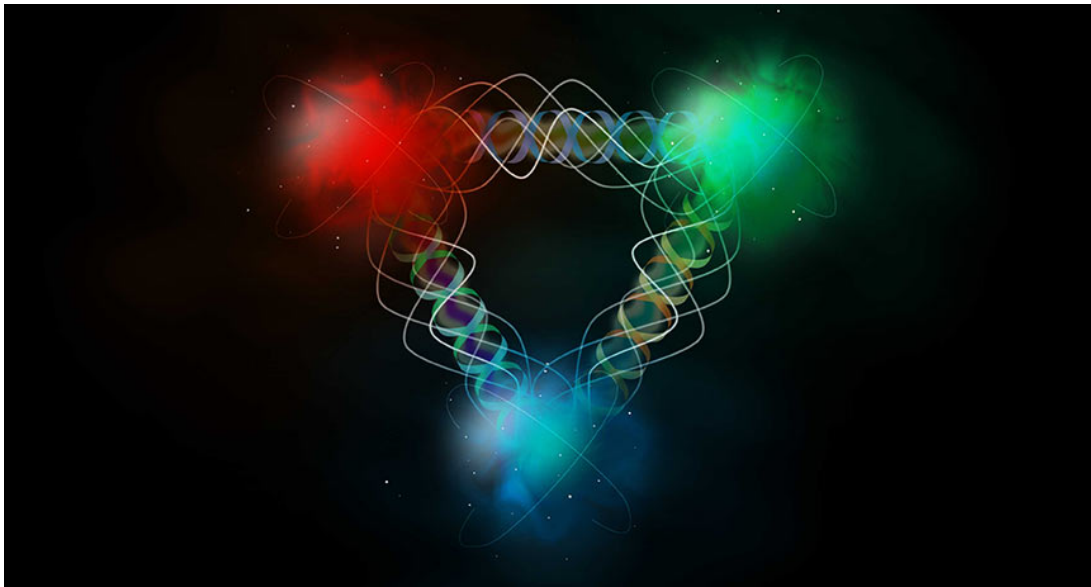


# Γνήσια Κβαντική Διεμπλοκή τριών qubits

Αδαμάντιος Αναστασιάδης

Διπλωματική εργασία για το ΠΜΣ  
Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του Φυσικού Αθήνας



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων



National and Kapodistrian  
UNIVERSITY OF ATHENS



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>iii</b>
<b>2</b>	<b>Κβαντική Διεμπλοκή δύο qubits</b>	<b>1</b>
2.1	To qubit . . . . .	1
2.2	Δύο qubits . . . . .	2
2.3	Ποσοτικοποίηση της κβαντικής διεμπλοκής . . . . .	4
2.3.1	Εντροπία von Neumann . . . . .	5
2.3.2	Schmidt decomposition . . . . .	7
2.3.3	Concurrence . . . . .	8
2.4	Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Κβαντική Διεμπλοκή τριών qubits</b>	<b>13</b>
3.1	3 qubits . . . . .	13
3.2	4 qubits . . . . .	16
3.3	Schmidt decomposition σε σύστημα τριών qubits . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Δυναμικό σύστημα δύο qubits</b>	<b>17</b>
4.1	Εντροπία von Neumann και Concurrence για δυναμικό σύστημα 2 qubits . . .	17
4.2	Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων για δυναμικό σύστημα 2 qubits . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Δυναμικό σύστημα τριών qubits</b>	<b>21</b>
5.1	Εντροπία von Neumann και Concurrence για δυναμικό σύστημα με 3 qubits . .	21
5.2	Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων για δυναμικό σύστημα με 3 qubits . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Appendix A</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Appendix B</b>	<b>29</b>



# 1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την κβαντική διεμπλοκή συστήματος τριών qubits. Η κβαντική διεμπλοκή  $n$  qubits με  $n > 2$  είναι ανοιχτό ζήτημα έρευνας και έχει μεγάλη σημασία για την δυνατότητα κατασκευής κβαντικών υπολογιστών. Στην παρούσα φάση δεν υπάρχουν ακόμα επαρκή μέτρα της κβαντικής διεμπλοκής για περισσότερα από δύο συστήματα τα οποία αναπτύσσουν κβαντικές συσχετίσεις. Ακόμα δεν υπάρχουν σαφή κριτήρια για το πότε μια κατάσταση ενός συστήματος που αποτελείται από υποσυστήματα ενέχει κβαντικές συσχετίσεις ή όχι. Το μόνο κριτήριο που υπάρχει στην διάθεσή μας είναι το κριτήριο Horodecki-Peres [19], το οποίο αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης του entanglement σε χώρους  $2 \otimes 2$  και  $2 \otimes 3$  (qubits και qutrits). Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε αρχικά κάποιες βασικές έννοιες και τον παραδοσιακό ορισμό της κβαντικής διεμπλοκής για δύο qubits. Στη συνέχεια εισάγουμε κάποια ευρέως χρησιμοποιούμενα μέτρα της κβαντικής διεμπλοκής όπως η εντροπία von Neumann και η Concurrence. Εξετάζουμε τα μέτρα αυτά στην περίπτωση ενός συστήματος που αποτελείται από δύο qubits και στην περίπτωση ενός συστήματος που αποτελείται από τρία qubits. Περαιτέρω εξετάζουμε την λεγόμενη Schmidt Decomposition και αναδεικνύονται οι λόγοι για τους οποίους αυτή δεν λειτουργεί σε σύστημα αποτελούμενο από τρία qubits. Τέλος εισάγουμε ένα νέο κριτήριο το οποίο ισχυριζόμαστε ότι αποτελεί ικανή συνθήκη για να χαρακτηριστεί μια κλάση καταστάσεων ως προς το αν περιέχει κβαντικές συσχετίσεις ή όχι.

## Ένα σχόλιο για τον φορμαλισμό :

Σε διάφορα σημεία του κειμένου χρησιμοποιούμε την σύμβαση  $\hbar/2 = 1$ . Αυτό συμβαίνει χάριν απλοποίησης των εξισώσεων, προκειμένου να μην εμφανίζονται διαρκώς οι ίδιες σταθερές. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι μια κατάσταση με ιδιοτιμή  $\hbar/2$  θα εμφανίζεται στις εξισώσεις με ιδιοτιμή 1, ενώ μια κατάσταση με ιδιοτιμή  $\hbar$  θα εμφανίζεται με ιδιοτιμή 2.



## 2 Κβαντική Διεμπλοκή δύο qubits

### 2.1 Το qubit

Όπως είναι γνωστό, η μονάδα πληροφορίας στον κλάδο της κλασικής πληροφορίας είναι το bit. Η αντίστοιχη μονάδα στην κβαντική πληροφορία είναι το qubit, το οποίο περιγράφει μια κατάσταση στον πιο απλό μη τετριμμένο χώρο Χίλμπερτ, τον δισδιάστατο. Αν συμβολίσουμε μια ορθογώνια βάση αυτού του χώρου με τα διανύσματα  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ , η πιο γενική κατάσταση που ανήκει στον χώρο αυτό, θα γράφεται ως εξής:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (1)$$

όπου τα  $a$  και  $b$  είναι μιγαδικοί αριθμοί που υπακούν στη σχέση:  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Μια μέτρηση του qubit η οποία προβάλλει την κατάσταση στην βάση  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ , θα έχει αποτέλεσμα  $|0\rangle$  με πιθανότητα  $|a|^2$  και αποτέλεσμα 1 με πιθανότητα  $|b|^2$ . Υπάρχουν όμως φυσικά συστήματα τα οποία συμπεριφέρονται όπως τα qubits; Μα και βέβαια! Ο πιο γνωστός βαθμός ελευθερίας που περιγράφεται από έναν δισδιάστατο χώρο Χίλμπερτ στα πλαίσια της μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής είναι το spin-1/2. Το ηλεκτρόνιο είναι ένα χαρακτηριστικό σωματίδιο με spin 1/2. Συγκεκριμένα, η κατάσταση  $|0\rangle$  αντιστοιχίζεται με την προβολή του spin "πάνω", η οποία συμβολίζεται και  $|1/2\rangle$ , σε κάποιον άξονα (πχ του z) και η κατάσταση  $|1\rangle$  με την κατάσταση "κάτω", η οποία συμβολίζεται  $|-1/2\rangle$ , στον ίδιο άξονα.

Είναι γνωστό πως το spin πρέπει να έχει κάποια διεύθυνση στον χώρο. Συγκεκριμένα, οι μιγαδικοί αριθμοί  $a$  και  $b$ , ορίζουν μια κατεύθυνση του spin στον χώρο. Αν τα  $a$  και  $b$  είναι γνωστά, μπορούμε να βρούμε δύο γωνίες ( $\theta, \phi$ ), οι οποίες χαρακτηρίζουν το qubit. Το γεγονός ότι κάθε qubit χαρακτηρίζεται από δύο γωνίες όταν εξετάζεται μόνο του, θα αποτελέσει αφετηρία για το κεντρικό μέρος αυτής της εργασίας. Ας συνεχίσουμε όμως την ανάλυση του ενός qubit. Όπως είναι προφανές, θέλουμε το spin να είναι μια μετρήσιμη ιδιότητα. Οφείλουμε ως εκ τούτου να βρούμε κάποιους ερμητιανούς τελεστές οι οποίοι θα αντιστοιχούν σε αυτή την μετρήσιμη ποσότητα. Προκειμένου να βρούμε την δομή αυτών των τελεστών θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως το spin είναι μια ενδογενής ιδιότητα ανεξάρτητη από το πώς τοποθετούμε τους άξονες στην μετρητική μας συσκευή. Ως εκ τούτου θέλουμε έναν δισδιάστατο χώρο Χίλμπερτ με ερμητιανούς τελεστές αναλλοίωτους στις στροφές. Για την κατασκευή τελεστών αναλλοίωτων σε στροφές, χρησιμοποιήσουμε την σχέση μετάθεσης της ομάδας των στροφών:

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm}J_m \quad (2)$$

Είναι γνωστό ότι η πιο απλή μη τετριμμένη, μη αναγώγιμη αναπαράσταση της ομάδας αυτής είναι δισδιάστατη και οι τελεστές που ικανοποιούν την σχέση μετάθεσης της σχέσης (2) είναι οι  $J_k$  με  $k = 1, 2, 3$  και:

$$J_k = \frac{1}{2}\sigma_k \quad (3)$$

όπου οι  $\sigma_k$  είναι οι πίνακες Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Προκύπτει εύκολα, ότι οποιαδήποτε πεπερασμένη στροφή μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των Pauli και του μοναδιαίου τελεστή. Συγκεκριμένα:

$$U(\hat{n}, \theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\vec{\sigma}} = I\cos\frac{\theta}{2} - i\hat{n}\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2} \quad (5)$$

Ο πιο γενικός μοναδιακός τελεστής του χώρου Χίλμπερτ δύο διαστάσεων μπορεί να γραφεί σε αυτή την μορφή. Ως εκ τούτου δυνάμεθα να σκεφτόμαστε οποιονδήποτε μοναδιακό μετασχηματισμό του ενός qubit ως μια στροφή του spin. Τέλος, ας δείξουμε πιο αναλυτικά το γεγονός ότι κάθε δυνατή κατάσταση του χώρου είναι ιδιοκατάσταση του spin σε κάποια διεύθυνση.

Έστω ένα άξονας σε κάποια διεύθυνση:  $\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ . Αν ξεκινήσουμε από κάποια ιδιοκατάσταση του  $J_z$ , μπορούμε να στρίψουμε την κατάστασή μας κατά  $\theta$ , γύρω από τον άξονα  $\hat{n}' = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ . Αν δράσουμε με τον τελεστή

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}'\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Στην αρχική κατάσταση

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Καταλήγουμε στην

$$\Psi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Η κατάσταση της σχέσης (8) είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή  $\hat{n}\vec{\sigma}$  με ιδιοτιμή 1. Ως εκ τούτου, η κατάσταση της σχέσης 1 του ενός qubit, μπορεί να γραφεί με  $a = e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}$  και  $b = e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}$  και να ερμηνευθεί ως spin το οποίο "κοιτάει" σε κάποια διεύθυνση  $(\theta, \phi)$ .

