ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Διαισθητική ανάπτυξη μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης μέσω της μοντελοποίησης ανοικτού προβλήματος κινηματικής: Μια εφαρμογή σε μαθητές Β΄ Λυκείου.

Κωνσταντίνου Γιάννης
Δ201606

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου   Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την **26η Σεπτέμβρη 2019** από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪	Χ. Τριανταφύλλου (επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪	Γ. Ψυχάρης	Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Θ. Ζαχαριάδης	Καθηγητής, ΕΚΠΑ
▪	Χ. Τριανταφύλλου (επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪	Γ. Ψυχάρης	Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Την κα. Χρυσαυγή Τριανταφύλλου για την τιμή που μου έκανε να είναι η επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, όπως και για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί της. Οι εποικοδομητικές συμβουλές της, η πολύτιμη καθοδήγησή της και οι λεπτομερείς υποδείξεις της όπως και η υπομονή της ήταν άκρως σημαντικά στοιχεία για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τον καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για την συνεισφορά του στον σχεδιασμό, στην υλοποίηση και στην κριτική ανάγνωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τον καθηγητή κ. Γεώργιο Ψυχάρη για την τιμή που μου έκανε να βρίσκεται στην συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας και ιδιαιτέρως για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του.

Την καθηγήτρια κα. Δέσποινα Πόταρη για την τιμή που μου έκανε να βρίσκεται στην εξεταστική επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά κυρίως για την έμπνευση που μου παρείχε κατά την διάρκεια των μαθημάτων της όπως και για τις πολύτιμες συμβουλές στην διάρκεια όλου του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Ευχαριστώ επίσης:

Όλους τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών για τις συμβουλές τους, την καθοδήγησή τους και την πρόθυμη βοήθειά και συνεργασία που μου προσέφεραν.

Την Διονυσία Μπακογιάννη και την Ελένη Κλη που μας εξυπηρετούσαν και μας διευκόλυναν μέσω της άψογης δουλειάς τους στη γραμματεία του τμήματος.

Τον συμφοιτητή μου Γιώργο Μαυρομάτη για την πολύτιμη βοήθεια κατά την διάρκεια της φοίτησής μας αλλά και για τις ατελείωτες συζητήσεις μας.

Την συμφοιτήτριά μου Μηλίτσα Ζήση για την συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά την διάρκεια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος.

Τους καθηγητές Φυσικής Γιώργο Γεωργιάδη, Αργύρη Νεόφυτο και Αργύρη Στασινάκη για τις πολύτιμες παρατηρήσεις και συμβουλές τους.

Την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξη που μου παρείχαν.

Την Σταυρούλα Κανιμά για την υποστήριξη και την υπομονή της κατά την διάρκεια της φοίτησής μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα. Αλλά και για τις πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις και συμβουλές της ιδιαιτέρως όμως για την φιλολογική επιμέλεια του κειμένου της διπλωματικής μου εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθούν οι δράσεις μοντελοποίησης μιας ομάδας πέντε μαθητών Β' Λυκείου σε μια πειραματική διδασκαλία όταν τους δόθηκε να λύσουν ένα ανοιχτό πρόβλημα. Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου λαμβάνοντας υπόψη τους δεδομένα από την παρακολούθηση της κίνησης ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1. Στο βίντεο καταγραφόταν η στιγμιαία ταχύτητα (σε χλμ/ώρα) ανά χρονική στιγμή κίνησης καθώς και η ένδειξη επιτάχυνσης (γκάζι) ή επιβράδυνσης (φρένο). Στην προσπάθεια να λύσουν το πρόβλημα οι μαθητές ανέπτυξαν διαισθητικά την διαδικασία μοντελοποίησης με αριθμητική ολοκλήρωση. Στην παρούσα εργασία μελετάμε, τις διαδικασίες που χρησιμοποίησαν αλλά και ανέπτυξαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν το πρόβλημα, την εξέλιξή τους καθώς και τους παράγοντες που επηρέασαν αυτήν την εξέλιξη. Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν η ηχογράφηση και η μαγνητοσκόπηση μιας διδασκαλίας δύο διδακτικών ωρών. Η ανάλυση των δεδομένων ήταν ποιοτική και βασίστηκε στον κύκλο μοντελοποίησης και το πρόγραμμα Atlas.ti.. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν τέσσερις διαδικασίες μοντελοποίησης που είτε απορρίφθηκαν είτε εξελίχθηκαν στη συνέχεια από τους συμμετέχοντες. Οι διαδικασίες αυτές ήταν (1η) η θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή στο σύνολό της και η χρήση των αντίστοιχων τύπων της Φυσικής (απορρίφθηκε), (2η) η θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή ανά διαστήματα επιταχυνόμενης και επιβραδυνόμενης κίνησης (απορρίφθηκε), (3η) Σύνδεση της μέσης ταχύτητας με την μέση τιμή των ταχυτήτων για διάφορες διαμερίσεις του χρόνου (εφαρμόστηκε αλλά στη συνέχεια απορρίφθηκε) και (4η) Εύρεση της αριθμητικής τιμής του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου. Στην ανάπτυξη της 4ης διαδικασίας μοντελοποίησης αναγνωρίσαμε πέντε στάδια: τη σημασία εύρεσης του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου, τη σχεδίαση διαφορετικών ειδών γραφημάτων, τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού, την αναζήτηση της καλύτερης προσέγγισης και τον υπολογισμός της αριθμητικής τιμής του εμβαδού με χρήση ψηφιακού εργαλείου. Οι μαθητές μέσα από την παραπάνω διαδικασία "επαν-εφηύραν" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000) τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης την οποία και εφάρμοσαν για την τελική επίλυση του προβλήματος. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι οι παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη της γνώσης των μαθητών ήταν (α) η επικοινωνία, (β) το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος, (γ) η αναζήτηση ακρίβειας, (δ) οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και (ε) η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων.

Λέξεις Κλειδιά: κύκλος μοντελοποίησης, ανοικτό πρόβλημα, ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης

Abstract

The present study attempted to study the modeling processes of a group of five high school students (grade 11) in an experimental teaching when they were given an open-ended problem. The problem given to the students was to calculate the total length of a Formula 1 circuit taking into account the data from the tracking of a Formula 1 racing car. The video recorded the instantaneous speed (in Km/h) every moment and there was an indication for acceleration (throttle) or deceleration (brake). In an attempt to solve the problem, students intuitively developed the modelling process of numerical integration. In the present work, we study the processes used and developed by the students in their efforts to solve the problem, their evolution, and the factors that influenced this development. The research data were the audio and video recordings of a two-hour teaching session. The data analysis was qualitative and based on the modeling cycle and with the assistance of Atlas.ti program. The results of the study revealed four modeling processes that were either rejected or subsequently developed by the participants. These processes were (1st) visualization of motion as linear with smooth acceleration as a whole and use of the corresponding physics types (rejected), (2nd) visualization of motion as linear with smooth acceleration per intervals of accelerated and decelerated motion (rejected), (3rd) Connection of the mean speed to the mean of the speeds for different partitions of time (applied but then rejected) and (4th) Finding the numerical value of the area under the velocity – time graph. In the development of the 4th modeling process we recognized five stages: the importance of finding the area under the velocity-time graph, designing different types of graphs, how to calculate the area under graph, searching for the best approach, and calculating the numerical value of the area using a digital tool. Students in the above trajectory "reinvented" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000) the numerical integration method which they applied to the final solution of the problem. The results revealed that the evolution factors of the of students' knowledge were (a) communication, (b) the realistic context of the problem, (c) the search for accuracy, (d) teacher interventions, and (e) the use of representations and digital tools.

Keywords: modeling cycle, open-ended problems, realistic mathematics education, numerical integration methods

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Η μελέτη και κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης δυσκολεύει πολύ τους μαθητές για διαφόρους λόγους. Πολλές έρευνες (Tall & Vinner, 1981; Artigue, 1991; Mahir, 2009;) παρουσίασαν στοιχεία ότι σε έννοιες της Ανάλυσης όπως αυτές του Ορίου, της Παραγώγου και του Ολοκληρώματος οι μαθητές αναπτύσσουν την διαδικαστική κατανόηση ενώ υστερούν στην εννοιολογική κατανόηση. Για παράδειγμα, οι Grenier et al. (1990) και Bagni (1999) σημειώνουν ότι στην παραδοσιακή διδασκαλία οι μαθητές δεν κατανοούν απόλυτα την έννοια του ολοκληρώματος. Σε αυτή την κατεύθυνση, οι Gray και Tall (1994) προτείνουν την ανάπτυξη της προεννοιακής εικόνας μιας έννοιας ως καλύτερο τρόπο ανάπτυξης της εννοιολογικής κατανόησης. Η Artigue στους Nguyen και Rebello (2011) συμπεραίνει ότι οι περισσότεροι μαθητές τα καταφέρνουν σε διαδικασίες υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος με τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από ένα γράφημα αλλά σπάνια κατανοούν την αναγκαιότητα αλλά και τη σημασία αυτών των υπολογισμών.

Η κατανόηση της έννοιας του εμβαδού κάτω από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (area under graph) σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές από την έννοια της κλίσης (slope) μιας συνάρτησης (Ivanjek et al., 2016; Doorman, 2005). Η έννοια της κλίσης έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών ενώ οι έρευνες σχετικά με την έννοια του εμβαδού κάτω από το γράφημα συνάρτησης είναι σαφώς λιγότερες (Ivanjek et al., 2016). Οι δύο έννοιες είναι εξίσου σημαντικές στην μαθηματική εκπαίδευση και ειδικότερα στον τομέα της ανάλυσης (Calculus). Η κλίση είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου και το εμβαδό κάτω από το γράφημα συνάρτησης είναι η γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος. Στο πλαίσιο της Φυσικής, στην περίπτωση της συναρτησιακής σχέσης ταχύτητας – χρόνου, η αριθμητική τιμή του εμβαδού κάτω από το γράφημα της συνάρτησης αντιστοιχεί στην απόσταση που διανύει ένα κινητό στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Στο μαθηματικό πλαίσιο η ίδια αριθμητική τιμή ορίζεται ως το ορισμένο ολοκλήρωμα της συγκεκριμένης συνάρτησης για τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Η ανάγκη κατανόησης της έννοιας του ολοκληρώματος είναι ιδιαιτέρως σημαντική αφού χρησιμοποιείται σε πολλές έννοιες της Φυσικής όπως στην συνολική μετατόπιση σε συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου, στο υπολογισμό του έργου σε μια συνάρτηση δύναμης – μετατόπισης κλπ. Η έλλειψη που παρουσιάζουν οι μαθητές όχι στις διαδικασίες εύρεσης ενός ολοκληρώματος αλλά στην βαθιά κατανόηση της έννοιας, όπως για παράδειγμα η σύνδεση των γραφημάτων και του εμβαδού κάτω από την καμπύλη με το ολοκλήρωμα ή η αναγνώριση της φυσικής ποσότητας που προκύπτει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος δημιουργεί πολλά εμπόδια στους μαθητές όταν εφαρμόζουν αυτή την μαθηματική έννοια στο πλαίσιο της Φυσικής (Nguyen & Rebello, 2011).

Σύμφωνα με το ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, στο μάθημα της Φυσικής οι μαθητές διδάσκονται στην Α΄ Λυκείου ότι η συνολική μετατόπιση στη συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου υπολογίζεται από την αριθμητική τιμή του εμβαδού κάτω από το γράφημα της παραπάνω συναρτησιακής σχέσης. Στο μάθημα των Μαθηματικών οι μαθητές διδάσκονται το ορισμένο ολοκλήρωμα στη Γ΄ Λυκείου. Σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές δεν κατανοούν τη σύνδεση ανάμεσα στα δύο πλαίσια (Μαθηματικών και Φυσικής).

Ερευνητές όπως ο Doorman (2005) και οι Doorman και Gravemeijer (2009) θεωρούν ότι η μελέτη εννοιών της Ανάλυσης (Calculus) ευνοείται όταν γίνεται μέσω της κινηματικής (της μελέτης της κίνησης ενός σώματος). Άλλωστε η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης σε σχέση με τον χρόνο για την Φυσική και η έννοια της παραγώγου για τα Μαθηματικά. Συνηγορώντας με τα παραπάνω η Sealey (2006) επισημαίνει ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην θεωρητική κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος (π.χ. θεωρήματα ολοκληρωτικού λογισμού) αλλά και στην εφαρμογή και σύνδεσή της με το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε προβλήματα Φυσικής αλλά και σε ρεαλιστικά προβλήματα. Οι Chapell και Killpatrick (2009) παραθέτοντας στοιχεία από την έρευνα τους συμπεραίνουν ότι οι μαθητές με καλύτερη εννοιολογική κατανόηση είχαν καλύτερη απόδοση σε δραστηριότητες που αξιολογούσαν την εννοιολογική κατανόηση αλλά και την κατανόηση των διαδικασιών. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τους Thompson (1994), Kouropatov και Dreyfus (2013) και Thompson και Silverman (2008) δύο από τος βασικές ιδέες πίσω από την έννοια του Ολοκληρώματος είναι αυτές της συσσώρευσης (accumulation) και της προσέγγισης (approximation) και σ' αυτές θα πρέπει να εστιάσει η διδασκαλία του Ολοκληρώματος.

Ένα ανοιχτό πρόβλημα δίνει την ευκαιρία στον μαθητή να κάνει τις δικές του επιλογές προσέγγισης και επίλυσης του προβλήματος. Σύμφωνα με τον Sullivan (2003) είναι πιθανότερο οι μαθητές να κατασκευάσουν νέα γνώση αφού δημιουργείται ένα περιβάλλον μάθησης στο οποίο μπορούν να εμπλέκονται περισσότερο όταν διερευνούν τα ανοιχτά προβλήματα. Συνηγορώντας στα παραπάνω η Boaler (1998) πρότεινε να δίνονται ανοιχτά προβλήματα στους μαθητές αφού έτσι έχουν την ευκαιρία να διαλέξουν το δικό τους διαφορετικό μονοπάτι και να το διερευνήσουν.

Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν βασικές μαθηματικές έννοιες ακόμα και μετά την ολοκλήρωση του κύκλου της μάθησης, όπως αυτός προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο είναι δομημένο σε σπειροειδή μορφή. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1991) η παραδοσιακή διδασκαλία δεν δίνει την δυνατότητα στους μαθητές συμμετέχουν ενεργά στην μαθησιακή διαδικασία και επομένως την πρόσβαση σε καταστάσεις πλούσιες σε ευκαιρίες ανακάλυψης Μαθηματικών εννοιών, συνειδητής χρησιμοποίησής τους αλλά και διερεύνησης. Η εναλλακτική πρόταση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education - RME) όπου βασικότερος εκφραστής της είναι ο Freudenthal, βλέπει τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα όπου οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μαθηματικοποιήσουν ρεαλιστικές καταστάσεις.

Η ερευνητική εστίαση της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι στους τρόπους μοντελοποίησης που εφάρμοσαν πέντε μαθητές Β΄ Λυκείου σε ένα ανοιχτό πρόβλημα που αφορούσε την εύρεση του μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1 με τη βοήθεια ενός βίντεο που έδειχνε την ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή. Το πρόβλημα αυτό είχε ως πλαίσιο μια ρεαλιστική κατάσταση όπου οι έννοιες των Μαθηματικών και της Φυσικής (στην ενότητα της κινηματικής) εμπλέκονται δυναμικά. Δεδομένου ότι οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί έννοιες της ανάλυσης (όριο, παράγωγος, ολοκλήρωμα) τους δόθηκε η ευκαιρία να επανεφεύρουν την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης, τους δόθηκαν ευκαιρίες για να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα σε Μαθηματικές έννοιες και έννοιες της Φυσικής και δεδομένου ότι το πρόβλημα επιδεχόταν διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης υποστήριξε την ενεργή συμμετοχή των πέντε μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία.

Συμπερασματικά, η παρούσα ερευνητική εργασία συνδυάζει την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME) τα ανοιχτά προβλήματα (open problems) και την μάθηση εννοιών ανάλυσης (Calculus) μέσω της μελέτης της κίνησης ενός σώματος. Στόχος της μελέτης είναι να διερευνηθούν οι τρόποι που οι μαθητές θα μοντελοποιήσουν το πρόβλημα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Η εργασία εστιάζει στις προσπάθειες μοντελοποίησης των μαθητών, πως αυτές εξελίσσονται κατά την διάρκεια επίλυσης τους προβλήματος αλλά και ποιοι παράγοντες επηρέασαν την εξέλιξή τους.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας και το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίστηκε η μελέτη. Το θεωρητικό πλαίσιο αναλύεται σε πέντε υπό-ενότητες: τα ανοιχτά προβλήματα, την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, την κοινωνικό πολιτισμικό πλαίσιο, τα Μαθηματικά και την Φυσική και την μοντελοποίηση.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το ερευνητικό θέμα και διατυπώνονται τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην έρευνα, το πρόβλημα το οποίο τέθηκε στους μαθητές αλλά και ο τρόπος που συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν τα ερευνητικά δεδομένα.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση. Τα αποτελέσματα χωρίζονται σε δύο ενότητες, η πρώτη αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και την μοντελοποίηση του προβλήματος από τους μαθητές ενώ η δεύτερη αφορά την εξέλιξη της διαδικασίας μοντελοποίησης με τη διαμέριση.

Στο Κεφάλαιο 6 που ακολουθεί είναι το τελευταίο μέρος της έρευνας όπου εξάγονται τα συμπεράσματα με βάση τα αποτελέσματα και το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας.

Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με την βιβλιογραφία.

2. Θεωρητικό Πλαίσιο και Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας

2.1 Ανοιχτά Προβλήματα

2.1.1 Τι είναι Πρόβλημα;

Ας περιγράψουμε όμως καταρχάς ποιες μαθηματικές δραστηριότητες θεωρούνται προβλήματα. Πρόβλημα θεωρείται μια κατάσταση η οποία δεν αντιμετωπίζεται με απλή εφαρμογή τύπου ή αλγοριθμικών διαδικασιών αλλά υπάρχει διέξοδος για λύση. Είναι μια πολύπλοκη κατάσταση για την επίλυση της οποίας απαιτούνται: συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών εννοιών που γνωρίζουν οι μαθητές και αναγνώριση κανονικοτήτων, χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων αυτών των εννοιών, ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών προσέγγισης του προβλήματος, αναστοχασμό πάνω στην δράση και τη σκέψη του, γενίκευση της εμπειρίας του. Τα παραπάνω είναι τα βασικά συστατικά διερεύνησης για την επίλυση ενός προβλήματος. Όμως, εάν οι μαθητές αναγνωρίσουν και εφαρμόσουν άμεσα μια λύση τότε δεν είναι πρόβλημα αλλά άσκηση. Επίσης, το αν μια δραστηριότητα είναι πρόβλημα εξαρτάται από τους μαθητές αλλά και από την χρονική στιγμή που τους τίθεται το πρόβλημα. Όπως ακριβώς αναφέρει και ο Schoenfeld (1983, σελ. 41) «*Πρόβλημα είναι μόνο αν, στο πρόβλημα (όπως λένε οι μαθηματικοί) δεν ξέρεις πως να κινηθείς για την επίλυσή του*», ενώ προσθέτει «*ένα πρόβλημα αν δεν κρύβει εκπλήξεις και μπορεί να λυθεί εύκολα με διαδικασίες ρουτίνας ή γνωστές διαδικασίες (όσο δύσκολες και να είναι) τότε αυτό δεν είναι πρόβλημα αλλά άσκηση*».

2.1.2 Ανοιχτά Προβλήματα

Τι καθιστά ένα πρόβλημα, ανοιχτό πρόβλημα; Η λέξη «ανοιχτά» που αναφέρεται στα προβλήματα προσδίδει επιπλέον χαρακτηριστικά στην δραστηριότητα. Ανοιχτά θεωρούνται τα προβλήματα στα οποία υπάρχουν πολλές και διαφορετικές λύσεις. Επίσης, ανοιχτό θεωρείται ένα πρόβλημα το οποίο προσφέρει πολλαπλούς τρόπους προσέγγισης για την (ή τις) λύση (ή λύσεις). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εάν παρουσιάσουμε ένα πρόβλημα με λίγους περιορισμούς ή ελλιπή δεδομένα (Hancock, 1995).

Ανοιχτό πρόβλημα με πολλαπλούς τρόπους λύσης.

Ένα ανοιχτό πρόβλημα με πολλούς τρόπους προσέγγισης προσφέρει την δυνατότητα στους μαθητές να επιλέξουν τον καταλληλότερο τρόπο επίλυσης για εκείνους. Επομένως, οι μαθητές έχουν την ευθύνη της επιλογής του τρόπου επίλυσης, συνεπώς και την ευθύνη να τον υποστηρίξουν με τεκμηριωμένα επιχειρήματα. Το πλήθος των τρόπων προσέγγισης και λύσης αναπτύσσει την κριτική ικανότητα των μαθητών ως προς την επιλογή και τα πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα που προσφέρει η καθεμία. Ένα τέτοιο πρόβλημα δίνει την δυνατότητα επίλυσης σε διαφορετικές ηλικίες αλλά και διαχρονικά αφού οι γνώσεις του σε μεγαλύτερη ηλικία ίσως επιτρέψουν την πρόσθεση και άλλων τρόπων λύσης.

Ανοιχτό πρόβλημα με πολλές λύσεις.

Ένα πρόβλημα με πολλές λύσεις προσφέρει κατ' αρχάς την ευχαρίστηση στον μαθητή της «δικής» του λύσης. Δίνει την δυνατότητα να εμπλακούν όλοι οι μαθητές στην δραστηριότητα, αφού δεν υπάρχει μοναδική λύση.

Γιατί να επιλέξουμε ένα ανοιχτό πρόβλημα; όπως αναφέρουν οι Polya (1973) και Schoenfeld (1985) «η λύση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις συνδέεται με την βαθύτερη κατανόηση και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού». Επομένως, η ανοιχτή προσέγγιση ως προς τις λύσεις του προβλήματος που υποστηρίζεται από τα ανοιχτά προβλήματα συνεισφέρει στην κατανόηση των Μαθηματικών εννοιών με τέτοιο τρόπο ώστε οι ίδιοι οι μαθητές να κατασκευάσουν την γνώση. Ο Krutetskii (1976) συνηγορώντας με τους παραπάνω υποστηρίζει ότι «τα προβλήματα με πολλές λύσεις επιτρέπουν την εξέταση της ευελιξίας της μαθηματικής σκέψης των ατόμων μέσα από τη διερεύνηση και της μετακίνησης από τη μια νοητική διεργασία στην άλλη». Σε αντίθεση με τα προβλήματα κλειστού τύπου, τα ανοιχτά προβλήματα προωθούν την βαθιά κατανόηση όταν ο μαθητής αγωνίζεται να ξεπεράσει τις δυσκολίες και δεν βασίζεται σε στείρα απομνημόνευση ή σε προκαθορισμένους κανόνες (Hiebert, Carpenter, Fennema et.al., 1996).

Καθοριστικό ρόλο στην μάθηση των Μαθηματικών εννοιών παίζει η σύνδεση μεταξύ τους ώστε να μην παρουσιάζονται αποσπασματικά. Η διερεύνηση κατά την διαδικασία επίλυσης ενός ανοιχτού προβλήματος προωθεί, παράγει και παρέχει τροφή για σκέψη (Dyer & Moynihan, 2000). Συμπληρώνοντας στα παραπάνω ο Sullivan (2003) παρατηρεί ότι «η ανοιχτού τύπου προσέγγιση προσφέρει ευκαιρίες για επέκταση της μαθηματικής σκέψης αφού οι μαθητές εξερευνούν το εύρος των επιλογών τους αλλά και τρόπους για γενικευμένες απαντήσεις». Και προσθέτει ότι «ενεργοποιεί τους μαθητές ώστε να εμπλακούν στην κατάσταση να σκεφτούν πάνω σ' αυτή και με αυτόν τον τρόπο αυξάνει τις πιθανότητες για κατασκευή νέας γνώσης δημιουργώντας μια δυναμική κατάσταση».

Τα ανοιχτά προβλήματα δίνουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να κάνει την διδασκαλία του ευχάριστη και ελκυστική, παρέχοντας στον μαθητή προβληματικές καταστάσεις που έχει νόημα να αντιμετωπίσει με εργαλείο τα Μαθηματικά. Πόσες φορές άλλωστε οι μαθητές ρώτησαν τον εκπαιδευτικό « που θα τα χρειαστούμε αυτά; ». Σύμφωνα με τον Sawada (1977) τα ανοιχτά προβλήματα παρέχουν στους μαθητές μια πληθώρα ευκαιριών ώστε να βιώσουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης. Αν τώρα προστεθεί και η δυνατότητα πολλών λύσεων οι μαθητές όχι μόνο θα έχουν ανακαλύψει μια λύση αλλά πιθανόν την δική τους μοναδική λύση από τον δικό τους μοναδικό δρόμο. Με αυτόν τον τρόπο κάνουν συνειδητή χρήση της μαθηματικής τους γνώσης αλλά και των δεξιοτήτων τους.

