ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης δύο μαθητών Β’ δημοτικού»

Γκαβογιάννη Αθηνά

Α.Μ.: 217321

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

κ. Μπούφη Ανδρονίκη

ΑΘΗΝΑ

Σεπτέμβριος 2019

Ευχαριστίες

Θα ήταν μεγάλη μου παράλειψη εάν ξεκινούσα την παρουσίαση της διπλωματικής μου δίχως να ευχαριστήσω πρώτα όλους εκείνους που με βοήθησαν στην εκπόνησή της καθώς και στην υλοποίησή της. Έτσι λοιπόν ευχαριστώ θερμά:

- Την επιβλέπουσά μου, κυρία Μπούφη Ανδρονίκη για τη συνεχή στήριξη και ανατροφοδότηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας, καθώς και τις χρήσιμες συμβουλές της στην συγγραφή της εργασίας.
- Το Δημοτικό Σχολείο και κυρίως τον υπέροχο και φιλόξενο διευθυντή καθώς και τη δασκάλα της τάξης, η οποία μου άνοιξε την τάξη της και με καλοδέχτηκε σαν να με ήξερε χρόνια.
- Τους δύο μαθητές με τους οποίους συνεργάστηκα, Αλίκη και Φιλίπε, και χάρη σ' αυτούς κατάφερα να ανακαλύψω κι εγώ πολλά νέα πράγματα, καθώς επίσης και να συνειδητοποιήσω κάποια άλλα που είχα διαβάσει.
- Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξή τους σε όλη την περίοδο της υλοποίησης και της συγγραφής της εργασίας.

Περίληψη

Η μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη θεωρείται συχνά απλή υπόθεση, στηριγμένη καθώς δείχνουν και τα βιβλία της Β’ δημοτικού σε μία ακολουθία συγκεκριμένων τυποποιημένων βημάτων που δίνεται από κάποια αυθεντία. Ωστόσο, στην πράξη αποδεικνύεται αρκετά δύσκολο εγχείρημα τόσο από την πλευρά του εκπαιδευτικού όσο και από την πλευρά του μαθητή. Η παρούσα εργασία αφορά σε μία απόπειρα στήριξης δύο μαθητών της Β΄ δημοτικού στην ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης. Οι δύο μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό από τη δασκάλα τους. Μετά από μία αρχική αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών διαπιστώθηκε η δυσκολία κατανόησης του αριθμού ως σύνθετη μονάδα. Θεωρώντας ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη προϋποθέτει την ικανότητα συντονισμένης διαχείρισης σύνθετων μονάδων, η διδακτική παρέμβαση που αποτελεί αντικείμενο αυτής της εργασίας εστίασε στην προώθηση αυτής ακριβώς της ικανότητας. Μέσα από τον απολογισμό των συναντήσεων που πραγματοποιήθηκαν με τους μαθητές, η εργασία φέρνει στο προσκήνιο τις δυνατότητες αλλά κυρίως τους περιορισμούς κατά την αξιοποίηση μιας σειράς δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να είχαν ενθαρρύνει τη μάθηση των δύο μαθητών.

Λέξεις κλειδιά: προσθετική και πολλαπλασιαστική σκέψη, σύνθετες μονάδες, συντονισμός, επίπεδα μάθησης

Abstract

The transition from additive to multiplicative reasoning is considered to be a simple affair, if this reasoning is promoted by a sequence of specific standardized steps given by some authority, as it happens in second grade textbooks. In practice though, it is a very demanding task for both teachers and students. This dissertation refers to my attempt in supporting two second graders in their development of multiplicative reasoning. Their classroom teacher had already taught the topic of multiplication, based on their textbooks. An initial assessment of students’ knowledge showed that they were experienced difficulties in understanding number as a composite unit. By considering that multiplicative reasoning requires the ability to coordinate composite units, the teaching intervention, which is the object of this study, focused on promoting this ability. By reflecting on my meetings with the students, this study brings to the fore the affordances but mainly the constraints, in using a set of instructional activities, that could have fostered student's learning.

Key-words: additive and multiplicative reasoning, composite units, coordination, learning levels

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία αφορά σε μία απόπειρα ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης δύο μαθητών της Β΄ δημοτικού όχι με τον παραδοσιακό τρόπο, όπου κυριαρχείται στα βιβλία και τις σχολικές αίθουσες, με πρωτεύοντα σκοπό την αποστήθιση του πίνακα της προπαίδειας και την επιβολή κάποιων έτοιμων τεχνικών, αλλά με έναν τρόπο που βασίζεται στις εμπειρίες και το επίπεδο των μαθητών και τους στηρίζει σε κάθε μαθησιακή τους φάση. Αυτού του είδους η προσπάθεια είναι σύμφωνη και με νέες πρακτικές διδασκαλίας, όπου επιδιώκεται να μάθουν οι μαθητές Μαθηματικά λύνοντας προβλήματα με τους δικούς τους τρόπους κι όχι εφαρμόζοντας κάποιες τεχνικές που η διδασκαλία τους επιβάλει να εφαρμόζουν (Tzur, Johnson, McClintock, Kenney, Xin, Si, Woordward, Hord, & Jin, 2013).

Η επιλογή αυτού του θέματος είναι αποτέλεσμα πολλών ερεθισμάτων, με πρώτο την επίσκεψη ενός δημοσίου σχολείου στην Αθήνα και την επαφή με μαθητές της Β΄ τάξης στα πλαίσια ενός προπτυχιακού μαθήματος με τίτλο «Βασικά Ζητήματα Διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο Ι- Εργαστήριο Μαθηματικών». Αυτή η πρώτη επαφή με τα παιδιά και τη σκέψη τους πάνω σε διάφορα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μου προκάλεσε το ενδιαφέρον να αναζητήσω περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και την εξέλιξή του στα πρώτα μαθησιακά βήματα των μαθητών.

Έτσι, υπό την καθοδήγηση πάντοτε και της επιβλέπουσάς μου κυρίας Μπούφη, άρχισα να διαβάζω άρθρα των τελευταίων δεκαετιών που μιλούν για την πολλαπλασιαστική σκέψη και τη δυσκολία που παρουσιάζει η προώθησή της, καθώς προϋποθέτει την οικοδόμηση και τον συντονισμό σύνθετων μονάδων, που είναι το κλειδί της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Steffe & Cobb, 1994; Ulrich, 2015). Στη συνέχεια, η μελέτη μου έφερε στο φως τη θεμελιώδη σημασία που έχει η πολλαπλασιαστική σκέψη όχι μόνο στην ανάπτυξη των εννοιών και διαδικασιών του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αλλά και στην αντιμετώπιση κλασματικών, αναλογικών και αλγεβρικών καταστάσεων (Larson, 2016) με αποτέλεσμα να τονώσει την επιθυμία μου να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα.

Έπειτα, κοιτάζοντας ενδελεχώς τα σχολικά εγχειρίδια της Β΄ τάξης και το υλικό που παρέχεται μέσα σ’ αυτά προκειμένου οι μαθητές να αναπτύξουν την πολλαπλασιαστική τους σκέψη οδηγήθηκα στο συμπέρασμα ότι ενώ υπάρχει πλούσιο υλικό, δυστυχώς δεν παρουσιάζει αλληλουχία και συνοχή. Δεν μπορεί να στηρίξει με κατάλληλο τρόπο την πορεία μάθησης των μαθητών μιας τάξης και δεν παρέχει εφόδια στον εκπαιδευτικό, προκειμένου να χειριστεί και να αξιοποιήσει το υλικό με αποτελεσματικό τρόπο.

Έτσι λοιπόν, προσμετρώντας όλα αυτά τα ερεθίσματα, αποφάσισα να ασχοληθώ με την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης δύο μαθητών της Β΄ δημοτικού, ένα αγόρι μέτριου μαθησιακού επιπέδου κι ένα κορίτσι χαμηλού μαθησιακού επιπέδου, προκειμένου να μελετήσω την εξέλιξη της σκέψης τους καθώς θα τους ενθάρρυνα να δημιουργούν και να συντονίζουν σύνθετες μονάδες κατά την ενασχόλησή τους με κατάλληλα προβλήματα. Η επιλογή μόνο δύο μαθητών έγκειται στο γεγονός ότι ήθελα να περιορίσω όσο το δυνατόν το βαθμό πολυπλοκότητας που ενδεχομένως να αντιμετώπιζα σε μία γεμάτη σχολική αίθουσα, αλλά απ’ την άλλη ήθελα να βιώσω και τη στήριξη που μπορεί να παρέχει ο ένας μαθητής στον άλλον, αποφεύγοντας να ασχοληθώ μονάχα με ένα παιδί. Το όλο εγχείρημα δεν ήταν καθόλου εύκολη υπόθεση, γεγονός που με έκανε να συνειδητοποιήσω πόσο δύσκολο είναι να ξεφύγει κανείς από τα παραδοσιακά πλαίσια με τα οποία έχει γαλουχηθεί και στα οποία τον σπρώχνει το σημερινό ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, με ό,τι συνεπάγεται αυτό.

Σκοπός των συναντήσεών μου με τα παιδιά ήταν μέσα από την επιλογή προβλημάτων που θα ανταποκρίνονταν στο γνωστικό τους επίπεδο, να τα στηρίξω να αρχίσουν να διακρίνουν τις ποσότητες που υπεισέρχονται σε αυτά και προοδευτικά να είναι σε θέση, αξιοποιώντας τις υφιστάμενες σχέσεις των ποσοτήτων, να αιτιολογούν μέσα από την συντονισμένη αρίθμηση σύνθετων μονάδων, τις απαντήσεις στα ερωτήματα των προβλημάτων αυτών.

Αρχικός σκοπός της εργασίας μου, με γνώμονα τη βιβλιογραφία που είχα μελετήσει και τα μεταπτυχιακά μαθήματα που είχα παρακολουθήσει ήταν να απαντήσω στα εξής δύο ερωτήματα:

- Μέσα από ποια πορεία μπορεί να αναπτυχθεί η πολλαπλασιαστική σκέψη στους μαθητές;
- Με ποιο τρόπο μπορώ να στηρίξω τους μαθητές μου σ' αυτήν την πορεία ανάπτυξης, παρεμβαίνοντας με τρόπο που δεν θα παρακωλύει την εξέλιξη της δικιάς τους σκέψης;

Έχοντας ολοκληρώσει τις συναντήσεις μου με τους μαθητές κι αποφασίζοντας να εκθέσω την εμπειρία μου από αυτές, διαπίστωσα ότι τα στοιχεία μου δεν ήταν αρκετά για να μπορέσω να δώσω πλήρεις απαντήσεις στα δύο αυτά ερωτήματα. Στο πείραμα σχεδιασμού που ήθελα να πραγματοποιήσω υπήρχαν πολλές δοκιμές που δεν ήταν αναγκαίες για την καλλιέργεια της πολλαπλασιαστικής σκέψης των μαθητών και σφάλματα από την πλευρά μου. Η μεγαλύτερη δυσκολία μου, είχε σχέση με την επιλογή των κατάλληλων προβλημάτων και τη δημιουργία ενός ευνοϊκού περιβάλλοντος μάθησης για τις δραστηριότητες των μαθητών. Άλλοι ανασχετικοί παράγοντες ήταν ο σχετικά μικρός αριθμός συναντήσεών μου με τους μαθητές (12 συναντήσεις), καθώς και οι προηγούμενες γνώσεις αλλά και τα παραδοσιακά «πιστεύω» των μαθητών για τα Μαθηματικά. Ως εκ τούτου, σε συνδυασμό και με μία κριτική ανασκόπηση πρόσφατης σχετικής βιβλιογραφίας, πείστηκα ότι τα στοιχεία που είχα συλλέξει θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν περισσότερο για να φανούν οι δικές μου ευκαιρίες μάθησης παρά εκείνες που πρόσφερα στους μαθητές. Εστιάζει λοιπόν, η εργασία μου στα σημεία εκείνα από την επαφή μου με τους δύο μαθητές που δείχνουν με ποιον τρόπο και γιατί μία δασκάλα μπορεί να αποκλίνει από τον σκοπό της να προωθήσει την πολλαπλασιαστική σκέψη βασισμένη στις δυνατότητες των μαθητών της.

Στο πρώτο κεφάλαιο, τοποθετείται το θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο δομήθηκε η εργασία μου. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται μία σύντομη ματιά στα βιβλία της Β΄ δημοτικού σχετικά με τον τρόπο που στηρίζουν ή δε στηρίζουν τους μαθητές στη μετάβασή τους από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη. Έπειτα, ακολουθεί το τρίτο κεφάλαιο που αφορά στην παρουσίαση κάποιων σημείων της μαθησιακής πορείας των δύο μαθητών, εστιάζοντας κυρίως στις δυσκολίες που αντιμετώπισα ως εκπαιδευτικός προσπαθώντας να ενθαρρύνω τη μάθησή τους με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Εν κατακλείδι, παρατίθενται τα συμπεράσματα και οι προτάσεις για περαιτέρω μελέτη.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Καθώς η εργασία μου εστιάζει στις δυσκολίες που συνάντησα στην προσπάθειά μου να ενθαρρύνω τη μετάβαση δύο μαθητών της Β΄ δημοτικού από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη μέσα από την υιοθέτηση μιας διδακτικής προσέγγισης που προσαρμόζεται στη σκέψη των μαθητών, το θεωρητικό πλαίσιό μου έχει δύο συνιστώσες. Η πρώτη αφορά στις βάσεις που στηρίζουν θεωρητικά τη διδακτική μου προσέγγιση. Η δεύτερη αφορά στην αριθμητική σκέψη των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων και ειδικά στις διαφορές που παρουσιάζουν οι νοητικές λειτουργίες της προσθετικής και πολλαπλασιαστικής σκέψης.

2.1. Η επίδραση του Piaget στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Όπως έχει επισημανθεί μέχρι στιγμής, σκοπός της παρούσας προσπάθειας είναι να έρθει στο επίκεντρο της μάθησης ο μαθητής μέσα από μία διαδικασία ανακάλυψης της γνώσης, στηριγμένη στα ήδη υπάρχοντα νοητικά σχήματα που έχει αναπτύξει ο μαθητής μέσα από την κατάλληλη ενίσχυση του εκπαιδευτικού. Αυτή η προσπάθεια ανάγεται στην εξέλιξη του τρόπου διδασκαλίας των Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια, όπου έχει απομακρυνθεί κατά πολύ από τη στείρα αποστήθιση και τη συνεχή εξάσκηση στην αριθμητική. Για την μεταστροφή αυτού του ενδιαφέροντος σημαντική ήταν η συμβολή του Ελβετού ερευνητή J.Piaget, ο οποίος έδωσε έμφαση στις δομές που αναπτύσσονται στο νου των μαθητών προκειμένου να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Σύμφωνα λοιπόν με τον Piaget, οι πηγές γνώσεις του ανθρώπου θα πρέπει να είναι τα ίδια τα αντικείμενα και οι δικές του ενέργειες πάνω σ' αυτά, καθώς μόνον έτσι θα καταφέρει να κατανοήσει τον κόσμο γύρω του. Η *νόηση* δηλαδή, προέρχεται μέσω της *δράσης*. Έτσι το όνομα του Piaget συνδέθηκε άρρηκτα με τα *νέα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο*, γιατί ήταν εκείνος που εστίασε το ενδιαφέρον του στο πως σκέφτονται τα παιδιά και με ποιον τρόπο επιχειρούν να λύσουν ένα πρόβλημα (Woolfolk, 2007).

Στην θεωρία του, ο Piaget πρεσβεύει ότι κάθε άνθρωπος στην προσπάθειά του να κατανοήσει τον κόσμο γύρω του τείνει να *οργανώνει* το περιβάλλον του και να *προσαρμόζεται* σ' αυτό. Οι άνθρωποι λοιπόν προκειμένου να κατανοήσουν τι λαμβάνει χώρα γύρω τους επιδίδονται στην οργάνωση της σκέψης τους σε *δομές* ή αλλιώς όπως τα ονομάζει ο Piaget «σχήματα»[1] - "schemes". Αυτά τα «γνωστικά

[1] Εμείς αυτά τα «σχήματα» θα τα αποκαλούμε από δω και στο εξής «γνωστικά σχήματα», καθώς δεν είναι απλά σχήματα ή σχέδια, αλλά νοητικές διεργασίες που κάνει κανείς στο μυαλό του.