## 2.2 Δύο qubits

Το βήμα από την περιγραφή ενός qubit στα δύο είναι μεγαλύτερο απ' ότι θα περίμενε κανείς. Το γεγονός αυτό συμβαίνει επειδή πλέον το συνολικό σύστημα περιγράφεται από έναν χώρο Χίλμπερτ, αλλά υπάρχει η δυνατότητα πρόσβασης σε υπόχωρους οι οποίοι όμως συμπεριφέρονται ως ανοιχτά συστήματα. Ο συνολικός χώρος των δύο qubits περιγράφεται από το τανυστικό γινόμενο των χώρων των δύο qubits. Δηλαδή:  $H_{tot} = H_1 \otimes H_2$ .



Σε αυτή την περιγραφή, μπορούμε να κατασκευάσουμε τελεστές οι οποίοι δρουν μόνο στον υπόχωρο του ενός qubit. Ένας τελεστής ο οποίος δρα μόνο στο πρώτο qubit θα έχει την μορφή:  $U_1 = U \otimes I$  με  $I$  τον μοναδιαίο τελεστή. Αν ο τελεστής  $U$  είναι ερμητιανός, τότε τα αποτελέσματα μιας μέτρησης που αντιστοιχούν στην φυσική ποσότητα που περιγράφει αυτός ο τελεστής για το 1ο qubit, θα είναι ανεξάρτητα από πιθανές μετρήσεις που γίνονται στο δεύτερο qubit, στο οποίο όμως μπορεί να μην υπάρχει πρόσβαση. Ένας βολικός τρόπος να περιγράψουμε καταστάσεις συστημάτων που αποτελούνται από υποσυστήματα, και άρα χώρους Χίλμπερτ οι οποίοι είναι ταυνοστικά γινόμενα άλλων χώρων Χίλμπερτ είναι ο density matrix. Ο density matrix είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για να περιγράψει κανείς στατιστικές συλλογές κβαντικών καταστάσεων. Δηλαδή, συλλογές της μορφής  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  με  $p_i$  την κλασική πιθανότητα να επιλέξουμε την κατάσταση  $|\psi_i\rangle$ . Για μια τέτοια συλλογή, ο density matrix (η μήτρα πυκνότητας στα ελληνικά), περιγράφεται από την σχέση:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (9)$$

Στην περίπτωση καθαρών καταστάσεων - δηλαδή απουσία κλασικών συσχετίσεων - ισχύει ότι όλα τα  $p_i$  είναι μηδέν εκτός από ένα το οποίο έχει τιμή ίση με την μονάδα. Στην περίπτωση αυτή, η μήτρα πυκνότητας παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (10)$$

Στην περίπτωση τελεστών οι οποίοι δρουν μόνο σε ένα υπόχωρο του συνολικού χώρου, π.χ μόνο στο ένα qubit, μπορούμε να ορίσουμε τους density matrices αυτών των υπόχωρων, αφού η μέση τιμή τελεστών που δρουν μόνο στο ένα qubit πχ, χάνει την πληροφορία που αφορά το δεύτερο. Συγκεκριμένα, αν ο συνολικός χώρος Χίλμπερτ αποτελείται από δύο qubits και ο συνολικός density matrix είναι αυτός της σχέσης (10), ο density matrix του πρώτου qubit θα είναι:

$$\rho_1 = \text{tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (11)$$

Αυτό συμβαίνει για τον ακόλουθο λόγο: Έστω ένας χώρος Χίλμπερτ που αποτελείται από δύο υπόχωρους με  $H_1$  και  $H_2$  με ορθοκανονικές βάσεις  $\{|i\rangle_1\}$  και  $\{|\mu\rangle_2\}$  αντίστοιχα. Ο συνολικός χώρος θα έχει την  $\{|i\rangle_1 \otimes |\mu\rangle_2\}$  ως ορθοκανονική βάση. Μια οποιαδήποτε κατάσταση στον χώρο αυτό γράφεται ως:

$$|\psi\rangle_{1,2} = \sum_{i,\mu} a_{i,\mu} |i\rangle_1 \otimes |\mu\rangle_2 \quad (12)$$

όπου  $\sum_{i,\mu} |a_{i,\mu}|^2 = 1$ . Η μέση τιμή κάποιας παρατηρήσιμης ποσότητας του πρώτου qubit, δηλαδή κάποιου τελεστή της μορφής  $M_1 \otimes I$ , θα είναι:

$$\begin{aligned}
\langle M_1 \rangle &= \langle \psi | M_1 \otimes I | \psi \rangle \\
&= \sum_{j,k} a_{jk}^* (\langle j|_1 \otimes \langle k|_2) (M_1 \otimes I) \sum_{i,\mu} a_{i,\mu} (|i\rangle_1 \otimes |\mu\rangle_2) \\
&= \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} \langle j | M_1 | i \rangle = \text{tr}(M_1 \rho_1)
\end{aligned} \tag{13}$$

με:

$$\rho_1 = \text{tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i,j,\mu} a_{i\mu} a_{j\mu}^* |i\rangle\langle j| \tag{14}$$

να είναι ο density matrix του πρώτου υποσυστήματος. Από την σχέση (14) μπορούμε απευθείας να συμπεράνουμε τα ακόλουθα για τον  $\rho_1$ :

- Ο  $\rho_1$  είναι αυτοσυζυγής:  $\rho_1 = \rho_1^\dagger$
- Ο  $\rho_1$  είναι θετικός, δηλαδή για κάθε  $|\phi\rangle$ ,  $\langle \phi | \rho_1 | \phi \rangle = \sum_{\mu} |\sum_i a_{i\mu} \langle \phi | i \rangle|^2 \geq 0$ .
- $\text{tr}(\rho_1) = 1$  αν η συνολική κατάσταση είναι κανονικοποιημένη.

Περαιτέρω, στην περίπτωση καθαρών καταστάσεων είναι εμφανές ότι  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ , ενώ στην περίπτωση mixed καταστάσεων, δηλαδή στατιστικών συλλογών καταστάσεων, θα ισχύει:  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ .

Γιατί όμως είναι χρήσιμος αυτός ο φορμαλισμός; Από τα αξιώματα της κβαντομηχανικής γνωρίζουμε ότι τα κλειστά συστήματα αναπαρίστανται από "ακτίνες" (rays) σε κάποιον χώρο Χίλμπερτ. Όταν όμως έχουμε συστήματα τα οποία είναι υποσυστήματα κάποιου μεγαλύτερου συστήματος, και άρα είναι ανοιχτά συστήματα, υπάρχει το ενδεχόμενο η κατάσταση του υποσυστήματος να μην μπορεί να αναπαρασταθεί με μια ακτίνα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η κατάσταση αναπαρίσταται από τον αντίστοιχο density matrix. Μία κατάσταση η οποία είναι ακτίνα στον χώρο Χίλμπερτ, ονομάζεται καθαρή κατάσταση (pure state) αλλιώς ονομάζεται mixed.

### 2.3 Ποσοτικοποίηση της κβαντικής διεμπλοκής

Η κβαντική διεμπλοκή, ως βασική ιδιότητα των κβαντικών συστημάτων, πολύ σύντομα έγινε αντικείμενο έρευνας. Ο κλάδος της Κβαντικής πληροφορίας έχει μεγάλη άνθιση σήμερα και η κβαντική διεμπλοκή αποτελεί θεμέλιο πολλών διεργασιών όπως η κβαντική κρυπτογράφηση, η κβαντική τηλεμεταφορά και οι κβαντικοί υπολογιστές [11]. Πολύ σύντομα τέθηκε το ζήτημα της ποσοτικοποίησης της κβαντικής διεμπλοκής, προκειμένου να υπάρξει ένα αντικειμενικό μέτρο των διεργασιών που μπορούμε να επιτύχουμε εξαντλώντας τα "αποθέματα" κβαντικής

διεμπλοκής που υπάρχουν στα συστήματά μας. Το πεδίο της έρευνας είναι ακόμα ανοιχτό, μιας και μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί μια ενιαία ποσότητα τόσο για πολλά όσο και για λίγα συστήματα, η οποία να δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Περαιτέρω, πηγαίνοντας από τα δύο στα τρία συστήματα, ανακύπτουν σημαντικές ποιοτικές διαφορές και δυνατοί τρόποι κβαντικής διεμπλοκής τριών συστημάτων οι οποίοι έχουν τόσο διαφορετικά χαρακτηριστικά μεταξύ τους όσο και οι διαχωρίσιμες από τις εναγκαλισμένες καταστάσεις στην περίπτωση δύο συστημάτων. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποια "παραδοσιακά" μέτρα της κβαντικής διεμπλοκής δύο συστημάτων

### 2.3.1 Εντροπία von Neumann

Η εντροπία von Neumann αποτελεί ίσως το πιο "παραδοσιακό" μέτρο της κβαντικής διεμπλοκής δύο συστημάτων. Αφορμάται από τον κλασικό ορισμό της εντροπίας και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$S(\rho) = -Tr_a(\rho_a \ln(\rho_a)) = -Tr_b(\rho_b \ln(\rho_b)) \quad (15)$$

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό δεν έχει σημασία αν πάρουμε το ίχνος πάνω στα στοιχεία βάσης του συστήματος b ενώ χρησιμοποιούμε τον reduced density matrix του συστήματος a ή ανάποδα. Αυτό συμβαίνει για τον ακόλουθο λόγο: Στην περίπτωση δύο συστημάτων, αν έχουμε μία entangled state, υπάρχει μια ιδιαίτερη βάση, η βάση Schmidt, την οποία μπορούμε πάντα να βρούμε για κάποιο σύστημα αποτελούμενο από δύο υποσυστήματα. Σε αυτή την βάση, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη ενότητα, οι reduced density matrices των υποσυστημάτων έχουν διαγώνια μορφή με ίδιες ιδιοτιμές, οι οποίες είναι οι πιθανότητες που αντιστοιχούν στις καταστάσεις που συμμετέχουν στην υπέρθεση της συνολικής κατάστασης. Παραδείγματος χάριν, έστω η κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_a |0\rangle_b + |1\rangle_a |1\rangle_b) \quad (16)$$

Ο συνολικός density matrix στην περίπτωση αυτή, θα είναι:

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle_a |0\rangle_b + |1\rangle_a |1\rangle_b)(\langle 0|_a \langle 0|_b + \langle 1|_a \langle 1|_b) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle_a |0\rangle_b + |1\rangle_a |1\rangle_b)(\langle 0|_a \langle 0|_b) + \frac{1}{2}(|0\rangle_a |0\rangle_b + |1\rangle_a |1\rangle_b)(\langle 1|_a \langle 1|_b) \quad (18)$$

Στην τελευταία μορφή που γράψαμε τον density matrix είναι προφανές ότι είτε πάρουμε το ίχνος πάνω στην βάση του A είτε στην βάση του B, θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή:

$\rho_a = \rho_b = \frac{1}{2}\hat{I}$ . Η κατάσταση του υποσυστήματος, δηλαδή, είναι πλήρως mixed. Στο παραπάνω παράδειγμα, βέβαια μπορεί κανείς να αντιτάξει το γεγονός ότι διαλέξαμε μια κατάσταση "ειδική" μιας και γνωρίζουμε ότι είναι entangled. Το "μυστικό" όμως βρίσκεται στο γεγονός ότι ακόμα και να επιλέξουμε μια κατάσταση που δεν είναι γραμμένη στην βάση Schmidt, όπως την:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle + |10\rangle + e^{i\phi}|01\rangle) \quad (19)$$

με  $\phi \neq n\pi$ , οι ιδιοτιμές των reduced density matrices και των δύο υποσυστημάτων είναι ίδιες. Ως εκ τούτου το γεγονός ότι παίρνουμε το ίχνος, εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα είναι ίδιο. Θα μπορούσαμε δηλαδή να πούμε και ότι:

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i) \quad (20)$$

όπου  $\lambda_i$  οι ιδιοτιμές του reduced density matrix οποιουδήποτε εκ των υποσυστημάτων. Η χρήση του ίχνος βέβαια διασφαλίζει ακόμα μια ευχάριστη ιδιότητα. Ότι το entanglement διατηρείται κάτω από LOCC (Local Operations Classical Communication). Αν δηλαδή οι δύο παρατηρητές κάνουν μοναδιακούς μετασχηματισμούς στο μέρος της κατάστασης που έχουν στην κατοχή τους, η εντροπία von Neumann δεν θα αλλάξει, μιας και:

$$S(\rho') = S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i) \quad (21)$$