2.2 Η Ρεαλιστική μαθηματική Εκπαίδευση – RME

2.2.1 Εισαγωγή

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education – RME) είναι μια ολλανδική προσέγγιση για την μαθηματική Εκπαίδευση η οποία ξεκίνησε να αναπτύσσεται περίπου το 1970. Αρχικά από το IOWO (Institute for the Development of Mathematical Education) το οποίο το οποίο ιδρύθηκε από τον ίδιο τον Freudenthal για την ανάπτυξη της μαθηματικής εκπαίδευσης και μετά τον θάνατό του μετονομάστηκε σε Ινστιτούτο Freudenthal (Freudenthal Institute). Η RME σύμφωνα με τις ιδέες του Freudenthal χαρακτηρίζεται από την σύνδεση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα (reality) επιπροσθέτως χαρακτηρίζεται από την ανάγκη τα Μαθηματικά να βρίσκονται κοντά στις εμπειρίες των μαθητών αλλά και στην κοινωνία (society) (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

Η παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών έχει ως αφετηρία τα συμπεράσματα και τις προσπάθειες από πολλούς μαθηματικούς η οποία ξεκινάει αρκετά χρόνια πριν, ίσως και χιλιάδες αν σκεφτούμε τα στοιχεία του Ευκλείδη. Επομένως, η παραδοσιακή διδασκαλία παρουσιάζει τις μαθηματικές έννοιες ως κάτι που έχει βρεθεί και δεν μπορεί να ξαναβρεθεί. Ουσιαστικά με αυτόν τον τρόπο αφαιρεί από τον μαθητή την δυνατότητα να προσπαθήσει να ανακαλύψει κάτι ακόμα και αν αυτό έχει βρεθεί και από κάποιον άλλο. Κριτική στην παραδοσιακή διδασκαλία έκανε ο Freudenthal (1973) για αυτή την διδακτική αναστροφή της ιστορικής πορείας και εξέλιξης των Μαθηματικών, όπου το τέλος των αποτελεσμάτων των Μαθηματικών αποτελούν την αφετηρία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για αυτό την ονόμασε αντί-διδακτική αναστροφή. Την κριτική και τον χαρακτηρισμό ως αντί-διδακτικής, της παραδοσιακής διδασκαλίας, ακολούθησε η πρόταση του Freudenthal (1973) των Μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα. Σύμφωνα με αυτή την οπτική η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να έχει ως σημείο εκκίνησης τα Μαθηματικά ως δραστηριότητα και όχι ως ένα έτοιμο σύστημα διδασκαλίας Μαθηματικών εννοιών (Freudenthal, 1971, 1973, 1991). Οι μαθητές από απλοί δέκτες των έτοιμων Μαθηματικών που θα τους παρουσιάσει ο εκπαιδευτικός γίνονται ενεργοί συμμετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επομένως, οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματικές έννοιες και εφαρμόζουν Μαθηματικά εργαλεία και στρατηγικές σε καθημερινά ρεαλιστικά φαινόμενα/προβλήματα ώστε να έχουν νόημα για αυτούς (Van den Heuvel-Panhuizen& Drijvers, 2014). Ο Freudenthal δεν έβλεπε την μαθηματική γνώση ως αντικείμενο που ο εκπαιδευτικός θα μεταδώσει στον μαθητή, αντίθετα θεωρούσε ότι την μαθηματική γνώση ως ανθρώπινη δραστηριότητα (mathematics as human activity). Σύμφωνα με την θεωρία του πλαισίου RME στην μαθηματική εκπαίδευση, είναι εφικτό να δοθεί η 'καθοδηγούμενη' ευκαιρία στους μαθητές να 'επανεφεύρουν' μαθηματικές έννοιες (guided reinvention) και βλέποντας τα Μαθηματικά ως δραστηριότητα να μαθηματικοποιήσουν ρεαλιστικές καταστάσεις ή φαινόμενα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2003).

2.2.2 Η Μαθηματικοποίηση

Για τον Freudenthal τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα έχουν ως πυρήνα την μαθηματικοποίηση (Doorman, 2005). Η μαθηματικοποίηση είναι ένας τρόπος οργάνωσης της δραστηριότητας από την οπτική των Μαθηματικών. Η μαθηματικοποίηση μπορεί να γίνει είτε σε ένα ρεαλιστικό φαινόμενο είτε την ίδια στην ίδια την μαθηματική δραστηριότητα. Ο Treffers (1987) διαχωρίζει την μαθηματικοποίηση σε οριζόντια και κάθετη. Ως οριζόντια μαθηματικοποίηση ορίζει την διαδικασία οργάνωσης και περιγραφής ενός πλαισιωμένου προβλήματος ή μιας ρεαλιστικής κατάστασης. Ενώ ως κατακόρυφη μαθηματικοποίηση ορίζει την μαθηματικοποίηση της ίδιας της μαθηματικής δραστηριότητας. Σύμφωνα με την Van Den Heuvel-Panhuizen(2003) στο τελευταίο του βιβλίο ο Freudenthal (1991) υιοθέτησε την διάκριση της μαθηματικοποίησης από τον Treffers. Σε ένα μεταφορικό επίπεδο η οριζόντια μαθηματικοποίηση είναι ένας τρόπος να μεταφερθείς από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο του μαθηματικού συμβολισμού. Ενώ η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση είναι ένας τρόπο να μετακινείσαι μέσα στον κόσμο των Μαθηματικών. Ο Freudenthal σημείωσε επίσης ότι οι δύο κόσμοι δεν είναι ξένοι μεταξύ τους και τελικά δεν είναι ξεχωριστοί κόσμοι. Οι Jupri και Drijvers (2016) αντίστοιχα αναφέρουν ως μαθηματικοποίηση την διαδικασία μετατροπής ενός ρεαλιστικού προβλήματος σε συμβολικό μαθηματικό πρόβλημα ή την αναδιοργάνωση του μαθηματικού συστήματος και των Μαθηματικών διαδικασιών.

2.3 Η Κοινωνικό-πολιτισμική οπτική

Σύγχρονες αντιλήψεις υποστηρίζουν ότι η μάθηση εμπεριέχει κοινωνικές διαστάσεις σε αντίθεση με το παρελθόν όπου η μάθηση θεωρούνταν ατομική υπόθεση. Όταν οι μαθητές αποτελούν μέρος της σχολικής τάξης ή μιας ομάδας μαθητών με στόχο την διερεύνηση και επίλυση ενός προβλήματος αναπτύσσουν συλλογικούς συλλογισμούς. Η συζήτηση μεταξύ τω μαθητών στην ομάδα που είναι ενταγμένοι δημιουργεί ένα πρόσφορο έδαφος για να εκφράσουν τις ιδέες τους και να τις εξηγήσουν αναλυτικότερα, να επιχειρηματολογήσουν για αυτές αλλά και για τις ιδέες συμμαθητών τους όπως και να σημειώσουν λάθη και ασυνέπειες σε ιδέες, σε προτάσεις αλλά και σε αιτιολογήσεις που εμφανίζονται στην κοινωνική ομάδα που βρίσκονται. Η μάθηση και η διδασκαλία των Μαθηματικών Freudenthal (1987) είναι κοινωνικό αλλά και πολιτισμικό φαινόμενο όπου σύμφωνα με τους Lave και Wenger (1991) όταν οι μαθητές λειτουργούν σε ένα πλαίσιο συνεργασίας τότε ενθαρρύνεται η συλλογική επιχειρηματολογία (Τριανταφύλλου, Μπακογιάννη & Κόσυβας, 2017).

Σύμφωνα με τον Freudenthal (1987) και την φιλοσοφία της ρεαλιστικής μαθηματική εκπαίδευσης (RME) τα Μαθηματικά προκύπτουν από την πραγματικότητα και επεκτείνονται διαρκώς μέσα από ατομικές αλλά και συλλογικές μαθησιακές διαδικασίες. Οι μαθητές δεν είναι απλοί παρατηρητές αλλά ενεργοί συμμετέχοντες στην μαθησιακή διαδικασία η οποία λαμβάνει χώρα στο κοινωνικό πλαίσιο της σχολικής τάξης. Σύμφωνα με τον Treffers (1978) οι μαθητές μαθαίνουν Μαθηματικά κάνοντας Μαθηματικά, κάτι που ταιριάζει με την ερμηνεία του Freudenthal των Μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα. Η μαθηματική γνώση, όπως και τα υπόλοιπα οικοδομήματα γνώσεων, είναι παράγωγα της ανθρώπινης εφευρετικότητας όπως και των κοινωνικών δραστηριοτήτων (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Η αρχή της αλληλεπίδρασης της RME προτείνει οι μαθητές να αντιμετωπίζονται από τον δάσκαλο ως ενεργά μέλη της μαθησιακής διαδικασίας είτε προκαλώντας συζητήσεις με ολόκληρη την τάξη είτε επιτρέποντας την επικοινωνία και εργασία σε μικρότερες ομάδες. Δημιουργούνται έτσι ευκαιρίες ώστε οι μαθητές να μοιραστούν της στρατηγικές τους, τις ιδέες τους και τις ανακαλύψεις τους σε ολόκληρη την ομάδα. Συνεπώς οι ιδέες τους μπορούν να διαπραγματευτούν συλλογικά στην ομάδα ώστε να βελτιωθούν, να εφαρμοστούν ή και να απορριφθούν, Η αλληλεπίδραση αυτή ενεργοποιεί τους μαθητές και τους επιτρέπει να φτάσουν σταδιακά σε ένα ανώτερο επίπεδο κατανόησης (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

2.4 Μαθηματικά και Φυσική

2.4.1 Εισαγωγή

Στην ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση τα Μαθηματικά και η Φυσική διδάσκονται ξεχωριστά. Ο διαχωρισμός αυτός δεν είναι μόνο η ελληνική πραγματικότητα αφού η εκπαίδευση ακολουθεί τον διαχωρισμό αυτό και σε άλλες χώρες.

Για το παραπάνω ζήτημα αναφέρεται χαρακτηριστικά ο Arnold (1998):

> *Στα μέσα του 20ου αιώνα έγινε μια προσπάθεια διαχωρισμού των Μαθηματικών και της Φυσικής. Οι συνέπειες ήταν καταστροφικές. Ολόκληρες γενιές Μαθηματικών μεγάλωσαν χωρίς να γνωρίζουν το άλλο μισό της επιστήμης τους, και σίγουρα έχοντας ολική άγνοια για άλλες επιστήμες. Αρχικά ξεκίνησαν να διδάσκουν σχολαστικά ψευδομαθηματικά στους μαθητές τους και έπειτα στους μαθητές των σχολείων.*

Η απομόνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών ώστε να μην κατανοούν οι μαθητές που χρειάζονται αυτά που διδάσκονται δημιουργεί πρόβλημα και στην κατανόηση των ίδιων των μαθηματικών εννοιών αφού αντιμετωπίζονται από τους μαθητές ως διαδικασίες και μετά τις τελικές εξετάσεις ξεχνιούνται. Αλλά η αρχή της εκπαίδευσης ότι πρέπει οι μαθητές να μάθουν πρώτα τα Μαθηματικά που θα χρειαστούν στις άλλες επιστήμες και μετά να τα εφαρμόσουν σ΄ αυτές δημιουργεί πρόβλημα και στις άλλες επιστήμες αφού τα μοντέλα έρχονται έτοιμα από τα Μαθηματικά χωρίς καμία ουσιαστική σύνδεση και προφανώς χωρίς να προκύψουν εξ ανάγκης (Michelsen, 2006). Τα Μαθηματικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην Φυσική. Ο ρόλος αυτός κυρίως εμφανίζεται μέσα από την κατασκευή την εφαρμογή και την αξιολόγηση των Μαθηματικών

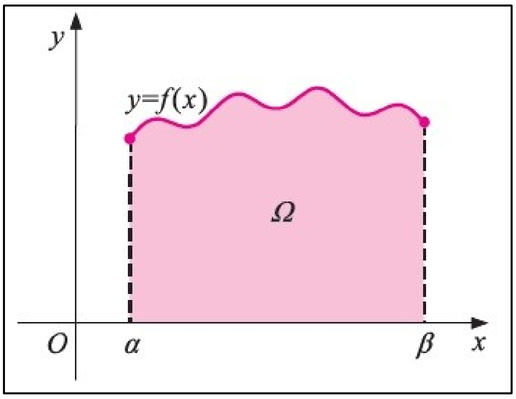
μοντέλων, ο οποίος θα πρέπει να αντικατοπτρίζεται και στην εκπαίδευση. Τα Μαθηματικά στην πραγματικότητα είναι πολλά χρόνια τώρα μια χρήσιμη γλώσσα για την ανάπτυξη της Φυσικής με τρόπο που να γίνεται κατανοητή στους μαθητές (Michelsen, 2005). Η Διδασκαλία των Μαθηματικών σε σύνδεση με την Φυσική υποστηρίζει την μάθηση των μαθητών προσφέροντας ένα πλαίσιο ερμηνείας στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δουν την εφαρμογή αφηρημένων Μαθηματικών εννοιών και ως παράπλευρη επίδραση αυτό να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια θετική στάση για τα Μαθηματικά. Επίσης τα Μαθηματικά προσφέρουν στην Φυσική, εργαλεία αναπαράστασης και ανάλυσης φαινομένων της Φυσικής. Τα πλαισιωμένα προβλήματα μπορούν να εκμεταλλευτούν ως εκκίνηση με νόημα όπου μοντέλα από τα Μαθηματικά και την Φυσική είναι δυνατό να προκύψουν. Η γνώση δεν είναι διαιρεμένη σε κατηγορίες και η διάκριση σε αντικείμενα είναι τεχνητή. Τα καθημερινά προβλήματα είναι πολυπαραγοντικά και αντιμετωπίζονται από ομάδες ανθρώπων από διαφορετικά πεδία. Βασικός στόχος της Μαθηματικής και Φυσικής εκπαίδευσης είναι να βοηθήσουμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις γλώσσες των Μαθηματικών και τις Φυσικής ώστε να κατασκευάσουν και αντιληφθούν τα νοήματα που προκύπτουν. Η Εκπαίδευση των Μαθηματικών και της Φυσικής πρέπει να αναμορφωθεί ώστε να προετοιμάζει τους μαθητές να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο αλλά και με τρόπο που θα εμπλέκει τις έννοιες της Φυσικής και μετά το σχολείο (Michelsen, 2006).
Ο Michelsen (2006) θεωρεί ότι δεν είναι μόνο ο Μαθηματικός φορμαλισμός που δημιουργεί εμπόδια στην μάθηση της Φυσικής αλλά είναι και η έλλειψη συνδέσεων μεταξύ των Μαθηματικών και της Φυσικής. Προτείνει από την άλλη ότι το πεδίο των Μαθηματικών πρέπει να επεκταθεί χρησιμοποιώντας παραδείγματα από την Φυσική σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Η μοντελοποίηση ρεαλιστικών καταστάσεων μπορεί να γεφυρώσει το κενό μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής. Η μοντελοποίηση μέσω της μαθηματικοποίησης έχει κυρίαρχο ρόλο για τα Μαθηματικά της Φυσικής και την σύνδεση των Μαθηματικών με διάφορα πεδία της εκπαίδευσης των Φυσικών επιστημών. Σύμφωνα με τους Lesh, Lester και Hjalmarson (2003) η εστίαση στα μοντέλα και στην μοντελοποίηση μπορεί να κάνει εφικτή την αποφυγή των προβλημάτων στην μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο και την αποφυγή της εξειδίκευσης. Ως εξειδίκευση εννοείται η προσπάθεια των μαθητών να εντάξουν τη προβληματική κατάσταση σε κάποιο πεδίο για παράδειγμα στο πεδίο των Μαθηματικών και να το επεξεργαστούν μόνο σ' αυτό το πεδίο. Οι Blum και Niss (1989) έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στην στενή διδακτική σύνδεση Μαθηματικών και Φυσικής με στόχο την πρόσβαση σε αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις της Φυσικής ώστε να εμφανιστούν πιθανότητες, συνθήκες, δυσκολίες και εμπόδια της εφαρμογής της μοντελοποίησης από τα Μαθηματικά. Ο Michelsen (2005) αναφέρει ότι οι δραστηριότητες μοντελοποίησης δίνουν έμφαση στις συνδέσεις μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής όπου συνήθως στην ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διδάσκονται ξεχωριστά και για αυτό οι δραστηριότητες μοντελοποίησης σε διεπιστημονικό επίπεδο Μαθηματικών και Φυσικής έχουν τη δυνατότητα να παίξουν ρόλο κλειδί όταν τα πεδία αυτά επεκταθούν.

2.4.2 Η αριθμητική τιμή του εμβαδού κάτω από το γράφημα συνάρτησης μη αρνητικών τιμών

Στα Μαθηματικά το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου Ω (βλ. Γράφημα 2.1) που περικλείεται από: (α) την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές, (β) τον άξονα $x'x$ και (γ) τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = E(\Omega)$$

Δύο έννοιες συνδυάζονται εδώ πρώτα η έννοια του εμβαδού από το πεδίο της Γεωμετρίας που δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη για τους μαθητές της ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και δεύτερον η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος (Definite Integral) που είναι μια έννοια της ανάλυσης (Calculus).



Γράφημα 2.1. Εμβαδό χωρίου Ω

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Φυσικής στην Α΄ Λυκείου η παραπάνω έννοια διδάσκεται σε γραφήματα που περιγράφουν την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είτε με σταθερή ταχύτητα είτε με σταθερή επιτάχυνση. Η εφαρμογή γίνεται στα γραφήματα ταχύτητας–χρόνου όπου ο υπολογισμός της αριθμητικής τιμής του εμβαδού κάτω από το γράφημα ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες χρονικές στιγμές αντιστοιχεί στην συνολική απόσταση που διανύει το σώμα ανάμεσα στις δύο αυτές στιγμές.

Ιστορικά κοιτώντας η ανάπτυξη της Ανάλυσης προήλθε από την μοντελοποίηση προβλημάτων ταχύτητας – χρόνου. Στην διαδικασία της προσπάθειας των μαθητών να διαχειριστούν την αλλαγή-μεταβολή, η μέθοδος της προσέγγισης (approximation) της ταχύτητας που συνεχώς αλλάζει, με την βοήθεια διακριτών γραφημάτων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο (Doorman & Gravemeijer, 2009). Από την σκοπιά της σύνδεσης Μαθηματικών και Φυσικής – Κινηματικής, ο Kaput(1994) χαρακτηρίζει την Ανάλυση ως «Μαθηματικά της αλλαγής». Σύμφωνα με τους Gravemeijer και Doorman (1999) η ανάλυση και η μελέτη της κίνησης ενός σώματος (Kinematics) ξεκίνησαν ιστορικά από την παρατήρηση και οργάνωση φαινομένων της κίνησης. Οι ερευνητές παρατηρούν ότι στην διαδικασία της μάθησης πρέπει να γίνεται προσπάθεια οι έννοιες Μαθηματικών και Φυσικής να ριζώνουν στους μαθητές μέσω της κατανόησης πραγματικών-καθημερινών καταστάσεων. Συνηγορώντας με τα παραπάνω οι Ivanjek et.al. (2016) θεωρούν ότι για την καλύτερη ερμηνεία από τους μαθητές της έννοιας του εμβαδού κάτω από την καμπύλη χρειάζεται περισσότερη μελέτη της έννοιας με κοινή εστίαση στην Φυσική και τα Μαθηματικά. Προσθέτουν ότι ο υπολογισμός του εμβαδού κάτω από την καμπύλη πιθανόν να έχει μεγαλύτερη επιτυχία και να ερμηνευτεί καλύτερα από τους μαθητές όταν διαχειριστούν το πρόβλημα της εύρεσης απόστασης σε γράφημα ταχύτητας - χρόνου αφού το έχουν διδαχθεί από τα μαθήματα της Φυσικής.

Η παραδοσιακή διδασκαλία της ανάλυσης επικεντρώνεται στο πως θα γίνουν οι υπολογισμοί και οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί και όχι στο γιατί γίνονται. Οι μαθητές παίρνουν έτοιμα τα μοντέλα όπως για παράδειγμα ότι το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα. Δεν συμμετέχουν στην κατασκευή έστω και διαισθητικά αυτών των μοντέλων με αποτέλεσμα να μην έχουν κάποιο νόημα για αυτούς. Η στόχευση της διδασκαλίες είναι σχεδόν πάντα άμεσα στις διαδικασίες, ενώ οι έννοιες που διαπραγματεύονται δεν είναι απλές. Αυτός ίσως είναι ο λόγος που οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ανάλυση και την κινηματική. Από τις διαδικασίες μοντελοποίησης των μαθητών μπορεί να προκύψει η ανάγκη σύνδεσης της κατανόησης ιδιοτήτων της Φυσικής με τα Μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Οι Gravemeijer και Doorman (1999) σημειώνουν ότι οι βασικές αρχές της Ανάλυσης μπορούν να αναπτυχθούν από τους μαθητές όταν αυτοί επιχειρηματολογούν για την κίνηση υποστηριζόμενοι από διακριτά γραφήματα (discrete graphs). Συνεχίζουν υποστηρίζοντας ότι το διακριτό γράφημα μπορεί να έχει ένα ρόλο ενδιάμεσου μοντέλου διακριτής προσέγγισης της κίνησης ώστε να συνδέσει προηγούμενες δραστηριότητες των μαθητών με την επιχειρηματολογία τους.

Τα γραφήματα αρχικά τα διακριτά και έπειτα τα συνεχή αποτελούν τη βάσης της Ανάλυσης. Τα διακριτά γραφήματα παίζουν ρόλο κλειδί ως ενδιάμεσου μεταξύ των ρεαλιστικών προβλημάτων για λύση και της τυπική ανάλυσης που αναπτύσσεται. Βασικό στοιχείο στα διακριτά γραφήματα είναι η ιδέα της προσέγγισης (approximation) όπου σε συνδυασμό με την έννοια της συσσώρευσης (accumulation) δημιουργούν μια προ-εννοιακή εικόνα (pro-concept image) για την έννοια του ολοκληρώματος (Kouropatov & Dreyfus, 2014). Η έννοια της συσσώρευσης στην ανάλυση (Calculus) σύμφωνα με τους Thompson και Silverman (2008) είναι σημαντική για την έννοια του ολοκληρώματος αφού ως συσσώρευση ορίζεται η συσσώρευση μιας ποσότητας παίρνοντας όλο και περισσότερα κομμάτια της (bits) όπου τελικά η οριακή συσσώρευσή της είναι το ολοκλήρωμα ως άθροισμα Riemann.

Το εμβαδό κάτω από τη καμπύλη είναι μια αρκετά απλή έννοια ώστε να αποτελέσει το έναυσμα για την διαισθητική κατανόηση των ολοκληρωμάτων. Δηλαδή οι μαθητές πρέπει να συνδέσουν το γινόμενο των δυο ποσοτήτων που αναπαριστούν οι άξονες $x'x$ και $y'y$ με το εμβαδό κάτω από την γραφική παράσταση της $f(x) = y$, ανά διαστήματα, και έπειτα το αριθμητικό άθροισμα (συσσώρευση – accumulation) όλων αυτών το εμβαδών, όπως στο άθροισμα Riemann (Jones, Lim & Chandler, 2017).

Σημαντική είναι η ανάπτυξη μιας προ-εννοιακής εικόνας του Ολοκληρώματος, αντί να εστιάζουν οι μαθητές στην διαδικαστική κατανόηση. Η συσσώρευση (accumulation) είναι η κεντρική ιδέα της έννοιας του ολοκληρώματος και επομένως η διαισθητική - άτυπη κατανόηση του ολοκληρώματος αναλύεται στα δύο στοιχεία της (1) διαίσθησης, που αναφέρεται στην συσσώρευση όλο και μικρότερων ποσοτήτων και της (2) άτυπης, που αναφέρεται στην μη τυπική γνώση του ορίου. Οι μαθητές μπορούν με την χρήση αριθμητικών και γραφικών στοιχείων αντί για αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και διαδικασίες να κατανοήσουν τι προσεγγίζουν, πως θα βελτιώσουν την προσέγγιση και πως θα γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους (Kouropatov & Dreyfus, 2014).

2.5 Μοντελοποίηση

2.5.1 Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση έχει μελετηθεί αρκετά από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών. Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί της Μαθηματικής μοντελοποίησης, σε όλους τους ορισμούς όμως υπάρχουν το ανθρώπινο υποκείμενο, ο κόσμος των Μαθηματικών και ο πραγματικός κόσμος (Jurdak, 2016). Σύμφωνα με τους BlumκαιFerri (2009) , η Μαθηματική μοντελοποίηση είναι η διαδικασία της μετάφρασης από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των Μαθηματικών και αντίστροφα. Είναι λοιπόν μια δυναμική διαδικασία όπου ο μαθητής «μετακινείται» ανάμεσα στους δύο κόσμους. Η διαφοροποιήσεις στους ορισμούς της μοντελοποίησης βασίζονται στις διαφορετικές οπτικές και εστιάσεις των ερευνητών. Το πλαίσιο της μοντελοποίησης αλλά και ο ρόλος τους ανθρώπινου υποκειμένου είναι οι βασικοί παράγοντες ώστε να κατηγοριοποιηθούν οι οπτικές στην μοντελοποίηση. Οι Kaiser και Sriraman (2006) κατηγοριοποίησαν αυτές τις οπτικές σε έξι οπτικές: (1) Ρεαλιστική μοντελοποίηση (Realistic Modelling), (2) Μοντελοποίηση του συγκείμενου (Contextual Modelling), (3) Εκπαιδευτική μοντελοποίηση (Educational Modelling), (4) Κοινωνικό-κριτική μοντελοποίηση (Socio-criticalModelling), (5) Επιστημολογική μοντελοποίηση (Epistemological Modelling), (6) Γνωστική μοντελοποίηση (Cognitive Modelling). Στην ανάγκη όμως για μια ευρύτερη θεωρητική κατηγοριοποίηση ο Jurdak (2016) προτείνει να βλέπουμε την διαδικασία της μοντελοποίησης ως πρακτική. Ειδικότερα διακρίνει 3 κατηγορίες: (1) μοντελοποίησης ως μαθηματική πρακτική, (2) μοντελοποίηση ως κοινωνικοπολιτισμική πρακτική και (3) μοντελοποίηση ως γνωσιολογική πρακτική.

