ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Σωτήριος Σ. Ζωιτσάκος

ΑΘΗΝΑ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2019

NATIONAL AND KAPODISTRIAN UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF SCIENCES
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND TELECOMMUNICATIONS

PhD THESIS

Mathematical knowledge of teachers for teaching Advanced Mathematics in secondary education

Sotirios S. Zoitsakos

ATHENS
July 2019

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Σωτήριος Σ. Ζωιτσάκος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ:
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Καθηγητής ΕΚΠΑ
Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής ΔΠΘ
Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης
Καθηγητής ΕΚΠΑ

Χαράλαμπος Σακονίδης
Καθηγητής ΔΠΘ

Δέσποινα Πόταρη
Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Ιωάννα Μαμωνά-Downs
Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πατρών

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Γεώργιος Ψυχάρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου
Επίκουρη Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αποτελεί βασική παραδοχή της παρούσας διατριβής ότι στο διδακτικό πλαίσιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μαθητές και εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συχνά διαισθητικές και εμπειρικές προσεγγίσεις κατά την διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών χωρίς να περιορίζονται στις τυπικές μαθηματικές γνώσεις όπως αυτές αποτυπώνονται στα επίσημα εγχειρίδια. Επίσης, για κάποιες μαθηματικές έννοιες και ιδιαίτερα αυτές των Ανώτερων Μαθηματικών που διδάσκονται ή χρησιμοποιούνται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπως, του ορίου, του απείρου, του πραγματικού αριθμού, δεν προσφέρονται οι αυστηροί μαθηματικοί τους ορισμοί και οι θεωρητικές τους θεμελιώσεις. Έτσι, κατά τη διδακτική πρακτική ο εκπαιδευτικός δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει την τυπική γνώση που έχει αποκτήσει στις πανεπιστημιακές του σπουδές επειδή αυτή η γνώση δεν περιέχεται στη διδακτέα ύλη. Αυτό που επιχειρεί να αναπτύξει στους μαθητές είναι μια αντίληψη γι' αυτές τις έννοιες χρησιμοποιώντας διαισθητικές και εμπειρικές προσεγγίσεις και σε κάποιες περιπτώσεις επεκτείνεται σε ζητήματα που αφορούν την ευρύτερη περιοχή που εντάσσεται η έννοια που διαπραγματεύεται.

Στην παρούσα διατριβή, μελετώνται σε πρώτη φάση οι αντιλήψεις και σε δεύτερη φάση η συλλογιστική των εκπαιδευτικών αναφορικά με τις αναπαραστάσεις δεκαδικών αριθμών με περίοδο 9 που αναπτύσσονται με βάση τη διάγνωση και την διδακτική διαχείριση σχετικών παρανοήσεων (υποθετικών) μαθητών Λυκείου που παρουσιάζονται σε ένα διδακτικό σενάριο.

Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας βασίζεται στις ιδέες του L. Shulman και των συνεργατών του, που ανέδειξαν τη γνώση του αντικειμένου διδασκαλίας ως ιδιαίτερη επαγγελματική γνώση του εκπαιδευτικού για τις ανάγκες της διδασκαλίας. Όσον αφορά την εξειδίκευσή του, στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης βασιζόμαστε στο μοντέλο της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία που διαμορφώθηκε από την ερευνητική ομάδα της D. Ball. Αξιοποιούμε επίσης, στοιχεία από τις θεωρητικές και εμπειρικές προσεγγίσεις της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης και Σκέψης προκειμένου να διαμορφώσουμε ένα πλαίσιο ερμηνείας και καταγραφής της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών που μελετάμε στην έρευνά μας.

Τα δεδομένα μας προέρχονται από τις γραπτές απαντήσεις 106 εκπαιδευτικών στα ερωτήματα που βασίστηκαν σε ένα διδακτικό σενάριο, σχετικό με τις αντιλήψεις κάποιων υποθετικών μαθητών για τους δεκαδικούς αριθμούς με περίοδο 9 και από τις ημιδομημένες συνεντεύξεις δεκαπέντε εξ' αυτών. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με ένα συνδυασμό ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων. Αρχικά κατηγοριοποιούνται και αναλύονται ποσοτικά τα δεδομένα, προσφέροντας έναν ολιστικό τρόπο αποτύπωσης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών. Στη συνέχεια, αξιοποιούνται τεχνικές της Θεμελιωμένης Θεωρίας για την ταυτοποίηση των αναδυόμενων κατηγοριών.

Τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης της ανάλυσης δείχνουν ότι οι αντιλήψεις της πλειονότητας των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα είναι κατά βάση διαδικαστικού τύπου, παρουσιάζουν ασάφειες και συχνά αντιφάσεις, ενώ επηρεάζονται σημαντικά από τις τοποθετήσεις των μαθητών. Αντίστοιχα, οι διδακτικές τους προσεγγίσεις προκειμένου να διαχειριστούν τις παρανοήσεις των μαθητών του σεναρίου είναι κυρίως άτυπες και διαισθητικές. Ένα μικρότερο ποσοστό των εκπαιδευτικών περιορίζεται σε διδακτικές προσεγγίσεις μαθηματικά ορθές, αλλά με καθαρά φορμαλιστικό τρόπο, αδυνατώντας να επικοινωνήσει ή να υποστηρίξει τις διαισθητικές ανησυχίες των μαθητών. Τέλος, ένα πολύ μικρό ποσοστό των εκπαιδευτικών καταφέρνει να συνδυάσει ουσιαστικά τη μαθηματική ορθότητα και το φορμαλισμό με τις διαισθητικές ανησυχίες των μαθητών. Έτσι, διαπιστώνεται ότι το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών δεν αξιοποιεί ικανοποιητικά στη διδακτική πρακτική τις γνώσεις των Ανώτερων Μαθηματικών που μελέτησε στις πανεπιστημιακές σπουδές του.

Στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης έχουν μελετηθεί σημειωτικά, επιστημολογικά, φιλοσοφικά και οντολογικά ζητήματα στο λόγο των εκπαιδευτικών τα οποία προσδιορίζουν το περιεχόμενο και το υπόβαθρο της συλλογιστικής τους, περιγράφοντας έτσι, κάποια βασικά χαρακτηριστικά της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης που απαιτείται για την υποστήριξη της διδασκαλίας σχετικών μαθηματικών εννοιών στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στην έρευνα αυτή τεκμηριώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν επίγνωση των επιστημολογικών εμποδίων, των ιδιαίτερων σημειωτικών χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων καθώς και του οντολογικού και φιλοσοφικού υπόβαθρου των εννοιών που διαπραγματεύονται μπορούν να υποστηρίζουν παραγωγικά τις σχετικές συζητήσεις με τους μαθητές και να ερμηνεύουν με ευρύτητα και βάθος τις προσεγγίσεις τους αξιοποιώντας λειτουργικά τις αναδυόμενες συνδέσεις μεταξύ εννοιών και αναπαραστάσεων. Το σύνολο αυτό των γνωστικών στοιχείων του εκπαιδευτικού το οποίο ξεπερνά το αυστηρά μαθηματικό πεδίο μπορεί να συνδεθεί με αυτό που στη βιβλιογραφία αποκαλείται *ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου* διαμορφώνοντας έτσι ένα πλαίσο ερμηνείας και υποστήριξης των εκπαιδευτικών για ζητήματα του ευρύτερου περιβάλλοντος των εννοιών τα οποία αναπόφευκτα αναπτύσσονται στη διδακτική πρακτική.

ABSTRACT

The central perspective adopted by the present thesis is that secondary school students and teachers often use intuitive and empirical approaches in teaching mathematics not necessarily compatible to the formal mathematics they had been taught in the University. Moreover, for certain mathematical concepts taught in secondary education, particularly those related to Advanced Mathematics, such as the concepts of limit, infinity and real number, the complete mathematical definitions and their theoretical foundations are rarely taken into serious consideration. Thus, during the teaching practice the teacher cannot use the formal knowledge that he has acquired in his university studies because it is not included in the curriculum. What he is trying to develop in students is an understanding of these concepts using intuitive and empirical approaches and in some cases extends to issues related to the wider area of the concepts under consideration.

The research problem addressed in the thesis is secondary teachers' conceptions and reasoning developed when dealing with Lyceum students' misconceptions about decimal representations of decimal numbers with period 9 presented in an appropriate teaching scenario.

The review of literature draws on Shulman's ideas about subject matter knowledge being a special professional knowledge of the teacher for teaching needs. As regards mathematics education, we are based on the model of Mathematical Knowledge for Teaching introduced by Deborah Ball and her associates. We also use elements and empirical findings of studies exploiting theoretical approaches related to Advanced Mathematical Knowledge and Thinking in order to establish a framework that would allow us to appropriately explore teachers' conceptions and reasoning of the particular advanced mathematical knowledge under consideration in our study, when thought for teaching purposes.

Our data are 106 teachers' written answers to questions that were drawn up on the basis of a teaching scenario related to the views of a number of hypothetical students on decimal numbers with period 9, as well as to questions of a semi-structured interview with fifteen of these teachers. A combination of quantitative and qualitative methods is adopted for the data analysis. Initially, a quantitative data analysis is carried out offering an overall mapping of the teachers' conceptions. Then, techniques of Grounded Theory approach are being used to identify features of their reasoning.

The outcomes of the first part of the data analysis indicate that the conceptions of the majority of teachers that participated in the study are basically of procedural type, are unclear, contain contradictions and are influenced by the (hypothetical) students' views. Furthermore, their suggested teaching approaches in order to handle these students' misconceptions are mainly informal and intuitive. Few teachers appeal to teaching approaches that are mathematically correct, however carried out in a purely formalistic way and being unable to communicate or support the students' intuitive concerns. A small percentage of teachers manages to combine significantly mathematical correctness and formalism with the students' intuitive concerns. Thus, most teachers do not seem to be in the position to use efficiently in their teaching practice the Advanced Mathematics knowledge studied in their University courses.

The second part of the data analysis features a number of semiotic, ontological, epistemological and philosophic issues in the participating teachers' discourse, which determine the content and the background of the mathematical reasoning unfolded, describing, in this way, some of the basic characteristics of the Advanced Mathematical Knowledge that is required to support the teaching of related mathematical concepts in secondary education level.

In this research it is documented that, teachers who are aware of the epistemological obstacles, the particular semiotic features of the representations, and the ontological and philosophical background of the concepts being negotiated, can support productive these relevant discussions with students and interpret students' approaches by making use of the emerging connections between concepts and representations. This set of teachers' cognitive elements which transcends the formal mathematical domain can be linked to what is called in the literature *horizon content knowledge* forming a framework of interpreting and supporting teachers on broader contexts of concepts that inevitably develop in teaching practice.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους εκείνους που θεωρώ ότι είχαν καθοριστική συμβολή στη διαμόρφωση και στην ολοκλήρωση της διατριβής.

Στον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και Επιβλέποντα της διδακτορικής διατριβής, Θεοδόσιο Ζαχαριάδη τόσο για την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου προσέφερε όσο και για τη διαμόρφωση ενός πλαισίου ερευνητικής ευθύνης και αμοιβαίου σεβασμού στη συνεργασία μας.

Στον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θράκης και μέλους της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, Χαράλαμπο Σακονίδη για την ενθάρυνση και την ουσιαστική βοήθεια που παρείχε στο πλαίσιο της συνεργασίας μας καθώς και για τις ευκαιρίες που μου προσέφερε.

Στην καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών και μέλους της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, Δέσποινα Πόταρη που με τις διεισδυτικές της παρατηρήσεις και τη στάση της συνέβαλλε ουσιαστικά στη διαμόρφωση της ερευνητικής μου εξελιξης.

Στα υπόλοιπα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, οι οποίοι αποδέχθηκαν να αξιολογήσουν την εργασία μου: την καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Πατρών Ιωάννα Μαμωνά-Downs, τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας Τριανταφυλλίδη Τριαντάφυλλο, τον Επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Ψυχάρη Γεώργιο και την Επίκουρη καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών Τριανταφύλλου Χρυσαυγή.

Στον καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, Τάσο Πατρώνη που μέσα από την ανάγνωση των κειμένων του, έχω επηρεαστεί σημαντικά στην ερευνητική μου προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στους συναδέλφους Διονυσία Μπακογιάννη, Γεωργία Πετροπούλου και Κώστα Στουραΐτη με τους οποίους συγκροτήσαμε μια ενεργή ομάδα υποψηφίων διδακτόρων που με τις οργανωμένες και άτυπες συζητήσεις μας είχαμε ουσιαστική αλληλοϋποστήριξη.

Στη σύντροφό μου Βασιλική Παπακωνσταντίνου τόσο για την βοηθειά της στην επιμέλεια του κειμένου της διατριβής, αλλά κυρίως για την αμέριστη συμπαράστασή της σε όλο το διάστημα διεξαγωγής της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Το ευρύτερο πεδίο της έρευνας

Τα τελευταία τριάντα περίπου χρόνια η έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει διακρίνει το ρόλο του εκπαιδευτικού ως έναν από τους πιο σημαντικούς παράγοντες από αυτούς που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών (Lerman, 2001). Έτσι, σημειώνεται ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον στο πεδίο της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, όπως φαίνεται από την εμφάνιση εξειδικευμένων περιοδικών, όπως το *Journal for Mathematics Teacher Education,* την έκδοση βιβλίων (π.χ. Sullivan & Wood, 2008; Lin & Cooney, 2001; Even & Ball, 2009) και πληθώρα σχετικών άρθρων σε διεθνή συνέδρια και περιοδικά κάποια από τα οποία είναι αποτελέσματα πολυετών διεθνών ερευνών (π.χ. Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna, 2005).

Περισσότερο από έναν αιώνα πριν είχε τεθεί το ζήτημα του ιδιαίτερου τρόπου προσέγγισης του περιεχομένου όταν αυτό πρόκειται να διδαχθεί σε παιδιά (Dewey, 1902). Όμως για μεγάλο χρονικό διάστημα δεν είχαν δοθεί ικανοποιητικές απαντήσεις για τη γνώση των εκπαιδευτικών που θα μπορούσαν να προωθήσουν αυτόν τον ιδιαίτερο τρόπο προσέγγισης του περιεχομένου. Ο Shulman (1986, 1987) και οι συνεργάτες του διέκριναν ένα ιδιαίτερο είδος επαγγελματικής γνώσης των δασκάλων, που αποτελεί ένα αμάλγαμα γνώσης του περιεχομένου και παιδαγωγικής το οποίο είναι απαραίτητο ώστε ένα γνωστικό περιεχόμενο να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας.

Αρκετοί ερευνητές τα τελευταία χρόνια πραγματεύονται το ζήτημα της μαθηματικής γνώσης που είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία (Ball, Thames & Phelps, 2008; Adler & Davis, 2006; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005). Ορισμένες μελέτες εστιάζουν στη μέτρηση της γνώσης για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Bruckmaier et al., 2016; Herbst & Kosko, 2014; Hill, Ball & Schilling, 2008; Hill, Schilling & Ball 2004). Άλλες ασχολούνται με το τι γνωρίζουν ή δεν γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών (Ball, 1990; Baumert et al., 2010; Hill, 2007). Διαρθρώνονται προτάσεις γι' αυτά που *πρέπει* να γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί (Conference Board of Mathematical Sciences, 2001; McCrory et al., 2012; Silverman & Thompson, 2008). Σημαντικές εργασίες δημοσιεύονται σχετικά με τη χρήση των μαθηματικών στη διδασκαλία (Adler & Rhonda, 2015; Herbst & Chazan, 2015; Hill, 2011a; Rowland, 2013; Sfard, 2007; Sherin, Jacobs & Phillipp, 2011).

Στις αρχές του τρέχοντος αιώνα σημειώνεται μια στροφή στις σχετικές έρευνες από το ερώτημα «τι μαθηματικά χρειάζεται να γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί;» στο «πως τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία;» (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Παράλληλα παρατηρείται μια μετατόπιση από a priori θέσεις σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών σε εμπειρικές μελέτες που σχηματοποιούν τις γνώσεις των εκπαιδευτικών εντός διδακτικού πλαισίου. Έτσι, ανάμεσα στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση της γνώσης των εκπαιδευτικών κυριαρχεί η παρακολούθηση, η βιντεοσκόπηση και η ηχογράφηση μαθημάτων, οι συνετεύξεις με τους εκπαιδευτικούς καθώς και η συμπλήρωση κατάλληλων ερωτηματολογίων.

Με τέτοιες μεθοδολογικές προσεγγίσεις οι Ball, Thames & Phelps (2008) αναπτύσσουν τη θεωρία τους για τη *μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία*, την οποία διακρίνουν σε *γνώση του γνωστικού αντικειμένου* (subject matter knowledge) και *παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου* (pedagogical content knowledge). Η γνώση του γνωστικού αντικειμένου υποδιαιρείται στην (α) *κοινή γνώση του περιεχομένου* (common content knowledge), (β) *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (specialized content knowledge), και (γ) στον *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου* (horizon content knowledge). Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου υποδιαιρείται στη (α) *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* (knowledge of content and students), (β) *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (knowledge of content and teaching) και (γ) *γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών* (knowledge of content and curriculum).

1.2 Αναγκαιότητα της έρευνας

Αρκετές έρευνες έχουν μελετήσει τη γνώση των εκπαιδευτικών, αλλά οι περισσότερες απ' αυτές θέτουν προαπαιτούμενα προκειμένου να αξιοποιηθούν στην αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου. Λιγότερες έρευνες μελετούν τη γνώση των εκπαιδευτικών για τις ανάγκες της διδασκαλίας εννοιών των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όμως οι περισσότερες απ' αυτές επικεντρώνονται στα θεσμικά χαρακτηριστικά της γνώσης αυτής.

Είναι γνωστό από αρκετές έρευνες (Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Fischbein, 1987; Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981) ότι συχνά οι μαθητές και οι φοιτητές χρησιμοποιούν περισσότερο τη διαίσθησή τους κατά τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών και λιγότερο τους αυστηρούς ορισμούς και τις μαθηματικές προτάσεις που διέπουν τις έννοιες αυτές. Επίσης, κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, κάποιες έννοιες όπως για παράδειγμα, η έννοια του πραγματικού αριθμού, της συνάρτησης, του ορίου δεν διδάσκονται με βάση τους αυστηρούς μαθηματικούς τους ορισμούς και τις σχετικές θεωρητικές θεμελιώσεις λόγω της ιδιαίτερης δυσκολίας και του βάθους τους. Έτσι, εκ των πραγμάτων η διδασκαλία τέτοιων μαθηματικών εννοιών γίνεται εντός ενός διδακτικού πλαισίου όπου η διαισθητική προσέγγιση συμβαδίζει με τη θεωρητική συγκρότηση των εννοιών αυτών. Σε αυτό το περιβάλλον ο λόγος που αναπτύσσεται κατά τη διδακτική πρακτική συχνά εκτείνεται πέρα από τους αυστηρούς ορισμούς και την τυπική θεωρία και σε ζητήματα σχετικά με τη φύση της μαθηματικής έννοιας που μελετάται, την χρησιμοποιούμενη ορολογία, το συμβολισμό και τις συσχετίσεις με άλλες μαθηματικές έννοιες και προσεγγίσεις που ανήκουν στο ευρύτερο περιβάλλον της υπό διαπραγμάτευσης έννοιας. Οι συνθήκες αυτές παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες ομοιότητες με τις αντίστοιχες της ιστορικής εξέλιξης των αντίστοιχων εννοιών όπως θα φανεί και στην παρούσα διατριβή.

Στην έρευνά μας επιδιώκουμε τη μελέτη των αντιλήψεων και της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών για μαθηματικά ζητήματα Ανώτερων Μαθηματικών για τα οποία γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία ότι υπάρχουν δυσκολίες στην προσέγγισή τους από τους μαθητές. Επιλέξαμε μαθηματικές έννοιες οι οποίες χρησιμοποιούνται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση παρόλο, που δεν ορίζονται με πληρότητα σ' αυτό το επίπεδο. Θεωρούμε ότι το θεσμικό γνωστικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών αδυνατεί να μας ενημερώσει με πληρότητα για τις αντιλήψεις τους και τον τρόπο που ενεργούν κατά τη διδακτική τους πρακτική. Ερμηνεύουμε τις τοποθετήσεις των εκπαιδευτικών για ζητήματα που αφορούν την ίδια τη φύση των εννοιών, τους συμβολισμούς που αναπτύσσονται, καθώς και τις συνδέσεις που επιδιώκονται.

1.3 Σκοπός και ερευνητικοί στόχοι

Με την έρευνά μας επιδιώκουμε γενικότερα να συμβάλλουμε στη διερεύνηση των αντιλήψεων και της μαθηματικής συλλογιστικής των εκπαιδευτικών κατά τη διδακτική διαπραγμάτευση. Για το σκοπό αυτό διαμορφώσαμε ένα διδακτικό σενάριο όπου εμφανίζονται κάποιες από τις εντοπισμένες παρανοήσεις σε μαθητές και φοιτητές για τις περιοδικές δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και ιδιαίτερα αυτών με περίοδο 9. Το διδακτικό αυτό σενάριο το εφοδιάσαμε με ερωτήσεις σχετικά με την αναγνώριση, την ερμηνεία και τη σχετική διδακτική ανατροφοδότηση. Τις ερωτήσεις που συνόδευαν το σενάριο τις απάντησαν γραπτά 106 εκπαιδευτικοί μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στη συνέχεια επιλέχθηκαν 15 εκπαιδευτικοί με τους οποίους πραγματοποιήθηκαν αντίστοιχες ημιδομημένες συνεντεύξεις διάρκειας περίπου 45 λεπτά της ώρας η κάθε μια, ώστε να έχουμε ακριβέστερη εικόνα της των αντιλήψεών τους.

Οι ερευνητικοί στόχοι που μελετώνται είναι:

α) οι αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τις αναπαραστάσεις δεκαδικών αριθμών με περίοδο 9 και η σύνδεσή τους με τη διδακτική πρακτική κατά τον αναστοχασμό τους όσον αφορά σχετικές παρανοήσεις μαθητών λυκείου και

β) η συλλογιστική των εκπαιδευτικών και το υπόβαθρό της κατά τη διδακτική διαχείριση παρανοήσεων μαθητών λυκείου γι' αυτές τις αναπαραστάσεις.

Με τον όρο αντίληψη των εκπαιδευτικών θεωρούμε το σύνολο των συνειδητών ή υποσυνείδητων πεποιθήσεων, εννοιών, σημασιών, κανόνων, νοητικών εικόνων και προτιμήσεων σχετικά με την επιστήμη των μαθηματικών (Thompson, 1992).

Με το όρο συλλογιστική εννοούμε τη διαδικασία της σκέψης για κάτι στη προσπάθεια να προκύψει ένα συμπέρασμα μ' ένα λογικό ή διαισθητικό τρόπο.

1.4 Επισκόπηση της διατριβής

Η διατριβή αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, αναπτύσσεται το ευρύτερο πεδίο στο οποίο εντάσσεται η έρευνα καθώς και οι βασικοί προβληματισμοί του πεδίου αυτού. Στη συνέχεια περιγράφονται στοιχεία για την αναγκαιότητα της έρευνας καθώς και οι βασικοί προβληματισμοί που πυροδότησαν τη συγκεκριμένη μελέτη στη διερεύνηση των οποίων επιδιώκουμε να συμβάλλουμε. Αναφέρονται βασικά στοιχεία του σχεδιασμού της έρευνας καθώς και τα ερευνητικά μας ερωτήματα. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με την επισκόπηση της διατριβής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική περιγραφή της σχετικής βιβλιογραφίας και αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασίζεται η έρευνα.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας όπου αναλύεται το βασικό εργαλείο συλλογής των δεδομένων και αιτιολογείται η επιλογή του, στη συνέχεια περιγράφονται βασικά στοιχεία των συμμετεχόντων στην έρευνα καθώς και τα ερευνητικά δεδομένα. Το κεφάλαιο κλείνει με την ανάπτυξη των βασικών παραμέτρων της ανάλυσης των δεδομένων για το κάθε ερευνητικό ερώτημα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση των δεδομένων και τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με τα ερευνητικά προβλήματα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων και αναπτύσσονται τα συμπεράσματα της έρευνας.

Η εργασία συνοδεύεται από δυο παραρτήματα. Στο πρώτο παράρτημα γίνεται μια επισκόπηση της διαπραγμάτευσης των αριθμών και των αναπαραστάσεων τους στα σχολικά εγχειρίδια από τις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας μέχρι και τις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ώστε να αναδειχθούν οι προτεινόμενες θεσμικές διδακτικές προσεγγίσεις και βασικοί προβληματισμοί σχετικά με το θέμα της εργασίας. Στο δεύτερο παράρτημα γίνεται μια σύντομη περιγραφή της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών με στόχο τη θεωρητική προσέγγιση μαθηματικών ζητημάτων που παρουσιάζονται στην εργασία.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Γνώση για τη Διδασκαλία

2.1.1 Το απολεσθέν παράδειγμα

Όπως σημειώνει ο Shulman (1986) με βάση μια ιστορική ανασκόπηση των προϋποθέσεων που θεωρούνταν σημαντικές για τη διδασκαλία στο τέλος του 19^{ου} αιώνα στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (Η.Π.Α), η γνώση του *γνωστικού αντικειμένου* (subject matter) θεωρούνταν αρκετά σημαντική εκείνη την περίοδο. Η γνώση των θεωριών και των μεθόδων της διδασκαλίας όμως αν και σημαντική έπαιζε ένα δευτερεύοντα ρόλο για τα προσόντα του δασκάλου.

Ωστόσο, η έμφαση στο διδακτικό αντικείμενο ήρθε σε έντονη αντίθεση με τις αναδυόμενες πολιτικές του 1980 σε σχέση με τις αξιολογήσεις και τους ελέγχους των ικανοτήτων των εκπαιδευτικών. Οι σχεδιαστές της εκπαιδευτικής πολιτικής των ΗΠΑ εκείνης της περιόδου, στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν ικανοποιητικά εργαλεία αξιολόγησης των εκπαιδευτικών, ανέπτυσσαν προδιαγραφές για ρουμπρίκες σε κατηγορίες όπως «διδακτική αποτελεσματικότητα», «μελέτες διαδικασίας-αποτελέσματος» ή «διδακτική συμπεριφορά». Σε αδρές γραμμές, το σκεπτικό των σχεδιαστών της εκπαιδευτικής πολιτικής ήταν ότι οι πιο αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί θα εργάζονται στη βάση συγκεκριμένων εκπαιδευτικών προσεγγίσεων, ώστε να συμβάλλουν σε μια πιο αποτελεσματική μάθηση των μαθητών. Η συγκεκριμένη προσέγγιση δέχθηκε κριτική από πολλές πλευρές τόσο τεχνικές όσο και θεωρητικές καθώς εμπεριείχε μια πολύ σημαντική έλλειψη στο σχεδιασμό της. Όπως επισημαίνει ο Shulman (1986), αυτό που απέτυχαν να κατανοήσουν οι εμπνευστές της ήταν ο αναπόφευκτος χαρακτήρας του ιδιαίτερου ρόλου του είδους της γνώσης της κάθε επιστήμης. Έτσι, ενώ στις περισσότερες αμερικανικές πολιτείες, η αξιολόγηση των εκπαιδευτικών επικεντρωνόταν στην αξιολόγηση της ικανότητάς τους να διδάσκουν, η σύγκριση των κατηγοριών στις οποίες αξιολογούνταν οι εκπαιδευτικοί την δεκαετία του 1980 σε σχέση με αυτές του προηγούμενου αιώνα ήταν αποκαλυπτική. Το γνωστικό αντικείμενο πλέον απουσίαζε εντελώς.

Η ερευνητική ομάδα του Shulman υλοποίησε ένα ερευνητικό πρόγραμμα για τη γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία. Αρχικός τους στόχος ήταν ο εντοπισμός των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για τα γνωστικά αντικείμενα που διδάσκουν και στη συνέχεια προχωρούν σε μια ποιοτική αξιολόγηση με στόχο τη μέτρηση της γνώσης του περιεχομένου που κατέχουν. Για το σκοπό αυτό παρακολουθούνταν διδασκαλίες ασκούμενων εκπαιδευτικών, και συλλέγονταν δεδομένα από το πρόγραμμα προετοιμασίας τους.

Ο Shulman (1986) ανέδειξε την έλλειψη προσανατολισμού της έρευνας στο περιεχόμενο της διδασκαλίας και χαρακτήρισε αυτή την έλλειψη ως το πρόβλημα του «απολεσθέντος παραδείγματος» ("missing paradigm") (σ. 7). Πρότεινε δε τη διάκριση της *γνώσης του περιεχομένου* (content knowledge) σε τρεις κατηγορίες: (α) τη *γνώση* του *γνωστικού αντικειμένου του περιεχομένου* (subject matter content knowledge), (β) την *παιδαγωγική γνώση περιεχομένου* (pedagogical content knowledge) και (γ) τη *γνώση του αναλυτικού προγράμματος* (curricular knowledge) (σ. 9).

Η *γνώση του γνωστικού αντικειμένου* θεωρείται η γνώση που κατέχει ο εκπαιδευτικός, ο τρόπος που την έχει οργανωμένη, καθώς και η κατανόηση της δομής του γνωστικού αντικειμένου. Η κατανόηση της δομής αναφέρεται τόσο στην κατανόηση βασικών εννοιών και αρχών του συγκεκριμένου επιστημονικού κλάδου, όσο και στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ελέγχεται η αλήθεια και η εγκυρότητα μιας πρότασης μέσα σ' αυτόν τον επιστημονικό κλάδο. Οι εκπαιδευτικοί δεν αρκεί μόνο να είναι ικανοί να ορίζουν στους μαθητές τις αποδεκτές αλήθειες σ' ένα πεδίο, αλλά πρέπει επίσης να μπορούν να εξηγούν γιατί μια συγκεκριμένη πρόταση θεωρείται έγκυρη, γιατί αξίζει να μαθευτεί και πως αυτή σχετίζεται με άλλες προτάσεις τόσο εντός της συγκεκριμένης επιστήμης όσο και εκτός αυτής, τόσο της θεωρίας όσο και της πρακτικής. Θεωρεί, επίσης, ότι ο εκπαιδευτικός δεν αρκεί να κατανοεί ότι ισχύει κάτι, αλλά επιπλέον να κατανοεί και γιατί ισχύει, ποιος είναι ο βαθμός εγκυρότητάς του καθώς και ότι η πεποίθηση για κάποια αιτιολόγηση μπορεί να αποδυναμωθεί ή ακόμα και να απορριφθεί. Επιπλέον, θεωρεί ότι πρέπει να αναμένουμε ένας εκπαιδευτικός να κατανοεί αν ένα συγκεκριμένο ζήτημα έχει κεντρικό ή περιφερειακό ρόλο σε μια επιστήμη (Shulman, 1986).

Η *παιδαγωγική γνώση περιεχομένου* είναι εκείνο το είδος της γνώσης του περιεχομένου που υπερβαίνει τη γνώση ενός θέματος καθ' αυτού και αποτελεί μια διάσταση της γνώσης του γνωστικού αντικειμένου για τη διδασκαλία. Στην κατηγορία αυτής της γνώσης περιλαμβάνονται χρήσιμες μορφές αναπαράστασης ιδεών, αναλογίες, απεικονίσεις, διαγράμματα, παραδείγματα και επεξηγήσεις που καθιστούν το γνωστικό αντικείμενο έτοιμο για κατανόηση από άλλους. Η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου επίσης περιλαμβάνει μια κατανόηση αυτού που κάνει τη μάθηση ενός συγκεκριμένου πεδίου εύκολη ή δύσκολη. Εδώ εντάσσεται η βασισμένη στην έρευνα γνώση που πρέπει να διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί για τις διαισθητικές αντιλήψεις και τις παρανοήσεις των μαθητών διαφόρων ηλικιών για διάφορα διδασκόμενα ζητήματα καθώς και η γνώση στρατηγικών που συμβάλλουν στην αναδιοργάνωση της κατανόησης των μαθητών και στο ξεπέρασμα των αρχικών τους παρανοήσεων (Shulman,1986, σ. 9-10).

Η *γνώση του προγράμματος σπουδών* περιλαμβάνει τη γνώση του περιεχομένου σπουδών των διαφόρων μαθημάτων σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, την ποικιλία των διδακτικών υλικών που είναι διαθέσιμα σε σχέση με το αντίστοιχο πρόγραμμα καθώς και το σύνολο των χαρακτηριστικών, των ενδείξεων και των αντενδείξεων για τη χρήση ιδιαίτερων εκπαιδευτικών υλικών σε συγκεκριμένες περιστάσεις. Επισημαίνεται επίσης, η διάκριση μεταξύ της παράπλευρης (lateral) γνώσης του προγράμματος σπουδών, η οποία περιλαμβάνει τη γνώση της συσχέτισης ενός δεδομένου γνωστικού ζητήματος με αντίστοιχα ζητήματα σε άλλες γνωστικές περιοχές και της κατακόρυφης (vertical) γνώσης του προγράμματος σπουδών η οποία περιλαμβάνει τη γνώση του περιεχομένου ενός συγκεκριμένου ζητήματος σε προηγούμενες και σε επόμενες τάξεις (Shulman, 1986).

Στη συνέχεια στην προσπάθειά του ο Shulman (1987) να περιγράψει την γνώση των εκπαιδευτικών ως επαγγελματική γνώση, την οργανώνει στις παρακάτω κατηγορίες:

- γνώση του περιεχομένου
- γενική παιδαγωγική γνώση, με ειδική αναφορά σε εκείνες τις ευρύτερες αρχές και στρατηγικές διαχείρισης της τάξης που φαίνεται να υπερβαίνουν το γνωστικό αντικείμενο
- γνώση του προγράμματος σπουδών, με ειδική κατανόηση των υλικών και των προγραμμάτων που προσφέρονται ως «εργαλεία εργασίας» για τους εκπαιδευτικούς
- παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου, το οποίο είναι το ειδικό αμάλγαμα του περιεχομένου και της παιδαγωγικής που ανήκει στη δικαιοδοσία των εκπαιδευτικών και της δικής τους ειδικής μορφής επαγγελματικής κατανόησης
- γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους
- γνώση των εκπαιδευτικών πλαισίων, που περιλαμβάνει, τους κανόνες λειτουργίας των ομάδων εργασίας στις τάξεις, τις κυβερνητικές και οικονομικές αρχές

λειτουργίας του σχολείου αλλά και το χαρακτήρα των κοινοτήτων και της κουλτούρας, και

- γνώση των εκπαιδευτικών περιορισμών, σκοπών, αξιών και του φιλοσοφικού και ιστορικού τους υπόβαθρου.

Όπως αναφέρουν οι Ball, Thames & Phelps (2008), το ενδιαφέρον του Shulman και των συνεργατών του δεν είναι να καταστρώσουν μια λίστα με αυτά που χρειάζεται να ξέρουν οι εκπαιδευτικοί σε κάθε συγκεκριμένη γνωστική περιοχή. Αντίθετα, με την εργασία τους επιδιώκουν να παρέχουν έναν εννοιολογικό προσανατολισμό και ένα σύνολο αναλυτικών επισημάνσεων, ώστε να στρέψουν την προσοχή των ερευνητικών και πολιτικών κοινοτήτων στη φύση και τους τύπους της γνώσης που χρειάζονται για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου. Έτσι, επιδιώκουν να εξειδικεύσουν τους τρόπους με τους οποίους η γνώση του περιεχομένου για τη διδασκαλία διακρίνεται από την επιστημονική γνώση του περιεχομένου. Αυτό έχει σημαντικό αντίκτυπο στην υποστήριξη ενός αναδυόμενου επιχειρήματος, ότι η διδασκαλία είναι επαγγελματική εργασία με δικό της διακριτό γνωστικό υπόβαθρο.

Η εργασία του Shulman και των συνεργατών του βρήκε εντυπωσιακή αποδοχή από την επιστημονική κοινότητα. Χιλιάδες άρθρα χρησιμοποίησαν την έννοια της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου σε αρκετές γνωστικές περιοχές όπως τις φυσικές επιστήμες, τα μαθηματικά, τη μηχανική, την ειδική εκπαίδευση, τη γλώσσα, τη μουσική κ.ά. Οι προσπάθειες εντοπίστηκαν στην ανάδειξη του ρόλου του εκάστοτε γνωστικού αντικειμένου στη διδασκαλία, στην αποσαφήνιση των ορισμών για τις κατηγορίες της γνώσης για τη διδασκαλία, στην ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης της γνώσης αυτής, αλλά και στην ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών τα οποία να συνδέονται στενότερα με τη διδακτική πρακτική.

2.1.2 Η γνώση των εκπαιδευτικών και η επίδρασή της στη διδασκαλία

Αρκετές μελέτες παρουσιάζουν τις δυσκολίες των εκπαιδευτικών όταν είναι αβέβαιοι για ένα περιεχόμενο. Υπάρχουν μάλιστα ερευνητικά ευρήματα που υποστηρίζουν ότι η φτωχή γνώση του γνωστικού αντικειμένου έχει αρνητικό αντίκτυπο στη διδασκαλία (McDiarmid, Ball & Anderson, 1989; Rowland, Martyn, Barber & Heal, 2000). Στην ίδια κατεύθυνση σε μια έρευνα των Eisenhart, Borko, Underhill, Brown, Jones & Agard (1993) παρουσιάζεται μια περίπτωση όπου ένας εκπαιδευτικός δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρά το ότι είχε παρακολουθήσει δυο χρόνια απειροστικό λογισμό, ένα μάθημα για την απόδειξη, ένα μάθημα σύγχρονης άλγεβρας και τέσσερα μαθήματα της επιστήμης των υπολογιστών, αδυνατούσε να βρει μια σωστή αναπαράσταση για τη διαίρεση δυο κλασμάτων και να εξηγήσει γιατί ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού με τον αντίστροφο λειτουργεί, καταλήγοντας να προτείνει στους μαθητές στη σχετική τους ερώτηση «απλά χρησιμοποιήστε τον κανόνα που σας έδωσα» (σ. 198).

Το 1996 η National Commission on Teaching and American's Future (NCTAF) αναφέρει μια σειρά συστάσεων για τη βελτίωση των σχολείων στο «Σχέδιο για πρόσληψη, προετοιμασία, και υποστήριξη εξαίρετων εκπαιδευτικών για όλα τα σχολεία της Αμερικής». Υποστηρίζεται ότι αυτό που οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν και μπορούν να κάνουν έχει πολύ σημαντική επιρροή σ' αυτό που οι μαθητές μαθαίνουν. Αναφέρουν ότι η γνώση των εκπαιδευτικών επηρεάζει τις ευκαιρίες των μαθητών για μάθηση. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν «πλήρως» το αντικείμενο μάθησης στην προσπάθειά τους να μπορούν να το παρουσιάσουν με σαφήνεια, να κάνουν τις ιδέες προσβάσιμες σε πολλούς μαθητές, ώστε αυτοί να συμμετέχουν σε μια προκλητική εργασία. Παρουσιάζονται μελέτες που δείχνουν ότι η γνώση των εκπαιδευτικών έχει ουσιαστική συμβολή στα επιτεύγματα των μαθητών και ισχυρίζονται ότι «διαφορές στα προσόντα των εκπαιδευτικών αντιστοιχούν σε πάνω από 90% της μεταβλητότητας των επιτευγμάτων των μαθητών στην ανάγνωση και τα μαθηματικά» (Armour-Thomas, Clay et al., 1989, στο NCTAF 1996, σ.8).

Όμως, από την άλλη, σε μια προσπάθεια να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ της μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών και των επιτευγμάτων των μαθητών τους, τα αποτελέσματα δεν είναι τα αναμενόμενα. Ο Begle (1979) αναλύοντας τη σχέση μεταξύ του αριθμού των μαθημάτων που παρακολούθησαν οι εκπαιδευτικοί στο πανεπιστήμιο και των επιδόσεων των μαθητών βρίσκει ότι η παρακολούθηση μαθημάτων Ανώτερων Μαθηματικών συσχετίζεται με θετικό αποτέλεσμα (effect) στις επιδόσεις των μαθητών μόνο στο 10% των περιπτώσεων, και, το πιο εντυπωσιακό είναι ότι συνδέεται με αρνητικό αποτέλεσμα στο 8% των περιπτώσεων. Οι Ball & Bass (2003) ισχυρίζονται ότι το αρνητικό αποτέλεσμα δεν τεκμηριώνεται από τα ευρήματα και υποστηρίζουν ότι σύμφωνα με αυτά δεν υπάρχει κάποια συνέπεια στις επιδόσεις των μαθητών.

Μια εξήγηση που έχει δοθεί για τα συμπεράσματα αυτά είναι ότι η περισσότερη εργασία με τα μαθήματα Ανώτερων Μαθηματικών συχνά συνοδεύεται με μεγαλύτερη εμπειρία με πιο συμβατικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών (Ball, 1988). Μια δεύτερη ερμηνεία υποστηρίζει ότι η ανώτερη μαθηματική εργασία συνοδεύεται από συμπίεση της γνώσης η οποία παρεμβαίνει στην αποσυμπίεση της γνώσης του περιεχομένου που χρειάζεται κατά την αποδόμηση της γνώσης αυτής που κάνουν οι εκπαιδευτικοί (Ball & Bass, 2000). Σε κάθε περίπτωση η σύνδεση της γνώσης των εκπαιδευτικών και των διδακτικών αποτελεσμάτων δεν είναι ούτε απλή ούτε γραμμική (Hodgen, 2011).

Όμως, παραμένει γενικά αποδεκτό ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν το γνωστικό αντικείμενο που διδάσκουν (Ball et. al., 2008). Αν οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν οι ίδιοι καλά το γνωστικό αντικείμενο δεν μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν το περιεχόμενο. Ωστόσο, αυτό δε σημαίνει ότι η επαρκής γνώση του γνωστικού αντικειμένου εξασφαλίζει από μόνη της μια καλή διδασκαλία. Από την άλλη, τα προγράμματα σπουδών προετοιμασίας των εκπαιδευτικών για το γνωστικό αντικείμενο, σε παγκόσμιο επίπεδο, ειδικότερα στην Ελλάδα, παραμένουν ακαδημαϊκά και απομακρυσμένα από τη διδακτική πράξη λόγω του ότι η επιστημονική γνώση συχνά προσανατολίζεται σε σκοπούς άλλους από αυτούς της διδασκαλίας. Αυτό ήταν ένα σημαντικό πρόβλημα που εντοπίστηκε από τον Shulman και τους συνεργάτες στις αρχές της δεκαετίας του 1980.

Όπως αναφέρουν οι Ball et al. (2008), η πρώτη σημαντική συνεισφορά του Shulman και των συνεργατών του ήταν η αναπλαισίωση της μελέτης της γνώσης των εκπαιδευτικών με τρόπους που επικεντρώνουν την προσοχή στο ρόλο του περιεχομένου στη διδασκαλία. Αυτή ήταν μια ριζική στροφή της έρευνας εκείνης της περιόδου η οποία εστίαζε σχεδόν αποκλειστικά στις γενικές πτυχές της διδασκαλίας. Η δεύτερη συμβολή του Shulman και των συνεργατών του ήταν η προσέγγιση της γνώσης του περιεχομένου ως ενός ιδιαίτερου είδους γνώσης, καθοριστικής σημασίας για το επάγγελμα του εκπαιδευτικού.

Όμως, αρκετά χρόνια αργότερα, μετά τις εργασίες του Shulman και των συνεργατών του, το πεδίο είχε πολύ μικρή εξέλιξη στο σημείο που αρχικά είχαν επικεντρωθεί, δηλαδή, στην ανάπτυξη ενός συνεπούς θεωρητικού πλαισίου της γνώσης του περιεχομένου για τη διδασκαλία. Όπως σημειώνουν οι Ball et al. (2008), οι ιδέες παρέμεναν θεωρητικά διάσπαρτες με έλλειψη ξεκάθαρων ορισμών. Οι ερευνητές εξειδικεύονταν σ' ένα συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο και μεγάλο μέρος της εργασίας τους εξελίσσονταν περίπου παράλληλα αλλά σε ανεξάρτητες κατευθύνσεις. Συχνά δεν ήταν ξεκάθαρο πως οι ιδέες από μια γνωστική περιοχή σχετίζονταν με κάποια άλλη ή ακόμα και ευρήματα εντός της ίδιας γνωστικής περιοχής περιείχαν παρόμοιες αλλά και διαφορετικές απόψεις για τη γνώση του γνωστικού αντικειμένου που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί. Σε κάποιες περιπτώσεις η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου φαινόταν να περιλαμβάνει σχεδόν οτιδήποτε μπορεί να ξέρει ο εκπαιδευτικός για την διδασκαλία ενός συγκεκριμένου ζητήματος.

Έτσι, προέκυψε η ανάγκη για την καλύτερη περιγραφή των χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία. Η Ma (1999) περιγράφει ως «γνωστικές αποσκευές» ένα μέρος της γνώσης 72 κινέζων εκπαιδευτικών, από τους οποίους πήρε συνέντευξη. Αυτές οι αποσκευές συνιστούν ένα εξευγενισμένο νόημα της οργάνωσης και της ανάπτυξης ενός συνόλου σχετικών ιδεών στο πεδίο της αριθμητικής. Οι εκπαιδευτικοί στη μελέτη της Ma είχαν σαφείς ιδέες για «τη διαμήκη διεργασία του ανοίγματος και της καλλιέργειας ενός τέτοιου πεδίου στα μυαλά των μαθητών» (Ma, 1999, σ. 114). Οι γνωστικές τους αποσκευές περιλαμβάνουν βασικές ιδέες που «ζυγίζουν περισσότερο» από άλλες ιδέες των αποσκευών, ακολουθίες για ανάπτυξη των ιδεών, και «γνωστικούς κόμβους» που συνδέουν κρίσιμες σχετικές ιδέες. Η έννοια της Ma για τις «γνωστικές αποσκευές» παριστάνει μια συγκεκριμένη γενεσιουργό μορφή και δομή για την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (Ball & Bass, 2000).

Η Ma (1999) περιγράφει αυτό που αποκαλεί «βαθιά κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών» με όρους βάθους (depth), *πλάτους* (breadth) και *ακρίβειας* (thoroughness) της γνώσης που χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί. *Βάθος*, σύμφωνα με τη Ma, είναι η ικανότητα της σύνδεσης ιδεών με τις μεγάλες και κρίσιμες ιδέες του πεδίου, το *πλάτος* έχει να κάνει με συνδέσεις μεταξύ ιδεών με παρόμοια εννοιολογική ισχύ. Η *ακρίβεια*, είναι η ουσιαστική ύφανση ιδεών σ' ένα συνεπές όλο. Επιπροσθέτως, η Ma επισημαίνει την ευελιξία που υπάρχει στην πολλαπλότητα των αναπαραστάσεων και των προσεγγίσεων. Με βάση τις ιδέες του Bruner (1960) για τη «δομή» μιας επιστήμης, η Ma τονίζει την σημασία της γνώσης των εκπαιδευτικών παρακολουθώντας τις «απλές αλλά κρίσιμες βασικές έννοιες και αρχές των μαθηματικών» (σ.122) και αναπτύσσοντας «βασικές στάσεις» (basic attitudes) (σ. 122), όπως για παράδειγμα η επιδίωξη στη δικαιολόγηση ισχυρισμών, η επιδίωξη για τη συνοχή μιας ιδέας σε διαφορετικά πλαίσια, για τη γνώση του «πως» και του «γιατί». Η Ma ισχυρίζεται ότι η γνώση των μαθηματικών για τη διδασκαλία από τους εκπαιδευτικούς πρέπει να είναι όπως αυτή του ταξιτζή μιας πόλης, δηλαδή κάποιος να μπορεί να πάει στις σημαντικές τοποθεσίες με μια μεγάλη ποικιλία τρόπων, όντως ευέλικτα και ευπροσάρμοστα (flexibly and adaptively) (σ. 123).

Η *ευελιξία* και η *προσαρμοστικότητα* είναι σαφείς διδακτικές απαιτήσεις. Όπως ισχυρίζεται η Ma (1999), οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν τι γνωρίζουν για να απαντήσουν σ' ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Για να είναι σε θέση να το κάνουν αυτό, πρέπει να είναι ικανοί να αποδομήσουν τη δική τους μαθηματική γνώση σε μια λιγότερο εξευγενισμένη και τελική μορφή, όπου τα συστατικά στοιχεία είναι προσβάσιμα και ορατά. Οι Ball & Bass (2000) αναφέρονται σ' αυτό ως *αποσυμπίεση* (decompression). Παραδόξως, περισσότερη προσωπική γνώση του γνωστικού αντικειμένου, η οποία επιθυμούμε για λόγους χρησιμότητας να είναι συμπιεσμένη, μπορεί να είναι ανεπαρκής για τη διδασκαλία. Στην πραγματικότητα τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη στην οποία η συμπίεση είναι κεντρικής σημασίας. Πράγματι, η εξευγενισμένη και συμπιεσμένη μορφή της μπορεί να επισκιάσει την ικανότητα κάποιου να διακρίνει πώς σκέφτονται οι μαθητευόμενοι, όπως και για τις ρίζες αυτής της γνώσης. Η ευέλικτη γνώση για τη διδασκαλία απαιτεί μια υπέρβαση αυτής της σιωπηρής κατανόησης που χαρακτηρίζει περισσότερο την προσωπική γνώση (Polanyi, 1958). Επειδή, οι εκπαιδευτικοί διαπραγματεύονται το περιεχόμενο στην ανάπτυξή του και όχι στο καταληκτικό του στάδιο, πρέπει να μπορούν να κάνουν κάτι ανάποδα: να δουλεύουν προς τα πίσω, από την ώριμη και συμπιεσμένη κατανόηση του περιεχομένου στην αποσυμπίεση των συστατικών του στοιχείων.

Οι Ball & Bass (2003) επιχειρώντας να προσδιορίσουν καλύτερα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία αναφέρουν τρεις βασικές παρατηρήσεις που προκύπτουν από τα ερευνητικά τους ευρήματα. Σύμφωνα με την πρώτη, η διδασκαλία μπορεί να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει σημαντικές μαθηματικές εργασίες. Η προοπτική αυτή επιτρέπει τον προσδιορισμό των μαθηματικών που οι εκπαιδευτικοί πρέπει να κάνουν στο μάθημά τους. Καθένα από τα παρακάτω περιλαμβάνεται την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

- Σχεδιασμός επεξηγήσεων με μαθηματική ακρίβεια οι οποίες να είναι κατανοήσιμες και χρήσιμες για τους μαθητές.
- Χρήση μαθηματικά κατάλληλων και κατανοήσιμων ορισμών.
- Προσεκτική αναπαράσταση ιδεών, αντιστοίχιση μεταξύ ενός φυσικού ή γραφικού μοντέλου και συμβολισμού, πράξης ή διεργασίας.
- Ερμηνεία και ανάπτυξη μαθηματικών και παιδαγωγικών αιτιολογήσεων για τις ερωτήσεις των μαθητών, λύσεων, προβλημάτων και απόψεων (προβλεπόμενων αλλά και ασυνήθιστων).
- Να μπορούν να απαντούν παραγωγικά στις ερωτήσεις των μαθητών και στις αναζητήσεις τους.
- Να έχουν επιχειρήματα για τη μαθηματική ποιότητα των διδακτικών υλικών και να τα τροποποιούν όταν χρειάζεται.
- Να μπορούν να θέτουν καλά μαθηματικά ερωτήματα και προβλήματα τα οποία να προάγουν τη μάθηση των μαθητών.
- Πρόσβαση στη γνώση των μαθητών από τους μαθητές και στα επόμενα βήματά τους.

Δεύτερον, εξετάζοντας τη διδασκαλία ως μαθηματική εργασία, οι Ball & Bass (2003) επισημαίνουν κάποια ουσιαστικά χαρακτηριστικά της γνώσης των μαθηματικών για τη διδασκαλία. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό είναι ότι η μαθηματική γνώση χρειάζεται να αποσυμπιεσθεί (*unpacked*). Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της γνώσης για τη διδασκαλία. Ωστόσο, η ικανότητα συμπίεσης (*compress*) της πληροφορίας αποτελεί δυναμικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών. Όταν οι ιδέες αναπαριστώνται σε συμπιεσμένη συμβολική μορφή, οι δομές τους γίνονται εμφανείς, και νέες ιδέες και ενέργειες καθίστανται δυνατές. Οι μαθηματικοί βασίζονται σ' αυτή τη συμπίεση στην εργασία τους. Όμως, οι εκπαιδευτικοί εργάζονται με τα μαθηματικά ώστε να μαθευτούν, και αυτό απαιτεί ένα είδος αποσυμπίεσης των ιδεών.

Ένα παράδειγμα, το οποίο σχετίζεται με το αντικείμενο της αναπαράστασης που αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, είναι οι εμπειρίες των μαθητών με τη συμβολική έκφραση του συστήματος θέσης των δεκαδικών αριθμών, που αναπτύσσονται στο έδαφος που αργότερα θα οικοδομηθούν τα κλάσματα, ώστε να προκύψει η αναδυόμενη έννοια του πραγματικού αριθμού. Οι εκπαιδευτικοί δεν θα μπορούν να διαχειριστούν την αναπτυσσόμενη κατανόηση των μαθητών μόνο με την συμπιεσμένη αντίληψη των πραγματικών αριθμών, ή του τυπικού ορισμού του ρητού αριθμού. Έτσι παρόλο που μια τέτοια έννοια έχει υψηλή χρησιμότητα στην εργασία των μαθηματικών είναι ακατάλληλη για την εργασία της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Μια ακόμα σημαντική πτυχή της γνώσης για τη διδασκαλία, όπως αναφέρουν οι Ball & Bass (2003), είναι η συνεκτικότητά της, τόσο μεταξύ των μαθηματικών πεδίων σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο όσο και κατά τη διάρκεια του χρόνου που οι μαθηματικές ιδέες αναπτύσσονται και εξελίσσονται. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να βοηθούν τους μαθητές να συνδέουν τις ιδέες που μαθαίνουν, όπως για παράδειγμα, στην αριθμητική και τη γεωμετρία. Η διδασκαλία επιδιώκει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών πεδίων, έτσι ώστε είναι σε θέση οι μαθητές να δημιουργούν συνδέσεις και να αναζητούν τη συνέπεια στη γνώση τους. Η διδασκαλία, επίσης, απαιτεί οι εκπαιδευτικοί να προβλέπουν τον τρόπο ή τους τρόπους που οι μαθηματικές ιδέες αλλάζουν και εξελίσσονται. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να έχουν τη ματιά τους στους «μαθηματικούς ορίζοντες» των μαθητών τους, ακόμα και όταν αποσυμπιέζουν τις λεπτομέρειες των ιδεών στις οποίες επικεντρώνονται κάποια δεδομένη στιγμή (Ball, 2003).

Μια ακόμα παρατήρηση που προέκυψε από την μελέτη της διδασκαλίας ως μαθηματικής εργασίας είναι ότι, σύμφωνα με την ανάλυσή των Ball & Bass (2003), κρίσιμα μαθηματικά ζητήματα παίζουν ρόλο στο μάθημα, παρόλο που δεν προβλέπονται στο πρόγραμμα σπουδών. Αναφέρεται ένα παράδειγμα όπου παρά το γεγονός ότι ένα μάθημα ήταν για την αφαίρεση έγινε διερεύνηση της ισοδυναμίας των αντίστοιχων αναπαραστάσεων. Σε άλλες περιπτώσεις, υπάρχουν μαθητές που αγωνιούν να ξεπεράσουν τα γλωσσικά εμπόδια με όρους ατελείς και ασαφώς ορισμένους, και εμφανίζονται συζητήσεις που ναυάγησαν επειδή ο μαθηματικός συλλογισμός ήταν περιορισμένος και απουσίαζε η καθοριστική γνώση, αυτή που ήταν θεμελιώδης για αυτόν.

Τα ανωτέρω ζητήματα φέρνουν στην επιφάνεια σημαντικές πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού, του συμβολισμού, της χρήσης των όρων και των αναπαραστάσεων. Συνεπώς, για τους εκπαιδευτικούς απαιτείται τόσο η γνώση των συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών όσο και άλλων στοιχείων γνώσης, μάθησης και αξιοποίησής τους στη διδακτική πράξη. Πολλές φορές η προσοχή των εκπαιδευτικών σε κάποια από αυτές τις πτυχές της *μαθηματικής πρακτικής* είναι κρίσιμες για την καθοδήγηση του μαθήματος και παρουσιάζονται χαμένες ευκαιρίες λόγω της έλλειψης ευαισθησίας και γνώσης θεμελιωδών μαθηματικών πρακτικών. Έτσι, η θεώρηση των *μαθηματικών πρακτικών ως συστατικό της μαθηματικής γνώσης* αποκτάει ένα ιδιαίτερο νόημα.

2.2 Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία

Οι Ball et al. (2008) αναγνωρίζοντας τη δυναμική της ιδέας της ερευνητικής ομάδας του Shulman για το ιδιαίτερο είδος γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου γνωστικού περιεχομένου και προσπαθώντας να εξειδικεύσουν τη φύση αυτής της γνώσης συμβάλλοντας στις αυξημένες απαιτήσεις ακρίβειας των νέων εννοιών και μεθόδων, αναπτύσσουν τη δική τους προσέγγισή για την *μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία* (mathematical knowledge for teaching). Με τον όρο μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία εννοούν, όπως οι ίδιοι δηλώνουν, τη μαθηματική γνώση για την πραγματοποίηση της εργασίας της διδασκαλίας των μαθηματικών, επισημαίνοντας ότι ο ορισμός τους ξεκινάει από την διδασκαλία και όχι από τους εκπαιδευτικούς.

Οι Ball et al. (2008) θέτουν το ερώτημα «Τι χρειάζεται να γνωρίζουν και να μπορούν να κάνουν οι εκπαιδευτικοί για να διδάσκουν αποτελεσματικά;» (σ. 394) και στην προσπάθειά τους να δώσουν έμφαση στην ίδια την γνώση για τη διδασκαλία και όχι τόσο στους εκπαιδευτικούς, προτιμούν να διαπραγματευτούν το ερώτημα «Τι απαιτεί η αποτελεσματική διδασκαλία με όρους κατανόησης του περιεχομένου;» (σ. 394) επικεντρώνοντας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Οι Ball et al. (2008) επιλέγουν μια ερευνητική προσέγγιση που οι ίδιοι ονομάζουν «από κάτω προς τα πάνω» (σ. 395), ξεκινώντας από την πράξη. Διαμόρφωσαν μια εκτεταμένη ποιοτική ανάλυση της διδακτικής πρακτικής και από το σχεδιασμό της μέτρησης της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία που βασίζονταν στην προηγούμενη ποιοτική ανάλυση. Συνέλεξαν βίντεο και ηχογραφήσεις από διδασκαλίες μαθηματικών της τρίτης τάξης ενός δημόσιου σχολείου των Η.Π.Α, κατά τη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς, κείμενα των μαθητών, σημειώσεις των εκπαιδευτικών και υλικά του αναλυτικού προγράμματος που χρησιμοποιήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία. Η προσέγγισή τους είχε τα χαρακτηριστικά μιας «ανάλυσης εργασίας», όπως αυτήν που υιοθέτησαν άλλες έρευνες (Hoyles, Noss & Pozzi, 2001; Noss, Healy & Hoyles, 1997) για επαγγέλματα όπως νοσοκόμων, μηχανικών, φυσικών και ξυλουργών. Έτσι, οι Ball et al. (2008) ανάπτυξαν τη θεωρία τους, η οποία είναι βασισμένη στην πρακτική, αναγνωρίζοντας από τη μια, ένα πιθανό μειονέκτημα περιορισμένης γενικευσιμότητας των αποτελεσμάτων τους, λόγω του ότι τα δεδομένα τους συλλέχθηκαν από ελάχιστες σχολικές τάξεις, αλλά από την άλλη, την πιθανή ευρύτερη εφαρμογή τους, επειδή η προσέγγιση της εργασίας της διδασκαλίας δεν βασίζεται σε κάποια συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση, αλλά αναγνωρίζει τις θεμελιώδεις δραστηριότητες που πραγματοποιούνται στη διδασκαλία.

Η *μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία* διαιρείται από την ερευνητική ομάδα της Ball σε δυο κατηγορίες. Τη *γνώση του γνωστικού αντικειμένου* (Subject Matter Knowledge-SMK) και την *παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου* (Pedagogical Content Knowledge-PCK). Η γνώση του γνωστικού αντικειμένου υποδιαιρείται στην (α) *κοινή γνώση του περιεχομένου* (Common Content Knowledge-CCK), στην (β) *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (Specialized Content Knowledge-SCK), και στον (γ) *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου* (horizon content knowledge-HCK). Η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου υποδιαιρείται στη (α) *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* (Knowledge of Content and Students-KCS), στη (β) *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (Knowledge of Content and Teaching-KCT) και στη (γ) *γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών* (Knowledge of Content and Curriculum-KCC) (Ball et al., 2008).

Η *κοινή γνώση του περιεχομένου* (CCK) ορίζεται ως η μαθηματική γνώση και δεξιότητα που χρησιμοποιείται και σε περιβάλλοντα διαφορετικά από αυτό της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να γνωρίζουν το υλικό που πρόκειται να διδάξουν, να χρησιμοποιούν τους όρους και τον συμβολισμό σωστά, χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίζουν πότε οι μαθητές τους δίνουν λανθασμένες απαντήσεις και πότε τα σχολικά εγχειρίδια αναφέρουν ανακρίβειες. Διευκρινίζεται ότι ο όρος «κοινή» δεν αναφέρεται στη γνώση που έχει ο καθένας αλλά ότι αυτό το είδος γνώσης χρησιμοποιείται σε πολλά περιβάλλοντα και όχι κατά μοναδικό τρόπο στη διδασκαλία (Ball et al., 2008, σ. 399).

Η *εξιδεικευμένη γνώση του περιεχομένου* είναι η μαθηματική γνώση και δεξιότητα που απαιτείται αποκλειστικά για τη διδασκαλία, δηλαδή δεν χρειάζεται για σκοπούς άλλους εκτός απ' αυτή. Κάποιες δραστηριότητες της διδασκαλίας που χαρακτηρίζουν αυτού του είδους τη γνώση είναι:

α) η παρουσίαση των μαθηματικών ιδεών,

β) οι απαντήσεις στα «γιατί» των μαθητών,

γ) η εύρεση παραδειγμάτων για κάποιο συγκεκριμένο ζήτημα,

δ) η επιλογή αναπαραστάσεων για συγκεκριμένους σκοπούς καθώς και η αναγνώριση αυτού που περιλαμβάνει η χρήση μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης,

δ) η σύνδεση αναπαραστάσεων με κάποιες ιδέες και με άλλες αναπαραστάσεις, η σύνδεση ενός ζητήματος διδασκαλίας με άλλα από προηγούμενα ή επόμενα χρόνια, η επεξήγηση μαθηματικών στόχων,

ε) η (συχνά σύντομη) αξιολόγηση της αληθοφάνειας των ισχυρισμών των μαθητών, η επιλογή και ανάπτυξη κατάλληλων ορισμών,

στ) η χρήση της μαθηματικής γλώσσας και του συμβολισμού καθώς και η κριτική της, η τοποθέτηση παραγωγικών μαθηματικών ερωτήσεων και η μελέτη των ισοδυναμιών.

Η *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* περιλαμβάνει ένα είδος αποσυμπιεσμένης γνώσης των μαθηματικών η οποία δεν χρειάζεται σε περιβάλλοντα διαφορετικά από αυτό της διδασκαλίας (Ball et al. 2008, σ. 400).

Η *γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου* αφορά σε μια συνειδητοποίηση για τον τρόπο που τα μαθηματικά θέματα σχετίζονται κατά τη διάρκεια του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Επίσης, περιλαμβάνει την δυνατότητα εύρεσης συνδέσεων με πιο προχωρημένες μαθηματικές ιδέες (Ball et al., 2008, σ. 403). Η Ball και οι συνεργάτες της είναι επιφυλακτικοί για το αν αυτό το είδος γνώσης είναι μέρος της γνώσης του γνωστικού αντικειμένου ή διατρέχει τις άλλες κατηγορίες. Όμως τη γνώση του μαθηματικού ορίζοντα θα την διαπραγματευτούμε εκτενέστερα στην ενότητα 2.3.3.

Η *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* συνδυάζει τη γνώση για τους μαθητές με τη γνώση για τα μαθηματικά. Είναι η γνώση που προσφέρει σ' έναν εκπαιδευτικό τη δυνατότητα να προβλέπει τι μπορεί να σκεφτούν οι μαθητές και τι θα τους μπερδέψει, τι θα βρουν ενδιαφέρον και τι θα τους κινητοποιήσει. Είναι η γνώση που δίνει στον εκπαιδευτικό την ικανότητα να ακούει και να ερμηνεύει τις ατελείς σκέψεις των μαθητών με τους τρόπους που αυτοί χρησιμοποιούν τη γλώσσα. Αυτό το είδος γνώσης είναι ένα αμάλγαμα που περιλαμβάνει μια συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα ή διαδικασία και μια οικειότητα με αυτό που οι μαθητές συχνά σκέφτονται ή κάνουν (Ball et al., 2008, σ. 401).

Η *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* συνδυάζει γνώση για τη διδασκαλία και γνώση για τα μαθηματικά. Αυτό το είδος της γνώσης περιλαμβάνει τη μαθηματική γνώση που απαιτείται για το σχεδιασμό της διδασκαλίας, την επιλογή της σειράς εμφάνισης των παραδειγμάτων, την αξιολόγηση πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων των αναπαραστάσεων μιας ιδέας, την αξιολόγηση της στιγμής για το ποιες από τις ιδέες των μαθητών θα αξιοποιηθούν, θα αγνοηθούν ή θα αναφερθούν αργότερα. Αυτές οι ενέργειες απαιτούν μια αλληλεπίδραση μεταξύ μιας ιδιαίτερης μαθηματικής κατανόησης και μιας κατανόησης των παιδαγωγικών ζητημάτων που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών (Ball et al., 2008, σ. 401).

Η *γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών* είναι η μια από τις τρεις κατηγορίες του Shulman (1986) και οι Ball et al. (2008. σ. 403) αποδέχονται ότι δεν είναι «σίγουροι αν αυτή η κατηγορία είναι μέρος της γνώσης του περιεχομένου και της διδασκαλίας ή διατρέχει τις υπόλοιπες κατηγορίες ή αποτελεί μια κατηγορία από μόνη της». Προσωρινά έχει ενταχθεί ως υποκατηγορία της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου.

Η ανωτέρω κατηγοριοποίηση της γνώσης για τη διδασκαλία έχει τα εξής πλεονεκτήματα σύμφωνα με τους Ball et al. (2008). Πρώτον, η χρησιμότητα της στην εξακρίβωση εκείνων των πτυχών της γνώσης του περιεχομένου των εκπαιδευτικών που προκαλεί καλύτερα επιτεύγματα των μαθητών. Έτσι, θα μπορούσαν να εστιαστούν οι προσπάθειες μας ώστε η γνώση του περιεχομένου να έχει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Ωστόσο, προς το παρόν δεν υπάρχουν έρευνες στην κατεύθυνση αυτή. Όμως η οπτική της ερευνητικής ομάδας της Ball προσφέρει ένα θεωρητικό πλαίσιο για την διαπραγμάτευση μιας τέτοιας δυνατότητας. Δεύτερον, η μελέτη των διαφορετικών προσεγγίσεων της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών οδηγεί αντίστοιχα αποτελέσματα για συγκεκριμένες πτυχές της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου τους. Τρίτον, μια πιο σαφής εξακρίβωση των κατηγοριών της γνώσης του περιεχομένου για τη διδασκαλία μπορεί να μας πληροφορήσει για το σχεδιασμό και την υποστήριξη υλικών για εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και την επαγγελματική τους ανάπτυξη.

Οι Ball et al. (2008) αναγνωρίζουν όμως και κάποια προβλήματα της θεωρίας τους, τα οποία είναι σύμφυτα με την ανάπτυξή της, δηλαδή ότι η θεωρία τους είναι βασισμένη στην πρακτική. Αυτή ακριβώς η επιλογή, που έχει ως στόχο να αυξήσει την πιθανότητα η γνώση που αναγνωρίζεται να είναι σχετική με τη διδασκαλία, ενέχει επίσης κάποια φυσική ασάφεια και μεταβλητότητα των όρων της διδασκαλίας και της μάθησης. Δηλαδή, η μελέτη κάποιων καταστάσεων που προκύπτουν στη διδασκαλία μπορούν να αντιμετωπιστούν με τη χρήση διαφορετικών ειδών γνώσης. Επίσης, ένα ακόμα πρόβλημα που σχετίζεται με το προηγούμενο είναι ότι, ενώ η πρόθεση είναι η επικέντρωση στη γνώση που χρησιμοποιείται, οι γνωστικές κατηγορίες εμφανίζονται στατικές. Σε αυτή την κατεύθυνση συνηγορεί και ότι ένας από τους στόχους της Ball και των συνεργατών της είναι η μέτρηση της γνώσης για τη διδασκαλία. Έτσι, ενώ τα ερωτήματα για τις μετρήσεις αυτές σχεδιάζονται για μια γνώση εγκατεστημένη στο πλαίσιο χρήσης της, είναι ακόμα ανεξιχνίαστο πως μια τέτοια γνώση χρησιμοποιείται και ποια χαρακτηριστικά της διαμοιράζονται. Συναφές είναι επίσης το πρόβλημα της δυσκολίας διάκρισης της μιας κατηγορίας από την επόμενη. Σε κάποιες περιπτώσεις η διάκριση μεταξύ της *κοινής* και της *εξιδεικευμένης γνώσης του περιεχομένου* είναι ιδιαίτερα δύσκολη και το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται και μεταξύ της *εξειδικευμένης γνώσης του περιεχομένου* και της *γνώσης του περιεχομένου και των μαθητών* αλλά και της *γνώσης του περιεχομένου και της διδασκαλίας*.

2.2.1 Προγράμματα διερεύνησης και μέτρησης της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία

Στη βιβλιογραφία απαντώνται ειδικά προγράμματα που παρέχουν εργαλεία για τη διερεύνηση της φύσης και της σύνθεσης των μαθηματικών γνώσεων που απαιτούνται για τη διδασκαλία. Χρησιμεύουν στη λειτουργική αξιοποίηση των ιδεών σχετικά με τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία και τον έλεγχο των προτεινόμενων μοντέλων και του ρόλου που διαδραματίζουν. Χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση της διδασκαλίας και της εκμάθησης αυτών των γνώσεων, των σχέσεων με άλλες μεταβλητές και άλλων θεμάτων που είναι σημαντικά για την πρακτική εφαρμογή και την πολιτική αξιοποίηση τους. Όμως αρκετά από τα προγράμματα αυτά είναι ιδιαίτερα δαπανηρά σε σχέση με τους διαθέσιμους πόρους και συχνά χρησιμοποιούνται σε μια μόνο έρευνα περιορίζοντας τις απαιτήσεις για την καθιερωμένη εγκυρότητα. Αρκετά σημαντικές προσπάθειες έχουν γίνει με μελέτες μεγάλης κλίμακας και ευρύτερης χρήσης στο πεδίο.

Το πρόγραμμα Μάθησης Μαθηματικών για τη Διδασκαλία (Learning Mathematics for Teaching, LMT), που αναπτύχθηκε για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στοιχειώδους και μέσης εκπαίδευσης (Hill, Schilling & Ball, 2004) περιλαμβάνει σχεδόν 1000 αντικείμενα για πάνω από δώδεκα διαφορετικά εργαλεία τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί σε πολυάριθμες αξιολογήσεις προγραμμάτων και μελέτες σχέσεων και αποτελεσμάτων. Έχουν επικυρωθεί εκτενώς (Schilling & Hill, 2007) και έχουν προσαρμοστεί διεθνώς (Blömeke & Delaney, 2012).

Το πρόγραμμα για την Διαγνωστική Αξιολόγηση των Εκπαιδευτικών στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (Diagnostic Teacher Assessment in Mathematics and Science, DTAMS) που αναπτύχθηκε για την πρακτική άσκηση των εκπαιδευτικών της μέσης εκπαίδευσης (Saderholm, Ronau, Brown & Collins, 2010) περιλαμβάνει 24 μορφές σε τέσσερις περιοχές περιεχομένου, έχει εφαρμοσθεί και αναλυθεί αυστηρά σε δείγμα αρκετών χιλιάδων εκπαιδευτικών, και επεκτείνεται ακόμα.

Το πρόγραμμα Εκπαίδευση των Εκπαιδευτικών και Ανάπτυξης Μελέτης στα Μαθηματικά (Teacher Education and Development Study in Mathematics, TEDS-M) απευθύνεται στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Tatto et al., 2008, Senk et al., 2012) και περιλαμβάνει πάνω από 100 αντικείμενα τα οποία αρχικά διοχετεύθηκαν σε 23.000 υποψήφιους εκπαιδευτικούς σε 17 χώρες.

Τα προγράμματα αυτά αποτελούν σημαντική συμβολή στο πεδίο. Η εκτεταμένη διεπιστημονική επανεξέταση από την κοινότητα και η οικοδόμηση συμφωνημένων διατυπώσεων για τη γνώση του περιεχομένου διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη σχετικών εργαλείων μέτρησης. Η σύνθεση των ιδεών και η ενσωμάτωση της εξειδίκευσης σε πολλές επαγγελματικές κοινότητες βοήθησαν στην αποσαφήνιση και βελτίωση των ιδεών για τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία. Επιπλέον, η διαθεσιμότητα κοινών εργαλείων επέτρεψε την ουσιαστική σύγκριση και ερμηνεία μεταξύ προγραμμάτων, χωρών και μελετών και την ερμηνεία τους με τρόπους που συμβάλλουν στην ωριμότητα της έρευνας σχετικά με τις μαθηματικές γνώσεις για τη διδασκαλία (Hoover et al., 2016).

Πολλές ακόμα προσπάθειες έχουν αναπτύξει εργαλεία με μικρότερη εστίαση σε ευρεία συναίνεση ή χρήση. Το πρόγραμμα COACTIV για την πρακτική άσκηση εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Kunter, Klusmann, Baumert, Voss & Hacfeld, 2013) παρήγαγε αντικείμενα παρόμοιου τύπου με αυτά που έχουν περιγραφεί παραπάνω και τα χρησιμοποίησε για να διερευνήσει τις σχέσεις με άλλες μεταβλητές για την κατανόηση θεμάτων πρακτικής εφαρμογής και πολιτικής σε σχέση με τη μαθηματική εκπαίδευση των εκπαιδευτικών.

Μερικά από τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν εστιάζουν σε μαθηματικές γνώσεις σχετικές με ένα συγκεκριμένο θέμα, όπως τα κλάσματα (Izsak, Jacobson, de Araujo & Orrill, 2012), τη γεωμετρία (Herbst & Kosko, 2012), την άλγεβρα (McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase & Senk, 2012), την συνεχή μεταβολή και συμμεταβολή (Thompson, 2015). Άλλα έχουν επικεντρωθεί σε συγκεκριμένες πτυχές της διδασκαλίας και τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται σε αυτές τις συγκεκριμένες πρακτικές διδασκαλίας, όπως η επιλογή παραδειγμάτων (Chick, 2009; Zodik & Zaslavsky, 2008) και η υποστήριξη συζητήσεων με όλη την τάξη για την αντιμετώπιση μαθηματικών στόχων (Speer & Wagner, 2009).

Ορισμένοι ερευνητές ανησυχούν για μια δυνητικά στενή ερμηνεία της γνώσης ως θεσμικής (declarative) ή για μια πιθανή απόκλιση μεταξύ της γνώσης καθ’ αυτής και της γνώσης σε χρήση. Αυτές οι ανησυχίες έχουν οδηγήσει μερικούς μελετητές να διερευνήσουν διαφορετικές αντιλήψεις σχετικά με τις ανάγκες των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά αναζητώντας εναλλακτικούς τρόπους μέτρησης (π.χ. Kersting, Givvin, Thompson, Santagata & Stigler, 2012; McCray & Chen, 2012; Thompson, 2015).

Στην κατεύθυνση των ανωτέρω ερευνών είναι και η μελέτη των Copur-Gencturk & Lubienski (2013). Προκειμένου να διερευνηθεί η ανάπτυξη της γνώσης της αρχικής κατάρτισης των εκπαιδευτικών, χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά εργαλεία: η LMT και η DTAMS. Κατά τη σύγκριση ομάδων εκπαιδευτικών που είχαν συμμετάσχει σε διαφορετικά είδη μαθημάτων, οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα όργανα LMT και DTAMS μετρούν πτυχές της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία που είναι ουσιαστικά διαφορετικές. Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν σε ένα καινοτόμο πρόγραμμα μαθηματικών περιεχομένων και μεθόδων είχαν τη σημαντικότερη αύξηση με όργανο μέτρησης το LMT και το αποτέλεσμα αυτό παρέμεινε σταθερό παρόλο που παρακολούθησαν ένα επιπλέον μάθημα περιεχομένου. Η βαθμολογία των εκπαιδευτικών με το όργανο DTAMS επίσης αυξήθηκε κατά τη διάρκεια παρακολούθησης του προγράμματος. Όμως κατά τη διάρκεια του μαθήματος της γνώσης του περιεχομένου η αύξηση αφορούσε μόνο το τμήμα της γνώσης του περιεχομένου του DTAMS. Η μελέτη αυτή υποστηρίζει την ιδέα ότι υπάρχει γνώση μαθηματικού περιεχομένου ειδικά για τη διδασκαλία που δεν επηρεάζεται από γενικά μαθήματα μαθηματικών περιεχομένου. Ότι τα διαφορετικά όργανα μετρούν διαφορετικές πτυχές της γνώσης δεν είναι απαραιτήτως αναπάντεχο εύρημα, αλλά προκαλεί κάποια ανησυχία όταν τα όργανα που φαινομενικά σχεδιάστηκαν για να συλλάβουν την ίδια δομή μετρούν στην πραγματικότητα σημαντικά διαφορετικές πτυχές αυτής της γνώσης, με ελάχιστη σαφήνεια σχετικά με αυτές τις διαφορές.

Ένα σαφές εύρημα που προκύπτει από τις σχετικές έρευνες είναι ότι τα προγράμματα επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στα οποία κυριαρχούν μαθήματα μεθόδων με συνέπεια έδειχναν θετικά αποτελέσματα ενώ τα προγράμματα στα οποία κυριαρχούν τα μαθήματα περιεχομένου δεν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο (π.χ. Begle, 1979; Ferguson & Womack, 1993; Guyton & Farokhi, 1987; Monk, 1994). Το δεύτερο εύρημα είναι ότι τα θετικά αποτελέσματα ήταν συχνότερα όταν το περιεχόμενο που διδάσκονταν στους εκπαιδευτικούς ήταν πιο κοντά στο περιεχόμενο που επρόκειτο να διδάξουν. Για παράδειγμα αρκετοί μελετητές οδηγήθηκαν σε θετικά αποτελέσματα όταν χρησιμοποιούσαν τις εξετάσεις των μαθητών για να μετρήσουν τη γνώση των εκπαιδευτικών (Harbison & Hanushek, 1992; Mullens, Murnane & Willett, 1996).

Ο Monk (1994) ενδυναμώνει τις ανωτέρω διαπιστώσεις βρίσκοντας ότι η παρακολούθηση μαθημάτων απειροστικού λογισμού από εκπαιδευτικούς επηρεάζει τα αποτελέσματα των μαθητών τους στην άλγεβρα αλλά όχι και στη γεωμετρία. Γενικά, προκύπτει ότι τα μαθηματικά που διδάσκονται οι εκπαιδευτικοί ή τα μαθηματικά που γνωρίζουν όταν μετρούνται, είναι σημαντικό να συνδέονται με υλικά ή αλληλεπιδράσεις που σχετίζονται με τη σχολική τάξη και αυτό είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης.

2.2.2 Η Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία ως ερευνητικό πεδίο

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, οι ερευνητές και οι εκπαιδευτές των εκπαιδευτικών των μαθηματικών, επισημαίνουν ολοένα και περισσότερο τη σημασία της μαθηματικής γνώσης που αφορά ειδικά τη διδασκαλία. Αυτή η γνώση, όπως έχει ήδη επισημανθεί, θεωρείται διαφορετική από τη μαθηματική γνώση που συνήθως διδάσκεται στα πανεπιστήμια και από τα μαθηματικά που χρειάζονται άλλοι επαγγελματίες εκτός από τους εκπαιδευτικούς. Αν και η Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία (MKT) περιλαμβάνει τη γνώση των μαθηματικών που διδάσκεται στους μαθητές, είναι γενικά αποδεκτό ότι το είδος της κατανόησης αυτής της γνώσης που χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί είναι διαφορετικό από αυτό που χρειάζονται οι μαθητές.

Παρόλο, που στη βιβλιογραφία υπάρχει γενική συναίνεση για το ιδιαίτερο είδος της γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν υπάρχει συμφωνία σχετικά με τους ορισμούς των επιμέρους χαρακτηριστικών της γνώσης αυτής, την ορολογία που χρησιμοποιείται, ακόμα και για τις βασικές έννοιες. Με αυξανόμενο το ενδιαφέρον για ιδέες σχετικά με τη γνώση εξειδικευμένου επαγγελματικού περιεχομένου, στις αρχές της δεκαετίας του 2000 αναπτύχθηκαν έρευνες μεγάλης κλίμακας για την ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης αυτού του είδους της γνώσης και χρήσης τους για την αξιολόγηση της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (π.χ., Bell, Wilson, Higgins & McCoach, 2010), έρευνες για τη μελέτη των επιπτώσεων των δομικών διαφορών της μαθηματικής εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών (π.χ. Kleickmann et al., 2013) και την υποστήριξη πολιτικών και προγραμμάτων (π.χ. Hill, 2011a) και διερεύνηση του ρόλου της γνώσης του επαγγελματικού περιεχομένου στη διδασκαλία των μαθηματικών (π.χ. Speer & Wagner, 2009). Τα μέσα μέτρησης αυτών των γνώσεων αποτελούν ένα κρίσιμο εργαλείο για την επίτευξη ουσιαστικής προόδου στο πεδίο. Θέτουν σε λειτουργία τις ιδέες που αναδύονται, δίνουν τη δυνατότητα για έλεγχο και υποστηρίζουν τη διερεύνηση των προτεινόμενων μοντέλων (Hoover, Mosvold, Ball & Lai, 2016).

Οι Hoover, Mosvold, Ball & Lai (2016) πραγματοποίησαν μια εμπεριστατωμένη ανασκόπηση της διεθνούς (αγγλόφωνης) βιβλιογραφίας, η οποία έλαβε υπόψη της τα άρθρα που δημοσιεύθηκαν μεταξύ 2006 και 2013 και τα οποία αναφέρονται σ' ένα διακριτό είδος μαθηματικής γνώσης το οποίο απαιτείται για τη διδασκαλία. Με βάση την ανάγνωση περιλήψεων, 349 άρθρα αναγνωρίσθηκαν δυνητικά ως εμπειρικές μελέτες όπου με κάποιο τρόπο χρησιμοποιήθηκε η ιδέα της ιδιαίτερης μαθηματικής γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία ως εννοιολογικό εργαλείο για τη διατύπωση ερευνητικών ερωτημάτων ή δομικής ανάλυσης. Στόχος της ανασκόπησης ήταν η χρησιμοποίηση μιας συστηματικής διαδικασίας για τη συλλογή ενός συνόλου σχετικών μελετών που αντιπροσωπεύουν τη βιβλιογραφία από την περίοδο αυτή. Οι πίνακες 2.2.1.Α και 2.2.1.Β προσφέρουν ορισμένα στοιχεία από την εν λόγω ανασκόπηση.

Πίνακας 2.2.1.Α. Μέγεθος άρθρου (αριθμός σελίδων), χρησιμοποιούμενο εργαλείο, βαθμίδα εκπαίδευσης και γεωγραφική περιοχή

Κατηγορίες και κωδικοί	*Αριθμός άρθρων*
Μέγεθος	
Μικρά (<10)	60
Μεσαία 1 (10-29)	51
Μεσαία 2 (30-70)	34
Μεγάλα (>70)	43
Άλλο	2
Εργαλεία	
COACTIV	4
CVA	3
DTAMS	3
LMT	31
TEDS-M	2
Μη κατηγοριοποιημένα	56
Άλλο	91
Βαθμίδα εκπαίδευσης	
Πρωτοβάθμια	81
Γυμνάσιο	45
Λύκειο	41
Τριτοβάθμια	3
Μεταξύ των βαθμίδων	20
Περιοχές	
Αφρική	7
Ασία	27
Ευρώπη	22
Λατινική Αμερική	3
Βόρεια Αμερική	112
Ωκεανία	15
Μεταξύ των περιοχών	4

(Hoover, Mosvold, Ball & Lai, 2016)

Από τον Πίνακα 2.2.1.Α. φαίνεται ότι μεγάλος αριθμός μελετών εφαρμόζουν μη σταθμισμένα εργαλεία (instruments) ή καθόλου εργαλεία. Οι μελέτες που χρησιμοποιούν σταθμισμένα εργαλεία το κάνουν για να μετρήσουν τη γνώση των εκπαιδευτικών και τα εργαλεία αυτά μετράνε τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία με πιο συνηθισμένο να είναι το πρόγραμμα Μάθησης Μαθηματικών για τη Διδασκαλία (Learning Mathematics for Teaching, LMT). Οι περισσότερες μελέτες εστιάζουν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και πραγματοποιούνται κυρίως στη βόρεια Αμερική.

Ο Πίνακας 2.2.1.Β παρέχει μια κατηγοριοποίηση με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Με την συντομογραφία SM δεν εννοείται κάποιο ακρωνύμιο αλλά συμβολίζεται η ποικιλία των τρόπων με τους οποίους έχει προσεγγιστεί και ονομαστεί η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία.

Πίνακας 2.2.1.Β. Κατηγοριοποίηση των ερευνητικών ερωτημάτων

Προβλήματα	*Αριθμός άρθρων*	*%*
Φύση και περιεχόμενο του SM	55	28,9
Τι είναι SM;	34	
Ποια η σχέση μεταξύ των πτυχών του SM ή με άλλες μεταβλητές	21	
Βελτίωση του SM	81	42,6
Ποια επαγγελματική ανάπτυξη βελτιώνει την SM των εκπαιδευτικών;	28	
Ποια εκπαίδευση εκπαιδευτικών βελτιώνει την SM των εκπαιδευτικών;	28	
Ποια προγράμματα σπουδών/δραστηριότητες βελτιώνουν την SM των εκπαιδευτικών	10	
Ποια διδακτική πρακτική βελτιώνει την SM των εκπαιδευτικών;	0	
Πως αναπτύσσεται η SM	15	
Πως αυξάνεται η διδασκαλία και η μάθηση της SM;	0	
Συμβολή της SM	33	17,4
Συμβάλλει η SM στη διδακτική πρακτική;	6	
Πως συμβάλλει η SM στη διδακτική πρακτική;	12	
Συμβάλλει η SM στη μάθηση των μαθητών;	15	
Πως συμβάλλει η SM στη μάθηση των μαθητών;	0	
Άλλο		
Ποια SM γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί;	21	11,1
Πως επηρεάζει την πολιτική η SM των εκπαιδευτικών;	0	0
Σύνολο	*190*	*100*

(Hoover, Mosvold, Ball & Lai, 2016)

2.2.3 Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία

Σύμφωνα με κάποιους εμπειρογνώμονες και σχεδιαστές εκπαιδευτικών προγραμμάτων ο αντίκτυπος των σχετικών εμπειρικών ερευνών συνδέεται με επιχειρήματα που υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία εξειδικευμένης επαγγελματικής γνώσης είναι αρκετή για να οδηγήσει στην προτεραιότητα της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία κατά τη μαθηματική εκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Έτσι, αρκετές πολιτικές πιέζουν στην αύξηση των μαθημάτων μαθηματικών που απαιτούνται να παρακολουθήσουν οι εκπαιδευτικοί, παρόλο χωρίς αυτά να συνδέονται με τη διδασκαλία και σε αντίθεση με τα ευρήματα των ερευνών που δεν υποστηρίζουν ότι με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται βελτίωση της διδασκαλίας (π.χ. Youngs & Qian, 2013). Αυτές οι πολιτικές δεν προκύπτουν τόσο ως αποτέλεσμα της παρατεταμένης αμφιβολίας για τα εμπειρικά αποτελέσματα αλλά περισσότερο ως αποτέλεσμα της υπερβολικής έκφρασης της αντίληψης ότι η γνώση του περιεχομένου είναι αποκλειστικός παράγοντας για την καλή διδασκαλία, ακόμη και ενόψει των αποδεικτικών στοιχείων που το διαψεύδουν. Φυσικά, είναι απαραίτητο ένα υψηλό επίπεδο γνώσης του περιεχομένου, αλλά η προετοιμασία των εκπαιδευτικών με μαθήματα μαθηματικών που δεν συνδέονται με το περιεχόμενο που διδάσκεται ή με τη δουλειά που εμπλέκεται στη διδασκαλία δεν φαίνεται να συμβάλλει στη βελτίωση της διδασκαλίας.

Κάποιες ερευνητικές ομάδες δεν στοχεύουν στη μέτρηση της γνώσης των εκπαιδευτικών, αλλά διαθέτουν αναπτυγμένες προσεγγίσεις που ενημερώνονται με προσεκτικό προβληματισμό, για την επιστημονική παρατήρηση της πρακτικής των εκπαιδευτικών και της πραγματικής υιοθέτησης ιδεών και πρακτικών. Μία σημαντική ιδέα που προκύπτει από αυτές τις έρευνες είναι ότι ο κυκλικός σχεδιασμός μέσω μαθηματικών ιδεών, παιδαγωγικών σκέψεων και της ανατροφοδοτικής τους εφαρμογής είναι ζωτικής σημασίας για το σχεδιασμό της επαγγελματικής εξέλιξης.

Για παράδειγμα, οι Silver, Clark, Ghousseini, Charalambous & Sealy (2007) παρέχουν στοιχεία για το αν και πώς οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να ενισχύσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους για τη διδασκαλία, μέσω μηνιαίων πρακτικών σεμιναρίων επαγγελματικής εξέλιξης, στην εξέταση παιδαγωγικών θεμάτων που βασίζονται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, στον προγραμματισμό, στη διδασκαλία και στη συζήτηση των μαθημάτων σε συνεργασία. Εστιάζοντας στις αλληλεπιδράσεις ενός εκπαιδευτικού, καταγράφουν τρόπους με τους οποίους αυτές οι δραστηριότητες παρέχουν ευκαιρίες στους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και να εξετάσουν αυτές τις ιδέες σε σχέση με τη σκέψη και τη διδασκαλία των μαθητών. Χωρίς να αποκαλύπτουν τα αποτελέσματα αυτού που αναφέρουν ως «κύκλο εργασιών επαγγελματικής μάθησης», τεκμηριώνουν τη δυναμική με την οποία ο δάσκαλος, από μια αρχική εμπειρία που επιλύει ένα μη τετριμμένο μαθηματικό πρόβλημα, υποστηριζόμενη από μαθηματικά ευαίσθητη διευκόλυνση, διαδοχικά ασχολείται με μαθηματικά και παιδαγωγικά ζητήματα με τρόπους που δημιουργούν ορατά συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών, παιδαγωγικής πρακτικής και αναπτυσσόμενης μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία. Επιπλέον, υποστηρίζουν ότι ο κυκλικός σχεδιασμός τους αύξησε τα κίνητρα των εκπαιδευτικών για την εκμάθηση των μαθηματικών, τόσο στα εργαστήρια όσο και στην καθημερινή πρακτική τους.

Ομοίως, σε μια προσπάθεια να καλυφθεί το χάσμα μεταξύ ενός οράματος μεταρρύθμισης και της πρακτικής της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, οι Koellner et al. (2007) εφάρμοσαν ένα μοντέλο επαγγελματικής ανάπτυξης σχεδιασμένο να βοηθήσει τους δασκάλους να εμβαθύνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για τη διδασκαλία μέσω ενός κύκλου επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, διδασκαλίας του προβλήματος και ανάλυσης ερωτήσεων πρώτα του εκπαιδευτικού και, στη συνέχεια, της σκέψης των μαθητών σε βίντεο της διδασκαλίας τους. Προκειμένου να κατανοήσουν τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται από αυτό που χαρακτηρίζουν ως «σχεδιασμό κύκλου επίλυσης προβλημάτων», ανέλυαν τα τεχνουργήματα από δύο χρόνια μιας σειράς μηνιαίων, ολοήμερων εργαστηρίων με δέκα δασκάλους μαθηματικών γυμνασίου, συμπεριλαμβανομένων βίντεο εργαστηρίων και συνεντεύξεων με τους διευκολυντές (facilitators). Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τους τομείς γνώσης που προσδιορίστηκαν από τους Ball, Thames & Phelps (2008) για να αναλύσουν διάφορες αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικών.

Διαπίστωσαν ότι αρκετές ευκαιρίες μάθησης παρέχονταν από διαφορετικές δραστηριότητες: αναπτύχθηκε εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου με τη σύγκριση, την τεκμηρίωση και τη σύνδεση μεταξύ των διαφόρων στρατηγικών λύσης. Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας αναπτύχθηκε με την ανάλυση των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών στα βίντεο από τα μαθήματα των δασκάλων και η γνώση του περιεχομένου και των φοιτητών αναπτύχθηκε με την ανάλυση των μεθόδων λύσης των μαθητών (ερμηνεία και εξέταση των συνεπειών τους για την διδασκαλία). Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι η ανατροφοδότηση, η τεκμηρίωση και η συζήτηση σχετικά με τη φύση της σκέψης των μαθητών και των εκπαιδευομένων που εμφανίζονται στα βίντεο της δικής τους διδασκαλίας, οδήγησαν τους δασκάλους να επεκτείνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για τη διδασκαλία, καθώς επανεξέταζαν το πρόβλημα των μαθηματικών και τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαν να διδάξουν το πρόβλημα υπό το πρίσμα της νέας τους εκτίμησης για το πώς οι μαθητές θα μπορούσαν να προσεγγίσουν το πρόβλημα.

Σε όλη την ανάλυση, οι συγγραφείς διαπίστωσαν ότι η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου αλληλεπιδρά με την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου στην ερμηνεία των μαθημάτων τόσο της σκέψης όσο και του προγραμματισμού των μαθητών. Υποστηρίζουν ότι τα εργαστήρια ανέπτυξαν τις μαθηματικές γνώσεις των διδασκόντων για διδασκαλία, υποστηρίζοντας τις τρέχουσες γνώσεις των εκπαιδευτικών, ενώ σταδιακά τους προκαλούσαν να αποκτήσουν νέα κατανόηση για το σκοπό της εργασίας τους ως εκπαιδευτικών.

Ακόμη στο πεδίο έχουν αναπτυχθεί σχετικές συγκριτικές μελέτες με μετρήσιμα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, οι Bell, Wilson, Higgins & McCoach (2010), υποστηρίζουν ότι ο πρακτικός χαρακτήρας του προγράμματος ανάπτυξης των μαθηματικών ιδεών (Developing Mathematical Ideas, DMI) εξηγεί καλύτερα τη μάθηση των εκπαιδευτικών που συμμετέχουν στη διδασκαλία των μαθηματικών γνώσεων. Οι ερευνητές εξέτασαν τις γνώσεις περιεχομένου 308 εκπαιδευτικών πριν και μετά την συμμετοχή τους στο πρόγραμμα και έκαναν συγκρίσεις με ομάδες ελέγχου. Βρήκαν σημαντικά πιο θετικά αποτελέσματα για τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στο πρόγραμμα και ότι αυτά τα αποτελέσματα συνδέονταν με το εύρος ευκαιριών μάθησης που παρέχονταν από τους διευκολυντές. Μελετώντας μεθοδικά μια σειρά εναλλακτικών εξηγήσεων για τη βελτίωση των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στο πρόγραμμα, οι ερευνητές τονίζουν το χαρακτηριστικό της επαγγελματικής ανάπτυξης στην τάξη, όπου οι καθηγητές κινούνται μεταξύ των σεμιναρίων και των δικών τους τάξεων, λαμβάνοντας γραπτή ανατροφοδότηση από την τακτική παρακολούθηση των διευκολυντών.

Αναφερόμενοι στο επιχείρημα των Ball & Cohen's (1999) ότι η μάθηση των εκπαιδευτικών πρέπει να ενσωματωθεί στην πράξη, οι Bell, Wilson, Higgins & McCoach (2010) επισημαίνουν ότι η σύνδεση με την πρακτική μπορεί να ωθήσει τη μάθηση των εκπαιδευτικών μέσα και από την καθημερινή τους εργασία, αυξάνοντας σημαντικά τη συνολική ικανότητα μάθησης και βελτίωσης των εκπαιδευτικών. Υποστηρίζουν ότι η πρακτική φύση του σχεδιασμού τους έρχεται σε αντίθεση με την επαγγελματική εξέλιξη που πραγματοποιείται εκτός της πρακτικής των εκπαιδευτικών.

2.2.4 Εφαρμογές της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία

Ενώ πολλές έρευνες έχουν μελετήσει τη φύση και τη σύνθεση των μαθηματικών γνώσεων για τη διδασκαλία και την ανάπτυξη της γνώσης των εκπαιδευτικών, λίγες μελέτες έχουν διερευνήσει τις επιπτώσεις που έχει αυτή η γνώση στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθητών. Βασική προϋπόθεση για την έρευνα στην κατεύθυνση αυτή ήταν η ανάπτυξη ισχυρών εργαλείων αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία. Στο πεδίο έχουν βρεθεί στοιχεία που συνδέουν τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία με τα αποτελέσματα των μαθητών με βάση τη χρήση του εργαλείου LMT (π.χ. Hill, Rowan &

Ball, 2005; Rockoff, Jacob, Kane & Staiger, 2011), του εργαλείου COACTIV (Baumert et al., 2010, Kunter et al., 2013) και το μέσο ανάλυσης βίντεο στην τάξη (CVA) (π.χ., Kersting et al., 2010, Kersting et al., 2012). Ένας μικρότερος αριθμός μελετών διερεύνησε τις σχέσεις μεταξύ της διδακτικής πρακτικής της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία και τα αποτελέσματα των μαθητών (π.χ. Hill, Kapitula & Umland, 2011). Σε αυτές τις μελέτες, η μάθηση των μαθητών μετριέται ως επί το πλείστον με τυποποιημένες βαθμολογίες σε ερωτήματα ενώ οι τρόποι με τους οποίους μετριέται η ποιότητα διδασκαλίας ποικίλλει. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι, σε γενικές γραμμές, η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία επηρεάζει τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθητών.

Οι Hill, Umland, Litke & Kapititu (2012) στη μελέτη τους με 34 εκπαιδευτικούς, κατέδειξαν ότι η σχέση μεταξύ μαθηματικών γνώσεων για τη διδασκαλία (μετρούμενη με το μέσο LMT) και η ποιότητα της διδασκαλίας είναι περίπλοκη. Ενώ οι ασθενέστερες μαθηματικές γνώσεις για τη διδασκαλία φαινόταν να σχετίζονται με φτωχότερη ποιότητα διδασκαλίας και ισχυρότερη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία φαινόταν να προβλέπει υψηλότερη ποιότητα διδασκαλίας, οι εκπαιδευτικοί που εμφανίζονταν με μέσο επίπεδο μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία με βάση το εργαλείο μέτρησης LMT διέφεραν ευρέως στην ποιότητα της διδασκαλίας τους. Επίσης, τα αποτελέσματα των μαθητών εκείνων που είχαν για δασκάλους, αυτούς με μέσο επίπεδο μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία παρουσιάζαν και αυτά μη αναμενόμενη ευρύτητα.

Επιπλέον, η μελέτη 10 καθηγητών από τους Hill et al. (2008), διαπίστωσε ότι παράγοντες όπως οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και η επαγγελματική τους ανάπτυξη, είναι επίσης παράγοντες πιθανής επιρροής, και οι παράγοντες αυτοί θα μπορούσαν να έχουν θετικά ή αρνητικά αποτελέσματα ανάλογα με τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία. Αυτές οι δύο μελέτες υπογραμμίζουν ότι η απλή καθιέρωση των επιπτώσεων της γνώσης στη διδασκαλία δεν αρκεί για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών.

