ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
NATIONAL AND KAPODISTRIAN UNIVERSITY OF ATHENS

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Αξιώματα Αρχιμήδους – Ευδόξου. Από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη στις Μη Αρχιμήδειες Γεωμετρίες: Μια ιστορική διαδρομή με διδακτικές προεκτάσεις.

Μαλέσιου Κωνσταντίνα

Δ 201624

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Λάππας Διονύσιος   Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα

Ιανουάριος, 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 24η Ιανουαρίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Λάππας (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ε. Ράπτης	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

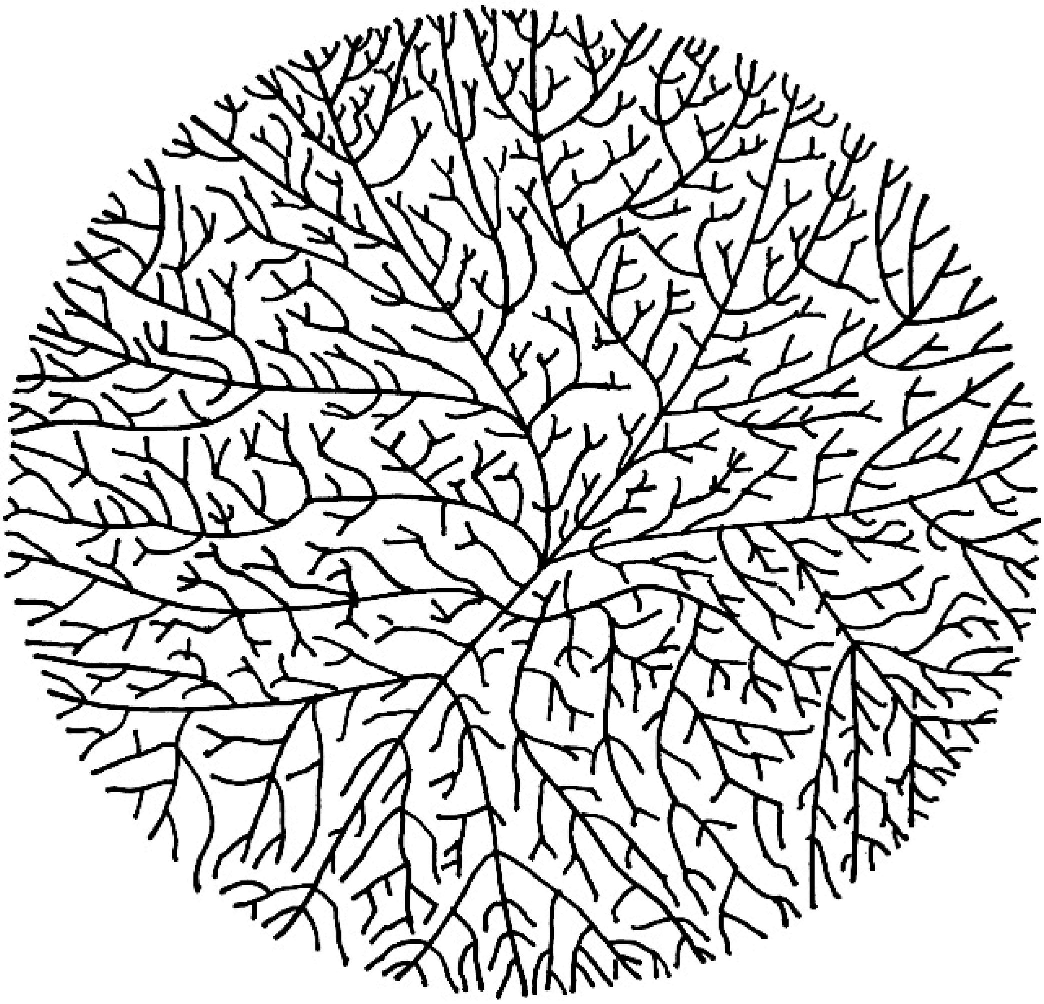
Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Λάππας (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ε. Ράπτης	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Λάππα, όπου, με την πραότητα, την καλοσύνη και την καθοδήγησή του, με βοήθησε στην ολοκλήρωση των σπουδών μου. Επίσης θέλω να τον ευχαριστήσω για το ενδιαφέρον θέμα που μου πρότεινε και μου δόθηκε η ευκαιρία να ανακαλύψω περαιτέρω τον σπουδαίο κόσμο της Γεωμετρίας.
- Τον κ. Ράπτη και κ. Σπύρου για την συμμετοχή τους στην συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή.
- Όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών που βοήθησαν στη διεύρυνση των γνώσεών μου περί της διδακτικής των Μαθηματικών.
- Την αξιαγάπητη φίλη μου Μαρία που μου πρότεινε να παρακολουθήσω το συγκεκριμένο μεταπτυχιακό και μου δίνει ελπίδα και πίστη στους ανθρώπους.
- Τους συμφοιτητές μου Γιώργο, Ηρώ, Πολυνίκη, Κώστα και πολλούς άλλους, για την καταπληκτική παρέα που κάναμε και την ψυχολογική στήριξη που παρείχαν.
- Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με στηρίζει και με φροντίζει πάντα.

Non-Archimedean Geometry and its Applications



University of Michigan
Organizers:
Mattias Jonsson (Michigan), Bhargav Bhatt (Michigan), Tyler Foster (Michigan)

CMI Enhancement and Partnership Program

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία σκοπεύει να παρουσιάσει τη διαιρετική μορφή του Αξιώματος μέτρησης των μεγεθών, το οποίο αναφέρεται ως «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» και να αναδείξει τον ρόλο του και τον τρόπο που αυτό χρησιμοποιήθηκε, τόσο στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά (: στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και το έργο του Αρχιμήδη), όσο και στα Νεότερα Μαθηματικά (: στη θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών από τον Dedekind και στην πρόταση του Hilbert για την Αξιωματική Θεμελίωση της Στοιχειώδους Γεωμετρίας).

Εξετάζονται μεγέθη τα οποία υπόκεινται στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου», όπως είναι οι γωνίες, καθώς και άλλα που αναφέρονται ως Μη Αρχιμήδεια συστήματα μεγεθών, όπως είναι οι κερατοειδείς γωνίες. Παρουσιάζεται η χρησιμότητα του Αξιώματος στις αποδείξεις των προτάσεων μέσω της «Μεθόδου της Εξάντλησης». Επίσης αναλύεται η διαφορά του «Αξιώματος του Αρχιμήδη» από το «Αξίωμα του Ευδόξου».

Εντοπίζεται ο ρόλος του Αξιώματος στην πορεία διαμόρφωσης των «Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών» και στα αποτελέσματα των Saccheri – Legendre στη μελέτη του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, σε αυτό που σήμερα ονομάζεται Ουδέτερη Γεωμετρία.

Σε μια σύγχρονη αναλυτική προσέγγιση, κατασκευάζονται διατεταγμένα σώματα στα οποία δεν ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» και αλγεβρικά μοντέλα, όπου ικανοποιούνται τα Αξιώματα της Γεωμετρίας, στην κατά Hilbert Αξιωματική Θεμελίωση.

Τέλος, ως διδακτική πρόταση παρουσιάζεται η κατασκευή μιας «Μη Αρχιμήδειας Γεωμετρίας» που αναπτύσσεται πάνω σε ένα αφηρημένο διατεταγμένο σώμα.

Λέξεις κλειδιά: Εύδοξος, Αρχιμήδης, Αξίωμα, Hilbert, Μη Αρχιμήδεια Γεωμετρία

Abstract

The purpose of this thesis is to present the division form of the Axiom about magnitudes measurement, referred as “Archimedes’ – Eudoxus’ Axiom” and to highlight its role, as it used in Ancient Greek Mathematics (: in Euclid’s “Elements” and in Archimedean Corpus), as well as in Modern Mathematics (: in Dedekind’s theory of Real numbers and Hilbert’s Axiomatic Foundation of Elementary Geometry).

The magnitudes which are usually studied (such as angles, segments, area) are subject to the “Archimedes’ – Eudoxus’ Axiom”. But there also exist geometric objects (such as the horned angles) for which the Axiom is not valid and they are referred as Non-Archimedean. We analyze how the Axiom is useful in demonstrating results through the “Method of Exhaustion”. It is also underlying the difference between “Archimedes’ Axiom” and “Eudoxus’ Axiom”.

The role of this Axiom was also present in early results of “Non-Euclidean Geometry”, as Saccheri and Legendre used it in their study of the sum of angles of a triangle in the so-called Neutral Geometry.

In a modern Analytic approach, there are developed Non-Archimedean ordered fields and Algebraic models for Hilbert’s Axiomatic Foundation of Elementary Geometry are constructed.

Finally, we conclude this thesis, by presenting a teaching proposal concerning the construction of a “Non-Archimedean Geometry” based on an abstract ordered field.

Keywords: Eudoxus, Archimedes, Axiom, Hilbert, Non-Archimedean Geometry

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Ι

Το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» και Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

1. Η διατύπωση του Ευκλείδη και σύγχρονη κριτική διατύπωση

Ο Εύδοξος Αισχίνου ο Κνίδιος (408 περίπου – 355 π.Χ.) συνέβαλλε με τις εργασίες του καθοριστικά για την ισχυρή θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Για να καταλάβουμε την ποιότητα και το εύρος των ερευνών του, είναι αρκετό να υπομνήσουμε ότι, σε αυτόν οφείλεται όλη η ύλη του V βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη και η πρώτη σαφής και αποτελεσματική θεωρία μέτρησης, όπως μας βεβαιώνει και ο ίδιος ο Αρχιμήδης, αφού τα επιτεύγματα του Ευδόξου μας έγιναν γνωστά μόνο μέσα από τα συγγράμματα του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη (Hilbert, 1975, Struik, 1966).

Εκτός από τη Θεωρία των Λόγων του V βιβλίου, το όνομα του Ευδόξου συνδέθηκε και με την αποκαλούμενη «μέθοδο της εξάντλησης». Στο XII βιβλίο των «Στοιχείων» αναλύονται οι διαδικασίες, που οδηγούν στον υπολογισμό όγκων και εμβαδών με διαδοχικές προσεγγίσεις, δηλαδή με τη λεγόμενη «μέθοδο της εξάντλησης» ενός εμβαδού ή όγκου με πολύγωνα ή πολύεδρα αντίστοιχα (Struik, 1966, Στράντζαλος, 1987).

Αυτά σημαίνουν πως στον Εύδοξο οφείλεται το ξεπέρασμα της «κρίσης», που προέκυψε στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά με την ανακάλυψη των αρρήτων από τους Πυθαγόρειους. Σύμφωνα με μία από τις δοξασίες που κυριαρχούσαν στην Πυθαγόρεια Σχολή ήταν ότι «τα μεγέθη είναι σύμμετρα», δηλαδή το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός ευθύγραμμου τμήματος ως προς οποιαδήποτε μονάδα πρέπει να είναι ρητός αριθμός. Οι Πυθαγόρειοι είδαν ότι αυτό δεν ήταν σωστό, με την απόδειξη της ύπαρξης ευθυγράμμων τμημάτων που δεν έχουν κοινό μέτρο. Απέδειξαν ότι, όταν μετρηθεί το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με μονάδα μια κάθετη πλευρά του, το αποτέλεσμα της μέτρησης δεν είναι ρητός (Struik, 1966, Στράντζαλος, 1987).

Η Θεωρία των Λόγων του Ευδόξου ήταν απαλλαγμένη από τη θεωρία των Πυθαγορείων, που εφαρμοζόταν μόνο στα σύμμετρα μεγέθη. Επρόκειτο για μια καθαρά γεωμετρική θεωρία, δοσμένη σε αυστηρά αξιωματική μορφή, που καθιστούσε περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη (Struik, 1966). Επίσης χρησιμοποιεί ως μαθηματικό αντικείμενο την έννοια «μέγεθος» και όχι την έννοια «αριθμός». Η διάκριση των εννοιών αυτών όμως πιθανολογείται ότι οφείλεται στους Πυθαγορείους, οι οποίοι απέδιδαν στους ακέραιους αριθμούς ιδιότητες και έννοιες διαφορετικές από τις σημερινές.

1.α. Η έννοια του μεγέθους

Στο βιβλίο V των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης δεν αναφέρει κάποιον ορισμό της έννοιας του μεγέθους, επειδή δεν υπάρχει ανώτερη έννοια για αυτή τη θεμελιώδη έννοια. Παρόλα αυτά, ασχολείται με τα μεγέθη σε όλη την έκταση των «Στοιχείων». Η γενική έννοια των μεγεθών αναφέρεται στο βιβλίο V, στο βιβλίο VI και αρκετές φορές σε μεταγενέστερα βιβλία (Thiele, 2003). Σήμερα θα λέγαμε ότι τόσο στη Γεωμετρία, όσο και στη Φυσική, γενικά, ο όρος μέγεθος αποτελεί έννοια διαστάσεων αντικειμένου, κατ' έκταση, ή κατ' όγκο ή και κατά ποσότητα. Ως μαθηματικός όρος, μέγεθος ονομάζεται κάθε ποσό που επιδέχεται αύξηση ή μείωση και επομένως μπορεί να μετρηθεί και να εκφρασθεί με αριθμούς.

Ο λόγος του εξεταζόμενου μεγέθους προς άλλο ομοειδές το οποίο έχει επιλεχθεί ως μονάδα μέτρησης είναι ο αριθμός που αποτελεί το μέτρο κάποιου μεγέθους.

Η έννοια του μεγέθους επιτρέπει μια διττή ερμηνεία: α) ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι ένα μέγεθος (εκτεταμένη οντότητα) και σαν ένα τέτοιο αντικείμενο μπορεί να μετρηθεί και β) το αποτέλεσμα μιας τέτοιας μέτρησης είναι ένα μέγεθος (καταμέτρηση) (Thiele, 2003).

Οι αρχαίοι Έλληνες διέκριναν αυστηρά τα αριθμητικά μεγέθη (φυσικοί αριθμοί) από τα γεωμετρικά μεγέθη (συνεχείς ποσότητες) με το σκεπτικό ότι στην Αριθμητική δεν μπορεί να χωριστεί η αριθμητική μονάδα (αριθμός 1), αλλά οποιοδήποτε γεωμετρικό μέγεθος συμπεριλαμβανομένης της αντίστοιχης μονάδας μπορεί να χωριστεί επ' άπειρον. Αποδεικνύεται ότι τα μεγέθη του ίδιου είδους μπορούν να συγκριθούν και να διαταχθούν, καθώς και να συνθέτονται (να προσθέτονται και, ειδικότερα, να πολλαπλασιάζονται). Γραμμές, επιφάνειες, στερεά ή γωνίες είναι συνεχή γεωμετρικά μεγέθη, επομένως υπόκεινται σε μέτρηση. Ο χρόνος, ο χώρος ή το βάρος είναι άλλα συνεχή μεγέθη. Τέτοια μεγέθη σχηματίζουν συστήματα, με σύγχρονους όρους, αλγεβρικές δομές, αλλά αυτό το γεγονός δεν αναφέρθηκε στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά (Thiele, 2003).

1.β. Το αποτέλεσμα της μέτρησης

Οι μαθηματικοί της αρχαίας Ελλάδας θεωρούσαν ότι αριθμός είναι μόνο ο φυσικός αριθμός. Ο Ευκλείδης στον Ορισμό 2 του VII βιβλίου των «Στοιχείων» λέει ότι: «αριθμός είναι ένα πλήθος που αποτελείται από μονάδες», όπου «μονάδα είναι αυτό μέσω του οποίου κάθε υπαρκτό αντικείμενο ονομάζεται ένα» (Στοιχεία VII, Ορισμός 1). Η μονάδα μόνη της (ή το ένα) δεν θεωρείται ως αριθμός (Αριστοτέλης, Μεταφυσικά, Ν, 1088α).

Με μια σύγχρονη έννοια, σύμφωνα με τον Thiele (2003), οι αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν ως συντελεστές του «στοιχείου της μονάδας» της συλλογής αντικειμένων ίδιου είδους. Αυτή η αρχική αντίληψη εξακολουθεί να διατηρείται στη Φυσική, επειδή ο συντελεστής οποιουδήποτε φυσικού μέτρου δεν έχει νόημα ως απόλυτος αριθμός, έχει νόημα μόνο ως σχετικό μέγεθος ενσωματωμένο σε κλίμακα μέτρησης.

Στον Ευκλείδη βρίσκουμε τρία διαφορετικά είδη αριθμών: α) τους φυσικούς αριθμούς και δύο λόγους, β) τον λόγο των φυσικών αριθμών («θετικά κλάσματα») («Στοιχεία», VII) και γ) τον λόγο των μεγεθών («θετικοί πραγματικοί αριθμοί») («Στοιχεία», V). Ο Ευκλείδης μεταχειρίστηκε αυτά τα τρία είδη μεγεθών με διάφορους τρόπους, αν και σε κάποιο βαθμό παρατήρησε κάποιες κοινές ιδιότητες αυτών των μεγεθών. Ωστόσο, ο λόγος $2:1$ δεν αναγνωρίστηκε ποτέ με τον φυσικό αριθμό 2. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μπορεί να είναι φυσικός αριθμός, ρητός ή πραγματικός αριθμός.

Λόγος φυσικών αριθμών: Ο Ευκλείδης ανέπτυξε τη Θεωρία των Λόγων (φυσικών) αριθμών ως στοιχειώδης θεωρία αριθμών. Στο βιβλίο VII των «Στοιχείων» βρίσκουμε τις έννοιες «μέρος ενός αριθμού ή πολλαπλάσιος, μονός και ζυγός αριθμός, πρώτος και σύνθετος αριθμός» κ.λπ. Ένας παλαιότερος ορισμός του λόγου των φυσικών αριθμών διατηρείται στον Νικόμαχο (Αριθμητική ΙΙ, 21, 1886): «Ο λόγος είναι μία σχέση δύο όρων μεταξύ τους», ωστόσο, εδώ η έννοια της «σχέσης» παραμένει ανεξήγητη.

Ο Ορισμός 21 του VII βιβλίου δηλώνει σιωπηρά ότι «[τέσσερις φυσικοί] αριθμοί [α, β, γ και δ] είναι ανάλογοι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, όταν ο πρώτος [$\alpha$] είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ή το ίδιο μέρος, ή τα ίδια μέρη, του δεύτερου [β] όπως ο τρίτος [γ]

είναι του τέταρτου [δ].» Ο ορισμός αυτός μας δίνει τις βασικές αρχές για τον υπολογισμό με μεγέθη.

Από μια σύγχρονη οπτική γωνία μπορούμε να κατανοήσουμε τον ορισμό του Ευκλείδη καλύτερα, αν θεωρήσουμε δύο σχετικά πρώτους αριθμούς μ και ν με

$$\alpha = \mu\left(\frac{\beta}{\nu}\right), \quad \gamma = \mu\left(\frac{\delta}{\nu}\right).$$

Για $\nu = 1$ έχουμε πολλαπλάσια, για $\mu = 1$ μέρη και για μ και ν μεγαλύτερα από 1 το σύνολο των μερών. Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση των ασύμμετρων με τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης.

Για να εισαγάγουμε τα κλάσματα ως λόγους αριθμών, χρειαζόμαστε πρώτα έναν ορισμό της ισότητας. Στη σύγχρονη γλώσσα των συνεχών κλασμάτων δίδεται ότι δύο λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ίσοι όταν παράγουν το ίδιο συνεχές κλάσμα. Όμως για να υπολογίσουμε χρειαζόμαστε θεωρήματα που επιτρέπουν τον μετασχηματισμό των αναλογιών, όπως για παράδειγμα τα θεωρήματα στο βιβλίο VII.