Οι Niss, Blum, & Galbraith (2007, σελ.4) δίνουν έναν πιο αναλυτικό και ολιστικό ορισμό. Αρχικά, στο πεδίο Dσυμπεριλαμβάνονται αντικείμενα, σχέσεις, φαινόμενα εικασίες ερωτήσεις κ.α. τα οποίο αναγνωρίζονται και επιλέγονται όταν είναι σχετικά με τον σκοπό και το πλαίσιο. Στο μαθηματικό πεδίο M γίνονται μαθηματικές σκέψεις, αξιολογήσεις, μετασχηματισμοί, πράξεις, εξάγονται συμπεράσματα κ.α. Μοντελοποίηση λοιπόν είναι ολόκληρη η διαδικασία και οτιδήποτε συμπεριλαμβάνεται σ’ αυτή από την κατασκευή του πεδίου D, την μετάφραση των στοιχείων του D, την επιλογή του μαθηματικού πεδίου M, την Μαθηματική επεξεργασία μέσα στο πεδίο M και τέλος την ερμηνεία και αξιολόγηση των συμπερασμάτων αναφορικά με το πεδίο D. μετάφραση από το πεδίο Dστο πεδίο M. Η μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης προσφέρει πολλαπλά οφέλη στους μαθητές. Τα Μαθηματικά μοντέλα βρίσκονται παντού γύρω μας σε έναν κόσμο που εξελίσσεται διαρκώς τεχνολογικά. Η ικανότητα του μαθητή να αναπτύξει όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που χρειάζεται ώστε να μοντελοποιεί πραγματικές καταστάσεις θα του προσφέρουν καλύτερη κατανόηση του πραγματικού κόσμου, υποστήριξη της μάθησης των Μαθηματικών, στην υποστήριξη για ανάπτυξη διαφόρων Μαθηματικών ικανοτήτων και κατάλληλων συμπεριφορών, συνεισφορά για μια πλήρη εικόνα της επιστήμης των Μαθηματικών. Η μοντελοποίηση μπορεί και πρέπει να δώσει νόημα στα Μαθηματικά (Blum & Ferri, 2009).

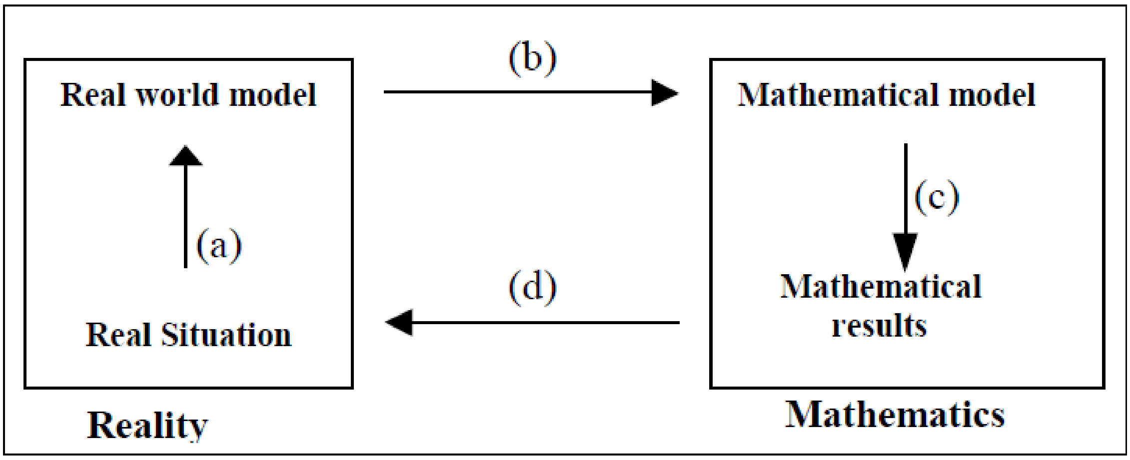
Η μοντελοποίηση μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα ανάμεσα στον πραγματικό κόσμο και των κόσμο των Μαθηματικών (Blum & Ferri, 2009) αλλά ακόμα περισσότερο μπορεί να απαλείψει την εντύπωση των μαθητών ότι αυτοί οι κόσμοι είναι ξεχωριστοί (Jurdak, 2016). Αφού όπως επισημαίνουν και οι Niss, Blum, και Galbraith (2007) οι μαθητές λειτουργούν με μεγαλύτερη ασφάλεια και αυτοπεποίθηση όταν γνωρίζουν σε πιο κόσμο βρίσκονται ειδικότερα όταν αυτό είναι ο κόσμος των Μαθηματικών αφού είναι πολύ εύκολο να διακρίνουν πότε βρίσκονται σε αυτόν.

Η εμπλοκή των μαθητών στην διαδικασία μοντελοποίησης δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να διαπραγματευτούν έννοιες των Μαθηματικών για την καλύτερη σύνδεση των εννοιών αυτών με φαινόμενα και καταστάσεις που συμβαίνουν γύρω τους. Η δραστηριότητα της μοντελοποίησης φέρνει των μαθητή σε μια κατάσταση ώστε να έχει την ευκαιρία να μετατρέψει την άτυπη γνώση/άτυπο μοντέλο σε πιο τυπική γνώση/τυπικό μοντέλο να πραγματοποιήσει ίσως δηλαδή την βασικότερη διαδικασία των Μαθηματικών την αφαιρετική διαδικασία (Doerr & English, 2003). Η δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων μέσω της μετατροπής ενός άτυπου μοντέλου σε ένα μαθηματικό μοντέλο δίνει την ευκαιρία μέσω της δικής του εμπειρίας να διαπιστώσει ο μαθητής το πως τα Μαθηματικά γίνονται χρήσιμα. Αλλά και κατά την διάρκεια του ελέγχου εγκυρότητας των συμπερασμάτων του δίνεται ευκαιρία να επιχειρηματολογήσει για αυτά και ίσως να οδηγηθεί σε γενίκευσή τους (Mousoulides, Sriraman & Christou, 2007). Δημιουργεί την ανάγκη οι μαθητές να φέρουν μοντέλα από προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις (model of) να εξελίξουν ώστε να γίνουν αντικείμενα και να μεταμορφωθούν σε μοντέλα χρήσιμα για την επίλυση του προβλήματος (model for) (Gravemeijer& Doorman, 1999; Doorman, 2005).

2.5.2 Κύκλος Μοντελοποίησης

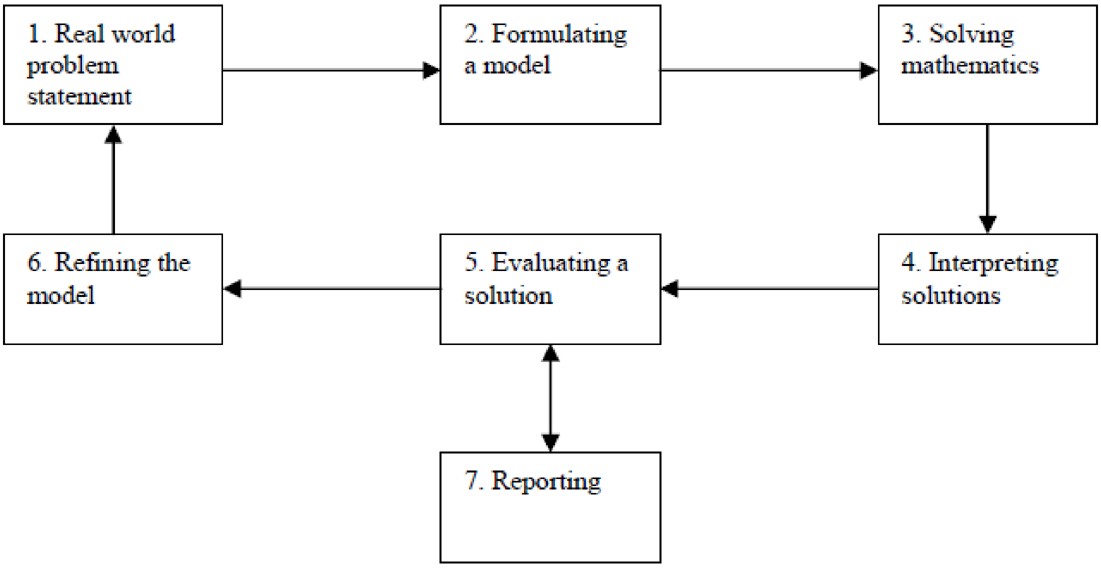
Η διαδικασία μοντελοποίησης έχει έναν κυκλικό δυναμικό χαρακτήρα, τον κύκλο μοντελοποίησης. Όπως είδαμε υπάρχουν διαφορετικές οπτικές της μοντελοποίησης έτσι υπάρχουν και διάφορα είδη κύκλων μοντελοποίησης. Ο κύκλος μοντελοποίησης είναι ένας τρόπος καλύτερης και πιο ολοκληρωμένης περιγραφής της μοντελοποίησης. Στον ορισμό που έδωσαν οι Niss, Blum, και Galbraith (2007 , p. 4) φαίνεται αυτή η κυκλικοί διαδικασία όπως και στον ορισμό των Blum και Ferri (2009).

Διάφοροι ερευνητές έχουν διαφοροποιήσει τον κύκλο μοντελοποίησης είτε ως προς τα στάδια τους κύκλου είτε ως προς τις μεταβάσεις από στάδιο σε στάδιο. Όλοι οι ερευνητές όμως συμφωνούν ότι ο κύκλος μοντελοποίησης αποτελείται από την πραγματική κατάσταση την μετάβαση στον κόσμο των Μαθηματικών και την επιστροφή στον πραγματικό κόσμο. Ένα παράδειγμα κύκλου μοντελοποίησης είναι αυτό των Kaiser (1995) και Blum (1996) το οποίο αποτελείται από 4 στάδια και ισάριθμες μεταβάσεις. Αναλυτικά τα στάδια αυτά είναι: (1^o) Πραγματική κατάσταση, (2^o) Πραγματικό μοντέλο, (3^o) Μαθηματικό Μοντέλο, (4^o) Μαθηματικό αποτέλεσμα. Οι μεταβάσεις περιγράφονται ως εξής: (a) απλοποίηση και οργάνωση σε κάποιου είδους δομή, (b) μαθηματικοποίηση του μοντέλου, (c) μαθηματική επεξεργασία, (d) ερμηνεία και εγκυρότητα του μαθηματικού αποτελέσματος (Σχήμα 2.2).



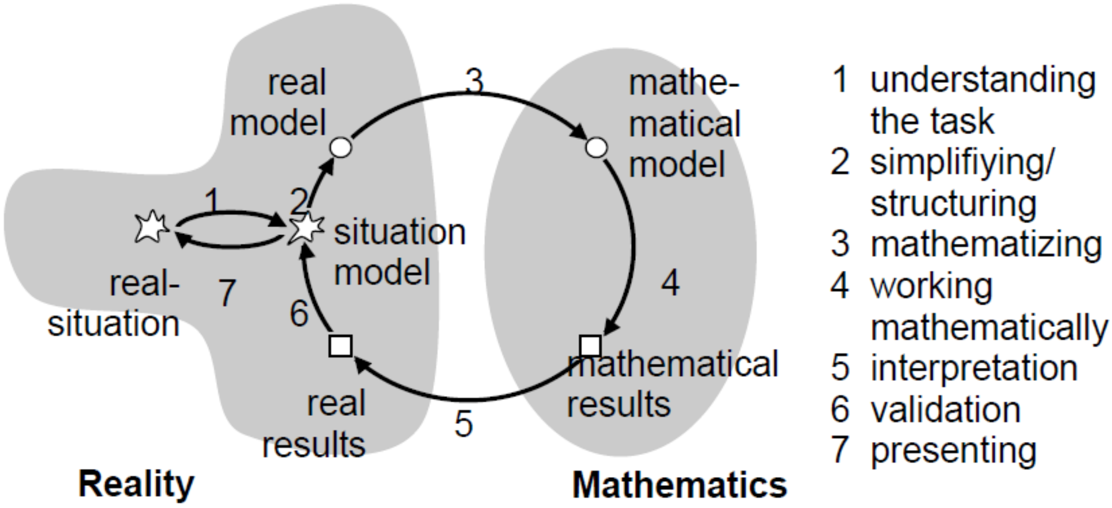
Σχήμα 2.2. Κύκλος Μοντελοποίησης Kaiser (1995) και Blum (1996)

στους Haines και Crouch (2013) ο κύκλος μοντελοποίησης των Berry και Davies (1996) αποτελείται από 7 στάδια με την διαφοροποίηση ότι δεν δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις μεταβάσεις. Τα στάδια είναι: (1) Πραγματικό πρόβλημα, (2) Σύνθεση μοντέλου, (3) Μαθηματική επίλυση, (4) Ερμηνεία αποτελέσματος, (5) Αξιολόγηση λύσης, (6) Αναπροσαρμογή του μοντέλου, (7) Αναφορά αποτελέσματος (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3. Κύκλος Μοντελοποίησης Berry & Davies (1996)

Από την γνωσιολογική οπτική οι Blum & Leiß (2007) παρουσίασαν έναν κύκλο μοντελοποίησης με έξι στάδια και εφτά μεταβάσεις (Σχήμα 2.4). Υπάρχουν αρκετές ομοιότητες με τους προηγούμενους ερευνητές, με την διαφορά ότι οι Blum & Leiß δίνουν ιδιαίτερη σημασία στις μεταβάσεις. Ο κύκλος αποτελείται από δύο διαχωρισμένα πεδία αυτό της Πραγματικότητας (Reality) και αυτό των Μαθηματικών (Mathematics). Στο πεδίο της Πραγματικότητας βρίσκονται τέσσερα στάδια το 1^{ο}, 2^{ο}, 3^{ο} και το 6^{ο} ενώ στο πεδίο των Μαθηματικών δυο στάδια το 4^{ο} και το 5^{ο}.



Σχήμα 2.4. Κύκλος Μοντελοποίησης Blum & Leiß (2007)

Αναλυτικότερα τα στάδια και οι μεταβάσεις σύμφωνα με την Ferri (2006):

1^{ο} Στάδιο: Πραγματική Κατάσταση (Real Situation).

Είναι η αρχική κατάσταση που δίνεται από το πρόβλημα σε οποιαδήποτε μορφή πριν ο μαθητής την επεξεργαστεί με κάποιο τρόπο.

Μετάβαση 1^{ο}→ 2^{ο} : Κατανόηση της Κατάστασης (Understanding the task).

Ο μαθητής καταλαβαίνει σε κάποιο βαθμό το πρόβλημα και κατασκευάζει μια νοητή εικόνα για την κατάσταση.

2^{ο} Στάδιο: Νοητική Αναπαράστασης της Κατάστασης (Mental Representation of the Situation).

Η εικόνα που έχει κατασκευάσει νοητά ο κάθε μαθητής είναι μοναδική αφού εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αυτοί οι παράγοντες είναι η σύνδεση της πραγματικής κατάστασης με τις προσωπικές μοναδικές εμπειρίες του κάθε μαθητή, το μαθηματικό στυλ και σκέψη που μπορεί να είναι η εξεικόνιση του προβλήματος, η εστίαση στους αριθμούς και τα αριθμητικά δεδομένα ή στις σχέσεις και συνδέσεις που μπορεί να διακρίνει. Σημαντικά χαρακτηριστικά αυτού του σταδίου είναι οι πιθανές απλοποιήσεις/αφαιρέσεις (να μην λάβει υπόψιν του κάποια στοιχεία τους προβλήματος που θεωρεί μη σημαντικά) που μπορεί κάνει ο μαθητής και η ιδιαίτερη προτίμηση του μαθητή για το πως θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα στην επερχόμενη διαδικασία μοντελοποίησης.

Μετάβαση 2ο→ 3ο : Απλοποίηση, Επεξεργασία και Δόμηση (Simplifying, Processing and Structuring).

Στην μετάβαση αυτή γίνεται απλούστευση του προβλήματος διότι κατά την διάρκεια του 2ου Σταδίου ο μαθητής παίρνει αποφάσεις και φιλτράρει τις πληροφορίες. Επεξεργάζεται τα στοιχεία και ανάλογα με το είδος τους προβλήματος η αναζήτηση ή η απαίτηση μαθηματική γνώσης εμφανίζεται, όχι αναγκαστικά σε απόλυτα τυπική μορφή. Δομείται σταδιακά ένα μαθηματικό μοντέλο.

3ο Στάδιο: Πραγματικό Μοντέλο (Real Model).

Το Στάδιο αυτό είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το 2ο στάδιο, διότι το πραγματικό μοντέλο έχει δημιουργηθεί κυρίως από της εσωτερικές αναπαραστάσεις του μαθητή. Αλλά μπορεί να έχει εκφραστεί σε εξωτερικές αναπαραστάσεις από τον μαθητή όπως κάποιο σχέδιο ή κάποιος τύπος ακόμα και σε λεκτικό επίπεδο.

Μετάβαση 3ο→ 4ο : Μαθηματικοποίηση (Mathematizing).

Η διαδικασία της μαθηματικοποίησης όπου απαιτείται μαθηματική γνώση, που εξαρτάται προφανώς από το πρόβλημα, για την κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου.

4ο Στάδιο: Μαθηματικό Μοντέλο (Mathematical Model).

Οι λεκτικές εκφράσεις των μαθητών είναι κυρίως σε μαθηματικό επίπεδο και λιγότερο με αναφορές στην πραγματικότητα. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών είναι κυρίως κατασκευή και επεξεργασία αναπαραστάσεων, τύπων και σχεδίων (γραφημάτων).

Μετάβαση 4ο→ 5ο : Μαθηματική Επεξεργασία (Working Mathematically).

Από το μαθηματικό μοντέλο οι μαθητές χρησιμοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις και ικανότητες για να παράξουν ένα μαθηματικό αποτέλεσμα.

5ο Στάδιο: Μαθηματικά Αποτελέσματα (Mathematical Results).

Οι μαθητές καταγράφουν τα δικά τους αποτελέσματα τα οποία βασίζονται στο μαθηματικό μοντέλο.

Μετάβαση 5ο→ 6ο : Ερμηνεία (Interpretation).

Οι μαθητές ερμηνεύουν τα αποτελέσματα στην μετάβαση από τα Μαθηματικά αποτελέσματα στα πραγματικά αποτελέσματα, αυτό δεν γίνεται απαραίτητα συνειδητά από τους ίδιους.

6ο Στάδιο: Πραγματικά Αποτελέσματα (Real Results).

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τα Μαθηματικά αποτελέσματα και ελέγχουν να είναι εφικτό να είναι πραγματικά αποτελέσματα.

Μετάβαση 6ο→ 2ο :Έλεγχος Εγκυρότητας (Validating).

Οι μαθητές ελέγχουν την εγκυρότητα το πραγματικών αποτελεσμάτων αν συνάδει με το μοντέλο της νοητικής τους αναπαράστασης του προβλήματος. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει σωστά ή και λανθασμένα ανεξαρτήτως σωστού ή λανθασμένου αποτελέσματος. Ο έλεγχος της εγκυρότητας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους από τους μαθητές. Ο πρώτος είναι ο διαισθητικός έλεγχος εγκυρότητας (Intuitive Validation), όπου ο μαθητής ανακαλύπτει ότι τα πραγματικά αποτελέσματα είναι λανθασμένα είτε επειδή δεν ταιριάζουν στο προσωπικό του μοντέλου νοητικής αναπαράστασης είτε για λόγους που δεν μπορεί να εξηγήσει. Ο δεύτερος τρόπος είναι ο έλεγχος εγκυρότητας που βασίζεται σε γνώσεις (Knowledge-based Validation), όπου οι μαθητές είτε διαφωνούν είτε συμφωνούν με το πραγματικό αποτέλεσμα βασιζόμενοι όμως στην μαθηματική γνώση που χρησιμοποίησαν και βασίστηκαν στην κατασκευή του μοντέλου.

Μετάβαση 2ο→ 1ο : Παρουσίαση (Presenting).

Στην μετάβαση αυτή ο μαθητής έχοντας ελέγξει την εγκυρότητα του αποτελέσματος το παρουσιάζει ως απάντηση στην αρχική πραγματική κατάσταση.

Αρκετοί ερευνητές στις μελέτες τους έχουν επισημάνει ότι ο κύκλος της μοντελοποίησης δεν είναι μια γραμμική διαδικασία μετάβασης, από το ένα στάδιο στο άλλο, αλλά μια δυναμική διαδικασία. Οι Blum και Ferri (2009) παρατήρησαν ότι οι μαθητές πολλές φορές επέστρεφαν στο προηγούμενο στάδιο ή και πριν από αυτό χωρίς να έχουν ολοκληρώσει τον κύκλο. Επίσης, κάποια στάδια και κάποιες μεταβάσεις δεν γινόντουσαν αφού οι μαθητές απέρριπταν τα μοντέλα τους πριν παράξουν κάποιο αποτέλεσμα. Στις παρατηρήσεις των Blum και Ferri (2009) συνηγορούν και άλλες έρευνες όπως αυτές των Haines και Crouch (2013), του Leiß (2007) και τηςDoerr (2007).

Τα Στάδια ή οι Φάσεις του κύκλου μοντελοποίησης δεν είναι πάντα εύκολα διαχωρίσιμα. Αυτό συμπεραίνει η Ferri (2006) όπου επισημαίνει ότι εξαιτίας της γνωστικής οπτικής του κύκλου μοντελοποίησης η διαδικασία περιγράφεται εμπειρικά και αυτό δυσκολεύει την διάκριση των φάσεων.

Ο Galbraith (2007) περιγράφει 3 τρόπους για την θετική προσφορά της μοντελοποίησης στην εκπαίδευση, (α) η μοντελοποίηση υποκαθιστά την εκμάθηση μαθηματική γνώσης, (β) η μοντελοποίηση παρέχει στους μαθητές μαθηματική γνώση αλλά και ικανότητες χρήσιμες για την πραγματικότητα έξω από την σχολική τάξη και (γ) μοντελοποίηση στην πιο αυστηρή και τυπική μορφή της για διαχείριση δεδομένων, στατιστικών στοιχείων, δημιουργίας γραφημάτων κλπ.

Ο κύκλος μοντελοποίησης είναι χρήσιμος στην περιγραφή των δραστηριοτήτων των μαθητών όταν μοντελοποιούν μια πραγματική κατάσταση (Haines & Crouch, 2013). Ενώ οι Blum και Ferri (2009) θεωρούν τον κύκλο μοντελοποίησης των Blum και Leiß (2007) εξαιρετικά βοηθητικό για την γνωστική ανάλυση των δραστηριότητα μοντελοποίησης κατά την διάρκεια επίλυσης του προβλήματος.

3. Ερευνητικό Θέμα

3.1 Εισαγωγή

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε με στόχο να μελετήσει τις ενέργειες των μαθητών κατά την διάρκεια επίλυσης ενός ανοιχτού και ρεαλιστικού προβλήματος που αφορά την κίνηση ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου με σκοπό την εύρεση του μήκους της διαδρομής του. Συγκεκριμένα, οι μαθητές παρακολούθησαν, μέσα από ένα βίντεο, την προσπάθεια του οδηγού της Formula 1, Lewis Hamilton, ώστε να κάνει τον ταχύτερο γύρο σε μια πίστα. Οι πληροφορίες που μας παρείχε το βίντεο ήταν η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή του Lewis Hamilton για τον γύρο αυτό. Ζητούμενο για τους μαθητές είναι να επιλέξουν μια από τις πέντε αριθμητικές τιμές που τους δίνονταν (4.5Km, 4.6Km, 4.55Km, 4.7Km, 4,65Km) η οποία θα εκφράζει το συνολικό μήκος της πίστας.

Οι μαθητές έπρεπε να συνδέσουν έννοιες από τα Μαθηματικά και την Φυσική. Η σύνδεση των δύο επιστημονικών πεδίων, των Μαθηματικών και της Φυσικής, στην παραδοσιακή διδασκαλία είτε δεν γίνεται καθόλου είτε αποφεύγεται από τους διδάσκοντες είτε γίνεται σπάνια. Πολλοί ερευνητές έχουν εξάγει θετικά συμπεράσματα για τις έννοιες των Μαθηματικών όταν αυτές συνδέονται με έννοιες της Φυσικής, ειδικά για θέματα ανάλυσης (Blum & Niss, 1989; Gravemeijer & Doorman, 1999; Michelsen, 2006; Doorman & Gravemeijer, 2009; Ivanjek et.al., 2016).

Το πρόβλημα ήταν επιπλέον και ανοιχτό ως προς τους τρόπους λύσης και προσέγγισης. Επομένως, δίνει ευκαιρίες στους μαθητές να κάνουν εικασίες, να διερευνήσουν και ίσως να ανακαλύψουν νέες έννοιες όπως να επανεφεύρουν την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

3.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Η βασική εστίαση της έρευνας είναι στις προσπάθειες των μαθητών να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα που τους τέθηκε, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο ανέπτυξαν και εξέλιξαν την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα η παρούσα έρευνα σκοπεύει να απαντήσει στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1^{o} Ερώτημα: Ποιες προσπάθειες μοντελοποίησης αναπτύχθηκαν από τους μαθητές για την επίλυση του προβλήματος;

2^{o} Ερώτημα: Με ποιο τρόπο οι μαθητές ανέπτυξαν και εξέλιξαν το μαθηματικό μοντέλο της αριθμητικής ολοκλήρωσης;

3^{o} Ερώτημα: Ποιοι παράγοντες επηρέασαν θετικά τους μαθητές στη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος;

4. Μεθοδολογία

4.1 Η Ερευνητική Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μια διδασκαλία δύο διδακτικών ωρών, διάρκειας 45΄ και 50΄ λεπτών τον Απρίλιο του 2019. Το τμήμα αποτελούταν από πέντε μαθητές της Β΄ Λυκείου, εκτός ωραρίου και αφού είχε ολοκληρωθεί η ύλη της Β΄ Λυκείου για την σχολική χρονιά 2018-2019. Είναι μια μελέτη περίπτωσης ομάδας μαθητών η οποία αποτελούταν από τέσσερα κορίτσια και ένα αγόρι. Στον παρακάτω Πίνακα 4.1 παρουσιάζεται το προφίλ των μαθητών.

