ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ:ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ

<u>ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ</u>:ΡΙΖΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ

Δ201535

<u>ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:</u>

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΨΥΧΑΡΗΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΕΠΤΕΜΒΙΟΣ 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο

....

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της Συμβουλευτική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

....

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι ολόψυχες ευχαριστίες μου αποστέλλονται στον ανώτερο επόπτη μου,κ.Γεώργιο Ψυχάρη,του οποίου το πάθος για τη διδασκαλία,η υποστήριξη της μάθησης και η αφοσίωση στην έρευνα για την διδακτική των μαθηματικών αποτέλεσαν βασικά στοιχεία έμπνευσης.Η διορατικότητά του και η ανατροφοδότηση του έργου μου ήταν πολύτιμες. Επιπλέον, η καθοδήγηση, η ενθάρρυνση, η ανατροφοδότηση και η διορατικότητα σε όλη την διάρκεια του προγράμματος και της διπλωματικής μου ήταν αρκετά βοηθητική. Μια ιδιαίτερη ευχαριστία και η ευγνωμοσύνη μου προς την κ.Δέσποινα Πόταρη για τη συνεχή υποστήριξή της στα πλαίσια του προγράμματος και της εργασίας.Οι συμμετέχοντες σε αυτή την έρευνα αξίζουν επίσης την ειλικρινή μου αναγνώριση για την συμβολή τους στην ερευνητική διαδικασία που αποτελεί μέρος της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συγγενείς και φίλους που στήριξαν την προσπάθεια που κατεβλήθηκε για την συγγραφή του παρακάτω κειμένου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα ερευνηθούν τα νοήματα και οι αντιλήψεις που σχηματίζουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή τους στις ανισώσεις. Επιπλέον,θα αναλυθούν οι στρατηγικές επίλυσης των ανισώσεων που ακολουθούν και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν προερχόμενες κυρίως από τις αντιλήψεις τους πάνω στην έννοια της εξίσωσης. Υλοποιώντας την έρευνα σε δύο ομάδες αποτελούμενες από δύο μαθητές Γυμνασίου που δεν έχουν διδαχθεί τις ανισώσεις,θα ερευνηθούν οι τρόποι διαχείρησης ανισωτικών συμβόλων,η διαχείρηση των ιδιοτήτων τους, οι στρατηγικές που θα ακολουθήσουν κατά την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, οι ομοιότητες και διαφορές που εντοπίζουν με τις εξισώσεις καθώς και η πιθανή σύνδεση της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης των ανισώσεων μέσω της χρήσης νέων ψηφιακών τεχνολογιών. Επιπλέον,θα μελετηθούν τα υπάρχοντα λογισμικά που χρησιμοποιούνται τόσο στο εγχώριο όσο και στα εκχώρια αναλυτικά προγράμματα.Εκτενέστερα θα αναλυθούν δύο λογισμικά ψηφιακής τεχνολογίας που θα αποτελέσουν βασικό πυλώνα της παρούσας έρευνας.Το λογισμικό Algebra arrows,που θα χρησιμοποιηθεί, στοχεύει να συμβάλλει στην νοηματοδότηση των αλγεβρικών εκφράσεων που συνθέτουν μία ανίσωση,οι οποίες έχει παρατηρηθεί τόσο από προσωπική εμπειρία όσο και από την υπάρχουσα βιβλιογραφία ότι δημιουργούν δυσκολίες στην νοηματοδότησή τους .Επίσης συμβάλλει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης , που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη σύνδεση της αλγεβρικής-γεωμετρικής αναπαράστασης μίας ανίσωσης.Τέλος, το λογισμικό Pan Balance θα χρησιμοποιηθεί με σκοπό την ανάδειξη της άνισης σχέσης των αλγεβρικών παραστάσεων μίας ανίσωσης για τις διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και την σύνδεση της αλγεβρικής-γεωμετρικής αναπαράστασης των ανισώσεων.Τα αποτελέσματα θα αναδειχθούν σύμφωνα με την θεωρία των κρίσιμων συμβάντων και θα αναλυθούν ποιοτικά μέσα από το πρίσμα του μοντέλου abstraction in concept.Ολοκληρώνοντας την έρευνα θα παρατεθούν επιπλέον ερευνητικές πτυχές για την μετέπειτα προέκτασή της.Συμπερασματικά,τα ερευνητικά ερωτήματα που στοχεύονται να απαντηθούν συνοψίζονται ως εξής: Παρατηρείται ευελιξία στους

μαθητές κατά την μετάφραση της λεκτικής διατύπωσης στη μαθηματική συμβολική γλώσσα με όρους ανισοτήτων και το αντίστροφο.Ποιες στρατηγικές αναπτύσουν οι μαθητές κατά τη διερεύνηση των ιδιοτήτων της διάταξης για κάθε πραγματικό αριθμό στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και πώς ανήχθηκαν σε αυτες.Ποια είναι η σημασία της λύσης στην περίπτωση των εξισώσεων/ανισώσεων και οι ομοιότητες-διαφορές που εντοπίζουν ανάμεσά τους ;Η κατασκευή των συναρτήσεων μέσω του Algebra arrows,συμβάλλει στην νοηματοδότηση των μαθηματικών εκφράσεων που εν συνεχεία δημιουργούν την ανίσωση;Γίνεται κατανοητή η άνιση σχέση δύο ποσοτήτων μίας ανίσωσης μέσω του δυναμικού μοντέλου της ζυγαριάς και η ποιοτική διαφορά της από την εξίσωση;Ποια η συμβολή του λογισμικού nctm-balance expressions στο παραπάνω ερώτημα καθώς και στη σύνδεση της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης μίας ανίσωσης;

ABSTRACT

The aim of the main study is to investigate the meanings and the perceptions which be constructed during the introduction in the concept of inequalities by the students. Furthermore,is going to analyze the strategies that unfurled during the inequqlity solving and the difficulties that encounter mainly due to their misconceptions in the contept of inequality.The participants are two teams that consist of two students at the age of Gymnasium and have not be introduced in the beforementioned concept. It's going to investigate the methods the studens manage the inequalities symbols and their properties,their strategies in equality and inequality solving,the similarities and differences that they find out between them and the possible relationship between the algebraic and the geometrical representation through new digital technologies in didactic of mathematics. Morover,is going to analyze the existing softwares in the domestic and international analytic programms.Extensivly,is going to analyze two digital technology applets ,which are the basic columns of this study.The first one is named Algebra Arrows and the main target is to contribute in the signification of the algebraic expressions.These are the main element of any inequality and is widely accepted that are the reason of many difficulties in their signification.Another advantage of this applet is the contribution in the meaning of the concept of function ,which is very significant in the connection of algebraic and geometrical representation of function.The final applet ,is going to be used to this study is called Pan Balance with the aim to highlight the inequality relationship between the two members of an inequality for the varying values of the independent x-value.The effects are going to highlighted by the theory of critical events and the qualitative analisis is going to come true under the frame of abstraction in concept.Fullfilling the study,is going to quote further aspects for the extension of this study.To conclude,the research questions are:Is there fluency to transfer the lectical problem in the symbolic language of mathematics through inequatinal symbols and the converse? Which are the strategies that develop the students through the research of number arrangements' properties in pen-paper enviroment.What does solution mean in equality and inequality and which the difference and similarity between them?Does the applet Algebra Arrows contribute in the deeper meaning of algebraic expression,which take part in an inequality?Is understandable the inequal relationship between two quantities of an inequality through the balance model and the differentations of the equality? Which is the contribution of the applet nctm-expressions so in this question as in the connection of algebraic and geometrical representation of an inequality?

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διανύουμε τις πρώτες δεκαετίες μιας νέας εποχής όπου, αναμφίβολα, έχουν συντελεστεί ριζικές αλλαγές σε σχέση με το παρελθόν. Μέσα σε αυτήν τη νέα πραγματικότητα, καινούριες συνήθειες έχουν ενταχθεί στην καθημερινότητα όλων, αλλάζοντας τον τρόπο που οι άνθρωποι μαθαίνουν, εργάζονται, διασκεδάζουν, επικοινωνούν και παρουσιάζονται στον κοινωνικό τους περίγυρο.Ορισμένοι λιγότερο και άλλοι περισσότερο εύκολα ενσωματώνονται σε αυτή την αλλαγή της καθημερινότητάς τους. Οι νεότερες γενιές, εκ φύσεως δεκτικές στην καινοτομία και την πρόοδο, ενσωματώνουν εύκολα στη ζωή τους τα νεοφανή τεχνολογικά επιτεύγματα.Οι ψηφιακές τεχνολογίες είναι ένα καλό παράδειγμα που περιγράφει αυτήν ακριβώς την κατάσταση καθώς έχουν εναρμονηστεί με την ανθρώπινη ύπαρξη από την παιδική μόλις ηλικία.

Ιδιαίτερη αξία φαίνεται να έχει για τους ερευνητές η μελέτη των αποτελεσμάτων της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων στην ανθρώπινη συμπεριφορά και ειδικά στη μάθηση (Banks και Potts, 2010).Επιπλέον,η Gros (2007) παρατηρεί ότι οι σημερινοί μαθητές πιθανόν να έχουν αναπτύξει νέους τρόπους μάθησης εξαιτίας της επαφής τους με την τεχνολογία και δεν είναι ικανοποιημένοι με το να λαμβάνουν απλώς οδηγίες. Προτιμούν να μαθαίνουν θέτοντας ερωτήματα, ανακαλύπτοντας, κατασκευάζοντας, αλληλεπιδρώντας και διασκεδάζοντας. Αναφερόμαστε, επομένως, σε ανθρώπους που έχουν εκτεθεί σε διαφορετικές εμπειρίες, οι οποίες αντανακλώνται και διαμορφώνουν τον τρόπο σκέψης τους (Jorgensen και Lowrie, 2012).

Ο Papert (1993) στο βιβλίο του “The Children’s machine: Rethinking School in the age of the computer” αναφέρει μια παραβολή κατά την οποία οι εκπαιδευτικοί σε αντίθεση με τους χειρούργους δεν μπορούν να διακρίνουν διαφορές στις τεχνικές και μεθόδους του επαγγέλματος κατά τη διάρκεια της δικής τους και της τωρινής εποχής. Ο Papert καταλήγει στο ερώτημα: «Γιατί μέσα σε μια περίοδο όπου η ανθρώπινη δραστηριότητα γνωρίζει μια επανάσταση δεν φαίνεται αντίστοιχη αλλαγή στον τρόπο που βοηθούμε τα παιδιά να μάθουν;»

Αυτό ακριβώς είναι και το σημείο εστίασης της παρούσας εργασίας. Θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε βασικές πτυχές της έρευνας που συσχετίζει τη μάθηση με τις ψηφιακές τεχνολογίες στη διδακτική των μαθηματικών. Παράλληλα, μέσα από μελέτη περιπτώσεων, θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τους τρόπους με τους οποίους το περιβάλλον ενός ψηφιακού λογισμικού επιδρά στις διαδικασίες μάθησης διευκολύνοντας, πιθανόν, κάποιες αφαιρετικές διαδικασίες και τη σύνδεση αναπαραστάσεων.

Σκοπεύουμε, ταυτόχρονα, να διερευνήσουμε τις δυνατότητες αξιοποίησης των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται επισκόπηση της βιβλιογραφίας που υπάρχει πάνω στην έννοια της ανίσωσης και την σχέση των μαθητών με αυτές. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η υπάρχουσα βιβλιογραφία που σχετίζεται με τη θέση των νέων τεχνολογιών στην έννοια της ανίσωσης τόσο στο εγχώριο όσο και στο διεθνές εκπαιδευτικό σύστημα.Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται το παρόν εγχείρημα. (Abstraction in Context). Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται ο σκοπός, τα ερευνητικά ερωτήματα, οι συμμετέχοντες και γίνεται ανάλυση του φύλλου εργασίας που θα κληθούν οι μαθητές να επιλύσουν με τη βοήθεια του ψηφιακού περιβάλλοντος Algebra Arrows και Pan Balance expressions. Στο πέμπτο έκτο κεφάλαιο αντίστοιχα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και διατυπώνονται τα συμπεράσματα της παρούσας ερευνητικής εργασίας.Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο παρατίθεται μία πιθανή επέκταση της έρευνας σε διδακτορικό επίπεδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

1.1. ΟΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

1.1.1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ- ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Οι ανισώσεις παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά καθώς εμπλέκονται σε πολλές θεματικές περιοχές, συμπεριλαμβανομένης της άλγεβρας, της τριγωνομετρίας, του γραμμικού προγραμματισμού και της μελέτης των συναρτήσεων (Bazzini & Tsamir, 2004). Συγκαταλέγονται μεταξύ των πιο χρήσιμων εργαλείων στα θεωρητικά και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Είναι χαρακτηριστική η οδηγία του N.C.T.M. στις Ηνωμένες Πολιτείες, που καθορίζει ότι όλοι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν να αναπαριστούν καταστάσεις που εμπεριέχουν εξισώσεις και ανισώσεις, να κατανοούν το νόημα των ισοδύναμων μορφών εξισώσεων και ανισώσεων και να είναι σε θέση να τις επιλύουν με άνεση (NCTM standards 1989, 2000).Η κύρια χρήση τους γίνεται στην εφαρμογή και επίλυση προβλημάτων,η οποία ανέδειξε και ιστορικά την χρησιμότητά τους.

Στα μαθηματικά των αρχαίων λαών κάποιες ανισώσεις, ως απλές εκφράσεις ανισοτήτων, παρουσιάζονται μέσα από τον προφορικό κυρίως λόγο. Ανισώσεις με την κανονική έννοια του όρου, μπορούν να συσχετιστούν με την ανάπτυξη του λογισμού των συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα στα προβλήματα μεγιστοποίησης -ελαχιστοποίησης. Οι μαθηματικοί συνήθως εξέφραζαν το προς επίλυση πρόβλημα μέσω εξισώσεων και στη συνέχεια χρησιμοποιούσαν ανισώσεις προκειμένου να εκφράσουν κάποιες συνθήκες για τις λύσεις των εξισώσεων αυτών. Επιπλέον, ιστορικά, η λύση μιας ανίσωσης συνήθως προέκυπτε μέσα από την επίλυση μιας εξίσωσης που πρακτικά υποκαθιστούσε την τεθείσα ανίσωση. Στην περίπτωση αυτή το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο πρέπει να ληφθεί υπόψη, καθόσον συχνά, η κατάκτηση μιας λύσης σε πρακτικό επίπεδο, θεωρείτο ως το κύριο αποτέλεσμα που έπρεπε να επιτευχθεί.

Το ερώτημα που κυριαρχεί στο μυαλό ενός μαθητή είναι ''Γιατί είναι χρήσιμες οι ανισώσεις; Που θα μου χρειαστούν;''. Το ερώτημα αυτό είναι εύλογο να διαμορφωθεί στην ηλικία των 14-15 ετών καθώς οι μαθητές δεν έχουν γνωρίσει τη σημασία των ανισώσεων στην ιστορική πρόοδο τόσο των μαθηματικών όσο και των άλλων θετικών επιστημών καθώς και την σημαντική χρήση τους στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Η ανισότητα $(a-1)^2 \geq 0$ είναι διαφορετική από τις ανισότητες που παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και αναφέρονται παρακάτω. Δεν υπάρχει τίποτα να λυθεί εδώ αλλά αντιθέτως παρουσιάζει μια καθολική αλήθεια. Με άλλα λόγια, το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού ελλατωμένου κατά μία μονάδα είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν για κάθε πραγματικό αριθμό a (Postelnicu & Coatu, 1980). Στην ίδια κατηγορία με αυτήν την ανισότητα, μπορούμε να βρούμε πολλές διάσημες ανισότητες που αξίζει να αναφερθούν:

- Τριγωνική ανισότητα $||a|-|b|| \leq |a|+|b| \leq |a+b|$
- Γενικευμένη τριγωνική ανισότητα $|a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|\ldots+|a_n|$
- Αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $a,b \geq 0$
- Γενικευμένη ανίσωση αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{2}, \quad a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$$

- Την ισοπεριμετρική ανίσωση επιπέδου $L^2 \geq 4 \cdot \pi \cdot A$, όπου A είναι το εμβαδόν και L η περίμετρος ενός σχήματος

- Ανισότητα Cauchy-Schwartz για πραγματικούς αριθμού

$$| a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots a_nb_n | \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots b_n^2}$$

η οποία για n=2 και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$| ax + by | \leq | a || x | + | b || y | \leq \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

- Ανισότητα Cauchy-Schwartz εκφρασμένη με αθροίσματα

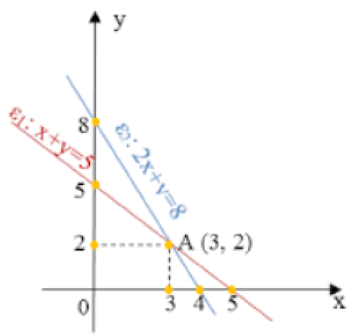
$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

Ο Fink (2000) διακρίνει δύο κατηγορίες ανισοτήτων στην κατηγορία των καθολικών αληθειών: ad hoc και γενικές ανισότητες. Χρησιμοποίησε την ονομασία ad-hoc για αυτές που αποτελούν εργαλεία που κάποιος χρειάζεται για να αποδείξει ένα αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, $-1 \leq \cos x \leq 1$ είναι μια ad hoc ανισότητα στην οποία θα βασιστούμε όταν αποδεικνύουμε $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x})=0$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα παρεμβολής.Η ανισότητα $1+x \leq e^x$ είναι μια ακόμη ad-hoc ανισότητα που χρησιμοποιήθηκε για να αποδείξει την ανίσωση αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου (Steele, 2004). Οι γενικές ανισότητες είναι οι διάσημες ανισότητες που μπορούν να σταθούν μόνες τους ως μαθηματικά αποτελέσματα ή χρησιμοποιούνται συχνά σε εκτιμήσεις αριθμών,λειτουργιών ή ολοκληρώματα. Παραδείγματα γενικών ανισοτήτων αποτελούν οι ανισότητες των μέσων ή την ανισότητα του Cauchy-Schwarz.Συνεπώς πέρα από την επιλυμότητα προβλημάτων , η χρησιμότητα των ανισώσεων έγκειται και στο ότι συμβάλλουν στην ανακάλυψη άλλων και κατ’επέκταση στην εξέλειξη των επιστημονικών κλάδων που ενυπάρχουν.

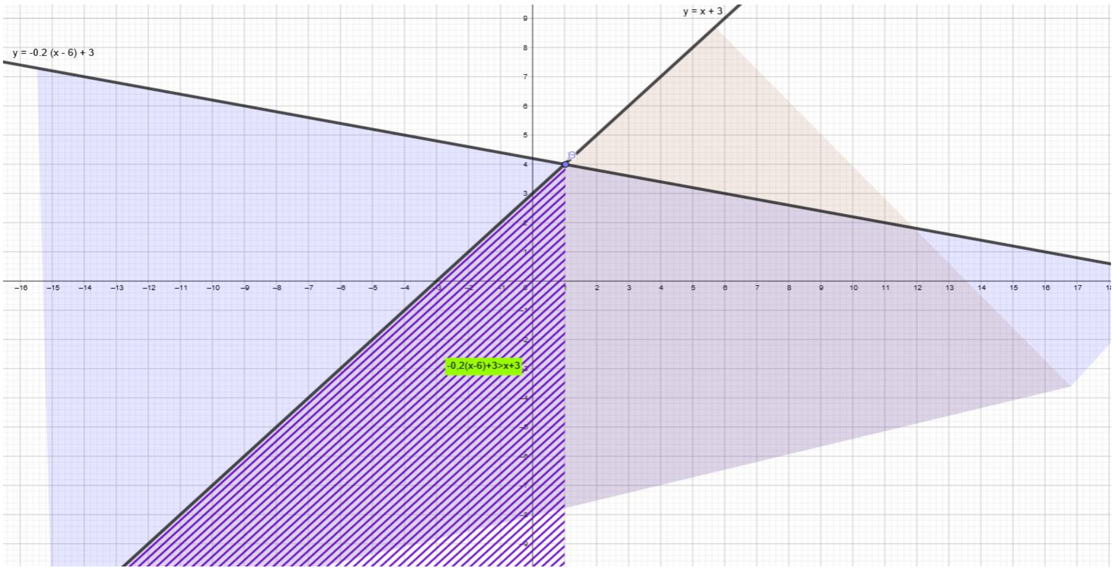
1.1.2. Η θέση των ανισώσεων στο αναλυτικό πρόγραμμα

Η εισαγωγή των προαπαιτούμενων εννοιών για τις ανισώσεις, όπως η έννοια της μεταβλητής ,της συνάρτησης ,της γραφικής παράστασης και της εξίσωσης ξεκινά από την Στ'Δημοτικού.Στην $6^{η}$ τάξη του δημοτικού οι μαθητές διδάσκονται για $1^{η}$ φορά την έννοια της μεταβλητής και της εξίσωσης.Επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής αx+β=0,κυρίως γεωμετρικής φύσεως.Στην Α'Γυμνασίου γίνεται επανάληψη και επέκταση των προηγούμενων εννοιών.Οι μαθητές διδάσκονται την επίλυση εξισώσεων με τη χρήση αλγεβγικών ιδιοτήτων,την κατασκευή διαγραμμάτων σε ορθοκανονικά συστήματα αξόνων καθώς και την έννοια της συνάρτησης y=αx στην περίπτωση των ανάλογων ποσών.Στην Β'Γυμνασίου αναλύεται ο τυπικός τρόπος επίλυσης εξισώσεων ,γίνεται η εισαγωγή συναρτήσεων της μορφής y=αx+β και των γραφικών τους παραστάσεων , η εισαγωγή των ιδιοτήτων της διάταξης καθώς και η έννοια της ανίσωσης.Η έννοια της ανίσωσης εισάγεται μέσω του γνώριμου μοντέλου της ζυγαριάς που,όμως,ανισσοροπεί.Στη συνέχεια ακολουθεί η τυπική επίλυση της ανίσωσης,συνοδευμένη από παραδείγματα,εφαρμογές και προβλήματα που αναδεικνύουν τη χρησιμότητά της.Επιπλέον ψηφιακά δομήματα σχεδιασμένα στο περιβάλλον του χελονόκοσμου και του geogebra,που θα αναλυθούν στα παρακάτω κεφάλαια,στοχεύουν στην νοηματοδότηση και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.Εν συνεχεία,στην Γ'Γυμνασίου η διδασκαλία της ανίσωσης επεκτείνεται,μέσω της επίλυσης πολύπλοκων ανισώσεων,συναλήθευσης ανισώσεων, απόδειξης ανισωτικών σχέσεων και επίλυσης προβλημάτων.Η χρήση ψηφιακών δομημάτων είναι εμφανής και σε αυτό το κεφάλαιο καθώς στοχεύει στην σύνδεση της αλγεβρικής-γεωμετρικής αναπαράστασης των ανισώσεων.