σχήματα» αναπτύσσονται κατά την αλληλεπίδρασή τους με το περιβάλλον και σταδιακά μετατρέπονται από απλά σε περίπλοκα και κατ' επέκταση σε αποτελεσματικότερα. Βασισμένος στον Piaget, ο von Glasersfeld (1980) περιγράφει το «γνωστικό σχήμα» ως μια τριμερή νοητική δομή την οποία συνιστούν: (1) μία κατάσταση η οποία υποκινεί στο άτομο έναν σκοπό, (2) μία δραστηριότητα που πυροδοτείται προκειμένου να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος σκοπός και (3) ένα προσδοκώμενο αποτέλεσμα της δραστηριότητας.

Τα «γνωστικά σχήματα» έχουν την τάση να μετασχηματίζονται μέσω δύο βασικών λειτουργιών, της «αφομοίωσης» - "assimilation" και της «συμμόρφωσης» - "accommodation". Η «αφομοίωση» συμβαίνει όταν το άτομο, στην προσπάθειά του να κατανοήσει τον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιεί τα ήδη υπάρχοντα νοητικά σχήματα που έχει αναπτύξει και προσπαθεί να τα ενσωματώσει στα παλιά, παραλλάσσοντάς τα όπου είναι απαραίτητο. Η δεύτερη λειτουργία, η «συμμόρφωση» συμβαίνει όταν το άτομο αναγκάζεται να αλλάξει τον ήδη αναπτυγμένο τρόπο σκέψης του, προκειμένου να προσαρμοστεί στη νέα γνώση. Αυτές οι δύο διαδικασίες αποτελούν μέρος μίας ανώτερης και πιο περίπλοκης διεργασίας της «εξισορρόπησης» - "equilibration" κατά την οποία το άτομο προσπαθεί να φέρει τη σκέψη του σε κατάσταση *ισορροπίας*. Ο κύριος μηχανισμός όμως, μέσω του οποίου, συντελούνται η αφομοίωση και η συμμόρφωση είναι ο αναστοχασμός με αντικείμενο τη σχέση που δημιουργείται ανάμεσα σε κάποια δραστηριότητα (2^o μέρος του σχήματος) και το αποτέλεσμά της (3^o μέρος του σχήματος) (Woolfolk, 2007).

Τα παραπάνω βασικά σημεία της γνωστικής θεωρίας του εποικοδομισμού (constructivism) φέρνουν στο προσκήνιο το ρόλο των προβλημάτων ως σημαντικού παιδαγωγικού εργαλείου προκειμένου να προωθηθεί η μάθηση των μαθητών. Κατανοούμε ότι ένα πρόβλημα δεν δίνεται στους μαθητές, αφού έχει συντελεστεί η μάθηση, για να εφαρμόσουν έννοιες και τεχνικές που διδάχθηκαν, αλλά αποτελεί εργαλείο για την υποστήριξη της μάθησης. Με αφορμή κατάλληλα επιλεγμένα προβλήματα, υποθέτουμε ότι οι μαθητές: (1) θα τα κατανοήσουν με τους δικούς τους τρόπους θέτοντας σκοπούς που συνδέονται με τα ερωτήματα που αυτά θέτουν (*αφομοίωση – 1^o μέρος του γνωστικού σχήματος*) , (2) θα εμπλακούν σε νοητική δραστηριότητα που αφορά την συσχέτιση των ποσοτήτων που το εκάστοτε πρόβλημα περιλαμβάνει (*2^o μέρος του γνωστικού σχήματος*) και (3) θα συγκρίνουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητας τους με τον σκοπό που είχαν θέσει (*3^o μέρος του* *γνωστικού σχήματος*) προκειμένου να καταλήξουν στην ενδυνάμωση ή τροποποίηση των σχημάτων που ήδη έχουν στη διάθεσή τους.

Ένα άλλο βασικό στοιχείο στη θεωρία του Piaget πέρα από την δράση πάνω στο αντικείμενο, με σκοπό να το αλλάξει για να αντιληφθεί καλύτερα τη λειτουργία του, είναι η σημασία της *αλληλεπίδρασης* του μαθητή με τον δάσκαλο και τους συμμαθητές του. Κατά την αλληλεπίδραση αυτή δημιουργούνται επιπλέον ευκαιρίες μάθησης, δηλαδή οι μαθητές ελέγχουν τον τρόπο σκέψης τους, αμφισβητούν κι επαναπροσδιορίζουν τη σκέψη τους μέσω της παρατήρησης των άλλων (Woolfolk, 2007). Αυτή τη λειτουργία προσπάθησα να αξιοποιήσω με την επιλογή δύο μαθητών τουλάχιστον, αντί ενός και μάλιστα διαφορετικού μαθησιακού επιπέδου, προκειμένου να δώσω την ευκαιρία στους μαθητές μου να βιώσουν κάτι τέτοιο. Το στοιχείο αυτό συμβαδίζει και με την κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία του Lev Vygotsky, η οποία τοποθετεί στο επίκεντρο ενδιαφέροντος για την ανάπτυξη του ατόμου, το πολιτισμικό περιβάλλον. Το κλειδί σ’ αυτή την θεωρία είναι οι αλληλεπιδράσεις του ατόμου με τους γύρω του, χάρη στις οποίες διαμορφώνει τις δομές και τη σκέψη του, μέσω των «πολιτισμικών εργαλείων», που παρέχονται από τους δασκάλους ή κάποιους ικανούς συνομήλικες – “scaffolding” στη Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης, προκειμένου να αναπτυχθεί το άτομο γνωστικά και να καταφέρει να λύσει προβλήματα. Το σημαντικότερο *πολιτισμικό σύστημα εργαλείων* κατά τον Vygotsky είναι η *γλώσσα*, καθώς είναι εκείνη που βοηθά τον άνθρωπο να επικοινωνεί τις ιδέες του, να διατυπώνει ερωτήσεις, να σκέφτεται, κ.α. (Vygotsky, 1978; Woolfolk, 2007). Γι’ αυτό και στις συναντήσεις μου με τους μαθητές είχα την πρόθεση να τους δίνω χρόνο να εκφράζουν τη σκέψη τους, με αφορμή τα προβλήματα που τους έδινα αλλά και για να την επαναδιατυπώνω ώστε να έρχεται σταδιακά σε συμφωνία με την κοινωνικά αποδεκτή μαθηματική γνώση.

Οι παραπάνω σύντομες επισημάνσεις διαμορφώνουν τις βασικές πτυχές μιας διδακτικής προσέγγισης, την οποία επιχείρησα να εφαρμόσω στις συναντήσεις μου με τους δύο μαθητές. Η προσέγγιση αυτή επιδιώκει η σκέψη των μαθητών να βρίσκεται διαρκώς στο κέντρο λήψης διδακτικών αποφάσεων και η πρώτη πτυχή της έγκειται στην επιλογή προβλημάτων, τα οποία αποτελούν το βασικό εργαλείο για την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Τα προβλήματα αυτά χρειάζεται: (1) να προσαρμόζονται στις εμπειρίες των μαθητών, (2) να προσφέρουν ευκαιρίες για άμεση εμπλοκή των μαθητών στην επίλυσή τους και (3) να λειτουργούν ενισχυτικά και όχι παρεμποδιστικά για τη μελλοντική μαθηματική εξέλιξη των μαθητών.

Η δεύτερη βασική πτυχή αυτής της προσέγγισης έγκειται στην οργάνωση των συζητήσεων με τους μαθητές. Αυτός είναι κι ένας από τους σημαντικότερους ρόλους του δασκάλου (Kaufmann, 2018). Στις συζητήσεις, ο δάσκαλος φροντίζει: (1) να δίνει προτεραιότητα στις ιδέες των μαθητών και να αποφεύγει την εκμαίευση των απαντήσεων που θα επιθυμούσε, (2) να διαπραγματεύεται τις εξηγήσεις που δίνουν οι μαθητές και να τις αξιοποιεί στην εξέλιξη των συζητήσεων, (3) να επιδιώκει τη σύνδεση των ιδεών των μαθητών μεταξύ τους αλλά και με αυτές των συμμαθητών τους και (4) να αξιοποιεί κατάλληλες αναπαραστάσεις για να συμβολίσει τις σκέψεις των μαθητών (Ryve, Larson, & Nilson, 2013; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

2.2. Η μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη

Η προσέγγιση που συνήθως ακολουθείται για να εισαχθούν οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό είναι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (Fischbein, Deir, Nello & Marino, 1985). Όμως, με αυτόν τον τρόπο, όπως θα φανεί, δεν ενθαρρύνεται η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των μαθητών.

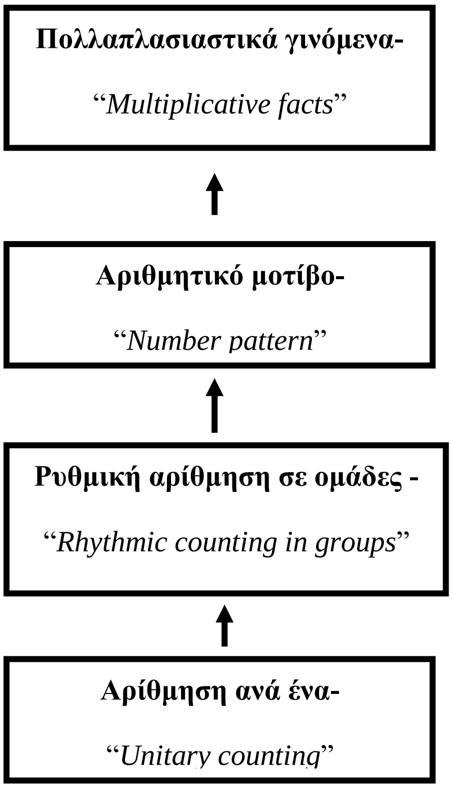
Μία χρήσιμη έννοια για τη διάκριση μεταξύ πολλαπλασιαστικής και προσθετικής σκέψης είναι η αντίληψη ότι ο αριθμός συμβολίζει μία αφηρημένη σύνθετη μονάδα (Kaufmann, 2018; Larson, 2016; Steffe & Cobb, 1994; Tzur et al., 2013). Αυτή η αντίληψη επιτρέπει στους μαθητές να χειρίζονται το εκάστοτε αριθμητικό σύμβολο σαν ένα ενιαίο «πράγμα» και να το αναλύουν στα μέρη του. Αυτό δε σημαίνει ότι ο αριθμός ως σύνθετη μονάδα δεν υφίσταται όταν οι μικροί μαθητές προβαίνουν σε προσθετικούς συλλογισμούς. Ειδικότερα, καθώς οι μαθητές συνειδητοποιούν προοδευτικά, τον ένθετο χαρακτήρα των σύνθετων ποσοτήτων, δηλαδή, ότι μια ποσότητα περιλαμβάνει τα μέρη της, μεταφέρουν και στους αριθμούς αυτήν την ιδιότητα. Έτσι μπορούν με ευκολία να προβλέπουν την ανάλυση των σύνθετων μονάδων σε μικρότερες μονάδες που περιλαμβάνονται σε αυτές. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να μετατρέψει το πρόβλημα 13 – 8 = __ σε 8+ __ = 13. Σε αυτήν την περίπτωση, το 13 (όλο) γίνεται αντιληπτό ως μία σύνθετη μονάδα, της οποίας γνωρίζει το ένα μέρος (8) και ο μαθητής μπορεί να υπολογίσει το άλλο. Ο Schwartz (1991) ισχυρίζεται ότι στην πρόσθεση η μονάδα αναφοράς δεν αλλάζει. Η διατήρηση της μονάδας αναφοράς συνδέεται άμεσα με την ανάλυση του όλου στα μέρη του (13 *μήλα*-8 *μήλα* = 5 *μήλα*).

Μία επιπλέον ικανότητα χρειάζεται να αναπτυχθεί για να θεωρήσουμε ότι ένας μαθητής είναι σε θέση να σκέφτεται πολλαπλασιαστικά. Θα πρέπει, όχι απλώς να αναλύει τις σύνθετες μονάδες αλλά και να προβαίνει στον συντονισμό τους. Στο πρόβλημα: «8 καλάθια με 5 μήλα στο καθένα. Πόσα είναι όλα τα μήλα;», υπεισέρχονται δύο σύνθετες μονάδες: τα μήλα ανά καλάθι (5) και τα καλάθια (8). Μία πολλαπλασιαστική συλλογιστική στηρίζεται στην κατανομή της μιας μονάδας στα στοιχεία της άλλης (5 μήλα ανά καλάθι). Η συντονισμένη διπλή αρίθμηση που μπορεί να μεσολαβήσει: 1 (καλάθι) είναι 1-2-3-4-5 (μήλα), 2 (καλάθια) είναι 6-7-8-9-10 (μήλα) ... 8 καλάθια είναι 36-37-38-39-40 (μήλα), προϋποθέτει την παρακολούθηση (κράτημα) των σύνθετων μονάδων με ταυτόχρονη αύξηση των μονάδων της μονάδας που κατανέμεται (5 μήλα ανά καλάθι). Σύμφωνα με τον Schwartz (1991), στον πολλαπλασιασμό η μονάδα αναφοράς μετασχηματίζεται μέσω της συντονισμένης κατανομής και το γινόμενο που προκύπτει (40 μήλα) μπορεί να γίνει αντιληπτό σαν μία μονάδα από μονάδες μονάδων , δηλαδή μία μονάδα που την συνθέτουν 8 μονάδες (καλάθια) από 5 μονάδες (μήλα ανά καλάθι). Τελικά, η ταυτόχρονη αρίθμηση δύο σύνθετων μονάδων και ο μετασχηματισμός της μονάδας αναφοράς συνιστούν μία σημαντική διάκριση μεταξύ προσθετικής και πολλαπλασιαστικής συλλογιστικής (Tzur, et al., 2013).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, για να λειτουργήσει η πολλαπλασιαστική διπλή αρίθμηση ως βάση για την ανάπτυξη των πολλαπλασιαστικών συλλογισμών των μαθητών, είναι αναγκαίο να στοχάζονται με αντικείμενο τις δικές τους προσπάθειες στον συντονισμό των ενεργειών αρίθμησής τους. Αυτές τις ενέργειες μπορεί αρχικά να τις πραγματοποιούν σε χειροπιαστό υλικό (π.χ. Φτιάξε 3 πύργους με 5 κύβους τον καθένα. Πόσους πύργους έφτιαξες; Πόσοι κύβοι είναι στον κάθε πύργο; Πόσους κύβους χρειάστηκες; Πώς το βρήκες;). Η παρουσία των αντικειμένων διευκολύνει τους μαθητές στη διεξαγωγή των νοητικών λειτουργιών που αφορούν στο ξεχώρισμα των μεμονωμένων αντικειμένων (κύβοι - απλές μονάδες) που τα έχουν οργανώσει σε μεγαλύτερες ομάδες (πύργοι - σύνθετες μονάδες). Η προοδευτική απόσυρση των αντικειμένων αυξάνει τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης δραστηριότητας. Γίνεται κατανοητό ότι αν, αφού οι μαθητές φτιάξουν τους πύργους, καλύψουμε την κατασκευή τους και τους ζητήσουμε να απαντήσουν στα 4 παραπάνω ερωτήματα, η δυσκολία του προβλήματος αυξάνει. Οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιήσουν τα δάχτυλά τους ή να φτιάξουν εικόνες ή σχήματα αντιπροσωπευτικά των κατασκευών τους. Με τη δική μας βοήθεια, οι αναπαραστάσεις των μαθητών μπορεί σταδιακά να γίνουν πιο αφηρημένες (π.χ. 3 γραμμές με τον αριθμό 5 δίπλα στην καθεμιά ή ακόμα και χωρίς τις γραμμές να σημειώνουν μόνο τις αριθμητικές αξίες της κάθε σύνθετης μονάδας). Αργότερα, αφού οι μαθητές εξοικειωθούν με την απουσία των αντικειμένων, το ίδιο πρόβλημα μπορεί να τίθεται χωρίς τη μεσολάβηση της κατασκευής. Οι μαθητές μπορεί να φαντάζονται ότι φτιάχνουν τους πύργους. Η ικανότητα των μαθητών να προβλέπουν την οργάνωση των απλών και των σύνθετων μονάδων θα σημαίνει ότι οι σύνθετες μονάδες έχουν γίνει πια πραγματικά «νοερά αντικείμενα» (Tzur, et al., 2013).