Μια προσέγγιση που αξίζει να διερευνηθεί είναι αυτή που προκύπτει από τη θεώρηση των Cohen, Raudenbush & Ball (2003), οι οποίοι αντιμετωπίζουν τη γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία ως έναν από τους πόρους των διδακτικών αλληλεπιδράσεων που επιτελούνται κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτή η παρατήρηση δείχνει ότι εκτός από τις γενικές μελέτες επιπτώσεων στη διδασκαλία και τη μάθηση, θα ήταν χρήσιμο να μάθουμε περισσότερα σχετικά με το ποιες συγκεκριμένες πτυχές της διδασκαλίας και της μάθησης επηρεάζονται από τη γνώση του περιεχομένου των εκπαιδευτικών, ποιες συγκεκριμένες πτυχές της γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών επηρεάζουν και πώς τις επιπτώσεις των αλληλεπιδράσεων μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών γύρω από το περιεχόμενο.

Μια ελπιδοφόρα έρευνα στην κατεύθυνση της διερεύνησης της συγκεκριμένης επίδρασης που έχει η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία στη ίδια τη διδασκαλία είναι αυτή των Speer & Wagner (2009) που διαπραγματεύεται την υποστήριξη ενός εκπαιδευτικού στις συζητήσεις στην τάξη. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι πτυχές της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου είναι σημαντικές για να βοηθήσουν τους μαθητές να βρουν παραγωγικούς τρόπους επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων και για να κατανοήσουν ποιες συνεισφορές – σωστές η λανθασμένες - είναι σημαντικό να αναδειχθούν σε μια συζήτηση. Υποδεικνύουν τρόπους με τους οποίους η ιδιαίτερη γνώση της κατανόησης των μαθητών βοηθά τους καθηγητές να διασφαλίσουν ότι το μάθημα επιτυγχάνει τους επιδιωκόμενους μαθηματικούς στόχους, κατανοώντας το ρόλο των συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών στην ανάπτυξη των μαθητών.

Με παρόμοιο τρόπο, η μελέτη του Charalambous (2010) εξετάζει τις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την επιλογή και τη χρήση μαθηματικών δραστηριοτήτων. Μελετώντας τη διδασκαλία δύο δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής γνώσης για διδασκαλία, διαπίστωσε αξιοσημείωτες διαφορές στην ποιότητα της διδασκαλίας τους. Χρησιμοποίησε το πλαίσιο των μαθηματικών δραστηριοτήτων των Stein, Engle, Smith & Hughes (2008) για να εξετάσει το γνωστικό επίπεδο των σχεδιασμένων δραστηριοτήτων και διατύπωσε τρεις υποθέσεις σχετικά με τους μηχανισμούς επίδρασης της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία στην επιλογή των εκπαιδευτικών και τη χρήση των μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Πρώτον, ότι η ισχυρή μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία μπορεί να συμβάλλει στη χρήση αναπαραστάσεων που υποστηρίζουν τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων, ενώ η ασθενέστερη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία μπορεί να περιορίσει την διδασκαλία στην απομνημόνευση των κανόνων. Δεύτερον, ότι η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία φαίνεται να υποστηρίζει την ικανότητα των εκπαιδευτικών να παρέχουν εξηγήσεις που δίνουν νόημα στις μαθηματικές διαδικασίες. Τρίτον, πως οι μαθηματικές γνώσεις των διδασκόντων για τη διδασκαλία μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητά τους να ακολουθούν την σκέψη των μαθητών και να υποστηρίζουν την ανάπτυξη της κατανόησής τους.

Οι ανωτέρω δύο μελέτες αποτελούν παραδείγματα πιθανών αναλύσεων της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία σε σχέση με τα πλαίσια διδασκαλίας και μάθησης. Αξιοποιούν τα ευρήματα σχετικά με τη διδασκαλία για να ερευνήσουν τις συνεισφορές της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία με τρόπους που αρχίζουν να αποδομούν τον συγκεκριμένο ρόλο που διαδραματίζει η γνώση αυτή. Δεν είναι οι μόνες μελέτες σε αυτή την κατεύθυνση, αλλά είναι χαρακτηριστικές ανάμεσα στις λίγες που υπάρχουν. Βασιζόμενη στις συγκεκριμένες ιδέες, η περαιτέρω αντίληψη των σαφώς μαθηματικών όψεων της διδασκαλίας μπορεί να προσφέρει ακόμα πιο εστιασμένα περιβάλλοντα για τη μελέτη της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία ως πόρου για τη διδασκαλία.

2.2.5 Ζητήματα μεθοδολογίας της έρευνας

Ένα κεντρικό πρόβλημα για την πρόοδο στο πεδίο είναι η έλλειψη σαφώς κατανοητής και εφαρμόσιμης μεθοδολογίας για τη μελέτη και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία. Στην βιβλιογραφία διαπιστώνεται ότι οι μέθοδοι ποικίλλουν ευρέως, παρουσιάζουν σχετικές ιδιαιτερότητες και είναι γενικά αδύναμες. Σε ορισμένες περιπτώσεις επιχειρούν να κάνουν αιτιώδεις ισχυρισμούς από ερευνητικά σχέδια που δεν είναι κατάλληλα για τέτοιες απαιτήσεις και σε άλλες παρέχουν τεκμηριωμένους ισχυρισμούς αλλά από ασαφείς διαδικασίες με βάση συλλογισμούς που βρίσκονται σε εξέλιξη. Η έλλειψη σαφήνειας και αυστηρότητας των μεθόδων, μπορεί να είναι αποτέλεσμα πολλών παραγόντων, όπως η ανεπαρκής κατανόηση του θεωρητικού υπόβαθρου, ανταγωνιστικοί σκοποί της έρευνας (συχνά ακόμα και σε μια μόνο μελέτη) και αβεβαιότητα ισχυρισμών σχετικά με το αν κάτι αποτελεί ή δεν αποτελεί επαγγελματική γνώση. Οι προσπάθειες για τον σχεδιασμό αξιόπιστων μελετών για τη διατύπωση των χρησιμοποιούμενων μεθόδων υποδηλώνουν την ανάγκη για αυξημένη προσοχή στη μέθοδο. Αυτό δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη. Η ζωτικότητα της έρευνας σε περιοχές που βρίσκονται ακόμα σε πρώιμα στάδια της θεωρητικής τους ανάπτυξης απαιτεί την ταυτόχρονη εξέταση της μεθόδου (Hoover et al. 2016).

Όπως προαναφέρθηκε οι πρώτες έρευνες για τη γνώση του περιεχομένου των εκπαιδευτικών περιορίζονταν κυρίως σε συσχετιστικές μελέτες (π.χ., Begle, 1979). Οι μελέτες συσχέτισης παραμένουν ακόμα εμφανείς στο πεδίο (π.χ., Baumert et al., 2010; Hill, Rowan & Ball, 2005; Kersting et al., 2010). Αλλά στη δεκαετία του 1980 και του 1990 άρχισαν μελέτες με συνεντεύξεις εκπαιδευτικών με στόχο τη διερεύνηση της γνώσης τους (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Για τις προσεγγίσεις αυτές εγείρονται οι εξής βασικοί προβληματισμοί. Πρώτον, συχνά οι προσεγγίσεις επικεντρώνονταν στον εντοπισμό ελλειμμάτων στις μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών, αντί να αποσαφηνίσουν τη μαθηματική γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία. Δεύτερον, αν και μερικές συνεντεύξεις που προέκυψαν, προέτρεπαν στην ανάπτυξη και υποστήριξη κάποιας υπερβολής στις μελέτες, η απαίτηση πρόσθετων προκλήσεων υψηλής ποιότητας δεν ήταν εύκολο να ικανοποιηθεί. Η ισχύς αυτών των πρώιμων συνεντεύξεων ήταν η επικέντρωση σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα εξειδικευμένων μαθηματικών γνώσεων που θα ήταν σημαντικό για να διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί. Η αδυναμία τους ήταν ότι επικεντρώθηκαν στη συζήτηση σχετικά με την έλλειψη γνώσεων των εκπαιδευτικών, παρέχοντας παράλληλα ελάχιστα στοιχεία σχετικά με το πώς να καλύψουν αυτές τις ελλείψεις και άφησαν το δύσκολο έργο της δημιουργίας καλών προτροπών ανεξιχνίαστο.

Παρομοίως, οι μέθοδοι για τις μελέτες παρατήρησης συχνά ήταν ασθενώς προσδιορισμένες και δύσκολο να χρησιμοποιηθούν από άλλους μελετητές ως βάση για συμπληρωματική μελέτη. Για παράδειγμα, λόγω των ελλείψεων των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών, η ερευνητική ομάδα του Πανεπιστημίου του Μίτσιγκαν ανέπτυξε μια προσέγγιση βασισμένη στη μελέτη των βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών (Ball & Bass, 2003, Thames, 2009). Αυτή η προσέγγιση απαιτεί την ταυτόχρονη κατανόηση του έργου της διδασκαλίας και των μαθηματικών απαιτήσεων του έργου αυτού. Είναι μια εμπειρική, διεπιστημονική, αναλυτική-εννοιολογική έρευνα που περιλαμβάνει την ανάπτυξη εννοιών και εννοιολογικής πλαισίωσης με την ανάλυση του φαινομένου και τη συστηματική δοκιμή προτάσεων σε συνέπεια, με τα δεδομένα και με συγκεκριμένες θεωρητικές και πρακτικές προοπτικές. Η προσέγγιση είναι χρονοβόρα και δαπανηρή, απαιτεί εξειδικευμένη χρήση της γνώσης των εμπειρογνωμόνων και είναι αρκετά ανεπαρκής για να τεθεί σε ευρύτερη χρήση.

Το κλειδί για την κατανόηση της διδασκαλίας και των απαιτήσεων της γνώσης είναι η κατανόηση της πλαισιωμένης συλλογιστικής της. Με άλλα λόγια, η ουσιαστική μελέτη της διδασκαλίας πρέπει να συνυπολογίζει την κατευθυνόμενη και συμφραζόμενη φύση του έργου. Διαφαίνεται, ότι η εν λόγω μελέτη απαιτεί την ανάπτυξη και τη χρήση μεθόδων που ταιριάζουν με το έργο της διδασκαλίας και αυτό σημαίνει μεγαλύτερη εξάρτηση από την υποκείμενη θεωρία της διδασκαλίας στο σχεδιασμό μελετών και την επιλογή των μεθόδων ανάλυσης. Όπως συνοψίζει η Gherardi (2012, σελ. 20) για τη διεξαγωγή μελετών που βασίζονται στην πρακτική, «η εμπειρική μελέτη που οργανώνεται ως η γνώση με επικέντρωση στην πράξη απαιτεί ανάλυση του τρόπου, με βάση τις εργασιακές πρακτικές, τους πόρους που συλλογικά ενεργοποιούνται και ευθυγραμμίζονται με επάρκεια». Ισχυρίζεται λοιπόν, ότι για την εμπεριστατωμένη μελέτη του τρόπου με τον οποίο μεθοδολογικές προσεγγίσεις εφαρμόζονται απαιτείται τοποθέτησή τους σε σχέση με τη φύση της πρακτικής και τη συνεχή ανασύσταση τους στο πλαίσιο της επαγγελματικής εργασίας.

Μια δεύτερη παρατήρηση που φαίνεται να εγείρει επιπρόσθετες ανησυχίες για την ανάπτυξη νέων μεθόδων είναι η επισήμανση ότι η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία είναι επαγγελματική γνώση, με την έννοια ότι διαμοιράζονται τεχνικές γνώσεις που καθορίζονται από επαγγελματικούς λόγους, αλλά είναι διακριτή ως ένα σώμα γνώσης το οποίο απαιτεί τον συντονισμό των μαθηματικών και της διδασκαλίας, που είναι διαφορετικοί τομείς εξειδίκευσης που λειτουργούν σε διαφορετικές επαγγελματικές κοινότητες. Έτσι, η μελέτη τέτοιων γνώσεων απαιτεί συντονισμό μεταξύ διαφορετικών επαγγελματικών κοινοτήτων με διαφορετικά με επιστημονικά θεμέλια. Με άλλα λόγια, η μελέτη της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία απαιτεί ή ενισχύεται τουλάχιστον από τη συλλογική εργασία σε ξεχωριστές επαγγελματικές κοινότητες με διαφορετική εξειδίκευση και διαφορετικά επαγγελματικά πρότυπα και πρακτικές και το έργο αυτό απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και υποστήριξη (Star & Griesemer, 1989).

2.3 Συμβολή της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης και Σκέψης στη διδασκαλία

Η ενότητα αυτή διαπραγματεύεται αρχικά διαφορετικές νοητικές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί για τη μαθηματική γνώση και σκέψη. Στη συνέχεια η εστίαση στρέφεται στην Ανώτερη Μαθηματική γνώση και Σκέψη όπου παρουσιάζονται μορφοποιημένες προσεγγίσεις, αναλύονται βασικά χαρακτηριστικά και λειτουργίες της επικεντρώνοντας στο ρόλο της στη διδακτική πρακτική και στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών.

2.3.1 Διαφορετικές νοητικές προσεγγίσεις στη μαθηματική γνώση και σκέψη

Στις αρχές του εικοστού αιώνα ο Henri Poincaré διατύπωσε την άποψη ότι:

> Είναι αδύνατο να μελετήσουμε τα έργα των σπουδαίων μαθηματικών, ή ακόμα και ακόμα και των λιγότερο σημαντικών, χωρίς να παρατηρήσουμε και να διακρίνουμε δύο αντίθετες τάσεις ή μάλλον δύο τελείως διαφορετικά είδη νοητικών προσεγγίσεων. Το ένα είδος είναι πάνω απ' όλα προσηλωμένο στη λογική˙ όταν διαβάζει κάποιος τα έργα τους, μπαίνει στον πειρασμό να πιστέψει ότι έχουν προχωρήσει μόνο βήμα-βήμα, σύμφωνα με τον τρόπο που ο Vauban[1] πολιορκούσε στα χαρακώματα, χωρίς να αφήνει τίποτα στην τύχη. Το άλλο είδος οδηγείται από τη διαίσθηση και με το πρώτο χτύπημα κάνει γρήγορες αλλά μερικές φορές επισφαλείς κατακτήσεις, όπως οι τολμηροί ιππείς της προωθημένης φρουράς. (Poincaré, 1913, σ. 210)

Υποστήριζε το επιχείρημά του με βάση την διαφορά των προσεγγίσεων πολλών μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένων και διασήμων όπως ο Weierstrass και ο Riemann συσχετίζοντας αυτή την επισήμανση με τις προσεγγίσεις των μαθητών.

> Ο Weierstrass οδηγεί τα πάντα πίσω στην εξέταση της σειράς και των αναλυτικών μετασχηματισμών τους. Για να το εκφράσει καλύτερα, μειώνει την ανάλυση σε ένα είδος επέκτασης της αριθμητικής˙ μπορείτε να φυλλομετρήσετε όλα τα βιβλία του χωρίς να βρείτε ένα σχήμα. Ο Riemann, αντιθέτως, καλεί αμέσως τη γεωμετρία για βοήθεια. Σε κάθε μία από τις αντιλήψεις του είναι μια εικόνα που κανείς δεν μπορεί να ξεχάσει, αφού έχει καταλάβει το νόημά της.
> ... Μεταξύ των φοιτητών μας παρατηρούμε τις ίδιες διαφορές˙ ορισμένοι προτιμούν να αντιμετωπίζουν τα προβλήματά τους «με ανάλυση», άλλοι με γεωμετρία». Οι πρώτοι είναι ανίκανοι να «βλέπουν στο χώρο», οι άλλοι γρήγορα κουράζονται από τους μακροσκελείς υπολογισμούς και έρχονται σε αμηχανία. (Poincaré, 1913, σ. 212)

Βεβαίως, δεν υπάρχουν μόνο δύο διαφορετικά είδη μαθηματικών νοητικών προσεγγίσεων, αλλά πολλά. Ο Kronecker συμφώνησε με τον Weierstrass ότι η λογική απόδειξη ήταν υψίστης σημασίας και υπερβαίνει τα διαισθητικά οπτικά επιχειρήματα, αλλά οι θεμελιώδεις πεποιθήσεις τους για τη φύση των μαθηματικών εννοιών ήταν πολύ διαφορετικές. Ο Weierstrass δήλωσε ότι «ένας άρρητος αριθμός έχει, όπως και ο πραγματικός, μια ύπαρξη όπως οτιδήποτε άλλο στον κόσμο των εννοιών», αλλά ο Kronecker δεν μπόρεσε να δεχθεί το εν ενεργεία άπειρο των πραγματικών αριθμών, υποστηρίζοντας ότι «ο Θεός μας έδωσε τους ακεραίους, τα υπόλοιπα είναι έργο του ανθρώπου». Με βάση τη θεωρία του Weierstrass για το εν ενεργεία άπειρο των πραγματικών αριθμών, ο Cantor ήταν σε θέση να παράγει ένα επιχείρημα άπειρης αρίθμησης για να δείξει με αυστηρότητα ότι υπάρχουν «περισσότεροι» πραγματικοί αριθμοί από αλγεβρικούς αριθμούς (λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους

---

[1] Ο Sebastien de Vauban (1633-1707) ήταν Γάλλος μηχανικός του στρατού που έκανε επανάσταση στην τέχνη της πολιορκίας σκαφών και αμυντικών οχυρώσεων.

συντελεστές). Υποστήριξε λοιπόν ότι υπάρχει ένας πραγματικός μη αλγεβρικός αριθμός, χωρίς να δίνει μια ρητή μέθοδο για την κατασκευή του. Αυτό ήταν ανάθεμα για τον Kronecker, ο οποίος απαίτησε να απορριφθεί το άρθρο του Cantor για δημοσίευση στο περιοδικό Crellés Journal το 1873.

Τέτοια επιχειρήματα για τα θεμέλια των μαθηματικών οδήγησαν στην ανάπτυξη διαφορετικών φιλοσοφικών σχολών στις αρχές του εικοστού αιώνα. Ο *λογισκισμός* ο οποίος είχε στόχο την αναγωγή των μαθηματικών στη λογική και, μέσω αυτής, στο ξεκαθάρισμα των θεμελίων των μαθηματικών και την πλήρη τυποποίησή τους. Βασικός εκπρόσωπος του λογικισμού ήταν ο Bertrand Russell, με το έργο του *Principia Mathematica*, το οποίο συνέγραψε με τον Alfred North Whitehead και υποστηρίχτηκε από τον Frege παρά τις επιμέρους διαφορές τους. Ως φιλοσοφικό ρεύμα ο λογικισμός βασίστηκε, τουλάχιστον όσον αφορά τις μαθηματικές αλήθειες στο έργο του Αριστοτέλη και υποστηρίχτηκε για πρώτη φορά ως φιλοσοφική θέση από τον Leibniz. Ο *φορμαλισμός*, με κύριο εκφραστή τον David Hilbert, θεωρεί τα μαθηματικά ως διαχείριση συμβόλων στο πλαίσιο ενός συστήματος, τα οποία όμως είναι χωρίς κάποιο ιδιαίτερο νόημα. Συμβιβάζοντας με τον τρόπο αυτό τη συνέχιση της μαθηματικής πρακτικής χωρίς την αναγκαιότητα της πλατωνικής οντολογίας για τα μαθηματικά αντικείμενα. Ο *ιντουισιονισμός*, με κύριο εκφραστή τον Γερμανό φιλόσοφο και μαθηματικό Luitzen Egbertus Jan Brouwer, υποστήριξε την άποψη που εκφράστηκε από τον Kronecker. Δηλαδή, ότι οι μαθηματικές έννοιες υπάρχουν μόνο όταν μπορούν να κατασκευαστούν από τους ακέραιους αριθμούς.

Όπως σημειώνει ο Tall (1991), πρακτικά οι μαθηματικοί ερευνητές τείνουν να αποστασιοποιούνται από αυτά τα ζητήματα και απλώς προχωρούν με το έργο της διατύπωσης και απόδειξης των θεωρημάτων τους. Έτσι, στον εικοστό αιώνα είδαμε την κατάρρευση των απόψεων του Kronecker και τον θρίαμβο ενός ρεαλιστικού μίγματος φορμαλισμού και λογικής. Είδαμε τη δημιουργία ενός μεγάλου αριθμού τυπικών συστημάτων βασισμένων στην απαγωγική λογική από τυπικούς ορισμούς και αξιώματα - μια προσέγγιση που επιβίωσε από το φαινομενικά θανάσιμο χτύπημα που έπληξε το θεώρημα μη πληρότητας του Gödel, ότι κάθε αξιωματικό σύστημα που περιλαμβάνει τους ακέραιους αριθμούς περιέχει αληθείς προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχθούν από μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων εντός του συστήματος.

Ο βασικός λόγος για τον οποίο αναφερόμαστε εδώ στις διαφορετικές νοητικές διεργασίες στα μαθηματικά είναι η επισήμανση ότι η προσωπική προσέγγιση του καθενός για τα μαθηματικά δεν είναι απαραίτητα η ίδια για όλους. Αυτή η φαινομενικά κοινότοπη διαπίστωση μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στην μαθηματική εκπαίδευση. Συνήθως οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν έχοντας τις δικές τους πεποιθήσεις και τη συνειδητή ή ασυνείδητη φιλοσοφική τους στάση για τα μαθηματικά, την οποία ακολουθούν και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Αυτό σε πολλές περιπτώσεις τους δυσκολεύει να αποδεχτούν ή να κατανοήσουν τις διαφορετικές νοητικές προσεγγίσεις που μπορεί να ακολουθούν οι μαθητές τους. Επίσης, κάποιοι εκπαιδευτικοί, ακολουθώντας μόνο μια νοητική διδακτική προσέγγιση στα μαθηματικά δυσκολεύουν ή υπονομεύουν τη συμμετοχή κάποιων μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα. Κατά συνέπεια κάθε θεωρία ή φιλοσοφική σχολή για τη μαθηματική σκέψη θα πρέπει να ενταχθεί σ' ένα ευρύτερο πλαίσιο ανθρώπινης νοητικής και πολιτισμικής δραστηριότητας. Δεν υπάρχει μοναδική αλήθεια ούτε απόλυτος τρόπος σκέψης στα μαθηματικά, αλλά αντίθετα υπάρχουν πολιτισμικά αναπτυσσόμενοι τρόποι σκέψης με πολλές πτυχές που αντιστοιχούν στο εκάστοτε πλαίσιο Tall (1991).

2.3.2 Ανώτερη Μαθηματική Γνώση και εκπαίδευση των εκπαιδευτικών

Αρκετή συζήτηση έχει γίνει στη βιβλιογραφία σχετικά με τον ορισμό της *Ανώτερης Μαθηματική Γνώσης* (Advanced Mathematical Knowledge). Οι Zazkis & Leikin (2010) ορίζουν ως «Ανώτερη Μαθηματική Γνώση εκείνη τη γνώση του αντικειμένου που αποκτάται κατά τη διάρκεια των ανώτερων σπουδών σ' ένα κολλέγιο ή πανεπιστήμιο» (σ. 263). Αναγνωρίζουν βέβαια ότι υπάρχουν προβλήματα σ' ένα τέτοιο ορισμό, λόγω των διαφορετικών προγραμμάτων σπουδών και των διδακτικών προσεγγίσεων που υπάρχουν στα διάφορα πανεπιστήμια, αλλά φαίνεται ότι ο ορισμός αυτός καλύπτει τις βασικές ανάγκες για την εργασία τους.

Όσον αφορά τον ορισμό αυτό σημειώνουμε ότι ένας γνωστικός τομέας μπορεί να αποτελέσει σχολική γνώση σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ενώ κάποια άλλη περίοδο, αποτελεί γνώση που παρέχεται αποκλειστικά στο πανεπιστήμιο. Για παράδειγμα, πριν από κάποια χρόνια στην Ελλάδα οι μαθητές διδάσκονταν τις έννοιες του διανυσματικού χώρου, της ομάδας και του σώματος, οι οποίες την τρέχουσα περίοδο είναι γνώση που διδάσκεται στο πανεπιστήμιο. Επίσης, στοιχεία του Διαφορικού Λογισμού μελετώνται και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι ενασχόληση με Ανώτερα Μαθηματικά μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να θεωρείται η εφαρμογή κάποιων τύπων, για παράδειγμα στα ολοκληρώματα, με τυποποιημένες διαδικασίες προκειμένου να προκύψουν κάποια συμβατικά συμπεράσματα. Ενώ ενασχόληση με στοιχειώδη μαθηματικά μπορεί να θεωρείται η διαδικασία επίλυσης θεμάτων μαθηματικών διαγωνισμών τα οποία απαιτούν βαθιά κατανόηση των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών.

Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς αυτούς θεωρούμε ότι το συγκεκριμένο περιεχόμενο που αποδίδεται από τις Zazkis & Leikin (2010) στον όρο Ανώτερη Μαθηματική Γνώση περιγράφεται καλύτερα από τον όρο Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε στοιχεία που εμπλουτίζουν και περιγράφουν καλύτερα τον όρο Ανώτερη Μαθηματική Γνώση τον οποίο θεωρούμε ευρύτερο.

Στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θεωρείται ως απαραίτητη προϋπόθεση για τους εκπαιδευτικούς η Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών. Στην Ελλάδα, η παρακολούθηση από τους εκπαιδευτικούς μαθημάτων Ανώτερων Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο, αποτελεί τη βάση σχεδόν του συνόλου της προετοιμασίας τους προκειμένου να ενταχθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Όμως, παρόλο που υπάρχει μια γενική αίσθηση της ιδιαίτερης σημασίας που μπορεί να διαδραματίσει στη διδακτική πράξη η Γνώση Ανώτερων Μαθηματικών, φαίνεται ότι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί αμφισβητούν αυτή τη συνάφεια ή ακόμα και όσοι την αναγνωρίζουν, δυσκολεύονται ιδιαίτερα να προσδιορίσουν συγκεκριμένα παραδείγματα παρουσίας της (Zazkis & Leikin, 2010).

Ο Felix Klein (1932) στο έργο του *Στοιχειώδη Μαθηματικά από Ανώτερη Σκοπιά*, είχε εντοπίσει μια «διπλή ασυνέχεια» στους εκπαιδευτικούς και την εκπαίδευσή τους. Η πρώτη ασυνέχεια είναι ότι η μελέτη των πανεπιστημιακών μαθηματικών δεν αναπτύχθηκε ως συνέχεια των σχολικών μαθηματικών που οι μαθητές (και μελλοντικοί καθηγητές) γνώριζαν. Η δεύτερη ασυνέχεια εντοπίζεται στην αποσύνδεση των μαθηματικών γνώσεων που οι εκπαιδευτικοί διδάχθηκαν στο πανεπιστήμιο σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο που καλούνται να διδάξουν. Αρκετοί ερευνητές έχουν αναφερθεί στις σημαντικές μαθηματικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι νεοεισερχόμενοι φοιτητές στο πανεπιστήμιο ακόμα και εκείνοι που στο σχολείο έχουν υψηλή επίδοση (Tall, 1991; Davis, 1988; Selden, Mason & Selden, 1989).

Από την άλλη, φαίνεται ότι η έρευνα δεν έχει κατασταλάξει σχετικά με την επίδραση της γνώσης των εκπαιδευτικών στην επίδοση των μαθητών τους. Οι Coleman et al. (1966) και οι Jencks et al. (1972) βρίσκουν πολύ μικρή επίδραση της γνώσης των εκπαιδευτικών στην επίδοση των μαθητών σε σχέση με εξωτερικούς παράγοντες, όπως το κοινωνικό και οικονομικό υπόβαθρο της οικογένειας. Ο Begle (1979) διαπίστωσε ότι οι μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών δεν συνδέονται ούτε με τον αριθμό των πανεπιστημιακών μαθημάτων που είχαν διδαχθεί οι αντίστοιχοι εκπαιδευτικοί ούτε με την επίδοση των εκπαιδευτικών στα μαθήματα αυτά. Έτσι, αναφερόμενος στην πεποίθηση σύμφωνα με την οποία «όσα περισσότερα γνωρίζει κάποιος για το γνωστικό του αντικείμενο τόσο πιο αποτελεσματικός δάσκαλος μπορεί να είναι», υποστηρίζει πως χρήζει σημαντικής τροποποίησης. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι τα αποτελέσματα των ερευνών του δείχνουν ότι «η επίδραση της γνώσης των εκπαιδευτικών για το γνωστικό τους αντικείμενο στη μάθηση των μαθητών φαίνεται να είναι πολύ μικρότερη απ' αυτή που υποθέτουμε» (σ. 53) και προτρέπει τους ερευνητές να στρέψουν αλλού την προσοχή τους σχετικά με παράγοντες που συμβάλλουν ουσιαστικά στην αποτελεσματική διδασκαλία. Επιπλέον, ερευνητές του Εθνικού Κέντρου Έρευνας για την Εκπαίδευση των Εκπαιδευτικών των ΗΠΑ διαπίστωσαν ότι «οι εκπαιδευτικοί που εξειδικεύτηκαν στο μάθημα που δίδασκαν, συχνά δεν ήταν πιο ικανοί από άλλους εκπαιδευτικούς στο να εξηγήσουν τις θεμελιώδεις έννοιες στον κλάδο τους» (NCRTE, 1991, όπως αναφέρεται στο Conference Board of Mathematical Sciences, 2001, σ. 121).

Ωστόσο, μελέτες, όπως του Brophy (1986), που ασχολήθηκαν με πλευρές της διδασκαλίας, όπως η διαχείριση της τάξης, η κατανομή του διδακτικού χρόνου ανέδειξαν μια πιο ισχυρή σχέση μεταξύ των γνώσεων των εκπαιδευτικών και της επίδοσης των μαθητών. Ο Monk (1994) διαπίστωσε μια μικρή αύξηση στις επιδόσεις των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που συνδέεται με τον αριθμό των μαθημάτων των μαθηματικών που έχουν παρακολουθήσει στα κολλέγια οι καθηγητές μαθηματικών τους, παρόλο που σημειώνει ότι, η ποσότητα της προπαρασκευαστικής προετοιμασίας στα μαθηματικά δεν εγγυάται την ποιότητα της διδασκαλίας, ή αλλιώς, η μαθηματική κατανόηση ενός ατόμου δεν μεταφράζεται απαραίτητα σε ικανότητα ενίσχυσης της κατανόησης των άλλων.

Πιο πρόσφατες μελέτες αναγνώρισαν την εγγενή πολυπλοκότητα σε αυτά τα αποτελέσματα, θεωρώντας ότι ο αριθμός των μαθημάτων που λαμβάνονται από έναν εκπαιδευτικό στο πανεπιστήμιο και ο βαθμός που έλαβε στα μαθήματα αυτά δεν είναι τα κατάλληλα μέτρα μαθηματικής γνώσης. Μετά από μια εμπεριστατωμένη βιβλιογραφική έρευνα, οι Hill, Rowan & Ball (2005), εξετάζοντας πιο άμεσα τις βαθμολογίες των μαθητών σε εξετάσεις πιστοποίησης και τα θέματα των εξετάσεων, διαπίστωσαν ένα γενικά θετικό αποτέλεσμα στη συσχέτιση της μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών με τις επιδόσεις των μαθητών.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι ερευνητές συνειδητοποίησαν ότι η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία (Ball et al., 2008), μπορεί να είναι ένας ειδικός συνδυασμός γνώσης του περιεχομένου και παιδαγωγικής, που βασίζεται σε βαθιά κατανόηση του θέματος και συνειδητοποίηση των εμποδίων στη μάθηση. Αυτή η εξειδικευμένη γνώση έχει μελετηθεί κυρίως για τη διδασκαλία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (π.χ. Ma, 1999) και έχει βρεθεί ότι μια τέτοια εξειδικευμένη γνώση σχετίζεται σημαντικά με την επιτυχία των μαθητών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Στον περιορισμό των κενών μεταξύ της μαθηματικής γνώσης που προσφέρεται στη δευτεροβάθμια και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, έρχεται να συμβάλλει η έκθεση του αμερικάνικου Συμβουλίου των Μαθηματικών Επιστημών (Conference Board of the Mathematical Sciences, CBMS, 2001) για τη μαθηματική εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, η οποία πρόσφερε δύο προτάσεις για το ποια μαθηματική γνώση πρέπει να απαιτηθεί από τους εκπαιδευτικούς και πώς αυτή η γνώση μπορεί να αποκτηθεί. Πρώτον, συνιστάται βασικά μαθήματα των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο να επανασχεδιαστούν προκειμένου να βοηθήσουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς να κάνουν διεισδυτικές συνδέσεις μεταξύ των Ανώτερων Μαθηματικών που σπουδάζουν στο πανεπιστήμιο και των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που πρόκειται να διδάξουν.

Δεύτερον, συνιστούν να αναπτυχθεί ένα μάθημα στο πανεπιστήμιο στο οποίο να μελετώνται θεμελιώδη ζητήματα του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με την οπτική των Ανώτερων Μαθηματικών. Ενώ η συζήτηση σχετικά με το υπόβαθρο που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συνεχίζεται, μια πρόσφατη έκθεση από την αμερικανική εθνική συμβουλευτική ομάδα για τα μαθηματικά κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει έλλειψη στέρεης έρευνας για τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τις μαθηματικές γνώσεις τους βοηθώντας τους μαθητές να μάθουν (Mervis, 2008; U.S. National Mathematics Advisory Panel, 2008). Στην κατεύθυνση αυτή προσδοκά να συμβάλλει η παρούσα εργασία.

2.3.3 Ανώτερη Γνώση των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Ορίζοντας της Γνώσης του Περιεχομένου

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια ανασκόπηση της ερευνητικής συζήτησης που έχει αναπτυχθεί σχετικά με τον Ορίζοντα της Γνώσης του Περιεχομένου (Horizon Content Knowledge - HCK) που, όπως έχει επισημανθεί, αποτελεί μια από τις κατηγορίες της γνώσης του γνωστικού αντικειμένου (Ball et al., 2008). Ο συγκεκριμένος γνωστικός τομές έχει συνδεθεί με την γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών (Wasserman & Stockton, 2013; Zazkis & Mamolo, 2011) αν και υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις σχετικά με το περιεχόμενό του (Ball et al., 2008; Ball & Bass, 2009; Zazkis & Mamolo, 2011; Mamolo & Pali, 2014; Wasserman & Stockton, 2013; Fernández & Figueras, 2014; Guberman & Goven, 2015).

Οι Ball et al., (2008) ορίζουν τον Ορίζοντα της Γνώσης του Περιεχομένου ως «μια συνειδητοποίηση για τον τρόπο που τα μαθηματικά θέματα συσχετίζονται κατά τη διάρκεια του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών» (σ. 403). Οι Ball & Bass (2009) περιγράφουν τον ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου «ως μια συνειδητοποίηση, ως μια αξιόλογη τουριστική επίσκεψη παρά ως μια περιήγηση – του ευρύτερου μαθηματικού τοπίου στο οποίο η παρούσα εμπειρία εγκαθίσταται» (σ. 6). Θεωρούν ότι αυτό το είδος γνώσης είναι σημαντικό για τη διδασκαλία επειδή μπορεί να λειτουργήσει ώστε να γίνουν αιτιολογήσεις για την σημαντικότητα των μαθηματικών, να τονίσει τις σημαντικές ιδέες, να δημιουργήσει συνδέσεις, να συμβάλλει στη δυνατότητα κατανόησης της μαθηματικής σημασίας με την οποία οι μαθητές διατυπώνουν και συλλαμβάνουν μαθηματικές στρεβλώσεις ή να προληφθούν πιθανές μετέπειτα μαθηματικές παρανοήσεις. Ισχυρίζονται ότι υπάρχει κάποιος ορίζοντας της γνώσης για τα (μαθηματικά) ζητήματα, κάποιος για τις πρακτικές και κάποιος για τις αξίες. Επίσης, σημειώνουν ότι ο ορίζοντας της γνώσης δεν δημιουργεί κάποια επιτακτική ανάγκη για άμεση δράση με κάποια συγκεκριμένη μαθηματική ενέργεια στη διδασκαλία. Διακρίνουν στην έννοια του ορίζοντα της γνώσης τέσσερα συστατικά στοιχεία: (α) την έννοια του μαθηματικού περιβάλλοντος που περιβάλλει την τρέχουσα θέση στη διδασκαλία, (β) τις μεγάλες επιστημονικές ιδέες και δομές, (γ) τις σημαντικές μαθηματικές πρακτικές και (δ) τον πυρήνα των μαθηματικών αξιών και ευαισθησιών.

Οι περιγραφές για τον *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου* χαρακτηρίζονται σε κάποιες περιπτώσεις από μια σχετική ασάφεια. Για παράδειγμα, η δημιουργία συνδέσεων εννοιών ή αναπαραστάσεων στο άρθρο των Ball et al. (2008) συνδέονται τόσο με την *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (SCK) και τον *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου* (HCK) που αποτελούν μέρος της ευρύτερης κατηγορίας της γνώσης του γνωστικού αντικειμένου (SMK), όσο και με τη *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* (KCS) και με τη *γνώση του προγράμματος σπουδών* (KCC) που είναι μέρος της άλλης ευρύτερης κατηγορίας της *παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου* (PCK). Επίσης, διαφοροποιήσεις μεταξύ των ερευνητών εντοπίζονται για τη σχέση του HCK με την

Ανώτερη Μαθηματική Γνώση. Οι Ball & Bass (2009) περιγράφουν τον HCK ως «ένα είδος στοιχειώδους αντίληψης της ανώτερης γνώσης που εξοπλίζει τους εκπαιδευτικούς με μια ευρύτερη αλλά συγκεκριμένη οπτική και προσανατολισμό για το έργο τους» (σ. 10), θεωρώντας ότι έτσι συμπληρώνεται ο τίτλος του κλασικού βιβλίου του Felix Klein (1924) «Στοιχειώδη Μαθηματικά από Ανώτερη Σκοπιά». Όμως, οι Zazkis & Mamolo (2011) θεωρούν τη γνώση των εκπαιδευτικών για το μαθηματικό ορίζοντα ως εφαρμογή της ανώτερης γνώσης των μαθηματικών (AMK) σε μια διδακτική κατάσταση. Παραφράζοντας τον τίτλο του βιβλίου του Felix Klein (1924), θεωρούν ότι ο HCK αποτελεί «ανώτερη αντίληψη των στοιχειωδών μαθηματικών που εφαρμόζεται στη διδασκαλία» (σ. 9).

Οι Zazkis & Mamolo (2011) συνδέουν και αυτές την έννοια του ορίζοντα με τη γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών. Στην προσέγγισή τους για τον ορίζοντα έχουν επηρεαστεί από τη φιλοσοφική ιδέα του Husserl, ο οποίος διακρίνει μεταξύ εσωτερικού (inner) και εξωτερικού (outer) ορίζοντα. Ο εσωτερικός ορίζοντας ενός αντικειμένου αντιστοιχεί σε πτυχές του αντικειμένου οι οποίες δεν είναι στην εστίαση της προσοχής μας. Ο εξωτερικός ορίζοντας ενός αντικειμένου περιλαμβάνει χαρακτηριστικά τα οποία δεν είναι τα ίδια πτυχές του αντικειμένου αλλά συνδέονται με τον κόσμο στον οποίο το αντικείμενο υπάρχει. Οι Zazkis & Mamolo (2011) θεωρούν ότι η εφαρμογή της γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών σε μια διδακτική κατάσταση αποτελεί μία εκδήλωση της γνώσης του μαθηματικού ορίζοντα των εκπαιδευτικών. Δηλώνουν ότι η αντίληψή τους για τον ορίζοντα επηρεάζεται από την κοινή χρήση του όρου που είναι «εκεί που η γη φαίνεται να συναντά τον ουρανό», διευκρινίζοντας ότι γι’ αυτές ο ορίζοντας είναι η περιοχή που η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών του εκπαιδευτικού (ο ουρανός) φαίνεται να συναντά τη μαθηματική γνώση που αντανακλάται στο σχολικό μαθηματικό περιεχόμενο (τη γη). Προτείνουν ότι η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς, τους επιτρέπει μια «υψηλή» θέαση και ευρύτερη οπτική του ορίζοντα σε σχέση με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του ίδιου του αντικειμένου (εσωτερικός ορίζοντας) και σε σχέση με τις σημαντικές ιδέες και δομές που περιβάλλουν τον κόσμο στον οποίο υπάρχει το αντικείμενο.

Οι Mamolo & Pali (2014) μελετούν τη γνώση του μαθηματικού ορίζοντα φοιτητών που προετοιμάζονται για να γίνουν εκπαιδευτικοί, τα στοιχεία του και πως επηρεάζει τις παιδαγωγικές τους ενέργειες. Επιπλέον, κάνουν συνδέσεις με την «εικόνα της έννοιας» των Tall & Vinner (1981), καταλήγοντας σε δυο βασικά συμπεράσματα. Το πρώτο είναι ότι, σε αντίθεση με τους Ball & Bass (2009), υποστηρίζουν ότι για κάποιους υποψήφιους εκπαιδευτικούς «η γνώση του μαθηματικού ορίζοντα προβαίνει σε μια (ίσως όχι επιτακτική) πρόσκληση για δράση σε συγκεκριμένη κατεύθυνση» (σ. 48). Το δεύτερο είναι ότι αναγνωρίζουν «μια σημαντική δυνατότητα σύνδεσης μεταξύ του γνωστικού ορίζοντα των υποψήφιων εκπαιδευτικών και της γνώσης του περιεχομένου και των μαθητών» (σ. 48).

Για τους Jacobsen, Thames & Ribeiro (2013) ο *ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου* (HCK) δεν είναι ούτε *κοινή* (CCK) ούτε *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (SCK), ούτε αρκεί να θεωρηθεί απλώς ως γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών ή γνώση για θέματα που μπορεί να προκύψουν σε μελλοντικές σπουδές των μαθητών. Θεωρούν ότι ο *ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου* είναι ένας προσανατολισμός και μια εξοικείωση με την επιστήμη που συμβάλλει στη διαθεσιμότητα του σχολικού περιεχομένου στη διδασκαλία, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς μια αίσθηση για το πως εγκαθίσταται το περιεχόμενο που διδάσκεται και συνδέεται με το ευρύτερο επιστημονικό περιβάλλον. Ακολουθώντας τους Ball & Bass (2009) συνηγορούν ότι ο ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου περιλαμβάνει τη ρητή γνώση των τρόπων και των εργαλείων της επιστήμης, των ειδών της γνώσης και των αιτιολογήσεών της, του χώρου από τον οποίο προέρχονται οι ιδέες και το πως καθιερώνεται η «αλήθεια» ή η εγκυρότητα. Επίσης, υποστηρίζουν ότι στον HCK περιλαμβάνεται η συνειδητοποίηση του πυρήνα των επιστημονικών αρχών και αξιών καθώς και οι σημαντικές δομές της επιστήμης, παρέχοντας τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να «ακούν» τους μαθητές, να κρίνουν την σπουδαιότητα συγκεκριμένων ιδεών ή ερωτήσεων και να αντιμετωπίζουν την επιστήμη με ακεραιότητα, αξιοποιώντας όλους τους πόρους για την εξισορρόπηση του θεμελιώδους στόχου της σύνδεσης των μαθητών με ένα ευρύτερο και ιδιαίτερα αναπτυγμένο πεδίο.

Για κάποιους άλλους ερευνητές αναγνωρίζεται ότι η Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών καλύπτει ιδέες που σχετίζονται με το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών (McCrory et al., 2012; CBMS, 2012) αλλά τέτοιες συνδέσεις δεν υποδηλώνουν αναγκαστικά κάποια ρητή αναγκαιότητα των Ανώτερων Μαθηματικών σε σχέση με συγκεκριμένα καθήκοντα για τη διδασκαλία (Stockton & Wasserman, 2017). Ο Wasserman (2016), στην προσπάθεια του να διερευνήσει το ρόλο της γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ονομάζει *τοπική μαθηματική περιοχή* (local mathematical neighborhood) μιας μαθηματικής ιδέας που πρόκειται να διδαχθεί εκείνο το πεδίο που περιλαμβάνει μαθηματικές ιδέες που είναι σχετικά κοντά στο περιεχόμενο που διδάσκεται. Η *μη τοπική* (nonlocal) περιοχή, αποτελείται από ιδέες που απέχουν περισσότερο, περιλαμβάνοντας και τα Ανώτερα Μαθηματικά (τουλάχιστον για τον δάσκαλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης). Το «κοντά» με αυτή την έννοια αναφέρεται τόσο στο βαθμό με τον οποίο οι μαθηματικές ιδέες συνδέονται όσο και με τη χρονική απόσταση σε σχέση με το πότε τυπικά αναπτύσσονται οι μαθηματικές ιδέες (αυτή η έννοια συνδέεται με τον Ορίζοντα της Γνώσης του Περιεχομένου των Ball et al., 2008)). Επίσης, επισημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν πρέπει να καταλήξουν να διδάσκουν Ανώτερα Μαθηματικά στους μαθητές αυτής της βαθμίδας εκπαίδευσης. Η επίδραση της γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οφείλει να είναι μετασχηματιστική, δηλαδή, η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών μπορεί να μετασχηματίσει την «κατανόηση και την αντίληψη των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο που διδάσκουν με τρόπους που επηρεάζουν τη διδασκαλία τους» (Wasserman, 2016, σ. 30).

Οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδακτική πράξη μπορούν να χρησιμοποιήσουν επιχειρήματα ή αποδεικτικά σχήματα για πείσουν τους μαθητές τους για την ισχύ κάποιας μαθηματικής πρότασης. Τα επιχειρήματα αυτά, παρόλο που μπορεί να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές, ενδεχομένως να μην ανήκουν στο αναλυτικό πρόγραμμα (με τη τυπική του σημασία) αλλά ούτε και να διδάσκονται σε κάποιο μάθημα Ανώτερων Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο. Θεωρούμε ότι τέτοιου τύπου επιχειρήματα ανήκουν στον ορίζοντα της γνώσης του εκπαιδευτικού. Ο ορίζοντας της γνώσης περιλαμβάνει εκείνα τα στοιχεία της γνώσης του εκπαιδευτικού που επιτρέπουν να προλαμβάνει, να αναγνωρίζει και να ερμηνεύει τις προσεγγίσεις ή τις παρανοήσεις των μαθητών και τον βοηθούν στην διδακτική τους διαπραγμάτευση. Ωστόσο, η γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά και σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης, έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και δεν αποτελεί απλά μια εφαρμογή της γνώσης που αποκτήθηκε από μια ανώτερη βαθμίδα εκπαίδευσης.

Όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν προτάσεις και δοκιμάζουν επιχειρήματα για την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης, ο εκπαιδευτικός καλείται να καθορίσει ένα πλαίσιο αποδεκτών προτάσεων ή προσεγγίσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη μιας πρότασης υιοθετώντας εναλλακτικές προσεγγίσεις ή αποκλείοντας εκείνες που περιέχουν στοιχεία της πρότασης που ζητείται να αποδειχθεί. Στοιχεία αυτής της γνώσης τα οποία δεν περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, αποτελούν και αυτά μέρος του HCK ως ένα ιδιαίτερο είδος γνώσης απαραίτητο για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Συνοψίζοντας, ο HCK είναι μαθηματική γνώση για τις ανάγκες της διδασκαλίας η οποία αναφέρεται σε ζητήματα του ευρύτερου περιβάλλοντος των μαθηματικών ζητημάτων που πραγματεύονται στο διδακτικό πλαίσιο, σε αντίθεση με την SCK που συνδέεται άμεσα με τα θέματα που διαπραγματεύονται διδακτικά. Συμβάλλει στην ανάπτυξη των ευρύτερων μαθηματικών προβληματισμών των μαθητών αλλά και στην ουσιαστική κατανόηση των αιτιών ενδεχόμενων παρανοήσεών τους. Συνδέεται με την βαθύτερη και ευρύτερη γνώση των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται, έχοντας ιδιαίτερο και διακριτό ρόλο στις διδακτικές προσεγγίσεις σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης. Περιλαμβάνει γνώσεις που δεν ανήκουν απαραίτητα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αλλά συνδέεται με έννοιες και ιδέες του προγράμματος.

2.3.4 Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη και διδασκαλία

Εδώ και αρκετά χρόνια είναι έντονο το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης για ζητήματα που αφορούν τη λεγόμενη Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη (Advanced Mathematical Thinking). Ένα μέρος της βιβλιογραφίας αναφέρεται σε ζητήματα σχετικά με την διδασκαλία συγκεκριμένων Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Ενδεικτικά αναφέρεται, για τον απειροστικό λογισμό (Bezuidenhout & Olivier, 2000), για τη γραμμική άλγεβρα (Dorier, 1995; Maracci, 2003), για τις διαφορικές εξισώσεις (Kwon, Cho, Ju & Shin, 2004; Artigue, 1992), για τις συναρτήσεις (DeMarois & Tall, 1999; Harel & Dubinsky, 1992). Επίσης, αρκετές έρευνες έχουν εστιάσει στη διδασκαλία στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (π.χ. Moreno & Azcárate, 1996; Nardi 1999). Επίσης, έχουν μελετηθεί οι απόψεις φοιτητών για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (Forgaz & Leder, 1998). Σημαντική συμβολή στο πεδίο της Ανώτερης Μαθηματικής Σκέψης αποτελεί ο σχετικός συλλογικός τόμος (Tall, 1991).

Στην ενότητα αυτή δεν επιδιώκεται μια εξαντλητική ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας αλλά η εστίαση βρίσκεται σε ζητήματα που αφορούν την προσέγγιση των Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών από τους εκπαιδευτικούς κατά τη μετάβαση των μαθητών από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Λαμβάνεται υπόψη ότι οι δυσκολίες που εντοπίζονται από την έρευνα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο αντιμετωπίζονται από σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την έρευνα που αποτελεί αντικείμενο της παρούσας διατριβής.

Ο Tall (1992) αναφέρει ότι η ανώτερη μαθηματική σκέψη χαρακτηρίζεται από δύο σημαντικά στοιχεία: τους ακριβείς μαθηματικούς ορισμούς (συμπεριλαμβανομένων των προτάσεων των αξιωμάτων των αξιωματικών θεωριών) και των λογικών συμπερασμάτων των θεωρημάτων που βασίζονται σε αυτά. Επισημαίνει όμως ότι: «θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι κατά τη μετάβαση στην ανώτερη μαθηματική σκέψη, ο φορμαλισμός και η συστηματοποίηση των μαθηματικών είναι το τελικό στάδιο της μαθηματικής σκέψης και όχι το σύνολο της δραστηριότητας» (σ. 508 -509).

Όπως σημειώνει ο Dreyfus (2002), αρκετοί καθηγητές μαθηματικών γνωρίζουν ότι τα μαθηματικά δεν δημιουργούνται στην τελική και ολοκληρωμένη τους μορφή, αλλά με δοκιμή και λάθος, με μερικώς ορθές (και εν μέρει λανθασμένες) προτάσεις, με διαισθητικές διατυπώσεις στις οποίες έχουν εισαχθεί σκόπιμα χαλαροί όροι και ανακρίβειες, που προσπαθούν να παρουσιάσουν οπτικά πλευρές των μαθηματικών δομών, μέσω δυναμικών αλλαγών που γίνονται σε αυτά τα σχέδια, κλπ. Αλλά παρά το γεγονός ότι οι καθηγητές γνωρίζουν για αυτές τις πτυχές των μαθηματικών, μάλιστα, είναι πολύ πιθανό να τις βιώνουν οι ίδιοι στη μαθηματική τους δραστηριότητα, συνήθως αυτό δεν τους εμποδίζει να διδάσκουν σχεδόν αποκλειστικά με βάση την αλληλουχία θεώρημα - απόδειξη - εφαρμογή. Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας, πράγματι, έχει κάποια πλεονεκτήματα: για παράδειγμα, επιτρέπει μια καλά προγραμματισμένη και οργανωμένη δομή του μαθήματος, υπάρχει μια προοδευτική κάλυψη του υλικού η οποία εγγυάται ότι το μεγαλύτερο μέρος του στο πρόγραμμα σπουδών μπορεί να καλυφθεί. Δυστυχώς, έχει και ένα πολύ σοβαρό μειονέκτημα: είναι άκαμπτος όσον αφορά την προσαρμοστικότητα στους μαθητές ή τους φοιτητές. Μπορεί να λειτουργήσει αρκετά καλά για σπουδαστές που σπουδάζουν τα μαθηματικά και οι οποίοι, από κάποιο εξαιρετικό δάσκαλο ή με βάση το δικό τους ταλέντο και ερευνητικό χαρακτήρα, είχαν ήδη την ευκαιρία να αποκτήσουν ένα ικανοποιητικό επίπεδο στα μαθηματικά. Αλλά, όπως φαίνεται, δεν λειτουργεί για την πλειονότητα των σπουδαστών, εκείνων τουλάχιστον που ασχολούνται με τα μαθηματικά υποχρεωτικά.

Για παράδειγμα, στην έρευνα των Selden, Mason & Selden (1989) που έγινε με φοιτητές που είχαν εξεταστεί επιτυχώς σε ένα κλασικό τεστ στην εισαγωγή στον απειροστικό λογισμό εμφανίστηκε σημαντική αδυναμία να διαπραγματευτούν το παρακάτω πρόβλημα:

> Βρείτε τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $4x^3 - x^4 = 30$ ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει μια τέτοια λύση.

Η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - x^4$ έχει μέγιστο το 27 και συνεπώς η εξίσωση δεν έχει καμία (πραγματική) λύση. Παρόλο που οι φοιτητές ήταν ικανοί να διαπραγματευτούν τη συνάρτηση δεν μπορούσαν να απαντήσουν στο ερώτημα όπως τους δόθηκε. Ούτε ένας δεν έλυσε ολοκληρωτικά το πρόβλημα και οι περισσότεροι δεν μπορούσαν να κάνουν οτιδήποτε. Αυτό δεν είναι ένα σπάνιο εύρημα, ούτε περιορίζεται στον μέσο πρωτοετή φοιτητή.

Ο Davis (1988), συζητώντας σε μια τάξη αναμφίβολα εξαιρετικών μαθητών λυκείου, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όταν κοιτάξουμε προσεκτικά τον τρόπο με τον οποίο αυτοί οι «φαινομενικά επιτυχημένοι» μαθητές ασχολούνται με τα μαθηματικά προβλήματα, διαπιστώνουμε ότι έχουν πολλές παιδαριώδεις παρανοήσεις σχετικά με τα μαθηματικά παρόλο που για κάποιους λόγους επιτυγχάνουν στις εξετάσεις. Οι περισσότερες διδασκαλίες στα μαθηματικά, από το δημοτικό σχολείο μέχρι τα μαθήματα στο πανεπιστήμιο, διδάσκουν αυτό που μπορούσε να ονομαστεί τελετουργικό: «κάνουμε αυτό, στη συνέχεια κάνουμε εκείνο, μετά κάνουμε τούτο ...» και οι εκπαιδευτικοί αποδέχονται τυπικά το σωστά εκτελεσμένο τελετουργικό στην εξέταση του μαθήματος ως αρκετό για την επιτυχία τη συγκεκριμένη στιγμή.

Όπως σημειώνει ο Dreyfus (2002) αυτό που οι περισσότεροι μαθητές μαθαίνουν στα μαθήματα των μαθηματικών είναι να διεξάγουν ένα μεγάλο αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών, οι οποίες εκτυλίσσονται σε καθορισμένες μορφοποιήσεις, για να λάβουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κατηγορίες ερωτήσεων. Έτσι αποκτούν την ικανότητα να εκτελούν, αν και πολύ πιο αργά, το είδος της λειτουργίας που μπορεί να εκτελέσει ένας υπολογιστής μέσω ενός κατάλληλου προγράμματος όπως το Mathematica. Καταλήγουν με μια σημαντική ποσότητα μαθηματικών γνώσεων αλλά χωρίς τη μεθοδολογία εργασίας ενός μαθηματικού δηλαδή, δεν διαθέτουν την τεχνογνωσία που τους επιτρέπει να χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους με ευέλικτο τρόπο για την επίλυση προβλημάτων άγνωστων σε αυτούς. Παραδείγματα αυτού φαινομένου που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Δηλαδή, έχουν διδαχθεί τα προϊόντα της δραστηριότητας των μαθηματικών σε τελική μορφή, αλλά δεν έχουν αποκτήσει γνώσεις σχετικά με τις διαδικασίες που οδήγησαν τους μαθηματικούς να δημιουργήσουν αυτά τα αποτελέσματα.

2.3.5 Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη: Τρεις χαρακτηριστικές προσεγγίσεις

Μεταξύ των ερευνητών που ασχολούνται με την Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη υπάρχει έντονη συζήτηση σχετικά με το αν ο όρος *ανώτερη* αναφέρεται στα μαθηματικά, στη σκέψη ή και στα δυο (Harel, Selden & Selden, 2015). Όμως, όπως σημειώνει και ο

Sternberg (1996) στο κεφάλαιο που έγραψε σε ένα βιβλίο αφιερωμένο στη φύση της μαθηματικής σκέψης, δεν υπάρχει ακόμα συναίνεση για το τι είναι η *μαθηματική σκέψη*. Δηλαδή, η συζήτηση αναπτύσσεται σε σχέση με το αν με τον όρο Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη εννοούμε τη σκέψη που εμπλέκεται σε διαδικασίες με προηγμένες μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται κατά κύριο λόγο στη τριτοβάθμια εκπαίδευση (διανυσματικός χώρος, ομάδα, σύγκλιση αριθμητικής ακολουθίας, ακολουθίας συναρτήσεων) ή έναν ιδιαίτερο τρόπο σκέψης με διακριτά χαρακτηριστικά ο οποίος αναπτύσσεται ακόμη και στη στοιχειώδη εκπαίδευση.

Ο Dreyfus (2002) σημειώνει ότι δεν υπάρχει μια σαφής διάκριση μεταξύ αρκετών διαδικασιών της στοιχειώδους και της ανώτερης μαθηματικής σκέψης, παρότι τα Ανώτερα Μαθηματικά επικεντρώνονται περισσότερο στις αφαιρέσεις του ορισμού και της απαγωγής. Πολλές διαδικασίες όπως της αναπαράστασης, της γενίκευσης, της σύνθεσης ακόμα και της αφαίρεσης υπάρχουν ήδη στα παιδιά που σκέφτονται για στοιχειώδεις έννοιες όπως του αριθμού. Μάλιστα τέτοιες διαδικασίες οι οποίες χρησιμοποιούνται στα προηγμένα μαθηματικά δεν χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στα μαθηματικά. Αφαιρέσεις γίνονται στη φυσική, αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στην ψυχολογία, η ανάλυση εφαρμόζεται στην οικονομία και η οπτικοποίηση συναντάται στην τέχνη. Επιπλέον, είναι δυνατόν να σκεφτούμε προηγμένες μαθηματικές έννοιες με στοιχειώδη τρόπο. Επίσης, μπορεί να υπάρχει ανώτερη σκέψη για στοιχειώδη θέματα (π.χ. στα θέματα των μαθηματικών διαγωνισμών).

Ο Tall (1991), προκειμένου να οριοθετήσει την Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη αναφέρεται στην αυστηρότητα και την ακρίβεια που διέπει τη διαδικασία της εξαγωγής των μαθηματικών συμπερασμάτων. Η μετάβαση από τη στοιχειώδη στην ανώτερη μαθηματική σκέψη συνεπάγεται μια σημαντική αλλαγή: από τη διαδικασία της περιγραφής στη διαδικασία του ορισμού, από την εμπειρία στην απόδειξη με έναν λογικό τρόπο με βάση τους ορισμούς αυτούς. Αυτή η μετάβαση απαιτεί μια γνωστική ανασυγκρότηση που απαιτεί τυπικές αφαιρέσεις. Είναι η μετάβαση από τη *συνοχή* (*coherence*) των στοιχειωδών μαθηματικών στη συνέπεια (*consequence*) των ανώτερων μαθηματικών, που βασίζονται σε αφηρημένες οντότητες, τις οποίες πρέπει να κατασκευάσει το άτομο μέσω συνεπαγωγών από τυπικούς ορισμούς.

Για τον Dreyfus (2002) ένα στοιχείο διάκρισης μεταξύ της ανώτερης και της στοιχειώδους σκέψης είναι η πολυπλοκότητα και ο τρόπος διαχείρισής της. Οι δυναμικές διαδικασίες είναι αυτές που επιτρέπουν σε κάποιον να χειριστεί την πολυπλοκότητα μέσω της αφαίρεσης και της αναπαράστασης, έτσι ώστε να μετακινηθεί από ένα επίπεδο λεπτομέρειας σε ένα άλλο.

Οι Edwards, Dubinsky & McDonald (2005) θεωρούν ότι:

> ... η Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη απαιτεί αφαιρετική και αυστηρή συλλογιστική για μαθηματικές ιδέες που δεν είναι πλήρως προσιτές στις πέντε αισθήσεις. ... [Η ανώτερη μαθηματική σκέψη] ενυπάρχει σ' ένα συνεχές μαθηματικής σκέψης το οποίο φαίνεται να υπερβαίνει, αλλά δεν αγνοεί τις διαδικαστικές εμπειρίες ή τις διαισθήσεις της στοιχειώδους μαθηματικής σκέψης.

Σημειώνουν για παράδειγμα, ότι το όριο συνάρτησης μπορεί να είναι μια έννοια που δεν είναι πλήρως προσιτή στις πέντε αισθήσεις, όμως ο «υπολογισμός ορίων» μπορεί να μην απαιτεί ανώτερη μαθηματική σκέψη, εφόσον μπορεί να περιλαμβάνει την εφαρμογή μιας τυποποιημένης ρουτίνας και όχι ακριβή συλλογισμό για μια μαθηματική ιδέα.

Οι Tall et al. (2001, σελ. 97) σημειώνουν ότι:

> Η μετάβαση από τη στοιχειώδη στην ανώτερη μαθηματική σκέψη απαιτεί μια σημαντική ανακατασκευή της σκέψης [...] μια πλήρη αλλαγή της εστίασης από την

ύπαρξη αντιληπτών αντικειμένων και συμβόλων που αναπαριστούν ενέργειες πάνω στα αντικείμενα σε νέες θεωρίες που βασίζονται σε συγκεκριμένες ιδιότητες που τυποποιούνται, ορίζοντας μαθηματικές δομές [...]. Η εικόνα είναι χρήσιμη, ακόμα και ουσιαστική για να υποδειχθούν εκείνοι οι ορισμοί που είναι περισσότερο χρήσιμοι και εκείνα τα θεωρήματα που θα πρέπει να αποδειχθούν. Ωστόσο, η ουσιαστική ποιότητα που κάνει την ανώτερη μαθηματική σκέψη διαφορετική από τα στοιχειώδη μαθηματικά είναι η εισαγωγή των τυπικών ορισμών και των αποδείξεων.

Μια δεύτερη προσέγγιση της ανώτερης μαθηματικής σκέψης προσφέρεται από τον Rasmussen και τους συνεργάτες του και επικεντρώνεται στην «ανώτερη μαθηματική δραστηριότητα» (advanced mathematical activity) όπως την ονομάζουν, επειδή, θεωρούν τη μάθηση των μαθηματικών ως συμμετοχή σε μια μαθηματική δραστηριότητα (Rasmussen, Zandieh, King & Teppo 2000). Οι εν λόγω ερευνητές, δεν περιορίζουν την Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη σε προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μαθηματικά, αν και τα παραδείγματα που αναπτύσσουν στην εργασία τους αντλούνται από μαθήματα διαφορικών εξισώσεων και γεωμετρία που διδάσκεται στο πανεπιστήμιο. Αναπτύσσουν τη συζήτηση σχετικά με την ανώτερη μαθηματική σκέψη με βάση τη λεγόμενη οριζόντια και κάθετη μαθηματικοποίηση (Treffers, 1987), των οποίων οι ορισμοί επεκτείνονται ώστε να επιτρέπουν την οριζόντια μαθηματικοποίηση και σε καθαρά μαθηματικά πλαίσια.

Ως *οριζόντια μαθηματικοποίηση* χαρακτηρίζουν το μετασχηματισμό ενός μαθηματικού ή πραγματικού προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να προσφέρεται για περαιτέρω μαθηματική ανάλυση. Η οριζόντια μαθηματικοποίηση περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως τον πειραματισμό, τη διερεύνηση μοτίβων, την ταξινόμηση, την οργάνωση και την εικασία αλλά δεν περιορίζεται σ' αυτές. Η *κάθετη μαθηματικοποίηση* περιλαμβάνει εκείνες τις δραστηριότητες που βασίζονται στην οριζόντια μαθηματικοποίηση και κατασκευάζονται πάνω σ' αυτή. Δηλαδή, η κάθετη μαθηματικοποίηση μπορεί να περιλαμβάνει δραστηριότητες συλλογισμού για αφηρημένες δομές, γενίκευσης και φορμαλισμού. Οι ερευνητές θεωρούν ότι η οριζόντια και κάθετη μαθηματικοποίηση αποτελούνται από μαθηματικές πρακτικές όπως του συμβολισμού, της αλγοριθμοποίησης και του ορισμού, οι οποίες συνιστούν μηχανισμούς με τους οποίους εξελίσσονται συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, όπως τα κλάσματα, οι λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης ή η έννοια του τριγώνου.

Η τρίτη προσέγγιση της Ανώτερης Μαθηματικής Σκέψης αναπτύχθηκε από τον Harel (2000), ο οποίος επισημαίνει τον αναπτυξιακό και τον σχετικό χαρακτήρα του όρου *ανώτερη*. Έτσι, θεωρεί ότι Ανώτερη Μαθηματική Σκέψη είναι αυτή που εμπλέκεται σε μια αναπτυξιακή διαδικασία, που εξελίσσεται βαθμιαία και δεν αποτελεί έναν στόχο που είτε κάποιος τον εκπληρώνει πλήρως είτε αποτυγχάνει εντελώς. Επίσης, θεωρεί ότι κάποιος μπορεί να αναπτύσσει διαφορετικούς τρόπους σκέψης χωρίς να τα καταφέρνει σε όλους στον ίδιο βαθμό.

Με βάση αυτή την σχετικιστική προσέγγιση του όρου *ανώτερη* για τη μαθηματική σκέψη υιοθετεί, σχετικά με τις δυσκολίες που συναντά κάποιος στην ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης, τη διάκριση του Brousseau μεταξύ διδακτικών και επιστημολογικών εμποδίων. Τα εμπόδια που αντιμετωπίζει κάποιος στην προσπάθεια εκμάθησης κάποιας γνώσης και οφείλονται σε ελλιπή ή ελαττωματική διδασκαλία είναι τα διδακτικά εμπόδια, ενώ εκείνα τα οποία είναι αναπόφευκτα λόγω της φύσης της ανάπτυξης της γνώσης είναι τα επιστημολογικά εμπόδια (Brousseau, 1997).

Ο Duroux (1982), αναφερόμενος στον Brousseau, απαριθμεί τρεις προϋποθέσεις ώστε να χαρακτηριστεί ένα εμπόδιο ως επιστημολογικό. Η πρώτη είναι ότι τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν ίχνη στην ιστορία των μαθηματικών. Η δεύτερη είναι ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο δεν αποτελεί έλλειψη αντίληψης ή έλλειψη γνώσης αλλά παράγει απαντήσεις που ισχύουν σ' ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ενώ μπορεί να μην είναι έγκυρες εκτός του πλαισίου αυτού. Έτσι, για να ξεπεραστεί το επιστημολογικό εμπόδιο χρειάζεται μια σημαντική αλλαγή εστίασης. Η τρίτη προϋπόθεση είναι ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο αντιστέκεται σε περιστασιακές αντιστάσεις και στη δημιουργία μιας βελτιωμένης σχετικής γνώσης, έτσι η κατοχή μιας βελτιωμένης γνώσης δεν επαρκεί για να εξαφανιστεί η προηγούμενη.

Έτσι, ο Harel (2000) με βάση τα παραπάνω θεωρεί ότι:

> Η μαθηματική σκέψη είναι ανώτερη, αν η ανάπτυξή της περιλαμβάνει τουλάχιστον μία από τις παραπάνω τρεις προϋποθέσεις για τις οποίες ένα εμπόδιο είναι επιστημολογικό. Το επίπεδο της απόκτησης ενός τρόπου σκέψης από ένα άτομο καθορίζεται από το βαθμό στον οποίο το άτομο έχει ξεπεράσει αυτά τα εμπόδια.

Ο Harel αναγνωρίζει, βέβαια, ότι η πρώτη προϋπόθεση - ένα επιστημολογικό εμπόδιο πρέπει να έχει ίχνη στην ιστορία των μαθηματικών - έχει κάποια προβλήματα εφόσον σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο ή αδύνατο να διαπιστωθεί αν ένα εμπόδιο έχει εμφανιστεί στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Αλλά η έρευνα στην ιστορία των μαθηματικών έχει προσφέρει ιδιαίτερα για συγκεκριμένες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα στην εξέλιξη της έννοιας του αριθμού.

Ο Harel (2000) υποστηρίζει ότι η ανώτερη μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται σε μεγάλες περιόδους εντατικής προσπάθειας. Δίνει παραδείγματα τρόπων μαθηματικής σκέψης που είναι απαραίτητοι για την εκμάθηση προηγμένου μαθηματικού περιεχομένου και η ανάπτυξη των οποίων πρέπει να ξεκινήσει σε νεαρή ηλικία, όταν διδάσκονται στοιχειώδη μαθηματικά περιεχόμενα.

2.3.6 Ανάπτυξη της Ανώτερης Μαθηματικής Σκέψης: Εικόνα της έννοιας και ορισμός της έννοιας

Οι Tall & Vinner (1981) διακρίνουν μεταξύ του ατομικού τρόπου σκέψης στα μαθηματικά και του τυπικού ορισμού και με την έννοια αυτή διακρίνουν μεταξύ των μαθηματικών ως νοητική δραστηριότητα και ως φορμαλιστικό σύστημα. Η θεωρία αυτή εφαρμόζεται τόσο σε μαθηματικούς ερευνητές όσο και σε σπουδαστές.

> Ο ανθρώπινος νους δεν αποτελεί μια καθαρά λογική οντότητα. Ο περίπλοκος τρόπος με τον οποίο λειτουργεί είναι συχνά σε αντίθεση με τη λογική των μαθηματικών. Δεν είναι πάντα η καθαρή λογική που μας δίνει γνώση, ούτε είναι τυχαίο που μας κάνει να κάνουμε λάθη... Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *εικόνα της έννοιας (concept image)* για να περιγράψουμε τη συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με την έννοια, η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες. Αυτή κατασκευάζεται με τα χρόνια μέσα από τις εμπειρίες κάθε είδους, αλλάζοντας καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει. [...] Καθώς η εικόνα της έννοιας αναπτύσσεται, δεν είναι αναγκαίο να είναι συνεκτική ανά πάσα στιγμή. ... Θα θεωρήσουμε ότι ο *ορισμός της έννοιας* είναι μια σειρά λέξεων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει την έννοια. Μπορεί να μαθευτεί από ένα άτομο επιφανειακά ή σε μεγαλύτερο βάθος και να σχετίζεται σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό με την έννοια ως ολότητα. Μπορεί να είναι μια προσωπική ανακατασκευή ενός ορισμού από έναν σπουδαστή την οποία την χρησιμοποιεί για τη δική του επεξήγηση της εικόνας της έννοιας. Με την έννοια αυτή ο προσωπικός ορισμός της έννοιας μπορεί να διαφέρει από έναν *τυπικό* ορισμό της έννοιας ο οποίος είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα γενικότερα. (Tall & Vinner, 1981, σ. 152-153)

Σ' ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε νεοεισερχόμενους φοιτητές μαθηματικών σε μια έρευνα των Tall & Schwarzenberger (1978) ζητήθηκε να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)$. Επίσης, ζητήθηκε να απαντήσουν αν το 0,999... είναι ίσο με 1 ή λίγο μικρότερο. Ένας μαθηματικός μπορεί να θεωρεί ότι ο υπολογισμός του προηγούμενου ορίου είναι το ίδιο πρόβλημα με το ερώτημα για το 0,9... Αντίθετα οι 14 από τους 36 φοιτητές ισχυρίστηκαν ότι: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)=2$ αλλά 0,999... < 1.

Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981) τα δυο ερωτήματα περιλαμβάνουν διαφορετικά μέρη της εικόνας της έννοιας για την οριακή διαδικασία.

Μια από τις πιο συνηθισμένες σημασίες που αποδίδεται στην εικόνα της έννοιας «$s_n \to s$» είναι ότι οι όροι s_n προσεγγίζουν το s αλλά ποτέ δεν το φτάνουν. Δεν υποστηρίζεται ο σχηματισμός της εικόνας της έννοιας όταν στα περισσότερα από τα παραδείγματα που συναντούν οι φοιτητές, οι όροι των ακολουθιών δεν φτάνουν το όριό τους.

Ο Cornu (1981) αποκαλεί *αυθόρμητες αντιλήψεις* (spontaneous conceptions) εκείνες τις διαισθήσεις, τις εικόνες, τη γνώση που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία. Η τάση πολλών φοιτητών να ανακαλούν (μέρος) της εικόνας της έννοιας τους, αντί του ορισμού της έννοιας, όταν απαντούν σε ποικίλα συναφή μαθηματικά ερωτήματα δεν είναι απαραιτήτως υποδεέστερη. Σε πολλές περιπτώσεις είναι επιθυμητό να έχουμε και να προκαλούμε πλούσιες εικόνες. Ωστόσο, πολλές μαθηματικές έννοιες εισάγονται στους μαθητές μέσω τυπικών ορισμών και η ικανότητα χρήσης τέτοιων ορισμών για την παραγωγή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων είναι χρήσιμη για την οικοδόμηση της εικόνας της έννοιας.

Ένας από τους τρόπους με τους οποίους η διδασκαλία επιχειρεί να εμπλουτίσει τις εικόνες των εννοιών για τους μαθητές είναι να τους βοηθήσει να αποκτήσουν την ικανότητα να απεικονίζουν τις μαθηματικές έννοιες. Άλλωστε, η έρευνα δείχνει επίσης, ότι η οπτικοποίηση μπορεί να διευκολύνει τη μαθηματική κατανόηση (Presmeg, 1994). Οι Dreyfus & Eisenberg (1990) έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν βασικές δυσκολίες όσον αφορά την οπτική ενημέρωση με τη μορφή γραφημάτων. Όμως, ακόμη και οι μαθητές που είναι μαθηματικά ώριμοι και έχουν τη δυνατότητα να σκεφτούν οπτικά είναι απρόθυμοι να απεικονίσουν τις μαθηματικές έννοιες (Dreyfus & Eisenberg, 1986, 1990; Vinner, 1989). Οι Dreyfus & Eisenberg (1990) συγκρίνουν την οπτική επεξεργασία με την αναλυτική επεξεργασία και θεωρούν ότι ένας λόγος για τον οποίο οι μαθητές προτιμούν την τελευταία είναι ότι οι καθηγητές μεταδίδουν στους μαθητές τους - έμμεσα ή ρητά - την πεποίθηση ότι ο οπτικός συλλογισμός είναι κατώτερος από την αναλυτική συλλογιστική.

Οι Selden & Selden (1995) επισημαίνουν ότι οι φοιτητές συχνά συναντούν δυσκολίες με την αποσυμπίεση των ορισμών των εννοιών και της λογικής δομής που περιλαμβάνεται σ' αυτούς. Οι Bills & Tall (1998) σημειώνουν ότι οι ορισμοί πρέπει να είναι λειτουργικοί για ένα άτομο ώστε να εστιάσει στις ιδιότητες που απαιτούνται για να βγάλει κατάλληλα λογικά συμπεράσματα στις αποδείξεις. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

> Ο αγώνας που δίνουν κάποιοι προκειμένου να καταστούν λειτουργικοί οι ορισμοί μπορεί να σημαίνει ότι αυτοί συναντούν τις έννοιες σε ένα στάδιο όπου οι γνωστικές απαιτήσεις είναι υπερβολικά υψηλές γι' αυτούς ώστε να τα καταφέρουν. Άλλοι δεν έχουν ποτέ λειτουργικούς ορισμούς, προσπαθώντας να βασιστούν σε προηγούμενες εμπειρίες και εικόνες των εννοιών που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ενώ περιστασιακά μια έννοια χωρίς λειτουργικό ορισμό μπορεί να εφαρμοστεί σε μια

απόδειξη χρησιμοποιώντας εικόνες, δίνοντας τις απαραίτητες πληροφορίες που απαιτούνται στην απόδειξη. (σελ. 104)

2.3.7 Λειτουργικά χαρακτηριστικά της Ανώτερης Μαθηματικής Σκέψης: Από τη διαδικασία στην έννοια

Ο επαγγελματίας μαθηματικός William Thurston, βραβευμένος με Fields Medal, αναφέρει:

> Θυμάμαι όταν ήμουν παιδί, στην πέμπτη τάξη, συνειδητοποίησα το εξής εκπληκτικό (για μένα), ότι η απάντηση στη διαίρεση 134 δια 29 είναι 134/29. Τι εργαλείο τεράστιας εξοικονόμησης εργασίας! Για μένα, «134 δια 29» σήμαινε μια κουραστική αγγαρεία, ενώ 134/29 ήταν ένα αντικείμενο χωρίς περαιτέρω εργασία. Πήγα ενθουσιασμένος στον πατέρα μου για να του εξηγήσω τη μεγάλη μου ανακάλυψη. Μου είπε ότι βεβαίως είναι έτσι, α/β και α διαιρούμενο από το β είναι συνώνυμα. Γι' αυτόν ήταν απλά μια μικρή παραλλαγή του συμβολισμού. (Thurston, 1990, σ. 848)

Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι κάποια στιγμή ο Thurston απέκτησε την ωριμότητα να βλέπει τη διαίρεση 134:29 και να μην αισθάνεται την ανάγκη να την εκτελέσει. Να μπορεί, δηλαδή, να χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα της πράξης χωρίς να πραγματοποιήσει την ίδια την πράξη. Σε αυτό συνέβαλε και η ύπαρξη του συμβόλου του κλάσματος που χρησιμοποιείται με αυτή τη διπλή σημασία.

Αρκετές φορές στα μαθηματικά εμφανίζεται μια διαδικασία και μια έννοια να συνυπάρχουν στο ίδιο σύμβολο. Για παράδειγμα, όταν ένα παιδί προσπαθεί να μετρήσει πέντε μολύβια τότε ξεκινάει από το ένα και συνεχίζει τη διαδικασία της αρίθμησης ανά ένα μέχρι να φτάσει το πέμπτο μολύβι, ανακοινώνοντας ότι το πλήθος του συνόλου των μολυβιών είναι ο τελευταίος αριθμός κατά την διαδικασία της αρίθμησης. Έτσι, το σύμβολο «5» σημαίνει τόσο τη διαδικασία της αρίθμησης όσο και το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής.

Ας πάρουμε ένα άλλο παράδειγμα από λίγο μεγαλύτερα παιδιά. Στην προσπάθειά τους οι μαθητές να κάνουν μια πρόσθεση, όπως για παράδειγμα την «3+7», επινοούν ή διδάσκονται διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος που λέγεται *αρίθμηση όλων* (count all) είναι να αριθμούν από το 1 ανά 1 μέχρι το 3 και να συνεχίσουν την αρίθμηση μέχρι το 10, άλλος τρόπος είναι να αρχίσουν την *αρίθμηση μετά τον πρώτο* (count-on from first), δηλαδή, η αρίθμηση από το 4 μέχρι το 10. Άλλος τρόπος είναι να αρχίσουν την *αρίθμηση από το μεγαλύτερο* (count-on from larger), δηλαδή από το 8 μέχρι το 10. Φυσικά, κάποια στιγμή μπορούν να έχουν άμεση γνώση του αποτελέσματος (known fact). Όλες αυτές οι διαδικασίες είναι ενσωματωμένες στην πράξη της πρόσθεσης «3+7», καθώς επίσης και το αποτέλεσμα της πράξης αυτής εκφράζεται από το συμβολισμό «3+7=10».

Ας δούμε ένα παράδειγμα ακόμα από μαθητές του Γυμνασίου. Συχνά συμβαίνει ο καθηγητής να γράφει «x+x+2x+2x=6x» και κάποιος μαθητής να αναρωτιέται λιγότερο ή περισσότερο φωναχτά «και πόσο κάνει αυτό;». Δηλαδή, ο μαθητής δεν μπορεί να δει το «6x» σαν αποτέλεσμα αλλά μόνο ως την διαδικασία της εύρεσης του εξαπλάσιου, ή σαν να ζητάει έναν αριθμό για να βάλει στη θέση του x ώστε να έχει αριθμητικό αποτέλεσμα.

Ακόμα, όταν γράφουμε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$, λέμε ότι οι τιμές $f(x)$ είναι οσοδήποτε κοντά στο l αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο α. Όμως, ο ορισμός του Weierstrass που είναι πίσω από αυτή την πολύπλοκη διατύπωση δεν βοηθάει στην εύρεση του ορίου και οι μαθητές συχνά τον αντικαθιστούν με την εξής διαδικασία. Παίρνουν τιμές του x που πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο α και βλέπουν ποιον πραγματικό αριθμό προσεγγίζουν οι τιμές $f(x)$. Έτσι, στο συμβολισμό του ορίου συμπυκνώνεται τόσο η διαδικασία προσέγγισης του l από τις τιμές $f(x)$ όσο και το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας δηλαδή, το όριο l.

Οι Gray & Tall (1994) θεωρούν χρήσιμη τη διάκριση μεταξύ *διαδικασίας* (procedure) και *διεργασίας* (process). Με το όρο *διαδικασία* εννούν έναν βήμα προς βήμα αλγόριθμο όπου το άτομο πρέπει να ολοκληρώσει το κάθε βήμα για να πάει στο επόμενο. Μια *διεργασία* λαμβάνει χώρα όταν μια ή περισσότερες διαδικασίες (που έχουν το ίδιο αποτέλεσμα) μπορούν να θεωρηθούν ως ένα όλο, χωρίς το άτομο να χρειάζεται να αναφέρεται σε επιμέρους βήματα ή διαφορετικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, τον όρο *διεργασία* τον χρησιμοποιούν με μια γενική έννοια, λέγοντας «διεργασία της πρόσθεσης» και τον όρο *διαδικασία* τον χρησιμοποιούν όταν αναφέρονται σε έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο που εφαρμόζεται κατά τη διεργασία της πρόσθεσης όπως η «αρίθμηση όλων», η «αρίθμηση από τον πρώτο», η «αρίθμηση από τον μεγαλύτερο» που είδαμε προηγουμένως και αφορούν διαδικασίες που χρησιμοποιούνται από το άτομο ως νοητικά στηρίγματα για τον υπολογισμό κάποιου αθροίσματος (Gray & Tall, 1994; Gray & Tall 2001).

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα. Η διεργασία της παραγώγισης της συνάρτησης $\frac{1+x^2}{x^2}$ μπορεί να να γίνει με μια ποικιλία διαδικασιών όπως η εφαρμογή του κανόνα της παραγώγισης πηλίκου, του κανόνα της παραγώγισης γινομένου (για τις συναρτήσεις $1+x^2$ και $\frac{1}{x^2}$) ή άλλες στρατηγικές, όπως η απλοποίηση στη μορφή $(x^{-2}+1)$ πριν την παραγώγιση (Tall et al., 2001).

Η μετάβαση από μια νοητική ενέργεια σε ένα νέο γνωστικό αντικείμενο έχει παίξει σημαντικό ρόλο σε πολλές θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης (Dienes, 1960; Piaget 1972; Greeno, 1983; Davis, 1984; Dubinsky 1991; Sfard, 1991; Harel & Kaput 1991; Gray & Tall, 1994).

Ο Piaget αναφέρει την *ενθυλάκωση* (encapsulation) μιας διαδικασίας ως νοητικό αντικείμενο όταν:

> ... μια φυσική ή νοητική ενέργεια αποδομείται και αναδιοργανώνεται σε ένα υψηλότερο επίπεδο σκέψης και έτσι γίνεται πιο κατανοητή από τον γνώστη (Beth & Piaget, 1966, σ. 247)

Ο Greeno (1983) ορίζει την «εννοιολογική οντότητα» ως ένα γνωστικό αντικείμενο που μπορεί να λειτουργήσει ως είσοδος σε μια νοητική διαδικασία. Η γνωστική διεργασία του σχηματισμού μιας (στατικής) εννοιολογικής οντότητας από μια (δυναμική) διεργασία έχει χαρακτηρισθεί ως *ενθυλάκωση* (encapsulation) (ακολουθώντας τον Piaget), *πραγμοποίηση* (reification) (Sfard, 1989).

Ο Dubinsky και οι συνεργάτες του αναπτύσουν μια θεωρία με το ακρωνύμιο APOS (Action, Process, Object, Schema) σύμφωνα με την οποία φυσικές ή νοητικές *ενέργειες* (actions) γίνονται εκούσιες και χαρακτηρίζονται *διεργασίες* (processes) οι οποίες στη συνέχεια ενθυλακώνονται σε ένα νέο *αντικείμενο* (object) δημιουργώντας ένα νοητικό *σχήμα* (schema) (Cottrill et al., 1996).

Η Sfard (1991, σ. 10) προτείνει ότι «στην προσπάθεια να μιλήσουμε για μαθηματικά αντικείμενα, πρέπει να μπορούμε να διαχειριστούμε τα αποτελέσματα κάποιων διαδικασιών χωρίς να χρειάζεται να αναφερόμαστε στις ίδιες τις διαδικασίες». Έτσι ξεκινάμε με «μια διεργασία που αναφέρεται σε οικεία αντικείμενα» (Sfard & Linchevski, 1994, σ. 64). Αυτή, στη συνέχεια, «συνοψίζεται» και χρησιμοποιείται ως «είσοδος/έξοδος, χωρίς απαραίτητη αναφορά των ενδιάμεσων βημάτων» και μετά «πραγμοποιείται» με την μετατροπή της «ήδη συνοψισμένης διεργασίας σε ένα αντικείμενο-οντότητα». Η Sfard θεμελιώνει την έννοια της *πραγμοποίησης* (refiecation) στο πλαίσιο της ευρύτερης θεωρίας της για τις λειτουργικές και δομικές αντιλήψεις, όπου οι πρώτες αναφέρονται σε διεργασίες και οι δεύτερες σε αντικείμενα (Sfard, 1989, 1991).

Αλλά παρόμοιες ιδέες αναφέρονται και από την εμπειρία των επαγγελματιών μαθηματικών:

> Τα μαθηματικά είναι εντυπωσιακά συμπιεσμένα: αγωνίζεσαι για ένα μεγάλο διάστημα, βήμα-βήμα δουλεύοντας με κάποια διαδικασία ή ιδέα με διαφορετικές προσεγγίσεις. Αλλά κάποια στιγμή πραγματικά την καταλαβαίνεις και έχεις την νοητική δυνατότητα να τη δεις ως μια ολότητα, στην οποία συχνά υπάρχει τεράστια νοητική συμπίεση. Μπορείς να την έχεις αποθηκεύσει κάπου, να την ανακαλέσεις γρήγορα και πλήρως όταν την χρειαστείς και να την χρησιμοποιήσεις ως βήμα σε κάποια άλλη νοητική διαδικασία. Η επίγνωση αυτής της συμπίεσης είναι ένα από τα πραγματικά παιχνίδια των μαθηματικών (Thurston 1990, σ. 847).

Ο Tall (2013) αναδεικνύει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της *συμπίεσης της γνώσης* (compression of knowledge) η οποία θεωρεί ότι συμβαίνει όταν ένα φαινόμενο κάποιου είδους είναι αντιληπτό στο νου με έναν απλούστερο ή πιο αποτελεσματικό τρόπο. Αυτό γίνεται μέσω πιο άμεσων συνδέσεων στο νου και ενισχύεται από τη χρήση της γλώσσας που δίνει στην έννοια ένα όνομα ώστε να μπορούν να διαμοιράζονται οι ιδέες, οι ιδιότητές τους και οι σχέσεις μεταξύ των εννοιών.

Η συμπίεση του συμβολισμού συμβαίνει με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Έχουμε την ικανότητα να αναγνωρίζουμε πράγματα μέσω της αντίληψής μας από ομοιότητες και διαφορές, να κατηγοριοποιούμε έννοιες σ’ ένα όλο με διαφορετικούς τρόπους, δίνοντας ένα όνομα που καθορίζει την κατηγορία, όπως «σκύλος» ή «τρίγωνο» . Αυτό είναι μια δομική αφαίρεση των ιδιοτήτων μιας έννοιας και η συγκρότησή τους σε μια νέα οντότητα με όνομα. Αυτός ο τρόπος συμβαίνει κυρίως στη γεωμετρία που ξεκινάμε με την κατηγοριοποίηση αντικειμένων, στα οποία αποδίδεται ένα όνομα και στη συνέχεια μελετάμε τις ιδιότητες τους.

Μια δεύτερη μέθοδος περιλαμβάνει την εφαρμογή μιας ακολουθίας ενεργειών όπως μια *διαδικασία* (procedure), έτσι ώστε να μπορεί να εκτελεστεί με μικρή νοητική προσπάθεια. Η ευρύτερη συμπίεση μιας διεργασίας (όπως η πρόσθεση) συμπιέζεται σε μια νοητική έννοια (όπως το άθροισμα) σε μια λειτουργική αφαίρεση που ονομάζεται *ενθυλάκωση* της διεργασίας ως μια έννοια. Η μέθοδος αυτή συμβαίνει κυρίως στην αριθμητική και την άλγεβρα, όπου ξεκινάμε κυρίως με διαδικασίες (π.χ. αρίθμηση, υπολογισμούς) και, στη συνέχεια, οι διαδικασίες αυτές γίνονται έννοιες.

Μια τρίτη μέθοδος εμφανίζεται όταν τα άτομα χρησιμοποιούν ολοένα και πιο εξελιγμένα τη γλώσσα για συγκεκριμένες έννοιες μέσω του ορισμού. Αυτό, οπωσδήποτε είναι μια ειδική περίπτωση κατηγοριοποίησης. Ωστόσο, αντί να ξεκινάμε με μια έννοια και να κατηγοριοποιούμε τις ιδιότητές της, η κατάσταση αντιστρέφεται με την εξειδίκευση μέσω του ορισμού και την παραγωγή όλων των άλλων ιδιοτήτων από αυτόν.

2.3.8 Λειτουργικά χαρακτηριστικά της Ανώτερης Μαθηματικής Σκέψης: Διεργασιοέννοια (Procept)

Η ενθυλάκωση της διεργασίας ως αντικείμενο έχει θεωρηθεί μια δύσκολη νοητική δραστηριότητα. Η Sfard (1989) αναρωτιέται «πως μπορεί κάτι να είναι διαδικασία και αντικείμενο την ίδια στιγμή;». Οι Gray & Tall (1994) θεωρούν ότι αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση του ίδιου συμβολισμού για την αναπαράσταση μιας διεργασίας και του αποτελέσματος αυτής της διεργασίας. Θα αναφερθούν μερικά ακόμα παραδείγματα, όπου το ίδιο σύμβολο χρησιμοποιείται για να εκφράσει τόσο τη διεργασία όσο και το αποτέλεσμα αυτής της διεργασίας δηλαδή, την έννοια, τα οποία διαπερνούν διαφορετικά επίπεδα των μαθηματικών.

- Το σύμβολο «4» εκφράζει τόσο τη διεργασία της αρίθμησης μέχρι το 4 όσο και την έννοια του αριθμού 4.
- Το σύμβολο «4+3» εκφράζει τόσο την διεργασία (πράξη) της πρόσθεσης όσο και το αποτέλεσμα (άθροισμα) της πράξης αυτής.
- Το σύμβολο «1/4» εκφράζει τόσο την διεργασία (πράξη) του «μοιράσματος» ή της διαίρεσης όσο και την έννοια του κλάσματος.
- Το σύμβολο «-3» εκφράζει τόσο τη διεργασία «αφαιρώ 3» ή «αντίθετος του 3» ή «μεταβαίνω τρία αριστερά στην ευθεία των αριθμών» όσο και την έννοια του αρνητικού αριθμού «-3».
- Η έκφραση «3x+2» παριστάνει τόσο τη διεργασία της πρόσθεσης του 2 στο τριπλάσιο του x όσο και το αποτέλεσμα του αθροίσματος αυτού.
- Το σύμβολο «$df(x)/dx$» εκφράζει τόσο τη διεργασία της παραγώγισης (η οποία μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους) όσο και την παράγωγο της συνάρτησης f.
- Η διεργασία του «τείνει σε ένα όριο» και η έννοια της τιμής του ορίου αναπαρίστανται και οι δυο από το συμβολισμό «$\lim_{x\to a} f(x)$».

(Gary & Tall 1994, Tall et al., 2001)

Στα προηγούμενα παραδείγματα είναι εμφανής μια αμφισημία που ενυπάρχει στο συμβολισμό ο οποίος χρησιμοποιείται είτε ως διεργασία είτε ως έννοια. Όμως αυτή η αμφισημία είναι δύναμη και αδυναμία μαζί. Από τη μια κάποιες φορές είναι ιδιαίτερα δύσκολο να γίνει κατανοητή η αναπαράσταση μιας διεργασίας και μιας έννοιας από το ίδιο σύμβολο. Απαιτεί ιδιαίτερη ευελιξία στο χειρισμό ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση. Όμως η ίδια αυτή δυσκολία αποτελεί και τη δύναμη του συμβολισμού για τα μαθηματικά. Η ίδια η αμφισημία στην ερμηνεία του συμβολισμού και η ευέλικτη χρήση του είναι στις ρίζες της επιτυχημένης μαθηματικής σκέψης. Είναι χαρακτηριστικό το παράδειγμα που αναφέρθηκε για τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για πρόσθεση δυο αριθμών. Όποιοι χρησιμοποιούν τη μέθοδο «αρίθμηση από τον πρώτο» έχουν θεωρήσει τον πρώτο αριθμό ως αντικείμενο και έχουν ένα πλεονέκτημα σε σχέση με αυτούς που «αριθμούν από την αρχή». Όσοι μπορούν να βάζουν πρώτο τον μεγαλύτερο έχουν ένα επιπλέον πλεονέκτημα εφόσον χρησιμοποιούν ευέλικτα τον συμβολισμό.

Ο Byers (2007), στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει γιατί οι φοιτητές του δυσκολεύονται να αποδεχθούν την ισότητα «0,999...= 1» θεωρεί ότι η έκφραση 0,999... = 9/10+9/100+9/1000+... και ο συμβολισμός αυτός είναι εκουσίως αμφίσημος. Από τη μια παριστάνει τη *διαδικασία* (process) της πρόσθεσης σε μια άπειρη ακολουθία κλασμάτων και από την άλλη παριστάνει το *αντικείμενο* (object) δηλαδή, τον αριθμό που είναι το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Έτσι, η ισότητα «1=0,999...» μπερδεύει επειδή φαίνεται να εξισώνει μια διαδικασία με ένα αντικείμενο. Εμφανίζεται να ταυτίζει δυο στοιχεία από δυο ασυμβίβαστα πλαίσια. Ένα ρήμα και ένα ουσιαστικό. Η αμφισημία αυτή είναι ιδιαίτερα ισχυρή και έτσι ακόμα και όταν αποδεικνύεται η συγκεκριμένη ισότητα, η αμφισημία για τους φοιτητές δεν επιλύεται και η κατανόηση της αναπαράστασης των περιοδικών δεκαδικών αριθμών παραμένει σε εκκρεμότητα. Η κατανόηση αυτή περιλαμβάνει ένα νοητικό άλμα, την συνειδητοποίηση ότι υπάρχει μια μοναδική ιδέα η οποία μπορεί να εκφραστεί είτε ως 1 είτε ως 0,999... και μπορεί να κατανοηθεί είτε ως διαδικασία αθροίσματος μιας άπειρης σειράς είτε ως μια περατωμένη διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων καθώς και ως ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Ο Byers (2007) θεωρεί την *αμφισημία* (ambiguity) ουσιαστικό μέρος της δημιουργικότητας των μαθηματικών και για το λόγο αυτό υιοθετεί για την αμφισημία τον ορισμό του Koestler (1964) για τη *δημιουργικότητα* (creativity): «Η αμφισημία περιλαμβάνει μια μοναδική κατάσταση ή ιδέα που γίνεται αντιληπτή σε δυο εσωτερικά συνεπή αλλά ασυμβίβαστα μεταξύ τους συστήματα αναφοράς» (Byers, 2007, σ. 28).

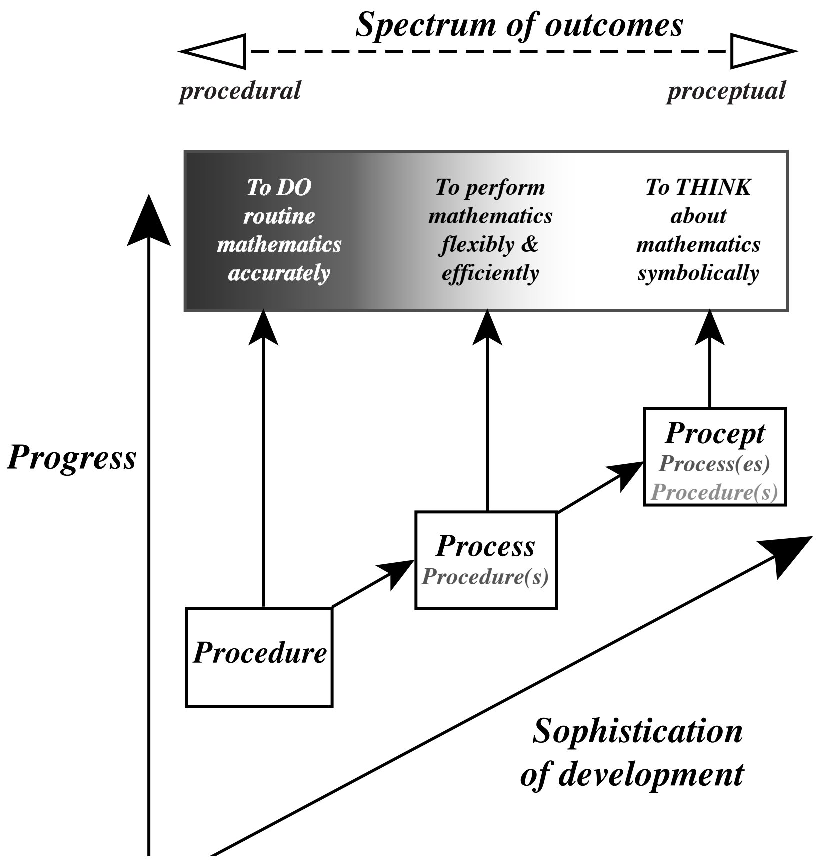
Οι Gray & Tall (1994), προσπαθώντας να αναδείξουν αυτή τη δύναμη που προκύπτει από τη χρήση του ίδιου συμβολισμού τόσο για τη διεργασία όσο και για την έννοια που αποτελεί το αποτέλεσμα της διεργασίας, χρησιμοποιούν τον όρο *διεργασιοέννοια* (procept). Ο όρος προκύπτει από τα τρία πρώτα γράμματα της λέξης ‘process’ και τα τέσσερα τελευταία γράμματα της λέξης ‘concept’.

> Ένα στοιχειώδες procept είναι ένα αμάλγαμα από τρία στοιχεία: μια *διεργασία* (process) η οποία παράγει ένα μαθηματικό *αντικείμενο* (object), και ένα *σύμβολο* (symbol) το οποίο χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει είτε τη διεργασία είτε το αντικείμενο. [...] Ένα procept αποτελείται από μια συλλογή από στοιχειώδη procepts τα οποία έχουν το ίδιο αντικείμενο. (Gray & Tall, 1994, σ. 120)

Το procept είναι μια γνωστική κατασκευή, στην οποία το σύμβολο μπορεί να λειτουργήσει ως στήριγμα για τη μετάβαση από την έμφαση στη διαδικασία του υπολογισμού ή της επεξεργασίας σε μια έννοια την οποία μπορεί κάποιος να σκεφτεί ως μια εύχρηστη οντότητα (Tall et al., 2001, σ. 85).