Αξίζει να συμειωθεί ότι η σύνδεση της αλγεβρικής με την γεωμετρική αναπαράσταση των ανισώσεων γίνεται αρκετά επιφανειακά στη διδασκαλία των ανισώσεων στο μέχρι πρώτεινος αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.Ως εκ τούτο μία ανίσωση αναπαρίστεται κυρίως γραφικά ως τομή ευθείων,όπως παρακάτω:



και δεν γίνεται καθόλου αναφορά στην αναπαράσταση της ανίσωσης 2 μεταβλητών x,y ως τομή ημιεπιπέδων,όπως παρακάτω:



1.1.3. Ορισμός ανίσωσης

Στο βιβλίο της Β'Γυμνασίου,στο κεφάλαιο των ανισώσεων δίνεται μία άτυπη εικόνα της έννοιας της ανίσωσης βασιζόμενη στα ''ανισοβαρή μέλη'' της ζυγαριάς.Πιο συγκεκριμένα,αναφέρει ως ανισότητα την ανισορροπία δύο ποσοτήτων στην ζυγαριά και ορίζει ως ανίσωση κάθε τέτοιας μορφής ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο x.Στο βιβλίο της Γ'Γυμνασίου η έννοια της ανίσωσης θεωρείται δεδομένη και δεν δίνεται περαιτέρω ορισμός για την έννοια αυτή.

1.1.4. Στρατηγικές επίλυσης μαθητών

Οι μέθοδοι που επιλέγουν οι μαθητές να επιλύσουν μία ανίσωση διαφέρουν ανάλογα με τις προυπάρχουσες εμπειρίες και γνώσεις τους. Οι κυριότεροι τρόποι που φαίνεται να χρησιμοποιούν οι μαθητές σύμφωνα με το άρθρο της Carolyn Kieran είναι:

1) Ισοδύναμοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί ανάλογα με τις εξισώσεις.

Οι Bazzini&Tsamir (2002b) ενισχύουν την παραπάνω άποψη, έχοντας διαπιστώσει ότι οι μαθητές διαισθητικά χρησιμοποιούν την επίλυση των εξισώσεων ως πρότυπο για την επίλυση ανισώσεων.Αναπτύσσουν ένα αλγοριθμικό μοντέλο εξίσωσης για την επίλυση ανισώσεων, το οποίο εκφράζεται κυρίως ως «το να κάνω την ίδια πράξη, με τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη, είναι έγκυρο για κάθε πράξη και για κάθε αριθμό» (Bazzini & Tsamir, 2002b,), όχι μόνο στην περίπτωση των εξισώσεων αλλά και των ανισώσεων. Πρόκειται για μια λανθασμένη υπεργενίκευση του μοντέλου της ζυγαριάς (balance model) που απαντάται στις εξισώσεις και στην περίπτωση των ανισώσεων. Χαρακτηριστικά λανθασμένα παραδείγματα αυτής της μεθόδου που συναντόνται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία(Carolyn Kieran) είναι:

Στην ερώτηση αν είναι σωστό: $a\cdot x<5 \rightarrow x<5/a$,το 75% απάντησε λαθεμενα

Στην ερώτηση αν είναι σωστό: $a\cdot x<5 \rightarrow x<5/a, \alpha\neq 0$,το 70% απάντησε λάθεμένα

Ζητήθηκε η επίλυση της ανίσωσης $x\cdot(a-5)>2a-1$,

το 10% απάντησε σωστά όμως πολλοί μαθητές (30%)διαχώρησαν την περίπτωση $a=5$.

Ζητήθηκε η επίλυση της ανίσωσης $1/4x^2 \geq 0$,

όπου κοινό λάθος ήταν η απάντηση $1/4x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

Στα παραπάνω παραδείγματα είναι εμφανές ότι οι γνώριμοι μετασχηματισμοί εξισώσεων(χιαστί γινόμενα, balance)επεκτείνωνται στις ανισώσεις.

2) Αριθμητικές μέθοδοι

Υπάρχουν μαθητές που επιλέγουν αριθμητικές μαθόδους αλλά όχι τους παραπάνω αλγεβρικούς μετασχηματισμούς για την επίλυση μίας ανίσωσης. Συγκεκριμένα,επιλέγουν τη μέθοδο trial and error. Πολλές μπορεί να είναι αιτίες για αυτή την επιλογή, ενδεχομένως αυτοί οι μετασχηματισμοί να μην αποτελούν κεκτημένη προυπάρχουσα γνώση ή κατά την επίλυση των εξισώσεων με αυτό τον τρόπο αναζητώντας μία λύση,θεωρούν ότι η λύση είναι μοναδική και σε αυτήν την περίπτωση.

3) Γεωμετρική Επίλυση

Μια μικρότερη μερίδα μαθητών επιλέγει την γεωμετρική επίλυση,σχεδιάζοντας το διάγραμμα και χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και έχει παρατηρηθεί η συμβολή της γεωμετρικής αναπαράστασης στην νοηματοδότηση της συμβολικής μορφής της ανίσωσης, σχεδόν κανένας μαθητής δεν επιλέγει να λύσει ένα πρόβλημα γεωμετρικά αντιθέτως χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς εξισώσεων στην επίλυση της ανίσωσης με αποτέλεσμα να προβούν σε λάθη Σύμφωνα με το άρθρο της Catherine Sackur κατά την επίλυση της ανίσωσης $3/x > 2+x$ καταγράφηκαν 4 ειδών μετασχηματισμοί της ανίσωσης:

Α)Αλγεβρική μορφή	β)Συναρτησιακή	γ)Γραφική 2-μεταβλητών	δ)Γραφική 1-μεταβλητης
$3/x>2+x$	$f(x)=3/x$,$g(x)=2+x$	$y=3/x$, $y=2+x$	$x \in [....]$

στις οποίες ακολουθειται η εξής πορεία:

Α->Γ->Δ:Οι μαθητές αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις(Γ) που υπάρχουν στην αλγεβρική μορφή της ανίσωσης(Α).Κατασκευάζουν πίνακες τιμών και εν συνεχεία τις γραφικές παραστάσεις τους.Εστιάζονται στις τιμές του y που τους ενδιαφέρουν και τις αντιστοιχούν με τις τιμές του x. Με ή χωρίς τη χρήση της αριθμογραμμής των πραγματικών αριθμών κατασκευάζουν το σύνολο των ζητούμενων τιμών του x.Μία πτυχή των παραπάνω αναπαραστάσεων που επιλέγουν οι μαθητές και ενδεχομένως αποτελεί συνιστώσα της επιλογής μεθόδου λύσης είναι όπως αναφέρει η Catherine Sackur, ότι οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί αναφέρονται σε κάθε τιμή του x ενώ τα γραφήματα οπτικοποιούν περιορισμένες τιμές του x.Έτσι ένας μαθητής μπορεί να νιώθει αβεβαιώτητα για ένα σύνολο τιμών που πρέπει να βρει στο οποίο η f(x) βρίσκεται πάνω από την g(x),καθώς δεν γνωρίζει τη συμπεριφορά των γραφικών παραστάσεων πέραν του οπτικοποιημένου γραφήματός τους και έτσι αποστρέφεται από αυτή την λύση. Βαθύτερη ανάλυση για τη φύση της διαισθητικής αλγοριθμικής διαδικασίας και τη γεωμετρική επίλυση θα δοθεί στα επόμενα κεφάλαια.

Συμπερασματικά, η μελέτη της συπεριφοράς των μαθητών απέναντι στις ανισώσεις, αναδεικνύει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι οποίες σχετίζονται είτε με άλλες έννοιες είτε με την ίδια την φύση τους και συνοψίζονται στις εξής:

1. Η πολυπλοκότητα των αλγεβρικών αντικειμένων ως προς τη σημασιολογία τους και το συντακτικό τους ρόλο
2. Λογικές διαδικασίες μετασχηματισμού ,προερχόμενες απ τη φύση της άλγεβρας.Ειδικότερα όταν συμπεριλαμβάνεται το '–'.

3. Συναισθηματκή συμπεριφορά απέναντι στην Άλγεβρα.Αμυντικές και αποξενωτικές συμπεριφορές λόγω παλαιότερων δυσκολιών που είχαν αντιμετωπίσει,που οδηγούν σε περιφρόνηση και περιθωριοποίηση της άλγεβρας από τα ενδιαφέροντά τους.
4. Δυσκολίες στην κατανόηση των λύσεων ως διάστημα λύσεων και όχι ως μεμονομένη τιμή
5. Δυσκολίες στη χρήση του κατάλληλου συμβόλου <,>,≤,≥ για την περιγραφή και αναπαράσταση των λύσεων ,στην ανάγνωση εκφράσεων από τη δεξιά ή την αριστερή πλευρά(x>1↔1<x) και στην κατανόηση των διπλοανισώσεων
6. Δυσκολία αντίληψης των διαφορών ανισώσεων και εξισώσεων
7. Θεωρούν ότι η επίλυση ενός προβλήματος δεν μπορεί να επιτευχθεί με τη χρηση ανισώσεων ,αφού δεν είναι η λύση μοναδική

1.2. ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

1.2.1. Η σημασία του συμβόλου

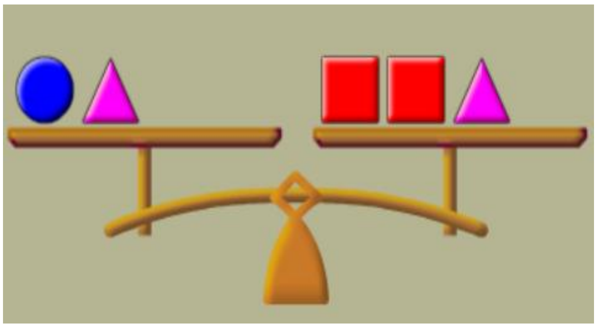
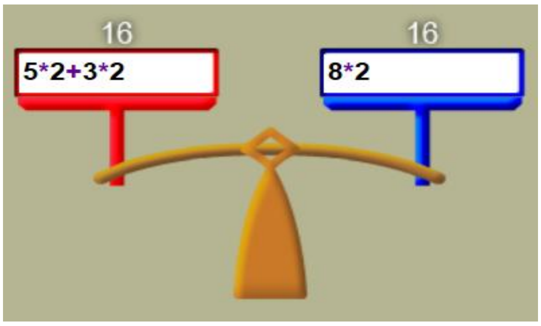
Όπως προαναφέρθηκε μία από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην νοηματοδότηση και κατ' επέκταση επίλυση μίας ανίσωσης προέρχεται από τη δυσκολία χρήσης του κατάλληλου συμβόλου $=,<,>,\leq,\geq$ (Blanco,Garrote,2007).Αυτές οι δυσκολίες παρατηρούνται σε μαθητές που ανήκουν σε κάθε μία από τις τρεις προηγούμενες κατηγορίες επίλυσης ανισώσεων και γίνονται εμφανείς κατά την γραφή και ανάγνωση αλγεβρικών εκφράσεων από τη δεξιά ή την αριστερή κατεύθυνση ,όπως $x>1 \leftrightarrow 1<x$, κατά την περιγραφή και αναπαράσταση των λύσεων μίας ανίσωσης καθώς και κατά την ανάγνωση και νοηματοδότηση των διπλοανισώσεων.Επιπλέον,σε αυτό οφείλεται το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα στην ανισώσεις και τις εξισώσεις.

Πιο συγκεκριμένα,στο άρθρο των Knuth and Stephens, McNeil, Alibali, παρατηρείται ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν το σύμβολο ως μέσο ανακοίνωσης του αποτελέσματος μιας αριθμητικής παράστασης παρά ως σύμβολο που εκφράζει μια μαθηματική ισότητα.(Barrrody & Ginsburg,1983 , Behr et la.,1980 , Kieran,1981, Rittle-Johnson & Alibali 1999).Αυτή η λειτουργική ματιά αναπαριστά το απόλυτο ή την απάντηση και σχετίζεται με τις προσπάθειες επίλυσης εξισώσεων στο Δημοτικό της μορφής $8+4=\square +5$ ή $4+3+5=\square +5$ καθώς και με γυμνασιακές σχολικές εμπειρίες κατά τις οποίες χρησιμοποιείται η μέθοδος cover up(Barrody & Ginsburg,1983 , Behr et la.,1980, Carpenter,Franke,& Levi,2003, Seo & Ginsburg,2003).Ωστόσο,η μη αντίληψη του ''='' ώς μία σχέση μεγεθών δημιουργεί γνωστικά εμπόδια στους μαθητές καθώς δεν επιτρέπει να γίνονται αντιληπτές οι διαφορές ανάμεσα στις ιδιότητες των εξισώσεων και ανισώσεων και εν συνεχεία να δίνουν νόημα στο μετασχηματισμό αναπαραστάσεων,εξισώσεων και ανισώσεων.Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα σε λυκειακό επίπεδο είναι η μη κατανόηση του παρακάτω μετασχηματισμού.

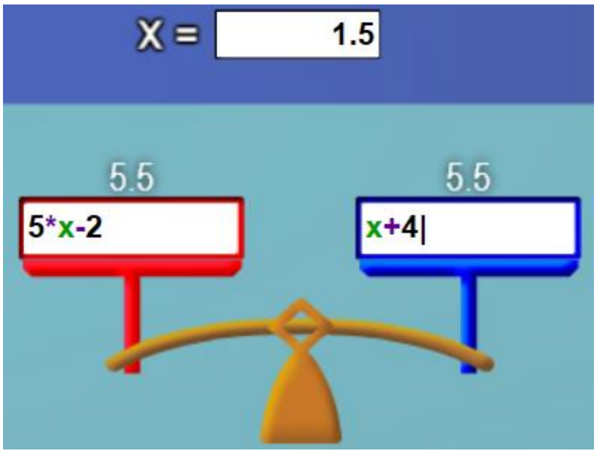
$$3x+32=97 \leftrightarrow 3x+32-32=97-32$$

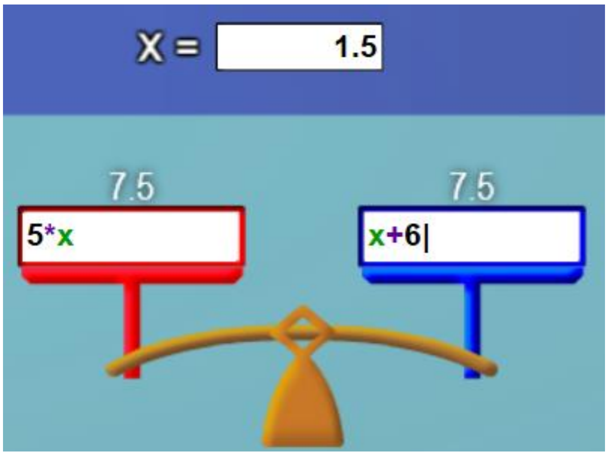
Από το παραπάνω παράδειγμα γίνεται σαφές ότι η κατανόηση του συμβόλου επηρεάζει και την επιλυσιμότητα των εξισώσεων καθώς παρατηρείται ότι οι μαθητές που είναι σε θέση να περιγράψουν το ''='' ως μία σχέση μεγεθών,κατανοούν τους μετασχηματισμούς και επιλύουν σωστά τις εξισώσεις με αλγεβρικές μεθόδους.

Αντιθέτως, οι μαθητές με έλλειψη σχεσιακής αντίληψης χρησιμοποιούν μη αλγεβρικές μεθόδους. Συνεπώς, η κατανόηση της λειτουργικής σημασίας του συμβόλου είναι κεντρικής σημασίας στην επιτυχή επίλυσή των εξισώσεων .Αρωγός στη νοηματοδότηση της λειτουργικής σημασίας του συμβόλου ''='' κατά πολλούς αποτελεί το μοντέλο της ζυγαριάς ,που χρησιμοποιείται στην επίλυση των εξισώσεων.Το παραπάνω μοντέλο προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν ισοδύναμες αριθμητικές εκφράσεις ,όπως

καθώς και μέσω διαδοχικών διαδικασιών να γίνει αντιληπτή η ισοδυναμία αλγεβρικών αναπαραστάσεων,όπως φαινεται παρακάτω:





Η ικανότητα των μαθητών να αντιληφθούν τη λειτουργική σημασία του συμβόλου ''='',συμβάλλει στην κατανόηση και των συμβόλων ''<'',''>'',''≥'',''≤'' καθώς στο άρθρο των Tsamir,Bazzini.,Student' algorithmic,formal and intuitive knowledge the case of inequalities, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές συνδέουν την επίλυση των ανισώσεων με αυτή των εξισώσεων.Ειδικότερα, εφαρμόζουν όμοιες τεχνικές επίλυσης όπως το balance model , σε κάθε ανίσωση θεωρώντας κάθε μετασχηματισμό αποδεκτό αρκεί να γίνεται και στα δύο μέλη.Το παραπάνω μοντέλο αποτελεί μία διαισθητική αλγοριθμική γνώση σύμφωνα με τον Fischbein(1993), η οποία αναπτύσσεται όταν η διαισθητική γνώση χειραγωγεί τις υπόλοιπες με αποτέλεσμα να εφαρμόζονται διαδικασίες κατά την επίλυση ασκήσεων και να αντιλαμβανόμαστε αυταπόδεικτα γιατι οι διαδικασίες αυτές ''δουλεύουν''.Τέτοια αλγοριθμικά μοντέλα εκφράζουν την υπεργενίκευση των μαθητών , θεωρούνται αναγκαστικά και χρησιμοποιούνται με άνεση από τους μαθητές ακόμη και αν οδηγούν σε παρανοήσεις.Συνεπώς η νοηματοδότηση του συμβόλου ''='' ,έχει καθοριστικό ρόλο στην ουσιαστική κατανόηση των ανισώσεων και των διαφορών τους από τις εξισώσεις.

1.2.2. Αλγεβρικές Παραστάσεις

Είναι γνώστο τόσο από την σχολική εμπειρία όσο και από τη μελέτη της βιβλιογραφίας ότι η Άλγεβρα είναι ένας τομέας των μαθηματικών που προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές να την κατανοήσουν. Ένα από τα πιο κρίσιμα σημεία στην αλγεβρική σκέψη είναι η ικανότητα να αναχθούν οι μαθητές από την κατανόηση των συμβόλων έχοντας ένα γενικό νόημα,στην κατανόηση των συμβόλων που μπορούν να υποβληθούν σε τυπικούς μετασχηματισμούς.π.χ. Το νόημα των αποτελεσμάτων μιας συνάρτησης που ''πάει πάνω-κάτω'' δημιουργει ένα ''origo'' στον παρατηρητή (Radford 2002a),δηλαδή ένα κρίσιμο σημείο αναφοράς όπου εκείνη τη χρονική στιγμή η εικόνα που έχει ο παρατηρητής για μία συγκεκριμένη έννοια-διαδικασία συνδέεται με περισσότερες αναπαραστάσεις με αποτέλεσμα να νοηματοδοτείται βαθύτερα και να εμπλουτίζεται με νοήματα.Αυτή η στιγμή αποτελεί ένα σημείο αναφοράς της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών,καθώς το νόημα μιας έννοιας εμποτίζεται με σύμβολα.Το σημείο εκκίνησης της αλγεβρικής σκέψης είναι η κατανόηση του γενικευμένου αριθμού ή μεταβλητής που στη συνέχεια συνθέτει αλγεβρικές εκφράσεις,εξισώσεις,ανισώσεις,συναρτήσεις κ.τ.λ. Αυτό το σημείο δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές καθώς εμπεριέχει το στοιχείο της γενίκευσης.Αυτές οι δυσκολίες αποτυπώνονται όταν:

1.Οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν λεκτικές εκφράσεις καθημερινής γλώσσας συμβολικά π.χ.Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3 -> 2x+3

2.Οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν αλγεβρικές εκφράσεις σε λεκτικές

π.χ. 3x-4 -> Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 4

Οι δυσκολίες αυτές ενισχύονται όταν πέραν τον μεταβλητών οι μαθητές καλούνται να νοηματοδοτήσουν εξισώσεις και ανισώσεις που τις εμπεριέχουν.Τέτοιες δυσκολίες αποτυπώνονται κατά:

1.Το χειρισμό εκφράσεων που περιέχουν σχέσεις διάταξης πραγματικών αριθμών

2.Την απόδοση νοήματος στη λύση μίας εξ/ανίσωσης

3.Τα λειτουργικά λάθη κατά τη σύνταξη μίας εξ/ανίσωσης π.χ.παρενθέσεις,σύμβολα

4.Την μη απόδοση σημασιολογικού νοήματος στις εξ/ανισώσεις

5.Την απώλεια σύνδεσης αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης

Κατά συνέπεια,είναι μία δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές που επιλέγουν την $1^η$ και $2^η$ στρατηγική επίλυσης,όπως αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Συμπερασματικά, το βασικό στοιχείο της άλγεβρας που την ξεχωρίζει από την πρακτική αριθμητική αλλά προκαλεί πολλές φορές δυσκολίες στους μαθητές είναι ο αφηρημένος αριθμός.Η αφαιρετικότητα που εμπεριέχει και η εμπλοκή του σε αλγεβρικές εκφράσεις καθιστά απαραίτητη τη διάκριση ανάμεσα στην σύνταξη και την σημασιολογία.Από την φιλοσοφική πλευρά,η πραγματική φύση των αντικειμένων δεν είναι εμφανής στον κόσμο αλλά στα αληθή τους νοήματα''βαθιά δομη-deep structures''όπως ονομάστηκε από τους Saussure και Levi-Strauss.Η σύνταξη αποτελεί μία ''επιφανειακή δομή-surface structure'' με την οποία αναφερόμαστε σε αυτά και αποκτούμε ευελιξία διαχείρισης.Η μεταφορά από την βαθιά στην επιφανειακή δομή και το αντίστροφο αποτελεί μαθησιακό άλμα για τους μαθητές καθώς εμπεριέχει το στοιχείο της γενίκευσης και είναι εύλογο να προκαλεί δυσκολίες. Ο Kaput ισχυρίζεται ότι αντί να διδάσκουμε σύνταξη,που προκαλεί μαθητική αποξένωση,είναι καλύτερο να διδάσκουμε σημασιολογία.Έτσι τα σύμβολα και κάθε μαθηματική έκφραση βασισμένη σε αυτά αποκτούν νόημα και ενδιαφέρον.

1.2.3. Γεωμετρική Επίλυση

Η γεωμετρική επίλυση μίας εξίσωσης ή ανισωσης είναι μία διαδικασία που δεν προβλέπεται από το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα.Ωστόσο όπως αναφέρουν οι Bazzini&Tsamir στο άρθρο των Catherine Sackur,με τη γραφική επίλυση ένας μαθητής δεν μαθαίνει τα ίδια πράγματα με την αλγεβρική. Είναι αξιοσημείωτο ότι η χρήση γραφημάτων επιφέρει νέες δυσκολίες στους μαθητές που την επιλέγουν,μερικές απ τις οποίες προέρχονται από τις συναρτήσεις.Συνεπώς ,το ερώτημα είναι τι μαθαίνει ένας μαθητής σε κάθε περίπτωση και τι θέλουμε ως εκπαιδευτικοί να διδάξουμε.

