ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Οι ρητοί αριθμοί και η διδασκαλία τους

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΠΕΠΠΑΣ
Δ201438

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Ευάγγελος Ράπτης — Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών
ΕΚΠΑ

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 26-27 Σεπτεμβρίου 2019 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Λάππας	Καθηγητής
▪ Ε. Ράπτης (επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Π. Σπύρου	πρ. Αναπλ. Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Λάππας	Καθηγητής
▪ Ε. Ράπτης (επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Π. Σπύρου	πρ. Αναπλ. Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι διατυπούμενες απόψεις απηχούν τις απόψεις του συγγραφέα. Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μας αφού χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητά μας. Ο άνθρωπος έρχεται σε επαφή με τους ρητούς αριθμούς από τα προσχολικά χρόνια γνωρίζοντας την έννοια της διαμέρισης σε ίσα κομμάτια. Στην προσχολική ηλικία η κατανόηση των ρητών αριθμών γίνεται μέσω της οπτικοποίησης. Το παιδί αντιλαμβάνεται την έννοια του μέρους μόνο αν την ταυτίσει με τον διαχωρισμό ενός πράγματος σε ισόποσα μέρη.

Κατά τα σχολικά χρόνια τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τις διάφορες εκφράσεις των ρητών αριθμών. Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να λάβουν τη μορφή δεκαδικών αριθμών, κλασματικών αριθμών ή και ποσοστών. Μαθαίνουν τις δομές τους και πως μπορούν να μεταβούν από τη μία μορφή στην άλλη. Επιπλέον, χρησιμοποιούν αλγεβρικές πράξεις για να επιλύσουν προβλήματα.

Οι ρητοί αριθμοί είναι εξίσου σημαντικοί στη μετέπειτα πορεία ενός ατόμου. Αυτοί εμπεριέχονται σε καθημερινές δραστηριότητες όπως είναι οι αγορές, οι τραπεζικές συναλλαγές κ.α. Επιπρόσθετα οι ρητοί αποτελούν τη βάση πολλών επιστημών. Πρωταρχικά είναι ένα κομμάτι της Άλγεβρας, το οποίο θα πρέπει κανείς να κατανοήσει πλήρως για να μπορέσει να διαχειριστεί ανώτερα μαθηματικά σε μεταγενέστερη φάση. Οι ρητοί χρησιμοποιούνται σχεδόν σε όλες τις θετικές επιστήμες, τη Φυσική, τη Χημεία, τη Βιολογία κ.α., αλλά και στις θεωρητικές επιστήμες μέσω της στατιστικής ανάλυσης.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η έννοια των ρητών αριθμών και των ρητών συναρτήσεων καθώς και οι ιδιότητές τους. Αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο αφομοιώνονται οι ρητοί από τα προσχολικά μέχρι και τα σχολικά χρόνια και τα προβλήματα που υπάρχουν στη διδασκαλία τους.

Abstract

Rational numbers play a very important role in our lives as they are used in our everyday life. We learn to communicate with rational numbers from preschool years in the concept of partitioning. During preschool years, the understanding of rational numbers comes through visualisation. The child embraces the meaning of the part and the whole of a number only by using tangible examples, i.e. cutting food into equal parts.

During the school years children come in contact with the various expressions of rational numbers, which are the decimals, the fractions and the percentages. They learn to distinguish their structures and how they can move from one form to another. They also use algebraic actions to solve problems.

Rational numbers are also important in a person's life after school. They are included in everyday activities. In addition, rational numbers are the basis of many sciences. In Algebra, one has to fully understand rational numbers in order to be able to manage algorithms. Rational numbers are used in science that entail mathematics, i.e. Physics, Chemistry, Biology, etc., but also in theoretical sciences through statistical analysis.

This work presents the concept of rational numbers and rational functions as well as their properties. It analyses the way in which the rationals are taught from preschool to school years and the problems included at the sequence of the curriculum.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 3

Abstract 4

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 14

1.1 Οι αριθμοί κατά τους Αιγύπτιους 14

1.2 Οι αριθμοί κατά τους Βαβυλώνιους 16

1.3 Οι αριθμοί κατά τους Έλληνες 18

1.4 Οι Αριθμοί κατά τους Μάγια 20

1.5 Οι αριθμοί κατά τους Ίνκας 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΤΟΥΣ ΔΙΕΠΟΥΝ 22

2.1 Οι πραγματικοί αριθμοί και τα υποσύνολα των πραγματικών 22

2.2 Πώς ορίζονται οι ρητοί αριθμοί και ποια σύνολα εμπεριέχουν 24

2.2.1.10 Διαίρεση κλασμάτων 30

2.2.1.11 Πολλαπλασιασμός αριθμού με κλάσμα 31

2.2.1.12 Ιδιότητες των δυνάμεων 32

2.2.1.13 Πολλαπλασιασμός δυνάμεων με την ίδια βάση 32

2.2.1.14 Διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση 32

2.2.1.15 Πολλαπλασιασμός δυνάμεων που έχουν ίδιο εκθέτη 32

2.2.1.16 Διαίρεση δυνάμεων με την ίδια δύναμη 33

2.2.2 Ορισμός ρητών αριθμών ως ισοδυναμίες κλασμάτων 33

2.2.2.1 Θεωρήματα που διέπουν τις σχέσεις ισοδυναμίας 33

2.2.2.2 Διάταξη του συνόλου Q 35

2.2.2.3 Ιδιότητες Κλάσεων Ισοδυναμίας 35

2.2.2.4 Η συμβατότητα πράξεων και διάταξης με σχέση ισοδυναμίας.................................... 37
2.3 Η έννοια της ρητής συνάρτησης 38
2.3.1 Μερικά χαρακτηριστικά των πολυωνυμικών συναρτήσεων.. 38
2.4 ΟΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ 40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥΣ.. 42
3.1 Η εκμάθηση των ρητών αριθμών στα προσχολικά και τα σχολικά χρόνια 42
3.2 Οι δυσκολίες στην διδασκαλία των ρητών αριθμών στις διάφορες ηλικίες κατά τα σχολικά χρόνια και τα αίτια της μη κατανόησής τους 43
3.3 Η μέθοδος της εκπαιδευτικής ακολουθίας στη διδασκαλία των ρητών............................. 47
3.4 Ποιοι ρητοί αριθμοί θα πρέπει να διδαχθούν στα πρώτα σχολικά χρόνια.......................... 50
3.4 Οι επιδράσεις της μη εμπέδωσης των ρητών αριθμών 53
3.5 Η ταύτιση των ρητών αριθμών με την έννοια του λόγου 55
3.6 Οι ρητοί ως αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης... 62
3.7 Η προσέγγιση της έννοιας των ρητών ως τελεστές.. 62
3.7 Η σημαντικότητα της διδασκαλίας των κλασμάτων... 63
3.8 Το πρόβλημα μη επαρκούς γνώσης και εμβάθυνσης στους ρητούς αριθμούς από την πλευρά των εκπαιδευτικών 64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 67
4.1 Η μέθοδος με την οποία γίνεται η εμπέδωση των ρητών αριθμών στα παιδιά.................. 67
4.2 Τα επίπεδα της γνώσης στα παιδιά και η σύνδεση αυτών με τους ρητούς 68
4.3 Λόγοι για τους οποίους παρουσιάζεται δυσκολία στην αφομοίωση των ρητών 69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ 79
Αναφορές 81

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Οι Αιγυπτιακοί Αριθμοί από το 1 έως το 10.

(Πηγή:https://nucleus2012.wordpress.com/2016/07/31/%CF%84%CE%B1-%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC-%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%85%CF%82-%CE%B1%CF%81%CF%87%CE%B1%CE%AF%CE%BF%CF%85%CF%82-%CF%80%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CF%84%CE%B9%CF%83/)

Εικόνα 2: Οι Αιγυπτιακοί Αριθμοί ως πολλαπλάσια του 10.

(Πηγή: http://www.tmth.gr/images/arith.%2003.jpg)

Εικόνα 3: Το αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων.

(Πηγή: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_numerals.html)

Εικόνα 4: Το Ελληνικό Αλφάβητο ως βάση αριθμητικής κλίμακας.

(Πηγή: https://www.diodos.gr/%CE%AD%CF%81%CE%B5%CF%85%CE%BD%CE%B1-%CE%B3%CE%BD%CF%8E%CF%83%CE%B7/%CE%B5%CE%BB%CE%BB%CE%AC%CF%82-%CE%AD%CE%BB%CE%BB%CE%B7%CE%BD%CE%B5%CF%82/item/%CF%84%CE%BF-%CE%B5%CE%BB%CE%BB%CE%B7%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CF%8C-%CE%B1%CE%BB%CF%86%CE%AC%CE%B2%CE%B7%CF%84%CE%BF.html

Εικόνα 5: Το αριθμητικό σύστημα των Μάγια.

(Πηγή: https://theeraofathena.wordpress.com/2010/11/15/%CE%BC%CE%AC%CE%B3%CE%B9%CE%B1-

%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC-%CE%BA%CE%B1%CE%B9-%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CF%81%CE%BF%CE%BB%CF%8C%CE%B3%CE%B9%CE%BF/

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αριθμοί αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μας καθότι χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητά μας και ενώνουν τις επιστήμες. Η μέτρηση διάφορων φυσικών μεγεθών όπως η μάζα, το μήκος, ο χρόνος, η θερμοκρασία, η ενέργεια, η δύναμη, η ταχύτητα κ.α. δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την ύπαρξη των αριθμών. Ιδιαίτερα οι ρητοί αριθμοί είναι αυτοί που εισέρχονται στη ζωή μας από τα πρώτα νηπιακά χρόνια. Αξίζει λοιπόν να διερευνηθεί η ιστορία αυτών των αριθμών καθώς και ο τρόπος που διδάσκονται σήμερα οι ρητοί αριθμοί.

Οι ρητοί αριθμοί κατά τα πρώτα χρόνια της ανακάλυψής τους δεν είχαν μια συγκεκριμένη σειρά και δεν είχαν καμία συνέχεια. Έπρεπε να μελετηθούν για χιλιάδες χρόνια ώστε να γίνει η ακριβής καταγραφή τους και να φτάσουμε στη σημερινή θεώρηση ότι είναι άπειροι και διατάσσονται με δεδομένο τρόπο σε άξονα.

Αυτοί που ασχολήθηκαν πρώτοι με την θεωρία των αριθμών ήταν οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι. Οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι, 4000 χρόνια πριν, ανέπτυξαν αριθμητικές τεχνικές που εφαρμόζονται στην τέχνη και τις επιστήμες. Αρχικά, οι Βαβυλώνιοι αντιλήφθηκαν ότι η μέτρηση διαφόρων ποσοτήτων μεταβλητών ή μη ήταν απαραίτητη. Έτσι επέκτειναν το αριθμητικό σύστημα μέτρησης που είχαν, το οποίο περιείχε μόνο φυσικούς αριθμούς, ώστε να εμπεριέχει και δεκαδικούς αριθμούς. Το σύστημα αυτό είχε ως βάση το 60. Το σύστημά τους όμως δεν περιείχε το μηδέν. Ωστόσο ήταν οι πρώτοι που προσέγγισαν το αποτέλεσμα της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού 2 και μάλιστα είχαν σωστά τα πρώτα τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

Αργότερα οι Αιγύπτιοι ανακάλυψαν έναν τρόπο αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών. Τα κλάσματα εκφράζονται σαν αθροίσματα άλλων αριθμών.

Οι Έλληνες φιλόσοφοι προσπαθούσαν να εντοπίσουν και να κατανοήσουν αλληλοσυνδέσεις που εμφάνιζαν οι αριθμοί μεταξύ τους και τις εκφάνσεις που έχουν αυτοί στην φιλοσοφία. Η ανακάλυψη των ρητών αριθμών έγινε από έναν μαθηματικό και φιλόσοφο που γεννήθηκε το 580 π.Χ. στη Σάμο, τον Πυθαγόρα. Η διδασκαλία του Πυθαγόρα δημιούργησε ένα ολόκληρο ρεύμα και επηρέασε σημαντικά τους μαθηματικούς και φιλοσόφους Σωκράτη, Πλάτωνα και Αριστοτέλη. Ο Πυθαγόρας μελέτησε το πώς συνδέονται κάποιοι αριθμοί στα γεωμετρικά σχήματα. Αρχικά πίστευε ότι τα πάντα μπορούν να μετρηθούν, στην πορεία ωστόσο συμπέρανε ότι υπάρχουν ποσότητες οι οποίες δεν μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια, δηλαδή με αριθμούς που έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Ο Πυθαγόρας υποστήριζε ότι δε νοείται η ύπαρξη πράγματος που δεν έχει κάτι να περιστρέφεται γύρω του. Όταν τοποθετηθούν δύο όμοιοι κύκλοι έτσι ώστε να τέμνονται, οι δύο αυτοί κύκλοι γεννούν μία σειρά όλων των αριθμών. Έτσι, από την τομή δύο ή περισσότερων κύκλων δημιουργούνται άλλα γεωμετρικά σχήματα όπως του τριγώνου, του τετραγώνου, του πενταγώνου κ.α. Ο αριθμός 10 διαδραμάτιζε πολύ σημαντικό ρόλο για τους Έλληνες και τους Βαβυλώνιους μαθηματικούς. Άλλωστε ακόμη και σήμερα το πρώτο σύνολο αριθμών που διδασκόμαστε είναι οι αριθμοί έως και το 10 συμπεριλαμβανομένων και των αριθμητικών πράξεων που διέπουν αυτό το σύνολο. Η διαπίστωση αυτή για τους μη μετρήσιμους αριθμούς άνοιξε το δρόμο για την μετέπειτα μελέτη των ρητών και των άρρητων αριθμών. Το πιο γνωστό θεώρημα που ανέπτυξε ήταν το «Πυθαγόρειο Θεώρημα». Το παραπάνω θεώρημα συνδέει αριθμητικά τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ορίζοντας ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του. Σύμφωνα με την θεωρία του Πυθαγόρα ολόκληρο το Σύμπαν αποτελείται και προσδιορίζεται από αριθμούς και σχέσεις που συνδέουν τους αριθμούς. Σαν αποτέλεσμα το ζητούμενο των φιλοσόφων αυτών ήταν να βρουν αυτούς.

Ο Ευκλείδης πιστεύει ότι ο αριθμός είναι ένας συνδυασμός μονάδων, όπου η μονάδα δεν εμπεριέχει άλλες μονάδες αλλά είναι αυτοτελής. Οι Έλληνες φιλόσοφοι θεωρούσαν σαν αριθμούς μόνο τους φυσικούς χωρίς όμως να συμπεριλαμβάνουν σε αυτούς την μονάδα. Τα κλάσματα τα θεωρούσαν σαν το λόγο, ή διαφορετικά το πηλίκο δύο αριθμών και αυτοί οι αριθμοί αποτελούσαν τους ρητούς.

Οι μαθηματικοί σε μεταγενέστερες χρονικές περιόδους προσπαθεί να ορίσει τους ρητούς αριθμούς μόνο με την βοήθεια των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Κατά συνέπεια, εστιάζουν στην εύρεση αριθμητικών σχέσεων και όχι στην φιλοσοφική ερμηνεία των αριθμών. Αργότερα μελετούν τις έννοιες του πεδίου ορισμού, του συνόλου των τιμών και των συναρτήσεων. Σημαντική ήταν η συνεισφορά των μαθηματικών Kronecker, Hankel, Weber, Hilbert και Steinitz στα ρητά πεδία ορισμού.

Σύμφωνα με σύγχρονες αντιλήψεις, οι ρητοί αριθμοί είναι ένα σύνολο αριθμών που μπορούν να εκφραστούν ως το πηλίκο δύο αριθμών, με τον περιορισμό ότι ο διαιρέτης δε θα μπορεί να λάβει την τιμή μηδέν. Οι ρητοί αριθμοί συμπεριλαμβάνουν το σύνολο των φυσικών αριθμών και των ακεραίων. Οι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνουν τους θετικούς αριθμούς που δεν έχουν δεκαδικά ψηφία μαζί με το μηδέν. Οι πραγματικοί αριθμοί εμπεριέχουν το σύνολο των ρητών, οι ρητοί εμπεριέχουν τους ακεραίους και οι τελευταίοι με τη σειρά τους εμπεριέχουν τους φυσικούς αριθμούς. Οι ακέραιοι είναι το σύνολο των αριθμών που δεν έχουν δεκαδικά ψηφία και μπορούν να έχουν είτε θετικό, είτε αρνητικό πρόσημο είτε να είναι μηδέν. Σε έναν άξονα, οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί καταλαμβάνουν τον θετικό ημιάξονα και οι αρνητικοί ακέραιοι τον αρνητικό ημιάξονα ενώ την αρχή του άξονα αποτελεί το μηδέν. Οι δύο ημιάξονες εκτείνονται επ' άπειρον.

Οι ακέραιοι αριθμοί είναι υποσύνολο των ρητών αριθμών αλλά και των πραγματικών. Οι ρητοί αριθμοί λοιπόν είναι το αποτέλεσμα ενός κλάσματος το οποίο μπορεί να δίνει σαν αποτέλεσμα έναν ακέραιο αριθμό, έναν φυσικό αριθμό ή έναν αριθμό με δεκαδικά ψηφία. Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να προκύψουν από τον λόγο δύο ομόσημων αριθμών, είτε δύο θετικών, είτε δύο αρνητικών αριθμών όπου ο διαιρετέος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του διαιρέτη. Οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να προκύψουν από τη διαίρεση δύο ετερόσημων ή ομόσημων αριθμών, όπου ο διαιρετέος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του διαιρέτη.

Οι ρητοί αριθμοί προκύπτουν ως αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο ακεραίων και μπορούν να είναι θετικοί αριθμοί, αρνητικοί ή μηδέν. Στην κατηγορία των ρητών αριθμών συμπεριλαμβάνονται επίσης και οι περιοδικοί αριθμοί και οι ρίζες που ισοδυναμούν με ακέραιο ψηφίο. Οι περιοδικοί αριθμοί είναι το αποτέλεσμα της πράξης δύο ακεραίων που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία ανά ένα ή ανά ομάδες επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο.

Η πρώτη γνωριμία με τους ρητούς αριθμούς γίνεται κατά τα προσχολικά χρόνια, όπου ο άνθρωπος παρατηρεί την ύπαρξη των έμβιων και των άβιων όντων και την ποσοτικοποιεί. Κατανοεί την έννοια της ποσότητας πριν ακόμη ξεκινήσουν οι γονείς να του δείχνουν ή να μιλούν για αυτή. Αργότερα, όταν περνάει στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση δέχεται και εξοικειώνεται με τους ρητούς αριθμούς, ξεκινώντας από το φυσικό υποσύνολό τους. Μαθαίνει να τους συνδέει χρησιμοποιώντας τις τέσσερις γνωστές πράξεις και να εφαρμόζει τις γνώσεις του στην καθημερινότητά του.

Η αγορά αγαθών από κάποιο κατάστημα είναι η πρώτη εφαρμογή που συναντούν οι πράξεις ρητών αριθμών και καθίσταται απαραίτητη για την ένταξη του ανθρώπου σε μία οργανωμένη κοινωνία. Η αντίληψη του χρόνου γίνεται επίσης μέσω της μέτρησης. Ένα παιδί διδάσκεται από τα πρώτα του σχολικά χρόνια τις έννοιες της ώρας, της ημέρας, του χρόνου κλπ. Παράλληλα στη συνέχεια το παιδί μαθαίνει να μετρά τη μάζα, παρατηρώντας το ζυγό, καθώς και να συγκρίνει τα μεγέθη αυτά. Η μέθοδος της σύγκρισης βοηθάει στην εμπέδωση των ρητών αριθμών και των σχέσεων που τους διέπει. Οι έννοιες του μεγαλύτερου και του μικρότερου καταγράφονται στον ανθρώπινο εγκέφαλο σαν αριθμοί εκτός από εικόνες.

Κατά τα εφηβικά χρόνια, όπου ο άνθρωπος ξεκινάει να αναπτύσσει και την κριτική του ικανότητα, διδάσκεται την έννοια της ρητής συνάρτησης και της ρητής εξίσωσης. Η ευθεία ως μέσο που εκφράζει ανάλογα ποσά, η υπερβολή σαν συνάρτηση που συνδέει αντιστρόφως ανάλογα ποσά είναι οι πρώτες συναρτήσεις που εμφανίζονται στα μαθητικά συγγράμματα. Εν συνεχεία τα παιδιά μαθαίνουν την πολυωνυμική συνάρτηση και τις πράξεις της, καθώς και τις ειδικές περιπτώσεις του μηδενικού, του σταθερού πολυωνύμου, του διωνύμου και του τριωνύμου. Η επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού και δευτέρου βαθμού με τους τύπους του Vieta τους βοηθάει αργότερα στη μελέτη χημικών αντιδράσεων και εξισώσεων κίνησης ή στη μελέτη μεταφοράς ενέργειας. Οι ρητοί αριθμοί απαντώνται επίσης σε γεωμετρικά σχήματα. Ο προσδιορισμός της περιμέτρου και του εμβαδού σχημάτων γίνεται με τη χρήση ρητών και των πράξεών τους.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να γίνει μία ιστορική αναδρομή στην ανακάλυψη και την εξέλιξη των ρητών αριθμών και στον τρόπο διδασκαλίας τους. Θα γίνει επισταμένη μελέτη σχετικά με την διδασκόμενη ύλη που αφορά στους ρητούς και τον τρόπο που διδάσκονται οι εν λόγω αριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

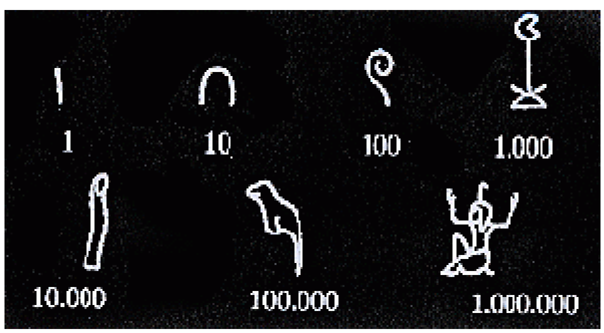
1.1 Οι αριθμοί κατά τους Αιγύπτιους

Οι Αιγύπτιοι ήταν από τους πρώτους λαούς που όρισαν τη μέτρηση και την έθεσαν σαν αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής τους. Η μέτρηση λοιπόν ήταν μία από τις πρώτες ανάγκες που προέκυψαν κατά το διαχωρισμό της γης, των ζώντων οργανισμών αλλά και των υλικών αγαθών. Ως αποτέλεσμα τα εδάφη χωρίστηκαν σε ίσα τμήματα ορθογωνίου σχήματος, ενώ ο ιδιοκτήτης τους ήταν υπόχρεος ετήσιου φόρου. Κατά την διάρκεια των πλημμυρών του Νείλου, όποιος έχανε μέρος του εδάφους θα είχε και αντίστοιχη μείωση του φόρου. Η μελέτη για τον ίσο και δίκαιο διαμοιρασμό έδωσε στους Αιγύπτιους την δυνατότητα να κάνουν πράξεις με κλάσματα και να διαχειρίζονται διάφορα μαθηματικά προβλήματα.

Ανέπτυξαν ένα δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο είχε σαν βάση τον αριθμό δέκα. Επιπλέον δημοσίευαν πίνακες με διάφορες πράξεις που ακόμη και σήμερα δεν έχουν αποκωδικοποιηθεί πλήρως από μαθηματικούς. Γνώριζαν το πως να υπολογίζουν εμβαδά διαφόρων σχημάτων, όπως είναι το τρίγωνο και το τραπέζιο και τον όγκο μίας σφαίρας δεδομένης ακτίνας. Επιπρόσθετα χρησιμοποιούσαν τριγωνομετρικές συναρτήσεις ώστε να υπολογίζουν την κλίση επιπέδων. Η κλίση υπολογίζονταν από τη συνάρτηση "seqt", που εικάζεται ότι αντιστοιχεί στη σημερινή εφαπτομένη, ωστόσο μπορεί να αντιστοιχεί στο ημίτονο ή το συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Η ακρίβεια στη δημιουργία των γωνιών των γνωστών Πυραμίδων είναι στη μία μοίρα, γεγονός που έχει ωθήσει τους σημερινούς επιστήμονες στη χρονολόγησή τους με βάση την ευθυγράμμισή τους με τον πολικό αστέρα. Οι Αιγύπτιοι είχαν υπολογίσει το πηλίκο του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου προς την αντίστοιχη περίμετρό του. Τον 5^{ο} αιώνα δημιούργησαν ένα ημερολόγιο το οποίο είχε συνολικά 365 ημέρες. Όπως και σήμερα, οι 360 ημέρες ήταν διαχωρισμένες σε 12 μήνες, ενώ οι υπόλοιπες 5 ημέρες κατανέμονταν σε κάποιους από αυτούς.

