



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής

Διδακτορική Διατριβή

*Συμμετρίες στην κβαντική κοσμολογία-βαρύτητα και
το πρόβλημα του χρόνου*

Αλέξανδρος Καραγιώργος

Αθήνα 2019



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής

Διδακτορική Διατριβή

*Συμμετροίες στην κβαντική κοσμολογία-βαρύτητα και
το πρόβλημα του χρόνου*

Αλέξανδρος Καραγιώργος

Επταμελής επιτροπή

Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης (Επιβλέπων)	Καθηγητής ΕΚΠΑ
Χάρης Αναστόπουλος	Επ. Καθηγητής Παν. Πατρών
Βασίλειος Γεωργαλάς	Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ
Νικόλαος Τετράδης	Καθηγητής ΕΚΠΑ
Γραμμένος Θεοφάνης	Επ. Καθηγητής Παν. Θεσσαλίας
Γεώργιος Διαμάντης	Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ
Γεώργιος Κοφινάς	Επ. Καθηγητής Παν. Αιγαίου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα μου κ.κ. Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα και γενικότερα για την βοήθεια, τις ευκαιρίες και τις συμβολές που μου πρόσφερε καθ' όλη την διάρκεια του διδακτορικού μου. Επιπλέον, θέλω να ευχαριστώ όλους τους συνεργάτες διδακτορικούς και μεταδιδακτορικούς που συνέβαλαν στις εργασίες αυτές. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια, τους φίλους και την Παναγιώτα για την κατανόηση και συμπαράσταση όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα εργασία μελετήσαμε συγκεκριμένες κλασικές και κβαντικές κοσμολογικές λύσεις. Τα κβαντικά κοσμολογικά πρότυπα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι λειτουργούν ως εργαλεία ελέγχου για τα θεωρητικά μοντέλα της κβαντικής βαρύτητας. Επίσης, όπως θα δούμε και σε κάποια από τα μοντέλα που αναλύσαμε, στην κβαντική κοσμολογία απαλείφονται οι κλασικές ανωμαλίες. Η ανάλυση μας γίνεται με την χρήση των συμμετριών της δράσης και των εξισώσεων κίνησης. Τα διατηρήσιμα φορτία που προκύπτουν από την εκάστοτε συμμετρία (γραμμική ή τετραγωνική) δίνουν επιπλέον εξισώσεις για την αναλυτική επίλυση του μοντέλου.

Αρχικά αναλύουμε ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο παρουσία ενός ηλεκτροστατικού πεδίου και κατασκευάζουμε τη Λαγκρανζιανή του μίνιπερχώρου που αναπαράγει τη γνωστή λύση Reissner-Nordström. Επιλέγουμε στη συνέχεια τα κλασικά ολοκληρώματα της κίνησης που πρόκειται να αναχθούν σε κβαντικά παρατηρήσιμα και τα οποία σχετίζονται με τη μάζα και το φορτίο. Οι εξισώσεις των ιδιοτιμών τους χρησιμοποιούνται ως συμπληρωματικές συνθήκες στην εξίσωση Wheeler-DeWitt και παρέχεται σύνδεση μεταξύ της ύπαρξης ενός ορίζοντα και του εάν το φάσμα των παρατηρητών είναι πλήρως διακριτό ή όχι. Για κάθε περίπτωση παρέχουμε μια ορθοκανονική βάση καταστάσεων όπως προκύπτει από τη διαδικασία της κανονικής κβάντωσης.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια αξονο-συμμετρική γεωμετρία Bianchi τύπου III παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ένα πρώτο αποτέλεσμα σε κλασικό επίπεδο είναι ότι η συμμετρία της γεωμετρίας δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί στον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή $F_{\mu\nu}$. Οι αλγεβρικοί περιορισμοί, που προέρχονται από τις εξισώσεις πεδίων Einstein στον τανυστή ενεργείας πίεσης $T_{\mu\nu}$, αρκούν για τη ανα-

γωγής της γενικής $F_{\mu\nu}$ στην κατάλληλη μορφή. Η κλασική λύση που βρέθηκε περιέχει ένα χρονοεξαρτωμένο ηλεκτρικό φορτίο και ένα σταθερό μαγνητικό φορτίο. Η λύση μπορεί να βρεθεί και από την δράση του μίνι-υπερχώρου, η οποία είναι εντυπωσιακά παρόμοια με την Reissner-Nordstrom. Αυτό καταδεικνύει μια σχέση μεταξύ της γεωμετρίας των μελανών οπών και της κοσμολογικής λύσης που βρέθηκε εδώ, η οποία είναι αντίστοιχη με την αναλογία μεταξύ Schwarzschild μελανής οπής και του κοσμολογικού μοντέλου Kantowski-Sachs. Ο θεσεογραφικός χώρος τροποποιείται δραστικά από την παρουσία του μαγνητικού φορτίου, από επίπεδος τρισδιάστατος σε επίπεδο τρισδιάστατο pp-wave. Απεικονίζουμε τα γραμμικά και τετραγωνικά κλασικά ολοκληρώματα της κίνησης, σε κβαντικά παρατηρήσιμα. Μαζί με την εξίσωση Wheeler-DeWitt αυτά τα παρατηρήσιμα στοιχεία παρέχουν μοναδικές κυματοσυναρτήσεις με απροσδιόριστες τις σταθερές.

Τέλος επανεξετάζουμε τα αξονοσυμμετρικά πρότυπα Bianchi VIII και IX. Στο κλασικό επίπεδο αναπαράγουμε τη γνωστή αναλυτική λύση, με ένα νέο τρόπο χρησιμοποιώντας δύο τετραγωνικά ολοκληρώματα της κίνησης, τον δεσμό, καθώς και ένα γραμμικό μη τοπικό ολοκλήρωμα της κίνησης. Αυτές οι ποσότητες αντιστοιχούν σε δύο τανυστές Killing δεύτερης τάξης και ένα ομοθετικό διανυσματικό πεδίο που υπάρχει στον αντίστοιχο θεσεογραφικό χώρο. Στο αντίστοιχο φασικό χώρο τα δύο τετραγωνικά φορτία μετατίθενται με τον Χαμιλτονιανό δεσμό αλλά όχι μεταξύ τους. Έτσι, αφού μετατρέψουμε αυτά τα φορτία σε τελεστές, έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις στην εξίσωση Wheeler DeWitt που αντιστοιχούν στους δύο τετραγωνικούς τελεστές. Το ομοθετικό διάνυσμα στη συνέχεια χρησιμοποιείται ως κατευθυντήρια γραμμή για τον ορισμό μιας κανονικοποιήσιμης υπό συνθήκη πιθανότητας που μηδενίζεται στις κλασικές ανωμαλίες.

Επιστημονική περιοχή: Γενική σχετικότητα, μαθηματική κοσμολογία, κβαντική κοσμολογία και κβαντική βαρύτητα

Λέξεις κλειδιά: κοσμολογία, βαρύτητα, συμμετρίες, Bianchi, κβαντική, γενική σχετικότητα, πρόβλημα του χρόνου, αυτομορφισμοί

ABSTRACT

In this dissertation we studied specific classical and quantum cosmological solutions. Quantum cosmological models are particularly useful, considering that they act as control tools for the theoretical models of quantum gravity. Also, as we will see in some of the models we analyzed, the classical anomalies are eliminated in quantum cosmology. Our analysis is done using the symmetries of action and equation of motion. The sustained loads resulting from the symmetry (linear or square) give extra equations to analyze the model.

We start from a static, spherically symmetric space-time in the presence of an electrostatic field and construct the mini-superspace Lagrangian that reproduces the well known Reissner - Nordström solution. We identify the classical integrals of motion that are to be mapped to quantum observables and which are associated with the mass and charge. Their eigenvalue equations are used as supplementary conditions to the Wheeler-DeWitt equation and a link is provided between the existence of an horizon and to whether the spectrum of the observables is fully discrete or not. For each case we provide an orthonormal basis of states as emerges through the process of canonical quantization.

Moreover, we consider a Bianchi type III axisymmetric geometry in the presence of an electromagnetic field. A first result at the classical level is that the symmetry of the geometry need not be applied on the electromagnetic tensor $F_{\mu\nu}$; the algebraic restrictions, implied by the Einstein field equations to the stress energy tensor $T_{\mu\nu}$, suffice to reduce the general $F_{\mu\nu}$ to the appropriate form. The classical solution thus found contains a time dependent electric and a constant magnetic charge. The solution is also reachable from the corresponding mini-superspace action, which is strikingly similar to the Reissner-Nordström one. This points to a connection between the black hole geometry and the cosmological solution here found, which is the analog of the known correlation

between the Schwarzschild and the Kantowski-Sachs metrics. The configuration space is drastically modified by the presence of the magnetic charge from a 3D flat to a 3D pp wave geometry. We map the emerging linear and quadratic classical integrals of motion, to quantum observables. Along with the Wheeler-DeWitt equation these observables provide unique, up to constants, wave functions. The employment of a Bohmian interpretation of these quantum states results in deterministic (semi-classical) geometries most of which are singularity free.

Finally, we revisit the axisymmetric Bianchi VIII and IX models. At the classical level we reproduce the known analytic solution, in a novel way making use of two quadratic integrals of motion, the constraint equation, as well as a linear non-local integral of motion. These quantities correspond to two second rank Killing tensors and a homothetic vector field existing on the relevant configuration space. On the corresponding phase space the two quadratic charges commute with the Hamiltonian constraint but not among themselves. Thus, after turning these charges into operators we obtain two different solutions to the Wheeler DeWitt equation utilizing each of the quadratic operators. The homothetic vector is then used, as a natural guide line, to define a normalizable conditional probability which assigns zero to the classically collapsed configurations.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες	ii
Περίληψη	iv
Abstract	vi
1 Βασικές Έννοιες	2
1.1 Συστήματα με δεσμούς	2
1.1.1 Μετασχηματισμός Legendre	4
1.1.2 Αλγόριθμος Dirac-Bergmann	5
1.1.3 Δεσμοί Πρώτης και Δεύτερης Κλάσης	6
1.2 Κλασική Δυναμική	7
1.2.1 ADM φορμαλισμός	7
1.2.2 Λαγκρανζιανός και Χαμιλτονιανός φορμαλισμός	9
1.2.3 Αυτομορφισμοί	11
1.3 Μίνι-υπερχώρος και Χαμιλτονιανός φορμαλισμός	12
1.3.1 Παραμετροποίηση σταθερού δυναμικού	14
1.4 Διατηρήσιμα Φορτία	14
1.4.1 Πρώτης τάξης	14
1.4.2 Τανυστές Killing δεύτερης τάξης	15
2 Κβαντική Κοσμολογία	18
2.1 Κανονική Κβάντωση	18
2.2 Το πρόβλημα του χρόνου	20
2.2.1 Χρόνος πριν την κβάντωση	20

2.2.2	Χρόνος μετά την κβάντωση	22
2.3	Κβάντωση του μίνι-υπερχώρου	23
2.3.1	Ένα Ομογενές και Ισότροπο Μοντέλο	24
2.4	Ομοθετικό πεδίο και τελεστής χρονικής εξέλιξης	26
2.5	Ημικλασσική ανάλυση μέσω του κβαντικού δυναμικού	27
3	Διακριτό φάσμα ιδιοτιμών της κβαντικής Reissner-Nordström γεωμετρίας	30
3.1	Το στατικό, σφαιρικά συμμετρικό ανηγμένο σύστημα	30
3.1.1	Κλασική περιγραφή	33
3.1.2	Κβάντωση του επίπεδου μίνι-υπερχώρου	34
3.2	Συμπεράσματα	43
4	Αξονοσυμμετρικό προτύπο Bianchi III συζευγμένο με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	46
4.1	Γενική περίπτωση με πλήρες ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	46
4.1.1	Κλασική περιγραφή	46
4.1.2	Κβάντωση του μίνι-υπερχώρου pp-wave μορφής	53
4.1.3	Ημικλασσική προσέγγιση	56
4.2	Περίπτωση με μαγνητικό μονόπολο	63
4.2.1	Κβάντωση	64
4.2.2	Ημι-κλασσική προσέγγιση	65
4.3	Περίπτωση με ηλεκτρικό πεδίο	67
4.4	Συμπεράσματα	69
5	Αξονοσυμμετρικά πρότυπα Bianchi VIII και IX	72
5.0.1	Περίπτωση με $\kappa_2 \neq 0$	75
5.0.2	Ειδική περίπτωση με $\kappa_2 = 0$	78
5.1	Κβαντικές λύσεις	79
5.2	Ερμηνεία με την χρήση του Ομοθετικού χρόνου	81
5.2.1	Δεύτερη Λύση	83
5.2.2	Πρώτη λύση	85
5.3	Συμπεράσματα	86
A	Μερικοί ορισμοί	88
A.1	Σχέσεις ορθοκανονικότητας για την περίπτωση $\ell(\ell + 1) < 0$	88
A.1.1	Ορθοκανονική συνθήκη για το $P_{is-1/2}^k(ix)$	88

A.1.2	Ορθοκανονικότητα για τις $Q_{is-1/2}^k(ix)$	92
-------	---	----

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

ADM	Arnowitt Deser Misner
FRW	Friedman Robertson Walker
WKB	Wentzel Kramers Brillouin
$G_{\alpha\beta}$	Μετρική του μίνι-υπερχώρου
$G_{\alpha\beta\gamma\delta}$	Μετρική στον χώρο των παραγόντων κλίμακας
$g_{\mu\nu}$	Μετρική της πολλαπλότητας
N	Συνάρτηση παρόδου
N^i	Διάνυσμα χωρικής μετατόπισης
K_{ij}	Εξωτερική καμπυλότητα του τρία-χώρου

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Η παρούσα εργασία βασίστηκε στις παρακάτω δημοσιεύσεις:

1. Dimakis, N., Karagiorgos, A., Pailas, T., Terzis, P. A., & Christodoulakis, T. (2017). Discrete spectrum of the quantum Reissner-Nordström geometry. *Physical Review D*, 95(8), 086016.
2. Karagiorgos, A., Pailas, T., Dimakis, N., Terzis, P. A., & Christodoulakis, T. (2018). Quantum cosmology of a Bianchi III LRS geometry coupled to a source free electromagnetic field. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(03), 030.
3. Karagiorgos, A., Pailas, T., Dimakis, N., Papadopoulos, G. O., Terzis, P. A., & Christodoulakis, T. (2019). Quantum cosmology of Bianchi VIII, IX LRS geometries. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(04), 006.
4. Christodoulakis, T., Karagiorgos, A., & Zampeli, A. (2018). Symmetries in classical and quantum treatment of Einstein's cosmological equations and mini-superspace actions. *Symmetry*, 10(3), 70.

1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Συστήματα με δεσμούς

Όλες οι θεωρίες για τα θεμελιώδη πεδία είναι αναλλοίωτες κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς των πεδίων αλλά και των συντεταγμένων της πολλαπλότητας. Τέτοιες θεωρίες ονομάζονται θεωρίες βαθμίδας ή γενικότερα ιδιάζουσες θεωρίες, βλ. [1] και [2]. Το κύριο χαρακτηριστικό σε αυτά τα συστήματα είναι ότι υπάρχει ένα σύνολο λύσεων που αντιστοιχεί στην ίδια κλασική φυσική κατάσταση.

Αρχικά θεωρούμε ένα κλασικό σύστημα με N βαθμούς ελευθερίας του οποίου η δυναμική παράγεται από την δράση

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

όπου L είναι η Λαγκρανζιανή και τα (q, \dot{q}) είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες στον φασικό χώρο των ταχυτήτων TQ . Η δράση αυτή πρέπει να παραμένει σταθερή κάτω από μεταβολές των δq και οι συνθήκες που προκύπτουν από αυτή την απαίτηση είναι οι εξισώσεις *Euler Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (1.2)$$

οι οποίες μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} \equiv W_{ij}(q, \dot{q}) \ddot{q} - V_i = 0 \quad (1.3)$$

όπου ο W_{ij} ονομάζεται Hessian. Από την τελευταία εξίσωση φαίνεται ότι για να λύσουμε ως προς τις επιταχύνσεις πρέπει η Hessian να είναι αντιστρέψιμη, τα συστήματα στα οποία ισχύει αυτό ονομάζονται *κανονικά*. Στην αντίθετη περίπτωση αν $\det W = 0$, το σύστημα ονομάζεται *ιδιάζον* και οι επιταχύνσεις δεν προσδιορίζονται μονοσήμαντα για κάθε (q, \dot{q}) . Δηλαδή στα ιδιάζοντα συστήματα για τις ίδιες αρχικές συνθήκες έχουμε διαφορετικές χρονικές εξελίξεις.

Για να αποδείξουμε το παραπάνω, θεωρούμε αρχικά ότι η W είναι R βαθμού (σταθερού σε όλο το TQ). Οπότε, αν $R < N$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν $M = N - R$ μηδενικά ιδιοδιανύσματα

$$Y_m^i(q, \dot{q}) W_{ij}(q, \dot{q}) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (1.4)$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω εξίσωση με τις εξισώσεις $E - L$ έχουμε

$$\phi_m(q, \dot{q}) \equiv Y_m^i V_i = 0, \quad (1.5)$$

οι οποίες δεν περιέχουν επιταχύνσεις και θεωρούμε ότι από αυτές οι $M' < M$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες με

$$\phi_{m'} = 0, \quad m' = 1, \dots, M'. \quad (1.6)$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται *Λαγκρανζιανοί δεσμοί*.

Για να μεταβούμε στον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό ορίζουμε αρχικά τις κανονικές ορμές με

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \quad i, a = 1, \dots, N. \quad (1.7)$$

Συνεπώς η Hessian στον φορμαλισμό αυτό γράφεται

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \quad (1.8)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως όταν η εξίσωση (1.8) δεν ισχύει οι ορμές δεν είναι ανεξάρτητες και το σύστημα έχει *πρωτεύον δεσμούς* οι οποίοι δίνονται από

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, \dots, M, \quad (1.9)$$

όπου $M = N - R$. Αυτοί οι δεσμοί ορίζουν μία $(2N - M)$ -διάστατη επιφάνεια που συμβολίζεται με Γ_p . Επιπλέον για να είναι δυνατή η μετάβαση στον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό πρέπει να επιβληθούν δύο συνθήκες κανονικότητας στους πρωτεύοντες δεσμούς :

- Πρώτον οι ανεξάρτητες συναρτήσεις $\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, \dots, M$ να μπορούν να θεωρηθούν τοπικά ως M ανεξάρτητες συντεταγμένες στην γειτονία του Γ_p .
- Δεύτερον τα διαφορικά $d\phi_1, \dots, d\phi_m$ είναι τοπικά γραμμικώς ανεξάρτητα στο Γ_p , δηλαδή ισχύει $d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_m = 0$ στο Γ_p .

Στην συνέχεια είναι χρήσιμο να ορίσουμε τι σημαίνει μία εξίσωση να είναι ασθενώς και ισχυρώς μηδέν. Συνεπώς αν έχουμε συνάρτηση $F(q, p)$ ορισμένη στην γειτονία του Γ_p έχουμε ότι είναι

Ασθενώς μηδέν

$$F|_{\Gamma_p} = 0 \Leftrightarrow F \approx 0 \quad (1.10)$$

Ισχυρώς μηδέν

$$F|_{\Gamma_p} = 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p^i} \right) |_{\Gamma_p=0} \Leftrightarrow F \simeq 0 \quad (1.11)$$

Επίσης, όταν οι δεσμοί ενός συστήματος είναι σε κανονική μορφή αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1 Αν μία ομαλή συνάρτηση $F(q, p)$ μηδενίζεται στο Γ_p , τότε ισχύει ότι $F = f^m \phi^m$.

Θεώρημα 2 Αν $\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0$ για τυχαίες μεταβολές $\delta q^i, \delta p_i$ εφαπτόμενες στην επιφάνεια που ορίζει ο δεσμός τότε ισχύει

$$\lambda_i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \quad \text{και} \quad \mu^i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad \text{στην} \quad \Gamma_p. \quad (1.12)$$

1.1.1 Μετασχηματισμός Legendre

Η κανονική Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H(q, p) = \dot{q}^i p_i - L \quad (1.13)$$

και ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} - \dot{q}^i \right) \delta p^i = 0 \quad (1.14)$$

από την οποία προκύπτει ότι η $H = H(p, q)$. Θεωρούμε τώρα ότι η H είναι συγκεκριμένη τιμή στον υπερχώρο Γ_p μίας πιο γενικής συνάρτησης \tilde{H} του φασικού χώρου. Συνεπώς κάνοντας χρήση του θεωρήματος 2 έχουμε τις εξισώσεις κίνησης σε Χαμιλτονιανή μορφή

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i}, \quad (1.15a)$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \approx -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \quad (1.15b)$$

όπου $\phi_m = \phi_m(q, p) = 0$ είναι οι πρωτεύοντες δεσμοί που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1 μπορούμε να επεκτείνουμε τη Χαμιλτονιανή στην περιοχή γύρω από το Γ_p ως

$$H \longrightarrow H_p = H + u^m \phi_m, \quad (1.16)$$

όπου διώξαμε την περισπωμένη από την H . Αυτή ονομάζεται πρωτεύουσα Χαμιλτονιανή και οι u^m είναι οι ίδιες συναρτήσεις που είχαμε προηγουμένως.

Ορίζουμε στην συνέχεια τις αγκύλες Poisson για δύο συναρτήσεις του φασικού χώρου ως

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \quad (1.17)$$

Με τις Χαμιλτονιανές εξισώσεις κίνησης να παίρνουν την μορφή

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_p\} \approx \{q^i, H\} + \{q^i, \phi_m\} u^m, \quad (1.18a)$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_p\} \approx \{p_i, H\} + \{p_i, \phi_m\} u^m, \quad (1.18b)$$

όπου πρώτα κάνουμε όλους τους υπολογισμούς και μετά χρησιμοποιούμε τους δεσμούς $\phi_m(q, p)$. Στη γενικότερη περίπτωση η χρονική εξέλιξη μίας τυχαίας συνάρτησης στο φασικό χώρο

$$\dot{F} \approx \{F, H_p\} \approx \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}. \quad (1.18c)$$

1.1.2 Αλγόριθμος Dirac-Bergmann

Οι δεσμοί πρέπει να είναι συνεπείς με την εξίσωση της χρονικής εξέλιξης, δηλαδή ισχύουν οι *συνθήκες συνέπειας*

$$\dot{\phi}_m \approx \{\phi_m, H\} + \{\phi_m, \phi_n\} u^n \equiv h_m + C_{nm} u^n \approx 0 \quad (1.19)$$

Όταν ισχύει ότι $\det C \neq 0$ η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς u οπότε προσδιορίζονται πλήρως και δεν προκύπτουν νέες εξισώσεις. Αντίθετα όταν ισχύει $\det C \approx 0$, προκύπτουν περαιτέρω δεσμοί οι οποίοι ονομάζονται *δευτερεύοντες δεσμοί*. Η διαδικασία αυτή τερματίζεται μετά από μερικές εφαρμογές και συνολικά θα έχουμε

$$\phi_k \approx 0 \quad , \quad j = 1, \dots, M + K, \quad (1.20)$$

όπου K είναι ο αριθμός των νέων δεσμών. Το πλήρες σύνολο των δεσμών ορίζουν μία υπερεπιφάνεια $\Gamma_c \subset \Gamma$.

1.1.3 Δεσμοί Πρώτης και Δεύτερης Κλάσης

Στη συνέχεια κατηγοριοποιούμε τους δεσμούς σε πρώτης και δεύτερης κλάσης. Ένας δεσμός είναι πρώτης κλάσης όταν η αγκύλη Poisson με όλους τους δεσμούς μηδενίζεται ασθενώς στο Γ_c , δηλαδή

$$\{\phi_a, \phi_j\} \approx 0, \quad (1.21)$$

$$\phi_a = v_a^m \phi_m \quad \{\phi_j, \phi_m\} v_a^m \quad a = 1, \dots, \dim \text{Ker} C, \quad (1.22)$$

όπου v_a είναι η βάση του πυρήνα του C . Οπότε για να είναι μία συνάρτηση *πρώτης κλάσης* (FCC) πρέπει να έχει μηδενική αγκύλη Poisson με όλους τους δεσμούς στο Γ_p .

Οι δεσμοί δεύτερης κλάσης είναι αυτοί που δεν ικανοποιούν την σχέση (1.21). Στην συνέχεια θα γράφουμε όλους τους FCC πρωτεύοντες και δευτερεύοντες ως γ_a και όλους τους *δεσμούς δεύτερης κλάσης* ως χ_a . Η διαφορά εδώ είναι ότι ο πίνακας

$$\Delta_{ab} = \{\chi_a \chi_b\} \quad (1.23)$$

είναι μη ιδιάζων. Άρα χρησιμοποιώντας την σχέση (1.19) έχουμε

$$\{\chi_a, H\} + \Delta_{ab} u^b \approx 0, \quad (1.24)$$

από την οποία προκύπτει

$$\Delta^{ba} \{\chi_a, H\} = -u^b \Rightarrow \chi_b \rightarrow \text{πρωτεύων}, \quad (1.25a)$$

$$\Delta^{ba} \{\chi_a, H\} = 0 \Rightarrow \chi_b \rightarrow \text{δευτερεύων}, \quad (1.25b)$$

εισάγοντας την εξίσωση για την περίπτωση των πρωτεύοντων δεσμών στην εξίσωση

της χρονικής εξέλιξης καταλήγουμε στην

$$\dot{F} \approx \{F, H\} + \{F, \phi_a\}\mu^a - \{F, \chi_a\}\Delta^{ab}\{\chi_b, H\}, \quad (1.26)$$

όπου τα ϕ_a είναι οι πρωτεύοντες FCC. Χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση κατασκευάζονται οι αγκύλες Dirac για δύο τυχαίες συναρτήσεις ως

$$\dot{F} \approx \{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \chi_a\}\Delta^{ab}\{\chi_b, G\} \quad (1.27)$$

η οποία έχει τις ίδιες ιδιότητες με τις αγκύλες Poisson. Με χρήση αυτής της αγκύλης μπορούν οι δευτέρας τάξης συνδέσμοι να τεθούν ισχυρά μηδέν.

1.2 Κλασική Δυναμική

1.2.1 ADM φορμαλισμός

Αρχικά διαλέγουμε μία φύλλωση του χωροχρόνου, αυτή η διαδικασία ονομάζεται $(3 + 1)$ -φύλλωση. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι που μπορεί να γίνει η αποσύνθεση αλλά η πιο συνηθισμένη είναι η ADM (Arnowitt-Deser-Misner) φύλλωση [3]. Θα περιορίσουμε την ανάλυση μας μόνο σε κλειστές κοσμολογίες για να αποφύγουμε τους συνοριακούς όρους και θα χρησιμοποιήσουμε τις συμβάσεις $\alpha, \dots, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $i, j = 1, 2, 3$ και $c = 1$.

Στην φύλλωση αυτή ο χωροχρόνος \mathcal{M} με την τετραδιάστατη μετρική $g_{\mu\nu}$, χωρίζεται σε μία υπερεπιφάνεια Σ σταθερού t (Σ_t) με μία τρισδιάστατη μετρική γ_{ij} και σ' ένα μονοδιάστατο \mathbb{R} το οποίο αντιπροσωπεύει τον χρόνο. Έπειτα ορίζονται η *συνάρτηση εξέλιξης* και το *διάνυσμα μετατόπισης* ως N και N^i αντίστοιχα, με

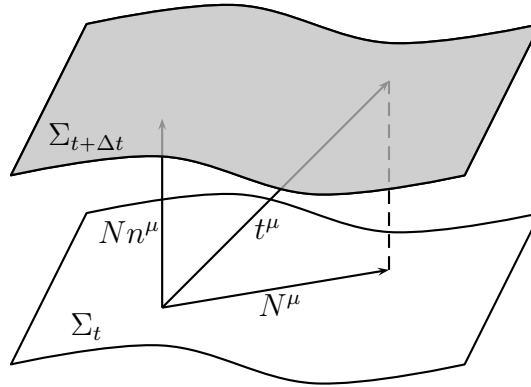
$$N = -t^\mu n_\mu \quad N^i = \gamma_j^i t^j \quad (1.28)$$

όπου το n^i είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην υπερεπιφάνεια Σ με $n^i n_i = 1$ (Σχ.1.1). Οπότε το στοιχειώδες μήκος γράφεται στην μορφή

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - (N^2 - N_i N^i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (1.29)$$

Από αυτή τη μετρική προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις σε συνάρτηση με την εξωτερική καμπυλότητα:

$$H_0 = \sqrt{g}(K_{ij}K^{ij} - K^2 + R) = 0, \quad (1.30a)$$



Σχήμα 1.1: (3+1)-φύλλωση του τετραδιάστατου χωροχρόνου.

$$H_i = 2\sqrt{g}(K_{ij}^j - K_{|i}) = 0, \quad (1.30b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d}{dt} [\sqrt{g}(K^{ij} - K g^{ij})] = & - N \left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} \right) - \frac{N}{2} (K_{kl} K^{kl} - K^2) g^{ij} \\ & + 2N(K^{ik} K_k^j - K K^{ij}) - (N^{ij} - N^l_l) \\ & + [(K^{ij} - K g^{ij}) N^l]_{|l} - N^i_{|l} (K^{lj} - K g^{lj}) - N^j_{|l} (K^{li} - K g^{li}), \end{aligned} \quad (1.30c)$$

όπου $K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(N_{i|j} + N_{i|j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right)$. Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Einstein.

Στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρουν μόνο χωρικά ομογενείς χωρόχρονοι, οι οποίοι έχουν μία τρισδιάστατη ομάδα ισομετρίας G η οποία δρα απλά μεταβατικά στην επιφάνεια Σ_t . Συνεπώς, υπάρχει μία βάση με τρεις μονομορφές σ_i^a οι οποίες ικανοποιούν την σχέση¹

$$d\sigma^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma \Leftrightarrow \sigma_{i,j}^\alpha - \sigma_{j,i}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \sigma_j^\beta \sigma_i^\gamma \quad (1.31)$$

όπου $C_{\beta\gamma}^\alpha$ είναι οι σταθερές δομής που προέρχονται από την εκάστοτε Lie άλγεβρα της αντίστοιχης ομάδας Bianchi. Με την χρήση των μονομορφών αυτών το στοιχειώδες μήκος μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή:

$$ds^2 = (N^\alpha(t) N_\alpha(t) - N^2(t)) dt^2 + 2N_\alpha(t) \sigma_i^\alpha dx^i dt + \gamma_{\alpha\beta}(t) \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta dx^i dx^j \quad (1.32)$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου του Einstein, για κάθε Bianchi μοντέλο, γράφο-

¹ Στην συνέχεια οι λατινικοί δείκτες είναι χωρικοί με $i, j = 1, 2, 3$ ενώ οι ελληνικοί απαριθμούν τις διαφορετικές 1-μορφές με $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

νται

$$E_0 = K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} - K^2 - R = 0, \quad (1.33a)$$

$$E_\alpha = K_\alpha^\mu C_{\mu\gamma}^\gamma - K_\gamma^\mu C_{\alpha\mu}^\gamma = 0, \quad (1.33b)$$

$$E_{\alpha\beta} = \dot{K}_{\alpha\beta} + (2K_\alpha^\tau K_{\tau\beta} - K K_{\alpha\beta}) + 2N^\rho (K_{\alpha\nu} C_{\beta\rho}^\nu + K_{\beta\nu} C_{\alpha\rho}^\nu) - N R_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.33c)$$

όπου το $K_{\alpha\beta}$ είναι η εξωτερική καμπυλότητα με

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\nu} C_{\beta\rho}^\nu N^\rho + 2\gamma_{\beta\nu} C_{\alpha\rho}^\nu N^\rho) \quad (1.34)$$

και $R_{\alpha\beta}$ είναι οι συνιστώσες του τανυστή Ricci της υπερεπιφάνειας $R_{ij} \equiv R_{\alpha\beta} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta$, με

$$R_{\alpha\beta} = C_{\sigma\tau}^\kappa C_{\mu\nu}^\lambda \gamma_{\alpha\kappa} \gamma_{\beta\lambda} \gamma^{\sigma\nu} \gamma^{\tau\mu} + 2C_{\beta\lambda}^\kappa C_{\alpha\kappa}^\lambda + 2C_{\alpha\kappa}^\mu C_{\beta\lambda}^\nu \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\kappa\lambda} + 2C_{\alpha\kappa}^\lambda C_{\mu\nu}^\mu \gamma_{\beta\lambda} \gamma^{\kappa\nu} \quad (1.35)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συντελούν ένα μαθηματικό ιδεώδες: αυτό φαίνεται από το ότι η χρονική παράγωγος των εξισώσεων (1.33a) και (1.33b) μηδενίζεται όταν αντικαταστήσουμε σε αυτές το $\dot{K}_{\alpha\beta}$ από την εξίσωση (1.33c).

1.2.2 Λαγκρανζιανός και Χαμιλτονιανός φορμαλισμός

Στην συνέχεια για να γίνει ένας πλήρης διαχωρισμός μεταξύ προτύπων Bianchi A και B κλάσης, χρειάζεται να ορισθεί η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή για την περίπτωση χωρικά ομογενών χωρόχρονων και να κατασκευασθεί η άλγεβρα των δεσμών με την χρήση της μεθόδου Dirac. Ορίζουμε αρχικά την δράση για το πεδίο βαρύτητας που αντιστοιχεί στην μετρική (1.29) ως

$$S = \int d^4x N \sqrt{\gamma} (K^{ij} K_{ij} - K^2 - R), \quad (1.36)$$

όπου K_{ij} είναι ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας. Για την περίπτωση των χωρικά ομογενών γεωμετριών που υπάρχουν τρεις μονο-μορφές σ_i^a η Λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$L = N \sqrt{\gamma} (K^{ij} K_{ij} - K^2 - R) = \sigma N \sqrt{\gamma} (K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2 - R), \quad (1.37)$$

όπου $\sigma = \det \sigma_i^a$. Ορίζοντας στην συνέχεια την υπερμετρική ως

$$G^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\sqrt{\gamma}}{4} (\gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \gamma^{\beta\mu} - 2\gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\mu\nu}), \quad (1.38)$$

αποδεικνύεται ότι μπορούμε να γράψουμε την Λαγκρανζιανή ως

$$L = 2NG^{\alpha\beta\mu\nu}K_{\alpha\beta}K_{\mu\nu} - \sqrt{\gamma}NR \quad (1.39)$$

από την οποία προκύπτουν οι γενικευμένες ορμές ως

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}^\mu} \approx 0, \quad p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} \approx 0, \quad \pi^{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = -2G^{\alpha\beta\kappa\lambda}K_{\kappa\lambda}. \quad (1.40)$$

Η γενική Χαμιλτονιανή που προκύπτει για την γεωμετρία αυτή γράφεται

$$H_c = NH_0 + 4N^\alpha H_\alpha \quad (1.41)$$

όπου ο Χαμιλτονιανός δεσμός και ο διαφορομορφικός δεσμός γράφονται αντίστοιχα

$$H_0 = \frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\pi^{\mu\nu}\pi^{\kappa\lambda} + \sqrt{\gamma}R \approx 0, \quad (1.42)$$

$$H_\alpha = C_{\alpha\beta}^\nu\gamma_{\rho\nu}\pi^{\rho\beta} \approx 0. \quad (1.43)$$

Συνεπώς η γενική Χαμιλτονιανή μηδενίζεται κάτι που είναι αναμενόμενο σε επαναπαραμετροποιήσιμες θεωρίες. Χρησιμοποιώντας τις αγκύλες Poisson (1.17) που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\{\gamma_{\alpha\beta}, \pi^{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu + \delta_\beta^\mu\delta_\alpha^\nu), \quad (1.44a)$$

$$\{H_\alpha, H_\beta\} \approx 0, \quad (1.44b)$$

$$\{H_\alpha, H_0\} = \frac{C_{\alpha\sigma}^\sigma}{2} \left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\pi^{\mu\nu}\pi^{\kappa\lambda} - \sqrt{\gamma}R \right). \quad (1.44c)$$

Για τα Bianchi A κλάσης όπου $C_{\tau\rho}^\tau = 0$ δεν υπάρχουν επιπλέον δεσμοί ενώ για τα Bianchi B κλάσης όπου $C_{\tau\rho}^\tau \neq 0$ προκύπτουν (λόγω του $H_0 \approx 0$) δύο επιπλέον δεσμοί

$$X_5 = G_{\kappa\lambda\mu\nu}\pi^{\mu\nu}\pi^{\kappa\lambda} \approx 0, \quad X_6 = \sqrt{\gamma}R \approx 0. \quad (1.45)$$

Εξαιτίας του πρώτου δεσμού συμπεραίνουμε ότι η Χαμιλτονιανή δεν είναι έγκυρη για τα πρότυπα B κλάσης γιατί οι συνολικοί δεσμοί εξαντλούν τις 10 εξισώσεις του Einstein και ο νέος δεσμός δεν αντιστοιχεί σε κάποια εξίσωση. Τέλος ο δεύτερος δεσμός οδηγεί σε ασυνέπεια μιας και δεν μπορεί να υπάρξει πρότυπο Bianchi B κλάσης με $R = 0$.