Ως γνωστό δηλαδή, οι ιδιοτιμές κάποιου γραμμικού τελεστή δεν εξαρτώνται από την βάση που προβάλλουμε. Βλέπουμε έτσι ότι η εντροπία von Neumann για τα δύο συστήματα έχει μια πολύ καλή ιδιότητα, την οποία θα απαιτήσουμε να την έχει κάθε "καλό" μέτρο του entanglement. Η ιδιότητα αυτή στην πιο αυστηρή της μορφή είναι η εξής:

- Κάθε μέτρο του entanglement θα πρέπει να μένει αμετάβλητο αν μετασχηματίσουμε τα υποσυστήματα με LOCC

Θα μπορούσε κανείς να είναι και κάπως πιο επιεικής απαιτώντας απλά να μην αυξάνεται το entanglement κάτω από LOCC. Περαιτέρω, μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι η εντροπία von Neumann μηδενίζεται για διαχωρίσιμες (seperable) καταστάσεις. Αυτό θα αποτελέσει ακόμα ένα κριτήριο το οποίο ένα "καλό" μέτρο του entanglement θα πρέπει να σέβεται. Έχουμε λοιπόν μία δεύτερη απαίτηση:

- Κάθε μέτρο του entanglement θα πρέπει να δίνει μηδενικό αποτέλεσμα για διαχωρίσιμες καταστάσεις

Τέλος, προκειμένου να έχουμε ένα μέτρο, θα πρέπει να αξιώσουμε και την ακόλουθη απαίτηση:

- Το μέτρο θα πρέπει να είναι μια απεικόνιση από τις μήτρες πυκνότητας στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

Στο σημείο αυτό αξίζει να κάνουμε άλλη μία παρατήρηση για την εντροπία. Επί της ουσίας τα αποτελέσματά της είναι ισοδύναμα με το να εξετάσουμε τον reduced density matrix κάποιου υποσυστήματος. Αν δηλαδή ο reduced density matrix, αφού πάρουμε το ίχνος στο άλλο υποσύστημα, έχει παραπάνω από μία ιδιοτιμές, ξέρουμε ότι η συνολική κατάσταση ήταν entangled (πάντα για συνολική pure state. Στις mixed τα πράγματα είναι κάπως πιο σύνθετα.). Το γεγονός αυτό βέβαια είναι με την σειρά του ισοδύναμο με το γεγονός ότι στα δύο συστήματα λειτουργεί καλά η Schmidt decomposition [12]. Ας εξετάσουμε όμως τι ακριβώς είναι το Schmidt decomposition.

### 2.3.2 Schmidt decomposition

Αποδεικνύεται ότι για δύο συστήματα, αν έχουμε μια γενική κατάσταση της μορφής:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \quad (22)$$

υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις των υποσυστημάτων στις οποίες η κατάσταση παίρνει την μορφή:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle |\tilde{i}\rangle \quad (23)$$

- Απόδειξη

Έστω μια κατάσταση όπως αυτή της σχέσης (23). Θεωρούμε επίσης ότι η βάση  $|i\rangle$  είναι αυτή στην οποία ο reduced density matrix του υποσυστήματος A είναι διαγώνιος. Έχουμε δηλαδή:

$$\rho_a = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \quad (24)$$

Θέτουμε

$$|\tilde{i}\rangle = c_{ij} |j\rangle \quad (25)$$

για τις καταστάσεις τους συστήματος B. Ισχύει ότι:

$$\rho_a = Tr_b(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_k \langle k | (\sum_i \sum_j |i\rangle\langle j| \langle \tilde{j} |) |k\rangle \quad (26)$$

$$= \sum_k \sum_i \sum_j |i\rangle\langle j| \langle k | \tilde{i}\rangle\langle \tilde{j} | k\rangle = \sum_i \sum_j \langle \tilde{j} | \tilde{i}\rangle |i\rangle\langle j| \quad (27)$$

Ξέρουμε όμως ότι οφείλει να βγει το αποτέλεσμα της σχέσης (25). Ως εκ τούτου θα πρέπει:

$$\langle \tilde{j} | \tilde{i}\rangle = p_i \delta_{ij} \quad (28)$$

Άρα όντως με αυτή την επιλογή και η βάση  $|\tilde{i}\rangle$  είναι ορθοκανονική. QED

Το γεγονός ότι μπορούμε να βρούμε βάσεις των υποσυστημάτων τέτοιες, κάνει προφανές το γεγονός ότι οι reduced density matrices έχουν ίδιες ιδιοτιμές. Συγκεκριμένα, εξετάζοντας την σχέση (23), παρατηρούμε ότι σε αυτή την βάση, τόσο ο density matrix του συνολικού συστήματος, όσο και των υποσυστημάτων είναι διαγώνιοι. Θα έχουν ως εκ τούτου τις ίδιες ιδιοτιμές. Μπορούμε να εισάγουμε εδώ ως κριτήριο entanglement και τον λεγόμενο Schmidt number, ο οποίος μας δίνει τον αριθμό των όρων που υπάρχουν στο άθροισμα.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην περίπτωση των τριών συστημάτων, ας εισάγουμε ένα χρήσιμο μέτρο ακόμα.

### 2.3.3 Concurrence

Η Concurrence είναι ένα μέτρο της κβαντικής διεμπλοκής το οποίο δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα τόσο στην περίπτωση των δύο όσο και των τριών συστημάτων. Εντοπίζει μάλιστα και την διαφορά μεταξύ W και GHZ καταστάσεων, οι οποίες παίζουν κεντρικό ρόλο στην περίπτωση των τριών σωματιδίων και θα ορισθούν κατάλληλα σε επόμενη ενότητα. Για μια δεδομένη κατάσταση  $|\Psi\rangle$ , η Concurrence ορίζεται ως εξής:

$$C(\Psi) = | \langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle | \quad (29)$$

όπου

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle \quad (30)$$

Με  $|\Psi^*\rangle$  να είναι η μιγαδική συζυγής κατάσταση και  $\sigma_y$  ο πίνακας Pauli ο οποίος πραγματοποιεί αντιστροφή του σπιν. Η δημιουργία αυτής της ποσότητας στηρίζεται στο γεγονός ότι αν έχουμε κάποια maximally entangled state και αντιστρέψουμε όλα τα σπιν, η κατάσταση που

προκύπτει είναι maximally entangled. Παρατηρούμε επίσης ότι για διαχωρίσιμες καταστάσεις η Concurrence μηδενίζεται κάτι που την καθιστά ικανοποιητικό μέτρο. Αποδεικνύεται [13] ότι εναλλακτικά μπορούμε να εκφράσουμε την Concurrence με τον ακόλουθο τρόπο:

$$C(\psi) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_a^2))} \quad (31)$$

Όπου  $\rho_a$  είναι η μήτρα πυκνότητας ενός από τους δύο δυνατούς υπόχωρους στους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε τον συνολικό χώρο. Σε αυτή την μορφή βλέπουμε ότι είναι και αμετάβλητη κάτω από LOCC. Αποτελεί ως εκ τούτου ένα ικανοποιητικό μέτρο της κβαντικής διεμπλοκής.

## 2.4 Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων

Στην υποενότητα αυτή θα αναπτύξουμε ένα σκεπτικό το οποίο ενδέχεται να βοηθάει στην αναγνώριση των διαχωρίσιμων καταστάσεων. Ισχυριζόμαστε ότι με βάση το ακόλουθο σκεπτικό μπορεί κανείς με ασφάλεια να αναγνωρίσει διαχωρίσιμες καταστάσεις σε συστήματα με χώρους Χίλμπερτ διάστασης  $2 \otimes 2$  και σε χώρους Χίλμπερτ  $2 \otimes 2 \otimes 2$ . Το σκεπτικό αυτό ενδέχεται να μπορεί να επεκταθεί και για χώρους μεγαλύτερης διάστασης.

Έστω ένας ερμητιανός τελεστής  $\hat{A}$ , ο οποίος αντιστοιχεί σε μια φυσική μετρήσιμη ποσότητα σε κάποιον χώρο Χίλμπερτ  $H_1$ , διάστασης  $k$  ( $\dim(H_1) = k$ ). Αν ο αριθμός των διαφορετικών ιδιοτιμών του τελεστή  $\hat{A}$  είναι ίδιος με την διάσταση του χώρου, οι ιδιοτιμές δεν είναι εκφυλισμένες και κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ιδιοάνυσμα. Έστω, επιπλέον, ότι για κάθε δυνατή κατάσταση του χώρου Χίλμπερτ υπάρχει κάποιος μοναδιακός  $\hat{U}$  μετασχηματισμός, ο οποίος μπορεί να την μεταμορφώσει σε κάποια ιδιοκατάσταση του  $\hat{A}$ . Ισχύει δηλαδή ότι  $\forall |\psi\rangle \in H, \exists \hat{U}$ :

$$\hat{U}|\psi\rangle = |a\rangle \quad (32)$$

όπου  $\lambda$  μία σταθερά, και:

$$\hat{A}|a\rangle = \lambda|a\rangle \quad (33)$$

Στην περίπτωση αυτή βέβαια θα ισχύει ότι η κατάσταση  $|\psi\rangle$  είναι ιδιοκατάσταση του  $\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}$ . Αν στη συνέχεια επεκτείνουμε τον χώρο Χίλμπερτ, και θεωρήσουμε τον αρχικό χώρο ως έναν υπόχωρο του συνολικού, ο τελεστής  $\hat{A}$  μπορεί να επεκταθεί με τετριμμένο τρόπο στον ευρύτερο χώρο χίλμπερτ ως:  $A_{expanded} = \hat{A} \otimes I$ . Θεωρούμε δηλαδή ότι πλέον βρισκόμαστε σε έναν χώρο  $H_{tot} = H_1 \otimes H_2$ . Ο δεύτερος χώρος  $H_2$  θα έχει κάποια διάσταση  $\omega$ . Αν κατασκευάσουμε την βάση γινόμενο του συνολικού χώρου, θα προκύψουν  $\omega$  καταστάσεις του συνολικού χώρου για κάθε ιδιοτιμή του  $A_{expanded}$ . Αυτό προκύπτει από τον απλό τρόπο με τον οποίο συνδυάζονται οι βάσεις των δύο χώρων προκειμένου να κατασκευάσουμε την βάση του συνολικού χώρου. Είναι προφανές ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός καταστάσεων του συνολικού χώρου αποτελείται από καταστάσεις που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή του

$A_{expanded}$ , θα είναι separable. Δηλαδή, αν κατασκευάσουμε μια κατάσταση η οποία αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή του  $A_{expanded}$ , θα πρέπει να έχει την μορφή:

$$|\psi_{eig}\rangle = |\lambda\rangle \otimes \sum_i^{dim(H_2)} c_i |i\rangle \quad (34)$$

Δημιουργείται ως εκ τούτου ένας υπόχωρος separable καταστάσεων του συνολικού χώρου, οι οποίες αντιστοιχούν σε κάποια ιδιοτιμή ενός τελεστή  $A_{expanded}$ . Τώρα, η πιο γενική διαχωρίσιμη κατάσταση του συνολικού συστήματος μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$|\psi_{sep}\rangle = \sum_{\lambda}^{dim(H_1)} c_{\lambda} |\lambda\rangle \otimes \sum_i^{dim(H_2)} c_i |i\rangle \quad (35)$$

Το κρίσιμο σημείο είναι το ακόλουθο: Αν στον  $H_1$  υπήρχε μοναδιακός μετασχηματισμός που να πληρεί τις προϋποθέσεις των σχέσεων (32) και (33) για την  $|\psi_{sub}\rangle = \sum_{\lambda}^{dim(H_1)} c_{\lambda} |\lambda\rangle$ , τότε η κατάσταση της σχέσης (35) θα είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή  $(\hat{U}^{\dagger} \otimes I) \hat{A}_{expanded} (\hat{U} \otimes I)$ . Αν γνωρίζουμε τον πιο γενικό μοναδιακό τελεστή που ορίζεται σε έναν χώρο Χίλμπερτ (στην περίπτωση ενός spin αυτός είναι ο:  $\hat{U}(\hat{n}, \theta) = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\hat{S}}$ ), και επίσης γνωρίζουμε ότι ο τελεστής αυτός με κατάλληλη ρύθμιση κάποιων παραμέτρων (στην περίπτωση του spin οι παράμετροι αυτοί είναι οι γωνίες  $\theta$  και  $\varphi$ ) μπορεί να μετατρέψει οποιαδήποτε κατάσταση σε ιδιοκατάσταση κάποιου τελεστή  $\hat{A}$  που ορίζεται στον χώρο αυτό (στην περίπτωση του spin, ο τελεστής είναι ο  $\hat{S}_i$ , με  $i = x, y, z$ ), μπορούμε να λειτουργήσουμε με τον ακόλουθο τρόπο: Αν μας δοθεί μια κατάσταση του συνολικού συστήματος, για την οποία θέλουμε να διαπιστώσουμε αν είναι διαχωρίσιμη, δρούμε με τον τελεστή  $(\hat{U}^{\dagger} \otimes I) \hat{A}_{expanded} (\hat{U} \otimes I)$  και αναζητούμε παραμέτρους του τελεστή  $\hat{U}$  ώστε να ικανοποιείται κάποια εξίσωση ιδιοτιμών. Αν δεν υπάρχουν τέτοιες παράμετροι, η κατάσταση δεν είναι διαχωρίσιμη. Στην περίπτωση των δύο qubits, γνωρίζουμε μοναδιακό τελεστή στους υπόχωρους ο οποίος να έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Σε αυτή την περίπτωση, αν δίδονταν μια κατάσταση του συνολικού συστήματος και θέλαμε να εξετάσουμε αν είναι διαχωρίσιμη, θα κατασκευάζαμε την εξίσωση:

$$(\hat{U}^{\dagger}(\hat{n}, \theta) \otimes I)(\hat{S}_i \otimes I)(\hat{U}(\hat{n}, \theta) \otimes I)|\psi\rangle = \pm |\psi\rangle \quad (36)$$

Στη συνέχεια, θα λύναμε την εξίσωση ως προς  $\theta$  και  $\varphi$ . Αν υπήρχαν λύσεις, η συνολική κατάσταση που μας δόθηκε θα ήταν διαχωρίσιμη.