Οι Αιγύπτιοι είχαν δημιουργήσει την ιερογλυφική, μία γλώσσα με την οποία μπορούσαν να παραστήσουν με ένα σύμβολο τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες και τις χιλιάδες. Το σύστημά τους ήταν μη θεσιακό και επαναληπτικό. Το ψηφίο «ένα» συμβολίζονταν με μία κατακόρυφη γραμμή. Η δεκάδα ήταν ένα πέταλο ανεστραμμένο προς το έδαφος. Η χιλιάδα ήταν ένα λουλούδι λωτού, η δεκάδα χιλιάδων ήταν ένα δάχτυλο με φορά προς τα επάνω, η εκατοντάδα χιλιάδων ήταν ένας βάτραχος ή ένας γυρίνος και το εκατομμύριο συμβολιζόταν με έναν άντρα που στέκεται στα γόνατα και έχει στραμμένα τα χέρια προς τον ουρανό.

Εικόνα 1: Οι Αιγυπτιακοί Αριθμοί από το 1 έως το 10.

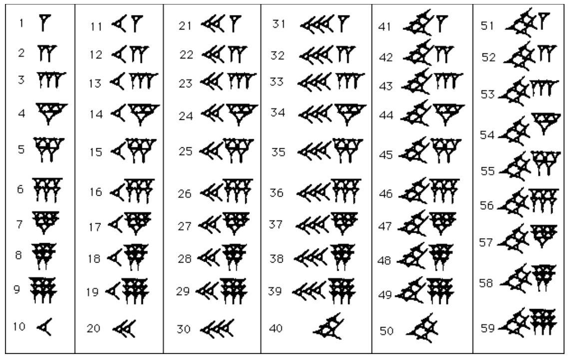


Εικόνα 2: Οι Αιγυπτιακοί Αριθμοί ως πολλαπλάσια του 10.

1.2 Οι αριθμοί κατά τους Βαβυλώνιους

Οι Βαβυλώνιοι (5.000 π.Χ.) αποτελούν έναν από τους πιο σημαντικούς πολιτισμούς που αναπτύχθηκαν στα αρχαία χρόνια. Η Βαβυλωνία σήμερα βρίσκεται στην περιοχή του Ιράκ ενώ τότε αποτελούσε πρωτεύουσα της Μεσοποταμίας, μιας εύφορης περιοχής αφού βρέχεται από τον Τίγρη και τον Ευφράτη ποταμό. Οι Βαβυλώνιοι δέχθηκαν επιρροές από τους Σουμέριους και τους Αιγύπτιους. Οι Σουμέριοι χρησιμοποιούσαν συστήματα μονάδων, ημερολόγια, λογαριασμούς, αποδείξεις, σημειώσεις και μαθηματικές έννοιες. Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων περιλαμβάνουν την Αριθμητική, την Άλγεβρα, την Μετρολογία και την Γεωμετρία (Swapan 1998). Αργότερα οι Σημίτες δημιουργούν στην περιοχή τον δικό τους πολιτισμό. Η Μεσοποταμία ωστόσο γνώρισε την μεγαλύτερή της άνθηση την εποχή που ο Χαμουραμπί ήταν βασιλιάς (περίπου το 1700 π.Χ.). Οι ανασκαφές που έχουν γίνει στην περιοχή έχουν φέρει στην επιφάνεια πολλές επιγραφές που επιβεβαιώνουν ότι κάτοικοι της Μεσοποταμίας ασχολούνταν με τα Μαθηματικά, την Γεωμετρία και την Αστρονομία. Γνώριζαν τις μαθηματικές πράξεις του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, των δυνάμεων, των ριζών, ενώ είχαν κατορθώσει να λύνουν γραμμικές εξισώσεις, δευτεροβάθμιες εξισώσεις, καθώς και να χρησιμοποιούν σε πράξεις αρνητικούς αριθμούς. Η πιο συνήθης κλίμακα που χρησιμοποιούσαν ήταν αυτή του 60 (Swapan 1998).

Οι Βαβυλώνιοι εφηύραν μία σειρά από δικά τους σύμβολα τα οποία παρίσταναν ένα σύνολο ψηφίων. Η κλίμακα αυτή των αριθμών περιλάμβανε δύο σύμβολα. Η σφήνα (), η οποία χρησιμοποιούνταν για την μέτρηση μονάδων και η γωνία (), που χρησιμοποιούνταν για την μέτρηση δεκάδων, ήταν τα δύο σύμβολα που συνδυάζονταν και δημιουργούσαν το αριθμητικό τους σύστημα. Τη βάση του συστήματος αυτού αποτελούσε ο αριθμός 60. Το εξηνταδικό σύστημα, όπως ονομάστηκε, έχει 60 μονάδες οι οποίες παράγουν την εξηντάδα. Μία δυσκολία που είχε το σύστημα αυτό είναι ότι οι μονάδες επαναλαμβάνονταν και δεν αποτελούσαν πραγματικά ψηφία. Το σύστημά τους ήταν θεσιακό, δηλαδή η αξία του ψηφίου σε κάθε αριθμό είναι αντίστοιχη της θέσης που κατέχει μέσα σε αυτόν. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός 0 και η υποδιαστολή δεν υπήρχαν στην αρίθμησή τους.



Εικόνα 3: Το αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων

1.3 Οι αριθμοί κατά τους Έλληνες

Κατά το 1200 π.Χ. περίπου, η ελληνική οικονομία ανθίζει χάρη στην εύφορη γη, την κτηνοτροφία αλλά και τη ναυσιπλοΐα. Οι Έλληνες ταξίδευαν στην Αίγυπτο και τη Μεσοποταμία, και μαζί με την ανταλλαγή αγαθών αντάλλασσαν ιδέες και μετέφεραν στην Ελλάδα πολύτιμη γνώση. Ο Θαλής ήταν ένας από τους πιο γνωστούς μαθηματικούς και φιλοσόφους που ταξίδεψε στις περιοχές αυτές ώστε να μελετήσει την επιστήμη. Όμοια έπραξε αργότερα και ο Πυθαγόρας, εξίσου σπουδαίος μαθηματικός και φιλόσοφος της εποχής.

Η διαφορά των Ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων με τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους έγκειται στο γεγονός ότι οι πρώτοι δεν μελετούσαν μόνο ό,τι είχε απτή φύση, ό,τι δηλαδή μπορούσε να έχει μία οπτική εφαρμογή. Ο Έλληνες φιλόσοφοι προσπαθούσαν να ερμηνεύσουν και να κατανοήσουν έννοιες λογικές και πραγματικές χωρίς την απαραίτητη ύπαρξη έμπρακτης εφαρμογής. Ο Αριστοτέλης ήταν ένας από τους πρωτοπόρους σε αυτό το κίνημα που έχει σαν βάση μη απτές έννοιες. Οι Έλληνες επιστήμονες δεν δημιούργησαν κάποιο νέο αριθμητικό σύστημα, χρησιμοποίησαν όμως ένα σύστημα με βάση τον αριθμό 10.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ϛ	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	ο	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ϙ	koppa*	900	ϡ	sampi

*vau, koppa, and sampi are obsolete characters

Εικόνα 4: Το Ελληνικό Αλφάβητο ως βάση αριθμητικής κλίμακας.

Παρήγαγαν πίνακες που περιλάμβαναν περίπλοκες πράξεις πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων και υιοθέτησαν το σύστημα των Βαβυλωνίων όσον αφορά τις αστρονομικές παρατηρήσεις και μετρήσεις. Η χρήση της αλφαβήτου στη μέτρηση δυσκόλευε ή έθετε ανέφικτες κάποιες πράξεις.

Μεταγενέστερα ωστόσο, με την δημιουργία της Άλγεβρας, σημαντικό ρόλο στην οποία διαδραμάτισε ο Gauss, η επίλυση πιο δύσκολων πράξεων έγινε πιο εύκολη.

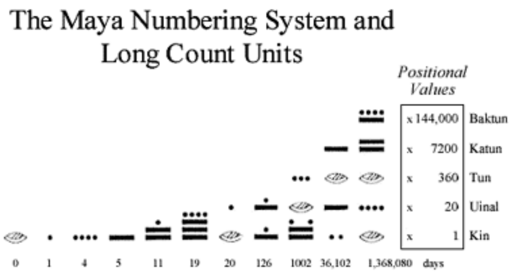
Στην αρχαία Ελλάδα, οι αριθμοί από το 1 έως και το 999 γράφονταν με γράμματα και σημεία στίξεως. Έτσι υπήρχαν τα σύμβολα της άνω κεραίας, η οποία σημειώνεται μετά το γράμμα «´», της ανεστραμμένης κεραίας, η οποία σημειώνεται κάτω από το γράμμα και πριν τη γραφή αυτού «,», της τελείας, η οποία μπαίνει ανάμεσα στα γράμματα «.», και των διαλυτικών, τα οποία μπαίνουν στην επάνω πλευρά των γραμμάτων «¨». Τα γράμματα α’ έως και θ’ της αλφαβήτου αντιστοιχούν στους αριθμούς σημερινούς φυσικούς αριθμούς από το 1 έως και το 9 αντίστοιχα. Τα γράμματα ι´ έως και ϟ´, παριστάνουν τα πολλαπλάσια του 10 που ξεκινούν από τον αριθμό 10 και φτάνουν έως και το 90. Το σύνολο των αριθμών ρ´ έως και ϡ´ είναι τα πολλαπλάσια του 100, από το 100 έως και το 900 αντίστοιχα.

Ορόσημο στο έργο των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών αποτέλεσε η εκτίμηση του αριθμού των κόκκων άμμου της Γης από τον Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές και αλγεβρικές έννοιες, κατόρθωσε να υπολογίσει το πλήθος των κόκκων όπως αναφέρεται στο έργο ¨Ψαμίτης¨. Για να κατορθώσει τον υπολογισμό του χρησιμοποίησε σύστημα με βάση το 10. Η μέγιστη τιμή του συστήματός του ήταν τα εκατό εκατομμύρια.

1.4 Οι Αριθμοί κατά τους Μάγια

Η φυλή των Μάγια άνθισε περίπου κατά τον 3ο με 8ο αιώνα και έδρευε στην περιοχή της κεντρικής Αμερικής. Ασχολήθηκαν με την Αστρονομία και διαχώρισαν το έτος σε 18 μήνες οι οποίοι είχαν 20 μέρες έκαστος. Το σύστημα αρίθμησής τους ονομάζεται «σύστημα τοποθέτησης». Οι κύριοι λόγοι της ονομασίας αυτής στηρίζονται στο ότι οι αριθμοί εκφράζονταν σαν μία συνάρτηση μεταβλητών με δεδομένες πράξεις και διάφορες παραμέτρους. Ο αριθμός 0 είχε δικό του ξεχωριστό συμβολισμό.

Οι Μάγια είχαν εφεύρει το εικοσαδικό σύστημα. Σε αυτό τα μόνα σύμβολα που παρατηρούνται είναι η παύλα «_» και η τελεία «.». Η τελεία αντιστοιχεί στον αριθμό 1 και η παύλα στον αριθμό 5. Το εικοσαδικό σύστημα ξεκινούσε από το 1 και πήγαινε μέχρι το 20, ενώ και αυτό ήταν θεσιακό, δηλαδή η αξία του ψηφίου σχετιζόταν με την θέση αυτού. Οι αριθμοί διαβάζονταν σε κατακόρυφη διεύθυνση και με φορά από επάνω προς τα κάτω, γεγονός που βοηθούσε στη διευκόλυνση των αριθμητικών πράξεων. Οι Μάγια κάλυψαν πολλά κενά των τάξεων των αριθμών με σύμβολα (ιερογλυφικά).



Εικόνα 5: Το αριθμητικό σύστημα των Μάγια.

1.5 Οι αριθμοί κατά τους Ίνκας

Οι Ίνκας εφηύραν ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το 10, το οποίο τους βοηθούσε να ελέγχουν τις δραστηριότητες των ανθρώπων καθώς ο πληθυσμός τους ήταν της τάξης των 6-12 εκατομμυρίων. Είχαν ανακαλύψει ένα σύστημα «quipu», με το οποίο μπορούσαν να μεταφέρουν δεδομένα με πληροφορίες. Τα «quipu» αποτελούσαν ένα αριθμητικό σύστημα με το οποίο καταγράφονταν αγαθά που μετακινούνταν από τόπο σε τόπο. Αυτά είχαν έναν οριζόντιο σπάγκο και πολλούς κατακόρυφους. Το χρώμα κάθε σπάγκου αντιστοιχούσε σε διαφορετικό προϊόν. Τα άσπρα νήματα αντιπροσώπευαν το μαλλί, τα κίτρινα το χρυσό και τα καφέ τους καρπούς. Εν συνεχεία η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε ώστε να γνωρίζουν ποιοι είναι οι πληθυσμοί που μετακινούνται και ποιοι είναι οι φόροι που καταβάλλονται κ.α. Το δυαδικό σύστημα, το οποίο χρησιμοποιείται σήμερα στους υπολογιστές, ανακαλύφθηκε από αυτούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΤΟΥΣ ΔΙΕΠΟΥΝ

2.1 Οι πραγματικοί αριθμοί και τα υποσύνολα των πραγματικών

Προτού δοθεί ο ορισμός των ρητών αριθμών θα πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν διάφορα σύνολα αριθμών.

Τα σύνολα των αριθμών που περιλαμβάνει η διδακτέα ύλη στο γυμνάσιο είναι τα εξής:

- Φυσικοί αριθμοί:

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το πρώτο σε σειρά με το οποίο έρχεται σε επαφή ο άνθρωπος από τα πρώτα στάδια της ζωής του. Σε αυτό το σύνολο περιλαμβάνονται αριθμοί χωρίς δεκαδικά ψηφία και χωρίς πρόσημο (συμπεριλαμβανομένου και του 0).

- Ακέραιοι αριθμοί:

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών περιλαμβάνει όλους τους φυσικούς αριθμούς και τους μη δεκαδικούς αριθμούς με αρνητικό πρόσημο.

- Ρητοί αριθμοί:

Το σύνολο των ρητών αριθμών περιέχει τα λεγόμενα κλάσματα που αποτελούνται από δύο ακέραιους αριθμούς, τον αριθμητή που ταυτίζεται με τον διαιρετέο σε μία ευκλείδεια διαίρεση και τον παρονομαστή που συμβολίζει τον διαιρέτη αυτής. Ο παρονομαστής του κλάσματος θα πρέπει να είναι διαφορετικός από το 0.

Όπως είναι φανερό, οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν κλάσμα δύο ακεραίων.

Ένας ρητός αριθμός, όταν γράφεται σαν δεκαδικός,

- είτε έχει πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων,

- είτε είναι περιοδικός αριθμός. Οι περιοδικοί αριθμοί είναι αυτοί στους οποίους ένα ή περισσότερα δεκαδικά ψηφία του αριθμού επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο άπειρες φορές. Η αντίστροφη έκφραση είναι δυνατή, δηλαδή κάθε περιοδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν ένα κλάσμα.

Έτσι οι περιοδικοί αριθμοί διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

- Ο απλός περιοδικός στον οποίο η περίοδος, δηλαδή η επανάληψη ψηφίων ξεκινάει μετά την υποδιαστολή. Στην περίπτωση αυτή το ισοδύναμο προς αυτόν κλάσμα έχει για αριθμητή την περίοδο και παρονομαστή τόσα εννιάρια όσα είναι τα ψηφία της περιόδου: 0,35355=35/99 και 0,99999…. = 9/9=1.

- Ο σύνθετος περιοδικός που ξεκινάει με μη περιοδικά ψηφία και στη συνέχεια παρατηρούμε την επανάληψη. Οι δεκαδικοί αυτοί μετατρέπονται σε κλασματικούς με την παρακάτω διαδικασία:

  0,78171717=78,171717/100=78/100+0,17/100=78/100+(17/99)/100=78/100+17/9.900

- Άρρητοι αριθμοί:

Είναι το σύνολο των αριθμών που δεν είναι ρητοί, δηλαδή δε μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους. Μπορούν να γίνουν δεκαδικές προσεγγίσεις τους. Έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία αλλά δεν παρουσιάζουν καμία περιοδικότητα στα ψηφία τους.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα άρρητων είναι ο αριθμός π (=3,1415926535…) που είναι ο λόγος της περιμέτρου ενός κύκλου με τη διάμετρό του, η αναλογία της χρυσής τομής φ (=1,6180339887…) που έχουν δύο ποσότητες όταν ο λόγος του αθροίσματός τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα ισούται με τον λόγο της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη, και ο αριθμός Euler e (=2, 718281829…) που αποτελεί βάση πολλών μεταβολών στη φύση, χρησιμοποιείται στη Φυσική, τη Βιολογία, τη Χημεία και τα Μαθηματικά.

- Πραγματικοί αριθμοί:

Περιέχουν όλα τα σύνολα των αριθμών που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με το R.

2.2 Πώς ορίζονται οι ρητοί αριθμοί και ποια σύνολα εμπεριέχουν

2.2.1 Ορισμός των Ρητών όπως διδάσκεται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Ως ρητούς αριθμούς ορίζουμε τους αριθμούς που προκύπτουν από το πηλίκο δύο ακεραίων αριθμών, όταν ο διαιρέτης είναι διαφορετικός από το μηδέν. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα *Q*, και κάθε ρητός μπορεί να γραφεί σαν $\frac{\mu}{\nu}, \nu \neq 0$, όπου μ, ν ακέραιοι. Το σύνολο των ρητών αποτελεί υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, *R*, και εμπεριέχει τα σύνολα των φυσικών αριθμών, *N={0, 1, 2, …,∞}*, και των ακεραίων, *Z={-∞, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,+∞}*. Το σύνολο των ρητών αριθμών για παράδειγμα περιλαμβάνει αριθμούς όπως, $\frac{3}{5}, -\frac{7}{3}, 1, -4, 0, \sqrt{4}, -\sqrt{36}$, ...κ.α.

2.2.1.1 Οι Ιδιότητες των πράξεων των Ρητών Αριθμών

Έστω ότι έχουμε τους ρητούς αριθμούς α, β, γ και τον φυσικό αριθμό ν. Οι παρακάτω ιδιότητες είναι οι βασικότερες της μαθηματικής γλώσσας. Αποτελούν ένα απαραίτητο εργαλείο για την εκμάθηση, επεξεργασία και σύγκριση των ρητών αριθμών.

2.2.1.1.1 Αντιμεταθετική Ιδιότητα

Η αντιμεταθετική ιδιότητα, εφαρμόζεται μόνο στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και φανερώνει ότι αν αλλάξουμε τη σειρά δύο όρων μιας αλγεβρικής παράστασης που περιλαμβάνει είτε τις πράξεις της πρόσθεσης είτε του πολλαπλασιασμού, τότε το αποτέλεσμα της πράξης παραμένει ίδιο.

Στην Πρόσθεση	Στον Πολλαπλασιασμό
$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

Παράδειγμα με αριθμούς:

Στην Πρόσθεση	Στον Πολλαπλασιασμό
$2+3=3+2=5$	$2\cdot3=3\cdot2=6$

2.2.1.2 Προσεταιριστική Ιδιότητα

Η προσεταιριστική ιδιότητα, εφαρμόζεται μόνο στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και δείχνει ότι αν αλλάξουμε τη θέση της παρένθεσης σε μια αλγεβρική παράσταση που περιλαμβάνει είτε τις πράξεις της πρόσθεσης είτε του πολλαπλασιασμού, τότε το αποτέλεσμα της πράξης παραμένει ίδιο.

Στην Πρόσθεση	Στον Πολλαπλασιασμό
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

Παράδειγμα με αριθμούς:

Στην Πρόσθεση	Στον Πολλαπλασιασμό
$(2+3)+4=2+(3+4)=9$	$(2\cdot3)\cdot4=2\cdot(3\cdot4)=24$

2.2.1.3 Επιμεριστική Ιδιότητα

α·(β±γ)=α·β±α·γ

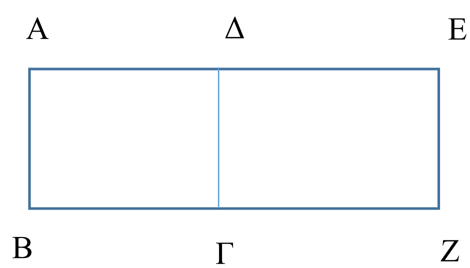
Παραδείγματα με αριθμούς:

2·(3+4)=2·3+2·4=6+8=14,

2·(3-4)=2·3-2·4=6-8=-2,

Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας α·(β+γ)=α·β+α·γ

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και ένα ορθογώνιο ΓΔΕΖ, όπως φαίνονται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Άθροισμα Εμβαδού ορθογωνίων

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΖΕ θα είναι:

(ΑΒΖΕ)=μήκος·πλάτος=ΑΒ·ΒΖ=ΑΒ·(ΒΓ+ΓΖ) [1]

ή (ΑΒΖΕ)=(ΑΒΓΔ)+(ΔΕΖΓ)=μήκος_1·πλάτος_1+μήκος_2·πλάτος_2=ΑΒ·ΒΓ+ΔΓ·ΓΖ=

=ΑΒ·ΒΓ+ΑΒ·ΓΖ=ΑΒ·(ΒΓ+ΓΖ) [2]

Από τις σχέσεις [1] και [2] αποδεικνύεται η επιμεριστική ιδιότητα:

ΑΒ·(ΒΓ+ΓΖ)= ΑΒ·ΒΓ+ΑΒ·ΓΖ

Γεωμετρική ερμηνεία της επιμεριστικής ιδιότητας α·(β-γ)=α·β-α·γ:

Έστω ότι θέλω να υπολογίσω το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ:

(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΖΕ)-(ΔΕΖΓ)= μήκος·πλάτος- $\text{μήκος}_2 \cdot \text{πλάτος}_2$= ΑΒ·ΒΖ- ΔΓ·ΓΖ =

= ΑΒ·ΒΖ- ΑΒ·ΓΖ=ΑΒ·(ΒΖ-ΓΖ) [3]

ή (ΑΒΓΔ)=ΑΒ·ΒΓ=ΑΒ·(ΒΖ-ΓΖ) [4]

Από τις σχέσεις [3] και [4] αποδεικνύεται η επιμεριστική ιδιότητα:

ΑΒ·(ΒΓ+ΓΖ)= ΑΒ·ΒΓ-ΑΒ·ΓΖ

2.2.1.4 Το ουδέτερο στοιχείο

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το ψηφίο που όταν το προσθέσουμε ή το πολλαπλασιάσουμε σε έναν άλλο αριθμό, θα δώσει το ίδιο με το αρχικό αποτέλεσμα. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το μηδέν, ενώ το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 1.

Στην Πρόσθεση	Στον Πολλαπλασιασμό
α+0=0+α=α	α·1=1·α=α

Παράδειγμα με αριθμούς:

Στην Πρόσθεση	Στον Πολλαπλασιασμό
2+0=0+2=2	2·1=1·2=2

2.2.1.5 Αντίθετοι Αριθμοί

Δύο ρητοί αριθμοί με άθροισμα το 0, ονομάζονται αντίθετοι αριθμοί. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, δηλαδή το ίδιο μέτρο, αλλά διαφορετικό πρόσημο.

α+β=0 ή α=-β ή β=-α

Παράδειγμα με αριθμούς:

2+(-2)=0 ή 2=-(-2)

2.2.1.6 Αντίστροφοι Αριθμοί

Δύο ρητοί αριθμοί με γινόμενο το 1, ονομάζονται αντίστροφοι αριθμοί.

