Φασματικά Θεωρήματα και Εφαρμογές

Κωτσογιάννη Ασπασία
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

8 Οκτωβρίου 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιβλέποντες

Γ. Μπαρμπάτης, καθηγητής (**Επιβλέπων**)
Δ. Γατζούρας, καθηγητής (**Επιβλέπων**)
Α. Γιαννόπουλος, καθηγητής

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στους επιβλέποντες της εργασίας κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη και κ. Δημήτριο Γατζούρα. Χωρίς την πολύτιμη βοήθεια τους σε επιστημονικά και διαδικαστικά ζητήματα, την ηθική υποστήριξη και την εμπιστοσύνη τους, η πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη. Ακόμα, ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στους διδάσκοντες του προγράμματος, αλλά και στους συμφοιτητές μου. Κλείνοντας, ευχαριστώ ειλικρινά, τους γονείς μου Σεραφείμ και Χριστίνα αλλά και την αδελφή μου Πέγκυ για την ηθική τους στήριξη και τους ευγνωμονώ που στέκονται πάντα δίπλα μου τόσο στις επιτυχίες όσο και στις αποτυχίες, δίνοντας μου την ελπίδα και τη δύναμη να συνεχίσω να προσπαθώ για το καλύτερο.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε το φασματικό θεώρημα στις διάφορες μορφές του. Η μορφή με την οποία θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα αναφέρεται στο ότι κάθε φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής είναι πολλαπλασιαστικός τελεστής. Αυτό σημαίνει ότι για δοσμένο φραγμένο τελεστή σε κάποιο χώρο Hilbert, μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο μ σε χώρο M και έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $U\colon H \longrightarrow L^2(M,\mu)$ έτσι ώστε

$$(UAU^{-1}f)(x) = F(x)f(x)$$

για κάποια φραγμένη, πραγματική, μετρήσιμη συνάρτηση F στον M.

Abstract

In this master thesis we will discuss the spectral theorem in its many guises. The form we prefer says that every bounded self-adjoint operator is a multiplication operator. This means that given a bounded self-adjoint operator on a Hilbert space H, we can always find a measure μ on a measure space M and a unitary operator $U\colon H \longrightarrow L^2(M, \mu)$ so that

$$(UAU^{-1}f)(x) = F(x)f(x)$$

for some bounded real-valued measurable function F on M.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία, θα ασχοληθούμε με το φασματικό θεώρημα στις διάφορες μορφές του και ειδικότερα με την πολλαπλασιαστική του μορφή. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα κάνουμε μια σύντομη αλλά σημαντική αναφορά στις ιδιότητες των τελεστών σε χώρους Hilbert καθώς και στις μονότονες ακολουθίες τελεστών. Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στις Borel συναρτήσεις και στα μέτρα με τιμές στις προβολές (projection valued measures). Στο τέταρτο κεφάλαιο θα αναλύσουμε την έννοια του συνεχούς συναρτησιακού λογισμού και των ιδιοτήτων που τον συνοδεύουν. Ακόμα, θα αναφερθούμε στα φασματικά μέτρα και τις φασματικές προβολές. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε το συναρτησιακό λογισμό αρχικά σε ημισυνεχείς και έπειτα σε Borel συναρτήσεις. Επιπλέον, θα διατυπωθεί και θα αποδειχθεί το φασματικό θεώρημα για φραγμένους, αυτοσυζυγείς τελεστές. Στο πέμπτο κεφάλαιο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το κριτήριο του Weyl για φραγμένους, αυτοσυζυγείς τελεστές. Στο έκτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην εναλλακτική προσέγγιση του συναρτησιακού λογισμού. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδειχθεί το φασματικό θεώρημα με τη χρήση σειρών Fourier. Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας θα διατυπωθεί το εργοδικό θεώρημα και θα αποδειχθεί με τη χρήση του φασματικού θεωρήματος.

2 Τελεστές σε χώρους Hilbert

2.1 Βασικές ιδιότητες

Ορισμός 2.1. Έστω H, F χώροι εσωτερικού γινομένου. Μία γραμμική απεικόνιση $T\colon H \longrightarrow F$ λέγεται γραμμικός τελεστής. Για κάθε γραμμικό τελεστή T ορίζονται τα σύνολα

$$\ker(T) = \{x \in H \colon Tx = 0\} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{range}(T) = \{Tx \colon x \in H\},$$

γραμμικοί υπόχωροι των H και F αντίστοιχα. Οι υπόχωροι αυτοί ονομάζονται *πυρήνας* και *εικόνα* του T, αντίστοιχα.

Ορισμός 2.2. Έστω H, F χώροι εσωτερικού γινομένου. Για κάθε γραμμικό τελεστή $T\colon H \longrightarrow F$ ορίζεται ο αριθμός

$$\|T\| := \inf\{M \colon \|Tx\| \leqslant M\|x\| \text{ για κάθε } x \in H\},$$

όπου ορίζουμε το infimum του κενού συνόλου να είναι το $+\infty$. Ο τελεστής T είναι *φραγμένος* αν $\|T\| < +\infty$. Τον γραμμικό χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T\colon H \longrightarrow F$ θα συμβολίζομαι στο εξής με $\mathcal{B}(H,F)$. Για $T \in \mathcal{B}(H,F)$, ο αριθμός $\|T\|$ ονομάζεται *νόρμα* του T.

Πρόταση 2.3. *Ισχύει*

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \colon x \neq 0\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \colon \|x\| \leqslant 1\right\} \\
&= \sup\left\{\|Tx\| \colon \|x\| = 1\right\} \\
&= \inf\left\{M \colon \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M, \ \textit{για κάθε } x \neq 0\right\} \\
&= \inf\left\{M \colon \|Tx\| \leqslant M, \textit{για κάθε } x \in H \ \textit{με } \|x\| \leqslant 1\right\} \\
&= \inf\left\{M \colon \|Tx\| \leqslant M, \textit{για κάθε } x \in H \ \textit{με } \|x\| = 1\right\}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.4. *Έστω $T \in \mathcal{B}(H,F)$. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(H,F)$ ώστε $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ για κάθε $x \in H$, $y \in F$. Ο τελεστής T^* ονομάζεται συζυγής του T.*

Πρόταση 2.5. *Έστω H, F, K χώροι εσωτερικού γινομένου, $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H,F)$ και $S \in \mathcal{B}(F,K)$. Τότε έχουμε:*

(α) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ ·

(β) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$·

(γ) $(ST)^* = T^* S^*$·

(δ) $T^{**} = T$·

(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$·

(στ) $\|T^*\| = \|T\|$·

(ζ) *αν ο T είναι αντιστρέψιμος τότε και ο T^* είναι αντιστρέψιμος και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Ορισμός 2.6. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H, F)$ για τον οποίο ισχύει $T^* = T$ λέγεται *αυτοσυζυγής*.

Άρα ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Οι αυτοσυζυγείς τελεστές παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη συναρτησιακή ανάλυση καθώς και στη μαθηματική φυσική. Για το λόγο αυτό θα αφιερώσουμε πολύ χρόνο στη μελέτη τους στην παρούσα εργασία.

Πρόταση 2.7. *Ισχύουν τα εξής:*

(α) *T αυτοσυζυγής, $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda T$ αυτοσυζυγής·*

(β) *T_1, T_2 αυτοσυζυγείς $\Longrightarrow T_1 + T_2$ αυτοσυζυγής·*

(γ) *αν T_1, T_2 αυτοσυζυγείς, τότε $T_1 T_2$ αυτοσυζυγής $\Longleftrightarrow T_1 T_2 = T_2 T_1$·*

(δ) *αν T_n αυτοσυζυγής και $T_n \longrightarrow T$ τότε T αυτοσυζυγής*
(όπου $T_n \longrightarrow T \Longleftrightarrow \|T_n - T\| \longrightarrow 0$)·

(ε) *αν T αυτοσυζυγής τότε $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.*

Πρόταση 2.8. *Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$*

Πρόταση 2.9. *Αν ο T είναι αυτοσυζυγής τότε:* (α) *όλες οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές και* (β) *ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.*

2.2 Μονότονες ακολουθίες τελεστών

Ορισμός 2.10. Έστω H χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $B \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται *θετικά ημιορισμένος* αν $\langle Bx, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in H$. Γράφουμε $B \geqslant 0$ αν ο B είναι θετικά ημιορισμένος και $B \leqslant A$ αν $A - B \geqslant 0$.

Λήμμα 2.11. *Αν A φραγμένος, θετικά ημιορισμένος τελεστής*

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Η απεικόνιση

$$(x, y) \longmapsto \langle (A+\epsilon)x, y\rangle$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο. Συνεπώς από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε ότι

$$|\langle (A+\epsilon)x, y\rangle|^2 \leqslant \langle (A+\epsilon)x, x\rangle\langle (A+\epsilon)y, y\rangle.$$

Παίρνοντας στην παραπάνω $\epsilon \longrightarrow 0$, προκύπτει το ζητούμενο. □

Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει αυτό το αποτέλεσμα ως μια οικογένεια από γενικεύσεις της ανισότητας Cauchy–Schwarz.

Λήμμα 2.12. *Αν A είναι ένας φραγμένος, θετικά ημιορισμένος τελεστής,*

$$\|Ay\|^2 \leqslant \|A\|\langle Ay, y\rangle.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.11 για $x = Ay$:

$$\begin{aligned}\|Ay\|^4 &= \langle Ay, Ay\rangle^2 \\ &\leqslant \langle Ay, y\rangle\langle A^2y, Ay\rangle \\ &\leqslant \langle Ay, y\rangle\|A^2y\|\|Ay\| \\ &\leqslant \langle Ay, y\rangle\|A\|\|Ay\|^2.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.13. *Έστω H χώρος Hilbert και A, B φραγμένοι, θετικά ημιορισμένοι γραμμικοί τελεστές στον H με $A \leqslant B$. Τότε $\|A\| \leqslant \|B\|$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Τότε από το Λήμμα 2.12,

$$\|Ax\|^2 \leqslant \|A\|\langle Ax, x\rangle \leqslant \|A\|\langle Bx, x\rangle \leqslant \|A\|\|Bx\|\|x\| \leqslant \|A\|\|B\|\|x\|^2.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x \in H$, έπεται ότι $\|A\| \leqslant \sqrt{\|A\|\|B\|}$, από όπου έπεται ότι $\|A\| \leqslant \|B\|$. □

Θεώρημα 2.14. *Μια αύξουσα ακολουθία από αυτοσυζυγείς τελεστές $\{A_n\}_n$ τέτοια ώστε $A_n \leqslant B$ για κάθε n, όπου B είναι φραγμένος τελεστής, συγκλίνει ισχυρά σε κάποιον τελεστή A με $A \leqslant B$.*

Απόδειξη. Για κάθε σταθερό διάνυσμα x, έχουμε:

$$\langle A_n x, x\rangle \leqslant \langle A_{n+1}x, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle$$

και επομένως $\lim_{m,n\to\infty}\langle (A_n - A_m)x, x\rangle = 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.12 και το Λήμμα 2.13, έχουμε

$$\begin{aligned}\|(A_n - A_m)x\|^2 &\leqslant \|A_n - A_m\|\langle (A_n - A_m)x, x\rangle \\ &\leqslant \|B - A_1\|\langle (A_n - A_m)x, x\rangle\end{aligned}$$

για $n \geqslant m \geqslant 1$. Επομένως έχουμε ότι $\lim_{m,n\to\infty}\|(A_n - A_m)x\|^2 = 0$, δηλαδή $\{A_n x\}_n$ είναι ακολουθία Cauchy. Αν ονομάσουμε το όριο Ax, τότε είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι ορίζει έναν τελεστή A, για τον οποίο ισχύει $A \leqslant B$. □

Λήμμα 2.15. *Μια φθίνουσα ακολουθία από θετικά ημιορισμένους τελεστές $\{A_n\}_n$ συγκλίνει ισχυρά.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.14 για την $\{-A_n\}_n$, η οποία είναι φραγμένη από το 0. □

2.3 Το Φάσμα

Ορισμός 2.16. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$. Το *επιλυτικό* σύνολο $\rho(T)$ του T ορίζεται ως το σύνολο όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο $zI - T$ (ή για συντομία $z - T$) είναι 1-1 και επί και ο αντίστροφος $(z-T)^{-1}$ είναι φραγμένος. Το φάσμα $\sigma(T)$ είναι το σύνολο $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Παρατήρηση. Αν ο H έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε το φάσμα συμπίπτει με το σύνολο των ιδιοτιμών του τελεστή.

Ορισμός 2.17. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$. Τότε η $r(T) = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\}$ λέγεται φασματική ακτίνα του T.

Θεώρημα 2.18. *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$. Ισχύει ότι $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Θεώρημα 2.19. *Έστω T φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert H. Τότε $r(T) = \|T\|$.*

Το φασματικό θεώρημα για τελεστές σε χώρους άπειρης διάστασης είναι περισσότερο περίπλοκο από το φασματικό θεώρημα για τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Έστω H, F χώροι Hilbert.

Ορισμός 2.20. Ένας τελεστής $T \colon H \longrightarrow F$ λέγεται *συμπαγής* αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subseteq H$, η ακολουθία (Tx_n) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία (στον F).

Ορισμός 2.21. Ένας τελεστής $U \colon H \longrightarrow F$ λέγεται *ισομετρία* αν $\|Ux\| = \|x\|$ για κάθε $x \in H$.

Ορισμός 2.22. Ένας τελεστής $U \colon H \longrightarrow F$ λέγεται *ορθομοναδιαίος* αν είναι 1-1, επί και ισχύει ότι $\|Ux\| = \|x\|$ (αν είναι δηλαδή μια επί ισομετρία).

Ορισμός 2.23. Αν $P \colon H \longrightarrow F$ και $P^2 = P$, τότε ο P λέγεται προβολή. Αν επιπροσθέτως ισχύει ότι $P = P^*$, τότε ο P καλείται ορθογώνια προβολή.

Η εικόνα (range) μιας προβολής είναι πάντα κλειστός υπόχωρος στον οποίο ο P συμπεριφέρεται ως ο ταυτοτικός τελεστής. Αν επιπλέον ο P είναι ορθογώνια προβολή, τότε ο P δρα ως ο μηδενικός τελεστής στο ορθογώνιο συμπλήρωμα της εικόνας του P $((\operatorname{Range} P)^{\perp})$.

Θεώρημα 2.24. *Έστω $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ πολυώνυμο και έστω $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$. Τότε $\sigma(P(A)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \sigma(A)$. Εφόσον $x = \lambda$ είναι ρίζα του $P(x) - P(\lambda)$, έχουμε ότι

$$P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x).$$

Επομένως $P(A) - P(\lambda) = (A - \lambda)Q(A)$. Επειδή ο $A - \lambda$ δεν αντιστρέφεται, δεν θα αντιστρέφεται ούτε ο $P(A) - P(\lambda)$. Πράγματι, καταρχήν παρατηρούμε ότι $(A - \lambda)Q(A) = Q(A)(A - \lambda)$ αφού Q πολυώνυμο. Αν ο $P(A) - P(\lambda)$ αντιστρέφεται, τότε θα είχαμε

$$B[P(A) - P(\lambda)] = I = [P(A) - P(\lambda)]B.$$

Τότε $BQ(A)(A - \lambda) = B(A - \lambda)Q(A) = B[P(A) - P(\lambda)] = I$ και όμοια $(A - \lambda)Q(A)B = I$. Όμως

$$BQ(A)(A - \lambda) = I \Rightarrow BQ(A)(A - \lambda)Q(A)B = Q(A)B$$

και

$$(A - \lambda)Q(A)B = I \Rightarrow BQ(A)(A - \lambda)Q(A)B = BQ(A).$$

Άρα $Q(A)B = BQ(A)$ και ο $A - \lambda$ αντιστρέφεται με $(A - \lambda)^{-1} = BQ(A)$, καταλήγοντας σε άτοπο. Επομένως $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$.

Αντίστροφα, έστω $\mu \in \sigma(P(A))$ και θεωρούμε $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ τις ρίζες του $P(x) - \mu$. Άρα $P(x) - \mu = a_n(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \notin \sigma(A)$ τότε $(P(A) - \mu)^{-1} = a_n^{-1}(A - \lambda_n)^{-1} \cdots (A - \lambda_1)^{-1}$. Άρα κάποια $\lambda_i \in \sigma(A)$ επομένως $\mu = P(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$. □

Θεώρημα 2.25. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής και P πολυώνυμο. Τότε* $\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.5 έχουμε ότι $\|T^*T\| = \|T\|^2$, για κάθε φραγμένο τελεστή T. Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για τον τελεστή $P(A)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\|P(A)\|^2 &= \|P(A)^*P(A)\| \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(P(A)^*P(A))} |\lambda| \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{P}P(A))} |\lambda| \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{P}P(\lambda)| \\
&= \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα επειδή αν $P(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ τότε

$$\begin{aligned}
P(A)^*P(A) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \overline{c_l} A^k (A^*)^l \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \overline{c_l} A^{k+l} \\
&= \overline{P}P(A)
\end{aligned}$$

όπου $\overline{P}(z)$ το πολυώνυμο $\overline{P}(z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k} z^k$. Το $\overline{P}P$ είναι πολυώνυμο· αυτό, μαζί με το Θεώρημα 2.24, αιτιολογούν την 4η ισότητα. Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{P}P(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \overline{c_l} \lambda^{k+l} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \overline{c_l} \lambda^k \lambda^l \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_k \overline{c_l} \lambda^k \overline{\lambda}^l \\
&= \overline{P(\lambda)} P(\lambda) \\
&= |P(\lambda)|^2,
\end{aligned}$$

επειδή $\lambda \in \mathbb{R}$ όταν $\lambda \in \sigma(A)$ για A αυτοσυζυγή. $\square$

3 Borel λογισμός

Ορισμός 3.1. Τα Borel σύνολα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ του $\mathbb{R}$ είναι η μικρότερη οικογένεια από υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Η οικογένεια είναι κλειστή κάτω από συμπληρώματα.

(β) Η οικογένεια είναι κλειστή κάτω από αριθμήσιμες ενώσεις.

(γ) Η οικογένεια περιέχει κάθε ανοιχτό διάστημα.

Ορισμός 3.2. Μια συνάρτηση f καλείται συνάρτηση Borel αν και μόνο αν το $f^{-1}((a, b))$ είναι σύνολο Borel για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.3.

(α) *Αν f, g είναι Borel, τότε και οι $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ είναι Borel. Αν η f είναι Borel και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε λf είναι επίσης Borel.*

(β) *Αν κάθε f_n, $n = 1, 2 \ldots$, είναι Borel και $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ για κάθε x, τότε η f είναι Borel.*

Θεώρημα 3.4. *Έστω f, g Borel συναρτήσεις. Τότε*

(α) *Αν $f, g \in L^1(a, b)$, τότε το ίδιο ισχύει και για τις $f + g$ και λf, για $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(β) *Αν $|g| \leqslant f$ και $f \in L^1(a, b)$, τότε $g \in L^1(a, b)$.*

(γ) $\int (f + g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx$ *αν $f, g \in L^1(a, b)$.*

(δ) $|\int f\, dx| \leqslant \int |f|\, dx$, *αν $f \in L^1(a, b)$.*

(ε) *Αν* $f \leqslant g$, *τότε* $\int f\,dx \leqslant \int g\,dx$, *αν* $f, g \in L^1(a,b)$.

(στ) *Αν* f *είναι φραγμένη και Borel στο* $-\infty < a \leqslant b < +\infty$, *τότε* $f \in L^1(a,b)$ *και*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant |b-a| \left(\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|\right).$$

3.1 Μέτρα με τιμές στις προβολές (projection valued measures)

Ορισμός 3.5. Μια οικογένεια από προβολές $\{P_\Omega \colon \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) κάθε P_Ω είναι ορθογώνια προβολή·

(β) $P_\varnothing = 0$ και $P_{(-\alpha,\alpha)} = I$ για κάποιο α·

(γ) αν $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ με $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ για όλα τα $n \neq m$, τότε $P_\Omega = s\text{–}\lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^N P_{\Omega_n})$,

λέγεται *μέτρο με τιμές στις προβολές* (projection valued measure).

Σημείωση. Η σύγκλιση $P_\Omega = s - \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^N P_{\Omega_n})$ σημαίνει σύγκλιση ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών, δηλαδή $\|P_\Omega x - \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n} x\| \longrightarrow 0$ καθώς $N \to \infty$, για κάθε $x \in H$.

Πρόταση 3.6. *Έστω H χώρος Hilbert και P, Q ορθογώνιες προβολές στον H με $P \leqslant Q$. Τότε,* $\mathrm{range}(P) \subseteq \mathrm{range}(Q)$ *και* $PQ = QP = P$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{range}(P)$. Το x μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα ως $x_1 + x_2$, όπου $x_1 = Qx \in \mathrm{range}(Q)$ και $x_2 = x - Qx \in [\mathrm{range}(Q)]^\perp$. Επομένως παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 &= \|x\|^2 \\
&= \langle x, x\rangle \\
&= \langle Px, x\rangle \\
&\leqslant \langle Qx, x\rangle \\
&= \langle x_1, x_1 + x_2\rangle \\
&= \|x_1\|^2,
\end{aligned}$$

δηλαδή $x_2 = 0$ και άρα $x = x_1 \in \mathrm{range}(Q)$.

Έστω τώρα $x \in H$. Τότε

$$QPx = Px,$$

αφού $Px \in \mathrm{range}(P) \subseteq \mathrm{range}(Q)$. Συνεπώς προκύπτει ότι $QP = P$. Παίρνοντας συζυγή, έχουμε και ότι $PQ = P$. □

Πρόταση 3.7. *Έστω H χώρος Hilbert και $P\colon H \longrightarrow H$ μέτρο με τιμές στις προβολές. Τότε $A \subseteq B \implies P_A \leqslant P_B$, για Borel σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης, $P_{A\cap B} = P_A P_B = P_B P_A$, για Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ειδικότερα, όλες οι προβολές P_A μετατίθενται και αν $A \cap B = \varnothing$ τότε $P_A P_B = 0$.*

Απόδειξη. Καταρχήν αποδεικνύουμε ότι $A \subseteq B \implies P_A \leqslant P_B$ για Borel σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Πράγματι, έχουμε ότι $B = A \cup (B \setminus A)$. Επομένως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \langle P_B x, x\rangle &= \langle P_A x, x\rangle + \langle P_{B\setminus A} x, x\rangle \\ &\geqslant \langle P_A x, x\rangle \end{aligned}$$

επειδή $P_{B\setminus A}$ είναι ορθογώνια προβολή και συνεπώς είναι $\geqslant 0$.

Έστω τώρα πρώτα ότι $A \cap B = \varnothing$. Τότε έχουμε

$$P_{A\cup B} = P_A + P_B$$

και πολλαπλασιάζοντας με P_A, επειδή $A \subseteq A \cup B$, οπότε $P_A \leqslant P_{A\cup B}$, από την Πρόταση 3.6 έπεται ότι

$$P_A = P_A P_{A\cup B} = P_A^2 + P_A P_B = P_A + P_A P_B$$

και άρα

$$P_A P_B = 0.$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$P_B P_A = 0.$$

Για κάθε A και B παρατηρούμε ότι

$$A = (A \setminus B) + (A \cap B).$$

Έτσι έχουμε ότι

$$P_A = P_{A\setminus B} + P_{A\cap B}$$

και πολλαπλασιάζοντας με P_B προκύπτει ότι

$$P_B P_A = P_B P_{A\setminus B} + P_B P_{A\cap B} = P_{A\cap B}$$

επειδή $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$ και $A \cap B \subset B$. Ομοίως παίρνουμε ότι

$$P_A P_B = P_{A\cap B}.$$ □

Ορισμός 3.8. Έστω H χώρος Hilbert. Μια οικογένεια τελεστών $\{E_\lambda\}_{\lambda=-\infty}^{\infty}$ λέγεται *φασματική ανάλυση του ταυτοτικού τελεστή* (spectral resolution of the identity), αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(α) E_λ είναι ορθογώνια προβολή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ για όλα τα $\lambda < \mu$.