4.2 Οι συμμετέχοντες

Πίνακας 4.1. Προφίλ Μαθητών

Μαθητές	Κατεύθυνση	Μαθηματικά	Φυσική
Ίριδα	Οικονομικών	Καλό επίπεδο	Μέτριο επίπεδο
Ντίνα	Οικονομικών	Καλό επίπεδο	Χαμηλό επίπεδο
Αναστασία	Οικονομικών	Μέτριο επίπεδο	Χαμηλό επίπεδο
Δέσποινα	Θετικών	Καλό επίπεδο	Καλό επίπεδο
Γιώργος	Θετικών	Καλό επίπεδο	Καλό επίπεδο

Οι μαθητές είχαν μέτριες αλλά και καλές επιδόσεις στα Μαθηματικά. Είχαν όλοι τις βασικές απαιτούμενες γνώσεις Μαθηματικών για την διδασκαλία, όπως γνώση εύρεσης εμβαδού ευθύγραμμων χωρίων, συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων, αλλά και εύρεσης μέσου όρου. Ως προς τις απαιτούμενες γνώσεις Φυσικής οι δύο μαθητές θα ακολουθήσουν κατεύθυνση θετικών σπουδών όπου περιλαμβάνεται το μάθημα της Φυσικής ενώ οι άλλοι τρεις θα ακολουθήσουν κατεύθυνση οικονομικών σπουδών όπου δεν θα περιλαμβάνεται το μάθημα της Φυσικής και επομένως οι πρώτοι δυο ήταν καλύτεροι στις επιδόσεις τους στην Φυσική.

Οι μαθητές τοποθετήθηκαν σε διάταξη Π ώστε να είναι εφικτό να συνεργαστούν με ευκολία, αλλά και να μπορούν όλοι να παρακολουθήσουν τον πίνακα. Χρησιμοποιήθηκαν εποπτικά μέσα όπως φορητός ηλεκτρονικός υπολογιστής με προβολέα όπου οι μαθητές έπρεπε να μπορούν να παρακολουθήσουν το προβαλλόμενο υλικό στον πίνακα.

4.3 Τα ερευνητικά δεδομένα

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην διδασκαλία δύο διδακτικών ωρών και διάρκειας 90΄ λεπτών συλλέχθηκαν προς ανάλυση τα παρακάτω ερευνητικά δεδομένα:

1. Αρχεία ήχου από την μαγνητοφώνηση της διδασκαλίας.
2. Αρχεία εικόνας από την μαγνητοσκόπηση της διδασκαλίας.
3. Φύλλα εργασίας των μαθητών.
4. Σημειώσεις του εκπαιδευτικού - ερευνητή.

Μετά την συλλογή τα δεδομένα αναλύθηκαν και στην Ενότητα 4.4 παρουσιάζεται με λεπτομέρεια ο τρόπος ανάλυσης.

Έγινε ηχογράφηση και μαγνητοσκόπηση της διδασκαλίας με λεπτομερή και αναλυτική απομαγνητοφώνηση (26 σελίδες και 7500 λέξεις). Το μαγνητοσκοπημένο υλικό ήταν χρήσιμο, ώστε οι κινήσεις και οι χειρονομίες των μαθητών να αξιοποιηθούν στην ανάλυση των δεδομένων. Οι μαθητές ήταν αμήχανοι στην αρχή της διδασκαλίας, εξαιτίας της μαγνητοσκόπησης αλλά και της ηχογράφησης, αφού οι συνθήκες ήταν πρωτόγνωρες γι' αυτούς. Στην συνέχεια όμως φάνηκε να μην τους επηρεάζει το διαφορετικό περιβάλλον στην τάξη. Στην ανάλυση εκτός από το παραπάνω ψηφιακό υλικό με το απομαγνητοφωνημένο κείμενο χρησιμοποιήθηκαν και φύλλο εργασίας σε κάθε μαθητή ξεχωριστά. Επομένως, ο συνδυασμός και η συλλογή των παραπάνω στοιχείων βοήθησε στην ανάλυση των δεδομένων ώστε να έχει ο ερευνητής όσο το δυνατόν πληρέστερη εικόνα για τις ενέργειες των μαθητών είτε αυτές είναι λεκτικές είτε είναι χειρονομίες είτε είναι παραγωγή σημειώσεων στο φύλλο εργασίας. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με το πρόγραμμα Atlas.ti.

4.4 Οργάνωση της ερευνητικής διαδικασίας (συνεργασία με εκπαιδευτικούς των Φυσικών επιστήμων)

Προηγήθηκαν της έρευνας αυτής για την βελτίωση των δραστηριοτήτων συναντήσεις με εκπαιδευτικούς των Φυσικών επιστήμων και συγκεκριμένα της Φυσικής (δύο εβδομάδες πριν την έρευνα) αλλά πραγματοποιήθηκε και πιλοτική διδασκαλία των δραστηριοτήτων (μια εβδομάδα πριν την έρευνα) σε ομάδα πέντε μαθητών οι οποίοι είχαν ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά με τους πέντε μαθητές της έρευνας ως προς την τάξη αλλά και την ύλη που είχαν διδαχθεί. Οι συζητήσεις του ερευνητή με τους Φυσικούς ήταν τρεις με τρεις διαφορετικούς εκπαιδευτικούς Φυσικής. Αρχικά τέθηκε το πρόβλημα όπως θα δίνονταν στους μαθητές και ρωτήθηκαν οι εκπαιδευτικοί πως θα το αντιμετώπιζαν. Έπειτα, ρωτήθηκαν πως θεωρούν ότι θα αντιμετώπιζαν το πρόβλημα οι μαθητές. Σκοπός των συζητήσεων ήταν η βελτίωση της δραστηριότητας αλλά και η υπόθεση για την πιθανή συλλογιστική πορεία των μαθητών ως προς τις έννοιες της Φυσικής που θα έπρεπε να διαπραγματευτούν. Οι συζητήσεις ανέδειξαν κοινά στοιχεία από τους εκπαιδευτικούς της Φυσικής ως προς τις πιθανές σκέψεις-στρατηγικές που ενδεχομένως θα έφερναν οι μαθητές. Ως προς τον τρόπο που εκείνοι θα αντιμετώπιζαν την δραστηριότητα υπήρξε ποικιλομορφία στις απαντήσεις αλλά και στις προσεγγίσεις τους. Τελικά, οι στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές ταυτίστηκαν με αυτές που υπέθεσαν οι εκπαιδευτικοί της Φυσικής ότι θα χρησιμοποιήσουν, όπου η μια από αυτές δεν ήταν στις σκέψεις του ερευνητή πριν από τις συναντήσεις. Η πιλοτική διδασκαλία έγινε με στόχο την βελτίωση της δραστηριότητας αλλά και της διαχείρισης της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό.

Βασικές δυσκολίες ήταν: πρώτον η διαχείριση από τον εκπαιδευτικό του συνόλου του ψηφιακού – ερευνητικού και εποπτικού – διδακτικού υλικού. Δεύτερον, η ίδια η δραστηριότητα αφού ήταν ένα ανοιχτό και ρεαλιστικό πρόβλημα, όπου οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει, αλλά και ότι ο εκπαιδευτικός δεν γνώριζε από πριν τις σκέψεις που θα φέρουν οι μαθητές είτε σχετικά με το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος είτε με την σύνδεση εννοιών από την Φυσική και τα Μαθηματικά. Η πιλοτική έρευνα δεν άλλαξε την δραστηριότητα αυτή καθ' αυτή αλλά βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τον ερευνητή – εκπαιδευτικό να αναπροσαρμόσει την διαχείριση της τάξης αλλά και των υλικών, ψηφιακών και εποπτικών.

4.5 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού – ερευνητή

Ο εκπαιδευτικός – ερευνητής είναι πτυχιούχος των Μαθηματικών και ασχολείται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε φροντιστηριακό επίπεδο. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με πέντε μαθητές του. Σε όλη την δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός προσπάθησε να μην έχει καθοδηγητικό ρόλο ως προς τις στρατηγικές που έφερναν οι μαθητές αλλά να ενθαρρύνει τους μαθητές να σκεφτούν και να εφαρμόσουν τις ιδέες τους. Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού γίνονταν κυρίως με διευκρινιστικές ερωτήσεις αλλά και με επισήμανση σημείων ώστε να συζητηθούν στην τάξη. Επίσης, υπήρξε προσπάθεια για καλλιέργεια συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών ώστε να επιχειρηματολογήσουν για τις ιδέες τους αλλά και να εξηγήσουν τον συλλογισμό τους είτε σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες είτε με τις έννοιες της Φυσικής είτε με το ρεαλιστικό πλαίσιο τους προβλήματος. Βασικός άξονας της διδασκαλίας ήταν να δημιουργηθεί ένα κατάλληλο περιβάλλον για διερεύνηση ώστε οι μαθητές να «μάθουν» μέσω της επανεφεύρεση και της ανακάλυψης στο πνεύμα της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

4.6 Το Πρόβλημα

Αρχικά οι μαθητές παρακολούθησαν το βίντεο και έπειτα τους δόθηκε το παρακάτω ανοιχτό πρόβλημα:

Το βίντεο που παρακολουθήσατε ήταν η προσπάθεια του οδηγού της Formula 1 Lewis Hamilton ώστε να κάνει τον ταχύτερο γύρο σε μια πίστα. Οι πληροφορίες που μας παρείχε το βίντεο ήταν η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή του Lewis Hamilton για τον γύρο αυτό. Μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της πίστας της ;

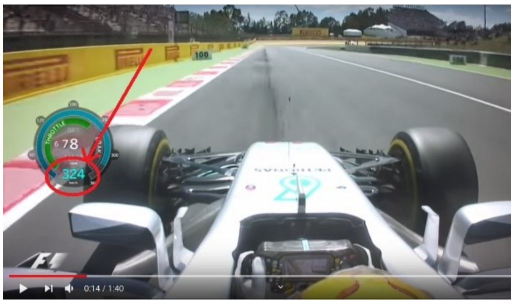
Η σωστή απάντηση είναι μια από τις παρακάτω:

(Α) 4.500m (Β) 4.600m (Γ) 4.550m (Δ) 4.700m (Ε) 4,650m

Η «Formula1» είναι ο κορυφαίος διαγωνισμός ταχύτητας στον κόσμο με αγωνιστικά μονοθέσια αυτοκίνητα και ο Lewis Hamilton είναι ένας από τους διασημότερους και καλύτερους οδηγούς στον κόσμο.

Το βίντεο οι μαθητές το παρακολούθησαν στον πίνακα της τάξης μέσω του προβολέα που ήταν συνδεδεμένος με τον φορητό υπολογιστή. Υπήρχε και η δυνατότητα μέσω του εκπαιδευτικού που χειριζόταν τον υπολογιστή να μπορούν δουν στο πρόγραμμα GeoGebra το γράφημα που ήθελαν αλλά και να μπορούν να υπολογίσουν εμβαδά ευθύγραμμων χωρίων. Οι μαθητές έπρεπε να διερευνήσουν το ανοιχτό πρόβλημα που τους δόθηκε ώστε να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης συνδυάζοντας γνώσεις από τα Μαθηματικά και την Φυσική. Δεν δόθηκε κάποιο άλλο υλικό στους μαθητές σε αυτή την φάση της δραστηριότητας ώστε να μην καθοδηγηθούν.

Στο βίντεο οι μαθητές είχαν ως δεδομένα την στιγμιαία ταχύτητα (σε χιλιόμετρα ανά ώρα) (βλ. Εικόνα 4.2) του αγωνιστικού αυτοκινήτου στο ειδικό εικονίδιο και τον χρόνο ανά δευτερόλεπτο (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) από την χρονική διάρκεια του βίντεο (βλ. Εικόνα 4.3). Επίσης, στο ειδικό εικονίδιο εμφανίζονταν το γκάζι (επιταχυντής), που απεικονίζεται με πράσινο χρώμα (βλ. Εικόνα 4.4), και το φρένο (επιβραδυντής), που απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα (βλ. Εικόνα 4.5), που πατούσε ο οδηγός.



Εικόνα 4.2. Στιγμιαία Ταχύτητα

Εικόνα 4.3. Χρονική διάρκεια

Εικόνα 4.4. Ειδικό εικονίδιο (Α)

Εικόνα 4.5. Ειδικό εικονίδιο (Β)

Τα υλικά που ήταν διαθέσιμα από τον ερευνητή για τους μαθητές ήταν:

(1) Ο υπολογιστής τσέπης σε περίπτωση που τον ζητούσαν.

Ο υπολογιστής τσέπης δόθηκε στους μαθητές όταν ξεκίνησαν τους υπολογισμούς για την μετατροπή της ταχύτητας από χιλιόμετρα ανά ώρα (km/h) σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/s). Αλλά χρησιμοποιήθηκε και στον υπολογισμό της μέσης τιμής των ταχυτήτων.

(2) Ο Πίνακας για συμπλήρωση τιμών ταχύτητας – χρόνου δόθηκε από τον ερευνητή όταν οι μαθητές χρειάστηκε να οργανώσουν τις ταχύτητες ανά χρονική (βλ. Πίνακα 4.6).

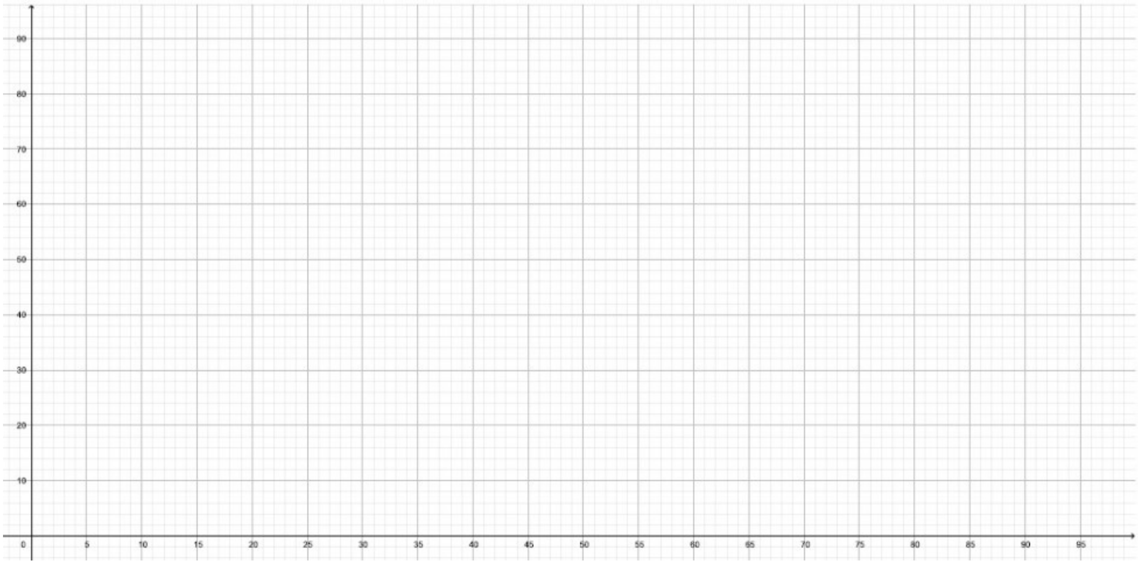
Πίνακας 4.6. Άδειος Πίνακας

(3) Ο Πίνακας όπου απεικονίζονταν ο χρόνος για κάθε δευτερόλεπτο και η ταχύτητα σε μονάδες μέτρησης km/h (χιλιόμετρα ανά ώρα) και σε m/s (μέτρα ανά δευτερόλεπτο) δόθηκε όταν οι μαθητές ήθελαν να συλλέξουν από το βίντεο περισσότερα δεδομένα για την ταχύτητα και τον χρόνο, κάτι που θα ήταν υπερβολικά χρονοβόρο. Ο ερευνητής δεν γνώριζε ποιες χρονικές στιγμές θα ζητούσαν οι μαθητές ούτε αν θα σκέφτονταν την μετατροπή από km/h σε m/s, οπότε τους έδωσε όλες τις πληροφορίες για την διευκόλυνση των υπόλοιπων ενεργειών τους (βλ. Πίνακα 4.7).

Πίνακας 4.7. Πίνακας Τιμών

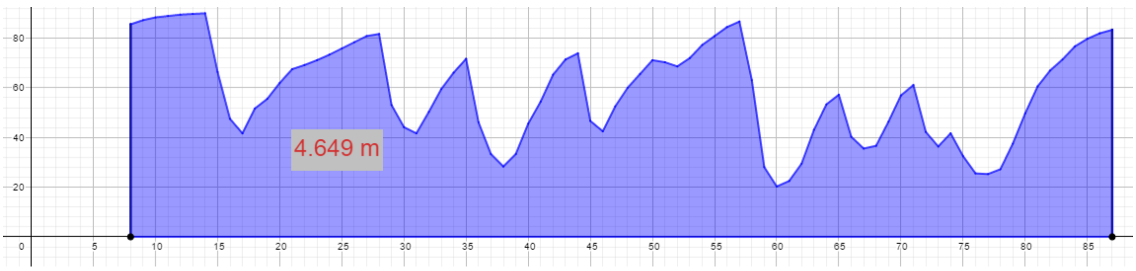
Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)
8	308	85,56	28	294	81,67	48	216	60,00	68	132	36,67
9	314	87,22	29	191	53,06	49	236	65,56	69	167	46,39
10	318	88,33	30	159	44,17	50	256	71,11	70	205	56,94
11	320	88,89	31	150	41,67	51	253	70,28	71	220	61,11
12	322	89,44	32	181	50,28	52	247	68,61	72	152	42,22
13	323	89,72	33	214	59,44	53	259	71,94	73	131	36,39
14	324	90,00	34	238	66,11	54	278	77,22	74	150	41,67
15	239	66,39	35	258	71,67	55	291	80,83	75	117	32,50
16	171	47,50	36	166	46,11	56	304	84,44	76	92	25,56
17	150	41,67	37	120	33,33	57	312	86,67	77	91	25,28
18	186	51,67	38	102	28,33	58	227	63,06	78	98	27,22
19	200	55,56	39	120	33,33	59	101	28,06	79	135	37,50
20	223	61,94	40	164	45,56	60	73	20,28	80	179	49,72
21	243	67,50	41	196	54,44	61	81	22,50	81	218	60,56
22	249	69,17	42	235	65,28	62	106	29,44	82	241	66,94
23	256	71,11	43	257	71,39	63	155	43,06	83	257	71,39
24	264	73,33	44	266	73,89	64	192	53,33	84	276	76,67
25	273	75,83	45	168	46,67	65	206	57,22	85	287	79,72
26	282	78,33	46	153	42,50	66	145	40,28	86	295	81,94
27	291	80,83	47	189	52,50	67	128	35,56	87	300	83,33

(4) Ένα τετραγωνισμένο χαρτί με βαθμονομημένους άξονες (με την αναλογία x προς y να είναι $1:2$), δόθηκε στους μαθητές αφού πρώτα είχαν την ιδέα να σχεδιάσουν το γράφημα ταχύτητας – χρόνου για να υπολογίσουν το εμβαδό μεταξύ του γραφήματος, του οριζόντιου άξονα και των κάθετων ευθειών στο 8^{o} (αρχή) και 79^{o} (τέλος) δευτερόλεπτο της κίνησης (βλ. Διάγραμμα 4.8).

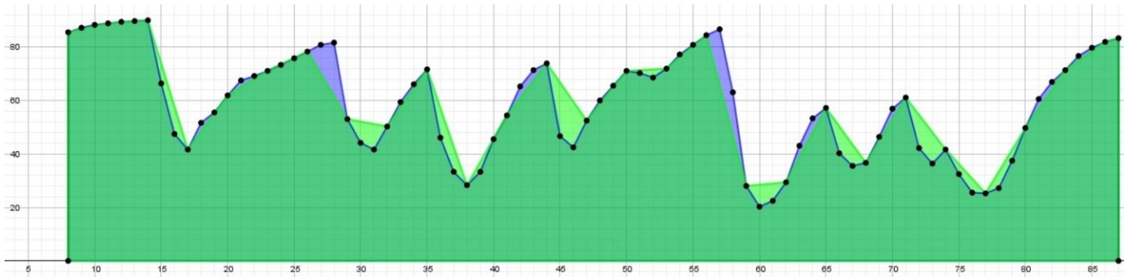


Διάγραμμα 4.8. Γράφημα άδειο

Τέλος, για τον υπολογισμό των εμβαδών χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Geogebra. Οι μαθητές επέλεγαν το χρονικό διάστημα και ο εκπαιδευτικός με την ειδική λειτουργία υπολόγιζε το εμβαδό των ευθύγραμμων χωρίων (βλ. Διάγραμμα 4.9). Επίσης, το λογισμικό έδινε την δυνατότητα να εμφανίζονται δύο γραφήματα διαφορετικών διαστημάτων ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση γραφημάτων ως προς το εμβαδό τους (βλ. Διάγραμμα 4.10). Όλες οι λειτουργίες γίνονταν στο υπολογιστή και οι μαθητές τις παρακολουθούσαν μέσω του προβολέα στον πίνακα.



Διάγραμμα 4.9. Εμβαδό Γραφήματος



Διάγραμμα 4.10. Σύγκριση Γραφημάτων

Η αξιοποίηση των τεχνολογιών, δηλαδή των υπολογιστών τσέπης και του φορητού υπολογιστή σε συνδυασμό με τον προβολέα, το λογισμικό GeoGebra και το βίντεο, έγινε πρώτον για την καλύτερη διαχείριση του χρόνου για τους απαιτούμενους υπολογισμούς. Αλλά και για την προβολή γραφημάτων με μεγαλύτερη ακρίβεια και σύγκριση κάτι που θα ήταν πολύ δύσκολο και χρονοβόρο στον λευκό πίνακα. Επομένως, κανένα τεχνικό μέσο δεν χρησιμοποιήθηκε διδακτικά αλλά όλα χρησιμοποιήθηκαν για την διαχείριση της δραστηριότητας είτε από τους μαθητές είτε από τον εκπαιδευτικό.

4.7 Ανάλυση Ερευνητικών Δεδομένων

Φάσεις της Ανάλυσης

$1^{η}$ Φάση – Απομαγνητοφώνηση

Στην ανάλυση των δεδομένων κυρίαρχο ρόλο είχε το απομαγνητοφωνημένο κείμενο. Για την αποτελεσματική απομαγνητοφώνηση υπήρξε σύνθεση των δεδομένων ήχου και εικόνας, ώστε να γίνουν αντιληπτές και οι χειρονομίες των μαθητών ώστε να ενταχθούν, όσο το δυνατόν, στο κείμενο.

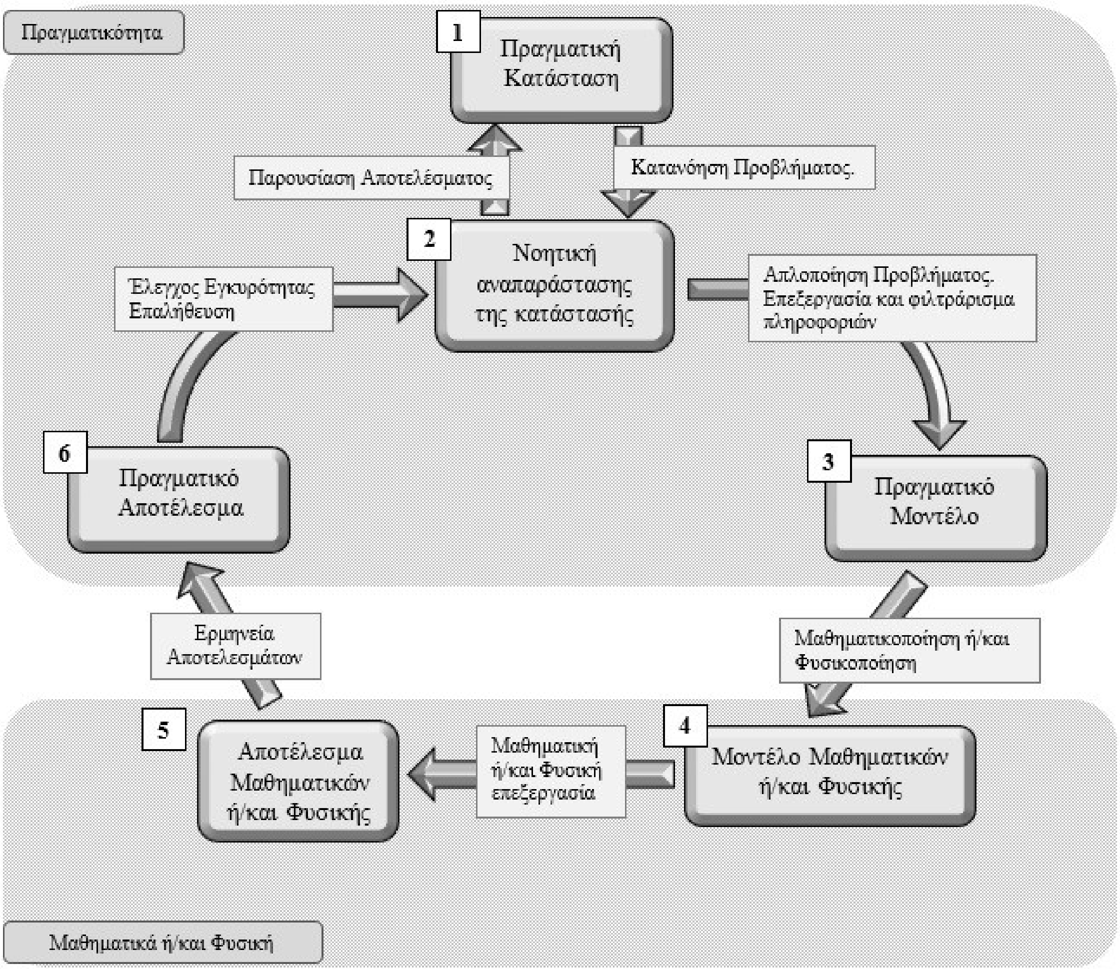
$2^{η}$ Φάση – Ανάλυση με το πρόγραμμα Atlas.ti.

Στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Atlas.ti. στο οποίο εισήχθησαν το κείμενο και τα αρχεία ήχου και εικόνας ώστε να ξεκινήσει το βασικό στάδιο της ανάλυσης. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε διεξοδικά και αναλύοντας γραμμή - γραμμή το κείμενο χρειάστηκε πολλές φορές να ανατρέξουμε στο ηχητικό, στο βίντεο της διδασκαλίας αλλά και στα φύλλα εργασίας των μαθητών. Η ανάλυση είχε δυναμικό χαρακτήρα αφού έχοντας ως βάση το κείμενο που είχε παραχθεί από τα αρχεία ήχου και εικόνας έπρεπε να επιστρέψουμε ξανά στα αρχεία αυτά ώστε να παρατηρηθούν λεπτομέρειες που δεν ήταν δυνατό να αποτυπωθούν στο κείμενο. Η ανάλυση συνεχίστηκε με κωδικοποίηση των δεδομένων. Σ' αυτή την φάση της Ανάλυσης η ερευνητική μας εστίαση ήταν στις έννοιες Μαθηματικών και Φυσικής που έφερναν οι μαθητές και στο αν και στο πως συνέδεαν αυτές τις έννοιες. Έτσι αναζητήθηκαν κώδικες που να αφορούν αναφορές των μαθητών σε Φυσική (π.χ. περιγραφή κίνησης) και

Μαθηματικά (π.χ. χρήση της έννοιας του εμβαδού κλπ.). Στη συνέχεια αναγνωρίσαμε ότι οι μαθητές συνέδεσαν έννοιες Μαθηματικών και Φυσικής μέσα από διαδικασίες μοντελοποίησης. Αυτό έστρεψε το ερευνητικό μας ενδιαφέρον στην διερεύνηση του κύκλου μοντελοποίησης. Παρόλα αυτά ορισμένοι κώδικες που αναγνωρίστηκαν σε αυτή τη φάση χρησιμοποιήθηκαν για να απαντήσουμε στο 2ο και στο 3ο ερευνητικό ερώτημα.

3η Φάση – Εφαρμογή του κύκλου μοντελοποίησης

Βασικό εργαλείο σε αυτή τη φάση ανάλυσης ήταν ο κύκλος μοντελοποίησης που ακολουθούσαν οι μαθητές. Όλες οι προσπάθειες και οι ιδέες των μαθητών αναλύθηκαν με βάση τον κύκλο μοντελοποίησης ώστε να είναι γίνουν κατανοητά τα μοντέλα και οι διαδικασίες μοντελοποίησης που σκέφτηκαν είτε αυτά εφαρμόστηκαν είτε αυτά απορρίφθηκαν.



Σχήμα 4.11. Κύκλος Μοντελοποίησης

Αλλά και για να γίνουν αντιληπτές οι αλλαγές των μοντέλων ώστε να φανούν οι λόγοι εξέλιξης και βελτίωσης των διαδικασιών μοντελοποίησης όπως και οι λόγοι μετάβασης από τη μια διαδικασία μοντελοποίησης στην άλλη. Στο Σχήμα 4.11 παρουσιάζεται ο κύκλος μοντελοποίησης των Blum και Leiß (2007) με μια τεχνική διαφοροποίηση του σχήματος ώστε στο σχήμα να είναι δυνατό να αλλαχθούν οι ετικέτες στα στάδια και στις μεταβάσεις για καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας μοντελοποίησης.

Στον παρακάτω Πίνακα 4.12 σε πλήρη αντιστοιχία με τον κύκλο μοντελοποίησης του Σχήματος 4.11 γίνεται αρίθμηση των σταδίων και των μεταβάσεων. Η αρίθμηση αυτή χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση ώστε να αναγνωριστεί στις δραστηριότητες των μαθητών πότε και αν βρίσκονται σε κάποιο στάδιο του κύκλου μοντελοποίησης αλλά επίσης πότε και αν και πότε βρίσκονται στην διαδικασία μετάβασης από ένα στάδιο σε ένα άλλο.

Πίνακας 4.12. Στάδια και Μεταβάσεις Κύκλου Μοντελοποίησης.

6 Στάδια	
1	Πραγματική Κατάσταση
2	Νοητική Αναπαράσταση της Πραγματικής Κατάστασης
3	Πραγματικό Μοντέλο
4	Μοντέλο Μαθηματικών ή/και Φυσικής
5	Αποτέλεσμα Μαθηματικών ή/και Φυσικής
6	Πραγματικό Αποτέλεσμα
7 Μεταβάσεις	
1-2	Κατανόηση της Πραγματικής Κατάστασης
2-3	Απλοποίηση Προβλήματος/Επεξεργασία και Φιλτράρισμα Πληροφοριών/Δόμηση
3-4	Μαθηματικοποίηση ή/και Φυσικοποίηση
4-5	Μαθηματική ή/και Φυσική Επεξεργασία και Εφαρμογή
5-6	Ερμηνεία Αποτελέσματος
6-2	Επαλήθευση/Ελεγχος εγκυρότητας
2-1	Παρουσίαση Αποτελέσματος

4$^{\eta}$ Φάση – Ανάλυση της εξέλιξης της διαμέρισης χρόνου

Η ανάλυση με το πρόγραμμα Atlas.ti. βοήθησε την κωδικοποίηση των δεδομένων. Η κωδικοποίηση έγινε στο Atlas.ti. με βασικό κωδικό την διαμέριση του συνολικού χρόνου. Η διαμέριση χωρίστηκε στους παρακάτω κώδικες:

Δ_{ν} : Διαμέριση πλάτους ν δευτερολέπτων, για παράδειγμα Δ_6 είναι η διαμέριση 6 δευτερολέπτων.

Δ_K : Διαμέριση πλάτους που εξαρτάται από το είδος της κίνησης, δηλαδή η επιλογή του πλάτους της διαμέρισης δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από ο είδος της κίνησης, επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη.

Στην συνέχεια αναγνωρίστηκαν υπό-κώδικες για τους παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη της διαμέρισης. Οι κώδικες αυτοί ήταν η επικοινωνία, το ρεαλιστικό πλαίσιο, οι συνδέσεις Μαθηματικών και Φυσικής και η ακρίβεια. Το ρεαλιστικό πλαίσιο και οι συνδέσεις Μαθηματικών και Φυσικής ήταν κώδικες που είχαν προκύψει από την ανάλυση πριν την εφαρμογή των κύκλων μοντελοποίησης ενώ η επικοινωνία και η ακρίβεια προέκυψαν μετά.

P_{Δ} : Ρεαλιστικό πλαίσιο

E_{Δ} : Επικοινωνία

$M\Phi_{\Delta}$: Μαθηματικά και Φυσική

A_{Δ} : Ακρίβεια

Η ανάλυση της εξέλιξης της διαμέρισης και η αναγνώριση των παραγόντων προέκυψε αφού αναγνωρίστηκαν ξεκάθαρα οι διαδικασίες μοντελοποίησης και οι κύκλοι μοντελοποίησης από την 3$^{\eta}$ φάση.

Στο επόμενο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης που λεπτομερώς εξηγήθηκε παραπάνω ως προς τον τρόπο, την κωδικοποίηση αλλά και τις φάσεις της.

5. Αποτελέσματα

5.1 Οι προσπάθειες μοντελοποίησης που ανέπτυξαν οι μαθητές

Ο στόχος των μαθητών ήταν να βρουν έναν τρόπο να υπολογίσουν την συνολική απόσταση της πίστας της Formula 1. Οι τρεις πρώτες ιδέες τους ήταν αποκλειστικά στο πεδίο της Φυσικής, όπου και οι τρεις απορρίφθηκαν από τους μαθητές πριν εφαρμοστούν. Αρχικά συμμετέχουν πολύ πιο ενεργά ο Γιώργος και η Δέσποινα, οι μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης, ενώ η Ίριδα και η Ντίνα δείχνουν να δυσανασχετούν με την εμπλοκή της Φυσικής στο πρόβλημα. Όλοι οι μαθητές εκτός ίσως του Γιώργου ήταν αρχικά αμήχανοι καθώς δεν είχαν αντίστοιχη προηγούμενη εμπειρία. Στην συνέχεια ξεπεράστηκαν οι όποιες αντιστάσεις και άρχιζαν να εμπλέκονται όλοι με την διερεύνηση του προβλήματος. Ακόμα και οι μαθήτριες που δυσανασχέτησαν στην εμπλοκή της Φυσικής συμμετείχαν ενεργά στην μελέτη των διαδικασιών μοντελοποίησης και των εννοιών της Φυσικής.

Στην ανάλυση των δεδομένων με τον κύκλο μοντελοποίησης μελετήθηκαν οι διαδικασίες μοντελοποίησης που έφεραν οι μαθητές στη διάρκεια της επίλυσης του ρεαλιστικού αυτού προβλήματος. Κάποιες απορρίφθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές και στην θέση τους εμφανίστηκαν νέες. Κάποιες άλλες εμφανίστηκαν και εξελίχθηκαν στην διάρκεια της δραστηριότητας.. Η δραστηριότητα είχε κάποια βασικά στοιχεία όπως το ρεαλιστικό και ανοιχτό πρόβλημα ως προς τον τρόπο λύσης και προσέγγισης. Αλλά και την σύνδεση των πεδίων των Μαθηματικών και της Φυσικής σε ένα πλαίσιο ομαδικής εργασίας χωρίς το πλαίσιο να είναι διατυπωμένο ξεκάθαρα στους μαθητές.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων που συλλέχθηκαν ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Βασικό εργαλείο για την ανάλυση ήταν ο κύκλος μοντελοποίησης που ακολουθούσαν οι μαθητές. Όλες οι προσπάθειες και οι ιδέες των μαθητών αναλύθηκαν με βάση τον κύκλο μοντελοποίησης ώστε να είναι γίνουν κατανοητές οι διαδικασίες μοντελοποίησης που σκέφτηκαν είτε αυτές εφαρμόστηκαν είτε αυτές απορρίφθηκαν. Αλλά και για να γίνουν αντιληπτές οι αλλαγές των διαδικασιών μοντελοποίησης ώστε να φανούν οι λόγοι εξέλιξης, βελτίωσης των διαδικασιών μοντελοποίησης όπως και οι λόγοι μετάβασης από τη μια διαδικασία μοντελοποίησης στην άλλη.

5.1.1 1η Προσπάθεια Μοντελοποίησης: Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή στο σύνολό της και η χρήση των αντίστοιχων τύπων της Φυσικής

Ο σκοπός των μαθητών ήταν να βρουν έναν τρόπο να υπολογίσουν την συνολική απόσταση της πίστας της Formula 1. Οι τρεις πρώτες ιδέες τους ήταν αποκλειστικά στο πεδίο της Φυσικής, όπου και οι τρεις απορρίφθηκαν από τους μαθητές πριν εφαρμοστούν. Αρχικά συμμετέχουν πολύ πιο ενεργά ο Γιώργος και η Δέσποινα, οι μαθητές της Θετικής

Κατεύθυνσης, ενώ η Ίριδα και η Ντίνα δείχνουν να δυσανασχετούν με την εμπλοκή της Φυσικής στο πρόβλημα. Όλοι οι μαθητές εκτός ίσως του Γιώργου ήταν αμήχανοι καθώς δεν είχαν αντίστοιχη προηγούμενη εμπειρία. Στην συνέχεια ξεπεράστηκαν οι όποιες αντιστάσεις και άρχιζαν να εμπλέκονται όλοι με την διερεύνηση του προβλήματος. Ακόμα και οι μαθήτριες που δυσανασχέτησαν στην εμπλοκή της Φυσικής συμμετείχαν ενεργά στην μελέτη των διαδικασιών μοντελοποίησης και των εννοιών της Φυσικής.

Ο Γιώργος εκφράζεται πρώτος ερμηνεύοντας την κίνηση του αγωνιστικού αυτοκινήτου τοποθετεί το πρόβλημα στο πεδίο της Φυσικής αναγνωρίζοντας το είδος της κίνησης.

<u>Μ1 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 1</u>

> **Εκπαιδευτικός** λοιπόν τι παρατηρήσατε;
>
> **Γιώργος** παρατηρήσαμε πότε επιταχύνει και πότε επιβραδύνει [...] δεν ήταν ομαλά επιταχυνόμενη. Δηλαδή όταν έπιασε 300 και για ενάμισι δευτερόλεπτο είχε συνέχεια 300. Ενώ σε άλλες φάσεις δηλαδή στα 240 περίπου σε ένα δευτερόλεπτο είχε αυξηθεί κατά 30 χιλιόμετρα ανά ώρα. Δεν μπορούμε να πάρουμε τους τύπους της Φυσικής
>
> **Εκπαιδευτικός** γιατί;
>
> **Γιώργος** γιατί δεν είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Είναι σκέτο επιταχυνόμενη ή σκέτο επιβραδυνόμενη.

Μέσω της περιγραφής αυτής ο Γιώργος απορρίπτει την επίλυση του προβλήματος με τύπους της Φυσικής αφού από την ερμηνεία της κίνησης προκύπτει ότι δεν έχουμε ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, δηλαδή παρατηρεί ότι δεν έχει σταθερή επιτάχυνση. Βέβαια δεν εξηγεί ποιους τύπους της Φυσικής και ειδικότερα της Κινηματικής εννοεί. Η πρώτη διαδικασία μοντελοποίησης του Γιώργου έμεινε σε πολύ αρχικό στάδιο και απορρίφθηκε από τον ίδιο χωρίς οι άλλοι μαθητές να εκφράσουν κάποιο γνώμη. Η αιτία της απόρριψης οφείλεται στην περιορισμένη εικόνα που είχε ο μαθητής ως προς την εφαρμογή των τύπων της Φυσικής που γνωρίζει.

Στην δεύτερη προσπάθεια ο Γιώργος προσπαθεί να εφαρμόσει την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ). Παρατηρεί ότι στο 8^{o} δευτερόλεπτο όπου ξεκινά ο οδηγός την προσπάθειά του γνωρίζει την ταχύτητα, χαρακτηρίζει $t_0 = 8sec$ και $v_0 = 304$χλμ/ώρα δηλαδή τα θεωρεί αρχικές συνθήκες. Με αυτό το επιπλέον χαρακτηριστικό προτείνει την εφαρμογή της ΑΔΜΕ. Ενώ προσπαθεί να αιτιολογήσει την επιλογή της ΑΔΜΕ απορρίπτει το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ). Αφού όπως εξηγεί δεν έχει σταθερή ταχύτητα το μονοθέσιο και άρα απορρίπτει το ΘΜΚΕ. Στην συνέχεια απορρίπτει και την ΑΔΜΕ αιτιολογώντας ότι χρειάζεται να γνωρίζει την μάζα αυτοκινήτου και οδηγού.

M1– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ2

Εκπαιδευτικός δηλαδή;

Γιώργος είναι η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειες. ΘΜΚΕ δεν ξέρω αν μπορούμε να πάρουμε γιατί η ταχύτητα δεν είναι σταθερή. Από τη στιγμή που άλλοτε επιταχύνει και άλλοτε επιβραδύνει.

[…]

Εκπαιδευτικός Γιώργο η ιδέα που είχες πριν με την ΑΔΜΕ τι χρειάζεται για την προχωρήσεις;

Γιώργος χρειαζόμαστε να βρούμε ξεχωριστά να ξέρουμε τη μάζα του αυτοκινήτου μαζί με τον οδηγό. χμμμμ την ξέρουμε;

Εκπαιδευτικός δεν τη γνωρίζουμε.

Η δεύτερη προσπάθεια μοντελοποίησης έμεινε σε αρχικό στάδιο όπως και η προηγούμενη οι διαδικασία μοντελοποίησης ενώ απορρίφθηκε η πρότασή του με τα θεωρήματα της Φυσικής από τον ίδιο αφού δεν είχε επαρκή δεδομένα.

5.1.2 2η Προσπάθεια Μοντελοποίησης: Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή ανά διαστήματα επιταχυνόμενης και επιβραδυνόμενης κίνησης

Στην τρίτη προσπάθεια μοντελοποίησης για πρώτη φορά συμμετέχει και άλλος μαθητής, στην προκειμένη περίπτωση η Αναστασία. Για πρώτη φορά εμφανίζεται έννοια Μαθηματικών, η έννοια της διαμέρισης. Η προσπάθεια αυτή είναι εξέλιξη της προηγούμενης αφού προτείνουν την εφαρμογή θεωρήματος ΘΜΚΕ της Φυσικής ανά διαστήματα.

M2– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ1

Αναστασία δεν μπορούμε να το σπάσουμε σε χρονικές στιγμές;

[…]

Γιώργος να το περνάμε ανά διαστήματα.

Αναστασία ναι αυτό

Γιώργος δηλαδή όσο κάνει επιταχυνόμενη την πρώτη φορά (*εννοεί στην αρχή*) να το πάρουμε αυτό ως ένα διάστημα και να εφαρμόσουμε κάποιο θεώρημα και μετά για επιβραδυνόμενη.

[…]

Αναστασία μέχρι να πατήσει φρένο είναι επιταχυνόμενη. Οπότε μπορούμε μέχρι εκείνη τη στιγμή να πάρουμε ΘΜΚΕ, που είπε ο Γιώργος.

Γιώργος ναι αλλά δεν είναι η επιτάχυνση σταθερή. Δεν νομίζω ότι μπορούμε να πάρουμε τους τύπους της ευθύγραμμης ομαλής.

[…]

Γιώργος και δεν είναι και ευθύγραμμη πάντως ξέρουμε ότι αφού ξεκίνησε από το 8 τώρα είναι στο 14 έχει κάνει 6 δευτερόλεπτα.

Η συνεργασία των δύο μαθητών, του Γιώργου και της Αναστασίας εξέλιξε ουσιαστικά τη 1η διαδικασία μοντελοποίησης εισάγοντας την έννοια της διαμέρισης του χρόνου ανάλογα με την κίνηση ($Δ_K$). Η απόρριψη της διαδικασίας μοντελοποίησης έγινε πάλι από τον Γιώργο με την αιτιολόγηση ότι η εφαρμογή των θεωρημάτων και των τύπων της Φυσικής δεν εφαρμόζονται αφού όπως παρατήρησε και περιέγραψε δεν έχουν σταθερή επιτάχυνση αλλά ούτε και ευθύγραμμη κίνηση.

5.1.3 3η Προσπάθεια Μοντελοποίησης: Σύνδεση της μέσης ταχύτητας με την μέση τιμή των ταχυτήτων για διάφορες διαμερίσεις του χρόνου

Η τρίτη προσπάθεια ξεκινά πάλι από τον Γιώργο αλλά και από την Δέσποινα, οι οποίοι προτείνουν την εύρεση μιας μέσης τιμής για τις ταχύτητες. Χωρίς να εξηγήσουν πως θα χρησιμοποιήσουν την μέση τιμή των ταχυτήτων που θα βρουν, προσπαθούν να επιλέξουν μια διαμέριση χρόνου ώστε έπειτα να επιλέξουν τις χρονικές στιγμές για τις ταχύτητες που θα συλλέξουν για την εύρεση της μέσης τιμής των ταχυτήτων. Τελικά επιλέγεται η διαμέριση έξι δευτερολέπτων ($Δ_6$) χωρίς να είναι απόλυτα σύμφωνοι όλοι οι μαθητές. Για πρώτη φορά εφαρμόζουν μια διαδικασία μοντελοποίησης που επέλεξαν. Στην διαδικασία εφαρμογής προκύπτει η ανάγκη μετατροπής της ταχύτητας από χιλιόμετρα ανά ώρα (km/h) σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/s), όπου μετά από συνεργασία των μαθητών ολοκληρώνεται επιτυχημένα. Στην συνέχεια ο Εκπαιδευτικός παρεμβαίνει με ερώτηση ώστε να δείξουν οι μαθητές πως σκοπεύουν να προχωρήσουν και μετά πάλι από συνεργασία καταλήγουν στην χρήση τύπου της Φυσικής:

$$« απόσταση = ταχύτητα \times χρόνος ».$$

Εδώ ουσιαστικά οι μαθητές χρησιμοποιούν τον τύπο της μέσης ταχύτητας:

$$« Συνολική\ απόσταση = μέση\ ταχύτητα \times συνολικός\ χρόνος »,$$

στην θέση της μέσης ταχύτητας θα αντικαταστήσουν την μέση τιμή των ταχυτήτων που έχουν βρει. Έχοντας ολοκληρώσει τα τρία βασικά στοιχεία που χρειάζονται η διαδικασία μοντελοποίησής τους είναι έτοιμη. Αυτό αποτελείται από δυο Μαθηματικά μοντέλα, την μέση τιμή και την διαμέριση, και από ένα μοντέλο Φυσικής , τον τύπο της Φυσικής.

<u>Μ3– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ1</u>

Δέσποινα παίρνουμε όλες τις τιμές μαζί και τις διαιρούμε δια το πόσες είναι.

Εκπαιδευτικός και την απόσταση πως θα την υπολογίσουμε;

Δέσποινα ταχύτητα δια χρόνο (*λέει διστακτικά*) όχι;;;

Αναστασία$Δx$ προς $Δt$;

Ίριδα επί δεν είναι;

Εκπαιδευτικός για θυμηθείτε ποιος είναι ο τύπος της μέσης ταχύτητας;

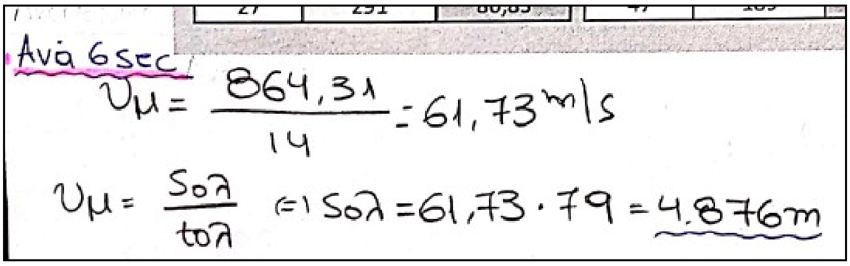
Γιώργος θα πάρουμε τον τύπο x = u επί t.

Αρχικά η Δέσποινα εξηγεί αναλυτικά πως θα βρει την μέση τιμή και έπειτα προσπαθεί να την συνδέσει με την Φυσική με λάθος τρόπο. Είναι η πρώτη προσπάθεια σύνδεσης

Μαθηματικών και Φυσικής αν θεωρήσουμε ότι και την έννοια της διαμέρισης δεν την έχουν εφαρμόσει ακόμα. Η σύνδεση της έννοιας της μέσης τιμής των ταχυτήτων από τα Μαθηματικά και της έννοιας της μέσης ταχύτητας από την Φυσική. Δηλαδή:

$$v_{μέση\ τιμή} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_k}{k} \text{και} S_{ολικό} = v_{μέση} \times t_{ολικό}$$

όπου $v_{μέση\ τιμή}$ η μέση τιμή των ταχυτήτων, όπου v_k η ταχύτητα για τις χρονικές στιγμές που θα επιλεχθούν, όπου k το πλήθος των διαμερίσεων, όπου $S_{ολικό}$ η συνολική απόσταση, όπου $t_{ολικό}$ ο συνολικός χρόνος. Εφαρμόζουν τη παραπάνω διαδικασία μοντελοποίησης και αρχικά παίρνουν 14 τιμές ταχυτήτων για την εύρεση της μέσης τιμής των ταχυτήτων και έπειτα πολλαπλασιάζουν την ταχύτητα με τον συνολικό χρόνο, ο οποίος είναι 79 δευτερολέπτων, όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.1.



Εικόνα 5.1. Φύλλο εργασίας Ίριδας

Απορρίπτουν το αποτέλεσμα εξαιτίας της απόκλισης από τα δοσμένα αποτελέσματα του προβλήματος

<u>Μ3– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ2</u>

Αναστασία 5.285μετρα...
Εκπαιδευτικός έχει επιλογή το πρόβλημα 5.285;
όχι από όλους
Αναστασία πολύ μακριά...

