definitely}$'. Απαιτούμε από κάθε ερμηνεία της $\mathcal{L}^1$ να ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο εντός του D^1 αυτό ανατίθεται ως αναφορά το πολύ σε μία ατομική σταθερά. Επιπλέον, επεκτείνουμε την $\mathcal{L}^1$ και με σχεσιακό σύμβολο 'Txy', όπου x κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0\prime}$ και y πρόταση της $\mathcal{L}^0$. Χρησιμοποιούμε την σαφή γλώσσα $\mathcal{L}^M$ ως ένα είδος γέφυρας μεταξύ των $\mathcal{L}^{0\prime}$ και $\mathcal{L}^1$, αφού εντός αυτής ορίζουμε τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης για τις διάφορες προτάσεις της $\mathcal{L}^1$ με τρόπο που εξαρτάται από τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά εκφράσεων τόσο της τελευταίας, όσο και της $\mathcal{L}^{0\prime}$. Έστω λοιπόν επίπεδο διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^{0\prime}$, επίπεδο διαμόρφωσης w' της $\mathcal{L}^1$, πρόταση A της $\mathcal{L}^0$, και αντίστοιχες ατομικές σταθερές {w}, {A} εντός της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρονται σε αυτά. Θέτουμε ότι θα είναι $w' \vDash T_{\{w\}}\{A\}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι το w' κατατάσσει το w ως φυσιολογικό και $[\forall x\ (x \in W^0 \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow (x \in Val^{1+}(w', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \sim(x \dashv A)))]$. Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος της μορφής <w, x> που τίθεται στην έκταση της έκφρασης 'Txy' ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης w' θα ισχύει ότι το αντικείμενο x είναι κάποια πρόταση της $\mathcal{L}^0$ που ικανοποιεί τον ορισμό περί αλήθειας που έχουμε δώσει, όπως αυτός σχετικοποιείται ως προς το w. Τώρα, ο προφανής τρόπος για να ορίσουμε τις συνθήκες διάψευσης είναι να θέσουμε ότι θα είναι $w' \dashv T_{\{w\}}\{A\}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι το w' κατατάσσει το w ως φυσιολογικό και $[\exists x\ (x \in W^0 \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{1+}(w', \text{αποδεκτό}) \wedge (x \dashv A))]$. Αυτό όμως, σε συνδυασμό με τον τρόπο που ορίσαμε τις συνθήκες επιβεβαίωσης έχει ως αποτέλεσμα να μην αποφεύγουμε τελικά τις δυσάρεστες συνέπειες που αναφέραμε πιο πάνω. Αν θεωρήσουμε ερμηνεία της ιεραρχίας που συμφωνεί με την ερμηνεία που έχουμε ήδη αναφέρει ως προς το w, και σύμφωνα με την οποία το w' εντάσσει εντός της έκτασης του κατηγορήματος 'το x είναι αποδεκτό' κάθε αντικείμενο εντός του W^0 που αφήνει κενό τουλάχιστον 500 αντικειμένων μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης και χαρακτηρίζει το w ως φυσιολογικό, τότε θα προκύπτει ότι είναι $w' \dashv (T_{\{w\}}\{Fa_{4500}\} \rightarrow T_{\{w\}}\{Fa_{4501}\})$ και άρα το σωρειτικό επιχείρημα που αντιστοιχεί στην ακολουθία προτάσεων $T_{\{w\}}\{Fa_1\}$, $T_{\{w\}}\{Fa_2\}$, …, $T_{\{w\}}\{Fa_{10000}\}$ της $\mathcal{L}^1$ θα χαρακτηρίζεται και πάλι ως μη ορθό.

Μια λύση για αυτό είναι να τροποποιήσουμε κατάλληλα τις συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης για προτάσεις που έχουν κοινή μορφή με την $T_{\{w\}}\{A\}$. Ως σημείο έναρξης αντιμετωπίζουμε ιεραρχία ασαφών γλωσσών και σαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^1$ και $\mathcal{L}^M$, όπου η $\mathcal{L}^0$ δεν περιέχει προτάσεις εντός της οποίας εμφανίζεται ο τελεστής '$\mathcal{Definitely}$'. Αναθέτουμε στις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ και τις υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής και του D^0 δείκτη i=0. Ορίζουμε εντός της $\mathcal{L}^M$ τις συνθήκες επιβεβαίωσης και απόρριψης για τις διάφορες προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ ως προς επίπεδο διαμόρφωσης της. Εντός του πεδίου δράσης D^1 των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^1$ περιλαμβάνουμε τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$, τις προτάσεις της, καθώς και τις υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτής και του συνόλου D^0. Χαρακτηρίζουμε τα αντικείμενα εντός του D^1 ως επιπέδου 0. Η $\mathcal{L}^1$ περιέχει ατομικές σταθερές που αναφέρονται σε κάποια από τα αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της, απαιτούμε από ερμηνεία της να αναθέτει το εκάστοτε αντικείμενο εντός του D^1 ως αναφορά το πολύ σε μία από τις ατομικές σταθερές της $\mathcal{L}^1$. Αυτή θα περιέχει επιπλέον τις κατηγορηματικές εκφράσεις «το x είναι αποδεκτό», «το x είναι φυσιολογικό», «Δx», σχεσιακό σύμβολο «Txy», όπου x κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ και y πρόταση της $\mathcal{L}^0$ ή υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει αυτής και του D^0, και τέλος, κατηγορηματική έκφραση «Ex». Η σημασιολογική δομή που αντιστοιχεί στην ιεραρχία $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^1$ περιγράφεται εντός της σαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^M$.

Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, κάποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ θα κατατάσσονται εντός της έκτασης της έκφρασης «το x είναι αποδεκτό», ενώ κάποια άλλα εντός της αντιέκτασης. Αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^1$ που δεν είναι επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ τίθενται πάντα εντός της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης. Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w' της $\mathcal{L}^1$, μια πρόταση της $\mathcal{L}^0$, ή υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει αυτής και του D^0, θα τίθεται εντός της έκτασης της έκφρασης «Δx» αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο που το w' κατατάσσει ως αποδεκτό την επιβεβαιώνει. Θα τίθεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν υπάρχει αντικείμενο που το w' κατατάσσει ως αποδεκτό και την διαψεύδει. Αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών που δεν είναι προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ ή υβριδικές προτάσεις εντάσσονται εντός της αντιέκτασης της έκφρασης. Προκειμένου διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0$ να κατατάσσεται ως φυσιολογική από διαμόρφωση w^1 της $\mathcal{L}^1$, θα πρέπει αυτή να χαρακτηρίζεται ως αποδεκτή από την τελευταία και επιπλέον να ισχύει ότι για κάθε κατηγορηματική έκφραση F που ανήκει στην $\mathcal{L}^0$ είναι $\forall y[y \in D^0 \rightarrow [\forall x(x \in W^0 \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow ($

$(y \in Val^{0-}(x, F)) \rightarrow x \in Val^{(1)-}(w^1$, αποδεκτό$))\ ) \rightarrow \exists x(x \in W^0 \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(w^1$, αποδεκτό$) \wedge (y \in Val^{0+}(x, F))\ )\ ]]$ καθώς και $\forall y[y \in D^0 \rightarrow [\forall x(x \in W^0 \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow (\ (y \in Val^{0+}(x, F)) \rightarrow x \in Val^{(1)-}(w^1$, αποδεκτό$))\ ) \rightarrow \exists x(x \in W^0 \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(w^1$, αποδεκτό$) \wedge (y \in Val^{0-}(x, F))\ )\ ]$. Όπως και για την έκφραση «το x είναι αποδεκτό», αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^1$ που δεν είναι επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ θα τίθενται πάντα εντός της αντιέκτασης της έκφρασης «το x είναι φυσιολογικό».

Οι συνθήκες επιβεβαίωσης και διάψευσης για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ ως προς κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης αυτής μένουν απαράλλακτες. Αυτές για τις σύνθετες προτάσεις της $\mathcal{L}^1$ είναι ίδιες με τις συνθήκες για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$.

Επιπλέον, θέτουμε τα εξής:

- Αν η ατομική σταθερά {A} της $\mathcal{L}^1$ αναφέρεται σε πρόταση της $\mathcal{L}^0$ την οποία καλούμε A εντός της $\mathcal{L}^M$, τότε ισχύει ότι $w' \vDash T_{\{w\}}\{A\}$ αν και μόνο αν το w' επιβεβαιώνει ότι το αντικείμενο w στο οποίο αναφέρεται το σύμβολο {w} είναι φυσιολογικό και για κάθε z που ανήκει στο W^0 τέτοιο ώστε να είναι $w \sqsubseteq z$, αν ισχύει ότι $z \dashv A$ τότε το w' διαψεύδει ότι το z είναι αποδεκτό. [Άρα, αν το w' επιβεβαιώνει ότι το αντικείμενο w στο οποίο αναφέρεται το σύμβολο {w} είναι φυσιολογικό και η ατομική σταθερά {A} αναφέρεται σε πρόταση A της $\mathcal{L}^0$ θα είναι : $(w' \vDash T_{\{w\}}\{A\} \leftrightarrow (w \in Val^{1+}(w'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall z\ ((z \in W^0 \wedge w \sqsubseteq z) \rightarrow ((\ z \dashv A\ ) \rightarrow z \in Val^{1-}(w'$, αποδεκτό$)\ )))$]
- Αν η ατομική σταθερά {A} της $\mathcal{L}^1$ αναφέρεται σε πρόταση A της $\mathcal{L}^0$ τότε ισχύει ότι $w' \dashv T_{\{w\}}\{A\}$ αν και μόνο αν το w' διαψεύδει ότι το αντικείμενο w στο οποίο αναφέρεται το σύμβολο {w} είναι φυσιολογικό, ή για κάποιο z που ανήκει στο W^0 ισχύει ότι $w \sqsubseteq z$, $z \dashv A$, και επιπλέον το w' επιβεβαιώνει ότι το z είναι αποδεκτό [Άρα, αν η ατομική σταθερά {A} αναφέρεται σε πρόταση της $\mathcal{L}^0$ θα είναι : $(w' \dashv T_{\{w\}}\{A\} \leftrightarrow (w \in Val^{1-}(w'$, φυσιολογικό$) \vee (w \in Val^{1+}(w'$, φυσιολογικό$) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge w \sqsubseteq z \wedge z \dashv A \wedge z \in Val^{1+}(w'$, αποδεκτό$)\ )))\ )$.
- Τα ίδια θα ισχύουν και για ζεύγη της μορφής <w, A> όπου A υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^0$ και του D^0. Για κάθε άλλο διατεταγμένο ζεύγος αντικειμένων που ανήκουν στο D^1, θα ισχύει ότι αυτό τίθεται εντός της αντιέκτασης της έκφρασης 'Txy'.

Τέλος, όσον αφορά τις ατομικές προτάσεις εντός των οποίων εμφανίζεται η έκφραση «Ex» θέτουμε:

- Αν {A} ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρεται σε πρόταση A της $\mathcal{L}^0$, ή σε υβριδική πρόταση A που προκύπτει βάσει αυτής, τότε ισχύει ότι w'⊨E{A} αν και μόνο αν ισχύει ότι $\forall x((x \in D^1 \wedge x \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \langle x, A \rangle \in Val^{(1)+}(w', T))$
- Αν η ατομική σταθερά {A} της $\mathcal{L}^1$ αναφέρεται σε πρόταση A της $\mathcal{L}^0$, ή σε υβριδική πρόταση A που προκύπτει βάσει αυτής, τότε ισχύει ότι w'⫤E{A} αν και μόνο αν ισχύει ότι $\exists x(x \in D^1 \wedge x \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \langle x, A \rangle \in Val^{(1)-}(w', T))$
- Αν η ατομική σταθερά {A} της $\mathcal{L}^1$ δεν αναφέρεται σε πρόταση της $\mathcal{L}^0$ ή υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει αυτής τότε είναι w'⫤E{A}

Η συγκεκριμένη έκφραση είναι ένα είδος ισχυρότερου κατηγορήματος αλήθειας, βάσει του οποίου μπορούν να σχηματιστούν εντός της $\mathcal{L}^1$ προτάσεις που δεν αναφέρονται σε επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$.

Οι υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει της $\mathcal{L}^1$ και του D^1 , καθώς και οι συνθήκες επιβεβαίωσης και απόρριψης ως προς επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ που αντιστοιχούν σε αυτές, ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και για την περίπτωση των $\mathcal{L}^0$, D^0.

Μια πρόταση όπως η ' w'$\vDash T_{\{w\}}${A} ' θα ανήκει στην σαφή μεταγλώσσα $\mathcal{L}^{M}$. Μπορούμε να την διαβάσουμε ως 'το w' επιβεβαιώνει ότι η πρόταση στην οποία αναφέρεται το σύμβολο {A} είναι αληθής ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης στο οποίο αναφέρεται το σύμβολο {w}'. Με τη συμβολοσειρά '$T_{\{w\}}${A}' αναφερόμαστε στην πρόταση της $\mathcal{L}^1$ που σχηματίζεται συνενώνοντας το κατηγορηματικό σύμβολο 'T', ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρεται στο αντικείμενο w, και ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρεται στην πρόταση A της $\mathcal{L}^0$.

Ως έχουν τα πράγματα, η $\mathcal{L}^1$ δεν διαθέτει τους απαραίτητους μηχανισμούς ώστε να είναι εντός αυτής δυνατό να σχηματιστούν όροι που αντικατοπτρίζουν την συντακτική δομή της εκάστοτε από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$, εφόσον δεν περιέχονται εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της τα μεμονωμένα σύμβολα της $\mathcal{L}^0$, και επιπλέον αυτή δεν διαθέτει μεταξύ των εκφράσεων της κάποιο διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο '$x^\frown y$' που αναφέρεται σε συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος <x, y> συμβόλων της $\mathcal{L}^0$ την συμβολοσειρά που προκύπτει εντός της $\mathcal{L}^0$ αν γράψουμε το x και έπειτα το y. Αν θεωρήσουμε πρόταση της μορφής $T_{\{w\}}${A} της $\mathcal{L}^1$, τότε η ατομική σταθερά {A} δεν θα αντικατοπτρίζει εντός της $\mathcal{L}^1$ την δομή της πρότασης A στην οποία αυτή αναφέρεται, παρόλα αυτά μπορούμε εντός της $\mathcal{L}^{M}$ να γράψουμε ‘Val^{1+}(w’, {A})=A ’,[68] όπου w’ μεταβλητή της $\mathcal{L}^{M}$ για επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1}$, ‘{A}’ ενικός όρος της $\mathcal{L}^{M}$ που σημαίνει ‘η ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^{1}$ για την πρόταση A ’, και ’A’ μεταβλητή της $\mathcal{L}^{M}$ για τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0}$. Επιπλέον, θα μπορούν εντός της $\mathcal{L}^{M}$ να σχηματιστούν σύνθετοι όροι, η δομή των οποίων αντικατοπτρίζει την δομή της εκάστοτε πρότασης της $\mathcal{L}^{0}$ ή $\mathcal{L}^{1}$ στην οποία αυτοί αναφέρονται, αφού η $\mathcal{L}^{M}$ θα είναι εφοδιασμένη με τους σχετικούς μηχανισμούς και όρους ώστε οι αναδρομικοί ορισμοί βάσει των οποίων καθορίζεται αν κάτι είναι πρόταση της $\mathcal{L}^{0}$ ή της $\mathcal{L}^{1}$, καθώς και οι εκτάσεις και αντιεκτάσεις της έκφρασης ‘Txy’ ως προς επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1}$ να μπορούν να διατυπωθούν εντός αυτής.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι η $\mathcal{L}^{0}$ περιέχει ονόματα a, a’, a’’, …, μονοθέσιες κατηγορηματικές εκφράσεις F, F’, F’’, …, διθέσιες κατηγορηματικές εκφράσεις R, R’, R’’, … , μεταβλητές x, x’, x’’, … , παρενθέσεις, το σύμβολο της καθολικής ποσόδειξης, το σύμβολο της συνεπαγωγής, και το σύμβολο της άρνησης.[69] Από την άλλη, η $\mathcal{L}^{1}$ περιέχει ονόματα a. , a.’, a.’’, …, τις μονοθέσιες κατηγορηματικές εκφράσεις F. , F.’ , F.’’ , F.’’’, που αντιστοιχούν σε αυτές που μέχρι εδώ συμβολίζουμε ‘(x αποδεκτό)’, ‘(x φυσιολογικό)’, ‘Δx’, και ‘Εx’ αντίστοιχα, την διθέσια κατηγορηματική έκφραση R. , που αντιστοιχεί στην έκφραση που μέχρι εδώ συμβολίζουμε ‘Txy’, μεταβλητές x. , x.’ , x.’’ , … , παρενθέσεις ‘(’ και ‘)’, το σύμβολο της καθολικής ποσόδειξης ‘$\forall$’ , το σύμβολο της συνεπαγωγής ‘$\rightarrow$’ , και το σύμβολο της άρνησης ‘$\sim$’ . Η $\mathcal{L}^{M}$ περιέχει ατομικές σταθερές S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, τέτοιες ώστε η S1 αναφέρεται στο σύμβολο ‘a’, η S2 στο ‘F’, η S3 στο ‘R’, η S4 στο ‘x‘, η S5 στο ‘(’, η S6 στο ‘)’, η S7 στο ‘$\forall$’, η S8 στο ‘$\rightarrow$’, η S9 στο ‘$\sim$’, η S10 στο ‘ ’ ’ και η S11 στο ‘ . ’. Επιπλέον η $\mathcal{L}^{M}$ περιέχει συναρτησιακό σύμβολο ‘ $\frown$ ’ όπως αυτό που έχουμε περιγράψει πιο πάνω. Έπεται ότι εντός αυτής μπορούν να σχηματιστούν όροι που αναφέρονται στο εκάστοτε από τα σύμβολα της $\mathcal{L}^{0}$ ή της $\mathcal{L}^{1}$. Για παράδειγμα, ο σύνθετος όρος S2$\frown$S10$\frown$S10 αναφέρεται στο σύμβολο F’’ που ανήκει στην $\mathcal{L}^{0}$, ενώ ο σύνθετος όρος S2$\frown$S11$\frown$S10$\frown$S10 αναφέρεται στο σύμβολο F.’’ που ανήκει στην $\mathcal{L}^{1}$. Γενικότερα, κάθε όρος της μορφής S2,

---

[68] Ας θεωρήσουμε και πάλι κάποια πρόταση της $\mathcal{L}^{1}$, της μορφής T{w}{Π}, όπου {w} , {Π} ατομικές σταθερές της γλώσσας που αναφέρονται στο επίπεδο διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^{0}$ και την πρόταση πχ A$\rightarrow$B αντίστοιχα της $\mathcal{L}^{0}$. Παρατηρούμε ότι αν <$\rightarrow$, A, B> η υβριδική πρόταση που αντίστοιχεί στην πρόταση A$\rightarrow$B της $\mathcal{L}^{0}$ δεδομένου του D^{0}, τότε αυτή θα περιέχεται εντός του συνόλου D1. Βάσει λοιπόν της $\mathcal{L}^{1}$ και του D^{1} θα προκύπτει και υβριδική πρόταση <T, <w, <$\rightarrow$, A, B>>>.

[69] Τα όσα διατυπώνουμε στην συγκεκριμένη παράγραφο αποτελούν παραλλαγή των όσων γράφει ο Quine, στο έβδομο κεφάλαιο του βιβλίου του 'Mathematical Logic', Quine [1981].

S2 ⌢ S10, S2 ⌢ S10 ⌢ S10, … θα αναφέρεται σε κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^0$, ενώ οι όροι S2⌢ S11, S2 ⌢ S11 ⌢ S10, S2 ⌢ S11 ⌢ S10 ⌢ S10, S2 ⌢ S11 ⌢ S10 ⌢ S10⌢ S10 και S2 ⌢ S11 ⌢ S10 ⌢ S10⌢ S10 ⌢ S10 θα αναφέρονται στο εκάστοτε από τα κατηγορηματικά σύμβολα της $\mathcal{L}^1$. Αν η $\mathcal{L}^M$ περιέχει όρους για τους διάφορους φυσικούς αριθμούς, και x είναι σύμβολο εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της τότε θέτουμε xEp1=x, xEp2=x⌢x, και γενικότερα xEpn=xEp(n-1)⌢x. Αν y, x είναι ακολουθίες συμβόλων τότε θέτουμε ότι θα είναι (y αρχίζει με x) αν και μόνο αν ισχύει ότι (x=y)∨∃z(x⌢z=y), θέτουμε ότι θα είναι (y τελειώνει με x) αν και μόνο αν ισχύει ότι (x=y)∨(∃z(z⌢x=y), θέτουμε ότι θα είναι (x ακολουθία ΄) αν και μόνο αν ∀y((x αρχίζει με y)→(y τελειώνει με s10). Βάσει αυτού μπορούμε να ορίσουμε ότι μια ακολουθία x συμβόλων θα είναι μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^i$, όπου i=0 ή i=1 αν και μόνο αν (i=0→(x=S2 ∨ ∃z((z ακολουθία ’)∧ x=S2 ⌢z))∧(~(i=0)→(x=S2⌢S11Epi ∨ x=S2⌢ S11Epi⌢S10 ∨ x=S2⌢S11Epi ⌢S10⌢S10 ∨ x=S2⌢S11Epi ⌢S10⌢S10 ⌢ S10). Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και σχεσιακές εκφράσεις (x διθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^i$), (x όρος της $\mathcal{L}^i$) και (x μεταβλητή της $\mathcal{L}^i$). Όσον αφορά την τελευταία για παράδειγμα, θα λέμε ότι η ακολουθία συμβόλων x είναι μεταβλητή της $\mathcal{L}^i$ αν και μόνο αν ισχύει ότι (i=0→(x=S4 ∨ ∃z((z ακολουθία ’)∧ x=S4 ⌢z))∧(~(i=0)→(x=S4 ⌢ S11Epi ∨ ∃z((z ακολουθία ’) ∧ x=S4 ⌢ S11Epi ⌢ z). Για x, y ακολουθίες συμβόλων θέτουμε ότι θα είναι (x συνεπαγωγή y)=S5 ⌢ x ⌢ S8 ⌢ y ⌢ S6, (άρνηση x)= S5 ⌢ S9 ⌢x ⌢ S6, και (x ποσόδειξη y)=S7 ⌢ x ⌢ S5 ⌢ y ⌢ S6.

Μπορούμε τώρα να θέσουμε ότι μια ακολουθία x συμβόλων θα είναι μονοθέσιος ατομικός τύπος της $\mathcal{L}^i$ αν και μόνο αν ∃y∃z(((y όρος της $\mathcal{L}^i$) ∨ (y μεταβλητή της $\mathcal{L}^i$)) ∧ (z μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^i$) ∧ x=z ⌢ y), ενώ θα είναι διθέσιος ατομικός τύπος της $\mathcal{L}^i$ αν και μόνο αν ∃u∃y∃z((((y όρος της $\mathcal{L}^i$) ∨ (y μεταβλητή της $\mathcal{L}^i$))∧ ((u όρος της $\mathcal{L}^i$) ∨ (u μεταβλητή της $\mathcal{L}^i$))) ∧ (z διθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^i$) ∧ x=z ⌢ u ⌢ y). Μια ακολουθία x συμβόλων θα είναι ατομική πρόταση της $\mathcal{L}^i$ αν και μόνο αν ∃u∃y∃z((u όρος της $\mathcal{L}^i$) ∧ (y όρος της $\mathcal{L}^i$) ∧ (z διθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^i$) ∧ x=z ⌢ y ⌢ u) ∨ ∃y∃z((y όρος της $\mathcal{L}^i$) ∧ (z μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}^i$) ∧ x=z ⌢ y). Σε αυτό το σημείο μπορούμε να ορίσουμε με αναδρομικό τρόπο κατηγόρημα (x πρόταση της $\mathcal{L}^i$), θέτοντας ότι για κάθε ακολουθία συμβόλων A, αν είναι (A ατομική πρόταση της $\mathcal{L}^i$) τότε A θα είναι πρόταση της $\mathcal{L}^i$, για ακολουθίες συμβόλων A, B θα ισχύει ότι αν είναι (A πρόταση της $\mathcal{L}^i$)∧ (B πρόταση της $\mathcal{L}^i$) τότε θα είναι και ((A συνεπαγωγή B) πρόταση της $\mathcal{L}^i$), αν είναι (A πρόταση της $\mathcal{L}^i$) τότε θα είναι και ((άρνηση A) πρόταση της $\mathcal{L}^i$), για ακολουθίες συμβόλων

Α, Β, αν είναι (Α μεταβλητή της $\mathcal{L}^{i}$) $\wedge$ (Β μονοθέσιος ατομικός τύπος της $\mathcal{L}^{i}$) τότε θα είναι και ((Α ποσόδειξη Β) πρόταση της $\mathcal{L}^{i}$), και τέλος, για ακολουθίες συμβόλων Α, Β, Γ αν είναι (Α μεταβλητή της $\mathcal{L}^{i}$) $\wedge$ (Β μεταβλητή της $\mathcal{L}^{i}$) $\wedge$ (Γ διθέσιος ατομικός τύπος της $\mathcal{L}^{i}$) τότε θα είναι και ((Α ποσόδειξη (Β ποσόδειξη Γ)) πρόταση της $\mathcal{L}^{i}$).

Τώρα, επανερχόμενοι στον τρόπο γραφής που έχουμε για λόγους ευκολίας χρησιμοποιήσει, παρατηρούμε ότι εντός της ‘ $w' \vDash T_{\{w\}}\{A\}$ ’ εμφανίζεται τόσο το σχεσιακό σύμβολο ‘$\vDash$’ της $\mathcal{L}^{M}$, όσο και το σχεσιακό σύμβολο ‘Txy’ της $\mathcal{L}^{1}$, πρέπει λοιπόν να ξεκαθαρίσουμε πως αντιλαμβανόμαστε τον τρόπο που αλληλεπιδρούν οι έννοιες στις οποίες αυτά αναφέρονται. Έχουμε θεωρήσει ότι μέρος της δομής βάσει της οποίας περιγράφονται τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά της $\mathcal{L}^{0}$ είναι διατυπωμένο εντός κάποιας ασαφούς, και άρα όχι πλήρως διαμορφωμένης γλώσσας. Το αν η συγκεκριμένη δομή εντάσσει κάποια πρόταση της $\mathcal{L}^{0}$ εντός του κατηγορήματος ‘Τ’ θα εξαρτάται λοιπόν όχι μόνο από το επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0}$, αλλά και από αυτό της σημασιολογικής δομής που της αντιστοιχεί. Αν ισχύει ότι $w' \vDash T_{\{w\}}\{A\}$, τότε έπεται ότι αν η $\mathcal{L}^{1}$ βρίσκεται στην κατάσταση w’ και η $\mathcal{L}^{0}$ στην κατάσταση στην οποία αναφέρεται το {w}, με άλλα λόγια αν η σημασιολογική δομή βρίσκεται στην κατάσταση <w, w’>, όπου w το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το σύμβολο {w}, τότε η πρόταση Α στην οποία αναφέρεται ο ενικός όρος {A} της $\mathcal{L}^{M}$ εντάσσεται εντός της έκτασης του ‘Τ’. Αν είναι $w' \dashv T_{\{w\}}\{A\}$, τότε αυτή εντάσσεται εντός της αντιέκτασης, αν δεν ισχύει τίποτα από τα δύο τότε η σημασιολογική δομή δεν αποφαίνεται για την Α. Οι σημασιολογικοί υπολογισμοί που εκτελούμε εντός της $\mathcal{L}^{M}$ μας δίνουν ως αποτέλεσμα μια ταξινόμηση ορισμένων από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{0}$ ως αληθείς ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης της ιεραρχίας, προκύπτουν όμως τώρα και κάποιες οριακές περιπτώσεις για τις οποίες το ζήτημα μένει ανοικτό. Θα μπορούσαμε να πούμε πως δεδομένης κάποιας διαμόρφωσης της ιεραρχίας καθορίζεται σε ποια κατάσταση βρίσκεται η βάση δεδομένων που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη έκφραση. Προκειμένου στην συνέχεια να καθοριστεί αν η πρόταση $T_{\{w\}}\{A\}$ εντάσσεται εντός της έκτασης του κατηγορήματος $T_{w'}(x)$, θα πρέπει να εξετάσουμε τους τρόπους με βάση τους οποίους μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω η $\mathcal{L}^{1}$, οπότε προκύπτει η ανάγκη επιπλέον αναθεώρησης της σημασιολογικής δομής που έχουμε περιγράψει.

