

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ
ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
& ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
- ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ -
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Θέμα
**Η έννοια του Απείρου στον Spinoza
και η συσχέτισή της με
το Άπειρο των Cantor και Gödel**

Εκπόνηση διπλωματικής εργασίας:
Αντώνης Περιβολάκης
(Α.Μ. 017/15)

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος
Στυλιανός Βιρβιδάκης
Βάνα Γρηγοροπούλου
Νοέμβριος 2019

... στη Βάνα Γρηγοροπούλου (†) ...

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	3
-----------------------	---

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η έννοια του Απείρου στον Spinoza

1.1 Ενωσιολογικές διευκρινίσεις.....	6
1.2 Μια πρώτη προσέγγιση του Απείρου στον Spinoza.....	8
1.3 Συνόφηση της Σπinoζικής γνωσιολογίας και του Σπinoζικού ρεαλισμού.....	11
1.4 Τα Κατηγορήματα.....	13
1.5 Οι Τρόποι.....	16
1.6 Μια διαφορετική ανάγνωση του Σπinoζικού Απείρου.....	18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το Άπειρο του Cantor και η σύνδεσή του με το Άπειρο του Spinoza

2.1 Η πρώτη προσέγγιση στο Άπειρο του Cantor.....	19
2.2 Οι πληθάρημοι.....	23
2.3 Οι διατακτικοί αριθμοί.....	31
2.4 Η σύγκλιση του Φιλοσοφικού και του Μαθηματικού Απείρου στον Cantor.....	32
2.5 Μια Καντοριανή γέφυρα ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Θεολογία.....	37
2.6 Η επίδραση του Σπinoζικού Απείρου στο Καντοριανό Άπειρο	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Οι μη αποκρίσιμες προτάσεις του Gödel, το αυταίτιο στον Spinoza και το Άπειρο.

3.1 Το γενικό διακύβευμα του Θεωρήματος του Gödel.....	43
3.2 Συνέπεια και πληρότητα ενός T . Σ.	44
3.3 Η δημιουργία μιας αληθούς μη αποδείξιμης πρότασης: το θεώρημα του Gödel.....	45
3.4 Σχέση Σπinoζικού αυταίτιου και Γκεντελιανής μη αποκρίσιμης πρότασης: μια πρόταση για το Άπειρο.....	47

Συμπεράσματα	51
---------------------------	----

Βιβλιογραφία	52
---------------------------	----

Εισαγωγή

Ο «Λημνίσκος» ή το «οκτάρι που κοιμάται» είναι η τεχνική ονομασία του πιο δημοφιλούς συμβόλου για το Άπειρο. Είθισται ο συγκεκριμένος συμβολισμός να υιοθετείται και επίσημα στο πεδίο των Μαθηματικών, ιδίως σε αυτό της Ανάλυσης, αλλά σημαντικοί φιλόσοφοι ανά τους αιώνες έθεσαν το Άπειρο ως αντικείμενο φιλοσοφικής διαπραγμάτευσης. Και πώς θα μπορούσε, άλλωστε, να μην συμβεί κάτι τέτοιο αφού η ενατένιση προς το Άπειρο αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του ανθρώπινου «θαυμάζειν» για τον κόσμο; Στις καθημερινές μας συζητήσεις και αναφορές, ακόμα και όταν αυτές γίνονται σε ακαδημαϊκό επίπεδο, η έννοια του “Απείρου” παραπέμπει στο ατελεύτητο, στο απερίοριστο, στο ασύλληπτο.

Σε αυτήν την εργασία και με αφορμή ένα σεμινάριο που παρακολούθησα στο Διατμηματικό πρόγραμμα Μεταπτυχιακών σπουδών των τμημάτων ΙΦΕ (πρ. ΜΙΘΕ) και ΣΕΜΦΕ πάνω στην *Ηθική* του Spinoza, με συνεπήρε η έννοια του Απείρου καθώς άρχισε το μυαλό μου αυτόματα να κάνει συσχετισμούς με το Μαθηματικό Άπειρο. Μετά από τη γόνιμη παρότρυνση και ενθάρρυνση της καθηγήτριάς μου στο σεμινάριο, Βάνας Γρηγοροπούλου (†) να ασχοληθώ με το ζήτημα αυτό που μου κέντριζε το ενδιαφέρον, κατάφερα να κινηθώ με αμείωτο ενδιαφέρον και ευχαρίστηση στα πιο βαθιά νερά του ζητήματος. Ειδικά, στο πεδίο του Μαθηματικού Απείρου, εστίασα συνειρμικά τη προσοχή μου στα έργα των Cantor και Gödel.

Θεωρώντας τη φιλοσοφία υπό το πρίσμα μιας ανοιχτής θεώρησης μπορούμε να πούμε ότι είναι εκείνο το κομμάτι της ανθρώπινης δραστηριότητας που ωθεί τον άνθρωπο να σκέφτεται “στα όρια” του νοητού και του ακατανόητου, του πραγματικού και του φανταστικού, του υλικού και του πνευματικού. Ο Spinoza υπήρξε ένα μεγαλοφυές φιλόσοφος βαθιά ριζωμένος στον κόσμο που ζούσε. Η φιλοσοφική του σκέψη είναι καθαρή και διαθέσιμη να ερμηνεύσει το Είναι μέσω των περιπλανήσεων του ανθρώπινου πνεύματος στο όχημα του ορθού λόγου. Ο Spinoza είναι ένας φιλόσοφος του οποίου τη σκέψη, αν ζούσαμε στην εποχή του, μάλλον δεν θα κατανοούσαμε. Όχι επειδή υπήρξαν και υπάρχουν αμέτρητοι επίσημοι μελετητές αλλά και απλοί αναγνώστες του έργου του και διατυπώνονται συνεχώς διαφορετικές ερμηνείες. Πιστεύω πως ο Spinoza, ο “ευγενέστερος όλων των φιλοσόφων” όπως τον χαρακτήρισε ο Bertrand Russell, έγραψε φιλοσοφία με έναν τρόπο σαφώς ποιητικό, συνεπώς βαθιά ανθρώπινο, χωρίς να έχει την πρόθεση να φλερτάρει με “γοητευτικές και παραπλανητικές ακροβασίες” της ανθρώπινης φαντασίας. Κατόρθωσε να τιθασεύσει την άπιαστη μέχρι τότε θεική Υπόσταση ερμηνεύοντάς των ως Υπόσταση ολόκληρου του Είναι. Σε επάλληλους με τον Spinoza δρόμους κινήθηκαν οι Cantor και Gödel. Ο Cantor τιθάσευσε το μαθηματικό Άπειρο έχοντας εντρυφήσει στην *Ηθική* του Spinoza, υπό το πρίσμα της δικής του ανάγνωσης. Η Θεωρία Συνόλων του, αν και είναι μια Θεωρία που δεν είναι δυσνόητη και που απλώνει τα πλοκάμια της σε πολλούς χώρους των Μαθηματικών, εν τούτοις έχει τη δική της αυτονομία λόγω της ιδιαίτερης σχέσης της με τη φιλοσοφία. Ο Gödel τιθάσευσε το

παράλογο ερμηνεύοντάς το με όρους της Λογικής. Το σχετικά δυσνόητο (κυρίως στην απόδειξή του) “Θεώρημα της μη πληρότητας” έκανε αποδεκτό, με όρους της λογικής αποδοχής, το υπό συνθήκες παράλογο. Και οι τρεις στοχαστές πήραν ένα ρίσκο: έβαλαν σε δοκιμασία τα όριά τους κινούμενοι στα πεδία του Απειρού, στα πεδία του «Θεού». Όπως είναι γνωστό, οι δύο τελευταίοι δεν κατόρθωσαν να βγουν ούτε ψυχικά ούτε διανοητικά αλώβητοι. Ο Spinoza ίσως και να υπήρξε ... τυχερός που δεν γνώριζε προχωρημένα της εποχής του Μαθηματικά. Υπό αυτή την έννοια, ο Benedictus Spinoza υπήρξε κυριολεκτικά ο ... ευλογημένος (benedictus) σε αντίθεση με τους Cantor και Gödel που έπαιζαν το ρόλο των ... καταραμένων ποιητών – φιλοσόφων - Μαθηματικών.

Στο *Κεφάλαιο 1* αυτής της εργασίας παρουσιάζω το βιβλιογραφικά δημοφιλές τρίπτυχο του Σπινοζικού Απειρού. Ο Spinoza (1632 – 1677) χειρίζεται την έννοια του Απειρού με ένα δικό του τρόπο τον οποίον εκθέτει σε δύο κυρίως γραπτά του: το εμπνευσμένο φιλοσοφικό – γνωσιολογικό του πόνημα *Ηθική* και την *Επιστολή 12* του 1663 προς τον φίλο του, γιατρό και εκδότη, L. Meyer. Πολλοί μελετητές θεωρούν ότι η αναλυτική έκθεση των ιδεών του Spinoza για το πώς αντιλαμβάνεται το Άπειρο βρίσκεται κατά κύριο λόγο στην *Επιστολή 12* (γνωστή και στην Σπινοζική βιβλιογραφία και ως “Επιστολή για το Άπειρο”). Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η *Επιστολή 12* συνίσταται κυρίως από εξηγήσεις, σχόλια, παροράματα προς την *Ηθική* στο ζήτημα του Απειρού έτσι όπως αυτό τίθεται στο μεγαλειώδες κλασικό φιλοσοφικό του έργο. Η *Επιστολή 12* έγινε σημείο αναφοράς των περί Απειρού αντιλήψεων του σπουδαίου φιλόσοφου, επειδή η *Ηθική*, ως γνωστόν, κυκλοφόρησε σε περιορισμένα αντίτυπα από χέρι σε χέρι και εκδόθηκε μετά τον θάνατό του.

Ο Cantor (1845 – 1918) είναι ο μαθηματικός που δημιούργησε τη Θεωρία Συνόλων, μια Μαθηματική θεωρία η οποία στέκει αυτόνομη στο χώρο των Μαθηματικών. Η πιο σημαντική του συνεισφορά, όμως, έγκειται στο ότι χειρίστηκε το Μαθηματικό Άπειρο, ταξινομώντας το σε κατηγορίες και με αυτόν τον τρόπο το «δάμασε». Γνωρίζουμε ότι από νεαρός φοιτητής είχε ασχοληθεί με το έργο του Spinoza και μετά, στην έρευνά του, οι χειρόγραφες σημειώσεις του περιείχαν εκτενέστατα αποσπάσματα από την *Ηθική*. Είναι βέβαιο ότι οι αντιλήψεις του Spinoza περί του Απειρού επηρέασαν σε σημαντικό βαθμό τις αντιλήψεις του Cantor σε αυτό το ζήτημα. Στο *Κεφάλαιο 2* παρουσιάζω το βασικό κορμό της δουλειάς του στο Άπειρο. Στη συνέχεια, με αφορμή μια μελέτη των Bussotti & Tapp στην οποία διαπραγματεύονται το θέμα της επίδρασης του Spinoza στον Cantor προτείνοντας εναλλακτικά σενάρια, διατυπώνω τη δική μου πρόταση για έναν “ισομορφισμό” Σπινοζικού και Καντοριανού Απειρού.

Στο *Κεφάλαιο 3* ασχολούμαι με τη δουλειά του Gödel (1906 – 1978), της πιο εμβληματικής – κατα κοινή ομολογία - μορφής στο χώρο της Μαθηματικής Λογικής. Ο Gödel με το “Θεώρημα της μη Πληρότητας” χειρίστηκε το Άπειρο στο πιο λιτό πεδίο της Ανθρώπινης Λογικής, δηλαδή στο πεδίο των Φυσικών Αριθμών, μιλώντας για Μαθηματικά

και Λογικά συμβάντα σε αριθμητικοποιήσιμες Θεωρίες. Παρουσιάζω σε αδρές γραμμές τα σημαντικότερα στοιχεία της απόδειξης του θεωρήματός του προκειμένου να στοιχειοθετήσω τη δική μου πρόταση για μια θεμελίωση του συσχετισμού της Γκεντελιανής αντίληψης για το Άπειρο με αυτή του Spinoza και του Cantor. Επειδή το εγχείρημα δεν δύναται να ολοκληρωθεί σε έναν τυπικό ισομορφισμό των Απείρων αφήνω μια εναλλακτική δυνατότητα μέσα από την άποψη του Zwick για το συσχετισμό causa sui και μη αποκρισιμότητας.

Η καθηγήτριά μου Βάνα Γρηγοροπούλου, ο άνθρωπος που με ενέπνευσε και με ενθάρρυνε στην εκπόνηση αυτής της εργασίας έφυγε από τη ζωή την 25^η Σεπτεμβρίου 2019, λίγες μέρες πριν από την επίσημη υποστήριξη της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Δύο μήνες νωρίτερα, αφού πρώτα μελέτησε μια προηγούμενη εκδοχή της εργασίας μου έδωσε τις τελευταίες της καίριες παρατηρήσεις και συστάσεις.

Διευκρινίσεις: Στην παρούσα εργασία οι προσδιορισμοί «Σπινοζικό», «Καντοριανό» και «Γκεντελιανό» είναι δικής μου έμπνευσης, θεωρώ ότι εξυπηρετούν τον προφανή στόχο τους, δεν αλλοιώνουν το νόημα και βοηθούν τον αναγνώστη. Η διαφοροποίηση των καταλήξεων ανάμεσα στα τρία ονόματα έγινε διότι θεωρώ ότι είναι πιο εύχημη η λέξη «Καντοριανό» από τη λέξη «Καντορικό». Ο όρος «Άπειρο», όταν δεν ενέχει θέση επιθετικού ή κατηγορηματικού προσδιορισμού, παρουσιάζεται με κεφαλαίο Αλφα. Εξαιρούνται οι περιπτώσεις εκείνες που παρατίθενται αυτούσια αποσπάσματα από τη βιβλιογραφία όπου δεν τα έχω πειράξει. Επίσης οι Σπινοζικοί όροι «Κατηγορημα» και «Τρόπος», το Καντοριανό «Σύνολο» και ο «Πρώτος Αριθμός» παρουσιάζονται με κεφαλαίο το πρώτο γράμμα για να αποφύγουμε τυχόν εννοιολογικές συγχύσεις με τους αντίστοιχους καθημερινής χρήσης όρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η έννοια του Απειρού στον Spinoza

Η προσμονή στο Άπειρο είναι μια ζόρικη μητέρα

Θηλάζει το αγέννητο κι ύστερα το καταπίνει

Θανάσης Παπακωνσταντίνου

1.1. Εννοιολογικές διευκρινίσεις

Πριν προχωρήσω στην παρουσίαση του θέματος θα προβώ σε μια σύντομη αναφορά σε ζητήματα ορολογίας που είναι ανάγκη να ξεκαθαριστούν καθώς η έννοια “Άπειρο” στη γλώσσα μας αλλά και σε άλλες γλώσσες, χρησιμοποιείται άλλοτε ως έννοια αυτόνομη, άλλοτε ως επιθετικός προσδιορισμός, άλλοτε ως ουσιαστικοποιημένο επίθετο, και άλλοτε ως έννοια που χρειάζεται να συνοδευτεί από κατάλληλους επιθετικούς ή κατηγορηματικούς προσδιορισμούς. Υπάρχουν επίσης φορές που η χρήση της δεν είναι με σαφήνεια προσδιορισμένη καθώς πολλοί συγγραφείς, μη εξαιρουμένου του Spinoza, παραθέτουν τον όρο με έναν γριφώδη και κάπως θολό για τα μάτια μας τρόπο. Θα πρέπει επίσης να ληφθεί υπ’ όψιν το γεγονός ότι το πρωτότυπο κείμενο είναι γραμμένο στα Λατινικά και η συγκεκριμένη εργασία βασίστηκε κυρίως στην Ελληνική μετάφραση του κειμένου το οποίο έχει μια αναλυτικότερη εισαγωγή της Β. Γρηγοροπούλου σε βασικά θέματα της Σπινοζικής φιλοσοφίας.

Μια περιδιάβαση σε μερικά αξιόπιστα λεξικά που εκδόθηκαν στην Ελλάδα προσφέρει μια πρώτου επιπέδου προσέγγιση στο Άπειρο. Για παράδειγμα, το *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας* του Μπαμπινιώτη στο λήμμα «άπειρο» αναφέρονται ως ερμηνείες αυτό που δεν έχει πέρας ή τέλος, το ατελείωτο, το απεριόριστο, το ατέρμον, αυτό που είναι τόσο μεγάλο ή πολύ που δεν μπορεί να μετρηθεί. Αναφέρονται επίσης, το κοσμικό Σύμπαν, το Χάος. Στο πεδίο της Φιλοσοφίας αναφέρεται η χωρίς χωρικά και χρονικά όρια - πρώτη αρχή των πεπερασμένων όντων. Περνώντας στο *Λεξικό της κοινής Νεοελληνικής* διαβάζουμε ότι «άπειρος» είναι αυτός που είναι απεριόριστα μεγάλος αριθμητικά ή ποσοτικά, ενώ «άπειρο» είναι η χωρίς όρια απεραντοσύνη του ουρανού, το χωρίς όρια απέραντο διάστημα. Το *Νέο Ελληνικό Λεξικό* του Ε. Κριαρά ορίζει το επίθετο «άπειρος» ως αυτόν που δεν έχει τέλος, που δεν έχει όρια, που είναι αχανής, καθώς επίσης και αναρίθμητος, ενώ στο ουσιαστικό «άπειρο» ορίζει το απέραντο διάστημα, τις αχανείς εκτάσεις του σύμπαντος υποστηρίζοντας παράλληλα ότι το φιλοσοφικό «Άπειρο» αναφέρεται σε αυτό που δεν έχει πέρας, αυτό που δηλώνει τη μονιμότητα και τη σταθερότητα των πραγμάτων, το αντίθετο του πεπερασμένου. Το *Μέγα Λεξικόν της Ελληνικής Γλώσσας*, γνωστό και ως “λεξικό των Liddel & Scott” στο λήμμα «άπειρος» αναφέρει: άνευ πέρατος, απέραντος, αχανής, σκότος (Πινδαρικό). Ως ουσιαστικό αναφέρεται στην πρώτη αρχή του Αναξίμανδρου. Τέλος αναφέρεται και στο χωρίς τέλος,

ατελεύτητο, όπως ο «κυκλικός, περιφερής, άπειρος δακτύλιος, απλούς, άνευ λίθου». Σε λήμμα περί του άπειρου που υπογράφει ο Θ. Βέικος στην *Πάπυρος Larousse Britannica* επισημαίνεται ότι η φιλοσοφική αρχή του Άπειρου του Αναξίμανδρου είχε το νόημα μιας πρωταρχικής αδιαμόρφωτης και αδιακόσμητης υλικής μάζας που δεν είχε όρια στο χώρο και στο χρόνο ούτε και προσδιορισμένες ιδιότητες. Από την αρχή αυτή ξεπήγασαν τα πάντα. Στο λήμμα γίνεται μνεία και στη φανερή επίδραση της Αναξίμανδρείας έννοιας του Άπειρου στον Αναξίμενη ο οποίος μεν θεώρησε σαν αρχή του κόσμου ένα στοιχείο τον αέρα, ωστόσο τον πρόβαλε σαν άπειρο απέναντι σε όλα τα πεπερασμένα πράγματα, τα παράγωγά του. Περνώντας στο *Φιλοσοφικό Λεξικό του Cambridge* στο λήμμα «άπειρον» διαβάζουμε «Αρχαίος Ελληνικός όρος που σημαίνει το άνευ ορίων ή το απεριόριστο και κατέληξε να σημαίνει αυτό που σήμερα ονομάζουμε άπειρο. Ο Αναξίμανδρος εισήγαγε τον όρο στη φιλοσοφία υποστηρίζοντας ότι η πηγή όλων των πραγμάτων είναι το άπειρον. Υπάρχει κάποια διαφωνία ως προς το αν εννοούσε με αυτό το χωρικά απεριόριστο, το χρονικά απεριόριστο ή το ποιοτικά απροσδιόριστο. Είναι πιθανόν ότι κατανοούσε τον όρο με την πρώτη σημασία αλλά και οι δύο άλλες σημασίες μπορούν να υποδηλωθούν από το χωρικά απεριόριστο. Μετά τον Αναξίμανδρο, ο Αναξίμενης θεώρησε ως πρώτη αρχή το ότι ο αέρας δεν έχει όρια και ο Ξενοφάνης έκανε την επίπεδη γη να εκτείνεται προς το κάτω απεριόριστα και πιθανώς προς τα έξω οριζοντίως εξίσου απεριόριστα. Απορρίπτοντας την παράδοση των άπειρων αρχών, ο Παρμενίδης υποστήριξε πως πρέπει να θεωρηθεί πως «ό,τι είναι» πρέπει να έχει καθορισμένα όρια. Όμως ο μαθητής του ο Μέλισσος υποστήριξε πάλι ότι το ον δεν μπορεί να έχει όρια, τόσο στο χώρο όσο και στο χρόνο, γιατί δεν μπορεί να έχει ούτε αρχή ούτε τέλος. Ένας άλλος μαθητής του Παρμενίδη, ο Ζήνων ο Ελεάτης, υποστήριξε ότι η ύπαρξη πολλών ουσιών (υποστάσεων) δημιουργεί αντινομίες, μεταξύ των συνεπειών των οποίων είναι ότι τα όντα είναι και πεπερασμένα και άπειρα στον αριθμό, όπως επίσης και το ότι είναι τόσο μικρά ώστε να μην έχουν μέγεθος και τόσο μεγάλα ώστε να έχουν απεριόριστο μέγεθος. Απορρίπτοντας το μονισμό ο Αναξαγόρας υποστήριξε ότι είναι απροσδιόριστος ο αριθμός των στοιχείων και το καθένα τους είναι άπειρο σε μέγεθος, ενώ ο Πυθαγόρειος Φιλόλαος θεώρησε τα περαίνοντα και τα άπειρα ως τις αρχές από τις οποίες συντίθενται όλα τα πράγματα. Οι ατομικοί φιλόσοφοι Λεύκιππος και Δημόκριτος συνέλαβαν ένα άπειρο σύμπαν, εν μέρει πλήρες (από ένα άπειρο αριθμό ατόμων) και εν μέρει κενό και ότι στο σύμπαν υπάρχουν άπειροι κόσμοι. Τέλος ο Αριστοτέλης κατέληξε σε μια αφηρημένη κατανόηση της έννοιας του Άπειρου, υποστηρίζοντας ότι λύνει τα παράδοξα γύρω από αυτό με το να θεωρεί ότι οι πραγματικές ποσότητες είναι απείρως διαιρετές *δυνάμει* όχι όμως *ενεργεία*.» Εδώ αξίζει να σταθούμε και στην ενδιαφέρουσα επισήμανση που κάνει η *Encyclopaedia Britannica* για την δυσμένεια στην οποία τέθηκε το Άπειρο από τον Πυθαγόρα: «το άπειρο ταξινομήθηκε στην κατηγορία των περιέργων, μεταβλητών, μη περατών και επομένως κακών πραγμάτων» (σελ. 341, Vol. 12). Ο Rucker στο κεφαλαιώδες έργο του *Το Άπειρο και ο Νους* το επισημαίνει και

αυτός λέγοντας «στα αρχαία Ελληνικά, άπειρος σημαίνει κυριολεκτικά, τόσο τον απεριόριστο, τον ατελεύτητο, όσο και τον αόριστο, τον ασαφή. Το άπειρον ήταν λέξη αρνητική και μάλλον, υποτιμητική. Το αρχικό χάος από το οποίο δημιουργήθηκε ο κόσμος ήταν άπειρο. Μια τυχαία στρεβλή γραμμή ήταν άπειρη. Ένα βρώμικο τσαλακωμένο μαντίλι ήταν άπειρο. Έτσι το άπειρο δεν σήμαινε μόνο το απείρως μεγάλο, αλλά επίσης το τελείως άτακτο, το πάρα πολύ πολύπλοκο, αυτό που δεν προσδιορίζεται με τρόπο πεπερασμένο. Όπως γράφει ο Αριστοτέλης, “το να είναι κάτι άπειρο είναι μειονέκτημα, δεν είναι πλεονέκτημα, το όριο απουσιάζει” (...) Ο Πλωτίνος ήταν ο πρώτος μετά τον Πλάτωνα φιλόσοφος που υιοθέτησε την άποψη ότι τουλάχιστον ο Θεός, ή το Εν, είναι άπειρο, λέγοντας γι’ αυτό ότι “το απόλυτο Εν, ουδέποτε μετρήθηκε, βρίσκεται πέρα από τον αριθμό, και έτσι δεν περιορίζεται ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά, διότι κάθε τέτοιος προσδιορισμός του θα έφερε μαζί του και τη δυική του έννοια”» (Rucker 1999: 2-3). Εστιάζοντας στην - κατά κύριο λόγο - ακαδημαϊκή και φιλοσοφική έννοια του Απείρου επισημαίνω ότι το “δυνάμει Άπειρο” και το “ενεργεία Άπειρο”, χαρακτηρίζονται από ένα διαχωρισμό που οφείλουμε, κατά τεκμήριο, στον Αριστοτέλη (Rucker 1999: 3). Ο Αριστοτέλης, αντιλήφθηκε ότι υπάρχουν πολλά χαρακτηριστικά του κόσμου που μας περιβάλλει που υποστηρίζουν το “δυνάμει Άπειρο”. Συνηθισμένα παραδείγματα είναι η ασταμάτητη ροή του χρόνου ή το πλήθος των σημείων μιας συνεχούς γραμμής. Ο Αριστοτέλης, όπως προανέφερα, στήριξε την ιδέα του κλειστού σύμπαντος, του πεπερασμένου κόσμου, και δέχθηκε μόνο την ύπαρξη του “δυνάμει Απείρου” σε αντιδιαστολή με το “ενεργεία Άπειρο” του οποίου την ύπαρξη απέρριψε. Εντελώς διαφορετική είναι η άποψη που υποστήριξε ο Spinoza, όπως θα δούμε παρακάτω, αφού αυτός στήριξε μόνο το “ενεργεία Άπειρο”.