$\alpha\cdot\beta=1$ ή $\alpha=1/\beta$ ή $\alpha=\alpha/\beta$

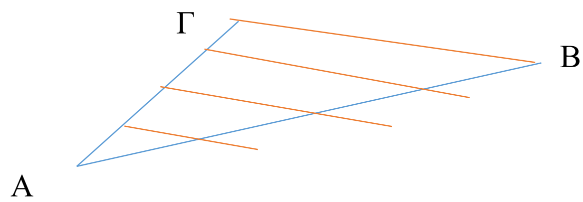
Παράδειγμα με αριθμούς:

2·(1/2)=1 ή 1=1/(1/2)

2.2.1.7 Ιδιότητες των κλασμάτων

Εφόσον οι ρητοί αριθμοί αποτελούν κλάσματα ακεραίων αριθμών, θα πρέπει να μελετηθούν οι ιδιότητες των πράξεων μεταξύ των κλασμάτων. Αρχικά βέβαια θα πρέπει να ορισθεί η έννοια του κλάσματος. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και μαθηματικοί ξεκίνησαν να χρησιμοποιούν τα κλάσματα σε υπολογισμούς τους και όρισαν τους ρητούς αριθμούς σαν ένα σύνολο που δημιουργούσε μία γραμμή. Κατά συνέπεια, αν ένα σχοινί κοπεί σε δύο κομμάτια μήκους α και β αντίστοιχα, τότε το μήκος α και το μήκος β θα είναι πολλαπλάσια ενός σταθερού αριθμού γ. Ήτοι $\alpha=\gamma\cdot\nu$ και $\beta=\gamma\cdot\kappa$. Επομένως τα δύο μεγέθη α και β συγκρίνονται με ένα τρίτο, κοινό μέγεθος, το γ. αν διαιρέσουμε τις πιο πάνω σχέσεις κατά μέλη, θα λάβουμε την $\alpha\cdot\kappa=\beta\cdot\nu$. Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι ο λόγος α/β δύο ρητών αριθμών θα δώσει ως αποτέλεσμα τον ρητό αριθμό ν/κ. Το γενικό συμπέρασμα της διαπίστωσης αυτής είναι ότι μία πεπερασμένου μήκους γραμμή μπορούμε να την διαχωρίσουμε σε άπειρα πλήθη ρητών αριθμών. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή θα μπορούσε να αποδειχθεί το παραπάνω πόρισμα.

Έστω ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο θέλουμε να διαχωρίσουμε σε ν ίσα μέρη, όπου ν ένας φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Από την κορυφή Α φέρνω ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, ΑΓ, το οποίο θα αποτελείται εξίσου από ν μέρη, μήκους 1. Αν ενώσω τα άκρα των δύο ευθύγραμμων τμημάτων, ΒΓ, που δεν έχουν κοινή κορυφή, και ακολούθως φέρω παράλληλες ευθείες από κάθε σημείο του ΑΓ που έχει δημιουργηθεί από τον διαχωρισμό του σε ν μέρη, τότε, τα σημεία τομής των παράλληλων ευθειών με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, θα ορίζουν ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα στο ΑΒ.



Σχήμα 2.2.6: Το Θεώρημα του Θαλή

2.2.1.8 Με ποιον τρόπο προσθέτουμε και με ποιον τρόπο αφαιρούμε κλάσματα

Για να προσθέσω ή να αφαιρέσω δύο κλάσματα που είναι ομώνυμα, προσθέτω ή αφαιρώ αντίστοιχα τους αριθμητές και τους διαιρώ με τον ίδιο παρονομαστή που είχαν τα αρχικά κλάσματα. Τα ομώνυμα κλάσματα είναι αυτά που έχουν ίδιο παρονομαστή.

$$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}$$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$$\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3} = \frac{2 \pm 4}{3}$$

Για να προσθέσω ή να αφαιρέσω δύο κλάσματα που δεν είναι ομώνυμα, αλλά ετερώνυμα, χρησιμοποιώ την παρακάτω ισότητα.

$$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta \pm \beta \cdot \gamma}{\gamma \cdot \delta}$$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$$\frac{2}{3} \pm \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 4 \pm 5 \cdot 3}{3 \cdot 4}$$

Ο τρόπος αυτός δε διδάσκεται στο σχολείο. Αντί αυτού, τα δύο ετερώνυμα κλάσματα μετατρέπονται πρώτα σε ομώνυμα με τη χρήση του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου των παρονομαστών, και μετά γίνεται η πρόσθεση ή αφαίρεση όπως στην πρώτη περίπτωση.

2.2.1.9 Πώς γίνεται ο πολλαπλασιασμός μεταξύ κλασμάτων

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των δύο αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των δύο παρονομαστών.

$$\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot \delta}$$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

2.2.1.10 Διαίρεση κλασμάτων

Το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο κλασμάτων είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό του πρώτου κλάσματος επί το αντίστροφο του δεύτερου κλάσματος.

$$\frac{\alpha}{\gamma}:\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\gamma\cdot\beta}$$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$$\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}$$

Ο λόγος, ή το πηλίκο, ή η διαίρεση δύο κλασμάτων καλείται σύνθετο κλάσμα και μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\gamma\cdot\beta}$$

2.2.1.11 Πολλαπλασιασμός αριθμού με κλάσμα

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με κλάσμα γίνεται όπως ακριβώς ο πολλαπλασιασμός δύο κλασμάτων. Αρκεί να μετατρέψουμε τον αριθμό μας σαν ένα κλάσμα.

$$\alpha\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\delta}$$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$$2\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 4}=\frac{6}{4}$$

2.2.1.12 Ιδιότητες των δυνάμεων

Όταν οι αριθμοί υψώνονται σε φυσικό αριθμό, τότε αυτό φανερώνει το πόσες φορές πολλαπλασιάζεται αυτός ο αριθμός με τον εαυτό του. Η νιοστή δύναμη του α, $α^ν$, είναι ίση με το γινόμενο α·α·...·α, όπου τα ψηφία α είναι ν σε πλήθος.

2.2.1.13 Πολλαπλασιασμός δυνάμεων με την ίδια βάση

$α^ν \cdot α^μ = α^{ν+μ}$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$

2.2.1.14 Διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση

$α^ν : α^μ = α^{ν-μ}$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$2^3 : 2^2 = 2^{3-2}$

2.2.1.15 Πολλαπλασιασμός δυνάμεων που έχουν ίδιο εκθέτη

$α^ν \cdot β^ν = (α \cdot β)^ν$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 4)^2$

2.2.1.16 Διαίρεση δυνάμεων με την ίδια δύναμη

$\alpha^{\nu}:\beta^{\nu}=(\alpha:\beta)^{\nu}$

Παράδειγμα με αριθμούς:

$2^2:4^2=(2\cdot4)^2$

2.2.2 Ορισμός ρητών αριθμών ως ισοδυναμίες κλασμάτων

Έστω Ζ το σύνολο των ακεραίων. Αν Τ είναι ένα σώμα τέτοιο ώστε η περιοχή Ζ να είναι υποδακτύλιος του Τ και το Τ παράγεται από την Ζ, δηλαδή Τ={κ/λ : κ,λ∈Ζ ∧ λ ≠ 0, τότε το Τ λέγεται σώμα πηλίκων (ή σώμα κλασμάτων) του Ζ. Αν η Ζ περιοχή είναι υποδακτύλιος ενός σώματος Λ, τότε το υπόσωμα Λ_0 του Λ που παράγεται από την Ζ περιοχή είναι ένα σώμα πηλίκων της Ζ. Το Λ_0 λέγεται σώμα πηλίκων της Ζ μέσα στο Λ.

2.2.2.1 Θεωρήματα που διέπουν τις σχέσεις ισοδυναμίας

Θεώρημα 2.1

Έστω Ζ μια ακέραια περιοχή. Στην περιοχή Ζ×Ζ* ορίζουμε τη **σχέση ισοδυναμίας**. Έστω Λ={(κ,λ) : <κ,λ> ∈ Ζ× Ζ*}, τότε το Λ αποτελεί σώμα και έχει κάποιες ιδιότητες οι οποίες θα δοθούν παρακάτω. Η σχέση (κ,λ) ~ (μ,ν), αν κ·ν = λ·μ [1], καλείται σχέση ισοδυναμίας. Η σχέση '1' διαμερίζει το παραπάνω σύνολο σε κλάσεις οι οποίες δεν εμφανίζουν κάποια τομή.

Έστω τώρα το σύνολο Α όλων των κλάσεων του οποίου τα στοιχεία συμβολίζονται με Α(κ,λ), Α(μ,ν) κ.λ.π. Στο σύνολο Α ορίζουμε τις **εσωτερικές πράξεις** ως εξής:

- Α(κ,λ) + Α(μ,ν) = Α(κν+λμ,λν)
- Α(κ,λ) · Α(μ,ν) = Α(κ·μ,λ·ν)
- $0_\Lambda = (0,1)$

- $-(\kappa, \lambda) := (-\kappa, \lambda)$
- $(\kappa, \lambda)(\mu, \nu) = (\kappa\mu, \lambda\nu)$
- $1_\Lambda = (1, 1)$.
- $(x, y)^{-1} := (y, x)$ (εφόσον $(x, y) \neq 0_\Lambda$).

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ορίζονται καλώς. Επομένως, οι κλάσεις Α(κδ+βγ,βδ) και Α(κ·γ,β·δ) είναι ανεξάρτητες των αντιπροσώπων (κ,λ) και (γ,δ) των κλάσεων Α(κ,λ) και Α(μ,ν). Κατά συνέπεια, αν $(\kappa,\lambda) \sim (\kappa_1,\lambda_1)$ και $(\mu,\nu) \sim (\mu_1,\nu_1)$, τότε :

$(\kappa\nu+\lambda\mu,\lambda\nu) \sim (\kappa_1\nu_1+\lambda_1\mu_1,\lambda_1\nu_1)$ και $(\kappa\mu,\lambda\omega) \sim (\kappa_1\mu_1 ,\lambda_1\nu_1)$.

Επιπλέον, η συνάρτηση $f: Z \to \Lambda$ με τύπο $f(\kappa) = (\kappa, 1)$ είναι μια εμφύτευση της Z στο Λ (άρα Z ~= f (Z)) και το K είναι ένα σώμα πηλίκων της f (Z).

Πόρισμα 2.1

Κάθε ακέραια περιοχή έχει ένα σώμα πηλίκων.

Απόδειξη

Αν θεωρήσουμε μία ακέραια περιοχή Z, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μια εμφύτευση $f : Z \to \Lambda$ της Z σε ένα σώμα K το οποίο είναι σώμα πηλίκων της f (Z). Αν διαλέξουμε ένα σύνολο A, τέτοιο ώστε $A \approx \Lambda - f(Z)$ και $A \cap Z = \emptyset$, θέτοντας $T = A \cup Z$, είναι προφανές ότι υπάρχει μια αμφίρριψη $g : T \to \Lambda$ τέτοια ώστε $g\restriction Z = f$. Αν μεταφέρουμε στο T τη δομή του Λ χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις g και g^{-1}, δηλαδή αν για κάθε $\kappa, \lambda \in F$ θέσουμε:

$\kappa + \lambda := g^{-1}(g(\kappa) + g(\lambda))$, $\kappa y := g^{-1}(g(\kappa)\, g(\lambda))$, τότε το F γίνεται σώμα πηλίκων της Z.

Θεώρημα 2.2

Έστω Z μια ακέραια περιοχή, F ένα σώμα πηλίκων της Z, και $f : Z \to \Lambda$ μια εμφύτευση της Z σε ένα σώμα Λ. Τότε υπάρχει μοναδική εμφύτευση $g: F \to \Lambda$, η οποία επεκτείνει την f. Επιπλέον, το g(F) είναι το σώμα πηλίκων της f (Z) μέσα στο Λ. Το θεώρημα αποδεικνύεται αν για κάθε κ, λ ∈ Z με λ≠0, θέτοντας g(κ/λ) = f (κ)/f (λ) .

Πόρισμα 2.2

Αν F και F′ είναι σώματα πηλίκων μιας ακέραιας περιοχής Z, τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός g : F → F′ τέτοιος ώστε g (κ) = κ για κάθε κ∈Z.

2.2.2.2 Διάταξη του συνόλου Q

Αν $\alpha < \beta$ ή $\alpha \leq \beta$, τότε υπάρχει $\chi \geq 0$ έτσι ώστε $\alpha+\chi = \beta$. Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ και υπάρχουν χ και ψ έτσι ώστε : $\alpha+\chi=\beta$, $\beta+\psi=\gamma$, τότε $\alpha+\beta+\chi+\psi\ \beta+\gamma \Rightarrow \alpha+\beta < \beta+\gamma$.

Η διάταξη του Q μπορεί να ορισθεί και με τις κλάσεις ισοδυναμίας J(α,β) , J(γ,δ):

$J(\alpha,\beta) \leq J(\gamma,\delta)$ αν $\alpha\cdot\delta \geq \beta\cdot\gamma$.

Πρόταση 2.1

Η διάταξη στο σύνολο Q, η οποία είναι συμβατή με τις πράξεις και την επέκταση της διάταξης του συνόλου Z, είναι μοναδική.

Συχνά είναι απαραίτητο να συνδέσουμε τα στοιχεία κάποιων συνόλων, ή ακόμα και τα στοιχεία ενός συνόλου μεταξύ τους. Για παράδειγμα, μεταξύ του συνόλου των μαθητών μιας τάξης και του συνόλου των θρανίων της, σε κάθε μαθητή αντιστοιχεί μία (ή περισσότερες) θέσεις.

2.2.2.3 Ιδιότητες Κλάσεων Ισοδυναμίας

Ορισμός 2.1

Δυαδική σχέση (binary relation) R από το σύνολο A στο σύνολο B είναι ένα υποσύνολο του A × B. Αν (a, b) ∈ R, γράφουμε a∼b. Στον παραπάνω ορισμό, για A = B έχουμε μια σχέση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου A: R ⊆ A. Αν η R είναι σχέση, τότε ορίζουμε την αντίστροφή της R^{-1} ως εξής: $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$. Μια σχέση ~ ονομάζεται:

• Ανακλαστική, αν $\forall x \in A\ (x \sim x)$.

• Συμμετρική, αν $\forall x, y \in A\ (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$.

• Αντισυμμετρική, αν $\forall x, y \in A(x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y)$.

• Μεταβατική, αν $\forall x, y, z \in A\ (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$.

Αν τώρα θέσουμε $\alpha \in A$ και ~ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A, το σύνολο όλων των στοιχείων x του A που ικανοποιούν την $x \sim \alpha$ θα ορίζεται, όπως και παραπάνω, ως κλάση ισοδυναμίας του α στο A και συμβολίζεται με [α], δηλαδή

$[\alpha] = \{x: x \in A \text{ με } x \sim \alpha\}$

Κάθε $x \in [\alpha]$ ονομάζεται αντιπρόσωπος της κλάσεως ισοδυναμίας [α]. Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι για τις κλάσεις ισοδυναμίας ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\alpha \in [\alpha]$
- αν $\beta \in [\alpha]$, τότε $[\beta] = [\alpha]$
- αν $[\alpha] \cap [\beta] \neq \emptyset$, τότε $[\alpha] = [\beta]$

Αν ~ είναι μια σχέση ισοδυναμίας σ' ένα σύνολο A, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες, με τις πιο πάνω:

- $\alpha \sim \beta$
- $[\alpha] = [\beta]$
- $[\alpha] \cap [\beta] \neq \emptyset$

2.2.2.4 Η συμβατότητα πράξεων και διάταξης με σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 2.2

Έστω X ένα μη κενό σύνολο το οποίο περιέχει μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$.

1. Αν " $*$ " είναι μία πράξη στο X, τότε θα λέμε ότι οι " $*$ " και " $\sim$ " είναι συμβατές, αν για κάθε x, x΄, y, y΄ στο X ¸ώστε $x \sim x'$ και $y \sim y'$ ισχύει $x * y \sim x' * y'$.
2. Αν " < " είναι μία διάταξη στο X θα λέμε ότι οι " < " και " $\sim$ " είναι συμβατές αν ισχύει το ακόλουθο:

Για κάθε x, x΄ , y, y΄ στο X ¸στο $x \sim x'$ και $y \sim y'$ ισχύει $x < y \Leftrightarrow x' < y'$.

Πρόταση 2.2

Έστω X μη κενό σύνολο το οποίο περιέχει μία πράξη " $*$ " και μία σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ " που είναι συμβατές μεταξύ τους. Τότε η " $*$ " επάγει μία πράξη " $*$ " στο χώρο πηλίκο $X/\sim$.

Απόδειξη

Ορίζουμε την πράξη στο X ως εξής:

$[x] * [y] = [x * y]$.

Πρέπει να ελέγξουμε είναι ότι η $*$ είναι καλά ορισμένη. Για να είναι καλά ορισμένη η πράξη $*$ στον $X/\sim$ πρέπει να αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι ανεξάρτητο από τους αντιπροσώπους των κλάσεων [x], [y] που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε το αποτέλεσμα της πράξης. Πράγματι, έστω $x' \in [x]$ και $y' \in [y]$. Από την συμβατότητα των $*$ και $\sim$ προκύπτει ότι $x * y \sim x' \sim y'$ και άρα $[x * y] = [x' * y']$.

Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τη διάταξη.

Πρόταση 2.3

Αν σε ένα μη κενό σύνολο υπάρχουν μία διάταξη < και μία σχέση ισοδυναμίας ~, που είναι συμβατές μεταξύ τους, τότε η < επάγει μία διάταξη στο X/~.

Απόδειξη

Για [x], [y] στο X/~ ορίζουμε: [x] < [y] αν x < y. Όμοια με πιο πάνω αποδεικνύεται ότι η διάταξη είναι καλώς ορισμένη.

2.3 Η έννοια της ρητής συνάρτησης

Ως συνάρτηση ορίζεται μία διαδικασία στην οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A (που περιέχει το πεδίο ορισμού, δηλαδή τις τιμές x), αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο ενός συνόλου B (που περιέχει τα στοιχεία του συνόλου τιμών, δηλαδή τις τιμές y). Κάθε στοιχείο του συνόλου x που καλείται πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αποτελεί μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Τα στοιχεία του συνόλου τιμών, y, αποτελούν τις εξαρτημένες μεταβλητές.

Αν τώρα αναφερόμαστε σε ρητές συναρτήσεις τότε η f(x) θα είναι μία συνάρτηση που μπορεί να εκφραστεί σαν ένας λόγος μεταξύ δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων.

2.3.1 Μερικά χαρακτηριστικά των πολυωνυμικών συναρτήσεων

1. Το πεδίο ορισμού τους είναι το σύνολο των πραγματικών αφού τα πολυώνυμα αποτελούνται από μονώνυμα και τα μονώνυμα με τη σειρά τους ορίζονται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

2. Τα πολυώνυμα δεν παρουσιάζουν καμία ασυνέχεια στο πεδίο ορισμού τους.

3. Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε που τείνει η πολυωνυμική συνάρτηση όταν η τιμή του x τείνει στο άπειρο, τότε βρίσκουμε το όριο μόνο του μονωνύμου με τη μεγαλύτερη δύναμη.

$$\lim_{x\to\infty} a_v x^v + a_{v-1}x^{v-1} + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_v x^v$$

4. Δεν υπάρχει σημείο στο οποίο οι πολυωνυμικές συναρτήσεις να μην είναι παραγωγίσιμες.

5. Όταν εξισώνουμε τη συνάρτηση με το μηδέν, τότε οι λύσεις που προκύπτουν καλούνται και ρίζες της συνάρτησης.

6. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση έχει συγκεκριμένο πλήθος ριζών, που εξαρτάται από το βαθμό της. Το πλήθος των ριζών της δεν μπορεί να ξεπεράσει τον αριθμό με τον οποίο ταυτίζεται ο βαθμός της. Στο γράφημά της μπορούμε να εντοπίσουμε αυτές τις ρίζες ως σημεία τομής με τον άξονα x’x.

7. Η πολυωνυμική συνάρτηση μπορεί να γραφτεί και ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, η εύρεση των οποίων συχνά γίνεται με το σχήμα Horner.

8. Το x-ρ ονομάζεται παράγοντας της συνάρτησης αν και μόνο αν το ρ αποτελεί ρίζα της συνάρτησης.

9. Αν υπάρχουν μιγαδικές ρίζες, τότε αυτές είναι πάντα ανά ζεύγη και καλούνται συζυγείς ρίζες.

10. Αν ο βαθμός μίας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι περιττός αριθμός, τότε η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

11. Οι ρίζες μπορεί να εμφανίζονται πολλαπλές φορές, π.χ. να εμφανίζονται δύο φορές και να λέμε ότι έχουμε μία διπλή ρίζα.

12. ν+1 τυχαία σημεία του επιπέδου Oxy ορίζουν ακριβώς ένα πολυώνυμο ν-ου βαθμού.

2.4 ΟΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Το μονώνυμο είναι μία παράσταση της μορφής: ax^{ν} , όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ο ν είναι φυσικός αριθμός. Επομένως το μονώνυμο είναι ένα γινόμενο που περιλαμβάνει μεταβλητές και αριθμούς. Η πολυωνυμική συνάρτηση είναι ένα άθροισμα μονώνυμων. Η μορφή της: $y = \pi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^{2} + \ldots + a_{\nu}x^{\nu}$ η οποία ορίζει μια πολυωνυμική συνάρτηση ν-στου βαθμού. Προφανώς δεν είναι μονώνυμο το $g(x)=3/x^{-5}$, και η συνάρτηση $f(x)= 3/x^{-5}$ λέγεται ρητή (κλασματική) συνάρτηση. Ονομάζουμε βαθμό μιας πολυωνυμικής συνάρτησης τον μεγαλύτερο εκθέτη στον οποίο υψώνεται η μεταβλητή x, ή όπως λέγεται, τον εκθέτη του μεγιστοβάθμιου όρου.

Η ρητές συναρτήσεις έχουν τη μορφή Y=F(x), όπου η F(x) είναι μία έκφραση ενός πηλίκου, στο οποίο η μεταβλητή x είναι μία ανεξάρτητη μεταβλητή και η συνάρτηση F(x) θα μπορούσε να γραφτεί και ως ο λόγος δύο πολυωνύμων T(x) και Z(x), με το τελευταίο πολυώνυμο να είναι διαφορετικό του μηδενός (F(x)=T(x)/Z(x)). Όταν το πηλίκο αυτό εξισωθεί με το μηδέν, τότε ο αριθμητής θα πρέπει να μηδενιστεί για να εξεταστεί η ύπαρξη ριζών.

Για την ύπαρξη και μελέτη των συναρτήσεων υπάρχουν δύο μέθοδοι εξέτασης. Η πρώτη αφορά σε μαθητές με βασικές γνώσεις μαθηματικών, για παράδειγμα μαθητών λυκειακών τάξεων. Σε αυτή τη περίπτωση η επίλυση της εξίσωσης που προκύπτει αν η ρητή συνάρτηση εξισωθεί με το μηδέν θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και σε περίπτωση που οι τιμές της εξίσωσης δεν εμπεριέχονται στο πεδίο ορισμού της να αποκλείονται από το σύνολο των λύσεων.

Στην δεύτερη μέθοδο, η εύρεση του πεδίου τιμών δεν είναι απαραίτητη για την επίλυση της εξίσωσης. Τα πολυώνυμα δηλαδή δεν έχουν πεδίο ορισμού και το πολυώνυμο του αριθμητή της ρητής συνάρτησης εξισώνεται με το μηδέν για κάθε ρητή τιμή που θα λάβει η ανεξάρτητη μεταβλητή x. Το πολυώνυμο T(x) τότε, θα ονομάζεται μηδενικό πολυώνυμο και η μεταβλητή x δεν θα προσδιορίζεται. Παρόλα αυτά όταν η δεύτερη μέθοδος ολοκληρωθεί, τότε προσδιορίζεται ένα πεδίο ορισμού και η μέθοδος εμπίπτει πλέον στην πρώτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

3.1 Η εκμάθηση των ρητών αριθμών στα προσχολικά και τα σχολικά χρόνια

Η διδασκαλία και η αντίληψη των ρητών αριθμών σε μικρές ηλικίες, όπως στα προσχολικά χρόνια είναι αρκετά δύσκολη, ωστόσο πολύ σημαντική καθώς δίνει στα παιδιά τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουν προβλήματα καθημερινής φύσης, να αντιλαμβάνονται την ύπαρξη των όντων ως μετρήσιμες ποσότητες, οξύνει τη σκέψη τους και τα βοηθάει στην πνευματική τους ανάπτυξη και την επικοινωνία τους με τους ανθρώπους. Παράλληλα η κατανόηση των ρητών αριθμών στην προσχολική ηλικία λειτουργεί σαν βάση για την μετέπειτα εκμάθηση αλγεβρικών μεθόδων και πράξεων (Behr et. al. 1983).