(γ) $\{E_\lambda\}$ είναι δεξιά συνεχής ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών, δηλαδή

$$\lim_{s\to t^+}\|E_s x - E_t x\| = 0$$

για κάθε $x \in H$.

(δ) Υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $E_\lambda = I$ για κάθε $\lambda \geqslant \beta$ και $E_\lambda = 0$ για κάθε $\lambda \leqslant \alpha$.

Έπεται από τον προηγούμενο ορισμό και την Πρόταση 3.6 ότι

$$E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda,\mu\}}.$$

Παρατήρηση. Κάθε οικογένεια από προβολές $\{P_\Omega \colon \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ που αποτελεί μέτρο με τιμές στις προβολές (projection valued measure) επάγει ένα E_λ και συγκεκριμένα ισχύει ότι $E_\lambda = P_{(-\infty,\lambda]}$.

Θεώρημα 3.9. *Έστω $\{E_\lambda\}$ φασματική ανάλυση του ταυτοτικού τελεστή σε χώρο Hilbert H και f πραγματική, συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει τότε φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής B τέτοιος ώστε*

$$\langle Bx, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\langle E_\lambda x, x\rangle, \qquad x \in H. \tag{1}$$

Γράφουμε τότε ότι $B = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE_\lambda$.

Απόδειξη. Αρχικά, θα εξηγήσουμε πως προκύπτει ο ορισμός του B. Για κάθε $x \in H$ η συνάρτηση $x \longmapsto \langle E_\lambda x, x\rangle$ είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά, και αφού η f είναι συνεχής το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει ως ολοκλήρωμα Riemann–Stieltjes. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής B για τον οποίον ισχύει η (1) για κάθε $x \in H$.

Από τον Ορισμό 3.8 υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $E_\lambda = I$ για κάθε $\lambda \geqslant \beta$ και $E_\lambda = 0$ για κάθε $\lambda \leqslant \alpha$. Θεωρούμε μια διαμέριση $\Delta = \{\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_n\}$ του $[\alpha, \beta]$, όπου $\lambda_0 = \alpha < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \beta$, και σημεία $\xi_k \in (\lambda_{k-1}, \lambda_k)$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Για κάθε $x \in H$ ορίζουμε

$$S(\Delta, \{\xi_k\}, x) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\langle (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}})x, x\rangle. \tag{2}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\langle E_\lambda x, x\rangle$ είναι εξ ορισμού το όριο των $S(\Delta, \{\xi_k\}, x)$ καθώς $|\Delta| \to 0$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k. Θεωρούμε ακολουθία $\Delta_n = \{\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_{m_n}^{(n)}\}$ διαμερίσεων του $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $|\Delta_n| \to 0$ και για κάθε n μια επιλογή σημείων $\xi_k^{(n)}$ όπως παραπάνω. Για κάθε $x \in H$ συμβολίζουμε με $Q_n(x)$ το αντίστοιχο άθροισμα Riemann (2) (π.χ Δ_n μπορεί να είναι η διαμέριση σε n ίσα διαστήματα και $\xi_k^{(n)}$ να είναι το μέσο του k διαστήματος). Θέτουμε

$$Q(x) := \lim_{n\to\infty} Q_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\langle E_\lambda x, x\rangle.$$

Για κάθε δύο $x, y \in H$ ορίζουμε

$$B(x,y) := \tfrac{1}{4}[Q(x+y) - Q(x-y) + iQ(x+iy) - iQ(x-iy)] \tag{3}$$

και

$$B_n(x,y) := \tfrac{1}{4}[Q_n(x+y) - Q_n(x-y) + iQ_n(x+iy) - iQ_n(x-iy)]$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $B_n(x,y) \longrightarrow B(x,y)$ για κάθε $x, y \in H$.

Για $x, y \in H$ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
4B_n(x,y) &= \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right)(x+y), x+y \right\rangle \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right)(x-y), x-y \right\rangle \\
&\quad + i \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right)(x+iy), x+iy \right\rangle \\
&\quad - i \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right)(x-iy), x-iy \right\rangle \\
&= 4 \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n-1)}}\right) x, y \right\rangle,
\end{aligned} \tag{4}$$

επειδή, για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T\colon H \to H$ και οποιαδήποτε διανύσματα $u, v \in H$, έχει κανείς ότι

$$\langle T(u+v), u+v\rangle - \langle T(u-v), u-v\rangle + i\langle T(u+iv), u+iv\rangle - i\langle T(u-iv), u-iv\rangle = 4\langle Tu, v\rangle,$$

όπως βλέπει κανείς αναπτύσσοντας το αριστερό μέρος χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου. Αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιγραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή, έπεται από την (4) ότι, για σταθερό $x \in H$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση $y \longmapsto B_n(x,y)$ είναι αντιγραμμική, δηλαδή

$$B_n(x, c_1y_1 + c_2y_2) = \overline{c_1}B_n(x,y_1) + \overline{c_2}B_n(x,y_2),$$

για $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ και $y_1, y_2 \in H$. Από την σύγκλιση $B_n(x,y) \longrightarrow B(x,y)$ για κάθε $x, y \in H$, έπεται ότι

$$B(x, c_1y_1 + c_2y_2) = \overline{c_1}B(x,y_1) + \overline{c_2}B(x,y_2),$$

για $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ και $y_1, y_2 \in H$, δηλαδή για σταθερό $x \in H$, η απεικόνιση $y \longmapsto B(x,y)$ είναι αντιγραμμική, και άρα η $y \longmapsto \overline{B(x,y)}$ είναι γραμμική.

Υπενθυμίζεται ότι τα α και β έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $E_\lambda = 0$ για κάθε $\lambda \leqslant \alpha$ και $E_\lambda = I$ για κάθε $\lambda \geqslant \beta$. Από την συνέχεια της f στο συμπαγές $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $M > 0$

τέτοιο ώστε $|f(\lambda)| \leqslant M$ στο $[\alpha, \beta]$. Τότε

$$
\begin{aligned}
|Q(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, x\rangle \right| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\langle E_\lambda x, x\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\alpha} |f(\lambda)| d\langle E_\lambda x, x\rangle + \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)| d\langle E_\lambda x, x\rangle + \int_{\beta}^{\infty} |f(\lambda)| d\langle E_\lambda x, x\rangle \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)| d\langle E_\lambda x, x\rangle \\
&\leqslant M \int_{\alpha}^{\beta} d\langle E_\lambda x, x\rangle \\
&= M[\langle E_\beta x, x\rangle - \langle E_\alpha x, x\rangle] \\
&= M\|x\|^2
\end{aligned}
$$

Η τέταρτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $d\langle E_\lambda x, x\rangle = 0$ εκτός του $[\alpha, \beta]$. Επομένως παίρνουμε τελικά ότι $|Q(x)\rangle| \leqslant M\|x\|^2$. Από την (3) παίρνουμε τώρα ότι

$$
\begin{aligned}
|B(x,y)| &\leqslant \tfrac{1}{4} M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2) \\
&\leqslant \tfrac{1}{4} M 4(\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\leqslant 4M\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\left|\overline{B(x,y)}\right| = |B(x,y)| \leqslant 4M(\|x\|^2 + 1)
$$

για $y \in H$ με $\|y\| \leqslant 1$ και κατά συνέπεια το γραμμικό συναρτησοειδές

$$
y \longmapsto L_x(y) := \overline{B(x,y)},
$$

για σταθερό $x \in H$, είναι φραγμένο και μάλιστα η νόρμα του είναι

$$
\|L_x\| \leqslant 4M(\|x\|^2 + 1).
$$

Έπεται τώρα από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ότι, για κάθε $x \in H$, υπάρχει $Bx \in H$ τέτοιο ώστε $\overline{B(x,y)} = \langle y, Bx\rangle$ και κατά συνέπεια $B(x,y) = \langle Bx, y\rangle$. Επιπλέον, $\|Bx\|$ ισούται με την νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς L_x και κατά συνέπεια

$$
\|Bx\| \leqslant 4M(\|x\|^2 + 1). \tag{5}
$$

Η $x \longmapsto Bx$ ορίζει έναν τελεστή $B \colon H \to H$ ο οποίος ικανοποιεί την (1):

$$
\langle Bx, x\rangle = B(x,x) = \lim_{n\to\infty} B_n(x,x) = \lim_{n\to\infty} Q_n(x) = Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, x\rangle
$$

για κάθε $x \in H$, η τρίτη ισότητα από την (4). Ο B είναι γραμμικός γιατί, για $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ και $x_1, x_2 \in H$, έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
\langle B(c_1x_1 + c_2x_2), y\rangle &= B(c_1x_1 + c_2x_2, y) \\
&= \lim_{n\to\infty} B_n(c_1x_1 + c_2x_2, y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right)(c_1x_1 + c_2x_2), y\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} f\big(\xi_k^{(n)}\big) \left(c_1 \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right) x_1, y\right\rangle + c_2 \left\langle \left(E_{\lambda_k^{(n)}} - E_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right) x_2, y\right\rangle\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} [c_1B_n(x_1, y) + c_2B_n(x_2, y)] \\
&= c_1\langle Bx_1, y\rangle + c_2\langle Bx_2, y\rangle \\
&= \langle c_1Bx_1 + c_2Bx_2, y\rangle
\end{aligned}$$

για κάθε $y \in H$, η τετάρτη ισότητα επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό ως προς την πρώτη μεταβλητή. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $y \in H$, έπεται ότι

$$B(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Bx_1 + c_2Bx_2.$$

Από την (5) έχει κανείς ότι $\|Bx\| \leqslant 8M$ για $x \in H$ με $\|x\| \leqslant 1$. Κατά συνέπεια ο γραμμικός τελεστής B είναι φραγμένος. Από την Πρόταση 2.8 έπεται τέλος άμεσα ότι ο B είναι αυτοσυζυγής. □

4 Φασματικά Θεωρήματα

4.1 Συναρτησιακοί Λογισμοί

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το φασματικό θεώρημα στις διάφορες μορφές του. Η μορφή με την οποία θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα αναφέρεται στο ότι κάθε φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής είναι μοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή. Αυτό σημαίνει ότι για δεδομένο φραγμένο τελεστή σε κάποιο χώρο Hilbert, μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο μ σε χώρο M και έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $U\colon H \longrightarrow L^2(M, \mu)$ έτσι ώστε $(UAU^{-1}f)(x) = F(x)f(x)$ για κάποια φραγμένη, πραγματική, μετρήσιμη συνάρτηση F στον M.

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε τον $f(A)$, όταν η f είναι συνεχής συνάρτηση πάνω στο φάσμα του A. Θα ασχοληθούμε επίσης με τα μέτρα που ορίζονται από τα συναρτησιοειδή $f \longmapsto \langle \psi, f(A)\psi\rangle$ για δοσμένο $\psi \in H$.

Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής. Αν $p(x) = \sum_{n=1}^{N} a_nx^n$ πολυώνυμο, τότε $p(A) = \sum_{n=1}^{N} a_nA^n$.

Θα αναφερόμαστε με $f(A)$ για το $\phi(f)$, ώστε να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι εξαρτάται από τον τελεστή A.

Θεώρημα 4.1. *[Συνεχής συναρτησιακός λογισμός] Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει μοναδική $\phi\colon C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$ με τις εξής ιδιότητες.*

(α) *Η ϕ είναι αλγεβρικός $(*)$-ομομορφισμός με $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$ και $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$.*

(β) *Η ϕ είναι ισομετρία (δηλαδή $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$).*

(γ) *Αν $f(x) = x$, τότε $\phi(f) = A$.*

(δ) *Αν $Ay = \lambda y$, τότε $\phi(f)y = f(\lambda)y$.*

(ε) *Αν $f \geqslant 0$, τότε $\phi(f) \geqslant 0$.*

Απόδειξη. Ύπαρξη. Αν $p(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ τότε ορίζουμε $\phi(p) = \sum_{k=0}^{N} c_k A^k$. Έστω $f \in C(\sigma(A))$. Από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε

$$p_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα. Θα δείξουμε τώρα ότι η $\phi(p_n)$ επίσης συγκλίνει. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι η ακολουθία $\phi(p_n)$ είναι Cauchy. Έχουμε ότι

$$\|\phi(p_n) - \phi(p_m)\| = \|\phi(p_n - p_m)\| = \sup|p_n - p_m| \longrightarrow 0$$

Επομένως, η $\phi(p_n)$ συγκλίνει σε κάποιο όριο το οποίο θα συμβολίσουμε με $\phi(f)$.

Θα δείξουμε και ότι η ϕ είναι καλώς ορισμένη (ότι είναι δηλαδή ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας). Θεωρούμε κάποια άλλη ακολουθία πολυωνύμων (q_n) με

$$q_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα. Θα δείξουμε ότι $\phi(q_n) \longrightarrow \phi(f)$. Πράγματι,

$$\|\phi(p_n) - \phi(q_n)\| = \|(p_n - q_n)(A)\| = \sup|p_n - q_n| \longrightarrow 0.$$

Μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχουν ομομορφισμοί $\phi, \phi' : C(\sigma(A) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του Θεωρήματος 4.1. Έπεται τότε ότι $\phi(p) = \phi'(p)$ για p πολυώνυμο. Αν λοιπόν $f \in C(\sigma(A))$ τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε

$$p_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα. Άρα έχουμε ότι

$$\phi(p_n) \longrightarrow \phi(f)$$

και

$$\phi'(p_n) \longrightarrow \phi'(f).$$

Όμως ισχύει ότι $\phi(p_n) = \phi'(p_n)$ και άρα $\phi(f) = \phi'(f)$.

(α), (γ), (δ). Έστω f_n, g_n ακολουθίες πολυωνύμων με $f_n \longrightarrow f$ και $g_n \longrightarrow g$. Τότε όμως

$$\phi(f_n) \longrightarrow f, \quad \phi(g_n) \longrightarrow g$$

και άρα $\phi(f_n)\phi(g_n) \longrightarrow \phi(f)\phi(g)$. Ακόμα, ισχύει ότι $f_n g_n \longrightarrow fg$ και άρα $\phi(f_n g_n) \longrightarrow \phi(fg)$. Όμως $\phi(f_n)\phi(g_n) = \phi(f_n g_n)$, οπότε $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$.

Έστω $f \in C(\sigma(A))$ και f_n ακολουθία πολυωνύμων με $f_n \longrightarrow f$. Τότε προκύπτει ότι $\phi(f_n) \longrightarrow \phi(f)$ και άρα

$$\phi(f_n)^* \longrightarrow \phi(f)^*. \tag{6}$$

Αν $f_n(z) = \sum_{k=0}^{d_n} c_{k,n} z^k$ τότε

$$\phi(f_n)^* = \sum_{k=0}^{d_n} \overline{c_{k,n}} (A^*)^k = \sum_{k=0}^{d_n} \overline{c_{k,n}} A^k.$$

Ορίζουμε $\widetilde{f_n}(z) = \sum_{k=0}^{d_n} \overline{c_{k,n}} z^n$. Τα $\widetilde{f_n}$ είναι πολυώνυμα και

$$\phi(\widetilde{f_n}) = \phi(f_n)^*. \tag{7}$$

Για πραγματικά x,

$$\widetilde{f_n}(x) = \overline{f_n(x)}.$$

Άρα $\widetilde{f_n} \to \bar{f}$ στο $C(\sigma(A))$ ($\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ αφού ο A είναι αυτοσυζυγής) και επομένως $\phi(\widetilde{f_n}) \to \phi(\bar{f})$. Συνεπώς $\phi(f)^* = \phi(\overline{f})$, από τις (6) και (7).

Έστω $f \in C(\sigma(A))$ και f_n ακολουθία πολυωνύμων με $f_n \longrightarrow f$. Τότε $\phi(f_n) \longrightarrow \phi(f)$. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\phi(\lambda f_n) \longrightarrow \phi(\lambda f), \quad \lambda\phi(f_n) \longrightarrow \lambda\phi(f)$$

Όμως $\phi(\lambda f_n) = \lambda\phi(f_n)$ και άρα τελικά $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται οι ιδιότητες (γ) και (δ).

(β) Έστω $p_n \in C(\sigma(A))$ ακολουθία πολυωνύμων τέτοια ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$. Τότε, από την συνέχεια της νόρμας και το Θεώρημα 2.25, έχουμε ότι

$$\|\phi(f)\| = \lim_{n\to\infty} \|\phi(p_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

(ε) Αν $f \geqslant 0$, τότε $f = g^2$, για κάποια g πραγματική και $g \in C(\sigma(A))$. Επομένως

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \phi(g^2) \\ &= \phi(g)\phi(g) \\ &= (\phi(g))^2 \end{aligned}$$

με $\phi(g)$ αυτοσυζυγή, αφού έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(g)^* &= \phi(\overline{g}) \\ &= \phi(g), \end{aligned}$$

όταν g είναι πραγματική συνάρτηση. Άρα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle \phi(f)v, v\rangle &= \langle \phi(g)^2 v, v\rangle \\ &= \langle \phi(g)v, \phi(g)^* v\rangle \\ &= \langle \phi(g)v, \phi(g)v\rangle \\ &= \|\phi(g)v\|^2 \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

δηλαδή $\phi(f)$ είναι θετικά ημιορισμένος. □

Θεώρημα 4.2 (Θεώρημα φασματικής απεικόνισης). *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert και $f \in C(\sigma(A))$. Τότε*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη. Αν $\mu \notin \{f(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(A)\}$, τότε η συνάρτηση $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, άρα υπάρχει $h \in C(\sigma(A))$ ώστε $hg = 1$ (συγκεκριμένα $h(t) = (f(t) - \mu)^{-1}$). Τότε όμως

$$\phi(h)\phi(g) = \phi(hg) = I \qquad \text{και} \qquad \phi(g)\phi(h) = \phi(gh) = I,$$

δηλαδή $h(A)g(A) = I = g(A)h(A)$ και άρα ο $\phi(f) - \mu I$ έχει αντίστροφο, τον $h(A)$. Συνεπώς $\mu \notin \sigma(f(A))$. Παρατηρούμε ότι αυτό το μέρος της απόδειξης είναι καθαρά αλγεβρικό: εξαρτάται μόνο από το γεγονός ότι η απεικόνιση $f \longmapsto f(A)$ είναι μορφισμός αλγεβρών που διατηρεί τη μονάδα, άρα απεικονίζει αντιστρέψιμα στοιχεία σε αντιστρέψιμα στοιχεία.

Έστω τώρα $\mu \in \{f(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(A)\}$, οπότε $\mu = f(\lambda_0)$ για κάποιο $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Θα δείξω ότι ο τελεστής $f(A) - \mu I$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Ισχυρίζομαι ότι

$$f(A) - \mu I = \lim_{n\to\infty} q_n(A)$$

όπου (q_n) ακολουθία πολυωνύμων με $q_n(\lambda_0) = 0$ για κάθε n. Πράγματι, υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε

$$p_n(t) \longrightarrow f(t) - \mu = g(t)$$

ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, άρα και $p_n(\lambda_0) \longrightarrow g(\lambda_0) = 0$. Αν θέσουμε $q_n(t) = p_n(t) - p_n(\lambda_0)$, έχουμε $q_n(\lambda_0) = 0$ και $\|q_n - g\|_{C(\sigma(A))} \longrightarrow 0$, άρα $q_n(A) \longrightarrow g(A) = f(A) - \mu I$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εφόσον $\lambda_0 \in \sigma(A)$, έπεται ότι $0 = q_n(\lambda_0) \in q_n(\sigma(A))$. Αλλά $q_n(\sigma(A)) = \sigma(q_n(A))$, άρα οι τελεστές $q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμοι. Εφόσον το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathcal{B}(H)$ είναι ανοικτό, έπεται ότι ο $f(A) - \mu I = \lim_{n\to\infty} q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. □

Θεώρημα 4.3 (Θεώρημα Riesz–Markov). *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff. Για κάθε θετικό, γραμμικό συναρτησοειδές l στον $C(X)$, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο Baire μ στον X, με $l(f) = \int f \, d\mu$ για κάθε $f \in C(X)$.*

Παρατήρηση. Κάθε πεπερασμένο μέτρο Baire σε συμπαγή μετρικό χώρο είναι μέτρο Radon.

4.2 Φασματικά μέτρα

Πρόταση 4.4. *Έστω H χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$ φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής και $v \in H$ ένα σταθερό διάνυσμα. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό, θετικό μέτρο Radon μ στο $\sigma(A)$, που εξαρτάται από τον A και το v, έτσι ώστε*

$$\int_{\sigma(A)} f(x)\, d\mu(x) = \langle f(A)v, v\rangle,$$

για κάθε $f \in C(\sigma(A))$. Ειδικότερα, έχουμε ότι

$$\mu(\sigma(A)) = \|v\|^2.$$

Επομένως, το μ είναι πεπερασμένο. Αυτό το μέτρο λέγεται φασματικό μέτρο ως προς v και A και θα συμβολίζεται ενίοτε με μ_v.

Απόδειξη. Είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Riesz–Markov. Πράγματι, το γραμμικό συναρτησοειδές

$$l\colon C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad l(f) = \langle f(A)v, v\rangle$$

είναι καλά ορισμένο και θετικό, αφού αν $f \geqslant 0$ είναι και $f(A) \geqslant 0$, δηλαδή

$$\langle f(A)v, v\rangle \geqslant 0,$$

εξ ορισμού. Επομένως, από το Θεώρημα Riesz–Markov και την Παρατήρηση που το ακολουθεί, υπάρχει μοναδικό μέτρο Radon μ, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} l(f) &= \langle f(A)v, v\rangle \\ &= \int_{\sigma(A)} f(x)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

για κάθε $f \in C(\sigma(A))$. Επιπλέον, παίρνοντας $f(x) = 1$ για κάθε x, προκύπτει ότι

$$l(f) = \langle v, v\rangle = \|v\|^2. \qquad \square$$

Λήμμα 4.5. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert και $\psi \in H$. Τότε ισχύει ότι*

$$\|\phi(f)\psi\|^2 = \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi,$$

για κάθε $f \in C(\sigma(A))$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \|\phi(f)\psi\|^2 &= \langle \phi(f)\psi, \phi(f)\psi\rangle \\ &= \langle \phi(f)^*\phi(f)\psi, \psi\rangle \\ &= \langle \phi\big(\bar{f}\big)\phi(f)\psi, \psi\rangle \\ &= \langle \phi\big(\bar{f}f\big)\psi, \psi\rangle \\ &= \langle \phi(|f|^2)\psi, \psi\rangle \\ &= \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi. \end{aligned} \qquad \square$$

Ορισμός 4.6. Ένα διάνυσμα $\psi \in H$ λέγεται *κυκλικό διάνυσμα για τον* A, αν το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων $\{A^n\psi\}_{n=0}^{\infty}$ είναι πυκνό στον H.