1.2. Μια πρώτη προσέγγιση του Απείρου στον Spinoza

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, τα έργα που γράφτηκαν από φιλοσόφους και που αναφέρουν το Άπειρο έχουν σχεδόν πάντα αναφορές στον Αριστοτέλη και στην διάκρισή του. Ο Spinoza δεν θα μπορούσε να είναι εξαίρεση. Επηρέαστηκε από τις απόψεις που είχαν «ορισμένοι από τους Εβραίους» (Ηθική, II 7Σ:153). Έχοντας αφιερώσει το μεγαλύτερο μέρος της *Επιστολής 12* στην απόπειρα τεκμηρίωσης της ύπαρξης του “ενεργεία Απείρου”, έρχεται όχι μόνο να περηφανευθεί για το κατόρθωμά του κοιτώντας τον κόσμο από την κορυφή του πανύψηλου και δύσβατου όρους της Φιλοσοφίας αλλά ασκώντας έντονη κριτική σε αυτούς που δεν αποδέχονται το Άπειρο. Πιο συγκεκριμένα, όπως αναφέρει ο ίδιος λίγο πριν το τέλος της *Επιστολής 12*, ορμώμενος από την άποψη του Chasdaï Crescas, έρχεται να ταχθεί ενάντια στους Περιπατητικούς – Αριστοτελικούς φιλοσόφους οι οποίοι υποστήριζαν μόνο το “δυνάμει Άπειρο”. Ο Spinoza επιχειρεί να δείξει ότι έχουν ένα φτωχό έως και σαθρό επιχείρημα στην προσπάθειά τους να απορρίψουν - με την αποδεικτική μέθοδο της εις άτοπον

απαγωγής - το “ενεργεία Άπειρο”, προσάπτοντάς τους την κατηγορία ότι έχουν παρανοήσει τον τρόπο απόδειξης της ύπαρξης του Θεού. Πιο συγκεκριμένα, γράφει:

«ερήσθω εν παρόδω, μια παρατήρηση, ότι κατά τη γνώμη μου οι νεότεροι περιπατητικοί φιλόσοφοι¹ έχουν παρανοήσει την απόδειξη με την οποία οι αρχαίοι επιχειρήσαν να δείξουν την ύπαρξη του Θεού. Γιατί, καθώς βρίσκω και στα λεγόμενα ενός Ιουδαίου που λέγεται Rab Chasdai (σ.σ. Crescas), η απόδειξη έχει ως εξής:

“αν υπάρχει μία άπειρη ακολουθία από αιτίες, τότε όλα τα πράγματα που υπάρχουν, είναι αιτιολογημένα. Ομως τίποτα το αιτιολογημένο δεν μπορεί να υπάρχει δυνάμει της φύσης του². Επομένως, δεν υπάρχει τίποτα στη φύση που να έχει αιτιολογημένη ύπαρξη και που να του αρμόζει το χαρακτηριστικό της αναγκαιότητας της ύπαρξης. Αλλά το τελευταίο είναι άτοπο³, άρα και η αρχική υπόθεση”.

Συνεπώς η δύναμη του επιχειρήματος δεν έγκειται στην αδυναμία του Ενεργεία Απείρου ή μιας άπειρης ακολουθίας αιτιών αλλά μόνο στην υπόθεση ότι τα πράγματα εκείνα που, λόγω της φύσης τους, η ύπαρξή τους δεν καθίσταται αναγκαία, είναι αδύνατον να υπάρχουν εξαιτίας ενός πράγματος που, λόγω της φύσης του, η ύπαρξή του καθίσταται αναγκαία⁴» (Spinoza, 2002a: 791).

Ουσιαστικά, κατά τον Spinoza, το επιχείρημα καθίσταται σαθρό αφού καθιστά αδύνατες και τις δύο μορφές του Απείρου, παραγνωρίζοντας ότι ο Αριστοτέλης αποδεχόταν το ένα είδος Απείρου, το “δυνάμει Άπειρο”. Εν συντομία θα λέγαμε ότι ο Θεός του Αριστοτέλη, ως ένα αρχικό αίτιο για τα πράγματα και για τον κόσμο, ως ένα «πρώτο κινούν» δεν θα μπορούσε να τεθεί στην αρχή μιας άπειρης ακολουθίας αιτιών, ενώ για τον Spinoza ο Θεός δεν είναι απλώς το Απολύτως Πρώτο Αίτιο⁵ αλλά εμμενές αίτιο του Κόσμου γι’ αυτό και απολύτως Άπειρο. Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι στην *Επιστολή 12* ο Spinoza δεν αποδομεί το επιχείρημα των Περιπατητικών αλλά αφού έχει παραθέσει ο ίδιος νωρίτερα τη θέση του περί Απείρου έρχεται να παρουσιάσει μία πηγή της φιλοσοφικής του έμπνευσης αναδεικνύοντας την μικρότητα των επιχειρημάτων των Περιπατητικών άρα και την ανεπάρκειά τους.

Από τη μία, όπως δέχονται οι μελετητές του έργου του, μπορούμε να διακρίνουμε τρία είδη Απείρου στον Spinoza: το Άπειρο του Θεού, το Άπειρο των Κατηγορημάτων και το Άπειρο των Τρόπων. Αυτή η κατηγοριοποίηση αναφέρεται στα διαφορετικής φύσης Σπινοζικά Άπειρα και ενώ τυγχάνει μιας αποδοχής στη διεθνή βιβλιογραφία, δεν είναι και η μοναδική. Όμως, επειδή φαντάζει απλοϊκή θα κινηθώ σε αυτό το σημείο κάπως αντίστροφα από το

¹ Υπονοώντας τους οπαδούς της Αριστοτελικής φιλοσοφίας

² Υπονοώντας ότι υπάρχει μόνο επειδή έχει αίτια ύπαρξης άρα δεν υπάρχει κατ’ ανάγκη.

³ Προφανώς, το άτοπο προκύπτει από το γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα που έχει αναγκαία ύπαρξη και αυτό είναι ο Θεός (του Αριστοτέλη).

⁴ Βλ. προηγούμενη υποσημείωση

⁵ βλ. *Ηθική*, I 16Πορ 1 & 2 & 3 (σελ. 104 - 105) και 18Π (σελ. 109)

ανεμενόμενο: θα παραθέσω τον πίνακα που δημιούργησε ο Eklund σε μια μελέτη του για το Άπειρο στον Spinoza (Eklund, 2014). Ο πίνακας συνοψίζει και κατηγοριοποιεί σχηματικά τη θέση του Spinoza έτσι όπως αυτή παρουσιάζεται σε όλη την έκταση της *Επιστολής 12*. Ο συγγραφέας της επιστολής, βαίνοντας προς το τέλος της, μαζεύει περιληπτικά αυτά που έχει παραθέσει στις προηγούμενες σελίδες, ως εξής:

«Από όλα όσα έχω πει, έχει γίνει σαφές ότι ορισμένα πράγματα είναι άπειρα εκ Φύσεως και με κανέναν τρόπο δεν θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως πεπερασμένα, ενώ άλλα πράγματα είναι Άπειρα δυνάμει της αιτίας στην οποία υπάρχουν. Και όταν τα τελευταία γίνονται αντιληπτά με τρόπο αφαιρετικό, μπορούν να διαρευθούν σε μέρη και να θεωρηθούν ως πεπερασμένα. Τέλος, υπάρχουν πράγματα που μπορούν να χαρακτηρισθούν ως άπειρα ή, αν προτιμάτε, απροσδιόριστα, διότι δεν μπορούν να προσδιορισθούν με ακρίβεια από κανέναν αριθμό, καθώς συνεχώς προσδιορίζονται ως μικρότερα ή μεγαλύτερα από συγκεκριμένες ποσότητες. Διότι δεν προκύπτει από πουθενά ότι τα πράγματα που δεν μπορούν να εκφρασθούν επαρκώς από κάποιον αριθμό πρέπει αναγκαστικά να είναι μεταξύ τους ίσα»
(Spinoza, 2002a: 790)

Άρα, κατά τον Eklund, έχουμε στο (Eklund, 2014: 2)

Είδος Απειρού	Οντολογικό Επίπεδο	Χρονικές Ιδιότητες	Χωρικές Ιδιότητες
Άπειρο εκ Φύσεως (Infinite by Nature)	Υπόσταση	Αιωνιότητα	Έκταση
Αιτιολογημένο Άπειρο (Infinite by Cause)	Τρόποι	Διάρκεια	Ποσότητα
Απροσδιόριστο (Indefinite)	[Κατηγορήματα] (Aids of the imagination)	Χρόνος	Μέτρο

Παραθέτοντας τον πίνακα του Eklund εδώ είχα την υποχρέωση να αναφέρω και κάποιους από τους Αγγλικούς όρους από το πρωτότυπο έτσι όπως ο συγγραφέας τους παραθέτει. Επίσης στην 2^η στήλη της τελευταίας σειράς έβαλα εγώ τη λέξη «Κατηγορήματα» διότι αν δεν υιοθετήσουμε την ίδια μεθοδολογία που υιοθετήσαμε στις 2 προηγούμενες σειρές του Πίνακα, δηλαδή το να πούμε ξεκάθαρα – σε αντίθεση με τον Eklund - ότι πρόκειται για την Υπόσταση και για τους Τρόπους, μπορεί να ανακύψουν παρανοήσεις. Δεν συμφωνώ όμως με τη χρήση του όρου “aids of the imagination” καθώς ο Spinoza έχει ξεκαθαρίσει σε διάφορα σημεία, όπως θα δείξω και σε επόμενες παραγράφους ότι (σε οντολογικό επίπεδο) ο νους αντιλαμβάνεται τα Κατηγορήματα να συνιστούν την ουσία της Υπόστασης (*Ηθική*, I O4 :

79). Μιλώ για οντολογικό επίπεδο διότι κατά το Spinoza ο νους ή το πνεύμα δεν κάνει σφάλματα, τα σφάλματα είναι προϊόντα της φαντασίας (βλ. επόμενη ενότητα §1.3).

1.3. Συνύφανση της Σπιννοζικής γνωσιολογίας και του Σπιννοζικού ρεαλισμού

Πώς όμως σχηματίζει ο άνθρωπος την αντίληψη που έχει για τα πράγματα; Ο Spinoza ισχυρίζεται πως ο άνθρωπος σχηματίζει μια εικόνα για τον κόσμο μέσα από τη “Φαντασία” αλλά και μέσα από τον “Νού”. Μόνο που αυτά τα δύο μέσα δεν είναι ούτε εξίσου ισχυρά ούτε εξίσου αξιόπιστα. Για τον Spinoza προέχει ο Νους. Είναι αυτός που κάνει την πιο σκληρή και καθαρή δουλειά, που έχει ως παράγωγά του τα «εννοήματα» που είναι ιδέες. Στην καθημερινή τους ζωή οι άνθρωποι φαίνεται να δημιουργούν “αντιλήψεις” για τα πράγματα. Ο Spinoza αποφεύγει τον όρο “αντίληψη” διότι υποκρύπτει μια παθητικότητα του Πνεύματος από τα αντικείμενα. Αντίθετα, ο όρος “εννόημα” εμπεριέχει μια δραστηριότητα του Πνεύματος πάνω σε αυτό που είναι πραγματικό (*Ηθική*, II Ο3 Επ.: 146). Όταν δουλεύει μόνο το Πνεύμα με τις ιδέες και όχι η Φαντασία, τότε τα συμπεράσματα που έχουμε δεν εμπεριέχουν αντιφάσεις αλλά μόνο την πραγματικότητα αυτή καθ’αυτή. Έχει ιδιαίτερη αξία να παραθέσουμε εδώ την άποψη του Spinoza για το πώς ο άνθρωπος πέφτει στην πλάνη της διάκρισης των πραγμάτων. Την άποψη αυτή τη διατυπώνει τόσο στην *Επιστολή 12* όσο και στην *Ηθική*. Παραθέτω το απόσπασμα από την *Ηθική*:

«(...) Αφού λοιπόν δεν υπάρχει στη φύση κενό (περί του οποίου γίνεται λόγος αλλού), αλλά όλα τα μέρη πρέπει να συνδράμουν έτσι ώστε να μην υπάρχει κενό, έπεται επίσης από εδώ ότι τα μέρη δεν μπορούν να διακριθούν πραγματικώς, τουτέστιν ότι η σωματική υπόσταση, καθόσον είναι υπόσταση, δεν μπορεί να διαρευθεί. Αν ωστόσο ρωτήσει κανείς: γιατί εμείς κλίνουμε εκ φύσεως να διαρούμε την ποσότητα; του απαντώ ότι συλλαμβάνουμε την ποσότητα με δύο τρόπους, είτε αφηρημένα είτε επιφανειακά, δηλαδή έτσι όπως τη φανταζόμαστε, είτε ως υπόσταση, κάτι που γίνεται μόνο από το νου. Αν προσέξουμε λοιπόν την ποσότητα έτσι όπως είναι στη φαντασία, κάτι που κάνουμε συχνά και ευκολότερα (σ.σ. υπογράμμιση δική μου) θα τη βρούμε πεπερασμένη, διαρευτή και απαρτιζόμενη από μέρη, ενώ αν την προσέξουμε έτσι όπως είναι στο νου και τη συλλάβουμε καθόσον είναι υπόσταση, κάτι που γίνεται δυσκολότατα, (σ.σ. υπογράμμιση δική μου) τότε όπως αποδείξαμε ήδη επαρκώς θα τη βρούμε μοναδική, άπειρη και αδιαίρετη. Αυτό θα είναι αρκετά πρόδηλο για όλους όσοι έμαθαν να διακρίνουν τη φαντασία από το νου: κυρίως αν προσεχθεί επίσης το εζής, ότι η ύλη είναι παντού ίδια και δεν διακρίνουμε σε αυτήν μέρη παρά καθόσον τη συλλαμβάνουμε ως επηρεασμένη με διαφορετικούς τρόπους, οπότε τα μέρη της διακρίνονται μονάχα τροπικώς και όχι πραγματικώς (σ.σ. υπογράμμιση δική μου)» (*Ηθική*, I 15Σ: 102 – 103)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη συζήτηση που κάνουμε για θέματα οντολογίας και γνωσιολογίας στον Spinoza, παρουσιάζει η πολυσυζητημένη Πρόταση - Θεώρημα ότι

«η τάξη και η σύνδεση των ιδεών είναι ίδια με την τάξη και την σύνδεση των πραγμάτων»

(Ηθική, II 7: 153)

Πιστεύω ότι προσδίδει μια ζώνη ασφαλείας στον φιλόσοφο, ή καλύτερα ένα αερόσακο σε περίπτωση «ατυχήματος». Μοιάζει να εξασφαλίζει μια αμφιμονότιμη απεικόνιση των ιδεών του και των πραγμάτων έτσι ώστε η γνωσιολογία του να αποκτά αυξημένο βαθμό αξιοπιστίας.

Για τον Spinoza, μιλώντας με σύγχρονους όρους, ο Κόσμος ή Σύμπαν, δηλαδή οτιδήποτε υπάρχει, αποτελεί κάποιο “Έν” που είναι ένα αδιαίρετο Όλον. Ο Κόσμος αυτός δεν έχει ως αιτία ύπαρξης παρά μόνο τον εαυτό του γι’ αυτό και χαρακτηρίζεται αυταίτιο (causa sui). Είναι τόσο σπουδαία έννοια ώστε στην *Ηθική* ο Spinoza παρουσιάζει το αυταίτιο στον 1ο Ορισμό ως

«αυτό που η ουσία του ενέχει την ύπαρξη, ήτοι αυτό που η φύση του δεν μπορεί να συλληφθεί παρά ως υπάρχουσα».

Η Υπόσταση του Θεού είναι μία και μοναδική άρα ο Θεός είναι το αυταίτιο. Στην ίδια την ουσία του αυταίτιου εμπεριέχεται αναγκαία η ύπαρξή του και αυτό εξηγείται ως εξής: επειδή ο Θεός είναι αιώνιος, τα κατηγορήματά του επίσης αιώνια, συνεπώς αυτά εκφράζουν ύπαρξη. Άρα αυτά εξηγούν τόσο την αιώνια ουσία του Θεού όσο και την αιώνια ύπαρξή του που είναι και η ουσία του Θεού (*Ηθική* I, 20A: 111). Αυτή θα μπορούσε να είναι η μία σκοπιά για να ερμηνεύσουμε το αυταίτιο. Θα μπορούσαμε όμως να εντοπίσουμε άλλη μία, η οποία βρίσκεται στην απόδειξη της Πρότασης 18 του πρώτου μέρους και η οποία φέρει τον ισχυρισμό ότι

«ο Θεός είναι εμμενές αίτιο και όχι μεταβατικό αίτιο όλων των πραγμάτων»

Η Απόδειξη έχει ως εξής:

«Όλα όσα είναι, είναι στον Θεό και πρέπει να συλλαμβάνονται μέσω του Θεού, ως εκ τούτου ο Θεός είναι αίτιο των πραγμάτων που είναι σε αυτόν, κάτι που είναι το πρώτο σημείο. Έπειτα, έξω από τον Θεό δεν μπορεί να υπάρξει καμία υπόσταση, τουτέστιν κανένα πράγμα που να είναι στον εαυτό του έξω από τον Θεό, κάτι που είναι το δεύτερο. Άρα ο Θεός είναι εμμενές αίτιο όλων των πραγμάτων» (Ηθική, I 18A: 110)

Μπορούμε να συμπεράνουμε επομένως, από τα δύο παραπάνω αποσπάσματα, ότι κατά τον Spinoza αυταίτιο είναι (i) αυτό που η ύπαρξή του περιέχει την ουσία του και (ii) αυτό που ταυτίζεται με οτιδήποτε υπάρχει και που τίποτα έξω από αυτό δεν χαρακτηρίζεται από ύπαρξη (Zwicky, 2007: 46).

Υπάρχει μόνο ένα πράγμα που είναι απόλυτα στον εαυτό του και καλείται “Υπόσταση”. Η Υπόσταση συλλαμβάνεται μέσω του εαυτού της από το Πνεύμα. Δεν καθίσταται απόλυτα σαφές από τον Spinoza εάν αυτή η σύλληψη γίνεται από το ανθρώπινο Πνεύμα ή από το Πνεύμα γενικά, καθώς στη Φιλοσοφία έχουμε σαφείς τάσεις γενίκευσης και διάθεση ενοποίησης των πραγμάτων. Παρ’ όλα αυτά θεωρώ πως είναι αρκετά ασφαλές να εκλάβουμε το Πνεύμα ως το Ανθρώπινο Πνεύμα σε ένα ρεαλιστικό επίπεδο.

Ο Θεός για τον Spinoza είναι το «*απολύτως Άπειρο ον*». Αυτό το ον έχει ως ουσία του την Υπόσταση. Για τον Spinoza ο Θεός δεν έχει καμία απολύτως σχέση με εκείνον τον Θεό των θρησκειών, την εικόνα του Δημιουργού, την εικόνα ενός όντος που είναι πάνω από όλα, ενός όντος που, εν δυνάμει, έχει τον έλεγχο των πάντων και αμοίβει ή τιμωρεί, δημιουργεί ή καταστρέφει, κατά βούληση. Στον Spinoza ο Θεός είναι εμμενές αίτιο σε ό,τι χαρακτηρίζεται από ύπαρξη, σε ό,τι ενέχει πραγματικότητα. Ο Θεός δεν εκλαμβάνεται ως ένα ον που υπάρχει μέσα στα πράγματα, ο Θεός του Spinoza είναι αυτή καθ' αυτή η πραγματικότητα και η τελειότητα⁶ και δεν του αποδίδεται ούτε βούληση ούτε συναίσθημα ούτε ζωή παρά μόνο ύπαρξη. Συνεπώς, αυτό που έχει ύπαρξη έχει Θεό και έχει μόνο μία φύση, την Υπόσταση, η οποία Υπόσταση δεν είναι πολύπτυχη αλλά μία μοναδική Ουσία.

Όπως λέει ο Spinoza στην *Ηθική*, ο Θεός ορίζεται να

«είναι το απολύτως Άπειρο ον τουτέστιν μια υπόσταση συγκείμενη από άπειρα κατηγορήματα καθένα εκ των οποίων εκφράζει μια απολύτως άπειρη και αιώνια ουσία».

Σε αυτό το σημείο εντοπίζεται, για πρώτη φορά στην *Ηθική* η χρήση του όρου «*Άπειρο*» ως επιθετικός και ταυτόχρονα ως κατηγορηματικός προσδιορισμός. Προς αποφυγή παρανοήσεων, επειδή η ύπαρξη αποδίδεται στο Θεό και μόνο, δεν θα μπορούσε ο Θεός να είναι «*άπειρος στο γένος του*» αλλά μόνο «*απολύτως άπειρος*» (*Ηθική*, I 6Επ: 80). Η Υπόσταση καθώς δεν είναι πολύπτυχη δεν μπορεί να αποτελείται από μέρη. Είναι «*άπειρη, αμετάβλητη, αδιαίρετη, κτλ*» (*Ηθική*, II 10Σ: 158). Υπόσταση, Θεός και ύπαρξη βρίσκονται στο ίδιο ερμηνευτικό και οντολογικό πεδίο άρα δεν μπορεί παρά να χαρακτηρίζονται από τον Spinoza ως «*απολύτως Άπειρα*».

«Μια τέτοια ύπαρξη συλλαμβάνεται ως αιώνια αλήθεια, (...) και για τον λόγο αυτό δεν μπορεί να εξηγηθεί μέσω της διάρκειας ή του χρόνου, όσο και αν η διάρκεια συλληφθεί στερούμενη αρχής και τέλους» (*Ηθική*, I 08 Επ. : 80).

Κοντολογίς, στον Σπινωζικό Θεό μπορούμε, τρόπον τινά, να αποδόσουμε τη μέγιστη δυνατή τάξη Απειρού.