Όπως αναφέρεται και στις μελέτες των Carpenter et. al. (1976) και Carpenter et. Al. (1980), τα παιδιά δυσκολεύονται να εμπεδώσουν και να καταλάβουν την έννοια του ρητού αριθμού και τις ιδιότητες που τον διέπουν. Έτσι ενώ η διδασκαλία των κλασμάτων ξεκινάει από τα παιδικά χρόνια, και πιο συγκεκριμένα κατά την τρίτη τάξη στην πρώτη βαθμίδα εκπαίδευσης, η διαχείριση των πράξεων με κλάσματα δεν είναι εύκολη ακόμη και για ηλικίες των 13 έως 17. Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται από έρευνες (Coburn et. al., 1975; Lankfortd, 1972; School of Mathematics Study Group, 1968)

Το γεγονός ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς έρχεται σε αντίθεση με το ότι διδάσκονται τη χρήση τους σε όλα τα σχολικά χρόνια. Οι λόγοι που ίσως να συμβαίνει αυτό είναι η έλλειψη γνώσεων όσον αφορά τις συναρτήσεις και τις πράξεις τους. Στο Δημοτικό οι μαθητές εξοικειώνονται με την έννοια του ρητού αριθμού και τις πράξεις μεταξύ αυτών. Παρόλα αυτά η πλήρης κατανόησή τους δεν είναι πάντα εφικτή καθώς τα παιδιά αποκτούν κριτική ικανότητα και συνδυαστική σκέψη κατά τα εφηβικά χρόνια περίπου. Οι ρητοί αριθμοί και η ανάλυση των συνιστωσών τους μπορούν να γίνουν κατανοητοί με τη χρήση έξι μεθόδων κατά τους Kieren (1976), Novillis (1976), Rappaport, 1962, Riess (1964) και Usiskin

(1979). Οι μέθοδοι αυτοί συνοψίζονται στη μερική σύγκριση, στην πράξη της διαίρεσης (που ονομάζεται διαφορετικά και πηλίκο ή λόγος), στην αναλογία, στους δεκαδικούς αριθμούς, στους τελεστές και στην μέτρηση ποσοτήτων με συνεχείς ή και διακριτές τιμές.

Για την ολοκληρωτική κατανόηση των ρητών είναι απαραίτητο να γνωρίσει κανείς τις υποδομές τους και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους (Kieren, 1976). Ο Kieren (1981) διέκρινε πέντε τρόπους με τους οποίους γίνεται η δόμηση και η εμπέδωση της πληροφορίας στους μαθητές. Σε πρώτο επίπεδο έρχονται σε επαφή με μαθηματικές έννοιες τις οποίες αντιλαμβάνονται μέσω της ταύτισης. Μαθαίνουν τους μηχανισμούς λειτουργίας των αριθμών ερχόμενοι σε επαφή με τους συμβολισμούς και τις δομικές και λειτουργικές τους βάσεις. Κάποιες έννοιες όπως είναι η διαίρεση, το πηλίκο, ο λόγος, το μέτρο και ο τελεστής βοηθούν στην ποσοτικοποίηση και συσχέτιση των ρητών αριθμών.

Από μελέτες λοιπόν, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του δημοτικού δυσκολεύεται με τα κλάσματα και αυτό ακολουθεί και τις μεγαλύτερες τάξεις του λυκείου εφόσον η μη κατανόησή τους από τα πρώτα χρόνια δημιουργεί μαθησιακά κενά τα οποία είναι δύσκολο να αναπληρωθούν για πολλούς λόγους. Ο όγκος της πληροφορίας που δέχεται ο μαθητής σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες είναι μεγάλος και η διδασκαλία των ρητών είναι συχνά ανεπαρκής αν σκεφτεί κανείς την περιπλοκότητα του περιεχομένου τους.

3.2 Οι δυσκολίες στην διδασκαλία των ρητών αριθμών στις διάφορες ηλικίες κατά τα σχολικά χρόνια και τα αίτια της μη κατανόησής τους

Για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών είναι πολύ σημαντικό να γίνει αντιληπτή η συσχέτιση του αριθμού με τα μέρη στα οποία μπορεί να διακριθεί και να εκφραστεί συναρτήσει αυτών. Η ικανότητα διαμέρισης των ρητών αριθμών θέτει τα θεμέλια για την μετέπειτα διαχείριση των ρητών σε αλγεβρικές παραστάσεις, συναρτήσεις και προβλήματα. Ουσιαστικά αποτελεί μία μαθηματική γλώσσα, τη γνώση της οποίας πρέπει να κατακτήσει ώστε να μπορεί αργότερα να επιλύει πιο δύσκολα και συνδυαστικά προβλήματα και να διαχειρίζεται συνδυαστικές και περίπλοκες πράξεις.

Σύμφωνα με τον Behr (1983) η έννοια του μέρους και του όλου διδάσκονται στα πρώτα σχολικά χρόνια. Συνήθως μάλιστα χρησιμοποιούνται απτά παραδείγματα με αντικείμενα που μπορούν να διασπαστούν σε μέρη. Το πιο γνωστό κλάσμα που διδάσκεται είναι το ένα δεύτερο. Το ένα δεύτερο είναι το μισό της μονάδας, πράγμα που θα πρέπει να γνωρίζει κάθε μαθητής της δευτέρας δημοτικού. Η εμπέδωση της παραπάνω έννοιας είναι βασική για την αργότερα διαμέριση των αριθμών (Polkinghorne, 1935).

Αργότερα οι μαθητές συνδέουν την έννοια της διαμέρισης με τα κλάσματα και ακολούθως μαθαίνουν να κάνουν πράξεις μεταξύ αυτών. Σε μεταγενέστερη φάση, κατά κύριο λόγο στα εφηβικά χρόνια, όταν οι μαθητές έχουν διαχωρίσει τις έννοιες της αριθμητικής παράστασης, που αποτελείται από πράξεις μεταξύ αριθμών και της αλγεβρικής παράστασης που περιλαμβάνει πράξεις μεταξύ αριθμών αλλά και μεταβλητών, ξεκινούν να ξεπερνούν εν μέρει κάποιες δυσκολίες στην εφαρμογή των πράξεων που περιλαμβάνουν ρητούς αριθμούς.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επεξήγηση των ρητών στα αρχικά στάδια εκμάθησης, μπορούν να είναι γεωμετρικές, παραδείγματος χάριν γεωμετρικά σχήματα τα οποία χωρίζονται σε ίσα ευθύγραμμα τμήματα, ίσα ορθογώνια, ίσα τρίγωνα ή τετράγωνα κ.λ.π. Έτσι οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του εμβαδού επιφάνειας και μαθαίνουν να το υπολογίζουν με πράξεις ρητών αριθμών. Συνεπώς ένα από τα πιο αποτελεσματικά εργαλεία προσαρμογής στους ρητούς αριθμούς είναι το μοντέλο του μέρους και του όλου ενός αριθμού. Το παραπάνω συμπέρασμα έχει αποδειχθεί από μελέτες των Ellerbruch and Payne (1978). Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι η διδασκαλία των ρητών συναρτήσεων μπορεί να γίνει μόνο αφότου τα παιδιά θα έχουν ενστερνιστεί πλήρως τις απλές πράξεις μεταξύ των ρητών αριθμών (Ellerbruch and Payne, 1978).

Έρευνες των προαναφερθέντων επιστημόνων έχουν αποδείξει ότι η χρήση της σειράς αρχικών πράξεων είναι κρίσιμες για την εισαγωγή των παιδιών στον κόσμο των ρητών αριθμών, ενώ η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί ορθογώνια σχήματα μεταβαίνοντας από μοντέλα που περιλαμβάνουν εικόνες και έννοιες σε συγκεκριμένη ορολογία. Η ορολογία αυτή περιλαμβάνει γραπτό και προφορικό κώδικα και διευκολύνει την μετάβαση στη χρήση μαθηματικών συμβόλων.

Μία άλλη μελέτη (των Hiebert και Tonnessen, 1978) έδειξε ότι τα παιδιά μπορούν να διαχωρίσουν πιο εύκολα διακριτούς αριθμούς από ό,τι συνεχείς αριθμούς και αυτό οφείλεται στην έλλειψη εμπειρίας επάνω στους συνεχείς ρητούς αριθμούς η οποία βοηθάει ουσιαστικά στην πρόβλεψη του αποτελέσματος. Αντίθετα η επίλυση με τη χρήση διακριτών τιμών απαιτεί μόνο την διακριτοποίηση, δηλαδή τον διαχωρισμό των μονάδων σε ίσα τμήματα.

Άλλο ένα συχνό φαινόμενο είναι η σύγχυση μεταξύ του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των ρητών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007), παρά το ότι οι μαθητές διδάσκονται τα σύνολα στο Δημοτικό χωρίς να αναφέρονται στις ονομασίες τους και αργότερα, από την πρώτη τάξη του Γυμνασίου μαθαίνουν την έννοια του συνόλου και του υποσυνόλου και κατηγοριοποιούν τους αριθμούς σε φυσικούς, ακεραίους, ρητούς και πραγματικούς. Παρόμοια προβλήματα παρατηρούνται ακόμη και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Giannakoulias, Souyoul, & Zahariades, 2007; Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1999). Το πρόβλημα όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω ξεκινάει από την εμπέδωση των φυσικών αριθμών καθώς και την εξοικείωση με τις έννοιες των διακριτών και συνεχών τιμών που εμφανίζονται επάνω σε έναν άξονα.

Ένας παράγοντας που έχει συμβάλλει στη μη κατανόηση του συνόλου των ρητών και των πράξεων μεταξύ αυτών θα μπορούσε να είναι η λανθασμένη μετάβαση από το σύνολο των φυσικών στο σύνολο των ρητών κατά τα σχολικά χρόνια. Ένα παράδειγμα παρουσιάστηκε από τις Vamvakoussi & Vosniadou (2004), στο οποίο ένα παιδί, 9 ετών, το οποίο ήταν πολύ καλό στη διαχείριση των μαθηματικών και είχε αρκετή αυτοπεποίθηση στην αντιμετώπισή τους, ερωτήθηκε για το πλήθος των αριθμών που εμπεριέχονται μεταξύ δύο ρητών αριθμών. Η απάντηση του παιδιού ήταν συγκεκριμένα ότι υπάρχουν 9 ή 10 αριθμοί στο διάστημα με κάτω όριο το 0.001 και άνω όριο το 0.01. Στην περίπτωση που αυτοί οι αριθμοί εκφραστούν σαν κλάσματα, τότε θα υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Στην επόμενη ερώτηση για το αν υπάρχουν αριθμοί μεταξύ δύο διαδοχικών ομώνυμων κλασμάτων που η διαφορά των αριθμητών αντιστοιχεί σε μονάδα, ισχυρίστηκε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Το παιδί πιστεύει ότι οι δεκαδικοί αριθμοί παρουσιάζουν πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, επομένως μεταξύ δύο δεκαδικών δεν θεωρεί ότι μπορούν να τοποθετηθούν άπειροι αριθμοί, κι ότι αντίθετα τα κλάσματα εκφράζουν ένα αποτέλεσμα που οδηγεί σε άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ωστόσο γνωρίζει πολύ καλά το πως γίνεται η μετατροπή από τους δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα κι ότι οι συγκεκριμένοι δεκαδικοί αριθμοί που επέλεξε οδηγούν σε ακριβές πηλίκο δύο φυσικών αριθμών. Η αιτία της παρεξηγημένης αντίληψης για τα κλάσματα, δηλαδή για τους ρητούς αριθμούς δεν έχει αποδειχθεί. Ίσως όμως να οφείλεται στην εναλλαγή των συμβολισμών μεταξύ όμοιων εννοιών.

Σε έρευνα που διεξήχθη από τους Tirosh et al. (1999) εξετάστηκε η απόκριση εν δυνάμει δασκάλων στη χρήση των δεκαδικών αριθμών παρά στα κλάσματα. Τα 2/5 των δασκάλων απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών, ενώ τα 6/25 αυτών απάντησε σωστά για το πλήθος των αριθμών μεταξύ των ίδιων αριθμών εκφρασμένων σε κλασματική μορφή. Σε όμοια έρευνα που διεξήχθη μεταξύ των φοιτητών του τμήματος Μαθηματικών, η πλειονότητα απάντησε ορθά για το πλήθος των αριθμών μεταξύ δύο ομώνυμων κλασμάτων με αριθμητή δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ακολούθησε πτώση κατά 16% όταν η ίδια ερώτηση τέθηκε σε βάση δύο δεκαδικών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Κάποιοι μαθητές λυκείου που αρχικά είχαν απαντήσει ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών μεταξύ των αριθμών, είτε αυτοί είναι δεκαδικοί, είτε κλάσματα, άλλαξαν γνώμη και ισχυρίστηκαν ότι υπάρχουν απείρως πολλοί ενδιάμεσοι αριθμοί ανάλογα με την μορφή των δύο άκρων του διαστήματος. Σε αντίθεση με την άποψη του εννιάχρονου παιδιού, οι περισσότερες απαντήσεις έτειναν στην ύπαρξη πεπερασμένου πλήθους στοιχείων στην περίπτωση των κλασμάτων και όχι σε αυτή των δεκαδικών αριθμών. Οι μαθητές που απάντησαν ότι εμφανίζονται άπειροι αριθμοί στο διάστημα ήταν διστακτικοί στο να συλλάβουν την ιδέα της ύπαρξης πολλαπλών συμβολισμών για την ίδια ακριβώς έννοια.

Η κατανόηση των κλασμάτων και των πράξεων ανάμεσά τους δίνει την δυνατότητα τοποθέτησης των ρητών σε άξονα που περιλαμβάνει θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, ώστε να μπορεί να γίνει η σύγκριση αυτών και η μετατροπή τους σε ποσοστά ή δεκαδικούς.

3.3 Η μέθοδος της εκπαιδευτικής ακολουθίας στη διδασκαλία των ρητών

Είναι γνωστό ότι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν με πολλές μορφές και η κάθε μορφή να έχει μία διαφορετική δομή και χειρισμό. Ο Kieren (1976) έδειξε πέντε τρόπους με τους οποίους μπορεί να εκφραστεί ένας ρητός αριθμός, ο πρώτος είναι σαν κλάσμα, ο δεύτερος σαν τελεστής, ο τρίτος σαν ένα απλό μέτρο ο τέταρτος σαν ένα μέρος ενός συνόλου και ο τελευταίος με τη μορφή πηλίκου. Η βαθιά κατανόηση των ρητών αριθμών προϋποθέτει τη γνώση των συμβολισμών, την ερμηνεία των αποτελεσμάτων που δίνει η κάθε έκφραση ενός ρητού αριθμού και τη σωστή επιλογή της έκφρασης που πρέπει να χρησιμοποιηθεί δεδομένου του προβλήματος (Behr et al. 1983, 1992; Charalambous and Pitta-Pantazi, 2007; Kieren 1976, 1980).

Κάποιοι επιστήμονες υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών θα πρέπει να προηγείται των κλασμάτων εξαιτίας της δυσκολίας στη διαχείριση των κλασμάτων (DeWolf et al. 2014, 2015b; Hurst and Cordes, 2016; Iuculano and Butterworth, 2011; Johnson, 1956; Zhang et al., 2013). Τα κλάσματα απαιτούν τη γνώση πολλών επιπλέον ιδιοτήτων για την εφαρμογή των πράξεων μεταξύ τους και η απεικόνισή τους είναι εξίσου δύσκολη. Αντίθετα οι δεκαδικοί αριθμοί εν μέρει μπορούν να διδαχθούν με παρόμοιο τρόπο με τους φυσικούς.

Παρόλα αυτά σε μελέτες παιδιών ηλικίας περίπου 13, από τα οποία ζητήθηκε να κάνουν κάποιες απλές πράξεις μεταξύ δεκαδικών ψηφίων, ένα μεγάλο ποσοστό έκανε λανθασμένη τοποθέτηση των δεκαδικών ψηφίων (Carpenter et al., 1981). Σε μία άλλη παρόμοια έρευνα που έγινε σε παιδιά Γυμνασίου παρατηρήθηκε ότι το 73% των παιδιών δεν τοποθετούσε σωστά τα δεκαδικά ψηφία (Lortie-Forgues and Siegle, 2017). Καθώς όμως περνάμε από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες ηλικίες δεν παρατηρούνται τόσο συχνά λάθη τοποθέτησης των δεκαδικών αριθμών στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Hiebert and Wearne 1985, 1986).

Τα παραπάνω λάθη θα μπορούσαν να οφείλονται στη μη ικανότητα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών ή κλασμάτων. Στις πράξεις της αφαίρεσης και της πρόσθεσης λάθη συμβαίνουν και πάλι εξαιτίας της μη κατανόησης του μεγέθους του αριθμού ή της σύγκρισής του με βάσει τα ψηφία που υπάρχουν σε κάθε θέση αυτού. Πολλά παιδιά γνωρίζουν πως να κάνουν την τοποθέτηση σε μία πράξη χωρίς να ξέρουν την αιτία. Αυτή είναι η πηγή των προβλημάτων καθώς, όταν χρησιμοποιείται η ικανότητα αποστήθισης της πληροφορίας χωρίς να συνδυάζεται με τη λογική, σε περίπτωση που λείψει ένας από τους δύο παράγοντες η ερμηνεία ενός προβλήματος θα είναι ανέφικτη. Άρα ένας λόγος που προκύπτουν λάθη σε τέτοιες απλές πράξεις είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν κατέχουν τη γνώση σε βάθος ώστε να μπορούν να την εφαρμόσουν και να εξηγήσουν το αποτέλεσμα.

Ένα επιπλέον ζήτημα που προκύπτει στις πράξεις με ρητούς είναι αν αυτές πρέπει να γίνουν με τη χρήση γραφικής ύλης σε χαρτί ή στο μυαλό. Σε αυτή την περίπτωση έχει αποδειχθεί ότι για να γίνουν οι πράξεις χωρίς τη χρήση γραφικής ύλης, θα πρέπει ο μαθητής να χειρίζεται άριστα τους δεκαδικούς, τα κλάσματα και την πράξη της διαίρεσης. Διαφορετικά η ακολουθία κανόνων που έχουν διδαχθεί για την διεξαγωγή των πράξεων θα είναι εφικτή μόνο αν οι μαθητές εκφράσουν γραπτά το πρόβλημα. Ένας άλλος τρόπος για μείωση της απαιτούμενης χρονικής διάρκειας επίλυσης έγκειται στο να εστιάσει κανείς στα δεδομένα και τις συνέπειες του προβλήματος (Siegler and Lortie-Forgues, 2015). Όπως έδειξαν πειράματα των προαναφερθέντων ερευνητών, η διδασκαλία των κλασμάτων με έμφαση στο αποτέλεσμα που δίνουν αυτά, σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου έδειξε ότι η πλειονότητα των μαθητών μπορούσε πλέον να διαχειριστεί τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με άνεση ενώ μπορούσε να επιλύει προβλήματα με τη λογική του πολλαπλάσιου ενός αριθμού και την πράξη της διαίρεσης, στην ειδική περίπτωση όπου τα κλάσματα ήταν μεγαλύτερα από την μονάδα. Στην περίπτωση όμως που τα κλάσματα λάμβαναν τιμές μεταξύ του 0 και του 1, τα αποτελέσματα ήταν απογοητευτικά, ιδιαίτερα όταν έπρεπε να εκτελέσουν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεταξύ των κλασμάτων.

Το 30% των παιδιών του Γυμνασίου μπορούσαν να εκτελέσουν σωστά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση το 47% στην πιο πάνω έρευνα. Όταν η έρευνα αυτή διεξήχθη σε φοιτητές Πανεπιστημίου υψηλού επιπέδου, το ποσοστό ήταν αρκετά αυξημένο, από 94% έως και 100%. Όμοια αποτελέσματα εξήχθησαν στην περίπτωση που ζητήθηκε από μαθητές και φοιτητές να χειριστούν προβλήματα και πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων έφθιναν όταν γινόταν αναφορά σε δεκαδικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας και μεγαλύτερους του 0. Πιο συγκεκριμένα, κατά τους Lortie-Forges και Siegler (2017), τα παιδιά της έκτης Δημοτικού και της δευτέρας Γυμνασίου απάντησαν σωστά κατά 19% σε πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς από το 0 έως το 1. Αντίθετα το 90% της ίδιας ομάδας ατόμων απάντησαν σωστά σε αντίστοιχα προβλήματα που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι η πλειονότητα των ατόμων θεωρεί λανθασμένα ότι ο πολλαπλασιασμός οδηγεί σε αποτέλεσμα με μέτρο μεγαλύτερο των αρχικών αριθμών, ενώ η διαίρεση σε αποτέλεσμα με μέτρο μικρότερο του διαιρετέου, ανεξάρτητα από το αν οι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται αντίστοιχα είναι μεγαλύτεροι ή μικρότεροι της μονάδας (Fischbeinet al.1985; Graeber and Tirosh, 1990). Οι έρευνες που έχουν γίνει σε σχέση με αυτά τα ζητήματα έχουν διεξαχθεί είτε σε μικρά δείγματα είτε σε μεγάλους πληθυσμούς και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν είναι περίπου τα ίδια.

Συνεπώς η έννοια του ρητού αριθμού και οι πράξεις που τον διέπουν δυσκολεύουν άτομα ηλικίας από το Δημοτικό έως και την ενηλικίωση. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι η μη εμπέδωση της ιδέας του ρητού αριθμού η οποία εμποδίζει τη μετέπειτα απόκτηση ικανότητας χειρισμού αυτών με πράξεις. Ένα άλλο πρόβλημα που παρουσιάζεται ακόμη και σε παιδιά Λυκείου είναι η μη κατανόηση της πυκνότητας των κλασματικών και δεκαδικών αριθμών. Η πυκνότητα των αριθμών σχετίζεται με την ύπαρξη άπειρων αριθμών σε διάστημα που σχηματίζεται από δύο διαφορετικά κλάσματα ή δύο διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς. Σε έρευνα σχετική με το πλήθος των αριθμών που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο αριθμούς, δεκαδικούς ή κλάσματα, σχεδόν τα μισά από τα παιδιά του Γυμνασίου αποκρίθηκαν σωστά, ενώ τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων αυξάνονταν στα παιδιά Λυκείου (Vamvakoussi and Vosniadou, 2007).

3.4 Ποιοι ρητοί αριθμοί θα πρέπει να διδαχθούν στα πρώτα σχολικά χρόνια

Όπως έχει διαπιστωθεί, σε όλες τις χώρες υπάρχει ένα συγκεκριμένο πρωτόκολλο σχετικά με τη σειρά με την οποία διδάσκονται τα κλάσματα, οι δεκαδικοί αριθμοί και τα ποσοστά. Για παράδειγμα, στον Καναδά το πρόγραμμα σπουδών των μαθητών υπαγορεύει τη διδασκαλία των κλασμάτων, ύστερα των δεκαδικών αριθμών και στο τέλος των ποσοστών (Moss, 1997; Moss and Case, 1999). Έτσι σε πείραμα που έγινε από την ομάδα του «National Assessment of Educational Progress (NAEP)» (2001) σε μαθητές της τετάρτης Δημοτικού, οι οποίοι δεν είχαν καμία βάση επάνω στους ρητούς αριθμούς, διακρίθηκαν σε ομάδες στις οποίες ακολουθήθηκε διαφορετική σειρά εκμάθησης των ρητών εκφράσεων.

Το πρόγραμμα αυτό ακολούθησε διαφορετικά χρονικά πλαίσια διδασκαλίας καθώς και διαφορετική σειρά στην ύλη. Ο πειραματικός οδηγός εκμάθησης υπαγόρευε 20 μαθήματα στη διάρκεια 5 μηνών, σε αντιδιαστολή με τον κλασσικό οδηγό σπουδών ο οποίος περιλάμβανε 25 μαθήματα σε μικρότερο χρονικό διάστημα. Στο πειραματικό πρόγραμμα σπουδών δόθηκε έμφαση στον τρόπο που συνδέονται οι τρεις εκφράσεις των ρητών αριθμών. Η εισαγωγή στο πειραματικό πρόγραμμα έγινε με την παρουσίαση των ποσοστών. Σε αυτή την περίπτωση τα παιδιά κλήθηκαν να εκφράσουν με ποσοστό την περιεκτικότητα πολλών ποτηριών σε νερό. Ακολούθως τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με δεκαδικούς αριθμούς δύο δεκαδικών ψηφίων, αναλύοντας τη συσχέτιση αυτών με τα ποσοστά, και επεξηγώντας την ισοδυναμία μεταξύ αυτών των εκφράσεων. Παράλληλα χρησιμοποιούνταν μία άτυπη ορολογία κλασμάτων για την επεξήγηση των δεκαδικών αριθμών και των ποσοστών κατά τα πρώτα στάδια του πειράματος. Επί παραδείγματι το κλάσμα ½ ή αλλιώς το μισό χρησιμοποιούνταν όταν εμφανιζόταν η τιμή 0.50 ή 50%. Κατά τη λήξη του προγράμματος τα παιδιά εστίασαν περισσότερο στον συμβολισμό, την οπτικοποίηση των κλασμάτων, και την αντιστοιχία τους σε μεγέθη.

Μετά το πέρας το πειράματος έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων για να ελεγχθεί η απόδοσή τους. Όπως διαπιστώθηκε τα παιδιά της πειραματικής ομάδας είχαν κατανοήσει καλύτερα την ποικιλία και την πολυπλοκότητα των ρητών αριθμών, μπορούσαν να κάνουν υπολογισμούς που περιλάμβαναν είτε ρητούς εκφρασμένους στην ίδια μορφή είτε σε διαφορετική, να χρησιμοποιούν έγκυρα τα σύμβολα των ρητών, να συγκρίνουν αυτούς επιτυχημένα, να μεταφράζουν τις εκφράσεις και να επιλύουν σχετικά προβλήματα.