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η αρίθμηση αποτελεί βάση για τη μετάβαση των μαθητών από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη. Πολλές έρευνες ασχολούνται με την εξέλιξη της αρίθμησης των μαθητών σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Η Anghileri (1989) διαπιστώνει ότι η πορεία αρίθμησης που οδηγεί στον πολλαπλασιασμό ξεκινά από «αρίθμηση ανά ένα» – "unitary counting", στη συνέχεια τη θέση της παίρνει η «ρυθμική αρίθμηση σε ομάδες» – "rhythmic counting in groups" όταν ο μαθητής αντιλαμβάνεται πλέον την «σύνθετη μονάδα», ύστερα την διαδέχεται η χρήση «αριθμητικού μοτίβου» – "number pattern" όπου κάθε αριθμός αποτελεί μία *συντόμευση* μίας ομάδας αριθμών, που απαιτεί μικρό χώρο στη μνήμη εργασίας, ενώ τέλος, προκύπτουν τα «πολλαπλασιαστικά γινόμενα» – "multiplicative facts", όπου όταν αρχίζει να τα χρησιμοποιεί φαίνεται να έχει συντελεστεί σταδιακά η αφαιρετική διαδικασία (βλ. **Σχήμα 1**.).

Μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της δυσκολίας που παρουσιάζει η ικανότητα των μαθητών για διπλή αρίθμηση σύνθετων μονάδων προέρχεται από τις πολυετείς έρευνες μιας ερευνητικής ομάδας, η οποία ασχολήθηκε με την εξέλιξη αυτής της ικανότητας ξεκινώντας από τις πρώτες προσπάθειες των παιδιών να αριθμήσουν συλλογές μεμονωμένων αντικειμένων (Steffe, 1992; Ulrich, 2015 & 2016). Οι ερευνητές αυτοί διέκριναν μέσα από την διεξαγωγή διδακτικών πειραμάτων μία αλληλουχία έξι σταδίων μέσα από τα οποία οι μαθητές έρχονται σε θέση να συντονίζουν με ευχέρεια σύνθετες αριθμητικές μονάδες.



Σχήμα 1. Πορεία αρίθμησης, κατά Anghileri (1989).

Μια άλλη ομάδα ερευνητών έχει ασχοληθεί με την κατηγοριοποίηση των προβληματικών καταστάσεων, οι οποίες χρειάζονται τον πολλαπλασιασμό για να λυθούν και μελετά την σχετική δυσκολία που οι μαθητές εμφανίζουν όταν ασχολούνται με αυτές. Ο Greer (1992) παρουσιάζει 10 κατηγορίες προβλημάτων και ισχυρίζεται ότι οι πιο σπουδαίες είναι: των ίσων ομάδων – “*equal groups*” π.χ. «*Είναι 3 παιδιά και το καθένα έχει από 4 μπίλιες. Πόσες μπίλιες έχουν όλα μαζί;*», της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης – “*multiplicative comparison*” π.χ. «*Ο Κώστας έχει τριπλάσιες καραμέλες από τη Μαρία. Η Μαρία έχει 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έχει ο Κώστας;*», του καρτεσιανού γινομένου - “*Cartesian product*” π.χ. «*Η Κατερίνα έχει 4 ειδών φούστες και 3 διαφορετικές μπλούζες. Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς ρούχων μπορεί να φτιάξει;*» και της ορθογώνιας επιφάνειας – “*rectangular area*” π.χ. «*Ποια είναι η επιφάνεια ενός ορθογωνίου, όταν τα μήκη των πλευρών του είναι 3 και 4 εκατοστά;*». Τα προβλήματα που περιλαμβάνουν τις κατηγορίες των ίσων ομάδων και της ορθογώνιας επιφάνειας σύμφωνα με τον Kaufmann (2018) είναι πιο εύκολα ως προς την επίλυσή τους, σε σχέση με τις άλλες δύο κατηγορίες προβλημάτων, ενώ άλλες έρευνες δείχνουν ότι ιδίως τα «καρτεσιανά γινόμενα» δυσκολεύουν πολύ τους μαθητές (Anghileri, 1989).

Η παραπάνω βιβλιογραφική ανασκόπηση εστίασε κυρίως σε έρευνες που αναφέρονται στη μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη με άξονα την ικανότητα των μαθητών να συντονίζουν την αρίθμηση σύνθετων μονάδων. Ωστόσο, ο Tzur και οι συνεργάτες του (Tzur, et al., 2013) με βάση τις έρευνές τους παρουσιάζουν ένα μοντέλο με 6 στάδια για να περιγράψουν μία πορεία εξέλιξης των μαθητών στην πολλαπλασιαστική σκέψη πέρα από το στάδιο της διπλής αρίθμησης σύνθετων μονάδων.

Έχοντας αναφερθεί σε έρευνες που αναλύουν τις διαφορές αλλά και τις προκλήσεις που εμφανίζει η μετάβαση των μαθητών από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη, γίνεται φανερό ότι η επιμονή της διδασκαλίας στην εισαγωγή του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση δεν μπορεί παρά να εμποδίζει τους μαθητές στην εξέλιξη της πολλαπλασιαστικής τους σκέψης.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στόχος της παρούσας εργασίας, όπως έχει προαναφερθεί, είναι να μπορέσουν οι μαθητές να προσεγγίσουν την πολλαπλασιαστική σκέψη μέσα από ένα μονοπάτι μάθησης, με τη βοήθεια ορισμένων μέσων στήριξης, που έχουν σχεδιαστεί προηγουμένως πολύ προσεκτικά για τον σκοπό αυτό. Αναλυτικότερα, χρειάζεται να βρεθεί το απαραίτητο υλικό που θα βοηθήσει τους μαθητές να χτίσουν τις πολλαπλασιαστικές έννοιες και τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, μέσα από κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις και καίριες ερωτήσεις που θα ενταχθούν σε ένα πλαίσιο ειδικά διαμορφωμένο γι’ αυτή την διδακτική απόπειρα. Με λίγα λόγια, σκοπός αυτής της εργασίας δεν είναι η απευθείας διδασκαλία κάποιων έτοιμων, βασικών τύπων του πολλαπλασιασμού, αλλά διαμέσου των σχεδίων και των νοημάτων που δίνουν τα παιδιά σε διάφορες προβληματικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας την αρίθμηση, να φτάσουν σ’ αυτούς τους τύπους. Δηλαδή, να ακολουθηθεί μία αντίστροφη πορεία, από τα Μαθηματικά και τα νοήματα του παιδιού, στα Μαθηματικά της Ευρύτερης Μαθηματικής Κοινότητας, στα Επίσημα Μαθηματικά. Για να πραγματοποιηθεί κάτι τέτοιο θα πρέπει απ’ τη μία, τα παιδιά να στηρίζονται στις δικές τους μεθόδους και στρατηγικές, κι ας είναι ανεπίσημες (Heege, 1985) κι απ’ την άλλη η διδασκαλία θα πρέπει να συμβαδίζει μ’ αυτές τις μεθόδους και να ενθαρρύνει την προβολή της σκέψης των μαθητών συνεχώς, έτσι ώστε η μαθησιακή διαδικασία να λαμβάνει χώρα μέσα σε ένα κλίμα «αρμονίας», όπως το αποκαλούν οι Steffe & Cobb (1994).

3.1. Το Πείραμα Σχεδιασμού και οι Φάσεις του

Το πλαίσιο μέσα στο οποίο προσπάθησαν να επιτευχθούν όλοι οι παραπάνω στόχοι είναι η Έρευνα Σχεδιασμού μέσα από ένα *Πείραμα Σχεδιασμού* με δύο μαθητές, ώστε να προσεγγιστεί σε ένα πρωταρχικό στάδιο η ανάπτυξη πολλαπλασιαστικών εννοιών από δύο μαθητές Β’ δημοτικού που έχουν διδαχθεί ήδη κάποια πράγματα σχετικά με τον πολλαπλασιασμό, ολοκληρώνοντας αυτή την τάξη. Η επιλογή του “one-on-one” *Πειράματος Σχεδιασμού* με δύο μαθητές κι όχι με ολόκληρη την τάξη έγινε με σκοπό αφενός να αποφευχθεί ο βαθμός πολυπλοκότητας, που πιθανόν να παρουσίαζε η δεύτερη περίπτωση ως προς τη διαχείρισή της και την εξαγωγή συμπερασμάτων κι αφετέρου να μελετηθεί σε βάθος και με λεπτομέρεια η πορεία μάθησης και τα μέσα στήριξης των μαθητών (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003).

Το Πείραμα Σχεδιασμού παρουσιάζει πέντε χαρακτηριστικά τα οποία είναι πλήρως εναρμονισμένα με τους στόχους της παρούσας εργασίας κι αυτό το γεγονός καταδεικνύει άλλον έναν λόγο για την επιλογή του. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι τα εξής: Το πρώτο αφορά στις θεωρίες που διακατέχουν την *πορεία μάθησης* και τα *μέσα στήριξης* που σχεδιάζονται προκειμένου να ενισχύσουν τους μαθητές• το δεύτερο αφορά στην υψηλή παρεμβατικότητα που παρουσιάζει η συγκεκριμένη μεθοδολογία καθώς αποτελεί μία δοκιμή για κάτι καινούργιο κι έχει σαν στόχο τη διαρκή βελτίωση της πορείας μάθησης• το τρίτο χαρακτηριστικό βασίζεται στα δύο προηγούμενα κι ενέχει ρόλο τόσο *μελλοντικό* κι *ενδεχόμενο* – "prospective" καθώς παρουσιάζει μία υποθετική πορεία μάθησης που στοχεύει στην ανάδειξη όλων των πιθανών μονοπατιών μάθησης και την αξιοποίηση όλων των απρόβλεπτων που θα προκύψουν, όσο και *στοχαστικό* – "reflective" καθώς σε όλη τη διάρκεια του πειράματος ελέγχονται οι αρχικές εικασίες• το τέταρτο χαρακτηριστικό είναι κι αυτό απόρροια των προηγούμενων κι αφορά στον *επαναληπτικό σχεδιασμό* – "iterative design", που σημαίνει ότι συνεχώς δημιουργούνται νέες εικασίες κι είτε διαψεύδονται είτε ελέγχονται μέσα σε έναν κύκλο διαρκούς εφεύρεσης κι αναθεώρησης• το πέμπτο χαρακτηριστικό αφορά στις θεωρίες που έχουν καθαρά λειτουργικό ρόλο στην όλη προσπάθεια κι είναι σε θέση να βοηθήσουν στην πιθανή πορεία μάθησης και την επιλογή εκείνων των μέσων που θα στηρίξουν την όλη προσπάθεια (Cobb, et al., 2003).

Στην παρούσα εργασία το Πείραμα Σχεδιασμού διεξήχθη σε ένα δημόσιο σχολείο της Αθήνας κοντά στο κέντρο της πρωτεύουσας, κατά τη διάρκεια των μηνών Μαΐου και Ιουνίου σε δύο μαθητές Β’ δημοτικού. Πραγματοποιήθηκαν 12 συναντήσεις με τους μαθητές, οι οποίες κυμαίνονταν από μισή έως μία ώρα, ανάλογα με την προβληματική κατάσταση που δινόταν κάθε φορά και με τη διάθεση των μαθητών να συμμετάσχουν σ’ αυτήν. Στην πορεία των συναντήσεών μου με τους μαθητές κρατούσα σημειώσεις, ενώ παράλληλα μαγνητοφωνούσα τις συζητήσεις μας έτσι ώστε να μπορώ να έχω μία πιο σαφή και ολοκληρωμένη εικόνα της κάθε συνάντησης.

Η επιλογή των μαθητών έγινε με τη βοήθεια της δασκάλας της τάξης, με την οποία βρισκόμουν σε συνεχή συνεννόηση κι επικοινωνία και γι’ αυτό την ευχαριστώ θερμά. Δε δόθηκε κάποιο ερωτηματολόγιο από πριν στα παιδιά, ώστε να διαγνωστεί και το γενικότερο επίπεδο της τάξης στο συγκεκριμένο πεδίο. Ζήτησα από τη δασκάλα να μου στείλει δύο μαθητές που να είναι πρόθυμοι να συνεργαστούν και να εκφράσουν τη σκέψη τους, με την προϋπόθεση να μην είναι οι άριστοι μαθητές της τάξης. Εκείνη μου εξήγησε ότι γενικά το επίπεδο της τάξης είναι αρκετά χαμηλό και οι περισσότεροι μαθητές είναι αλλοδαποί. Έτσι, οι μαθητές με τους οποίους συνεργάστηκα ήταν, μία χαμηλών ταχυτήτων ελληνίδα μαθήτρια κι ένας μέτριος μαθητής από την Βενεζουέλα.

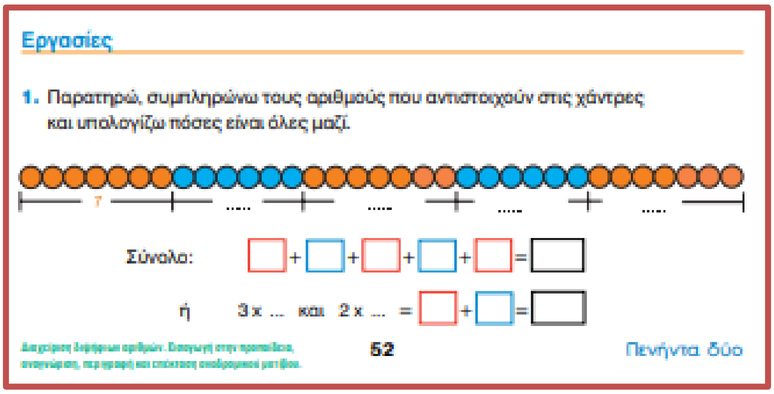
Σε κάθε συνάντηση λοιπόν, δινόταν μία σειρά από προβληματικές καταστάσεις με βάση τις οποίες οι μαθητές καλούνταν να αναδείξουν την πολλαπλασιαστική τους σκέψη, αιτιολογώντας κάθε φορά τον τρόπο με τον οποίο προτίμησαν να λύσουν το εκάστοτε έργο. Η πορεία διδασκαλίας είχε τις βάσεις της στις τρεις φάσεις του Πειράματος Σχεδιασμού (Cobb, et al., 2003 & Gravemeijer, 2015). . Η πρώτη φάση (“Preparing for a Design Experiment”) αφορά στον σχεδιασμό της πορείας μάθησης πριν την έναρξη της έρευνας κι έχει σαν στόχο την εύρεση των σημείων αφετηρίας των μαθητών και την εικασία των μέσων στήριξης καθώς επίσης και των δυσκολιών που πιθανόν να συναντήσουν οι μαθητές. Η δεύτερη φάση (“Conducting a Design Experiment”) αφορά στην υλοποίηση αυτής της υποθετικής τροχιάς μάθησης και στον διαρκή της έλεγχο μετά από κάθε συνάντηση με τους μαθητές. Δηλαδή κατά τη διάρκεια της έρευνας υπήρχε διαρκής *αναστοχασμός*, στον οποίο εξετάζονταν ποια σημεία θα μπορούσαν να είχαν διδαχθεί αλλιώς και ποιες ερωτήσεις θα μπορούσαν να είχαν στηρίξει καλύτερα τους μαθητές. Άλλωστε, καθώς είναι απολύτως φυσιολογικό κάθε αρχική, υποθετική τροχιά μάθησης μπορεί ανά πάσα στιγμή να αναθεωρηθεί από τον ερευνητή, αρκεί να μη μένει προσκολλημένος στο πρωταρχικό του πλάνο. Τέλος, η τρίτη και τελευταία φάση του Πειράματος Σχεδιασμού (“Conducting Retrospective Analysis”) σχετίζεται με την τελική ανάλυση του πειράματος και θεωρείται το πιο καίριο σημείο στην ερευνητική πορεία. Μέσα από την τελευταία ανάλυση της συλλογιστικής πορείας του μαθητή και του μαθησιακού περιβάλλοντος στο οποίο λαμβάνει χώρα η έρευνα, προκύπτει μία γενικευμένη και αρκετά βελτιωμένη, σε σχέση με την αρχική, *πορεία μάθησης* κι *εξέλιξης* της σκέψης των μαθητών. Έτσι, η τελική πορεία μάθησης θα είναι σε θέση να απαντήσει στα εξής ερωτήματα: «Τι λειτουργεί; Πώς, πότε και γιατί λειτουργεί;», αιτιολογώντας την επιλογή αυτού του σχεδίου για μελλοντική αξιοποίηση.