1.4. Τα Κατηγορήματα

Τα Κατηγορήματα είναι αυτά που αντιλαμβάνεται ο νους (και όχι η φαντασία) ως συνιστώσες της Υπόστασης (*Ηθική*, I 08Επ. : 80). Όπως είδαμε λίγο παραπάνω στον κατά Spinoza ορισμό του Θεού, ο Θεός σύγκειται από «*Άπειρα Κατηγορήματα*». Η έκφραση αυτή δεν είναι απόλυτα σαφής και επιδέχεται διαφορετικές ερμηνείες καθώς δεν διασαφηνίζεται από τον Spinoza ο προσδιορισμός «*Άπειρα*». Εδώ θα επιχειρήσω να δώσω το νόημα που πιστεύω ότι ήθελε να της αποδώσει ο φιλόσοφος. Ο Spinoza, εμπνεόμενος από μια πλειάδα άλλων φιλοσόφων όπως ο Descartes, αναδεικνύει το ζήτημα της Ύλης και του Πνεύματος μέσα στην Υπόσταση. Συγκεκριμένα, μιλάει για τα Κατηγορήματα της Σκέψης και της Έκτασης

⁶ Στον Spinoza οι όροι «πραγματικότητα» και «τελειότητα» ταυτίζονται, βλ. *Ηθική*, II 06 (σελ.146)

προσδίδοντάς τους το χαρακτηρισμό «Άπειρα» αλλά ταυτόχρονα μιλά και για την ύπαρξη άπειρων άλλων Κατηγορημάτων τα οποία το ανθρώπινο πνεύμα δεν φαίνεται να μπορεί να τα γνωρίσει. Πώς όμως φθάνει στο σημείο να μιλά για την ύπαρξη πολλών, έως και άπειρων Κατηγορημάτων; Ιδού τι λέει ο ίδιος:

«είναι στη φύση της υπόστασης, πράγματι, κάθε Κατηγορημά της να συλλαμβάνεται μέσω του εαυτού του. Εφόσον όλα τα Κατηγορήματα που έχει ήταν πάντοτε σε αυτήν συγχρόνως και το ένα δεν θα μπορούσε να παραχθεί από ένα άλλο. Αλλά καθένα εκφράζει την πραγματικότητα, ήτοι το είναι της υπόστασης. Άρα πόρρω απέχει του να είναι άτοπο να προσδώσουμε πολλά κατηγορήματα σε μία υπόσταση. Αφού τίποτα δεν είναι σαφέστερο στη φύση από το ότι κάθε ον πρέπει να συλλαμβάνεται υπό κάποιο κατηγορημα, και όσο έχει περισσότερη πραγματικότητα ή είναι, τόσο έχει περισσότερα κατηγορήματα που εκφράζουν και αναγκαιότητα, ήτοι αιωνιότητα, και απειρία. Και συνεπώς τίποτα δεν είναι σαφέστερο από το ότι το απολύτως άπειρο όν πρέπει να ορίζεται αναγκαία ως ένα ον που σύγκειται από άπειρα κατηγορήματα καθένα εκ των οποίων εκφράζει μια συγκεκριμένη αιώνια και άπειρη ουσία». (Ηθική, I 10Σχ : 90)

Εδώ έχουμε χρέος να τονίσουμε emphaticά ότι τα δύο Κατηγορήματα της Σκέψης και της Έκτασης δεν θεωρούνται ειδικωμένα μέσα από το πλαίσιο του Καρτεσιανού δυισμού αλλά είναι δύο από τα άπειρα μη διακριτά Σπινοζικά Κατηγορήματα της Υπόστασης τα οποία Κατηγορήματα είναι απολύτως άπειρα.

Είναι, όμως, άπειρα και σε πλήθος; Δηλαδή, θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι ο Spinoza θεωρεί ότι υπάρχει μια άπειρη ακολουθία κατηγορημάτων $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ όπου

$K_1 =$ Σκέψη (1^ο Κατηγορημα)

$K_2 =$ Έκταση (2^ο Κατηγορημα)

.

.

.

$K_n =$ n-στό κατηγορημα

.

.

.

κ. ο. κ. ;

Ο Spinoza δεν το διευκρινίζει ευθέως. Και είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς: τι ακριβώς έχει ο φιλόσοφος στο μυαλό του όταν υποστηρίζει ότι η θεϊκή υπόσταση είναι «συγκεκριμένη από άπειρα Κατηγορήματα καθένα εκ των οποίων εκφράζει μια απολύτως άπειρη και αιώνια ουσία»; Αποδεχόμενοι την πρόκληση να υιοθετήσουμε μια τέτοια διαδικασία καταμέτρησης των Κατηγορημάτων θα θέταμε σε ένα – προς - ένα αντιστοιχισή τα Κατηγορήματα με τους Φυσικούς Αριθμούς που έχουν ένα συγκεκριμένο είδος Απείρου, δηλαδή το εν δυνάμει. Η

εκδοχή που παρουσίασα μόλις πριν, δηλαδή ότι η Θεϊκή υπόσταση σύγκειται από άπειρα στο πλήθος (τάξεως \aleph_0 άλεφ – μηδέν, δηλαδή αριθμίσμο άπειρο) Κατηγορήματα πρέπει να απορριφθεί αλλά μόνο στη σκέψη του Spinoza, επειδή ο Spinoza έχει απορρίψει αυτού του είδους τα Άπειρα στην επιστολή του προς τον Meyer καθώς υποδηλώνουν το “δυνάμει Άπειρο” στο οποίο δεν πιστεύει, αλλά ούτε και δέχεται το Άπειρο των αριθμών. Μια τέτοια πρόσληψη εκ μέρους μας θα καθίστατο δυνατή, κατά τον Spinoza, μόνο ως έργο της Φαντασίας μας που έχει την τάση να διαιρεί τα πράγματα σε μέρη. Αλλά το έργο της Φαντασίας μας, πάντα κατά τον Spinoza, συχνά οδηγεί σε πλάνες. Τι είναι, λοιπόν, τα «Άπειρα Κατηγορήματα» του Spinoza; Ας δούμε:

«η σκεπτόμενη υπόσταση και η εκτεταμένη υπόσταση είναι μία και η αυτή που γίνετα καταληπτή άλλοτε υπό το μεν κατηγορήμα και άλλοτε υπό το δε. Παρομοίως, ένας άλλος τρόπος της έκτασης και η ιδέα εκείνου του τρόπου είναι ένα και το αυτό πράγμα, αλλά εκφρασμένο με δύο τρόπους, πράγμα που φαίνεται να το είδαν νεφελωδώς ορισμένοι από τους Εβραίους,⁷ δηλαδή όσοι υποστηρίζουν ότι ο Θεός, ο νούς του Θεού και τα νοούμενα από αυτόν πράγματα είναι ένα και το αυτό (σ.σ. υπογράμμιση δική μου). Π.χ., ένας κύκλος υπάρχων στη φύση και η ιδέα του υπάρχοντος κύκλου, η οποία είναι επίσης στον Θεό, είναι ένα και το αυτό πράγμα που συλλαμβάνεται μέσω διαφορετικών κατηγορημάτων. Και γι αυτό είτε συλλάβουμε τη φύση υπό το κατηγορήμα της Έκτασης, υπό το κατηγορήμα της Σκέψης, ή υπό οποιοδήποτε άλλο, (σ.σ. υπογράμμιση δική μου) θα ανακαλύψουμε μία και την αυτήν τάξη, ήτοι μία και την αυτή σύνδεση αιτίων, τουτέστιν τα ίδια πράγματα να έπονται τα μεν από τα δε (...) ο Θεός σύγκειται από άπειρα κατηγορήματα και προς το παρόν δεν μπορώ να το εξηγήσω σαφέστερα» (Ηθική, II 7Σ : 153 – 154).

Τι είναι αυτό που «δεν μπορεί να εξηγήσει σαφέστερα» ο Spinoza; Μα προφανώς, δεν μπορεί να εξηγήσει προς τον αναγνώστη, το είδος του Απείρου των Κατηγορημάτων του γιατί πρόκειται για μια απόπειρα κάθε άλλο παρά απλή. Από τη μια καθιστά σαφές πως κάθε Κατηγορήμα είναι απολύτως άπειρο. Από την άλλη τα Κατηγορήματα χαρακτηρίζονται από μια ιδιότυπη διάκριση ανάμεσά τους ενώ παράλληλα εκφράζουν τη μία και μοναδική Υπόσταση. Νομίζω πως είναι πρόδηλο πως αυτό το είδος του Απείρου, ήτοι το Άπειρο των Κατηγορημάτων δεν είναι το ίδιο είδος ή της ίδιας τάξης με το “Απολύτως Άπειρο του (Σπινοζικού) Θεού”. Στα Κεφάλαια 2 και 3 θα επιχειρήσω να κάνω παραλληλισμούς των Κατηγορημάτων με θεμελιώδεις Μαθηματικές έννοιες.

Μελετητές του έργου του όπως ο Bennett στο (Bennett, 1984: 76) και ο Nadler στο (Nadler, 2006: 68) ερμηνεύουν την έννοια του Απείρου στα Κατηγορήματα με την έννοια του «όλα» μια ερμηνεία που δεν είναι αρκετά σαφής. Για παράδειγμα, ο Nadler λέει: «είναι δυνατόν ότι με τον όρο “Άπειρα κατηγορήματα” ο Spinoza δεν εννοεί απίεως πολλά αλλά όλα». Σε παρόμοια

⁷ ανάμεσά τους και ο αγαπημένος του Chasdai Crescas

γραμμή ο Bennett υποστηρίζει ότι «ο Spinoza χρησιμοποιεί τον όρο “Άπειρα” ως ένα εικονικό συνώνυμο του “όλα”». Πάντως, σε αυτό το σημείο οφείλω να πω πως μάλλον θα υιοθετούσα μια άποψη που υποστηρίζει ότι τέτοιου είδους απαντήσεις σε ερωτήσεις όπως “πόσα είναι αυτά τα Κατηγορήματα” μοιάζει με τη φράση «όλοι οι αριθμοί» ή «όλα τα ευθύγραμμα τμήματα μιας ευθείας». Αυτά ακριβώς τα ερωτήματα τίθενται από τη Φαντασία μας (κατά τον Spinoza) που έχει την τάση να ταξινομεί για να αποφύγει την βαθιά σκέψη με το Πνεύμα. Κοντολογίς, στερούνται Σπινοζικής φιλοσοφικής νομιμότητας.

Φυσικά, ο Spinoza δεν είναι ούτε αλάθητος ούτε χωρίς αντιφάσεις. Γι’ αυτό, πριν κλείσω αυτήν την ενότητα, δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ σε ένα σφάλμα που κάνει ο Spinoza στην *Ηθική* του, σφάλμα το οποίο αφορά το ζήτημα που διαπραγματεύομαστε εδώ. Προκειμένου να αποδείξει την Πρόταση 16 του Μέρους I (*Ηθική*, I 16Απ: 104), πρόταση στην οποία διατυπώνεται ο ισχυρισμός ότι «*από την αναγκαιότητα της θεϊκής φύσης πρέπει να έπονται άπειρα με άπειρους τρόπους*» λέει:

«(...) Αφού όμως η θεϊκή φύση έχει απολύτως άπειρα κατηγορήματα (κατά τον Ορ.6) και καθένα από αυτά εκφράζει μια άπειρη στο γένος της ουσία, (σ.σ. υπογραμμίσεις δικές μου) τότε από την αναγκαιότητά της πρέπει να έπονται άπειρα με άπειρους τρόπους»

Όμως, στον 6^ο Ορισμό του Μέρους I ο Θεός έχει

«μια υπόσταση συγκείμενη από άπειρα κατηγορήματα (σ.σ. και όχι απολύτως άπειρα) καθένα εκ των οποίων εκφράζει μια απολύτως άπειρη και αιώνια ουσία (σ.σ και όχι άπειρη στο γένος της ουσία)».

Παρά το ότι έχει γίνει μέχρι και απόπειρα υποβάθμισης αυτής της αλλαγής, υποβιβάζοντάς την σε απλή «*παράφραση*» (Melamed, 2014: 211) νομίζω ότι πρόκειται για ουσιαστική διαφορά και κατά πάσα πιθανότητα πρόκειται για αβλεψία του Spinoza αφού ο ίδιος, από την αρχή ήδη του έργου του, έχει τονίσει την διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στο “απολύτως άπειρο” και στο “άπειρο στο γένος του”.

1.5. Οι Τρόποι

Στην *Επιστολή 12* στον L. Meyer (Spinoza, 2002a: 788) ο Spinoza γράφει:

«Τους επηρεασμούς της Υπόστασης τους ονομάζω “Τρόπους”. Ο ορισμός των Τρόπων, στο μέτρο που αυτός δεν αφορά τον ορισμό της Υπόστασης, δεν συμπεριλαμβάνει την ύπαρξη (σ.σ. υπογράμμιση δική μου). Επομένως, ακόμη και όταν αυτοί υπάρχουν, μπορούμε να τους θεωρήσουμε ως μη υπάρχοντες. Από αυτό, συνάγεται πως όταν θεωρούμε μόνο την ουσία των Τρόπων και όχι την τάξη της Φύσης ως να είναι αυτή ένα όλον, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από την τωρινή τους ύπαρξη αν θα υπάρχουν ή όχι στο μέλλον ούτε αν υπήρξαν ή όχι στο παρελθόν. Έτσι είναι σαφές ότι αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη της Υπόστασης με ένα εντελώς διαφορετικό τρόπο από αυτόν της ύπαρξης των Τρόπων. Αυτή είναι και η πηγή της διαφοράς ανάμεσα στην Αιωνιότητα και στη Διάρκεια. Είναι το γεγονός ότι μόνο στην ύπαρξη των

Τρόπων μπορούμε να εφαρμόσουμε την Διάρκεια, ενώ ο αντίστοιχος όρος για την ύπαρξη της Υπόστασης είναι Αιωνιότητα, ήτοι η επ' άπειρον απόλαυση της ύπαρξης ή του είναι».

Άρα ο Τρόπος δεν είναι κάτι που έχει ως αίτιο ύπαρξης τον εαυτό του αλλά έχει οντολογική εξάρτηση από την Υπόσταση. «Ο επηρεασμός υποδηλώνει μια ορισμένη τροποποίηση και μεταβολή της Υπόστασης, μια κατάσταση ενεργητικού χαρακτήρα από την οποία προκύπτουν άλλοι τρόποι»⁸. Όπως ο ίδιος ο Spinoza λέει:

«τα επιμέρους πράγματα δεν είναι παρά επηρεασμοί των κατηγορημάτων του Θεού, ήτοι Τρόποι με τους οποίους τα Κατηγόρηματα του Θεού εκφράζονται με συγκεκριμένο και καθορισμένο τρόπο». (Ηθική, I 25ΠΣ : 116)

Άρα, οι πεπερασμένοι Τρόποι δεν είναι παρά τα ξεχωριστά δημιουργήματα, αντικείμενα, πλάσματα, νόες, ιδέες, επιθυμίες, συναισθήματα, αισθήσεις, αντιδράσεις, καταστάσεις. Είναι οι φαινόμενες εκφράσεις των κατηγορημάτων του Θεού. Υπάρχουν όμως και οι άπειροι Τρόποι που φαίνεται να είναι και το κάπως δυσκολότερο σημείο της παρούσας διαπραγμάτευσης. Σύμφωνα με τον Spinoza

«όλα όσα έπονται από την απόλυτη φύση κάποιου κατηγορήματος του Θεού έπρεπε να υπάρχουν πάντοτε και να είναι άπειρα, ήτοι είναι αιώνια και άπειρα μέσω αυτού του κατηγορήματος» (Ηθική, I 21: 112)

«Ό,τι έπεται από κάποιο κατηγορήμα του Θεού, καθόσον είναι τροποποιημένο με μια τροποποίηση τέτοια που, μέσω αυτού του κατηγορήματος, να υπάρχει και κατ' ανάγκη και ως άπειρη, πρέπει επίσης να υπάρχει και κατ' ανάγκη και ως άπειρο» (Ηθική, I 22: 114)

«Κάθε τρόπος που υπάρχει και κατ' ανάγκη και ως άπειρος πρέπει κατ' ανάγκη να έπεται από την απόλυτη φύση κάποιου κατηγορήματος του Θεού ή από κάποιο κατηγόρημα τροποποιημένο με μια τροποποίηση που υπάρχει κατ' ανάγκη και ως άπειρη» (Ηθική, I 23: 114) (υπογράμμιση δική μου)

Από αυτές τις 3 προτάσεις θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι οι Άπειροι Τρόποι προκύπτουν όχι μόνο κατ' ευθείαν από Κατηγόρηματα του Θεού αλλά θα μπορούσαν να υπάρχουν και τροποποιημένα κατηγόρηματα που υπάρχουν κατ' ανάγκη ως άπειρα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η κατάσταση του σύμπαντος κάτι που ο Spinoza χαρακτηρίζει ως έναν «άπειρο τρόπο δεύτερου είδους». Και αυτό επειδή το Σύμπαν μεταβάλλεται συνεχώς ως τροποποιημένη Έκταση αλλά παραμένει ενιαίο Όλον. Πάντως φαίνεται ότι τα άπειρα Κατηγόρηματα και οι άπειροι Τρόποι στο έργο του Spinoza μοιράζονται κάτι κοινό: την έννοια του μέγιστου δυνατού χωρίς να υπάγονται όμως στην ίδια τάξη Απείρου. Αλλά αυτό το τελευταίο ζήτημα το διαπραγματεύομαι στο επόμενο Κεφάλαιο.

⁸ Ηθική, εισαγωγή της Β. Γρηγοροπούλου στην Ελληνική έκδοση, σελ. 34

1.6 Μια διαφορετική ανάγνωση του Σπινοζικού Απείρου

Όπως προανέφερα στα προηγούμενα υιοθέτησα μια ανάγνωση του Απείρου την οποία έχουν ενστερνιστεί ορισμένοι μελετητές και η οποία εξυπηρετεί τόσο την ιδιαίτερη προσωπική μου ματιά στη φιλοσοφία του Spinoza όσο και το στόχο της παρούσας έρευνας. Εν τούτοις, δεν μπορώ να αγνοήσω και διαφορετικές αναγνώσεις του Σπινοζικού Απείρου. Γι' αυτό και θα σταθώ χαρακτηριστικά σε μια εξαιρετικά διεισδυτική, ενδιαφέρουσα και σχετικά σύγχρονη ανάγνωση, αυτήν της Shanon Dea στο (Dea, 2011). Η Dea, κόντρα στη σύγχρονη μαθηματική έννοια του Απείρου, επιχειρεί να δείξει ότι το Σπινοζικό Άπειρο είναι πιο κοντά σε μια γραμματική – «grammatical» (μια «λόγια», θα αποδίδαμε στην Ελληνική τον προηγούμενο όρο) έννοια. Όπως ισχυρίζεται η ίδια «αν ο Spinoza ποτέ δεν μας λέει πόσα Κατηγορήματα υπάρχουν (ούτε και στα πιο ώριμα έργα του) αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή για τον Spinoza οτιδήποτε πραγματικά άπειρο δεν άπτεται της μέτρησης, όχι επειδή είναι τόσο μεγάλο ώστε να μην είναι μετρήσιμο αλλά επειδή δεν είναι το είδος εκείνο που μπορεί να είναι αριθμήσιμο ή μετρήσιμο» (Dea, 2011: 604). Η Dea αφού υποστηρίζει την άποψη ότι η Υπόσταση είναι κατά Spinoza αδιαίρετη επειδή είναι εγγενώς αδιαίρετη (Dea, 2011: 607) προχωρά στη σε βάθος εξέταση της απολύτως άπειρης Υπόστασης. Παρουσιάζει πρώτα την *Επιστολή 12* του Spinoza και επισημαίνει ότι το Άπειρο είναι αντικείμενο του νου και όχι της φαντασίας και επικαλείται την επιχειρηματολογία του Wolfson που στηρίζει την άποψη ότι το Σπινοζικό Άπειρο συνάδει μάλλον με το ακαθόριστο παρά με το ατέρμονο ή το αμέτρητο κάνοντας έναν παραλληλισμό με το γεγονός ότι η φωνή δεν είναι ορατή (Dea, 2011: 608). Η Dea χαρακτηρίζει την προσέγγισή της πιο grammatical επειδή, όπως λέει, ενώ η Λατινική γλώσσα κάνει εκτεταμένη χρήση ουσιαστικών, η Εβραϊκή γλώσσα κάνει εκτεταμένη χρήση του απαρέμφατου στα ρήματα και είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι η Εβραϊκή γλώσσα είναι η μητρική του Spinoza. Συνεπώς θα είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ο Άπειρος Θεός του Spinoza είναι Θεός χωρίς καθορισμούς, άρα το Άπειρο του είναι απροσδιόριστο στο διηνεκές. (Dea, 2011: 610 – 611).

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε την άποψη της Dea για το άπειρο των Κατηγορημάτων. Αφού απορρίπτει την αρκετά διαδεδομένη βιβλιογραφική άποψη ότι ο Spinoza αναφέρεται σε δύο από τα άπειρα κατηγορήματα επειδή αυτά είναι προσβάσιμα από το Νου λέει: «Αν υπάρχει ένας άπειρος αριθμός Κατηγορημάτων αυτά πρέπει να γίνονται όχι απλώς αντιληπτά από εμάς αλλά ενεργεία αντιληπτά. Δεν αντιλαμβανόμαστε, και ούτε καν μπορούμε να αντιληφθούμε ένα άπειρο αριθμό Κατηγορημάτων. Πρέπει συνεπώς να συμπεράνουμε πως όταν ο Spinoza λέει ότι η Υπόσταση έχει άπειρα Κατηγορήματα δεν υπονοεί ότι έχει ένα άπειρο αριθμό από Κατηγορήματα. Μάλλον εννοεί ότι τα Κατηγορήματα της Υπόστασης, όπως και η ίδια η Υπόσταση (εκ της οποίας αυτά καθίστανται μόνο εννοιολογικά διακριτά και όχι πραγματικά διακριτά) είναι απροσδιόριστα (Dea, 2011: 615).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το Άπειρο του Cantor και η σύνδεσή του με το Άπειρο του Spinoza

Κάποτε σε είχα ρωτήσει
πόσο κρατάει το αύριο
και μου είχες πει:
“μια Αιωνιότητα και μια Μέρα”

Θόδωρος Αγγελόπουλος

(από το σενάριο της ομότιτλης ταινίας του)

2.1 Μια πρώτη προσέγγιση στο Άπειρο του Cantor

Ο Cantor, έφτασε στο στάδιο της μελέτης του μαθηματικού Απείρου όχι τόσο μέσα από τη μελέτη της θεωρίας αριθμών αλλά κυρίως μέσα από την μελέτη των συνόλων. Το πρώτο έρεισμα ήταν η τομή του Dedekind. Ο Dedekind πρότεινε τον ορισμό του άρρητου αριθμού κάνοντας χρήση της Θεωρίας Συνόλων. Θεώρησε το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} ως ένα σύνολο από τομές. Για τον Dedekind κάθε αριθμός ήταν μια *τομή*, για την ακρίβεια μια διαμέριση του συνόλου \mathbb{Q} των ρητών αριθμών. Μοιάζει με εγκάρσια «τσεκουριά» στον κορμό, στον κύλινδρο του σώματος των ρητών αριθμών. Η διαμέριση ήταν της μορφής $[A, \Delta]$, δηλαδή ένα ζεύγος άπειρων συνόλων. Για παράδειγμα, ο άρρητος $\sqrt{2}$ ορίζεται σαν η τομή Dedekind:

$$[A, \Delta] = \left[\left(\left\{ \frac{p}{q} > 0 \mid \frac{p^2}{q^2} < 2 \right\} \cup \left\{ \frac{r}{s} \mid \frac{r}{s} < 0 \right\} \right), \left\{ \frac{m}{n} > 0 \mid \frac{m^2}{n^2} > 2 \right\} \right]$$

όπου οι αριθμοί p, q, r, s, m, n είναι ακέραιοι.

Ο Cantor είδε τους πραγματικούς αριθμούς ως δεκαδικά αναπτύγματα, πιο συγκεκριμένα, ως άπειρες σειρές της μορφής:

$$\pm n, r_1 r_2 r_3 \dots r_p \dots$$

όπου n οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός και όπου r_i φυσικοί αριθμοί με $0 \leq r_i \leq 9$.

Το \mathbb{R} αναπαριστάται συχνά ως μια ευθεία, κάτι που γίνεται προκειμένου να του προσδώσουμε τόσο εποπτεία όσο και γεωμετρική υπόσταση. Όμως ο Cantor προέβη σε μια υπέρβαση: ουσιαστικά, δεν είδε τους πραγματικούς αριθμούς ως μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Τους είδε ως άπειρα αθροίσματα, πράγμα που θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως μια κίνηση προς νοητικές διαδικασίες στο χώρο του Απείρου. Αυτό το στοιχείο θα πρέπει να το θεωρήσουμε πολύ βασικό όσον αφορά τη μελέτη μας, υιοθετώντας τη θέση του Rucker που

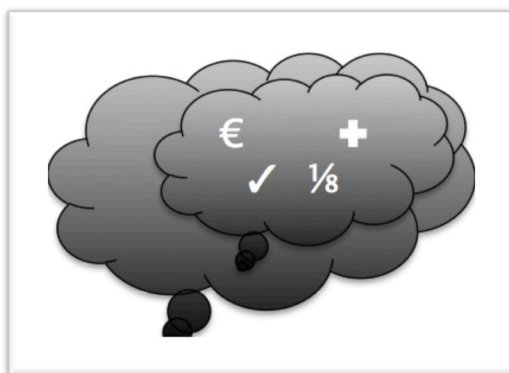
σε εκτενή μελέτη του για το Άπειρο υποστηρίζει ότι αυτά είναι διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στο «Νοοχώρο», δηλαδή έναν πολυδιάστατο χώρο που φιλοξενεί όλες τις σκέψεις⁹.