1.2.3 Αυτομορφισμοί

Ένας άμεσος τρόπος για να βρεθεί η γενική λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι μέσω των αυτομορφισμών των αντιστοίχων αλγεβρών Lie. Γενικά οι αυτομορφισμοί είναι οι μετασχηματισμοί των συντεταγμένων $x^i = f^i(\tilde{x}^j, t)$ οι οποίοι διατηρούν σχεδόν αναλλοίωτη την συναρτησιακή μορφή του στοιχειώδους μήκους (1.32). Συνεπώς το στοιχειώδες μήκος γίνεται

$$\begin{aligned}
ds^2 = & [(N^\alpha(t)N_\alpha(t) - N^2(t)) + \frac{\partial f^i}{\partial t} \frac{\partial f^j}{\partial t} \sigma_i^\alpha(f)\sigma_j^\beta(f)\gamma_{\alpha\beta}(t) \\
& + 2\sigma_i^\alpha(f) \frac{\partial f^i}{\partial t} N_\alpha(t)] dt^2 \\
& + 2\sigma_i^\alpha(f) \frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} [N_\alpha(t) + \sigma_j^\beta(f) \frac{\partial f^j}{\partial t} \gamma_{\alpha\beta}(t)] d\tilde{x}^m dt \\
& + \sigma_i^\alpha(f)\sigma_j^\beta(f)\gamma_{\alpha\beta}(t) \frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial f^j}{\partial \tilde{x}^n} d\tilde{x}^m d\tilde{x}^n.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Υπάρχει πάντα αντιστρέψιμος πίνακας $\Lambda_\mu^\alpha(\tilde{x}, t)$ και η τριπλέτα $P^\alpha(\tilde{x}, t)$, για τις οποίες ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\sigma_i^\alpha(f) \frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} &= \Lambda_\mu^\alpha(\tilde{x}, t) \sigma_m^\mu(\tilde{x}), \\
\sigma_i^\alpha(f) \frac{\partial f^i}{\partial t} &= P^\alpha(\tilde{x}, t).
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Για να διατηρείται η χωρική ομοιογένεια θα πρέπει οι παραπάνω πίνακες να είναι χωρικά ανεξάρτητοι, δηλαδή $\Lambda_\mu^\alpha(\tilde{x}, t) = \Lambda_\mu^\alpha(t)$ και $P^\alpha(\tilde{x}, t) = P^\alpha(t)$. Με την χρήση αυτών των περιορισμών οι ανωτέρω εξισώσεις διαμορφώνουν ένα μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης για τις συναρτήσεις $f^i(\tilde{x}, t)$. Άρα για την συγκεκριμένη συνάρτηση f^i 's το στοιχειώδες μήκος (1.32) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$ds^2 = (\tilde{N}^\alpha(t)\tilde{N}_\alpha(t) - \tilde{N}^2(t))dt^2 + 2\tilde{N}_\alpha(t)\sigma_i^\alpha(\tilde{x})d\tilde{x}^i dt + \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(t)\sigma_i^\alpha(\tilde{x})\sigma_j^\beta(\tilde{x})d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j, \tag{1.48}$$

όπου

$$\tilde{N} = N, \quad \tilde{N}_\alpha = \Lambda_\alpha^\rho(N_\rho + \gamma_{\rho\sigma}P^\sigma), \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha\Lambda_\nu^\beta\gamma_{\alpha\beta}. \tag{1.49}$$

Το θεώρημα του Φρομπένιους μας λέει ότι υπάρχει πάντα τοπική λύση στο σύστημα (1.47), εφόσον ισχύει η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας $\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^n} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^n \partial \tilde{x}^m}$ and $\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^m \partial t} =$

$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \bar{x}^m}$. Με την χρήση αυτών των συνθηκών η εξίσωση (1.47) παίρνει την μορφή

$$\Lambda_\rho^\alpha C_{\beta\gamma}^\rho = C_{\mu\nu}^\alpha \Lambda_\beta^\mu \Lambda_\gamma^\nu \Leftrightarrow C_{\beta\gamma}^\alpha = S_\mu^\alpha \Lambda_\beta^\mu \Lambda_\gamma^\nu C_{\mu\nu}^\mu, \quad (1.50)$$

$$2P^\mu C_{\mu\nu}^\alpha \Lambda_\beta^\nu = \dot{\Lambda}_\beta^\alpha, \quad (1.51)$$

όπου S είναι ο αντίστροφος πίνακας του Λ . Η πρώτη εξίσωση από τις δύο παραπάνω υποδεικνύει ότι ο πίνακας Λ ανήκει στους αυτομορφισμούς τις αντίστοιχης Lie άλγεβρας. Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί για όλα τα πρότυπα Bianchi. Σε κάθε περίπτωση τα Λ_μ^α και P^ρ εξαρτώνται από τρεις τυχαίες συναρτήσεις του χρόνου. Επίσης υπάρχει μία ελευθερία βαθμίδας αλλαγής του χρόνου. Οι ελευθερίες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για να απλοποιηθεί η μορφή του στοιχειώδους μήκους, κυρίως με δύο τρόπους:

1. Ο πρώτος είναι να τεθεί αρχικά το \tilde{N}^α ίσο με μηδέν. Έπειτα, η ελευθερία βαθμίδς που περιγράφεται από τα $\Lambda_\beta^\alpha = \text{constant}$, $P^\rho = 0$ μας επιτρέπει τη μείωση της τάξης των εξισώσεων και την εύρεση όλων των λύσεων. Με αυτόν τον τρόπο έχουν βρεθεί οι γενικές λύσεις των προτύπων Bianchi I έως VII [4, 5, 6, 7].
2. Στον δεύτερο αρχικά απλοποιείται η τρισδιάστατη μετρική και έπειτα επιλύονται οι εξισώσεις. Αυτός ο τρόπος είναι χρήσιμος στην περίπτωση των προτύπων Bianchi VIII και IX γιατί σε αυτήν το Λ αρκεί για να διαγωνοποιηθεί η $\gamma_{\alpha\beta}$.

1.3 Μίνι-υπερχώρος και Χαμιλτονιανός φορμαλισμός

Η δράση που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια είναι αυτή της βαρύτητας Einstein με ύλη

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + S_m, \quad (1.52)$$

όπου g θεωρούμε την ορίζουσα της χωροχρονικής μετρικής $g_{\mu\nu}$, R είναι το βαθμωτό πεδίο Ricci και S_m η δράση της ύλης του μοντέλου. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθούν πολλαπλότητες με χωρική ομοιογένεια, για τις οποίες το στοιχειώδες μήκος παίρνει την μορφή

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + \gamma_{\kappa\lambda}(t) \sigma_i^\kappa(x) \sigma_j^\lambda(x) dx^i dx^j, \quad (1.53)$$

όπου N είναι η συνάρτηση παρόδου. Η διαφορά του μήκους αυτού από το στοιχειώδες μήκος (1.32) είναι ότι ο όρος $(2N_\alpha \sigma_i^\alpha(x) dx^i dt)$ είναι μηδέν, το οποίο μπορεί

πάντα να επιτευχθεί στις κατάλληλες συντεταγμένες [8] ωστόσο σε κάποιες περιπτώσεις αυτό ισχύει μόνο τοπικά. Αντικαθιστώντας το μήκος αυτό στις εξισώσεις Einstein (οι οποίες προέρχονται από την μεταβολή της δράσης ως προς το $g_{\mu\nu}$)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

με $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$, προκύπτει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με ανεξάρτητη μεταβλητή το t . Αντιθέτως, αν η δράση (1.52) υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την φυλλοποιημένη μετρική (1.53), ολοκληρώνονται όλοι οι μη-δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας και το βαρυτικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από την ανηγμένη δράση. Επιπλέον το ανηγμένο σύστημα που προκύπτει έχει πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας και είναι πιο εύκολα κβαντώσιμο.

Η Λαγκρανζιανή² του μίνι-υπερχώρου που περιγράφηκε έχει την γενική μορφή

$$\bar{L} = \frac{1}{2N(t)} \bar{G}_{\alpha\beta}(q) q'^{\alpha}(t) q'^{\beta}(t) - N(t) \bar{V}(q), \quad (1.55)$$

όπου $' = \frac{d}{dt}$, ενώ $\bar{V}(q)$ και $\bar{G}_{\alpha\beta}(q)$ είναι το δυναμικό και η μετρική του μίνι-υπερχώρου αντίστοιχα. Οι μεταβλητές q^{α} εξαρτώνται από τον $\gamma_{\mu\nu}$ δηλαδή $q^{\alpha} = q^{\alpha}(\gamma_{\mu\nu})$. Η Λαγκρανζιανή αυτή αντιστοιχεί σε ιδιάζον σύστημα. Για να μεταβούμε σε Χαμιλτονιανή περιγραφή χρειάζεται να περάσουμε στο φασικό χώρο

$$q^{\alpha} \rightarrow p_{\alpha} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'^{\alpha}} = \frac{1}{N} \bar{G}_{\mu\alpha} q'^{\mu}, \quad (1.56)$$

και η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή

$$H_T = N \bar{\mathcal{H}} + u_{\bar{N}} p_{\bar{N}}, \quad (1.57)$$

η οποία προκύπτει μέσω του αλγόριθμου των Dirac-Bergmann για ιδιάζοντα συστήματα που αναλύθηκε στην ενότητα (1.1.2). Η Χαμιλτονιανή αυτή έχει τους παρακάτω πρωτεύοντες και δευτερεύοντες δεσμούς

$$p_{\bar{N}} \approx 0, \quad (1.58a)$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \bar{G}^{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta} + \bar{V}(q) \approx 0. \quad (1.58b)$$

²Για να έχουμε απλούστερες πράξεις θεωρήσαμε ότι $c = G = \hbar = 1$, $\mu_0 = 4\pi$. Η επιλογή των c , G και \hbar είναι το σύννηθες φυσικό σύστημα μονάδων, ενώ η επιλογή του μ_0 σημαίνει ότι χρησιμοποιούμε τις Γκαουσιανές μονάδες για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

Στην συνέχεια, αφού πρώτα αναλύσουμε και την περίπτωση του σταθερού δυναμικού, θα αναλυθούν και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα της κίνησης που προκύπτουν από συμμετρίες πρώτης και δεύτερης τάξης.

1.3.1 Παραμετροποίηση σταθερού δυναμικού

Ο παραπάνω φορμαλισμός απλουστεύεται αισθητά στην παραμετροποίηση σταθερού δυναμικού. Στην ουσία για να επιτύχουμε αυτή την αλλαγή χρησιμοποιείται η ελευθερία ορισμού που υπάρχει για την συνάρτηση παρέλευσης. Δηλαδή υπάρχει πάντα η δυνατότητα να γίνει ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$N(t) \longrightarrow n(\bar{t}) = N(t)V(q) \quad (1.59)$$

Συνεπώς η Λαγκρανζιανή παίρνει την μορφή

$$L = \frac{1}{2n(t)} G_{\alpha\beta}(q) q'^{\alpha}(t) q'^{\beta}(t) - n(t), \quad (1.60)$$

όπου $G_{\alpha\beta} = V \bar{G}_{\alpha\beta}$ είναι η νέα μετρική του μίνι-υπερχώρου. Στη νέα Λαγκρανζιανή όλη η πληροφορία για το σύστημα περιέχεται μέσα στην μετρική του μίνι-υπερχώρου. Ο αντίστοιχος Χαμιλτονιανός δεσμός γράφεται

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta} + 1 \approx 0.$$

Η αλλαγή αυτή, η οποία δεν είναι για επιλογή βαθμίδας, μας παράγει μία Λαγκρανζιανή με σταθερό ως προς q , δυναμικό $V = 1$.

1.4 Διατηρήσιμα Φορτία

1.4.1 Πρώτης τάξης

Αποδεικνύεται ότι οι παραλλακτικές πρώτης τάξης συμμετρίες της δράσης ορίζουν ολοκληρώματα της κίνησης. Για την γενική περίπτωση που προκύπτει με την χρήση της Λαγκρανζιανής (1.60), οι μόνες μη τετριμμένες συμμετρίες ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες

$$\mathcal{L}_{\xi} G_{\alpha\beta} = \omega(q) G_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{L}_{\xi} V = -f(q) V, \quad (1.61)$$

όπου οι δύο συναρτήσεις $\omega(q)$ και $f(q)$ διαφέρουν κατά μία προσθετική σταθερά. Στις συμμετρίες αυτές αντιστοιχούν γραμμικά ολοκληρώματα της κίνησης

Αποδεικνύεται ότι οι συμμετρίες αυτές παράγουν διατηρήσιμα φορτία (γραμμικά στις ορμές), τα οποία εξαρτώνται από τον δεσμό [9] και έχουν γενική μορφή

$$Q = \xi^\alpha(q)p_\alpha + \int n(t)\omega(q(t))dt, \quad (1.62)$$

με

$$\mathcal{L}_\xi G_{\alpha\beta} = \omega(q)G_{\alpha\beta},$$

όπου \mathcal{L}_ξ είναι η παράγωγος Lie ως προς το διάνυσμα του θεσεογραφικού χώρου ξ . Τα παραπάνω διατηρήσιμα φορτία αντιστοιχούν σε σύμμορφα ($\omega(q) \neq 0$), Killing ($\omega(q) = 0$) η ομοθετικά ($\omega(q) = \text{constant}$) διανυσματικά πεδία του $G_{\alpha\beta}$. Επίσης τα φορτία που αντιστοιχούν σε Killing διανυσματικά πεδία μετατίθενται ισχυρά με την Χαμιλτονιανή, μία ιδιότητα που θα μας φανεί αρκετά χρήσιμη στην συνέχεια.

1.4.2 Τανυστές Killing δεύτερης τάξης

Στην γενικότερη περίπτωση ένας Killing τανυστής τάξης m είναι ένας συμμετρικός τανυστής της μορφής $K_{a_1 \dots a_m}$, ο οποίος ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$K_{(a_1 \dots a_m)} = 0 \quad (1.63)$$

και είναι γενίκευση των Killing διανυσμάτων. Στην συνέχεια θα χρειαστούμε Killing τανυστές μόνο δεύτερης τάξης για τους οποίους ισχύουν

$$\nabla_\mu K_{\nu\lambda} + \nabla_\lambda K_{\mu\nu} + \nabla_\nu K_{\lambda\mu} = 0, \quad (1.64)$$

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}. \quad (1.65)$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι οποιοσδήποτε Killing τανυστής αποτελείται από έναν όρο που το ίχνος του είναι μηδέν P_{ab} και έναν που είναι γινόμενο του ίχνους του K και της μετρικής g_{ab} , δηλαδή

$$K_{ab} = P_{ab} + K g_{ab}/4 \quad (1.66)$$

και ισχύουν οι σχέσεις

$$4P_{b;a}^a = -3K_{,b}, \quad P_{(ab;c)} - \frac{1}{3}g_{(ab}P_{c);d}^d = 0, \quad (1.67)$$

οι τανυστές που ικανοποιούν την τελευταία σχέση ονομάζονται σύμμορφοι Killing τανυστές. Επιπλέον αν η $P_{b;a}^a$ είναι βαθμίδα τότε ο K_{ab} θα είναι Killing τανυστής.

Οι παραπάνω τανυστές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τους τετριμμένους τανυστές όπως η μετρική και τους τανυστές που κατασκευάζονται από τανυστικά γινόμενα των Killing διανυσματικών πεδίων, δηλαδή

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\xi_\mu \otimes \xi_\nu + \xi_\nu \otimes \xi_\mu). \quad (1.68)$$

Στην δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται όλοι οι υπόλοιποι μη τετριμμένοι τανυστές.

Μη τετριμμένοι Killing τανυστές δεύτερης τάξης μπορούν να προκύψουν μέσω των ομοθετικών ή σύμμορφων Killing διανυσμάτων μέσω της παρακάτω σχέσης (βλέπε [10])

$$K_{ab} = \xi_{(a}\eta_{b)} - 2\phi g_{ab}, \quad (1.69)$$

ο οποίος είναι Killing τανυστής αν τα διανύσματα ξ_a και η_a ικανοποιούν τα παρακάτω

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 2\Phi g_{ab}, \quad \eta_{a;b} + \eta_{b;a} = 2\Psi g_{ab}, \quad \Phi\eta_a + \Psi\xi_a = \phi_{,a}. \quad (1.70)$$

Ένα ακόμα είδος συμμετριών στα κοσμολογικά μοντέλα παράγεται από τους Killing-Yano τανυστές οι οποίοι είναι αντισυμμετρικοί τανυστές $a_{bc\dots de}$ που ικανοποιούν την

$$a_{bc\dots de;f} + a_{bc\dots df;e} = 0, \quad (1.71)$$

η οποία γενικεύει την εξίσωση Killing. Μέσω αυτών των τανυστών μπορούν να κατασκευαστούν Killing τανυστές. Για δεύτερης τάξης τανυστές $a_{(A)bc}$ ο αντίστοιχος Killing τανυστής είναι

$$K_{nm} = a_{Ani}a_B^i{}_{m} + a_{Bni}a_A^i{}_{m} \quad (1.72)$$

Από τους παραπάνω τανυστές παράγονται διατηρήσιμα φορτία της μορφής $K = K^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ τα οποία έχουν μηδενική αγκύλη Poisson με τον Χαμιλτονιανό δεσμό και συνεπώς είναι σταθερές της κίνησης

$$K = K^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \Rightarrow \{K, \mathcal{H}\} = 0. \quad (1.73)$$

2

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

Η μετάβαση στην κβαντική θεωρία δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή για μία συγκεκριμένη κλασική θεωρία δεν αντιστοιχεί μία μοναδική κβαντική λόγω μη αντιστρεψιμότητας του όριο $\hbar \rightarrow 0$. Ένας τρόπος επιλογής είναι μέσω της μελέτης της κβαντικής θεωρίας στο κλασσικό όριο της. Ο κύριος λόγος που υπάρχει αυτό το πρόβλημα είναι γιατί στις βαρυτικές θεωρίες η συνολική Χαμιλτονιανή είτε μηδενίζεται ως δεσμός είτε αποτελείται από επιφανειακούς όρους.

2.1 Κανονική Κβάντωση

Η διαδικασία της κανονικής κβάντωσης ακολουθώντας τις [11, 12] χωρίζεται σε έξι βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να αναγνωρίσουμε τις κατάλληλες θεσεογραφικές μεταβλητές και τις αντίστοιχες ορμές τους. Αυτές θα ονομάζονται θεμελιώδεις μεταβλητές V_i . Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Dirac, δηλαδή μετατρέπουμε τις αγκύλες Poisson σε μεταθέτες για τις θεμελιώδεις μεταβλητές,

$$V_3 = \{V_1, V_2\} \longrightarrow \hat{V}_3 = -\frac{i}{\hbar}[\hat{V}_1, \hat{V}_2]. \quad (2.1)$$

Στην περίπτωση της γενικής σχετικότητας που περιγράφηκε προηγουμένως οι θεμελιώδεις μεταβλητές είναι οι $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ και οι αντίστοιχες ορμές $\pi^{\mu\nu}(\mathbf{y})$, με μεταθέτη

$$[\hat{\gamma}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \pi^{\mu\nu}(\mathbf{y})] = i\hbar\delta_{(\alpha}^{\mu}\delta_{\beta)}^{\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.2)$$

Μολονότι οι ορμές, όπως φαίνεται και στην σχέση (1.40), εξαρτώνται από την εξωτερική καμπυλότητα, η παρουσία του παραπάνω μεταθέτη και η επακόλουθη σχέση απροσδιοριστίας μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής γεωμετρίας που δημιουργεί, συνεπάγεται ότι ο κλασικός χωρόχρονος αναλύεται πλήρως στην κβαντική βαρύτητα. Το *δεύτερο βήμα* είναι η κβάντωση μίας γενικής μεταβλητής F που εξαρτάται από τις θεμελιώδεις μεταβλητές.

Στο *τρίτο βήμα* χρειάζεται να κατασκευάσουμε τον κατάλληλο χώρο αναπαράστασης \mathcal{F} για τις δυναμικές μεταβλητές. Στην περίπτωση μας θα χρησιμοποιούμε την εικόνα Schroedinger, στην οποία οι τελεστές δρουν στα συναρτησοειδή στον κατάλληλο χώρο, δηλαδή έχουμε

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\Psi[\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] = \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\Psi[\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] \quad (2.3)$$

$$\hat{p}_{\gamma\delta}(\mathbf{x})\Psi[\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{\gamma\delta}(\mathbf{x})}\Psi[\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] \quad (2.4)$$

Αυτές οι σχέσεις δεν ορίζουν αυτοσυζυγείς τελεστές μολονότι δεν υπάρχει μέτρο Lebesgue στον χώρο $\text{Riem}\Sigma^1$. Αυτό συμβαίνει γιατί ο χώρος αναπαράστασης \mathcal{F} είναι βοηθητικός χώρος και δεν έχουν χρησιμοποιηθεί οι δεσμοί του συστήματος, άρα δεν περιέχει μόνο τις φυσικές καταστάσεις.

Το *τέταρτο βήμα* είναι η εφαρμογή των κλασικών δεσμών (1.42) στην κβαντική περίπτωση. Αυτό γίνεται ως εξής

$$\mathcal{H}_0 \approx 0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0\Psi = 0, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{H}_\alpha \approx 0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_\alpha\Psi = 0, \quad (2.6)$$

οι παραπάνω εξισώσεις είναι σχεδόν άπειρες σε αριθμό γιατί υπάρχει μία για κάθε σημείο του χωρόχρονου. Συνεπώς ως φυσικές καταστάσεις θα θεωρούνται μόνο όσες ικανοποιούν τους παραπάνω δεσμούς και ο αντίστοιχος χώρος συμβολίζεται με \mathcal{F}_0 . Ο τρόπος επίλυσης των δεσμών εξαρτάται από την προσέγγιση που χρησιμοποιείται για τον ορισμό του χρόνου. Επίσης σε κάποιες περιπτώσεις, όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια, πρέπει να εφαρμόσουμε και συνθήκες κανονικοποίησης της κυματοσυνάρτησης σύμφωνα με την εκάστοτε κβαντική ερμηνεία που χρησιμοποιείται. Οπότε ο υπόχωρος στον οποίο οι κυματοσυναρτήσεις υπάρχουν ορίζεται ως $\mathcal{F}_{\text{phys}}$, με $\mathcal{F}_{\text{phys}} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.

Το *πέμπτο βήμα* αφορά τον ορισμό των παρατηρήσιμων μεγεθών. Κλασικά ως παρατηρήσιμα μεγέθη ορίζονται όσα έχουν μηδενική αγκύλη Poisson με τους δε-

¹Ο χώρος $\text{Riem}\Sigma$ περιέχει όλες τις τρία-μετρικές του χώρου Σ .

σμούς, με $\{\mathcal{O}, \mathcal{H}_\mu\}$. Για να παραμένει παρατηρήσιμο ένα μέγεθος και στην κβαντική περίπτωση θα πρέπει να ισχύει

$$[\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{H}}]\Psi = 0. \quad (2.7)$$

Η αντιστοίχιση αυτή δεν ισχύει πάντα όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 4, γεγονός το οποίο οφείλεται πιθανότατα στον ελλειπή κανόνα κβάντωσης διατηρήσιμων φορτίων που προέρχονται από τανυστικά μεγέθη. Επίσης για τελεστές με $[\hat{F}, \hat{\mathcal{H}}_\mu] \neq 0$ ισχύει ότι $\hat{\mathcal{H}}_\mu(\hat{F}\Psi) \neq 0$. Ένα τέτοιο τελεστή θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια για τον μίνι-υπερχώρο.

Το έκτο και τελευταίο βήμα αφορά την κατασκευή του φυσικού χώρου Hilbert. Η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι δεν είναι πάντα ξεκάθαρο αν ο χώρος αυτός είναι ο \mathcal{F}_0 ή ο $\mathcal{F}_{\text{phys}}$. Το πιο πιθανό είναι ο χώρος αυτός να είναι εγκιβωτισμένος χώρος Hilbert (βλέπε [13]). Το πρόβλημα ορισμού του χώρου Hilbert συνδέεται άμεσα με το πρόβλημα του χρόνου που θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

2.2 Το πρόβλημα του χρόνου

Η έννοια του χρόνου διαφέρει δραστικά στη γενική σχετικότητα σε σχέση με την κβαντική μηχανική. Η κύρια διαφορά είναι ότι στην κβαντομηχανική ο χρόνος θεωρείται εξωτερική μεταβλητή ενώ στην γενική σχετικότητα δυναμική. Ένα βασικό πρόβλημα που προκύπτει από αυτό είναι ότι δεν μπορεί να οριστεί κβαντικός τελεστής για τον χρόνο. Επίσης οι κλασικοί δεσμοί δεν περιέχουν καμία χρονική μεταβλητή. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν ότι για μία κβαντική θεωρία η έννοια του χρόνου είναι πολύ σημαντική, υπάρχουν τρεις βασικές προσεγγίσεις για το πρόβλημα του χρόνου (βλέπε [14, 15]):

- επιλογή του χρόνου πριν την κβάντωση
- επιλογή του χρόνου μετά την κβάντωση
- άχρονες θεωρίες

2.2.1 Χρόνος πριν την κβάντωση

Στην περίπτωση αυτή ξεχωρίζουμε αρχικά τη χρονική μεταβλητή από τις πραγματικές μεταβλητές. Δηλαδή ξεκινώντας από τις μεταβλητές του ADM $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ και

$\pi^{\gamma\delta}(\mathbf{x})$, καταλήγουμε στις εξής

$$(\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \pi^{\gamma\delta}(\mathbf{x})) \rightarrow (X^A(\mathbf{x}), P_B(\mathbf{x}); \phi^r(\mathbf{x}), p_s(\mathbf{x})) \quad (2.8)$$

όπου οι $8 \times \infty$ μεταβλητές X^A και P_B ($A, B = 0, 1, 2, 3$) είναι οι εμφαντευμένες μεταβλητές και οι κανονικές τους ορμές, ενώ οι $4 \times \infty$ μεταβλητές ϕ^r και p_s ($r, s = 1, 2$) υποδεικνύουν τους πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας του βαρυτικού πεδίου. Το επόμενο βήμα στην διαδικασία αυτή είναι η εφαρμογή των κλασσικών δεσμών \mathcal{H} με σκοπό να απαλείψουμε τις $4 \times \infty$ από τις συνολικές $8 \times \infty$ εμφαντευμένες μεταβλητές

$$P_A(\mathbf{x}) + h_A(\mathbf{x}; X^B, \phi^r, p_s) \approx 0 \quad (2.9)$$

Οι υπόλοιπες $4 \times \infty$ μεταβλητές απαλείφονται μετά την εισαγωγή του δεσμού στην κλασσική δράση

$$S = \int dt \int d^3x \left(p_r \dot{\phi}^r - h_A(\mathbf{x}; X_t^B, \phi^r, p_s) \dot{X}_t^A(\mathbf{x}) \right) \quad (2.10)$$

με αντίστοιχη "πραγματική" Χαμιλτονιανή

$$H_{\text{true}}(t) = \int_{\Sigma} d^3x h_A(\mathbf{x}; X_t^B, \phi^r, p_s) \dot{X}_t^A(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Οι εξισώσεις αυτές δίνουν τις εξισώσεις κίνησης για τα ϕ^r και p_s . Στην εξίσωση (2.9) μπορεί να γίνει εύκολα η κβάντωση εισάγοντας τα συναρτησοειδή $\Psi[\phi^r(\mathbf{x})]$, με αποτέλεσμα

$$i\hbar \frac{\delta \Psi[\phi^r(\mathbf{x})]}{\delta X^A(\mathbf{x})} = h_A(\mathbf{x}; X^B, \phi^r, p_s) \Psi[\phi^r(\mathbf{x})] \quad (2.12)$$

η οποία έχει την μορφή της εξίσωσης Schroedinger και ο χρόνος θεωρείται το X^A .

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν λιγιστές θεωρίες για την επιλογή του χρόνου στην πλήρη θεωρία. Μία από τις επιλογές αυτές είναι ο χρόνος York ή 'εξωτερικός χρόνος' ο οποίος ορίζεται ως (βλέπε [16])

$$T(\mathbf{x}; H_{ab}, p^{cd}) = \frac{2}{3\sqrt{h}} p^{cd} \gamma_{cd} \quad P_T = -\sqrt{h}. \quad (2.13)$$

Με τον αντίστοιχο Χαμιλτονιανό δεσμό να γράφεται στην μορφή $P_T + h_T \approx 0$, η πραγματική Χαμιλτονιανή θα έχει την μορφή

$$H_{\text{true}} = \int d^3x \sqrt{\gamma} + \int d^3x N^a \mathcal{H}_a \quad (2.14)$$

Τέλος αξίζει να σημειώσουμε ότι το κύριο πρόβλημα της θεωρίας αυτής είναι ότι δεν λύνει το πρόβλημα του χρόνου στην γενική περίπτωση αλλά μόνο για ειδικές περιπτώσεις.

2.2.2 Χρόνος μετά την κβάντωση

Στην δεύτερη προσέγγιση γίνεται κβάντωση των δεσμών (1.42), πριν τον ορισμό του χρόνου, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2,2.3,2.4) και παράγονται οι παρακάτω εξισώσεις για την κυματοσυνάρτηση $\Psi[h_{ab}(\mathbf{x})]$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi \equiv \left(-16\pi G \hbar^2 G_{abcd} \frac{\delta^2}{\delta h_{ab} \delta h_{cd}} - \frac{\sqrt{\gamma}}{16\pi G} ({}^{(3)}R - 2\Lambda) \right) \Psi = 0 \quad (2.15)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a \Psi \equiv i2D_b \gamma_{ac} \hbar \frac{\delta \Psi}{\delta \gamma_{bc}} = 0 \quad (2.16)$$

Η πρώτη εξίσωση ονομάζεται *Wheeler-De Witt* και η δεύτερη κβαντική εξίσωση *διαφορομορφισμών*. Ένα από τα κύρια προβλήματα της προσέγγισης αυτής είναι η επιλογή της σωστής σειράς των όρων. Επίσης επειδή η εξίσωση WdW δεν είναι της μορφής Schroedinger η επιλογή χώρου Hilbert δεν είναι τετριμμένη.

Στην συνέχεια είναι απαραίτητο να κατασκευάσουμε τον κατάλληλο χώρο Hilbert, ορίζοντας το κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο. Η πρώτη επιλογή είναι η χρήση του εσωτερικού γινομένου τύπου Schrödinger, με

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\text{Riem}} \mathcal{D}\mu[\gamma] \Psi_1^*[\gamma] \Psi_2[\gamma], \quad (2.17)$$

και η δεύτερη είναι να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο τύπου Klein-Gordon με μορφή

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = & i \int \prod_x d\Sigma^{ab}(\mathbf{x}) \Psi_1^*[\gamma_{ab}] \\ & \left(G_{abcd} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \gamma_{cd}} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \gamma_{cd}} G_{abcd} \right) \Psi_2[\gamma_{ab}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Και οι δύο σχέσεις είναι πολύ δύσκολες στην επίλυση. Η δεύτερη παρότι είναι χρονικά ανεξάρτητη δεν είναι θετικά ορισμένη. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση κβάντωσης δεν υπάρχει τελική απάντηση και θεωρία και γι' αυτό το λόγο η WdW εξίσωση χρησιμοποιείται απλά σαν μία διαφορική εξίσωση.

2.3 Κβάντωση του μίνι-υπερχώρου

Όπως είδαμε παραπάνω η επίλυση της WdW εξίσωσης είναι δύσκολη έως αδύνατη. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που οι θεμελιώδεις μεταβλητές μας είναι οι κβαντικές συνδέσεις στην κβαντική βαρύτητα βρόχων. Γι' αυτό το λόγο είναι σύνηθες να επιβάλλονται διάφορες συμμετρίες στο εκάστοτε βαρυτικό μοντέλο, όπως: σφαιρική συμμετρία, αξονική συμμετρία ή ομοιογένεια. Η κάθε περίπτωση αντιστοιχεί σε διαφορετικό φυσικό σύστημα, για παράδειγμα οι στατικές μελανές οπές είναι σφαιρικά ή αξονικά συμμετρικές, ενώ το σύμπαν προσεγγίζεται από χωρικά ομογενή και ισότροπα μοντέλα. Επιπλέον, αυτά τα απλουστευμένα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο των γενικότερων επιλογών που έχουν γίνει ως προς τις μεταβλητές για παράδειγμα.

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή της κβαντικής θεωρίας σε κοσμολογικά μοντέλα, από την οποία προκύπτουν τα επονομαζόμενα μοντέλα μίνι-υπερχώρου. Πιο συγκεκριμένα θα αναλύσουμε μόνο την περίπτωση της κβαντικής γεωμετροδυναμικής και όχι της κβαντικής κοσμολογίας βρόχων.

Το πρώτο βήμα είναι να εφαρμόσουμε την μέθοδο της κανονικής κβάντωσης για την Λαγκρανζιανή (1.60). Θεωρούμε ότι η μίνι-υπερμετρική $G_{\alpha\beta}$ έχει κάποια διανυσματικά πεδία Killing ξ_I και κάποια τανυστικά πεδία Killing K_J όπου I, J είναι οι δείκτες για το καθένα από αυτά. Σε κάθε διάνυσμα και τανυστή Killing αντιστοιχεί ένα ολοκλήρωμα της κίνησης. Αρχικά αντιστοιχούμε διαφορικούς τελεστές στις ορμές και αντικαθιστούμε τις αγκύλες Poisson με μεταθέτες

$$p_n \mapsto \hat{p}_n = -i \frac{\partial}{\partial n}, \quad p_\alpha \mapsto \hat{p}_\alpha = -i \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \quad (2.19)$$

ενώ οι τελεστές που αντιστοιχούν στην q^α θεωρείται ότι δρουν πολλαπλασιαστικά. Επιπλέον, οι αγκύλες Poisson παίρνουν την μορφή μεταθέτη

$$\{ , \} \rightarrow -i[,], \quad (2.20)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σύμβαση $\hbar = 1$.

Κατά την διαδικασία μετασχηματισμού του κινητικού όρου της \mathcal{H} σε τελεστή προκύπτει το πρόβλημα διάταξης των όρων, δηλαδή το ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος να γράψουμε τον τελεστή αυτό αλλά εξαρτάται από την σειρά των όρων. Γι' αυτό το λόγο θα επιλέξουμε τη σύμμορφη Λαπλασιανή (ή τελεστή Yamabe),

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2\mu} \partial_\alpha (\mu G^{\alpha\beta} \partial_\beta) + \frac{d-2}{8(d-1)} \mathcal{R} + 1, \quad (2.21)$$

όπου $\mu(q) = \sqrt{|\det G_{\alpha\beta}|}$, $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$, \mathcal{R} είναι το βαθμωτό πεδίο Ricci και d είναι διάσταση του μίνι-υπερχώρου. Η συγκεκριμένη επιλογή είναι ξεχωριστή για τους εξής λόγους:

1. Μετασχηματίζεται ως βαθμωτό πεδίο όταν γίνονται μετασχηματισμοί στις θεσογραφικές μεταβλητές q^a .
2. Η απαίτηση να περιέχει παραγώγους δεύτερης τάξης του $G_{\mu\nu}$ διότι ο κλασσικός δεσμός είναι τετραγωνικός στις ορμές.
3. Η απαίτηση να είναι συναλλοιώτη κάτω από σύμμορφη κλιμάκωση του $G_{\mu\nu}$, πράγμα το οποίο είναι ιδιότητα και του κλασσικού συστήματος.