Λήμμα 4.7. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής με κυκλικό διάνυσμα ψ. Τότε, υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U\colon H \longmapsto L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$, με $(UAU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ για κάθε $f \in L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Έστω $\phi(f) = f(A)$ για $f \in C(\sigma(A))$ ο συμβολισμός του Θεωρήματος 4.1. Εφόσον το ψ είναι κυκλικό διάνυσμα έχουμε ότι

$$\overline{\{\phi(f)\psi \mid f \in C(\sigma(A))\}} = H$$

και συνεπώς υπάρχει υπάρχει $(f_n) \subset C(\sigma(A))$ έτσι ώστε $\phi(f_n)\psi \longrightarrow x$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int |f_n(\lambda) - f_m(\lambda)|^2 \, d\mu_\psi = \|\phi(f_n - f_m)\psi\|^2 < \epsilon$$

για κάθε $n, m \geqslant n_0$. Άρα η (f_n) είναι Cauchy στον $L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$, επομένως συγκλίνει. Έστω $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Θέτουμε $Ux = f$. Ο U είναι καλά ορισμένος, αφού αν θεωρήσουμε κάποια άλλη $(f_n') \subset C(\sigma(A))$ τέτοια ώστε $\phi(f_n')\psi \longrightarrow x$, τότε $[\phi(f_n) - \phi(f_n')]\psi \longrightarrow 0$ και συνεπώς

$$\int_{\sigma(A)} |f_n - f_n'|^2 \, d\mu_\psi = \|\phi(f_n - f_n')\psi\|^2 \longrightarrow 0.$$

Επομένως ισχύει ότι $L^2\text{-}\lim f_n = L^2\text{-}\lim f_n'$.

Δείχνουμε ότι ο U είναι ισομετρία. Έστω $(f_n) \in C(\sigma(A))$ τέτοια ώστε $\phi(f_n)\psi \to x$ για κάποιο $x \in H$. Τότε $Ux = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$, οπότε

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|\phi(f_n)\psi\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(\sigma(A),\mu_\psi)} = \|Ux\|_{L^2(\sigma(A),\mu_\psi)},$$

από την συνέχεια της νόρμας και το προηγούμενο Λήμμα.

Θέλουμε να δείξουμε και ότι $\mathrm{range}(U) = L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$. Έστω $f \in L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$. Επειδή ο $C(\sigma(A))$ είναι πυκνός στον $L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$, υπάρχει $(f_n) \subset C(\sigma(A))$ με $f_n \longrightarrow f$. Τότε η $(\phi(f_n)\psi)_n$ είναι Cauchy στον H (όπως προηγουμένως), άρα

$$\phi(f_n)\psi \longrightarrow x$$

για κάποιο $x \in H$ και άρα $Ux = f$.

Τέλος, αν $f \in L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$, τότε όπως στην προηγούμενη παράγραφο υπάρχει $(f_n) \subset C(\sigma(A))$ με $\phi(f_n)\psi \longrightarrow U^{-1}f$, οπότε

$$\begin{aligned}
(UAU^{-1}f) &= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} UA\phi(f_n)\psi \\
&= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} U\phi(h)\phi(f_n)\psi \\
&= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} U\phi(hf_n)\psi \\
&= L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} hf_n \\
&= hf
\end{aligned}$$

όπου $h(x) = x$ και παρατηρούμε ότι $(hf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$. $\square$

Λήμμα 4.8. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει ανάλυση σε ευθύ άθροισμα $H = \bigoplus_{n=1}^{N} H_n$, με $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, έτσι ώστε*

(α) *ο A αφήνει κάθε H_n αναλλοίωτο, έτσι αν $\psi \in H_n$ τότε $A\psi \in H_n$·*

(β) *για κάθε n υπάρχει $\psi_n \in H_n$ που είναι κυκλικό διάνυσμα για τον $A \restriction H_n$.*

Απόδειξη. Έστω $\{w_j : j \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του H (υπάρχει τέτοιο εφόσον υποθέτουμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος) με όλα τα $w_j \neq 0$. Παίρνουμε $\psi_1 = w_1$ και θεωρούμε

$$H_1 = \overline{\operatorname{span}\{\psi_1, A\psi_1, A^2\psi_1, \dots\}}.$$

Παρατηρούμε ότι $A : H_1 \longrightarrow H_1$, επειδή $A(A^k\psi_1) = A^{k+1}\psi_1 \in H_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, η A είναι γραμμική και άρα η A-εικόνα ενός γραμμικού συνδυασμού από $A^k\psi_1$ είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός από $A^k\psi_1$ και τέλος

$$A\big(\overline{\operatorname{span}\{\psi_1, A\psi_1, A^2\psi_1, \dots\}}\big) \subseteq \overline{A(\operatorname{span}\{\psi_1, A\psi_1, A^2\psi_1, \dots\}}),$$

λόγω συνέχειας του A. Αν $H_1 = H$ έχουμε τελειώσει, αφού έχουμε το ζητούμενο με $N = 1$. Αν όχι, συνεχίζουμε θεωρώντας το πρώτο $j \geqslant 2$ τέτοιο ώστε $w_j \notin H_1$ και θέτουμε ψ_2 να είναι η ορθογώνια προβολή του w_j πάνω στον $H_1^{\perp}$. Τότε θέτουμε

$$H_2 = \overline{\operatorname{span}\{\psi_2, A\psi_2, A^2\psi_2, \dots\}} \subseteq H_1^{\perp}.$$

Αφού ο A αφήνει τον H_1 αναλλοίωτο, δεδομένου ότι είναι αυτοσυζυγής αφήνει και τον $H_1^{\perp}$ αναλλοίωτο (Κατάβολος, Λήμμα 4.1.8). Αφού $\psi_2 \in H_1^{\perp}$, έπεται όπως παραπάνω ότι $A^k\psi_2 \in H_1^{\perp}$ για κάθε $k \in k \in \mathbb{N}$ και άρα λοιπόν $H_2 \subset H_1^{\perp}$.

Αν $H_1 \oplus H_2 = H$ έχουμε τελειώσει. Αν όχι, παίρνουμε το πρώτο j_3 για το οποίο $w_{j_3} \notin H_1 \oplus H_2$ και θέτουμε ψ_3 να είναι η ορθογώνια προβολή του w_{j_3} πάνω στον $(H_1 \oplus H_2)^{\perp}$. Τότε θέτουμε

$$H_3 = \overline{\operatorname{span}\{\psi_3, A\psi_3, A^2\psi_3, \dots\}} \subseteq (H_1 \oplus H_2)^{\perp}.$$

Όπως παραπάνω έχουμε τότε $H_3 \subseteq (H_1 \oplus H_2)^{\perp}$. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία. Αν για κάποιο $K \in \mathbb{N}$, $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_K = H$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, παίρνουμε μία άπειρη αριθμήσιμη ακολουθία από ορθογώνιους μεταξύ τους χώρους $H_k = \overline{\operatorname{span}\{\psi_k, A\psi_k, A^2\psi_k, \dots\}}$. Το ευθύ τους άθροισμα είναι κλειστός υπόχωρος του H και εκ κατασκευής θα περιέχει όλα τα w_j στο αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{w_j : j \in \mathbb{N}\}$. Έπεται ότι το ευθύ άθροισμα των H_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι όντως όλος ο H.

Στην περίπτωση που ο χώρος Hilbert H δεν είναι διαχωρίσιμος, το αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το λήμμα του Zorn. $\square$

Θεώρημα 4.9. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής στον διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Τότε, υπάρχουν μέτρα $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) στο $\sigma(A)$ και ένας ορθομοναδιαίος τελεστής*

$$U \colon H \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$$

έτσι ώστε

$$(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

όπου γράφουμε ένα στοιχείο $\psi \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$ ως $\psi(\lambda) = (\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_N(\lambda))$ αν $N \in \mathbb{N}$ και $\psi(\lambda) = (\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \ldots)$ αν $N = \infty$. Αυτή η μορφή του A λέγεται φασματική αναπαράσταση.

Απόδειξη. Έχουμε $H = \bigoplus_n H_n$, όπου H_n A-αναλλοίωτος, κυκλικός υπόχωρος με κυκλικό διάνυσμα ψ_n, από το Λήμμα 4.8. Θα γράφουμε $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots$ με $x_i \in H_i$ για κάθε i, για ένα διάνυσμα στο $H = \bigoplus_n H_n$. Τότε από το Λήμμα 4.7 υπάρχει ορθομοναδιαίος

$$U_n \colon H_n \longrightarrow L^2(\sigma(A), \mu_{\psi_n})$$

ώστε

$$(U_n A U_n^{-1} f)(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Ορίζουμε

$$U \colon \bigoplus_n H_n \longrightarrow \bigoplus_n L^2(\sigma(A), \mu_{\psi_n})$$

από τη σχέση

$$U(x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = (U_1 x_1, U_2 x_2, \ldots)$$

και έχουμε

$$U^{-1}\psi = (U_1^{-1}\psi_1) \oplus (U_2^{-1}\psi_2) \oplus \cdots,$$

για $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots) \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$. Επομένως

$$\begin{aligned} AU^{-1}\psi &= A(U_1^{-1}\psi_1 \oplus U_2^{-1}\psi_2 \oplus \cdots) \\ &= (AU_1^{-1}\psi_1) \oplus (AU_2^{-1}\psi_2) \oplus \cdots \\ &= \lambda U_1^{-1}\psi_1 \oplus \lambda U_2^{-1}\psi_2 \oplus \cdots \end{aligned}$$

και άρα

$$(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda).$$

□

Πόρισμα 4.10. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει πεπερασμένος χώρος μέτρου (M, μ), μια φραγμένη συνάρτηση F στο M και ορθομοναδιαίος τελεστής $U \colon H \longrightarrow L^2(M, \mu)$, έτσι ώστε $(UAU^{-1}f)(m) = F(m)f(m)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M = \bigcup_{j \in J}(\mathbb{R} \times \{j\})$, όπου το J είναι αριθμήσιμο, πεπερασμένο ή άπειρο. Συνεχίζουμε την απόδειξη με τη διαδικασία που περιγράφεται πλήρως στις σελ. 51–58.

□

Ορισμός 4.11. Έστω F πραγματική, μετρήσιμη συνάρτηση σε χώρο μέτρου (M, μ). Λέμε ότι το $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκει στην *ουσιώδη εικόνα* της F αν και μόνο αν

$$\mu\{m \in M \colon \lambda - \epsilon < F(m) < \lambda + \epsilon\} > 0$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Η ουσιώδης εικόνα μιας F θα συμβολίζεται με $\operatorname{essran}(F)$.

Πρόταση 4.12. *Έστω F φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση σε έναν χώρο μέτρου (M, μ). Έστω T_F ο τελεστής στον $L^2(M, \mu)$ που δίνεται από τη σχέση*

$$(T_F g)(m) = F(m)g(m).$$

Τότε το $\sigma(T_F)$ είναι η ουσιώδης εικόνα της F.

Απόδειξη. Αν $\lambda \notin \operatorname{essran}(F)$ τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mu\{m \in M \colon \lambda - \epsilon < F(m) < \lambda + \epsilon\} = 0$$

και άρα ορίζεται η συνάρτηση $(F(m) - \lambda)^{-1}$ και είναι ουσιωδώς φραγμένη. Τότε ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $T_{(F-\lambda)^{-1}}$ είναι ο αντίστροφος του $T_F - \lambda$ και άρα $\lambda \notin \sigma(T_F)$. Έτσι παίρνουμε ότι $\sigma(T_F) \subseteq \operatorname{essran}(F)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda \in \operatorname{essran}(F)$. Θα δείξουμε ότι $\lambda \in \sigma(T_F)$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$S_m = \{x \in M \colon |\lambda - F(x)| < 2^{-m}\},$$

οπότε $\mu(S_m) > 0$. Έστω χ_m η χαρακτηριστική συνάρτηση του S_m, που είναι μη μηδενικό στοιχείο του $L^2(M, \mu)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|(T_F - \lambda)\chi_m\|^2 &= \int_{S_m} |\chi_m|^2 |F - \lambda|^2 \, d\mu \\ &\leqslant 2^{-2m} \int |\chi_m|^2 \, d\mu \\ &= 2^{-2m} \|\chi_m\|^2 \end{aligned}$$

που δείχνει ότι αν υπάρχει ο $(T_F - \lambda)^{-1}$ δε μπορεί να είναι φραγμένος. Άρα $\lambda \in \sigma(T_F)$. Επομένως $\operatorname{essran}(F) \subseteq \sigma(T_F)$ και άρα τελικά

$$\sigma(T_F) = \operatorname{essran}(F).$$

□

4.3 Επέκταση του συναρτησιακού λογισμού σε ημισυνεχείς συναρτήσεις

Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert H και $\mathbb{P}$ το σύνολο από μη αρνητικές συναρτήσεις στο $\sigma(A)$ που είναι κατά σημείο όρια ακολουθίας φθίνουσων, συνεχών συναρτήσεων. (Θα μπορούσαμε μάλιστα να χαρακτηρίσουμε τις συναρτήσεις στον $\mathbb{P}$ ως τις μη αρνητικές άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις. Μια συνάρτηση είναι άνω ημισυνεχής στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε $f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.)

Λήμμα 4.13. *Έστω (f_n) φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων σε ένα συμπαγές σύνολο X, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση f. Έστω g κάποια συνεχής συνάρτηση με $f \leqslant g$, και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f_n \leqslant g + \epsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n = \max\{f_n, g\}$. Πρόκειται για ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει κατά σημείο στη συνεχή συνάρτηση g και μάλιστα $g_n \searrow g$. Εφόσον το X είναι συμπαγές σύνολο, έπεται από το Θεώρημα του Dini ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.14. *Ο συνεχής συναρτησιακός λογισμός επεκτείνεται σε συναρτησιακό λογισμό στο $\mathbb{P}$, ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *αν (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία από συνεχείς συναρτήσεις που συγκλίνει κατά σημείο στην f, τότε $f_n(A)$ συγκλίνει ισχυρά στο $f(A)$·*

(ii) *$(fg)(A) = f(A)g(A)$ και $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$ για συναρτήσεις $f, g \in \mathbb{P}$ και $f(A) \geqslant 0$ για κάθε $f \in \mathbb{P}$·*

(iii) *$\|f(A)\| \leqslant \|f\|_\infty$.*

Απόδειξη. Αν $f \in \mathbb{P}$ είναι το όριο της ακολουθίας συνεχών, θετικών συναρτήσεων f_n με $f_{n+1} \leqslant f_n$, τότε ορίζουμε $f(A)$ το όριο, από το Λήμμα 2.15 (των φθινουσών, θετικά ημιορισμένων τελεστών $f_n(A)$). Πρώτα εξετάζουμε αν είναι καλά ορισμένος, δηλαδή ανεξάρτητος από την επιλογή της ακολουθίας. Πράγματι, έστω (g_n) μία άλλη φθίνουσα ακολουθία από θετικές, συνεχείς συναρτήσεις που συγκλίνει κατά σημείο στην f. Χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.13 για να δούμε ότι για κάθε k (σταθερό) και $\epsilon > 0$, υπάρχει n_0 έτσι ώστε για όλα τα $n \geqslant n_0$, $f_n(x) \leqslant g_k(x) + \epsilon$ για κάθε $x \in \sigma(A)$. Εφαρμόζοντας αυτές τις συναρτήσεις στον A, έχουμε ότι

$$f_n(A) \leqslant g_k(A) + \epsilon,$$

και θεωρώντας ότι n τείνει στο άπειρο

$$\lim f_n(A) \leqslant g_k(A) + \epsilon,$$

και θεωρώντας ότι k τείνει στο άπειρο

$$\lim f_n(A) \leqslant \lim g_k(A) + \epsilon,$$

και τέλος με το ϵ να τείνει στο μηδέν

$$\lim f_n(A) \leqslant \lim g_k(A).$$

Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει (με την ίδια ακριβώς διαδικασία αυτή τη φορά θεωρούμε ότι $g_n(x) \leqslant f_k(x) + \epsilon$ για κάθε $x \in \sigma(A)$ κ.ο.κ.). Συνεπώς τα δύο όρια είναι τελικά μεταξύ τους ίσα.

Ακόμα μένει να δείξουμε την πολλαπλασιαστικότητα και την αθροισιμότητα. Θεωρούμε ακολουθίες f_n, g_n που συγκλίνουν στις f, g αντίστοιχα. Ακόμα θεωρούμε την $f_n g_n$ που συγκλίνει στο fg. Βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}(f_n g_n)(A)x = \lim_{n\to\infty} f_n(A)g_n(A)x = f(A)g(A)x$$

για κάθε διάνυσμα x. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\begin{aligned}\|f_n(A)g_n(A)x - f(A)g(A)x\| &\leqslant \|f_n(A)(g_n(A)-g(A))x\| + \|(f_n(A)-f(A))g(A)x\| \\ &\leqslant \|f_1(A)\|\|(g_n(A)-g(A))x\| + \|(f_n(A)-f(A))g(A)x\|.\end{aligned}$$

Η αθροισιμότητα αποδεικνύεται όμοια, είναι μάλιστα πιο άμεση.

Το ότι $f(A) \geqslant 0$ για $f \in \mathbb{P}$ προκύπτει από το γεγονός ότι $f \geqslant 0$ για κάθε $f \in \mathbb{P}$ και από την αντίστοιχη ιδιότητα (ε) του Θεωρήματος 4.1 για συνεχείς συναρτήσεις.

Αποδεικνύουμε τέλος την (iii). Υποθέτουμε ότι $f \leqslant g$. Επιλέγουμε ακολουθίες f_n, g_m που συγκλίνουν στις f, g αντίστοιχα. Ξαναεφαρμόζοντας το Λήμμα 4.13, για κάθε m υπάρχει αριθμός $n_0(m)$ έτσι ώστε για όλα τα $n \geqslant n_0(m)$

$$f_n(x) \leqslant g_m(x) + m^{-1}$$

και επομένως

$$f(A) \leqslant f_n(A) \leqslant g_m(A) + m^{-1}I.$$

Η ανισότητα $f(A) \leqslant f_n(A)$ προκύπτει από το γεγονός ότι αν θεωρήσουμε κάποιο $m \geqslant n$ τότε θα ισχύει ότι $f_m(A) \leqslant f_n(A)$ (αφού f_n φθίνουσα). Επομένως

$$\langle f_m(A)x, x\rangle \leqslant \langle f_n(A)x, x\rangle$$

για κάθε $x \in H$. Για $m \to \infty$ προκύπτει ότι

$$\langle f(A)x, x\rangle \leqslant \langle f_n(A)x, x\rangle$$

για κάθε x. Δηλαδή $f(A) \leqslant f_n(A)$. Συνεχίζοντας στην κυρίως απόδειξη και παίρνοντας όρια, βλέπουμε ότι $f(A) \leqslant g(A)$. Αν πάρουμε τώρα $g(x) := \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in \sigma(A)$, παίρνουμε ότι $f(A) \leqslant \|f\|_\infty I$. Επειδή τώρα $f(A), \|f\|_\infty I \geqslant 0$, η ιδιότητα (iii) έπεται από το Λήμμα 2.13. □

Θεώρημα 4.15. *Η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα διαστήματα $(-\infty, \lambda]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$.*

Διατυπώνουμε τέλος χωρίς απόδειξη το ακόλουθο θεώρημα, όπου με $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των φραγμένων Borel συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, των φραγμένων συναρτήσεων δηλαδή για τις οποίες η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου είναι Borel σύνολο.

Θεώρημα 4.16 (Φασματικό θεώρημα—μορφή Borel συναρτησιακού λογισμού)**.** *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής στον H. Υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\widehat{\phi}\colon \mathbb{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε* (α) $\widehat{\phi}$ *είναι αλγεβρικός* $*$*-ομομορφισμός·*

(β) $\widehat{\phi}$ *είναι συνεχής ως προς τη νόρμα* $\|\cdot\|$: $\|\widehat{\phi}(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$·

(γ) *αν* f *η συνάρτηση* $f(x) = x$, *τότε* $\widehat{\phi}(f) = A$·

(δ) *αν* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *για κάθε* x *και* $\|f_n\|_\infty$ *είναι φραγμένη, τότε* $\widehat{\phi}(f_n) \longrightarrow \widehat{\phi}(f)$.

Ακόμα έχουμε τις ιδιότητες:

(ε) *αν* $A\psi = \lambda\psi$, *τότε* $\widehat{\phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$·

(στ) *αν* $f \geqslant 0$, *τότε* $\widehat{\phi}(f) \geqslant 0$·

(ζ) *αν* $AB = BA$, *τότε* $\widehat{\phi}(f)B = B\widehat{\phi}(f)$.

4.4 Φασματικές προβολές

Ορισμός 4.17. Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής και Ω ένα Borel σύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε ο $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(A)$ λέγεται μία *φασματική προβολή* του A.

Θεώρημα 4.18. *Υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε φραγμένους αυτοσυζυγείς τελεστές και μέτρα με τιμές στις προβολές (p.v.m.)* $\{P_\Omega\}$ *που δίνεται από*

$$A \longmapsto \{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\}$$
$$\{P_\Omega\} \longmapsto A = \int \lambda dE_\lambda,$$

όπου E_λ *η φασματική ανάλυση του ταυτοτικού τελεστή (spectral resolution of the identity) που επάγεται από την οικογένεια προβολών* $\{P_\Omega \colon \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *η οποία αποτελεί μέτρο με τιμές στις προβολές (projection valued measure).*

Παρατήρηση. Το γεγονός ότι κάθε $\chi_\Omega(A)$ είναι προβολή έπεται από το ότι $\chi_\Omega = \chi_\Omega^2 = \overline{\chi_\Omega}$ σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.16.

Πρόταση 4.19. $\lambda \in \sigma(A) \iff P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A) \neq 0$ *για κάθε* $\epsilon > 0$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A) = 0$. Θα δείξουμε ότι $\lambda \notin \sigma(A)$. Έστω $L^2(M,\mu)$ ο χώρος μέτρου που έχουμε από την πολλαπλασιαστική μορφή του φασματικού θεωρήματος, $F(m)$, $m \in M$, η αντίστοιχη συνάρτηση και U ο αντίστοιχος ορθομοναδιαίος τελεστής από τον H στον $L^2(M,\mu)$. Άρα

$$(UAU^{-1}f)(m) = F(m)f(m)$$

για κάθε $f \in L^2(M,\mu)$. Έπεται εύκολα ότι

$$(Up(A)U^{-1}f)(m) = p(F(m))f(m)$$

για κάθε πολυώνυμο p και άρα $(Ug(A)U^{-1}f)(m) = g(F(m))f(m)$ για κάθε συνεχή συνάρτηση g και τελικά μπορεί να αποδειχθεί η σχέση αυτή για κάθε συνάρτηση $g \in \mathbb{P}$. Συγκεκριμένα, με χρήση κατάλληλων προσεγγίσεων αποδεικνύεται ότι η σχέση ισχύει και για $g = \chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}$ και έτσι έχουμε ότι

$$(U\chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A)U^{-1}f)(m) = \chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(F(m))f(m). \tag{8}$$

Από την υπόθεση το α′ μέλος είναι μηδέν, άρα και το β′ μέλος και συνεπώς η συνάρτηση $\chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(F(m))$ είναι μηδέν σχεδόν παντού στο M. Δηλαδή το σύνολο

$$\{m \in M \colon F(m) \in (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)\}$$

είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Αυτό σημαίνει, εξ ορισμού, ότι το λ δεν ανήκει στην ουσιώδη εικόνα της F, η οποία είναι ίση με το φάσμα του A. Δηλαδή $\lambda \notin \sigma(A)$.