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι με τις παραπάνω τροποποιήσεις στις σημασιολογικές συνθήκες, προτάσεις που έχουν συγκεκριμένη μορφή θα εξακολουθούν να προκύπτουν αληθείς. Έστω για παράδειγμα μια πρόταση της μορφής $\sim(A \wedge \sim A)$, διαμόρφωση w της $\mathcal{L}^{0}$, διαμόρφωση w' της $\mathcal{L}^1$, και {w}, {~(A∧~A)} ατομικές σταθερές της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρονται στο w και την ~(A∧~A) αντίστοιχα. Τέλος, έστω ότι το w' κατατάσσει το w ως φυσιολογικό:

1. $w' \vDash T_{\{w\}}\{\sim(A\wedge\sim A)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \dashv \sim(A\wedge\sim A)\ ) \rightarrow\ z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ ))$
2. $w' \vDash\ T_{\{w\}}\{\sim(A\wedge\sim A)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \dashv \sim\sim(A \rightarrow \sim\sim A)\ ) \rightarrow\ z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ ))$
3. $w' \vDash\ T_{\{w\}}\{\sim(A\wedge\sim A)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \dashv (A \rightarrow \sim\sim A)\ ) \rightarrow\ z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ ))$
4. $w' \vDash\ T_{\{w\}}\{\sim(A\wedge\sim A)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \vDash A\ \wedge\ z \dashv \sim\sim A) \rightarrow\ z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ )$
5. $w' \vDash\ T_{\{w\}}\{\sim(A\wedge\sim A)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \vDash A\ \wedge\ z \dashv A) \rightarrow\ z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$))$

Το τελευταίο όμως είναι κάτι που ισχύει, αφού έπεται επαγωγικά από όσα έχουμε θέσει ότι δεδομένης κάποιας ερμηνείας της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^1$, δεν θα υπάρχουν αποδεκτές διαμορφώσεις της $\mathcal{L}^0$ για τις οποίες ισχύει ότι επιβεβαιώνουν και επίσης διαψεύδουν κάποια πρόταση της γλώσσας.

Συνεχίζοντας, ας θεωρήσουμε σωρειτική ακολουθία αντικειμένων ως προς κάποιο κατηγόρημα F της γλώσσας $\mathcal{L}^0$, και έστω για λόγους ευκολίας ότι το πεδίο των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^0$ περιορίζεται στα αντικείμενα που εμφανίζονται εντός αυτής. Έστω επιπλέον w επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας $\mathcal{L}^0$, w' επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$. που κατατάσσει το w ως φυσιολογικό, {w} ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$ που έχει ως αναφορά το w και {∀x(Fx→Fx+1)} ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$που έχει ως αναφορά την πρόταση '∀x(Fx→Fx+1)' της $\mathcal{L}^0$.

Διαπιστώνουμε ότι θα είναι:

1. $w' \vDash T_{\{w\}}\{\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \dashv \forall x(Fx \rightarrow Fx+1)\ ) \rightarrow\ z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ ))$
2. $w' \vDash T_{\{w\}}\{\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow ((\ z \dashv <\forall x, <\rightarrow, Fx, Fx+1>>\ ) \rightarrow z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ ))$
3. $w' \vDash T_{\{w\}}\{\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)\}$ αν και μόνο αν $\forall z\ (\ w \sqsubseteq z \rightarrow (($ αν για κάποιο αντικείμενο o που ανήκει στο D^0 είναι $z \dashv [\ <\rightarrow, Fx, Fx+1>]^{o}_{x} \rightarrow z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)\ ))$

4. $w' \vDash T_{\{w\}}\{\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)\}$ αν και μόνο αν $\forall z$ ($w \sqsubseteq z \rightarrow$ ((αν για κάποιο αντικείμενο o που ανήκει στο D^0 είναι $z \dashv [<\rightarrow, <F, o>, <F, o+1>>] \rightarrow z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)$))
5. $w' \vDash T_{\{w\}}\{\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)\}$ αν και μόνο αν $\forall z$ ($w \sqsubseteq z \rightarrow$ ((αν για κάποιο αντικείμενο o που ανήκει στο D^0 είναι $z \vDash <F, o> \wedge z \dashv <F, o+1>) \rightarrow z \in Val^{1-}(w',$ αποδεκτό$)$))

Έχουμε όμως θεωρήσει ότι διαμορφώσεις της γλώσσας που διακρίνουν μεταξύ αντικειμένων που οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι ή δεν έχουν την δυνατότητα, εντός του εκάστοτε πλαισίου συζήτησης, να διακρίνουν μεταξύ τους θα πρέπει να κατατάσσονται ως μη αποδεκτές. Καταλήγουμε άρα ότι αν η $\mathcal{L}^1$ έχει ερμηνευτεί κατάλληλα, τότε σύμφωνα με το w' η πρόταση $\forall x(Fx \rightarrow Fx+1)$ θα κατατάσσεται ως αληθής.

Ας θεωρήσουμε τώρα για παράδειγμα ατομικές προτάσεις Fa_1, Fa_2, Fa_3, Fa_4 και Fa_5 της γλώσσας $\mathcal{L}^0$, και έστω ότι α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 είναι μια σωρειτική ακολουθία αντικειμένων ως προς το κατηγόρημα 'F' όπου το πρώτο αντικείμενο είναι ξεκάθαρα F ενώ το τελευταίο ξεκάθαρα όχι F, με το εκάστοτε σταθερό σύμβολο της μορφής a_i να αναφέρεται στο αντικείμενο αi της ακολουθίας. Υποθέτουμε ότι το τρέχον πλαίσιο της συζήτησης είναι τέτοιο ώστε σύμφωνα με το σημείο w' κάθε διαμόρφωση της γλώσσας $\mathcal{L}^0$ που διακρίνει μεταξύ αντικειμένων α_i και α_{i+1} που βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας είναι μη αποδεκτή, κάθε διαμόρφωση που διακρίνει μεταξύ αντικειμένων α_i και α_{i+2} είναι οριακή περίπτωση, και κάθε διαμόρφωση που διακρίνει μεταξύ αντικειμένων α_i και α_{i+3} και πάνω είναι αποδεκτή. Έστω ότι το D^0 περιέχει μόνο τα αντικείμενα της σωρειτικής ακολουθίας ενώ το W^0 περιέχει αντικείμενα w_1, w_2, w_3, …, w_9, w_{10} για τα οποία ισχύει ότι το w_1 επιβεβαιώνει από τις πιο πάνω προτάσεις μόνο την Fa_1 ενώ απορρίπτει τις υπόλοιπες, το w_2 επιβεβαιώνει τις Fa_1, Fa_2 ενώ απορρίπτει τις υπόλοιπες, το w_3 απορρίπτει τις Fa_4 και Fa_5 ενώ επιβεβαιώνει τις υπόλοιπες και το w_4 απορρίπτει μόνο την Fa_5 ενώ επιβεβαιώνει τις υπόλοιπες. Έπεται με βάση τα όσα έχουμε πει ότι τα συγκεκριμένα σημεία θα είναι μη αποδεκτά σύμφωνα με το w'. Από τα υπόλοιπα, το w_5 επιβεβαιώνει την Fa_1 ενώ απορρίπτει τις Fa_3, Fa_4 και Fa_5, το w_6 επιβεβαιώνει τις Fa_1 και Fa_2 ενώ απορρίπτει τις Fa_4, Fa_5 και το w_7 επιβεβαιώνει τις Fa_1, Fa_2 και Fa_3 και απορρίπτει την Fa_5. Έπεται ότι για τα w_5, w_6 και w_7 θα ισχύει ότι ως προς το τρέχον επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1\prime}$ είναι οριακές περιπτώσεις για το κατηγόρημα «το x είναι αποδεκτό». Τέλος, για το w_8 θα ισχύει ότι αυτό επιβεβαιώνει την Fa_1 ενώ απορρίπτει τις Fa_4 και Fa_5, για το w_9 ότι επιβεβαιώνει τις Fa_1, Fa_2 ενώ απορρίπτει την Fa_5, και για το w_{10} ότι επιβεβαιώνει την Fa_1 ενώ απορρίπτει την Fa_5. Θα ισχύει άρα ότι τα w_8, w_9 και w_{10} είναι αποδεκτά σύμφωνα με το w’. Έπεται από αυτά ότι μεταξύ των αντικειμένων εντός του W^0, το w_{10} θα κατατάσσεται ως φυσιολογικό.

Έστω ότι η $\mathcal{L}^1$ περιέχει τις κατάλληλες ατομικές σταθερές. Διαπιστώνουμε ότι θα είναι $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa1\}$, $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa2\}$, $w'\vDash T_{\{w10\}}\{\sim Fa4\}$ και $w'\vDash T_{\{w10\}}\{\sim Fa5\}$, $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa4\}$, $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa5\}$ και $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{\sim Fa1\}$ και $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{\sim Fa2\}$. Τέλος, δεν θα ισχύει ότι $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa3\}$, ούτε και ότι $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa3\}$, και παρομοίως για την ‘$\sim$Fa3’. Όσον αφορά τις προτάσεις με μορφή συνεπαγωγής που μπορεί να σχηματιστούν με βάση τις συγκεκριμένες ατομικές προτάσεις διαπιστώνουμε ότι θα είναι $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa2\}$, $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa2\rightarrow Fa3\}$, $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa3\rightarrow Fa4\}$ και $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa4\rightarrow Fa5\}$, ενώ από την άλλη θα είναι $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa4\}$, $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa5\}$[70] και $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa2\rightarrow Fa5\}$, ενώ δεν θα ισχύει ότι $w'\vDash T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa3\}$, ούτε όμως και ότι $w'\Dashv T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa3\}$, και παρομοίως για τις $Fa2\rightarrow Fa4$ και $Fa3\rightarrow Fa5$. Έπεται ότι θα είναι $w'\Dashv(T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa2\}\wedge T_{\{w10\}}\{Fa2\rightarrow Fa3\}\wedge T_{\{w10\}}\{Fa3\rightarrow Fa4\}) \rightarrow T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa4\}$, $w'\Dashv(T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa2\} \wedge T_{\{w10\}}\{Fa2\rightarrow Fa3\}\wedge T_{\{w10\}}\{Fa3\rightarrow Fa4\} \wedge T_{\{w10\}}\{Fa4\rightarrow Fa5\})\rightarrow T_{\{w10\}}\{Fa1\rightarrow Fa5\}$ και $w'\Dashv(T_{\{w10\}} \{Fa2\rightarrow Fa3\} \wedge T_{\{w10\}}\{Fa3\rightarrow Fa4\} \wedge T_{\{w10\}}\{Fa4\rightarrow Fa5\})\rightarrow T_{\{w10\}}\{Fa2\rightarrow Fa5\}$.

3.2.3 Επεκτείνοντας τις γλώσσες εντός της ιεραρχίας με επιπλέον εκφράσεις

Ας θεωρήσουμε τώρα την γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime}$, που προκύπτει από την $\mathcal{L}^0$ προσθέτοντας σε αυτήν τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A, όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^0$, και την ιεραρχία $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^M$ που αντιστοιχεί σε αυτήν. Εντός του πεδίου δράσης D^2 των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^2$ θα περιλαμβάνονται οι προτάσεις των $\mathcal{L}^{0\prime}$ και $\mathcal{L}^1$, οι υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν κάθε φορά βάσει κάποιας από αυτές και του αντίστοιχου των D^0, D^1, τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, καθώς και οι διατεταγμένες δυάδες της μορφής <x, x’>, όπου x επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ και x’ επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ τέτοια ώστε να είναι $x\in Val^{(1)+}$(x’, φυσιολογικό). Χαρακτηρίζουμε τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, καθώς και τις διατεταγμένες δυάδες της μορφής <x, x’> ως αντικείμενα επιπέδου 1. Θεωρούμε πως στις προτάσεις της $\mathcal{L}^0$ ανατίθεται δείκτης 0, οπότε τις χαρακτηρίζουμε ως αντικείμενα επιπέδου 0, ενώ αναθέτουμε στις προτάσεις της $\mathcal{L}^1$ δείκτη 1, οπότε και τις

[70] Θα είναι μάλιστα $w'\vDash T_{w10}(\sim(Fa1\rightarrow Fa5))$, γενικότερα, μπορεί να αποδειχτεί επαγωγικά ότι για φυσιολογικά σημεία w, w’, με $w\in W^0$ και $w'\in W^1$, και πρόταση A της $\mathcal{L}^0$, αν είναι $w'\vDash Tw(\sim A)$ τότε θα είναι $w'\Dashv Tw(A)$. Πάντως, με βάση τις συνθήκες που έχουμε θέσει προκύπτει ότι το αντίθετο δεν θα ισχύει πάντα.

χαρακτηρίζουμε ως αντικείμενα επιπέδου 1, παρομοίως και για τις υβριδικές προτάσεις εντός του D^2. Μεταξύ των εκφράσεων της $\mathcal{L}^2$ περιλαμβάνονται ονόματα για τις προτάσεις των $\mathcal{L}^{0}$' και $\mathcal{L}^1$, για κάποιες από τις υβριδικές προτάσεις εντός του D^2, για κάποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, καθώς και για κάποιες από τις διατεταγμένες δυάδες της μορφής <x, x'> που περιλαμβάνονται εντός του D^2. Απαιτούμε από κάθε ερμηνεία της $\mathcal{L}^2$ να ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο εντός του D^2 αυτό ανατίθεται ως αναφορά το πολύ σε μία ατομική σταθερά. Επιπλέον, ανάμεσα στις εκφράσεις της περιλαμβάνονται διμελές κατηγόρημα 'Txy', καθώς και κατηγορήματα 'x αποδεκτό', 'x φυσιολογικό', 'Δx', 'x επίπεδο διαμόρφωσης' και 'Ex'.

Όπως και πριν, δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^2$ θα ισχύει ότι κάποια από τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ τίθενται εντός της έκτασης της έκφρασης 'x αποδεκτό' ενώ κάποια άλλα εντός της αντιέκτασης. Αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της $\mathcal{L}^2$ που δεν είναι επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ τίθενται πάντα εντός της αντιέκτασης. Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w'' της $\mathcal{L}^2$, μια πρόταση της $\mathcal{L}^1$ με δείκτη 1 θα τίθεται εντός της έκτασης της έκφρασης «Δx» αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο που το w'' κατατάσσει ως αποδεκτό την επιβεβαιώνει. Θα τίθεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν υπάρχει αντικείμενο που το w'' κατατάσσει ως αποδεκτό και την διαψεύδει. Παρομοίως και για τις υβριδικές προτάσεις επιπέδου 1 που προκύπτουν βάσει της $\mathcal{L}^1$ και του D^1. Αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών που δεν ανήκουν σε κάποια από αυτές τις κατηγορίες εντάσσονται εντός της αντιέκτασης. Προκειμένου κάποιο αντικείμενο να τίθεται εντός της έκτασης της έκφρασης 'x φυσιολογικό' ως προς επίπεδο διαμόρφωσης w^2 της $\mathcal{L}^2$ θα πρέπει να ισχύει ότι αυτό χαρακτηρίζεται αποδεκτό ως προς το συγκεκριμένο επίπεδο, και επιπλέον να ισχύει ότι για κάθε n-μελή κατηγορηματική έκφραση F που ανήκει στην $\mathcal{L}^1$, όπου $n \geq 1$, ισχύει ότι για κάθε n-άδα y αντικειμένων επιπέδου 0 που ανήκουν στο D^1 είναι $[\forall x(x \in W^1 \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow((y \in Val^{1-}(x, F)) \rightarrow x \in Val^{(2)-}(w^2,$ αποδεκτό$))) \rightarrow \exists x(x \in W^1 \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(2)+}(w^2,$ αποδεκτό$) \wedge (y \in Val^{1+}(x, F)))]]$ καθώς και $\forall y[y \in (D^1)^n \rightarrow [\forall x(x \in W^1 \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow((y \in Val^{1+}(x, F)) \rightarrow x \in Val^{(2)-}(w^2,$ αποδεκτό$))) \rightarrow \exists x(x \in W^1 \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(2)+}(w^2,$ αποδεκτό$) \wedge (y \in Val^{1-}(x, F)))]$. Αντικείμενα που δεν είναι επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$ τίθενται πάντα εντός της αντιέκτασης της έκφρασης «το x είναι φυσιολογικό». Κάποιο αντικείμενο εντός του D^2 θα τίθεται εντός της έκτασης του κατηγορήματος 'x επίπεδο διαμόρφωσης' αν και μόνο αν αυτό είναι διατεταγμένη δυάδα της μορφής $\langle x, x'\rangle$, όπου x επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0\prime}$ και x’ επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{1\prime}$.

Τώρα, δεδομένης κάποιας διαμόρφωσης w’ της $\mathcal{L}^{1}$, διαμόρφωσης w της $\mathcal{L}^{0\prime}$ και πρότασης A της τελευταίας που δεν περιέχει τον τελεστή ‘$\mathcal{Definitely}$’, ή αντίστοιχης υβριδικής πρότασης A που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^{0\prime}$ και του D^0, θα γράφουμε, εντός της $\mathcal{L}^{M}$, $\langle w, w'\rangle \vDash A$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $w \vDash A$, ενώ θα γράφουμε $\langle w, w'\rangle \Dashv A$ αν και μόνο αν είναι $w \Dashv A$. Για πρόταση της $\mathcal{L}^{0\prime}$ με μορφή $\mathcal{Definitely}$ A, όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^{0}$, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση $\langle \mathcal{Definitely}, A\rangle$, θα γράφουμε $\langle w, w'\rangle \vDash \mathcal{Definitely}\ A$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash \langle \mathcal{Definitely}, A\rangle$ αντίστοιχα, αν και μόνο αν ισχύει ότι $\forall x((x \in W^0 \wedge x \in Val^{(1)+}(w', \text{αποδεκτό})) \rightarrow x \vDash A)$, θα γράφουμε $\langle w, w'\rangle \Dashv \mathcal{Definitely}\ A$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle \mathcal{Definitely}, A\rangle$ αντίστοιχα, αν και μόνο αν ισχύει ότι $\exists x((x \in W^0 \wedge x \in Val^{(1)+}(w', \text{αποδεκτό})) \wedge x \Dashv A)$.

Δεδομένου σημείου w με $w \in W^0$, και w’ με $w' \in W^1$, στην περίπτωση που για κάποιο ζεύγος $\langle \alpha, \beta\rangle$ αντικειμένων που ανήκουν στο D^1 είναι $w' \vDash \langle T, \langle \alpha, \beta\rangle\rangle$, τότε θα γράφουμε και $\langle w, w'\rangle \vDash \langle T, \langle \alpha, \beta\rangle \rangle$, αν η $\mathcal{L}^{2}$ περιέχει ατομικές σταθερές {a}, {b} που αναφέρονται στα αντικείμενα α, β θα γράφουμε εντός της $\mathcal{L}^{M}$ ότι $\langle w, w'\rangle \vDash T_{\{a\}}(\{b\})$. Αν είναι $w' \Dashv \langle T, \langle \alpha, \beta\rangle\rangle$ τότε θα γράφουμε και $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle T, \langle \alpha, \beta\rangle \rangle$, ενώ αν η $\mathcal{L}^{2}$ περιέχει τις ανάλογες ατομικές σταθερές θα γράφουμε και $\langle w, w'\rangle \Dashv T_{\{a\}}(\{b\})$. Για εκφράσεις της $\mathcal{L}^{1}$ της μορφής ‘x αποδεκτό’, ή ‘x φυσιολογικό’, ή ‘Δx’, ή ‘x επίπεδο διαμόρφωσης’, ή ‘Ex’, θα γράφουμε $\langle w, w'\rangle \vDash \langle \text{αποδεκτό}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash \langle \text{φυσιολογικό}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash \langle \Delta, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash \langle \text{επίπεδο διαμόρφωσης}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash \langle E, \alpha\rangle$ αν και μόνο αν το αντικείμενο α εντάσσεται από το w’ εντός της έκτασης της αντίστοιχης κατηγορηματικής έκφρασης. Αν η $\mathcal{L}^{1}$ περιέχει ατομική σταθερά a που αναφέρεται στο α τότε θα γράφουμε και $\langle w, w'\rangle \vDash (a\ \text{αποδεκτό})$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash (a\ \text{φυσιολογικό})$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash (\Delta a)$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash (a\ \text{επίπεδο διαμόρφωσης})$, ή $\langle w, w'\rangle \vDash (Ea)$. Αν το αντικείμενο α εντάσσεται από το w’ εντός της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης θα γράφουμε $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle \text{αποδεκτό}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle \text{φυσιολογικό}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle \Delta, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle \text{επίπεδο διαμόρφωσης}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle E, \alpha\rangle$ ενώ αν η $\mathcal{L}^{2}$ περιέχει ατομική σταθερά a που αναφέρεται στο α τότε θα γράφουμε και $\langle w, w'\rangle \Dashv (a\ \text{αποδεκτό})$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv (a\ \text{φυσιολογικό})$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv (\Delta a)$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv (a\ \text{επίπεδο διαμόρφωσης})$, ή $\langle w, w'\rangle \Dashv (Ea)$.

Ας θεωρήσουμε επίπεδα διαμόρφωσης z της $\mathcal{L}^{0\prime}$, z’ της $\mathcal{L}^{1}$, w’’ της $\mathcal{L}^{2}$, και A πρόταση με δείκτη i=0 που ανήκει στην $\mathcal{L}^{0\prime}$, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει αυτής και του D^0. Θα ισχύει ότι το ζεύγος $\langle\langle z, z'\rangle, A\rangle$ εντάσσεται από το w’’ εντός της έκτασης της

‘Txy’ αν και μόνο αν είναι $<z, A> \in Val^{(1)+}(z', T)$, ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν είναι $<z, A> \in Val^{(1)-}(z', T)$. Αν ο δείκτης i της A είναι ίσος με 1, τότε το ζεύγος $<<z, z'>, A>$ θα εντάσσεται από το w’’ εντός της έκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης αν και μόνο αν είναι $[z' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (<x, x'> \dashv (A)_{A1 \cup S1} \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$, ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν είναι $[z' \in Val^{(2)-}(w'', \text{φυσιολογικό}) \vee (z' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x' \exists x(x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge <x, x'> \dashv (A)_{A1 \cup S1}))]$. Αν η A ανήκει στην $\mathcal{L}^1$ και ισχύει το πρώτο για κάποιο z, με $z \in W^0$, τότε θα τίθεται εντός της έκτασης και το διατεταγμένο ζεύγος $<z', A>$, ενώ αν ισχύει το δεύτερο θα τίθεται εντός της αντιέκτασης, κάθε άλλο διατεταγμένο ζεύγος αντικειμένων που ανήκουν στο D^2 θα τίθεται εντός της αντιέκτασης. Τέλος, για αντικείμενο A εντός του D^2 που είναι πρόταση κάποιας εκ των $\mathcal{L}^0$’, $\mathcal{L}^1$ ή υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει αυτών και του D^0 ή D^1 αντίστοιχα, θα ισχύει ότι αυτό εντάσσεται από το w’’ εντός της έκτασης της έκφρασης ‘Ex’ αν και μόνο αν ισχύει ότι $\forall x' \forall x((x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge <x, x'> \in Val^{(2)+}(w'', \text{επίπεδο διαμόρφωσης})) \rightarrow <<x, x'>, A> \in Val^{(2)+}(w'', T))$, ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν ισχύει ότι $\exists x' \exists x(x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge <x, x'> \in Val^{(2)+}(w'', \text{επίπεδο διαμόρφωσης}) \wedge <<x, x'>, A> \in Val^{(2)-}(w'', T))$.

Έστω πρόταση της $\mathcal{L}^2$ με μορφή Txy, αν το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η ατομική σταθερά y είναι επιπέδου i τότε της αναθέτουμε δείκτη i+1. Για πρόταση της $\mathcal{L}^2$ με μορφή Ex, αν το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η ατομική σταθερά x είναι επιπέδου i τότε της αναθέτουμε δείκτη i+1. Αναθέτουμε στις υπόλοιπες από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^2$ δείκτη 2. Παρομοίως και για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις.

