Εθνικο Και Καποδιστριακο
Πανεπιστημιο Αθηνων

Σχολη Επιστημων Της Αγωγης
Παιδαγωγικο Τμημα Δημοτικης Εκπαιδευσης

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ισοδυναμία των κλασμάτων μέσω της ερμηνείας του πηλίκου: Ένα πείραμα σχεδιασμού με μια μαθήτρια της Ε’ Δημοτικού»

Φραγκίσκου Σοφία
Α.Μ.: 217331

Επιβλέπουσα: **Ανδρονίκη Μπούφη**
Συνεπιβλέποντες: **Αγγελική Βουδούρη**
Γεώργιος Μπαραλής

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Εικόνων

Περίληψη

Η εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές/-τριες τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου είναι συνήθως περιορισμένη. Η παρούσα εργασία, η οποία στηρίχθηκε στα σχήματα των κλασμάτων κατά τον Steffe, είχε ως στόχο την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού επικεντρώνονται κυρίως στην ανάπτυξη του κλάσματος ως μέρος-όλου, η οποία όμως περιορίζει την αντίληψη για το κλάσμα, καθώς αποτελεί μόνο μία από τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος (μέρος-όλου, πηλίκο, μέτρο, τελεστής, λόγος). Στη συγκεκριμένη εργασία διεξήχθη ένα πείραμα σχεδιασμού της μορφής ένας-προς-έναν, ώστε να προσεγγιστεί η ισοδυναμία των κλασμάτων μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο. Πραγματοποιήθηκαν συνολικά επτά συναντήσεις με μια μαθήτρια της Ε' Δημοτικού σε διάστημα τριών μηνών. Τα προβλήματα που της δόθηκαν αφορούσαν καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, μέσα από τις οποίες η μαθήτρια συνήθως καλούνταν να εκφράσει ένα μερίδιο με τη μορφή κλάσματος. Μετά το πέρας κάθε συνάντησης πραγματοποιούταν από την ερευνητική ομάδα αναστοχαστική ανάλυση προκειμένου να συζητηθούν τα αποτελέσματα της μαθήτριας και να σχεδιαστούν οι επόμενες συναντήσεις.

Λέξεις-κλειδιά: ισοδυναμία κλασμάτων, πηλίκο, σχήματα κλασμάτων, εννοιολογική γνώση, πείραμα σχεδιασμού

Abstract

Students' conceptual knowledge of fractions is usually rather limited, both in the primary and secondary education level. The present study, which was based on Steffe's fraction schemes, aimed at the development of the conceptual understanding of fraction equivalence. The Greek primary school textbooks tend to focus on the development of fractions as parts of a whole, which can however lead to a restricted notion about fractions, since it is only one out of five interpretations of fraction (part-whole, quotient, measure, operator, ratio). In this study, an one-to-one design experiment was conducted, so that the fraction equivalence could be approached through the interpretation of fraction as a quotient. A total of seven sessions with an 11-year-old student were conducted during a period of three months. All the tasks presented to the student involved equal-sharing situations, through which the student was led to express a share in fraction form. At the end of each session, the research team would conduct a retrospective analysis in order to discuss the student's answers, as well as to plan the remaining sessions.

Keywords: fraction equivalence, quotient, fraction schemes, conceptual knowledge, design experiment

Εισαγωγή

Τα κλάσματα αποτελούν μια από τις δυσκολότερες έννοιες που διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Παρόλο που η διδασκαλία των κλασμάτων επαναλαμβάνεται σε τρεις διαφορετικές τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές/-τριες συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες ακόμη και στις τάξεις του Γυμνασίου. Πολλά παιδιά δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ή να φτιάξουν δύο ισοδύναμα κλάσματα και συχνά η γνώση τους για αυτά περιορίζεται στον πολλαπλασιασμό η στη διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό. Η ισοδυναμία, όμως των κλασμάτων αποτελεί μια σημαντική έννοια για τη βαθύτερη κατανόηση των κλασμάτων, καθώς αποτελεί τη βάση για την πρόσθεση και την αφαίρεση αυτών αλλά και για τη σύνδεσή τους με τους δεκαδικούς αριθμούς. Οι εκπαιδευτικοί και τα σχολικά εγχειρίδια συνήθως προκειμένου να διδάξουν την ισοδυναμία των κλασμάτων στηρίζονται στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος ενός όλου και στην αναπαράσταση του κλάσματος ως κάποια κομμάτια ενός τεμαχισμένου όλου. Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου είναι συνήθως αποτελεσματική για μια πρώτη επαφή των παιδιών με τα κλάσματα, όταν όμως είναι η μοναδική ή η κυρίαρχη ερμηνεία παραμερίζονται διάφορες πτυχές του κλάσματος που είναι απαραίτητες για τη βαθύτερη κατανόησή του. Μια από αυτές τις ερμηνείες αποτελεί αυτή του κλάσματος ως ένα πηλίκο, ως ένα αποτέλεσμα, δηλαδή, μιας δίκαιης μοιρασιάς κάποιων αγαθών σε έναν αριθμό ατόμων. Η ερμηνεία αυτή, η οποία εμπεριέχεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε’ Δημοτικού, έχει αποτελέσει στο παρελθόν τη βάση για την εμπλοκή των μαθητών/-τριων με την ισοδυναμία των κλασμάτων με ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Ο Streefland για παράδειγμα, χρησιμοποίησε διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους κάθεται ένας συγκεκριμένος αριθμός ατόμων σε τραπέζια για να μοιραστούν ένα συγκεκριμένο αριθμό πιτσών και μέσα από τα σχήματα των ίδιων των παιδιών για τις καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς αναδείχθηκε ο αλγόριθμος για τη δημιουργία των ισοδύναμων κλασμάτων.

Έτσι, αποφασίστηκε να διερευνηθεί ένα μονοπάτι μάθησης που μπορεί να ακολουθήσει μία μαθήτρια Ε’ Δημοτικού για την ανάπτυξη της έννοιας της ισοδυναμίας των κλασμάτων όχι μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, αλλά από αυτή του πηλίκου χρησιμοποιώντας ένα πείραμα σχεδιασμού. Μέσα από την παρακολούθηση της σκέψης μίας μαθήτριας θεωρήθηκε ότι θα μπορέσουν να γίνουν αντιληπτοί οι τρόποι αντιμετώπισης των προβλημάτων σε μεγαλύτερο βάθος απ’ ό,τι αν επιχειρούταν μια διδασκαλία σε όλη την τάξη. Σκοπός του πειράματος σχεδιασμού δεν αποτέλεσε μόνο η ανάπτυξη μιας εναλλακτικής προσέγγισης της ισοδυναμίας για την εκμάθηση του αλγόριθμου, αλλά η βαθύτερη ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης της ισοδυναμίας των κλασμάτων από τη μαθήτρια μέσα από τα στοιχεία που αναδεικνύονται από την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο.

Η παρούσα εργασία είναι χωρισμένη σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, το οποίο αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας, διευκρινίζεται ο όρος «γνώση» στα μαθηματικά, παρουσιάζεται η θεωρία των γνωστικών σχημάτων, περιγράφονται τα γνωστικά σχήματα των παιδιών για τα κλάσματα, αναλύονται οι διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος και των ισοδύναμων κλασμάτων και σκιαγραφείται η αντιμετώπιση των κλασμάτων από τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού. Στο δεύτερο μέρος, το οποίο αφορά την ερευνητική προσέγγιση που εφαρμόστηκε, περιγράφεται το πείραμα σχεδιασμού, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιήθηκε, η προετοιμασία αυτού καθώς και τα αποτελέσματα από τις συναντήσεις με τη μαθήτρια. Η εργασία κλείνει με ορισμένα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση και την εφαρμογή του πειράματος σχεδιασμού.

ΜΕΡΟΣ Α’: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1. Διευκρίνιση του Όρου «Γνώση» στα Μαθηματικά

Περισσότερο από μισός αιώνας έχει περάσει και η συζήτηση για το τι συνιστά *γνώση* στα μαθηματικά συνεχίζει να είναι αντικείμενο συζήτησης και ενδιαφέροντος. Η συζήτηση αυτή επικεντρώνεται κυρίως στην ανάπτυξη δύο ειδών γνώσης, της *εννοιολογικής* και της *διαδικαστικής*.

Η εννοιολογική γνώση σχετίζεται με την κατανόηση των εννοιών αλλά και με τις συνδέσεις μεταξύ αυτών (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001· Skemp, 1976). Όλες οι μεμονωμένες πληροφορίες ενώνονται μεταξύ τους με σχέσεις, δημιουργώντας ένα συνεκτικό ιστό γνώσης (Hiebert & Lefevre, 1986). Οι συνδέσεις μεταξύ των πληροφοριών, είτε πρόκειται για πληροφορίες μεταξύ δύο αποκτηθέντων γνώσεων, είτε μεταξύ μιας παλιάς και μιας νέας γνώσης, πραγματοποιούνται μέσω της διαδικασίας της *αφομοίωσης* (Baroody, 2003· βλ. ενότητα 2.2). Μαθητές/-τριες με εννοιολογική γνώση είναι σε θέση να επιχειρηματολογούν για ποιο λόγο κάποια γεγονότα είναι αποτέλεσμα κάποιων άλλων και να καταλαβαίνουν τους λόγους για τους οποίους μια μαθηματική ιδέα είναι σημαντική καθώς και τα πλαίσια στα οποία μπορεί αυτή να εφαρμοστεί (NRC, 2001)

Η διαδικαστική γνώση αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος σχετίζεται με την εξοικείωση του ατόμου με τα σύμβολα και την επίσημη γλώσσα των μαθηματικών. Το δεύτερο μέρος αποτελείται από κανόνες ή διαδικασίες, δηλαδή, από τους αλγόριθμους, που χρησιμοποιούνται για τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος (Hiebert & Lefevre, 1986). Η διαδικαστική γνώση, σε αντίθεση με την εννοιολογική, ακολουθεί μια γραμμική πορεία, καθώς αποτελείται από οδηγίες που εκτελούνται βήμα-προς-βήμα (Hallett, Nunes & Bryant, 2010).

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα δύο αυτά συστήματα γνώσης, ούτε είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, ούτε κάθε γνώση ταιριάζει αποκλειστικά σε ένα από αυτά (Hiebert & Lefevre, 1986). Το κάθε σύστημα επηρεάζει το άλλο και αναπόφευκτα δημιουργούνται σχέσεις μεταξύ τους, ενώ ταυτόχρονα η βελτίωση της γνώσης του ενός συστήματος οδηγεί στη βελτίωση του άλλου (Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2015).

Η διαδικαστική γνώση ενισχύεται από την εννοιολογική, καθώς τα σύμβολα αποκτούν νόημα και οι αλγόριθμοι διατηρούνται στη μνήμη (Hiebert & Lefevre, 1986), όχι ως στείροι κανόνες που εμφανίστηκαν άνωθεν, αλλά ως διαδικασίες που εκφράζουν τη σκέψη του/της μαθητή/-τριας. Με την εννοιολογική γνώση ο/η μαθητής/-τρια γνωρίζει πότε να χρησιμοποιήσει τον αλγόριθμο κατάλληλα και πώς να τον εφαρμόζει σε διαφορετικά προβλήματα (Baroody, 2003). Η διαδικαστική γνώση παρέχει την επίσημη γλώσσα των μαθηματικών για να εφαρμοστεί και να αποτυπωθεί η εννοιολογική γνώση (Hiebert & Lefevre, 1986).

Στο παρελθόν παγκοσμίως τα αναλυτικά προγράμματα στα μαθηματικά επικεντρώνονταν στην εκμάθηση μιας σειράς διαδικασιών και όχι στην εννοιολογική βάση στην οποία στηρίζονταν αυτές οι διαδικασίες (Strigler & Hiebert, 1999). Η εννοιολογική, όμως, γνώση προσφέρει αναμφισβήτητα καλύτερα αποτελέσματα από τη στείρα εκτέλεση διαδικασιών (Crooks & Alibali, 2014). Το σημαντικό είναι να μην παραγκωνίζεται κανένα από τα δύο συστήματα γνώσης, καθώς είναι εξίσου σημαντικά για μια συνεκτική εικόνα του/της μαθητή/-τριας για τα μαθηματικά.

Το ερώτημα, όμως, που προκύπτει είναι το εξής: *Πώς διαμορφώνεται η γνώση, είτε αυτή είναι εννοιολογικής είτε διαδικαστικής φύσης*;

2. Θεωρία Σχημάτων

2.1. Εποικοδομιστική Αντίληψη της Μάθησης

Ο θεωρητικός προσανατολισμός της παρούσας εργασίας στηρίχθηκε κυρίως στη θεωρία του εποικοδομισμού (von Glaserfeld, 1995) και πιο συγκεκριμένα, στο μοντέλο των γνωστικών σχημάτων για τη δόμηση της γνώσης που αφορά τα κλάσματα (Steffe, 2002, 2003, 2010· Steffe & Olive, 1996, 2010). Η μάθηση, λοιπόν, σε όλη την έκταση της εργασίας, θεωρείται ως «μια διαδικασία τροποποίησης και αναδιοργάνωσης των υπάρχοντων εννοιολογικών δομών –σχημάτων- ώστε να περιοριστούν οι *συγχύσεις* (‘perturbations’)» (Tzur, 1999, σελ. 391).

2.2. Γνωστικά Σχήματα

Σύμφωνα με τον von Glaserfeld (1995) τα γνωστικά σχήματα αποτελούνται από τρία μέρη: (α) μια εμπειρική κατάσταση με την οποία εμπλέκεται το παιδί, (β) μια δραστηριότητα που σχετίζεται με την εκάστοτε κατάσταση και (γ) ένα αποτέλεσμα που προκύπτει από τη δραστηριότητα του παιδιού.

Το πρώτο μέρος του σχήματος πραγματοποιείται μέσω της διαδικασίας της *αφομοίωσης* (‘assimilation’· Steffe, 2002). Μια κατάσταση, δηλαδή, γίνεται αντιληπτή από το άτομο ως παρόμοια με κάποια κατάσταση που έχει βιώσει στο παρελθόν (Hackenberg, 2010). Το άτομο αφομοιώνει ό,τι ταιριάζει στις ήδη υπάρχουσες γνωστικές του δομές και απορρίπτει ή αγνοεί τα στοιχεία που δεν ταιριάζουν σε αυτές (von Glaserfeld, 1995)

Ακολουθεί μια δραστηριότητα, είτε σωματική είτε νοητική, η οποία αποτελείται από ένα σύνολο *λειτουργιών* (Hackenberg, 2010). Η λειτουργία (‘operation’) ορίζεται ως μια νοητική πράξη που έχει προκύψει από την εμπειρία του ατόμου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε νέες καταστάσεις (McCloskey & Norton, 2009). Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν τη λειτουργία του *τεμαχισμού* από προηγούμενες εμπειρίες κατά τις οποίες δίπλωναν ένα κομμάτι χαρτί, δημιουργούσαν ίσα μερίδια από μια μοιρασιά ή σχημάτιζαν ίσα μέρη από ένα όλο. Η λειτουργία προκύπτει αφού το άτομο αναστοχαστεί πάνω στις γνωστικές διεργασίες που μετέχουν σε αυτές τις σωματικές δραστηριότητες (Norton & Wilkins, 2009). Οι λειτουργίες αποτελούν κυρίαρχο συστατικό στοιχείο των σχημάτων αν σκεφτεί κανείς ότι τα σχήματα αποτελούν έναν τρόπο λειτουργίας, ασυνείδητο προς το άτομο (Norton & McCloskey, 2008).

Από τη δραστηριότητα που αναφέρθηκε παραπάνω προκύπτει ένα αποτέλεσμα. Αν το αποτέλεσμα αυτό ήταν προβλέψιμο, το άτομο το αφομοιώνει σύμφωνα με τις προσδοκίες του, στα υπάρχοντα δίκτυα γνώσης του (von Glaserfeld, 1995). Αν το παραγόμενο αποτέλεσμα ήταν απροσδόκητο, τότε πραγματοποιείται μια διαφορετική λειτουργία, η *συμμόρφωση* (‘accommodation’). Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει μια *σύγχυση* (‘perturbation’) που οδηγεί στην εξέταση κι άλλων παραμέτρων (Lee & Shin, 2015). Στην προσπάθεια του ατόμου να μειώσει τις συγχύσεις, τα υπάρχοντα σχήματα τροποποιούνται και γίνονται πιο ισχυρά έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περισσότερες καταστάσεις από ό,τι προηγουμένως (Hackenberg, 2010).

3. Λειτουργίες Σχετικές με τα Κλάσματα

Οι λειτουργίες, οι οποίες, όπως αναφέρθηκε, αποτελούν νοητικές πράξεις που έχουν προκύψει από τις εμπειρίες του ατόμου, συνιστούν τον βασικό παράγοντα που συμβάλλει στην ανάπτυξη των εννοιών σχετικά με τα κλάσματα (McCloskey & Norton, 2009). Οι παρακάτω λειτουργίες, αν και συνήθως συνοδεύονται ταυτόχρονα και από φυσικές πράξεις, αναφέρονται περισσότερο στις νοητικές πράξεις του μυαλού (Hackenberg, 2010). Οι λειτουργίες που σχετίζονται με τα κλάσματα σύμφωνα με τους Norton και McCloskey (2008· McCloskey & Norton, 2009) είναι οι εξής: *η ομαδοποίηση* (unitizing), *ο τεμαχισμός* (partitioning), *η απόσπαση* (disembedding), *η επανάληψη* (iterating) και η *αποσυναρμολόγηση* (splitting). Αυτές συνοψίζονται περιληπτικά στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1. Οι λειτουργίες που σχετίζονται με τα κλάσματα

Λειτουργία	**Περιγραφή**	**Παράδειγμα χρήσης της λειτουργίας**
Ομαδοποίηση	Η αντιμετώπιση ενός αντικειμένου ή μιας συλλογής αντικειμένων ως μια μονάδα ή ένα όλο	Η αντιμετώπιση δύο εξάγωνων ως ένα όλο
Τεμαχισμός	Ο χωρισμός μιας μονάδας/ενός όλου σε ίσα μέρη	Το μοίρασμα μιας πίτσας σε τέσσερα άτομα
Απόσπαση	Η νοητική αφαίρεση ενός κλάσματος από ένα όλο με την ταυτόχρονη διατήρηση του όλου ανέπαφου και αναλλοίωτου	Αφού η πίτσα έχει χωριστεί σε τέταρτα, η χρήση της φαντασίας για το πώς μοιάζουν τα τρία-τέταρτα της πίτσας
Επανάληψη	Η επανάληψη ενός μέρους για την παραγωγή αντιγράφων αυτού	Η χρήση ενός κομματιού του ενός-πέμπτου για την ταυτοποίηση ενός κομματιού τριών-πέμπτων
Αποσυναρμολόγηση	Η ταυτόχρονη σύνθεση της απόσπασης και της επανάληψης	«Αυτή η μπάρα είναι πέντε φορές όσο μια άλλη μπάρα. Ζωγράφισε την άλλη μπάρα»

Πηγή: McCloskey & Norton, 2009, σελ. 46

3.1 Η Λειτουργία της Ομαδοποίησης

Ο/Η μαθητής/-τρια με αναπτυγμένη τη λειτουργία της ομαδοποίησης δημιουργεί από τα μέρη ενός αντικειμένου, ένα όλο, μια μονάδα. Ακόμη, μπορεί να συνενώνει ένα σύνολο αντικειμένων και να δημιουργεί μια *σύνθετη μονάδα* (Norton & McCloskey, 2008).

3.2 Η Λειτουργία του Τεμαχισμού

Μέσω της λειτουργίας του τεμαχισμού[1], ο/η μαθητής/-τρια είναι σε θέση να χωρίζει μια ποσότητα σε ίσα μέρη, με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαντλείται όλη η ποσότητα (Lamon, 2012), αλλά ταυτόχρονα διατηρεί την αρχική ποσότητα ως ένα όλο (Olive & Lobato, 2008). Αυτή η λειτουργία αποτελεί μια από τις σημαντικότερες λειτουργίες για τη δόμηση της γνώσης των κλασμάτων (Cortina, Višňovská & Zúñiga, 2014· Lamon, 1996· Mack, 2001· Steffe & Olive, 2010).

3.3 Η λειτουργία της Απόσπασης

Ο/Η μαθητής/-τρια, σε αυτή τη λειτουργία, φαντάζεται να αποσπά ένα μέρος από τη σύνθετη μονάδα, χωρίς να καταστρέφει τη μονάδα ως όλο στο μυαλό του/της (Steffe & Olive, 2010). Το κλάσμα 2/3, δηλαδή, μπορεί να παραχθεί αν τεμαχιστεί το όλο σε 3 ίσα μέρη και αποσπαστούν τα δύο από αυτά. Με αυτή τη λειτουργία γίνονται οι συγκρίσεις των κλασμάτων όταν ερμηνεύονται ως μέρη κάποιου όλου (Steffe & Olive, 1996· βλ. ενότητα 5.2.1).

3.4 Η λειτουργία της Επανάληψης

Η λειτουργία της επανάληψης αναφέρεται στην ικανότητα του/της μαθητή/-τριας να επαναλαμβάνει ένα μέρος ενός όλου, ώστε να δημιουργεί μια νέα ποσότητα

[1] Η λειτουργία του τεμαχισμού ουσιαστικά αναφέρεται στο χωρισμό ενός όλου σε μέρη άνισου μεγέθους. Ο ισο-τεμαχισμός από την άλλη μεριά είναι αυτός που δηλώνει τη δημιουργία ίσων μερών και σύμφωνα με τον Steffe (2002) αποτελεί ένα νοητικό σχήμα. Για λόγους συντομίας, στην παρούσα εργασία ο όρος τεμαχισμός θα δηλώνει το χωρισμό ενός όλου σε μέρη ίσου μεγέθους, δηλαδή τον ισο-τεμαχισμό.

(Hackenberg, 2007· Tzur, 2004). Για παράδειγμα, όπως επισημαίνουν οι Norton και McCloskey (2008) η επανάληψη ενός πέμπτου μιας σοκολάτας τρεις φορές θα δημιουργήσει 3/5 σοκολάτας. Έτσι, το κλάσμα 3/5 έχει μια πολλαπλασιαστική σχέση με το 1/5 του όλου που χρησιμοποιήθηκε.

3.5 Η Λειτουργία της Αποσυναρμολόγησης

Η λειτουργία της αποσυναρμολόγησης αποτελεί τον συνδυασμό των λειτουργιών του τεμαχισμού και της επανάληψης, με τη μία λειτουργία να θεωρείται ως αντίστροφη της άλλης (Steffe, 2003, 2010). Οι μαθητές/-τριες αντιλαμβάνονται την αντιστρέψιμη σχέση μεταξύ του τεμαχισμού και της επανάληψης και μπορούν μέσω οποιουδήποτε κλασματικού μέρους να ανα-δημιουργήσουν το όλο (McCloskey & Norton, 2009). Αυτή η λειτουργία αποτελεί το κλειδί για τη δημιουργία καταχρηστικών κλασμάτων (Hackenberg, 2007). Σύμφωνα με τον Steffe (2002) η λειτουργία αυτή περιλαμβάνει τη δημιουργία μιας ποσότητας από μια αρχική, που είναι όμως ανεξάρτητη από αυτή και ταυτόχρονα σχετίζεται με αυτή. Ένα παράδειγμα ίσως είναι πιο διαφωτιστικό. Έστω ότι ένας/μια μαθητής/-τρια μέσα από ένα δοσμένο μήκος φτιάχνει ένα νέο μήκος τέτοιο ώστε το δοσμένο μήκος να είναι πέντε φορές το μήκος που έφτιαξε (Steffe, Liss & Lee, 2014). Το νέο μήκος είναι ανεξάρτητο αλλά και έχει σχέση με το δοσμένο μήκος. Αυτό σημαίνει ότι το νέο μήκος μπορεί να επαναληφθεί πέντε φορές για να δώσει το δοσμένο μήκος και ταυτόχρονα, το δοσμένο μήκος χρειάζεται να τεμαχιστεί σε πέντε ίσα μέρη για να δώσει το νέο μήκος (Hackenberg, 2010). Το δοσμένο μήκος όχι μόνο τεμαχίζεται σε πέντε ίσα μέρη, αλλά κάθε μέρος του τεμαχισμένου μήκους μπορεί να επαναληφθεί για να φτιάξει το νέο μήκος (Hackenberg, 2007). Δημιουργείται λοιπόν, μια *αντιστρέψιμη* πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ του δοθέντος και του νέου μήκους (Steffe, κ.ά., 2014). Η δυσκολία του προβλήματος έγκειται στο γεγονός ότι ενώ η εκφώνηση περιλαμβάνει ένα πρόβλημα επανάληψης, προκειμένου να λυθεί απαιτείται τεμαχισμός του μήκους (Norton & McCloskey, 2008). Όταν μάλιστα το δοθέν μήκος αποτελεί μια σύνθετη μονάδα, η λύση του προβλήματος απαιτεί το συντονισμό μονάδων τριών επιπέδων. Αν για παράδειγμα το προαναφερθέν μήκος δινόταν ότι είναι είκοσι μέτρα, ένα παιδί που θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι το νέο μήκος θα είναι τέσσερα μέτρα πιθανώς να αντιλαμβανόταν το μήκος είκοσι μέτρων ως μια μονάδα που αποτελείται από πέντε μονάδες και η καθεμία εκ των οποίων περιλαμβάνει τέσσερις μονάδες (Olive & Steffe, 2002).

Οι εκπαιδευτικοί, λοιπόν, χρειάζεται να παρέχουν ένα πλήθος ευκαιριών στους/στις μαθητές/-τριες να επαναλαμβάνουν και να τεμαχίζουν κλασματικά μέρη στην ίδια κατάσταση, ούτως ώστε να μπορέσουν να αναπτύξουν τη λειτουργία της αποσυναρμολόγησης (McCloskey & Norton, 2009).

4. Σχήματα Σχετικά με τα Κλάσματα

Τα βασικότερα σχήματα σύμφωνα με τους McCloskey και Norton (2009) που σχετίζονται με τα κλάσματα είναι τα εξής: το *σχήμα μέρος-όλου* (‘part whole scheme), το *σχήμα τεμαχισμού μοναδιαίου κλάσματος* (‘partitive unit fractional scheme’), το *σχήμα τεμαχισμού κλάσματος* (‘partitive fractional scheme’), το σχήμα *αντιστρέψιμου τεμαχισμού κλάσματος* (‘reversible partitive fractional scheme’) και το *επαναληπτικό σχήμα κλάσματος*[2] (‘iterative fractional scheme’).

Αυτά τα σχήματα σκιαγραφούν μια πιθανή πορεία που ακολουθούν οι μαθητές/-τριες στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τα κλάσματα. Τα σχήματα που ακολουθούν δομούνται ιεραρχικά από το απλούστερο στο πολυπλοκότερο και κάθε σχήμα μπορεί να ερμηνευτεί ως μια αναδιοργάνωση του προηγούμενου σχήματος (McCloskey & Norton, 2009). Στο σημείο αυτό χρειάζεται να διευκρινιστεί ότι τα παρακάτω σχήματα δεν αποτελούν ακριβείς αναπαραστάσεις της σκέψης των παιδιών, αλλά μοντέλα που χρησιμοποιούν οι ερευνητές για τον τρόπο δόμησης της γνώσης των κλασμάτων από τους μαθητές/-τριες (Tzur, 1999).

4.1. Σχήμα Μέρους-όλου

Σε αυτό το σχήμα οι μαθητές/-τριες τεμαχίζουν το όλο σε κομμάτια και αναπτύσσουν μια σχέση μέρους-όλου. Αυτή η σχέση μεταξύ των μερών και του όλου δεν σχετίζεται με το μέγεθος του μέρους, ούτε το μέρος αυτό αποτελεί ένα κομμάτι που επαναλαμβάνεται για να δημιουργηθεί το όλο (Steffe, 2010). Οι μαθητές, δηλαδή, ερμηνεύουν το κλάσμα ως τόσα τεμαχισμένα κομμάτια από τόσα κομμάτια του τεμαχισμένου όλου (Cortina, κ.ά., 2014). Οι λειτουργίες που μετέχουν σε αυτό το σχήμα είναι αυτές της ομαδοποίησης του όλου, του τεμαχισμού του όλου σε ίσα μέρη και της απόσπασης κάποιων μερών από το όλο (Norton & Wilkins, 2009). Η λειτουργία της επανάληψης δεν εμπλέκεται σε αυτό το σχήμα και για το λόγο αυτό τα παιδιά δεν ελέγχουν αν για παράδειγμα το 1/4 μιας ποσότητας είναι όντως αυτό μέσω της επανάληψής του (Tunç-Pekkan, 2015). Οι μαθητές/-τριες, παρόλο που

[2] Οι McCloskey και Norton (2009) αναλύουν δύο ακόμη σχήματα, το *σχήμα του ταυτόχρονου τεμαχισμού* (‘simultaneous partitioning scheme’) και το *σχήμα του ισο-τεμαχισμού* (‘equi-partitioning scheme’) τα οποία δεν παρουσιάστηκαν για λόγους συντομίας.

αντιλαμβάνονται ότι όλα τα κομμάτια έχουν το ίδιο μέγεθος, δεν τα θεωρούν ολόιδια. Δεν μπορούν, δηλαδή, να αντικαταστήσουν ένα κομμάτι με ένα άλλο. (Norton & McCloskey, 2008).

Ο περιορισμός του συγκεκριμένου σχήματος συνίσταται στο γεγονός ότι με βάση αυτό δεν μπορούν να ερμηνευτούν τα καταχρηστικά κλάσματα διότι το κλάσμα ερμηνεύεται ως μια απόσπαση από το όλο και το καταχρηστικό κλάσμα το καθιστά αυτό αδύνατο (Norton & Wilkins, 2009). Για παράδειγμα, το 4/3 δεν έχει νόημα σύμφωνα με αυτό το σχήμα καθώς θα σήμαινε την απόσπαση τεσσάρων κομματιών από τρία συνολικά.

4.2. Σχήμα Τεμαχισμού Μοναδιαίου Κλάσματος

Σε αυτό το σχήμα οι μαθητές/-τριες επαναλαμβάνουν ένα κλασματικό μέρος όσες φορές χρειάζεται για να προκύψει το όλο και ο αριθμός των φορών σχετίζεται με το *μέγεθος* του κλάσματος σε σχέση με το όλο στο οποίο αναφέρεται (Steffe, 2003).

Για παράδειγμα, αν δοθεί ένα συνεχές μέγεθος (π.χ. μια σοκολάτα) και ένα μοναδιαίο κλάσμα αυτού, οι μαθητές/-τριες που στηρίζονται στο σχήμα μέρους-όλου πιθανώς να μην μπορούν να καθορίσουν το μέγεθος του κλασματικού μέρους, επειδή το όλο δεν είναι τεμαχισμένο. Αντίθετα, μαθητές/-τριες με αναπτυγμένο το σχήμα τεμαχισμού μοναδιαίου κλάσματος θα μπορέσουν να επαναλάβουν το κλασματικό μέρος τόσες φορές ώστε να δημιουργηθεί το όλο και θα συσχετίσουν τον αριθμό αυτό με το μέγεθος του κλάσματος (Norton & McCloskey, 2008· Norton & Wilkins, 2009)

Ο περιορισμός του σχήματος αυτού είναι ότι δεν μπορούν να ερμηνευτούν όλα τα κλάσματα βάση αυτού. Δεν μπορεί δηλαδή, να καθοριστεί το κλασματικό μέγεθος ενός μη μοναδιαίου κλάσματος, όπως το 2/3, διότι σε αυτή την περίπτωση, η επανάληψή του δεν θα δημιουργήσει το όλο, εκτός κι αν πρόκειται για ένα κλάσμα που απλοποιείται σε μοναδιαίο, όπως το 2/6 (Norton & Wilkins, 2009). Η λειτουργία που θα χρειαζόταν για τον προσδιορισμό ενός τέτοιου κλάσματος θα ήταν αυτή της αποσυναρμολόγησης, η οποία όμως δεν έχει αναπτυχθεί ακόμη σε αυτό το σχήμα (Steffe, 2010).

Αρκετά παιδιά, ακόμη και στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού φαίνεται να μην έχουν αναπτύξει το σχήμα αυτό, αλλά να στηρίζονται ακόμη στο σχήμα μέρος-όλου. Η εξήγηση για το γεγονός αυτό αποδίδεται από τους ερευνητές στα σχολικά εγχειρίδια και στη σχεδόν αποκλειστική ενασχόληση αυτών με έργα μέρους-όλου (Norton & McCloskey, 2008).