($\Leftarrow$) Από τη σχέση (8) και την υπόθεση ότι $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A) \neq 0$ για κάθε $\epsilon > 0$, έχουμε ότι η συνάρτηση $\chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(F(m))$ είναι μη μηδενική σε σύνολο θετικού μέτρου, για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα το σύνολο

$$\{m \in M \colon F(m) \in (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)\}$$

είναι σύνολο θετικού μέτρου, για κάθε $\epsilon > 0$. Συνεπώς $\lambda \in \mathrm{essRanF} = \sigma(A)$. □

Ορισμός 4.20. Λέμε ότι $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, το *ουσιώδες φάσμα* του A, αν και μόνο αν η προβολή $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A)$ είναι άπειρης διάστασης για όλα τα $\epsilon > 0$. Αν $\lambda \in \sigma(A)$ αλλά η $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A)$ είναι πεπερασμένης διάστασης για κάποιο $\epsilon > 0$, λέμε ότι $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$, το *διακριτό* φάσμα του A. Λέμε ότι μία προβολή Q είναι απειροδιάστατη αν η εικόνα της $Q(H)$ είναι άπειρης διάστασης και πεπερασμένης διάστασης αν η εικόνα της είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 4.21. *Αν το $\lambda \in \sigma(A)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$ τότε $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Ειδικότερα, το ουσιώδες φάσμα $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda_n \in \sigma(A)$ με $\lambda_n \longrightarrow \lambda$, όπου $\lambda_n \neq \lambda$ για κάθε n. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία (λ_n) είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $\epsilon_0 > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $|\lambda_n - \lambda| < \frac{1}{2}\epsilon_0$.

Αφού $\lambda_n \in \sigma(A)$, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε ότι $P_{(\lambda_n-\epsilon,\lambda_n+\epsilon)}(A) \neq 0$ (από Πρόταση 4.19). Θέτουμε

$$\delta_n = \tfrac{1}{2}\min\{\lambda_n - \lambda_{n-1}, \lambda_{n+1} - \lambda_n\}.$$

Τότε τα διαστήματα

$$(\lambda_n - \delta_n, \lambda_n + \delta_n)$$

είναι ανά δύο ξένα. Επίσης για $n \geqslant n_1$

$$(\lambda_n - \delta_n, \lambda_n + \delta_n) \subset (\lambda - \epsilon_0, \lambda + \epsilon_0).$$

Άρα για $n \geqslant \max\{n_0, n_1\} =: n_2$ έχουμε ότι

$$P_{(\lambda-\epsilon_0,\lambda+\epsilon_0)}(A) \geqslant P_{\bigcup_{n\geqslant n_2}(\lambda_n-\delta_n,\lambda_n+\delta_n)}(A) = \sum_{n\geqslant n_2} P_{(\lambda_n-\delta_n,\lambda_n+\delta_n)}(A)$$

και επειδή το τελευταίο άθροισμα είναι άπειρο και οι χώροι $P_{(\lambda_n-\delta_n,\lambda_n+\delta_n)}(H)$ είναι κάθετοι ανά δύο αφού

$$P_{(\lambda_n-\delta_n,\lambda_n+\delta_n)}P_{(\lambda_m-\delta_m,\lambda_m+\delta_m)} = P_{(\lambda_m-\delta_m,\lambda_m+\delta_m)}P_{(\lambda_n-\delta_n,\lambda_n+\delta_n)} = 0,$$

έπεται ότι και ο $P_{(\lambda-\epsilon_0,\lambda+\epsilon_0)}(A)$ είναι άπειρης διάστασης, δηλαδή ότι $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Συνεπώς αν $\lambda_n \in \sigma_{\text{ess}}(A) \subseteq \sigma(A)$ με $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ και $\lambda_n \neq \lambda$ έχουμε ότι $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$, δηλαδή το ουσιώδες φάσμα είναι πάντα κλειστό. $\square$

Θεώρημα 4.22. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert H και E_λ, $-\infty < \lambda < +\infty$, η αντίστοιχη φασματική ανάλυση του ταυτοτικού τελεστή (βλ. Θεώρημα 4.18). Τότε η απεικόνιση*

$$\lambda \longmapsto E_\lambda$$

παρουσιάζει ασυνέχεια από αριστερά σε ένα $\lambda = \lambda_0$ αν και μόνο αν το λ_0 είναι ιδιοτιμή του A. Σε αυτή την περίπτωση ο ιδιόχωρος είναι

$$\ker(A - \lambda_0 I) = (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 -})(H). \tag{9}$$

Απόδειξη. Το λ_0 είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\ker(A-\lambda_0 I) \neq \{0\}$ και έτσι ο πρώτος ισχυρισμός του Θεωρήματος έπεται από τη σχέση (9). Άρα επαρκεί να αποδείξουμε την (9). Γράφουμε για συντομία

$$F_0 = E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 -}$$

και αποδεικνύουμε την (9) πρώτα δείχνοντας ότι

$$F_0(H) \subseteq \ker(A - \lambda_0 I)$$

και μετά ότι

$$\ker(A - \lambda_0 I) \subseteq F_0(H).$$

Εφαρμόζοντας την παρακάτω ανισότητα (βλ. Kreyszig σελ. 503)

$$\lambda(E_\mu - E_\lambda) \leqslant A(E_\mu - E_\lambda) \leqslant \mu(E_\mu - E_\lambda)$$

για $\lambda = \lambda_0 - \frac{1}{n}$ και $\mu = \lambda_0$ έχουμε

$$\left(\lambda_0 - \frac{1}{n}\right) E(\Delta_n) \leqslant AE(\Delta_n) \leqslant \lambda_0 E(\Delta_n),$$

όπου $\Delta_n = (\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0]$ και $E(\Delta) := E_b - E_a$ για ένα διάστημα $\Delta = (a, b]$. Τότε $E(\Delta_n) \longrightarrow F_0$ καθώς $n \to \infty$ και έτσι η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$\lambda_0 F_0 \leqslant AF_0 \leqslant \lambda_0 F_0.$$

Άρα τελικά $AF_0 = \lambda F_0$, δηλαδή $(A - \lambda_0 I)F_0 = 0$ και έτσι αποδεικνύεται ο πρώτος εγκλεισμός.

Αντίστροφα, έστω $x \in \ker(A - \lambda_0 I)$. Θα δείξουμε ότι $x \in F_0(H)$ και συγκεκριμένα ότι $F_0 x = x$. Το λ_0 είναι ιδιοτιμή του A έχουμε ότι $Ax = \lambda_0 x$. Από συναρτησιακό λογισμό έπεται ότι $f(A)x = f(\lambda_0)x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$. Από επέκταση του συναρτησιακού λογισμού έχουμε ότι αυτό ισχύει και για όλες τις άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις. Επομένως,

$$\begin{aligned} E_{\lambda_0} x &= \chi_{(-\infty,\lambda_0]}(A)x \\ &= \chi_{(-\infty,\lambda_0]}(\lambda_0)x \\ &= 1x \\ &= x. \end{aligned}$$

Για $\epsilon > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_{\lambda_0-\epsilon} x &= \chi_{(-\infty,\lambda_0-\epsilon]}(A)x \\ &= \chi_{(-\infty,\lambda_0-\epsilon]}(\lambda_0)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$E_{\lambda_0-} x = \lim_{\epsilon \to 0^+} E_{\lambda_0-\epsilon} x = 0$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} F_0 x &= (E_\lambda - E_{\lambda-})x \\ &= x - 0 \\ &= x \end{aligned}$$

δίνοντας το ζητούμενο εγκλεισμό. □

Θεώρημα 4.23. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H. Τότε*

(α) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \Leftrightarrow$ *είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$ ή ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας·*

(β) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A) \Leftrightarrow$ *είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(A)$ και ιδιοτιμή πεπερασμένης πολλαπλότητας.*

Απόδειξη. (α) ($\Rightarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ και ο $\ker(A - \lambda)$ είναι πεπερασμένης διάστασης τότε το λ είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$. Πράγματι, έστω ότι το λ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε $(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Για κάθε $\mu \in (\lambda, \lambda+\epsilon)$ υπάρχει $\epsilon_\mu > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $P_{(\mu-\epsilon_\mu, \mu+\epsilon_\mu)}(A) = 0$. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{\mu \in (\lambda, \lambda+\epsilon)} (\mu - \epsilon_\mu, \mu + \epsilon_\mu) = (\lambda, \lambda + \epsilon)$. Από το

Θεώρημα Lindelöf υπάρχουν $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\bigcup_{N=1}^{\infty}(\mu_n-\epsilon_{\mu_n},\mu_n+\epsilon_{\mu_n})=(\lambda,\lambda+\epsilon)$. Επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
P_{(\lambda,\lambda+\epsilon)}(A) &= P_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu_n-\epsilon_{\mu_n},\mu_n+\epsilon_{\mu_n})} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P_{(\mu_n-\epsilon_{\mu_n},\mu_n+\epsilon_{\mu_n})}(A) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda)}(A)=0$. Όμως

$$\begin{aligned}
P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A) &= P_{(\lambda-\epsilon,\lambda)\cup\{\lambda\}\cup(\lambda,\lambda+\epsilon)}(A) \\
&= P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A) + P_{\{\lambda\}}(A) + P_{(\lambda,\lambda+\epsilon)}(A)
\end{aligned}$$

Συνεπώς ο $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A)$ είναι πεπερασμένης διάστασης αφού $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda)}=P_{(\lambda,\lambda+\epsilon)}=0$ και ο $P_{\{\lambda\}}(A)$ είναι πεπερασμένης διάστασης όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4.22. Άρα παίρνουμε ότι $\lambda\in\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$, καταλήγοντας σε άτοπο.

($\Leftarrow$) Αν το λ είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$ τότε από το Θεώρημα 4.21 έχουμε ότι $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Αν το λ είναι ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας τότε από το Θεώρημα 4.22 έπεται εύκολα ότι $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

(β) Με αντίστοιχο τρόπο. □

5 Κριτήριο του Weyl για φραγμένους, αυτοσυζυγείς τελεστές

Λήμμα 5.1. *Έστω A φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(α) $\lambda\in\sigma(A)$·

(β) *υπάρχει ακολουθία $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον H τέτοια ώστε $\|\chi_n\|=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και* $\lim_{n\to\infty}\|(A-\lambda)\chi_n\|=0$.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω ότι δεν ισχύει η (β). Τότε υπάρχει $\epsilon>0$ έτσι ώστε

$$\|(A-\lambda)x\|\geqslant\epsilon\|x\| \tag{10}$$

για κάθε $x\in H$. Έπεται ότι το range$(A-\lambda)$ είναι πυκνός και κλειστός υπόχωρος του H. Πράγματι, έστω ακολουθία (ψ_n) στο range$(A-\lambda)$, $\psi_n=(A-\lambda)x_n$ με $\psi_n\to\psi$. Η ακολουθία (ψ_n) είναι Cauchy και συνεπώς έχουμε ότι

$$\|\psi_n-\psi_m\|=\|(A-\lambda)(x_n-x_m)\|\to 0.$$

Επομένως, λόγω της (10), η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy και άρα υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$. Ο $A - \lambda$ είναι φραγμένος και άρα συνεχής, οπότε έχουμε ότι

$$(A - \lambda)x_n \to Ax.$$

Συνεπώς $\psi = (A - \lambda)x$, δηλαδή $\psi \in \mathrm{range}(A - \lambda)$. Αυτό δείχνει ότι το $\mathrm{range}(A - \lambda)$ είναι όντως κλειστός υπόχωρος του H. Θα δείξουμε ότι είναι και πυκνός υπόχωρος του H. Είναι γνωστό ότι για κάθε αυτοσυζυγή τελεστή A ισχύει ότι $\ker(A) = [\mathrm{range}(A)]^{\perp}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για τον $A - \lambda$, έχουμε ότι $\ker(A - \lambda) = [\mathrm{range}(A - \lambda)]^{\perp}$. Όμως από την (10) $\ker(A - \lambda) = \{0\}$ και άρα $[\mathrm{range}(A - \lambda)]^{\perp} = \{0\}$. Επομένως το $\mathrm{range}(A - \lambda)$ είναι κλειστός και πυκνός υπόχωρος του H και άρα ο $(A - \lambda)$ είναι επί του H. Αφού είναι και ένα προς ένα, από την (10), έπεται ότι $\lambda \in \rho(A)$, το οποίο είναι άτοπο από υπόθεση.

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω αντίθετα ότι υπάρχει ο $(A - \lambda)^{-1}$ και είναι φραγμένος. Θεωρούμε $\psi_n = (A - \lambda)\chi_n$. Τότε $\psi_n \longrightarrow 0$ και άρα $\chi_n = (A - \lambda)^{-1}\psi_n \longrightarrow 0$, το οποίο είναι άτοπο από υπόθεση αφού $\|\chi_n\| = 1$. □

Θεώρημα 5.2 (Κριτήριο του Weyl)**.** *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$·

(β) *υπάρχει* $\{\chi_n\}$, *με* $\|\chi_n\| = 1$ *τέτοια ώστε* $\chi_n \longrightarrow 0$ *ασθενώς και* $\|(A - \lambda)\chi_n\| \longrightarrow 0$.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Λόγω του φασματικού θεωρήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A είναι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής σε κάποιον $L^2(M, \mu)$ (μ πεπερασμένο μέτρο) έτσι ώστε

$$(Af)(m) = a(m)f(m).$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\sigma(A) = \mathrm{essran}(\alpha).$$

Αν ο $\ker(A - \lambda)$ είναι άπειρης διάστασης, θεωρούμε ένα άπειρο ορθοκανονικό σύνολο στον $\ker(A - \lambda)$. Κάθε άπειρο ορθοκανονικό σύνολο συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν. Έπεται λοιπόν το ζητούμενο.

Αν ο $\ker(A - \lambda)$ είναι πεπερασμένης διάστασης τότε το λ είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4.23. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\lambda_n \in \sigma(A)$ γνησίως αύξουσα έτσι ώστε $\lambda_n \nearrow \lambda$. Έστω $\epsilon_n > 0$ ώστε τα διαστήματα

$$I_n = (\lambda_n - \epsilon_n, \lambda_n + \epsilon_n)$$

να είναι ξένα ανά δύο. Θέτουμε

$$B_n = \{m \in M \colon a(m) \in I_n\}.$$

Τα B_n είναι ξένα ανά δύο και έχουμε ότι $\mu(B_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω

$$f_n = \frac{\chi_{B_n}}{\|\chi_{B_n}\|} \colon M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε ότι $\|f_n\| = 1$, f_n κάθετες ανά δύο (άρα $f_n \to 0$ ασθενώς) και

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda)f_n\|^2 &= \int_M |\alpha-\lambda|^2 f_n^2 \, d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{B_n} |\alpha-\lambda|^2 \, d\mu \\
&\leqslant \sup_{B_n} |\alpha-\lambda|^2 \\
&\leqslant (\lambda-\lambda_n+\epsilon_n)^2 \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

(β) $\Rightarrow$ (α) Από το Λήμμα 5.1 έχουμε ότι $\lambda \in \sigma(A)$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Άρα το λ είναι ιδιοτιμή πεπερασμένης πολλαπλότητας και είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(A)$. Έστω P η ορθογώνια προβολή στον ιδιόχωρο $N = \ker(A-\lambda)$. Έστω

$$\begin{aligned}
A_1 \colon N &\longrightarrow N, &\qquad A_1 &= A|_N, \\
A_2 \colon N^\perp &\longrightarrow N^\perp, &\qquad A_2 &= A|_{N^\perp}.
\end{aligned}$$

Άρα ως προς την ανάλυση σε ευθύ άθροισμα

$$M = N \oplus N^\perp$$

παίρνουμε

$$A = A_1 \oplus A_2 = \langle \lambda \rangle \oplus A_2$$

και

$$\sigma(A) = \{\lambda\} \cup \sigma(A_2).$$

Έχουμε ότι $\lambda \notin \sigma(A_2)$. Πράγματι, έστω αντίθετα ότι $\lambda \in \sigma(A_2)$. Το λ δε μπορεί να είναι ιδιοτιμή πεπερασμένης πολλαπλότητας του A_2, αφού θα υπήρχε $\psi \in N^\perp$ έτσι ώστε $A_2\psi = \lambda\psi$. Όμως ο A_2 είναι ο περιορισμός του A στον $N^\perp$ και συνεπώς θα ίσχυε $Ay = \lambda\psi$. Αυτό θα σήμαινε ότι $\psi \in N$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το λ είναι σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A_2)$, το οποίο είναι άτοπο αφού το λ είναι μεμονωμένο σημείο από υπόθεση.

Συνεχίζοντας στην κυρίως απόδειξη, επειδή $\chi_n \to 0$ ασθενώς και P συμπαγής,

$$P\chi_n \to 0$$

(κατά νόρμα). Έστω $\psi_n = (I-P)\chi_n$ (άρα $\psi_n \in N^\perp$). Τότε

$$\|\psi_n\| = \|\chi_n - P\chi_n\| \longrightarrow 1$$

και

$$\begin{aligned}
\|(A_2-\lambda)\psi_n\| &= \|(A_2-\lambda)(I-P)\chi_n\| \\
&= \|(A-\lambda)(I-P)\chi_n\| \\
&= \|(I-P)(A-\lambda)\chi_n\| \\
&\leqslant \|(A-\lambda)\chi_n\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Άρα από το Λήμμα 5.1 έχουμε ότι $\lambda \in \sigma(A_2)$, το οποίο είναι άτοπο όπως είδαμε πριν. $\square$

6 Εναλλακτική προσέγγιση συναρτησιακού λογισμού

Θα δημιουργήσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση του συναρτησιακού λογισμού $f \longmapsto f(U)$ όταν $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθομοναδιαίος. Εξ ορισμού παίρνουμε

$$f(U) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)U^k, \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta$$

οποτεδήποτε $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| < \infty$ (μάλιστα λέμε ότι $f \in A(\mathbb{S}^1)$ τότε). Ο στόχος μας είναι να επεκτείνουμε το συναρτησιακό λογισμό $f \longrightarrow f(U)$ σε $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Η διαφορά είναι ότι δε θα κάνουμε καθόλου χρήση του ολομορφικού συναρτησιακού λογισμού. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε βασικές ταυτότητες με βάση τον παραπάνω ορισμό. Αρχικά θεωρούμε τις

$$e_l(\zeta) = \zeta^l,$$

$l \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$. Υπολογίζοντας τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε

$$\widehat{e_l}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^l e^{-ik\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\theta}d\theta = \delta_{kl},$$

για $k, l \in \mathbb{Z}$. Ορίζοντας τώρα $\phi(\zeta) = \overline{f(\zeta)}$, παίρνουμε ότι

$$\overline{\widehat{f}(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(e^{i\theta})e^{ik\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{ik\theta}d\theta = \widehat{\phi}(-k),$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Ο U είναι ορθομοναδιαίος, συνεπώς ισχύει ότι $U^* = U^{-1}$. Άρα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(U)^* &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)U^k\right)^* \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\widehat{f}(k)U^k\right)^* \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}(U^*)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}U^{-k} \\ &= \overline{f}(U). \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι για πεπερασμένα αθροίσματα ισχύει ότι

$$\left(\sum_{k=-N}^{M} \widehat{f}(k)U^k\right)^* = \sum_{k=-N}^{M} \left(\widehat{f}(k)U^k\right)^*.$$

Όμως η $\alpha \longmapsto \alpha^*$ είναι συνεχής αφού αν θεωρήσουμε κάποια ακολουθία $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ έχουμε ότι

$$\|\alpha_n^* - \alpha^*\| = \|(\alpha_n - \alpha)^*\| = \|\alpha_n - \alpha\| \longrightarrow 0.$$

Ακόμα έχουμε ότι

$$\sum_{k=-N}^{M} \widehat{f}(k)U^k \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)U^k,$$

και άρα

$$\left(\sum_{k=-N}^{M} \widehat{f}(k)U^k\right)^* \longrightarrow \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)U^k\right)^*,$$

και επίσης

$$\sum_{k=-N}^{M} \left(\widehat{f}(k)U^k\right)^* \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\widehat{f}(k)U^k\right)^*.$$

Έπεται λοιπόν η ζητούμενη ισότητα. Η σχέση αυτή δηλώνει ότι αν $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ομαλή τότε $f(U)$ είναι αυτοσυζυγής. Μάλιστα φθάνει $f \in A(\mathbb{S}^1)$.

Για να συνεχίσουμε με την ανάλυση του $(fg)(U)$, για δοσμένες $f, g \in A(\mathbb{S}^1)$, αρχικά ορίζουμε

$$g_l(\zeta) = \zeta^l g(\zeta) = e_l(\zeta)g(\zeta),$$

$l \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$. Υπολογίζοντας τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\widehat{g_l}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^l g(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\theta} g(e^{i\theta})d\theta \\
&= \widehat{g}(k-l),
\end{aligned}$$

για κάθε $k, l \in \mathbb{Z}$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
g_l(U) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g_l}(k)U^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k-l)U^k \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(m)U^{l+m} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(m)U^l U^m \\
&= U^l g(U),
\end{aligned}$$

για κάθε $l \in \mathbb{Z}$. Έχουμε επίσης ότι

$$(fg)(\zeta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l)\zeta^l g(\zeta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) g_l(\zeta),$$

για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$. Επομένως, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \widehat{(fg)}(k) &= \left(\widehat{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) g_l}\right)(k) \\ &= \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l)\widehat{g_l}\right)(k). \end{aligned} \tag{11}$$

Πράγματι, από τη μία έχουμε ότι

$$\left(\widehat{\sum_{l=-N}^{N} \widehat{f}(l) g_l}\right)(k) = \sum_{l=-N}^{N} \widehat{f}(l)\widehat{g_l}(k) \longrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l)\widehat{g_l}(k)$$

καθώς $N \to \infty$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, από την άλλη, για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\widehat{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) g_l}\right)(k) - \left(\widehat{\sum_{l=-N}^{N} \widehat{f}(l) g_l}\right)(k) \right| &= \left| \left(\widehat{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) g_l - \sum_{l=-N}^{N} \widehat{f}(l) g_l}\right)(k) \right| \\ &= \left(\widehat{\sum_{|l|>N} \widehat{f}(l) g_l}\right)(k) \\ &\leq \sup_{\zeta \in \mathbb{S}^1} \left| \sum_{|l|>N} \widehat{f}(l) g_l(\zeta) \right| \\ &\leqslant \|g\|_\infty \sum_{|l|>N} \left|\widehat{f}(l)\right| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς $N \to \infty$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από την (11) έπεται τώρα ότι

$$\begin{aligned} (fg)(U) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l)\widehat{g_l}(k) U^k \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g_l}(k) U^k \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) g_l(U) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(l) U^l g(U) \\ &= f(U)g(U) \end{aligned} \tag{12}$$

για δοσμένες $f, g \in A(\mathbb{S}^1)$, ειδικότερα για $f, g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Αν $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ομαλή, τότε $f(U)$ είναι αυτοσυζυγής. Η παρακάτω πρόταση είναι το κλειδί για την επέκταση του συναρτησιακού λογισμού σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f \in C(\mathbb{S}^1)$.