Επιπλέον, οι κλασσικές συμμετρίες που παράγονται από γραμμικά διανυσματικά πεδία και Killing ταυστικά πεδία μετασχηματίζονται σε κβαντικό επίπεδο, τα μεν πρώτα αντικαθιστώντας τα Q_I με πρώτης τάξης γραμμικούς Ερμιτιανούς τελεστές [17] και τα δε K_J με τον ψευδο-Λαπλασιανό τελεστή [18], οπότε έχουμε αντίστοιχα

$$\hat{Q}_I = -\frac{i}{2\mu} (\mu\xi_I^\alpha \partial_\alpha + \partial_\alpha (\mu\xi_I^\alpha)) = -i \xi_I^\alpha \partial_\alpha \quad (2.22)$$

$$\hat{K}_J = -\frac{1}{\mu} \partial_\alpha [\mu K_J^{\alpha\beta} \partial_\beta]. \quad (2.23)$$

2.3.1 Ένα Ομογενές και Ισότροπο Μοντέλο

Το πιο απλό παράδειγμα μοντέλου μίνι-υπερχώρου είναι αυτό που προκύπτει από την χωρικά ομογενή και ισότροπη κοσμολογία FLRW (με ιδανικό ρευστό, βαθμωτό πεδίο κλπ.). Η αρχική βαρυτική δράση σε αυτό το μοντέλο είναι η δράση Einstein-Hilbert από την γενική σχετικότητα, που δίνεται από

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2.24)$$

με $\kappa^2 = 8\pi G$. Για το ομογενές και ισότροπο σύμπαν FLRW το στοιχειώδες μήκος δίνεται από

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 d\Omega_3^2 \quad (2.25)$$

όπου $d\Omega_3^2$ είναι το στοιχειώδες μήκος χώρου σταθερής καμπυλότητας με $k = 0, \pm 1$ και παράγοντα κλίμακας a . Η εξίσωση 2.25 προκύπτει από την εξίσωση 1.29 αν θέσουμε $N^i = 0$ και $h_{ij}(\mathbf{x}, t) dx^i dx^j = a^2(t) d\Omega_3^2$.

Το βαθμωτό πεδίο ϕ περιγράφεται από την αντίστοιχη ελαχιστικά συζευγμένη

δράση. Οπότε η συνολική δράση για το μοντέλο είναι

$$S = S_{grav} + S_m \quad (2.26)$$

$$= \frac{3V_0}{\kappa^2} \int dt N \left(-\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + ka - \frac{\Lambda a^3}{3} \right) + \frac{V_0}{2} \int dt N a^3 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) \right) \quad (2.27)$$

όπου V_0 είναι ο όγκος ενός χωρικού φύλλου, το οποίο το θέτουμε ίσο με $V_0 = 2\pi^2$. Συνεπώς το σύστημα έχει τώρα δύο βαθμούς ελευθερίας (a, ϕ), αντί για τους άπειρους ($h_{ij}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})$) που είχε στον υπερχώρο. Οι αντίστοιχες κανονικές ορμές δίνονται από τις σχέσεις

$$\pi_a = -\frac{a\dot{a}}{\kappa^2 N} \quad \pi_\phi = \frac{a^3 \dot{\phi}}{N} \quad \pi_N \approx 0 \quad (2.28)$$

όπου το κυματιστό ίσον είναι για την *ασθενή ισότητα*, βλ. [2]. Οπότε η εξίσωση για το π_N είναι ένας πρωτεύων δεσμός, και συνεπώς η Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H = N \left(-\frac{\kappa^2}{12a} \pi_a^2 + \frac{1}{2a^3} \pi_\phi^2 + a^3 \frac{\Lambda}{\kappa^2} + a^3 V(\phi) - \frac{3ka}{\kappa^2} \right) \quad (2.29)$$

Από την διατήρηση του δεσμού αυτού $\pi_N \approx 0 \rightarrow \partial H / \partial N \approx 0$ συνεπάγεται ότι η Χαμιλτονιανή μηδενίζεται, $H \approx 0$. Αυτός είναι ο Χαμιλτονιανός δεσμός και μπορεί να γραφτεί σε πιο συμπαγή μορφή με την χρήση της μετρικής DeWitt

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{6a}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Συνεπώς ο Χαμιλτονιανός δεσμός γράφεται στην μορφή

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} G^{AB} \pi_A \pi_B + \mathcal{V}(a, \phi) \approx 0 \quad (2.31)$$

με

$$\mathcal{V}(a, \Phi) = \frac{1}{2} \left(-\frac{6ka}{\kappa^2} + \frac{2\Lambda a^3}{\kappa^2} + a^3 V(\phi) \right) \quad (2.32)$$

όπου $A, B \rightarrow \alpha, \phi$ και $q^c = (a, \phi)$. Έπειτα γίνεται κανονική κβάντωση όπως προηγουμένως και χρησιμοποιούμε την σύμμορφη Λαπλασιανή

$$G^{AB} \pi_A \pi_B \longrightarrow -\hbar^2 \nabla_{LB}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-\mathcal{G}}} \partial_A \left(\sqrt{-\mathcal{G}} G^{AB} \partial_B \right) \quad (2.33)$$

όπου \mathcal{G} είναι η ορίζουσα της μετρικής DeWitt. Τελικά, η εξίσωση Wheeler-DeWitt

παίρνει την μορφή

$$\left(\frac{\hbar^2 \kappa^2}{12} a \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial}{\partial a} \right) - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + a^6 \left(V(\phi) + \frac{\Lambda}{\kappa^2} \right) - \frac{3ka^4}{\kappa^2} \right) \Psi(a, \phi) = 0 \quad (2.34)$$

αντικαθιστώντας $\alpha \equiv \ln a$, η εξίσωση αυτή γράφεται στην απλούστερη μορφή

$$\left(\frac{\hbar^2 \kappa^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + e^{6\alpha} \left(V(\phi) + \frac{\Lambda}{\kappa^2} \right) - 3e^{4\alpha} \frac{k}{\kappa^2} \right) \Psi(\alpha, \phi) = 0 \quad (2.35)$$

Η νέα μεταβλητή α έχει διττό ρόλο: πρώτον φράζει τον παράγοντα κλίμακας από κάτω και δεύτερον κάνει την εξίσωση Wheeler-DeWitt καλώς ορισμένη στις μοναδικότητες.

Συνεπώς είδαμε ότι η κανονική κβάντωση της κοσμολογίας δίνει μία εξίσωση για την κβαντική κοσμολογία αντίστοιχη με την εξίσωση Schrödinger στην κβαντομηχανική. Η βασικότερη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο είναι ότι στην πρώτη ο χρόνος είναι εσωτερικός ενώ στην δεύτερη εξωτερικός όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, που είναι ένα στοιχείο που μας δείχνει ότι πιθανότατα πρέπει να οριστεί διαφορετικά ο χρόνος στην κβαντομηχανική.

2.4 Ομοθετικό πεδίο και τελεστής χρονικής εξέλιξης

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1 για την Λαγκρανζιανή της μορφής (1.60) οι μόνες μη τετριμμένες συμμετρίες ικανοποιούν τις συνθήκες (1.61) και προκύπτουν διατηρήσιμα φορτία που δίνονται από την σχέση (1.62).

Ακολουθώντας την διαδικασία της κανονικής κβάντωσης, επιλέγουμε τη σύμμορφη Λαπλασιανή για να αναπαραστήσουμε τον κινητικό όρο του Χαμιλτονιανού δεσμού, με

$$\hat{\mathcal{H}} = -\hat{L}_g + 1 \Rightarrow \hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\mu} \partial_\alpha (\mu G^{\alpha\beta} \partial_\beta) - \frac{d-2}{4(d-1)} R \quad (2.36)$$

Επιπλέον οι γραμμικές ορμές δίνονται από τη σχέση (2.22). Αποδεικνύεται ότι όταν το ξ_α είναι σύμμορφο διάνυσμα Killing του $G_{\mu\nu}$, ο τελεστής

$$\hat{D}_\xi = \xi^\alpha \nabla_\alpha + \frac{d-2}{2d} (\nabla_\alpha \xi^\alpha), \quad (2.37)$$

είναι συμμετρία της σύμμορφης Λαπλασιανής \hat{L}_g με

$$\hat{L}_g \hat{D}_\xi = \hat{\delta}_\xi \hat{L}_g, \quad (2.38)$$

όπου

$$\hat{\delta}_\xi = \xi^\alpha \nabla_\alpha + \frac{d+2}{2d} (\nabla_\alpha \xi^\alpha). \quad (2.39)$$

Δρώντας στην κυματοσυνάρτηση Ψ η σχέση (2.38) παίρνει την μορφή

$$\hat{L}_g \left(\hat{Q}\Psi + \frac{i}{d} \xi^\alpha{}_{;\alpha} \Psi \right) = -i \hat{\delta}_\xi \hat{L}_g \Psi \quad (2.40)$$

Όταν η Ψ είναι λύση της εξίσωσης WDW, $\hat{\mathcal{H}}\Psi \Rightarrow \hat{L}_g \Psi = \Psi$, τότε καταλήγουμε στην σχέση

$$\hat{L}_g \hat{Q}\Psi = \hat{Q}\Psi - \frac{i}{d} \left(\hat{L}_g (\xi^\alpha{}_{;\alpha} \Psi + \xi^\alpha \Psi) \right) \quad (2.41)$$

η οποία είναι τελείως γενική λαμβάνοντας υπόψιν ότι δεν έχουμε προσδιορίσει το ξ . Στην συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση που το ξ είναι το ομοθετικό πεδίο με $\xi^\alpha{}_{;h} = \frac{d}{2}$, οπότε η (2.41) παίρνει την απλή μορφή

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{Q}_h \Psi = i\Psi \Leftrightarrow [\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_h]\Psi = i\Psi. \quad (2.42)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορισθεί η Ψ και ισχύουν μόνο όταν έχει χρησιμοποιηθεί η εξίσωση $\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο ομοθετικός τελεστής δεν πληρεί τις ίδιες ιδιοκαταστάσεις με τον Χαμιλτονιανό τελεστή. Θεωρώντας ότι η πλήρης Χαμιλτονιανή στην κβαντική περίπτωση έχει τη μορφή

$$\hat{H} = N\hat{\mathcal{H}} + u_N(t)\hat{p}_N, \quad (2.43)$$

τότε για την χρονική εξέλιξη του ομοθετικού διατηρήσιμου φορτίου προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\frac{d\hat{Q}_h}{dt} \Psi = -i[\hat{Q}_h, \hat{H}] = iN[\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}_h] = -N\Psi, \quad (2.44)$$

από την οποία προκύπτει ότι το \hat{Q}_h παράγει την συνάρτηση παρόδου. Επίσης η \hat{Q}_h παράγει την συνάρτηση $u_N(t)$.

2.5 Ημικλασσική ανάλυση μέσω του κβαντικού δυναμικού

Στην ερμηνεία κβαντικού δυναμικού χρησιμοποιείται η κυματοσυνάρτηση του συστήματος για να βρεθεί μία οικογένεια τροχιών για τα παρατηρήσιμα μεγέθη. Αρχικά θεωρούμε την απλή περίπτωση ενός σωματιδίου με συντεταγμένη $x(t)$ μάζα

m και δυναμικό $V(x)$. Το πρώτο βήμα στην ανάλυση αυτή είναι να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση ως

$$\psi(x, t) = \Omega(x, t)e^{iS(x, t)}, \quad (2.45)$$

όπου $\Omega(x, t)$ και $S(x, t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, που αναπαριστούν αντίστοιχα το πλάτος και τη φάση της κυματοσυνάρτησης. Οπότε προκύπτουν δύο εξισώσεις μετά την αντικατάσταση αυτής στην εξίσωση Schrödinger

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V_Q = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right). \quad (2.47)$$

Θεωρώντας ότι η κλίση του S είναι η ορμή του σωματιδίου, τότε η πρώτη εξίσωση είναι μία τροποποιημένη Hamilton-Jacobi εξίσωση. Ο δυναμικός όρος περιέχει έναν επιπλέον όρο ο οποίος ονομάζεται *κβαντικό δυναμικό*, με $Q = \partial_x^2 R / 2mR$. Οι τροχιές $x(t)$ βρίσκονται από την επίλυση του συστήματος $\dot{x} = \partial_x S / m$. Το μέτρο $R^2 dx$ δίνει την πιθανότητα να διασχίζουν οι τροχιές την περιοχή $(x, x + dx)$, η οποία διατηρείται με βάση την εξίσωση συνέχειας (2.47). Τέλος αν το κβαντικό δυναμικό είναι αμελητέο σε σχέση με το κλασικό δυναμικό τότε οι τροχιές έχουν την κλασική μορφή.

Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την παραπάνω ερμηνεία στην κβαντική κοσμολογία, χρησιμοποιώντας ένα απλό κοσμολογικό μοντέλο (βλέπε [19]) το οποίο προέρχεται από ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + n^2(r)dr^2 + b^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.48)$$

με την αντίστοιχη WdW του μίνι-υπερχώρου

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi = \frac{1}{8b} \left[\frac{1}{2b} (\partial_{aa}\Psi - \partial_{ff}\Psi) - \frac{1}{a} \partial_{ab}\Psi \right] - \Psi = 0. \quad (2.49)$$

Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία αρχικά γράφουμε την κυματοσυνάρτηση στην παρακάτω μορφή και την αντικαθιστούμε στην εξίσωση WDW

$$\Psi(a, b, f) = \Omega(a, b, f)e^{iS(a, b, f)}, \quad (2.50)$$

Στην συνέχεια χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, προκύπτει η

εξίσωση συνέχειας

$$\frac{1}{16b^2} \left[2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial a} - \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial S}{\partial f} \right) + \Omega \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial f^2} \right) \right] - \frac{1}{8ab} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right) = 0, \quad (2.51)$$

$$- \frac{1}{16b^2} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{8ab} \frac{\partial S}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial b} + \frac{1}{16b^2} \left(\frac{\partial S}{\partial f} \right)^2 - 1 + \mathcal{Q} = 0, \quad (2.52)$$

όπου

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{16b^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial f^2} \right) - \frac{1}{8ab} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \right], \quad (2.53)$$

είναι το κβαντικό δυναμικό. Είναι προφανές ότι η (2.52) είναι της μορφής

$$\frac{1}{2} G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + 1 - \frac{\square \Omega}{2\Omega} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} \left(q^\mu, p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \right) + \mathcal{Q} = 0, \quad (2.54)$$

όπου ισχύει $\frac{\square \Omega}{\Omega} = \frac{1}{\mu} \partial_\alpha (\mu G^{\alpha\beta} \partial_\beta) \Omega$, η \mathcal{H} είναι η Χαμιλτονιανή, $q^\mu = (a, b, f)$ είναι οι μεταβλητές του θεσεογραφικού χώρου και $p_\mu = (p_a, p_b, p_f)$ είναι οι συζυγείς ορμές q^μ . Όπως προαναφέρθηκε οι κβαντικές διορθώσεις προκύπτουν από τον τελευταίο όρο που παράγεται από το κβαντικό δυναμικό. Άρα οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \Rightarrow \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} \frac{8}{N} abb' = \frac{\partial S}{\partial a}, \\ \frac{8}{N} (aba' + a^2 b') = \frac{\partial S}{\partial b}, \\ \frac{8}{N} b^2 f' = \frac{\partial S}{\partial f}. \end{cases} \quad (2.56)$$

Όταν το κβαντικό δυναμικό (2.53) είναι μη μηδενικό, προκύπτουν διορθώσεις στις κλασσικές λύσεις. Στις περιπτώσεις που το κβαντικό δυναμικό είναι μηδενικό αναμένεται ότι η επίλυση του συστήματος στην (2.56) θα παράγει τις κλασσικές λύσεις.

3

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΦΑΣΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ REISSNER-NORDSTRÖM ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κανονική κβάντωση του τρισδιαστατικού επίπεδου μίνι-υπερχώρου που παράγεται από στατικούς σφαιρικά συμμετρικούς χωρόχρονους συζευγμένους με ηλεκτρικό πεδίο [20]. Αρχικά θα αναλύσουμε το κλασσικό σύστημα και τις διατηρήσιμες ποσότητες του. Στην συνέχεια θα τις χρησιμοποιήσουμε για την κβάντωση του συστήματος.

3.1 Το στατικό, σφαιρικά συμμετρικό ανηγμένο σύστημα

Για να κάνουμε την προαναφερθείσα ανάλυση θα χρειαστούμε αρχικά μία δράση της μορφής (1.52) όπου ο όρος για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα δίνεται από την

$$S_m = -\frac{1}{4\mu_0} \int \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x$$

με $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Στην συνέχεια παραλλάσσοντας την δράση ως προς την μετρική παράγονται οι εξισώσεις Einstein-Maxwell (1.54) όπου ο τανυστής ενέργειας

και ορμής δίνεται από την σχέση

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \right).$$

Επιπρόσθετα, η παράλλαξη της δράσης ως προς το διανυσματικό πεδίο A^μ οδηγεί στις εξισώσεις Maxwell στο κενό χωρίς πηγές

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Θεωρούμε το γενικότερο στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = -b(r)^2 dt^2 + N(r)^2 dr^2 + a(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.2)$$

που αντιστοιχεί σ' έναν στατικό σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο στις συνηθισμένες συντεταγμένες. Η αντίστοιχη μορφή του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού είναι

$$A = f(r) dt. \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.2) και την (3.3) στην (1.52) προκύπτει η ακόλουθη Λαγκρανζιανή μίνι-υπερχώρου

$$L = \frac{2}{N(r)} \left(2a(r)\dot{a}(r)\dot{b}(r) + b(r)\dot{a}(r)^2 + \frac{a(r)^2 \dot{f}(r)^2}{b(r)} \right) + 2b(r)N(r) \quad (3.4)$$

όπου $\dot{a}(r) \equiv \partial a(r)/\partial r$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange που προκύπτουν με τη χρήση της (3.4) είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Einstein (1.54) συν τις εξισώσεις Maxwell (3.1) μετά την απλοποίηση τους με την χρήση των (3.2) και (3.3). Όπως προαναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο είναι χρήσιμο να γίνει η ανάλυση στην παραμετροποίηση σταθερού δυναμικού, ο μετασχηματισμός αυτός επιτυγχάνεται θέτοντας

$$N(r) = \frac{n(r)}{2b(r)}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (3.4) μετασχηματίζεται στην

$$L = \frac{4}{n(r)} \left(2a(r)b(r)\dot{a}(r)\dot{b}(r) + b(r)^2 \dot{a}(r)^2 + a(r)^2 \dot{f}(r)^2 \right) + n(r) \quad (3.5)$$

από την οποία υπολογίζεται η μετρική του μίνι-υπερχώρου

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 8b^2 & 8ab & 0 \\ 8ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

η οποία αναπαριστά τον επίπεδο χώρο. Η παραπάνω μετρική έχει έξι διανύσματα Killing από τα οποία παράγονται αυτόνομα ολοκληρώματα της κίνησης της μορφής (1.62)

$$\begin{aligned} \xi_1 = \partial_f, \quad \xi_2 = \frac{1}{ab}\partial_b, \quad \xi_3 = \frac{f}{ab}\partial_b + \frac{1}{a}\partial_f, \quad \xi_4 = -a\partial_a + b\partial_b + f\partial_f \\ \xi_5 = \partial_a - \frac{b^2 + f^2}{2ab}\partial_b - \frac{f}{a}\partial_f, \quad \xi_6 = af\partial_a - bf\partial_b - \frac{b^2 + f^2}{2}\partial_f \end{aligned} \quad (3.7)$$

και ένα ομοθετικό διάνυσμα $\xi_h = \frac{1}{4}(a\partial_a + b\partial_b + f\partial_f)$ από το οποίο παράγεται ένα μη-τοπικό διατηρήσιμο φορτίο της μορφής

$$Q_h = \xi_h^\alpha p_\alpha - \int n(r)dr. \quad (3.8)$$

Στην [19] αναλύθηκε η διαδικασία εύρεσης της κλασικής λύσης με αλγεβρικό τρόπο χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα της κίνησης: Αρχικά βρίσκουμε την λύση από το σύστημα $Q_I = c_I$, $I = 1, \dots, 5$ και $Q_h = c_h$ (c_I, c_h είναι σταθερές), για της μεταβλητές $a, b, \int n dr$ και τις παραγώγους τους. Στην συνέχεια η αντικατάσταση των λύσεων στην εναπομένονσα 6η εξίσωση $Q_6 = c_6$ αλλά καθορίζει την τιμή της c_6 συναρτήσει των άλλων σταθερών, οπότε στην συγκεκριμένη περίπτωση $c_6 = -(c_1c_5 + c_3c_4)/c_2$. Τέλος οι συνθήκες συμβιβαστότητας $a' = \frac{da}{dr}$ και $b' = \frac{db}{dr}$ ικανοποιούνται ταυτοτικά, ενώ η $n = \frac{d}{dr} \int n dr$ ικανοποιεί τον δεσμό ο οποίος τώρα εξαρτάται μόνο από τις σταθερές, δηλαδή $c_5 = \frac{16-c_3^2}{2c_2}$.

Έπειτα από επαναπαραμετροποιήσεις έχουμε : $c_1 = 4Q$, $c_2 = 4/\tilde{c}$, $c_4 = \tilde{c}(c_3Q - 4M)$ και εισάγοντας μία σταθερά στην μεταβλητή t , $\pm\tilde{c}$, καταλήγουμε στο παρακάτω στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{a} + \frac{Q^2}{a^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{a} + \frac{Q^2}{a^2}\right)^{-1} da^2 + a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.9)$$

Όπως είναι προφανές η παραπάνω μετρική είναι η Reissner-Nordström ([21], [22]), με την μόνη διαφορά ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι

$$A = \tilde{c} \left(\frac{c_3}{4} - \frac{Q}{a(r)} \right) dt. \quad (3.10)$$

Η σταθερά c_3 δεν εμφανίζεται στο στοιχειώδες μήκος (3.9), ενώ στην (3.10) απλά ορίζει την τιμή του A_μ όταν $a \rightarrow \infty$, οπότε έχουμε το δικαίωμα να την θέσουμε ίση με μηδέν. Τέλος, η κλιμάκωση της μεταβλητής t με την $\pm \tilde{c}$ οδηγεί στην

$$A = \pm \frac{Q}{a(r)} dt \quad (3.11)$$

όπου η εναπομένουσα σταθερά Q παίζει τον ρόλο του απόλυτου φορτίου.

3.1.1 Κλασική περιγραφή

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η (3.6) περιγράφει τον επίπεδο χώρο, υπάρχει η δυνατότητα να την φέρουμε στην μορφή $G_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ διαλέγοντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό για τις συντεταγμένες, ο οποίος έχει την μορφή $(a, b, f) \mapsto (\chi, \psi, \zeta)$ με

$$a = \frac{1}{8}(\chi - \zeta), \quad b = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\zeta^2 + \psi^2 - \chi^2}}{\chi - \zeta}, \quad f = \frac{2\sqrt{2}\psi}{\chi - \zeta}. \quad (3.12)$$

Στο σημείο αυτό επιλέχθηκαν οι κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί των ξ τέτοιοι ώστε οι ισομετρίες της $G_{\mu\nu}$ να δρουν ως γεννήτορες της ομάδας μεταθέσεων και της $SO(2, 1)$ ομάδας. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{8}\xi_5 - \frac{1}{2}\xi_2, & X_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_3, & X_3 &= -\frac{1}{8}\xi_5 - \frac{1}{2}\xi_2 \\ X_4 &= \xi_4, & X_5 &= \sqrt{2}\xi_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_6, & X_6 &= \sqrt{2}\xi_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_6 \end{aligned} \quad (3.13)$$

στις συντεταγμένες αυτές, οι X_4, X_5 γεννήτορες αντιστοιχούν σε υπερβολικές στροφές (δηλαδή Lorentz προωθήσεις στους άξονες $\chi - \zeta$ και $\chi - \psi$) ενώ ο X_6 αντιστοιχεί σε απλές στροφές στο επίπεδο $\psi - \zeta$. Οι υπόλοιποι X_i γεννήτορες αντιστοιχούν σε μεταθέσεις στον κάθε άξονα

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_\chi, & X_2 &= \partial_\psi, & X_3 &= \partial_\zeta \\ X_4 &= \zeta\partial_\chi + \chi\partial_\zeta, & X_5 &= \psi\partial_\chi + \chi\partial_\psi, & X_6 &= \psi\partial_\zeta - \zeta\partial_\psi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Οι τιμές που παίρνουν τα ολοκληρώματα τις κίνησης $\tilde{Q}_I = X_I^\alpha p_\alpha$ όταν αντικατασταθεί σε αυτά η προηγούμενη λύση είναι

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= \frac{\tilde{c}(16 - c_3^2)}{64} - \frac{2}{\tilde{c}}, & \tilde{Q}_2 &= \frac{c_3}{2\sqrt{2}}, & \tilde{Q}_3 &= \frac{\tilde{c}(c_3^2 - 16)}{64} - \frac{2}{\tilde{c}}, & \tilde{Q}_4 &= \tilde{c}(c_3 Q - 4M) \\ \tilde{Q}_5 &= \frac{Q(128 - \tilde{c}^2(16 + c_3^2)) + 8\tilde{c}^2 c_3 M}{16\sqrt{2}}, & \tilde{Q}_6 &= \frac{Q(128 + \tilde{c}^2(16 + c_3^2)) - 8\tilde{c}^2 c_3 M}{16\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (3.15)$$

στα οποία μπορούμε να θέσουμε $c_3 = 0$ το οποίο δείχνει ότι το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο, ενώ η σταθερά \tilde{c} μπορεί να απορροφηθεί με διαφορετική κλιμάκωση της μετρικής οπότε μπορεί να τεθεί ίση με οποιοδήποτε αριθμό εκτός του μηδενός. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι τα τρία τελευταία διανύσματα (3.14) σχετίζονται με τα διατηρήσιμα φορτία που συνδέονται με τις ουσιώδεις σταθερές του στοιχειώδους μήκους (3.9), πιο συγκεκριμένα η μάζα M και η απόλυτη τιμή του φορτίου Q .

Σε αντίθεση με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στην [19], όπου η κβάντωση έγινε με την χρήση των Αβελιανών υποαλγεβρών που βασίζονται στις κλασσικές συμμετρίες ξ για την περίπτωση της Reissner-Nordström, στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η κβάντωση με την χρήση διαφορετικών αλγεβρών οι οποίες περιλαμβάνουν το τετραγωνικό Casimir αναλλοίωτο που γράφεται συναρτήσει των X_4 , X_5 και X_6

$$Q_{Cas} = X_6 \otimes X_6 - X_4 \otimes X_4 - X_5 \otimes X_5. \quad (3.16)$$

Το ολοκλήρωμα της κίνησης που αντιστοιχεί στο παραπάνω αναλλοίωτο γράφεται

$$\tilde{Q}_{Cas} = \tilde{Q}_6^2 - \tilde{Q}_4^2 - \tilde{Q}_5^2 = 16\tilde{c}^2(Q^2 - m^2). \quad (3.17)$$

Η βασική ιδέα εδώ είναι να χρησιμοποιηθεί το αναλλοίωτο αυτό συμπληρωματικά με ένα αναλλοίωτο από τα προηγούμενα και την εξίσωση Wheeler-DeWitt.

3.1.2 Κβάντωση του επίπεδου μίνι-υπερχώρου

X_6 στροφή

Αρχικά είναι χρήσιμο να φέρουμε το X_6 σε κανονική μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του ψευδο-σφαιρικού μετασχηματισμού, όπου $(\chi, \psi, \zeta) \mapsto (u, v, w)$

$$\chi = u \sinh v, \quad \psi = u \cosh v \cos w, \quad \zeta = u \cosh v \sin w, \quad (3.18)$$

ο οποίος φέρνει την μετρική του μίνι-υπερχώρου στην μορφή $G_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -u^2, u^2 \cosh^2 v)$, ενώ το X_6 παίρνει την απλή μορφή ∂_w . Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2.22) για να γράψουμε την μορφή του γραμμικού πρώτης τάξης Ερμιτιανού τελεστή, όπου χρησιμοποιούνται τα X αντί για τα ξ , το μέτρο σε αυτές τις συντεταγμένες γράφεται $\mu = \sqrt{-G} = u^2 \cosh v$. Ως αποτέλεσμα έχουμε

$$\hat{Q}_6 = -i \frac{\partial}{\partial w} \quad (3.19)$$

$$\hat{Q}_{Cas} = \hat{Q}_6^2 - \hat{Q}_4^2 - \hat{Q}_5^2 = \frac{1}{\cosh v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\cosh v \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{1}{\cosh^2 v} \frac{\partial^2}{\partial w^2}, \quad (3.20)$$

ενώ ο τετραγωνικός τελεστής που προκύπτει από τον Χαμιλτονιανό δεσμό (2.21), γράφεται

$$\hat{H} = -\frac{1}{2u^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{1}{\cosh v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\cosh v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{\cosh^2 v} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right] - 1. \quad (3.21)$$

Όπως αναμέναμε οι \hat{Q}_6 , \hat{Q}_{Cas} και \hat{H} δημιουργούν μία Αβελιανή άλγεβρα κβαντικών τελεστών οπότε μπορούμε να βρούμε την ιδιοκατάσταση χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις

$$\hat{Q}_6 \Psi_{k\ell}(u, v, w) = k \Psi_{k\ell}(u, v, w) \quad (3.22a)$$

$$\hat{Q}_{Cas} \Psi_{k\ell}(u, v, w) = \ell(\ell + 1) \Psi_{k\ell}(u, v, w), \quad (3.22b)$$

ταυτόχρονα με την εξίσωση Wheeler-DeWitt (3.21).

Στην κβαντική κοσμολογία το φάσμα των τελεστών που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως συνεχές και δεν είναι πάντα εφικτό να ξεχωρίσουμε ένα διακριτό φάσμα ιδιοτιμών. Ωστόσο, στην περίπτωση μας αυτό δεν ισχύει και μπορεί να κατασκευαστεί χώρος Hilbert. Η κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί τις (3.22) και τον Χαμιλτονιανό δεσμό μπορεί να χωριστεί σε τρεις ανεξάρτητες συναρτήσεις $\Psi_{k\ell} = \psi_\ell^{(1)}(u) \psi_{k\ell}^{(2)}(v) \psi_k^{(3)}(w)$. Όπως συνήθως, μέσω της (3.22a), η $\psi_k^{(3)}(w)$ παίρνει την μορφή

$$\psi_k^{(3)}(w) = C_1 e^{ikw} \quad (3.23)$$

όπου η C_1 είναι σταθερά κανονικοποίησης.

Ο τελεστής \hat{Q}_6 αντιστοιχεί στην κλασική συμμετρία X_6 , η οποία παράγει το μετασχηματισμό στροφής στο επίπεδο $\psi - \zeta$ του επίπεδου θεσεογραφικού χώρου στις μεταβλητές (χ, ψ, ζ) . Επιπρόσθετα, η μεταβλητή w εμφανίζεται ως όρισμα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στον μετασχηματισμό (3.18), οπότε θεωρούμε ότι το

πεδίο ορισμού του θα είναι το $[0, 2\pi]$ έτσι ώστε να καλύπτει όλο τον χώρο μία φορά. Συνεπώς προκύπτει η εξής συνοριακή συνθήκη $\psi_k^{(3)}(0) = \psi_k^{(3)}(2\pi)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $k \in \mathbb{Z}$ και $C_1 = (2\pi)^{-1/2}$ έτσι ώστε η $\psi_k^{(3)}(w)$ να ικανοποιεί και την συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int_0^{2\pi} \psi_{k'}^{(3)}(w)^* \psi_k^{(3)}(w) dw = C_1^* C_1 \int_0^{2\pi} e^{i(k-k')w} dw = \delta_{kk'}, \quad k, k' \in \mathbb{Z}$$

όπου $\delta_{kk'}$ είναι το δέλτα του Kronecker. Με τον παραπάνω χωρισμό των μεταβλητών η εξίσωση (3.22b) ανάγεται ως εξής

$$\frac{1}{\cosh v} \frac{d}{dv} \left(\cosh v \frac{d\psi_{k\ell}^{(2)}(v)}{dv} \right) - \left[\ell(\ell+1) - \frac{k^2}{\cosh^2 v} \right] \psi_{k\ell}^{(2)}(v) = 0. \quad (3.24)$$

Στο σημείο αυτό ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις οι οποίες καθορίζονται από το πρόσημο της ιδιοτιμής του τελεστή Casimir \hat{Q}_{Cas} .

- Στην πρώτη περίπτωση ισχύει ότι $\ell(\ell+1) \geq 0$, για κάθε $\ell \in \mathbb{R} - (-1, 0)$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\psi_{k\ell}^{(2)}(v) = \frac{\Phi_{k\ell}(v)}{\cosh^{1/2} v}$, η εξίσωση (3.24) απλοποιείται στην μορφή

$$\frac{d^2 \Phi_{k\ell}(v)}{dv^2} + \left[\frac{k^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 v} - \frac{1}{4}(2\ell+1)^2 \right] \Phi_{k\ell}(v) = 0. \quad (3.25)$$

Η εξίσωση (3.25) ταυτίζεται με την μονοδιάστατη χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger με το δυναμικό να είναι της μορφής Pöschl - Teller [23], επιπλέον ορίζουμε $\frac{1}{4} - k^2 = -V_0 < 0$ ως το βάθος του δυναμικού και την $E = -\frac{1}{4}(2\ell+1)^2$ ως την αρνητική ενέργεια από την οποία προκύπτουν οι ενεργειακές στάθμες. Μία παρόμοια ανάλυση, στην οποία συνδέεται η άλγεβρα των τελεστών με το σύστημα Pöschl - Teller, υπάρχει στην [24]. Σύμφωνα με την [23] είναι δυνατό να εισάγουμε νέες παράμετρους κ και λ με

$$\kappa(\kappa+1) = V_0 \Rightarrow \kappa = |k| - \frac{1}{2}, \quad \lambda = \sqrt{-E} = |\ell + \frac{1}{2}| \quad (3.26)$$

στην συνέχεια έπειτα από την αλλαγή μεταβλητών μέσω της $v \mapsto \sigma = \tanh(v)$ η εξίσωση (3.25) γράφεται

$$\frac{d}{d\sigma} \left[(1-\sigma^2) \frac{d\Phi_{\kappa\lambda}(\sigma)}{d\sigma} \right] + \left[\kappa(\kappa+1) + \frac{\lambda^2}{1-\sigma^2} \right] \Phi_{\kappa\lambda}(\sigma) = 0, \quad (3.27)$$

και το πεδίο ορισμού από $v \in (-\infty, +\infty)$ γίνεται $\sigma \in (-1, 1)$. Η λύση της

εξίσωσης αυτής είναι πεπερασμένη για $\sigma \rightarrow 1$ και δίνεται από την σχέση

$$\Phi_{\kappa\lambda}(\sigma) = C_2(1 - \sigma^2)^{\lambda/2} {}_2F_1(\lambda - \kappa, \lambda + \kappa + 1; \lambda + 1; \frac{1}{2}(1 - \sigma)), \quad (3.28)$$

όπου ${}_2F_1(a, b; c; z)$ είναι η Γκαουσιανή υπεργεωμετρική συνάρτηση και C_2 η σταθερά κανονικοποίησης. Λόγω της κανονικότητας της λύσης στο όριο $\sigma \rightarrow -1$ προκύπτει ο περιορισμός $\kappa - \lambda = n \in \mathbb{N}$, ο οποίος για τα k και ℓ γράφεται

$$|k| - |\ell + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} |k| > \ell, & k \in \mathbb{Z}, \quad \ell \in \mathbb{N} \\ |k| \leq \ell, & k \in \mathbb{Z}, \quad \ell \in \mathbb{Z}_- \end{cases}. \quad (3.29)$$

Επειδή οι $\ell = \nu \in \mathbb{N}$ και $\ell = -\nu - 1$ παράγουν το ίδιο σύνολο ιδιοτιμών $\ell(\ell + 1)$, φαίνεται από τη μορφή των ιδιοσυναρτήσεων (3.28) ότι οι μόνοι απαραίτητοι περιορισμοί είναι $k \in \mathbb{Z}_+$ και $\ell \in \mathbb{N}$ με $k > \ell$, όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Η σταθερά κανονικοποίησης C_2 υπολογίζεται είτε εκφράζοντας την υπεργεωμετρική συναρτήσε των συναφών πολυώνυμων Legendre είτε των πολυώνυμων Gegenbauer, με τελική μορφή (για αναλυτικό υπολογισμό βλέπε [25])

$$C_2 = \sqrt{\frac{\Gamma(\kappa + \lambda + 1)\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\pi^{1/2}(\kappa - \lambda)!\Gamma(2\lambda + 1)\Gamma(\lambda)}}. \quad (3.30)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι κβαντικές συνθήκες για το ℓ ικανοποιούν πλήρως την $\ell(\ell + 1) \geq 0$, που είναι και ο λόγος που διακρίνουμε αυτή την περίπτωση. Η κλασική προέλευση αυτής της ανισότητας μπορεί να ευρευθεί αν γίνει υπολογισμός της σταθερής τιμής του ολοκληρώματος της κίνησης (3.16), που αντιστοιχεί στον τελεστή \hat{Q}_{Cas} . Όπως φαίνεται από την (3.17), η περίπτωση που η ιδιοτιμή $\ell(\ell + 1)$, του τελεστή \hat{Q}_{Cas} , είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, αντιστοιχεί κλασικά στην συνθήκη $Q \geq M$, η οποία εκτός από την ακραία περίπτωση που $Q = M$, αντιστοιχεί σ'έναν χωρόχρονο με γυμνή μοναδικότητα.