4.3. Σχήμα Τεμαχισμού Κλάσματος

Το σχήμα αυτό είναι μια γενίκευση του προηγούμενου σχήματος σε μη μοναδιαία κλάσματα (Norton & McCloskey, 2008· Norton & Wilkins, 2009). Μαθητές/-τριες με ανεπτυγμένο αυτό το σχήμα, ερμηνεύουν ένα κλάσμα, μη μοναδιαίο (και μη καταχρηστικό), μέσω της επανάληψης του αντίστοιχου μοναδιαίου κλάσματος, έχοντας στο μυαλό τους ταυτόχρονα, τη σχέση του μοναδιαίου κλάσματος με το όλο (Cortina, κ.ά., 2014).

Αυτό που αξίζει να τονιστεί είναι ότι σε αυτό το σχήμα, οι μαθητές/-τριες μπορούν πλέον να συντονίζουν δύο επίπεδα μονάδων (McCloskey & Norton, 2009). Αν ζητηθεί για παράδειγμα το κλάσμα 2/3 ενός μη τεμαχισμένου όλου, τότε αυτό ερμηνεύεται ως μια μονάδα που αποτελείται από δύο επαναλήψεις του ενός τρίτου, ενώ το όλο είναι μια μονάδα που αποτελείται από τρεις επαναλήψεις του ίδιου τμήματος. Η όλη διαδικασία περιλαμβάνει τη λειτουργία του τεμαχισμού του όλου σε τρία μέρη, την απόσπαση και την επανάληψη ενός από αυτά για τη δημιουργία δύο μερών (Steffe, κ.ά., 2014). Σύμφωνα με τον Steffe (2002) είναι το πρώτο γνήσιο σχήμα κλασμάτων.

Παρόλα αυτά σε αυτό το σχήμα τα παιδιά συνεχίζουν να κάνουν συγκρίσεις μέρους-όλου (Steffe, 2010) και δεν βλέπουν το 2/3 ως δύο επαναλήψεις του ενός τρίτου. Για παράδειγμα, η ερμηνεία του 2/3 βασίζεται στο γεγονός ότι πρόκειται για ένα μέρος ενός όλου και δεν ερμηνεύεται ως δύο φορές το 1/3 (Hackenberg, 2007). Σύμφωνα με την Hackenberg (2010) αυτό το σχήμα δεν αποτελεί ένα πολλαπλασιαστικό σχήμα.

Έτσι, τα παιδιά που βασίζονται σε αυτό το σχήμα δεν είναι σε θέση ακόμη να δημιουργήσουν καταχρηστικά κλάσματα επαναλαμβάνοντας ένα μοναδιαίο κλάσμα (Steffe, 2002). Αυτό σημαίνει ότι παρόλο που μπορούν να αποσπάσουν και να επαναλάβουν κλασματικά μέρη, δεν μπορούν να τα επαναλάβουν αρκετές φορές ώστε να ξεπεράσουν το όλο γιατί έτσι το όλο εξαφανίζεται (Norton & Wilkins, 2009). Για παράδειγμα, δεν μπορούν να δημιουργήσουν τα 5/4 μιας ποσότητας, αλλά ακόμη και αν καταφέρουν να επαναλάβουν το 1/4 πέντε φορές συνήθως χαρακτηρίζουν το νέο μέγεθος ως 5/5 κι όχι ως 5/4 (Hackenberg, 2007).

4.4. Σχήμα Αντιστρέψιμου Τεμαχισμού Κλάσματος

Σε αυτό το σχήμα εμφανίζεται για πρώτη φορά η λειτουργία της αποσυναρμολόγησης (Hackenberg, 2007· Steffe, 2010). Οι μαθητές/-τριες σε αυτή την περίπτωση καλούνται να δημιουργήσουν το όλο έχοντας ένα κλασματικό μέρος αυτού (Norton & Wilkins, 2009). Ενώ τα έργα που τίθενται σε αυτό το σχήμα φαίνεται να περιλαμβάνουν τη λειτουργία της επανάληψης, οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να τεμαχίσουν και να επαναλάβουν, ώστε να καταλήξουν σε μια ποσότητα μεγαλύτερη από την αρχική (Hackenberg, 2007· Norton & McCloskey, 2008). Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου έργου που προωθεί αυτό το σχήμα είναι το εξής: «*Αυτό το κομμάτι είναι τα τρια-τέταρτα του όλου. Μπορείς να σχεδιάσεις το όλο;*». Οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να αντιστρέψουν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούσαν μέχρι τώρα και να εφαρμόσουν τη λειτουργία της αποσυναρμολόγησης (McCloskey & Norton, 2009).

4.5. Επαναληπτικό Σχήμα Κλάσματος

Σε αυτό το σχήμα, οι μαθητές/-τριες σκέφτονται πολλαπλασιαστικά για τα κλάσματα και είναι σε θέση να διαχειριστούν και να δημιουργήσουν καταχρηστικά πλέον κλάσματα (Tzur, 1999). Έχοντας ένα κομμάτι ενός όλου, μπορούν να το επαναλάβουν απεριόριστες φορές και να δημιουργήσουν μια νέα ποσότητα μεγαλύτερη του όλου (Cortina, κ.ά., 2014). Εμπλέκεται και εδώ η λειτουργία της αποσυναρμολόγησης, αλλά αυτή τη φορά ένα μοναδιαίο κλάσμα μπορεί να επαναληφθεί και να ξεπεράσει το όλο (Norton & Wilkins, 2009). Έτσι, το νέο κλάσμα που δημιουργείται έχει μια πολλαπλασιαστική σχέση με το όλο και η ερμηνεία του δεν βασίζεται στη μέτρηση των μερών σε σχέση με το όλο (Hackenberg, 2010).

Το σημαντικό στοιχείο αυτού του σχήματος, το οποίο το διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα, είναι ότι με αυτό το σχήμα, οι μαθητές/-τριες ερμηνεύουν οποιοδήποτε κλάσμα ως μέτρο (Steffe & Olive, 2010· βλ. ενότητα 5.2.4). Αποτελεί, λοιπόν, ένα μεγάλο βήμα για την κατανόηση των κλασμάτων (Olive & Steffe, 2002).

Στο προηγούμενο σχήμα, οι μαθητές/-τριες μπορούσαν μεν να δημιουργήσουν ένα κλάσμα, όπως το 3/4 μέσω της επανάληψης του 1/4 τρεις φορές, αλλά δεν ερμήνευαν το 1/4 ως επαναλαμβανόμενη μονάδα (‘iterable unit’). Αντίθετα, σε αυτό το σχήμα, το 1/4 υποδηλώνει ένα όλο που αποτελείται από 1/4, το οποίο έχει επαναληφθεί τέσσερις φορές· έχει δηλαδή μια a priori πολλαπλασιαστική σχέση με το όλο (Hackenberg, 2007).

Ένα πρόβλημα που θα μπορούσε να ενθαρρύνει το συγκεκριμένο σχήμα είναι το εξής: «*Αυτό το κομμάτι είναι τα πέντε-τρίτα του όλου. Μπορείς να ζωγραφίσεις το όλο;*». Παρόλο που η εκφώνηση φαίνεται να μοιάζει αρκετά με αυτήν του προηγούμενου σχήματος, υπάρχει μια βασική διαφορά: οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να τεμαχίσουν και να επαναλάβουν (όπως και το προηγούμενο σχήμα), αλλά αυτή τη φορά θα πρέπει να καταλήξουν σε ένα κομμάτι μικρότερο του αρχικού. Είναι απαραίτητο, δηλαδή, να συμπεράνουν ότι το όλο βρίσκεται μέσα στο κομμάτι που δίνεται (McCloskey & Norton, 2009).

Ένα ακόμη σημαντικό βήμα που πραγματοποιείται σε αυτό το σχήμα είναι ότι οι μαθητές/-τριες είναι πλέον σε θέση να συντονίζουν τρία επίπεδα μονάδων (Steffe, 2010). Για παράδειγμα, για να δημιουργήσουν τα 7/6 μιας ποσότητας, χρειάζεται να ενώσουν μια σύνθετη μονάδα που αποτελείται από 6/6, με μια μονάδα που αποτελείται από ένα μοναδιαίο κλάσμα, το 1/6, για να σχηματίσουν μια νέα σύνθετη μονάδα που αποτελείται από 7/6 (Steffe, κ.ά., 2014). Τα μοναδιαία κλάσματα δεν ερμηνεύονται πλέον ως αριθμοί που δηλώνουν ένα μέγεθος που περιλαμβάνονται κατ’ανάγκη μέσα σε ένα όλο, αλλά ως αριθμοί που αντιπροσωπεύουν ένα σχετικό μέγεθος που μπορεί να επαναληφθεί απεριόριστα (Norton & Hackenberg, 2010).

4.6. Ανακεφαλαιωτικά

Τα παραπάνω σχήματα, τα οποία παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον πίνακα 4.1, συμβάλλουν στην κατανόηση των εκπαιδευτικών για τον τρόπο που λειτουργούν τα παιδιά με τα κλάσματα και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν προτάσεις διδασκαλίας των κλασμάτων (Norton & McCloskey, 2008). Αν επιχειρούταν κάτι τέτοιο το αποτέλεσμα θα ήταν πιθανώς ένα σύνολο από ασύνδετες και κατακερματισμένες γνώσεις. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να εντοπίζουν το κυρίαρχο σχήμα στον τρόπο που λειτουργεί κάθε παιδί με τα κλάσματα και να προωθούν ανώτερα σχήματα μέσα από κατάλληλα προβλήματα (McCloskey & Norton, 2009). Αυτή είναι άλλωστε η βασική πρόκληση των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά· να κατασκευάζουν πρακτικές που να ταιριάζουν στον τρόπο που κάθε μαθητής/-τρια δομεί τη γνώση (Simon, 1995).

Πίνακας 4.1. Τα βασικότερα σχήματα που σχετίζονται με τα κλάσματα

Σχήμα	Λειτουργίες	Παράδειγμα Έργου
Σχήμα μέρους-όλου	Ομαδοποίηση, τεμαχισμός, απόσπαση ενός μέρους από το τεμαχισμένο όλο	Δείξε μου τα δύο-τρίτα της μπάρας.
Σχήμα τεμαχισμού μοναδιαίου κλάσματος	Επανάληψη ενός δοσμένου μοναδιαίου κλάσματος για την παραγωγή ενός συνεχούς ομαδοποιημένου τεμαχισμένου όλου	Αν σου δώσω αυτό [δείχνουμε ένα κομμάτι ενός-τρίτου ενός μη τεμαχισμένου όλου], ποιο κλάσμα της μπάρας θα είχες;
Σχήμα τεμαχισμού κλάσματος	Ομαδοποίηση, απόσπαση ενός κλάσματος από το όλο, υποθετικός τεμαχισμός του κλάσματος για τη δημιουργία ενός μοναδιαίου κλάσματος, επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος για τη δημιουργία του κλάσματος από το όλο, συντονισμός μοναδιαίων κλασμάτων σε ένα σύνθετο κλάσμα (συντονισμός μονάδων δύο επιπέδων)	Αν σου δώσω αυτό [δείχνουμε ένα μη τεμαχισμένο κομμάτι δύο-τρίτων και ένα μη τεμαχισμένο όλο], ποιο κλάσμα της μπάρας θα είχες;
Σχήμα αντιστρέψιμου τεμαχισμού κλάσματος	Αποσυναρμολόγηση ενός μη τεμαχισμένου κομματιού ενός μεγαλύτερου όλου για την ανα-δημιουργία του όλου	Αν αυτή η μπάρα είναι τα τέσσερα-πέμπτα της μπάρας σου [δείχνουμε ένα μη τεμαχισμένο κομμάτι], ζωγράφισε την μπάρα σου.
Επαναληπτικό σχήμα κλάσματος	Αποσυναρμολόγηση ενός μη τεμαχισμένου κομματιού ενός μικρότερου όλου για την ανα-δημιουργία του όλου	Αν αυτή η μπάρα είναι τα πέντε-τέταρτα της μπάρας σου [δείχνουμε ένα μη τεμαχισμένο κομμάτι], ζωγράφισε την μπάρα σου.

Πηγή: McCloskey & Norton, 2009, σελ. 47

4.7. Κλασματικές Έννοιες

Οι έννοιες του κλάσματος (‘fraction concepts’) είναι σχήματα του κλάσματος των οποίων τα αποτελέσματα είναι διαθέσιμα πριν από οποιαδήποτε δραστηριότητα του παιδιού σχετική με το συγκεκριμένο σχήμα (Norton & Hackenberg, 2010). Αυτό σημαίνει ότι οι κλασματικές έννοιες είναι από τη φύση τους *προκαταβολικές* (‘anticipatory’), σε αντίθεση με τα σχήματα τα οποία ενδεχομένως να είναι κι αυτά προκαταβολικά, αλλά όχι απαραίτητα (Hackenberg, 2010).

Όταν οι μαθητές/-τριες έχουν αποσπάσει μία κλασματική έννοια από το αντίστοιχο σχήμα, έχουν *εσωτερικεύσει* τα αποτελέσματα των αντίστοιχων σχημάτων. (Hackenberg, 2010). Αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματα του σχήματος έχουν υποστεί επαν-επεξεργασία μέσω της αναστοχαστικής αφαίρεσης (von Glaserfeld, 1995) και οι μαθητές/-τριες πλέον λειτουργούν νοερά, χωρίς να έχουν ανάγκη από υλικά στα οποία να ενεργήσουν (Norton & Hackenberg, 2010).

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των κλασματικών εννοιών είναι η *αντιστρεψιμότητά* τους. Οι μαθητές/-τριες που έχουν αποσπάσει τις κλασματικές έννοιες από τα αντίστοιχα σχήματα, μπορούν να φανταστούν μια κατάσταση και δραστηριότητα του σχήματος και να επανέλθουν οποιαδήποτε στιγμή στο σημείο από το οποίο ξεκίνησαν (Hackenberg, 2010). Για παράδειγμα, ένα παιδί που έχει αναπτύξει την έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλου (από το αντίστοιχο σχήμα) αντιλαμβάνεται αμέσως ένα κλάσμα, όπως το 5/6, ως πέντε μέρη που έχουν αποσπαστεί από το όλο, το οποίο έχει τεμαχιστεί σε 6 ίσα μέρη, χωρίς να χρειαστεί να ενεργήσει πάνω σε αυτό (Norton & Hackenberg, 2010). Έτσι, λοιπόν, μια έννοια δεν αποτελεί μια μεμονωμένη ιδέα, αλλά μια ιδέα που έχει δομηθεί σε ένα σύστημα γνώσης και σχημάτων (Wong & Evans, 2007).

5. Ερμηνείες Κλασμάτων

5.1 Τι Είναι το Κλάσμα;

Τα κλάσματα είναι μία από τις πολυπλοκότερες μαθηματικές έννοιες με τις οποίες εμπλέκονται τα παιδιά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005). Πολλοί μαθητές/-τριες δεν αναπτύσσουν εννοιολογική κατανόηση για τα κλάσματα, αλλά βασίζονται μόνο σε διαδικασίες, οι οποίες συνήθως είναι λανθασμένες (Naik & Subramaniam, 2008). Παρόλα αυτά, αποτελούν μια σημαντική έννοια την οποία οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να αναπτύξουν, καθώς ενισχύει την *αναλογική σκέψη* ('proportional reasoning') και αποτελεί τη βάση για έννοιες που θα διδαχθούν αργότερα στην άλγεβρα και στις πιθανότητες (Clarke & Roche, 2009).

Αποτελεί ένα θέμα που δυσκολεύει τόσο τους μαθητές να το κατανοήσουν (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983) όσο και τους εκπαιδευτικούς να το διδάξουν (Kierren, 1976· Ma, 2010). Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/-τριες στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τα κλάσματα σχετίζονται είτε με την ίδια τη φύση των κλασμάτων είτε με τις διδακτικές προσεγγίσεις που διαλέγουν οι εκπαιδευτικοί (Lamon, 2012).

Μια από τις δυσκολίες των κλασμάτων σχετίζεται με το συμβολισμό τους (Mack, 1995). Η γραφή δύο ακέραιων αριθμών, με τον έναν κάτω από τον άλλο, δεν βοηθάει τους μαθητές/-τριες να συλλάβουν τη σημασία του κλάσματος (Gould, 2013). Ένας από τους βασικότερους παράγοντες που καθιστά τα κλάσματα τόσο δύσκολα είναι οι πολλές αναπαραστάσεις και ερμηνείες των κλασμάτων, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται (Kieren, 1976· Behr, κ.ά., 1983· Lamon, 2012)

5.2. Ερμηνείες Κλάσματος

Ο Kieren (1976), ο οποίος ήταν ο πρώτος που μίλησε για τις διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος[3], αρχικά μίλησε για 4 τέτοιες ερμηνείες: το κλάσμα ως *πηλίκο* ('quotient'), ως *μέτρο* ('measure'), ως *λόγος* ('ratio'), και ως *τελεστής* ('operator'). Το κλάσμα ως *μέρος-όλου* ('part-whole') θεωρούσε ότι εμπλέκεται σε όλες τις άλλες

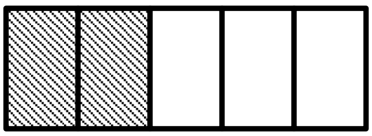
[3] Ο Kieren για την ακρίβεια δεν είχε κάνει λόγο για διαφορετικές ερμηνείες, αλλά για διαφορετικές *υποδομές* του κλάσματος ('suconstructs').

κατηγορίες και για τον λόγο αυτό δεν το παρουσίαζε ως ξεχωριστή ερμηνεία. Οι Behr κ.ά. (1983) ήταν αυτοί που μερικά χρόνια αργότερα πρότειναν ότι το κλάσμα ως μέρος-όλου αποτελεί μια ξεχωριστή ερμηνεία από τις υπόλοιπες.

Κάθε ερμηνεία του κλάσματος επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο την αντίληψη των παιδιών για την έννοια του κλάσματος, καθώς ο αριθμητής και ο παρονομαστής ερμηνεύονται διαφορετικά σε κάθε περίπτωση. Στο Δημοτικό οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να κατανοήσουν τουλάχιστον το κλάσμα ως πηλίκο, ως μέρος-όλου και ως τελεστή (Mamede & Oliveira, 2010). Όλες οι ερμηνείες του κλάσματος παρουσιάζονται περιληπτικά στον πίνακα 5.1.

5.2.1. Το κλάσμα ως μέρος-όλου

Το κλάσμα όταν ερμηνεύεται ως μέρος-όλου δηλώνει μια συνεχή ποσότητα ή ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων που τεμαχίζονται σε ίσα μέρη (Lamon, 2012). Το κλάσμα, λοιπόν, αναπαριστά μια σύγκριση μεταξύ του αριθμού των μερών που αποσπάστηκαν από το τεμαχισμένο όλο (αριθμητής) σε σχέση με τον αριθμό των συνολικών μερών του τεμαχισμένου όλου (παρονομαστής· Clarke & Roche, 2009). Για παράδειγμα, το κλάσμα 2/5 με βάση αυτή την ερμηνεία, δηλώνει ένα όλο, όπως μια σοκολάτα, που έχει χωριστεί σε πέντε ίσα μέρη και τα δύο από αυτά έχουν ενωθεί (Εικόνα 5.1· Mamede & Oliveira, 2010).



Εικόνα 5.1: Η αναπαράσταση του 2/5 σύμφωνα με την ερμηνεία του μέρους-όλου

Οι μαθητές/-τριες, με βάση αυτή την ερμηνεία, χρειάζεται να αναγνωρίζουν αν το όλο έχει χωριστεί σε ίσα μέρη ή όχι και να μπορούν να εφαρμόσουν τις λειτουργίες του τεμαχισμού και της ομαδοποίησης, δηλαδή να είναι σε θέση να φτιάξουν ένα κλάσμα από ένα όλο και το αντίστροφο (Pantziara & Philippou, 2012). Σε αυτή την ερμηνεία εμπλέκονται ένα σύνολο από ιδέες που χρειάζεται να οικοδομηθούν, όπως ότι τα μέρη χρειάζεται να εξαντλούν το όλο και ότι σε όσα περισσότερα μέρη τεμαχίζεται το όλο, τόσο μικρότερα σε μέγεθος είναι αυτά τα κομμάτια (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Pantziara & Philippou, 2012). Οι μαθητές/-

τριες φαίνεται να μην παρουσιάζουν δυσκολίες στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

5.2.2. Περιορισμοί της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος-όλου

Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, ο αριθμητής πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του παρονομαστή (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), αφού η ποσότητα που αναπαριστά το κλάσμα περιέχεται μέσα στο όλο. Οι Thompson και Saldanha (2003) χρησιμοποιούν την έκφραση «τόσα από τόσα» ('so many out of so many') για να αναφερθούν σε αυτόν τον τρόπο σύλληψης των κλασμάτων. Τονίζουν ότι οι μαθητές με αυτό τον τρόπο σκέφτονται προσθετικά κι όχι πολλαπλασιαστικά διότι δεν αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως μια σχετική ποσότητα.

Συνήθως, στα σχολικά εγχειρίδια που προωθούν αυτή την ερμηνεία του κλάσματος, δίνονται γεωμετρικά σχήματα, όπως κύκλοι ή τετράγωνα, τα οποία είναι τεμαχισμένα εκ των προτέρων σε ίσα μέρη, με κάποια από αυτά να είναι σκιασμένα και ζητείται να εκφραστούν τα σκιασμένα μέρη σε σχέση με όλα τα κομμάτια (Lamon, 2012). Οι μαθητές/-τριες, όμως, συνήθως μετρούν απλώς το συνολικό αριθμό των μερών και τον αριθμό των σκιασμένων μερών και τους τοποθετούν τον έναν κάτω από τον άλλο (Gould, 2013).

5.2.3. Το κλάσμα ως πηλίκο

Με βάση αυτή την ερμηνεία ένα κλάσμα α/β ερμηνεύεται ως ένα πηλίκο του α ως προς το β, όπου το α και το β είναι ακέραιοι αριθμοί (Behr κ.ά., 1983). Τα προβλήματα που βοηθούν τους μαθητές να οικοδομήσουν το κλάσμα ως πηλίκο αφορούν την εύρεση δίκαιων μεριδίων από συνεχείς ποσότητες, όπως πίτσες (Streefland, 1993b). Σε αυτή την περίπτωση, ο παρονομαστής δείχνει τον αριθμό των ατόμων και ο αριθμητής τα αγαθά που μοιράστηκαν τα άτομα αυτά. Το κλάσμα ως πηλίκο έχει δύο σημασίες: (α) αναπαριστά μια διαίρεση και (β) αναπαριστά την ποσότητα του αγαθού που θα λάβει κάθε άτομο, ανεξάρτητα από τον τρόπο που τεμαχίστηκαν τα αγαθά (Mamede & Oliveira, 2010).

Σε αντίθεση με το κλάσμα ως μέρος-όλου, στην ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο δεν υπάρχει περιορισμός για το μέγεθος του κλάσματος. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμητής μπορεί να είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή

(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Για παράδειγμα, το 6/5 μπορεί να δηλώνει 6 σοκολάτες που μοιράστηκαν ανάμεσα σε 5 άτομα.

Για αυτή την ερμηνεία του κλάσματος, οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να αντιλαμβάνονται τον ρόλο του διαιρέτη και του διαιρετέου στην όλη διαδικασία (Lamon, 2012). Ο διαιρετέος αναφέρεται στον αριθμό των κομματιών σε κάθε μερίδιο, ενώ ο διαιρέτης στο κλασματικό όνομα κάθε μεριδίου (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Αν για παράδειγμα, τρεις πίτσες μοιράζονται δίκαια σε πέντε άτομα, οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να αναγνωρίσουν ότι κάθε πίτσα τεμαχίζεται σε πεντε ίσα μέρη και σε κάθε άτομο αναλογούν τρία από αυτά, ένα από κάθε πίτσα. Χρειάζεται ακόμη, να κατανοούν τη διαίρεση μερισμού και τη διαίρεση μέτρησης. Το πρώτο είδος διαίρεσης αναφέρεται στο μερίδιο που προκύπτει από μια κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς (π.χ. αν τέσσερα παιδιά μοιράζονται δίκαια τρεις πίτσες, πόση πίτσα θα φάει το κάθε παιδί;), ενώ το δεύτερο αφορά στον αριθμό των μεριδίων που προκύπτουν από μια κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς (π.χ. κάποια παιδιά μοιράζονται τρεις πίτσες. Αν κάθε παιδί τρώει 3/4 της πίτσας, πόσα παιδιά μοιράστηκαν τις πίτσες;»). Απαιτείται, λοιπόν, τα παιδιά να αντιλαμβάνονται τη σχέση μεταξύ του πηλίκου ως αριθμού και της πράξης της διαίρεσης ως μια πολλαπλασιαστική σχέση (Toluk & Middleton, 2001).

Είναι δύσκολο οι μαθητές/-τριες να αντιληφθούν μια αντιστρέψιμη σχέση μεταξύ του κλάσματος και της κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς· να μπορούν, δηλαδή, να βλέπουν το αποτέλεσμα μιας κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς ως ένα κλάσμα (π.χ. 3 σοκολάτες που μοιράζονται μεταξύ 4 ατόμων οδηγούν σε ένα μερίδιο 3/4 της μιας σοκολάτας για κάθε άτομο) και τα κλάσματα ως αναπαραστάσεις καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς (π.χ. το κλάσμα 3/4 μπορεί να ερμηνευτεί ως το αποτέλεσμα που προκύπτει αν 3 σοκολάτες μοιραστούν μεταξύ 4 ατόμων· Hackenberg, 2010).

5.2.4. Το κλάσμα ως μέτρο

Το κλάσμα ως μέτρο από τη μια μεριά δείχνει το μέγεθος του κλάσματος (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) και από την άλλη, σχετίζεται με τη μέτρηση μιας απόστασης από ένα σημείο σε σχέση με μια μονάδα αναφοράς (Lamon, 2012). Ένα μοναδιαίο κλάσμα επαναλαμβάνεται για να καθορίσει μια απόσταση από ένα σημείο αναφοράς (Pantziara & Philippou, 2012).

Συνήθως, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο, σχετίζεται με τη χρήση της αριθμογραμμής ή του χάρακα (Tunç -Pekkan, 2015). Οι μαθητές/-τριες όταν έχουν αναπτύξει την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο είναι σε θέση να τοποθετούν ένα κλάσμα στην αριθμογραμμή και αν δίνεται ένα σημείο στην αριθμογραμμή να μπορούν να αναγνωρίζουν ποιο κλάσμα αναπαριστά (Charalambous & Pitta Pantazi 2007).

Το κλάσμα ως μέτρο συνδέεται άμεσα με τη λειτουργία του τεμαχισμού. Μια μονάδα μπορεί να τεμαχίζεται σε όλο και μικρότερα τμήματα ώστε να γίνει ακριβής μέτρηση μιας απόστασης (Lamon, 2012). Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο βοηθάει τους/τις μαθητές/-τριες στη σύγκριση κλασμάτων, στη δημιουργία καταχρηστικών κλασμάτων (Hackenberg, 2010) και στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

5.2.5. Το κλάσμα ως λόγος

Το κλάσμα ως λόγος δηλώνει μια σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων (Lamon, 2012), όπως για παράδειγμα αν υπάρχουν 3 αγόρια για κάθε 4 κορίτσια σε μια ομάδα. Σε αυτή την περίπτωση, ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι 3:4, με τα αγόρια να αναπαριστούν τα 3/7 της ομάδας και τα κορίτσια τα 4/7 της ομάδας. Οι μαθητές/-τριες χρειάζεται να συνειδητοποιήσουν ότι οι δύο ποσότητες συμμεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε η σχέση μεταξύ τους να διατηρείται σταθερή (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Αυτή η ιδέα βοηθάει την ανάπτυξη της ιδέας των ισοδύναμων κλασμάτων.

Ο λόγος συχνά συγχέεται με την αναλογία. Όταν ένας λόγος συγκρίνει ποσότητες διαφορετικού είδους και περιγράφει ένα χαρακτηριστικό που είναι κοινό σε πολλές καταστάσεις, ο λόγος μετατρέπεται σε αναλογία (Lamon, 2012). Ένα παράδειγμα αναλογίας είναι το ακόλουθο: τέσσερα ευρώ ανά τετραγωνικό μέτρο. Αυτή η αναλογία μεταξύ χρημάτων και αριθμού μέτρων μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές περιπτώσεις, όπως 8€ ανά 2 τετραγωνικά μέτρα, κτλ.

5.2.6. Το κλάσμα ως τελεστής

Στην ερμηνεία του κλάσματος ως τελεστή, το κλάσμα θεωρείται μια συνάρτηση που εφαρμόζεται σε μια ποσότητα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μια ποσότητα που έχει μεγαλώσει ή μικρύνει σε σχέση με την αρχική (Lamon, 2012). Ένα κλάσμα, όπως το 3/4 αναπαριστά μια ποσότητα που μειώθηκε στα 3/4 του αρχικού μεγέθους της μέσω τεμαχισμού και επανάληψης (Mack, 2001). Είτε τριπλασιάζεται πρώτα και τεμαχίζεται έπειτα σε τέσσερις ίσες ομάδες, είτε τεμαχίζεται πρώτα σε τέσσερις ομάδες και στη συνέχεια τριπλασιάζεται. Το κλάσμα ως τελεστής αποτελεί λοιπόν, ένα συνδυασμό των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Αυτή η ερμηνεία οδηγεί με φυσικό τρόπο στον πολλαπλασιασμό μεταξύ των κλασμάτων, όπως όταν ζητείται να βρεθούν τα 3/4 του 1/2 (Lee & Shin, 2015· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

Πίνακας 5.1. Οι διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος 3/4

Ερμηνείες	Παράδειγμα
Μέρος-όλου	3 από 4 ίσα μέρη ενός όλου ή ενός συνόλου αντικειμένων
Μέτρο	3/4 δηλώνει μια απόσταση από 3 (μονάδες 1/4) από το 0 στην αριθμογραμμή
Τελεστής	3/4 από κάτι, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας
Πηλίκο	3 που διαιρούνται σε 4, 3/4 είναι η ποσότητα που αναλογεί σε κάθε άτομο
Λόγος	3 μέρη τσιμέντου προς 4 μέρη άμμου

Πηγή: Wong & Evans, 2007 σελ. 825

6. Ισοδύναμα Κλάσματα

6.1. Εννοιολογική Κατανόηση στα Ισοδύναμα Κλάσματα

Η κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων αποτελεί μια σημαντική πλευρά της ευρύτερης κατανόησης της έννοιας του κλάσματος (Lamon, 2012). Είναι απαραίτητη για την πρόσθεση και αφαίρεση των κλασμάτων και παρέχει μια βάση για τη σύνδεση μεταξύ κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών (Kara, Simon & Placa, 2018).

Δύο διαφορετικά κλάσματα που εκφράζουν την ίδια ποσότητα ονομάζονται ισοδύναμα (Lamon, 2012). Κάθε κλάσμα ανήκει σε μία τάξη ισοδυναμίας που προκύπτει από μία πολλαπλασιαστική εξίσωση και κάθε τάξη ισοδυναμίας ορίζει έναν ρητό αριθμό (Ni, 2001). Κάθε κλάσμα αναπαριστά έναν αριθμό με άπειρα ονόματα. Για παράδειγμα, το 1/2 μπορεί να αναπαρασταθεί ως [1/2, 2/4, 3/6, 4/8, ...] (Wong & Evans, 2007). Η ισοδυναμία είναι μια από τις σημαντικότερες και πιο αφηρημένες μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται τα παιδιά στο δημοτικό σχολείο (Ni, 2001).

Η εννοιολογική κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων δεν σχετίζεται με την εφαρμογή μιας διαδικασίας ή την απομνημόνευση ενός κανόνα (Wong & Evans, 2007). Μαθητές/-τριες με εννοιολογική κατανόηση για τα κλάσματα είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται τις ομοιότητες και τις διαφορές των διάφορων μοντέλων αναπαράστασης κλασμάτων (NRC, 2001), να κάνουν συνδέσεις μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων και να αντιλαμβάνονται ότι ένα κλάσμα αναπαριστά έναν αριθμό με πολλά ονόματα (Wong & Evans, 2007).

Σύμφωνα με την Wong (2010) μαθητές/-τριες με εννοιολογική κατανόηση για τα ισοδύναμα κλάσματα είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται τα εξής: (α) ένα κλάσμα αναπαριστά μια ποσότητα η οποία μετριέται σε σχέση με μια μονάδα αναφοράς, (β) μια κλασματική ποσότητα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του τεμαχισμού ενός όλου σε ίσα μέρη, (γ) ισοδύναμα κλάσματα μπορούν να προκύψουν μέσω του τεμαχισμού ενός ήδη τεμαχισμένου όλου, και (δ) μια κλασματική ποσότητα είναι μέρος μιας κλασματικής τάξης, της οποίας όλα τα κλάσματα αναπαριστούν την ίδια ποσότητα.