Δεδομένου σημείου w με $w \in W^0$, w’ με $w' \in W^1$ και $w'' \in W^2$, στην περίπτωση που κάποιο ζεύγος <α, β> αντικειμένων που ανήκουν στο D^2 εντάσσεται από το w’’ εντός της έκτασης της έκφρασης ‘Txy’ της $\mathcal{L}^2$, τότε θα γράφουμε $<w, w', w''> \models <T, <\alpha, \beta>>$, αν η $\mathcal{L}^2$ περιέχει ατομικές σταθερές {a}, {b} που αναφέρονται στα αντικείμενα α, β θα γράφουμε εντός της $\mathcal{L}^M$ ότι $<w, w', w''> \models T_{\{a\}}(\{b\})$. Στην περίπτωση που το <α, β> εντάσσεται από το w’’ εντός της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης θα γράφουμε $<w, w', w''> \dashv <T, <\alpha, \beta>>$, ενώ αν η $\mathcal{L}^2$ περιέχει τις ανάλογες ατομικές σταθερές θα γράφουμε και $<w, w', w''> \dashv T_{\{a\}}(\{b\})$. Για εκφράσεις της $\mathcal{L}^2$ της μορφής ‘x αποδεκτό’, ή ‘x φυσιολογικό’, ή ‘Δx’, ή ‘x επίπεδο διαμόρφωσης’, ή ‘Ex’, θα γράφουμε $<w, w', w''> \models <\text{αποδεκτό}, \alpha>$, ή $<w, w', w''> \models <\text{φυσιολογικό}, \alpha>$, ή $<w, w', w''> \models <\Delta, \alpha>$, ή $<w, w', w''> \models <\text{επίπεδο διαμόρφωσης}, \alpha>$, ή <w,

$w', w''\rangle \vDash \langle E, \alpha\rangle$ αν και μόνο αν το αντικείμενο α εντάσσεται από το w'' εντός της έκτασης της αντίστοιχης κατηγορηματικής έκφρασης. Αν η $\mathcal{L}^2$ περιέχει ατομική σταθερά a που αναφέρεται στο α τότε θα γράφουμε και $\langle w, w', w''\rangle \vDash$(a αποδεκτό), ή $\langle w, w', w''\rangle \vDash$ (a φυσιολογικό), ή $\langle w, w', w''\rangle \vDash$ (Δa), ή $\langle w, w', w''\rangle \vDash$ (a επίπεδο διαμόρφωσης), ή $\langle w, w', w''\rangle \vDash$(Ea). Αν το αντικείμενο α εντάσσεται από το w'' εντός της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης θα γράφουμε $\langle w, w', w''\rangle \Dashv \langle\text{αποδεκτό}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv \langle\text{φυσιολογικό}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv \langle \Delta, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv \langle\text{επίπεδο διαμόρφωσης}, \alpha\rangle$, ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv \langle E, \alpha\rangle$ ενώ αν η $\mathcal{L}^2$ περιέχει ατομική σταθερά a που αναφέρεται στο α τότε θα γράφουμε και $\langle w, w', w''\rangle \Dashv$(a αποδεκτό), ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv$ (a φυσιολογικό), ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv$ (Δa), ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv$ (a επίπεδο διαμόρφωσης), ή $\langle w, w', w''\rangle \Dashv$ (Ea). Αν A πρόταση που ανήκει στην $\mathcal{L}^{0\prime}$ ή την $\mathcal{L}^1$ με δείκτη i=0 ή i=1, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει κάποιας από αυτές και του D^0 ή D^1 αντίστοιχα, θα γράφουμε $\langle w, w', w''\rangle \vDash A$ αν και μόνο αν είναι $\langle w, w'\rangle \vDash A$, ενώ θα γράφουμε $\langle w, w', w''\rangle \Dashv A$ αν και μόνο αν είναι $\langle w, w'\rangle \Dashv A$. Αν κατά παρόμοιο τρόπο με πριν επεκτείνουμε την γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime}$ στην $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, προσθέτοντας σε αυτήν τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$ A όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^{0\prime}$, και την ιεραρχία $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$ στην $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$ τότε για πρόταση της $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$ με δείκτη i=2 και μορφή $\mathcal{Definitely}$ A, θα γράφουμε $\langle w, w', w''\rangle \vDash \mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν είναι $\forall x((x \in W^1 \wedge x \in Val^{(2)+}(w'', \text{αποδεκτό})) \rightarrow \langle w, x\rangle \vDash A)$, θα γράφουμε $\langle w, w', w''\rangle \Dashv \mathcal{Definitely}$ A αν και μόνο αν ισχύει ότι $\exists x(x \in W^1 \wedge x \in Val^{(2)+}(w'', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle w, x\rangle \Dashv A)$, και παρομοίως για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις.

Καταλήγουμε τελικά σε τροποποιημένη ιεραρχία $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$… την οποία περιγράφουμε εντός σαφούς μεταγλώσσας $\mathcal{L}^M$. Έστω $\mathcal{L}^{(i)}$ γλώσσα που εμφανίζεται εντός αυτής. Εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της περιλαμβάνονται οι προτάσεις των $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$…, $\mathcal{L}^{(i-1)}$ για τις οποίες ισχύει ότι ο δείκτης τους είναι μικρότερος ή ίσος του (i-1), οι αντίστοιχες από τις υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει αυτών και του εκάστοτε από τα D^0, D^1, …, $D^{(i-1)}$, τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{(i-1)}$, καθώς και οι διατεταγμένες i-άδες της μορφής $\langle x, x', x'', \ldots, x^{i-1}\rangle$, όπου x επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0*$, x' επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, …, και x^{i-1} επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{i-1}$ τέτοια ώστε να είναι $x^{i-2} \in Val^{(i-1)+}(x^{i-1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge x^{i-3} \in Val^{(i-2)+}(x^{i-2}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})$. Χαρακτηρίζουμε τα επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{(i-1)}$, καθώς και τις διατεταγμένες i-άδες της μορφής $\langle x, x', x'', \ldots, x^{i-1}\rangle$ ως αντικείμενα επιπέδου i-1. Χαρακτηρίζουμε πρόταση A που ανήκει σε κάποια από τις $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$…, $\mathcal{L}^{(i-1)}$, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει κάποιας από αυτές, ως αντικείμενο επιπέδου j αν και μόνο αν ο δείκτης της είναι j. Η $\mathcal{L}^{(i)}$ θα περιέχει ονόματα για κάποια από τα αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών της, απαιτούμε από κάθε ερμηνεία της $\mathcal{L}^{(i)}$ να ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο εντός του $D^{(i)}$ αυτό ανατίθεται ως αναφορά το πολύ σε μία ατομική σταθερά. Επιπλέον, η $\mathcal{L}^{(i)}$ περιέχει διμελές κατηγόρημα 'Txy' [71], καθώς και κατηγορήματα 'x αποδεκτό', 'x φυσιολογικό', 'Δx', 'Ex', και 'x επίπεδο διαμόρφωσης'. Δεδομένου επιπέδου διαμόρφωσης w^i της $\mathcal{L}^{(i)}$, μια πρόταση της $\mathcal{L}^{(i-1)}$ με δείκτη i-1, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση, θα τίθεται εντός της έκτασης της έκφρασης «Δx» αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο που το w^i κατατάσσει ως αποδεκτό την επιβεβαιώνει. Θα τίθεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν υπάρχει αντικείμενο που το w^i κατατάσσει ως αποδεκτό και την διαψεύδει. Αντικείμενα εντός του πεδίου δράσης των ποσοδεικτών που δεν είναι προτάσεις της $\mathcal{L}^{(i-1)}$ με δείκτη i-1, ή υβριδικές προτάσεις με δείκτη i-1, θα εντάσσονται εντός της αντιέκτασης. Προκειμένου κάποιο αντικείμενο να τίθεται εντός της έκτασης της έκφρασης 'x φυσιολογικό' ως προς επίπεδο διαμόρφωσης w^i της $\mathcal{L}^{(i)}$ θα πρέπει να ισχύει ότι αυτό χαρακτηρίζεται αποδεκτό ως προς το συγκεκριμένο επίπεδο, και επιπλέον να ισχύει ότι για κάθε n-μελή κατηγορηματική έκφραση F που ανήκει στην $\mathcal{L}^{(i-1)}$, όπου $n \geq 1$, ισχύει ότι για κάθε n-άδα y αντικειμένων επιπέδου i-2 που ανήκουν στο D^{i-1} είναι $[\forall x(x \in W^{i-1} \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow ((y \in Val^{(i-1)-}(x, F)) \rightarrow x \in Val^{(i)-}(w^i, \text{αποδεκτό}))) \rightarrow \exists x(x \in W^{i-1} \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(i)+}(w^i, \text{αποδεκτό}) \wedge (y \in Val^{(i-1)+}(x, F)))]]$ καθώς και $\forall y[y \in (D^{i-1})^n \rightarrow [\forall x(x \in W^{i-1} \wedge w \sqsubseteq x \rightarrow ((y \in Val^{(i-1)+}(x, F)) \rightarrow x \in Val^{(i)-}(w^i, \text{αποδεκτό}))) \rightarrow \exists x(x \in W^{i-1} \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(i)+}(w^i, \text{αποδεκτό}) \wedge (y \in Val^{(i-1)-}(x, F)))]$. Αντικείμενα που δεν είναι επίπεδα διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{(i-1)}$ τίθενται πάντα εντός της αντιέκτασης της έκφρασης «το x είναι φυσιολογικό».

[71] Μια διαφορετική δυνατότητα που έχουμε θα ήταν να τροποποιήσουμε τις γλώσσες που εμφανίζονται εντός της ακολουθίας $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{0\prime}$, $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$, … προσθέτοντας σε αυτές, με τρόπο ανάλογο όπως και στην περίπτωση του τελεστή '$\mathcal{Definitely}$', κάποιον τελεστή 'T' που αντιστοιχεί στην έννοια της αλήθειας. Η γλώσσα $\mathcal{L}^{0\prime}$ προκύπτει τώρα από την $\mathcal{L}^0$ προσθέτοντας σε αυτήν τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A και TA όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^0$, καθώς και τις σύνθετες προτάσεις που μπορεί να σχηματιστούν από αυτές. Η $\mathcal{L}^{0\prime\prime}$ προκύπτει από την $\mathcal{L}^{0\prime}$ προσθέτοντας σε αυτήν τις διάφορες προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}$A και TA, όπου A πρόταση της $\mathcal{L}^{0\prime}$, και ούτω καθ' εξής. Ταυτόχρονα επεκτείνουμε την ιεραρχία που αντιστοιχεί στην εκάστοτε από αυτές τις γλώσσες με τον τρόπο που έχουμε ήδη περιγράψει. Στο όριο της διαδικασίας καταλήγουμε τελικά σε γλώσσα $\mathcal{L}^{0}*$, οπότε και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τελεστές 'Definitely ' και 'T' δρουν επί προτάσεων αυτής σχηματίζοντας νέες προτάσεις. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια θα είμαστε υποχρεωμένοι να διαβάσουμε μια πρόταση της μορφής TA ως «είναι αλήθεια ότι A». Για μια συζήτηση όσον αφορά την σχέση μεταξύ του τελεστή της αλήθειας με το αντίστοιχο κατηγόρημα μπορεί κανείς να κοιτάξει στο βιβλίο του Wolfgang Kunne, 'Conceptions of Truth', (σελίδες 350 με 352), καθώς και στο άρθρο Mulligan [2010].

Για αντικείμενο w^i με $w^i \in W^i$, διατεταγμένη i-άδα αντικειμένων $\langle w, w', \dots, w^{i-1}\rangle$, και A υβριδική πρόταση με δείκτη j, όπου $0 \leq j \leq i-1$, που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^n$, όπου $\mathcal{L}^n$ κάποια από τις $\mathcal{L}^{0(i-2)}$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^{2\prime}\dots$, $\mathcal{L}^{(i-1)}$, και του αντίστοιχου πεδίου δράσης ποσοδεικτών D^n, θα γράφουμε $\langle w, w', \dots, w^{i-1}, w^i\rangle \vDash A$ αν και μόνο αν είναι $\langle w, w', \dots, w^k\rangle \vDash A$, ενώ θα γράφουμε $\langle w, w', \dots, w^{i-1}, w^i\rangle \Dashv A$ αν και μόνο αν είναι $\langle w, w', \dots, w^k\rangle \Dashv A$, όπου κ=max(i, n), και παρομοίως για τις αντίστοιχες από τις προτάσεις που εμφανίζονται εντός των $\mathcal{L}^{0(i-2)}$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^{2\prime}\dots$, $\mathcal{L}^{(i-1)}$. Για πρόταση της $\mathcal{L}^{0*}$ με μορφή $\mathcal{Definitely}$A και δείκτη i-1, θα γράφουμε $\langle w, w', \dots, w^{i-1}\rangle \vDash \mathcal{Definitely}A$ αν και μόνο αν ισχύει ότι κάθε αντικείμενο που το w^{i-1} κατατάσσει ως αποδεκτό επιβεβαιώνει την A. Θα γράφουμε $\langle w, w', \dots, w^{i-1}\rangle \Dashv \mathcal{Definitely}A$ αν και μόνο αν υπάρχει αντικείμενο που κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w^{i-1} και διαψεύδει την A. Παρομοίως για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις της μορφής $\langle \mathcal{Definitely}, A\rangle$.

Για αντικείμενο x εντός του D^i και A πρόταση που περιέχεται εντός αυτού, και της οποίας ο δείκτης είναι j, με $0 \leq j < i-1$ και j μεγαλύτερο ή ίσο του εκθέτη της γλώσσας εντός της οποίας εμφανίζεται η A, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση, τότε το ζεύγος $\langle\langle z, z', \dots, z^{i-1}\rangle, A\rangle$ θα εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της έκφρασης ‘Txy’ αν και μόνο αν $[\forall x^j \forall x^{j-1} \dots \forall x((x^j \in W^j \wedge x^{j-1} \in W^{j-1} \wedge \dots \wedge x \in W^0 \wedge z^j \sqsubseteq x^j \wedge z^{j-1} \sqsubseteq x^{j-1} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{j-1} \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{j-2} \in Val^{(j-1)+}(x^{j-1}, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (\langle x, x', \dots, x^j, z^{j+1}, z^{j+2}, \dots, z^{i-1}\rangle \Dashv (A)_{Aj \cup Sj} \rightarrow x^j \in Val^{(j+1)-}(z^{j+1}, \text{αποδεκτό})))\ ]$, ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν είναι $[\exists x^j\ \exists x^{j-1} \dots \exists x(x^j \in W^j \wedge x^{j-1} \in W^{j-1} \wedge \dots \wedge x \in W^0 \wedge z^j \sqsubseteq x^j \wedge z^{j-1} \sqsubseteq x^{j-1} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^j \in Val^{(j+1)+}(z^{j+1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{j-1} \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, x', \dots, x^j, z^{j+1}, z^{j+2}, \dots, z^{i-1}\rangle \Dashv (A)_{Aj \cup Sj}\ )]$. Αν ο δείκτης j της A είναι μικρότερος του εκθέτη n της γλώσσας εντός της οποίας αυτή εμφανίζεται τότε το ζεύγος $\langle\langle z, z', \dots, z^{i-1}\rangle, A\rangle$ θα εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της έκφρασης ‘Txy’ αν και μόνο αν ισχύει ότι $\langle z, z', \dots, z^n\rangle \vDash A$, ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν είναι $\langle z, z', \dots, z^n\rangle \Dashv A$. Αν ο δείκτης της A είναι i-1, τότε το ζεύγος $\langle\langle z, z', \dots, z^{i-1}\rangle, A\rangle$ θα εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της έκφρασης ‘Txy’ αν και μόνο αν $[z^{i-1} \in Val^{(i)+}(w^i, \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x^{i-1} \forall x^{i-2} \dots \forall x((x^{i-1} \in W^{i-1} \wedge x^{i-2} \in W^{i-2} \wedge \dots \wedge x \in W^0 \wedge z^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge z^{i-2} \sqsubseteq x^{i-2} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{i-2} \in Val^{(i-1)+}(x^{i-1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-3} \in Val^{(i-2)+}(x^{i-2}, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (\langle x, x', \dots, x^{i-1}\rangle \Dashv (A)_{Ai \cup Si} \rightarrow x^{i-1} \in Val^{(i)-}(w^i, \text{αποδεκτό})))\ ]$, ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν είναι $[z^{i-1} \in Val^{(i)-}(w^i, \text{φυσιολογικό}) \vee (z^{i-1} \in Val^{(i)+}(w^i, \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x^{i-1} \exists x^{i-2} \dots \exists x(x^{i-1} \in W^{i-1} \wedge x^{i-2} \in W^{i-2} \wedge \dots \wedge x \in W^0 \wedge z^{i-1} \sqsubseteq x^{i-1} \wedge z^{i-2} \sqsubseteq x^{i-2} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{i-2} \in Val^{(i-1)+}(x^{i-1}, \text{αποδεκτό}) \wedge x^{i-3} \in Val^{(i-2)+}(x^{i-2}, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, x', \dots, x^{i-1}\rangle \Dashv (A)_{Ai \cup Si} \wedge x^{i-1} \in Val^{(i)+}(w^i,$

αποδεκτό)))]. Για Α πρόταση που ανήκει στην $\mathcal{L}^{(i-1)}$, ή υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει αυτής, στην περίπτωση που ζεύγος <<z, z', …, z^{i-1}>, A> τίθεται εντός της έκτασης της έκφρασης 'Txy' θα εντάσσεται εντός της έκτασης και η δυάδα <z^{i-1}, A>, ενώ στην περίπτωση που ζεύγος που ζεύγος <<z, z', …, z^{i-1}>, A> εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αυτό θα τίθεται επίσης εντός της αντιέκτασης. Κάθε διατεταγμένο ζεύγος αντικειμένων που ανήκουν στο D^i το οποίο δεν εντάσσεται σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες θα τίθεται πάντα εντός της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης.

Τέλος, για αντικείμενο Α εντός του D^i που είναι πρόταση κάποιας εκ των $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, …, $\mathcal{L}^{(i-1)}$ με δείκτη j, όπου 0≤j<i-1, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση, θα ισχύει ότι αυτό εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της έκφρασης 'Ex' αν και μόνο αν ισχύει ότι ∀x(x∈$Val^{(i)+}$(w^i, επίπεδο διαμόρφωσης)→ <x, A>∈$Val^{(i)+}$(w^i, T)), ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν ισχύει ότι ∃x(x∈$Val^{(i)+}$(w^i, επίπεδο διαμόρφωσης) ∧ <x, A>∈$Val^{(i)+}$(w^i, T)). Αν είναι πρόταση κάποιας εκ των $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, …, $\mathcal{L}^{(i-1)}$, ή αντίστοιχη υβριδική πρόταση, με δείκτη i-1, τότε θα εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της έκφρασης 'Ex' αν και μόνο αν ισχύει ότι ∀x^{i-1}∀x^{i-2}…∀x((x^{i-1}∈W^{i-1} ∧ x^{i-2}∈W^{i-2} ∧ … ∧ x∈W^0 ∧ x^{i-1}∈$Val^{(i)+}$(w^i, φυσιολογικό) ∧ x^{i-2}∈$Val^{(i-1)+}$(x^{i-1}, φυσιολογικό) ∧ x^{i-3}∈$Val^{(i-2)+}$(x^{i-2}, φυσιολογικό) ∧ … ∧ x∈$Val^{(1)+}$(x', φυσιολογικό))→ <<x, x', x'', …, x^{i-1}>, A>∈$Val^{(i)+}$(w^i, T)), ενώ θα εντάσσεται εντός της αντιέκτασης αν και μόνο αν ισχύει ότι ∃x^{i-1}∃x^{i-2}…∃x(x^{i-1}∈W^{i-1} ∧ x^{i-2}∈W^{i-2} ∧ … ∧ x∈W^0 ∧ x^{i-1}∈$Val^{(i)+}$(w^i, φυσιολογικό) ∧ x^{i-2}∈$Val^{(i-1)+}$(x^{i-1}, φυσιολογικό) ∧ x^{i-3}∈$Val^{(i-2)+}$(x^{i-2}, φυσιολογικό) ∧ … ∧ x∈$Val^{(1)+}$(x', φυσιολογικό) ∧ <<x, x', x'', …, x^{i-1}>, A>∈$Val^{(i)-}$(w^i, T)).

Δεδομένων λοιπόν αντικειμένων w, w', …, w^i τέτοιων ώστε w∈W^0, w'∈W^1, …, w^i∈W^i, καθώς και αντικειμένων x, y που ανήκουν στο D^i, στην περίπτωση που το ζεύγος <x, y> εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της έκφρασης 'Txy' θα γράφουμε <w, w', …, w^i> ⊨<T, <x,y>>, ενώ στην περίπτωση που εντάσσεται εντός της αντιέκτασης θα γράφουμε <w, w', …, w^i> ⫤<T, <x,y>>. Αν η $\mathcal{L}^{(i)}$ περιέχει αντίστοιχες ατομικές σταθερές {x}, {y} τότε στην πρώτη περίπτωση θα γράφουμε και <w, w', …, w^i> ⊨$T_{\{x\}}${y} , ενώ στην δεύτερη περίπτωση θα γράφουμε και <w, w', …, w^i> ⫤$T_{\{x\}}${y}. Για έκφραση $\mathcal{L}^{(i)}$ της μορφής 'x αποδεκτό', ή 'x φυσιολογικό', ή 'Δx', ή 'x επίπεδο διαμόρφωσης', ή 'Ex', θα γράφουμε <w, w', …, w^i>⊨< αποδεκτό , α>, ή <w, w', …, w^i>⊨ < φυσιολογικό , α>, ή <w, w', …, w^i>⊨< Δ , α>, ή <w, w', …, w^i>⊨< επίπεδο διαμόρφωσης , α>, ή <w, w', …, w^i>⊨< E , α>, αν και μόνο αν το αντικείμενο α εντάσσεται από το w^i εντός της έκτασης της αντίστοιχης κατηγορηματικής έκφρασης. Θα γράφουμε <w, w', …, w^i>⫤< αποδεκτό , α>, ή <w, w', …, w^i>⫤ < φυσιολογικό , α>, ή <w, w',

…, w^i>⫤< Δ , α>, ή <w, w’, …, w^i>⫤< επίπεδο διαμόρφωσης , α>, ή <w, w’, …, w^i>⫤< Ε , α>, αν και μόνο αν το αντικείμενο α εντάσσεται από το w^i εντός της αντιέκτασης της συγκεκριμένης έκφρασης. Αν η $\mathcal{L}^{(i)}$ περιέχει και ατομική σταθερά a που αναφέρεται στο α τότε στην πρώτη περίπτωση θα γράφουμε και <w, w’, …, w^i>⊨(a αποδεκτό), ή <w, w’, …, w^i>⊨ (a φυσιολογικό), ή <w, w’, …, w^i>⊨(Δa), ή <w, w’, …, w^i>⊨(a επίπεδο διαμόρφωσης), ή <w, w’, …, w^i>⊨(Εα) αντίστοιχα, ενώ στην δεύτερη περίπτωση <w, w’, …, w^i>⫤(a αποδεκτό), ή <w, w’, …, w^i>⫤(a φυσιολογικό), ή <w, w’, …, w^i>⫤(Δa), ή <w, w’, …, w^i>⫤(a επίπεδο διαμόρφωσης), ή <w, w’, …, w^i>⫤(Εα) αντίστοιχα. Για πρόταση της $\mathcal{L}^0$* με μορφή $\mathcal{Definitely}$A και δείκτη i θα γράφουμε, εντός της $\mathcal{L}^M$, <w, w’, …, w^{i-1}, w^i>⊨ $\mathcal{Definitely}$A αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο z που ανήκει στο D^i και κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w^i ισχύει ότι <w, w’, …, z >⊨A ενώ θα γράφουμε <w, w’, …, w^{i-1}, w^i>⫤ $\mathcal{Definitely}$A αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο z που ανήκει στο D^i και κατατάσσεται ως αποδεκτό από το w^i ισχύει ότι <w, w’, …, z >⫤A. Παρομοίως και για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις με μορφή < $\mathcal{Definitely}$, A >.

Έστω πρόταση της $\mathcal{L}^{(i)}$ με μορφή Txy, αν το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η ατομική σταθερά y είναι επιπέδου j τότε αναθέτουμε στην Txy δείκτη j+1. Παρομοίως, για πρόταση της $\mathcal{L}^{(i)}$ με μορφή Ex, αν το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η ατομική σταθερά x είναι επιπέδου j τότε αναθέτουμε στην Ex δείκτη j+1. Αναθέτουμε στις υπόλοιπες από τις προτάσεις της $\mathcal{L}^{(i)}$ δείκτη i. Παρομοίως για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις.

Ορίζεται κατ’ αυτόν τον τρόπο ερμηνεία <<D^0, W^0, $\sqsubseteq^0$, $Val^{(0)+}$, $Val^{(0)-}$>, <D^1, W^1, $\sqsubseteq^1$, $Val^{(1)+}$, $Val^{(1)-}$>, <D^2, W^2, $\sqsubseteq^2$, $Val^{(2)+}$, $Val^{(2)-}$>, … > της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … .

Για τις ατομικές προτάσεις που εμφανίζονται εντός των $\mathcal{L}^0$*, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … , θα είναι:

- Για πρόταση $(F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_i$ που ανήκει στην $\mathcal{L}^k$ θα είναι <w, w’, w’’, …, w^j>⊨($F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_i$ αν και μόνο αν < $Val^{(k)+}(w^k, t_1)$, $Val^{(k)+}(w^k, t_2)$, …, $Val^{(k)+}(w^k, t_n)$> ∈ $Val^{(k)+}(w^k, F)$, όπου i, k≤j.
- Για πρόταση $(F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_i$ που ανήκει στην $\mathcal{L}^k$ θα είναι <w, w’, w’’, …, w^j>⫤($F(t_1, t_2, \ldots, t_n))_i$ αν και μόνο αν < $Val^{(k)+}(w^k, t_1)$, $Val^{(k)+}(w^k, t_2)$, …, $Val^{(k)+}(w^k, t_n)$> ∈ $Val^{(k)-}(w^k, F)$, όπου i, k≤j.

Για i, j φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε να είναι i≤j, καθώς και πρόταση A της $\mathcal{L}^0$*, θα είναι:

- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash (\mathcal{Definitely}\ A)_i$ αν και μόνο αν $\forall x(x \in Val^{i+}(w^i, \text{αποδεκτό}) \rightarrow (\langle \ldots, x, \ldots \rangle \vDash (A)_{i-1}))$, όπου με την συμβολοσειρά $\langle \ldots, x, \ldots \rangle$ αναφερόμαστε στην διαμόρφωση της ιεραρχίας που προκύπτει από την $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle$ αν στην θέση του $w^{(i-1)}$ θέσουμε την διαμόρφωση x της $\mathcal{L}^{(i-1)}$.
- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv (\mathcal{Definitely}\ A)_i$ αν και μόνο αν $\exists x(x \in Val^{i+}(w^i, \text{αποδεκτό}) \wedge (\langle \ldots, x, \ldots \rangle \Dashv (A)_{i-1}))$

Αν A, B προτάσεις που εμφανίζονται εντός της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … και i, j φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε να είναι $i \leq j$, τότε είναι:

- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash (A \rightarrow B)_i$ αν και μόνο αν $\sim(\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash (A)_m \wedge \langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv (B)_\kappa)$, όπου $k, m \leq i \leq j$.
- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv (A \rightarrow B)_i$ αν και μόνο αν $(\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash (A)_m \wedge \langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv (B)_k)$, όπου $k, m \leq i \leq j$.
- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash (\sim A)_i$ αν και μόνο αν $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv (A)_i$
- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv (\sim A)_i$ αν και μόνο αν $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash (A)_i$
- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash \forall x A(\ldots x \ldots)_i$ αν και μόνο αν $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash \langle \forall x, A(\ldots x \ldots) \rangle_i$
- $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv \forall x A(\ldots x \ldots)_i$ αν και μόνο αν $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv \langle \forall x, A(\ldots x \ldots) \rangle_i$

Συντομογραφούμε τις προτάσεις με μορφή $(\sim(A \rightarrow \sim B))_i$ ως $(A \wedge B)_i$, αυτές με μορφή $(\sim A \rightarrow B)_i$ ως $(A \vee B)_i$, ενώ αυτές με μορφή $(\sim \forall \sim x A(\ldots x \ldots))_i$ ως $(\exists x A(\ldots x \ldots))_i$.

Για τις αντίστοιχες υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει των εκφράσεων της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … θα είναι:

- Για υβριδική πρόταση $\langle F, \langle o_1, o_2, \ldots, o_n \rangle \rangle_i$ που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^k$ και του D^k θα είναι $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \vDash \langle F, \langle o_1, o_2, \ldots, o_n \rangle \rangle_i$ αν και μόνο αν $\langle Val^{(k)+}(w, o_1), Val^{(k)+}(w, o_1), \ldots, Val^{(k)+}(w, o_1) \rangle \in Val^{(k)+}(w, F)$, όπου $i, k \leq j$.
- Θα είναι $\langle w, w', w'', \ldots, w^j \rangle \Dashv \langle F, \langle o_1, o_2, \ldots, o_n \rangle \rangle_i$ αν και μόνο αν $\langle Val^{(k)+}(w, o_1), Val^{(k)+}(w, o_1), \ldots, Val^{(k)+}(w, o_1) \rangle \in Val^{(k)-}(w, F)$, όπου $i, k \leq j$.