Για να γίνει σύνδεση μεταξύ των κλασικών σταθερών M, Q με τους κβαντικούς αριθμούς k και ℓ , χρειάζεται να αντιστρέψουμε τις σχέσεις $k = \tilde{Q}_6$ και $\ell(\ell + 1) = Q_{Cas}$, άρα

$$M = \frac{\sqrt{32\tilde{c}^2k^2 - (\tilde{c}^2 + 8)^2\ell(\ell + 1)}}{4|\tilde{c}|(\tilde{c}^2 + 8)} \quad (3.31a)$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}k}{(\tilde{c}^2 + 8)}. \quad (3.31b)$$

όπου ήδη έχουμε θέσει $c_3 = 0$, το οποίο είναι απαραίτητο για να μηδενίζεται το δυναμικό στο άπειρο. Γενικότερα οι τιμές των διατηρήσιμων ποσοτήτων \tilde{Q}_I εξαρτώνται από τις σταθερές ολοκλήρωσης \tilde{c} , c_3 . Ουσιαστικά οι διαφορετικές τιμές των σταθερών αυτών αντιστοιχούν μόνο σε διαφορετικές αναπαραστάσεις του χωρόχρονου. Πιο συγκεκριμένα αυτό σημαίνει ότι, αλλάζοντας την αριθμητική τιμή των σταθερών αλλάζει η αριθμητική τιμή του στοιχειώδους μήκους, αλλά η γεωμετρία παραμένει ίδια. Όμως υπάρχουν κάποιες προτιμητέες τιμές οι οποίες αντιστοιχούν σε φυσικές τιμές.

Οι φυσικές παράμετροι του προβλήματος είναι η μάζα M και η απόλυτη τιμή του φορτίου Q , οπότε χρειαζόμαστε δύο τελεστές για να αντιστοιχήσουμε σε αυτές τις ουσιώδεις σταθερές. Από την μορφή των \tilde{Q}_I στην (3.15), παρατηρούμε ότι οι τρεις τελευταίοι, που παράγονται από τους \tilde{X}_4 , \tilde{X}_5 και \tilde{X}_6 , εξαρτώνται από τις προαναφερθείσες σταθερές. Για να καταλήξουμε σε δύο τελεστές, οι οποίοι θα περιέχουν ξεχωριστά την πληροφορία για τα M και Q , διαλέγουμε με τέτοιο τρόπο τις σταθερές έτσι ώστε να μηδενίζεται το ένα διατηρήσιμο φορτίο που προέρχεται από τις υπερβολικές στροφές. Οπότε, θέτουμε $\tilde{c} = 2\sqrt{2}$ επιπρόσθετα στην προηγούμενη συνθήκη $c_3 = 0$, άρα καταλήγουμε στα εξής

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= 0, & \tilde{Q}_2 &= 0, & \tilde{Q}_3 &= -\sqrt{2} \\ \tilde{Q}_4 &= -8\sqrt{2}M, & \tilde{Q}_5 &= 0, & \tilde{Q}_6 &= 8\sqrt{2}Q. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Επιπλέον η εξίσωση (3.31) γίνεται

$$M = \frac{1}{8\sqrt{2}}\sqrt{k^2 - \ell(\ell + 1)} \quad (3.33a)$$

$$Q = \frac{k}{8\sqrt{2}}. \quad (3.33b)$$

Όπως είναι προφανές, με την επιλογή αυτή, από την εξίσωση (3.33a) συνεπάγεται ότι οι κβαντικές συνθήκες $k > \ell$ με k να είναι ακέραιος και ℓ φυσικός αριθμός, αντιστοιχούν απολύτως στην απαίτηση για πραγματικότητα της M .

Το τελευταίο βήμα αυτής της ανάλυσης είναι να δώσουμε την λύση που ικα-

νοποιεί την εξίσωση του δεσμού (3.21)

$$\psi_\ell^{(1)}(u) = C_4 j_\ell(\sqrt{2}u) + C_5 y_\ell(\sqrt{2}u), \quad (3.34)$$

όπου j_ℓ, y_ℓ είναι οι σφαιρικές εξισώσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα και C_4, C_5 είναι οι μιγαδικές σταθερές ολοκλήρωσης. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι σφαιρικές Bessel $j_\ell(x)$ συμπεριφέρονται καλά στο άπειρο και στο μηδέν και επίσης ικανοποιούν την συνθήκη ορθοκανονικότητας

$$\int_0^{+\infty} u^2 j_\ell(\alpha_1 u) j_\ell(\alpha_2 u) du = \frac{\pi}{2\alpha_1^2} \delta(\alpha_1 - \alpha_2),$$

θέτουμε $C_4 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ και $C_5 = 0$ στην (3.34) έτσι ώστε να είναι δυνατό να γραφτεί ως

$$\int_0^{+\infty} u^2 \psi_\ell^{(1)}(u)^* \psi_\ell^{(1)}(u) du = C_4^* C_4 \int_0^{+\infty} j_\ell(\sqrt{2}u) j_\ell(\sqrt{2}u) = \delta(0), \quad (3.35)$$

όπου συμβολικά επιλέγουμε να εκφράσουμε το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης ως $\delta(0)$, με το οποίο στην συνέχεια κανονικοποιούμε ως εξής

$$\rho(u, v, w) = \frac{\mu \Psi_{k\ell}^* \Psi_{k\ell}}{\delta(0)}, \quad (3.36)$$

και το πεδίο τιμών της (3.35) για $u \in (0, +\infty)$, $v \in \mathbb{R}$ και $w \in [0, 2\pi]$ κυμαίνεται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας.

- Στην προηγούμενη περίπτωση είδαμε ότι η συνθήκη $Q \geq M$ οδηγεί σε δέσμιες καταστάσεις ενός συστήματος Pöschl - Teller. Για να μελετήσουμε τι συμβαίνει στην κλασική περίπτωση $Q < M$, θεωρούμε ότι $\ell(\ell+1) < 0$. Αυτό μας οδηγεί να θέσουμε το $\ell = -1/2 + is$, $s \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι επιτρεπτό για τον τελεστή \hat{Q}_{Cas} γιατί η ιδιοτιμή του προέρχεται από τον συνδυασμό $\ell(\ell+1)$ και είναι πραγματική. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει διακριτό φάσμα ιδιοτιμών για το ℓ , διότι η ενέργεια $E = -\frac{1}{4}(2\ell+1)^2$ του αντίστοιχου συστήματος που μελετήσαμε νωρίτερα είναι θετική και πάνω από το πηγάδι του δυναμικού. Ωστόσο, αν ξαναγράψουμε την λύση στις μεταβλητές που είναι γραμμένη η εξίσωση (3.24), έχουμε

$$\psi_{k\ell}^{(2)}(i \sinh v) = C_2 P_\ell^k(i \sinh v) + C_3 Q_\ell^k(i \sinh v), \quad (3.37)$$

όπου τα $P_\ell^k(z)$ και $Q_\ell^k(z)$ είναι οι συναφείς συναρτήσεις Legendre πρώτου και

δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Είναι γνωστό από το σύστημα Pöschl - Teller ότι το φάσμα είναι συνεχές. Ωστόσο, μπορεί και σε αυτή την περίπτωση να ορισθεί συνθήκη ορθογωνιότητας για τις συναρτήσεις (για λεπτομέρειες βλέπε A.1) με την μορφή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_{k, is'-1/2}^{(2)}(v))^* \psi_{k, is-1/2}^{(2)}(v) d(\sinh v) \propto \delta(s' - s) + \delta(s' + s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.38)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι το s και το $-s$ αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή $\ell(\ell+1)$, το οποίο εξηγεί γιατί έχουμε δύο συναρτήσεις δέλτα στο δεξιό μέλος της (3.38). Επιπλέον, όπως φαίνεται στο παράρτημα A.1, για την συνάρτηση $P_\ell^k(i \sinh v)$ το πλάτος πιθανότητας είναι το ίδιο και για τις δύο τιμές, αφού ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας είναι συμμετρικός στην αλλαγή $s \mapsto -s$. Αντιθέτως, δεν ισχύει το ίδιο για την συνάρτηση $Q_\ell^k(i \sinh v)$.

Τέλος, ο Χαμιλτονιανός δεσμός $\widehat{\mathcal{H}}\Psi_{k\ell} = 0$ συνεχίζει να ισχύει και στην περίπτωση αυτή μέσω της (3.34). Επιπρόσθετα η σχέση (3.33a) ικανοποιείται με την τιμή του $\ell(\ell+1)$ να είναι μόνιμα αρνητική και το M λαμβάνει μόνο πραγματικές τιμές.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε τα εξής: Για διακριτό ℓ και $\ell(\ell+1) \geq 0$, οι καταστάσεις $|k, \ell\rangle$ είναι κανονικοποιημένες σε όλο τον χώρο και η κυματοσυνάρτηση γράφεται

$$\Psi_{k\ell} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} C_2(k, \ell) j_\ell(\sqrt{2}u) \frac{{}_2F_1(\ell - k + 1, \ell + k + 1; \ell + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}(1 - \tanh v))}{\cosh^{\ell-1/2} v} e^{ikw}, \quad (3.39)$$

με τους περιορισμούς $k \in \mathbb{Z}^+$, $\ell \in \mathbb{N}$ και $k > \ell$. Η σταθερά $C_2(k, \ell)$ δίνεται από την (3.30) έπειτα από αντικατάσταση του $\kappa = k - 1/2$, $\lambda = \ell + 1/2$. Αντιθέτως για την περίπτωση με συνεχές φάσμα $\ell(\ell+1) < 0$, η οποία κλασσικά αντιστοιχεί στο $M > Q$, έχουμε: για $\ell = -1/2 + is$ και χρησιμοποιώντας τις (A.13) και (A.14) μία κυματοσυνάρτηση της μορφής

$$\Psi_{ks} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k - is)\Gamma(\frac{1}{2} - k + is)}{\cosh(s\pi)\Gamma(-is)\Gamma(is)} \right)^{1/2} j_{is-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}u) P_{is-\frac{1}{2}}^k(i \sinh v) e^{ikw} \quad (3.40)$$

με $k \in \mathbb{Z}$ και $s \in \mathbb{R}$, κανονικοποιημένη ως προς τα γινόμενα του $\delta(0)$ με τα δέλτα του (3.38). Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση του μέτρου δίνεται από την $\mu = u^2 \cosh v$, ενώ το πεδίο ορισμού των μεταβλητών είναι $u \in (0, +\infty)$, $v \in \mathbb{R}$ και $w \in [0, 2\pi]$.

Επιπρόσθετα, για την διακριτή περίπτωση, μπορούμε να κατασκευάσουμε τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης

$$\hat{A}_+ = \hat{Q}_4 - i\hat{Q}_5 \quad (3.41a)$$

$$\hat{A}_- = \hat{Q}_4 + i\hat{Q}_5 \quad (3.41b)$$

οι οποίοι θα ανεβάζουν ή θα κατεβάζουν την κατάσταση συναρτήσει των ιδιοτιμών k . Η συνήθης άλγεβρα μεταξύ αυτών των τελεστών και του \hat{Q}_6 ικανοποιείται ως

$$[\hat{A}_+, \hat{A}_-] = -2\hat{Q}_6, \quad [\hat{Q}_6, \hat{A}_+] = \hat{A}_+, \quad [\hat{Q}_6, \hat{A}_-] = -\hat{A}_- \quad (3.42)$$

και φυσικά το αναλλοίωτο Casimir μπορεί να ξαναγραφτεί συναρτήσει των \hat{A}_\pm και \hat{Q}_6 ως

$$\hat{Q}_{Cas} = \hat{Q}_6 (\hat{Q}_6 + 1) - \hat{A}_- \hat{A}_+. \quad (3.43)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.39) και τις αναδρομικές σχέσεις για τις υπεργεωμετρικές συναρτήσεις, ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\hat{A}_+ |k, \ell\rangle = [k(k+1) - \ell(\ell+1)]^{1/2} |k+1, \ell\rangle \quad (3.44a)$$

$$\hat{A}_- |k, \ell\rangle = [k(k-1) - \ell(\ell+1)]^{1/2} |k-1, \ell\rangle. \quad (3.44b)$$

με την δράση των τελεστών υποβίβασης η χαμηλότερη κατάσταση για το k είναι όπως συνήθως μηδέν, δηλαδή $\hat{A}_- |\ell+1, \ell\rangle = 0$.

Υπερβολική στροφή X_4

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε ως ιδιοτελεστή την υπερβολική στροφή X_4 , για την διαδικασία της κβάντωσης. Για να γράψουμε τον τελεστή αυτόν σε κανονική μορφή διαλέγουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\chi = u \sinh v \cosh w, \quad \psi = u \cosh v, \quad \zeta = u \sinh v \sinh w. \quad (3.45)$$

οι συντεταγμένες αυτές δεν είναι οι ίδιες με αυτές της ενότητας 3.1.2. Κάτω από τον μετασχηματισμό (3.45), η μετρική του επίπεδου μίνι-υπερχώρου γίνεται $G_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -u^2, u^2 \sinh^2 v)$, και οδηγεί σ'ένα μέτρο $\mu = \sqrt{-G} = u^2 |\sinh v|$. Στις συντεταγμένες αυτές, οι τελεστές που κατασκευάζουν μία αβελιανή υποάλγεβρα είναι

$$\hat{Q}_4 = -i \frac{\partial}{\partial w} \quad (3.46)$$

$$\hat{Q}_{cas} = \hat{Q}_6^2 - \hat{Q}_4^2 - \hat{Q}_5^2 = \frac{1}{\sinh v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sinh v \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{1}{\sinh^2 v} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \quad (3.47)$$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2u^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{1}{\sinh v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sinh v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{\sinh^2 v} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right] - 1. \quad (3.48)$$

Και στην περίπτωση αυτή η εξίσωση που ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις είναι η $\Psi_{k\ell} = \psi_\ell^{(1)}(u)\psi_{k\ell}^{(2)}(v)\psi_k^{(3)}(w)$, όπου

$$\hat{Q}_4 \Psi_{k\ell} = k \Psi_{k\ell}, \quad \hat{Q}_{cas} \Psi_{k\ell} = \ell(\ell + 1) \Psi_{k\ell}, \quad \hat{H} \Psi_{k\ell} = 0$$

$$\psi_k^{(3)}(w) = C_1 e^{ikw} \quad (3.49a)$$

$$\psi_{k\ell}^{(2)}(v) = C_2 P_\ell^{ik}(\cosh v) + C_3 Q_\ell^{ik}(\cosh v) \quad (3.49b)$$

$$\psi_\ell^{(1)}(u) = C_4 j_\ell(\sqrt{2}u) + C_5 y_\ell(\sqrt{2}u). \quad (3.49c)$$

Όπως παρατηρούμε, η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση που εξετάζεται στην 3.1.2(εκτός από την διαφορετική σύνδεση των παραμέτρων (u, v, w) με τις αρχικές μεταβλητές (a, b, f)) είναι στην εξίσωση (3.49b). Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψιν ότι το w είναι μη περιοδική μεταβλητή δεν οδηγεί απαραίτητα σε μη διακριτό φάσμα για το k , αντιθέτως η συνθήκη ορθοκανονικότητας για την (3.49a) είναι τώρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k'}^{(3)}(w)^* \psi_k^{(3)}(w) dw = C_1^* C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k'-k)w} dw = 2\pi C_1^* C_1 \delta(k' - k),$$

από την οποία συνεπάγεται ότι $C_1 = (2\pi)^{-1/2}$.

Η περίπτωση της συνάρτησης $\psi_{k\ell}^{(2)}(v)$ που εκφράζεται από την λύση (3.49b) δεν είναι όσο ξεκάθαρη ήταν στη προηγούμενη άλγεβρα και η συνθήκη ορθοκανονικότητας συναρτήσει του ℓ δεν μπορεί να παραχθεί με παρόμοιο τρόπο. Ωστόσο, και για το $P_\ell^{ik}(x)$ και για το $Q_\ell^{ik}(x)$, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (A.1) και (A.15), υπάρχουν τιμές για τα ℓ οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που φαίνονται στο παράρτημα A.1, όπου το Ψ πρέπει να μηδενίζεται στο σύνορο. Όταν $v \rightarrow \pm\infty$, $x = \cosh v \rightarrow +\infty$ οι συναρτήσεις $P_\ell^{ik}(x)$, $Q_\ell^{ik}(x)$ τείνουν στο μηδέν αν $\ell \in (-1, 0)$, ή για κάθε τιμή του $s \in \mathbb{R}$ αν $\ell = -1/2 + is$. Ωστόσο και οι δύο περιπτώσεις αντιστοιχούν στο $\ell(\ell + 1) < 0$, το οποίο προέρχεται από την κλασσική σχέση $Q < M$.

3.2 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο κατασκευάσαμε αρχικά την Λαγκρανζιανή μίνι-υπερχώρου ενός στατικού, σφαιρικά συμμετρικού χωροχρόνου συζευγμένου με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η λύση του παραπάνω μοντέλου είναι η *Reissner - Nordström* λύση. Στην κβαντική ανάλυση τα κλασσικά ολοκληρώματα της κίνησης μετασχηματίστηκαν σε κβαντικά μεγέθη και χρησιμοποιήθηκαν ως συμπληρωματικές εξισώσεις μαζί με την εξίσωση *Wheeler-DeWitt*, έτσι ώστε να γίνει ο προσδιορισμός της κυματοσυνάρτησης με μόνη απομένουσα παράμετρο την σταθερά κανονικοποίησης. Οι τελεστές που αντιστοιχούν σε γεωμετρικές και φυσικές ιδιότητες του συστήματος είναι οι \hat{Q}_6 που αντιστοιχεί στη μάζα και ο \hat{Q}_{cas} που αντιστοιχεί στο φορτίο. Τέλος με την εφαρμογή συνοριακών συνθηκών οδηγούμαστε σε διακριτό φάσμα, με μία ορθοκανονική βάση ιδιοκαταστάσεων μέσω των γνωστών συνθηκών *Pöschl-Teller*.

Όσον αφορά την κλασσική μοναδικότητα, είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει κάποιος γενικά αποδεκτός τρόπος αποφυγής της. Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι αποφυγής της, όπως ο μηδενισμός της κυματοσυνάρτησης στο ιδιάζων σημείο ως συνοριακή συνθήκη ή η πιθανότητα να μηδενίζεται στο σημείο αυτό.

Στην παραμετροποίηση που χρησιμοποιήθηκε όπως φαίνεται από το στοιχειώδες μήκος (3.9), τα χωροχρονικά βαθμωτά πεδία καμπυλότητας είναι

$$S = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{4Q^4}{a^8} \quad \text{και} \quad K = R^{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{8(6m^2a^2 - 12mQ^2a + 7Q^4)}{a^8},$$

το οποίο δείχνει ότι η μοναδικότητα βρίσκεται στο σημείο $a = 0$ του θεσεογραφικού χώρου.

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς (3.12) και (3.18) βλέπουμε ότι το a εμφανίζεται μόνο στη μεταβλητή u ως $u \propto a b$. Ως εκ τούτου, για να δούμε τι συμβαίνει όταν $a \rightarrow 0$ χρειάζεται μόνο να ελέγξουμε την συμπεριφορά της πιθανότητας ως προς το u

$$P_\varepsilon = I_{vw} \int_0^\varepsilon u^2 j_\ell(\sqrt{2}u) j_\ell(\sqrt{2}u)^* du \quad (3.50)$$

στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$. Όπου το I_{vw} περιλαμβάνει τα υπόλοιπα ολοκληρώματα ως προς τις μεταβλητές v και w , με τις τιμές του να είναι είτε πεπερασμένες (διακριτή περίπτωση) είτε εξαρτώμενες από δέλτα συναρτήσεις (συνεχής περίπτωση).

Για την διακριτή περίπτωση όπου το $j_\ell(u)$ είναι πραγματικό παίρνουμε

$$P_\varepsilon = I_{vw} \left[u^2 \left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} J_{\ell+1/2}(\sqrt{2}u)^2 - J_{\ell-1/2}(\sqrt{2}u) J_{\ell+3/2}(\sqrt{2}u) \right) \right]_0^\varepsilon, \quad (3.51)$$

όπου με την βοήθεια των ιδιοτήτων των συναρτήσεων Bessel $J_\mu(x)$ προκύπτει $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon = 0$. Για την περίπτωση του συνεχούς, όπου $\ell = -1/2 + i s$, το ολοκλήρωμα (3.50) γίνεται

$$P_\varepsilon = I_{vw} \left[\frac{s \sinh(\pi s)}{4\sqrt{2}} \left({}_1F_2 \left(-\frac{1}{2}; -i s, i s; -2u^2 \right) - 1 \right) \right]_0^\varepsilon, \quad (3.52)$$

το οποίο τείνει στο μηδέν για $\varepsilon \rightarrow 0$, επειδή ισχύει ${}_1F_2 \left(-\frac{1}{2}; -i s, i s; 0 \right) = 1$. Οπότε, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε μηδενισμό της πιθανότητας στην περιοχή του προβληματικού σημείου $u = 0$ ($a = 0$).

Τέλος, θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο μ' ένα σχόλιο για την σχέση (3.33a). Για να φέρουμε στις εξισώσεις αυτές ξανά τις μονάδες μέτρησης πρέπει να επανεισάγουμε το \hbar στο δεξιό μέρος. Ωστόσο, επειδή η κβάντωση έγινε χρησιμοποιώντας ως δυναμική μεταβλητή το r και όχι το t , δεν είναι προφανές ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό $\hbar \simeq 1.054 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{sec}$. Για αυτό το λόγο θέτουμε μία τυχαία σταθερά d αντί για το \hbar , οπότε έχουμε

$$M = \frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{k^2 - \ell(\ell + 1)} d \quad (3.53a)$$

$$Q = \frac{1}{8\sqrt{2}} k d. \quad (3.53b)$$

Όπως φαίνεται από την μετρική αμφότερα τα M και Q εμφανίζονται με μονάδες μήκους. Οπότε η φυσική μάζα m_0 και το φορτίο q σχετίζονται με αυτές ως

$$M = \frac{G m_0}{c^2}, \quad Q = \frac{q}{c^2} \sqrt{\frac{G}{4\pi\varepsilon_0}}. \quad (3.54)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.53b) και αντικαθιστώντας την τιμή που αντιστοιχεί στο πραγματικό φυσικό φορτίο q , προκύπτει για την διακριτή περίπτωση $k = 1$, η εξίσωση

$$d = 4\sqrt{2} \frac{q}{c^2} \sqrt{\frac{G}{\pi\varepsilon_0}}. \quad (3.55)$$

Χρησιμοποιώντας για το φορτίο την τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου $q = |e| \simeq 1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$, ενώ για την ταχύτητα του φωτός, την διηλεκτρική σταθερά και την σταθερά παγκόσμιας έλξης αντίστοιχα: $c \simeq 2.998 \cdot 10^8 \text{m/sec}$, $\varepsilon_0 \simeq 8.854 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ και $G \simeq 6.674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{sec}^2$, έχουμε $d \simeq 1.562 \cdot 10^{-35} \text{m}$ το οποίο είναι πολύ κοντά στην τιμή του μήκους Planck $\ell_P \simeq 1.616 \cdot 10^{-35} \text{m}$. Είναι αξιοσημείωτο ότι το d παράχθηκε από θεμελιώδεις σταθερές της φύσης στην (3.55) χωρίς την χρήση του \hbar .

4

ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ BIANCHI III ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΟ ΜΕ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στο παρόν κεφάλαιο μελετούμε ένα αξονοσυμμετρικό προτύπο Bianchi III συζευγμένο με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [26]. Αρχικά αναλύουμε το κλασικό σύστημα και τις διατηρήσιμες ποσότητες του. Στην συνέχεια τις χρησιμοποιούμε για την κβάντωση του συστήματος. Στο τέλος γίνεται μία ημικλασική ανάλυση των λύσεων.

4.1 Γενική περίπτωση με πλήρες ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

4.1.1 Κλασική περιγραφή

Αρχικά ορίζουμε μία δράση της μορφής (1.52) με όρο ύλης της μορφής

$$S_m = -\frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x. \quad (4.1)$$

Όπως είναι γνωστό μέσω μεταβολών της δράσης ως προς την μετρική, προκύπτει ο ταυνοστής ενέργειας και ορμής

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\kappa} F_{\nu}{}^{\kappa} - \frac{1}{4} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \right),$$

όπου $F_{\mu\nu}$ είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής του Faraday, που ορίζεται μέσω του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ως $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, $F_{0i} = E_i(t, x, y, z)$ και $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B^k(t, x, y, z)$. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψιν την αρχή της ισοδυναμίας, ο τανυστής πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell χωρίς πηγές

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (4.2)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\kappa\lambda;\nu} = 0. \quad (4.3)$$

Επιπρόσθετα, το γενικό στοιχειώδες μήκος για ένα πρότυπο Bianchi Type III LRS ¹ γράφεται

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + e^{-2x} dy^2) + b(t)^2 dz^2 \quad (4.4)$$

και επιδέχεται τα εξής τέσσερα Killing πεδία

$$\xi_1 = \partial_y \quad \xi_2 = \partial_z \quad \xi_3 = \partial_x + y\partial_y \quad \xi_4 = 2y\partial_x + (y^2 - e^{2x})\partial_y, \quad (4.5)$$

με τον τανυστή Einstein να ικανοποιεί τις ακόλουθες αλγεβρικές σχέσεις

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{for} \quad \mu \neq \nu \quad \text{and} \quad G_{11} = G_{22}e^{2x}. \quad (4.6)$$

Οι εξισώσεις Einstein (1.54) υποδεικνύουν ότι οι ίδιες αλγεβρικές σχέσεις πρέπει να ικανοποιούνται και από τον τανυστή ενέργειας και ορμής $T_{\mu\nu}$ που δόθηκε παραπάνω. Το σύστημα είναι τετραγωνικό στα E_i, B_j και έχει πέντε διαφορετικές λύσεις, όπου μόνο η μία δίνει πραγματικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $F_{\mu\nu}$. Η λύση περιγράφεται από τις $E_1 = E_2 = B_1 = B_2 = 0$, οπότε ο αντίστοιχος ηλεκτρομαγνητικός τανυστής είναι

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E_3(t, x, y, z) \\ 0 & 0 & B_3(t, x, y, z) & 0 \\ 0 & -B_3(t, x, y, z) & 0 & 0 \\ -E_3(t, x, y, z) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Στην συνέχεια με την χρήση των εξισώσεων Maxwell (4.2,4.3) οδηγούμαστε στην τελική μορφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, για την οποία αρκεί να θέσουμε $E_3(t, x, y, z) = E_3(t)$ και $B_3(t, x, y, z) = \epsilon e^{-x}$ με το ϵ να είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Η μόνη εξί-

¹Ένας χωρόχρονος αποκαλείται τοπικά περιστροφικά συμμετρικός (LRS) αν σε κάθε σημείο p σε μία ανοιχτή γειτονιά U ενός σημείου p_o , υπάρχει ένα μη διακριτό υποσύνολο g της ομάδας Lorentz στον εφαπτόμενο χώρο T_p το οποίο αφήνει αναλλοίωτο τον τανυστή καμπυλότητας και όλες τις συναλλοίωτες παραγωγίσεις του μέχρι δεύτερης τάξης, βλέπε [27, 28, ?]

σωση Maxwell που μένει είναι η

$$F^{3\nu}{}_{;\nu} = \frac{2a'(t)}{a(t)} - \frac{b'(t)}{b(t)} + \frac{E'_3(t)}{E_3(t)} - \frac{N'(t)}{N(t)} = 0 \quad (4.8)$$

η οποία με ολοκλήρωση ως προς το $E_3(t)$ δίνει

$$E_3(t) = Q \frac{b(t)N(t)}{a(t)^2}, \quad (4.9)$$

με Q μία σταθερά ολοκλήρωσης. Εν συνεχεία, αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα στην εξίσωση (1.54), ολοκληρώνοντας την εξίσωση $G_{33} = T_{33}$ για την εύρεση του $N(t)$, εισάγοντας το αποτέλεσμα αυτό στις υπόλοιπες εξισώσεις Einstein και επιλέγοντας την βαθμίδα να είναι $a(t) = t$, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$b'(t) (\epsilon^2 + (2m - t)t + Q^2) t + b(t) (\epsilon^2 + mt + Q^2) = 0, \quad (4.10)$$

όπου m είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης. Η παραπάνω μπορεί να λυθεί, άρα το τελικό στοιχειώδες μήκος και το $F_{\mu\nu}$ γράφονται (έπειτα από την απαλοιφή των μη ουσιωδών σταθερών ολοκλήρωσης)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{t} - \frac{Q^2 + \epsilon^2}{t^2} \right)^{-1} dt^2 + t^2 (dx^2 + e^{-2x} dy^2) + \left(1 - \frac{2m}{t} - \frac{Q^2 + \epsilon^2}{t^2} \right) dz^2, \quad (4.11)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{Q}{t^2} \\ 0 & 0 & \epsilon e^{-x} & 0 \\ 0 & -\epsilon e^{-x} & 0 & 0 \\ -\frac{Q}{t^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Εξ όσων γνωρίζουμε το παραπάνω στοιχειώδες μήκος δεν εμφανίζεται σε κάποια άλλη εργασία στη βιβλιογραφία. Υπάρχουν οι εξής σχέσεις αναλλοιωτότητας που χαρακτηρίζουν την γεωμετρία:

$$R = 0 \quad (4.13a)$$

$$W_{;\kappa} W^{;\kappa} = \frac{64\sqrt[4]{2}mW^{19/8}}{Qe^{3/2}} - \frac{32\sqrt{2}W^{9/4}}{Qe} + 32W^{5/2} \quad (4.13b)$$

$$\square W = \frac{64\sqrt[4]{2}mW^{11/8}}{Qe^{3/2}} - \frac{28\sqrt{2}W^{5/4}}{Qe} + 36W^{3/2} \quad (4.13c)$$

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{12\sqrt{2}m^2W^{3/4}}{Qe^3} + \frac{24\sqrt[4]{2}mW^{7/8}}{Qe^{3/2}} + 14W \quad (4.13d)$$

όπου $W = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$. Η πρώτη σχέση είναι κοινή σε όλα τα συστήματα Einstein-Maxwell, διότι το ίχνος του αντίστοιχου τανυστή ενέργειας και ορμής είναι μηδέν στις τέσσερις διαστάσεις. Οι άλλες σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιβεβαίωση ότι οι προηγούμενες λύσεις από τις [29, 30, 31] αντιστοιχούν ουσιαστικά σε διαφορετικές γεωμετρίες σε σχέση με αυτήν που περιγράφεται από την (4.11). Αυτό ισχύει επίσης και για τις κυλινδρικά συμμετρικές κυματικές λύσεις των Chandrasekhar και Ξανθόπουλου [32, 33].

Το στοιχειώδες μήκος (4.11) έχει τις ίδιες αναλογίες που έχει και η γεωμετρία Reissner–Nordström, όπως συμβαίνει και μεταξύ της λύσης Schwarzschild και της λύσης Kantowski-Sachs στο κενό. Ο χωρόχρονος έχει μία ανωμαλία καμπυλότητας στο $t = 0$ και μία ανωμαλία συντεταγμένων στο

$$t = t_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 + Q^2 + \epsilon^2}. \quad (4.14)$$

Στην περιοχή $t \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει πάντα ένας ορίζοντας γεγονότων, αντίθετα με την περίπτωση Reissner–Nordström που μπορεί να έχει είτε έναν είτε δύο ή κανέναν, όπου έχουμε $r \in \mathbb{R}^+$ για την ακτινική απόσταση. Αυτό οφείλεται στο διαφορετικό πρόσημο με το οποίο εμφανίζονται τα τετράγωνα των δύο φορτίων στο (4.11). Πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι η σταθερά ολοκλήρωσης m δεν συνδέεται απαραίτητα με μια μάζα κάποιου αντικειμένου, επομένως μπορούμε να την θεωρήσουμε θετική ή αρνητική.

Στη συνέχεια επιθυμούμε να αποκτήσουμε μια περιγραφή μίνι-υπερχώρου για το παραπάνω σύστημα. Ο συνηθισμένος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να εφαρμοστούν οι συμμετρίες της γεωμετρίας στα πεδία της ύλης που στην περίπτωση μας ενσωματώνονται στο $F_{\mu\nu}(t, x, y, z)$. Η απαίτηση να μηδενίζεται η παράγωγος Lie και για τα τέσσερα πεδία Killing (4.5) δηλαδή $\mathcal{L}_{\xi_i} F_{\mu\nu} = 0$, οδηγεί στη γενική μορφή (4.7) και τις επιπλέον σχέσεις $E_3(t, x, y, z) = E_3(t)$ και $B_3(t, x, y, z) = \epsilon(t) e^{-x}$. Σε αυτό το στάδιο, θεωρούμε ότι το $F_{\mu\nu}$ θα πρέπει να δοθεί συναρτήσει κάποιας μονομορφής A_μ δηλαδή $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Αυτό σημαίνει ότι το $\epsilon(t)$ πρέπει να είναι μια σταθερά και η αντίστοιχη μονο-μορφή γράφεται $A = -\epsilon e^{-x} dy + f(t) dz$. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν είχαμε κρατήσει το μαγνητικό πεδίο $\epsilon(t) e^{-x}$, η επαγόμενη Λαγκρανζιανή του μίνι-υπερχώρου θα ήταν μη έγκυρη, δηλαδή οι εξισώσεις κίνησης θα διέφεραν από αυτές που προκύπτουν από τις εξισώσεις Einstein με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Με τρόπο παρόμοιο με την περίπτωση που αναλύσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, πα-

ράγουμε τη συνολική Λαγκρανζιανή του μίνι-υπερχώρου

$$L = \frac{-2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - b(t)^2a'(t)^2 + a(t)^2f'(t)^2}{b(t)N(t)} - N(t)\frac{b(t)(a(t)^2 + \epsilon^2)}{a(t)^2}. \quad (4.15)$$

Στην συνέχεια όπως προαναφέρθηκε μεταβαίνουμε στην παραμετροποίηση σταθερού δυναμικού μέσω του μετασχηματισμού

$$N(t) \mapsto n(t) = N(t)\frac{b(t)(a(t)^2 + \epsilon^2)}{a(t)^2}. \quad (4.16)$$

Οπότε, η Λαγκρανζιανή μετασχηματίζεται στην ακόλουθη μορφή

$$L = \frac{(a(t)^2 + \epsilon^2)(-2a(t)b(t)a'(t)b'(t) - b(t)^2a'(t)^2 + a(t)^2f'(t)^2)}{a(t)^2n(t)} - n(t). \quad (4.17)$$

Η αντίστοιχη μετρική μίνι-υπερχώρου είναι

$$G_{\mu\nu} = \frac{2b}{a}(a^2 + \epsilon^2) \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

η οποία έχει μηδενικό τανυστή Cotton-York, δηλαδή είναι σύμμορφα επίπεδη γεωμετρία. Επιπλέον, η μετρική έχει τρία διανυσματικά πεδία και ένα ομοθετικό

$$\xi_1 = \partial_f, \quad \xi_2 = \frac{1}{ab}\partial_b, \quad \xi_3 = \frac{f}{ab}\partial_b - \frac{1}{a}\partial_f, \quad \xi_h = \frac{b}{2}\partial_b + \frac{f}{2}\partial_f \quad (4.19)$$

από τα οποία, το ξ_2 έχει μηδενικό μέτρο και έχει μηδενική συναλλοίωτη παράγωγο, γεγονός το οποίο χαρακτηρίζει τη γεωμετρία ως pp-wave.