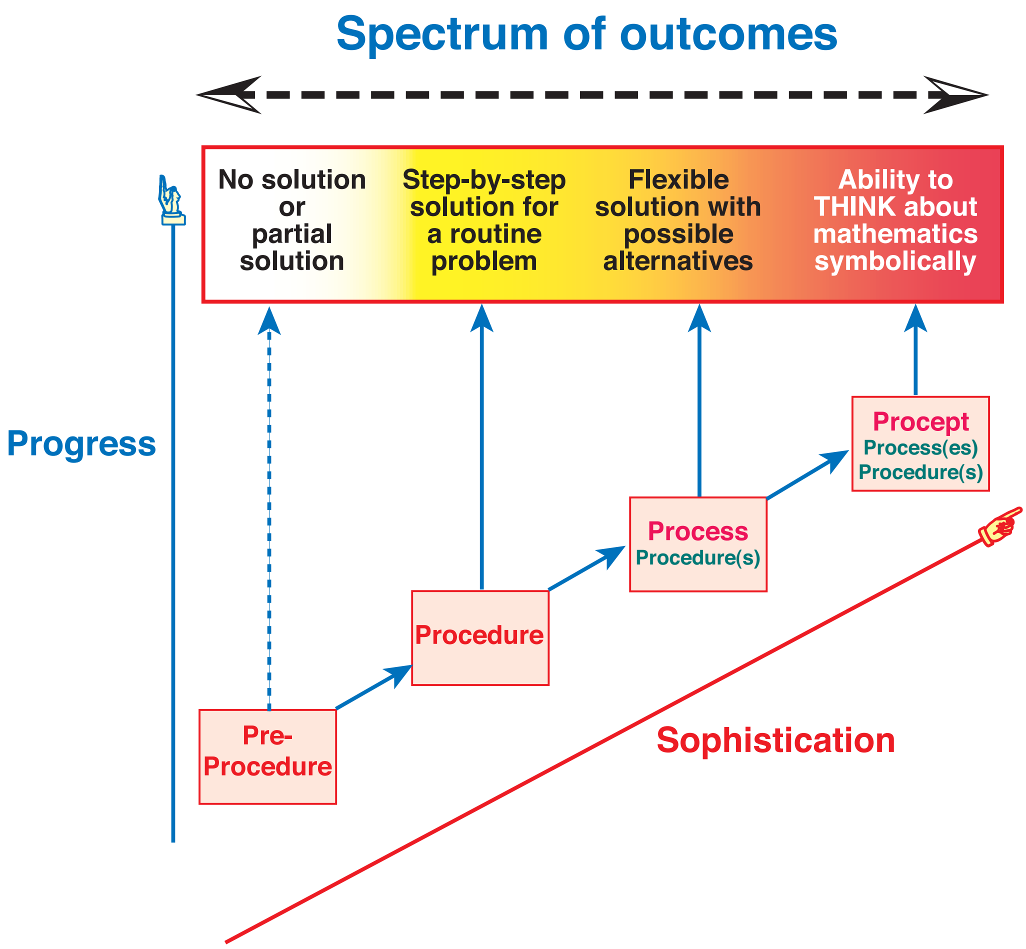
Η γνώση μιας συγκεκριμένης διαδικασίας επιτρέπει στο άτομο να κάνει έναν συγκεκριμένο υπολογισμό ή επεξεργασία. Όμως, έχοντας μια ή περισσότερες εναλλακτικές διαθέσιμες, επιτρέπεται μεγαλύτερη ευελιξία και αποτελεσματικότητα στην επιλογή της κατάλληλης διαδρομής μεταξύ αυτών που διατίθενται. Αλλά επίσης, κάποιοι μπορεί να είναι ικανοί να σκεφτούν μαθηματικά μ’ ένα συμπιεσμένο και εύχρηστο τρόπο, μεταβαίνοντας εύκολα από τη διεργασία στην έννοια. Οι Gray, Pitta, Pinto & Tall (1999) δίνουν ένα φάσμα δυνατών αποτελεσμάτων (Εικόνα 2.3.8.Α), σε βασικά στάδια, τα οποία είναι πιθανό να επιτευχθούν από μαθητές με διαφορετικές ικανότητες.

Όμως, η πιθανή ανάπτυξη για το μέλλον είναι πολύ διαφορετική. Αυτοί που σκέφτονται διαδικαστικά ο προσανατολισμός τους είναι περιορισμένος σε μια συγκεκριμένη διαδικασία, με επικέντρωση της προσοχής στα ίδια τα βήματα, ενώ αυτοί που βλέπουν το συμβολισμό ως διεργασία ή έννοια έχουν μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στη χρήση της γνωστικής διεργασίας. Μακροπρόθεσμα όταν οι μαθητές συναντούν νέα προβλήματα επαναλαμβάνεται ένα φάσμα ίδιου είδους, με τάση να εξαναγκάζονται ολοένα και περισσότερο σε διαδικαστική σκέψη. Αυτό σημαίνει ότι αυτοί που επικεντρώνουν κυρίως στη διαδικασία έχουν ένα σημαντικά μεγαλύτερο βάρος να αντιμετωπίσουν στη μάθηση νέων μαθηματικών σε σχέση με αυτούς που είναι ικανοί να επικεντρώνουν στις ουσιαστικές πτυχές του συμβολισμού ταυτόχρονα ως διεργασία και ως έννοια.



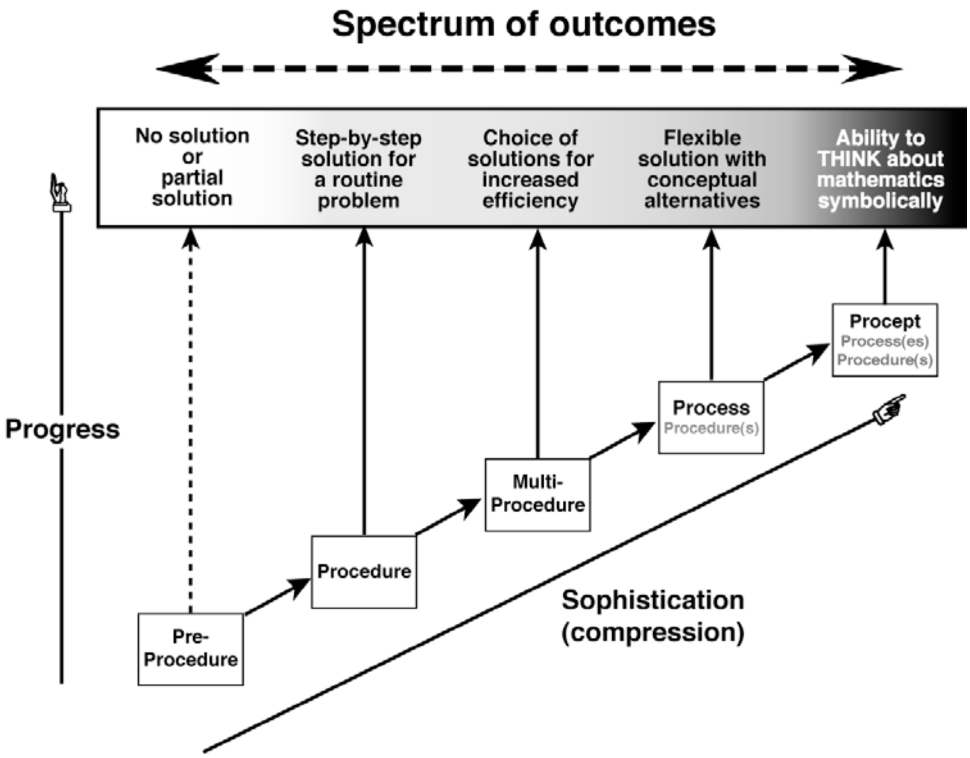
Εικόνα 2.3.8.Α: Φάσμα αποτελεσμάτων κατά την εκτέλεση μαθηματικών διεργασιών (Gray, Pitta, Pinto & Tall, 1999, p. 120)

Οι Gray & Tall (2001) επεκτείνουν την Εικόνα 2.3.8.Α των Gray, Pitta, Pinto & Tall (1999) οδηγούμενοι στην Εικόνα 2.3.8.Β στην οποία εμφανίζονται τα διαφορετικά επίπεδα εκλέπτυνσης από το προ-διαδικαστικό στάδιο μέχρι το στάδιο του procept. Η ανάγκη επέκτασης του προηγούμενου φάσματος αποτελεσμάτων προέκυψε σε μια προσπάθεια διάκρισης της αποτυχίας ώστε να δοθεί λύση σ’ ένα πρόβλημα και της επιτυχούς λύσης του προβλήματος αλλά μόνο με διαδικαστικούς όρους. Η διαθεσιμότητα διαφορετικών διαδρομών στο διεργασιακό επίπεδο (process level) εισάγει τη δυνατότητα εναλλακτικών μεθόδων επιτρέποντας τον έλεγχο για πιθανά λάθη, ακόμα και όταν εμφανίζεται ένα ασυνείδητο συναίσθημα ότι κάτι δεν πάει καλά (Crowley & Tall, 1999). Το επίπεδο procept εμφανίζεται σ’ ένα υψηλότερο στάδιο, όπου τα σύμβολα δρουν διπλά ως διεργασία και ως έννοια μ’ έναν τρόπο που υπερβαίνει την διεργασία από μόνη της.



Εικόνα 2.3.8.Β: Φάσμα αποτελεσμάτων (Gray & Tall, 2001, p. 69)

Σε αντιστοιχία με την ταξινομία SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome – Δομή των Παρατηρούμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων) (Biggs & Collis, 1991; Pegg, 2003; Pegg & Tall, 2005), το μοντέλο της οποίας διέπεται από την ακολουθία: μονοδομικό (unistructural), πολυδομικό (multistructural), σχεσιακό (relational) και εκτεταμένης αφαίρεσης (extended abstract) ο Tall (2007) επεκτείνει περαιτέρω το προηγούμενο φάσμα αποτελεσμάτων σε αυτό της Εικόνας 2.3.8.Γ, όπου αναπαρίσταται η διαδοχική συμπίεση από τη διαδικασία μέσω της πολυ-διαδικασίας στη διεργασία και το στάδιο procept. Έτσι, μοντελοποιείται ο τρόπος με τον οποίο μια διαδικασία που είναι μια νοητή ακολουθία βημάτων, τα οποία πραγματοποιούνται κάποια στιγμή σταθερά, εμπλουτίζονται για να δώσουν την ικανότητα της επιλογής κατάλληλης διαδικασίας για την εκτέλεση της δραστηριότητας με μια συγκεκριμένη έννοια, συνοψίζονται σε μια διεργασία και συμπυκνώνεται σε ένα procept που δίνει τη δυνατότητα σκέψης για τα μαθηματικά με ένα ευέλικτο και συμβολικό τρόπο. Μαθητές που έχουν δυσκολίες με τη διαδικασία μπορεί να εδραιώσουν το διαδικαστικό επίπεδο, ίσως εμπλουτίζοντας το πολυδιαδικαστικό στάδιο. Άλλοι, που επικεντρώνουν στις διαδικασίες ως συνοπτικές διεργασίες και στη συνέχεια ως ευέλικτα procepts μπορούν να οδηγηθούν σε πολύ πιο εξελιγμένο διεργασιοεννοιολογικό (proceptual) επίπεδο λειτουργίας.



Εικόνα 2.3.8.Γ: Φάσμα αποτελεσμάτων από την αυξανόμενη συμπίεση του συμβολισμού (Tall, 2007, p. 5)

Οι Tall et al. (2001, σελ. 94-95) διακρίνουν μια μακρά πορεία που οδεύει από την αριθμητική στην άλγεβρα και στη συνέχεια στον απειροστικό λογισμό των αξιωματικά θεμελιωμένων μαθηματικών με τους τυπικούς ορισμούς και τις αποδείξεις.

> Τα διαφορετικά procepts λειτουργούν με διάφορους τρόπους, οδηγώντας στην ανάγκη για γνωστική ανασυγκρότηση σε διάφορα στάδια. Ενώ τα «βασικά αριθμητικά σύμβολα έχουν όλα διπλό νόημα ως διαδικασία και ως έννοια» και φέρουν λεπτές διαφορές. Το άθροισμα δύο ακεραίων αριθμών είναι ένας άλλος ακέραιος αριθμός αλλά η διαίρεση δημιουργεί μια εντελώς νέα οντότητα – τα κλάσματα. Λίγο αργότερα, η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα οδηγεί σε ένα νέο είδος procept, όπου η έκφραση $2 + 3x$ είναι μια «απάντηση» η οποία είναι μία διαδικασία που μόνο *δυνητικά* μπορεί να ελεγχθεί. Η μετάβαση από την άλγεβρα στον απειροστικό λογισμό δημιουργεί νέα προβλήματα, με σύμβολα ορίων, όπως, καταδεικνύουν οι *δυνητικά άπειρες* διαδικασίες. Όμως, σε τυπικό επίπεδο, τα procepts διαδραματίζουν ένα μικρό ρόλο. Μια έννοια, όπως η ομάδα στην Άλγεβρα, δεν είναι ένα procept αλλά μια μεγαλύτερη δομή που δίνεται από έναν ορισμό που καθορίζει τις ιδιότητες που πρέπει να έχει. Οι διαδικασίες για την κατασκευή τυπικού νοήματος είναι τώρα *λογικές* διαδικασίες και οι έννοιες είναι τυπικές κατασκευές. Μια περαιτέρω ασυνέχεια, αυτή τη φορά με μεγάλες αναλογίες, παρεμβαίνει, σηματοδοτώντας το βήμα από τα «στοιχειώδη μαθηματικά» του υπολογισμού και του χειρισμού στα «προχωρημένα μαθηματικά» του ορισμού και της απόδειξης.

2.4 Συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στο πλαίσιο της διδακτικής πρακτικής

Αρκετοί ερευνητές έχουν εκφράσει τις ανησυχίες τους σχετικά με την καθιέρωση της θεσμικής γνώσης στην εκπαιδευτική πραγματικότητα. Ως θεσμική γνώση θεωρείται η γνώση των τυπικών διαδικασιών και νόμων η οποία είναι αυτή που συνήθως ανακαλείται για τις ανάγκες των εξετάσεων. Όμως αυτού του τύπου η γνώση δεν παραμένει στη μνήμη των μαθητών για μεγάλο χρονικό διάστημα και κυρίως δεν μπορεί να ενεργοποιηθεί για τις ανάγκες επίλυσης ενός μη αναμενόμενου ή τυποποιημένου προβλήματος. Στην ενότητα αυτή αρχικά περιγράφεται το πλαίσιο διάκρισης της Θεσμικής γνώσης από την ενεργή γνώση η οποία αναπτύσσεται κατά τη διδακτική πράξη. Στη συνέχεια η εστίαση είναι στις μορφές και στο ρόλο της Ανώτερης Γνώσης των Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική. Επιπρόσθετα, αναδεικνύεται η ερευνητική στροφή που από τη γνώση των εκπαιδευτικών επικεντρώνεται στο νόημα που αποδίδουν αυτοί στις μαθηματικές έννοιες στη διδακτική πρακτική, και η ενότητα ολοκληρώνεται με τον ιδιαίτερο ρόλο της Σημειωτικής στη αξιοποίηση της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδακτική πράξη.

2.4.1 Θεσμική και ενεργή γνώση για τη διδασκαλία

Παραδοσιακά, οι φιλόσοφοι θεωρούσαν τη γνώση ως «αιτιολόγηση της αληθούς πεποίθησης» αλλά, εξετάζοντας βαθύτερα τι σημαίνει καθένας από αυτούς τους πρωτογενείς όρους (*αιτιολόγηση, αλήθεια* και *πεποίθηση*), είτε εμφανίζεται μια εγγενής κυκλικότητα είτε αυτοί οι πρωταρχικοί όροι γίνονται προβληματικοί (Mason & Spence, 2000).

Ο Russel (1914) διακρίνει μεταξύ της γνώσης *μέσω γνωριμίας* (knowledge by acquaintance), που επιτυγχάνεται άμεσα μέσω αισθητηριακών εντυπώσεων, από τη γνώση *μέσω περιγραφής* (knowledge by description), η οποία περιλαμβάνει την απόκτηση της γνώσης, όπως αυτή εκφράζεται γλωσσικά. Για παράδειγμα, μια κοινωνική πρακτική υιοθετείται από ένα άτομο κατά τη χρήση της από άλλους, μέσα σε μια κοινότητα που ενσωματώνει τη γνώση, και αποτελεί μια μορφή της γνώσης *μέσω γνωριμίας* (knowledge by acquaintance), όπως είναι και η γνώση που αποκτάται «κάνοντας κάποιος πράγματα από μόνος του». Αντίθετα, η *θεσμική γνώση* (institutionalized knowledge) που «επικοινωνείται» μέσω τυπικών εκπαιδευτικών διαδικασιών (σε μεγάλο βαθμό λεκτικών) είναι η γνώση *μέσω περιγραφής*. Τα μαθηματικά ως πρακτική εξαρτώνται τόσο από την ενόραση όσο και από την έκφραση αυτής της ενόρασης σε άλλους.

Ο Ryle (1949) διακρίνει μεταξύ της *knowing-that* (γνώση με βάση γεγονότα), *knowing-how* (γνώση εκτέλεσης διαδικασιών) και *knowing-why* (γνώση εκδοχών για φαινόμενα και ενέργειες). Ο Burton (1995) προτείνει ότι η knowledge-that έχει μια απρόσωπη συνειδητοποίηση. Όταν η knowledge-that επεκτείνεται στη knowledge-why, δηλαδή, στη γνώση προσωπικών εκδοχών που αιτιολογούν, που κάνουν συνδέσεις και ανακατασκευάζουν, τότε τα μαθηματικά νοήματα γίνονται πιο προσωπικά και αποκτούν ιδιοσυγκρασιακό χαρακτήρα. Ο Biggs (1994) δοκιμάζει τις διακρίσεις του Ryle και στη συνέχεια επικεντρώνεται σε αυτό που θεωρεί ως διαφορετικό τρόπο μελέτης της γνώσης, διακρίνοντας πέντε ιεραρχικά επίπεδα κατά το σπειροειδές πρόγραμμα του Bruner (1966) και των επιπέδων των van Hiele (1986). Τα επίπεδα αυτά γνώσης είναι:

Σιωπηρή (*Tacit)*: εκδηλώνεται μέσω της εκτέλεσης χωρίς συνειδητοποίηση.

Διαισθητική (*Intuitive*): άμεσα αντιληπτή ή αντίληψη μέσω των αισθήσεων.

Θεσμική (*Declarative*): περιγραφή του πως και γιατί όπως εκφράζονται σε κάποιο δημόσια κατανοητό συμβολικό σύστημα.

Θεωρητική (Theoritical): αφηρημένες ή γενικευμένες προτάσεις που ξεπερνούν συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Metatheoretical (*Metatheoritical)*: γνώση σχετικά με τη διαδικασία της αφαίρεσης και την οικοδόμηση της θεωρίας.

Ο Skemp (1979) διακρίνει τη knowing-that και τη knowing-how από τη knowing-to (γνώση για δράση), την οποία περιγράφει ως την *ικανότητα* να χρησιμοποιήσει κάποιος μια τεχνική σε μια νέα κατάσταση. Ωστόσο, η χρήση του όρου *ικανότητα* δείχνει πόσο δύσκολο είναι να παραμείνει ο πυρήνας του βιωματικού-φαινομενολογικού χαρακτήρα της γνώσης και πόσο εύκολο είναι να θεωρεί με πιο απόλυτους όρους (είτε κάποιος έχει την ικανότητα είτε δεν την έχει). Ο όρος *ικανότητα* και ο συγγενής όρος *επάρκεια* έχουν αντίκτυπο σε οντολογική δέσμευση για κάτι αντικειμενικό και αμετάβλητο, ενώ η γνώση μπορεί να είναι ασταθής να μεταβάλλεται, να εξελίσσεται ή να εξαρτάται από την κατάσταση.

Οι Mason & Spense (1999) θεωρούν ότι ο όρος knowing (γνωρίζειν) είναι πιο χρήσιμος από τον όρο knowledge (γνώση) όταν πρόκειται να περιγραφούν ζητήματα που αφορούν τη σκέψη για τη διδασκαλία και τη μάθηση. Η knowing-about δηλαδή, η knowing-that, -how, and –why είναι μορφές στην καρδιά της θεσμικής εκπαίδευσης όπου οι μαθητές μπορούν να μάθουν και να εξεταστούν σε αυτή. Αλλά η επιτυχία στις εξετάσεις προσφέρει πολύ μικρή ένδειξη για το αν η γνώση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν απαιτείται, η οποία είναι η ουσία της knowing-to δηλαδή, της «ενεργούς γνώσης, η οποία είναι παρούσα τη στιγμή που απαιτείται» (Mason & Spense, 1999, σ. 135).

Με βάση τα ερευνητικά δεδομένα, οι προσπάθειες μαθητών και εκπαιδευτικών τείνουν να επικεντρώνονται στα θέματα και τις διαδικασίες στις οποίες καλούνται να αξιολογηθούν. Έτσι, αρκετά συχνά οι μαθητές μπορούν να γράψουν ένα δοκίμιο που να ικανοποιεί τα κριτήρια που απαιτούνται σε μια επικείμενη αξιολόγηση ή να αναπαράγουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις διαδικασίες που απαιτούνται για την επίλυση ενός συμβατικού μαθηματικού προβλήματος. Επιπλέον, συχνά οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών επικεντρώνονται στους τρόπους με τους οποίους μια τέτοια προσπάθεια θα είναι αποτελεσματική, όμως φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα όταν έχουν να αντιμετωπίσουν πιο γενικές ή λιγότερο οικείες καταστάσεις, μη τετριμμένα προβλήματα ακόμα και αν αυτά βασίζονται σε έννοιες που έχουν διδαχθεί. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να διαχειριστούν διδακτικά μη αναμενόμενες καταστάσεις οι οποίες προκύπτουν κατά τη διδασκαλία.

Οι Brown, Collins & Duguit (1989) επισημαίνουν ότι «... οι μαθητές μπορεί να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις … αλλά δεν είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν τα γνωστικά εργαλεία ενός τομέα.» (σ. 34) που αντικατοπτρίζει την παρατήρηση του Whitehead (1932) «Είναι δυνατόν να αποκτηθεί ένα εργαλείο αλλά να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί» (σ. 7).

Στο διδακτικό μετασχηματισμό (*transposition didactique*) του Chevellard (Chevellard, 1985; Kang & Kilpatrick, 1992) αλλά και στο διδακτικό συμβόλαιο (*contrat didactique*) του Brousseau (1984, 1997) εξηγείται ότι αυτό που διδάσκεται στη θεσμοποιημένη εκπαίδευση, είναι αυτό που μπορεί να εξεταστεί. Έτσι, η εξειδικευμένη συνειδητοποίηση μετασχηματίζεται σε οδηγίες συμπεριφοράς (transposition didactique). Οι μαθητές αναμένουν ότι θα μάθουν, απλώς «εκτελώντας» τα καθήκοντα που ο δάσκαλος καθορίζει και όσο σαφέστερα και με μεγαλύτερη ακρίβεια ο δάσκαλος καθορίζει τη συμπεριφορά που επιδιώκεται, τόσο πιο εύκολο είναι για τους μαθητές να επιδείξουν αυτή τη συμπεριφορά χωρίς να τη δημιουργήσουν με βάση τη δική τους αντίληψη (contrat didactique).

Πολλές δυνάμεις φαίνεται να συνεισφέρουν στην καθιέρωση μιας θεσμικής γνώσης η οποία δεν μπορεί να γίνει λειτουργική όταν απαιτηθεί σε διαφορετικές καταστάσεις και πλαίσια, αλλά περιορίζεται να είναι μια αδρανής γνώση που λειτουργεί περισσότερο ως αναμενόμενη συμπεριφορά. Ο Whitehead (1932) ισχυρίστηκε ότι «το πρόβλημα της διατήρησης της γνώσης ενεργής και η αποτροπή της αδράνειας» (σ. 7) είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα της εκπαίδευσης. Όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει:

> Αυτό το κακό μονοπάτι που αντιπροσωπεύεται από ένα βιβλίο ή σύνολο διαλέξεων που θα επιτρέψει ουσιαστικά σε έναν μαθητή να μάθει απ' έξω όλα τα ερωτήματα που είναι πιθανόν να του ζητηθούν ... κορυφώνεται σε μια ομοιόμορφη εξέταση (η οποία) είναι τόσο θανατηφόρα (σ. 7-8).

Πλήθος ερευνών (Charalambous & Hill, 2012; Hill, 2011b; Hill, Blunk et al., 2008; Hill & Charalambous, 2012) έχουν τεκμηριώσει μια σχέση συσχέτισης μεταξύ της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών, όπως αυτή μετρήθηκε με το εργαλείο Learning Mathematics for teaching (LMT) και της ποιότητας της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών όπως αυτή μετρήθηκε με το εργαλείο Mathematical Quality Instruction (MQI). Όμως οι Schilling, Blunk & Hill (2007) ομολογούν σιωπηρά ότι κατά την αξιολόγηση θεώρησαν ως θεσμικές (declarative) τις γνώσεις που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί για το περιεχόμενο και τους μαθητές (KCS). Συγκεκριμένα αναφέρουν:

> Όταν ξεκινήσαμε την ανάπτυξη αντικειμένων σε αυτόν τον τομέα [KCS], υποθέσαμε ότι η γνώση των εκπαιδευτικών για τους μαθητές υπήρχε ξεχωριστά από τις μαθηματικές γνώσεις και τη συλλογιστική τους ικανότητα. Θεωρήσαμε αυτή τη γνώση ως «θεσμική» (declarative), ή πραγματιστική (factual knowledge) γνώση που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί για τη μάθηση των μαθητών. Ωστόσο, τα αποτελέσματα από αυτές τις επικυρωμένες μελέτες υποδηλώνουν ότι αυτή η «γνώση» μπορεί στην πραγματικότητα να περιέχει τόσο στοιχεία μαθηματικού συλλογισμού όσο και γνώση των μαθητών και των μαθηματικών τους μαθησιακών τροχιών. (Schilling et al., 2007, σελ. 121)

2.4.2 Μορφές της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών για τη διδασκαλία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Οι Stockton & Wasserman (2017) εστιάζουν σε *μορφές γνώσης* (forms of knowledge) των Ανώτερων Μαθηματικών για τη διδασκαλία. Οι μορφές αυτές δεν περιγράφουν μια γενική διαδικασία γνωστικής προσέγγισης των μαθηματικών με έναν προηγμένο τρόπο αλλά διαφορετικούς τρόπους που θα μπορούσε κάποιος να γνωρίζει ιδέες για τα Ανώτερα Μαθηματικά. Επίσης, εξηγούνται οι λόγοι για τους οποίους η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών θα ήταν επωφελής για τη διδασκαλία στην ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επισημαίνουν ότι η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών μπορεί να αξιοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς ώστε αυτοί να τροφοδοτήσουν τις πρακτικές τους για τη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών και όχι για να διδάξουν Ανώτερα Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Διακρίνουν τέσσερις μορφές γνώσης που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Περιφεριακή (*peripheral*) γνώση

Πολλές φορές οι εκπαιδευτικοί περιορίζουν τις εξηγήσεις τους στο τοπικό περιεχόμενο μιας ιδέας χωρίς να αποφεύγουν υπεραπλουστεύσεις ή ανακρίβειες, προκειμένου να κάνουν πιο προσιτή μια ιδέα στους μαθητές στο στάδιο που διδάσκεται. Όμως, πολλές μαθηματικές ιδέες είναι αρκετά απλές σε ένα στοιχειώδες επίπεδο αλλά αποκτούν στη συνέχεια ιδιαίτερη πολυπλοκότητα. Έτσι, είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να είναι ευαισθητοποιημένοι για τις προηγμένες εκδοχές του θέματος που διδάσκουν, αποφεύγοντας την υπερβολική εμπιστοσύνη στις απλοϊκές εκδοχές του, έτσι ώστε να αποτρέπεται η προσκόλληση των μαθητών στα στοιχειώδη ερμηνευτικά σχήματα.

Για παράδειγμα, εκφράσεις όπως: «το γινόμενο δυο αριθμών είναι μεγαλύτερο από τους όρους του», «οποιοσδήποτε αριθμός στη μηδενική κάνει ένα», «δεν γίνεται να αφαιρέσουμε έναν μεγαλύτερο αριθμό από ένα μικρότερο» αποτελούν χαρακτηριστικές δηλώσεις που είναι αληθείς σ' ένα περιορισμένο πεδίο αλλά αναληθείς όταν το πεδίο αυτό διευρύνεται. Έτσι, η θεώρηση του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση περιορίζεται στον πολλαπλασιασμό φυσικών και αποτυγχάνει στον πολλαπλασιασμό ακεραίων ή ρητών. Η έννοια της δύναμης ως επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού ισχύει όταν ο εκθέτης είναι φυσικός αριθμός αλλά αποτυγχάνει να ερμηνεύσει δυνάμεις με ακέραιους, ρητούς ή άρρητους εκθέτες.

Εξελικτική (*evolutionary*) γνώση

Η θεώρηση των μαθηματικών στο πλαίσιο μιας εξελισσόμενης πορείας, επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τη διαδικασία με την οποία αναπτύχθηκε μια συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα με την πάροδο του χρόνου ή πως μια στοιχειώδης ιδέα ολοκληρώνεται σε προχωρημένα επίπεδα μαθηματικών. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί είναι καλύτερα προετοιμασμένοι ώστε να εντάξουν τους μαθητές σε μια γόνιμη γνωστική πορεία που ανοίγει το δρόμο τόσο για την ανάπτυξη των μαθηματικών ερωτημάτων για τους ίδιους και την επίλυση αυτών των ερωτημάτων αργότερα.

Για παράδειγμα η επέκταση των φυσικών στους ακέραιους ώστε η αφαίρεση να είναι *κλειστή* πράξη ή οι ακέραιοι να αποτελούν ομάδα, η επέκταση των μη μηδενικών ακεραίων στους ρητούς ώστε η διαίρεση να είναι κλειστή ή οι ρητοί να αποτελούν σώμα και η επέκταση των ρητών στους πραγματικούς ώστε οι πραγματικοί να αποτελούν πλήρως διατεταγμένο σώμα και στη συνέχεια στους μιγαδικούς ώστε να ορίζεται η τετραγωνική ρίζα και αρνητικών αριθμών, δείχνει μια τέτοια εξελικτική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης των βασικών συνόλων των αριθμών.

Μια σημαντική υποκατηγορία αυτής της μορφής γνώσης είναι η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο εξελίχθηκαν ιστορικά οι μαθηματικές ιδέες και η ανάπτυξη των βασικών κόμβων αυτής της πορείας στη διδακτική διαδικασία. Για παράδειγμα, η συζήτηση για τον «ανοικτό» χαρακτήρα του πέμπτου ευκλείδειου αιτήματος και του ρόλου στην ανάπτυξη της ευκλείδειας γεωμετρίας και των μη ευκλείδειων γεωμετριών μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών λόγω της θεώρησης των μαθηματικών ως ανθρώπινου πολιτιστικού δημιουργήματος ή λόγω των αναπάντεχων συνεπειών που αφορούν για παράδειγμα, το άθροισμα των γωνιών τριγώνου.

Αξιωματική (*axiomatic*) γνώση

Είναι σημαντικό ότι για την κατανόηση των μαθηματικών ιδεών απαιτείται η θεώρησή τους σε μια δομή με βάση κάποιες αρχές. Τα δομικά στοιχεία των μαθηματικών ιδεών και ο καθορισμός των μεταξύ τους σχέσεων μπορούν να λειτουργήσουν ενοποιητικά και προωθητικά για την κατανόηση των μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές. Έχοντας οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί επίγνωση των διαδικασιών θεμελίωσης των μαθηματικών δομών μπορούν να καθοδηγήσουν τους μαθητές τους με τρόπο που θα τους βοηθήσει να αποκτήσουν το απαραίτητο υπόβαθρο για την ανάπτυξη επιστημονικής προσέγγισης στα ζητήματα που μελετούν. Για παράδειγμα, έναν τέτοιο ρόλο μπορεί να διαδραματίσει η μελέτη της Ευκλείδειας γεωμετρίας, που ξεκινάει με τις αρχικές έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου και οι μεταξύ τους σχέσεις καθορίζονται με βάση τα αξιώματα. Επίσης, η προσπάθεια εύρεσης των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών μιας έννοιας που αποδίδονται με τον ορισμό της έννοιας. Ακόμα η κοινή ιδιότητα στην απόσταση δυο αριθμών και στην απόσταση δυο σημείων μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση της ευρύτερης έννοιας του μέτρου και της μετρικής ενός μετρικού χώρου.

Λογική (*logical*) γνώση

Μια σημαντική πτυχή της εργασίας του εκπαιδευτικού είναι η αξιολόγηση της εγκυρότητας ενός ισχυρισμού. Η εργασία αυτή γίνεται πιο δύσκολη όταν ο ισχυρισμός δεν είναι αναμενόμενος, όταν ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να βρει κάποιο αντιπαράδειγμα για να πείσει έναν μαθητή ότι ο ισχυρισμός του δεν ισχύει ή όταν πρέπει να τεκμηριώσει την τοπική ισχύ ενός ισχυρισμού ο οποίος δεν γενικεύεται. Επίσης, με δεδομένο ότι οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν πώς λειτουργεί ένας αλγόριθμος ή πώς να αποδείξουν μια μαθηματική πρόταση είναι σαφές ότι οφείλουν οι ίδιοι να έχουν βαθιά γνώση των διαφορετικών διαδικασιών που θα οδηγήσουν σε μια μαθηματική απόδειξη, καθώς και την ικανότητα να παράγουν δικές τους λογικές αποδείξεις και εξηγήσεις ερμηνεύοντας τα επιχειρήματα των μαθητών. Όλα αυτά υποστηρίζονται από τη γνώση του εκπαιδευτικού σχετικά με τους έγκυρους λογικούς κανόνες του απαγωγικού συλλογισμού. Αυτή η μορφή γνώσης υπογραμμίζει την ικανότητα των εκπαιδευτικών να εφαρμόζουν τις γνώσεις τους για λογικές δομές (π.χ. ισοδύναμα επιχειρήματα, αντιθετοαντιστροφή, αντιπαραδείγματα, διατύπωση της άρνησης μιας πρότασης, διατύπωση της αντίστροφης μιας πρότασης, διατύπωσης ισοδύναμων ορισμών).

2.4.3 Αξιοποίηση της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική

Στα μαθηματικά ίσως πολύ περισσότερο από ότι σε άλλες επιστήμες, κυριαρχεί η αντίληψη ότι η εξέλιξη των εννοιών βασίζεται πάνω σε προηγούμενες ιδέες οι οποίες συνεχώς βελτιώνονται και εξευγενίζονται. Σε κάθε επίπεδο εξέλιξης προστίθεται κάθε φορά και κάποιο επίπεδο πολυπλοκότητας. Με την έννοια αυτή η προσεκτική μελέτη της μαθηματικής πολυπλοκότητας μπορεί να αποτελέσει μια σημαντική πτυχή για τη διδασκαλία (Wasserman, 2015). Μάλιστα, σύμφωνα με τη θεωρία των παραλλαγών (Marton & Tsui, 2004) η ουσία της μάθησης έγκειται στην ικανότητα του ατόμου να διακρίνει τις παραλλαγές μεταξύ των αντιπαραθέσεων σε παρόμοια γεγονότα. Έτσι, είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να βοηθήσουν τους μαθητές στην προσπάθειά τους να διακρίνουν παραλλαγές παρόμοιων μορφών σε πολύπλοκες καταστάσεις.

Ο Wasserman (2015) βασιζόμενος στην εργασία των McCrory et al. (2012) διακρίνει τέσσερις δυνατότητες διαχείρισης των εκπαιδευτικών σε σχέση με την πολυπλοκότητα. Την *αποσυμπίεση* (unpaking), την *πρόβλεψη* (foreshadowing), την *σύντμηση* (abridging) και την *απόκρυψη* (concealing).

Η *αποσυμπίεση*, όμοια με την ομώνυμη έννοια των Ball & Bass (2000), αποτελεί μια απόκριση που επισημαίνει και περιγράφει σκόπιμα και σε τοπικό επίπεδο κάποια πολυπλοκότητα για ένα θέμα (π.χ. κάνει σαφές το δεκαδικό σύστημα στην έκφραση των αριθμών). Η *πρόβλεψη* είναι μια κίνηση παρόμοια με την αποσυμπίεση αλλά σε μη τοπικό επίπεδο. Είναι μια ενέργεια που προετοιμάζει τους μαθητές για μια μελλοντική πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, η περιγραφή του δεκαδικού συστήματος με τρόπο που αναδεικνύει τις ιδέες οποιουδήποτε αριθμητικού συστήματος θέσης. Η *σύντμηση* αντίθετα περιλαμβάνει τις ενέργειες που προκαλούν την συντόμευση μιας ιδέας αλλά σε μη τοπικό επίπεδο, διατηρώντας, όμως, την ουσία του περιεχομένου χωρίς περιττές λεπτομέρειες. Η *απόκρυψη* είναι παρόμοια με την *σύντμηση* αλλά στο επίπεδο μιας τοπικής πολυπλοκότητας. Αποτελεί μια προσωρινή απόκρυψη κάποιας τοπικής πολυπλοκότητας για λόγους σαφήνειας και έμφασης. Για παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί συχνά καλούν τους μαθητές να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ορθογώνια τρίγωνα των οποίων οι δυο πλευρές έχουν μήκη δυο αριθμούς από μια ακέραια πυθαγόρεια τριάδα. Οι παραπάνω ενέργειες χρησιμοποιούνται, σύμφωνα με τον Wasserman (2017), ως ένας τρόπος, αν και όχι ο μοναδικός, σύνδεσης των Ανώτερων Μαθηματικών με τη διδασκαλία.

Οι Zazkis & Leikin (2010) πραγματοποίησαν μια έρευνα μελετώντας τη γνώμη 42 ασκούμενων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αναλύοντας τις γραπτές τους απαντήσεις σε ένα ερωτηματολόγιο και 10 συνεντεύξεις σχετικά με τη χρήση της Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Από αυτούς τους 42 εκπαιδευτικούς οι 6 δήλωσαν ότι δεν κάνουν καμία ουσιαστική χρήση, οι 16 δήλωσαν ότι κάνουν σπάνια ή ελάχιστη χρήση, οι 13 δήλωσαν ότι η χρήση που κάνουν εξαρτάται από το συγκεκριμένο περιεχόμενο που διδάσκουν και 7 δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν συνεχώς τη Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

Ζητήθηκε επίσης, από τους εκπαιδευτικούς να αναφέρουν συγκεκριμένα παραδείγματα όπου θεωρούν ότι η χρήση των Ανώτερων Μαθηματικών είναι ουσιαστική στη διδασκαλία και οι απαντήσεις τους διακρίθηκαν σε αυτές που (α) προσδιορίζουν μαθηματικά προβλήματα ή καταστάσεις που συνδέουν σαφώς τη γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών με το πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, (β) περιγράφουν προβλήματα που απαιτούν γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών αλλά δεν σχετίζονται με το πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και (γ) πολύπλοκα προβλήματα που σχετίζονται κυρίως με το πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας και λιγότερο με τη γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών.

Κάποια σημαντικά ζητήματα τα οποία διέκριναν οι Zazkis & Leikin (2010) στις απαντήσεις των εκπαιδευτικών ήταν οι συνδέσεις που έκαναν με την ιστορία των μαθηματικών και τα λεγόμενα μεταμαθηματικά ζητήματα (δηλαδή, ζητήματα που διαπερνούν τα μαθηματικά περιεχόμενα όπως ο ορισμός, η απόδειξη, το παράδειγμα, το αντιπαράδειγμα, η γλώσσα, η αισθητική μιας λύσης κ.ά.). Συγκεκριμένα, ένας εκπαιδευτικός δήλωσε ότι με βάση τα μαθήματα των Ανώτερων Μαθηματικών κατανόησε το νόημα της απόδειξης και τη σημασία της για τη διδασκαλία. Μια άλλη εκπαιδευτικός δήλωσε ότι τα Ανώτερα Μαθηματικά την ευαισθητοποίησαν σχετικά με την ακρίβεια της χρήσης της μαθηματικής γλώσσας στη διδασκαλίας της, μια τρίτη αναφέρθηκε στη σύνδεση των σπουδών της με την συνειδητοποίηση της μαθηματικής αισθητικής και της ανάδειξής της στη διδασκαλία της και μια άλλη σε διδακτικές επιλογές που βασίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη των αντίστοιχων εννοιών.

Οι εκπαιδευτικοί επίσης ισχυρίσθηκαν ότι η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών τους επιτρέπει να έχουν: (α) «καλύτερη εικόνα» ή «συνολική εικόνα» του περιεχομένου (β) βελτιωμένη δυνατότητα εξέτασης διαφορετικών λύσεων, εναλλακτικών στρατηγικών και μεθόδων επίλυσης και επεξήγησης του υλικού, (γ) ικανότητα σύνδεσης των σχολικών μαθηματικών με τις εφαρμογές τους στην κοινωνία, (δ) άνεση και εμπιστοσύνη στον εαυτό τους γνωρίζοντας περισσότερα από όσα οι μαθητές γνωρίζουν, αλλά και από όσα χρειάζεται να γνωρίζουν, (ε) ικανότητα να κάνουν κάποιες ενέργειες γρήγορα, (στ) δυνατότητα να απαντούν στις ερωτήσεις των μαθητών, (ζ) ικανότητα να υποστηρίζουν τους μαθητές στις μελλοντικές τους επιλογές.

2.4.4 Από τη γνώση των εκπαιδευτικών στο νόημα που προσδίδουν στις μαθηματικές έννοιες κατά τη διδακτική πράξη

Πρόσφατες έρευνες του Thompson και συνεργατών του (Thompson 2013, 2016; Byerley & Thompson 2017; Thompson & Carlson, 2017) στρέφουν την προσοχή τους από τη μαθηματική γνώση, στα μαθηματικά νοήματα των εκπαιδευτικών παρέχοντας μια εποικοδομητική προσέγγιση για την αποκάλυψη των πηγών των διδακτικών αποφάσεων και ενεργειών των εκπαιδευτικών που μπορεί να προσφέρει χρήσιμη καθοδήγηση για το σχεδιασμό της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Ο λόγος για μια τέτοια στροφή στην εστίαση έχει να κάνει με τη αλλαγή του ενδιαφέροντος μελέτης από το θεσμικό χαρακτήρα του όρου *γνώση* στον πιο προσωπικό χαρακτήρα του όρου *νόημα*. Τα νοήματα ενός εκπαιδευτικού μπορεί να είναι ασυνεπή, επιφανειακά, συνεπή ή παραγωγικά αλλά με βάση αυτά τα νοήματα ο εκπαιδευτικός τοποθετείται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Το ενδιαφέρον του Thompson και των συνεργατών του στρέφεται στο βαθμό παραγωγικότητας των νοημάτων των εκπαιδευτικών θεωρώντας ότι αυτό είναι καταλληλότερο κριτήριο από το αν το νόημα που αποδίδει ο εκπαιδευτικός στην έννοια είναι σωστό ή λανθασμένο. Από τα πολλαπλά νοήματα που υπάρχουν για κάποιες έννοιες, κάποια από αυτά μπορεί να έχουν περιορισμένη ισχύ σε κάποια πλαίσια ενώ άλλα να έχουν ευρύτερες εφαρμογές και συνεπώς να είναι πιο παραγωγικά. Τα νοήματα των εκπαιδευτικών θεωρούνται παραγωγικά, όταν συμβάλλουν στην ανάπτυξη παραγωγικών νοημάτων για τους μαθητές, δηλαδή, νοημάτων τα οποία διατηρούνται για τη μακρά περίοδο της μαθησιακής τους διαδικασίας και είναι ενεργά τη στιγμή που απαιτούνται.

Ειδικότερα, ο Thompson και οι συνεργάτες του υποστηρίζουν ότι, επικεντρώνοντας στα μαθηματικά νοήματα των εκπαιδευτικών με βάση την εστίαση στον όρο knowing-to των Mason και Spense (1999) μπορούμε να έχουμε πιο παραγωγική κατανόηση της διδακτικής πραγματικότητας, ώστε να υποστηριχθούν οι εκπαιδευτικοί σε μια πιο δημιουργική διδασκαλία η οποία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν πιο παραγωγικά νοήματα.

Ο Thompson (2016) αναφέρει ένα παράδειγμα δυο φανταστικών εκπαιδευτικών για το νόημα που αποδίδουν αυτοί στην έννοια της εξίσωσης. Για τον εκπαιδευτικό 1 εξίσωση είναι οποιαδήποτε μαθηματική πρόταση που περιέχει το σύμβολο της ισότητας ενώ για τον εκπαιδευτικό 2 εξίσωση είναι μια πρόταση ισότητας μαζί με το ερώτημα, «Για ποιες τιμές της μεταβλητής ή των μεταβλητών η πρόταση αυτή θα είναι αληθής;». Ο εκπαιδευτικός 1 σκέφτεται να υιοθετήσει μια σειρά ενεργειών που θα οδηγήσουν σε μια πρόταση της μορφής «x=(αριθμός)» που είναι λύση της εξίσωσης. Ο εκπαιδευτικός 2 σκέφτεται ότι σε κάθε ενέργεια που εφαρμόζει για τη λύση μιας εξίσωσης πρέπει να προκύπτει εξίσωση ισοδύναμη με την προηγούμενη δηλαδή, εξίσωση με τις ίδιες λύσεις με την προηγούμενη. Ο εκπαιδευτικός 1 δυσκολεύεται να διακρίνει τη διαφορά μεταξύ ισότητας, ταυτότητας, του τύπου μιας συνάρτησης και μιας εξίσωσης επειδή σε κάθε περίπτωση εμφανίζεται το σύμβολο της ισότητας ενώ ο εκπαιδευτικός 2 γνωρίζει τις λεπτές διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των επιμέρους όρων.

Και οι δύο εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να παρουσιάσουν παρόμοιες αποδόσεις απαντώντας σε ερωτήσεις σχετικά με εξισώσεις και διαδικασίες για την επίλυσή τους. Επίσης, θα μπορούσαν να καλύψουν τις ανάγκες του αναλυτικού προγράμματος για τη συγκεκριμένη ενότητα. Πιθανώς θα είχαν παρόμοια αποτελέσματα σε μια αξιολόγηση της διδασκαλίας τους που περιλάμβανε κυρίως θεσμικά κριτήρια. Δεν θα διαχειρίζονταν, όμως, με τον ίδιο τρόπο ερωτήματα των μαθητών που θα ξέφευγαν από το τυπικό περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος, όπως, για παράδειγμα σχετικά με την έννοια της ισοδυναμίας στα μαθηματικά.

Ο Dewey (1910), επικεντρώνοντας στη σχέση ανάμεσα στη σκέψη και στο νόημα αναφέρει:

> Η σκέψη ταυτόχρονα επεξεργάζεται και επεκτείνει τις έννοιες, τις αντιλήψεις, έτσι ώστε απλά να λέγεται ότι σε συμπεράσματα και κρίσεις χρησιμοποιούμε νοήματα και ότι η χρήση αυτή διορθώνει και διευρύνει. (Dewey, 1910, σελ. 125)

Ο Dewey (1910) μας προειδοποίησε επίσης, για τους κινδύνους να είμαστε ασαφείς σχετικά με τις κεντρικές κατασκευές μας, επειδή η ασάφεια νοήματος αποτελεί πηγή παρεξήγησης, παρανόησης και λάθους. Χαρακτήρισε τα μπερδεμένα νοήματα (δηλ. δυσδιάκριτα, ασαφή, συγκεχυμένα) «υπερβολικά ζελατινώδη» για να υποστηρίξουν την παραγωγική ανάλυση και τον προβληματισμό των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει:

> Η ασάφεια συγκαλύπτει την ασυνείδητη ανάμειξη διαφορετικών νοημάτων και διευκολύνει την υποκατάσταση ενός νοήματος με άλλο καλύπτοντας την αποτυχία στον καθορισμό ενός ακριβούς νοήματος. (Dewey, 1910, σελ. 130)

Ένας δάσκαλος με ένα αδύναμο σύστημα νοημάτων για μια ιδέα δεν μπορεί να βοηθήσει και γίνεται ασαφής ή συγκεχυμένος, όταν μιλάει για την ιδέα αυτή, και φυσικά προσπαθεί να αποφεύγει τα ζητήματα νοήματος. Ωστόσο, ακόμη κι αν τα αποφεύγει ρητά, οι ενέργειές του δεν θα περιορίζονται από ένα ισχυρό σύστημα νοημάτων και οι συζητήσεις του για τα νοήματα θα έχουν μεγάλη πιθανότητα να συνεπάγονται πολλές ακατάλληλες εκδοχές (Thompson, 2016).

Η προσέγγιση του Dewey διευκρινίζεται από μια έρευνα που παρουσιάζεται από τον Thompson (2013). Μια ομάδα καθηγητών γυμνασίου δούλευαν μαζί σε εβδομαδιαίες συναντήσεις της Επαγγελματικής Κοινότητας Μάθησης (Professional Learning Community, PLC) και συζητούσαν για το υλικό που δίδαξαν από κοινού. Την εποχή της συγκεκριμένης συνάντησης, στις 20 Ιανουαρίου 2006, βρίσκονταν στη μέση της διδασκαλίας μιας ενότητας τριγωνομετρίας στους δεκαπεντάχρονους μαθητές τους (10-Κ). Τα τρέχοντα θέματα ήταν η γωνία και η μέτρηση της γωνίας.

Ένας εξωτερικός διευκολυντής τους ρώτησε: «Τι είναι το μέτρο μιας γωνίας;» και η συζήτηση καταγράφηκε με κάμερα και στη συνέχεια φαίνεται ένα απόσπασμα του διαλόγου που αναπτύχθηκε μεταξύ του Διευκολυντή (Δ) και των εκπαιδευτικών (Ε1, Ε2, Ε3, Ε4).

Απόσπασμα 1: Συζήτηση εκπαιδευτικών για το νόημα του μέτρου μιας γωνίας

1. Δ: Τι είναι το μέτρο μιας γωνίας; Μπορείτε να αναπτύξετε αυτό το ζήτημα ...
2. Ε1: (Διακοπή) Τι είναι το μέτρο μιας γωνίας; Θεωρώ ότι αυτή είναι μια καλή ερώτηση.
3. Δ: Τι είναι το μέτρο μιας γωνίας;
4. Ε2: Είναι πολύ διαφορετικό από τη μέτρηση του μήκους μιας πλευράς ... Έχω δυο μαθητές που θεωρούν ότι μπορεί να είναι το ίδιο πράγμα.
5. Δ: Τι τους είπες;
6. Ε2: Δεν πρέπει να το κάνετε αυτό! Δεν είναι το ίδιο πράγμα!
7. Ε1: Οπότε πως το όρισες (τη μέτρηση της γωνίας)
8. Ε3: Πως ορίζεις// Πως ορίζεις το μέτρο μιας γωνίας;
9. Ε1: Η πλευρά σαρώνει //δεν είναι η γωνία που δημιουργείται όταν η αρχική πλευρά σαρώνει μέχρι να φτάσει την τελική πλευρά// έτσι το μέτρο της γωνίας ορίζεται ως τι;
10. Ε3: Λες για αυτό το πράγμα που λέγαμε για το μήκος τόξου;
11. Ε1: Δεν ξέρω. Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;
12. Ε4: Η καμπυλότητα.
13. Ε3: (Στον Ε1) Εννοείς την αρχική σου πλευρά;
14. Δ: Πως θα πούμε, «Το μέτρο της γωνίας σημαίνει αυτό»
15. Ε3: (Διαβάζει από το σχολικό εγχειρίδιο) «Το μέτρο της γωνίας Α σημειώνεται με ... Το μέτρο μιας γωνίας μπορεί να προσεγγιστεί από ένα μοιρογνωμόνιο χρησιμοποιώντας μονάδες που λέγονται μοίρες. Για παράδειγμα» ... δεν φτάνουν ποτέ στο σημείο για το τι είναι μια μοίρα.
16. Ε1:(Διαβάζει) Μια γωνία αποτελείται από δυο πλευρές.
17. Ε3: Έτσι απλά ορίζεται μια γωνία.
18. Ε1: Είναι το τμήμα μιας πλήρους περιστροφής που προκύπτει όταν η τελική πλευρά σαρώνει (σταματά).

Ζητήθηκε από τους ίδιους καθηγητές να θέσουν στους μαθητές τους το ερώτημα «Τι μετράμε όταν μετράμε μια γωνία;» και οι απαντήσεις των μαθητών φαίνονται στον πίνακα 2.4.4.Α.

Πίνακας 2.4.4.Α: Απαντήσεις μαθητών στο ερώτημα «Τι μετράμε όταν μετράμε μια γωνία;» (ν=110)

Απαντήσεις μαθητών	Ποσοστό
Απόσταση μεταξύ των πλευρών	51%
Απόσταση μεταξύ σημειωμένων σημείων	2%
Σχήμα της γωνίας (κατεύθυνση των ακτίνων)	3%
Διάμετρο της γωνίας	2%
Τόξο της γωνίας (πόσο ευρύ είναι)	1%
Περιοχή της γωνίας	42%

Επισημάνθηκε στους καθηγητές ότι ποτέ δεν συζητήθηκε με τους μαθητές τι είναι το μέτρο μιας γωνίας ή τι μετρά κάποιος όταν μετρά μια γωνία. Οι απαντήσεις των μαθητών μάλλον θα πρέπει να είναι αναμενόμενες με την έννοια ότι αυτά τα νοήματα δημιουργούνται πριν οι μαθητές παρακολουθήσουν μαθήματα γεωμετρίας. Όμως, ακόμα κι αν τα μαθήματα προϋπήρχαν, οι εμπειρίες τους από τα μαθήματα γεωμετρίας θα πρέπει να μας ανησυχήσουν επειδή οι τρόποι που σκέφτονται είναι προβληματικοί. Πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι οι μαθητές δεν είχαν ποτέ σκεφτεί τι μετράμε όταν μετράμε μια γωνία. Αυτή η ερμηνεία φαίνεται λογική αν η μόνη εμπειρία που διατηρήθηκε από τη μέτρηση μιας γωνίας ήταν απλά ο χειρισμός του γωνιόμετρου. Στη συνέχεια οι καθηγητές πήραν συνεντεύξεις από τους κάποιους μαθητές τους με βάση ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η υποτείνουσα ήταν 80 η μια οξεία γωνία ήταν 43 μοίρες και ζητούνταν η απέναντι κάθετη πλευρά η οποία συμβολιζόταν x.

Απόσπασμα 2: Συζήτηση των εκπαιδευτικών για τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων των μαθητών.

1. Ε4: Έμεινα έκπληκτος από τις συνεντεύξεις. Δυο από τους τρεις μαθητές στις συνεντεύξεις πραγματικά μπέρδευαν τις πληροφορίες. Μπέρδευαν τις 180 μοίρες ενός τριγώνου// Μπέρδευαν το 180 με το μήκος μιας πλευράς. Αφαιρούσαν 180-43 και έβρισκαν 137. Μετά αφαιρούσαν 80 από το 137 και έβρισκαν 57 για το άλλο μήκος της πλευράς.
2. Ε3: Τα τρίγωνα όταν προστεθούν δίνουν 180.
3. Ε2: Τα παιδιά μου δεν κάνουν καμία διάκριση μεταξύ γωνιών και πλευρών.
4. Ε5: Τα παιδιά μου σήμερα έπαιρναν το 360 και αφαιρούσαν ένα μήκος και τους είπα ότι ανακατεύετε γωνίες και μήκη! Δεν μπορείτε να το κάνετε αυτό!!

Στο προηγούμενο απόσπασμα πέρα από την εμφανή αδυναμία των εκπαιδευτικών να ορίσουν το μέτρο μιας γωνίας φαίνεται και σημαντική σύγχυση ιδεών γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα. Η μελέτη του λόγου των εκπαιδευτικών μπορεί να μας φανεί χρήσιμη για την κατανόηση του νοήματος που αποδίδουν οι εκπαιδευτικοί τόσο στην ίδια την έννοια του μέτρου μιας γωνίας όσο και στις περιφερειακές έννοιες που απαιτούνται για τον ορισμό της έννοιας αυτής. Δεδομένου μάλιστα, ότι η όλη συζήτηση για το μέτρο μιας γωνίας γίνεται με σκοπό να χρησιμοποιηθεί αυτή η κατανόηση για τις διδακτικές ανάγκες και τη μάθηση των μαθητών.

Στο απόσπασμα είναι φανερό ότι με κατηγορηματικό τρόπο, διαπιστώνεται από τους εκπαιδευτικούς στο απόσπασμα, πως είναι διαφορετικό ζήτημα η μέτρηση μιας γωνίας από τη μέτρηση μιας πλευράς αλλά δεν εξηγείται σε τι έγκειται η διαφορά. Μάλιστα η συγκεκριμένη παρανόηση από τη μεριά των μαθητών εμφανίζεται σχεδόν παράλογη ή ακατανόητη. Αν προσέξουμε, όμως, λίγο περισσότερο θα δούμε ότι η σύγχυση ανάμεσα στη μέτρηση μιας γωνίας και στη μέτρησης μιας πλευράς έχει μια λογική βάση. Είναι και οι δυο μετρήσεις και συνεπώς θα πρέπει να υπάρχουν κοινά χαρακτηριστικά. Πράγματι, τόσο το μέτρο μιας γωνίας όσο και το μήκος (μέτρο) ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, με τον οποίο, όταν πολλαπλασιαστεί η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης (μοναδιαία γωνία ή μοναδιαίο τμήμα), θα μας δώσει αντίστοιχα τη γωνία ή το τμήμα που θέλουμε να μετρήσουμε.

Επίσης, τα αποτελέσματα και στις δυο μετρήσεις (γωνίας και τμήματος) είναι αριθμοί και με δυο αριθμούς μπορούμε να κάνουμε πράξεις, σε περίπτωση που δεν δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή για το νόημα του αποτελέσματος τέτοιου είδους πράξεων. Οπότε, η διαφορά στις δυο μετρήσεις είναι στα μεγέθη και στο τι εκφράζουν τα αποτελέσματα των δυο μετρήσεων και όχι σ' αυτά καθ' αυτά τα αποτελέσματα των μετρήσεων.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, οι συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί φαίνεται να συνδέουν το μέτρο μιας γωνίας με το μήκος του τόξου ενός κύκλου στον οποίο η γωνία γίνεται επίκεντρη (φαίνεται ότι κάτι τέτοιο εννοείται χωρίς να αναφέρεται). Βεβαίως, μια επίκεντρη γωνία έχει το ίδιο μέτρο με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει. Επίσης, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης την ακτίνα του κύκλου τότε το μήκος του τόξου είναι ίσο με το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σ' αυτό, θεωρώντας ως μονάδα μέτρησής της το τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Κάποιες φορές, όμως, θεωρείται λανθασμένα ότι το μέτρο ενός τόξου σε μοίρες (άρα και της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας που βαίνει σ' αυτό) είναι ίσο με το μήκος του αντίστοιχου τόξου, όπως αυτό μετριέται με κάποια μονάδα μέτρησης μήκους με την οποία μετριέται και η ακτίνα του κύκλου που ανήκει το συγκεκριμένο τόξο. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές γνωρίζουν ότι ένα ημικύκλιο είναι 180^o και π ακτινίων και από αυτό βγάζουν λανθασμένα το συμπέρασμα ότι το π είναι 180.

Επίσης, ένα σχετικό ζήτημα με το οποίο προκαλείται σύγχυση είναι ότι, ενώ όταν δυο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες δεν ισχύει το ίδιο για τα τόξα γενικά, αλλά μόνο όταν αυτά ανήκουν στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους. Ο λόγος για τον οποίο δεν ισχύει η συγκεκριμένη ιδιότητα για τα τόξα έχει να κάνει με την καμπυλότητα των κύκλων η οποία μικραίνει όσο μεγαλώνει η ακτίνα. Η έννοια της καμπυλότητας αναφέρθηκε από τον εκπαιδευτικό Ε4, αλλά δεν δόθηκαν κάποιες διευκρινήσεις για το τι εννοεί.

Όταν οι εκπαιδευτικοί του αποσπάσματος διαπιστώνουν την αδυναμία τους να δώσουν τον ορισμό του μέτρου μιας γωνίας, ανατρέχουν στο σχολικό εγχειρίδιο όπου, με βάση όσα αναφέρονται στο απόσπασμα δεν προκύπτει ότι εκεί τουλάχιστον δίνεται ο ζητούμενος ορισμός. Αντίστοιχα για το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα δεν δίνεται ο ορισμός του μέτρου μιας γωνίας στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου και ενώ δίνεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου, όμως η αντίστοιχη ενότητα είναι εκτός διδακτέας ύλης.

Γιατί όμως υπάρχει τόση δυστοκία να δοθεί ένας σαφής ορισμός για το μέτρο μιας γωνίας, είτε από τους εκπαιδευτικούς είτε στα σχολικά εγχειρίδια. Απαραίτητη προϋπόθεση για τον ορισμό του μέτρου μιας γωνίας είναι η έννοια του λόγου δυο γωνιών ή εναλλακτικά του γινομένου ενός αριθμού επί μια γωνία. Όμως, αυτό το γινόμενο μπορεί να είναι μια γωνία που υπερβαίνει την πλήρη γωνία δηλαδή, ένα αντικείμενο για το οποίο δεν έχει δοθεί ορισμός, αλλά επίσης χάνεται και η επαφή με μια μορφή γεωμετρικής εποπτείας που αντιμετωπίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα ως στατικά αντικείμενα. Αντίθετα στην κατεύθυνση της κατανόησης μιας γωνίας που είναι μεγαλύτερη από την πλήρη γωνία είναι η ιδέα της προσανατολισμένης γωνίας που γίνεται μια προσπάθεια προσέγγισης που επιχειρείται από τον εκπαιδευτικού Ε1 του αποσπάσματος η οποία δεν ολοκληρώνεται. Αντίστοιχα, στο σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, όπου γίνεται διαπραγμάτευση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, δεν παρουσιάζεται ο ορισμός του μέτρου μιας προσανατολισμένης γωνίας.

Το παραπάνω απόσπασμα παρουσιάζεται από τον Thompson (2013) ως μια χαρακτηριστική περίπτωση απουσίας νοήματος για τους εκπαιδευτικούς της έννοιας του μέτρου μιας γωνίας, η οποία έχει προκαλέσει παρανοήσεις, ασάφειες και σύγχυση στους ίδιους. Επίσης, θεωρείται ότι αυτή η απουσία νοήματος και η σύγχηση που τη συνοδεύει μεταφέρεται και στους μαθητές, όπως φαίνεται τόσο από τους λανθασμένους, ασαφείς και συγκεχυμένους τρόπους που προσπαθούν να περιγράψουν το μέτρο μιας γωνίας όσο και από τις παρανοήσεις τους που αναδύονται στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα πρόβλημα.

Όμως το πρόβλημα όπως παρουσιάστηκε στην ανωτέρω ανάλυση δεν συνιστά μόνο ένα πρόβλημα έλλειψης γνώσης από την μεριά των εκπαιδευτικών. Είναι ένα ευρύτερο πρόβλημα επιλογών των τρόπων με τους οποίους θα προσεγγιστεί η μαθηματική γνώση σε σχολικό επίπεδο η οποία συχνά υπερβαίνει τις αρμοδιότητες (αλλά και τις δυνατότητες) του εκπαιδευτικού. Το πλέγμα των εννοιών που συνδέονται με τη μέτρηση μιας γωνίας και οι μαθηματικές συνέπειες της μιας ή της άλλης επιλογής κατά την εφαρμογή στη διδακτική πρακτική ανήκουν στον *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου* όπως περιγράφηκε στην ενότητα 2.3.3. Η μελέτη της συγκεκριμένης έννοιας φαίνεται ότι μπορεί να συνεισφέρει τόσο στην αποσαφήνιση των νοημάτων που αποδίδουν οι εκπαιδευτικοί στις έννοιες που διδάσκουν όσο και στο σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων που εφαρμόζονται στη σχολική τάξη αλλά και στο σχεδιασμό των προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών.

2.4.5 Σημειωτική και αξιοποίηση της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών κατά τη διδακτική πράξη

Η αξιοποίηση της γνώσης Ανώτερων Μαθηματικών στη διδακτική πράξη αναδεικνύει αναπόφευκτα και κάποια σημειωτικά ζητήματα, εξαιτίας της κυρίαρχης παρουσίας του τυπικού συμβολισμού. Οι πλέον καθοριστικές προσεγγίσεις σε αυτά τα ζητήματα συνδέονται με τον Saussure από τη Γλωσσολογική πλευρά θέασης, τον Peirce από την σημειωτική πλευρά και τον Frege από την προοπτική της φιλοσοφίας των μαθηματικών, οπτικές ιδιαίτερα χρήσιμες και για την παρούσα εργασία, οι οποίες και παρουσιάζονται με συντομία στη συνέχεια.

Ο Ferdinand de Saussure (1857-1913) ο οποίος είναι από τους θεμελιωτές της Σημειωτικής, προσπαθώντας να αντιπαρέλθει την θεώρηση της γλώσσας ως μια απλή διαδικασία απόδοσης ονομάτων στα πράγματα δίνει ως εξής τον ορισμό του *σημείου* (*sign*).

> Το γλωσσικό σημείο δεν ενώνει ένα πράγμα και ένα όνομα, αλλά μια έννοια και μια ηχητική-εικόνα. Το τελευταίο δεν είναι ένα υλικό άκουσμα, ένα καθαρά φυσικό πράγμα, αλλά το ψυχολογικό ίχνος του ήχου, η εντύπωση που προκαλεί στις αισθήσεις μας. Η ηχητική εικόνα είναι αισθητηριακή, κι αν την αποκαλώ «υλική» είναι μόνο με αυτή την έννοια και αντίθετα με τον άλλο όρο με τον οποίο συνδέεται, την έννοια, η οποία είναι γενικά πιο αφηρημένη. (Saussure, 1959, σ. 66)

Ο Saussure, ανησυχώντας επειδή ο όρος *σημείο* (sign*)* χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει μόνο μια ηχητική-εικόνα, τη λέξη, κρατά τον όρο *σημείο* (*sign)* για να προσδιορίσει το όλο και αντικαθιστά την *έννοια (concept)* και την *ηχητική-εικόνα (sound-image)* με το *σημαινόμενο* (*signified*) και *σημαίνον* (*signifier*) αντίστοιχα. Για τον Saussure ο δεσμός μεταξύ του *σημαινόμενου* και του *σημαίνοντος* είναι αυθαίρετη ή αλλιώς το γλωσσικό σημείο είναι αυθαίρετο. Όμως για το *σύμβολο* έχει διαφορετική θεώρηση.

> Η λέξη *σύμβολο* έχει χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του γλωσσικού σημείου ή πιο συγκεκριμένα αυτού που εδώ αποκαλείται σημαίνον. Η αρχή της αυθαίρετης φύσης του σημείου συγκεκριμένα είναι εναντίον της χρήσης αυτού του όρου. Ένα χαρακτηριστικό του συμβόλου είναι ότι ποτέ δεν είναι εντελώς αυθαίρετο, δεν είναι

> άδειο. Υπάρχει μια πρωτογενής φυσική σύνδεση μεταξύ του σημαίνοντος και του σημαινόμενου. Το σύμβολο της δικαιοσύνης, ο ζυγός, δεν μπορεί να αντικατασταθεί απλά από κάποιο άλλο σύμβολο όπως ένα άρμα. (Saussure, 1959, σ. 68)

Για τον Saussure το *σημείο* δεν αντιστοιχεί σε κάποιο αντικείμενο με υλική υπόσταση αλλά η αναφορά γίνεται σε κάποια νοητική εικόνα. Δηλαδή, η σημασία των σημείων είναι δομική και σχεσιακή και δεν έγκειται στην αναφορά τους σε υλικά αντικείμενα. Έτσι, ενώ φαίνεται ότι η μεμονωμένη λέξη «δένδρο» έχει κάποια σημασία ο Saussure θεωρεί ότι η σημασία της προσδιορίζεται από τη σχέση της με άλλες λέξεις μαζί με τις οποίες χρησιμοποιείται. Ο Saussure (1959) ισχυρίζεται επίσης ότι:

> ... οι έννοιες είναι καθαρά διαφορικές και ορίζονται όχι από το θετικό τους περιεχόμενο αλλά αρνητικά από τις σχέσεις με άλλους όρους του συστήματος. Τα πιο ακριβή χαρακτηριστικά τους είναι αυτά που δεν έχουν οι άλλες. (σ. 117)

Ο Peirce, σε αντίθεση με τον Saussure ορίζει το *σημείο* (*sign*) ως μια τριάδα που απαρτίζεται από το σημείο ή *αντιπροσωπεύον* (*representamen*) (αυτό που αναπαριστά), το *αντικείμενο* (*object*) (αυτό που αναπαρίσταται) και τον *ερμηνευτή* (*interpretant)*.

> Ένα σημείο, ή αντιπροσωπεύον, είναι κάτι το οποίο αναπαριστά κάτι σε κάποιον με κάποια άποψη ή ικανότητα. Απευθύνεται σε κάποιον, δηλαδή, δημιουργεί στο νου αυτού του ατόμου ένα ισοδύναμο σημείο ή ίσως ένα πιο αναπτυγμένο σημείο. Αυτό το σημείο που δημιουργεί ονομάζω ερμηνευτή του πρώτου σημείου. Το σημείο αντιπροσωπεύει κάτι, το αντικείμενό του. Αντιπροσωπεύει αυτό το αντικείμενο, όχι από όλες τις απόψεις, αλλά με αναφορά σε μια ιδέα, την οποία έχω αποκαλέσει μερικές φορές το υπόβαθρο των αντιπροσώπων. (Peirce C.P., 2. 228)

Το αντικείμενο είναι το αναφερόμενο, αυτό που αναπαριστά το σημείο. Πριν ερμηνευθεί το σημείο αποτελεί μια καθαρή δυνατότητα. Για τον Peirce «ένα σημείο είναι ένα αντικείμενο που αντιπροσωπεύει κάτι για κάποιον στο νου» (Peirce, 1986, σ. 66). Δηλαδή, η σχέση της αντιπροσώπευσης διαμεσολαβείται από έναν ερμηνευτή. Το ερμήνευμα δεν είναι ο ερμηνευτής του σημείου, μάλλον είναι αυτό που εγγυάται την εγκυρότητα του σημείου, ακόμη και ελλείψει του ερμηνευτή. Το ερμήνευμα αποτελεί μια ακόμα αναπαράσταση που αναφέρεται στο ίδιο αντικείμενο. Μπορεί να είναι μια ισοδύναμη σημασία σε ένα άλλο σημειωτικό σύστημα (π.χ. ένα σχέδιο για να εξηγηθεί μια λέξη), ένας άλλος ορισμός στο ίδιο σημειωτικό σύστημα (π.χ. αλάτι για το χλωριούχο νάτριο), μια συναισθηματική συσχέτιση (π.χ. ο σκύλος ως ένδειξη πίστης), η χρήση συνωνύμων.

Το ερμήνευμα δεν περιορίζεται στις χαρακτηριστικές ιδιότητες του περιεχομένου και ως τούτου στις άμεσες υποδηλώσεις και τα συμπεράσματα μιας έκφρασης. Ένα ερμήνευμα μπορεί να είναι ένας ακόμη πολύπλοκος λόγος που αναπτύσσεται από τα δυνατά ενδεχόμενα που εμπλέκονται στο σημείο. Έτσι, η εισαγωγή του ερμηνεύματος στον ορισμό του σημείου έχει για τον Peirce έναν εγγενώς δυναμικό χαρακτήρα. Στην πραγματικότητα, το ερμήνευμα είναι ένα σημείο που μεταφράζει και εξηγεί το προηγούμενο, και αυτό το άλλο σημείο με τη σειρά του απαιτεί ένα άλλο σημείο ως ερμήνευμα και ούτω καθεξής, σε μια αλυσίδα αέναης ερμηνείας, δημιουργώντας μια διαδικασία δυναμικής απεριόριστης σημείωσης. Η ιδέα του Peirce για τη σημείωση περιλαμβάνει τη σχέση Sign-Object-Interpretant ως μη αναστρέψιμη τριάδα. Συχνά επιμένει ότι η τριάδα είναι γνήσια, με την έννοια ότι δεν μπορεί να μειωθεί σε κανένα από τα ζευγάρια που σχηματίζονται από τους όρους της (Sabena, 2008).

Εκτός από τον γενικό χαρακτηρισμό των σημείων, μια σημαντική πτυχή της θεωρίας του Peirce σε σχέση με την παρούσα έρευνα είναι ο πραγματιστικός της χαρακτήρας. Στην πραγματικότητα, εξετάζει το *πλαίσιο* της παραγωγής και λήψης του σημείου και ορίζει το σημείο μέσω της δράσης του στο ερμήνευμα. Αυτή είναι η κύρια διαφορά από γλωσσολογική προσέγγιση του Saussure, όπου δεν υπάρχει πρόβλεψη για τη μελέτη των πραγματικών πλαισίων στα οποία οι ομιλητές επικοινωνούν μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό η θεωρία του Peirce έχει χρησιμοποιηθεί στη μαθηματική εκπαίδευση και ιδιαίτερα στην ανάλυση των διδακτικών πρακτικών στη σχολική τάξη (π.χ. Radford, Schubring & Seeger, 2008; Presmeg, Radford, Roth & Kadunz, 2016).

Η θεωρία του Peirce προσδιορίζει τρεις βασικούς τύπους σημείων, σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο αυτά σηματοδοτούν. Ένα σημείο αναφέρεται στο αντικείμενο του με *εικονικό* (*iconic*) τρόπο αν μοιάζει με αυτό, αν είναι όμοιο με αυτό. Για παράδειγμα ένα πορτρέτο είναι ένα εικονικό σημείο επειδή μοιάζει με το πρόσωπο που παριστάνει. Το σημείο της ισότητας « = » είναι επίσης ένα παράδειγμα ενός εικονικού σημείου. Ένα σημείο αναφέρεται στο αντικείμενό του με έναν *ενδεικτικό* τρόπο εάν επηρεάζεται υλικά από αυτό. Οι δείκτες περιλαμβάνουν ένα στοιχείο φυσικής συνάφειας, όπως ο καπνός σε σχέση με τη φωτιά ή τα ίχνη στο χιόνι. Τέλος, ένα σημείο είναι *σύμβολο* (*symbol*) αν αναφέρεται στο αντικείμενο του μέσω ενός κανόνα, όπως οι λέξεις μιας γλώσσας ή οι αλγεβρικοί τύποι. Οι συμβολικοί κανόνες μπορούν να διατυπωθούν εκ των προτέρων, λόγω συμβάσεων ή εκ των υστέρων, λόγω πολιτισμικών συνηθειών (Sabena, 2008).

Αυτή η διάκριση στα μαθηματικά σημεία είναι περίπλοκη επειδή διαφορετικά άτομα μπορεί να κατηγοριοποιήσουν την ίδια σχέση μεταξύ του σημείου και του αντικειμένου με τρόπο που μπορεί να *εικονικός*, *ενδεικτικός* ή *συμβολικός* αντίστοιχα σύμφωνα με τις ερμηνείες τους. Στην πράξη οι διακρίσεις είναι λεπτές επειδή εξαρτώνται από τις ερμηνείες των μαθητών και μπορούν να φανούν χρήσιμες στον ερευνητή ή τον εκπαιδευτικό για τον προσδιορισμό της λεπτότητας των μαθηματικών αντιλήψεων ενός μαθητή εάν οι διαφορές στην ερμηνεία λαμβάνονται υπόψη (Presmeg et al., 2016).

Για παράδειγμα, ο τύπος $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ που δίνει τις πραγματικές ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, μπορεί να χαρακτηριστεί *συμβολικός* επειδή υπόκειται σε συγκεκριμένους κανόνες. Όμως για κάποιους μαθητές ο τύπος αυτός είναι μια *εικόνα* όπως ένα σχήμα και για κάποιους άλλους ερμηνεύεται ως ένας δείκτης με την έννοια ότι τους ωθεί στην αντικατάσταση των μεταβλητών α, β, γ, για τη λύση της εξίσωσης (Presmeg et al., 2016).

Ο Peirce εισήγαγε επίσης τρεις εννοιολογικές κατηγορίες που αποκαλεί *πρωτογενές* (*firstness*), δευτερογενές (*secondness*) και τριτογενές (*thirdness*). Το πρωτογενές έχει να κάνει με αυτό που καθιστά δυνατή την αναγνώριση πως κάτι εμφανίζεται στο φαινομενολογικό πεδίο. Έχει να κάνει με την ιδιότητα του πράγματος. Γνωρίζουμε τα πράγματα επειδή μπορούμε να αναγνωρίσουμε την *ποιότητα* (*qualia*) του πράγματος. Μια *ποιότητα* (*quale*) είναι το διακριτικό σημάδι του ότι κάτι είναι ανεξάρτητο από κάτι άλλο (είναι η καθαυτότητά του). «Κάθε ποιότητα (quale) είναι από μόνη της αυτό που είναι για τον εαυτό της, χωρίς αναφορά σε κανένα άλλο» (Peirce C.P., 6.224). Έτσι, αυτό που μας επιτρέπει να αντιλαμβανόμαστε ένα κόκκινο τριαντάφυλλο είναι η ποιότητα της ερυθρότητας. Η επίγευση ενός κρασιού ή ένα χαρακτηριστικό είδος πονοκεφάλου είναι επίσης τέτοιες ποιότητες. Εάν είχαμε απομείνει χωρίς ποιότητες, δεν θα μπορούσαμε να αντιληφθούμε τίποτα. Ωστόσο, η ποιότητα δεν είναι ακόμα αντίληψη. Είναι μόνο μια δυνατότητα: είναι *πρωτογενές* - η πρώτη κατηγορία της ύπαρξης στην προσέγγιση του Peirce. «Η ιδιότητα της ερυθρότητας, πριν από οτιδήποτε στο σύμπαν ήταν ακόμα το κόκκινο, ήταν ωστόσο μια θετική ποιοτική δυνατότητα» (C.P., 1.25). Ποιότητες - όπως το πικρό, το ανιαρό, το σκληρό, η ευγένεια (C.P., 1.418) - εξετάζονται συνεπώς ως δυνατότητες της εμπειρίας, καθιστώντας δυνατή την σημείωση ότι κάτι υπάρχει, τοποθετημένο, όπως ήταν, στα όρια της συνείδησης (Radford, 2008).

Η ίδια η εμφάνιση του αντικειμένου στο πεδίο της αντίληψής μας σηματοδοτεί την *ενδεικτική* στιγμή της συνείδησης. Είναι μια στιγμή της πραγματικότητας ή του συμβάντος. Εδώ μπαίνουμε στο *δευτερογενές*. Επειδή έχουμε φτάσει στην επίγνωση, το αντικείμενο τώρα γίνεται ένα αντικείμενο γνώσης. Αλλά η γνώση δεν είναι μια σειρά απομονωμένων στιγμών ή γεγονότων. Μάλλον, προκύπτει από τη σύνδεση μεταξύ γεγονότων και αυτού του δεσμού. Ο Peirce ισχυρίζεται ότι απαιτείται να εισέλθουμε σε ένα επίπεδο που υπερβαίνει την ποιότητα (*πρωτογενές*) και την πραγματικότητα (*δευτερογενές*). Αυτό το νέο επίπεδο (*τριτογενές*) απαιτεί τη χρήση συμβόλων (Presmeg et al., 2016). Σχολιάζοντας αυτές τις λεπτές αποχρώσεις των αλληλεξαρτήσεων μεταξύ *πρωτογενούς*, *δευτερογενούς*, και *τριτογενούς* ως οντολογικές ή ως φαινομενολογικές κατηγορίες οι Sáens-Ludlow & Kadunz (2016) αναφέρουν τα εξής:

> Η ύπαρξη αυτών των τριών κατηγοριών ονομάστηκε Θεώρημα Peirce ... Θεωρεί ότι αυτές οι κατηγορίες είναι τόσο οντολογικές όσο και φαινομενολογικές. Η πρώτη ασχολείται με τη φύση της ύπαρξης και η τελευταία με το φαινόμενο της συνειδητής εμπειρίας. (σ. 4)

Στο παρακάτω απόσπασμα ο Peirce περιγράφει με τους όρους της θεωρίας του αυτό που αποκαλείται νόημα του σημείου.

> Όπως έχω ήδη επισημάνει ένα Σημείο (Sign) έχει ένα Αντικείμενο (Object) και ένα Ερμήμνευμα (Interpetant), το τελευταίο είναι αυτό που παράγει το σημείο στον ψευδο-νου (Quasi- mind), δηλαδή είναι ο Ερμηνευτής, που καθορίζει στο τελευταίο ένα αίσθημα, μια προσπάθεια ή ένα Σημείο του οποίου ο προσδιορισμός είναι το Ερμήνευμα. Άλλα πρέπει να επισημάνω εδώ ότι συνήθως υπάρχουν δύο αντικείμενα και περισσότερα από δυο Ερμηνεύματα. Συγκεκριμένα, διακρίνουμε το *άμεσο* (Immediate) *αντικείμενο* το οποίο είναι το αντικείμενο όπως το αναπαριστάνει το ίδιο το αντικείμενο, και του οποίου η ύπαρξη είναι κατά συνέπεια εξαρτώμενη από την αναπαράστασή του στο σημείο, από το δυναμικό (dynamical) αντικείμενο, το οποίο είναι η Πραγματικότητα που με κάποια μέσα δημιουργεί τον προσδιορισμό του σημείου στην αναπαράστασή του. Όσον αφορά το Ερμήνευμα έχουμε διάκριση σε πρώτο επίπεδο του άμεσου ερμηνεύματος που είναι το ερμήνευμα όπως αποκαλύπτεται στην ορθή κατανόηση του ίδιου του σημείου, και αυτού που συχνά λέγεται «νόημα» (‘meaning’) του σημείου· που σε δεύτερο επίπεδο σημειώνουμε ως *Δυναμικό Ερμήνευμα*, που είναι η πραγματική επίδραση που το σημείο, ως σημείο, στην πραγματικότητα καθορίζει. (Peirce, 1906, σ. 536)

Στην παρούσα έρευνα έχει μεθοδολογικά ληφθεί υπόψη ότι υπάρχει μια διάκριση μεταξύ της ορθής προσέγγισης της αναπαράστασης 0,3999... και της πραγματικής επίδρασης που η αναπαράσταση αυτή καθορίζει κατά την ερμηνεία της, η οποία είναι μια δυναμική διαδικασία.

Για τον Peirce, ένα σημείο έχει μια εσωτερική δυνατότητα να ερμηνευτεί πριν οποιοσδήποτε στην πραγματικότητα το ερμηνεύσει – αυτό το ονομάζει άμεσο ερμήνευμα του σημείου, και υποστηρίζει πως αυτό είναι το οποίο συχνά αποκαλείται *νόημα* του σημείου. Το Δυναμικό Ερμήνευμα αναφέρεται στις πραγματικές ενέργειες ερμηνείας του ατόμου. Ο Peirce διακρίνει, επίσης, το *Τελικό Ερμήνευμα*, στο οποίο συγκλίνουν όλες οι πραγματικές ερμηνείες.

Ο Frege προσπάθησε να θεμελιώσει την αριθμητική μέσω της αναγωγής των θεμελιωδών εννοιών και οντοτήτων στη Λογική. Οι φυσικοί αριθμοί και θεμελιώδεις έννοιες της αριθμητικής όπως αυτή του «επόμενου ενός φυσικού αριθμού», μετατρέπονται σε λογικές οντότητες και λογικές σχέσεις αντίστοιχα. Με το πρόγραμμά του άσκησε κριτική στο νατουραλισμό που στηριζόμενος σε εικόνες, ιδέες, εποπτείες και παραστάσεις, διαπραγματεύεται τις θεμελιώδης αριθμητικές οντότητες. Προσπαθεί να υπερβεί την παραδοσιακή διάκριση της λογικής υποκείμενο-κατηγόρημα με την διατύπωση ενός προγράμματος οντολογικού ρεαλισμού της αριθμητικής, με βάση τη διάκριση έννοια-(λογικό) αντικείμενο. Ο Frege επιδιώκει να εξαλείψει οποιαδήποτε ψυχολογικά κατάλοιπα από τη θεμελίωση της αριθμητικής. Έτσι, η έμφαση δίνεται στη θεμελίωση και την αιτιολόγηση της αλήθειας της πρότασης η οποία οφείλει να είναι ανεξάρτητη των συγκεκριμένων υποκειμένων (Ρουσόπουλος, 1991).

Ο Frege θεωρεί τη γλώσσα ως ένα συμβολικό σύστημα. Στην πραγματικότητα, το γλωσσικό του μοντέλο ήταν τα καθαρά μαθηματικά από τα οποία εξαιρεί ακόμα και τη γεωμετρία. Η στάση του τον οδήγησε στο να μειώσει τις αναφορές του κόσμου σε δυο στοιχεία: τις λογικές τιμές του ορθού και του λάθους. Το νόημα μπορεί συνεπώς να αντιστοιχεί μόνο σε προτάσεις, όχι σε λέξεις που είναι μόνες τους: η ουσία του νοήματος μιας πρότασης είναι στις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούν να εξεταστούν ως αληθείς. Τα μαθηματικά ως εκ τούτου ανάγονται στη Λογική (Dummett, 1991).

> Οφείλουμε να έχουμε μπροστά μας μια πλήρη πρόταση. Μόνο σε μια πρόταση έχουν νόημα οι λέξεις. Μπορεί οι νοητικές εικόνες να περνούν μπροστά από τα μάτια μας, όμως δεν είναι αναγκαίο να αντιστοιχούν στα λογικά στοιχεία της πρότασης. Είναι αρκετό ότι η πρόταση ως ένα όλον έχει νόημα˙ αυτό προσδίδει νόημα και στα μέρη της. (Frege, 1990)

Για τον Frege (1892), σε ένα *σημείο* (sign) (όνομα, συνδυασμός λέξεων, γράμμα) εκτός από εκείνο στο οποίο αναφέρεται, το οποίο αποκαλεί *αναφερόμενο* (Reference-Bedeutung) του *σημείου*, υπάρχει και αυτό που ονομάζει *σημασία* (Sense-Sinn) του *σημείου* στο οποίο περιέχεται και ο τρόπος παρουσίασής του.

Ο Frege αναφέρει τα εξής παραδείγματα: (α) Αν α, β, γ οι διάμεσοι ενός τριγώνου τότε το αναφερόμενο της πρότασης «το σημείο τομής των α και β» ταυτίζεται με το αναφερόμενο της πρότασης «το σημείο τομής των β και γ», αλλά οι δυο προτάσεις δεν έχουν τις ίδιες σημασίες. (β) Το αναφερόμενο του «Αποσπερίτη» είναι ίδιο με του «Αυγερινού» αφού και οι δυο λέξεις αναφέρονται στον πλανήτη Αφροδίτη, αλλά η σημασία τους είναι διαφορετική αφού η ο «Αποσπερίτης» αντιστοιχεί στο πως φαίνεται από τη Γη ο πλανήτης Αφροδίτη το απόγευμα (την εσπέρα) ενώ ο «Αυγερινός» αντιστοιχεί στο πως φαίνεται από τη Γη ο πλανήτης Αφροδίτη το πρωί (την αυγή).

Για τον Frege η αναφορά και η σημασία ενός σήματος πρέπει να διακρίνεται από την αντίστοιχη ιδέα. Αν η αναφορά ενός σήματος είναι ένα αντικείμενο αντιληπτό από τις αισθήσεις η ιδέα γι' αυτό είναι μια εσωτερική εικόνα που προκύπτει από μνήμες αισθητηριακών εντυπώσεων που είχε το υποκείμενο και από εσωτερικές και από εξωτερικές ενέργειες που έκανε. Μια τέτοια ιδέα συχνά είναι διαποτισμένη από το συναίσθημα. Η καθαρότητα των διαφορετικών μερών της υπόκειται σε μεταβολές και ταλαντεύσεις. Η ίδια σημασία δεν συνδέεται πάντα ακόμα και από τον ίδιο άνθρωπο με την ίδια ιδέα. Η ιδέα είναι υποκειμενική. Η ιδέα κάποιου ανθρώπου δεν είναι η ιδέα ενός άλλου. Ως αποτέλεσμα έχουμε προφανώς μια ποικιλία διαφορετικών ιδεών που συνδέονται με την ίδια σημασία.

Στη συνέχεια ο Frege θέτει το ερώτημα γιατί θέλουμε ένα (ίδιον) όνομα να μην έχει μόνο σημασία αλλά και αναφορά; Γιατί η σκέψη δεν μας είναι αρκετή;

Και η απάντησή του είναι ότι αυτό το ζήτημα σχετίζεται στο βαθμό που μας απασχολεί, με την αξία της αλήθειας. Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι ακούγοντας ένα επικό ποίημα, για παράδειγμα, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ευφωνία της γλώσσας, η σημασία των προτάσεων, των εικόνων και των συναισθημάτων που προκαλούνται με αυτό τον τρόπο. Το ζήτημα της αλήθειας θα μας έκανε να εγκαταλείψουμε την αυθεντική απόλαυση για χάρη μιας στάσης επιστημονικής έρευνας. Ως εκ τούτου, δεν μας απασχολεί εάν το όνομα «Οδυσσέας», για παράδειγμα, έχει αναφορά, αρκεί να αποδεχόμαστε το ποίημα ως έργο τέχνης. Είναι η προσπάθεια για την αλήθεια που μας οδηγεί πάντα να προχωρήσουμε από τη σημασία στην αναφορά. Έχουμε δει ότι η αναφορά μιας φράσης μπορεί πάντα να αναζητηθεί, όποτε αφορά την αναφορά των συστατικών της και ότι αυτό συμβαίνει όταν και μόνο όταν ερευνάμε την αξία της αλήθειας.

Για τον Frege μια λογικά τέλεια γλώσσα (Begriffsschrift) θα πρέπει να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις ότι κάθε έκφραση γραμματικά καλώς κατασκευασμένη ως σωστό όνομα εκτός από σημάδια που έχουν ήδη εισαχθεί θα δηλώνει πράγματι ένα αντικείμενο και ότι κανένα νέο σημάδι δεν θα εισαχθεί ως σωστό όνομα χωρίς να έχει εξασφαλιστεί αναφορά. Τα λογικά βιβλία περιέχουν προειδοποιήσεις για λογικά λάθη που προκύπτουν από την ασάφεια των εκφράσεων. Θεωρεί πως δεν είναι λιγότερο πρόσφορη μια προειδοποίηση ενάντια σε προφανή ονόματα που δεν έχουν καμία αναφορά. Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει λάθη που έχουν προκύψει με αυτόν τον τρόπο.

Ένα παράδειγμα από την ιστορία των μαθηματικών στο ζήτημα που αναφέρεται ο Frege είναι η έκφραση 1+2+3+... η οποία έχει σημασία αλλά δεν έχει αναφορά. Δηλαδή έχει κάποια σημασία στη μαθηματική γλώσσα (άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών) αλλά δεν αναφέρεται σε κάποιο μαθηματικό αντικείμενο (αναφερόμενο).

Σε σχέση με τις αναπαραστάσεις που ενδιαφέρουν την παρούσα εργασία, υπάρχουν δυο *σημεία* (signs) το 0,3999… και το 0,4 τα οποία έχουν το ίδιο αναφερόμενο, όμως το *σημείο* 0,3999... συνδέεται με τις εξής σημασίες: α) το όριο της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, ..., β) το άθροισμα της σειράς 0,3+0,09+0,009+..., όπως οι όροι αυτοί ορίζονται στο πλαίσιο του απειροστικού λογισμού. Ενώ το *σημείο* 0,4 συνδέεται με τις σημασίες που αποδίδονται σ' ένα κλάσμα ακεραίων (μέρος –όλου, πηλίκο διαίρεσης ...), χωρίς να είναι πολλές φορές ορατή η σύνδεση των σημασιών ανάμεσα στα δυο πλαίσια.

Για τον Frege βασικό χαρακτηριστικό της σημασίας είναι ο ιδιάζων τρόπος παρουσίασης του αντικειμένου της αναφοράς του σήματος. Επίσης, θεωρεί ότι οι σημασίες ανήκουν στην αντικειμενική περιοχή των κοινών σκέψεων, όπως αυτές μεταβιβάζονται από γενεά σε γενεά. Δηλαδή, βασικά χαρακτηριστικά των σημασιών των εννοιών θεωρεί τα ιδιαίτερα σημειωτικά γνωρίσματα των *σημείων* καθώς και τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των εννοιών.

Μια κλασσική προσέγγιση στη φύση μιας έννοιας και του νοήματός της με σημειολογικό ενδιαφέρον αποτελεί ο προσδιορισμός μιας έννοιας μέσω του δυϊσμού μεταξύ *πλάτους* και *βάθους* ή αλλιώς μεταξύ έκτασης (extension) και έντασης (intension). Το *πλάτος* μιας έννοιας αποτελείται από όλα τα αντικείμενα τα οποία έχουν τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης έννοιας, ενώ το *βάθος* μιας έννοιας είναι το σύνολο των ιδιοτήτων που είναι κοινές σε όλα τα αντικείμενα που αποτελούν το πλάτος της έννοιας.

Όμως η συγκεκριμένη διάκριση *βάθους/πλάτους* φαίνεται εξαιρετικά απλοϊκή σε κάποιες περιπτώσεις προκειμένου από μόνη της να εξηγήσει κάποιες έννοιες ή φαινόμενα. Επειδή για παράδειγμα είναι σχεδόν ανέφικτο να γνωρίζουμε όλα τα αντικείμενα που αποτελούν το πλάτος της έννοιας αλλά ούτε είναι πάντα εφικτό να προσδιορίσουμε όλα τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της έννοιας προκειμένου να κατανοήσουμε το νόημά της, το οποίο δεν βρίσκεται στον τυπικό ορισμό της αλλά στο σύνολο των προβληματικών καταστάσεων στις οποίες η έννοια έπαιξε κάποιο ρόλο και μέσω αυτών εξελίχθηκε και συνδέθηκε με άλλες αποτελώντας μαζί τους ένα εννοιολογικό πεδίο.

Ο Marcus (1986) με βάση το μύθο της τραγωδίας «Ηλέκτρα» του Σοφοκλή αναπτύσσει ένα επιχείρημα που ονομάζει «παράδοξο της Ηλέκτρας». Σύμφωνα με αυτό όταν ο Ορέστης γυρίζει στο σπίτι, δεν αναγνωρίζεται από την αδελφή του Ηλέκτρα, αν και αυτή γνωρίζει ότι ο Ορέστης είναι αδελφός της. Η Ηλέκτρα γνωρίζει ότι έχει αδελφό τον Ορέστη και ότι μπροστά της βρίσκεται ο Ορέστης αλλά από την άλλη δεν αναγνωρίζει στο πρόσωπο που βρίσκεται μπροστά της τον αδελφό της τον Ορέστη. Όμως η διαδικασία δημιουργίας σημασιών δεν έχει μόνο δυο διαστάσεις, δηλαδή δεν αποτελείται μόνο από εκφράσεις (όπως το όνομα «Ορέστης») και αποσπάσματα της πραγματικότητας (ο Ορέστης ως φυσικό πρόσωπο) αλλά απαιτείται και μια τρίτη διάσταση, εννοιολογικής φύσεως (την εγκεφαλική αναπαράσταση του προσώπου με το όνομα Ορέστης).

Έτσι, την αδυναμία της προσέγγισης μιας μαθηματικής έννοιας μόνο μέσα από το δυϊσμό *βάθος/πλάτος* έρχεται να καλύψει ο Freudenthal (1983) όταν για τις ανάγκες της διδακτικής των μαθηματικών εισάγει την ιδέα της «διδακτικής φαινομενολογίας» εξηγώντας ότι η φαινομενολογία μιας μαθηματικής ιδέας είναι η περιγραφή της σε σχέση με τα φαινόμενα εκείνα για τη μελέτη των οποίων η ιδέα αυτή δημιουργήθηκε, και με εκείνα τα φαινόμενα στα οποία η σημασία της επεκτάθηκε, μέσα από τις ανθρώπινες διαδικασίες μάθησης. Στο πλαίσιο των διαδικασιών μάθησης των παιδιών, η φαινομενολογία αυτή γίνεται διδακτική φαινομενολογία.

2.5 Αντιλήψεις για τους πραγματικούς αριθμούς στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Η περίπτωση των περιοδικών δεκαδικών αριθμών

Προκειμένου να αναδειχθεί ο ρόλος της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι σημαντική καταρχήν η αποσαφήνιση ζητημάτων σχετικών με τη διαπραγμάτευση των άρρητων αριθμών. Στην κατεύθυνση αυτή κρίσιμα ζητήματα συνιστούν (α) μαθηματικά ερωτήματα που μπορούν να προκύψουν και η διαπραγμάτευσή τους απαιτεί γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών, (β) ζητήματα που σχετίζονται με τη δομή των συνόλων των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών αριθμών, (γ) ζητήματα που σχετίζονται με τη συνάφεια ανάμεσα στη μαθηματική και την διαισθητική προσέγγιση των όρων που χρησιμοποιούνται, (δ) την ιστορική εξέλιξη στην προσέγγιση της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών και (ε) την αλληλοτροφοδότηση της μαθηματικής έρευνας και του διδακτικού σχεδιασμού. Επιπλέον, σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια ανάδειξης του ρόλου της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί η διερεύνηση των αντιλήψεων μαθητών αλλά και εκπαιδευτικών για τους πραγματικούς αριθμούς και ειδικά για τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς στους οποίους εστιάζει το εμπειρικό μέρος της παρούσας διατριβής. Οι ανωτέρω δυο συνιστώσες οριοθέτησης του ρόλου της Γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδακτική πράξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποτελούν αντικείμενο αυτής της ενότητας.

2.5.1 Η εισαγωγή των άρρητων αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα από την εκπαιδευτική εμπειρία. Ένας μαθητής της Β΄ Γυμνασίου μετά από μια εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού και τη διάκριση μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών προσπάθησε να υπολογίσει όσους από τους αριθμούς $\sqrt{25}$, $\sqrt{250}$, $\sqrt{2500}$, $\sqrt{25000}$ είναι ρητοί. Ο μαθητής βρήκε εύκολα ότι $\sqrt{25} = 5$ και ότι $\sqrt{2500} = 50$ αλλά για τους υπόλοιπους αριθμούς τα πράγματα δυσκόλεψαν. Δεν μπορούσε να αποφασίσει αν ο αριθμός $\sqrt{250}$ είναι ρητός ή άρρητος. Χρησιμοποίησε και υπολογιστή αλλά δεν ήταν σίγουρος ότι η ένδειξη του υπολογιστή ήταν αυτό που του είχε ζητηθεί. Αλήθεια, πόσο εύκολο είναι να διαπραγματευτεί ένας μαθητής αυτό το φαινομενικά απλό ερώτημα και πως θα μπορούσε ένας εκπαιδευτικός να διαπραγματευτεί διδακτικά το συγκεκριμένο ζήτημα;

Ο μαθητής αυτός όταν θα έφτανε στην Α΄ Λυκείου θα μπορούσε να δει στο σχολικό εγχειρίδιο μια απόδειξη η οποία βασίζεται στην αποδεικτική μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, για το ότι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει αποτέλεσμα 2 και συμβολίζεται: $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Κατά πόσο όμως αυτή η πρόταση και η απόδειξή της βοηθάει το μαθητή να κατανοήσει το βάθος και το εύρος της έννοιας που διαπραγματεύεται;

Με την εισαγωγή των άρρητων αριθμών μια σειρά ερωτημάτων αναδύονται ή δύνανται να αναδυθούν στη διδακτική πρακτική. Ένα ερώτημα που θέτουν συχνά οι μαθητές είναι «πόσο κάνει το $\sqrt{2}$;». Υπάρχουν διάφορες σωστές (με την τυπική σημασία του όρου) απαντήσεις που μπορούν να δοθούν σε μια τέτοια ερώτηση ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών ή φοιτητών που συμμετέχουν στο μάθημα και τους στόχους του εκπαιδευτικού. Μια απάντηση που συχνά δίνεται στην ερώτηση αυτή είναι ότι «ο $\sqrt{2}$ είναι *περίπου* 1,4». Και τότε προκύπτει αβίαστα η ερώτηση «τι σημαίνει *περίπου*;» ή αλλιώς «και πόσο είναι *ακριβώς*;». Αξίζει, βεβαίως, οι μαθητές να εμπλακούν σε μια διαδικασία δεκαδικής προσέγγισης του $\sqrt{2}$ αλλά ακόμα και τότε ίσως αναρωτηθούν «και πότε τελειώνει αυτή η διαδικασία δεκαδικής προσέγγισης του $\sqrt{2}$;». Η απάντηση στο τελευταίο ερώτημα, ακόμα και αν δοθεί στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δεν μπορεί να αποδειχθεί το αντίστοιχο θεώρημα.