Ο Cantor ήταν ο άνθρωπος που νοηματοδότησε τις διαφορετικές τάξεις του Απειρού. Αρχικά εστίασε στην απλή επανάληψη μιας διακριτής νοητικής διαδικασίας. Σε πρωτόλειο επίπεδο η συγκεκριμένη επαναληπτική διαδικασία δύναται να εκφρασθεί στο σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών. Αν σκεφτούμε μια ενέργεια μία φορά και μετά τη σκεφτούμε και μια δεύτερη φορά και μετά μια τρίτη φορά και ούτω καθ' εξής τότε δεν υφίσταται λόγος αυτή η διανοητική διαδικασία να έχει κάποιο όριο. Αν ξεκινήσω με την μονάδα, δηλαδή τον αριθμό 1 και μετά προσθέσω στο αποτέλεσμα άλλη μια μονάδα και μετά σε αυτό το αποτέλεσμα άλλη μια μονάδα χωρίς να τίθεται περιορισμός στη διαδικασία, τότε λαμβάνω το γνωστό \mathbb{N} . Σε μαθηματικό επίπεδο και μάλιστα στο χώρο της Θεωρίας των Συνόλων αυτό έχει κωδικοποιηθεί μέσω της θεωρίας του Peano και των αξιωμάτων της.

Η ιδέα ήταν απλή. Ας υποθέσουμε ότι στο παρακάτω σχήμα απεικονίζουμε μια οποιαδήποτε αρχική σκέψη \mathcal{J}_0 π.χ. τη σκέψη που περιλαμβάνει τα σύμβολα του ευρώ, του σταυρού, του τσεκαρίσματος και του ενός ογδόου, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους.

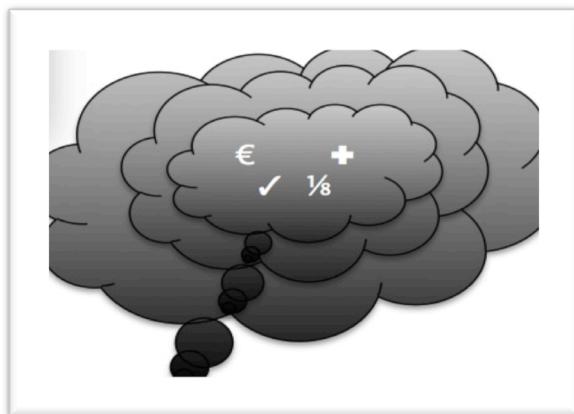


Ας προχωρήσουμε τώρα στην σκέψη \mathcal{J}_1 που περιγράφει την αμέσως προηγούμενη νοητική μας κατάσταση. Αυτή έχει να κάνει με εκείνη την σκέψη που έχει ως περιεχόμενό της την σκέψη \mathcal{J}_0 . Προφανώς αυτό θα μπορούσε να απεικονισθεί με το επόμενο σχήμα.

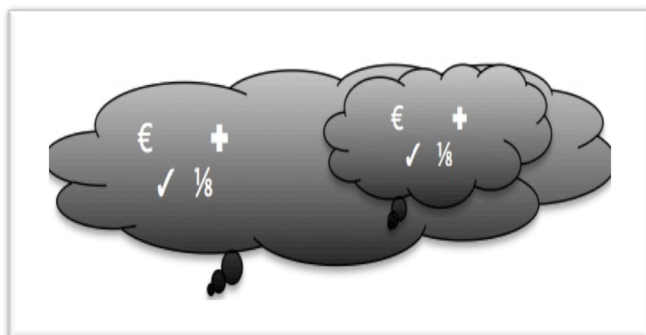


⁹ «Νοοχώρος» είναι η απόδοση στην Ελληνική γλώσσα του πρωτότυπου Αγγλικού όρου “Mindscape” που εισήχθη από τον Rucker στο (Rucker 1999: 37)

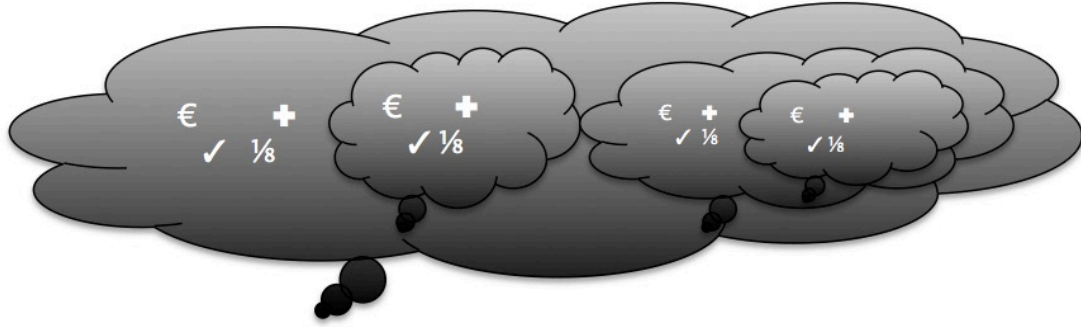
Μετά από τη σκέψη \mathcal{J}_1 είναι εύλογο ότι θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε στη σκέψη του επόμενου σχήματος \mathcal{J}_2 που έχει ως περιεχόμενο μόνο τη σκέψη \mathcal{J}_1 . Δηλαδή, η σκέψη \mathcal{J}_2 έχει ως περιεχόμενο τη σκέψη της σκέψης \mathcal{J}_0 . Μια τέτοια διαδικασία μπορεί να συνεχισθεί ad infinitum στο «Νοοχώρο» αλλά δεν φαίνεται να παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ή φιλοσοφικό ενδιαφέρον.



Παρ' όλα αυτά, η προηγούμενη διαδικασία μάς βοηθάει να προχωρήσουμε σε μια υψηλότερου επιπέδου παραλλαγή. Θεωρώντας ως δεδομένη τη σκέψη \mathcal{J}_0 του παραδείγματός μας θα προχωρήσουμε στη δημιουργία της σκέψης Σ_1 που περιλαμβάνει τα 4 στοιχεία της σκέψης \mathcal{J}_0 μαζί με τη σκέψη \mathcal{J}_0 . Συνεπώς, η σκέψη Σ_1 περιέχει ένα στοιχείο παραπάνω από τη \mathcal{J}_0 , ήτοι περιέχει 5 στοιχεία.



Επαγωγικά σκεπτόμενοι, το επόμενο βήμα θα ήταν η δημιουργία μιας σκέψης Σ_2 που θα περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία: τα τέσσερα στοιχεία της \mathcal{J}_0 , τη σκέψη για τη \mathcal{J}_0 , καθώς και τη σκέψη για τη Σ_1 . Αυτή η σκέψη απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα, ως μια σκέψη που περιέχει 6 στοιχεία.



Βαδίζοντας πάνω σε αυτή τη γενική γραμμή ο Peano εισήγαγε την παραγωγή φυσικών αριθμών μέσω της δημιουργίας συνόλων. Στο προηγούμενο παράδειγμα εισαγάγαμε μια αρχική σκέψη J_0 που είχε ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία και τους απαιτούμενους όρους μαθηματικής λιτότητας και οικονομίας, ο Peano έθεσε ως αρχική σκέψη, ήτοι ως αρχικό σύνολο, το κενό σύνολο, το οποίο δεν περιέχει στοιχεία, το γνωστό:

$$S_0 = \emptyset$$

Κατόπιν εισήγαγε το σύνολο S_1 , το σύνολο που περιέχει το κενό σύνολο, δηλαδή το:

$$S_1 = \{ \emptyset \}$$

Στο επόμενο βήμα εισήγαγε το S_2 δηλαδή το σύνολο εκείνο που περιέχει τα εξής δύο στοιχεία: α) το κενό σύνολο και β) το σύνολο που περιέχει το κενό σύνολο δηλαδή το S_1 . Αυτό το σύνολο ήταν το

$$S_2 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$$

Κατά επαγωγική συνέπεια, τα επόμενα βήματα ήταν η δημιουργία των συνόλων:

$$S_3 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$$

$$S_4 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \}$$

$$S_5 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \} \}$$

κ.ο.κ. Η βασική ιδέα ήταν να ορίσει τον κάθε αριθμό ως ένα σύνολο. Με αυτόν τον τρόπο αντιστοίχισε στο S_0 το 0, στο S_1 το 1, στο S_2 το 2, στο S_3 το 3 συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία ad infinitum. Η συγκεκριμένη ιδέα του Peano, που ήταν σύγχρονος του Cantor, θα δώσει το έναυσμα στον δεύτερο για την ανάπτυξη της Θεωρίας Συνόλων και κυρίως για την ιδέα των τάξεων του Απειρού με τον τρόπο που θα παρουσιάσω παρακάτω.

2.2 Οι πληθάριθμοι

Ο Cantor πήρε το σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών και καθόρισε το είδος του απείρου των αριθμών αυτών. Αυτήν την «τάξη» Απείρου την συμβόλιζε με το \aleph_0 (“άλεφ – μηδέν”). Ουσιαστικά επρόκειτο για έναν αριθμό που χαρακτήριζε το πλήθος των στοιχείων του \mathbb{N} . Η τάξη \aleph_0 συμβόλιζε μια επαναληπτική νοητική διαδικασία της οποίας τα αριθμητικά στοιχεία δεν είχαν κάποια ιδιαίτερη σημασία, απλά συμβόλιζε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου, τον πληθάριθμό του. Επρόκειτο για τον μικρότερο *υπερπεπερασμένο πληθάριθμο*. Όπως έγραψε και ο ίδιος (Cantor 1997: 118):

«με την ονομασία “ισχύς” ή “πληθάριθμος” ενός συνόλου M θα καλούμε εκείνη την γενική έννοια η οποία ανακύπτει, μέσω της ενεργούς δραστηριότητας στις σκέψης μας από το σύνολο M , όταν κάνουμε αφαίρεση της φύσης των διαφόρων στοιχείων του m και της διάταξης με την οποία αυτά δίνονται (σ.σ. υπογράμμιση δική μου), (...) Αφού κάθε εξατομικευμένο στοιχείο γίνεται μονάδα αν κάνουμε αφαίρεση της φύσης του, ο πληθάριθμος είναι καθορισμένο σύνολο που συντίθεται από μονάδες (σ.σ. υπογράμμιση δική μου), ενώ αυτός ο αριθμός υπάρχει στη σκέψη μας ως μια νοητή εικόνα ή προβολή του δοθέντος συνόλου M »

Ο Cantor έδειξε ότι μπορούσαμε να έχουμε άπειρα σύνολα που να έχουν την τάξη \aleph_0 . Ενδεικτικά θα παραθέσω το εξής σκεπτικό: σύμφωνα με τον Cantor, στη Θεωρία Συνόλων δύο σύνολα θεωρούνται ισοδύναμα, αν καταφέρουμε να δημιουργήσουμε μεταξύ τους μια *ένα προς ένα αντιστοίχιση*. Ας πάρουμε τον παρακάτω πίνακα όπου παρουσιάζουμε οκτώ σύνολα – παραδείγματα τα οποία είναι ισοδύναμα με το σύνολο των φυσικών αριθμών που παρουσιάζεται στην γραμμή a . Έτσι, στη γραμμή b παρουσιάζεται το σύνολο των πολλαπλάσιων του 2. Στη γραμμή c το σύνολο των πολλαπλάσιων του 5, στη γραμμή d παρουσιάζονται οι αριθμοί που προκύπτουν αν αυξάνουμε κάθε φορά το βήμα κατά μία μονάδα. Στη γραμμή e παρουσιάζονται οι ακέραιοι (το σύνολο \mathbb{Z}). Στη γραμμή f παρουσιάζονται τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών,¹⁰ στη γραμμή g παρουσιάζονται τα κλάσματα με αριθμητή το 1, και στη γραμμή h μια ακολουθία κλασμάτων.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	4	6	8	10	12	14	16	18
c	5	10	15	20	25	30	35	40	45
d	1	2	4	7	11	16	22	29	37
e	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5
f	1	4	9	16	25	36	49	64	81
g	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
h	1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7	7/8	8/9

¹⁰ πρόκειται για το γνωστό και ως «παράδοξο του Γαλιλαίου»

αριθμό $n=40$. Παίρνουμε τη θετική ρίζα της εξίσωσης $\frac{n(n+1)}{2} = 40$ που είναι ο

$\frac{-1+\sqrt{321}}{2} \approx 8,45$. Στρογγυλοποιώντας στον πλησιέστερο μεγαλύτερο ακέραιο έχουμε τον

αριθμό 9 που μας δείχνει προφανώς τη γραμμή στην οποία βρίσκεται ο ζητούμενος ρητός. Επειδή όμως ο πλησιέστερος μικρότερος ακέραιος είναι το 8 τότε το πλήθος των ρητών που

βρίσκονται στις 8 πρώτες γραμμές είναι: $\sum_{i=1}^8 n = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$. Η διαφορά του 36 από το $n=40$

που θέσαμε είναι 4. Άρα, λαμβάνουμε τον 4^ο ρητό της 9^{ης} σειράς που είναι το $4/6$. Δηλαδή στον φυσικό αριθμό 40 αντιστοιχεί ο ρητός αριθμός $4/6$. Η διαδικασία γίνεται εύκολα και αντιστρόφως, δηλαδή ο κάθε ρητός αντιστοιχεί σε έναν φυσικό. Δείξαμε λοιπόν ότι:

ο πληθάρηθος του \mathbb{Q} είναι \aleph_0 .

Υπενθυμίζουμε πως το γεγονός ότι σε αυτό το τρίγωνο κάθε αριθμός εμφανίζεται άπειρες φορές διόλου δεν επηρεάζει τη δυνατότητα αντιστοίχισης, αντιθέτως βοηθάει στην τεκμηρίωση της γενίκευσης ότι

ο πληθάρηθος του \mathbb{N}^{\aleph_0} είναι \aleph_0 ,

κάτι που βέβαια έκανε και ο Cantor.

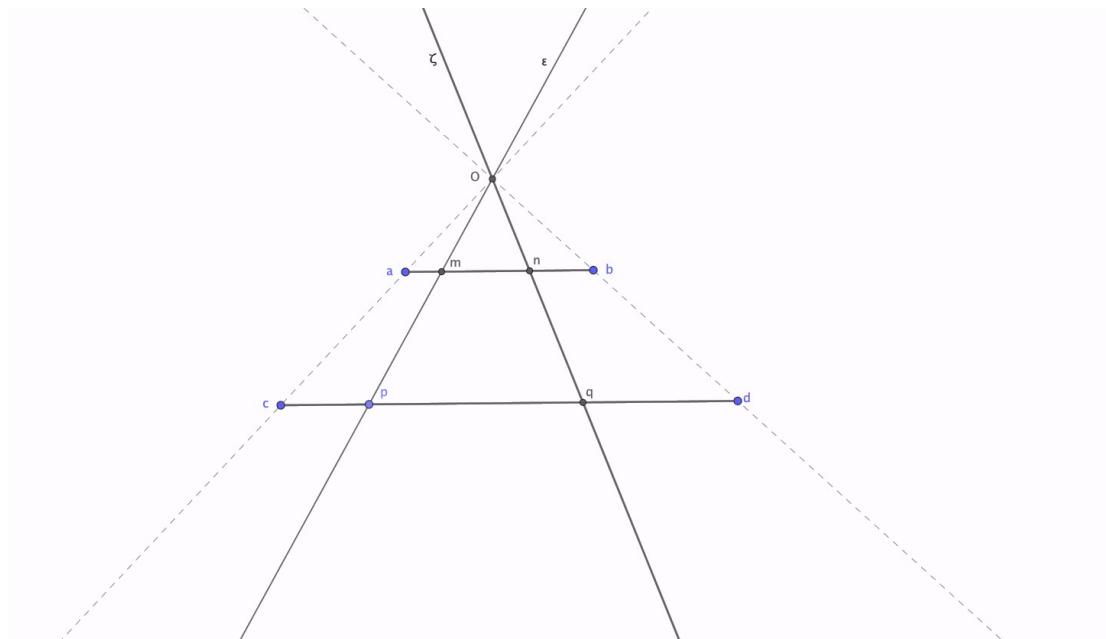
Έχοντας λύσει το θέμα με τον πληθάρηθο των ρητών, συνεπώς έχοντας ξεκαθαρίσει τι εστί \aleph_0 , ο Cantor συνέχισε με το ζήτημα των άρρητων. Όπως είδαμε και νωρίτερα είδε τους πραγματικούς αριθμούς ως άπειρες σειρές της μορφής :

$$\pm n, r_1 r_2 r_3 \dots r_p \dots$$

όπου n οποιοσδήποτε φυσικός και όπου r_i φυσικοί με $0 \leq r_i \leq 9$

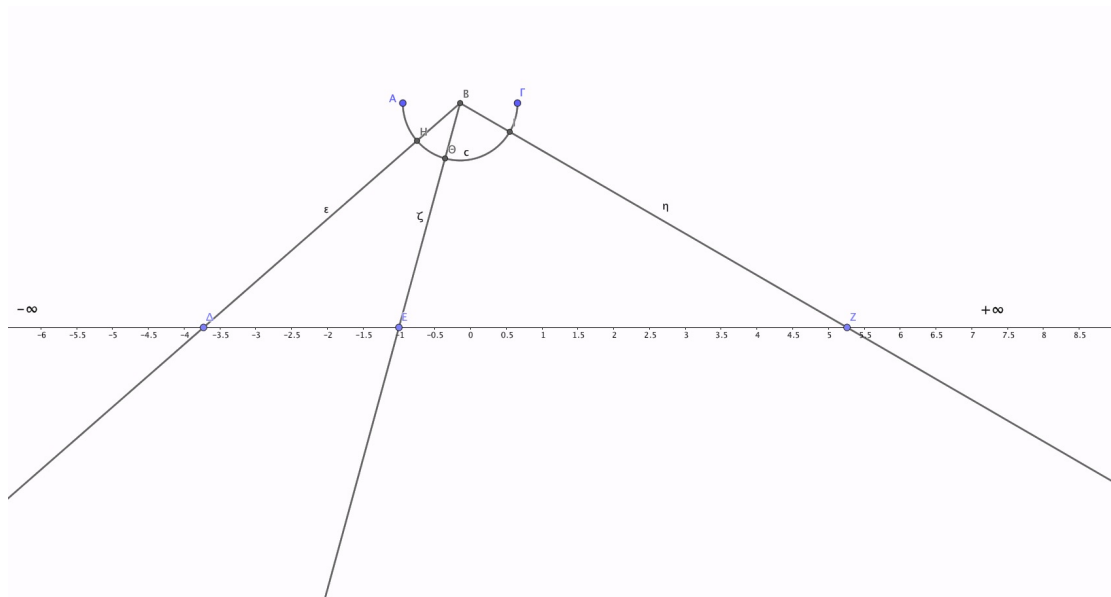
Θα δώσουμε μια οπτικοποιημένη εξήγηση του ισομορφισμού του συνόλου \mathbb{R} με το ανοιχτό διάστημα της μορφής $(0, 1)$. Για να γίνει αυτό είναι αναγκαίο να προβούμε πρώτα σε μια

οπτικοποιημένη απόδειξη του γεγονότος ότι δυο τυχαία διαστήματα (a, b) και (c, d) , διαφορετικού μήκους είναι ισόμορφα. Αυτό μπορεί να φανεί με το παρακάτω σχέδιο:



Ειδικότερα, έχουμε τοποθετήσει τα διαστήματα (a,b) και (c,d) στο επίπεδο και με τη χρήση ευθειών όπως οι ζ και ε που έχουμε σχεδιάσει, βλέπουμε πως κάθε σημείο, δηλαδή κάθε αριθμός του (a,b) αντιστοιχεί σε ένα σημείο δηλαδή σε έναν αριθμό του (c,d) και αντιστρόφως. Έτσι, η ευθεία ε έχει ως ρόλο της να αντιστοιχίζει τον αριθμό $m \in (a,b)$ στον αριθμό $p \in (c,d)$, η ευθεία ζ να αντιστοιχίζει τον αριθμό $n \in (a,b)$ στον αριθμό $q \in (c,d)$ και ούτω καθ' εξής. Αυτά γίνονται με την παραδοχή ότι κάθε ευθεία είναι «πυκνή» δηλαδή δεν υπάρχουν «κενά» ανάμεσα σε δύο σημεία της. Κατά συνέπεια και κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι «πυκνό». Λέγοντας ότι δεν υπάρχουν «κενά» εννοούμε το γεγονός ότι ενώ ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν \aleph_0 ρητοί, εντούτοις ανάμεσα στους ρητούς υπάρχουν και άρρητοι αριθμοί που δεν εκφράζονται με τη μορφή κλάσματος, και βέβαια αναφερόμαστε σε αρρήτους όπως οι γνωστοί π , e , $\sqrt{2}$...

Αφού δύο οποιαδήποτε τυχαία διαστήματα είναι ισόμορφα, άρα όλα είναι ισόμορφα με το διάστημα $(0,1)$. Θα δείξουμε ότι το $(0,1)$ είναι ισόμορφο με την ευθεία των πραγματικών αριθμών άρα με το \mathbb{R} .



Θεωρούμε ένα διάστημα (A, Γ) καμπυλωμένο σε ημικύκλιο, με τη διάμετρο $A\Gamma$ παράλληλη στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Αν B το κέντρο του ημικυκλίου τότε κάθε ευθεία που έχει ως αρχή το B μπορεί να αντιστοιχίσει σε κάθε σημείο του ημικυκλίου, δηλαδή σε κάθε αριθμό του διαστήματος (A, Γ) ένα σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών, δηλαδή ένα πραγματικό αριθμό. Και επειδή το διάστημα (A, Γ) είναι ισόμορφο με το $(0, 1)$ συμπεραίνουμε ότι το $(0, 1)$ είναι ισόμορφο με το \mathbb{R} και συνεπώς, κατ' ανάγκη,

το \mathbb{R} και το $(0, 1)$ θα έχουν τον ίδιο πληθάρημο.

Το προηγούμενο συμπέρασμα μάς επιτρέπει να μελετήσουμε τον πληθάρημο του $(0, 1)$ και το συμπέρασμα που θα βγάλουμε θα είναι το ίδιο για το \mathbb{R} . Αυτό το έκανε ο Cantor και μάλιστα χρησιμοποίησε το περίφημο «διαγώνιο επιχείρημα». Ο Cantor έκανε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού για λόγους οικονομίας και τεχνικής. Ξεκινάμε με το γεγονός ότι κάθε αριθμός του $(0, 1)$ είναι της μορφής

$$0, \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_p \dots$$

όπου $\delta_i \in \{0, 1\}$. Όμως το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που ακολουθούν θα είναι της τάξης \aleph_0 , και αφού το κάθε ένα από τα r_i λαμβάνει είτε μόνο την τιμή 0 είτε την τιμή 1 (λόγω δυαδικού αναπτύγματος), τότε το σύνολο των δυνατών διατάξεων των 2 στοιχείων ανά \aleph_0 - με επανάληψη - που λαμβάνουμε είναι: 2^{\aleph_0} . Συμπεραίνουμε ότι

ο πληθάρημος του $(0, 1)$, συνεπώς και του \mathbb{R} είναι 2^{\aleph_0} .