Είναι εύκολο να αντληθεί η κλασική λύση χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες $Q_I = \xi_I^\alpha p_\alpha$ που εκφράζονται με τη βοήθεια των τριών διανυσματικών πεδίων Killing και του ομοθετικού διανυσματικού πεδίου για το οποίο έχουμε

$$Q_h = \xi_h^\alpha p_\alpha + \int n(t)dt. \quad (4.20)$$

Η γενική λύση μπορεί να δοθεί συναρτήσει των $n(t)$, $f(t)$ και $b(t)$

$$\begin{aligned} n(t) &= -\frac{2a'(t)(a(t)^2 + \epsilon^2)}{k_2a(t)^2}, & f(t) &= \frac{k_1}{k_2a(t)} + \frac{k_3}{k_2}, \\ b(t) &= \pm \frac{\sqrt{k_2^2n_1a(t) + 4a(t)^2 - (k_1^2 + 4\epsilon^2)}}{k_2a(t)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

όπου k_1, k_2, k_3 και n_1 είναι σταθερές ολοκλήρωσης, με το κάθε k_i να αντιστοιχεί σε κάθε διατηρήσιμο φορτίο Q_i . Αν θέλουμε να αποκτήσουμε την λύση (4.11) όταν $a(t) = t$ χρειάζεται να θέσουμε τα εξής $k_1 = 2Q, k_2 = 2c_2, n_1 = -2m/c_2$ και να απορροφήσουμε το c_2 με μία ανακλιμάκωση στην μεταβλητή z . Η συνάρτηση $a(t)$ παραμένει αυθαίρετη μολονότι δεν απαιτείται επιλογή βαθμίδας για την επίλυση του συστήματος. Χρησιμοποιώντας την (4.16) και αντικαθιστώντας την στην (4.4) οδηγούμαστε στο ακόλουθο στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{a(t)} - \frac{Q^2 + \epsilon^2}{a(t)^2} \right)^{-1} a'(t)^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + e^{-2x} dy^2) + \left(1 - \frac{2m}{a(t)} - \frac{Q^2 + \epsilon^2}{a(t)^2} \right) dz^2. \quad (4.22)$$

Στην [20] έχει αναλυθεί η περίπτωση της γεωμετρίας *Reissner-Nordström* όπως παρουσιάστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η διαφορά με την παρούσα περίπτωση είναι ότι τώρα η μέτρηση περιέχει τον συνδυασμό $Q^2 + \epsilon^2$ αντί του Q^2 , έτσι η γεωμετρία έχει δύο ουσιώδεις σταθερές, τις $Q^2 + \epsilon^2$ και την m . Σε αυτό το σημείο μπορούμε να σημειώσουμε ότι, αν και έχουμε την ίδια κλασική λύση, το γεγονός ότι η γεωμετρία του μίνι-υπερχώρου έχει αλλάξει, υποδεικνύει την ανάγκη για μία διαφορετική διαδικασία κβάντωσης.

Πριν προχωρήσουμε στην κβάντωση, είναι χρήσιμο να μεταβούμε στις μεταβλητές που φέρνουν σε κανονική μορφή δύο από τα διανυσματικά πεδία Killing ξ_1 και ξ_2 του (4.19). Επομένως, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $(a, b, f) \mapsto (\chi, \psi, \zeta)$ με

$$a = \chi, \quad b = \sqrt{2\frac{\psi}{\chi}}, \quad f = \zeta \quad (4.23)$$

και τα διανυσματικά πεδία Killing, εκφραζόμενα στις νέες μεταβλητές, γράφονται

$$\xi_1 = \partial_\zeta \quad \xi_2 = \partial_\psi \quad \xi_3 = \zeta \partial_\psi - \frac{1}{\chi} \partial_\zeta \quad \xi_h = \psi \partial_\psi + \frac{\zeta}{2} \partial_\zeta, \quad (4.24)$$

ενώ η αντίστοιχη ύπερ-μετρική είναι

$$G_{\mu\nu} = 2(x^2 + \epsilon^2) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Εκτός από τις (4.24) υπάρχουν επίσης και μη-τετριμμένες συμμετρίες υψηλότερης τάξης. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πέντε μη-αναγώγιμοι Killing τανυστές δεύ-

τερου βαθμού (αυτό σημαίνει ότι ικανοποιούν την εξίσωση (1.64)), οι οποίοι στις συντεταγμένες (χ, ψ, ζ) έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
 K_1^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \frac{\chi^2}{2} & \frac{\chi\psi(\epsilon^2-\chi^2)}{2(\chi^2+\epsilon^2)} & 0 \\ \frac{\chi\psi(\epsilon^2-\chi^2)}{2(\chi^2+\epsilon^2)} & \frac{\psi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\chi\psi}{\chi^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}, \\
 K_2^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi\zeta(\chi^2-\epsilon^2)}{2(\chi^2+\epsilon^2)} & \frac{1}{2} \\ \frac{\chi\zeta(\chi^2-\epsilon^2)}{2(\chi^2+\epsilon^2)} & -\psi\zeta & \frac{\psi}{2\chi} \\ \frac{1}{2} & \frac{\psi}{2\chi} & -\frac{\chi\zeta}{\chi^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}, \\
 K_3^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi(\epsilon^2-\chi^2)}{2(\chi^2+\epsilon^2)} & 0 \\ \frac{\chi(\epsilon^2-\chi^2)}{2(\chi^2+\epsilon^2)} & \psi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\chi}{\chi^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}, \quad K_4^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi^2\zeta\epsilon^2}{(\chi^2+\epsilon^2)} & -\frac{\chi}{2} \\ \frac{\chi^2\zeta\epsilon^2}{(\chi^2+\epsilon^2)} & 0 & \frac{\psi}{2} \\ -\frac{\chi}{2} & \frac{\psi}{2} & \frac{\chi^2\zeta}{\chi^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}, \\
 K_5^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi^2\zeta^2\epsilon^2}{\chi^2+\epsilon^2} & -\chi\zeta \\ \frac{\chi^2\zeta^2\epsilon^2}{\chi^2+\epsilon^2} & 0 & \psi\zeta \\ -\chi\zeta & \psi\zeta & \frac{\chi^2\zeta^2}{\chi^2+\epsilon^2} - \frac{2\psi}{\chi} \end{pmatrix}. \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Η Λαγκρανζιανή στις συντεταγμένες αυτές έχει την απλή μορφή

$$L = \frac{(\chi(t)^2 + \epsilon^2)(\chi(t)^2\zeta'(t)^2 - 2\chi'(t)\psi'(t))}{n(t)\chi(t)^2} - n(t). \tag{4.27}$$

Όπως προαναφέρθηκε, οι τανυστές αυτοί παράγουν επιπλέον ολοκληρώματα της κίνησης μέσω της $K_J = K_J^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$. Ορίζουμε στην συνέχεια την αντίστοιχη Χαμιλτονιανή η οποία είναι ασθενώς μηδέν

$$H = N\mathcal{H} = n \left(-\frac{p_\chi p_\psi \chi^2}{2(\chi^2 + \epsilon^2)} + \frac{p_\zeta^2}{4(\chi^2 + \epsilon^2)} + 1 \right) \approx 0 \tag{4.28}$$

και υπολογίζουμε τις αγκύλες Poisson μεταξύ των γραμμικών σταθερών της κίνησης $Q_I = \xi_I^\mu p_\mu$ όσο και των τετραγωνικών K_J και της \mathcal{H} , οι οποίες είναι μηδέν σε όλες τις περιπτώσεις. Συνολικά έχουμε τα εξής

$$Q_1 = p_\zeta, \quad Q_2 = p_\psi, \quad Q_3 = p_\psi \zeta - \frac{p_\zeta}{\chi}, \quad Q_h = p_\psi \psi + \frac{p_\zeta \zeta}{2} + \int n(t) dt, \tag{4.29}$$

$$K_1 = \frac{p_\chi^2 \chi^2 (\chi^2 + \epsilon^2) + 2p_\chi p_\psi \chi \psi (\epsilon^2 - \chi^2) + \psi (p_\psi^2 \psi (\chi^2 + \epsilon^2) + 2p_\zeta^2 \chi)}{2(\chi^2 + \epsilon^2)}, \quad (4.30)$$

$$K_2 = \frac{p_\chi p_\psi \chi^2 \zeta (\chi^2 - \epsilon^2) + (p_\chi p_\zeta \chi - p_\psi^2 \chi \psi \zeta + p_\psi p_\zeta \psi) (\chi^2 + \epsilon^2) - p_\zeta^2 \chi^2 \zeta}{\chi (\chi^2 + \epsilon^2)}, \quad (4.31)$$

$$K_3 = \frac{p_\psi (p_\chi \chi (\epsilon^2 - \chi^2) + p_\psi \psi (\chi^2 + \epsilon^2)) + p_\zeta^2 \chi}{\chi^2 + \epsilon^2}, \quad (4.32)$$

$$K_4 = \frac{p_\zeta (p_\psi \psi (\chi^2 + \epsilon^2) + p_\zeta \chi^2 \zeta) - p_\chi \chi (p_\zeta (\chi^2 + \epsilon^2) - 2p_\psi \chi \zeta \epsilon^2)}{\chi^2 + \epsilon^2}, \quad (4.33)$$

$$K_5 = \frac{-2p_\zeta \chi \zeta (\chi^2 + \epsilon^2) (p_\chi \chi - p_\psi \psi) + 2p_\chi p_\psi \chi^3 \zeta^2 \epsilon^2 + p_\zeta^2 (\chi^3 \zeta^2 - 2\psi (\chi^2 + \epsilon^2))}{\chi (\chi^2 + \epsilon^2)}. \quad (4.34)$$

Αντικαθιστώντας την λύση (4.21) σε όλα τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= 2Q & \mathcal{Q}_2 &= 2c_2 & \mathcal{Q}_3 &= k_3 \\ \mathcal{K}_1 &= \frac{2(m^2 + Q^2 + \epsilon^2)}{c_2^2}, & \mathcal{K}_2 &= \frac{2k_3 m + 4Q}{c_2}, & \mathcal{K}_3 &= -4m, \\ \mathcal{K}_4 &= \frac{2k_3(Q^2 + \epsilon^2) - 4mQ}{c_2}, & \mathcal{K}_5 &= \frac{k_3^2(Q^2 + \epsilon^2) - 4Q(k_3 m + Q)}{c_2^2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Για μεταγενέστερη χρήση στη διαδικασία κβάντωσης σημειώνουμε ότι οι τρισδιάστατες Αβελιανές υπο-άλγεβρες Poisson σχηματίζονται από τους συνδυασμούς (Q_1, Q_2, \mathcal{H}) , (Q_2, Q_3, \mathcal{H}) , (Q_1, K_1, \mathcal{H}) , (Q_1, K_3, \mathcal{H}) , (K_1, K_4, \mathcal{H}) and (K_1, K_5, \mathcal{H}) . Επιπλέον, υπάρχουν Αβελιανές υπο-άλγεβρες Poisson που σχηματίζονται από τα πεδία Killing και τους τετριμμένους τανυστές Killing, οι οποίες συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα

	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{22}	K_{23}	K_{33}
Q_1	✓	✓	✓	-	-	-
Q_2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Q_3	-	-	-	✓	✓	✓

όπου K_{IJ} είναι τα αναγώγικα τανυστικά πεδία Killing με $K_{IJ} = \frac{1}{2} (\xi_I \otimes \xi_J + \xi_J \otimes \xi_I)$.

4.1.2 Κβάντωση του μίνι-υπερχώρου *pp-wave* μορφής

Για την κβάντωση ακολουθήσαμε την διαδικασία που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.3. Το μέτρο είναι $\mu = 2\sqrt{2} \frac{(\chi^2 + \epsilon^2)^{3/2}}{\chi^2}$. Οπότε, για το Χαμιλτονιανό δεσμό συμπεραίνουμε μέσω της εξίσωσης (2.21) ότι

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi(\chi, \psi, \zeta) = 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{4(\chi^2 + \epsilon^2)} \partial_\zeta^2 + \frac{\chi^3}{4(\chi^2 + \epsilon^2)^2} \partial_\psi + \frac{\chi^2}{2(\chi^2 + \epsilon^2)} \partial_\chi \partial_\psi + 1 \right] \Psi(\chi, \psi, \zeta) = 0, (4.36)$$

ενώ για τους τελεστές πρώτης τάξης που κατασκευάζονται από τα διανυσματικά πεδία Killing χρησιμοποιούμε τον ορισμό (2.22). Για να χρησιμοποιήσουμε τα μη αναγωγή ταυστικά πεδία Killing στη διαδικασία της κβάντωσης, κάνουμε χρήση του λεγόμενου ψευδο-Λαπλασιανού τελεστή που ορίζεται στην (2.23).

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπάρχουν έξι Αβελιανές τρισδιάστατες άλγεβρες με τα γραμμικά και τετραγωνικά φορτία (και φυσικά την H). Ωστόσο, οι κβαντικοί τελεστές που έχουν οριστεί προηγουμένως δεν κλείνουν τις αντίστοιχες κβαντικές άλγεβρες (Q_1, K_1, \mathcal{H}) , (K_1, K_4, \mathcal{H}) και (K_1, K_5, \mathcal{H}) . Επομένως, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στην κβάντωση της Αβελιανής υπο-άλγεβρας που περιλαμβάνει το K_1 . Έτσι, αναλύσαμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις.

Άλγεβρα (Q_1, Q_2, \mathcal{H})

Στης μεταβλητές (χ, ψ, ζ) , τα διανύσματα ξ_1 και ξ_2 όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.24) είναι σε κανονική μορφή, οπότε η επίλυση του συστήματος

$$\widehat{Q}_1 \Psi(\chi, \psi, \zeta) = \kappa_1 \Psi(\chi, \psi, \zeta), \quad \widehat{Q}_2 \Psi(\chi, \psi, \zeta) = \kappa_2 \Psi(\chi, \psi, \zeta)$$

και της εξίσωσης (4.36), έχει την εξής λύση

$$\Psi(\chi, \psi, \zeta) = \frac{C e^{i \left(\frac{4(\chi^2 - \epsilon^2) - \kappa_1^2}{2\chi\kappa_2} + \kappa_2\psi + \kappa_1\zeta \right)}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4}}, \quad (4.37)$$

όπου C είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης.

Άλγεβρα (Q_2, Q_3, \mathcal{H})

Στην περίπτωση αυτή οι συμπληρωματικές σχέσεις στην εξίσωση (4.36) είναι

$$\widehat{Q}_2 \Psi(\chi, \psi, \zeta) = \kappa_2 \Psi(\chi, \psi, \zeta), \quad \widehat{Q}_3 \Psi(\chi, \psi, \zeta) = \kappa_3 \Psi(\chi, \psi, \zeta)$$

και η παραγόμενη λύση είναι

$$\Psi(\chi, \psi, \zeta) = \frac{C\sqrt{\chi}e^{i\left(\frac{\chi(\kappa_3 - \kappa_2\zeta)^2 + 4}{2\kappa_2} - \frac{2\epsilon^2}{\kappa_2\chi} + \kappa_2\psi\right)}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4}}. \quad (4.38)$$

Άλγεβρα (Q_1, K_3, \mathcal{H})

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το \widehat{K}_3 , όπως δίνεται από την (2.23) μετατίθενται και με την \widehat{Q}_1 και με την $\widehat{\mathcal{H}}$. Οπότε μπορούμε να λύσουμε ταυτόχρονα το σύστημα των εξισώσεων

$$\widehat{Q}_1\Psi(\chi, \psi, \zeta) = \kappa_1\Psi(\chi, \psi, \zeta), \quad \widehat{K}_3\Psi(\chi, \psi, \zeta) = \lambda_1\Psi(\chi, \psi, \zeta).$$

Η παραγόμενη λύση χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, \psi, \zeta) = & \frac{\sqrt{\chi}e^{i\kappa_1\zeta}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4} \sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}} \times \\ & \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2\psi}\sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}}{\sqrt{\chi}}\right) \right. \\ & \left. + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2\psi}\sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}}{\sqrt{\chi}}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

Άλγεβρα $(Q_2, K_{13}, \mathcal{H})$

Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να ορίσουμε τον τελεστή \widehat{K}_{13} που σχετίζεται με τον αναγώγμο Killing τανυστή που κατασκευάζεται από τα ξ_1 και ξ_3 . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των τελεστών πρώτης τάξης \widehat{Q}_1 και \widehat{Q}_3 ως εξής

$$\widehat{K}_{13} = \frac{1}{2} \left(\widehat{Q}_1\widehat{Q}_3 + \widehat{Q}_3\widehat{Q}_1 \right) \quad (4.40)$$

και η λύση του συστήματος $\widehat{Q}_2\Psi = \kappa_2\Psi$, $\widehat{K}_{13}\Psi = \kappa_{13}\Psi$ και $\widehat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ είναι

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, \psi, \zeta) = & \frac{\chi^{\frac{1}{4} - \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}} e^{\frac{2i(\chi^2 - \epsilon^2)}{\kappa_2\chi} + i\kappa_2\psi}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4}} \left[c_1 H_{-\frac{1}{2} + \frac{i\kappa_{13}}{\kappa_2}} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \sqrt{\kappa_2}\sqrt{\chi}\zeta \right) + \right. \\ & \left. c_2 {}_1F_1 \left(\frac{1}{4} - \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}; \frac{1}{2}; \frac{i}{2}\chi\zeta^2\kappa_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Η $H_\nu(z)$ και η ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$ είναι η συνάρτηση Hermite και η συμπυκνόμενη υπεργεωμετρική συνάρτηση Kummer αντίστοιχα, ενώ τα c_1 και c_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

4.1.3 Ημικλασική προσέγγιση

Ημικλασική ανάλυση της (Q_1, K_3, \mathcal{H}) περίπτωσης

Όπως φαίνεται από τη γενική κυματοσυνάρτηση (4.39), η μορφή της κβαντικής λύσης και συνεπώς η προκύπτουσα ημικλασική ανάλυση είναι ιδιαίτερα εξαρτώμενη από τις τιμές των σταθερών C_1 και C_2 . Κατ' αρχήν, στη θεωρία της κβαντικής μηχανικής, ο κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων κλάδων της γενικής λύσης στις εξισώσεις ιδιοτιμών, που αντιπροσωπεύει τη λειτουργία της κβαντικής κυματοσυνάρτησης, καθορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες που είναι κατάλληλες για το πρόβλημα, εξασφαλίζοντας επίσης ότι οι χρησιμοποιούμενοι τελεστές είναι αυτο-συζυγείς. Η μοναδική ελεύθερη σταθερά που παραμένει μετά από αυτή τη διαδικασία καθορίζεται μέσω της κανονικοποίησης της πιθανότητας. Αυτή είναι η κλασική διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος όταν έχει ένα διακριτό φάσμα με την κυματοσυνάρτηση να είναι στοιχείο του χώρου Hilbert.

Στις περιπτώσεις όπου το φάσμα είναι συνεχές η κατάσταση είναι πολύ πιο περίπλοκη. Η κυματοσυνάρτηση δεν ανήκει στον χώρο Hilbert, αλλά στην επέκτασή του, τον αποκαλούμενο εγκιβωτισμένος χώρος Hilbert (βλέπε [34, 35] ή [13] για μια εξαιρετική ανασκόπηση στο θέμα). Με απλά λόγια, ο εγκιβωτισμένος χώρος Hilbert εκτείνεται ως εξής $\Phi \subset H \subset \Phi^\times$, όπου: Φ είναι το υποσύνολο του χώρου Hilbert στο οποίο η δράση των βασικών τελεστών είναι καλώς ορισμένη (με την έννοια ότι η δράση του τελεστή σε ένα στοιχείο του χώρου Hilbert έχει ως αποτέλεσμα ένα στοιχείο του ίδιου χώρου), H είναι ο χώρος Hilbert και Φ^\times είναι η δϋικότητα του. Ο χώρος Φ συνήθως αποτελείται από συναρτήσεις που τείνουν στο μηδέν στα σύνορα ταχύτερα από οποιοδήποτε πολώνυμο. Στα περισσότερα γνωστά προβλήματα της κβαντικής μηχανικής με συνεχές φάσμα είναι κάποια υποσύνολα του χώρου Schwartz. Αντίθετα, τα στοιχεία του δϋϊκού χώρου Φ^\times επιτρέπεται να αποκλίνουν στο σύνορο αλλά όχι ταχύτερα από οποιοδήποτε πολώνυμο. Αυτός είναι ο χώρος όπου υπάρχει η κυματοσυνάρτηση ενός προβλήματος συνεχούς φάσματος. Το γενικευμένο φασματικό θεώρημα εγγυάται ότι εάν ένας τελεστής \hat{Q} είναι αυτοσυζυγής (πάνω στα στοιχεία του Φ) τότε η κυματοσυνάρτηση που είναι λύση του προβλήματος ιδιοτιμών $\hat{Q}\Psi = \kappa\Psi$ υπάρχει ως στοιχείο του Φ^\times [35].

Συνεπώς, αυτή είναι η κατάσταση την οποία αντιμετωπίζουμε εδώ. Ένα πρόβλημα συνεχούς φάσματος όπου η κυματοσυνάρτηση δεν είναι κανονικοποιήσιμη,

επίσης δεν θέλουμε να αποκλίνει στα σύνορα χειρότερα από οποιοδήποτε πολυώνυμο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση από την (4.39) αυτό δεν μας δίνει δεδομένα για τις σταθερές C_1 και C_2 , αλλά οδηγεί σε μια ενδιαφέρουσα αναλογία μεταξύ της κβαντικής και της κλασικής λύσης. Αν θέλουμε μια κυματοσυνάρτηση που δεν αποκλίνει γρηγορότερα από ένα πολυώνυμο στο όριο $\chi \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \infty$, πρέπει να απαιτήσουμε το όρισμα του ημίτονου και του συνημίτονου στην (4.39) να είναι πάντα πραγματικό. Με άλλα λόγια πρέπει να απαιτήσουμε

$$\frac{\psi(4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2)}{\chi} \geq 0. \quad (4.42)$$

Μετασχηματίζοντας αυτή την σχέση στις αρχικές μεταβλητές a, b, f και ταυτόχρονα αντικαθιστώντας στην θέση του λ_1 και του κ_1 τις κλασικές τιμές που αντιστοιχούν στα διατηρήσιμα φορτία που συνδέονται με τους κβαντικούς τελεστές \hat{Q}_1 και \hat{K}_3 όπως φαίνεται από την (4.35), δηλαδή $\kappa_1 = 2Q$ και $\lambda_1 = -4m$, η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$b^2(a^2 - 2am - Q^2 - \epsilon^2) \geq 0. \quad (4.43)$$

Η σχέση στην παρένθεση γίνεται αρνητική όταν το a παίρνει τιμές στην περιοχή του κλασικού ορίζοντα

$$a_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 + Q^2 + \epsilon^2}. \quad (4.44)$$

Αυτό σημαίνει ότι για να έχει η κυματοσυνάρτηση καλή συμπεριφορά (για πρόβλημα με συνεχές φάσμα) πρέπει να απαιτήσουμε ότι στην περιοχή $a \in (a_-, a_+)$, η μεταβλητή b είναι φανταστική. Αλλά αυτή ακριβώς είναι η αναπαραγωγή του τι συμβαίνει στην κλασική λύση. Όταν το a παίρνει τιμές μέσα στο (a_-, a_+) , ο συντελεστής του dz^2 στο στοιχειώδους μήκους αλλάζει πρόσημο λόγω του ότι το b γίνεται φανταστικό. Στις μεταβλητές που δουλεύουμε φανταστικό b υποδηλώνει ότι το ψ είναι αρνητικό, όπως μπορούμε να δούμε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό στην (4.23) που έχει σαν αποτέλεσμα $\psi = \frac{ab^2}{2}$. Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι αυτή η συγκεκριμένη κλασική συμπεριφορά που οδηγεί στην αλλαγή του πρόσημου στη μετρική όταν η πραγματική μεταβλητή χρόνου a διασχίζει τον ορίζοντα, υπάρχει επίσης σε κβαντικό επίπεδο μέσω της απαίτησης ότι η κυματοσυνάρτηση δεν πρέπει να αποκλίνει πολύ στο όριο (γρηγορότερα από οποιοδήποτε πολυώνυμο).

Δυστυχώς, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αυτό δεν μας δείχνει εκ των υστέρων τι τιμές αποκτούν οι σταθερές κανονικοποίησης C_1 ή C_2 . Μπορούμε να διακρίνουμε δύο μεγάλες περιπτώσεις που οδηγούν σε μια ξεκάθαρα διαφορετική ημικλασική συμπεριφορά. Πρώτον, μπορούμε να δούμε ότι αν θέσουμε $C_2 = iC_1$, τότε

η λύση (4.39) μπορεί να γραφτεί ως

$$\Psi_1 = C_1 \frac{\sqrt{\chi}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4} \sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}} \times \exp \left[i \left(\frac{\sqrt{2\psi} \sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}}{\sqrt{\chi}} + \kappa_1\zeta \right) \right]. \quad (4.45)$$

Αυτή η κυματοσυνάρτηση οδηγεί σε μηδενικό κβαντικό δυναμικό, με

$$\Omega = \frac{\sqrt{\chi}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4} \sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}} \Rightarrow \square\Omega = 0. \quad (4.46)$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ημικλασική ανάλυση της εξίσωσης (2.54) να μην οδηγεί σε κάποια κβαντική διόρθωση, αναπαράγοντας απλά την κλασική λύση.

Αντίθετα, για οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό των C_1 και C_2 η μόνη εναπομένουσα φάση της κυματοσυνάρτησης (4.39) είναι $\kappa_1\zeta$ και το κβαντικό δυναμικό είναι μη μηδενικό. Οπότε, υπάρχουν κβαντικές διορθώσεις στις κλασικές τροχιές που παράγονται από τις εξισώσεις (2.55), με

$$-2 \frac{(\chi^2(t) + \epsilon^2) \psi'(t)}{n(t)\chi^2(t)} = 0, \quad (4.47)$$

$$-2 \frac{(\chi^2(t) + \epsilon^2) \chi'(t)}{n(t)\chi^2(t)} = 0, \quad (4.48)$$

$$\frac{2(\chi^2(t) + \epsilon^2) \zeta'(t) - \kappa_1 n(t)}{n(t)} = 0. \quad (4.49)$$

Και η αντίστοιχη λύση είναι

$$\chi(t) = \chi_0, \quad \psi(t) = \psi_0, \quad \zeta(t) = \frac{\kappa_1 t}{2(\chi_0^2 + \epsilon^2)} + \zeta_0, \quad (4.50)$$

όπου έχουμε ορίσει βαθμίδα $n(t) = 1$. Αυτή η λύση παράγει ένα χωρόχρονο προτύπου Bianchi III LRS με το ακόλουθο στοιχειώδες μήκος (στο οποίο απαλείψαμε τις μη ουσιώδεις σταθερές)

$$ds^2 = \chi_0^2 (-dt^2 + dx^2 + e^{-2x} dy^2 + dz^2). \quad (4.51)$$

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψιν ότι το βαθμωτό πεδίο Ricci είναι της μορφής $R \sim 1/\chi_0^2$, η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή Riemann είναι μηδέν και τα δεκατέσσερα βαθμωτά πεδία καμπυλότητας [36] είναι πολυώνυμα του $\frac{1}{\chi_0^2}$, συμπεραίνουμε ότι ο χωρόχρονος δεν έχει σημεία ανωμαλιών.

Παρατηρούμε πόσο διαφορετική είναι η κατάσταση ανάλογα με την επιλογή των σταθερών. Από τη μία πλευρά έχουμε την αναπαραγωγή του κλασικού χωροχρόνου στην περίπτωση που παίρνουμε $C_2 = iC_1$ και έναν ημικλασικό χώρο χωρίς ανωμαλίες για κάθε άλλη επιλογή. Μπορούμε να κρατήσουμε τα θετικά και από τις δύο περιπτώσεις αν θεωρήσουμε

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_1, & \chi = a \notin (a_-, a_+) \\ \Psi_2, & \chi = a \in (a_-, a_+). \end{cases} \quad (4.52)$$

όπου η Ψ_1 δίνεται από την (4.45), ενώ η Ψ_2 είναι το σκέλος με το συνημίτονο της (4.39)

$$\Psi_2 = \frac{iC_1\sqrt{\chi}e^{i\kappa_1\zeta}}{(\chi^2 + \epsilon^2)^{1/4} \sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}} \times \cos\left(\frac{\sqrt{2\psi}\sqrt{4(\chi^2 - \epsilon^2) + 2\lambda_1\chi - \kappa_1^2}}{\sqrt{\chi}}\right), \quad (4.53)$$

όπου επιλέξαμε $C_2 = 0$ και αλλάξαμε κατάλληλα την άλλη σταθερά ολοκλήρωσης, με $C_1 \rightarrow iC_1$, έτσι ώστε να έχουμε μία Ψ που να είναι συνεχής στο όριο που σχηματίζεται από την επιφάνεια $\chi = \alpha_{\pm}$. Με αυτόν τον τρόπο αποκτάμε μία κυματοσυνάρτηση που αναπαράγει ακριβώς τον ημι-κλασικό χωρόχρονο έξω από τον ορίζοντα γεγονότων, παρέχοντας σταθερή την βαθμωτή καμπυλότητα, ελεύθερη από ανωμαλίες, ημι-κλασική περιγραφή για την εσωτερική περιοχή του ορίζοντα, διώχνοντας την κλασική ανωμαλία στο $\chi = 0$.

Ημικλασική ανάλυση της $(Q_2, K_{13}, \mathcal{H})$ περίπτωσης

Στην περίπτωση αυτή η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση δίνεται από την (4.41). Με βάση τα επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα, επιλέγουμε εκείνο τον κλάδο της λύσης που δεν αποκλίνει γρηγορότερα από ένα πολώνυμο στο όριο $\omega = \sqrt{\chi}\zeta \rightarrow \infty$. Αναπτύσσοντας σε σειρά την εξίσωση Hermite, φαίνεται ξεκάθαρα το παρακάτω

$$\begin{aligned} H_{-\frac{1}{2} + \frac{i\kappa_{13}}{\kappa_2}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\sqrt{\kappa_2}\omega\right) &\approx e^{\omega^2} e^{-i\frac{\kappa_{13}}{\kappa_2}\ln\omega} \left(\frac{\alpha_1}{\omega^{1/2}} + \mathcal{O}(\omega^{-3/2})\right) \\ &+ e^{i\frac{\kappa_{13}}{\kappa_2}\ln\omega} \left(\frac{\alpha_2}{\omega^{1/2}} + \mathcal{O}(\omega^{-3/2})\right) \\ &\approx \alpha_1 \frac{e^{\omega^2}}{\omega^{1/2}} e^{-i\frac{\kappa_{13}}{\kappa_2}\ln\omega}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

πράγμα που σημαίνει ότι αποκλίνει εκθετικά. Επομένως, ορίσαμε $c_1 = 0$ στην (4.41) και θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον κλάδο της λύσης που περιέχει την υπεργεωμετρική συνάρτηση. Άρα θα χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις: η πρώτη αφορά μικρά ορίσματα, ενώ η δεύτερη γίνεται για μεγάλα ορίσματα. Ο λόγος για αυτό είναι να γράψουμε μια προσεγγιστική έκφραση για την (4.41) που μας επιτρέπει να εκφράσουμε την Ψ σε πολική μορφή, με σκοπό να καταστεί δυνατή η χρήση της ημικλασικής προσέγγισης που περιγράφεται στην ενότητα (2.5).

Μικρά ορίσματα για το a συνεπάγεται, χρησιμοποιώντας την κλασική λύση, μεγάλα ορίσματα για την ποσότητα $\omega \equiv \zeta\sqrt{\chi} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Το ανάπτυγμα σε σειρά της προηγούμενης υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι

$${}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}; \frac{1}{2}; \frac{i\kappa_2}{2}\omega^2\right) \approx \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{\frac{i\kappa_2}{4}\omega^2} \left[\frac{2^{\frac{1}{4} + \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}} (i\kappa_2)^{-\frac{1}{4} - \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}} e^{\frac{1}{4}i\kappa_2\omega^2} \omega^{-\frac{i\kappa_{13}}{\kappa_2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}\right)} + \frac{2^{\frac{1}{4} - \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}} (-i\kappa_2)^{-\frac{1}{4} + \frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2}} e^{-\frac{1}{4}i\kappa_2\omega^2} \omega^{\frac{i\kappa_{13}}{\kappa_2}}}{\Gamma\left(\frac{i\kappa_{13}}{2\kappa_2} + \frac{1}{4}\right)} \right]. \quad (4.55)$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η συνεισφορά της υπεργεωμετρικής συνάρτησης στον όρο φάσης της (4.41) είναι $\frac{\kappa_2\omega^2}{4}$ ή ισοδύναμα $\frac{\kappa_2\chi\zeta^2}{4}$, διότι η έκφραση μέσα στην παρένθεση της (4.55) είναι πραγματική, γιατί παράγεται από άθροισμα δύο μιγαδικών συζυγών όρων.

Η πλήρης προσεγγιστική φάση της κυματοσυνάρτησης (4.41), όταν ισχύει $\chi\zeta^2 \gg 1$, είναι

$$S_1(\chi, \psi, \zeta) = -\frac{\kappa_{13}}{2\kappa_2} \ln(\chi) + \frac{2\chi}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{4}\chi\zeta^2 - \frac{2\epsilon^2}{\kappa_2\chi} + \kappa_2\psi \quad (4.56)$$

και παράγονται οι ακόλουθες εξισώσεις

$$n(t) (-2\kappa_{13}\chi(t) + \chi(t)^2 (\kappa_2^2\zeta(t)^2 + 8) + 8\epsilon^2) + 8\kappa_2 (\chi(t)^2 + \epsilon^2) \phi'(t) = 0, \quad (4.57)$$

$$-\kappa_2 - \frac{2(\chi(t)^2 + \epsilon^2)\chi'(t)}{n(t)\chi(t)^2} = 0, \quad (4.58)$$

$$\frac{2(\chi(t)^2 + \epsilon^2)\zeta'(t)}{n(t)} - \frac{\kappa_2}{2}\chi(t)\zeta(t) = 0. \quad (4.59)$$

Το τελικό στοιχειώδες μήκος δίνεται από

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\psi_0\kappa_2^2}{2a} - \frac{\epsilon^2}{a^2} + \frac{\psi_1\kappa_2^2 \ln(a)}{2a} \right)^{-1} da^2$$

$$+ a^2 (dx^2 + e^{-2x} dy^2) + \frac{4}{\kappa_2^2} \left(1 + \frac{\psi_0 \kappa_2^2}{2a} - \frac{\epsilon^2}{a^2} + \frac{\psi_1 \kappa_2^2 \ln(a)}{2a} \right) dz^2, \quad (4.60)$$

όπου ψ_0 και ψ_1 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Ο χώρος αυτός έχει μη σταθερές βαθμωτές καμπυλότητες άρα δεν είναι απαλλαγμένος από ανωμαλίες.