Ένα ακόμα ζήτημα σχετικό με την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στη διδακτική πράξη είναι η συνειδητοποίηση της διάκρισης ανάμεσα στην ιδιότητα της πυκνότητας και στην ιδιότητα της πληρότητας ενός συνόλου. Πράγματι, όταν διαπιστωθεί ότι η διαγώνιος τετραγώνου με πλευρά τη μονάδα έχει μήκος $\sqrt{2}$, τότε, τοποθετώντας το ένα άκρο αυτής της διαγωνίου στην αρχή ενός άξονα με μονάδα την πλευρά του τετραγώνου, τότε το άλλο άκρο βρίσκεται στο σημείο στο οποίο αντιστοιχεί ο αριθμός $\sqrt{2}$. Και επειδή εύκολα μπορούν να προκύψουν και άλλοι άρρητοι αριθμοί, αυτό σημαίνει ότι ο άξονας ο οποίος περιλαμβάνει τους ρητούς αριθμούς έχει κενά ή τρύπες. Στο σημείο αυτό ο μαθητής καλείται να αποδεχθεί ότι η ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών, δηλαδή, ότι μεταξύ δυο ρητών διαφορετικών αριθμών υπάρχει πάντα ένας άλλος ρητός αριθμός, δεν ταυτίζεται με την διαισθητική εικόνα που έχει για τη συνέχεια του άξονα, δηλαδή, ότι τα σημεία μιας ευθείας δεν έχουν κενά ή τρύπες.

2.5.2 Επιστημολογικά ζητήματα σχετικά με την εισαγωγή των άρρητων αριθμών

Κατά τη διαπραγμάτευση των πραγματικών αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αρκετά ζητήματα προκύπτουν σχετικά με την δεκαδική αναπαράσταση ενός ρητού αριθμού με άπειρα περιοδικά επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία όπως ο 0,333... ή ο 0,3999... ή ενός άρρητου αριθμού (π.χ. $\sqrt{2} = 1,414...$). Έτσι λέμε ότι ο αριθμός 0,39 είναι μια προσσέγγιση του αριθμού 0,3999... με δυο δεκαδικά ψηφία ή ότι ο αριθμός 1,41 είναι μια ρητή προσέγγιση του $\sqrt{2}$ με δυο δεκαδικά ψηφία. Επίσης, υπάρχει μια ακολουθία αριθμών η οποία έχει όριο τον συγκεκριμένο αριθμό. Για παράδειγμα, το όριο της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, ... είναι ο αριθμός 0,3999... Και στην περιοχή αυτή νέα ερωτήματα αναδύονται για τους μαθητές στο διδακτικό πλαίσιο. Οι όροι της ακολουθίας που έχει όριο έναν αριθμό φθάνουν ή όχι το όριό της; Τι σημαίνει ότι μια ακολουθία έχει όριο έναν αριθμό; Αντίστοιχα ερωτήματα έγινε προσπάθεια να απαντηθούν κατά την ιστορική εξέλιξη των εννοιών αυτών. Είναι ενδεικτική η προσέγγιση του Newton για το όριο στο κλασσικό έργο του Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας, που ενώ βρίσκει το όριο του λόγου των διαφορών δεν το ονομάζει ως τέτοιο αλλά περιγράφει τα όρια ως «έσχατους λόγους των αλλαγών».

> Αυτοί οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους μηδενίζονται οι ποσότητες δεν είναι στην πραγματικότητα οι λόγοι των έσχατων ποσοτήτων, αλλά όρια προς τα οποία τείνουν ποσότητες, που μειώνονται απεριόριστα, και προς τα οποία προσεγγίζουν πλησιέστερα από οποιαδήσποτε δοθείσα διαφορά, χωρίς ποτέ να τα ξεπερνούν ούτε στην πραγματικότητα να τα φτάνουν, αφού οι ποσότητες μειώνονται επ' άπειρον. (Newton I, scholium to lemma XI, p. 39, 1981, σ. 82, στο Γιαννακούλιας, 2007)

Η μετάβαση στην προσέγγιση των ορίων από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση θυμίζει την μετάβαση από την περίοδο του Newton στην περίοδο του Cauchy. «Για τον Newton η έννοια του ορίου είναι ξεκάθαρη, το πρόβλημα είναι να βρεθεί το όριο» (Grabiner, 1981, 81-82).

> Υπάρχει ένα όριο για την ταχύτητα στο τέλος της ... [α] κίνησης που φθάνει αλλά δεν υπερβαίνει. Αυτή είναι η τελική ταχύτητα. Και υπάρχει ένα τέτοιο όριο σε όλες τις ποσότητες και τις αναλογίες που ξεκινούν και [κάπου] παύουν να είναι. Και δεδομένου ότι τα όρια αυτά είναι βέβαια και καθορισμένα, ο προσδιορισμός τους είναι ένα πρόβλημα αυστηρά γεωμετρικό. (Newton, 1727, μτφ. από το Grabiner, 1981, σ. 81)

Κατά την Grabiner (1981), «την περίοδο του Cauchy μπορούσαν να υπολογιστούν απλά όρια. Το πρόβλημα ήταν να οριστεί η έννοια [του ορίου] και να καθοριστεί αν υπάρχουν διάφορα όρια.» (σ. 81-82).

> Όταν οι τιμές που λαμβάνονται από μια μεταβλητή προσεγγίζουν μια σταθερή τιμή κατά τρόπο που να διαφέρουν από αυτήν όσο θέλουμε, τότε αυτή η τιμή καλείται το *όριο* όλων των άλλων. Έτσι, λόγου χάρη, ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο των διαφόρων κλασμάτων που μας δίνουν τιμές που τον προσεγγίζουν όλο και περισσότερο. Στη γεωμετρία, οι επιφάνεια του κύκλου είναι το όριο στο οποίο συγκλίνουν οι επιφάνειες των εγγεγραμμένων πολυγώνων καθώς ο αριθμός των πλευρών τους ολοένα αυξάνει ... (Cauchy στο Fauvel, Gray, (1987), σ. 566)

Επίσης, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα η προσπάθεια διάκρισης των βασικών χαρακτηριστικών της ιδιότητας της συνέχειας του συνόλου των πραγματικών αριθμών και της περιγραφής τους με μαθηματικούς όρους. Το ζήτημα μπορεί να τεθεί ακόμα και στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και η απάντησή του έχει διαδραματίσει εξέχοντα ρόλο στην θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Είναι χαρακτηριστικός ο τρόπος με τον οποίο εισάγει ο ίδιος ο Dedekind (1963) το συγκεκριμένο ζήτημα:

> Ασχολήθηκα για πρώτη φορά με τα ζητήματα που αποτελούν αντικείμενο του παρόντος δοκιμίου το φθινόπωρο του 1858. Ως καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης βρέθηκα για πρώτη φορά υποχρεωμένος να διδάξω στοιχεία του διαφορικού λογισμού, και αισθάνθηκα περισσότερο έντονα από οποιαδήποτε άλλη φορά την έλλειψη ενός πραγματικά επιστημονικού θεμελίου για την αριθμητική. Κατά τη συζήτηση της έννοιας της προσέγγισης μιας μεταβλητής ποσότητας προς μια οριακή τιμή, και ιδιαιτέρως κατά την απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε μέγεθος που αυξάνεται συνεχώς, αλλά όχι πέρα κάποιου ορίου, πρέπει κατ' ανάγκη να προσεγγίζει μια οριακή τιμή, κατέφυγα στη γεωμετρική μαρτυρία. Ακόμη και τώρα θεωρώ ότι η προσφυγή στη γεωμετρική εποπτεία κατά την πρώτη παρουσίαση του διαφορικού

> λογισμού είναι εξαιρετικά χρήσιμη από διδακτική σκοπιά, και ουσιαστικά αναγκαία, αν δεν θέλει να χάσει κανείς πολύ χρόνο. Αλλά κανείς δεν θα μπορούσε να αρνηθεί ότι αυτός ο τρόπος εισαγωγής στο διαφορικό λογισμό δεν είναι επιστημονικός. Προσωπικά αισθανόμουνα αυτή τη δυσφορία τόσο έντονα, ώστε υποσχέθηκα στον εαυτό μου να συνεχίσω να σκέφτομαι πάνω στο ζήτημα μέχρι να μπορέσω να βρω ένα καθαρά αριθμητικό και εντελώς αυστηρό θεμέλιο των αρχών του απειροστικού λογισμού. Πολύ συχνά ακούμε να λέγεται ότι ο διαφορικός λογισμός ασχολείται με συνεχή μεγέθη/ποσότητες, όμως πουθενά δεν δίνεται μια ερμηνεία αυτής της συνέχειας, ακόμη και οι πιο αυστηρές διατυπώσεις του διαφορικού λογισμού δεν βασίζουν τις αποδείξεις (πάνω) στη συνέχεια. Αλλά καταφεύγουν, περισσότερο ή λιγότερο συνειδητά, σε γεωμετρικές έννοιες ή σε έννοιες που συνδέονται με τη γεωμετρία ή εξαρτώνται από θεωρήματα, τα οποία ποτέ δεν αποδεικνύονται με καθαρά αριθμητικό τρόπο. Σ' αυτά, για παράδειγμα ανήκει το παραπάνω θεώρημα, και μια προσεκτικότερη έρευνα με έπεισε ότι αυτό το θεώρημα ή κάποιο άλλο ισοδύναμο με αυτό μπορεί να θεωρηθεί κατά κάποιο τρόπο επαρκής βάση για τον απειροστικό λογισμό. Έμενε λοιπόν απλώς να ανακαλυφθεί η πραγματική του προέλευση από τα στοιχεία της αριθμητικής και ταυτόχρονα να εξασφαλιστεί ένας πραγματικός ορισμός της ουσίας της συνέχειας. (Ρουσόπουλος, 1991, σ. 215-216)

Κατά τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών έχει προκύψει ένα ζήτημα σχετικά με τους λόγους που ώθησαν στην ανάγκη θεμελίωσης των μαθηματικών και ειδικότερα της θεμελίωσης της Ανάλυσης (Grabiner, 1981). Αξίζει να σημειωθεί ότι με βάση το προηγούμενο απόσπασμα έχουμε έναν από τους λόγους αυτούς. Ο Dedekind σύμφωνα με την ομολογία του εγείρει το ζήτημα της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών κατά την προσπάθεια του να προετοιμάσει ένα μάθημα διαφορικού λογισμού. Έτσι, παρόλο που όπως επισημαίνει ο Dedekind για τις διδακτικές ανάγκες χρησιμοποιούνται εποπτικές ιδέες οι οποίες ελέγχονται σχετικά με το επιστημονικό τους υπόβαθρο και τη θεωρητική τους τεκμηρίωση, την ίδια στιγμή αναγνωρίζεται η ανάγκη για θεωρητική υποστήριξη των ιδεών αυτών, προκειμένου να ενταχθούν στο διδακτικό πλαίσιο.

Ένα ζήτημα, επίσης που προκύπτει από τη μελέτη της προσέγγισης του Dedekind είναι, ότι ενώ διακρίνει με σαφήνεια την εποπτική ιδέα της συνέχειας όπως αυτή εισέρχεται στην Ανάλυση «περισσότερο ή λιγότερο συνειδητά» από μια αντίστοιχη ιδέα, η οποία είναι καλά θεμελιωμένη στο πλαίσιο της αριθμητικής, και παρόλο που η ίδια η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind είναι μια ιδιαίτερα τεχνική υπόθεση, εντούτοις είναι φανερό ότι ο Dedekind προσπαθεί να «'σώσει' το διαισθητικό χαρακτήρα της συνέχειας» (Ρουσόπουλος, 1991, σ. 49), όπως φαίνεται στο επόμενο απόσπασμα:

> Η παραπάνω σύγκριση του πεδίου των ρητών αριθμών με μια ευθεία γραμμή έχει οδηγήσει στην αναγνώριση της ύπαρξης κενών, μια κύρια έλλειψη πληρότητας ή συνέχειας της κατασκευής, ενώ αναγνωρίζουμε πληρότητα στην ευθεία γραμμή, απουσία κενών, ή συνέχεια. Σε τι συνίσταται όμως αυτή η συνέχεια. Τα πάντα εξαρτώνται από την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα, και μόνο μέσω αυτού θα αποκτήσουμε μια επιστημονική βάση για την έρευνα όλων των συνεχών πεδίων. Προφανώς, δεν κερδίζουμε τίποτα με ασαφείς παρατηρήσεις για την αδιάσπαστη σύνδεση των ελαχίστων μερών, το πρόβλημα είναι να καταδείξουμε τον ακριβή χαρακτήρα της συνέχειας, ο οποίος μπορεί να προσφέρει τη βάση για έγκυρα συμπεράσματα. Η ανακάλυψη αυτή, ίσως, να εκτιμηθεί διαφορετικά από διαφορετικούς ανθρώπους, η πλειονότητα μπορεί να βρεί την ουσία της ως κοινό τόπο. Συνίσταται στο εξής. Στο προηγούμενο κεφάλαιο επέσυρα την προσοχή στο γεγονός ότι σε κάθε σημείο p της ευθείας γραμμής παράγει έναν διαχωρισμό σε δυο ίδια μέρη

> τέτοια ώστε κάθε σημείο του ενός μέρους να βρίσκεται αριστερά από κάθε σημείο του άλλου μέρους. Βρήκα την ουσία της συνέχειας στο αντίστροφο, δηλαδή στην ακόλουθη αρχή:
>
> Αν όλα τα σημεία της ευθείας γραμμής χωριστούν σε δυο κλάσεις, ώστε κάθε σημείο της πρώτης κλάσης να βρίσκεται αριστερά από κάθε σημείο της δεύτερης κλάσης, τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο το οποίο παράγει αυτή τη διαίρεση όλων των σημείων σε δυο κλάσεις, αυτό το διαχωρισμό της ευθείας γραμμής σε δυο μέρη.
>
> Όπως, ειπώθηκε ήδη, νομίζω ότι δεν θα έσφαλα αν υπέθετα ότι ο καθένας αμέσως αναγνωρίζει την αλήθεια αυτής της αρχής, η πλειονότητα των αναγνωστών θα απογοητευτεί μαθαίνοντας ότι με αυτή την κοινότοπη παρατήρηση αποκαλύπτεται το μυστικό της συνέχειας. Μπορώ να πω ότι είμαι χαρούμενος, αν ο καθένας θεωρεί την παραπάνω αρχή τόσο προφανή και σε αρμονία με τις ιδέες του για την ευθεία γραμμή, γιατί πραγματικά ούτε εγώ ούτε και κανείς άλλος είναι σε θέση να προσκομίσει κάποια απόδειξη για την ορθότητά της. Η αποδοχή αυτής της ιδιότητας της ευθείας γραμμής δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα αξίωμα με το οποίο αποδίδουμε στη γραμμή τη συνέχεια της, με το οποίο βρίσκουμε ότι η ευθεία είναι συνεχής. Αν ο χώρος έχει μια πραγματική ύπαρξη δεν είναι απαραίτητο γι' αυτόν να είναι συνεχής, πολλές από τις ιδιότητές θα παραμένουν οι ίδιες ακόμα και αν ήταν ασυνεχής. Και αν γνωρίζαμε με βεβαιότητα ότι ο χώρος ήταν ασυνεχής, τίποτα δεν θα μας εμπόδιζε, αν το επιθυμούσαμε, να καλύψουμε τα κενά, στη σκέψη μας κάνοντάς τον συνεχή, αυτή η συμπλήρωση συνίσταται στη δημιουργία νέων ατομικών-σημείων και θα έπρεπε να πραγματοποιηθεί σύμφωνα με την παραπάνω αρχή. (Dedikind, 1963, μετάφραση από το Ρουσόπουλος, 1991, σ. 221-222)

Όμως, αρκετά ερωτήματα φαίνεται να αιωρούνται στο διδακτικό πλαίσιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, ενώ οι ρητοί αριθμοί περιγράφουν αριθμητικά μια «φυσική» διαδικασία της διαμέρισης ενός μεγέθους σε ίσα μέρη, γεννάται το ερώτημα ποια είναι η αντίστοιχη διαδικασία την οποία περιγράφουν οι άρρητοι αριθμοί την οποία δεν καλύπτουν οι ρητοί; Πως συνδέεται το μαθηματικό και το ετυμολογικό υπόβαθρο των λέξεων ρητός και άρρητος; Πως θεμελιώνεται μαθηματικά η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών; Γιατί οι ρητοί αριθμοί έχουν περιοδικές δεκαδικές αναπαραστάσεις και οι άρρητοι όχι; Ποιοι είναι περισσότεροι, οι ρητοί ή οι άρρητοι; κ.ά.

Απαντήσεις σε ερωτήματα όπως αυτά δεν ανήκουν στο αναλυτικό πρόγραμμα αλλά δύναται να εμφανιστούν σε συζητήσεις με τους μαθητές. Η διαπραγμάτευση τέτοιων ζητημάτων δεν αφορά τρέχοντα ζητήματα της διδασκαλίας, ούτε μπορούν σε κάθε περίπτωση να αναπτυχθούν στους μαθητές οι αποδείξεις των σχετικών προτάσεων όπως ίσως αναπτύσσονται στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Όμως σε αρκετές περιπτώσεις, πράγματι, η συμβολή της γνώσης των Ανώτερων Μαθηματικών είναι καθοριστική για την ανάδειξη της σημασίας μιας συγκεκριμένης μαθηματικής ιδέας, για την αναγνώριση και ερμηνεία παρανοήσεων των μαθητών ή ακόμα και για την αποφυγή της δημιουργίας παρανοήσεων στους μαθητές.

2.5.3 Αντιλήψεις για τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς

Οι Tall & Scwarzenberger (1978) αναφέρουν ότι, όταν ρωτήθηκαν πρωτοετείς φοιτητές των μαθηματικών για τη σχέση του 0,999... και του 1, η πλειονότητα τους απάντησε ότι το 0,999... είναι μικρότερο του 1. Ως πιθανές αιτίες για τη δυσκολία αυτή αναφέρουν: (α) την έλλειψη κατανόησης της έννοιας του ορίου, (β) τη λανθασμένη θεώρηση ότι το σύμβολο 0,999... έχει ένα μεγάλο αλλά πεπερασμένο πλήθος από 9, (γ) την προσέγγιση με όρους απειροστών («απείρως κοντά αλλά όχι ίσα») και (δ) την αίσθηση ότι υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των απειροψήφιων δεκαδικών και των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, μπερδεύονται όταν βλέπουν δυο διαφορετικούς δεκαδικούς να αντιστοιχούν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

Οι Li & Tall (1993) αναφέρονται σε μαθητές που αποδέχονται την ισότητα 1/9=0,1+0,01+0,001+... αλλά δεν αποδέχονται την ίδια ισότητα στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή, 0,1+0,01+0,001+... = 1/9. Η σκέψη που υιοθετούν είναι ότι διαιρώντας το 1 με το 9 διαδοχικά προκύπτει 0,1, μετά 0,11, και ούτω καθ' εξής ενώ οι όροι αυτοί δεν μπορούν να προστεθούν όλοι μαζί για να δώσουν 1/9, επειδή η διαδικασία είναι δυνητικά άπειρη και δεν μπορεί ποτέ να ολοκληρωθεί σε πεπερασμένο χρόνο.

Ο Edwards (1997) αναφέρεται σε μια μαθήτρια που αποδέχεται την ισότητα 1/3=0,333... αλλά δεν αποδέχεται ότι 1=0,999..., επειδή μπορεί κάποιος να πάρει 0,333... με τη διαίρεση του 1 με το 3 αλλά δεν μπορεί να πάρει 0,999... από τη διαίρεση του 1 με το 1. Η Mamona (1987) (στο Πατρώνης & Σπανός 1996, σ. 288) παρουσιάζει την απάντηση κάποιου μαθητή στην ερώτηση αν οι ισότητες 0,999...= 1 και 0,333...=1/3 είναι σωστές ή λανθασμένες και γιατί. Ο μαθητής λοιπόν αυτός ισχυρίζεται:

> Οι δυο ισότητες δεν είναι σωστές. Οι αριθμοί 0,999... και 0,333... πλησιάζουν τους αριθμούς 1 και 1/3 άπειρα κοντά, αλλά δεν μπορούν να τους φτάσουν και να πάρουν αυτές τις συγκεκριμένες τιμές. Δηλαδή οι 1 και 1/3 έχουν μια ορισμένη τιμή αλλά οι οι 0,333... και 0,999... δεν είναι ορισμένοι.

Η Mamona (1987) υποστηρίζει ότι «οι δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία δεν θεωρούνται συγκεκριμένοι αριθμοί, θεωρούνται 'λιγότερο πραγματικοί' θα λέγαμε, όχι ρητοί». (σ. 288)

Οι Kidron & Vinner (1983) και Vinner & Kidron (1985) ισχυρίζονται ότι οι απειροψήφιοι δεκαδικοί γίνονται αντιληπτοί με μια πεπερασμένη τους προσέγγιση ή ως μια δυναμική δημιουργία στην οποία υπάρχει μια ατέρμονη διαδικασία. Οι Fischbein, Tirosh & Hess (1979) αναφέρονται σε ένα μαθητή που ισχυρίζεται ότι: $1+1/2+1/4+1/8+... = 2-1/\infty$. Αυτή η απάντηση θεωρήθηκε ότι υιοθετεί ότι το όριο έχει τις ίδιες ιδιότητες με τους αριθμούς που τείνουν σ' αυτό. Ο Tall (1986) βασιζόμενος σ' αυτή την τελευταία ιδέα ισχυρίζεται ότι οι μαθητές που θεωρούν ότι ο 0,999... είναι μικρότερος του 1 σκέφτονται ότι καθένας από τους όρους της ακολουθίας 0,9, 0,99, 0,999, ... είναι μικρότερος από το 1 οπότε και το όριο της ακολουθίας, δηλαδή ο 0,999... είναι μικρότερος του 1. Αποκαλεί ένα τέτοιο όριο «γενεσιουργό όριο» (generic limit) όταν θεωρείται ότι έχει τις ίδιες ιδιότητες που συνήθως έχουν όλοι οι όροι της ακολουθίας που τείνει σ' αυτό.

Οι Kidron & Tall (2014) ανακαλούν την αρχαιοελληνική συζήτηση μεταξύ του δυνητικού και ενεργεία απείρου θεωρώντας ότι η έννοια του δυνητικού απείρου είναι πιο φυσική επειδή ζούμε σε πεπερασμένο χρόνο και οι φυσικές μας ενέργειες πραγματοποιούνται πεπερασμένες φορές. Οι Lakoff & Núñez (2000, σ. 258) ισχυρίζονται στην ιδέα τους για τη «μεταφορά του απείρου» (metaphor of infinity) ότι:

> Υποθέτουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις του απείρου – άπειρα σύνολα, άπειρα σημεία, όρια άπειρων σειρών, άπειρες διαιρέσεις, ελάχιστα άνω φράγματα- είναι ειδικές περιπτώσεις μιας μοναδικής εννοιολογικής μεταφοράς στην οποία διαδικασίες που συνεχίζονται απεριόριστα θεωρούνται ότι έχουν ένα τέλος, ένα τελικό αποτέλεσμα.

Οι Dubinsky, Weller, Mc Donald & Brown (2005) θεωρούν ότι η σύγχυση των μαθητών για τη σχέση του 0,999… με το 1 οφείλεται στο ότι το 0,999… γίνεται αντιληπτό ως διαδικασία ενώ το 1 ως αντικείμενο. Υποστηρίζουν ότι η διαφορά μεταξύ των δυο αντιλήψεων είναι ότι η διαδικασία γίνεται αντιληπτή από το άτομο ως κάτι που κάνει κάποιος, ενώ το αντικείμενο γίνεται αντιληπτό ως κάτι που είναι και για το οποίο κάποιος ενεργεί. Μια δεύτερη επεξήγηση που προσφέρουν είναι ότι οι μαθητές πράγματι αντιλαμβάνονται ότι ο 0,999... αποτελείται από μια σειρά από 9 με πεπερασμένο πλήθος αλλά απεριόριστο μήκος. Έτσι, αποδέχονται αντιλήψεις σύμφωνα με τις οποίες υπάρχει διαφορά μεταξύ του 0,999... και του 1 αλλά είναι απεριόριστα μικρή.

2.5.4 Φιλοσοφικό υπόβαθρο των αντιλήψεων για τους περιοδικούς δεδκαδικούς αριθμούς

Αρκετά συχνά, στις γραπτές απαντήσεις των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα αλλά και στις συνεντεύξεις τους, γίνονται αναφορές στο άπειρο ή σε άπειρες διαδικασίες, στη συνέχεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών και στα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη, θεωρώντας ότι τα θέματα αυτά σχετίζονται με την κατανόηση της διπλής δεκαδικής αναπαράστασης εντός του διδακτικού πλαισίου για την οποία κλήθηκαν να τοποθετηθούν. Καθώς αρκετοί στοχαστές, ακόμα και από την αρχαιότητα, έχουν μελετήσει τα ζητήματα αυτά, προσφέροντας ενδιαφέρουσες ερμηνείες για τους τρόπους προσέγγισης τους με βάση το φιλοσοφικό τους υπόβαθρο, η ενότητα αυτή εστιάζει σε βασικά στοιχεία αυτών των ερμηνειών, στην προοπτική της κατανόησης των σχετικών αντιλήψεων των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα.

Ο αριθμός, το άπειρο και το συνεχές

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, το άπειρο δεν υπάρχει σε κάποιο πλατωνικό σύμπαν ιδεών και η γνώση του σχετίζεται με τη σταδιακή εξοικείωση με αντικείμενα και διαδικασίες που δεν εξαντλούνται ή εμφανίζονται χωρίς πέρατα. Έτσι, το άπειρο έχει διαφορετικό χαρακτήρα από αυτόν που έχει στα σύγχρονα μαθηματικά. Στο πλαίσιο μιας σύγχρονης μαθηματικής θεωρίας η ύπαρξη του απείρου κατοχυρώνεται από μια πρόταση που εισάγεται ως αξίωμα ή αποδεικνύεται από τα αξιώματα της θεωρίας. Μη – ύπαρξη του απείρου σημαίνει ότι υπάρχει μια πρόταση που αρνείται την ύπαρξη του απείρου στο πλαίσιο της θεωρίας. Το αριστοτελικό ερώτημα για το άπειρο και το νόημα της ύπαρξής του δεν έχει το χαρακτήρα που παίρνει στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας. Το άπειρο έχει οντολογικά χαρακτηριστικά στην αριστοτέλεια φιλοσοφία και συναρτάται με ζητήματα οντολογικού χαρακτήρα, όπως η πίστη μας για το απεριόριστο του χρόνου, η ατελείωτη δυνατότητα τμήσης πεπερασμένων μεγεθών, το απεριόριστο των μεγεθών κ.ά.

Ο Αριστοτέλης στο έργο του «Φυσική Ακρόασις Γ΄» διακρίνει τον αριθμό από τα μεγέθη σε σχέση με το αν αυτά μπορούν να αυξηθούν ή να ελαττωθούν.

> ... μπορεί ακόμη να δικαιολογηθεί και το ότι στον αριθμό κατά την κατεύθυνση του ελαχίστου υπάρχει ένα πέρας, προς την κατεύθυνση όμως της αύξησης ο αριθμός κάθε φορά ξεπερνά οποιοδήποτε πλήθος· σχετικά όμως με τα μεγέθη συμβαίνει το αντίθετο, προς την κατεύθυνση του ελαχίστου μπορεί να ξεπεραστεί οποιοδήποτε μέγεθος, προς την κατεύθυνση, όμως, της αύξησης δεν υπάρχει άπειρο μέγεθος... (Αριστοτέλους, 1972, Φυσικής Ακροάσεως Γ΄., 207b., 208a, σ. 92-95, μτφ. Γεωργούλη)

Θεωρεί ότι ο αριθμός έχει πέρας στην κατεύθυνση του ελαχίστου επειδή αποτελείται από μονάδες και η μονάδα είναι αδιαίρετη. Όμως, ο αριθμός μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλος, επειδή εκφράζει τις δυνατές διχοτομίες ενός μεγέθους που μπορούν να συνεχιστούν επ' άπειρο. Στο σημείο αυτό εμφανίζεται το ιδιαίτερα σημαντικό δίπολο για τη φιλοσοφία του Αριστοτέλη δυνητικότητα – πραγματικότητα. Ο αριθμός είναι συνυφασμένος με τις δυνατότητες διχοτομιών ενός μεγέθους. Όμως, κάθε διχοτομία γίνεται σε μια στιγμή. Έτσι, το αποτέλεσμα της διχοτομίας που μπορεί να είναι ένα σημείο ενός ευθύγραμμου τμήματος ή μια χρονική στιγμή πραγματοποιείται με μια πράξη-ενέργεια, όταν τα υπόλοιπα σημεία ή χρονικές στιγμές αναμένουν δυνητικά την ενέργεια υλοποίησής τους, προκειμένου να γίνουν πραγματικά.

> ... ο αριθμός πάλι αποτελείται από περισσότερα από ένα (μονάδες), που αποτελούν ένα ποσό˙ ώστε είναι ανάγκη να σταματήσουμε, όταν φθάσουμε στο αδιαίρετο˙ ... προς την κατεύθυνση όμως της αύξησης μπορούμε να εννοούμαι κάθε φορά και μεγαλύτερο αριθμό, γιατί οι διχοτομίες του μεγέθους μπορούν να συνεχίζονται επ’ άπειρο. Ώστε ο αριθμός μεγέθους υπάρχει δυνάμει και όχι ενεργεία˙ συμβαίνει όμως εκείνο που κάθε φορά παίρνουμε να ξεπερνά οποιοδήποτε πλήθος. Ο αριθμός όμως που προκύπτει από τη διχοτομία δεν έχει αυθυπόστατη ύπαρξη, ούτε η απειρότητα παρουσιάζεται ως μόνιμη αλλά βρίσκεται πάντοτε στο στάδιο της γένεσης, όπως ο χρόνος και ο αριθμός του χρόνου. Σχετικά με τα μεγέθη συμβαίνει το αντίθετο˙ το συνεχές, δηλαδή παρουσιάζει διαίρεση που προχωρεί προς το άπειρο, προς την κατεύθυνση όμως της αύξησης δεν είναι άπειρο. Γιατί όσο μπορεί να είναι δυνάμει, τόσο μπορεί να είναι ενεργεία. Ώστε επειδή δεν υπάρχει κανένα αισθητό άπειρο μέγεθος, δεν είναι δυνατό να ξεπεράσουμε οποιοδήποτε ορισμένο μέγεθος˙ γιατί σε τέτοια περίπτωση θα υπήρχε ένα πράγμα που θα ήταν μεγαλύτερο από τον ουρανό ... Η αντίληψή μας αυτή, που δεν παραδέχεται πως υπάρχει κατά την κατεύθυνση της αύξησης ένα ενεργεία άπειρο, εξ αιτίας του ότι θα ήταν δυνατό να φθάσουμε καμία φορά στο τέρμα του, δεν έχει να βλάψει καθόλου τη μαθηματική έρευνα. Γιατί δεν τους είναι το άπειρο απαραίτητο, ούτε να το χρησιμοποιούν, αλλά παίρνουν τα πεπερασμένα μεγέθη μόνο στα μήκη που τυχόν τους χρειάζονται˙ μπορεί όμως οποιοδήποτε άλλο μέγεθος να τμηθεί κατά τις ίδιες αναλογίες όπως και το μέγιστο μέγεθος. Ώστε από την άποψη της απόδειξης δεν θα σημειωθεί σχετικά με εκείνα τα μεγέθη καμία διαφορά, η ύπαρξη όμως θα υπάρχει στα πραγματικά μεγέθη. (Αριστοτέλους, 1972, Φυσικής Ακροάσεως Γ΄., 207b., 208a, σ. 92-95, μτφ. Γεωργούλη)

Στην αριστοτελική φιλοσοφία οι έννοιες του απείρου και του συνεχούς συνδέονται ουσιαστικά και αποτελούν τη βάση για την ερμηνεία των παραδόξων του Ζήνωνα.

> Το άπειρο εμφανίζεται κατά προτεραιότητα στο συνεχές˙ γι’ αυτό και το άπειρο χρησιμοποιείται συχνά στους ορισμούς του συνεχούς, όπως όταν λέμε ότι το άπειρα διαιρέσιμο είναι συνεχές. (Αριστοτέλης, 1973, Φυσική Ακρόασις ΙΙΙ, 200b 17-20 στο Αναπολιτάνος 1985, σ. 60)

Το σημαντικό εννοιολογικό δίπολο δυνητικότητα – πραγματικότητα είναι αυτό που καθορίζει επίσης την αριστοτελική ιδέα για το σημείο και τη δομή του συνεχούς. Όμως, το συνεχές συνδέεται με την ύπαρξη δυνατότητας διαίρεσης μεταξύ δυο πράξεων διαίρεσης και όχι με την ύπαρξη πραγματικού σημείου μεταξύ δυο σημείων. Στις σύγχρονες θεμελιώσεις της πραγματικής ευθείας ένα ευθύγραμμο τμήμα θεωρείται ως ένα σύνολο σημείων συγκροτημένων σε μια δομή με συγκεκριμένες σχέσεις και ιδιότητες και με αυτή την έννοια το σημείο κατέχει μια πρωταρχική θέση αφού αποτελεί ένα αδιάστατο δομικό στοιχείο του ευθύγραμμου τμήματος. Για την αριστοτελική αντίληψη τα σημεία έχουν δυνητική υπόσταση μέχρι να γίνει μια συγκεκριμένη πράξη τομής και να αποκτήσουν πραγματική υπόσταση. Έτσι το σημείο στην αριστοτελική θεώρηση δεν έχει πρωταρχικό αλλά δυνητικό χαρακτήρα.

Το συνεχές για τον Αριστοτέλη ορίζεται από την ατέρμονη δυνατότητα διαιρετότητάς του. Η ιδιότητα αυτή είναι αντίστοιχη με την ιδιότητα της πυκνότητας ενός συνόλου σημείων όπου μεταξύ δυο σημείων του συνόλου υπάρχει και τρίτο σημείο του. Βέβαια για την αριστοτελική αντίληψη το συνεχές συνδέεται με τη δυνατότητα διαίρεσης μεταξύ δυο άλλων πράξεων διαίρεσης και όχι με την ύπαρξη πραγματικών σημείων. Όμως σύμφωνα με αυτή την αντίληψη το σύνολο των ρητών αριθμών θα χαρακτηριζόταν συνεχές αφού μεταξύ δυο ρητών αριθμών υπάρχει ένας τρίτος ρητός αριθμός. Έτσι, η αντίληψη αυτή για το συνεχές διαφέρει σημαντικά από τη σύγχρονη θεώρηση.

Ερχόμαστε σε επαφή με την έννοια του απείρου μέσω της αθροιστικής και της διαιρετικής διαδικασίας. Με βάση την αθροιστική διαδικασία αν θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα τμήμα μήκους ΑΒ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχουν τμήματα μήκους 2ΑΒ, 3ΑΒ, ... νΑΒ όπου ν φυσικός αριθμός. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε τμήματα οσοδήποτε μεγάλα. Για τον Αριστοτέλη είναι αδύνατο να θεωρήσουμε αντικείμενα άπειρης διάστασης. Όπως επίσης θεωρεί ότι δεν υπάρχουν άπειρες ολότητες αντικειμένων τα οποία να μπορούν μελετηθούν ως τελειωμένα αντικείμενα. Δηλαδή η θεώρηση οσοδήποτε μεγάλου τμήματος που περιγράψαμε προηγουμένως αποτελεί μελέτη του *δυνητικού απείρου* (potential infinity) αλλά δεν μπορούμε να θεωρήσουμε αυτήν τη διαδικασία ολοκληρωμένη. Αντίστοιχα, μπορούμε να μελετήσουμε τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, ... εργαζόμενοι μέσα στο σύνολό τους αλλά δεν μπορούμε να μελετήσουμε το ίδιο το σύνολο των φυσικών αριθμών. Το *ενεργεία άπειρο* (actual infinity) είναι αποτέλεσμα νοητικού άλματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αποδοχή μιας πρότασης ύπαρξης στο πλαίσιο της Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων, σύμφωνα με την οποία υπάρχει ένα συνολοθεωρητικό αντικείμενο τέτοιο ώστε (α) ο αριθμός 0 είναι στοιχείο του και (β) αν ο αριθμός ν είναι στοιχείο του, και ο αριθμός ν+1 είναι στοιχείο του. Για τον Αριστοτέλη μια τέτοια αντικειμενοποίηση του απείρου δεν γίνεται αποδεκτή επειδή ο άνθρωπος δεν μπορεί ποτέ να ολοκληρώσει μια τέτοια άπειρη διαδικασία, όπως, για παράδειγμα της ολοκλήρωσης μιας άπειρης αρίθμησης (Αναπολιτάνος, 1985).

Η δεύτερη διαδικασία που σχετίζεται με το άπειρο είναι η διαιρετική. Έτσι ένα εκτεταμένο μέγεθος μπορεί να θεωρηθεί ως *δυνάμει* άπειρο δεδομένου ότι μπορεί να τμηθεί άπειρες φορές. Για παράδειγμα μπορούμε να διαιρέσουμε ένα τμήμα ΑΒ σε δυο ίσα τμήματα ΑΒ/2 και το καθένα απ' αυτά σε δυο ίσια τμήματα ΑΒ/4. Μια τέτοια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί για οσοδήποτε μεγάλο αριθμό φορών επιθυμούμε αλλά σύμφωνα με τον Αριστοτέλη δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν άπειρες τέτοιες διαιρέσεις σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Μπορεί να πραγματοποιηθεί όμως οσοδήποτε μεγάλος αριθμός διαιρέσεων σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Για τον Αριστοτέλη ο χρόνος είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης της αλλαγής γι' αυτό είναι συνεχής. Ο χρόνος δεν αποτελείται από σημεία, όπως δεν αποτελείται από σημεία μια γραμμή. Γίνεται αντιληπτός μέσω της τριάδας «πριν, τώρα, μετά». Τα διάφορα εκάστοτε «τώρα» βρίσκονται δυνητικά παντού στη ροή του χρόνου και η πραγμάτωσή τους είναι μια πράξη διαίρεσης του χρόνου. Ένα πραγματικό χρονικό διάστημα είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας συγκεκριμένης αλλαγής που συμβαίνει μεταξύ δυο πραγματωμένων στιγμών. Στη διάρκεια ενός τέτοιου χρονικού διαστήματος ο αριθμός των πραγματωμένων στιγμών είναι πεπερασμένος επειδή η πραγμάτωσή τους διενεργείται από το έλλογο ον το οποίο αδυνατεί να κάνει άπειρες χρονικές τομές.

> Αξίζει τον κόπο να εξετάσουμε πως ο χρόνος σχετίζεται με την ψυχή... Μια ερώτηση που θα μπορούσε να διατυπώσει κανείς είναι αν θα υπήρχε ή όχι χρόνος στην περίπτωση που δεν θα υπήρχε ψυχή· γιατί αν δεν υπήρχε κανένας να μετρήσει, δεν θα υπήρχε και τίποτε που θα μπορούσε να μετρηθεί, επομένως είναι προφανές πως δεν θα υπήρχε και το αποτέλεσμα μέτρησης (αριθμός)· Γιατί αποτέλεσμα μέτρησης (αριθμός) είναι ή οτιδήποτε έχει μετρηθεί ή οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί. Αλλά αν τίποτε εκτός από την ψυχή ή από το νου της ψυχής δεν μπορεί να μετρήσει, δεν θα υπήρχε χρόνος αν δεν υπήρχε ψυχή, παρά αυτό του οποίου ο χρόνος είναι ιδιότητα· δηλαδή, αν η κίνηση μπορεί να υπάρχει χωρίς την ψυχή και το πριν και το μετά είναι ιδιότητες της κίνησης, τότε ο χρόνος είναι αυτά τα πράγματα όταν μετρηθούν. (Φυσική Ακρόασις, IV, 223a 16-29, στο Αναπολιτάνος, 1985, σ. 72)

Τα παράδοξα του Ζήνωνα

Τα παράδοξα του Ζήνωνα σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (Φυσική Ακρόασις VI, 239b-240b) είναι συνολικά τέσσερα. Στη συνέχεια περιγράφονται τα πρώτα δύο.

Το πρώτο παράδοξο γνωστό ως «παράδοξο της διχοτομίας» έχει ως εξής:

Για να διανύσει κάποιος μια απόσταση ΑΒ θα πρέπει να διανύσει πρώτα την απόσταση AA_1 = ΑΒ/2, στη συνέχεια την απόσταση A_1A_2 =ΑΒ/4 και την A_2A_3 =ΑΒ/8 και ούτω καθ' εξής. Αυτό εμφανίζεται ως αδύνατο γιατί κάποιος πρέπει να περάσει από άπειρο πλήθος σημείων για να διανύσει μια πεπερασμένη απόσταση ΑΒ. Πρέπει δηλαδή να πραγματοποιηθούν άπειρες το πλήθος μεταβάσεις. Επίσης, το άθροισμα άπειρου πλήθους τμημάτων εμφανίζεται να είναι ένα πεπερασμένο τμήμα. Έτσι, συνολικά θα πρέπει να διανυθεί απόσταση: $\frac{AB}{2}+\frac{AB}{4}+\frac{AB}{8}+\cdots$ η οποία εμφανίζεται να γίνεται ίση με ΑΒ μετά από άπειρα βήματα.

Το δεύτερο παράδοξο γνωστό και ως παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας είναι το εξής:

Σ' έναν αγώνα δρόμου ανάμεσα στον γοργοπόδαρο Αχιλλέα και σε μια χελώνα δίνεται προβάδισμα ενός σταδίου στη χελώνα. Στο χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί ο Αχιλλέας για να καλύψει την διαφορά του ενός σταδίου η χελώνα θα διανύσει ένα άλλο διάστημα (πολύ μικρότερο του ενός σταδίου). Στην προσπάθειά του ο Αχιλλέας να καλύψει τη νέα διαφορά θα χρειαστεί κάποιο νέο χρονικό διάστημα στο οποίο η χελώνα θα καλύψει μια νέα απόσταση και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρο. Έτσι, φαίνεται ότι ο Αχιλλέας θα χρειαστεί άπειρο χρόνο για να φτάσει τη χελώνα (Αναπολιτάνος, 1985, Fisschbein, 2001).

Αν υποθέσουμε ότι ο Αχιλλέας τρέχει με δεκαπλάσια ταχύτητα από τη χελώνα τότε όταν αυτός θα διανύσει ένα στάδιο για να φτάσει τη χελώνα, αυτή θα διανύσει το 1/10 του σταδίου. Αν αυτή η διαδικασία συνεχίζεται ο Αχιλλέας θα διανύσει 1+0,1+0,01+0,001+… στάδια.

Στην αριστοτελική αντίληψη όπως ήδη αναφέρθηκε, τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος θεωρούνται δυνατότητες για αντίστοιχες νοητικές πράξεις διαίρεσής του, οι οποίες πρέπει να είναι συνειδητές από το έλλογο ον που τις πραγματοποιεί. Τα εκάστοτε σημεία-θέσεις της ευθείας και οι αντίστοιχες χρονικές στιγμές έχουν μόνο δυνητική και όχι απόλυτη ύπαρξη. Έτσι, η αριστοτελική ερμηνεία για το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας είναι ότι λανθασμένα θεωρείται πως μπορούν να συνειδητοποιηθούν, από το έλλογο ον ως ολότητα οι άπειρες πράξεις διαίρεσης που πρέπει να πραγματωθούν προκειμένου να ολοκληρωθεί η διαδικασία (Αναπολιτάνος 1985).

Ο Enriques (1948/1982) θεωρεί ότι τα παράδοξα του Ζήνωνα για την κίνηση, έρχονται να τροφοδοτήσουν την αντιπαράθεση με τον ατομισμό των Πυθαγορείων. Σύμφωνα με τον Enriques, αν υπήρχε ένα γεωμετρικό αδιαίρετο ε, το άθροισμα ε+ε/2+ε/3+...(άπειροι το πλήθος προσθετέοι), προσθετέων που έχουν έστω και κάποια ελάχιστη έκταση, θα έπρεπε να είναι άπειρο. Ο F.Enriques, σημειώνει ότι:

> … προλαβαίνεται εδώ, σε αρνητική μορφή, το αίτημα των Ευδόξου-Αρχιμήδη, που λέει ότι το υπο-πολλαπλάσιο ενός οποιουδήποτε διαστήματος μπορεί πάντα να είναι μικρότερο από ένα άλλο δεδομένο διάστημα οσοδήποτε μικρό. Δεν ισχυριζόμαστε βέβαια ότι ο Ζήνωνας είχε κατά νου το αίτημα αυτό, με τη συγκεκριμένη μορφή που του δίνει ο Αρχιμήδης, ή ότι είχε ανακαλύψει, σε ξεκαθαρισμένη μορφή, μια ισοδύναμη πρόταση σαν εκείνη που συναντούμε στον Ευκλείδη, ωστόσο όμως έπρεπε να κατέχει μια κάποια διαίσθηση (intuition), περισσότερο ή λιγότερο συνειδητή, του

> γεωμετρικού γεγονότος, έπρεπε δηλ. να αισθάνεται ότι είναι αδύνατο να εννοήσουμε μέσα σε μια πεπερασμένη γραμμή άπειρα σημεία, αν αυτά έχουν όλα μια κάποια έκταση ελάχιστη, όχι ίση με το μηδέν. (σ. 22-23)

Ο Fischbein (2001) θεωρεί ότι τα παράδοξα του Ζήνωνα εμφανίζονται ως τέτοια λόγω της άδηλης δράσης του χωρικού μοντέλου στον τρόπο που σκεφτόμαστε την έννοια του χρόνου. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

> Ζούμε με το άδηλο χωρικό μοντέλο του χρόνου, σκεπτόμαστε με αυτό, διαπραγματευόμαστε με αυτό, συμπράττουμε κοινωνικά, χρησιμοποιώντας το συνειδητά. Η χωρική μεταφορά είναι τόσο βαθιά σφηνωμένη μέσα στη γλώσσα μας, μέσα στη λογική μας, που δεν αισθανόμαστε κάποια ασυμφωνία όταν συλλογιζόμαστε για το χρόνο σε χωρικούς όρους. (σ. 319)

Ψυχολογικά ο χρόνος θεωρείται άπειρος αλλά όχι άπειρα διαιρετός, ενώ ο χώρος θεωρείται και άπειρος αλλά και άπειρα διαιρετός. Σύμφωνα με τον Fischbein, η κίνηση, και αντίστοιχα ο χρόνος, δεν είναι απείρως διαιρετός. Ψυχολογικά δεν υφίσταται η απειρία στιγμών. Για το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας ο Fischibein (2001) αναφέρει:

> Το παράδοξο λύνεται μόνο επιτυγχάνοντας –το οποίο είναι ψυχολογικά πολύ δύσκολο – την απόσπαση της καθαρής διαίσθησης της διάρκειας από τη σκλαβιά της εξάρτησής της από το χωρικό μοντέλο με τους πολύ δυνατούς εξαναγκασμούς του. (σ. 321)

Θα πρέπει να διευκρινισθεί ότι τα παράδοξα του Ζήνωνα δεν αποτελούν παράδοξα στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας. Για παράδειγμα, το παράδοξο της διχοτομίας δεν αποτελεί μαθηματικά παράδοξο αφού το άπειρο άθροισμα των διαστημάτων είναι το άθροισμα άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ = ½ που ισούται με 1. Αντίστοιχα, η μαθηματική έκφραση του δεύτερου παραδόξου μας οδηγεί στον απειροψήφιο δεκαδικό 1,111… ο οποίος ισούται με 10/9. Όμως η «λύση του παραδόξου είναι ψυχολογική, όχι μαθηματική» (Fischbein, 2001, σ. 320). Η μαθηματική λύση θα λέγαμε ότι λύνει ένα εντελώς διαφορετικό πρόβλημα από αυτό που καλείται να λύσει κάποιος στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει τα παράδοξα.

Η Sierpinska (1990) σε έρευνά της επιχείρησε να ερμηνεύσει τις αυθόρμητες επεξηγήσεις δεκαεξάχρονων μαθητών για τα παράδοξα του Ζήνωνα «ο Αχιλλέας και η χελώνα» και «Διχοτομία». Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές δεν έχουν την αίσθηση του παράδοξου με τις λεκτικές περιγραφές των παραδόξων. Το αίσθημα του παράδοξου εμφανίζεται μόνο όταν οι μαθητές βλέπουν τη μαθηματική μορφή των παραδόξων με όρους αθροίσματος άπειρων αριθμών. Η Sierpinska (1990) αναφέρει για τις αντιλήψεις των μαθητών:

> Τα δυο παράδοξα του Ζήνωνα δεν μπορούν να επιλυθούν με την έννοια του αθροίσματος των σειρών. Η μαθηματικοποίηση αποδεικνύεται ισοδύναμη με τα ίδια τα παράδοξα. Δεν μπορούν να λυθούν μόνο με τα μαθηματικά. Η ύπαρξη ή μη ύπαρξη του εν ενεργεία απείρου είναι πάνω απ’ όλα όχι ένα μαθηματικό αλλά ένα φιλοσοφικό πρόβλημα. Και η φιλοσοφία δεν δίνει καθορισμένες απαντήσεις σε τέτοια προβλήματα. (σ. 32)

2.5.5 Ετυμολογικό υπόβαθρο των αντιλήψεων για τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς

Η λέξη «ρητός» ετυμολογικά προέρχεται από το ρήμα «λέγω» που στον μέλλοντα λέγεται και «ἐρῶ». Ρητός είναι αυτός που μπορεί να ειπωθεί ή να εκφρασθεί. Ρητός είναι ο καθορισμένος, ο σαφής, ο συγκεκριμένος. Έτσι, ετυμολογικά θα λέγαμε ότι άρρητος είναι αυτός που δεν μπορεί να ειπωθεί ή να εκφρασθεί.

Στα μαθηματικά, ρητός αριθμός είναι αυτός που μπορεί να εκφρασθεί ως κλάσμα ή ως λόγος ή αλλιώς ως πηλίκο δυο ακεραίων αριθμών και συνεπώς άρρητος είναι αυτός που δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

Για τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς οι έννοιες του ρητού και του άρρητου υπάρχουν αλλά δεν έχουν τα ίδια ονόματα. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι έννοιες αυτές στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Ο πρώτος σχετικός ορισμός (όρος α΄) στο βιβλίο Χ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη είναι:

> Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.
> Σύμμετρα λέγονται τα μεγέθη που μετριούνται από το ίδιο μέτρο, ενώ ασύμμετρα εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο.

Όταν αναφέρονται μεγέθη εννοούνται ομοειδή μεγέθη. Όταν δυο μεγέθη α, β είναι σύμμετρα συμβολίζουμε «αΣβ» και όταν είναι ασύμμετρα «$\alpha \not\Sigma \beta$». Αλλιώς θα λέγαμε ότι δυο μεγέθη είναι σύμμετρα, αν και μόνο αν μετρούνται από το ίδιο μέτρο, συμμετρούνται. Δηλαδή, τα μεγέθη α, β είναι σύμμετρα αν και μόνο αν υπάρχει ένα μέγεθος ε και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε $\alpha = \mu \cdot \varepsilon$ και $\beta = \nu \cdot \varepsilon$ ενώ θα λέγονται ασύμμετρα αν για κάθε μέγεθος ε δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιο ώστε να ισχύει: $\alpha = \mu \cdot \varepsilon$ και $\beta = \nu \cdot \varepsilon$.

Αλλιώς θα μπορούσε να ειπωθεί ότι δυο μεγέθη α, β είναι σύμμετρα αν και μόνο αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε: α/β = μ/ν. Στα «Στοιχεία» η ισοδυναμία αυτή εμφανίζεται στις προτάσεις Χ5 (5η πρόταση στο βιβλίο Χ των «Στοιχείων»), και Χ6 οι οποίες διατυπώνονται ως εξής:

> Χ5: Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.
>
> Χ6: Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Να σημειωθεί ότι στα «Στοιχεία» αριθμοί θεωρούνται μόνο οι φυσικοί αριθμοί και το μηδέν και το ένα δεν θεωρούνται αριθμοί όπως φαίνεται από τους δυο πρώτους ορισμούς του βιβλίου VII των «Στοιχείων» οι οποίοι είναι:

> Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.
> Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
>
> Μονάδα είναι το καθένα από τα όντα.
> Αριθμός είναι το πλήθος που αποτελείται από μονάδες.

Ο δεύτερος ορισμός (όρος β΄) στο βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι ο εξής:

> Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.
> Ευθείες δυνάμει σύμμετρες ονομάζονται οι ευθείες που τα τετράγωνά τους είναι σύμμετρα μεγέθη και ευθείες δυνάμει ασύμμετρες ονομάζονται οι ευθείες που τα τετράγωνά τους είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Όταν αναφέρονται ευθείες εννοούνται ευθύγραμμα τμήματα. Ο παραπάνω ορισμός θα μπορούσε να αποδοθεί με σύγχρονους όρους ως εξής:

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, β λέγονται δυνάμει σύμμετρα αν «$\alpha^2 \Sigma \beta^2$» και δυνάμει ασύμμετρα αν «$\alpha^2 \Sigma \beta^2$».

Να σημειωθεί ότι στους παραπάνω ορισμούς οι αναφορές είναι για τα ίδια τα μεγέθη και όχι για τα μέτρα τους. Δηλαδή, όταν στα «Στοιχεία» υπάρχει αναφορά για το τετράγωνο ενός τμήματος η αναφορά αυτή είναι κυριολεκτική, δηλαδή αναφέρεται στο τετράγωνο με πλευρά το συγκεκριμένο τμήμα και όχι στο γινόμενο του μήκους του τμήματος με τον εαυτό του.

Με σύγχρονους όρους, τα ευθύγραμμα τμήματα α, β λέγονται δυνάμει σύμμετρα αν υπάρχει τμήμα ε και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε: $\alpha^2 = \mu \cdot \varepsilon$ και $\beta^2 = \nu \cdot \varepsilon$. Ο τρίτος ορισμός (όρος γ΄) στο βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι:

> Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

Μια απόδοση στα νεοελληνικά θα ήταν η εξής: Για μια δοθείσα ευθεία αποδεικνύεται ότι υπάρχουν άπειρες ευθείες σύμμετρες με αυτή και άπειρες ευθείες ασύμμετρες με αυτή όπως και δυνάμει σύμμετρες και δυνάμει ασύμμετρες. Μια ευθεία θα λέγεται ρητή αν είναι σύμμετρη ή δυνάμει σύμμετρη ως προς τη δοθείσα ρητή ευθεία ενώ αν είναι ασύμμετρες θα λέγονται άρρητοι.

Με σύγχρονους όρους το νόημα του τρίτου ορισμού θα μπορούσε να αποδοθεί ως εξής:

Αν ε ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα τότε το τμήμα α θα λέγεται ρητό αν «αΣε» ή «$\alpha^2 \Sigma \varepsilon^2$» και άρρητο σε κάθε άλλη περίπτωση. Δηλαδή, αν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε $\alpha = \mu \cdot \varepsilon$ ή $\alpha^2 = \mu \cdot \varepsilon^2$, τότε το τμήμα α θα λέγεται ρητό (ως προς το α), ενώ αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός θα λέγεται άρρητο. Παρατηρούμε μια σχετική διαφοροποίηση του περιεχομένου των όρων ρητός και άρρητος, όπως χρησιμοποιείται στα «Στοιχεία» και στη σύγχρονη εκδοχή τους. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα α ως μονάδα τότε σύμφωνα με τα «Στοιχεία» η διαγώνιος β του τετραγώνου πλευράς α ενώ είναι ασύμμετρη ως προς το α θα λέγεται ρητή επειδή $\beta^2 = 2 \cdot \alpha^2$. Σήμερα, όμως, θεωρούμε ότι το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου άρρητο με μονάδα μέτρησης την πλευρά του.

Θα ήταν δυνατό να δοθεί μια ερμηνεία με βάση το ετυμολογικό υπόβαθρο των λέξεων ρητός και άρρητος. Γιατί ο ρητός είναι ο καθορισμένος και ο άρρητος να είναι ακαθόριστος;

Μια απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορούμε να δοθεί με βάση την πρόταση Χ2 των «Στοιχείων».

> Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.
> Αν από δυο άνισα μεγέθη ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δε μετρά τον προηγούμενό του, τότε τα δυο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Ως ανθυφαίρεση θεωρείται ο ευκλείδειος αλγόριθμος της διαίρεσης. Δηλαδή, αν α και β δυο αριθμοί (φυσικοί) με $\alpha > \beta$ και διαιρέσουμε (μετρήσουμε) το α με το β απομένει υπόλοιπο $0 \leq \upsilon < \beta$. Στη συνέχεια, διαιρούμε το β με το υ και προκύπτει υπόλοιπο υ_1. Από την επαναλαμβανόμενη διαδικασία της ανθυφαίρεσης προκύπτει ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δυο αριθμών είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαδοχικών διαιρέσεων που περιγράψαμε παραπάνω.

Από την πρόταση Χ2 βλέπουμε ότι η άπειρη ανθυφαίρεση οδηγεί σε ασύμμετρα μεγέθη. Η πρόταση Χ3 είναι η εξής:

> Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.
> Αν δίνονται δυο σύμμετρα μεγέθη, να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Έτσι, προκύπτει ότι τα σύμμετρα μεγέθη έχουν πεπερασμένη ανθυφαίρεση και με αντιθετοαντιστροφή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα ασύμμετρα μεγέθη έχουν άπειρη ανθυφαίρεση. Έτσι, ο προσδιορισμός ενός μεγέθους με κάποιο άλλο, όταν αυτά είναι ασύμμετρα, δεν μπορεί να ολοκληρωθεί σε πεπερασμένα βήματα και με την έννοια αυτή θα μπορούσε να δικαιολογηθεί ο όρος άρρητα για τα ασύμμετρα μεγέθη.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Το ερευνητικό πρόβλημα

Στη διδακτική πρακτική αρκετές μαθηματικές έννοιες δεν παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό ή τα σχολικά εγχειρίδια με τους πλήρεις και αυστηρούς ορισμούς τους. Πολύ περισσότερο αυτό συμβαίνει στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όπου βασικές έννοιες όπως του πραγματικού αριθμού, του ορίου ή του απείρου, χρησιμοποιούνται συνεχώς χωρίς όμως να έχουν οριστεί με ακρίβεια. Έτσι, κατά την εκπαιδευτική πράξη αναπτύσσονται από μαθητές και εκπαιδευτικούς διαισθητικές προσεγγίσεις χωρίς πολλές φορές να είναι συνειδητοποιημένη, η αναγκαστική έλλειψη της αυστηρής προσέγγισης. Οι διαισθητικές αυτές προσεγγίσεις διαμορφώνονται τόσο από το γνωστικό υπόβαθρο του εκπαιδευτικού όσο και από τη προσπάθειά του να μετασχηματίσει ένα γνωστικό περιεχόμενο σε διδακτικό αντικείμενο. Στην προσπάθεια αυτή ο εκπαιδευτικός καλείται σε αλληλεπίδραση με τις ιδέες των μαθητών, να περιγράψει τις μαθηματικές έννοιες λεκτικά, να αναγνωρίσει και να ερμηνεύσει πιθανές παρανοήσεις των μαθητών και να αναπτύξει διδακτικές προσεγγίσεις που διευκολύνουν τη κατανόηση των μαθητών χωρίς να διολισθαίνει σε ερμηνείες που μπορεί να προκαλέσουν μελλοντικές παρανοήσεις στους μαθητές. Κατά τη διαδικασία αυτή οι ιδέες των μαθητών δεν κρίνονται από τον εκπαιδευτικό μόνο μαθηματικά αλλά ερμηνεύεται το υπόβαθρό τους, αναπτύσσονται συμβολισμοί και γίνονται συνδέσεις με άλλες μαθηματικές ή μη μαθηματικές έννοιες.

Με βάση τα παραπάνω θεωρήσαμε ότι η θεσμική γνώση των εκπαιδευτικών δεν καθορίζει με αποκλειστικό τρόπο τη διδακτική τους πρακτική. Έτσι, αποφύγαμε να μελετήσουμε την τυπική μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών σ' ένα απομονωμένο πλαίσιο με βάση κάποιο ερωτηματολόγιο ελέγχου κατανόησης του γνωστικού περιεχομένου. Επίσης, αποφύγαμε την παρακολούθηση και την ανάλυση πραγματικών διδασκαλιών προσπαθώντας να επικεντρώσουμε στις προσεγγίσεις και επιλογές των εκπαιδευτικών, απαλλαγμένων από την πολλαπλότητα των αλληλεπιδράσεων που ενέχει η πραγματική διδασκαλία.

Επιδιώξαμε να μελετήσουμε τις αντιλήψεις και τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών όπως αυτή αναπτύσσεται με βάση ένα ρεαλιστικό διδακτικό σενάριο, τα χαρακτηριστικά του οποίου αναπτύσσονται στην επόμενη ενότητα. Το μαθηματικό ζήτημα που διαπραγματεύθηκαν οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα είναι οι δεκαδικοί αριθμοί με περίοδο 9. Η συγκεκριμένη επιλογή έγινε, όχι μόνο επειδή από τη βιβλιογραφία, όπως έχει αναφερθεί, αρκετοί μαθητές και φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες μαθηματικής κατανόησης για το θέμα, αλλά και επειδή θεωρούμε ότι οι δυσκολίες αυτές προέρχονται από την ίδια τη φύση της έννοιας, τη σύνδεσή της με άλλες μαθηματικές έννοιες των Ανώτερων Μαθηματικών (άπειρο, σύγκλιση, σειρές πραγματικών αριθμών) και την ιδιαιτερότητα του συμβολισμού.

Οι ερευνητικοί στόχοι που μελετώνται είναι:

α) οι αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τις αναπαραστάσεις δεκαδικών αριθμών με περίοδο 9 και η σύνδεσή τους με τη διδακτική πρακτική κατά τον αναστοχασμό τους όσον αφορά σχετικές παρανοήσεις μαθητών λυκείου και

β) η συλλογιστική των εκπαιδευτικών και το υπόβαθρό της κατά τη διδακτική διαχείριση παρανοήσεων μαθητών λυκείου γι' αυτές τις αναπαραστάσεις.

3.2 Το ερευνητικό εργαλείο

3.2.1 Η ιδέα των διδακτικών σεναρίων

Όπως αναφέρει ο Shulman (1986) έχουν περάσει αρκετά χρόνια που η μελέτη περιπτώσεων (cases) έχει χρησιμοποιηθεί στην επαγγελματική εκπαίδευση (δικηγόρων, γιατρών κ.ά.). Επισημαίνεται όμως ότι η μελέτη περιπτώσεων δεν είναι σημαντική επειδή η διδασκαλία τους γίνεται με σκοπό την πρακτική εφαρμογή συγκεκριμένων μεθόδων και προσεγγίσεων. Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι αν η ουσία του επαγγέλματος (του δικηγόρου, του γιατρού, του δασκάλου) ήταν η πρακτική τότε δεν θα υπήρχε λόγος να εκπαιδεύονται οι υποψήφιοι επαγγελματίες στα πανεπιστήμια. Αντίθετα, υποστηρίζεται ότι η μελέτη περιπτώσεων είναι αποτελεσματική στη διδασκαλία του θεωρητικού υπόβαθρου του επαγγέλματος. Μια περίπτωση που προτείνεται να μελετηθεί δεν είναι απλά η αναφορά ενός γεγονότος (ενός συμπτώματος ενός ασθενή που αντιμετωπίζει ένας γιατρός, μιας δικαστικής απόφασης ή ενός διδακτικού συμβάντος). Μια περίπτωση που χρήζει μελέτης πρέπει να μπορεί να αναδείξει έναν θεωρητικό ισχυρισμό. Έτσι, ο Shulman (1986) δεν υποστηρίζει μια πιο πρακτική και συγκεκριμένη προετοιμασία των υποψήφιων εκπαιδευτικών αλλά τη χρησιμοποίηση της δύναμης της μελέτης περιπτώσεων στην ανάπτυξη πρακτικών προσεγγίσεων με συνείδηση του θεωρητικού τους υπόβαθρου.

Στις διερευνήσεις των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και της σχέσης τους με την πρακτική έχει επισημανθεί, εμφανής απόκλιση μεταξύ των θεωρητικών τους αντιλήψεων για τα μαθηματικά και την παιδαγωγική και της εφαρμοζόμενης πρακτικής τους (Thompson, 1992). Έτσι, στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής είμαστε αρκετά επιφυλακτικοί στην προσέγγιση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών μέσω ερωτήσεων σ' ένα αποπλαισιωμένο από το διδακτικό πλαίσιο επίπεδο σε σχέση με μαθηματικά ή παιδαγωγικά ζητήματα. Αντίθετα, θεωρήσαμε ότι μπορούμε να έχουμε πιο αυθεντική πρόσβαση στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για ένα συγκεκριμένο μαθηματικό ζήτημα με διδακτικό ενδιαφέρον όταν αυτοί τοποθετούνται σ' ένα υποθετικό αλλά ρεαλιστικό διδακτικό πλαίσιο.

Θεωρήσαμε επίσης ότι η μελέτη των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για το συγκεκριμένο μαθηματικό ζήτημα μέσω της μελέτης πραγματικών διδασκαλιών θα είχε περιορισμούς. Για παράδειγμα, η διαδικασία μετασχηματισμού της γνώσης του περιεχομένου προκειμένου να γίνει διδακτικό αντικείμενο υπόκειται σε αλλοιώσεις που ενδέχεται να κάνει αδιαφανείς τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών. Επίσης, ενδεχομένως να μην είχαμε διαπραγμάτευση σημαντικών ζητημάτων του περιεχομένου που έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία και μας ενδιέφεραν να τα μελετήσουμε ερευνητικά. Επιπρόσθετα ενδεχομένως να υπάρχει δυσκολία πρόσβασης στις αυθεντικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών μετά από ενημέρωση για την παρακολούθηση του μαθήματος από ερευνητές ή λόγω ενασχόλησης του εκπαιδευτικού με την διαχείριση της τάξης.

Έχει υποστηριχτεί ότι η διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών μέσα από τις τοποθετήσεις τους σε κατάλληλα αναπτυγμένα διδακτικά σενάρια, μπορεί να είναι πιο ουσιαστική (Biza, Nardi & Zachariades, 2007; Nardi, Biza & Zachariades, 2012; Zazkis, Sinclair & Liljedahl, 2013). Έτσι, έχουν αναπτυχθεί διδακτικά σενάρια τόσο για ερευνητικούς σκοπούς αλλά και για τις ανάγκες επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών. Τα σενάρια αυτά έχουν συνήθως την εξής δομή. Στο πρώτο μέρος τίθεται προς διαπραγμάτευση σε μια φανταστική σχολική τάξη ένα μαθηματικό ζήτημα (στην περίπτωσή μας η αναπαράσταση 0,3999...) το οποίο γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία ή εμπειρικά ότι αντιμετωπίζεται με παρανοήσεις από τους μαθητές. Έτσι, κάποιοι υποθετικοί μαθητές δίνουν κάποιες αμφίσημες απαντήσεις οι οποίες δεν είναι ούτε πλήρως ορθές αλλά ούτε και εντελώς λανθασμένες. Σε δεύτερη φάση οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αναγνωρίσουν τις ενδεχόμενες παρανοήσεις στις απαντήσεις των μαθητών, να τις ερμηνεύσουν και να προσφέρουν κάποια διδακτική ανατροφοδότηση ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις αυτές.

Όπως αναφέρουν οι Biza et al. (2007) η μελέτη των απαντήσεων των εκπαιδευτικών σε τέτοιου τύπου σενάρια μπορεί να υποστηρίξει στόχους όπως:

1. Διερεύνηση της γνώσης του περιεχομένου των εκπαιδευτικών (teachers' subject-matter knowledge) – κυρίως όσον αφορά συγκεκριμένους τύπους της μαθηματικής σκέψης – και αναγνώριση κρίσιμων ζητημάτων προετοιμασίας τους για τη σχολική τάξη όπως για παράδειγμα τη διάκριση μεταξύ σχεσιακής (relational) και οργανικής (instrumental) (Skemp, 1976) γνώσης ή εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (Hiebert, 1986).

2. Διερεύνηση του ενδιαφέροντος των εκπαιδευτικών για συγκεκριμένους τύπους παιδαγωγικής και κυρίως διερεύνηση των τρόπων που αλληλεπιδρούν οι προτιμήσεις τους και επηρεάζονται από το προηγούμενο (για παράδειγμα με όρους κονστρουκτιβιστικών αρχών (Freudenthal, 1983), για την ενθάρρυνση της συμμετοχής των μαθητών στην ανακατασκευή των αρχικά ελλειπών ή λανθασμένων λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα.

3. Διερεύνηση της βαρύτητας που δείχνουν οι εκπαιδευτικοί σε ορισμένους τύπους διδακτικής πρακτικής μέσω της ανατροφοδότησης που παρέχουν στους μαθητές όπως για παράδειγμα τον τρόπο που χρησιμοποιούν τα παραδείγματα ή τις απεικονίσεις ως μέσο εξήγησης.

Τα διδακτικά σενάρια προσφέρουν τη δυνατότητα διερεύνησης και ανάπτυξης της ευαισθησίας (sensitivity) των εκπαιδευτικών απέναντι στις δυσκολίες και τις ανάγκες των μαθητών (Jaworski, 1994) και δίνουν τη δυνατότητα να παρέχεται επαρκής (παιδαγωγικά ευαίσθητη και μαθηματικά ακριβής) ανατροφοδότηση στο μαθητή. Συγκεκριμένα, ζητώντας από τον εκπαιδευτικό να εμπλακεί σε μια συγκεκριμένη (υποθετική αλλά ρεαλιστική) απάντηση κάποιου μαθητή η οποία χαρακτηρίζεται από ένα λεπτό μαθηματικό σφάλμα, μπορούμε να διερευνήσουμε όχι μόνο αν ο δάσκαλος μπορεί να εντοπίσει το λάθος, αλλά και να ερμηνεύσει τις αιτίες του δράττοντας της διδακτικής ευκαιρίας που του προσφέρεται (και τη γόνιμης γνωστικής σύγκρουσης που ενδεχομένως έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει).

Με βάση τα παραπάνω για το σχεδιασμό του σεναρίου που χρησιμοποιούμε στην έρευνα έχουμε λάβει υπόψη ότι το μαθηματικό περιεχόμενο αφορά κάποιο ζήτημα το οποίο είναι γνωστό για την λεπτότητά του ή για την πρόκληση δυσκολιών στους μαθητές (από την βιβλιογραφία ή την εμπειρία). Επίσης, οι υποθετικές απαντήσεις των μαθητών αντικατοπτρίζουν αυτή τη λεπτότητα ή τη δυσκολία προσέγγισης του ζητήματος και παρέχουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να προβληματιστεί και να επιδείξει τρόπους με τους οποίους θα βοηθούσε τον υποθετικό μαθητή να κατανοήσει τη λεπτότητα του ζητήματος ή να ξεπεράσει τη δυσκολία που εμφανίζεται. Τόσο το μαθηματικό περιεχόμενο όσο και οι υποθετικές απαντήσεις των μαθητών παρέχουν ένα πλαίσιο το οποίο επιτρέπει να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις και τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών.

3.2.2 Το διδακτικό σενάριο της έρευνας

Στην κατασκευή του σεναρίου λάβαμε υπόψη μας τη διαλεκτική προσέγγιση μεταξύ κατανόησης και επεξήγησης όπως αναπτύσσεται από τους Ricoeur (1976) και Lakatos (1976). Κατά την προσέγγιση αυτή αρχίζουμε με μια εικασία η οποία στη συνέχεια μπορεί να γίνει αποδεκτή, να τροποποιηθεί, να βελτιωθεί ή να απορριφθεί. Έτσι, με βάση το σενάριο μας, δίνεται η δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα, να κατανοήσουν τις γνώμες των φανταστικών μαθητών και στη συνέχεια να υιοθετήσουν κάποια άποψη, να διακρίνουν σωστά από λανθασμένα στοιχεία, να την τροποποιήσουν με σκοπό να την βελτιώσουν ή απλά να την απορρίψουν παρέχοντες σε κάθε περίπτωση τις απαραίτητες επεξηγήσεις ή ανατροφοδότηση.

Στη διαμόρφωση του διδακτικού σεναρίου βασιστήκαμε στα ευρήματα της σχετικής έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης όσον αφορά τους απειροψήφιους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς, τα οποία όπως ήδη αναφέραμε δεν περιορίζονται αυστηρά σε μαθηματικά ζητήματα αλλά επεκτείνονται και σε ευρύτερα επιστημολογικά θέματα. Επιλέξαμε τον αριθμό 0,3999... και όχι κάποιο άλλο όπως ο 0,999... προκειμένου να αποφύγουμε την πρόσθετη ιδιαιτερότητα που έχει ο δεύτερος ως ακέραιος.

Το σενάριο της έρευνας είναι το εξής:

> Σε μια σχολική τάξη Γ΄ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών θετικής κατεύθυνσης ο καθηγητής ρωτάει τους μαθητές: «Τι εκφράζει η παράσταση 0,3999… όταν τα 9 είναι άπειρα;». Τέσσερις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:
>
> Μαθητής Α: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία που τείνει στο 0,4.
> Μαθητής Β: Το 0,3999… είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,4.
> Μαθητής Γ: Ο 0,3999… είναι ο αμέσως πριν τον 0,4 αριθμός.
> Μαθητής Δ: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 +… αλλά επειδή συνεχώς αυξάνεται δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό.
>
> α) Ποιος πιστεύετε ότι μπορεί να ήταν ο στόχος της ερώτησης του καθηγητή;
> β) Αναφέρατε για κάθε έναν από τους τέσσερις μαθητές:
> i) πως νομίζετε ότι σκέφτηκε και έδωσε την παραπάνω απάντηση,
> ii) ποια θεωρείτε θετικά σημεία της άποψής του (αν υπάρχουν) και
> iii) ποιες είναι οι πιθανές παρανοήσεις του (αν υπάρχουν).
> γ) Αν είσασταν ο καθηγητής της παραπάνω τάξης πως θα βοηθούσατε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις στις οποίες αναφερθήκατε στην απάντηση του ερωτήματος β;

Συγκεκριμένα σχετικά με τη δήλωση των μαθητών Α και Β λάβαμε υπόψη μας τη δυσκολία διάκρισης που μπορεί να δημιουργηθεί μεταξύ του αριθμού 0,3999..., που αποτελεί μια διαφορετική αναπαράσταση του αριθμού 0,4, και της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, ... η οποία έχει όριο το 0,4 και οι όροι της προκύπτουν κατά τη διαδικασία καταγραφής του 0,3999... Με τη δήλωση του μαθητή Γ επιδιώκουμε να εξετάσουμε πως θα διαχειριστούν οι εκπαιδευτικοί την αδυναμία χρήσης της ιδιότητας της πυκνότητας από τους μαθητές. Με τη δήλωση του μαθητή Δ μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών κατά τη διαπραγμάτευση ενός αθροίσματος άπειρων προσθετέων το οποίο προκύπτει ως ανάπτυγμα ενός απειροψήφιου περιοδικού δεκαδικού αριθμού.

Η διαπραγμάτευση των ερωτήσεων του σεναρίου γίνεται εντός ενός ευρύτερου περιβάλλοντος προσέγγισης των εννοιών, όπως η διπλή φύση μαθηματικών αντικειμένων, ως διαδικασίες και ως έννοιες (Sfard, 1991; Gray & Tall, 1994) και η διπλή φύση του απείρου ως εν δυνάμει και εν ενεργεία άπειρο (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown; 2005a). Αναδεικνύονται σημαντικές ιδέες και δομές όπως η ιδιότητα της πυκνότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Επίσης, αναπτύσσονται σημαντικές μαθηματικές πρακτικές όπως η τεκμηρίωση της ισοδυναμίας διαφορετικών αναπαραστάσεων φροντίζοντας για την ακρίβεια και την συνέπεια στη μαθηματική γλώσσα και τους συμβολισμούς. Αυτά είναι στοιχεία που συγκροτούν όπως προαναφέραμε τον *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου* σε σχέση με το συγκεκριμένο ζήτημα.

Οι εκπαιδευτικοί, επομένως, καλούνται να διαπραγματευτούν με έναν παιδαγωγικά πρόσφορο τρόπο, ένα πολύπλοκο πλέγμα μαθηματικών εννοιών, συμβόλων και αναπαραστάσεων με έμφαση στις μεταξύ τους συνδέσεις, θέτοντας προκλήσεις ακόμα και για το προσωπικό τους μαθηματικό οικοδόμημα. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι δεν αντιμετωπίζουμε τις αντιλήψεις των καθηγητών ως ελλειμματικές αλλά θεωρούμε ότι αποτελούν μέρος ενός συστήματος νοηματοδοτήσεων που μας ενδιαφέρει να διερευνήσουμε.

3.3 Συλλογή δεδομένων

Οι ερωτήσεις του σεναρίου απαντήθηκαν γραπτά από 106 καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (36 άνδρες και 70 γυναίκες) οι οποίοι διέθεταν από ελάχιστη έως και εικοσαετή διδακτική εμπειρία. Οι απαντήσεις δόθηκαν στο πλαίσιο μιας εισαγωγικής εξέτασης σ’ ένα Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών. Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν πτυχίο μαθηματικού τμήματος με τετραετή φοίτηση.

Επίσης, διενεργήθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις με 15 από τους παραπάνω εκπαιδευτικούς. Οι συνεντεύξεις είχαν διάρκεια περίπου 45 λεπτά της ώρας, μαγνητοφωνήθηκαν και ακολούθησε η πλήρης απομαγνητοφώνησή τους. Η επιλογή των εκπαιδευτικών για τις συνεντεύξεις έγινε με βάση τις γραπτές απαντήσεις τους στις ερωτήσεις του σεναρίου, προκειμένου να διευκρινίσουν και να εκφράσουν αναλυτικά τις απόψεις τους για τα ζητήματα που εξετάζουμε. Στη συνέχεια δημιουργήθηκε ένα προφίλ για τον κάθε εκπαιδευτικό που έδωσε συνέντευξη το οποίο αφορούσε κυρίως ζητήματα όπως η εκπαιδευτική του εμπειρία και η επίδοσή του στα μαθήματα του απειροστικού λογισμού. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων τέθηκαν άμεσα ερωτήματα όπως «τι εκφράζει η αναπαράσταση 0,3999... για σένα;» ή έμμεσα όπως «τι εννοείς όταν έγραψες ότι δεν είναι απλά ένας αριθμός;» και κάθε συνέντευξη προσαρμόστηκε στο γραπτό δοκίμιο και τις τοποθετήσεις του κάθε εκπαιδευτικού.

3.4 Μεθοδολογία ανάλυσης δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων μας έχουμε χρησιμοποιήσει ένα συνδυασμό ποσοτικών και ποιοτικών εργαλείων ανάλυσης. Σε πρώτη φάση προχωρήσαμε στην ποσοτική ανάλυση των δεδομένων μας ώστε να αποτυπώσουμε με έναν ολιστικό τρόπο τις αντιλήψεις και τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα. Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για τις ταξινομήσεις των δηλώσεων των εκπαιδευτικών έγινε με βάση τις τεχνικές της Θεμελιωμένης Θεωρίας (grounded theory) που περιλαμβάνει επαναλαμβανόμενους κύκλους ανάγνωσης, κωδικοποίηση, ανακωδικοποίηση και ομαδοποίηση και την εκ νέου ομαδοποίηση των στοιχείων που οδηγούν στην ταυτοποίηση των κατηγοριών των απαντήσεων για κάθε κριτήριο (Corbin & Strauss, 2008).

Συγκεκριμένα, στην έρευνά μας σε πρώτη φάση έγινε αναλυτική ανάγνωση των γραπτών δοκιμίων των εκπαιδευτικών επικεντρώνοντας στο ζήτημα που επιδιώκουμε να αναλύσουμε. Στη συνέχεια διαφαίνονταν αδρά κάποιες κατηγορίες και διαμορφώθηκε μια αρχική ταξινόμηση των σχετικών αντιλήψεων των εκπαιδευτικών στις κατηγορίες αυτές. Στην προσπάθεια αυτή οι κατηγορίες κωδικοποιούνταν καταγράφοντας τα βασικά χαρακτηριστικά της κάθε μιας απ’ αυτές. Μετά την σχετική αποσαφήνιση των κατηγοριών γινόταν έλεγχος για το περιεχόμενο της κάθε κατηγορίας. Επίσης, καταγράφονται χαρακτηριστικά παραδείγματα για την κάθε κατηγορία τα οποία παρουσιάζονται στην ανάλυση προκειμένου να αποσαφηνιστεί το περιεχόμενο των επιμέρους κατηγοριών. Οι ποσοτικοί πίνακες που προέκυπταν από τη διαδικασία αυτή, οι επιμέρους κωδικοί και τα κριτήρια καθώς και το περιεχόμενο των επιμέρους κατηγοριών συζητούνταν εκτενώς και μετασχηματίζονταν, από μια ομάδα τριών ερευνητών, μέχρι να συμφωνηθεί ένα αποδεκτό αποτέλεσμα. Την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων μας συνοδεύει σε κάθε περίπτωση η ανάλυση αντίστοιχων παραδειγμάτων της κάθε κατηγορίας προσφέροντας ποιοτικά χαρακτηριστικά στην ανάλυση ενισχύοντας την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Με βάση τον προαναφερόμενο συνδυασμό ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων ανάλυσης μελετήθηκαν κυρίως οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το ζήτημα μέσα από την διαδικασία αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών του σεναρίου αλλά και με βάση τις διδακτικές τους προτάσεις στους μαθητές.

Το δεύτερο μέρος της ανάλυσης γίνεται αποκλειστικά με ποιοτικές μεθόδους προκειμένου να μελετηθεί η διδακτική συλλογιστική των εκπαιδευτικών και οι πηγές της τόσο κατά την ερμηνεία των δηλώσεων των μαθητών του σεναρίου όσο και κατά τη διδακτική τους προσέγγιση. Η ανάλυση των δηλώσεων των εκπαιδευτικών στο δεύτερο μέρος γίνεται σε σύνδεση με τα επιστημολογικά θέματα που ανακύπτουν και την αντίστοιχη ιστορική εξέλιξη των εννοιών που διαπραγματεύονται οι εκπαιδευτικοί, τη φιλοσοφική συζήτηση που έχει αναπτυχθεί σε σχέση με τις συγκεκριμένες έννοιες, τα ζητήματα σημειωτικής που προκύπτουν από την ερμηνεία και χρησιμοποίηση των εμφανιζόμενων συμβόλων και φυσικά από την πλευρά της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η θεώρηση αυτή έχει έναν διεπιστημονικό χαρακτήρα ο οποίος θεωρούμε ότι μπορεί να προσφέρει ιδιαίτερα για ζητήματα διδασκαλίας της Ανάλυσης όπως αυτά που διαπραγματευόμαστε στην έρευνά μας.

3.4.1 Μεθοδολογία ανάλυσης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την παράσταση 0,3999...

Σύμφωνα με τους Ball et. al. (2008, σ. 401) για την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικοί τύποι μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία. Συγκεκριμένα αναφέρουν:

> Με άλλα λόγια, η αναγνώριση μιας λανθασμένης απάντησης είναι κοινή γνώση περιεχομένου (CCK), ενώ η ταξινόμηση της φύσης ενός λάθους, ιδιαίτερα ενός ασυνήθιστου λάθους, συνήθως απαιτεί ευελιξία στη σκέψη για το νόημα με τρόπους την εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου (SCK). Αντίθετα, η εξοικείωση με τα κοινά λάθη και η απόφαση για το ποια από τα κοινά λάθη είναι πιο πιθανό να κάνουν οι μαθητές αποτελούν παραδείγματα της γνώσης του περιεχομένου και των μαθητών (KCS).

Έτσι, σύμφωνα με το πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως *κοινή μαθηματική γνώση* ότι η αναπαράσταση 0,3999… εκφράζει έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό, ότι κάθε αριθμός αποτελεί μια σταθερή ποσότητα και ότι δεν υπάρχει ο αμέσως προηγούμενος ρητός αριθμός ενός αριθμού. Οι γνώσεις αυτές είναι τυπικά αρκετές για την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών του σεναρίου.

Σε ποιο βαθμό, ωστόσο, αυτές οι γνώσεις παραμένουν επαρκείς, δηλαδή αρκεί η *κοινή γνώση του περιεχομένου*, όταν το πλαίσιο διαπραγμάτευσή της γίνεται σύνθετο, όπως στην περίπτωση του σεναρίου της έρευνάς μας; Στην περίπτωση αυτή διερευνούμε τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν ένα ευρύ και ενίοτε πολύπλοκο φάσμα μαθηματικών ιδεών και συνδέσεων που αποτυπώνονται στις παρανοήσεις των μαθητών, οδηγώντας τους συχνά σε κρίσιμα μαθηματικά και επιστημολογικά ζητήματα της μαθηματικής γνώσης, θέτοντας προκλήσεις ακόμα και για προσωπικό τους μαθηματικό οικοδόμημα.

Επαρκούν αυτές οι γνώσεις για να μπορέσει ένας εκπαιδευτικός να αναγνωρίσει τις σχετικές παρανοήσεις των μαθητών ή ορισμένες απαιτούν πιο εξειδικευμένο και στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο, το οποίο δεν είναι απαραίτητο σε όσους χρησιμοποιούν τη μαθηματική γνώση εκτός διδακτικού πλαισίου; Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η *κοινή* *γνώση του περιεχομένου* δεν είναι αρκετή και απαιτείται όχι μόνο *εξειδικευμένη γνώση του*, αλλά και *γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου*, η οποία θα καταστήσει δυνατή την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών και τα αίτια αυτών, καθώς και την αποτελεσματική τους διδακτική διαχείριση. Ο ανωτέρω προβληματισμός είναι κεντρικός στην ερευνητική ατζέντα αυτού του μέρους της εργασίας.

Όμως κατά την ανάλυση των δεδομένων μας προέκυψε ότι στο συγκεκριμένο πλαίσιο για την αναγνώριση μιας παρανόησης οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν συχνά ασαφείς ή λανθασμένες μαθηματικά διαδρομές. Συγκεκριμένα, εμφανίζονται περιπτώσεις όπου η γνώμη κάποιου μαθητή του σεναρίου χαρακτηρίζεται λανθασμένη και η αιτιολόγηση που παρέχεται είναι επίσης λανθασμένη. Σε κάποιες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν την απάντηση ενός μαθητή ως λανθασμένη επειδή οι ίδιοι εμφανίζονται να συμφωνούν με την γνώμη κάποιου άλλου μαθητή του σεναρίου.

Η συγκρότηση του περιεχομένου των κατηγοριών έγινε μαζί με την προσπάθεια ταξινόμησης των απαντήσεων σε κατηγορίες και όχι εκ των προτέρων. Δηλαδή, σε πρώτη φάση εξεταζόταν αν σε κάθε δοκίμιο αναγνωρίζεται παρανόηση στη γνώμη του κάθε μαθητή του σεναρίου και ποια ήταν αυτή. Το βάρος δινόταν στη δεύτερη φάση όπου μελετούσαμε την αιτιολόγηση με βάση την οποία αναγνωριζόταν η συγκεκριμένη παρανόηση. Με αυτή την διαδικασία προέκυψαν για τη δήλωση του κάθε μαθητή: (α) αναγνώριση παρανόησης με ορθή προσέγγιση, (β) αναγνώριση παρανόησης με λανθασμένη προσέγγιση, (γ) αναγνώριση παρανόησης με ασαφή προσέγγιση, (δ) απουσία θέσης σχετικά με την παρανόηση, (ε) δήλωση συμφωνίας με τον μαθητή και (στ) ασάφεια σχετικά με την αναγνώριση παρανόησης.

Επισημαίνουμε ότι στην περίπτωση (α) συμπεριλήφθηκαν εκείνες οι δηλώσεις των εκπαιδευτικών που αναγνώρισαν με ορθή μαθηματικά τεκμηρίωση την παρανόηση του αντίστοιχου μαθητή και από το υπόλοιπο δοκίμιο δεν προκύπτουν αντιφάσεις σχετικά με αυτή την τεκμηρίωση. Όμως όπως θα δούμε στην Ανάλυση, εμφανίζεται το φαινόμενο κάποιοι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίζουν σωστά την παρανόηση κάποιων μαθητών αλλά όχι όλων.

3.4.2 Μεθοδολογία ανάλυσης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για την παράσταση 0,3999...

Γνωρίζοντας από τη βιβλιογραφία ότι αναπαραστάσεις όπως η «0,3999...» δεν θεωρούνται από μαθητές και φοιτητές απαραίτητα ως ένας αριθμός θέλαμε να μελετήσουμε αν τέτοιες αντιλήψεις υπάρχουν και σε εκπαιδευτικούς μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, διερευνήσαμε το νόημα που συνδέεται με αυτή την αναπαράσταση σε εν ενεργεία καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι γραπτές απαντήσεις στις ερωτήσεις του σεναρίου κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με το αν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την αναπαράσταση «0,3999...» φαινόταν ότι παριστάνει μια διεργασία, μια έννοια ή ένα αμάλγαμα των δύο. Σε αρκετές περιπτώσεις όμως δεν υπήρχε σαφήνεια για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών καθώς εμφανίζονταν αντιφάσεις ή αμφισημίες.

Συγκεκριμένα θεωρήσαμε διεργασιακές τις προσεγγίσεις που ήταν σε συμφωνία με τους μαθητές Α, Β ή Δ. Κάποιοι, αποδίδουν στην αναπαράσταση 0,3999... χαρακτηριστικές ιδιότητες της ακολουθίας όπως ότι «τείνει σ' έναν αριθμό» (σε συμφωνία με το μαθητή Β), ενώ άλλοι ισχυρίζονται ότι το 0,3999... εκφράζει κάποια μεταβλητή που συνεχώς αυξάνεται (σε συμφωνία με το μαθητή Δ).

Σε αρκετές περιπτώσεις οι διεργασιακές αντιλήψεις για το 0,3999... συνυπήρχαν με αντιλήψεις που το θεωρούσαν αριθμό. Όμως στις περιπτώσεις αυτές η έννοια του αριθμού αλλοιώνεται και έχει συχνά χαρακτηριστικά μεταβλητής. Επίσης, δεν διαφαινόταν από το δοκίμιο ότι υπήρχε γνώση της σχέσης μεταξύ του 0,3999... και του 0,4.

Η επόμενη κατηγορία που διακρίναμε ήταν απαντήσεις εκπαιδευτικών που έδειχναν ότι υπήρχε γνώση της ισότητας 0,3999... = 0,4 και αρκετές φορές παρουσιάζονταν και κάποιες αποδείξεις για την ισότητα αυτή αλλά το κείμενο δεν ήταν απαλλαγμένο από λάθη.

Στην τελευταία κατηγορία εντάχθηκαν οι περιπτώσεις όπου ήταν γνωστή η ισότητα 0,3999... = 0,4 χωρίς να συνοδεύεται από παλινωδίες ή σφάλματα. Θεωρήσαμε ότι για την κατηγορία αυτή η αναπαράσταση 0,3999... γίνεται αντιληπτή ως διεργασιοέννοια (procept).

Η συγκρότηση των κατηγοριών εξελισσόταν μαζί με την ταξινόμηση των απαντήσεων και όχι εκ των προτέρων. Από τη μια είχαμε λάβει υπόψη τις γενικές θεωρητικές περιγραφές για τη διεργασία, την έννοια και τη διεργασιοέννοια (procept) όπως αναπτύχθηκαν από τους Gray και Tall και αναφέραμε στο θεωρητικό πλαίσιο της μελέτης μας. Όπως, έχουμε ήδη εξηγήσει η πορεία δεν ήταν πάντα σαφής και η εξέλιξη δεν ήταν γραμμική. Έτσι, οι κατηγορίες διαμορφώνονταν και με βάση τις απαντήσεις που ομογενοποιούσαν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά προσαρμοσμένα στα ζητήματα της έρευνάς μας. Μετά από μια αρχική ταξινόμηση αρκετές περιπτώσεις συζητούνταν από τρείς ερευνητές και ταξινομούνταν ανάλογα. Η συζήτηση αυτή διαμόρφωνε και το οριστικό περιεχόμενο των ίδιων των κατηγοριών.

3.4.3 Μεθοδολογία συνδυαστικής ανάλυσης αντιλήψεων και διδακτικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών

Στο Zoitsakos, Zachariades & Saconidis (2013) εξετάσαμε τις αντιλήψεις των καθηγητών για την αναπαράσταση «0,3999...» μέσω των γραπτών τους απαντήσεων στις παρανοήσεις των υποθετικών μαθητών του σεναρίου. Βασιζόμενοι στην προαναφερόμενη εργασία επιδιώκουμε στην παρούσα ενότητα, μια συνδυαστική ανάλυση των διδακτικών προτάσεων των εκπαιδευτικών και των αντιλήψεών τους.

Για το σκοπό αυτό, αναλύουμε τις διδακτικές τους προτάσεις σχετικά με δύο κριτήρια, τη *μαθηματική ορθότητα* και το επίπεδο του *φορμαλισμού* που υιοθετούν, με βάση τις τεχνικές της Θεμελιωμένης Θεωρίας (Corbin & Strauss, 2008). Για κάθε κριτήριο, εντοπίστηκαν τρεις τύποι διδακτικών προτάσεων, σχηματίζοντας ένα φάσμα που εκτείνεται από την ασυμφωνία μέχρι την πλήρη συμφωνία με το χαρακτηριστικό που υποδεικνύεται από το αντίστοιχο κριτήριο.

Συγκεκριμένα, σε σχέση με τη μαθηματική ορθότητα, οι προτάσεις διδασκαλίας διακρίνονται σε: α) μαθηματικά ορθές, β) μεικτές (συνδυασμός ορθών και λανθασμένων προσεγγίσεων ή ιδεών που θα μπορούσαν να θεωρηθούν σωστές ή λανθασμένες, λόγω αμφίσημων διατυπώσεων) και γ) προβληματικές (εμφανώς μαθηματικά λανθασμένων προσεγγίσεων). Όσον αφορά το κριτήριο του φορμαλισμού, οι διδακτικές προτάσεις χαρακτηρίστηκαν ως α) φορμαλιστικές (κατά την έγκριση κυρίως αμιγώς τυπικών μαθηματικών μεθόδων), β) συνδυαστικές (όταν χρησιμοποιούνται τόσο φορμαλιστικές όσο και διαισθητικές μέθοδοι, άμεσα ή έμμεσα) και γ) άτυπες (όταν καταφεύγουν κυρίως σε εμπειρικές, περιγραφικές και διαισθητικές προσεγγίσεις).

3.4.4 Μεθοδολογία ανάλυσης της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών

Μελετώντας τα δεδομένα μας αναδύονται οι βασικοί παράγοντες που συγκροτούν το περιεχόμενο και το υπόβαθρο της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών. Δηλαδή εκείνα τα πεδία γνώσης και σκέψης στα οποία βασίζονται οι προβληματισμοί τους, ενεργοποιούν τις διδακτικές προσεγγίσεις τους ή κάνουν τις διδακτικές τους επιλογές.

Η διαπραγμάτευση των ερωτήσεων του σεναρίου γίνεται εντός ενός ευρύτερου περιβάλλοντος προσέγγισης των εννοιών, όπως η διπλή φύση των μαθηματικών αντικειμένων, ως διαδικασίες και ως έννοιες (Sfard, 1991; Gray & Tall, 1994) θέτοντας στους εκπαιδευτικούς ζητήματα οντολογίας της έννοιας που διαπραγματεύονται. Επίσης, αναπτύσσονται προσεγγίσεις σχετικά με τη διπλή φύση του απείρου, ως ενεργεία (actual) και δυνάμει (potential) (Dubinsky et al., 2005a), καθώς και τα απειροστά θέτοντας φιλοσοφικά ζητήματα στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών. Αναδεικνύονται σημαντικές ιδέες και δομές όπως η ιδιότητα της πυκνότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Επίσης, αναπτύσσονται σημαντικές μαθηματικές πρακτικές όπως η τεκμηρίωση της ισοδυναμίας διαφορετικών αναπαραστάσεων φροντίζοντας για την ακρίβεια και την συνέπεια στη μαθηματική γλώσσα και τους συμβολισμούς αναπτύσσοντας ζητήματα σημειωτικής στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών.

Κατά την ανάλυση τόσο των γραπτών δοκιμίων και των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών διακρίνουμε στη συλλογιστική τους: (α) Στοιχεία σημειωτικής, όταν λέξεις, εκφράσεις ή σημεία των συμβόλων φαίνεται να έχουν καθοριστικό ρόλο στις προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών, (β) Στοιχεία οντολογίας, όταν οι εκπαιδευτικοί θέτουν θέματα σχετικά με τη φύση των εννοιών που διαπραγματεύονται, (γ) Στοιχεία Επιστημολογίας, όταν συναντάμε στο λόγο των εκπαιδευτικών θέματα που επικοινωνούν με την ιστορική εξέλιξη των εννοιών που διαπραγματεύονται και (δ) Στοιχεία φιλοσοφίας, όπου οι εκπαιδευτικοί ενσωματώνουν στοιχεία από τη φιλοσοφική ανάλυση των εννοιών στη διδακτική τους πρακτική.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιμερίζονται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αναλύονται με ποσοτικές και ποιοτικές μεθόδους οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών τόσο μέσα από τη διαδικασία αναγνώρισης και ερμηνείας των δηλώσεων των μαθητών του σεναρίου όσο και κατά τη διαδικασία ανατροφοδότησης προς τους μαθητές. Συγκεκριμένα έχουν αναλυθεί: (α) οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την παράσταση 0,3999..., (β) οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την παράσταση 0,399... οι οποίες στη συνέχεια ταξινομήθηκαν και (γ) οι διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών ως προς την ορθότητα και το φορμαλισμό σε συνδυασμό με τις αντιλήψεις τους όπως αυτές αποτυπώθηκαν στο φάσμα της προηγούμενης περίπτωσης (β). Οι τρείς αυτές αναλύσεις γίνονται με βάση τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών στα γραπτά τους δοκίμια. Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζεται ένας πίνακας ποσοτικών αποτελεσμάτων, ο οποίος προσφέρει μια γενική εικόνα των αποτελεσμάτων και στη συνέχεια οι επιμέρους κατηγορίες του πίνακα τεκμηριώνονται με αντίστοιχα επιλεγμένα αποσπάσματα από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών τα οποία συνοδεύονται από σχόλια και ερμηνείες που αιτιολογούν την ένταξη στην εκάστοτε κατηγορία, προσφέροντας μια μικροσκοπική προσέγγιση για την κάθε περίπτωση.

Στο δεύτερο μέρος γίνεται ανάλυση του περιεχομένου και της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών, τόσο από τα γραπτά τους δοκίμια όσο και από τις συνεντεύξεις. Κατά την ανάλυση έχουν προκύψει: (α) Στοιχεία με σημειωτικό υπόβαθρο, όπου αναδεικνύεται ο ρόλος των συμβόλων στη διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών, (β) Στοιχεία με οντολογικό υπόβαθρο, όπου αναλύονται θέματα σχετικά με τη φύση των εννοιών που προκύπτουν στη διδακτική διαπραγμάτευση (γ) Στοιχεία με επιστημολογικό υπόβαθρο, όπου μελετάται ο ρόλος της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών στο λόγο και στη διδακτική προσέγγιση των εκπαιδευτικών και (δ) Στοιχεία με φιλοσοφικό υπόβαθρο, όπου επισημαίνονται και αναλύονται συνδέσεις των προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών με το αντίστοιχο φιλοσοφικό τους υπόβαθρο. Στο τέλος έχουν διερευνηθεί δυο ζητήματα που προέκυψαν κατά την ανάλυση της ανατροφοδότησης προς τους μαθητές τόσο με βάση τα γραπτά δοκίμια των εκπαιδευτικών όσο και από τις συνεντεύξεις που είχαμε με κάποιους από αυτούς. Το ένα ζήτημα σχετίζεται με την πειστικότητα που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι έχουν οι αποδείξεις για τους μαθητές. Το άλλο ζήτημα είναι σχετικό με την αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών με τους μαθητές όταν αναπτύσσουν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις.

4.1 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τους περιοδικούς δεκαδικούς με περίοδο 9

4.1.1 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την παράσταση 0,3999...