Παρά το γεγονός ότι η πρώτη ομάδα δε διδάχθηκε τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις μεταξύ των ρητών αριθμών, είναι εξίσου ικανοί να τις εκτελέσουν με επιτυχία. Τα παιδιά της πειραματικής ομάδας μπορούσαν να λύσουν προβλήματα που δεν είχαν διδαχθεί χωρίς να χρησιμοποιούν μεθόδους στηριζόμενες σε ολόκληρο τον αριθμό. Επιπρόσθετα είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στη μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς.

Μετέπειτα έγιναν κι άλλες μελέτες αναστροφής του προγράμματος ύλης σε παιδιά Δημοτικού και ελήφθησαν τα ίδια αποτελέσματα, δηλαδή η απόδοση των παιδιών που παρακολούθησαν το πειραματικό πρόγραμμα ήταν καλύτερη σε σχέση με το κλασσικό (Kalchman et al., 2001).

Βέβαια για να διεξαχθεί ένα πόρισμα σχετικά με τη βέλτιστη σειρά και μέθοδο διδασκαλίας των ρητών θα ήταν καλό να γίνουν εκτενέστερες μελέτες σε μεγαλύτερα δείγματα. Η πειραματική μέθοδος που περιγράφηκε, αμφισβητήθηκε από κάποιους επιστήμονες κυρίως εξαιτίας της αλλαγής στη σειρά διδασκαλίας των ρητών αλλά και στην έμφαση που έδινε στο μέγεθος των αριθμών (Moss and Case, 1999). Αναμφισβήτητα όμως τα αποτελέσματα έδωσαν μία κατεύθυνση για τη δημιουργία αλλαγών στο πρόγραμμα σπουδών. Το πείραμα που έγινε από την ομάδα του «National Assessment of Educational Progress (NAEP)» το 2007 σε μαθητές δευτέρας Γυμνασίου και τρίτης Λυκείου, από τα παιδιά Γυμνασίου τα αγόρια απέδωσαν καλύτερα από τα κορίτσια στο σύνολο και σε θέματα που πραγματεύονται τις ιδιότητες των ρητών, τις πράξεις, το μέτρο τους και το αλγεβρικό κομμάτι.

Στην ομάδα μαθητών του Λυκείου η πλειονότητα των κοριτσιών είχε μικρότερη απόδοση, το ίδιο παρατηρήθηκε και σε έρευνα του 2005 (National Center for Education Statistics, 2006). Επιπλέον σαν γενικό συμπέρασμα από τις έρευνες αυτές μπορεί να εξαχθεί ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολία στο να υπολογίσουν το μέρος (κλάσμα) ενός αριθμού, δηλαδή να πολλαπλασιάσουν το κλάσμα επί τον αριθμό. Η γεωμετρική ερμηνεία των κλασμάτων και η οπτικοποίησή τους φαίνεται να είναι πιο προσιτή για τα παιδιά από ό,τι η αλγεβρική τους μελέτη.

Ένα πρόβλημα που αφορά στο αλγεβρικό κομμάτι των ρητών αριθμών είναι ότι οι μαθητές δεν έχουν συνδέσει καλά την έννοια του κλάσματος με τον αριθμό. Για παράδειγμα, σε δείγμα μαθητών δόθηκε πρόβλημα στο οποίο δόθηκαν τα ποσοστά των ψήφων που αντιστοιχούσαν σε κάθε κόμμα και ζητήθηκε να υπολογίσουν το πλήθος των ψήφων που έλαβε το κάθε κόμμα, χωρίς όμως να έχει δοθεί η πληροφορία του συνόλου του δείγματος. Το 26% περίπου των ατόμων απάντησε σωστά ότι οι δοσμένες πληροφορίες δεν επαρκούν για να βγει κάποιο συμπέρασμα, ενώ το 17% απάντησε ότι δεν γνωρίζει πως θα λυθεί το πρόβλημα.

Το συμπέρασμα όλων αυτών των μελετών συνοψίζεται στο ότι οι μαθητές δεν αποκτούν τις βάσεις ώστε να χειρίζονται πράξεις και προβλήματα που περιέχουν ρητούς αριθμούς κατά τη διάρκεια της μαθητείας τους και αυτό το φαινόμενο παρατηρείται τις τελευταίες δεκαετίες (για τις οποίες έχουν γίνει και οι αντίστοιχες μελέτες. Οι Carpenter, Lindquist, Brown, Kouba, Silver, and Swafford (1988), παρατήρησαν ότι οι μαθητές μεγαλύτερων τάξεων αντιμετωπίζουν δυσκολία στις πράξεις με κλάσματα, δεκαδικούς αριθμούς, και ποσοστά, ενώ υπάρχουν κενά στις γνώσεις που έχουν για τις βασικές πράξεις αυτών.

Έτσι σε μελέτη των Carpenter et al. (1988) το 47% των παιδιών της πρώτης Γυμνασίου και ένα 44% των παιδιών της δευτέρας Λυκείου γνώριζαν ότι η πρόσθεση ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα μπορεί να γραφτεί και ως μικτό κλάσμα. Το Εθνικό Κέντρο Εκπαιδευτικής Στατιστικής της Αμερικής επιβεβαιώνει με συνεχείς αναλύσεις ότι η απόδοση των μαθητών στα κλάσματα φθίνει συνεχώς. Ωστόσο παρουσιάζεται μία βελτίωση μεταξύ των ηλικιών της τρίτης Γυμνασίου και της τρίτης Λυκείου. Οι ελλείψεις που έχουν τα παιδιά στους ρητούς συχνά προκαλούν μία αποστασιοποίηση από το μάθημα της Άλγεβρας που οδηγεί και στον αποκλεισμό των παιδιών αργότερα από εκπαιδευτικά ιδρύματα τα οποία έχουν σαν βάση την Άλγεβρα, γεγονός που προκαλεί απογοήτευση, αφού η σημερινή κοινωνία είναι τεχνοκρατούμενη και τα περισσότερα επαγγέλματα της εποχής αυτής εμπεριέχουν ανώτερα μαθηματικά.

Η κοινωνία μας δε, έχει μεγάλη ανάγκη από ανθρώπους που χειρίζονται άριστα τα μαθηματικά και μπορούν να σκέφτονται συνδυαστικά και με κριτική ικανότητα κατά την επίλυση προβλημάτων (McLester & McIntire, 2006; National Research Council, 1989). Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στο άτομο ακολουθεί πολλά στάδια και ταυτίζεται με την ικανότητα αναπαράστασης ποσοτήτων και σχέσεων μεταξύ αυτών και την απόδοση των συμβολισμών και των αριθμητικών αναπαραστάσεων έτσι ώστε να γίνουν κατανοητοί σε όποιον επιθυμεί να τις μελετήσει (Burke, Erickson, Lott, & Obert, 2001). Επιπλέον η Άλγεβρα αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της λογικής των υπολογιστών και του προγραμματισμού καθώς και της Μηχανικής, επιστήμες που διαδραματίζουν τους βασικότερους ρόλους στη σημερινή κοινωνία.

3.4 Οι επιδράσεις της μη εμπέδωσης των ρητών αριθμών

Ένα κύριο στοιχείο στο οποίο πρέπει να δοθεί έμφαση για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι οι συμβολισμοί των ρητών, δηλαδή η μαθηματική γλώσσα με την οποία εκφράζεται κάθε μαθηματική πρόταση. Αν ένα παιδί δεν αποκτήσει την ικανότητα να αναγνωρίζει τη μαθηματική έκφραση, τότε είναι βέβαιο ότι δε θα μπορεί και να την επεξεργαστεί. Η ύπαρξη της άλγεβρας είναι ένας λόγος που οι μαθητές προσανατολίζονται συχνά σε πιο θεωρητικά επαγγέλματα, χάνοντας ίσως το προνόμιο να μπορούν να εισαχθούν σε κάποια σχολή τεχνολογικού περιεχομένου.

Μία άποψη που έχει κυριαρχήσει μέσα στα χρόνια, η οποία βέβαια δεν έχει αποδειχθεί, είναι ότι τα μαθηματικά είναι μία φυσική και όχι επίκτητη ικανότητα του ατόμου, που είτε κανείς έχει είτε δεν έχει, αντί να είναι παράγωγο της συνεχούς προσπάθειας και μελέτης (National Mathematics Advisory Panel, 2008; National Research Council, 1989).

Παρόλα αυτά οι μαθητές, είτε χαμηλής επίδοσης, είτε υψηλής επίδοσης στα μαθηματικά, ευνοούνται από την εκμάθηση των ρητών και γενικότερα από το μάθημα της Άλγεβρας, αφού οξύνει τη σκέψη και δημιουργεί νέους τρόπους οπτικής των πραγμάτων (Gamoran & Hannigan, 2000). Η δυσκολία που έχουν οι μαθητές στην κατανόηση των ρητών δεν θα πρέπει να τους αποτρέπει από το να λάβουν τη βασική αυτή γνώση, και για αυτό οι ρητοί διδάσκονται κάθε χρόνο από τη δευτέρα Δημοτικού μέχρι και την τρίτη Λυκείου, μιας και ένας τρόπος βελτίωσης είναι η συνεχής επανάληψη. Επίσης θα πρέπει να επισημανθεί ότι σκόπιμα οι ρητοί είναι μέρος της βασικής εκπαίδευσης και όχι της ανώτερης εκπαίδευσης μόνο, αφού προσφέρουν σημαντικά εφόδια στην επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων.

Μια αρνητική επίπτωση της μη κατανόησης των ρητών αριθμών είναι ότι οι μαθητές δε μπορούν να αποδώσουν σε μαθήματα ή αντικείμενα που εμπεριέχουν το σύνολο των ρητών. Έτσι, αν δεν γνωρίζει κάποιος τι σημαίνει κλάσμα και του ζητηθεί να δημιουργήσει έναν αλγόριθμο που να κάνει υπολογισμούς με κλάσματα, δε θα είναι δυνατό. Αν κάποιος αγαπά το μάθημα της Φυσικής και του ζητηθεί να μελετήσει ένα διάγραμμα ή να υπολογίσει μία τιμή με τη χρήση αλγεβρικών εξισώσεων και κλασμάτων, δε θα τα καταφέρει. Άρα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος ώστε να φτάσει η πληροφορία από τον εκπαιδευτικό στον μαθητή με αποτελεσματικό τρόπο.

Η αναδιαμόρφωση του σχολικού προγράμματος θα μπορούσε να προσφέρει στους μαθητές το έναυσμα για να μελετήσουν και να κατανοήσουν τους ρητούς. Το πρώτο σκέλος της μάθησης θα περιλαμβάνει την παράθεση του θεωρητικού υπόβαθρου από τον καθηγητή και τα αποτελέσματα αυτού, ενώ στη συνέχεια η πληροφορία αυτή θα πρέπει να γίνει πράξη. Οι μαθητές πρέπει να επεξεργαστούν το αντικείμενο ατομικά ή ομαδικά, να το μελετήσουν, να κάνουν σχετικές εργασίες, να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα και τα αποτελέσματα και να μπορούν να το εκφράσουν με σύμβολα. Ένας άλλος εκπαιδευτικός τρόπος εκμάθησης είναι η σύνδεση των εννοιών και οι συσχετίσεις και πιθανές αναλογίες που ίσως να υπάρχουν μεταξύ τους.

3.5 Η ταύτιση των ρητών αριθμών με την έννοια του λόγου

Ο λόγος ή διαφορετικά το πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών υποδεικνύει τη σύγκριση των αριθμών αυτών ως προς το μέτρο τους καθώς και την έκφραση ενός αριθμού συναρτήσει του άλλου. Αν εκφράσουμε τους λόγους δύο αριθμών σαν κλάσματα, όπου ο διαιρετέος είναι ο αριθμητής και ο διαιρέτης είναι ο παρονομαστής, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι δύο λόγοι είναι ίσοι, όταν τα δύο αυτά κλάσματα είναι ισοδύναμα. Ένα πείραμα που εκτελέστηκε από τον Noelting (1978), χρησιμοποιούσε ποσότητα χυμού ο οποίος αναμιγνύονταν με νερό αποκτώντας διαφορετική συγκέντρωση και προσδίδοντας λιγότερο έντονη γεύση. Οι μαθητές έπρεπε να αποφανθούν για το αν οι χυμοί θα έχουν πιο έντονη γεύση ή λιγότερο έντονη συγκρίνοντας τις ποσότητες του νερού που προστέθηκαν και υπολογίζοντας τις αναλογίες νερού και χυμού. Μεταξύ των αναλογιών αυτών μπορούσαν να γίνουν διάφορες αλγεβρικές πράξεις και να εντοπισθούν ισοδύναμες περιεκτικότητες σε χυμό.

Ένα από τα προβλήματα που παρουσιάζονται συχνά στην κατανόηση των ρητών συναρτήσεων είναι η έκφραση αυτών σαν το πηλίκο δύο πολυωνύμων. Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν έχουν πλήρη επίγνωση των ρητών αριθμών και των αλγεβρικών πράξεων μεταξύ μεταβλητών. Η έννοια της μεταβλητής συχνά δεν γίνεται πλήρως κατανοητή. Ίσως να μην έχουν εμπεδώσει την προτεραιότητα με την οποία εκτελούνται οι πράξεις στις ρητές αλγεβρικές παραστάσεις. Συχνό φαινόμενο αποτελεί επίσης και η λανθασμένη απαλοιφή όρων. Το τελευταίο παρατηρείται πάρα πολύ συχνά, ενώ ο λόγος που συμβαίνει είναι η ελλιπής γνώση χειρισμού των κλασμάτων και των δυνάμεων. Ίσως επίσης να μην έχει τονιστεί από τον εκπαιδευτικό η δυνατότητα απλοποίησης μόνο κατά την ύπαρξη της πράξης του πολλαπλασιασμού στον αριθμητή ή τον παρονομαστή ενός κλάσματος, ή οι έννοιες των αντίστροφων και των αντίθετων αριθμών. Είναι αξιοπερίεργο όμως ότι οι έννοιες των αντίθετων και των αντίστροφων αριθμών διδάσκονται από τις τάξεις του Δημοτικού και η πλειονότητα των παιδιών φτάνει στα λυκειακά χρόνια και πάλι δεν τις έχει εμπεδώσει.

Ο χειρισμός των αλγεβρικών πράξεων αποτελεί ένα εμπόδιο στην κατανόηση των ρητών αριθμών και γενικότερα των ρητών παραστάσεων. Ένας τρόπος να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο θα ήταν να βασίζεται η διδασκαλία σε ήδη υπάρχουσα και καλά θεμελιωμένη γνώση. Η μέθοδος αυτή όμως δεν οδηγεί πάντα σε σωστό αποτέλεσμα γιατί βασίζεται στη διαίσθηση και όχι στην πραγματική γνώση. Έτσι προκύπτουν σημαντικά λάθη στις πράξεις. Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά λάθη που συμβαίνουν είναι η απλοποίηση του αριθμού α στην παράσταση (α+β)/α, ενώ στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού, (α·β)/α=β. Οι συνειρμοί μεταξύ πράξεων λοιπόν μπορούν να επιφέρουν αρκετά λάθη και να ματαιώσουν την προτεραιότητα των πράξεων (Kirshner, 1989).

Τα λάθη των μαθητών είναι πιθανό να οφείλονται στο ότι υπάρχουν δύο τρόποι αντίληψης μιας μαθηματικής έννοιας. Ο ένας στηρίζεται στις λειτουργικές διαδικασίες και ο άλλος στη δημιουργία δομών μέσω αντικειμένων. Η μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα δεν είναι εύκολη και αποτελείται από αρκετά στάδια και εμπόδια.

Σε μία παρόμοια έρευνα προέβη και ο Neumann (2001), ο οποίος διαπίστωσε την δυσκολία που αντιμετωπίζουν παιδιά του Γυμνασίου να καταλάβουν ότι υπάρχουν κλάσματα μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών. Η διδασκαλία των διακριτών αριθμών με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων οδηγεί αναπόφευκτα στη δυσκολία εισαγωγής στην έννοια του απείρου πλήθους ρητών. Εν κατακλείδι οι μαθητές όλων των επιπέδων, και ιδιαίτερα των μικρών τάξεων δεν κατανοούν εύκολα τους ρητούς αριθμούς και τους συμβολισμούς αυτών. Για την υπερπήδηση του εν λόγω εμποδίου θα ήταν καλό να γίνει μία ταυτόχρονη παρουσίαση των συνόλων των αριθμών και των διαφορών καθώς και των ομοιοτήτων που παρουσιάζουν.

Οι έννοιες των συνόλων και των υποσυνόλων θα βοηθούσαν στη διαχείριση των πράξεων μεταξύ αυτών και την επίλυση απλών προβλημάτων. Κατά τον Dörfler (1995), οι ρητοί αριθμοί διαθέτουν συγκεκριμένο συμβολισμό και αποκτούν ουσία όταν αναφέρονται σε ένα σύστημα-σύνολο. Έτσι οι ρητοί αριθμοί, εμπεριέχουν το σύνολο των φυσικών και ακεραίων αριθμών και διέπονται από τους ίδιους μηχανισμούς και κανόνες πράξεων. Η προτεραιότητα των πράξεων άλλωστε ισχύει για όλα τα σύνολα των αριθμών. Η αφηρημένη έννοια που ίσως να έχουν οι ρητοί αριθμοί, αποκτά ουσία όταν αυτοί παρεμβάλλονται σε μία σειρά πράξεων ή απεικονίσεων.

Έτσι, ενώ οι ρητοί αριθμοί αντιμετωπίζονται με τις ίδιες μαθηματικές πράξεις με τους φυσικούς αριθμούς, παρουσιάζουν τεράστιες αντιθέσεις μεταξύ τους. Επί παραδείγματι, η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός δύο φυσικών αριθμών οδηγεί πάντα σε αποτέλεσμα που είναι μεγαλύτερο από τον κάθε προσθετέο ή παράγοντα αντίστοιχα. Αντίθετα, όταν προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε δύο ρητούς αριθμούς, το αποτέλεσμα που θα εξαχθεί θα μπορούσε να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από κάθε ένα των δοσμένων αρχικών ψηφίων.

Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν ισοδύναμα με πάρα πολλούς τρόπους και να δίνουν το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, ενώ οι φυσικοί αριθμοί παρουσιάζουν μοναδικότητα στην έκφραση και στο αποτέλεσμα. Συχνά όμως οι μαθητές εφαρμόζουν τους φυσικούς αριθμούς σε προβλήματα που δεν αρμόζουν, κυρίως επειδή δεν κατανοούν τους ρητούς αριθμούς (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005; Smith, Solomon, & Carey, 2005).

Η εκμάθηση και η πλήρης εμπέδωση των φυσικών αριθμών, αλλά και η συχνή χρήση τους κατά τα παιδικά χρόνια, συχνά δρα σαν ανασταλτικός παράγοντας για την εκμάθηση των ρητών αριθμών. Οι μαθητές συνήθως καταλαβαίνουν και αποστηθίζουν το συμβολισμό του πηλίκου α/β χωρίς να συνδέουν τους αριθμούς α και β με μία σχέση αναλογίας. Κατά κύριο λόγο, μεταφράζουν την σχέση των α και β σαν μία αύξηση-πρόσθεση του ενός με τον άλλο (Lamon, 1999; Moss, 2005; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Οι μαθητές εκλογικεύουν τις πράξεις μεταξύ των ρητών με βάση τους φυσικούς πράγμα που δεν έχει κάποια λογική βάση (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005).

Μια άλλη δυσκολία στην εμπέδωση των ρητών αριθμών είναι οι πολλαπλοί συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται είτε για την ίδια έννοια είτε για τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων. Για παράδειγμα ένα σύνθετο κλάσμα αποτελείται από ένα κλάσμα με παρονομαστή κλασματικό αριθμό και αριθμητή κλασματικό αριθμό. Το αποτέλεσμα αυτού ισοδυναμεί με την διαίρεση δύο κλασμάτων, του αριθμητή, που δρα ως διαιρετέος και του παρονομαστή που δρα σαν διαιρέτης. Μία άλλη έκφραση της ίδιας έννοιας είναι ο πολλαπλασιασμός του αριθμητή του αναφερθέντος κλάσματος με το αντίστροφο κλάσμα του παρονομαστή.

Η κατανόηση αυτών των μετατροπών μπορεί να γίνει αν το άτομο γνωρίζει πολύ καλά τις πράξεις και την προτεραιότητα των πράξεων ή αν μπορεί να αποδώσει στο κλάσμα την έννοια της οντότητας. Παρόλα αυτά η σύνδεση των συμβολισμών με την έννοια του κλάσματος ως οντότητα είναι άκρως δύσκολη αφού δεν παρουσιάζουν κανένα κοινό σημείο (Markovits & Sowder, 1991). Ένα από τα πρώτα παραδείγματα που διδάσκεται στις τάξεις του Δημοτικού είναι ο διαχωρισμός ενός κυκλικού δίσκου σε κυκλικούς τομείς « τα κομμάτια της πίτας». Οπότε αν κάποιος λάβει τα 2 από τα 8 κομμάτια αυτού, η οπτικοποίηση της έννοιας οδηγεί σε σχηματικές αναπαραστάσεις, ενώ το κλάσμα μπορεί να γραφεί σαν ¼.

Περεταίρω έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά δεν μπορούν να συνδέσουν τους ρητούς αριθμούς που γνωρίζουν και να φτιάξουν ένα ενιαίο, συνεχές σύνολο (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Έτσι κάνουν πράξεις μεταξύ των δεκαδικών αριθμών και των κλασμάτων θεωρώντας ότι υπάρχουν διαφορές στα αποτελέσματα (Khoury & Zazkis, 1994; O’Connor, 2001). Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα παιδιά μαθαίνουν πως να χειρίζονται τα κλάσματα και τους δεκαδικούς και να τους συγκρίνουν. Αρχικά μετατρέπουν όλο το σύνολο αριθμών που τους δίνεται σε δεκαδικούς ή σε κλάσματα ώστε να είναι σε θέση να τους συγκρίνουν. Στην περίπτωση των κλασμάτων, τα κάνουν είτε ομώνυμα είτε τους δημιουργούν κοινό αριθμητή ώστε να τα συγκρίνουν. Στην περίπτωση των δεκαδικών συγκρίνουν όμοιες θέσεις στα ψηφία αυτών.

Η πλειοψηφία όμως των παιδιών δεν είναι σε θέση να συγκρίνει σύνολα αριθμών που χρησιμοποιούν διαφορετικούς συμβολισμούς. Η μετατροπή των αριθμών στην ίδια μορφή είναι επίσης μία δυσκολία που αντιμετωπίζουν και δύσκολα ξεπερνούν. Τα ισοδύναμα κλάσματα σε πρώιμες ηλικίες δεν γίνονται αντιληπτά (Mitchell, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Επομένως για να γίνει εφικτή η πλήρης κατανόηση των ρητών από μικρές ηλικίες, θα πρέπει να δοθούν οι σωστές βάσεις από την προσχολική ηλικία, στην οποία τα παιδιά εμφανίζουν μία έντονη διάθεση για μάθηση (Carey & Gelman, 1991, Carey, 1985, Gelman, 1990). Οι περισσότερες μελέτες δείχνουν ότι τα παιδιά στην προσχολική ηλικία περιορίζονται στη δυνατότητα εκμάθησης μόνο διακριτών τιμών, δηλαδή φυσικών αριθμών (Ni & Zhou, 2005). Αυτή η ιδέα επεκτείνεται και για άτομα παιδικής ηλικίας. Υπάρχουν όμως και αντίθετες απόψεις που υποστηρίζουν ότι τα παιδιά από τα πρώτα τους χρόνια μπορούν να μάθουν να διαμερίζουν ποσότητες, άρα να καταλάβουν την έννοια του κλάσματος και της αναλογίας (Moss & Case, 1999). Σύμφωνα με τον Gelman (1994, 2000), τα παιδιά κατά την ηλικία των πέντε περίπου συνδέουν τον αριθμό με την καταμέτρηση έμβιων και άβιων όντων και μπορούν να εφαρμόσουν σε αυτούς τις πράξεις της αφαίρεσης και της πρόσθεσης, με μόνο μειονέκτημα ότι το εύρος των ψηφίων που διαχειρίζονται είναι συνήθως πολύ μικρό (Gelman, 1994, σ. 68).

Τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας μαθαίνουν να μετρούν τους αριθμούς με συγκεκριμένη και συνήθως αύξουσα σειρά. Αυτή η γνώση βοηθά στην μετέπειτα παρατήρηση ότι οι αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος (Hartnett & Gelman, 1998). Εντέλει, η πρώτη γνώση χτίζει ένα υπόβαθρο για τη θεωρία των αριθμών το οποίο αποκτάται μέσω της παρατήρησης και της αλληλεπίδρασης με τα υπόλοιπα όντα (diSessa, 1993, 2008).

Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τους αριθμούς και τη μέτρηση σε πρώιμη ηλικία και μαθαίνουν να μετρούν και να αντιμετωπίζουν τους αριθμούς στηριζόμενοι στην πληροφορία που δέχονται (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007; Vosniadou et al., 2008). Υπάρχουν όμως απόψεις που στηρίζουν ότι οι παράγοντες που συμβάλλουν στην δημιουργία ενός θεωρητικού υποβάθρου που αφορά στους αριθμούς στηρίζεται στις αρχές του πειραματισμού, της αισθητηριακής και αντιληπτικής εμπειρίας που είναι τα πιο συνηθισμένα μέσα απόκτησης γνώσεων στην προσχολική ηλικία (diSessa, 1993, 2008). Στη μέθοδο αυτή, το άτομο χρησιμοποιεί κυρίως τις αισθήσεις της όρασης αλλά και της αφής ή της ακοής ώστε να επικοινωνεί και να αλληλεπιδρά με τα αντικείμενα που υπάρχουν στη φύση.

Οι μαθηματικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά στα πρώτα τους χρόνια δημιουργούν στην πορεία μεγαλύτερες εννοιολογικές δομές οι οποίες αφομοιώνονται ανάλογα με το πόσο το κοινωνικό περιβάλλον βοηθάει σε αυτό. Ένα παιδί θα πρέπει να εκτίθεται επανειλημμένα σε μία πληροφορία και να την εφαρμόζει πολλαπλές φορές για να γίνει κτήμα του.

Αν λοιπόν ένα παιδί έχει μεγαλώσει σε μία κοινωνία που θα του παρέχει τα εφόδια ώστε να αποκτήσει τις βάσεις για την κατανόηση των φυσικών αριθμών, όταν θα ξεκινήσει να διδάσκεται τους δεκαδικούς αριθμούς θα πρέπει να διαμορφώσει έναν τρόπο να καταχωρήσει αυτή την πληροφορία στο νου του. Η γνώση που έχουν για τους φυσικούς αριθμούς παρέχει την δυνατότητα στα παιδιά να μπορούν να θέσουν σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά αριθμούς και να κάνουν πράξεις μεταξύ αυτών. Η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση αποτελούν τη θεμελιώδη γνώση με την οποία αργότερα θα ερμηνεύσουν και το σύνολο των δεκαδικών αριθμών. Χρησιμοποιούν λοιπόν την νέα γνώση που λαμβάνουν σαν επιπρόσθετη πληροφορία σε όλες τις προηγούμενες, χωρίς να αναιρούν τις δεύτερες. Τελικός τους στόχος είναι ο εμπλουτισμός της πληροφορίας και η προσαρμογή της στο υπόβαθρο. Η χρήση της πράξης της πρόσθεσης όμως μπορεί να οδηγήσει στην παρανόηση της λειτουργίας και της φύσης των ρητών (Moss, 2005; Mamede et al., 2005).

Ωστόσο το γεγονός ότι τα παιδιά ερμηνεύουν τα πάντα στηριζόμενα στην υπάρχουσα γνώση και εμπειρία είναι αυτονόητο. Δεν θα ήταν λογικό οι γνώσεις να αποτελούν ένα αποσπασμένο από το περιβάλλον αντικείμενο. Έτσι η διδασκαλία των ρητών θα πρέπει να στηρίζεται από την μία πλευρά στη γνώση των φυσικών αριθμών, αλλά να επισημαίνονται και οι διαφορές μεταξύ αυτών των δύο συνόλων. Η διαδικασία αυτή δεν θα είναι εύκολη αλλά θα πρέπει να γίνεται σταδιακά, με υπομονή και με την παράθεση πολλών καθημερινών εφαρμογών στην παρατιθέμενη εκάστοτε θεωρία. Η εμβάθυνση στην έννοια των ρητών μπορεί να λειτουργήσει σαν αρωγός στο να ξεπεραστούν κάποια προβλήματα στη διαχείρισή και την κατανόησή τους. Τα παιδιά θα πρέπει να μεταβούν από εύκολες έννοιες σε δυσνόητες σταδιακά, χωρίς να χρησιμοποιούν τη διαίσθησή τους προβλέποντας καταστάσεις. Οι αριθμοί θα πρέπει να αποκτήσουν μια αφηρημένη έννοια και να συνδυαστεί η γνώση των φυσικών αριθμών με τους δεκαδικούς αριθμούς χωρίς να γίνεται σύγχυση αυτών.

Σε πείραμα που έγινε με μαθητή δημοτικού, για να διαπιστωθεί αν έχει διαχωρίσει τις έννοιες των δεκαδικών αριθμών, των ρητών και των φυσικών, ο μαθητής επέκτεινε την έννοια των φυσικών αριθμών σε ρητούς αριθμούς. Γνώριζε για την ύπαρξη άπειρων αριθμών μεταξύ δύο κλασμάτων, για την ισοδυναμία των κλασμάτων με τους δεκαδικούς αλλά στην πράξη δεν μπορούσε να καταλάβει την ύπαρξη άπειρων δεκαδικών αριθμών που βρίσκονται σε ένα διάστημα. Ο διαχωρισμός που θέτει ανάμεσα στους δεκαδικούς και τα κλάσματα πιθανότατα να οφείλεται στον διαφορετικό συμβολισμό που χρησιμοποιείται ανάμεσα στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Η μέθοδος της προσθήκης πληροφορίας στην ήδη υπάρχουσα είναι σωστή αλλά δεν έχει πάντα τα επιθυμητά αποτελέσματα αφού γίνεται μία ανορθολογική μίξη αυτής. Μία λύση θα μπορούσε να αποτελέσει η δημιουργία νέας βάσης της πρώτης πληροφορίας. Πιο συγκεκριμένα, όταν ένα παιδί ξεκινάει να μαθαίνει για τους φυσικούς αριθμούς, θα πρέπει να παρέχονται και πληροφορίες σε σχέση με τα υπόλοιπα σύνολα αριθμών, φυσικά με τρόπο προσιτό, κατανοητό και βασιζόμενο στην ηλικία. Η έννοια του αριθμού πρέπει να αποκτήσει αφηρημένη και όχι συγκεκριμένη έννοια. Επίσης οι μαθητές θα πρέπει να εμπεδώσουν ότι οι ρητοί και οι φυσικοί αριθμοί είναι δύο υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών αλλά μεταξύ τους παρουσιάζουν τεράστιες διαφορές εννοιολογικές αλλά και πρακτικές.

Η ικανότητα να ελίσσεται κανείς ανάμεσα στις ιδιότητες και τις πράξεις μεταξύ των συνόλων των φυσικών και ρητών αριθμών αποκτάται ύστερα από αρκετή εξάσκηση και προσωπική προσπάθεια. Η μετάβαση από τους δεκαδικούς στους ρητούς αριθμούς, των οποίων οι μόνες διαφορές που παρουσιάζουν μεταξύ τους αφορούν στον συμβολισμό και στις πράξεις, θα ήταν καλό να στηρίζεται στη σταδιακή δόμηση των διαφορών τους, ενώ θα πρέπει να δοθεί ένα κοινό σημείο αναφοράς (Duval, 2006; Markovits & Sowder, 1991). Παραδείγματος χάριν μία σημαντική ομοιότητα μεταξύ των αριθμών αυτών είναι ότι εκφράζουν την ίδια αναλογία μεταξύ αριθμών, δηλαδή τον ίδιο ρητό αριθμό. Για να το καταλάβουν αυτό θα πρέπει να έχουν κατακτήσει την έννοια του πολλαπλάσιου ενός αριθμού. Στη συνέχεια θα πρέπει να γίνει γνωστό ότι η ομάδα των ρητών αριθμών αποτελείται από συνεχείς και όχι διακριτές τιμές και ότι κάποιοι διαφορετικοί συμβολισμοί παριστάνουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό.

Σε πειράματα που εκτελέστηκαν φάνηκε ότι τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται την έννοια της συνέχειας των ρητών αριθμών, οι μαθητές αντιμετώπιζαν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα σαν φυσικούς, θεωρώντας ότι λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές. Οπότε για ένα διάστημα μεταξύ των 0.2 και 0.4 θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένας ενδιάμεσος αριθμός, με την υπόθεση ότι αναζητείται αριθμός με ένα δεκαδικό ψηφίο. Για ένα διάστημα μεταξύ δύο δεκαδικών 1/3 και 2/3, η απάντηση θα ήταν ότι δεν υπάρχουν ενδιάμεσοι αριθμοί. Η επέκταση των φυσικών αριθμών σε ρητούς είναι δύσκολη στη σύλληψη και δεν απαιτεί τη διάσπαση αυτών αλλά την προσθήκη νέων, εντελώς διαφορετικών ιδεών που είτε θα συνυπάρχουν με τις παλιές είτε θα ανακαλούνται κατά την επίλυση προβλημάτων.

3.6 Οι ρητοί ως αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης

Ένας ρητός αριθμός θα μπορούσε να εκφραστεί ως ένα τμήμα του όλου, και να ορισθεί σαν ένα κλάσμα μίας συγκεκριμένης ποσότητας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο συμβολισμός α:β=α/β εμπεριέχει δύο ακέραιες ποσότητες οι οποίες είναι ανάλογες μεταξύ τους. Αν το όλο εκφραστεί με τον αριθμό 1, τότε θα πρέπει να χωριστεί σε β μέρη, ώστε να λάβουμε τα α μέρη από αυτό. Η αλγεβρική έκφραση της παραπάνω πρότασης είναι 1·(α/β)=(1·α)/β.

3.7 Η προσέγγιση της έννοιας των ρητών ως τελεστές

Ένας ρητός αριθμός, δηλαδή ένα πηλίκο, θα μπορούσε να δράσει σαν ένας τελεστής σε μία ποσότητα. Κατά αυτόν τον τρόπο ένα γεωμετρικό σχήμα στο οποίο θα επιδράσει ένας τελεστής α/β, θα το μετατρέψει σε ένα άλλο σχήμα το οποίο είναι κ φορές μεγαλύτερο, όπου ο αριθμός κ θα είναι ισοδύναμος με τον λόγο α/β. Επίσης, ο λόγος α/β θα μπορούσε να εκφραστεί σαν συνάρτηση, όπου θα διακρίνει μία ποσότητα σε α/β στοιχεία. Στην περίπτωση που αναφερόμαστε στο μήκος ενός μεγέθους, τότε ο λόγος α/β μπορεί να θεωρηθεί ότι μικραίνει ή μεγαλώνει το υπάρχον μήκος αφού όταν το χωρίσουμε σε β μέρη, θα λάβουμε τα α μέρη αυτού. Όταν ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον β, τότε το νέο μήκος που θα προκύψει θα είναι μεγαλύτερο του αρχικού. Όταν ο αριθμός α είναι μικρότερος από τον β, τότε το νέο μήκος θα είναι μικρότερο του αρχικού.

Σε πειράματα (Ganson et al, 1980; Kieren et al., 1978, Kieren et al., 1979, Noelting) που έγιναν σε παιδιά κάτω των 12 ετών, διαπιστώθηκε ότι διαθέτουν περισσότερο αφαιρετική παρά πολλαπλασιαστική σκέψη. Ωστόσο ένα μεγάλο ποσοστό ατόμων μπορούσε να κατανοήσει πλήρως την έννοια του μισού μιας ποσότητας.

3.7 Η σημαντικότητα της διδασκαλίας των κλασμάτων

Τα κλάσματα ιστορικά είναι από τις πιο δύσκολες έννοιες στην εμπέδωση και την μετέπειτα διαχείριση (Misquita, 2011, p109). Ωστόσο είναι από τα πιο σημαντικά κεφάλαια των Μαθηματικών αφού αντικατοπτρίζουν την ίδια την καθημερινότητά μας και κάνουν την ζωή μας πιο εύκολη. Υπάρχουν όμως και αντίμαχοι αυτής της άποψης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο Grof (1992) ο οποίος υποστήριξε ότι τα κλάσματα δεν έχουν προέκταση στην καθημερινή ζωή των μαθητών και κατά συνέπεια η διδασκαλία τους δεν είναι απαραίτητη. Η πλειονότητα όμως των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι τα κλάσματα αποτελούν τη βάση για την εκμάθηση των Μαθηματικών επειδή απαιτούν μία εμβάθυνση στους αριθμούς και τις πράξεις μεταξύ αυτών. Τα κλάσματα αποτελούν ένα βασικό εργαλείο με το οποίο μπορεί κανείς να κατακτήσει όχι μόνο τα απλά μαθηματικά που διδάσκονται στην πρώτη και την δεύτερη βαθμίδα της εκπαίδευσης αλλά και στην τριτοβάθμια (Sieger et al., 2012).

Από μελέτες όμως, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού δυσκολεύεται με τα κλάσματα και αυτό ακολουθεί και τις μεγαλύτερες τάξεις του Λυκείου εφόσον η μη κατανόησή τους από τα πρώτα χρόνια δημιουργεί μαθησιακά κενά, τα οποία είναι δύσκολο να αναπληρωθούν για πολλούς λόγους. Ο όγκος της πληροφορίας που δέχεται ο μαθητής σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες είναι μεγάλος και η διδασκαλία των ρητών είναι συχνά ανεπαρκής αν σκεφτεί κανείς την περιπλοκότητα του περιεχομένου τους.

3.8 Το πρόβλημα μη επαρκούς γνώσης και εμβάθυνσης στους ρητούς αριθμούς από την πλευρά των εκπαιδευτικών

Ένας παράγοντας που καταστέλλει την αποτελεσματική διδασκαλία των ρητών αριθμών είναι η μη κατανόησή τους σε βάθος από την πλευρά των καθηγητών και των δασκάλων (Park et al., 2012). Θα ήταν καλό οι δάσκαλοι να εκπαιδεύονται σε σχέση με την διδασκαλία των ρητών και να ελέγχεται η γνώση τους και η αποτελεσματικότητα της δουλειάς τους. Οι Hill et al. (2005) τόνισαν ότι τα εφόδια που θα αποκτήσουν οι μαθητές κατά την εκπαιδευτική διαδικασία είναι άμεσα συνδεδεμένα με τη γνωστική βάση που έχουν οι εκπαιδευτικοί.

Το κύριο πρόβλημα έγκειται στους στόχους που θέτει η εκπαιδευτική κοινότητα μέσα στο πέρασμα των χρόνων. Παλαιότερα, και ιδιαίτερα πριν το 1970, η εκπαιδευτική κοινότητα μελετούσε την ύλη που θα πρέπει να διδαχθεί στα σχολικά χρόνια ώστε τα παιδιά να αποκτήσουν τις βάσεις για τη μετέπειτα ζωή τους. Πλέον, εστιάζει όχι μόνο στην ποσότητα και το είδος της διδακτέας ύλης αλλά και στον τρόπο με τον οποίο φτάνει η πληροφορία στον μαθητή. Έτσι έχουν αναπτυχθεί πολλές εκπαιδευτικές μέθοδοι που έχουν δοκιμαστεί σε ομάδες μαθητών για να ελεγχθεί η αποδοτικότητά τους. Αυτό που δεν έχει συμβεί μέχρι τώρα στα σχολικά έτη είναι η μεταδοτικότητα των υπάρχοντων εκπαιδευτικών και οι γνώσεις που διαθέτουν σχετικά με τα διδασκόμενα μαθήματα. Επομένως τα τελευταία πενήντα χρόνια γίνονται επιστάμενες μελέτες για τις βάσεις που πρέπει να έχει ο καθηγητής ή δάσκαλος ώστε να είναι σε θέση να εξηγήσει και να μεταλαμπαδεύσει τις γνώσεις του στα παιδιά. Κάπως έτσι αναπτύχθηκε ένας νέος όρος που καλείται “Μαθηματικά για τη διδασκαλία” (Renert et al., 2010). Ο εν λόγω όρος αναφέρεται στις μεθόδους και τις σχέσεις που εμπεριέχονται στη διδασκαλία και το μάθημα των Μαθηματικών.

O Schulman (1986) ύστερα από πολυετείς μελέτες σχετικά με τη βελτίωση στη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου θέματος, διέκρινε κάποιους δασκάλους οι οποίοι είχαν αποκτήσει την ικανότητα να μεταδίδουν τη γνώση τους και την εμπειρία τους επάνω στο διδασκόμενο αντικείμενο. Διαχωρίζοντας τη λογική κατανόηση, την οποία ήταν απαραίτητο να διαθέτει ένας επιστήμονας, από την ψυχολογική κατανόηση που έπρεπε να κατέχει ένας δάσκαλος κατέληξε ότι υπάρχουν τρεις τύποι γνώσης που είναι αποτέλεσμα της αποδοτικής διδασκαλίας. Ο πρώτος τρόπος εμπεριέχει την ίδια τη γνώση των γεγονότων και των εννοιών του εξεταζόμενου θέματος. Ο δεύτερος τρόπος σχετίζεται με τον βαθμό στον οποίο ο δάσκαλος είναι γνώστης του αντικειμένου και της ύλης που διδάσκει. Η τρίτη μέθοδος, ίσως και η σημαντικότερη όλων συνδέεται με την παιδαγωγική μέθοδο διδασκαλίας. Οι τρεις αυτές μέθοδοι θα πρέπει να λαμβάνονται σαν μία, και να αποτελούν μία νοητή αλυσίδα η οποία αν σπάσει, η διδασκαλία θα πάσχει και δεν θα είναι το ίδιο αποδοτική.

Σε μία σύγκριση που είχε γίνει μεταξύ μιας ομάδας καθηγητών Μαθηματικών που κατάγονταν από την Αμερική και μιας άλλης ομάδας που κατάγονταν από την Κίνα, φάνηκε ότι η δεύτερη ομάδα είχε βαθύτερη γνώση του αντικειμένου παρότι η εμπειρία της ήταν μικρότερης χρονικής διάρκειας.

Οι δάσκαλοι που γνωρίζουν σε βάθος τα βασικά μαθηματικά, μπορούν με άνεση να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούν στον λόγο που προκύπτει ή εφαρμόζεται κάποιος αλγόριθμος. Επιπλέον έχουν την ικανότητα να εφευρίσκουν πολλούς τρόπους επεξήγησης της ίδιας έννοιας και να αποδεικνύουν τους ισχυρισμούς τους. Μπορούν να συνδυάζουν την παλιά και τη νέα γνώση αρμονικά και να μεταβαίνουν ομαλά από την παράθεση μιας πληροφορίας σε μία άλλη. Μπορούν επίσης να συσχετίζουν τις πληροφορίες χωρίς να τις συγχέουν και να απαντούν σε ερωτήματα που έχουν τεθεί από τα παιδιά ή και από ερευνητές με άνεση. Παράλληλα μπορούν να θέτουν ερευνητικά ερωτήματα για μετέπειτα αναζήτηση και επίλυση προβλημάτων. Συμπερασματικά η δουλειά των καθηγητών Μαθηματικών και τα ίδια τα Μαθηματικά σαν περιεχόμενο είναι αλληλένδετα με την διδασκαλία των Μαθηματικών.

Το περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης μελέτησαν οι Davis et al. (2010), οι οποίοι διαχώρισαν τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε τρία σκέλη, τη μετάδοση της πληροφορίας, την συλλογιστική και τον ενστερνισμό της. Για να είναι εφικτή η ορθή διδασκαλία, οι δάσκαλοι θα πρέπει να είναι γνώστες υψηλότερου επιπέδου μαθηματικών από τα διδασκόμενα ώστε να ανάγουν την πληροφορία στην πράξη. Θα πρέπει να γνωρίζουν εκτός των βασικών μαθηματικών που διδάσκονται στα σχολεία και τα ανώτερα μαθηματικά. Θα πρέπει να εκμεταλλεύονται την καθημερινή τους τριβή με το αντικείμενο ώστε να μπορούν να φέρουν την πληροφορία στον ακροατή σαν μία γνώριμη έννοια και να μειώσουν τον βαθμό δυσκολίας που ίσως να εμπεριέχει. Οι Μαθηματικοί πρέπει συνεχώς να επιμορφώνονται και να αναζητούν νέους τρόπους εκπαίδευσης ώστε να βελτιώνονται οι ίδιοι και να γίνεται πιο αποδοτικό το έργο τους. Ταυτόχρονα θα πρέπει να είναι ευέλικτοι ως προς τους μαθητές και ευπροσάρμοστοι στα νέα δεδομένα της κοινωνίας ώστε να προσαρμόζουν τα δεδομένα των μαθηματικών με την εξέλιξη της κοινωνίας.

Η ισχύς της διδασκαλίας των μαθηματικών αποδεδειγμένα αυξάνεται με τη χρήση της ενέργειας, δηλαδή με την ενεργό εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, με τη δημιουργία εικόνας που θα παραπέμπει στη διδακτέα έννοια, με τη χρήση των συνήθων συμβολισμών αλλά και πιο εξειδικευμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Πολλά παιδιά και ενήλικες δυσκολεύονται στον χειρισμό των ρητών αριθμών. Η σειρά με την οποία διδάσκονται τα παιδιά τους ρητούς αριθμούς είναι σχεδόν ίδια σε όλες τις χώρες. Πρώτα διδάσκονται τα κλάσματα, μετά οι δεκαδικοί και στο τέλος τα ποσοστά. Τα τελευταία χρόνια όμως έχουν γίνει διάφορες μελέτες οι οποίες οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η εκμάθηση των δεκαδικών αριθμών είναι πιο εύκολη από τα κλάσματα, επομένως αυτοί θα έπρεπε να διδάσκονται πρώτοι. Η διδασκαλία αυτών θα μπορούσε να αποδώσει θετικά αποτελέσματα στην κατανόηση των κλασμάτων και των ρητών αριθμών γενικότερα.

Αυτό δεν συνεπάγεται ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι εύκολοι, αλλά μόνο ότι είναι λιγότερο δύσκολοι από τα κλάσματα.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν παρόμοια δυσκολία στην κατανόηση του κλάσματος και των δεκαδικών μεγεθών, της αριθμητικής και της πυκνότητας, καθώς και με τη μετάβαση από τον ένα συμβολισμό στον άλλο. Αντίστοιχες μελέτες έχουν γίνει και για τα ποσοστά αλλά επειδή ήταν ελάχιστες δεν μπορεί να εξαχθεί ένα ξεκάθαρο συμπέρασμα.

4.1 Η μέθοδος με την οποία γίνεται η εμπέδωση των ρητών αριθμών στα παιδιά

Η βαθιά γνώση των ρητών αριθμών είναι αποτέλεσμα συνδέσεων που αφορούν σε δομές, αναπαραστάσεις, σε διαδικασίες και κατασκευές (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Carpenter & Fennema, 1991). Για τη δημιουργία των δομών θα πρέπει να «χτιστούν» πρώτα οι βασικές γνώσεις (Carpenter & Fennema, 1991). Οι βασικές γνώσεις αποκτώνται από τη διδασκαλία στα πλαίσια των σχολικών μαθημάτων, μέσω των διαισθητικών γνώσεων που δεν γνωρίζει κανείς από που προέρχονται ακριβώς, και από τις εμπειρίες εκτός σχολείου, της αλληλεπίδρασης με τους παράγοντες σε μια κοινωνία και τις διάφορες δραστηριότητες. Η διαισθητική γνώση είναι η γνώση που λαμβάνεται από τα παιδιά μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με το περιβάλλον (Cobb, Yackel, & Wood, 1991). Συχνά οι δάσκαλοι στηρίζονται στο ένστικτο των μαθητών για να επεξηγήσουν κάτι και να βοηθήσουν τα παιδιά να δομήσουν την δική τους γνώση.

4.2 Τα επίπεδα της γνώσης στα παιδιά και η σύνδεση αυτών με τους ρητούς

Η γνώση διακρίνεται σε τρία επίπεδα, τη φυσική γνώση, τη λογική και τη λογικο-μαθηματική. Στην προσχολική ηλικία η λογική των παιδιών στηρίζεται κυρίως στο ένστικτο. Αν θέλουμε να τους εξηγήσουμε τις ισοδύναμες ποσότητες, θα μπορούσαμε για παράδειγμα να χρησιμοποιήσουμε μία τούρτα στην οποία θα κοπούν ίσα κομμάτια. Εδώ η ποσοτικοποίηση και η έκφραση σε κλάσματα δεν είναι απαραίτητη.