Μεγάλα ορίσματα για το a Αντίθετα στην περίπτωση των μεγάλων ορισμάτων το ω θεωρείται μικρό. Η προσεγγιστική μορφή της κυματοσυνάρτησης είναι

$$\Psi(\chi, \psi, \zeta) \approx \left(\frac{\chi}{\chi^2 + \epsilon^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i \left[\kappa_2 \psi + \frac{2(\chi^2 - \epsilon^2)}{\kappa_2 \chi} - \frac{\kappa_{13} \ln(\chi)}{2\kappa_2} \right]} \quad (4.61)$$

Οι αντίστοιχες ημικλασσικές εξισώσεις είναι

$$-\frac{2(\chi^2(t) + \epsilon^2) \psi'(t)}{n(t)} - \frac{4(\chi(t)^2 + \epsilon^2) - \kappa_{13} \chi(t)}{2\kappa_2} = 0, \quad (4.62)$$

$$-\kappa_2 - \frac{2(\chi^2(t) + \epsilon^2) \chi'(t)}{n(t) \chi^2(t)} = 0, \quad (4.63)$$

$$\frac{2(\chi^2(t) + \epsilon^2) \zeta'(t)}{n(t)} = 0. \quad (4.64)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις, το τελικό στοιχειώδες μήκος γράφεται

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\psi_0 \kappa_2^2}{2a} - \frac{\epsilon^2}{a^2} - \frac{\kappa_{13} \ln(a)}{4a} \right)^{-1} da^2 + a^2 (dx^2 + e^{-2x} dy^2) + \frac{4}{\kappa_2^2} \left(1 + \frac{\psi_0 \kappa_2^2}{2a} - \frac{\epsilon^2}{a^2} - \frac{\kappa_{13} \ln(a)}{4a} \right) dz^2, \quad (4.65)$$

όπου ξανά το ψ_0 είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης. Το μήκος αυτό είναι παρόμοιο με αυτό της εξίσωσης (4.60) από την προηγούμενη περίπτωση. Ο αντίστοιχος χώρος δεν είναι ελεύθερος από ανωμαλίες αλλά η υπό μελέτη περιοχή είναι μακριά από την ανωμαλία.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι και στις δύο ημικλασσικές μετρικές (4.60) και (4.65) διατηρήσαμε όλους τους όρους που περιέχουν το a ανεξάρτητα από την προσέγγιση που θεωρήσαμε για τα ορίσματα της υπεργεωμετρικής συνάρτησης. Οι προσεγγίσεις $\zeta \sqrt{\chi} \gg 1$ και $\zeta \sqrt{\chi} \ll 1$ υιοθετούνται έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση σε πολική μορφή. Η σχέση που έχει το $\omega = \zeta \sqrt{\chi}$ με το a από την κλασσική περιγραφή, $\omega = \frac{1}{\sqrt{a}}$, το οποίο χρησιμοποιήθηκε και ως χρονική μεταβλητή στην κλασσική λύση, ισχύει μόνο στην περιοχή της λύσης. Από την άποψη αυτή, και παρότι η απόλυτη σύγκριση μεταξύ των ημικλασσικών

και των κλασικών μετρικών δεν είναι δυνατή (λόγω του ότι είναι ξεχωριστές γεωμετρίες) μπορούμε να διακρίνουμε πώς εξαρτώνται οι συνιστώσες της μετρικής από την χρονική μεταβλητή a . Ωστόσο, πρέπει να έχουμε κατά νου ότι σε κάθε περίπτωση μιλάμε για δύο διαφορετικές εσωτερικές χρονικές παραμέτρους a_{cl} και a_{sc} για τις κλασικές και τις ημικλασικές πολλαπλότητες αντίστοιχα. Παρατηρούμε επίσης ότι και οι δύο ημικλασικές μετρικές έχουν έναν όρο ανάλογο στο $\frac{\ln(a)}{a}$ στη θέση του $\frac{Q^2}{a^2}$ το οποίο εμφανίζεται στην κλασική μετρική. Άρα, βλέπουμε ότι η κύρια συμβολή των κβαντικών διορθώσεων έχει να κάνει με την επίδραση της συμβολής του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του στοιχειώδους μήκους.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να κάνουμε την συσχέτιση των κβαντικών αριθμών κ_2 και κ_{13} με τους αντίστοιχους κλασικούς, που προκύπτουν από την (4.35). Η σταθερά κ_2 συνδέεται με το Q_2 και κατά συνέπεια με την κλασική σταθερά ολοκλήρωσης k_2 η οποία είναι μη μηδενική και μη ουσιώδης σταθερά της γεωμετρίας. Η σταθερά κ_{13} αντιστοιχεί στην κλασική διατηρούμενη ποσότητα που κατασκευάστηκε από τον τετριμμένο τανυστή Killing $K_{13} = \frac{1}{2} (\xi_1 \otimes \xi_3 + \xi_3 \xi_1)$, ο οποίος στη περιοχή της λύσης παίρνει την τιμή $2Qk_3$ (και πάλι από τις σχέσεις (4.35)). Παρατηρούμε ωστόσο ότι το k_3 είναι επίσης μια μη-ουσιώδης σταθερά που ορίζει την τιμή του δυναμικού στο άπειρο όπως φαίνεται από την (4.21). Εάν κάνουμε αυτή τη συσχέτιση με το κλασικό επίπεδο και θεωρήσουμε $k_3 = 0 \Rightarrow \kappa_{13} = 2Qk_3 = 0$, τότε η δεύτερη ημι-κλασική μετρική (4.65) - για μεγάλο a - δεν συνεισφέρει από το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ από την άλλη η ημι-κλασική χρονική περίοδος (4.60) που περιγράφει το χωροχρόνο για μικρά a έχει πάντα μια συνεισφορά της μορφής $\frac{\psi_1 \kappa_2^2 \ln(a)}{2a}$ σε συνδυασμό με ένα ημι-κλασικό ηλεκτρικό δυναμικό που στην περίπτωση αυτή είναι (λύνοντας το σύστημα (4.57)-(4.59))

$$f = \sqrt{\frac{2}{a} \left(\frac{\kappa_{13}}{\kappa_2^2} + 2\psi_1 \right)}. \quad (4.66)$$

Αυτό σημαίνει ότι πάντα υπάρχει μια συνεισφορά από την $f \neq 0$ μέσα στη μετρική, όταν $a \ll 1$ ακόμα και αν $\kappa_{13} = 0$. Σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει για $a \gg 1$, όπου η συνθήκη $\kappa_{13} = 0$ μπορεί να απαλείψει την συνεισφορά από τη μετρική. Όσον αφορά το μαγνητικό φορτίο βλέπουμε ότι η συμβολή του είναι αναλλοίωτη σε αυτή την περιγραφή. Ο όρος αυτός οφείλει την προέλευσή του στο γεγονός ότι το μαγνητικό φορτίο εμφανίζεται σταθερό μέσα στην Χαμιλτονιανή συνάρτηση και δεν αντιμετωπίζεται ως προϊόν βαθμών ελευθερίας όπως το ηλεκτρικό φορτίο που προκύπτει από την f στην A_μ .

4.2 Περίπτωση με μαγνητικό μονόπολο

Αν θέλουμε να εξετάσουμε την περίπτωση όπου το ηλεκτρικό δυναμικό $f(t)$ είναι μηδέν, τότε η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί ξεκινώντας από την Λαγκρανζιανή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η γεωμετρία του μίνι-υπερχώρου είναι διαφορετική: ο αριθμός των θεσεογραφικών βαθμών ελευθερίας μειώνεται στους δύο, δηλ. τα (a, b) και στη σταθερή παραμετροποίηση του δυναμικού η μίνι-υπερμετρική γράφεται

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{2b(a^2 + \epsilon^2)}{a} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

και ο χώρος είναι επίπεδος. Η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή δίνεται από το (4.17). Με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων της κίνησης που κατασκευάστηκαν από τα τρία διανυσματικά πεδία Killing

$$\xi_1 = \frac{a(a^2 - \epsilon^2)}{a^2 + \epsilon^2} \partial_a - \frac{a^2 b}{a^2 + \epsilon^2} \partial_b, \quad \xi_2 = -\frac{a^2}{2(a^2 + \epsilon^2)} \partial_a + \frac{ab}{4(a^2 + \epsilon^2)} \partial_b, \quad \xi_3 = \frac{1}{ab} \partial_b \quad (4.68)$$

και το ομοθετικό διάνυσμα (το οποίο παράγει ένα μη τοπικό διατηρήσιμο φορτίο)

$$\xi_h = \frac{b}{2} \partial_b \quad (4.69)$$

η κλασική λύση μπορεί εύκολα να εξαχθεί. Το στοιχειώδες μήκος είναι το ίδιο με αυτό της λύσης (4.22) με $Q = 0$. Φυσικά το m μπορεί ακόμα να θεωρηθεί θετικό ή αρνητικό και σχηματίζεται ένας ορίζοντας στο

$$a_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 + \epsilon^2} \quad (4.70)$$

το οποίο εξαρτάται από το αν είμαστε στην περιοχή $a \in \mathbb{R}_+$ ή την περιοχή $a \in \mathbb{R}_-$ αντίστοιχα.

Όσον αφορά τις τιμές των τριών διατηρουμένων φορτίων που αντιστοιχούν στη (4.68), όταν έχουμε εφαρμόσει την λύση, μπορούμε να δούμε ότι μόνο το Q_1 συνδέεται με μια ουσιαστική σταθερά της γεωμετρίας, με $Q_1 = 2m$, ενώ $Q_2 = -\frac{1}{2}$ και $Q_3 = 2$. Πιο συγκεκριμένα, τα Q_2 και Q_3 συνδέονται με μη ουσιώδεις σταθερές της γεωμετρίας που είναι υποχρεωμένες να ικανοποιούν το $Q_2 Q_3 = -1$ λόγω του δεσμού. Οι συγκεκριμένες τιμές που δίνουμε εδώ είναι εκείνες που προκύπτουν από το στοιχειώδες μήκος από το οποίο έχουν απαλειφθεί οι μη ουσιώδεις σταθερές.

4.2.1 Κβάντωση

Για να προχωρήσουμε στην κβάντωση είναι χρήσιμο να κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό $(a, b) \rightarrow (\chi, \psi)$ με ²

$$a = \frac{1}{4} \left(-\chi + \sqrt{16\epsilon^2 + \chi^2} \right), \quad b = \frac{2\sqrt{2}\psi}{\left(\sqrt{16\epsilon^2 + \chi^2} - \chi \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.71)$$

αυτό φέρνει την μετρική του μίνι-υπερχώρου στη μορφή $G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Σε αυτές τις συντεταγμένες φαίνεται ότι τα διανύσματα (4.68) μετασχηματίζονται στη μορφή

$$\xi_1 = \chi\partial_\chi - \psi\partial_\psi, \quad \xi_2 = \partial_\chi, \quad \xi_3 = \partial_\psi. \quad (4.72)$$

Οι αντίστοιχοι τελεστές παράγουν δύο Αβελιανές υποάλγεβρες οι οποίες περιλαμβάνουν τα $(\widehat{Q}_2, \widehat{Q}_3, \widehat{\mathcal{H}})$ και $(\widehat{Q}_1, \widehat{\mathcal{H}})$. Η πρώτη περίπτωση, όπως φαίνεται από την μορφή (4.72), οδηγεί σε λύση επίπεδου κύματος για την κυματοσυνάρτηση

$$\psi = C e^{i(\kappa_2\chi + \kappa_3\psi)} \quad (4.73)$$

με την εξίσωση Wheeler-DeWitt, $\widehat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ να δημιουργεί την σχέση $\kappa_2\kappa_3 = -1$.

Η δεύτερη περίπτωση αποδεικνύεται πιο ενδιαφέρουσα, η λύση της $\widehat{Q}_1\Psi = \kappa_1\Psi$ υποδεικνύει

$$\Psi(x, y) = \chi^{i\kappa_1} \psi(\chi\psi). \quad (4.74)$$

Η επιβολή του Χαμιλτονιανού δεσμού $\widehat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ δίνει στην συνάρτηση $\psi(xy)$ την μορφή

$$\psi(\chi\psi) = (\chi\psi)^{-\frac{i\kappa_1}{2}} \left(c_1 I_{i\kappa_1} \left(2\sqrt{\chi\psi} \right) + c_2 I_{-i\kappa_1} \left(2\sqrt{\chi\psi} \right) \right). \quad (4.75)$$

Άρα, η πλήρης κυματοσυνάρτηση γίνεται

$$\Psi(\chi, \psi) = \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{i\kappa_1}{2}} \left(c_1 I_{i\kappa_1} \left(2\sqrt{\chi\psi} \right) + c_2 I_{-i\kappa_1} \left(2\sqrt{\chi\psi} \right) \right), \quad (4.76)$$

όπου $I_\nu(\zeta)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους. Γυρίζοντας πίσω στις αρχικές μεταβλητές (a, b) βλέπουμε ότι

$$\zeta^2 = \chi\psi = b^2 (\epsilon^2 - a^2), \quad (4.77)$$

²Είναι κατανοητό ότι οι μεταβλητές χ, ψ και ζ είναι διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

που σημαίνει ότι πρέπει να προσέξουμε εάν το γινόμενο $\zeta^2 = \chi\psi$ είναι θετικό ή αρνητικό επειδή αλλάζει σημαντικά τη συμπεριφορά του $I_\nu(\zeta)$. Για παράδειγμα, αν το $\zeta \rightarrow \infty$ το $I_\nu(\zeta)$ αποκλίνει, αλλά όταν $\zeta \rightarrow i\infty$, $I_\nu(\zeta) \rightarrow 0$. Από την (4.76) μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι παίρνουμε δύο κλάδους, οι οποίοι όμως μπορούν να αντικατασταθούν από έναν, με τον κατοπτρικό μετασχηματισμό $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$. Επομένως, στην συνέχεια θα μας ενδιαφέρει μόνο ο πρώτος κλάδος. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ερμηνεία της κβαντομηχανικής από τον Bohm ως εργαλείο για την κατασκευή μιας ημι-κλασσικής προσέγγισης εισάγοντας την έννοια της τροχιάς σε αυτό το επίπεδο.

4.2.2 Ημι-κλασσική προσέγγιση

Ακολουθώντας το παραπάνω σκεπτικό χρησιμοποιούμε μόνο τη συνεισφορά του πρώτου μέρους της (4.76) στη κυματοσυνάρτηση, δηλαδή παίρνουμε $c_2 = 0$. Ας αρχίσουμε με τη μελέτη της συμπεριφοράς του όρου ζ στη (4.77), ο οποίος εξαρτάται από τη συμπεριφορά των a και b . Εάν διατηρήσουμε το b σταθερό, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι για $a \rightarrow \pm\infty$, ζ^2 προσεγγίζει το $-\infty$ και συνεπώς το ζ θα είναι φανταστικό. Η κατά προσέγγιση έκφραση για τη συνάρτηση Bessel όταν το όρισμα είναι καθαρά φανταστικό $\zeta = is$, είναι

$$I_{i\kappa_1}(is) \approx \frac{\cos \left[s - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\kappa_1\pi \right) \right]}{s^{1/2}} + \mathcal{O}(s^{-3/2}), \quad (4.78)$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση Bessel δεν συμβάλλει στη φάση και μπορούμε να προσεγγίσουμε την κυματοσυνάρτηση (4.76) με

$$\Psi(a, b) \approx \frac{1}{b\sqrt{a^2 - \epsilon^2}} \exp \left[\frac{i\kappa_1}{2} \ln \left(\frac{4(a^2 - \epsilon^2)}{a^2 b^2} \right) \right]. \quad (4.79)$$

Έχοντας φέρει την κατά προσέγγιση κυματοσυνάρτηση σε πολική μορφή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (2.55) για να εξαγάγουμε τις ημικλασσικές τροχιές. Οι τελευταίες διέπονται από εξισώσεις:

$$\frac{\partial L}{\partial a'} = \frac{\kappa_1 \epsilon^2}{a(t)(a(t)^2 - \epsilon^2)}, \quad (4.80a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b'} = -\frac{\kappa_1}{b}, \quad (4.80b)$$

όπου το L προέρχεται από την (1.60) θέτοντας την (4.67) ως την μετρική του μίνι-υπερχώρου.

Σε αυτό το σημείο έχουμε δύο εξισώσεις και τρεις συναρτήσεις που πρέπει να

καθοριστούν, $a(t)$, $b(t)$ και $n(t)$. Αυτό το σύνολο εξισώσεων μπορεί εύκολα να ολοκληρωθεί έτσι ώστε να παραχθεί ένα ημι-κλασσικό στοιχειώδες μήκος της μορφής

$$ds^2 = -\frac{4b_0^2 a^2}{\kappa_1(a^2 - \epsilon^2)} da^2 + a^2(dx^2 + e^{-2x} dy^2) + \frac{b_0^2}{a^2 - \epsilon^2} dz^2. \quad (4.81)$$

Ο προκύπτων χωροχρόνος εμφανίζει ανωμαλίες καμπυλότητας στα $a = 0$ και $a = \pm\epsilon$. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί λαμβάνοντας υπόψη την περιοχή $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, από το οποίο προκύπτει ότι $\zeta \in \mathbb{R}$ με $\zeta \rightarrow \infty$. Στη συνέχεια, η προσεγγιστική κυματοσυνάρτηση εξακολουθεί να μην έχει καμία συνεισφορά στη φάση προερχόμενη από τη συνάρτηση Bessel, δεδομένου ότι

$$I_{i\kappa_1}(\zeta) \approx \frac{1}{\zeta} (e^\zeta + e^{-\zeta - \kappa_1\pi}) \quad (4.82)$$

και ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε στο ίδιο ημι-κλασσικό στοιχειώδες μήκος (4.81).

Αυτό που έχουμε ελέγξει μέχρι στιγμής είναι η ημι-κλασσική συμπεριφορά, καθώς το ζ^2 παίρνει μεγάλες τιμές. Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει στην άλλη περιοχή όταν το $\zeta^2 \rightarrow 0$. Θεωρώντας το b πεπερασμένο, συμπεραίνουμε από την (4.77), ότι $a \rightarrow 0$ το οποίο σημαίνει ότι ζ^2 είναι μικρό αλλά θετικό, έτσι $\zeta \in \mathbb{R}$. Η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel $I_\nu(\zeta)$ σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γραφτεί σαν σειρά ως

$$I_\nu(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\zeta^2/4)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (4.83)$$

όπου το Γ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση Γάμμα. Δεδομένου ότι το ζ είναι τώρα πραγματικό μπορούμε αμέσως να δούμε ότι η μόνη συνεισφορά στη φάση, η οποία παίζει ρόλο στην παραγωγή των ημι-κλασσικών τροχιών, δίνεται από την $\zeta^\nu = \zeta^{i\kappa_1}$. Ως αποτέλεσμα, η κυματοσυνάρτηση, εάν θεωρήσουμε ότι $c_2 = 0$, μπορεί να προσεγγιστεί με

$$\Psi(a, b) \approx \Omega(a, b) e^{i\kappa_1 \ln\left(\frac{2(\epsilon^2 - a^2)}{a}\right)} \quad (4.84)$$

και οι αντίστοιχες ημι-κλασσικές εξισώσεις είναι

$$-\frac{2(a(t)^2 + \epsilon^2)b(t)}{a(t)n(t)} \left(\frac{b(t)a'(t)}{a(t)} + b'(t) \right) + \frac{\kappa_1(a(t)^2 + \epsilon^2)}{a(t)(\epsilon^2 - a(t)^2)} = 0, \quad (4.85a)$$

$$-\frac{2b(t)(a(t)^2 + \epsilon^2)a'(t)}{a(t)n(t)} = 0. \quad (4.85b)$$

Αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί εύκολα και η λύση για τα $a(t)$ και $n(t)$ γράφεται

$$a(t) = a_0, \quad n(t) = -\frac{2(a_0^2 - \epsilon^2)b(t)b'(t)}{\kappa_1}. \quad (4.86)$$

Τέλος, το αντίστοιχο ημι-κλασσικό στοιχειώδες μήκος (μετά την εξάλειψη των μη ουσιωδών σταθερών) είναι

$$ds^2 = \alpha_0^2 (-db^2 + dx^2 + e^{-2x}dy^2 + b^2dz^2). \quad (4.87)$$

Όλες οι βαθμωτές καμπυλότητες αυτού του χώρου είναι σταθερές, επομένως δεν έχει ανώμαλα σημεία. Όπως συνέβη και στη περίπτωση όπου θεωρήσαμε μεγάλα ζ , το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί λαμβάνοντας υπόψη ότι $a > \epsilon$ και $b \rightarrow 0$, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα ένα μικρό αλλά καθαρά φανταστικό $\zeta = is$. Η προσέγγιση της συνάρτησης Bessel για το $s \ll 1$ αποδίδει την τιμή $I_{i\kappa_1}(is) \sim s^{i\kappa_1}$ που παράγει ακριβώς την ίδια διόρθωση στον όρο φάσης.

4.3 Περίπτωση με ηλεκτρικό πεδίο

Όπως συμβαίνει στην περίπτωση του μαγνητικού μονόπολου, προκύπτει επίσης ένας ξεχωριστός (από τη γενική περίπτωση) μίνι-υπερχώρος αν το σύστημα μας έχει μόνο ηλεκτρικό φορτίο. Πράγματι, αν θέσουμε $\epsilon = 0$ στη γενική Λαγκρανζιανή (4.17), παίρνουμε

$$L = -\frac{1}{n} (2aba'b' + b^2a'^2 - a^2f'^2) - n \quad (4.88)$$

από την οποία παράγεται η αντίστοιχη μετρική μίνι-υπερχώρου

$$G_{\mu\nu} = -2 \begin{pmatrix} b^2 & ab & 0 \\ ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Αυτή τη φορά ο μίνι-υπερχώρος είναι τρισδιάστατος, αφού χρησιμοποιούμε το f ως βαθμό ελευθερίας, αλλά σε αντίθεση με την περίπτωση όπου $\epsilon \neq 0$, είναι επίπεδος.

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο το παρακάτω σχόλιο. Η κβάντωση του μίνι υπερχώρου με μετρική την (4.89) μοιάζει με αυτή του προηγούμενου κεφαλαίου. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι γενικά το πρότυπο LRS Bianchi τύπου III διαθέτει μια παρόμοια δομή μίνι-υπερχώρου σε σχέση με αυτή ενός στατικού σφαιρικά συμμετρικού στοιχειώδους μήκους. Η διαφορά βέβαια είναι ότι ο πρώτος έχει ως ανεξάρτητη μεταβλητή τον χρόνο t , ενώ ο τελευταίος εξελίσσεται σε σχέση με την

ακτινική απόσταση. Μια επιπλέον διαφορά είναι στο πρόσημο του κινητικού όρου που οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο f στη Λαγκρανζιανή. Μπορούμε να δούμε από την (3.6) ότι η αντίστοιχη Λαγκρανζιαν (αν παραλείψουμε ένα γενικό μείον) έχει έναν όρο “ $-\frac{1}{n}a^2 \dot{f}^2$ ” αντί για τον όρο “ $+\frac{1}{n}a^2 \dot{f}^2$ ” που εμφανίζεται στην (4.88). Ωστόσο, αυτό δεν επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τη διαδικασία μέχρι το σημείο που προκύπτει η Wheeler-DeWitt εξίσωση και αυτός είναι ο λόγος που θα σκιαγραφήσουμε μόνο τα βασικά σημεία ακολουθώντας ακριβώς τη λογική του προηγούμενου κεφαλαίου.

Δεδομένου ότι ο Lorentzian τρισδιάστατος μίνι-υπερχώρος που εμφανίζεται εδώ είναι επίπεδος, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν έξι ολοκληρώματα της κίνησης πρώτης τάξης, που αποτελούνται από τρεις μεταθέσεις, δύο ψευδοστροφές και μία πραγματική στροφή. Τα τελευταία τρία είναι τα στοιχεία της γνωστής ομάδας $SO(2, 1)$. Μια ενδιαφέρουσα άλγεβρα που χρησιμοποιείται στη διαδικασία κβάντωσης είναι αυτή που σχηματίζεται από την πραγματική στροφή, δηλαδή το Q_6 , και το αναλλοίωτο Casimir Q_{Cas} της αλγεβρας $\mathfrak{so}(2, 1)$. Με την εκτέλεση του μετασχηματισμού

$$a = \frac{1}{4}u(\sinh(v) \cos(w) + \cosh(v)), \quad b = \frac{2\sqrt{2}}{\sinh(v) \cos(w) + \cosh(v)}, \quad (4.90)$$

$$f = \frac{2\sqrt{2} \sin(w)}{\coth(v) + \cos(w)}$$

ο τελεστής που αντιστοιχεί στην στροφή Q_6 έρχεται σε κανονική μορφή ως προς την συντεταγμένη w . Η λύση του ιδιοσυστήματος

$$\hat{Q}_6 \Psi = k\Psi, \quad \hat{Q}_{Cas} \Psi = \ell(\ell + 1)\Psi, \quad \mathcal{H}\Psi = 0 \quad (4.91)$$

είναι

$$\Psi = e^{ikw} (C_1 P_\ell^k(\cosh(v)) + C_2 Q_\ell^k(\cosh(v))) (C_3 j_\ell(\sqrt{2}u) + C_4 y_\ell(\sqrt{2}u)), \quad (4.92)$$

όπου P_ℓ^k , Q_ℓ^k , j_ℓ and y_ℓ είναι οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre και οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εξαιτίας του $\hat{Q}_6 = -i\frac{\partial}{\partial w}$ που αντιστοιχεί σε μία πραγματική στροφή σε αυτόν τον επίπεδο μίνι-υπερχώρο, μπορούμε να θέσουμε μία περιοδική συνοριακή συνθήκη στην μεταβλητή w η οποία οδηγεί σ'ένα διακριτό φάσμα για το k , δηλαδή $k \in \mathbb{Z}$. Το ίδιο φάνηκε και στην περίπτωση της γεωμετρίας Reissner - Nordström στο κεφάλαιο 3, το Q_6 σχετίζεται κλασικά με το ηλεκτρικό φορτίο, ενώ το Q_{Cas} με τον τετραγωνικό συνδυασμό του φορτίου Q και της “μάζας” m . Πιο συγκεκριμένα,

χρησιμοποιώντας την κλασική λύση

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{a} - \frac{Q^2}{a^2}\right)^{-1} da + a^2 (dx^2 + e^{-2x} dy^2) + \left(1 - \frac{2m}{a} - \frac{Q^2}{a^2}\right) dz^2 \quad (4.93)$$

και $f(t) = \frac{Q}{a}$, βλέπουμε ότι

$$Q_6 \propto Q, \quad Q_{Cas} \propto - (m^2 + Q^2) \quad (4.94)$$

από την οποία παρατηρούμε ότι $Q_{Cas} < 0$. Αυτή η συνθήκη δεν είναι απαραίτητα αληθής για την περίπτωση της Reissner - Nordström στο κεφάλαιο 3, όπου το Q_{Cas} μπορεί να πάρει και θετικές τιμές. Το γεγονός ότι το αναλλοίωτο Casimir είναι αρνητικό συνεπάγεται ότι και σε κβαντικό επίπεδο θα έχουμε $\ell(\ell + 1) < 0$. Αυτό γίνεται θεωρώντας ότι ο κβαντικός αριθμός ℓ είναι μιγαδικός με $\ell = -\frac{1}{2} + is$, $s \in \mathbb{R}$.

4.4 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήσαμε τον μίνι-υπερχώρο ενός πρότυπου LRS Bianchi τύπου III συζευγμένο με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο χωρίς πηγή.

Σε κλασικό επίπεδο βρήκαμε τις λύσεις χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες της θεσογραφικής πολλαπλότητας. Συγκεκριμένα, το πρώτο μας βήμα ήταν να βρούμε τον πιο γενικό ηλεκτρομαγνητικό τανυστή, συμβατό με τις συμμετρίες του στοιχειώδους μήκους του προτύπου Bianchi III LRS. Για το σκοπό αυτό εξετάσαμε τους αλγεβρικούς περιορισμούς που επιβάλλονται στο $T_{\mu\nu}$ μέσω των εξισώσεων του Einstein, για την συγκεκριμένη γεωμετρία. Το αποτέλεσμα, έπειτα και από την εφαρμογή των εξισώσεων Maxwell, είναι ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου να περιέχει μόνο $E_3(t)$ και $B_3(x) = \epsilon e^{-x}$. Η τελική λύση δίνεται από την (4.11). Η κατασκευή του μίνι-υπερχώρου επιτυγχάνεται με την εφαρμογή των τεσσάρων πεδίων Killing (4.5) σε ένα γενικό $F_{\mu\nu}(t, x, y, z)$ και απαιτώντας να εκφράζεται αυτό με όρους ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού. Ένα αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι η έγκυρη Λαγκράνζιαν που παράγεται ορίζει ένα μίνι-υπερχώρο που είναι pp-wave για τη γενική περίπτωση και έχει πέντε μη τετριμμένους Killing τανυστές και τρία διανυσματικά πεδία Killing. Οι περιπτώσεις με σκέτο ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο αντιστοιχούν απλά σε επίπεδους μίνι-υπερχώρους τριών και δύο διαστάσεων αντίστοιχα.

Στο κβαντικό επίπεδο ακολουθήσαμε την μέθοδο κανονικής κβάντωσης. Για τον πλήρη προσδιορισμό της κυματοσυνάρτησης χρησιμοποιήσαμε, εκτός από την εξίσωση δεσμού Wheeler-DeWitt, τους τελεστές που αντιστοιχούν σε Αβελιανές υποάλγεβρες που κατασκευάζονται από τους γραμμικούς και τετραγωνικούς γεννήτορες

των συμμετριών. Σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις του μίνι-υπερχώρου έγινε ημι-κλασσική ανάλυση των λύσεων χρησιμοποιώντας την ερμηνεία του Bohm για την κβαντομηχανική. Ένα αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι μερικές από τις λύσεις δίνουν ημικλασσικούς χωρόχρονους απαλλαγμένους από ανωμαλίες.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στη διαδικασία της ημικλασσικής ανάλυσης η εξίσωση συνέχειας δεν ισχύει πάντα. Το φαινόμενο αυτό προκύπτει λόγω των προσεγγίσεων που γίνονται για να έρθουν οι κυματοσυναρτήσεις σε πολική μορφή. Αυτό το πρόβλημα ξεπερνιέται αν εφαρμόσουμε το αντίστοιχο όριο και στην εξίσωση συνέχειας. Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει στην (4.79), με την αντίστοιχη εξίσωση συνέχειας

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}S\nabla_{\nu}\Omega + \frac{\Omega}{2}\square S = \frac{4\epsilon^2 + \kappa_1\epsilon^2}{b^2(a^4 - \epsilon^4)} + \frac{4a^2}{b^2(a^4 - \epsilon^4)}, \quad (4.95)$$

η οποία τείνει στο μηδέν αν θεωρήσουμε ότι οι όροι της μορφής $\frac{1}{a^n}$ με $n > 1$ είναι αμελητέοι.

Μία ιδέα για περαιτέρω μελέτη θα μπορούσε να είναι μια τροποποίηση της μεθόδου κβάντωσης. Συγκεκριμένα, η χρήση της ψευδο-Λαπλασιανής για τον ορισμό των τελεστών, που αντιστοιχούν στα τετραγωνικά φορτία, δεν είναι ότι πιο γενικό μπορεί να κατασκευαστεί. Ο πιο γενικός βαθμωτός, δεύτερης τάξης και ερμιτιανός τελεστής, δίνεται από την

$$\hat{K}\Psi = (1 - a) \left[\phi_1 K^{ab} \nabla_a \left(\frac{1}{\phi_1 \phi_2} \nabla_b (\phi_2 \Psi) \right) + \phi_2 \nabla_a \left(\frac{1}{\phi_1 \phi_2} \nabla_b (\phi_1 K^{ab} \Psi) \right) \right] \\ + a \nabla_a (K^{ab} \nabla_b (\phi_1 \Psi)),$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 είναι βαθμωτές ποσότητες που κατασκευάζονται από την μετρική και τον τανυστή Killing K_{ab} . Τέλος με αυτή την μορφή ίσως να βελτιώνονται και οι κβαντικές άλγεβρες έτσι ώστε να συμπίπτουν με τις κλασσικές, γεγονός το οποίο μας δίνει περισσότερες δυνατότητες.

5

ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ BIANCHI VIII ΚΑΙ IX

Για τα πλήρη πρότυπα Bianchi VIII και XI, ο γενικός πίνακας κλίμακας μπορεί να διαγωνοποιηθεί μέσω της κινηματικής και στη συνέχεια με χρήση των γραμμικών δεσμών εξαλείφεται το διάνυσμα μετατόπισης (βλέπε [5, 37]). Στο παρόν κεφάλαιο εστιάζουμε στην περίπτωση του αξονοσυμμετρικού μοντέλου. Επομένως, το στοιχειώδες μήκος είναι,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + \gamma_{AB}\sigma_i^A\sigma_j^B dx^i dx^j, \quad A, B, i, j = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

με $\gamma_{AB} = \text{diag}(a^2(t), b^2(t), b^2(t))$ (οι εναλλακτικές επιλογές είναι ασύμβατες για την περίπτωση του VIII [37, 38]) και οι μονο-μορφές που αντιστοιχούν στην ομάδα συμμετρίας Bianchi VIII, IX δίνονται από

$$\sigma^1 = dx - k \sinh(ky)dz \quad (5.2)$$

$$\sigma^2 = \cos(x)dy - \sin(x) \cosh(ky)dz \quad (5.3)$$

$$\sigma^3 = \sin(x)dy + \cos(x) \cosh(ky)dz \quad (5.4)$$

με $k = 1$ και $k = i$ για Bianchi VIII και Bianchi IX αντίστοιχα.