Στον πίνακα 4.1.1.Α φαίνονται οι κατηγορίες που προέκυψαν σχετικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τους περιοδικούς με περίοδο 9 οι οποίες ανιχνεύθηκαν μέσα από την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών, κατά την ανάλυση των γραπτών δοκιμίων των εκπαιδευτικών. Στη συνέχεια αναλύουμε ξεχωριστά το περιεχόμενο της κάθε στήλης.

Πίνακας 4.1.1.Α: Κατηγορίες απαντήσεων με βάση την αναγνώριση της παρανόησης

	Αναγνώριση παρανόησης με ορθή προσέγγιση	Αναγνώριση παρανόησης με λανθασμένη προσέγγιση	Αναγνώριση παρανόησης με ασαφή προσέγγιση	Απουσία θέσης σχετικά με την παρανόηση	Δήλωση συμφω-νίας με τον μαθητή	Ασάφεια σχετικά με την αναγνώριση παρανόησης
Μαθ. Α	19	13	15	29	14	16
Μαθ. Β	21	18	9	27	14	17
Μαθ. Γ	25	17	25	18	3	18
Μαθ. Δ	27	8	20	20	18	13

Στην πρώτη στήλη του Πίνακα 4.1.1.Α εμφανίζεται ο αριθμός των δηλώσεων των εκπαιδευτικών που αναγνώρισαν με ορθή μαθηματικά τεκμηρίωση την παρανόηση του αντίστοιχου μαθητή και από το υπόλοιπο δοκίμιο δεν προκύπτουν αντιφάσεις σχετικά με αυτή την τεκμηρίωση. Όμως εμφανίζεται το φαινόμενο κάποιοι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίζουν σωστά την παρανόηση κάποιων μαθητών αλλά όχι όλων. Έτσι, ενώ το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στις γραμμές του πίνακα 4.1.1.Α είναι 106, δηλαδή ίσο με το πλήθος των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα, το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στις στήλες του πίνακα είναι διαφορερικό για την κάθε στήλη.

Για παράδειγμα, η δήλωση του καθηγητή Κ39, όπως προκύπτει από το παρακάτω απόσπασμα, είναι ασαφής σχετικά με την αναγνώριση παρανόησης στον μαθητή Α, όμως, αναγνωρίζει με σωστή προσέγγιση τις παρανοήσεις στους υπόλοιπους μαθητές και συνεπώς εντάσσεται στην πρώτη στήλη για τους μαθητές Β, Γ, Δ και στην έκτη στήλη για τον μαθητή Α.

> Ο μαθητής Α βάζει στην απάντησή του την έννοια της συνάρτησης και του ορίου. Όμως δεν είναι σίγουρο ότι αν όταν του ζητηθεί μπορεί να δείξει γιατί τείνει στο 0,4. […] Ο μαθητής Β δεν έχει κατανοήσει ότι ένας αριθμός είναι κάτι σταθερό και δεν μπορεί να τείνει κάπου αλλού. […Ο μαθητής Γ] μπερδεύει ότι υπάρχει επόμενος και προηγούμενος όπως στους φυσικούς. […Ο μαθητής Δ] κάνει ένα μεγάλο λάθος αφού αναφέρει ότι ο αριθμός συνεχώς αυξάνεται για να πει τελικά ότι δεν είναι ίσος με 0,4.

Όμως η αναγνώριση της παρανόησης ενός μαθητή του σεναρίου από κάποιον εκπαιδευτικό δεν σημαίνει ότι αυτή στηρίζεται σε μια ορθή προσέγγισή της. Υπάρχουν εκπαιδευτικοί που θεωρούν ως παρανόηση την απάντηση ενός μαθητή επειδή οι ίδιοι συμφωνούν με την λανθασμένη απάντηση κάποιου άλλου μαθητή. Για παράδειγμα, η εκπαιδευτικός Κ21 αναγνωρίζει παρανόηση στον μαθητή Γ επειδή η ίδια εκφράζει μια αντίληψη παρόμοια με αυτή του μαθητή Β. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

> Για το μαθητή Γ οι παρανοήσεις είναι αρκετές. […] ο αριθμός αυτός συνεχώς πλησιάζει το 0,4, δεν είναι απλά ο προηγούμενός του. Είναι ένας περιοδικός αριθμός που συνεχώς θα πλησιάζει το 0,4.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι το «πλησιάζει» που αναφέρει η Κ21 και το «τείνει» που αναφέρεται στην απάντηση του μαθητή Β δεν είναι ισοδύναμα. Για παράδειγμα, οι όροι της ακολουθίας 0,38, 0,388, 0,3888, ... «πλησιάζουν» συνεχώς τον αριθμό 0,4 αλλά η συγκεκριμένη ακολουθία δεν έχει όριο το 0,4 αλλά τον αριθμό $\frac{35}{90}$.

Το πλήθος τέτοιων τοποθετήσεων εκπαιδευτικών για τον αντίστοιχο μαθητή φαίνεται στη δεύτερη στήλη του πίνακα 4.1.1.Α.

Στην τρίτη στήλη είναι οι τοποθετήσεις που αναγνωρίζουν την ύπαρξη παρανόησης σε κάποιον μαθητή αλλά η προσέγγισή τους είναι ασαφής. Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ92 αναφέρει:

> Ο μαθητής Α έκανε το λάθος ότι ο αριθμός 0,3999... μπορεί να μεγαλώνει διαρκώς με τον ίδιο τρόπο αλλά ποτέ να μην γίνει ο αριθμός 0,4, διότι ο αριθμός αλλάζει ελάχιστα, απλά τα δεκαδικά του ψηφία αυξάνονται.

Στην τέταρτη στήλη εντάσσονται οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί δεν τοποθετούνται σχετικά με το αν ο αντίστοιχος μαθητής του σεναρίου έχει κάποια παρανόηση στη δήλωση του. Στην πέμπτη στήλη βρίσκονται οι τοποθετήσεις των εκπαιδευτικών που δηλώνουν ότι συμφωνούν με τη γνώμη του αντίστοιχου μαθητή. Ένα παράδειγμα, είναι η δήλωση της καθηγήτριας Κ21 που αναφέραμε προηγουμένως.

Στην έκτη στήλη εντάσσονται οι τοποθετήσεις εκείνες από τις οποίες δεν είναι σαφές αν αναγνωρίζεται κάποια παρανόηση στον εκάστοτε μαθητή. Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ16, ο οποίος παραθέτει μια απόδειξη της ισότητας 0,3999… = 0,4, αναφέρει: «Οι μαθητές Α και Β προφανώς έχουν διδαχθεί την έννοια του ορίου, (όπως και οι άλλοι δυο μαθητές) και το έχουν εκλάβει με ένα τρόπο διαισθητικό».

Σχετικά με τις προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών κατά την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών παρατηρούμε ότι, προέκυψαν αρκετές περιπτώσεις που η αναγνώριση της παρανόησης ενός μαθητή δεν προκύπτει από την ακριβή και συγκροτημένη αντίληψη του εκπαιδευτικού για το θέμα. Σε κάποιες περιπτώσεις αναγνωρίζονται παρανοήσεις για κάποιους από τους μαθητές του σεναρίου αλλά όχι για όλους. Σε άλλες περιπτώσεις οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών διολισθαίνουν προς τις αντιλήψεις των μαθητών του σεναρίου ή εμφανίζονται αντιφατικά στοιχεία στο συλλογισμό τους. Συχνά οι εκπαιδευτικοί προσφεύγουν σε άτυπα, διαισθητικά ή ανακριβή επιχειρήματα αδυνατώντας να τεκμηριώσουν με σαφήνεια την παρανόηση ενός μαθητή.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.1.Α, δυσκολότερα αναγνωρίζονται με σωστή τεκμηρίωση οι παρανοήσεις των μαθητών Α και Β (περίπου 20%) από ότι οι παρανοήσεις των μαθητών Γ και Δ (περίπου 25%). Μια ερμηνεία που μπορεί να δοθεί στη διαπίστωση αυτή είναι ότι για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς δεν είναι σαφές αν η αναπαράσταση 0,3999... είναι μεταβλητή ποσότητα ή σταθερός αριθμός. Αυτή η διαπίστωση είναι σε συμφωνία με τη βιβλιογραφία σχετικά με την προσέγγιση των απειροψήφιων δεκαδικών αναπαραστάσεων από μαθητές και φοιτητές, αλλά θα λέγαμε ότι δεν είναι αναμενόμενο για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι μάλιστα στην Ελλάδα έχουν ολοκληρώσει τις τετραετείς πανεπιστημιακές σπουδές τους στα μαθηματικά. Για την εγκυροποίηση αυτής της ερμηνείας, οδηγηθήκαμε σην ανάγκη για διεξοδικότερη μελέτη των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για το θέμα με βάση το σύνολο του γραπτού τους δοκιμίου, η οποία αναπτύσσεται στην επόμενη ενότητα.

4.1.2 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την παράσταση 0,3999...

Από την ανάλυση των απαντήσεων με βάση τα κριτήρια που αναπτύχθηκαν στην αντίστοιχη ενότητα της Μεθοδολογίας προέκυψαν τέσσερις κατηγορίες (με εξαίρεση των αναπάντητων ή ασαφών) οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.2.Α μαζί με τις περιγραφές και τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για την καθεμιά καθώς επίσης και τις συχνότητές τους.

Πίνακας 4.1.2.Α: Κατηγορίες απαντήσεων και αντίστοιχες συχνότητες

Κατηγορίες	Ν	Περιγραφές και Κριτήρια
Ανύπαρκτες ή ασαφείς απαντήσεις	10	
Διεργασία (Process)	30	Το 0,3999… κυρίως θεωρείται ως διεργασία (process)
Διεργασία και Έννοια (Αριθμός) με ένα τουλάχιστον λάθος	31	Το 0,3999… θεωρείται ως διεργασία και το αποτέλεσμα της (αριθμός) χωρίς να το ταυτίζουν με το 0,4 και κάπου εμφανίζεται κάποιο λάθος
Διεργασία και Έννοια (Αριθμός) με αμφιταλάντευση ανάμεσα στα δυο	12	Αναφέρουν την ισότητα 0,3999… = 0,4 αλλά υπάρχει και κάποιο λάθος
Διεργασιοέννοια (Procept)	23	Συνειδητοποίηση της ορθής προσέγγισης για το 0,3999…

Στη συνέχεια κάθε κατηγορία καταρχήν σχολιάζεται σε σχέση με το περιεχόμενο της και τη συχνότητα των απαντήσεων της και παρατίθενται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα για να επεξηγήσουν την κατηγορία.

Σύμφωνα με τον πίνακα 4.1.2.Α περίπου το 10% των καθηγητών δεν έδωσε καμία απάντηση ή έδωσε ασαφείς απαντήσεις. Για παράδειγμα ο καθηγητής Κ60 έγραψε:

> Ο στόχος του καθηγητή είναι η εισαγωγή της έννοιας του ορίου, αλλά επίσης και η έννοια της συνέχειας συνάρτησης [...]. Βεβαίως μπορεί να είναι και εισαγωγή στο όριο συνάρτησης όπου το $x \to \pm\infty$ επειδή το 0,3999... έχει άπειρα 9 (Προτιμώ το τελευταίο παράδειγμα).

Ένα αξιοσημείωτο ποσοστό καθηγητών περίπου 28% θεωρεί ρητά ή υπονοούμενα την αναπαράσταση 0,3999... ως διεργασία.

Η καθηγήτρια Κ23 στη γραπτή της απάντηση φαίνεται ότι αντιλαμβάνεται το 0,3999... ως μια διεργασία. Συγκεκριμένα έγραψε: «Αυτός ο αριθμός μπορεί συνεχώς να αυξάνεται αλλά δεν είναι αυτός ο λόγος για τον οποίο δεν γίνεται 0,4». Σύμφωνα με τη δήλωσή της το 0,3999... παριστάνει έναν αυξανόμενο μεταβλητό αριθμό. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης μετά τη σχετική ερώτηση του ερευνητή εξήγησε ότι και το 0,333... εκφράζει μια διαδικασία και όχι έναν αριθμό. Για την ακρίβεια ανέφερε:

> Μπορεί να είπα ότι το 0,333... είναι 1/3 αλλά δεν θεωρώ ότι είναι ακριβώς ένας αριθμός. Λογικά μπορεί να το χρησιμοποιούμε αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Πιστεύω ότι λειτουργεί σαν ακολουθία, ένα όριο που πάει όλο και πιο κοντά.

Άλλος ένας καθηγητής αυτής της κατηγορίας ο Κ83 εκφράζει παρόμοια άποψη στην απάντησή του. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Θα έλεγα στους μαθητές μου ότι το 0,3999... είναι μια αναπαράσταση και όχι ένας αριθμός. Είναι μια ακολουθία α_n για την οποία πρέπει να υπολογίσουν το όριο εφόσον το $n \to \infty$ (όπου $n \in \mathbb{R}$ ο αριθμός των ψηφίων 9).

Περίπου το ίδιο ποσοστό καθηγητών (29%) αντιμετωπίζει την αναπαράσταση 0,3999... όχι μόνο ως μια διεργασία αλλά και ως το αποτέλεσμα της διεργασίας, χωρίς να θεωρούν την ισότητα 0,3999... = 0,4. Επίσης, κάποιοι απ' αυτούς αναπτύσσουν μια δική τους μικρή θεωρία στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν την παράσταση 0,3999... Για παράδειγμα, ο Κ92 εκφράζει την άποψη ότι ο 0,3999... είναι σταθερός αριθμός διαφορετικός του 0,4 αλλά την ίδια στιγμή θεωρεί ότι αλλάζει. Χαρακτηριστικά έγραψε:

> Ο μαθητής Β συνδέει τον αριθμό 0,3999... με τον αριθμό 0,4 σαν την τελική τιμή του [...]. Ο αριθμός 0,3999... είναι μεταξύ του 0,4 και του 0,38. Μπορούμε να πούμε ότι αυτός ο αριθμός εκφράζει μια απόσταση που συνεχώς αλλάζει.

Επίσης, ο καθηγητής Κ46 παρόλο που θεωρεί ότι το σύμβολο 0,3999... παριστάνει μια διεργασία και μια έννοια εισάγει τον όρο: «οριακή προσέγγιση ενός αριθμού». Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Η έκφραση 0,3999... δεν παριστάνει μόνο έναν αριθμό [...] Πίσω από τον 0,3999... υπάρχει κρυμμένη η προσέγγιση των τιμών μιας συνάρτησης [...]. Ο μαθητής Γ δεν κατανοεί την έννοια της οριακής προσέγγισης ενός αριθμού.

Ο συγκεκριμένος καθηγητής δεν περιλαμβάνει στο δοκίμιό του κάποια ένδειξη ότι γνωρίζει την ισότητα 0,3999... = 0,4.

Μια αξιοσημείωτη κατηγορία που αποτελείται από το 11% των απαντήσεων των εκπαιδευτικών μπορούν να συμβιβάσουν τη γνώση της ισότητας 0,3999...= 0,4 είτε μέσω της συμφωνίας τους με έναν τουλάχιστον από τους μαθητές του σεναρίου είτε ισχυριζόμενοι ότι το 0,3999.... είναι ένας άρρητος αριθμός.

Για παράδειγμα, ο Κ32 αναφέρει ότι 0,3999... είναι ίσο με το 0,4 αλλά επίσης γράφει: «Η αναπαράσταση 0,3999... είναι μια άπειρη διαδικασία που τείνει στο 0,4. Δεν υπάρχει παρανόηση στην απάντηση του μαθητή Α».

Ένας ακόμη καθηγητής αυτής της κατηγορίας ο Κ25 παρότι αναφέρει δυο αποδείξεις για την ισότητα 0,3999...= 0,4 στο σχόλιο του που ακολουθεί, δείχνει μια αμφίσημη κατανόηση. Συγκεκριμένα αναφέρει: «Συνεπώς το 0,3999... είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,4 - αν δεν είναι το ίδιο το 0,4».

Κάποιοι καθηγητές αυτής της κατηγορίας εισάγουν κάποια δικά τους σύμβολα προκειμένου να ερμηνεύσουν τις δηλώσεις των μαθητών. Για παράδειγμα η καθηγήτρια Κ33 αναφέρει δυο σωστές αποδείξεις για την ισότητα 0,3999... = 0,4 αλλά επίσης γράφει:

> Το θετικό σημείο του μαθητή Α είναι ότι αντιστοιχεί την παράσταση [0,3999...] με μια συνεχή συνάρτηση και αυτό είναι σωστό [...] Συνεπώς lim0,3999... = 0,4.

Μόνο το 22% των καθηγητών εμφανίζεται να κατανοεί ότι η αναπαράσταση 0,3999... είναι ίση με το 0,4 χωρίς η τοποθετήσή τους να συνοδεύεται με αντιφάσεις ή παρανοήσεις. Για παράδειγμα ο Κ49 αποδεικνύει την ισότητα 0,3999... = 0,4 και για τη δήλωση του μαθητή Γ αναφέρει:

> Ο μαθητής Γ αναγνωρίζει το 0,3999... σαν έναν αριθμό αλλά έχει παρασυρθεί από τη διάταξη στο σύνολο των φυσικών αριθμών και θεωρεί ότι πρόκειται για έναν αριθμό ακριβώς πριν το 0,4.

Ενώ για τη δήλωση του μαθητή Δ αναφέρει: «το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 +... είναι ένα άπειρο άθροισμα με όρους μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο 1/10 το οποίο υπάρχει». Κάποιοι από τους καθηγητές αυτής της κατηγορίας όμως γράφουν ρητά την ισότητα 0,3999... = 0,4 χωρίς να δίνουν κάποια άλλη απόδειξη ή επεξήγηση.

Συνοψίζοντας από την ανάλυση φαίνεται ότι το δείγμα των καθηγητών μας χωρίζεται σε τρεις ομάδες σχετικά με τον τρόπο που έδωσαν νόημα στην αναπαράσταση 0,3999... Σχεδόν 3 στους 10 το θεωρούν μόνο ως διεργασία, σχεδόν 4 στους 10 ισχυρίζονται ότι πρόκειται για ένα συνδυασμό διεργασίας και έννοιας (αριθμού) με παρανοήσεις σε κάποια σημεία ενώ σχεδόν 2 στους 10 θεωρούν σωστά ότι η δοθείσα παράσταση είναι ταυτόχρονα διεργασία και έννοια (procept). Στη συνέχεια μελετάμε τις διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών σε συνδυασμό με την ταξινόμηση των αντιλήψεών τους όπως προέκυψαν στην ενότητα αυτή.

4.1.3 Συνδυαστική ανάλυση αντιλήψεων και διδακτικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών

Ο πίνακας 4.1.3.Α, παρουσιάζει τα αποτελέσματα της συνδυαστικής ανάλυσης των διδακτικών προτάσεων των εκπαιδευτικών και των ίδιων των αντιλήψεών τους σχετικά με την αναπαράσταση αυτή, με βάση την ανάλυση που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Πίνακας 4.1.3.Α: Κατηγοριοποίηση των διδακτικών προτάσεων ως προς την ορθότητα και το φορμαλισμό

		Διαδικα-στικές **30**	Διαδικασία & Έννοια με τουλάχιστον μια από τις δυο λανθασμένη **31**	Διαδικασία και Έννοια με αμφιταλάντευση μεταξύ των δυο **12**	Procept **23**	Σύνολο **96**
Ορθές **23**	Φορμαλι-στικές			4	12	16
	Συνδυα-στικές			1	6	7
	Άτυπες					
Μεικτές **24**	Φορμαλι-στικές				1	1
	Συνδυα-στικές	2	6	4	3	15
	Άτυπες	3	4	1		8
Προβλημα-τικές **28**	Φορμαλι-στικές					
	Συνδια-στικές	1	2			3
	Άτυπες	12	13			25
Άλλες **11**		7	4			11
Απουσία προτάσεων **10**		5	2	2	1	10

Κατά την ανάλυση των διδακτικών προτάσεων βρέθηκαν δέκα καθηγητές οι οποίοι δεν αναφέρουν καμία πρόταση διδασκαλίας, δηλαδή δεν απαντούν στο ερώτημα (γ) του σεναρίου και στον πίνακα 4.1.3.Α, και βρίσκονται στην τελευταία γραμμή με τίτλο «Απουσία προτάσεων». Επίσης, έντεκα απαντήσεις καθηγητών δεν κατέστη δυνατό να ταξινομηθούν στις αναδυόμενες κατηγορίες και αποτυπώνονται στην προτελευταία γραμμή του πίνακα 4.1.3.Α, με τίτλο «Άλλες».

Οι 75 διδακτικές προτάσεις που ταξινομήθηκαν διακρίνονται ως προς την μαθηματική ορθότητα σε (α) 23 μαθηματικά ορθές, (β) 24 μεικτές (συνδυασμός ορθών και λανθασμένων προσεγγίσεων ή ιδεών που θα μπορούσαν να θεωρηθούν σωστές ή λανθασμένες, λόγω αμφίσημων διατυπώσεων) και (γ) 28 προβληματικές (εμφανώς μαθηματικά λανθασμένων προσεγγίσεων). Παρατηρείται σχετική ισορροπία μεταξύ των τριών τύπων μαθηματικής ορθότητας των διδακτικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών. Ωστόσο, αυτό συμβαίνει σε μικρότερο βαθμό για τη διάκριση των διδακτικών προτάσεων των εκπαιδευτικών με βάση το φορμαλισμό τους, όπου οι άτυπες φαίνεται να κυριαρχούν και οι τυπικές να εμφανίζονται σπανιότερα. Συγκεκριμένα οι διδακτικές προτάσεις των εκπαιδευτικών διακρίνονται σε σχέση με το κριτήριο του φορμαλισμού σε (α) 17 φορμαλιστικές (όταν υιοθετούνται αμιγώς τυπικές μαθηματικές μέθοδοι), (β) 25 συνδυαστικές (όταν χρησιμοποιούνται τόσο φορμαλιστικές όσο και διαισθητικές μέθοδοι, άμεσα ή έμμεσα) και (γ) 33 άτυπες (όταν κυριαρχούν οι εμπειρικές, περιγραφικές και διαισθητικές προσεγγίσεις).

Είναι αξιοσημείωτο ότι όσο οι αντιλήψεις των καθηγητών για την αναπαράσταση «0,3999 ...» εκτείνονται από «διαδικαστικές» σε «procept», οι διδακτικές τους προτάσεις μετατοπίζονται από μαθηματικά προβληματικές σε ορθές και από άτυπες σε φορμαλιστικές μαθηματικές μεθόδους. Επιπλέον, στην προσπάθειά τους να μετατρέψουν τις μαθηματικές γνώσεις τους σε διδακτικές πρακτικές, κάποιοι από τους καθηγητές με πλήρη κατανόηση της αναπαράστασης «0,3999 ...» (δηλαδή μεταξύ των 23 εκπαιδευτικών της κατηγορίας «procept») μετατοπίζονται σε εν μέρει μαθηματικά σωστές διδακτικές προτάσεις (18 ορθές και 4 μικτές). Τέλος, η πλειονότητα των 23 καθηγητών που διαμορφώνουν μαθηματικά σωστές διδακτικές προτάσεις (16 εκπαιδευτικοί) ακολουθούν φορμαλιστική προσέγγιση, ενώ οι υπόλοιποι συμπεριλαμβάνουν και άτυπες μεθόδους στις διδακτικές τους προσεγγίσεις.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται μερικά χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τα δεδομένα προκειμένου να τεκμηριωθεί κάθε κατηγορία απαντήσεων, να διευκρινιστούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους και να αναδειχθεί η πολυπλοκότητα των διδακτικών πρακτικών που προτείνονται από τους εκπαιδευτικούς του δείγματος.

Ο καθηγητής Κ37 (με περιορισμένη διδακτική εμπειρία, υποψήφιος διδάκτωρ μαθηματικών) είναι ένας από τους 23 καθηγητές που φαίνεται ότι έχει αντίληψη procept για την αναπαράσταση «0,3999 ...». Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι η διδακτική του πρόταση και αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα μιας πρότασης που χαρακτηρίζεται ως μαθηματικά ορθή και φορμαλιστική.

> Θα έλεγα (χρησιμοποιώντας την γνώση από τη Β΄ λυκείου της γεωμετρικής προόδου) ότι καθώς: $0{,}09+0{,}009+\ldots+\underbrace{0{,}00\ldots0}_{n+1}9=\dfrac{9}{10^2}+\dfrac{9}{10^3}+\ldots+\dfrac{9}{10^{n+2}}=\dfrac{9}{10^2}\left(1+\dfrac{1}{10}+\ldots\dfrac{1}{10^n}\right)=$

$$=\frac{9}{10^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)\text{και}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}=\frac{1}{10^{n+1}}\to 0 \text{ καθώς } n\to+\infty \text{ έχουμε}$$

ότι: $0{,}3\overline{9}=\lim_n\left(0{,}3+0{,}09+0{,}009+...+\underbrace{0{,}00...09}_{n+1}\right)=0{,}3+0{,}1=0{,}4$. Δηλαδή ότι το 0,4

είναι ο <u>αριθμός</u> $0{,}3\overline{9}$ ο οποίος είναι το όριο του αθροίσματος

$0{,}3+0{,}09+0{,}009+...+\underbrace{0{,}00...09}_{n+1}$. (η υπογράμμιση από το πρωτότυπο)

Σε μια τέτοια διδακτική πρόταση υπονοείται ότι οι μαθητές θα πειστούν από την απόδειξη της ισότητας 0,3999... = 0,4 και θα παραμερίσουν τους προβληματισμούς τους σχετικά με τη φύση της αναπαράστασης 0,3999...

Ο καθηγητής Κ4 (με δεκαετή διδακτική εμπειρία), του οποίου η απάντηση ταξινομείται στην κατηγορία «procept» και η διδακτική του πρόταση ως μαθηματικά ορθή με συνδυασμό φορμαλιστικών και διαισθητικών προσεγγίσεων. Ο εκπαιδευτικός αρχίζει να παρουσιάζει (διστακτικά) μια (φορμαλιστική) απόδειξη της ισότητας 0,3999 ... = 0,4, θεωρώντας όμως ότι η προσέγγιση αυτή έχει περιορισμένη δύναμη πειθούς για τους μαθητές.

> Αρχικά ίσως να τους έδειχνα την [εξής] διαδικασία: x = 0,3999… [τότε] 10x = 3,999…, [άρα] 10x – x = 3,999… - 0,3999… [συνεπώς] 9x = 3,6 [άρα] x = 0,4 [δηλαδή] 0,3999… = 0,4. Πράγμα που σίγουρα θα τους φαινόταν περίεργο. Συνήθως αντιδρούν. Θα έλεγαν ότι έχει γίνει λάθος.

Στη συνέχεια ισχυρίζεται ότι «θα χρησιμοποιούσα τα θετικά σημεία των απόψεων των μαθητών για να καταλάβουν τι συμβαίνει» και συγκεκριμένα αναφέρει:

> Ο μαθητής Β λέει ότι είναι αριθμός σε αντίθεση με τους Α και Δ. Με την αλληλεπίδραση των απόψεων των μαθητών θα γίνει κατανοητό κι απ' τους υπόλοιπους ότι 0,3999… είναι συμβολισμός για έναν αριθμό.

Στο σημείο αυτό αναδεικνύει το ζήτημα της φύσης της αναπαράστασης 0,3999… (αριθμός-διαδικασία) που έχει τεθεί από τις τοποθετήσεις των μαθητών και προτείνει την ανάπτυξη μιας συζήτησης μεταξύ των μαθητών για το συγκεκριμένο ζήτημα κατευθύνοντας τους κατάλληλα. Στη συνέχεια προσπαθεί να απαντήσει στις παρανοήσεις των μαθητών επαναδιατυπώνοντας αυτές, σε μια ποιο θεωρητική μορφή, χρησιμοποιώντας παράλληλα κατάλληλα διαισθητικά επιχειρήματα. Για το λόγο αυτό η διδακτική του πρόταση έχει ταξινομηθεί στις συνδυαστικές ως προς το φορμαλισμό. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Πρέπει να αντιμετωπίσουμε τις εξής παρανοήσεις: α) Ένα άθροισμα άπειρων όρων μπορεί να τείνει σε έναν αριθμό. Αυτό γίνεται με παράδειγμα: Κόβοντας ένα χαρτί στο μισό και το μισό πάλι στο μισό κ.λπ. ...» Βέβαια η συγκεκριμένη πρόταση αναφέρεται μάλλον σε μια θεωρητική δυνατότητα παρά σε μια πραγματική εφαρμογή. β) Στους πραγματικούς αριθμούς δεν υπάρχει η έννοια της διαδοχικότητας. Δεν είναι ο 0,4 ο επόμενος του 0,3999… Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί ρωτώντας τους μαθητές ποιος είναι ο επόμενος του 0,4. Μπορεί να πουν ότι *μετά* από άπειρα μηδενικά βάζουμε το 1. Όμως εδώ υπάρχει η αντίφαση μετά από άπειρα…

Στο τελευταίο μέρος της απάντησής του αφού επισημαίνει ένα βασικό στοιχείο της παρανόησης των μαθητών, δίνει ένα περιγραφικό επιχείρημα για την ισότητα 0,3999… = 0,4. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> γ) Τέλος πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές ότι ο 0,3999… *είναι* το όριο της διαδικασίας που έχουν στο μυαλό τους (και όχι η ίδια η διαδικασία). Αφού έχουμε καταλήξει στο ότι δεν υπάρχει διαδοχικότητα στους πραγματικούς και ότι δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του 0,3999… και του 0,4, άρα οι αριθμοί ταυτίζονται, επομένως 0,3999…= 0,4. Δηλαδή το όριο είναι *ίσο* με 0,4. (οι υπογραμμίσεις δικές του)

Η ανάλυση των απαντήσεων στις ερωτήσεις του σεναρίου από τον καθηγητή Κ6 (με 12 χρόνια διδακτική εμπειρία) έδειξε ότι ο ίδιος αντιλαμβάνεται την παράσταση «0,3999 ...» ως procept. Ωστόσο, η πρόταση διδασκαλίας του δεν περιλαμβάνει μόνο ορθά μαθηματικά στοιχεία. Χρησιμοποιεί μια φορμαλιστική προσέγγιση, αλλά αδυνατεί να ολοκληρώσει με εγκυρότητα το επιχείρημα. Επίσης, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα μπερδεύει την ιδιότητα της πληρότητας με την ιδιότητα της πυκνότητας.

> Θα χρησιμοποιούσα την εις άτοπον. Έστω ότι 0,3999… $\neq$ 0,4. Τότε από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ θα έπρεπε να βρίσκουμε αριθμό μεταξύ τους. Αν υπάρχει τέτοιος αριθμός τότε το πλήθος των ψηφίων του θα ήταν πεπερασμένο. Άτοπο.

Η καθηγήτρια Κ33 (με μικρή εκπαιδευτική εμπειρία και υψηλό βαθμό στο μάθημα του απειροστικού λογισμού στο πανεπιστήμιο) συμβιβάζει τη γνώση της ισότητας 0,3999... = 0,4 με τη θεώρηση ότι η αναπαράσταση 0,3999... παριστάνει συνάρτηση που πλησιάζει το 0,4. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Θετικά στο μαθητή Α είναι η σκέψη του να αντιστοιχίσει την παράσταση με μια συνάρτηση συνεχή είναι σωστή και ο καθηγητής μπορεί να την αξιοποιήσει καθώς από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής άρα $\lim 0{,}3999... = 0{,}4$. Στο μαθητή Β θετικό είναι ότι σκέφτηκε τουλάχιστον ότι πλησιάζει τον 0,4 [...] Οι μαθητές Α, Β δεν έχουν καταλάβει προφανώς ότι 0,3999... = 0,4 και όχι απλά ότι 'τείνει' στο 0,4.

Στις διδακτικές της προτάσεις η καθηγήτρια Κ33 αναφέρει: «Αν ήμουν καθηγήτρια, στην προκειμένη περίπτωση θα έκανα πρώτα μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη για να τους πείσω». Και στη συνέχεια παραθέτει δυο αποδείξεις της ισότητας 0,3999... = 0,4. Στη μια χρησιμοποιεί τον τύπο για το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου και στην άλλη προσαρμόζει στη συγκεκριμένη περίπτωση την ιδέα της μετατροπής του απειροψήφιου περιοδικού δεκαδικού αριθμού στο αντίστοιχο κλάσμα όπως εμφανίζεται στο διδακτικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου. Έτσι, η αντίληψη της εκπαιδευτικού Κ33 αποτελεί ένα παράδειγμα της κατηγορίας «Διαδικασία και Έννοια με αμφιταλάντευση μεταξύ των δυο» και οι διδακτικές της προσεγγίσεις θεωρούνται ορθές και φορμαλιστικές.

Η αντίληψη του καθηγητή Κ13 (πάνω από 15 χρόνια διδακτική εμπειρία) ταξινομήθηκε στην κατηγορία «Διαδικασία και Έννοια με τουλάχιστον μια από τις δυο λάθος». Οι διδακτικές του προτάσεις που αναφέρονται στο απόσπασμα που ακολουθεί θεωρήθηκαν μεικτές ως προς την ορθότητα και άτυπες ως προς το φορμαλισμό:

> Μια πρόταση θα ήταν να παρουσιάσουμε στους μαθητές το παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα. [σχεδιάζει μια γραμμή με τις ενδεικτικές θέσεις του Αχιλλέα και της χελώνας] Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαν να αντιληφθούν την διαδικασία της σύγκλισης και να αποδεχθούν ότι μια άπειρη διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε πεπερασμένο αποτέλεσμα, αφού η εμπειρία τους λέει ότι σίγουρα ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα.

Ουσιαστικά ο καθηγητής Κ13 επικαλείται ένα εμπειρικό-άτυπο επιχείρημα (ο Αχιλλέας θα φθάσει σίγουρα τη χελώνα) για να τεκμηριώσει μια ορθή μαθηματική ιδέα (ένα άθροισμα άπειρων όρων μπορεί να οδηγήσει σε πεπερασμένο αποτέλεσμα) το οποίο δεν αναφέρει με σαφήνεια και για το λόγο αυτό έχουμε ταξινομήσει την απάντησή του όπως προαναφέραμε.

Η καθηγήτρια Κ38 με βάση το δοκίμιό της έχει ενταχθεί στην κατηγορία «Διαδικασία και έννοια με τουλάχιστον μια από τις δυο λανθασμένη» και οι διδακτικές της προτάσεις χαρακτηρίστηκαν «μεικτές» ως προς την ορθότητα και «άτυπες» ως προς το φορμαλισμό. Από το δοκίμιό της φαίνεται να θεωρεί αρχικά την παράσταση 0,3999... ως διαδικασία όταν αναφέρει:

> Ο μαθητής Α πιθανώς βλέπει την παράσταση 0,3999... σαν μια σειρά από βήματα (άπειρα) ίσως σαν μια μέθοδο την οποία αν την συνεχίζαμε επ' άπειρον θα καταλήγαμε κάποια στιγμή στο 0,4. [...] Θετικά στοιχεία για την απάντηση του Α είναι ότι ο μαθητής βλέπει την παράσταση 0,3999... ως μια διαδικασία.

Όμως υπάρχουν και στοιχεία που δείχνουν ότι θεωρεί τη συγκεκριμένη παράσταση και αριθμό αλλά με κάποια ιδιάζοντα χαρακτηριστικά.

> Ο μαθητής Β δείχνει ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει τη λέξη 'τείνει' και έχει πιο καλή διαίσθηση [από τον Α]. [...] Ο μαθητής Β μάλλον αντιλαμβάνεται την έννοια του 'τείνει'.

Φαίνεται όμως ότι συμφωνεί περισσότερο με τον μαθητή Δ που θεωρεί ότι η αναπαράσταση 0,3999... δεν εκφράζει κάποιον αριθμό.

> Ο μαθητής Δ έδωσε την πιο σωστή απάντηση και αντιμετώπισε την παράσταση 0,3999... όχι ως ένα συγκεκριμένο αριθμό. [...] Για τον Δ δεν νομίζω ότι υπάρχει κάποια παρανόηση.

Στις διδακτικές της προτάσεις αποφεύγει να πάρει συγκεκριμένες θέσεις για το ζήτημα και περιορίζεται να θέτει ερωτήματα προς τους μαθητές για τα οποία δεν αναφέρεται κάποια αναμενόμενη απάντηση. Η προσέγγιση αυτή συναντάται στις διδακτικές προτάσεις αρκετών εκπαιδευτικών της έρευνάς μας οι οποίοι φαίνεται να μην έχουν μια σαφή άποψη για το θέμα και πολλές φορές συνοδεύεται από μια παιδαγωγική κάλυψη της μορφής «ο μαθητής θα ανακαλύψει μόνος του τη γνώση μέσα από τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού». Συγκεκριμένα η καθηγήτρια Κ38 στις διδακτικές της προτάσεις αναφέρει:

> Αν ήμουν καθηγήτρια, θα ρωτούσα τον [μαθητή] Α ποια διαδικασία εννοεί, τον Β, [...] τι εννοεί με το «τείνει» αν έχει δηλαδή στο μυαλό του την έννοια του «πολύ κοντά». Τον Γ θα τον ρωτούσα ποιος είναι τότε ο επόμενος του 0,4, έτσι ώστε να αντιληφθεί μόνος του ότι δε θα μπορούσε να βρει συγκεκριμένο αριθμό και τον Δ, θα ενδιαφερόμουν να μάθω το σκεπτικό του και μετά θα έκανα εισαγωγή της έννοιας του ορίου και τι σημαίνει.

Με τη συγκεκριμένη εκπαιδευτικό είχαμε και μια ημιδομημένη συνέντευξη (δυο ερευνητές Ε1, Ε2 και η καθηγήτρια Κ38). Ας δούμε στο παρακάτω απόσπασμα (εμφανίζεται μόνο ο ερευνητής Ε2) πως λειτουργεί αυτή η αστάθεια στις απόψεις της συγκεκριμένης εκπαιδευτικού στο πλαίσιο της συνέντευξης:

Απόσπασμα 1 της συνέντευξης με την εκπαιδευτικό Κ38

Ε2: Για παράδειγμα γράφεις εδώ θετικά στοιχεία για την απάντηση του Α είναι ίσως ότι ο μαθητής βλέπει την παράσταση αυτή ως μια διαδικασία.

Κ38: Το ερώτημα τώρα αν είναι αριθμός ή όχι είναι λίγο φιλοσοφικό ερώτημα. Έτσι όπως μου ακούγεται εμένα αυτή τη στιγμή. Δηλαδή γιατί να μην ισχύουν και τα δύο. Να είναι και αριθμός να είναι και διαδικασία. Που είναι το πρόβλημα δεν ξέρω.

[...]

Ε2: Το πρόβλημα ποιο είναι, λέει ο μαθητής Δ για παράδειγμα ότι αυτό το πράγμα συνεχώς αυξάνει, μπορεί να αυξάνεται συνεχώς καταρχήν; Αυξάνεται συνεχώς;

Κ38: Ναι, όταν έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Ε2: Ωραία, και είναι και ένας αριθμός;

Κ38: Μάλλον, δεν αυξάνεται συνεχώς (Γέλια)

Παρατηρούμε ότι ενώ στο δοκίμιο της η καθηγήτρια Κ38 δεν συνειδητοποιεί τις αντιφάσεις που προκύπτουν από τις τοποθετήσεις της, κάτι τέτοιο αναδεικνύεται στο επικοινωνιακό πλαίσιο της συνέντευξης.

Η αντίληψη της καθηγήτριας Κ23 (χωρίς διδακτική εμπειρία) έχει ταξινομηθεί στην κατηγορία process και οι διδακτικές της προτάσεις έχουν θεωρηθεί προβληματικές ως προς την ορθότητα και άτυπες ως προς το φορμαλισμό. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Θα εξηγούσα στους μαθητές ότι αυτή η παράσταση έχει άπειρους όρους (όπως και μια ακολουθία έχει άπειρους όρους που τείνουν σε ένα όριο και πάντα υπάρχει ένας προηγούμενος και ένας επόμενος όρος) οπότε το 0,3999… δεν είναι αμέσως προηγούμενος αριθμός του 0,4 αφού τους χωρίζουν χιλιάδες ψηφία.

Εδώ, υπάρχει μια σωστή ιδέα (ο 0,3999 ... δεν είναι ο αμέσως προηγούμενος του 0,4), αλλά η αιτιολογία δεν ευσταθεί. Στη συνέχεια, προσπαθώντας να εξηγήσει στους μαθητές τα χαρακτηριστικά της παράστασης «0,3999 ...», η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί μόνο διαισθητικές προσεγγίσεις και γλιστράει σε θεμελιώδη σφάλματα σχετικά με τη φύση των αριθμών.

> Ο αριθμός αυτός μπορεί συνέχεια να αυξάνεται αλλά δεν είναι αυτός ο λόγος που δεν γίνεται 0,4. Επιπλέον δεν μιλάμε για έναν αριθμό όπως λέει ο μαθητής Β που πλησιάζει σ' έναν άλλο αριθμό αλλά για μια παράσταση που μας δίνει νέους όρους που «τείνουν» → (σύνδεση με όριο) σε έναν αριθμό. Επίσης θα έδειχνα στο μαθητή Δ ότι οι όροι αυτής της παράστασης εάν αντιστοιχούσαν στις εικόνες μιας συνάρτησης σίγουρα αυτή δεν θα ήταν συνεχής οπότε δεν χρειάζεται να τα συγχέει. Μια καλή σκέψη είναι να δείξουμε στους μαθητές συναρτήσεις όπως αυτής της ακόλουθης γραφικής παράστασης [έχει σχεδιάσει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=\frac{\alpha}{x}$] που τείνουν, έχουν όριο αλλά δεν ταυτίζονται με μια τιμή, έχουν άπειρους όρους.

4.2 Περιεχόμενο και υπόβαθρο της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών

4.2.1 Στοιχεία σημειωτικής στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών

Από την ανάγνωση των δοκιμίων προκύπτει ότι για αρκετούς εκπαιδευτικούς έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στη συλλογιστική τους, η ιδιαιτερότητα των χρησιμοποιούμενων συμβόλων. Σε κάποιες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί, με αφορμή μια λέξη, μια έκφραση ή ένα σύμβολο κάνουν συνδέσεις μεταξύ συγγενών ή διαφορετικών μαθηματικών εννοιών στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν τις κατανοήσεις των μαθητών ή να διατυπώσουν τις δικές τους αντιλήψεις για το μαθηματικό αντικείμενο.

Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ1 ερμηνεύοντας την απάντηση του μαθητή Α γράφει:

> Οι τρεις τελείες στο τέλος του αριθμού 0,3999… του έδωσαν την εντύπωση της έννοιας του κ.ο.κ. (και ούτω καθ' εξής), οπότε ανέφερε την λέξη διαδικασία. Πιο πολύ φαντάστηκε ότι πρόκειται για την ακολουθία των εξής αριθμών: 0,39, 0,399, 0,3999 κ.ο.κ. «Κατάλαβε» τον αριθμό 0,4 σαν την οριακή τιμή της προηγούμενης διαδικασίας. Η παρανόηση του είναι ότι μπέρδεψε τον αριθμό 0,4 με μια «διαδικασία».

Στο σημείο αυτό ο εκπαιδευτικός Κ1 θεωρεί ότι μπορεί οι μαθητές να συνδέσουν ένα χαρακτηριστικό της αναπαράστασης 0,3999…, τις τρεις τελείες, με την συντόμευση «κ.ο.κ.» που συναντάται στη γραπτή γλώσσα και αναπαριστά επαναλαμβανόμενες ενέργειες που θεωρούνται υπονοούμενες. Δηλαδή, εδώ έχουμε την πεποίθηση από τον εκπαιδευτικό ότι η ερμηνεία ενός μαθητή για την αναπαράσταση 0,3999... μπορεί να επηρεαστεί από το περιεχόμενο που έχει ένα σύμβολο όπως οι τρεις τελείες σε μη μαθηματική περιοχή όπως η γραπτή γλώσσα.

Επίσης, επισημαίνεται από τον εκπαιδευτικό Κ1 ότι, μπορεί οι μαθητές, να προβληματιστούν σχετικά με τη φύση του 0,3999..., επειδή οι τρείς τελείες χρησιμοποιούνται τόσο στο συμβολισμό της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, … όσο και στον αριθμό 0,3999... με πιθανή συνέπεια κάποιοι να θεωρήσουν ότι το 0,3999... ως ακολουθία. Εδώ, έχουμε τον εντοπισμό από τον εκπαιδευτικό μιας ενδεχόμενης σύνδεσης της σημασίας που έχουν οι τρεις τελείες από διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (συμβολισμός απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών και ακολουθιών) με συνέπεια να προκύπτουν συμπεράσματα, σχετικά με τη φύση των αντίστοιχων εννοιών αντίστοιχα των σημασιών που αποδίδονται στα σχετικά σύμβολα σε κάθε περιοχή.

Στο ίδιο πνεύμα ο εκπαιδευτικός Κ17 επισημαίνει σχετικά με τον μαθητή Α του σεναρίου ότι «συγχέει τον αριθμό με τη διαδικασία γραφής του». Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό 0,3999... τότε θα προκύψουν διαδοχικά οι αριθμοί 0,3, 0,39, 0,399, ... Σ' αυτή την ιδέα φαίνεται να στηρίζεται και η πεποίθηση αρκετών εκπαιδευτικών που θεωρούν ότι το 0,3999... εκφράζει μια διαδικασία. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή η αναπαράσταση 0,3999... εκφράζει τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, ... οι οποίοι «τείνουν στο 0,4» χωρίς κανένας από αυτούς να είναι ο 0,4. Ενώ στο σενάριο μας δεν έχει οριστεί κάποια ακολουθία ή συνάρτηση και οι όροι «διαδικασία» και «τείνει» που χρησιμοποιούνται στις δηλώσεις των μαθητών Α και Β του σεναρίου παραπέμπουν τους εκπαιδευτικούς να σκεφτούν σχετικά με τα όρια ακολουθιών ή συναρτήσεων.

Κάποιοι καθηγητές όπως ο Κ34 θεωρούν ότι μπορεί να αποδοθεί εννοιολογικό περιεχόμενο στη λέξη «παράσταση» που προηγείται από το «0,3999...» στο σενάριο της έρευνας. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Για το μαθητή Δ η λέξη παράσταση είναι αυτή που τον οδήγησε στην απάντηση αυτή. [...] Το σύνδεσε με τις αλγεβρικές και αριθμητικές παραστάσεις που διδάσκονταν τα προηγούμενα χρόνια και έχοντας συνηθίσει τη λογική ότι ένα πλήθος πράξεων θα οδηγήσουν σε έναν αριθμό, οπότε τα άπειρα αθροίσματα δεν μπορούν να δώσουν «πεπερασμένο» αριθμό.

Αντίστοιχα, ο καθηγητής Κ3 αναφέρει: «Ο μαθητής Α βλέποντας τη λέξη παράσταση θεωρεί ότι θα πρέπει να γίνουν μια σειρά από πράξεις για να προκύψει 0,3999...».

Στις προηγούμενες περιπτώσεις η λέξη «παράσταση» που υπάρχει στο αρχικό ερώτημα του καθηγητή του σεναρίου θεωρείται από τους εκπαιδευτικούς ότι μπορεί να ερμηνευθεί ως «αριθμητική παράσταση» όπου μετά από μια σειρά από αριθμητικές πράξεις θα οδηγηθούμε σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα.

Να σημειώσουμε εδώ, ότι στο σενάριό μας προσδιορίσαμε με την ουδέτερη, για εμάς, λέξη «παράσταση» το «0,3999…» στην αρχική ερώτηση του υποτιθέμενου καθηγητή προσπαθώντας να αποφύγουμε τη λέξη «αριθμός» που θα προσδιόριζε το εννοιολογικό περιεχόμενο του «0,3999…».

Μια άλλη χαρακτηριστική περίπτωση για το ρόλο που φαίνεται να διαδραματίζουν τα στοιχεία σημειωτικής στη διδακτική προσέγγιση των εκπαιδευτικών φαίνεται στο απόσπασμα από το δοκίμιο του καθηγητή Κ25 ο οποίος, προσπαθώντας να απαντήσει στην αμφισβήτηση της θεώρησης της παράστασης 0,3999... ως αριθμού χρησιμοποιεί το εξής επιχείρημα προς τους μαθητές: «Αν η παράσταση 0,3999... δεν είναι αριθμός επειδή εκφράζει την άπειρη διαδικασία 0,3 + 0,09 + 0,009 +... τότε ούτε ο π ούτε ο e ούτε οι άρρητοι είναι αριθμοί». Στο επιχείρημα αυτό υπονοείται ότι οι αριθμοί που συμβολίζονται με το π ή το e έχουν και αυτοί μια δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία και συνεπώς γράφονται ως ένα άθροισμα άπειρων προσθετέων. Έτσι, υπονοείται ότι μπορεί να υιοθετείται πιο εύκολα από τους μαθητές ότι εκφράζουν έναν αριθμό.

Σε κάποιες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί δεν ερμηνεύουν απλά τα σύμβολα με βάση τις προσωπικές τους αντιλήψεις αλλά ο μηχανισμός αυτός λειτουργεί και αντίστροφα, δηλαδή επινοούν νέα σύμβολα προκειμένου να εκφράσουν τις προσωπικές τους κατανοήσεις με βάση την αλληλεπίδραση των νοημάτων της ευρύτερης περιοχής των εννοιών που διαπραγματεύονται.

Για παράδειγμα, η καθηγήτρια Κ63, θεωρεί ότι «ο μαθητής Β έχει την πιο σωστή διατύπωση», επινοεί στις διδακτικές της προτάσεις ένα νεοσύστατο σύμβόλο προκειμένου να εκφράσει τη διαφορά ανάμεσα στον 0,4 και τον 0,3999...

> Η παράσταση 0,3999... πρόκειται για ένα δεκαδικό αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία που τείνει στον αριθμό 0,4 έχοντας πάντα ανάμεσά τους μια άπειρη [μικρή] διαφορά 0,000...1.

Εδώ, φαίνεται ότι η καθηγήτρια Κ63 δυσκολεύεται να αποδεχθεί τη θεώρηση των Ανώτερων Μαθηματικών που διδάχθηκε στο πανεπιστήμιο, σύμφωνα με την οποία αν η απόσταση μιας πραγματικής μεταβλητής x από έναν αριθμό α είναι οσοδήποτε μικρή τότε $x = \alpha$, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $|x-\alpha| < \varepsilon$ τότε $x = \alpha$. Θεωρεί ότι θα υπάρχει πάντα μια άπειρα μικρή (απειροστή) απόσταση ανάμεσα στο 0,3999... και το 0,4 την οποία εκφράζει με το σύμβολο 0,000...1.

Ο καθηγητής Κ87 στις διδακτικές του προτάσεις προς τους μαθητές Α και Β χρησιμοποιεί και αυτός έναν ιδιαίτερο συμβολισμό προκειμένου να εκφράσει την ιδέα του για τη σχέση του 0,3999... με το 0,4. Συγκεκριμένα, αναφέρει: «Θα ρωτούσα αν θα μπορούσα αντί για $\lim\limits_{x\to 0,4}(x)$ να γράψω $\lim\limits_{x\to 0,3999}(x)$ ». Εδώ, αν και υπάρχει μια ασάφεια σχετικά με το αν ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι αυτά τα δυο σύμβολα εκφράζουν την ίδια έννοια, φαίνεται μια μίξη ιδεών σχετικά με το πως αντιλαμβάνεται ότι μια μεταβλητή x τείνει σε έναν αριθμό. Έτσι, ενώ σύμφωνα με τον τυπικό ορισμό του ορίου συνάρτησης, το όριο των τιμών μιας συνάρτησης, δηλαδή της εξαρτημένης μεταβλητής, είναι συνυφασμένο με το ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης παίρνει τιμές σε μια οσοδήποτε μικρή περιοχή ενός αριθμού, ο εκπαιδευτικός Κ87 φαίνεται ότι εξετάζει ανεξάρτητα τη σημασία της έκφρασης «η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σ' έναν αριθμό» από τη συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής. Μάλιστα χρησιμοποιεί έναν ιδιόμορφο συμβολισμό για το όριο συνάρτησης για να εκφράσει αυτή την ιδιαίτερη προσέγγισή του.

Γνωρίζουμε ότι οι τρείς τελείες στα μαθηματικά δεν χρησιμοποιούνται μόνο για να περιγράψουν άπειρα ψηφία, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθούν και για την αναπαράσταση πεπερασμένου πλήθους αριθμών όπως, για παράδειγμα των φυσικών αριθμών από το ένα ως το εκατό με τη μορφή: 1, 2, ..., 100. Σε κάποιες περιπτώσεις εκπαιδευτικοί επηρεασμένοι απ' αυτή τη χρήση, χρησιμοποιούν αντίστοιχο συμβολισμό για την αναπαράσταση άπειρου πλήθους αριθμών. Για παράδειγμα η καθηγήτρια Κ21 αναφέρει:

> ... ένα όριο με έναν αριθμό x να τείνει στο 0,4 σημαίνει ότι πρακτικά θέλω να υπολογίσω κάτι για έναν αριθμό που πλησιάζει πολύ στο 0,4, αλλά δεν τον φτάνει, δηλαδή έναν αριθμό 0,39...9 με άπειρα 9. [...] Δεν μπορούμε να εντοπίσουμε τον αριθμό 0,3999...9 με άπειρα 9. Δεν μπορεί το μυαλό μας να μετρήσει άπειρα 9. Επίσης, [ο μαθητής Γ] δεν έχει συνειδητοποιήσει την έννοια του ορίου. Αυτός ο αριθμός συνεχώς πλησιάζει το 0,4, δεν είναι απλά ο προηγούμενός του.

Φαίνεται εδώ ότι η καθηγήτρια Κ21 δεν διστάζει να επινοήσει το σύμβολο «0,3999...9» δείχνοντας όχι μόνο ότι έχει επηρεαστεί από συμβολικές μορφές όπως «1, 2, 3, ... ν», όπου το ν μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε μεγάλος φυσικός αριθμός, αλλά και ότι αντιλαμβάνεται το άπειρο μόνο στην δυνητική του εκδοχή, ότι δηλαδή όταν λέμε άπειρα 9 εννοούμαι οσοδήποτε πολλά 9. Έτσι, η έκφραση 0,3999... δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ολότητα, ως ένα αντικείμενο αλλά ως διαδικασία σε εξέλιξη.

Σε κάποιες περιπτώσεις, μερικοί εκπαιδευτικοί κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών σημασιών που έχει μια λέξη ή έκφραση σε διαφορετικές περιοχές. Για παράδειγμα ο καθηγητής Κ9 αναφέρει:

> [Ο μαθητής Β] ... έχει κατανοήσει ότι υπάρχει συνέχεια στο σύνολο των πραγματικών και άρα ένας αριθμός με άπειρα ψηφία 9 όπως ο 0,3999... τείνει στο 0,4.

Στο παραπάνω απόσπασμα η ιδιότητα του συνεχούς που έχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών θεωρείται η αιτία σύμφωνα με την οποία «ο αριθμός 0,3999... τείνει στο 0,4». Ενδεχομένως η σχέση του 0,3999... με το 0,4 συνδέεται συνειρμικά με την έννοια της συνεχούς συνάρτησης σ' ένα σημείο, όπου οι τιμές της συνάρτησης «τείνουν» στην τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό και ακολούθως με την ιδιότητα του συνεχούς της ευθείας των πραγματικών αριθμών λόγω της χρήσης της λέξης «συνέχεια» και στις δύο περιπτώσεις.

Ακόμα όμως και όταν υπάρχει η τυπική μαθηματική γνώση, τέτοιες προβληματικές συνδέσεις μπορεί να οδηγήσουν σε αδόκιμους συμβολισμούς. Για παράδειγμα, η καθηγήτρια Κ33 η οποία φαίνεται να έχει τυπική μαθηματική γνώση του θέματος αφού έχει αποδείξει με δυο τρόπους την ισότητα 0,3999... = 0,4, σε κάποιο σημείο του δοκιμίου της αναφέρει:

> Θετικά σημεία στο μαθητή Α είναι η σκέψη του να αντιστοιχίσει την παράσταση [0,3999...] με μια συνάρτηση συνεχή είναι σωστή και ο καθηγητής μπορεί να την αξιοποιήσει καθώς από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής άρα lim 0,3999… = 0,4.

Εμφανίζεται πάλι με αφορμή την αναπαράσταση 0,3999... μια σύνδεση της έννοιας της συνεχούς συνάρτησης με την με την έννοια της πληρότητας των πραγματικών αριθμών που με τη σειρά της σχετίζεται με το συνεχές της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή η λέξη «συνεχές» η οποία έχει διαφορετικό περιεχόμενο σε δυο διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια, παίζει το συνδετικό κρίκο ανάμεσα στα πλαίσια αυτά νοηματοδοτώντας με έναν νέο αδόκιμο τρόπο την αναπαράσταση 0,3999...

Ο καθηγητής Κ91 έχει αναφέρει σαν μοναδική διδακτική πρόταση μια σωστή μαθηματική απόδειξη για την ισότητα 0,3999... = 0,4 που βασίζεται στο άπειρο άθροισμα γεωμετρικής προόδου και για τον μαθητή Β αναφέρει: «Επειδή ο αριθμός 0,399 $\cong$ 0,4 (προσέγγιση δεκάτου) η σκέψη του μαθητή ήταν ότι ο αριθμός αυτός τείνει στο 0,4 (θετική σκέψη)».

Στο σημείο αυτό ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι ο μαθητής συνδέει τη λέξη «τείνει» (η οποία κυρίως χρησιμοποιείται στα όρια συναρτήσεων) με την σημασία της «προσέγγισης». Δηλαδή, η λέξη «τείνει» με τη σημασία της «στρογγυλοποίησης» αναπροσαρμόζεται εννοιολογικά ώστε να προσδώσει συγκεκριμένο νόημα στο αντικείμενο.

Εισαγωγή νεοσύστατων συμβόλων από τους εκπαιδευτικούς προκειμένου να εκφράσουν με το δικό τους τρόπο τη σχέση που θεωρούν ότι συνδέει το 0,3999... και το 0,4 έχουμε και κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων που είχαμε μαζί τους. Παρατίθεται το παρακάτω απόσπασμα 2 από τη συνέντευξη με την καθηγήτρια Κ38 όπου με τους κωδικούς Ε1, Ε2 συμβολίζονται δυο ερευνητές.

Απόσπασμα 2 από την συνέντευξη με την καθηγήτρια Κ38

Ε1: Ποιό θα ήταν ποιο σωστό σύμβολο [σύνδεσης 0,3999... και 0,4];
Κ38: Το βελάκι [σχεδιάζει 0,3+0,09+0,009+... $\to$ 0,4]
Ε1: Ενώ εδώ δεν θα έβαζες ποτέ 0,3+0,09+0.009 $\to$ 0,399
Κ38: όχι εκεί είμαι σίγουρη πως ...
Ε2: Να ρωτήσω κάτι, το 0,333... τείνει στο 1/3;
Κ38: ή αν είναι;
Σ1: εδώ θα έβαζες βελάκι ή ίσο;
Σ2: αν τείνει στο 1/3
[...]
Κ38: εδώ (δείχνει το 0,333... = 1/3) δεν μ' ενοχλεί να βάλω το ίσον
Ε2: ...πριν... εδώ (δείχνει) στο 0,3999;
Κ38: να το γράψω 0,4;
Ε2: Σου φαίνεται ότι είναι καλύτερο εδώ το ίσον απ' ότι βελάκι ή στην περίπτωση του 0,333... ;
Κ38: δηλαδή 0,333... εδώ ίσον (δείχνει 0,333... = 1/3) ή ... (δείχνει 0,333... $\to$ 1/3) αν ... με ποιο συμφωνώ περισσότερο;
Ε2: ναι
Κ38: μ' αυτό (δείχνει 0,333... = 1/3) γιατί ...
Ε2: με το ίσον ... με το 1/3... ενώ στο άλλο θα πήγαινε καλύτερα το βελάκι στο 0,3999...
Κ38: νομίζω όμως τώρα που το ξανασκέφτομαι θα πρέπει να ισχύει το ίδιο πράγμα και στα δυο.

Στο απόσπασμα 2 το σύμβολο «$\to$» χρησιμοποιείται από την εκπαιδευτικό για να εκφράσει το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων (0,3, 0,39, 0,399, ...). Φαίνεται ότι συγχέεται η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων η οποία τείνει στο 0,4 με το άπειρο άθροισμα (0,3 + 0,09 + 0,009+...) που είναι ίσο με 0,4. Έτσι, η λέξη «τείνει» παριστάνεται με το σύμβολο «$\to$». Όμως η σύγχυση αυτή έχει τη βάση της στον τρόπο που έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούμε τη σχετική ορολογία. Χαρακτηριστικά ο Spivak (2010, σ. 428) αναφέρει:

Η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται αθροίσιμη αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει, όπου $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Στην περίπτωση αυτή, το $\lim_{n\to\infty} s_n$ συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (λιγότερο τυπικά με $a_1 + a_2 + a_3 ...$ και λέγεται το άθροισμα της ακολουθίας $\{a_n\}$.

Η ορολογία που εγκαινιάσαμε σε αυτόν τον ορισμό αντικαθίσταται συνήθως με λιγότερο ακριβείς εκφράσεις· ο ίδιος ο τίτλος αυτού του κεφαλαίου [Σειρές] είναι παρμένος από αυτήν την καθημερινή γλώσσα. Ένα άπειρο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συνήθως λέγεται *σειρά*, όπου η λέξη «σειρά» δίνει έμφαση στη σχέση που υπάρχει με την ακολουθία $\{a_n\}$. Αντί να λέμε ότι $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη ή όχι, λέμε συνήθως ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή όχι. Αυτή η ορολογία είναι κατά κάποιο τρόπο ιδιόρρυθμη, γιατί το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ στην καλύτερη περίπτωση συμβολίζει έναν αριθμό (άρα δεν μπορεί να «συγκλίνει»), ενώ δεν συμβολίζει απολύτως τίποτα αν $\{a_n\}$ δεν είναι αθροίσιμη. Παρ' όλα αυτά, αυτή η μη τυπική γλώσσα είναι εύχρηστη και καθιερωμένη και είναι απίθανο να οδηγήσει σε λογικές παρανοήσεις.

Στο απόσπασμα 2 επίσης βλέπουμε, ότι η εκπαιδευτικός προκειμένου να εκφράσει την αντίληψή της για τη σχέση του 0,3999... με το 0,4 δανείζεται το σύμβολο «$\rightarrow$» το οποίο χρησιμοποιείται στα μαθηματικά σε εκφράσεις όπως το όριο συνάρτησης ($\lim_{x\to x_0} f(x)$) δείχνοντας με τον τρόπο αυτό ότι αντιλαμβάνεται την αναπαράσταση 0,3999... ως συνάρτηση. Έτσι, φαίνεται ότι η πεποίθηση ότι η έκφραση 0,3999... είναι μια συνάρτηση που τείνει στο 0,4 είναι ικανή να κάνει την εκπαιδευτικό να οικειοποιηθεί σύμβολα από το αντίστοιχο πεδίο προκειμένου να εκφράσει και συμβολικά την πεποίθηση αυτή.

Επιπλέον, είναι χαρακτηριστικό ότι στο πλαίσιο της ημιδομημένης συνέντευξης φαίνεται η συνειδητοποίηση, από την ίδια την εκπαιδευτικό, της αντίφασης στην προσέγγισή με την οποία θεωρεί ότι διαφορετικό σύμβολο θα πρέπει να συνδέει το 0,3999... με το 0,4 από αυτό που πρέπει να συνδέει το 0,333... με το 1/3.

Την εισαγωγή ενός νέου συμβόλου σύνδεσης ανάμεσα στο 0,3999... και το 0,4 έχουμε και στο επόμενο απόσπασμα 3 από την ίδια συνέντευξη κάτι το οποίο δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν τα σύμβολα, μόνο με την καθορισμένη σημασία που τους έχει αποδοθεί στο πλαίσιο της τυπικής θεωρίας αλλά τα δανείζονται ή ακόμα και τα δημιουργούν κάθε φορά με βάση το εννοιολογικό περιεχόμενο που προσδίδουν σ' αυτά τη συγκεκριμένη στιγμή.

Απόσπασμα 3 από την συνέντευξη με την καθηγήτρια Κ38

Ε1: ... μπορεί να είναι ίσα πράγματα; το 0,3 κάτι και το 0,4;
Κ38: ίσα δεν είναι αλλά δεν μας νοιάζει αν έχουν πολύ πολύ μικρή διαφορά
Ε1: Α! με την έννοια της προσέγγισης μπορούμε να τα θεωρήσουμε ...
Κ38: ναι ...
Ε2: ναι, το ίσον θα μπορούσες να το βάλεις ... είναι σωστό να βάλουμε το ίσον ανάμεσα σ' αυτά τα δυο;
Κ38: αν μπορούσαμε να το βάλουμε γιατί να υπάρχει τότε αυτό (δείχνει το 0,3999...) και το χρησιμοποιούμε
Ε2: συγνώμη;
Κ38: αν μπορούσαμε να το βάλουμε το ίσον γιατί να υπάρχει ... ποιο απ' τα δυο θα διάλεγα;

Ε1: ποιο απ' απο τα δυο ... (δείχνει 0,3999... < 0,4 ή 0,3999... = 0,4)
Ε2: Α! γιατί να υπάρχει;
Κ38: θα 'βαζα αυτό (δείχνει 0,3999... ~ 0,4)

Στο απόσπασμα 3 φαίνεται ότι η εκπαιδευτικός δεν μπορεί να ξεκαθαρίσει αν πρέπει να βάλει το σύμβολο της ανισότητας ή της ισότητας, δηλαδή αν το 0,3999... είναι μικρότερο ή ίσο με το 0,4 και βρίσκει ως ενδιάμεση λύση το σύμβολο «~» εκφράζοντας σε συμβολικό επίπεδο την εμπειρική προσέγγιση της εκπαιδευτικού, όπου φαίνεται να θεωρεί ότι προσεγγιστικά οι αριθμοί 0,3999... και 0,4 είναι ίσοι. Επίσης, σημειώνεται ότι όταν η εκπαιδευτικός αναρωτιέται «αν μπορούσαμε να το βάλουμε το ίσον γιατί να υπάρχει ... ποιο απ' τα δυο θα διάλεγα;» με βάση και την εξέλιξη του διαλόγου φαίνεται ότι εννοεί «ότι αν μπορούμε να βάλουμε το ίσον τότε γιατί να υπάρχει διαφορετικό σύμβολο;».

Όμως, ενώ με μια πρώτη ματιά φαίνεται ασύνδετη η έννοια της αριθμητικής προσέγγισης με την έννοια του ορίου, ιστορικά έχει εντοπιστεί μια σαφής σχέση. Ο Cauchy επηρεασμένος από τις εργασίες των D' Alembert και Lagrange σχετικά με προσεγγίσεις άπειρων σειρών με οριακό σφάλμα χρησιμοποιεί ανισότητες προκειμένου να δώσει έναν νέο ορισμό της σύγκλισης. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η Grabiner (1981, σ. 76):

> Κατά την μελέτη εννοιών των ορίων, της συνέχειας και της σύγκλισης που βασίζονται στους ε-δ ορισμούς, θα πρέπει να σημειωθεί ότι το ελληνικό γράμμα ε που χρησιμοποιούν οι σύγχρονοι μαθηματικοί είναι ένας συμβολισμός που προήλθε από τον Cauchy ο οποίος τον εφάρμοσε σε πολλές αποδείξεις του. Πιθανότατα προέρχεται από την αντιστοιχία του «έψιλον» και του αρχικού γράμματος της γαλλικής λέξης «erreur» που σημαίνει σφάλμα. Το έψιλον σε μια σύγχρονη απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως κληρονομιά από τότε που οι ανισότητες χρησιμοποιούνταν στις προσεγγίσεις. Η σημείωση έψιλον είναι μια υπενθύμιση ότι, παραδόξως, η ανάπτυξη των προσεγγίσεων και της εκτίμησης ενός σφάλματος ανέδειξε πολλές από τις τεχνικές που είναι απαραίτητες για την πρώτη ακριβή και αυστηρή απόδειξη για τις έννοιες του απειροστικού λογισμού.

Στην ενότητα αυτή αναλύθηκε το σημειωτικό περιεχόμενο στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών και το σημειωτικό υπόβαθρο στη διαμόρφωση της συλλογιστικής αυτής. Παρουσιάστηκαν περιπτώσεις εκπαιδευτικών οι οποίοι προκειμένου να ερμηνεύσουν την κατανόηση ενός μαθητή για ένα μαθηματικό αντικείμενο, απομονώνουν λέξεις ή σημεία (signs) από τη δήλωση του μαθητή ή του ίδιου του μαθηματικού αντικειμένου και τα συνδέουν νοηματικά με όμοιες λέξεις ή σημεία του ευρύτερου μαθηματικού περιβάλλοντος όπου αυτά όμως έχουν παραπλήσιο ή ακόμα και διαφορετικό περιεχόμενο. Κάποιοι απ' αυτούς, όπως ο Κ1, χρησιμοποιούν τη διαδικασία αυτή για να ερμηνεύσουν τις αντιλήψεις των μαθητών καταφέρνοντας να αποστασιοποιηθούν από τις μεταφορές περιεχομένου από το ένα πεδίο στο άλλο. Κάποιοι άλλοι, όπως οι Κ9, Κ38 και Κ21 αλληλεπιδρούν νοήματα και προσεγγίσεις, τα οποία διαμορφώνουν ή και καθορίζουν ακόμα και τις δικές τους αντιλήψεις. Αναφερθήκαν επίσης συγκεκριμένες περιπτώσεις εκπαιδευτικών που δεν διστάζουν να υιοθετήσουν ή ακόμα και να προτείνουν μη καθιερωμένα σύμβολα στις διδακτικές τους προσεγγίσεις αποτυπώνοντας με τον τρόπο αυτό το σημειωτικό υπόβαθρο της συλλογιστικής τους.

4.2.2 Στοιχεία οντολογίας στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών

Από την ανάλυση των δεδομένων σχετικά με τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών προκύπτουν στοιχεία με οντολογικό υπόβαθρο. Για κάποιους από αυτούς όπως ήδη έχει αναφερθεί και στη μελέτη των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, η συγκεκριμένη αναπαράσταση δεν αποτελεί αριθμό αλλά διαδικασία. Για κάποιους άλλους, οι αριθμοί γίνονται αντιληπτοί μόνο εντός ενός ρεαλιστικού πλαισίου. Επίσης, οι αναπαραστάσεις που περιέχουν άπειρα ψηφία συχνά αντιμετωπίζονται ως αφηρημένες οντότητες και όχι ως συγκεκριμένα αντικείμενα. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε συγκεκριμένες περιπτώσεις τέτοιων συλλογιστικών τις οποίες συνοδεύουμε με κατάλληλα ερμηνευτικά σχήματα από το θεωρητικό μας πλαίσιο.

Ξεκινάμε με κάποιες περιπτώσεις εκπαιδευτικών που δεν θεωρούν ότι το 0,3999... εκφράζει αριθμό και τις πλασιώνουμε με σχετικές ερμηνείες. Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ106 στις διδακτικές του προτάσεις αναφέρει:

> [...] η παράσταση 0,3999... δεν θεωρείται αριθμός, αφού δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε το πλήθος των ψηφίων, από τα οποία αποτελείται. Συνεπώς δεν μπορούμε να τον τοποθετήσουμε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Μια ερμηνεία που προσφέρουμε εδώ με αφορμή το προηγούμενο απόσπασμα του εκπαιδευτικού Κ106 που παραθέτουμε, αλλά και γενικότερα για την αντίληψη εκπαιδευτικών που δεν θεωρούν ότι η αναπαράσταση 0,3999... εκφράζει αριθμό, σχετίζεται με τις σημασίες που έχουν αποδοθεί στον όρο «άπειρο». Στο απόσπασμα αυτό φαίνεται ότι ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι «η παράσταση 0,3999... έχει άπειρα 9, άρα δεν είναι συγκεκριμένος αριθμός». Σημειώνουμε εδώ ότι, ετυμολογικά η λέξη «άπειρο» υποδηλώνει «αυτό που δεν έχει πέρας (τέλος)». Έτσι, το άπειρο ως «οσοδήποτε μεγάλο» μπορεί να ερμηνευτεί ως κάτι το οποίο δεν είναι συγκεκριμένο, και ως τέτοιο είναι απροσδιόριστο. Με την έννοια αυτή περιγράφεται συχνά το άπειρο στη διδακτική πρακτική στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση λόγω της έλλειψης των απαραίτητων προτάσεων θεμελίωσης που υπάρχουν στα Ανώτερα Μαθηματικά.

Στο ίδιο πλαίσιο, η καθηγήτρια Κ71 θεωρεί ως «αφηρημένη έννοια» το 0,3999... και συγκεκριμένα αναφέρει στις διδακτικές προτάσεις:

> Θα διευκρίνιζα ότι [το 0,3999...] δεν είναι «αριθμός» *όπως αυτοί που χρησιμοποιούμε* (ακέραιος κλπ) αλλά μια αφηρημένη έννοια που την δανειζόμαστε για την εξήγηση των χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης. (η υπογράμμιση προστέθηκε)

Στο προηγούμενο απόσπασμα φαίνεται ότι οι αριθμοί για την εκπαιδευτικό Κ71 είναι «αυτοί που χρησιμοποιούμε» και δεν αποδέχεται για τον 0,3999... μια τέτοια δυνατότητα και συνεπώς θεωρείται μια «αφηρημένη έννοια».

Από τα προηγούμενα αποσπάσματα φαίνεται ότι τα άπειρα 9 προσδίδουν στην αναπαράσταση 0,3999... μια ασάφεια για κάποιους εκπαιδευτικούς όσον αφορά τη φύση τους.

Παρόμοια, ο καθηγητής Κ101 γράφει στις διδακτικές του προτάσεις:

> Για τον μαθητή Α θα του εξηγούσα την ύπαρξη άρρητων αριθμών, δηλαδή θα του έλεγα ότι αυτοί ίσως να είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας όπως παραδείγματος χάριν όταν έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 η υποτείνουσα του είναι $\sqrt{2}$, δεν είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός, δηλαδή ρητός, με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται ότι παρόλο που ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει ένα επιχείρημα για την πραγματική υπόσταση του $\sqrt{2}$ (ότι εκφράζει το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1) ουσιαστικά αντιμετωπίζει τους αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία ως άρρητους και ως «μη συγκεκριμένους αριθμούς». Είναι χαρακτηριστική η σύνδεση που κάνει ο εκπαιδευτικός μεταξύ της μαθηματικής σημασίας της λέξης «ρητός» με το νόημα του όρου που σημαίνει συγκεκριμένος ή καθορισμένος και ετυμολογικά «αυτός που μπορεί να ειπωθεί». Την συγκεκριμένη αμφισημία έχει διαπιστώσει και ο Felix Klein (1924) ο οποίος επισημαίνει το ετυμολογικό υπόβαθρο της λέξης 'irrational' (άρρητος) και την παρανόηση που δημιουργείται με τη θεώρηση του 'irrational' ως 'unreasonable' (μη λογικός) :

> Θα ήθελα να προσθέσω μια παρατήρηση σχετικά με τη λέξη «άρρητος» ('irrational'). Είναι χωρίς αμφιβολία η μετάφραση στα Λατινικά της ελληνικής λέξης «ἄλογος». Όμως η ελληνική λέξη σήμαινε «ανέκφραστος» ('inexpressible') και υπονοούσε ότι οι νέοι αριθμοί, ή λόγοι τμημάτων, δεν μπορούν δεν μπορούν να εκφραστούν από το λόγο δυο ακεραίων αριθμών, όπως οι ρητοί αριθμοί. Η παρανόηση της λατινικής λέξης «λόγος» ('ratio') μπορούσε να μεταφέρει μόνο το νόημα της λέξης «λογικός» ('reason'), δίνοντας στον «άρρητο» (irrational') το νόημα του «παράλογου» ('unreasonable') που φαίνεται να προσκολλάται στον όρο άρρητος αριθμός. (σ. 32)

Στη συνέχεια εστιάζουμε σε μια περίπτωση εκπαιδευτικού που φαίνεται να επηρεάζεται από τις πολλαπλές σημασίες με τις οποίες χρησιμοποιείται το άπειρο στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα ο καθηγητής Κ106 σχετικά με τον μαθητή Α αναφέρει:

> ... η παράσταση 0,3999... δεν είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός (όπως δηλαδή απάντησε ο μαθητής Β), αλλά μια κατά κάποιον τρόπο «διαδικασία» που τείνει να φτάσει στον αριθμό 0,4. Φυσικό είναι άλλωστε, το γεγονός ότι αφού η παράσταση 0,3999... έχει άπειρα 9, άρα δεν είναι συγκεκριμένος αριθμός.

Από τη μια το άπειρο στα μαθηματικά χρησιμοποιείται για να εκφράσει τον πληθάριθμο ενός μη πεπερασμένου συνόλου. Επίσης, το άπειρο χρησιμοποιείται στο όριο μιας ακολουθίας (α_ν) όταν λέμε όριο της ακολουθίας (α_ν) καθώς το ν τείνει στο άπειρο. Στην έκφραση 0,3999... έχουμε ενσωματωμένες και τις δυο σημασίες του απείρου. Από τη μια το σύνολο των 9 στην αναπαράσταση 0,3999... είναι απειροσύνολο. Από την άλλη η αναπαράσταση 0,3999... είναι το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = 0,3999...9$ (ν φορές το 9) όπου ν = 1, 2, 3, … καθώς το ν τείνει στο άπειρο.

Βλέπουμε στο σημείο αυτό ότι η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών μπορεί να δώσει ένα ερμηνευτικό πλαίσιο σχετικά με τις προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών για το άπειρο. Συγκεκριμένα, την έννοια του απείρου τη συναντάμε και με τις δυο σημασίες που προαναφέραμε ακόμα και στη δευτεροβάθμια μαθηματική εκπαίδευση, παρόλο που οι σχετικοί ορισμοί δεν αποδίδονται στο επίπεδο αυτό. Έτσι, εκ των πραγμάτων οι εκπαιδευτικοί καλούνται να διαπραγματευτούν διδακτικά την έννοια με βάση τη δική τους κατανόηση και το εκάστοτε σχετικό πλαίσιο διαπραγμάτευσης. Επιπλέον, η απουσία ορισμών για τις διαφορετικές σημασίες του απείρου στη δευτεροβάθμια μαθηματική εκπαίδευση αφήνει το πεδίο ανοιχτό για περισσότερο διαισθητικές προσεγγίσεις όπως πράγματι, συναντάμε στα ερευνητικά μας δεδομένα.

Επιπλέον φαίνεται ότι η πολλαπλότητα της οντολογίας του απείρου έχει τις καταβολές της στην ιστορική του εξέλιξη, ενισχύοντας την άποψη ότι η δυσκολία στην κατανόηση του 0,3999... ως αριθμό, οφείλεται σε επιστημολογικά εμπόδια η οποία υποστηρίζεται από την σχετικιστική προσέγγιση της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης Harel (2000).

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η οντολογία της έννοιας ακόμα και για τους εκπαιδευτικούς δεν καθορίζεται μόνο από τα τυπικά μαθηματικά χαρακτηριστικά της, όπως αυτά παρουσιάζονται στα σχετικά εγχειρίδια των Ανώτερων Μαθηματικών που οι εκπαιδευτικοί έχουν διδαχθεί. Μέρος του φορτίου της έννοιας καθορίζεται και από τη ευρύτερη σημασία του σχετικού όρου-λέξης που χρησιμοποιούμε για να την αποδώσουμε.

Στο παρακάτω απόσπασμα 4 φαίνεται η συλλογιστική της εκπαιδευτικού Κ38 σύμφωνα με την οποία, το 0,3999... έχει σταθερή ή μεταβλητή θέση στον άξονα ανάλογα με τη βαθμονόμηση του άξονα.

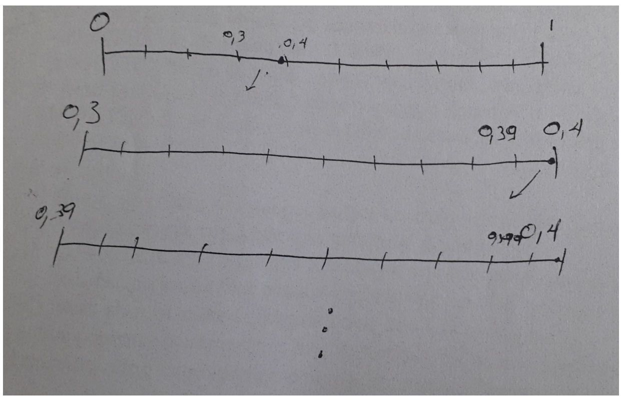
Απόσπασμα 4 από την συνέντευξη με την εκπαιδευτικό Κ38

Ε2: Μπορείς να κάνεις ένα σχήμα;
Κ38: Σχήμα γι' αυτόν εδώ [0,3999...] ;
Ε1: Στον άξονα
Κ38: Ας πούμε εδώ είναι το 0,3999 εδώ είναι το 0,400 και αυτό εδώ [δείχνει το 0,3999...] είναι κάπου εδώ πέρα [δείχνει ανάμεσα στο 0,3999 και το 0,400]
Ε2: Είναι κάπου σταθερά αυτό;
Κ38: θα έπρεπε να είναι κάπου εδώ που είναι οι γραμμές
Ε1: Δηλαδή κάτσε, είναι κάπου εκεί αλλά όχι εκεί που είναι το 0,400
Κ38: Είναι σχετικό βασικά αυτό
Ε2: Με τι;
Κ38: νομίζω είναι πολύ φιλοσοφικό ας πούμε,
Ε1: Σχετικό είναι αν είναι το ίδιο ή διαφορετικό;
Κ38: ... μπορείς να χωρίσεις το διάστημα και σ' άλλα κομμάτια. Άρα τώρα γίνεται μη σταθερό. Το θέμα είναι αν είναι μη σταθερό ή σταθερό ε;
Ε2: Περίπου, Πως το βλέπεις εσύ είναι το θέμα
Ε1: Κοίταξε...
Κ38: Εγώ το βλέπω με τα μάτια μου σ' αυτό τον κόσμο που ζω
Ε2: Δηλαδή;
Κ38: Εγώ σ' αυτό τον κόσμο που ζω το βλέπω σα σταθερό γιατί και να κινείται εγώ δε θα το βλέπω είναι πολύ μικρό, κάπως έτσι
Ε2: Γιατί αν κάνουμε πολύ μεγάλη την απόσταση από το 0 μέχρι το 1; Αν την κάνουμε 100 χιλιόμετρα.
Κ38: Ωραία τότε κινείται ...

Στο ίδιο πνεύμα με την εκπαιδευτικό Κ38 στο προηγούμενο απόσπασμα είναι μια διδακτική πρόταση του Κ34 ο οποίος αφού δίνει στις διδακτικές του προτάσεις μια απόδειξη για την ισότητα 0,3999... = 0,4 στη συνέχεια αναφέρει:

> Στο μαθητή Γ θα ζητούσα να βάλει το 0,399 πάνω στον άξονα των πραγματικών από το 0 έως το 1. Έπειτα φτιάχνοντας άλλον άξονα «μεγαλύτερο», δηλαδή ίσου μεγέθους αλλά χωρισμένο από το 0,3 έως το 0,4 θα συνέχιζα έτσι, ώστε να σκεφτούν την έννοια του «κοντά» και πιο κοντά και την έννοια του απείρου.

Στην Εικόνα 4.2.2Α παρατίθεται το σχήμα του εκπαιδευτικού Κ38 το οποίο αναφέρεται στο προηγούμενο απόσπασμα.



Εικόνα 4.2.2Α: Σχέδιο του εκπαιδευτικού Κ34

Στο παρακάτω απόσπασμα 5 από τη συνέντευξη με την καθηγήτρια Κ38 φαίνεται ότι οι αριθμοί προκειμένου να έχουν μια αποδεκτή υπόσταση ή οντολογία για την εκπαιδευτικό θεωρείται απαραίτητο να συνδέονται με κάποιο πραγματικό νόημα ή διαδικασία.

Απόσπασμα 5 από την συνέντευξη με την εκπαιδευτικό Κ38

Κ38: Εγώ προσωπικά θεωρώ καταρχήν... όλους τους αριθμούς, αριθμούς και ότι έτσι τους διδαχτήκαμε και ότι όχι μόνο αυτό, καταρχήν μας δίνουν ένα ποσοτικό μέγεθος ένα νούμερο ένα ... δηλώνουν κάτι στην καθημερινότητά μας οπότε μου δίνει κάτι, οπότε δεν μπορώ να μην το θεωρήσω σαν αριθμό

Ε2: Ο 0,333... τι δηλώνει από την καθημερινότητά μας; Μπορεί να περιγράψει κάτι καθημερινό;

Κ38: Μια διαίρεση

Ε2: Ποια;

Κ38: 1 δια ... το 10/3 είναι το 3.3333... ε .. το 1:3

Ε2: 1 δια 3

Ε1: Για να ξαναγυρίσουμε λίγο στο προηγούμενο σ' αυτό που έχει εδώ το 0,3999...

Κ38: Το κλάσμα 1/3 δεν είναι αριθμός; Είναι διαδικασία [απαντάει στον Ε2]

Στο απόσπασμα αυτό φαίνεται ότι ο αριθμός δεν θεωρείται μια αφηρημένη θεωρητική έννοια αλλά το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας, ένα αντικείμενο το οποίο εκφράζει κάτι «στην καθημερινότητά μας» κάτι πραγματικό. Έτσι, το 0,333... θεωρείται όχι μόνο αριθμός, αλλά και το αποτέλεσμα της διαδικασίας της διαίρεσης 1:3 η οποία μπορεί εύκολα να συνδεθεί με τα νοήματα που αποδίδονται σε ένα κλάσμα. Όμως κάτι αντίστοιχο δεν συμβαίνει με την αναπαράσταση 0,3999... η οποία δεν μπορεί να συνδεθεί άμεσα με τις διαδικασίες της διαίρεσης. Μια τέτοια σύνδεση μπορεί να γίνει μόνο μέσα από τις διαδικασίες του απειροστικού λογισμού και οι συνδέσεις με αντικείμενα «της καθημερινότητας» δεν είναι τόσο φανερές.

Συνεχίζοντας στο ίδιο πνεύμα παραθέτουμε αναφορές των εκπαιδευτικών στις οποίες φαίνεται ότι αυτοί αποζητούν μια φυσική διαδικασία η οποία να εκτελείται από κάποιο υποκείμενο και εξελίσσεται στο χρόνο προκειμένου να ερμηνεύσουν ένα μαθηματικό αντικείμενο. Για παράδειγμα ο εκπαιδευτικός Κ40 αναφέρει:

> Ο μαθητής Α φαίνεται ότι έχει κατανοήσει πλήρως την έννοια του ορίου από την απάντηση που δίνει. Θετικά σημεία της άποψής του είναι οι λέξεις που χρησιμοποιεί: «διαδικασία», «τείνει». Έτσι δείχνει ότι γνωρίζει ότι το όριο δεν είναι απλά ένας αριθμός αλλά και μια διαδικασία που μας βοηθάει να προσεγγίσουμε κάποιον αριθμό καθώς «κινούμαστε» προς αυτόν «ανεβαίνοντας» διαδοχικά τους αριθμούς.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται μια θεώρηση της έννοιας του ορίου ως φυσικό φαινόμενο που συνδέεται με το υποκείμενο που πραγματοποιεί τις ενέργειες. Μια τέτοια προσέγγιση βρίσκεται πολύ μακριά από τον αποστασιοποιημένο από τη φυσική πραγματικότητα τυπικό ορισμό του ορίου ακολουθίας. Συγκεκριμένες λέξεις όπως «τείνει» εκλαμβάνονται με την καθημερινή τους χρήση και καθορίζουν την κατανόηση για τα μαθηματικά αντικείμενα. Παρόμοια ο καθηγητής Κ73 στις διδακτικές του προτάσεις αναφέρει:

> Θα προσπαθούσα επίσης να δώσω στο μαθητή Δ να κατανοήσει ότι όσο αυξάνονται τα 9 τόσο πιο κοντά στο 0,4 πλησιάζει ποτέ όμως δε θα γίνει ο αριθμός 0,4. Δηλαδή η ανάλυση που έκανε ο ίδιος 0,3+0,09+0,009+... μας πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο 0,4 όχι όμως στον ίδιο τον αριθμό.

Στη συγκεκριμένη δήλωση υπάρχει μια διαισθητική συσχέτιση της μαθηματικής έννοιας του ορίου με το χρόνο στον οποίο εκτελείται αυτή η οριακή διαδικασία όταν αναφέρεται από τον εκπαιδευτικό ότι «*ποτέ* δε θα γίνει ο αριθμός 0,4». Αυτή η προσέγγιση όμως είναι σε απόσταση από την σύγχρονη θεώρηση για το όριο ακολουθίας.

Με εμφατικό τρόπο αναδεικνύεται η απαραίτητη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με ρεαλιστικές συσχετίσεις και στο παρακάτω απόσπασμα 6 της συνέντευξης που είχαμε με την καθηγήτρια Κ38.

Απόσπασμα 6 από την συνέντευξη με την καθηγήτρια Κ38

Ε1: … βλέπεις αυτό (δείχνει το 0,399) και βλέπεις αυτό (δείχνει το 0,3999...) τι σκέφτεσαι, αν υπάρχει διαφορά σ' αυτό που σκέφτεσαι όταν βλέπεις αυτό [0,399] με αυτό που σκέφτεσαι όταν βλέπεις αυτό [0,3999...].

Κ38: Δεν μπορώ να σας απαντήσω χωρίς να ... απαλλαγμένη από τις επιρροές τις καθημερινές δηλαδή με τίποτα ούτε ...επειδή δεν καταλαβαίνω ακριβώς σε τι αποσκοπούν εγώ αναγκαστικά θα απαντήσω σαν άνθρωπος ...τελοσπάντων θα το δω 399 χιλιοστά σα κλάσμα ... αυτό μπορεί να το δω και σαν 0,4 αλλά σαν μαθηματικός θα με ικανοποιούσε πιο πολύ η σειρά εμένα γι' αυτό το πράγμα.

Ε1: Δηλαδή αυτό είπες μπορείς να το δεις σαν 399 χιλιοστά ;

Κ38: Ναι

Ε1: Και αυτό (δείχνει το 0,3999...) σαν 0,4

Κ38: Αυτό σαν σειρά

Ε1: Όχι...

Κ38: Εννοώ για τις καθημερινές ανάγκες ενός ατόμου που δεν έχει να κάνει με μαθηματικά.

Ε2: Σαν σειρά όμως, πριν που σε ρωτήσαμε για τη σειρά είπες ότι δεν μπορεί να δίνει ένα συγκεκριμένο νούμερο

Κ38: Ναι, απάντησα γρήγορα επειδή ...

Ε2: Άρα αυτό δεν είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός αφού είναι ίσος με μια σειρά;

Κ38: η οποία συγκλίνει; ... ναι αυτή τη στιγμή συγκρούονται οι γνώσεις μου με τη διαίσθησή μου (χαμόγελα) δηλαδή

Ε1: Δηλαδή πως συγκρούονται;

Κ38: Συγκρούονται γιατί έχω μάθει ας πούμε τη σειρά να γράφω το ίσον, η σειρά που συγκλίνει να είναι ίσον ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα ακόμα απόσπασμα από την ίδια συνέντευξη για το ίδιο ζήτημα όπου φαίνεται με ακόμα πιο έντονο τρόπο μια σύγκρουση ανάμεσα στην διαισθητική προσέγγιση της εκπαιδευτικού και σε αυτή που θεωρεί ότι οφείλει να έχει ως μαθηματικός.

Απόσπασμα 7 από την συνέντευξη με την καθηγήτρια Κ38

Ε1: Βλέπεις μια τέτοια εικόνα αυτό με άπειρες τελείες [0,3999...] σε προβληματίζει το τι είναι αυτό που σε κάνει ... ο λόγος που σε προβληματίζει, αν έβλεπες δυο εννιάρια μόνο;

Κ38: Ότι κάποιους άλλους ανθρώπους τους απασχολεί, μπορεί αναλόγως την περίπτωση να το δει ως 0,4

Ε1: Όχι, όχι, άλλο ρωτάω. Αν έβλεπες αυτό με τα δυο εννιάρια δε θα σε προβλημάτιζε έτσι δεν είναι;

Κ38: Μα κι' αυτό θα μπορούσα να το δω σαν 0,4

Ε1: Το 0,399;

Ε2: Ακριβώς ίσο;

Κ38: Όχι εννοώ, αναλόγως με τις ανάγκες όχι σαν μαθηματικός
Ε1: Όχι, σαν μαθηματικός συζητάμε
Κ38: Εγώ νόμισα σαν άνθρωπος συγνώμη
Ε1: Όχι σαν μαθηματικός, καλά και οι μαθηματικοί άνθρωποι είναι, ξέρω γω, (γέλια) αυτό το διαχωρισμό δεν κατάλαβα ...
Ε1- Κ38 -Ε2: ΓΕΛΙΑ
Ε1: Δηλαδή τον αριθμό τον βλέπεις σαν διαδικασία αλλά τον μαθηματικό δεν τον βλέπεις σαν άνθρωπο …
Ε1 – Κ38 - Ε2: ΓΕΛΙΑ

Η Grabiner (1981) θεωρεί ότι ένας από τους λόγους που έστρεψαν τους μαθηματικούς προς τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού αφορά το ζήτημα της *μεθοδολογίας* της ίδιας της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας. Μέχρι και τον 17^{ο} αιώνα θεωρείται ότι τα μαθηματικά αντλούν το νόημά τους από τη φύση. Χαρακτηριστική για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι η δήλωση που αποδίδεται στο Γαλιλαίο ότι «Το βιβλίο της Φύσης είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών». Όμως τον 18^{ου} αιώνα φαίνεται από την αλληλογραφία μεταξύ του D' Alembert και του Lagrange πως θεωρούσαν ότι οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνταν είχαν φτάσει σε κάποιο όριο που έπρεπε να το ξεπεράσουν. Έτσι, αναπτύσσεται μια στροφή για λογική αυστηρότητα στις αποδείξεις, για περισσότερη σαφήνεια στους ορισμούς των εννοιών και την απομάκρυνση της γεωμετρικής μεθοδολογίας (υπό τη μορφή της εποπτείας) από την ανάλυση. Μια τέτοια τάση σημαίνει την αποδοχή του διαχωρισμού των μαθηματικών από τον εμπειρικό κόσμο.

> Τα μαθηματικά λοιπόν τώρα τείνουν προς μια *αυτοθέσμιση* των μεθόδων τους και των εργαλείων τους και προς μια *αυτοδιαχείριση* των 'πραγμάτων του οίκου τους', στο βαθμό που επιχειρούν να καθορίσουν για λογαριασμό τους τα εργαλεία της πρακτικής τους. (Ρουσόπουλος, 1991, σ. 40)

Στα προηγούμενα αποσπάσματα βλέπουμε ότι επανέρχεται και πάλι το δίπολο των εμπειρικών με τις φορμαλιστικές προσεγγίσεις τουλάχιστον για τις ανάγκες της διδακτικής πρακτικής. Σε άλλες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί της έρευνάς μας περιορίζονται σε μια φορμαλιστική προσέγγιση του μαθηματικού ζητήματος (Zoitsakos, Zachariades, Saconidis, 2015). Στην ενότητα αυτή όμως, έχουμε αποσπάσματα εκπαιδευτικών που δεν ακολουθούν την τάση ανεξαρτητοποίησης των μαθηματικών από το εμπειρικό τους υπόβαθρο, τουλάχιστον κατά την τοποθέτησή τους σ' ένα διδακτικό πλαίσιο. Αυτή η τάση η οποία χαρακτηρίζει την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ο Freudenthal (1983) την έχει ονομάσει «απο-οντολόγηση» ("anontologization").

> Οι αριθμοί, η αρίθμηση, και οι αριθμητικές πράξεις είναι πρώτα απ' όλα ένα μέσο για την οργάνωση φαινομένων όπου οι ποσότητες παίζουν ένα ρόλο. Όλες οι θεωρίες των φυσικών αριθμών έχουν τις ρίζες τους σε αυτά τα μέσα οργάνωσης. Αλλά όλες οι θεωρίες το ξεπερνούν αυτό. Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από μια τάση την οποία έχω ονομάσει απο-οντολόγηση: κοψίματος των δεσμών με την πραγματικότητα. Αυτή η τάση είναι δικαιολογημένη. Είναι, ωστόσο, το αποτέλεσμα της ιστορικής και της ατομικής εξέλιξης και δεν μπορεί να θεωρείται έμφυτη στο νου του μαθητή. Ακόμα περισσότερο δεν μπορεί ο μαθητής να θεωρείται επιδεκτικός σε απο-οντολογιοποιημένα μαθηματικά. Οι προσπάθειες για την ενδυνάμωσή της οδηγούν σε λανθασμένες εφαρμογές. (σ. 81)

Στην κατεύθυνση άρσης αυτής της τάσης προσπαθεί να συμβάλλει ο καθηγητής Κ4 όταν στις διδακτικές του προτάσεις αναφέρει:

Πρέπει να αντιμετωπίσουμε κάποιες παρανοήσεις: α. Ένα άθροισμα άπειρων όρων μπορεί να τείνει σε έναν αριθμό. Αυτό γίνεται με ένα παράδειγμα: Κόβοντας ένα χαρτί στο μισό και το μισό πάλι στο μισό κ.λπ.

Το φαινόμενο της απο-οντολόγησης θα μπορούσε να μας δώσει και μια ερμηνεία για τη δυσκολία κατανόησης της σύνδεσης των απειροψήφιων δεκαδικών όπως το 0,3999… με το 0,4. Έτσι, ενώ οντολογικά το κλάσμα συνδέεται με μια συγκεκριμένη ενέργεια, την διαίρεση που πρέπει να πραγματοποιήσουμε προκειμένου για παράδειγμα να περάσουμε από το 4/10 το οποίο είναι μια διαφορετική μορφή της διαίρεσης 4:10 και γράφεται και ως 0,4, η περίπτωση των απειροψήφιων περιοδικών δεκαδικών αριθμών δεν μπορεί να συνδεθεί με μια τέτοια άμεση ενέργεια η οποία να ολοκληρώνεται σε πεπεπρασμένα βήματα. Έτσι, ενώ η σύνδεση του 0,4 με το κλάσμα 4/10 παραμένει ακόμα και στον τρόπο που το διαβάζουμε («τέσσερα δέκατα»), η αντίστοιχη σύνδεση του 0,399... με το κλάσμα απουσιάζει εντελώς εμφανίζοντας έτσι μια σημασιολογική ασυμφωνία. Ίσως με βάση αυτή την ασυμφωνία κάποιοι καθηγητές όπως η Κ23 θεωρούν ότι ο 0,3999... «είναι ένας άρρητος αριθμός». Επίσης ο εκπαιδευτικός Κ35 αναφέρει σχολιάζοντας τη δήλωση του μαθητή Β: «Ο αριθμός έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, είναι άρρητος».

Στο ίδιο πνεύμα επισημαίνουμε την αναφορά του Κ40, «δεν είναι *απλά* ένας αριθμός αλλά και μια διαδικασία που μας βοηθάει να προσεγγίσουμε κάποιον αριθμό» μαζί με τη δήλωση της καθηγήτριας Κ33 η οποία αναφέρει «Οι μαθητές Α, Β δεν έχουν καταλάβει προφανώς ότι 0,3999…= 0,4 και όχι *απλά* ότι «τείνει» στο 0,4» (οι επισημάνσεις δικές μας).

Στην ενότητα αυτή αναλύσαμε το οντολογικό περιεχόμενο στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών. Από την ανάλυσή μας προέκυψε ότι καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών για την αναπαράσταση 0,3999... έχει η πολλαπλότητα της οντολογίας της έννοιας του απείρου.

Ένα ζήτημα που προσδιορίζει στοιχεία του περιεχομένου της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών για το συγκεκριμένο ζήτημα σχετίζεται με την οντολογία του απείρου η οποία προέρχεται από το ετυμολογικό υπόβαθρο της λέξης «άπειρο» το οποίο παραπέμπει σε «κάτι χωρίς πέρας». Έτσι, για αρκετούς εκπαιδευτικούς περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί όπως ο 0,3999... ή οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών, δεν θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν «συγκεκριμένους» αριθμούς αλλά αφηρημένες ιδέες χωρίς ρεαλιστική υπόσταση.