Ο Ευκλείδης ορίζει μία αριθμητική πράξη για το λόγο αριθμών, τον λόγο σύνθεσης $\alpha : \gamma$. Είναι η σύνθεση των λόγων $\alpha : \beta$ και $\beta : \gamma$. Στη γλώσσα της αναλογίας για να πολλαπλασιαστούν δύο λόγοι (κλάσματα) σημαίνει να σχηματιστεί ο λόγος σύνθεσης, δηλαδή πρώτα οι λόγοι μετασχηματίζονται σε μια τέτοια μορφή και στη συνέχεια ο λόγος σύνθεσης μπορεί να προσδιοριστεί με μοναδικό τρόπο όπως δείχνει ο Ευκλείδης («Στοιχεία», VII. 17). Άρα ο λόγος σύνθεσης προϋποθέτει μια βολική μορφή του δεύτερου λόγου, δηλαδή την ύπαρξη της τέταρτης αναλόγου και υποστηρίζεται η συνέχεια του πεδίου μεγέθους του είδους. Οι αρχαίοι Έλληνες υπέθεταν τις ιδιότητες της συνέχειας σιωπηρά. Επίσης στο βιβλίο VI. 23 ο Ευκλείδης εξηγεί πώς συνθέτει τον λόγο ευθειών γραμμών. Βασικά, η έννοια του λόγου σύνθεσης αναφέρεται στην Πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής, αφού μία από τις θεμελιώδεις ανακαλύψεις των Πυθαγορείων ήταν η κατανόηση της ρητής φύσης της αρμονίας (Thiele, 2003).

Λόγος μεγεθών: Στο βιβλίο V των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης δίνει τον Ορισμό 3: «Λόγος δύο ομογενών μεγεθών είναι η κατά πηλικότητα ποια τις σχέσις», με άλλα λόγια: αν δύο ομοειδή μεγέθη συγκριθούν μεταξύ τους, τότε υπάρχει πάντοτε μία σχέση που προκύπτει από τη σύγκριση του ενός με το άλλο, η οποία λέγεται λόγος των δύο αυτών μεγεθών. Επομένως για τον Ευκλείδη ο λόγος είναι μία σχέση μεταξύ δύο μεγεθών και όχι κάτι σαν ένα αντικείμενο, π.χ. ένα κλάσμα ή σαν ένα πηλίκο ακεραίων (Συγγραφική Ομάδα, 2001, τόμ. Ι).

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι από τον 5ο αιώνα π.Χ. οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι μερικά γεωμετρικά μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με το λόγο ενός αριθμού προς έναν άλλον αριθμό («Στοιχεία», Χ. 7), δηλαδή δεν μπορούν να μετρηθούν. Υπήρξαν αρκετές προσπάθειες να ξεπεραστεί το δίλημμα της ασυμμετρίας, όπως με τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης. Εάν ο λόγος των μεγεθών δεν είναι λόγος αριθμών, τότε τι είναι αυτό; Πρώτον, οι Έλληνες υπογράμμισαν ότι η Γεωμετρία είναι γενικότερη από την Αριθμητική, διότι σε οποιαδήποτε αριθμητικό λόγο αντιστοιχεί εκεί ένας γεωμετρικός λόγος αλλά όχι αντιστρόφως, όπως για παράδειγμα: ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά ενός τετραγώνου. Σημειώστε ότι τα αντικείμενα δεν ήταν το πρόβλημα, αλλά οι λόγοι των αντικειμένων ήταν (Thiele, 2003).

Ο Thiele (2003) αναφέρει ότι δεν είναι απαραίτητο να δώσουμε ρητά έναν ορισμό για τον λόγο μεγεθών, δηλαδή να πούμε τι εννοούμε με την αρρητότητα των λόγων, αφού αρκεί να γνωρίζουμε πώς να συγκρίνουμε τους λόγους και πώς να τους χειριζόμαστε. Έτσι, ο Ευκλείδης θα μπορούσε να προχωρήσει με τον ίδιο τρόπο όπως έκανε όταν εισήγαγε τους λόγους αριθμών: όρισε πρώτα πώς να συγκρίνει τους λόγους και με αυτόν τον τρόπο διέταξε σιωπηρά το σύνολο των λόγων. Αυτή η ταξινόμηση των λόγων μεγεθών γίνεται μόνο με τη χρήση των λόγων αριθμών (ρητοί αριθμοί).

Ο Εύδοξος συγκρίνει τους λόγους μεγεθών με λόγους αριθμών, δηλαδή με θετικά κλάσματα. Με αυτό τον τρόπο, ονομάζει δύο λόγους μεγεθών ίσους αν είναι πάντα κλεισμένοι μεταξύ των ίδιων λόγων αριθμών (ορίων) και μέσω αυτών των ορίων μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα διάστημα τόσο μικρό όσο είναι επιθυμητό. Η υποκείμενη αρχή αποδίδεται στον Βρύσων Ηρακλεώτης (450-370 π.Χ.) και μπορεί να εκφραστεί με τον τρόπο αυτό: Τα μεγέθη σε σύγκριση με την ίδια ποσότητα που είναι ταυτόχρονα ίσα, μεγαλύτερα ή μικρότερα είναι ίσα (Thiele, 2003).

Όταν συγκρίνουμε τους λόγους μεγεθών, τα μεγέθη που εξετάζονται μπορεί να διαφέρουν σε είδος, αλλά στα «Στοιχεία», ο Ορισμός 3 αποκλείει διαφορετικά είδη μεγεθών να εμφανίζονται στον ίδιο λόγο. Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε δύο συστήματα διαφορετικών μεγεθών α, β και A, B και τους αντίστοιχους λόγους τους, για παράδειγμα γραμμές και εμβαδά.

1.γ. Αξίωμα Αρχιμήδους - Ευδόξου

Οι πηγές που μας οδηγούν στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά αποτελούνται από δύο έως τρεις δωδεκάδες έργων αντικατοπτρίζοντας μόνο ένα μικρό μέρος της Ελληνικής γνώσης και η μεγάλη πλειοψηφία τους δεν είναι πρωτότυπα. Χειρόγραφες εκδοχές των έργων του Ευκλείδη εμφανίζονται από το 888 μ.Χ. Ένα άλλο βασικό ζήτημα είναι η ερμηνεία των Ελληνικών Μαθηματικών αποτελεσμάτων από τον γεωμετρικό-λεκτικό χαρακτήρα τους. Ο Thiele (2003) υποστηρίζει ότι δεν έχει σημασία αν μια μαθηματική ανακάλυψη εκφράζεται με λέξεις ή με μια φόρμουλα, αλλά υπάρχει, ωστόσο, μια ψυχολογική διαφορά, είτε σκέφτεται κανείς το θεώρημα της ανθυφαίρεσης («Στοιχεία», X. 1), στην λεκτική εκδοχή του Ευκλείδη, το οποίο φαίνεται αδέξιο λόγω των τεχνικών δυσκολιών της διατύπωσης των σχέσεων των μεγεθών:
«Δίνονται δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, και από αυτό που απέμεινε ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και εάν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί συνεχώς, θα απομείνει κάποιο μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο από το μικρότερο μέγεθος που έχει δοθεί»
ή αν θεωρεί ότι αυτό το θεώρημα είναι διαφορετικό από τον Ορισμό 4 του V βιβλίου των «Στοιχείων», ο οποίος αποτελεί μια αποκαλούμενη «διαιρετική μορφή του αξιώματος μέτρησης»:
«Τα μεγέθη λέγεται ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν πολλαπλασιαζόμενα είναι ικανά να υπερβαίνουν το ένα το άλλο»
ή εάν χρησιμοποιεί μια σύγχρονη «τυποποιημένη» δήλωση:
«Οποιοδήποτε μέγεθος α μπορεί να μειωθεί σε οποιοδήποτε επιθυμητό μέγεθος. Το οποίο σημαίνει ότι για ένα σωστά επιλεγμένο ακέραιο ν το μέγεθος $\frac{\alpha}{2^\nu}$ μπορεί να γίνει μικρότερο από οποιοδήποτε μέγεθος β, δηλαδή $\frac{\alpha}{2^\nu} < \beta$».

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ο Ορισμός 4 παρουσιάζει αυτό που αποκαλούμε σήμερα «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου», προκειμένου να ορίσει έμμεσα την έννοια «λόγος»:

Για μεγέθη συγκρίσιμα μεταξύ τους δεχόμαστε ότι το καθένα από αυτά μπορεί, πολλαπλασιαζόμενο, να υπερβεί το άλλο.

Με σημερινή ορολογία: Δύο ομοειδή μεγέθη μπορούν να ορίσουν λόγο υπό την προϋπόθεση ότι κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του ενός γίνεται μεγαλύτερο από το άλλο.

Δηλαδή: Αν δοθούν δύο θετικοί αριθμοί α, β υπάρχει φυσικός αριθμός ν έτσι ώστε $\nu\alpha > \beta$.

Το ίδιο ισχύει αν δοθούν δύο ομοειδή μεγέθη, δηλαδή δύο μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, δύο εμβαδά επίπεδων χωρίων ή δύο όγκοι στερεών σωμάτων.

Ο Stolz (1842-1905) αποκάλεσε αυτόν τον ορισμό διορατικότητα του Ευδόξου, προκειμένου να ισχυριστεί τη μέτρηση των λόγων γεωμετρικών μεγεθών του Αρχιμήδειου αξιώματος, αν και θα ήταν ιστορικά σωστό να το ονομάσουμε «Αξίωμα Ευδόξου» (Thiele, 2003).

Ο λόγος ορίζεται για ομοειδή μεγέθη και θεωρείται αφηρημένος αριθμός. Έτσι, μία αναλογία μπορεί να μην αναφέρεται σε τέσσερα ομοειδή μεγέθη, αλλά σε δύο ζευγάρια ομοειδών. Τυπικό δείγμα αποτελεί ο Ορισμός 5 του V βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη:

Λέμε για μεγέθη ότι έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν όποιο ισοπολλαπλάσιο και αν πάρουμε του πρώτου και του τρίτου και όποιο ισοπολλαπλάσιο και αν πάρουμε του δεύτερου και του τέταρτου, το πρώτο από τα νέα μεγέθη είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το δεύτερο, μόνο αν το ίδιο συμβαίνει, αντίστοιχα, με τα άλλα δύο μεγέθη (Struik, 1966).

Σε κάθε περίπτωση, ο ορισμός της αναλογίας δίνεται με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών και σύμφωνα με τον Στράντζαλο (1987), με τους δικούς μας συμβολισμούς θα λέμε ότι:

Ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν για κάθε επιλογή φυσικών αριθμών μ, ν, μπορεί να διαπιστωθεί ότι:

- αν ισχύει $\nu\alpha > \mu\beta$, τότε θα ισχύει και $\nu\gamma > \mu\delta$
- αν ισχύει $\nu\alpha = \mu\beta$, τότε θα ισχύει και $\nu\gamma = \mu\delta$
- αν ισχύει $\nu\alpha < \mu\beta$, τότε θα ισχύει και $\nu\gamma < \mu\delta$.

Επίσης, με σημερινούς όρους και εφόσον ο $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ δεν είναι ρητός, το ουσιαστικό μέρος του προηγούμενου ορισμού του Ευδόξου συνίσταται στη διαμέριση του συνόλου Q των ρητών αριθμών σε δύο κλάσεις $K_1 = \left\{ \frac{\mu}{\nu} : \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\mu}{\nu} \right\}$, $K_2 = \left\{ \frac{\mu}{\nu} : \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\mu}{\nu} \right\}$, που είναι ξένες μεταξύ τους και ορίζουν μία «τομή του Dedekind» στο Q, αφού κάθε στοιχείο του K_1 είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του K_2.

Βασιζόμενος στον Ορισμό 5 και ακολουθώντας την πορεία μιας αξιωματικά δομημένης θεωρίας, ο Εύδοξος απέδειξε όλες τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών, στις οποίες σημαντικό ρόλο παίζει και το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου».

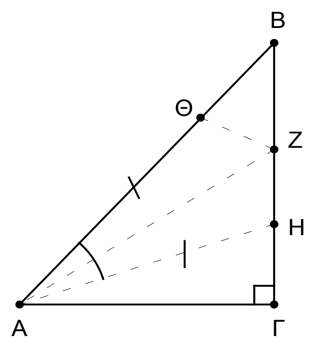
1.δ. Εφαρμογή του «Αξιώματος Αρχιμήδους – Ευδόξου» για τις γωνίες

Όπως προαναφέραμε, ο Ορισμός 4 αποτελεί μια αποκαλούμενη «διαιρετική μορφή του αξιώματος μέτρησης», αφού ο λόγος του εξεταζόμενου μεγέθους προς άλλο ομοειδές, το οποίο έχει επιλεχθεί ως μονάδα μέτρησης, αποτελεί το μέτρο του μεγέθους. Ο Ευκλείδης προσπαθεί να ορίσει έμμεσα τον λόγο μεγεθών, χωρίς όμως να έχει ορίσει την έννοια του μεγέθους και χωρίς να διευκρινίζει ποια είναι αυτά τα μεγέθη, για τα οποία ισχύει η προηγούμενη πρόταση.

Ας εξετάσουμε τώρα αν δύο ευθύγραμμες γωνίες έχουν λόγο, δηλαδή αν ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για αυτά τα μεγέθη και επομένως θα υπόκεινται σε μέτρηση. Για να το αποδείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα, όπως το αναφέρει ο Στράντζαλος (1987):

Λήμμα. Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (όπως στο σχήμα). Αν $H\hat{A}Z \cong Z\hat{A}B$, τότε $HZ < ZB$.

Απόδειξη



«Μεταφέρουμε» το AH στην AB έτσι, ώστε $AH \cong A\Theta$. Τότε, ισχύει $A - \Theta - B$, δηλαδή το Θ είναι εσωτερικό του τμήματος AB. Από τα «σύμφωνα» τρίγωνα AHZ και $A\Theta Z$ προκύπτει $A\hat{Z}H \cong A\hat{Z}\Theta$,
οπότε έχουμε: $\Theta\hat{B}Z < A\hat{Z}H \cong A\hat{Z}\Theta < B\hat{\Theta}Z \Rightarrow HZ \cong \Theta Z < ZB$.

Παρατήρηση:
Το σύμβολο $\cong$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη «συμφωνία» γωνιών. Σύμφωνα με την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert για την Γεωμετρία, όπως θα δούμε παρακάτω, ορίζονται 5 ομάδες αξιωμάτων για την Επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μία από αυτές είναι τα «Αξιώματα της συμφωνίας». Η «συμφωνία» αντιστοιχεί στην «ισότητα» με την ευρεία έννοια του όρου, δηλαδή δεν περιορίζεται στην «ταυτότητα». Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει 5 αξιώματα, στα οποία κατοχυρώνεται η «μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών» και η «ισότητα τριγώνων».

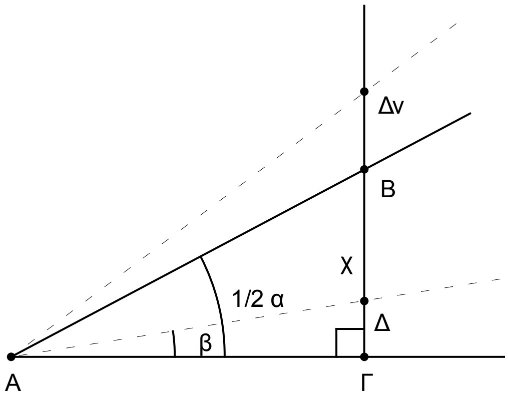
Το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για γωνίες διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο βιβλίο του Hilbert (1975) ως εξής:

Αν α, β δύο τυχούσες γωνίες, μπορεί πάντα να βρεθεί ένας φυσικός αριθμός ν, τέτοιος ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{2^\nu} < \beta$.

(Με $\frac{\alpha}{2^\nu}$ δηλώνουμε εκείνη τη γωνία που προκύπτει από την α ύστερα από ν αλλεπάλληλες διχοτομήσεις).
Με άλλα λόγια:
Αν δοθούν δύο γωνίες και ορίσουμε το $\kappa -$ πολλαπλάσιο μιας γωνίας, σε αναλογία με το $\kappa -$ πολλαπλάσιο ευθυγράμμων τμημάτων, τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν έτσι, ώστε το $2^\nu -$ πολλαπλάσιο της μιας γωνίας να είναι μεγαλύτερη από την άλλη.

Απόδειξη
Παρατηρούμε καταρχήν, ότι η διχοτόμηση γωνίας είναι, δυνάμει των προϋποτιθέμενων αξιωμάτων, εφικτή. Θεωρούμε τώρα την οξεία γωνία $\frac{\alpha}{2}$.

Στην περίπτωση όπου $\frac{\alpha}{2} \leq \beta$, τότε ο ισχυρισμός ισχύει για $\nu = 2$.



Αν αντιθέτως είναι $\frac{\alpha}{2} > \beta$, τότε από ένα σημείο B της μιας πλευράς της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$ φέρνουμε την κάθετο προς την άλλη πλευρά και έστω Γ το ίχνος αυτής της καθέτου. Αν A η κορυφή της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$, θεωρούμε, με πλευρά την $\mathrm{A}\Gamma$ και στο εσωτερικό της $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \frac{\alpha}{2}$, γωνία ίση προς τη β. Τότε η ελεύθερη πλευρά αυτής της γωνίας τέμνει, σύμφωνα προς την υποτιθέμενη ανισότητα, το τμήμα $\mathrm{B}\Gamma$ σ' ένα εσωτερικό του σημείο Δ. Σύμφωνα με το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου», θα υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\kappa \cdot \Gamma\Delta > \Gamma\mathrm{B}$.

Προσαρμόζουμε τώρα τη γωνία β, $\kappa-$φορές διαδοχικά, τη μία κατόπιν της άλλης, έτσι ώστε η πρώτη πλευρά της καθεμιάς (από τη δεύτερη και εφεξής) να ταυτίζεται με τη δεύτερη πλευρά της προηγούμενης και η εκάστοτε ελεύθερη πλευρά να κείται προς το μέρος της AB.

Ι) Είναι δυνατό να συμβεί, με τελευταία τη $\kappa-$οστή η παραγόμενη ελεύθερη πλευρά ως πρώτη να μη συναντά πλέον την ημιευθεία $\Gamma\mathrm{B}$. Επειδή η προηγούμενη ελεύθερη πλευρά τέμνει ακόμα αυτή την ημιευθεία, έπεται ότι η γωνία $(\kappa-1)\cdot\beta$ είναι οξεία. Από τα παραπάνω προκύπτει εύκολα ότι, το εσωτερικό της γωνίας $\kappa\cdot\beta$, που κατασκευάσθηκε με την $\kappa-$πολλαπλή προσαρμογή, κείται σ' εκείνο το ημιεπίπεδο ως προς την $\mathrm{A}\Gamma$ που περιλαμβάνει και το B και ακόμα, ότι η ημιευθεία AB πέφτει στο εσωτερικό της γωνίας $\kappa\cdot\beta$, δηλαδή ισχύει: $\kappa\cdot\beta > \frac{\alpha}{2}$.

ΙΙ) Στην άλλη περίπτωση, καθεμιά από τις παραγόμενες γωνίες β, μέσω μιας $\kappa-$πολλαπλής προσαρμογής, αποκόπτει από την ημιευθεία ΓB ένα τμήμα, το οποίο από το λήμμα, είναι μεγαλύτερο ή ίσο προς το $\Gamma\Delta$. Έστω Δ_{ν} το σημείο τομής της $\kappa-$οστής ελεύθερης πλευράς με την ΓB. Το άθροισμα $\Gamma\Delta_{\nu}$ των κ επί της ΓB αποκοπτόμενων τμημάτων είναι μεγαλύτερο του $\kappa\cdot\Gamma\Delta$ και συνεπώς μεγαλύτερο του ΓB. Απ' αυτά έπεται ότι $\kappa\cdot\beta>\frac{\alpha}{2}$.