Πιο συγκεκριμένα,στο προαναφερθέν άρθρο οι μαθητές υλοποίησαν την επίλυση μίας ανίσωσης f(x)>g(x) με f(x)=3/x ,g(x)=x+2 μετατρέποντας τις συναρτήσεις f(x) και g(x) σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών y=3/x και y=x+2.Στη συνέχεια αναγνώρισαν τα δύο γραφήματά τους και επικεντρώθηκαν γεωμετρικά στο y για τις διάφορες τιμές του x,δηλαδή βρήκαν τα σημεία τομής των παράστασεων και τα τμήματα της C_f που βρίσκεται πάνω από την C_g.Εν συνεχεία,ακολουθείται μία διαδικασία αντιστοίχησης των σημείων της παράστασης της f που βρίσκονται πάνω την g με τις τετμημένες τους.Η ακολουθία που ακολουθήθηκε είναι η εξής:

Ανισότητα↔Δημιουργία των δύο συναρτήσεων↔Σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων μέσω της εμφάνισης του y↔σύγκριση του y↔επιστροφή στο x↔Κατασκευή συνόλου λύσεων

Αναλυτικότερα,οι μαθητές κατά την διαδικασία γεωμετρικής επίλυσης μιας ανίσωσης περνούν από το στάδιο της αναγνώρισης και σχεδιασμού γραφικής παράστασης συνάρτησης.Για να το επιτεύξουν , ανάγουν τις συναρτήσεις σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών x,y καθώς είναι εξοικιωμένοι με αυτή τη διαδικασία από το Γυμνάσιο(ειδικότερα έως την ηλικία των 16 ετών όπου έχουν συναντήσει το συμβολισμό f(x) ελάχιστες φορές ή καθολου).Η χρηση δύο διαφορετικών μεταβλητών βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν την αντιστοίχιση καθώς οι τιμές αντιστοιχούν σε διαφορετικά μεγέθη(x,y).Αντιθέτως η χρήση συμβόλων όπως f(x), περιπλέκει τους μαθητές καθώς εμφανιζόμενη η μεταβλητή x στον όρο f(x) φαίνεται στους μαθητές ως αυτοαναφορά και δεν δύναται να πάρει δύο διαφορετικές τιμές.Το επόμενο στάδιο από την κατασκευή των γραφημάτων είναι η εύρεση των ζητούμενων σημείων.Οι ανισώσεις της μορφής ''f(x)>α,α∈R'' είναι ευκολότερες για τους μαθητές καθώς αναζητούν τα σημεία της f που βρίσκονται πάνω από ευθείες της μορφής y=α. Μεγαλύτερες δυσκολίες εμφανίζονται στην τομή δύο συναρτήσεων '' f(x)>g(x)'' ,όπου αναζητούνται τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g. Στη συνέχεια οι μαθητές αντιστοιχούν τα σημεία που βρίσκουν με τις αντίστοιχες τετμημένες τους και κατασκευάζουν το σύνολο λύσεων.

Η παραπάνω διαδικασία καθιστά εμφανή τη σύνδεση της γεωμετρικής επίλυσης ανίσωσης με την έννοια της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης.Είναι σαφές ότι ελοχεύουν δυσκολίες για τους μαθητές προερχόμενες από την αφηρημένη έννοια των συναρτήσεων και την νοηματοδότηση της γραφικής τους πράστασης.Επιπλέον, η κατασκευή του συνόλου λύσεων δεν απαιτεί μόνο την αντιστοίχηση των ζητούμενων τιμών του y στις αντίστοιχες τιμές του x αλλά και την σωστή αλγεβρική τους έκφραση(τοποθέτηση κατάλληλων συμβόλων με κατάλληλο τρόπο).Επίσης, η μη ύπαρξη 1-1 αντιστοιχίας ανάμεσα στα σύνολα λύσεων και τα γραφήματα δημιουργεί παρανοήσεις στους μαθητές καθώς 2 διαφορετικά γραφήματα μπορεί να οδηγούν στο ίδιο σύνολο λύσεων .Αναφέροντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει ένας μαθητής κατά την γεωμετρική επίλυση ανίσωσης δεν πρέπει να λησμονούμε και τα πλεονεκτήματα που επιφέρει αυτή η μέθοδος.Αναλυτικότερα αυτά έγκεινται στο γεγονός ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται την σύνδεση και αλληλουχία των μαθηματικών εννοιών και πέρνουν μία γεύση για τον συνθετικό τρόπο ανάπτυξης της επιστήμης των Μαθηματικών. Επιπλέον,δίνεται περαιτέρω νόημα στην έννοια της γραφικής παράστασης καθώς οι μαθητές επεξεργάζονται και αντλούν νοήματα από αυτές με διαφορετικό τρόπο απ'ότι πρώτερα.Έτσι είναι σε θέση να μελετήσουν και να αναγνωρίσουν κανονικότητες και στην μετέπειτα ζωή τους πιο εύκολα και πιο αποτελεσματικά.Επιπλέον,η έννοια της συνάρτησης αποκτά μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τους μαθητές,αφού είναι ο τρόπος να μελετήσουν την πορεία μεγεθών και να προβούν σε προβλέψεις.Η έννοια της ανίσωσης εμπλουτίζεται και αποκτά γεωμετρική υπόσταση,μία διαδικασία αρκετά χρήσιμη και για επόμενες μαθηματικές έννοιες όπως ολοκληρώμτα,θεωρήματα κτλ.Τέλος μέσω του γραφήματος γίνεται αντιληπτό το σύνολο λύσεων ως διάστημα και όχι ως μεμονομένη τιμή,κάτι που αναδεικνύεται στο άρθρο των Socas & Palarea ως βασική δυσκολία για τους μαθητές στην έννοια της ανίσωσης.

Είναι σαφές ότι όπως όλες οι αποφάσεις που λαμβάνουμε στην καθημερινή μας ζωή έτσι και την απόφαση επίλυσης μίας ανίσωσης με γεωμετρική μέθοδο μπορεί να επιφέρει θετικά και αρνητικά αποτελέσματα.Κάθε εκπαιδευτικός κρίνει ποια από τα παραπάνω είναι υψηλότερης αξίας και επιλέγει αν θα ακολουθησει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.

1.2.4. Αλγεβρική επίλυση

Όπως γίνεται αντιληπτό από το προηγούμενο κεφάλαιο,η γεωμετρική επίλυση ανίσωσης προσφέρει πληθώρα πλεονεκτημάτων,ωστόσο έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές επιλέγουν την αλγεβρική .Ενδεχόμενως αυτό οφείλεται στην περιθωριοποίηση της μεθόδου από το αναλυτικό πράγραμμα είτε στις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στις προυπάρχουσες απαιτούμενες γνώσεις.Αναμφίβολα η αλγεβρική επίλυση είναι μία διαδικασία πιο γνώριμη για τους μαθητές και λειτουργεί ως διαισθητική αλγοριθμική γνώση,όπως αναφέρει ο Fischbein,στις περιπτώσεις των ανισώσεων.Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με το άρθρο των Tsamir & Bazzini οι μαθητές έχουν όμοια αντιμετώπιση στην επίλυση των ανισώσεων με τις εξισώσεις.

1. Χρησιμοποιούν το balance model κάνοντας ισοδύναμους μετασχηματισμούς και στα δύο μέλη
2. Χρησιμοποιούν την ιδιότητα των ίσων χιαστί γινομένων στις ανισώσεις
3. Αναγνωρίζουν προβληματικές καταστάσεις, όπως στη διαίρεση με το 0

Η αλγεβρική επίλυση ανίσωσης επιφέρει πολλά πλεονεκτήματα στην διδασκαλία των μαθηματικών καθώς και πολλές παρανοήσεις αν δεν γίνει με προσεκτικό τρόπο. Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου έγκεινται στο ότι γίνεται αντιληπτή η ανάγκη εύρεσης ακριβής λύσης,που δεν επιτυγχάνεται με την γεωμετρική μέθοδο,και είναι βασικός πυλώνας της επιστήμης των μαθηματικών.Επιπροσθέτως,είναι μία καθολική αλγοριθμική διαδικασία που εφαρμώζεται από την επίλυση απλοικών γραμμικών ανισώσεων μέχρι σύνθετων ανισώσεων λυκειακού επιπέδου.Τέλος,μέσω της αλγεβρικής επίλυσης γίνονται εμφανείς στους μαθητές όλες οι ιδιότητες της διάταξης που έχουν διδαχθεί. Από την άλλη πλευρά η συντακτική ομοιότητα των ανισώσεων με τις εξισώσεις φέρει ως αποτέλεσμα και παρανοήσεις από τους μαθητές ,που στις περισσότερες φορές έχουν τις ρίζες τους στις εξισώσεις.Αναλυτικότερα ,οι μέθοδοι balance model ή cover up method που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις έχουν για τους μαθητές καθολική ισχύ.Έτσι χρησιμοποιούνται άκριτα στις ανισώσεις που έχουν ίδια συντακτική δομή,αγνοώντας τις ιδιότητες της διάταξης.Οι μαθητές θεωρούν ότι κάθε μετασχηματισμός που γίνεται και στα δύο μέλη είναι επιτρεπτός και έχει τις ίδιες ιδιότητες διάταξης,με αποτέλεσμα να δημιουργούνται παρανοήσεις.Κατά συνέπεια, η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης έχει αρκετές θετικές πτυχές ,αρκεί να δίνεται πρωταρχικά βάση στη σημασία του συμβόλου και στις ιδιότητες που φέρει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2-ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

2.1. Υπάρχοντα δομήματα στις ανισώσεις

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή της εργασίας υπάρχουν αρκετά δομήματα σχεδιασμένα σε ποικίλλα ψηφιακά λογισμικά , που χρησιμοποιούνται τόσο στο κεφάλαιο των ανισώσεων του σχολικού εμπλουτισμένου εγχειριδίου σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα όσο και άλλα που υποστηρίζουν διεθνώς το κεφάλαιο αυτό κατά την υπάρχουσα βιβλιογραφία.Τέτοια λογισμικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε:

1.Λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας DGS,που αποτελούν την πλειοψηψία και απαρτίζονται από δομήματα σχεδιασμένα σε περιβάλλον geogebra και χελονόκοσμου

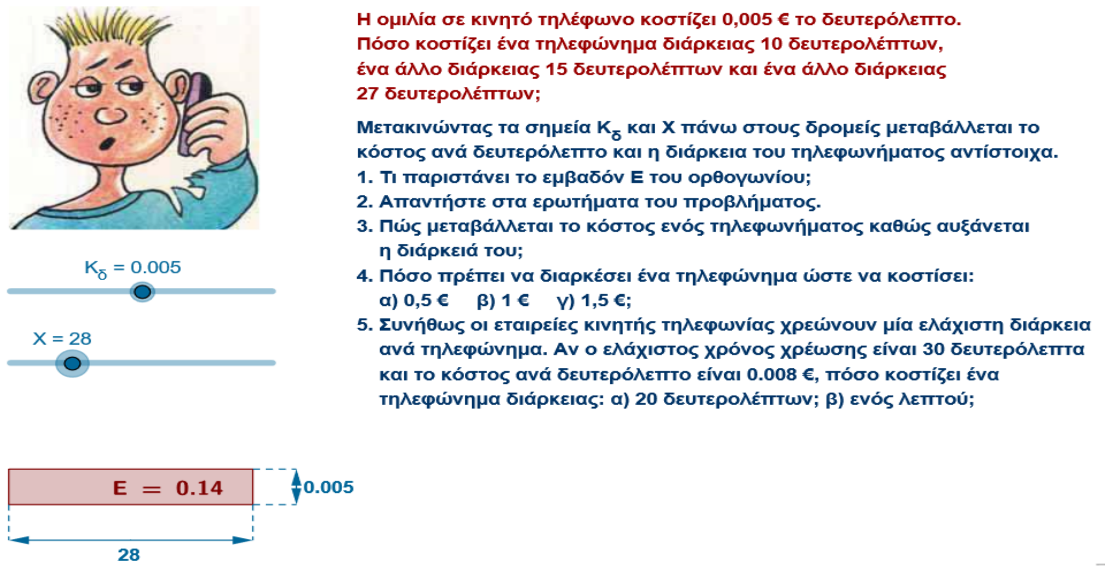
2.Λογισμικά πολλαπλών αναπαραστάσεων,που απαρτίζονται από μικροπειράματα σχεδιασμένα σε περιβάλλον geogebra κ.τ.λ. ,τα οποία προσφέρουν ποικιλλία αναπαραστάσεων

3.Applets , που απαρτίζονται από μαθητικές εφαρμογές και παιχνίδια.Ορισμένα αναπαριστούν γνωστά μαθηματικά μοντέλα,όπως το μοντελό της αριθμογραμμής και της ζυγαριάς που αναφέρονται παρακάτω.

Εν συνέχεια αναλύονται ορισμένα δομήματα του εμπλουτισμένου βιβλίου που σχετίζονται με το κεφάλαιο της μεταβλητής-εξισώσεων-ανισώσεων. Κάνοντας μία έρευνα στον τρόπο εισαγωγής των εξισώσεων-ανισώσεων στο εγχωριο αναλυτικό πρόγραμμα, παρατηρούμε ότι στην Στ’Δημοτικού γίνεται η εισαγωγή των εξισώσεων μέσω ενός applet του μοντέλου της ζυγαριάς (balance model),όπου οι μαθητές καλούνται να βρουν το βάρος ενός βαριδίου προσθέτοντας ή αφαιρώντας βαρίδια με σκοπό να ισορροπήσουν τη ζυγαριά.Στην Β’Γυμνασίου για την εισαγωγή των μεταβλητών-εξισώσεων χρησιμοποιείται το δυναμικό περιβάλλον ενός DGS δομήματος σχεδιασμένο στο περιβάλλον geogebra, όπου το γινόμενο

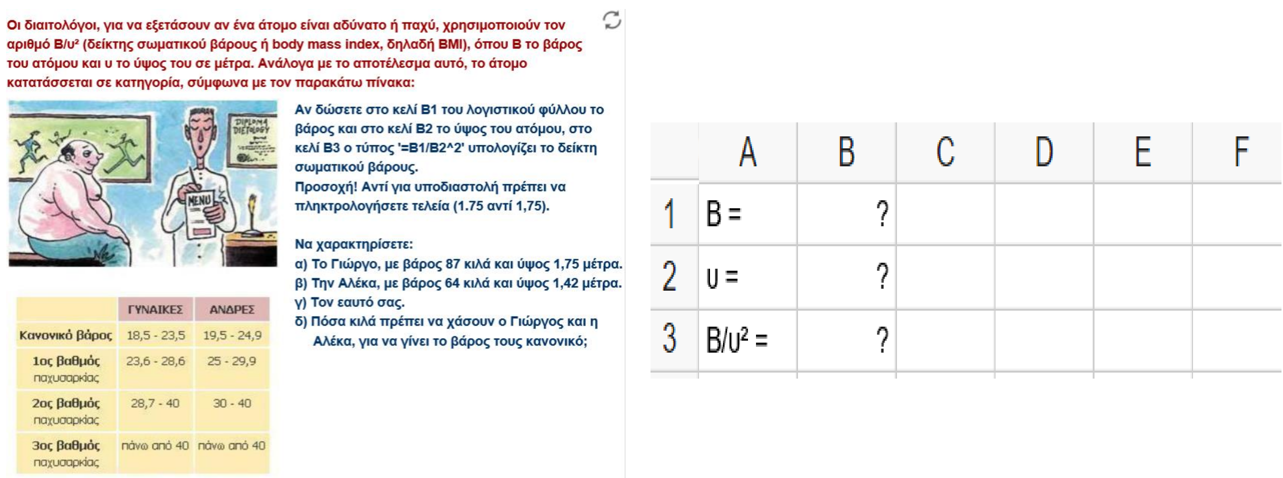
πλήθος τηλεφωνημάτων x κόστος ανά δευτερόλεπτο

οπτικοποιείται ως ένα δυναμικό ορθογώνιο.Έτσι ο μαθητής καλείται να αλλάξει δυναμικά το μήκος του(πλήθος τηλεφωνημάτων) μέχρι να επιτύχει το ζητούμενο εμβαδόν.Η παραπάνω δραστηριότητα δεν στοχεύει στην τυπικη αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης εξίσωσης αλλά στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής.

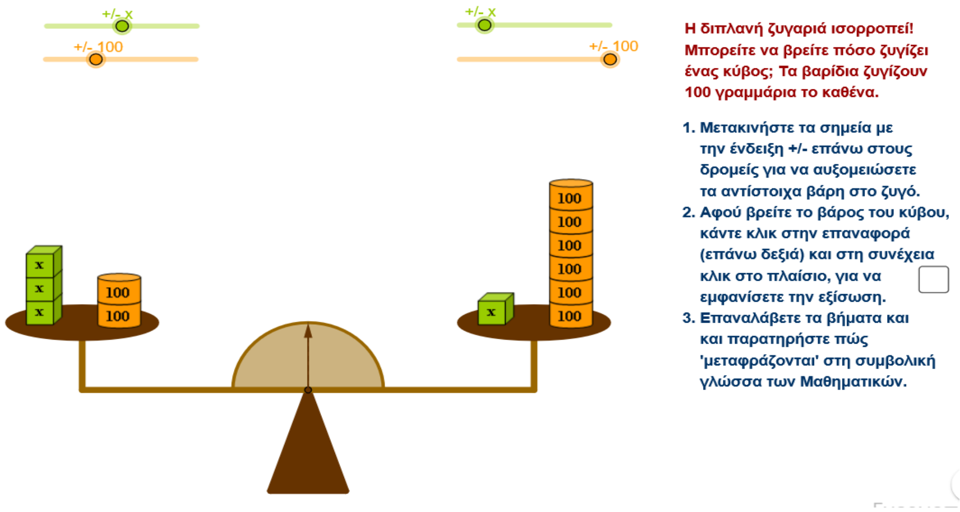


Μία ακόμη δραστηριότητα σε DGS λογισμικό που στοχεύει στην νοηματοδότηση της μεταβλητής είναι σχεδιασμένη στο δυναμικό περιβάλλον του χελονόκοσμου και καλεί τους μαθητές να μετατρέψουν την εικόνα ενός τετραγώνου σε γενικευμένο αντικείμενο κάνοντας αλλαγές στον αλγόριθμο κατασκευής τους. Έτσι οι μαθητές δίνουν νόημα στις μεταβλητές αντικαθιστώντας τις πλευρές του με αυτές.

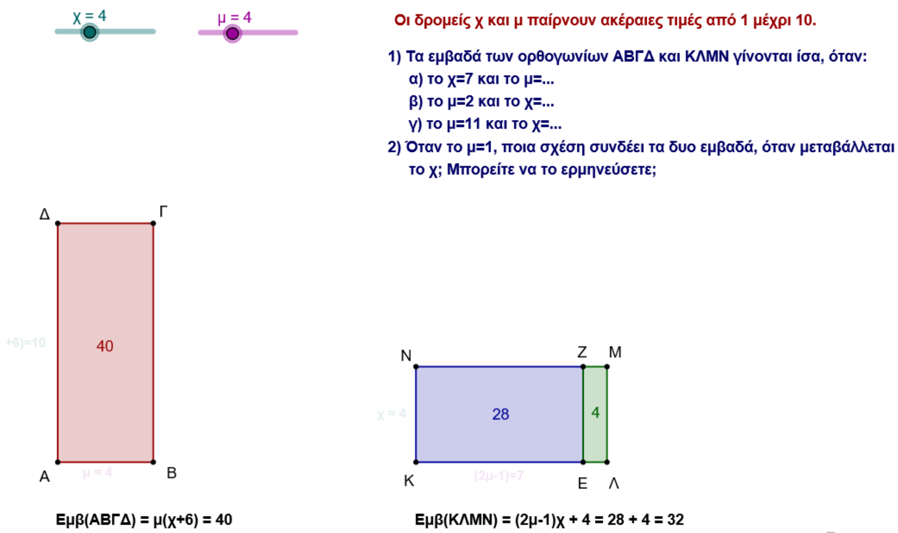
Στην 2η κατηγορία λογισμικών κατατάσσεται το παρακάτω μικροπείραμα σχεδιασμένο σε περιβάλλον geogebra καλεί τους μαθητές ένα λεκτικό πρόβλημα να το αναπαραστήσουν σε πίνακα τιμών προσπαθώντας με τη μέθοδο trial and error να λύσουν μία εξίσωση.Η πληθώρα αναπαραστάσεων και η πρώτη επαφή με την έννοια της εξίσωσης,συνθέτουν τη σημασία του μικροπειράματος .



Στο κεφάλαιο 1.2 των εξισώσεων,το applet μιας ζυγαριάς που τα μέρη της ανισοροπούν δυναμικά καλεί τους μαθητές να βρουν άγνωστα βαρίδια και εμπλουτίζει την διαδικασία της τυπικής επίλυσης όπως αυτή παρουσιάζεται στο βιβλίο.Με αυτό τον τρόπο κάθε ισοδύναμος αλγεβρικός μετασχηματισμός των δύο μελών οπτικοποιείται και αποκτά ρεαλιστικό νόημα.

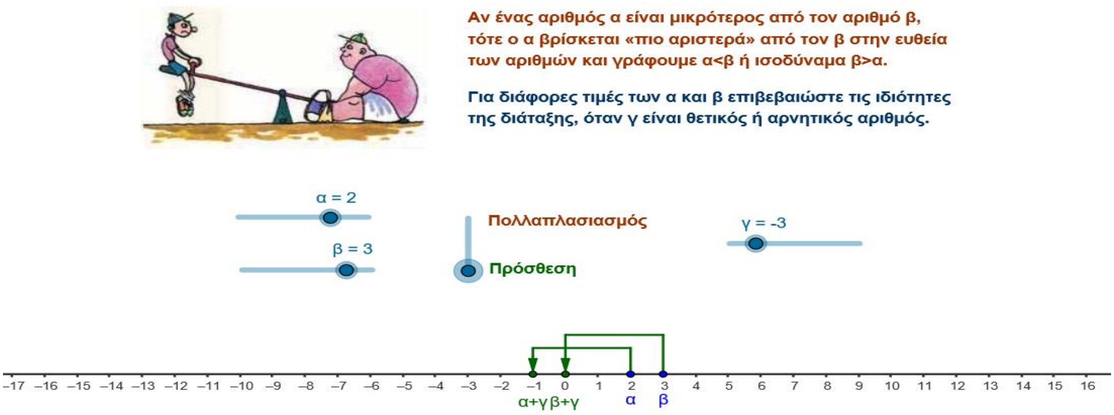


Επίσης μικροπειράματα στο δυναμικό περιβάλλον του χελονόκοσμου συμπληρώνουν την τυπική επίλυση αδύνατων/αόριστων εξισώσεων ,με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές μέσα από τη γεωμετρική αναπαράσταση της εξίσωσης τις περιπτώσεις των άπειρων ή καμιάς λύσης.Τέλος,μικροπειράματα δυναμικής γεωμετρίας στο περιβάλλον geogebra συμπληρώνουν τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου,αναπαριστώντας τα αλγεβρικά προβλήματα με γεωμετρικά και καλώντας τους μαθητές να κάνουν διερεύνηση για να αποδείξουν άτυπα τους ισχυρισμούς τους.Αυτή η μέθοδος ακολουθείται και σε ασκήσεις με παραμετρικές εξισώσεις όπως η παρακάτω.