Επίσης, από την ανάλυση των δηλώσεων των εκπαιδευτικών προκύπτει ότι μια σημαντική πηγή δυσκολίας προέρχεται από το διττό χαρακτήρα του απείρου στα μαθηματικά και ειδικότερα στην αναπαράσταση 0,3999... Συγκεκριμένα, στην αναπαράσταση 0,3999... ενσωματώνεται η έννοια του άπειρου πληθάριθμου που έχει το σύνολο των ψηφίων 9 με την έννοια του «ορίου ακολουθίας όπου το ν τείνει στο άπειρο.

Επιπλέον, σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών αναζητούν εμπειρικές προσεγγίσεις, ή φυσικές διαδικασίες διαμορφώνοντας ένα πραγματιστικό υπόβαθρο για τις μαθηματικές έννοιες που διαχειρίζεται διδακτικά. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η προσέγγιση προέρχεται από μια αδυναμία αξιοποίησης της σχετικής θεσμικής γνώσης που είχαν διδαχθεί οι εκπαιδευτικοί στο πανεπιστήμιο για τις ανάγκες της διδακτικής πρακτικής τους. Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις όμως κάποιοι εκπαιδευτικοί φαίνεται ότι προσπαθούν να αποκαταστήσουν μια ισορροπία στην τάση ανεξαρτητοποίησης των μαθηματικών από το εμπειρικό τους υπόβαθρο και τα ερωτήματα που τα οδήγησαν στην ανάπτυξή τους.

Επισημαίνουμε ότι, στο πλαίσιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν διδάσκονται οι σχετικοί ορισμοί για τις πολλαπλές σημασίες του απείρου, με αποτέλεσμα μαθητές και εκπαιδευτικοί να προσπαθούν να αποδώσουν τα αντίστοιχα νοήματα με περιγραφικές και διαισθητικές προσεγγίσεις. Επίσης, φαίνεται ότι η σχετική θεσμική γνώση την οποία είχαν διδαχθεί οι εκπαιδευτικοί στο πανεπιστήμιο, δεν μπορεί στις περισσότερες περιπτώσεις, να αξιοποιηθεί με ουσιαστικό τρόπο στην διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών.

4.2.3 Επιστημολογικά στοιχεία στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών

Στην ενότητα αυτή επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε φαινόμενα που δείχνουν τις επιστημολογικές πτυχές που αναδεικνύονται από τη μελέτη των ερμηνειών των εκπαιδευτικών για τις δηλώσεις των μαθητών του σεναρίου. Δηλαδή, ζητήματα που δείχνουν ότι ο τρόπος διαπραγμάτευσης των μαθηματικών εννοιών από τους εκπαιδευτικούς δεν περιλαμβάνει μόνο τις τελικές μορφές των εννοιών όπως αυτές διατυπώνονται στη σύγχρονη θεώρησή τους αλλά πτυχές της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών αυτών.

Συγκλίνουσα και αποκλίνουσα σειρά

Ο καθηγητής Κ3 ερμηνεύοντας τη δήλωση του μαθητή Δ αναφέρει:

> Ο μαθητής Δ ορθά βλέπει στη λέξη παράσταση τη λέξη άθροισμα και σπάει τον αριθμό 0,3999... σε 0,3+0,09+0,009, ... κάτι που σωστά αναφέρει [ότι] αυξάνεται συνεχώς και δεν μπορεί να ισούται με κάποιο αριθμό. Βέβαια πρέπει να τονιστεί ότι ο αριθμός αυτός θα είναι πάντα μικρότερος αυστηρά του 0,4.

Παρατηρούμε ότι διακρίνονται κάποιες αντιφάσεις στο σκεπτικό της προηγούμενης δήλωσης. Από τη μια θεωρείται το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 +... ως αποκλίνουσα σειρά, όταν αναφέρεται ότι «αυξάνεται συνεχώς και δεν μπορεί να ισούται με κάποιον αριθμό» και από την άλλη θεωρεί σωστό ότι ο *αριθμός* 0,3999... είναι ίσος με το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 + ... Αυτή η τάση συμβιβασμού αντιφατικών προεγγίσεων σε σχέση με τις άπειρες σειρές έχει τα ιστορικά της ίχνη. Συγκεκριμένα ο ίδιος ο Euler εφαρμόζοντας τη σχέση $\left(1+x\right)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$ για $m=-1$ αναφέρει:

> Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα κάθε άπειρης σειράς είναι η πεπερασμένη έκφραση με το ανάπτυγμα της οποίας δημιουργείται η σειρά. Υπό αυτή την έννοια το άθροισμα των άπειρων σειρών $1-x+x^2-x^3+\ldots$ θα είναι $\frac{1}{1+x}$, επειδή η σειρά προκύπτει από το ανάπτυγμα του κλάσματος, για οποιονδήποτε αριθμό τίθεται στη θέση του x. Αν συμφωνηθεί κάτι τέτοιο, ο νέος ορισμός της λέξης άθροισμα συμπίπτει με τη συνήθη έννοια όταν μια σειρά συγκλίνει. Και δεδομένου ότι οι αποκλίνουσες σειρές δεν έχουν κανένα άθροισμα με την αρμόζουσα έννοια της λέξης, καμία δυσκολία δεν μπορεί να προκύψει από αυτή την ορολογία. Τελικά, μέσω αυτού του ορισμού, μπορούμε να διατηρήσουμε την χρησιμότητα των αποκλινουσών σειρών και να υπερασπιστούμε τη χρήση τους πέρα από κάθε αντίρρηση. (Institutiones 1755 in Kline M. 1983, p. 313)

Όπως επισημαίνει ο Morris Kline (1983) «Ένα εξωτερικό χαρακτηριστικό του 18^{ου} αιώνα είναι ότι οι μαθηματικοί εμπιστεύονταν τα σύμβολα περισσότερο από τη λογική» (σ. 314). Προτιμούσαν να υιοθετούν τους τύπους των δυναμοσειρών παρόλο που ήξεραν ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι αντίστοιχες σειρές δεν ήταν συγκλίνουσες. Οπωσδήποτε αναγνώριζαν την αναγκαιότητα για περισσότερες διευκρινήσεις αλλά φαίνεται ότι δεν ήταν διατεθειμένοι να απορρίψουν το σύνολο της μεθόδου λόγω των εμφανιζόμενων δυσλειτουργιών.

Τα απειροστά

Σε κάποιες περιπτώσεις στις δηλώσεις των εκπαιδευτικών ανιχνεύονται στοιχεία που παραπέμπουν στη μακρά ιστορική συζήτηση για τα απειροστά Για παράδειγμα, η καθηγήτρια Κ9 η οποία θεωρεί ότι ο μαθητής Β έχει ικανοποιητική αντίληψη του θέματος αναφέρει:

> Ο μαθητής Α έχει αντιληφθεί ότι το 0,3999… είναι «απείρως κοντά» στο 0,4, ίσως επειδή η παράσταση [0,3999…] δεν μπορεί να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή τη χαρακτηρίζει διαδικασία […].

Στις παραπάνω δηλώσεις, από τη μία, φαίνεται μια αντίληψη σύμφωνα με την οποία το 0,3999… είναι απείρως κοντά στο 0,4. Από την άλλη η προηγούμενη αντίληψη για την απόσταση του 0,3999... από το 0,4 είναι πολύ κοντά στην έννοια του απειροστού αλλά σε διαισθητικό μόνο επίπεδο, μακριά από τη θεωρητική θεμελίωση των απειροστών όπως έγινε με την εργασία του Robinson (1966) για την μη συμβατική ανάλυση.

Αντίστοιχα η καθηγήτρια Κ21 εμφανίζει την αντίληψη ότι τα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών δεν είναι αδιαίρετα. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι:

> Δεν μπορούμε να εντοπίσουμε τον αριθμό 0,39...9 με άπειρα 9. Ότι δεν μπορεί το μυαλό μας να μετρήσει άπειρα 9. [...] Αυτός ο αριθμός συνεχώς πλησιάζει το 0,4 δεν είναι απλά ο προηγούμενός του. [...] Θα παρότρυνα τους μαθητές να μου δείξουν τον αριθμό 0,39...9 πως όμως γνωρίζω ότι εκείνο το *σημείο* που θα μου έδειχναν δε σπάει σε πιο μικρά *σημεία* και το αμέσως επόμενο σε ακόμα πιο μικρά κ.ο.κ. (οι υπογραμμίσεις προστέθηκαν)

Οι Katz & Tall (2012) επισημαίνουν ότι «οι απειροστές έννοιες δημιουργούνται φυσικά στην ανθρώπινη σκέψη προκαλώντας μια σύγκρουση μεταξύ της φυσικής διαδικασίας σκέψης των μαθητών και τυπικών τρόπων απόδειξης της μαθηματικής ανάλυσης» (σ. 77) και προσφέρουν μια προσέγγιση που:

> ... επιτρέπουν την αντιμετώπιση ακολουθιών που τείνουν στο μηδέν ή στο άπειρο να συλλαμβάνονται με όρους απειροστών και άπειρων ποσοτήτων με ένα τυπικό τρόπο που συνάδει με τις διαισθητικές ιδέες των απειροστών και των άπειρων αριθμών στον απειροστικό λογισμό (σ. 85).

«Η έννοια του ‘τείνει’»

Η καθηγήτρια Κ29 αναφέρει στην εισαγωγή του δοκιμίου της σχετικά με το στόχο της ερώτησης του καθηγητή του σεναρίου.

> Ο καθηγητής με αυτή την ερώτηση προσπαθεί να εισάγει ίσως την έννοια του ορίου στους μαθητές και την *έννοια του «τείνει»*. Η παράσταση 0,3999... τείνει στο 0,4 όταν τα ψηφία τείνουν στο άπειρο αλλά ποτέ δε φτάνει το 0,4 και αυτό είναι που πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές. Όπως για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ αλλά ποτέ η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ δεν ακουμπάει τον $x'x$ δηλαδή δεν μηδενίζεται. Όσο το x μεγαλώνει τόσο, δηλαδή ο παρονομαστής $\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\frac{1}{10^4},\frac{1}{10^5},\ldots$ ο αριθμός γίνεται όλο και πιο μικρός αλλά ποτέ δεν γίνεται μηδέν. (η υπογράμμιση προστέθηκε)

Σε πρώτη φάση επικεντρώνουμε την προσοχή μας στην υπογράμμισή που έχουμε κάνει στη δήλωση της εκπαιδευτικού σχετικά με την «έννοια του ορίου και ... την έννοια του ‘τείνει’» και τις ομοιότητες που υπάρχουν με μια κλασική διατύπωση για το όριο που διατυπώθηκε τον $18^{ο}$ αιώνα από τους d’ Alembert και de la Chapelle στην *Εγκυκλοπαίδεια*.

> Ένα μέγεθος θεωρείται ότι είναι το όριο ενός άλλου μεγέθους, όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίσει πλησιέστερα προς το πρώτο από ένα δεδομένο μέγεθος, τόσο μικρό όσο αυτό [το δεδομένο] μέγεθος μπορεί να υποτεθεί, παρόλα αυτά, χωρίς το μέγεθος που πλησιάζει να μπορεί ποτέ να ξεπεράσει το μέγεθος που προσεγγίζει, έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ μιας ποσότητας και του ορίου της είναι απολύτως ασήμαντη ... Ορθώς μιλώντας, το όριο ποτέ δεν συμπίπτει ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα του οποίου είναι ένα όριο, αλλά το τελευταίο μπορεί πάντοτε να πλησιάζει και να προσεγγίζει και μπορεί να διαφέρει από αυτό όσο λιγότερο επιθυμεί. (όπως αναφέρεται στο Grabiner, 1981, σ. 8)

Παρόμοια, σε μια διαισθητική προσέγγιση για το όριο συνάρτησης, που συχνά φαίνεται από τα δεδομένα μας ότι προτιμούν οι εκπαιδευτικοί, είναι αυτή που επιχειρείται στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών προσανατολισμού θετικών σπουδών/οικονομίας και πληροφορικής (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2017). Στην αρχή της ενότητας για το όριο συνάρτησης, με αφορμή το παράδειγμα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ αναφέρεται:

> Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2 [...] Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και διαβάζουμε «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2». (σ. 40)

Υπάρχει βεβαίως σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση τον σύγχρονο ορισμό του ορίου συνάρτησης όπως αυτός εμφανίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Λυκείου:

> Λέμε ότι μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ έχει στο x_0 όριο $\ell\in\mathbb{R}$, και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $0<|x-x_0|<\delta$, να ισχύει: $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. (σ. 43)

Στο σύγχρονο ορισμό σε αντίθεση με τις προσεγγίσεις των μαθηματικών του 18ου αιώνα, δεν υπάρχει κάποια αναφορά σε μεταβλητές ή μεγέθη που «τείνουν», «πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά» ή «προσεγγίζουν οσοδήποτε επιθυμούμε» κάποιον αριθμό. Το μόνο που απέμεινε στον σύγχρονο ορισμό είναι ή λέξη «όριο» στον τρόπο που διαβάζεται το αντίστοιχο σύμβολο. Τέτοιες λέξεις ή εκφράσεις εμφανίζονται μόνο στις λεκτικές προσπάθειες περιγραφής του ορισμού του ορίου συνάρτησης όπως μπορούμε να δούμε στο διδακτικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου.

> Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και διαβάζουμε «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 είναι ℓ» ή το «όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ». (Ανδρεαδάκης κ.ά, 2017, σ. 40)

Έτσι, φαίνεται ότι μια πηγή συγγένειας μεταξύ των σύγχρονων κατανοήσεων των εκπαιδευτικών και αυτών που συναντάμε στην ιστορία των επιστημών και των μαθηματικών βρίσκεται στο διαχωρισμό των τρόπων με τους οποίους οι λέξεις έχουν διαδραματίσει το ρόλο τους στην εξέλιξη των εννοιών αλλάζοντας το νόημά τους. Ένας όρος που εισάγεται από τη Skarga (1989) γι' αυτόν τον διαχωρισμό είναι ο «εξορθολογισμός» (rationalization) μιας λέξης ή έκφρασης από τότε που έγινε επιστημονικός όρος και περιλαμβάνεται σε μια θεωρία. Ένας ακόμα όρος είναι η «μεταφορά» (metaphorization) όπου η λέξη ή η σημασία ενός συμβόλου αποκτά ένα μεταφορικό νόημα όπως χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη. Για παράδειγμα, η έννοια της μάζας στη Φυσική έχει περάσει από την συνήθη της σημασία ως κάτι μεγάλο ή βαρύ, στον ορισμό της με βάση τη σχέση της δύναμης με την επιτάχυνση μέσω της Νευτώνιας θεωρίας και την εξέλιξή της, στη συνέχεια, στην έννοια της μάζας στη θεωρία της σχετικότητας και στη θεωρία του Dirac.

Ο *εξορθολογισμός* και η *μεταφορά* είναι διαδικασίες που οδηγούν σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Ενώ ο εξορθολογισμός σπάει τις γλωσσικές παραδόσεις και οντολογίες που φέρει έννοια, η μεταφορά τις διατηρεί με τρόπους που δεν είναι εντελώς καθορισμένοι, αλλά ακόμα διατηρούνται κάποια από τα παλιά νοήματα και αξίες (Sierpinska, 1996).

> Το πέρασμα σε μια μεταφορά δεν είναι μια διακοπή από την εμπειρία, παρότι μπορεί να είναι το αποτέλεσμα μιας απόσπασης από τα κυριολεκτικά νοήματα χάρη στην επιβεβαίωση της εμπειρίας με επιστημονικές μεθόδους. Περιλαμβάνεται σε ένα στερέωμα από πολύ ισχυρές προηγούμενες εμπειρίες, μαζί με συνδέσεις που τις ξυπνούν, γεμίζουν με συναισθήματα και αξίες σ' ένα πλούσιο ιστό από φαντασία ... Υπάρχουν εμπειρίες τόσο ισχυρές που ο χρόνος δεν μπορεί να τις καταστρέψει. Γίνονται πηγές ολόκληρων θεωριών όπως η θεωρία των στοιχείων, και όταν η θεωρία εγκαταλείφθηκε, εκφράζονταν τα ίδια σ' ένα δίκτυο μεταφορών, και αυτό είναι ακριβώς το δίκτυο που έχει τη δύναμη της επιβίωσης όχι ως υπενθύμιση των ξεχασμένων που τα βάζουμε στην άκρη αλλά σαν ζωντανή λέξη ... Η γλώσσα είναι ένας πραγματικός θυσαυρός – το σπίτι των σκέψεων και των εικόνων των οποίων είμαστε κληρονόμοι... (Skarga, 1989, σ. 136-137 με βάση την παράθεση στο Sierpinska, 1996, σ. 123)

Μια πεποίθηση που εμφανίζεται αρκετά συχνά στους εκπαιδευτικούς της έρευνάς μας όπως είδαμε και στη δήλωση της καθηγήτριας Κ29 που προαναφέραμε είναι η θεώρηση σύμφωνα με την οποία «οι τιμές μιας συνάρτησης πλησιάζουν το όριό της αλλά δεν το φτάνουν ποτέ». Παρόμοιες αντιλήψεις εκφράζουν και άλλοι εκπαιδευτικοί της έρευνάς μας.

> Κ65: Ο μαθητής Α προφανώς έχει διδαχθεί τα όρια και δίνει μια <u>σχεδόν</u> σωστή απάντηση σκεπτόμενος τον ορισμό του ορίου. Ότι δηλαδή, όταν λέμε $x \to x_0$, εννοούμε ότι το x είναι πάρα πολύ κοντά στο x_0 δεν είναι όμως ίσα (η υπογράμμιση υπήρχε).

> Κ21: Η έννοια του ορίου ενός αριθμού x που τείνει στο 0,4 σημαίνει ότι θέλω να υπολογίσω κάτι για έναν αριθμό που πλησιάζει πολύ κοντά στο 0,4 αλλά δεν τον φτάνει, δηλαδή έναν αριθμό 0,3999.........9 με άπειρα 9.

Αντίστοιχη προσέγγιση για το όριο συναντάμε και στους μαθηματικούς του 18ου αιώνα όπως φαίνεται και από το απόσπασμα της Εγκυκλοπαίδειας των d' Alembert και de la Chapelle που παραθέσαμε παραπάνω.

Όμως οι περιγραφές των d' Alembert και de la Chapelle όπως και οι περιγραφές των παραπάνω εκπαιδευτικών έχουν δυο βασικούς περιορισμούς οι οποίοι είναι πολύ ισχυροί για τα μαθηματικά. Αν ένα μέγεθος δεν ξεπερνά ποτέ το όριό του, τότε μια μεταβλητή δεν μπορεί να ταλαντεύεται γύρω από το όριο. Πως λοιπόν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο ορισμό για να ορίσουμε το όριο των μερικών αθροισμάτων της σειράς $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, ή να εξετάσουμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x}$ καθώς το x τείνει στο 0. Και αν το μέγεθος δεν μπορεί να γίνει ποτέ ίσο με το όριό του, τότε πως μπορεί να οριστεί η παράγωγος της γραμμικής συνάρτησης $f(x)$ = ax + b ως το όριο του πηλίκου των διαφορών. Η εγκατάλειψη αυτών των περιορισμών είναι απαραίτητη προκειμένου ο ορισμός ή το όριο να είναι επαρκώς ευρύ για να υποστηρίξει τους ορισμούς όλων των βασικών εννοιών του απειροστικού λογισμού (Grabiner, 1981).

Όμως η τάση των εκπαιδευτικών να θεωρούν ότι «οι τιμές της συνάρτησης δεν φτάνουν ποτέ το όριό της» έχει και μια ερμηνεία που δικαιολογείται στο διδακτικό πλαίσιο. Οι εκπαιδευτικοί ενδεχομένως θέλουν να προστατέψουν τους μαθητές τους από την λανθασμένη πεποίθηση ότι το όριο κάθε συνάρτησης σ' ένα σημείο είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό, δηλαδή ότι αν μια συνάρτηση έχει όριο σ' ένα σημείο τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Αυτή η προσέγγιση διαφαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα από το δοκίμιο της καθηγήτριας Κ23 η οποία αναφερόμενη στον μαθητή Δ γράφει:

> ... φαίνεται ότι έχει καταλάβει ότι ένα όριο πηγαίνει σ' έναν αριθμό αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη ίσο με αυτόν (δεδομένου ότι κανένας δεν μας λέει εάν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση που $f(x_0)=0{,}4$. Θετικό σημείο θεωρώ ότι είναι το γεγονός ότι έχει κατανοήσει τη διαφορά του τείνει μια συνάρτηση (ή μια ακολουθία) κάπου χωρίς κατ' ανάγκη όμως να ταυτίζεται με το όριο αυτό.

Κάποιοι άλλοι εκπαιδευτικοί φαίνεται να θεωρούν ότι τελικά ή θεωρητικά «η συνάρτηση φτάνει το όριο της».

> Κ28: Λέγοντας τείνει ίσως έχει στο μυαλό του την έννοια του ορίου που κάποια στιγμή θεωρητικά θα φτάσει το 0,4.

Όπως φαίνεται όμως ο τρόπος που προσεγγίζουν, τουλάχιστον σε διδακτικό πλαίσιο, την έννοια του ορίου, αρκετοί εκπαιδευτικοί της έρευνάς μας, είναι πιο κοντά στο τρόπο που το προσέγγιζαν οι μαθηματικοί του 18ου αιώνα, παρά με τον σύγχρονο ορισμό για το όριο που έχουν διδαχθεί στο πανεπιστήμιο τον οποίο παραθέτουμε στη συνέχεια:

> Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A[2]. Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 υπάρχει και ισούται με $\ell\in\mathbb{R}$ αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in A$ και $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει: $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Όπως επισημαίνει η Sierpinska (1990):

> Ο ορισμός του Weierstrass για το όριο μιας ακολουθίας[3] με όρους έψιλον και Ν δεν λύνει το πρόβλημα σχετικά με τον αν η ακολουθία φτάνει το όριό της ή όχι. Είναι

[2] Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Λέμε ότι ο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του Α αν για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x\in$ Α ώστε $0<\left|x-x_0\right|<\delta$.

στατικός και φορμαλιστικός εξαλείφοντας αυτό το πρόβλημα από τα μαθηματικά και κάνοντάς το άνευ σημασίας το να τεθεί. (σ. 32)

Κάπως διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή που εμφανίζεται στον ορισμό του Cauchy για το όριο μιας μεταβλητής το οποίο παραθέτουμε στη συνέχεια.

> Όταν οι διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή ποσότητα πλησιάζουν απεριόριστα μια σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά [αυτές οι τιμές] να διαφέρουν από τη σταθερή αυτή τιμή τόσο λίγο όσο θέλουμε, τότε αυτή η τιμή λέγεται το όριο των άλλων τιμών. (Cauchy, 1821 όπως παρατίθεται στο Grabiner, 1981, σ. 7)

Στον παραπάνω ορισμό του Cauchy δεν γίνεται κάποια αναφορά σχετικά με το αν οι τιμές της μεταβλητής ποσότητας φτάνουν ή όχι την οριακή τιμή τους.

Στην σύγχρονη προσέγγιση για το όριο συνάρτησης, ενώ υπάρχουν κάποιες ομοιότητες με τον ορισμό του Cauchy απουσιάζει η ιδέα της διαδοχικότητας σύμφωνα με την οποία οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής τείνουν στην οριακή τους τιμή.

Ακόμα διακρίνουμε, λιγότερο, στον ορισμό του ορίου των d' Alembert και de la Chapelle και περισσότερο στον ορισμό του Cauchy την αναφορά στις «διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή ποσότητα» η οποία δεν έχει νόημα στον τυπικό ορισμό του ορίου συνάρτησης.

Αρκετά μπερδεμένη είναι η προσπάθεια της εκπαιδευτικού Κ96 να χρησιμοποιήσει τη γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών που έχει διδαχθεί στο πανεπιστήμιο προκειμένου εξηγήσει με όρους θεωρίας ορίων τι σημαίνει ότι «έναν αριθμός τείνει σ' έναν άλλον». Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Στη συνέχεια θα τους έκανα παραδείγματα διαστημάτων με άκρα *(x-ε, x+ε)*, $x \in \mathbb{R}$ και θα τους ρωτούσα πόσοι αριθμοί υπάρχουν σ' αυτό το διάστημα και αν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον αμέσως επόμενο αριθμό του $x+\varepsilon$, και επίσης θα διευκρινίζαμε ότι σ' αυτό το πολύ μικρό διάστημα υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι αριθμοί. Επομένως θα καταλάβαιναν την έννοια του «ο αριθμός τείνει σ' έναν άλλον». Δηλαδή σ' ένα διάστημα $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι αριθμοί που τείνουν στο 2 χωρίς να μπορούμε να προσδιορίσουμε όλους.[...] Έτσι θα καταλάβαιναν ότι για να πούμε π.χ. ότι ο x τείνει στο 2 δεν χρειάζεται να τον προσδιορίσουμε αριθμητικά π.χ. ο $x=1{,}98$ ή 1,99 ή 1,999 ή ... αλλά θα μας έφτανε ότι τείνει στο 2 ότι πλησιάζει πολύ κοντά στο 2.

Εδώ παρουσιάζονται σε σύγχυση και με ακατέργαστο τρόπο ιδέες των Ανώτερων Μαθηματικών προκειμένου να τεκμηριωθεί μια ιδέα που εμφανίζεται στην τοποθέτηση του μαθητή Β του σεναρίου και υιοθετείται από την εκπαιδευτικό ως στόχος για τεκμηρίωση.

Πολύ κοντά στον ορισμό του Cauchy είναι και η προσέγγιση του καθηγητή Κ17 ο οποίος σχετικά με τους στόχους του υποτιθέμενου καθηγητή του σεναρίου αναφέρει:

---

[3] Έστω (a_ν) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η (a_ν) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό α αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός ν_0 τέτοιος, ώστε για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > \nu_0$ να ισχύει: $|a_\nu - a| < \varepsilon$.

> Πιστεύω ότι ο καθηγητής [του σεναρίου] με την ερώτηση αυτή ήθελε να διαπιστώσει κατά πόσο οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια του ορίου και το γεγονός ότι όταν λέμε ότι κάποια ποσότητα τείνει σε μια τιμή αναφερόμαστε σε μεταβαλλόμενη ποσότητα, και όχι σε σταθερά, οι τιμές της οποίας μπορούν να βρίσκονται «οσοδήποτε κοντά» στην τιμή αυτή και ότι αυτή η διαδικασία της προσέγγισης δεν σταματά κάπου.

Εδώ, ο καθηγητής Κ17 δεν ασχολείται με το αν «οι τιμές μιας συνάρτησης φτάνουν ή όχι την τιμή του ορίου της» σε αντίθεση με αρκετούς εκπαιδευτικούς της έρευνάς μας που οι προσεγγίσεις είναι πιο κοντά στον ορισμό του ορίου των d' Alembert και de la Chapelle.

Η σύνδεση στην ενότητα αυτή των δηλώσεων των εκπαιδευτικών και σχετικών ιστορικών προσεγγίσεων στην εξέλιξη των αντίστοιχων εννοιών δεν γίνεται με σκοπό να ενισχύσουμε την αμφισβητούμενη υπόθεση ότι η «οντογένεση ανακεφαλαιώνει την φυλογένεση». Βασικός λόγος για τον οποίο επισημαίνουμε αυτές τις συνδέσεις είναι για να υπογραμμίσουμε ότι στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών είναι χαραγμένες προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν στην ιστορική εξέλιξη των εννοιών, παρότι αυτοί έχουν διδαχθεί ως θεσμική γνώση στο πανεπιστήμιο τις αντίστοιχες σύγχρονες θεωρήσεις. Μια τέτοια τάση η οποία εμφανίζεται με βάση τα δεδομένα μας συνειδητά ή όχι από τους εκπαιδευτικούς στο διδακτικό πλαίσιο, δείχνει ότι αυτοί επικοινωνούν και διαχειρίζονται πολύ λιγότερο τις τυπικές - ολοκληρωμένες μορφές των εννοιών όπως αυτές εκφράζονται στα επιστημονικά εγχειρίδια, που ούτως ή άλλως κάποιες απ' αυτές είναι εκτός πλαισίου διδακτικής διαπραγμάτευσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά χρησιμοποιούν περισσότερο άτυπες, ίσως πιο ζωντανές και ενίοτε λανθασμένες μορφές των εννοιών. Εμφανίζεται όμως ιδιαίτερη δυσκολία στο να αποδοθούν οι σχετικές μαθηματικές έννοιες διαισθητικά και απλοποιημένα χωρίς να έχουν διαστρεβλωθεί. Αυτή η διδακτική διαχείριση που διαφαίνεται στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών έχει στις περισσότερες περιπτώσεις έναν άδηλο χαρακτήρα παρά αποτελεί συνειδητή επιλογή.

4.2.4 Φιλοσοφικά στοιχεία στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών

Ζητήματα όπως το αν ένα μέγεθος είναι ή όχι απείρως διαιρετό και τι προκύπτει μετά από από μια άπειρη διαίρεση, πως γίνεται ένα σημείο να μην έχει διαστάσεις και άπειρα σημεία να συγκροτούν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι θέματα τα οποία έχουν απασχολήσει ιστορικά τη φιλοσοφία γενικότερα και την φιλοσοφία των μαθηματικών πιο συγκεκριμένα. Από τα δεδομένα μας προκύπτει ότι τέτοια ζητήματα υπεισέρχονται στις διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών ή υποβόσκουν στη διδακτική τους πρακτική. Στην ενότητα αυτή μελετάμε κάποια χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τα γραπτά δοκίμια των εκπαιδευτικών της έρευνάς μας αλλά και τις συνεντεύξεις τους και τα συνδέουμε με τις αντίστοιχες φιλοσοφικές διεργασίες που έχουν αναπτυχθεί ιστορικά.

Σε κάποιες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί στις γραπτές τους δηλώσεις ή τις συνεντεύξεις τους αναπτύσσουν προσσεγγίσεις με έκδηλο το φιλοσοφικό τους υπόβαθρο. Αρκετές φορές, χρησιμοποιείται το κλασικό ιστορικό παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας ως στοιχείο της διδακτικής τους συλλογιστικής. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στο παρακάτω απόσπασμα 1 της ημιδομημένης συνέντευξης με τον καθηγητή Κ1.

Απόσπασμα 1 από την συνέντευξη με τον καθηγητή Κ1

Ε: Μήπως θα μπορούσες να περιγράψεις με κάποιο γενικό τρόπο μια προσέγγιση που θα βοηθούσε τα παιδιά να καταλάβουν αυτό το θέμα;

Κ1: Ας πούμε τώρα μου ήρθε το παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα αυτό το έχω πει και σε μικρότερες τάξεις στο Γυμνάσιο που διδάσκω ότι το μισό του ευθυγράμμου τμήματος είναι πάλι ευθύγραμμο τμήμα και τους ρωτάω αυτή η διαδικασία όταν προχωράει τελειώνει ποτέ; Και χωρίς πολύ βοήθεια το βγάζουνε τα παιδιά δευτέρας και τρίτης γυμνασίου το βγάζουνε ας πούμε αρχίζουνε και λένε μερικοί ότι άμα το βλέπαμε με μικροσκόπιο κάποτε θα χαθεί απ' τα μάτια μας το μισό, το μισό, το μισό αυτή η άπειρη διχοτόμηση, αλλά εφόσον είναι ευθύγραμμο τμήμα μάλλον το βγάζουν τα παιδιά ότι έχει την οντότητα ευθύγραμμου τμήματος όσο και να μικραίνει. Το μισό, το μισό, … οπότε το ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να εκφυλιστεί ποτέ σε σημείο. Αυτό βέβαια το παράδειγμα δεν ανταποκρίνεται πλήρως σ' αυτό που μου είπες στο 0,999… γιατί ισούται με 1 αλλά αυτό το κάνουμε με τα παιδιά για να να καταλάβουν τι σημαίνει άπειρες διαδικασίες και τι διαφορά έχει από πεπερασμένες διαδικασίες.

Φαίνεται ότι το συγκεκριμένο παράδοξο ανακαλείται ως στοιχείο της διδακτικής συλλογιστικής του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού με την έννοια του νοητικού πειράματος (thought experiment), δηλαδή της νοητικής δραστηριότητας με την οποία κάποιος εκτελεί μια εμπρόθετη δομημένη διαδικασία πνευματικής διαπραγμάτευσης προκειμένου εντός ενός προσδιορισμένου προβληματικού πεδίου να τεκμηριώσει έναν ισχυρισμό, ή να αναδείξει τις πιθανές συνέπειες κάποιων υποθέσεων ή τις ενδεχόμενες προϋποθέσεις κάποιων συνεπειών (Yeates, 2004).

Ένα τέτοιο πείραμα συνδέεται από τον Szabo (1958) με τη σημασία του ρήματος «δείκνυμι» στα αρχαία ελληνικά, στο άρθρο του «'Δείκνυμι' ως μια μαθηματική έκφραση για την 'απόδειξη'» (όπως αναφέρεται στο Lakatos (1976)). Ο Szabo θεωρεί ότι τα νοητικά πειράματα υπήρχαν στα μαθηματικά ακόμα και πριν τον Ευκλείδη και ότι η έμφαση δίνεται στην έννοια και όχι τόσο στην πειραματική διάταξη του νοητικού πειράματος. Τα νοητικά πειράματα έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στην επιστήμη και τη φιλοσοφία (π.χ. η γάτα του Schrödinger, το σπήλαιο των σκιών του Πλάτωνα, η μελέτη της πτώσης δυο αντικειμένων διαφορετικής μάζας από τον πύργο της Πίζας από τον Γαλιλαίο κ.ά.).

Σε άλλες περιπτώσεις η αναφορά στο παράδοξο γίνεται μέρος της διδακτικής συλλογιστικής των εκπαιδευτικών προκειμένου να πειστούν εμπειρικά οι μαθητές ότι μπορεί «ένα άπειρο άθροισμα να έχει πεπερασμένο αποτέλεσμα». Για παράδειγμα, ο Κ13 αναφέρει:

> Μια πρόταση θα ήταν να παρουσιάσουμε στους μαθητές το παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαν να αντιληφθούν την διαδικασία της σύγκλισης και να αποδεχθούν ότι μια άπειρη διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε πεπερασμένο αποτέλεσμα, αφού η εμπειρία τους λέει ότι σίγουρα ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα.

Ο καθηγητής Κ13 χρησιμοποιεί το παράδοξο προκειμένου να συμβάλλει στην άρση μιας λανθασμένης πεποίθησης που εμφανίζεται στους μαθητές χωρίς όμως να δίνει αρκετές εξηγήσεις για τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει αυτό.

Η καθηγήτρια Κ82 προτείνει τη χρησιμοποίηση μιας παραλλαγής του παραδόξου του «Αχιλλέα και της χελώνας» για μια «εισαγωγή στην πληρότητα των πραγματικών αριθμών» (μάλλον εννοεί την ιδιότητα της πυκνότητας). Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Αν ο Αχιλλέας κάθε φορά καλύπτει τη μισή απόσταση από την χελώνα που προηγείται […] τότε αν αρχικά απείχαν 1m τότε σε διαδοχικά βήματα η μεταξύ τους απόσταση είναι 1m, ½ m, ¼ m. Παρατηρώντας ότι ανάμεσα στον αριθμό 0 (που εκφράζει την απόσταση του Αχιλλέα από τη χελώνα, όταν την έχει φθάσει) και του αριθμού που εκφράζει την απόστασή τους την συγκεκριμένη στιγμή, υπάρχει πάντα μη μηδενικός αριθμός ανάμεσά τους.

Στην περίπτωση αυτή το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας φαίνεται να λειτουργεί για τις ανάγκες της διδασκαλίας ως ρεαλιστικό υπόβαθρο για την εισαγωγή της ιδιότητας της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών.

Φαίνεται ότι αυτοί οι εκπαιδευτικοί Κ13 και Κ82 γνωρίζουν κάποια στοιχεία της πλούσιας συζήτησης που έχει αναπτυχθεί σχετικά με το συγκεκριμένο παράδοξο χωρίς απαραίτητα οι συνδέσεις με το θέμα να είναι συγκεκριμένες ή κατάλληλες. Όμως είναι αλήθεια ότι υπάρχουν ενδιαφέρουσες συνδέσεις της ανάλυσης του συγκεκριμένου παραδόξου με το θέμα μας, οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στην κατανόηση των αντιλήψεων που έχουν αναπτυχθεί γι' αυτό.

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη η ερμηνεία του παραδόξου του Αχιλλέα και της χελώνας βασίζεται στη διάκριση μεταξύ, του εν δυνάμει και του εν ενεργεία απείρου. Το εν δυνάμει άπειρο (potential infinity) αναπαριστά μια άπειρη διαδικασία που εξελίσσεται βήμα-βήμα και το εν ενεργεία άπειρο (actual infinity) αναπαριστά την ολοκλήρωση της διαδικασιας αυτής, την οποία ο Αριστοτέλης απορρίπτει (Dubinsky, Weller, McDonald, Brown; 2005a). Ο Αριστοτέλης φαίνεται να θεωρεί ότι μπορεί να υπάρχει μια άπειρη διαδικασία ως μια ολότητα (ως μεταφυσική ολότητα) αλλά δεν μπορεί αυτή να γίνει αντιληπτή από τον άνθρωπο (Moore, 1999).

Ακόμα και πιο σύγχρονοι στοχαστές όπως ο Poincaré (1854-1912) συμφωνούν σε σημαντικό βαθμό με τις απόψεις του Αριστοτέλη. Συγκεκριμένα, ο Poincaré (1963) θεωρεί ότι «δεν υπάρχει εν ενεργεία άπειρο, όταν μιλάμε για μια άπειρη συλλογή κατανοούμε μια συλλογή στην οποία μπορούμε να προσθέσουμε άπειρα στοιχεία απεριόριστα» (σ. 47). Ο Fischbein (1987, σ. 52) ισχυρίζεται ότι «ένα εν ενεργεία άπειρο είναι μια καθαρά λογική κατασκευή, όχι διαισθητικά αποδεκτή».

Άλλοι φαίνεται να θεωρούν αυτή την πεποίθηση λανθασμένη. Για παράδειγμα ο Bolzano (1950) αναφέρει:

> Πουθενά δεν μπορεί να υπάρξει ένα άπειρο σύνολο, λένε, «για τον απλό λόγο ότι οι άπειρες σειρές δεν μπορούν να ενωθούν για να σχηματίσουν μια ολότητα, δεν συλλέγονται ποτέ μαζί στη σκέψη». Πρέπει να στιγματίσω σ' αυτό τον ισχυρισμό ένα λάθος, και το λάθος προκλήθηκε από την λανθασμένη άποψη ότι μια ολότητα αποτελείται από ορισμένα αντικείμενα α, β, γ, δ, ... και δεν μπορεί να δομηθεί στη σκέψη χωρίς διακριτές νοητικές αναπαραστάσεις των επιμέρους χαρακτηριστικών.

Ο Bolzano στην προσπάθεια του να εξηγήσει τη θέση του για το εν ενεργεία άπειρο, χρησιμοποιεί παραδείγματα πεπερασμένων συνόλων!

> Μπορώ να σκεφτώ ένα σύνολο από αμμοχάλικο ή, αν το προτιμάτε, το σύνολο των κατοίκων της Πράγας ή του Πεκίνου χωρίς να σχηματίζεται η διακριτή αναπαράσταση κάθε κατοίκου (Bolzano ό.π.).

Η Sierpinska (1990) ερμηνεύει τις αυθόρμητες ερμηνείες του παραδόξου του Ζήνωνα, «Ο Αχιλλέας και η χελώνα» από δεκαεξάχρονους μαθητές. Οι μαθητές δεν είχαν αίσθηση παραδόξου από την λεκτική περιγραφή της ιστορίας. Όμως το παράδοξο του «Αχιλλέα και της χελώνας» δόθηκε στους μαθητές και με την εξής μαθηματική του εκδοχή. Η χελώνα τρέχει με ταχύτητα $\upsilon_\chi = 0,2$ km/h ενώ ο Αχιλλέας τρέχει με ταχύτητα $\upsilon_A = 20$ km/h και αρχίζει να τρέχει 9,9 ώρες μετά την χελώνα. Ενώ οι μαθητές είχαν βρει με τύπους της κινηματικής ότι ο Αχιλλέας θα χρειαστεί 10 ώρες για να φτάσει τη χελώνα όταν όμως ο χρόνος που χρειάστηκε ο Αχιλλέας για να φτάσει τη χελώνα εμφανίστηκε στη μαθηματική του μορφή από το άθροισμα της σειράς 9,9 + 0,099 + 0,00099+… οι μαθητές αναγνώριζαν το αποτέλεσμα ως παράδοξο. Θεωρούσαν ότι το άθροισμα αυτό ήταν 9,9999… αλλά δεν αποδέχονταν ότι αυτό κάνει 10. Μετά απ' αυτό θεωρούσαν ότι ο

Αχιλλέας δεν φτάνει ποτέ τη χελώνα αφού το 9,999… προσεγγίζει το 10 χωρίς ποτέ να το φτάνει. Η Sierpinska (1990, σ. 32) αναφέρει για τις στάσεις των μαθητών:

> Τα δυο παράδοξα του Ζήνωνα δεν μπορούν να λυθούν με την ιδέα του αθροίσματος μιας σειράς. Η μαθηματικοποίηση καταλήγει ισοδύναμη με τα ίδια τα παράδοξα. Δεν μπορούν σε καμία περίπτωση να λυθούν από τα μαθηματικά. Η ύπαρξη ή η ανυπαρξία ενός εν ενεργεία απείρου δεν είναι ένα μαθηματικό αλλά ένα φιλοσοφικό ζήτημα. Και η φιλοσοφία δεν δίνει συγκεκριμένες απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα. Μπορεί να συζητήσει μόνο τις πιθανές συνέπειες των πιθανών απαντήσεων.

Σε κάποιες περιπτώσεις οι καθηγητές θεωρούν για τους μαθητές τους ότι δεν μπορούν να θεωρήσουν το 0,3999… ως ολότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση της καθηγήτριας Κ93 η οποία στις διδακτικές προτάσεις της προς τους μαθητές του σεναρίου αναφέρει μια απόδειξη για την ισότητα 0,3999... = 0,4, όμως σχετικά με τον μαθητή Γ αναφέρει:

> ... δεν κατανοεί ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί που εκφράζονται από την παράσταση 0,3999... και τον νομίζει ότι είναι ο προηγούμενος του 0,4 που δεν υπάρχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Αυτή είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση όπου φαίνεται ότι η τυπική γνώση του μαθηματικού ζητήματος δεν δείχνει απαραίτητα και κατανόηση της φύσης της έννοιας στο ευρύτερο πλαίσιο που αυτή υπάρχει. Εδώ συγκεκριμένα η καθηγήτρια ενώ γνωρίζει ότι η παράσταση 0,3999... εκφράζει τον αριθμό 0,4 αυτό δεν την εμποδίζει να θεωρεί ότι με την συγκεκριμένη παράσταση εκφράζονται «άπειροι αριθμοί».

Στην περίπτωση του καθηγητή ο Κ82 έχουμε τη θεώρηση ότι το 0,3999... εκφράζει «έναν μεταβαλλόμενο αριθμό» η οποία προέρχεται από το ότι έχουμε «άπειρα εννιάρια». Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Βλέποντας ο μαθητής [Β] τον αριθμό 0,3999… θεωρεί πως τα «άπειρα εννιάρια» μπαίνουν διαδοχικά σε βήματα, και επομένως δεν έχει έναν σταθερό αριθμό, αλλά ένα μεταβαλλόμενο αριθμό, ο οποίος τείνει στο 0,4.

Επίσης, κάποιοι εκπαιδευτικοί φαίνεται να θεωρούν ότι το άπειρο εκφράζει το «οσοδήποτε μεγάλο» όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

> Κ56: [Στόχος του καθηγητή είναι] να εισάγει στα παιδιά μια καινούργια έννοια το όριο. Ότι δηλαδή κάτι «τείνει» αρκούντως κοντά σε κάτι άλλο. Αλλά ποτέ δεν το φτάνει, *όσο άπειρα* και αν είναι τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται. (η υπογράμμιση προστέθηκε)

Η αντίληψη αυτή που θεωρεί το άπειρο ως κάτι το οποίο είναι οσοδήποτε μεγάλο χρειαστούμε συναντάμε και στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη όπου για παράδειγμα στο δεύτερο αίτημα αναφέρει:

> Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
> Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως

Δηλαδή, η ευθεία στον Ευκλείδη δε νοείται άπειρη στην ολότητά της εξ’ αρχής αλλά θεωρείται ως εν δυνάμει απεριόριστα προεκτεινόμενο ευθύγραμμο τμήμα. Όπως αναφέρεται στο συλλογικό τόμο Ευκλείδη «Στοιχεία», Εξαρχάκος (2001) «το αίτημα 2

[...] επιβεβαιώνει και τη δυνατότητα του τμήματος να προεκτείνεται εκατέρωθεν επ' άπειρον και συνεχώς» (τ. Ι, σ. 110).

Η καθηγήτρια Κ21 εντοπίζει τη δυσκολία κατανοήσης της δεδομένης αναπαράστασης στα άπειρα 9 που αυτή περιέχει. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> ... ένα όριο με έναν αριθμό *x* να τείνει στο 0,4 σημαίνει ότι πρακτικά θέλω να υπολογίσω κάτι για έναν αριθμό που πλησιάζει πολύ στο 0,4, αλλά δεν τον φτάνει, δηλαδή έναν αριθμό 0,39...9 με άπειρα 9. [...] Δεν μπορούμε να εντοπίσουμε τον αριθμό 0,3999...9 με άπειρα 9. Δεν μπορεί το μυαλό μας να μετρήσει άπειρα 9.

Στις παραπάνω περιπτώσεις που αναφέρθηκαν φαίνεται ότι τα άπειρα 9 που περιλαμβάνονται στην αναπαράσταση 0,3999... δυσκολεύουν τη θεώρησή της συγκεκριμένης αναπαράστασης ως μια ολότητα. Το υπόβαθρο αυτής της θεώρησης όπως έχει επισημανθεί και στη βιβλιογραφική ανασκόπηση βασίζεται στη διάκριση του εν δυνάμει απείρου, που εκφράζει μια αέναη επαναλαμβανόμενη διαδικασία για όσο επιθυμούμε, από το εν ενεργεία άπειρο που εκφράζει τη θεώρηση αυτής της διαδικασίας ως μια ολότητα. Έτσι, στα προαναφερθέντα αποσπάσματα υιοθετείται η εν δυνάμει μορφή του απείρου και αποκλείεται η εν ενεργεία μορφή του, που θα έκανε αποδεκτή την αναπαράσταση 0,3999... ως μια ολότητα, ως έναν αριθμό.

Στο παρακάτω απόσπασμα 2 της ημιδομημένης συνέντευξης που είχαμε με τον εκπαιδευτικό αναδεικνύεται ο πλούτος του φιλοσοφικού του προβληματισμού για την ιδέα της άπειρης διαιρετότητας σε συνδυασμό με τις διδακτικές του ανησυχίες για τον τρόπο που προσεγγίζεται η ιδέα αυτή από τους μαθητές κατά τη διδακτική πράξη.

Απόσπασμα 2 της συνέντευξης με τον εκπαιδευτικό Κ1

Ε: Ωραία, θα μπορούσες να σκεφτείς κάποια δραστηριότητα ή κάποια παραδείγματα όπως αναφέρεις που θα βοηθούσαν τους μαθητές να πειστούν για την ορθότητα των επιχειρημάτων σου;…Πέρα από τις τυπικές αποδείξεις. Κάτι τέτοιο θα το έκανες πριν τη τυπική απόδειξη; Μετά την τυπική απόδειξη;

Κ1: Θα προτιμούσα να το κάνω πριν την τυπική απόδειξη. Γιατί έτσι είναι και όλη μου η διδασκαλία σε όλες τις τάξεις.

Ε: Μήπως θα μπορούσες να περιγράψεις με κάποιο γενικό τρόπο μια προσέγγιση που θα βοηθούσε τα παιδιά να καταλάβουν αυτό το θέμα;

Κ1: Ας πούμε τώρα μου ήρθε το παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα αυτό το έχω πει και σε μικρότερες τάξεις στο Γυμνάσιο που διδάσκω ότι το μισό του ευθύγραμμου τμήματος είναι πάλι ευθύγραμμο τμήμα και τους ρωτάω αυτή η διαδικασία όταν προχωράει τελειώνει ποτέ; Και χωρίς πολύ βοήθεια το βγάζουνε τα παιδιά δευτέρας και τρίτης γυμνασίου το βγάζουνε ας πούμε αρχίζουνε και λένε μερικοί ότι άμα το βλέπαμε με μικροσκόπιο κάποτε θα χαθεί απ' τα μάτια μας το μισό, το μισό, το μισό αυτή η άπειρη διχοτόμηση, αλλά εφόσον είναι ευθύγραμμο τμήμα μάλλον το βγάζουν τα παιδιά ότι έχει την οντότητα ευθύγραμμου τμήματος όσο και να μικραίνει. Το μισό, το μισό, … οπότε το ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να εκφυλιστεί ποτέ σε σημείο. Αυτό βέβαια το παράδειγμα δεν ανταποκρίνεται πλήρως σ΄ αυτό που μου είπες στο 0,999… γιατί ισούται με 1 αλλά αυτό το κάνουμε με τα παιδιά για να καταλάβουν τι σημαίνει άπειρες διαδικασίες και τι διαφορά έχει από πεπερασμένες διαδικασίες.

Ε: Γιατί εδώ ας πούμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο ένας μαθητής λέει ότι αυτή η ποσότητα είναι ένα άπειρο άθροισμα και αυξάνεται συνέχεια. Πως θα μπορούσαμε να αντιπαρέλθουμε σ' αυτό το χαρακτηριστικό;

Κ1: Τώρα έτσι όπως με ρώτησες με βοήθησες να το συνδέσω με αυτό που έλεγα προηγουμένως. Άμα ξεκινήσεις και του κάνεις [του μαθητή] μια γεωμετρική

> απεικόνιση, ένα ευθύγραμμο τμήμα και του βάλεις αριστερά το 0 και δεξιά το 1 αρχίζεις να του κάνεις αυτό το άπειρο άθροισμα, να του δείχνεις ότι κάθε όρος που προσθέτει είναι πολύ πιο μικρός από τον προηγούμενο και ότι είναι σαν αυτή τη διχοτόμηση που έλεγα προηγουμένως. Δηλαδή προχωράω μ' ένα βηματάκι και το κόβω και κάνω πιο κοντό βήμα και πιο κοντό βήμα … τώρα εκεί το πολύ λεπτό σημείο πως με άπειρη διαδικασία πας και πέφτεις ακριβώς επάνω στο 1. Εκεί έχει δυσκολία να το δώσεις στους μαθητές.

Σ' αυτό το απόσπασμα φαίνεται όπως ο ίδιος ο εκπαιδευτικός επισημαίνει, ότι μετά από πεπερασμένες διχοτομήσεις ενός τμήματος μένει ένα τμήμα αλλά εκφράζει την επιφύλαξή του κατά πόσο είναι κατανοητή από τους μαθητές η αποδοχή της ποιοτικής αλλαγής που υφίσταται το τμήμα όπου μετά από άπειρες διχοτομήσεις, εκφυλίζεται σε σημείο. Αυτή η επιφύλαξη φαίνεται στις υπογραμμίσεις που προσθέσαμε στο απόσπασμα: «το βγάζουνε τα παιδιά δευτέρας και τρίτης γυμνασίου το βγάζουνε ας πούμε αρχίζουνε και λένε μερικοί ότι άμα το βλέπαμε με μικροσκόπιο κ*άποτε θα χαθεί απ' τα μάτια μας* το μισό, το μισό, το μισό αυτή η άπειρη διχοτόμηση, αλλά εφόσον είναι ευθύγραμμο τμήμα *μάλλον* το βγάζουν τα παιδιά ότι έχει την οντότητα ευθύγραμμου τμήματος όσο και να μικραίνει» (οι υπογραμμίσεις είναι δικές μας). Επίσης, η δυσπιστία του εκπαιδευτικού σχετικά με την κατανόηση της ιδέας αυτής από τους μαθητές, φαίνεται τόσο από τις τρείς τελείες που χρησιμοποιήσαμε στην απομαγνητοφώνηση για να δείξουμε την παύση στο λόγο του όσο και από τις υπογραμμίσεις που προσθέσαμε στο παρακάτω απόσπασμα: «Δηλαδή προχωράω μ' ένα βηματάκι και το κόβω και κάνω πιο κοντό βήμα και πιο κοντό βήμα ... *τώρα εκεί το πολύ λεπτό σημείο*, πως με άπειρη διαδικασία πας και πέφτεις ακριβώς επάνω στο 1».

Στο παραπάνω απόσπασμα ο εκπαιδευτικός Κ1 αφήνει να εννοηθεί ότι όταν η διχοτόμηση του τμήματος είναι πεπερασμένη τότε το αποτέλεσμά της είναι τμήμα, ενώ αν είναι άπειρη τότε το αποτέλεσμα της είναι αριθμός. Η μαθηματική περιγραφή αυτής της συζήτησης βασίζεται στο αξίωμα του κιβωτισμού (Για κάθε ακολουθία *κιβωτισμένων* διαστημάτων[4] υπάρχει ένα μοναδικό κοινό στοιχείο τους) το οποίο είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της πληρότητας[5].

Όπως επισημαίνουν οι Πατρώνης & Σπανός (1996) η ουσία του συνεχούς της ευθείας των πραγματικών αριθμών φαίνεται καλύτερα μέσα από τη διαδικασία της μέτρησης ενός τμήματος. Η θεώρηση ότι η διαδικασία αυτή έχει άπειρα βήματα ή η θεώρηση ότι τελειώνει αναγκαία μετά από κάποιο (ίσως πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο) αριθμό βημάτων καθορίζει την αντίληψή μας σχετικά με το συνεχές της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Η ιστορική έρευνα έχει αναδείξει δυο τρόπους προσέγγισης για το πρόβλημα της μέτρησης. Οι δυο αυτοί τρόποι είναι λογικά ισοδύναμοι, αλλά αναπτύχθηκαν σε διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα, εκφράζονται με διαφορετικά

---

[4] Τα κλειστά διαστήματα της ακολουθίας $[\alpha_0,\beta_0],[\alpha_1,\beta_1],...,[\alpha_\nu,\beta_\nu]...$ ονομάζονται *κιβωτισμένα*, όταν έχουν τις ακόλουθες δύο ιδιότητες: (α) $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, $[\alpha_\nu,\beta_\nu]\subset[\alpha_{\nu-1},\beta_{\nu-1}]$ και (β) $\forall \mu \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, \nu \in \mathbb{N}$, $\beta_\nu-\alpha_\nu \le \frac{1}{\mu}$.

[5] Ένα σύνολο A λέγεται πλήρες αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

συστήματα αναπαράστασης και αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τομείς της σύγχρονης μαθηματικής δραστηριότητας.

Ο πρώτος τρόπος είναι αυτός που αναπτύχθηκε στην αρχαία Ελλάδα όπου η μέτρηση ενός τμήματος α γίνεται μέσω του λόγου του ως προς ένα άλλο μικρότερο τμήμα β το οποίο θεωρείται προσωρινά ως μονάδα. Σε πρώτη φάση αφαιρούμε από το α το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του β που δεν υπερβαίνει το α. Αν $υ_1$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής τότε σε δεύτερη φάση αφαιρούμε από β το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του $υ_1$ που δεν υπερβαίνει το β. Αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία, η οποία είναι γνωστή ως διαδικασία της ανθυφαίρεσης, και κάποιο από τα υπόλοιπα $υ_ν$ είναι ίσο με μηδέν τότε το προηγούμενο υπόλοιπο $υ_{ν-1}$ είναι κοινό μέτρο των α και β και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακέραια πολλαπλάσια του $υ_{ν-1}$ τα οποία είναι ίσα με τα α και β αντίστοιχα και συνεπώς τα α και είναι σύμμετρα (σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό στο βιβλίο X των «Στοιχείων» του Ευκλείδη). Αν αυτή η διαδικασία δεν τελειώνει σε πεπερασμένα βήματα τότε τα μεγέθη α και β είναι ασύμμετρα. Με τον τρόπο αυτό δεν απαιτείται κανένα άλλο σύστημα αριθμών παρά μόνο οι φυσικοί αριθμοί και οι πράξεις γίνονται μεταξύ γεωμετρικών μεγεθών. Σύμφωνα με τον Fowler (1987) η συγκεκριμένη προσέγγιση συνιστά τα λεγόμενα *μη αριθμητικοποιημένα μαθηματικά* (*non-arithmetized*) τα οποία αναπτύχθηκαν στην αρχαία Ελλάδα μέχρι την ελληνιστική περίοδο.

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης της μέτρησης τμημάτων που εντάσσεται σύμφωνα με τον Fowler στα λεγόμενα *αριθμητικοποιημένα μαθηματικά*, αναπτύχθηκε από Βαβυλώνιους και Ινδούς και γίνεται χρήση συστημάτων αριθμών πέραν των φυσικών. Στην προσέγγιση αυτή αρχικά ορίζεται στην ευθεία ένα σημείο ως αρχή και ένα αυθαίρετο τμήμα ως μονάδα. Στη συνέχεια η μονάδα χωρίζεται σε τόσα ίσα μέρη, όσα είναι το μέγεθος της βάσης του αντίστοιχου συστήματος αρίθμησης (σε δέκα ίσα μέρη για το δεκαδικό σύστημα, σε εξήντα ίσα μέρη για το εξηκονταδικό σύστημα). Με τον τρόπο αυτό κάθε τμήμα έχει μήκος που εκφράζεται ως πεπερασμένο ή άπειρο άθροισμα ή αλλιώς ανάπτυγμα. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε αρχικά για να καλύψει τις ανάγκες των εμπορικών συναλλαγών, στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της αστρονομίας και οδήγησε στο σύγχρονο σύστημα αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών με απειροψήφιους δεκαδικούς.

Το δίλλημα που εκφράζεται στο απόσπασμα 1 του καθηγητή Κ1 ανάμεσα στην αποδοχή ή όχι της άπειρης διαιρετότητας ενός τμήματος ουσιαστικά είναι αναπαραγωγή της διχογνωμίας μεταξύ των ατομικών φιλοσόφων (Παρμενίδης, Δημόκριτος) που δεν θεωρούσαν ότι τα φυσικά μεγέθη είναι επ' άπειρον διαιρετά και ότι υπάρχει αναγκαία ένα κενό μεταξύ τους και του Αριστοτέλη ο οποίος χρησιμοποιεί την άπειρη διαιρετότητα προκειμένου να ορίσει τη συνέχεια των μεγεθών.

> Το συνεχές είναι επ' άπειρον διαιρετό. (Φυσικά, Α΄, 2, 185β 10)
> Ονομάζω συνεχές αυτό που διαιρείται πάντα σε μέρη διαιρετά (Φυσικά, ΣΤ΄, 2, 232β 24-25)

Συμβατή με την παραπάνω αντίληψη του Αριστοτέλη για το συνεχές είναι η πρόταση η οποία σήμερα είναι γνωστή ως «αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου» σύμφωνα με την οποία: «Αν α, β δυο μεγέθη με α > β τότε υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε $ν \cdot β > α$». Στο βιβλίο 5 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη η ίδια ιδέα εμφανίζεται στον ορισμό δ: «Λέμε ότι (δυο ή περισσότερα) μεγέθη έχουν λόγο το ένα προς το άλλο όταν μπορούν, πολλαπλασιαζόμενα, να ξεπεράσουν το ένα το άλλο».

Ουσιαστικά η πρόταση αυτή, την οποία ο Αρχιμήδης αποδίδει στον Εύδοξο απορρίπτει τα απειροστά μεγέθη και χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του εμβαδού του κύκλου με τη λεγόμενη «μέθοδο της εξάντλησης». Όμως, ενώ η πρόταση αυτή θεωρείται προφανής στο πλαίσιο της σύγχρονης Ανάλυσης φαίνεται ότι εκφράζονται επιφυλάξεις από τον εκπαιδευτικό για την αποδοχή της από τους μαθητές του γυμνασίου.

Σύμφωνα με τους Πατρώνη & Σπανό (1996) είναι πιθανό η θεώρηση του Αριστοτέλη για το δυνάμει άπειρο να μην είναι μόνο αντιπαραθετική με τους Ατομικούς Φιλοσόφους και το Ζήνωνα αλλά και απέναντι στην πλατωνική θεώρηση που αντιμετωπίζει το συνεχές ως «ενεργεία» άπειρο. Στα Φυσικά του Αριστοτέλη (Δ΄, 11, 219 α11, ΣΤ΄, 1, 231 α17-β18 και ΣΤ΄, 2, 232 α23-25) διαμορφώνεται ένα επιχείρημα για το συνεχές που θυμίζει τα παράδοξα του Ζήνωνα:

> Είναι αδύνατο ένα συνεχές στην ευθεία να αποτελείται από σημεία ή από «αδιαίρετα» χωρίς κάποιο μήκος˙ Γιατί τότε αυτά δεν θα μπορούσαν προστιθέμενα να σχηματίσουν ένα μέγεθος˙ και κάθε συνεχές έχει ένα μέγεθος, και αντίστροφα κάθε μέγεθος είναι συνεχές.

Η καθηγήτρια Κ21 επαναφέρει στις διδακτικές της προτάσεις το σύμβολο «0,399...9» που είχε εισάγει στις ερμηνείες των αντιλήψεων των μαθητών του σεναρίου.

> Για να ξεπεραστούν οι παρανοήσεις των μαθητών, σίγουρα θα χρησιμοποιούσα τον άξονα των πραγματικών αριθμών και θα προσπαθούσα να τονίσω την απειρότητα τους ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι ρητών. Θα τους παρότρυνα να μου δείξουν τον αριθμό 0,39...9 που όμως πως γνωρίζω ότι εκείνο το σημείο που θα μου έδειχναν δε σπάει σε πιο μικρά σημεία, και το αμέσως επόμενο σε ακόμα πιο μικρά κ.ο.κ...

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα η εκπαιδευτικός Κ21 μέσω του συμβόλου 0,39...9 εισάγει μια δυναμική υπόσταση για το συγκεκριμένο αντικείμενο. Φαίνεται να θεωρεί ότι το συγκεκριμένο αντικείμενο εκφράζει μια περιοχή της ευθείας των πραγματικών αριθμών παρά ένα σημείο – αμερές όπως ορίζεται από τον Ευκλείδη στο βιβλίο Ι των «Στοιχείων» (Σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν - Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρη).

Όμως, ο προβληματισμός για τον καθορισμό των σχέσεων μεταξύ του αριθμού, της θέσης που του αντιστοιχεί στον άξονα και του μεγέθους που αυτός εκφράζει όπως αναδεικνύεται στο παραπάνω απόσπασμα από το δοκίμιο της εκπαιδευτικού, μας υπενθυμίζει τις σχετικές αντιπαραθέσεις μεταξύ των φιλοσόφων της αρχαιότητας σε σχέση με τα ζητήματα αυτά. Συγκεκριμένα ο Αριστοτέλης στο έργο του Φυσικής Ακροάσεως Γ΄ 207b, 208a, (1972, σ. 92-95 μτφ Γεωργούλη) σημειώνει:

> ... μπορεί ακόμη να δικαιολογηθεί και το ότι στον αριθμό κατά την κατεύθυνση του ελαχίστου υπάρχει ένα πέρας, ... σχετικά όμως με τα μεγέθη συμβαίνει το αντίθετο, προς την κατεύθυνση του ελαχίστου μπορεί να ξεπεραστεί οποιοδήποτε μέγεθος ... ο αριθμός πάλι αποτελείται από περισσότερα από ένα (μονάδες), που αποτελούν ένα ποσό˙ ώστε είναι ανάγκη να σταματήσουμε, όταν φθάσουμε στο αδιαίρετο˙ ... Ώστε ο αριθμός μεγέθους υπάρχει δυνάμει και όχι ενεργεία˙ ... Ο αριθμός όμως που προκύπτει από τη διχοτομία δεν έχει αυθυπόστατη ύπαρξη, ούτε η απειρότητα παρουσιάζεται ως μόνιμη αλλά βρίσκεται πάντοτε στο στάδιο της γέννησης, όπως ο χρόνος και ο αριθμός του χρόνου. Σχετικά με τα μεγέθη συμβαίνει το αντίθετο˙ το συνεχές δηλαδή, παρουσιάζει διαίρεση που προχωρεί προς το άπειρο...

Ο Αριστοτέλης σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (1985, σ. 68) αποδίδει στο σημείο «... ένα παρασιτικό status, με την έννοια πως θα μπορούσε να ορισθεί με χρήση διαδικασιών κιβωτισμού (εγκλεισμού) ευθυγράμμων τμημάτων και χρήση συγκεκριμένων σχέσεων ισοδυναμίας ανάμεσα σε κατάλληλες κλάσεις τέτοιων ευθυγράμμων τμημάτων» σε αντίθεση με τις σύγχρονες θεμελιώσεις της ευθείας των πραγματικών αριθμών που αποδίδουν στο σημείο έναν πρωταρχικό, δομικό ρόλο στη συγκρότηση του ευθυγράμμου τμήματος με βάση συγκεκριμένες ιδιότητες και σχέσεις. Ο Αριστοτέλης θεωρεί ότι το σημείο αποτελεί μια κατάσταση ή μια τάση ή ένα όριο που δεν φτάνουμε και συνεπώς στο συνεχές της ευθείας δεν μπορεί να αποδοθεί μια απόλυτη αλλά μόνο μια δυνητική ύπαρξη η οποία προσιδιάζει περισσότερο με τα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης δραστηριότητας και ψυχοσύνθεσης.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της δυνητικής ύπαρξης του 0,3999... εκφράζεται από τον καθηγητή Κ94 στις διδακτικές του προτάσεις όταν αναφέρει:

> Θα διευκρίνιζα στους μαθητές μου ότι λόγω του άπειρου πλήθους ψηφίων δεν μπορούμε να παραστήσουμε το 0,3999... μ' έναν συγκεκριμένο αριθμό γιατί δεν ξέρουμε σε ποιο 9 ψηφίο να σταματήσουμε.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα ο εκπαιδευτικός φαίνεται να θεωρεί ότι επειδή τα δεκαδικά ψηφία της παράστασης 0,3999... είναι άπειρα, αυτή δεν παριστάνει έναν συγκεκριμένο αριθμό. Εδώ το άπειρο ή αλλιώς η ανερμάτιστη διαδικασία προσδίδει έναν απροσδιόριστο ή μη συγκεκριμένο χαρακτήρα στην παράσταση 0,3999... Οι αριθμοί θεωρείται ότι έχουν ένα συγκεκριμένο πέρας στο συμβολισμό τους.

Παρόμοια είναι και η θεώρηση του Leibniz για τη σειρά του Grandi (1-1+1-1+…) όπως αυτή εκφράζεται σε κάποια γράμματά του (1713-1716) προς τον Christian Wolf (1678-1754) όπου χρησιμοποιεί το λεγόμενο «πιθανοτικό επιχείρημα», το οποίο επηρέασε και τους Johann και Daniel Bernoulli (Bagni, 2005). Ο Leibniz σημειώνει ότι αν «σταματήσουμε» την άπειρη σειρά 1-1+1-1+... είναι δυνατό να προκύψει 0 ή 1 με την ίδια «πιθανότητα». Οπότε η πιο πιθανή τιμή είναι ο μέσος όρος μεταξύ του 0 και 1, δηλαδή το ½. Ο Leibniz παραδέχεται ότι «αυτό το επιχείρημα είναι περισσότερο μεταφυσικό παρά μαθηματικό, αλλά συνήθιζε να λέει ότι υπάρχει περισσότερη μεταφυσική αλήθεια στα μαθηματικά απ' ότι γενικά αναγνωρίζεται» (Kline, 1972, p. 446; Leibnitian letters to Wolf, *Acta Eruditiorum Lipsiae, Tom.*V. ab an. 1711 ad an. 1719 Epist. GGL. Ad V. claris. Ch. Wolfium).

Στην ενότητα αυτή είδαμε τον τρόπο που εμπλέκονται φιλοσοφικά ζητήματα στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών. Παρουσιάσαμε περιπτώσεις εκπαιδευτικών που χρησιμοποιούν το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας αναπτύσσοντας μια νοητή συζήτηση στη διδακτική τους συλλογιστική προκειμένου με τον τρόπο αυτό να τεκμηριώσουν ότι ένα άπειρο άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, άρα και ένα άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών, τα οποία μπορεί να είναι μήκη των αντίστοιχων τμημάτων μπορεί να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός. Σύμφωνα με το επιχείρημα αυτό, επειδή στην πραγματικότητα ο Αχιλλέας γνωρίζουμε ότι φτάνει τη χελώνα και αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται μετά από άπειρα βήματα, αυτό σημαίνει ότι μπορεί το άθροισμα άπειρων τμημάτων να είναι ένα τμήμα ή αλλιώς το άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών να είναι αριθμός. Όμως, όπως έχει επισημανθεί στη βιβλιογραφική ανασκόπηση το παράδοξο δεν είναι μαθηματικής φύσης αλλά φιλοσοφικής. Αλλά η φιλοσοφική αυτή συζήτηση που βασίζεται στο συγκεκριμένο παράδοξο και σχετίζεται με τις ιδέες του εν δυνάμει και του εν ενεργεία απείρου έχει ιστορικό βάθος και είναι στη βάση της κατανόησης των άπειρων διαδικασιών στα μαθηματικά.

Έτσι, στη συγκεκριμένη ενότητα είδαμε περιπτώσεις εκπαιδευτικών που συνδέουν (όχι απαραίτητα συγκεκριμένα ή επιτυχημένα) τις μαθηματικές ιδέες των μαθητών για τη σχέση του 0,3999... με το 0,4 με ζητήματα για τα οποία έχει σημειωθεί στη βιβλιογραφία σημαντικό φιλοσοφικό και γνωστικό ενδιαφέρον. Η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να εκφράσει στη διδακτική του πρακτική τη γνώση του για το εν δυνάμει και εν ενεργεία άπειρο, να διαχειριστεί διδακτικά το μετασχηματισμό μιας διαδικασίας σε ένα μαθηματικό αντικείμενο καθώς και το άθροισμα των άπειρων σειρών αποτελεί μέρος της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης. Ο σκοπός μιας τέτοιας γνώσης δεν είναι να διδαχθεί άμεσα στους μαθητές. Όμως με βάση την ανάλυση μας φαίνεται ότι αυτή η γνώση χαρακτηρίζει τη μαθηματική συλλογιστική του εκπαιδευτικού η οποία, ενεργοποιείται ανάλογα με την περίπτωση, με στόχο είτε την ερμηνεία των αντιλήψεων των μαθητών είτε την διδακτική διαπραγμάτευση των εννοιών με επίγνωση του φιλοσοφικού τους υπόβαθρου και των γνωστικών μετασχηματισμών που επιτελούνται.

Η συζήτηση του φιλοσοφικού υπόβαθρου των προαναφερόμενων αποσπασμάτων είναι ενδεικτική για βάθος της συλλογιστικής που αναπτύσσεται από τους εκπαιδευτικούς συνειδητά ή ασυνείδητα κατά τη διδακτική πρακτική τους ή κατά τον αναστοχασμό τους.

4.2.5 Ο ρόλος της πειστικότητας των αποδείξεων για τους μαθητές στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών

Έχουμε από τη βιβλιογραφία αναφορές που δείχνουν ότι οι μαθητές αμφιβάλουν για την ισχύ του συγκεκριμένου επιχειρήματος μετασχηματισμού των περιοδικών δεκαδικών αναπαραστάσεων στο αντίστοιχο κλάσμα ακεραίων και ιδιαίτερα όταν αυτό το επιχείρημα εφαρμόζεται στην περίπτωση που η περίοδος είναι ο αριθμός 9. Έτσι, οδηγηθήκαμε στη διερεύνηση του προβληματισμού σχετικά με το κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η διαδικασία μετατροπής ενός απειροψήφιου δεκαδικού ρητού αριθμού στο αντίστοιχο κλάσμα γίνεται αποδεκτή από τους μαθητές;

Συγκεκριμένα η Sierpinska (1990) παρουσιάζει τις προσεγγίσεις 17-χρονων μαθητών σχετικά με τον τρόπο που μετατρέπονται οι περιοδικές δεκαδικές αναπαραστάσεις (π.χ. 0,123412341234..., 0,989898..., 0,121121121...) στα αντίστοιχα κλάσματα ακεραίων. Η μέθοδος η οποία παρουσιάστηκε στους μαθητές είναι η ίδια που υπάρχει και στη χώρα μας στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου. Θέτουμε $x = 0{,}123412341234...$ πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με 10000 και προκύπτει: $10000x = 1234{,}123412341234...$, αφαιρούμε την πρώτη ισότητα από τη δεύτερη: $9999x = 1234$ και διαιρώντας με 9999 έχουμε: $x = \frac{1234}{9999}$.

Επίσης, η Sierpinska (1990) επισημαίνει ότι ενώ οι μαθητές αποδέχονται το επιχείρημα για εκφράσεις όπως αυτές που αναφέραμε δεν το αποδέχονται όμως για την περίπτωση της ισότητας 0,999... = 1. Αρχικά, οι μαθητές απορρίπτουν τόσο το επιχείρημα όσο και το συμπέρασμα αλλά στη συνέχεια σε κάποιες περιπτώσεις η στάση τους διαφοροποιείται.

Ένας μαθητής, ο Tom, ο οποίος είναι ο μόνος που τελικά αποδέχτηκε την ισότητα 0,999... = 1 αμφισβητεί το συλλογισμό με τον οποίο προκύπτει αυτός:

> Tom: Επειδή, δεν ξέρουμε πόσα εννιά έχουμε εδώ, δεν θα γίνει ποτέ ίσο με ένα.
> Καθηγητής: Αποδέχτηκες το επιχείρημα στην περίπτωση των άλλων αριθμών. Γιατί όχι και εδώ;
> Tom: Δεν εμπιστεύομαι τέτοιες μαθηματικές αποδείξεις. Είναι απλά κόλπα (tricks)

Έτσι, διερευνήσαμε κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι μαθητές πείθονται από τέτοιου τύπου αποδείξεις ή απλά τις αποδέχονται επειδή τις αναφέρει ο καθηγητής τους ή το σχολικό εγχειρίδιο. Στην έρευνά μας, είναι χαρακτηριστική η περίπτωση του εκπαιδευτικού Κ4 ο οποίος στις διδακτικές του προτάσεις, αφού ολοκληρώνει μια απόδειξη της ισότητας 0,3999... = 0,4 την οποία προτείνει προς τους μαθητές στη συνέχεια αναφέρει: «Πράγμα που σίγουρα θα τους φαινόταν περίεργο. Συνήθως αντιδρούν. Θα έλεγαν ότι έχει γίνει λάθος. …».

Επίσης, ζητήσαμε από κάποιους από τους εκπαιδευτικούς με τους οποίους είχαμε συνεντεύξεις να σχολιάσουν κατά πόσο θεωρούν ότι το συγκεκριμένο επιχείρημα γίνεται αποδεκτό από τους μαθητές.

Η καθηγήτρια Κ33 είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση με φορμαλιστικές διδακτικές προσεγγίσεις όπως φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα 1 από την ημιδομημένη συνέντευξη μαζί της.

Απόσπασμα 1 της συνέντευξης με την καθηγήτρια Κ33

Ε: Το ερώτημά μου έχει να κάνει με το εξής. Μπορούμε να σχεδιάζουμε δραστηριότητες που να υποστηρίζουν διαισθητικά τις έννοιες στην κατεύθυνση της μαθηματικής τεκμηρίωσης;

Κ33: Νομίζω ότι είναι πολύ δύσκολο. Γιατί η διαίσθηση από μόνη της έρχεται σε σύγκρουση με αυτά. Με τα μαθηματικά. Κάποιες έννοιες.

Ε: Σίγουρα μια πρώτη διαίσθηση έρχεται σε σύγκρουση.

Κ33: Οπότε πολλές φορές είναι και λάθος να βασιζό…να φτιάξουμε κάτι βασιζόμενοι στη διαίσθηση. Γιατί μας πάει έτσι κι αλλιώς σε λάθος μονοπάτι.

Ε: Η ιδέα που προσπαθώ να περιγράψω είναι η εξής. Αν η διαίσθηση κάποιου έρχεται σε αντίθεση με την έννοια στη μαθηματική της μορφή μήπως θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε τη διαίσθησή του με τρόπο ώστε να μπορεί να θεωρήσει τις μαθηματικά τεκμηριωμένες έννοιες με καλύτερο τρόπο;

Κ33: Όχι αυτό λέω ότι ίσως είναι λάθος. Εξ’ αρχής να στηριζόμαστε στη διαίσθηση για να … Ότι αφού η διαίσθηση μας πάει σε λάθος μονοπάτι πρέπει να την ξεχάσουμε τελείως. Κάπως έτσι. Σε κάποιες έννοιες νομίζω ότι μόνο κακό μας κάνει.

Ε: Μπορούμε να το κάνουμε αυτό; Ο προβληματισμός μου έχει να κάνει με το εξής: Άνθρωποι που αποδεικνύουν δυο φορές παρόλο … σε άλλα σημεία …

Κ33: Ναι όταν πάνε να μιλήσουνε γι’ αυτή και να την εξηγήσουνε πάλι πέφτουνε στη διαίσθηση.

Ε: Ακριβώς. Οπότε λέω αν δεν υποστηρίξουμε αυτό που είναι μαθηματικά σωστό… να το υποστηρίξουμε και διαισθητικά …

Κ33: Νομίζω ότι δεν γίνεται σε κάποιες έννοιες. Όπως αυτή. Νομίζω ότι δεν γίνεται… Γιατί αναγκαστικά η διαίσθηση πάλι θα μας επηρεάσει.

Ε: Οπότε το μόνο που μας μένει είναι η μαθηματική απόδειξη.

Κ33: Ναι να βασιστούμε καθαρά σε μαθηματικές αξιωματικές αποδείξεις που ξέρουμε ότι είναι γρήγορες, … καθαρές, … Δυστυχώς. Νομίζω ότι σε άλλα πράγματα στα μαθηματικά μπορούμε να τα συνδυάζουμε με τη διαίσθηση αλλά σε κάποια όπως αυτά δεν …

Η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός φαίνεται να θεωρεί ότι λόγω της φύσης της συγκεκριμένης έννοιας δεν μπορεί να προσφερθεί στους μαθητές διαισθητική υποστήριξη. Επίσης, δηλώνει ότι δεν πρέπει να προσφερθεί κάποια διαισθητική υποστήριξη επειδή υπάρχει ο κίνδυνος να δημιουργηθούν παρανοήσεις. Παρόλο που της έχουν επισημανθεί προβληματικές προσεγγίσεις στην κατανόηση της έννοιας που οφείλονται σε ζητήματα σχετικά με τη φύση της έννοιας θεωρεί ότι μοναδικός τρόπος διδακτικής προσέγγισης είναι οι μαθηματικές «αξιωματικές» (όπως αναφέρει) αποδείξεις οι οποίες είναι «γρήγορες» και «καθαρές».

Η καθηγήτρια Κ33 είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα αρκετών εκπαιδευτικών της έρευνάς μας οι οποίοι ενώ γνωρίζουν σχετικά καλά το ζήτημα σε μαθηματικό επίπεδο και προσφέρουν στις διδακτικές τους προτάσεις φορμαλιστικά μαθηματικά επιχειρήματα αγνοούν τις διατυπωμένες ανησυχίες των μαθητών για ζητήματα σχετικά με τη φύση της έννοιας. Αυτοί οι εκπαιδευτικοί φαίνεται ότι θεωρούν ότι οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά αποδεχόμενοι τα μαθηματικά που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια ή παρατηρώντας τα μαθηματικά που γράφει ο δάσκαλος στον πίνακα. Κατά κάποιο τρόπο θεωρούν ότι κάποιες ενέργειες θα πρέπει να γίνουν αποδεκτές από τους μαθητές ακόμα και αν δεν είναι απόλυτα κατανοητές προκειμένου να προχωρήσουν στον κόσμο των μαθηματικών. Προκρίνουν μια διαδικασία εξοικείωσης κυρίως με τη θεσμική γνώση με βάση περισσότερο εξωτερικά κίνητρα. Όπως επισημαίνουν όμως οι (Mason et al., 1982), τα μαθηματικά θεωρούνται κατά παράδοση ως καταφύγιο για τη διατήρηση της εξωτερικής αρχής, αλλά το να γίνεις μαθηματικός περιλαμβάνει αιτιολογήσεις για να πείσεις τον εαυτό σου, να πείσεις έναν κριτικό φίλο και να πείσεις έναν λογικό σκεπτικιστή.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ζητήματα που προκύπτουν από τη μελέτη του δοκιμίου αλλά και της συνέντευξης που είχαμε με τον καθηγητή Κ1 ο οποίος έχει πολυετή εκπαιδευτική εμπειρία και βαθιά μαθηματική γνώση του ζητήματος. Επίσης, εμφανίζεται ότι έχει επίγνωση και των ευρύτερων θεμάτων που σχετίζονται με το συγκεκριμένο ζήτημα, όπως ζητήματα συμβολισμού και οντολογίας της έννοιας τα οποία θεωρούμε ότι αποτελούν μέρος του *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου*. Η περίπτωση του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού κατηγοριοποιήθηκε ως μια από τις 6 περιπτώσεις όπου έχουμε procept ως προς την αντίληψή του για το θέμα και διδακτικές προτάσεις οι οποίες είναι ορθές όσον αφορά το μαθηματικό μέρος και χρησιμοποιεί συνδυαστικές μεθόδους στη διδακτική του προσέγγιση.

Συγκεκριμένα, στις διδακτικές του προτάσεις γράφει ότι έχει σκοπό να αναφέρει στους μαθητές παραδείγματα δεκαδικών αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία οι οποίοι είναι ρητοί και άρρητοι. Επίσης, αναφέρει:

> Για τους ρητούς, μπορούμε κατ' αρχήν να δώσουμε την γυμνασιακή μέθοδο (αμφιλεγόμενη για κάποια μαθηματική «σχολή») π.χ. $x = 0{,}999\ldots \Leftrightarrow 10x = 9{,}999\ldots \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$. Τουλάχιστον από παιδαγωγική άποψη αυτή η μέθοδος «πείθει» το μαθητή.

Στη συνέχεια, αναφέρει ένα ζήτημα το οποίο δείχνει βαθιά γνώση για τους αριθμούς και τις αναπαραστάσεις τους. «Επίσης, 'ισχυρό' παιδαγωγικό επιχείρημα είναι να μετατρέψουμε κλάσματα, των οποίων ο παρονομαστής δεν είναι δύναμη του 2 ή του 5 ή συνδυασμού τους, ώστε να βγαίνει δεκαδικός με περιοδικότητα και άπειρα δεκαδικά. Όμως στην συνέντευξη του φαίνεται καλύτερα ο τρόπος σκέψης του.

Απόσπασμα 3 της συνέντευξης με τον εκπαιδευτικό Κ1

Ε: ... Αν θα ήθελες να διαπραγματευτείς μια τέτοια έννοια στην τάξη, τι στοιχεία θα λάμβανες υπόψη σου;

Β: Ας πούμε ότι οι διαδικασίες με το άπειρο είναι πολύ λεπτής φύσεως ε… το άπειρο μπορούμε να το χειριστούμε μόνο με εγκεφαλικές … με λογικές διαδικασίες γιατί δεν έχουμε καμία εποπτεία ούτε εμείς ούτε οι μαθητές. Επομένως εδώ που αναφέρω κιόλας ότι για να καταλάβουν ότι το 0,999… είναι ακριβώς ο αριθμός 1, ας ήτανε τρίτη λυκείου τα παιδιά, θα τους ανέφερα το παράδειγμα αυτό που έχει το [σχολικό εγχειρίδιο στο] γυμνάσιο με τη διαδικασία αυτή που το λέει έστω χ ίσο κ.λπ. Και μέσω μιας εξίσωσης αποδεικνύει ότι είναι το 1. Βέβαια αυτός ο τρόπος έχει και υπέρ και κατά. Το υπέρ είναι ότι αποδεικνύει ότι είναι ίσο με τον αριθμό 1 αλλά δεν έχει εποπτεία, δηλαδή τον πείθεις [τον μαθητή] τυπικά.

Στο απόσπασμα 3 φαίνεται η ευαισθησία του εκπαιδευτικού σχετικά με την αναγκαιότητα απόκτησης «εποπτείας» (όπως λέει ο ίδιος) της έννοιας, προκειμένου να γίνει κατανοητή

από τους μαθητές. Επίσης, είναι πρόδηλη η ανησυχία του σχετικά με την αδυναμία απόκτησης εποπτείας σε σχέση με την έννοια του απείρου. Επιπλέον, είναι έκδηλος ο προβληματισμός του σχετικά με την «τυπική» μόνο πειστικότητα της απόδειξης της ισότητας 0,999... = 1.
Έτσι, ο εκπαιδευτικός εγείρει ένα ζήτημα του βαθμού αποδοχής των μαθηματικών αποδείξεων από τη μεριά των μαθητών ως κριτήριο κατανόησης. Δηλαδή, φαίνεται να θεωρεί ότι οι μαθητές αποδέχονται την τυπική απόδειξη ως κριτήριο εγκυρότητας περισσότερο επειδή, την αναφέρει ο εκπαιδευτικός και το σχολικό εγχειρίδιο και λιγότερο επειδή πραγματικά τους βοηθάει να ξεκαθαρίσουν το νόημα του 0,3999...
Όπως επισημαίνει και ο κλασικός ερευνητής της γαλλικής σχολής της Διδακτικής των Μαθηματικών Brousseau (1983) το ευρύτερο νόημα (ή το ουσιαστικό περιεχόμενο) μιας μαθηματικής γνώσης περιλαμβάνει, όχι μόνο το σύνολο των καταστάσεων, στις οποίες το υποκείμενο χρησιμοποίησε τη γνώση ως μέσο για την επίλυση προβλημάτων, αλλά και το σύνολο των αντιλήψεων, των προηγούμενων επιλογών (που τώρα απορρίπτονται με το σχηματισμό αυτής της γνώσης), τα λάθη (που τώρα αποφεύγονται), την «οικονομία» που γίνεται, τις εκφωνήσεις που αναθεωρούνται (Πατρώνης & Σπανός, 1996).

Στο ίδιο πνεύμα είναι και ο καθηγητής Κ12 όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα από τη συνέντευξη του.

Απόσπασμα 1 της συνέντευξης με τον καθηγητή Κ12

Ε: …Θεωρείς ότι αυτή η απόδειξη θα έπειθε τον μαθητή ότι είναι ο ίδιος αριθμός. … Είναι ένα πειστικό επιχείρημα για ένα μαθητή αυτό; Ή είναι κάποιο τρυκ. Πως πιστεύεις ότι θα το αντιληφθεί ο μαθητής;
Κ12: Εντάξει σαν τρυκ θα το πάρει αυτό…. Κοίτα όπως το συζητάμε σαν τρυκ θα το πάρει. Το πιθανότερο έτσι. Θα δει το παράδειγμα και θα του βγαίνει κάθε φορά αυτό… Δεν θα έχει πλήρη αίσθηση του πραγματικού αριθμού.
Ε: Ωραία, οι τυπικές αποδείξεις, …
Κ12: Αυτό δεν είναι τυπική απόδειξη βέβαια …

Στη συνέχεια αναφέρουμε τρεις λόγους που ερμηνεύουν τους προβληματισμούς των εκπαιδευτικών για τη συγκεκριμένη απόδειξη. Ο ένας σχετίζεται με την έλλειψη μαθηματικής θεμελίωσης σε σχολικό επίπεδο, αλλά ακόμα και σε εγχειρίδια σε επίπεδο Ανώτερων Μαθηματικών, καθώς και κατά την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών για τις πράξεις μεταξύ απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών. Ο Spivak (2010) μάλιστα εκφράζει αυτή την ανησυχία όταν με δεδομένους τους ρητούς αριθμούς σκιαγραφεί «μια κατασκευή των πραγματικών αριθμών του μαθητή λυκείου» όπως την ονομάζει, η οποία βασίζεται στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Ορίζουμε ως πραγματικό αριθμό ένας ζεύγος (a, $\{b_n\}$), όπου a είναι ένας ακέραιος και $\{b_n\}$ μια ακολουθία από τους φυσικούς αριθμούς από 0 ως 9, με τον όρο ότι η ακολουθία δεν είναι τελικά 9. Διαισθητικά, αυτό το ζεύγος παριστάνει τον $a+\sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$. Με αυτό τον ορισμό, ο πραγματικός αριθμός είναι ένα πολύ συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά οι δυσκολίες που συναντάμε να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό είναι φοβερές (πως προσθέτετε δεκαδικούς με άπειρα ψηφία χωρίς να ανησυχείτε για το ότι μεταφέρετε δεκαδικά ψηφία επ' άπειρον;). (σ. 555).

Η δεύτερη ερμηνεία που προτείνουμε είναι ότι κατά τη συγκεκριμένη απόδειξη υπονοούνται προϋποθέσεις (η σύγκλιση της σειράς 0,3 + 0,09 + 0,09 +...) οι οποίες δεν είναι ξεκάθαρες κατά τη διαδικασία της απόδειξης. Παρόμοιοι προβληματισμοί έχουν εντοπιστεί και ιστορικά από τον Niels Henrik Abel (1802-1829) τους οποίους ο Spivak (2010) αναδεικνύει στην προμετωπίδα του κεφαλαίου για την «προσέγγιση με πολυωνυμικές συναρτήσεις». Χαρακτηριστικά αναφέρεται:

> Μια από τις πιο ξεχωριστές σειρές στην αλγεβρική ανάλυση είναι η ακόλουθη: $\left(1+x\right)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+...$
> Όταν ο *m* είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, το άθροισμα της σειράς που είναι πεπερασμένο, μπορεί να εκφραστεί, όπως είναι γνωστό, από το $\left(1+x\right)^m$. Όταν ο *m* δεν είναι ακέραιος, η σειρά συνεχίζεται επ' άπειρον, και συγκλίνει ή αποκλίνει ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν οι ποσότητες *m* και *x* . Σ' αυτή την περίπτωση, γράφουμε την ίδια ισότητα: $\left(1+x\right)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+...$ κτλ.
> … Υποτίθεται ότι η αριθμητική ισότητα θα ισχύει όποτε η σειρά συγκλίνει, αλλά αυτό δεν έχει ως τώρα αποδειχθεί. Niels Henrik Abel. (Spivak 2010, p. 372)

Χωρίς την εξασφάλιση της προϋπόθεσης της σύγκλισης της σειράς ο συλλογισμός της «απόδειξης» που αναφέρουν οι εκπαιδευτικοί και το σχολικό εγχειρίδιο εμφανίζεται ουσιαστικά σαν να πρόκειται για ένα μηχανικό χειρισμό συμβόλων. Αλλά τέτοιοι χειρισμοί είναι γνωστό ότι έγιναν στην ιστορική εξέλιξη των δυναμοσειρών από εξαίρετους μαθηματικούς.

Για παράδειγμα, αντίστοιχες διαδικασίες αν τις ακολουθήσουμε για την λεγόμενη σειρά του Guido Grandi (1671-1742): 1-1+1-1+... θα οδηγηθούμε σε παράδοξα αποτελέσματα. Αν υποθέσουμε ότι S = 1-1+1-1+... τότε χρησιμοποιώντας κάπως μηχανικά τα σύμβολα θα μπορούσαμε να πούμε ότι S= (1-1)+(1-1)+... = 0 ή S= 1-(1-1+1-1+...) = 1-0=1 ή S= 1-(1-1+1-1+...) = 1-S οπότε 2S=1 ή S=1/2. O Grandi στο βιβλίο του 'Quadratura circula et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhibita' (1703) υιοθετεί το τρίτο αποτέλεσμα βάζοντας στο δυωνυμικό ανάπτυγμα που προαναφέραμε $m=-1$ και x = 1. Το ίδιο αποτέλεσμα υιοθετεί και ο Leibniz σ' ένα γράμμα του προς τον Christian Wolf που δημοσιεύθηκε το 1713, με το σκεπτικό ότι η απάντηση ½ είναι ο μέσος όρος των δυο άλλων αποτελεσμάτων 0 και 1.

Σε κάθε περίπτωση τέτοιες διαδικασίες σε διδακτικό πλαίσιο φαίνονται σαν τρυκ του καθηγητή ή του σχολικού εγχειριδίου και οι μαθητές δεν έχουν πρόσβαση στα κριτήρια εγκυρότητάς τους και για το λόγο αυτό οι εκπαιδευτικοί εκφράζουν τον προβληματισμό τους για τη χρησιμοποίηση τέτοιων προσεγγίσεων.

Η τρίτη ερμηνεία έχει σαν αφορμή τη δυσκολία κατανόησης του απείρου λόγω έλλειψης εποπτείας όπως αναφέρει ο καθηγητής Κ1 καθώς και ότι η απόδειξη που παρουσιάζει είναι «αμφιλεγόμενη για κάποια μαθηματική 'σχολή'». Πράγματι, ο Brower (1912) ο θεμελιωτής της σχολής των ιντουισιονιστών στη φιλοσοφία των μαθηματικών αναφέρει:

> Ας θεωρήσουμε την έννοια «πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1» … Για τον ιντουισιονιστή [αυτή η έννοια] σημαίνει 'νόμος για την κατασκευή μιας στοιχειώδους σειράς ψηφίων μετά την υποδιαστολή, ο οποίος χτίζεται μέσω μιας πεπερασμένης σειράς πράξεων. (p. 85)

Να επισημάνουμε λοιπόν ότι τέτοιοι διδακτικοί μεταγνωστικοί προβληματισμοί των εκπαιδευτικών σχετικά με την πειστικότητα τυπικών μαθηματικών αποδείξεων στους μαθητές, το επίπεδο μαθηματικής τους αυστηρότητας αλλά ακόμα και προβληματισμοί με φιλοσοφικό υπόβαθρο, είναι μέρος του *ορίζοντα της γνώσης* των εκπαιδευτικών και μπορούν να επηρεάσουν τόσο τον προγραμματισμό της διδασκαλίας τους όσο και την εξέλιξη της συζήτησης στην τάξη.

4.2.6 Αλληλεπίδραση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών με τους μαθητές

Στην ενότητα αυτή μελετάμε στοιχεία στις δηλώσεις των εκπαιδευτικών που αναδεικνύουν τον τρόπο που επηρεάζονται οι προσεγγίσεις τους από τις ιδέες των μαθητών του σεναρίου. Ένα χαρακτηριστικό στοιχείο με βάση το οποίο φαίνεται να διαμορφώνεται η συλλογιστική κάποιων εκπαιδευτικών είναι η προσπάθειά τους να χρησιμοποιήσουν τις ιδέες των μαθητών στις διδακτικές τους προσεγγίσεις. Κάποιοι άλλοι εκπαιδευτικοί απαντούν άμεσα στα γνωστικά ζητήματα που διατυπώνονται προσπερνώντας, ευρύτερα ζητήματα που τίθενται από τις δηλώσεις των μαθητών του σεναρίου και αφορούν στη φύση ή στον συμβολισμό του μαθηματικού αντικειμένου που διαπραγματεύονται. Δηλαδή, θεωρούμε ότι είναι στοιχείο αλληλεπίδρασης του εκπαιδευτικού με τους μαθητές υπάρχει όταν αυτός, στις διδακτικές του προσεγγίσεις, λαμβάνει υπόψη του το ευρύτερο πλαίσιο των εννοιών και καταστάσεων που συνδέονται με την ιδέα που διαπραγματεύονται οι μαθητές και των πιθανών τρόπων προσέγγισής της.

Για παράδειγμα ο καθηγητής Κ18 αναφέρει στις διδακτικές του προτάσεις την απόδειξη της ισότητας 0,3999... = 0,4 και κλείνει γράφοντας «Έτσι θα δουν [οι μαθητές] ότι πρόκειται για τον ίδιο αριθμό».

Στην περίπτωση αυτή αφήνεται να εννοηθεί ότι μέσω της απόδειξης της ισότητας οι μαθητές θα κατανοήσουν ότι το 0,3999... εκφράζει έναν αριθμό, μια σταθερή ποσότητα. Επίσης, αναμένεται από τον εκπαιδευτικό να κατανοηθούν από τους μαθητές οι λόγοι που τους οδήγησαν να θεωρήσουν ότι δεν πρόκειται για έναν συγκεκριμένο αριθμό ή για μια μεταβλητή ποσότητα που συνεχώς αυξάνεται.

Αντίθετα ο καθηγητής Κ4 αναφέρει στις διδακτικές του προτάσεις:

> ...θα χρησιμοποιούσα τα θετικά σημεία των απόψεων των μαθητών για να καταλάβουν τι συμβαίνει. [...] Ο μαθητής Β λέει ότι είναι αριθμός σε αντίθεση με τους Α και Δ. Με την αλληλεπίδραση των απόψεων των μαθητών θα γίνει κατανοητό κι απ' τους υπόλοιπους ότι 0,3999… είναι συμβολισμός για έναν αριθμό.

Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται το ζήτημα της φύσης της αναπαράστασης 0,3999… (αριθμός-διαδικασία) που έχει τεθεί από τις τοποθετήσεις των μαθητών και προτείνει την ανάπτυξη μιας συζήτησης μεταξύ των μαθητών για το συγκεκριμένο ζήτημα κατευθύνοντας τους κατάλληλα. Στη συνέχεια προσπαθεί να απαντήσει στις παρανοήσεις των μαθητών επαναδιατυπώνοντάς αυτές σε μια ποιο θεωρητική μορφή και χρησιμοποιώντας κατάλληλα διαισθητικά επιχειρήματα και για το λόγο αυτό η διδακτική του πρόταση έχει ταξινομηθεί στις συνδυαστικές ως προς το φορμαλισμό. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Πρέπει να αντιμετωπίσουμε τις εξής παρανοήσεις: α) Ένα άθροισμα άπειρων όρων μπορεί να τείνει σε έναν αριθμό. Αυτό γίνεται με παράδειγμα: Κόβοντας ένα χαρτί στο μισό και το μισό πάλι στο μισό κ.λπ. ...» Βέβαια η συγκεκριμένη πρόταση αναφέρεται μάλλον σε μια θεωρητική δυνατότητα παρά σε μια πραγματική εφαρμογή. «… β) Στους πραγματικούς αριθμούς δεν υπάρχει η έννοια της διαδοχικότητας. Δεν είναι ο 0,4 ο επόμενος του 0,3999… Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί ρωτώντας τους μαθητές ποιος είναι ο επόμενος του 0,4. Μπορεί να πουν ότι *μετά* από άπειρα μηδενικά βάζουμε το 1. Όμως εδώ υπάρχει η αντίφαση μετά από άπειρα …

Σε κάποιες περιπτώσεις όμως η αλληλεπίδραση με τους μαθητές εκφράζεται μέσω αμφίβολων εμπειρικών επιχειρημάτων στην προσπάθεια των εκπαιδευτικών να κάνουν την έννοια προσιτή στους μαθητές. Για παράδειγμα ο καθηγητής Κ26 στις διδακτικές του προτάσεις για το μαθητή αναφέρει ότι: «Είναι δύσκολη έννοια για τη Γ΄ Λυκείου και ίσως το ποσοστό κατανόησης είναι ικανοποιητικό αν τονιστεί ότι $0{,}39\overline{9} = 0{,}4$». Όμως στις διδακτικές του προτάσεις για το μαθητή Δ αναφέρει:

> Του μαθητή Δ μπορεί να του ζητηθεί να προσθέσει τους αριθμούς 1000000 και 0,0000001 και στη συνέχεια να ερωτηθεί «Αν δυο εταιρείες σου πρόσφεραν μισθούς 1000000 και 1000000,0000001 ευρώ ποια θα προτιμούσες;».

Στην ίδια κατεύθυνση είναι και θεώρησή του ίδιου εκπαιδευτικού όταν αναφέρει ότι: «Θετικό [για τον μαθητή Β] είναι ότι κατάλαβε ότι *πρακτικά* είναι ο αριθμός 0,4» (η υπογράμμιση προστέθηκε).