6.2. Δυσκολίες στα Ισοδύναμα Κλάσματα

Η βασική πηγή δυσκολίας των παιδιών σχετικά με τα ισοδύναμα κλάσματα θεωρείται η πολλαπλασιαστική τους φύση (Ni, 2001). Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί κάποιος να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992· Kara, κ.ά., 2018). Ο πρώτος σχετίζεται με τη συνειδητοποίηση ότι δύο διαφορετικά κλάσματα αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα και ο δεύτερος αφορά την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ δύο κλασμάτων.

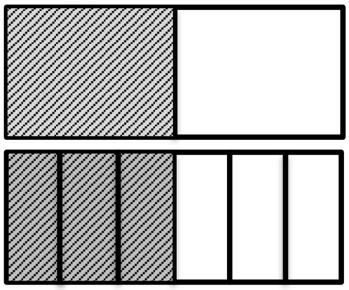
Οι περισσότεροι/-ες μαθητές/-τριες χρησιμοποιούν απλώς έναν αλγόριθμο - τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό - για τα ισοδύναμα κλάσματα, χωρίς να αντιλαμβάνονται γιατί αυτός λειτουργεί. Αλλά, όπως έχει ήδη τονιστεί, η χρήση ενός αλγόριθμου δεν συνεπάγεται απαραίτητα και κατανόηση (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

6.3 Ερμηνείες Ισοδύναμων Κλασμάτων

6.3.1 Ισοδύναμα κλάσματα ως μέρη-όλου

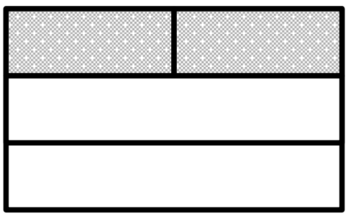
Η ερμηνεία αυτή δίνει έμφαση στον πρώτο τρόπο κατανόησης των ισοδύναμων κλασμάτων, αυτού της αναπαράστασης της ίδιας ποσότητας. Στην αντιμετώπιση των ισοδύναμων κλασμάτων ως μέρη κάποιου όλου δίνονται δύο γεωμετρικά σχήματα, που είναι ήδη τεμαχισμένα σε ίσα μέρη, με κάποια από αυτά να είναι σκιασμένα. Στα δύο σχήματα το όλο και τα σκιασμένα μέρη είναι τα ίδια, αλλά αλλάζει ο αριθμός των ίσων μερών στα οποία είναι τεμαχισμένο το όλο (Wong & Evans, 2007). Συνήθως, παρατάσσονται το ένα κάτω από το άλλο και οι μαθητές/-τριες καλούνται να δουν ότι οι δύο αναπαραστάσεις αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα (Kara, κ.ά., 2018). Για παράδειγμα, δίνεται ένα ορθογώνιο τεμαχισμένο σε δύο ίσες στήλες, με τη μία από αυτές να είναι σκιασμένη (1/2) και ακριβώς από κάτω δίνεται ένα ίδιο ορθογώνιο τεμαχισμένο σε έξι ίσες στήλες, με τις τρεις από αυτές να είναι σκιασμένες (Εικόνα 6.1). Ένα παιδί μπορεί να καταλήξει εύκολα στα κλάσματα 1/2 και 3/6 μετρώντας τα κομμάτια και βλέποντας ότι τα σκιασμένα μέρη καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο να συμπεράνει ότι πρόκειται για ισοδύναμα κλάσματα.

Έτσι, δημιουργούνται δύο διαφορετικά κλάσματα που αναπαριστούν τον αριθμό των σκιασμένων μερών σε σχέση με όλα τα μέρη του σχήματος και τα οποία αποτελούν ένα ζευγάρι ισοδύναμων κλασμάτων (Wong & Evans, 2007).



Εικόνα 6.1. Αναπαράσταση των ισοδύναμων κλασμάτων 1/2 και 3/6 με την ερμηνεία του μέρους-όλου

Για τη γνώση όμως των ισοδύναμων κλασμάτων απαιτείται η πολλαπλασιαστική σκέψη και ταυτόχρονα η διατήρηση του όλου και των μερών (Kamii & Clark, 1995). Όταν το σχήμα δεν δίνεται ολόκληρο τεμαχισμένο σε ίσα μέση η κατάσταση δυσκολεύει, καθώς οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν ένα σχήμα με παραπάνω από έναν τρόπους (Kara, κ.ά., 2018). Για παράδειγμα, στην εικόνα 6.2 οι μαθητές/-τριες συνήθως δεν μπορούν να δουν ταυτόχρονα το 1/3 του σχήματος και ως 2/6 αυτού.

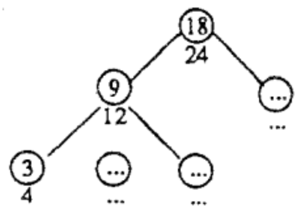


Εικόνα 6.2. Η αναπαράσταση των ισοδύναμων κλασμάτων 1/3 και 2/6 ενός ορθογωνίου που δεν είναι ολόκληρο τεμαχισμένο

Με βάση αυτή την προσέγγιση διδασκαλίας, η μέτρηση των ποσοτήτων δεν είναι ακριβής καθώς το παιδί καλείται να συγκρίνει τις ποσότητες μόνο μέσα από τις οπτικές αναπαραστάσεις και το συμπέρασμα που πιθανώς να προκύπτει είναι ότι τυχαία κάποιες φορές δύο κλάσματα αναπαριστούν το ίδιο μέγεθος (Kara, κ.ά., 2018). Η διδασκαλία, λοιπόν, των ισοδύναμων κλασμάτων μέσα από σχήματα που είναι τεμαχισμένα εκ των προτέρων δεν ενθαρρύνει το συλλογισμό των παιδιών και τη δημιουργία κλασμάτων από τα ίδια, αλλά προωθεί την κατανόησή τους μέσω μόνο της οπτικής αντίληψης (Kamii & Clark, 1995) ή της διπλής μέτρησης των μερών σε σχέση με το όλο (Gould, 2013). Με άλλα λόγια, δεν αναπτύσσει την εννοιολογική κατανόηση των παιδιών για τα ισοδύναμα κλάσματα (Empson, 1999).

6.3.2. Ισοδύναμα κλάσματα ως πηλίκα

Ο Streefland (1991, 1993) πρότεινε ότι οι καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα μπορεί να προωθήσει την ιδέα των ισοδύναμων κλασμάτων. Δίνοντας ρεαλιστικά προβλήματα στα παιδιά, αυτά καταλήγουν στις δικές τους λύσεις και φτιάχνουν τα δικά τους κλάσματα, χωρίς να τους δίνονται έτοιμα σχήματα τεμαχισμένα σε ίσα μέρη (Kamii & Clark, 1995). Έτσι, παρουσιάζοντας στους/στις μαθητές/-τριες ισοδύναμες καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, όπως «*3 αγόρια μοιράζονται 2 πίτσες και 6 κορίτσια μοιράζονται 4 πίτσες*» και καλώντας τους/τες να βρουν σε ποια παρέα θα φάνε περισσότερη πίτσα, μπορούν να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ των ατόμων και των αγαθών σε κάθε περίπτωση και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για δύο ισοδύναμες καταστάσεις. Ο Streefland (1993) για παράδειγμα, ανέπτυξε τα ισοδύναμα κλάσματα χρησιμοποιώντας διαφορετικούς τρόπους οργάνωσης καθισμάτων ατόμων σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Έτσι, ένα τραπέζι με 18 άτομα και 24 πίτσες θα μπορούσε να αναδιοργανωθεί σε δύο τραπέζια με 9 άτομα και 12 πίτσες έκαστο, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.4.

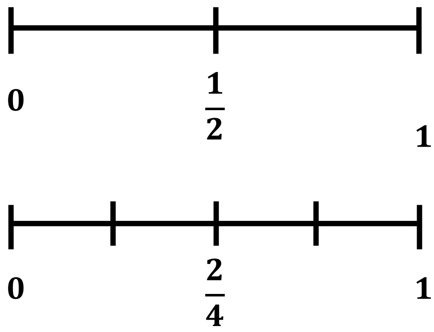


Εικόνα 6.3: Ισοδύναμες καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς κατά τον Streefland (1993, σελ. 115)

Οι μαθητές/-τριες συγκρίνοντας δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, σύμφωνα με την Empson (1995) μπορούν να εργαστούν με δύο τρόπους: είτε να βρουν την ποσότητα που αντιστοιχεί σε κάθε άτομο στις δύο περιπτώσεις και να τις συγκρίνουν, είτε να συγκρίνουν τους δύο λόγους των αγαθών προς τα άτομα. Η ερμηνεία, λοιπόν, του κλάσματος ως πηλίκο αντανακλά τον διπλό τρόπο κατανόησης των ισοδύναμων κλασμάτων που αναφέρθηκε προηγουμένως.

6.3.3. Ισοδύναμα κλάσματα ως μέτρα

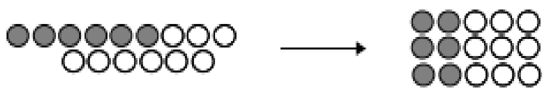
Αφού ένα μήκος μπορεί να διαιρείται συνεχώς σε όλο και μικρότερες μονάδες, ισοδύναμα κλάσματα προκύπτουν όταν διαφορετικές μονάδες καλύπτουν το ίδιο μήκος (Ni, 2001). Όσο μικρότερες είναι οι μονάδες που μετρούν το μήκος, τόσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος τους και αντίστροφα (Lamon, 2012). Οι μαθητές/-τριες συνήθως χρησιμοποιούν ράβδους Cuisenaire ή τη διπλή αριθμογραμμή για να αναπαραστήσουν τα ισοδύναμα κλάσματα με αυτή την ερμηνεία (Kara, κ.ά., 2018).



Εικόνα 6.4: Αναπαράσταση των ισοδύναμων κλασμάτων 1/2 και 2/4 με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο

6.3.4. Ισοδύναμα κλάσματα ως λόγοι

Η λειτουργία της ομαδοποίησης φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτή την ερμηνεία. Για παράδειγμα, για να προκύψουν οι ισοδύναμοι λόγοι 6:9 και 2:3, χρειάζεται να ανα-ομαδοποιηθεί ο λόγος 6:9, δημιουργώντας δύο στήλες σκιασμένες και τρεις στήλες άσπρες, ή διαφορετικά 2:3, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.5 (Lamon, 2012). Η ερμηνεία των ισοδύναμων κλασμάτων ως ισοδύναμοι λόγοι επικεντρώνεται κυρίως στο δεύτερο τρόπο κατανόησης των ισοδύναμων κλασμάτων.



Εικόνα 6.5: Οι ισοδύναμοι λόγοι 6/9 και 2/3 (Lamon, 2012, σελ. 229)

6.3.5. Ισοδύναμα κλάσματα ως τελεστές

Η ισοδυναμία των κλασμάτων όταν ερμηνεύονται ως τελεστές προκύπτει όταν εφαρμόζονται δύο διαφορετικά κλάσματα σε δύο διαφορετικές ποσότητες και καταλήγουν σε δύο ίσες ποσότητες (Carraher, 1993). Για παράδειγμα, τα 3/4 από 12 καραμέλες (36/4) και τα 3/8 από 24 καραμέλες (72/8) εκφράζουν την ίδια ποσότητα· 9 καραμέλες και στις δύο περιπτώσεις.

7. Τα Κλάσματα στα Σχολικά Εγχειρίδια του Δημοτικού

7.1. Σχολικό Εγχειρίδιο της Γ' Δημοτικού

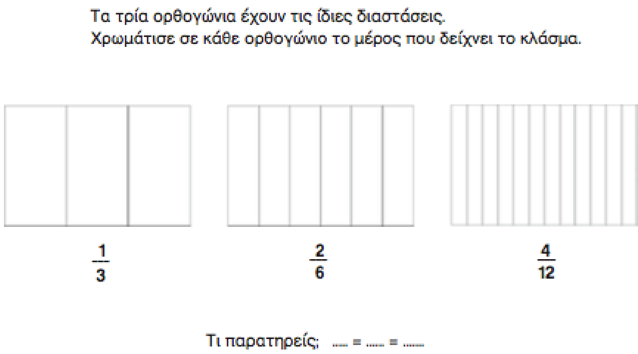
Τα κλάσματα εμφανίζονται στο Δημοτικό για πρώτη φορά στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' Δημοτικού. Σύμφωνα με το βιβλίο δασκάλου (2006) η ερμηνεία του κλάσματος στην οποία επικεντρώνονται τα σχολικά εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού είναι αυτή του μέρους-όλου σε συνεχή και διακριτά μεγέθη. «… Η κλασματική μονάδα είναι το ένα από τα πολλά ίσα μέρη στα οποία είναι χωρισμένη μια ποσότητα» (Βιβλίο δασκάλου, σελ.10). Σκοπός της διδασκαλίας των κλασμάτων σε αυτή την τάξη αποτελεί η σύνδεση του κλάσματος με την ονομασία και το συμβολισμό του.

Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στα κλάσματα, όπου συνδέονται με τη μέτρηση της ώρας (π.χ. τέταρτο της ώρας) και παρουσιάζεται ο συμβολισμός τους. Στη συνέχεια, γίνεται λόγος για τις κλασματικές μονάδες, οι οποίες παρουσιάζονται μέσα από μοντέλα που προωθούν την ερμηνεία του μέρους-όλου (βλ. Gould, 2013). Αναφέρεται μάλιστα ρητά ότι ο παρονομαστής εκφράζει τα ίσα μέρη στα οποία χωρίζουμε ένα σχήμα και ο αριθμητής τα ίσα μέρη που παίρνουμε (Εικόνα 7.1). Παρόλο που, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η λειτουργία του τεμαχισμού διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε αυτή την ερμηνεία (Pantziara & Philippou, 2012), δεν προωθείται σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς τις περισσότερες φορές τα σχήματα παρέχονται έτοιμα, τεμαχισμένα σε ίσα μέρη και οι μαθητές/-τριες καλούνται να αναγνωρίσουν απλώς το κλάσμα που αναπαρίσταται, πιθανώς μέσω της διπλής μέτρησης (Εικόνα 7.2).

Εικόνα 7.1. Ορισμός του κλάσματος στο Βιβλίο Μαθητή Γ' Δημοτικού (2006, σελ. 59)

Εικόνα 7.2. Δραστηριότητα για την αναγνώριση κλασματικών μονάδων (Τετράδιο Εργασιών Γ’ Δημοτικού, Β’ τεύχος, 2006, σελ. 27)

Ακολουθεί το κεφάλαιο με τα ισοδύναμα κλάσματα, στο οποίο δίνεται έμφαση στην προσέγγιση των ισοδύναμων κλασμάτων ως αναπαραστάσεις της ίδιας ποσότητας, ενώ δεν γίνεται λόγος για την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ τους. Τα παιδιά καλούνται να χρωματίσουν το κλασματικό μέρος που τους δίνεται σε μερικά ίδια σχήματα, τα οποία είναι τεμαχισμένα με διαφορετικό τρόπο, και να παρατηρήσουν ότι η χρωματισμένη ποσότητα που προκύπτει είναι ίδια κάθε φορά, ενώ τα κλάσματα που την αναπαριστούν είναι διαφορετικά (Εικόνα 7.3). Τέλος, δεν αναμένεται από τους/τις μαθητές/-τριες αυτής της ηλικίας να δουν την ισοδυναμία μέσα από μαθηματικές ιδιότητες ούτε να καταλήξουν σε κάποια γενίκευση για το πότε συμβαίνει δύο κλάσματα να αναπαριστούν την ίδια ποσότητα, απλώς έρχονται σε μια πρώτη επαφή μαζί τους.



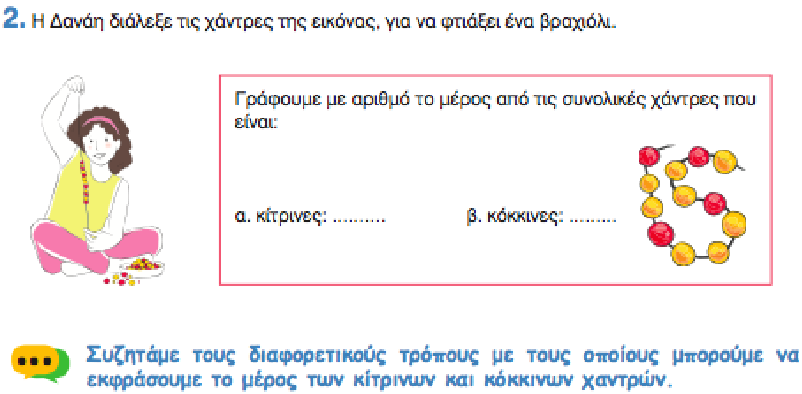
Εικόνα 7.3. Δραστηριότητα για την ισοδυναμία των κλασμάτων (Τετράδιο Εργασιών Γ’ Δημοτικού, Β’ Τεύχος, 2006, σελ. 38)

7.2. Σχολικό Εγχειρίδιο της Ε’ Δημοτικού

Η διδασκαλία των κλασμάτων επανέρχεται στην Ε’ Δημοτικού. Σε αυτή την τάξη, σύμφωνα με το βιβλίο εκπαιδευτικού (2018) επαναλαμβάνονται όσα είχαν διδαχθεί στην Γ’ Δημοτικού και προστίθενται καταχρηστικά κλάσματα και μεικτοί αριθμοί. «Οι μαθητές/ήτριες κατασκευάζουν ισοδύναμα κλάσματα και αναπαριστάνουν την ίδια σχέση μεγεθών με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις, βρίσκουν οποιοδήποτε κλάσμα ανάμεσα σε άλλα και συγκρίνουν κλάσματα με διαφορετικούς τρόπους» (Βιβλίο Εκπαιδευτικού, 2018, σελ. 47). Ακόμη, περιλαμβάνονται οι τέσσερις πράξεις των κλασμάτων.

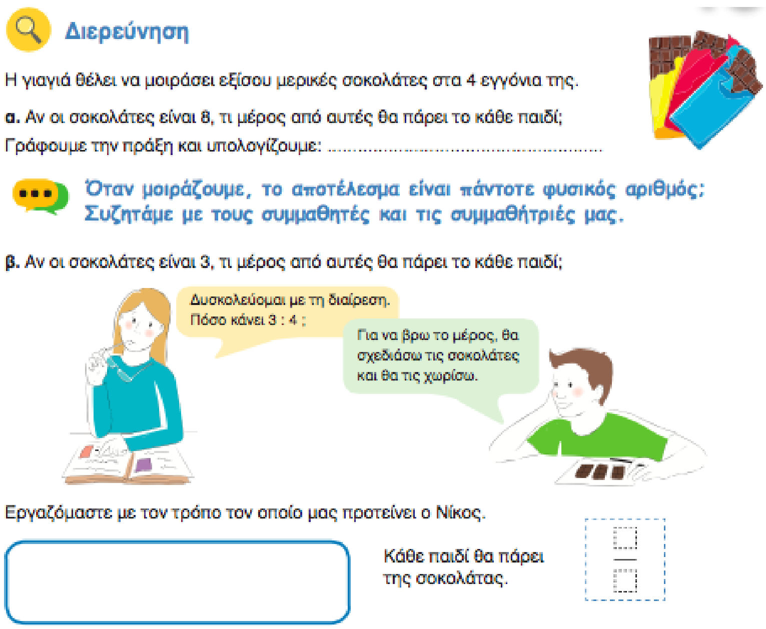
Το πρώτο κεφάλαιο της ενότητας που σχετίζεται με τα κλάσματα, παρουσιάζει το κλάσμα ως μέρος-όλου, τόσο για συνεχείς όσο και για διακριτές ποσότητες, και το κλάσμα ως μέτρο, μέσα από την τοποθέτηση κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή.

Μετά από μια δραστηριότητα για το κλάσμα ως μέρος-όλου μιας συνεχούς ποσότητας, εμφανίζονται κιόλας στο προσκήνιο τα ισοδύναμα κλάσματα (Εικόνα 7.4). Στη δραστηριότητα αυτή, διερευνάται η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων (χάντρες). Αφού οι μαθητές/-τριες εκφράσουν τον αριθμό των κόκκινων και των κίτρινων χαντρών σε σχέση με τις συνολικές χάντρες, καλούνται να εκφράσουν τις ίδιες ποσότητες με διαφορετικά κλάσματα. Αν και τα ισοδύναμα κλάσματα ίσως εμφανίστηκαν με απότομο τρόπο -δεδομένου ότι το παρόν κεφάλαιο είναι η πρώτη επαφή με τα κλάσματα μετά από περισσότερο από ένα χρόνο για τους μαθητές και τις μαθήτριες- η παραπάνω δραστηριότητα θα μπορούσε να προωθήσει την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων διακριτών ποσοτήτων σε επόμενες ενότητες. Ανάλογα με τον τρόπο που θα ανα-ομαδοποιηθούν οι χάντρες από τα παιδιά, μπορούν να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα. Αν για παράδειγμα ομαδοποιηθούν ανά δύο, προκύπτει το κλάσμα 2/6 που αναπαριστά τον αριθμό των δυάδων των χαντρών με κόκκινο χρώμα, σε σχέση με τον αριθμό των συνολικών δυάδων των χαντρών. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα ενθαρρύνεται τόσο η λειτουργία του τεμαχισμού όσο και αυτή της ομαδοποίησης, οι οποίες αποτελούν τις δύο λειτουργίες που αναπτύσσονται στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου (Pantziara & Philippou, 2012).



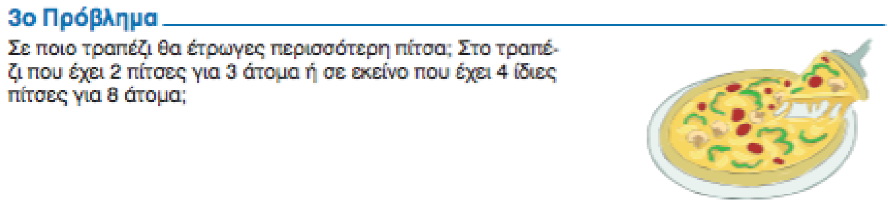
Εικόνα 7.4. Δραστηριότητα για τα κλάσματα ως μέρη-όλου (Βιβλίο Μαθητή Ε’ Δημοτικού, Α’ Τεύχος, 2018, σελ. 39)

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το κεφάλαιο για τα καταχρηστικά κλάσματα και ακολουθεί το κεφάλαιο με το κλάσμα ως πηλίκο. Οι στόχοι του κεφαλαίου «Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης», σύμφωνα με το βιβλίο εκπαιδευτικού (2018) αφορούν τη διαπίστωση ότι ένα κλάσμα εκφράζει ένα πηλίκο διαίρεσης και την εύρεση του αποτελέσματος αυτού του πηλίκου. Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς όπου το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι αρχικά φυσικός αριθμός και έπειτα κλασματικός (Εικόνα 7.5).



Εικόνα 7.5. Δραστηριότητα για το κλάσμα ως πηλίκο (Βιβλίο Μαθητή Ε’ Δημοτικού, Α’ Τεύχος, 2018, σελ. 43)

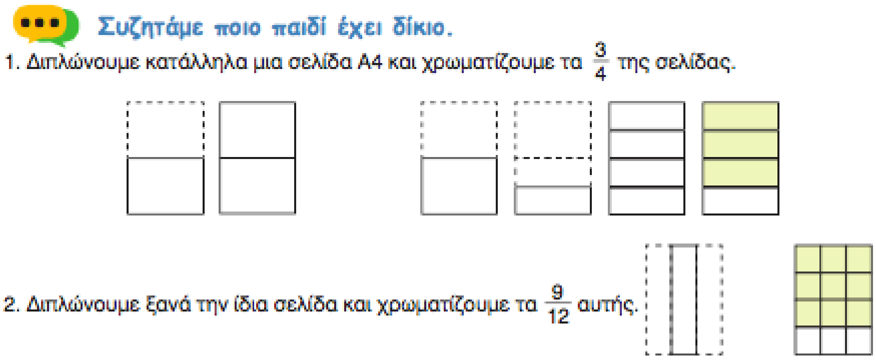
Στο κεφάλαιο αυτό, περιλαμβάνεται και μια δραστηριότητα σύγκρισης κλασμάτων μέσα από διαφορετικές καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (Εικόνα 7.6). Οι μαθητές/-τριες, σύμφωνα με το βιβλίο εκπαιδευτικού (2018), καλούνται να βρουν το μερίδιο κάθε ατόμου για να καταλήξουν στα κλάσματα 2/3 και 4/8 και στη συνέχεια, σκεπτόμενοι πως το 2/3 είναι μεγαλύτερο από το μισό να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η παρέα με τα τρία άτομα και τις δύο πίτσες θα φάνε περισσότερη πίτσα. Βέβαια, θα μπορούσαν να εργαστούν με διαφορετικό τρόπο, αν επικεντρώνονταν στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των δύο κλασμάτων. Θα μπορούσε για παράδειγμα, ένας μαθητής ή μία μαθήτρια να ισχυριστεί ότι ενώ η δεύτερη παρέα τρώει τις διπλάσιες πίτσες, ο αριθμός των ατόμων είναι μεγαλύτερος από διπλάσιος και για το λόγο αυτό αναλογεί στον καθένα λιγότερη ποσότητα πίτσας.



Εικόνα 7.6. Δραστηριότητα κλασμάτων μέσω της ερμηνείας του πηλίκου (Τετράδιο Εργασιών Ε’ Δημοτικού, Α’ Τεύχος, 2018, σελ. 44)

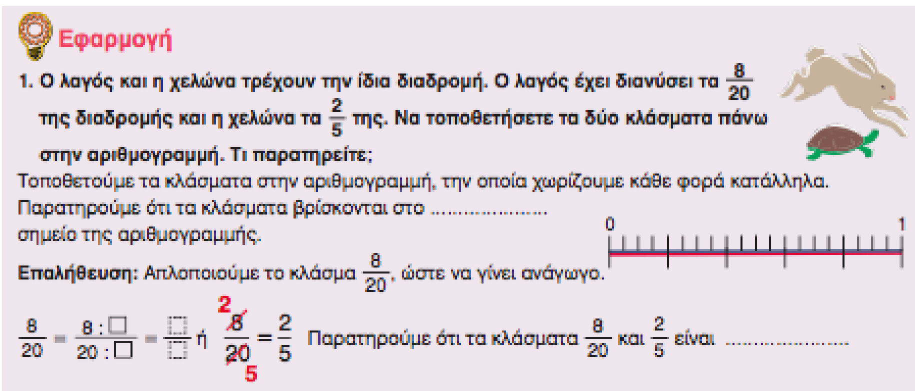
Το βιβλίο του μαθητή και το τετράδιο εργασιών στο αντίστοιχο κεφάλαιο περιλαμβάνει ένα πλήθος από προβλήματα που αφορούν στη διαίρεση μερισμού. Θα μπορούσε παράλληλα να εμπεριέχονται και προβλήματα με διαίρεση μέτρησης, όπως «*κάποια παιδιά μοιράζονται 5 πίτσες, αν κάθε παιδί τρώει τα 4/5 της μίας πίτσας, πόσα παιδιά πιστεύεις ότι μοιράστηκαν τις πίτσες;*», τα οποία συμβάλλουν στη βαθύτερη κατανόηση του κλάσματος ως πηλίκο (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Ακολουθεί το κεφάλαιο με αντικείμενο τα ισοδύναμα κλάσματα και την απλοποίηση των κλασμάτων. Σύμφωνα με το βιβλίο εκπαιδευτικού (2018) τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι οι μαθητές/-τριες στο τέλος του κεφαλαίου να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν ισοδύναμα κλάσματα και να απλοποιούν κλάσματα. Η πρώτη δραστηριότητα του κεφαλαίου που εισάγει τα ισοδύναμα κλάσματα, αφορά την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου (Εικόνα 7.7). Οι μαθητές/-τριες στη δραστηριότητα αυτή, καλούνται να παρατηρήσουν τα δύο σχήματα και να βγάλουν το συμπέρασμα ότι τα δύο κλάσματα αναπαριστούν την ίδια περιοχή του χαρτιού. Ακόμη, αναμένεται από αυτούς/-ές να συμπεράνουν ότι το κλάσμα 9/12 προκύπτει από το κλάσμα 3/4, αν πολλαπλασιαστούν οι όροι του τελευταίου με τον αριθμό 3. Η δραστηριότητα αυτή θα μπορούσε να προκαλέσει τη συζήτηση στην τάξη σχετικά με την ομαδοποίηση των μερών που γίνεται και τη σχέση που έχουν οι σειρές με τα κουτάκια.



Εικόνα 7.7. Δραστηριότητα για τα ισοδύναμα κλάσματα ως μέρη-όλου (Βιβλίο Μαθητή Ε' Δημοτικού, Α' Τεύχος, 2018, σελ. 45)

Παρακάτω, υπάρχουν και δραστηριότητες που ενθαρρύνουν την ερμηνεία των ισοδύναμων κλασμάτων ως μέτρα, όπως φαίνεται για παράδειγμα στην εικόνα 7.8. Στην παρούσα δραστηριότητα θα μπορούσε να μη δίνεται εκ των προτέρων τεμαχισμένη η αριθμογραμμή, ώστε να ενθαρρυνθούν οι λειτουργίες του τεμαχισμού και της επανάληψης από τη μεριά των μαθητών/-τριων. Με αφορμή αυτή τη δραστηριότητα, θα μπορούσε να γίνει μια συζήτηση σχετικά με τη σχέση των δύο μονάδων μέτρησης, αλλά και με την αντίστροφη σχέση που υπάρχει μεταξύ του μεγέθους της μονάδας μέτρησης και του αριθμού των φορών που χωράει στη δοσμένη απόσταση.



Εικόνα 7.8. Δραστηριότητα για τα ισοδύναμα κλάσματα ως μέτρα (Βιβλίο Μαθητή Ε' Δημοτικού, Α' Τεύχος, 2018, σελ. 46)

Έπεται ένα κεφάλαιο για τη σύγκριση και τη διάταξη των κλασμάτων. Στο βιβλίο εκπαιδευτικού (2018) αναφέρεται ότι καλό είναι οι εκπαιδευτικοί να προτρέψουν τα παιδιά:

> να περιγράψουν τις στρατηγικές σύγκρισης των κλασμάτων με εννοιολογικό τρόπο (πρότυπα εννοιολογικής σκέψης για τη σύγκριση: περισσότερα μέρη του ίδιου μεγέθους, ίδιος αριθμός μερών αλλά διαφορετικά μεγέθη, περισσότερο και λιγότερο από το μισό ή το ένα, πιο κοντά στο μισό ή στο όλο· σελ. 61).

Η σύγκριση των κλασμάτων επικεντρώνεται στην εννοιολογική προσέγγιση της γνώσης και οι μαθητές/-τριες καλούνται να συγκρίνουν τα κλάσματα εφαρμόζοντας τις δικές τους στρατηγικές, συγκρίνοντάς τα για παράδειγμα με ένα άλλο κλάσμα ως σημείο αναφοράς.

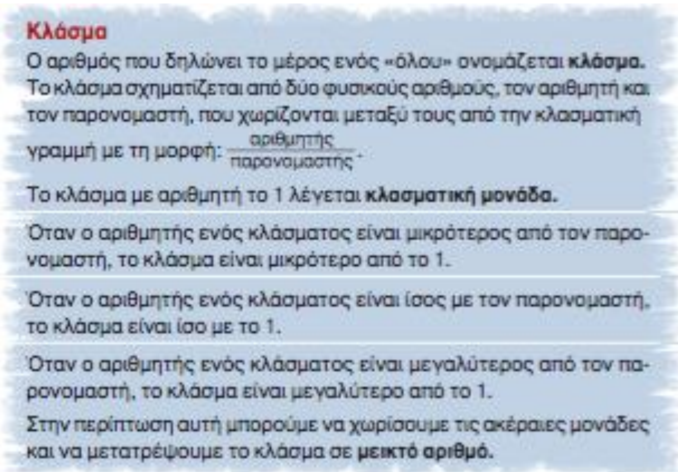
Το σχολικό εγχειρίδιο περιλαμβάνει στη συνέχεια κεφάλαια σχετικά με τις πράξεις των κλασμάτων, στα οποία μετά από κάποιες διερευνητικές δραστηριότητες παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι. Στα κεφάλαια αυτά το κλάσμα αντιμετωπίζεται κυρίως με την ερμηνεία του μέρους-όλου και του μέτρου.