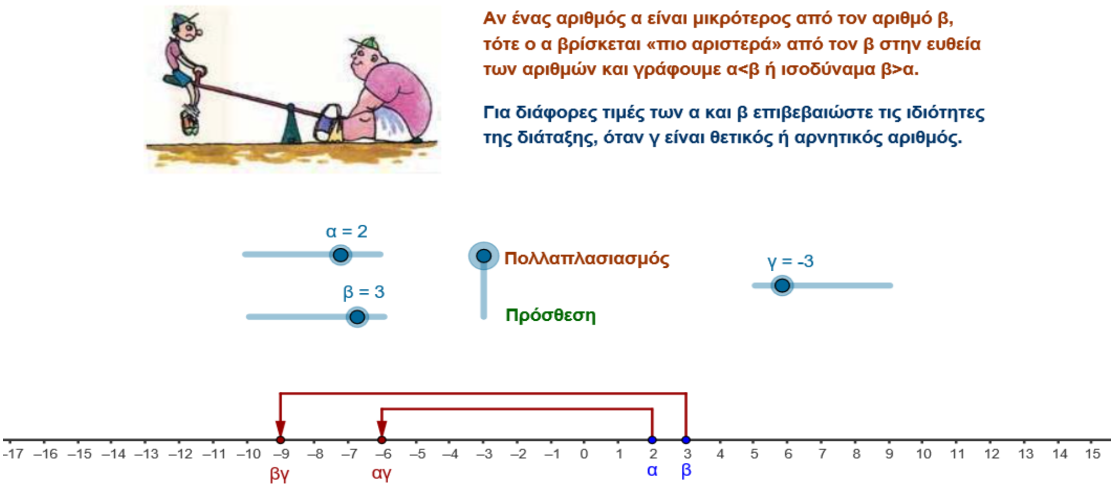


Οι παραπάνω δραστηριότητες στοχεύουν στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και της εξίσωσης ,οι οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την εισαγωγή των μαθητών στις ανισώσεις στο κεφάλαιο 1.5.

Στο κεφάλαιο των ανισώσεων χρησιμοποιούνται εκτενώς applets που αναπαριστούν το μοντέλο της αριθμογραμμής για την διερεύνηση των ιδιοτήτων της διάταξης τόσο στην πρόσθεση:

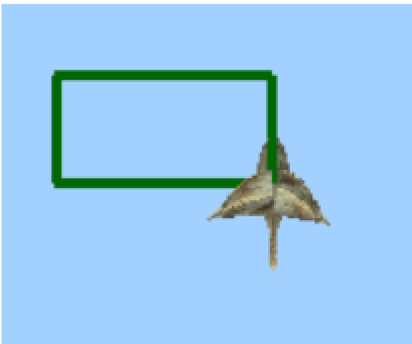


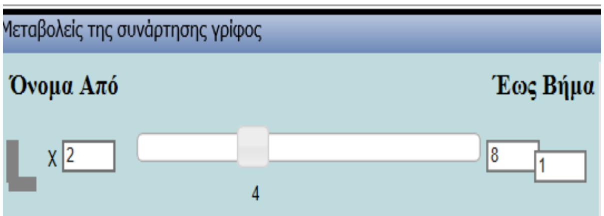
όσο και στον πολλαπλασιασμό:



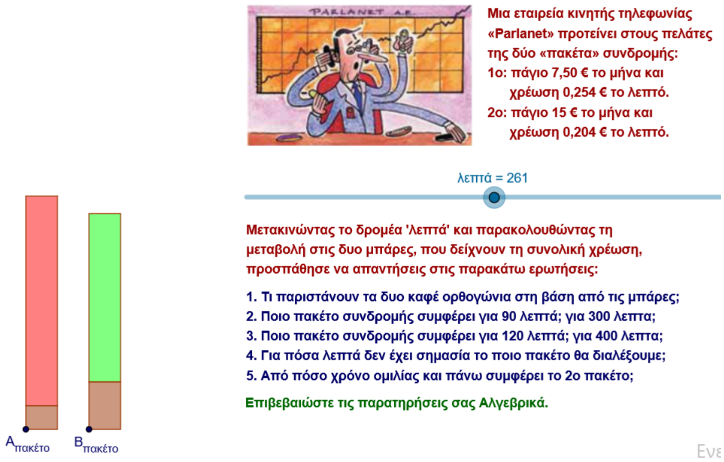
Την τυπική αλγεβρική επίλυση μίας ανίσωσης,βασισμένη στις προαναφερθείσες ιδιότητες διάταξης, στοχεύει να εμπλουτίσει ένα δόμημα στο DGS λογισμικό του περιβάλλοντος του χελονόκοσμου.Το δόμημα αναπαριστά γεωμετρικά μία ανίσωση και καλεί τους μαθητές να διερευνήσουν την περίπτωση:

μήκος ορθογωνίου(3x+10) ≤ πλάτος ορθογωνίου(x+40)





μέσω της οπτικοποίησης για τις διάφορες τιμές του μεταβολέα.Έτσι οι μαθητές έρχονται σε μία πρώτη επαφή με την εύρεση της οριακής τιμής που καθιστά τα δύο μεγέθη άνισα.Επίσης η έννοια της ανίσωσης αποκτά περισσότερο νόημα για τους μαθητές,κατανοούν τη σημασία των πολλαπλών λύσεων και αντιλαμβάνονται ότι μία ανίσωση μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα.Είναι λοιπόν σαφές,ότι η γεωμετρική αναπαράσταση και η διερεύνηση που προσφέρει το παραπάνω δόμημα είναι αρκετά βοηθητικά για να ξεπεραστούν οι προηγούμενες δυσκολίες,που σύμφωνα με τους Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote, 2007 συναντώνται συχνά στο σχολικό περιβάλλον. Ένα ακόμη δόμημα σε δυναμικό περιβάλλον που αναπαριστά με διαφορετικό τρόπο μία ανίσωση,συνοδεύει μία άσκηση του σχολικού βιβλίου.Αναπαριστά το κόστος των τηλεφωνημάτων με δυναμικούς ράβδους που μεταβάλλονται ανάλογα με τον όγκο των τηλεφωνημάτων.

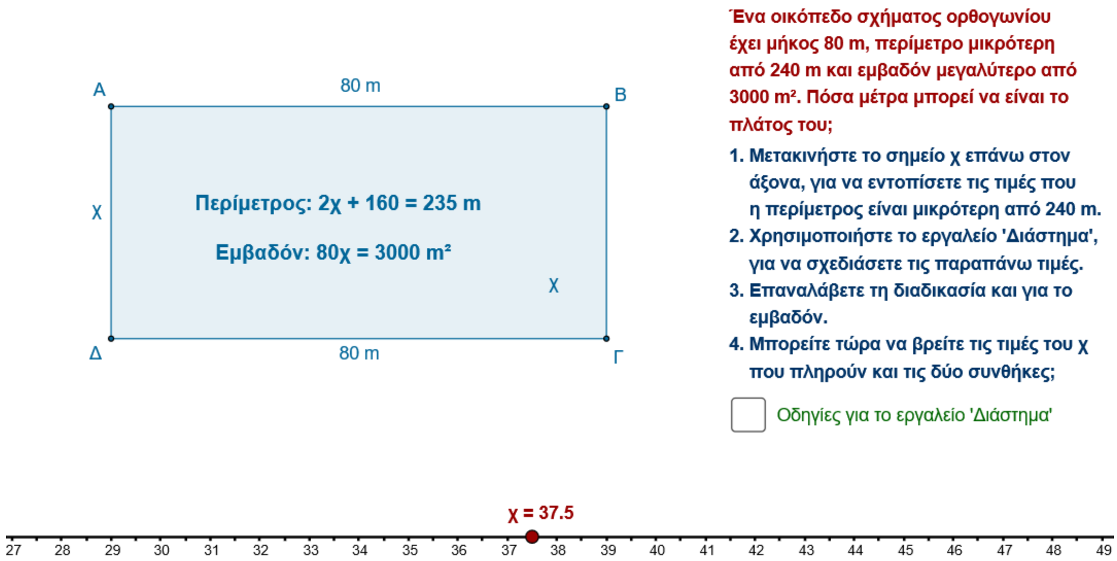


Μέσα από τη δυναμικό χειρισμό του ύψους των ράβδων,οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον διαφορετικό ρυθμό μεταβολής τους και διερευνούν την οριακή κατάσταση όπου η ράβδος Β γίνεται υψηλότερη από την Α μετακινώντας τον δρομέα των λεπτών.

Τέλος,στην τελευταία άσκηση του σχολικού βιβλίου ένα καθαρά γεωμετρικό πρόβλημα έρχεται να οπτικοποιήσει τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων:

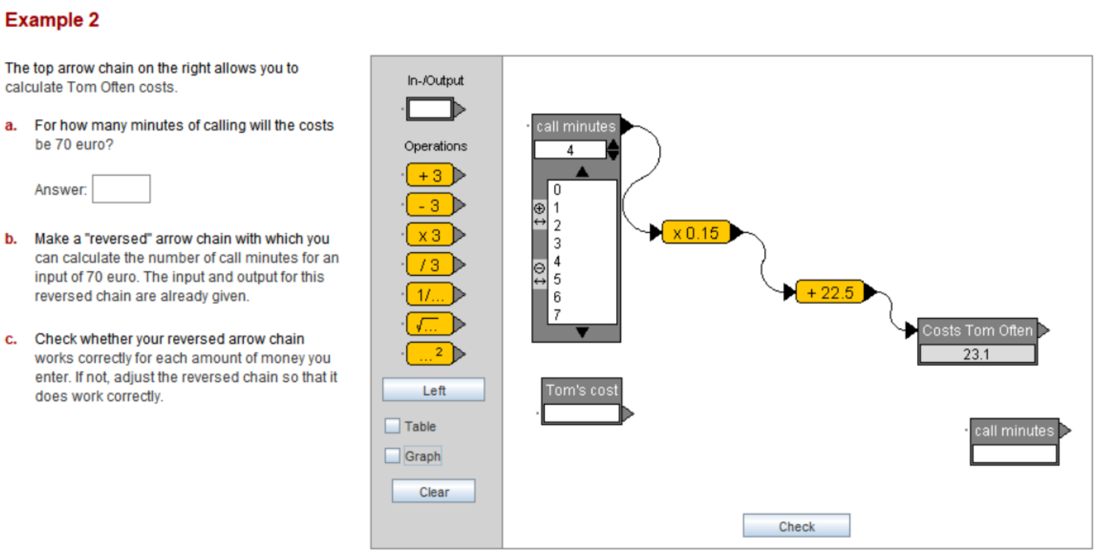
$$160+2x<240 \quad \text{και} \quad 80x>3.000$$

Η 1^η αναπαριστώντας τον περιορισμό του προβλήματος για την Περίμετρο και η 2^η για το Εμβαδόν του ορθογωνίου που αναπαρίσταται γεωμετρικά με το παρακάτω δόμημα.

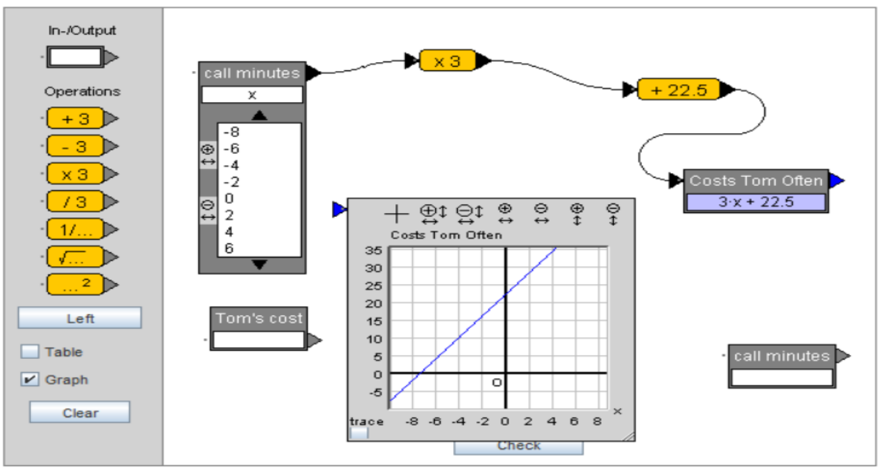


Η σειρά των ερωτημάτων είναι τέτοια ώστε οι μαθητές να επιλύουν κάθε ανίσωση ξεχωριστά και στο τελικό ερώτημα(δ) να ζητείται η εύρεση των τιμών που επαληθεύουν και τις δύο προηγούμενες συνθήκες.Έτσι,το γνωστικό άλμα απο την επίλυση ανίσωσης στην εύρεση κοινών λύσεων είναι αρκετά ομαλό και νοηματοδοτημένο για τους μαθητές.Αυτή είναι ακόμη μία περίπτωση στην οποία γίνεται εμφανές ότι ένα πρόβλημα επιλύεται με χρήση ανισώσεων και χρησιμοποιώντας το κουμπί 'Διάστημα' του δομήματος οι μαθητές μπορούν να αναπαραστήσουν τις λύσεις τους σε αριθμογραμμή.Συμπερασματικά ,όλα τα παραπάνω δομήματα στοχεύουν να εμπλουτίσουν την αλγεβρική αναπαράσταση των ανισώσεων με άλλες πολλαπλές ώστε να προσφέρουν στους μαθητές περισσότερα ερεθίσματα για την νοηματοδότηση της έννοιας.Κανένα από τα παραπάνω δεν επεξηγεί την τυπική διαδικασία επίλυσης,όμως,αναδεικνύουν την χρησιμότητά τους,νοηματοδοτούν την σημασιολογία τους και στοχεύουν στην καλλιέργεια της συναισθηματικής συμπεριφοράς απέναντι στην Άλγεβρα,που κατά τους Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote, 2007 αποτελεί μία συνιστώσα δυσκολιών για τους μαθητές.

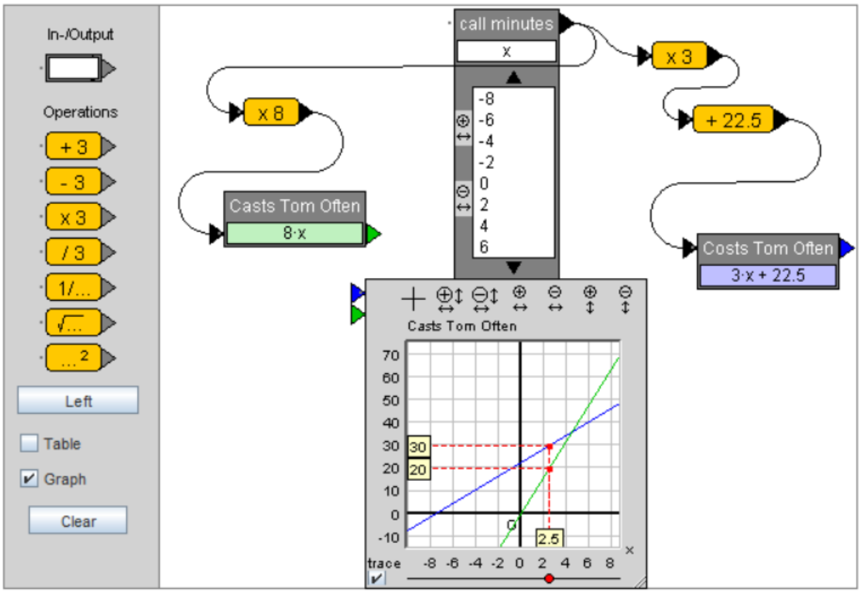
Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθούν δύο ψηφιακά εργαλεία(applets) Algebra arrows (Paul Drijvers) και Pan Balance (NCTM) που εξυπηρετούν διαφορετικούς ερευνητικούς σκοπούς.Πιο συγκεκριμένα, το λογισμικό Algebra Arrows με χρήση στο πεδίο συναρτήσεις-εξισώσεις-ανισώσεις συμβάλλει σύμφωνα με το άρθρο των Drijvers,Doorman,Boon,Reed, Gravemeijer στην νοηματοδότηση των συμβόλων μίας αλγεβρικής έκφρασης και τη σύνδεση της με την γραφική της αναπαράσταση. Αναλυτικότερα,η εφαρμογή επιτρέπει δοσμένου ενός λεκτικού προβλήματος, την χρήση σειριακών λειτουργειών με σκοπό την επίλυσή του .Ο μαθητής επιλέγει από τον αριστερό πίνακα τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και ακολουθώντας τον τρόπο σκέψης του,αποτυπώνει με βέλη κάθε πράξη που τον οδηγεί στη λύση σειριακά.Τέλος ενώνει το τελευταίο βέλος με τον δεξί πίνακα τιμών.



Το διάγραμμα βέλους που έχει κατασκευάσει χρησιμοποιείται για οποιαδήποτε άλλη τιμη του αριστερού πίνακα,εφώσον αυτή αλλαχθεί από το χρήστη.Ειδικότερα αν ο μαθητής αντικαταστήσει την τιμή αυτή με μεταβλητή,οδηγείτε στην κατασκευή αλγεβρικών παραστάσεων,τη σύνταξη συναρτήσεων και την κατασκευή των γραφικών τους παραστάσεων όπως φαίνεται παρακάτω.

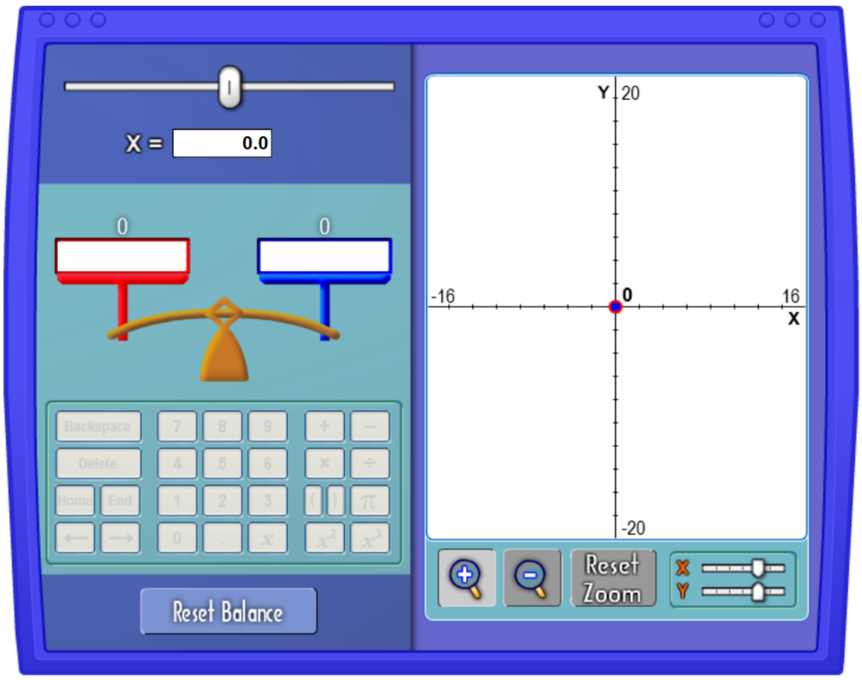


Επιπλέον παρέχει επιλογές για δημιουργία πινάκων,γραφημάτων κύλισης και ίχνους ,οι οποίες είναι χρήσιμες κατά την γραφική επίλυση εξισώσεων/ανισώσεων καθώς η επιλογή της κύλισης επιτρέπει να γίνονται εμφανείς οι τομές γραφικών παραστάσεων.

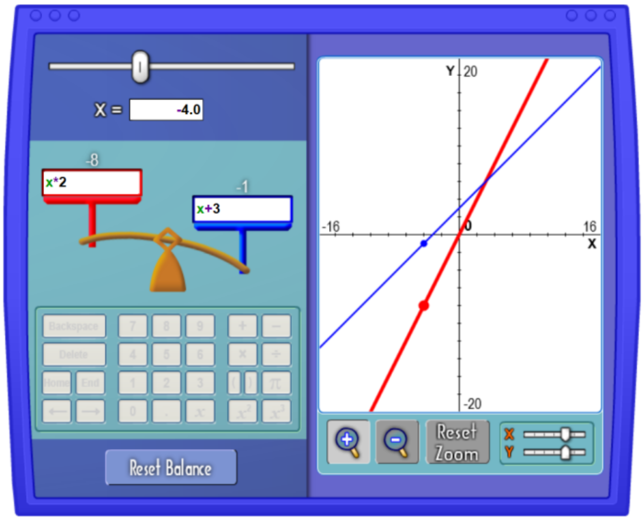


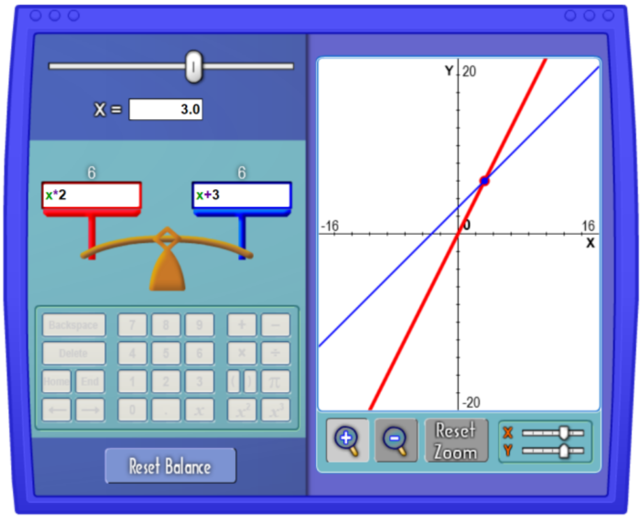
Τέλος,επιτρέπει την προσβασιμότητα σε μαθητές από διάφορα περιβάλλοντα και την πρόσβαση σε οθόνη από τον καθηγητή για τον έλεγχο των διαδικασιών ώστε να ενισχύεται η συνεργασία και η επιχειρηματολογία ανάμεσα τους. Η εφαρμογή είναι ενσωματωμένη στο ηλεκτρονικό μαθηματικό περιβάλλον (DME).

Ως προς το δεύτερο λογισμικό,ονομάζεται Pan Balance και πρόκειτε για ένα λογισμικό που προτείνεται από την Εθνικη Εκπαιδευτική Κοινότητα Μαθηματικών Αμερικής (NCTM) . Η σημασία-καινοτομία του έγκειται στην προσπάθεια νοηματοδότησής των ανισώσεων μέσα από δραστηριότητες βασισμένες στο κεκτημένο μοντέλο της ζυγαριάς,που όπως είναι φανερό αποτελεί το συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις εξισώσεις και τις ανισώσεις.Αναλυτικότερα,το λογισμικό αποτελείται από δύο μέρη,την ζυγαριά και ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται παρακάτω.



Στα δύο σκέλη μπορούν να τοποθετούνται τόσο αριθμοί όσο και αλγεβρικές παραστάσεις συναρτήσει του x.Με τη μεταβολή του δρομέα x τα σκέλη της ζυγαριάς αλλάζουν βάρος με αποτέλεσμα να υπάρχει μία δυναμική κίνηση της ζυγαριάς που ανισορροπεί.Ταυτόχρονα με την τοποθέτηση των αλγεβρικών παραστάσεων στα σκέλη της ζυγαριάς,εμφανίζεται η γραφική παράσταση των αντίστοιχων συναρτήσεων καθώς και τα ίχνη των σημείων με τετμημένη την τιμή x του δρομέα.Επιπλέον η κίνηση του δρομέα έχει ως αποτέλεσμα πέρα της δυναμικής κίνησης της ζυγαριάς και την μεταβολή αυτών των σημείων και κατ'επέκταση την ανάδειξη του σημείου τομής τους.