Προκειμένου όμως να είμαστε σίγουροι ότι το κριτήριο λειτουργεί, θα πρέπει να δούμε και ότι δεν δίνει λανθασμένο αποτέλεσμα σε περίπτωση που η κατάσταση είναι entangled. Θα πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν  $\theta$  και  $\varphi$  που να ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής (36) σε περίπτωση που η  $|\psi\rangle$  είναι entangled. Αυτό θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την ανάλυση Schmidt.



Σε περίπτωση που η κατάσταση είναι entangled, είδαμε ότι μπορούμε να την γράψουμε στην μορφή:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle |\tilde{i}\rangle \quad (37)$$

και εφόσον η κατάσταση είναι entangled, θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο όροι στο άθροισμα. Αυτό όμως σημαίνει ότι θα συμμετέχουν τουλάχιστον δύο καταστάσεις του πρώτου υπόχωρου στο άθροισμα οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Όπως αποδείξαμε επίσης οι καταστάσεις αυτές είναι ορθοκανονικές. Ως εκ τούτου, ο μοναδιακός μετασχηματισμός που θα εφαρμόσουμε, δεν δύναται να τις μεταμορφώσει στην ίδια κατάσταση και τις δύο. Περαιτέρω, αφού ο ερμητιανός τελεστής  $\hat{A}$  που επιλέξαμε δεν έχει εκφυλισμένες ιδιοτιμές, η κατάσταση της σχέσης (37) δεν μπορεί να είναι ιδιοκατάσταση του  $(\hat{U}^\dagger \otimes I)\hat{A}_{expanded}(\hat{U} \otimes I)$ .

Παρατηρούμε με βάση τα προηγούμενα και από το γεγονός ότι υπάρχει μοναδιακός τελεστής στον χώρο Χίλμπερτ διάστασης 2, ο οποίος μπορεί να μας μεταφέρει από οποιαδήποτε κατάσταση στον χώρο αυτό σε οποιαδήποτε άλλη, με κατάλληλη ρύθμιση δύο παραμέτρων, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι εξισώσεις της μορφής (36) μπορούν να κατασκευαστούν και για συστήματα με χώρους Χίλμπερτ διάστασης  $2 \otimes n$ , με το n να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Έτσι μπορούμε να διερευνήσουμε αν έχουν αναπτυχθεί κβαντικές συσχετίσεις μεταξύ του qubit και κάποιου άλλου συστήματος με διάσταση n.

Στην περίπτωση των n qubits (χώρος  $2 \otimes 2 \otimes 2 \dots \otimes 2$ ), Μπορούμε με αντίστοιχο τρόπο να κατασκευάσουμε τους  $\hat{S}_i \otimes I_{res}$ , και κατασκευάζοντας εξισώσεις της μορφής (36), να εξετάσουμε την n-διαχωρισιμότητα. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση τριών spins, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους τελεστές:  $\hat{S}_i \otimes I \otimes I, I \otimes \hat{S}_i \otimes I, I \otimes I \otimes \hat{S}_i$ . Αν για οποιονδήποτε από αυτούς υπάρχουν θ και φ τέτοια που να ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής (36), τότε το spin αυτό θα είναι διαχωρισμένο από τα άλλα δύο. Αν ικανοποιείται η εξίσωση αυτή για ένα μόνο από τα τρία qubits, τότε η κατάσταση θα είναι biseparable- θα έχουν αναπτυχθεί δηλαδή κβαντικές συσχετίσεις μεταξύ των δύο spins αλλά όχι με το τρίτο. Αν ικανοποιείται η εξίσωση αυτή και για τους τρεις τελεστές (όχι αναγκαία για τα ίδια θ και φ κάθε φορά), αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση είναι triseparable. Αν τέλος δεν ικανοποιείται καμία τέτοια εξίσωση, αυτό θα σημαίνει ότι έχουν αναπτυχθεί γνήσιες κβαντικές συσχετίσεις μεταξύ και των τριών σωματιδίων.

Τα παραπάνω επί της ουσίας συνιστούν ένα κριτήριο διαχωρισιμότητας για συστήματα  $2 \otimes n$  και  $2 \otimes 2 \otimes 2$ . Πριν προχωρήσουμε σε κάποια παραδείγματα εφαρμογής του κριτηρίου, να κάνουμε δύο παρατηρήσεις:

- Ο τελεστής  $\hat{U}^\dagger \hat{S}_i \hat{U}$  ο οποίος στρέφει το spin σε κάποια διεύθυνση, είναι ισοδύναμος με την χρήση του τελεστή  $\hat{S}\hat{n}$ , με το n να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα σε κάποια διεύθυνση ( $\hat{n} = (\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, \cos\theta)$ ). Ως εκ τούτου η εξίσωση της σχέσης (36), είναι ισοδύναμη με την:

$$(\hat{S}\hat{n} \otimes I)|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle \quad (38)$$

- Προκειμένου να γενικευθεί το κριτήριο σε σύστημα τεσσάρων qubit και πάνω, θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιον γενικό μοναδιακό τελεστή σε κάθε αντίστοιχο υπόχωρο με τις

ιδιότητες που περιγράψαμε, καθώς και κάποιον τελεστή (ή τελεστες) που να καλύπτουν με τις ιδιοκαταστάσεις τους όλων τον χώρο. Αν είχαμε για παράδειγμα τέσσερα spins, θα έπρεπε να έχουμε κάποιον γενικό μοναδιακό τελεστή ο οποίος να μπορεί να μεταφέρει κάθε κατάσταση του υπόχωρου των δύο spin, σε κάποια ιδιοκατάσταση ενός κατάλληλου τελεστή. Η ύπαρξη τέτοιων τελεστών δεν αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία.

Ας προχωρήσουμε όμως σε κάποια παραδείγματα:

Έστω η συνολική κατάσταση:

$$|\psi\rangle_{sep} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle + |0, 1\rangle) \quad (39)$$

των δύο συστημάτων. Αναγνωρίζουμε ότι είναι separable. Ως εκ τούτου, αν δράσουμε με τον τελεστή της σχέσης (38), θα πρέπει να υπάρχουν γωνίες  $(\theta, \varphi)$  τέτοιες που να κάνουν την παραπάνω κατάσταση ιδιοκατάσταση του τελεστή. Αν προβάλλουμε την σχέση

$$\hat{S}\hat{n} \otimes I |\psi\rangle_{sep} = |\psi\rangle_{sep} \quad (40)$$

στην συνήθη βάση, θα προκύψει η ακόλουθη εξίσωση πινάκων:

$$\begin{pmatrix} -i \sin(\theta) \sin(\varphi) + \sin(\theta) \cos(\varphi) + \cos(\theta) & 0 \\ i \sin(\theta) \sin(\varphi) + \sin(\theta) \cos(\varphi) - \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι για γωνίες  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  και  $\varphi = \pi$  το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από την σχέση (38) ικανοποιείται. Ως εκ τούτου η κατάσταση της σχέσης (39) είναι ιδιοκατάσταση του  $\hat{S}\hat{n} \otimes I$  και άρα είναι διαχωρίσιμη. Αν στην θέση αυτής της κατάστασης, χρησιμοποιούσαμε την:

$$|\psi\rangle_{ent} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle + |0, 0\rangle) \quad (42)$$

θα προέκυπτε

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ -\cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

και είναι προφανές ότι δεν υπάρχει λύση. Ως δεύτερο παράδειγμα, ας εξετάσουμε αν η κατασκευή μας λειτουργεί για την πιο γενική δυνατή διαχωρίσιμη κατάσταση. Αυτή θα είναι μια κατάσταση της μορφής:

$$\psi_{sep} = \begin{pmatrix} \sin(r) \\ 0 \\ \cos(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Δρώντας σε αυτή την κατάσταση με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathcal{Z}^* & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \mathcal{Z}^* \\ \mathcal{Z} & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & \mathcal{Z} & 0 & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

Αναζητούμε γωνίες  $(\theta, \varphi)$  που να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(r) + \cos(r)(\sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi)) \\ 0 \\ -\cos(\theta) \cos(r) + \sin(r)(\sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(r) \\ 0 \\ \cos(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Το σύστημα επιδέχεται τις ακόλουθες λύσεις:

$$\begin{aligned} 2\pi c_1 + \pi &= \varphi \wedge ((\theta = 2\pi c_2 \wedge \cos(r) = 0) \\ \vee (\theta + 2 \tan^{-1}(\cot(r)) &= 2\pi c_2 \wedge \sin(r) \neq 0) \end{aligned}$$

με  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ . Οι υπολογισμοί έγιναν στο Mathematica. Βλέπουμε ότι μπορούμε να βρούμε λύση και στην γενικότερη περίπτωση διαχωρίσιμης κατάστασης. Ως εκ τούτου το κριτήριό μας λειτουργεί καλά τουλάχιστον μέχρι και τα δύο qubits.

Εφοδιασμένοι με τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να προχωρήσουμε στην περίπτωση των τριών qubits.

### 3 Κβαντική Διεμπλοκή τριών qubits

#### 3.1 3 qubits

Τα 3 qubits στην τρέχουσα βιβλιογραφία [14] [15] χωρίζονται στα ακόλουθα ήδη καταστάσεων:

- Καταστάσεις πλήρως διαχωρίσιμες
- Καταστάσεις στις οποίες τα δύο σωματίδια είναι εναγκαλισμένα και το τρίτο διαχωρισμένο
- Καταστάσεις στις οποίες και τα τρία σωματίδια είναι εναγκαλισμένα

Στην τελευταία κατηγορία υπάρχουν δύο υποκατηγορίες καταστάσεων, οι λεγόμενες  $W$  και οι  $GHZ$  καταστάσεις. Αυτές διαφέρουν από το γεγονός ότι αν κάνουμε trace out ένα σωματίδιο, η κατάσταση που μένει στην περίπτωση των  $W$  καταστάσεων είναι entangled, ενώ στην περίπτωση των  $GHZ$ , είναι πλήρως separable. Η tangle ( η οποία ορίζεται ως το τετράγωνο της concurrence που ορίσαμε στην αντίστοιχη ενότητα) μηδενίζεται στην περίπτωση των  $W$  καταστάσεων αλλά όχι στην περίπτωση των  $GHZ$ . Μια διεξοδική μελέτη της κβαντικής διεμπλοκής τριών qubits έχει γίνει στο [4]. Στο συγκεκριμένο άρθρο αποδεικνύεται το γεγονός ότι οι  $W$  και οι  $GHZ$  στην πραγματικότητα ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις καταστάσεων όσων αφορά στην κβαντική διεμπλοκή. Η κατηγοριοποίησή τους γίνεται με βάση το γεγονός ότι αδυνατεί κανείς να μετασχηματίσει μια  $W$  σε  $GHZ$  κατάσταση χρησιμοποιώντας SLOCC (stochastic LOCC), δηλαδή με τοπικούς μετασχηματισμούς να εξάγει κατάσταση του ενός είδους από το άλλο με κάποια πεπερασμένη πιθανότητα.