Σε όλα τα κεφάλαια που σχετίζονται με τα κλάσματα παρέχεται ένα πλήθος από ευκαιρίες που αναδεικνύουν τις διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος ανάλογα με το εκάστοτε πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Ενδεχομένως, πρόσθετες δραστηριότητες που θα επέτρεπαν ακόμα περισσότερη αυτονομία στα παιδιά, όπως για παράδειγμα δραστηριότητες χωρίς σχήματα ή με σχήματα τα οποία να μην είναι τεμαχισμένα εκ των προτέρων, να συντελούσαν σε μεγαλύτερο βαθμό στην ανάπτυξη των λειτουργιών που εμπλέκονται με τα κλάσματα και στην καλλιέργεια όλο και πιο πολύπλοκων γνωστικών σχημάτων.

7.3. Σχολικό Εγχειρίδιο της ΣΤ' Δημοτικού

Τα κλάσματα αποτελούν και πάλι αντικείμενο διδασκαλίας στην τελευταία τάξη του Δημοτικού σχολείου. Σύμφωνα με το βιβλίο δασκάλου (2005) η ενότητα που περιέχει τα κλάσματα «σκοπεύει στην επανάληψη και επέκταση των γνώσεων (...) που έχουν κατακτήσει οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις» (σ.18).

Έτσι, το πρώτο κεφάλαιο που αναφέρεται στα κλάσματα μελετά και πάλι το κλάσμα ως μέρος ενός όλου. Ο ορισμός μάλιστα που δίνεται για το κλάσμα αφορά πάλι αυτή την ερμηνεία, όπως φαίνεται στην εικόνα 7.9. Ο ορισμός, όμως αυτός, ενθαρρύνει τους/τις μαθητές/-τριες να σκέφτονται ξεχωριστά για τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος, ως δύο αριθμούς και δεν θέτει στο επίκεντρο την πολλαπλασιαστική σχέση των δύο όρων του κλάσματος.



Κλάσμα

Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται **κλάσμα.** Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$.

Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται **κλασματική μονάδα.**

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό.**

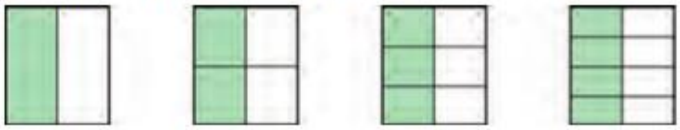
Εικόνα 7.9. Ορισμός του κλάσματος (Βιβλίο Μαθητή ΣΤ’ Δημοτικού, 2005, σελ. 46)

Σε αυτή την τάξη, περιλαμβάνεται και πάλι ένα ξεχωριστό κεφάλαιο που αντιμετωπίζει το κλάσμα ως ένα πηλίκο διαίρεσης. Εκτός από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, μέσω τον οποίων το κλάσμα προκύπτει από τη διαίρεση των αγαθών προς τα άτομα, το κεφάλαιο αυτό περιέχει και τη σύνδεση του κλάσματος με τους δεκαδικούς αριθμούς. Οι μαθητές/-τριες αναμένεται, δηλαδή, να είναι σε θέση να μετατρέπουν δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα και αντίστροφα.

Ακολουθώντας την ίδια διδακτική πορεία με τα σχολικά εγχειρίδια των προηγούμενων τάξεων, ακολουθεί ένα κεφάλαιο αφιερωμένο στα ισοδύναμα κλάσματα. Οι στόχοι του κεφαλαίου σύμφωνα με το βιβλίο δασκάλου (2005) είναι οι μαθητές/-τριες να αναγνωρίζουν και να δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα και να απλοποιούν τα κλάσματα για να γίνουν ανάγωγα. Η πρώτη δραστηριότητα του κεφαλαίου παρουσιάζει τα ισοδύναμα κλάσματα με την ερμηνεία του μέρους-όλου (Εικόνα 7.10) και ακολουθεί μια δραστηριότητα για τη διαδικασία δημιουργίας ισοδύναμων κλασμάτων (Εικόνα 7.11).

Δραστηριότητα 1η

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το σχέδιο ενός πάρκου που χωρίστηκε, για να καλυφθεί ένα μέρος του με χόρτο, ενώ στο υπόλοιπο θα τοποθετηθούν τα παιχνίδια.



Α .... Β .... Γ .... Δ ....

- Γράψε, κάτω από κάθε τετράγωνο, το κλάσμα που περιγράφει το πράσινο μέρος του.
- Πόσο μέρος του πάρκου θα καλυφθεί με χόρτο σε κάθε περίπτωση; ....
- Σύγκρινε τα κλάσματα μεταξύ τους με τη βοήθεια των σχημάτων.

  Τι παρατηρείς; ....
- Σύγκρινε το πρώτο κλάσμα με καθένα από τα υπόλοιπα.

  Τι παρατηρείς για τη σχέση ανάμεσα στους όρους τους; ....

  ....

Εικόνα 7.10. Δραστηριότητα για τα ισοδύναμα κλάσματα ως μέρη-όλου (Βιβλίο Μαθητή ΣΤ’ Δημοτικού, σελ. 49)

Δραστηριότητα 2η

Ο Χρήστος και ο Φοίβος είχαν από 12 €. Όταν συναντήθηκαν, ο Χρήστος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{9}{12}$ των χρημάτων του και ο Φοίβος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του.

- Ποιος ξόδεψε περισσότερα; ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους των δύο κλασμάτων; ....
- Μπορείς να σχηματίσεις ένα νέο κλάσμα, που να εκφράζει το ίδιο μέρος του όλου; ....

  ....
- Με ποιο κλάσμα θα διάλεγες να εκφραστείς εσύ; Γιατί; ....

  ....

Εικόνα 7.11. Δραστηριότητα για τη δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων (Βιβλίο Μαθητή ΣΤ’ Δημοτικού, σελ. 49)

Στο τετράδιο εργασιών, οι περισσότερες δραστηριότητες παρέχουν μόνο τη συμβολική γραφή των κλασμάτων και δεν εντάσσονται σε κάποιο πλαίσιο (Εικόνα 7.12), εκτός από δύο μόνο δραστηριότητες που σχετίζονται με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου και ως τελεστή (Εικόνα 7.13).

Συμπλήρωσε τις ισότητες:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$$

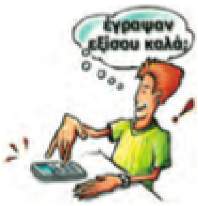
Με ποιον δεκαδικό αριθμό είναι ίσα αυτά τα κλάσματα;

Εικόνα 7.12. Δραστηριότητα για τα ισοδύναμα κλάσματα με συμβολική γραφή (Τετράδιο Εργασιών ΣΤ’ Δημοτικού, Τεύχος 2ο, σελ. 11)

Πρόβλημα 2ο

Στο ένα τμήμα της Στ΄ τάξης τα $\frac{20}{25}$ των μαθητών έγραψαν άριστα στο επαναληπτικό τεστ, ενώ στο άλλο έγραψαν άριστα τα $\frac{24}{30}$. Έλεγξε αν οι μαθητές των δύο τμημάτων έγραψαν εξίσου καλά.

Λύση



Απάντηση: ....

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Θέματα υγείας»*

Μετά την πρόσφατη κακοκαιρία η Παιδιατρική Κλινική του Πανεπιστημιακού Νοσοκομείου Θεσσαλονίκης αποφάσισε να κάνει μια τηλεφωνική έρευνα στα σχολεία για να καταγράψει πόσοι μαθητές απουσίαζαν εκείνη τη συγκεκριμένη μέρα. Ο Διευθυντής του 2ου Δημοτικού Σχολείου Τριανδρίας επισκέφτηκε τις τάξεις και κατέγραψε τους απόντες μαθητές με ένα κλάσμα. Πιο κάτω παρουσιάζεται η καταγραφή που έκανε.

Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που έλειπαν από κάθε τάξη και να τον γράψετε.

- Α΄ τάξη: Απουσίαζαν τα $\frac{2}{5}$ (από τους 25 μαθητές) ....
- Β΄ τάξη: Απουσίαζαν τα $\frac{2}{3}$ (από τους 30 μαθητές) ....
- Γ΄ τάξη: Απουσίαζαν τα $\frac{3}{7}$ (από τους 28 μαθητές) ....
- Δ΄ τάξη: Απουσίαζαν τα $\frac{4}{6}$ (από τους 24 μαθητές) ....
- Ε΄ τάξη: Απουσίαζαν τα $\frac{3}{13}$ (από τους 26 μαθητές) ....
- Στ΄ τάξη: Απουσίαζαν τα $\frac{2}{9}$ (από τους 27 μαθητές) ....
- Πόσοι έλειπαν συνολικά από το σχολείο;

Απάντηση: ....

Εικόνα 7.13. Δραστηριότητες για το κλάσμα ως λόγο και ως τελεστή (Τετράδιο Εργασιών ΣΤ’ Δημοτικού, 2ο Τεύχος, σελ. 12)

Σε όλο το κεφάλαιο, έργα που να εμπλέκουν τα παιδιά με τις ερμηνείες των ισοδύναμων κλασμάτων ως μέτρα και ως πηλίκα απουσιάζουν, ενώ ταυτόχρονα, δεν παρέχονται ευκαιρίες για να αναπτυχθούν οι πέντε λειτουργίες που σχετίζονται με τα κλάσματα, καθώς οι δραστηριότητες απαιτούν περισσότερο τη διαχείριση των κλασμάτων σε συμβολικό επίπεδο και την εφαρμογή συνήθως μιας διαδικασίας. Το σχολικό εγχειρίδιο, λοιπόν, φαίνεται να επικεντρώνεται περισσότερο στη διαδικαστική φύση της γνώσης και όχι τόσο στην εννοιολογική, καθώς δεν παρέχονται ευκαιρίες στους/στις μαθητές/-τριες να δημιουργήσουν διαφορετικά μοντέλα αναπαράστασης των ισοδύναμων κλασμάτων και να κάνουν παρατηρήσεις σχετικά με τις ομοιότητες και τις διαφορές αυτών.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν και για το κεφάλαιο της σύγκρισης των κλασμάτων. Το σχολικό εγχειρίδιο δίνει έμφαση στη μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα για τη σύγκρισή τους και όχι στους εννοιολογικούς τρόπους σύγκρισης και στις άτυπες στρατηγικές που μπορεί να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές/-τριες.

ΜΕΡΟΣ Β’: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

9. Πείραμα Σχεδιασμού

Για την ερευνητική προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε το πείραμα σχεδιασμού της μορφής ένας-προς-έναν που αποτελούταν από την ερευνητική ομάδα και μία μαθήτρια (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Βασικός στόχος αυτής της μεθοδολογίας αποτέλεσε η μελέτη από τη μεριά των ερευνητών του τρόπου μάθησης και συλλογισμού των μαθητών/-τριων όσον αφορά τα μαθηματικά (Steffe & Thompson, 2000).

Το πείραμα σχεδιασμού δεν σχετίζεται με την παροχή γνώσεων προς τους/τις μαθητές/-τριες, αλλά με την εμπλοκή τους με ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις ούτως ώστε να οικοδομηθούν πιο ισχυρά σχήματα και λειτουργίες (Thompson 2010). Ένα σημαντικό στοιχείο του πειράματος σχεδιασμού αποτελεί η καταγραφή της *υποθετικής πορείας μάθησης* (‘hypothetical learning trajectory’), η οποία περιλαμβάνει το μαθησιακό στόχο, τα βασικά έργα που θα προωθήσουν αυτό το στόχο και τον πιθανό συλλογισμό των παιδιών πάνω στις έννοιες με τις οποίες θα εμπλακούν (Clements & Sarama, 2004· Simon, 1995). Οι αρχικές αυτές υποθέσεις, βέβαια, επαναπροσδιορίζονται μετά από κάθε συνάντηση με τα παιδιά, ανάλογα με τα αποτελέσματα που καταγράφονται (Hackenberg, 2010) και με βάση αυτά επαναπροσδιορίζεται και ο σχεδιασμός των επόμενων συναντήσεων (Cobb et al., 2003).

Μετά το πέρας του πειράματος ακολουθεί η *αναστοχαστική ανάλυση* (‘retrospective analysis’), στόχος της οποίας είναι η τοποθέτηση του πειράματος σε ένα γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο, που ξεπερνά την πορεία μάθησης του συγκεκριμένου παιδιού, και η παροχή βοήθειας σε μελλοντικές έρευνες ώστε τα αποτελέσματά τους να είναι προβλέψιμα (Cobb et al., 2003).

9.1. Συμμετέχοντες στο Πείραμα Σχεδιασμού

Το πείραμα σχεδιασμού υλοποιήθηκε σε ένα δημόσιο σχολείο της Αττικής, με μια μαθήτρια της Ε’ Δημοτικού, τη Μαρία. Η επιλογή του παιδιού έγινε έπειτα από συζήτηση με την εκπαιδευτικό της τάξης κυρίως λόγω των επικοινωνιακών δεξιοτήτων της μαθήτριας, καθώς επρόκειτο για ένα εξωστρεφές και ομιλητικό παιδί, γεγονός που θα βοηθούσε να γίνει αντιληπτός ο τρόπος σκέψης της. Ταυτόχρονα υπήρχαν και πρακτικοί λόγοι που συνέβαλαν στην επιλογή της συγκεκριμένης μαθήτριας, διότι υπήρχε καλή συνεργασία μεταξύ των γονιών της και την εκπαιδευτικό της τάξης και επιπλέον ήταν ένα από τα λίγα παιδιά που παρέμενε στο ολοήμερο πρόγραμμα του σχολείου κατά τη διάρκεια του οποίου θα πραγματοποιούνταν και οι συναντήσεις.

Πραγματοποιούταν μία συνάντηση μίας σχολικής ώρας (45’) μετά το ημερίσιο πρόγραμμα του σχολείου κάθε βδομάδα. Από το Μάρτιο μέχρι τον Ιούνιο υλοποιήθηκαν συνολικά επτά συναντήσεις. Η ερευνητική ομάδα αποτελούταν από δύο ερευνήτριες-εκπαιδευτικούς: η μία αλληλεπιδρούσε με τη μαθήτρια και η άλλη παρακολουθούσε και κρατούσε σημειώσεις. Οι συναντήσεις κάθε φορά ηχογραφούνταν ώστε να καταγραφούν όλες οι απαντήσεις της μαθήτριας.

Μετά από κάθε συνάντηση, γινόταν η απομαγνητοφώνηση των συναντήσεων και ακολουθούσε συζήτηση μεταξύ της ερευνητικής ομάδας για τον τρόπο λειτουργίας της μαθήτριας καθώς και τις υπάρχουσες γνωστικές της δομές. Έπειτα, πραγματοποιούταν ο σχεδιασμός των επόμενων συναντήσεων για τον έλεγχο αυτών των υποθέσεων. Ακόμη, υπήρχε ένα ημερολόγιο στο οποίο καταγράφονταν τα αποτελέσματα των συναντήσεων, τα οποία βοήθησαν στη διαπίστωση των αλλαγών που χρειάζονταν να γίνουν στα προβλήματα που δίνονταν ή στις προσεγγίσεις που ακολουθούνταν με τη μαθήτρια.

Η Μαρία, σύμφωνα με τη δασκάλα της, είναι γενικά μια καλή μαθήτρια σε όλα τα μαθήματα, αλλά δεν παρουσιάζει σταθερότητα στις επιδόσεις της. Σύμφωνα με την ίδια, τα μαθηματικά είναι ένα από τα αγαπημένα της μαθήματα, οπότε έχει καλή διάθεση απέναντι τους.

Όταν ξεκίνησαν οι συναντήσεις, οι ενότητες που σχετίζονται με τα κλάσματα είχαν ήδη διδαχθεί από την εκπαιδευτικό της τάξης, οπότε η μαθήτρια είχε προηγούμενες γνώσεις στο αντικείμενο που θα μελετούσαμε. Για να διαπιστωθεί όμως ποιες ακριβώς ήταν οι γνώσεις της Μαρίας για τα κλάσματα και να προσδιοριστούν τα σημεία αφετηρίας του πειράματος σχεδιασμού δόθηκαν μια σειρά από προβλήματα σχετικά με βασικές γνώσεις του κλάσματος.

9.2. Προετοιμασία του Πειράματος

9.2.1. Τελικά σημεία μάθησης

Το πρώτο βήμα ενός πειράματος σχεδιασμού αποτελεί ο προσδιορισμός των μαθηματικών μαθησιακών στόχων και του τρόπου με τον οποίο θα επιτευχθούν αυτοί οι στόχοι (Cobb, 2000).

Ο βασικός σκοπός που τέθηκε για το παρόν πείραμα σχεδιασμού αφορά τη μελέτη του συλλογισμού και των τρόπων λειτουργίας που αναπτύσσονται κατά την προσπάθεια μίας μαθήτριας να αναπτύξει εννοιολογική κατανόηση για την ισοδυναμία δύο κλασμάτων. Η μαθήτρια μετά το πέρας του πειράματος θεωρήθηκε ότι θα μπορεί να είναι σε θέση να διακρίνει δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς εάν είναι ισοδύναμες ή όχι, παρέχοντας επιχειρήματα με τους δύο τρόπους που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες (βλ. ενότητα 6.2).

Ένας ακόμη στόχος που τέθηκε αφορά την ικανότητα της μαθήτριας βλέποντας ένα κλάσμα α/β να το ερμηνεύει ως το μερίδιο που προκύπτει από μία κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς, όπου ο αριθμός α αντιπροσωπεύει τα αγαθά που μοιράζονται και ο αριθμός β τα άτομα στα οποία τα αγαθά μοιράζονται, αλλά και οποιαδήποτε άλλη ισοδύναμη πολλαπλασιαστική σχέση αυτών.

Τέλος, για να ελεγχθεί εάν η νέα γνώση που οικοδομήθηκε από τη μαθήτρια είναι στέρεα ή μη τέθηκε ως στόχος η μαθήτρια στο τέλος των συναντήσεων να είναι σε θέση να αξιοποιεί την ισοδυναμία των κλασμάτων για να συγκρίνει δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Άλλωστε, η εννοιολογική γνώση –που αποτελεί και το σκοπό του παρόντος πειράματος σχεδιασμού- σχετίζεται άμεσα με τις συνδέσεις μεταξύ των αποκτηθέντων γνώσεων και την εφαρμογή αυτών των γνώσεων σε νέα πλαίσια και καταστάσεις (Hiebert & Lefevre, 1986).

Αφού καθορίστηκαν οι μαθησιακοί στόχοι του πειράματος σχεδιασμού, κρίθηκε αναγκαίο να ερευνηθούν οι προηγούμενες γνώσεις της μαθήτριας για τον τρόπο που ερμηνεύει το κλάσμα σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, ώστε να καθοριστούν τα σημεία αφετηρίας του πειράματος σχεδιασμού.

9.2.2. Σημεία αφετηρίας

Τα σημεία αφετηρίας χρειάζεται να συνάδουν με τα τελικά σημεία μάθησης. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική δραστηριότητα της μαθήτριας πρέπει να αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία θα οικοδομηθούν όλο και πολυπλοκότερες μαθηματικές έννοιες στη διάρκεια της μαθησιακής πορείας του πειράματος σχεδιασμού (Cobb, 2000).

Η πρώτη, λοιπόν, συνάντηση αφιερώθηκε στη μελέτη των προηγούμενων γνώσεων της Μαρίας για τα κλάσματα. Παρέχοντάς της προβλήματα με καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, εξετάστηκε ο τρόπος που ερμήνευε το κλάσμα, οι λειτουργίες και τα σχήματα που έχει αναπτύξει για αυτά.

Με το κλάσμα ως πηλίκο σχετίζονται τρεις παράμετροι: τα άτομα που συμμετέχουν στη μοιρασιά, τα αγαθά που μοιράζονται και το μερίδιο κάθε ατόμου που προκύπτει από τη μοιρασιά. Σχεδιάστηκαν, λοιπόν, προβλήματα στα οποία δίνονταν οι δύο από τους τρεις αυτούς παράγοντες και ζητούταν να βρεθεί ο τρίτος. Έτσι, προέκυψαν τρεις κατηγορίες προβλημάτων στην πρώτη συνάντηση, όπως φαίνονται και στον πίνακα 9.1: (α) προβλήματα στα οποία δίνονταν ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών και ζητούταν το μερίδιο, (β) προβλήματα στα οποία δίνονταν το μερίδιο με τη μορφή σχήματος και ο αριθμός των αγαθών και ζητούταν ο αριθμός των ατόμων και (γ) προβλήματα στα οποία δίνονταν το μερίδιο με τη μορφή σχήματος και ο αριθμός των ατόμων και ζητούταν να σχεδιαστεί το σύνολο των αγαθών.

Πίνακας 9.1. Οι κατηγορίες προβλημάτων για τα σημεία αφετηρίας

Είδος προβλήματος	**Περιγραφή**
Α’ Κατηγορίας	Δίνονται ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών και ζητείται το μερίδιο
Β’ Κατηγορίας	Δίνονται το μερίδιο (σε σχήμα) και τα αγαθά (σε σχήμα) και ζητείται ο αριθμός των ατόμων
Γ’ Κατηγορίας	Δίνονται το μερίδιο (σε σχήμα) και ο αριθμός των ατόμων και ζητείται ο αριθμός των αγαθών

9.2.2.1. Προβλήματα Α' Κατηγορίας

Αρχικά δόθηκαν προβλήματα καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς, στα οποία η μαθήτρια καλούταν να βρει το μερίδιο που αντιστοιχεί σε κάθε παιδί. Για παράδειγμα, δόθηκε το εξής πρόβλημα και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

> Τέσσερα παιδιά μοιράζονται δίκαια μια πίτσα, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Τι μέρος της πίτσας θα φάει κάθε παιδί;

Ε: [Δίνει στη Μαρία μια εικόνα μιας πίτσας]

Μ: Α! Θα τη χωρίσω σε τέσσερα ίσα μέρη (Εικόνα 9.1).

Ε: Είσαι σίγουρη ότι είναι ίσα; Μπορείς να με πείσεις ότι όλοι θα φάνε ίσο μερίδιο πίτσας;

Μ: Ναι, το κάθε παιδί θα φάει ένα κομμάτι.

Ε: Μπορείς να μου δείξεις ότι είναι ίσα αυτά τα κομμάτια;

Μ: Δεν είναι ακριβώς ίσα.... Μπορώ να κάνω άλλο ένα και να περισσέψει λίγο.

Ε: Δεν περισσεύει τίποτα, την έφαγαν όλη.

Μ: [Σκέφτεται]

Ε: Μπορείς να βρεις ένα τρόπο να τη μοιράσεις ίσα [Δίνεται στη Μαρία μια δεύτερη εικόνα με πίτσα];

Μ: Νομίζω σκέφτηκα. [Ζωγραφίζει το πίσω μέρος της πίτσας που της δόθηκε όπως φαίνεται στην εικόνα 9.2] Ούτε έτσι είναι ίσα... Ααaα, με μπέρδεψε αυτή η πίτσα [Ζωγραφίζει το σχήμα που φαίνεται στην εικόνα 9.3].

Ε: Τι έκανες;

Μ: Είπα ότι αν τα χωρίσω έτσι, θα φάει το ένα παιδί αυτό το κομμάτι [δείχνει το πρώτο κομμάτι της πίτσας στην εικόνα 9.3], το άλλο παιδί αυτό [δείχνει το δεύτερο κομμάτι], το άλλο παιδί αυτό [δείχνει το τρίτο κομμάτι] και το άλλο παιδί αυτό [δείχνει και το τέταρτο κομμάτι της πίτσας].

Ε: Γιατί είναι ίσα;

Μ: Γιατί... γιατί αν τα χωρίζαμε έτσι [δείχνει την εικόνα 9.2] δεν γίνεται, δεν θα ήταν δίκαιη η μοιρασιά.

Ε: Πόσο θα φάει ο καθένας;

Μ: Θα φάει ένα κομμάτι.

Ε: Σε σχέση με όλη την πίτσα;

Μ:	Το κάθε παιδί θα φάει το 1/4 της πίτσας.

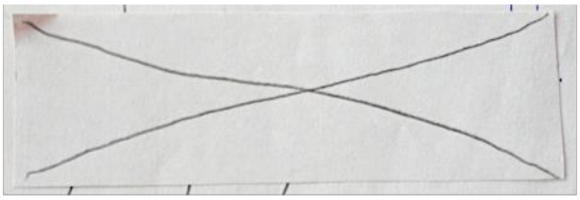
Ε:	Γιατί το 1/4;

Μ:	Αν τρώγανε 2/4 , δεν θα έμενε για τα άλλα παιδιά, θα τρώγανε μόνο τα δύο παιδιά.

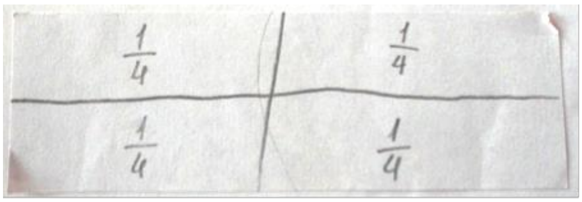
Ε:	Εξήγησέ το μου πάλι αυτό.

Μ:	Αν το κάθε παιδί έτρωγε τα 2/4 θα τρώγανε μόνο τα δύο παιδιά γιατί θα έτρωγε το ένα παιδί τα 2/4 και το άλλο [παιδί] τα άλλα 2/4, οπότε τα άλλα παιδιά δεν θα έτρωγαν, θα έμεναν νηστικά.

Εικόνα 9.1. Η πρώτη προσπάθεια της Μαρίας να τεμαχίσει μια πίτσα σε 4 ίσα μέρη



Εικόνα 9.2. Η δεύτερη προσπάθεια της Μαρίας να τεμαχίσει μια πίτσα σε 4 ίσα μέρη



Εικόνα 9.3. Η τρίτη προσπάθεια της Μαρίας να τεμαχίσει μια πίτσα σε 4 ίσα μέρη

Η Μαρία στην αρχή προσπάθησε να τεμαχίσει την πίτσα σε τέσσερα ίσα μέρη φέρνοντας κάθετες γραμμές. Επειδή όμως το αποτέλεσμα του τεμαχισμού της δεν ήταν τέσσερα ίσα μέση και δεδομένου ότι δεν είχε χάρακα για να μετρήσει το μήκος της πίτσας, προχώρησε σε διαφορετικούς τρόπους τεμαχισμού της πίτσας. Αφού προσπάθησε να την τεμαχίσει φέρνοντας τις διαγωνίους του ορθογωνίου, την τεμάχισε φέρνοντας μια οριζόντια και μια κάθετη γραμμή. Με αυτόν τον τρόπο τεμαχισμού θεώρησε ότι τα κομμάτια είναι ίσα και η μοιρασιά δίκαιη.

Η Μαρία φαίνεται να έχει αναπτύξει σε κάποιο βαθμό τη λειτουργία του τεμαχισμού, αφού αν και δυσκολεύτηκε να τεμαχίσει την πίτσα σε τέσσερα ίσα μέρη, τόνισε από την αρχή πώς αυτός ήταν ο σκοπός της για να βρει το μερίδιο των ατόμων. Ακόμη, μέσα από την τελευταία της απάντηση φαίνεται να έχει αναπτύξει και τη λειτουργία της ομαδοποίησης, καθώς ήταν σε θέση να ενώσει τα δύο μέρη της πίτσας και να φτιάξει μια σύνθετη μονάδα, τα 2/4 της πίτσας, η οποία κατάλαβε ότι χωράει 2 φορές σε όλη την ποσότητα.

Ως προς την ερμηνεία που κυριαρχούσε για το κλάσμα, παρόλο που όλα τα προβλήματα είχαν ως στόχο να προωθήσουν την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, η Μαρία ερμήνευε το κλάσμα ως μέρος-όλου, κάτι το οποίο έγινε φανερό και στο επόμενο πρόβλημα που της δόθηκε:

> Οκτώ παιδιά μοιράζονται δίκαια μία πίτσα, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Τι μέρος της πίτσας θα φάει το κάθε παιδί;

Μ: Νομίζω το βρήκα. [σχεδιάζει το σχήμα που φαίνεται στην εικόνα 9.4]

Ε: Για πες μου τι έκανες.

Μ: Είπα ότι το 4 είναι το μισό του 8, άρα, θα κάνω το ίδιο σχήμα που έκανα στα τέσσερα στη μισή πίτσα και θα κάνω το άλλο μισό στην άλλη μισή.

Ε: Δηλαδή πόσο θα φάει κάθε παιδί;

Μ: [Μετράει τα κομμάτια που έχει φτιάξει] θα φάει ένα κομμάτι.

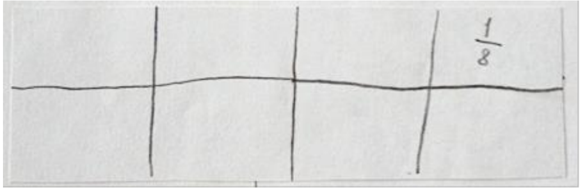
Ε: Αυτό το κομμάτι σε σχέση με όλη την πίτσα πόσο είναι;

Μ: Το κομμάτι σε σχέση με όλη την πίτσα... Α! 1/8.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί είναι ένα από τα 8 κομμάτια.

Μέσα από την απάντηση της Μαρίας είναι φανερό ότι ερμηνεύει το κλάσμα ως μέρος ενός όλου. Αυτή τη φορά, όμως, δεν φάνηκε να δυσκολεύεται να τεμαχίσει την πίτσα σε ίσα μέρη. Το αντίθετο μάλιστα. Συνδέοντας αυτή την κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς με την προηγούμενη, συνειδητοποίησε ότι η ίδια ποσότητα πίτσας χρειάζεται να μοιραστεί στα διπλάσια άτομα, οπότε μετέφερε τον τελικό τρόπο που είχε τεμαχίσει την προηγούμενη πίτσα (Εικόνα 9.3), στη μισή ποσότητα της νέας πίτσας και επανέλαβε το ίδιο και για την άλλη μισή. Είναι πολύ σημαντικό που συσχέτισε πολλαπλασιαστικά τις δύο καταστάσεις στα σχήματα, ακόμη και αν δεν έκανε το ίδιο με τα αντίστοιχα κλάσματα.

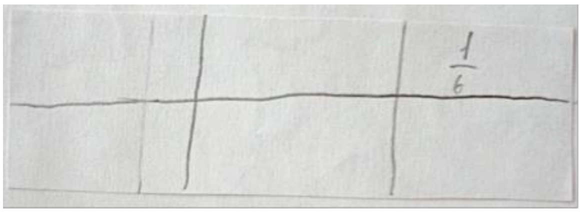


Εικόνα 9.4. Ο τεμαχισμός μιας πίτσας σε 8 ίσα μέρη από τη Μαρία

Η ικανότητα τεμαχισμού της Μαρίας έγινε αντιληπτή και στο επόμενο πρόβλημα που της δόθηκε, κατά το οποίο ζητούταν να μοιράσει μια πίτσα σε έξι άτομα. Μέσα από το σχήμα που έκανε (Εικόνα 9.5) φαίνεται η αρχική της προσπάθεια να τεμαχίσει την πίτσα (γραμμή που έχει σβηστεί). Η Μαρία όμως αντιλήφθηκε ότι χρειάζεται να τεμαχίσει την πίτσα σε μεγαλύτερα κομμάτια σε σχέση με την αρχική της προσπάθεια και σε σχέση με το προηγούμενο πρόβλημα, ώστε να προκύψουν έξι ίσα μερίδια:

Ε: Για εξήγησέ μου τι έκανες εδώ.

Μ: Λοιπόν, έκανα το ίδιο πράγμα [με το προηγούμενο πρόβλημα], αλλά χώρισα σε δύο, έκανα δύο γραμμές τέλος πάντων για να βγούνε τρία και τρία, έξι. Οπότε κάθε παιδί θα φάει το 1/6 της πίτσας.



Εικόνα 9.5. Ο τεμαχισμός μιας πίτσας σε 6 ίσα μέρη από τη Μαρία

Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται μία ακόμη ικανότητα της μαθήτριας. Σκεπτόμενη ότι χρειάζεται να δημιουργήσει έξι ίσα κομμάτια στο σχήμα, το χώρισε αρχικά σε δύο φέρνοντας μια οριζόντια γραμμή, οπότε συνειδητοποίησε ότι μένει να δημιουργηθούν τρία κομμάτια σε κάθε μέρος που έφτιαξε. Μάλιστα, συνειδητοποίησε ότι αρκεί να φέρει δύο κάθετες γραμμές για να δημιουργηθούν τρία κομμάτια σε κάθε σειρά.