Συνεπώς το λογισμικό Pan Balance θα χρησιμοποιηθεί με σκοπό την ανάδειξη της άνισης σχέσης των αλγεβρικών παραστάσεων για τις διάφορες τιμές του x και την σύνδεση της αλγεβρικής-γεωμετρικής αναπαράστασης των ανισώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3-ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Όπως προαναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας εργασίας το πλαίσιο που αναλύθηκαν τα αποτελέσματα της έρευνας είναι το abstraction in context.Πρόκειτε για ένα θεωρητικό πλαίσιο που εισήχθηκε στην διδακτική των μαθηματικών από τους Hershkowitz, Schwarz και Dreyfus (2001) και σχετίζεται με τα στάδια που περνάει ένας μαθητής ώστε να κατακτήσει την αφαίρεση και να οδηγηθεί στην γενίκευση κατακτώντας μία αφηρημένη έννοια .Αναλυτικότερα, σύμφωνα με αυτό το πρίσμα η αφαίρεση αναπτύσσεται από κάτι συγκεκριμένο σε μια αφηρημένη έννοια(κάθετη μαθηματικοποίηση) και κατά αυτή την διαδικασία αυτή αναγνωρίζονται τα εξής στάδια:

--Recognising

-Building with

-Constructing

τα οποία συνθέτουν το μοντέλο RBC.Πιο συγκεκριμένα πρόκειτε για συμπεριφορές του μαθητή που προδίδουν την αναγνώριση ενός μοτίβου,μιας νόρμας ή γενικά ενός αντικειμένου(Recognising).Εν συνεχεία,η διαχείρηση και η εμπλοκή της προαναφερθείσας έννοιας με τον τρόπο σκέψης και δημιουργίας του μαθητή συνθέτουν το επόμενο στάδιο (Building with).Τέλος η αφομείωση της έννοιας και η ευελιξία στη διαχείρησή της οδηγούν στην ανάδυση μίας νέας αφηρημένης έννοιας που προκύπτει από την προηγούμενη.Αυτό συνθέτει το $3^{ο}$ στάδιο(Constructing) όπου η κατασκευή της νέας έννοιας έχει επιτευχθεί από την δημιουργία συνδέσεων με την συγκεκριμένη και την διαδικασία της αφαίρεσης.Σύμφωνα με αυτό το πρίσμα θα αναλυθούν τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας,προσπαθώντας να αναλύσουμε τις απαντήσεις των μαθητών σύμφωνα με το RBC μοντέλο.

Η επιλογή των ψηφιακών τεχνολιογιών στην παρούσα εργασία έγινε λαμβάνοντας υπόψη μία σειρά θετικών αποτελεσμάτων που έχει αναδείξει η υπάρχουσα βιβλιογραφία καθώς και γνωρίζοντας τις δυσκολίες ενορχήστρωσής της. Οι απόψεις στον ακαδημαικό και ερευνητικό χώρο ποικίλλουν ως προς το αν η τεχνολογία αποτελεί βασικό στοιχείο της εκπαίδευσης στον σύγχρονο κόσμο και σε ποιους τομείς οφελεί.Σύμφωνα με τον πρωτεργάτη των ψηφιακών τεχνολογιών Seymour Papert η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα από την δραστηριότητα και την εμπλοκή , κατά συνέπεια η τεχνολογία λειτουργώντας ως εργαλείο μαστορέματος και κατασκευής προσφέρει δυνατότητες δημιουργικής μάθησης.Η άποψη αυτή ενισχύεται από μία έρευνα 8 διδακτικών μαθημάτων σε σχολεία του Βελγίου και Dutch,στο άρθρο των Drijvers&Doorman οι Robert and Rogalski (2005) υποστήριξαν ότι οι διδακτικές πρακτικές είναι εν γενει αμετάβλητες .Έτσι κατά τους Lagrange and Monaghan (2009) στο ομόνυμο άρθρο,η τεχνολογία ενισχύει την περιπλοκοτητα και κατ’επέκταση μεταβάλλει αυτή την στασιμότητα προσφέρωντας επιπλέον παιδαγωγική αξία στην διαδικασία της μάθησης.Πιο συγκεκριμένα η χρήση του λογισμικού Algebra Arrows στην ερευνητική διαδικασία παρατήρησαν ότι επέφερε αρκετές θετικές συνέπειες όπως δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων και συνδέσεις ανάμεσά τους,διατυπώσεις ισχυρισμών και έρευνα για την επαληθευσή τους,συνδέσεις και κατηγοριοποιήσεις των συναρτήσεων που εισήγαγαν στο λογισμικό. Επιπλέον , το Εθνικό Συμβούλιο των Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών (NCTM) τονίζει ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να "αναπτύξουν το περιβάλλον στο μάθημα των μαθηματικών που επωφελείται από πλούσια τεχνολογικά περιβάλλοντα και την ενσωμάτωση των ψηφιακών εργαλείων στην καθημερινή διδασκαλία''. Το NCTM (2011) αναφέρει ότι μερικά από τα επιτεύγματα των εκπαιδευτικών που χρησιμοποιούν τις ψηφιακές τεχνολογίες είναι ότι βελτιστοποιούν:

- τις δυνατότητες ανάπτυξης της τεχνολογίας
- την νοηματοδότηση και κατανόηση των σπουδαστών
- την τόνωση του ενδιαφέροντός τους
- την αύξηση της μαθηματικής τους αντίληψης και ικανότητας

Έτσι ,κρίνεται απαραίτητο να αναπτυχθούν νέες διδακτικές πρακτικές με χρηση κατάλληλων εργαλείων. "Η χρήση της τεχνολογίας οφείλει να αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών. Η χρήση αυτή θα πρέπει να στοχεύει στην ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης και των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων''(WIDPI, 2009).

Παρά των θετικών συνεπειών της χρήσης της ψηφιακής τεχνολογίας στη διαδασκαλία ,πρέπει να είναι σαφείς και οι δυσκολίες που αυτή επιφέρει.Οι δυσκολίες αυτές αφορούν κυρίως τον εκπαιδευτικό-ενορχηστρωτή της διδασκαλίας. Το πρώτο σημαντικό πρόβλημα που έρχεται αντιμέτωπος ένας εκπαιδευτικός που σκοπεύει να εμπλουτίσει την διδασκαλία του με ψηφιακές τεχνολογίες σχετίζεται με την εύρεση των κατάλληλων λογισμικών. Μια αναζήτηση στο διαδίκτυο είναι πιθανό να αποκαλύψει μεγάλο αριθμό ιστοτόπων που είτε δεν είναι ελεύθερα προς χρήση είτε αποτελούν παλιές εκδόσεις είτε δεν είναι πλήρως ενημερωμένα. Μπορεί μερικές φορές να χρειαστούν αρκετές ώρες επαλήθευσης των αποτελεσμάτων για να βρεθεί μία χρήσιμη έκδοση του εκάστωτε λογισμικού. Αν και οι ψηφιακές βιβλιοθήκες γίνονται ολοένα και πιο άφθονες, εξακολουθούν πολύωρες αναζητήσεις να αποδίδουν μικρά αποτελέσματα. Ένα δεύτερο ζήτημα με την ενσωμάτωση της τεχνολογίας είναι η συμβατότητα. Για παράδειγμα,το πρόγραμμα που είναι γραμμένο για πλατφόρμα UNIX ενδέχεται να μην είναι συμβατό με τα Windows. Επιπλέον, οι παλαιότεροι υπολογιστές ενδέχεται να μην υποστηρίζουν νεότερα προγράμματα και ενδέχεται να μην είναι παλαιότερα προγράμματα συμβατά από νεότερα προγράμματα περιήγησης. Σε όλες τις περιπτώσεις, η ανάγκη αναβάθμισης και αντικατάστασης υφιστάμενων λογισμικών είναι αρκετά αποθαρρυντική και ακριβή .Το τελικό ζήτημα με την χρήση νέων τεχνολογιών, είναι ότι για τις εφαρμογές που βρίσκονται online μπορεί να τεθεί το ζήτημα της εγκυρότητας του περιεχομένου. Στοιχεία που βρίσκονται στο διαδίκτυο πρέπει να επιθεωρούνται προσεκτικά από τον χρήστη με ακρίβεια για να διασφαλιστεί η μαθηματική ακεραιότητα .Με την πρόσφατη αύξηση του αριθμού των ψηφιακών βιβλιοθηκών που βρίσκονται σε απευθείας σύνδεση, μερικές από τις οποίες έχουν πολιτικές ελέγχου και ανασκόπησης,αυτή η κατάσταση έχει αρχίζει να αλλάζει.Το σημαντικότερο θέμα, ωστόσο, δεν περιβάλλει την ίδια την τεχνολογία, αλλά τον άνθρωπο- τους εκπαιδευτές και τους διαχειριστές που είναι υπεύθυνοι για την απόκτηση και χρήση της τεχνολογίας.Υπάρχει συχνά απροθυμία εκ μέρους των εκπαιδευτικών και των διοικητικών υπαλλήλων να υποστηρίξουν πλήρως την τεχνολογία στην τάξη. Αυτό πέρα των προαναφερθέντων τεχνικών δυσκολιών, οφείλεται και σε ιδεολογικούς λόγους που σχετίζονται με την πεποίθηση πολλών εκπαιδευτικών ότι η τεχνολογία δεν θα προσφέρει επιπρόσθετη παιδαγωγική αξία στη μάθηση των μαθητών σε σύγκριση με άλλες προσεγγίσεις, ή ότι η χρήση της τεχνολογίας στην τάξη θα δεσμεύσει χρόνο εις βάρος της κάλυψης όλων των απαιτούμενων θεμάτων της διδακτέας ύλης. Υπάρχει επίσης μια ανησυχία ότι το κόστος του λογισμικού και του εξοπλισμού μπορεί να το θέσει εκτός έδρας μερικών μαθητών , θέτοντας ζητήματα δίκαιης προσβασιμότητας.Μία μεγάλη μερίδα μαθηματικών θεωρούν ότι η τεχνολογία θα οδηγήσει σε παραμέληση των βασικών δεξιοτήτων, αφήνοντας τους μαθητές απροετοίμαστους για ανώτερα μαθηματικά. Επίσης,αρκετοί εκπαιδευτικοί έχουν μια «δέσμευση στις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας» και δεν αναγνωρίζουν τις προσπαθειες εμπλουτισμού και βελτίωσής της.Σε κάθε περίπτωση προτού η τεχνολογία μπορέσει να εφαρμοστεί πλήρως σε σχολικό επίπεδο , πρέπει να είναι πλήρως υποστηριζόμενη από την κοινωνία και διοίκηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1. Στόχοι έρευνας-Ερευνητικά ερωτήματα

Από την ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας έχει διαπιστωθεί ότι πολλοί ερευνητές αναγνωρίζουν πως οι νέες ψηφιακές τεχνολογίες έχουν θετική επίδραση και προσφέρουν περαιτέρω παιδαγωγική αξία σε υπάρχουσες δραστηριότητες σχεδιασμένες σε περιβάλλον χαρτί-μολύβι.Μία μεγάλη μερίδα εκπαιδευτικών και ερευνητών τις θεωρούν ισχυρό εργαλείο μάθησης καθώς προσφέρουν ευκαιρίες νοηματοδότησης και αναπτύσουν την κριτική ικανότητα και αντίληψη των μαθητών και αναζητούν πιθανούς τρόπους ενσωμάτωσής τους στη σχολική πραγματικότητα. Εντούτοις δεν θα πρέπει να παραβλέψουμε το γεγονός ότι υπάρχει και η μερίδα εκείνη των ερευνητών που διατυπώνει επιφυλάξεις και αντιμετωπίζει με σκεπτικισμό τις προτεινόμενες αλλαγές. Διαμορφώνεται, κατά συνέπεια, ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον πεδίο για μελέτη και προβληματισμό. Αναμφίβολα, ένα περιβάλλον το οποίο ευνοεί τη δημιουργικότητα και την αναζήτηση ,δεν μπορεί παρά να λειτουργεί ενισχυτικά για τα παιδιά, καθώς αυτά σκέφτονται,παρατηρούν κανονικότητες, δημιουργούν ισχυρισμούς,ενεργούν με σκοπό την αποδοχή ή αναπροσαρμογή τους και μαθαίνουν.

Βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των νοημάτων που εξάγωνται από τους μαθητές Β', Γ' Γυμνασίου κατά την εισαγωγή τους στις ανισότητες και ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο καθώς και οι αντιλήψεις που διαμορφώνονται για αυτές όταν έρχονται αντιμέτωποι με ψηφιακά περιβάλλοντα που επιτρέπουν την σύνδεση πολλαπλών αναπαράστασεων μέσω δυναμικών χειρισμών .

Τα ειδικότερα ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρείται να απαντηθούν στο πρώτο μέρος της ερευνητικής διαδικασίας σχετίζονται με τις δυσκολίες που έχει αναδείξει η υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετικά με την νοηματοδότηση των συμβόλων =,>,< , τις ιδιότητές και τις διαφορές τους σε μια μαθηματική έκφραση και είναι τα εξής: Πρώτον,η ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν την λεκτική διατύπωση στη μαθηματική συμβολική γλώσσα με όρους ανισοτήτων (1ο έργο), καθώς και το αντίστροφο, η ικανότητα δηλαδή, των μαθητών να μεταφράζουν την μαθηματική συμβολική γλώσσα στην καθημερινή γλώσσα με όρους ανισοτήτων (2ο έργο). Δεύτερον, η ικανότητα των μαθητών να διερευνούν τις ιδιότητες της διάταξης για κάθε πραγματικό αριθμό και να αιτιολογούν τις ιδιότητες αυτές με μαθηματικό τρόπο (3ο έργο). Τρίτον, η διερεύνηση της κατανόησης της λύσης στην περίπτωση των εξισώσεων/ανισώσεων και οι ομοιότητες-διαφορές που εντοπίζουν ανάμεσά τους (4ο έργο).Στο δεύτερο μέρος της ερευνητικής διαδικασίας σκοπός είναι μέσω μίας δραστηριότητας βαθμωτών ερωτημάτων(5ο έργο) να ερευνηθούν ερωτήματα που σχετίζονται με την έννοια της ανίσωσης και τη σύνδεση της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπάστασής της και είναι τα εξής: Η κατασκευή των συναρτήσεων μέσω του algebra arrows,βοηθά στην νοηματοδότηση των μαθηματικών εκφράσεων που εν συνεχεία δημιουργούν την ανίσωση;Γίνεται κατανοητή η άνιση σχέση δύο ποσοτήτων μίας ανίσωσης μέσω του δυναμικού μοντέλου της ζυγαριάς και η ποιοτική διαφορά της από την εξίσωση;Είναι φανερή η σύνδεση της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης μίας ανίσωσης μέσω του λογισμικού nctm-balance expressions.

Για τους παραπάνω σκοπούς το $1^{ο}$ μέρος της έρευνας θα διεξαθεί στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι ενώ το $2^{ο}$ μέρος θα εμπλουτιστεί με ψηφιακά μέσα που να υποστηρίζουν τα λογισμικά algebra arrows και balance expressions.

4.2. Συμμετέχοντες στην έρευνα

Στην έρευνα όπως προαναφέρθηκε συμμετείχαν δύο ομάδες των 2 μαθητών της Β' και Γ'Γυμνασίου.Στην $1^{η}$ ομάδα των αγοριών συμμετείχε ο Θάνος και Βαγγέλης και στη $2^{η}$ η Αφροδίτη και η Μαρία αντίστοιχα.Οι μαθητές της $1^{ης}$ ομάδας τυγχάνει να έχουν $1^{ου}$ βαθμού συγγένεια,έτσι,ως ξαδέρφια γνωριζόντουσαν αρκετά καλά και η επικοινωνία-συνεργασία ανάμεσά τους ήταν ιδιαίτερα εύκολη. Πρόκειτε για 2 μαθητές με κλίση στα μαθηματικά ,που τόσο η πρώτερη πορεία τους όσο και η προθυμία τους για τη συμμετοχή στην έρευνα φανερώνουν την αγάπη τους για το συγκεκριμένο μάθημα.Τα κορίτσια της $2^{ης}$ ομάδας είναι συμμαθήτριες,οπότε η επικοινωνία ανάμεσά τους είναι αρκετά εύκολη.Πρόκειτε για μαθήτριες χωρίς αρκετή ευχαίρεια στα μαθηματικά αλλά με αρκετή προθυμία και διάθεση για γνώση.

4.3. Τοποθεσία Διεξαγωγής έρευνας

Η έρευνα διεξήχθη ένα πρωινό Κυριακής στις 11:00 π.μ. στο σπίτι ενός εκ των δύο μαθητών στην περιοχή της Νίκαιας (Θάνου) καθώς και την επόμενη Κυριακή στις 11:00 στο σπίτι ενός εκ των δύο κοριτσιών στην περιοχή του Περιστερίου(Μαρίας). Είχα φέρει μαζί τον ψηφιακό εξοπλισμό(laptop) ,ώστε να χρησιμοποιήσουμε τα ήδη εγκατεστημένα προγράμματα(algebra arrows,nctm-balance expressions) και να μην χαθεί χρόνος στην επανεγκατάστασή τους στους υπολογιστές των παιδιών.

4.4. Διάρκεια Έρευνας

Η έρευνα διήρκησε συνολικά εξι διδακτικές ώρες.Πιο συγκεκριμένα, 2 ώρα και 50 λεπτά σε κάθε ομάδα μαθητών. Συγκεκριμένα διεξήχθη την Κυριακή 20/5/2019 και 27/5/2019, 11:00-13:50. Το φύλλο εργασίας όπως αναλύεται παρακάτω χωρίστηκε σε δύο μέρη.

$1^{ο}$ μέρος->11:00-11:50
Ενδιάμεσο διάλλειμμα->11:50-12:00
$2^{ο}$ μερός-> 12:00-13:50

4.5. Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με τη μέθοδο των κρίσιμων συμβάντων. Σύμφωνα με τους Powell, Francisco και Maher (2003) λέμε κρίσιμο ένα γεγονός στο οποίο παρατηρείται σημαντική εξέλειξη σε σχέση με προηγούμενα συμβάντα. Σε αυτήν την περίπτωση ο ερευνητής βοηθείται να κατανοήσει την επίδραση που έχει το γεγονός στην περαιτέρω κατανόηση. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι αρχικά να αναγνωρισθεί ένα γεγονός ως κρίσιμο είτε γιατί δημιουργείται από μια

μαθηματική ενόραση είτε γιατί παρουσιάζει γνωστικό εμπόδιο. Ο ερευνητής καλείται να αναγνωρίσει το πλαίσιο μέσα στο οποίο κινείται ο μαθητής, τις στρατηγικές που ακολουθεί, τις αρχικές του ιδέες το δρόμο προς τον οποίο
κινείται,τα συμπεράσμματα που καταλήγει και να αναγνωρίσει τις συνδέσεις ανάμεσα στις αρχικές και τελικές του ιδέες. Οργανώνοντας τα κρίσιμα συμβάντα δημιουργείται μια ιστορία η οποία τελικά βοηθά τον ερευνητή να κατανοήσει τη νοητική πορεία του μαθητή ή μιας ομάδας που συνεργάζεται.Οι ιστορίες αυτές αναλύονται περαιτέρω με βάση το μοντέλο abstraction in context,όπως προαναφέρθηκε.Κατά την ανάλυση αναζητούνται σημεία του διαλόγου ή της συμπεριφοράς του μαθητή που στοιχειοθετούν τις τρεις πτυχές του RBC μοντέλου(Recognising,Building with,Constructing). Για την ανάλυση των δεδομένων με τη μέθοδο των κρίσιμων συμβάντων ενημερώθηκαν οι συμμετέχοντες για την μαγνητοφώνηση της ερευνητικής διαδικασίας,ακολούθησε η απομαγνητοφώνηση των δεδομένων των 2 συναντήσεων, επιλέχθηκαν τα σημεία στα οποία εμφανιζόντουσαν συμβάντα που είχαν ενδιαφέρον για την έρευνα και εν συνεχεία αναλύθηκαν. Τέτοια γεγονότα ήταν αυτά που έδειχναν τη στρατηγική που ακολουθούσε ο μαθητής, τη συνεργασία των μαθητών μέσα στην ομάδα, οι περιπτώσεις που διαφαινόταν ότι ο μαθητής είχε κάποια ενόραση ,οι στιγμές που αναγνωρίστηκαν νοητικά άλματα του μαθητή καθώς και οι διαδικασίες διατύπωσης ισχυρισμών και μελέτης για την αποδοχή ή αναδιατύπωσής τους.

4.6. Φύλλο εργασίας

<u>Φύλλο εργασίας</u>

1)Να μετατρέψετε τις παρακάτω λεκτικές εκφράσεις σε συμβολικές:

Το διπλάσιο ενός αριθμού κάνει 15	
Ένας αριθμός είναι μικρότερος από 10	
Ένας αριθμός αυξημένος κατά 5 είναι μεγαλύτερος από 15	
Το μισό ενός αριθμού είναι μικρότερο από 4	
Ένα από τα 4 μέρη ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από -8	
Η αύξηση του -2,μέχρι να γίνει μεγαλύτερο ή ίσο του 8,5	
Η διαφορά ενός αριθμού από το 15 είναι μικρότερη ή ίση του 7	
Ένας αριθμός αυξημένος κατά 2 είναι μεγαλύτερος από 5 και μικρότερος από 10	

2)Να μετατρέψετε τις συμβολικές εκφράσεις σε λεκτικές:

$x>-7$	
$3x-1<-8$	
$\frac{x}{2} \leq x-1$	
$-5<x<2$	

3)Ένας μαθητής ρωτήθηκε το εξής:’’Αν ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος του 3 τότε το διπλάσιό του είναι μεγαλύτερο του 6;Επίσης ο αντίθετος του διπλασίου του είναι μεγαλύτερο του -6;’’.Ποια πιστεύετε ότι ήταν η απάντησή του;

………
………
………

4) i)Βρείτε τις λύσεις σε κάθε περίπτωση με το νου με περιγράψτε τις είτε συμβολικά είτε λεκτικά:

α) $2x + 3 = x + 1$ β) $3x + 1 > 5$

………

ii)Παρατηρείτε ομοιότητες/διαφορές παρατηρείτε στις δύο παραπάνω μαθηματικές εκφράσεις;Αν ναι,συμπληρώστε τις στον πίνακα:

5) Δραστηριότητα

Ο κ.Γιώργος σκοπεύει να διαμορφώσει στο οικόπεδό του δύο ξεχωριστούς κήπους, περιφράζοντάς τους με σχοινί.Ο $1^{ος}$ θα περιφραχτεί με 10 ξύλινα κολωνάκια τοποθετημένα σε ίση απόσταση και μια ξύλινη πόρτα μήκους 1,5μέτρου που στηρίζεται σε δύο από αυτά.Ο $2^{ος}$ θα περιφραχτεί με 12 τσιμεντένια κολωνάκια τοποθετημένα στην ίδια απόσταση με τα προηγούμενα.