Ήδη στην περίπτωση αυτή αρχίζει να αναδεικνύεται ο πλούτος της κβαντικής διεμπλοκής σε συστήματα με περισσότερα από δύο μέρη. Ο πλούτος αυτός οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στον τρόπο που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε διαμερίσεις του συστήματος όπως καταδεικνύεται στο [5]. Στην περίπτωση συστημάτων με 3 qubits και πάνω μπορούμε να εξετάσουμε με διάφορους τρόπους τα υποσυστήματα και να πάρουμε πολλούς περισσότερους τύπους κβαντικής διεμπλοκής. Για δύο συστήματα τα πράγματα είναι εξαιρετικά πιο απλά. Στα  $n$  qubits η δυσκολία είναι πολύ μεγαλύτερη, αφού ο αριθμός των παραμέτρων προκειμένου να χαρακτηριστεί μια κατάσταση σε σχέση με την κβαντική διεμπλοκή αυξάνει με εκθετικό τρόπο (χρειάζονται  $2(2^n - 1)$  παράμετροι).

Περαιτέρω, στο [5] αναδεικνύεται η δυσκολία ορισμού κατάλληλου μέτρου του εναγκαλισμού εξαιτίας των πολλών διαφορετικών διαμερίσεων που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε. Με αυτόν τον τρόπο αποκαλύπτεται και μία στενή σχέση του τύπου της διαχωρισιμότητας με την δυνατότητα ορισμού μέτρου. Το γεγονός της μίας και μοναδικής διαμέρισης στην περίπτωση του διμερούς συστήματος είναι αυτό που επιτρέπει τον ορισμό μέτρων με τις επιθυμητές ιδιότητες που παραθέσαμε στην ενότητα 2.3.1. Για τρία ή περισσότερα συστήματα η κατάσταση είναι εξαιρετικά σύνθετη και μέτρα με τις κατάλληλες ιδιότητες δεν έχουν ανευρεθεί. Προσπάθειες για κατασκευή τέτοιων μέτρων παρατίθενται στα [5], [6], [7]. Η στενή σύνδεση της διαχωρισιμότητας με την δυνατότητα ορισμού κατάλληλου μέτρου, αποτελεί αφηρητή για την εφαρμογή του κριτηρίου διαχωρισιμότητας που θέσαμε στην περίπτωση των τριών qubits. Ας ξεκινήσουμε από την πιο γενική, triseparable κατάσταση. Αυτή θα έχει την μορφή

$$\psi_{sep} = \begin{pmatrix} \sin(v) \sin(u) \sin(w) \\ \sin(v) \sin(u) \cos(w) \\ \cos(v) \sin(u) \sin(w) \\ \cos(v) \sin(u) \cos(w) \\ \sin(v) \cos(u) \sin(w) \\ \sin(v) \cos(u) \cos(w) \\ \cos(v) \cos(u) \sin(w) \\ \cos(v) \cos(u) \cos(w) \end{pmatrix} \quad (46)$$

Αν το κριτήριο μας είναι σωστό, αυτή η κατάσταση θα πρέπει να είναι ιδιοκατάσταση των τελεστών  $S_1 := \hat{S}\hat{n} \otimes I \otimes I$ ,  $S_2 := I \otimes \hat{S}\hat{n} \otimes I$ ,  $S_3 := I \otimes I \otimes \hat{S}\hat{n}$  με ιδιοτιμές  $\pm 1/2$ . Ο τελεστής  $S_1$  στη βάση που έχουμε επιλέξει γράφεται:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (47)$$

Αν δράσουμε με τον τελεστή αυτόν στην κατάσταση που μας δίνεται και την εξισώσουμε με τον εαυτό της με την κατάλληλη ιδιοτιμή, παίρνουμε ως λύση από το Mathematica

$$\phi = \pi + 2\pi c_1 \wedge (\theta + 2\tan^{-1}(\cot u)) = 2\pi c_2 \wedge \sin u \neq 0$$

με  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ . Ακριβώς δηλαδή ό,τι πήραμε και στην περίπτωση των δύο qubits όταν είχαμε πλήρως διαχωρίσιμη κατάσταση. Είναι προφανές ότι με αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε κατευθείαν να αναγνωρίσουμε τις biseparable καταστάσεις. Αρκεί να δράσουμε με τον κατάλληλο εκ των  $S_1, S_2, S_3$  που θα "αναγνωρίσει" το ξεχωριστό σωματίδιο. Για παράδειγμα, έστω η κατάσταση:

$$|\psi_{tot}\rangle = |1\rangle (\sqrt{1/3}|11\rangle + \sqrt{2/3}|00\rangle) \quad (48)$$

Στην βάση μας θα αναπαρίσταται ως

$$|\psi_{tot}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Στο Mathematica βρίσκουμε ότι όντως, αν δράσουμε με τον τελεστή  $S_1$  η κατάσταση θα είναι ιδιοκατάσταση με τις κατάλληλες τιμές. Αντίθετα, αν δράσουμε με τους τελεστές  $S_2$  ή  $S_3$  το σύστημα δεν έχει λύση.

Το κριτήριό μας λειτουργεί καλά στην περίπτωση των τριών σωματιδίων. Σίγουρα ταξινομεί σωστά τις biseparable καταστάσεις σε σχέση με αυτές που έχουν genuine tripartite entanglement, μιας και πάντα θα περισεύει ένα σωματίδιο το οποίο θα είναι ιδιοκατάσταση του σπιν στον υπόχωρό του. Στην περίπτωση μιας mixed state τριών σωματιδίων και πάλι θα μπορούσαμε να έχουμε μια ασφαλή αποτίμηση του σπιν λειτουργώντας με τον ακόλουθο τρόπο: Διαγωνοποιούμε τον συνολικό density matrix. Στη συνέχεια γράφουμε την κατάσταση που μας δίνεται στη βάση αυτή. Η mixed state των τριών σωματιδίων θα έχει τώρα μια μορφή:

$$\rho_{tot} = \sum_i p_i \rho_i \quad (50)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο μας σε κάθε όρο του παραπάνω αθροίσματος και να διαπιστώσουμε με τον τρόπο αυτό αν υπάρχουν κβαντικές συσχετίσεις μέσα στην συλλογή μας. Στην περίπτωση δηλαδή των τριών σωματιδίων μπορούμε με απόλυτη βεβαιότητα να αναγνωρίσουμε αν μια κατάσταση είναι entangled ή όχι με βάση την τρέχουσα κατηγοριοποίηση που υπάρχει στην βιβλιογραφία.

### 3.2 4 qubits

Στα 4 qubits αρχίζουμε να αντιμετωπίζουμε δυσκολίες. Αυτό συμβαίνει επειδή μπορούν να υπάρξουν biseparable καταστάσεις 2 και 2 σωματιδίων. Στους υπόχωρους αυτούς όμως μπορούν να υφίστανται καταστάσεις της μορφής:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \left(|0\rangle + |1\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \left(|0\rangle + |1\rangle\right) \quad (51)$$

Αυτές είναι καταστάσεις οι οποίες δεν "αναγνωρίζονται" από τους τελεστές σπιν των αντίστοιχων υπόχωρων αλλά ούτε και από τελεστές σπιν των μεγαλύτερων χώρων. Ως εκ τούτου, μια μελέτη των τεσσάρων qubits, καθιστά αναγκαία την εύρεση κατάλληλων τελεστών στους υπόχωρους των δύο qubits με τις ιδιότητες που θέσαμε στο κριτήριο.

### 3.3 Schmidt decomposition σε σύστημα τριών qubits

Το ενδιαφέρον με την Schmidt decomposition είναι ότι δεν λειτουργεί ως κριτήριο του entanglement στην περίπτωση τριών σωματιδίων. Όπως αναφέρεται στο [16], μια n-partite κατάσταση είναι Schmidt decomposable αν μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$|\psi\rangle = \sum_i p_i |i_a\rangle |i_b\rangle \dots |i_n\rangle \quad (52)$$

Οι καταστάσεις οι οποίες μπορούν να γραφούν στην μορφή αυτή, έχουν την εξής ιδιότητα. Αν γίνει trace out κάποιο σωματίδιο, ο density matrix που θα προκύψει θα είναι διαχωρίσιμος. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ν-διαχωρισιμότητα. Αυτό αποκαλύπτει το γεγονός ότι δεν μπορεί οποιαδήποτε κατάσταση ενός συστήματος ν σωματιδίων να είναι Schmidt decomposable. Ας το δούμε όμως συγκεκριμένα στην περίπτωση των τριών σωματιδίων.

Έστω ότι έχουμε μια mixed κατάσταση δύο σωματιδίων. Οποιαδήποτε κατάσταση δύο σωματιδίων μπορεί να γίνει pure σε έναν μεγαλύτερο χώρο μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται purification. Αν τώρα η κατάσταση που προέκυπτε από το purification ήταν Schmidt decomposable, αυτό θα σήμαινε ότι είναι triseparable. Δηλαδή ότι και η κατάσταση των δύο σωματιδίων από την οποία ξεκινήσαμε θα ήταν separable. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα. Ως εκ τούτου δεν μπορεί η γενική tripartite κατάσταση να είναι Schmidt decomposable. Αντίστοιχα η εντροπία von Neumann το μόνο που μπορεί να μας δείξει είναι ο βαθμός που δύο κομμάτια του συνολικού συστήματος είναι entangled μεταξύ τους. Αδυνατεί όμως να μας δώσει μια ποσοτικοποίηση του genuine multipartite entanglement.

Θα προχωρήσουμε τώρα στην εξέταση δύο παραδειγμάτων. Αρχικά θα εξετάσουμε μια Χαμιλτονιανή δύο σπιν τα οποία περιοδικά γίνονται entangled και το πως αποτυπώνεται αυτό στα μέτρα που έχουμε στη διάθεσή μας. Η Χαμιλτονιανή που θα χρησιμοποιήσουμε στην περίπτωση των δύο σωματιδίων είναι η λεγόμενη Heisenberg ή αλλιώς συμμετρική στην εναλλαγή των δύο σπιν. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια αντισυμμετρική Χαμιλτονιανή για σύστημα τριών σωματιδίων και θα επαναλάβουμε μια παρόμοια εξέταση.