Πρόταση 6.1. *Αν $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ και $f\colon \mathbb{S}^1 \to [0,\infty)$, τότε $f(U) \geqslant 0$, δηλαδή,*

$$(f(U)v, v) \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in H.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\epsilon > 0$, θέτουμε $f_\epsilon(\zeta) = f(\zeta) + \epsilon$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$. Τότε $f_\epsilon\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow [\epsilon, \infty)$ και υπάρχει ομαλή $g_\epsilon\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow (0,\infty)$ τέτοια ώστε $g_\epsilon(\zeta) = f_\epsilon(\zeta)^{\frac{1}{2}}$. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\widetilde{f_\epsilon}(\theta) := f_\epsilon(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) + \epsilon$$

για $\theta \in \mathbb{R}$, τότε $\widetilde{f_\epsilon}\colon \mathbb{R} \longrightarrow [\epsilon,\infty)$ και $\widetilde{f_\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{R})$, εξ' ορισμού του τι σημαίνει $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Αφού η συνάρτηση $x \longmapsto \sqrt{x}$ είναι επίσης στο $C^\infty(0,\infty)$, η συνάρτηση $\sqrt{\widetilde{f_\epsilon}}$ είναι στο $C^\infty(\mathbb{R})$, και $\sqrt{\widetilde{f_\epsilon}(\theta)} = \sqrt{\widetilde{f_\epsilon}(\theta + 2\pi m)}$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Επομένως η $\sqrt{\widetilde{f_\epsilon}}$ είναι μια 2π-περιοδική $C^\infty(\mathbb{R})$ συνάρτηση και άρα ορίζει μία $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ συνάρτηση στον $\mathbb{S}^1$. Έπεται τώρα ότι

$$f(U) + \epsilon I_H = f_\epsilon(U) = g_\epsilon(U)^2,$$

όπου I_H ο ταυτοτικός τελεστή στον χώρο Hilbert, με τον $g_\epsilon(U)$ αυτοσυζυγή. Πράγματι, για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\epsilon}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\epsilon(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon e^{-ik\theta}\,d\theta \\
&= \begin{cases} \widehat{f}(0) + \epsilon & \text{αν } k = 0 \\ \widehat{f}(k) & \text{αν } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}
\end{aligned}$$

και άρα

$$f_\epsilon(U) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f_\epsilon}(k)U^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)U^k + \epsilon U^0 = f(U) + \epsilon I_H,$$

και η δεύτερη ισότητα επειδή $g_\epsilon^2 = f_\epsilon$ και άρα $f_\epsilon(U) = (g_\epsilon g_\epsilon)(U) = g_\epsilon(U)g_\epsilon(U)$ από την (12), αφού $g_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Τέλος ο $g_\epsilon(U)$ είναι αυτοσυζυγής επειδή η g_ϵ είναι $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Έπεται τώρα ότι

$$\begin{aligned}
\langle (f(U) + \epsilon I_H)v, v\rangle &= \langle g_\epsilon(U)^2 v, v\rangle \\
&= \langle g_\epsilon(U)v, g_\epsilon(U)^* v\rangle \\
&= \langle g_\epsilon(U)v, g_\epsilon(U)v\rangle \\
&= \|g_\epsilon(U)v\|^2 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $\epsilon \longrightarrow 0$ προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση. Για δοσμένη $f_\epsilon\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow (0,\infty)$ και $g_\epsilon = f_\epsilon^{\frac{1}{2}}$, είναι ξεκάθαρο ότι

$$f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{S}^1) \Longrightarrow g_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{S}^1).$$

Το αποτέλεσμα

$$f_\epsilon \in A(\mathbb{S}^1) \Longrightarrow g_\epsilon \in A(\mathbb{S}^1)$$

επίσης ισχύει αλλά είναι δυσκολότερο να αποδειχθεί.

Πρόταση 6.2. *Αν $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, τότε*

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{S}^1}|f(\zeta)| = M \Longrightarrow \|f(U)\| \leqslant M.$$

Απόδειξη. Για

$$g = M^2 - |f|^2$$

έχουμε ότι

$$g \geqslant 0, \qquad g \in C^\infty(\mathbb{S}^1),$$

έτσι από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $g(U) \geqslant 0$. Επομένως, για όλα τα $v \in H$,

$$\begin{aligned}
\|f(U)v\|^2 &= \langle f(U)v, f(U)v\rangle \\
&= \langle f(U)^* f(U)v, v\rangle \\
&= \langle \overline{f}(U) f(U)v, v\rangle \\
&= \langle |f|^2(U)v, v\rangle \\
&= \langle M^2 v, v\rangle - \langle g(U)v, v\rangle \\
&\leqslant \langle M^2 v, v\rangle \\
&= M^2\|v\|^2,
\end{aligned}$$

που δίνει το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.3. *Για δεδομένο $U \in \mathcal{B}(H)$ μοναδιαίο, η απεικόνιση $f \longmapsto f(U)$ έχει μοναδική συνεχή επέκταση από το $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ στο $C(\mathbb{S}^1)$. Έχουμε ότι*

$$f, g \in C(\mathbb{S}^1) \quad \Longrightarrow \quad (fg)(U) = f(U)g(U), \quad \overline{f}(U) = f(U)^*$$

και

$$f \in C(\mathbb{S}^1),\ |f| \leqslant M \ \Longrightarrow\ \|f(U)\| \leqslant M.$$

Απόδειξη. Ο $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ είναι πυκνός στον $C(\mathbb{S}^1)$. Επομένως για κάθε $f \in C(\mathbb{S}^1)$ υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\subset C^\infty(\mathbb{S}^1)$ ώστε $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $(f_n(U))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι είναι Cauchy. Έχουμε ότι

$$\|f_n(U) - f_m(U)\| = \|(f_n - f_m)(U)\| \leqslant \sup_{\mathbb{S}^1}|f_n - f_m| \longrightarrow 0.$$

Επομένως η $(f_n(U))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνει σε κάποιο όριο το οποίο θα συμβολίσουμε με $f(U)$.

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη. Θεωρούμε κάποια άλλη ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ με $g_n \longrightarrow f$ στον $C(\mathbb{S}^1)$, δηλαδή ομοιόμορφα. Θα δείξουμε ότι η $g_n(U)$ συγκλίνει επίσης στο ίδιο όριο. Με αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι το όριο που επιλέξαμε για τον ορισμό του $f(U)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $(f_n(U))_{n\in\mathbb{N}}$. Πράγματι έχουμε

$$\|f_n(U) - g_n(U)\| = \|(f_n - g_n)(U)\| \leqslant \sup_{\mathbb{S}^1}|f_n - g_n| \leqslant \sup_{\mathbb{S}^1}|f_n - f| + \sup_{\mathbb{S}^1}|f - g_n| \longrightarrow 0.$$

Η μοναδικότητα της επέκτασης προκύπτει ως εξής. Έστω ότι υπάρχουν δύο συνεχείς επεκτάσεις $f \longmapsto f(U)$ και $f \longmapsto f(U)'$, $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Θεωρούμε ότι $f(U) = f(U)'$ για κάθε $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Έστω κάποια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ με $f_n \longrightarrow f$. Από τη συνέχεια των επεκτάσεων προκύπτει ότι

$$f_n(U) \longrightarrow f(U)$$

και

$$f_n(U)' \longrightarrow f(U)'.$$

Όμως ισχύει ότι $f_n(U) = f_n(U)'$ (από υπόθεση) και συνεπώς

$$f(U) = f(U)'.$$

□

Θεώρημα 6.4. *Αν $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε υπάρχει χώρος μέτρου $(X, \mathcal{B}, \mu)$, μια απεικόνιση*

$$\Phi\colon H \longrightarrow L^2(X, \mu),$$

και $u \in L^\infty(X, \mu)$ τέτοιο ώστε $|u| = 1$ και για όλα τα $v \in H$

$$(\Phi U v)(x) = u(x)(\Phi v)(x).$$

Επιπλέον, για κάθε $f \in C(\mathbb{S}^1)$,

$$[\Phi f(U) v](x) = f(u(x))(\Phi v)(x).$$

Απόδειξη. Για δοσμένο ορθομοναδιαίο τελεστή $U \in \mathcal{B}(H)$, παίρνουμε ένα μη μηδενικό $v \in H$ και ορίζουμε

$$\mu(f) = \mu_{U,v}(f) = \langle f(U)v, v\rangle$$

για $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Έχουμε δείξει ότι αν $f \geqslant 0$ τότε $f(U) \geqslant 0$, επομένως $\mu(f) \geqslant 0$. Από θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι ορίζεται κάποιο μέτρο Radon μ στον $\mathbb{S}^1$ έτσι ώστε

$$\langle f(U)v, v\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f\, d\mu.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε

$$W = W_{U,v}\colon C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H$$

έτσι ώστε

$$W(f) = f(U)v.$$

Τότε, αν $g \in C(\mathbb{S}^1)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle W(f), W(g)\rangle_H &= \langle f(U)v, g(U)v\rangle \\ &= \langle g(U)^* f(U)v, v\rangle \\ &= \langle \overline{g}(U) f(U)v, v\rangle \\ &= \langle (\overline{g}f)(U)v, v\rangle \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} f\overline{g}\, d\mu \\ &= \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)}.\end{aligned}$$

Επομένως η W είναι ισομετρία. Ως επακόλουθο, η W έχει μοναδική συνεχή επέκταση σε

$$W\colon L^2(\mathbb{S}^1,\mu) \longrightarrow H.$$

Πράγματι, έστω $f \in L^2(\mathbb{S}^1,\mu)$. Ο $C(\mathbb{S}^1)$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{S}^1,\mu)$ και επομένως υπάρχουν $f_n \in C(\mathbb{S}^1,\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$f_n \longrightarrow f$$

ως προς την L^2-νόρμα. Ακόμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|W(f_n) - W(f_m)\|_H &= \|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \\ &= \|f_n - f + f - f_m\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} + \|f - f_m\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

άρα η $W((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Συνεπώς υπάρχει κάποιο $W(f) \in H$ τέτοιο ώστε

$$W(f_n) \longrightarrow W(f)$$

στον H.

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι ο W είναι καλά ορισμένος. Έστω κάποια άλλη ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $C(\mathbb{S}^1)$ με $g_n \longrightarrow f$. Θα δείξουμε ότι η $W(g_n)$ συγκλίνει στο ίδιο όριο με την $W(f_n)$, και άρα ότι το όριο που επιλέξαμε για τον ορισμό του $W(f)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned}\|W(f_n) - W(g_n)\|_{L^2} &= \|f_n - g_n\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \\ &= \|f_n - f + f - g_n\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{L^2} + \|f - g_n\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

άρα τα όρια είναι πράγματι ίσα.

Η μοναδικότητα προκύπτει ως εξής. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $W, W'\colon L^2(\mathbb{S}^1,\mu) \longrightarrow H$ συνεχή τέτοια ώστε

$$W(g) = W'(g)$$

για κάθε $g \in C(\mathbb{S}^1)$. Έστω f_n, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία από συνεχείς συναρτήσεις με $f_n \longrightarrow f$ στον L^2. Τότε από την συνέχεια των W, W' παίρνουμε ότι

$$W(f_n) \longrightarrow W(f)$$

και
$$W'(f_n) \longrightarrow W'(f).$$
Όμως έχουμε ότι $W(f_n) = W'(f_n)$ (εφόσον f_n συνεχής). Άρα τελικά έχουμε ότι $W(f) = W'(f)$.

Το πεδίο τιμών (range) του W είναι η κλειστή θήκη στον H του
$$C(U,v) = \operatorname{span}\{U^k v \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$
Αυτό προκύπτει ως εξής. Για $f \in A(\mathbb{S}^1)$ ισχύει ότι
$$\begin{aligned} W(f) &= f(U)v \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) U^k v \\ &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{k=-N}^{M} \widehat{f}(k) U^k v \end{aligned}$$
και παρατηρούμε ότι το τελευταίο όριο ανήκει στο $\overline{C(U,v)}$. Άρα παίρνουμε πως
$$W(A(\mathbb{S}^1)) \subseteq \overline{C(U,v)}.$$
Αν τώρα $f \in C(\mathbb{S}^1)$, τότε υπάρχουν $f_n \in A(\mathbb{S}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Τότε $f_n(U) \longrightarrow f(U)$ ως προς την νόρμα τελεστών, άρα $f_n(U)v \longrightarrow f(U)v$ επίσης και αφού $f_n(U)v \in \overline{C(U,v)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και το $\overline{C(U,v)}$ είναι κλειστό, έπεται ότι και $W(f) = f(U)v \in \overline{C(U,v)}$. Αυτό δείχνει τώρα ότι
$$W(C(\mathbb{S}^1)) \subseteq \overline{C(U,v)}.$$
Τέλος, αν $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$, τότε υπάρχουν $f_n \in C(\mathbb{S}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $f_n \longrightarrow f$ στον L^2. Τότε, επειδή η W είναι ισομετρία και άρα συνεχής, παίρνουμε ότι $W(f_n) \longrightarrow W(f)$ και αφού $f_n \in C(\mathbb{S}^1)$ και άρα $W(f_n) \in \overline{C(U,v)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $W(f) \in \overline{C(U,v)}$. Αυτό δείχνει τελικά ότι
$$\operatorname{range}(W) = W(L^2(\mathbb{S}^1,\mu)) \subseteq \overline{C(U,v)}.$$
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $\overline{C(U,v)}$ γράφεται ως όριο πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών $\sum_{n=-N}^{M} c_n U^n v$ για κάποια $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \{-N, \dots, M\}$, και μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M = N$, δηλαδή ότι ο πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός γράφεται ως $\sum_{n=K}^{K} c_n' U^n v$, παίρνοντας $K := \max\{N, M\}$ και $c_n' = c_n$ αν $n \in \{-N, \dots, M\}$ και $c_n' = 0$ αλλιώς. Αν λοιπόν $w \in \overline{C(U,v)}$, τότε υπάρχουν
$$w_n = \sum_{m=-N_n}^{N_n} c_{n,m} U^n v \in H,$$

$n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $w = \lim_{n\to\infty} w_n$. Ορίζουμε

$$f_n(\zeta) := \sum_{m=-N_n}^{N_n} c_{n,m}\zeta^m,$$

$\zeta \in \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\widehat{f_n}(k) = \begin{cases} c_{n,m} & \text{αν } |m| \leqslant N_n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και άρα $f_n \in A(\mathbb{S}^1)$ και

$$f_n(U) = \sum_{m=-N_n}^{N_n} c_{n,m}U^m,$$

οπότε

$$W(f_n) = \sum_{m=-N_n}^{N_n} c_{n,m}U^m v.$$

Επειδή τώρα η $W((f_n))_{n\in\mathbb{N}_\times}$ συγκλίνει, στο w, είναι Cauchy και επειδή η W είναι ισομετρία και η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $f \in L^2(\mathbb{S}^1,\mu)$ στην L^2-νόρμα. Από την συνέχεια της W πάλι, πρέπει $w = \lim_{n\to\infty} W(f_n) = W(f)$ και άρα $w \in \operatorname{range}(W)$. Αυτό δείχνει τον αντίστροφο εγκλεισμό $\overline{C(U,v)} \subseteq \operatorname{range}(W)$ και άρα τελικά $\overline{C(U,v)} = \operatorname{range}(W)$.

Ο $\overline{C(U,v)}$ λέγεται κυκλικός υπόχωρος του H που παράγεται από τον U και το v. Μάλιστα, αν $\overline{C(U,v)} = H$, λέμε ότι το v είναι κυκλικό διάνυσμα του U.

Πρόταση 6.5. *Αν $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθομοναδιαίος και έχει ένα κυκλικό διάνυσμα v, τότε*

$$W\colon L^2(\mathbb{S}^1,\mu) \longrightarrow H$$

είναι ορθομοναδιαίος και

$$(W^{-1}UWf)(\zeta) = \zeta f(\zeta), \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{S}^1,\mu),\ \zeta \in \mathbb{S}^1.$$

Απόδειξη. Ο W είναι ορθομοναδιαίος αφού αποδείχθηκε παραπάνω ότι ο W είναι ισομετρία καθώς και ότι

$$\operatorname{range}(W) = \overline{C(U,v)}.$$

Όμως το v είναι κυκλικό διάνυσμα του U και άρα ισχύει ότι

$$\operatorname{range}(W) = \overline{C(U,v)} = H.$$

Επομένως ο W είναι μια επί ισομετρία, δηλαδή είναι ορθομοναδιαίος.

Από το Πόρισμα 6.3, για $h_f(\zeta) := \zeta f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$, έχουμε ότι $h_f(U) = Uf(U)$, όταν $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Άρα

$$W(h_f) = h_f(U)v = Uf(U)v = UW(f)$$

για $f \in C(\mathbb{S}^1)$ και επομένως

$$\begin{aligned}(W^{-1}UWf)(\zeta) &= W^{-1}(UW(f))(\zeta)\\ &= W^{-1}(W(h_f))(\zeta)\\ &= h_f(\zeta)\\ &= \zeta f(\zeta)\end{aligned}$$

και προκύπτει η ζητούμενη σχέση για $f \in C(\mathbb{S}^1)$.

Έστω τώρα $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$. Τότε υπάρχουν $f_n \in C(\mathbb{S}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $f_n \longrightarrow f$ στην L^2-νόρμα. Τότε

$$\begin{aligned}\|h_f - h_{f_n}\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} &= \left(\int_{\mathbb{S}^1} |\zeta f(\zeta) - \zeta f_n(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta)\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbb{S}^1} |\zeta|^2 |f(\zeta) - f_n(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta)\right)^{1/2}\\ &= \|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

και επειδή η W είναι ισομετρία έχουμε ότι $\|W(h_f) - W(h_{f_n})\| \longrightarrow 0$. Όμως επίσης

$$W(h_{f_n}) = UW(f_n) \longrightarrow UW(f),$$

η πρώτη ισότητα από τα παραπάνω επειδή $f_n \in C(\mathbb{S}^1)$, και η σύγκλιση επειδή ο U είναι ορθομοναδιαίος και η W ισομετρία, οπότε

$$\|UW(f_n) - UW(f)\| = \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mu)} \longrightarrow 0.$$

Έπεται τώρα ότι $W(h_f) = UW(f)$ και επομένως $h_f = W^{-1}UW(f)$, που δείχνει την ζητούμενη σχέση για αυθαίρετες $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu)$. □

Πρόταση 6.6. *Αν ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος και $U \in \mathcal{B}(H)$ ορθομοναδιαίος τελεστής, τότε υπάρχουν $v_j \in H$, $j \in J$, τέτοια ώστε οι $\overline{C(U, v_j)}$, $j \in J$, να είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους υπόχωροι του H, με τη γραμμική τους θήκη (span) πυκνή στον H και όπου το σύνολο δεικτών J είναι αριθμήσιμο, πεπερασμένο ή άπειρο.*

Απόδειξη. Έστω $\{w_j : j \in \mathbb{N}\}$ ένα πυκνό υποσύνολο του H (υπάρχει τέτοιο εφόσον υποθέτουμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος) με όλα τα $w_j \neq 0$. Παίρνουμε $v_1 = w_1$ και θεωρούμε

$$\overline{C(U, v_1)} = \overline{\operatorname{span}\{v_1, Uv_1, U^2v_1, \dots\}} =: H_1.$$

Παρατηρούμε ότι $U : H_1 \longrightarrow H_1$, επειδή $U(U^k v_1) = U^{k+1}v_1 \in H_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, η U είναι γραμμική και άρα η U-εικόνα ενός γραμμικού συνδυασμού από $U^k v_1$ είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός από $U^k v_1$ και τέλος $U\big(\overline{\operatorname{span}\{v_1, Uv_1, U^2v_1, \dots\}}\big) \subseteq \overline{U(\operatorname{span}\{v_1, Uv_1, U^2v_1, \dots\})}$, λόγω συνέχειας του U.

Αν $H_1 = H$, έχουμε τελειώσει αφού έχουμε το ζητούμενο. Αν όχι, συνεχίζουμε ως εξής. Παρατηρούμε καταρχήν ότι, οποτεδήποτε $H' \subseteq H$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος,

$$U : H' \longrightarrow H' \implies U : (H')^\perp \longrightarrow (H')^\perp.$$

Πράγματι, αν $w \in (H')^{\perp}$, τότε

$$\langle v, Uw \rangle = \langle Uv, w \rangle = 0,$$

για κάθε $v \in H'$, δίνοντας το παραπάνω συμπέρασμα. Συνεχίζοντας, θεωρούμε το πρώτο $j \geqslant 2$ έτσι ώστε $w_j \notin H_1$, και θέτουμε v_2 να είναι η ορθογώνια προβολή του w_j πάνω στον $H_1^{\perp}$. Τότε θέτουμε $H_2 = \overline{C(U, v_2)}$ και από την παραπάνω παρατήρηση $H_2 = \overline{C(U, v_2)} \subseteq H_1^{\perp}$, αφού $v_2 \in H_1^{\perp}$ και επίσης ο $H_1^{\perp}$ είναι κλειστός. Προφανώς ο

$$H_1 \oplus H_2 = \{h_1 + h_2 \colon h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

περιέχει το $\mathrm{span}\{w_k \colon 1 \leqslant k \leqslant j\}$. Επίσης $U(H_i) \subseteq H_i$ για $i \in \{1, 2\}$ και άρα $U(H_1 \oplus H_2) \subseteq H_1 \oplus H_2$. Αν $H_1 \oplus H_2 = H$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, γνωρίζουμε ότι

$$U \colon (H_1 \oplus H_2)^{\perp} \longrightarrow (H_1 \oplus H_2)^{\perp}.$$

Παίρνουμε το πρώτο $j_3 > j$ για το οποίο $w_{j_3} \notin H_1 \oplus H_2$, και θέτουμε v_3 να είναι η ορθογώνια προβολή του w_{j_3} πάνω στον $(H_1 \oplus H_2)^{\perp}$. Τότε θέτουμε

$$H_3 = \overline{C(U, v_3)} \subseteq (H_1 \oplus H_2)^{\perp}.$$

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία. Αν, για κάποιο $K \in \mathbb{N}$, $H_1 \oplus \ldots \oplus H_K = H$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, παίρνουμε μία άπειρη αριθμήσιμη ακολουθία από ορθογώνιους μεταξύ τους χώρους $H_k = \overline{C(U, v_k)}$, $k \in \mathbb{N}$, των οποίων η γραμμική θήκη περιέχει τα w_j για κάθε $j \in \mathbb{N}$, είναι δηλαδή πυκνή στον H και έπεται το ζητούμενο. $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.8, όταν ο H είναι διαχωρίσιμος. Από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχουν κυκλικοί υπόχωροι

$$H_j = \overline{C(U, v_j)},$$

$j \in J$ του H, όπου το J είναι αριθμήσιμο, πεπερασμένο ή άπειρο, που είναι κάθετοι μεταξύ τους ανά δύο και των οποίων η γραμμική θήκη είναι πυκνή στον H. Θεωρούμε και τους αντίστοιχους τελεστές

$$W_j = W_{U, v_j} \colon C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H_j, \qquad W_j(f) = f(U) v_j,$$

που όπως είδαμε επεκτείνονται σε ορθομοναδιαίες απεικονίσεις

$$W_j \colon L^2(\mathbb{S}^1, \mu_j) \longrightarrow H_j, \qquad \int_{\mathbb{S}^1} f \, d\mu_j = (f(U) v_j, v_j), \tag{13}$$

για κατάλληλα μέτρα Radon μ_j, που ικανοποιούν την

$$W_j^{-1} U W_j f = h_f, \qquad f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mu_j),$$

με h_f όπως πιο πάνω, δηλαδή $h_f(\zeta) = \zeta f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$H = \bigoplus_{j \in J} H_j. \tag{14}$$

Αν το J είναι πεπερασμένο, $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ έστω, η γραμμική θήκη των H_j, $j \in J$, είναι ακριβώς

$$H_1 \oplus \cdots \oplus H_k = \{h_1 + \cdots + h_k \colon h_1 \in H_1, \ldots, h_k \in H_k\}$$

και αφού είναι πυκνή στον H και το $H_1 \oplus \cdots \oplus H_k$ κλειστό[1] έπεται ότι $H_1 \oplus \cdots \oplus H_k = H$.