9.2.2.2. Προβλήματα Β' Κατηγορίας

Στη συνέχεια δόθηκαν τα προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας, στα οποία δινόταν το μερίδιο σε σχέση με ολόκληρη την ποσότητα και ο αριθμός των αγαθών και ζητούταν να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων. Αυτού του είδους τα προβλήματα είχαν ως στόχο να ερευνηθεί αν η μαθήτρια έχει αναπτυγμένη τη λειτουργία της επανάληψης και το σχήμα τεμαχισμού μοναδιαίου κλάσματος, δεδομένου ότι για τη λύση αυτών είναι η αναγκαία η επανάληψη ενός κομματιού και ο συσχετισμός του αριθμού των επαναλήψεων αυτών με τον αριθμό των ατόμων. Έτσι, δόθηκε για παράδειγμα το παρακάτω πρόβλημα:

> Μια παρέα παιδιών μοιράστηκε δίκαια έναν κορμό σοκολάτας, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Αν το μεγάλο κομμάτι είναι ολόκληρος ο κορμός σοκολάτας και το μικρό κομμάτι είναι η ποσότητα που έφαγε το κάθε παιδί, πόσα παιδιά πιστεύεις ότι μοιράστηκαν τον κορμό σοκολάτας; (δόθηκε η εικόνα 9.6)

Εικόνα 9.6. Ένας κορμός σοκολάτας και ένα κομμάτι που αναπαριστά την ποσότητα που έφαγε ένα άτομο (το 1/4 του κορμού)

Η Μαρία, έχοντας το κομμάτι που αντιπροσωπεύει το μερίδιο κάθε ατόμου, το τοποθέτησε πάνω σε ολόκληρο τον κορμό σοκολάτας και σχεδίαζε μια γραμμή σε κάθε επανάληψη. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «είναι τέσσερα παιδιά και θα φάει το κάθε παιδί το 1/4 του κορμού».

Η Μαρία δεν δυσκολεύτηκε να βρει τον αριθμό των ατόμων ούτε όταν το κομμάτι που δινόταν αναπαριστούσε την ποσότητα που έφαγαν δύο άτομα μαζί, όπως στο παρακάτω πρόβλημα:

Μια παρέα παιδιών μοιράζεται δίκαια μια μπάρα δημητριακών χωρίς να περισσέψει τίποτα. Αν το μεγάλο κομμάτι είναι ολόκληρη η μπάρα δημητριακών και το μικρό είναι η ποσότητα που έφαγαν δύο παιδιά μαζί, πόσα παιδιά πιστεύεις ότι μοιράστηκαν την μπάρα δημητριακών; (δόθηκε η εικόνα 9.7)

Εικόνα 9.7. Μια μπάρα δημητριακών και ένα κομμάτι που αναπαριστά την ποσότητα που έφαγαν δύο άτομα (τα 2/6 της μπάρας)

Μ: [Επανέλαβε το μικρό κομμάτι σε ολόκληρη την μπάρα, σχεδίαζε μια γραμμή σε κάθε επανάληψη και βρήκε ότι χωράει 3 φορές (Εικόνα 9.8)]. Είναι τρεις φορές και άρα κάθε παιδί... Άρα, μπορούμε να το χωρίσουμε στη μέση. Άρα δύο παιδιά μαζί φάγανε αυτό. Το ένα παιδί έφαγε το 1/2 και το άλλο παιδί το άλλο 1/2.

Ε: Το 1/2 ποιανού;

Μ: Το 1/2 του κομματιού αυτού [δείχνει το κομμάτι που αναπαριστά το μερίδιο των δύο ατόμων] ή αλλιώς όλης της μπάρας.... 1, 2, 3, 4, 5, 6, [μετράει τα κομμάτια που έχει δημιουργήσει] Α! το 1/6!

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί αυτό το κομματάκι [δείχνει το μισό του κομματιού που αναπαριστά το μερίδιο των δύο ατόμων] χωράει έξι φορές στην μπάρα, οπότε κάθε παιδί έφαγε το 1/6 της μπάρας.

Ε: Άρα πόσα παιδιά ήταν;

Μ: Ένα-δύο, τρία-τέσσερα, πέντε-έξι [μετράει ανά δύο σε κάθε κομμάτι ολόκληρης της μπάρας δημητριακών]. Έξι παιδιά.

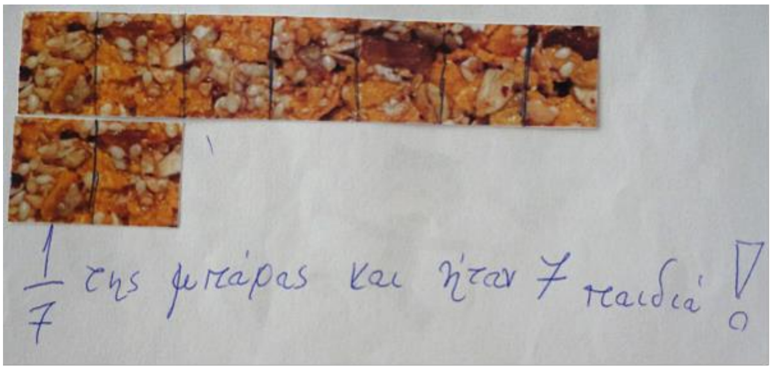
Εικόνα 9.8. Τα σχέδια της Μαρίας για να καθορίσει πόσες φορές χωράει το μικρό κομμάτι σε ολόκληρη την μπάρα δημητριακών

Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται μια σημαντική αλλαγή στο επιχείρημα της Μαρίας για το κλάσμα που αντιστοιχεί στο μερίδιο κάθε ατόμου. Μέχρι στιγμής, οι αιτιολογήσεις της στηρίζονταν στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου (π.χ. σε ένα παραπάνω πρόβλημα είπε ότι κάθε παιδί θα φάει το 1/8 γιατί είναι ένα κομμάτι από τα 8), ενώ στη δραστηριότητα αυτή η Μαρία έδωσε έμφαση στον αριθμό των επαναλήψεων του κλάσματος που χρειάζονται για να δημιουργηθεί το όλο. Βασίστηκε, λοιπόν, περισσότερο στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο, χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης αρχικά το κομμάτι που αναπαριστά την ποσότητα που έφαγαν δύο άτομα και έπειτα το μισό αυτού.

Ακόμη, η Μαρία μπορούσε να φανταστεί τον τεμαχισμό του τεμαχισμού ολόκληρης της σοκολάτας σε έξι ίσα μέρη, αντί για τρία που είχε φτιάξει, χωρίς να έχει ανάγκη να το σχεδιάσει. Τεμάχισε το μικρό κομμάτι σε δύο ίσα μέρη και φαντάστηκε κάθε κομμάτι της μεγάλης μπάρας να είναι τεμαχισμένο με τον ίδιο τρόπο.

Φαίνεται, ταυτόχρονα, ότι η Μαρία είναι σε θέση να συντονίζει δύο επίπεδα μονάδων, καθώς ήταν σε θέση να αντιλαμβάνεται το μισό του μεριδίου των δύο ατόμων και ως το 1/2 αυτού αλλά και ως το 1/6 ολόκληρης της μπάρας δημητριακών. Το μικρό κομμάτι, που αναπαριστά την ποσότητα που έφαγαν τα δύο άτομα, θεωρήθηκε από τη Μαρία ως μια μονάδα, η οποία αποτελείται από δύο επαναλήψεις του 1/6 και ολόκληρη η μπάρα δημητριακών είναι μια μονάδα που αποτελείται από έξι επαναλήψεις του ίδιου τμήματος.

Στη συνέχεια, της δόθηκε ένα πρόβλημα παρόμοιο με το προηγούμενο, με τη διαφορά ότι το κομμάτι που αντιπροσώπευε το μερίδιο των δύο ατόμων αυτή τη φορά δεν χωρούσε ακέραιες φορές σε ολόκληρη την μπάρα δημητριακών (χωρούσε τρεισήμισι φορές). Αφού είδε πόσες ακέραιες φορές χωράει το μικρό κομμάτι σε ολόκληρη την μπάρα, σχεδιάζοντας και πάλι γραμμές, χώρισε τόσο το μικρό κομμάτι όσο και κάθε κομμάτι που είχε δημιουργήσει στη μεγάλη μπάρα σε δύο ίσα κομμάτια και συμπέρανε ότι το νέο κομμάτι που δημιούργησε χωράει ακόμη μισή φορά, οπότε κάθε παιδί θα φάει το 1/7 της μπάρας, την οποία μοιράστηκαν επτά παιδιά (Εικόνα 9.9).



Εικόνα 9.9. Η λύση της Μαρίας για να βρει ότι το μισό του μικρού κομματιού χωράει επτά φορές σε ολόκληρη την μπάρα

Από αυτό και το προηγούμενο πρόβλημα, η Μαρία φαίνεται να έχει αναπτύξει ως ένα βαθμό το σχήμα τεμαχισμού κλάσματος, αφού μπόρεσε να τεμαχίσει και να επαναλάβει το κλασματικό μέρος ώστε να προκύψει το όλο. Ακόμη, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, φαίνεται να είναι σε θέση να συντονίζει δύο επίπεδα μονάδων· ένα χαρακτηριστικό αυτού του σχήματος.

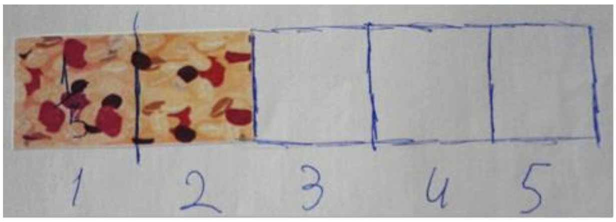
9.2.2.3. Προβλήματα Γ' Κατηγορίας

Στα προβλήματα της τρίτης κατηγορίας, δινόταν το μερίδιο του ενός ατόμου σε σχήμα και ο αριθμός των ατόμων και ζητούταν να βρεθούν τα συνολικά αγαθά. Τα προβλήματα αυτού του τύπου δόθηκαν για να διαπιστωθεί αν έχει αναπτυχθεί μια αντιστρέψιμη σχέση για το κλάσμα. Για παράδειγμα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

> Πέντε φίλοι μοιράστηκαν δίκαια ένα κέικ, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Αν το παρακάτω κομμάτι είναι η ποσότητα του κέικ που έφαγαν δύο φίλοι μαζί, μπορείς να ζωγραφίσεις ολόκληρο το κέικ; (δόθηκε η εικόνα 9.10)

Εικόνα 9.10. Ένα κομμάτι κέικ που αναπαριστά την ποσότητα που έφαγαν δύο άτομα από μια παρέα πέντε ατόμων (τα 2/5)

Η Μαρία τεμάχισε το μικρό κομμάτι σε δύο ίσα μέρη και το επανέλαβε άλλες τρεις φορές για να δημιουργήσει ολόκληρο το κέικ (Εικόνα 9.11). Εδώ, εμφανίστηκε για πρώτη φορά η λειτουργία της αποσυναρμολόγησης, αφού τεμάχισε για να βρει το μερίδιο που έφαγε ένα άτομο, το οποίο περιεχόταν στο σχήμα που της δόθηκε. Έτσι, μπορεί να εκτιμηθεί ότι η μαθήτρια έχει αναπτύξει ως ένα βαθμό το σχήμα αντιστρέψιμου τεμαχισμού κλάσματος. Ενώ η εκφώνηση φαίνεται να απαιτεί την επανάληψη του κομματιού, χρειάζεται πρώτα αυτό να τεμαχιστεί και μετά να επαναληφθεί για να δημιουργηθεί το όλο.



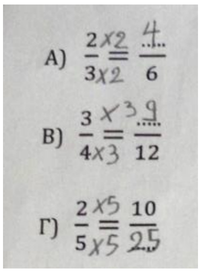
Εικόνα 9.11. Η λύση της Μαρίας, η επανάληψη του μισού κομματιού πέντε φορές

9.2.2.4. Αναστοχασμός

Γενικά, η Μαρία ανταποκρίθηκε με επιτυχία στα προβλήματα που της δόθηκαν, χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Αυτό, όμως, που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι παρόλο που όλα τα προβλήματα είχαν σχεδιαστεί για να αναπτύξουν την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, η ερμηνεία που κυριαρχούσε στις αιτιολογήσεις της Μαρίας ήταν αυτή του μέρους-όλου. Όπως επισημαίνει άλλωστε ο Gould (2013), ο τρόπος που ένα παιδί ερμηνεύει ένα κλάσμα σε μια δραστηριότητα δεν καθορίζεται από την ερμηνεία στην οποία έχει βασιστεί η δραστηριότητα. Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, βέβαια, βοήθησε τη Μαρία στον προσδιορισμό του μεριδίου ενός ατόμου στις καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς που της δόθηκαν. Ταυτόχρονα, με αυτές φαίνεται να εμπλέκεται και η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο, αφού και αυτή χρησιμοποιήθηκε από τη Μαρία για να καθορίσει το μερίδιο, βασιζόμενη στον αριθμό των φορών που χωράει ένα κομμάτι σε ένα όλο.

Η Μαρία φαίνεται επιπλέον να έχει αναπτύξει στοιχεία από όλες τις λειτουργίες που συμμετέχουν στο κλάσμα και από τα περισσότερα κλασματικά σχήματα. Ήταν ικανή να τεμαχίζει ένα όλο, να το επαναλαμβάνει για να δημιουργεί το όλο, να αποσπά ένα μέρος αυτού για να προσδιορίσει το μερίδιο, να ομαδοποιεί μερικά κομμάτια για να δημιουργεί ένα νέο κλάσμα και να βλέπει τη λειτουργία του τεμαχισμού και της επανάληψης ως δύο αντίστροφες λειτουργίες.

Επιπλέον, δόθηκαν στη Μαρία προβλήματα σχετικά με τα ισοδύναμα κλάσματα για να διερευνηθούν οι προηγούμενες γνώσεις της σε αυτά, δεδομένου ότι τα είχε ήδη διδαχθεί δύο φορές στο σχολικό πλαίσιο. Από τις απαντήσεις της φάνηκε ότι ήταν ικανή να βρίσκει ένα ισοδύναμο κλάσμα ενός δοσμένου κλάσματος πολλαπλασιάζοντας και τους δύο όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό (Εικόνα 9.12). Όταν, όμως, ρωτήθηκε γιατί εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία προκύπτουν ισοδύναμα κλάσματα, δεν ήταν σε θέση να δώσει ένα επιχείρημα. Η ακριβής απάντησή της ήταν «Δεν ξέρω». Φαίνεται, λοιπόν, ότι ενώ διαθέτει διαδικαστική γνώση για τα ισοδύναμα κλάσματα, η εννοιολογική της κατανόηση δεν είναι ιδιαίτερα ανεπτυγμένη. Έτσι, το παρόν διδακτικό πείραμα αφιερώθηκε στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης για την ισοδυναμία των κλασμάτων, μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο.



Εικόνα 9.12. Οι απαντήσεις της Μαρίας για την εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων

9.2.3. Υποθετική πορεία μάθησης

Η υποθετική πορεία μάθησης, εκτός από τους μαθησιακούς στόχους που αναφέρθηκαν παραπάνω, περιλαμβάνει επίσης τις δραστηριότητες που προωθούν τους στόχους και τη μαθησιακή διαδικασία που εμπλέκεται σε αυτές τις δραστηριότητες (Simon, 1995). Η πορεία αυτή είναι υποθετική, δεδομένου ότι πολλές φορές η μάθηση δεν εξελίσσεται με τον τρόπο που έχει προβλεφθεί και επομένως δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων (Ball, 2000).

Στο παρόν πείραμα σχεδιασμού, θεωρήθηκε ότι πριν την εμπλοκή της μαθήτριας με καταστάσεις ισοδυναμίας, χρειάζεται να αναπτυχθεί η ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, δεδομένου ότι ο κυρίαρχος τρόπος με τον οποίο ερμήνευε το κλάσμα ήταν αυτός του μέρους-όλου. Μέσα, λοιπόν, από την επαφή της με προβλήματα που αναδεικνύουν την ερμηνεία αυτή (προβλήματα με καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς), αναμένεται να αντιλαμβάνεται το κλάσμα ως μια διαίρεση και ταυτόχρονα ως το μερίδιο που προκύπτει για κάθε άτομο από τη μοιρασιά κάποιων αγαθών. Σημαντικό στοιχείο αυτών των προβλημάτων αποτελεί η ανάπτυξη της λειτουργίας του τεμαχισμού, η οποία συνδέεται άμεσα με την ερμηνεία αυτή.

Στη συνέχεια, η μαθήτρια θα εμπλακεί με προβλήματα που παρουσιάζουν δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς και θα καλείται να εντοπίσει σε ποια από τις δύο καταστάσεις το μερίδιο είναι μεγαλύτερο. Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να εργαστεί σε αυτό το πλαίσιο είναι δύο. Γίνεται είτε να εντοπίσει το μερίδιο σε κάθε περίπτωση και να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για την ίδια ποσότητα, είτε να κάνει συσχετίσεις μεταξύ των ατόμων και των αγαθών στις δύο περιπτώσεις και να συνειδητοποιήσει ότι πρόκειται για δύο ισοδύναμες καταστάσεις.

Έπειτα, η μαθήτρια θα κληθεί να βρει είτε τον αριθμό των ατόμων είτε τον αριθμό των αγαθών μιας κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς ώστε να είναι ισοδύναμη με μια που θα της δίνεται. Αυτού του είδους τα προβλήματα αποτελούν ένα πιο προχωρημένο στάδιο από την απλή αναγνώριση δυο καταστάσεων ως ισοδύναμων. Η επιχειρηματολογία που θα αναπτύξει η μαθήτρια ενδεχομένως να σχετίζεται με την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αγαθών και των ατόμων στις δύο καταστάσεις. Οι δραστηριότητες αυτές θα αποτελέσουν ένα σημαντικό βήμα για την οικοδόμηση της εννοιολογικής γνώσης των ισοδύναμων κλασμάτων, καθώς θα δώσουν νόημα στον αλγόριθμο για τη δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων (τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό).

Σε ένα τελευταίο στάδιο, η μαθήτρια θα εμπλακεί με καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, όπου δεν θα είναι ισοδύναμες, αλλά θα κληθεί να χρησιμοποιήσει την ισοδυναμία των κλασμάτων και των καταστάσεων για να εντοπίσει σε ποια από τις δύο καταστάσεις το μερίδιο κάθε ατόμου είναι μεγαλύτερο. Μέσα από τα προβλήματα σύγκρισης κλασμάτων θα ελεγχθεί αν η μαθήτρια είναι σε θέση να αξιοποιήσει λειτουργικά τις νέες γνώσεις της για τα ισοδύναμα κλάσματα και να τις εφαρμόσει σε ένα νέο πλαίσιο.

Έτσι, οι συναντήσεις με τη Μαρία, οι οποίες βασίστηκαν σε αυτή την υποθετική πορεία μάθησης υλοποιήθηκαν όπως φαίνονται στον πίνακα 9.2.

Πίνακας 9.2. Συνοπτική παρουσίαση των συναντήσεων με τη Μαρία

Αριθμός συνάντησης	**Είδος Φάσης**	**Στόχος**
1		Καθορισμός σημείων αφετηρίας
2	Α’	Ανάπτυξη της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο
3	Α’	Ανάπτυξη της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο
4	Α’	Ανάπτυξη της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο
5	Β’	Ανάπτυξη της ισοδυναμίας των κλασμάτων – διαπίστωση δύο καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς ως ισοδύναμων
6	Β’	Ανάπτυξη της ισοδυναμίας των κλασμάτων – εύρεση ενός από τους τέσσερις παράγοντες που εμπλέκονται σε δύο ισοδύναμες καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς
7	Γ’	Σύγκριση κλασμάτων

10. Ανάλυση Αποτελεσμάτων

10.1. Α’ Φάση: Το κλάσμα ως Πηλίκο

10.1.1. Δεύτερη και τρίτη συνάντηση

Στην πρώτη ομάδα συναντήσεων (στην Α΄ φάση) τέθηκε ως στόχος η ανάπτυξη της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο. Για το λόγο αυτό δόθηκαν προβλήματα παρόμοια με αυτά που δόθηκαν για τον προσδιορισμό των σημείων αφετηρίας, αλλά αυτή τη φορά τα αγαθά ήταν περισσότερα του ενός και επιπλέον δεν δόθηκαν σε κανένα πρόβλημα τα αγαθά σε σχήμα. Αντίθετα, αναμενόταν από τη μαθήτρια να τα σχεδιάσει η ίδια και να τα τεμαχίσει όπως επιθυμούσε.

Στα προβλήματα που σχεδιάστηκαν, λοιπόν, ακολουθήθηκε η ίδια λογική με τις τρεις κατηγορίες προβλημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω αλλά προστέθηκε μια παραπάνω κατηγορία κατά την οποία θα δινόταν το μερίδιο με τη μορφή κλάσματος και η μαθήτρια θα καλούταν να βρει τον πιθανό αριθμό ατόμων και αγαθών που οδηγούν σε αυτό το μερίδιο, όπως φαίνεται στον πίνακα πίνακας 9.3.

Πίνακας 9.3. Οι κατηγορίες προβλημάτων για την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο

Είδος προβλήματος	**Περιγραφή**
Α’ Κατηγορίας	Δίνονται ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών και ζητείται το μερίδιο
Β’ Κατηγορίας	Δίνεται το μερίδιο (με κλάσμα) και ο αριθμός των αγαθών και ζητείται ο αριθμός των ατόμων
Γ’ Κατηγορίας	Δίνονται το μερίδιο (με κλάσμα) και ο αριθμός των ατόμων και ζητείται ο αριθμός των αγαθών
Δ’ Κατηγορία	Δίνεται το μερίδιο (με κλάσμα) και ζητούνται οι πιθανοί αριθμοί των ατόμων και των αγαθών

10.1.1.1. Προβλήματα Α’ κατηγορίας:

Στα προβλήματα αυτά δινόταν ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών και ζητούταν το μερίδιο. Ένα παράδειγμα ενός προβλήματος αυτής της κατηγορίας είναι το παρακάτω:

> 6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
> Τι μέρος της σοκολάτας θα φάει κάθε παιδί;

Μόλις δόθηκε το παραπάνω πρόβλημα, ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

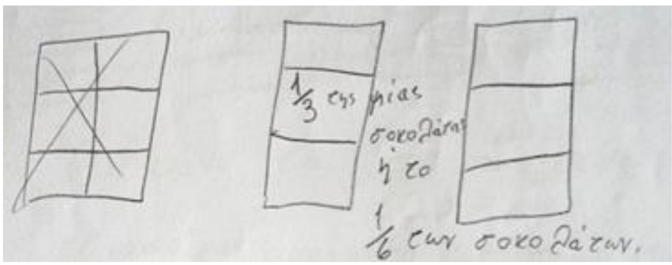
Μ: [Στην αρχή ζωγραφίζει μια σοκολάτα και την τεμαχίζει σε έξι ίσα κομμάτια αλλά μετά το σβήνει και ζωγραφίζει δύο σοκολάτες που τις τεμαχίζει σε τρία ίσα κομμάτια την καθεμία, όπως φαίνεται στην εικόνα 10.1]
Έξι παιδιά. Άρα θα το χωρίσω σε τρία κομμάτια. Το κάθε παιδί θα φάει το 1/3 της μίας σοκολάτας ή το 1/6 των δύο σοκολατών.

Ε: Αν το είχες χωρίσει έτσι [αναφέρεται στο σχήμα που είχε ζωγραφίσει στην αρχή η Μαρία και μετά το έσβησε], θα μπορούσαν να τη μοιράσουν;

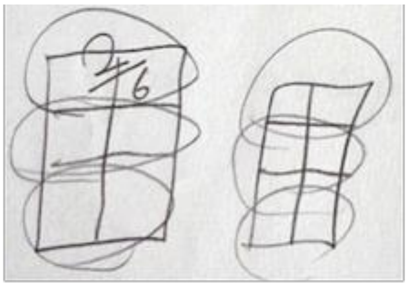
Μ: Όχι... ναι! Το κάθε παιδί θα έτρωγε... [ζωγραφίζει το σχήμα της εικόνας 10.2]. Το κάθε παιδί θα φάει τα 2/6 της μίας σοκολάτας ή τα 2/12 των δύο σοκολατών.

Ε: Φάγανε παραπάνω εδώ (Εικόνα 10.2) σε σχέση με εδώ (Εικόνα 10.1);

Μ: Όχι, δεν φάγανε παραπάνω, απλά το μοίρασαν σε δύο κομματάκια.



Εικόνα 10.1. Η πρώτη λύση της Μαρίας για τη μοιρασιά 2 σοκολατών σε 6 άτομα



Εικόνα 10.2. Η δεύτερη λύση της Μαρίας για τη μοιρασιά 2 σοκολατών σε 6 άτομα

Μέσα από τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας αναδείχθηκαν δύο σημαντικά σημεία σχετικά με τα κλάσματα. Το πρώτο σημείο που παρουσιάστηκε σχετίζεται με την ποσότητα στην οποία αναφέρεται το κλάσμα. Η Μαρία ήταν ικανή να ονοματίζει μια ποσότητα με διαφορετικό τρόπο ανάλογα με το όλο που χρησιμοποιούσε ως σημείο αναφοράς. Έτσι, κατάλαβε ότι το μερίδιο κάθε ατόμου μπορεί να αντιπροσωπευτεί και από το κλάσμα 1/3 με σημείο αναφοράς τη μία σοκολάτα και από το κλάσμα 1/6 με σημείο αναφοράς όλες τις σοκολάτες. Αντίστοιχες παρατηρήσεις για την έκφραση του μεριδίου με αναφορά είτε τη μία σοκολάτα είτε όλες τις σοκολάτες ήταν ικανή να κάνει σε όλα τα προβλήματα που της δόθηκαν.

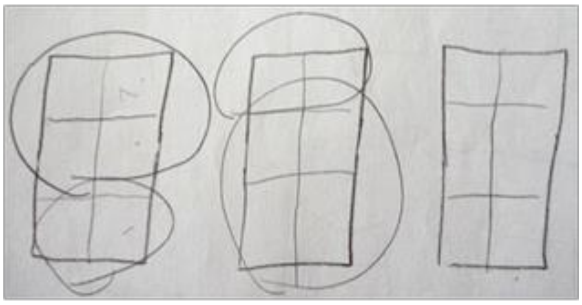
Το δεύτερο σημείο που προέκυψε μέσα από τα σχέδια της Μαρίας αφορά τη δημιουργία των ισοδύναμων κλασμάτων. Με αφορμή τον τρόπο που η ίδια η Μαρία τεμάχισε τις σοκολάτες, προέκυψαν δύο διαφορετικοί τεμαχισμοί που έδωσαν δύο ισοδύναμα κλάσματα. Η Μαρία κατάφερε να προβεί στον τεμαχισμό ενός τεμαχισμού και να ομαδοποιήσει τα απαραίτητα κομμάτια ώστε να δημιουργήσει δύο ίσα μερίδια. Στηριζόμενη πιθανώς ακόμη στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, αντιλήφθηκε ότι το μερίδιο μπορεί να εκφραστεί είτε με το κλάσμα 1/3 είτε με το κλάσμα 2/6, ανάλογα με τον τρόπο που τεμαχίζονται και ομαδοποιούνται οι ποσότητες.

Μέσα, όμως, από τους διαφορετικούς τεμαχισμούς για τη δημιουργία των ισοδύναμων κλασμάτων, αναδεικνύεται μια διαφορετική προσέγγιση της ερμηνείας των ισοδύναμων κλασμάτων, αυτή του μέρους-όλου και όχι του πηλίκου, που ήταν ο στόχος του πειράματος σχεδιασμού. Η ισοδυναμία αναμενόταν να προσεγγιστεί όχι μέσα από τους διαφορετικούς τρόπους τεμαχισμού της ίδιας ποσότητας, αλλά από την ισοδυναμία της σχέσης μεταξύ των αγαθών και των ατόμων που οδηγούν στο ίδιο μερίδιο.

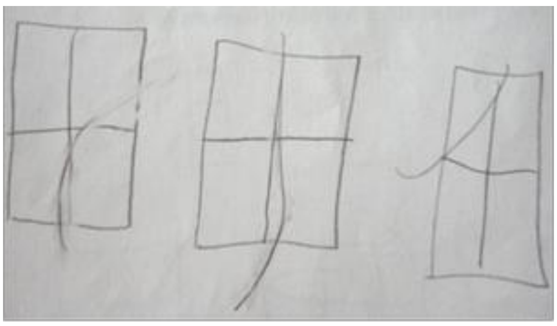
Ιδιαίτερα βοηθητικά για την ανάπτυξη της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο φάνηκαν να είναι τα προβλήματα στα οποία ο αριθμός των ατόμων δεν είναι πολλαπλάσιο του αριθμού των αγαθών, ώστε ο τεμαχισμός να γίνεται με βάση τον αριθμό των ατόμων και όχι κάποιο πολλαπλάσιο αυτού. Για παράδειγμα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
Πόση σοκολάτα έφαγε κάθε παιδί;

Η Μαρία είχε την τάση να τεμαχίζει πρώτα τα αγαθά που σχεδίαζε στη μέση, με μια κατακόρυφη συνήθως γραμμή και να συνεχίζει έπειτα με οριζόντιους τεμαχισμούς για να βρει τα κομμάτια που αναλογούν σε κάθε άτομο. Σε αυτό το πρόβλημα για παράδειγμα, αρχικά προσπάθησε να τεμαχίσει την κάθε σοκολάτα πρώτα σε έξι (Εικόνα 10.3) και μετά σε τέσσερα ίσα μέρη (Εικόνα 10.4), αλλά αμέσως συνειδητοποίησε ότι αυτοί οι τεμαχισμοί δεν καταλήγουν σε δίκαια μερίδια. Δεν επιχείρησε δηλαδή να ξανα-τεμαχίσει το μέρος της σοκολάτας που περίσσευε ώστε να το μοιράσει κι αυτό σε πέντε ίσα μέρη.

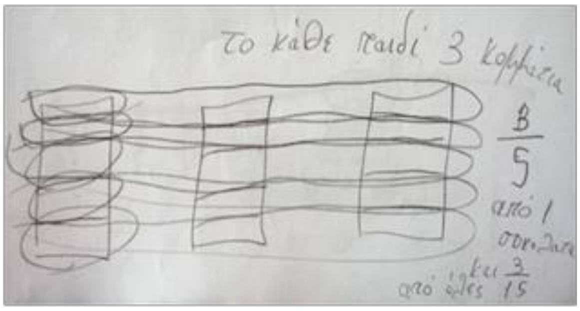


Εικόνα 10.3. Η πρώτη προσπάθεια της Μαρίας να μοιράσει 3 σοκολάτες σε 5 άτομα



Εικόνα 10.4. Η δεύτερη προσπάθεια της Μαρίας να μοιράσει 3 σοκολάτες σε 5 άτομα

Με αυτό το πρόβλημα η στρατηγική λύσης των προβλημάτων της άλλαξε καθώς άρχισε να τεμαχίζει οριζόντια τα αγαθά, χωρίς να φέρνει κάθετες γραμμές, σε τόσα κομμάτια όσα ο αριθμός των ατόμων που συμμετέχουν στην κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς. Κατέληξε μάλιστα να ομαδοποιεί ένα κομμάτι από κάθε σοκολάτα για να προσδιορίσει το μερίδιο κάθε ατόμου, όπως φαίνεται στην εικόνα 10.5. Έτσι, αυτό το πρόβλημα φαίνεται να βοήθησε στην κατανόηση του καταλληλότερου τρόπου τεμαχισμού των αγαθών για οποιαδήποτε κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς.



Εικόνα 10.5. Η τρίτη προσπάθεια της Μαρίας να μοιράσει 3 σοκολάτες σε 5 άτομα

Ταυτόχρονα, η λύση της Μαρίας σε αυτό το πρόβλημα ανέδειξε την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο και την απομάκρυνση της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος ενός όλου. Αν και προφορικά η Μαρία είπε ότι το μερίδιο που προκύπτει για κάθε άτομο είναι 3/5 γιατί είναι τρία κομμάτια από τα πέντε, το σχήμα που έχει φτιάξει η ίδια φαίνεται να βασίζεται σε μία διαφορετική προσέγγιση (Εικόνα 10.5). Κάθε αγαθό έχει τεμαχιστεί σε όσα κομμάτια δείχνει ο αριθμός των ατόμων και το μερίδιο έχει προκύψει από την απόσπαση και την ομαδοποίηση ενός κομματιού από κάθε αγαθό. Έχει προκύψει, λοιπόν, το κλάσμα 1/5 από τον τεμαχισμό μίας σοκολάτας σε πέντε ίσα μέρη και η επανάληψή του τρεις φορές, η ομαδοποίηση, δηλαδή, ενός κομματιού από κάθε σοκολάτα -δεδομένου ότι υπάρχουν τρεις σοκολάτες- δίνει το κλάσμα 3/5, που αποτελεί και το μερίδιο του κάθε ατόμου. Έτσι, αναδεικνύεται η πολλαπλασιαστική φύση του κλάσματος και πραγματοποιείται μια απομάκρυνση από την αντιμετώπιση του κλάσματος ως μια αναπαράσταση δύο διαφορετικών φυσικών αριθμών.