## 4 Δυναμικό σύστημα δύο qubits

### 4.1 Εντροπία von Neumann και Concurrence για δυναμικό σύστημα 2 qubits

Στην ενότητα αυτή, θα εξετάσουμε ένα σύστημα δύο σπιν, τα οποία είναι συζευγμένα. Η Χαμιλτονιανή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι γνωστή και ως μοντέλο Heisenberg [17]. Αναλυτικά αυτή γράφεται:

$$H = j\vec{S}_1\vec{S}_2 = j(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z) \quad (53)$$

Αν αναπαράστούμε την Χαμιλτονιανή στη συνήθη βάση για δύο σωματίδια, θα έχει την μορφή:

$$H = j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

ενώ για  $J = 1$ , ο διαδότης θα είναι ο:

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2}e^{-3it} & \frac{e^{it}}{2} - \frac{1}{2}e^{-3it} & 0 \\ 0 & \frac{e^{it}}{2} - \frac{1}{2}e^{-3it} & \frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2}e^{-3it} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Αν πάρουμε για αρχική κατάσταση μια διαχωρίσιμη κατάσταση, όπως η  $|\psi_{in}\rangle = |10\rangle$ , η χρονική της εξέλιξη θα δίνεται από την:

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi_{in}\rangle \quad (56)$$

Σε μορφή πινάκων θα είναι:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-it} \cos(2t) \\ \sin(2t)(\sin(t) + i \cos(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2}e^{-3it} & \frac{e^{it}}{2} - \frac{1}{2}e^{-3it} & 0 \\ 0 & \frac{e^{it}}{2} - \frac{1}{2}e^{-3it} & \frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2}e^{-3it} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Ως εκ τούτου, έχουμε την χρονική εξέλιξη της κατάστασής μας. Για να εφαρμόσουμε τόσο την εντροπία von Neumann ως μέτρο του entanglement όσο και την Concurrence, θα χρειαστούμε τον density matrix της κατάστασής μας με τον χρόνο. Αυτός δίδεται από:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2t) & \frac{1}{2}i \sin(4t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \sin(4t) & \sin^2(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Περαιτέρω, για να εξετάσουμε την εντροπία von Neumann, όπως αναπτύξαμε στην πρώτη παράγραφο, θα πρέπει να πάρουμε τον reduced density matrix. Να κάνουμε δηλαδή trace out το ένα από τα δύο σωματίδια.

$$\rho_{red} = \sum_i \langle i | (|jk\rangle \langle lm|) | i \rangle \quad (59)$$



Ο πίνακας που προκύπτει από αυτήν την διαδικασία είναι ο:

$$\rho_{red} = \begin{pmatrix} \cos^2(2t) & 0 \\ 0 & \sin^2(2t) \end{pmatrix} \quad (60)$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του είναι  $\cos^2(2t)$  και  $\sin^2(2t)$ . Μπορούμε ως εκ τούτου να προχωρήσουμε στην κατασκευή της εντροπίας von Neumann για κάθε χρονική στιγμή. Το αποτέλεσμα δίδεται στο γράφημα 1:

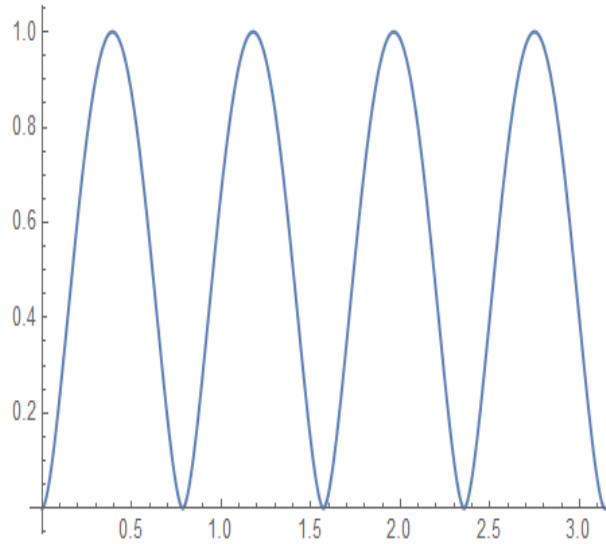


Figure 1: Εντροπία von Neumann

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια περιοδική διακύμανση του entanglement με περίοδο  $\pi/4$ . Στο γράφημα 2 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα που δίνει η Concurrence για το ίδιο σύστημα, ενώ στο γράφημα 3 υπάρχουν και τα δύο αποτελέσματα συγκριτικά.

Βλέπουμε ότι υπάρχει σχετική συμφωνία μεταξύ των δύο μέτρων με μια μικρή απόκλιση στις περιοχές ανάμεσα στα μέγιστα και στα ελάχιστα.

## 4.2 Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων για δυναμικό σύστημα 2 qubits

Ας εξετάσουμε όμως αν λειτουργεί και το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων. Όπως έχει γίνει κατανοητό από τα προλεγόμενα, το κριτήριο αυτό εξετάζει απλά αν υπάρχει ή όχι entanglement. Ως εκ τούτου, για να δούμε αν λειτουργεί σωστά, θα πρέπει να συνεχίσουμε με τον ακόλουθο τρόπο: Θα δράσουμε στην κατάσταση με τον τελεστή  $\vec{S}\hat{n} \otimes I$  και θα αναζητήσουμε τους χρόνους για τους οποίους η κατάστασή μας είναι ιδιοκατάσταση αυτού του τελεστή. Αν το κριτήριό μας λειτουργεί καλά, θα πρέπει οι χρόνοι για τους οποίους η κατάσταση είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή να είναι οι  $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ . Οι χρόνοι δηλαδή στους οποίους η κατάσταση γίνεται πλήρως διαχωρίσιμη.

Συγκεκριμένα πρέπει να βρούμε τις χρονικές στιγμές για τις οποίες ικανοποιείται η εξίσωση:

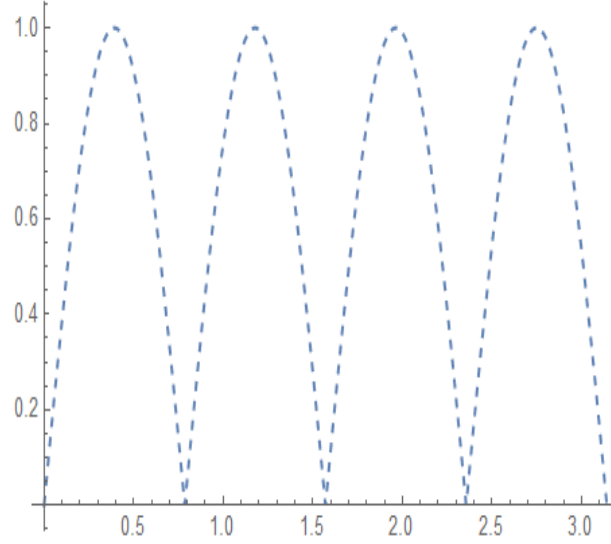


Figure 2: Concurrence

$$S_n \otimes I |\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (61)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} \sin(2t)(\sin(t) + i \cos(t))(\sin(\theta) \cos(\varphi) - i \sin(\theta) \sin(\varphi)) \\ e^{-it} \cos(\theta) \cos(2t) \\ -\cos(\theta) \sin(2t)(\sin(t) + i \cos(t)) \\ e^{-it} \cos(2t)(\sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-it} \cos(2t) \\ \sin(2t)(\sin(t) + i \cos(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Τα  $\theta, \varphi$  και  $t$  που ικανοποιούν αυτό το σύστημα. Η λύση είναι:

$$(c_1 | c_2) \in \mathbb{Z} \wedge ((2\pi c_1 + \pi = \theta \wedge (4t + \pi = 4\pi c_2 \quad or \quad t = \pi (c_2 + \frac{1}{4}))) \\ \vee (\theta = 2\pi c_2 \wedge (t = \pi c_1 \quad or \quad t = \pi (c_1 + \frac{1}{2}))))$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι όντως για τις χρονικές στιγμές που αναμέναμε υπάρχουν λύσεις. Βλέπουμε ότι το κριτήριο των ιδιοτιμών φαίνεται να έχει κάποια εγκυρότητα. Ας προχωρήσουμε τώρα στο σύστημα με τα τρία qubits.

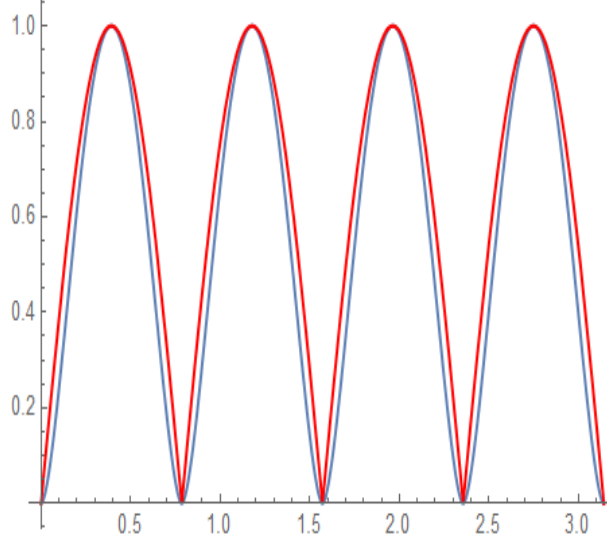


Figure 3: Entropy vs Concurrence

## 5 Δυναμικό σύστημα τριών qubits

### 5.1 Εντροπία von Neumann και Concurrence για δυναμικό σύστημα με 3 qubits

Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε μια αντισυμμετρική Χαμιλτονιανή η οποία δημιουργεί γνήσιο entanglement τριών σωματιδίων. Η Χαμιλτονιανή στην περίπτωση αυτή είναι η εξής:

$$H = (\vec{S}_1 \wedge \vec{S}_2) \vec{S}_3 \quad (63)$$

$$= S_y \otimes S_z \otimes S_x - S_z \otimes S_y \otimes S_x - S_x \otimes S_z \otimes S_y + S_z \otimes S_x \otimes S_y \quad (64)$$

$$+ S_x \otimes S_y \otimes S_z - S_y \otimes S_x \otimes S_z \quad (65)$$

Αν ξεκινήσουμε με μια διαχωρίσιμη κατάσταση της μορφής  $|\psi_{in}\rangle = |011\rangle$  η οποία έχει συνολικό σπιν 1/2 και την εξελίξουμε στον χρόνο με τον διαδότη που προκύπτει από την Χαμιλτονιανή μας, θα πάρουμε για κάθε χρονική στιγμή:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} (\sqrt{3} \sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1) \\ \frac{1}{3} (-\sqrt{3} \sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1) \\ 0 \\ \frac{1}{3} (2 \cos(2\sqrt{3}t) + 1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Ενώ ο density matrix αυτής της κατάστασης είναι ο:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 & -\frac{2}{9}(\cos(2\sqrt{3}t) - \cos(4\sqrt{3}t)) & 0 & -\frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(-\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9}(\cos(2\sqrt{3}t) - \cos(4\sqrt{3}t)) & 0 & \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1)^2 & 0 & -\frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1) & -\frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1) & 0 & 0 & \frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε αυτή την φορά είναι η εξής: Θα εξετάσουμε την εντροπία του κάθε σωματιδίου στον χρόνο, καθώς και την Concurrence. Θα δούμε ότι αυτά τα μέτρα μας αποκαλύπτουν, μέσω της αύξησης της τυχαιότητας του κάθε σωματιδίου, πότε μπορούμε να μιλήσουμε για tripartite entanglement. Παρ' όλα ταύτα δεν δίνουν ικανοποιητική απάντηση για τον διαχωρισμό των W από τις GHZ καταστάσεις. Το πρώτο βήμα στην διαδικασία αυτή, είναι να υπολογίσουμε τους density matrices των υποσυστημάτων, αφού έχουμε κάνει trace out τα υπόλοιπα σωματίδια. Παρουσιάζονται παρακάτω οι τρεις δυνατοί density matrices, αφού έχουμε κάνει trace out στον πρώτο το σωματίδιο 1, στον δεύτερο το σωματίδιο 2 και στον τρίτο το σωματίδιο 3.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & -\frac{2}{9}(\cos(2\sqrt{3}t) - \cos(4\sqrt{3}t)) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9}(\cos(2\sqrt{3}t) - \cos(4\sqrt{3}t)) & \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & -\frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(-\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1) & \frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) - \cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1)^2 & -\frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)(\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}t) - 1) & \frac{1}{9}(2\cos(2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Τώρα, αν θέλουμε να καταλήξουμε στους density matrices των σωματιδίων, μπορούμε να λειτουργήσουμε παίρνοντας τα κατάλληλα traces των παραπάνω density matrices. Συγκεκριμένα, από τον πρώτο θα πάρουμε το 3ο σωματίδιο κάνοντας trace out το 2ο, από τον δεύτερο θα πάρουμε το πρώτο σωματίδιο κάνοντας trace out το 3ο και από τον τρίτο θα πάρουμε το δεύτερο σωματίδιο κάνοντας trace out το 1ο. Οι density matrices των σωματιδίων που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο είναι οι εξής:

- Σωματίδιο 1

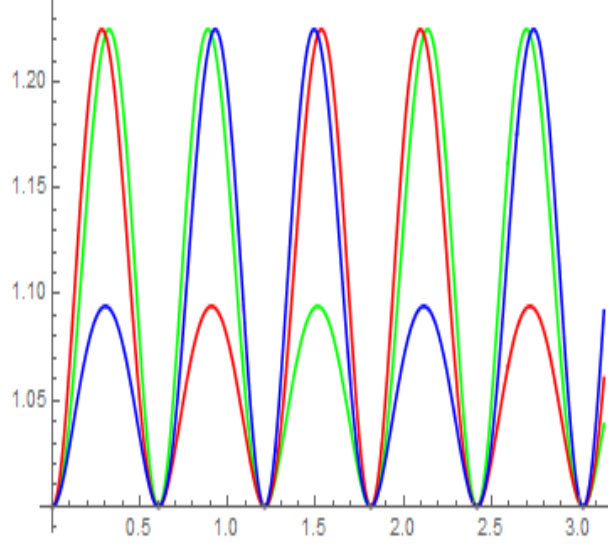


Figure 4: Entropy of three spins. Entropy of spin 1, is pictured with green, spin 2, with red and spin 3, with blue

$$\rho_{part1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} (2 \cos (2\sqrt{3}t) + 1)^2 + \frac{1}{9} (\sqrt{3} \sin (2\sqrt{3}t) + \cos (2\sqrt{3}t) - 1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} (\sqrt{3} \sin (2\sqrt{3}t) - \cos (2\sqrt{3}t) + 1)^2 \end{pmatrix} \quad (71)$$

• Σωματίδιο 2

$$\rho_{part2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} (\sqrt{3} \sin (2\sqrt{3}t) - \cos (2\sqrt{3}t) + 1)^2 + \frac{1}{9} (\sqrt{3} \sin (2\sqrt{3}t) + \cos (2\sqrt{3}t) - 1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} (2 \cos (2\sqrt{3}t) + 1)^2 \end{pmatrix} \quad (72)$$

• Σωματίδιο 3

$$\rho_{part3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} (2 \cos (2\sqrt{3}t) + 1)^2 + \frac{1}{9} (\sqrt{3} \sin (2\sqrt{3}t) - \cos (2\sqrt{3}t) + 1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} (\sqrt{3} \sin (2\sqrt{3}t) + \cos (2\sqrt{3}t) - 1)^2 \end{pmatrix} \quad (73)$$

Αν στη συνέχεια χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοτιμές αυτών των πινάκων για να σχεδιάσουμε την εξέλιξη της εντροπίας von Neumann αυτών των σωματιδίων, θα πάρουμε το γράφημα 4.