Υποθέτουμε λοιπόν τώρα ότι το J είναι άπειρο και συγκεκριμένα ότι $J = \mathbb{N}$. Για $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \ldots$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του H, αφού τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{N} h_n$, $N \in \mathbb{N}$, αποτελούν βασική ακολουθία στον H:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} h_n - \sum_{n=1}^{M} h_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=\min\{N,M\}+1}^{\max\{N,M\}} h_n \right\|^2 = \sum_{n=\min\{N,M\}+1}^{\max\{N,M\}} \|h_n\|^2 \longrightarrow 0$$

αφού $h_n \in H_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $H_n \perp H_m$ για $n \neq m$· επιπλέον ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} h_n \right\|^2 &= \left\| \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} h_n \right\|^2 \\ &= \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} h_n \right\|^2 \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \|h_n\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2, \end{aligned}$$

[1]Έστω $(h_1(n) + \cdots + h_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $H_1 \oplus \cdots \oplus H_k$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο h στον H. Τότε η ακολουθία αυτή είναι Cauchy και άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|(h_1(n) + \cdots + h_k(n)) - (h_1(m) + \cdots + h_k(m))\| < \varepsilon$$

για όλα τα $n, m \geqslant n_\varepsilon$. Όμως

$$\begin{aligned} \|h_1(n) + \cdots + h_k(n) - (h_1(m) + \cdots + h_k(m))\|^2 &= \|h_1(n) - h_1(m) + \cdots + h_k(n) - h_k(m))\|^2 \\ &= \|h_1(n) - h_1(m)\|^2 + \cdots + \|h_k(n) - h_k(m))\|^2 \end{aligned}$$

λόγω ορθογωνιότητας των $H_1, \ldots, H_k$ ανά δύο και άρα $\|h_i(n) - h_i(m)\|^2 < \varepsilon^2$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε $(h_i(n))_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, είναι Cauchy και αφού οι $H_1, \ldots, H_k$ είναι κλειστοί και άρα πλήρεις υπόχωροι του H, έπεται ότι κάθε $(h_i(n))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $h_i \in H_i$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$. Τότε όμως $h_1(n) + \cdots + h_k(n) \longrightarrow h_1 + \cdots + h_k$, αφού

$$\|h_1(n) + \cdots + h_k(n) - (h_1 + \cdots + h_k)\| \leqslant \|h_1(n) - h_1\| + \cdots + \|h_k(n) - h_k\| \longrightarrow 0,$$

οπότε $h = h_1 + \cdots + h_k \in H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$, που δείχνει ότι ο $H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$ είναι κλειστός.

η δεύτερη ισότητα από την συνέχεια της νόρμας.

Εξ' ορισμού θέτουμε

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} h_n \colon h_n \in H_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty \right\}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, για $h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \in H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ και $g = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \in H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
\langle h, g \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} h_n, \sum_{m=1}^{\infty} g_m \right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} h_n, \sum_{m=1}^{M} g_m \right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \langle h_n, g_m \rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \langle h_n, g_m \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle h_n, g_m \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, g_n \rangle \qquad (15)
\end{aligned}$$

αφού $\langle h_n, g_n \rangle = 0$ για $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Βλέπε και την αιτιολόγηση της (16) για λεπτομερέστερη αιτιολόγηση της δεύτερης ισότητας παραπάνω. Επιπλέον, η $\sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, g_n \rangle$ συγκλίνει απολύτως από την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Πράγματι, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h_n, g_n \rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \|g_n\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Τέλος, ο χώρος $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ είναι πλήρης και άρα τελικά κλειστός υπόχωρος του H.

Πράγματι, έστω $(h(m))_{m\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$, δηλαδή κάθε $h(m)$ γράφεται ως

$$h(m) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(m)$$

με $h_n(m) \in H_n$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n(m)\|^2 < \infty$. Τότε

$$\|h(m) - h(k)\|^2 \longrightarrow 0$$

καθώς $k, m \to \infty$ και επειδή

$$\begin{aligned}\|h(m) - h(k)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} h_n(m) - \sum_{n=1}^{\infty} h_n(k) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (h_n(m) - h_n(k)) \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n(m) - h_n(k)\|^2,\end{aligned}$$

λόγω ορθογωνιότητας των $H_1, H_2, \ldots$ ανά δύο, έπεται ότι

$$\|h_n(m) - h_n(k)\|^2 \leqslant \|h(m) - h(k)\|^2 \to 0$$

καθώς $k, m \to\to \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα η ακολουθία $(h_n(m))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον H_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού κάθε H_n είναι πλήρης, αφού είναι κλειστός, έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $h_n \in H_n$ τέτοιο ώστε $h_n(m) \to h_n$, καθώς $m \longrightarrow \infty$. Από το λήμμα του Fatou (για το μέτρο απαρίθμησης στο $\mathbb{N}$) και τη συνέχεια της νόρμας έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \|h_n(m)\|^2 \\ &\leqslant \liminf_m \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n(m)\|^2 \\ &= \liminf_m \|h(m)\|^2\end{aligned}$$

και η τελευταία ποσότητα είναι πεπερασμένη γιατί η ακολουθία $(h(m))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι βασική: για $\varepsilon = 1 > 0$ υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|h(m) - h(k)\| < 1$$

για όλα τα $k, m \geqslant M$ και τότε

$$\|h(m)\| \leqslant \max\{\|h(1)\|, \ldots, \|h(M-1)\|, \|h(M)\| + 1\}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ συγκλίνει στον H και ορίζει ένα στοιχείο h του $H_1 \oplus H2 \oplus \cdots$, εξ ορισμού του τελευταίου χώρου. Μένει να δειχθεί ότι $h(m) \longrightarrow h$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|h(m) - h(k)\| < \epsilon$$

για όλα τα $k, m \geqslant N$. Έχουμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\|h(m) - h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n(m) - h_n\|^2.$$

Τώρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\|h_n(m)-h_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{N}\lim_{k\to\infty}\|h_n(m)-h_n(k)\|^2\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|h_n(m)-h_n(k)\|^2\\ &\leqslant \liminf_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n(m)-h_n(k)\|^2\\ &= \liminf_{k\to\infty}\|h(m)-h(k)\|^2\\ &\leqslant \varepsilon^2,\end{aligned}$$

όταν $m \geqslant M$. Επομένως, για $m \geqslant M$, έχουμε ότι

$$\|h(m)-h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n(m)-h_n\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|h_n(m)-h_n\|^2 \leqslant \epsilon^2.$$

Αυτό δείχνει ότι $h(m) \longrightarrow h$ και επομένως ότι ο $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ είναι πλήρης και άρα κλειστός υπόχωρος του H.

Η γραμμική θήκη των $H_1, H_2, \ldots$ περιέχεται στο $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ αφού η γραμμική θήκη των $H_1, H_2, \ldots$ είναι πυκνή, ο $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$, που είναι κλειστός και άρα πρέπει να περιέχει την κλειστή θήκη της γραμμικής θήκης των $H_1, H_2, \ldots$, είναι όλος ο H. Αποδείχθηκε δηλαδή ότι $H = \bigoplus_{j\in J} H_j$ και στην περίπτωση που το J είναι άπειρο και άρα η (14) ισχύει γενικά.

Ορίζουμε

$$X = \bigcup_{j\in J}(\mathbb{S}^1 \times \{j\})$$

και $\mathcal{B}$ να είναι η κλάση όλων των υποσυνόλων B του X για τα οποία

$$\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \qquad \forall\, j \in J,$$

όπου $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ η Borel σ-άλγεβρα του κύκλου $\mathbb{S}^1$. Ελέγχει κανείς ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα: προφανώς $X \in \mathcal{B}$, αφού

$$\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in X\} = \mathbb{S}^1 \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$$

για κάθε $j \in J$· επίσης,

$$\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in X \setminus B\} = \mathbb{S}^1 \setminus \{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B\}$$

για κάθε $j \in J$, για κάθε $B \subseteq X$, και αφού το σύνολο στο δεξιό μέλος ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ για κάθε $j \in J$ αν $B \in \mathcal{B}$, έχουμε ότι και το σύνολο στο αριστερό μέλος ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ για κάθε $j \in J$ αν $B \in \mathcal{B}$, από όπου έπεται ότι $X \setminus B \in \mathcal{B}$ αν $B \in \mathcal{B}$ και επομένως η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή σε συμπληρώματα· τέλος,

$$\left\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B_i\}$$

για κάθε $j \in J$, για αυθαίρετα υποσύνολα $B_1, B_2, \dots$ του X, και έτσι αν $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$, αφού τότε $\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, για κάθε $j \in J$.

Για κάθε $j \in J$, θεωρούμε την απεικόνιση $\pi_j \colon \mathbb{S}^1 \to X$ με $\pi_j(\zeta) := (\zeta, j)$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$. Τότε $\pi_j^{-1}(B) = \{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B\}$ που ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ αν $B \in \mathcal{B}$, και επομένως κάθε π_j, $j \in J$, είναι μετρήσιμη από τον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1))$ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{B})$. Ορίζουμε τα μέτρα

$$\widetilde{\mu}_j(B) := \mu_j(\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B\}) = \mu_j(\pi_j^{-1}(B)),$$

για κάθε $j \in J$ και

$$\mu(B) := \sum_{j \in J} \widetilde{\mu}_j(B),$$

στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{B})$, όπου τα μέτρα μ_j είναι τα μέτρα που ορίζονται στην (13).

Για δοθείσα $f \colon X \to \mathbb{C}$ ορίζουμε $f_j \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ από την $f_j(\zeta) := f(\zeta, j)$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$, για κάθε $j \in J$, και $T(f) := (f_j)_{j \in J} = (f_1, f_2, \dots)$. Προφανώς, για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{C}$ και $f, g \colon X \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(af + bg)_j(\zeta) &= (af + bg)(\zeta, j)\\ &= af(\zeta, j) + bg(\zeta, j)\\ &= af_j(\zeta) + bg_j(\zeta)\\ &= (af_j)(\zeta) + (bg_j)(\zeta)\end{aligned}$$

για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$, οπότε $(af + bg)_j = af_j + bg_j$ σαν συναρτήσεις στον $\mathbb{S}^1$, για κάθε $j \in J$· επομένως και

$$\begin{aligned}T(af + bg) &= ((af + bg)_j)_{j \in J}\\ &= (af_j + bg_j)_{j \in J}\\ &= a(f_j)_{j \in J} + b(g_j)_{j \in J}\\ &= aT(f) + bT(g)\end{aligned}$$

για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{C}$ και $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} &= \int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) \\
&= \sum_{j\in J} \int_X |f(x)|^2 \, d\widetilde{\mu}_j(x) \\
&= \sum_{j\in J} \int_{\mathbb{S}^1} |f(\pi_j(\zeta))|^2 \, d\mu_j(\zeta) \\
&= \sum_{j\in J} \int_{\mathbb{S}^1} |f(\zeta, j)|^2 \, d\mu_j(\zeta) \\
&= \sum_{j\in J} \int_{\mathbb{S}^1} |f_j(\zeta)|^2 \, d\mu_j(\zeta) \\
&= \sum_{j\in J} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)},
\end{aligned}$$

η τρίτη ισότητα από τον ορισμό του μέτρου $\widetilde{\mu}_j$ ως $\widetilde{\mu}_j(B) = \mu_j(\pi_j^{-1}(B))$ και τον τύπο αλλαγής μεταβλητής. Επομένως αν $\|f\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} < +\infty$ τότε έχουμε ότι $\|f_j\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < +\infty$ και άρα $f_j \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$ για κάθε $j \in J$ και επιπλέον $\|f\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} < +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{j\in J} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < +\infty$· δηλαδή έχει κανείς ότι $\|f\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} < +\infty$ αν και μόνο αν

$$T(f) = (f_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j),$$

εξ΄ ορισμού του ευθέως αθροίσματος ως

$$\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j) = \Big\{ (h_j)_{j\in J} \colon h_j \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j) \text{ για κάθε } j \in J \text{ και } \sum_{j\in J} \|h_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < \infty \Big\}.$$

Φυσικά η συνθήκη $\sum_{j\in J} \|h_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < \infty$ είναι περιττή όταν το J είναι πεπερασμένο, αφού ικανοποιείται αυτόματα όταν $h_j \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$ για κάθε $j \in J$ στην περίπτωση αυτή. Δεδομένου τώρα ότι η γραμμική δομή στο ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$ δίνεται από την $a(h_j)_{j\in J} + b(g_j)_{j\in J} = (ah_j + bg_j)_{j\in J}$, η $T(f) = (f_j)_{j\in J} (= (f_1, f_2, \ldots))$ είναι μία γραμμική απεικόνιση από τον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ στο ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, η οποία είναι ισομορφισμός. Πράγματι, $T(f) = T(g)$ αν και μόνο αν $f_j = g_j$ μ_j-σχεδόν παντού για κάθε $j \in J$, αν και μόνο αν $\mu_j(\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon f(\zeta, j) \neq g(\zeta, j)\}) = 0$ για κάθε $j \in J$, αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X \colon f(x) \neq g(x)\} = \sum_{j\in J} \mu_j(\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon f(\zeta, j) \neq g(\zeta, j)\}) = 0$, δηλαδή $T(f) = T(g)$ αν και μόνο αν $f = g$ μ-σχεδόν παντού, που ισοδυναμεί με την $f = g$ στον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Αυτό δείχνει ότι η T είναι μονομορφισμός (δηλαδή ένα προς ένα). Και αν $(f_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, τότε η $f\colon X \to \mathbb{C}$ με $f(\zeta, j) := f_j(\zeta)$ για $j \in J$ και $\zeta \in \mathbb{S}^1$, ικανοποιεί την $T(f) = (f_j)_{j\in J}$ και $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, σύμφωνα με τον παραπάνω υπολογισμό, αφού $(f_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j) \Rightarrow \sum_{j\in J} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < +\infty$

και άρα $\|f\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} < +\infty$. Αυτό δείχνει ότι η T είναι και επιμορφισμός. Τέλος η T είναι και ισομετρία από τον $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ στον $\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)$, δηλαδή εν τέλει ισομετρικός ισομορφισμός, οπότε οι χώροι $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ και $\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)$ μπορούν να ταυτιστούν. Πράγματι, αν $f,g \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ και $T(f) = (f_j)_{j\in J}$ και $T(g) = (g_j)_{j\in J}$, τότε τα $(f_j)_{j\in J}$ και $(g_j)_{j\in J}$ ανήκουν στο ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)$ και, εξ' ορισμού του εσωτερικού γινομένου σε ένα ευθύ άθροισμα,

$$
\begin{aligned}
\langle T(f), T(g)\rangle &= \langle (f_j)_{j\in J}, (g_j)_{j\in J}\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \langle f_j, g_j\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \int_{\mathbb{S}^1} f_j(\zeta)\overline{g_j(\zeta)}\, d\mu_j(\zeta) \\
&= \sum_{j\in J} \int_{\mathbb{S}^1} f(\zeta,j)\overline{g(\zeta,j)}\, d\mu_j(\zeta) \\
&= \sum_{j\in J} \int_{\mathbb{S}^1} f(\pi_j(\zeta))\overline{g(\pi_j(\zeta))}\, d\mu_j(\zeta) \\
&= \sum_{j\in J} \int_{X} f(x)\overline{g(x)}\, d\widetilde{\mu}_j(\zeta) \\
&= \int_{X} f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) \\
&= \langle f, g\rangle.
\end{aligned}
$$

Εδώ όλα τα αθροίσματα συγκλίνουν απολύτως, όταν το J είναι άπειρο, γιατί οι όροι τους είναι ίσοι και για το πρώτο έχουμε ότι $|\langle f_j, g_j\rangle| \leq \|f_j\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)}\|g_j\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)}$ για κάθε $j \in J$, από την ανισότητα Cauchy–Schwarz, και επομένως

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in J} |\langle f_j, g_j\rangle| &\leqslant \sum_{j\in J} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)}\|g_j\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} \\
&\leqslant \left(\sum_{j\in J} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)}\right)^{1/2} \left(\sum_{j\in J} \|g_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)}\right)^{1/2} < +\infty,
\end{aligned}
$$

από μία δεύτερη εφαρμογή της ανισότητας Cauchy–Schwarz και επειδή τα $(f_j)_{j\in J}$ και $(g_j)_{j\in J}$ ανήκουν στο $\bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)$.

Έστω τώρα ο ισομετρικός ισομορφισμός (unitary απεικόνιση) $U\colon H \to H$. Υπενθυμίζεται ότι για κάθε $j \in J$, υπάρχουν ισομετρικοί ισομορφισμοί (unitary απεικονίσεις)

$$W_j\colon L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j) \to H_j$$

τέτοιοι ώστε $W_j^{-1}UW_jf_j = gf_j$, για κάθε $f_j \in L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)$, όπου $g(\zeta) = \zeta$ για $\zeta \in \mathbb{S}^1$. Για $f \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ ορίζουμε

$$Wf := \sum_{j\in J} W_j f_j$$

όπου $(f_j)_{j\in J} = T(f)$. Το Wf είναι προφανώς καλά ορισμένο όταν το J είναι πεπερασμένο. Όταν το J είναι άπειρο, επειδή κάθε $W_j \colon L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j) \to H_j$ είναι ισομετρία και η νόρμα στον H_j είναι ο περιορισμός της νόρμας του $H = \bigoplus_{j\in J} H_j$ στον H_j, $j \in J$, έχουμε ότι

$$\sum_{j\in J} \|W_j f_j\|_H^2 = \sum_{j\in J} \|W_j f_j\|_{H_j}^2 = \sum_{j\in J} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < +\infty$$

όταν $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, και άρα $\sum_{j\in J} \|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} < +\infty$, οπότε το Wf είναι καλά ορισμένο και σε αυτήν την περίπτωση, αφού η σειρά $\sum_{j\in J} W_j f_j$ που το ορίζει συγκλίνει στον H: για $n \leqslant m$, $\left\|\sum_{j=n}^m W_j f_j\right\|_H^2 = \sum_{j=n}^m \|W_j f_j\|_H^2 \to 0$ καθώς $n, m \to \infty$, άρα τα μερικά αθροίσματα της σειράς αποτελούν βασική ακολουθία και άρα συγκλίνουν, από πληρότητα του H. Έχουμε δηλαδή ότι $W \colon L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to H$ είναι καλά ορισμένη. Επίσης

$$\begin{aligned}
\langle Wf, Wg \rangle &= \left\langle \sum_{j\in J} W_j f_j, \sum_{j\in J} W_j g_j \right\rangle \\
&= \sum_{i\in J} \sum_{j\in J} \langle W_i f_i, W_j g_j \rangle \\
&= \sum_{j\in J} \langle W_j f_j, W_j g_j \rangle \\
&= \sum_{j\in J} \langle f_j, g_j \rangle \\
&= \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

Εδώ η τρίτη ισότητα επειδή $W_i f_i \in H_i$ και $W_j g_j \in H_j$ και οι H_i και H_j είναι ορθογώνιοι αν $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$, και η τέταρτη επειδή κάθε W_j, $j \in \mathbb{N}$, είναι ισομετρία· στην περίπτωση που το J είναι άπειρο, δηλαδή $J = \mathbb{N}$, η δεύτερη ισότητα αιτιολογείται πάλι, όπως και στην (15), από την συνέχεια του εσωτερικού γινομένου και την γραμμικότητα του ως προς την πρώτη και αντιγραμμικότητα ως προς την δεύτερη μεταβλητή του:

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{j=1}^\infty W_j f_j, \sum_{j=1}^\infty W_j g_j \right\rangle &= \lim_{N,M\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^N W_j f_j, \sum_{j=1}^M W_j g_j \right\rangle \\
&= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^M \langle W_j f_j, W_j f_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \langle W_j f_j, W_j f_j \rangle, \qquad (16)
\end{aligned}$$

με την πρώτη από τις παραπάνω ισότητες να είναι συνέπεια της ανισότητας Cauchy–

Schwarz: αν $h_n \to h$ και $h'_n \to h'$ σε έναν χώρο Hilbert, τότε

$$\begin{aligned}|\langle h_n, h'_m\rangle - \langle h, h'\rangle| &= |\langle h_n, h'_m\rangle - \langle h_n, h'\rangle + \langle h_n, h'\rangle - \langle h, h'\rangle| \\ &\leqslant |\langle h_n, h'_m\rangle - \langle h_n, h'\rangle| + |\langle h_n, h'\rangle - \langle h, h'\rangle| \\ &= |\langle h_n, h'_m - h'\rangle| + |\langle h_n - h, h'\rangle| \\ &\leqslant \|h_n\| \, \|h'_m - h\| + \|h_n - h\| \|h'\| \xrightarrow{n,m\to\infty} \|h\| \cdot 0 + 0 \cdot \|h'\| = 0,\end{aligned}$$

αφού $h_n \to h \Rightarrow |\|h_n\| - \|h\|| \leqslant \|h_n - h\| \to 0$ και άρα $\|h_n\| \to \|h\|$ όταν $h_n \to h$. Επομένως η W είναι ισομετρία και άρα ειδικότερα μονομορφισμός. Είναι επίσης επιμορφισμός, αφού αν $h \in H$, τότε $h = \sum_{j\in J} h_j$ για κάποια $h_j \in H_j$, $j \in \mathbb{N}$, με $\sum_{j\in J}\|h_j\|_H^2 < +\infty$ όταν το J είναι άπειρο, αφού $H = \bigoplus_{j\in J} H_j$· αφού κάθε $W_j \colon L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j) \to H_j$ είναι ισομορφισμός, υπάρχει $f_j = W_j^{-1} h_j \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, και τότε $f := T^{-1}((f_j)_{j\in J}) \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και

$$Wf = WT^{-1}((f_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} W_j f_j = \sum_{j\in J} h_j = h.$$

Επομένως ο W είναι ισομετρικός ισομορφισμός (unitary).