Θεωρούμε τώρα σε σχέση με τον κ έναν φυσικό αριθμό ν τέτοιον ώστε να ισχύει $\kappa<2^{\nu-1}$. Σημειώνουμε τη γωνία $\kappa\cdot\beta$ με ω και παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\frac{\omega}{2^{\nu-1}}$ και $\frac{\alpha}{2^{\nu}}$ είναι κατασκευάσιμες. Από τη δυνατότητα της σύγκρισης γωνιών ως προς το μέγεθος προκύπτει εύκολα, ότι από μεν την ανισότητα $2^{\nu-1}>\kappa$ έπεται η ανισότητα $\frac{\omega}{2^{\nu-1}}<\frac{\omega}{\kappa}=\beta$, από δε την ανισότητα $\omega>\frac{\alpha}{2}$ έπεται η ανισότητα $\frac{\omega}{2^{\nu-1}}>\frac{a}{2^{\nu}}$.
Συνεπώς, ένεκα της μεταβατικότητας της σχέσης συγκρίσεως μεγεθών, ισχύει: $\frac{\alpha}{2^{\nu}}<\beta$.

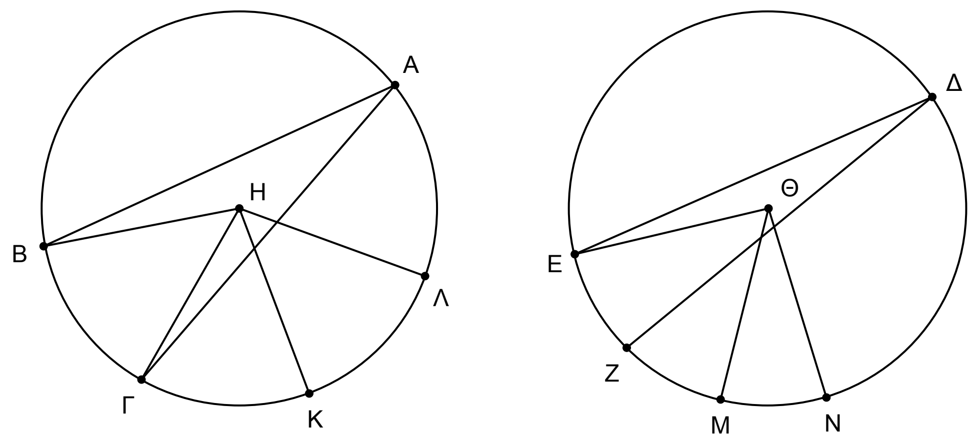
Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ευθύγραμμες γωνίες είναι από εκείνα τα μεγέθη που ικανοποιούν τον Ορισμό 4, εφόσον μόλις αποδείξαμε ότι υπάρχει κάποιο πολλαπλάσιο της μιας που να υπερβαίνει την άλλη. Ως εκ τούτου μπορούν να έχουν λόγο και κατά συνέπεια να μετρηθούν.

Η διαδικασία της μέτρησης δύο ευθυγράμμων γωνιών δίνεται από την Πρόταση VI.33 των «Στοιχείων», η οποία αναφέρεται στα βιβλία των Heath (1908, vol. II) και Σταμάτη (1953, τόμ. ΙΙ), και λέει το εξής:

Σε ίσους κύκλους οι γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο με τα τόξα στα οποία βαίνουν, είτε είναι επίκεντρες είτε είναι εγγεγραμμένες.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω οι ίσοι κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ, οι επίκεντρες γωνίες αυτών $\text{Β}\hat{\text{Η}}\text{Γ}$, $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$ στα κέντρα τους Η και Θ και οι εγγεγραμμένες γωνίες $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$, $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$. Λέγω ότι $\dfrac{\textit{περιφερια}\,\text{Β}\widehat{\Gamma}}{\textit{περιφερια}\,\text{Ε}\widehat{\text{Ζ}}}=\dfrac{\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma}{\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}}=\dfrac{\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma}{\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}}$.



Ας θεωρήσουμε οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών τόξων $\Gamma\widehat{\text{Κ}}$, $\text{Κ}\widehat{\Lambda}$ ίσα με την περιφέρεια του $\text{Β}\widehat{\Gamma}$ και οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών τόξων $\text{Ζ}\widehat{\text{Μ}}$, $\text{Μ}\widehat{\text{Ν}}$ ίσα με την περιφέρεια του $\text{Ε}\widehat{\text{Ζ}}$ και ας ενώσουμε τα ΗΚ, ΗΛ, $\Theta\text{Μ}$, $\Theta\text{Ν}$.

Τότε, καθώς τα τόξα $\text{Β}\widehat{\Gamma}$, $\Gamma\widehat{\text{Κ}}$, $\text{Κ}\widehat{\Lambda}$ είναι ίσα μεταξύ τους, οι γωνίες $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$, $\Gamma\hat{\text{Η}}\text{Κ}$, $\text{Κ}\hat{\text{Η}}\Lambda$ είναι επίσης ίσες μεταξύ τους. (ΙΙΙ.27)

Επομένως, όσες φορές είναι πολλαπλάσιο το τόξο $\text{Β}\widehat{\Lambda}$ του τόξου $\text{Β}\widehat{\Gamma}$, τόσες φορές είναι πολλαπλάσια και η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Lambda$ της $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$. Για τους ίδιους λόγους όσες φορές είναι πολλαπλάσιο το τόξο $\text{Ν}\widehat{\text{Ε}}$ του τόξου $\text{Ε}\widehat{\text{Ζ}}$, τόσες φορές είναι πολλαπλάσια και η γωνία $\text{Ν}\hat{\Theta}\text{Ε}$ της $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$.

Εάν το τόξο $\text{Β}\widehat{\Lambda}$ είναι ίσο με το τόξο $\text{Ν}\widehat{\text{Ε}}$, τότε η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Lambda$ θα είναι επίσης ίση με τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ν}$. (ΙΙΙ.27)

Και αν το τόξο $\text{Β}\widehat{\Lambda}$ είναι μεγαλύτερο από το τόξο $\text{Ν}\widehat{\text{Ε}}$, τότε η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Lambda$ θα είναι επίσης μεγαλύτερη από τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ν}$, και αν είναι μικρότερο τότε μικρότερη.

Τότε υπάρχουν τέσσερα μεγέθη, δύο τόξα $\text{Β}\widehat{\Gamma}$, $\text{Ε}\widehat{\text{Ζ}}$ και δύο γωνίες $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$, $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$, τα οποία έχουν ληφθεί για το τόξο $\text{Β}\widehat{\Gamma}$ και τη γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$ τα ίσες φορές πολλαπλάσια, το τόξο $\text{Β}\overset{\frown}{\Lambda}$ και η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Lambda$, ενώ για το τόξο $\text{Ε}\overset{\frown}{\text{Ζ}}$ και τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$, το τόξο $\text{Ν}\overset{\frown}{\text{Ε}}$ και η γωνία $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ν}$.

Και αποδείχθηκε ότι, εάν το τόξο $\text{Β}\overset{\frown}{\Lambda}$ υπερέχει του τόξου $\text{Ν}\overset{\frown}{\text{Ε}}$, τότε θα υπερέχει και η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Lambda$ της γωνίας $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ν}$, και αν είναι ίσο, τότε θα είναι ίση, και αν είναι μικρότερο, τότε θα είναι μικρότερη.

Άρα το τόξο $\text{Β}\overset{\frown}{\Gamma}$ προς το $\text{Ε}\overset{\frown}{\text{Ζ}}$ είναι όπως η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$ προς την $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$. (Ορισμός V.5)

Αλλά όπως είναι η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$ προς την $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$, έτσι είναι η $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma$ προς την $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$, (V.15), διότι κάθε μια των $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$, $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$ είναι διπλάσια των $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma$, $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$ αντίστοιχα. (III.20)

Επομένως, όπως είναι το τόξο $\text{Β}\overset{\frown}{\Gamma}$ προς το τόξο $\text{Ε}\overset{\frown}{\text{Ζ}}$, έτσι είναι και η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Η}}\Gamma$ προς την $\text{Ε}\hat{\Theta}\text{Ζ}$, και έτσι είναι και η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma$ προς την $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$.

Άρα σε ίσους κύκλους οι γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο προς τα τόξα, στα οποία βαίνουν, είτε είναι επίκεντρες είτε εγγεγραμμένες. Ο.ε.δ. (Όπερ έδει δείξαι)

Επομένως η μέτρηση των ευθύγραμμων γωνιών γίνεται με την μέτρηση των αντίστοιχων τόξων τους, εφόσον τις καταστήσω επίκεντρες. Το αποτέλεσμα όμως της μέτρησης των τόξων μπορεί να είναι ακέραιος αριθμός ή ρητός αριθμός, αλλά μπορεί να είναι και πραγματικός αριθμός. Συνεπώς μπορεί οι ευθύγραμμες γωνίες να υπακούουν στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» και με βάση αυτό να μπορούν να μετρηθούν, αλλά το αποτέλεσμα της μέτρησης δεν υπάρχει, αφού το τόξο δεν ευθειοποιείται, ώστε να μετρηθεί (όπως θα δούμε παρακάτω στην παράγραφο I.3).

Ο Πτολεμαίος αναφέρει ότι από τον Θέωνα προστέθηκε στην Πρόταση VI. 33 το πόρισμα: οι επίκεντρες γωνίες είναι ανάλογες των αντίστοιχων τομέων (Συγγραφική Ομάδα, 2001, τόμ. I). Όμως και αυτή η πρόταση δεν βοηθάει στην μέτρηση των γωνιών.

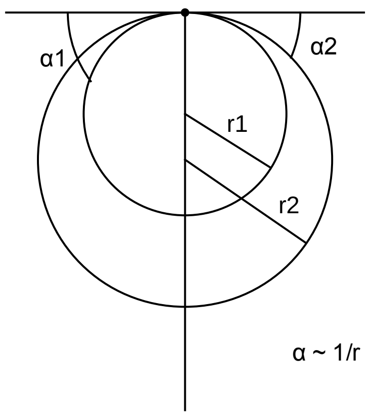
Επίσης η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης έχει θεωρηθεί ότι ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών τόξων και επομένως για οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών επίκεντρων γωνιών. Αν θεωρήσουμε το πολλαπλάσιο των γωνιών αυτών ως γωνία, τότε σύμφωνα με τους περιορισμούς που έχουν δοθεί, η γωνία πρέπει να είναι μικρότερη από 2 ορθές και να μην υπερβαίνει τον κύκλο.

1.ε. Μεγέθη που δεν υπόκεινται στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου»

Ο Thiele (2003) γράφει ότι ο Ορισμός 4 χαρακτηρίζει τη δυνατότητα της μέτρησης: ένα μέγεθος είναι εφικτό να μετρηθεί από ένα άλλο, του ίδιου είδους, μόνο εάν το μέγεθος του πρώτου μπορεί να υπερβληθεί προσθέτοντας το δεύτερο (τη μονάδα μέτρησης) στον εαυτό του επαρκώς πολλές φορές. Αυτή η ιδιότητα είναι προφανής για φυσικούς αριθμούς. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί και για τα κλάσματα (λόγοι φυσικών αριθμών). Με την αναγωγή των κλασμάτων σε κοινό παρονομαστή, στον αριθμητή εμφανίζονται μόνο φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει. Ωστόσο, για πραγματικούς αριθμούς (λόγοι μεγεθών) πρέπει να εισάγουμε αυτήν την ιδιότητα ως αξίωμα της δυνατότητας μέτρησης. Αυτός ο ισχυρισμός αποκλείει μη-Αρχιμήδεια συστήματα μεγεθών.

Με άλλα λόγια, σε οποιοδήποτε Αρχιμήδειο σύστημα μεγεθών ίδιου είδους, κανένα μέγεθος α δεν μπορεί να είναι τόσο μικρό σε σχέση με ένα άλλο μέγεθος β του συστήματος, ώστε για κάθε φυσικό αριθμό ν το πολλαπλάσιο $\nu\alpha$ είναι μικρότερο από το β ($\nu\alpha < \beta$).

Αλλά στους αρχαίους Έλληνες ήταν ήδη γνωστό ένα μη-Αρχιμήδειο σύστημα μεγεθών, οι κερατοειδείς γωνίες. Η εφαπτομένη ενός κύκλου και το αντίστοιχο τόξο του σχηματίζουν μια γωνία που ονομάζεται κερατοειδής. Το μήκος της αντίστροφης ακτίνας $\frac{1}{r}$ του κύκλου μπορεί να χρησιμεύσει ως μέτρο μιας τέτοιας κερατοειδούς γωνίας.



Επομένως οι κερατοειδείς γωνίες δεν έχουν λόγο προς καμία ευθύγραμμη γωνία, δηλαδή δεν υπόκεινται στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου», αφού κάθε πολλαπλάσιο $\nu\alpha$ της κερατοειδούς γωνίας α είναι μικρότερο από οποιαδήποτε ευθύγραμμη γωνία, σύμφωνα με την Πρόταση 16 του ΙΙΙ βιβλίου των «Στοιχείων».
Ως ευθύγραμμη γωνία ερμηνεύεται κάθε μια από αυτές τις κερατοειδείς γωνίες που έχει την τιμή μηδέν, επομένως και οποιοδήποτε άθροισμα τέτοιων γωνιών θα είναι μηδέν. Με άλλα λόγια, κάθε πολλαπλάσιο αυτών των κερατοειδών γωνιών (που γίνεται κατανοητό με τη γενική έννοια) παραμένει ένα εκμηδενισμένο μέγεθος, δηλαδή δεν υπάρχει φυσικός αριθμός ν με $\nu\alpha > 0$, επομένως δεν ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου».

2. Η παρουσίαση του Λήμματος στη μέθοδο της εξάντλησης

2.α. Η Πρόταση Χ.1

Το βιβλίο Χ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη παρουσιάζει γεωμετρικά τη θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών. Η δημιουργία και η ανάπτυξη της θεωρίας του πρέπει να θεωρηθεί έργο των μεγάλων μαθηματικών της Ακαδημίας του Πλάτωνα και κυρίως του Θεαίτητου του Αθηναίου (περίπου 417-369 π.Χ.) και του Ευδόξου του Κνίδιου (Σταμάτης, 1975, τόμ. ΙΙΙ).

Στην πρόταση 1 του Χ βιβλίου, διατυπώνεται η «αρχή» του Ευδόξου, η οποία αποτελεί και την βάση της «μεθόδου της εξάντλησης» που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης. Επίσης μπορεί να ονομαστεί ως το «θεώρημα της ανθυφαίρεσης». Το αποτέλεσμα της πρότασης αυτής εξαρτάται από τον Ορισμό 4 του V βιβλίου, δηλαδή το λεγόμενο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου». Με βάση την πρόταση αυτή θα γίνει δυνατή η σύγκριση καμπυλόγραμμων σχημάτων και όγκων στερεών στο XIII βιβλίο. Σύμφωνα με τα σχόλια του Heath (1908, vol. III), η Πρόταση Χ.1 είναι το Λήμμα που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στην αμέσως επόμενη Πρόταση Χ.2. Αυτό συνεπάγεται ότι, εφόσον η Χ.2 δίνει το κριτήριο για την ασυμμετρία δύο μεγεθών, η Χ.1 έρχεται ακριβώς εκεί που θα έπρεπε να είναι. Επίσης είναι το Λήμμα που απαιτείται για την απόδειξη των Προτάσεων XII.2 και XII.5.

Η Πρόταση Χ.1 διατυπώνεται στα «Στοιχεία» ως εξής:

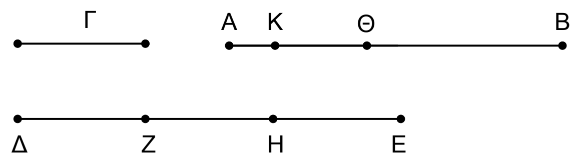
Έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή επαναληφθεί συνέχεια, θα απομείνει μέγεθος μικρότερο από το μικρότερο δοσμένο αρχικό μέγεθος.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω δύο άνισα μεγέθη τα AB, Γ, των οποίων μεγαλύτερο είναι το AB. Εάν από το AB αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτό γίνεται πάντοτε, θα απομείνει κάποιο μέγεθος, το οποίο θα είναι μικρότερο του μεγέθους Γ.

Διότι το Γ,αν πολλαπλασιαστεί, κάποια στιγμή θα γίνει μεγαλύτερο από το AB. [Ορισμός 4 – «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου»]

Ας πολλαπλασιαστεί, και έστω το ΔE είναι το πολλαπλάσιο του Γ και είναι μεγαλύτερο από το AB, και ας διαιρεθεί το ΔE στα ίσα μεγέθη με το Γ, τα ΔZ, ZH, HE, και ας αφαιρεθεί από το AB μεγαλύτερο από το μισό, το $B\Theta$, και από το $A\Theta$ μεγαλύτερο από το μισό, το ΘK και αυτό ας γίνεται πάντοτε μέχρις ότου οι διαιρέσεις του AB γίνουν ίσες το πλήθος με τις διαιρέσεις του ΔE.



Έστω λοιπόν οι διαιρέσεις AK, $K\Theta$, ΘB οι ίσες το πλήθος με τις διαιρέσεις ΔZ, ZH, HE και επειδή το $\Delta E > AB$, και έχει αφαιρεθεί από το μεν ΔE λιγότερο από το μισό, το EH, από το δε AB μεγαλύτερο από το μισό, το $B\Theta$, τότε το υπόλοιπο $H\Delta$ θα είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου ΘA. Και επειδή το $H\Delta > \Theta A$ και αφαιρεθεί από το μεν $H\Delta$ το μισό του HZ, από το δε ΘA μεγαλύτερο από το μισό, το ΘK, τότε το υπόλοιπο ΔZ είναι μεγαλύτερο από το υπόλοιπο AK. Επίσης είναι $\Delta Z = \Gamma$. Άρα και το $\Gamma > AK$. Άρα το AK είναι μικρότερο του Γ. Άρα από το μέγεθος AB απομένει το μέγεθος AK, το οποίο είναι μικρότερο από το δοθέν μικρότερο μέγεθος Γ. Ο.ε.δ.

Με όμοιο τρόπο γίνεται η απόδειξη όταν αυτά που αφαιρούνται είναι τα μισά (Heath, 1908, vol. III), (Σταμάτης, 1975, τόμ. III).

Ο Heath (1908, vol. III) σχολιάζοντας στην X.1, αναφέρει ότι το «Αξίωμα Αρχιμήδους -Ευδόξου», εκτός από τη χρησιμότητα του στην X.1 του Ευκλείδη, εμφανίζεται στα «Φυσικά» (viii. 10, 266b2) του Αριστοτέλη ως εξής: «προσθέτοντας συνεχώς σε ένα πεπερασμένο μέγεθος θα υπερβώ κάθε ορισμένο μέγεθος, και παρομοίως αφαιρώντας συνεχώς από αυτό θα φτάσω σε κάτι μικρότερο από αυτό». Ο Αριστοτέλης πρακτικά παραθέτει το αποτέλεσμα της ίδιας της X.1 (iii. 7, 207b10): «οι διχοτομήσεις ενός μεγέθους είναι ατελείωτες».

Αντί της πρότασης X.1 όπως αναφέρεται στα «Στοιχεία», μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια σύγχρονη «τυποποιημένη» δήλωση ως εξής:

«Οποιοδήποτε μέγεθος M μπορεί να μειωθεί σε οποιοδήποτε επιθυμητό μέγεθος. Το οποίο σημαίνει ότι για ένα σωστά επιλεγμένο ακέραιο ν το μέγεθος $\frac{\mathrm{M}}{2^{\nu}}$ μπορεί να γίνει μικρότερο από οποιοδήποτε μέγεθος μ, δηλαδή $\frac{\mathrm{M}}{2^{\nu}} < \mu$».

Ο Στράντζαλος (1987) αποδεικνύει την παραπάνω πρόταση ως εξής:

<u>Απόδειξη</u>

Έστω M το μεγαλύτερο και μ το μικρότερο από τα άνισα μεγέθη που δίνονται. Αφαιρώντας κάθε φορά το M_{ω}, $\omega = 1, 2, ..., \nu$, που είναι μεγαλύτερο από το μισό του εκάστοτε υπολοίπου, δημιουργούμε την ακόλουθη διαδοχή ανισοτήτων:

$$\mathrm{M} - \mathrm{M}_1 < \frac{\mathrm{M}}{2}, \quad \frac{\mathrm{M}}{2} - \mathrm{M}_2 < \frac{\mathrm{M}}{2^2}, \quad \dots \quad , \quad \frac{\mathrm{M}}{2^{\nu-1}} - \mathrm{M}_{\nu} < \frac{\mathrm{M}}{2^{\nu}} \ .$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει ν έτσι ώστε $\frac{\mathrm{M}}{2^{\nu}} < \mu$ **:**

Σύμφωνα με το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου», υπάρχει φυσικός αριθμός ν_0 με την ιδιότητα $(\nu_0 + 1)\mu > \mathrm{M}$, οπότε $\nu_0 \mu \geq \frac{\nu_0 + 1}{2}\mu > \frac{\mathrm{M}}{2}$.