α)Βρείτε έναν τρόπο να περιγράψετε την Περίμετρο κάθε κήπου σύμφωνα με την απόσταση των κολωνιών του,χρησιμοποιώντας το λογισμικό algebra arrows στη σελίδα https://app.dwo.nl/en/student/ .

β)Πόση απόσταση πρέπει να έχουν τα κολωνάκια κάθε κήπου ώστε να χρησιμοποιηθεί το ίδιο μήκος σχοινιού;

γ)Ανοίξτε το λογισμικό https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Pan-Balance----Expressions/ ,τοποθετώντας στα σκέλη της τις αλγεβρικές παραστάσεις που δίνουν την περίμετρο κάθε σχήματος και σέρνοντας τον δρομέα x παρατηρείστε ποιος είναι ο ρόλος του δρομέα x στη ζυγαριά και τις γραφικές παραστάσεις;

………

Στη συνέχεια συμπληρώστε τον πίνακα με τα σύμβολα >,<,= ανάλογα με ποια Περίμετρος είναι μεγαλύτερη για κάθε τιμή του x καθώς και την τιμή της:

X	9x+1.5	Σύμβολο	12x
0,2			
0,4			
1			
2,5			
4			

δ)Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις του λογισμικού συμπληρώστε τον πίνακα:

X	Σύμβολο		
0,1	9x+1,5		12x
0,3	9x+1,5		12x
0,5	9x+1,5		12x
1,5	9x+1,5		12x
3	9x+1,5		12x

ε) i)Τι εκφράζει ο παρακάτω συμβολισμός;Πώς θα ονόμαζες την παρακάτω μαθηματική έκφραση;

$$9x + 1,5 > 12x$$

ii)Μπορείς να εκφράσεις συμβολικά όλες τις τιμές του x για τις οποίες

………
………

6)i)Σχηματίστε ένα δικό σας πρόβλημα το οποίο να περιγράφει την ανίσωση

2x-3>2x-5 και προσπαθήστε να το λύσετε.

ii)Ανοίξτε το λογισμικό https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Pan-Balance----Expressions/ και επαληθεύστε την απάντησή σας.Τι παρατηρείτε;

iii)Αναδιαμορφώστε το πρόβλημά σας ώστε να περιγράφει την ανίσωση 2x-3<2x-5; Ποια είναι τώρα η λύση του;

4.7. Ανάλυση φύλλου εργασίας

Το γενικότερο σκεπτικό για τη διαμόρφωση του συγκεκριμένου φύλλου εργασίας είναι τόσο η ανάδειξη των δυσκολιών των μαθητών στην κατανόηση των ανισώσεων,όπως αυτές έχουν αποτυπωθεί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και η προσπάθεια νοηματοδοτημένης εισαγωγής τους στην Β' ή Γ' Γυμνασίου.

Οι πρώτες δύο ερωτήσεις ζητούν από τους μαθητές μία συμβολική έκφραση να την διατυπώσουν λεκτικά και το αντίστροφο.Οι δραστηριότητες στοχεύουν στην έρευνα της κατανοήσης των αλγεβρικών εκφράσεων καθώς και των συμβόλων ''<'',''>'' , της διαφοράς τους από το ''='' και των διπλοανισώσεων που ενυπάρχουν στις δραστηριότητες αυτές. Η δυσκολία κατανόησης του συμβόλου καθώς και η λεκτική περιγραφή διπλοανισώσεων είναι δυσκολίες που έχουν διατυπωθεί στο άρθρο Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote και Eric J.Knuth and Ana C.Stephens,Nicole M.McNeil,Martha W.Alibali.

Στην ερώτηση 3 αναμένεται οι μαθητές να απαντήσουν με γνώμονα τις γνώσεις τους στις εξισώσεις.Στο 1ο ερώτημα η σκέψη αυτή θα τους οδηγήσει σε σωστό συμπέρασμα όμως στο 2ο όχι.Έτσι θα αναπτυχθεί μία παρανόηση γύρω από το μοντέλο της ζυγαριάς και της κατάλληλης χρήσης του.Το μοντέλο αυτό έρχεται στην επιφάνεια αυθόρμημα στους μαθητές σε κάθε περίπτωση ύπαρξης δύο μελών ανεξαρτήτου συμβόλου που τα συνδέει όπως φαίνεται στο άρθρο των Tsamir&Bazzini,όπου αναφέρεται ως διαισθητική γνώση,όπως χαρακτηρίστικε από τον Fischbein.

Σκοπός της ερώτησης 4 είναι να φέρει σε άμεση αντιπαράθεση την έννοια της εξίσωσης και ανίσωσης και να γίνει εμφανής η πιθανή διαφοροποίηση τους για τους μαθητές.Όπως αναφέρεται στο άρθρο των Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote,οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τόσο την συντακτική διαφορά τους όσο και τη διαφορά στις λύσεις τους.Για το λόγο αυτό ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις λύσεις τους με όποιο τρόπο θέλουν.Καθώς δεν έχουν διδαχτεί την επίλυση ανισώσεων έχει ενδιαφέρον αν οι μαθητές θα επιλέξουν έναν αλγοριθμικό τρόπο βασισμένο στις εξισώσεις ή θα τη λύσουν με την αριθμητική μέθοδο των δοκιμών και θα αναχθούν σε ένα γενικευμένο σύνολο τιμών.

Η δραστηριότητα 5 αποτελείται από 5 υποερωτήματα με διαφορετικό ρόλο το καθένα:

Στο α)οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τις συναρτήσεις των x κολώνων με την y Περίμετρο.Έχει παρατηρηθεί δυσκολία των μαθητών στην σύνταξη αλγεβρικών εκφράσεων-συναρτήσεων και την νοηματοδότησή τους (Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote) για αυτό το λόγο έχει επιλεχθεί το λογισμικό arrows algebra.Το προαναφερθέν λογισμικό(όπως αναφέρει το άρθρο των Paul Drijvers,Michiel Doorman,Peter Boon,Helen Reed,Koeno Gravemeijer)προσφέρει τη δυνατότητα οι μαθητές να οπτικοποιούν με βέλη τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που καταστρώνουν με το νου κατά τη σύνταξη μιας αριθμητικής έκφρασης και στη συνέχεια αντικαθιστώντας την ανεξάρτητη μεταβλητή με x τους βοηθάει να τη γενικεύσουν σε αλγεβρική έκφραση.Κατά συνέπεια η επιλογή του λογισμικού έγινε με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση των αλγεβρικών μορφών που δομούν τις συναρτησεις,κάτι που κρίνεται απαραίτητο για τη συνέχεια της δραστηριότητας

Το β) αποτελεί ένα μεταβατικό στάδιο μεταξύ του α και γ ερωτήματος κατά το οποίο ζητείται οι μαθητές να εξισώσουν τις δύο συναρτήσεις.Η εξίσωση διδάσκεται πριν τις συναρτήσεις στο αναλυτικό πρόγραμμα με αποτέλεσμα οι μαθητές να

αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εξίσωσή τους.Ωστόσο είναι ένα απαραίτητο εφόδιο που πρέπει να αποκτήσουν ώστε να το επεκτείνουν και στην περίπτωση των ανισώσεων.
Στόχος του γ) είναι να ενταχθεί η σύγκριση των δύο μεγεθών στην εξίσωση.Πολλές φορές η εξίσωση και κατ επέκταση ανίσωση γίνεται αντιληπτή ως ένα στατικό αντικείμενο και όχι ως ισοδυναμία αντικειμένων.Αυτή η παρανόηση πρέπει να ξεπεραστεί για να αναδειχθεί η ανάγκη χρήσης της ανίσωσης.Το λογισμικό αυτό εξυπηρετεί ακριβώς αυτή την ανάγκη,καθώς συγκρίνει τις αλγεβρικές μορφές με το μοντέλο της ζυγαριάς για τις διάφορες τιμές του x.Οι τιμές του x μεταβάλλονται από έναν δρομέα που πέρα της οπτικοποίησης, προσφέρει και δυναμικό μετασχηματισμό στην ζυγαριά(σύγκριση μεγεθών) και στη γραφική παράσταση των συναρτήσεων(ίχνος σημείων με αυτή την τιμή του x ως τετμημένη).Κατ'επέκταση αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν και τη σημασία των άνισων μεγεθών στην γραφική παράσταση.Συνεπώς,το ερώτημα στοχεύει στην αξιοποίηση του λογισμικού για την διερεύνηση της κατανόησης της ανίσωσης και τη σύνδεσή της με την γραφική παράσταση των δύο μεγεθών.Αυτό θα επιτευχθεί μεταβάλλοντας οι μαθητές το δρομέα x, είτε με τον υπολογισμό των βαρών της ζυγαριάς είτε με τη χρήση των σημείων της γραφικής παράστασης είτε με μια οριζόντια μαθηματικοποίηση των δύο παραπάνω αναπαραστάσεων.
Το δ)στοχεύει στην κατανόηση της γεωμετρικής σημασίας των άνισων μεγεθών και στην εισαγωγή τους στον τυπικό τρόπο σύνταξης μιας ανίσωσης.Τα δύο μέλη είναι τοποθετημένα και οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν μόνο το σύμβολο της ανίσωσης ανάλογα με τα δεδομένα που έχουν από την γραφική αναπαράσταση.
Στο ε)οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν λεκτικά το νόημα του συμβόλου που ανακάλυψαν στο προηγούμενο ερώτημα.Πρόκειτε για ένα ερώτημα που στοχεύει στην ανάπτυξη του παραγωγικού συλλογισμού τους(ειδικές περιπτώσεις->γενική μορφή ανίσωσης). Επίσης ζητείται να μαντέψουν την ονομασία του συμβολισμού,ώστε να γίνει αντιληπτή η συνάφεια της ονοματολογίας κάθε μαθηματικού αντικειμένου με τη σημασία του.Τέλος ζητείται η επίλυση της ανίσωσης,η οποία αναμένεται να υλοποιηθεί με τη χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των συναρτήσεων.

Τέλος η δραστηριότητα 6 ερευνά την νοηματοδότηση της νέας έννοιας με κριτήριο την κατασκευή λεκτικού προβλήματος που να επεξηγεί την αλγεβρική της μορφή.Επιπλέον στόχος της δραστηριότητας είναι να αναδείξει τις αδύνατες και αόριστες ανισώσεις(κατ αντιστοιχία με τις εξισώσεις) ως ανισώσεις με μηδενικό ή άπειρο πλήθος λύσεων.Το λογισμικό λειτουργεί τόσο ως αποδεικτικό μέσο της διαισθητική αντίληψης των μαθητών για το πλήθος λύσεων(ζυγαριά) όσο και ως συνδετικός κρίκος της υπάρχουσας αλγεβρικής αναπαράστασης με την γεωμετρική που προσφέρει.Πιο συγκεκριμένα αναμένεται να παρατηρήσουν οι μαθητές την παραλληλία των συναρτήσεων,ως αιτία μη ύπαρξης λύσεων και την ταύτισή τους,ως αιτία απείρων λύσεων.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</u>

Στο σύνολο της ερευνητικής διαδικασίας παρατηρήθηκαν κρίσιμα συμβάντα που σχετίζονται με:

A. <u>Την έννοια του συμβόλου</u>.

Πιο συγκεκριμένα,στην $1^{η}$ ερώτηση όπου οι μαθητές είχαν να μετατρέψουν λεκτικές εκφράσεις σε συμβολικές,οι μαθητές παρατηρήθηκε ότι δεν αντιμετώπισαν δυσκολία τόσο στις λεκτικές εκφράσεις που περιείχαν το =, όσο σε αυτές που απαιτούσαν τη χρήση ανισοτικών συμβόλων.Παρακάτω αναφέρεται ένα κρίσιμο συμβάν κατά το οποίο φαίνεται ο προβληματισμός του μαθητή για τη χρήση του < ή > ή = .

Β:Ναι.Επόμενο,ένας αριθμός είναι μικρότερος από 10.
Θ:x μικρότερο (<)10.Ένας αριθμός αυξημένος κατά 5 είναι μεγαλύτερος από 15.
x+5=15
Β:Περίμενε,περίμενε.ένας αριθμός μεγαλύτερος(γράφει <) απο 15.
Θ:Α! ναι μεγαλύτερος.

Η σημασία των παρακάτω κρίσιμων συμβάντων προκύπτει από την διαφοροποίηση τους από την υπάρχουσα βιβλιογραφία.Αν και σύμφωνα με την βιβλιογραφία η διαφορά των συμβόλων <,≤ και >,≥ δεν είναι συχνά εμφανής στο παρακάτω συμβάν φαίνεται να είναι σαφής.Επιπλέον,στο $2^{ο}$ απόσπασμα είναι σαφής η κατασκευή της νέας έννοιας(≥),καθώς σύμφωνα με το μοντέλο RBC υπήρξε αναγνώριση της διαφοροποίησης των συμβόλων ≥,>(R) ,κατασκευή συλλογισμών με βάση τον προηγούμενο διαχωρισμό που αποτυπώνονται από την διαφορετική ορολογία που έδωσε ο μαθητής(B) και κατασκευή της νέου άτυπου ορισμού που προδίδει τη σύνδεση με τον ορισμό του συμβόλου >(C).

1.

Β:Α!Εχω μια ιδέα.Τι θα λεγες για -2+x≥…..
Θ:Αυτό είναι μικρότερο ή ίσο.(μπέρδεμα συμβόλου)
Β:Μεγαλύτερο είναι ή ίσο του 8,5.
Θ:Α!λέει και ίσο.
Β:Ετσι το συμβολίζουμε αυτό ≥.
Θ:Να το γράψουμε έτσι;≥;Δεν είμαι σίγουρος

2.

Κ:Ποια είναι η διαφορά στο $5^{ο}$ της $1^{ης}$ χ/4>-8 και στο $6^{ο}$ 2χ-6≥6,5 της $1^{ης}$;
Θ:Το $2^{ο}$ μπορεί να γίνει και ίσο με 6,5 ενώ το $1^{ο}$ δεν γίνεται ίσο με -8.
Β:Μπορούμε να το πούμε το $1^{ο}$ ανισότητα και το $2^{ο}$ ανισοισότητα.

Επίσης είναι εμφανές ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις που απαιτούν τη χρήση δύο ανισωτικών συμβόλων αρχικά μπέρδεψαν τους μαθητές των δύο ομάδων στο να τις αποτυπώσουν συμβολικά αλλά ύστερα από συνεργασία ανήχθηκαν στο σωστό τρόπο γραφής τους.Παρακάτω αποτυπώνεται ο διάλογος της ομάδας 1 και 2.

1.

Θ:Ένας αριθμός αυξημένος κατά 2 είναι μεγαλύτερος από 5 και μικρότερος από 10.(Γράφει) $x+2>5$.Αααα όχι όχι είναι έτσι....
Β:Στο κέντρο
Θ:Είναι έτσι μικρότερο… $x+2<10$.Ναι και στο κέντρο αυτό και μεγαλύτερο από...
$5<x+2<10$

2.

Μ:Ένας αριθμός αυξημένος κατά 2 είναι μεγαλύτερος από 5 και μικρότερος από 10.Τι σημαίνει αυτό; $x+2>5$ και $x+2<10$;
Α:Μα λέει να το γράψουμε με μία αλγεβρική έκφραση.....εεε...$x+2>5<10$;
Μ:Για το $x+2$ λεει ότι είναι μικρότερο από 10 ,όχι το 5.Άρα $5<x+2<10$.

Η παραπάνω δυσκολία παρατηρήθηκε και στην 2^{η} άσκηση κατά την μετατροπή του συμβολικού τρόπου γραφής σε λεκτικό.

1.

Θ:$- 5<x<2$
Β:Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από -5 και μικρότερος από 2.Ναι!
Θ:Και μεγαλύτερος από 2.
Β:Όχι μικρότερος από 2.
Θ:Το γραψα ανάποδα;Οχι ρε...
Β:Το γραψες ανάποδα!

Β. <u>Την σημασιολογία αλγεβρικών εκφράσεων</u>.

Επιπλέον κρίσιμα συμβάντα της ερευνητικής διαδικασίας σχετίζονται με τη σύνταξη των αλγεβρικών εκφράσεων και την μαθηματική ορολογία.Αναλυτικότερα,ο αλγεβρικός συμβολισμός δημιούργησε παρερμηνείες στον σωστό τρόπο γραφής των λεκτικών εκφράσεων, κυρίως όσων περιείχαν την έννοια της διαίρεσης.Επίσης, η αυστηρή ορολογία των μαθηματικών εννοιών είναι εμφανές ότι δυσκολεύει τους μαθητές να τις χρησιμοποιήσουν ορθά.

Θ:Ένα από τα τέσσερα μέρη ενός αριθμού είναι 8.
Β:Ένα από τα τέσσερη μέρη ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από -8.Τι;x/4;(δυσκολία στην περιπλοκότητα του συμβολισμού)
Θ:Ναι!x/4.1/4x θα λεγα αλλά είναι το ίδιο.

B:Δευτερη,Να μετατρέψετε τις συμβολικές εκφράσεις σε λεκτικές.Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από -7.3x-1=-8,το 3πλάσιο ενός αριθμού μείον ένα ισούται με -8.Εεεε...μειομένο κατά 1.
Θ:Όχι,όχι
B:Μια χαρά είναι!Επόμενο.x/2≤x-1,το μισό ενός αριθμού είναι μικρότερο ή ίσο με τον ίδιο αριθμο μειωμένο κατά 1.
Θ:Διάφορο κατά 1,διαφορά κατά 1.

Γ. Την διατύπωση ισχυρισών και επιχειρηματολογία

Η έρευνα για τη σύνδεση των ιδιοτήτων της ισότητας με την ανισώτητα,ανέδειξε κρίσιμα σημεία όταν οι μαθητές κλήθηκαν να ανακαλύψουν την ιδιότητα των ανισωτήτων:

$$\alpha\cdot x<\beta \rightarrow x < \frac{\beta}{\alpha},\ \alpha>0$$

$$\alpha\cdot x<\beta \rightarrow x > \frac{\beta}{\alpha},\ \alpha<0$$

αιτιολογώντας ο καθένας την άποψη του.Το σημείο αυτό είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την $1^η$ ομάδα(των αγοριών) καθώς ενώ και οι δύο ομάδες αρχικά θεώρησαν ότι η διαίρεση κατά μέλη δεν επηρεάζει τη διάταξη των αποτελεσμάτων και κατ επέκταση τη φορά της ανίσωσης,η $1^η$ ομάδα ανατροφοδοτήθηκε μέσα από το διάλογο(R-B) και κατέληξε στο διαχωρισμό των περιπτώσεων για τις διάφορες τιμές του α(C).Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι τεκμηριώσεις των παιδιών καθώς αν και είναι μαθητές γυμνασίου,οι απαντήσεις τους διαφέρουν άρδην.Ο μαθητής Β προσπάθησε να τεκμηριώσει την άποψή του με τη χρήση συναρτήσεων(που είχε διδαχτεί στην ίδια σχολική χρονιά) ενώ ο μαθητής Θ προσπάθησε να χρησιμοποιήσει μία προσεγγισική μέθοδο απειροστικού λογισμού.Είναι αξιοσημείωτο ότι και σε αυτή την άσκηση,οι δυσκολίες που αναφέρθηκαν ως προς τη χρήση του συμβόλου έγιναν φανερές,όπως φαίνεται παρακάτω.

Θ:Καταρχήν το $1^ο$ δεν ισχύει ότι αν είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του 3 τότε το διπλάσιο είναι μεγαλύτερο του 6.
B:Ισχύει.3·2 κάνει 6,αν είναι μεγαλύτερος του 3 θα βγαίνει παραπάνω από 6
Θ:Α!Ναι.Όχι 6 μεγαλύτερος του 6(μπερδεύει το = με το >)
B:Και μετά που λέει αφού είναι ο αντίθετος,αλλάζουμε το πρόσημο και πάει πάλι...
Θ:Ισχύει-Ισχύει
B:Νομίζω πρέπει να βρούμε και αιτιολόγηση.Εεεεεε
Οι αιτιολογήσεις των μαθητών για το $1^ο$ ερώτημα καθώς και η αλλαγή απόψεων για το $2^ο$,φαίνονται παρακάτω:
Θ:Κόλησες και εσύ ε;Ότι εφόσων το 3 θα το πλησιάσουμε.....
B:Να το πούμε σαν συνάρτηση;Ότι κάθε τιμή του x ισούται με μόνο μία τιμη του y
Θ:Εγώ έγραψα αυτο.$2\cdot x=6 \rightarrow x=6:2 \rightarrow 2x=6+y, όπου\ y\ θετικός\ αριθμός$

Β:Ναι αλλά αυτό δεν αιτιολογεί και το δεύτερο σκέλος,που λέει για τον αντίθετο.Εγω έγραψα ισχύει γιατί για x>3 ισούται με μόνο μία τιμή του y μέσω της συνάρτησης y=αx,για α=2.
Κ:Αυτό αιτιολογεί και το δεύτερο σκέλος;
Β:Το αιτιολογεί γιατί αν x=-3,επί 2 κάνει -6.
Κ:Η άσκηση μιλάει για τον αντίθετο του διπλασίου του,οπότε μιλάμε για τον ίδιο αριθμό.
Β:Ναι αλλά εαν προσπαθήσουμε να το επαληθεύσουμε και στο y βαλουμε -6,το x βγαίνει .... (ο συμβολισμός μπερδεύει)
Θ:-2x=-6 μεγαλύτερος είναι μετα;Να βάλουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο του 3;Να πουμε 4.Στο $1^{ο}$ μια χαρά βγαίνει 2·4=8 ,είναι μεγαλύτερος από 6.Κολάει για το y.Στο $2^{ο}$ -2·4=-8<-6 ,αφού είναι στους αρνητικούς.
Β:Α!ναι.Να το ξαναελέγξω.Άρα δεν ισχύει το $2^{ο}$,γιατί όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή για έναν αρνητικό τόσο απέχει από το 0 και όσο απέχει από το 0 τόσο μικρότερος είναι ο αριθμόςΆρα παρότι η απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη από 6,στους αρνητικούς θα είναι μικρότερο το -2x από το -6.Αλλά στο $1^{ο}$ ισχύει.
Θ:Εγώ έχω βάλει για το $1^{ο}$ για x>3→2x=6+y.Οπότε και το 3+0,00001 να βάλεις στην τιμή του x θα βγει μεγαλύτερο του 6.Πάμε στην επόμενη.

Δ. Την σύνδεση εξίσωσης-ανισώσεων.

Κατά την συνέχεια της έρευνας στο πεδίο των ομοιοτήτων που παρατηρούν οι μαθητές στις εξισώσεις και ανισώσεις, κρίσιμο θεωρήθηκε το συμβάν ότι οι μαθητές παρατήρησαν την ομοιότητα στη σύνταξη της εξίσωσης-ανίσωσης,αλλά δεν έδωσαν βάση στο ρόλο του συμβόλου ως προς το πλήθος των λύσεων.Δηλαδή θεώρησαν ότι το σύμβολο δεν επηρεάζει το πλήθος των λύσεων.