Για $h \in H$ έχουμε ότι $h = \sum_{j\in J} h_j$ για κάποια $h_j \in H_j$ για κάθε $j \in J$ και επιπλέον $\sum_{j\in J}\|h_j\|_H^2 < +\infty$ όταν το J είναι άπειρο, και η αναπαράσταση αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη λόγω ορθογωνιότητας των H_j, $j \in J$: αν $h = \sum_{j\in J} h_j$ και $h = \sum_{j\in J} h'_j$, με $h_j, h'_j \in H_j$ για κάθε $j \in J$ και επιπλέον $\sum_{j\in J}\|h_j\|_H^2 < +\infty$ και $\sum_{j\in J}\|h_j\|_H^2 < +\infty$ όταν το J είναι άπειρο, τότε $\sum_{j\in J}(h_j - h'_j) = 0$, οπότε $\sum_{j\in J}\|h_j - h'_j\|_H^2 = \left\|\sum_{j\in J}(h_j - h'_j)\right\|_H^2 = 0$ και άρα $h_j = h'_j$ για κάθε $j \in J$. Ισχυριζόμαστε ότι τότε

$$W^{-1}h = T^{-1}((W_j^{-1}h_j)_{j\in J})(= T^{-1}(W_1^{-1}h_1, W_2^{-1}h_2, \dots)). \tag{17}$$

Αυτό είναι καλά ορισμένο, αφενός μεν λόγω της μοναδικότητας της αναπαράστασης $h = \sum_{j\in J} h_j$, αφετέρου δε, όταν το J είναι άπειρο, επειδή $W_j^{-1}h_j \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$ για κάθε $j \in J$ και κάθε W_j είναι ισομετρία, οπότε

$$\sum_{j\in J}\|W_j^{-1}h_j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1,\mathcal{B}(\mathbb{S}^1),\mu_j)} = \sum_{j\in J}\|h_j\|_H^2 < +\infty,$$

και άρα $(W_j^{-1}h_j)_{j\in J} = (W_1^{-1}h_1, W_2^{-1}h_2, \dots) \in \bigoplus_{j\in J} L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$ και επομένως το

$$T^{-1}(W_1^{-1}h_1, W_2^{-1}h_2, \dots)$$

είναι καλά ορισμένο. Για την απόδειξη του ισχυρισμού, έστω $V \colon H \to L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ η απεικόνιση που απεικονίζει το h στο δεξί μέλος, δηλαδή η

$$Vh := T^{-1}((W_j^{-1}h_j)_{j\in J})(= T^{-1}(W_1^{-1}h_1, W_2^{-1}h_2, \dots))\cdot$$

τότε, εξ' ορισμού του W,

$$WVh = WT^{-1}((W_j^{-1}h_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} W_j(W_j^{-1}(h_j)) = \sum_{j\in J} h_j = h.$$

Δηλαδή WV είναι ο ταυτοτικός τελεστής και αυτό, δεδομένου ότι ο W είναι αντιστρέψιμος, αυτόματα αποδεικνύει ότι $W^{-1} = V$ (δηλαδή ισχύει ότι και VW ισούται με τον ταυτοτικό). Έπεται τώρα από την γραμμικότητα του U, και την συνέχειά του αν το J είναι άπειρο, ότι

$$UWf = U\left(\sum_{j\in J} W_j f_j\right) = \sum_{j\in J} UW_j f_j,$$

με κάθε $UW_j f_j \in H_j$ αφού $W_j f_j \in H_j$, εξ' ορισμού, και ο U αφήνει κάθε H_j αναλλοίωτο, δηλαδή $U(H_j) \subseteq H_j$, για κάθε $j \in J$. Από την (17) έχουμε τότε ότι

$$W^{-1}UWf = T^{-1}((W_j^{-1}UW_j f_j)_{j\in J}) = T^{-1}((gf_j)_{j\in J}) = uf,$$

για $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ με $T(f) = (f_j)_{j\in J}$, όπου $u := T^{-1}(g, g, \dots)$. Για την τελευταία ισότητα εδώ η αιτιολόγηση είναι ως εξής. Αν $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, τότε $T(f) = (f_j)_{j\in J}$ με $f_j(\zeta) = f(\zeta, j)$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$, $j \in J$. Αν $u = T^{-1}(g, g, \dots)$, δηλαδή $u(\zeta, j) := g(\zeta)$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$ και $j \in J$, τότε

$$(uf)_j(\zeta) = (uf)(\zeta, j) = u(\zeta, j)f(\zeta, j) = g(\zeta)f_j(\zeta)$$

για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$ και $j \in J$, οπότε $T(uf) = (gf_j)_{j\in J}$ και άρα

$$T^{-1}((gf_j)_{j\in J}) = uf.$$

Τα παραπάνω αποδεικνύουν τον πρώτο ισχυρισμό στο Θεώρημα 6.4 με $\Phi := W^{-1} \colon H \longrightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $u \colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ την συνάρτηση $u(\zeta, j) = \zeta$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$ και $j \in J$, στην περίπτωση που ο υποκείμενος χώρος Hilbert H είναι διαχωρίσιμος. Σημειωτέον ότι $|u(\zeta, j)| = 1$ για κάθε $(\zeta, j) \in X = \mathbb{S}^1 \times J$.

Για να δείξουμε τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό των W_j, έχουμε ότι, για κάθε $j \in J$,

$$f(U)W_j(h) = f(U)h(U)v_j = (fh)(U)v_j = W_j(fh)$$

για κάθε $h \in C(\mathbb{S}^1)$, από το Πόρισμα 6.3. Η σχέση αυτή επεκτείνεται σε $h \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, για κάθε $j \in J$. Πράγματι, αν $h \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$ και $h_n \in C(\mathbb{S}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τέτοιες ώστε $h_n \longrightarrow h$ στον $L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, τότε $f(U)W_j(h_n) \longrightarrow f(U)W_j(h)$ στον $L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, αφού

$$\begin{aligned}
\|f(U)W_j(h_n) - f(U)W_j(h)\| &= \|f(U)h_n(U)v_j - f(U)h(U)v_j\| \\
&\leqslant \|f(U)\|\|h_n(U)v_j - h(U)v_j\| \\
&= \|f(U)\|\|W_j(h_n) - W_j(h)\| \\
&= \|f(U)\|\|h_n - h\|_{L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1, \mu_j)} \\
&\leqslant \|f\|\|h_n - h\|_{L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

όπου $\|f\| = \sup_{\mathbb{S}^1}|f|$, $W_j(fh_n) \longrightarrow W_j(fh)$ στον $L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)$, αφού

$$\|W_j(fh_n) - W_j(fh)\| = \|fh_n - fh\|_{L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)} \leqslant \|f\|\|h_n - h\|_{L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu_j)} \longrightarrow 0,$$

και τέλος $f(U)W_j(h_n) = W_j(fh_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$f(U)W_j(h) = \lim_{n\to\infty} f(U)W_j(h_n) = \lim_{n\to\infty} W_j(fh_n) = W_j(fh), \tag{18}$$

για κάθε $j \in J$.

Έστω τώρα $f \in C(\mathbb{S}^1)$ και $\varphi \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Τότε

$$W\varphi := \sum_{j\in J} W_j\varphi_j,$$

όπου $(\varphi_j)_{j\in J} = T(\varphi)$. Επομένως, από την γραμμικότητα του $f(U)$, και την συνέχειά του αν το J είναι άπειρο (Πόρισμα 6.3 σύμφωνα με το οποίο $\|f(U)\| \leqslant \sup_{\mathbb{S}^1}|f|$), έχουμε ότι

$$f(U)W\varphi = \sum_{j\in J} f(U)W_j\varphi_j = \sum_{j\in J} W_j(f\varphi_j),$$

σύμφωνα με την (18). 'ρα, από την (17) έχουμε πάλι ότι

$$W^{-1}f(U)W\varphi = T^{-1}(W_j^{-1}W_j(f\varphi_j))_{j\in J}) = T^{-1}((f\varphi_j)_{j\in J}) = (f\circ u)\varphi,$$

όπου η τελευταία ισότητα αιτιολογείται πάλι από τον υπολογισμό

$$T((f\circ u)\varphi) = ([(f\circ u)\varphi]_j)_{j\in J} = ((f\circ u)_j\varphi_j)_{j\in J} = ((f\circ u_j)\varphi_j)_{j\in J} = (f\varphi_j)_{j\in J},$$

αφού $(f\circ u)(\zeta, j) = f(u(\zeta, j)) = f(u_j(\zeta))$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$ και άρα $(f\circ u)_j = f\circ u_j$ για κάθε $j \in J$, και επίσης $f(u_j(\zeta)) = f(\zeta)$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$ οπότε $f\circ u_j = f$, για κάθε $j \in J$. Αυτό τώρα δείχνει και τον δεύτερο ισχυρισμό στο Θεώρημα 6.4, όπου, υπενθυμίζεται ότι $\Phi := W^{-1}\colon H \longrightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $u\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ η συνάρτηση $u(\zeta, j) = \zeta$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$ και $j \in J$, στην περίπτωση πάλι που ο υποκείμενος χώρος Hilbert H είναι διαχωρίσιμος.

Στην περίπτωση που χώρος Hilbert H δεν είναι διαχωρίσιμος, το αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το λήμμα του Zorn. □

Το επόμενο Θεώρημα είναι το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές.

Θεώρημα 6.7. *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, τότε υπάρχει χώρος μέτρου $(X, \mathcal{F}, \mu)$, μια μοναδιαία απεικόνιση $\Phi\colon H \longrightarrow L^2(X, \mu)$ και $\alpha \in L^\infty(X, \mu)$, τέτοια ώστε*

$$\Phi A\Phi^{-1}f(x) = \alpha(x)f(x), \qquad \forall f \in L^2(X, \mu).$$

Μάλιστα, στο συγκεκριμένο θεώρημα η α είναι πραγματική και έχουμε ότι $\|\alpha\|_{L^\infty} = \|A\|$.

Το επόμενο Θεώρημα είναι μια αναδιατύπωση του Θεωρήματος 6.4, δηλαδή του φασματικού θεωρήματος για μοναδιαίους τελεστές.

Θεώρημα 6.8. *Αν $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε υπάρχει χώρος μέτρου $(X, \mathcal{B}, \mu)$, μια μοναδιαία απεικόνιση $\Phi\colon H \longrightarrow L^2(X, \mu)$ και $u \in L^\infty(X, \mu)$, τέτοια ώστε*

$$\Phi U\Phi^{-1}f(x) = u(x)f(x), \qquad \forall f \in L^2(X, \mu).$$

Εδώ έχουμε ότι $|u| = 1$ στον X.

Θα δείξουμε το Θεώρημα 6.7 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.8, χωρίς να κάνουμε χρήση του ολομορφικού συναρτησιακού λογισμού.

Έστω αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$. Έχουμε ότι $A = A^* \Longrightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, επομένως οι $A \pm i$ είναι αντιστρέψιμοι:

$$(A+i)^{-1}, (A-i)^{-1} \in L(H).$$

Ορίζουμε τον U να είναι ο μετασχηματισμός Cayley:

$$U = (A+i)(A-i)^{-1}. \tag{19}$$

Παρατηρούμε ότι $(A-i)(A-i)^{-1} = I = (A-i)^{-1}(A-i)$ και συνεπώς προκύπτει ότι

$$A(A-i)^{-1} - i(A-i)^{-1} = (A-i)^{-1}A - i(A-i)^{-1},$$

δηλαδή

$$A(A-i)^{-1} = (A-i)^{-1}A.$$

Άρα ο A αντιμετατίθεται με τον $(A-i)^{-1}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο $(A-i)^{-1}$ αντιμετατίθεται και με τον $(A+i)$ αφού έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A(A-i)^{-1} = (A-i)^{-1}A &\iff A(A-i)^{-1} + i(A-i)^{-1} = (A-i)^{-1}A + i(A-i)^{-1} \\ &\iff (A+i)(A-i)^{-1} = (A-i)^{-1}(A+i). \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τον U και ως

$$U = (A-i)^{-1}(A+i). \tag{20}$$

Ο U είναι ορθομοναδιαίος. Πράγματι, ισχύει ότι $(TS)^* = S^*T^*$ και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ αν ο $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως η (19) γίνεται

$$\begin{aligned} U^* &= ((A-i)^{-1})^*(A+i)^* \\ &= ((A-i)^*)^{-1}(A+i)^* \\ &= (A^*+i)^{-1}(A^*-i) \\ &= (A+i)^{-1}(A-i), \end{aligned}$$

και από την (20) παίρνουμε ότι

$$U^*U = UU^* = I$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι $(A+i) = U(A-i) = (A-i)U$, και έτσι

$$A(U-I) = i(U+I) = (U-I)A. \tag{21}$$

Λήμμα 6.9. *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και ο U δίνεται από (19)–(20), τότε*

$$1 \in \rho(U).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την (19) ως εξής

$$\begin{aligned} U &= (A+i)(A+i)(A+i)^{-1}(A-i)^{-1} \\ &= (A+i)^2(A^2+I)^{-1}, \end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned} (A+i)^{-1}(A-i)^{-1} &= ((A-i)(A+i))^{-1} \\ &= (A^2+I)^{-1}. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$U = (A^2-I)(A^2+I)^{-1} + 2iA(A^2+I)^{-1}. \tag{22}$$

Οι τελεστές A, A^2+I και A^2-I αντιμετατίθενται αφού έχουμε ότι:

$$(A^2-I)(A^2+I) = (A^2+I)(A^2-I) = A^4-I,$$

$$A(A^2-I) = (A^2-I)A = A^3-A$$

και

$$A(A^2+I) = (A^2+I)A = A^3+A.$$

Επομένως προκύπτει ότι οι τελεστές

$$(A^2-1)(A^2+1)^{-1} \quad \text{και} \quad A(A^2+1)^{-1}$$

είναι αυτοσυζυγείς, αφού

$$\begin{aligned} [(A^2-1)(A^2+1)^{-1}]^* &= [(A^2+1)^{-1}]^*(A^2-1)^* \\ &= [(A^2+1)^*]^{-1}(A^2-1) \\ &= (A^2+1)^{-1}(A^2-1) \\ &= (A^2-1)(A^2+1)^{-1} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} [A(A^2+1)^{-1}]^* &= [(A^2+1)^{-1}]^*A^* \\ &= (A^2+1)^{-1}A \\ &= A(A^2+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Για κάθε $v \in H$, από την (22) έχουμε ότι

$$\langle Uv, v\rangle = \langle (A^2-I)(A^2+I)^{-1}v, v\rangle + 2i\langle A(A^2+I)^{-1}v, v\rangle,$$

και επειδή οι $(A^2-1)(A^2+1)^{-1}$ και $A(A^2+1)^{-1}$ είναι αυτοσυζυγείς, έχουμε ότι οι αριθμοί $\langle (A^2-I)(A^2+I)^{-1}v, v\rangle$ και $\langle A(A^2+I)^{-1}v, v\rangle$ είναι πραγματικοί, αφού για κάθε αυτοσυζυγή τελεστή T^* έστω, έχουμε ότι

$$\overline{\langle Tv, v\rangle} = \langle v, Tv\rangle = \langle T^*v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle.$$

Έπεται τώρα ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle Uv, v\rangle &= \langle (A^2 - I)(A^2 + I)^{-1}v, v\rangle \\
&= \langle (A^2 + I - 2I)(A^2 + I)^{-1}v, v\rangle \\
&= \langle (A^2 + I)(A^2 + I)^{-1}v, v\rangle - 2\langle (A^2 + I)^{-1}v, v\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - 2\langle (A^2 + I)^{-1}v, v\rangle \\
&= \|v\|^2 - 2\langle (A^2 + I)^{-1}v, v\rangle
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle (I - U)v, v\rangle &= 2\langle (A^2 + I)^{-1}v, v\rangle \\
&= 2\langle w, (A^2 + I)w\rangle \\
&= 2\langle w, A^2 w + w\rangle \\
&= 2\langle w, w\rangle + 2\langle w, A^2 w\rangle \\
&= 2\|w\|^2 + 2\langle Aw, Aw\rangle \\
&= 2\|w\|^2 + 2\|Aw\|^2 \\
&\geqslant 2\|w\|^2
\end{aligned}$$

όπου $w = (A^2 + 1)^{-1}v$. Τώρα

$$\|v\| = \|(A^2 + 1)w\| \leqslant C\|w\|,$$

με $C := \|A^2 + 1\| < \infty$, και έτσι παίρνουμε ότι

$$\mathrm{Re}\langle (I - U)v, v\rangle \geqslant \frac{2}{C^2}\|v\|^2.$$

Από ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε ότι

$$|\langle (I - U)v, v\rangle| \leqslant \|(I - U)v\|\|v\|,$$

και επειδή

$$|\langle (I - U)v, v\rangle| \geqslant \mathrm{Re}\langle (I - U)v, v\rangle \geqslant \frac{2}{C^2}\|v\|^2,$$

έπεται τελικά ότι

$$\|(I - U)v\| \geqslant \frac{2}{C^2}\|v\|. \tag{23}$$

Επομένως για κάθε $v \neq 0$ έχουμε ότι

$$\|(I - U)v\| > 0.$$

Έπεται ότι $\ker(I - U) = \{0\}$, δηλαδή ο $I - U$ είναι 1-1.

Τώρα αν $w \in H$ είναι ορθογώνιο στην εικόνα $\operatorname{range}(I-U)$ του $I-U$, τότε για όλα τα $v \in H$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle (I-U)v, w\rangle &= \langle v, (I-U)^* w\rangle \\ &= \langle v, (I-U^*)w\rangle \\ &= \langle v, (I-U^{-1})w\rangle \\ &= -\langle v, U^{-1}(I-U)w\rangle \\ &= -\langle v, U^*(I-U)w\rangle \\ &= -\langle Uv, (I-U)w\rangle. \end{aligned}$$

Εφόσον $U\colon H \longrightarrow H$ είναι αντιστρέψιμος και άρα επί, αυτό δείχνει ότι, για όλα τα $\overline{v} \in H$,

$$(\overline{v}, (I-U)w) = 0$$

Επομένως έχουμε ότι $(I-U)w = 0$, δηλαδή ότι $w = 0$, αφού $\ker(I-U) = \{0\}$. Δείξαμε δηλαδή ότι

$$w \in [\operatorname{range}(I-U)]^{\perp} \implies w = 0. \tag{24}$$

Δείχνουμε τώρα ότι η εικόνα $\operatorname{range}(I-U)$ του $I-U$ είναι και κλειστή· αυτό μαζί με την (24) δίνει ότι $\operatorname{range}(I-U) = H$ και ο $I-U$ είναι επίσης επί του H.

Πράγματι, έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $(I-U)(H) = \operatorname{range}(I-U)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in H$. Τότε υπάρχουν x_n, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $y_n = (I-U)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αφού συγκλίνει είναι βασική (Cauchy). Από την (23) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \|(I-U)(x_n - x_m)\| \\ &\geqslant \frac{2}{C^2}\|x_n - x_m\|, \end{aligned}$$

και επειδή $\|y_n - y_m\| \longrightarrow 0$ καθώς $n, m \longrightarrow \infty$, έπεται ότι και η ακολουθία x_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι βασική. Αφού τώρα ο H είναι πλήρης, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$, και αφού ο $I-U$ είναι φραγμένος και άρα συνεχής, έπεται ότι

$$(I-U)x_n \longrightarrow (I-U)x.$$

Έπεται τώρα ότι $y = (I-U)x$, και επομένως $y \in \operatorname{range}(I-U)$. Άρα το $\operatorname{range}(I-U)$ είναι όντως κλειστό.

Το ότι $\operatorname{range}(I-U) = H$ προκύπτει τώρα ως εξής. Κάθε $u \in H$ γράφεται ως $u = v + w$ με το w να είναι η ορθογώνια προβολή στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $[\operatorname{range}(I-U)]^{\perp}$ της εικόνας του $I-U$, ο οποίος είναι κλειστός χώρος, γιατί όλα τα ορθογώνια συμπληρώματα είναι κλειστοί χώροι, και άρα υπάρχει αυτή η ορθογώνια προβολή w. Από την (24) τώρα, $w = 0$ και συνεπώς $u = v$. Άρα έχουμε ότι ο $I-U$ είναι 1-1 και επί και συνεπώς αντιστρέφεται. Πρέπει ακόμα να εξετάσουμε αν ο $(I-U)^{-1}$ είναι γραμμικός και φραγμένος όπως οφείλει.

Αν $T\colon H \longrightarrow H$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής ενός χώρου Hilbert H ο οποίος είναι 1-1 και επί, τότε υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $T^{-1}\colon H \longrightarrow H$. Μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι τότε η T^{-1} είναι αναγκαστικά γραμμική. Πράγματι, αν $a, b \in \mathbb{C}$ και $u, v \in H$, τότε

$$T(T^{-1}(au + bv)) = au + bv$$

από τη μία, και από την άλλη

$$T(aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v)) = aT(T^{-1}(u)) + bT(T^{-1}(v)) = au + bv$$

και άρα

$$T(T^{-1}(au + bv)) = au + bv = T(aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v)).$$

Επειδή η T είναι 1-1, έπεται τώρα ότι

$$T^{-1}(au + bv) = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v).$$

Για μια τέτοια T όμως η T^{-1} είναι αναγκαστικά και φραγμένη. Αυτό έπεται από το Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης. Αφού η ίδια η T είναι φραγμένη και επί, έπεται ότι είναι και ανοικτή απεικόνιση, δηλαδή $T(G)$ είναι ανοικτό οποτεδήποτε το G είναι ανοικτό. Έπεται ότι το $T(U(0,1))$ είναι ανοικτό, όπου $U(0,1)$ είναι η ανοικτή, μοναδιαία μπάλα, με κέντρο το 0 και ακτίνα ένα:

$$U(0,1) = \{u \in H : \|u\| < 1\}.$$

Αφού $T(0) = 0$ και άρα $0 \in T(U(0,1))$, έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$U(0,\delta) \subset T(U(0,1)) \tag{25}$$

($U(0,\delta)$ η ανοικτή μπάλα με ακτίνα δ γύρω από το 0). Αυτό σημαίνει ότι $\|T(x)\| \geqslant \delta$ για κάθε x με $\|x\| \geqslant 1$, γιατί αν ήταν $\|T(x)\| < \delta$ για κάποιο τέτοιο x (δηλαδή με $\|x\| \geqslant 1$), τότε θα είχαμε ότι $T(x) \in U(0,\delta)$ και άρα θα υπήρχε $x' \in U(0,1)$ με $T(x') = T(x)$ (λόγω της σχέσης (25)), και αυτό θα ερχόταν σε αντίφαση με το γεγονός ότι η T είναι 1-1 (αφού $\|x\| \geqslant 1$ και $\|x'\| < 1$ και άρα $x \neq x'$).

Έστω τώρα, προς άτοπο, ότι η T^{-1} δεν είναι φραγμένη. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in H$, με $\|x_n\| = 1$ και $\|T^{-1}(x_n)\| \geqslant n$. Όμως τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\|x_n\|}{n} &= \left\|\frac{x_n}{n}\right\| \\
&= \left\|T\left(T^{-1}\left(\frac{x_n}{n}\right)\right)\right\| \\
&\geqslant \delta \left\|T^{-1}\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \\
&= \delta \frac{1}{n}\|T^{-1}(x_n)\| \\
&\geqslant \delta
\end{aligned}$$

και άρα έχουμε ότι $1 = \|x_n\| \geqslant n\delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, που φυσικά αποτελεί αντίφαση. $\square$

Από το προηγούμενο Λήμμα και την (21) συμπεραίνουμε ότι

$$A = i(U+I)(U-I)^{-1}. \tag{26}$$

Παρατηρούμε ότι ο $(U-I)^{-1}$ αντιμετατίθεται με τον $U-I$ και άρα και με τον U αφού

$$(U-I)^{-1}(U-I) = (U-I)(U-I)^{-1} = I$$

και

$$\begin{aligned}(U-I)^{-1}U &= (U-I)^{-1}(U-I+I)\\ &= (U-I)^{-1}(U-I) + (U-I)^{-1}\\ &= (U-I)(U-I)^{-1} + (U-I)^{-1}\\ &= (U-I+I)(U-I)^{-1}\\ &= U(U-I)^{-1}.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ο $(U-I)^{-1}$ αντιμετατίθεται τελικά και με τον $U+I$ αφού

$$\begin{aligned}(U-I)^{-1}(U+I) &= (U-I)^{-1}U + (U-I)^{-1}\\ &= U(U-I)^{-1} + (U-I)^{-1}\\ &= (U+I)(U-I)^{-1}.\end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε τον A και ως εξής:

$$A = i(U-I)^{-1}(U+I).$$

Με πράξεις διαπιστώνουμε ότι

$$A^* = -i((U-I)^{-1})^*(U+I)^* = -i((U-I)^*)^{-1}(U^*+I) = -i(U^{-1}-I)^{-1}(U^{-1}+I),$$

και ισχύει ότι $(U^{-1}-I)^{-1} = (I-U)^{-1}U$, αφού

$$(I-U)^{-1}U(U^{-1}-I) = (I-U)^{-1}(I-U) = I$$

και

$$(U^{-1}-I)(I-U)^{-1}U = (U^{-1}-I)[U(U^{-1}-I)]^{-1}U = (U^{-1}-I)(U^{-1}-I)^{-1}U^{-1}U = I.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$A^* = i(U-I)^{-1}U(U^{-1}+I) = (U-I)^{-1}(I+U) = A,$$

όπως θα έπρεπε αφού υποθέτουμε τον A αυτοσυζυγή.