Είναι προφανές ότι δεν έχει σημασία αν δουλέψαμε τους πραγματικούς αριθμούς στο δυαδικό σύστημα αφού κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται μοναδικός είτε τον γράψουμε στο δυαδικό, είτε στο δεκαδικό είτε σε σύστημα με οποιαδήποτε βάση επιθυμούμε. Άρα, εύκολα φαίνεται ότι:

$$\text{Για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό } n \text{ ισχύει: } n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Το ερώτημα που έθεσε ο Cantor ήταν:

η τάξη Απειρου του \mathbb{N} είναι ίδια με την τάξη Απειρου του \mathbb{R} ;

Δηλαδή,

$$\text{το } \aleph_0 \text{ και το } 2^{\aleph_0} \text{ είναι ο ίδιος πληθάριθμος;}$$

Η απάντηση που έδωσε ο Cantor είναι αρνητική και το σκεπτικό της απόδειξης είναι το περίφημο «διαγώνιο επιχείρημα». Κινήθηκε δια της εις άτοπον απαγωγής. Το σκεπτικό του διαγώνιου επιχειρήματος έχει ως εξής¹¹: για λόγους ευκολίας ας θεωρήσουμε ότι κάθε αριθμός που ανήκει στο $(0, 1)$ έχει μια αναπαράσταση στο δυαδικό σύστημα, αναπαράσταση της μορφής:

$$0, r_1 r_2 r_3 \dots r_p \dots$$

Υποθέτουμε ότι το $(0, 1)$ είναι αριθμήσιμο. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο τότε θα μπορούσαμε να βάλουμε τους \aleph_0 αριθμούς του σε σειρά. Θεωρώντας τη δυαδική αναπαράσταση του κάθε αριθμού στο $(0, 1)$ ας βάλουμε στην 1η σειρά τον 1ο αριθμό, στη 2η σειρά τον 2ο αριθμό κ.ο.κ. Άρα θα λάβουμε μια λίστα της μορφής:

$$\begin{array}{l} 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \dots \alpha_p \dots \\ 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_p \dots \\ 0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots c_p \dots \\ 0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots d_p \dots \\ 0, e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \dots e_p \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0, w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 \dots w_p \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

¹¹ Εδώ παρουσιάζουμε μόνο το σκεπτικό της απόδειξης και όχι την ίδια την απόδειξη η οποία έχει ειδικά προαπαιτούμενα όπως, για παράδειγμα, το θεώρημα Heine Borel.

$$\alpha_i, b_i, c_i, d_i, e_i, \dots, w_i, \dots \in \{0,1\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Μετά ο Cantor προχώρησε στο εξής τέχνασμα: πήρε το πρώτο μετά την υποδιαστολή ψηφίο του 1^{ου} αριθμού - δηλαδή το α_1 , το 2^ο μετά την υποδιαστολή ψηφίο του 2^{ου} αριθμού - δηλαδή το b_2 κ.ο.κ. και έφτιαξε τον αριθμό:

$$z = 0, a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 \dots w_i \dots$$

Λόγω της υπόθεσης που κάναμε ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο, ο z θα είναι ένας από τους άπειρους αριθμούς της παραπάνω λίστας. Αν όμως μεταβάλλουμε κάθε ένα από τα δυαδικά ψηφία του z μετά την υποδιαστολή, σε 1 αν αυτό είναι 0 και σε 0 αν αυτό είναι 1, τότε θα λάβουμε τον αριθμό:

$$\bar{z} = 0, \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 \bar{d}_4 \bar{e}_5 \dots \bar{w}_i \dots$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι ο \bar{z} δεν είναι ούτε ο 1^{ος} αριθμός της παραπάνω λίστας διότι διαφέρει με αυτόν κατά το 1^ο μετά την υποδιαστολή ψηφίο, ούτε ο 2^{ος} αριθμός της παραπάνω λίστας διότι διαφέρει με αυτόν κατά το 2^ο μετά την υποδιαστολή ψηφίο, ούτε γενικά ο n -στος τη τάξει αριθμός αυτής της λίστας αφού θα διαφέρει από αυτόν κατά το n -στο τη τάξει ψηφίο.

Όμως ο $\bar{z} \in (0,1)$ και ταυτόχρονα ο \bar{z} δεν ανήκει στη λίστα. Άτοπο! Καταλήξαμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο. Άρα ούτε και το \mathbb{R} είναι αριθμήσιμο, κατά συνέπεια θα έχει κάποια τάξη Απειρού μεγαλύτερη από \aleph_0 . Συμπέρασμα:

Το \mathbb{R} δεν είναι αριθμήσιμο.

Επειδή όμως το \mathbb{R} είναι «πυκνό» χωρίς «κενά», άρα είναι συνεχές, ο Cantor συμβόλισε τον πληθάριθμό του με \mathfrak{c} εμπνεόμενος από τη λατινική λέξη continuum και όρισε ότι

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

Αυτό που κατάφερε να αποδείξει ήταν ότι το \mathbb{R} δεν είναι αριθμήσιμο κοινώς ότι $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. Όπως είναι γνωστό, αυτό που τον απασχόλησε σε όλη την υπόλοιπη ζωή του ήταν το ερώτημα αν ανάμεσα στο \aleph_0 και στο \mathfrak{c} παρεμβalόταν κάποιος άλλος πληθάριθμος. Δηλαδή, ο Cantor δημιούργησε μια σειρά από πληθάριθμους με συμβολισμούς άλεφ, τα :

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \dots$$

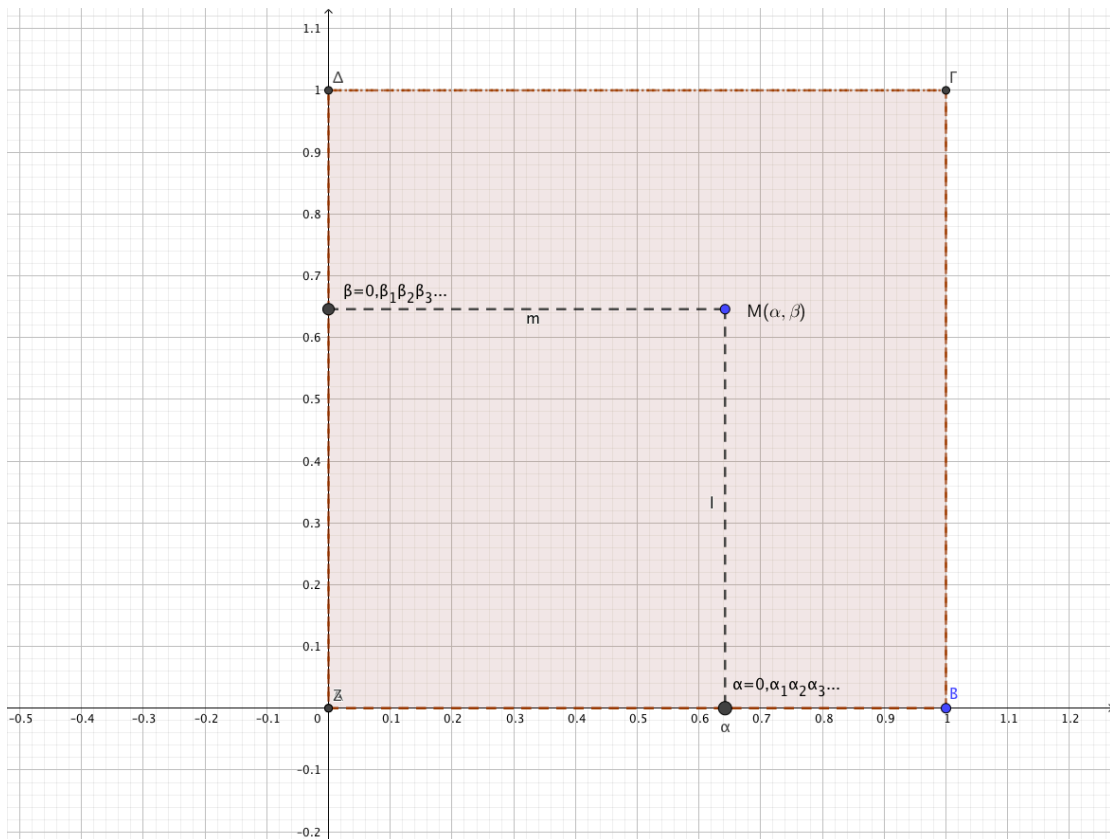
Για παράδειγμα, το \aleph_1 θεωρούμε ότι είναι ο πρώτος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος του \aleph_0 . Ενώ ο πρώτος πληθάριθμος μεγαλύτερος του \aleph_0 που ανακάλυψε ο Cantor ήταν ο πληθάριθμος του \mathbb{R} δεν γνωρίζουμε αν αυτός αντιστοιχεί στον \aleph_1 . Το ερώτημα είναι ακόμα αναπάντητο μέχρι σήμερα και είναι πολιτογραφημένο στα Μαθηματικά ως «υπόθεση του

συνεχούς». Με χρήση των συμβόλων Άλεφ, το αναπάντητο μέχρι σήμερα ερώτημα που έθεσε ο Cantor είναι η αλήθεια της σχέσης:

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}$$

Εύκολα δείχνουμε ότι το σύνολο των σημείων του επιπέδου έχει το ίδιο πλήθος σημείων με την ευθεία. Για παράδειγμα, λαμβάνοντας το καρτεσιανό γινόμενο $(0, 1) \times (0, 1)$ και θεωρώντας το ως ένα τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, τότε κάθε σημείο M στο εσωτερικό του τετραγώνου θα έχει συντεταγμένες π.χ. (α, β) όπως στο παρακάτω σχήμα. Αν θεωρήσουμε τα δεκαδικά αναπτύγματα της τετμημένης και της τεταγμένης, δηλαδή των αριθμών $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ και $\beta = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την αντιστοίχιση ενός σημείου του επιπέδου σε έναν μοναδικό αριθμό γ , δηλαδή αντιστοιχίζουμε το σημείο

$M(0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots, 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots 0)$ στον μοναδικό αριθμό $\gamma = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \dots$



Λαμβάνοντας υπόψη ότι το \mathbb{R} είναι ισόμορφο με το $(0, 1)$ και έχοντας δείξει ότι το $(0, 1)^2$ είναι ισόμορφο με το $(0, 1)$, εύκολα συνάγεται ότι το $(0, 1)^n$ είναι ισόμορφο του $(0, 1)$ και ότι το \mathbb{R}^n είναι ισόμορφο του \mathbb{R} . Κατέληξε λοιπόν ο Cantor στο φαινομενικά παράδοξο

συμπέρασμα ότι μια ευθεία και ένας n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος έχουν το ίδιο πλήθος σημείων, δηλαδή, ο πληθάριθμος του \mathbb{R}^n είναι \mathfrak{c} .

2.3 Οι διατακτικοί αριθμοί

Θα συνεχίσω εδώ με την παρουσίαση των λεγόμενων «διατακτικών αριθμών», πιο τυπικά - «διατακτικών τύπων» του Cantor. Εδώ, θα τους αποκαλούμε απλά «διατακτικούς». Η εφαρμογή των διατακτικών γίνεται σε σύνολα που έχουν «καλή διάταξη» στα στοιχεία τους. Η παραγωγή τους βασίζεται σε δύο αρχές:

I. Δοθέντος ενός διατακτικού \mathbf{a} , μπορούμε να βρούμε τον επόμενο του που συμβολίζεται με $\mathbf{a} + 1$.

II. Δοθείσης μιας αύξουσας ακολουθίας διατακτικών \mathbf{a} μπορούμε να λάβουμε τον μικρότερο διατακτικό τύπο που είναι μεγαλύτερος από όλους τους όρους της ακολουθίας και συμβολίζεται $\lim(\mathbf{a})$.

Θεωρώντας την μηδενική ακολουθία, το 0 θα ήταν ο πρώτος διατακτικός που την ακολουθεί. Έχοντας το 0 παράγουμε τους πεπερασμένους διατακτικούς $1, 2, 3, \dots$. Πηγαίνοντας πέρα από την άπειρη ακολουθία των διατακτικών αυτών και αναζητώντας τον μικρότερο διατακτικό που είναι μεγαλύτερος από κάθε πεπερασμένο τότε με εφαρμογή της αρχής **II** παίρνουμε, τον διατακτικό $\lim(\mathbf{a})$ τον οποίο ο Cantor συμβόλισε με το γράμμα ω , δηλαδή έθεσε

$$\lim(\mathbf{a}) = \omega.$$

Λαμβάνουμε επομένως την ακολουθία :

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega.$$

Με χρήση της δεύτερης αρχής παράγονται οι διατακτικοί :

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \dots$$

Επειδή δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι αριθμοί αυτοί προσεγγίστηκαν μέσω της συνολοθεωρίας είναι χρήσιμο σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι η δημιουργία τους προσομοιάζει στην διαδικασία που πρωτοείδαμε νωρίτερα από τον Peano. Κοντολογίς, οι διατακτικοί τύποι αντιστοιχούν σε σύνολα ως εξής:

$$\omega \rightarrow \{\mathbb{N}\}$$

$$\omega + 1 \rightarrow \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$$

$$\omega + 2 \rightarrow \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}\}$$

$$\omega + 3 \rightarrow \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}\}\}$$

$$\omega + 4 \rightarrow \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}\}\}\}$$

Ουσιαστικά ο Cantor χρησιμοποίησε ως «εργαλείο» την αρχή της γέννησης των πεπερασμένων αριθμών ώστε να προσδιορίσει τους υπερπεπερασμένους αριθμούς του ως διατακτικούς τύπους:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, 3\omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega \dots$$

και ούτω καθ' εξής. Και όλο αυτό θεμελιώθηκε στη Θεωρία Συνόλων, μια δική του ολοκληρωμένη επινόηση.

2.4 Η σύγκλιση του Φιλοσοφικού και του Μαθηματικού Απείρου στον Cantor

Δεν θα σταθούμε περισσότερο στους διατακτικούς τύπους που αναφέραμε ούτε και στις τεχνικές διότι μας ενδιαφέρει να εστιάσουμε περισσότερο στις φιλοσοφικές επιρροές που δέχθηκε ο ίδιος όπως και στην ουσία της φιλοσοφικής του σκέψης. Ο Cantor διέθετε ένα πολύ υψηλό επίπεδο φιλοσοφικής μόρφωσης και μια αχαλιναγώγητη φαντασία ενώ οι μαθηματικοί της εποχής ήθελαν ένα Άπειρο κατά το μάλλον ή ήττον, χαλιναγωγημένο. Είναι σίγουρο ότι τόσο οι θρησκευτικοί μελετητές που μελετούσαν την Εβραϊκή Καμπάλα και τη Χριστιανική Θεολογία όσο και ο Spinoza (από του οποίου το έργο, όπως θα δούμε, είχε επηρεαστεί) είχαν το κουράγιο να υπερβούν τα όρια του πεπερασμένου νου και να προσεγγίσουν ένα θεϊκό Απόλυτο Άπειρο. Ο Άγιος Αυγουστίνος έγραφε:

«Το άπειρο των αριθμών, παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει αριθμηση των άπειρων αριθμών δεν καθίσταται μη κατανοήσιμο από Αυτόν, του οποίου η αντίληψη είναι άπειρη. Συνεπώς, αν το καθετί που είναι κατανοητό ορίζεται ή καθορίζεται από αυτόν που το γνωρίζει, τότε όλο το άπειρο είναι με κάποιο ανείπωτο τρόπο πεπερασμένο για τον Θεό, διότι είναι αντιληπτό από τη δική Του γνώση. Συνεπώς αν το άπειρο των αριθμών δεν μπορεί να είναι άπειρο για τη γνώση του Θεού, μέσω της οποίας γίνεται αντιληπτό, τι είμαστε εμείς, τα φτωχά δημιουργήματα, για να αποπειραθούμε να θέσουμε όρια στη γνώση Του;...»
(Augustine 2000: 1244 – 1245).

Ο Cantor επιχείρησε να υπερβεί αυτή την ανησυχία που αντιμετωπίζουν οι άνθρωποι στην προσπάθεια τους να υπερβούν με τη φαντασία τους αυτό το οποίο δεν μπορούν να κατανοήσουν, εν προκειμένω το άπειρο των αριθμών, για αυτό και αποδέχθηκε την ύπαρξή του ακόμα και αν δεν έχουμε την εποπτεία του. Θα μπορούσε να αποδεχθεί το ενεργεία άπειρο παρά την ασφαλή αποδοχή του “δυνάμει Απείρου” των αρχαίων Ελλήνων. Ένωσε άνετα με την αντίληψη των διαφορετικών ειδών Απείρου κάτι που οι περισσότεροι από εμάς το θεωρούμε απίστευτο. Έγραφε:

«ο Φόβος του απείρου είναι μια μορφή μυωπίας που καταστρέφει τη δυνατότητα να δούμε το ολοκληρωμένο Άπειρο, αν και η υψηλότερη μορφή του μάς δημιούργησε και μάς

¹² Η υιοθέτηση εκ μέρους του τού Ελληνικού γράμματος ω μάλλον δεν είναι τυχαία καθώς στην Αποκάλυψη τα λόγια του Θεού είναι «Εγώ ειμί το Α και το Ω».

*συντηρεί μολοντί στις δευτερεύουσες υπερπεπερασμένες μορφές του υπάρχει παντού
ολόγυρά μας και μάλιστα κατοικεί και στο νού μας.» (Rucker 1999: 45 – 46)*

Ορίζοντας τα άπειρά του ως υπερπεπερασμένους αριθμούς, με εξαίρεση το Απόλυτο Άπειρο προχώρησε την έρευνά του. «Ιστορικά ενδιαφέρον όσο και σημαντικό για την κατανόηση εκ μέρους μας του τρόπου σκέψης του είναι το γεγονός ότι παρά την αξιόλογη σε όγκο αλληλογραφία του με Καθολικούς θεολόγους, ήταν στην πραγματικότητα ένας Προτεστάντης. Η εξοικείωσή του με τον Καθολικισμό οφειλόταν τόσο στα διαβάσματά του των έργων του Θωμά του Ακινάτη όσο και στον Καθολικισμό της μητέρας του. Ίσως εξαιτίας της τάσης του ανάμεσα στον Καθολικισμό και τον Προτεσταντισμό, δεν προσκολήθηκε σε κάποια οργανωμένη Εκκλησία και έτσι είχε την άνεση να ερευνά το Καθολικό Δόγμα. (...) Παρά την επιθυμία του να ασχοληθεί διερευνητικά με τα της Εκκλησίας, ήταν πολύ σημαντικό για τον Cantor το να δείξει ότι η θεωρία του των ενεργεία άπειρων συνόλων του συνάδει με την Καθολική διδασκαλία η οποία υποστήριζε παραδοσιακά ότι το μόνο ενεργεία Άπειρο ήταν αυτό του Θεού. Αυτό θα μπορούσε εν μέρει να οφείλεται στην ξεκάθαρη θέση του Cantor ότι η Θεωρία Συνόλων τού δόθηκε ως Θεϊκή έμπνευση» (Thomas – Bolduc 2016: 134). Αυτή του την αντίληψη την καταμαρτυρούν μια σειρά από επιστολές προς φίλους του (Dauben 1990: 146 – 148).

Είναι ανάγκη να μπούμε λίγο πιο βαθιά στο κλίμα της εποχής. Το 1878 που χρίστηκε Πάπας ο Λέων ο 13^{ος}, «άρχισε να παρατηρείται μια φιλελευθεροποίηση της εκκλησίας απέναντι σε μια σειρά από ζητήματα. Η φωτισμένη ηγεσία του Λέοντος του 13^{ου} αποσκοπούσε στη συμφιλίωση θρησκείας και επιστήμης. Αυτό ωφέλησε ιδιαίτερα τον Constatin Gutberlet που εκτός από την ιερατική του ιδιότητα, ήταν επίσης φιλόσοφος, θεολόγος και εξέχων εκπρόσωπος του Γερμανικού ρεύματος των νεο-θωμιστών. Ο Gutberlet υποστηρίζει τη ριζοσπαστική άποψη ότι ο ανθρώπινος νους έχει την ικανότητα να συλλαμβάνει τα ενεργεία άπειρα και να τα μελετά. Η θέση του αυτή τον έβαλε στο στόχαστρο των καθολικών θεολόγων, στις επιθέσεις των οποίων αντέδρασε επικαλούμενος το έργο του Cantor ως σαφή απόδειξη ότι ο ανθρώπινος νους είναι σε θέση να στοχάζεται το ενεργεία Άπειρο και ότι αυτό τον βοηθούσε να προσεγγίσει καλύτερα την αληθινή φύση του θείου. Οι σκέψεις που υπάρχουν στον νου ενός αμετάβλητου Θεού, υποστηρίζει, πρέπει να αποτελούν ένα πλήρες και άπειρο σύνολο. Αυτό για τον Gutberlet αποδείκνυε ότι τα Άπειρα του Cantor υπάρχουν πραγματικά και σημαίνει ότι, όποιος το αρνείται, εμμέσως αρνείται ότι ο νους του Θεού είναι άπειρος και απόλυτος. Το δίλημμα ήταν πολύ σοβαρό (...) Ο Gutberlet εξήρε στα κείμενα του την θεολογική σπουδαιότητα του έργου του Cantor και άρχισε να αλληλογραφεί μαζί του σχετικά με το απόλυτο άπειρο της θεϊκής υπόστασης. Ο Cantor έδειξε μεγάλο ενδιαφέρον για τις θεολογικές συνέπειες των ιδεών και υποστήριξε ότι τα ανώτερα Άπειρα που είχε ανακαλύψει επέκτειναν την κυριαρχία του Θεού αφού δεν υπόκεινταν σε κανέναν ανώτατο φραγμό, δεν υπήρχε, με άλλα λόγια, αυτό που θα λέγαμε «μέγιστο»

Άπειρο. Ο ατέλειωτος πύργος από Άπειρα που είχε συλλάβει ο Cantor εμπειρίχε τη λύση στον κίνδυνο που απασχολούσε τον Gutberlet, μήπως, δηλαδή, η κατανόηση και η κωδικοποίηση του απείρου υπονομεύει το μεγαλείο του Θεού. Αφού όμως δεν υπήρχε μέγιστο Άπειρο δεν υπήρχε και λόγος ανησυχίας (...) Ο Cantor ήθελε να δείξει ότι η ύπαρξη του Θεού αποδεικνύεται και με μαθηματικό τρόπο. Στην αλληλογραφία του με τον καρδινάλιο Franzelin, ανέφερε πως το Άπειρο, ή αλλιώς Απόλυτο, αποτελεί αποκλειστικό γνώρισμα του Θεού. Πίστευε πως ο Θεός είναι αυτός που διασφαλίζει ότι η ιεραρχία των υπερπεπερασμένων αριθμών υπάρχει και ξεπερνά τα πιο απλά αριθμήσιμα Άπειρα, αυξανόμενη απεριόριστα. Και επειδή το μεγαλύτερο από όλα δεν θα μπορούσε ποτέ να εκφραστεί με έναν τύπο διότι από οποιοδήποτε απειροσύνολο μπορεί κανείς πάντα να φτιάξει ένα άλλο, απείρως μεγαλύτερο, ο Cantor θεωρούσε πως οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί αυξάνονται φτάνοντας στο Απόλυτο, το αληθινό Άπειρο, το οποίο σηματοδοτεί ένα απόλυτο μάξιμουμ, ασύλληπτο για τον ανθρώπινο νου. Ο άνθρωπος, κατά τον Cantor, δεν θα μπορούσε ποτέ να προσδιορίσει αυτό το Απόλυτο Άπειρο αφού, αν το έκανε, τότε αυτό θα έπαυε να είναι Άπειρο και θα γινόταν εξ ορισμού πεπερασμένο – από τη στιγμή που θα το προσδιόριζε κάποιος, θα μπορούσε να του προσθέσει ή να του αφαιρέσει στοιχεία, να το χειριστεί ή να το αυξήσει επ’ άπειρον, όπως και τα κατώτερα άπειρα». (Barrow 2007: 121 – 125)

Ο Cantor το 1883 διέκρινε το ενεργεία άπειρο σε δύο είδη: το Άπειρο του Θεού και το μη - Θεϊκό Άπειρο. Τρία χρόνια αργότερα εμπλούτισε την άποψή του και έγραψε:

«το ενεργεία άπειρο εμφανίζεται σε τρεις περιπτώσεις: πρώτον, όταν πραγματώνεται στην πληρέστερη μορφή του, ως μια εντελώς ανεξάρτητη μεταφυσική οντότητα, in Deo, οπότε το ονομάζω Απόλυτο Άπειρο ή απλώς Απόλυτο. Δεύτερον, όταν εμφανίζεται μέσα στο δημιουργημένο κόσμο του δυνατού (σ.σ. in concreto). Τρίτον, όταν συλλαμβάνεται νοερά in abstracto, ως μαθηματικό μέγεθος, ως αριθμός ή ως τύπος απόδειξης. Θέλω να τονίσω την αντίθεση ανάμεσα στο Απόλυτο και σε αυτό που ονομάζω Υπεπεπερασμένο, ανάμεσα δηλαδή στα δύο τελευταία είδη ενεργεία απείρου, τα οποία είναι σαφώς προσδιορισμένα, επιδέχονται αύξηση και ως εκ τούτου σχετίζονται με το πεπερασμένο.» (Barrow 2007: 129 – 130)

Ενεργεία άπειρο	στο Θεό (in Deo)	στον υλικό κόσμο (in concreto)	στο νοητό Κόσμο (in abstracto)
Επιδέχεται αύξηση		Υπεπεπερασμένο → Μεταφυσική	Υπεπεπερασμένοι Αριθμοί → Μαθηματικά
Δεν επιδέχεται αύξηση	Το Απόλυτο ή το απολύτως Άπειρο		