4. ΚΡΙΤΙΚΗ ΜΑΤΙΑ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ

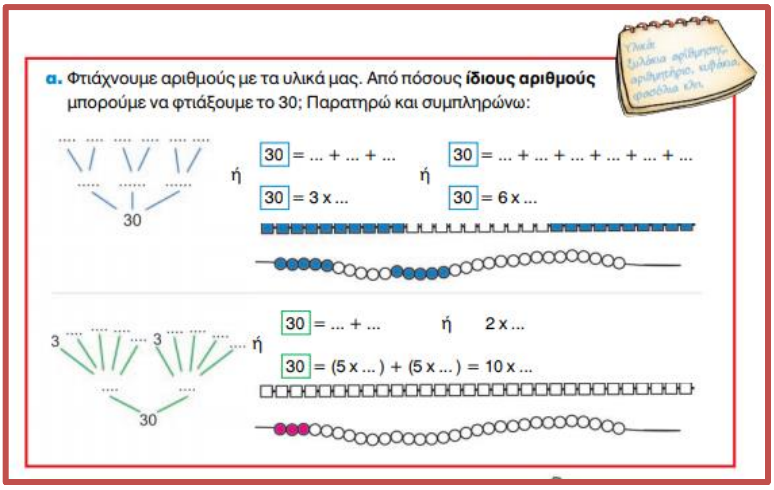
Η μελέτη των σχολικών βιβλίων πριν από οποιαδήποτε απόπειρα ενασχόλησης με τα παιδιά είναι πολύ σημαντική καθώς τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο της εκπαιδευτικής πορείας, κυρίως για τα ελληνικά δεδομένα. Είναι όπως ωραία τα έχουν χαρακτηρίσει οι Harries & Sutherland (2000) «το παράθυρο» που μας δείχνει τις εκπαιδευτικές απόψεις και την παιδαγωγική κουλτούρα κάθε χώρας. Αναλυτικότερα, τα βιβλία μας πληροφορούν αρχικά για το τι διδάσκονται οι μαθητές κάθε τάξης, με ποιον ακριβώς τρόπο και με ποια αλληλουχία. Επομένως, η πρώτη στάση στη μελέτη μου γύρω από τον πολλαπλασιασμό θα είναι τα σχολικά εγχειρίδια της Β' δημοτικού. Το θεωρητικό πλαίσιο και η βιβλιογραφική ανασκόπηση που εντάχθηκε σ' αυτό θα χρησιμοποιηθούν για να γίνει μία αξιολόγηση αυτών των εγχειριδίων. Τα κριτήρια για την αξιολόγηση αυτή, τα οποία προέρχονται από τις ιδέες που παρουσιάστηκαν στο 2ο κεφάλαιο, θα εφαρμοστούν πρώτα στα βιβλία που απευθύνονται στους μαθητές και κατόπιν στο βιβλίο του δασκάλου. Πιο συγκεκριμένα, ο σχολιασμός μας θα αφορά: (1) στη διδακτική προσέγγιση που τα βιβλία φαίνεται να ενθαρρύνουν και (2) στην παροχή ευκαιριών για την εξέλιξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των μαθητών.

4.1. Τα βιβλία των μαθητών

Έχοντας θεωρήσει τη μάθηση σαν αναδιοργάνωση γνωστικών σχημάτων, οι σκοποί της διδασκαλίας θα πρέπει να προσαρμόζονται στις συνεισφορές των μαθητών στο μάθημα. Εξετάζοντας τα μαθήματα 17, 19, 22 και 24 - 29 , τα οποία σχετίζονται με τον πολλαπλασιασμό, διαπιστώνεται ότι αυτή η προσαρμογή δεν φαίνεται να απασχολεί τους συγγραφείς των βιβλίων. Εξ αρχής, οι μαθητές καλούνται να εκτελούν υπολογισμούς που σύμφωνα με τους συγγραφείς εξασφαλίζουν τις σωστές απαντήσεις. Οι τρόποι που οι μαθητές θα μπορούσαν να προτείνουν δεν βρίσκουν διέξοδο. Κατά συνέπεια, το μάθημα δεν προσαρμόζεται στις ιδέες των μαθητών όπως γίνεται φανερό και στις παρακάτω εικόνες (βλ. **Εικόνα 1. & 2.**).

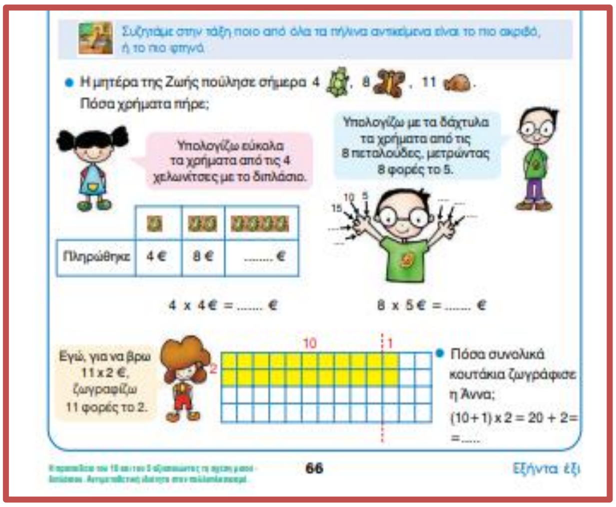


Εικόνα 1. Βιβλίο μαθητή, α’ τεύχος, σελ.52



Εικόνα 2. Τετράδιο Εργασιών, β’ τεύχος, σελ.18

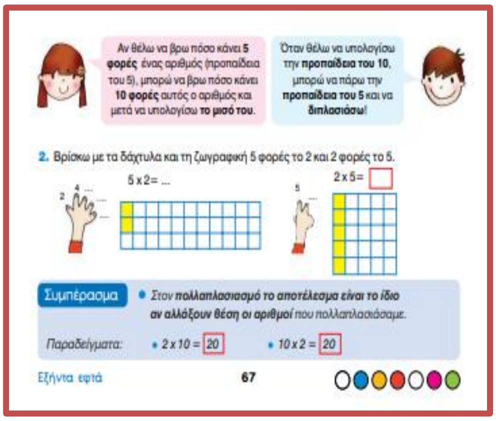
Στο ίδιο πνεύμα είναι και η πάγια τακτική των συγγραφέων, στο ξεκίνημα των μαθημάτων, να θέτουν κάποιο πρόβλημα και αμέσως κάτω από αυτό να δίνουν έτοιμους τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να λυθεί (βλ. **Εικόνα 3.**). Ακόμα κι αν οι μαθητές ήταν σε θέση να σκεφτούν κάποιους δικούς τους τρόπους, οι οποίοι θα μπορούσαν να συζητηθούν στην τάξη, η πρόκληση χάνεται, αφού οι τρόποι δίνονται έτοιμοι και συνήθως οι μαθητές υποχρεώνονται να τους μιμηθούν. Ως συνέπεια, φυσικό επακόλουθο αυτής της τακτικής είναι η αδρανοποίηση της σκέψης των μαθητών.

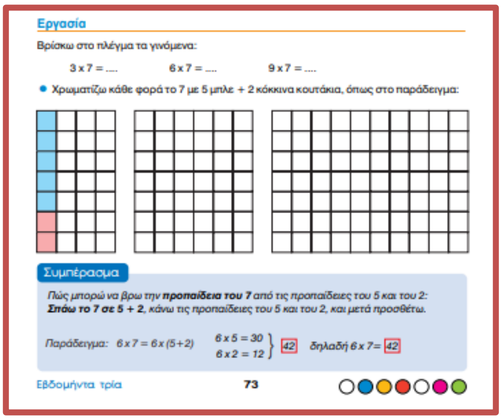


Εικόνα 3. Βιβλίο μαθητή, α’ τεύχος, σελ.66

Σχετικά με τις ευκαιρίες για ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των μαθητών, παρατηρούμε ότι κύρια στρατηγική που ακολουθούν οι συγγραφείς για την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού είναι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Η διπλή αρίθμηση σύνθετων μονάδων εμφανίζεται μόνο σε ορισμένα σημεία (βλ. **Εικόνα 3.**). Το γεγονός όμως ότι παρουσιάζεται σαν έτοιμος τρόπος δεν δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να υπεισέλθουν στην πολυπλοκότητά της και να κατανοήσουν την αναγκαιότητά της. Ίσως κάποιοι μαθητές να μάθουν να την εφαρμόζουν μηχανικά για να υπολογίζουν γινόμενα, χωρίς όμως προηγουμένως να έχουν αντιληφθεί ποιες ακριβώς είναι οι ποσότητες στις οποίες αναφέρονται οι υπολογισμοί τους. Η μετάβασή τους στην πολλαπλασιαστική σκέψη παρεμποδίζεται διότι διαρκώς καλούνται να ταυτίσουν τον πολλαπλασιασμό με τον υπολογισμό γινομένων. Τα περιθώρια για να συνειδητοποιήσουν ότι στην πολλαπλασιαστική διπλή αρίθμηση υποβόσκει η αναλογική μεταβολή των ποσοτήτων που εμπλέκονται είναι περιορισμένα. Γι’ αυτόν το λόγο, λύσεις που στηρίζονται στο ‘διπλάσιο’ (υπολογισμός χρημάτων για τις χελωνίτσες – βλ. **Εικόνα 3.**) δίνονται έτοιμες.

Ομοίως, οι μαθητές υποχρεώνονται να δεχθούν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού με τρόπο που δεν τους υποστηρίζει και να οδηγηθούν στη γενίκευση μέσα από την αξιοποίηση των γνωστικών σχημάτων που έχουν στη διάθεσή τους. Ωθούνται απλά να παρατηρήσουν ομοιομορφίες που εμφανίζουν οι αριθμοί όταν πολλαπλασιάζονται μέσα από σχήματα που αναγκάζονται να χρωματίσουν με τρόπους που καθορίζονται από τους συγγραφείς (βλ. **Εικόνες 4. & 5.**).





Εικόνα 4. & 5. Βιβλίο μαθητή, α’ τεύχος, σελ.67 & 73

Η εννοιολογική κατανόηση της αντιμεταθετικής και της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση εξασφαλίζεται μέσα από τη χρήση εποπτικού υλικού (πλέγματα) που οι μαθητές θα πρέπει να το «διαβάσουν» και να το ερμηνεύσουν με τον τρόπο που θα ήθελαν οι συγγραφείς. Το εποπτικό υλικό θα πρέπει να αξιοποιείται για να επιτρέπει στους μαθητές να αναπαριστούν τις δικές τους ιδέες. Διαφορετικά, δεν είναι σε θέση να δουν σ’ αυτό μαθηματικές ιδέες που ακόμα δεν τις έχουν οικοδομήσει. Και μάλιστα, όταν οι ιδέες αυτές απαιτούν μία επίπονη αφαιρετική διαδικασία. Για παράδειγμα, αν οι μαθητές κατανοούν σε βάθος ότι 3x5 είναι ίσο με 5x3 σημαίνει ότι είναι σε θέση να μετασχηματίσουν νοερά την οργάνωση που υπάρχει στο γινόμενο 3x5. Πιο συγκεκριμένα, η μία μονάδα της σύνθετης μονάδας του 5 στο γινόμενο 3x5 δίνει μία σύνθετη τριάδα κι εφόσον αυτό επαναλαμβάνεται για κάθε μία από τις επιμέρους μονάδες του 5, η αριθμητική αξία μπορεί να αναπαρασταθεί και ως 5x3. Με κατάλληλα προβλήματα κι εποπτικό υλικό, οι μαθητές θα μπορούσαν να αναπτύξουν την κατανόηση των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού. Δυστυχώς, οι συγγραφείς αφιερώνουν ελάχιστο χρόνο σ’ ένα ή δύο μαθήματα του βιβλίου παραβιάζοντας μία απαραιτήτως προοδευτική διαδικασία μάθησης.

4.2. Το βιβλίο του δασκάλου

Για τα μαθήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω μελετήθηκαν οι οδηγίες που δίνονται στους εκπαιδευτικούς μέσα από το βιβλίο του δασκάλου. Διαπιστώθηκε λοιπόν, ότι ως προς τη διδακτική προσέγγιση οι συγγραφείς ενθαρρύνουν τους δασκάλους να σέβονται τις δυνατότητες των μαθητών τους (βλ. **Εικόνα 6**).

> και να εξελιχθούν ανάλογα με τις δυνατότητές τους. **Δεν επιβάλλουμε τις στρατηγικές στα παιδιά, τα αφήνουμε να βρουν όποια τους ταιριάζει.**

Εικόνα 6. Βιβλίο δασκάλου, σελ.118

Η ενημέρωση όμως του εκπαιδευτικού σχετικά με τις στρατηγικές που οι μαθητές είναι σε θέση να επινοήσουν απουσιάζει. Και πολύ περισσότερο, δεν υπάρχει μία σκιαγράφηση της πορείας με την οποία οι στρατηγικές αυτές μπορεί να εξελίσσονται. Ο εκπαιδευτικός αφήνεται αβοήθητος. Οι συγγραφείς περιορίζονται σε συμβουλές που φανερώνουν ότι το βάρος της ευθύνης της διδασκαλίας θα πρέπει, εξ ολοκλήρου, να το επωμιστεί ο δάσκαλος (βλ. **Εικόνα 7.**).

> Καταγράφουμε τα αποτελέσματα που τα παιδιά βρίσκουν (νοερά ή με τα δάχτυλα ή με όποιον άλλο τρόπο μπορούν). **Δεν παραλείπουμε να λάβουμε υπόψη μας τους πολλαπλασιασμούς που δυσκολεύουν τα παιδιά και τους λόγους που μας εξηγούν ότι τα δυσκολεύουν**.

Εικόνα 7. Βιβλίο δασκάλου, σελ.117

Οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών καθώς μεταβαίνουν από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη δεν αναφέρονται στο βιβλίο του δασκάλου και οι συγγραφείς καλούν τον δάσκαλο να ζητήσει από τους μαθητές να του τις εξηγήσουν (sic!).

Οι ελλείψεις του βιβλίου του δασκάλου, του αφαιρούν τη δυνατότητα να προσαρμόζει τους σκοπούς της διδασκαλίας του στις ανάγκες των μαθητών της τάξης του. Ως εκ τούτου, είναι φυσικό, να ακολουθεί πιστά το διδακτικό βιβλίο του μαθητή, το οποίο, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, δεν αφήνει στους μαθητές τα περιθώρια να αυτενεργούν και η μαθηματική γνώση τους επιβάλλεται.

5. ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΣΚΕΛΟΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αρχικά μια υποθετική πορεία διδασκαλίας που ακολουθήθηκε. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ορισμένα επιλεγμένα επεισόδια μέσα από τις 12 συναντήσεις που είχα με τον Φιλίπε και την Αλίκη[2] κατά την πορεία της εργασίας. Μέσα απ’ αυτά τα επιλεγμένα επεισόδια σκιαγραφείται τόσο η εξέλιξη στην σκέψη και τον συλλογισμό των παιδιών όσο και η δική μου στήριξη και παρέμβαση, δίνοντας έμφαση στις δυσκολίες που συνάντησα.