Αν $\nu_0 = 1$, ισχύει το ζητούμενο για $\nu = 1$. Αν όχι, συνεχίζουμε:

$(\nu_0 - 1)\mu \geq \frac{\nu_0}{2}\mu > \frac{\mathrm{M}}{2^2}$ κ.ο.κ.

Σε ν_0 βήματα θα φτάσουμε στην $\frac{\mathrm{M}}{2^{\nu}} < \mu$, όπου $\nu = \nu_0$.

Οι Νεγρεπόντης και Φαρμάκη (2019) γράφουν ότι η Πρόταση X.1 εκφράζει, σύμφωνα με τον σύγχρονο ορισμό σύγκλισης μιας (φθίνουσας) ακολουθίας, ότι κάθε ακολουθία μεγεθών (γ_{ν}), η οποία ικανοποιεί την συνθήκη $\gamma_1 < \frac{\alpha}{2}$, $\gamma_2 < \frac{\gamma_1}{2}$, …, $\gamma_{\nu+1} < \frac{\gamma_{\nu}}{2}$, …, συγκλίνει στο μηδέν. Η Πρόταση X.1 διατυπώνεται ως εξής:

Αν α και γ είναι δύο (ομογενή) μεγέθη και $\gamma_1 < \frac{\alpha}{2}$, $\gamma_2 < \frac{\gamma_1}{2}$, …, $\gamma_{\nu+1} < \frac{\gamma_\nu}{2}$, …, τότε υπάρχει ν ώστε $\gamma_\nu < \gamma$.

Απόδειξη

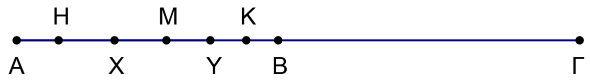
Από την συνθήκη Ευδόξου (όρος 4, Βιβλίο 5 των Στοιχείων) υπάρχει ν ώστε $\nu\gamma > \alpha$.
Εφόσον $2^\nu > \nu$, έπεται $2^\nu \gamma > \nu\gamma > \alpha$.
Από τον τρόπο ορισμού της ακολουθίας (γ_ν), έπεται ότι $2\gamma_1 < \alpha$, $4\gamma_2 < \alpha$, …, $2^\nu \gamma_\nu < \alpha$.
Άρα, $2^\nu \gamma > \alpha > 2^\nu \gamma_\nu$, άρα τελικά $\gamma_\nu < \gamma$.

Η «αρχή» αυτή του Ευδόξου πρέπει να επηρέασε καίρια τον Αρχιμήδη, που την συμπλήρωσε λειτουργικά με δικές του ιδέες, οι οποίες ξεπέρασαν τα «σύνορα» της αρχαιότητας, φτάνοντας στην έννοια του «ολοκληρώματος» (Στράντζαλος, 1987).
Η τωρινή θεωρία των ασύμμετρων αριθμών, που αναπτύχθηκε από τους Dedekind και Weierstrass, ακολουθεί σχεδόν κατά βήμα τον τρόπο σκέψης του Ευδόξου. Με το να κάνει όμως χρήση σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων, άνοιξε πολύ ευρύτερες προοπτικές (Struik, 1966).

Ο Heath (1908, vol. III) σχολιάζει στη X.1, ότι ο Stolz έδειξε πώς να αποδείξουμε το αποκαλούμενο «Αξίωμα του Αρχιμήδη» (για εμάς το λεγόμενο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου») μέσω της Υπόθεσης του Dedekind. Υποθέτουμε ότι τα δύο μεγέθη είναι ευθείες γραμμές. Πρέπει να αποδείξουμε ότι: «δοσμένων δύο ευθειών γραμμών, υπάρχει πάντοτε ένα πολλαπλάσιο του μικρότερου το οποίο είναι μεγαλύτερο από το άλλο».
Ας θεωρήσουμε ότι οι ευθείες γραμμές είναι τοποθετημένες έτσι ώστε έχουν ένα κοινό άκρο και η μικρότερη κείτεται κατά μήκος της άλλης από την ίδια μεριά του κοινού άκρου.
Αν η $\mathrm{A\Gamma}$ είναι η μεγαλύτερη και η AB η μικρότερη, έχουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός ν τέτοιος ώστε $\nu \cdot \mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma}$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει, αλλά ότι υπάρχουν κάποια σημεία, όπως το B, που δεν συμπίπτουν με το άκρο A και ν κάθε ακέραιος οσοδήποτε μεγάλος, τέτοιος ώστε $\nu \cdot \mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτή η υπόθεση οδηγεί σε άτοπο.



Τα σημεία του $\mathrm{A\Gamma}$ μπορεί να θεωρηθούν ότι διακρίνονται σε δύο «είδη», και συγκεκριμένα

1) στα σημεία H για τα οποία δεν υπάρχει ακέραιος ν τέτοιος ώστε $\nu \cdot \mathrm{AH} > \mathrm{A\Gamma}$

2) στα σημεία K για τα οποία υπάρχει ακέραιος ν τέτοιος ώστε $\nu \cdot \mathrm{AK} > \mathrm{A\Gamma}$.

Αυτή η διαίρεση των σημείων σε «είδη» ικανοποιεί τις συνθήκες για την εφαρμογή της Υπόθεσης του Dedekind και επομένως, υπάρχει ένα σημείο M έτσι ώστε τα σημεία του AM να ανήκουν στο πρώτο «είδος» και εκείνα του $\mathrm{M\Gamma}$ στο δεύτερο «είδος».

Παίρνουμε τώρα ένα σημείο Y του $\mathrm{M\Gamma}$ έτσι ώστε $\mathrm{MY} < \mathrm{AM}$. Το μέσο X του AY θα πέφτει μεταξύ των A και M και επομένως θα ανήκει στο πρώτο «είδος», αλλά τότε υπάρχει ακέραιος ένας ακέραιος ν τέτοιος ώστε $\nu \cdot \mathrm{AY} > \mathrm{A\Gamma}$, έπεται ότι $2\nu \cdot \mathrm{AX} > \mathrm{A\Gamma}$, το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση.

2.β. Η Πρόταση XII.2

Στο XII βιβλίο των «Στοιχείων» εφαρμόζεται η «μέθοδος εξάντλησης» του Ευδόξου, δηλαδή αναλύονται οι διαδικασίες, που οδηγούν στον υπολογισμό ενός εμβαδού ή όγκου με διαδοχικές προσεγγίσεις με πολύγωνα ή πολύεδρα αντίστοιχα.

Αυτή η έμμεση μέθοδος ήταν η καθιερωμένη, τόσο στην αρχαία Ελλάδα όσο και στην Αναγέννηση, για την αυστηρή απόδειξη προτάσεων που αναφέρονται σε υπολογισμούς εμβαδών ή όγκων. Είναι απόλυτα ορθή και εύκολα μεταγράφεται σε απόδειξη σύμφωνη με τις απαιτήσεις της σύγχρονης Ανάλυσης. Έχει όμως το μεγάλο μειονέκτημα ότι, για να αποδειχθεί ένα αποτέλεσμα, πρέπει αυτό να είναι από τα πριν γνωστό. Για αυτό οι μαθηματικοί το αναζητούσαν πρώτα με άλλη μέθοδο, περισσότερο δοκιμαστική και λιγότερο αυστηρή (Struik, 1966).

Η μέθοδος, με σημερινή προσέγγιση, όπως διατυπώνεται από τη Συγγραφική ομάδα (2001, τόμ. ΙΙΙ), έχει κατά βάση ως εξής: Βρίσκουμε μια αύξουσα ακολουθία (α_ν) και μια φθίνουσα ακολουθία (β_ν), έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha_\nu \le \mathrm{A} \le \beta_\nu, \quad \alpha_\nu \le \mathrm{B} \le \beta_\nu, \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^* \quad$ και $\quad \beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} \le \frac{1}{2}(\beta_\nu - \alpha_\nu), \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^*$.

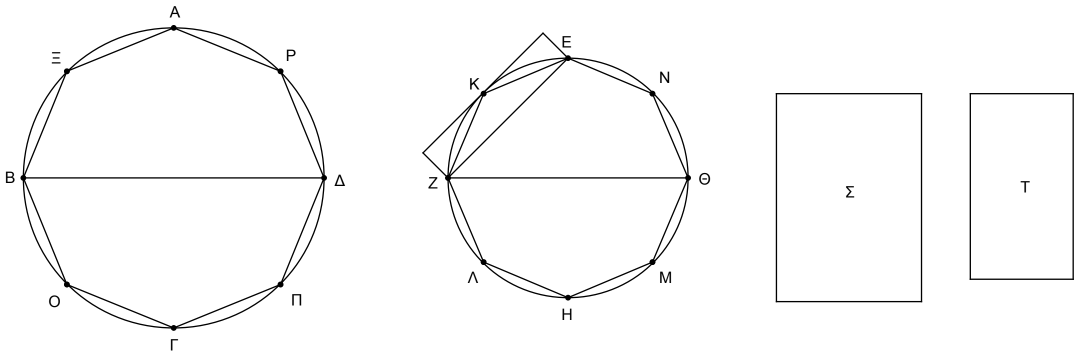
Η Πρόταση Χ.1 είναι το λήμμα που απαιτείται για την απόδειξη της Πρότασης ΧΙΙ.2. Στην Πρόταση ΧΙΙ.2 αποδεικνύεται ότι δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Ας σημειωθεί ότι, με σημερινούς όρους, το εμβαδόν κύκλου λαμβάνεται ως όριο της ακολουθίας (E_{2^n}), που ορίζουν τα εμβαδά των εγγεγραμμένων στον κύκλο κανονικών πολυγώνων με 2^n πλευρές (Συγγραφική Ομάδα, 2001, τόμ. ΙΙΙ).

Η πρόταση ΧΙΙ.2 διατυπώνεται στα «Στοιχεία», σύμφωνα με τους Heath (1908, vol. III) και Σταμάτη (1957, τόμ. IV) ως εξής:
Οι κύκλοι είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των διαμέτρων.

<u>Απόδειξη</u>
Έστω οι κύκλοι $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$, $\mathrm{EZH\Theta}$ και έστω οι διάμετροι αυτών $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{Z\Theta}$. Τότε $\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{(\mathrm{EZH\Theta})} = \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}$.

Διότι αν ο κύκλος $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ προς τον κύκλο $\mathrm{EZH\Theta}$ δεν είναι ίσος με $\frac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}$, τότε θα είναι $\frac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}$ ο κύκλος $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ προς μικρότερο ή μεγαλύτερο χωρίο του κύκλου $\mathrm{EZH\Theta}$.

Έστω, αρχικά, ότι ο λόγος αυτός είναι προς μικρότερο χωρίο Σ, δηλαδή $\frac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2} = \frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$, όπου $\Sigma < (\mathrm{EZH\Theta})$. Και ας εγγραφεί το τετράγωνο $\mathrm{EZH\Theta}$ στον κύκλο $\mathrm{EZH\Theta}$. Όμως το εγγεγραμμένο τετράγωνο είναι μεγαλύτερο από το μισό του κύκλου $\mathrm{EZH\Theta}$, επειδή εάν από τα σημεία E, Z, H, Θ φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου, το τετράγωνο $\mathrm{EZH\Theta}$ είναι το μισό του περιγραφόμενου τετραγώνου στον κύκλο και ο κύκλος είναι μικρότερος του περιγραφόμενου τετραγώνου, άρα το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι μεγαλύτερο από το μισό του κύκλου.



Ας διχοτομηθούν τα τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ από τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν και ας φέρουμε τα ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, και επομένως καθένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του τμήματος του κύκλου που αντιστοιχεί σε αυτό, επειδή αν από τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου και συμπληρώσουμε τα παραλληλόγραμμα πάνω στις ευθείες ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, καθένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ είναι το μισό του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί, αλλά το αντίστοιχο τμήμα του κύκλου είναι μικρότερο του παραλληλογράμμου, επομένως καθένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου τμήματος του κύκλου.

Διχοτομώντας τα υπολειπόμενα τόξα και φέρνοντας τις ευθείες και κάνοντας αυτό επ' άπειρον, θα απομείνουν κάποια τμήματα του κύκλου, τα οποία θα είναι μικρότερα από την υπεροχή, με την οποία υπερέχει ο κύκλος ΕΖΗΘ από το χωρίο Σ. Διότι στο πρώτο θεώρημα του δέκατου βιβλίου (Χ.1) αποδείχθηκε, ότι αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μεγαλύτερο από το μισό και από αυτό που απομένει αφαιρεθεί μεγαλύτερο από το μισό και αυτό γίνεται επ' άπειρον, θα απομείνει κάποιο μέγεθος, το οποίο θα είναι μικρότερο από το δοσμένο μικρότερο μέγεθος.

Έστω τα τμήματα του κύκλου ΕΖΗΘ που απέμειναν όπως περιγράψαμε είναι τα ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ και είναι μικρότερα της υπεροχής, με την οποία υπερέχει ο κύκλος $\mathrm{EZH\Theta}$ από το χωρίο Σ. Τότε το πολύγωνο $\mathrm{EK Z\Lambda HM\Theta N}$ που απομένει είναι μεγαλύτερο από το χωρίο Σ.

Ας εγγραφεί και στον κύκλο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ το πολύγωνο $\mathrm{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P}$ όμοιο με το πολύγωνο $\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N}$, τότε $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P})}{(\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N})}$. (XII.1)

Αλλά και $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$. Άρα $\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}=\dfrac{(\mathrm{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P})}{(\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N})}$. (V.2)

Επομένως και $\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{(\mathrm{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P})}=\dfrac{\Sigma}{(\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N})}$. (V.16)

Όμως ο κύκλος $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι μεγαλύτερος από το εγγεγραμμένο του πολύγωνο, άρα και το χωρίο Σ είναι μεγαλύτερο του πολυγώνου $\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N}$.

Αλλά είναι και μικρότερο, το οποίο είναι αδύνατο.

Άρα δεν είναι $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$, όπου Σ χωρίο μικρότερο του κύκλου $\mathrm{EZH\Theta}$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ούτε $\dfrac{\mathrm{Z\Theta}^2}{\mathrm{B\Delta}^2}=\dfrac{(\mathrm{EZH\Theta})}{\Sigma'}$, όπου Σ' χωρίο μικρότερο του κύκλου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$.

Λέγω τώρα, ότι δεν είναι $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$, όπου Σ χωρίο μεγαλύτερο του κύκλου $\mathrm{EZH\Theta}$.

Διότι αν είναι $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$, τότε $\dfrac{\mathrm{Z\Theta}^2}{\mathrm{B\Delta}^2}=\dfrac{\Sigma}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}$. (V.7, πόρ.)

Αλλά $\dfrac{\Sigma}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}=\dfrac{(\mathrm{EZH\Theta})}{\mathrm{T}}$, (κατωτ. λήμμα)

όπου T χωρίο μικρότερο του κύκλου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$, το οποίο αποδείχθηκε αδύνατο.

Άρα δεν είναι $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$, όπου Σ χωρίο μεγαλύτερο του κύκλου $\mathrm{EZH\Theta}$.

Και αποδείχθηκε ότι δεν είναι $\dfrac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}=\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{\Sigma}$, όπου Σ χωρίο μικρότερο του κύκλου $\mathrm{EZH\Theta}$.

Άρα $\dfrac{\mathrm{Β}\Delta^2}{\mathrm{Z}\Theta^2}=\dfrac{(\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta)}{(\mathrm{EZH}\Theta)}$.

Άρα οι κύκλοι είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των διαμέτρων. Ο.ε.δ.

<u>Λήμμα</u>

Λέγω τώρα, ότι $\dfrac{\Sigma}{(\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta)}=\dfrac{(\mathrm{EZH}\Theta)}{\mathrm{T}}$, όπου Σ χωρίο μεγαλύτερο του κύκλου $\mathrm{EZH}\Theta$ και T χωρίο μικρότερο του κύκλου $\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta$.

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $\dfrac{\Sigma}{(\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta)}=\dfrac{(\mathrm{EZH}\Theta)}{\mathrm{T}}$ τότε εναλλάξ θα είναι $\dfrac{\Sigma}{(\mathrm{EZH}\Theta)}=\dfrac{(\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta)}{\mathrm{T}}$. (V.16)

Αλλά το χωρίο Σ είναι μεγαλύτερο του κύκλου $\mathrm{EZH}\Theta$ και άρα ο κύκλος $\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta$ είναι μεγαλύτερος του χωρίου T. (V.14)

Ώστε το χωρίο Σ είναι ως προς τον κύκλο $\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta$, όσο ο κύκλος $\mathrm{EZH}\Theta$ προς κάποιο χωρίο μικρότερο του κύκλου $\mathrm{ΑΒ}\Gamma\Delta$. Ο.ε.δ.

Ο Heath (1908, vol. III) στα σχόλια της XII.2 αναφέρει ότι παρότι αυτό το θεώρημα λέγεται ότι έχει αποδειχθεί από τον Ιπποκράτη, μπορούμε, με ανεκτή βεβαιότητα, να αποδώσουμε την απόδειξη που δίνεται από τον Ευκλείδη, στον Εύδοξο. Στα σχόλια της X.1 γράφει ότι ο Αρχιμήδης, στον πρόλογο του έργο του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου», αποδίδει τα θεωρήματα XII.7 και XII.10 στον Εύδοξο, ενώ στον πρόλογο του έργο του «Τετραγωνισμός της Παραβολής» λέει ότι το XII.7 και το XII.2 αποδείχθηκαν μέσω ενός βασικού λήμματος: «από άνισες γραμμές, άνισα εμβαδά ή άνισους όγκους, το μεγαλύτερο υπερβαίνει το μικρότερο με τέτοιο μέγεθος που είναι ικανό, αν προστεθεί [συνεχώς] στον εαυτό του, υπερβαίνει το μικρότερο κάθε μέγεθος από αυτά, τα οποία είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους» π.χ. μεγέθη ίδιου είδους όπως τα αρχικά μεγέθη. Ο Αρχιμήδης επίσης λέει ότι το δεύτερο από τα θεωρήματα, το οποίο αποδίδεται στον Εύδοξο (XII.10) αποδείχθηκε μέσω «ενός παρόμοιου λήμματος με αυτό που προείπαμε».

Το λήμμα που διατυπώθηκε έτσι από τον Αρχιμήδη είναι αναμφισβήτητα διαφορετικό από την X.1. Η εμφανής δυσκολία που οφείλεται από τη μνεία των δύο λημμάτων σε σύνδεση με το θεώρημα XII.2 μπορεί να δικαιολογηθεί από την αναφορά της X.1 στην απόδειξη του. Ο Ευκλείδης στην XII.2 παίρνει το μικρότερο μέγεθος και λέει ότι είναι δυνατόν, πολλαπλασιάζοντάς το, να το κάνουμε κάποια στιγμή να υπερβαίνει το μεγαλύτερο, και αυτή η δήλωση βασίζεται καθαρά στον Ορισμό 4 του V βιβλίου. Ως εκ τούτου το μικρότερο μέγεθος στην X.1 μπορεί να θεωρηθεί ως η διαφορά μεταξύ των δύο άνισων μεγεθών. Είναι ξεκάθαρο ότι το λήμμα που διατύπωσε ο Αρχιμήδης χρησιμοποιείται ουσιαστικά για να επικυρώσει το λήμμα X.1, το οποίο φαίνεται να παίζει τόσο μεγάλο ρόλο στις έρευνες του τετραγωνισμού και κυβισμού που έφτασαν σε εμάς (Heath, 1908, vol. III).