Στην αντίληψη του Cantor για το Θεϊκό Άπειρο θα αναφερθώ παρακάτω, διεξοδικότερα. Όμως, σε αυτό το σημείο, έχοντας αναφερθεί στη σχέση του με τη θρησκεία και με το Θεό θα εξετάσουμε την ερευνητική απόπειρα του Amir Aczel να στοιχειοθετήσει την όποια σχέση μπορεί να είχε ο Cantor με την Εβραϊκή θρησκεία, καθώς στοιχειοθετείται η Εβραϊκή του καταγωγή. Ο Aczel αναφέρει: «ξέρουμε ότι η οικογένεια του είχε Εβραϊκές ρίζες πολύ πιθανόν και από τους δύο γονείς, παρά το γεγονός ότι από το επίθετο του Cantor φαίνεται ότι ο πατέρας σίγουρα είχε (...) Σε ένα γράμμα σε κάποιον φίλο του χρόνια αργότερα ο πατέρας του έγραφε ότι οι παππούδες του ήταν *Ισραηλίτες*. Αλλά και σε μια επιστολή που έστειλε ο νεαρότερος αδερφός του Louis από την Αμερική υπάρχει η φράση “είμαστε απόγονοι Εβραίων”» (Aczel 2006: 112). Επίσης, ο Cantor είχε παντρευτεί την Vally Guttman οποία ανήκε σε μια εβραϊκή οικογένεια του Βερολίνου (Aczel 2006: 119). Αυτό είναι ένα κοινό χαρακτηριστικό που είχε με τον Spinoza. Αναφερόμαστε ξεχωριστά στην σύμπτωση αυτή επειδή τόσο ο Spinoza ήταν ένας αποσυνάγωγος των Εβραίων όσο και ο Cantor ήταν ένας άνθρωπος που είχε Εβραϊκή καταγωγή. Αν ο Amir Aczel δίνει βαρύτητα στην εβραϊκή καταγωγή του αυτό γίνεται επειδή προσπαθεί να βρει κοινά στοιχεία της ανάπτυξης της Θεωρίας Συνόλων με την Εβραϊκή φιλοσοφία, ιδίως στο ζήτημα της έννοιας του Απείρου. Ας δούμε πώς το στοιχειοθετεί: «ξέρουμε ότι οι Εβραίοι της Ισπανίας και της Πορτογαλίας που είχαν αλλάξει πίστη είχαν γίνει conversos ενώ συνέχιζαν να πιστεύουν στην θρησκεία τους μυστικά, για ολόκληρες γενιές. (...) Σε ιδιωτικές επιστολές, όπως εκείνη του αδερφού του Cantor, μπορούσαν να μιλούν ανοιχτά ο ένας στον άλλον και να συζητούν για τις παραδόσεις και για την καταγωγή των οικογενειών τους. Ο Grattan – Guinness έλεγε ότι το όνομα του Cantor δεν ήταν Εβραϊκό αλλά Λατινικό και σημαίνει τραγουδιστής. Πράγματι, η ρίζα του όρου Cantor προέρχεται από το ρήμα τραγουδώ, αλλά η συγκεκριμένη μορφή καθόλου δεν παρέπεμπε στο chanteur (στα γαλλικά ο τραγουδιστής) ή cantante (ο τραγουδιστής στα ιταλικά) αλλά μάλλον στον τραγουδιστή της συναγωγής, στον Πρωτοψάλτη. Όσοι Εβραίοι είχαν αλλαξοπιστήσει στην Ισπανία και στην Πορτογαλία, εγκατέλειψαν την Ιβηρική Χερσόνησο κατά τη διάρκεια του 15ου και 16ου αιώνα και ταξίδευαν προς το Βορρά, αρχικά στο Άμστερνταμ και στη συνέχεια ανατολικότερα, προς τη Γερμανία και τη Βαλτική Ρωσία. Είναι πιθανό λοιπόν, οι πρόγονοι του Cantor να έφθασαν μέχρι την Αγία Πετρούπολη, τη Δανία και τη Γερμανία. Κράτησαν το Εβραϊκό όνομα της οικογένειά τους καθώς επίσης και τις παραδόσεις τους - μεταξύ των οποίων ήταν οι γάμοι μεταξύ τους, όπως ακριβώς συνέβη στην περίπτωση του Cantor. Παρότι, λοιπόν, προς τα έξω έδειχναν Χριστιανοί, ιδιωτικά εφήρμοζαν τον Ιουδαϊσμό γιατί τότε, πώς αλλιώς θα μπορούσε ο Cantor να γνωρίζει την Εβραϊκή αλφάβητο(...) Οι Εβραίοι της Ιβηρικής χερσονήσου γνώριζαν επίσης την Καμπάλα. Ο ιουδαϊκός μυστικισμός γεννήθηκε στην Ισπανία και οι πιο σημαντικοί ραββίνοι της Καμπάλα έζησαν και δούλεψαν στη χώρα αυτή. Καθώς όμως οι Ισπανοί και Πορτογάλοι Εβραίοι ταξιδεύουν και διασπείρονται σε ολόκληρη τη βόρεια Ευρώπη, κουβαλούσαν μαζί

τους την παράδοση της μελέτης του Εβραϊκού μυστικισμού. Η ιδέα του *Ain Sof*, δηλ. του Απειρού του Θεού, ήταν ένα σημαντικό μέρος της μυστικής τους παράδοσης. Ο Cantor πρέπει να γνώριζε καλά τον ρόλο του γράμματος Άλεφ, ως σύμβολο του θεού και της απεραντοσύνης του. (...) Ο Cantor όμως, δεν ήταν ανάγκη να γνωρίζει ολοκληρωτικά την Καμπάλα προκειμένου να αντιμετωπίσει την αντίληψη του απείρου και το σύμβολο που σχετίζεται με αυτή, δηλαδή το Άλεφ στα πλαίσια της εβραϊκής παράδοσης. Το μόνο που έπρεπε να γνωρίζει ήταν η πιο σημαντική εβραϊκή προσευχή το "Άντόν Ολάμ" (αφέντης του σύμπαντος). Ένας στίχος από την προσευχή αυτή που οι Εβραίοι επαναλαμβάνουμε αρκετές φορές καθημερινά, λέει πως ο Θεός κυβερνά το σύμπαν «μπελί ρεσίτ, μπελί ταχλίτ», δηλαδή δίχως αρχή και δίχως τέλος. Συνεπώς, η αντίληψη του Απειρού ήταν γνωστή σε όλους όσους είχαν Εβραϊκές καταβολές ακόμη και στους Εβραίους της Ιβηρικής χερσονήσου που είχαν αλλαξοπιστήσει» (Aczel 2006: 167 – 168).

Άφησα για το τέλος της παραγράφου την ιδέα του Θεϊκού Απόλυτου διότι αυτή εμφανίζεται όταν αυτός δεν είναι σε νεαρή ηλικία. Συγκεκριμένα, στα 54 του χρόνια, σε μια επιστολή του στον Dedekind βρίσκουμε το παρακάτω απόσπασμα:

«μια πολλαπλότητα μπορεί να είναι τέτοια ώστε η υπόθεση ότι όλα τα στοιχεία της συνυπάρχουν να οδηγεί σε αντίφαση, οπότε είναι αδύνατο να συλλαβουμε την πολλαπλότητα αυτή ως ενότητα, ως ένα "ολοκληρωμένο πράγμα". Τέτοιες πολλαπλότητες τις αποκαλώ "Απόλυτα Απειρες" ή "λογικά ασυνεπείς πολλαπλότητες". Όπως μπορούμε να δούμε αμέσως, η "ολότητα των νοητών πραγμάτων", παραδείγματος χάριν, είναι μια τέτοια πολλαπλότητα» (Rucker 1999: 51)

Σε αυτο το απόσπασμα είναι φανερό ότι ο Κόσμος ή το Σύμπαν δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί ένα ενιαίο Όλον αφού για να χαρακτηρίζεται από μια συνέπεια δεν θα υπάρχει η δυνατότητα να υπάρχουν σε αυτό αντιφατικές προτάσεις, πόσω μάλλον αντιφατικοί κόσμοι. Επειδή όμως όλα αυτά υπάρχουν ως ιδέες που μπορούν να συλληφθούν από τον ανθρώπινο νου ο Cantor τα αντιμετωπίζει όχι ως ένα "σύνολο" αλλά ως μια "πολλαπλότητα". Αλλά και εννέα χρόνια αργότερα, το 1908 σε επιστολή του προς την μαθηματικό Grace Chislom Young έγραφε:

«ποτέ δεν δέχθηκα κάποιο "Υπέρτατο είδος" του ενεργεία απείρου. Τουναντίον, απέδειξα με αυστηρότητα ότι δεν μπορεί υφίσταται η ύπαρξη ενός Υπέρτατου είδους" του ενεργεία απείρου. Αυτό που εννοείται είναι ότι το πεπερασμένο και το υπερπεπερασμένο δεν είναι κάποιο "Είδος". Είναι η μοναδική, απόλυτα ανεξάρτητη ενότητα, στην οποία βρίσκονται τα πάντα, η οποία περιέχει τα πάντα, είναι το "Απόλυτο", ακατανόητο για τον ανθρώπινο νου, άρα δεν σνιστά αντικείμενο των Μαθηματικών, είναι μη μετρήσιμο, είναι το "ens simplicissimum", το "Actus purissimus", αυτό που οι πολλοί αποκαλούν "Θεό"» (Thomas – Bolduc 2016: 142)

Συνεπώς, είναι φανερό από το παραπάνω απόσπασμα ότι ακόμα και αν ο Cantor είχε κάποτε κατά νου να μιλήσει για το Απόλυτο Άπειρο με μαθηματικούς όρους, σε ώριμη ηλικία πια έχει καταλήξει ότι η κλάση Ω που περιέχει τα πάντα και δεν αφήνει τίποτα απ' έξω δεν είναι προσιτή από την ανθρώπινη διάνοια άρα μια τέτοια κλάση θα μπορούσε να προσιδιάζει μόνο προς το Θεό.

2.5 Μια Καντοριανή γέφυρα ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Θεολογία

Ο Cantor μέσα από τη Θεωρία Συνόλων του δημιούργησε δύο βασικές ασυνεπείς πολλαπλότητες (inconsistent multiplicities), την *On* και την *Card*. Η πρώτη είναι το σύνολο των διατακτικών τύπων και η δεύτερη είναι το σύνολο των πληθάριθμων. Αν τα εκλάβει κανείς ως σύνολα – θεωρώντας ως σύνολο μια συλλογή στοιχείων που έχουν κοινά χαρακτηριστικά και που υπακούει σε μια σειρά μαθηματικές ιδιότητες της Θεωρίας Συνόλων - θα βρεί μέσα ανυπέρβλητες αντινομίες. Ένα άλλο χαρακτηριστικό τους είναι ότι πρόκειται για σύνολα υπερβολικά μεγάλα. Αυτοί οι λόγοι είναι αρκετοί ώστε να εξηγήσουν το γιατί δεν μπορούν να ενταχθούν στη Θεωρία Συνόλων του¹³. Ο Cantor το γνώριζε καλά και για αυτό τα ενέταξε στις ασυνεπείς πολλαπλότητες¹⁴. Αυτές οι πολλαπλότητες δημιούργησαν στον Cantor την τεχνική αίσθηση της έννοιας του Απολύτως Απείρου, του Καντοριανού Ω . «Τι είναι το Ω ; Ω είναι εκείνο που οι άνθρωποι σκέφτονται όταν μιλούν για το άπειρο, υπό την έννοια ότι αυτό δεν υπόκειται σε κανενός είδους περιορισμό. Ω είναι το απόλυτο άπειρο. Λόγω της ίδιας τους της φύσης δεν είναι δυνατόν να συλλάβουμε έλλογα, ούτε να γνωρίσουμε πλήρως αντικειμενικά τα Απόλυτα. Μπορούμε να γνωρίσουμε ένα απόλυτο μόνον υποκειμενικά. Και για να ταυτίσουμε τον εαυτό μας με το Απόλυτο, πρέπει να εγκαταλείψουμε την αίσθηση της προσωπικής μας ταυτότητας. Τα παπούτσια μένουν έξω από το ναό» (Rucker, 1999: 246). Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον τρόπο που σκέφτηκε ο Cantor. Όπως λέει ο Tarrp «Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα μεθοδολογική παραλληλία ανάμεσα στην Καντοριανή θεωρία και την παραδοσιακή θεολογία. Όταν ο Cantor ανέλυσε τις παραδοσιακές αποδείξεις περί του αδύνατου της ύπαρξης των άπειρων αριθμών με πρόθεση να τις ανασκευάσει, ανακάλυψε ότι το πιο συνηθισμένο λάθος ήταν το να διατηρείς προτάσεις και ιδιότητες από το χώρο του πεπερασμένου στο χώρο του απείρου χωρίς έλεγχο. Αυτό το σφάλμα ονόμασε *proton pseudos*» (Tarrp, 2014: 83).

Ο Tarrp στη μελέτη του παραθέτει δύο αποσπάσματα στα οποία, όπως ισχυρίζεται, ο Cantor ρίχνει ευθεία γέφυρα ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Θεολογία. Το πρώτο είναι ένα απόσπασμα το οποίο ομολογεί ο ίδιος ότι δυσκολεύτηκε να το αποδώσει στα Αγγλικά από τα Γερμανικά γι αυτό και προτείνει μια πιο ελεύθερη απόδοση που έχει στην Ελληνική γλώσσα

¹³ Πρόκειται για το γνωστό παράδοξο που απέδειξε το 1897 ο Cesare Burali - Forti αν και ο Cantor το γνώριζε πριν από αυτόν (Rucker, 1999: 246).

¹⁴ Βλ. και πίνακα στη σελίδα 34 αυτής της εργασίας, όπως και τη σελίδα 36.

ως εξής: «την εποχή του Gauss υπήρχε ένα τρόμος πάνω σε θέματα Απειρού που οδήγησε στην απόρριψη όχι μόνο των άτυπων μορφών του μαθηματικού Απειρού αλλά ακόμα και των έγκυρων. Όμως η απόρριψη των έγκυρων μορφών του μαθηματικού Απειρού οδηγεί σε μια συγκεκριμένη μωπία: καθίσταται ανίκανος να δει κάποιος τον “άνωτερο, τον απόλυτο φορέα” του Απόλυτου¹⁵ Απειρού, δηλαδή το Θεό, το δημιουργό του κόσμου (Tarr 2014: 83). Το δεύτερο απόσπασμα βρίσκεται σε μία επιστολή του Cantor προς θεολόγους. Με αφορμή μια φράση από τη σύσταση του δόγματος περί του ‘*Dei Filius*’ (Υιού του Θεού), σε κείμενο του συμβουλίου του Βατικανού η οποία λέει για το Θεό ότι είναι «άρρητα υψηλότερος από οτιδήποτε άλλο εκτός του ιδίου, οτιδήποτε μπορεί να υπάρξει ή να είναι στη φαντασία». Στην επιστολή του Cantor προς θεολόγο βρίσκουμε τη φράση «κάθε επέκταση της διαίσθησης μας προς αυτό που είναι δυνατόν εντός της δημιουργίας μάς οδηγεί αναγκαία προς μια εκτεταμένη γνώση του Θεού» (Tarr 2014: 85)

2.6 Η επίδραση του Σπinoζικού Απειρού στο Καντοριανό Άπειρο

Στη §2.4 παρέθεσα κάποια στοιχεία που δείχνουν τον Cantor και τον Spinoza ως ανθρώπους που τους συνδέει το κοινό της Εβραϊκής τους ρίζας. Σε αυτήν την ενότητα θα επιχειρήσω την καταγραφή της επιρροής των Σπinoζικών ειδών του Απειρού στον μεγάλο συνολοθεωρητικό, διακόσια χρόνια αργότερα. Θα παρουσιάσω πρώτα την άποψη των Bussotti & Tarr όπως την καταγράφουν σε δημοσίευσή τους το 2010 και κατόπιν θα προχωρήσω στην παρουσίαση της δικής μου άποψης.

2.6.1 Μια άποψη των Bussotti & Tarr

Οι Bussotti & Tarr επιχειρούν μια ερμηνεία που βασίζεται από τη μια μεριά στο έργο των Spinoza και Cantor και από την άλλη στις χειρόγραφες σημειώσεις του Cantor. Ο τελευταίος άφησε ένα σημειωματάριο που μέσα παραθέτει αποσπάσματα από την *Ηθική* του Spinoza, αποσπάσματα που επικεντρώνονται στις έννοιες του Απειρού.

Η επιχειρηματολογία των Bussotti & Tarr έχει την παρακάτω κλιμάκωση: Ξεκινούν με την αποδοχή εκ μέρους και των 2 στοχαστών του ενεργεία Απειρού. Υπενθυμίζουμε ότι ο Cantor το δέχθηκε τόσο *in concreto* όσο και *in abstracto*, τουναντίον ο Spinoza δεν δεχόταν την ύπαρξη άπειρων αριθμών, θεωρώντας τους ως έργο της φαντασίας. Όπως περιέγραφα στο *Κεφάλαιο 1* της παρούσας εργασίας, ο Spinoza παρουσιάζει σύμφωνα με τους μελετητές 3 είδη Απειρού: το Άπειρο του Θεού, το Άπειρο των Κατηγορημάτων και το Άπειρο των

¹⁵ Καθώς το Απολύτως Άπειρο δε μπορεί για τον Cantor παρά να είναι ο Θεός, είναι βοηθητικό στην ανάγνωση αυτής της επιχειρούμενης συσχέτισης των Μαθηματικών με τη Θεολογία να αναφέρουμε ότι η λέξη “absolute” προέρχεται από το Λατινικό *absolutum* που προέρχεται από το *absolvere* που σημαίνει αποστασιοποιούμαι, ανεξαρτητοποιούμαι.

Τρόπων. Οι Bussotti & Tapp επισημαίνουν ότι οι Τρόποι δεν είναι αυθυπόστατοι καθώς εξαρτώνται οντολογικά από την Υπόσταση.

“Τα επιμέρους πράγματα δεν είναι παρά επηρεασμοί των κατηγορημάτων του Θεού, ήτοι τρόποι με τους οποίους τα κατηγορήματα του Θεού εκφράζονται με συγκεκριμένο και καθορισμένο τρόπο” (Ηθική, I 25ΠΣ : 116)

Άρα έχουμε την υπενθύμιση ότι οι πεπερασμένοι Τρόποι δεν είναι τίποτα άλλο παρά τα ατομικά δημιουργήματα, νόες και σκέψεις ή οι ατομικές εκδηλώσεις τους. Τρόπον τινά οι Τρόποι είναι οι φαινόμενες εκφράσεις των Κατηγορημάτων του Θεού. Όμως οι άπειροι (μη πεπερασμένοι) Τρόποι χρήζουν μιας προσεκτικότερης εξέτασης:

Ας δούμε τι λέει ο Spinoza για τους άπειρους Τρόπους, αλλά και για τις τροποποιήσεις τους :

«όλα όσα έπονται από την απόλυτη φύση κάποιου κατηγορήματος του Θεού έπρεπε να υπάρχουν πάντοτε και να είναι άπειρα, ήτοι είναι αιώνια και άπειρα μέσω αυτού του κατηγορήματος» (Ηθική, I 21 : 112)

«Ο,τι έπεται από κάποιο κατηγορήμα του Θεού, καθόσον είναι τροποποιημένο με μια τροποποίηση τέτοια που, μέσω αυτού του κατηγορήματος, να υπάρχει και κατ’ ανάγκη και ως άπειρη, πρέπει επίσης να υπάρχει και κατ’ ανάγκη και ως άπειρο» (Ηθική, I 22 :114)

Άρα, εφόσον τα κατηγορήματα είναι αυθυπόστατα εκφράζοντας την Υπόσταση, ενώ οι τρόποι όχι μόνο είναι φαινόμενες εκφράσεις των κατηγορημάτων του Θεού αλλά υπόκεινται σε τροποποιήσεις τότε το πράγμα αποκτά ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Διότι φαίνεται να υπάρχουν άπειροι τρόποι δύο ειδών. Ο G. H. Schuller στην Επιστολή 63 προς τον Spinoza θέτει το σχετικό ερώτημα

«θα ήθελα να έχω παραδείγματα εκείνων των πραγμάτων που παράγονται άμεσα από το Θεό, και εκείνων των πραγμάτων που παράγονται από τη διαμεσολάβηση κάποιας άπειρης τροποποίησης.» (Spinoza 2002b: 917)

Έτσι, σε απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος, στην Επιστολή 64 ο Spinoza απαντάει:

« τα παραδείγματα που ζητάτε, του πρώτου είδους είναι: στην περίπτωση της Σκέψης, η απόλυτη και άπειρη διάνοια και στην περίπτωση της έκτασης η κίνηση και η ηρεμία. Ένα παράδειγμα δεύτερου είδους είναι η όψη ολόκληρου του Σύμπαντος, το οποίο, ενώ ποικίλει με άπειρους τρόπους, εντούτοις παραμένει πάντα το ίδιο. (Spinoza 2002b: 919)

Ο παραπάνω ισχυρισμός στηρίζεται και σε σχετικό Λήμμα της Ηθικής:

«Ένα ούτως συντεθειμένο Άτομο διατηρεί επιπλέον τη φύση του είτε κινείται ολόκληρο, είτε ηρεμεί, είτε κινείται προς το τάδε μέρος, είτε προς το δεύνα, φτάνει κάθε μέρος να διατηρεί την κίνησή του και να τη μεταδίδει και στα υπόλοιπα όπως πριν» (Ηθική II, Λ7: 172)

προσθέτοντας στο σχετικό Σχόλιο ότι :

«...ολόκληρη η φύση είναι ένα και μόνο άτομο που τα μέρη του, τουτέστιν, όλα τα σώματα, ποικίλουν με άπειρους τρόπους δίχως καμιά μεταβολή ολόκληρου του Ατόμου.»

Οι Bussotti & Tarr έχοντας παραθέσει τα 3 Άπειρα του Spinoza, με την επισήμανση ότι το άπειρο των τρόπων φαίνεται να έχει δύο είδη, ήτοι τους άπειρους τρόπους και τις άπειρες τροποποιήσεις των άπειρων τρόπων, ισχυρίζονται ότι αυτό επηρέασε και τον Cantor, κάτι το οποίο αποδεικνύεται από τον παρακάτω ισχυρισμό του μεγάλου συνολοθεωρητικού:

«το ολοκληρωμένο Άπειρο μπορεί να βρεθεί υπό κάποια έννοια στους αριθμούς ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ... ω^ω ... που είναι σύμβολα για συγκεκριμένους Τρόπους (modi) του ολοκληρωμένου Απείρου. Έτσι το ολοκληρωμένο Άπειρο μπορεί να προκύψει με διαφορετικές τροποποιήσεις που μπορεί να είναι πιο καθαρά διακριτές από το λεγόμενο “πεπερασμένο ανθρώπινο άπειρο”. Αυτό δείχνει σαφώς πόσο απέχουμε από το Απόλυτο».

Το παραπάνω απόσπασμα που φαίνεται να υποκρύπτει μια Σπινοζική ανάγνωση του Απείρου μιλάει για μια από τις σημαντικότερες επινοήσεις της Καντοριανής Θεωρίας Συνόλων, αυτή των διατακτικών αριθμών. Όπως είδαμε στην §2.3 η παραγωγή τους βασίζεται σε δύο Αρχές: η Αρχή I εξασφαλίζει ότι κάθε διατακτικός είναι μεγαλύτερος από κάθε πεπερασμένο, ενώ η Αρχή II ότι κάθε διατακτικός αναπαριστάται από το σύνολο των προηγούμενων του. Άρα η Αρχή I προσιδιάζει με το «άπειρο σε ουσία» ενώ η Αρχή II με το «άπειρο σε ποσότητα» του Spinoza, έτσι όπως αυτά εκφράζονται στον Ορισμό 6 του Θεού. Συνεπώς, οι Bussotti & Tarr προτείνουν ότι οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί έχουν και τις δύο ιδιότητες των άπειρων Τρόπων του Spinoza: άπειροι σε ουσία, άπειροι σε τροποποιήσεις.

Στους υπερπεπερασμένους αριθμούς υπάγονται οι πληθάρημοι (τα Άλεφ) και οι διατακτικοί (τα ωμέγα). Υπό αυτή την έννοια αντιστοιχίζουν:

- α) τους πληθάρημους στο πρώτο είδος των άπειρων Τρόπων του Spinoza
- β) τους διατακτικούς στο δεύτερο είδος των άπειρων Τρόπων του Spinoza.