Θεωρούμε επίσης ως στοιχείο αλληλεπίδρασης με τους μαθητές την προσπάθεια κάποιου εκπαιδευτικού να αποδεχθεί αρχικά την γνώμη των μαθητών ότι 0,3999… ≠ 0,4 με σκοπό να την ανατρέψει με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Συγκεκριμένα το τελευταίο μέρος των διδακτικών προτάσεων του καθηγητή Κ4 δίνεται ένα περιγραφικό επιχείρημα για την ισότητα 0,3999…= 0,4 που βασίζεται στην ιδέα της απαγωγής σε άτοπο όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

> Αφού έχουμε καταλήξει στο ότι δεν υπάρχει διαδοχικότητα στους πραγματικούς και ότι δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του 0,3999… και του 0,4, άρα οι αριθμοί ταυτίζονται, επομένως 0,3999…= 0,4. Δηλαδή το όριο είναι *ίσο* με 0,4 » (οι υπογραμμίσεις στο πρωτότυπο).

Ο καθηγητής Κ25 επίσης είναι ένας από αυτούς που ξεκινάνε την διδακτική τους προσέγγιση από την ιδέα κάποιου μαθητή. Στο δοκίμιό του αρχίζει ερμηνεύοντας τη σκέψη του μαθητή Δ και στη συνέχεια αναπτύσσει έναν υποθετικό διάλογο με τους μαθητές. Συγκεκριμένα αναφέρει

> Ο μαθητής Δ σκεπτόμενος με βασικές έννοιες π.χ. ότι το 72 είναι 7 δεκάδες και 2 μονάδες δηλαδή 72 = 70 + 2 προσπαθεί να εκφράσει τον αριθμό 0,3999... ως 0,3 + 0,09 + 0.009 + ... δηλαδή να τον εκφράσει στη μορφή $0{,}1 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 9 + 0{,}001 \cdot 9 + \ldots$ αλλά επειδή η διαδικασία αυτή είναι άπειρη θεωρεί πως δεν εκφράζει αριθμό. Όμως τότε ούτε ο π ούτε ο e ούτε γενικά οι άρρητοι θα ήταν αριθμοί. Άρα ο 0,3999... ή αλλιώς $0{,}3\overline{9}$ είναι αριθμός που τείνει στο 0,4 (αν όχι το 0,4*)

Το (*) που υπάρχει στο παραπάνω απόσπασμα αντιστοιχεί σε δυο σωστές αποδείξεις για την ισότητα 0,3999... = 0,4. Έτσι, ενώ ο εκπαιδευτικός φαίνεται ότι έχει την τυπική γνώση όταν προσπαθεί να την διαπραγματευτεί διδακτικά ξεκινώντας από τις ιδέες των μαθητών καταλήγει στην ασαφή διατύπωση «Άρα ο 0,3999... ή αλλιώς $0{,}3\overline{9}$ είναι αριθμός που τείνει στο 0,4 (αν όχι το 0,4*)».

Η περίπτωση του καθηγητή Κ6 (12 χρόνια διδακτικής εμπειρίας) είναι κάπως διαφορετική. Με βάση το δοκίμιό του φαίνεται ότι ο ίδιος έχει ικανοποιητική κατανόηση της παράστασης «0,3999 ...». Όμως η προσπάθεια του εκπαιδευτικού αυτού να αποδεχθεί αρχικά τη γνώμη των μαθητών ότι 0,3999… ≠ 0,4 και να καταλήξει σε άτοπο δεν στέφθηκε με επιτυχία. Συγκεκριμένα αναφέρει:

> Θα χρησιμοποιούσα την εις άτοπον. Έστω ότι 0,3999… ≠ 0,4. Τότε από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ θα έπρεπε να βρίσκουμε αριθμό μεταξύ τους. Αν υπάρχει τέτοιος αριθμός τότε το πλήθος των ψηφίων του θα ήταν πεπερασμένο. Άτοπο.

Ένα πρόβλημα στην συγκεκριμένη δήλωση του Κ6 είναι ότι αναφέρει λανθασμένα την ιδιότητα της ύπαρξης ενός πραγματικού αριθμού μεταξύ δυο διαφορετικών πραγματικών αριθμών ως ιδιότητα της πληρότητας αντί για ιδιότητα της πυκνότητας. Εδώ συναντάμε μια σύγχυση μεταξύ δυο βασικών όρων της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών, η οποία επαναλαμβάνεται και από άλλους εκπαιδευτικούς της έρευνάς μας, παρά την έμφαση που αποδίδεται στους όρους αυτούς κατά τη διδασκαλία της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών στο πανεπιστήμιο. Επισημαίνουμε επίσης, ότι ενώ από τη γενική εικόνα του γραπτού δοκιμίου του εκπαιδευτικού φαίνεται ότι διαθέτει την απαραίτητη γνώση σχετικά με την αναπαράσταση 0,3999... στις διδακτικές του προτάσεις διακινδυνεύει να αναπτύξει ένα αίωλο τελικά επιχείρημα προκειμένου να χρησιμοποιήσει τις ιδέες των μαθητών.

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με βάση την κλασσική πλέον εργασία του L. Shulman (1986, 1987) και των συνεργατών του, έγινε μια σημαντική στροφή στην εκπαιδευτική έρευνα. Δόθηκε έμφαση στο γνωστικό αντικείμενο και κατά συνέπεια στην ιδιαίτερη γνώση που πρέπει να έχει ο εκπαιδευτικός προκειμένου να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της διδασκαλίας του γνωστικού αντικειμένου. Στην περίπτωση των μαθηματικών οι Ball et al. (2008) αναπτύσσουν το θεωρητικό τους μοντέλο για τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία που περιλαμβάνει τα ιδιαίτερα εκείνα χαρακτηριστικά της γνώσης που είναι απαραίτητα στον εκπαιδευτικό προκειμένου να διδάξει μαθηματικά. Όμως η έρευνα της ερευνητικής ομάδας της D. Ball βασίζεται κυρίως σε δεδομένα από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση αφήνοντας χωρίς ιδιαίτερη διερεύνηση ζητήματα σχετικά με τη λειτουργικότητα του μοντέλου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επίσης, το μοντέλο της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία χρησιμοποιήθηκε αρκετές φορές για τις ανάγκες της αξιολόγησης της γνώσης των εκπαιδευτικών, αποκτώντας έναν χαρακτήρα προαπαιτούμενων που πρέπει να ικανοποιεί ένας εκπαιδευτικός προκειμένου να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της διδακτικής πρακτικής.

Η ιδέα της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία ως ιδιαίτερης επαγγελματικής γνώσης του εκπαιδευτικού απέκτησε ιδιαίτερη δυναμική την πρώτη δεκαετία του 21ου αιώνα, όμως στη συνέχεια παρατηρείται μια σχετική υποχώρηση της δυναμικής αυτής. Στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αναφέρθηκε ότι συχνά η μελέτη της γνώσης των εκπαιδευτικών περιορίζεται στα θεσμικά της χαρακτηριστικά. Κυρίως μελετάται η τυπική μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών στοχεύοντας συχνά σε μια διαδικασία αξιολόγησής τους και λιγότερο στα νοήματα που αποδίδουν αυτοί στις μαθηματικές έννοιες που διαπραγματεύονται διδακτικά.

Η παρούσα μελέτη βασίστηκε στις γραπτές απαντήσεις 106 καθηγητών μαθηματικών σε ερωτήσεις που σχετίζονταν με ένα διδακτικό σενάριο για την αναπαράσταση 0,3999... και σε συνεντεύξεις 15 εξ' αυτών. Η επιλογή της συγκεκριμένης διαδικασίας συλλογής των δεδομένων έχει κάποια πλεονεκτήματα αλλά και κάποιους περιορισμούς. Από τη μια οι γραπτές απαντήσεις θεωρήθηκε ότι αποτυπώνουν με περισσότερη ακρίβεια τις συνειδητές αντιλήψεις και διδακτικές προθέσεις σχετικά μεγάλου αριθμού εκπαιδευτικών προσφέροντας με τον τρόπο αυτό μεγαλύτερη δυνατότητα γενικευσιμότητας των αποτελεσμάτων. Από την άλλη ο προφορικός λόγος, όπως αυτός αποτυπώνεται σε μια συνέντευξη ή μια ζωντανή διδασκαλία θεωρήθηκε ότι επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες και επηρεάζεται σημαντικά από το πλαίσιο διαπραγμάτευσης. Επίσης, με τη διαδικασία των ερωτήσεων με βάση το διδακτικό σενάριο δόθηκε η δυνατότητα να τεθεί προς διαπραγμάτευση στους εκπαιδευτικούς μια σειρά ζητημάτων που είχαν ανιχνευθεί στην βιβλιογραφική ανασκόπηση τα οποία επιδιώχθηκε να μελετήθούν και τα οποία πιθανόν να μην προέκυπταν σε μια ζωντανή διδασκαλία.

Από την άλλη, θεωρήθηκε ότι το σύστημα ερώτησης - απάντησης είναι ένα σχετικά κλειστό σύστημα με μικρές δυνατότητες εξέλιξης. Όμως, υιοθετήθηκε ότι το πλαίσιο του διδακτικού σεναρίου δεν έχει το χαρακτήρα ενός τυπικού ελέγχου της μαθηματικής γνώσης του εκπαιδευτικού όπου οι απαντήσεις είναι ορθές ή λανθασμένες. Αντίθετα, προσομοιάζει ως ένα βαθμό, με τις συνθήκες της διδακτικής πράξης, προσφέροντας πολλαπλές δυνατότητες ελεύθερης έκφρασης των κατανοήσεων και των προσεγγίσεων του εκπαιδευτικού. Επιπλέον, οι συνεντεύξεις που είχαμε με κάποιους εκπαιδευτικούς μας προσφέρουν επιπλέον δυνατότητες ισχυροποίησης των αποτελεσμάτων μας.

Η μελέτη των αντιλήψεων και της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα, δεν γίνεται σε καμία περίπτωση για να διατυπωθούν αξιολογικές κρίσεις ή χαρακτηρισμοί για τις μαθηματικές ή διδακτικές τους ικανότητες των εκπαιδευτικών. Στόχος στην παρούσα έρευνα είναι η μελέτη των αντιλήψεων και της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών, με σκοπό την κατανόηση και να την ερμηνεία τους, ώστε στη συνέχεια να διαμορφωθούν τα βασικά χαρακτηριστικά ενός γνωστικού πλαισίου, το οποίο θα μπορέσει να αξιοποιηθεί λειτουργικά, τόσο σε προγράμματα επαγγελματικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, όσο και στη διαμόρφωση προγραμμάτων σπουδών για τη διδασκαλία εννοιών των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στη παρούσα μελέτη, λαμβάνοντας υπόψη το θεωρητικό πλαίσιο της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία επιδιώκεται η συμβολλή στην ανάδειξη της σημασίας της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για το σκοπό αυτό μελετήθηκαν οι αντιλήψεις και η συλλογιστική των εκπαιδευτικών όταν διαπραγματεύονται διδακτικά ένα ζήτημα που σχετίζεται με τα Ανώτερα Μαθηματικά στο πλαίσιο ενός διδακτικού σεναρίου.

Συγκεκριμένα, για τον πρώτο ερευνητικό στόχο μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις αναπαραστάσεις δεκαδικών αριθμών με περίοδο 9 και η σύνδεσή τους με τη διδακτική πρακτική, κατά τον αναστοχασμό τους όσον αφορά σχετικές παρανοήσεις μαθητών λυκείου. Για τον δεύτερο ερευνητικό στόχο, μελετήθηκε η συλλογιστική των εκπαιδευτικών και το υπόβαθρό της κατά τη διδακτική διαχείριση παρανοήσεων μαθητών λυκείου γι’ αυτές τις αναπαραστάσεις.

Συζήτηση για τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τον πρώτο ερευνητικό στόχο

Σε σχέση με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που διαπραγματευόμαστε στον πρώτο ερευνητικό στόχο, έχουν μελετηθεί αρχικά οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την παράσταση 0,3999... Σε δεύτερη φάση μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την παράσταση 0,399... οι οποίες στη συνέχεια ταξινομήθηκαν σ’ ένα φάσμα μεταξύ διαδικαστικών και διεργασιεννοιακών (procept) αντιλήψεων και σε τρίτη και τελευταία φάση οι διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών ταξινομήθηκαν ως προς την ορθότητα και το φορμαλισμό σε συνδυασμό με τις αντιλήψεις τους όπως αυτές αποτυπώθηκαν στο φάσμα της δεύτερης φάσης.

Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την παράσταση 0,3999...

Από την ανάλυση της αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών φάνηκε ότι υπήρχαν περιπτώσεις εκπαιδευτικών που ενώ αναγνωρίζουν με ορθή τεκμηρίωση τις παρανοήσεις κάποιων μαθητών του σεναρίου δεν καταφέρνουν να ανταποκριθούν με αποτελεσματικότητα σε κάθε περίπτωση. Επίσης, σε αρκετές περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αποστασιοποιηθούν από τις γνώμες των μαθητών του σεναρίου, οπότε είτε διολισθαίνουν στις απόψεις των μαθητών, είτε εμφανίζονται αντιφατικά στοιχεία στο συλλογισμό τους, είτε αδυνατούν να τεκμηριώσουν με σαφήνεια την εκάστοτε παρανόηση. Οι εκπαιδευτικοί εμπλέκονται ενεργά και επηρεάζονται σημαντικά από το διδακτικό πλαίσιο του σεναρίου και δεν λειτουργούν γνωστικά απομονωμένα προσπαθώντας να χαρακτηρίσουν τις γνώμες των μαθητών απλά ως σωστές ή λανθασμένες.

Στην προσπάθεια λοιπόν αναγνώρισης και ερμηνείας των παρανοήσεων των μαθητών οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν μόνο τυπική μαθηματική ορολογία και συμβολισμούς αλλά επιχειρούν λεκτικά επιχειρήματα, κάνουν συνδέσεις με συναφείς μαθηματικές έννοιες χωρίς να φροντίζουν σε κάθε περίπτωση για τη σαφήνεια όσων αναφέρουν. Συγκεκριμένα, σε πολλές περιπτώσεις οι αναφορές των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των μαθητών περιλαμβάνουν στοιχεία από το ευρύτερο περιβάλλον των υπό διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών, όπως η φύση τους, ο τρόπος μεταβολής τους, οι συσχετίσεις μεταξύ τους ή ο συμβολισμός τους. Με την έννοια αυτή ενεργοποιείται ο *ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου* (σύμφωνα με την ορολογία των Ball. et al., 2008) ακόμα και κατά την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών.

Σημειώνεται ότι στο θεωρητικό μοντέλο της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία, η γνώση που απαιτείται για την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθηματικών από τον εκπαιδευτικό περιορίζεται είτε στην *κοινή γνώση του περιεχομένου* είτε στην *εξιδεικευμένη γνώση του περιεχομένου*. Όμως από τα αποτελέσματα της ανάλυσης της παρούσας έρευνας προέκυψε ότι η κοινή και εξιδεικευμένη γνώση του περιεχομένου δεν επαρκεί για την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών. Φαίνεται ότι ο *ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου* του εκπαιδευτικού συνεισφέρει σημαντικά στη διαδικασία αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών.

Από την ανάλυση των προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών κατά την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών επίσης προέκυψε ότι οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν με μεγαλύτερη δυσκολία τις παρανοήσεις των μαθητών Α και Β του σεναρίου οι οποίες έχουν περισσότερο διαδικαστικό χαρακτήρα. Μια εύλογη υπόθεση που εξηγεί αυτή τη διαπίστωση είναι ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί έχουν και οι ίδιοι διαδικαστικές προσεγγίσεις για το θέμα οπότε για το λόγο αυτό δυσκολεύονται περισσότερο να αναγνωρίσουν με ορθή προσέγγιση τις διαδικαστικές προσεγγίσεις των μαθητών. Για την εγκυρότητα αυτής της υπόθεσης αναλύθηκαν στη συνέχεια οι ίδιες οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών με βάση το σύνολο του γραπτού δοκιμίου τους, χωρίς να περιοριζόμαστε στα σημεία αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών του σεναρίου.

Μελέτη και ταξινόμηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για την παράσταση 0,399...

Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση είδαμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις μαθητές και φοιτητές δυσκολεύονται να διαπραγματευτούν τη σχέση μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων των αριθμών και ειδικά των απειροψήφιων δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών. Στις σχετικές όμως έρευνες (Tall & Schwarzenberger, 1978; Byers 2007), φοιτητές καλούνται να διαπραγματευτούν το ζήτημα σ' ένα τυπικό μαθηματικό πλαίσιο. Συγκεκριμένα ζητείται να συγκριθεί το 0,999... με το 1. Σε κάποιες περιπτώσεις, οι δυσκολίες σε μια τέτοιου τύπου προσέγγιση, αποδίδεται με απλοϊκότητα στην έλλειψη θεσμικής γνώσης των μαθητών ή των φοιτητών. Μελετώντας τις αντίστοιχες προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών αποφεύγεται η απόδοση των δυσκολιών της σχετικής διαπραγμάτευσης στην έλλειψη της θεσμικής γνώσης. Να σημειωθεί εδώ ότι δεν ανευρέθηκαν στη βιβλιογραφία ερευνητικές προσπάθειες μελέτης αντίστοιχων προσεγγίσεων από εκπαιδευτικούς οπότε θεωρούμε ότι με τη συγκεκριμένη μελέτη συνεισφέρουμε ερευνητικά στο πεδίο.

Επίσης, από την βιβλιογραφική ανασκόπηση είδαμε ότι κάποιοι ερευνητές (π.χ. Byers, 2007) θεωρούν ότι η δυσκολία σύγκρισης του 0,999... με το 1 οφείλεται στη δυσκολία μετάβασης από τη διαδικασία σ' ένα γνωστικό αντικείμενο. Αξιοποιήσαμε αυτή την ιδέα ως βάση για τη διαμόρφωση του διδακτικού σεναρίου που αποτέλεσε και το βασικό εργαλείο συλλογής των δεδομένων της παρούσας διατριβής. Έτσι, δόθηκε η δυνατότητα να διερευνήσουμε πιο άμεσα αν οι εκπαιδευτικοί θεωρούν το 0,3999... ως διαδικασία, αριθμό ή ως ένα δίπολο διαδικασίας και αριθμού.

Όπως αναφέρθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο της σχετικής ανάλυσης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών έγκειται στη μετάβαση από τη διαδικασία σε ένα γνωστικό αντικείμενο. Πιο συγκεκριμένα αρκετοί ερευνητές (Gray & Tall, 1994; Dienes, 1960; Piaget, 1972; Greeno, 1983; Davis, 1984; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Harel & Kaput 1991) έχουν μελετήσει την εξελικτική νοητική πορεία από την διαδικασία στην έννοια. Όμως στις εργασίες στις οποίες κυρίως βασιστήκαμε ((Gray, et al, 1999, Gray & Tall, 2001; Tall, 2007) η προσέγγιση της πορείας αυτής παρουσιάζεται με γραμμικότητα. Δηλαδή, εξετάζει τις επιτυχημένες προσπάθειες κατά την επίλυση κάποιου προβλήματος και ταξινομεί κυρίως το βαθμό αποτελεσματικότητας των ενεργειών στα επιμέρους στάδια. Επίσης, το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο δεν βασίζεται σε εκτεταμένες εμπειρικές μελέτες αλλά σε θεωρητικές ερμηνείες πάνω σε σχετικά αποσπασματικές εργασίες μαθητών ή φοιτητών.

Η παρούσα εμπειρική μελέτη, βασίστηκε στο προαναφερόμενο θεωρητικό πλαίσιο, χωρίς να επιδιώκεται η ένταξη των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών στις επιμέρους κατηγορίες του θεωρητικού πλαισίου. Αντίθετα, διαμορφώθηκαν κατηγορίες με βάση τα δεδομένα, έχοντας ως υπόβαθρο το θεωρητικό μοντέλο. Έτσι, ενώ στο θεωρητικό μοντέλο οι αντιλήψεις κατά βάση ταξινομούνται ως διαδικαστικές, διεργασιακές ή διεργασιεννοιακές (procept), από τη μελέτη των γραπτών δοκιμίων των εκπαιδευτικών αναδύθηκαν συχνά αμφισημίες, παρερμηνείες ή ακόμα και αντιφάσεις στις τοποθετήσεις των εκπαιδευτικών. Οι περιπτώσεις αυτές εντάχθηκαν στις κατηγορίες που φαίνονται στον πίνακα 4.1.2.Α χωρίς να υιοθετείται κάποια εφαρμογή του θεωρητικού πλαισίου στα εμπειρικά δεδομένα ούτε προσαρμογή των δεδομένων στις κατηγορίες του θεωρητικού πλαισίου.

Υπενθυμίζεται ότι ένας επιπλέον λόγος για τον οποίο μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το συγκεκριμένο ζήτημα σχετίζεται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, με ενδογενή χαρακτηριστικά της έρευνας. Δηλαδή, επιδιώχθηκε η ανάδειξη ολοκληρωμένης άποψης για τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών η οποία δεν περιορίζεται από τις προσεγγίσεις τους κατά την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών. Συγκεκριμένα από την ανάλυση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με την αναπαράσταση 0,3999... προέκυψε ότι περίπου 3 στους 10 εκπαιδευτικούς θεωρούν την αναπαράσταση 0,3999... μόνο ως διαδικασία. Σχεδόν 4 στους 10 εκπαιδευτικούς θεωρούν ότι η αναπαράσταση 0,3999... είναι ένας συνδυασμός διαδικασίας και έννοιας (αριθμού) αλλά διαπιστώνονται παρερμηνείες, ασάφειες ή ακόμα και αντιφάσεις στις προσεγγίσεις τους. Τέλος, διαπιστώνεται ότι μόνο 2 στους 10 εκπαιδευτικούς υιοθετούν τον διττό χαρακτήρα της αναπαράστασης 0,3999... ως διαδικασία και έννοια χωρίς να διολισθαίνουν σε παρερμηνείες.

Στην επόμενη ενότητα συζητάμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης σχετικά την αντανάκλαση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για το θέμα στις διδακτικές τους προσεγγίσεις.

Αντιλήψεις και διδακτικές προσεγγίσεις

Όσον αφορά την τελευταία φάση της συνδυαστικής ανάλυσης των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών με τις διδακτικές τους προσεγγίσεις, παρατηρείται ότι ένα σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών με ικανοποιητική κατανόηση της αναπαράστασης «0,3999 ...» (12 καθηγητές: procept, σωστές, φορμαλιστικές) καταφεύγουν σε αμιγώς τυπικές και φορμαλιστικές προσεγγίσεις στις διδακτικές τους προτάσεις για την αντιμετώπιση των σχετικών παρανοήσεων των μαθητών. Με τον τρόπο αυτό φαίνεται ότι υπερβαίνουν τις οντολογικές ανησυχίες και τα νοητικά παράδοξα που προκύπτουν από τις υποθετικές απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το αν η αναπαράσταση «0,3999 ...» είναι διαδικασία ή αριθμός, καθώς και αν το άπειρο άθροισμα θετικών αριθμών μπορεί να είναι ένας αριθμός ή άπειρο. Έτσι αναδύεται και από την παρούσα έρευνα το φαινόμενο της αποσύνδεσης των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται, από το εμπειρικό τους υπόβαθρο και τα προβλήματα τα οποία προκάλεσαν την εξέλιξή τους, το οποίο έχει εντοπιστεί στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης από τον Freudenthal (1983) ο οποίος το έχει αποδώσει με τον όρο απο-οντολόγηση (an-ontologization).

Υπάρχει, ωστόσο, ένας μικρότερος αριθμός εκπαιδευτικών (6 καθηγητές: procept, ορθές, συνδυαστικές), οι οποίοι, αναγνωρίζουν περιορισμένη πειστικότητα για τους μαθητές των καθαρά φορμαλιστικών τεχνικών. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί συνοδεύουν τις διδακτικές προσεγγίσεις τους με κατάλληλα επιχειρήματα διαισθητικών και λεκτικών επεξηγήσεων.

Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι από τους 23 καθηγητές που έχουν ικανοποιητική κατανόηση της συγκεκριμένης αναπαράστασης, μόνο 18 απ' αυτούς παραμένουν ακριβείς στις προτάσεις διδασκαλίας τους. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια απόκλιση από τη μαθηματική ακρίβεια κατά την μετατροπή αυτής της γνώσης για διδακτικούς σκοπούς. Η λεπτότητα της υπό εξέταση μαθηματικής έννοιας, δηλαδή της αναπαράστασης 0,3999..., φαίνεται να συμβάλλει σε αυτή την διολίσθηση, καθιστώντας σαφές την ιδιαίτερη προσοχή που απαιτείται κατά τη διάρκεια του διδακτικού μετασχηματισμού της. Επιπλέον, τονίζεται με τον τρόπο αυτό, ο ποιοτικά διαφορετικός χαρακτήρας του γνωστικού περιεχομένου της διδασκαλίας των μαθηματικών (Davis & Smith, 2006).

Όμως, η πλειονότητα των καθηγητών δεν προτείνει διδακτικές προσεγγίσεις για το σχετικό θέμα οι οποίες να είναι μαθηματικά ορθές. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί διολισθαίνουν σε άτυπες και ασαφείς διδακτικές προσεγγίσεις οι οποίες αδυνατούν να ανταποκριθούν αποτελεσματικά στις σχετικές παρανοήσεις των μαθητών. Εδώ, εμφανίζεται μια ισχυρή προσπάθεια ενσωμάτωσης της μαθηματικής γνώσης μέσα σε ένα εμπειρικό-διαισθητικό πλαίσιο, απογυμνωμένο όμως, από το μαθηματικό του περιεχόμενο. Να σημειώσουμε επίσης ότι όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.3.Α υπάρχουν 11 εκπαιδευτικοί που ενώ απαντούν στα δυο πρώτα ερωτήματα του σεναρίου αποφεύγουν να τοποθετηθούν στο (γ) δηλαδή αυτό που τους ζητάει να διατυπώσουν διδακτικές προτάσεις προς τους μαθητές. Μια ερμηνεία που εξηγεί αυτή τη διστακτικότητα ενδεχομένως να σχετίζεται με την ανασφάλεια που μπορεί να νιώθουν οι εκπαιδευτικοί για το γνωστικό τους υπόβαθρο σε σχέση με το θέμα. Δηλαδή, να θεωρούν ότι η γνώση τους για το ζήτημα δεν είναι στέρεη και έτσι αποφεύγουν να παρέχουν διδακτικές προτάσεις.

Τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν ότι το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών δεν μπορεί να διαχειριστεί διδακτικά με αποτελεσματικό τρόπο, τις θεσμικές γνώσεις των Ανώτερων Μαθηματικών που διδάχθηκε στις πανεπιστημιακές σπουδές του, αναδεικνύοντας την ανάγκη για διερεύνηση της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης που απαιτείται για την υποστήριξη της διδασκαλίας Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Διαπιστώνεται επίσης ότι, κατά βάση οι αντιλήψεις ακόμα και καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για το θέμα παραμένουν διαδικαστικές. Επισημαίνεται όπως ήταν αναμενόμενο ότι οι η διαδικαστικές προσεγγίσεις του θέματος έχουν αντανάκλαση και στις διδακτικές προτάσεις των εκπαιδευτικών. Έτσι, η παρούσα έρευνα συνεισφέρει ερευνητικά στο πεδίο ενδυναμώνοντας τα σχετικά ερευνητικά αποτελέσματα με επεξεργασία δεδομένων που προέρχονται από εκπαιδευτικούς. Επιπλέον, η σημαντικότητα των αποτελεσμάτων της μελέτης ενισχύεται λαμβάνοντας υπόψη ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν διδαχθεί στις πανεπιστημιακές τους σπουδές τα αντίστοιχα μαθηματικά ζητήματα, οπότε οι δυσκολίες που παρουσιάζονται δεν μπορούν να αποδοθούν, αποκλειστικά τουλάχιστον, σε έλλειψη γνωστικού υπόβαθρου, όπως θα μπορούσε να αποδοθεί σε αντίστοιχες προσεγγίσεις μαθητών ή φοιτητών.

Διαφαίνεται λοιπόν ότι υπάρχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά στη μαθηματική ιδέα που διαπραγματευόμαστε τα οποία αναγκάζουν μαθητές, φοιτητές ακόμα και καθηγητές σε παρερμηνείες. Επιπλέον, όπως ήδη έχει αναφερθεί, με βάση την ανάλυση των τοποθετήσεων των εκπαιδευτικών, αρκετοί από αυτούς επεκτείνουν τις προσεγγίσεις τους στο ευρύτερο περιβάλλον των υπό διαπραγμάτευση εννοιών, δείχνοντας ότι αναζητούν ερμηνείες και εκτός του αυστηρού μαθηματικού πλαισίου. Λαμβάνοντας υπόψη αυτά τα δυο στοιχεία στη συνέχεια διερευνήθηκαν εκτενέστερα εκείνοι οι παράγοντες που οδηγούν τους εκπαιδευτικούς να συζητούν για το ευρύτερο περιβάλλον της έννοιας που διαπραγματεύονται, δηλαδή τα στοιχεία του *ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου*. Αυτή η ερευνητική προσπάθεια αναπτύχθηκε στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης προκειμένου να καλυφθεί ο δεύτερος ερευνητικός στόχος.

Συζήτηση για τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τον δεύτερο ερευνητικό στόχο

Στη συνέχεια της έρευνας του δεύτερου ερευνητικού στόχου μελετήθηκε η συλλογιστική των εκπαιδευτικών και το υπόβαθρό της κατά τη διδακτική διαχείριση παρανοήσεων μαθητών λυκείου για αναπαραστάσεις δεκαδικών αριθμών με περίοδο 9.

Συγκεκριμένα, μελετώντας το περιεχόμενο και το υπόβαθρο της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών διακρίθηκαν (α) στοιχεία σημειωτικής, όπου αναδεικνύεται ο ιδιαίτερος ρόλος των συμβόλων στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών, (β) στοιχεία οντολογίας, τα οποία αφορούν στη φύση των μαθηματικών εννοιών που διαχειρίζονται διδακτικά οι εκπαιδευτικοί, (γ) επιστημολογικά στοιχεία, όπου εντοπίζονται στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών και (δ) φιλοσοφικά στοιχεία, τα οποία ανέκυψαν κατά τη μελέτη εκείνων των αναφορών των εκπαιδευτικών που δείχνουν συνδέσεις στη συλλογιστική τους με το φιλοσοφικό υπόβαθρο των εννοιών που διαπραγματεύονται. Στο τέλος έχουν διερευνηθεί δυο ζητήματα που προέκυψαν τόσο κατά την ανάλυση των γραπτών δοκιμίων των εκπαιδευτικών στην ανατροφοδότησή τους προς τους μαθητές όσο και από την ανάλυση των συνεντεύξεων που έγιναν με κάποιους από αυτούς. Το ένα ζήτημα σχετίζεται με την πειστικότητα που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι έχουν οι αποδείξεις για τους μαθητές. Το άλλο ζήτημα είναι σχετικό με την αλληλεπίδραση που φαίνεται να έχουν οι εκπαιδευτικοί με τους μαθητές όταν αναπτύσσουν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις.

Ο ρόλος της σημειωτικής στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών

Ένας από τους σημαντικούς παράγοντες που προέκυψε από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, ότι διαμορφώνει τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών κατά τη διδακτική πρακτική τους, είναι ο ρόλος των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των εννοιών. Στο λόγο των εκπαιδευτικών της παρούσας έρευνας εντοπίζονται αρκετά συχνά, περισσότερο αυθόρμητα χαρακτηριστικά τα οποία διαμορφώνονται με βάση τις προσωπικές τους ανεπεξέργαστες κατανοήσεις για το μαθηματικό ζήτημα που διαπραγματεύονται και λιγότερο με βάση τις θεσμικές τους γνώσεις, όπως αυτές τις έχουν διδαχθεί στις ανώτερες σπουδές τους. Είναι χαρακτηριστικό στην κατεύθυνση αυτή, όχι μόνο η άτυπη γλώσσα που συχνά χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για να περιγράψουν τα μαθηματικά ζητήματα, αλλά και ότι δοκιμάζουν την εισαγωγή μη καθιερωμένων συμβόλων προσπαθώντας να αποδώσουν τις κατανοήσεις τους. Δηλαδή, φαίνεται ότι παρά τον αυστηρό χαρακτήρα που έχει αποδοθεί στη χρήση των μαθηματικών συμβόλων συχνά οι εκπαιδευτικοί για τις ανάγκες της διδακτικής πρακτικής, χρησιμοποιούν και διαπραγματεύονται τα σύμβολα, περισσότερο με έναν πρωτογενή και ζωντανό τρόπο παρά με μια τυπική προσέγγιση, χωρίς να αποφεύγουν τη διολίσθηση σε παρερμηνείες.

Στην ανάλυση εντοπίζονται τοποθετήσεις εκπαιδευτικών που θεωρούν ότι το είδος του συμβόλου μπορεί να καθορίσει την κατανόηση της έννοιας που αντιπροσωπεύει το σύμβολο αυτό. Συγκεκριμένα, επισημαίνουμε αναφορές εκπαιδευτικού που μας οδηγούν στη διάκριση μεταξύ συμβόλων όπως το π ή το e τα οποία παραπέμπουν πιο εύκολα σε αριθμό και συμβόλων όπως το 0,3999... τα οποία παραπέμπουν πιο εύκολα σε διαδικασία. Όμως, παρότι οι εκπαιδευτικοί έχουν διδαχθεί την συγκεκριμένη σημασία συμβόλων και όρων, κατά την ερμηνεία των αντιλήψεων των μαθητών δεν διστάζουν να προτείνουν μη καθιερωμένους συμβολισμούς προκειμένου να εκφράσουν την δική τους προσέγγιση για τα μαθηματικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, κάποιοι χρησιμοποιούν το σύμβολο 0,000...1 προσπαθώντας να εκφράσει την απόσταση του 0,3999... από το 0,4 ή σύμβολα όπως το «$\lim_{x \to 0,4}(x)$», ή το «$\lim_{x \to 0,3999}(x)$» προσπαθώντας να εκφράσουν συμβολικά συγκεχυμένες ιδέες για τη σχέση του 0,3999... και του 0,4. Οι συμβολισμοί αυτοί νοηματοδοτούνται μέσα από την αλληλεπίδραση των νοημάτων της ευρύτερης περιοχής στην οποία ανήκουν οι έννοιες που διαπραγματεύονται.

Εστιάζοντας στο σημειωτικό υπόβαθρο της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών, αναδείχθηκαν περιπτώσεις όπου εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι τρεις τελείες «...» που εμφανίζονται στην αναπαράσταση 0,3999... μπορεί να συνδεθούν από τους μαθητές και με το συμβολισμό της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, ... και έτσι ενδεχομένως να θεωρηθεί ότι η αναπαράσταση 0,3999... αντιπροσωπεύει μια ακολουθία. Επίσης, αναδείχθηκαν αντίστοιχες συνδέσεις ανάμεσα στις τρεις τελείες όπως εμφανίζονται στην αναπαράσταση 0,3999... και στον τρόπο που χρησιμοποιούνται αυτές στο γραπτό λόγο με την έννοια του και ούτω καθ’ εξής (κ.ο.κ). Μια τέτοια προσέγγιση παραπέμπει σύμφωνα με τον εκπαιδευτικό που το επισήμανε στο να θεωρηθεί ότι η αναπαράσταση 0,3999... εκφράζει την ακολουθία «0,3, 0,39, 0,399 κ.ο.κ» (0,3, 0,39, 0,399, ...). Επιπρόσθετα, υπενθυμίζεται ότι στο γραπτό λόγο τα αποσιωπητικά που παριστάνονται με τρεις τελείες χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν κάτι που εννοείται ή κάτι που αφήνεται στον αναγνώστη να συμπληρώσει με το δικό του νόημα.

Προς ενίσχυση του προηγούμενου αναφέρονται περιπτώσεις που φαίνεται ότι η χρήση των τριών τελειών σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια με διαφορετικές σημασίες επηρεάζει σημαντικά τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός «1, 2, 3, ..., ν» φαίνεται να συνδέεται με την αναπαράσταση 0,3999... προσδίδοντας ένα διαδικαστικό περιεχόμενο σ’ αυτή δυσκολεύοντας τη θεώρησή της ως μια ολότητα. Στην ίδια κατεύθυνση κατατείνουν και οι προσεγγίσεις ανάγνωσης ή καταγραφής της αναπαράστασης 0,3999... (διαδοχικά 0,3, 0,39, 0,399, ...).

Σε κάποιες μάλιστα περιπτώσεις επινοούνται από τους εκπαιδευτικούς αντίστοιχα σύμβολα όπως «0,3999...9» ή «0,00...09» τα οποία εκφράζουν με χαρακτηριστικό τρόπο το εννοιολογικό υπόβαθρο της συλλογιστικής τους, το οποίο βρίσκει και αντίστοιχη σημειωτική έκφραση. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι πολλαπλές σημασίες με τις οποίες χρησιμοποιούνται οι τρείς τελείες στα μαθηματικά και στο γραπτό λόγο μπορούν να καθορίσουν εννοιολογικά ή οντολογικά το περιεχόμενο της έκφρασης που συνοδεύουν. Με την έννοια αυτή διαπιστώνεται μια σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ της σημειωτικής και της οντολογίας (που συζητάμε στην επόμενη ενότητα) ως παράγοντες διαμόρφωσης της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών. Επισημαίνουμε ότι οι εκπαιδευτικοί δεν περιορίζονται στα καθιερωμένα σύμβολα που έχουν διδαχθεί στις πανεπιστημιακές σπουδές τους αλλά τολμούν να εκφράσουν συμβολικά τις προσωπικές τους αντιλήψεις προκειμένου να ερμηνεύσουν τις τοποθετήσεις των μαθητών ακόμα και αν αυτές φαίνεται να έχουν ένα συγκεχυμένο ή διαισθητικό χαρακτήρα, δείχνοντας ότι η διδακτική διαδικασία διέπεται έντονα από ένα αυθόρμητο και ζωντανό τρόπο και δεν περιορίζεται στις τυποποιημένες γνώσεις του εκπαιδευτικού που αποκτήθηκαν στις σπουδές του.

Επίσης, σε αρκετές περιπτώσεις χαρακτηριστικές λέξεις ή όροι που χρησιμοποιούνται με διαφορετικά νοήματα σε διαφορετικά πλαίσια φαίνεται ότι επηρεάζουν σημαντικά τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα εμφανίζονται περιπτώσεις που η λέξη «αναπαράσταση» συνδέεται με την αριθμητική παράσταση όπου μετά από μια σειρά πράξεων θα οδηγηθούμε σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα και με την έννοια αυτή η αναπαράσταση 0,3999... αποκτά μια διαδικαστική ανάγνωση και υπόσταση. Η λέξη «συνέχεια» φαίνεται να προκαλεί σύγχυση στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών όταν από τη μια εννοείται ως «συνέχεια συνάρτησης» και από την άλλη ότι εκφράζει το «συνεχές της ευθείας των πραγματικών αριθμών». Επίσης, η λέξη «τείνει» από τη μια θεωρείται ότι χαρακτηρίζει το όριο και από την άλλη την προσέγγιση ή την στρογγυλοποίηση.

Προκύπτει λοιπόν από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας ότι στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών αναδύεται η διάκριση που κάνει ο Vygotsky (1986) ανάμεσα στη σημασία της έκφρασης στη κυριολεξία από την εμπράγματη αναφορά της, που αφορά τη λειτουργία της όταν αναφέρεται σε κάποιο αντικείμενο ως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του. Δηλαδή, ενώ οι εκφράσεις 0,3999... και 0,4 έχουν την ίδια εμπράγματη αναφορά, για κάποιους εκπαιδευτικούς διαφέρουν σημασιολογικά επειδή επισημαίνονται και απομονώνονται διαφορετικά χαρακτηριστικά («διαδικασία», «αριθμός») της έννοιας. Σε κάποιες από τις συνδέσεις αυτές ενδέχεται να υπάρχει ένα συνδετικό εννοιολογικό υπόβαθρο το οποίο αναδείξαμε στην ανάλυση των δεδομένων μας. Όμως σπάνια φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν επίγνωση αυτών των συνδέσεων.

Στη βιβλιογραφική ανασκόπηση παρουσιάστηκαν κάποιες από τις κλασικές εργασίες των Saussure (1959), Peirce (1986, 1906) και Frege (1892) σχετικά με τη σημειωτική, οι οποίες αξιοποιήθηκαν και στην παρούσα έρευνα. Στη συγκεκριμένη ενότητα η εστίαση της μελέτης αυτής είναι στις σημειωτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών για το θέμα που διαπραγματευόμαστε και τους τρόπους που χρησιμοποιούν τα σύμβολα στη διδακτική τους πρακτική. Η συνεισφορά της έρευνας έγκειται σε δυο σημεία. Το πρώτο αφορά στην αποκάλυψη εκείνων των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των συμβόλων που οδηγούν τους εκπαιδευτικούς σε συνδέσεις εννοιών με παραπλήσιο ή διαφορετικό περιεχόμενο. Το δεύτερο αφορά στην ανάδειξη του κοινού εννοιολογικού υπόβαθρου που ενδεχομένως υπάρχει μεταξύ σημείων ή συμβόλων που χρησιμοποιούνται σε διαφορετικά πλαίσια διαπραγμάτευσης. Έτσι, προσφέρεται ένα εννοιολογικό υπόβαθρο για το θέμα, ώστε οι άτυπες και διαισθητικές συνδέσεις που κάνουν αναπόφευκτα οι εκπαιδευτικοί στη διδακτική πράξη να αποκτήσουν ένα περισσότερο συνειδητό χαρακτήρα.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις προκειμένου να ερμηνευθεί η προσέγγιση ενός μαθητή για ένα μαθηματικό αντικείμενο απομονώνονται λέξεις ή σημεία (signs) της δήλωσης του μαθητή ή του ίδιου του αντικειμένου, τα οποία συνδέονται νοηματικά με όμοιες λέξεις ή σημεία του ευρύτερου μαθηματικού περιβάλλοντος, όπου αυτά έχουν παραπλήσιο ή ακόμα και διαφορετικό περιεχόμενο. Αρκετές φορές το σημειωτικό υπόβαθρο στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών έχει τα χαρακτηριστικά αυτού που ο Vygotsky (1986) αποκαλεί *συμπλεκτική σκέψη*. Δηλαδή μια συνειρμική σύνδεση μεμονωμένων στοιχείων που καθορίζουν ένα σύμπλεγμα.

Αποτελεί λοιπόν ιδιαίτερο στοιχείο της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης του εκπαιδευτικού για τις ανάγκες της διδασκαλίας, η δυνατότητα ερμηνείας των συμβόλων που διαχειρίζεται σε κάθε πλαίσιο, στο οποίο αυτά εμφανίζονται, αλλά και η δυνατότητα διάκρισης των διαφορετικών περιεχομένων, που έχει ένα σύμβολο σε διαφορετικά πλαίσια, τα οποία όπως είδαμε μπορεί να μην είναι μόνο μαθηματικά. Επίσης, αποτελεί βασικό στοιχείο των διδακτικών εφοδίων του εκπαιδευτικού η δυνατότητά του να ερμηνεύει και να διευκρινίζει τις διαφορετικές σημασίες των χρησιμοποιούμενων συμβόλων σε κάθε περίπτωση αλλά και τις μεταξύ τους συνδέσεις.

Ο ρόλος της οντολογίας στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφική ανασκόπηση σε αρκετές έρευνες (Tall & Schwarzenberger, 1978; Byers 2007) μαθητές και φοιτητές καλούνταν να συγκρίνουν το 0,999... με το 1. Έτσι, το πλαίσιο διαπραγμάτευσης από τη μεριά των ερωτώμενων ήταν βασικά μαθηματικό, οπότε δεν άφηνε το περιθώριο σ' αυτούς να εκφράσουν τις απόψεις τους σχετικά με τη φύση των αντικειμένων που τους ζητούσαν να συγκρίνουν. Θεωρούνταν κατά κάποιο τρόπο δεδομένο ότι καλούνταν να συγκρίνουν δυο αριθμούς. Παρόλα αυτά κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι δυσκολίες σύγκρισης των δυο αριθμών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι φοιτητές οφείλονται στο ότι το 0,999... θεωρείται ως διαδικασία ενώ το 1 ως αριθμός. Ουσιαστικά οι ερευνητές αυτοί θεωρούν ότι τα υποκείμενα των ερευνών καλούνται να συγκρίνουν δυο διαφορετικές ποιότητες και συχνά απαντούν ότι για το λόγο αυτό δεν είναι ίσα. Μια τέτοια ερμηνεία είναι αρκετά ενδιαφέρουσα όμως δεν στηρίζεται στα εμπειρικά δεδομένα.

Στη παρούσα μελέτη έγινε αποδεκτή αυτή η υπόθεση ως συνθήκη εργασίας και επιδιώχθηκε να υποστηριχθεί με βάση εμπειρικά δεδομένα. Έτσι, η διαμόρφωση του ερευνητικού εργαλείου της έρευνας δηλαδή του διδακτικού σεναρίου, έγινε έχοντας επίγνωση αυτού του ζητήματος και έτσι δεν κλήθηκαν οι εκπαιδευτικοί να συγκρίνουν δυο αριθμούς αλλά ουσιαστικά κλήθηκαν να τοποθετηθούν για τη φύση των αναπαραστάσεων που καλούνταν να διαπραγματευτούν. Όμως η επιδίωξη δεν ήταν μόνο να διαπιστωθεί αν οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η αναπαράσταση 0,3999... παριστάνει μια διαδικασία ή έναν αριθμό. Στους ερευνητικούς στόχους ήταν να διερευνηθεί βαθύτερα το ζήτημα αναδεικνύοντας τους λόγους για τους οποίους ένας εκπαιδευτικός μπορεί να θεωρήσει το 0,3999... ως διαδικασία σ' ένα διδακτικό πλαίσιο διαπραγμάτευσης.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στα ευρήματα για το πρώτο ερευνητικό στόχο οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν υιοθετούν ότι η αναπαράσταση 0,3999... είναι ένας αριθμός, αλλά μια διαδικασία. Έτσι, με την παρούσα έρευνα ισχυροποιείται η σχετική υπόθεση που αναπτύσσεται στη βιβλιογραφία και μάλιστα όταν τα υποκείμενα της είναι εκπαιδευτικοί οι οποίοι ερωτήθηκαν άμεσα για να τοποθετηθούν σχετικά με το ζήτημα αυτό.

Στη συνέχεια προσπαθώντας να διερευνηθούν οι λόγοι για τους οποίους υιοθετείται από τους εκπαιδευτικούς η διαδικαστική προσέγγιση για το 0,3999... πραγματοποιήθηκε μια συνδυαστική ανάλυση συγκεκριμένων αποσπασμάτων των εκπαιδευτικών από τα οποία διαφαίνονταν αντίστοιχες προσεγγίσεις και σχετικών θεωρητικών αναφορών που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία.

Ένα ζήτημα που ερμηνεύει κάποια χαρακτηριστικά της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών για το συγκεκριμένο ζήτημα σχετίζεται με την οντολογία του απείρου η οποία προέρχεται από το ετυμολογικό υπόβαθρο της λέξης «άπειρο» το οποίο παραπέμπει σε «κάτι χωρίς πέρας» ή σύμφωνα με σχετικές ερμηνείες σε «κάτι απροσδιόριστο». Έτσι, για αρκετούς εκπαιδευτικούς απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί όπως ο 0,3999... ή οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων αριθμών, δεν θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν «συγκεκριμένους» αριθμούς αλλά αφηρημένες ιδέες χωρίς ρεαλιστική υπόσταση. Σε άλλες περιπτώσεις, αναλύοντας τις δηλώσεις των εκπαιδευτικών προέκυψε επίσης, ότι σημαντική πηγή δυσκολίας και παρερμηνειών προέρχεται από το διττό χαρακτήρα του απείρου στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, στην αναπαράσταση 0,3999... ενσωματώνεται η έννοια του άπειρου πληθάριθμου που έχει το σύνολο των ψηφίων 9 με την έννοια του «ορίου ακολουθίας όπου το ν τείνει στο άπειρο, δημιουργώντας έτσι μια σχετική σύγχυση σχετικά την οντολογία του.

Όμως στο πλαίσιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν διδάσκονται οι σχετικοί ορισμοί, με αποτέλεσμα μαθητές και εκπαιδευτικοί να προσπαθούν να αποδώσουν τα αντίστοιχα νοήματα με περιγραφικές και διαισθητικές προσεγγίσεις. Επίσης, φαίνεται ότι η σχετική θεσμική γνώση την οποία είχαν διδαχθεί οι εκπαιδευτικοί στο πανεπιστήμιο, δεν μπορεί στις περισσότερες περιπτώσεις, να αξιοποιηθεί με ουσιαστικό τρόπο στην ερμηνεία των δηλώσεων των μαθητών και στις διδακτικές προτάσεις των εκπαιδευτικών.

Ο ρόλος της οντολογίας των εννοιών στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών αναδεικνύεται επίσης και από την προσπάθειά τους να υποστηρίξουν εμπειρικά και διαισθητικά τις αφηρημένες ιδέες τις οποίες επιδιώκουν να διαχειριστούν διδακτικά. Κάποιοι εκπαιδευτικοί επιδιώκουν να ισορροπήσουν την τάση απο-οντολόγησης που διέπει τα μαθηματικά, όπως την χαρακτηρίζει ο Freudenthal (1983), δηλαδή, την τάση ανεξαρτητοποίησης των μαθηματικών από το εμπειρικό τους υπόβαθρο και τα βασικά ερωτήματα τα οποία τα δημιούργησαν. Αυτή η τάση όμως δεν διέπει μόνο τα μαθηματικά αλλά διαπερνά και το θεσμικό χαρακτήρα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Όμως κατά τη διδακτική διαπραγμάτευση όπως φαίνεται και από τα δεδομένα της παρούσας έρευνας οι εκπαιδευτικοί δεν μεταφέρουν στους μαθητές αναλλοίωτη τη γνώση που έχουν διδαχθεί στο πανεπιστήμιο ή τη γνώση που αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών ή το σχολικό εγχειρίδιο.

Επισημαίνεται λοιπόν, ότι για κάποιους εκπαιδευτικούς, ένα σημαντικό μέρος του οντολογικού φορτίου της έννοιας δεν καθορίζεται αποκλειστικά από τα θεσμικά της χαρακτηριστικά όπως αυτά περιγράφονται στα επίσημα εγχειρίδια αλλά και από την ευρύτερη σημασία της, και τα αλλεπάλληλα επίπεδα ερμηνειών που έχουν επιφορτίσει την έννοια κατά την ιστορική της εξέλιξη.

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν διαπραγματεύονται τα ζητήματα σε ένα απομονωμένο περιβάλλον τυπικής μαθηματικής ορθότητας αλλά φέρνουν στο προσκήνιο μια ανάγκη σύνδεσης των μαθηματικών διαδικασιών με εμπειρικές προσεγγίσεις σε μια προσπάθεια απόδοσης φυσικής σημασίας ή οντολογίας σ' αυτές. Τέτοιες πρακτικές αν και δεν ανήκουν στο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών, εμφανίζονται συνειδητά ή όχι στο λόγο των εκπαιδευτικών και αποτελούν μέρος της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί για τις ανάγκες τις διδασκαλίας.

Ο ρόλος του επιστημολογικού υπόβαθρου στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών

Σε αρκετές περιπτώσεις η έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Cornu, 1981; Sierpinska, 1990) έχει διαπιστώσει δυσκολίες μαθητών και φοιτητών στην προσέγγιση εννοιών των Ανώτερων Μαθηματικών όπως το όριο, οι άπειρες σειρές κ.ά. Κάποια από τα ζητήματα που έχουν αναδειχθεί είναι οι πεποιθήσεις που συμπυκνώνονται σε φράσεις όπως: «οι τιμές μιας συνάρτησης δε φτάνουν ποτέ το όριό της», «οι τιμές μιας συνάρτησης πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο το όριό της», ένα άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών είναι άπειρο», «η απόσταση του 0,999... από το 1 είναι απείρως μικρή κ.ά.

Από την ανάλυση των γραπτών δοκιμίων των εκπαιδευτικών εντοπίστηκαν ισχυρές συνδέσεις της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών με επιστημολογικές πτυχές των εννοιών που διαπραγματεύονται στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν τις κατανοήσεις των μαθητών του σεναρίου. Δηλαδή, εντοπίστηκαν πτυχές της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών στη συλλογιστική των εκπαιδευτικών οι οποίες συχνά απέχουν από τη σύγχρονη θεώρηση των αντίστοιχων εννοιών που έχουν διδαχθεί οι εκπαιδευτικοί και παρατίθενται στα σχετικά εγχειρίδια.

Συγκεκριμένα, συνδέθηκαν δηλώσεις εκπαιδευτικών για το άθροισμα άπειρης σειράς που υιοθετούν μια τάση συμβιβασμού αντιφατικών προσεγγίσεων (με βάση τη σύγχρονη θεώρηση) με αντίστοιχες προσεγγίσεις των μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα. Έτσι, φαίνεται ότι σε κάποιες περιπτώσεις για τις ανάγκες της διδακτικής πρακτικής, υιοθετούνται ιστορικές προσεγγίσεις προκειμένου να ερμηνευθούν οι κατανοήσεις των μαθητών. Στην ιστορική διαδρομή των εννοιών οι εξαιρέσεις στον κανόνα φαίνεται να εξοβελίζονται (Lakatos, 1976) ώστε οι τύποι που έχουν προκύψει να έχουν μέγιστη ισχύ παραπέμποντας τη διαδικασία της θεμελίωσης για την περίοδο που τα θεμέλια φαίνεται να κλονίζονται. Αντίστοιχα, στη περίπτωση που η συζήτηση στην τάξη αναδεικνύει τα αντιφατικά χαρακτηριστικά των χρησιμοποιούμενων προσεγγίσεων ο εκπαιδευτικός θα αναγκαστεί να επικαλεστεί πιο ακριβείς και στέρεες προσεγγίσεις προκειμένου να ανταποκριθεί στις αναβαθμισμένες ανάγκες της διδακτικής διαπραγμάτευσης.

Στη συνέχεια, εντοπίστηκαν στοιχεία στις δηλώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα απειροστά, με την έννοια κυρίως του «απείρως μικρού» παρά τον εξοβελισμό των απειροστών από τη σύγχρονη Μαθηματική Ανάλυση. Επιβεβαιώνεται με τον τρόπο αυτό μια φυσική διαδικασία υιοθέτησης των απειροστών από τους εκπαιδευτικούς όπως επισημανθεί από τη σχετική βιβλιογραφία.

Αρκετή συζήτηση αναπτύσσεται από τους εκπαιδευτικούς σχετικά με το αν μια συνάρτηση φτάνει το όριό της ή όχι. Ενδεχομένως οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να προστατέψουν τους μαθητές τους από την πεποίθηση ταύτισης του ορίου μιας συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε έναν συγκεκριμένο αριθμό, με την τιμή της συνάρτησης για τον αριθμό αυτό. Όμως οι δηλώσεις των εκπαιδευτικών δεν ξεκαθαρίζουν αρκετά τις προθέσεις τους σε μια τέτοια κατεύθυνση.

Εντοπίστηκαν επίσης στοιχεία, που συνδέουν το περιεχόμενο της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών με τις προσεγγίσεις των μαθηματικών του $18^{ου}$ για το όριο συνάρτησης σε συνδυασμό με τις σχετικές αναφορές του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα στα αποτελέσματα της ανάλυσης αναδείχθηκαν σχετικές νοηματοδοτήσεις εκπαιδευτικών σχετικά με τον όρο «τείνει» που χρησιμοποιείται στα όρια συναρτήσεων και ακολουθιών. Στις περιπτώσεις αυτές συχνά οι έννοιες χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς συνδέεται με μια εμπειρική προσέγγιση που κυριαρχεί ιστορικά στις πρώτες προσπάθειες διαμόρφωσής τους. Έτσι, συχνά στις δηλώσεις των εκπαιδευτικών φαίνεται να αποτυπώνεται το πρωτογενές εννοιολογικό φορτίο των εννοιών και λιγότερο η σύγχρονη θεώρησή τους που οι εκπαιδευτικοί έχουν διδαχθεί στο πανεπιστήμιο και η οποία είναι απαλλαγμένη από τις εμπειρικές καταβολές των εννοιών.

Σε άλλες περιπτώσεις οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών έχουν έντονο φορμαλιστικό χαρακτήρα, δείχνοντας έτσι μια τάση αποκοπής ή «εξορθολογισμού» των εννοιών που χρησιμοποιούνται στη διδακτική πρακτική και υιοθέτησης των χαρακτηριστικών τους στο πλαίσιο μιας θεωρίας, απαλλάσοντάς τους από το εννοιολογικό φορτίο της ιστορική τους εξέλιξης και της τρέχουσας σημασία τους.

Κάποιοι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να ενσωματώσουν έννοιες και όρους των Ανώτερων Μαθηματικών στη διδακτική τους πρακτική αλλά με αρκετή ασάφεια και αμφίβολα αποτελέσματα. Φαίνεται λοιπόν ότι απαιτείται επίγνωση της ιστορικής εξέλιξης των συγκεκριμένων εννοιών και της σύγχρονης θεσμικής τους θεώρησης προκειμένου να αξιοποιηθούν τέτοια στοιχεία στη διδακτική πρακτική. Η επίγνωση αυτή θεωρούμε ότι αποτελεί μέρος της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί για τις ανάγκες της διδασκαλίας αντίστοιχων εννοιών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ο ρόλος του φιλοσοφικού υπόβαθρου στη διαμόρφωση της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών

Στη βιβλιογραφική ανασκόπηση παρουσιάστηκε η πλούσια και μακραίωνη συζήτηση που έχει αναπτυχθεί στη φιλοσοφία των μαθηματικών σχετικά με το εν δυνάμει και εν ενεργεία άπειρο, για ένοια του συνεχούς της ευθείας των πραγματικών αριθμών καθώς για τα απειροστά. Επίσης, παρουσιάστηκαν μελέτες που ερμηνεύουν προσεγγίσεις μαθητών ή φοιτητών με βάση το φιλοσοφικό υπόβαθρο των εννοιών αυτών. Στην παρούσα έρευνα διαπιστώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί ενεργοποιούν στοιχεία αυτής της φιλοσοφικής συζήτησης στις διδακτικές τους προσεγγίσεις. Συγκεκριμένα, αναλύθηκαν οι σχετικές δηλώσεις των εκπαιδευτικών με αντίστοιχες φιλοσοφικές προσεγγίσεις που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία (π.χ. Αναπολιτάνος, 1985) ακόμη και από την αρχαιότητα.

Διαπιστώνεται για παράδειγμα ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί αναφέρουν στις διδακτικές τους ενέργειες το κλασσικό από την Αρχαιότητα παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας.

Κάποιοι από αυτούς αναπτύσσουν μια συζήτηση στη διδακτική τους διαπραγμάτευση, προκειμένου να τεκμηριώσουν ότι ένα άπειρο άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, άρα και ένα άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών, είναι ένας αριθμός. Σύμφωνα με την επιχειρηματολογία τους, επειδή στην πραγματικότητα ο Αχιλλέας γνωρίζουμε ότι φτάνει τη χελώνα και αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται μετά από άπειρα βήματα, αυτό σημαίνει ότι μπορεί το άθροισμα άπειρων τμημάτων να είναι ένα τμήμα ή αλλιώς το άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών να είναι αριθμός. Δηλαδή, το πραγματικό φαινόμενο (ο Αχιλλέας φτάνει τη χελώνα) έρχεται να υποστηρίξει στη διδακτική διαπραγμάτευση τον μαθηματικό ισχυρισμό (το άπειρο άθροισμα θετικών αριθμών είναι αριθμός). Αλλά το παράδοξο έγκειται στη θεώρηση άπειρων μερών ως ένα όλο την ίδια στιγμή και αυτό είναι ένα φιλοσοφικό και όχι μαθηματικό πρόβλημα. Αλλά η φιλοσοφική αυτή συζήτηση που βασίζεται στο συγκεκριμένο παράδοξο και σχετίζεται με τις ιδέες του εν δυνάμει και του εν ενεργεία απείρου έχει ιστορικό βάθος και είναι στη βάση της κατανόησης των άπειρων διαδικασιών στα μαθηματικά.

Ένας εκπαιδευτικός για τις ανάγκες της διδακτικής πρακτικής, αναπτύσσει μια συζήτηση σχετικά με την νοητή επαναλαμβανόμενη διχοτόμηση ενός τμήματος. Κατά τη διαπραγμάτευση αυτή αφήνει να εννοηθεί ότι όταν αυτή η διχοτόμηση είναι πεπερασμένη τότε το αποτέλεσμα της είναι τμήμα, ενώ όταν είναι άπειρη τότε το αποτέλεσμα της είναι σημείο. Το μαθηματικό υπόβαθρο εδώ είναι το αξίωμα του κιβωτισμού το οποίο είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της πληρότητας όπως αναφέρθηκε και στη σχετική ενότητα των αποτελεσμάτων. Η βαθιά αυτή συζήτηση έχει τις ρίζες της στην φιλοσοφική προσέγγιση του Αριστοτέλη για το συνεχές και με σύγχρονους όρους σχετίζεται με το συνεχές της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Επίσης, παρουσιάστηκε στα σχετικά αποτελέσματα της έρευνας η συσχέτιση αυτής της ιδέας με την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών και την διάκρισή τους σε αριθμητικοποιημένα και μη αριθμητικοποιημένα μαθηματικά ανάλογα με το κατά πόσο χρησιμοποιείται σ' αυτά σύστημα αρίθμησης.

Στη συνέχεια συνδέθηκαν δηλώσεις εκπαιδευτικών που η απόδοση δυνητικής υπόστασης για την έννοια του σημείου της ευθείας των πραγματικών αριθμών συσχετίζεται με τη διαδικασία της διχοτόμησης ενός ευθυγράμμου τμήματος. Μια τέτοια υπόσταση όπως αναφέρθηκε, απέδιδε και ο Αριστοτέλης για το σημείο. Με την έννοια αυτή παρέχεται και μια ερμηνεία για εκείνες τις περιπτώσεις εκπαιδευτικών που θεωρούν ότι η αναπαράσταση 0,3999... δεν εκφράζει έναν συγκεκριμένο αριθμό αλλά ένα αφηρημένο αντικείμενο χωρίς συγκεριμένη θέση στον άξονα. Αντίστοιχες θεωρήσεις για τον αφηρημένο χαρακτήρα άπειρων αθροισμάτων ανευρέθηκαν και σε προσεγγίσεις του Leibniz δείχνοντας ότι τέτοια χαρακτηριστικά είναι στη φύση της ίδιας της έννοιας των άπειρων αθροισμάτων και δεν είναι εύκολο να ανατραπούν μόνο με βάση τις θεσμικές γνώσεις που αποκτούν οι εκπαιδευτικοί στο πανεπιστήμιο.

Εμφανίστηκαν επίσης περιπτώσεις εκπαιδευτικών που αναφέρουν στις διδακτικές τους πρακτικές το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας χωρίς να δίνουν αρκετές εξηγήσεις για τους λόγους που επικαλούνται το συγκεκριμένο παράδοξο αλλά ούτε για τους τρόπους που σχεδιάζουν να το αξιοποιήσουν. Φαίνεται ότι αναγνωρίζουν σ' ένα πρώτο επίπεδο το συγκεκριμένο παράδοξο σχετίζεται με τη διαπραγμάτευση της σχέσης ενός άπειρου αθροίσματος αριθμών (π.χ. στη μορφή 0,3 + 0,09 + 0,009 + ...) με το «αποτέλεσμα» αυτού του αθροίσματος (αντίστοιχα 0,399... ή 0,4) αλλά δεν φαίνεται ότι έχουν επίγνωση αυτής της συσχέτισης ούτε προσπαθούν να την αναδείξουν.

Η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να εκφράσει στη διδακτική του πρακτική τη γνώση του για το εν δυνάμει και εν ενεργεία άπειρο, να διαχειριστεί διδακτικά το μετασχηματισμό μιας διαδικασίας σε ένα μαθηματικό αντικείμενο καθώς και το άθροισμα των άπειρων αριθμητικών σειρών αποτελεί μέρος της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης. Ο σκοπός μιας τέτοιας γνώσης δεν είναι απαραίτητο να διδαχθεί άμεσα στους μαθητές. Όμως, με βάση την ανάλυση της έρευνας, φαίνεται ότι αυτή η γνώση χαρακτηρίζει τη συλλογιστική του εκπαιδευτικού, η οποία ενεργοποιείται ανάλογα με την περίπτωση, με στόχο είτε την ερμηνεία των αντιλήψεων των μαθητών είτε την διδακτική διαπραγμάτευση των εννοιών, με επίγνωση του φιλοσοφικού τους υπόβαθρου και των γνωστικών μετασχηματισμών που επιτελούνται.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχοι της έρευνάς ήταν η μελέτη των αντιλήψεων και της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών όπως διαμορφώνονται σ' ένα διδακτικό πλαίσιο διαπραγμάτευσης Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Διαπιστώνεται ότι ένα μικρό σχετικά μέρος των εκπαιδευτικών της έρευνας προτείνει μαθηματικά ορθές διδακτικές προσεγγίσεις. Όμως οι περισσότερες από αυτές έχουν κυρίως καθαρά φορμαλιστικό χαρακτήρα αδυνατώντας να επικοινωνήσουν ή να υποστηρίξουν τις διαισθητικές ανησυχίες των μαθητών για τις σχετικές έννοιες. Επισημαίνονται στο σημείο αυτό οι ανησυχίες και οι προβληματισμοί των εκπαιδευτικών για την πειστικότητα των τυπικών μαθηματικών αποδείξεων για τους μαθητές. Επίσης, υπογραμμίζονται οι περιπτώσεις εκείνες που η ορθότητα των μαθηματικών αντιλήψεων δεν εγγυάται διδακτικές προσεγγίσεις χωρίς μαθηματικές παρερμηνείες. Το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι προκειμένου να υποστηρίξει διδακτικά το μαθηματικό περιεχόμενο καταφεύγει σε διαισθητικές, ασαφείς αλλά και λανθασμένες διδακτικές προσεγγίσεις. Ένα μικρό μόνο μέρος των εκπαιδευτικών καταφέρνει να συνδυάσει παραγωγικά τη μαθηματική ορθότητα και το φορμαλισμό με την υποστήριξη των διαισθητικών ανησυχιών των μαθητών. Τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν ότι το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών δυσκολεύεται να διαχειριστεί διδακτικά, τις τυπικές γνώσεις των Ανώτερων Μαθηματικών που απέκτησε στις πανεπιστημιακές σπουδές του.

Σημειώνεται επίσης ότι μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών αναπτύσσει λόγο για το ευρύτερο περιβάλλον των εννοιών που διαχειρίζεται διδακτικά. Έτσι, προκειμένου οι εκπαιδευτικοί να διαπραγματευτούν την υπόσταση του 0,3999... και τη σχέση του με το 0,4 σ' ένα διδακτικό πλαίσιο, αναφέρονται σε όρια, σε άπειρες σειρές σε νοητικά παράδοξα. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών είναι διαισθητικές, άτυπες και ασαφείς. Δεν λείπουν όμως και οι περιπτώσεις όπου ο λόγος των εκπαιδευτικών αποπνέει βαθιά επίγνωση των ζητημάτων που διαπραγματεύονται.

Διαπιστώνεται επίσης, ότι σε αρκετές περιπτώσεις, οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα, προσεγγίζουν τα σχετικά μαθηματικά ζητήματα παρουσιάζοντας παρόμοιες προβληματικές θεωρήσεις με μαθητές ή φοιτητές όπως αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Επιπλέον, στην έρευνα παρουσιάζονται αρκετές περιπτώσεις που οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών διολισθαίνουν σε αντίστοιχες προσεγγίσεις των μαθητών του σεναρίου. Λαμβάνεται υπόψη, ότι στο πλαίσιο της διδακτικής διαπραγμάτευσης, ακόμα και στο επίπεδο που αυτή αναπτύσσεται για τις ανάγκες τοποθέτησης σ' ένα διδακτικό σενάριο, αναδύεται μια τάση έντονης αλληλεπίδρασης με τους μαθητές, όπως διαπιστώσαμε και στην ανάλυσή. Η εστίαση είναι στα αυθεντικά νοήματα που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί για τις έννοιες κατά τη διδακτική διαπραγμάτευση και λιγότερο στις απομονωμένες ιδέες που έχουν για τα μαθηματικά αντικείμενα.

Μελετώντας τη γνώση εκπαιδευτικών που έχουν παρακολουθήσει με επιτυχία αρκετά μαθήματα Ανώτερων Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο δεν μπορούμε να αποδώσουμε τις προβληματικές προσεγγίσεις στην έλλειψη τυπικής μαθηματικής γώσης. Έτσι, θεωρούμε ότι συνεισφέρουμε στο πεδίο αναδεικνύοντας ως σημαντική πηγή διαμόρφωσης των προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών την εμπλοκή τους με μη τυπικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης.

Έτσι, περάσαμε στην διαπραγμάτευση του δεύτερου ερευνητικού στόχου, όπου διαπιστώνεται ότι η αλληλεπίδραση των πολλαπλών σημασιών ενός σημείου ή συμβόλου διαμορφώνει σημαντικά τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών για το θέμα. Επίσης, παρουσιάστηκαν ευρήματα που τεκμηριώνουν, ότι οι διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών καθορίζονται από τη φύση των εννοιών που διαπραγματεύονται όπως αυτή έχει διαμορφωθεί από την ιστορική τους εξέλιξη και δεν περιορίζεται στη σύγχρονη εκδοχή της, που συνήθως διδάσκεται στο πανεπιστήμιο ή στο σχολείο. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί δε διστάζουν να αξιοποιήσουν διδακτικά το πλούσιο φιλοσοφικό υπόβαθρο των εννοιών που διαπραγματεύονται ακόμα και όταν δεν έχουν πλήρη επίγνωσή του.

Στην έρευνα αυτή τεκμηριώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν επίγνωση των επιστημολογικών εμποδίων, των ιδιαίτερων σημειωτικών χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων καθώς και του οντολογικού και φιλοσοφικού υπόβαθρου των εννοιών που διαπραγματεύονται μπορούν να υποστηρίξουν πιο παραγωγικά τις σχετικές συζητήσεις με τους μαθητές, έχοντας συνειδητοποιήσει το πλαίσιο που διαμορφώνεται. Τους δίνεται επίσης η δυνατότητα να ερμηνεύουν με ευρύτητα και βάθος τις προσεγγίσεις των μαθητών και να αξιοποιήσουν λειτουργικά τις αναδυόμενες συνδέσεις μεταξύ εννοιών και αναπαραστάσεων. Αυτού του είδους η γνώση δεν είναι μια γνώση που λειτουργεί μόνο επικουρικά κατά τη διδακτική πρακτική. Αντίθετα, είναι μια γνώση που μπορεί να υποστηρίξει τον εκπαιδευτικό στη διδακτική του πρακτική. Επίσης, είναι μια γνώση που μπορεί να υποστηρίξει εννοιολογικά τις συνδέσεις που γίνονται κατά τη διδακτική διαπραγμάτευση από τον εκπαιδευτικό ή τους μαθητές.

Η γνώση αυτή συμβάλλει καθοριστικά στη διαμόρφωση της μαθηματικής συλλογιστικής των εκπαιδευτικών για τις ανάγκες της διδασκαλίας των Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών. Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δε μεταφέρουν στη διδακτική τους πρακτική αναλλοίωτες τις τυπικές γνώσεις που απέκτησαν στο πανεπιστήμιο με ένα στεγνό και άκαμπτο τρόπο. Αντίθετα, προσεγγίζουν τη διδακτική διαδικασία με έναν ζωντανό τρόπο, προσπαθώντας να καλύψουν τα κενά που υπάρχουν, ούτως ή άλλως στους ορισμούς των Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ένα σύνολο από σημειωτικά, οντολογικά, επιστημολογικά και φιλοσοφικά στοιχεία οριοθετεί τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών, η οποία ενεργοποιείται και υποστηρίζει τη διδακτική πράξη. Το σύνολο αυτό ξεπερνά το αυστηρά μαθηματικό πεδίο και μπορεί να συνδεθεί με αυτό που στη βιβλιογραφία αποκαλείται *ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου*. Με την έννοια αυτή, συνεισφέρουμε στη διαμόρφωση ενός πλαισίου ερμηνείας και υποστήριξης των εκπαιδευτικών για ζητήματα του ευρύτερου περιβάλλοντος των εννοιών τα οποία αναπόφευκτα αναπτύσσονται κατά τη διδακτική διαπραγμάτευση.

Αυτή η γνώση θεωρούμε ότι είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να ελέγχει αποτελεσματικότερα τη μαθηματική γνώση που βρίσκεται κάθε φορά υπό διαπραγμάτευση στην τάξη. Έτσι, η συζήτηση που αναπτύσσεται μπορεί να έχει περισσότερο συνειδητό χαρακτήρα, με σκοπό την αξιοποίησή της με επίγνωση στις διδακτικές πρακτικές. Αυτά τα χαρακτηριστικά της γνώσης που αναδείξαμε στην έρευνά μας θεωρούμε ότι μπορούν να αξιοποιηθούν σε προγράμματα επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν έννοιες των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθώς και στη διαμόρφωση σχετικών προγραμμάτων σπουδών.

Περιορισμοί της έρευνας

Η έρευνα έχει περιορισμούς που σχετίζονται με τα δεδομένα μας. Όπως έχουμε αναφέρει οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν γραπτά στις ερωτήσεις που βασίστηκαν σ' ένα διδακτικό σενάριο στο πλαίσιο μιας διαδικασίας αξιολόγησης για την εισαγωγή τους σ' ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών. Έτσι, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών θα ταυτίζονταν στην περίπτωση που διαπραγματεύονταν ένα σχετικό ζήτημα διδακτικά σε μια πραγματική σχολική τάξη. Όμως η ερευνητική μας εστίαση αφορά κυρίως τους εκπαιδευτικούς και έτσι επιδιώξαμε μια σχετική απομόνωσή τους από τους πολλαπλούς παράγοντες που επηρεάζουν μια πραγματική διδασκαλία.

Επίσης, λαμβάνουμε υπόψη ότι τα δεδομένα μας προέκυψαν με βάση τη διαπραγμάτευση των εκπαιδευτικών για τη φύση του 0,3999... και της σχέσης του με το 0,4. Αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματά μας δεν θεωρούμε ότι θα ήταν ίδια, στην περίπτωση που γινόταν διαπραγμάτευση άλλων παραδειγμάτων Ανώτερων Μαθηματικών εννοιών, που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Βέβαια στο σενάριο έχουμε μεριμνήσει να εμπλέκονται αρκετές έννοιες του διαφορικού λογισμού όπως το όριο, η άπειρη σειρά η έννοια της πυκνότητας, αλλά αναγνωρίζουμε ότι τα συγκεκριμένα παραδείγματα που επιλέξαμε έχουν τις ιδιαιτερότητές τους.

Επιπλέον, οι παράγοντες διαμόρφωσης της συλλογιστικής των εκπαιδευτικών που προέκυψαν από την διαπραγμάτευση του δεύτερου ερευνητικού στόχου εμφανίζονται να έχουν ένα γενικό χαρακτήρα. Θεωρούμε ότι αυτό συμβαίνει σ' ένα συλλογικό επίπεδο και με μια ολιστική προσέγγιση των ζητημάτων. Δηλαδή, δεν υποστηρίζουμε ότι η συλλογιστική του κάθε εκπαιδευτικού διαμορφώνεται από το σύνολο των παραγόντων που αναφέραμε για οποιοδήποτε ζήτημα των Ανώτερων Μαθηματικών διαπραγματεύεται την κάθε στιγμή. Με την έννοια αυτή η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της έρευνας μας σ' ένα πρόγραμμα επιμόρφωσης θεωρούμε ότι έχει νόημα σ' ένα πλαίσιο συζήτησης και όχι σε επίπεδο ατομικής αυτομόρφωσης.

Μελλοντική έρευνα

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας θα πρέπει να θεωρηθούν ως μια πρώτη προσπάθεια εστίασης στη γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με το ευρύτερο περιβάλλον μιας ομάδας συσχετιζόμενων εννοιών (όριο, άπειρη σειρά, περιοδικός δεκαδικός αριθμός) που διαπραγματεύονται και των αντανακλάσεων της γνώσης αυτής στη διδακτική πρακτική. Η μελέτη των αντιλήψεων και των διδακτικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών και για άλλα μαθηματικά ζητήματα σε σχέση με το ευρύτερο περιβάλλον τους, μπορεί να εμπλουτίσει τα συμπεράσματά μας και να ενισχύσει τις δυνατότητες αξιοποίησης της έρευνας στην επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών. Περαιτέρω έρευνα που βασίζεται σε δεδομένα από παρακολούθηση πραγματικών διδασκαλιών σε σχέση με το θέμα μας θα εμπλουτίσει τα αποτελέσματα μας φωτίζοντας τις διδακτικές αποφάσεις που λαμβάνει ο εκπαιδευτικός τη στιγμή που απαιτούνται στο πλαίσιο ενός ζωντανού μαθήματος. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και η διερεύνηση συζητήσεων ομάδων εκπαιδευτικών σχετικά το ευρύτερο μαθηματικό περιβάλλον των εννοιών που διαπραγματεύονται διδακτικά, ώστε να μελετηθούν οι αντιδράσεις τους σε ένα αλληλεπιδραστικό πλαίσιο διαπραγμάτευσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Οι αριθμοί και οι αναπαραστάσεις τους στα σχολικά εγχειρίδια

Στο παράρτημα Ι θα περιγράψουμε τον τρόπο που παρουσιάζονται οι αριθμοί και οι αναπαραστάσεις τους στα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια στη Ελλάδα. Θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στα ζητήματα που σχετίζονται με την έρευνά μας χωρίς να επιδιώκουμε μια πλήρη ανάλυση του ζητήματος. Παρουσιάζουμε τη μελέτη μας για τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού, Στ΄ Δημοτικού, Α΄ Γυμνασίου, Β΄ Γυμνασίου και τα αντίστοιχα βιβλία του δασκάλου (για το δημοτικό) και του καθηγητή (για το γυμνάσιο). Τα υπόλοιπα σχολικά εγχειρίδια δεν προσφέρουν κάτι παραπάνω για τα ζητήματα που μας ενδιαφέρουν. Όταν υπάρχει αναφορά στο σχολικό βιβλίο μιας τάξης θεωρείται το αντίστοιχο βιβλίο μαθηματικών του μαθητή. Αν υπάρχει αναφορά στο βιβλίο του καθηγητή ή του δασκάλου θα δηλώνεται.

Στην μελέτη αυτή δεν επιδιώκουμε να βρούμε λάθη ή αδυναμίες στα σχολικά εγχειρίδια χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτά δεν υπάρχουν. Προσπαθούμε να αναδείξουμε ζητήματα όπως αντιφάσεις, αδυναμίες ορισμών, πολλαπλές σημασίες συμβολισμών, αδυναμία εφαρμογής κανόνων τα οποία όμως είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποφευχθούν στο σχολικό πλαίσιο. Επίσης να σημειώσουμε ότι μετά την πρώτη κυκλοφορία των σχολικών εγχειριδίων αυτά έχουν διορθωθεί και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μελετήσαμε την κατασταλαγμένη μορφή τους. Ένα ερώτημα το οποίο προσπαθήσαμε να διευκρινίσουμε από τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών είναι ποιοι θεωρούνται δεκαδικοί αριθμοί στα σχολικά εγχειρίδια;

Μαθηματικά Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού για τους φυσικούς αριθμούς αναφέρεται εμφατικά ότι:

> Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99, ..., 1000, ... λέγονται φυσικοί αριθμοί. Κάθε φυσικός αριθμός, εκτός από το 0, σχηματίζεται από τον προηγούμενό του, με πρόσθεση του αριθμού 1. (σ.10)

Σε σχέση με το συγκεκριμένο απόσπασμα επισημαίνουμε τον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι τρεις τελείες («...») στο συμβολισμό του συνόλου των φυσικών αριθμών. Την πρώτη φορά που εμφανίζονται υποκαθιστούν τους φυσικούς αριθμούς από το 6 μέχρι και το 98, τη δεύτερη φορά τους φυσικούς αριθμούς από το 100 έως και το 999 και την τρίτη φορά αναφέρονται στους υπόλοιπους φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή τις δυο πρώτες φορές οι τρεις τελείες αναπαριστούν πεπερασμένο πλήθος αριθμών την τρίτη φορά αναπαριστούν άπειρο πλήθος αριθμών, χωρίς να γίνεται κάποια σχετική επισήμανση για το πλήθος των φυσικών αριθμών. Επίσης, επισημαίνουμε την αναφορά στη διαδοχικότητα των φυσικών αριθμών με τρόπο μάλιστα που δείχνει ότι αποτελεί συστατικό στοιχείο της συγκρότησής τους. Έτσι, προκύπτει αβίαστα ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει επόμενο και κάθε φυσικός αριθμός εκτός από το 0 έχει προηγούμενο. Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 2 για τους δεκαδικούς αριθμούς αναφέρεται ότι:

> Δεκαδικοί είναι οι αριθμοί που αποτελούνται από ένα ακέραιο και ένα δεκαδικό μέρος. Τα δυο μέρη χωρίζονται μεταξύ τους με την υποδιαστολή (,). Όπως οι φυσικοί έτσι και οι δεκαδικοί σχηματίζονται από μονάδες διαφόρων τάξεων στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος. Τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη προς τα δεξιά της. (σ. 12) .

Να σημειώσουμε ότι στο βιβλίο του δασκάλου της Στ΄ δημοτικού αναφέρεται ότι «πρέπει να τονίσουμε στους μαθητές, ότι οι δεκαδικοί αριθμοί δεν είναι ένα άλλο ξεχωριστό σύνολο αριθμών, αλλά ένας τρόπος με τον οποίο γράφονται οι ρητοί αριθμοί» (σ.23). Η συγκεκριμένη αναφορά είναι αρκετά σαφής σχετικά με το ποιοι είναι οι δεκαδικοί αριθμοί σε μαθηματικό επίπεδο αλλά υπάρχουν ανοικτά ζητήματα στο σχολικό πλαίσιο επειδή η συγκεκριμένη αναφορά δεν υπάρχει στο βιβλίο του μαθητή, οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί ποιοι είναι ρητοί αριθμοί και επίσης δεν έχουν αναφερθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα (μη μηδενικά) δεκαδικά ψηφία.

Στο Κεφάλαιο 3 που διαπραγματεύεται την «μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα» αναφέρονται τα εξής:

> Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι δυνατό να γραφούν ως δεκαδικά κλάσματα και τα δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικοί αριθμοί. Για να γράψουμε ένα δεκαδικό αριθμό ως κλάσμα, γράφουμε όλο τον αριθμό χωρίς την υποδιαστολή, στη θέση του αριθμητή και στη θέση του παρονομαστή γράφουμε τον αριθμό 1 με τόσα μηδενικά όσα ήταν τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού. (σ. 14).

Τα παραδείγματα που δίνονται στο συγκεκριμένο κεφάλαιο έχουν αποκλειστικά περιπτώσεις κλασμάτων με παρονομαστή δυνάμεις του 10 και δεν υπάρχουν περιπτώσεις κλασμάτων που είναι ισοδύναμα με δεκαδικά κλάσματα (π.χ. 4/5, 1/8 κ.ά.). Επίσης, αφήνεται ένα ενδεχόμενο παρανόησης να θεωρηθεί ότι όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί μετατρέπονται σε δεκαδικά κλάσματα ή ότι δεκαδικοί αριθμοί είναι αυτοί που μετατρέπονται σε δεκαδικά κλάσματα.

Στο βιβλίο του δασκάλου αποσαφηνίζεται ότι : «Ο κανόνας δεν ισχύει για τους περιοδικούς αριθμούς π.χ. 0,333333333... (για παράδειγμα το 1/3 που παίρνουμε από το κομπιουτεράκι)» (σ. 25). Να σημειώσουμε εδώ ότι στο κομπιουτεράκι το αποτέλεσμα της διαίρεσης 1:3 εμφανίζεται στη μορφή «0,333333» και όχι στη μορφή «0,333333333...». Με αφορμή αυτή την αναφορά να σημειώσουμε ότι στο κομπιουτεράκι το αποτέλεσμα κάθε διαίρεσης εμφανίζεται με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.

Το κεφάλαιο 4 διαπραγματεύεται την «σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών». Εκεί αναφέρεται ότι «δυο αριθμοί (φυσικοί ή δεκαδικοί) μπορούν πάντα να συγκριθούν μεταξύ τους» (σ. 16). Στο σημείο αυτό δεν αναφέρεται κάποιος κανόνας σύγκρισης. Στο βιβλίο όμως της Ε' τάξης, στο κεφάλαιο 9 (σελ. 31) έχει αναφερθεί ότι: «Όταν συγκρίνουμε αριθμούς με δεκαδικά ψηφία, ξεκινάμε να συγκρίνουμε τα ψηφία που βρίσκονται από αριστερά, στις ακριβώς αντίστοιχες θέσεις». Ο συγκεκριμένος κανόνας όμως μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο στις περιπτώσεις που οι δεκαδικοί αριθμοί έχουν πεπερασμένα (μη μηδενικά) δεκαδικά ψηφία. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί που έχουν εμφανισθεί μέχρι το συγκεκριμένο σημείο στο σχολικό βιβλίο. Αν ο συγκεκριμένος κανόνας εφαρμοσθεί για αριθμούς όπως ο 0,3999... θα προκύψει το λανθασμένο αποτέλεσμα ότι: 0,3999... < 0,4.

Στο ίδιο κεφάλαιο της Ε΄ δημοτικού, ζητείται η εύρεση δεκαδικού αριθμού ή δεκαδικών αριθμών μεταξύ δοθέντων δεκαδικών, μια διαδικασία που αναπτύσσει στους μαθητές την έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Στο κεφάλαιο 4 του βιβλίου της Στ΄ δημοτικού στο πλαίσιο μιας εφαρμογής ζητείται να βρεθεί ο αριθμός που αντιστοιχεί στην αριθμογραμμή στο μέσο του τμήματος ΑΒ, όπου το Α αντιστοιχεί στο 2 και το Β αντιστοιχεί στο 6. Η εφαρμογή επιλύεται με μέθοδο που μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη της έννοιας της πυκνότητας (προστίθεται στο μικρότερο αριθμό το μισό της απόστασής τους) αλλά το συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα λόγω της απλότητάς του ενδεχομένως να αντιμετωπιστεί εμπειρικά από τους μαθητές και να μην αναδειχθεί αξία της μεθόδου.

Στο κεφάλαιο 19 του βιβλίου της Στ΄ δημοτικού δηλώνεται ότι: «Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός ‘όλου’ ονομάζεται κλάσμα. Το κλάσμα σχηματίζεται από δυο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\dfrac{αριθμητής}{παρονομαστής}$ » (σ. 46)

Αρχικά να επισημάνουμε η θεώρηση του κλάσματος ως «μέρος ενός όλου» είναι μια σχέση δυο μεγεθών ή όπως λέγεται ο λόγος δυο μεγεθών. Όμως ενώ το κλάσμα δυο φυσικών αριθμών (με μη μηδενικό παρονομαστή) είναι ένας ρητός αριθμός, ο λόγος δυο μεγεθών δεν εκφράζεται πάντα από κάποιο ρητό αριθμό. Να σημειώσουμε επίσης ότι ο συμβολισμός του λόγου δυο μεγεθών είναι αυτός του κλάσματος είτε αυτός είναι ρητός αριθμός είτε όχι. Βεβαίως η συγκεκριμένη παρατήρηση δεν σχετίζεται με την συγκεκριμένη τάξη στην οποία οι μαθητές δεν έχουν αντιμετωπίσει τις σχετικές έννοιες αλλά συχνά οι τρόποι που χρησιμοποιούνται τα σύμβολα και οι έννοιες αρχικά επεκτείνονται και σε ανώτερο επίπεδο, κυρίως όταν οι διαφορές είναι λεπτές και οι σχετικές επισημάνσεις ξεπερνιούνται.

Επίσης να σημειώσουμε με αφορμή το συμβολισμό «$\dfrac{αριθμητής}{παρονομαστής}$» τον τρόπο που χρησιμοποιούνται μαθηματικά σύμβολα όπως αυτό του κλάσματος στην προσπάθεια να εξηγηθούν κάποια ζητήματα στους μαθητές. Παρατηρούμε να αναγράφονται λέξεις ολογράφως στους όρους τους κλάσματος που δείχνει ότι αρκετές φορές τα μαθηματικά σύμβολα χρησιμοποιούνται με ένα διευρυμένο τρόπο και δεν περιορίζονται στο αυστηρό πλαίσιο της μαθηματικής τυπολογίας.

Θα επισημάνουμε επίσης την ανακολουθία που δημιουργείται από τη αρχική θεώρηση του κλάσματος ως «μέρος ενός όλου» με την μετέπειτα αναφορά σύμφωνα με την οποία: «Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1» (σ. 46).

Το 20ο κεφάλαιο του βιβλίου της Στ΄ δημοτικού έχει τίτλο «Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης» (σ. 47). Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να βρουν τρόπο να βοηθήσουν έναν πατέρα να μοιράσει (το εξίσου δεν αναφέρεται) 10 σοκολάτες σε τρία παιδιά. Όπως δηλώνεται στο στο βιβλίο του δασκάλου «Μέσα από την αντιμετώπιση της δραστηριότητας αυτής τα παιδιά θα αντιληφθούν ότι μπορούμε να εκφράσουμε το πηλίκο μίας διαίρεσης ως κλάσμα. Με τον τρόπο αυτό καταφέρνουμε να εκφράσουμε με ακρίβεια το πηλίκο, στην περίπτωση κατά την οποία η διαίρεση είναι ατελής (όπως στη δραστηριότητα 10:3 = 3,33333...» (σ. 58). Κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας οι μαθητές καθοδηγούνται στο να αντιληφθούν ότι το πηλίκο της διαίρεσης 10:3, το κλάσμα 10/3 και ο αριθμός 3,333... είναι διαφορετικές μορφές του ίδιου αντικειμένου. Παραμένει όμως ένα πρόβλημα οντολογικής φύσης. Ενώ είναι νοηματικά κατανοητό το ότι αν μοιράσουμε κάθε σοκολάτα σε τρία ίσα μέρη το κάθε παιδί τελικά θα πάρει 10 φορές το 1/3 της κάθε σοκολάτας φαίνεται χωρίς νόημα να λέμε ότι κάθε παιδί θα πάρει 3,333... σοκολάτες. Για να το υλοποιήσουμε αυτή τη ποσότητα θα πρέπει αρχικά κάθε παιδί να πάρει 3 σοκολάτες και στη συνέχεια να χωρίσουμε τη σοκολάτα που έμεινε σε 10, 100, 1000, ... ίσα μέρη και κάθε παιδί να παίρνει 3 από τα 10, 3 από τα 100, 3 από τα 1000 και αυτό να συνεχίζεται απεριόριστα.

Επίσης, η ισότητα 10/3 = 3,333... φαίνεται να λειτουργεί μονόδρομα. Δηλαδή από την διαδικασία – πράξη της διαίρεσης 10:3 προκύπτει 3,333.... Όμως προκύπτει το ερώτημα από ποια διαδικασία μπορεί να προκύψει το κλάσμα που αντιστοιχεί στο 3,333... ; Να επισημάνουμε εδώ ότι οι παρατηρήσεις δεν αποτελούν κριτική για κάποια έλλειψη του σχολικού βιβλίου. Βασικά σημειώνουν μια νοηματική ασυμφωνία μεταξύ των δυο αναπαραστάσεων καθώς και μια απουσία νοήματος της μορφής 3,333... σ' ένα ρεαλιστικό πλαίσιο.

Στη δεύτερη δραστηριότητα του ίδιου κεφαλαίου του βιβλίου της Στ΄ δημοτικού ζητείται από τους μαθητές να τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή η οποία έχει το 0, το 1 και τη μεταξύ τους απόσταση χωρισμένη σε 100 ίσα μέρη, κάποια κλάσματα μεταξύ των οποίων και το κλάσμα 10/3. Με δεδομένο ότι οι μαθητές δεν γνωρίζουν να χωρίζουν κατασκευαστικά ένα τμήμα σε τρία ίσα μέρη αυτό που αναμένεται είναι, να τοποθετήσουν το 10/3 στην αριθμογραμμή κατά προσέγγιση. Άλλωστε αυτό δηλώνεται και στο βιβλίο του δασκάλου:

> Για να βρούμε σε ποιο σημείο στην αριθμογραμμή αντιστοιχεί ο αριθμός που εκφράζεται με ένα κλάσμα, ένας τρόπος είναι να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και να το τοποθετήσουμε στο ακριβές σημείο της αριθμογραμμής. Όταν η διαίρεση είναι ατελής στρογγυλοποιούμε στα δέκατα, στα εκατοστά ή στα χιλιοστά, ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε, και τοποθετούμε το σημείο στην αριθμογραμμή (σ. 58).

Έτσι αν ο 3,333... στρογγυλοποιηθεί στις μονάδες θα τον τοποθετήσουμε στο σημείο που αντιστοιχεί το 3, αν στρογγυλοποιηθεί στα δέκατα θα τον τοποθετήσουμε στο σημείο που αντιστοιχεί το 3,3, αν στρογγυλοποιηθεί στα εκατοστά θα τοποθετηθεί στο σημείο που αντιστοιχεί το 3,33 κ.ο.κ. Με βάση τα παραπάνω είναι πιθανό να προκληθεί στους μαθητές η εντύπωση είτε ότι δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε με απόλυτη ακρίβεια τον 3,333... στην αριθμογραμμή είτε ότι ο αριθμός 3,333... αντιστοιχεί σε ένα «κινητό σημείο» στην αριθμογραμμή. Επίσης, μπορεί να δημιουργηθεί η εντύπωση ότι δυο διαφορετικοί αριθμοί όπως για παράδειγμα ο 3,333... και ο 3,33 αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής, οπότε η αντιστοιχία δεν είναι 1-1.

Σημειώνεται επίσης στο βιβλίο του δασκάλου ότι «δεν γράφονται όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί ως κλάσματα με παρανομαστή δυνάμεις του 10. Για παράδειγμα το 1/3 είναι ο δεκαδικός αριθμός 0,333.... που δεν γράφεται ως κλάσμα με παρονομαστή δυνάμεις του 10.» (σ. 58). Επισημαίνουμε εδώ ότι ο 0,333... χαρακτηρίζεται δεκαδικός αριθμός.

Στο βιβλίο του μαθητή της Στ΄ δημοτικού σημειώνεται εμφατικά ότι:

> Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή του με τον παρονομαστή του. Αν κάνουμε τη διαίρεση αυτή, μπορούμε να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό (ή σε φυσικό αν η διαίρεση είναι τέλεια). Αν η διαίρεση δεν μας δίνει ακριβές πηλίκο σταματάμε εκεί που θέλουμε και έχουμε πηλίκο με προσέγγιση στα δέκατα, στα εκατοστά, στα χιλιοστά,... Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται και ως κλάσματα. (σ. 48).

Τα παραπάνω είναι δυνατό να προκαλέσουν παρερμηνείες. Συγκεκριμενα, ποιο είναι το νόημα της πρότασης «ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης»;. Δηλαδή μπορεί το πηλίκο μιας διαίρεσης μπορεί να μην είναι ακριβές; Φαίνεται να θεωρείται ότι ένα πηλίκο θεωρείται ακριβές αν έχει πεπερασμένα ή «λίγα» δεκαδικά ψηφία.

Το παράδειγμα που αναφέρεται για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι: «Το 3/7 είναι το πηλίκο της διαίρεσης 3:7.» Και στη συνέχεια: «3:7 = 0,4285714... Το πηλίκο της διαίρεσης είναι 0,42 με προσέγγιση στα εκατοστά ή 0,428 με προσέγγιση στα χιλιοστά». Σημειώνουμε εδώ τον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι τρεις τελείες στον συμβολισμό 0,4285714... Ο αριθμός 3/7 έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία με περίοδο 428571 και επειδή το μήκος της περιόδου είναι σχετικά μεγάλο δεν φαίνεται ότι ο αριθμός είναι περιοδικός. Έτσι, αφήνεται το ενδεχόμενο να θεωρηθεί ότι υπάρχουν κλάσματα που η δεκαδική τους μορφή έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά.

Το κεφάλαιο 30 διαπραγματεύεται το λόγο μεγεθών και αναφέρεται ότι: « Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δυο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται λόγος. Το κλάσμα αυτό έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο» (σ. 76). Στα παραδείγματα του κεφαλαίου εμφανίζονται λόγοι μόνο σύμμετρων μεγεθών παρόλο που στο βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού αναφέρεται ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του. Συγκεκριμένα, σημειώνεται ότι:

> Από τα αρχαία χρόνια ο Αρχιμήδης παρατήρησε ότι, αν διαιρέσουμε το μήκος οποιουδήποτε κύκλου με τη διάμετρό του, το πηλίκο είναι **3,14**, τον οποίο συμβολίζουμε με το γράμμα **π**. Ο αριθμός αυτός έχει πολλά δεκαδικά ψηφία, αλλά συνήθως χρησιμοποιούμε τα δυο πρώτα μόνο. (σ. 137)

Η παραπάνω διατύπωση αφήνει το ενδεχόμενο οι μαθητές να θεωρήσουν ότι με το γράμμα π συμβολίζουμε τον αριθμό 3,14 και όχι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του μήκους οποιουδήποτε κύκλου προς τη διάμετρό του. Επίσης, είναι αδόκιμη η έκφραση «Ο αριθμός αυτός έχει πολλά δεκαδικά ψηφία» όταν αναφέρεται στον αριθμό 3,14.

Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

Στο βιβλίο των μαθηματικών της Α΄ γυμνασίου στην εφαρμογή 1 της σελίδας 58 ζητείται να γραφούν κλάσματα όπως το 50/8 και το 520/67 ως δεκαδικοί αριθμοί. Ο αριθμός 50/8 στη δεκαδική του μορφή είναι 0,625, δηλαδή έχει πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία (3) ενώ ο 520/67 στη δεκαδική του μορφή είναι 7,76119... και δεν φαίνεται ότι είναι περιοδικός επειδή έχει «πολλά» ψηφία η περίοδός του. Επίσης δεν είναι σαφές αν οι τρεις τελείες στον αριθμό 7,76119... παριστάνουν άπειρα δεκαδικά ψηφία ή πολλά πεπερασμένα ψηφία. Να σημειώσουμε επίσης ότι αριθμοί όπως ο 7,76119... αναφέρονται δεκαδικοί αριθμοί παρόλο που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Να σημειώσουμε επίσης ότι και στο βιβλίο της της Ε΄ και της Στ΄ δημοτικού καθώς και στο βιβλίο της Α΄ γυμνασίου οι δεκαδικοί αριθμοί εισάγονται λόγω της ανεπάρκειας των φυσικών αριθμών να εκφράσουν με ακρίβεια τα αποτελέσματα κάποιων μετρήσεων. Με την έννοια αυτή αναμένεται δεκαδικοί αριθμοί να θεωρούνται αυτοί που έχουν πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία. Όμως και στο βιβλίο της Στ΄ δημοτικού και σε αυτό της Α΄ γυμνασίου, αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία αναφέρονται ως δεκαδικοί αριθμοί. Βασικά αυτό γίνεται μέσω της διαδικασίας μετατροπής των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς. Έτσι, φαίνεται ότι το περιεχόμενο της έννοιας «δεκαδικός αριθμός» καθορίζεται κυρίως από αυτό που ικανοποιεί την γενική μαθηματική πρόταση «κάθε ρητός αριθμός γράφεται και σαν δεκαδικός αριθμός» και λιγότερο από το νόημα που έχει αυτός στο πλαίσιο ενός ρεαλιστικού προβλήματος μέτρησης. Έτσι ενώ οι δεκαδικοί αριθμοί εισάγονται προκειμένου να εκφράσουν τα αποτελέσματα μετρήσεων με ακρίβεια στη συνέχεια πρέπει να ικανοποιήσουν τη μαθηματική απαίτηση να υπάρχει δεκαδική μορφή για κάθε κλάσμα φυσικών (με μη μηδενικό παρονομαστή).

Η παράγραφος Α.3.2. διαπραγματεύεται τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα αναφέρεται:

> Η *πρόσθεση* και η *αφαίρεση* δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως στους φυσικούς αριθμούς. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης τοποθετώντας τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη.