Το γράφημα αυτό έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον γιατί αναδεικνύει μια ιδιότητα του συστήματος των 3ων σπιν η οποία λέγεται μονογαμία του entanglement [18]. Σύμφωνα με το θεώρημα

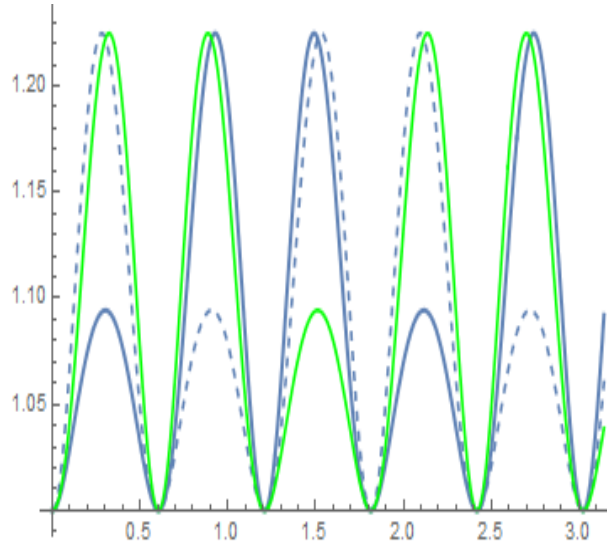


Figure 5: Entropy of three spins. Concurrence of spin 1, is pictured with green, spin 2, with dashed blue and spin 3, with blue

της μονογαμίας, τρία συστήματα δεν μπορούν να είναι συγχρόνως maximally entangled. Στο γράφημα 4, το γεγονός αυτό αποτυπώνεται με ξεκάθαρο τρόπο μιας και βλέπουμε ότι όντως όταν δύο από τα τρία σωματίδια έχουν μέγιστη εντροπία το τρίτο έχει ένα αρκετά μικρότερο μέγιστο. Αυτό όμως που πραγματικά αποκαλύπτει την μονογαμία, είναι το γεγονός ότι τα δύο συστήματα που έχουν μεγαλύτερες εντροπίες δεν μεγιστοποιούνται ταυτόχρονα. Το ένα μέγιστο είναι λίγο μετατοπισμένο προς τα αριστερά ενώ το άλλο λίγο προς τα δεξιά, ενώ ανάμεσά τους βρίσκεται το αρκετά μικρότερο μέγιστο του τρίτου σωματιδίου. Αυτό συμβαίνει επειδή η εντροπία του τρίτου, μαρτυράει πως είναι και αυτό σε έναν βαθμό entangled με τα άλλα δύο. Ως εκ τούτου, δεν επιτρέπει την ταυτόχρονη μεγιστοποίηση των εντροπιών των άλλων δύο. Τους "κλέβει" ένα μέρος του entanglement, μη επιτρέποντας να είναι maximally entangled.

Με αντίστοιχο τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε τις concurrences των υποσυστημάτων και να σχεδιάσουμε το αποτέλεσμα. Γνωρίζουμε ότι:

$$C(\rho_i) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_i^2))} \quad (74)$$

Αν ζωγραφίσουμε την Concurrence για καθένα από τα υποσυστήματα παίρνουμε το αποτέλεσμα του γραφήματος 5

Παρατηρούμε ότι παίρνουμε ακριβώς την ίδια εικόνα με την εντροπία.

## 5.2 Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων για δυναμικό σύστημα με 3 qubits

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων για το δυναμικό σύστημα των τριών σπιν. Θα αναζητήσουμε τις χρονικές στιγμές στις οποίες κάθε ένα εκ των σπιν εμφανίζεται πλήρως διαχωρισμένο από τα άλλα δύο, αλλά και τις χρονικές στιγμές στις οποίες

δύο από τα τρία σωματίδια εμφανίζονται σε πλήρως διαχωρίσιμη κατάσταση από το τρίτο. Για να βρούμε αυτές τις χρονικές στιγμές θα δράσουμε με τους τελεστές  $S_1 = S_n \otimes I \otimes I$ ,  $S_2 = I \otimes S_n \otimes I$ ,  $S_3 = I \otimes I \otimes S_n$  στην κατάσταση μας και θα αναζητήσουμε τις χρονικές στιγμές στις οποίες ικανοποιείται η εξίσωση ιδιοτιμών-ιδιοκαταστάσεων. Σύμφωνα με το κριτήριό μας, όλες τις άλλες στιγμές τα σωματίδια θα έχουν γνήσιο tripartite entanglement. Για να έχουμε μία αίσθηση του τι αναμένουμε από το κριτήριο, θα χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα που εξάγαμε από την μελέτη της εντροπίας και της concurrence των τριών σωματιδίων. Όπως φαίνεται στα γραφήματα 4 και 5, οι στιγμές στις οποίες δεν υφίσταται γνήσιο tripartite entanglement είναι αυτές στις οποίες η εντροπία και των τριών σωματιδίων μηδενίζεται. Ας προχωρήσουμε με τους τρεις τελεστές. Θα πρέπει να λύσουμε για έκαστον, το σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση:

$$S_i |\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (75)$$

Λύνοντας το σύστημα για το πρώτο σπιν, παίρνουμε την λύση:

$$\begin{aligned} \theta &= 2\pi c_1 \wedge ((\sqrt{3}\pi(3c_2 - 1) = 9t \vee \sqrt{3}\pi(3c_2 + 1) = 9t)) \\ \vee \theta &= \pi + 2\pi c_1 \wedge t = \frac{\pi c_2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας με τα διαγράμματα, παρατηρούμε ότι αυτοί είναι οι σωστοί χρόνοι. Στην λύση επίσης βλέπουμε ότι σε διαφορετικούς χρόνους θα πάρουμε το σπιν "πάνω" και σε άλλους κάτω.

Για το δεύτερο σπιν έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\pi c_1 + \pi &= \theta \wedge \sqrt{3}\pi(3c_2 - 1) = 9t \\ \vee \theta &= 2\pi c_1 \wedge \left( t = \frac{\pi c_1}{\sqrt{3}} \vee \sqrt{3}\pi(3c_1 + 1) = 9t \right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι παίρνουμε τους ίδιους χρόνους μηδενισμού άλλα με διαφορετικές κατευθύνσεις του δεύτερου σπιν από το πρώτο.

Για το τρίτο σπιν έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\pi c_1 + \pi &= \theta \wedge \sqrt{3}\pi(3c_2 + 1) = 9t \\ \vee \theta &= 2\pi c_1 \wedge \left( t = \frac{\pi c_1}{\sqrt{3}} \vee \sqrt{3}\pi(3c_1 - 1) = 9t \right) \end{aligned}$$

με  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ . Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα συμφωνούν με την εντροπία και την Concurrence. Όντως στα σημεία μηδενισμού της εντροπίας έχουμε μια triseparable κατάσταση. Όπως παρατηρούμε στα γραφήματα 4 και 5, μετά τους μηδενισμούς, οι εντροπίες των τριών σπιν αυξάνουν συγχρόνως (όχι βέβαια στον ίδιο βαθμό). Αυτό σημαίνει ότι στα χρονικά διαστήματα ανάμεσα σε δύο μηδενισμούς της εντροπίας, υπάρχει γνήσιο tripartite entanglement, αφού αν η κατάσταση ήταν biseparable, το ένα σωματίδιο θα έπρεπε να διατηρεί μηδενική εντροπία.

## 6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία εξετάσαμε την κβαντική διεμπλοκή δύο και τριών συστημάτων. Αναλύσαμε κάποια "κλασικά" μέτρα της κβαντικής διεμπλοκής και είδαμε την εφαρμογή τους σε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα. Το κριτήριο των ιδιοκαταστάσεων φάνηκε να έχει μία σχετική εγκυρότητα. Χρειάζεται περαιτέρω μελέτη για μια πιο διεξοδική εξέταση σε μεγαλύτερα συστήματα. Τα αποτελέσματα πάντως που δίνει για σύστημα τριών σωματιδίων είναι ενδιαφέροντα, μιας και συγκεκριμένα για χώρο διάστασης  $2 \otimes 2 \otimes 2$  μπορούμε με ασφάλεια να κατατάξουμε τις καταστάσεις με βάση την υπάρχουσα κατηγοριοποίηση της κβαντικής διεμπλοκής που υπάρχει στην βιβλιογραφία. Μέχρι στιγμής το μόνο γνωστό κριτήριο για να αποφανθούμε αν μια κατάσταση που μας δίνεται είναι εναγκαλισμένη είναι το κριτήριο Peres-Horodecki [19] το οποίο αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αποφανθούμε αν μια κατάσταση είναι εναγκαλισμένη αλλά μόνο για χώρους  $2 \otimes 2$  και  $2 \otimes 3$ . Το κριτήριο που θέτουμε στην παρούσα εργασία φαίνεται να έχει ως εκ τούτου κάποια χρησιμότητα.



## References

- [1] A.Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Phys. Rev. **47**, 777 (1935)
- [2] J. Preskill Lecture Notes for Ph219/CS219: Quantum Information and Computation, Chapter 4
- [3] J.S Bell, Physics **1**, 195 (1964)
- [4] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways* Phys. Rev. A **62**, 062314 – Published 14 November 2000
- [5] Szilárd Szalay *Multipartite entanglement measures* Phys. Rev. A **92**, 042329 (2015)
- [6] Dafa Li *The  $n$ -tangle of odd  $n$  qubits* Quantum Information Processing, Vol. **11**, Iss. 2, pp 481–492 (2012)
- [7] S. J. Akhtarshenas *Concurrence vectors in arbitrary multipartite quantum systems* Jour. of Phys. A, **38** , 30 (2005)
- [8] N.D Mermin Phys. Today **43**(6), 9 (1990) *What's Wrong with these Elements of Reality?* <http://dx.doi.org/10.1063/1.2810588>.
- [9] D.M Greenberger, M. Horne, A. Zeilinger *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, M.Kafatos, ed.,Kluwer, Dordrecht, The Netherlands (1989), p. 69.
- [10] B.Hensen, N. Kalb, M. S. Blok, A. E. Dréau, A. Reiserer, R. F. L. Vermeulen, R. N. Schouten, M. Markham, D. J. Twitchen, K. Goodenough, D. Elkouss, S. Wehner, T. H. Taminiau, R. Hanson *Loophole-free Bell test using electron spins in diamond: second experiment and additional analysis* Scientific Reports volume **6**, Article number: 30289 (2016)
- [11] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki *Quantum entanglement* Rev. Mod. Phys. **81**, 865 – Published 17 June 2009
- [12] A. Ekert, P.L Knight *Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition* American Journal of Physics **63**, 415 (1995); <https://doi.org/10.1119/1.17904>
- [13] W.K.Wooters *Entanglement of formation and concurrence* Quantum Information and Computation, Vol 1, No.1 (2001) 27-44 Rinton Press
- [14] A. Acín, D. Bruß, M. Lewenstein, and A. Sanpera *Classification of Mixed Three-Qubit States* Phys. Rev. Lett. **87**, 040401 – Published 3 July 2001
- [15] A.Miyake *Classification of multipartite entangled states by multidimensional determinants* Phys. Rev. A **67**, 012108 – Published 30 January 2003
- [16] A.V Thapliyal *Multipartite pure-state entanglement* Phys. Rev. A **59**, 3336 – Published 1 May 1999

- [17] M.E.Fisher *Magnetism in One-Dimensional Systems—The Heisenberg Model for Infinite Spin* American Journal of Physics **32**, 343 (1964); <https://doi.org/10.1119/1.1970340>
- [18] Thiago R. de Oliveira, Marcio F. Cornelio, and Felipe F. Fanchini *Monogamy of entanglement of formation* Phys. Rev. A **89**, 034303 – Published 24 March 2014
- [19] Asher Peres *Separability Criterion for Density Matrices* Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 – Published 19 August 1996

## 7 Appendix A

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε τον έλεγχο της strong subadditivity για το σύστημα των τριών σπιν. Με βάση την subadditivity, θα πρέπει για όλες τις χρονικές στιγμές να ισχύει:

$$S(\rho_{123}) + S(\rho_2) \leq S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) \quad (76)$$

Στο γράφημα 6 παρουσιάζουμε με μπλε το άθροισμα του αριστερού μέλους της ανισότητας και με κόκκινο το δεξί μέλος.