Θεωρώ ότι αυτή τους η προσέγγιση έχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον αν και ενέχει δόσεις υπερβολής. Οι τροποποιημένοι τρόποι είναι βέβαια κάτι το οποίο έχει ένα ενδιαφέρον σε οντολογικό επίπεδο στην ερμηνεία του Spinoza όμως δεν είναι από τα πρωτεύοντα ζητήματα της φιλοσοφίας του. Αν ήταν θα είχε φανεί και στη σχετική βιβλιογραφία μια ακόμη εκτενέστερη συζήτηση πάνω σε αυτό. Η αναφορά των δύο ειδών Απείρου στους Τρόπους θεωρώ ότι υπερτονίζεται περισσότερο για να δώσουμε έμφαση στην διαδικασία παραγωγής των Απείρων εκ μέρους του Cantor , ως «ιδέα» ή ως ένα τεχνικό μοντέλο παραγωγής. Άλλωστε θα μπορούσε κάποιος να κατασκευάσει πολύ εύκολα μια ένα προς ένα αντιστοίχιση των διατακτικών με τους φυσικούς ή και των πληθάρημων με τους φυσικούς, κάνοντας την όλη προσπάθεια να καταρρεύσει. Υπό αυτήν έννοια θεωρώ ότι δεν έχει ιδιαίτερη αξία να παρουσιάσουμε εδώ μια εναλλακτική πρόταση που παρουσιάζουν στην έρευνά τους οι Bussotti & Tarr στην οποία κάνουν λόγο: α) για “τρόπους τρίτου είδους”, β) για αντιστοίχιση των συνόλων του Cantor με τα Κατηγορήματα του Spinoza, γ) για αντιστοίχιση της ασυνεπούς πολλαπλότητας των Άλεφ με τους άπειρους Τρόπους του πρώτου είδους, της

ασυνεπούς πολλαπλότητας των διατακτικών με τους άπειρους τρόπους δεύτερου είδους και κάποιων ασυνεπών πολλαπλοτήτων με τα κατηγορήματα του Θεού.

2.6.2 Μια εναλλακτική προσέγγιση της επίδρασης του Σπιννοζικού Απείρου στο Καντοριανό Απειρο

Η πρόταση που παρουσιάζω μπορεί να φαίνεται απλουστευτική, όμως είναι αποτέλεσμα έμπνευσης από ένα καταστάλαγμα ανθρώπων που ασχολούνται με τα Μαθηματικά και με τη Φιλοσοφία και που λέει το εξής: τελικά τα Μαθηματικά έχουν μόνο δύο πυλώνες: είναι το σύνολο των Φυσικών Αριθμών και το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών. Τα υπόλοιπα Μαθηματικά είναι στερεωμένα σε αυτούς τους δύο πυλώνες και αποτελούν εξέλιξη του οικοδομήματος. Με αυτή τη σκληρή και απλή αλλά καθόλου απλοϊκή θέση συμφώνησα θεωρώντας την ως απόσταγμα εμπειρίας χρόνων. Αυτή η θέση θα είναι και το εργαλείο του συλλογισμού που παραθέτω.

Βγαίνοντας έξω από τον Spinoza αλλά μπαίνοντας σε μια ευρύτερη φιλοσοφικό – μαθηματική λογική που έχει την αρχή της στον Cantor αλλά όχι μόνο σε αυτόν, και λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση που κάναμε στο §1.4 για τα Κατηγορήματα, μου φαίνεται πιο συνεπές να αντιληφθώ αυτή την έννοια ως έννοια που συνάδει με την έννοια της διάστασης όπως εκφράζεται σέ ένα σύστημα συντεταγμένων. Αν λάβουμε υπόψη μας είτε τους καρτεσιανούς n -διάστατους χώρους όπου η κάθε διάσταση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες (με την μαθηματική έννοια της καθετότητας) είτε τα γενικευμένα quaternions (π.χ. τα octonions) που αποτελούνται από n πραγματικές ή / και φανταστικές διαστάσεις όπου υπάρχει πάλι η γενικευμένη έννοια της καθετότητας με μηδενικά εσωτερικά γινόμενα των μοναδιαίων διανυσμάτων της κάθε διάστασης, τότε μπορούμε να εκλάβουμε κάθε επιμέρους πράγμα ως n -διάστατο πράγμα¹⁶. Καθώς δεν υπάρχει όριο χρήσης στο πλήθος των διαστάσεων (ήδη στην Κβαντική κάνουμε χρήση άπειρων διαστάσεων), μπορούμε χωρίς φόβο να απεικονίσουμε τα Κατηγορήματα στις διαστάσεις. Και επειδή κάθε μαθηματική διάσταση είναι μοναδική (π.χ. τετμημένη, τεταγμένη, κατηγμένη ... ή πραγματική, φανταστική i , φανταστική j , φανταστική k , κοκ) μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των διαστάσεων, το οποίο είναι φυσικός αριθμός άλλοτε προσδιορισμένος και άλλοτε απροσδιόριστος, προσιδιάζει με το \mathbb{N} των φυσικών αριθμών. Συνεπώς, αν μείνουμε στην απλή περίπτωση ενός χώρου n -διαστάσεων τότε κάθε επιμέρους πράγμα έχει την εικόνα $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ άρα έχει n -κατηγορήματα. Καθώς μπορούμε να επιλύουμε προβλήματα σε n -διάστατους χώρους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των Κατηγορημάτων ή

¹⁶ Επειδή το \mathbb{R}^n και ο χώρος των quaternions είναι διαφορετικοί χώροι, εδώ θα ίσχυε η Πρόταση II του μέρους I της *Ηθικής*: «δύο υποστάσεις με διαφορετικά κατηγορήματα δεν έχουν τίποτα το κοινό μεταξύ τους», δηλαδή, με σημερινούς όρους θα μιλάγαμε για άλλα Σύμπαντα

ακόμα καλύτερα ο πληθάριθμος των Κατηγορημάτων είναι ο πληθάριθμος του \aleph_0 , δηλαδή \aleph_0 (Άλεφ – μηδέν).

Κάθε επιμέρους πράγμα είναι Τρόπος στην Σπινοζική φιλοσοφία, και οι Τρόποι είναι «επιηρεασμοί των κατηγορημάτων του Θεού». Όμως, όπως έδειξε ο Cantor, το σύνολο των υποσυνόλων του \aleph_0 , ήτοι ο πληθάριθμος των δυνατών συνδυασμών των τρόπων είναι ο πληθάριθμος του \aleph_1 , και που, αν είναι σωστή η Υπόθεση του Συνεχούς, ταυτίζεται με τον πληθάριθμο του \mathbb{R} (δηλαδή 2^{\aleph_0}). Άρα το άπειρο των Τρόπων πρώτου είδους προτείνω να ταυτιστεί με το το Καντοριανό \mathfrak{c} . Όσο για το άπειρο των Τρόπων δεύτερου είδους, δηλαδή τους τροποποιημένους Τρόπους, θα πρότεινα να το αντιστοιχίσουμε με την τάξη των ασυνεπών πολλαπλοτήτων *Card* επειδή, όπως εξήγησα νωρίτερα, αυτές δεν συνιστούν αμιγή (μαθηματικά) σύνολα, είναι προϊόντα των άπειρων τροποποιήσεων των άπειρων Τρόπων και εν τέλει δεν χαρακτηρίζονται από κάποια τάξη μαθηματικού Απείρου. Ο λόγος που εστιάζω την προτίμησή μου στην *Card* και όχι στην *On* είναι επειδή η δεύτερη αναφέρεται στο σύνολο των διατακτικών τύπων δηλαδή αφορά σύνολα διατεταγμένα. Όμως το Σπινοζικό Σύμπαν δεν έχει δομή τέτοια ώστε οι Τρόποι δεύτερου είδους να υπόκεινται σε κάποιο είδος διάταξης, συνεπώς θεωρώ ότι η τάξη *Card* προσιδιάζει σε αυτήν την τάξη Απείρου

Τέλος, θεωρώ πως είναι προφανές ότι το Απόλυτο Άπειρο του Spinoza, όπως παρουσιάζεται στον Ορισμό 6 αλλά και στην σχετική επεξήγηση στην *Ηθική* - τα οποία και παρέθεσα στην § 1.3 - αλλά και το Μαθηματικό Απολύτως Άπειρο του Cantor - το οποίο και παρέθεσα στην §2.4 - ταυτίζονται, είναι δηλαδή το μη μετρήσιμο Ω , εν ολίγοις η «ολότητα των νοητών πραγμάτων» που υπερβαίνει την ανθρώπινη διάνοια.

Κοντολογίς, με βάση την πρόταση που κάνω, προτείνω:

\aleph_0 Σπινοζικά Κατηγορήματα

\mathfrak{c} Σπινοζικούς Τρόπους (πρώτου είδους)

Card Σπινοζικούς Τρόπους (δεύτερου είδους)

Ω το Απόλυτο Άπειρο, το Άπειρο του Θεού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Οι μη αποκρίσιμες προτάσεις του Gödel, το αυταίτιο του Spinoza και το Άπειρο.

Με το Μηδέν και το Άπειρο

Να συμπλιωθούμε

Κώστας Καρυωτάκης

3.1 Το γενικό διακύβευμα του Θεωρήματος του Gödel

Το 1931 ο Kurt Gödel δημοσίευσε σε ένα επιστημονικό περιοδικό ένα άρθρο με τον τίτλο «περί των τυπικά μη αποκρίσιμων προτάσεων στο *Principia Mathematica*¹⁷ και σε σχετικά συστήματα». Στο άρθρο αυτό δεν δόθηκε εξ αρχής από την επιστημονική κοινότητα η δέουσα βαρύτητα. Χρειάστηκε να περάσουν σχεδόν δύο δεκαετίες για να γίνει ευρύτερα γνωστό στις κοινότητες των Μαθηματικών και των Φιλοσόφων η βαθύτερη σημασία του και οι σοβαρές συνέπειες που θα είχε στην ανάπτυξη των Τυπικών Συστημάτων. Το εν λόγω άρθρο πολιτογραφήθηκε στην επιστημονική κοινότητα ως *Θεώρημα μη πληρότητας* του Gödel.

Όλοι γνωρίζουμε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία διδάσκεται ως μια παραγωγική επιστήμη. Στον πυρήνα μιας παραγωγικής επιστήμης βρίσκεται η ιδέα ότι μια πρόταση μπορεί να εδραιωθεί ως συμπέρασμα μιας συγκεκριμένης λογικής απόδειξης. Αυτή η μέθοδος έχει τις ρίζες της στους Αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι ανακάλυψαν αυτό που είναι γνωστό ως “Αξιωματική Μέθοδος” και τη χρησιμοποίησαν για να αναπτύξουν τη γεωμετρία με συστηματικό τρόπο. Η αξιωματική μέθοδος συνίσταται στο να δεχτεί κανείς χωρίς αποδείξεις μερικές προτάσεις ως αξιώματα ή αιτήματα και μετά να παραγάγει από αυτά τα αξιώματα άλλες προτάσεις του συστήματος ως θεωρήματα. Τα αξιώματα αποτελούν τα θεμέλια του συστήματος και είναι συνήθως κάποιες κοινά αποδεκτές και κατά κάποιο τρόπο προφανείς αλήθειες. Τα θεωρήματα είναι η “υπερδομή” και απορρέουν από τα αξιώματα με την αποκλειστική βοήθεια των αρχών της λογικής. Το εντυπωσιακό είναι ότι ο σχετικά μικρός αριθμός αξιωμάτων φέρει όλο το βάρος της εκδίπλωσης του ανεξάντλητου πλούτου των μαθηματικών αληθειών που παράγονται από αυτά. Αυτό το γεγονός εντυπωσίαζε τους στοχαστές για αιώνες και πίστευαν ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί πρότυπο αλλά και προνομιακό πεδίο ανάπτυξης μιας τέτοιας λογικής. Τα τελευταία περίπου 250 χρόνια νεότεροι αλλά και παλιότεροι κλάδοι των Μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της Θεωρίας Αριθμών, της Θεωρίας Συνόλων κ.λπ. εφοδιάστηκαν με ένα φαινομενικά επαρκές σύνολο αξιωμάτων και ανέπτυξαν τις Μαθηματικές τους Αλήθειες. Δημιουργήθηκε έτσι ένα κλίμα μέσα στο οποίο γινόταν σιωπηρά παραδεκτό ότι κάθε τομέας της Μαθηματικής σκέψης

¹⁷ Πρόκειται για τη μνημειώδη τρίτομη πραγματεία *Principia Mathematica* των Alfred North Whitehead και Bertrand Russell

μπορούσε να εφοδιαστεί με ένα σύνολο αξιωμάτων επαρκές για να αναπτυχθεί μεθοδικά η απέραντη ολότητα των αληθών προτάσεων για το δεδομένο ερευνητικό πεδίο. Ο Gödel έδειξε ότι αυτή η υπόθεση είναι αστήριχτη. Παρουσίασε στους μαθηματικούς το εκπληκτικό και μελαγχολικό συμπέρασμα ότι η αξιωματική μέθοδος έχει ορισμένους ενδογενείς περιορισμούς που αποκλείουν τη δυνατότητα να αξιωματικοποιηθεί πλήρως ακόμη και η συνηθισμένη Αριθμητική των Ακεραίων. Πέρα από αυτό απέδειξε ότι είναι αδύνατο να εδραιωθεί η εσωτερική λογική συνέπεια μιας μεγάλης κλάσης παραγωγικών συστημάτων - η στοιχειώδης αριθμητική, για παράδειγμα - εκτός αν υιοθετηθούν συλλογιστικές αρχές τόσο περίπλοκες, ώστε η εσωτερική τους συνέπεια να είναι αμφίβολη όσο αμφίβολη είναι και η συνέπεια των ίδιων των συστημάτων (Nagel & Newman 1991: 14 – 15)

Ο τρόπος παραγωγής των γεωμετρικών αληθειών δεν διέλαθε της προσοχής του Spinoza, εξάλλου πώς θα ήταν κάτι τέτοιο εφικτό για ένα στοχαστή – φιλόσοφο του δικού του εκτοπίσματος; Αυτό που εντυπωσιάζει είναι το μεγάλο τόλμημα να επιχειρήσει να γράφει την *Ηθική* στα πρότυπα της παραγωγικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έθεσε κάποιους αρχικούς ορισμούς, υιοθέτησε κάποια αξιώματα ως στοιχειώδεις και προφανείς αλήθειες και άρχισε να παράγει προτάσεις που στοιχειοθετούν την *Ηθική* του. Είναι γεγονός ότι στο έργο του μπορεί να κανείς να βρεί ατέλειες ή και αντιφάσεις τόσο στον μη επαρκή τρόπο απόδειξης ορισμένων προτάσεων όσο και στην ασάφεια κάποιων ορισμών και θέσεών του. Εν τούτοις, πρόκειται για ένα έργο ανυπέβλητο τόσο για το φιλοσοφικό του περιεχόμενο όσο και για τη μέθοδο γραφής του.

Σε μια παράλληλη ανάγνωση του 1ου κυρίως μέρους της *Ηθικής* και του θεωρήματος του Gödel εντοπίζονται ορισμένα ενδιαφέροντα ζητήματα που έχουν να κάνουν από τη μια με τις μη αποκρίσιμες προτάσεις και το αυταίτιο και από την άλλη σχετίζονται με τα είδη του Απειρού στους Spinoza και Gödel. Τα αποτελέσματα μιας τέτοια ανάγνωσης θα δούμε παρακάτω.

3.2 Συνέπεια και πληρότητα ενός Τ. Σ.

Ένα “Τυπικό Σύστημα” (Τ.Σ.) είναι μια αφηρημένη μαθηματική θεωρία που ξεκινά από μερικές πρωταρχικές έννοιες που δεν ορίζονται (σύμβολα), μερικές πρωταρχικές σχέσεις μεταξύ των συμβόλων που δεχόμαστε ως αληθείς (αξιώματα) και ορισμένους κανόνες (που δεχόμαστε ως έγκυρους) βάσει των οποίων παράγονται νέες αληθείς σχέσεις. Ένα “Τυπικό Σύστημα Μαθηματικής Λογικής” εξετάζει τη δημιουργία και τις ιδιότητες των λογικών τύπων. Το σύστημα του “Προτασιακού Λογισμού” εξετάζει την εξωτερική σύνδεση των τύπων ενώ ο “Κατηγορηματικός Λογισμός” αποτελεί επέκταση του προτασιακού λογισμού και εξετάζει και την εσωτερική δομή των τύπων. Ο Gödel στην απόδειξή του κάνει χρήση κατηγορηματικού λογισμού πρώτης τάξης και αποδεικνύει το θεώρημά του για το σύστημα των φυσικών αριθμών.

Η ιδιαίτερη αξία ενός Τ.Σ. έγκειται ότι «σε ένα τυπικό σύστημα, ο κίνδυνος να παρεισφρήσει η διαίσθηση εξαλείφεται. Οι διαισθήσεις μάς λένε πώς να σκεφτόμαστε για πραγματικά αντικείμενα – για τον χώρο, τους αριθμούς, τα σύνολα. Για επινοημένα σύμβολα χωρίς νόημα, και για τους αυστηρούς κανόνες που θεσπίσαμε για το χειρισμό τους, όμως, ούτε έχουμε ούτε χρειαζόμαστε διαισθήσεις. Αφού σε ένα τυπικό σύστημα όλα όσα πρέπει να κάνουμε με την α priori λογική προσδιορίζονται από τους κανόνες, η ιδέα του τυπικού συστήματος έχει στενή σχέση με την ιδέα του ηλεκτρονικού υπολογιστή, με το τι κάνει ένας υπολογιστής και πώς το κάνει» (Goldstein 2006: 131)

Ας εστιάσουμε τώρα στις βασικές έννοιες της ‘‘συνέπειας’’ και της ‘‘πληρότητας’’. Ένα Τ.Σ. λέγεται *συνεπές* όταν για καμία πρόταση P του συστήματος δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί και η P και η άρνησή της $\sim P$. Η *συνέπεια* είναι απαραίτητο χαρακτηριστικό των Τ.Σ. Ένα Τ.Σ. λέγεται *πλήρες* όταν για κάθε πρόταση P του συστήματος υπάρχει η δυνατότητα να αποδειχθεί είτε η αλήθεια της είτε το ψεύδος της. Αυτά αποδεικνύονται ως θεωρήματα. Θεωρητικά ένα μη πλήρες Τ.Σ. ενδέχεται να καταστεί *πλήρες* με την προσθήκη πρόσθετων αξιωμάτων. Αυτό όμως δεν είναι πάντα εφικτό, όπως απέδειξε ο Gödel στο θεώρημά του.

3.3 Η δημιουργία μιας αληθούς μη αποδείξιμης πρότασης: το θεώρημα του Gödel

Το ισχυρότερο εργαλείο στην απόδειξη του Θεωρήματος είναι η *Αρίθμηση Gödel*. Σε κάθε ένα από τα βασικά στοιχειώδη σύμβολα ενός Τ.Σ. των Φυσικών αντιστοιχίζει έναν περιττό αριθμό που λέγεται *Αριθμός Gödel* και συμβολίζεται ως **#G**. Η αντιστοίχιση που θα υιοθετήσουμε δεν είναι υποχρεωτικά μοναδική, υπάρχουν απεριόριστες επιλογές. Έτσι έχουμε, για παράδειγμα, την παρακάτω αντιστοίχιση ως μία από τις δυνατές επιλογές:

Σύμβολο	~	∨	∇	=	0	s	()	+	×	∈	{	}	:	ℕ
#G	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

1. Οι μεταβλητές κωδικοποιούνται σε πρώτους αριθμούς μεγαλύτερους του 30, υψωμένους στην 1^η δύναμη για τις κοινές μεταβλητές και στη 2^η δύναμη για τις προτασιακές μεταβλητές. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές x, y έχουν **#G** αντίστοιχα 31 και 37, ενώ οι προτασιακές μεταβλητές p, q έχουν **#G** αντίστοιχα 31^2 και 37^2 . Έτσι μια ακολουθία n συμβόλων κωδικοποιείται στο γινόμενο των n Πρώτων Αριθμών υψωμένος ο καθένας στη δύναμη με τον αντίστοιχο **#G**. Άρα, μια συμβολοσειρά n συμβόλων εκφράζεται ως το γινόμενο:

$$\prod_{i=1}^n p_i^{\#G_i}, \text{ όπου } p_i \text{ ο } i\text{-στός Πρώτος Αριθμός.}$$

Αυτή η ευφυέστατη σύλληψη αυτή βασίζεται στο *Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Αριθμών* που λέει ότι κάθε φυσικός αριθμός αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο Πρώτων Αριθμών. Αυτή η μοναδικότητα της ανάλυσης μας δίνει τη δυνατότητα να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ακολουθία συμβόλων, άρα και σε κάθε τύπο, έναν μοναδικό αριθμό που είναι και ο **#G** της ακολουθίας. Αντιστρόφως, κάθε φυσικός αριθμός, ακριβώς επειδή αναλύεται με μοναδικό τρόπο σε γινόμενο Πρώτων παραγόντων, μπορεί να διερευνηθεί η δυνατότητα μετατροπής του σε μια μοναδική ακολουθία συμβόλων.

Κατόπιν, ο Gödel προχώρησε στην κωδικοποίηση των *πράξεων*, των κανόνων *μετασχηματισμού*, *αντικατάστασης*, *αποδειξιμότητας* κ.λ.π. Αυτοί οι κανόνες ουσιαστικά δημιουργήθηκαν για να καταφέρουν να στήσουν τα θεμέλια ενός συστήματος που θα αποδείκνυε μια πολύ συγκεκριμένη πρόταση. Όμως τι είδους πρόταση ήταν αυτή;

Πριν προχωρήσουμε στην καρδιά του Θεωρήματος αξίζει να αναφερθούμε σε δύο λογικά παράδοξα που σίγουρα στάθηκαν για τον Gödel δύο από τις σημαντικότερες εμπνεύσεις για την απόδειξη της πρότασης του Θεωρήματός του.:

α) το κλασικό πια αυτοαναφορικό παράδοξο περί της αλήθειας ή μή της πρότασης

«αυτή η πρόταση είναι ψευδής»

η οποία αν είναι ψευδής, τότε θα είναι αληθής και αν είναι αληθής τότε θα είναι ψευδής. Αυτό το παράδοξο λύνεται ως γνωστόν αναγνωρίζοντας τη χρήση Αλήθειας δύο επιπέδων, δηλαδή η αληθοτιμή της αναζητείται σε μετα-μαθηματικό επίπεδο.

β) του *παράδοξο του Richard*. Αυτό διατυπώνεται ως εξής. Έστω

$$I = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$$

το σύνολο των ιδιοτήτων των Φυσικών αριθμών. Ένας φυσικός αριθμός n θα λέγεται *αριθμός Richard* αν δεν έχει την n -στή ιδιότητα i_n . Διαφορετικά, αν την έχει δεν θα είναι *αριθμός Richard*. Έστω τώρα η ιδιότητα

i_j : «ο x είναι αριθμός Richard»

Αντιλαμβανόμαστε, τότε, ότι ο αριθμός j αν είναι *αριθμός Richard* τότε δεν είναι *αριθμός Richard*, και αν δεν είναι *αριθμός Richard* τότε είναι *αριθμός Richard*.

Ο Gödel κατάφερε να αποδείξει με το οικοδόμημα που έστησε και με τη βοήθεια του διαγώνιου λήμματός ¹⁸ του ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος προτασιακός τύπος μιας αριθμητικοποίησιμης Θεωρίας ο οποίος είναι αληθής αν και μόνο αν δεν είναι αποδείξιμος. Πιο αναλυτικά: «Ο Gödel έδειξε: α) πώς να κατασκευάσουμε έναν αριθμητικό τύπο **G** που αντιπροσωπεύει τη μεταμαθηματική πρόταση : «ο τύπος **G** δεν είναι αποδείξιμος». Αυτός ο τύπος **G**, επομένως, φαινομενικά λέει για τον εαυτό του ότι δεν είναι αποδείξιμος. Μέχρις ενός σημείου, ο **G** κατασκευάζεται ανάλογα με το παράδοξο Richard. Στο παράδοξο αυτό η

¹⁸ το *Διαγώνιο Λήμμα* του Γκέντελ παραπέμπει στο γνωστό *Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών* της Ανάλυσης

έκφραση “αριθμός Richard” σχετίζεται με ένα ορισμένο αριθμό n και η πρόταση «ο n είναι αριθμός Richard» κατασκευάζεται. Στο συλλογισμό του Gödel, ο τύπος G επίσης σχετίζεται με ένα ορισμένο αριθμό h και κατασκευάζεται έτσι ώστε να αντιστοιχεί στην πρόταση «ο τύπος που αντιστοιχεί στον αριθμό h δεν είναι αποδείξιμος». Η G είναι αληθής αν και μόνο αν δεν είναι αποδείξιμη!!! «Βέβαια, η G είναι μια καθαρά αριθμητική δήλωση. Συγχρόνως, όμως, αναφέρεται και στον εαυτό της λέγοντας ότι δεν είναι αποδείξιμη. Όμως, είναι αυτό που λέει αληθές; Από ο,τι φαίνεται δεν μπορεί να είναι ψευδές αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι θα πρέπει να είναι αποδείξιμη και, συνεπώς, ούτως ή άλλως αληθής. Εκτός, βέβαια, κι αν το τυπικό σύστημα της Αριθμητικής είναι ασυνεπές, οπότε όλες του οι προτάσεις είναι αποδείξιμες ακόμα και οι αντιφατικές. Φτάνουμε λοιπόν σε ένα σημείο της απόδειξης όπου η βασική παραδοχή περί συνέπειας του τυπικού συστήματος καλείται να επιβεβαιώσει την ορθότητά της και το κάνει: Η G είναι και μη αποδείξιμη και, εφόσον αυτό ακριβώς λέει, αληθής. Δεν δείξαμε ότι είναι αληθής αποδεικνύοντάς την εντός του τυπικού συστήματος, σύμφωνα με τους καθαρά μηχανιστικούς κανόνες αυτού του συστήματος, δηλαδή παράγοντάς της. Αντ’ αυτού, δείξαμε ότι είναι αληθής βγαίνοντας έξω από το σύστημα και δείχνοντας ότι δεν μπορεί να αποδειχθεί εντός του τυπικού συστήματος (...) Επομένως υπάρχουν αποδείξιμα μη αποδείξιμες, κι ωστόσο αληθείς, προτάσεις σε κάθε τυπικό σύστημα που περιλαμβάνει τη στοιχειώδη αριθμητική, αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι συνεπές» (Goldstein 2006: 180 – 181). Μια τέτοια πρόταση είναι και η πρόταση G .