Επομένως η σημασία του «Αξιώματος Αρχιμήδους – Ευδόξου» κατανοήθηκε πλήρως από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), ο οποίος το διατύπωσε αυτόνομα και καθαρά, όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο. Το αξιοποίησε για να παρακάμψει τις δυσκολίες που προέκυπταν τότε κατά τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων καμπυλόγραμμων σχημάτων με την «μέθοδο της εξάντλησης». Εκείνο που ακριβώς χρειαζόταν ο Αρχιμήδης, ήταν η δυνατότητα κατασκευής μικρών μεγεθών με μία διαδικασία που επαναλαμβάνεται ν φορές για κατάλληλα μεγάλο ν. Η δυνατότητα αυτή προκύπτει από το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου»: όσο μικρό και αν είναι το α, υπάρχει ν έτσι, ώστε να ισχύει $\frac{\beta}{\nu} < \alpha$ (Στράντζαλος, 1987).

Το μεγαλύτερο εμπόδιο για την παραπέρα πρόοδο της Μαθηματικής Επιστήμης ήταν αναμφιβόλως η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού τέτοιου ώστε να είναι ευχερής η συνοπτική έκφραση των μαθηματικών συλλογισμών (Hilbert, 1975).

3. Η διατύπωση του Αρχιμήδη – Σχόλια

Στην ερμηνεία της θεωρίας των μεγεθών του Αρχιμήδη οι σύγχρονοι μελετητές των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών δεν μπόρεσαν να αντισταθούν επαρκώς στην αποσπασματική επίδραση του σύγχρονου μηχανισμού της επιστήμης στη σκέψη τους, αφού κανένας δεν κατάφερε να περάσει επαρκώς στις σκέψεις του Αρχιμήδη, σύμφωνα με τον Hjelmslev (1950).

Η Ελληνική θεωρία των μεγεθών μπαίνει σε μια νέα εποχή με την πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου», αφού εισάγονται αρκετά νέα μεγέθη, όπως το μήκος καμπύλων γραμμών και το εμβαδό καμπύλων επιφανειών και για αυτά τα μεγέθη καθορίζονται σαφείς κανόνες που διατυπώνονται στα ακόλουθα αξιώματα:

1^{o}. Από όλες τις γραμμές που έχουν τα ίδια άκρα, η ευθεία είναι η μικρότερη.

2^{o}. Από δύο κυρτές γραμμές που έχουν τα ίδια άκρα και η μία περικλείει την άλλη, η εξωτερική είναι η μεγαλύτερη.

3^{o}. Μια επίπεδη επιφάνεια είναι μικρότερη από μια καμπύλη επιφάνεια με την ίδια περίμετρο.

4^{o}. Από δύο κυρτές επιφάνειες που καλύπτουν την ίδια επίπεδη επιφάνεια και η μία από αυτές περικλείει την άλλη, η εξωτερική είναι η μεγαλύτερη.

5^{o}. Περαιτέρω, με άνισες γραμμές, άνισες επιφάνειες και άνισα στερεά, το μεγαλύτερο υπερβαίνει το μικρότερο με τέτοιο μέγεθος, έτσι ώστε όταν προστεθεί στον εαυτό του, μπορεί να υπερβεί οποιαδήποτε καθορισμένο μέγεθος μεταξύ εκείνων που είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους (Hjelmslev, 1950, Heath, 2002).

Ο Hjelmslev (1950) ισχυρίζεται ότι στην τελευταία υπόθεση που έκανε ο Αρχιμήδης βρίσκεται το εργαλείο που καθιστά δυνατή την επέκταση των κύριων θεωρημάτων της θεωρίας των μεγεθών που ιδρύθηκε από τον Εύδοξο - όπως την ξέρουμε από τον Ευκλείδη, στο βιβλίο V των «Στοιχείων» - κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί στα νέα μεγέθη.

Το «λήμμα του Αρχιμήδη» που διατυπώνεται στο 5^{o} αξίωμα θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Όταν $\alpha > \beta$, η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι ένα ιδανικό μέγεθος, για το οποίο ισχύει η ίδια διαδικασία, όπως στην θεωρία των μεγεθών του Ευδόξου: σε κάθε περίπτωση που μπορεί να προκύψει η διαφορά, υπάρχει πάντα ένας ακέραιος ν ώστε το $\nu(\alpha - \beta)$ να είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε δοσμένο μέγεθος γ, ίδιου τύπου με τα α και β.

Ο Αρχιμήδης επέλεξε να βάλει το λήμμα του, ως το τελευταίο βήμα στις θεμελιώδεις παραδοχές σχετικά με τα νέα μεγέθη, για να ξεπεράσει δυσκολίες που συναντούσε στις έρευνές του. Ο κύριος κανόνας που εφαρμόζεται στο έργο του λέει ότι:

Αν $\alpha >=< \beta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} >=< \frac{\beta}{\gamma}$ (ή $\frac{\gamma}{\alpha} <=> \frac{\gamma}{\beta}$)

(Ο κανόνας αυτός υπάρχει στα «Στοιχεία», στο V. 7 με την ισότητα και στο V. 8 με το σύμβολο του μεγαλυτέρου).

Αλλά η απόδειξη αυτής της πρότασης προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ακέραιου αριθμού ν έτσι ώστε $\nu(\alpha-\beta) > \gamma$.

Στη Θεωρία των Λόγων του Ευδόξου αυτό ήταν μια άμεση συνέπεια του «Αξιώματος του Ευδόξου», καθώς για τα πεδία των μεγεθών που θεωρήθηκαν εκεί, το $\alpha-\beta$ πάντοτε υπήρχε σαν ένα μέγεθος ίδιου μεγέθους με αυτά που δόθηκαν. Αλλά για το νέο πεδίο των μεγεθών με το οποίο ενδιαφέρεται τώρα ο Αρχιμήδης αυτό δεν θα μπορούσε σε καμία περίπτωση να υποτεθεί. Τι, για παράδειγμα, θα έπρεπε να καταλάβουμε από το $\alpha-\beta$ όταν το α ήταν το τόξο ενός κύκλου και το β ήταν μια ευθεία γραμμή; Ή το α επιφάνεια μιας σφαίρας, και το β μια επίπεδη επιφάνεια;

Επίσης ο Hjelmslev (1950) ισχυρίζεται ότι μέχρι τώρα κανείς δεν φαίνεται να συνειδητοποίησε την ιδιαίτερη σημασία του «λήμματος του Αρχιμήδη», αλλά έχει απλώς ερμηνευθεί ως ισοδύναμο με το «Αξίωμα του Ευδόξου». Είναι πολύ γνωστό γεγονός, ότι σε γενικώς αποδεκτή σύγχρονη μαθηματική χρήση, το «Αξίωμα του Ευδόξου» αναφέρεται ως «Αξίωμα του Αρχιμήδη».

Άλλο ένα συγκεκριμένο παράδειγμα της επίδειξης του «λήμματος του Αρχιμήδη» αποτελεί η Πρόταση 2 στην πραγματεία του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»:

Λαμβάνοντας υπόψη δύο άνισα μεγέθη, είναι δυνατόν να βρεθούν δύο άνισες ευθείες γραμμές έτσι ώστε η μεγαλύτερη ευθεία προς τη μικρότερη να έχει λόγο μικρότερο από ότι το μεγαλύτερο μέγεθος προς το μικρότερο (Heath, 2002).

Στο σχήμα της απόδειξής της τα δοσμένα μεγέθη μπορεί να συμβολίζονται από τις ευθείες γραμμές AB και Δ, με $\mathrm{AB} > \Delta$, έτσι ώστε η διαφορά να μπορεί εύκολα να συμβολισθεί από το $\mathrm{A\Gamma}$, μαζί και το πολλαπλάσιό του, το οποίο σύμφωνα με το «λήμμα του Αρχιμήδη» θα υπερβαίνει το Δ, αλλά αυτή είναι μόνο μια συμβολική αναπαράσταση που μας επιτρέπει να διατηρήσουμε τα εν λόγω μεγέθη υπό αμφισβήτηση στο μυαλό μας. Εκτός από αυτό, στην απόδειξη αναπαριστάται μια πραγματική, ευθεία γραμμή, στην οποία πρέπει να μετρηθούν τα απαιτούμενα τμήματα. Επίσης στην απόδειξη της Πρότασης 33 του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»: η επιφάνεια O της σφαίρας = 4 φορές ο μεγάλος κύκλος c, χρησιμοποιείται η Πρόταση 2, όπου τα μεγέθη είναι η O και ο 4c, πράγμα που φυσικά ο Αρχιμήδης δεν σκέφτεται να αντικαταστήσει με αναλογικές γραμμές. Στη μελέτη του Αρχιμήδη είναι πολύ σημαντικό να επιμείνουμε σε αυτή τη διάκριση μεταξύ συνήθων μεγεθών και τμημάτων γραμμών (Hjelmslev, 1950).

Ο Αρχιμήδης στην απόδειξη της Πρότασης 2 εφαρμόζει τον κύριο κανόνα, που αναφέραμε παραπάνω ως εξής:

Από $\alpha > \beta$ έπεται $\frac{\gamma}{\alpha} < \frac{\gamma}{\beta}$.

Αλλά όταν τα α και β είναι μεγέθη ενός γενικότερου είδους, όπως εδώ, στη θεωρία των μεγεθών του Αρχιμήδη, η προαναφερόμενη συνθήκη οδηγεί αναγκαστικά στη διαμόρφωση του «λήμματος του Αρχιμήδη».

Επιπλέον, ο Hjelmslev (1950) αναφέρει ότι είχε επικρατήσει η άποψη ότι ο ίδιος ο Αρχιμήδης θεωρούσε δεδομένο, ότι ένας λόγος μπορεί πάντα να παριστάνεται ως λόγος μεταξύ δύο γραμμών. Ότι αυτή είναι μια προφανής παρεξήγηση μπορεί να διαπιστωθεί ήδη από το γεγονός ότι αν ήταν έτσι, το «λήμμα του Αρχιμήδη» θα ήταν αρκετά περιττό.

Σε ολόκληρη την έκθεση της γενικής θεωρίας των μεγεθών στη πραγματεία του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», αλλά και σε μεταγενέστερα έργα του ο Αρχιμήδης δεν διατύπωσε την ύπαρξη τμημάτων γραμμών ανάλογων με δύο δεδομένα γενικά μεγέθη, δηλαδή η ύπαρξη μιας τέταρτης αναλόγου χ που αντιστοιχεί σε τρία μεγέθη α, β, γ έτσι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\chi}$, όπου τα μεγέθη στη μία πλευρά α και β είναι τμήματα γραμμών, ενώ τα μεγέθη στην άλλη πλευρά γ και χ είναι γενικά μεγέθη (ή αντίστροφα) , είναι έξω από τις υποθέσεις του Αρχιμήδη (Hjelmslev, 1950).

Για να ρίξουμε περισσότερο φως σε αυτά τα θεμελιώδη ερωτήματα σχετικά με την κατανόηση της θεωρίας των μεγεθών του Αρχιμήδη, με σύγχρονα βοηθήματα θα κατασκευάσουμε το ακόλουθο αλγεβρικό παράδειγμα: Κατασκευάζουμε μια Γεωμετρία συντεταγμένων με την πυθαγόρεια μετρική, όπου οι συντεταγμένες δεν περιλαμβάνουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά μόνο όλους τους πραγματικούς αλγεβρικούς αριθμούς. Σε αυτή τη Γεωμετρία είναι δυνατόν να εδραιωθεί μια θεωρία μεγεθών στην οποία ισχύουν όλες οι προτάσεις του Αρχιμήδη, αλλά σε αυτή τη γεωμετρία δεν υπάρχει τμήμα της ευθείας γραμμής = περιφέρεια ενός κύκλου.

Συνεπώς, ο Αρχιμήδης με τη θεωρία των μεγεθών του, δεν είναι σε θέση να αποδείξει την ύπαρξη μιας γραμμής ίσης με μια δεδομένη περιφέρεια ενός κύκλου (Hjelmslev, 1950).

Επομένως: αν τα δύο δεδομένα μεγέθη είναι το τμήμα μιας γραμμής l και η περιφέρεια ενός κύκλου c, τότε δεν υπάρχουν δύο τμήματα γραμμών α και β, ανάλογα προς l και c, όπως στην περίπτωση της τέταρτης αναλόγου προς τα τμήματα των γραμμών α, β, l θα μπορούσε να ορίσει ένα τμήμα γραμμής = c.

Ο Hjelmslev (1950) ισχυρίζεται ότι ο Αρχιμήδης επίτηδες σχεδίασε τη θεωρία των μεγεθών του με τέτοιο τρόπο ώστε να μην ενσωματώνει εκ των προτέρων οποιαδήποτε παραδοχή σχετικά με την ύπαρξη ενός τέτοιου τμήματος γραμμής. Αυτό γίνεται φανερό από την Πρόταση 4 της πραγματείας του «Περί ελίκων», η οποία διατυπώνεται ως εξής:

«Δοσμένων δύο άνισων γραμμών, δηλαδή μιας ευθεία γραμμής και της περιφέρειας ενός κύκλου, είναι δυνατό να βρεθεί μια ευθεία γραμμή μικρότερη από τη μεγαλύτερη και μεγαλύτερη από τη μικρότερη».

Γιατί: από το «λήμμα του Αρχιμήδη», η υπεροχή της μιας γραμμής από την άλλη, με την πρόσθεση επαρκούς αριθμού φορών του εαυτού της, μπορεί να υπερβεί τη μικρότερη γραμμή.

Έτσι, π.χ. αν $c > l$ (όπου c είναι η περιφέρεια του κύκλου και l το μήκος της ευθείας γραμμής), μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό n τέτοιο ώστε $n(c-l) > l$.

Συνεπώς $c - l > \frac{l}{n}$ και $c > l + \frac{l}{n} > l$.

Άρα, η ευθεία γραμμή που ικανοποιεί την πρόταση 4 είναι η $l + \frac{l}{n}$.

Αν εδώ ο Αρχιμήδης είχε πάρει το c ίσο με μια ορισμένη ευθεία γραμμή l', δεν θα υπήρχε κανένας λόγος να δημιουργηθεί η παραπάνω πρόταση, επειδή σε αυτή την περίπτωση η δήλωση θα είναι προφανής.

Επομένως η θεωρία των μεγεθών του δεν είναι σε θέση να αποδείξει την ύπαρξη μιας γραμμής ίσης με μια δεδομένη περιφέρεια ενός κύκλου.

Η Πρόταση 4, στο έργο του «Περί ελίκων», βρίσκει μια μεταγενέστερη χρήση στην Πρόταση 18, όπου δηλώνεται ότι η πολική υπο-εφαπτομένη OB στο σημείο A στο τέλος της πρώτης πλήρους στροφής της σπείρας OA είναι ίση με την περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα OA.

Έτσι, η ύπαρξη της ελικοειδούς εφαπτομένης, την οποία ο Αρχιμήδης προφανώς δεν αμφισβητεί, υποδηλώνει την ύπαρξη μιας ευθείας γραμμής = της περιφέρειας του εν λόγω κύκλου. Φαίνεται ότι από τη στιγμή που το γεγονός ήταν μπροστά του, ο Αρχιμήδης έβλεπε εδώ μια συγκεκριμένη συμπληρωματική βάση για περαιτέρω έρευνες σχετικά με την διόρθωση και τον τετραγωνισμό του κύκλου, όπως έκανε αργότερα στην πραγματεία του «Κύκλου μέτρησις» (Hjelmslev, 1950).

Επίσης στην πραγματεία «Κύκλου μέτρησις» στο θεώρημα που λέει ότι: μια σφαίρα είναι τετραπλάσια από το μέγεθος ενός κώνου, όταν η βάση του είναι ο μεγαλύτερος κύκλος και το ύψος του είναι ίσο με την ακτίνα της σφαίρας, ξεκινάει με την ιδέα ότι, ένας κύκλος ισούται με ένα τρίγωνο, του οποίου η γραμμή της βάσης είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου και το ύψος του είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Φαίνεται, λοιπόν, σύμφωνα με τον Hjelmslev (1950), ότι αποδέχεται το γεγονός ότι υπάρχει τμήμα γραμμής = περιφέρεια κύκλου, παρότι δεν το αποδεικνύει η θεωρία του. Πως όμως θα κατασκευάσω ένα τέτοιο τμήμα; Πως θα το μετρήσω;

Επομένως, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο Αρχιμήδης δεν έχει τη δυνατότητα να αποδείξει την ύπαρξη μιας ευθείας γραμμής = με μια δεδομένη περιφέρεια ενός κύκλου μέσω των προτάσεων του για το μέγεθος, αλλά σίγουρα έχει αντιληφθεί το γεγονός ότι ενώ ο λόγος της επιφάνειας της σφαίρας προς τον μεγάλο κύκλο θα μπορούσε να εκφραστεί από τον απλό ακέραιο αριθμό 4, ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο ήταν πολύ πιο περίπλοκος.

Ο Hjelmslev (1950) ισχυρίζεται ότι οι έρευνες του Αρχιμήδη, στη θεωρία των μεγεθών του, συνορεύουν τόσο κοντά με τις σύγχρονες υπάρχουσες αποδείξεις και το εργαλείο που μπορεί να οδηγήσει κατευθείαν σε αυτές είναι η επέκταση της Θεωρίας των Λόγων του Ευδόξου, των αναλογιών των τμημάτων ευθειών γραμμών έτσι ώστε να περιλαμβάνει επίσης «μη καταληκτικά-τερματισμένα τμήματα γραμμών». Αυτό το τμήμα γραμμής δημιουργείται ως εξής: Εάν σε ένα τμήμα AB μιας ευθείας γραμμής δίνεται μια σειρά από τμήματα AA_1, AA_2, ... , κάθε ένα από τα οποία αποτελεί μέρος του επόμενου και δεν υπάρχει τμήμα μιας γραμμής που εξαντλείται από αυτή τη σειρά, τότε το σύνολο των σημείων που περιλαμβάνουν ορίζουν ένα «μη τερματιζόμενο τμήμα γραμμής».

Όλα τα πεπερασμένα και μη τερματιζόμενα τμήματα των γραμμών σχηματίζουν ένα πεδίο μεγέθους για το οποίο όλη η θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι έγκυρη αμέσως μόλις εισαγάγουμε τους ορισμούς του Αθροίσματος, Διαφοράς, Μεγαλύτερου και Μικρότερου που φυσικά προτείνουν οι ίδιοι . Και αυτό μας οδηγεί κατευθείαν από την αρχαία στη σύγχρονη θεωρία των μεγεθών.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Η παρουσίαση του Αξιώματος σε κρίσιμα αποτελέσματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

1. Κριτική του «5^{ου} αιτήματος» των «Στοιχείων»

Στο βιβλίο I των «Στοιχείων» συναντάμε μια σειρά από 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες . Το 5^{ο} στη σειρά αίτημα των παραλλήλων ευθειών διατυπώνεται ως εξής: «Εάν ευθεία που τέμνει δύο άλλες ευθείες σχηματίζει γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες απεριόριστα, από τη μεριά που κείνται οι (αναφερόμενες) γωνίες με το μικρότερο των δύο ορθών άθροισμα, τέμνονται». Σήμερα ως «5^{ο} αίτημα» λέγεται το εξής: «Από σημείο εκτός ευθείας και στο επίπεδο που ορίζουν άγεται ακριβώς μια παράλληλη προς τη δεδομένη ευθεία». Η προηγούμενη πρόταση είναι ισοδύναμη με το «5^{ο} αίτημα» του Ευκλείδη. Το ερώτημα αν το αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο αξίωμα ή μπορεί να προκύψει από άλλα αξιώματα είχε προβληματίσει τους μαθηματικούς για δύο χιλιάδες χρόνια.