Το βαθμωτό Ricci για την μετρική αυτή είναι

$$R = \frac{2a''(t)}{a(t)N(t)^2} + \frac{4a'(t)b'(t)}{a(t)b(t)N(t)^2} - \frac{2a'(t)N'(t)}{a(t)N(t)^3} - \frac{a(t)^2}{2b(t)^4} + \frac{4b''(t)}{b(t)N(t)^2} - \frac{4b'(t)N'(t)}{b(t)N(t)^3} + \frac{2b'(t)^2}{b(t)^2N(t)^2} - k^2 \frac{2}{b(t)^2}. \quad (5.5)$$

Είναι γνωστό ότι η ανηγμένη δράση Einstein-Hilbert παρέχει τη σωστή δυναμική, δηλαδή η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή είναι έγκυρη. Προκειμένου να περικλείσουμε ολόκληρη τη δυναμική στο κινητικό μέρος και επίσης για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς μας, αλλάζουμε βαθμίδα ως εξής $N(t) = \frac{2b(t)^2n(t)}{a(t)^3+k^24a(t)b(t)^2}$, η οποία φέρνει το δυναμικό σε μορφή που είναι ανεξάρτητη από τα a και b . Η τελική μορφή της Λαγκρανζιανής γράφεται

$$\mathcal{L} = -\frac{2a(t)(4k^2b(t)^2 + a(t)^2)a'(t)b'(t)}{b(t)n(t)} - \frac{a(t)^2(4k^2b(t)^2 + a(t)^2)b'(t)^2}{b(t)^2n(t)} - n(t), \quad (5.6)$$

όπου για απλότητα επιλέγουμε στην συνέχεια τις συντεταγμένες του κώνου φωτός w, u

$$(a, b) \mapsto (u, w) : \quad a = \frac{w}{\sqrt{u}}, \quad b = u. \quad (5.7)$$

Οπότε η μετασηματισμένη Λαγκρανζιανή και η αντίστοιχη υπερμετρική γράφονται

$$L = -\frac{2w(t)(4k^2u(t)^3 + w(t)^2)}{n(t)u(t)^3}u'(t)w'(t) - n(t) \quad (5.8)$$

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2w^3}{u^3} - 8k^2w \\ -\frac{2w^3}{u^3} - 8k^2w & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Η παραπάνω Λαγκρανζιανή είναι ιδιάζουσα και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Dirac-Bergmann για συστήματα με δεσμούς, καταλήγουμε στον ασθενώς μηδέν Χαμιλτονιανό δεσμό

$$\mathcal{H} = G^{\alpha\beta}p_{\alpha}p_{\beta} + 1 = \frac{-u(t)^3}{2w(t)(4k^2u(t)^3 + w(t)^2)}p_u(t)p_w(t) + 1 \approx 0, \quad (5.10)$$

με $p_w(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial w'(t)}$, $p_u(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial u'(t)}$. Προκειμένου να αναπαραχθεί η κλασική λύση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επιπλέον συμμετρίες του παραπάνω θεσεογραφικού χώρου. Η μίνι-υπερμετρική $G_{\alpha\beta}$ έχει συμμετρίες πρώτης και δεύτερης τάξης. Από το πρώτο είδος υπάρχει μόνο ένα ομοθετικό διανυσματικό πεδίο και από το δεύτερο υπάρχουν δύο Killing τανυστές δεύτερης τάξης. Συνολικά έχουμε

Πρώτης τάξης:

$$\mathcal{L}_{\xi_h} G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \Rightarrow \xi_h = \frac{u}{4} \partial_u + \frac{3w}{8} \partial_w \quad (5.11)$$

Δεύτερης-τάξης:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu K_{\nu\lambda} + \nabla_\lambda K_{\mu\nu} + \nabla_\nu K_{\lambda\mu} &= 0 \Rightarrow \\ K_1^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \frac{u^2}{4} & -\frac{uw(4k^2u^3-w^2)}{8(4k^2u^3+w^2)} \\ -\frac{uw(4k^2u^3-w^2)}{8(4k^2u^3+w^2)} & \frac{w^2}{16} \end{pmatrix} K_2^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{u}{4w(4k^2u^3+w^2)} \\ \frac{u}{4w(4k^2u^3+w^2)} & \frac{1}{4w^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Έχει αποδειχθεί στις [39, 40] ότι τα κατάλληλα ομοθετικά ή σύμμορφα διανυσματικά πεδία Killing της μετρικής του μίνι-υπερχώρου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν μη τοπικά διατηρούμενα φορτία τα οποία εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο υπό τη μορφή ενός ολοκληρώματος στον φασικό χώρο. Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση, η μη τοπική διατηρούμενη ποσότητα που παράγεται από ξ_h είναι

$$\begin{aligned} Q_h = \xi^\alpha(q) p_\alpha + \int n(t) dt &= - \frac{w(t) (4k^2u(t)^3 + w(t)^2) (3w(t)u'(t) + 2u(t)w'(t))}{4n(t)u(t)^3} \\ &+ \int n(t) dt. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η συνολική παράγωγος της παραπάνω έκφρασης μηδενίζεται με την χρήση των εξισώσεων κίνησης για τις επιταχύνσεις και του Χαμιλτονιανού δεσμού. Ταυτόχρονα, οι δύο Killing ταυιστές ορίζουν τα ακόλουθα τοπικά ολοκληρώματα της κίνησης

$$\begin{aligned} Q_{K_1} = K_1^{\mu\nu} p_\mu p_\nu &= \frac{w(t)^2 (4k^2u(t)^3 + w(t)^2)}{4n(t)^2u(t)^6} [-16k^2u(t)^4w(t)u'(t)w'(t) \\ &+ 4k^2u(t)^3w(t)^2u'(t)^2 + 16k^2u(t)^5w'(t)^2 + 4u(t)w(t)^3u'(t)w'(t) \\ &+ w(t)^4u'(t)^2 + 4u(t)^2w(t)^2w'(t)^2] \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} Q_{K_2} = K_2^{\mu\nu} p_\mu p_\nu &= \frac{u'(t) (4k^2u(t)^3 + w(t)^2)}{n(t)^2u(t)^6} [4k^2u(t)^3u'(t) \\ &+ w(t)^2u'(t) + 2u(t)w(t)w'(t)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Οι παραπάνω διατηρούμενες ποσότητες είναι υπεραρκετές για την απόκτηση της κλασικής λύσης, η οποία μπορεί να προκύψει με καθαρά αλγεβρικά μέσα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό είναι εφικτό μόνο επειδή το μη τοπικό φορτίο δίνει μη

τετριμμένη εξάρτηση ως προς το χρόνο στην αλγεβρική λύση που λαμβάνεται όταν λυθούν τα τρία φορτία και ο δεσμός ως προς (u, p_u, w, p_w) . Έτσι, συνδυάζοντας μαζί τα $Q_h = 0$, $Q_{K_1} = \kappa_1$, $Q_{K_2} = \kappa_2$ και $\mathcal{H} \approx 0$ φτάνουμε στη λύση. Για το μη τοπικό διατηρούμενο φορτίο αρκεί να απαιτήσουμε ταυτόχρονα $Q_h = 0$ αντί για $Q_h = \text{σταθερό}$ επειδή περιλαμβάνει ένα αόριστο ολοκλήρωμα στην έκφρασή της. Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει ως αποτέλεσμα δύο διαφορετικούς κλάδους για τη λύση ανάλογα με το αν η τιμή του κ_2 είναι μηδέν ή διάφορη του μηδενός.

5.0.1 Περίπτωση με $\kappa_2 \neq 0$

Το γενικότερο σύστημα εξισώσεων που θα χρησιμοποιηθεί είναι το ακόλουθο

$$n^2(t) - \frac{2w(t)(4k^2u(t)^3 + w(t)^2)u'(t)w'(t)}{u(t)^3} = 0 \quad (5.16)$$

$$Q_{K_1} - \kappa_1 = 0 \quad (5.17)$$

$$Q_{K_2} - \kappa_2 = 0 \quad (5.18)$$

$$Q_h = 0 \quad (5.19)$$

όπου η (5.16) προέκυψε από την $\mathcal{H} \approx 0$ εκφρασμένη συναρτήσει των ταχυτήτων. Αρχικά επιλύσαμε τον δεσμό ως προς το $n(t)$ και αντικαταστήσαμε στις εξισώσεις (5.17), (5.18), (5.19). Το αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων

$$\begin{aligned} & -16k^2u(t)^4w(t)^2u'(t)w'(t) + 4k^2u(t)^3w(t)^3u'(t)^2 \\ & + 16k^2u(t)^5w(t)w'(t)^2 - 8\kappa_1u(t)^3u'(t)w'(t) + 4u(t)w(t)^4u'(t)w'(t) + \\ & w(t)^5u'(t)^2 + 4u(t)^2w(t)^3w'(t)^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.20a)$$

$$4k^2u(t)^3u'(t) + w(t)^2u'(t) - 2\kappa_2u(t)^3w(t)w'(t) + 2u(t)w(t)w'(t) = 0 \quad (5.20b)$$

και η εξίσωση από το μη-τοπικό ολοκλήρωμα της κίνησης

$$4f(t)n(t)u(t)^3 - w(t)(4k^2u(t)^3 + w(t)^2)(3w(t)u'(t) + 2u(t)w'(t)) = 0 \quad (5.20c)$$

όπου το $f(t)$ είναι ο όρος $\int n(t)dt$. Στη συνέχεια λύνουμε αλγεβρικά το σύστημα (5.20b,5.20c) ως προς τις ταχύτητες $(u'(t), w'(t))$. Αν η λύση αυτή αντικατασταθεί στην εξίσωση (5.20a), προκύπτει μία καθαρά αλγεβρική σχέση μεταξύ των (u, w)

$$4\kappa_1 + 16k^4u(t)^4 - 8\kappa_2k^2u(t)^3w(t)^2 + 16k^2u(t)w(t)^2 + \kappa_2u(t)^2(\kappa_2w(t)^4 - 4\kappa_1) = 0. \quad (5.21)$$

Επιπλέον, επειδή η εξίσωση (5.20b) είναι 1-μορφή στις δύο διαστάσεις είναι απαραίτητα κλειστή μορφής και γι' αυτό μπορεί να γραφτεί σαν $\omega(u, w)d\phi(u, w) = 0$ η οποία ορίζει μία ακόμα αλγεβρική σχέση για τα (u, w)

$$2\sqrt{16k^4 - \kappa_2^2\kappa_1} + \frac{\kappa_2 u(t) (\kappa_2 w(t)^2 - 4k^2 u(t)) + 8k^2}{\sqrt{1 - \kappa_2 u(t)^2}} = 0 \quad (5.22)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι δεν ορίσαμε χρονική μεταβλητή οι παραπάνω δύο σχέσεις δεν είναι ανεξάρτητες και ορίζουν μία σχέση μεταξύ των $(u(t), w(t))$, η οποία δίνεται από

$$w(t) = \pm \frac{1}{\kappa_2} \left(\frac{\pm 2\sqrt{16 - \kappa_1\kappa_2^2}\sqrt{1 - \kappa_2 u(t)^2} + 4\kappa_2 k^2 u(t)^2 - 8k^2}{u(t)} \right)^{1/2}. \quad (5.23)$$

Η συνάρτηση εξέλιξης $n(t)$ δίνεται από την εξίσωση του δεσμού

$$n(t) = \pm \frac{2}{\kappa_2 u(t)^3} \left[2\kappa_2 k^2 u(t)^2 + 4k^2 \pm (\kappa_1 \kappa_2^2 - 16) [(\kappa_1 \kappa_2^2 - 16) (\kappa_2 u(t)^2 - 1)]^{-1/2} \right. \\ \left. \pm [(\kappa_1 \kappa_2^2 - 16) (\kappa_2 u(t)^2 - 1)]^{1/2} + 2k^2 (\kappa_2 u(t)^2 - 1) (\kappa_2 u(t)^2 + 2) \right]^{1/2} u'(t). \quad (5.24)$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange με την Λαγκρανζιανή (5.8). Οπότε, η τελική μορφή της λύσης (εκφραζόμενη συναρτήσει των αρχικών μεταβλητών $(N(t), a(t), b(t))$) μπορεί να γραφτεί στην χρονική βαθμίδα $b(t) = t$ ως

Πρώτος κλάδος. Έχουμε αρχικά

$$a(t)^2 = -\frac{2 \left(k^2 (4 - 2\kappa_2 t^2) + \sqrt{\kappa_2^2 \mu (1 - \kappa_2 t^2)} \right)}{\kappa_2^2 t^2}, \quad (5.25a)$$

$$N(t)^2 = \frac{2\kappa_2^2 t^4}{(\kappa_2 t^2 - 1) \left(2k^2 (\kappa_2 t^2 - 2) - \sqrt{\kappa_2^2 \mu (1 - \kappa_2 t^2)} \right)}, \quad (5.25b)$$

όπου θέσαμε $\mu = \frac{16}{\kappa_2^2} - \kappa_1$. Για να μην υπάρχει αλλαγή στο πρόσημο και να παραμένουν οι $a(t)^2$ και $N(t)^2$ θετικές, το πεδίο ορισμού της μεταβλητής t πρέπει να περιοριστεί κατάλληλα ως προς τις σταθερές κ_2 και μ . Για παράδειγμα:

- Στην περίπτωση με $k = 1$ απαιτούμε να ισχύει

$$\kappa_2 t^2 > 2 \quad \text{και} \quad -4 (\kappa_2 t^2 - 2)^2 < \kappa_2^2 (\kappa_2 t^2 - 1) \mu \leq 0. \quad (5.26)$$

- Αντίθετα, αν $k = i$ πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$1 < \kappa_2 t^2 < 2 \quad \text{and} \quad -4 (\kappa_2 t^2 - 2)^2 < \kappa_2^2 (\kappa_2 t^2 - 1) \mu \leq 0. \quad (5.27)$$

Δεύτερος κλάδος. Στην περίπτωση αυτή η ρίζα εμφανίζεται με αντίθετο πρόσημο

$$a(t)^2 = -\frac{2 \left(k^2 (4 - 2\kappa_2 t^2) - \sqrt{\kappa_2^2 \mu (1 - \kappa_2 t^2)} \right)}{\kappa_2^2 t^2}, \quad (5.28a)$$

$$N(t)^2 = \frac{2\kappa_2^2 t^4}{(\kappa_2 t^2 - 1) \left(2k^2 (\kappa_2 t^2 - 2) - \sqrt{\kappa_2^2 \mu (1 - \kappa_2 t^2)} \right)}. \quad (5.28b)$$

Η απαίτηση να έχουμε θετικό $a(t)^2$ και $N(t)^2$ οδηγεί στις συνθήκες:

- Αν $k = 1$, τότε θα έχουμε είτε

$$1 < \kappa_2 t^2 < 2 \quad \text{και} \quad -4 (\kappa_2 t^2 - 2)^2 > \kappa_2^2 (\kappa_2 t^2 - 1) \mu \quad (5.29)$$

είτε

$$\kappa_2 t^2 > 2 \quad \text{και} \quad \mu \leq 0. \quad (5.30)$$

- Αντίθετα για $k = i$ έχουμε

$$1 < \kappa_2 t^2 < 2 \quad \text{και} \quad \mu \leq 0 \quad (5.31)$$

ή

$$\kappa_2 t^2 > 2 \quad \text{και} \quad -4 (\kappa_2 t^2 - 2)^2 > \kappa_2^2 (\kappa_2 t^2 - 1) \mu. \quad (5.32)$$

Ο αριθμός των σταθερών που εμφανίζονται στις λύσεις είναι ακριβώς αυτός που αναμένεται λόγω αξονικής συμμετρίας: $2 \times (\text{αριθμός ανεξάρτητων παραγόντων κλίμακας}) - 2 \times (\text{αριθμός πρώτης τάξης δεσμών}) \equiv 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$. Και οι δύο είναι ουσιώδεις, όπως φαίνεται από τον πίνακα Wronski $W_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial x^j}$ (όπου S_i είναι τα τετραδιάστατα βαθμωτά καμπυλότητας $K = R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda}$, $\square K$, $K_{,\mu} K_{,\nu} g^{\mu\nu}$ και $x^j = (t, \kappa_1, \kappa_2)$) ο οποίος έχει $\text{rank} = 3$. Αυτό σημαίνει ότι τα t, κ_1, κ_2 μπορούν να εκφραστούν σαν συνάρτηση των S_i .

5.0.2 Ειδική περίπτωση με $\kappa_2 = 0$

Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα των εξεταζόμενων εξισώσεων είναι απλούστερο. Πάλι ακολουθούμε την ίδια διαδικασία λύνοντας αλγεβρικά τις εξισώσεις (5.20b) και (5.20c) σε σχέση με τις ταχύτητες $u'(t)$ και $w'(t)$, όπου στο πρώτο έχουμε φυσικά $\kappa_2 = 0$. Η αντικατάσταση στην (5.20a) αποδίδει την ακόλουθη απλοποιημένη σχέση μεταξύ u και w

$$w(t) = \pm \frac{\sqrt{-\kappa_1 - 4u(t)^4}}{2k\sqrt{u(t)}}. \quad (5.33)$$

Η τελική λύση μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει (a, b, N) χωρίς συγκεκριμένη επιλογή χρόνου:

$$a(t)^2 = -\frac{4b(t)^4 + \kappa_1}{4k^2b(t)^2}, \quad (5.34a)$$

$$N(t)^2 = \frac{16k^2b(t)^4}{4b(t)^4 + \kappa_1} b'(t)^2, \quad (5.34b)$$

όπου, όταν $4b(t)^4 + \kappa_1 > 0$, παρατηρούμε ότι η λύση έχει ίχνος Λορέντζιαν αν $k = i$. Αντίθετα, όταν $k = 1$ βλέπουμε ότι το ίχνος γίνεται $(+, -, +, +)$. Όταν $4b(t)^4 + \kappa_1 < 0$ προκύπτει η αντίθετη κατάσταση. Η σταθερά κ_1 είναι ουσιώδης για τις αντίστοιχες γεωμετρίες.

Ως προετοιμασία για την κβαντική περίπτωση διερευνούμε όλες τις αβελιανές υποάλγεβρες μέσω των αγκύλων Poisson, που σχηματίζονται από τα τετραγωνικά φορτία και τον Χαμιλτονιανό δεσμό. Δεδομένου ότι οι αγκύλες Poisson των Q_{K_1} και Q_{K_2} είναι μη μηδενικές, οι μόνες πιθανές επιλογές είναι

$$\{\mathcal{H}, Q_{K_1}\} = 0 \quad \{\mathcal{H}, Q_{K_2}\} = 0. \quad (5.35)$$

Έτσι, μπορούμε να ελπίζουμε για δύο διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις που θα αντιστοιχούν στα κβαντικά ανάλογα των συνδυασμών \mathcal{H} και Q_{K_1} ή \mathcal{H} και Q_{K_2} .

Τέλος, χρειάζεται να σχολιάσουμε για το γραμμικό ομοθετικό διατηρήσιμο φορτίο το εξής: Ο μη τοπικός χαρακτήρας του αποκλείει κάθε χρήση του αντίστοιχου κβαντικού αναλόγου σε ολόκληρο τον θεσεογραφικό χώρο. Φυσικά, εάν κάποιος ήθελε να επιδοθεί στον ανηγμένο φασικό χώρο, όπου η πραγματική Χαμιλτονιανή διαμορφώνει τη δυναμική, τότε το μη τοπικό γραμμικό ολοκλήρωμα Q_h θα είναι ιδανικό για χρονική μεταβλητή και έτσι μπορεί να κατασκευαστεί μία κυματική εξίσωση τύπου Schrödinger για την κυματοσυνάρτηση Ψ .

5.1 Κβαντικές λύσεις

Στην περίπτωση μας η γραμμική ομοθετική συμμετρία παράγει ένα μη τοπικό φορτίο και επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα στον τετραδιάστατο χώρο φάσης, που παραμετρίζεται συναρτήσεως των (a, b, p_a, p_b) . Επομένως, στρεφόμεστε προς τα τετραγωνικά φορτία που παράγουν οι δύο Killing τανυστές: μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι οι σχετικοί μεταθέτες είναι μηδέν

$$[\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{K}_1]\Psi(a, b) = 0 \quad [\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{K}_2]\Psi(a, b) = 0. \quad (5.36)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για οποιοδήποτε $\Psi(a, b)$ ανεξάρτητα από το αν επιλύει ή όχι τον Χαμιλτονιανό δεσμό. Διαχωρίζουμε λοιπόν τις δύο Αβελιανές κβαντικές υποάλγεβρες $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{K}_1)$ και $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{K}_2)$.

Υποάλγεβρα $(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{K}_1)$

Αυτοί οι τελεστές δίνουν το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων για τις κυματοσυναρτήσεις

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}\Psi(u, w) = 0 \Rightarrow \\ \frac{u^3}{2w(4k^2u^3 + w^2)}\partial_u\partial_w\Psi(u, w) + \Psi(u, w) = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\widehat{K}_1\Psi(u, w) = \kappa_1\Psi(u, w) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 16\kappa_1\Psi(u, w) + w\partial_w\Psi(u, w) + w^2\partial_w\partial_w\Psi(u, w) + 4u\partial_u\Psi(u, w) + \\ -4uw\frac{4k^2u^3 - w^2}{4k^2u^3 + w^2}\partial_u\partial_w\Psi(u, w) + 4u^2\partial_u\partial_u\Psi(u, w) = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

όπου κ_1 είναι η σταθερά που εμφανίζεται στην κλασική λύση. Ως πρώτο βήμα στη διαδικασία λύσης, επιλύουμε τον δεσμό της Χαμιλτονιανής ως προς το $\partial_w\partial_u\Psi(u, w)$ και αντικαθιστούμε στην (5.38). Προκειμένου να καταστούν απλούστερες οι τελικές εξισώσεις και να δημιουργήσουμε ένα διαχωρίσιμο σύνολο εξισώσεων χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$\Psi(u, w) = f\left(\frac{u}{w^2}\right)g(uw^2), \quad u = \sqrt{x}\sqrt{y}, \quad w = \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}}, \quad (5.39)$$

οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο σύνολο εξισώσεων

$$\frac{y^2 g''(y)}{4g(y)} + \frac{y g'(y)}{4g(y)} + k^2 y = -\lambda^2 \quad (5.40)$$

$$\frac{x^2 f''(x)}{2f(x)} + \frac{x f'(x)}{2f(x)} + \kappa_1 - \frac{1}{2x^2} = \lambda^2. \quad (5.41)$$

Η γενική λύση στο παραπάνω σύστημα είναι

$$\Psi(u, w) = f\left(\frac{u}{w^2}\right) g(uw^2) \quad (5.42)$$

με

$$f\left(\frac{u}{w^2}\right) = c_1 \Gamma(\sqrt{-\kappa_1} + 1) I_{\sqrt{-\kappa_1}}\left(\frac{w^2}{u}\right) + c_2 \Gamma(1 - \sqrt{-\kappa_1}) I_{-\sqrt{-\kappa_1}}\left(\frac{w^2}{u}\right), \quad (5.43)$$

$$g(uw^2) = c_3 \Gamma(1 - 2i\sqrt{\kappa_1}) J_{-2i\sqrt{\kappa_1}}(4kw\sqrt{u}) + c_4 \Gamma(1 + 2i\sqrt{\kappa_1}) J_{2i\sqrt{\kappa_1}}(4kw\sqrt{u}), \quad (5.44)$$

όπου c_1 , c_2 , c_3 και c_4 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Η σταθερά σύζευξης λ που εμφανίζεται στις (5.40) και (5.41) έχει καθοριστεί από την σχέση τετραγωνικού δεσμού στη τιμή $\lambda = \pm \left(\frac{\kappa_1}{2}\right)^{1/2}$.

Υπόαλγεβρα ($\widehat{\mathcal{H}}$, \widehat{K}_2)

Οι αντίστοιχες εξισώσεις εξέρχονται από τον κβαντικό Χαμιλτονιανό δεσμό που δίνεται από την (5.37) και την δράση του \widehat{K}_2 στην κυματοσυνάρτηση

$$\widehat{K}_2 \Psi(a, b) = \kappa_2 \Psi(a, b) \Rightarrow$$

$$-\frac{u \partial_u \partial_w \Psi(u, w)}{2w(4k^2 u^3 + w^2)} - \frac{4\kappa_2 w^3 \Psi(u, w) + w \partial_w \partial_w \Psi(u, w) - \partial_w \Psi(u, w)}{4w^3} = 0 \quad (5.45)$$

Λύνουμε ξανά την (5.37) ως προς $\partial_w \partial_u \Psi(u, w)$, και αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση, με αποτέλεσμα την παρακάτω απλουστευμένη εξίσωση

$$\left(\frac{1}{u^2} - \kappa_2\right) \Psi(u, w) + \frac{\partial_w \Psi(u, w) - w \partial_w \partial_w \Psi(u, w)}{4w^3} = 0, \quad (5.46)$$

με την ακόλουθη γενική λύση:

$$\Psi(u, w) = d_2(u) \sin\left(\frac{w^2 \sqrt{\kappa_2 u^2 - 1}}{u}\right) + d_1(u) \cos\left(\frac{w^2 \sqrt{\kappa_2 u^2 - 1}}{u}\right). \quad (5.47)$$

Η μορφή των $d_2(u)$ και $d_1(u)$ καθορίζεται αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση για το $\Psi(u, w)$ στην εξίσωση (5.37) και θέτοντας μηδέν τους συντελεστές των ημίτονων και συνημίτονων στην προκύπτουσα εξίσωση. Το τελικό αποτέλεσμα δίνεται από την

$$\Psi(u, w) = \frac{u}{\sqrt{\kappa_2 u^2 - 1}} \left(c_5 e^{\frac{i\sqrt{\kappa_2 u^2 - 1}(4k^2 u + \kappa_2 w^2)}{\kappa_2 u}} + c_6 e^{-\frac{i\sqrt{\kappa_2 u^2 - 1}(4k^2 u + \kappa_2 w^2)}{\kappa_2 u}} \right) \quad (5.48)$$

όπου c_5, c_6 είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

5.2 Ερμηνεία με την χρήση του Ομοθετικού χρόνου

Αφού εξασφαλίσουμε την ύπαρξη κβαντικών καταστάσεων με απροσδιόριστες μόνο τις σταθερές, πρέπει τώρα να στραφούμε στο ζήτημα της ερμηνείας τους. Αυτό είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα στην κβαντική κοσμολογία (για μια συνολική ανασκόπηση των διαφόρων προσεγγίσεων βλέπε [14, 9]). Το κύριο πρόβλημα είναι το αναλλοιώτο της κλασσικής θεωρίας κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις του χρόνου, που μεταφέρεται στο κβαντικό επίπεδο μέσω της εξίσωσης WdW.

Στη συνήθη κβαντική μηχανική η κανονικοποίηση των καταστάσεων επιβάλλεται με ολοκλήρωση ως προς τις μεταβλητές του θεσεογραφικού χώρου αλλά όχι και ως προς τον χρόνο. Το πρόβλημα που προκύπτει στην κβαντική κοσμολογία είναι ότι οποιοσδήποτε συνδυασμός των μεταβλητών του θεσεογραφικού χώρου, για παράδειγμα το $\phi(a, b)$, πρέπει να επιτρέπεται να θεωρηθεί ως χρόνος. Κατά συνέπεια, στον ορισμό της πιθανότητας πρέπει να λάβουμε υπόψη αυτό το γεγονός. Από την άποψη αυτή έχουν αναπτυχθεί δύο βασικές προσεγγίσεις όπως αναπτύχθηκε στην ενότητα (2.2).

Στη συνέχεια υιοθετούμε τη δεύτερη προσέγγιση στην οποία ο χρόνος ορίζεται μετά την κβάντωση. Δεδομένου ότι τα δύο τετραγωνικά φορτία έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί στην προηγούμενη ενότητα για την παραγωγή των λύσεών μας, είναι εύλογο να στραφούμε προς το γραμμικό ομοθετικό φορτίο για να δικαιολογήσουμε την επιλογή του χρόνου.

Δεδομένου ότι η διάσταση του θεσεογραφικού χώρου είναι δύο, η αντίστοιχη στο ξ_h^μ 1-μορφή $\xi_{h\mu} \equiv G_{\mu\nu} \xi_h^\nu$ είναι απαραίτητως κλειστή, οπότε αναμένουμε ότι μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\xi_{h\mu} = -\omega(u, w) df(u, w). \quad (5.49)$$

Πράγματι, είναι απλό να επαληθεύσουμε ότι οι σωστές εκφράσεις είναι:

$$\omega(u, w) = \frac{3(4k^2u^3w^2 + w^4)}{4u^3f^{(1,0)}(u, w)} \quad f(u, w) = f(u^{3/2}w). \quad (5.50)$$

Η πρότασή μας είναι να επιλέξουμε ως φυσική χρονική μεταβλητή την ποσότητα $\tau = u^{3/2}w$. Επομένως, το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από τις ακόλουθες δύο μεταβλητές

$$(\tau, \chi) = (u^{3/2}w, \frac{\sqrt{u}}{\sqrt[3]{w}}), \quad (u, w) = \left(\sqrt[3]{\tau}\chi, \sqrt{\frac{\tau}{\chi^3}} \right), \quad (5.51)$$

στην οποία η μετασχηματισμένη μετρική του μίνιπερχώρου είναι διαγώνια

$$G_{\mu\nu}(\tau, \chi) = \begin{pmatrix} -\frac{2(4k^2\chi^6+1)}{3\tau^{2/3}\chi^8} & 0 \\ 0 & \frac{6\tau^{4/3}(4k^2\chi^6+1)}{\chi^{10}} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

με αντίστοιχο βαθμωτό Ricci $\mathcal{R} = -\frac{24k^2\chi^{14}}{\tau^{4/3}(4k^2\chi^6+1)^3}$. Βλέπουμε ότι υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία της καμπυλότητας της θεσεογραφικής πολλαπλότητας που περιγράφονται από την $(\tau = 0, \text{ για κάθε } \chi)$ στο μοντέλο *VIII* και $(\tau = 0, \text{ ή } \chi = (\frac{1}{2})^{1/3})$ για το μοντέλο *IX*. Αν παρατηρήσουμε ότι στις αρχικές μεταβλητές $a, b, \tau = ab^2, \chi = (\frac{b}{a})^{1/3}$ και λάβουμε υπόψιν τις κλασσικές λύσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $\tau = 0$ αντιστοιχεί στην τετραδιάστατη χωροχρονική μοναδικότητα καμπυλότητας, ενώ η τιμή $\chi = (\frac{1}{2})^{1/3}$ ποτέ δεν ισχύει επί των κλασσικών λύσεων. Αυτή η μοναδικότητα μεταφέρεται στη γεωμετρία του θεσεογραφικού χώρου μέσω ανακλιμάκωσης του αρχικού $N(t)$ και επομένως αντιστοιχεί στο μηδενισμό του βαθμωτού Ricci της τρισδιάστατης χωρικής φέτας. Οπότε δεν εμφανίζεται ποτέ για τα εξεταζόμενα μοντέλα. Επομένως, το εύρος της ολοκλήρωσης για τη μεταβλητή χ θα είναι αρχικά $(\frac{1}{2})^{1/3} < \chi < \infty$ στον ορισμό της κατά συνθήκη πιθανότητας.

Η πυκνότητα πιθανότητας ορίζεται χρησιμοποιώντας το φυσικό μέτρο

$$\mu(\tau, \chi) \equiv \sqrt{|\det G_{\mu\nu}(\tau, \chi)|} = \frac{2\sqrt[3]{\tau}(4k^2\chi^6 + 1)}{\chi^9} \quad (5.53)$$

ως

$$\rho(\tau, \chi) \equiv \mu(\tau, \chi)\Psi(\tau, \chi)\Psi^*(\tau, \chi) \quad (5.54)$$

Αν η ολοκλήρωση ως προς χ της παραπάνω συνάρτησης συγκλίνει σε κάποιο $\rho_0(\tau)$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την κατά συνθήκη πιθανότητα της κβαντικής

κατάστασης του σύμπαντος, στο διάστημα $(\tau, \chi) \rightarrow (\tau, \chi + d\chi)$, ως

$$P_\tau(\chi) \equiv \frac{\rho(\tau, \chi)}{\rho_0(\tau)} \quad (5.55)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το παραπάνω σκεπτικό στην περίπτωση της δεύτερης άλγεβρας. Υπάρχουν δύο ξεχωριστές περιοχές, ανάλογα με την τιμή της $\kappa_2 u^2 - 1 = \kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 - 1$ στην εκθετική συνάρτηση, η οποία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Η επακόλουθη κατάσταση είναι κανονικοποιήσιμη με βάση την παραπάνω υπό συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας, αφού ισχύει $\int_{(\frac{1}{2})^{1/3}}^{\infty} P_\tau(\chi) d\chi = 1$.

5.2.1 Δεύτερη Λύση

Η δεύτερη άλγεβρα δίνει την λύση (5.48), η οποία στις μεταβλητές χ, τ γράφεται

$$\Psi(\tau, \chi) = \frac{\chi \sqrt[3]{\tau}}{\sqrt{\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 - 1}} \left[c_5 e^{\left(\frac{i \sqrt{\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 - 1} (\kappa_2 \tau^{2/3} + 4k^2 \chi^4)}{\kappa_2 \chi^4} \right)} + c_6 e^{\left(-\frac{i \sqrt{\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 - 1} (\kappa_2 \tau^{2/3} + 4k^2 \chi^4)}{\kappa_2 \chi^4} \right)} \right], \quad (5.56)$$

Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε ότι $\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 < 1$ και η εξίσωση έχει εκθετικά φθίνουσα μορφή. Η κυματική εξίσωση στην περίπτωση αυτή είναι

$$\psi_{dec}(\tau, \chi) = \frac{\sqrt[3]{\tau} \chi \exp\left(-\frac{\sqrt{1 - \kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2} (4k^2 \chi^4 + \kappa_2 \tau^{2/3})}{\kappa_2 \chi^4}\right)}{\sqrt{1 - \kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2}} \quad (5.57)$$

όπου, για να είναι κανονικοποιήσιμη, κρατήσαμε μόνο τον όρο που μηδενίζεται όταν το χ τείνει στο μηδέν. Άρα η πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$\rho(\tau, \chi) = \frac{2\tau (4k^2 \chi^6 + 1) \exp\left(-\frac{2\sqrt{1 - \kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2} (4k^2 \chi^4 + \kappa_2 \tau^{2/3})}{\kappa_2 \chi^4}\right)}{\chi^7 (1 - \kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2)} \quad (5.58)$$

η οποία τείνει στο μηδέν για $\tau = 0$ και για $\chi = 2^{-1/3}$ για τα πρότυπα Bianchi IX.

Στην δεύτερη περίπτωση ισχύει $\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 > 1$. Σε αυτή τη περίπτωση και οι δύο όροι είναι αρμονικοί. Για την ανάλυση μας θα κρατήσουμε μόνο τις θετικές συχνότητες γιατί χρειαζόμαστε μόνο τα κύματα που διαδίδονται προς τα έξω. Άρα θέτοντας

$c_5 = 1$ και $c_4 = 0$, η λύση παίρνει την μορφή

$$\psi_1(\tau, \chi) = \frac{\chi \sqrt[3]{\tau} \exp\left(-\frac{i\sqrt{\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 - 1}(\kappa_2 \tau^{2/3} + 4k^2 \chi^4)}{\kappa_2 \chi^4}\right)}{\sqrt{\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^2 - 1}} \quad (5.59)$$

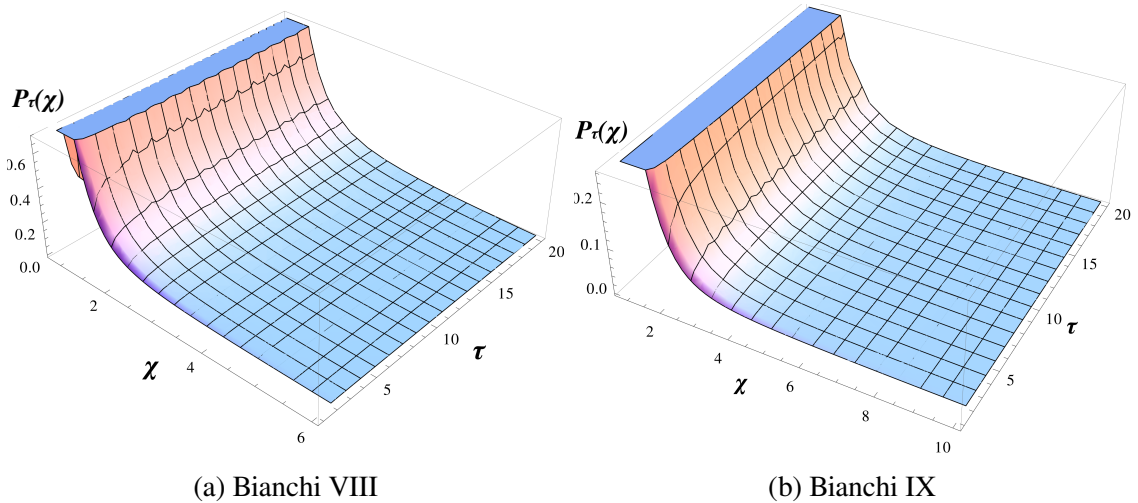
Το $\rho_0(\tau)$ που ορίσθηκε προηγουμένως δίνεται από την

$$\rho_0(\tau) = \frac{1}{3}\tau \left((4k^2 + \kappa_2^3 \tau^2) \ln\left(\frac{\kappa_2^3 \tau^2}{(\kappa_2 \tau^{2/3} - 2^{2/3})^3}\right) - 3\sqrt[3]{2}\kappa_2 \tau^{2/3}(\sqrt[3]{2}\kappa_2 \tau^{2/3} + 1) - 4 \right) \quad (5.60)$$

της οποίας την ύπαρξη και την πεπερασμένη συμπεριφορά εγγυάται η ανισότητα στην περίπτωση αυτή. Η αντίστοιχη κατά συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$P_\tau(\chi) \equiv \frac{\rho(\tau, \chi)}{\rho_0(\tau)} = \frac{2\tau(4k^2 \chi^6 + 1)}{\rho_0(\tau)(2\kappa_2 \tau^{2/3} \chi^9 - \chi^7)} \quad (5.61)$$

το οποίο μηδενίζεται για $\tau = 0$. Στο σχήμα (5.1) παρουσιάζεται η κανονικοποιημένη πυκνότητα πιθανότητας $P_\tau(\chi)$ σε σχέση με τ και χ . Σημειώστε ότι οι απεικονιζόμενες σειρές για τ και χ είναι αυτές που επιτρέπονται από τη βασική ανισότητα που αναφέρθηκε παραπάνω.



Σχήμα 5.1: Στα διαγράμματα εμφανίζεται η κανονικοποιημένη πυκνότητα πιθανότητας συναρτήσει των χ και τ για $\kappa_2 = 1$.