Η συγκεκριμένη διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο για τις περιπτώσεις δεκαδικών με πεπερασμένα (μη μηδενικά) δεκαδικά ψηφία επειδή είναι απαραίτητη η ύπαρξη τελευταίου ψηφίου. Για παράδειγμα, πως θα εφαρμοσθεί η παραπάνω διαδικασία στην πρόσθεση 1,666... + 1,666... ; Ο Spivak (2008) μάλιστα εκφράζει αυτή την ανησυχία όταν σκιαγραφεί «μια κατασκευή των πραγματικών αριθμών του μαθητή λυκείου» όπως την ονομάζει, ίσως επειδή βασίζεται στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, αναφέρει:

> Ορίζουμε ως πραγματικό αριθμό ένας ζεύγος (a, $\{b_n\}$), όπου a είναι ένας ακέραιος και $\{b_n\}$ μια ακολουθία από τους φυσικούς αριθμούς από 0 ως 9, με τον όρο ότι η ακολουθία δεν είναι τελικά 9. Διαισθητικά, αυτό το ζεύγος παριστάνει τον $a+\sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$. Με αυτό τον ορισμό, ο πραγματικός αριθμός είναι ένα πολύ συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά οι δυσκολίες που συναντάμε να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό είναι φοβερές (πως προσθέτετε δεκαδικούς με άπειρα ψηφία χωρίς να ανησυχείτε για το ότι μεταφέρετε δεκαδικά ψηφία επ' άπειρον;). (σ. 555).

Δηλαδή, οι δυσκολίες που διαπιστώνει ο Spivak (2008) φαίνεται ότι συχνά σε σχολικό επίπεδο ξεπερνιούνται χωρίς ιδιαίτερες επισημάνσεις.

Στην παράγραφο Α.7.6. έχουμε την διαίρεση ρητών αριθμών. Εκεί αναφέρεται ότι το «πηλίκο της διαίρεσης α:β ή α/β λέγεται λόγος του α προς το β και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης βx =α» (σ. 133).

Να σημειώσουμε εδώ ότι η κλασματική μορφή α/β όταν α, β ρητοί δεν αναφέρεται ως κλάσμα αλλά ως λόγος. Υπενθυμίζουμε ότι τον όρο κλάσμα το βιβλίο τον είχε ορίσει ως το πηλίκο φυσικών.

Στη συνέχεια αναφέρεται ότι: «η διαίρεση α/β μπορεί να γραφεί και $\alpha\cdot 1/\beta$, επομένως για να διαιρέσουμε δυο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη» (σ. 133).

Να επισημάνουμε επίσης ότι στις δυο προηγούμενες εκφράσεις, έχουμε στην πρώτη «το πηλίκο της διαίρεσης α/β» και στην άλλη έχουμε «η διαίρεση α/β». Δηλαδή χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο (κλασματική μορφή) τόσο για την πράξη (διαίρεση) όσο και για το αποτέλεσμά της (πηλίκο).

Η παράγραφος Α.7.7 του σχολικού μαθηματικών της Α΄ γυμνασίου διαπραγματεύεται τη δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών. Εκεί αναφέρεται ότι:

> Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω [44,44..., 2,295454...] τους ονομάζουμε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς. [...]. Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού και συμβολίζεται $\frac{5}{3}=1,\overline{6}$ και $\frac{1000000}{7}=142857,\overline{142857}$ (σ. 135)

Στο απόσπασμα αυτό φαίνεται ότι δεκαδικοί αριθμοί θεωρούνται αυτοί που έχουν πεπερασμένα (μη μηδενικά) δεκαδικά ψηφία ενώ αυτοί που έχουν άπειρα περιοδικά επαναλαμβανόμενα λέγονται περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί και προφανώς δεν μπορεί να θεωρούνται υποσύνολο των δεκαδικών αριθμών.

Επίσης στην ίδια παράγραφο περιγράφεται μια διαδικασία μετατροπής των «περιοδικών δεκαδικών αριθμών» στην ισοδύναμη κλασματική τους μορφή. Συγκεκριμένα, αναφέρεται:

Θέτουμε $x = 0,\overline{2}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$x = 0,222...$$

$$10x = 2,222...$$

$$10x = 2 + 0,222...$$

$$9x + x = 2 + x$$

$$9x = 2$$

$x = \dfrac{2}{9}$ Δηλαδή: $0,\overline{2} = \dfrac{2}{9}$

Στη συγκεκριμένη απόδειξη χρησιμοποιείται ο κανόνας που αναφέρεται στο βιβλίο της Ε΄ δημοτικού σύμφωνα με τον οποίο «Για να πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000 κτλ., μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αντίστοιχα 1, 2, 3 κτλ. θέσεις δεξιά» (σ. 37). Όμως στο συγκεκριμένο βιβλίο οι δεκαδικοί αριθμοί που αναφέρονται έχουν όλοι πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία. Πως η ισχύς του κανόνα επεκτείνεται και στην περίπτωση που τα δεκαδικά ψηφία είναι άπειρα; Βέβαια η ισχύς του κανόνα όταν τα ψηφία είναι πεπερασμένα είναι εύκολο να εξηγηθεί. Για παράδειγμα αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 1,25 με το 10 έχουμε $10 \cdot 1,25 = 10 \cdot \dfrac{125}{100} = \dfrac{125}{10} = 12,5$ δηλαδή η υποδιαστολή μεταφέρεται μια θέση δεξιά. Όμως δεν μπορούμε να κάνουμε την αντίστοιχη διαδικασία στην περίπτωση του 0,222... επειδή αυτός δεν γράφεται ως δεκαδικό κλάσμα. Ας κάνουμε όμως μια ακόμα προσπάθεια να εξηγήσουμε μαθηματικά την ισχύ του κανόνα στην περίπτωση του 0,222... Αν θεωρήσουμε ότι $0,222... = \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{100} + \dfrac{2}{1000} + ...$ τότε πολλαπλασιάζοντας το 0,222... με το 10 θα έχουμε:

$$10 \cdot \left(\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + ... \right) =$$

$2 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{100} + ... = 2 + 0,2 + 0,02 + ... = 2,222...$ Δηλαδή η υποδιαστολή μεταφέρεται μια θέση δεξιά.

Όμως και πάλι εγείρονται κάποιοι προβληματισμοί. Με ποιο μαθηματικό υπόβαθρο πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με ένα άπειρο άθροισμα και τι σημαίνει αυτό το άπειρο άθροισμα που εμφανίστηκε;

Ουσιαστικά κατά τις προηγούμενες διαδικασίες υπονοούνται προϋποθέσεις οι οποίες δεν είναι εξασφαλισμένες. Παρόμοιοι προβληματισμοί έχουν εντοπιστεί και ιστορικά από τον Niels Henrik Abel (1802-1829) τους οποίους ο Spivak (2008) στο κλασικό εγχειρίδιο του απειροστικού λογισμού αναδεικνύει στην προμετωπίδα του 4ου μέρους του που έχει τίτλο «Ακολουθίες και Σειρές» αναφέροντας ότι:

> Μια από τις πιο ξεχωριστές σειρές στην αλγεβρική ανάλυση είναι η ακόλουθη: $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1}x + \dfrac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + ...$. Όταν ο m είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, το άθροισμα της σειράς που είναι πεπερασμένο, μπορεί να εκφραστεί, όπως είναι γνωστό,

από το $(1+x)^m$. Όταν ο *m* δεν είναι ακέραιος, η σειρά συνεχίζεται επ' άπειρον, και συγκλίνει ή αποκλίνει ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν οι ποσότητες *m* και *x* . Σ' αυτή την περίπτωση, γράφουμε την ίδια ισότητα. […] Υποτίθεται ότι η αριθμητική ισότητα θα ισχύει όποτε η σειρά συγκλίνει, αλλά αυτό δεν έχει ως τώρα αποδειχθεί. Niels Henrik Abel. (στο Spivak 2008, p. 372)

Χωρίς την εξασφάλιση της προϋπόθεσης της σύγκλισης της σειράς ο συλλογισμός της «απόδειξης» που αναφέρει το σχολικό εγχειρίδιο εμφανίζεται ουσιαστικά σαν να πρόκειται για ένα μηχανικό χειρισμό συμβόλων. Αλλά τέτοιοι χειρισμοί είναι γνωστό ότι έγιναν στην ιστορική εξέλιξη των δυναμοσειρών από εξαίρετους μαθηματικούς.

Για παράδειγμα, αντίστοιχες διαδικασίες αν τις ακολουθήσουμε για την λεγόμενη σειρά του Guido Grandi (1671-1742): 1-1+1-1+... θα οδηγηθούμε σε παράδοξα αποτελέσματα. Αν υποθέσουμε ότι S = 1-1+1-1+... τότε χρησιμοποιώντας κάπως μηχανικά τα σύμβολα θα μπορούσαμε να πούμε ότι S= (1-1)+(1-1)+... = 0 ή S= 1-(1-1+1-1+...) = 1-0=1 ή S= 1-(1-1+1-1+...) = 1-S οπότε 2S=1 ή S=1/2. O Gandi στο βιβλίο του Quadratura circula et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhibita (1703) υιοθετεί το τρίτο αποτέλεσμα βάζοντας στο δυωνυμικό ανάπτυγμα που προαναφέραμε m = - 1 και x =1. Το ίδιο αποτέλεσμα υιοθετεί και ο Leibniz σ' ένα γράμμα του προς τον Christian Wolf που δημοσιεύθηκε το 1713, με το σκεπτικό ότι η απάντηση ½ είναι ο μέσος όρος των δυο άλλων αποτελεσμάτων 0 και 1. Σε κάθε περίπτωση αντίστοιχες διαδικασίες σε διδακτικό πλαίσιο φαίνονται σαν τρυκ του καθηγητή ή του σχολικού εγχειριδίου και οι μαθητές δεν έχουν πρόσβαση στα κριτήρια εγκυρότητάς τους.

Στην ίδια παράγραφο Α. 7.7 του βιβλίου της Α΄ γυμνασίου ζητείται σε άσκηση από τους μαθητές μεταξύ άλλων να βρουν την κλασματική μορφή του αριθμού $15,3\overline{99}$ και μια άλλη δεκαδική μορφή των $2,\overline{9}$ και $7,6\overline{9}$. Δηλαδή εμφανίζονται παραδείγματα αριθμών με δυο δεκαδικές μορφές. Σύμφωνα με την ορολογία του βιβλίου ο $7,6\overline{9}$ θεωρείται περιοδικός δεκαδικός αριθμός και ο ίσος με αυτόν 7,7 θεωρείται δεκαδικός αριθμός. $7,6\overline{9}$.

Στην ίδια παράγραφο Α.7.7. προτείνεται στους μαθητές ως δραστηριότητα για το σπίτι να εξηγήσουν το παράδοξο του Ζήνωνα. Συγκεκριμένα, αναφέρεται:

> Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ' αυτόν. Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο. (σ. 136)

Στο βιβλίο του καθηγητή για η συγκεκριμένη δραστηριότητα αναφέρεται ότι:

> ... έχει στόχο να δείξει ότι με το παράδοξο του Ζήνωνα μπορούμε να φτάσουμε στην περιοδική δεκαδική μορφή $1,\overline{1}$ του κλασματικού ρητού αριθμού $1\frac{1}{9}$ που είναι το αποτέλεσμα του υπολογισμού της απόστασης S που πρέπει να διανύσει ο Αχιλλέας μέχρι να φθάσει τη χελώνα που είναι $1+0,1+0,01+0,001+...=1,111...=1,\overline{1}$ (σ. 72)

Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα εμφανίζεται στο σχολικό πρόγραμμα ένας αριθμός να είναι ίσος με ένα άπειρο άθροισμα θετικών αριθμών χωρίς να δίνεται κάποια ιδιαίτερη επεξήγηση. Επίσης δεν δίνεται κάποια εξήγηση για το λόγο για τον οποίο ο ισχυρισμός του Ζήνωνα συνιστά κάποιο παράδοξο.

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

Μέχρι και το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου της Β΄ γυμνασίου διαπραγματεύονται οι ρητοί αριθμοί. Στην παράγραφο 2.1 δίνεται ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας.

> Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$. (σ. 41)

Όμως μπορεί να αναρωτηθεί κάποιος μαθητής. Αυτοί οι νέοι αριθμοί $\sqrt{\alpha}$ είναι όπως οι αριθμοί που ξέραμε μέχρι τώρα; Είναι δηλαδή ρητοί αριθμοί; Από όλα τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στη συγκεκριμένη παράγραφο η απάντηση φαίνεται να είναι καταφατική.

Ένα άλλο ζήτημα που μπορεί να τεθεί εδώ είναι κατά πόσο είμαστε βέβαιοι ότι αριθμοί όπως ο $\sqrt{2}$ με την έννοια που ορίστηκαν παραπάνω υπάρχουν. Η απόδειξη για την απόδειξη για την ύπαρξη του $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γίνει με βάση τις ιδιότητες των αριθμών που διδάσκονται οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην συγκεκριμένη απόδειξη έχει ουσιαστικό ρόλο η ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών στην οποία θα αναφερθούμε παρακάτω.

Όμως στην παράγραφο 2.2 που διαπραγματεύεται τους Άρρητους και τους Πραγματικούς αριθμούς αναφέρεται ότι: «Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, δηλαδή δεν είναι ρητός. Γι' αυτό λέγεται άρρητος.» (σ. 45). Στη συνέχεια εμφατικά και εν είδη ορισμού αναφέρεται ότι: «Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$ ονομάζεται άρρητος αριθμός».

Όμως για να οριστεί ένα σύνολο ως συμπληρωματικό ενός άλλου, πρέπει να είναι ορισμένο κάποιο σύνολο αναφοράς, γιατί διαφορετικά δημιουργούνται παρανοήσεις. Για παράδειγμα θεωρούμε η φανταστική μονάδα i για την οποίο ισχύει ότι $i^2 = -1$ δεν είναι ούτε ρητός ούτε άρρητος αριθμός.

Ως συνέπεια της πρότασης ότι άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί προκύπτει ότι: «... κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός» (σ. 45).

Όμως στο βιβλίο του εκπαιδευτικού σε ένα προτεινόμενο φύλλο εργασίας για την συγκεκριμένη ενότητα που διαπραγματεύεται τις διαδοχικές προσεγγίσεις των άρρητων αριθμών και συγκεκριμένα του $\sqrt{7}$ στο τέλος αναφέρεται:

> ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: (*Συνεχίζοντας επ' άπειρον την παραπάνω διαδικασία)*
>
> Α. Δεν υπάρχει δεκαδικός αριθμός x (με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων) τέτοιος ώστε $x^2 = 7$. Δηλαδή, ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι .... αριθμός.
>
> Β. Οι άρρητοι αριθμοί είναι δεκαδικοί αριθμοί με .... δεκαδικά ψηφία τα οποία όμως δεν είναι .... (σ. 29)

Στο πρώτο συμπέρασμα αναμένεται από τους μαθητές να συμπληρώσουν το κενό με τη λέξη άρρητος. Όμως αυτό το συμπέρασμα δεν μπορεί να προκύψει από την εύρεση κάποιων ρητών προσεγγίσεών του $\sqrt{7}$. Ότι οι ρητές προσεγγίσεις είναι άπειρες και ότι δεν υπάρχουν περιοδικά ψηφία στη δεκαδική του μορφή δεν μπορεί να προκύψει από την προτεινόμενη διαδικασία.

Επίσης, στην παράγραφο 3.3 του ίδιου βιβλίου που διαπραγματεύεται το μήκος του κύκλου αφού έχει ορίσει τον αριθμό π ως το πηλίκο του μήκος του κύκλου προς τη διάμετρό του στη συνέχεια αναφέρει:

> Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι: π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971... (σ.187)

Δηλαδή, εδώ φαίνεται ότι οι άρρητοι έχουν δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά. Η έκφραση που χρησιμοποιείται «άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία» μπορεί να δημιουργήσει την εντύπωση ότι τα δεκαδικά ψηφία προκύπτουν τυχαία ενώ αυτό που ισχύει είναι ότι δεν είναι περιοδικά επαναλαμβανόμενα. Να σημειώσουμε επίσης ότι εδώ οι τρείς τελείες χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά. Να προσθέσουμε στο σημείο αυτό ότι στο βιβλίο του εκπαιδευτικού προτείνεται οι μαθητές να βρουν αν ο δεκαδικός αριθμός 7,07007000700007... είναι ρητός ή άρρητος (σ. 25). Δηλαδή, εδώ οι τρείς τελείες παριστάνουν άπειρα δεκαδικά ψηφία τα οποία δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά αλλά υπονοείται εμφανώς ένας κανόνας που μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία συμπλήρωσης ψηφίων απεριόριστα.

Στη συνέχεια στο βιβλίο του μαθητή περιγράφεται η διαδικασία ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ ως εξής:

$$1,96 = 1,4^2 < 2 < 1,5^2 = 2,25$$
$$1,9881 = (1,41)^2 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164$$
$$1,9994 = (1,414)^2 < 2 < (1,415)^2 = 2,0022$$
$$1,99996 = (1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024$$
$$1,9999899 = (1,41421)^2 < 2 < (1,41422)^2 = 2,000018$$

....

Άρα:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$
$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$
$$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$$

.... (σ. 45)

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε κάποιες από τις ισότητες στο πρώτο μέρος της διαδικασίας (π.χ. $1,9994 = (1,414)^2$) δεν ισχύουν. Έχει γίνει στρογγυλοποίηση ώστε να εμφανίζεται το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων κάθε φορά αλλά πουθενά δεν αναφέρεται κάποια σχετική διευκρίνιση. Έτσι, το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιείται καταχρηστικά προκειμένου να ικανοποιήσει τις ανάγκες της παρουσίασης της διαδικασίας.

Μια παρατήρηση σχετικά με την προηγούμενη διαδικασία είναι ότι δεν αναφέρεται ότι συνεχίζεται απεριόριστα ή επ' άπειρον αλλά μάλλον αφήνεται να εννοηθεί από τον αναγνώστη από τις τελείες που χρησιμοποιούνται. Θα λέγαμε ότι το βιβλίο αποφεύγει να αναφερθεί στο άπειρο αν και όπως είδαμε παραπάνω κάτι τέτοιο αναφέρεται στο συμπέρασμα του αντίστοιχου φύλλου εργασίας που προτείνεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού.

Από την παραπάνω διαδικασία στο σχολικό βιβλίο προκύπτει το συμπέρασμα: «Επομένως, τον αριθμό $\sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά.» (σ. 46).

Σημειώνουμε ότι η διαδικασία ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ δεν είναι ίδιον χαρακτηριστικό του ως άρρητος. Αντίστοιχες προσεγγίσεις θα μπορούσαμε να γράψουμε και για ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε:

$$0,3 < 0,333... < 0,4$$

$$0,33 < 0,333... < 0,34$$

$$0,333 < 0,333... < 0,334$$

$$......$$

Έτσι έχουμε ρητές προσεγγίσεις του 0,333... (0,3 προσέγγιση δεκάτου, 0,33 προσέγγιση εκατοστού κ.ο.κ.) αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι ο αριθμός 0,333... δεν είναι ακριβής.

Στη συνέχεια το σχολικό βιβλίο διαπραγματεύεται την αναπαράσταση των αριθμών σε μια ευθεία. Εκεί αναφέρεται ότι: «Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως» (σ. 46). Η διαπίστωση ότι «Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή» φαίνεται να λειτουργεί αντιπαραθετικά με τη δεκαδική μορφή των άρρητων η οποία δεν θεωρείται ότι είναι γνωστή. Όμως μπορούν να βρεθούν παραδείγματα ρητών για τους οποίους θα έχουμε εξαιρετική δυσκολία ακόμα και αδυναμία να γνωρίσουμε όλα τους τα δεκαδικά ψηφία όπως και άρρητοι αριθμοί όπως ο 7,07007000700007... για τον οποίο μπορούμε να έχουμε γνώση του ψηφίου που υπάρχει σε οποιαδήποτε θέση επιθυμούμε. Επίσης, η πρόταση ότι «Οι ρητοί αριθμοί γεμίζουν την ευθεία αλλά όχι πλήρως» δύσκολα μπορεί να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Έρχεται σε αντίθεση με την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών που αναφέρεται στη συνέχεια να «καλύπτουν την ευθεία πλήρως» και εξηγείται «δηλαδή, κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας»(σ. 46).

Φαίνεται ότι πολλοί μαθητές με την αποφοίτηση από τη δευτεροθμια εκπαίδευση, ακόμη και μαθητές που ακολουθούν θετικές σπουδές, δεν έχουν σαφές ότι αυτό που ονομάζουμε δεκαδικοί αριθμοί είναι η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών και σ ένα μεγάλο ποσοστό θεωρούν ότι δεν ταυτίζονται τα δύο σύνολα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται στοιχεία μαθηματικής που έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην παρούσα εργασία. Για τη συγγραφή του συγκεκριμένου παραρτήματος χρησιμοποιήθηκαν τα εξής εγχειρίδια: α) Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος και Γιανακούλιας (2000), β) Γιαννόπουλος (2009), γ) Γιαννόπουλος, (2008), δ) Παπαδημητράκης (2015), ε) Παπαδημητράκης (2006), στ) Πηχωρίδης, Σ. (2006) και ζ) Spivak (2010).

Αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο, το οποίο ονομάζεται σύνολο των πραγματικών αριθμών και συμβολίζεται $\mathbb{R}$, το οποίο εφοδιάζεται με δύο πράξεις, την πρόσθεση, που συμβολίζεται «+» και τον πολλαπλασιασμό που συμβολίζεται «$\cdot$» καθώς και μια σχέση διάταξης « $<$ », ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω 14 αξιωματα (Α1-Α14).

Τα τέσσερα πρώτα αξιώματα αφορούν την πράξη της πρόσθεσης και είναι τα εξής:

Α1. *Ύπαρξη του μηδενός* (ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης)

Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται 0 που ικανοποιεί τη σχέση: $\alpha+0=\alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Α2. *Ύπαρξη του αντιθέτου* κάθε πραγματικού αριθμού

Για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχει ένας αριθμός που λέγεται αντίθετος του α συμβολίζεται $-\alpha$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: $\alpha+(-\alpha)=0$.

Α3. *Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης*

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

Α4. *Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης*

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

Τα επόμενα τέσσερα αξιώματα αφορούν την πράξη του πολλαπλασιασμού και είναι τα εξής:

Α5. *Ύπαρξη της μονάδας* (ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)

Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται 1 με $1\neq 0$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: $\alpha\cdot 1=\alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Α6. *Ύπαρξη αντιστρόφου* κάθε πραγματικού αριθμού

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha\neq 0$ υπάρχει ένας αριθμός που λέγεται αντίστροφος του α και συμβολίζεται α^{-1} ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$.

Α7. *Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού*

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει: $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Α8. *Αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού*

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

Αν α, β δυο πραγματικοί αριθμοί και $\beta\neq 0$ τότε συμβολίζουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\beta^{-1}$.

Το επόμενο αξίωμα συνδυάζει τις δυο πράξεις

Α9. *Επιμεριστική ιδιότητα*

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

Ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα Α1-Α9 λέγεται σώμα. Αν ένα σώμα εφοδιαστεί με τη σχέση διάταξης < ώστε να ικανοποιούνται τα δύο επόμενα αξιώματα τότε το σώμα αυτό λέγεται διατεταγμένο.

Α10. *Ιδιότητα της μεταβατικότητας*

Αν α, β και γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ τότε ισχύει $\alpha<\gamma$

Α11. *Ιδιότητα της τριχοτομίας*

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει μόνο μια από τις σχέσεις: $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\beta<\alpha$.

Αν ισχύει $0<\alpha$ τότε ο αριθμός α λέγεται θετικός ενώ αν ισχύει ότι $\alpha<0$ τότε ο αριθμός α λέγεται αρνητικός. Αν α, β δυο στοιχεία του σώματος λέμε ότι το α είναι μικρότερο του β και συμβολίζουμε $\alpha<\beta$ αν το $\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$ είναι θετικός αριθμός.

Θεωρούμε ότι $\alpha\leq\beta$ αν $\alpha<\beta$ ή $\alpha=\beta$. Επίσης, θεωρούμε ότι $\alpha>\beta$ αν $\beta<\alpha$.

Τα επόμενα δυο αξιώματα συνδέουν τις δυο πράξεις με τη διάταξη.

Α12. *Διάταξη και πρόσθεση*

Αν α, β δυο πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$ τότε $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$ για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

Α13. *Διάταξη και πολλπλασιασμός*

Αν α, β και γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$ και $0<\gamma$ τότε $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$.

Ένα κρίσιμο ερώτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό είναι αν τα αξιώματα Α1-Α13 αρκούν για να προκύψουν από αυτές οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι αρνητική και αυτό θα φανεί στη συνέχεια, όπου προκύπτει η αναγκαιότητα για μια επιπλέον βαθιά και λεπτή ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, η οποία δεν έχει ακόμα αναφερθεί. Στη συνέχεια ορίζονται τα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ όπως είναι γνωστό από το σχολείο περιλαμβάνει τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, ... και χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο βασικές ιδιότητες. Περιέχει το 0 και για κάθε φυσικό αριθμό n ο αριθμός $n+1$ είναι επίσης φυσικός αριθμός. Τις δυο αυτές ιδιότητες τις έχουν και άλλα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών αλλά αν κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει αυτές τις δυο ιδιότητες τότε θα περιλαμβάνει και τους φυσικούς αριθμούς.

Ορισμός: Ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό σύνολο αν $0\in A$ και για κάθε $\alpha\in A$ το $\alpha+1\in A$.

Για παράδειγμα, το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών είναι επαγωγικό σύνολο. Αποδεικνύεται ότι η τομή επαγωγικών συνόλων είναι επαγωγικό σύνολο. Το σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζεται ως η τομή όλων των επαγωγικών συνόλων του $\mathbb{R}$. Δηλαδή, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Βασικές ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών

Από τον τρόπο που ορίστηκε το σύνολο των φυσικών αριθμών προκύπτει η αρχή της μαθηματικής επαγωγής η οποία χρησιμοποιείται για την απόδειξη σημαντικών προτάσεων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Θεωρείται ότι αν μια πρόταση Ρ είναι αληθής για τον αριθμό x τότε λέμε ότι η πρόταση $\mathrm{P}(x)$ είναι αληθής.

Πρόταση *(αρχή της μαθηματικής επαγωγής)*

Έστω μια μαθηματική πρόταση P. Υποθέτουμε ότι:

α) η $\mathrm{P}(0)$ είναι αληθής, και

β) αν για κάποιο αριθμό κ η $\mathrm{P}(\kappa)$ είναι αληθής τότε και η $\mathrm{P}(\kappa+1)$ είναι αληθής.

Τότε η $\mathrm{P}(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η αρχή της μαθηματική επαγωγής χρησιμοποιείται επίσης και στους λεγόμενους «αναδρομικούς ορισμούς». Για παράδειγμα, αν n ένας φυσικός αριθμός. τότε ο αριθμός $n!$ (n παραγοντικό) ορίζεται ως το γινόμενο όλων των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Θεωρώντας ότι $0! = 1$ μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ότι ισχύει: $n! = n \cdot (n-1)!$ για κάθε μη μηδενικό φυσικό αριθμό.

Πρόταση *(αρχή της καλής διάταξης)*

Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Η αρχή της καλής διάταξης είναι ισοδύναμη με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, δηλαδή, αν υποτεθεί ότι ισχύει η μία από τις δυο τότε μπορεί να αποδειχθεί η άλλη.

Πρόταση *(ταυτότητα της διαίρεσης)*

Για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς n, m υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π, υ ώστε: $n = m \cdot \pi + \upsilon$ και $0 \leq \upsilon < m$.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $n = 2 \cdot \kappa$ και τότε ο n ονομάζεται άρτιος, ή $n = 2 \cdot \kappa + 1$ οπότε ο n ονομάζεται περιττός.

Επίσης, από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει η επόμενη πρόταση που αφορά την αναπαράσταση των φυσικών αριθμών στο δεκαδικό σύστημα.

Πρόταση *(δεκαδική αναπαράσταση φυσικών αριθμών)*

Για κάθε φυσικό αριθμό $m \neq 0$ υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $\in \{0,1,2,\ldots 9\}$, $\alpha_n \neq 0$ ώστε $m = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$.

Ο αριθμός m συμβολίζεται $m = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$ και η μορφή αυτή είναι η δεκαδική αναπαράσταση του m.

Όμως το σύνολο των φυσικών αριθμών έχει σημαντικές αδυναμίες. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει ο αντίθετος και ο αντίστροφος ενός μη μηδενικού φυσικού αριθμού. Έτσι, εξισώσεις όπως η $x + 2 = 1$ και η $2 \cdot x = 1$ είναι αδύνατες στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n, n \in \mathbb{N}\}$

Στο σύνολο των ακεραίων υπάρχει ο αντίθετος αριθμός κάθε ακεραίου αλλά δεν υπάρχει ο αντίστροφος κάθε μη μηδενικού ακεραίου. Επίσης, η βασική ιδιότητα του συνόλου των φυσικών αριθμών ότι είναι επαγωγικό σύνολο ισχύει και στο σύνολο των ακεραίων.

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q} = \{n \cdot m^{-1} : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$**.**

Στο σύνολο των ρητών αριθμών κάθε μη μηδενικός αριθμός έχει αντίστροφο. Μια σημαντική διαφοροποίηση του συνόλου των ρητών αριθμών σε σχέση με το σύνολο των ακεραίων είναι ότι ενώ μεταξύ δυο οποιονδήποτε, διαφορετικών μεταξύ τους, ακεραίων αριθμών δεν υπάρχει πάντοτε ακέραιος, στο σύνολο των ρητών αριθμών ισχύει ότι μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών αριθμών υπάρχει πάντα ρητός αριθμός ανάμεσά τους.

Πυκνότητα των ρητών

Μια βασική ιδιότητα των ρητών αριθμών είναι η πυκνότητα. Δηλαδή, ότι μεταξύ δυο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών αριθμών υπάρχει πάντα κάποιος άλλος ρητός αριθμός. Πράγματι, αν α, β δυο ρητοί αριθμοί με α < β τότε ο μέσος όρος τους $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι μεταξύ των α, β επειδή $\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0$ άρα $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\beta - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0$ άρα $\beta > \frac{\alpha+\beta}{2}$. Δηλαδή $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

Αν επαναλάβουμε το προηγούμενο επιχείρημα μεταξύ του α και του $\frac{\alpha+\beta}{2}$ θα προκύψει ένας νέος ρητός μεταξύ των α, β και αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές επιθυμούμε, επομένως υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ δυο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών.

Το σύνολο των ρητών αριθμών εφοδιασμένο με την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διάταξη όπως ορίστηκαν στα αξιώματα Α1-Α13 είναι διατεταγμένο σώμα.

Οι ρητοί αριθμοί στον άξονα

Αν και στα σχολικά βιβλία γίνεται σε διάφορα σημεία η τοποθέτηση των ρητών αριθμών στην αριθμογραμμή ή στον άξονα των αριθμών, η διαδικασία τοποθέτησης δεν περιγράφεται κάπου συγκεντρωμένα. Περιγράφουμε αυτή τη διαδικασία στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη.

Ορισμός του άξονα των αριθμών

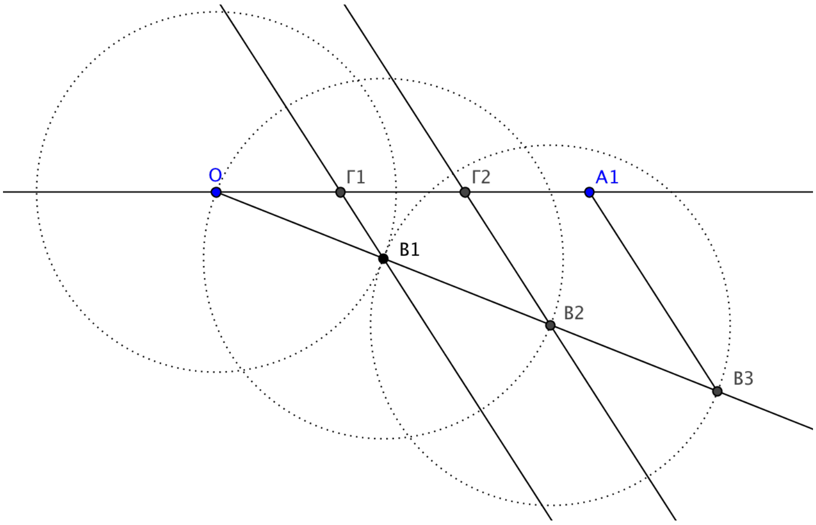
Θεωρούμε μια ευθεία $x'x$, ένα σημείο της Ο το οποίο θεωρούμε ως αρχή του άξονα και αντιστοιχούμε σ' αυτό τον αριθμό 0 και ένα άλλο σημείο, στην ημιευθεία Οx, το A_1 στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 1. Στην ημιευθεία Οx, συμφωνούμε να τοποθετούμε τους θετικούς αριθμούς και στην αντικείμενή της τους αρνητικούς αριθμούς.

Τοποθέτηση των φυσικών αριθμών στον άξονα

Ο κύκλος (A_1, OA_1) τέμνει την ευθεία στο Ο και στο A_2 στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 2. Αντίστοιχα κάθε κύκλος (A_ν , OA_1) μας δίνει το σημείο $A_{\nu+1}$ στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό ν+1 και έτσι έχουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς στον άξονα. Στο συμμετρικό A'_ν του σημείου A_ν ως προς το Ο αντιστοιχούμε τον αριθμό $-\nu$ και έτσι έχουμε και τους αρνητικούς ακέραιους στον άξονα.

Τοποθέτηση της κλασματικής μονάδας στον άξονα

Έστω ν ένας μη μηδενικός φυσικός αριθμός. Φέρουμε ημιευθεία Oy που δεν ανήκει στην ευθεία $x'x$ και ορίζουμε σ' αυτή με το διαβήτη ν ίσα τμήματα $OB_1 = B_1B_2 = ... = B_{\nu-1}B_\nu$. Γράφουμε το τμήμα A_1B_ν και φέρουμε από τα σημεία B_1, B_2, ..., $B_{\nu-1}$ παράλληλες σ' αυτό οι οποίες τέμνουν το τμήμα OA_1 σε σημεία Γ_1 , Γ_2 , ..., $\Gamma_{\nu-1}$ στα οποία τοποθετούμε αντίστοιχα τους αριθμούς $\frac{1}{\nu}$, $\frac{2}{\nu}$, ..., $\frac{\nu-1}{\nu}$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $\nu = 3$.



Τοποθέτηση ρητού αριθμού στον άξονα

Για να κατασκευαστεί το σημείο που αντιστοιχεί στο ρητό αριθμό $\frac{\mu}{\nu}$ με $\mu, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \neq 0$ και $\mu > \nu$ κάνουμε τη διαίρεση $\mu : \nu$ οπότε προκύπτει ότι υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος, ώστε $\mu = \kappa \cdot \nu + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < \nu$. Οπότε $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa \cdot \nu + \upsilon}{\nu} = \kappa + \frac{\upsilon}{\nu}$. Δηλαδή, ο αριθμός $\frac{\upsilon}{\nu}$ είναι κάποιος από τους αριθμούς 0, $\frac{1}{\nu}$, $\frac{2}{\nu}$, ..., $\frac{\nu-1}{\nu}$. Γράφουμε κύκλο (Κ, ρ) όπου Κ το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό κ και $\rho = \frac{\upsilon}{\nu}$ ο οποίος τέμνει τον άξονα στο σημείο Γ_μ που αντιστοιχεί στον αριθμό $\frac{\mu}{\nu} = \kappa + \frac{\upsilon}{\nu}$.

Το συμμετρικό Γ'_μ του Γ_μ ως προς το Ο αντιστοιχεί στον αρνητικό ρητό $-\frac{\mu}{\nu}$. Έτσι σε κάθε ρητό αριθμό αντιστοιχίσαμε ένα σημείο στον άξονα.

Με βάση ότι οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί είναι βάσιμο το ερώτημα αν σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί κάποιος ρητός αριθμός; Όπως είναι γνωστό και από τα σχολικά βιβλία η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι αρνητική και αυτή είναι μια βασική αδυναμία του συνόλου των ρητών αριθμών.

Υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί

Αν σε μια ευθεία (ε) έχουμε ορίσει ότι το 0 αντιστοιχεί στο σημείο Ο και το 1 αντιστοιχεί στο σημείο Α τότε φέροντας κάθετη στην (ε) στο Α και ορίζοντας σ' αυτή τμήμα ΑΒ με μήκος 1, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $OA = AB = 1$. Οπότε σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα είναι $OB^2 = 2$, άρα φαίνεται ότι υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με 2. Επίσης, αν Γ είναι το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (O, OB) προς το μέρος του A τότε στο σημείο Γ του άξονα, φαίνεται ότι αντιστοιχεί ένας θετικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με 2.

Πρόταση: Δεν υπάρχει ρητός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha^2 = 2$

Απόδειξη. Έστω ότι ο αριθμός ρητός αριθμός α για τον οποίο ισχύει $\alpha^2 = 2$. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ ανάγωγο κλάσμα (δηλαδή, κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε:

$$\alpha^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\cdot\lambda^2$$

Άρα ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε και ο κ είναι άρτιος (αν ο κ ήταν περιττός τότε ο κ^2 θα ήταν επίσης περιττός). Συνεπώς είναι της μορφής κ = 2μ. Τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\kappa^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow (2\mu)^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow 4\mu^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\mu^2$$

Οπότε ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος. Δηλαδή, οι κ, λ είναι άρτιοι και συνεπώς το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν είναι ανάγωγο (άτοπο).

Παρατηρήσεις

1. Μόλις αποδείξαμε ότι ο θετικός αριθμός που εκφράζει το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος (της υποτείνουσας ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1). Αφού εκφράζει το μήκος ενός αντικειμένου είναι διαισθητικά προφανές ότι υπάρχει. Όμως, είμαστε βέβαιοι ότι ο αριθμός αυτός υπάρχει; Τα μαθηματικά δεν θεμελιώνονται με βάση τη σχέση τους με τα πραγματικά αντικείμενα παρόλο που συχνά μας βοηθάει ιδιαίτερα αυτή η σχέση. Συχνά οι εκπαιδευτικοί λένε στους μαθητές τους ότι τα μαθηματικά προχωράνε με βάση αυτά που θεωρούνται γνωστά. Έτσι, λοιπόν η ύπαρξη του θετικού αριθμού του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με 2, θα έπρεπε να αποδειχθεί με βάση τις μέχρι τώρα γνωστές ιδιότητες των αριθμών αλλά αυτό δεν είναι εφικτό (Spivak, 2010). Θα δώσουμε μια απάντηση στο ερώτημα αυτό σε επόμενη πρόταση.

2. Από τη διαδικασία τοποθέτησης του θετικού αριθμού α για τον οποίο $\alpha^2 = 2$ στον άξονα είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει σημείο του άξονα που δεν αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό. Έτσι, το σύνολο των ρητών αριθμών παρόλο που είναι πυκνό, αντιστοιχεί σε μια ευθεία με κενά η οποία δεν είναι συνεχής. Έτσι, μια διαισθητικά «φυσιολογική» επέκταση των ρητών θα ήταν να θεωρήσουμε ένα ευρύτερο σύνολο αριθμών στο οποίο μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε σημείο του άξονα. Αυτή η διαισθητική βάση αποκτά τυπικά χαρακτηριστικά και ορίζει πλέον το σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η ιδιότητα της πληρότητας

Στο σύνολο των φυσικών αριθμών κάθε (μη κενό) υποσύνολό του έχει κάποιο φυσικό αριθμό ως ελάχιστο στοιχείο. Επίσης, υπάρχουν υποσύνολα των ρητών τα οποία έχουν κάποιο ρητό αριθμό ως ελάχιστο στοιχείο. Για παράδειγμα το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο το 1. Το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1\}$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο αλλά υπάρχουν ρητοί αριθμοί που είναι μικρότεροι από κάθε στοιχείο του συνόλου Β, όπως για παράδειγμα ο αριθμός 0. Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται κάτω φραγμένο. Ο αριθμός 1 είναι ο μεγαλύτερος από κάθε έναν από τους αριθμούς αυτούς, δηλαδή, από τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από οποιοδήποτε στοιχείο του Β. Θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε αυτό το συμπέρασμα; Δηλαδή, ισχύει ότι για οποιοδήποτε, μη κενό, υποσύνολο των ρητών αριθμών, για το οποίο υπάρχουν ρητοί μικρότεροι από κάθε στοιχείο του, υπάρχει το μεγαλύτερο απ' αυτά; Δηλαδή, υπάρχει μέγιστο κάτω φράγμα; Αποδεικνύεται ότι αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για το σύνολο $\Gamma = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$ ενώ αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο της δομής των πραγματικών αριθμών. Αντίστοιχα για το μη κενό υποσύνολο των ρητών $\mathrm{K} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$ υπάρχουν ρητοί που είναι μεγαλύτεροι από κάθε στοιχείο του Κ αλλά αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει κάποιος ρητός που να έχει την ίδια ιδιότητα και να είναι μικρότερος από όλους αυτούς.

Με τον τρόπο που παρουσιάσαμε την παραπάνω ιδιότητα ίσως φαίνεται ότι είναι αρκετά τεχνική χωρίς κάποια διαισθητική ερμηνεία. Δεν είναι όμως έτσι. Στους μαθητές της Γ΄ λυκείου είναι γνωστό το λεγόμενο θεώρημα του Bolzano για τις συνεχείς συναρτήσεις. Αυτό λέει ότι αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β] και $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Αυτό το θεώρημα έχει μια προφανή διαισθητική ερμηνεία. Αν ενώσεις δυο σημεία του συστήματος συντεταγμένων που είναι εκατέρωθεν του άξονα x΄x με μια συνεχή γραμμή τότε η γραμμή αυτή τα τέμνει τον άξονα x΄x σε κάποιο σημείο.

Η απόδειξη όμως του θεωρήματος αυτού δεν είναι και τόσο απλή. Ουσιαστικά απαιτεί από τους πραγματικούς αριθμούς την ιδιότητα που περιγράψαμε προηγουμένως. Έτσι, εφοδιάζουμε τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τις μέχρι τώρα γνωστές ιδιότητες και με την ιδιότητα αυτή, η οποία είναι γνωστή ως ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Θα συνεχίσουμε δίνοντας κάποιους απαραίτητους ορισμούς εννοιών που περιγράφηκαν παραπάνω και μετά θα ακολουθήσει μια σειρά προτάσεων που δείχνει τη σημασία της ιδιότητας της πληρότητας για τη δομή των πραγματικών αριθμών.

Άνω φραγμένο σύνολο

Ορισμός: Ένα μη κενό υποσύνολο Α ενός διατεταγμένου σώματος Ω λέγεται

(i) άνω φραγμένο αν υπάρχει $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε $\alpha \le \omega$ για κάθε $\alpha \in A$

(ii) κάτω φραγμένο αν υπάρχει $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε $\alpha \ge \omega$ για κάθε $\alpha \in A$

Κάθε $\omega \in A$ που ικανοποιεί το (i) λέγεται άνω φράγμα του Α και κάθε $\omega \in A$ που ικανοποιεί το (ii) λέγεται κάτω φράγμα του Α.

Ελάχιστο άνω φράγμα

Ορισμός: Έστω Α ένα μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Ω.
(α) Λέμε ότι το $\alpha \in A$ ελάχιστο άνω φράγμα του Α αν

(i) το α είναι άνω φράγμα του Α

(ii) για κάθε άνω φράγμα β του Α ισχύει $\alpha \le \beta$

(β) Λέμε ότι το $\alpha \in A$ μέγιστο κάτω φράγμα του Α αν

(i) το α είναι κάτω φράγμα του Α

(ii) για κάθε κάτω φράγμα β του Α ισχύει $\alpha \ge \beta$

Παρατήρηση: Το ελάχιστο άνω φράγμα του Α (αν υπάρχει) είναι μοναδικό. Πράγματι, αν α, β είναι δυο ελάχιστα άνω φράγματα του Α τότε επειδή το α είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α έχουμε $\alpha \leq \beta$ και επειδή το β είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α έχουμε $\beta \leq \alpha$. Άρα $\alpha = \beta$.

Ιδιότητα της πληρότητας

Ορισμός: Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Ω έχει την ιδιότητα της πληρότητας αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο Α του Ω έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Κάθε διατεταγμένο σώμα εφοδιασμένο με την ιδιότητα της πληρότητας λέγεται πλήρες.

Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα

Πρόταση: *Υπάρχει μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των ρητών που δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα ρητό αριθμό.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\mathrm{K} = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο Κ δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα ρητό αριθμό.

Επειδή 1 > 0 και $1^2 = 1 < 2$ έχουμε $1 \in \mathrm{K}$ άρα το Κ δεν είναι κενό.

Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε θετικός ρητός αριθμός y για τον οποίο ισχύει ότι $y^2 > 2$ είναι άνω φράγμα του Κ αφού $y^2 > x^2 \Leftrightarrow y > x$ για $x, y > 0$.

Υποθέτουμε ότι το Κ έχει ελάχιστο άνω φράγμα το $\alpha \in \mathbb{Q}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή δεν υπάρχει ρητός αριθμός που το τετράγωνό του να είναι ίσο με 2, θα ισχύει είτε: $\alpha^2 > 2$ είτε: $\alpha^2 < 2$.

(i) Έστω $\alpha^2 > 2$. Θα βρούμε ρητό αριθμό μικρότερο του α που έχει τετράγωνο μεγαλύτερο του 2. Τότε ο αριθμός α δεν μπορεί να είναι το ελάχιστο (άνω φράγμα του Κ) και θα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. Για να το πετύχουμε αυτό αρκεί να βρούμε αριθμό ε τέτοιο, ώστε να ισχύει: $0 < \varepsilon < \alpha$ και $(\alpha - \varepsilon)^2 > 2$. Τότε έχουμε: $\alpha - \varepsilon < \alpha$ και αρκεί να βρούμε αριθμό ε τέτοιο, ώστε $0 < \varepsilon < \alpha$ και $\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > 2$. Επειδή, $\varepsilon^2 > 0$, αρκεί να βρούμε ε ώστε να ισχύει: $\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon > 2 \Leftrightarrow \varepsilon < \dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$. Σημειώνουμε εδώ ότι ο $\dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$ είναι θετικός ρητός αριθμός. Έτσι, αν επιλέξουμε ως *ε* ένα ρητό μεγαλύτερο του μηδενός και μικρότερο από τους α και $\dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$ τότε έχουμε βρει ρητό *ε* που ικανοποιεί τις σχέσεις: $0 < \varepsilon < \alpha$ και $(\alpha - \varepsilon)^2 > 2$.

(ii) Έστω $\alpha^2 < 2$. Τώρα επιδιώκουμε να βρούμε αριθμό μεγαλύτερο του α που έχει τετράγωνο μικρότερο του 2. Τότε ο αριθμός α δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα του Κ και θα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. Ζητάμε ρητό αριθμό $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $(\alpha + \varepsilon)^2 < 2$. Οπότε $\alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$. Αν επιλέξουμε $\varepsilon \leq 1$ τότε $\varepsilon^2 \leq \varepsilon$ και αρκεί να βρούμε ε ώστε να ισχύει: $0 < \varepsilon \leq 1$ και $\alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon < 2 \Leftrightarrow \varepsilon < \dfrac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}$. Σημειώνουμε ότι ο $\dfrac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}$ είναι θετικός ρητός αριθμός και επιλέγουμε ως κατάλληλο ε έναν οποιονδήποτε θετικό ρητό μικρότερο των 1 και $\dfrac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}$. Έτσι βρήκαμε ρητό αριθμό $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $(\alpha + \varepsilon)^2 < 2$. Οπότε το σύνολο Κ δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{Q}$.

Α14. ***Αξίωμα της πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς***

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ο Spivak (2010) στο κεφάλαιο 29 αποδεικνύει ότι υπάρχει μόνο ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Δηλαδή, όλα τα πλήρως διατεταγμένα σώματα είναι ουσιαστικά ίδια μεταξύ τους ή αλλιώς είναι όπως λέμε ισόμορφα.

Ύπαρξη θετικού αριθμού του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με 2

Πρόταση: *Υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός x ώστε $x^2 = 2$*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$. Επειδή $1 \in \mathrm{A}$ το Α δεν είναι κενό. Επίσης, είναι άνω φραγμένο από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει $y^2 > 2$ (π.χ. από τον αριθμό 2). Άρα από την ιδιότητα της πληρότητας το Α έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, έστω α. Προφανώς $\alpha > 0$. Θα δείξουμε ότι $\alpha^2 = 2$ αποκλείοντας τις περιπτώσεις $\alpha^2 > 2$ και $\alpha^2 < 2$.

Έστω $\alpha^2 > 2$. Τότε με βάση την ιδέα της απόδειξης για τη μη πληρότητα των ρητών υπάρχει πραγματικός αριθμός ε με $0 < \varepsilon < \alpha$ ώστε $(\alpha - \varepsilon)^2 > 2$. Άρα ο αριθμός $(\alpha - \varepsilon)$ είναι άνω φράγμα του Α. Όμως $\alpha - \varepsilon < \alpha$. Άτοπο, αφού το α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α.

Έστω $\alpha^2 < 2$ και επειδή $\alpha > 0$ έχουμε $\alpha \in \mathrm{A}$. Τότε με βάση την ιδέα της απόδειξης για τη μη πληρότητα των ρητών υπάρχει πραγματικός αριθμός $\varepsilon > 0$ ώστε $(\alpha + \varepsilon)^2 < 2$. Άρα $(\alpha + \varepsilon) \in \mathrm{A}$. Όμως $\alpha + \varepsilon > \alpha$. Άτοπο αφού ο α είναι άνω φράγμα του Α.

Άρρητοι αριθμοί

Ορισμός: Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός λέγεται άρρητος.

Συνέπειες της πληρότητας των πραγματικών αριθμών

Αρχιμήδεια ιδιότητα

Πρόταση: *Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε από την ιδιότητα της πληρότητας το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα β. Επειδή $\beta - 1 < \beta$ το $\beta - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n > \beta - 1$. Συνεπώς $n + 1 > \beta$. Άτοπο, επειδή $n + 1$ φυσικός και β άνω φράγμα του $\mathbb{N}$.

Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών

Η παρακάτω πρόταση εισάγεται από τον Αρχιμήδη ως 5ο αξίωμα στο έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» και αποκλείει τα απειροστά από τη διαπραγμάτευση των μεγεθών. Τα απειροστά ήταν μεγέθη μικρότερα από οποιοδήποτε μέγεθος χωρίς να είναι ανύπαρκτα. Μια τέτοια περίπτωση είναι η λεγόμενη κερατοειδής γωνία, δηλαδή, η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη του κύκλου με το ημικύκλιο με κοινό άκρο το σημείο επαφής. Η γωνία αυτή εμφανίζεται στην πρόταση 16 του βιβλίου ΙΙΙ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη και εκεί αποδεικνύεται ότι είναι μικρότερη από οποιαδήποτε ευθύγραμμη γωνία. Για την περίπτωση των αριθμών και με σύγχρονους όρους το 5ο αξίωμα του Αρχιμήδη είναι το εξής:

Πρόταση: *Αν α και β δυο πραγματικοί αριθμοί και* $\beta > 0$ *τότε υπάρχει φυσικός αριθμός* n *τέτοιος ώστε* $n\beta > \alpha$.

Απόδειξη. Αφού το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Οπότε υπάρχει φυσικός n τέτοιος, ώστε $n > \frac{\alpha}{\beta}$. Άρα $n\beta > \alpha$.

Επέκταση της αρχής του ελαχίστου στους ακέραιους

Πρόταση: *Κάθε μη κενό υποσύνολο των ακεραίων που είναι κάτω φραγμένο έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο των ακεραίων το οποίο είναι κάτω φραγμένο. Τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $x \leq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n > -x$. Οπότε $-n < x \leq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Συνεπώς το $-n$ είναι κάτω φράγμα του Α. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{\alpha + n, \alpha \in A\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$ αφού $\alpha + n > 0$. Από την αρχή του ελαχίστου για τα υποσύνολα των φυσικών αριθμών έχουμε ότι το Β έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω β. Επειδή $\beta \in B$ υπάρχει $\alpha_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\beta = \alpha_0 + n$. Επειδή το β είναι το ελάχιστο στοιχείο του Β ισχύει ότι $\beta \leq \alpha + n$ για κάθε $\alpha \in A$. Άρα $\alpha_0 + n \leq \alpha + n$ δηλαδή $\alpha_0 \leq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Συνεπώς το α_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του Α.

Ύπαρξη ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού

Πρόταση: *Για κάθε πραγματικό αριθμό* x *υπάρχει μοναδικός ακέραιος* m *τέτοιος, ώστε:* $m \leq x < m+1$

Απόδειξη. (i) Για την ύπαρξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{Z} : n > x\}$ δηλαδή το σύνολο των ακεραίων που υπερβαίνουν το x. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα προκύπτει ότι το σύνολο αυτό δεν είναι κενό. Το σύνολο Α είναι κάτω φραγμένο από το x. Άρα από την επέκταση της αρχής του ελαχίστου στους ακέραιους προκύπτει ότι το Α θα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω n_0. Άρα $(n_0 - 1) \notin A$ και $n_0 - 1 \leq x$. Επειδή $n_0 \in A$ έχουμε $n_0 > x$. Συνεπώς $n_0 - 1 \leq x < n_0$. Αν $m = n_0 - 1$ τότε $m \leq x < m+1$

(ii) Για τη μοναδικότητα: Θεωρούμε ότι υπάρχουν ακέραιοι m, κ τέτοιοι ώστε:

$$m \leq x < m+1 \text{ και } \kappa \leq x < \kappa + 1$$

Έχουμε $m \leq x$ και $x < \kappa + 1$ άρα $m < \kappa + 1$ επομένως $m \leq \kappa$. Επίσης, έχουμε $\kappa \leq x$ και $x < m+1$ άρα $\kappa < m+1$. Συνεπώς $\kappa \leq m$. Άρα $m = \kappa$

Ορισμός ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού

Ο ακέραιος m που μας δίνει η προηγούμενη πρόταση λέγεται *ακέραιο μέρος* του πραγματικού αριθμού x και συμβολίζουμε $[x]$. Δηλαδή, το $[x]$ προσδιορίζεται από τις σχέσεις $[x] \in \mathbb{Z}$ και $[x] \leq x < [x]+1$.

Το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει τον αριθμό x. Ισχύει προφανώς ότι: $0 \leq x - [x] < 1$.

Παραδείγματα: [2,9] = 2, [2] = 2, $[\sqrt{2}]=1$, $[-2,3]=-3$

Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς

Μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών υπάρχει ρητός

Πρόταση: *Αν x, y δυο πραγματικοί αριθμοί με $x<y$ τότε υπάρχει ρητός q τέτοιος ώστε $x<q<y$.*

Απόδειξη. Έχουμε $y-x>0$ και από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $n(y-x)>1$. Άρα $nx+1<ny$. Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε $nx<[nx]+1$ και $[nx]\le nx$. Άρα $nx<[nx]+1<ny$, δηλαδή $x<\dfrac{[nx]+1}{n}<y$ και επειδή ο $\dfrac{[nx]+1}{n}$ είναι ρητός, έχουμε το ζητούμενο.

Παρατήρηση

Μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει και άλλος ρητός μεταξύ των x, y επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία της απόδειξης για τους τους x, $\dfrac{[nx]+1}{n}$. Επειδή αυτή τη διαδικασία μπορούμε να την επαναλάβουμε όσες φορές επιθυμούμε προκύπτει ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ δυο πραγματικών.

Η πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$

Πρόταση: *Αν x, y δυο πραγματικοί αριθμοί με $x<y$ τότε υπάρχει άρρητος α ώστε $x<\alpha<y$.*

Απόδειξη. Έχουμε $x<y$ και $\sqrt{2}>0$, άρα $\dfrac{x}{\sqrt{2}}<\dfrac{y}{\sqrt{2}}$. Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς προκύπτει ότι υπάρχει ρητός $q\neq 0$ τέτοιος ώστε $\dfrac{x}{\sqrt{2}}<q<\dfrac{y}{\sqrt{2}}$.

Τότε $x<q\sqrt{2}<y$. Όμως ο $\alpha=q\sqrt{2}$ είναι άρρητος επειδή αν ήταν ρητός τότε ο $\dfrac{\alpha}{q}=\sqrt{2}$ θα ήταν ρητός, άτοπο. Άρα βρήκαμε άρρητο α μεταξύ των x, y.

Ιδιότητα της συνέχειας

Ένα διατεταγμένο σύνολο Ω έχει την ιδιότητα της συνέχειας αν για οποιαδήποτε δυο μη κενά σύνολα $\mathrm{A},\mathrm{B}\subseteq\Omega$ ώστε $\alpha\le\beta$ για κάθε $\alpha\in\mathrm{A}$, $\beta\in\mathrm{B}$ τότε υπάρχει $\xi\in\Omega$ ώστε $\alpha\le\xi\le\beta$ για κάθε $\alpha\in\mathrm{A}$, $\beta\in\mathrm{B}$.

Πρόταση: *Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν έχει την ιδιότητα της συνέχειας.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathrm{A}=\{\alpha\in\mathbb{Q}:\alpha^2<2\}$ και $\mathrm{B}=\{\beta\in\mathbb{Q}:\beta^2>2\}$ τα οποία είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ και $\alpha\le\beta$ για κάθε $\alpha\in\mathrm{A}$, $\beta\in\mathrm{B}$. Έστω ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $\alpha\le\xi\le\beta$ για κάθε $\alpha\in\mathrm{A}$, $\beta\in\mathrm{B}$. Επειδή $\xi\in\mathbb{Q}$ θα είναι $\xi\neq\sqrt{2}$. Αν $\xi>\sqrt{2}$ τότε $\xi\in\mathrm{B}$ και επειδή $\xi\le\beta$ για κάθε $\beta\in\mathrm{B}$ το ξ είναι το ελάχιστο στοιχείο του Β. Όμως από την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς υπάρχει κ τέτοιο, ώστε $\sqrt{2} < \kappa < \xi$. Συνεπώς το κ είναι στοιχείο του Β, αφού $\kappa > \sqrt{2}$ και επίσης το κ είναι μικρότερο από το ελάχιστο στοιχείο του Β. Άτοπο. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει ότι $\xi < \sqrt{2}$. Άρα το σύνολο των ρητών αριθμών δεν έχει την ιδιότητα της συνέχειας.

Από την ιδιότητα της πληρότητας στην ιδιότητα της συνέχειας

Πρόταση: *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει την ιδιότητα της συνέχειας.*

Απόδειξη. Έστω Α, Β δυο μη-κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών και $\alpha \leq \beta$ για κάθε $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Κάθε $\beta \in B$ είναι άνω φράγμα του Α. Άρα το Α είναι μη-κενό άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Οπότε το Α θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα ξ. Δηλαδή, $\alpha \leq \xi$ για κάθε $\alpha \in A$. Επειδή κάθε $\beta \in B$ είναι άνω φράγμα του Α και το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α έχουμε $\xi \leq \beta$. Άρα υπάρχει ξ (το ελάχιστο άνω φράγμα του Α) για το οποίο ισχύει ότι $\alpha \leq \xi \leq \beta$ για κάθε $\alpha \in A$, $\beta \in B$ Δηλαδή, ισχύει η ιδιότητα της συνέχειας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Από την ιδιότητα της συνέχειας στην ιδιότητα της πληρότητας

Πρόταση: *Έστω ένα διατεταγμένο σώμα Ω στο οποίο ισχύει η ιδιότητα της συνέχειας. Κάθε είναι μη-κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του Ω έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Έστω Α ένα μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του Ω. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{\beta \mid \beta$ άνω φράγμα του $A\}$. Επειδή το Α είναι άνω φραγμένο προκύπτει ότι το Β δεν είναι κενό. Οπότε ισχύει $\alpha \leq \beta$ για κάθε $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέχειας υπάρχει ξ τέτοιο, ώστε $\alpha \leq \xi \leq \beta$. Επειδή $\alpha \leq \xi$ για κάθε $\alpha \in A$, ο ξ είναι άνω φράγμα του Α. Άρα $\xi \in B$ και επειδή $\xi \leq \beta$ για κάθε $\beta \in B$ ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α

Δηλαδή, δείξαμε ότι η ιδιότητα της πληρότητας είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα της συνέχειας

Δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός x έχει δεκαδική αναπαράσταση, δηλαδή γράφεται στη μορφή

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_n}{10^n} + \ldots$$

όπου x_0 ακέραιος και $x_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ για κάθε θετικό φυσικό αριθμό n, καθώς και ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που έχουν δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις.

Δεκαδική αναπαράσταση πραγματικού αριθμού

Ο τρόπος που βρίσκουμε τη δεκαδική αναπαράσταση ενός πραγματικού αριθμού τον οποίο θα περιγράψουμε στη συνέχεια στη γενική του μορφή είναι όμοιος με αυτόν που είδαμε ότι αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου για τον προσδιορισμό ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$.

Πρόταση: *Κάθε μη αρνητικός πραγματικός αριθμός* x *γράφεται στη μορφή:*

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_n}{10^n} + \ldots$$

όπου x_0 *φυσικός και* $x_n \in \{0,1,2,...,9\}$ *για κάθε θετικό φυσικό αριθμό* n.

Τότε λέμε ότι ο x έχει δεκαδική αναπαράσταση $x = x_0, x_1 x_2 ...$

Απόδειξη. Έστω x ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και $x_0 = [x]$. Τότε σύμφωνα με την ιδιότητα του ακεραίου μέρους έχουμε: $x_0 \le x < x_0 + 1$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[x_0, x_0 + 1)$ σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$ και ο x ανήκει σε ένα από αυτά. Άρα υπάρχει $x_1 \in \{0,1,...,9\}$ τέτοιος ώστε: $x_0 + \frac{x_1}{10} \le x < x_0 + \frac{x_1 + 1}{10}$

Χωρίζουμε το διάστημα $\left[x_0 + \frac{x_1}{10}, x_0 + \frac{x_1 + 1}{10}\right)$ σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά και συνεπώς υπάρχει $x_2 \in \{0,1,...9\}$ τέτοιος ώστε:

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \le x < x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2 + 1}{10^2}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $n > 0$ υπάρχει $x_n \in \{0,1,...,9\}$ ώστε:

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + ... + \frac{x_n}{10^n} \le x < x_0 + \frac{x_1}{10} + ... + \frac{x_n + 1}{10^n}$$

Έστω $s_n = x_0 + \frac{x_1}{10} + ... + \frac{x_n}{10^n}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας $\left(\frac{x_n}{10^n}\right)$, $n = 1,2,...$.

Τότε $s_n \le x < s_n + \frac{1}{10^n}$. Οπότε $0 \le x - s_n < \frac{1}{10^n}$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{n\to\infty} s_n = x$. Άρα

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + ... + \frac{x_n}{10^n} + ...$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι η δεκαδική παράσταση του x .

Το άθροισμα $x_0 + \frac{x_1}{10} + ... + \frac{x_\kappa}{10^\kappa}$ το συμβολίζουμε $x_0, x_1 ... x_\kappa$ και λέγεται δεκαδική προσέγγιση τάξης $\frac{1}{10^\kappa}$ του x .

Επίσης, θα αποδείξουμε ότι αν δοθεί ακολουθία (β_n) τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της μορφής $\alpha_\kappa = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + ... + \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}$, όπου $\beta_0 \in \mathbb{N}$ και $\beta_i \in \{0,1,...,9\}$, $i = 0,1,...,9$ συγκλίνει σε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x .

Κάθε όρος της ακολουθίας (α_κ) είναι μη αρνητικός και η ακολουθία είναι (α_κ) είναι αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η (α_κ) είναι άνω φραγμένη.

Για κάθε μη μηδενικό φυσικό αριθμό κ έχουμε:

$$\alpha_\kappa = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + ... + \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} \le \beta_0 + \frac{9}{10} + ... + \frac{9}{10^\kappa} = \beta_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{10^{\kappa-1}}\right) =$$

$$= \beta_0 + \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^\kappa}}{1-\frac{1}{10}} < \beta_0 + \frac{9}{10} = \beta_0 + 1$$

Οπότε το $\beta_0 + 1$ είναι ένα άνω φράγμα της (α_κ) και συνεπώς αυτή συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό x.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ένας διαισθητικά «φυσιολογικός» τρόπος όπου μπορούμε να έχουμε δεκαδικές προσεγγίσεις ενός πραγματικού αριθμού x με ρητούς αριθμούς.

Μια άλλη αξιοσημείωτη παρατήρηση η οποία έχει ουσιαστικό ρόλο στην εργασία μας είναι ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με δυο διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις

Για παράδειγμα: $0,3999... = 0,3 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ... = 0,3 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... + \frac{9}{10^n}\right) =$

$$= 0,3 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10^2}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right) = 0,3 + \frac{9}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 0,3 + 0,1 = 0,4$$

Στην ουσία οι μόνες διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών είναι όπως στο παράδειγμά μας. Δηλαδή κάθε πραγματικός (ρητός) αριθμός x που έχει μια δεκαδική παράσταση $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa$ με $\alpha_\kappa \ne 0$ τότε θα έχει και άλλη μια της μορφής $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_{\kappa-2}\beta_{\kappa-1}999...$ όπου $\beta_{\kappa-1} = \alpha_{\kappa-1} - 1$.

Διπλή δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών

Πρόταση:

Αν $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...$, $\beta_0,\beta_1\beta_2...$ *δυο δεκαδικές παραστάσεις ενός πραγματικού αριθμού* x, *δηλαδή* $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... = \beta_0,\beta_1\beta_2...$ *τότε θα συμβαίνει* ***μόνο ένα*** *από τα παρακάτω:*

(i) $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ...

(ii) για κάποιο φυσικό αριθμό κ θα ισχύει ότι: $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_{\kappa-1} = \beta_{\kappa-1}$, $\alpha_\kappa = \beta_\kappa + 1$, $\alpha_{\kappa+1} = \alpha_{\kappa+2} = ... = 0$, $\beta_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+2} = ... = 9$

(iii) για κάποιο φυσικό αριθμό κ θα ισχύει ότι: $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_{\kappa-1} = \beta_{\kappa-1}$, $\beta_\kappa = \alpha_\kappa + 1$, $\beta_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+2} = ... = 0$, $\alpha_{\kappa+1} = \alpha_{\kappa+2} = ... = 9$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν δεν συμβαίνει το (i) τότε θα συμβαίνει το (ii) ή το (iii).

Έστω ότι δεν συμβαίνει το (i). Αφού οι παραστάσεις είναι διαφορετικές θα υπάρχει ελάχιστος φυσικός κ για τον οποίο $\alpha_\kappa \neq \beta_\kappa$.

Περίπτωση 1: $\alpha_\kappa > \beta_\kappa$

Τότε έχουμε: $\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}} \geq \frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa} \geq \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa}$ και

$$\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\beta_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}} \leq \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{9}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{9}{10^{\kappa+n}} = \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) < \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa}$$

Άρα: $\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\beta_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}} < \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa} \leq \frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}$

Οπότε, επειδή υπάρχουν τα $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\beta_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right)$

ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) \leq \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa} \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right)$ (1)

Επειδή, $\alpha_0\alpha_1\alpha_2... = \beta_0\beta_1\beta_2...$ από την επιλογή του κ προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\beta_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) \quad (2)$$

Αν υπάρχει κάποιο $\kappa+1 \leq i$ ώστε $\beta_i < 9$ και ονομάσουμε $\beta = 9-\beta_i > 0$, τότε έχουμε:

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) \leq \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10^{\kappa+1}}+\frac{9-\beta}{10^i}+...+\frac{9}{10^{\kappa+n}}\right) =$$
$$= \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa}-\frac{\beta}{10^i} < \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa}$$

Άτοπο από την (1).

Άρα $\beta_{\kappa+n} = 9$ για κάθε $n = 1,2,...$

Αν για κάποιο $i > 0$ είναι $\alpha_{\kappa+i} > 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) > \frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}$

Όμως $\alpha_\kappa > \beta_\kappa$ άρα $\alpha_\kappa \geq \beta_\kappa + 1$. Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}+...+\frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) > \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\frac{1}{10^\kappa}$.

Άτοπο από την (1). Άρα $\alpha_{\kappa+n} = 0$ για κάθε $n = 1,2,...$

Επειδή, για κάθε $n > 0$ είναι $\alpha_{\kappa+n} = 0$ τότε τότε $\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa... = \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_{\kappa-1}\alpha_\kappa$

Οπότε $\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) = \frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}$ (3)

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10^{\kappa+1}}+...+\frac{9}{10^{\kappa+n}}\right) = \frac{9}{10^\kappa}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10^n}\right) = \frac{9}{10^\kappa}\frac{1}{9} = \frac{1}{10^\kappa}$ (4)

Από τις σχέσεις (3), (4) έχουμε: $\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa}-\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa}=\frac{1}{10^\kappa}\Leftrightarrow \alpha_\kappa=\beta_\kappa+1$

Άρα ισχύει η (ii)

Περίπτωση 2: $\alpha_\kappa<\beta_\kappa$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ισχύει η (iii)

Μετατροπή περιοδικών δεκαδικών παραστάσεων σε ρητό κλάσμα

Η δεκαδική του παράσταση ενός αριθμού x λέγεται περιοδική όταν είναι της μορφής

$$x=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa\overline{\beta_1\beta_2...\beta_n}=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa\beta_1\beta_2...\beta_n\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

Ισχυρισμός: Η δεκαδική παράσταση $x=1,4\overline{23}=1,42323...$ αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό.

Πράγματι: $x=1,4\overline{23}=1,42323...=1,4+0,023+0,00023+...=1,4+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+...=$

$$=1,4+\frac{23}{10^2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+...\right)=1,4+\frac{23}{10^2}\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{14}{10}+\frac{23}{100}\frac{10}{99}=\frac{1409}{990}$$

Πρόταση: *Αν ένας αριθμός x έχει περιοδική δεκαδική παράσταση τότε είναι ρητός*

Απόδειξη. Έστω $x=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa\overline{\beta_1\beta_2...\beta_n}=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa\beta_1\beta_2...\beta_n\beta_1\beta_2...\beta_n...$

Συμβολίζουμε $\beta_1\beta_2...\beta_n=\beta_1 10^{n-1}+\beta_2 10^{n-2}+...+\beta_n$

Τότε: $x=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa+\frac{\beta_1\beta_2...\beta_n}{10^{\kappa+n}}+\frac{\beta_1\beta_2...\beta_n}{10^{\kappa+2n}}+...=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa+\frac{\beta_1\beta_2...\beta_n}{10^n}\left(\frac{1}{10^\kappa}+\frac{1}{10^{\kappa+n}}+...\right)$

$$=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa+\frac{\beta_1\beta_2...\beta_n}{10^n}\frac{1}{10^\kappa}\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}}=\alpha_0,\alpha_1...\alpha_\kappa+\frac{\beta_1\beta_2...\beta_n}{10^n}\frac{10^{n-\kappa}}{10^n-1}$$

Οπότε ο x είναι ρητός.

Πρόταση: *Κάθε ρητός αριθμός έχει είτε πεπερασμένη δεκαδική παράσταση είτε περιοδική.*

Απόδειξη. Έστω ένας ρητός αριθμός $x=\frac{\alpha}{\beta}$ με $0\le x<1$. Τότε η διαδικασία της διαίρεσης $\alpha:\beta$ δίνει τη δεκαδική παράσταση του x. Κάθε βήμα της διαδικασίας αυτής δίνει ένα ακέραιο υπόλοιπο μεταξύ του 0 και του $\beta-1$. Οπότε αν η διαίρεση δεν έχει τερματιστεί σε β βήματα θα συνεχιστεί με κάποιο υπόλοιπο να επανεμφανίζεται. Οπότε τα αντίστοιχα ψηφία στο πηλίκο θα επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο. Συνεπώς η δεκαδική παράσταση ενός ρητού αν δεν είναι πεπερασμένη είναι περιοδική.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ξενόγλωσσες

[1] Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics Education, 60,* 359-381.

[2] Adler, J., & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 270-296.

[3] Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3), 237–254.

[4] Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes (Vol. 25, pp. 109-132). Washington, DC: Mathematical Association of America.

[5] Bagni, G.T. (2005), Infinite series from history to mathematics education, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, ISSN 1473 – 0111, http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/bagni.pdf.

[6] Ball D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, 93(4), 373-397.

[7] Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*(4), 449–466.

[8] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

[9] Ball, D, L. (1988). Knowledge and reasoning in mathemathical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education. Unpublished doctoral dissertation. East Lasing: Michigan State University; http://www-personal.umich.edu/~dball/books/. [Προσπελάστηκε 13/08/2015]

[10] Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). San Francisco: Jossey Bass.

[11] Ball D. L., & Bass, H. (2000). Intervweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

[12] Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4th ed.)* (pp. 433-456). San Francisco: Jossey Bass.

[13] Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis, & E. Simmt (Eds.), Proceedings of the the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

[14] Ball, D. L., Hill, H. C, & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *30*(3), p. 14–17, 20–22, 43–46.

[15] Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany. Retrieved 15 May 2011 from www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/ BzMU2009-Inhalt-fuer-Homepage.htm

[16] Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133–180.

[17] Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of empirical literature.* Washington, DC: Mathematics Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics.

[18] Bell, C. A., Wilson, S. M., Higgins, T., & McCoach, D. B. (2010). Measuring the effects of professional development on teacher knowledge: The case of developing mathematical ideas. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 479-512.

[19] Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*, (W. Mays, trans.) Reidel. Dordrechet (0riginally published 1965).

[20] Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 2, 73-80.

[21] Biggs, J., & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. In H. Rowe (Ed.) *Intelligence, Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). New Jersey Laurence Erlbaum Assoc.
[22] Biggs, J. (1994). Modes of Learning, Forms of Knowing, and Ways of Schooling, in A. Demetriou, M. Shayer & A. Efklides (Eds.) *Neo-Piagetian Theories of Cognitive Development*, Routledge, London, p.31-51.
[23] Bills, L., & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of the least upper bound. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, 104-111.
[24] Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 301–309.
[25] Blömeke, S., & Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: a review of the state of research. *ZDM, 44*(3), 223–247.
[26] Bolzano, B. (1950). *Paradoxes of the infinite* (translated from the German of the posthumous edition by Fr. Prihonsky and furnished with a historical introduction by Donald A. Steele), Routledge & Paul, London.
[27] Brophy, J. (1986). Teaching and learning mathematics: Where research should be going. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(5), 323-346.
[28] Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématique, Rech*erches en didactique des mat*é*matiques* 2, 164-197.
[29] Brousseau, G. (1984). The Crucial Role of the Didactical Contract in the Analysis and Construction of Situations in Teaching and Learning Mathematics, in H. Steiner (Ed.) Theory of Mathematics Education, Paper 54, Institut fur Didaktik der Mathematik der Universitat Bielefeld, 110-119.
[30] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*: didactiques des mathématiques, 1970-1990, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield (Trans.), Kluwer, Dordrecht.
[31] Brown, J., Collins A., & Duguid P. 1989: Situated Cognition and the Culture of Learning, Educational Researcher 18 (1), 32-41.
[32] Bruckmaier, G., Krauss, S., Blum, W., & Leiss, D. (2016). Measuring mathematics teachers' professional competence by using video clips (COACTIV video). *ZDM Mathematics Education, 48*(1–2), 111–124.
[33] Bruner, J. 1966: *Towards a Theory of Instruction*, Harvard University Press, Cambridge.
[34] Burton, L. 1995: Moving Towards a Feminist Epistemology of Mathematics, Educational Studies in Mathematics 28 (3), 275-291.
[35] Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 48*, 168-193.
[36] Byers W. (2007). *How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
[37] Charalambous, C. (2010). Mathematical Knowledge for Teaching and Task Unfolding: An Exploratory Study. *The Elementary School Journal, 110*(3), 247–278.
[38] Charalambous, C. Y., & Hill, H. C. (2012). Teacher knowledge, curriculum materials, and quality of instruction: Unpacking a complex relationship. *Journal of Curriculum Studies, 44*, 443-466.
[39] Chevellard, Y. 1985: La Transposition Didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.
[40] Chick, H. (2009). Choice and Use of Examples as a Window on Mathematical Knowledge for Teaching. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 26–30.
[41] Cohen, D., Raudenbush, S., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*(2), 1–24.
[42] Coleman, J., Hopkins, J., Campbell, E., Hobson, C., McPartland, J., Mood, A., Weinfeld, F., & York, R. (1966). *Equality of Educational Opportunity*. U.S. Department of Health, Education, and Welfare, National Center for Educational Statistics.
[43] Conference Board of Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence RI and Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
[44] Conference Board of Mathematical Sciences. (2012). *The mathematical education of teachers II*. Providence RI and Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
[45] Copur-Gencturk, Y., & Lubienski, S. T. (2013). Measuring mathematical knowledge for teaching: a longitudinal study using two measures.*Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 211–236.
[46] Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
[47] Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. Actes du Cinquième Collque du Group Intenrationale PME, Grenoble, 322-326.

[48] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

[49] Davis, R. B. (1983). Complex Mathematical Cognition. In H. P. Ginsburg (Ed.) *The Development of Mathematical Thinking*, Academic Press, New York, 254-290.

[50] Davis, R. B., (1988), 'The Interplay of Algebra, Geometry, and Logic', *Journal of Mathematical Behavior*, **7,** 9–28.

[51] Dedekind, R. (1888) *Was Sind und was sollen die Zahlen?* In Dedekind (1963) *Essays on the Theory of Numbers,* W. Beman (tr.) Dover. New York.

[52] DeMarois, P., & Tall, D. (1999). Function: Organizing principle or cognitive root? In O. Zaslavsky, (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 2*, 257-264.

[53] Dewey, J. (1902). *The child and the curriculum.* Chicago, IL: The University of Chicago Press.

[54] Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: D. C. Heath.

[55] Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*, Hutchinson Educational: London.

[56] Dorier, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 175-197.

[57] Dreyfus T. (2002) Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht.

[58] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. In Univ. of London Inst. of Educ. (Eds.), *Proceedings of the 10th PME International Conference*, 152–158.

[59] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference, 1*, 27-34.

[60] Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp.95-123), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[61] Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M. A., & Brown, A., (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS based analysis: Part 1, *Educational Studies in Mathematics,* 58, 335-359.

[62] Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A., (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2, *Educational Studies in Mathematics, 60,* 253–266.

[63] Edwards, B. (1997). An undergraduate student's understading and use of mathematical definitions in real analysis. In J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmantie, & A. E. Dossey (Eds.), *Proceedings of the nineteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17-22). Colombus, OH: The ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Enviromental Education.

[64] Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 15-25.

[65] Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R.G., Brown, C.A, Jones, D., & Agard, P.C. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Reasearch in Mathematics Education,* 24(1), 8-40.

[66] Even, R., & Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics: the 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

[67] Ferguson, P., & Womack, S. T. (1993). The impact of subject matter and education coursework on teaching performance. *Journal of Teacher Education, 44*, 155– 163.

[68] Fernández, S., & Figueiras, L. (2014). Horizon content knowledge: Shaping MKT for a continuous mathematical education. *REDIMAT, 3*(1), pp. 7-29.

[69] Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3–40.

[70] Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel Publishing, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[71] Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). 'Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?' *Educational Studies in Mathematics* 12, 491-512.

[72] Fischbein, E. (2001), Tacit models and infinity, *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 48 (2-3), 309-329.

[73] Forgaz, H. J., & Leder, G. C. (1998). Affective dimensions and tertiary mathematics students. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference, 2*, 296-303.

[74] Fowler D. (1987). *The Mathematics of Plato's Academy.* Oxford University Press.

[75] Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung', in *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100: 25–50. Translated as 'On Sense and Reference' by M. Black in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, P. Geach and M. Black (eds. and trans.), Oxford: Blackwell, third edition, 1980.

[76] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

[77] Gherardi, S. (2012). *How to conduct a practice-based study: Problems and methods.* Northhampton, MA: Edward Elgar Publishing.
[78] Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of Chauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge. Mass.: MIT Press.
[79] Gray, E. M., & Tall, D. O. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Succesful Mathematical Thinking, In Furinghetti F. (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 72-79). *Assisi*,.Italy.
[80] Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141.
[81] Gray, E. M., & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematicsc, In van den Heuvel-Panhuizen, Marja, (Eds.), *Proccedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 65-72). Utrecht, The Netherlands.
[82] Gray, E. M., Pitta, D., Pinto, M. M. F., & Tall, D. O. (1999). Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1-3), 111-133.
[83] Greeno, J. (1983). Conceptual Entities. In D. Genter & A. L. Stevens (Eds.), *Mental Models*, 227-252.
[84] Guberman, R., & Gorev, D. (2015). Knowledge concerning the mathematical horizon: A close view. *Mathematics Education Research Journal, 27*(2), pp. 165-182.
[85] Guyton, E., & Farokhi, E. (1987). Relationships among academic performance, basic skills, subject matter knowledge, and teaching skills of teacher education graduates. *Journal of Teacher Education, 38*, 37–42.
[86] Harbison, R.W., & Hanushek, E. A. (1992). *Educational performance for the poor: Lessons from rural northeast Brazil.* Oxford, UK: Oxford University Press.
[87] Harel, G. (2000). Advanced mathematical thinking across the grades. Paper presented at the *22nd annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* – North American Chapter. Tucson, AZ.
[88] Harel, G., & Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.* MAA Notes (Vol. 25). Washington, DC: Mathematical Association of America.
[89] Harel, G., Selden, A., & Selden J. (2015). Advanced Mathematical Thinking: Some PME Perspectives (https://www.researchgate.net/publication/284079532_Advanced_mathematical_thinkingSome_PME_Perspectives)
[90] Harel, G., & Kaput, J. (1992). Conceptual entities in advanced mathematical thinking: The role of notations in their formation and use. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 82-94). Dordrechet, Kluwer Academic Publishers.
[91] Herbst, P., & Chazan, D. (2015). Using multimedia scenarios delivered online to study professional knowledge use in practice. *International Journal of Research and Method in Education, 38*(3), 272–287.
[92] Herbst, P., & Kosko, K. (2014). Mathematical knowledge for teaching and its specificity to high school geometry instruction. In J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (Eds.), Research trends in mathematics teacher education (pp. 23–45). New York, NY: Springer.
[93] Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.
[94] Hill, H. C. (2011a). The nature and effects of middle school mathematics teacher learning experiences. *Teachers College Record, 113*(1), 205–234.
[95] Hill, H. C. (2011b). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 25-47.
[96] Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., *et al.* (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*, 430-511.
[97] Hill, H. C., & Charalambous, C. Y. (2012). Teacher knowledge, curriculum materials, and quality of instruction: Lessons learned and open issues. *Journal of Curriculum Studies, 44*, 559-576.
[98] Hill, H. C., Umland, K., Litke, E., & Kapitula, L. (2012). Teacher quality and quality teaching: Examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education, 118*(4), 489–519.
[99] Hill, H. C., Kapitula, L., & Umland, K. (2011). A validity argument approach to evaluating teacher value-added scores. *American Educational Research Journal, 48*(3), 794–831.
[100] Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L., (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.
[101] Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, *42*(2), 371–406.

[102] Hill, H. C. (2007). Mathematical knowledge of middle school teachers: Implications for the No child left behind policy initiative. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 29*, 95–114.

[103] Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

[104] Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511.

[105] Hodgen J. (2011). Knowing and Identity: A situated Theory of Mathematics Knowledge in Teaching. In T. Rowland, K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching*, Mathematics Education Library (pp. 27-42). London: Springer.

[106] Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., & Lai, Y. (2016) "Making Progress on Mathematical Knowledge for Teaching," *The Mathematics Enthusiast*: Vol. 13 : No. 1 , Article 3. Available at: https://scholarworks.umt.edu/tme/vol13/iss1/3.

[107] Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics education*, 32(1), 4-27.

[108] Izsak, A., Jacobson, E., de Araujo, Z., & Orrill, C. H. (2012). Measuring mathematical knowledge for teaching fractions with drawn quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 391–427.

[109] Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constractivist enquiry.* London: The Falmer Press.

[110] Jencks, C., Smith, M., Acland, H., Bane, M. J., Cohen, D., Gintis, H., Heyns, B., & Michelson, S. (1972) *Inequality: A Reassessment of the Effect of Family and Schooling in America*. New York: Basic Books.

[111] Kang, W., & Kilpatrick, J . 1992: Didactic transposition in mathematics textbooks, For The Learning of Mathematics, 12 (1) p. 2-7.

[112] Katz M., & Tall D. (2012). The tension between intuitive infinitesimals and formal analysis. In Bharath Sriraman, (Ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education, (The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education 12),* pp. 71–90.

[113] Kersting, N. B., Givvin, K. B., Sotelo, F. L., & Stigler, J. W. (2010). Teachers' analyses of classroom video predict student learning of mathematics: further explorations of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education, 61*, 172– 181.

[114] Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R., & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal, 49*(3), 568–589.

[115] Kidron, I. and Vinner, S. (1983). Rational numbers and decimals at the senior high level: density and comparison, *Proceedings of the 7th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*: Israel, pp.301–306.

[116] Kidron, I., & Tall, D. (2014) *The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. Educational Studies in Mathematics,* 88,183-199.

[117] Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2013). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge: The role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education, 64*(1), 90–106.

[118] Kline, M. (1983). Euler and infinite series. Mathematics Magazine. 56 (5): 307-314.

[119] Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

[120] Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., Bunning, K., & Frykholm, J. (2007). The Problem-Solving Cycle: A model to support the development of teachers' professional knowledge. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 271–300.

[121] Koestler, A., (1964). The Act of Creation. Picador Pan Books, London.

[122] Kunter, M., Klusmann, U., Baumert, J., Voss, T., & Hacfeld, A. (2013). Professional competence of teachers: Effects on instructional quality and student development. *Journal of Educational Psychology, 105*(3), 805–820.

[123] Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

[124] Kwon, O.N., Cho, K., Ju, M.-K., & Shin, K. (2004). Category of students' justification an its relation to the structure of argumentations: An analysis of discourse in systems of linear differential equation. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference,* 1, 352.

[125] Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

[126] Li, L., & Tall, D. (1993). Constructing Different Concept Images of Sequences and Limits by Programming, In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 2, pp. 41-48). Tsukuba, Japan.
[127] Lin, F-L., & Cooney, T. (2001). *Making sense of mathematics teacher education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
[128] Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematacs: Teachears' understanding of fundamental mathematacs in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
[129] Mamolo, A., & Pali, R. (2014). Factors Influencing Prospective Teachers' Recommendations to Students: Horizons, Hexagons, and Heed, *Mathematical Thinking and Learning,* 16: 32-50.
[130] Marton, F., & Tsui, A. (Eds.). (2004). *Classroom discourse and the space for learning*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.
[131] Maracci, M. (2003). Difficulties in vector space theory: A compared analysis in terms of conceptions and tacit models. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox, (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 229-236.
[132] Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 135-161.
[133] Mamona, J. (1987). *Students' Interpretations of Some Concepts of Mathematical Analysis*. Ph. D. Thesis, University of Southampton.
[134] McCray, J. S., & Chen, J.-Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education, 26*, 291–307.
[135] McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584–615.
[136] McDiarmid, G. W., Ball, D. L., & Anderson, C. W. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject-specific pedagogy. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 193-206). Oxford: Peramon.
[137] McIntyre, R., & Smith D.W. (1989). Theory of Intentionality. In J. N. Mohanty and W. R. McKenna (Eds)., *Husserl's Phenomenology: A Textbook.* pp. 147-179. Washington, D. C.: Center for Advanced Research in Phenomenology and University Press of America.
[138] Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13*, 125–145.
[139] Moore, A.W. (1995). *The Infinite,* 2nd ed. Routledge & Paul, London.
[140] Moreno, M., & Azcárate, C. (1996). Teaching differential equations to chemistry and biology students: An overview on methodology of qualitative research. A case study. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 4,* 11-18.
[141] Mullens, J. E., Murnane, R. J., & Willett, J. B. (1996). The contribution of training and subject matter knowledge to teaching effectiveness: A multilevel analysis of longitudinal evidence from Belize. *Comparative Education Review, 40*, 139–157.
[142] Nardi, E. (1999). Using semi-structured interviewing to trigger university mathematics tutors' reflections on their teaching practices. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 3*, 321-328.
[143] National Commission on Teaching & America's Future (1996). What matters most: Teaching for America's future. New York: The National Commission on Teaching & America's Future.
[144] Newton I. (1727). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, tr. A. Motte, rev. F. Cajori, Berkeley: University of California Press, 1934.
[145] Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in mathematics*, 33, 203-233.
[146] Pegg, J. (2003). Assessment in Mathematics: a developmental approach. In J. M. Royer (Ed.) *Advances in Cognition and Instruction* (pp. 227-259). New York: Information Age Publishing Inc.
[147] Pegg, J., & Tall, D. O. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM),* 37 (6), 468-475.
[148] Peirce, C. S. (1986). On the nature of signs, MS 214: Winter-Spring 1873', in Fisch, M. H. et al. (Eds) *Writings of Ch. S. Peirce. A Chronological Edition,* Vol. 3, Bloomington, Indiana University Press, 3 pp. 1842-78.
[149] Peirce, C. S. (1906). 'Prolegomena to an apology for pragmatism', *The Monist*, 16, pp. 492-546.
[150] Peirce, C. S. (1931–1958). *Collected papers* (CP, Vols. 1–8). Cambridge: Harvard University Press.
[151] Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology* (W. Mays trans.) London: Routledge & Kegan Paul.
[152] Rockoff, J. E., Jacob, B. A., Kane, T. J., & Staiger, D. O. (2011). Can you recognize an effective teacher when you recruit one? *Education Finance and Policy, 6*(1), 43– 74.

[153] Poincaré, H., (1913), *The Foundations of Science* (translated by Halsted G.B.), The Science Press, New York (page references as in University Press of America edition, 1982).

[154] Poincaré, H. (1963). *Mathematics and science: Last essays* (John W. Bolduc, trans.), Dover, New York.

[155] Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: University of Chicago Press.

[156] Presmeg, N. C. (1994). The role of visually mediated processes in classroom mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: International Reviews on Mathematics Education*, 26(4), 114-117.

[157] Presmeg, N., Radford, L., Roth, W-M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*, Kaiser, G. (Ed), Springer Open, ICME 13 Hamburg.

[158] Radford, L. (2008). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. PNA, 3(1), 1–18.

[159] Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (2008). *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam: Sense Publishers.

[160] Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 51-73.

[161] Ricouer, P. (1976). *Interpretation Theory: Discourse and the Surplus of Meaning*. The Texas Christian University Press.

[162] Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

[163] Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. In T. Rowland & C. Morgan, (Eds.) *Research in Mathematics Education* (Vol. 2). London: BSRLM.

[164] Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

[165] Rowland, T. (2013). The knowledge quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *Sisyphus-Journal of Education, 1*(3), 15–43.

[166] Ρουσόπουλος, Γ. (1991). *Επιστημολογία των μαθηματικών, Αναλυτικο-Αναφορικότητα και νομιμοποίηση στα νεότερα μαθηματικά*, Gutenberg, Αθήνα.

[167] Russell, B. (1914). *Our Knowledge of the external World as a Field for Scientific Mathod in Philosophy*, George Allen & Unwin, London.

[168] Ryle, G. (1949). *The Concept of mind*, Hutchinson, London.

[169] Sabena, C. (2008). On the Semiotics of Gestures in *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture*, Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (Eds), pp. 19-38. Rotterdam: Sense Publishers.

[170] Saderholm, J., Ronau, R., Brown, E. T., & Collins, G. (2010). Validation of the Diagnostic Teacher Assessment of Mathematics and Science (DTAMS) instrument. *School Science and Mathematics, 110*(4), 180–192.

[171] Sáenz-Ludlow, A., & Kadunz, G. (2016). Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematics concepts. Rotterdam: Sense Publishers.

[172] Saussure, F. (1959). *A Couse in General Linguistics*, trans. Wade Baskin, Philosophical Library, New York.

[173] Schilling, S. G., & Hill, H. C. (2007). Assessing measures of mathematical knowledge for teaching: a validity argument approach. *Measurement, 5*(2–3), 70–80.

[174] Schilling, S. G., Blunk, M., & Hill, H. C. (2007). Test validation and the MKT measures: Generalizations and conclusions. *Measurement, 5*, 118-128.

[175] Selden, J., Mason, A., & Selden, A., (1989), 'Can Average Calculus Students Solve Non-routine Problems?' *Journal of Mathematical Behavior,* **8** (2), 45–50.

[176] Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123-151.

[177] Selden, A., & Selden, J. (Guest Eds.). (2005). Advanced mathematical thinking [Special Issue]. Mathematical Thinking and Learning, 7(1).

[178] Senk, S. L., Tatto, M. T., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R., & Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: An international comparative study. *ZDM, 44*(3), 307–324.

[179] Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. In G. Vergnaud, J. Rogalski, M. Artigue, (Eds.), *Proccedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 151-158). Paris, France.

[180] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflactions on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
[181] Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
[182] Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565–613.
[183] Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
[184] Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.
[185] Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1-22.
[186] Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 10(3), 24-36.
[187] Sierpinska, A. (1996) . *Understanding in Mathematics.* The Falmer Press, London.
[188] Silver, E. A., Clark, L. M., Ghousseini, H. N., Charalambous, C. Y., & Sealy, J. T. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4–6), 261–277.
[189] Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499–511.
[190] Skarga, B. (1989). *Granice historycznosci*. Warsaw, Poland, Panstwowy Instytut Wydawniczy.
[191] Speer, N. M., & Wagner, J. F. (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 530–562.
[192] Skemp, R. (1976). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.
[193] Skemp, R. (1979). *Intelligence, Learning and Action*, Wiley, Chichester.
[194] Star, S. L., & Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, "translations" and boundary objects: Amateurs and professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907–39. *Social Studies of Science, 19*, 387–420.
[195] Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.
[196] Stockton, J., & Wasserman, H. (2017). Forms of Knowledge of Advanced Mathematics for Teaching, *The Mathematics Enthusiast:* Vol. 14 : No. 1 , Article 30. Available at: https://scholarworks.umt.edu/tme/vol14/iss1/30
[197] Sternberg, R. J. (1996). What is mathematical thinking? In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp. 303-318). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
[198] Sullivan, P., & Wood, T. (Eds.) (2008). *International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 1: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
[199] Szábo, Árpád. (1958) " 'Deiknymi' als Mathematischer Terminus fur 'Beweisen' ", *Maia* N.S. **10** pp. 1–26 as cited by Imre Lakatos (1976) in *Proofs and Refutations* p.9. (John Worrall and Elie Zahar, eds.) Cambridge University Press.
[200] Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.
[201] Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.
[202] Tall, D. O. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics*. Ph.D. Thesis in Education, University of Warwick.
[203] Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics. (Learning in doing: Social, Cognitive & Computational Perspectives). Cambridge University Press. New York.
[204] Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., et al. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education*, 1(1), 81-104.
[205] Tall, D., & Schwarzenberger, L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Published in Mathematics teaching*, 82, 44-49.
[206] Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 151–169.

[207] Tall D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81-104.

[208] Tall, D. (2007). Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education, *Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California, USA.

[209] Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

[210] Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 122-127). New York: Macmillan.

[211] Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). New York: Springer.

[212] Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Third handbook of international research in mathematics education* (pp. 435–461). New York: Taylor & Francis.

[213] Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[214] Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education, *Notices of the American Mathematical Society*, 37 (7), 844-850.

[215] Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[216] van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*, Academic Press, Orlando.

[217] Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language*, A. Kozulin, (Ed. and Trans.), Cambridge, MA.: MIT Press.

[218] Vinner, S., & Kidron, I. (1985). The concept of repeating and non repeating decimals at the senior high level. L. Streefland (Ed.) *Proceedings of the 9th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference*, (Vol. 1, pp. 357–361). Noorwijkerhout, The Netherlands.

[219] Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 149-156.

[220] Yeates, L. B. (2004). *Thought Experimentention: A Cognitive Approach, Graduate Diploma in Arts* (By Research) dissertation, University of New South Wales.

[221] Youngs, P., & Qian, H. (2013). The influence of university courses and field experiences on Chinese elementary candidates' mathematical knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education, 64*(3), 244–261.

[222] Wasserman, N. (2016). Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, 16*(1), 28-47.

[223] Wasserman, N. (2015). Unpacking teachers' moves in the classroom: Navigating micro- and macro-levels of mathematical complexity. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1), pp. 75-93.

[224] Wasserman, N., & Stockton, J. (2013). Horizon content knowledge in the work of teaching: A focus on planning. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), pp. 20-22.

[225] Whitehead, A. 1932: The Aims of Education and Other Essays, Williams & Norgate, London.

[226] Zahavi D. (2003). *Husserl's Phenomenology*. Standford University Press, Standford, California.

[227] Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning,* 12(4), 263–281.

[228] Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8–13.

[229] Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 165– 182.

[230] Zoitsakos, S., Zachariades, Th., & Sakonidis, Ch. (2013). Secondary mathematics teachers' understanding of the infinite decimal representation of a rational number. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.) *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 441- 448). Kiel, Germany: PME.

[231] Zoitsakos, S., Zachariades, Th., & Sakonidis Ch. (2015). Secondary mathematics teachers' content knowledge for teaching in two contexts: Interpreting versus managing didactically students' understandings. Konrad Krainer; Naďa Vondrová. CERME 9 – Ninth Congress of the European *Society for Research in Mathematics Education*, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp. 3296-3302, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Ελληνόγλωσσες

[232] Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. Γ' έκδοση. Νεφέλη. Αθήνα.

[233] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ (2017). Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής, Β΄ Μέρος. ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

[234] Αριστοτέλους, (1972). *Φυσικής Ακροάσεως Γ.΄*, Μετάφραση Κ.Δ Γεωργούλη, Εκδ. Παπαδήμα.

[235] Αριστοτέλης, (1973). *Φυσική Ακρόασις*, W.D. Ross (Ed.), Oxford Classical Texts, Oxford Un. Press, London.

[236] Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος Σ. (2016). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[237] Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος Σ. (2016). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο Εκπαιδευτικού.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[238] Βλάμος, Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2016). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[239] Βλάμος, Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2016). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο Εκπαιδευτικού.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[240] Γιαννακούλιας Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός- Η Ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.Χ εως και τον 19ο αιώνα.* Συμμετρία. Αθήνα.

[241] Γιαννόπουλος, Απ. (2008). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ. Τμήμα Μαθηματικών. Αθήνα. http://opencourses.uoa.gr/modules/document/index.php?course=MATH3&openDir=/55891766YD84

[242] Γιαννόπουλος, Απ. (2009). Απειροστικός Λογισμός Ι. Τμήμα Μαθηματικών. Αθήνα. https://eclass.uoa.gr/modules/document/index.php?course=MATH130&openDir=/52b208cbQJT9/4acf909d890o

[243] Εξαρχάκος Θ. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία" – Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό.* Τόμος Ι. Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.). Αθήνα.

[244] Enriques, F., & Mazziotti, M. (1982). *Οι θεωρίες του Δημόκριτου του Αβδηρίτη – Κείμενα και Υπομνήματα*, Μετάφραση: Παπαϊωάνου Α. Α., Διεθνές Δημοκρίτειο Ίδρυμα, Ξάνθη.

[245] Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης., Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2016). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[246] Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης., Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2016). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[247] Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2016) *Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[248] Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2016) *Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

[249] Μαμωνά, Γ. (1987). Διαισθητικές προσεγγίσεις της ευθείας των πραγματικών αριθμών από τους μαθητές. Πρακτικά 4ου – 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ (1987-1988). σ. 283-290.

[250] Marcus, S. (1986). *Το παράδοξο*, Πνευματικός, Αθήνα.

[251] Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., & Γιανακούλιας, Ε. (2000). *Απειροστικός Λογισμός*, Συμμετρία. Αθήνα.

[252] Παπαδημητράκης Μ. (2015). Ανάλυση. Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής. Τμήμα Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Κρήτης. http://fourier.math.uoc.gr/~papadim/analysis.pdf.

[253] Παπαδημητράκης, Μ. (2006) Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[254] Πατρώνης, Τ., & Σπανός, Δ. (1996). *Σύγχρονες θεωρήσεις και έρευνες στη μαθηματική παιδεία.* Αθήνα, Πνευματικός.

[255] Πηχωρίδης, Σ. (2006). Απειροστικός Λογισμός, Τμήμα Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

[256] Spivak, M. (2010). *Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

[257] Frege, G. (1990). *Τα θεμέλια της αριθμητικής*, Νεφέλη, Αθήνα, 1884.