Αργότερα όταν τα παιδιά περνούν στη σχολική ηλικία, η εμπειρική γνώση θα πρέπει να πάρει την μορφή συμβόλων. Το πρόβλημα είναι ότι σε αυτή τη φάση ο μαθητής θα πρέπει να μάθει να χρησιμοποιεί τα κλάσματα αλλά και να τα ερμηνεύει με έναν δικό του τρόπο. Έτσι ενώ θα μπορούσαν να διδαχθούν στα παιδιά τα ισοδύναμα κλάσματα, είναι προτιμότερο να παρατηρήσουν μόνα τους τις αναλογίες που υπάρχουν στη φύση και σε διάφορα προβλήματα για να δομήσουν τη δική τους ερμηνεία και τους δικούς τους αλγορίθμους.

Αν στα παιδιά δοθούν τα προβλήματα χωρίς να διδαχθεί ο αλγόριθμος, δηλαδή η μέθοδος επίλυσης, τότε το όφελος που προκύπτει είναι πολλαπλό. Τα παιδιά μαθαίνουν να χρησιμοποιούν το ένστικτό τους και να δομούν τη διαισθητική τους γνώση, διευρύνοντας τον τρόπο σκέψη τους και την ταχύτητα επεξεργασίας της πληροφορίας που δέχονται (Kamii & Warrington, 1999). Οι πρώτες έννοιες που μπορούν να εκτιμήσουν τα παιδιά είναι η σύγκριση ποσοτήτων και οι αναλογίες που προκύπτουν από αυτή, οι μεταβολές των ποσοτήτων και η ιδέα ότι το όλο αποτελείται από επιμέρους τμήματα τα οποία όταν ενωθούν δημιουργούν και πάλι το όλο. Αυτές είναι οι πρώτες μετρήσεις με τις οποίες έρχεται σε επαφή. Στην ηλικία των 2 περίπου τα παιδιά μαθαίνουν να αντιστοιχούν τα μεγέθη συγκρίνοντας τα πάντα με άλλα. Αυτό που κατανοούν σίγουρα είναι ότι τα μεγάλα αντικείμενα ταιριάζουν στα εξίσου μεγάλα αντικείμενα και το αντίστροφο (Resnick et al., 1989). Οι μαθητές προσχολικής ηλικίας μαθαίνουν την έννοια του όλου και των κλασμάτων του μέσα από τον ίσο διαμοιρασμό ποσοτήτων και μέσω του διαχωρισμού. Η παραπάνω παρατήρηση είναι η πρώτη ένδειξη εκμάθησης των κλασμάτων σε μικρή ηλικία.

Δυστυχώς όμως καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν, η εμπειρική μάθηση δεν επιδιώκεται από τα σχολεία. Οι δάσκαλοι δεν αναζητούν νέους τρόπους, όπως δραστηριότητες ή διαδραστικά παιχνίδια ή γενικότερα έκθεση των παιδιών σε πραγματικά προβλήματα. Όσο τα παιδιά ωριμάζουν, η σχέση τους με τους ρητούς δε βελτιώνεται. Αντίθετα παρουσιάζει πολλά προβλήματα αφού συνεχώς προστίθεται πληροφορία που δεν βρίσκει κάποια εφαρμογή. Κάθε πληροφορία διδάσκεται απομονωμένη από τις άλλες και η αλληλεπίδραση αυτής με τον κόσμο δεν συζητείται. Ιδιαίτερα τα παιδιά του Γυμνασίου βλέπουν κάθε δομή σαν ξεχωριστή με διαφορετικές ιδιότητες (Lamon, 2007; Murray, Olivier, & Human, 1996).

4.3 Λόγοι για τους οποίους παρουσιάζεται δυσκολία στην αφομοίωση των ρητών

Μία άλλη αιτία για την οποία το σύνολο των ρητών αριθμών είναι περίπλοκο είναι επειδή για τις περισσότερες δομές των ρητών αριθμών απαιτούνται δύο αριθμοί οι οποίοι λογίζονται τελικά σαν ένας ολόκληρος αριθμός με στοιχεία συσχετιζόμενα. Η έννοια του μέρους και του όλου, ουσιαστικά σημαίνει ότι σε έναν ρητό, ο οποίος μπορεί να εκφραστεί σαν ένα κλάσμα, υπάρχουν δύο στοιχεία, το ένα καλείται αριθμητής και εκφράζει το μέρος, το τμήμα δηλαδή που λαμβάνουμε από το κλάσμα, ενώ το άλλο στοιχείο λέγεται παρονομαστής και αποτελεί το όλο του κλάσματος. Το κλάσμα δε, αποτελείται από μία διαχωριστική οριζόντια γραμμή, πάνω από την οποία τοποθετείται ο αριθμητής και κάτω από την οποία βρίσκεται ο παρονομαστής. Για τη δημιουργία του ρητού ως τελεστή χρησιμοποιείται η έννοια της ευκλείδειας διαίρεσης. Η ευκλείδεια διαίρεση είναι μία ταυτότητα όπου ένας αριθμός, ο διαιρετέος, εκφράζεται συναρτήσει τριών άλλων αριθμών, του διαιρέτη, ο οποίος διαιρεί τον διαιρετέο, του πηλίκου, που είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης και του υπολοίπου.

$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$,

Όπου Δ=Διαιρετέος, δ=διαιρέτης, π=πηλίκο και υ=υπόλοιπο.

Για την έκφραση του ρητού σαν έναν λόγο χρησιμοποιούνται δύο αριθμοί οι οποίοι αναπαριστούν διαφορετικές ποσότητες που συγκρίνονται. Όσον αφορά το πηλίκο, πρόκειται για δύο αριθμούς που διαιρούνται. Η μόνη περίπτωση στην οποία ο μαθητής θα εκλάβει τον ρητό αριθμό ως ένα στοιχείο είναι όταν θα τον εκφράσει σαν μέτρο. Το μέτρο θα αναπαρίσταται σαν η απόσταση της θέσης ενός αριθμού από την αρχή των αξόνων, αν ο ρητός αριθμός αναπαρασταθεί σε έναν άξονα.

Όπως είπαμε η περιπλοκότητα έγκειται στη σχέση που παράγεται μεταξύ των αριθμών του λόγου και στο πως αυτή η σχέση μπορεί να έχει αντίκτυπο στο πρόβλημα και στη διαδικασία επίλυσης αυτού. Αν δοθεί ένα απλό πρόβλημα όπου θα δίνονται τα πλήθη δύο ομάδων, αυτά θα μπορούσαν να συγκριθούν το ένα ως προς το άλλο δημιουργώντας ένα κλάσμα, ή θα μπορούσαν να αντιστοιχηθούν σε κλάσματα και να εκφράσουν το μέρος του συνόλου και ύστερα να αποδοθούν και σε ποσοστά επί τοις εκατό ή σε δεκαδικούς αριθμούς. Για να υπολογιστεί το κλάσμα του πληθυσμού της κάθε ομάδας θα πρέπει να διαιρεθεί το πλήθος της αντίστοιχης ομάδας με το συνολικό άθροισμα του πλήθους και των δύο ομάδων. Έπειτα για την έκφραση σε ποσοστό επί τοις 100, πολλαπλασιάζεται κάθε κλάσμα με το 100, και τέλος για να υπολογιστούν τα κλάσματα ως δεκαδικοί αριθμοί πρέπει να πραγματοποιηθεί η διαίρεση μεταξύ του αριθμητή και του παρονομαστή των κλασμάτων.

Οι μαθητές που αντιλαμβάνονται το κλάσμα σαν δύο αριθμούς συνήθως αντιμετωπίζουν πρόβλημα στη διαχείρισή τους εξαιτίας της ελλιπούς πρώτης γνώσης που έλαβαν σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς (π.χ. ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών οδηγεί σε αποτέλεσμα με μεγαλύτερο αριθμό). Για να μπορέσουν λοιπόν να κατανοήσουν την έννοια του ρητού, θα πρέπει να έχουν μία ξεκάθαρη εικόνα για το ρόλο που διαδραματίζουν οι δύο αριθμοί του κλάσματος. Μόνο έτσι θα μπορέσει να γίνει ομαλά η μετάβαση στην ιδέα ότι ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων θα μπορούσε να έχει σαν αποτέλεσμα αριθμό είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο από τους αρχικούς παράγοντες (Hecht, Vagi, & Torgesen, 2007). Μία επιπρόσθετη δυσκολία είναι οι διαφορετικοί συμβολισμοί των ρητών όπως αναφέρθηκε πιο πριν (Hecht, Vagi, & Torgesen, 2007).

Τα παιδιά εκ φύσεως οπτικοποιούν οποιοδήποτε πρόβλημα ώστε να το λύσουν. Σε πρώτο επίπεδο το αναπαριστούν με εικόνες στο μυαλό τους και ακολούθως έχοντας τη γνώση των συμβόλων και των πράξεων προσπαθούν να το αποδώσουν με μαθηματικές εκφράσεις, κατά βάση όμως χρησιμοποιούν τη διαισθητική τους ικανότητα που έρχεται μέσα από την εμπειρική γνώση και την αλληλεπίδραση με τους περιβαλλοντικούς παράγοντες (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007). Εφόσον ο κάθε μαθητής έχει μεταφράσει τους ρητούς σαν μία εικόνα στο μυαλό του, και ο κάθε μαθητής έχει δημιουργήσει διαφορετικές εικόνες προσαρμοσμένες στις δικές του εμπειρίες και τον δικό του τρόπο αντίληψης, το περιεχόμενο των αναπαραστάσεων των ρητών που θα διδάσκονται θα πρέπει να συσχετίζεται με πραγματικές αναπαραστάσεις με τις οποίες ο μαθητής έχει ήδη έρθει σε επαφή (Ball, 1993; Saxe, Taylor, McIntosh, & Gearhart, 2005; Streefland, 1993). Οι διαφορετικές εικόνες και οι χειρισμοί των αριθμών θα μπορούσαν να βοηθήσουν έναν μαθητή που δεν μπορεί να οπτικοποιήσει τα κλάσματα, να παράγει εικόνες και να κατανοήσει την έννοια του ρητού (Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985; Chick, Tierney, & Storeygard, 2007).

Συχνά οι μαθητές δεν έχουν αποκτήσει τη δεξιότητα να χρησιμοποιούν χειρισμούς σαν ένα εργαλείο επίλυσης προβλημάτων με ρητούς, ή δε γνωρίζουν πως να παραστήσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα μέρη ενός προβλήματος με ειδικούς χειρισμούς, ή μπορεί να μην είναι ικανοί να ελίσσονται μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Η συνέπεια αυτών είναι να υπάρχουν λανθασμένες αντιλήψεις σε σχέση με τους ρητούς (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; McNeil, Uttal, Jarvin, & Sternberg, 2009; Taube, 1997).

Συμβαίνει επίσης, ακόμη και οι δάσκαλοι κάνουν λάθη αναπαράστασης των ρητών και οδηγούνται σε λάθος αποτελέσματα (L. Ma, 1999).

Σε μία ομάδα ατόμων που ήταν μέρη ενός πιλοτικού προγράμματος, τα παιδιά μπορούσαν να αντιληφθούν τους ρητούς σαν μέρη μιας κυκλικής περιοχής, δε μπορούσαν όμως να μεταβούν από αυτή την απεικόνιση στην εφαρμογή αλγεβρικών πράξεων μεταξύ των κλασμάτων (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983).

Οι μαθητές δεν έχουν συχνά την ικανότητα να αναπαριστούν τους ρητούς ως κλάσματα, δεκαδικούς, πηλίκα ή ποσοστά, έτσι δεν μπορούν και να κάνουν πράξεις μεταξύ αυτών ή να τους τοποθετούν σε μία σειρά σε άξονα (Izsak, Tillema, & Tunc-Pekkan, 2008; Martinie & Bay-Williams, 2003; Mewborn, 1998; Ni, 2000).

Ωστόσο οι μαθητές που είχαν ενστερνιστεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των ρητών είχαν μεγάλη ευχέρεια στο να εναλλάσσουν τις αναπαραστάσεις τους ώστε να υπολογίζουν τα κλάσματα αριθμών, ακόμη και στην περίπτωση που σε πείραμα ζητήθηκε από τα παιδιά να βρουν τα δύο τέταρτα μιας γραμμής που ήταν χωρισμένη σε τρία ίσα κομμάτια (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983).

Η χρήση στρογγυλής ή ορθογώνιας τροφής, ειδικά όταν θέλουμε να διαχωρίσουμε μία ολόκληρη ποσότητα σε ίσα τμήματα, χρησιμοποιείται από όλους τους εκπαιδευτικούς και είναι ένας τρόπος να αξιοποιηθεί η γνώση του μαθητή. Παρότι οι αναπαραστάσεις σε κύκλο χρησιμοποιούνται συχνά γιατί θεωρούνται ως ένα από τα πιο απλά απεικονιστικά μέσα, είναι πολύ περίπλοκες δεδομένου ότι η χρήση γεωμετρικής περιοχής με ισοδύναμα κλάσματα απαιτεί τόσο συνδυαστική σκέψη όσο και ικανότητα διατήρησης του συνόλου και των τμημάτων.

Σε μία μελέτη που έγινε σε μαθητές της πέμπτης και της έκτης τάξης, μόνο το 44% των μαθητών της πέμπτης και το 51% των μαθητών της έκτης τάξης συμφώνησαν ότι ½ κομμάτια από δύο ισοδύναμα ορθογώνια ήταν τα ίδια, όταν κόπηκαν σε τρίγωνα και το άλλο κόπηκε σε ορθογώνια (Kamii & Clark, 1995). Η έννοια του μέτρου είναι από τις πιο δυσνόητες για τους μαθητές, αφού η μόνη προηγούμενη εμπειρία των παιδιών με τη μέτρηση είναι με μεζούρα ή με χάρακα

(Marshall, 1993). Χρησιμοποιώντας την εμπειρική και διαισθητική τους γνώση, για να αποφανθούν ποιος αριθμός έχει μεγαλύτερο μέτρο, τον ανάγουν σε ολόκληρο.

Οι μαθητές συχνά συγχέουν τις έννοιες του μεγέθους, δηλαδή του μέτρου ενός αριθμού και της ποσότητας καθώς προσπαθούν να βρουν τη σειρά των ρητών αριθμών (Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985). Κάποιες από τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι φοιτητές για να συγκρίνουν τους ρητούς αριθμούς ήταν να συγκρίνουν τους αριθμητές και παρονομαστές, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις αγνοήθηκε ένας υπέρ του άλλου. Άλλες μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν λανθασμένα ήταν ο ορισμός ενός νέου σημείου αναφοράς, η χρήση κλασμάτων και η χρήση της έννοιας του όλου ενός αριθμού (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984).

Ένας τρόπος να ξεπεραστούν κάποια από τα προβλήματα είναι να γίνεται πάντα η σύγκριση των κλασμάτων με τη μονάδα. Η χρήση της μονάδας σαν μέτρο σύγκρισης των αριθμών επιτρέπει στους μαθητές να συνδέσουν την έννοια της μέτρησης με την έννοια του μέρους και του όλου ενός αριθμού (Larson, 1980), ωστόσο παρέχει νέες πληροφορίες για τις δομές και τις πράξεις μεταξύ των κλασμάτων.

Σε πείραμα που έγινε το οποίο περιείχε μη τυπικά προβλήματα, δύο ομάδες μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου διδάχθηκαν κλάσματα αναπαριστώντας τα σε έναν άξονα και ερμηνεύοντας τα με την απεικόνισή τους σε κυκλικό δίσκο αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά που διδάχθηκαν τους ρητούς επάνω σε άξονα είχαν καλύτερη απόδοση από τα παιδιά που έμαθαν να αναπαριστούν τους ρητούς σε κύκλο (Keijzer & Terwel, 2003). Η χρήση του άξονα τιμών και των γραμμών κλάσματος έδωσε στους μαθητές του Γυμνασίου την ικανότητα να αναγνωρίζουν τα κλάσματα ως αριθμούς ενώ παράλληλα χτίζουν τη μαθηματική τους γλώσσα συμπεριλαμβάνοντας πολλούς συμβολισμούς (Darley, 2005).

Ωστόσο, οι μαθητές που δεν είχαν συνδέσει την έννοια του τμήματος ενός αριθμού με ολόκληρο τον αριθμό δε μπορούσαν να διαχωρίσουν σε ίσα τμήματα ένα ευθύγραμμο τμήμα επάνω σε έναν άξονα και να λάβουν τα μέρη που υπαγορεύει το δοσμένο κλάσμα (Saxe, Shaughnessy, Shannon, Langer-Osuna, Chinn, & Gearhart, 2007). Η σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων και η δυνατότητα των μαθητών να μεταβαίνουν από τη μία στην άλλη μορφή δεν περιορίζεται μόνο στο σύνολο των ρητών αριθμών ή στην έννοια της αναλογίας. Οι μαθητές επωφελούνται από την γνώση των ρητών αφού αυτοί εφαρμόζονται σε πολλές άλλες περιπτώσεις που έχουν σχέση είτε με τα μαθηματικά είτε με άλλες επιστήμες. Για παράδειγμα η έννοια του κλάσματος χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά και την Φυσική, στον υπολογισμό της κλίσης, της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, της επιτάχυνσης στην ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, της δύναμης που ισοδυναμεί με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής, της ροπής που ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κ.α.

Εκτός από τους τομείς των θετικών επιστημών, υπάρχουν και πολλοί άλλοι τομείς που χρησιμοποιούν την έννοια του ρυθμού μεταβολής, τέτοιοι αφορούν σε οικονομικές επιστήμες και τραπεζικά συστήματα (Wilhelm & Confrey, 2003). Ο Darley (2005) παρατήρησε ότι οι μαθητές κατά την έναρξη των μαθημάτων της Άλγεβρας συγχέουν τους ρητούς αριθμούς με τις ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

Μία επιπλέον επιβεβαίωση της δυσκολίας στην εφαρμογή των ρητών στα Μαθηματικά και σε άλλες επιστήμες είναι ότι ακόμη και μαθητές που είναι άριστοι, δε μπορούν εύκολα να πραγματοποιήσουν υπολογισμούς με ρητούς. Αν το μάθημα της Άλγεβρας έχει συγκεκριμένη δομή που παρουσιάζει τα κλάσματα σαν μέσο επίλυσης προβλημάτων και παραθέτει διάφορες μεθόδους, τότε τα παιδιά αποκτούν την ικανότητα χειρισμού των ρητών σε μορφή κλασμάτων.

Παράλληλα ύστερα από τις πολλαπλές εφαρμογές τα παιδιά απέκτησαν τη δεξιότητα να απλοποιούν παραστάσεις ή μεταβλητές που περιέχουν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις. Η έκθεση των μαθητών σε οικονομικά προβλήματα και αγορές μπορεί να ενισχύει την διαισθητική ικανότητα των παιδιών και να χτίζει τη γνώση τους επάνω στο αντικείμενο. Η διαισθητική ικανότητα όμως δεν βοηθάει όταν συγκρίνουμε δύο αριθμούς με διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Οι μαθητές πρέπει να έχουν την γνώση να προσθέσουν το ψηφίο 0 στον δεκαδικό με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία, ώστε να εξισωθεί το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων των δύο αριθμών και να μπορεί να γίνει αφαίρεση μεταξύ τους. Οι Steinle και Stacey (2004) παρατήρησαν ότι η χρήση των χρημάτων βοηθούσε τα παιδιά στην επίλυση των προβλημάτων με ρητούς, η διαχείριση όμως δεκαδικών που είχαν κάποια κοινά ψηφία ήταν αρκετά περίπλοκη. Οι Moloney και Stacey (1997) διαπίστωσαν ότι κατά τη διάρκεια των χρόνων και καθώς τα παιδιά αποκτούσαν καλύτερα γνώση των χρημάτων, το γεγονός αυτό ήταν ανεξάρτητο με την απόδοσή τους στα κλάσματα ή τους δεκαδικούς αριθμούς.

Όταν ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν με ποσοστά γραμμοσκιασμένες περιοχές σε περιοχές συνεχών τιμών δεν αποδίδουν τόσο καλά όσο αν τους δοθεί κυκλικός δίσκος (Gay & Aichele, 1997), αναδεικνύοντας την ανάγκη ικανότητας της μετάβασης από έναν συμβολισμό σε έναν άλλο. Με βάση τη διαισθητική γνώση, τα παιδιά μπορούν να διαχωρίσουν μία πίτσα σε ίσα κομμάτια και να συγκρίνουν ποσότητες και αναλογίες μεταξύ των ατόμων (Lamon, 2007). Ο Lamon (1993) διαπίστωσε ότι παιδιά της έκτης Δημοτικού μετέφραζαν τα κλάσματα σε μονάδες και μπορούσαν να λύσουν προβλήματα αναλογιών, πολλαπλασιάζοντας με τον κατάλληλο συντελεστή.

Οι BayWilliams και Martinie (2003) παρατήρησαν ότι οι μαθητές πέμπτης και έκτης τάξης Δημοτικού μπορούσαν να διατάξουν σε μία σειρά κάποια κλάσματα συγκρίνοντάς τα με ένα άλλο κλάσμα αναφοράς και μεταβαίνοντας από τον συμβολισμό των κλασμάτων στο συμβολισμό των δεκαδικών αριθμών. Ο D'Ambrosio και ο Mewborn (1994) παρατήρησαν ότι οι μαθητές εξήγησαν ότι καθόρισαν τα κλάσματα ως επαναλήψεις μονάδων κλασμάτων χρησιμοποιώντας τη γνώση ολόκληρου ενός αριθμού και έναν άξονα στον οποίο τοποθετούνταν. Ωστόσο οι μαθητές αυτοί δε μπορούσαν να μεταβούν μεταξύ οπτικών αναπαραστάσεων.

Η ίδια ομάδα μαθητών, όταν ρωτήθηκε ποιο είναι το 1/3 του αριθμού 24, η απάντηση που έδωσαν στην πλειοψηφία τους ήταν 8/24. Έτσι ενώ οι μαθητές είχαν κατανοήσει την ισοδυναμία μεταξύ του αριθμού και του κλάσματος δεν είχαν καταλάβει σε ποια έννοια αντιστοιχεί ο κάθε αριθμός. Η έννοια του όλου και του μέρους δεν είχαν αφομοιωθεί με το σωστό τρόπο. Με τον ίδιο τρόπο συχνά γίνονται παρεξηγήσεις μεταξύ των συγκρίσεων αριθμών και των αναλογιών που τους διέπουν. Ύστερα χρησιμοποιώντας την έννοια της κλίμακας ζητήθηκε να μεταβάλουν το μέγεθος μιας εικόνας. Όταν οι μαθητές έκαναν μεγέθυνση χρησιμοποιώντας την πράξη της πρόσθεσης, τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικά. Αντίθετα όταν έπρεπε να πολλαπλασιάσουν με έναν λόγο, δεν μπορούσαν να διαχειριστούν τη λογική ή τις πράξεις. Όταν ο συντελεστής της κλίμακας απαιτούσε πολλαπλασιασμό με κλάσμα, αυτοί οι μαθητές προσπάθησαν να βρουν διεξοδικές μεθόδους επίλυσης χρησιμοποιώντας την πράξη της πρόσθεσης η οποία δεν άρμοζε στη λογική του προβλήματος. Παρότι οι μαθητές είχαν επίγνωση του λανθασμένου αποτελέσματος, δεν μπορούσαν να καταλάβουν ότι ευθυνόταν η μεθοδολογία τους. Εντούτοις οι μαθητές αυτοί είχαν διδαχθεί την έννοια του κλάσματος και τις πράξεις μεταξύ αυτών (Hart, 1988). Οι Riddle και Rodzwell (2000) υποστηρίζουν ότι καθώς περνούν τα χρόνια και το άτομο φτάνει στην ενηλικίωση, η ικανότητα διαίσθησης στα μαθηματικά εξαλείφεται.

Όταν οι μαθητές βρίσκονταν στις εκπαιδευτικές βαθμίδες από το νηπιαγωγείο έως και την 6η τάξη του Δημοτικού σχολείου, μπορούσαν να δημιουργήσουν τη δική τους πρωτότυπη στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος $2 + ½ + ¾$. Μεγαλύτεροι μαθητές δεν μπορούσαν να επιλύσουν όμοιο πρόβλημα αφού είχαν μάθει να επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας αλγορίθμους, κοινώς μεθοδολογίες. Αν όμως στις μεθοδολογίες έλειπε η κατανόηση μιας έννοιας, η επίλυση γινόταν ανέφικτη. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά προσέθεσαν πρώτα τα δύο κλάσματα για να φτιάξουν ένα σύνολο και ύστερα πρόσθεσαν αυτό στον ακέραιο αριθμό (Riddle & Rodzwell, 2000). Οι μαθητές που παρακολουθούσαν πιλοτικά προγράμματα εκμάθησης της Άλγεβρας, χρησιμοποιούσαν κυρίως την οπτικοποίηση των κλασμάτων και την έννοια του διαχωρισμού του κύκλου ώστε να βρουν το αποτέλεσμα, που συνήθως ήταν ικανοποιητικό (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983).