Η εφαρμογή της διαδικασίας μοντελοποίησης έγινε πετυχημένα αφού συνδύασαν τα δύο μοντέλα των Μαθηματικών (διαμέριση και Μέση Τιμή) και το ένα της Φυσικής (Μέση Ταχύτητα). Στην διαδικασία της μοντελοποίησης είχαν όλοι οι μαθητές ενεργή συμμετοχή βοηθώντας στην εφαρμογή των μοντέλων. Στην έννοια της διαμέρισης έχουν εκφραστεί επιφυλάξεις από τους μαθητές για την επιλογή της και φαίνεται να είναι η μόνη διαδικασία μοντελοποίησης που έχει προοπτική για άμεση εξέλιξη. Ο βασικός στόχος των μαθητών είναι να λύσουν το πρόβλημα επιλέγοντας μια απάντηση από τις δοσμένες. Στην διάρκεια αυτής της μοντελοποίησης οι μαθητές έχουν συνδέσει μόνο την έννοια της διαμέρισης με την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Στην συνέχεια έχουμε εξέλιξη της διαδικασίας μοντελοποίησης με τη διαμέρισης. Αφού από την διαμέριση 6 δευτερολέπτων που είχαν επιλέξει και απέρριψαν στην προηγούμενη προσπάθεια επιλέγουν διαμέριση ανάλογα με την κίνηση ($Δ_K$) και έπειτα διαμέριση 1 δευτερολέπτου (Δ_1). Κεντρικό ρόλο είχε η συζήτηση και διαπραγμάτευση των μαθητών για τις διαμερίσεις και την ακρίβεια, την οποία συνέδεσαν ακόμη ισχυρότερα με το πλήθος των διαμερίσεων.

<u>Μ3– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ3</u>

Δέσποινα θα μπορούσαμε θα μπορούσαμε ανάλογα με την κίνηση.
Εκπαιδευτικός δηλαδή;
Δέσποινα αυτό που είπαν τα παιδιά από την αρχή μέχρι πριν πατήσει φρένο . Μετά που κάνει επιβραδυνόμενη.

Οι μαθητές τώρα βασίστηκαν σε προηγούμενες παρατηρήσεις όπου θεώρησαν ότι η διαμέριση ανάλογα με την κίνηση (Δ_K) είναι καλύτερη από την διαμέριση των έξι δευτερολέπτων (Δ_6) .

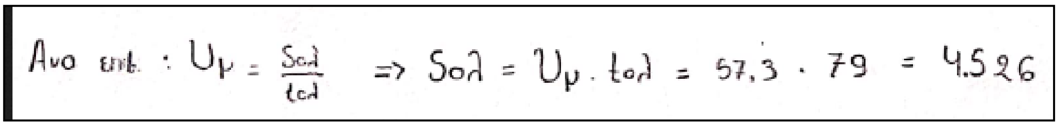
Στο παρακάτω απόσπασμα οι μαθητές θεωρούν ότι το μεγαλύτερο πλήθος σημείων θα επιφέρει και μεγαλύτερη ακρίβεια. Επομένως με στόχο την όσο το δυνατόν πιο ακριβή προσέγγιση της συνολικής απόστασης οι μαθητές εξελίσσουν σιγά σιγά τον ισχυρισμό ότι όσο περισσότερες διαμερίσεις έχουν τόσο πιο ακριβής θα είναι η προσέγγισή τους και άρα τόσο πιθανότερο να βρουν σωστό αποτέλεσμα.

<u>Μ3– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ4</u>

Δέσποινα να ρωτήσω κάτι κανονικά όσο πιο πολλά διαστήματα σταματάμε για να πάρουμε μια μέτρηση τόσο καλύτερη δεν θα είναι η μέτρηση για το ν μέσο;;; τόσο πιο κοντά στην πραγματική;
Εκπαιδευτικός Δεν ξέρω; οι υπόλοιποι τί λέτε;
Ίριδα Τι είπε;
Εκπαιδευτικός πες το ξανά Δέσποινα
Δέσποινα δεν ξέρω αν θα το εκφράσω σωστά...ότι όσο περισσότερες τιμές πάρουμε....και τις διαιρέσουμε με το πλήθος τους, τόσο πιο σωστή θα είναι η μέτρηση.
Ίριδα τόσο πιο ακριβής.
[…]
Εκπαιδευτικός να ρωτήσω. Γιατί θεωρείτε ότι όσο πιο μικρά θα είναι τα διαστήματα οι μετρήσεις θα είναι πιο ακριβείς.
Δέσποινα γιατί........βλέπεις το πόσο αυξάνεται και το πόσο μειώνεται. πιο ... ξέρω εγώ .... με μεγαλύτερη ακρίβεια...οπότε άμα τα δεις όλα μαζί μετά...
Εκπαιδευτικός οι υπόλοιποι καταλαβαίνετε γιατί θα είναι πιο ακριβές, όπως λέει η Δέσποινα...;
Γιώργος αν πάρουμε μόνο δύο τιμές την αρχική και την τελική και η αρχική είναι 100 και η τελική είναι 200 τότε η μέση ταχύτητα θα είναι 150. άμα πάρουμε...20 τιμές καθ' όλη την διάρκεια...θα πάρουμε κάποια πιο ακριβή τιμή.
Δέσποινα ναι μπορεί να επιταχύνει κάπου και να επιβραδύνει κάπου περισσότερο.

Αρχικά η Δέσποινα αναφέρει τον ισχυρισμό έχοντας την Ίριδα να συνηγορεί υπέρ του ισχυρισμού της Δέσποινας βελτιώνοντάς τον. Αν και έχει διατυπωθεί ο ισχυρισμός δεν υπάρχει σαφής αιτιολόγηση γιατί αυτός ισχύει. Ο Εκπαιδευτικός επαναφέρει τον ισχυρισμό ώστε να εμφανιστούν πιθανές αιτιολογήσεις και επιχειρήματα. Η Δέσποινα εκφράζει θεωρητικά την αιτιολόγηση ότι τα μικρότερα διαστήματα θα τις δώσουν περισσότερες πληροφορίες για την κίνηση και άρα θα έχει μεγαλύτερη ακρίβεια ο υπολογισμός της. Ενώ ο Γιώργος εξελίσσει το επιχείρημα της Δέσποινας φέρνοντας ένα παράδειγμα.

Τα παραπάνω δημιούργησαν στους μαθητές την εικόνα ότι χρειάζονται όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία. Αυτό λειτούργησε θετικά ώστε να επιλέξουν αρχικά την διαμέριση ανάλογα με την κίνηση ($Δ_K$) αφού συμπεριελάμβανε τα επιχειρήματα της Δέσποινας και του Γιώργου, δηλαδή να έχουν όσο μπορούν περισσότερες πληροφορίες για την κίνηση. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι οι χρονοβόροι υπολογισμοί έπαιξαν καθοριστικό ρόλο για να μην μεταβούν άμεσα στην διαμέριση 1 δευτερολέπτου ($Δ_1$) αφού θα είχαν περισσότερες πράξεις να κάνουν.



Εικόνα 5.2. Φύλλο εργασίας Ντίνας

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία μοντελοποίησής τους όπως φαίνεται και στην Εικόνα 5.2 ερμηνεύουν τα αποτελέσματα με βάση το πρόβλημα και τα απορρίπτουν εξαιτίας της απόκλισης που έχουν.

Οι μαθητές έχουν κατασκευάσει και εφαρμόσει τη διαδικασία μοντελοποίησης δύο φορές, η προηγούμενη με διαμέριση ($Δ_6$) και τώρα με διαμέριση ($Δ_K$). Αμφιβολίες έχουν μόνο για την επιλογή της διαμέρισης για την οποία φαίνεται να καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το μεγαλύτερο πλήθος θα συνεπάγεται και μεγαλύτερη ακρίβεια της προσέγγισης. Η συγκεκριμένη διαδικασία μοντελοποίησης δεν έχει απορριφθεί από τους μαθητές αφού υπάρχει δυνατότητα εξέλιξης της διαμέρισης, σε διαμέριση ($Δ_1$).

Σ' αυτή την προσπάθεια εκτός από την λύση του προβλήματος το διακύβευμα για της μαθητές είναι της και η επιβεβαίωση της εικασίας της ότι το μεγαλύτερο πλήθος διαμερίσεων θα φέρει και μεγαλύτερη ακρίβεια στο αποτέλεσμα. Ο ανασταλτικός παράγοντας των χρονοβόρων υπολογισμών θα αρθεί με την βοήθεια του εκπαιδευτικού όπου οι υπολογισμοί θα γίνουν στον ηλεκτρονικό υπολογιστή και όχι με το χέρι από της μαθητές, αφού της έχουν καταλήξει στην επιλογή της διαμέρισης ($Δ_1$).

<u>Μ3– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ5</u>

Αναστασία τώρα να τα κάνουμε όλα;
Γιώργος από δευτερόλεπτο, σε δευτερόλεπτο.

[…]

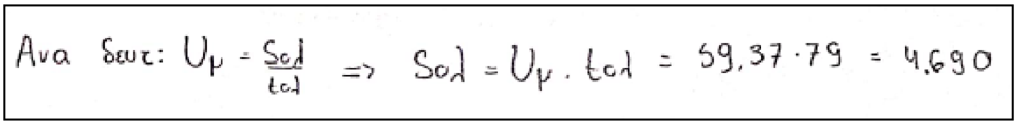
Αναστασία να το πάρουμε ανά 1 δευτερόλεπτο; (*λίγο νευριασμένη με το αποτέλεσμα)*

Γιώργος ναι να πάρουμε πιο ακριβή μέση τιμή.

[…]

Ντίνα να πάρουμε και ανά δευτερόλεπτο να είμαστε σίγουροι;

Οι μαθητές έχοντας εφαρμόσει τις διαδικασίες μοντελοποίησης με τις διαμερίσεις (Δ_6) και (Δ_K) τώρα ακολουθούν τον ισχυρισμό που είχαν διατυπώσει νωρίτερα όπου όσο περισσότερα σημεία έχουν τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα πετύχουν. Αρχικά η Αναστασία και ο Γιώργος προτείνουν διστακτικά να εφαρμόσουν την διαμέριση (Δ_1). Αφού έχει προηγηθεί η οριστική απόρριψη της διαμέρισης (Δ_K) τότε η Αναστασία επιμένει πιο δυναμικά στην διαμέριση (Δ_1). Η πρότασή της ενισχύεται από τον Γιώργο ο οποίος εκφράζει και την αιτία επιλογής της (Δ_1) που δεν είναι άλλη από την ακρίβεια. Έπειτα και η Ντίνα εκφράζεται για την διαμέριση (Δ_1) με τρόπο που δείχνει την εντύπωση ότι ο υπολογισμός θα είναι σίγουρα πιο ακριβής από της προηγούμενους.


Ανα δευτ: $U_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \Rightarrow S_{o\lambda} = U_\mu \cdot t_{o\lambda} = 59.37 \cdot 79 = 4.690$

Εικόνα 5.3. Φύλλο εργασίας Ντίνας

Τελικά, η διαμέριση (Δ_1) της έδωσε ένα αποτέλεσμα με 4.690 μέτρων με απόκλιση 30 μέτρων από μια επιλογή του προβλήματος που ήταν 4.660 μέτρα (βλ. Εικόνα 5.3). Αν και θα μπορούσαν να το θεωρήσουν μια σχετικά καλή προσέγγιση την απέρριψαν. Ο Γιώργος άμεσα θέλοντας να βελτιώσει τη διαδικασία μοντελοποίησης προτείνει να επιλεγούν της οι ταχύτητες. Η πρόταση αυτή του Γιώργου είναι μια διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της ορισμένου ολοκληρώματος. Η πρόταση αυτή βέβαια απορρίπτεται από τον ίδιο ως ανέφικτη εξαιτίας των πάρα πολλών τιμών.

<u>Μ3– ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 6</u>

Γιώργος αν παίρναμε για κάθε μεταβολή της ταχύτητα ένα ένα για πόσο μεταβάλλεται…; Κατά 1 χλμ./ώρα; Θα ήταν πολύ χρονοβόρο.

Εκπαιδευτικός ανά πόσα δευτερόλεπτα δηλαδή;

Γιώργος δεν χρειάζεται να ξέρουμε τα δευτερόλεπτα, δηλαδή να παίρνουμε απλά της τιμές της ταχύτητας.

Εκπαιδευτικός δεν πρέπει να σταματάω το βίντεο της;

Γιώργος όχι θα βλέπουμε ότι πάει από…να πήραμε εδώ πέρα…έχει πόσες τιμές…να πάει 85…αααααα θα είναι και δεκαδικοί, θα πάρει πάρα της τιμές, αλλά αυτό θα έβγαινε με ακρίβεια, ξέρω εγώ, άμα παίρναμε την κάθε τιμή της ταχύτητας για όλη την διάρκεια και βρίσκαμε…

Αν και δεν ήταν επιτυχημένες οι προσπάθειες τους με τη παραπάνω διαδικασία μοντελοποίησης, η έννοια της διαμέρισης εξελίχθηκε από τους μαθητές όπου τελικά κατέληξαν και στο συμπέρασμα ότι το πλήθος των διαμερίσεων είναι συνδεδεμένο με την ακρίβεια των υπολογισμών.

5.1.4 4η Προσπάθεια Μοντελοποίησης: Εύρεση της αριθμητικής τιμής του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου

Η τέταρτη προσπάθεια ξεκινάει από τον Γιώργο ο οποίος σκέφτεται να κατασκευάσουν το γράφημα μιας συνάρτησης. Ανακαλεί από τις γνώσεις του στην Φυσική ότι χρησιμοποιούσαν διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου. Αφού κατασκεύασαν το γράφημα ταχύτητας – χρόνου διαπραγματεύτηκαν δύο σημαντικά στοιχεία. Το πρώτο ήταν η διαμέριση του χρόνου που έπρεπε να επιλέξουν και κατέληξαν στην διαμέριση 5 δευτερολέπτων (Δ_5). Το δεύτερο ήταν το είδος του γραφήματος, δηλαδή αν θα είναι ευθύγραμμο (τεθλασμένη γραμμή) ή καμπυλόγραμμο (καμπύλη γραμμή). Τελικά επιλέγουν να υπολογίσουν το εμβαδόν του ευθύγραμμου χωρίου (το ευθύγραμμο χωρίο είναι αυτό που βρίσκεται ανάμεσα στην τεθλασμένη γραμμή των σημείων (v, t) χρόνου-ταχύτητας που επέλεξαν οι μαθητές και στον άξονα $x'x$) ως προσέγγιση του εμβαδού κάτω από την καμπύλη ανάμεσα δηλαδή στην καμπύλη, τον οριζόντιο άξονα και την αρχική και τελική χρονική στιγμή (στο καμπυλόγραμμο χωρίο). Αφού το εφάρμοσαν με διαμέριση (Δ_5) στην συνέχεια το εφάρμοσαν διαδοχικά για τις διαμερίσεις Δ_4 , Δ_3 , Δ_2 , Δ_1. Οι μαθητές ανέπτυξαν τη διαδικασία της διαμέρισης που υπάρχει στις προηγούμενες προσπάθειες, τη διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού κάτω από καμπύλη η οποία θα γίνει με αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο τραπεζίου και τα είδη γραφημάτων που σχεδιάζουν οι μαθητές. Ο Γιώργος φέρνει από το μάθημα της Φυσικής τη γνώση ότι το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε γράφημα ταχύτητας – χρόνου είναι ίσο αριθμητικά με την συνολική απόσταση που διήνυσε το αγωνιστικό αυτοκίνητο.

<u>1ο Στάδιο :</u> Η σημασία εύρεσης του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου.

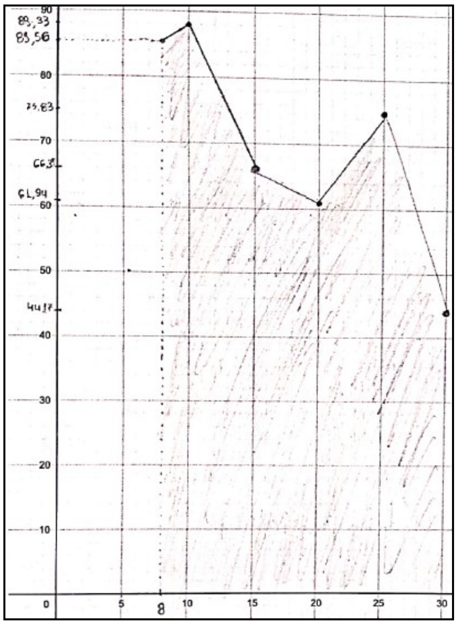
<u>Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 1</u>

> **Εκπαιδευτικός** σωστά όμως όλοι είναι σε σχέση με την μέση ταχύτητα... ας σκεφτούμε κάτι άλλο.
>
> **Γιώργος** να φτιάξουμε μια συνάρτηση […] να κάνουμε τον κάτω να είναι ο άξονας του χρόνου και ο $y'y$ ο άξονας των ταχυτήτων
>
> […]
>
> **Αναστασία** θέλουμε να βρούμε το μήκος.
>
> **Γιώργος** ααααα αν κάνουμε σε διάγραμμα και το εμβαδό από αυτό να είναι αυτό που περικλείεται από αυτό που θα φτιάξουμε τέλος θα είναι το Δx(μετατόπιση).

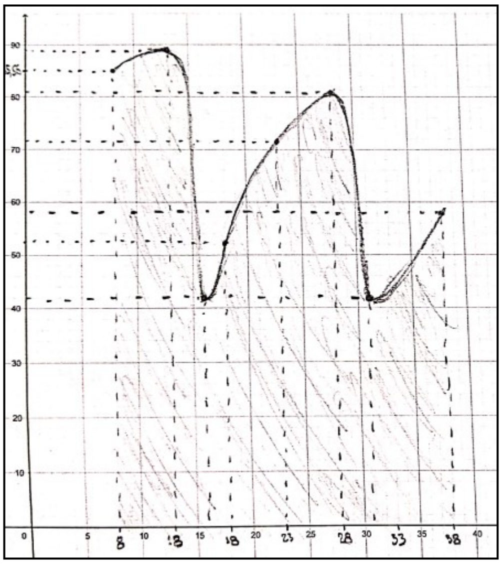
Ο Γιώργος σκέφτεται να κατασκευάσει ένα γράφημα συνάρτησης. Χωρίς να γνωρίζει κάποια συνάρτηση με τύπο, γνωρίζει όμως δύο μεγέθη την ταχύτητα και τον χρόνο που συμμεταβάλλονται και σκέφτεται να τα τοποθετήσει σε γράφημα. Ο Γιώργος ανακαλεί από τις γνώσεις του στην Φυσική ότι χρησιμοποιούσαν γραφήματα στην μελέτη της κίνησης. Για αυτό και άμεσα σκέφτεται να τα τοποθετήσει τα μεγέθη σε άξονες. Στην έκφρασή του *«να φτιάξουμε συνάρτηση»* εννοεί γράφημα συνάρτησης. Ενώ με την βοήθεια της Αναστασίας που υπενθυμίζει ότι το ζητούμενο είναι η απόσταση, ανακαλεί από την Φυσική ότι σε διαγράμματα ταχύτητας χρόνου το εμβαδό κάτω από την καμπύλη αριθμητικά είναι η συνολική μετατόπιση. Επομένως, έχουν διαμορφώσει την νέα διαδικασία μοντελοποίησης που θα εφαρμόσουν, συνδυάζοντας τις γνώσεις τους από τα Μαθηματικά και τη Φυσική.

<u>2ο Στάδιο :</u> **Η σχεδίαση διαφορετικών ειδών γραφημάτων**

Οι μαθητές έχοντας επιλέξει κάποια σημεία πάνω στα τετραγωνισμένα χαρτιά προσπάθησαν να σχεδιάσουν το γράφημα με αποτέλεσμα να αναπτύξουν δυο γραφήματα που αναπαριστούν την κίνηση του αγωνιστικού αυτοκινήτου. Το πρώτο γράφημα ήταν ευθύγραμμο με τεθλασμένη γραμμή ενώ το δεύτερο ήταν καμπυλόγραμμο γράφημα με καμπύλη γραμμή. Στην εικόνα 5.4 έχουμε το γράφημα της Ντίνας όπου έχει επιλέξει να ενώσει τα σημεία της με τεθλασμένη γραμμή. Ενώ στην εικόνα 5.5 έχουμε το γράφημα του Γιώργου που έχει ενώσει τα σημεία με καμπύλη γραμμή.



Εικόνα 5.4. Γράφημα της Ντίνας



Εικόνα 5.5. Γράφημα του Γιώργου

Η Δέσποινα, η Ντίνα και η Αναστασία σχεδίασαν με τεθλασμένη γραμμή ενώ ο Γιώργος και η Ίριδα με καμπύλη γραμμή. Η διαφοροποίηση αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο στην πορεία για την διαμόρφωση διαισθητικά του μοντέλου της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αφού στις περιπτώσεις όπως αυτή της συνεχόμενης κίνησης ενός αυτοκινήτου όπου δεν υπάρχει γνωστή συνάρτηση που να συνδέει την ταχύτητα με τον χρόνο η απόσταση δεν υπολογίζεται με ορισμένο ολοκλήρωμα αλλά με κάποια μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης.

<u>Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 2</u>

> **Γιώργος** τώρα θα είναι λίγο δύσκολο να βρούμε το εμβαδό, γιατί […] και δεν νομίζω ότι πάει με ευθείες, πάει με καμπύλες, αφού δεν είναι σταθερή η επιτάχυνση[…]εγώ το κάνω καμπύλη επειδή δεν είναι ομαλά επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη οπότε δεν θα πάει ευθεία.

Η επιλογή του Γιώργου και της Ίριδας να σχεδιάσουν το γράφημα με καμπύλη έγινε στην προσπάθειά τους να έχουν μια όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική αναπαράσταση. Όπως φαίνεται και από τα λεγόμενα του Γιώργου στο παραπάνω απόσπασμα όπου αναγνωρίζει σωστά την κίνηση ως μη ομαλά επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη και συμπεραίνει ότι δεν μπορεί να είναι ευθείες. Παρόλα αυτά αναγνωρίζουν την αδυναμία εύρεσης του εμβαδού σε καμπυλόγραμμο χωρίο, οπότε θα προχωρήσουν και εκείνοι στον υπολογισμό του εμβαδού στα γραφήματα με την τεθλασμένη γραμμή.

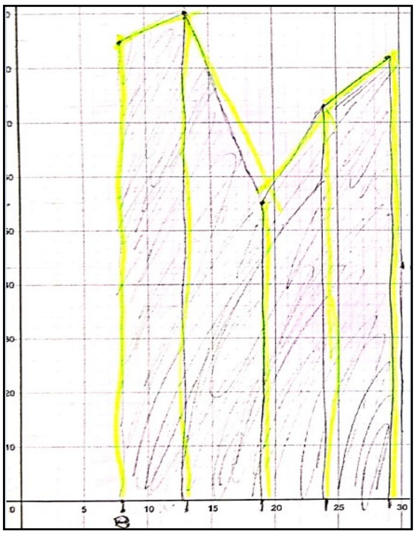
<u>3ο Στάδιο :</u> Ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού

Για τον υπολογισμό του ευθύγραμμου χωρίου οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα μετά από συζήτηση ως τραπέζια για το κάθε διάστημα που έχουν επιλέξει. Το ύψος του τραπεζίου είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην αρχική και την τελική χρονική στιγμή και οι βάσεις του είναι οι ταχύτητες στην αρχική και την τελική χρονική στιγμή που επέλεξαν.

<u>Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 3</u>

> **Εκπαιδευτικός** στα σχήματα που έχετε κάνει εμβαδό μπορείτε να βρείτε;
> **Ντίνα** κάτι μπορούμε να βρούμε, μπορούμε να το σπάσουμε.
> […]
> **Ίριδα** τώρα σχήματα, αυτό τραπέζιο. (*δείχνει από 8-10)*
> […]
> **Δέσποινα** τραπέζια.[…] $\frac{(\beta+B)\upsilon}{2}$.

Στο απόσπασμα παρατηρούμε ότι αναγνωρίζουν τα σχήματα διαμερίζοντας τον χρόνο και διαχωρίζοντας έτσι σε πολλά τραπέζια το ευθύγραμμο χωρίο, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 5.6 από το φύλλο εργασίας της Δέσποινας η οποία έχει χρωματίσει τα σύνορα των τραπεζίων. Ανακαλούν έπειτα και το τύπο υπολογισμού για το εμβαδό τραπεζίου και επομένως έχουν κατασκευάσει τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού του ευθύγραμμου χωρίου.



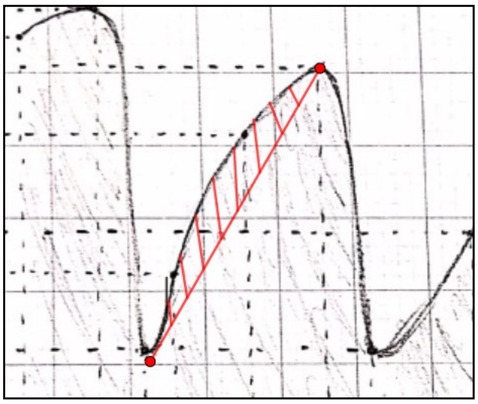
Εικόνα 5.6. Γράφημα της Δέσποινας

<u>4ο Στάδιο :</u> **Η αναζήτηση της καλύτερης προσέγγισης**

Έχοντας ως κύριο στόχο την επίλυση του προβλήματος επιλέγοντας μια από της δοσμένες τιμές για την συνολική απόσταση, οι μαθητές κατευθύνουν την σκέψη τους στο να βρουν την καλύτερη προσέγγιση ώστε να λύσουν το πρόβλημα. Στην προσπάθεια αυτή εμφανίζονται σε άτυπη ή/και διαισθητική μορφή έννοιες ανάλυσης όπως αυτή του ορίου και του ορισμένου ολοκληρώματος αλλά και διαδικασίες όπως αυτή της αριθμητικής ολοκλήρωσης και της ελαχιστοποίησης σφάλματος.