3.4 Σχέση Σπινοζικού αυταίτιου και Γκεντελιανής μη αποκρίσιμης πρότασης: μια πρόταση για το Άπειρο

Το 2007 δημοσιεύθηκε μια πολύ ενδιαφέρουσα μονογραφία, πρόκειται για την εργασία του Zwick (2007) με αφορμή το αυταίτιο του Spinoza και τις ορθές αλλά μη αποδείξιμες προτάσεις του Gödel. Η ανάγνωσή της με ενέπνευσε να αποτολμήσω ένα φανταστικό σενάριο το οποίο θα παρουσιάσω εν συντομία εδώ προκειμένου να παρουσιάσω μια πρότασή μου για μια αντιστοίχιση δύο Σπινοζικών Απειρών στη Γκεντελιανή Θεωρία. Αφού αναδείξω τα όρια μιας τέτοιας απόπειρας αντιστοίχισης θα παρουσιάσω το βασικό συμπέρασμα του Zwick για το αυταίτιο και το μη αποκρίσιμο.

Ας επιχειρήσουμε να καταγράψουμε ένα σύντομο σενάριο εμπνευσμένο από τα αριθμητικοποιήσιμα συστήματα του Gödel και από την *Ηθική*. Ας υποθέσουμε ότι η *Ηθική* του Spinoza μπορεί να γίνει ένα αριθμητικοποιήσιμο σύστημα παραγωγής αληθειών. Άρα θα ξεκινούσαμε με τις βασικές έννοιες που δεν επιδέχονται ορισμών (όπως η ουσία, η ύπαρξη, η φύση, το γένος, η σκέψη κλπ), μετά θα δεχόμασταν κάποια αξιώματα και τέλος κάποιους κανόνες παραγωγής αληθειών (modus ponens, κλπ). Ύστερα θα προχωρούσαμε σε ορισμούς και θα αρχίζαμε να παράγουμε αλήθειες σε επίπεδο Φιλοσοφίας αλλά πάντα

αριθμητικοποιήσιμες¹⁹. Επειδή μπορούμε να παράγουμε τύπους, κάποιιοι από αυτούς θα αντιστοιχούσαν σε προτάσεις που μπορούν να λάβουν αληθοτιμή, άρα θα υπήρχε μια διαδικασία, πάντα αριθμητικοποιήσιμη, που θα συνιστά την απόδειξη της Αλήθειας ή του Ψεύδους αυτών των προτάσεων. Η διαδικασία αυτή θα απεικόνιζε σε αριθμητικό επίπεδο την ακολουθία των αιτίων για την παραγωγή ενός αποτελέσματος. Ο Spinoza δέχεται ότι προκειμένου να εκδηλωθεί ένα γεγονός, ήτοι ένας Σπινοζικός Τρόπος, υπάρχει μια ακολουθία αιτίων. Αυτή η ακολουθία αιτίων σε μια αριθμητικοποιημένη *Ηθική* θα συνιστούσε την Γκεντελιανή *απόδειξη*, που θα ήταν και η ίδια η αριθμητική ουσία του εν λόγω Σπινοζικού Τρόπου. Από την άλλη η Γκεντελιανή *απόδειξη* αυτού του Τρόπου θα ήταν ένας μοναδικός φυσικός αριθμός ο οποίος θα είχε μια μοναδική ανάλυση σε γινόμενο Πρώτων Παραγόντων. Εδώ δεν χρειάζεται πια να συνεχίσουμε το σενάριο μας. Εδώ είναι το κομβικό σημείο της υπόθεσής μας: επειδή η ανάλυση αυτή είναι μοναδική προτείνω οι Πρώτοι Αριθμοί να παίζουν τον ρόλο των Σπινοζικών Κατηγορημάτων (κάτι σαν τις διαστάσεις που αναλύσαμε στην υποενότητα 2.6.2). Υπό αυτή την έννοια, αφού γνωρίζουμε ότι οι Πρώτοι Αριθμοί είναι άπειροι και είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των φυσικών, ο πληθάρημος του συνόλου των Πρώτων Αριθμών θα είναι \aleph_0 . Άρα, υποστηρίζω ότι στο σύστημα του Gödel, όπως και στο σύστημα του Cantor, η τάξη των άπειρων Σπινοζικών Κατηγορημάτων είναι \aleph_0 .

Τέλος, όπως είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, οι Τρόποι είναι «επηρεασμοί των κατηγορημάτων του Θεού» και κάθε επιμέρους πράγμα είναι Τρόπος στην Σπινοζική φιλοσοφία. Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να καταγράψουμε το σύνολο όλων των

$$\prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\#G_i}, \text{ όπου } p_i \text{ ο } i\text{-στός πρώτος αριθμός.}$$

Τότε θα καταγράφαμε το σύνολο όλων των τύπων μέσα στο συγκεκριμένο αριθμητικοποιημένο σύστημα, άρα θα καταγράφαμε το σύνολο των Σπινοζικών Τρόπων. Δεχόμενοι ότι:

- α) ο πληθάρημος των αριθμών Gödel, δηλαδή των $\#G$, είναι \aleph_0 που αντιστοιχεί στον διατακτικό ω
 - β) ο πληθάρημος των πρώτων αριθμών είναι επίσης \aleph_0 που αντιστοιχεί στον διατακτικό ω
- τότε το πλήθος όλων των δυνατών τύπων που θα προκύψουν από μια αριθμητικοποιημένη Θεωρία, και εν προκειμένω μια αριθμητικοποιημένη *Ηθική*, αντιστοιχεί στον διατακτικό

$$\omega^{\omega}$$

που είναι, όπως έδειξε ο Cantor, ο αριθμός:

$$\varepsilon_0 = E(1) = \lim_{\nu} \omega_{\nu}, \text{ όπου } \omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \omega_3 = \omega^{\omega_2}, \dots, \omega_{\nu} = \omega^{\omega_{\nu-1}}$$

¹⁹ Σε ένα τέτοιο σενάριο αριθμητικοποίησης της Ηθικής δεν θα έπρεπε να υπάρχει ο ορισμός του Θεού, διότι κατά τον Spinoza ο Θεός είναι μεν πρώτο αίτιο αλλά εμμενές.

δηλαδή, ο ελάχιστος όλων των \mathcal{E} - αριθμών που αντιστοιχεί στο σύνολο με το δεύτερο μέγιστο υπερπεπερασμένο πληθάριθμο, δηλαδή το \aleph_1 ²⁰. Άρα, υποστηρίζω ότι στο σύστημα του Gödel, όπως και στο σύστημα του Cantor, η τάξη των άπειρων Σπινοζικών Τρόπων είναι \aleph_1 , ενδεχομένως \mathfrak{c} , αν φυσικά η Υπόθεση του Συνεχούς είναι αληθής.

Σε αυτό ο σημείο ο συλλογισμός για μια αντιστοίχιση του Απόλυτου Απείρου του Spinoza με κάτι ομόλογο που βρίσκεται στον Gödel, σταματάει. Δεν υπάρχει κάποιο γραπτό εκ μέρος του μεγάλου λογικολόγου που να αφορά το Απόλυτο Άπειρο ή το Θεό. Υπάρχουν όμως κάποιες πληροφορίες που δεν μας επαρκούν για να θεμελιώσουμε μια πρόταση, πληροφορίες που αξίζει να παραθέσουμε. «Εκείνο τον καιρό κυκλοφορούσαν κάτι περίεργες φήμες ότι δούλευε σε μια απόδειξη για την ύπαρξη του Θεού – φήμες που, όπως αποδείχθηκε ήταν αληθινές. Ο Gödel, όπως και ο Leibniz, πίστευε ότι η περίφημη οντολογική απόδειξη για την ύπαρξη του Θεού είναι έγκυρη σε κάποια εκδοχή της. Το σκεπτικό της συγκεκριμένης απόδειξης ήταν ότι, για να αποφανθούμε σχετικά με την ύπαρξη του Θεού, πρέπει πρώτα να ορίσουμε επακριβώς την έννοια Θεός». (Goldstein 2006: 208) «Σύμφωνα με αυτό το επιχείρημα, ο Θεός δεν μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαίο ον – δηλαδή ως ένα ον που απλώς τυχαίνει να υπάρχει – αλλά ως αναγκαίο που, εάν υπάρχει, υπάρχει σε όλους τους δυνατούς κόσμους. Επομένως, αν ο Θεός είναι έστω δυνατός, είναι και υπαρκτός. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί κανείς να είναι αθεϊστής, εκτός κι αν είναι υπεραθεϊστής - αν δηλαδή αρνείται όχι μόνο την ύπαρξη αλλά και τη δυνατότητα ύπαρξης του Θεού. Ακολουθώντας το παράδειγμα του Leibniz, ο Gödel κατασκεύασε το δικό του οντολογικό επιχείρημα υπέρ της ύπαρξης του Θεού. Όμως στη συνέχεια φοβούμενος μήπως θεωρηθεί θεϊστής σε μια εποχή που ο αθεϊσμός ήταν το κυρίαρχο ρεύμα απέφυγε να το δημοσιοποιήσει.» (Yourgrau 2005: 187)

Επομένως, τα υπάρχοντα στοιχεία βάζουν ανάσχεση στον όποιον συλλογισμό μας να μιλήσουμε για μια πρόταση **G**. Όπως προανέφερα, η πρόταση **G** χαρακτηρίζεται από αυτοαναφορικότητα και είναι αληθής σε ένα μετα-επίπεδο μιας συγκεκριμένης αριθμητικοποιημένης Θεωρίας, εν προκειμένω της *Ηθικής*. Δεν έχει νόημα να αποτολμήσω κάποια εικασία για παραλληλισμό της με κάποιο Ω ή με «το σύνολο των προτάσεων», κάτι τέτοιο θα ήταν βεβιασμένο θα φάνταζε αστήριχτο και δεν θα διέθετε έρεισμα παρά μόνο διαίσθηση. Θα παραθέσω όμως εδώ, προκειμένου να τελειώσω την μελέτη μου, ένα απόσπασμα από τη μονογραφία του Zwick. Ο Martin Zwick, λοιπόν, αναφέρει: «Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η πρόταση **G** δεν είναι μια πρόταση causa – sui αφού αντανακλά, άρα απαιτεί ολόκληρο το T. Σ. Ακόμη η πρόταση **G** δεν προκύπτει με τον τρόπο που προκύπτουν τα θεωρήματα από τα αξιώματα, και τους κανόνες λογικού συμπερασμού. Αν ως “όλον” θεωρήσουμε τους ορισμούς, τα αξιώματα, τους κανόνες συμπερασμού και τα θεωρήματα του T.Σ., τότε η **G** δεν είναι μέρος αυτού του “όλου”, αλλά βρίσκεται έξω από

²⁰ Βλ. Cantor 1997: 208 & 238. Βλέπε επίσης Rucker 1999 : 70 - 73

αυτό. Και όμως, παραδόξως, είναι πλήρως εξαρτώμενη από αυτό το “όλον”, στην πραγματικότητα, είναι αντιληπτή μόνο σε αυτό το πλαίσιο. Σαν τη “μονάδα” του Leibnitz η πρόταση **G** είναι ταυτόχρονα ατομική και είδωλο του παντός δηλαδή καθενός πράγματος που βρίσκεται έξω από αυτήν. Σε αντίθεση με αυτό, τα θεωρήματα του Τ.Σ. που είναι αποκρίσιμα, είναι πολύ διαφορετικά: όπως οι Τρόποι του Spinoza, εξαρτώνται αποκλειστικά από το δικό τους περιβάλλον. Και παρά το ότι η πρόταση **G** είναι έξω από το Τ.Σ. , εντούτοις δεν είναι απομονωμένη, όχι μόνο γιατί προϋποθέτει και αντανακλά το σύστημα, αλλά επειδή είναι και παραγωγική που σημαίνει ότι έχει συνέπειες σε νέα θεωρήματα που προκύπτουν από αυτήν. Ισοδύναμα, στο πεδίο της Έκτασης, γεγονότα που είναι αιτία, παράγουν πρόσθετα γεγονότα (...) Αυτή η ασταμάτητη αύξηση είναι υπόρρητη, συνεπώς η εμμένεια υπονοεί την υπέρβαση (σ.σ. σε ένα μετα-επίπεδο). Αν αντιθέτως, εσωτερικεύσει κανείς όλη την έκταση αυτής της αύξησης, δηλαδή αν δει κανείς την αιωνιότητα σαν κάτι που περιλαμβάνει οτιδήποτε είναι αληθές και όχι απλά αποδείξιμο, τότε επιστρέφει στην προοπτική της εμμένειας. Η πρόταση **G** και οι συνέπειές της είναι μέρος της αιωνιότητας, μιας άπειρης ασυμμετρότητας μεγαλύτερης από το μικρότερο τη τάξει Άπειρο του αποκρίσιμου. Δοθείσης μιας τέτοιας πρότασης η οποία προϋποθέτει το «όλον» και όχι το να είναι απλά μια πρόταση, ίσως το σύστημα του Spinoza να μπορούσε να αναπτυχθεί υπό την ιδέα μιας τέτοιας δυνατότητας. Αν κάποιος, επίσης, πάρει στα σοβαρά το κρίσιμο στοιχείο της αυτοαναφορικότητας της πρότασης **G** και σκεφτεί την ανάλυση του Spinoza για τους Τρόπους ως λιγότερο ή περισσότερο συμπαγείς άρα λιγότερο ή περισσότερο δυναμικούς και ελεύθερους, ίσως θα μπορούσε να εκλάβει τον Τρόπο ως κάτι επαρκώς συμπαγές, ειδικά μέσα στην αυτοαναφορικότητά του, ότι αντανακλά το όλον. (...) Ίσως, οπλισμένοι με τα ευρήματα του Gödel ο Spinoza να είχε δει τη δυνατότητα ένα μέρος να ενσωματώνει όλη τη φιλοσοφική ηχώ της Βιβλικής δήλωσης ότι ο άνθρωπος δημιουργήθηκε κατ εικόνα και καθ’ ομοίωση του Θεού. Η πρόταση **G** είναι αιτία, δυνάμει της εκμετάλλευσης των κανόνων του λογικού συμπερασμού.» (Zwicky 2007: 50 – 51)

Συμπεράσματα

Επιχείρησα σε αυτή την εργασία να διερευνήσω μια αντιστοίχιση των τριών κύριων ειδών του Απείρου του Spinoza με το Άπειρο των Cantor και Gödel. Είναι πλέον φανερό ότι ουσιαστικά τα Άπειρα του Spinoza δεν σχετίζονται ουσιαστικά ή υποστασιακά με τα Άπειρα των Cantor και Gödel. Ο Spinoza κάνει καθαρή Φιλοσοφία βγάζοντας απ' έξω το πεδίο της Αριθμητικής καθώς την τελευταία τη θεωρεί εργαλείο της Φαντασίας, την εγκυρότητα της οποίας αμφισβητεί. Από τη μία μεριά είναι αμφισβητήσιμο το κατά πόσο νομιμοποιούμε να αναγάγουμε το Άπειρό του σε Μαθηματικό Άπειρο ή να ερμηνεύουμε το Άπειρό του με εργαλεία της σύγχρονης επιστημονικής μας σκέψης η οποία είναι πιο δεκτική στο πέπλο ενός μαθηματικού ή, ακόμα καλύτερα, μαθηματικοποιήσιμου Απείρου. Από την άλλη όμως, ξέρουμε ότι ο Cantor στην ανάπτυξη της Συνολοθεωρίας του επηρεάστηκε σε βάθος από την *Ηθική* του Spinoza. Την ιδιαίτερη αυτή γνώση τη χρωστάμε στις έρευνες των τελευταίων κυρίως χρόνων, όπως η μελέτη των Bussoti & Tarr που έφερε στο φως της δημοσιότητας τις σημειώσεις από τα χειρόγραφα του Cantor πάνω στην *Ηθική* και στο Άπειρο. Δικαιούμαστε λοιπόν, να διατυπώνουμε βάσιμες εικασίες για τον τρόπο με τον οποίο επηρεάστηκε ο Cantor από τον Spinoza και ας είναι ουσιαστικά διαφορετικά τα Άπειρα των δύο μελετητών. Αλλά και ο νεότερος Gödel του οποίου η δουλειά είναι επηρεασμένη από το έργο του Cantor, καίτοι δηλωμένος Λαϊμπνιτσιανός, έχει στην απόδειξή του σαφέστατες επιρροές από τα Καντοριανά Άπειρα και είναι νόμιμη η διερεύνηση μιας τέτοιας αντιστοίχισης, άσχετα αν αυτή δεν γεννά μια αντιστοίχιση ένα προς ένα, όπως στην περίπτωση του Cantor. Η μελέτη της απόδειξης του “Θεωρήματος της μη Πληρότητας” και κυρίως η δημιουργία και η διατύπωση της *πρότασης G* είναι οι σύνδεσμοι που θεμελιώνουν τον προβληματισμό για τη ισχυρή σύνδεση των Μαθηματικών με τα φιλοσοφικά Άπειρα.

Βιβλιογραφία

- Aczel, A. (2006). *Το μυστήριο του Άλεφ* (μτφρ. Ι. Σταυροπούλου), Αθήνα: Ενάλιος
- Augustine, S. (2000), *The City of God* (trans. By M. Dodds). New York: The Modern Library
- Barrow, J. D. (2007). *Άπειρο – τα Μαθηματικά της Αθανασίας* (μτφρ. Θεοφάνης Γραμμένος). Αθήνα: εκδοτικός οίκος Τραυλός
- Bennett, J. (1984). *A study on Spinoza's Ethics*. Indianapolis, IN : Hackett Pub. Co.
- Bussoti, P. & Tapp C., (2009), “The Influence of Spinoza’s concept of infinity on Cantor’s set theory”. Στο *Studies in history and philosophy of science* τ. 40, σ.σ. 25 – 35
- Cantor, G. (1997). *Συμβολές στη θεμελίωση της θεωρίας των υπερπεπερασμένων αριθμών* (μτφρ. Θ. Χριστακόπουλος). Αθήνα: Τροχαλία
- Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor – His Mathematics and Philosophy of Infinite*. Princeton: Princeton University Press
- Dea, S. (2011). *The Infinite and the Indeterminate in Spinoza*. Στο *Dialogue: Canadiana Philosophical Review*, vol. 50, issue 33 (September 2011), σ. σ. 603 - 621
- Della Rocca, M. (2008). *Spinoza*. London & New York: Routledge
- Eklund, Samuel H. (2014). "A Cardinal Sin: The Infinite in Spinoza's Philosophy". Στο *Philosophy Honors Projects*. Paper 7 . Διατίθεται Διαδικτυακά στο https://www.macalester.edu/philosophy/wp-content/uploads/sites/43/2016/10/Samuel_Eklund_2014_Thesis.pdf (Ανακτήθηκε: 01/10/2019)
- Gödel, K. (2018). *Το θεώρημα της μη πληρότητας* (μτφρ & μαθηματική προσέγγιση Γ. Βουλιούρης). Αθήνα: Δρόμων
- Goldstein, R. (2006). *Αιχμάλωτος των Μαθηματικών* (μτφρ. Έλενα Πισσία). Αθήνα: Τραυλός
- Koistinen, O. (ed), (2010). *The Cambridge companion to Spinoza's Ethics*. Cambridge: Cambridge University Press
- Melamed, Y. (2014). “Hasdai Crescas and Spinoza on Actual Infinity and the Infinity of God’s Attributes” στο Steven Nadler (ed.), *Spinoza and Jewish Philosophy*, Cambridge University Press, σ. σ. 194 – 215
- Nadler, S. (2006). *Spinoza's Ethics – An Introduction* . Cambridge: Cambridge University Press

- Nagel, E. – Newman, J. R. (1991). *Το θεώρημα του Gödel* (μτφρ. Ν. Γιαννακόπουλος). Αθήνα: Τροχαλία
- Newstead, A. (2007). Intertwining metaphysics and mathematics: the development of Georg Cantor's set theory 1871-1887. Διατίθεται Διαδικτυακά στο https://pdfs.semanticscholar.org/f044/21dacc5166ecc1eeb80c1c8706a84f13b612.pdf?_ga=2.185633836.46261198.1561518661-15742784.1561518661 (Ανακτήθηκε: 25/6/2019)
- Rucker, R. (1999). *Το Άπειρο και ο Νους* (μτφρ. Κ. Χατζηκυριάκου). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Augustine, S. (2000), *The City of God* (trans. By M. Dodds). New York: The Modern Library
- Spinoza, B. (2002α). Letter 12 to Meyer στο *Spinoza Complete Works* (ed. Michael Morgan), Indianapolis: Hackett Publishing Company σ. σ. 787 - 791
- Spinoza, B. (2002b). Letters 63 & 64 στο *Spinoza Complete Works* (ed. Michael Morgan), Indianapolis: Hackett Publishing Company. σ. σ. 916 – 919
- Σπινόζα, (2009). *Ηθική* (μτφρ. Ε. Βανταράκης – εισαγωγή Β. Γρηγοροπούλου). Αθήνα: Εκκρεμές
- Tapp, C. (2014). “Absolute Infinity – A bridge between Mathematics and Theology?”. Στο N. Tennant (ed.) *Foundational Adventuress. Essays in Honour of Harvey M. Friedman*, London: College Publications, σ.σ. 77-90
- Thomas – Bolduc, A. R. (2016). Cantor, God and Inconsistent Multiplicities. Στο *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 44 (1) . σ. σ. 113 – 146. Διατίθεται Διαδικτυακά στο <https://content.sciendo.com/view/journals/slgr/44/1/article-p133.xml> (Ανακτήθηκε: 25/6/2019)
- Vilenkin, N. Y. (1995). *Αναζητώντας το άπειρο* (μτφρ & επιμ. Α. Μουζακίτης & Γ. Μπούκης). Αθήνα: Κάτοπτρο
- Yourgrau, P. (2005). *Ένας κόσμος δίχως χρόνο* (μτφρ. Έλενα Πισσία). Αθήνα: Τραυλός
- Zwick, M, (2007). Spinoza and Gödel: Causa Sui and Undecidable Truth. Στο North American Spinoza Society – NASS Monograph # 13 (2007). σ.σ. 46 – 52. Διατίθεται Διαδικτυακά στο <https://static1.squarespace.com/static/55f6d5bde4b02cbdec67622e/t/57f40d563e00becf61a2644c/1475611993061/MONO13.pdf> (Ανακτήθηκε: 25/6/2019)

Λεξικά & Εγκυκλοπαίδειες

Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής (1998). Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης – Ινστιτούτο Νεοελληνικών Σπουδών (Ιδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη)

Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας, (επιμ. Μπαμπινιώτης Γ.) (2002), Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας Ε.Π.Ε

Μέγα Λεξικό της Ελληνικής Γλώσσας (1997) (επιμ. Liddell, H & Scott, R.). Αθήνα: Ι. Σιδέρης

Νέο Ελληνικό Λεξικό (επιμ. Κριαράς Ε.) (2003). Αθήνα: Εκδοτική Αθηνών

Το Φιλοσοφικό Λεξικό του Cambridge (επιμ. R. Audi) (2011). Αθήνα: Κέδρος

Encyclopaedia Britannica (2010). Chicago, London, Toronto, Geneva, Sydney, Tokyo, William Benton (Publisher)