Παρόλα αυτά, η Μαρία παρουσίαζε μια επιμονή στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου και συχνά επανερχόταν στη σκέψη της αυτή η ερμηνεία και μαζί με αυτήν, εμφανίζονταν και οι περιορισμοί της. Για παράδειγμα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα και ακολούθησε ο εξής διάλογος:

> 18 παιδιά μοιράζονται δίκαια 24 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Πόση σοκολάτα θα φάει κάθε παιδί;

Μ: [Ζωγραφίζει εικοσιτέσσερις σοκολάτες και τεμαχίζει τη μία σε δεκαοχτώ κομμάτια]. Το κάθε παιδί θα φάει λογικά εικοσιτέσσερα κομμάτια. Όχι... ναι! Λάθος έκανα, δεκαοχτώ. Όχι! Αφού είναι εικοσιτέσσερις σοκολάτες.

Ε: Θέλεις να μου πεις τι σκέφτεσαι;

Μ: Πριν ήταν τέσσερις σοκολάτες, τέσσερα κομμάτια [αναφέρεται στο προηγούμενο πρόβλημα που της δόθηκε στο οποίο επτά παιδιά μοιράζονταν τέσσερις σοκολάτες και καλούταν να βρει το μερίδιο]. Τώρα εικοσιτέσσερις σοκολάτες, άρα εικοσιτέσσερα κομμάτια. Άρα 24/48.

Ε: Γιατί 24/48;

Μ: Γιατί το έκανα επί δύο. Δεν ξέρω τώρα, να υπολογίσω εικοσιτέσσερις σοκολάτες... [κάνει κάθετα τον πολλαπλασιασμό 24x18 και βρίσκει 432. Άρα είναι 24/432

Ε: Σε σχέση με τι, με τη μία σοκολάτα;

Μ: Όχι, με όλες τις σοκολάτες.

Ε: Σε σχέση με τη μία;

Μ: [Σκέφτεται] Δεν γίνεται σε σχέση με τη μία, με τις δύο γίνεται.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί δεν μπορούμε να έχουμε εικοσιτέσσερα από δεκαοχτώ.

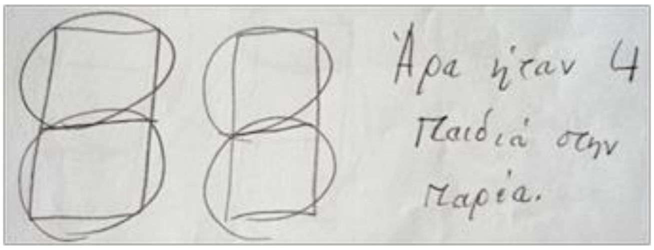
Η Μαρία μπόρεσε να φανταστεί τους τεμαχισμούς κάθε αγαθού και συνειδητοποίησε, αν και στην αρχή δυσκολεύτηκε, ότι σε κάθε άτομο αναλογούν εικοσιτέσσερα κομμάτια. Όμως, δεν ήταν σε θέση να εκφράσει αυτά τα κομμάτια σε σχέση με τη μία σοκολάτα και να καταλήξει στο κλάσμα 24/18 γιατί, στηριζόμενη στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, δεν μπορούσε να φανταστεί τον αριθμό των μερών να ξεπερνάει τον αριθμό των κομματιών του όλου. Μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, αυτή η δυσκολία ξεπερνιέται, καθώς το μερίδιο προκύπτει από την επανάληψη ενός κλασματικού μέρους του ενός αγαθού τόσες φορές όσα είναι τα αγαθά τα οποία μοιράζονται.

10.1.1.2. Προβλήματα Β' κατηγορίας

Στη συνέχεια δόθηκαν προβλήματα, κατά τα οποία δίνονταν το μερίδιο με κλάσμα και ο αριθμός των αγαθών και ζητούταν να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων, όπως για παράδειγμα:

> Μια παρέα παιδιών μοιράζεται δίκαια δύο μπάρες δημητριακών, χωρίς να περισσέψει τίποτα, Αν το κάθε παιδί έφαγε το 1/2 της μίας μπάρας, πόσα παιδιά πιστεύεις ότι μοιράστηκαν όλες τις μπάρες;

Σε αυτού του είδους τα προβλήματα, η Μαρία δεν παρουσίασε καμία δυσκολία και έβρισκε γρήγορα τη λύση, σχεδιάζοντας, τεμαχίζοντας και ομαδοποιώντας τα αγαθά (Εικόνα 10.6).



Εικόνα 10.6. Η λύση της Μαρίας για την εύρεση των ατόμων αν από 2 μπάρες δημητριακών προκύπτει μερίδιο 1/2

10.1.1.3. Προβλήματα Γ' κατηγορίας

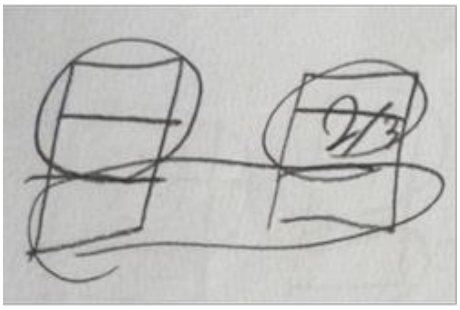
Σε αυτού του τύπου τα προβλήματα, δίνονταν το μερίδιο κάθε ατόμου με κλάσμα και ο αριθμός των ατόμων και ζητούταν να βρεθεί ο αριθμός των αγαθών.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η Μαρία συσχέτιζε τα προβλήματα που της δίνονταν και έκανε συνδέσεις μεταξύ τους, βρίσκοντας εύκολα τις λύσεις. Για παράδειγμα, δόθηκαν διαδοχικά τα δύο παρακάτω προβλήματα:

> Τρία παιδιά αγόρασαν σοκολάτες για να φάνε και τις μοιράστηκαν δίκαια, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Αν κάθε παιδί έφαγε τα 2/3 της σοκολάτας, πόσες σοκολάτες πιστεύεις ότι μοιράστηκαν συνολικά;

> Έξι παιδιά αγόρασαν σοκολάτες για να φάνε και τις μοιράστηκαν δίκαια, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Αν κάθε παιδί έφαγε τα 2/3 της σοκολάτας, πόσες σοκολάτες πιστεύεις ότι μοιράστηκαν συνολικά;

Στο πρώτο πρόβλημα η Μαρία σχεδίασε μία σοκολάτα, την τεμάχισε σε τρία ίσα κομμάτια και στη συνέχεια ζωγράφισε μία δεύτερη, εργάστηκε με τον ίδιο τρόπο, ομαδοποίησε τα κομμάτια ανά δύο και συμπέρανε ότι οι σοκολάτες που μοιράστηκαν ήταν συνολικά δύο (Εικόνα 10.7).



Εικόνα 10.7. Η λύση της Μαρίας για τον αριθμό των σοκολατών αν κάθε παιδί από τα 3 έφαγε 2/3 σοκολάτας

Στο δεύτερο πρόβλημα, ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Μ: Α! Τέσσερις σοκολάτες. Γιατί είναι έξι παιδιά. [απάντησε αμέσως]

Ε: Πώς το βρήκες;

Μ: Πολλαπλασίασα το προηγούμενο. Εδώ ήταν τρία παιδιά και το έξι είναι έξι δια δύο ίσον τρία. Άρα, αν κάνεις δύο φορές το τρία ίσον έξι [αναφέρεται στα άτομα του πρώτου προβλήματος και του δεύτερου]. Άρα και δύο φορές οι σοκολάτες ίσον τέσσερα, άρα δύο φορές το δύο, τέσσερα.

Η Μαρία, φαίνεται να είδε τη δεύτερη κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς ως ισοδύναμη της προηγούμενης και για το λόγο αυτό τις συσχέτισε πολλαπλασιαστικά. Αν και το επιχείρημά της αναφέρεται περισσότερο στις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και λιγότερο στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, φανερώνει έναν αναλογικό τρόπο σκέψης για το κλάσμα και μια κατανόηση για την πολλαπλασιαστική του φύση. Αυτός ο συλλογισμός της Μαρίας αποτέλεσε και τη βάση για τα επόμενα προβλήματα που σχεδιάστηκαν αναφορικά με τα ισοδύναμα κλάσματα στις επόμενες συναντήσεις.

10.1.1.4. Προβλήματα Δ' κατηγορίας

Στο τέλος της δεύτερης συνάντησης δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα, για να προσεγγιστεί πρώτη φορά η ισοδυναμία των κλασμάτων.

> Μια παρέα παιδιών αγόρασαν σοκολάτες για να φάνε και τις μοιράστηκαν δίκαια, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Αν το ένα παιδί έφαγε τα 2/5 μιας σοκολάτας, πόσα μπορεί να ήταν τα παιδιά και πόσες οι σοκολάτες που μοιράστηκαν;

Μ: Ένα παιδί έφαγε τα 2/5 [ζωγραφίζει μία σοκολάτα, την τεμαχίζει σε πέντε ίσα μέρη, κυκλώνει ανά δύο και ζωγραφίζει άλλη μια σοκολάτα]
Αααα! Το βρήκα νομίζω. Ήταν πέντε παιδιά και έφαγαν δύο σοκολάτες.

Ε: Μπορεί να ήταν και παραπάνω παιδιά και παραπάνω σοκολάτες;

Μ: Ναι. Μπορεί να ήταν... Αααα! Άμα ήταν δέκα παιδιά και τέσσερις σοκολάτες θα έκανα άλλη μία, άλλη μία και [είναι] το ίδιο πράγμα ουσιαστικά.

Ε: Άλλη περίπτωση υπάρχει;

Μ: Ναι, οκτώ σοκολάτες και είκοσι παιδιά. Και δεκαέξι σοκολάτες και σαράντα παιδιά.

Ε: Γιατί τρώνε το ίδιο;

Μ: Σε κάθε περίπτωση θα φάνε τα 2/5. Πολλαπλασίασα με το δύο για να βγούνε ίσα και να τρώνε συνέχεια τα 2/5.

Η Μαρία ήταν σε θέση να ερμηνεύσει το μερίδιο ως αποτέλεσμα μιας δίκαιης μοιρασιάς στην οποία ο αριθμητής δηλώνει τον αριθμό των αγαθών και ο παρονομαστής τον αριθμό των ατόμων και συνειδητοποίησε ότι υπάρχουν περισσότερες από μία περιπτώσεις που οδηγούν στο ίδιο μερίδιο. Όμως, διπλασίαζε κάθε φορά τον αριθμό των αγαθών και των ατόμων και δεν μπορούσε να βρει όλες τις ισοδύναμες καταστάσεις. Η επιχειρηματολογία της συνεχίζει να στηρίζεται περισσότερο σε διαδικασίες, παρά στις σχέσεις μεταξύ των εννοιών.

10.1.1.5. Αναστοχασμός

Στο τέλος αυτών των δύο συναντήσεων συνειδητοποιήθηκε ότι η Μαρία αν και ανταποκρίθηκε με επιτυχία σε όλα τα προβλήματα που της δόθηκαν και μερικές φορές φαίνεται να προσεγγίζει την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, συχνά επικεντρώνεται περισσότερο στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου. Έτσι, θεωρήθηκε ότι χρειάζεται να δοθούν κάποια προβλήματα ώστε η μαθήτρια να μπορέσει να κάνει παρατηρήσεις για τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται ο αριθμός των ατόμων, ο αριθμός των αγαθών και το μερίδιο που προκύπτει από μια κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς, ώστε να απομακρυνθεί από την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου και να στηριχθεί σε αυτή του πηλίκου.

10.1.2. Τέταρτη συνάντηση

Δύο ήταν οι βασικές δραστηριότητες με τις οποίες απασχολήθηκε η μαθήτρια στην τέταρτη συνάντηση. Η μία αφορούσε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς κατά τις οποίες διατηρούταν σταθερός ο αριθμός των ατόμων, μεταβαλλόταν ο αριθμός των αγαθών και ζητούταν να βρεθεί το μερίδιο με αναφορά αρχικά το συνολικό αριθμό των αγαθών και έπειτα το ένα αγαθό, και η δεύτερη αφορούσε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς κατά τις οποίες διατηρούταν σταθερός ο αριθμός των αγαθών και μεταβαλλόταν ο αριθμός των ατόμων και ζητούταν και πάλι το μερίδιο. Οι δύο αυτές δραστηριότητες είχαν ως στόχο η Μαρία να ξεκαθαρίσει τη σχέση μεταξύ των αγαθών και των ατόμων και τον τρόπο που επιδρούν στο μερίδιο που προκύπτει και κατά συνέπεια στο κλάσμα που αναπαριστά αυτό το μερίδιο.

Μέσα από αυτές τις δύο δραστηριότητες, επιχειρήθηκε η Μαρία να μπορεί να φαντάζεται τα αγαθά τεμαχισμένα και έπειτα το μερίδιο που προκύπτει από την κατάλληλη ομαδοποίηση και το αντίστοιχο κλάσμα, ώστε να μη χρειάζεται να σχεδιάζει κάθε φορά τα αγαθά για να βρει τη λύση. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα γινόταν μια διδασκαλία μετάδοσης γνώσεων της μορφής: «*το μερίδιο αναπαρίσταται από το κλάσμα στο οποίο ως αριθμητής τοποθετείται ο αριθμός των αγαθών και ως παρονομαστής ο αριθμός των ατόμων*». Κάθε άλλο. Μέσα από τις δραστηριότητες αυτές επιχειρήθηκε η Μαρία να παρατηρήσει η ίδια τον τρόπο που επιδρούν οι αριθμοί των ατόμων και των αγαθών στο μερίδιο και να καταλήξει σε κάποιες γενικεύσεις στηριζόμενη στα δικά της επιχειρήματα και σχέδια.

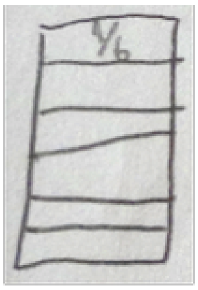
Έτσι, δόθηκαν αρχικά προβλήματα στα οποία διατηρούταν σταθερός ο αριθμός των παιδιών και μεταβαλλόταν ο αριθμός των αγαθών και η Μαρία καλούταν να βρει το μερίδιο κάθε παιδιού σε σχέση με το σύνολο των αγαθών. Σε αυτή τη δραστηριότητα ο στόχος ήταν η Μαρία να παρατηρήσει ότι ανεξάρτητα από τον αριθμό των αγαθών που μοιράζεται ένας συγκεκριμένος αριθμός ατόμων (π.χ. έξι άτομα), το μερίδιο που αναλογεί στον καθένα σε σχέση με το συνολικό αριθμό αγαθών είναι το ίδιο με τη μορφή κλάσματος (π.χ. 1/6).

10.1.2.1. Προβλήματα με σταθερό αριθμό ατόμων και μεταβαλλόμενο αριθμό αγαθών

Το πρώτο πρόβλημα που δόθηκε στη Μαρία σε αυτή τη συνάντηση ήταν το παρακάτω, στο οποίο διατηρούταν σταθερός ο αριθμός των παιδιών και μεταβαλλόταν ο αριθμός των αγαθών σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Η Μαρία καλούταν σε κάθε περίπτωση να βρει το μερίδιο που προκύπτει σε σχέση με το συνολικό αριθμό των αγαθών.

6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 4 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 5 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια κάποιες σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
Πόση σοκολάτα τρώει κάθε παιδί σε κάθε περίπτωση σε σχέση με όλες τις σοκολάτες;

Στο πρώτο ερώτημα η Μαρία σχεδίασε μία σοκολάτα, την τεμάχισε σε έξι ίσα μέρη και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι κάθε παιδί θα φάει το 1/6 (Εικόνα 10.8).



Εικόνα 10.8. Η λύση της Μαρίας για το μερίδιο όταν 6 παιδιά μοιράζονται μια σοκολάτα

Στο δεύτερο ερώτημα η Μαρία, αφού σχεδίασε δύο σοκολάτες και τις τεμάχισε πάλι σε έξι ίσα μέρη την καθεμία, απάντησε ότι το κάθε παιδί θα φάει τα

2/12 των συνολικών σοκολατών ή τα 2/6 της μίας σοκολάτας (Εικόνα 10.9). Στη συνέχεια ακολούθησε ο εξής διάλογος:

Ε: Το 2/12 από όλες τις σοκολάτες μπορείς να μου το πεις με άλλο τρόπο;

Μ: Ε... ναι, 4/24.

Ε: Αλλιώς, με πιο εύκολο τρόπο;

Μ: Α! 1/6

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί το έκανα δια δύο.

Ε: Δηλαδή, τι σημαίνει αυτό;

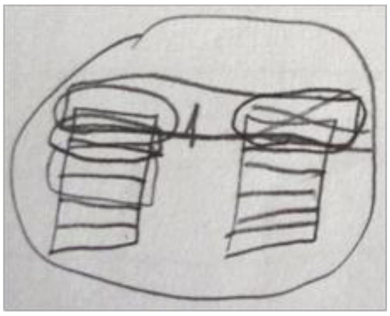
Μ: Είναι ίσα όλα.

Ε: Το 1/6 μπορείς να μου το δείξεις;

Μ: [δείχνει το 1/6 της μίας σοκολάτας]

Ε: Μου είπες ότι είναι το 1/6 από τις δύο σοκολάτες.

Μ: Δεν ξέρω αν γίνεται... [σκέφτεται]
Α! Είναι δύο σοκολάτες ενωμένες. Είναι ένα από τα έξι [κομμάτια] και είναι μια πιο μεγάλη σοκολάτα.



Εικόνα 10.9. Η λύση της Μαρίας για το μερίδιο όταν 6 παιδιά μοιράζονται δύο σοκολάτα

Η Μαρία, έχοντας αναπτύξει μια ερμηνεία για το κλάσμα ως μέρος ενός όλου, δυσκολεύτηκε να ανα-ομαδοποιήσει τα κομμάτια και να δει τα 2/12 ως 1/6. Ακόμη και στο τελικό επιχείρημα που έδωσε για το λόγο που το 2/12 μπορεί να γραφεί και ως 1/6, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου φαίνεται να κυριαρχεί. Το 1/6 στο μυαλό της αντιπροσώπευε το ένα κομμάτι από τα έξι και όχι μια σύνθετη μονάδα η οποία αν επαναληφθεί έξι φορές θα δημιουργήσει το όλο. Στα υπόλοιπα ερωτήματα δεν παρουσίασε κάποια δυσκολία και έκανε αντίστοιχες παρατηρήσεις.

Το ερώτημα που φαίνεται να συνέβαλε στην κατανόηση του τρόπου που επιδρά ο αριθμός των ατόμων στο μερίδιο είναι το τελευταίο της παραπάνω δραστηριότητας. Η Μαρία, όταν ρωτήθηκε, λοιπόν, απάντησε το εξής: «Το 1/6, γιατί όσες κι αν είναι θα ενωθούν και θα πάρουν το 1/6». Είναι σημαντικό που μπόρεσε να απαντήσει με επιτυχία σε αυτό το ερώτημα γιατί αφορούσε ένα μεγαλύτερο επίπεδο αφαίρεσης από τα προηγούμενα, αφού δεν δινόταν ο αριθμός των αγαθών. Παρόλο που δεν αναφέρθηκε ρητά από τη Μαρία –ούτε και ρωτήθηκε- πιθανολογείται ότι μπόρεσε να κάνει μια γενίκευση και να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αν έξι άτομα μοιράζονται κάποια αγαθά, ανεξάρτητα από τον αριθμό των αγαθών, σε κάθε άτομο αναλογεί το 1/6 με αναφορά το συνολικό αριθμό των αγαθών.

Στη συνέχεια, δόθηκε ένα πρόβλημα με καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, στο οποίο ο αριθμός των ατόμων διατηρούταν και πάλι σταθερός και μεταβαλλόταν ο αριθμός των αγαθών, αλλά αυτή τη φορά ζητούταν να βρεθεί το μερίδιο σε σχέση με το ένα αγαθό. Σε αυτή την περίπτωση δεν προκύπτει ίδιο μερίδιο με τη μορφή κλάσματος, αλλά διαφορετικό, αφού εξαρτάται από τον αριθμό των αγαθών που μοιράζονται τα άτομα.

5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 4 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
Πόση σοκολάτα τρώει κάθε παιδί σε κάθε περίπτωση σε σχέση με τη μία σοκολάτα;

Η Μαρία δεν παρουσίασε δυσκολίες κατά την ενασχόλησή της με αυτό το πρόβλημα και στην αρχή έβρισκε το μερίδιο σχεδιάζοντας και τεμαχίζοντας σοκολάτες και στη συνέχεια με το νου της.

10.1.2.2. Προβλήματα με σταθερό αριθμό αγαθών και μεταβαλλόμενο αριθμό ατόμων

Η επόμενη δραστηριότητα που δόθηκε αφορούσε τον τρόπο που επιδρά ο αριθμός των ατόμων στο μερίδιο, όταν ο αριθμός των αγαθών διατηρείται σταθερός. Έτσι, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

2 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
3 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
4 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 1 σοκολάτα, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
Πόση σοκολάτα τρώει κάθε παιδί σε κάθε περίπτωση;

Η Μαρία απάντησε χωρίς δυσκολία σε όλες τις ερωτήσεις, σχεδιάζοντας κάθε φορά μια σοκολάτα και τεμαχίζοντάς την σε ανάλογα κομμάτια. Έτσι, αφού ανταποκρίθηκε με επιτυχία στο παραπάνω πρόβλημα, στη συνέχεια δόθηκαν αντίστοιχα προβλήματα που αφορούσαν δύο αγαθά αντί ενός:

3 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
4 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
5 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
6 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
67 παιδιά μοιράζονται δίκαια 2 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
Τι μέρος της μίας σοκολάτας τρώει κάθε παιδί σε κάθε περίπτωση;

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι σε αυτό το σημείο ότι η Μαρία, ενώ στην αρχή σχεδίαζε τα αγαθά και τα τεμάχιζε για να βγάλει συμπέρασμα για το μερίδιο κάθε ατόμου, καθώς έλυνε αυτά τα προβλήματα, σταδιακά σταμάτησε να τα σχεδιάζει και μπορούσε να τεμαχίζει τις σοκολάτες νοητά για να εκφράσει το μερίδιο με τη μορφή κλάσματος. Έτσι, απάντησε με ευκολία σε όλα τα ερωτήματα, ακόμη και στο τελευταίο:

Μ: 2/67

Ε: Πώς το βρήκες τόσο εύκολα;

Μ: Αφού κάθε παιδί θα φάει δύο κομμάτια από όλες τις σοκολάτες.

Στη συνέχεια, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα για να διαπιστωθεί αν η Μαρία είχε κατακτήσει τις παρατηρήσεις που έκανε στα προηγούμενα προβλήματα και αν είχε ξεκαθαρίσει τον τρόπο που επηρεάζει ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών στο μερίδιο κάθε ατόμου σε μια δίκαιη μοιρασιά:

24 παιδιά μοιράζονται δίκαια 18 σοκολάτες, χωρίς να περισσέψει τίποτα. Πόση σοκολάτα θα φάει κάθε παιδί;

Μ: Από τη μία θα φάει 1/24.

Ε: Ωραία. Συνολικά σε σχέση με τη μία σοκολάτα πόσο θα φάει;

Μ: 18/24.

Ε: Πώς φαντάζεσαι τις σοκολάτες;

Μ: Είναι δεκαοκτώ σοκολάτες. Αν δώσουμε ένα κομμάτι από την καθεμία θα βγει δεκαοκτώ.

Η Μαρία απάντησε με ευκολία στο παραπάνω πρόβλημα, χωρίς να χρειαστεί να σχεδιάσει τις σοκολάτες για να βρει το μερίδιο. Φαντάστηκε δεκαοκτώ σοκολάτες και τεμάχισε νοητά καθεμία σε εικοσιτέσσερα κομμάτια, σύμφωνα με τον αριθμό των ατόμων. Έπειτα, συνειδητοποίησε ότι το ένα κομμάτι από τα εικοσιτέσσερα, στα οποία έχει τεμαχιστεί η κάθε σοκολάτα, χρειάζεται να επαναληφθεί δεκαοκτώ φορές, όσες οι σοκολάτες που μοιράζονται προκειμένου να προκύψει το μερίδιο κάθε ατόμου.

10.1.2.3. Αναστοχασμός

Η Μαρία, παρά την επιμονή της σε μια ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος ενός όλου, φαίνεται να εσωτερίκευσε ως ένα βαθμό την έννοια του κλάσματος ως πηλίκο, καθώς δεν είχε την ανάγκη να σχεδιάζει τις σοκολάτες και να τις τεμαχίζει για να προσδιορίσει το μερίδιο με τη μορφή κλάσματος. Προχώρησε σε ορισμένες γενικεύσεις για τον τρόπο που μεταβάλλουν το μερίδιο ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών σε μια κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς και συνειδητοποίησε ότι τα αγαθά τεμαχίζονται σε τόσα μέρη όσα δείχνει ο αριθμός των ατόμων που συμμετέχουν στη μοιρασιά και το μερίδιο προκύπτει από την επανάληψη του ενός μέρους τόσες φορές όσες δείχνει ο αριθμός των αγαθών.

Έτσι, αποφασίστηκε στη συνέχεια να δοθούν προβλήματα στα οποία εμπλέκονται ισοδύναμες καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς για να διερευνηθεί ο τρόπος που θα προσεγγίσει η Μαρία την ισοδυναμία των παραγόμενων κλασμάτων.

10.2. Β' Φάση: Ισοδυναμία Καταστάσεων

10.2.1. Πέμπτη συνάντηση

Αυτή η συνάντηση αφιερώθηκε σε προβλήματα που εμπλέκουν δύο ισοδύναμες καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς και η Μαρία καλούταν να βρει σε ποια από τις δύο καταστάσεις το μερίδιο που αναλογεί σε κάθε άτομο είναι μεγαλύτερο και γιατί.

Η Μαρία αυτού του είδους τα προβλήματα τα αντιμετώπιζε με δύο τρόπους: είτε προχωρούσε στον τεμαχισμό των αγαθών με τον ίδιο τρόπο και στις δύο καταστάσεις και κατέληγε σε δύο ίσα κλάσματα, είτε τεμάχιζε με διαφορετικό τρόπο τα αγαθά και έκανε συσχετίσεις μεταξύ του μεγέθους των κομματιών στις δύο περιπτώσεις.

10.2.1.1. Αντιμετώπιση ισοδυναμίας με ίδιους τεμαχισμούς και ίσα κλάσματα

Στο πρώτο πρόβλημα που δόθηκε σε αυτή τη συνάντηση η Μαρία εργάστηκε με τον πρώτο τρόπο:

> 2 αγόρια μοιράζονται δίκαια 5 πίτσες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
> 4 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 10 πίτσες χωρίς να περισσέψει τίποτα.
> Σε ποια παρέα θα ήθελες να είσαι για να φας περισσότερη πίτσα;

Μόλις της δόθηκε το πρόβλημα, ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Τι φαντάζεσαι πριν αρχίσεις να ζωγραφίζεις;

Μ: Θα ήθελα να ήμουν στην παρέα των αγοριών.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί είναι λίγα τα αγόρια και πιο πολλές οι πίτσες, εδώ είναι τέσσερα κορίτσια... Α, όχι! Είναι το ίδιο.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί αυτό το δύο είναι το διπλάσιο του τέσσερα και το πέντε διπλάσιο του δέκα.

Ε: Και πόσο θα φάνε;

M: Να σχεδιάσω [ζωγραφίζει τα σχήματα που φαίνονται στην εικόνα 10.10]

Θα τις χωρίσω στα τέσσερα κομμάτια. Δέκα κομμάτια το κάθε αγόρι.

E: Σε σχέση με όλη την πίτσα πόσο θα φάνε;

M: Α! 10/20.

Το κάθε κορίτσι τρώει ένα κομμάτι. Το κάθε κορίτσι θα φάει 10/40.

E: Σε σχέση με τη μία πίτσα;

M: 1/4, όχι, 10/4. 10/4; Θα πω 1/4.

E: Γιατί;

M: Γιατί είναι ένα κομμάτι από τα τέσσερα της μίας πίτσας.

E: Όλη η ποσότητα που θα φάει σε σχέση με τη μία πίτσα [πόση είναι];

M: Α, 1/40.

E: Θα φάει ένα μόνο κομμάτι;

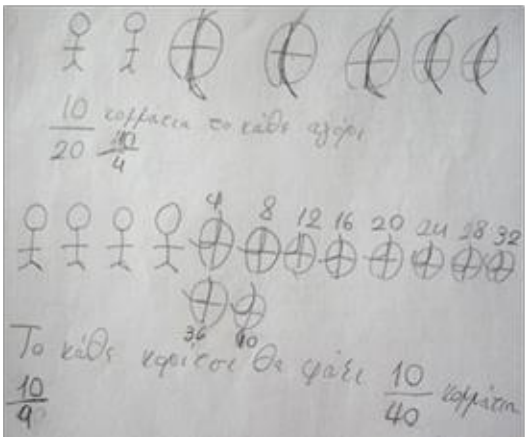
M: Α! 10/40.

E: Σε σχέση με τη μία πίτσα;

M: Ένα κομμάτι... 10/4!

E: Γιατί;

M: Γιατί από όλες τις πίτσες θα φάει 10 [κομμάτια].



Εικόνα 10.10. Τα σχέδια της Μαρίας για τη μοιρασιά 5 πιτσών σε 2 αγόρια και 10 πιτσών σε 4 κορίτσια

Η Μαρία, γρήγορα διαπίστωσε ότι υπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των δύο καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς, γεγονός που τις κάνει ισοδύναμες. Ίσως θα έπρεπε να έχουν γίνει περισσότερες ερωτήσεις στη Μαρία αναφορικά με το επιχείρημα που ανέπτυξε για την ισοδυναμία των δύο καταστάσεων για να ερευνηθεί καλύτερα ο συλλογισμός της.

Στην απάντηση της Μαρίας αναδεικνύεται μια δυσκολία σχετικά με τους όρους διπλάσιο-μισό και την αντίστροφη σχέση μεταξύ τους. Φαίνεται να μπερδεύεται ανάμεσα στο ποια ποσότητας είναι διπλάσια ποιας. Αναφέρθηκε στο ότι ο αριθμός πέντε είναι διπλάσιος του δέκα και ο αριθμός δύο είναι διπλάσιος του τέσσερα. Ίσως βέβαια να ήταν ένα λάθος της στιγμής και να είπε απλώς ανάποδα τους αριθμούς. Πάντως, συνειδητοποίησε ότι οι δύο καταστάσεις συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση διπλάσιου-μισού.

Η Μαρία στο συγκεκριμένο πρόβλημα, τεμάχισε με τον ίδιο τρόπο τα αγαθά και στις δύο καταστάσεις και παρατήρησε ότι και στις δύο περιπτώσεις το κλάσμα που εκφράζει το μερίδιο σε κάθε κατάσταση είναι το 10/4. Έτσι, δεν κατέληξε σε δύο διαφορετικά αλλά ισοδύναμα κλάσματα που εκφράζουν την ίδια ποσότητα, αλλά ακριβώς στο ίδιο κλάσμα. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι παρά την επιμονή της στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισε, ήταν σε θέση να εκφράσει το μερίδιο με ένα καταχρηστικό κλάσμα· κάτι που δεν μπορούσε να κάνει σε προηγούμενες συναντήσεις (βλ. ενότητα 10.1.1. το πρόβλημα με τα δεκαοκτώ παιδιά και τις εικοσιτέσσερις σοκολάτες).

Ίσως θα είχε ενδιαφέρον να γίνει μια συζήτηση με τη μαθήτρια σχετικά με την ποσότητα που τρώει κάθε άτομο σε σχέση με όλες τις πίτσες σε κάθε παρέα, καθώς προκύπτουν δύο διαφορετικά κλάσματα και μάλιστα το ένα είναι διπλάσιο του άλλου (10/20 και 10/40), αφού αναφέρονται σε διαφορετική ποσότητα (πέντε και δέκα πίτσες αντίστοιχα). Δυστυχώς, λόγω έλλειψης χρόνου μια τέτοια συζήτηση δεν πραγματοποιήθηκε. Ιδίως σε πλαίσιο τάξης, όπου υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός παιδιών, μια τέτοια συζήτηση θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη και θα έφερνε στο προσκήνιο σημαντικές ιδιότητες του κλάσματος, όπως ο τρόπος που αλλάζει η έκφραση της ίδιας ποσότητας με κλάσμα ανάλογα με την ποσότητα στην οποία αναφέρεται.