5.2.2 Πρώτη λύση

Στην περίπτωση αυτή η κυματοσυνάρτηση δίνεται από την (5.42) η οποία εκφράζεται συναρτήσει των τ και χ γράφεται

$$f_1(\tau, \chi) = C_1 I_{-\sqrt{-\kappa_1}} \left(\frac{\tau^{2/3}}{\chi^4} \right) + C_2 I_{\sqrt{-\kappa_1}} \left(\frac{\tau^{2/3}}{\chi^4} \right) \quad (5.62)$$

$$f_2(\tau, \chi) = C_3 J_{-2\sqrt{-\kappa_1}} \left(4k \frac{\tau^{2/3}}{\chi} \right) + C_3 J_{2\sqrt{-\kappa_1}} \left(4k \frac{\tau^{2/3}}{\chi} \right) \quad (5.63)$$

όπου οι συναρτήσεις Γάμμα ενσωματώθηκαν στις σταθερές C_i . Η κατάσταση είναι αρκετά περίπλοκη λαμβάνοντας υπόψιν ότι όλοι οι όροι του $\Psi^* \Psi$ περιέχουν Bessel συναρτήσεις. Δίνουμε μόνο τους περιορισμούς για το κ_2 που επιβάλλονται από την απαίτηση της κανονικοποίησης: Το μόνο ιδιάζον σημείο είναι στο $\chi \rightarrow +\infty$ με σταθερό τ , όπου τα ορίσματα γίνονται μικρά και τείνουν στο μηδέν. Αμφότερα τα J_μ και I_μ είναι προβληματικά στο μηδέν αν το μ είναι αρνητικό, ενώ ταυτόχρονα δεν είναι ένας ακέραιος αριθμός, $\mu \notin \mathbb{R}_- - \mathbb{Z}_-$. Για τις υπόλοιπες τιμές έχουμε $J_\mu(0) = I_\mu(0) = 0$, εκτός αν $\mu = 0$ για το οποίο $J_0(0) = I_0(0) = 1$.

1. Αν $\kappa_1 < 0$ τότε το μ είναι πραγματικό και μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

- (a) Στην πρώτη εξαλείφουμε τους κλάδους της λύσης που έχουν αρνητικό δείκτη θέτοντας $C_1 = C_3 = 0$ με αποτέλεσμα μια συνάρτηση κύματος

$$\Psi(\tau, \chi) = C_0 I_{\sqrt{-\kappa_1}} \left(\frac{\tau^{2/3}}{\chi^4} \right) J_{2\sqrt{-\kappa_1}} \left(4k \frac{\tau^{2/3}}{\chi} \right), \quad \kappa_1 < 0. \quad (5.64)$$

- (b) Στη δεύτερη κρατάμε και τους δύο κλάδους και περιορίζουμε το κ_1 έτσι ώστε $\sqrt{-\kappa_1} \in \mathbb{Z}_+$. Εντούτοις, στην περίπτωση αυτή, τα J_μ και $J_{-\mu}$ δεν είναι ανεξάρτητα λαμβάνοντας υπόψιν το $J_{-\mu} = (-1)^\mu J_\mu$. Το ίδιο ισχύει και για τα I_μ και $I_{-\mu}$ όταν $\mu \in \mathbb{Z}$, $I_{-\mu} = (-1)^\mu I_\mu$. Έτσι, καταλήγουμε ξανά στην ίδια κυματοσυνάρτηση όπως στην περίπτωση 1a, αλλά με μια διαφορετική συνθήκη για το κ_1 .

$$\Psi(\tau, \chi) = C_0 I_{\sqrt{-\kappa_1}} \left(\frac{\tau^{2/3}}{\chi^4} \right) J_{2\sqrt{-\kappa_1}} \left(4k \frac{\tau^{2/3}}{\chi} \right), \quad \sqrt{-\kappa_1} \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.65)$$

2. Αν το $\kappa_1 > 0$ τότε οι δείκτες γίνονται φανταστικοί, $\mu = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Οι προκύπτουσες συναρτήσεις Bessel είναι φραγμένες, αλλά το όριο στο μηδέν δεν

μπορεί να υπολογισθεί. Είναι όριο της μορφής

$$0^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln(0)} = \cos(\alpha \ln(0)) + i \sin(\alpha \ln(0)) = \cos(\infty) + i \sin(\infty), \quad (5.66)$$

και ταλαντώνεται στο μιγαδικό επίπεδο. Ωστόσο, οτιδήποτε και να επιλέξουμε τελικώς η κυματοσυνάρτηση θα είναι φραγμένη στο όριο $\chi \rightarrow +\infty$.

Οπότε, αν χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω περιορισμοί το γινόμενο $\Psi^*\Psi$ θα είναι πεπερασμένο και θα μπορούσε να γίνει μία ποιοτική ανάλυση όπως έγινε για την προηγούμενη περίπτωση.

5.3 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήσαμε τα μοντέλα μίνι-υπερχώρου των γεωμετριών από πρότυπα Bianchi VIII και IX LRS.

Στο κλασικό επίπεδο αναπαράγουμε τον χώρο λύσης μέσω της χρήσης των συμμετριών του θεσεογραφικού χώρου. Συγκεκριμένα, αυτές οι συμμετρίες παράγονται από ένα ομοθετικό πεδίο Killing και από δύο τανυστικά πεδία Killing δεύτερης τάξης. Μαζί με τον Χαμιλτονιανό δεσμό αυτά τα τέσσερα φορτία, όταν εκφράζονται στο φασικό χώρο, παρέχουν ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων για τις δύο χωρικές μεταβλητές και τις αντίστοιχες ταχύτητες. Η λύση του μας παρέχει την πλήρη λύση του προβλήματος. Εκτός από τις πολύ γνωστές λύσεις (5.25) και (5.28), η λύση (5.34) είναι, εξ όσων γνωρίζουμε, καινούργια. Όταν $\kappa_1 < 0$, παρουσιάζεται το ενδιαφέρον φαινόμενο της αλλαγής πρόσημου όταν το $b(t)$ εκτείνεται στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

Στο κβαντικό επίπεδο ακολουθήσαμε την κανονική μέθοδο κβάντωσης. Για να προσδιορίσουμε μια μοναδική κυματοσυνάρτηση (με μόνο άγνωστο τις σταθερές), χρησιμοποιήσαμε, εκτός από την εξίσωση δεσμού Wheeler-DeWitt, τους τελεστές που αντιστοιχούν σε Αβελιανές υποάλγεβρες που σχηματίζονται από τα δύο ζευγάρια που αποτελούνται από τον προαναφερθέντα δεσμό και από τους δύο τελεστές που αντιστοιχούν στις τετραγωνικές συμμετρίες.

Το γραμμικό μη τοπικό φορτίο έχει χρησιμοποιηθεί ως κατευθυντήρια γραμμή για την επιλογή ενός φυσικού χρόνου στο θεσεογραφικό χώρο και ως εκ τούτου καθορίζει μια κατά συνθήκη πιθανότητα με βάση την οποία οι κλασικά ιδιάζουσες περιοχές έχουν μηδενική πιθανότητα.

Τέλος, είναι σημαντικό να συζητήσουμε την ύπαρξη της έννοιας του ομοθετικού χρόνου που υιοθετήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο. Με την πρώτη ματιά, θα μπορούσε κάποιος να πει ότι αυτό συμβαίνει επειδή διαθέτουμε ένα θεσεογραφικό χώρο δύο διαστάσεων και κάθε μονομορφή είναι απαραίτητα κλειστή και ως εκ τούτου το ίδιο

ισχύει και για τη μονομορφή που αντιστοιχεί στον ομοθετικό διάνυσμα. Στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει αυτό: το ομοθετικό διάνυσμα υπάρχει (ως η μόνη γεννήτρια γραμμικής συμμετρίας) ακόμη και για την εντελώς ανισότροπη περίπτωση με $\gamma_{\alpha\beta} = \text{diag}(a^2(t), b^2(t), c^2(t))$ και η μονομορφή είναι και σε αυτή την περίπτωση κλειστή. Επομένως, η περιγραφόμενη διαδικασία ορισμού της κατά συνθήκης πιθανότητας που υιοθετήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο θα ισχύει επίσης και στην περίπτωση αυτή. Το ίδιο σκεπτικό ισχύει ακόμη και για έναν πλήρη πίνακα κλίμακας $\gamma_{\alpha\beta}$: η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι

$$L = n \left(\sqrt{\gamma} R L^{\alpha\beta\gamma\delta} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} - 1 \right),$$

όπου το $K_{\alpha\beta}$ είναι η συνηθισμένη εξωτερική καμπυλότητα της φέτας $t = \text{σταθερή}$ διαιρούμενη με $\sqrt{\gamma} R$, R είναι το τρισδιάστατο βαθμωτό Ricci και $L^{\alpha\beta\gamma\delta} = \gamma^{\alpha\gamma} \gamma^{\beta\delta} + \gamma^{\alpha\delta} \gamma^{\beta\gamma} - 2\gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta}$ επαναπαραμετροποιήσαμε την συνάρτηση παρόδου ως $N = \frac{n}{\sqrt{\gamma}} R$ ώστε το διάνυσμα $\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}$ να είναι γεννήτορας ομοθεσίας. Η αντίστοιχη ένα-μορφή $\sqrt{\gamma} R L^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\kappa\lambda} \gamma_{\alpha\beta} \sim R d\gamma$ είναι προφανώς κλειστή και άρα ο ομοθετικός χρόνος ορίζεται και πάλι. Είναι ενδιαφέρον ότι αυτός ο χρόνος συμπίπτει με τη γνωστή χρονοειδή μεταβλητή γ .

A

ΜΕΡΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

A.1 Σχέσεις ορθοκανονικότητας για την περίπτωση $\ell(\ell + 1) < 0$.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1.2, η περίπτωση $\ell(\ell + 1) > 0$ οδηγεί σε καθαρά διακριτό φάσμα για τα k και ℓ , όταν $k \in \mathbb{Z}_+$ και $\ell \in \mathbb{N}$ με $k > \ell$. Πηγαίνοντας πίσω στην κλασσική περίπτωση για να δούμε τι περιορισμούς θέτει η ανισότητα $k > \ell$ στις κλασσικές σταθερές, παρατηρούμε ότι αντιστοιχεί στην περίπτωση που $Q \geq M$. Συνεπώς, περιγράφει μία μελανή οπή (στατική και σφαιρικά συμμετρική) μόνο για την περίπτωση $Q = M$ και έναν χωρόχρονο με μία κλασσική γυμνή ανωμαλία όταν $Q > M$. Για να πάμε πέρα από την περιοχή $Q < M$ χρειάζεται να θέσουμε τις ιδιοκαταστάσεις $\ell(\ell + 1)$ του αναλλοίωτου Casimir να είναι αρνητικές. Αυτό μπορεί να γίνει αν επιτρέψουμε την ύπαρξη μιγαδικών κβαντικών αριθμών της μορφής $i s - 1/2$. Οπότε, χρειάζεται να μελετήσουμε την συμπεριφορά των $P_{is-1/2}^k(ix)$ και $Q_{is-1/2}^k(ix)$.

A.1.1 Ορθοκανονική συνθήκη για το $P_{is-1/2}^k(ix)$

Πρώτα από όλα πρέπει να ελέγξουμε αν η λύση ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν ώστε οι τελεστές να είναι Ερμιτιανοί. Στην περίπτωση μας, αυτό μεταφράζεται ως μηδενισμός της κυματοσυνάρτησης στο όριο

των πραγματικών αριθμών $(-\infty, +\infty)$ που είναι το πεδίο ορισμού της μεταβλητής $x = \sinh v$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά της $P_\ell^k(z)$, το οποίο ορίζεται όταν $|1 - z|/2 > 1$ και $2\ell \notin \mathbb{Z}$ ([41],[42]), οδηγούμαστε στην

$$P_\ell^k(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1+z)^{k/2}}{(1-z)^{k/2}} \left[\frac{2^\ell \Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell - k + 1)} (z-1)^\ell + \frac{2^{-\ell-1} \Gamma(-\ell - \frac{1}{2})}{\Gamma(-k - \ell)} (z-1)^{-\ell-1} + O\left(\frac{1}{1-z}\right) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Στην παραπάνω εξίσωση θέτουμε $\ell = is - 1/2$, $z = ix$ οπότε ορίζονται δύο περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του x :

- Περίπτωση $x \gg 1$: Η προσέγγιση $ix - 1 \simeq ix$, επιπρόσθετα με το γεγονός ότι $\frac{(1+ix)^{k/2}}{(1-ix)^{k/2}} \rightarrow e^{ik\pi/2}$ όσο το x τείνει στο συν άπειρο, οδηγεί στην

$$P_{is-1/2}^k(ix) \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} (\alpha_{k,s} x^{is} + \beta_{k,s} x^{-is}) \quad (\text{A.2})$$

με

$$\alpha_{k,s} = \frac{2^{is}}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(is)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + is)} e^{-s\frac{\pi}{2}} \quad (\text{A.3a})$$

$$\beta_{k,s} = \alpha_{k,-s} \quad (\text{A.3b})$$

- Περίπτωση $x \ll -1$: Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1+ix)^{k/2}}{(1-ix)^{k/2}} \rightarrow e^{-ik\pi/2}$ και ξανά το $ix - 1 \simeq ix$ καταλήγουμε στην

$$P_{is-1/2}^k(ix) \simeq \frac{1}{\sqrt{-x}} (\zeta_{k,s} (-x)^{is} + \eta_{k,s} (-x)^{-is}) \quad (\text{A.4})$$

όπου

$$\zeta_{k,s} = \frac{2^{is}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(is)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + is)} e^{s\frac{\pi}{2}} \quad (\text{A.5a})$$

$$\eta_{k,s} = \zeta_{k,-s} \quad (\text{A.5b})$$

Συνεπώς, όπως φαίνεται από τις (A.2) και (A.4), το $P_{is-1/2}^k(ix)$ μηδενίζεται στα όρια $(-\infty, +\infty)$ ικανοποιώντας έτσι τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες.

Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \sinh v$ στην (3.24) η τελευταία εξί-

σωση παίρνει την μορφή της προσαρτημένης εξίσωσης Legendre με λύσεις τις αντίστοιχες συναρτήσεις με φανταστικά ορίσματα. Αν τώρα $W_\ell^k(ix)$ και $W_n^m(ix)$ είναι κάποια από τις δύο προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre, τότε οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x^2) \frac{dW_\ell^k}{dx} \right] - \left[\ell(\ell+1) - \frac{k^2}{1+x^2} \right] W_\ell^k = 0 \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x^2) \frac{dW_n^m}{dx} \right] - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1+x^2} \right] W_n^m = 0 \quad (\text{A.6b})$$

ισχύουν ταυτοτικά. Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη με W_n^m , την δεύτερη με W_ℓ^k και τις συνδυάσουμε, παίρνουμε την

$$\left[(\ell-n)(\ell+n+1) - \frac{k^2-m^2}{1+x^2} \right] W_\ell^k W_n^m = \frac{d}{dx} \left[(1+x^2) \left(W_n^m \frac{dW_\ell^k}{dx} - W_\ell^k \frac{dW_n^m}{dx} \right) \right],$$

η οποία για $k = m$ και $\ell \neq n$ γίνεται

$$(\ell+n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} W_\ell^k(ix) W_n^m(ix) dx = \left[\frac{1+x^2}{\ell-n} \left(W_n^m \frac{dW_\ell^k}{dx} - W_\ell^k \frac{dW_n^m}{dx} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty}. \quad (\text{A.7})$$

Αντικαθιστούμε στην συνέχεια το W_ℓ^k με το P_ℓ^k και το W_n^m με το μιγαδικά συζυγές του. Θέτοντας $\ell = is - 1/2$ και $n = ip - 1/2$ με $s, p \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} P_{is-1/2}^k(ix) (P_{ip-1/2}^k(ix))^* dx = \\ & = \left[\frac{1+x^2}{p^2-s^2} \left((P_{ip-1/2}^k)^* \frac{dP_{is-1/2}^k}{dx} - P_{is-1/2}^k \frac{d(P_{ip-1/2}^k)^*}{dx} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (\text{A.8}) \\ & = \left[\frac{1}{p^2-s^2} \mathcal{A}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει το όριο της παραπάνω έκφρασης στο $\pm\infty$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγιστικές σχέσεις (A.2) και (A.4). Αρχικά, για την περίπτωση με $x > 0$ και με χρήση της σχέσης Euler $x^{is} = \cos(s \ln x) + i \sin(s \ln x)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για $x \gg 1$, η $\mathcal{A}(x)$ γίνεται

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x)|_{x \gg 1} =: \mathcal{A}_+(x) = & i(p+s) \cos[(p-s) \ln x] (\alpha_{k,p}^* \alpha_{k,s} - \beta_{k,p}^* \beta_{k,s}) \\ & + i(p-s) \cos[(p+s) \ln x] (\alpha_{k,p}^* \beta_{k,s} - \beta_{k,p}^* \alpha_{k,s}) \\ & + (p+s) \sin[(p-s) \ln x] (\alpha_{k,p}^* \alpha_{k,s} + \beta_{k,p}^* \beta_{k,s}) \\ & + (p-s) \sin[(p+s) \ln x] (\alpha_{k,p}^* \beta_{k,s} + \beta_{k,p}^* \alpha_{k,s}). \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο (δεδομένου ότι για τους υπολογισμούς στο συνεχές φάσμα που αφορούν την κυματοσυνάρτηση απαιτούνται ολοκληρώματα για τις ιδιοτιμές) επιλέγουμε να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα της (A.8) με κατανομή. Είναι γνωστό από το λήμμα Riemann-Lebesgue ότι

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(s) \cos(sy) ds = 0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(s) \sin(sy) ds \quad (\text{A.9})$$

για κάθε L^1 ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(s)$ στο \mathbb{R} . Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας την

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isy} dy = 2\pi\delta(s)$$

προκύπτει ως πόρισμα η

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sin(sy)}{s} = \pi\delta(s) \quad (\text{A.10})$$

όπου $\delta(s)$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac και η (A.10) υπολογίζεται ως

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(s) \frac{\sin(sy)}{s} ds = \pi f(0),$$

$f(s)$ είναι μία δοκιμαστική συνάρτηση που χρησιμεύει για την εφαρμογή της θεωρίας κατανομής (και είναι απείρως διαφορίσιμη και συμπαγής). Με την βοήθεια των (A.9), (A.10) και με αλλαγή μεταβλητών $y = \ln x$ μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_+(y) = \pi \left[(\alpha_{k,p}^* \alpha_{k,s} + \beta_{k,p}^* \beta_{k,s}) \delta(p-s) + (\alpha_{k,p}^* \beta_{k,s} + \beta_{k,p}^* \alpha_{k,s}) \delta(p+s) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Για την περίπτωση όπου $x < 0$ η αντίστοιχη έκφραση για $\mathcal{A}(x)$ στο όριο $x \ll -1$ γράφεται

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x)|_{x \ll -1} =: \mathcal{A}_-(x) = & i(p+s) \cos[(p-s) \ln(-x)] (\eta_{k,p}^* \eta_{k,s} - \zeta_{k,p}^* \zeta_{k,s}) \\ & + i(p-s) \cos[(p+s) \ln(-x)] (\eta_{k,p}^* \zeta_{k,s} - \zeta_{k,p}^* \eta_{k,s}) \\ & - (p+s) \sin[(p-s) \ln(-x)] (\zeta_{k,p}^* \zeta_{k,s} + \eta_{k,p}^* \eta_{k,s}) \\ & - (p-s) \sin[(p+s) \ln(-x)] (\zeta_{k,p}^* \eta_{k,s} + \eta_{k,p}^* \zeta_{k,s}). \end{aligned}$$

και με αλλαγή μεταβλητής $y = \ln(-x)$ οδηγεί στην

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_-(y) = -\pi \left[(\zeta_{k,p}^* \zeta_{k,s} + \eta_{k,p}^* \eta_{k,s}) \delta(p-s) + (\zeta_{k,p}^* \eta_{k,s} + \eta_{k,p}^* \zeta_{k,s}) \delta(p+s) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Τέλος, εισάγοντας την (A.11) και την (A.12) στην (A.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{is-1/2}^k(ix)(P_{ip-1/2}^k(ix))^* dx = \pi \left[\delta(p-s)(\alpha_{k,p}^* \alpha_{k,s} + \beta_{k,p}^* \beta_{k,s} + \zeta_{k,p}^* \zeta_{k,s} + \eta_{k,p}^* \eta_{k,s}) \right. \\ \left. + \delta(p+s)(\alpha_{k,p}^* \beta_{k,s} + \beta_{k,p}^* \alpha_{k,s} + \zeta_{k,p}^* \eta_{k,s} + \eta_{k,p}^* \zeta_{k,s}) \right]$$

και έπειτα από αντικατάσταση της (A.3) και της (A.5) παράγουμε την παρακάτω σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{is-1/2}^k(ix)(P_{ip-1/2}^k(ix))^* dx = A(p,s)\delta(p-s) + A(p,-s)\delta(p+s) \quad (\text{A.13})$$

όπου

$$A(p,s) = \cosh[(p+s)\frac{\pi}{2}] \left[\frac{2^{-i(p-s)}\Gamma(-ip)\Gamma(is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-ip)\Gamma(\frac{1}{2}-k+is)} \right. \\ \left. + \frac{2^{i(p-s)}\Gamma(ip)\Gamma(-is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+ip)\Gamma(\frac{1}{2}-k-is)} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Ως εκ τούτου, καταλήγουμε σε μία συμμετρική συνάρτηση ως προς την αλλαγή $s \rightarrow -s$ (ή $p \rightarrow -p$). Υπενθυμίζουμε ότι και το s και το $-s$ αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή $\ell(\ell + 1) = -\frac{1}{4} - s^2$.

A.1.2 Ορθοκανονικότητα για τις $Q_{is-1/2}^k(ix)$

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre δεύτερου είδους, για $|z| > 1$ μπορούν να γραφτούν ως [42]

$$Q_\ell^k(z) = \frac{2^{-(\ell+2)} e^{ik\pi} \sqrt{\pi} (1-z^2)^{k/2}}{\cos(\ell\pi) z^{k+\ell+1}} \left[(\cos[(k-\ell)\pi] + e^{i(\ell-k)\pi}) \frac{\Gamma(k+\ell+1)}{\Gamma(\ell+\frac{3}{2})} \right. \\ \left. + i 2^{2\ell+1} \sin[(k-\ell)\pi] \frac{\Gamma(k-\ell)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\ell)} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (\text{A.15})$$

Και πάλι κάνουμε διάκριση σε δύο περιπτώσεις, θέτοντας αρχικά $z = ix$ και $\ell = is - 1/2$:

- Περίπτωση $x \gg 1$: Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση $1 + ix \simeq ix$ και ακολου-

θώντας την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη ενότητα παράγουμε την

$$Q_{is-1/2}^k(ix) \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\tilde{\alpha}_{k,s} x^{is} + \tilde{\beta}_{k,s} x^{-is} \right) \quad (\text{A.16})$$

με

$$\tilde{\alpha}_{k,s} = \frac{2^{is}}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{s\pi}{2}} e^{-i(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \coth(s\pi) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} - is)}{\Gamma(1 - is)} \quad (\text{A.17a})$$

$$\tilde{\beta}_{k,s} = \frac{2^{-is}}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{s\pi}{2}} e^{-i(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} (2 - \coth(s\pi)) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} + is)}{\Gamma(1 + is)} \quad (\text{A.17b})$$

- Περίπτωση $x \ll -1$: Με παρόμοιο τρόπο οδηγούμαστε στην

$$Q_{is-1/2}^k(ix) \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\tilde{\zeta}_{k,s} (-x)^{is} + \tilde{\eta}_{k,s} (-x)^{-is} \right) \quad (\text{A.18})$$

όπου

$$\tilde{\zeta}_{k,s} = \frac{2^{is}}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{s\pi}{2}} e^{i(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \coth(s\pi) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} - is)}{\Gamma(1 - is)} \quad (\text{A.19a})$$

$$\tilde{\eta}_{k,s} = \frac{2^{-is}}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{s\pi}{2}} e^{i(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} (2 - \coth(s\pi)) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} + is)}{\Gamma(1 + is)}. \quad (\text{A.19b})$$

Βλέπουμε ξανά ότι και για τις δύο περιπτώσεις η λύση έχει τη μορφή $Q_{is-1/2}^k(ix)$ και ικανοποιεί τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες καθώς φθίνει συναρτήσει της $x^{-1/2}$ όταν το x πλησιάζει το άπειρο. Ας εργαστούμε τώρα στη σχέση ορθοκανονικότητας με τη χρήση της (A.7) στη μορφή

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{is-1/2}^k(ix) (Q_{ip-1/2}^k(ix))^* dx &= \\ &= \left[\frac{1+x^2}{p^2-s^2} \left((Q_{ip-1/2}^k)^* \frac{dQ_{is-1/2}^k}{dx} - Q_{is-1/2}^k \frac{d(Q_{ip-1/2}^k)^*}{dx} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \left[\frac{1}{p^2-s^2} \mathcal{B}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Για μεγάλα ορίσματα μπορούμε να γράψουμε το $\mathcal{B}(x)$ ως

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x)|_{x \gg 1} =: \mathcal{B}_+(x) = & i(p+s) \cos[(p-s) \ln x] \left(\tilde{\alpha}_{k,p}^* \tilde{\alpha}_{k,s} - \tilde{\beta}_{k,p}^* \tilde{\beta}_{k,s} \right) \\ & + i(p-s) \cos[(p+s) \ln x] \left(\tilde{\alpha}_{k,p}^* \tilde{\beta}_{k,s} - \tilde{\beta}_{k,p}^* \tilde{\alpha}_{k,s} \right) \\ & + (p+s) \sin[(p-s) \ln x] \left(\tilde{\alpha}_{k,p}^* \tilde{\alpha}_{k,s} + \tilde{\beta}_{k,p}^* \tilde{\beta}_{k,s} \right) \\ & + (p-s) \sin[(p+s) \ln x] \left(\tilde{\alpha}_{k,p}^* \tilde{\beta}_{k,s} + \tilde{\beta}_{k,p}^* \tilde{\alpha}_{k,s} \right), \end{aligned}$$

ενώ για μεγάλα, κατά απόλυτη τιμή, αρνητικά x έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x)|_{x \ll -1} =: \mathcal{B}_-(x) = & i(p+s) \cos[(p-s) \ln(-x)] \left(\tilde{\eta}_{k,p}^* \tilde{\eta}_{k,s} - \tilde{\zeta}_{k,p}^* \tilde{\zeta}_{k,s} \right) \\ & + i(p-s) \cos[(p+s) \ln(-x)] \left(\tilde{\eta}_{k,p}^* \tilde{\zeta}_{k,s} - \tilde{\zeta}_{k,p}^* \tilde{\eta}_{k,s} \right) \\ & - (p+s) \sin[(p-s) \ln(-x)] \left(\tilde{\zeta}_{k,p}^* \tilde{\zeta}_{k,s} + \tilde{\eta}_{k,p}^* \tilde{\eta}_{k,s} \right) \\ & - (p-s) \sin[(p+s) \ln(-x)] \left(\tilde{\zeta}_{k,p}^* \tilde{\eta}_{k,s} + \tilde{\eta}_{k,p}^* \tilde{\zeta}_{k,s} \right). \end{aligned}$$

Για μία ακόμα φορά η εφαρμογή της (A.9) και της (A.10) οδηγεί στην

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{B}_+(y) = \pi \left[\left(\tilde{\alpha}_{k,p}^* \tilde{\alpha}_{k,s} + \tilde{\beta}_{k,p}^* \tilde{\beta}_{k,s} \right) \delta(p-s) + \left(\tilde{\alpha}_{k,p}^* \tilde{\beta}_{k,s} + \tilde{\beta}_{k,p}^* \tilde{\alpha}_{k,s} \right) \delta(p+s) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{B}_-(y) = -\pi \left[\left(\tilde{\zeta}_{k,p}^* \tilde{\zeta}_{k,s} + \tilde{\eta}_{k,p}^* \tilde{\eta}_{k,s} \right) \delta(p-s) + \left(\tilde{\zeta}_{k,p}^* \tilde{\eta}_{k,s} + \tilde{\eta}_{k,p}^* \tilde{\zeta}_{k,s} \right) \delta(p+s) \right] \quad (\text{A.22})$$

όπου έχουμε θεωρήσει μία νέα μεταβλητή $y = \ln |x|$ σε κάθε περίπτωση. Ως αποτέλεσμα έχουμε τις ακόλουθες ορθοκανονικές συνθήκες

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{is-1/2}^k(ix) (Q_{ip-1/2}^k(ix))^* dx = B_1(p,s) \delta(p-s) + B_2(p,-s) \delta(p+s) \quad (\text{A.23})$$

με

$$\begin{aligned} B_1(p,s) = & \frac{\pi}{4} \cosh\left[\frac{(p+s)\pi}{2}\right] \left[2^{-i(p-s)} \coth(p\pi) \coth(s\pi) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} + ip) \Gamma(k + \frac{1}{2} - is)}{\Gamma(1+ip) \Gamma(1-is)} \right. \\ & \left. + 2^{i(p-s)} (2 - \coth(p\pi)) (2 - \coth(s\pi)) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} - ip) \Gamma(k + \frac{1}{2} + is)}{\Gamma(1-ip) \Gamma(1+is)} \right] \end{aligned}$$

και

$$B_2(p, s) = \frac{\pi}{4} \cosh\left[\frac{(p-s)\pi}{2}\right] \left[2^{-i(p+s)} \coth(p\pi) (2 - \coth(s\pi)) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} + ip)\Gamma(k + \frac{1}{2} + is)}{\Gamma(1 + ip)\Gamma(1 + is)} \right. \\ \left. + 2^{i(p+s)} \coth(s\pi) (2 - \coth(p\pi)) \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2} - ip)\Gamma(k + \frac{1}{2} - is)}{\Gamma(1 - ip)\Gamma(1 - is)} \right].$$

Όπως φαίνεται η (Α.23) δεν έχει συμμετρία κατοπτρισμού $p \rightarrow -p$ or $s \rightarrow -s$. Οπότε, ακόμη και αν τα s και $-s$, οδηγούν για παράδειγμα στις ίδιες ιδιοτιμές $\ell(\ell + 1) = -\frac{1}{4} - s^2$, έχουν διαφορετικά πλάτη πιθανότητας σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει αν κάποιος χρησιμοποιήσει την λύση $P_{is-1/2}^k(ix)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Andreas Wipf. Hamilton's formalism for systems with constraints. In *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, pages 22–58. Springer, 1994.
- [2] Paul Adrien Maurice Dirac. *Lectures on quantum mechanics*, volume 2. Courier Corporation, 2001.
- [3] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. *Gravitation: an introduction to current research*, 1962.
- [4] T Christodoulakis, G Kofinas, E Korfiatis, GO Papadopoulos, and A Paschos. Time-dependent automorphism inducing diffeomorphisms in vacuum bianchi cosmologies and the complete closed form solutions for types ii and v. *Journal of Mathematical Physics*, 42(8):3580–3608, 2001.
- [5] T Christodoulakis, E Korfiatis, and GO Papadopoulos. Automorphism inducing diffeomorphisms, invariant characterization of homogeneous 3-spaces and hamiltonian dynamics of bianchi cosmologies. *Communications in mathematical physics*, 226(2):377–391, 2002.
- [6] T Christodoulakis and Petros A Terzis. Automorphisms and a cartography of the solution space for vacuum bianchi cosmologies: The type iii case. *Journal of mathematical physics*, 47(10):102502, 2006.
- [7] T Christodoulakis and Petros A Terzis. The general solution of bianchi type iii vacuum cosmology. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 68, page 012039. IOP Publishing, 2007.

- [8] T Christodoulakis, G Kofinas, E Korfiatis, GO Papadopoulos, and A Paschos. Time-dependent automorphism inducing diffeomorphisms in vacuum bianchi cosmologies and the complete closed form solutions for types ii and v. *Journal of Mathematical Physics*, 42(8):3580–3608, 2001.
- [9] K Kuchař. *J. Math. Phys.*, 23:1647, 1982.
- [10] Andreas Koutras. Killing tensors from conformal killing vectors. *Classical and Quantum Gravity*, 9(6):1573, 1992.
- [11] Karel Kuchar. Canonical quantum gravity. *General relativity and gravitation*, 1992:119–50, 1993.
- [12] Ashtekar Abhay. *Lectures on non-perturbative canonical gravity*, volume 6. World Scientific, 1991.
- [13] Rafael De la Madrid. The role of the rigged hilbert space in quantum mechanics. *European journal of physics*, 26(2):287, 2005.
- [14] Chris J Isham. Canonical quantum gravity and the problem of time. In *Integrable systems, quantum groups, and quantum field theories*, pages 157–287. Springer, 1993.
- [15] Karel V Kuchař. Time and interpretations of quantum gravity. *International Journal of Modern Physics D*, 20(supp01):3–86, 2011.
- [16] Boris L Al'tshuler and Andrei O Barvinsky. Quantum cosmology and physics of transitions with a change of the spacetime signature. *Physics-Uspekhi*, 39(5):429, 1996.
- [17] T Christodoulakis and E Korfiatis. Contact transformations and the quantisation of constraint systems. *Physics Letters B*, 256(3-4):457–464, 1991.
- [18] S Benenti. An outline of the geometrical theory of the separation of variables in the hamilton-jacobi and schrödinger equations. In *Symmetry And Perturbation Theory*, pages 10–17. World Scientific, 2002.
- [19] T Christodoulakis, N Dimakis, Petros A Terzis, Babak Vakili, E Melas, and Th Grammenos. Minisuperspace canonical quantization of the reissner-nordström black hole via conditional symmetries. *Physical Review D*, 89(4):044031, 2014.

- [20] N Dimakis, A Karagiorgos, T Pailas, Petros A Terzis, and T Christodoulakis. Discrete spectrum of the quantum reissner-nordström geometry. *Physical Review D*, 95(8):086016, 2017.
- [21] H Reissner. *Annalen der Physik*, 50(106), 1916.
- [22] G. Nordström. Verhandl. koninkl. ned. akad. wetenschap., afdel. natuurk., amsterdam. 26:1201–1208, 1918.
- [23] LD Landau and EM Lifshitz. Quantum mechanics: Non-relativistic theory pergamon. *New York*, page 248, 1958.
- [24] Francisco Correa, Vít Jakubský, and Mikhail S Plyushchay. Aharonov–bohm effect on ads₂ and nonlinear supersymmetry of reflectionless pöschl–teller system. *Annals of Physics*, 324(5):1078–1094, 2009.
- [25] Shi-Hai Dong. *Factorization method in quantum mechanics*, volume 150. Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] A Karagiorgos, T Pailas, N Dimakis, Petros A Terzis, and T Christodoulakis. Quantum cosmology of a bianchi iii lrs geometry coupled to a source free electromagnetic field. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(03):030, 2018.
- [27] GF R Ellis. Dynamics of pressure-free matter in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 8(5):1171–1194, 1967.
- [28] George FR Ellis and Malcolm AH MacCallum. A class of homogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 12(2):108–141, 1969.
- [29] José P Mimoso and Paulo Crawford. Shear-free anisotropic cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):315, 1993.
- [30] Saulo Carneiro and Guillermo A Mena Marugán. Anisotropic cosmologies containing isotropic background radiation. *Physical Review D*, 64(8):083502, 2001.
- [31] Tomi S Koivisto, David F Mota, Miguel Quartin, and Tom G Zlosnik. Possibility of anisotropic curvature in cosmology. *Physical Review D*, 83(2):023509, 2011.
- [32] Subrahmanyan Chandrasekhar and Basilis C Xanthopoulos. On colliding waves in the einstein—maxwell theory. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 398(1815):223–259, 1985.

- [33] Subrahmanyam Chandrasekhar. Cylindrical waves in general relativity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 408(1835):209–232, 1986.
- [34] J. E. Roberts. *Commun. Math. Phys.*, 3:98–119, 1996.
- [35] Leslie E Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development Second Edition*. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [36] Tracy Yerkes Thomas. The differential invariants of generalized spaces. 1934.
- [37] Theodosios Christodoulakis, Alexandros Karagiorgos, and Adamantia Zampeli. Symmetries in classical and quantum treatment of einstein’s cosmological equations and mini-superspace actions. *Symmetry*, 10(3):70, 2018.
- [38] T Christodoulakis and E Korfiatis. Variational principles vs. spatial homogeneity. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 109(11):1155–1168, 1994.
- [39] T Christodoulakis, N Dimakis, and Petros A Terzis. Lie point and variational symmetries in minisuperspace einstein gravity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(9):095202, 2014.
- [40] N Dimakis, A Karagiorgos, Adamantia Zampeli, Andronikos Paliathanasis, T Christodoulakis, and Petros A Terzis. General analytic solutions of scalar field cosmology with arbitrary potential. *Physical Review D*, 93(12):123518, 2016.
- [41] Milton Abramowitz. Handbook of mathematical functions, national bureau of standards. *Applied Mathematics Series*, (55), 1964.
- [42] The wolfram function site.