5.1. Πορεία διδασκαλίας

Αρχικά, δόθηκαν κάποιες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, καθώς και ορισμένα προβλήματα πολλαπλασιασμού, με σκοπό να διαπιστωθεί σε ποιο σημείο βρίσκονταν οι μαθητές σχετικά με την πολλαπλασιαστική τους σκέψη. Ύστερα, έχοντας κάνει κάποιες εκτιμήσεις σχετικά με τα σημεία αφετηρίας των δύο μαθητών, επέλεξα προβληματικές καταστάσεις που θα στήριζαν τη μετάβασή τους από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική συλλογιστική. Έτσι λοιπόν, στην πρώτη μας συνάντηση έδωσα τα ακόλουθα:

❖ **Προσθέσεις:**

- 8 + 7 =
- 9 + 6 =
- 2 + 3 =
- 7 + 3 + 7 + 3 =
- 7 + 4 + 6 + 6 + 4 + 3 =
- 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 5 =

❖ **Πολλαπλασιασμοί:**

- 8 x 7 =
- 2 x 4 =
- 3 x 6 =
- 4 x 5 =

[2]Τα ονόματα των παιδιών είναι διαφορετικά από τα πραγματικά, με σκοπό να προστατευτούν τα προσωπικά τους δεδομένα.

❖ **Προβλήματα πολλαπλασιασμού:**

- **Πρόβλημα με αερόστατα:** Σε κάθε αερόστατο μπορούν να ταξιδέψουν 7 επιβάτες, πόσοι άνθρωποι μπορούν να ταξιδέψουν με 3 αερόστατα;

- **Πρόβλημα με καραμέλες:** Είναι 3 φίλοι. Ο καθένας έχει 4 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έχουν όλοι μαζί;

Στη συνέχεια, στις συναντήσεις μου με τους μαθητές σκόπευα να αξιοποιήσω διάφορες προβληματικές καταστάσεις προκειμένου να πυροδοτήσω μέσα απ' αυτές την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης τους. Ανάλογα με την πρόοδο που θα εμφάνιζαν οι μαθητές, είχα σκοπό να αξιοποιήσω διαφορετικά προβλήματα διατυπωμένα σε διαφορετικά πλαίσια (π.χ. ορθογώνια καφάσια με φρούτα, κουτιά με σοκολατάκια, πλακάκια σε ορθογώνια πατώματα, κουρτίνες με σχέδια, παράθυρα σε πολυκατοικίες, οργανωμένες συλλογές από φρούτα ή γραμματόσημα με τις τιμές τους, κτλ.) Αλλάζοντας τα πλαίσια στα οποία θα ήταν διατυπωμένα τα προβλήματα, θα μπορούσα να αποφύγω την πλήξη των μαθητών ή/ και να αυξάνω τη δυσκολία των προβλημάτων μεγαλώνοντας το μέγεθος των αριθμών. Έκρινα, ότι η αφήγηση κάποιας ιστορίας θα βοηθούσε τους μαθητές αφενός να κατανοήσουν το πρόβλημα και αφετέρου να εμπλακούν άμεσα στη λύση του.

Έτσι λοιπόν, για παράδειγμα, τα προβλήματα στο πλαίσιο των ορθογώνιων καφασιών με φρούτα θα τα εισήγαγα μέσα από μια ιστορία για κάποια παιδιά που έχουν πάει στο Σούπερ Μάρκετ και που αποφάσισαν να παίξουν ένα παιχνίδι, δηλαδή να παρατηρούν τα καφάσια με τα φρούτα και να προσπαθούν να βρουν όσο πιο γρήγορα γίνεται τον αριθμό των φρούτων μέσα σ' αυτά. Στη συνέχεια, θα καλούσα τους μαθητές να παίξουν το ίδιο παιχνίδι δείχνοντάς τους διαφορετικά καφάσια και ζητώντας τους να βρίσκουν και να εξηγούν με ποιον τρόπο βρήκαν το πλήθος των φρούτων σ' αυτά.

Μια ακόμα σημαντική συνιστώσα στην εισαγωγή των προβλημάτων, που είχα σκεφτεί, ήταν ο τρόπος με τον οποίο θα διαφοροποιούσα την ενασχόληση των μαθητών με τη λύση τους. Πιο συγκεκριμένα, η σχηματοποίηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης τους είχα σκοπό να γίνει προοδευτικά. Αρχικά, οι μαθητές θα είχαν στη διάθεσή τους τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται οι ποσότητες των προβλημάτων και σταδιακά θα φρόντιζα να τα αποσύρω ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να προχωρήσουν σε πιο αφηρημένες εκδοχές πολλαπλασιαστικής σκέψης.

5.2. Σημεία αφετηρίας των δύο μαθητών

Στην πρώτη συνάντηση έδωσα στους μαθητές κάποιες προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς, καθώς επίσης και κάποιες προβληματικές καταστάσεις πολλαπλασιασμού. Με τις προσθέσεις στόχος μου ήταν να κάνω μία πρόβλεψη για την τρέχουσα ικανότητα των μαθητών να σκεφτούν πολλαπλασιαστικά. Οι στρατηγικές τους στις προσθέσεις θα με βοηθούσαν να κατανοήσω με ποιον τρόπο αντιλαμβάνονται τον αριθμό, και ειδικότερα αν έχουν μία ισχυρή αντίληψη του αριθμού ως σύνθετη μονάδα

Στην πρόσθεση «8+7» ο Φιλίπε εργάστηκε ως εξής:

-Φιλίπε: «Εγώ σκέφτηκα 7+7=14 κι έβαλα άλλο 1, 15»

Ενώ η Αλίκη έπραξε διαφορετικά, λέγοντας:

-Αλίκη: «Εγώ είπα έχω 8 στο μυαλό μου και μέτρησα άλλα 7»

-Φοιτήτρια: «Πόσο βρήκες;»

-Αλίκη: «Βρήκα 16»

Επειδή ήταν λάθος το αποτέλεσμα την προέτρεψα να το υπολογίσει μπροστά σε όλους, για να εξετάσουμε πως το επεξεργάζεται στο μυαλό της. Εκείνη ξεκίνησε να μετρά από το 8 βάζοντας κι άλλα 7, με τη βοήθεια των δαχτύλων της, βρίσκοντας τελικά το αποτέλεσμα 15. Θα μπορούσα να πω ότι και οι δύο θεώρησαν το 7 ως σύνθετη μονάδα. Όμως, η Αλίκη δεν ήταν σε θέση να το αναλύσει σε μέρη διαφορετικά από τις απλές μονάδες του, ενώ ο Φιλίπε ανέλυσε το 8 σε 7+1, μετά πρόσθεσε δύο σύνθετες μονάδες (7+7=14) και δεν λησμόνησε να λάβει υπ’ όψη του το 1 που είχε προκύψει από την ανάλυση του 8 (14+1=15). Καθώς οι ικανότητές τους να διαχειρίζονται σύνθετες μονάδες ήταν διαφορετικές, διαφορετικές θα ήταν και οι ικανότητές τους να ασχοληθούν με προβλήματα πολλαπλασιαστικού τύπου (Tzur, Johnson, Norton, Davis, Wang, Ferrara, Jorgensen, & Wei, 2017). Όμως, κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι οι λύσεις των μαθητών οφείλονταν σε επιβεβλημένες από το μάθημα στρατηγικές, τις οποίες εφάρμοσαν μηχανικά. Γι’ αυτόν το λόγο, τους έδωσα να ασχοληθούν και με προβλήματα πολλαπλασιασμού, προκειμένου να οδηγηθώ σε ασφαλέστερα συμπεράσματα για τα σημεία αφετηρίας των δύο μαθητών ως προς τη δυνατότητά τους να μάθουν να σκέφτονται πολλαπλασιαστικά.

Στο πρόβλημα με τα αερόστατα (Σε κάθε αερόστατο μπορούν να ταξιδέψουν 7 επιβάτες, πόσοι άνθρωποι μπορούν να ταξιδέψουν με 3 αερόστατα;) οι δύο μαθητές εργάστηκαν ως εξής:

Η Αλίκη στην αρχή είχε μπερδευτεί με τα δεδομένα του προβλήματος και χρειάστηκε πολλές φορές να διαβάσουμε το πρόβλημα, για να ξεμπερδέψει τη σκέψη της. Παρακάτω σκιαγραφείται η δυσκολία της:

-Φοιτήτρια: «Ας πούμε ότι αυτό εδώ είναι το πρώτο αερόστατο, πόσοι επιβάτες θα μπουν;»

-Αλίκη: «Τρεις»

-Φοιτήτρια: «Τι λέει το πρόβλημα;»

-Αλίκη: «…»

-Φοιτήτρια: «Σε κάθε αερόστατο πόσοι επιβάτες μπαίνουν;»

-Αλίκη: «Ένας;»

-Φοιτήτρια: «Τι λέει το πρόβλημα; Ξαναδιάβασε το πάλι!»

-Αλίκη: «…» «Τέσσερις»

-Φοιτήτρια: «Εδώ πέρα τι λέει το πρόβλημα; Διάβασε το πάλι...»

[…]

-Αλίκη: «εφτά»

-Φοιτήτρια: «Πόσα αερόστατα θέλουμε εμείς;»

-Αλίκη: «Τρία»

-Φοιτήτρια: «Όλοι οι επιβάτες που θα χωράνε μέσα, πόσοι θα είναι; Και στο πρώτο και στο δεύτερο και στο τρίτο;»

-Αλίκη: «Έχουμε εφτά. Θα πάρουμε το εφτά τρεις φορές»

-Φοιτήτρια: «Πόσο μας κάνει τρεις φορές το εφτά;»

[…]

-Αλίκη: «Τρεις φορές το εφτά, θα πάρω 3+3+3…»

-Φοιτήτρια: «Αυτό σημαίνει τρεις φορές το εφτά;»

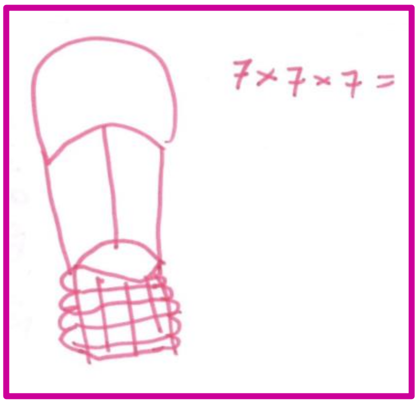
-Αλίκη: «Ναι»

-Φοιτήτρια: «Και εφτά φορές το τρία, τι σημαίνει;»

Μετά που ξεμπερδεύτηκε λιγάκι είπε:

-Αλίκη: «Το εφτά τρεις φορές, εφτά κι εφτά κι εφτά»

-Φοιτήτρια: «Για γράψε μου στο χαρτάκι σου»



Σχέδιο 1. Αλίκης. Πρόβλημα με αερόστατα

-Φοιτήτρια: «Πολύ ωραία. Πόσο μας κάνει 7+7;»

-Αλίκη: «7 + 7 = 14»

-Φοιτήτρια: «Και 7;»

-Αλίκη: «15, 16, 17, 18, 19, …» - *κόλλησε και ξεκινήσαμε απ' την αρχή*

-Φοιτήτρια: «Πάμε. 7 + 7 = 14»

-Αλίκη: «15, 16, 17»

Εδώ φαίνεται ότι είναι πραγματικά πολύ μπερδεμένη, ενώ για να το λύσει επιδίδεται κυρίως στην αρίθμηση ανά ένα.

Ο Φιλίπε απ' την άλλη εργάστηκε με τον εξής τρόπο:

-Φιλίπε: «Εγώ για να κάνω τρεις φορές το εφτά, είπα. Δύο φορές το εφτά, δεκατέσσερα και μετά έβαλα 1, 1, 1, 1, 1, 1 κι 1»

-Φοιτήτρια: «Τι είναι αυτό το 1, 1, 1, 1;»

-Φιλίπε: «Έβαλα εφτά 1»

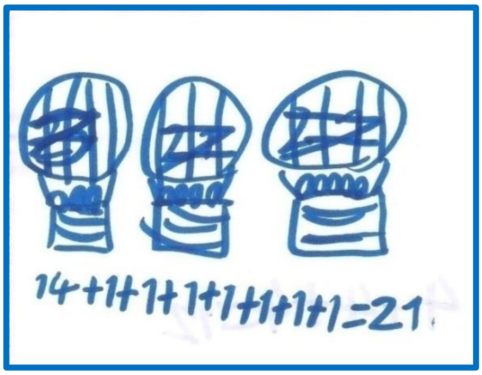
[…]

-Φοιτήτρια: «Πόσο βρήκες;»

-Φιλίπε: «21»

-Φοιτήτρια: «Τη ζωγραφιά γιατί την έκανες;»

-Φιλίπε: «Για να μετρήσω εάν είναι σωστά»



Σχέδιο 1 Φιλίπε. Πρόβλημα με αερόστατα

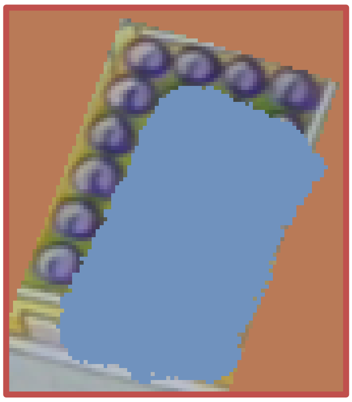
Απ’ αυτό το σύντομο απόσπασμα φαίνεται ότι ο Φιλίπε ενώ έχει καταλάβει τα δεδομένα του προβλήματος, αλλά επιλέγει να συνεχίζει με αρίθμηση ανά ένα, προκειμένου να λύσει το πρόβλημα.

Εν κατακλείδι, παρουσιάζεται εμφανώς, ήδη από την πρώτη συνάντηση, ότι ενώ οι μαθητές έχουν διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό στο σχολείο και λογικά είναι πλέον εξοικειωμένοι με πράξεις πρόσθεσης, οι τεχνικές που χρησιμοποιούν δεν είναι εκείνες που αντικατοπτρίζουν την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστική σκέψης. Ιδιαίτερα μάλιστα, η Αλίκη φαίνεται να μη διαθέτει απαραίτητες προηγούμενες γνώσεις για να αρχίσει να ασχολείται με προβλήματα πολλαπλασιαστικού τύπου.

5.3. Σημαντικά επεισόδια μέσα από την πορεία διδασκαλίας

5.3.1. Επεισόδια με κρυμμένα αντικείμενα

Προς το τέλος των αρχικών συναντήσεων και σαν συνέχεια του σεναρίου του σούπερ μάρκετ πήρα ένα καφάσι με δαμάσκηνα και με τη βοήθεια του εργαλείου της ζωγραφικής απέκρυψα ορισμένα φρούτα, με αποτέλεσμα να δημιουργήσω την παρακάτω εικόνα (βλ. **Εικόνα 8.)** Στόχος μου ήταν να εξασκήσω την αφαιρετική σκέψη των μαθητών. Γι’ αυτό το λόγο, έδειξα στους μαθητές μου αυτή την εικόνα από μακριά και τους ζήτησα να υπολογίσουν όσο πιο γρήγορα μπορούσαν πόσα είναι όλα τα φρούτα μέσα στο καφάσι. Οι μαθητές στην αρχή δυσκολεύτηκαν κι αυτό φαίνεται ξεκάθαρα από τις απαντήσεις που έδωσαν:



Εικόνα 8. Καφάσι με κρυμμένα δαμάσκηνα

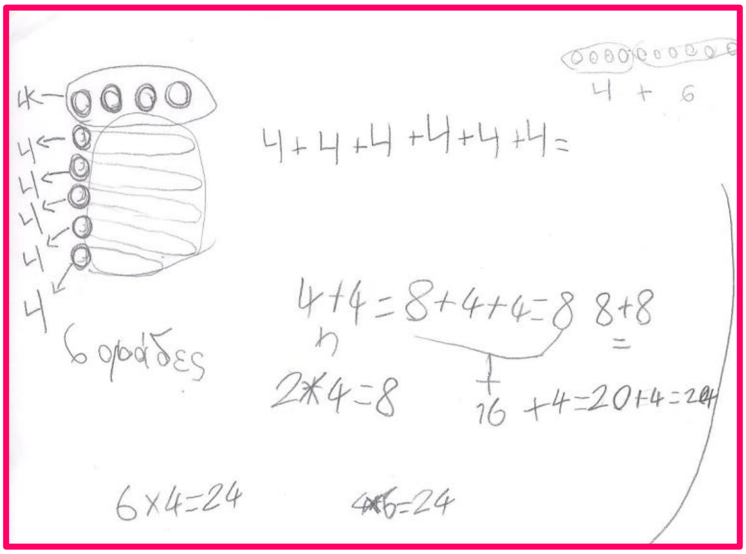
-Φοιτήτρια: «Θέλω να μου πείτε πόσα δαμάσκηνα πιστεύεται ότι έχει μέσα το καφάσι.»