10.2.1.2. Αντιμετώπιση ισοδυναμίας με διαφορετικούς τεμαχισμούς και ισοδύναμα κλάσματα

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης τέτοιων προβλημάτων από τη Μαρία φαίνεται, για παράδειγμα, στο παρακάτω πρόβλημα.

12 αγόρια μοιράζονται δίκαια 9 πίτσες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
4 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 3 πίτσες, χωρίς να περισσέψει τίποτα.
Σε ποια παρέα θα ήθελες να είσαι για να φας περισσότερη πίτσα;

Σε αυτό το πρόβλημα η Μαρία, αν και από την αρχή ισχυρίστηκε ότι είναι ίσα τα μερίδια που προκύπτουν από τις δύο παρέες, δυσκολεύτηκε αρκετά να βρει τον τρόπο με τον οποίο θα τεμαχίσει τις πίτσες ώστε να είναι δίκαιη η μοιρασιά. Πιθανώς να την δυσκόλεψε η επιλογή των αγαθών στο πρόβλημα (πίτσες) σε συνδυασμό με τους δύσκολους αριθμούς των αγαθών (οι οποίοι δεν ήταν άρτιοι αριθμοί που ενδεχομένως να διευκόλυναν), καθώς αρχικά η Μαρία προσπαθούσε να βρει έναν τρόπο τεμαχισμού σχεδιάζοντας κύκλους, γεγονός που τη δυσκόλεψε ιδιαίτερα (Εικόνα 10.11). Αφού διευκρινίστηκε ότι οι πίτσες που μοιράστηκαν οι δύο παρέες δεν ήταν κυκλικές αλλά ορθογώνιες, η δυσκολία ξεπεράστηκε και η μαθήτρια βρήκε έναν τρόπο για να τεμαχίσει τις πίτσες. Τεμάχισε, λοιπόν, πρώτα τις πίτσες που αντιστοιχούν στην παρέα των κοριτσιών δημιουργώντας τέσσερα ίσα κομμάτια σε καθεμία (Εικόνα 10.12, στην αρχή δεν είχε τεμαχίσει και κάθε τέταρτο σε τρία κομμάτια) και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

(...)

Ε: Πόσο θα φάνε σε αυτή την παρέα [των κοριτσιών];

Μ: Ένα κομμάτι. Α! Άρα τρία κομμάτια.

Ε: Πόσο θα φάνε σε σχέση με τη μία πίτσα;

Μ: 3/4.

Ε: Είναι και δώδεκα αγόρια που μοιράζονται εννιά πίτσες.

Μ: Α! Κατάλαβα τι θα κάνω! Θα τις χωρίσω σε δώδεκα κομμάτια. [σχεδιάζει το σχήμα που φαίνεται στην εικόνα 10.13].
Θα φάνε 9/12.

Ε: Πώς αυτά τα δύο είναι ίσα;

Μ: Τρία επί τρία, εννιά και τέσσερα επί τρία δώδεκα [πολλαπλασιάζει τους όρους του κλάσματος 3/4 που αναπαριστά το μερίδιο κάθε κοριτσιού με τον αριθμό τρία και προκύπτει το κλάσμα που αναπαριστά το μερίδιο κάθε αγοριού]

Ε: Με τα κομμάτια εδώ τι γίνεται; Πώς γίνονται επί τρία;

Μ: Επειδή πολλαπλασιάζω επί τρία.

Ε: Γιατί;

M: Επειδή είναι τριπλάσια η ποσότητα. Άρα δεν είναι ίδια ... Εδώ το κάθε παιδί θα φάει εννιά κομμάτια, ενώ εδώ θα φάει τρία κομμάτια. Οπότε επιλέγω αυτή την παρέα [δείχνει την παρέα των αγοριών με τα εννιά κομμάτια]

E: Αυτά τα εννιά κομμάτια είναι ίδια σε μέγεθος με τα τρία;

M: Εδώ είναι χωρισμένη σε πιο μεγάλα κομμάτια [δείχνει τις πίτσες των κοριτσιών που είναι κομμένες σε τέταρτα]

E: Πόσα κομμάτια αυτής [πίτσα χωρισμένη σε δωδέκατα] είναι ίσα με ένα αυτής [πίτσα χωρισμένη σε τέταρτα];

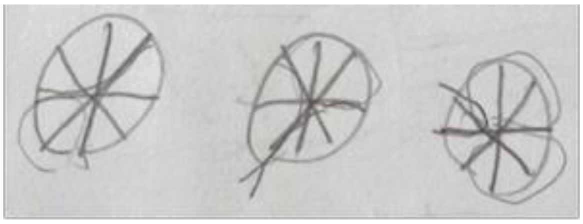
M: Ε.... τρία.

E: Γιατί;

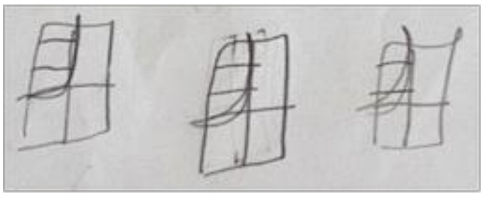
M: Γιατί τρία επί τέσσερα ίσον δώδεκα.

E: Μπορείς να μου το δείξεις στο σχήμα;

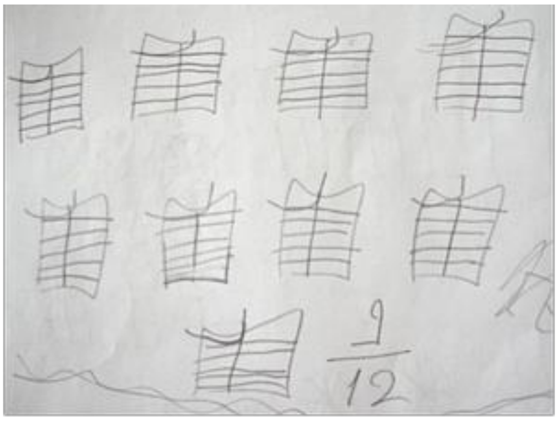
M: [τεμαχίζει κάθε τέταρτο σε 3 ίσα μέρη, όπως φαίνεται στην εικόνα 10.12]
Είναι ίδια τελικά.



Εικόνα 10.11. Η προσπάθεια της Μαρίας να μοιράσει 3 κυκλικές πίτσες σε 4 κορίτσια



Εικόνα 10.12. Η λύση της Μαρίας για τη μοιρασιά 3 ορθογώνιων πιτσών σε 4 κορίτσια



Εικόνα 10.13. Η λύση της Μαρίας για τη μοιρασιά 9 ορθογώνιων πιτσών σε 12 αγόρια

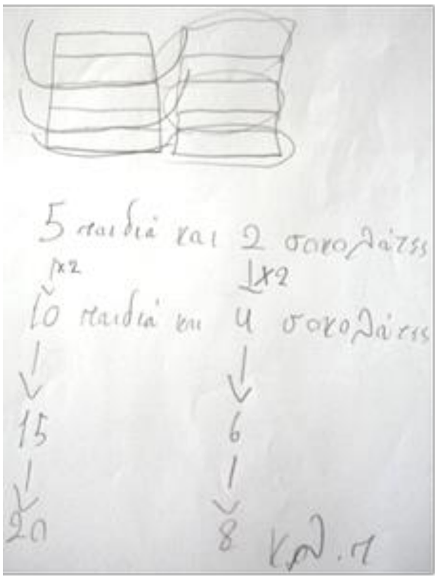
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η στιγμή που η Μαρία αντιλαμβάνεται τον αριθμό στον οποίο πρέπει να τεμαχίσει τις πίτσες που θα μοιραστούν τα δώδεκα αγόρια. Μέσα από το επιφώνημα της Μαρίας, φαίνεται ότι εκείνη τη στιγμή διαπίστωσε πως ο αριθμός των τεμαχισμών που χρειάζεται να γίνουν για να μοιραστούν δίκαια τα αγαθά σε οποιαδήποτε κατάσταση υποδεικνύεται από τον αριθμό των ατόμων που συμμετέχουν στη μοιρασιά.

Η Μαρία σε αυτό το πρόβλημα, τεμάχισε με διαφορετικό τρόπο τα αγαθά σε κάθε κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα μερίδια αντιπροσωπεύονται από τα κλάσματα 3/4 και 9/12 και στις δύο περιπτώσεις. Από την αρχή υποστήριξε ότι τα δύο αυτά κλάσματα είναι ισοδύναμα διότι το δεύτερο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των όρων του πρώτου κλάσματος με το τρία. Παρουσίασε όμως δυσκολίες στο να αιτιολογήσει εννοιολογικά το λόγο που ισχύει κάτι τέτοιο και τον τρόπο με τον οποίο αντανακλάται αυτή η σχέση στα κομμάτια που είχε φτιάξει η ίδια. Μέσα από τη συζήτηση που ακολούθησε, κατάφερε τελικά να τεμαχίσει τα τέταρτα που είχε φτιάξει στις πίτσες των κοριτσιών σε τρία ίσα μέρη, ώστε να δημιουργήσει μια κοινή μονάδα μέτρησης για τις πίτσες στις δύο παρέες.

Έτσι, η ισοδυναμία εδώ προέκυψε μέσα από την ανα-ομαδοποίηση των κομματιών και την παρατήρηση ότι τα δύο κλάσματα, παρόλο που είναι διαφορετικά είναι ισοδύναμα, καθώς αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα, η οποία απλώς έχει τεμαχιστεί με διαφορετικό τρόπο σε κάθε κατάσταση. Η παρατήρηση, μάλιστα, της Μαρίας ότι τρία κομμάτια της πίτσας των αγοριών αντιστοιχούν σε ένα κομμάτι της πίτσας των κοριτσιών πραγματοποιήθηκε πριν προχωρήσει στον περαιτέρω τεμαχισμό της πίτσας από τέταρτα σε δωδέκατα. Πιθανώς η Μαρία στο σημείο αυτό να συνέδεσε τη διαδικασία πολλαπλασιασμού του κλάσματος με τη σχέση μεταξύ του μεγέθους των κομματιών (τριπλάσια) και τον τεμαχισμό του τεμαχισμού (τεμαχισμός σε τρία ίσα μέρη κάθε τεμαχισμού των τεσσάρων ίσων μερών). Αξίζει να σημειωθεί ότι η Μαρία δεν είχε ανάγκη να προχωρήσει στον τεμαχισμό κάθε τέταρτου της πίτσας των κοριτσιών και να δημιουργήσει δώδεκα κομμάτια, όπως αυτά της παρέας των αγοριών. Αρκέστηκε στο να τεμαχίσει το ένα τέταρτο κάθε πίτσας και τον υπόλοιπο τεμαχισμό μπορούσε να τον φανταστεί, χωρίς να τον σχεδιάσει.

10.2.1.3. Πρόβλημα στο οποίο δίνεται το μερίδιο (με κλάσμα) και ζητούνται οι πιθανοί αριθμοί των ατόμων και των αγαθών

Στο τέλος αυτής της συνάντησης, δόθηκε το πρόβλημα που είχε δοθεί και στην τρίτη συνάντηση, στο οποίο δινόταν το μερίδιο με το κλάσμα 2/5 και ζητούταν να βρεθεί ο πιθανός αριθμός αγαθών και ατόμων. Αυτή τη φορά η Μαρία βρήκε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς για τον αριθμό των αγαθών και των ατόμων, χωρίς να παραλείψει κανέναν. Η ίδια υποστήριξε ότι μπορεί να πρόκειται για πέντε παιδιά που μοιράζονται δίκαια δύο σοκολάτες ή για δέκα παιδιά που μοιράζονται δίκαια τέσσερις σοκολάτες ή για δεκαπέντε παιδιά που μοιράζονται δίκαια έξι σοκολάτες κτλ., γιατί η ποσότητα που τρώνε είναι πάντα η ίδια (Εικόνα 10.14).



Εικόνα 10.14. Η λύση της Μαρίας για τους πιθανούς αριθμούς ατόμων και αγαθών με μερίδιο 2/5

Από την προηγούμενη φορά που δόθηκε το πρόβλημα μέχρι τη δεύτερη, η Μαρία άλλαξε κατά πολύ τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος. Αρχικά, είχε συνειδητοποιήσει ότι πρόκειται για μια πολλαπλασιαστική σχέση, αλλά λάμβανε υπόψιν μόνο τον διπλασιασμό του αριθμού των ατόμων και των αγαθών κάθε φορά. Τώρα, αντιμετώπισε διαφορετικά το πρόβλημα, καθώς βρήκε όλους τους ισοδύναμους συνδυασμούς, πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα τον αριθμό των ατόμων και των αγαθών.

10.2.1.4. Αναστοχασμός

Η Μαρία, μέσα από τα προβλήματα που της δόθηκαν, κατάφερε να προσεγγίσει την ισοδυναμία των κλασμάτων βασιζόμενη στην ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο. Σχεδιάζοντας αγαθά, τεμαχίζοντας και ομαδοποιώντας τα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι εάν σε δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών σχετίζονται με την ίδια πολλαπλασιαστική σχέση αντίστοιχα (π.χ. τριπλάσιος αριθμός αγαθών και τριπλάσιος αριθμός ατόμων στη δεύτερη κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς), τα κλάσματα που εκφράζουν το μερίδιο κάθε ατόμου σε κάθε κατάσταση είναι μεταξύ τους ισοδύναμα.

Έτσι, λοιπόν, στη συνέχεια, κρίθηκε σκόπιμο να δοθούν στη Μαρία προβλήματα στα οποία θα καλούταν να βρει έναν από τους παράγοντες που συμμετέχουν στην κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς (είτε τον αριθμό των ατόμων είτε τον αριθμό των αγαθών) δεδομένου ότι είναι ισοδύναμη μιας δεύτερης κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς της οποίας ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών είναι γνωστά.

10.2.2. Έκτη συνάντηση

Αυτή η συνάντηση με τη μαθήτρια αφιερώθηκε σε ισοδύναμες καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς στις οποίες δίνονταν ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών της μίας κατάστασης και είτε δίνονταν ο αριθμός των ατόμων και ζητούταν ο αριθμός των αγαθών της δεύτερης κατάστασης είτε το αντίστροφο. Προέκυψαν, δηλαδή, τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων, όπως φαίνονται στον πίνακα 10.1.

Πίνακας 10.1. Οι κατηγορίες προβλημάτων για την ισοδυναμία των κλασμάτων

Είδος Προβλήματος	**Παράδειγμα**	**Περιγραφή**
Κατηγορία 1η	$\frac{3}{7} = \frac{9}{x}$	Ζητούνται τα άτομα, τα οποία είναι πολλαπλάσιο
Κατηγορία 2η	$\frac{8}{5} = \frac{x}{20}$	Ζητούνται τα αγαθά τα οποία είναι πολλαπλάσιο
Κατηγορία 3η	$\frac{8}{12} = \frac{x}{3}$	Ζητούνται τα αγαθά τα οποία είναι υποδιαίρεση
Κατηγορία 4η	$\frac{16}{20} = \frac{4}{x}$	Ζητούνται τα άτομα, τα οποία είναι υποδιαίρεση

10.2.2.1. Κατηγορία 1η

Στην πρώτη κατηγορία προβλημάτων δίνονταν ο αριθμός των ατόμων και ο αριθμός των αγαθών μιας κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς και δινόταν και μια δεύτερη κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς, της οποίας ο αριθμός των αγαθών δίνονταν και ζητούταν να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων, ώστε οι δύο καταστάσεις να είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

> 7 αγόρια μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες.
> Κάποια κορίτσια μοιράζονται δίκαια 9 σοκολάτες.
> Πόσα πιστεύεις ότι ήταν τα κορίτσια αν κάθε αγόρι έφαγε το ίδιο μερίδιο με κάθε κορίτσι;

Μ: [Ζωγραφίζει τρεις σοκολάτες και τεμαχίζει την καθεμία σε επτά κομμάτια, όπως φαίνεται στην εικόνα 10.15]. Το κάθε παιδί θα φάει τρία κομμάτια. Θα φάει 3/21 από όλες ή 3/7 από τη μία.

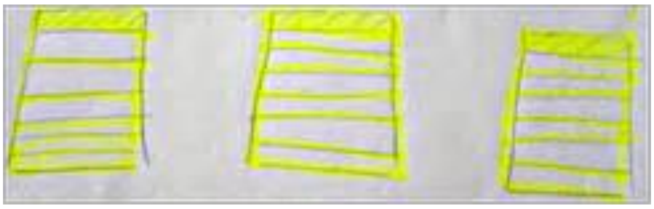
Ε: Κάποια κορίτσια μοιράζονται εννιά σοκολάτες.

Μ: Τρία κομμάτια πάλι. Τώρα έχουμε εννιά σοκολάτες.
Θα φάνε εννιά κομμάτια... Εικοσιένα [κορίτσια]!

Ε: Πώς το βρήκες;

Μ: Επειδή είναι τριπλάσιες οι σοκολάτες και 7x3=21.

Η Μαρία, χωρίς να χρειαστεί να σχεδιάσει τις εννιά σοκολάτες, φαντάστηκε ότι σε κάθε άτομο αναλογεί ένα κομμάτι από κάθε σοκολάτα, αφού κάθε σοκολάτα τεμαχίζεται σε τόσα κομμάτια όσα και ο αριθμός των ατόμων, οπότε κάθε κορίτσι έφαγε εννιά κομμάτια. Στη συνέχεια, σκέφτηκε ότι αφού κάθε κορίτσι έφαγε τριπλάσια ποσότητα κομματιών σε σχέση με πριν, θα πρέπει να είναι τριπλάσια και τα άτομα που τις μοιράστηκαν. Περισσότερες ερωτήσεις ίσως να φώτιζαν περισσότερο τον τρόπο σκέψης της Μαρίας.



Εικόνα 10.15. Η μοιρασιά 3 σοκολατών σε 7 άτομα από τη Μαρία

10.2.2.2. Κατηγορία 2η

Στη δεύτερη κατηγορία προβλημάτων δινόταν ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών μιας κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς και δινόταν και μια δεύτερη κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς, κατά την οποία δινόταν ο αριθμός των ατόμων και ζητούταν ο αριθμός των αγαθών, δεδομένου ότι οι δύο αυτές καταστάσεις είναι ισοδύναμες, όπως το εξής πρόβλημα:

> 5 αγόρια μοιράζονται δίκαια 8 σοκολάτες.
> 20 κορίτσια μοιράζονται δίκαια κάποιες σοκολάτες.
> Πόσες σοκολάτες πιστεύεις ότι μοιράστηκαν τα κορίτσια αν κάθε αγόρι έφαγε το ίδιο μερίδιο με κάθε κορίτσι;

Ε: Μπορείς να το βρεις χωρίς να σχεδιάσεις;

Μ: Θα φάνε 8 κομμάτια γιατί τρώνε ένα από κάθε σοκολάτα. [Τρώνε] 8/5 σε σχέση με τη μία.
Τετραπλασιάστηκαν τα άτομα, άρα θα τετραπλασιαστούν και οι σοκολάτες.
Άρα είναι τριάντα δύο σοκολάτες και τρώνε 32/20.

Η Μαρία, μπορεί να φαντάζεται με ευκολία τους τεμαχισμούς που χρειάζεται να γίνουν και να ομαδοποιεί ένα κομμάτι από κάθε αγαθό για να προσδιορίσει το μερίδιο. Φαίνεται να έχει γίνει πλέον στέρεα η γνώση ότι τα αγαθά σε κάθε κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς τεμαχίζονται σε τόσα κομμάτια όσα δηλώνει ο αριθμός των ατόμων που συμμετέχουν στη μοιρασιά. Έτσι, σε όλα τα επόμενα προβλήματα αυτής της συνάντησης η Μαρία δεν χρειάστηκε να ζωγραφίσει τα αγαθά και να τα τεμαχίσει, αλλά τα τεμάχιζε με το νου της. Μάλιστα, είναι ικανή να βρίσκει το μερίδιο ακόμη και σε περιπτώσεις που αυτό εκφράζεται με ένα καταχρηστικό κλάσμα, όπως σε αυτή την περίπτωση, χωρίς να εμφανίζει κάποια δυσκολία. Αφού, λοιπόν, βρήκε ότι το μερίδιο στην πρώτη κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς είναι 8/5 και δεδομένου ότι στη δεύτερη κατάσταση, η οποία είναι ισοδύναμη με την πρώτη, τα άτομα που συμμετέχουν είναι τετραπλάσια, για να φάνε την ίδια ποσότητα σοκολάτας μοιράζονται τετραπλάσιες σοκολάτες σε σχέση με την πρώτη κατάσταση.

10.2.2.3. Κατηγορία 3η

Στην τρίτη κατηγορία προβλημάτων, δινόταν δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, κατά τις οποίες δινόταν ο αριθμός των ατόμων και των αγαθών της πρώτης και ο αριθμός των ατόμων της δεύτερης και ζητούταν να βρεθεί ο αριθμός των αγαθών της δεύτερης, με την προϋπόθεση οι δύο καταστάσεις να είναι ισοδύναμες. Αυτή τη φορά, όμως, τα στοιχεία της δεύτερης κατάστασης δεν ήταν πολλαπλάσια της πρώτης, αλλά υποδιαιρέσεις αυτής. Για παράδειγμα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

> 12 αγόρια μοιράζονται δίκαια 8 σοκολάτες.
> 3 κορίτσια μοιράζονται δίκαια κάποιες σοκολάτες.
> Πόσες σοκολάτες πιστεύεις ότι μοιράστηκαν τα κορίτσια, αν κάθε αγόρι έφαγε το ίδιο μερίδιο με κάθε κορίτσι;

Μ: Είναι τετραπλάσια τα αγόρια, άρα 8x4=32

Ε: Δώδεκα αγόρια μοιράζονται οκτώ σοκολάτες και τρία κορίτσια μοιράζονται τριάντα δύο σοκολάτες. Τρώνε το ίδιο;

Μ: Ναι.

Ε: Τρία κορίτσια μοιράζονται τριάντα δύο σοκολάτες. Πόσες σοκολάτες θα φάει περίπου κάθε κορίτσι; Θα φάει περισσότερο από μία σοκολάτα;

Μ: Τριάντα δύο κομμάτια.

Ε: Οι οκτώ σοκολάτες τι πρέπει να είναι σε σχέση με αυτές των κοριτσιών;

Μ: Τέσσερις φορές λιγότερες.

Ε: Τα αγόρια με τα κορίτσια τι σχέση έχουν;

Μ: Τα αγόρια είναι τετραπλάσια από τα κορίτσια. Α! Δύο σοκολάτες.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί 8:4=2

Ε: Πόσο τρώνε σε κάθε περίπτωση;

Μ: 2/3 και 8/12.

Σε αυτό το πρόβλημα αναδεικνύεται η δυσκολία της Μαρίας ανάμεσα στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ δύο μεγεθών η οποία είχε παρατηρηθεί και σε προηγούμενες συναντήσεις (βλ. ενότητα 10.2.1.1). Δυσκολευόταν να σκεφτεί αντίστροφα και να συνειδητοποιήσει ότι οι σοκολάτες που αντιστοιχούν στα κορίτσια δεν είναι τετραπλάσιες από αυτές των αγοριών, αλλά υποτετραπλάσιες.

Μέσα από τις απαντήσεις της Μαρίας στις ερωτήσεις που της έγιναν φανερώνεται επίσης μια περισσότερο διαδικαστική και λιγότερο εννοιολογική προσέγγιση στην αντιμετώπιση των προβλημάτων. Όταν ρωτήθηκε πόσες σοκολάτες θα φάει περίπου κάθε κορίτσι αν τρία κορίτσια μοιραστούν τριάντα δύο σοκολάτες, πιθανώς δεν αντιλήφθηκε την ερώτηση ως μια κατάσταση διαίρεσης από την οποία προκύπτει ότι σε κάθε κορίτσι αντιστοιχούν περίπου δέκα ολόκληρες σοκολάτες. Αντίθετα, εικάζεται ότι από τη συνήθεια να τεμαχίζει αγαθά και να σκέφτεται με κλασματικούς όρους, επικεντρώθηκε στους τεμαχισμούς και στα κομμάτια που προκύπτουν μέσα από αυτούς και για αυτό το λόγο υποστήριξε ότι κάθε κορίτσι θα φάει τριάντα δύο κομμάτια.

Παρόλα αυτά, κατάφερε εντέλει να βρει την πολλαπλασιαστική σχέση που συνδέει τις δύο καταστάσεις. Αφού το έκανε αυτό, μετά της ήταν εύκολο να βρει τον αριθμό των αγαθών που χρειάζεται να μοιραστεί η παρέα των αγοριών προκειμένου οι δύο καταστάσεις να είναι ισοδύναμες.

10.2.2.4. Κατηγορία 4η

Στα προβλήματα της τελευταίας κατηγορίας δίνονταν πάλι δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Στην πρώτη δινόταν τόσο ο αριθμός των ατόμων όσο και ο αριθμός των αγαθών και στη δεύτερη δινόταν ο αριθμός των αγαθών, ο οποίος ήταν υποδιαίρεση του αριθμού των αγαθών της πρώτης κατάστασης και ζητούταν να βρεθεί ο αριθμός των ατόμων ώστε το μερίδιο που προκύπτει από τις δύο καταστάσεις να είναι το ίδιο. Έτσι, δόθηκε για παράδειγμα το παρακάτω πρόβλημα:

> 20 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 16 σοκολάτες.
> Κάποια αγόρια μοιράζονται δίκαια 4 σοκολάτες.
> Πόσα πιστεύεις ότι ήταν τα αγόρια αν κάθε κορίτσι έφαγε το ίδιο μερίδιο με κάθε αγόρι;

Σε αυτό το πρόβλημα η Μαρία εργάστηκε με τον ίδιο τρόπο με το προηγούμενο. Αρχικά θεώρησε ότι ο αριθμός των αγοριών χρειάζεται να είναι τετραπλάσιος από αυτόν τον κοριτσιών (ογδόντα) και στη συνέχεια, μετά από ερωτήσεις και συζήτηση, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός των αγοριών είναι πέντε, αφού ο αριθμός των αγαθών είναι υποπενταπλάσιος και η ίδια σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ των αριθμών των ατόμων, και ότι το μερίδιο που προκύπτει είναι 4/5.

10.2.2.5. Αναστοχασμός

Η Μαρία, στα προβλήματα της πρώτης και δεύτερης κατηγορίας δεν παρουσίασε δυσκολίες και ήταν σε θέση να συσχετίζει με ευκολία πολλαπλασιαστικά τις δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Στα προβλήματα όμως της τρίτης και τέταρτης κατηγορίας δυσκολεύτηκε να κατανοήσει τις σχέσεις στις οποίες μια ποσότητα ήταν υποδιαίρεση της άλλης. Πιθανώς, στην αρχή του πειράματος σχεδιασμού και στον προσδιορισμό των σημείων αφετηρίας ή ακόμη και αργότερα όταν πρωτοπαρουσιάστηκε αυτή η δυσκολία της μαθήτριας, να έπρεπε να απασχοληθεί με προβλήματα που προωθούν τη λειτουργία της αποσυναρμολόγησης, όπως «*αυτή η σοκολάτα είναι 5 φορές όσο μια άλλη σοκολάτα, ζωγράφισε την άλλη σοκολάτα*». Τέτοιου είδους προβλήματα ίσως να βοηθούσαν τη Μαρία να δομήσει μια αντιστρέψιμη πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων και να είχαν αποφευχθεί αυτές οι δυσκολίες.

Όσον αφορά την επιμονή της να λειτουργεί με έναν περισσότερο διαδικαστικό τρόπο, ίσως, οι ερωτήσεις που γίνονταν στη Μαρία σε όλη τη διάρκεια του πειράματος σχεδιασμού να έπρεπε να επικεντρώνονται ακόμη περισσότερο στις ποσότητες που εμπλέκονται σε κάθε προβληματική κατάσταση και στην εννοιολογική τους σχέση, ώστε να επικεντρωθεί στην εννοιολογική κατανόηση των ποσοτήτων και όχι στις διαδικασίες που χρειάζεται να γίνουν για να βρεθεί μια λύση για κάθε πρόβλημα.

10.3. Γ' Φάση: Σύγκριση Κλασμάτων

10.3.1. Έβδομη συνάντηση

Ως στόχος για την τελευταία συνάντηση τέθηκε η λειτουργική αξιοποίηση των γνώσεων που απέκτησε η μαθήτρια για τα ισοδύναμα κλάσματα στη σύγκριση μη ομώνυμων κλασμάτων ώστε να διαπιστωθεί κατά πόσο ήταν στέρεα η νέα γνώση που αποκτήθηκε. Για το λόγο αυτό, σχεδιάστηκαν δραστηριότητες που να προωθούν τη σύγκριση κλασμάτων όχι μέσα από μια αλγοριθμική προσέγγιση (μέσα από την κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων ώστε να είναι ομώνυμα) αλλά μέσα από την έμφαση στις έννοιες που συμμετέχουν στο πλαίσιο των καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς.

Με βάση αυτό το σκεπτικό θεωρήθηκε ότι η μαθήτρια θα μπορέσει να κάνει συγκρίσεις μεταξύ καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς στις οποίες είτε τα άτομα της μιας παρέας είναι πολλαπλάσιο της άλλης (ισοδύναμοι παρονομαστές) είτε τα αγαθά της μιας παρέας είναι πολλαπλάσιο της άλλης (ισοδύναμοι αριθμητές). Έτσι, θα μπορέσει να βρει την αντίστοιχη ισοδύναμη κατάσταση με βάση είτε τον αριθμό των ατόμων είτε των αγαθών αντίστοιχα και να καταλήξει σε ένα συμπέρασμα σχετικά με το μερίδιο που είναι μεγαλύτερο.

Οι τύποι προβλημάτων που προέκυψαν για την προώθηση της σύγκρισης των κλασμάτων μέσα από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς ήταν τέσσερις και φαίνονται στον πίνακα 10.2.

Πίνακας 10.2. Οι κατηγορίες προβλημάτων για τη σύγκριση κλασμάτων

Είδος προβλήματος	**Παράδειγμα**	**Περιγραφή**
Κατηγορία Ι	$\frac{3}{10}$ και $\frac{5}{20}$	Πολλαπλάσια άτομα και λιγότερα αγαθά, αποτέλεσμα μικρότερο μερίδιο
Κατηγορία ΙΙ	$\frac{6}{7}$ και $\frac{20}{21}$	Πολλαπλάσια άτομα και περισσότερα αγαθά, αποτέλεσμα μεγαλύτερο μερίδιο
Κατηγορία ΙΙΙ	$\frac{6}{9}$ και $\frac{18}{21}$	Πολλαπλάσια αγαθά και λιγότερα άτομα, αποτέλεσμα μεγαλύτερο μερίδιο
Κατηγορία ΙV	$\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{11}$	Πολλαπλάσια αγαθά και περισσότερα άτομα, αποτέλεσμα μεγαλύτερο μερίδιο

10.3.1.1. Κατηγορία Ι

Το πρώτο πρόβλημα που δόθηκε στη Μαρία αφορούσε δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, με τη δεύτερη να έχει πολλαπλάσιο αριθμό ατόμων σε σχέση με τον αριθμό ατόμων της πρώτης και μικρότερο από το αντίστοιχο πολλαπλάσιο αριθμό αγαθών. Θεωρήθηκε ότι η Μαρία θα μπορούσε να βρει μια ισοδύναμη κατάσταση της πρώτης χρησιμοποιώντας τον πολλαπλάσιο αριθμό ατόμων για να βρει το αντίστοιχο πολλαπλάσιο αριθμό αγαθών και να χρησιμοποιήσει αυτή για να τη συγκρίνει με τη δεύτερη. Έτσι, δεδομένου ότι ο αριθμός των ατόμων των δύο καταστάσεων τώρα είναι ίσος, αλλά ο αριθμός των αγαθών της δεύτερης κατάστασης είναι μικρότερος, το μερίδιο της δεύτερης κατάστασης θα είναι μικρότερο. Για παράδειγμα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα με δύο διαδοχικά ερωτήματα:

> 10 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες.
> 20 αγόρια μοιράζονται δίκαια 6 σοκολάτες.
> Σε ποια παρέα θα προτιμούσες να είσαι για να φας περισσότερη σοκολάτα;
>
> 10 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες.
> 20 αγόρια μοιράζονται δίκαια 5 σοκολάτες.
> Σε ποια παρέα θα προτιμούσες να είσαι για να φας περισσότερη σοκολάτα;

Στο πρώτο ερώτημα, η Μαρία δεν παρουσίασε κάποια δυσκολία και απάντησε αμέσως πως κάθε κορίτσι τρώει 3/10 σοκολάτας και κάθε αγόρι τρώει 6/20 σοκολάτας και είναι ίσα γιατί στη δεύτερη κατάσταση είναι διπλάσια τα αγόρια και διπλάσιες και οι σοκολάτες.