Κ:Πώς θα την ονόμαζες λέει στη συνέχεια Θάνο και γιατί;
Θ:Ανισωτητα,γιατί το σήμα δείχνει μικρότερο ή μεγαλύτερο δηλαδή δεν είναι ίσο,είναι άνισο.
Β:Δεν επαληθεύεται από τον ορισμό της εξίσωσης.
Κ:Θάνο πιστεύεις ότι τα ονόματα που δίνουμε σε μαθηματικές έννοιες σχετίζονται με το τι εκφράζουν;
Θ:Ναι εδώ δεν έχει το = για να πουμε ισότητα ,έχει μεγαλύτερο άρα ανισώτητα και δεν έχει συγκεκριμένο αποτέλεσμα.Βασικά μερικές φορές μπορεί να έχει συγκεκριμένο αποτέλεσμα.Όχι ποτε δεν έχει.
Κ:Όταν λες συγκεκριμένο αποτέλεσμα τι εννοείς;
Θ:Δεν μας λέει ακριβώς ακριβώς ότι είναι 4,είναι κοντά στο 4.

Αρχικά θεώρησαν ότι οι δύο μαθηματικές εκφράσεις έχουν μία λύση,ωστόσο στη συνέχεια διαπίστωσαν ότι η ανίσωση έχει άπειρες.

Κ:Παρατηρείτε ομοιότητες/διαφορές στις δύο μαθηματικές εκφράσεις;
Β:Έχουν την ίδια μεταβλητή x.
Θ:Διαφορετικές λύσεις. Η μία είναι το -2 και η άλλη ότι το x είναι μικρότερο από το -4/3 .(εννοεί τους αριθμούς)

K:Δηλαδή διαφέρουν μόνο στην τιμή;
B:Ναι η κάθε μία έχει μία λύση.
Θ:Όχι η 2η έχει άπειρες.
B:Α!Ναι η 1η έχει μία.Η 2η έχει κάθε αριθμό μεγαλύτερο του -4/3,άπειρες.

Στην μία ομάδα η συζήτηση εξελίσσεται καθως οι μαθητές συνέδεσαν τις άπειρες λύσεις της ανίσωσης με τον χαρακτηρισμό ταυτότητα.Σύμφωνα με το RBC μοντέλο η σύνδεση του άπειρου πλήθους λύσεων της ανίσωσης με την ταυτότητα αποτελεί το τελικό στάδιο(C) μιας συλλογιστικής πορείας κατά την οποία αναγνωρίστηκε η διαφοροποίηση στο πλήθος λύσεων των ανισώσεων(R) και σμηλεύτικε με την ανάδειξη και σημασία των άπειρων λύσεων(B).Στη βάση της κονστρουβιστικής θεωρίας μία τέτοια σύνδεση παλαιάς και νέα γνώσης έχει ιδιαίτερη σημασία.Ωστόσο η ελλειπής γνώση του ορισμού της έννοιας ''ταυτότητα'',δεν τους οδήγησε στην έκβαση κάποιου ορθού συμπεράσματος.

B:Δηλαδή είναι ταυτότητα;
Θ:Όχι,εγώ έχω συνηθίσει τις $(α+β)^2$ και τέτοια.
K:Ο Θάνος μιλάει για κάποιες σχέσεις που ισχύουν για κάθε αριθμό.(Ο Β είναι μαθητής της Β'Γυμνασίου και δεν γνωρίζει αυτές τις ταυτότητες)
Θ:Να έχει άπειρες λύσεις.
B:Ταυτότητα είναι η εξίσωση 0x=0,που έχει άπειρες λύσεις.
Θ:Ε!είναι.....κουτσα στραβά.Είναι κάπως παράξενο(άγνοια ορισμού)
K:Εσύ Βαγγέλη τι λές;
B:Είναι...(δυστακτικά)καθώς οποιαδήποτε τιμή του x μεγαλύτερη του -4/3 την επαληθεύει.

Ε. Τη συμβολή του λογισμικού Algebra Arrows στη σύνταξη και σημασιολογία αλγεβρικών παραστάσεων.

Το 2ο μέρος της ερευνητικής διαδικασίας αποτελούμενο από πολλά ερωτήματα με κύριο σκοπό τη σύνδεση της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης της ανίσωσης και το ρόλο των νέων τεχνολογιών σε αυτό,ανέδειξε ποικίλλα κρίσιμα σημεία που σχετίζονται με αυτό καθώς και με τις προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών ως προς την έννοια της ανίσωσης.Στο α ερώτημα,ζητήθηκε από τους μαθητές να μοντελοποιήσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα οικοπέδων κατασκευάζοντας τη συνάρτηση του συνδέει που συνδέει την Περίμετρο των σχημάτων(Π) σε σχέση με την απόσταση των κολονιών(x)που τα περιβάλλουν.Η διαδικασία αυτή δυσκόλεψε τους μαθητές καθώς απαιτούσε αρκετή προσοχή στις λεπτομέρειες του προβλήματος.Οι ομάδες ακολούθησαν διαφορετικές στρατηγικές,με ξεχωριστή σημασία η κάθε μία.Η 1η ομάδα (υψηλότερη μαθηματική επίδοση)αν και ξεκίνησε με μία λανθασμένη εκτίμηση της συνάρτησης,κάνοντας μία γεωμετρική αναπαράσταση του προβλήματος κατάφερε να φτάσει στη ζητούμενη συνάρτηση και με τη χρήση του λογισμικού Algebra arrows επαλήθευσε την παραπάνω λύση.

Θ:Ο δεύτερος κήπος δεν έχει πόρτα,μπαίνει όποιος θέλει.Αν συμβολίσουμε x την απόσταση των κολονιών....
Β:οκ.10=α ,10x=y όπου y=Περιμετρος.x είναι η απόσταση από το ένα κολωνάκι στο άλλο και 10 τα κολωνάκια.
Θ:Ναι
Κ:Για πάμε λίγο στο λογισμικό ,όπου μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε τιμή για το x είτε με το πληκτρολόγιο είτε με το ποντίκι στην είσοδο.Ας πάρουμε μία τυχαία τιμή του x,για παράδειγμα το 3μ.
Β:Και αυτο θα είναι το x;
Κ:Ναι.Ας φανταστούμε λοιπόν αυτό το οικοπεδο με τα 10 κολωνάκια και την πόρτα,πώς θα υπολογίζατε την Περίμετρό του;
Θ:1,5·10.Θα κάνω ένα σχήμα.Ωχ δε μου βγηκε....οχι μου βγηκε.
Β:Εμένα μου βγήκε.
Θ:Μαζί με την πόρτα η περίμετρος είναι τόση.Όχι,όχι....9x+1,5
Κ:Για να δούμε επαληθεύεται η διαδικασία που σκεφτήκαμε και στο λογισμικό;Εσείς τι σκεφτήκατε ότι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε την περίμετρο του οικοπέδου όταν η απόσταση των κολωνιών είναι 3μ;
Θ:επί 9.
Κ:Πολύ ωραία ,εννόνουμε το x με το ·9.Χρειαζόμαστε άλλη πράξη για τον υπολογισμό του εμβαδού;
Θ: +1,5
Κ:Φτιάξτε την επόμενη πράξη στο λογισμικό.(βάζουν το +1,5)Τώρα πρέπει να ενώσουμε την αρχική τιμή εισόδου του x με το +1,5 ή το αποτέλεσμα του πολ/μου;
Θ:Το αποτέλεσμα του πολ/μου.
Κ:Ενώνοντας την μυτούλα με τον τελικό πίνακα ,προκύπτει η τιμή της περιμέτρου.Μπορούμε να βάλουμε και κάτι άλλο για την τιμη της απόστασης των κολονιών εκτός από 3;
Θ:Ναι x.(το βάζει και προκύπτει στην έξοδο 9x+1,5)
Κ:Τι είναι αυτό δηλαδή;
Θ:Ξερω γω...
Β:Μια αλγεβρική παράσταση.Η συνάρτηση της περιμέτρου Π σε σχέση με το x που βρήκαμε με πριν.Άρα είναι σωστο!!!
Κ:Τι λέτε για το 2^{ο};
Β:Έχουν την ίδια x απόσταση μεταξύ τους,το λέει.Όπου 10 θα βάλουμε 12.Δεν θα βάλουμε κατά 1 μικρότερο αφου δεν εχει πορτα.Θα είναι τετράγωνο.
Θ:Ας το φτιαξουμε τωρα.
Β:επί 10 όχι επί 12.Δεν βάζουμε τίποτα άλλο.Και ο πίνακας δείχνει 36(η περίμετρος)
Κ:Αν αλλάξουμε την τιμή θα αλλάξει η περίμετρος;
Β:Ναι να το κάνουμε x.Και θα μας δώσει κατευθείαν τη συνάρτηση.Π=12x

Αντιθέτως,η 2^{η} ομάδα έφτασε στην λύση του προβλήματος με τη χρήση του λογισμικού,καθώς επιτρέπει σειριακές μεταβολές των μεγεθών για διάφορες τιμές της ανεξάρτητης x μεταβλητής.Έτσι,οι μαθήτριες κάνοντας διάφορες δοκιμές (δοκιμές για το x) κατέληγαν στην τιμή της Περιμέτρου.Οι μεταβολές αυτές αποτυπώνονταν στο λογισμικό και η εξαγωγή της ζητούμενης συνάρτησης πραγματοποιήθηκε με ευκολία με τη χρήση του λογισμικού.

Μ:Θα βάλουμε στην είσοδο το 0,5 για να βρούμε την Περίμετρο του οικοπέδου όταν η απόσταση των κολωνιών είναι 0,5μ. Α:Εγώ θα το κάνω σε σχήμα...Βγαίνει ορθογώνιο!Να κάνουμε β+β+υ+υ; Μ:Πόσα κενά 0,5μ έχεις στη βάση; Α:4 στη μία βάση, 1 στην άλλη και άλλα δύο σε κάθε ύψος,σύνολο 9. Μ:Να πάρουμε το κουτάκι ·9 για το 0,5. Α:Ωραία!Μετά πρόσθεσε την πόρτα. Μ:Οκ!Θα πάρω άλλο ένα βελάκι με +1,5.Άρα η Περίμετρος βγαίνει 6. Κ:Ωραία κορίτσια.Προσπαθήστε να αλλάξετε την είσοδο για το x. Α:Αν βάλουμε 3,θα βγει άλλη Περίμετρος. Μ:Να βάλουμε το x για κάθε περίπτωση.Βγάζει 9x+1,5 Α:Άρα αυτή είναι η συνάρτηση!Λογικό γιατί παίρνουμε 9 φορες το μήκος και προσθέτουμε την πόρτα.

ΣΤ. <u>Ο ρόλος του λογισμικού Pan Balance στην ανάδειξη της ίσης-άνισης σχέσης των μελών μίας εξίσωσης-ανίσωσης.</u>

Η σύνδεση της έννοιας της εξίσωσης με την ισότητα των συναρτήσεων είναι μία αφαιρετική διαδικασία που απαιτεί ιδιαίτερη αφαιρετική διαδικασία και βαθιά κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.Παρά τις δυσκολίες των μαθητών που αποτυπώνονται στην βιβλιογραφία , οι δύο ομάδες αντιλήφθηκαν ότι η επίλυση του προβλήματος απαιτεί την εξίσωση των δύο περίμετρων δηλαδή την εξίσωση των συναρτήσεων ως προς Π.Το γεγονός αυτό καθιστά κρίσιμο το παρακάτω συβάν,για το οποίο αργότερα δίνονται πιθανές επεξηγήσεις.

Β:Το σκοινί ισούται με Π ,οπότε ξέρουμε ότι το Π πρέπει να βρούμε.Θα κάνουμε συνάρτηση. Θ:Να βρούμε την απόσταση των κολονιών ώστε να χρησιμοποιηθεί το ίδιο μήκος σχοινιού.Να βρούμε το Ε.Κ.Π..(θεωρεί ότι υπάρχουν αναλογίες) Β:Που κολάει αυτο; Θ:Όχι όχι....ή το ΕΚΠ ή το ΜΚΔ για το 10,12.Τα έχω μπερδέψει. Β:Θα έχουν ίδιο μήκος σχοινιού άρα και ίδια περίμετρο άρα θα κάνουμε μία πολύ ωραία συνάρτηση όπου 9x+1,5=12x.(τη λύνουν) Θ:3x=1,5→x=0,5

Ο ρόλος της ψηφιακής τεχνολογίας και συγκεκριμένα του λογισμικού Pan Balance ερευνάται και στα επόμενα ερωτήματα της δραστηριότητας καθώς οι μαθητές ανοίγοντας το λογισμικό κλήθηκαν να νοηματοδοτήσουν την ανίσωση μέσω του μοντέλου της ζυγαριάς.Τοποθέτησαν στα σκέλη της τις αλγεβρικές παραστάσεις και άμεσα κατάλαβαν ότι ο δρομέας του μοντέλου έχει το ρόλο της μεταβλητής x.Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκάλεσε ότι η πρώτη σκέψη της $1^{ης}$ ομάδας ήταν να μετακινήσει το δρομεα στο σημείο που οι Περίμετροι γίνονται ίσοι.Σύμφωνα με το RBC μοντέλο,παρατηρείται μία πρώτη αναγνώριση της σχέσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων εξίσωση-ζυγαριά με την ισορρόπηση των μελών της(R).Επιπλέον η δυναμικότητα του μοντέλου δημιούργησε ένα γονιμο περιβάλλον για διατύπωση ισχυρισμών και προσπάθεια επαλήθευσης μέσω του ίχνους ,όπως αποτυπώνεται παρακάτω(B).Η κατασκευή της νέας γνώσης (C)επέρχεται καθώς οι μαθητές νοηματοδοτούν το ρόλο του δρομέα και το ρόλο που διαδραματίζει τόσο στην αλγεβρική έκφραση όσο και στην ισορροπία της ζυγαριάς.

Β:Πηγαινέτο λίγο στο 6 να δεις.Ωραία πήγαινε στο 0,5.Ίσα και μας βγάζει 6.

Κ:Άρα ποιος είναι ο ρόλος του δρομέα;

Β:Είναι το σημείο στο οποίο συγκρούονται οι ευθείες.

Κ:Ναι αν το βάλουμε στο 0,5.Μόνο αυτή την τιμή μπορεί να πάρει;

Θ:Αλλάζοντας το δρομέα αλλάζει η ζυγαριά και το χρώμα της.(Η ζυγαριά παίρνει το χρώμα που βαρύτερου σκέλους)

Β:Μετά που το μετακινούμε πάει πάνω το μπλέ να φανταστώ.Ας το δοκιμάσω,πώς γίνεται αυτό;

Ζ. <u>Την σύνδεση της αλγεβρικής-γεωματρικής αναπαράστασης της ανίσωσης.</u>

Κρίσιμο θεωρείτε το γεγονός ότι μέσα από τη χρήση του λογισμικού οι δύο ομάδες αντιλήφθηκαν τη συμμεταβολή του δρομέα με τη ζυγαριά και τις γραφικές παραστάσεις(R),όμως,δεν μπορούσαν να αντιληφθουν πλήρως τον τρόπο αλληλεπίδρασης.Με διάφορους μετασχηματισμούς (B) προέκυψαν διαπιστώσεις όπως ότι το πιο υψηλό στη ζυγαριά είναι πιο κοντά στον x’x.Στην συμπλήρωση των πινάκων παρότι η εκφώνηση παρότρυνε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το γράφημα για να απαντήσουν,χρησιμοποίησαν κατα κύριο λόγω τη ζυγαριά κάτι που όπως φάνηκε οδήγησε σε παρανοήσεις.Η παρανόηση αυτή ήταν ότι το μικρότερο μέγεθος είναι όποιο βρίσκεται πιο χαμηλά στη ζυγαριά(πιθανή ερμηνεία λόγω άλλων μοντέλων όπως η κάθετη αριθμογραμμή).Όταν προσπάθησαν να βρουν λύση χρησιμοποιώντας το γράφημα τα προηγουμενα εμπόδια ξεπεράστηκαν(C),ωστόσο προέκυψε η παρανόηση ότι το μέγεθος με την μικρότερη απόσταση από τον x’x είναι το μεγαλύτερο(πιθανή ερμηνεία ότι επηρεάστηκαν από το μοντέλο της ζυγαριάς όπου πιο χαμηλο->πιο βαρύ->μεγαλύτερο).Με την πάροδο της συζήτησης ανάμεσα τους η παρανόηση ξεπεράστηκε και κατέστη σαφές ότι το μεγαλύτερο μέγεθος είναι το πιο χαμηλο στη ζυγαριά και το πιο υψηλό ως προς τον x’x(C).

Β:Είναι πιο κοντά στον άξονα x’x,άρα είναι λογικό να είναι πιο πάνω στη ζυγαριά.

Κ:Ωραία πάμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα με τις τιμές και τα σύμβολα.

Β:Ωραία,μετά το 0,5 το μπλε ειναι μικρότερο οπότε σε όλα πάει <.

Κ:Σίγουρα;Πώς το παρατήρησες;

Β:Από τη ζυγαριά και τη γραφική παράσταση.

Θ:Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι είναι πιο μεγάλο.

B:Οχ,ναι το μαθα τωρα.Σε αυτό το σημείο πιο δεξιά του 0,5 είναι μεγαλύτερο το 9x+1,5 γιατί....μικρότερο....μεγαλύτερο,γιατί στη ζυγαριά η μπλε ποσότητα πάει πιο κάτω άρα είναι και πιο βαρια.
K:Αυτό φαίνεται και δίπλα;(μεγαλώνει την τιμή του x)
B:Το κόκκινο είναι πιο κοντά στον άξονα x'x,ενώ αυτό όσο πάει απομακρύνεται και πιο πολυ από τον άξονα.Άρα το μπλε είναι πιο μεγάλο.
K:Θάνο εσύ συνφωνείς ότι μετά το 0,5 η τιμή του μπλε είναι μεγαλυτερη;
Θ:Ναι το βλέπω στη $2^η$.Η μπλε μακραίνει.Άμα πούμε ότι αυτό είναι το κέντρο ισορροπίας,η μπλε όλο και μακραίνει ενώ η κόκκινη και αυτή παει όλο και πιο μακρυά αλλά πιο κοντά στον άξονα x'x.
K:Αρα ας πούμε για αυτή την τιμή που έχουμε πάρει x=20,5 ποια τιμή είναι πιο μεγάλη;
Θ:Η κόκκινη,είναι πιο κοντά στον x'x.Όχι οχι είναι μικρότερη.
K:Ωραία πάμε να βρούμε και τις τιμές του πίνακα.
Θ:Με πράξεις ή στο λογισμικό.(τις υπολογίζουν).Παμε στο επόμενο.Για το 0,1 το πρωτο δηλαδή το κόκκινο είναι μεγαλύτερο....Ωπα...το 9,1 είναι το πρωτο;Οχι μεγαλύτερο είναι το μπλε(επηρεάζεται πάλι απο τη ζυγαριά ενω η άσκηση λέει να χρησιμοποιηθεί το γράφημα)
B:Να κάνω και ζουμ...Για το x=0,1,αφού είναι πιο κοντά το μπλε στον x'x,άρα είναι το ανάποδο.Άρα το κόκκινο είναι το μεγαλύτερο(κατάλαβε ότι η μικρότερη απόσταση από τον x'x δηλώνει την μικρότερη Π)
Θ:Γιατί;
B:Γιατί το κόκκινο είναι πιο ψηλά από τον x'x απ το μπλε.
Θ:Όποιο είναι πιο ψηλά είναι και το πιο μεγάλο;
B:Ναι αφού το y είναι η περίμετρος.
K:Όποιο είναι πιο ψηλά παίρνει μεγαλύτερη τιμή στον άξονα y'y άρα έχει μεγαλύτερη περίμετρο.
Θ:Αααα,οπότε στο $2^ο$ το 0,4 είναι μεγαλύτερο.
B:Το 0,5 είναι ίσα
Θ:Και στα επόμενα είναι μικρότερο

H. <u>Τον τρόπο επίλυσης μίας ανίσωσης</u>.

Ολοκληρώνοντας το ερευνητικό φυλλάδιο,παρατηρήθηκε ότι όταν ζητείται η επίλυση της ανίσωσης 9x+1,5>12x οι περισσότεροι μαθητές την έλυσαν αλγεβρικά ανάγωντας την επίλυσή της σε επίλυση εξίσωσης, καταλήγοντας σε λανθασμένο αποτέλεσμα καθώς δεν εφάρμωσαν την ιδιότητα της διάταξης:

$$\alpha\cdot x<\beta \rightarrow x<\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha>0$$

$$\alpha\cdot x<\beta \rightarrow x>\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha<0$$

Όμως ένας μαθητής διαφοροποιήθηκε καθώς χρησιμοποίησε τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση του προηγούμενου ερωτήματος.Έτσι έγινε εμφανής η μη καθολικότητα του μοντέλου ''είναι αποδεκτό να κάνω τον ίδιο μετασχηματισμό και στα δύο μέλη'' (R) και εν συνεχεία συζητήθηκαν οι λόγοι που αυτό δεν ισχύει(B).Η προηγούμενη άσκηση με την έρευνα για την ισχύ της ιδιότητας της διάταξης,ήταν αρωγός για να αντιληφθούν την διαφοροποίηση ανάμεσα στις ιδιότητες των εξισώσεων και ανισώσεων.(C)Ενδεικτικά κάποιες απαντήσεις φαίνονται παρακάτω:

K:Ωραία μπορείτε να εκφράσετε συμβολικά και τις λύσεις της;
Θ:Δεν μπορώ,είναι άπειρες.
K:Δηλαδή είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί;
Θ:Όχι όλοι.Αυτοί που είναι μεγαλύτεροι...από το 0,5.
B:Ισχύει για οποιαδήποτε τιμή μικρότερη....του 0,5.Από το πινακάκι.
Θ:Μα γιατί να αλλάξουμε το σύμβολο;(>)Το συμβολο δεν το αλλάζουμε μόνο...όταν διαιρούμε με αρνητικό αριθμό;
K:Τωρα ποιος έχει δικιο;Που το στηρίζεις εσύ Βαγγέλη;
B:Από το πινακάκι βλέπω ότι αυτο εδω το 9x+1,5>12x ισχύει για τις τιμές του x που είναι μικρότερες από 0,5
Θ:Κατι δε μου βγήκε καλά.....εγώ το έλυσα -3x>-1,5->x>0,5.Οχ αλλάζει η φορα της ανίσωσης.
K:Γιατί αλλάζει;
Θ:Ε το χουμε μαθει στους κανονες της ανισωσης.
B:Αλλάζει;(νέα γνώση ασυσχέτιστη με τα προηγούμενα που έχουν υποθεί)
K:Ναι αυτό έχει να κανει με το προγούμενο ερώτημα που απαντήσατε.Αν ο αντιθετος του διπλασίου ενός αριθμού μεγαλύερου του 3 είναι μεγαλύτερος του6.Σε αυτή την ερώτηση παρατηρήσατε ότι η απόλυτη τιμή του διπλάσιου αριθμού είναι μεγαλύτερη αλλα΄στους αρνητικούς αριθμούς,η μεγαλύτερη απόσταση από το 0 δηλώνει μικρότερο αριθμό.Άρα η φορά αλλάζει και ο αριθμός μικραίνει.(επιδιώκεται η σύνδεση)
Θ:Α,ναι είχα στο μυαλό μου ό,τι κάνουμε στην εξίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την παρούσα έρευνα επιβεβαιώνονται δυσκολίες που ελοχεύουν για τους μαθητές στην έννοια της ανίσωσης,όπως έχουν διατυπωθεί αναλυτικά και στο άρθρο των Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote. Πιο συγκεκριμένα,οι μαθητές ήρθαν αντιμέτωποι με δυσκολίες που αφορούσαν:

1. Η πολυπλοκότητα των αλγεβρικών αντικειμένων ως προς τη σημασιολογία τους και το συντακτικό τους ρόλο
2. Λογικές διαδικασίες μετασχηματισμού ,προερχόμενες απ τη φύση της άλγεβρας.Ειδικότερα όταν εμπεριέχεται το σύμβολο '-'.
3. Δυσκολίες στην κατανόηση των λύσεων ως διάστημα λύσεων και όχι ως μεμονομένη τιμή
4. Δυσκολίες στη χρήση του κατάλληλου συμβόλου <,>,≤,≥ για την περιγραφή και αναπαράσταση των λύσεων ,στην ανάγνωση εκφράσεων από τη δεξιά ή την αριστερή πλευρά(x>1↔1<x) και στην κατανόηση των διπλοανισώσεων
5. Δυσκολία αντίληψης των διαφορών ανισώσεων και εξισώσεων

Αναλυτικότερα,στις δύο πρώτες ασκήσεις αναδείχθηκαν τα σημεία 1,4 της προηγούμενης παραγράφου. Οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία όχι τόσο στη χρήση του συμβόλου '=' ή στη διαφορά της σημασίας των συμβόλων '≤','≥' , όσο στη διαφοροποίηση και κατάλληλη χρήση του '>','<' .Παρότι έχουν συναντήσει τα προαναφερθέντα σύμβολα ανισότητας αρκετές φορές από τα χρόνια του Δημοτικού, φαίνεται ότι η επιλογή του κατάλληλου συμβόλου ανά περίπτωση προκάλεσε δυσκολίες στους μαθητές κατά τη συμβολική αναπαράσταση μιας λεκτικής έκφρασης ή το αντίστροφο.