-Φελίπε: «39»

-Αλίκη: «Νομίζω ότι έχει 13, ή βασικά 12»

-Φοιτήτρια: «Πάμε να δούμε τι μπορούμε να κάνουμε για να το βρούμε».

Σ’ αυτό το σημείο ξεκινήσαμε μία συζήτηση για τα κρυμμένα δαμάσκηνα κι ο Φιλίπε πρώτος παρατήρησε ότι σε κάθε σειρά λείπουν από 3 δαμάσκηνα. Ύστερα αρχίσαμε να δουλεύουμε πάνω στο καφάσι που είχε σχεδιάσει η Αλίκη, κυκλώνοντας τις ομάδες από δαμάσκηνα και σχηματίζοντας τελικά 6 ομάδες από 4 δαμάσκηνα στην κάθε μία, προκειμένου να βρούμε το αποτέλεσμα (βλ. **Σχέδιο 1 Αλίκης.**). Τα παιδιά με λίγα λόγια κατάφεραν να λύσουν την άσκηση, έχοντας πλέον μπροστά τους το καφάσι και μετά από δική μου στήριξη, γεγονός που καταδεικνύει ότι δεν ήταν ακόμη έτοιμα γι’ αυτή την απότομη μετάβαση από τα ορατά αντικείμενα στα κρυμμένα.



Σχέδιο 2 Αλίκης. Καφάσι με κρυμμένα δαμάσκηνα

Έτσι λοιπόν γυρίσαμε στην επεξεργασία ορατών αντικειμένων και μετά το πέρας των μισών συναντήσεων επανέφερα το ίδιο καφάσι, προκειμένου να ελέγξω εάν οι μαθητές ήταν σε θέση τότε να βρουν γρήγορα το σύνολο όλων των φρούτων, ορατών και κρυμμένων. Σ’ αυτή τη συνάντηση η βελτίωση της Αλίκης ήταν μεγάλη, καθώς βρήκε το αποτέλεσμα πιο γρήγορα από την προηγούμενη φορά. Ο διάλογος που ακολουθεί σκιαγραφεί πλήρως τη βελτίωσή της:

-Φοιτήτρια: «Εσύ τι βρήκες Αλίκη;»

-Αλίκη: «24»

-Φοιτήτρια: «Πώς το βρήκες το 24;»

-Αλίκη: «Επειδή εδώ πέρα είδα 4 (*δείχνοντας την πρώτη σειρά*) και τότε αφού είναι 4 πάνω, θα είναι και κάτω»

-Φοιτήτρια: «Και άρχισες να μετράς 4+4+4+4+4+4;»

-Αλίκη: «4+4=8 και 4, 12 και 4 (*αργεί λίγο γιατί αριθμεί ανά 4*) 16 και 4, 20 και 4, 24»

-Φοιτήτρια: «Ωραία. Ως εδώ οι δύο πάνω σειρές είχαν 8, μετά έχουμε άλλες δύο σειρές;»

-Αλίκη: «Ναι»

-Φοιτήτρια: «Άρα δηλαδή είναι σαν να έχουμε κι άλλη οχτάδα εδώ. Δεν είναι; 8+8=;»

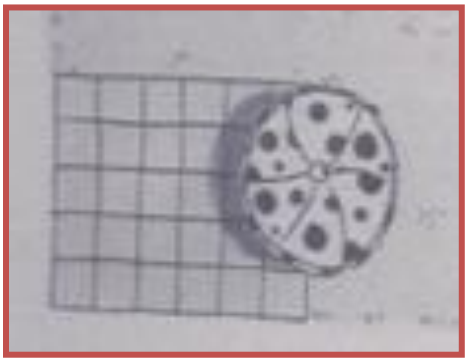
-Αλίκη: «16»

-Φοιτήτρια: «Και μετά δεν έχουμε άλλες δύο σειρές που μας δίνουν 8; Άρα; Κι άλλα 8; Είχαμε μείνει στα 16»

-Αλίκη: «24» - *αργεί λίγο γιατί μετρά από μέσα της – ωστόσο πιο γρήγορα τώρα πια*

-Φοιτήτρια: « Άρα πόσες φορές είδαμε το 8; Προσέξτε. Είδαμε μία, δύο, τρεις φορές το 8. Για να τα γράψουμε στο χαρτί.»

Αργότερα στην ίδια συνάντηση πάλι στο ίδιο σκεπτικό με την απόκρυψη ενός μέρους από το όλο τους έδειξα τη διπλανή φωτογραφία με μια ομπρέλα που καλύπτει ένας μέρος από τα πλακάκια μιας πισίνας (βλ. **Εικόνα 9.**). Ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:



Εικόνα 9. Ομπρέλα στα πλακάκια

-Φοιτήτρια: «Πόσα είναι όλα τα πλακάκια; Θέλω να το υπολογίσετε πολύ γρήγορα.»

-Αλίκη: «Αχ! μπερδεύτηκα…» - *μάλλον στην προσπάθειά της να βρει γρήγορα το αποτέλεσμα.*

-Φιλίπε: «Εδώ είναι 30»

-Φοιτήτρια: «Πώς το υπολόγισες; Μέτρησες ένα - ένα;»

-Φιλίπε: «Όχι. Μέτρησα έξι-έξι»

-Φοιτήτρια: «Πού τις είδες τις εξάδες; Για δείξε μου»

-Φιλίπε: «Βασικά μέτρησα δώδεκα – δώδεκα»

-Φοιτήτρια: «Πού είναι; Δεν τα βλέπω καλά»

-Φιλίπε: «1,2,3,4,5…ααα»

-Φοιτήτρια: «Μήπως είναι αλλού τα έξι; Πού τα μέτρησες; Για δες το καλά»

-Αλίκη: «Έτοιμη. Να πω;»

-Φοιτήτρια: «Για να μας πεις»

-Αλίκη: «Εγώ επειδή η πίτσα έχει πέσει πάνω δω (– *δείχνει το σημείο που έπεσε),* αλλά εδώ δεν έχει πέσει καθόλου (– *δείχνει το κάτω σημείο με τα έξι κενά πλακάκια)*»

-Φοιτήτρια: «Πολύ ωραία!»

-Αλίκη: «Άρα μέτρησα έξι-έξι»

-Φοιτήτρια: «Πού τα είδες τα έξι;»

-Αλίκη: «Εδώ κάθετα»

-Φοιτήτρια: «Για μέτρα πάλι»

-Αλίκη: «1,2,3,4,5,6»

-Φοιτήτρια: «Αυτά είναι οριζόντια όχι κάθετα. Έξι είναι οριζόντια στη σειρά. Εδώ πάνω πόσα έχουμε; Πρόσεξε γιατί μπερδεύτηκες κι εσύ σαν τον Φιλίπε»

-Αλίκη: «Πέντε»

-Φοιτήτρια: «Πέντε»

-Αλίκη: «Εγώ είπα πέντε φορές το έξι, ίσον τριάντα»

Απ' αυτό το επεισόδιο γίνεται εμφανές ότι η σκέψη, η αντιληπτικότητα και η ταχύτητα ως ένα βαθμό έχουν βελτιωθεί και στα δύο παιδιά. Από εκεί δηλαδή που στο προηγούμενο επεισόδιο δυσκολεύτηκαν να βρουν τον αριθμό όλων των αντικειμένων ορατών και μη, δίχως συζήτηση και σχεδίαση, κατάφεραν να το βρίσκουν με περισσότερη ακρίβεια. Βέβαια πρέπει να σημειωθεί ότι ο ένας μαθητής ήταν πάντοτε στήριγμα του άλλου κι ότι χάρη σ' αυτή την αλληλεξάρτηση και στη δική μου αρχική στήριξη μπόρεσαν να τα καταφέρουν.

Εντούτοις, δεν πρέπει να παραλείψουμε τα ερευνητικά και παιδαγωγικά λάθη που συνόδευσαν την αξιοποίηση αυτής της δραστηριότητας. Με αυτή τη δραστηριότητα είχα ως στόχο οι μαθητές μου να καταφέρουν να συντονίσουν σύνθετες μονάδες, ακόμη κι όταν δεν ήταν σε θέση να τις έχουν μπροστά τους. Ήθελα να εξετάσω αυτή την παράμετρο καθώς η ταυτόχρονη αρίθμηση των σύνθετων μονάδων που δημιουργούν από αντικείμενα που τα φαντάζονται και ο συντονισμός τους, είναι οι ενέργειες των μαθητών που επιθυμούσα να προωθήσω. Μελλοντικά, η νοερή εκτέλεσή τους χωρίς να υπάρχουν ορατά αντικείμενα ή να υπονοείται η ύπαρξή τους θα συνιστούσε σύμφωνα με το θεωρητικό μου πλαίσιο αποδεικτικό στοιχείο για τη μετάβαση των μαθητών από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη.

Σε μία από τις πρώτες συναντήσεις με τα παιδιά αξιοποίησα αυτή την δραστηριότητα (κρυμμένα δαμάσκηνα), η οποία όμως δεν απέφερε τους καρπούς που επιθυμούσα, καθώς όπως φάνηκε οι μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο εξοικείωσης με τα ορατά αντικείμενα, προκειμένου να είναι σε θέση να υπολογίζουν πιο αφαιρετικά. Εκ των υστέρων συνειδητοποιώ ότι θα έπρεπε να είχα δώσει περισσότερο χρόνο στους μαθητές να εξοικειωθούν με τις ενέργειές τους στην αρίθμηση των φρούτων στα καφάσια όταν όλα τα φρούτα που περιέχουν είναι ορατά. Όμως, δεδομένου ότι οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό στην τάξη, δεν πίστευα ότι θα υπήρχε τόσο μεγάλη δυσκολία κι αυτό ήταν κάτι που με εξέπληξε.

Ωστόσο, ο σχετικά έγκαιρος εντοπισμός αυτού του λάθους με οδήγησε στην επαναφορά των ορατών αντικειμένων ωσότου αισθανθώ τους μαθητές ικανούς να υπολογίζουν γινόμενα ακόμη και με κρυμμένα αντικείμενα. Πράγματι, χρειάστηκε να επαναφέρω τα καφάσια με όλα τα φρούτα ορατά ώστε να προσφέρω στους μαθητές κάτι που φάνηκε ότι είχαν ανάγκη, για να αρχίσουν να συνειδητοποιούν τις ενέργειές τους στην διπλή πολλαπλασιαστική αρίθμηση. Για άλλη μια φορά αυτή η πορεία επαληθεύει την παιδαγωγική αρχή ότι η μάθηση είναι μία μακρά κι επίπονη διαδικασία και δεν μπορεί να συμβεί από τη μια στιγμή στην άλλη.

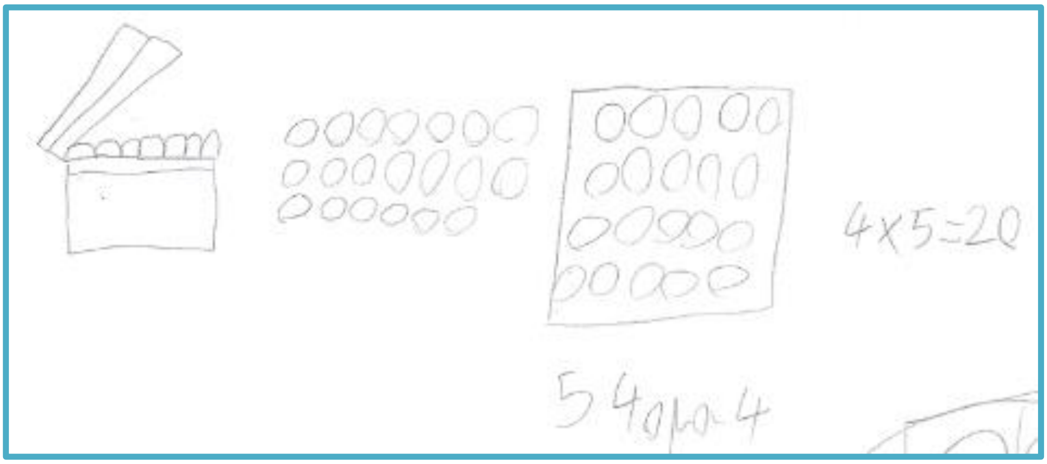
Η διαχείριση της συζήτησης με τους μαθητές, από την πλευρά μου, με οδηγεί στη συνειδητοποίηση ενός ακόμα σφάλματος. Κατευθύνω τη σκέψη των μαθητών στην αρίθμηση των γραμμών από δαμάσκηνα με πιο γρήγορο τρόπο. Τους θέτω ερωτήματα που απαιτούν την κατανομή 2 σύνθετων μονάδων από δαμάσκηνα (16) τη φορά στις 6 σειρές από δαμάσκηνα που έδειχνε η εικόνα. Αντί αυτής της ενέργειάς μου θα μπορούσα να είχα ζητήσει από τους μαθητές να βρουν δικούς τους πιο γρήγορους τρόπους για να μετρήσουν τα δαμάσκηνα. Η δημιουργία και η συντονισμένη αρίθμηση σύνθετων μονάδων που οι μαθητές θα είχαν οι ίδιοι δημιουργήσει θα ήταν έτσι πιο επωφελής για την μελλοντική τους εξέλιξη.

Τέλος, ένα ακόμα λάθος μου στη στήριξη των μαθητών αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο άφησα τους μαθητές να συμβολίζουν τη σκέψη τους. Στο **Σχέδιο 2 Αλίκης** φαίνεται η προσπάθειά της να καταγράψει τις διαδοχικές προσθέσεις που έκανε για να βρει πόσα είναι όλα τα δαμάσκηνα. Υπενθυμίζω ότι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση μπορεί να είναι ένας τρόπος για να υπολογισθεί ένα γινόμενο αλλά δεν δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να φανταστούν τι ακριβώς είναι αυτό το οποίο αριθμούν προτού εμπλακούν στον υπολογισμό του. Μπορεί να εκτελούν μηχανικά τις διαδοχικές προσθέσεις χωρίς να αντιλαμβάνονται τη διασύνδεση των σύνθετων μονάδων με τις οποίες ασχολούνται. Οι πιθανότητες να συνειδητοποιήσουν σταδιακά τις αναλογικές σχέσεις που διέπουν τους παράγοντες ενός γινομένου με το γινόμενο αυτό καθαυτό μειώνονται. Βέβαια, θα ήθελα να επισημάνω ότι οι διαδοχικές προσθέσεις , στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν δόθηκαν από εμένα. Σε αντίθεση από την πρακτική που ακολουθείται στα διδακτικά βιβλία, οι ίδιοι οι μαθητές έγραφαν τα αθροίσματα για να υπολογίσουν και δεν συμπλήρωναν τα κενά σε έτοιμες προσθέσεις. Παρόλα αυτά θα μπορούσα να είχα βοηθήσει τους μαθητές στην αξιοποίηση άλλων τρόπων συμβολισμού των ενεργειών τους (πρβλ. Κεφάλαιο 2, παράγραφος 2.2. Η μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη).

5.3.2. Επεισόδια με σοκολατάκια και κουτιά

Λίγο πριν τις μισές συναντήσεις με τους μαθητές εισήγαγα μία νέα δραστηριότητα με τίτλο «Το Ζαχαροπλαστείο του κυρίου Ανέστη». Σ’ αυτή την δραστηριότητα ζητούσα από τους μαθητές να μου σχεδιάσουν σε ένα χαρτί με ποιον τρόπο ο κύριος Ανέστης τοποθετεί 20 σοκολατάκια σε ένα κουτί, προκειμένου να τα δώσει σε κάποιον πελάτη. Οι μαθητές εργάστηκαν ως εξής:

Στην αρχή ο Φιλίπε σχεδίασε ένα κουτί με ένα καπάκι από πάνω και 7 σοκολατάκια στη σειρά. Στη συνέχεια, τον παρότρυνα να ζωγραφίσει όλα τα σοκολατάκια κι εκείνος σχεδίασε δίπλα 7, από κάτω άλλα 7 κι από κάτω άλλα 6. Ύστερα, άδραξα την ευκαιρία και συζητήσαμε λίγο για τη διάταξη που πρέπει να έχει το κουτί έτσι ώστε να μην δημιουργείται κανένα κενό και να είναι γεμάτες οι σειρές πάντα με τον ίδιο αριθμό από σοκολατάκια, για να μην κουνιούνται μέσα. Έτσι, χωρίς να εξηγήσει πως, αμέσως συνειδητοποίησε το λάθος του κι άρχισε να σχεδιάζει 5-5 τα σοκολατάκια σε σειρές (βλ. **Σχέδιο 2 Φιλίπε**).