Η κριτική πάνω στο «5^{ο} αίτημα» συνοψίζεται στα αποτελέσματα των προσπαθειών να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα (και αιτήματα) των «Στοιχείων». Οι προσπάθειες για μια απάντηση στο προηγούμενο πρόβλημα αρχίζουν γύρω στο 150 μ.Χ., όταν ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (100 – 170 μ.Χ) είχε προσπαθήσει να βρει μια απάντηση, για να βρουν την κορύφωσή τους τον 18^{ο} αιώνα και να οδηγήσουν, τον 19^{ο} αιώνα, στην ανακάλυψη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Στράντζαλος, 1987, Struik, 1966).

Τώρα, αφού έχουμε μελετήσει Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, ξέρουμε ότι οι ισχυρισμοί αυτοί αντιφάσκουν προς προτάσεις των Γεωμετριών αυτών. Τότε, όμως, η σκέψη ήταν εγκλωβισμένη στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, την οποία θεωρούσαν ως μοναδική. Ενδιαφέρον είναι, σύμφωνα με τον Στράντζαλο (1987) ότι, παρ’ όλα αυτά, είχε αρχίσει σχετικά νωρίς η διαδικασία της απελευθέρωσης της έννοιας «ευθεία» από την εποπτική «ευθεία γραμμή». Για παράδειγμα, ο Πρόκλος, κριτικάροντας το «5^{ο} αίτημα», συσχέτισε το «δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν», που αναφέρεται στον ορισμό των «παράλληλων ευθειών» στα «Στοιχεία», με τη σχετική θέση μιας ασύμπτωτης και του αντίστοιχου κλάδου μιας υπερβολής.

Ο νεοπλατωνικός Πρόκλος (περίπου 410-485 μ.Χ.) στην προσπάθειά του να αποδείξει το «5^{ο} αίτημα», δέχθηκε τους επόμενους δύο ισχυρισμούς, που έπρεπε να συμπληρωθούν με κάποιο «αξίωμα συνέχειας» για να δώσουν την επιθυμητή απόδειξη: «Η απόσταση ενός σημείου της πλευράς μιας γωνίας από την άλλη πλευρά της μεγαλώνει απεριόριστα, όσο το σημείο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας» και «οι αποστάσεις των σημείων μιας ευθείας από μια παράλληλή της έχουν άνω φράγμα» (Στράντζαλος, 1987).

Επίσης με την κριτική πάνω στο «5^{ο} αίτημα» ασχολήθηκαν ο Nasir-al-Din al-Tusi (1201-1274) κατά τον Μεσαίωνα, αλλά και οι Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833) και Gauss (1777-1855) κατά τον 18^{ο} αιώνα. Ο Lambert άγγιξε τη λύση, αλλά δεν μπόρεσε να απεγκλωβισθεί τελείως από τη δοξασία ότι το «5^{ο} αίτημα» πρέπει να αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα (και αιτήματα) της Επίπεδης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Όσο για τον Gauss, ήταν ο πρώτος που πίστεψε στην ανεξαρτησία του αιτήματος των παραλλήλων. Ουδέποτε δημοσίευσε τις σκέψεις του πάνω σε αυτό το θέμα, αλλά υπάρχουν επιστολές του, από τις οποίες συνάγεται ότι, γύρω στο 1815, είχε διατυπώσει πρώτος τη λύση, δηλαδή ότι είναι δυνατό να οικοδομηθεί αξιωματικά μία Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, στην οποία θα ισχύουν τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκτός από το αξίωμα των παραλλήλων, και μια άρνηση του αξιώματος αυτού (Στράντζαλος, 1987, Struik, 1966).

Όταν, κάτω από τους προβολείς της εξαντλητικής έρευνας και αναζήτησης απόδειξης 20 ολόκληρων αιώνων, φωτίστηκε τελικά και λύθηκε το αίνιγμα των παραλλήλων, σύμφωνα με τον Hilbert (1975), είδαν ότι είχαν τη λογική δυνατότητα να τροποποιήσουν το αξίωμα του Ευκλείδη, ως προς την ύπαρξη και το πλήθος των παραλλήλων και διατηρώντας τα άλλα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, να κατασκευάσουν νέες Γεωμετρίες, της ίδιας λογικής πληρότητας με εκείνης του Ευκλείδη. Αυτό έγινε κυρίως από δύο μεγάλους γεωμέτρες του 19^{ου} αιώνα: τον Ρώσο Lobatchevski (1793-1856) και τον Γερμανό Riemann (1826-1866).

Μια χαρακτηριστική συνέπεια των νέων αιτημάτων παραλληλίας είναι: στη Γεωμετρία Lobatchevski «το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από 2 ορθές», ενώ στη Γεωμετρία Riemann «το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές γωνίες».

Μία λεπτομέρεια, που ίσως δεν εντοπίζεται με την πρώτη ματιά και δείχνει μια ιδιαίτερη ευαισθησία και μια αξιοσημείωτη για την εποχή ωριμότητα της σκέψης του Ευκλείδη είναι ότι το «5^{ο} αίτημα» χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην απόδειξη της Πρότασης 29 του Ι βιβλίου των «Στοιχείων», μολονότι θα απλοποιούσε αποδείξεις προηγούμενων προτάσεων (Στράντζαλος, 1987). Συνεκτιμώντας το τελευταίο και το ότι η 29^{η} Πρόταση: «Οι εντός εναλλάξ γωνίες, που σχηματίζονται από δύο παράλληλες τεμνόμενες από τρίτη ευθεία είναι ίσες», είναι ισοδύναμη με το «5^{ο} αίτημα» (και άρα δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς αυτό ή κάτι ισοδύναμό του), δεν θα ήταν αυθαίρετο να διατυπώσουμε την εικασία ότι ο Ευκλείδης είχε διαισθανθεί την ιδιαιτερότητα του «5^{ου} αιτήματος» και τρέναρε τη χρησιμοποίησή του όσο ήταν δυνατόν.

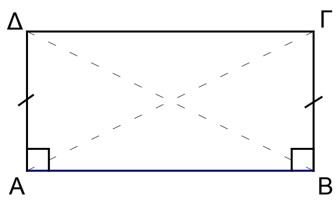
2. Saccheri

Ο Saccheri (1667-1733) ήταν ικανός και ευρηματικός μαθηματικός, που διακρινόταν και για την ευρυμάθειά του. Είχε, όμως, το σοβαρό για ερευνητή μειονέκτημα να διακατέχεται από την έμμονη ιδέα ότι το «5ο αίτημα» αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αν δεν ήταν τόσο σίγουρος γι' αυτό, θα είχε πιθανότατα ανακαλύψει εκείνος πρώτος τις «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες» (Στράντζαλος, 1987).

Στις αποδείξεις του Saccheri χρησιμοποιούνται ουσιαστικά:

- Τα αξιώματα (και τα αιτήματα) των «Στοιχείων» καθώς, επίσης, και οι πρώτες 27 Προτάσεις τους
- Το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου»
- Ένα αξίωμα «συνέχειας – πληρότητας», που είχε μάλλον εποπτικό χαρακτήρα: Κάθε γεωμετρικό μέγεθος, μεταβαλλόμενο από μια τιμή του προς μια άλλη παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Το έργο του Saccheri, σύμφωνα με τον Στράντζαλο (1987), στην κατεύθυνση που μας ενδιαφέρει, στηρίχθηκε σε μία έννοια, που διαφαίνεται στο έργο του Giordano Vitale (1633-1711) και ορίζεται ως εξής: Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ λέγεται τετράπλευρο Saccheri, αν οι γωνίες του στα $Α$ και $Β$ είναι ορθές και, επιπλέον οι πλευρές του $ΑΔ$ και $ΒΓ$ είναι ίσες.



Σ' ένα τετράπλευρο Saccheri τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι ίσα, αφού έχουν αντίστοιχα ίσες δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία. Επομένως, στο προηγούμενο σχήμα ισχύει $ΑΓ = ΒΔ$, απ' όπου έπεται ότι και τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΒΔΓ$ είναι ίσα. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες στα $Γ$ και $Δ$ του τετραπλεύρου είναι ίσες.

Έτσι, ο Saccheri διέκρινε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

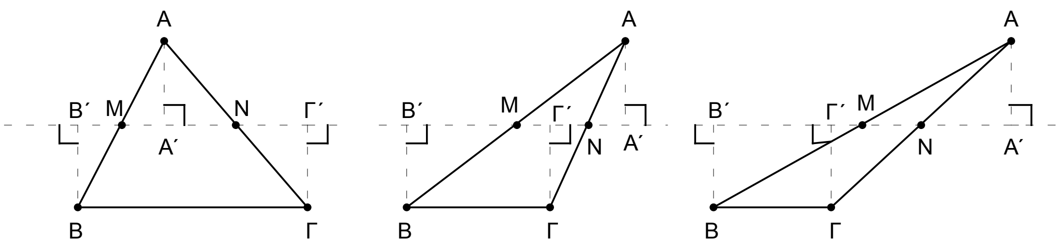
I) Περίπτωση της ορθής γωνίας: $B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma = 1$ ορθή (που αντιστοιχεί στην «Ευκλείδεια Γεωμετρία»)

II) Περίπτωση της αμβλείας γωνίας: $B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma > 1$ ορθή (που αντιστοιχεί στην «Ελλειπτική Γεωμετρία» ή «Γεωμετρία του Riemann»).

III) Περίπτωση της οξείας γωνίας: $B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma < 1$ ορθή (που αντιστοιχεί στην «Υπερβολική Γεωμετρία»).

Πρόθεση του Saccheri ήταν να αποκλείσει τις περιπτώσεις (II) και (III), οπότε θα παρέμενε η (I) ως μόνη αποδεκτή. Η (I) αποδεικνύεται ισοδύναμη με το «5^{o} αίτημα». Αν, λοιπόν, κατόρθωνε να αποκλείσει τις περιπτώσεις (II) και (III), θα είχε αποδείξει ότι το «5^{o} αίτημα» αποδεικνύεται από τα αξιώματα του Ευκλείδη (κατάλληλα συμπληρωμένα) (Στράντζαλος, 1987).

Τα σχήματα που ακολουθούν αντιστοιχούν στις δυνατές θέσεις των σημείων M και N ως προς τα σημεία B', Γ' και δείχνουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις (I), (II) και (III) που διέκρινε ο Saccheri και στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.



Και στα τρία σχήματα τα M και N είναι μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Τα ορθογώνια τρίγωνα $BB'M$ και $AA'M$ είναι ίσα, απ' όπου έπεται $BB' = AA'$ και $B'\hat{B}M = A'\hat{A}M$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $AA' = \Gamma\Gamma'$ και $A'\hat{A}N = \Gamma'\hat{\Gamma}N$. Επομένως, το $B'\Gamma'\Gamma B$ είναι τετράπλευρο Saccheri (με ορθές γωνίες στα B' και Γ' και $BB' = \Gamma\Gamma'$).

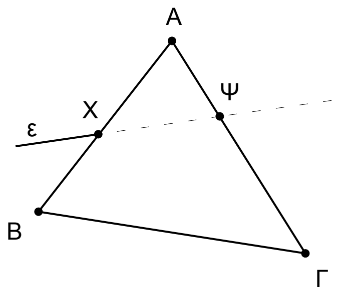
Επιπλέον έχουμε:

$$B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = (B'\hat{B}M \pm \Gamma'\hat{\Gamma}N) + A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = B'\hat{B}\Gamma + \Gamma'\hat{\Gamma}B.$$

Οι τρεις πρώτες γωνίες είναι οι γωνίες του τριγώνου, ενώ οι δύο τελευταίες είναι οι ίσες γωνίες του προηγούμενου τετραπλεύρου Saccheri. Άρα, αν ισχύει η (I), η (II) ή η

(ΙΙΙ), τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου θα είναι ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από 2 ορθές, αντίστοιχα (Στράντζαλος, 1987).

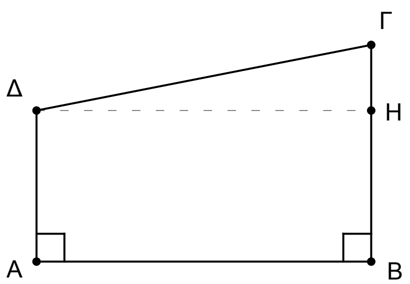
Επίσης ο Saccheri χρησιμοποιούσε σιωπηρά το Αξίωμα του Pasch:
Αν μια ευθεία (η ε στο σχήμα) δεν περιέχει καμία από τις κορυφές ενός τριγώνου και περνάει από ένα σημείο μιας πλευράς του (το X της πλευράς AB), τότε θα τέμνει μια (τουλάχιστον) από τις άλλες πλευρές του.



Η Πρόταση του Saccheri που θα μας απασχολήσει διατυπώνεται ως εξής:
Αν δεν ισχύει η (ΙΙΙ), ενώ ισχύουν το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» και το Αξίωμα του Pasch, τότε ισχύει το «5^{ο} αίτημα» (δηλαδή ισχύει η (Ι)).

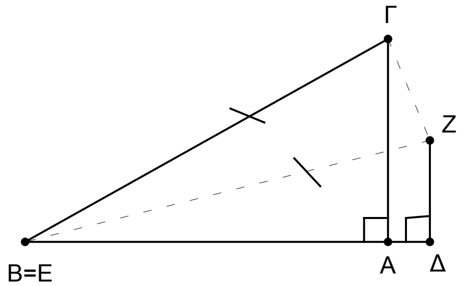
Τα βήματα της απόδειξης της πρότασης αυτής που δίνουμε στη συνέχεια, αποδίδουν τους συλλογισμούς του Saccheri, σύμφωνα με τον Στράντζαλο (1987):

Λήμμα 1:
Αν ισχύει ότι μία εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντί της εσωτερική και αν στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta > \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, τότε $\mathrm{A}\Delta > \mathrm{B}\Gamma$.



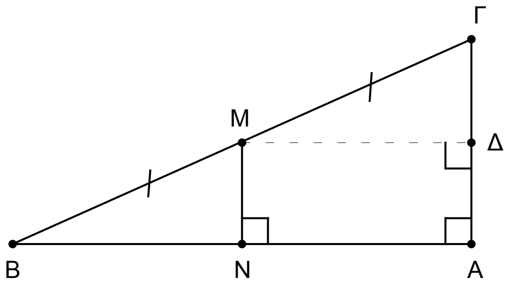
Λήμμα 2:

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ορθογώνια στα A και Δ αντίστοιχα και ότι ισχύουν: $B\Gamma = EZ$ και $A\hat{B}\Gamma > \Delta\hat{E}Z$. Τότε, ισχύει $A\Gamma > \Delta Z$.



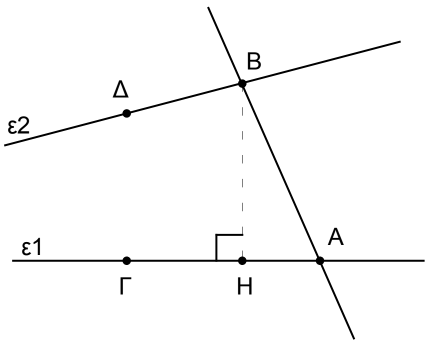
Λήμμα 3:

Έστω M το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Αν η MN είναι κάθετη στην AB και ισχύει είτε η (Ι) είτε η (ΙΙ), τότε θα ισχύει και $BN \le NA$.



<u>Απόδειξη</u> της πρότασης του Saccheri:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\Gamma\hat{A}B + \Delta\hat{B}A < 2$ ορθές, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται «αριστερά» της ευθείας των A, B.



Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η γενική περίπτωση ανάγεται στην ειδική, κατά την οποία η BA είναι κάθετη στην $\mathrm{A\Gamma}$ (ή στην $\mathrm{B\Delta}$):

Από την παραδοχή που κάναμε συνάγεται ότι μια (τουλάχιστον) από τις γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$, $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ θα είναι οξεία. Έστω ότι είναι η πρώτη. Τότε, αν φέρουμε την κάθετη BH προς την $\mathrm{A\Gamma}$, το H θα βρεθεί στη θέση που υποδεικνύεται στο σχήμα (αφού ισχύει η Πρόταση Ι. 16 των «Στοιχείων» για την εξωτερική γωνία τριγώνου).

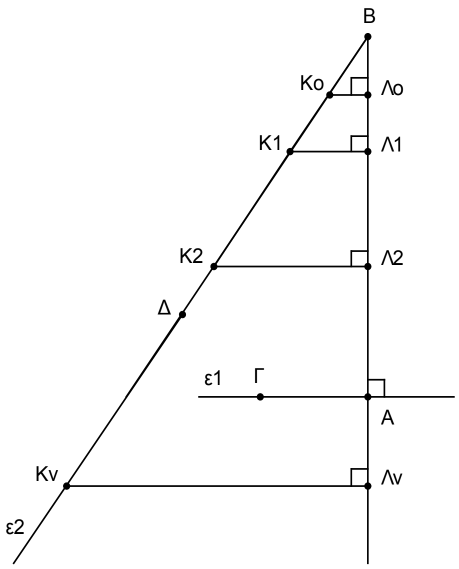
Θα έχουμε αναχθεί στην ειδική περίπτωση, αν αποδείξουμε ότι

$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma < 2$ ορθές, δηλαδή ότι: $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} < 1$ ορθή. Αυτό, πράγματι, ισχύει:

$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} - \mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} < (2 \text{ ορθές } - \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}) - \mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} \le 1$ ορθή

(αφού έχουμε $\mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} + \mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} \ge 2$ ορθές).

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση αναφερόμενοι στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο ίδια γράμματα παίζουν τον ίδιο ρόλο που έπαιζαν στο προηγούμενο.



Πάνω στην $\mathrm{B\Delta}$ εκλέγουμε το K_0 κατά τυχαίο τρόπο και τα K_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ έτσι, ώστε: $\mathrm{BK}_0 = \mathrm{K}_0\mathrm{K}_1$ και $\mathrm{BK}_\lambda = \mathrm{K}_\lambda\mathrm{K}_{\lambda+1}$.

Φέρουμε τις $\mathrm{K}_0\Lambda_0$, $\mathrm{K}_\lambda\Lambda_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ κάθετες στη BA. Τότε, το K_0 θα είναι μέσο την υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου $\Lambda_1\mathrm{BK}_1$, οπότε θα ισχύει $\mathrm{B}\Lambda_0 \le \Lambda_0\Lambda_1$, δηλαδή $\mathrm{B}\Lambda_1 \ge 2\mathrm{B}\Lambda_0$. Ανάλογα και επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $\mathrm{B}\Lambda_\lambda \ge 2^\lambda \mathrm{B}\Lambda_0$.

Επειδή ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» , θα υπάρχει $\lambda = \nu$ έτσι, ώστε $\mathrm{B}\Lambda_\nu > \mathrm{BA}$, οπότε το A θα είναι «εσωτερικό σημείο» της πλευράς $\mathrm{B}\Lambda_\nu$ του (ορθογωνίου) τριγώνου $\Lambda_\nu \mathrm{BK}_\nu$. Αλλά, έχουμε υποθέσει ότι ισχύει το Αξίωμα του Pasch. Επομένως, η ευθεία του $\mathrm{A}\Gamma$, περνώντας από το A, θα τέμνει και κάποια άλλη πλευρά του τριγώνου $\Lambda_\nu \mathrm{BK}_\nu$. Στην Πρόταση Ι. 27 των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι «δύο ευθείες είναι παράλληλες, αν τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν «εντός εναλλάξ» γωνίες ίσες».
Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες των $\mathrm{A}\Gamma$ και $\Lambda_\nu \mathrm{K}_\nu$ δεν τέμνονται, απ’ όπου συνάγεται ότι οι ευθεία, ε_1, του $\mathrm{A}\Gamma$ τέμνει την ε_2 (του BK_ν), και το «5$^{\mathrm{o}}$ αίτημα» αποδείχθηκε.