<u>Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 4</u>

> **Ίριδα** λόγω του σχήματος, γιατί το έχει κάνει ευθεία, ενώ ανάμεσα στις χρονικές στιγμές που έχει πάρει μπορεί η ταχύτητα να αυξομειώνεται, οπότε θα βγει μια προσέγγιση.
>
> […]
>
> **Γιώργος** να εδώ πέρα για παράδειγμα δείτε, εγώ το έχω βρει καμπύλη *(δείχνει την καμπύλη κοίλη)* ενώ η Δέσποινα θα βρει αυτό. *(δείχνει το ευθύγραμμο τμήμα κάτω από την καμπύλη)* […] οπότε θα κόψει αυτό το κομμάτι. *(δείχνει τον μηνίσκο)(*Εικόνα 5.7*)*



Εικόνα 5.7. Μηνίσκος

Στο παραπάνω απόσπασμα η συνύπαρξη του καμπυλόγραμμου και του ευθύγραμμου χωρίου δημιουργεί την ανάγκη στους μαθητές για σύγκριση της πραγματικότητας που στο νου τους αναπαρίσταται από την καμπύλη γραμμή και της προσέγγισής της που αναπαρίσταται από την τεθλασμένη γραμμή. Οι μαθητές έτσι κάνουν μια αφαίρεση αφού έχουν δύο γραφήματα που αναπαριστούν την πραγματικότητα και την προσέγγισή της. Επίσης τους προσφέρει και ένα επιχείρημα βασισμένο στα γραφήματα για να ισχυριστούν ότι οι ευθείες είναι προσεγγίσεις. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που φέρνει ο Γιώργος με τον μηνίσκο της Εικόνας 5.7 όπου θεωρεί ότι το εμβαδό του μηνίσκου θα λείπει από τον υπολογισμό του συνολικού εμβαδού. Σε αντίθεση με την Ίριδα που το επιχείρημά της είναι πιο διαισθητικό αφού δίνει το χαρακτηρισμό προσέγγιση εξαιτίας της έλλειψης πληροφοριών για την ταχύτητα ανάμεσα από τις επιλεγμένες χρονικές στιγμές. Κατανοούν λοιπόν ότι πρέπει τα εμβαδά των μηνίσκων να γίνουν όσο το δυνατόν μικρότερα. Ο τρόπος για να το πετύχουν αυτό είναι να έχουν την μικρότερη δυνατή διαμέριση χρόνου, συμπέρασμα που είχαν καταλήξει και στην εφαρμογή της τρίτης διαδικασίας μοντελοποίησης. Συνεχίζοντας την προσπάθεια βελτίωσης της προσέγγισης όπως εμφανίζεται και στο παρακάτω απόσπασμα θεωρούν ότι θα έχουν το καλύτερο αποτέλεσμα και άρα το μικρότερο σφάλμα μόνο αν πάρουν όλες τις χρονικές στιγμές.

<u>Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 5</u>

> **Εκπαιδευτικός** ωραία άρα πως θα μπορέσουμε την προσέγγιση που είπε πριν η **Ίριδα** να την κάνουμε καλύτερη;
> **Ντίνα** παίρνοντας όλα τα σημεία […] μόνο τότε θα ξέρουμε ακριβώς τι γίνεται […] θα θέλαμε πάρα πολύ δουλειά να κάνουμε […] θα έπρεπε να πάρουμε σημείο ανά σημείο δευτερόλεπτα ανά δευτερόλεπτα και μπορεί να βρίσκαμε μια πολύ καλή προσέγγιση.

Επομένως οι μαθητές στα τέσσερα μέρη έχουν κατασκευάσει μια διαδικασία μοντελοποίησης όπου θα υπολογίσουν το συνολικό μήκος που διήνυσε ο οδηγός του αγωνιστικού αυτοκινήτου. Ο υπολογισμός θα είναι η εύρεση του εμβαδού κάτω από το ευθύγραμμο χωρίο ως προσέγγιση του πραγματικού εμβαδού κάτω από την καμπύλη λαμβάνοντας υπόψιν ότι θα μπορούν να βελτιώσουν αυτή την προσέγγιση μικραίνοντας το πλάτος της διαμέρισης. Το παραπάνω μοντέλο είναι η αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο του τραπεζίου αντί όμως για ελαχιστοποίηση σφάλματος οι μαθητές θα επιλέξουν την ελάχιστη δυνατή διαμέριση χρόνου του ενός δευτερολέπτου, που θα μπορούσαν να διαχειριστούν με μολύβι και χαρτί (αφού ο πίνακας που τους δόθηκε ήταν ανά ένα δευτερόλεπτο) και θα εξετάσουν αν η απόκλιση – σφάλμα από τις δοθείσες απαντήσεις είναι αποδεκτή.

<u>5ο Στάδιο :</u> Ο υπολογισμός της αριθμητικής τιμής του εμβαδού με τη χρήση ψηφιακού εργαλείου

Σημαντικό μέρος για την εφαρμογή της διαδικασίας μοντελοποίησης είχε το πρόγραμμα Geogebra αφού θα ήταν χρονοβόρο και άνευ ουσιαστικής σημασίας οι υπολογισμοί να γίνονταν από τους μαθητές στο χαρτί. Πιθανόν έτσι να χάνονταν και το ενδιαφέρον από την μεριά των μαθητών. Το πρόγραμμα Geogebra προσφέρει την δυνατότητα στον χειριστή να υπολογίζει το εμβαδό ευθύγραμμων χωρίων δίνοντας τις τιμές σε πίνακα των δύο μεταβλητών, όπου στην προκειμένη περίπτωση ήταν η ταχύτητα και ο χρόνος. Ο Εκπαιδευτικός είχε εισάγει τις χρονικές στιγμές ανά ένα δευτερόλεπτο στον πίνακα οπότε ήταν αποκλειστική ευθύνη των μαθητών να επιλέξουν την διαμέριση που επιθυμούν ώστε να έχουν το αποτέλεσμα για το εμβαδό.

<u>Μ4 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 6</u>

Εκπαιδευτικός λοιπόν ανά 5...έχουμε […] 4,701
Ντίνα όχι δεν βγήκε κανένα...
Εκπαιδευτικός ας δούμε και το επόμενο ανά 4, έχουμε 4,589.
Αναστασία έχει 4,620 πιστεύω μπορούμε να βρούμε και καλύτερο.
Εκπαιδευτικός ωραία ας δούμε και τα υπόλοιπα, ανά 3, έχουμε 4,684
Ντίνα κανένα.
Εκπαιδευτικός να πάω στο ανά 2; έχουμε 4,603.
Αναστασία όχι.
Εκπαιδευτικός ανά 1, για να δούμε είναι κάποιο; έχουμε 4,649.
Αναστασία έχει 4,650.
Γιώργος 4,650.
Αναστασία το δεχόμαστε. *(καταφατικά με χαρά και ανακούφιση....)*
Εκπαιδευτικός το δεχόμαστε;
Αναστασία ναι ναι ναι ναι ....*(με πολύ χαρά...και αυτοπεποίθηση)* ναι το (δ)
γέλια και ανακούφιση....

Οι μαθητές επέλεξαν να ξεκινήσουν από την διαμέριση των πέντε δευτερολέπτων Δ_5 με την οποία είχαν σχεδιάσει και τα γραφήματά τους. Έπειτα επέλεξαν τις διαμερίσεις μειώνοντας το πλάτος τις διαμέρισης για ένα δευτερόλεπτο κάθε φορά μέχρι την διαμέριση του ενός δευτερολέπτου (Δ_1) . Η απόρριψη του κάθε υπολογισμού έχει τον ρόλο του σφάλματος το οποίο υπάρχει και στην τελευταία διαμέριση (Δ_1) και είναι ένα μέτρο, το οποίο όμως το αποδέχονται ώστε τελικά να απαντήσουν στο πρόβλημα με την απάντηση (δ) 4.650 μέτρα, ενώ η προσέγγισή του ήταν 4.649 μέτρα.

Ο Εκπαιδευτικός επαναλαμβάνοντας την ερώτηση «Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε;» προσπάθησε να κάνει τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στην δραστηριότητα και να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους. Στην προσπάθεια αυτή εμφανίστηκε όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα η έννοια του ολοκληρώματος που εμπεριέχει την έννοια του ορίου σε λεκτική και διαισθητική μορφή.

Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 7

> **Γιώργος** όχι, ότι όλα τείνουν προς αυτό, το ένα είναι μεγαλύτερο, το άλλο είναι μικρότερο και πετύχαμε μια που είναι σχεδόν ίσο με αυτό.

Ενώ στην προσπάθεια να αιτιολογήσουν τον ισχυρισμό τους ότι οι υπολογισμοί τους έφτασαν σε καλό αποτέλεσμα εξαιτίας των όλο και μικρότερων διαστημάτων, κατέληξαν σε μια άτυπη μορφή για το όριο. Η Αναστασία στο παρακάτω απόσπασμα διατυπώνει λεκτικά και άτυπα την έννοια του ορίου χρησιμοποιώντας ως επιχείρημα την ιδιαιτερότητα των αγωνιστικών αυτοκινήτων που οι αλλαγές τις ταχύτητας είναι ραγδαίες.

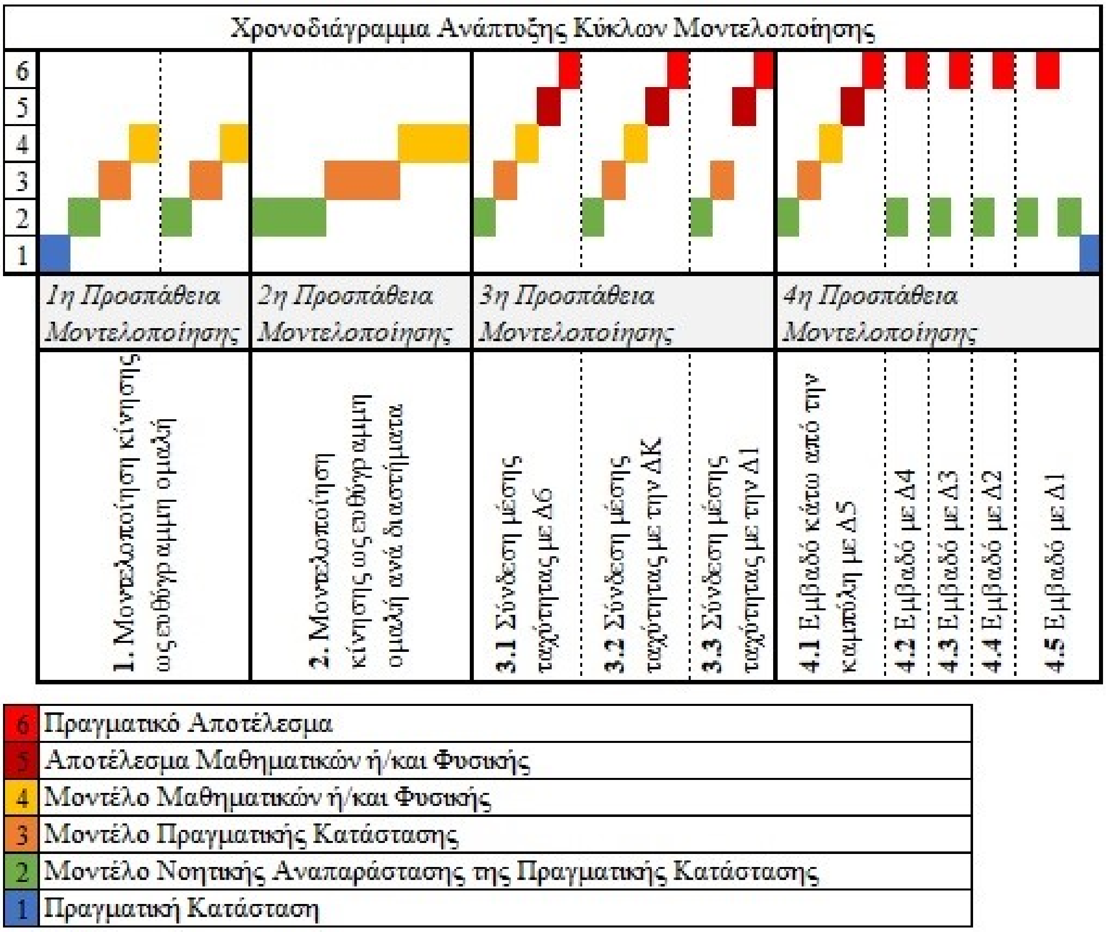
Μ4 - ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 8

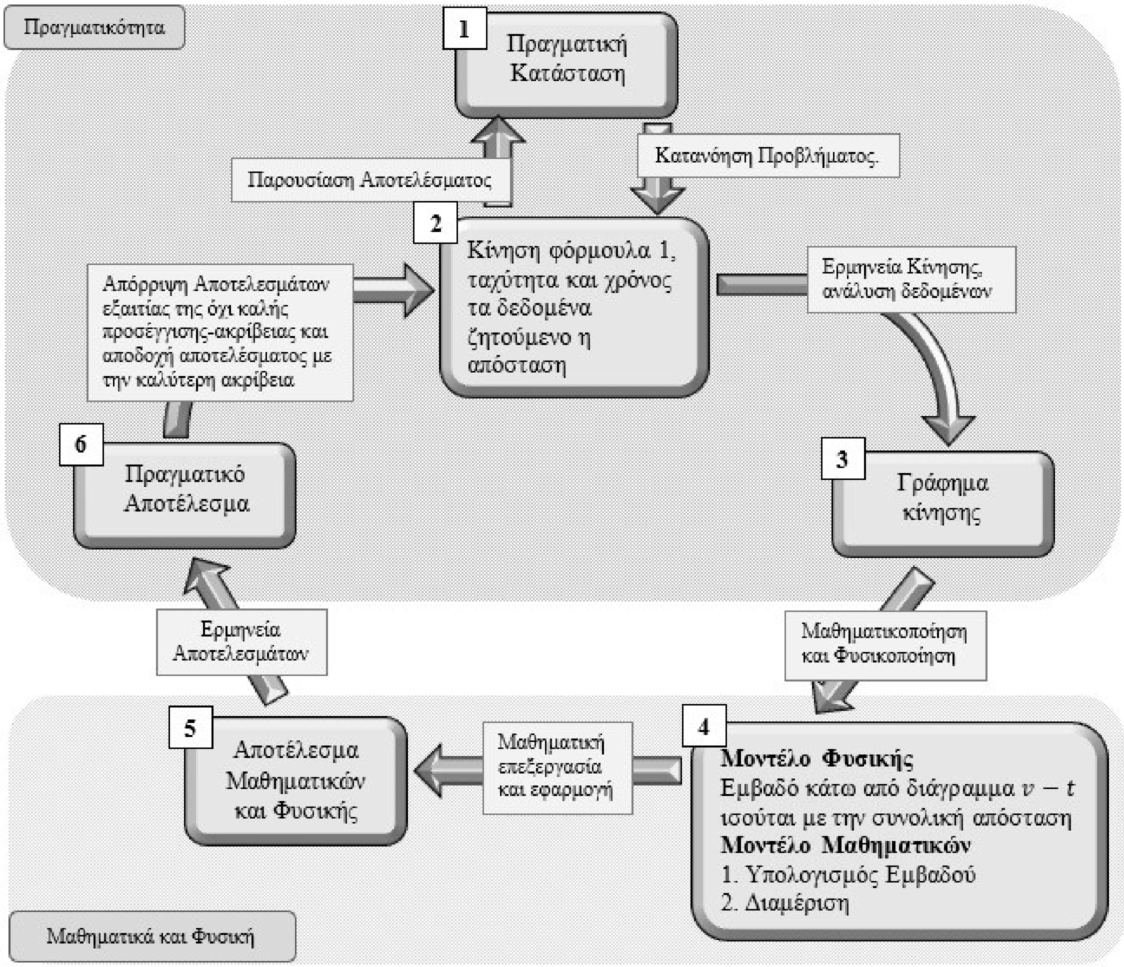
> **Εκπαιδευτικός** άρα βασίζεται στην τύχη;
>
> **Αναστασία** όχι όχι όσο πιο μικρό είναι […] γιατί αλλάζει συνεχώς η ταχύτητα του, επειδή είναι φόρμουλα οπότε όσο πιο λίγα δευτερόλεπτα πάρουμε εμείς τόσο πιο κοντά θα είμαστε…

5.2 Χρονοδιάγραμμα Μοντελοποίησης

Οι μαθητές στο πλαίσιο του ρεαλιστικού και ανοιχτού προβλήματος εφάρμοσαν το κύκλο μοντελοποίησης τέσσερις φορές. Η πρώτη ήταν χωρίς αποτέλεσμα αφού δεν ερμήνευε την συγκεκριμένη περίπτωση και οι δύο διαδικασίες μοντελοποίησης ήταν μόνο από το πεδίο της Φυσικής. Η δεύτερη ήταν χωρίς αποτέλεσμα και αυτή αλλά υπήρξε μια πρώτη σύνδεση με τα Μαθηματικά και συγκεκριμένα την διαμέριση του χρόνου. Στην τρίτη και την τέταρτη μοντελοποίηση οι μαθητές συνέδεσαν έννοιες Μαθηματικών και Φυσικής όμως στην τέταρτη επαν-εφεύρεσαν την αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο του τραπεζίου για τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από την καμπύλη το οποίο αριθμητικά ισούται με την συνολική απόσταση. Στο παρακάτω χρονοδιάγραμμα του Πίνακα 5.8 εμφανίζονται τα στάδια μοντελοποίησης από το $1^o - 6^o$ στάδιο τα οποία αναπαρίστανται με διαφορετικό χρώμα. Οι μαθητές ξεκίνησαν από το μπλε χρώμα (1^o στάδιο) και προχωρούσαν από το ένα στάδιο στο επόμενο από αριστερά προς τα δεξιά. Στο Σχήμα 5.9 παρουσιάζεται ο κύκλος μοντελοποίησης της τέταρτης διαδικασίας μοντελοποίησης.

Πίνακας 5.8. Χρονοδιάγραμμα Κύκλων Μοντελοποίησης





Σχήμα 5.9. Κύκλος 4ης Προσπάθειας Μοντελοποίησης

5.3 Παράγοντες Εξέλιξης των διαδικασιών μοντελοποίησης

Στην ανάλυση της διαδικασίας μοντελοποίησης των μαθητών παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές τις διαδικασίες μοντελοποίησης που έφερναν, τις εξέλισσαν στην διάρκεια της δραστηριότητας. Κάποιες διαδικασίες μοντελοποίησης εξελίχθηκαν περισσότερο και άλλες λιγότερο, όμως κοινός παρονομαστής ήταν οι παράγοντες εξέλιξης. Οι παράγοντες που παρατηρήθηκαν ήταν πέντε ξεκινώντας από τον πρώτο την επικοινωνία των μαθητών και την ομαδική εργασία τους. Ο δεύτερος ήταν το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος και ο τρίτος ήταν οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού που φάνηκαν να επηρεάζουν την εξέλιξη των διαδικασιών μοντελοποίησης που εμφάνιζαν οι μαθητές. Ο τέταρτος παράγοντας ήταν η χρήση των γραφικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές και ο πέμπτος αναζήτηση ακρίβειας στο αποτέλεσμά τους.

1. *Επικοινωνία*

Η διαδικασία διαμέρισης εμφανίστηκε πολύ νωρίς στην δραστηριότητα από τους μαθητές, συγκεκριμένα στη 2η προσπάθεια μοντελοποίησης, όπου προσπάθησαν να εφαρμόσουν κάποια θεωρήματα ή τύπους της Φυσικής ξεχωρίζοντας τα είδη κίνησης σε επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη κίνηση. Οι μαθητές δεν γνωρίζουν την έννοια της διαμέρισης και συνεπώς ξεκίνησαν με άτυπα μοντέλα για αυτήν.

<u>Π – Απόσπασμα Α1</u>

> **Δέσποινα** μπορούμε να πάρουμε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.
> […]
> **Αναστασία** δεν μπορούμε να το σπάσουμε σε χρονικές στιγμές;
> […]
> **Γιώργος** να το περνάμε ανά διαστήματα.
> **Αναστασία** ναι αυτό
> **Γιώργος** δηλαδή όσο κάνει επιταχυνόμενη την πρώτη φορά (*εννοεί στην αρχή*) να το πάρουμε αυτό ως ένα διάστημα και να εφαρμόσουμε κάποιο θεώρημα και μετά για επιβραδυνόμενη…

Παρατηρούμε στο παραπάνω απόσπασμα τους μαθητές με την διατύπωση των ιδεών τους δημόσια να εξελίσσουν την αρχική έκφραση «*..συγκεκριμένες χρονικές στιγμές*» που είναι διακριτά σημεία στην έκφραση «*..σπάσουμε σε χρονικές στιγμές;*» που υπονοεί κάποιου είδους διαχωρισμό και έπειτα στην έκφραση «…ανά διαστήματα» που αναλύεται αμέσως μετά ότι η επιλογή διαστημάτων δεν είναι τυχαία αφού θα την χρησιμοποιήσουν για την εφαρμογή κάποιου θεωρήματος. Η εξέλιξη αυτή παρατηρούμε ότι προήλθε από την ομαδική δουλειά και την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών.

2. *Το Ρεαλιστικό Πλαίσιο του Προβλήματος*

Το πρόβλημα που τέθηκε στους μαθητές ήταν ένα πρόβλημα όπου το ρεαλιστικό του πλαίσιο είχε σημαντικό ρόλο στις σκέψεις των μαθητών. Αντιλήφθηκαν ότι δεν μπορούσαν να αντιμετωπίσουν την πραγματική κατάσταση όπως τις καταστάσεις κίνησης που είχαν συναντήσει στην Φυσική. Χαρακτηριστικά απόσπασμα από τα λόγια της Ίριδας:

<u>Π – Απόσπασμα Β1</u>

> *«γιατί η Φυσική που κάνουμε μελετάμε τέλειες καταστάσεις, όχι πραγματικές καταστάσεις, η φόρμουλα είναι μια πραγματική κατάσταση, με την Φυσική που ξέρουμε εμείς τουλάχιστον δεν μπορούμε να τα υπολογίσουμε...».*

Το γεγονός αυτό τους βοήθησε να αναπτύξουν και να εξελίξουν προσεγγιστικές μεθόδους όπως και η αριθμητική ολοκλήρωση την οποία επαν-εφεύρεσαν και εφάρμοσαν για την τελική επίλυσης του προβλήματος. Το είδος του ρεαλιστικού προβλήματος βοήθησε ακόμη περισσότερο αφού εξέλιξε τη διαδικασία μοντελοποίησης με τη προσέγγισης και τη διαμέρισης χρόνου καταλήγοντας σε συμπεράσματα που άτυπα και διαισθητικά μεν αλλά πολύ σημαντικά δε οδηγούν σε έννοιες ανάλυσης όπως αυτή του ορίου. Χαρακτηριστικά η Αναστασία αναφέρει:

<u>Π – Απόσπασμα Β2</u>

> *«γιατί αλλάζει συνεχώς η ταχύτητα του, επειδή είναι φόρμουλα οπότε όσο πιο λίγα δευτερόλεπτα πάρουμε εμείς τόσο πιο κοντά θα είμαστε».*

Η λεκτική της διατύπωση γίνεται για να ισχυροποιήσει τον ισχυρισμό ότι μειώνοντας το πλάτος της διαμέρισης θα βελτιώνεται το αποτέλεσμά τους, όμως αποτυπώνει την έννοια του ορίου σε διαισθητική μορφή χωρίς να την γνωρίζει.

3. *Αναζήτηση της Ακρίβειας*

Η ανάγκη για ακρίβεια στο αποτέλεσμα είχε σίγουρα το έναυσμα στις δοθείσες απαντήσεις του προβλήματος. Αφού οι μαθητές αναφέρθηκαν σε αυτό όπως ο Γιώργος:

<u>Π – Απόσπασμα Γ1</u>

> **Γιώργος** τώρα αυτό το θέλει ακριβώς η κατά προσέγγιση; […] οι επιλογές βέβαια που μας δίνει είναι αρκετά ακριβείς.

Όμως σε όλη την δραστηριότητα οι μαθητές εκφράζονται με τρόπο που αναδεικνύεται για αυτούς πολύ σημαντική. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω διάλογος όπου προσπαθούν να εξηγήσουν γιατί με περισσότερες τιμές θα έχουν πιο ακριβή μέση τιμή των ταχυτήτων που θέλουν να υπολογίσουν.

<u>Π – Απόσπασμα Γ2</u>

> **Δέσποινα** δεν ξέρω αν θα το εκφράσω σωστά...ότι όσο περισσότερες τιμές πάρουμε....και τις διαιρέσουμε με το πλήθος τους, τόσο πιο σωστή θα είναι η μέτρηση.
>
> **Γιώργος** αν πάρουμε μόνο δύο τιμές την αρχική και την τελική και η αρχική είναι 100 και η τελική είναι 200 τότε η μέση ταχύτητα θα είναι 150, άμα πάρουμε 20 τιμές καθ' όλη την διάρκεια θα πάρουμε κάποια πιο ακριβή τιμή.

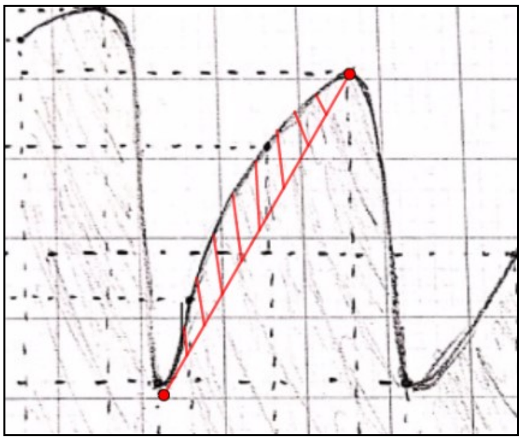
Η ανάγκη τους αυτή για μεγαλύτερη ακρίβεια αποδείχθηκε πολύ χρήσιμη αφού απέρριψαν προσεγγίσεις με μεγάλη απόκλιση και έτσι αναγκάστηκαν να βελτιώσουν τη διαμέριση του χρόνου αλλά και τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της πίστας.