Σχέδιο 2 Φιλίπε. Προβληματική κατάσταση με 20 σοκολατάκια σε κουτί

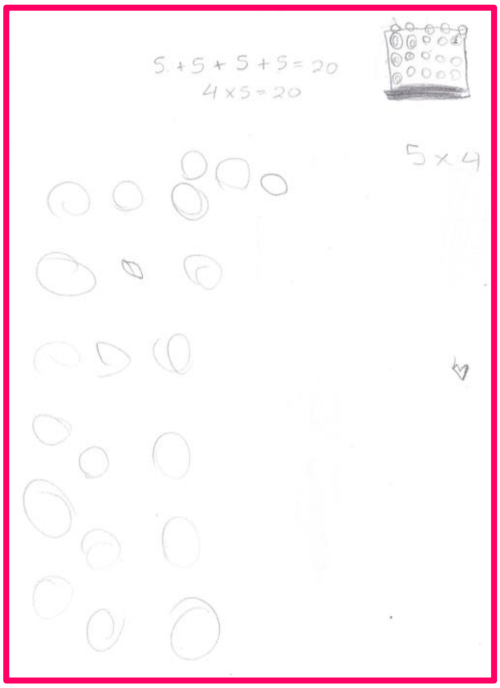
Η Αλίκη απ’ την άλλη στην αρχή σχεδίασε διάσπαρτα τα σοκολατάκια πάνω στο χαρτί και μετά τη συζήτηση που είχαμε με τον Φιλίπε για το κουτί και πως πρέπει να είναι παραταγμένα τα σοκολατάκια σε ίσες ομάδες, σχεδίασε κι αυτή ένα ορθογώνιο κουτί για να βάλει μέσα τα σοκολατάκια της (βλ. **Σχέδιο 3 Αλίκης.**). Σ’ εκείνο το σημείο ξεκίνησα μία συζήτηση γύρω από το σχήμα που πρέπει να έχει το κουτί, καθώς είχα προβλέψει ότι οι ενδεχομένως οι μαθητές να δοκιμάσουν κι άλλα σχήματα (καρδούλα, τρίγωνο, κ.α.), πράγμα το οποίο θα αναιρούσε τον σκοπό της δραστηριότητας. Η Αλίκη μάλιστα μου είπε χαρακτηριστικά:

-Αλίκη: «Γιατί συνήθως κάθε φορά που πηγαίνω στο ζαχαροπλαστείο μας βάζουν τέτοια κουτιά».

-Φοιτήτρια: «Τι σχήμα είναι αυτό; Ξέρετε;»

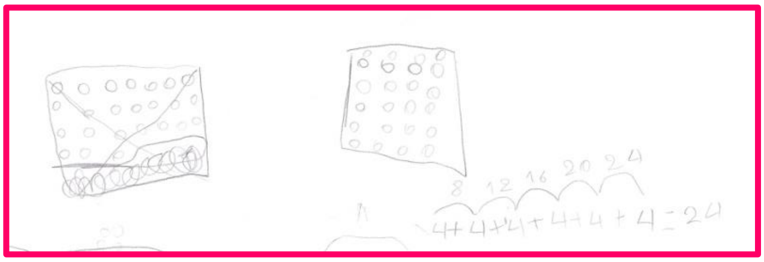
-Αλίκη: «Τετράγωνο»

Αυτό μας δείχνει ότι η εμπειρία τους ξεπέρασε τη γνώση και λόγω αυτού είναι σε θέση να αποφύγουν το σφάλμα της επιλογής ενός άλλου σχήματος.



Σχέδιο 3 Αλίκης. Προβληματική κατάσταση με 20 σοκολατάκια σε κουτί

Όταν ασχοληθήκαμε σε επόμενες συναντήσεις με την ίδια προβληματική κατάσταση οι μαθητές πλέον είχαν εμπεδώσει τον ορθογώνιο/τετράγωνο σχηματισμό του κουτιού, χωρίς όμως απαραίτητα να είναι πάντα σε θέση να τοποθετούν τα σοκολατάκια χωρίς να μένει κανένα κενό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η απόπειρα της Αλίκης να σχεδιάσει 24 σοκολατάκια σε ένα κουτί, κάπου στα μισά των συναντήσεών μας. Η Αλίκη στην πρώτη της απόπειρα σχεδίασε ένα τετράγωνο κουτί, καθώς το είχαμε συζητήσει και παλαιότερα, αλλά τοποθέτησε 7-7 τα σοκολατάκια σε τρεις σειρές και στην τέταρτη έβαλε 3. Αυτή η τοποθέτηση με παραξένεψε γιατί είχαμε συζητήσει για το πώς πρέπει να μπαίνουν τα σοκολατάκια μέσα στο κουτί, χωρίς να δημιουργείται κάποιο κενό. Αμέσως όμως κατάλαβε το λάθος της και πρότεινε να φτιάξει ένα κουτί με τα σοκολατάκια να είναι τοποθετημένα 4-4, χωρίς όμως να μπορεί να εξηγήσει γιατί επέλεξε αυτή τη διάταξη. Στην παρότρυνσή μου εάν θα μπορούσε να σκεφτεί από πριν για το πώς θα μπορούσαν να τοποθετηθούν τα σοκολατάκια μέσα στο κουτί, χωρίς να περισσεύει καμία θέση, εκείνη μου απάντησε «Όχι» και θα το έλεγχε αρχικά με τις τετράδες. Απ’ αυτό αντιλαμβανόμαστε πως η μαθήτρια είναι ακόμη σε χαμηλό επίπεδο, παρά το πέρας των συναντήσεων κι έχει ανάγκη την αναπαράσταση, προκειμένου να ελέγξει την απάντησή της. Έτσι λοιπόν, έφτιαξε ένα κουτί με 6 τετράδες κι άρχισε να γράφει «4+4+4+4+4+4=» κι από πάνω να ενώνει τα *τεσσάρια* και να γράφει το συνολικό άθροισμα (βλ. **Σχέδιο 4 Αλίκης.**).



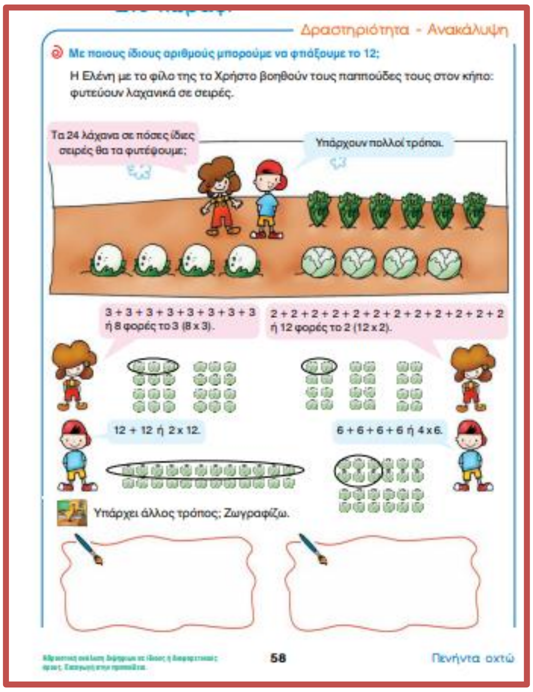
Σχέδιο 4 Αλίκης. Προβληματική κατάσταση με 24 σοκολατάκια σε κουτί

Μέσα απ’ αυτά τα δύο σύντομα επεισόδια συμπεραίνω ότι αυτή η προβληματική κατάσταση ήταν εσπευσμένη από τη μεριά μου, καθώς δυσκόλεψε πολύ τους μαθητές. Στην αρχή δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τη διάταξη που θα πρέπει να έχουν τα σοκολατάκια μέσα στο κουτί, έτσι ώστε να μην υπάρχει κανένα κενό. Έπειτα, αν και φάνηκε ότι το είχαν ξεπεράσει σε επόμενη συνάντηση αναδύθηκε και πάλι το πρόβλημα, το οποίο αυτή τη φορά ξεπεράστηκε με μεγαλύτερη ευκολία, φανερώνοντας όμως ότι δεν ήταν απολύτως ξεκαθαρισμένο και στους δύο μαθητές.

Σ’ αυτό το σημείο, χρήσιμο είναι να αναφερθούν τα λάθη στα οποία υπέπεσα, προκειμένου να αποτελέσουν παραδείγματα προς αποφυγή σε μελλοντικές διδασκαλίες αλλά και θεμέλιο για την καλύτερη μελέτη της πορείας των μαθητών. Αρχικά λοιπόν, δεν είχα κάνει επαρκή διαπραγμάτευση του σεναρίου με τους μαθητές μου από πριν για το εάν το κουτί θα πρέπει να είναι τελείως γεμάτο ή όχι. Μπορεί να κάναμε μία νύξη για το σχήμα του κουτιού, αλλά το κενό που ενδεχομένως προκύπτει δεν το είχαμε συζητήσει από πριν. Έτσι, μπορεί να μην εντυπώθηκε καλά μέσα στο μυαλό τους, κι αυτό φαίνεται ότι ταλάνισε τους μαθητές και σε άλλες συναντήσεις, όπως στην περίπτωση της Αλίκης στα μισά των συναντήσεων.

Έπειτα, παρασυρόμενη από το βιβλίο του μαθητή επέλεξα τη συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση η οποία κρίθηκε εκ των υστέρων παιδαγωγικά μη ορθή, γιατί το πρόβλημα ενείχε έναν βαθμό δυσκολίας παραπάνω, καθώς περίκλειε στην ουσία την αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, τη διαίρεση. Ωστόσο, προσπάθησα να διαφοροποιηθώ από το βιβλίο, όπου οι πράξεις και οι στρατηγικές του πολλαπλασιασμού δίνονται έτοιμα στους μαθητές, με τελευταίο το περιθώριο του ελεύθερου σχεδιασμού (βλ. **Εικόνα 10**). Εγώ απ' την άλλη τους παρείχα χαρτί και μολύβι και τους άφησα να πειραματιστούν και να δοκιμάσουν μόνοι τους διάφορους τρόπους. Παρόλ' αυτά όμως, οι μαθητές δεν ήταν ακόμη έτοιμοι να δουλέψουν το αντίστροφο του πολλαπλασιασμού και γι' αυτό αναγκάστηκα να επιστρέψω στα προβλήματα «καθαρού» πολλαπλασιασμού μέχρι να εξοικειωθεί και να ωριμάσει η σκέψη τους πάνω στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις των γινομένων.

Εν κατακλείδι, θα ήθελα να επισημάνω την έκπληξη που μου προκάλεσε η δυσκολία των μαθητών να ανταποκριθούν σ' αυτό το πρόβλημα, δεδομένου ότι έχουν διδαχθεί ήδη τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση στην τάξη τους.

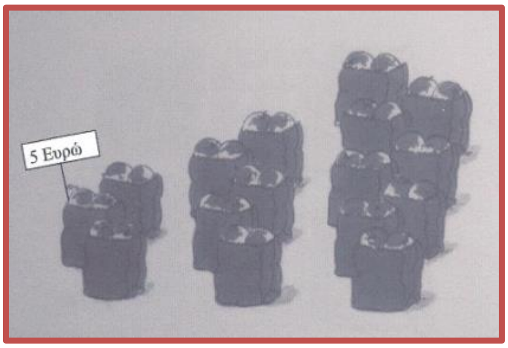


Εικόνα 10. Βιβλίο μαθητή, α' τεύχος, σελ. 58

5.3.3. Επεισόδια με σακούλες και γραμματόσημα

Προς το τέλος των συναντήσεων, τα παιδιά και ιδιαίτερα ο Φελίπε έδειχναν να έχουν αποκτήσει κάποια ευχέρεια στην πολλαπλασιαστική διπλή αρίθμηση μονάδων. Αυτή η ευχέρεια σύμφωνα με τον Tzur και τους συνεργάτες του (Tzur, et al., 2013) αποτελεί βάση για την επινόηση στρατηγικών υπολογισμού γινομένων. Δηλαδή, οι μαθητές αρχίζουν προοδευτικά να υπολογίζουν άγνωστα γινόμενα βασιζόμενοι σε άλλα που τους είναι ήδη γνωστά (π.χ. 5x7 είναι σαν ένα κουτί που έχει 5 σειρές με 7 σοκολατάκια στην καθεμιά. Ξέρω ότι θα έχει 35 σοκολατάκια. Άρα το 6x7 είναι σαν ένα κουτί με μία σειρά σοκολατάκια ακόμα και γι’ αυτό θα έχει 35 + 7 = 42 σοκολατάκια). Σκέφτηκα λοιπόν να δοκιμάσω κάποιες δραστηριότητες που θα τους ενθάρρυναν στην ανάπτυξη στρατηγικών υπολογισμού, οι οποίες από μαθηματική πλευρά αντανακλούν μία αίσθηση των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού. Την πρώτη φορά που επεχείρησα αυτές τις δραστηριότητες, η Αλίκη απουσίαζε.

Έτσι λοιπόν έδειξα στον Φελίπε πρώτα την αριστερή συλλογή από σακούλες με μήλα, καθώς φαίνεται στη διπλανή εικόνα (βλ. **Εικόνα 11.**) και τον ρώτησα να μου πει πόσο κάνουν και γιατί.



Εικόνα 11. Σακούλες με μήλα

-Φιλίπε: «Δεκαπέντε»

-Φοιτήτρια: «Τι έκανες για να το βρεις;»

-Φιλίπε: «Έκανα τρεις φορές το πέντε»

Ύστερα, κρύβοντας την αρχική συλλογή, του έδειξα τη μεσαία κι όταν βρήκε την τιμή της εργάστηκε κατά τον ίδιο τρόπο και με την τελευταία συλλογή, αφού είχα κρύψει προηγουμένως τις δύο υπόλοιπες. Αμέσως μετά ξεκίνησα μία συζήτηση με σκοπό να ενθαρρύνω την επιμεριστική ιδιότητα στο μαθητή.

-Φοιτήτρια: Γνωρίζοντας τις ποσότητες από τις προηγούμενες σακούλες μπορούσαμε να βρούμε την τιμή των τρίτων σακουλών; Δηλαδή στην αρχή πόσες σακούλες είχαμε;»

-Φιλίπε: «3»

-Φοιτήτρια: «Κι εδώ;»

-Φιλίπε: «5»

-Φοιτήτρια: «Κι εδώ;»

-Φιλίπε: «8»

-Φοιτήτρια: «Ωραία! Να σου πω. Πέντε και τρία πόσο μας κάνει;»

-Φιλίπε: «Οχτώ»

-Φοιτήτρια: «Άρα είναι σαν να έχουμε αυτά (*δείχνοντας τα οχτώ*). Πόσο είχαμε βρει εδώ τα τρία; Θυμάσαι;»

-Φιλίπε: «Είχαμε βρει δεκαπέντε»

-Φοιτήτρια: «Μπράβο Φιλίπε! Και στα πέντε;»

-Φιλίπε: «Εικοσιπέντε»

-Φοιτήτρια: «Άρα, αφού πέντε και τρία μας κάνει οχτώ, κι έχουμε βρει πόσα είναι στα τρία, *δεκαπέντε* και πόσο κάνουν οι πέντε σακούλες, *εικοσιπέντε,* μπορούσαμε να βρούμε, χωρίς να πούμε οχτώ φορές το πέντε, πόσες είναι όλες οι σακούλες;»

-Φιλίπε: «Ναι. Θα κάναμε πρόσθεση. Δεκαπέντε και εικοσιπέντε»

-Φοιτήτρια: «Μπράβο! Είσαι απίστευτος!»