Ενώ αν A είναι υβριδική πρόταση που προκύπτει βάσει της $\mathcal{L}^0*$ και του D^0, τότε θα είναι:

- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash <\mathcal{D}efinitely, <A>>_i$ αν και μόνο αν $\forall x(x \in Val^{i+}(w^i, \text{αποδεκτό}) \to <\ldots, x, \ldots> \vDash <A>)$, όπου με την συμβολοσειρά $<\ldots, x, \ldots>$ αναφερόμαστε στην διαμόρφωση της ιεραρχίας που προκύπτει από την $<w, w', w'', \ldots, w^j>$ αν στην θέση του $w^{(i-1)}$ θέσουμε την διαμόρφωση x της $\mathcal{L}^{(i-1)}$.
- Θα είναι $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv <\mathcal{D}efinitely, <A>>_i$ αν και μόνο αν $\exists x(x \in Val^{i+}(w^i, \text{αποδεκτό}) \wedge <\ldots, x, \ldots> \Dashv <A>)$

Αν Α, Β υβριδικές προτάσεις που προκύπτουν βάσει της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … , τότε θα είναι:

- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash <\to, A, B>_i$ αν και μόνο αν $\sim(<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash A \wedge <w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv B)$
- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv <\to, A, B>_i$ αν και μόνο αν $(<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash A \wedge <w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv B)$
- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash <\sim, A>_i$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv A$
- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv <\sim, A>_i$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash A$
- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \vDash <\forall x, A(\ldots x \ldots)>_i$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o εντός του D^k είναι $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv [A(\ldots x \ldots)]^o_x$, όπου k ο εκθέτης της γλώσσας βάσει της οποίας προκύπτει η $<\forall x, A(\ldots x \ldots)>$.
- $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv <\forall x, A(\ldots x \ldots)>_i$ αν και μόνο αν για κάποιο αντικείμενο o εντός του D^k ισχύει ότι $<w, w', w'', \ldots, w^j> \Dashv [A(\ldots x \ldots)]^o_x$, όπου k ο εκθέτης της γλώσσας βάσει της οποίας προκύπτει η $<\forall x, A(\ldots x \ldots)>$.

Όπως και πριν, ως επίπεδο διαμόρφωσης της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε άπειρο διατεταγμένο σύνολο της μορφής $<w, w', w'', \ldots>$ όπου w επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$, w' επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^1$, w'' επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^2$ κτλ. Για πρόταση Α με δείκτη i που εμφανίζεται εντός της $\mathcal{L}^k$, θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash A$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots, w^m> \vDash A$, ενώ θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \Dashv A$ αν και μόνο αν $<w, w', w'', \ldots, w^m> \Dashv A$, όπου $m=\max(i, k)$.

3.2.4 Μερικά αποτελέσματα

Με βάση αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές αλήθειας και για προτάσεις της $\mathcal{L}^0*$ με δείκτη $i \geq 1$. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα μια πρόταση της μορφής $\mathcal{D}efinitely A \to A$

που ανήκει στην $\mathcal{L}^0*$, και έστω διαμόρφωση <w, w', w'', …> της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … και n-άδα <z, z', …, z^n> τέτοια ώστε $z^{n-1}\in Val^{(n)+}(z^n$, φυσιολογικό$)\wedge$ $z^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(z^{n-1}$, φυσιολογικό$)\wedge \ldots \wedge z\in Val^{(1)+}(z'$, φυσιολογικό), και n ο δείκτης της πρότασης. Έχουμε ήδη δει ότι θα είναι $((\mathit{Definitely}A)_n\rightarrow(A)_{n-1})_n$. Έστω ότι η $\mathcal{L}^{n+1}$ περιέχει τις κατάλληλες ατομικές σταθερές, η συμβολοσειρά '$T_{\{<z,\ z',\ \ldots,\ zn>\}}\{\mathit{Definitely}A\rightarrow A\}$' που εμφανίζεται εντός της πρότασης '$<w, w', w'', \ldots>\vDash T_{\{<z, z', \ldots, zn>\}}\{\mathit{Definitely}A\rightarrow A\}$' της $\mathcal{L}^M$ είναι σύνθετος όρος της τελευταίας, που αναφέρεται σε εκείνη την πρόταση της $\mathcal{L}^{n+1}$ που προκύπτει συνενώνοντας το κατηγορηματικό σύμβολο 'T' αυτής, ατομική σταθερά της που αναφέρεται στο διατεταγμένο σύνολο <z, z', …, z^n>, και ατομική σταθερά της που αναφέρεται στην πρόταση $\mathit{Definitely}A\rightarrow A$ της $\mathcal{L}^n$. Θα ισχύουν τα εξής:

1. $<w, w', w'', \ldots>\vDash T_{\{<z,\ z',\ \ldots,\ zn>\}}\{\mathit{Definitely}A\rightarrow A\}$ αν και μόνο αν $[z^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$)\ \wedge\ \forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((z^n\sqsubseteq x^n\ \wedge\ z^{n-1}\sqsubseteq x^{n-1}\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ z\sqsubseteq x\ \wedge\ x^{n-1}\in Val^{(n-1)+}(x^n$, αποδεκτό$)\wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, αποδεκτό$)\wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$))\rightarrow (<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n , w^{n+1}>\Dashv(\mathit{Definitely}A\rightarrow A)_n \rightarrow x^n\in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)\ ))\ ]$
2. $<w, w', w'', \ldots>\vDash T_{\{<z,\ z',\ \ldots,\ zn>\}}\{\mathit{Definitely}A\rightarrow A\}$ αν και μόνο αν $[z^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$)\ \wedge\ \forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((z^n\sqsubseteq x^n\ \wedge\ z^{n-1}\sqsubseteq x^{n-1}\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ z\sqsubseteq x\ \wedge\ x^{n-1}\in Val^{(n-1)+}(x^n$, αποδεκτό$)\wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, αποδεκτό$)\wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$))\rightarrow ((<x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n , w^{n+1}>\vDash\mathit{Definitely}A\ \wedge <x, x', \ldots, x^{n-1}, x^n , w^{n+1}>\Dashv A)\ \rightarrow\ x^n\in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)\ ))\ ]$
3. $<w, w', w'', \ldots>\vDash T_{\{<z,\ z',\ \ldots,\ zn>\}}\{\mathit{Definitely}A\rightarrow A\}$ αν και μόνο αν $[z^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$)\ \wedge\ \forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((z^n\sqsubseteq x^n\ \wedge\ z^{n-1}\sqsubseteq x^{n-1}\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ z\sqsubseteq x\ \wedge\ x^{n-1}\in Val^{(n-1)+}(x^n$, αποδεκτό$)\ \wedge\ x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, αποδεκτό$)\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ x\in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$))\rightarrow (\ (\forall y^{n-1}\in D^n(y^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$)\rightarrow <x, x', \ldots, y^{n-1}, x^n , w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1})\wedge <x, x', \ldots,x^{n-1}, x^n , w^{n+1}>\Dashv A\ )\rightarrow x^n\in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)\ ))]$

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι αν θεωρήσουμε διαμόρφωση <w, w', w'', …> της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … , και n-άδα <z, z', …, z^n> τέτοια ώστε να είναι $z^n\in Val^{(n+1)+}(z^{n+1}$, φυσιολογικό), τότε το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές. Πράγματι, ας θεωρήσουμε σημεία c^n, c^{n-1}, …, c που συγκεκριμενοποιούν τους αντίστοιχους από τους αρχικούς καθολικούς ποσοδείκτες της πρότασης '$\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((z^n\sqsubseteq x^n \wedge z^{n-1}\sqsubseteq x^{n-1} \wedge \ldots\ \wedge\ z\sqsubseteq x\ \wedge\ x^{n-1}\in Val^{(n-1)+}(x^n$, αποδεκτό$)\ \wedge\ x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, αποδεκτό$)\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ x\in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$))\rightarrow (\ (\forall y^{n-1}\in D^n(y^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, αποδεκτό$)\rightarrow <x, x', \ldots, y^{n-1}, x^n , w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1})\wedge <x, x'$,

$\ldots, x^{n-1}, x^{n}, w^{n+1}>\dashv A) \rightarrow x^{n} \in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό)))’. Έστω ότι είναι $z^{n} \sqsubseteq c^{n} \wedge z^{n-1} \sqsubseteq c^{n-1} \wedge \ldots \wedge z \sqsubseteq c \wedge c^{n-1} \in Val^{(n-1)+}(c^{n}$, αποδεκτό) $\wedge\ c^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(c^{n-1}$, αποδεκτό) $\wedge \ldots \wedge\ c \in Val^{(1)+}(c'$, αποδεκτό). Βλέπουμε τώρα ότι το ηγούμενο της συνεπαγωγής ‘($(\forall y^{n-1} \in D^{n}(y^{n-1} \in Val^{(n)+}(c^{n}$, αποδεκτό)$\rightarrow <c, c', \ldots, y^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1}) \wedge <c, c', \ldots, c^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\dashv A) \rightarrow c^{n} \in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό))’, δηλαδή η σύζευξη ‘$(\forall y^{n-1} \in D^{n}(y^{n-1} \in Val^{(n)+}(c^{n}$, αποδεκτό)$\rightarrow <c, c', \ldots, y^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1}) \wedge <c, c', \ldots, c^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\dashv A$)’ θα προκύπτει πάντα ψευδής. Πράγματι, μέσω απλοποίησης έπεται ότι θα είναι $<c, c', \ldots, c^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\dashv A$, ταυτόχρονα όμως είναι $c^{n-1} \in Val^{(n)+}(c^{n}$, αποδεκτό) και επιπλέον $\forall y^{n-1} \in D^{n}(y^{n-1} \in Val^{(n)+}(c^{n}$, αποδεκτό)$\rightarrow <c, c', \ldots, y^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1})$, οπότε θα πρέπει να ισχύει και $<c, c', \ldots, c^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\vDash A$. Με βάση τα όσα έχουμε θέσει όμως, έπεται επαγωγικά ότι δεν υπάρχει επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας και πρόταση αυτής τέτοια ώστε να ισχύει ότι αυτό τόσο την επιβεβαιώνει όσο και την διαψεύδει. Έπεται άρα ότι η συνεπαγωγή ‘$(\forall y^{n-1} \in D^{n}(y^{n-1} \in Val^{(n)+}(c^{n}$, αποδεκτό)$\rightarrow <c, c', \ldots, y^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1}) \wedge <c, c', \ldots, c^{n-1}, c^{n}, w^{n+1}>\dashv A) \rightarrow c^{n} \in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό)’ θα είναι αληθής και άρα θα ισχύει το ίδιο και για την ‘$\forall x^{n} \forall x^{n-1} \ldots \forall x((z^{n} \sqsubseteq x^{n} \wedge z^{n-1} \sqsubseteq x^{n-1} \wedge \ldots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{n-1} \in Val^{(n-1)+}(x^{n}$, αποδεκτό) $\wedge\ x^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, αποδεκτό) $\wedge \ldots \wedge\ x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό))$\rightarrow$ ($(\forall y^{n-1} \in D^{n}(y^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^{n}$, αποδεκτό)$\rightarrow <x, x', \ldots, y^{n-1}, x^{n}, w^{n+1}>\vDash(A)_{n-1}) \wedge <x, x', \ldots, x^{n-1}, x^{n}, w^{n+1}>\dashv A) \rightarrow x^{n} \in Val^{(n+1)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό)))’. Καταλήγουμε άρα ότι θα είναι $<w, w', w'', \ldots>\vDash T_{\{<z, z', \ldots, zn>\}}\{\mathcal{Definitely} A \rightarrow A\}$.

Από την άλλη, προτάσεις της μορφής $A \rightarrow \mathcal{Definitely} A$ υπάρχει περίπτωση να προκύπτουν μη αληθείς. Πράγματι, ας θεωρήσουμε για παράδειγμα πρόταση ‘$Fa \rightarrow \mathcal{Definitely} Fa$’ που ανήκει στην $\mathcal{L}^{0}*$, και έστω διαμόρφωση $<w, w', w'', \ldots>$ της ιεραρχίας $\mathcal{L}^{0}*, \mathcal{L}^{1}, \mathcal{L}^{2}, \mathcal{L}^{3}, \mathcal{L}^{4}, \ldots$, και δυάδα $<z, z'>$ τέτοια ώστε $z \in Val^{(1)+}(z'$, φυσιολογικό). Όσον αφορά τους δείκτες, θα είναι $((Fa)_{0} \rightarrow (\mathcal{Definitely} A)_{1})_{1}$. Η συμβολοσειρά ‘$T_{\{<z, z'>\}}\{Fa \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa\}$’ αποτελεί σύνθετο όρο της $\mathcal{L}^{M}$ που αναφέρεται στην πρόταση της $\mathcal{L}^{2}$ που προκύπτει συνενώνοντας το κατηγορηματικό σύμβολο ‘T’ αυτής, ατομική σταθερά αυτής που αναφέρεται στην δυάδα $<z, z'>$, και ατομική σταθερά αυτής που αναφέρεται στην πρόταση ‘$Fa \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa$’ της $\mathcal{L}^{0}*$. Θα ισχύουν τα εξής:

1. $<w, w', w'', \ldots>\dashv(T_{\{<z, z'>\}}\{Fa \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa\})_{2}$ αν και μόνο αν $[z' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό) $\wedge\ \exists x' \exists x(z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό) $\wedge <x, x', w''>\dashv(Fa \rightarrow \mathcal{Definitely} Fa)_{1} \wedge x' \in Val^{(2)+}(w''$, αποδεκτό))]

2. $<w, w', w'', \ldots> \dashv (T_{\{<z,\ z'>\}}\{Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely\ Fa\})_2$ αν και μόνο αν $[z' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge \exists x' \exists x(z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge <x, x', w''> \vDash (Fa)_0 \wedge$ $<x, x', w''> \dashv (\mathcal{D}efinitely Fa)_1 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w''$, αποδεκτό$)\ )\ ]$
3. $<w, w', w'', \ldots> \dashv (T_{\{<z,\ z'>\}}\{Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely\ Fa\})_2$ αν και μόνο αν $[z' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge \exists x' \exists x(z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge <x, x', w''> \vDash (Fa)_0 \wedge$ $\exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge <y, x', w''> \dashv (Fa)_0\ ) \wedge x' \in Val^{(2)+}(w''$, αποδεκτό$)\ )\ ]$

Με άλλα λόγια, προκειμένου η πρόταση ‘$Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely Fa$‘ να προκύψει μη αληθής ως προς διαμόρφωση που κατατάσσεται ως φυσιολογική, αρκεί να θεωρήσουμε ερμηνεία της ιεραρχίας τέτοια ώστε για σημείο $<w, w', w''>$ και δυάδα $<z, z'>$ τέτοια ώστε $z' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge z \in Val^{(1)+}(z'$, φυσιολογικό$)$ να υπάρχει τρόπος διαμόρφωσης $<x, x', w''>$ τέτοιος ώστε να είναι $z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x$ με $<x, x', w''> \vDash Fa$, και επιπλέον να υπάρχει σημείο y τέτοιο ώστε το x’ επιβεβαιώνει ότι είναι αποδεκτό και για το οποίο ισχύει ότι το σημείο $<y, x', w''>$ διαψεύδει την ‘Fa’. Είναι εμφανές όμως ότι υπάρχουν μοντέλα των γλωσσών της ιεραρχίας τέτοια ώστε να υπάρχει διαμόρφωση για την οποία αυτό ισχύει. Καταλήγουμε έτσι ότι προτάσεις της μορφής $A \rightarrow \mathcal{D}efinitely A$ δεν θα προκύπτουν πάντα αληθείς ως προς φυσιολογική διαμόρφωση της ιεραρχίας.

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε και ότι μια πρόταση της μορφής $\mathcal{D}efinitely A \rightarrow \mathcal{D}efinitely \mathcal{D}efinitely A$ δεν θα είναι πάντα αληθής. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την πρόταση ‘$\mathcal{D}efinitely Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely \mathcal{D}efinitely Fa$’ και έστω διαμόρφωση $<w, w', w'', \ldots>$ της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … , και τριάδα $<z, z', z''>$ τέτοια ώστε $z' \in Val^{(2)+}(z''$, φυσιολογικό$) \wedge z \in Val^{(1)+}(z'$, φυσιολογικό$)$. Όσον αφορά τους δείκτες, θα είναι $((\mathcal{D}efinitely(Fa)_0)_1 \rightarrow (\mathcal{D}efinitely\ (\mathcal{D}efinitely\ (Fa)_0)_1)_2)_2$. Έστω επίσης ‘$T_{\{<z,\ z',\ z''>\}}\{\mathcal{D}efinitely Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely \mathcal{D}efinitely Fa\}$’ σύνθετος όρος της $\mathcal{L}^M$ που αναφέρεται στην πρόταση της $\mathcal{L}^3$ που προκύπτει συνενώνοντας το κατηγορηματικό σύμβολο ‘T’ που αυτή περιέχει, ατομική σταθερά της που αναφέρεται στην πρόταση ‘$\mathcal{D}efinitely Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely \mathcal{D}efinitely Fa$’, της $\mathcal{L}^0*$, και ατομική σταθερά της που αναφέρεται στην τριάδα $<z, z', z''>$. Έστω επίσης ότι είναι $z'' \in Val^{(3)+}(w'''$, φυσιολογικό$)$. Θα ισχύουν τα εξής:

1. $<w, w', w'', \ldots> \dashv (T_{\{<z,\ z',\ z''>\}}\{\mathcal{D}efinitely Fa \rightarrow \mathcal{D}efinitely \mathcal{D}efinitely Fa\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w'''$, φυσιολογικό$) \wedge \exists x'' \exists x' \exists x(z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge$

$x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, x', x'', w''' \rangle \Dashv (\mathit{Definitely}Fa \rightarrow \mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa)_2 \wedge x'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό}))\ ]$

2. $\langle w, w', w'', \ldots \rangle \Dashv (T_{\{\langle z, z', z'' \rangle\}}\{\mathit{Definitely}Fa \rightarrow \mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x'' \exists x' \exists x(z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, x', x'', w''' \rangle \vDash (\mathit{Definitely}Fa)_0 \wedge \langle x, x', x'', w''' \rangle \Dashv (\mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa)_2 \wedge x'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό}))\ ]$
3. $\langle w, w', w'', \ldots \rangle \Dashv (T_{\{\langle z, z', z'' \rangle\}}\{\mathit{Definitely}Fa \rightarrow \mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x'' \exists x' \exists x(z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, x', x'', w''' \rangle \vDash (Fa)_0) \wedge \exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge (\langle x, y', x'', w''' \rangle \Dashv (\mathit{Definitely}Fa)_1)\ ) \wedge x'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό})\ )\ ]$
4. $\langle w, w', w'', \ldots \rangle \Dashv (T_{\{\langle z, z', z'' \rangle\}}\{\mathit{Definitely}Fa \rightarrow \mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x'' \exists x' \exists x(z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, x', x'', w''' \rangle \vDash (Fa)_0) \wedge \exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \wedge (\langle y, y', x'', w''' \rangle \Dashv (Fa)_0)\ )\ ) \wedge x'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{αποδεκτό})\ )\ ]$

Προκειμένου λοιπόν το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής να προκύψει με βάση τα όσα έχουμε θέσει αληθές, αρκεί να θεωρήσουμε ερμηνεία της ιεραρχίας σύμφωνα με την οποία η διαμόρφωση $\langle z, z', z'', w''' \rangle$είναι φυσιολογική, και υπάρχει αποδεκτός τρόπος $\langle x, x', x'', w''' \rangle$ περαιτέρω διαμόρφωσης της ιεραρχίας τέτοιος ώστε ενώ σύμφωνα με το x' κάθε αποδεκτό σημείο που ανήκει στο D^1 επιβεβαιώνει την 'Fa', παρόλα αυτά υπάρχει σημείο που ανήκει στο D^2 και το οποίο είναι αποδεκτό σύμφωνα με το x'', σύμφωνα με το οποίο υπάρχει αποδεκτό σημείο στο D^1 που να απορρίπτει την Fa. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μοντέλο τέτοιο ώστε να ισχύει αυτό, και άρα έπεται ότι όντως υπάρχει περίπτωση μια πρόταση της μορφής $\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}\mathit{Definitely}A$ να μην είναι αληθής.

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνήθη σωρειτική ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100000}$ για το κατηγόρημα 'F', ερμηνεία της ιεραρχίας που σέβεται τις παραδοχές που έχουμε κάνει, διαμόρφωση $\langle w, w', w'', \ldots \rangle$ της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*, \mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4\ldots$, και αντικείμενο z τέτοιο ώστε $z \in W^0$. Έστω επίσης ότι η $\mathcal{L}^1$ περιέχει τις απαραίτητες ατομικές σταθερές, με τον όρο '$T_{\{z\}}\{Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}\}$' αναφερόμαστε στην πρόταση της $\mathcal{L}^1$ που προκύπτει συνενώνοντας την κατηγορηματική έκφραση 'T', ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρεται στο επίπεδο διαμόρφωσης z της $\mathcal{L}^0$, και ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^1$ που αναφέρεται στην πρόταση $Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}$ της $\mathcal{L}^0$. Παρατηρούμε ότι επίπεδα διαμόρφωσης της ιεραρχίας που επιβεβαιώνουν ότι το z είναι φυσιολογικό, θα εντάσσουν ζεύγη της μορφής $<z, Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}>$ εντός της έκτασης των διαφόρων εκφράσεων της μορφής 'Txy'. Πράγματι, είναι:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{z\}}\{Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}\})_1$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[z \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x(z \sqsubseteq x \rightarrow (<x, w', w''> \dashv (Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})_0 \rightarrow x \in Val^{(1)-}(w', \text{αποδεκτό})))]$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{z\}}\{Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}\})_1$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[z \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x(z \sqsubseteq x \rightarrow ((<x, w', w''> \vDash (Fa_i)_0 \wedge <x, w', w''> \dashv (Fa_{i+1})_0) \rightarrow x \in Val^{(1)-}(w', \text{αποδεκτό})))]$

Οπότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι αν το w' κατατάσσει το z ως φυσιολογικό τότε το δεξί μέλος της παραπάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές.

Με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει διαπιστώνουμε ότι ανάλογα θα ισχύουν και για προτάσεις της μορφής $\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}Fa_{i+1}$. Έστω λοιπόν δυάδα $<z, z'>$ τέτοια ώστε $z \in Val^{(1)+}(z', \text{φυσιολογικό})$ καθώς και ότι η $\mathcal{L}^2$ περιέχει τις κατάλληλες ατομικές σταθερές. Η συμβολοσειρά '$T_{\{<z, z'>\}}\{\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}Fa_{i+1}\}$' είναι σύνθετος όρος της $\mathcal{L}^M$ που αναφέρεται στην πρόταση της $\mathcal{L}^2$ που προκύπτει συνενώνοντας την κατηγορηματική έκφραση 'T', ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^2$ που αναφέρεται στην πρόταση $\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1}$ της $\mathcal{L}^0$*, και ατομική σταθερά της $\mathcal{L}^2$ που αναφέρεται στην διατεταγμένη δυάδα $<z, z'>$. Θα είναι:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<z, z'>\}}\{\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}Fa_{i+1}\})_2$ αν και μόνο αν $[z' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((<x, x', w''> \dashv (\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}Fa_{i+1})_1) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<z, z'>\}}\{\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}Fa_{i+1}\})_2$ αν και μόνο αν $[z' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((<x, x', w''> \vDash (\mathcal{Definitely}Fa_i)_1 \wedge <x, x', w''> \dashv (\mathcal{Definitely}Fa_{i+1})_1) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$
3. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<z, z'>\}}\{\mathcal{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}Fa_{i+1}\})_2$ αν και μόνο αν $[z' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow$

$((\forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, x', w''\rangle \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge (\langle y, x', w''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0))) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$

Έπεται ότι αν το w'' κατατάσσει το z' ως φυσιολογικό, τότε το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές. Πράγματι, έστω σημεία c', c που συγκεκριμενοποιούν τους πιο πάνω καθολικούς ποσοδείκτες, τέτοια ώστε να είναι $z' \sqsubseteq c' \wedge z \sqsubseteq c \wedge c \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό})$. Τέλος, έστω ότι ισχύει πως $(\forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, c', w''\rangle \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle y, c', w''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0))$. Ας θεωρήσουμε σημείο b που συγκεκριμενοποιεί τον υπαρκτικό ποσοδείκτη, έπεται ότι θα είναι $b \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle b, c', w''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0$. Έχουμε όμως ότι θα είναι και $\forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, c', w''\rangle \vDash (Fa_i)_0)$, και άρα αφού είναι $b \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό})$ έπεται ότι θα είναι $\langle b, c', w''\rangle \vDash (Fa_i)_0$. Καταλήξαμε έτσι ότι θα είναι $\langle b, c', w''\rangle \vDash (Fa_i)_0$ και $\langle b, c', w''\rangle \Dashv(Fa_{i+1})_0$, έχουμε θεωρήσει όμως ότι αντικείμενα όπως το b κατατάσσονται πάντα ως μη αποδεκτά. Με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει έπεται ότι θα κατατάσσεται ως μη αποδεκτό και σημείο που κατατάσσει το b ως αποδεκτό, οπότε έπεται ότι θα είναι $[z' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, x', w''\rangle \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge (\langle y, x', w''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0))) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$.