Επιπλέον,η έρευνα επιβεβαίωσε την υπάρχουσα βιβλιογραφία κατά την οποία η επιλογή του κατάλληλου συμβόλου παρατηρείται πιο δύσκολη στην περίπτωση συμβολικής ή λεκτικής περιγραφής διπλοανισώσεων.Στην παρούσα έρευνα η τοποθέτηση του κατάλληλου αριθμού δεξιά ή αριστερά από την μεταβλητή προκάλεσε δυσκολίες στους μαθητές οι οποίες είναι λογικό επακόλουθο των προαναφερθέντων δυσκολιών.

Επίσης,η ερευνητική διαδικασία επιβεβαίωσε το άρθρο του Louis Radford κατά το οποίο η πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης δημιουργεί αρκετές φορές παρερμηνείες και αποξένωση από τη σημασιολογία στους μαθητές.Χαρακτηριστικό της αποξένωσης της σημασιολογίας από την αλγεβρική έκφραση αποτέλεσε η συγγραφή του όρου $\frac{1}{4}\cdot x$ ως $\frac{1}{4x}$,η οποία φανερώνει την έλλειψη νοηματοδότησης της σημασίας της αλγεβρικής έκφρασης.

Είναι ακόμη αξιοσημείωτη, η ανάδειξη του 2^{ου} σημείου της προηγούμενης παραγράφου καθώς και η εκτίμηση των Knuth,Stephens,McNeil,Alibali ότι το σύμβολο ''='' έχει λειτουργική σημασία για τους μαθητές και όχι σημασιολογική.Αναλυτικότερα,η έρευνα για την ισχύ της ιδιότητας της διάταξης :

$$\alpha\cdot x<\beta \rightarrow x<\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha>0$$

$$\alpha\cdot x<\beta \rightarrow x>\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha<0$$

οδήγησε τους μαθητές σε παρερμηνείες λόγω της ύπαρξης του συμβόλου '-',που στη συνέχεια ξεπεράστηκαν.Αρχικά,οι μαθητές αντιμετώπισαν την περίπτωση x>3 -> -2x<-6 ,όπως την περίπτωση x=3->2x=6.Δηλαδή δεν έδωσαν σημασία στην διαφοροποίηση του συμβόλου,αντιθέτως υιοθέτησαν τη συχνή άποψη ότι οποιαδήποτε μεταβολή και στα δύο μέλη είναι αποδεκτή και σωστή. Εν συνεχεία,η συζήτηση μεταξύ τους ήταν αρωγός στην ανατροφοδότηση αυτής της σκέψης με αποτέλεσμα να αναχτούν στην σημασιολογική αξία του συμβόλου και κατ'επέκταση να καταλήξουν στην σωστή απάντηση.Έτσι ,γίνεται ξεκάθαρη η σημασία της σύμπραξης και της συνεργασίας των μαθητών,που αποτέλεσε τον βασικό λόγο για την επιλογή δύο ατόμων στις σχηματιζόμενες ομάδες.Παρότι αναμενόταν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο της ζυγαριάς για την έρευνα των ιδιοτήτων της διάταξης, για την αιτιολόγηση των ισχυρισμών τους χρησιμοποίησαν τις προυπάρχουσες γνώσεις τους στις συναρτήσεις (Β' Γυμνασίου) ή στις απειροστικές διαδικασίες (Γ' Γυμνασίου). Οι αιτιολογήσεις αυτές είχαν ως κοινή αφετηρία το μοντέλο της αριθμογραμμής, όπου στο ημιεπίπεδο των αρνητικών αριθμών οι ιδιότητες της διάταξης μεταβάλλονται.

Στην 4^η άσκηση έγινε εμφανές το 3^ο και 5^ο σημείο του άρθρου, που υποστηρίζει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τόσο την συντακτική διαφορά των εξισώσεων-ανισώσεων όσο και τη διαφορά στις λύσεις τους.Οι διαφορές στην εξίσωση-ανίσωση που εντόπισαν οι μαθητές αφορούσαν την τιμή της λύσης και όχι το πλήθος τους.Δηλαδή αναγνώρισαν μία λύση και στις δύο περιπτώσεις, γεγονός που πιθανότατα οφείλεται στην μη σημασιολογική αντιμετώπιση του συμβόλου.Όπως είναι κατανοητό η προαναφερθείσα δυσκολία δεν δημιουργεί γνωστικά εμπόδια μόνο όταν εμφανίζονται αυτούσια τα ανισωτικά σύμβολα αλλά φέρει παρανοήσεις και όταν συνδυάζονται με άλλες πιο σύνθετες έννοιες.

Ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο που ανέδειξε η παρούσα έρευνα είναι η αυτοματοποιημένη χρήση της ζυγαριάς από τους μαθητές στην περίπτωση των ανισώσεων.Οι μαθητές,έχοντας διδαχτεί τη χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς στην περίπτωση των εξισώσεων,χρησιμοποίησαν διαισθητικά το μοντέλο κατά την επίλυση της ανίσωσης.Το στοιχείο αυτό επιβεβαιώνει τους Tsamir and Bazzini που θεωρούν το μοντέλο της ζυγαριάς ως ένα διαισθητικό αλγοριθμικό μοντέλο,που η καθολική ισχύς του είναι αυταπόδεικτη για τους μαθητές.

Στο 2^ο μέρος της έρευνας αναδείχθηκε η σημασία των ψηφιακών εργαλείων τόσο στην αντιμετώπιση δυσκολιών λόγω ελλειπής νοηματοδότησης εννοιών(Algebra Arrows) όσο και στην διαμόρφωση και έρευνα ισχυρισμών για την εξαγωγή συμπερασμάτων(Pan Balance).Επιπλέον έγινε εμφανής ο πιθανόν απαραίτητος ρόλος της ψηφιακής τεχνολογίας μέσω του applet Pan-Balance για τη σύνδεση της αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης της ανίσωσης.

Πιο συγκεκριμένα,στο α ερώτημα οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τις συναρτήσεις των x κολώνων με το y εμβαδόν.Αν και έχει παρατηρηθεί δυσκολία των μαθητών στην σύνταξη αλγεβρικών εκφράσεων-συναρτήσεων και την νοηματοδότησή τους τόσο από εμπειρικές μελέτες όσο και την υπάρουσα βιβλιογραφία(J.Blanco,Garrote),η μία από τις δύο ομάδες δεν αντιμετώπισε δυσκολίες σε αυτό.Πιθανή ερμηνεία είναι η ευελιξία και οι καλές βάσεις των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών.Αντιθέτως,η νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης δεν ήταν κεκτημένη στην 2^η ομάδα όπου αυτή η δυσκολία έγινε εμφανής.Ως εκ τούτο,το λογισμικό arrows algebra λειτούργησε συμπληρωματικά στην 1^η ομάδα ενώ στην 2^η είχε προταρχικό ρόλο.Το προαναφερθέν λογισμικό σύμφωνα με τους Drijvers,Doorman,Boon,Reed,Gravemeijer,προσφέρει τη δυνατότητα οι μαθητές να οπτικοποιούν με βέλη τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που καταστρώνουν με το νου κατά τη σύνταξη μιας αριθμητικής έκφρασης και στη συνέχεια αντικαθιστώντας την ανεξάρτητη μεταβλητή x με διαφορες τιμές καθίσταται αντιληπτή η έννοια της μεταβλητής και ο ρόλος της σε μία γενικευμένη αλγεβρική έκφραση.Κατά συνέπεια η επιλογή του λογισμικού έγινε με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση των αλγεβρικών μορφών που δομούν τις συναρτησεις,κάτι που κρίθηκε απαραίτητο στην 2η ομάδα για τη συνέχεια της δραστηριότητας.Η 1η ομάδα κατασκεύασε χωρίς τη χρήση του λογισμικού τις συναρτήσεις,όμως,η δυνατότητα εναλλαγής της x εισόδου απέδωσε βαθύτερο νόημα στη συμμεταβολή των x,y και την διαφορά της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.

Το β ερώτημα,αποτέλεσε ένα μεταβατικό στάδιο μεταξύ του α και γ ερωτημάτων καθώς ζητείται από τους μαθητές να εξισώσουν τις δύο συναρτήσεις.Αν και η σύνδεση της τομής συναρτήσεων με τις εξισώσεις δεν προβλέπεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, οι μαθητές και των δύο ομάδων αντιλήφθηκαν την ανάγκη κατασκευής εξίσωσης.Το λογισμικό algebra arrows λειτούργησε για ακόμη μία φορά ως αποδεικτικό μέσο,καθώς βρίσκοντας η 1η ομάδα την ζητούμενη x τιμή μέσα από τη λύση της εξίσωσης,την χρησιμοποίησε ως τιμή εισόδου στις δύο συναρτήσεις και επιβεβαίωσε ότι η έξοδος που προκύπτει είναι ίδιος αριθμός.

Στο γ ερώτημα,οι μαθητές χρησιμοποιούν το λογισμικό Pan Balance προκειμένου να αποδώσουν σημασιολογικό νόημα στην εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος,εμπλουτίζοντάς την με τη σύγκριση των δύο μεγεθών μέσω του μοντέλου της ζυγαριάς.Πράγματι αποδώθηκε περαιτέρω νόημα στην εξίσωση,καθώς οι μαθητές ανοίγοντας το λογιμικό μετέβαλλαν την τιμή του x δρομέα καθηλώνοντάς τον στην οριακή τιμή επίλυσης της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος. Έτσι, ξεπεράστηκε η αντίληψη ότι η εξίσωση και κατ επέκταση η ανίσωση είναι ένα στατικό αντικείμενο,καθώς τα άνισα σκέλη της ζυγαριάς ανισορροπούσαν δυναμικά για τις διάφορες τιμές του x μέχρι τη στιγμή ισορροπίας.Ξεπερνώντας αυτή την παρανόηση,βρίσκει γόνιμο έδαφος να αναπτυχθεί η ανάγκη χρήσης της ανίσωσης στο δ ερώτημα,ώστε πέρα της οριακής κατάστασης όπου οι περίμετροι είναι ίσοι,να βρεθεί και σε ποιες περιπτώσεις η πρώτη είναι μεγελύτερα από την άλλη.Συνεπώς,σε αυτό το ερώτημα αξιοποιήθηκε το λογισμικό για την διερεύνηση της κατανόησης της ένοιας εξίσωσης δύο μεγεθών ως ισότητα μεγεθών και ως προς τη σύνδεσή της με την γραφική παράσταση.Αυτό επιτυγχάνεται κατά τη μεταβολή του δρομέα x είτε με την σύγκριση των βαρών της ζυγαριάς είτε με τη χρήση των σημείων της γραφικής παράστασης είτε με την οριζόντια μαθηματικοποίηση των αναπαραστάσεων.

Στο δ και ε ερώτημα, οι μαθητές άγονται της ταυτόχρονης συμμεταβολης των σκελών της ζυγαριάς και των γραφικών παραστάσεων κατά την μεταβολή του x δρομέα ,που επιτρέπει το πρόγραμμα,με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ευκαιρίες διατύπωσης και αναδιαμόρφωσης ισχυρισμών για την σύνδεση των αναπαραστάσεων.Αυτή η ζητούμενη σύνδεση παρατηρήθηκε στην 1η ομάδα,καθώς ο μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό ότι καθώς αλλάζει ο δρομέας αλλάζει και η ζυγαριά το χρώμα της άρα κάποια αλλαγή παρουσιάζεται στο σύστημα ζυγός-σκέλη-δρομέας.Επιπλέον διαπιστώθηκε ότι το ύψος του κάθε σκέλους στη ζυγαριά σχετίζεται με την απόσταση του σημείου με τετμημένη την τιμή του x-δρομέα από τον x'x.Παρά το ότι η σχέση αυτή διατυπώθηκε αρχικά σωστά από έναν μαθητή ως:

''Το πιο υψηλό στη ζυγαριά είναι πιο κοντά στον x'x''

,υπήρξε δυσκολία παρατήρησης από το άλλο μέλος της ομάδας καθώς και δυσκολίες που σχετίζονται με τη φύση των συμβόλων που βγήκαν στην επιφάνεια όταν κλήθηκαν οι μαθητές να συμπληρώσουν τον ζητούμενο πίνακα.Πιο συγκεκριμένα,οι μαθητές ύστερα από συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων αντιλήφθηκαν ότι το πιο βαρύ στην ζυγαριά είναι το χαμηλότερο άρα έχει την μεγαλύτερη απόσταση από τον x'x.Ωστόσο αποδείχτηκε δύσκολη η έκφραση του σύμπεράσματος με σύμβολα, γεγονός που επαναφέρει την δυσκολία απόδοσης σημασιολογικής σημασίας στα σύμβολα της αλγεβρας όπως υποστήριξε ο Radford αλλά και συγκεκριμένα τα σύμβολα της ανίσωσης όπως υποστήριξε οι Blanco & Garrotte. Βοηθητικό στοιχείο στην κατανόηση και ξεπέρασμα αυτών των παρανήσεων αποτελεί η δομή του applet,όπου επιτρέπει τον υπολογισμό των βαρών της ζυγαριάς με αποτέλεσμα να είναι ελέγχεται ευκολότερα η σωστή συμπλήρωση του συμβόλου.

Επιπλέον,ο πίνακας που καλούνται να συμπληρώσουν οι μαθητές συμβάλλει στην ανακάλυψη της γεωμετρικής σημασίας των άνισων μεγεθών και στην εισαγωγή τους στον τυπικό τρόπο σύνταξης μιας ανίσωσης.Αξιοπρόσεκτο είναι ότι κατά την συμπλήρωση του ε ερωτήματος,που ωθεί τους μαθητές να αξιοποιήσουν τις γραφικές παραστάσεις για τη συμπλήρωση του πίνακα,οι μαθητές επιλέγουν το μοντέλο της ζυγαριάς και εμπίπτουν σε παρανοήσεις.Η πιθανή αιτία προκύπτει από την παράλληλη αναπαράσταση της ζυγαριάς και του γραφήματος.Πιο συγκεκριμένα,οι μαθητές της 1ης ομάδας θεωρούν ότι το μεγαλύτερο μέγεθος είναι αυτό που βρίσκεται υψηλότερα σε σχέση με το άλλο από τον x'x και κατ'επέκταση θα βρίσκεται υψηλότερα και στα σκέλη της ζυγαριάς..Δηλαδή παρατηρείται ίδια αντιμετώπιση των μοντέλων,που ενδεχομένως οφείλεται στην αναγωγή του μοντέλου της ζυγαριάς στο μοντέλο του θερμομέτρου,όπου η παραπάνω ανάλυση είναι σωστή και αποτελεί ένα πιο σύνηθες και ρεαλιστικό μοντέλο της καθημερινότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επικοδομητική διαφωνία και συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές απέδωσε καρπούς και η παρανόηση ξεπεράστηκε.Κατά συνέπεια το μοντέλο της ζυγαριάς φαίνεται να αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση της έννοιας της ανίσωσης αλλά όχι τόσο εύχρηστο για την εξαγωγή συμπερασμάτων όσο η γραφική παράσταση.

Τέλος στο στ ερώτημα,οι δύο ομάδες απέδωσαν με ευκολία τον όρο ''ανίσωση'' στη γενικευμένη αλγεβρική έκφραση που τους είχε δωθεί,σημείο που φανερώνει το άλμα από την σημασιολογία στην σύνταξη.Σε αυτό το γνωστικό άλμα,το νόημα εμποτίζεται με σύμβολα και κατά τον Louis Radford είναι μία απαραίτητη διαδικασία για την κατασκευή μιας νέας έννοιας σε μία κονστρουβιστική βάση και τη νοηματοδότησή της.Επίσης αναδεικνύεται η συνάφεια που αναγνωρίζουν οι μαθητές ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες και τις ονομασίες τους.

Επιπροσθέτως,το ερώτημα για την συμβολική έκφραση των λύσεων της ανίσωσης αποδείκτηκε ιδιαίτερου ενδιαφέροντος.Ο λόγος για τους μαθητές της 1ης ομάδας, όπου ο Β έλυσε σωστά την ανίσωση χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των προηγούμενων ερωτημάτων(πίνακες τιμών,γραφήματα) ενώ ο μαθητής Θ έλυσε την ανίσωση με αλγεβρικούς ματασχηματισμούς όπως στην περίπτωση των εξισώσεων.Έτσι επιβεβαιώνεται η υπάρχουσα βιβλιογραφία των Tsamir,Bazzini κατά την οποία παρατηρείται όμοια αντιμετώπιση των μαθητών στις ανισώσεις με τις εξισώσεις κατά την επίλυσή τους, καθώς εφαρμόζουν το balance model σε κάθε ανίσωση θεωρώντας κάθε μετασχηματισμό αποδεκτό αρκεί να γίνεται και στα δύο μέλη.Ωστόσο,ήταν αναπόφευκτο να συγκριθούν οι λύσεις των μαθητών και να δημιουργηθεί ενδιαφέρον για την σωστή λύση.Η επιχειρηματολογία του 1ου βασιζόμενη στην υπάρχουσα αναπαράσταση της ζυγαριάς,του πίνακα και του γραφήματος αποτέλεσε ισχυρότερο πιστήριο έναντι των ιδιοτήτων της ισότητας που επικαλέσθηκε ο 2ος μαθητής δίχως να λάβει υπόψην του την υπάρχουσα ανισώτητα.

Επίσης,το ενδιαφέρον εστιάζεται στις απαντήσεις των μαθητών για το πλήθος λύσεων.Θεωρούν ότι μπορούν να εκφράσουν συμβολικά μόνο την μοναδική λύση και όχι ένα σύνολο απείρων λύσεων,κάτι που ενισχύει την άποψη των Blanco και Garrote, ότι η φύση της άλγεβρας προκαλεί πολυπλοκότητα και κατά συνέπεια δυσκολεύει τους μαθητές καθώς έρχονται αντιμέτωποι με το χειρισμό συμβόλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7-ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Μία πιθανή επέκταση της παρούσας εργασίας σε διδακτορικό ή γενικότερα ερευνητικό επίπεδο μπορεί να αποτελέσει η συνέχιση του παρόντος φύλλου εργασίας, με τα ερευνητικά ερωτήματα και τις δραστηριότητες που το δομούν εφαρμορμένο σε μεγαλύτερο εύρος μαθητών.Με αυτό τον τρόπο τα αποτελέσματα θα αποκτήσουν μεγαλύτερη ακρίβεια και θα αναδειχτούν περισσότερα θέματα διδακτικής προς έρευνα και εποικοδομητική συζήτηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.Luciana Bazzini & Pessia Tsamir.Algebraic equations and inequalities:issues for research and teaching.PME28.2004;Vol 1:137-166

2.Eric J.Knuth and Ana C.Stephens,Nicole M.McNeil,Martha W.Alibali.Does Understanding the Equal Sign Matter?Evidence from Solving Equations.Journal for Research in Mathematics Education.2006;Vol 37(No 4):297-312

3.Lorenzo J.Blanco,Manuel Garrote.Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education of Spain.Eurasia Journal of Mathematics,Science and Technology Education.August 2007;3(3):221-229

4.Joelle Vlassis.The balance model:Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown.Educational Studies in Mathematics.2002;49:341-359

5.Paul Drijvers,Michiel Doorman,Peter Boon,Helen Reed,Koeno Gravemeijer. The teacher and the tool:instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom.Educ Stud Math.2010;75:213-234

6.Pessia Tsamir,Luciana Bazzini.Student' algorithmic, formal and intuitive knowledge the case of inequalities.

7. Wisconsin Department of Public Instruction.(2009). Wisconsin 's model academic standards for mathematics retrieved from http://www.dpi.state.wi.us/standards/matintro.html

8. National Council of Teachers of Mathematics. (2010). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.

9.Postelnicu, V. & Coatu, S. (1980). Mica Enciclopedie Matematica (Small Mathematical Encyclopedia), Editura Technica Bucuresti, Romania

10. Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1, 118–134.

11. Steele, J. M. (2004). The Cauchy-Schwarz master class: An introduction to the art of mathematical inequalities. Cambridge University Press and the Mathematical Association of Ameri Bazzini, L., & Tsamir, P.

12.Bazzini, L., & Tsamir, P. (2002b). Students' algorithmic, formal and intuitive knowledge: The case of inequalities. Retrieved from http://www.math.uoc. gr/~ictm2/Proceedings/pap511.pdf (20/09/08) ca. Cambridge UK and Washington DC.

13.Powell, A. B., Francisco J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. Journal of Mathematical Behavior, 22, 405-435. 26

14. Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(6), 793-812.

15. NCTM. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, Virginia.

16.NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Virginia.

17.Banks, J., Potts, J.(2010). Towards a cultural science of videogames: evolutionary social learning. Journal of Cultural Science Vol 3, No 1: What is Cultural Behaviour?

18.Gros, B. (2007). Digital games in education: The design of games–based learning environments. Journal of Research on Technology in Education, 40, 1–23

19.Jorgensen, R., και Lowrie, T. (2012). Digital games for learning mathematics: Possibilities and limitations. In J. Dindyal, L. P. Cheng, και S. F. Ng (Eds.), Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 378–384). Singapore: MERGA

20.Papert, S. (1993). The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer. New York :BasicBooks.