4. *Παρεμβάσεις Εκπαιδευτικού*

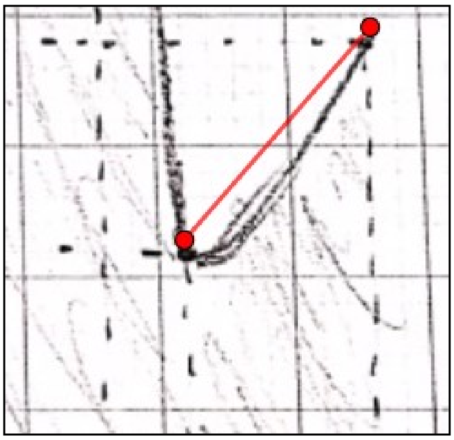
Ο εκπαιδευτικός είχε σημαντικό ρόλο στην δραστηριότητα αφού με ερωτήσεις ζητούσε από τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν και να υποστηρίξουν τις ιδέες τους. Με αυτό τον τρόπο το σύνολο των μαθητών συμμετείχε στην διαπραγμάτευση προσπαθώντας να κατανοήσει την ιδέα του συμμαθητή τους, να την βελτιώσει, να την αμφισβητήσει ακόμα και να την αποσαφηνίσει. Επιπλέον, σημαντικός παράγοντας ήταν να μην κατευθύνει τους μαθητές με τα υλικά που θα τους παρείχε. Οπότε έπρεπε να δώσει το αντίστοιχο υλικό (π.χ. τετραγωνισμένο χαρτί για γράφημα) μόνο αφού ειπώθηκε από τους μαθητές. Σε αρκετές φάσεις της δραστηριότητας οι μαθητές εξέφραζαν ιδέες είτε μόνο στον εκπαιδευτικό είτε σε κάποιον συμμαθητή τους χωρίς να έχει ακουστεί σε όλη την ομάδα. Ο εκπαιδευτικός τότε αναλάμβανε τον ρόλο είτε αναφέροντας εκείνος την ιδέα του μαθητή είτε ζητούσε από τον μαθητή να επαναλάβει την ιδέα του σε όλη την ομάδα. Τέλος, σε κάποια ζητήματα που οι μαθητές δεν κατανοούσαν κάτι που ανέφερε ο συμμαθητής τους ή ήταν αναγκαία κάποια γνωστική υπενθύμιση ο εκπαιδευτικός συνέβαλε ώστε να συνεχιστεί η δραστηριότητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στο παρακάτω απόσπασμα με την παρέμβαση του εκπαιδευτικού στον πίνακα όπου σχεδίασε ένα γράφημα συνάρτησης όπου ήταν κοίλη σε κάποιο διάστημα αλλά και κυρτή σε κάποιο άλλο ώστε να δείξει ότι οι μηνίσκοι άλλες φορές θα λείπουν και άλλες φορές θα περισσεύουν από την προσέγγιση του εμβαδού με τα τραπέζια.

<u>Π – Απόσπασμα Δ1</u>

> **Γιώργος** να εδώ πέρα για πχ, δείτε εγώ το έχω βρει καμπύλη, ενώ η Δέσποινα θα βρει αυτό (*δείχνει την ευθεία κάτω από την κοίλη καμπύλη*) […] οπότε θα κόψει αυτό το κομμάτι (*δείχνει τον μηνίσκο ανάμεσα*)
>
> **Εκπαιδευτικός** μήπως κάπου αλλού κερδίζει ... ? δηλαδή μήπως η καμπύλη είναι από κάτω κάπου....?
>
> **Γιώργος** εδώ πέρα μόνο κερδίζει ελάχιστα(*δείχνει ένα τμήμα κυρτή καμπύλη)*
>
> **Εκπαιδευτικός** ο Γιώργος λέει ότι αν έχεις δυο σημεία (*δείχνει στον πίνακα*) αν κάνει ευθεία και αν κάνεις καμπύλη ίσως είναι περισσότερο το εμβαδό *(βλ. Εικόνα 5.10*) άρα χάνεις το εμβαδό αυτό (*μηνίσκος*) και τον ρώτησα μήπως κερδίζει και σε κάποια σημεία έτσι *(βλ. Εικόνα 5.11)*



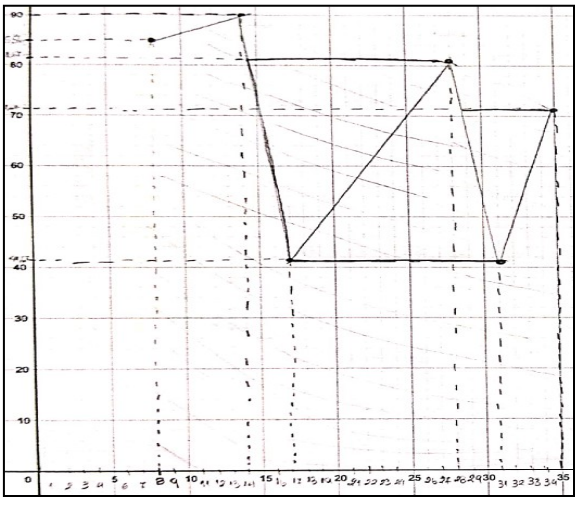
Εικόνα 5.10. Μηνίσκος σε κοίλη



Εικόνα 5.11. Μηνίσκος σε κυρτή

5. *Χρήση αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων*

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν στην διάρκεια της δραστηριότητας αρκετές φορές γραφικές παραστάσεις και με αυτό τον τρόπο οπτικοποίησαν τα μοντέλα και τα επιχειρήματά τους. Σ' αυτό συνέβαλε και η χρήση του ψηφιακού εργαλείου Geogebra ως εποπτικού μέσου όπου ο εκπαιδευτικός μπορούσε να παρουσιάσει τα γραφήματα ώστε να μπορούν οι μαθητές να συζητήσουν για αυτά και να τα συγκρίνουν. Τα γραφήματα είχαν καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη των διαδικασιών μοντελοποίησης του προβλήματος. Η χάραξη και η εποπτεία των γραφημάτων τους έδωσε την δυνατότητα να εξελίσσουν τη γνώση τους και από την διαίσθηση ή τα άτυπα επιχειρήματα να έχουν επιχειρήματα με βάση το γράφημα. Επιπλέον μετά την εμφάνιση των γραφημάτων οι μαθητές αναφέρονταν συχνά σε αυτά και έλεγχαν τους ισχυρισμούς τους ανατρέχοντας σε αυτά.



Εικόνα 5.12. Γράφημα της Αναστασίας

Στο παρακάτω απόσπασμα παρατηρούμε ότι όλοι οι μαθητές επέλεξαν πλάτος διαμέρισης πέντε δευτερολέπτων ($Δ_5$) εκτός από την Αναστασία που επέλεξε διαμέριση όπου το πλάτος εξαρτάται από την κίνηση ($Δ_K$) (βλ. Εικόνα 5.12).

<u>Π – Απόσπασμα Ε1</u>

> **Αναστασία** εγώ δεν το έκανα καν έτσι […] εγώ απλά πήρα και τις τιμές που είχαμε πάρει στην αρχή 8, 14, … που πάει γρήγορα και που αργά.
>
> […]
>
> **Ντίνα** γιατί έχει μόνο τα σκαμπανεβάσματα.
>
> **Γιώργος** τα ακρότατα […] χχμμμμ μάλλον η Αναστασία το πήρε καλύτερα […] ξέρει τα ελάχιστα έτσι η Αναστασία.

Οι υπόλοιποι μαθητές κατάλαβαν ότι το δικό τους γράφημα υστερεί σε σχέση με αυτό της Αναστασίας αφού στο γράφημά της διακρίνονται οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές. Παρατηρούμε ότι η σύγκριση των γραφημάτων τους έδωσε ένα καλύτερο γράφημα για την κίνηση με γραφικό επιχείρημα.

6. Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθούν οι δράσεις μοντελοποίησης μιας ομάδας πέντε μαθητών Β΄ Λυκείου σε μια πειραματική διδασκαλία όταν τους δόθηκε να λύσουν ένα ανοιχτό πρόβλημα κινηματικής. Το πρόβλημα διατυπώθηκε σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο σύμφωνα με την θεωρία του Freudenthal της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (RME) και περιλάμβανε έννοιες από τα Μαθηματικά και τη Φυσική. Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου λαμβάνοντας υπόψη τους δεδομένα από την παρακολούθηση της κίνησης ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1. Συγκεκριμένα, μελετάμε τα Μαθηματικά μοντέλα και τις διαδικασίες μοντελοποίησης που ανέπτυξαν οι μαθητές, την εξέλιξή τους καθώς και τους παράγοντες που επηρέασαν αυτήν την εξέλιξη.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν τέσσερις διαδικασίες μοντελοποίησης που είτε απορρίφθηκαν είτε εξελίχθηκαν στη συνέχεια από τους συμμετέχοντες. Οι διαδικασίες μοντελοποίησης ήταν (1^{η}) η θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή στο σύνολό της και η χρήση των αντίστοιχων τύπων της Φυσικής (το οποίο απορρίφθηκε) και (2^{η}) η θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή ανά διαστήματα επιταχυνόμενης και επιβραδυνόμενης κίνησης (και το οποίο επίσης απορρίφθηκε). Οι μαθητές κατέληξαν σε αδιέξοδο και τελικά απέρριψαν την εφαρμογή τύπων της Φυσικής ακόμα και όταν προσπάθησαν σε πολύ βασικό επίπεδο να διαμερίσουν την κίνηση. Εξαιτίας της ρεαλιστικής κατάστασης κατανόησαν ότι δεν μπορούν να κάνουν μια απλή εφαρμογή των τύπων σαν τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν γιατί όπως αναφέρουν χαρακτηριστικά: *«...μελετάμε τέλειες καταστάσεις όχι πραγματικές..»*. Επομένως, η μη επιτυχημένη σύνδεση Μαθηματικών εννοιών και εννοιών από την Φυσική είχε ως αποτέλεσμα την μη εφαρμογή των στρατηγικών των μαθητών, το συμπέρασμα αυτό συνάδει με τα συμπεράσματα των ερευνών του Doorman (2005), των Ivanjek et.al. (2016) και των Nguyen και Rebello (2011).

Οι επόμενες διαδικασίες μοντελοποίησης που ανέπτυξαν οι μαθητές ήταν η (3^{η}) Σύνδεση της μέσης ταχύτητας με την μέση τιμή των ταχυτήτων για διάφορες διαμερίσεις του χρόνου (εφαρμόστηκε αλλά στη συνέχεια απορρίφθηκε) και (4^{η}) Εύρεση της αριθμητικής τιμής του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου.

Στη τρίτη διαδικασία μοντελοποίησης οι μαθητές συνέδεσαν αποτελεσματικά την μέση ταχύτητα από την Φυσική με την μέση τιμή των ταχυτήτων και την διαμέριση από τα Μαθηματικά κατασκευάζοντας έτσι τη πρώτη διαδικασία μοντελοποίησης που εφάρμοσαν. Σε αυτή τη διαδικασία μοντελοποίησης παρατηρούμε ότι αρχίζει να διαμορφώνεται η διαδικασία της διαμέρισης και η έννοια της μέσης ταχύτητας. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές δημιούργησαν διαισθητικά μια σταθερή ανά διαστήματα συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου. Η στρατηγική αυτή με την μέση ταχύτητα παρατηρήθηκε και στην έρευνά του ο Doorman (2005) αλλά δεν διερευνήθηκε περεταίρω αφού δεν εμφανίστηκε στην τάξη αλλά σε ατομικές προσπάθειες των μαθητών.

Στη τέταρτη διαδικασία μοντελοποίησης οι μαθητές συνέδεσαν την έννοια της συνολικής μετατόπισης με την αριθμητική τιμή του εμβαδού που ορίζεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου του αυτοκινήτου, του οριζόντιου άξονα του χρόνου, της αρχικής και της τελικής χρονικής στιγμής. Στην ανάπτυξη της τέταρτης διαδικασίας μοντελοποίησης αναγνωρίσαμε πέντε στάδια: (α) η σημασία εύρεσης του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου, (β) η σχεδίαση διαφορετικών ειδών γραφημάτων, (γ) ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού, (δ) η αναζήτηση της καλύτερης προσέγγισης και (ε) ο υπολογισμός της αριθμητικής τιμής του εμβαδού με χρήση ψηφιακού εργαλείου. Η τέταρτη διαδικασία μοντελοποίησης είναι η αριθμητική ολοκλήρωση που μπορεί να έχει τον ρόλο της προ-έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος αλλά και ο υπολογισμός του εμβαδού μπορεί να αναπτύξει την εικόνα για την έννοια του ολοκληρώματος., κάτι που προτείνεται από διάφορους ερευνητές (Kouropatov & Dreyfus, 2014; Jones, Lim & Chandler, 2017). Αντίθετα όμως στην έρευνα του Doorman (2005) οι μαθητές δεν κατέληξαν στον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από την καμπύλη με την μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης, αλλά υπολόγιζαν το εμβαδό με ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Αυτό συνέβη πιθανότατα εξαιτίας των προηγούμενων δραστηριοτήτων που συμμετείχαν οι μαθητές αφού υπολόγιζαν σε γραφήματα σταθερών συναρτήσεων και τα εμβαδά εκεί ήταν ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Παράλληλα αναπτυχθήκαν και διαισθητικά – άτυπα μοντέλα εννοιών ανάλυσης όπως του ορίου και του ολοκληρώματος. Η αποτελεσματική σύνδεση εννοιών ανάλυσης με προβλήματα μελέτης κίνησης είχε παρατηρηθεί και από τους Gravemeijer και Doorman (1999). Η μοντελοποίηση αφού συνδύασε έννοιες της Φυσικής, των Μαθηματικών και διαισθητικά έννοιες της ανάλυσης κατέληξε στην επανεφεύρεση της αριθμητικής ολοκλήρωσης με την μέθοδο του τραπεζίου η οποία τελικά εφαρμόστηκε αποτελεσματικά για την τελική λύση και απάντηση του προβλήματος. Η επανεφεύρεση αυτή προέκυψε από την ανάγκη εύρεσης ενός μαθηματικού μοντέλου για τον υπολογισμό μιας έννοιας από την Φυσική (του μήκους της πίστας διαδρομής του αγωνιστικού αυτοκινήτου). Σύμφωνα με τους Tall και Vinner (1981) είναι σημαντικό πριν οι μαθητές έρθουν σε επαφή τυπικά με έννοιες της ανάλυσης (Calculus)να αναπτύξουν την προ-έννοια (pro-concept) αλλά και της εικόνας της έννοιας (concept image).

Η τρίτη διαδικασία μοντελοποίησης είχε καθοριστικό ρόλο τρόπο εξέλιξης και κατασκευής της τέταρτης διαδικασίας μοντελοποίησης αφού οι μαθητές διατήρησαν την έννοια της διαμέρισης και εμφάνισαν διακριτό γράφημα ταχύτητας χρόνου. Η έννοια από την Φυσική, ότι το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε γράφημα είναι αριθμητικά η συνολική μετατόπιση, συνδυάστηκε με την διαμέριση και την εύρεση εμβαδού αλλά και τις διαισθητικές έννοιες της ανάλυσης όπως αυτή του ορίου και του ολοκληρώματος. Οι μαθητές κατέληξαν τελικά στην εύρεση εμβαδού τραπεζίων για κάθε διάστημα που είχαν ορίσει με βάση την διαμέριση που επέλεγαν κάθε φορά. Στην συνέχεια αναζήτησαν την καλύτερη προσέγγιση και με την ιδέα ότι το όλο και μικρότερο πλάτος διαμέρισης θα φέρει μεγαλύτερη ακρίβεια έφεραν την άτυπη έννοια του ορίου και του ολοκληρώματος.

Επομένως, οι μαθητές επαν-εφεύρεσαν και ανέπτυξαν διαισθητικά την αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο του τραπεζίου.

Οι διαδικασίες μοντελοποίησης που εμφάνισαν οι μαθητές σε μια αρχική και άτυπη μορφή εξελίχθηκαν στην διάρκεια της δραστηριότητας. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι κάποιοι παράγοντες ήταν καθοριστικοί στην εξέλιξη αυτή, αφού υπήρχαν σχεδόν σε όλες τις διαδικασίες μοντελοποίησης. Ο πρώτος παράγοντας ήταν η επικοινωνία και ομαδική εργασία με αποτέλεσμα την δυναμική εξέλιξη όλων των διαδικασιών μοντελοποίησης. Ο δεύτερος παράγοντας ήταν το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος όπου λειτούργησε και στην εξέλιξη διαδικασιών μοντελοποίησης όπως στο μοντέλο της αριθμητικής ολοκλήρωσης όπου κατανόησαν οι μαθητές ότι πρέπει προσεγγίσουν την πραγματικότητα. Αλλά και στην απόρριψη διαδικασιών μοντελοποίησης, όπως οι τύποι της Φυσικής στην αρχή της δραστηριότητας. Ο τρίτος παράγοντας ήταν η διαρκής αναζήτηση ακρίβειας των αποτελεσμάτων από τους μαθητές. Εμφανίστηκε αναπάντεχα πολύ ισχυρός αφού αν και είχαν αποτελέσματα με μικρή απόκλιση όπως η απόκλιση 30μέτρων στην τρίτη διαδικασία μοντελοποίησης, την απέρριψαν, ώστε να βελτιώσουν την προσέγγιση. Ο τέταρτος παράγοντας ήταν οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού ο οποίος είχε στόχο να μην κατευθύνει τις σκέψεις και τις ιδέες των μαθητών πάνω στις διαδικασίες μοντελοποίησης αλλά να παρέμβει με σκοπό να τους καθοδηγήσει με ερωτήσεις ώστε να επιχειρηματολογήσουν για τις διαδικασίες μοντελοποίησης αλλά και να τους οδηγήσει στην βελτίωσή τους. Επίσης, αποσαφηνίζοντας δύσκολα σημεία που προέκυψαν δόθηκε η δυνατότητα όλοι οι μαθητές να τα κατανοήσουν ώστε να μπορούν να συμμετέχουν στην διαπραγμάτευση για την εξέλιξη των διαδικασιών μοντελοποίησης. Τέλος, ο πέμπτος παράγοντας ήταν η χρήση γραφικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές και η χρήση του ψηφιακού εργαλείου από τον εκπαιδευτικό. Η σχεδίαση των γραφημάτων από όλους τους μαθητές δημιούργησε την ευκαιρία σύγκρισης των γραφημάτων τους. Οι διαφορές που εμφανίστηκαν έδωσαν την δυνατότητα στους μαθητές να περάσουν σε ανώτερο επίπεδο αφαίρεσης αφού από την περιγραφή της κίνησης πέρασαν στην περιγραφή του γραφήματος και έτσι εξέλιξαν τις διαδικασίες μοντελοποίησης που είχαν φέρει αρχικά σε άτυπη μορφή.

Η παρούσα έρευνα συνιστά μια διδακτική πρόταση η οποία αποτελείται όμως από σημαντικούς και αναπόσπαστους παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί είναι η φύση του προβλήματος ως ανοιχτό πρόβλημα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, το καλό κλίμα συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών, οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού αλλά και η χρήση του ψηφιακού εργαλείου στο τελικό στάδιο της δραστηριότητας. Ο συνδυασμός των παραπάνω παραγόντων αλλά ειδικότερα η απαραίτητη συνύπαρξή τους είναι καθοριστικής σημασίας για αυτή την διδακτική πρόταση. Επομένως η απουσία κάποιων παραγόντων ίσως επιφέρει διαφορετικά αποτελέσματα.

Η διδακτική πρόταση στοχεύει στην ανάπτυξη και εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλήματος αλλά και της διαισθητικής ανάπτυξης εννοιών της ανάλυσης. Το πλαίσιο της διαισθητικής ανάπτυξης εννοιών της ανάλυσης μέσα από στρατηγικές και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων προτείνεται εξαιτίας των δυσκολίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οδηγούνται μακριά από την εννοιολογική κατανόηση αφού εστιάζουν περισσότερο στις διαδικασίες. Συγκεκριμένα η έννοια του ολοκληρώματος προτείνεται να προσεγγιστεί διαισθητικά με την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου. Σκοπός είναι οι μαθητές να επαν-εφεύρουν την μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος ως εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα. Συνεπώς η ιδέα της αριθμητικής ολοκλήρωσης λειτουργεί ως προσεγγιστικός τρόπος υπολογισμού του εμβαδού, ενώ παράλληλα συνυπάρχει με την έννοια της διαμέρισης όπου για την καλύτερη προσέγγιση (approximation) αθροίζονται όλο και περισσότερες ποσότητες εμβαδού (accumulation) όταν το πλάτος της διαμέρισης μικραίνει. Τα παραπάνω επομένως έχουν δύο στόχους την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ολοκληρώματος αλλά και την κατασκευή του μέσα από την μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης η οποία προτείνεται ώστε να αποτελέσει το ενδιάμεσο άτυπο στάδιο πριν την τυπική έννοια του ολοκληρώματος.

Βιβλιογραφία

Arnold, V. (1998). On teaching mathematics. *Russian Math*. Surveys 53 (pp. 229-236).

Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, 167-198. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Bagni, G. T. (1999). Integral and continuity in high school students' conceptions. In A. Gagatsis (Ed.), *A multidimensional approach to learning in mathematics and sciences* (pp. 171–182). Nicosia, Cyprus: Intercollege Press.

Berry, J. and Davies, A. (1996) Written Reports. In C.R. Haines and S. Dunthorne (eds)*Mathematics Learning and assessment: Sharing Innovative Practices.* London: Arnold, 3.3-3.11.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht–Trends und perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, 23, 15-38.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application,* 1(1), 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? *In Mathematical modelling* (pp. 222-231). Woodhead Publishing.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1) 41-62.

Chappell, K. K., & Killpatrick, K. (2003). Effects of Concept-Based Instruction on Students' Conceptual Understanding and Procedural Knowledge of Calculus. *Primus*, 13(1), 17-37.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? *In Modelling and applications in mathematics education* (pp. 69-78). Springer, Boston, MA.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education*, 110-136.

Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion from trace graphs to instantaneous change*. CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education.

Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM,* 41(1-2), 199-211.

Dyer, M. K., & Moynihan, C. (2000). *Open-ended questions in elementary mathematics: instruction & assessment*. Eye on Education.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.

Freudenthal, H. (1973).*Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Freudenthal, H. (1987). Mathematics starting and staying in reality. In *Proceedings of the USCMP Conference on Mathematics Education on Development in School Mathematics around the World*, NCTM, Reston, VA.

Freudenthal, H. (1991).*Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H.: 1971, Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Galbraith, P. (2007). Dreaming a ‘possible dream’: More windmills to conquer. In *Mathematical Modelling* (pp. 44-62). Woodhead Publishing.

Gravemeijer, K., &Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, 39(1-3), 111-129.

Gray, E., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity & flexibility: Aproceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 115–141.

Grenier, D., Richard, F. O., & Legrand, M. (1990). Un changement de point de vuesurl’enseignement de l’inte´grale. *Commission interIREMUniversite, Enseignerautrement les mathe´matiques en DEUG a premiere anne´e* (pp. 205–220). LIRDIS: Lyon.

Haines, C. R., & Crouch, R. (2013). Remarks on a modeling cycle and interpreting behaviours. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 145-154). Dordrecht: Springer.

Hancock, C. L. (1995). Enhancing mathematics learning with open-ended questions. *The Mathematics Teacher*, 88(6), 496.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., ... & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational researcher*, 25(4), 12-21.

Ivanjek, L., Susac, A., Planinic, M., Andrasevic, A., & Milin-Sipus, Z. (2016). Student reasoning about graphs in different contexts. *Physical Review Physics Education Research*, 12(1), 010106.

Jones, S. R., Lim, Y., & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1075-1095.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(9), 2481-2502.

Jurdak, M. (2016). *Learning and teaching real world problem solving in school mathematics*. Cham: Springer.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. *Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion*.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.

Kaput, J.J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 379-397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, 641–651.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM*, 46(4), 533-548.

Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. (Translated by Teller, J.; edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51-61.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leiß, D. (2007). Lehrerinterventionen im selbständigkeitsorientierten Prozess der Lösung einermathematischen Modellierungsaufgabe. Hildesheim: Franzbecker

Lesh, R., Lester, F. K., & Hjalmarson, M. (2003). A models and modeling perspective on metacognitive functioning in everyday situations where problem solvers develop mathematical constructs. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, 383-403.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 201-211.

Michelsen, C. (2005). Expanding the domain: Variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics. In *Proceedings of the 1st International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences* (pp. 201-214).

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM*, 38(3), 269-280.

Mousoulides, N., SRIRAMAN, B., & CHRISTOU, C. (2007). From problem solving to modelling. *Education*, 12(1), 23-47.

Nguyen, D. H., & Rebello, N. S. (2011). Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 7(1), 010112.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Part 1: Introduction. *Modelling and applications in mathematics education.* The 14th ICMI Study. New York/etc.: Springer, New ICMI Studies series, 10.

Polya, G. (1945/1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. In J. Becker, & S. Shimada (Eds.), *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. (p. 23-35). National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, No. 1991, pp. 46-53).

Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In An*nual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2003* (pp. 813-816). Deakin University.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275–298.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate* *mathematics* (pp. 43–52). Washington, DC: MAA.

Treffers, A.: 1987, Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: *The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Τριανταφύλλου, Χ., Μπακογιάννη, Δ., Κόσυβας, Γ. (2017). *Η Πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού μιας ομάδας μαθητών*. Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands A guided tour. *Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*, 1-32.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education. An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 521-525.