Τα προηγούμενα δείχνουν την κατεύθυνση προς την οποία μπορεί να συμπληρωθεί το έργο του Saccheri (κυρίως με το Αξίωμα του Pasch), ώστε να αποκλειστεί η περίπτωση (ΙΙ). Ο αποκλεισμός της οφείλεται και στο ότι από τη μια μεριά δεχτήκαμε το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» και από την άλλη, υποθέσαμε ότι ισχύει η Πρόταση για την εξωτερική γωνία τριγώνου.
Αντίθετα, στη διαδικασία του Saccheri για τον αποκλεισμό της περίπτωσης (ΙΙΙ) υπάρχουν κενά που δεν μπορούν να καλυφθούν. Πάντως, κατά τη διαδικασία αυτή, ο Saccheri απέδειξε προτάσεις που αναφέρονται στη «Θεωρία των Παραλλήλων» της σημερινής «Υπερβολικής Γεωμετρίας» (Στράντζαλος, 1987).

3. Legendre

Ο Legendre (1752-1833) επηρέασε όσο κανείς άλλος τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ευρώπη, συμπληρώνοντας τα «Στοιχεία» και με αποτελέσματα που προέκυψαν από την κριτική πάνω στο «5^{ο} αίτημα». Όπως και ο Saccheri, ασχολήθηκε συστηματικά με τη διερεύνηση της σχέσης του «5^{ου} αιτήματος» προς το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Τα διαδοχικά αποτελέσματα των προσπαθειών του δημοσιεύτηκαν στις 12 εκδόσεις του βιβλίου του «Στοιχεία της Γεωμετρίας» (Στράντζαλος, 1987).

Στις προσπάθειές του ο Legendre στηρίχθηκε:

- Στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου»
- Στις 26 πρώτες Προτάσεις των «Στοιχείων» και κυρίως στην Πρόταση 24, σύμφωνα με την οποία: αν δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες και τις γωνίες που σχηματίζουν αυτές άνισες, τότε οι τρίτες πλευρές τους είναι άνισες και, μάλιστα, απέναντι της μεγαλύτερης γωνίας βρίσκεται η μεγαλύτερη τρίτη πλευρά.

Στην τρίτη έκδοση του βιβλίου του ο Legendre απέδειξε την Πρόταση:

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, $\mathrm{AB\Gamma}$, δεν είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές**.**

Η απόδειξη της πρότασης αυτής, όπως παρουσιάζεται από τους Bonola (1955) και Στράντζαλο (1987), στηρίχθηκε ουσιαστικά στις επόμενες παραδοχές:

Α) Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

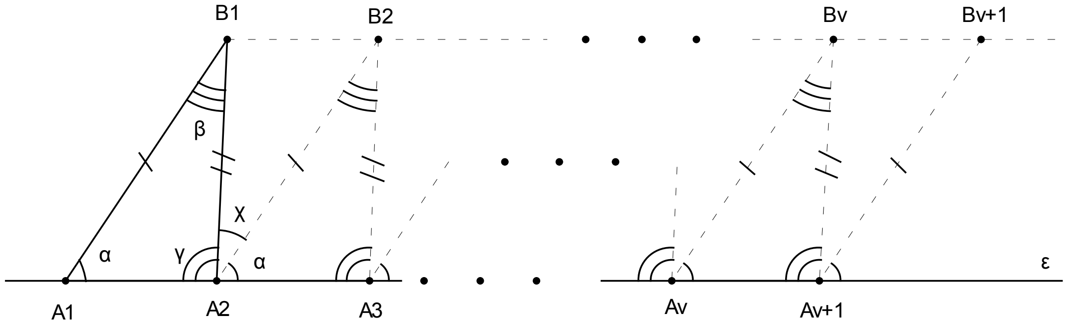
Β) Μία ευθεία είναι μικρότερη από κάθε τεθλασμένη με τα ίδια άκρα.

Γ) Ισχύει η Πρόταση 24 των «Στοιχείων»

Δ) Ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για ευθύγραμμα τμήματα.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε την ευθεία ε. Επιλέγουμε τα σημεία της A_1 και A_2, ώστε να ισχύει $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A\Gamma}$, και καθορίζουμε το B_1 έτσι, ώστε τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ να είναι ίσα. Επαναλαμβάνοντας διαδοχικά τη διαδικασία αυτή ν φορές, φτάνουμε στο τρίγωνο $\mathrm{A}_\nu\mathrm{B}_\nu\mathrm{A}_{\nu+1}$.



Έστω $B_1\hat{A}_1A_2 = \alpha$, $A_1\hat{B}_1A_2 = \beta$, $B_1\hat{A}_2A_1 = \gamma$ και $B_1\hat{A}_2B_2 = \chi$.

Επειδή $\gamma + \chi + \alpha =$ 2 ορθές, για να αποδείξουμε ότι $\alpha + \beta + \gamma \le$ 2 ορθές , όπως επιδιώκουμε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\beta \le \chi$.

Θα καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτοντας $\beta > \chi$.

Αν εφαρμόσουμε την παραδοχή (Γ) για τα τρίγωνα $A_1B_1A_2$ και $B_2A_2B_1$, συμπεραίνουμε $A_1A_2 > B_1B_2$, απ' όπου προκύπτει: $A_1A_2 - B_1B_2 = \mu > 0$.

Εξαιτίας της παραδοχής (Α), τα τρίγωνα $B_1A_2B_2$, … , $B_\nu A_{\nu+1}B_{\nu+1}$ είναι ίσα (αφού $\chi =$ 2 ορθές$-\alpha - \gamma$), οπότε $B_1B_2 = ... = B_\nu B_{\nu+1}$.

Επομένως, $B_1B_2 + ... + B_\nu B_{\nu+1} = \nu\left(B_1B_2\right)$, ενώ τα $A_1, ..., A_{\nu+1}$ έχουν επιλεγεί έτσι, ώστε $A_1A_{\nu+1} = \nu\left(A_1A_2\right)$.

Από την παραδοχή (Β) συνάγεται: $A_1A_{\nu+1} < A_1B_1 + \left(B_1B_2 + ... + B_\nu B_{\nu+1}\right) + B_{\nu+1}A_{\nu+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu\left(A_1A_2\right) < A_1B_1 + \nu\left(B_1B_2\right) + A_1B_1$

$\Rightarrow \nu\mu < 2\left(A_1B_1\right)$.

Η τελευταία ανισότητα αληθεύει, προφανώς, για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει στην παραδοχή (Δ).

Αργότερα, ο Legendre απέδειξε ότι η προηγούμενη Πρόταση ισχύει και υπό τις επόμενες προϋποθέσεις:

1) Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

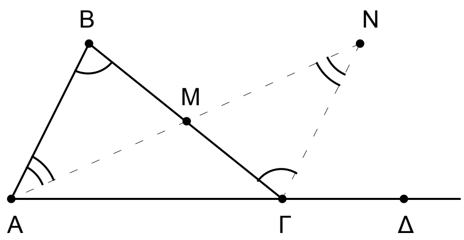
2) Ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για τα μέτρα των γωνιών.

3) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 2 ορθές.

Ο Στράντζαλος (1987) αναφέρει ότι το (3) ισοδυναμεί με τη Πρόταση 16 των «Στοιχείων»: μία εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική. Η απόδειξη της πρότασης αυτής, όπως δίνεται στα «Στοιχεία» και ακολουθεί παρακάτω, στηρίζεται έμμεσα στην παραδοχή: Κάθε ευθεία είναι «απέραντη» (με την έννοια ότι με αρχή ένα τυχαίο σημείο της μπορούμε να θεωρήσουμε πάνω σ' αυτήν ευθύγραμμο τμήμα ίσο με άλλο ήδη δεδομένο).

<u>Απόδειξη</u>

Προκειμένου ν' αποδείξει ο Ευκλείδης ότι $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} < \mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta}$, θεώρησε το M μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$ και καθόρισε το N έτσι, ώστε $\mathrm{AM} = \mathrm{MN}$. (Εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι η ευθεία των A, M είναι «απέραντη»: αλλιώς, δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει N με την προηγούμενη ιδιότητα). Από την ισότητα των τριγώνων ABM και $\mathrm{NM\Gamma}$ προκύπτει $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{N\hat{\Gamma}M}$, απ' όπου έπεται: $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{B\hat{\Gamma}N} < \mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta}$.



Ας σημειωθεί ότι η τελευταία ανισότητα συνάγεται εποπτικά από το σχήμα: το N θεωρείται «μέσα» στη γωνία $\mathrm{B\Gamma\Delta}$. Αυτό αποτελεί μειονέκτημα της απόδειξης του Ευκλείδη. Ο Hilbert αποδεικνύει τη Πρόταση 16 των «Στοιχείων», στηριζόμενος πάλι στο ότι κάθε ευθεία είναι «απέραντη», αλλά έχοντας προηγουμένως κατοχυρώσει αξιωματικά την έννοια «εσωτερικό» μιας γωνίας.

Επειδή η Πρόταση 24 των «Στοιχείων» που χρησιμοποίησε ο Legendre αποδεικνύεται με τη βοήθεια της Ι.16, η διαδικασία που περιγράφει πιο κάτω ο Στράντζαλος (1987), υπερέχει τυπικά της προηγούμενης και στηρίζεται:

Α) στο δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες

Β) στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για γωνίες και

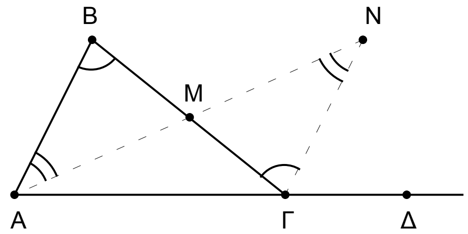
Γ) στην παραδοχή ότι κάθε ευθεία είναι «απέραντη».

Απόδειξη

$1^{ο}$ Βήμα: Το πρώτο βήμα της διαδικασίας αυτής συνίσταται στην απόδειξη του επόμενου ισχυρισμού:

Αν δοθεί ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$, υπάρχει ένα άλλο $Α΄Β΄Γ΄$ με το ίδιο άθροισμα γωνιών και έτσι, ώστε να ισχύει: $Β\hat{Α}Γ \geq 2Β΄\hat{Α}΄Γ΄$.

Η απόδειξη είναι, ουσιαστικά, ίδια μ' εκείνη του Ευκλείδη που αναλύσαμε πριν. Γι' αυτό, θα αναφερόμαστε στο προηγούμενο σχήμα:



Ένα τρίγωνο με τις επιθυμητές ιδιότητες είναι το $ΑΓΝ$, αφού $Ν\hat{Α}Γ + Α\hat{Γ}Ν + Γ\hat{Ν}Α = Ν\hat{Α}Γ + (Α\hat{Γ}Β + Α\hat{Β}Γ) + Ν\hat{Α}Β$ και μία τουλάχιστον από τις γωνίες $Ν\hat{Α}Γ$, $Α\hat{Ν}Γ (= Ν\hat{Α}Β)$ δεν είναι μεγαλύτερη από το μισό της $Β\hat{Α}Γ$.

$2^{ο}$ Βήμα: Το δεύτερο βήμα της απόδειξης συνίσταται στο να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτοντας ότι το άθροισμα των γωνιών κάποιου τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές:

Έστω, λοιπόν, ότι για κάποιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} =$ 2 ορθές $+\hat{\delta}$. Σύμφωνα με τον προηγούμενο ισχυρισμό, υπάρχει ένα τρίγωνο $Α_1Β_1Γ_1$ με $\hat{Α} \geq 2\hat{Α}_1$ και, επαγωγικά, ένα τρίγωνο $Α_\nu Β_\nu Γ_\nu$ με $\hat{Α} \geq 2^\nu \hat{Α}_\nu$, ενώ το άθροισμα των γωνιών όλων των τριγώνων $Α_1Β_1Γ_1$, …. , $Α_\nu Β_\nu Γ_\nu$ είναι 2 ορθές $+\hat{\delta}$, απ' όπου έπεται: $\hat{Β}_\nu + \hat{Γ}_\nu =$ 2 ορθές $+\left(\hat{\delta} - \hat{Α}_\nu\right)$.

Αλλά από το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για γωνίες, συνάγεται η ύπαρξη ενός ν έτσι, ώστε $2^\nu \hat{\delta} > \hat{Α}$, οπότε $2^\nu \hat{\delta} > 2^\nu \hat{Α}_\nu$, δηλαδή $\hat{\delta} - \hat{Α}_\nu > 0$.

Απ’ αυτό και την προηγούμενη ισότητα προκύπτει $\hat{B}_\nu + \hat{\Gamma}_\nu >$ 2 ορθές, που είναι άτοπο, αφού όταν κάθε ευθεία είναι «απέραντη», μπορούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές.

Όπως είδαμε ο Legendre απέδειξε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, στις οποίες δεν συμπεριλαμβάνεται καμία ισοδύναμη προς το «5^o αίτημα».

Το 1823 πίστεψε ότι είχε αποδείξει το «5^o αίτημα» από τα υπόλοιπα αξιώματα, αλλά φυσικά έκανε λάθος.

Ο Στράντζαλος (1987) περιγράφει τα βήματα μιας απόδειξης του ισχυρισμού:

«Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές, τότε ισχύει το 5^o αίτημα».

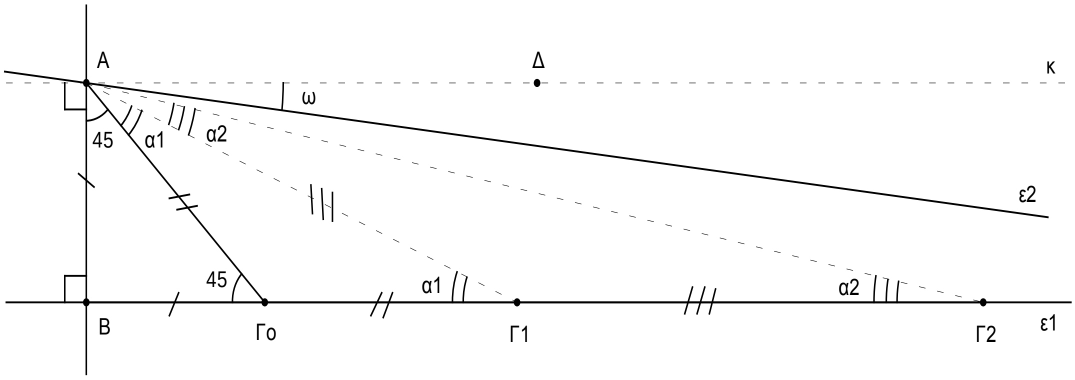
1^o Βήμα: Το πρώτο βήμα το είχε κάνει ήδη ο Saccheri, αποδεικνύοντας ότι «αν το άθροισμα των γωνιών κάποιου τριγώνου είναι 2 ορθές, το ίδιο ισχύει και για κάθε τρίγωνο».

2^o Βήμα: Το δεύτερο βήμα στηρίζεται στο «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» για γωνίες και σε μία επιπλέον παραδοχή, που θα μπορούσε να είναι μία από τις δύο επόμενες:

- Αν μία γωνία «μεταβάλλεται» με «μετακίνηση» μιας πλευράς της από μία θέση σε κάποια άλλη, τότε η «μετακινούμενη» πλευρά παίρνει όλες τις «ενδιάμεσες θέσεις».
- Μία ευθεία, που περνάει από μία κορυφή ενός τριγώνου και περιέχει «εσωτερικά» σημεία του τριγώνου, τέμνει την απέναντι από την κορυφή πλευρά του.

Η απόδειξη που ακολουθεί στηρίζεται στην τελευταία παραδοχή.

<u>Απόδειξη</u>



Έστω ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 του σχήματος σχηματίζουν με την ευθεία των A, B ορθή γωνία στο B και γωνία 1 ορθή$-\omega$ στο A. Υποθέτουμε ότι η ευθεία K είναι κάθετη προς την AB στο A. Επί της ε_1 θεωρούμε τα σημεία Γ_0, Γ_1, Γ_2, $\ldots$ έτσι, ώστε $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Gamma_0$, $\mathrm{A}\Gamma_0=\Gamma_0\Gamma_1$, $\ldots$, $\mathrm{A}\Gamma_\nu=\Gamma_\nu\Gamma_{\nu+1}$, $\ldots$

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι η ε_2 τέμνει την ε_1.

Επειδή τα τρίγωνα $\mathrm{A}\Gamma_\nu\Gamma_{\nu+1}$, $\nu=0,1,\ldots$ είναι ισοσκελή και το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές, ισχύει

$\alpha_1=\frac{1}{2}(45^o)$, $\alpha_2=\frac{1}{2}\alpha_1=\frac{1}{2^2}(45^o)$ και επαγωγικά $\alpha_\nu=\frac{1}{2^\nu}(45^o)$, απ’ όπου έπεται

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu\hat{\mathrm{A}}\Delta &= 90^o-(45^o+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\\ &=45^o-(45^o)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\right)\\ &=45^o-(45^o)\left(1-\frac{1}{2^\nu}\right)\\ &=\frac{1}{2^\nu}(45^o).\end{aligned}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι ισχύει το «Αξίωμα Αρχιμήδους - Ευδόξου» για γωνίες, θα υπάρχει ν έτσι, ώστε να ισχύει $2^\nu\omega>45^o$, δηλαδή $\omega>\frac{1}{2^\nu}(45^o)=\Gamma_\nu\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Αυτό σημαίνει ότι η ε_2 περιέχει «εσωτερικά» σημεία του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma_\nu$. Επομένως, σύμφωνα με την παραλλαγή του «Αξιώματος του Pasch», που δεχτήκαμε, η ε_2 θα τέμνει την πλευρά $\mathrm{B}\Gamma_\nu$ του τριγώνου αυτού, δηλαδή την ε_1.

Όπως διαφαίνεται και απ’ όσα προηγήθηκαν, το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» είναι εξαιρετικά λειτουργικό. Επίσης, τόσο στη «γεωμετρική» διατύπωση του «Αξιώματος Αρχιμήδους – Ευδόξου», όσο και για την αξιοποίηση του «Αξιώματος του Pasch» είναι χρήσιμη μία έννοια «διάταξης». Μία έννοια «διάταξης» είναι, για παράδειγμα, απαραίτητη στην πορεία της απόδειξης της πρότασης του Saccheri, ώστε να μπορούμε να λέμε ότι το σημείο Λ_ν «βρίσκεται μετά» από το A. Στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert μία έννοια «διάταξης» των σημείων μιας ευθείας ορίζεται με τη βοήθεια της έννοιας του «μεταξύ», όπως θα δούμε παρακάτω.

Η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως την πρότεινε ο Hilbert, δεν προήλθε μόνο από την αναμφισβήτητη μαθηματική και συνθετική του ικανότητα, αλλά ήταν και αποτέλεσμα μιας σειράς καίριων επισημάνσεων, δημιουργικών ιδεών και αποτελεσματικών μεθόδων, που κατακτήθηκαν βήμα-βήμα από μαθηματικούς πολύ προγενέστερους του Hilbert (Στράντζαλος, 1987).

ΜΕΡΟΣ III

Σύγχρονες Αξιωματικές Θεμελιώσεις

1. Αξιώματα συνέχειας κατά Hilbert

Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και μαθηματικοί είναι εκείνοι που πρώτοι συνέλαβαν την ιδέα και διατύπωσαν την άποψη, πως μια πρόταση είναι ένα πλήρες και σαφές προϊόν απόδειξης, όταν απορρέει ως συμπέρασμα μιας συγκεκριμένης λογικής διαδικασίας η οποία θεμελιώνεται πάνω σε κάποιες γενικές και βασικές αρχές. Έτσι ανακαλύφθηκε η λεγόμενη «αξιωματική μέθοδος» (Hilbert, 1975).

Καθοριστικό ρόλο γι' αυτή τη γενική επικράτηση της αξιωματικής μεθόδου έπαιξε το μνημειώδες βιβλίο «Grundlagen der Geometrie» (Θεμέλια της Γεωμετρίας), το οποίο κατά το 1889, έφερε στο φως της δημοσιότητας ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert (1862-1943).