Ανάλογα ισχύουν και για προτάσεις που περιέχουν περισσότερες εμφανίσεις του τελεστή '*Definitely* '. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα πρόταση της μορφής $\mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely} Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\mathit{Definitely} Fa_{i+1}$, όσον αφορά τους δείκτες θα είναι $((\mathit{Definitely}\ (\mathit{Definitely}(Fa_i)_0)_1)_2 \rightarrow (\mathit{Definitely}(\mathit{Definitely}(Fa_{i+1})_0)_1)_2)_2$. Έστω επίσης τριάδα $\langle z, z', z''\rangle$ τέτοια ώστε να είναι $z' \in Val^{(2)+}(z'', \text{φυσιολογικό}) \wedge z \in Val^{(1)+}(z', \text{φυσιολογικό})$, και έστω ότι η $\mathcal{L}^3$ περιέχει τα ανάλογα ονόματα. Θα είναι:

1. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash (T_{\{\langle z, z', z''\rangle\}}\{\mathit{Definitely}\mathit{Definitely} Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x'' \forall x' \forall x((z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (\langle x, x', x'', w'''\rangle \Dashv ((\mathit{Definitely}\mathit{Definitely} Fa_i)_2 \rightarrow (\mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1})_2) \rightarrow x'' \in Val^{(3)-}(w''', \text{αποδεκτό})))]$
2. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash (T_{\{\langle z, z', z''\rangle\}}\{\mathit{Definitely}\mathit{Definitely} Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x'' \forall x' \forall x((z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (($

$\langle x, x', x'', w'''\rangle \vDash (\mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa_i)_2 \wedge \langle x, x', x'', w'''\rangle \Dashv (\mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1})_2) \rightarrow x'' \in Val^{(3)-}(w''', \text{αποδεκτό})\ ))]$

3. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash (T_{\{\langle z, z', z''\rangle\}}\{\mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x''\forall x'\forall x((z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle x, y', x'', w'''\rangle \vDash (\mathit{Definitely}\ Fa_i)_1) \wedge \exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, y', x'', w'''\rangle \Dashv (\mathit{Definitely}\ Fa_{i+1})_1\ )) \rightarrow x'' \in Val^{(3)-}(w''', \text{αποδεκτό})\ ))]$
4. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash (T_{\{\langle z, z', z''\rangle\}}\{\mathit{Definitely}\mathit{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\})_3$ αν και μόνο αν $[z'' \in Val^{(3)+}(w''', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x''\forall x'\forall x((z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, y', x'', w'''\rangle \vDash (Fa_i)_0)\ ) \wedge \exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle y, y', x'', w'''\rangle \Dashv (\ Fa_{i+1})_0)\ )) \rightarrow x'' \in Val^{(3)-}(w''', \text{αποδεκτό})\ ))]$

Όπως και με την περίπτωση των προτάσεων της μορφής $\mathit{Definitely}Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{i+1}$, έτσι κι εδώ θα έπεται με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές. Πράγματι, έστω σημεία c, c′, c″ που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς καθολικούς ποσοδείκτες της πρότασης ‘$\forall x''\forall x'\forall x((z'' \sqsubseteq x'' \wedge z' \sqsubseteq x' \wedge z \sqsubseteq x \wedge x' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, y', x'', w'''\rangle \vDash (Fa_i)_0)\ ) \wedge \exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle y, y', x'', w'''\rangle \Dashv (\ Fa_{i+1})_0\ )\ )) \rightarrow x'' \in Val^{(3)-}(w''', \text{αποδεκτό})\ ))$ ’, και τα οποία είναι τέτοια ώστε να ισχύει ότι $z'' \sqsubseteq c'' \wedge z' \sqsubseteq c' \wedge z \sqsubseteq c \wedge c' \in Val^{(2)+}(c'', \text{αποδεκτό}) \wedge c \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό})$. Ας υποθέσουμε ότι είναι $\forall y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, y', x'', w'''\rangle \vDash (Fa_i)_0)\ ) \wedge \exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle y, y', x'', w'''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0)\ )$, και έστω b, b′ σημεία που συγκεκριμενοποιούν τους υπαρκτικούς ποσοδείκτες που εμφανίζονται εντός της ‘$\exists y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \wedge \exists y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle y, y', x'', w'''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0)\ )$’. Έπεται ότι θα είναι $b' \in Val^{(2)+}(c'', \text{αποδεκτό})$, $b \in Val^{(2)+}(b', \text{αποδεκτό})$, και $\langle b, b', c'', w'''\rangle \Dashv (Fa_{i+1})_0$. Εφόσον όμως είναι $\forall y' \in D^2(y' \in Val^{(2)+}(x'', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \forall y \in D^1(y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \rightarrow \langle y, y', x'', w'''\rangle \vDash (Fa_i)_0)\ )$, έπεται ότι θα ισχύει και ότι $\langle b, b', c'', w'''\rangle \vDash (Fa_i)_0$. Ας θεωρήσουμε πλαίσιο συζήτησης τέτοιο ώστε οι ομιλητές δεν μπορούν να διακρίνουν μεταξύ των αντικειμένων στα οποία αναφέρονται τα σταθερά σύμβολα ‘a_i’ και ‘a_{i+1}’ ως προς τις σχετικές ιδιότητες, ακόμη και αν χρησιμοποιούν κατάλληλα μετρητικά όργανα. Το b θα είναι λοιπόν κάποιο επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0}*$ που κατατάσσει σε διαφορετικές κατηγορίες αντικείμενα που εντός του συγκεκριμένου πλαισίου οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι να διακρίνουν ως προς τις σχετικές ιδιότητες. Έχουμε θεωρήσει όμως ότι ένας τέτοιος τρόπος διαμόρφωσης δεν μπορεί να κατατάσσεται ως αποδεκτός ως προς ένα πλαίσιο συζήτησης όπως αυτό, και άρα επίπεδο διαμόρφωσης όπως το b’, που τον κατατάσσει ως αποδεκτό θα πρέπει επίσης να κατατάσσεται ως μη αποδεκτό ως προς το συγκεκριμένο πλαίσιο, και παρομοίως για επίπεδο διαμόρφωσης που κατατάσσει ως αποδεκτό το b’.

Γενικότερα, για προτάσεις $\mathcal{D}efinitely$ Ai, $\mathcal{D}efinitely$ Ai+1 με δείκτη j≥1, όπου με τα σύμβολα ‘Ai’ και ‘Ai+1’ αναφερόμαστε σε προτάσεις της μορφής Fa_i και Fa_{i+1} αντίστοιχα, ή $\mathcal{D}efinitely$ Fa_i και $\mathcal{D}efinitely$ Fa_{i+1}, ή $\mathcal{D}efinitely$ $\mathcal{D}efinitely$ Fa_i και $\mathcal{D}efinitely$ $\mathcal{D}efinitely$ Fa_{i+1} κτλ, (j+1)-άδα $<z, z', z'', \dots, z^j>$ τέτοια ώστε $z^{j-1} \in Val^{(j)+}(z^j, \text{φυσιολογικό}) \wedge z^{j-2} \in Val^{(j-1)+}(z^{j-1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \dots \wedge z \in Val^{(1)+}(z', \text{φυσιολογικό})$, αν θεωρήσουμε κατάλληλες ατομικές σταθερές εντός της $\mathcal{L}^{(j+1)}$ τότε θα είναι:

1. $<w, w', w'', \dots> \vDash (T_{\{<z, z', \dots, zj>\}}\{\mathcal{D}efinitely\ Ai \rightarrow \mathcal{D}efinitely\ Ai+1\})_{j+1}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[z^j \in Val^{(j+1)+}(w^{j+1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x^j \forall x^{j-1} \dots \forall x((z^j \sqsubseteq x^j \wedge z^{j-1} \sqsubseteq x^{j-1} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{j-1} \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (<x, x', \dots, x^j, w^{j+1}> \dashv (\mathcal{D}efinitely\ Ai \rightarrow \mathcal{D}efinitely\ Ai+1)_j \rightarrow x^j \in Val^{(j+1)-}(w^{j+1}, \text{αποδεκτό})))]$
2. $<w, w', w'', \dots> \vDash (T_{\{<z, z', \dots, zj>\}}\{\mathcal{D}efinitely\ Ai \rightarrow \mathcal{D}efinitely\ Ai+1\})_{j+1}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[z^j \in Val^{(j+1)+}(w^{j+1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x^j \forall x^{j-1} \dots \forall x((z^j \sqsubseteq x^j \wedge z^{j-1} \sqsubseteq x^{j-1} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{j-1} \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((<x, x', \dots, x^j, w^{j+1}> \vDash (\mathcal{D}efinitely\ Ai)_j \wedge <x, x', \dots, x^j, w^{j+1}> \dashv (\mathcal{D}efinitely\ Ai+1)_j) \rightarrow x^j \in Val^{(j+1)-}(w^{j+1}, \text{αποδεκτό})))]$
3. $<w, w', w'', \dots> \vDash (T_{\{<z, z', \dots, zj>\}}\{\mathcal{D}efinitely\ Ai \rightarrow \mathcal{D}efinitely\ Ai+1\})_{j+1}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[z^j \in Val^{(j+1)+}(w^{j+1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x^j \forall x^{j-1} \dots \forall x((z^j \sqsubseteq x^j \wedge z^{j-1} \sqsubseteq x^{j-1} \wedge \dots \wedge z \sqsubseteq x \wedge x^{j-1} \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \wedge \dots \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y \in D^j(y \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \rightarrow <x, x', \dots, y, x^j, w^{j+1}> \vDash (Ai)_{j-1}) \wedge \exists y \in D^j(y \in Val^{(j)+}(x^j, \text{αποδεκτό}) \wedge <x, x', \dots, y, x^j, w^{j+1}> \dashv (Ai+1)_{j-1})) \rightarrow x^j \in Val^{(j+1)-}(w^{j+1}, \text{αποδεκτό})))]$

Οπότε μπορεί να αποδειχτεί ότι με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές.

Ας θεωρήσουμε και πάλι την σωρειτική ακολουθία $α_1$, $α_2$, …, $α_{100000}$ για το κατηγόρημα ‘F’, με το $α_1$ να είναι ξεκάθαρα F ενώ το $α_{100000}$ ξεκάθαρα να μην είναι, και κάθε αντικείμενο να διαφέρει αμελητέα ως προς τις σχετικές ιδιότητες από τα γειτονικά του. Θεωρούμε επιπλέον ότι εντός της $\mathcal{L}^0*$ περιέχονται ονόματα a_1, a_2, …, a_{100000}, κάθε ένα από τα οποία αναφέρεται στο αντίστοιχο αντικείμενο της ακολουθίας. Έστω διαμόρφωση c της $\mathcal{L}^0*$ που επιβεβαιώνει ως F τα $α_1$ μέχρι και a_{35000}, και διαψεύδει τα $α_{65000}$ μέχρι και $α_{100000}$, και έστω ότι η διαμόρφωση c’ της $\mathcal{L}^1$ θέτει ως αποδεκτές διαμορφώσεις της $\mathcal{L}^0*$ που διακρίνουν μεταξύ αντικειμένων που απέχουν από 9999 θέσεις και πάνω, κατατάσσει ως μη αποδεκτές διαμορφώσεις που διακρίνουν μεταξύ αντικειμένων που απέχουν από 4999 θέσεις και κάτω, ενώ για διαμορφώσεις που αφήνουν κάποιο ενδιάμεσο κενό στις εκτάσεις δεν αποφαίνεται. Έπεται ότι από τις επεκτάσεις του c που επιβεβαιώνουν ότι και αυτό θα θέτει ως αποδεκτές αυτές που διαψεύδουν ότι είναι F μέχρι και το $α_{45000}$, ενώ μη αποδεκτές αυτές που διαψεύδουν ότι είναι F από το $α_{40000}$ και πριν. Τέλος, κατατάσσει ως μη αποδεκτές διαμορφώσεις που δεν επιβεβαιώνουν τουλάχιστον τα αρχικά 5000 αντικείμενα ως F, ανεξαρτήτως των κενών που αυτές αφήνουν στις εκτάσεις της έκφρασης, ενώ κάθε διαμόρφωση που αυτή κατατάσσει ως αποδεκτή επιβεβαιώνει ως F τουλάχιστον τα πρώτα 20000 αντικείμενα. Έστω επιπλέον ότι σύμφωνα με την διαμόρφωση c’’ της $\mathcal{L}^{2}$’ αποδεκτές επεκτάσεις της c’ είναι εκείνες που δέχονται ως αποδεκτές μέχρι και διαμορφώσεις της $\mathcal{L}^0*$ που επιτρέπουν κενά μεταξύ έκτασης και αντιέκτασης μεγαλύτερα ή ίσα των 6999 αντικειμένων, μη αποδεκτές εκείνες που επιτρέπουν κενά μικρότερα ή ίσα των 5999 αντικειμένων, ενώ για αυτές που επιτρέπουν διαμορφώσεις που αφήνουν ενδιάμεσα κενά δεν αποφαίνεται. Έπεται ότι από τις επεκτάσεις της c’ που επιβεβαιώνουν ότι και αυτή, η c’’ θα θέτει ως αποδεκτές μέχρι και εκείνες που αποδέχονται διαμορφώσεις της $\mathcal{L}^0*$ που επεκτείνουν την c και διαψεύδουν ότι είναι F μέχρι και το $α_{42000}$ ενώ απορρίπτουν επεκτάσεις της c που διαψεύδουν ότι είναι F αντικείμενα από το $α_{41000}$ και πριν, οπότε έστω ότι δέχεται ως αποδεκτή και συγκεκριμένη διαμόρφωση της $\mathcal{L}^1$ που δέχεται ως αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0*$ που επεκτείνει το c και διαψεύδει ως F το $α_{42000}$ ενώ κατατάσσει ως μη αποδεκτή κάθε διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0*$ που επεκτείνει το c και διαψεύδει το $α_{41000}$. Τέλος, έστω ότι σύμφωνα με την c’’ θα υπάρχει αποδεκτή επέκταση της c’ που δέχεται ως αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^0*$ που επιβεβαιώνει ως F τα πρώτα 12000 αντικείμενα της ακολουθίας και απορρίπτει τα αντικείμενα που έπονται του $α_{19999}$.

Με βάση τα όσα έχουμε πει θα είναι $c' \in Val^{(2)+}(c''$, φυσιολογικό) και $c \in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό). Ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{L}^1$ περιέχει τις κατάλληλες ατομικές σταθερές. Με βάση την συγκεκριμένη ερμηνεία θα είναι:

1. $<c, c', c'', \ldots> \dashv (T_{\{c\}}\{Fa_{35000} \rightarrow Fa_{45000}\})_1$ αν και μόνο αν [$c \in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό) $\wedge$ $\exists x(x \in W^0 \wedge c \sqsubseteq x \wedge x \dashv (Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})_0 \wedge x \in Val^{(1)+}(c'$, αποδεκτό))]
2. $<c, c', c'', \ldots> \dashv (T_{\{c\}}\{Fa_{35000} \rightarrow Fa_{45000}\})_1$ αν και μόνο αν [$c \in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό) $\wedge$ $\exists x(x \in W^0 \wedge c \sqsubseteq x \wedge x \vDash (Fa_i)_0 \wedge x \dashv (Fa_{i+1})_0 \wedge x \in Val^{(1)+}(c'$, αποδεκτό))

Οπότε διαπιστώνουμε ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές.

Με ανάλογο τρόπο, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι δεν θα ισχύει πως $<c, c', c'', \ldots> \vDash (T_{\{c\}}\{Fa_{35000} \rightarrow Fa_{42000}\})_1$, δεν θα ισχύει όμως ούτε ότι $<c, c', c'', \ldots> \dashv (T_{\{c\}}\{Fa_{35000} \rightarrow Fa_{42000}\})_1$.

Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για προτάσεις εντός των οποίων εμφανίζεται ο τελεστής ‘$\mathcal{Definitely}$’, ενώ λοιπόν είναι $<c, c', c'', \ldots> \vDash (T_{\{<c, c'>\}}\{\mathcal{Definitely}\ Fa_{25000} \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{25500}\})_2$, θα ισχύει και ότι $<c, c', c'', \ldots> \dashv (T_{\{<c, c'>\}}\{\mathcal{Definitely}\ Fa_{20000} \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{30000}\})_2$.

Τέλος, ας θεωρήσουμε ότι εντός του D^2 περιλαμβάνεται και επίπεδο διαμόρφωσης b’ της $\mathcal{L}^{1*}$ που επεκτείνει το c’, και σύμφωνα με το οποίο κάθε αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0*}$ επιβεβαιώνει ως F τα πρώτα 20000 αντικείμενα της ακολουθίας, και το οποίο δέχεται ως αποδεκτή διαμόρφωση της $\mathcal{L}^{0*}$ που κατατάσσει ως F τα πρώτα 20000 αντικείμενα και απορρίπτει ως F κάθε αντικείμενο της ακολουθίας από το α26500 και έπειτα. Το σημείο c’’ δεν θα αποφαίνεται για το b’, οπότε έπεται ότι δεν θα είναι $<c, c', c'', \ldots> \vDash (T_{\{<c, c'>\}}\{\mathcal{Definitely}\ Fa_{20000} \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{26500}\})_2$, μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε εύκολα ότι δεν θα ισχύει ούτε και ότι $<c, c', c'', \ldots> \dashv (T_{\{<c, c'>\}}\{\mathcal{Definitely}\ Fa_{20000} \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{26500}\})_2$.

Ας θεωρήσουμε εδώ τυχούσα διαμόρφωση <w, w’, w’’, …> της ιεραρχίας $\mathcal{L}^{0*}, \mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4$, …, καθώς και ότι η $\mathcal{L}^2$ περιέχει τις κατάλληλες ατομικές σταθερές. Θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash (E\{\mathcal{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathcal{Definitely}\ Fa_{i+1}\})_2$. Πράγματι, έχουμε τα εξής:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow <<x, x'>, (\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1})_1> \in Val^{(2)+}(w'', T))]$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow [x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall y'\forall y((y' \in W^1 \wedge y \in W^0 \wedge x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (<y, y'> \Dashv (\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1})_1 \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))])]$
3. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow [x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall y'\forall y((y' \in W^1 \wedge y \in W^0 \wedge x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((<y, y'> \vDash \mathit{Definitely}\ Fa_i \wedge <y, y'> \Dashv \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))])]$
4. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow [x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall y'\forall y((y' \in W^1 \wedge y \in W^0 \wedge x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall z \in D^1(z \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \rightarrow z \vDash (Fa_i)_0) \wedge \exists z \in D^1 (z \in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}) \wedge z \Dashv (Fa_{i+1})_0)) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))])]$

Με βάση όμως τις παραδοχές που έχουμε κάνει έπεται ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα είναι αληθές, άρα όντως θα ισχύει ότι $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{\mathit{Definitely}\ Fa_i \rightarrow \mathit{Definitely}\ Fa_{i+1}\}$ για κάθε i που ανήκει στο {1, 2, …, 99999}. Πράγματι, προκειμένου αυτό να είναι ψευδές θα έπρεπε να υπάρχει διαμόρφωση $<x, x'>$ της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$ τέτοια ώστε να είναι $x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό})$, και επιπλέον να υπάρχει επέκταση y' του x' σύμφωνα με την οποία κάθε αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0*$ επιβεβαιώνει την πρόταση Fa_i και ταυτόχρονα, υπάρχει αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης της ίδιας γλώσσας που διαψεύδει την Fa_{i+1}, και δεν ισχύει ότι το y' κατατάσσεται ως μη αποδεκτό από το w''. Το αντικείμενο y' θα έπρεπε δηλαδή να δέχεται ως αποδεκτό επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^0$ που διακρίνει μεταξύ αντικειμένων που βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας. Έχουμε όμως θεωρήσει ότι αντικείμενο x που κλείνει τελείως τα κενά στις εκτάσεις ασαφούς έκφρασης θα πρέπει να κατατάσσεται ως μη αποδεκτό, και μάλιστα ότι το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για αντικείμενα που κατατάσσουν αντικείμενα όπως το x ως αποδεκτά, οπότε έπεται το ζητούμενο.

Αν τώρα θεωρήσουμε την ερμηνεία που έχουμε περιγράψει στην σελίδα 262, παρατηρούμε ότι θα είναι <c, c′, c′′, …>$\Dashv$E{$\mathit{Definitely}$F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}Fa_{30000}$}. Πράγματι, θα είναι <c, c′, c′′, …>$\Dashv$E{$\mathit{Definitely}$F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}Fa_{30000}$} αν και μόνο αν [$\exists x'\exists x((x'\in W^1\wedge x\in W^0\wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)\wedge x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$))\wedge\exists y'\exists y(y'\in W^1\wedge y\in W^0\wedge x'\sqsubseteq y'\wedge x\sqsubseteq y\wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$)\wedge\forall z\in D^1(z\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$)\rightarrow z\vDash($ F$a_{20000}))\wedge\exists z\in D^1(z\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$)\wedge z\Dashv($ F$a_{30000}))\wedge y'\in Val^{(2)+}(w''$, αποδεκτό$)))$])]. Αν θεωρήσουμε τα σημεία c, c′, τότε με βάση την συγκεκριμένη ερμηνεία θα είναι ($c'\in W^n\wedge c\in W^0\wedge c\in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό$)\wedge c'\in Val^{(2)+}(c''$, φυσιολογικό). Επιπλέον, θα είναι $c'\sqsubseteq c'\wedge c\sqsubseteq c\wedge c'\in Val^{(2)+}(c''$, αποδεκτό), για κάθε διαμόρφωση της $\mathcal{L}^{0}*$ που το c′ κατατάσσει ως αποδεκτή ισχύει ότι αυτή επιβεβαιώνει την ‘Fa_{20000}’, και τέλος, υπάρχει επίπεδο διαμόρφωσης της $\mathcal{L}^{0}*$ που διαψεύδει την ‘Fa_{30000}’ και το οποίο κατατάσσεται ως αποδεκτό από το c′. Καταλήγουμε έτσι ότι όντως υπάρχει διαμόρφωση της ιεραρχίας για την οποία ισχύει το ζητούμενο, και άρα όντως θα ισχύει ότι <c, c′, c′′, …>$\Dashv$E{$\mathit{Definitely}$F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}Fa_{30000}$}.

Καταλήγουμε κατ’ αυτόν τον τρόπο ότι παρόλο που είναι <c, c′, c′′, …>$\vDash$E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{20001}}, <c, c′, c′′, …>$\vDash$E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{20001}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{20002}}, …, <c, c′, c′′, …>$\vDash$E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{29999}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{30000}}, θα είναι <c, c′, c′′, …>$\Dashv$ E{$\mathit{Definitely}$F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}Fa_{30000}$}. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό μπορεί μάλιστα να εκφραστεί εντός της ιεραρχίας, αφού έπεται από αυτά ότι θα είναι <c, c′, c′′, …>$\Dashv$[(E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{20001}} $\wedge$ E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{20001}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{20002}} $\wedge$ … $\wedge$ E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{29999}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{30000}})$\rightarrow$ E{$\mathit{Definitely}$ F$a_{20000}\rightarrow\mathit{Definitely}$ Fa_{30000}}].

Ανάλογα με παραπάνω, αν θεωρήσουμε προτάσεις της γλώσσας Α, Β με δείκτη i, και έστω ότι είναι n=i+1, διαπιστώνουμε ότι θα είναι <w, w′, w′′, …>$\vDash$E{($\mathit{Definitely}$A$\wedge$ ($\mathit{Definitely}$A$\rightarrow$ $\mathit{Definitely}$B))$\rightarrow\mathit{Definitely}$B}. Πράγματι, έχουμε τα εξής:

1. <w, w′, w′′, …>$\vDash$E{($\mathit{Definitely}$A$\wedge$ ($\mathit{Definitely}$A$\rightarrow\mathit{Definitely}$B))$\rightarrow$ $\mathit{Definitely}$ B} αν και μόνο αν [$\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((x^n\in W^n\wedge x^{n-1}\in W^{n-1}\wedge\ldots\wedge x\in W^0\wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$)\wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$)\wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$,

φυσιολογικό) $\wedge \ldots \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow \langle\langle x, x', x'', \ldots, x^n\rangle, (\mathit{Definitely}A \wedge (\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}B)) \rightarrow \mathit{Definitely}\ B\rangle \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}, T)\ )\ ]$

2. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash E\{(\mathit{Definitely}A \wedge (\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}B)) \rightarrow \mathit{Definitely}\ B\}$ αν και μόνο αν $[\forall x^n \forall x^{n-1} \ldots \forall x((x^n \in W^n \wedge x^{n-1} \in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x \in W^0 \wedge x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, φυσιολογικό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow [\forall y^n \forall y^{n-1} \ldots \forall y((y^n \in W^n \wedge y^{n-1} \in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y \in W^0 \wedge x^n \sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1} \sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x \sqsubseteq y \wedge y^{n-1} \in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \wedge y^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge y \in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$)) \rightarrow (\langle y, y', \ldots, y^n\rangle \Dashv ((\mathit{Definitely}A \wedge (\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}B)) \rightarrow \mathit{Definitely}\ B\ ) \rightarrow y^n \in Val^{(n)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό $)))\ ]\ )\ ]$
3. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash E\{(\mathit{Definitely}A \wedge (\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}B)) \rightarrow \mathit{Definitely}\ B\}$ αν και μόνο αν $[\forall x^n \forall x^{n-1} \ldots \forall x((x^n \in W^n \wedge x^{n-1} \in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x \in W^0 \wedge x^n \in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-1} \in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, φυσιολογικό$) \wedge \ldots \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow [\forall y^n \forall y^{n-1} \ldots \forall y((y^n \in W^n \wedge y^{n-1} \in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y \in W^0 \wedge x^n \sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1} \sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x \sqsubseteq y \wedge y^{n-1} \in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \wedge y^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge y \in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$)) \rightarrow ((\langle y, y', \ldots, y^n\rangle \vDash \mathit{Definitely}A \wedge \langle y, y', \ldots, y^n\rangle \vDash (\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}B) \wedge \langle y, y', \ldots, y^n\rangle \Dashv \mathit{Definitely}\ B\ ) \rightarrow y^n \in Val^{(n)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)))\ ]\ \ )\ ]$

Έστω λοιπόν διαμόρφωση $\langle x, x', x'', \ldots\rangle$ της ιεραρχίας τέτοια ώστε για κάθε ένα από τα σημεία $x, x', \ldots, x^n$ ισχύει ότι αυτό κατατάσσει το αμέσως προηγούμενο του ως φυσιολογικό. Ας θεωρήσουμε επιπλέον σημεία $c^n, c^{n-1}, \ldots, c', c$ που συγκεκριμενοποιούν τους καθολικούς ποσοδείκτες της πρότασης ‘$[\forall y^n \forall y^{n-1} \ldots \forall y((y^n \in W^n \wedge y^{n-1} \in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y \in W^0 \wedge x^n \sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1} \sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x \sqsubseteq y \wedge y^{n-1} \in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \wedge y^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge y \in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$)) \rightarrow ((\langle y, y', \ldots, y^n\rangle \vDash \mathit{Definitely}A \wedge \langle y, y', \ldots, y^n\rangle \vDash (\mathit{Definitely}A \rightarrow \mathit{Definitely}B) \wedge \langle y, y', \ldots, y^n\rangle \Dashv \mathit{Definitely}\ B\ ) \rightarrow y^n \in Val^{(n)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)))\ ]$ ’και για τα οποία ισχύει ότι $(c^n \in W^n \wedge c^{n-1} \in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge c \in W^0 \wedge x^n \sqsubseteq c^n \wedge x^{n-1} \sqsubseteq c^{n-1} \wedge \ldots \wedge x \sqsubseteq c \wedge c^{n-1} \in Val^{(n)+}(c^n$, αποδεκτό$) \wedge c^{n-2} \in Val^{(n-1)+}(c^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge c \in Val^{(1)+}(c'$, αποδεκτό$))$. Είναι εμφανές ότι δεν μπορεί να ισχύει πως $\langle c, c', c'', \ldots, c^n\rangle \vDash \mathit{Definitely}A \wedge \sim(\langle c, c', c'', \ldots, c^n\rangle \vDash \mathit{Definitely}A \wedge \langle c, c', c'', \ldots, c^n\rangle \Dashv \mathit{Definitely}B) \wedge \langle c, c', c'', \ldots, c^n\rangle \Dashv \mathit{Definitely}B$. Καταλήγουμε άρα ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι αληθές, και άρα όντως θα ισχύει ότι $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash E\{(\mathit{Definitely}A \wedge (\mathit{Definitely}A \rightarrow$

*Definitely*B))$\rightarrow$ *Definitely* B}. Είναι εμφανές από την απόδειξη ότι θα ισχύει γενικότερα πως $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{(A \wedge (A\rightarrow B))\rightarrow B\}$.

Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι θα είναι και $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely*(A$\rightarrow$B))$\rightarrow$*Definitely*B}. Πράγματι, έχουμε:

1. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely*(A$\rightarrow$B))$\rightarrow$*Definitely*B} αν και μόνο αν $[\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((x^n\in W^n \wedge x^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\in W^0 \wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, φυσιολογικό$) \wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$))\rightarrow <<x, x', x'', \ldots, x^n>,(($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely* (A$\rightarrow$B)) $\rightarrow$*Definitely*B $) >\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}, T))]$
2. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely*(A$\rightarrow$B))$\rightarrow$*Definitely*B} αν και μόνο αν $[\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((x^n\in W^n \wedge x^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\in W^0 \wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, φυσιολογικό$) \wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$))\rightarrow [\forall y^n\forall y^{n-1}\ldots\forall y((y^n\in W^n \wedge y^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y\in W^0 \wedge x^n\sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1}\sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\sqsubseteq y \wedge y^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \wedge y^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow (<y, y', \ldots, y^n>\dashv(($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely*(A$\rightarrow$B)) $\rightarrow$*Definitely*B $)\rightarrow y^n\in Val^{(n)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)))]\ )\ ]$
3. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely*(A$\rightarrow$B))$\rightarrow$*Definitely*B} αν και μόνο αν $[\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((x^n\in W^n \wedge x^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\in W^0 \wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, φυσιολογικό$) \wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$))\rightarrow [\forall y^n\forall y^{n-1}\ldots\forall y((y^n\in W^n \wedge y^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y\in W^0 \wedge x^n\sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1}\sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\sqsubseteq y \wedge y^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \wedge y^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow ((<y, y', \ldots, y^n>\vDash$*Definitely*A $\wedge <y, y', \ldots, y^n>\vDash$*Definitely*(A$\rightarrow$B) $\wedge <y, y', \ldots, y^n>\dashv$*Definitely*B $) \rightarrow y^n\in Val^{(n)-}(w^{n+1}$, αποδεκτό$)))]\ )\ ]$
4. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{($*Definitely*A $\wedge$ *Definitely*(A$\rightarrow$B))$\rightarrow$*Definitely*B} αν και μόνο αν $[\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((x^n\in W^n \wedge x^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\in W^0 \wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n$, φυσιολογικό$) \wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}$, φυσιολογικό$) \wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$))\rightarrow [\forall y^n\forall y^{n-1}\ldots\forall y((y^n\in W^n \wedge y^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y\in W^0 \wedge x^n\sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1}\sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\sqsubseteq y \wedge y^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \wedge y^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}$, αποδεκτό$) \wedge \ldots \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow ((\forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \rightarrow <y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\vDash(A)) \wedge \forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n$, αποδεκτό$) \rightarrow <y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\vDash(A\rightarrow B)) \wedge \exists x^{n-}$

$^{1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n, \text{αποδεκτό}) \wedge <y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\Dashv(B))) \to y^n\in Val^{(n)-}(w^{n+1}, \text{αποδεκτό})))]\ )]$

5. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{(\mathit{Definitely}A \wedge \mathit{Definitely}(A\to B))\to \mathit{Definitely}B\}$ αν και μόνο αν $[\forall x^n\forall x^{n-1}\ldots\forall x((x^n\in W^n \wedge x^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\in W^0 \wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n, \text{φυσιολογικό}) \wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}))\to [\forall y^n\forall y^{n-1}\ldots\forall y((y^n\in W^n \wedge y^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge y\in W^0 \wedge x^n\sqsubseteq y^n \wedge x^{n-1}\sqsubseteq y^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\sqsubseteq y \wedge y^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n, \text{αποδεκτό}) \wedge y^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(y^{n-1}, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}))\to ((\forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n, \text{αποδεκτό}) \to <y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\vDash(A)) \wedge \forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n, \text{αποδεκτό}) \to \sim(<y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\vDash A \wedge <y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\Dashv B)) \wedge \exists x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(y^n, \text{αποδεκτό}) \wedge <y, y', \ldots, , x^{n-1}, y^n>\Dashv(B))) \to y^n\in Val^{(n)-}(w^{n+1}, \text{αποδεκτό})))]\ )]$

Οπότε διαπιστώνουμε εδώ ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι αληθές. Πράγματι, έστω $<x, x', x'', \ldots>$ διαμόρφωση της ιεραρχίας τέτοια ώστε για τα σημεία $x, x', x'', \ldots, x^n$ είναι $(x^n\in W^n \wedge x^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\in W^0 \wedge x^n\in Val^{(n+1)+}(w^{n+1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge x^{n-1}\in Val^{(n)+}(x^n, \text{φυσιολογικό}) \wedge x^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(x^{n-1}, \text{φυσιολογικό}) \wedge \ldots \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}))$ και ας θεωρήσουμε σημεία $c^n, c^{n-1}, \ldots, c', c$ που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς καθολικούς ποσοδείκτες της υποπρότασης με σημείο έναρξης την δεύτερη αριστερή αγκύλη, και τα οποία είναι τέτοια ώστε να ισχύει $(c^n\in W^n \wedge c^{n-1}\in W^{n-1} \wedge \ldots \wedge c\in W^0 \wedge x^n\sqsubseteq c^n \wedge x^{n-1}\sqsubseteq c^{n-1} \wedge \ldots \wedge x\sqsubseteq c \wedge c^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \wedge c^{n-2}\in Val^{(n-1)+}(c^{n-1}, \text{αποδεκτό}) \wedge \ldots \wedge c\in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό}))$. Ας υποθέσουμε ότι είναι $\forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \to <c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\vDash(A)) \wedge \forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \to \sim(<c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\vDash A \wedge <c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\Dashv B)) \wedge \exists x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \wedge <c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\Dashv(B))$, έπεται ότι θα ισχύει πως $\exists x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \wedge <c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\Dashv(B))$, οπότε έστω σημείο b^{n-1} που συγκεκριμενοποιεί τον υπαρκτικό ποσοδείκτη. Θα είναι $b^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό})$, καθώς και $<c, c', \ldots, , b^{n-1}, c^n>\Dashv B$, ταυτόχρονα όμως, ισχύει ότι $\forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \to <c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\vDash(A))$, και άρα θα είναι $<c, c', \ldots, , b^{n-1}, c^n>\vDash A$, οπότε θα είναι $[<c, c', \ldots, , b^{n-1}, c^n>\vDash A \wedge <c, c', \ldots, , b^{n-1}, c^n>\Dashv B]$. Εφόσον όμως είναι $\forall x^{n-1}\in D^n(x^{n-1}\in Val^{(n)+}(c^n, \text{αποδεκτό}) \to \sim(<c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\vDash A \wedge <c, c', \ldots, , x^{n-1}, c^n>\Dashv B))$, έπεται ότι θα ισχύει και ότι $\sim[<c, c', \ldots, , b^{n-1}, c^n>\vDash A \wedge <c, c', \ldots, , b^{n-1}, c^n>\Dashv B]$. Έχουμε κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήξει σε άτοπο, οπότε η υπόθεση που κάναμε δεν μπορεί να είναι αληθής. Συμπεραίνουμε ότι όντως θα είναι $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{(\mathit{Definitely}A \wedge \mathit{Definitely}(A\to B)) \to \mathit{Definitely}B\}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα και πάλι την σωρειτική ακολουθία αντικειμένων ως προς το F καθώς και την ερμηνεία της ιεραρχίας που έχουμε περιγράψει πιο πάνω. Αν θεωρήσουμε τυχούσα διαμόρφωση $\langle w, w', w'', \ldots\rangle$ της ακολουθίας, τότε με βάση τα όσα έχουμε πει θα είναι $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \models E\{(\mathit{Definitely}Fa_1 \wedge (\mathit{Definitely}Fa_1 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_2)) \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_2\}$, $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \models E\{(\mathit{Definitely}Fa_2 \wedge (\mathit{Definitely}Fa_2 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_3)) \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_3\}$, …, $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \models E\{(\mathit{Definitely}Fa_{99999} \wedge (\mathit{Definitely}Fa_{99999} \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{100000})) \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{100000}\}$. Ανάλογα διαπιστώνουμε ότι θα είναι $\langle c, c', c'', \ldots\rangle \models T_{\{\langle c, c'\rangle\}}\{\mathit{Definitely}Fa_1 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_2\}$, $\langle c, c', c'', \ldots\rangle \models T_{\{\langle c, c'\rangle\}}\{\mathit{Definitely}Fa_2 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_3\}$, …, $\langle c, c', c'', \ldots\rangle \models T_{\{\langle c, c'\rangle\}}\{\mathit{Definitely}Fa_{99999} \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{100000}\}$, και επιπλέον θα είναι $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \models E\{\mathit{Definitely}Fa_1 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_2\}$, $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \models E\{\mathit{Definitely}Fa_2 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_3\}$, …, $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \models E\{\mathit{Definitely}Fa_{99999} \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{100000}\}$. Από την άλλη όμως, εύκολα διαπιστώνουμε ότι θα είναι $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \Dashv E\{(\mathit{Definitely}Fa_1 \wedge (\mathit{Definitely}Fa_1 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_2) \wedge (\mathit{Definitely}Fa_2 \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_3) \wedge \ldots \wedge (\mathit{Definitely}Fa_{99999} \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{100000})) \rightarrow \mathit{Definitely}Fa_{100000}\}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο αντικατοπτρίζεται εντός της ιεραρχίας το γεγονός ότι τα διάφορα σωρειτικά επιχειρήματα που μπορούν να διατυπωθούν εντός της $\mathcal{L}^{0*}$ χρησιμοποιώντας προτάσεις με δείκτη 1 αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζονται και τα αντίστοιχα επιχειρήματα για προτάσεις με δείκτη 0. Οι προκείμενες είναι αληθείς, ο κανόνας που εφαρμόζεται στο εκάστοτε βήμα του επιχειρήματος είναι έγκυρος, αλλά η σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας δεν είναι πάντα μεταβατική.

Παρατηρούμε εδώ ότι με βάση την διαδικασία που έχουμε περιγράψει θα προκύπτει το ενδεχόμενο πρόταση που ανήκει σε κάποια από τις $\mathcal{L}^{0*}$, $\mathcal{L}^{1}$, $\mathcal{L}^{2}$, $\mathcal{L}^{3}$, $\mathcal{L}^{4}$, … , και η οποία είναι τέτοια ώστε περιέχει εμφανίσεις της αντίστοιχης κατηγορηματικής έκφρασης 'Txy' ή 'Ex', να εντάσσεται από επίπεδο διαμόρφωσης της γλώσσας που έπεται εντός της ιεραρχίας στην έκταση ή την αντιέκταση της ανάλογης κατηγορηματικής έκφρασης που αυτή περιέχει. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα κάποια ατομική πρόταση 'Fa' της $\mathcal{L}^{0*}$ και διαμόρφωση $\langle w, w', w'', \ldots\rangle$ της ιεραρχίας, και ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{L}^{1}$ περιέχει ατομικές σταθερές, «a.» και «a.'», οι οποίες αναφέρονται στο επίπεδο διαμόρφωσης w και την πρόταση 'Fa' αντίστοιχα της $\mathcal{L}^{0*}$. Εντός της $\mathcal{L}^{1}$ θα εμφανίζονται λοιπόν και προτάσεις όπως «Ta.(a.')», «E(a.')», κτλ.

Ας θεωρήσουμε ότι η $\mathcal{L}^2$ περιέχει ατομική σταθερά «a.. » η οποία αναφέρεται στο διατεταγμένο σύνολο <w, w'>, καθώς και ατομικές σταθερές «a..'», «a..''» που αναφέρονται στις προτάσεις «Ta.(a.')» και «E(a.')» αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι $w \in Val^{(1)+}$(w', φυσιολογικό) τότε θα εμφανίζονται εντός της $\mathcal{L}^2$ και προτάσεις όπως πχ «Ta..(a..')», «Ta..(a..'')», «E(a..')» κτλ.

Συμβολίζουμε ως '$T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa\}\}$' τον σύνθετο όρο της $\mathcal{L}^M$ που αναφέρεται σε εκείνη την πρόταση της $\mathcal{L}^1$ που σχηματίζεται συνενώνοντας το κατηγορηματικό σύμβολο T αυτής, ατομική σταθερά που αναφέρεται στο επίπεδο διαμόρφωσης <w, w'> και ατομική σταθερά που αναφέρεται σε πρόταση της $\mathcal{L}^1$ που σχηματίζεται συνενώνοντας το κατηγορηματικό σύμβολο 'T' που αυτή περιέχει, ατομική σταθερά της που αναφέρεται στο w και ατομική σταθερά της που αναφέρεται στην 'Fa'. Βλέπουμε ότι θα είναι:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa\}\})_2$ αν και μόνο αν ισχύει ότι [$w' \in Val^{(2)+}$(w'', φυσιολογικό) $\wedge$ $w \in Val^{(1)+}$(w', φυσιολογικό)$\wedge$ $\forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}$(x', αποδεκτό)) $\rightarrow$ ($<x, x', w''> \dashv (T_{<w>}Fa)_1 \rightarrow x' \in Val^{(2)-}$(w'', αποδεκτό)))]
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa\}\})_2$ αν και μόνο αν ισχύει ότι [$w' \in Val^{(2)+}$(w'', φυσιολογικό) $\wedge$ $w \in Val^{(1)+}$(w', φυσιολογικό)$\wedge$ $\forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}$(x', αποδεκτό)) $\rightarrow$ ($w \in Val^{(1)-}$(x', φυσιολογικό) $\vee$ ($w \in Val^{(1)+}$(x', φυσιολογικό) $\wedge$ $\exists y$ ($y \in Val^{(1)+}$(x', αποδεκτό)$\wedge$ $w \sqsubseteq y \wedge <y, x', w''> \dashv (Fa)_0$)))$\rightarrow$ $x' \in Val^{(2)-}$(w'', αποδεκτό)))

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να ερευνήσουμε πώς συμπεριφέρονται οι συγκεκριμένες εκφράσεις όσον αφορά τα διάφορα επιχειρήματα σωρειτικού τύπου που μπορούν να διατυπωθούν εντός των γλωσσών της ιεραρχίας που έπονται της $\mathcal{L}^0*$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν και πάλι την σωρειτική ακολουθία α1, α2, …, α100000 ως προς το κατηγόρημα 'F', την ερμηνεία της ιεραρχίας που έχουμε ήδη περιγράψει, και επίπεδο διαμόρφωσης <w, w', w'', …>, υποθέτουμε επιπλέον ότι οι γλώσσες εντός της ιεραρχίας $\mathcal{L}^0*$, $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, … περιέχουν τις ανάλογες ατομικές σταθερές, παρατηρούμε ότι θα ισχύουν τα εξής:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\})_1$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι [$<w, w', w''> \vDash T_{<w>}Fa_i$ και $<w, w', w''> \dashv T_{<w>}Fa_{i+1}$]
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\})_1$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι [$w \in Val^{(1)+}$(w', φυσιολογικό) $\wedge$ $\forall x(w \sqsubseteq x \rightarrow (<x, w', w''> \dashv (Fa_i)_0 \rightarrow x \in Val^{(1)-}$(w', αποδεκτό))) και ($w \in Val^{(1)-}$(w', φυσιολογικό) $\vee$ ($w \in Val^{(1)+}$(w', φυσιολογικό) $\wedge$ $\exists x(w \sqsubseteq x \wedge <x, w', w''> \dashv (Fa_{i+1})_0 \wedge x \in Val^{(1)+}$(w', αποδεκτό))))]

Οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει βάσει των παραδοχών που έχουμε κάνει αληθές.

Με ανάλογο τρόπο παρατηρούμε ότι αν ισχύει ότι $w \in Val^{(1)+}(w'$, φυσιολογικό$)$ τότε θα είναι:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\})_2$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge w \in Val^{(1)+}(w'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)) \rightarrow (<x, x', w''> \Dashv (T_{<w>}Fa_i \rightarrow T_{<w>}Fa_{i+1})_1 \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)))]$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\})_2$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge w \in Val^{(1)+}(w'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)) \rightarrow ((<x, x', w''> \vDash (T_{<w>}Fa_i)_1 \wedge <x, x', w''> \Dashv (T_{<w>}Fa_{i+1})_1) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)))]$
3. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\})_2$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge w \in Val^{(1)+}(w'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)) \rightarrow (([w \in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y(w \sqsubseteq y \rightarrow (<y, x', w''> \Dashv (Fa_i)_0 \rightarrow y \in Val^{(1)-}(x'$, αποδεκτό$)))] \wedge [w \in Val^{(1)-}(x'$, φυσιολογικό$) \vee (w \in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \exists y(w \sqsubseteq y \wedge <y, x', w''> \Dashv (Fa_{i+1})_0 \wedge y \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)))]) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)))]$

Με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει όμως, το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές. Άρα, όντως θα ισχύει ότι $<w, w', w'', \ldots> \vDash (T_{\{<w, w'>\}}\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\})_2$.

Από την άλλη, αν θεωρήσουμε την ερμηνεία της σελίδας 262, και υποθέσουμε ότι οι γλώσσες της ιεραρχίας περιέχουν τις απαραίτητες ατομικές σταθερές, τότε όσον αφορά μια πρόταση όπως για παράδειγμα η '$T_{\{<c, c'>\}}\{T_{\{<c>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<c>\}}\{Fa_{42000}\}\}$' θα είναι:

1. $<c, c', c'', \ldots> \Dashv (T_{\{<c, c'>\}}\{T_{\{<c>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<c>\}}\{Fa_{42000}\}\})_2$ αν και μόνο αν $[c' \in Val^{(2)+}(c''$, φυσιολογικό$) \wedge c \in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό$) \wedge \exists x' \exists x(c' \sqsubseteq x' \wedge c \sqsubseteq x \wedge <x, x', c''> \Dashv (TFa_{41000} \rightarrow TFa_{42000})_1 \wedge x' \in Val^{(2)+}(c''$, αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(2)+}(x'$, αποδεκτό$))]$
2. $<c, c', c'', \ldots> \Dashv (T_{\{<c, c'>\}}\{T_{\{<c>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<c>\}}\{Fa_{42000}\}\})_2$ αν και μόνο αν $[c' \in Val^{(2)+}(c''$, φυσιολογικό$) \wedge c \in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό$) \wedge \exists x' \exists x(c' \sqsubseteq x' \wedge c \sqsubseteq x \wedge c \in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y(c \sqsubseteq y \rightarrow (<y, x', c''> \Dashv (Fa_{41000})_0 \rightarrow y \in Val^{(1)-}(x'$, αποδεκτό$))) \wedge \exists z(c \sqsubseteq z \wedge <z, x', c''> \Dashv (Fa_{42000})_0 \wedge z \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)) \wedge x' \in Val^{(2)+}(c''$, αποδεκτό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$))]$

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει όμως αληθές, με βάση την ερμηνεία της ιεραρχίας που έχουμε περιγράψει.

Συνεχίζοντας τώρα και σε περιπτώσεις που περιλαμβάνουν ποσόδειξη, θα έχουμε ότι:

1. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν $\langle w, w'\rangle \vDash \langle \forall x, \langle \to, \langle \text{φυσιολογικό}, x\rangle, \langle T, \langle x, (Fa_i \to Fa_{i+1})\rangle\rangle\rangle\rangle$
2. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 είναι $\langle w, w'\rangle \Dashv [\langle \to, \langle \text{φυσιολογικό}, x\rangle, \langle T, \langle x, (Fa_i \to Fa_{i+1})\rangle\rangle\rangle]^{o}_{x}$
3. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 δεν είναι $\langle w, w'\rangle \Dashv \langle \to, \langle \text{φυσιολογικό}, o\rangle, \langle T, \langle o, (Fa_i \to Fa_{i+1})\rangle\rangle\rangle$
4. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[\langle w, w'\rangle \vDash \langle \text{φυσιολογικό}, o\rangle \wedge \langle w, w'\rangle \Dashv \langle T, \langle o, (Fa_i \to Fa_{i+1})\rangle\rangle]$
5. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[\mathrm{Val}^{1+}(w', o) \in \mathrm{Val}^{1+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \langle \mathrm{Val}^{1+}(w', o), \mathrm{Val}^{1+}(w', (Fa_i \to Fa_{i+1}))\rangle \in \mathrm{Val}^{1-}(w', T)]$
6. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[\mathrm{Val}^{1+}(w', o) \in \mathrm{Val}^{1+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x(o \sqsubseteq x \wedge x \in \mathrm{Val}^{(1)+}(w', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, w'\rangle \Dashv (Fa_i \to Fa_{i+1}))]$
7. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[\mathrm{Val}^{1+}(w', o) \in \mathrm{Val}^{1+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists x(o \sqsubseteq x \wedge x \in \mathrm{Val}^{(1)+}(w', \text{αποδεκτό}) \wedge \langle x, w'\rangle \vDash Fa_i \wedge \langle x, w'\rangle \Dashv Fa_{i+1})]$

Οπότε και μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές.

Με βάση αυτά έπεται ότι θα είναι πχ και $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash T_{\{\langle w, w'\rangle\}}\{\forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})\}$. Πράγματι, έχουμε:

1. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash T_{\{\langle w, w'\rangle\}}\{\forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\})\}$ αν και μόνο αν $[w' \in \mathrm{Val}^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in \mathrm{Val}^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \to (\langle x, x', w''\rangle \Dashv \forall x((x\ \text{φυσιολογικό}) \to Tx\{Fa_i \to Fa_{i+1}\}) \to x' \in \mathrm{Val}^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$

2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash \mathrm{T}_{\{<w, w'>\}}\{\forall x((x$ φυσιολογικό$) \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}\})\}$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$)) \rightarrow$ ([για κάποιο αντικείμενο $\mathcal{O}$ που ανήκει στο D^1 είναι $[\, Val^{1+}(x', \mathcal{O}) \in Val^{1+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \exists y(\mathcal{O} \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(x'$, αποδεκτό$) \wedge <y, x'> \vDash Fa_i \wedge <y, x'> \Dashv Fa_{i+1})\,]] \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)\,))\,]$

Μπορούμε εδώ να δούμε ότι με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει, το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές, και άρα όντως θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash \mathrm{T}_{\{<w, w'>\}}\{\forall x((x$ φυσιολογικό$) \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}\})\}$.

Ανάλογα:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash (\forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\}))_1$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $<w, w'> \vDash <\forall x, <\rightarrow, <\mathrm{T}, <x, Fa_i>>, <\mathrm{T}, <x, Fa_{i+1}>>>>$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash \forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο $\mathcal{O}$ που ανήκει στο D^1 είναι $<w, w'> \Dashv [<\rightarrow, <\mathrm{T}, <x, Fa_i>>, <\mathrm{T}, <x, Fa_{i+1}>>>]^{\mathcal{O}}_{x}$
3. $<w, w', w'', \ldots> \vDash \forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι για κάποιο αντικείμενο $\mathcal{O}$ που ανήκει στο D^1 είναι $<w, w'> \Dashv [<\rightarrow, <\mathrm{T}, <\mathcal{O}, Fa_i>>, <\mathrm{T}, <\mathcal{O}, Fa_{i+1}>>>]$
4. $<w, w', w'', \ldots> \vDash \forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο $\mathcal{O}$ που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[<w, w'> \vDash <\mathrm{T}, <\mathcal{O}, Fa_i>> \wedge <w, w'> \Dashv <\mathrm{T}, <\mathcal{O}, Fa_{i+1}>>]$
5. $<w, w', w'', \ldots> \vDash \forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο $\mathcal{O}$ που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[<Val^{1+}(w', \mathcal{O}), Val^{1+}(w', Fa_i)> \in Val^{1+}(w', \mathrm{T}) \wedge <Val^{1+}(w', \mathcal{O}), Val^{1+}(w', Fa_{i+1})> \in Val^{1-}(w', \mathrm{T})]$
6. $<w, w', w'', \ldots> \vDash \forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\})$ αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε αντικείμενο $\mathcal{O}$ που ανήκει στο D^1 είναι $\sim[\, < Val^{1+}(w', \mathcal{O}) \in Val^{1+}(w'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y(\mathcal{O} \sqsubseteq y \rightarrow (\, <y, w'> \Dashv Fa_i \rightarrow y \in Val^{1-}(w'$, αποδεκτό$)\,)) \wedge \exists y(\mathcal{O} \sqsubseteq y \wedge <y, w'> \Dashv Fa_{i+1} \wedge y \in Val^{(1)+}(w'$, αποδεκτό$)\,)]$

Οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι θα είναι και $<w, w', w'', \ldots> \vDash \mathrm{T}_{\{<w, w'>\}}\{\forall x(\mathrm{T}x\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{T}x\{Fa_{i+1}\})\}$. Πράγματι:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash T_{\{<w, w'>\}}\{\forall x(Tx\{Fa_i\} \rightarrow Tx\{Fa_{i+1}\})\}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[w' \in Val^{(2)+}(w'',$ φυσιολογικό$) \wedge \forall x'\forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)) \rightarrow (<x, x'> \dashv \forall x(Tx\{Fa_i\} \rightarrow Tx\{Fa_{i+1}\}_{S1}) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'',$ αποδεκτό$)))]$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash T_{\{<w, w'>\}}\{\forall x(Tx\{Fa_i\} \rightarrow Tx\{Fa_{i+1}\})\}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $[w' \in Val^{(2)+}(w'',$ φυσιολογικό$) \wedge \forall x'\forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$)) \rightarrow$ ([για κάποιο αντικείμενο o που ανήκει στο D^1 είναι $< Val^{1+}(x', o) \in Val^{1+}(x',$ φυσιολογικό$) \wedge \forall y(o \sqsubseteq y \rightarrow (<y, x'> \dashv Fa_i \rightarrow y \in Val^{1-}(x',$ αποδεκτό$))) \wedge \exists y(o \sqsubseteq y \wedge <y, x'> \dashv Fa_{i+1} \wedge y \in Val^{(1)+}(x',$ αποδεκτό$))] \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'',$ αποδεκτό$)))]$

Ανάλογοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν και όσον αφορά προτάσεις της ιεραρχίας εντός των οποίων εμφανίζεται η κατηγορηματική έκφραση 'Ex'.

Έστω προτάσεις A, B με δείκτη i=n-1, όπου i≥0, με βάση τα όσα έχουμε πει έπεται κατευθείαν ότι θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{((T_{\{<w, w', \ldots, wn-1>\}}\{A\} \rightarrow T_{\{<w, w', \ldots, wn-1>\}}\{B\}) \wedge T_{\{<w, w', \ldots, wn-1>\}}\{A\}) \rightarrow T_{\{<w, w', \ldots, wn-1>\}}\{B\}\}$.