Οι μαθητές, εξαιτίας της δόμησης της ύλης στα σχολεία, δεν αναπτύσσουν διαδοχικά αριθμητικές γνώσεις, αλλά μετακινούνται σε ένα φάσμα γνώσεων κινούμενοι εμπρός και πίσω, ξεκινώντας από τα κλάσματα, που ο μαθητής μεταφράζει στο νου του με εικόνες και εργαλεία σκέψης (τέτοιες είναι η διαισθητική και η άτυπη γνώση), μεταβαίνοντας από μία μορφή αναπαράστασης σε άλλη χωρίς να λαμβάνουν ολοκληρωμένες γνώσεις για τους ρητούς αριθμούς. Οι μαθητές έχουν την τάση σε μικρές ηλικίες να αποτυπώνουν σε εικόνες τους αριθμούς. Θα πρέπει λοιπόν να καταλάβουμε ότι οι μαθητές πρέπει να διδάσκονται τους ρητούς με βάση την ηλικία τους και το επίπεδο των γνώσεών τους, είτε αυτό είναι διαισθητικό, είτε εμπειρικό (Kieren, 1993). Ένα μειονέκτημα στην αντίληψη των παιδιών για τις μεθόδους επίλυσης είναι ότι πρέπει να βασιστούν μόνο σε ό,τι έχουν διδαχθεί χωρίς να απαιτείται κάποια καινοτομία ή διαφορετική σκέψη από πλευράς τους. Η γνώση κατά τα παιδιά είναι αυστηρά προκαθορισμένη από το σχολείο και δεν επιτρέπεται η απόκλιση από αυτή (Resnick, 1987).

Επομένως, όταν υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μεταξύ της χρήσης ανεπίσημων στρατηγικών (στρατηγικές που αποκτήθηκαν εκτός σχολείου) και επίσημων στρατηγικών, οι ανεπίσημες στρατηγικές θα έχουν προτεραιότητα για τα παιδιά και ανάλογα βέβαια με τα πλαίσια στα οποία τίθεται το ερώτημα. Τα παιδιά λοιπόν προτίμησαν να τροποποιήσουν τα ποσά τους προκειμένου να εξάγουν το «λογικό» κατά αυτά αποτέλεσμα, σε καμία περίπτωση όμως δεν παραιτήθηκαν από τον τυπικό τρόπο επίλυσης που είχαν διδαχθεί παρά το γεγονός ότι δεν γνώριζαν πως να ελιχθούν από πράξη σε πράξη (Carraher, Carraher, & Schliemann, 1987).

Αν πάρουμε το παράδειγμα μιας ομάδας ανθρώπων που δεν έχει διδαχθεί μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, όπως οι αλιείς στη Βραζιλία, οι οποίοι μπορούν να επιλύσουν πολλά προβλήματα αναλογιών σε σχέση με τα ψάρια, θα καταλάβουμε ότι πολλές φορές η μαθηματική ικανότητα δεν είναι εξαρτώμενη από το γνωστικό υπόβαθρο που παρέχει το σχολείο. Περισσότερο είναι αποτέλεσμα εμπειρικής γνώσης παρά τυπικής γνώσης. Όταν τα ίδια προβλήματα τέθηκαν σε μαθητές της ίδιας κοινότητας, μόνο ένας μαθητής εξ' αυτών χρησιμοποίησε έναν αναλογικό αλγόριθμο που είχε διδαχθεί επισήμως, ενώ άλλος μαθητής χρησιμοποίησε την λανθασμένη στρατηγική της πράξης της πρόσθεσης. Επομένως οι άτυπες γνώσεις των αλιέων ήταν αρκετά βαθιές ώστε να είναι σε θέση να αντιστρέψουν την κατεύθυνση των προβλημάτων που αφορούν τα μεταποιημένα ψάρια και να μεταφέρουν τις γνώσεις τους σε άλλα είδη προβλημάτων που βρίσκονται εκτός της δικής τους εμπειρίας (Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993). Οι δύο παραπάνω δεξιότητες φαίνονται αρκετά δύσκολες για τους μαθητές. Η σύνδεση των διαισθητικών γνώσεων των μαθηματικών με τις γνώσεις του σχολείου αποτελεί ένα μεγάλο και δύσκολο βήμα που θα βοηθούσε τα παιδιά στην κατανόηση εννοιών (Resnick, 1987).

Κατά την διάρκεια του μαθήματος στο σχολείο οι μαθητές συχνά δε μπορούν να συνδυάσουν την τυπική με την άτυπη γνώση, γεγονός που οφείλεται ίσως στον παράγοντα της πίεσης χρόνου ή άλλων αγχωτικών παραγόντων. Για να αποκτήσουν ευχέρεια στους ρητούς θα πρέπει να υπάρξει μία γέφυρα ανάμεσα στην τυπική και άτυπη γνώση τους και να μπορούν να χρησιμοποιούν την κάθε μία ξεχωριστά ή και τις δύο συνδυαστικά ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος (Mack, 1993).

Δεδομένου ότι ο στόχος της εννοιολογικής κατανόησης πρέπει να είναι προσιτός για όλους τους μαθητές, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να χρησιμοποιούν τη σχολική συζήτηση για να καταλάβουν αν οι δέκτες της πληροφορίας έχουν καταφέρει να την αποκωδικοποιήσουν. Με τη συζήτηση οι καθηγητές εξασφαλίζουν ότι τα δεδομένα του προβλήματος έχουν κατανοηθεί και μεταφραστεί έτσι ώστε να μπορεί να γίνει η επεξεργασία αυτών. Επίσης οι μαθητές θα πρέπει να έχουν καταλάβει τα ζητούμενα του προβλήματος και να τα έχουν συνδέσει με απτά παραδείγματα μέσα από δικές τους εμπειρίες. Οι μαθητές πρέπει επίσης να μάθουν όχι μόνο να παρέχουν απάντηση, αλλά να επεξηγούν τον τρόπο έκβασης συμπερασμάτων και τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν (Boaler, 2002).

Ο βαθμός δυσκολίας στη διδασκαλία και εμπέδωση των ρητών αριθμών αυξάνεται εξαιτίας της ποικιλομορφίας των συμβολισμών τους σε δεκαδικούς αριθμούς, ποσοστά και κλάσματα (Hecht, Vagi, & Torgesen, 2007). Τα μαθηματικά προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές τα επιλύουν χρησιμοποιώντας την οπτική τους και τη διαισθητική τους ικανότητα (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007) η οποία είναι αποτέλεσμα πολλών εμπειριών, ενδοσχολικών και εξωσχολικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ

Όπως φαίνεται οι ρητοί αριθμοί είναι αρκετά δύσκολοι ως προς την εκμάθησή τους. Η αντίληψή τους μπορεί να γίνει είτε με την απλή λογική που έχει σαν βάση την διαισθητική ικανότητα του ατόμου, ή την διδασκαλία των μεθόδων με τις οποίες μπορούμε να τους αντιληφθούμε, να τους επεξεργαστούμε και να τους χρησιμοποιήσουμε σε καθημερινές δραστηριότητές μας.

Σύμφωνα με τα έως τώρα δεδομένα, το τμήμα των ρητών αριθμών που πρέπει να διδάσκεται πρώτο είναι τα κλάσματα, ενώ στη συνέχεια πρέπει να διδάσκονται οι δεκαδικοί αριθμοί και τα ποσοστά. Αυτή η σειρά ακολουθείται από τα εκπαιδευτικά συστήματα των περισσότερων χωρών ανά τον κόσμο.

Παρόλα αυτά πολλαπλές μελέτες έχουν δείξει ότι η σειρά διδασκαλίας των ρητών θα ήταν καλύτερο να αλλάξει. Άλλοι προτείνουν να διδάσκονται πρώτα τα ποσοστά και άλλοι να διδάσκονται πρώτα οι δεκαδικοί αριθμοί. Οι περισσότερες μελέτες συμφωνούν ότι η διδασκαλία των ρητών θα πρέπει να διεγείρει τη διαισθητική ικανότητα του ατόμου, η οποία θα ήταν καλό να μπορεί να συνδυαστεί με τις γνωστικές βάσεις που έχουν δομηθεί κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Βέβαια κάτι τέτοιο βρίσκει μεγάλα εμπόδια στην εφαρμογή του καθώς αφότου το άτομο λάβει τις μεθοδολογίες και τους αλγορίθμους με τους οποίους μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα ρητών, η σκέψη του τον οδηγεί μονόπλευρα στο να χρησιμοποιήσει μόνο αυτή τη γνώση.

Προτείνεται λοιπόν να γίνουν πολλαπλές μελέτες στη χώρα μας για την απόδοση της τωρινής σειράς με την οποία διδάσκονται οι ρητοί αριθμοί. Να ελεγχθεί κατά πόσο οι μαθητές αφομοιώνουν τις έννοιες και τις μορφές των ρητών αριθμών, και σε ποιο βαθμό έχουν την ικανότητα να ελίσσονται μεταξύ των διαφορετικών συμβολισμών που χρησιμοποιούνται. Επίσης θα ήταν καλό να εφαρμόσουμε πειραματικά μία διαφορετική σειρά στη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών, των κλασμάτων και των ποσοστών και να παρατηρήσουμε τα αποτελέσματα.

Προτείνεται επίσης οι εκπαιδευτικοί να προτρέπουν τους μαθητές να εκφράζουν ελεύθερα την σκέψη τους πριν προβούν στη διδασκαλία μεθοδολογιών. Ίσως η διδασκαλία των ρητών να πρέπει να διαμορφωθεί ανάλογα με τον τρόπο αντίληψης των μαθητών ώστε να είναι πιο αποδοτική αφού σήμερα, όπως έχει αποδειχθεί, οι μαθητές έχουν τεράστια κενά που αφορούν στην έννοια των ρητών αλλά και των μεθοδολογιών τους.

Αναφορές

1. Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In Handbook of Research on Mathemtics Teaching and Learning (pp.296–333). New York: Macmillan.
2. Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 91–125). New York: Academic Press.
3. Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, 15(5), 323–341. doi:10.2307/748423.
4. Brown, E., Fractions: a concept study, 2013, The University of Calgary Conjoint Faculties Research Ethics Board.
5. Burke, M., Erickson, D., Lott, J. W., & Obert, M. (2001). Navigating through algebra in grades 9–12. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics
6. Carey, S. (1985). Conceptual change in childhood. Cambridge, MA: MIT Press.
7. Carey, S. (1991). Knowledge acquisition: Enrichment or conceptual change? In S. Carey & R. Gelman, R. (1990). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and animate-inanimate distinction as examples. Cognitive Science, 14, 79-106.
8. Gelman, R. (1994). Constructivism and supporting environments. In D. Tirosh (Ed.), Implicit and explicit knowledge: An educational approach (pp. 55–82). New York: Ablex.
9. Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. Journal of Applied Developmental Psychology, 21, 27–37.Gelman (Eds.), The epigenisis of mind: Essays on biology and cognition. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
10. Carey, S. (2004). Bootstrapping and the origin of concepts. Daedalus, 133, 59-68.
11. Carey, S. & Gelman, R. (1991). The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
12. Carey, S. & Spelke, E. (1994). Domain-specific knowledge and conceptual change. In L. A. Hirschfeld & S. A. Gelman (Eds.), Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture (pp. 169–200). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

13. Carpenter, R. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. Notes from national assessment: Addition and multiplication with fractions. Arithmetic Teacher, 1976, 23(2), 137-141.
14. Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (1975). Results and implications of the NAEP mathematics assessment: Secondary school. The Mathematics Teacher, 68(6), 453–470.
15. Carpenter, T., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. Results form the first mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1978.
16. Carpenter. T. P., Corbitt. M. K., Kepner. H. S., Jr., Lindquist. M., & Reys. R E. National assessment: Prospective of students' mastery of basic skills. In M. Lindquist (Ed). Selected issues in mathematics education. Berkeley, California: McCutchan. 1980.
17. Coburn. T. G., Beardsley. L. M., & Payne. J. N. Michigan educational assessment program. Mathematics Interpretive Report. 1973, grades 4 and 7 tests. Guidelines for quality mathematics teaching monograph series, No.7. Birmingham, Michigan: Michigan Council of Teachers of Mathematics, 1975.
18. Colignatus, Th. (2017a), "Education, group theory and division", https://boycottholland.wordpress.com/2017/01/03/education-group-theory-anddivision
19. Davis, B., & Renert, M. (2010). An Open Way of being: Integral Reconceptualization of Mathematics for Teaching. In S. Esbjorn-Hargens, O. Gunnlauson, & J. Reams, Integral Education: New Directions for Higher Learning (pp. 2 - 25). Albany, New York: SUNY Press.
20. diSessa, A. A. (1993). Toward an epistemology of physics. Cognition and Instruction, 10, 105-225.
21. diSessa, A. A. (2006). A history of conceptual change research. In R.K. Sawyer (Ed.), Cambridge handbook of the learning sciences (pp. 265-281). New York: Cambridge University Press.
22. diSessa, A.A. (2008). A bird's eye view of the 'pieces' vs. 'coherence' controversy (from the 'pieces' side of the fence). In S. Vosniadou (Ed.), International handbook of research on conceptual change (pp.35-60). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

23. Ellerbruch. L. W., & Payne. J. N. A teaching sequence for initial fraction concepts through the addition of unlike fractions. In M. Suydam (Ed.), Developing computational skills. Reston. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.1978.
24. Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. Educational Studies in Mathematics, 64(3), 293–316. doi:10.1007/s.
25. Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2), 135–164.
26. Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2), 135–164.
27. Cramer, K. A., Post, T. R., & DelMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 33(2), 111–144. doi:10.2307/749646.
28. Desmet, L., Grégoire, J., & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. Learning and Instruction, 20(6), 521–532. doi:10.1016/j.learninstruc.2009.07.004.
29. DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015a). From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. Journal of Experimental Child Psychology, 133, 72–84. doi:10.1016/j.jecp.2015.01.013.
30. DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015b). Conceptual Structure and the Procedural Affordances of Rational Numbers : Relational Reasoning With Fractions and Decimals. Journal of experimental psychology. General, 144(1), 127–150. doi:10.1037/xge0000034.
31. DeWolf, M., Grounds, M. a., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 40(1), 71–82. doi:10.1037/a0032916.
32. Dörfler, W. (1995). Mathematical objects, representations and imagery. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), Exploiting mental imagery with computers in mathematics education (pp. 82-94). NATO ASI Series F: Advanced Educational Technology. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

33. Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., et al. (2007). School readiness and later achievement. Developmental Psychology, 43(6), 1428–1446. doi:10.1037/0012-1649.43.6.1428.
34. Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. Learning and Instruction, 37, 21–29. doi:10.1016/j.learninstruc.2014.08.003.
35. Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 63, 103-131.
36. Gamoran, A., & Hannigan, E. C. (2000). Algebra for everyone? Benefits of collegepreparatory mathematics for students with diverse abilities in early secondary school. Educational Evaluation and Policy Analysis, 22(3), 15.
37. Ganson, R. E., & Kieren, T. Operator and ratio thinking structures with rational numbers - A theoretical and empirical exploration. The Alberta Journal of Educational Research, 1980, in press.
38. Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education (pp. 416–425).
39. Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. Educational Studies in Mathematics, 21(6), 565–588. doi:10.1007/BF00315945.
40. Groff, P. (1994). The future of fractions. International journal in mathematical education in science and technology, 25(4), 549-561.
41. Hartnett, P.M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? Learning and Instruction, 8, 341-374.
42. Hecht, S. A., Vagi, K. J., & Torgesen, J. K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), Why is math so hard for some children? Baltimore, MD: Paul H. Brookes Publishing Company.
43. Hill, H., Rowan, B., & Lowenberg Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching onstudent achievement. American Education Research Journal, 371-406.

44. Hiebert. J., & Tonnessen, L. H. Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation. Journal for Research in Mathematics Education, 1975, 9(5), 374-378.
45. Hiebert, J., & Wearne, D. (1983). Students' Conceptions of Decimal Numbers. Hiebert, J., & Wearne, D. (1985). A model of students' decimal computation procedures. Cognition and Instruction, 2(3), 175–205. doi:10.1080/07370008.1985.9648916.
46. Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 199–223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
47. Hurst, M., & Cordes, S. (2016). Rational-number comparison across notation: Fractions, decimals, and whole numbers. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 42(2), 281–293. doi:10.1037/xhp0000140.
48. Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Understanding the real value of fractions and decimals. Quarterly journal of experimental psychology, 64(11), 2088–2098. doi:10.1080/17470218.2011.604785.
49. Johnson, J. T. (1956). Decimal versus common fractions. The Arithmetic Teacher, 3(5), 201–206.
50. Kalchman, M., Moss, J., & Case, R. (2001). Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), Cognition and instruction: Twenty-five years of progress (pp. 1–38).
51. Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. Journal of Mathematical Behavior, 14, 365–378. Kamii, C., & Warrington, M. A. (1999). Teaching fractions fostering children's own reasoning. In L. V. Stiff & F. R.
52. Curcio (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12 (pp. 82–92). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
53. Kieren, T. E. Activity learning. Review of Edu8cational Research. 1969, 39, 509-522.
54. Kieren, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and measurement: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976. Kieren, T. E. Five faces of mathematical knowledge building. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta, 1981.

55. Kieren, T. E., & Nelson, D. The operator construct of rational numbers in childhood and adolescence - An exploratory study. The Alberta Journal of Educational Research, 1978, 24(1). Kieren, T. E., & Southwell, B. Rational numbers as operators: The development of this construct in children and adolescents. Alberta Journal of Educational Research, 1979, 25(4), 234-247.
56. Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In Recent Research on Number Learning (pp. 125–150).
57. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.
58. Kirshner, D., 1989, The Structural Algebra Option: A Discussion Paper, ED 364 409, SE 053 833.
59. Khoury, H.A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. Educational Studies in Mathematics, 27, 191–204.
60. Lankford, F. G., Jr. Some computational strategies of seventh grade pupils. U.S. Office of Education, Project No. 2-C-013. Washington, Misquitta, R. (2011). A Review of the Literature: Fraction Instruction for Struggling Learners in Mathematics. Learning Disabilities Research and Practice, 109-119. D.C.: Government Printing Office, 1972.
61. Lamon, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge.
62. Lortie-Forgues, H., & Siegler, R. S. (2017). Conceptual knowledge of decimal arithmetic. Journal of Educational Psychology, 109(3), 374–386. doi:10.1037/edu0000148 Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? Developmental Review, 38, 201–221. doi:10.1016/j.dr.2015.07.008.
63. Ma, L. (2010). Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. New York: Routledge.
64. Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 85–105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

65. Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 32(3), 267–295.
66. McLester, S., & McIntire, T. (2006). The workforce readiness crisis. Technology and Learning, 27(4), 22 – 29.
67. Mamede, E., Nunes, T., & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3. (pp. 281-288). Melbourne: PME.
68. Markovits, Z., & Sowder, J. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(1), 3-11.
69. Mitchell, A. (2005). Measuring fractions. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Building connections: Research, theory, and practice. Proceedings of the 28th Conference of the Mathematics Research Group of Australasia (pp. 545–552). Melbourne: MERGA.
70. Moss, J. (1997). Developing children's rational number sense: A new approach and an experimental program. University of Toronto.
71. Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 30(2), 122. doi:10.2307/749607.
72. Moss. J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), How students learn: Mathematics in the classroom (pp. 121-162). Washington, DC: National Academic Press.
73. National Mathematics Advisory Panel. (2008). Foundations for success. Retrieved July 7, 2009 from http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/index.html.
74. National Research Council. (1989). Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education. Washington, DC: National Academy Press.
75. Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40(1), 27–52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3.

76. Neumann, R. (2001). Students' ideas on the density of fractions. In H.G. Weigand, A. PeterKoop, N. Neil, K. Reiss, G. Torner & B. Wollring (Eds.), Developments in mathematics education in German-speaking countries: Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Munich, 1998 (pp. 97-104).. Hildesheim, Germany: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.
77. Noelting, G. The development of proportional reasoning in the child and adolescent through combination of logic and arithmetic. In E. CohorsFresenborg & I. Wacksmuth (Eds.), Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Osnabruck, West Germany: University of Osnabruck, 1978.
78. Noelting, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept (the orange juice experiment). Ecole de Psychologie Universite Labal, Quebec, November, 1979.
79. Novillis, C. An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchy dependences. Journal for Research in Mathematics Education, 1976, 7, 131-144.
80. Novillis-Larson, C. Locating proper fractions. School Science and Mathematics, 1980, 53(5), 423-428.
81. Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. Learning and Instruction, 28, 64–72. doi:10.1016/j.learninstruc.2013.05.003.
82. O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. Educational Studies in Mathematics, 46(1), 143– 185
83. Park, J., Gucler, B., & McCrory, R. (2012). Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. Educational Studies in Mathematics, 82, 455- 479.
84. Polkinghorne, A. R. Young children and fractions. Childhood Education, 1935, 11, 354-358.
85. Rappaport, D. The meaning of fractions. School Science and Mathematics. 1962, 62, 241-244.
86. Renert, M., & Davis, B. (2009). Mathematics-For-Teaching as Shared Dynamic Participation. For the Learning of Mathematics, 37-43.

87. Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peret, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), 8–27. doi:10.2307/749095.
88. Resnick, L. B. (1987). Education and learning to think. Washington, D.C.: National Academy Press.
89. Resnick, L. B., & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 107–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
90. Riess, A. P. A new approach to the teaching of fractions in the intermediate grades. School Science and Mathematics, 1964, 54, 111-119.
91. Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Educational Psychology, 93(2), 346–362. doi:10.1037/0022-0663.93.2.346.
92. Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2012). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. Trends in cognitive sciences.
93. Siegler, R. S., Carpenter, T. P., Fennell, F., Geary, D. C., Lewis, J., Okamoto, Y., et al. (2010). Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=ED512043.
94. Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. Journal of Educational Psychology, 107(3), 909–918. doi:10.1037/edu0000025.
95. Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. Developmental Psychology, 49(10), 1994–2004. doi:10.1037/a0031200 Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62(4), 273–296. doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001
96. Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). Bringing out the algebraic character of arithmetic. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
97. Schulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 4-14.

98. Silver, E. A. (1983). Probing young adults' thinking about rational numbers. Focus on learning problems in mathematics, 5, 105–117.
99. Smith, M. S., Silver, E. A., & Stein, M. K. (2005). Improving instruction in rational numbers and proportionality (Vol. 1). New York: Teachers College Press.
100. Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14(5), 503–518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015.
101. Swapan K. A., 1998, Babylonian Mathematics, Indian Journal of History of Science, 33(1).
102. Tian, J., Siegler, R., S., Department of Psychology, Carnegie Mellon University, Baker Hall, 5000 Forbes Ave., Pittsburgh, PA 15213, USA 2 Siegler Center for Innovative Learning and A.
103. Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers, 1–17.
104. Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. Learning and Instruction, 21(5), 676–685. doi:10.1016/j.learninstruc.2011.03.005.
105. Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. Journal of Mathematical Behavior, 31(3), 344–355. doi:10.1016/j.jmathb.2012.02.001.
106. Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval ? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction (pp. 265–282). Oxford, UK: Elsevier.
107. Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. Cognition and Instruction, 28(2), 181–209. doi:10.1080/07370001003676603.
108. Usiskin, Z. P. The future of fractions. The Arithmetic Teacher, 1979, 26, 18-20.

109. Zhang, L., Wang, Q., Lin, C., Ding, C., & Zhou, X. (2013). An ERP study of the processing of common and decimal fractions: How different they are. PLoS ONE, 8(7). doi:10.1371/journal.pone.0069487.

Βιβλιογραφία

1. Αρβανιτάκης, Α., Γάσπαρης, Ι., Αργυρός, Σ., Απατσίδης, Δ., Αργυρός, Σ., Σημειώσεις στο μάθημα Πραγματική Ανάλυση (Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών).
2. Γκίκα, Κ., Ν., Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Θεμελίωση του σώματος των πραγματικών αριθμών Ισχύς και διάταξη αυτού, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Θεωρητικών Μαθηματικών.
3. Ζάχος, Ε., Παγουρτζής, Α., Σούλιου, Θ., Σύνολα, Σχέσεις και Συναρτήσεις, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, Κάλλιπος.
4. Πέρρος, Γ. Π., Μάρτιος 2015, Σύνολα και Αριθμοί, Μια περιήγηση στα θεμέλια των μαθηματικών.