Το δεύτερο ερώτημα η Μαρία δεν το αντιμετώπισε με την ίδια ευκολία. Μόλις της δόθηκε το πρόβλημα ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος

Μ: Πάλι 3/10 τρώνε αλλά θα είναι 5/20.
Θα προτιμούσα να είμαι εδώ [δείχνει την παρέα των αγοριών]

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί εδώ τρώνε πέντε κομμάτια ενώ στην άλλη τρία.

Ε: Αν έτρωγαν το ίδιο πόσο θα έτρωγαν;

Μ: Έξι κομμάτια.
Α! Εδώ θα προτιμούσα [δείχνει την παρέα των κοριτσιών]

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί είναι λιγότερη η σοκολάτα και λιγότερα τα κομμάτια [στην παρέα των αγοριών]

Ε: Μπορείς να μου το εξηγήσεις;

Μ: Αν έτρωγαν το ίδιο θα ήταν έξι σοκολάτες, τώρα που έχουν πέντε είναι λιγότερο.
Άρα θα προτιμούσα αυτή [δείχνει την παρέα των κοριτσιών]

Η Μαρία, σκεπτόμενη αρχικά τα κλάσματα με την ερμηνεία του μέρους-όλου, δυσκολεύτηκε να συμπεράνει ποιο κλάσμα είναι μεγαλύτερο γιατί αντιλαμβανόταν τα κλάσματα ως κομμάτια, χωρίς να λαμβάνει υπόψη την ποσότητα στην οποία αναφέρονται. Βλέποντας το κλάσμα 3/10 ως τρία κομμάτια από τα πέντε και το κλάσμα 5/20 ως πέντε κομμάτια από τα είκοσι, έδωσε έμφαση μόνο στον αριθμό των κομματιών και όχι στο μέγεθος αυτών.

Όταν, όμως, ρωτήθηκε ποια κατάσταση θα ήταν ισοδύναμη με την παρέα των κοριτσιών αν συμμετείχαν στη μοιρασιά είκοσι άτομα, απάντησε με ευκολία ότι θα έπρεπε να μοιραστούν έξι σοκολάτες και όχι πέντε. Έτσι, ήταν σε θέση να συνδέσει το δεύτερο ερώτημα με το πρώτο και να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αφού ο αριθμός των ατόμων στις δύο καταστάσεις είναι ο ίδιος και ο αριθμός των αγαθών στην παρέα των αγοριών είναι πέντε, ενώ στην παρέα των κοριτσιών είναι έξι, το μεγαλύτερο μερίδιο προκύπτει στην παρέα των κοριτσιών.

10.3.1.2. Κατηγορία ΙΙ

Στα προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας δίνονταν δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, για τις οποίες ίσχυε ότι η δεύτερη είχε πολλαπλάσιο αριθμό ατόμων σε σχέση με την πρώτη, αλλά ο αριθμός των αγαθών της δεύτερης ήταν μεγαλύτερος από το αντίστοιχο πολλαπλάσιο και κατά συνέπεια το μερίδιο της δεύτερης κατάστασης ήταν μεγαλύτερο από αυτό της πρώτης. Για παράδειγμα, δόθηκε το εξής πρόβλημα και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

> 7 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 6 σοκολάτες.
> 21 αγόρια μοιράζονται δίκαια 20 σοκολάτες.
> Σε ποια παρέα θα προτιμούσες να είσαι για να φας περισσότερη σοκολάτα;

Μ: Αν έτρωγαν ίσο θα ήταν δεκαοκτώ [σοκολάτες].

Ε: Πόσο τρώνε σε κάθε περίπτωση;

Μ: 6/7 και είναι είκοσι μία σοκολάτες και είκοσι παιδιά, οπότε θα φάνε 21/20, όχι 20/21.
Α! Είναι ίσα σχεδόν.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί εδώ είναι ένα λιγότερο [δείχνει το κλάσμα που αναπαριστά το μερίδιο των κοριτσιών] και εδώ είναι ένα λιγότερο [δείχνει το κλάσμα που αναπαριστά το μερίδιο των αγοριών· αναφέρεται στη διαφορά του αριθμητή με τον παρονομαστή].

Ε: Εσύ μου είπες ότι αν έτρωγαν ίσα θα έπρεπε να τρώνε δεκαοκτώ σοκολάτες. Τι ισχύει τελικά;

Μ: Είναι ίσα αυτά [6/7 και 20/21]

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί έχουν διαφορά ένα.

Ε: Αν δύο παιδιά μοιράζονταν μία σοκολάτα, πόσο θα έτρωγε κάθε παιδί;

Μ: 1/2.

Ε: Αυτό είναι ίσο με το 6/7;

Μ: Όχι...

Ε: Γιατί, αφού κι αυτό έχει διαφορά ένα;

Μ: Γιατί το 1/2 είναι το μισό και το 6/7 είναι σχεδόν ένα.

Ε: Οπότε τι ισχύει τελικά;

Μ: Αν έτρωγαν ίσο θα έτρωγαν 18/21. Τώρα τρώνε 20/21.

Θα προτιμούσα εδώ [δείχνει την παρέα των αγοριών με τα 20/21] γιατί τρώνε δύο κομμάτια παραπάνω.

Η Μαρία σε αυτό το πρόβλημα δυσκολεύτηκε αρκετά και παρουσίασε ιδέες σχετικά με τα κλάσματα που δεν είχε αναφέρει στο παρελθόν. Ενώ στην αρχή βρήκε μια ισοδύναμη κατάσταση για την παρέα των κοριτσιών, τριπλασιάζοντας τον αριθμό των ατόμων και των αγαθών, στη συνέχεια ανέπτυξε ένα αρκετά διαφορετικό επιχείρημα. Υποστήριξε ότι τα κλάσματα 6/7 και 20/21 είναι ίσα διότι η διαφορά του παρονομαστή και τον αριθμητή είναι η ίδια. Αυτή είναι μια συνηθισμένη εναλλακτική ιδέα που εφαρμόζουν τα παιδιά στη σύγκριση κλασμάτων και βασίζεται στη γνώση που έχουν για τους ακέραιους αριθμούς (Gould, 2005).

Προκειμένου να ξεπεράσει αυτή τη λανθασμένη αντίληψη για τα κλάσματα, επιχειρήθηκε να προκληθεί μία *σύγχυση* προσφέροντας στη μαθήτρια ένα αντιπαράδειγμα ώστε να διαπιστώσει ότι η εκτίμησή της ναι μεν δίνει μια εικόνα για το μέγεθος των κλασμάτων (όπως υποστήριξε και η ίδια είναι *σχεδόν* ίσα), αλλά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ακριβή προσδιορισμό του μεγέθους των κλασμάτων.

Στη συνέχεια, ξεπερνώντας την παραπάνω παρανόηση και παράγοντας μια ισοδύναμη κατάσταση με αυτή των κοριτσιών μπόρεσε να συγκρίνει τις δύο καταστάσεις, τεμαχίζοντας και ομαδοποιώντας νοητά τα αγαθά. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στην παρέα των αγοριών το μερίδιο είναι μεγαλύτερο καθώς, ενώ ο αριθμός των ατόμων είναι ο ίδιος, ο αριθμός των αγαθών είναι κατά δύο μεγαλύτερος και επομένως σε κάθε άτομο αντιστοιχούν δύο ακόμη κομμάτια, ένα από κάθε σοκολάτα.

10.3.1.3. Κατηγορία ΙΙΙ

Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας αφορούσαν δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Ο αριθμός των αγαθών της δεύτερης κατάστασης ήταν πολλαπλάσιο της πρώτης και ο αριθμός των ατόμων ήταν μικρότερος του αντίστοιχου πολλαπλάσιου του αριθμού των ατόμων της πρώτης κατάστασης. Έτσι, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα και πραγματοποιήθηκε ο ακόλουθος διάλογος:

> 9 αγόρια μοιράζονται δίκαια 6 σοκολάτες.
> 21 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 18 σοκολάτες.
> Σε ποια παρέα θα προτιμούσες να είσαι για να φας περισσότερη σοκολάτα;

Μ: Οι σοκολάτες είναι τριπλάσιες, άρα αν ήταν και τα κορίτσια τριπλάσια θα ήταν είκοσι επτά.

Ε: Για πες μου τα μερίδια σε κάθε παρέα.

Μ: 6/9 και 18/21 και 18/27

Ε: Σε ποια παρέα θα προτιμούσες να είσαι;

Μ: Θα προτιμούσα να είμαι σε αυτή την παρέα [δείχνει την παρέα των κοριτσιών] γιατί εδώ [στην παρέα των αγοριών] είναι πιο πολλά κομμάτια, οπότε θα προτιμούσα να είμαι σε αυτή την παρέα [των κοριτσιών] που τρώω πιο πολύ.

Η Μαρία, κατάφερε να συγκρίνει τις δύο καταστάσεις φαντάζοντας και πάλι τους τεμαχισμούς που πρέπει να γίνουν σε καθεμία. Στην παρέα των κοριτσιών, όπου είκοσι ένα κορίτσια μοιράζονται δεκαοκτώ σοκολάτες, κάθε σοκολάτα χρειάζεται να τεμαχιστεί σε είκοσι ένα κομμάτια και κάθε κορίτσι να φάει ένα κομμάτι από κάθε σοκολάτα, δηλαδή δεκαοκτώ κομμάτια. Στην παρέα των αγοριών, όπου εννιά αγόρια μοιράζονται έξι σοκολάτες, το οποίο ισοδυναμεί με είκοσι επτά αγόρια να μοιράζονται δεκαοκτώ σοκολάτες, κάθε σοκολάτα πρέπει να τεμαχιστεί σε είκοσι επτά κομμάτια και κάθε αγόρι να φάει ένα κομμάτι από την καθεμία, συνολικά, δηλαδή, δεκαοκτώ κομμάτια. Παρόλο που ο αριθμός των κομματιών που αντιστοιχεί σε κάθε αγόρι και σε κάθε κορίτσι είναι ο ίδιος, το μέγεθος των κομματιών που αντιστοιχούν στα αγόρια είναι μικρότερο από αυτό των κομματιών που αντιστοιχούν στα κορίτσια, αφού κάθε σοκολάτα έχει τεμαχιστεί σε περισσότερα μέρη στην παρέα των αγοριών. Έτσι, η Μαρία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στην παρέα των κοριτσιών το μερίδιο που προκύπτει από τη μοιρασιά είναι μεγαλύτερο από αυτή των αγοριών.

10.3.1.4. Κατηγορία IV

Η τελευταία κατηγορία προβλημάτων αφορούσε δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς με τη δεύτερη να έχει πολλαπλάσιο αριθμό αγαθών σε σχέση με την πρώτη και μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πολλαπλάσιο αριθμό ατόμων, με αποτέλεσμα το μερίδιο της δεύτερης να είναι μεγαλύτερο από αυτό της πρώτης. Για παράδειγμα, δόθηκε το εξής πρόβλημα και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

> 4 αγόρια μοιράζονται δίκαια 3 σοκολάτες.
> 11 κορίτσια μοιράζονται δίκαια 6 σοκολάτες.
> Σε ποια παρέα θα προτιμούσες να είσαι για να φας περισσότερη σοκολάτα;

Μ: Εδώ είναι διά [αναφέρεται στον αριθμό των σοκολατών] δύο, εδώ δεν είναι. Αν ήταν ίσα θα ήταν οκτώ [κορίτσια].

Ε: Πόσο τρώνε σε κάθε περίπτωση;

Μ: 3/4, δηλαδή 6/8 και 6/11. Θα προτιμούσα να είμαι σε αυτή την παρέα [δείχνει την παρέα των αγοριών] γιατί είναι μεγαλύτερα τα κομμάτια.

Η Μαρία, κάνοντας νοητά τους τεμαχισμούς για κάθε κατάσταση, βρήκε ότι ενώ στην παρέα των αγοριών το μερίδιο είναι 3/4 και ένα ισοδύναμο αυτής είναι 6/8, το μερίδιο που προκύπτει στην παρέα των κοριτσιών είναι 6/11. Στη συνέχεια, συμπέρανε ότι αφού στις δύο παρέες ο αριθμός των αγαθών είναι ο ίδιος, αλλά ο αριθμός των κοριτσιών είναι μεγαλύτερος από αυτόν των αγοριών, κάθε σοκολάτα στην παρέα των κοριτσιών θα τεμαχιστεί σε περισσότερα κομμάτια και επομένως το μερίδιο στην παρέα των κοριτσιών θα είναι μικρότερο.

10.3.1.5. Αναστοχασμός

Η Μαρία, μέσα από την ισοδυναμία των καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς κατάφερε να κάνει συγκρίσεις μεταξύ των κλασμάτων που αντιπροσωπεύουν τα μερίδια κάνοντας συσχετίσεις μεταξύ των ατόμων και των αγαθών και όχι εφαρμόζοντας αλγοριθμικές διαδικασίες. Η ερμηνεία, όμως, του κλάσματος ως μέρος-όλου φαίνεται να επανεμφανίζεται στον τρόπο σκέψης της και να δυσκολεύει τη μαθήτρια στην ανάπτυξη πιο πολύπλοκων συλλογισμών για τη σύγκριση κλασμάτων. Μια πιθανή εξήγηση της επιμονής της Μαρίας σε αυτή την ερμηνεία είναι η έμφαση η οποία δίνεται από τους εκπαιδευτικούς στην ερμηνεία αυτή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των κλασμάτων.

Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου δίνει έμφαση περισσότερο στον αριθμό των κομματιών που αντιπροσωπεύει το κλάσμα και λιγότερο στην ποσότητα στην οποία αυτό αναφέρεται. Έτσι, η σύγκριση μεταξύ δύο ετερώνυμων κλασμάτων με βάση αυτή την ερμηνεία γίνεται δύσκολη και πιθανώς να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, αν κάποιος συγκρίνει τα κλάσματα 3/10 και 5/20 με βάση την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι το κλάσμα 5/20 είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα 3/10, καθώς το πρώτο αναπαριστά πέντε κομμάτια ενώ το δεύτερο μόλις τρία. Ένας τέτοιος όμως συλλογισμός δεν λαμβάνει υπόψιν ότι κάθε κλάσμα αναφέρεται σε διαφορετική ποσότητα και επομένως τα κομμάτια που συγκρίνονται δεν είναι τα ίδια. Η μόνη περίπτωση που θα ίσχυε ένας τέτοιος συλλογισμός θα ήταν αν τα κλάσματα που συγκρίνονταν ήταν ομώνυμα όπως τα 3/10 και 5/10, όπου τα κομμάτια θα ήταν ίσου μεγέθους, αφού θα είχαν την ίδια μονάδα αναφοράς.

Μέσα από τις απαντήσεις της Μαρίας φαίνεται μια αστάθεια ως προς το συλλογισμό που χρησιμοποιεί για τη σύγκριση των κλασμάτων. Στις αρχικές απαντήσεις της Μαρίας στα πρώτα προβλήματα που της δόθηκαν σε αυτή τη συνάντηση δεν αξιοποίησε την ισοδυναμία των καταστάσεων και των αντίστοιχων κλασμάτων για τη σύγκριση τους. Αντίθετα, χρησιμοποίησε διαφορετικά επιχειρήματα όπως τη σύγκριση των κλασμάτων μέσω της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος-όλου, όπως η παραπάνω, ή τη σύγκριση της διαφοράς του αριθμητή από τον παρονομαστή των δύο κλασμάτων. Τελικά βέβαια, κατάφερε να αξιοποιήσει την ισοδυναμία των κλασμάτων για να συγκρίνει τις δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, μετά από μια παρότρυνση προς αυτή την κατεύθυνση, μέσα από τις ερωτήσεις που της τέθηκαν.

Θα παρουσίαζε ενδιαφέρον η Μαρία να απασχοληθεί επίσης με προβλήματα σύγκρισης κλασμάτων με καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, τα μερίδια των οποίων θα αντιπροσωπεύονταν από δύο κλάσματα στα οποία ούτε οι αριθμητές αλλά ούτε και οι παρονομαστές τους θα συνδέονταν με κάποια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ τους, όπως το 2/3 και το 3/4. Με βάση την ίδια συλλογιστική που ανέπτυξε στα προηγούμενα προβλήματα, θα μπορούσε να βρει δύο ισοδύναμες καταστάσεις με μερίδια 8/12 και 6/12 αντίστοιχα ή 6/9 και 6/8 και στη συνέχεια να τα συγκρίνει, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που ανέπτυξε παραπάνω.

Συμπερασματικά, η Μαρία φάνηκε ικανή να χρησιμοποιήσει την ισοδυναμία των καταστάσεων για να συγκρίνει δύο ετερώνυμα κλάσματα, ακόμη κι αν δεν ήταν αυτή η πρώτη της σκέψη. Κάνοντας συσχετίσεις μεταξύ των αγαθών και των ατόμων στις δύο καταστάσεις προς σύγκριση μπόρεσε να αναπτύξει λογικά επιχειρήματα για όλες τις περιπτώσεις με τις οποίες ήρθε σε επαφή. Ίσως χρειαζόταν να έχει εμπλακεί πρώτα με προβλήματα που αφορούσαν τη σύγκριση κλασμάτων μέσω καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς με ίδιο αριθμό ατόμων και διαφορετικό αριθμό αγαθών και το αντίστροφο. Λόγω, όμως χρονικών περιορισμών δεν δόθηκαν τέτοιου είδους προβλήματα στη μαθήτρια, τα οποία ίσως να είχαν αναδείξει τις εναλλακτικές ιδέες της Μαρίας για τη σύγκριση κλασμάτων και να είχαν ξεπεραστεί πριν δοθούν τα προβλήματα αυτής της συνάντησης, τα οποία χαρακτηρίζονταν από μια μεγαλύτερη δυσκολία.

11. Συμπεράσματα

Μέσα από το πείραμα σχεδιασμού που υλοποιήθηκε διαγράφηκε ένα πιθανό μονοπάτι μάθησης για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των ισοδύναμων κλασμάτων μέσα από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, χρησιμοποιώντας την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο.

Η Μαρία, στην αρχή του πειράματος αντιμετώπιζε τα κλάσματα κυρίως μέσω της ερμηνείας του μέρους-όλου, παρά το πλαίσιο των προβλημάτων με τις καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, το οποίο είχε ως στόχο την ανάπτυξη της ερμηνείας του πηλίκου. Η ερμηνεία αυτή από τη μία πλευρά βοήθησε τη Μαρία να εκφράζει το μερίδιο των ατόμων στην εκάστοτε κατάσταση, αλλά από την άλλη δεν επέτρεπε την κατανόηση και τη δημιουργία καταχρηστικών κλασμάτων.

Στις πρώτες συναντήσεις επίσης, η Μαρία αντιμετώπιζε κάθε κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς με τον ίδιο προβληματισμό αναφορικά με τον τρόπο που θα τεμαχίσει τα αγαθά προκειμένου να οδηγηθεί σε μια δίκαιη μοιρασιά. Όταν όμως ενεπλάκη με προβλήματα που αναδείκνυαν τον τρόπο που επιδρούν στο μερίδιο και στο αντίστοιχο κλάσμα ο αριθμός των αγαθών και ο αριθμός των ατόμων, σταμάτησε να αναρωτιέται για τον τρόπο με τον οποίο θα τεμαχίσει τα αγαθά σε κάθε κατάσταση και συνειδητοποίησε ότι ο τεμαχισμός κάθε αγαθού σε τόσα κομμάτια όσα ορίζει ο αριθμός των ατόμων καταλήγει πάντα σε μια δίκαιη μοιρασιά. Από τη στιγμή που ο τεμαχισμός των αγαθών σταμάτησε να αποτελεί αντικείμενο πειραματισμού για τη Μαρία, ο προσδιορισμός του μεριδίου σε κάθε κατάσταση γινόταν με ευκολία, τεμαχίζοντας κάθε αγαθό σε τόσα κομμάτια όσα ο αριθμός των ατόμων και επαναλαμβάνοντας το ένα κομμάτι από αυτά τόσες φορές όσες ο αριθμός των αγαθών. Όταν η Μαρία εσωτερίκευσε αυτή την ιδέα για το κλάσμα δεν είχε ανάγκη να σχεδιάζει τα αγαθά και να τα τεμαχίζει, αλλά γνώριζε εκ των προτέρων το μερίδιο κάθε κατάστασης και τον τρόπο με τον οποίο αυτό σχηματίζεται. Ήταν μάλιστα σε θέση να ερμηνεύει ένα οποιοδήποτε κλάσμα α/β ως ένα αποτέλεσμα μιας κατάστασης δίκαιης μοιρασιάς κατά την οποία α αγαθά μοιράζονται μεταξύ β ατόμων και ως αποτέλεσμα οποιασδήποτε άλλης ισοδύναμης κατάστασης με αυτή. Ενώ, λοιπόν, στην αρχή η Μαρία αντιμετώπιζε τους όρους του κλάσματος ως δύο διαφορετικούς αριθμούς που αντιπροσωπεύουν αριθμούς κομματιών, σιγά-σιγά, άρχισε να αντιμετωπίζει το κλάσμα ως έναν αριθμό επαναλήψεων ενός κλασματικού μέρους. Η εννοιολογική αυτή αλλαγή για την αντιμετώπιση του κλάσματος, με την οποία αναδύθηκε η πολλαπλασιαστική φύση του κλάσματος, επέτρεψε στη Μαρία να χρησιμοποιεί καταχρηστικά κλάσματα για να εκφράσει ένα μερίδιο από μια μοιρασιά, ξεπερνώντας την προηγούμενη δυσκολία της.

Οι πρώτες συναντήσεις με τη μαθήτρια στις οποίες διερευνήθηκαν όλα τα στοιχεία που συμμετέχουν στην ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, κρίθηκαν ιδιαίτερα ωφέλιμες, καθώς από τη στιγμή που η Μαρία ανέπτυξε την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, –παρόλο που η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου διατηρούσε την κυριαρχία στη σκέψη της- η ανάπτυξη της ισοδυναμίας μέσα από αυτό το πλαίσιο εμφανίστηκε ως άμεση επέκταση των προηγούμενων γνώσεων. Με αναπτυγμένη, πλέον την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, η Μαρία αντιμετώπισε με ευκολία την ισοδυναμία δύο καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς. Αντιλήφθηκε ότι σε δύο ισοδύναμες καταστάσεις και αντίστοιχα σε δύο ισοδύναμα κλάσματα η ποσότητα που αναπαριστούν είναι η ίδια, είτε είναι τεμαχισμένα με τον ίδιο είτε με διαφορετικό τρόπο και επιπλέον ότι αυτά τα δύο κλάσματα συνδέονται μεταξύ τους με μια πολλαπλασιαστική σχέση. Έτσι, ήταν σε θέση πέρα από το να αντιλαμβάνεται αν δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς είναι ισοδύναμες ή όχι, στη συνέχεια ήταν ικανή να βρίσκει η ίδια είτε τον αριθμό των ατόμων είτε τον αριθμό των αγαθών μίας κατάστασης με δεδομένο ότι είναι ισοδύναμη με μια δεύτερη κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς της οποίας δίνονταν όλα τα στοιχεία.

Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις της για τα ισοδύναμα κλάσματα, ήταν ικανή στη συνέχεια να συγκρίνει δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς όχι εφαρμόζοντας μια στείρα διαδικασία, αλλά βλέποντας τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών των ατόμων και των αγαθών των δύο καταστάσεων. Παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισε κυρίως λόγω της επανεμφάνισης της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος-όλου, κατάφερε να συγκρίνει δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, βρίσκοντας μια ισοδύναμη, ούτως ώστε είτε ο αριθμός των ατόμων είτε ο αριθμός των αγαθών στις δύο καταστάσεις να είναι ο ίδιος. Στην περίπτωση που προέκυπτε ο ίδιος αριθμός μεταξύ των ατόμων, η κατάσταση με το μεγαλύτερο μερίδιο ήταν εκείνη με τα περισσότερα αγαθά, αφού σε κάθε άτομο αναλογούσαν περισσότερα κομμάτια, ενώ στην περίπτωση που προέκυπτε ίδιος αριθμός μεταξύ των αγαθών, η κατάσταση με το μεγαλύτερο μερίδιο ήταν εκείνη με το μικρότερο αριθμό ατόμων, αφού κάθε αγαθό τεμαχιζόταν σε μεγαλύτερα κομμάτια.

Συμπερασματικά, η Μαρία ανέπτυξε την εννοιολογική κατανόηση για τα ισοδύναμα κλάσματα. Παρόλο που δεν αναφέρθηκε ρητά, οικοδόμησε ένα επιχείρημα για το λόγο για τον οποίο μέσα από τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό προκύπτουν ισοδύναμα κλάσματα, μέσα από την αντιμετώπιση του κλάσματος ως πηλίκο διαίρεσης. Θα παρουσίαζε μεγάλο ενδιαφέρον αν μετά την ολοκλήρωση του πειράματος σχεδιασμού η Μαρία ρωτούταν και πάλι, όπως ρωτήθηκε στην αρχή αυτού, γιατί ισχύει ο αλγόριθμος για τη δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων. Οι χρονικοί περιορισμοί, όμως, δεν επέτρεψαν μια τελευταία συνάντηση με τη μαθήτρια, στην οποία θα πραγματοποιούταν μια τέτοια συζήτηση. Το ζητούμενο της διδασκαλίας σε μια τάξη είναι η ανάπτυξη μιας εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων η οποία να συνδέεται με τις διαδικασίες που εφαρμόζονται, είτε χρησιμοποιώντας την ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο, είτε κάποια άλλη ή και όλες μαζί, καθώς μέσα από την επαφή με τις διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος, αναδεικνύονται διαφορετικά στοιχεία αυτού και η γνώση των μαθητών/-τριων γίνεται βαθύτερη.

Ως περαιτέρω έρευνα, θα μπορούσε να διερευνηθεί η ισοδυναμία των κλασμάτων μέσα από διαφορετικά μονοπάτια μάθησης, όπως για παράδειγμα μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο. Βέβαια, οι οποιασδήποτε μορφής συγκρίσεις μεταξύ των δύο πορειών θα ήταν αρκετά δύσκολη, δεδομένου ότι αναγκαστικά θα χρειαζόταν να γίνει σε διαφορετικά παιδιά με διαφορετικά σημεία αφετηρίας και τρόπους λειτουργίας. Παρόλα αυτά, ίσως να αναδεικνύονταν οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να έρθουν στο προσκήνιο οι διάφορες ιδέες του κλάσματος οι οποίες εμπλέκονται με τα ισοδύναμα κλάσματα, οι ερμηνείες που καθιστούν πιο εύκολη την ανάπτυξη κάθε ιδέας καθώς και οι τρόποι με τους οποίους συνδέονται οι ερμηνείες μεταξύ τους. Ήδη από το παρόν πείραμα σχεδιασμού, αναδείχθηκαν ορισμένες συνδέσεις μεταξύ της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο, ως μέρος-όλου και ως μέτρο. Για τον προσδιορισμό του μεριδίου από ένα πηλίκο κάποιων αγαθών σε κάποια άτομα, όπως ήδη αναφέρθηκε, η αντιμετώπιση του κλάσματος ως μέρος-όλου μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη για τον τεμαχισμό κάθε αγαθού στον κατάλληλο αριθμό κομματιών και τον προσδιορισμό του μεριδίου. Παράλληλα, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο επιτρέπει μια διαφορετική προσέγγιση για τον προσδιορισμό του μεριδίου μέσα από την επανάληψη ενός κλασματικού μέρους τις κατάλληλες φορές ώστε να εξαντληθεί όλη η ποσότητα. Αναμφισβήτητα, περαιτέρω έρευνα θα έριχνε περισσότερο φως στον τρόπο σύνδεσης μεταξύ των διαφορετικών ερμηνειών των κλασμάτων.

Βιβλιογραφία

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying teaching and learning. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.365-402). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1–34). Mahwah, NJ: Lawrence, Erlbaum.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91–125). New York: Academic Press.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(4), 281-305.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the *29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, No. 2, pp. 233-240). Melbourne, Australia: PME.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307–333). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cortina, J. L., Višňovská, J., & Zúñiga, C. (2014). Equipartition as a didactical obstacle in fraction instruction. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Empson, S. B. (1995). Using sharing situations to help children learn fractions. *Teaching Children Mathematics*, *2*(2), 110-114.

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 283-342.

Gould, P. (2005). Year 6 students' methods of comparing the size of fractions. In *Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 393-400). Sydney: MERGA.

Gould, P. (2013). Australia's next top fraction model. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *18*(3), 5-12.

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(1)*,* 27–47.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383–432.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 395–406.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Eds.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(4), 365-378.

Kara, M., Simon, M. A., & Placa, N. (2018). An empirically-based trajectory for fostering abstraction of equivalent-fraction concepts: A study of the learning through activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, *52*(1), 134-150.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101–144). Athens, GA: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170–193.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New York: Routledge.

Lee, S. J., & Shin, J. (2015). Distributive partitioning operation in mathematical situations involving fractional quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 329-355.

Μαθηματικά Ε' Δημοτικού (2018). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά Ε' Δημοτικού: Βιβλίο Εκπαιδευτικού (2018). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά Ε’ Δημοτικού: Τετράδιο Εργασιών (2018). Αθήνα: Ινστιτούτο Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά ΣΤ’ Δημοτικού (2005). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά ΣΤ’ Δημοτικού: Βιβλίο Δασκάλου (2005). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά ΣΤ’ Δημοτικού: Τετράδιο Εργασιών, Β’ Τεύχος, (2005). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά της φύσης και της Ζωής Γ’ Δημοτικού (2006). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά της φύσης και της Ζωής Γ’ Δημοτικού: Βιβλίο Δασκάλου (2006). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μαθηματικά της φύσης και της Ζωής Γ’ Δημοτικού: Τετράδιο Εργασιών, Β’ Τεύχος (2006). Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Ma, L. (2010). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. New York: Routledge.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 422–441.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3)*,* 267–295.

Mamede, E., & Oliveira, M. (2010). Issues On Children’s Ideas of Fraction when Quotient Interpretation is Used. Proceedings of the *7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Poland: Rzeszów.

McCloskey, A. V., & Norton, A. H. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(1), 44-50.

Naik, S., & Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpretation of fractions. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *International group of the psychology of mathematics education:* Proceedings of the *Joint Meeting of PME* (Vol. 32, pp. 17-24). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH.

National Research Council. (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*(3), 400-417.

Norton, A. H., & McCloskey, A. V. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, *15*(1), 48-54.

Norton, A., & Hackenberg, A. J. (2010). Continuing research on students’ fraction schemes. In L. Steffe, & J. Olive (Eds.), *Children’s Fractional Knowledge* (pp. 341-352). New York: Springer.

Norton, A., & Wilkins, J. L. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(2-3), 150-161.

Olive, J., & Lobato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology in the Teaching and Learning of Mathematics*: *Volume I. Research syntheses*. North Carolina: Information Age Publishing, Inc.

Olive, J., & Steffe, L. (2002). Schemes, schemas and director systems. In D. O. Tall & M. O. J. Thomas (Eds.), *Intelligence, Learning and Understanding in mathematics: A Tribute to Richard Skemp* (pp. 97–130). Flaxton, QLD: Post Pressed.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in mathematics*, *79*(1), 61-83.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(4), 587-597.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2)*,* 346–362.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(2), 114–145.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77(1)*, 20–26.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 267–307.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 237-295.

Steffe, L. P. (2010). The partitive and the part-whole schemes. In L. P. Steffe, & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 75-122). New York:Springer.

Steffe, L. P., & Olive, J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in a computer microworld. *Journal of Educational Computing Research*, *14*(2), 113-138.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge.* New York: Springer.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–306). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L. P., Liss, D. R. I., & Lee, H. Y. (2014). On the operations that generate intensive quantity. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, 49-79.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York, NY: Free Press.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publications.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course: A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1-2), 109-135.

Streefland, L. (1993b). Fractions: A realistic approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema, and T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp.289-325). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W. (2010). Forward. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge*. New York: Springer.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Toluk, Z., & Middleton, J. A. (2001). The development of children's understanding of the quotient: A teaching experiment. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-265).

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419-441.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.

Tzur, R. (2004). Teacher and students' joint production of a reversible fraction conception. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 93–114.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* Washington, DC: Falmer Press.

Wong, M. (2010). Equivalent fractions: Developing a pathway of students' acquisition of knowledge and understanding. In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education*. Proceedings of the *33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 673–680). Fremantle: MERGA.

Wong, M., & Evans, D. (2007). Students' conceptual understanding of equivalent fractions. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) Proceedings of the *30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 824–833). Tasmania, Australia: MERGA.