Έστω από την άλλη δύο προτάσεις της μορφής Fa_i και Fa_{i+1} με δείκτη i=0, θα είναι:

1. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'',$ φυσιολογικό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ φυσιολογικό$)) \rightarrow <<x, x'>,(T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\})> \in Val^{(2)+}(w'', T))]$
2. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'',$ φυσιολογικό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ φυσιολογικό$)) \rightarrow [\forall y'\forall y((y' \in W^1 \wedge y \in W^0 \wedge x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(y',$ αποδεκτό$)) \rightarrow (<y, y'> \dashv (T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'',$ αποδεκτό$)))])]$
3. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'',$ φυσιολογικό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ φυσιολογικό$)) \rightarrow [\forall y'\forall y((y' \in W^1 \wedge y \in W^0 \wedge x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(y',$ αποδεκτό$)) \rightarrow (<y, y'> \vDash T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \wedge <y, y'> \dashv T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'',$ αποδεκτό$)))])]$
4. $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_i\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'',$ φυσιολογικό$) \wedge x \in Val^{(1)+}(x',$ φυσιολογικό$)) \rightarrow [\forall y'\forall y((y' \in W^1 \wedge y \in W^0 \wedge x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(y',$ αποδεκτό$)) \rightarrow ([w \in Val^{(1)+}(y',$ φυσιολογικό$) \wedge \forall x(w \sqsubseteq x \rightarrow (x \dashv Fa_i \rightarrow x \in Val^{(1)-}(y',$ αποδεκτό$)))] \wedge [\exists x(w \sqsubseteq x \wedge x \dashv Fa_{i+1} \wedge x \in Val^{(1)+}(y',$ αποδεκτό$)]) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'',$ αποδεκτό$)))])]$

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα πρέπει όμως να προκύπτει αληθές, με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει. Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει πως $[\forall x'\forall x((x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow [\forall y'\forall y((y'\in W^1 \wedge y\in W^0 \wedge x'\sqsubseteq y' \wedge x\sqsubseteq y \wedge y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}))\rightarrow ([w\in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x(w \sqsubseteq x \rightarrow (x\Dashv Fa_i\rightarrow x\in Val^{(1)-}(y', \text{αποδεκτό})))] \wedge [\exists x(w \sqsubseteq x \wedge x\Dashv Fa_{i+1} \wedge x\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})]) \rightarrow y'\in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))] \;)]$, θα ισχύει άρα ότι $\exists x'\exists x(x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge x\in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}))$ και επιπλέον, θα υπάρχουν y, y' τέτοια ώστε να ισχύει ότι $(y'\in W^1 \wedge y\in W^0 \wedge x'\sqsubseteq y' \wedge x\sqsubseteq y \wedge y\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό}))$, να ισχύει ότι $([w\in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x(w \sqsubseteq x \rightarrow (x\Dashv Fa_i\rightarrow x\in Val^{(1)-}(y', \text{αποδεκτό})))] \wedge \exists x(w \sqsubseteq x \wedge x\Dashv Fa_{i+1} \wedge x\in Val^{(1)+}(y', \text{αποδεκτό})]$, αλλά να μην ισχύει ότι $y'\in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})$. Έστω λοιπόν σημεία c, c' που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς υπαρκτικούς ποσοδείκτες, θα είναι $c'\in W^1 \wedge c\in W^0 \wedge c'\in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge c\in Val^{(1)+}(c', \text{φυσιολογικό})$. Έστω επιπλέον σημεία b, b' που συγκεκριμενοποιούν τις μεταβλητές y, y', θα είναι $(b'\in W^1 \wedge b\in W^0 \wedge c'\sqsubseteq b' \wedge c\sqsubseteq b \wedge b\in Val^{(1)+}(b', \text{αποδεκτό}))$, καθώς και $w\in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x(w \sqsubseteq x \rightarrow (x\Dashv Fa_i\rightarrow x\in Val^{(1)-}(b', \text{αποδεκτό}))) \wedge \exists x(w \sqsubseteq x \wedge x\Dashv Fa_{i+1} \wedge x\in Val^{(1)+}(b', \text{αποδεκτό}))$. Επιπλέον θα είναι $\sim(b'\in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό}))$. Έστω λοιπόν σημείο d που συγκεκριμενοποιεί τον υπαρκτικό ποσοδείκτη της '$\exists x(w \sqsubseteq x \wedge x\Dashv Fa_{i+1} \wedge x\in Val^{(1)+}(b', \text{αποδεκτό}))$', θα είναι $w \sqsubseteq d \wedge d\Dashv Fa_{i+1} \wedge d\in Val^{(1)+}(b', \text{αποδεκτό})$. Αν τώρα θεωρήσουμε όμως ότι εντός του D^0 περιέχεται και σημείο d' που διαφέρει από το d μόνο όσον αφορά το γεγονός ότι αυτό διαψεύδει και την πρόταση Fa_i, τότε φαίνεται πως είμαστε υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε ότι τα σημεία d και d' διαφέρουν μεταξύ τους σε βαθμό που δεδομένης της σχετικής σωρειτικής ακολουθίας είναι αμελητέος. Εφόσον είναι $\forall x(w \sqsubseteq x \rightarrow (x\Dashv Fa_i\rightarrow x\in Val^{(1)-}(b', \text{αποδεκτό})))$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σημείο b' κατατάσσει τα d, d' σε διαφορετικές κατηγορίες, και άρα θα πρέπει να κατατάσσεται ως μη αποδεκτό από το w''.

Από την άλλη, αν εξετάσουμε το μοντέλο που έχουμε περιγράψει, εύκολα διαπιστώνουμε ότι θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \Dashv E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{4100}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{42000}\}\}$. Ενώ λοιπόν θα ισχύει ότι $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{41001}\}\}$, $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41001}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{41002}\}\}$, …, $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41999}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{42000}\}\}$, θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \Dashv E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{42000}\}\}$. Έπεται από αυτά ότι θα είναι και $<w, w', w'', \ldots> \Dashv ([E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{41001}\}\} \wedge E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41001}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{41002}\}\} \wedge \ldots \wedge E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41999}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{42000}\}\}] \rightarrow E\{T_{\{<w>\}}\{Fa_{41000}\} \rightarrow T_{\{<w>\}}\{Fa_{42000}\}\})$.

Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι θα είναι:

1. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \mathrm{T}_{\{\langle w, w'\rangle\}}\{\mathrm{E}\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{E}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge w \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (\langle x, x', w''\rangle \Dashv (\mathrm{E}\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{E}\{Fa_{i+1}\}) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$
2. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \mathrm{T}_{\{\langle w, w'\rangle\}}\{\mathrm{E}\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{E}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge w \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\langle x, x', w''\rangle \vDash \mathrm{E}\{Fa_i\} \wedge \langle x, x', w''\rangle \Dashv \mathrm{E}\{Fa_{i+1}\}) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$
3. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \mathrm{T}_{\{\langle w, w'\rangle\}}\{\mathrm{E}\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{E}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge w \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y((y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \langle y, Fa_i\rangle \in Val^{(1)+}(x', T)) \wedge \exists y(y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge \langle y, Fa_{i+1}\rangle \in Val^{(1)-}(x', T))) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$
4. $\langle w, w', w'', \ldots\rangle \vDash \mathrm{T}_{\{\langle w, w'\rangle\}}\{\mathrm{E}\{Fa_i\} \rightarrow \mathrm{E}\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[w' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge w \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y((y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z((z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(x', \text{αποδεκτό})))) \wedge \exists y(y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z(z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό})))) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$

Αν όμως θεωρήσουμε ερμηνεία που σέβεται τις παραδοχές που έχουμε κάνει, και επίπεδο διαμόρφωσης $\langle w, w', w'', \ldots\rangle$, τότε το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής θα προκύπτει αληθές. Πράγματι, έστω ότι είναι $w' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge w \in Val^{(1)+}(w', \text{φυσιολογικό})$ και ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει πως $\forall x' \forall x((w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow ((\forall y((y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z((z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(x', \text{αποδεκτό})))) \wedge \exists y(y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists y(y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z(z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}))) \rightarrow x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))]$. Έπεται ότι θα είναι $\exists x' \exists x(w' \sqsubseteq x' \wedge w \sqsubseteq x \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \forall y((y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z((z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(x', \text{αποδεκτό})))) \wedge \exists y(y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z(z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(x', \text{αποδεκτό}))) \wedge \sim(x' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})))$. Έστω σημεία c, c' που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς υπαρκτικούς ποσοδείκτες, θα είναι $w' \sqsubseteq c' \wedge w \sqsubseteq c \wedge c \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό})$, $\forall y((y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(c', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z((z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(c', \text{αποδεκτό}))))$, $\exists y(y \in D^1 \wedge y \in Val^{(1)+}(c', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z(z \in W^0 \wedge y \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(c', \text{αποδεκτό})))$, καθώς και $\sim(c' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό}))$. Ας θεωρήσουμε σημεία b, b' που συγκεκριμενοποιούν τον πρώτο και δεύτερο αντίστοιχα από τους υπαρκτικούς ποσοδείκτες που εμφανίζονται εντός της $\exists y(y\in D^1 \wedge y\in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό$) \wedge \exists z\ (z\in W^0 \wedge y\sqsubseteq z \wedge z\Dashv Fa_{i+1} \wedge z\in Val^{1+}(c'$, αποδεκτό$)\ ))$. Θα είναι $b\in D^1 \wedge b\in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό$)$, και επιπλέον $b'\in W^0 \wedge b\sqsubseteq b' \wedge b'\Dashv Fa_{i+1} \wedge b'\in Val^{1+}(c'$, αποδεκτό$)$. Αν τώρα θεωρήσουμε σημείο d' που διαφέρει από το b' μόνο όσον αφορά το γεγονός ότι διαψεύδει την Fa_{i+1}, τότε από το γεγονός ότι είναι $\forall y((y\in D^1 \wedge y\in Val^{(1)+}(c'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow \forall z\ ((z\in W^0 \wedge y\sqsubseteq z\ )\rightarrow (\ z\Dashv A \rightarrow z\in Val^{1-}(c'$, αποδεκτό$)\ \ )\ )\ )$, έπεται ότι θα είναι $d'\in Val^{1-}(c'$, αποδεκτό$)$. Το c' λοιπόν θα κατατάσσει σε διαφορετικές κατηγορίες τα b', d', παρόλο που αυτά διαφέρουν μεταξύ τους μόνο όσον αφορά το πώς αντιμετωπίζουν την πρόταση Fa_i, η οποία έχουμε θεωρήσει ότι βρίσκεται πολύ κοντά στην Fa_{i+1} ως προς τα σημασιολογικά της χαρακτηριστικά. Έπεται ότι με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει, αντικείμενα όπως το c' θα πρέπει να κατατάσσονται ως μη αποδεκτά.

Κατά παρόμοιο τρόπο έπεται και ότι:

1. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow <<x, x'>,(E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}) >\in Val^{(2)+}(w'', T)\ )\ ]$
2. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow [x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y'\forall y((x'\sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow (<y, y'>\Dashv(E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}) \rightarrow y'\in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)\ ))]\ )\ ]$
3. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow [x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y'\forall y((x'\sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow ((<y, y'>\vDash E\{Fa_i\} \wedge <y, y'>\Dashv E\{Fa_{i+1}\}) \rightarrow y'\in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)\ ))]\ )\ ]$
4. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow [x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y'\forall y((x'\sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow (\ (\forall z_0((z_0\in D^1 \wedge z_0\in Val^{(1)+}(y'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow <z_0, Fa_i >\in Val^{(1)+}(y', T)\ ) \wedge \exists z_0\ (z_0\in D^1 \wedge z_0\in Val^{(1)+}(y'$, φυσιολογικό$) \wedge <z_0, Fa_{i+1}>\in Val^{(1)-}(y', T))\ ) \rightarrow y'\in Val^{(2)-}(w''$, αποδεκτό$)\ ))]\ )\ ]$
5. $<w, w', w'', \ldots>\vDash E\{E\{Fa_i\}\rightarrow E\{Fa_{i+1}\}\}$ αν και μόνο αν $[\forall x'\forall x((x'\in W^1 \wedge x\in W^0 \wedge x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow [x'\in Val^{(2)+}(w''$, φυσιολογικό$) \wedge x\in Val^{(1)+}(x'$, φυσιολογικό$) \wedge \forall y'\forall y((x'\sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y\in Val^{(1)+}(y'$, αποδεκτό$))\rightarrow (\ (\forall z_0\ ((z_0\in D^1 \wedge z_0\in Val^{(1)+}(y'$, φυσιολογικό$)) \rightarrow \forall z\ ((z\in W^0 \wedge z_0\sqsubseteq z\ )\rightarrow ($

$z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ ) \wedge \exists z_0(z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ ) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})\ ))])\ ]$

Το δεξί μέλος της πιο πάνω διπλής συνεπαγωγής είναι όμως αληθές. Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει πως $[\forall x' \forall x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow [x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό}) \wedge \forall y' \forall y((x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό})) \rightarrow (\ (\forall z_0\ ((z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z\ ((z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z\ ) \rightarrow (\ z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ ) \wedge \exists z_0(z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ ) \rightarrow y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό})\ ))])\ ]$, έπεται ότι θα είναι $[\exists x' \exists x((x' \in W^1 \wedge x \in W^0 \wedge x' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge x \in Val^{(1)+}(x', \text{φυσιολογικό})) \wedge \exists y' \exists y(x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \forall z_0\ ((z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z\ ((z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z\ ) \rightarrow (\ z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ ) \wedge \exists z_0(z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ ) \wedge \sim(y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό}))\ ))]$. Έστω σημεία c, c' που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς υπαρκτικούς ποσοδείκτες, θα είναι λοιπόν $c' \in W^1 \wedge c \in W^0 \wedge c' \in Val^{(2)+}(w'', \text{φυσιολογικό}) \wedge c \in Val^{(1)+}(c', \text{φυσιολογικό})$. Έστω επιπλέον σημεία b, b' που συγκεκριμενοποιούν τους αρχικούς υπαρκτικούς ποσοδείκτες της '$\exists y' \exists y(x' \sqsubseteq y' \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \in Val^{(1)+}(x', \text{αποδεκτό}) \wedge \forall z_0\ ((z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z\ ((z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z\ ) \rightarrow (\ z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ ) \wedge \exists z_0(z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(y', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(y', \text{αποδεκτό})\ )\ ) \wedge \sim(y' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό}))\ )$', έπεται ότι θα είναι $c' \sqsubseteq b' \wedge c \sqsubseteq b \wedge b \in Val^{(1)+}(c', \text{αποδεκτό})$, $\forall z_0\ ((z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z\ ((z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z\ ) \rightarrow (\ z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(b', \text{αποδεκτό})\ )\ )\ )$, $\exists z_0(z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(b', \text{αποδεκτό})\ )\ )$, καθώς και $\sim(b' \in Val^{(2)-}(w'', \text{αποδεκτό}))$. Τέλος, έστω σημεία d_0, d που συγκεκριμενοποιούν τους αντίστοιχους από τους υπαρκτικούς ποσοδείκτες της '$\exists z_0(z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό}) \wedge \exists z\ (z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z \wedge z \Dashv Fa_{i+1} \wedge z \in Val^{1+}(b', \text{αποδεκτό})\ )$', θα είναι $d_0 \in D^1 \wedge d_0 \in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό})$, και επιπλέον $d \in W^0 \wedge d_0 \sqsubseteq d \wedge d \Dashv Fa_{i+1} \wedge d \in Val^{1+}(b', \text{αποδεκτό})$. Εφόσον είναι $\forall z_0\ ((z_0 \in D^1 \wedge z_0 \in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό})) \rightarrow \forall z\ ((z \in W^0 \wedge z_0 \sqsubseteq z\ ) \rightarrow (\ z \Dashv Fa_i \rightarrow z \in Val^{1-}(b', \text{αποδεκτό})\ )\ )$ και $d_0 \in Val^{(1)+}(b', \text{φυσιολογικό})$, έπεται ότι αν θεωρήσουμε αντικείμενο d' που διαφέρει από το d μόνο όσον αφορά το γεγονός ότι διαψεύδει την πρόταση Fa_i, αυτό θα κατατάσσεται από το b' ως μη αποδεκτό. Το b' θα κατατάσσει λοιπόν σε διαφορετικές κατηγορίες αντικείμενα d, d' που διαφέρουν μεταξύ τους το πολύ όσον αφορά τον τρόπο που αντιμετωπίζουν την πρόταση Fa_i, η οποία έχουμε θεωρήσει ότι βρίσκεται πολύ κοντά στην Fa_{i+1} ως προς τα σημασιολογικά της χαρακτηριστικά. Δεδομένης λοιπόν ερμηνείας που σέβεται τις παραδοχές που έχουμε κάνει, το αντικείμενο b’ θα πρέπει να κατατάσσεται ως μη αποδεκτό, αφού διακρίνει μεταξύ αντικειμένων που διαφέρουν μεταξύ τους ελάχιστα όσον αφορά τις σχετικές ιδιότητες.

Από την άλλη, παρατηρούμε ότι με βάση την ερμηνεία που έχουμε περιγράψει θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \dashv E\{E\{Fa_{40000}\} \rightarrow E\{Fa_{45000}\}\}$. Ενώ λοιπόν είναι $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{E\{Fa_{40000}\} \rightarrow E\{Fa_{40001}\}\}$, $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{E\{Fa_{40001}\} \rightarrow E\{Fa_{40002}\}\}$, …, $<w, w', w'', \ldots> \vDash E\{E\{Fa_{44999}\} \rightarrow E\{Fa_{45000}\}\}$, θα είναι ταυτόχρονα και $<w, w', w'', \ldots> \dashv E\{E\{Fa_{40000}\} \rightarrow E\{Fa_{45000}\}\}$. Έπεται λοιπόν ότι θα είναι $<w, w', w'', \ldots> \dashv [[E\{E\{Fa_{40000}\} \rightarrow E\{Fa_{40001}\}\} \wedge E\{E\{Fa_{40001}\} \rightarrow E\{Fa_{40002}\}\} \wedge \ldots \wedge E\{E\{Fa_{44999}\} \rightarrow E\{Fa_{45000}\}\}] \rightarrow E\{E\{Fa_{40000}\} \rightarrow E\{Fa_{45000}\}\}]$.

4 Συμπέρασμα

Η συγκεκριμένη εργασία βασίστηκε σε μια σειρά από παραδοχές γύρω από την φύση του φαινομένου της ασάφειας. Θεωρήσαμε πως το συγκεκριμένο φαινόμενο πηγάζει από το γεγονός ότι η φυσική γλώσσα είναι από κάποιες απόψεις ημιτελής, δεν είναι πλήρως διαμορφωμένη. Πολύ απλά το νόημα μιας ασαφούς κατηγορηματικής έκφρασης και ο τρόπος που είναι δομημένος ο κόσμος δεν επαρκούν ώστε να καθοριστεί για κάθε περίπτωση αν αυτή ικανοποιεί την έκφραση ή όχι. Προκύπτει λοιπόν μια πληθώρα δυνατοτήτων όσον αφορά το πώς μπορεί να συμπληρωθεί περαιτέρω η σχετική πληροφορία, δηλαδή όσον αφορά το πώς μπορεί να διαμορφωθεί περαιτέρω η γλώσσα από σημασιολογική άποψη.

Μελετώντας τα βασικά χαρακτηριστικά μερικών από τις θεωρίες που έχουν κατά καιρούς προταθεί, διαπιστώσαμε ότι θεωρίες που σέβονται την αρχή της αληθοσυναρτησιακότητας δεν είναι πάντα εύκολο να συμβιβαστούν με την παραπάνω θεώρηση. Προσπαθήσαμε λοιπόν να τροποποιήσουμε το πώς ανατίθενται οι σημασιολογικές τιμές στις διάφορες προτάσεις της γλώσσας, οπότε διαπιστώσαμε ότι καταλήγουμε έτσι σε θεωρίες που φαίνεται μεν να διακρίνονται από επιπλέον χαρακτηριστικά που θεωρούμε επιθυμητά, αλλά δεν μπορούν πλέον να χαρακτηριστούν ως αληθοσυναρτησιακές. Κυριότερες θεωρίες του είδους είναι οι λεγόμενες θεωρίες υπερτιμήσεων, διαπιστώσαμε όμως τελικά ότι και αυτές διακρίνονται από μια σειρά χαρακτηριστικών που δεν είναι εύκολο να δικαιολογηθούν από φιλοσοφική άποψη. Συνεχίσαμε ερευνώντας εναλλακτικές δυνατότητες ώστε να οριστεί η έννοια της αλήθειας ως προς ερμηνεία της γλώσσας, οπότε και προέκυψε το ερώτημα: ποιους από τους δυνατούς τρόπους ώστε να συμπληρωθεί περαιτέρω η σχετική πληροφορία πρέπει η θεωρία να λαμβάνει υπόψη;

Σε αυτό το σημείο κάναμε μια επιπλέον παραδοχή, πιο συγκεκριμένα δεχτήκαμε ότι ως προς κάποιο πλαίσιο συζήτησης, δυνατοί τρόποι περαιτέρω διαμόρφωσης της σχετικής πληροφορίας που δέχονται διακρίσεις τις οποίες οι ομιλητές δεν είναι διατεθειμένοι, ή δεν μπορούν καν, να κάνουν, πρέπει να κατατάσσονται ως μη αποδεκτοί. Καταλήξαμε σε ένα είδος θεωρίας υπερτιμήσεων, σύμφωνα με την οποία η σχέση συνέπειας μεταξύ των προτάσεων της γλώσσας δεν είναι πάντα μεταβατική.

Όπως συμβαίνει και με κάθε άλλη θεωρία, διαπιστώσαμε ότι αυτή διακρίνεται από κάποια θετικά χαρακτηριστικά, αλλά και από κάποια άλλα που θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι είναι μειονεκτήματα της θεώρησης. Έτσι, είδαμε ότι η θεωρία αντιμετωπίζει τα διάφορα επιχειρήματα σωρειτικού τύπου με ελκυστικό τρόπο, και επιτρέπει ώστε κάθε πρόταση που εκφράζει ανεκτικότητα να κατατάσσεται ως αληθής. Κατ' αυτόν τον τρόπο αποφύγαμε, τουλάχιστον όσον αφορά προτάσεις όπως αυτές, να βρεθούμε στην θέση να είμαστε αναγκασμένοι να δικαιολογήσουμε πώς είναι δυνατόν προτάσεις που στην συντριπτική πλειοψηφία των ομιλητών της γλώσσας φαίνονται ως αληθείς παρόλα αυτά να μην είναι. Μια από τις μεθοδολογικές αρχές που προσπαθήσαμε να ακολουθήσουμε είναι να λάβουμε τοις μετρητοίς εκείνες από τις γλωσσικές διαισθήσεις που, ακόμα και ύστερα από φιλοσοφική διερεύνηση, φαίνεται δύσκολο να υποστηριχθεί πως πρόκειται τελικά απλώς για περιπτώσεις όπου τα φαινόμενα απατούν. Παρόλα αυτά, προέκυψαν και κάποιες συνέπειες για τις οποίες θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι ισχύει ακριβώς το τελευταίο. Για παράδειγμα, όπως είδαμε έπεται σύμφωνα με την θεωρία ότι κάποια πρόταση της μορφής $(A\wedge B)\vee(A\wedge \Gamma)$ δεν έπεται λογικά από την $A\wedge(B\vee\Gamma)$, και κατά παρόμοιο τρόπο κάποια πρόταση της μορφής $A\vee(B\wedge\Gamma)$ δεν έπεται λογικά από την $(A\vee B)\wedge(A\vee\Gamma)$. Κάθε προσπάθεια επίλυσης ενός φιλοσοφικού προβλήματος, πέρα από τα όποια πλεονεκτήματα και ελκυστικά χαρακτηριστικά που μπορεί να προσφέρει θα συνοδεύεται αναπόφευκτα και από κάποιο κόστος. Απαιτείται στην συνέχεια περαιτέρω φιλοσοφική ανάλυση προκειμένου να εκτιμηθεί αν αξίζει κανείς να το πληρώσει ή όχι, και εδώ όπως είναι φυσικό οι απόψεις θα διίστανται.

Συνεχίσαμε διαπιστώνοντας ότι η απάντηση που δώσαμε όσον αφορά το ποιοι από τους δυνατούς τρόπους ώστε να διαμορφωθεί η γλώσσα είναι αποδεκτοί θα συνεπάγεται ότι το συγκεκριμένο ζήτημα δεν μπορεί να είναι σαφές. Ορισμένες λοιπόν από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούμε προκειμένου να περιγράψουμε τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά των εκφράσεων της γλώσσας αντικείμενο θα πρέπει επίσης να είναι ασαφείς. Αυτό είναι κάτι που σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να λάβουμε υπόψη, ειδικά μάλιστα αν αποφασίσουμε να εμπλουτίσουμε την γλώσσα αντικείμενο με τους κατάλληλους μηχανισμούς ώστε να μπορούν εντός αυτής να διατυπωθούν και προτάσεις που χαρακτηρίζονται από ανώτερα επίπεδα ασάφειας. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιήσαμε μια ιεραρχία από γλώσσες, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να εκφράσει μέχρι κάποιο πεπερασμένο επίπεδο ασάφειας. Τέλος, παρατηρήσαμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκάστοτε από τις γλώσσες που εμφανίζονται εντός της ιεραρχίας προκειμένου να μιλήσουμε για ορισμένα από τα σημασιολογικά χαρακτηριστικά κάποιων από τις εκφράσεις που εμφανίζονται σε άλλες γλώσσες της ιεραρχίας. Προχωρήσαμε λοιπόν εμπλουτίζοντας την ιεραρχία με κάποιες επιπλέον εκφράσεις.

Η πλειονότητα των περιπτώσεων καθημερινής επικοινωνίας χαρακτηρίζεται ως ένα βαθμό από ασάφεια, ψήγματά της μπορούν να εντοπιστούν ακόμη και σε περιπτώσεις που οι ομιλητές καταβάλλουν προσπάθεια να μιλήσουν με ακρίβεια. Η μελέτη του φαινομένου μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως σημαντική, και ως κάτι που μπορεί να ρίξει φως σε μια σειρά από φιλοσοφικά και επιστημονικά ζητήματα. Αυτό είναι κάτι που αναγνωρίστηκε από νωρίς, ήδη από τα αρχαία χρόνια οι φιλόσοφοι της μεγαρικής σχολής πρωτο-χρησιμοποίησαν επιχειρήματα σωρειτικού τύπου προκειμένου να πλήξουν θέσεις του Αριστοτέλη ή των στωικών, ενώ από τους τελευταίους, ο Χρύσιππος έγραψε πραγματείες για αυτά και τον ορθό τρόπο αντιμετώπισής τους. Πάνω από 2000 χρόνια αργότερα, οι πατέρες της σύγχρονης λογικής Frege και Russell αναγνώρισαν την ασάφεια ως ένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας και το σχολίασαν ή μελέτησαν, διατυπώνοντας μάλιστα εικασίες για την φύση και την προέλευση του φαινομένου, έστω και για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η φυσική γλώσσα είναι τελικά ακατάλληλη για τους σκοπούς τους. Η έρευνα γύρω από την ασάφεια δεν σταμάτησε όμως εκεί, με πλήθος θεωριών να έχουν μέχρι σήμερα προταθεί ως η ορθή σημασιολογική θεώρηση, και κάθε έναν από τους δυνατούς τρόπους ώστε να αντιμετωπιστούν τα επιχειρήματα σωρειτικής μορφής να έχει πλέον διερευνηθεί. Η συζήτηση πάντως όχι μόνο συνεχίζεται αλλά και εξακολουθεί να είναι γόνιμη, οπότε ελπίζω ότι η παρούσα εργασία συνεισφέρει κάτι σε αυτήν.