Απ' αυτό το επεισόδιο γίνεται εμφανές ότι ο μαθητής χρειάζεται τη δική μου στήριξη προκειμένου να είναι σε θέση να βρει το ζητούμενο με την αξιοποίηση της επιμεριστικής ιδιότητας. Παρά το γεγονός ότι έχει διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό κι έχει λύσει ασκήσεις που ενέχουν τον επιμερισμό στα σχολικά εγχειρίδια, εντούτοις δεν μπορεί να συνδυάσει από μόνος του τα ήδη γνωστά γινόμενα, προκειμένου να βρει το άγνωστο.

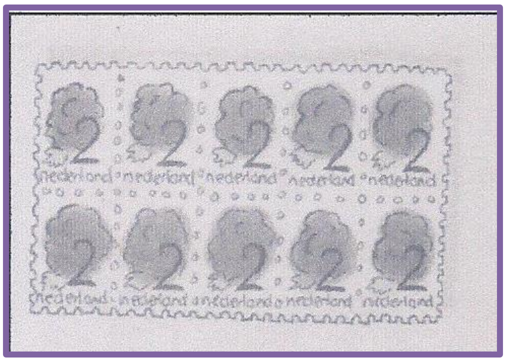
Σ' αυτό το σημείο, αναγκαίο είναι να σχολιαστεί ο τρόπος που διαχειρίστηκα τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Αρχικά, μου είχε φανεί ότι το πρόβλημα με τις σακούλες θα υποκινούσε τον μαθητή στην αξιοποίηση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Συγκρίνοντάς το με την προσέγγιση των βιβλίων τα οποία αξιοποιούν πλέγματα για να ωθήσουν τους μαθητές στην αξιοποίηση των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού (βλ. **Εικόνα 5.**, πρβλ. 4.1. Τα βιβλία των μαθητών) θεώρησα ότι θα έδινε στον μαθητή την ευκαιρία να οδηγηθεί σε μία λειτουργική κατανόηση της επιμεριστικότητας. Εκ των υστέρων, πιστεύω ότι ο τρόπος που το αξιοποίησα δεν ήταν παιδαγωγικά κατάλληλος.

Καταρχήν, ο τρόπος που παρουσίασα την εικόνα που συνόδευε το πρόβλημα, δηλαδή δείχνοντάς του κάθε συλλογή ξεχωριστά δεν βοήθησε τον μαθητή να σχηματίσει μια ολοκληρωμένη εικόνα για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αν του είχα δείξει ολόκληρη την εικόνα με τις 3 συλλογές και τον είχα ρωτήσει να μου την περιγράψει, εστιάζοντας την προσοχή του στις ομοιότητες και τις διαφορές που είχαν οι συλλογές μεταξύ τους, ενδεχομένως, με έναν έμμεσο τρόπο να τον είχα στηρίξει να αξιοποιήσει τα γινόμενα που θα έβρισκε στον υπολογισμό των άγνωστων γινομένων.

Από την άλλη πλευρά, οι ερωτήσεις μου για να υποκινήσω τον μαθητή να βρει τα άγνωστα γινόμενα ήταν ιδιαίτερα καθοδηγητικές. Θα μπορούσα πρώτα να του είχα ζητήσει να βρει έναν πιο γρήγορο τρόπο μόνος του κι αν ο μαθητής αδυνατούσε να βρει κάτι διαφορετικό, να τον ρωτούσα αν θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα ευρώ που κόστιζε η πρώτη συλλογή.

Τέλος, οι ποσότητες «ευρώ» και οι «συλλογές με σακούλες» που υπεισέρχονται στο πρόβλημα ίσως δυσκόλεψαν τον μαθητή να ανταποκριθεί στο μαθησιακό σκοπό της δραστηριότητας. Αν η εικόνα του προβλήματος είχε διαφορετικές ποσότητες (π.χ. διαφορετικές συλλογές με πύργους που θα ήταν φτιαγμένοι με τον ίδιο αριθμό από κυβάκια, όπως 3 πύργοι με 5 κυβάκια ο καθένας, 5 πύργοι με 5 κυβάκια ο καθένας και μετά 8 πύργοι με 5 κυβάκια ο καθένας) ίσως ο μαθητής να ήταν σε θέση να κάνει χρήση της επιμεριστικότητας.

Σε επόμενη συνάντηση στην οποία ήταν παρούσα κι η Αλίκη έδωσα μία παρόμοια δραστηριότητα όμως αυτή τη φορά έδειχνα όλη την εικόνα κι άφηνα ελεύθερη τη σκέψη των μαθητών να οδηγηθεί στην επιμεριστικότητα. Έτσι λοιπόν στην ερώτηση πόσο κοστίζουν όλα τα γραμματόσημα της παρακάτω εικόνας (**βλ. Εικόνα 12.**) ο Φιλίπε είπε:



Εικόνα 12. Γραμματόσημα με τιμές

-Φιλίπε: «Το αποτέλεσμα είναι 20»

-Φοιτήτρια: «Είναι 20. Τι έκανες για να το βρεις;»

-Φιλίπε: «Είπα 8 και 8»

-Φοιτήτρια: «Πού το είδες το 8;»

-Φιλίπε: «Είναι 4 και 4, 8 και του έβαλα κι άλλα δύο»

-Φοιτήτρια: «Και μας κάνει;»

-Φιλίπε: «Δέκα. Και μετά είδα το ίδιο»

Απ' την τελευταία του φράση γίνεται αντιληπτό ότι αρχίζει σιγά-σιγά να βλέπει την επιμεριστικότητα μέσα στο παράδειγμα και γνωρίζοντας το κόστος της πάνω σειράς, είναι σε θέση να βρει το τελικό αποτέλεσμα διπλασιάζοντάς την απλά.

Η Αλίκη απ' την άλλη εργάστηκε διαφορετικά καθώς φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

-Φοιτήτρια: «Εσύ Αλίκη, πώς σκέφτηκες;»

-Αλίκη: «Κυρία εγώ είπα. 2+2 = 4 και 2, 6... Εγώ απλώς μέτρησα δύο-δύο»

-Φοιτήτρια: «Και τι βρίσκεις;»

-Αλίκη: «Είκοσι»

Αν και οι σύνθετες μονάδες που η Αλίκη επαναλαμβάνει είναι μικρότερες από αυτές του Φιλίπε φαίνεται να είναι σε θέση να διπλασιάσει την τιμή της πρώτης σειράς γραμματοσήμων για να υπολογίσει τη συνολική τιμή τους.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία, την οποία εκπόνησα στα πλαίσια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, αποτέλεσε μία ανεπανάληπτη εμπειρία για μένα και μου χάρισε χρήσιμα εφόδια ως αυριανή εκπαιδευτικό σε κάποιο σχολείο. Σκοπός αυτής της δουλειάς μπορεί να μην ήταν η διεξαγωγή μίας τέλειας διδασκαλίας που θα στηρίζει τους μαθητές να μεταβούν από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη. Ίσως μία τέτοια διδασκαλία να μην υπάρξει και ποτέ. Εκείνο όμως το οποίο πέτυχα μ’ αυτή τη δουλειά ήταν να συνειδητοποιήσω βαθειά τις δυσκολίες που συναντά κάποιος εκπαιδευτικός όταν προσπαθεί να σεβαστεί και να θέσει σε προτεραιότητα τις σκέψεις των μαθητών έναντι των δικών του στο συγκεκριμένο πεδίο της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Πράγματι, δεν είναι διόλου εύκολο να απεκδυθεί κανείς τα παραδοσιακά πρότυπα με τις ετοιμοπαράδοτες λύσεις και να προβάλλει την φωνή και τα σχέδια των παιδιών στο προσκήνιο.

Αρχικά, στον στόχο αυτό πολύτιμη πυξίδα αποτέλεσε το διάβασμα της σύγχρονης βιβλιογραφίας γύρω από την πολλαπλασιαστική σκέψη. Μελετώντας σύγχρονες έρευνες και στρατηγικές προσπάθησα να καταλάβω τι ακριβώς θέλω να εξετάσω και με τι μέσα και τρόπο μπορώ να το καταφέρω καλύτερα. Το διάβασμα τόσο πριν και κατά τη διάρκεια των συναντήσεων με τους μαθητές, όσο και μετά το πέρας αυτών, ήταν καθοριστικό για να εναρμονίσω το θεωρητικό με το πρακτικό σκέλος της εργασίας μου. Αυτή η διαρκής μελέτη με βοήθησε να είμαι σε θέση απ’ τη μία να μελετήσω τα σχολικά εγχειρίδια με κριτική ματιά κι απ’ την άλλη να στοχαστώ και να επανεξετάσω την πορεία της διδασκαλίας μου πριν, μετά αλλά και κατά τη διάρκεια διεξαγωγής της. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της διαρκούς μελέτης της βιβλιογραφίας αποτέλεσε η συνειδητοποίηση της αξίας του άρθρου του Tzur και των συνεργατών του (Tzur, et al., 2013) μετά το πέρας των συναντήσεων, καθώς φάνηκε ότι οι μαθητές είχαν πράγματι ανάγκη την επαφή με χειροπιαστό υλικό.

Έπειτα, άλλος σταθμός στην προσπάθεια μου να αναδείξω τη σκέψη των μαθητών μέσα από την επιλογή κατάλληλων προβλημάτων αποτέλεσε η μελέτη των βιβλίων. Έχοντας όμως γνώση της σύγχρονης βιβλιογραφίας και με βάση την πορεία διδασκαλίας που είχα χαράξει, τα προβλήματα και οι ασκήσεις που εντόπισα στα σχολικά εγχειρίδια απείχαν πολύ από τον παραπάνω στόχο. Βέβαια δίχως, τη μελέτη σημαντικών άρθρων των τελευταίων δεκαετιών πάνω στην πολλαπλασιαστική σκέψη και δίχως τη δουλειά με τους μαθητές, ίσως να μην ήμουν σε θέση να μπορώ εξετάσω τα βιβλία με κριτική ματιά. Μάλιστα, προς επίρρωση αυτού του επιχειρήματος αποτελεί κι η αξιοποίηση ενός παρόμοιου προβλήματος με το βιβλίο του μαθητή όπου εισάγει τους μαθητές στον πολλαπλασιασμό με μία αντίστροφη προβληματική κατάσταση, αυτή της διαίρεσης, δίνοντας έτοιμες όλες τις λύσεις (βλ. παράδειγμα με λάχανα - **Εικόνα 10.**). Έτσι κι εγώ εισήγαγα τους μαθητές μου σε μία αντίστοιχη προβληματική κατάσταση με βάση τη διαίρεση (ζαχαροπλαστείο κυρίου Ανέστη – σοκολατάκια σε κουτί), δίχως όμως την χορήγηση έτοιμων απαντήσεων στους μαθητές, παρά μόνο μολύβι και χαρτί. Τότε όμως συνειδητοποίησα ότι οι μαθητές μου, παρά το γεγονός ότι έχουν διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και μετά το πέρας των αρχικών μας συναντήσεων, αντιμετώπισαν τρομερή δυσκολία, γεγονός που καταδεικνύει πόσο ακατάλληλη είναι μία τέτοια δραστηριότητα στην εισαγωγή του πολλαπλασιασμού, όπως προτείνεται από τους συγγραφείς των βιβλίων.

Εν συνεχεία, δεν θα πρέπει να διαφύγει της προσοχής μου να αναφέρω το τρίτο σκέλος της όλης προσπάθειας που αφορά καθαρά στο πρακτικό κομμάτι. Τίποτα δεν θα είχε σημασία από την παραπάνω μελέτη, εάν δεν ήμουν σε θέση να τα εφαρμόσω όλα αυτά σε κάποιους μαθητές κι έτσι να έχω την ευκαιρία να συνειδητοποιήσω από μόνη μου τις δυσκολίες που ενέχει το όλο εγχείρημα. Πάντως σε καμία περίπτωση η μελέτη δεν μπορεί να υποβαθμιστεί, καθώς ήταν εκείνη που καθόριζε συνεχώς την πορεία της εργασίας μου. Εκείνο όμως που θα πρέπει να χαρακτηρίζει αυτό το κομμάτι είναι η διαρκής προσπάθεια και ο αναστοχασμός των πεπραγμένων. Δίχως αυτά τα δύο στοιχεία είναι αμφίβολη η βελτίωση της διδασκαλίας.

Εν κατακλείδι λοιπόν, μέσα από την ολοκλήρωση αυτής της δουλειάς συμπέρανα ότι για να είναι καλή η προσπάθεια του σημερινού δασκάλου στη στήριξη της μετάβασης από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη θα πρέπει να απαρτίζεται από τρεις πολύ σημαντικές συνιστώσες:

1. το διάβασμα της ευρύτερης βιβλιογραφίας για την πολλαπλασιαστική σκέψη,
2. την κριτική μελέτη των σχολικών εγχειριδίων &
3. τη δουλειά με τους μαθητές.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτών των συνιστωσών είναι ότι η μία είναι αλληλένδετη με την άλλη και δεν μπορεί κάποιος εύκολα να διαλέξει μία απ’ αυτές χωρίς να εξετάσει τις άλλες δύο. Έτσι λοιπόν, κλείνοντας θα ήθελα να έχω την ευκαιρία στο μέλλον να εξετάσω τόσο το ενδεχόμενο μίας ακόμη πιο βελτιωμένης διδασκαλίας πάνω στο συγκεκριμένο πεδίο που μελετήθηκε όσο και να έχω την ευκαιρία να επεκτείνω αυτό το εγχείρημα εμπλουτίζοντάς το με περισσότερο υλικό που να αγγίζει όλες τις πτυχές της πολλαπλασιαστικής σκέψης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anghileri, J. 1989. An investigation of young children's understanding of multiplication. Educational Studies in Mathematics, 20, 367-385.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher* 32 (1) 9-13.

Fischbein, E., Deir, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 16(1), 3-17.

Gravemeijer, K. (2015). Design Research as a Research Method in Education. In A. Pereira, et al. (Eds.), Entre a teoria e os dados (III): investigar práticas em contexto (pp. 5-20). Setúbal: Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In Grows, D. (Eds.) Handbook of Research on Mathematics teaching and learning. (pp. 276-295). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Virginia.

Harries, T. & Sutherland, R., (2000). The representation of mathematical concepts in primary mathematics textbooks: a focus on multiplication. - In: A. Rogerson. (Ed.), Mathematics for living: The mathematics education into the 21st century project. Amman, Jordan, p. 142-146.

Heege, H. T. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics* 16, 375-388.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν. & Σοφού, Β. (2006). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού*. *(βιβλίο μαθητή α' τεύχος, βιβλίο δασκάλου, τετράδιο εργασιών β' τεύχος)*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Kaufmann, O. T., (2018). The problem of distinguishing multiplicative from additive reasoning in primary school classroom context. *European Journal of Science and Mathematics Education*. 6(3), 100-112.

Larson, K., (2016). Students' understandings of multiplication. (Διδακτορική διατριβή).

Ryve, A. Larson, M. & Nilson, P. (2013). Analyzing Content and Participation in Classroom Discourse: Dimensions of Variation, Mediating Tools, and Conceptual Accountability. Scandinavian Journal of Educational Research, 57 (1), 101-114.

Schwartz, J. L. (1991). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4*(3), 259-309.

Steffe, L. & Cobb, P. (1994). Multiplicative and Divisional Schemes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(1 & 2), 45-61.

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S. & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

Tzur, R., Johnson, H.L., McClintock, E., Kenney, R.H., Xin, Y.P., Si L., Woordward, J., Hord, C. & Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children’s development of multiplicative reasoning. *PNA.*7(3), 85-101.

Tzur, R., Johnson, H.L., Norton, A., Davis, A., Wang, X., Ferrara, M., Jorgensen, C., & Wei, B. (2017). Conception of numbers as a composite unit predicts students’ multiplicative reasoning: Quantitative corroboration of Steffe’ s model. In Kaur, B., Ho, W.K., & Choy, B.H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, (pp. 289-296). Singapore: PME.

Ulrich, C. (2015). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (part 1*).For the Learning of Mathematics*, 35 (3), 2-7.

Ulrich, C. (2016). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (part 2).For the Learning of Mathematics, 36 (1), 34-39.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society*, *The development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Woolfolk, A. (2005). Εκπαιδευτική Ψυχολογία, (μτφρσ. Μαρία Μπαρμπάτση) Αθήνα: ΕΛΛΗΝ.