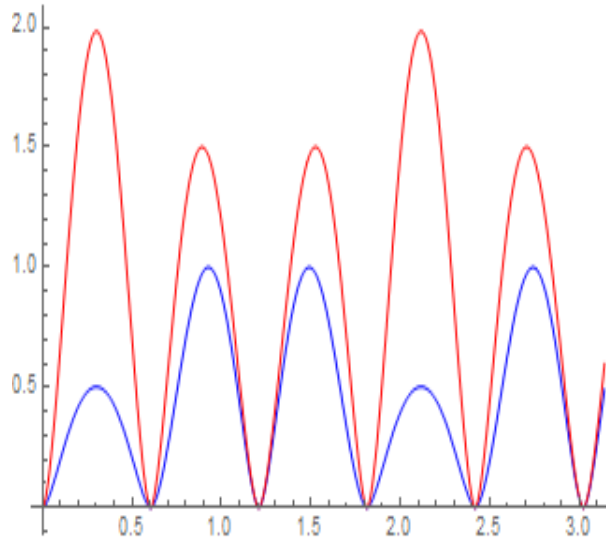


Figure 6:  $S(\rho_{123}) + S(\rho_2)$  with blue and  $S(\rho_{12}) + S(\rho_{23})$  with red

Παρατηρούμε ότι όντως η ανισότητα ικανοποιείται για όλες τις χρονικές στιγμές.

## 8 Appendix B

Παραθέτουμε στο σημείο αυτό τον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για τους διάφορους υπολογισμούς και σχεδιαγράμματα. Είναι γραμμένος σε Mathematica

```
H1 = OTimes[sy, sz, sx] - OTimes[sz, sy, sx] - OTimes[sx, sz, sy] + OTimes[sz, sx, sy] +
OTimes[sx, sy, sz] - OTimes[sy, sx, sz];
```

```
Psi
in = OTimes[0, 1, 1, 0, 1, 0];
propagator[t] := MatrixExp[IH1t];
```

**Psi**  
 $fin = FullSimplify[propagator[t].[Psi]in];$

**Psi**  
 $find = ConjugateTranspose[[Psi]fin];$

**Psi**  
 $in' = 1/Sqrt[2]OTimes[0, 1, 1, 0, 1, 0] + 1/Sqrt[2]OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0]; [Psi]fin' = FullSimplify[propagator[t].[Psi]in'];$

**Psi**  
 $find' = ConjugateTranspose[[Psi]fin'];$

**Rho**  
 $fin = FullSimplify[[Psi]find.[Psi]fin, Element[t, Reals]];$

**Rho**  
 $fin' = FullSimplify[[Psi]find'.[Psi]fin', Element[t, Reals]];$

$vec1p1 = OTimes[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec2p1 = OTimes[0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec1p2 = OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec2p2 = OTimes[1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec1p3 = OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0];$   
 $vec2p3 = OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1];$   
 $vec1subp1 = OTimes[1, 0, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec2subp1 = OTimes[0, 1, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec1subp2 = OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0];$   
 $vec2subp2 = OTimes[1, 0, 0, 1, 0, 1];$   
 $vec2subp2 = OTimes[1, 0, 0, 1, 0, 1];$

$vec1p1tr = OTimes[Transpose[1, 0], 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec2p1tr = OTimes[Transpose[0, 1], 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1];$   
 $vec1p2tr = OTimes[1, 0, 0, 1, Transpose[1, 0], 1, 0, 0, 1];$   
 $vec2p2tr = OTimes[1, 0, 0, 1, Transpose[0, 1], 1, 0, 0, 1];$   
 $vec1p3tr = OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, Transpose[1, 0]];$   
 $vec2p3tr = OTimes[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, Transpose[0, 1]];$   
 $vec1subp1tr = OTimes[Transpose[1, 0], 1, 0, 0, 1];$   
 $vec2subp1tr = OTimes[Transpose[0, 1], 1, 0, 0, 1];$   
 $vec1subp2tr = OTimes[1, 0, 0, 1, Transpose[1, 0]];$   
 $vec2subp2tr = OTimes[1, 0, 0, 1, Transpose[0, 1]];$   
 $entropyfun = If [k > 0, -kLog[2, ], 0];$

”bipartition one”

$redp1[Rho]fin = vec1p1tr.[Rho]fin.vec1p1 +$   
 $vec2p1tr.[Rho]fin.vec2p1$   
;  $redp1subp1[Rho]fin = vec1subp1tr.redp1[Rho]fin.vec1subp1 +$   
 $vec2subp1tr.redp1[Rho]fin.vec2subp1;$   
 $redp1subp2[Rho]fin = vec1subp2tr.redp1[Rho]fin.vec1subp2 +$   
 $vec2subp2tr.redp1[Rho]fin.vec2subp2;$   
 $p1subp1 = Plot[Plus @@ entropyfun /@ Eigenvalues$

$redp1subp1[Rho]$

```

fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Green];
p1subp2 = Plot[Plus @@ entropyfun /@ Eigenvalues[redp1subp2[Rho]fin], t, 0, Pi];
"bipartition two" redp[Rho]fin = vec1p2tr.[Rho]fin.vec1p2
+ vec2p2tr.[Rho]fin.vec2p2;
redp2subp1[Rho]fin = vec1subp1tr.redp2[Rho]fin.vec1subp1 +
vec2subp1tr.redp2[Rho]fin.vec2subp1;
redp2subp2[Rho]fin = vec1subp2tr.redp2[Rho]fin.vec1subp2 +
vec2subp2tr.redp2[Rho]fin.vec2subp2;
p2subp1 = Plot[Plus @@ entropyfun /@
Eigenvalues[redp2subp1[Rho]fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Thick];
p2subp2 = Plot[Plus @@ entropyfun /@
Eigenvalues[redp2subp2[Rho]fin], t, 0, Pi];

"bipartitionthree"redp3[Rho]fin = vec1p3tr.[Rho]fin.vec1p3+vec2p3tr.[Rho]fin.vec2p3;

redp3sub3[Rho]fin = vec1subp1tr.redp3[Rho]fin.vec1subp1 +
vec2subp1tr.redp3[Rho]fin.vec2subp1;

redp3subp2[Rho]fin = vec1subp2tr.redp3[Rho]fin.vec1subp2 +
vec2subp2tr.redp3[Rho]fin.vec2subp2;

p3subp1 = Plot[Plus @@ entropyfun /@
Eigenvalues[redp3subp1[Rho]fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Magenta];
p3subp2 = Plot[Plus @@ entropyfun
/@ Eigenvalues[redp3subp2[Rho]fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Dashed];
redp1subp1[Rho]finsquare = FullSimplify[ ConjugateTranspose
redp1subp1[Rho
fin].redp1subp1[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp1subp2[Rho]finsquare = FullSimplify[ ConjugateTranspose
redp1subp2[Rho
fin].redp1subp2[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp2subp1[Rho]finsquare = FullSimplify[ ConjugateTranspose
redp2subp1[Rho
fin].redp2subp1[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp2subp2[Rho]finsquare = FullSimplify[ ConjugateTranspose
redp2subp2[Rho
fin].redp2subp2[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp3subp1[Rho]finsquare = FullSimplify[ ConjugateTranspose
redp3subp1[Rho
fin].redp3subp1[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp3subp2[Rho]finsquare = FullSimplify[ ConjugateTranspose
redp3subp2[Rho
fin].redp3subp2[Rho]fin, Element[t, Reals]];

```

```

redp3subp2[Rho
fin].redp3subp2[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp1[Rho]finsquare = FullSimplify[ConjugateTranspos
e[redp1[Rho]fin].redp1[Rho]fin, Element[t, Reals]];
redp2[Rho]finsquare = FullSimplify[ConjugateTranspose[redp2[Rho]fin].redp2[Rho]fin, Ele-
ment[t, Reals]];
redp3[Rho]finsquare = FullSimplify[ConjugateTranspose

redp3[Rho
fin].redp3[Rho]fin, Element[t, Reals]];
trp1 = Tr[redp1[Rho]finsquare];
trp2 = Tr[redp2[Rho]finsquare];
trp3 = Tr[redp3[Rho]finsquare];
trp1s1 = Tr[redp1subp1[Rho]finsquare];
trp1s2 = Tr[redp1subp2[Rho]finsquare];
trp2s1 = Tr[redp2subp1[Rho]finsquare];
trp2s2 = Tr[redp2subp2[Rho]finsquare];
trp3s1 = Tr[redp3subp1[Rho]finsquare];
trp3s2 = Tr[redp3subp2[Rho]finsquare];
cp1s1 = Sqrt[2 - trp1s1];
cp1s2 = Sqrt[2 - trp1s2];
cp2s1 = Sqrt[2 - trp2s1];
cp2s2 = Sqrt[2 - trp2s2];
cp3s1 = Sqrt[2 - trp3s1];
cp3s2 = Sqrt[2 - trp3s2];
cp1 = Sqrt[2 - trp1];
cp2 = Sqrt[2 - trp2];
cp3 = Sqrt[2 - trp3];
pcp1s1 = Plot[cp1s1, t, 0, Pi, PlotStyle -> Green];
pcp2s2 = Plot[cp2s2, t, 0, Pi, PlotStyle -> Red];
pcp3s1 = Plot[cp3s1, t, 0, Pi, PlotStyle -> Blue];
pcp1 = Plot[cp1, t, 0, Pi, PlotStyle -> Dashed];
pcp2 = Plot[cp2, t, 0, Pi, PlotStyle -> Thick];
pcp3 = Plot[cp3, t, 0, Pi, PlotStyle -> Green];
pentroyp1 = Plot[Plus @@ entropyfun
/@ Eigenvalues[redp1[Rho]fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Dashed];
pentroyp2 = Plot[Plus @@ entropyfun
/@ Eigenvalues[redp2[Rho]fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Thick];
pentroyp3 = Plot[Plus @@ entropyfun
/@ Eigenvalues[redp3[Rho]fin], t, 0, Pi, PlotStyle -> Green];
n = Sin[[Theta]]*Cos[[CurlyPhi]],
Sin[[Theta]]*Sin[[CurlyPhi]], Cos[[Theta]];
snf = Sin[[Theta]]*Cos[[CurlyPhi]] sx +
Sin[[Theta]]*Sin[[CurlyPhi]] sy + Cos[[Theta]] sz;
sn12 = OTimes[snf, id, id] + OTimes[id, snf, id];
sn13 = OTimes[snf, id, id] + OTimes[id, id, snf];
sn23 = OTimes[id, snf, id] + OTimes[id, id, snf];

```

```
sn3 = OTimes[id, id, snf];  
sn1 = OTimes[snf, id, id];  
sn2 = OTimes[id, snf, id];  
sn123 = OTimes[snf, id, id] + OTimes[id, snf, id] +  
OTimes[id, id, snf];
```