Τώρα θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.8 για τον U. Υπάρχει ένας χώρο μέτρου $(X, \mathcal{B}, \mu)$, μια μοναδιαία απεικόνιση

$$\Phi \colon H \longrightarrow L^2(X,\mu),$$

και $u \in L^\infty(X,\mu)$ με $|u| = 1$, έτσι ώστε, για όλα τα $v \in H$, να έχουμε ότι

$$(\Phi U v)(x) = u(x)(\Phi v)(x).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $1 \in \rho(M_u)$, όπου $M_u \colon L^2(X,\mathcal{B},\mu) \longrightarrow L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_u\phi(x) := u(x)\phi(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|u(x) - 1| \geqslant \delta \tag{27}$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$.

Έστω λοιπόν $(X,\mathcal{B},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου. Κάθε $\phi \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ ορίζει φραγμένο γραμμικό τελεστή $M_\phi \colon L^2(X,\mathcal{B},\mu) \longrightarrow L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ με

$$M_\phi f(x) = \phi(x) f(x),$$

$x \in X$, $f \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$. Έστω ότι ο τελεστής αυτός είναι αντιστρέψιμος, με φραγμένο αντίστροφο. Τότε, επειδή ο $(X,\mathcal{B},\mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου, έχουμε ότι $1_X \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$, όπου 1_X η συνάρτηση ταυτοτικά ίση με ένα (δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση του X), και άρα υπάρχει $\psi \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ τέτοια ώστε $M_\phi\psi = 1_X$ στον $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$, και άρα

$$\phi(x)\psi(x) = M_\phi\psi(x) = 1_X(x) = 1$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$. Ειδικότερα

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)}$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$.

Για $f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$, έστω $L_\psi f(x) = \psi(x) f(x)$, $x \in X$. Τότε $L_\psi f \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ για κάθε $f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$, επειδή $\psi \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$. Επομένως,το $M_\phi L_\psi f$ είναι καλά ορισμένο και

$$M_\phi L_\psi f(x) = \phi(x) L_\psi f(x) = \phi(x)\psi(x) f(x) = f(x)$$

και εφαρμόζοντας τον M_ϕ^{-1} και στα δύο μέλη παίρνουμε ότι $L_\psi f = M_\phi^{-1} f$ για $f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$.

Υποθέτουμε τώρα επιπλέον ότι ο αντίστροφος M_ϕ^{-1} είναι φραγμένος τελεστής από τον $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ στον $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$. Ισχυριζόμαστε ότι τότε $\psi \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$. Πράγματι,έστω $A_n := \{x \in X \colon |\psi(x)| > n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζεται η άπειρη ακολουθία

$$f_n := \frac{1}{\sqrt{\mu(A_n)}} 1_{A_n},$$

όπου 1_{A_n} η χαρακτηριστική συνάρτηση του A_n, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f_n \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ και

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} &= \int |f_n|^2 \, d\mu \\
&= \int \frac{1^2_{A_n}}{\mu(A_n)} \, d\mu \\
&= \int \frac{1_{A_n}}{\mu(A_n)} \, d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A_n)} \mu(A_n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$M_\phi^{-1} f_n(x) = L_\psi f_n(x) = \psi(x) f_n(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{\mu(A_n)}} 1_{A_n}(x),$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\|L_\psi f_n\|^2_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} &= \frac{1}{\mu(A_n)} \int |\psi(x)|^2 1_{A_n}(x) \, d\mu(x) \\
&\geqslant \frac{1}{\mu(A_n)} \int n^2 1_{A_n}(x) \, d\mu(x) \\
&= n^2 \\
&= n^2 \|f_n\|^2_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)}.
\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $\|L_\psi\| \geqslant n$ για τη νόρμα του L_ψ ως τελεστή από τον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ στον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, και αυτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από όπου φυσικά έπεται ότι ο M_ϕ^{-1} δεν είναι φραγμένος. Συνεπώς, αν ο M_ϕ^{-1} είναι φραγμένος ως τελεστής από τον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ στον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, τότε αναγκαστικά $\mu(A_n) = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, από όπου έπεται ότι $\psi \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Εφαρμόζουμε τώρα τα παραπάνω στον τελεστή $M_u - I =: M_v$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής στον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $v(x) := u(x) - 1$, $x \in X$. Για να είναι ο M_v αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο, δηλαδή $1 \in \rho(M_v)$, πρέπει η συνάρτηση

$$x \longmapsto \frac{1}{v(x)}$$

να ανήκει στον $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, δηλαδή πρέπει

$$\frac{1}{|v(x)|} \leqslant N$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, για κάποιο $N \in (0, +\infty)$. Επομένως αν $1 \in \rho(M_v) = \rho(M_u - I)$, πρέπει αναγκαστικά

$$|u(x) - 1| = |v(x)| \geqslant \delta$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, όπου $\delta := 1/N$.

Από το φασματικό θεώρημα για μοναδιαίους (unitary) τελεστές, υπάρχουν χώρος μέτρου $(X, \mathcal{B}, \mu)$, ισομετρικός ισομορφισμός $\Phi\colon H \longrightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, και συνάρτηση $u \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ με $|u(x)| = 1$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, τέτοια ώστε $\Phi U = M_u \Phi$, όπου

$$M_u\colon L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \longrightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$$

ο πολλαπλασιαστικός τελεστής

$$(M_u f)(x) = u(x) f(x),$$

για $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $x \in X$. Από την (26) έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned} \Phi A &= i\Phi(U + I)(U - I)^{-1} \\ &= i\Phi U(U - I)^{-1} + i\Phi(U - I)^{-1} \\ &= iM_u\Phi(U - I)^{-1} + i\Phi(U - I)^{-1} \\ &= i(M_u + I)\Phi(U - I)^{-1}. \end{aligned}$$

Επομένως $\Phi A(U - I) = i(M_u + I)\Phi$, ή ισοδύναμα, από την (21),

$$\begin{aligned} i(M_u + I)\Phi &= \Phi A(U - I) \\ &= \Phi(U - I)A \\ &= M_u\Phi A - \Phi A \\ &= (M_u - I)\Phi A. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $v \in H$,

$$i[u(x) + 1](\Phi v)(x) = [u(x) - 1](\Phi A v)(x),$$

και αφού $u(x) - 1 \neq 0$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, παίρνουμε τελικά ότι

$$(\Phi A v)(x) = i\frac{u(x) + 1}{u(x) - 1}(\Phi v)(x) = \alpha(x)(\Phi v)(x),$$

όπου

$$\alpha(x) := i\frac{u(x) + 1}{u(x) - 1}$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$. Επειδή δε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|u(x) - 1| \geqslant \delta$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$|\alpha(x)| = \left| i\frac{u(x) + 1}{u(x) - 1} \right| = \frac{|u(x) + 1|}{|u(x) - 1|} \leqslant \frac{|u(x)| + 1}{|u(x) - 1|} = \frac{2}{|u(x) - 1|} \leqslant \frac{2}{\delta}$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, και άρα τελικά $\alpha \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. Έχουμε ακόμη ότι

$$\overline{\alpha(x)} = -i\frac{\overline{u(x)} + 1}{\overline{u(x)} - 1} = -i\frac{\dfrac{1}{u(x)} + 1}{\dfrac{1}{u(x)} - 1} = \alpha(x)$$

για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, αφού $|u(x)| = 1$ και επομένως $\overline{u(x)} = 1/u(x)$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$. Δηλαδή $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, και μπορούμε να πάρουμε την α να είναι συνάρτηση με πραγματικές τιμές, αλλάζοντας τις τιμές της σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν εν ανάγκη.

Τέλος, η ισότητα $\|A\| = \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$ έπεται από το γεγονός ότι η Φ είναι ισομετρία και το εξής Λήμμα.

Λήμμα 6.10. *Αν $(X,\mathcal{B},\mu)$ χώρος μέτρου, $\phi \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ και $M_\phi \colon L^2(X,\mathcal{B},\mu) \longrightarrow L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ ο πολλαπλασιαστικός τελεστής με*

$$M_\phi f = \phi f,$$

τότε

$$\|M_\phi\| \leqslant \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$$

και αν ο χώρος μέτρου είναι ημι-πεπερασμένος, δηλαδή για κάθε $B \in \mathcal{B}$ με $\mu(B) > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $0 < \mu(A) < +\infty$, τότε έχουμε ισότητα $\|M_\phi\| = \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$.

Απόδειξη. Για κάθε $f \in L^2(X,B,\mu)$ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}\|M_\phi f\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} &= \|\phi f\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &= \left(\int |\phi(x)f(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|\phi\|_{L^\infty(X,B,\mu)} \|f\|_{L^2(X,B,\mu)},\end{aligned}$$

που δείχνει ότι $\|M_\phi\| \leqslant \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$. Υποθέτουμε τώρα ότι ο χώρος μέτρου είναι ημι-πεπερασμένος. Αν $\|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} = 0$, τότε προφανώς $\|M_\phi\| = \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} = 0$. Έστω λοιπόν ότι $\|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} > 0$ και έστω $\epsilon > 0$ με $\epsilon < \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$. Θέτουμε

$$F_\epsilon = \{x \in X \colon |\phi(x)| > \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon\}.$$

Τότε $\mu(F_\epsilon) > 0$ και άρα υπάρχει $E_\epsilon \subseteq F_\epsilon$ με $0 < \mu(E_\epsilon) < +\infty$. Θέτουμε

$$f_\epsilon := \frac{1}{\sqrt{\mu(E_\epsilon)}} 1_{E_\epsilon},$$

όπου 1_{E_ϵ} η χαρακτηριστική συνάρτηση του E_ϵ. Τότε

$$\|f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} = \left(\int_{E_\epsilon} \frac{1}{\mu(E_\epsilon)} \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

και

$$\begin{aligned}\|M_\phi f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} &= \left(\int_{E_\epsilon} \frac{1}{\mu(E_\epsilon)} |\phi(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant \left[\left(\|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon\right)^2 \int_{E_\epsilon} \frac{1}{\mu(E_\epsilon)} \, d\mu(x)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon.\end{aligned}$$

Επομένως $\|M_\phi f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \geqslant \big(\|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon\big)\, \|f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)}$, που δείχνει ότι

$$\|M_\phi\| \geqslant \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon,$$

με το ϵ αυθαίρετο στο διάστημα $\big(0, \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}\big)$. Άρα τελικά $\|M_\phi\| \geqslant \|\phi\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$. $\square$

Αποδεικνύουμε τώρα την ισότητα $\|A\| = \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$. Καταρχήν ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{B}, \mu)$ που κατασκευάσαμε είναι ημι-πεπερασμένος: αν $B \in \mathcal{B}$ και $\mu(B) > 0$, τότε $\widetilde{\mu}_j(B) > 0$ για κάποιο $j \in J$, δηλαδή

$$\mu_j(\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B\}) > 0,$$

οπότε το σύνολο $B_j := B \cap (\mathbb{S}^1 \times \{j\})$ προφανώς περιέχεται στο B και ανήκει στην $\mathcal{B}$ και έχει μέτρο

$$\begin{aligned} \mu(B_j) &= \sum_{n\in J} \mu_n(\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, n) \in B \cap (\mathbb{S}^1 \times \{j\})\}) \\ &= \mu_j(\{\zeta \in \mathbb{S}^1 \colon (\zeta, j) \in B\}) \end{aligned}$$

που είναι θετικό, εξ' ορισμού του j, και πεπερασμένο, επειδή κάθε μ_n, και άρα και το μ_j, είναι πεπερασμένο μέτρο στον $(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1))$.

Από το προηγούμενο Λήμμα 6.10 έχουμε ότι $\|\Phi A \Phi^{-1}\| = \|M_\alpha\| = \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$. Επίσης, επειδή η Φ είναι ισομετρία, για κάθε $v \in H$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|Av\|_H &= \|\Phi A v\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &= \|\Phi A \Phi^{-1}(\Phi v)\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &= \|M_\alpha(\Phi v)\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &\leqslant \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} \|\Phi v\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &= \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} \|v\|_H, \end{aligned}$$

που δείχνει ότι

$$\|A\| \leqslant \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}.$$

Από την άλλη, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $f_\epsilon \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ τέτοιο ώστε $\|f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} = 1$ και $\|M_\alpha f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \geqslant \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon$. Τότε, για $v_\epsilon := \Phi^{-1} f_\epsilon$ έχουμε ότι

$$\|v_\epsilon\|_H = \|\Phi v_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} = \|f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} = 1$$

και

$$\begin{aligned} \|Av_\epsilon\|_H &= \|\Phi A v_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &= \|\Phi A \Phi^{-1} f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &= \|M_\alpha f_\epsilon\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \\ &\geqslant \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon, \end{aligned}$$

που δείχνει ότι $\|A\| \geqslant \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)} - \epsilon$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, πρέπει να έχουμε τελικά ότι

$$\|A\| \geqslant \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)},$$

οπότε τελικά $\|A\| = \|\alpha\|_{L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)}$.

7 Εργοδικό Θεώρημα

Έστω U ένας ορθομοναδιαίος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H και θεωρούμε τους τελεστές

$$A_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n,$$

$N \in \mathbb{N}$. Για $N \in \mathbb{N}$, έστω $\varphi_N \colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ η συνάρτηση

$$\varphi_N(\zeta) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \zeta^n = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{1-\zeta^N}{1-\zeta} & \text{αν } \zeta \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \\ 1 & \text{αν } \zeta = 1. \end{cases}$$

Τότε

$$A_N = \varphi_N(U)$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό των φ_N, έχουμε άμεσα ότι

$$|\varphi_N(\zeta)| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\zeta^n| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1,$$

για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1$, και επιπλέον

$$|\varphi_N(\zeta)| = \frac{1}{N}\frac{|1-\zeta^n|}{|1-\zeta|} \leqslant \frac{1}{N}\frac{1+|\zeta^n|}{|1-\zeta|} = \frac{1}{N}\frac{2}{|1-\zeta|} \xrightarrow{N\to\infty} 0,$$

οπότε $\varphi_N(\zeta) \longrightarrow 0$ καθώς $N \to \infty$, για κάθε $\zeta \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$.

Αν $\Phi \colon H \to L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ ο ισομετρικός ισομορφισμός του Θεωρήματος 6.4 για τον τελεστή U, τότε

$$\Phi A_N \Phi^{-1} f(x) = \varphi_N(u(x)) f(x) \xrightarrow{N\to\infty} \chi(x) f(x), \tag{28}$$

όπου

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u(x) = 1 \\ 0 & \text{αν } u(x) \neq 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\chi(x)u(x) = \chi(x)$ για κάθε $x \in X$. Η σύγκλιση στην (28) είναι κατά σημείο, δηλαδή για κάθε $x \in X$. Επομένως έχουμε ότι

$$|\Phi A_N \Phi^{-1} f(x) - \chi(x) f(x)|^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

για κάθε $x \in X$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} |\Phi A_N \Phi^{-1} f(x) - \chi(x) f(x)|^2 &= |\varphi_N(u(x)) f(x) - \chi(x) f(x)|^2 \\ &= |\varphi_N(u(x)) - \chi(x)|^2 |f(x)|^2 \\ &\leqslant 2\left(|\varphi_N(u(x))|^2 + |\chi(x)|^2\right)|f(x)|^2 \\ &\leqslant 4|f(x)|^2, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$|a-b|^2 \leqslant (|a|+|b|)^2 = |a|^2+|b|^2+2|a||b| \leqslant 2|a|^2+2|b|^2,$$

για αυθαίρετους μιγαδικούς αριθμούς a, b. Αφού η $|f|^2$ είναι ολοκληρώσιμη αν $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ότι

$$\|\Phi A_N \Phi^{-1} f - \chi f\|^2_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} = \int_X |\Phi A_N \Phi^{-1} f(x) - \chi(x) f(x)|^2 \, d\mu(x) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

και η σύγκλιση (28) είναι και στον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Έστω $Q\colon L^2(X,\mathcal{B},\mu) \to L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ ο τελεστής $Qf = \chi f = M_\chi f$. Για $f \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ έχουμε ότι $Qf \in \ker(I - M_u)$, αφού

$$(I - M_u)Qf = Qf - M_u Qf = Qf - u\chi f = Qf - \chi f = Qf - Qf = 0,$$

επειδή $u\chi = \chi$. Επιπλέον, $f - Qf \perp g$ για κάθε $g \in \ker(I - M_u)$. Πράγματι, αν $g \in \ker(I - M_u)$, τότε $g = ug$ στον $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$, δηλαδή $u(x)g(x) = g(x)$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, και άρα $g(x) = 0$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$ για το οποίο $u(x) \neq 1$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\langle g, f - Qf\rangle &= \langle g, f\rangle - \int_X \overline{Qf} g \, d\mu \\
&= \langle g, f\rangle - \int_X \chi \overline{f} g \, d\mu \\
&= \langle g, f\rangle - \int_{\{x\in X\colon u(x)=1\}} \overline{f} g \, d\mu \\
&= \langle g, f\rangle - \int_X \overline{f} g \, d\mu \\
&= \langle g, f\rangle - \langle g, f\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

η τρίτη από το τέλος ισότητα επειδή $g(x) = 0$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$ για το οποίο $u(x) \neq 1$ και επομένως

$$\int_X \overline{f} g \, d\mu = \int_{\{x\in X\colon u(x)=1\}} \overline{f} g \, d\mu + \int_{\{x\in X\colon u(x)\neq 1\}} \overline{f} g \, d\mu = \int_{\{x\in X\colon u(x)=1\}} \overline{f} g \, d\mu + 0.$$

Επομένως πράγματι $f - Qf \in \ker(I - M_u)^\perp$ για κάθε $f \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ και αφού επίσης $Qf \in \ker(I - M_u)$ για κάθε τέτοια f έπεται ότι ο τελεστής Q είναι η ορθογώνια προβολή του $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ στον $\ker(I - M_u)$.

Δείξαμε τώρα ότι $\Phi A_N \Phi^{-1} f \longrightarrow Qf$ στον $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$. Έπεται ότι $A_N v \to Pv$ στον H, όπου $P = \Phi^{-1} Q \Phi$, αφού, για $v \in H$,

$$\begin{aligned}
\|A_N v - \Phi^{-1} Q \Phi v\|_H &= \|(A_N - \Phi^{-1} Q \Phi) v\|_H \\
&= \|\Phi^{-1}(\Phi A_N \Phi^{-1} - Q)\Phi v\|_H \\
&= \|(\Phi A_N \Phi^{-1} - Q)\Phi v\|_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} \xrightarrow{N\longrightarrow\infty} 0,
\end{aligned}$$

η τρίτη ισότητα επειδή η Φ, και άρα και Φ^{-1}, είναι ισομετρία και η σύγκλιση επειδή $\Phi v \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και άρα $\Phi A_N \Phi^{-1}(\Phi v) \to Q(\Phi v)$ στον $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Τέλος, έχουμε ότι $\Phi U \Phi^{-1} = M_u$, ή ισοδύναμα, $U\Phi^{-1} = \Phi^{-1} M_u$, και $P = \Phi^{-1} Q \Phi$. Επομένως

$$\begin{aligned}(I_H - U)P &= (I_H - U)\Phi^{-1} Q\Phi = \Phi^{-1} Q\Phi - U\Phi^{-1} Q\Phi \\ &= \Phi^{-1} Q\Phi - \Phi^{-1} M_u Q\Phi = \Phi^{-1}(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)Q\Phi.\end{aligned}$$

Για $v \in H$ τότε έχουμε ότι,

$$(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)Q\Phi v = 0,$$

αφού $Qf \in \ker(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)$ για κάθε $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ και άρα και για $f = \Phi v$, οπότε

$$(I_H - U)Pv = \Phi^{-1}(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)Q\Phi v = 0$$

για κάθε $v \in H$. Αυτό δείχνει ότι $Pv \in \ker(I_H - U)$ για κάθε $v \in H$. Θα δείξουμε ότι επιπλέον $v - Pv \perp \ker(I_H - U)$ για κάθε $v \in H$, οπότε θα έχουμε ότι P είναι η ορθογώνια προβολή του H στον κλειστό υπόχωρο

$$\ker(I_H - U) = \{v \in H \colon Uv = v\}$$

των U-αναλλοίωτων διανυσμάτων. Πράγματι, έστω $v \in H$ και $h \in \ker(I_H - U)$. Τότε $Uh = h$ και άρα $\Phi^{-1} M_u \Phi h = h$, ή ισοδύναμα, $M_u \Phi h = \Phi h$. Επομένως $\Phi h \in \ker(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)$.

$$\begin{aligned}\langle v - Pv, h\rangle &= \langle v, h\rangle - \langle Pv, h\rangle \\ &= \langle v, h\rangle - \langle \Phi^{-1} Q\Phi v, h\rangle \\ &= \langle v, h\rangle - \langle Q\Phi v, \Phi h\rangle \\ &= \langle \Phi v, \Phi h\rangle - \langle Q\Phi v, \Phi h\rangle \\ &= \langle \Phi v - Q\Phi v, \Phi h\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

η τρίτη ισότητα επειδή ο Φ είναι ισομετρικός ισομορφισμός (unitary) και άρα $\Phi^{-1} = \Phi^*$, η τέταρτη επίσης επειδή ο Φ είναι ισομετρία και η τελευταία ισότητα επειδή ο Q είναι ορθογώνια προβολή στον $\ker(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)$, οπότε $\Phi v - Q\Phi v \perp \ker(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)$, και $\Phi h \in \ker(I_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)} - M_u)$.

Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα που μόλις αποδείξαμε.

Θεώρημα 7.1 (Μέσο Εργοδικό Θεώρημα von Neumann για μοναδιαίους τελεστές σε χώρους Hilbert)**.** *Έστω H χώρος Hilbert, $U \colon H \longrightarrow H$ ορθομοναδιαίος τελεστής και $P \colon H \longrightarrow \ker(I - U)$ η ορθογώνια προβολή του H στον κλειστό υπόχωρο $\ker(I - U)$, δηλαδή τον κλειστό υπόχωρο των U-αναλλοίωτων στοιχείων του H. Τότε*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n v \xrightarrow{N \longrightarrow \infty} Pv$$

στον H, *για κάθε* $v \in H$, *δηλαδή*

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n v - Pv \right\| \xrightarrow{N \longrightarrow \infty} 0$$

για κάθε $v \in H$.

Υπάρχουν και άλλες αποδείξεις του παραπάνω αποτελέσματος, που δεν κάνουν χρήση του φασματικού θεωρήματος. Μάλιστα επεκτείνουν το αποτέλεσμα συμπεριλαμβάνοντας τελεστές $U \colon H \longrightarrow H$ που είναι ισομετρίες, αλλά όχι απαραίτητα αντιστρέψιμοι, δηλαδή όχι κατ΄ ανάγκη μοναδιαίοι.

Αναφορές

[1] P. D. Hislop και I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory*. Springer, 1996.

[2] M. Reed και B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, I. Functional Analysis*. Academic Press, 1980.

[3] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[4] E. Kowalski, *Spectral theory in Hilbert spaces*. Lecture Notes (ETH Zurich, FS 09), 2009. `https://people.math.ethz.ch/ kowalski/spectral-theory.pdf`

[5] M. Taylor, *The Spectral Theorem for Self-Adjoint and Unitary Operators*.

[6] S. Morrison, Lecture Notes, `https://tqft.net/web/teaching/current/Analysis3`

[7] A. Κατάβολος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*. Εκδόσεις Συμμετρία, 2008.