Βιβλιογραφία:

Akama, Seiki (1988): *"Constructive Predicate Logic with strong negation and model theory"*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 29, Number 1, Winter 1988

Akiba, Ken and Ali Abasnezhad (Editors) (2014): *Vague Objects and vague identity, new essays on ontic vagueness* (Springer)

Almukdad, Ahmad and David Nelson (1984): *"Constructible Falsity and Inexact Predicates"*, The journal of Symbolic Logic, Vol. 49, No. 1 (Mar., 1984), pp. 231-233

Anderson A. R. and Nuel Belnap (1975a): *Entailment, the logic of Relevance and Necessity*, Vol 1, (Princeton University Press)

-------- (1975b): *Entailment, the logic of Relevance and Necessity*, Vol 2, (Princeton University Press)

Aristotle (1963): *Categories and De Interpretatione*, translated by J. L. Ackrill (Clarendon Press, Oxford)

Αριστοτέλης (2011): *Έργα, τόμος πρώτος: Κατηγορίαι, Περί Ερμηνείας.* Μετάφραση, εισαγωγή, επιμέλεια: Παύλος Καλλιγάς (Αθήνα, Νήσος)

Asher, N., J. Dever, and C. Pappas (2009): *"Supervaluations Debugged"* Mind

Austin, J. L. (1962) : *How to do things with words*, The William James Lectures delivered at Harvard University in 1955 (Oxford at the Clarendon Press)

Awodey, S., Erich Rech and Gottfried Gabriel (2004): *Frege's Lectures on Logic, Carnap's Student notes*, 1910-1914 (Open Court)

Bacon, A. (2013): *"Non-classical Metatheory for Non-Classical Logics"*, Journal of Philosophical Logic, Volume 42, Issue 2, pp. 332-355

Barnes, Jonathan (1982): *"Medicine, Experience and Logic"*, in Barnes J., M. F. Burnyeat, and M. Schofield (Eds.), Science and Speculation (Cambridge University Press)

Beall, J. C. (2009): *Spandrels of Truth* (Clarendon Press, Oxford)

Beall, J. C. (Editor) (2007): *Revenge of the Liar, New essays on the Paradox* (Oxford University Press)

Belnap, Nuel (1977): "A useful four-valued logic", in J. M. Dunn and G. Epstein (Eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic, D. Reidel

-------- (1993): "*Life in the undistributed middle"*, in Schroeder-Heister, Peter and Kosta Dosen (eds) Substructural Logics (Clarendon Press, Oxford)

Bolzano, B (1973): *Theory of Science*, edited by Jan Berg, (D. Reidel Publishing Company)

Boolos, George (1999): *Logic, Logic, and Logic* (Harvard University Press)

Boolos, G. , John P. Burgess, Richard C. Jeffrey (2007): *“Computability and Logic”*, fifth edition (Cambridge University Press)

Borel, Emile (1907): *“An Economic Paradox: The Sophism of the Heap of Wheat and Statistical Truths”*, Erkenntnis, Volume 79, Issue S5 (2014), originally published as *“Un Paradoxe Economique: Le sophisme du tas de ble et les verities statistiques”*, La revue du mois, 1907, pp. 688-699 [2197-2208]

Brady, Ross. T. (1982): *“Completeness proofs for the Systems RM3 and BN4”*, Logique et Analyse, Vol. 25, No. 97 (Mars 1982), pp. 9-32

Broadie, Alexander (1987): *Introduction to Medieval Logic*, 2nd edition, (Clarendon Press, Oxford)

Burgess, J. A. and Lloyd Humberstone (1987): *“Natural deduction rules for a logic of Vagueness”*, Erkenntnis, 27:197-229

Burgess, J. A. (1990): *“The Sorites paradox and higher-order Vagueness”*, Synthese, Volume 85, Issue 3, pp. 417-474

Burns, Linda Claire (1991): *Vagueness, an investigation into natural languages and the sorites paradox* (Springer Science and Business Media)

-------- (1995): *“Something to do with Vagueness”*, Southern Journal of Philosophy Supplement, 33:23-47

Burnyeat, Myles (1982): *“Gods and heaps”*, in *Language and Logos*, Malcolm Schoefield and Martha Nussbaum (eds.), pages 315-338 (Cambridge University Press)

Carnap, R. (1946): *“Modalities and Quantification”*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 11, No. 2 (June, . 1946), pp. 33-64

Casari, Ettore (1987): *“Comparative Logics”*, Synthese, Vol. 73, No. 3, Theories of Meaning (Dec., 1987), pp. 421-449

Cobreros, P. , P. Egre, D. Ripley, R. Van Rooiz (2006): *“Tolerance and Mixed consequence in the s’valuationist setting”*, Studia Logica, 82, pp. 1-23

-------- (2010):*”Tolerant, Classical, Strict”*, Journal of Philosophical Logic, DOI 10.1007/s10992-010-9165-z

Cook, Roy (2004): *“Patterns of Paradox”*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 69, No.3 (Sep., 2004) pp767-774

Copeland, B. Jack (1997): *“Vague identity and Fuzzy Logic”*, The Journal of Philosophy, Vol. 94, No. 10 (Oct., 1997), pp. 514-534

Cresswell, M. J. and G. E. Hughes (1996): *A new introduction to Modal Logic* (Routledge)

De Rijz, L. M. (1992): *“John Buridan on Universals”*, Revue de metaphysique et de morale, 97e annee, No. 1, Les Universaux, (Janvier-Mars, 1992), pp. 35-59

Dummett, M. (1977): *Elements of Intuitionism,* Oxford Logic Guides (Clarendon Press, Oxford)

-------- (1991): *Frege, Philosophy of Mathematics* (Duckworth)

-------- (1996): *Truth and other enigmas* (Duckworth)

Dunn, J. M. and George Epstein (Eds.) (1977): *Modern Uses of Multiple - Valued Logic*, Invited Papers in the Fifth international symposium on multiple – valued logic held at Indiana university (D. Reidel Publishing Company)

Dunn, J. M. and Greg Restall (2002): *"Relevance Logic"*, in D. Gabbay & F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic* (Kluwer Academic Publishers)

Dunn, J. M. (2000): *"Partiality and its Dual"*, Studia Logica 65: 5-40, 2000

Dutilh-Novaes, Catarina (2007): *Formalizing Medieval Logical Theories*, Suppositio, Consequentiae and Obligationes (Springer, New York)

Dyke, H. (ed.) (2009): *From Truth to Reality, New essays in Logic and Metaphysics* (Routledge)

Edgington, D (1992): *"Validity, Uncertainty and Vagueness"*, Analysis, 52:193-204

Eklund, M (2001): *"Inconsistent Languages"*, Philosophy and Phenomenological Research, 64:251-275

-------- (2007): *"Characterizing Vagueness"* Philosophy Compass (2) pp. 896-909

Enderton, B. Herbert (1977): *Elements of Set theory*, (Academic Press)

Epstein, R. L. (1979): *"Relatedness and Implication"*, Philosophical Studies, Vol. 36, Issue 2

Etchemendy, J. (1999): *"The concept of Logical Consequence"* (Stanford, CSLI)

Field, H. (1994): "*Disquotational truth and factually defective discourse"*, The Philosophical Review, 103:405-452

-------- (2003): *"The Semantic Paradoxes and the Paradoxes of Vagueness"*, in J. C. Beall (Ed.) *Liars and Heaps: New Essays on Paradox*, Clarendon Press, pp. 262-311

-------- (2003a): *"A revenge-immune solution to the semantic paradoxes"*, Journal of Philosophical Logic 32 (2):139-177

-------- (2003b): *"No fact of the Matter"*, Australasian Journal of Philosophy, 81:457-480

-------- (2008): *Saving Truth from Paradox* (Oxford University Press)

Fine, K. (1972): *"In so many possible worlds"*, Notre Dame Journal of Philosophical Logic, vol. 13, num. 4, pp. 516-520

-------- (1975): *"Vagueness, Truth and Logic"* Synthese (30) pp. 265-300

Fitch, Frederic Brenton (1952): *Symbolic Logic, An Introduction* (The Ronald Press Company, New York)

Frege, G. (1984): *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy* (Blackwell)

Garson, J. (2013): *Modal Logic for Philosophers*, 2nd edition (Cambridge University Press)

Geach, P. T. (1970): *"Entailment"*, The Philosophical Review, Vol. 79, No. 2, (Apr., 1970), pp. 237-239

-------- (1972): *Logic matters* (Basil Blackwell)

Geach, P. T and Robert H. Stoothoff (1968): *"What actually exists"*, Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes, Vol. 42, pp. 7-30

Goble, L. (Ed) (2001): *The Blackwell Guide to Philosophical Logic* (Blackwell Publishing)

Gödel, K. (1933): *"An interpretation of the Intuitionistic propositional calculus"*, in Kurt Gödel, Collected Works, Volume 1, Publications 1929-1936, Solomon Feferman, John W. Dawson, Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, Jean Van Heijenoort (editors) (Oxford University Press)

Goguen, J. (1969): *"The Logic of Inexact Concepts"* Synthese (19) pp. 325-373

Graff, Delia Ruby (1997): *The Phenomena of Vagueness*, Phd thesis, Massachusetts Institute of Technology

Gurevich, Yuri (1977): *"Intuitionistic Logic with Strong negation"*, Studia Logica 36 (1-2):49-59

Haack, Susan (1978): *Philosophy of Logics* (Cambridge University Press)

Halbach, V. (1995): "*Tarski Hierarchies"*, Erkenntnis, Volume 43, Issue 3

-------- (1997): "*Tarskian and Kripkean Truth"*, Journal of Philosophical Logic, Volume 26, Issue 1

Halmos R. Paul (1950): *Measure Theory*, Graduate texts in Mathematics (Springer Verlag)

Hazen, Allen (1982): *"On a possible Misinterpretation of Kripke's Semantics for Intuitionistic Logic"*, Analysis, Vol. 42, No. 3 (Jun., 1982), pp. 128-133

Heck, R. G. (1993): *"A note on the logic of (higher-order) vagueness"*, Analysis, Volume 53, Issue 4, October 1993, pp. 201-208

Hyde, D. (1994): *"Why Higher-Order Vagueness is a Pseudoproblem"* Mind (103) pp. 35-41

-------- (2003): *"Higher-Orders of Vagueness Reinstated"* Mind (112) pp. 301-305

-------- (2008): *Vagueness, Logic and Ontology* (Ashgate)

Jonsson, Olafur Pall (2001): *Vague Objects*, Phd thesis, Massachusetts Institute of Technology

Kamp, Hans (1981): *"The Paradox of the Heap"*, in Uwe Monnich (ed.), Aspects of Philosophical Logic, pages 225-277 (Reidel, Dordrecht)

Kaplan, D (1989): *"Demonstratives"*, in Joseph Almog, John Perry, & Howard Wettstein (eds.), *Themes from Kaplan*, pp. 481-563 (Oxford University Press)

Keefe, R. (2000): *Theories of Vagueness* (Cambridge University Press)

-------- (2000a): *"Supervaluationism and Validity"* Philosophical Topics (28) pp. 93-105

-------- (2008): *"Vagueness: Supervaluationism"* Philosophy Compass (3) pp. 315-324

Kleene, S. C. (1938): *"On Notation for Ordinal Numbers"*, Journal of Symbolic Logic, Volume 3, Issue 4

-------- (1950): *Introduction to Meta-Mathematics* (Ishi Press International)

Kneale, William and Martha Kneale (1962): *The Development of Logic* (Oxford at the Clarendon Press)

Korner, Stephan (1966): *Experience and Theory, An Essay in the Philosophy of Science* (Routledge Library Editions: History and Philosophy of Science)

Kunne, Wolfgang (2003): *Conceptions of Truth* (Clarendon Press, Oxford)

Leary, C. C. and Lars Kristiansen (2015): *A friendly Introduction to Mathematical Logic*, 2nd edition (Milne Library, SUNY Geneseo, Geneseo, NY)

Lemmon, E. J. (1957): *"New Foundations for Lewis Modal Systems"*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 22, No. 2, (Jun., 1957), pp. 176-186

-------- (1977): *An introduction to Modal Logic*, In collaboration with Dana Scott (Basil Blackwell)

Lewis, C. I and Cooper Harold Langford (1959): *Symbolic Logic*, 2nd edition (Dover Publications)

Lewis, D. (1970): *"General Semantics"* Synthese (22) pp. 18-67

-------- (1973): *Counterfactuals* (Blackwell Publishers)

-------- (1979): *"Scorekeeping in a Language Game"*, Journal of Philosophical Logic, Volume 8, Issue 3 (June, 1979), p. 339

-------- (1980): *"A subjectivist's guide to objective chance"*, in Richard C. Jeffrey (ed.), Studies in Inductive logic and Probability, Volume II, Berkeley: University of California Press, pp. 263-293

-------- (1986): *On the Plurality of Worlds* (Oxford, UK: Basil Blackwell)

-------- (1993): *"Many but almost one"*, in Bacon, J., K. Campbell, and L. Reinhardt (eds.)

Łukasiewicz, Jan (1920): O logice trójwartościowej. Ruch filozoficzny 5:170–171

-------- (1955): *Aristotle's Syllogistic, from the standpoint of modern formal logic* (Oxford at the Clarendon Press)

Łukasiewicz, Jan and Vernon Wedin (1971): "On the principle of contradiction in Aristotle", Review of Metaphysics, 24 (3) : 485-509

Machina, K. F. (1976): *"Truth, belief and vagueness"* Journal of Philosophical Logic (5) pp. 47-78

Macintosh, J (2016): *"Theological and Scientific Applications of the notion of Necessity in the mediaeval and early modern Periods"*, in Logical Modalities from Aristotle to Carnap, The Story of Necessity, Max Cresswell, Edwin Mares, Adriane Rini (Eds.) (Cambridge University Press)

MacFarlane, John (2003): *"Future Contingents and Relative Truth"*, The philosophical Quarterly, Vol. 53, No. 212

Malinowsky, Grzegorz (1993): *Many – Valued Logics*, Oxford Logic Guides (Clarendon Press, Oxford)

Marenbon, J. (1981): *From the circle of Alcuin to the school of Auxerre*, Cambridge studies in medieval life and thought (Cambridge University Press)

Mares, Edwin (2004): *Relevant Logic, a philosophical Interpretation* (Cambridge University Press)

-------- (2004): *"Four- Valued Semantics for the relevant logic R"*, Journal of Philosophical Logic 33: 327-341

Mates, Benson (1949): *"Diodorean Implication"*, The philosophical review, Vol. 58, No. 3 (May 1949) pp. 234-242

McGee, V. (1990): *Truth, Vagueness, and Paradox, An essay on the logic of Truth* (Hackett Publishing Company)

McGee, V. and B. McLaughlin (1995): *"Distinctions without a Difference"* Southern Journal of Philosophy (33) pp. 203-252

Meredith, C. A. and A. N. Prior (1963): *"Notes on the axiomatics of the Propositional Calculus"*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 4, Issue 3, July 1963

Mignucci, Mario (1993): *"The Stoic analysis of the sorites"*, Proceedings of the Aristotelian Society, 93:231-245

Moline, Jon (1969): *"Aristotle, Eubulides and the sorites"*, Mind, New Series, Vol. 78, No. 311 (Jul., 1969), pp. 393-407

Moschovakis, Y. (1994): *Notes on Set Theory* (Springer)

Mulligan, K. (2010): *"The Truth predicate vs the Truth connective. On taking connectives seriously"*, Dialectica, Vol. 64, No. 4, (2010), pp. 565-584

Nelson, David (1949): *"Constructible Falsity"*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 14, No. 1 (Mar., 1949), pp. 16-26

Ohrom, Peter, and Per. F. V. Hasle (1995): *Temporal Logic, from Ancient Ideas to Artificial Intelligence* (Kluwer Academic Publishers)

Paoli, F. (2002): *Substructural Logics, a primer* (Springer)

Parsons, Terence (2000): *Indeterminate Identity, Metaphysics and Semantics* (Clarendon Press, Oxford)

Patrick, Mary, Mills (1897): *Sextus Empiricus and Greek Scepticism*, A dissertation for the degree of doctor of Philosophy in the University of Bern

Post, Emil (1920): "Introduction to a general theory of elementary propositions", Bulletin of the American Mathematical Society, 26, 437

Priest, G (1979): *"The Logic of Paradox"*, Journal of Philosophical Logic, Vol. 8, No. 1, pp. 219 -241

-------- (1984): *"Logic of Paradox revisited"*, Journal of Philosophical Logic 13 (2): 153-179

-------- (1995): *Beyond the Limits of Thought* (Oxford)

-------- (1998): *"Fuzzy identity and local validity"*, The Monist, 81:331-342

-------- (2001): *"An Introduction to non-classical logic"* (Cambridge University Press)

-------- (2004): *"A Site for Sorites"*, in J. C. Beall (Ed.), Liars and Heaps: New Essays on paradox (Oxford, Clarendon Press)

-------- (2006): *In Contradiction, A study of the Transconsistent* (Clarendon Press, Oxford)

-------- (2010): *"Inclosures, Vagueness and self-reference"* Notre Dame Journal of Formal Logic (51)

-------- (2010b): "Non-transitive Identity", in Richard Dietz and Sebastiano Moruzzi (Eds.), Cuts and Clouds: Vagueness, its Nature, and its Logic, Oxford University Press, pp 406-416

Prior, A. N. (1955): *"Many – Valued and Modal Systems: An intuitive approach"*, The Philosophical Review, Vol. 64, No. 4, (Oct., 1955) pp 626-630

--------- (1955): "Diodoran Modalities", The philosophical quarterly, Vol. 5, No. 20 (Jul., 1955), pp. 205-213

--------- (1957): *Time and Modality* (Oxford at the Clarendon Press)

--------- (1967): *Past, Present, and Future* (Oxford University Press)

Putnam, Hilary (1973): *"Meaning and Reference"*, Journal of Philosophy 70 (19): 699-711

Quine, W. V. O. (1981): *Mathematical Logic*, Revised Edition (Harvard University Press)

-------- (1981): *"What Price Bivalence?"*, The Journal of Philosophy, Vol. 78, No. 2, (Feb., 1981), pp. 90-95

-------- (1986): *Philosophy of Logic*, 2nd edition (Harvard University Press)

Raffman, D. (1994): *"Vagueness without Paradox"* , The Philosophical Review, Vol. 103, No. 1, pp. 41-47

Read, S. (1988): *Relevant Logic, a philosophical examination of inference* (Blackwell)

-------- (1995): *Thinking about Logic, An introduction to the Philosophy of Logic* (Oxford University Press)

Restall, G. (1995): *"Four-Valued Semantics for Relevant Logics (and some of their rivals)*, Journal of Philosophical Logic, 24: 139-160

-------- (1997): *"Combining Possibilities and negations"*, Studia Logica, 59(1):121-144

-------- (2000): *Introduction to Substructural Logics* (Routledge)

-------- (2005): *"Łukasiewicz, Supervaluations, and the Future"*, Logic and Philosophy of Science 3:1-10

-------- (2017): *"First Degree Entailment, Symmetry and Paradox"*, Logic and Logical Philosophy 26 (1):3-18

Ripley, D. (2012): *"Conservatively extending classical logic with transparent truth"*, The review of Symbolic Logic, 5, pp. 354-378, doi: 10.1017/S1755020312000056

-------- (2013): *"Paradoxes and Failures of Cut"*, Australasian Journal of Philosophy, 91:1, pp. 139-164

Robles, G. (2016): *"The Quasi – Relevant 3 – Valued Logic RM3 and some of its sublogics lacking the variable – sharing property"*, Reports on Mathematical Logic, 51 (2016), pp. 105 - 131

Ronzitti, G. (2011): *Vagueness, a Guide* (Springer)

Routley, R. and V. Routley (1972): *"The Semantics of First degree entailment"*, Nous, Vol. 6, No. 4, (Nov., 1972), pp. 335-359

Routley, R (1984): *"The American Plan completed: Alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics"*, Studia Logica, 42 (1-2):131-158

Rubin, Jean. E. (1967): *Set theory for the Mathematician* (Holden – Day)

Russell, B. (1907): *"On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types"*, Proceedings of the London Mathematical Society, Volume S2-4, Issue 1

-------- (1923): *"Vagueness"* Australasian Journal of Philosophy and Psychology (1) pp. 84-92; reprinted in Eames, J. Slater, et al. (eds) (1983): "The collected papers of Bertrand Russell", Vol. 9 (London, UK: Allen and Unwin/Unwin Hyman) pp. 145-154

Sainsbury, M. (1990): *"Concepts without Boundaries"*, in Rosanna Keefe and Peter Smith (Eds.), Vagueness: a reader, pages 251-264 (MIT Press)

-------- (1991): *"Is There Higher-Order Vagueness"* The philosophical Quarterly (41) pp. 167-182

-------- (1995): *Paradoxes* (Cambridge University Press)

-------- (2001): Logical Forms, 2nd edition (Oxford University Press)

Sainsbury, M and T. Williamson (1997): *"Sorites"* in Hale and Wright (eds.) A companion to the Philosophy of Language (Blackwell)

Schiffer, S. (1998): *"Two Issues of Vagueness"* , The Monist (88) pp. 193-214

Sextus Empiricus (2005): *Against the Logicians*, Edited by Richard Belt, Cambridge texts in the history of Philosophy (Cambridge University Press)

-------- (1988): *Outlines of Scepticism*, Edited by Julia Annas and Jonathan Barnes, Cambridge texts in the history of Philosophy (Cambridge University Press)

Shapiro, S. (2006): *Vagueness in Context* (Oxford University Press)

Sharvy, R. (1968): *"Why a Class can't change its members"*, Nous, Vol. 2, No. 4, (Nov. 1968), pp. 303-314

Siebel, M. (2002): *"Bolzano's concept of consequence"*, The Monist, Vol. 85, no.4, pp. 580-599

Simmons, Keith (2008): *Universality and the Liar, An essay on truth and the diagonal argument* (Cambridge University Press)

Simons, Peter (2010): *"Supernumeration: Vagueness and Numbers"*, in Richard Dietz and Sebastiano Moruzzi (Eds.), Cuts and Clouds: Vagueness, its Nature, and its Logic, Oxford University Press

Skyrms, B. (1978): *"An immaculate conception of modality, or how to confuse use and mention"*, The Journal of Philosophy, Volume 75, Issue 7 (Jul., 1978) pp. 368-387

Slaney, J. (1990): *"A general Logic"*, Australasian Journal of Philosophy, 68:1, 74-88

-------- (2010): *"A logic for Vagueness"*, Australasian Journal of Logic, 8, 100-134

Smiley, T. J. (1958): *"Entailment and Deducibility"*, Proceedings of the Aristotelian Society, New Series, Vol. 59 (1958-1959), pp. 233-254

Smith, N. (2008): *Vagueness and Degrees of Truth* (Oxford University Press)

-------- (2011): *"Fuzzy Logic and Higher-Order Vagueness"*, in Petr Cintula, Christian G. Fermuller, Lluis Godo, Petr Hajek (eds.), *Understanding Vagueness: Logical, Philosophical and Linguistic Perspectives*, College Publications, pp. 1-19

Smith, P. (2003): *An introduction to Formal Logic* (Cambridge University Press)

Smullyan, R. (1995): *First-Order Logic* (Dover Publications)

Soames, Scott (1999): *Understanding Truth* (Oxford University Press)

Sorensen, R. (1985): *"An argument for the vagueness of 'vague' "* Analysis (45) pp. 134-137

-------- (2001): *Vagueness and Contradiction* (Oxford University Press)

Strawson, P. F. (1997): *Entity and Identity – And other essays* (Oxford, Clarendon Press)

Tappenden, J. (1993): *"The Liar and Sorites Paradoxes: Towards a unified treatment"* The Journal of Philosophy (90) 551-577

Tarski, A. (1941): *Introduction to Logic and the Methodology of the Deductive Sciences* (Oxford University Press)

-------- (1956): *Logic, Semantics, Metamathematics*, Papers from 1923 to 1938 (Oxford at the Clarendon Press)

Tatzel, A. (2002): *"Bolzano's theory of Ground and Consequence"*, Notre Dame Journal of formal Logic, Volume 43, Number 1

Teller, Paul (1989): *A modern formal Logic primer, Vol 1: Sentence Logic*

---------- (1989): *A modern formal Logic primer, Vol 2: Predicate Theory*

Tennant, N. (1984): *"Perfect Validity, Entailment and Paraconsistency"*, Studia Logica, Vol. 43, issue 1-2

-------- (1987): *Anti-Realism and Logic* (Oxford at the Clarendon Press)

Thomason, R. (1969): *"A semantical Study of constructible falsity"*, Mathematical Logic Quarterly 15 (16-18): 247-257

-------- (1970): *"Indeterminist Time and Truth-value gaps"* Theoria (36) pp. 264-281

Tye, M. (1990): *"Vague Objects"* Mind (99) pp. 535-537

-------- (1994): *"Sorites Paradoxes and the Semantics of Vagueness"*, Philosophical Perspectives, Vol. 8, Logic and Language (1994), pp. 189-206

-------- (1994): *"Vagueness: welcome to the quicksand"*, The southern journal of philosophy, Volume 33, Issue S1

-------- (1994): *"Why the Vague need not be Higher Order Vague"* Mind (103) pp. 43-45

-------- (2000): *"Vagueness and Reality"* Philosophical Topics (28) pp. 195-209

Uckelman, S. L. (2009): *Modalities in Medieval Logic*, Phd Thesis, Institute for Logic, Language, and Computation, University of Amsterdam

Unger, Peter (1971): *"A defence of skepticism"*, Philosophical Review 80 (2): 198-219

-------- (1975) : *Ignorance, a case for Skepticism* (Oxford University Press)

-------- (1979): *"There are no ordinary things"*, Synthese, 41:117-154

-------- (1980): "The problem of the many", Midwest studies in Philosophy, 5 (1): 411-468

Uzquiano, G. (2004): *"The Supreme Court and the Supreme Court Justices: A metaphysical Puzzle"*, Nous, 38:1, (2004), pp. 135-153

Van Fraasen, B. (1966): *"Singular terms, Truth-value gaps, and Free Logic"* Journal of Philosophy (63) pp. 481-495

-------- (1968): "*Presupposition, Implication, and Self-reference"* Journal of Philosophy (65) pp. 136-152

-------- (1970): *"Inference and Self Reference"*, Synthese, Volume 21, issue 3-4, pp. 425-438

Van Heijenoort, Jean (Ed.) (1967): *From Frege to Gödel, A source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (Harvard University Press)

Varzi, A. (2000): *"Supervaluationism and Paraconsistency"*, in Diderik Batens, Chris Mortensen, Graham Priest and Jean-Paul Van Bendegem (Eds.), *Frontiers in Paraconsistent Logic* (Studies in Logic and Computation, Series 8), Baldock: Research Studies Press, 2000, pp. 279-297)

-------- (2003): *"Higher order Vagueness and the Vagueness of 'Vague' "* Mind (112) pp. 295-298

-------- (2007): *"Supervaluationism and Its Logics"*, Mind 116, 633-676

Von Wright, G. H. (1951): *An Essay in Modal Logic*, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam)

Wansing, H. (1993): *The Logic of Information Structures* (Springer)

Weatherson, Brian (2005): *"True, truer, truest"*, Philosophical Studies, 123: 47-70

Williamson, T. (1992): *"Vagueness and Ignorance"* Proceedings of the Aristotelian Society (66 supp. Vol.) pp. 145-162

-------- (1994): *Vagueness* (London, UK: Routledge)

Wittgenstein, L. (1974): *Tractatus Logico-Philosophicus* (Routledge Classics)

Wright, C. (1975): *"On the coherence of vague predicates"*, Synthese, 30:325-365

-------- (1987): *"Further Reflections on the Sorites Paradox"* Philosophical Topics (15) pp. 227-290

-------- (1992): *"Is Higher-Order Vagueness Coherent?"* Analysis (52) pp. 129-139

Wright, C. (2007): *"The Illusion of Higher-Order Vagueness"* in Dietz, R. and S. Morruzzi (eds.): Cuts and Clouds (Oxford, UK: Oxford University Press)

Zadeh, L (1975): *"Fuzzy logic and approximate reasoning"*, Synthese, 30: 407-428

Zardini, E. (2007): Living on the Slippery Slope, The Nature, Sources and Logic of Vagueness, Phd Thesis, University of St Andrews (http://hdl.handle.net/10023/508)

-------- (2008): "*A model for Tolerance"*, Studia Logica, 90 (3): 337-368

-------- (2013): *"Higher-Order Sorites Paradox"*, Journal of Philosophical Logic, 42(1):25-48