Το βιβλίο αυτό είχε επηρεαστεί σε πολλά σημεία από το πρωτοποριακό έργο του Pasch, και ιδιαίτερα από το βιβλίο του «Vorlesungen uder neuere Geometrie» (Πανεπιστημιακά μαθήματα νεώτερης γεωμετρίας) (1882). Εκεί ο Pasch επέκτεινε στη Γεωμετρία τον αξιωματικό τρόπο θεώρησης που, την ίδια εποχή, είχε οδηγήσει τον Frege στο έργο του για τη θεμελίωση της Αριθμητικής. Ο Hilbert, στο βιβλίο του, έκαμε μια ανάλυση των αξιωμάτων στα οποία βασίζεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία και εξήγησε πως η σύγχρονη αξιωματική έρευνα είναι σε θέση να βελτιώσει τα επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων (Struik, 1966).

Ο Hilbert (1975) διατυπώνει την άποψη ότι, ένα σύστημα αξιωμάτων για να είναι αποδεκτό πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες απαιτήσεις:

1. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι απαλλαγμένο αντιφάσεων.
2. Οι προτάσεις του συστήματος πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
3. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι πλήρες.

Η πρώτη απαίτηση σημαίνει ότι, δεν είναι δυνατόν να συνυπάρχει με μια κατάφαση, A και η άρνησή της, όχι A. Η δεύτερη απαίτηση σημαίνει ότι, δεν πρέπει καμία πρόταση που συμπεριλαμβάνεται μέσα σε ένα σύνολο αξιωμάτων, να μπορεί να αποδειχθεί μέσω των άλλων αξιωμάτων του συστήματος. Η τρίτη αρχή της «πληρότητας», σημαίνει ότι, κάθε σχετική πρόταση μιας θεωρίας είναι δυνατόν να αποδειχθεί με τη χρησιμοποίηση ενός μέρους ή όλων των αξιωμάτων που έχουμε αποδεχθεί ως βάθρο της αναπτυσσόμενης θεωρίας.

Το σύστημα αξιωμάτων του Hilbert αποτελείται από πέντε ομάδες και βελτιώθηκε διαδοχικά από τον ίδιο και από άλλους ερευνητές. Σύμφωνα με την $7^{η}$ έκδοση του βιβλίου «Grundlagen der Geometrie» του Hilbert (1975), οι ομάδες των αξιωμάτων είναι:

I) τα αξιώματα σύνδεσης (ή σύμπτωσης)

II) τα αξιώματα διάταξης (ή του μεταξύ)

III) τα αξιώματα ισότητας (ή συμφωνίας)

IV) το αξίωμα παραλληλίας

V) τα αξιώματα συνέχειας.

Σύμφωνα με τον Hilbert (1975), τα σημεία χαρακτηρίζονται ως στοιχεία της Γραμμικής Γεωμετρίας, τα σημεία και οι ευθείες καλούνται στοιχεία της Επίπεδης Γεωμετρίας, ενώ τα σημεία, οι ευθείες και τα επίπεδα αναφέρονται ως στοιχεία της Γεωμετρίας του χώρου.

I) Τα «αξιώματα σύνδεσης» ή «σύμπτωσης» είναι 8, τα 3 αναφέρονται στην Επίπεδη Γεωμετρία, ενώ τα υπόλοιπα 5 στη Γεωμετρία του χώρου. Τα αξιώματα αυτής της ομάδας ιδρύουν μεταξύ των σημείων, ευθειών και επιπέδων μία «σύνδεση». Διαφορετικά, το αντικείμενό τους είναι οι έννοιες που σχετίζονται με τη «σύμπτωση ενός σημείου και μίας ευθείας», δηλαδή οι έννοιες που διευκρινίζουν τι σημαίνει η φράση «ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία» και επιτρέπουν απαντήσεις στο ερώτημα κατά πόσον οι σχέσεις «σύμπτωσης» καθορίζουν τα σημεία ή τις ευθείες.

II) Τα «αξιώματα διάταξης» ή «του μεταξύ» είναι 4 και κάνουν δυνατή τη διάταξη των σημείων επί μιας ευθείας, σε ένα επίπεδο και στον χώρο. Τα 3 αναφέρονται στην έννοια του «μεταξύ για συνευθειακά σημεία» και το 4^{ο} είναι το αξίωμα του Pasch, που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι διέπει την έννοια του «μεταξύ στο επίπεδο» και οδηγεί στην έννοια του ημιεπιπέδου.

III) Τα «αξιώματα ισότητας» ή «συμφωνίας» είναι 5 και κατοχυρώνουν τη «μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών» και την «ισότητα γωνιών».

IV) Το «αξίωμα παραλληλίας» ή «Ευκλείδειο αξίωμα» διατυπώνεται από τον Hilbert ως εξής: Έστω ε μια τυχούσα ευθεία και A ένα σημείο εκτός της ε κείμενο: τότε στο από το A και την ε οριζόμενο επίπεδο υπάρχει το πολύ μία ευθεία που διέρχεται από το A και δεν τέμνει την ε. Η ευθεία αυτή καλείται «η από το A παράλληλη προς την ε» (Hilbert, 1975, Στράντζαλος, 1987).

Το «αξίωμα παραλληλίας» IV έχει την ίδια σημασία με το ακόλουθο αίτημα: «Αν δύο ευθείες α και β, κείμενες σε ένα επίπεδο, δεν συναντούν μια τρίτη ευθεία γ του ίδιου επιπέδου, τότε αυτές δεν συναντώνται ούτε μεταξύ τους». Πράγματι, αν οι δύο ευθείες α και β είχαν ένα κοινό σημείο A, τότε θα υπήρχαν από το A οι δύο ευθείες α, β – κείμενες με την γ στο ίδιο επίπεδο – που δεν θα συναντούσαν την ευθεία γ. Όμως ένα τέτοιο περιστατικό αντιφάσκει προς το αξίωμα παραλληλίας IV. Παρομοίως εύκολα συνάγεται αντιστρόφως το αξίωμα παραλληλίας IV από το παραπάνω αίτημα (Hilbert, 1975).

Επίσης, σύμφωνα με τον Hilbert (1975), δεχόμενοι το «αξίωμα παραλληλίας» μαζί με τα «αξιώματα ισότητας», φθάνουμε εύκολα στα επόμενα γνωστά συμπεράσματα.

α) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία, τότε οι σχηματιζόμενες εντός και εναλλάξ (όπως και οι εκτός και εναλλάξ) γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, και αντιστρόφως: η ισότητα δύο εντός (ή εκτός) και εναλλάξ γωνιών έχει ως συνέπεια την παραλληλία των (δύο αρχικών) ευθειών.

β) Οι γωνίες κάθε τριγώνου έχουν άθροισμα δύο ορθές γωνίες.

V) Τα «αξιώματα συνέχειας» είναι 2, το «Αξίωμα Αρχιμήδους - Ευδόξου» και το «Αξίωμα της γραμμικής πληρότητας». Και τα δύο είναι γραμμικά αξιώματα.

V_1. («Αξίωμα της μέτρησης» ή «Αρχιμήδειο αξίωμα»). Αν AB και $\Gamma\Delta$ είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα, τότε πάνω στην ευθεία AB υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από σημεία A_1, A_2, A_3, …, $A_{\nu-1}$, A_ν, τέτοια ώστε τα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{\nu-1}A_\nu$, να είναι ίσα προς το τμήμα $\Gamma\Delta$ και το σημείο B να κείται μεταξύ των $A_{\nu-1}$, A_ν (Hilbert, 1975).

Ο Στράντζαλος (1987) εξηγεί ότι, το αξίωμα V_1 επιτρέπει τη μέτρηση για τον εξής λόγο: Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το ΑΒ με μονάδα το ΓΔ. Έστω ν ο ελάχιστος φυσικός αριθμός, για τον οποίο ικανοποιείται το V_1. Τότε, θα έχουμε είτε $B=\Delta_{\nu-1}$, είτε $A – \Delta_{\nu-1} – B$. Στην πρώτη περίπτωση το μήκος του ΑΒ είναι ν-1, ενώ στη δεύτερη συνεχίζουμε τη μέτρηση με ανάλογη διαδικασία, θεωρώντας ως μονάδα το ΑΜ, όπου Μ είναι το μέσο του ΑΒ κ.ο.κ.

V_2. («Αξίωμα της γραμμικής πληρότητας»). Δεν είναι δυνατόν να επεκταθεί, με επιπλέον σημεία, μία ευθεία σε μία καινούργια ευθεία έτσι, ώστε να ισχύουν για τα σημεία της καινούργιας ευθείας οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα της σύμπτωσης, του μεταξύ, της συμφωνίας και από το προηγούμενο αξίωμα (Στράντζαλος, 1987).

Η διατήρηση όλων αυτών των αξιωμάτων, κατά τον Hilbert (1975), έχει το νόημα ότι κατά την επέκταση όλα τα αξιώματα πρέπει να παραμένουν ισχυρά με την πρωταρχική σημασία, δηλαδή οι κατεστημένες σχέσεις των σημείων, η υπάρχουσα διάταξη, και η καθιδρυμένη ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων δεν πρέπει πουθενά να διαταραχθεί. Αν π.χ. ένα σημείο Α κείται, πριν από την επέκταση, μεταξύ δύο σημείων Β και Γ, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και μετά την επέκταση. Επίσης, τμήματα που ήταν πριν ίσα μεταξύ τους, πρέπει να μένουν το ίδιο και μετά την επέκταση.

Το «αξίωμα πληρότητας» δεν είναι συνέπεια του «Αρχιμήδειου αξιώματος». Με την προσθήκη του «αξιώματος πληρότητας», μολονότι δεν περιλαμβάνει άμεσα καμιά έκφραση σχετική με την έννοια της σύγκλισης, γίνεται εφικτό να καταδείξουμε την ύπαρξη του ορίου του αντίστοιχου προς μια τομή Dedekind και την πρόταση του Bolzano για την ύπαρξη των σημείων συσσώρευσης, οπότε τότε η Γεωμετρία μας αναδεικνύεται ως ταυτόσημη με την «Αναλυτική Γεωμετρία» (Hilbert, 1975).

Επομένως το «Αρχιμήδειο αξίωμα» V_1 προετοιμάζει το αίτημα της συνέχειας και το «αξίωμα της πληρότητας» V_2 αποτελεί τον «τελικό δομικό λίθο» του συστήματος αξιωμάτων, αφού με τη βοήθειά του, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία είναι συνεχές (Στράντζαλος, 1987). Με τα «αξιώματα συνέχειας» και «διάταξης» ξεπεράστηκε το πρόβλημα της ύπαρξης σημείων τομής, που εμφανίζεται στα «Στοιχεία».

Στις σύγχρονες παρουσιάσεις της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας, αντί των δύο αξιωμάτων της συνέχειας του Hilbert, διατυπώνεται το «Αξίωμα του Dedekind», που προτάθηκε το 1871, και διατυπώνεται σύμφωνα με τον Στράντζαλο (1987), ως εξής:

V. Έστω $x \in \mathrm{E}$. Μία «τομή του Dedekind» στο $\Sigma(x)$ ορίζεται από δύο ξένα μεταξύ τους και μη κενά υποσύνολα του, τα Σ_1 και Σ_2 έτσι ώστε να ισχύει $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma(x)$ και, επιπλέον, τα εσωτερικά σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος με άκρα που ανήκουν στο Σ_λ, να ανήκουν επίσης, στο ίδιο Σ_λ, $\lambda = 1,2$. Δεχόμαστε ότι σε κάθε «τομή του Dedekind» αντιστοιχεί ένα σημείο $D \in \Sigma(x)$, που είναι ακρότατο σημείο του Σ_λ, δηλαδή ανήκει στο Σ_λ και δεν βρίσκεται «μεταξύ» δύο σημείων του.

Αποδεικνύεται με «απαγωγή σε άτοπο» ότι, αν ισχύει το «Αξίωμα του Dedekind» είτε το Σ_1 είτε το Σ_2 περιέχει ένα ακρότατο σημείο.

Η απόδειξη του «Αξιώματος Αρχιμήδους – Ευδόξου» μέσω του «Αξιώματος του Dedekind» δόθηκε στην παράγραφο Ι.2.α.

Τέλος, η Γεωμετρία που αναπτύσσεται αποδεικτικά στη βάση των αξιωμάτων του Hilbert εκτός του (IV) «αξιώματος της παραλληλίας» καλείται «Ουδέτερη Γεωμετρία» (Στράντζαλος, 1987). Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη το «5^o αίτημα», το οποίο είναι ισοδύναμο με το «αξίωμα της παραλληλίας», χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην απόδειξη της Πρότασης Ι.29, (οι εντός εναλλάξ γωνίες, που σχηματίζονται από δύο παράλληλες τεμνόμενες από τρίτη ευθεία, είναι ίσες), μολονότι θα απλοποιούσε αποδείξεις προηγούμενων προτάσεων. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι στην «Ουδέτερη Γεωμετρία» ανήκουν όλες οι προτάσεις των «Στοιχείων» πριν από την Πρόταση 29.

Επίσης η «Ουδέτερη Γεωμετρία» επεκτείνεται στην «Ευκλείδεια» ή την «Υπερβολική» ανάλογα με το αν θα εμπλουτίσουμε τα αξιώματα της, με το «αξίωμα παραλληλίας» ή το «υπερβολικό αξίωμα» (από σημείο Α εκτός ευθείας ε, του ίδιου επιπέδου, άγονται περισσότερες από μία παράλληλες ευθείες προς την ε) (Στράντζαλος, 1987).

Στην «Ελλειπτική Γεωμετρία», ισχύει ότι, κάθε δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο. Επομένως δεν ικανοποιείται κάποιο από τα αξιώματα της «σύμπτωσης», του «μεταξύ» και της «συμφωνίας». Ενώ αν ικανοποιούνται τα αξιώματα αυτά τότε αποδεικνύεται ότι, από κάθε σημείο που δεν ανήκει σε μία ευθεία περνάει μία τουλάχιστο παράλληλη προς αυτήν.

Αν εκτός από τα αξιώματα της «σύμπτωσης», του «μεταξύ» και της «συμφωνίας», λάβουμε υπόψη μας και το «Αξίωμα του Dedekind», δηλαδή στα πλαίσια της «Ουδέτερης Γεωμετρίας», αποκτούμε τη δυνατότητα μιας πληρέστερης διερεύνησης της «παραλληλίας», αφού αποδεικνύεται ότι, αν από ένα σημείο A που δεν ανήκει στην ευθεία ε περνάνε δύο (τουλάχιστον) παράλληλες προς την ε, τότε από το A περνάνε άπειρες ως προς το πλήθος τους παράλληλες προς την ε. Επίσης ισχύουν οι προτάσεις: «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές» και «αν ένα τρίγωνο έχει άθροισμα 2 ορθών, τότε κάθε τρίγωνο έχει άθροισμα 2 ορθών» (Στράντζαλος, 1987).

Σύμφωνα με τον Hilbert (1975), η δημιουργία των νέων συστημάτων Γεωμετρίας απέδειξε, ότι υπάρχει η «λογική δυνατότητα» να απορρίψουμε ένα ή περισσότερα από τα θεμελιώδη αιτήματα της Κλασσικής Γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό παρότρυνε τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους των Θετικών Επιστημών να μελετήσουν κατά πόσον τα, επί πολλούς αιώνες, παραδεκτά αιτήματα είναι αναγκαία και μεταξύ τους ανεξάρτητα. Έτσι προέκυψε η λεγόμενη «Αξιωματική», πάνω στην οποία έγιναν κατά τους επόμενους χρόνους πολλές βαθυστόχαστες και εμπνευσμένες μελέτες. Κορυφαίος αυτής της ομάδας ερευνητών ήταν ο Hilbert.

2. Μη Αρχιμήδειες Γεωμετρίες

Ο Hartshorne (2000) αναφέρει ότι, το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» ότι, δοσμένων δύο ευθύγραμμων τμημάτων, κάποιο πολλαπλάσιο του πρώτου θα υπερβεί το δεύτερο, είναι τόσο ενσωματωμένο στην εμπειρία του κόσμου μας, που είναι δύσκολο να φανταστούμε μία Γεωμετρία στην οποία δεν θα ισχύει. Ακόμη και το πιο απομακρυσμένο αστέρι έχει κάποια απόσταση από τη γη, η οποία μπορεί να μετρηθεί σε έτη φωτός και ακόμη και αν πάρουμε την ίντσα ως την τυπική μονάδα του μήκους, κάποιος αριθμός ιντσών, αν και πολύ μεγάλος αριθμός, θα υπερβεί την απόσταση αυτού του απομακρυσμένου αστεριού. Όσο εμείς διατηρούμε την ιδέα ότι, η Γεωμετρία αντιπροσωπεύει τον πραγματικό κόσμο κατά κάποιον τρόπο, είμαστε δεσμευμένοι να δεχθούμε το «Αρχιμήδειο αξίωμα» ως αληθές.

Αφ’ ετέρου, στα αφηρημένα Μαθηματικά, η Γεωμετρία είναι κάτι που ικανοποιεί ένα ορισμένο σύνολο αξιωμάτων. Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μία Γεωμετρία πάνω σε ένα αφηρημένο διατεταγμένο σώμα. Τα στοιχεία του σώματος δεν χρειάζεται να είναι αριθμοί ή αποστάσεις. Κάθε αφηρημένο σώμα μας κάνει .

Θα επωφεληθούμε από αυτή την αφαίρεση για να κατασκευάσουμε κάποιες «Μη Αρχιμήδειες Γεωμετρίες». Αυτά τα παραδείγματα θα εξυπηρετούν δύο λειτουργίες. Η μία μας δείχνει την ανεξαρτησία του «Αρχιμήδειου αξιώματος» και του «αξιώματος της παραλληλίας» του Playfair από τα αξιώματα του επιπέδου του Hilbert. Η άλλη ελευθερώνει το μυαλό μας από τους περιορισμούς της συνήθειας, μελετώντας τις ιδιότητες μιας λογικά κατασκευασμένης Γεωμετρίας, στην οποία δεν ισχύει το «Αρχιμήδειο αξίωμα». Τέτοιες Γεωμετρίες καλούνται «Μη Αρχιμήδειες» (Hartshorne, 2000).

Στη συνέχεια θα εξετασθεί η «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας και θα αναλυθούν μοντέλα, που θα αναδεικνύουν τα αξιώματα του Hilbert ως «ανεξάρτητα» μεταξύ τους, στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

2.α. Πραγματικοί αριθμοί

Ο Hilbert αποδεχόταν τη Θεωρία των Φυσικών Αριθμών και των πράξεών τους και κατ' επέκταση, τις παράγωγες θεωρίες, όπως είναι οι Θεωρίες των Πραγματικών αριθμών, των Ρητών κ.λπ., προκειμένου, από τη μια μεριά, να αποδείξει την «ανεξαρτησία» των αξιωμάτων του και από την άλλη, να βρει διέξοδο στην προσπάθεια του να βεβαιωθεί αποδεικτικά ότι, το σύστημα των αξιωμάτων του δεν οδηγεί σε αντιφάσεις (Στράντζαλος, 1987).

Το σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών αποτελεί ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα , αφού ικανοποιεί τις ιδιότητες του σώματος (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, ύπαρξη ουδετέρου και συμμετρικού στοιχείου ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα) και επιπλέον είναι εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης, $\alpha > \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta > 0$, έτσι ώστε αν θεωρήσουμε το σύνολο P των θετικών στοιχείων του, έχει τις εξής ιδιότητες:

(Νόμος της Τριχοτόμησης): Για κάθε αριθμό α ισχύει μία και μόνο μία τις:

i) $\alpha = 0$ ii) $\alpha \in \mathrm{P}$ iii) $-\alpha \in \mathrm{P}$.

(Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση): Αν ο α και ο β ανήκουν στο P, τότε και ο $\alpha + \beta$ ανήκει στο P.

(Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό): Αν ο α και ο β ανήκουν στο P, τότε και ο $\alpha \cdot \beta$ ανήκει στο P.

Επίσης ικανοποιεί την ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος, η οποία κάνει ένα διατεταγμένο σώμα πλήρες, και είναι η εξής: Κάθε μη κενό άνω φραγμένο σύνολο A του διατεταγμένου σώματος έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή ο αριθμός x είναι ένα ελάχιστο άνω φράγμα του A αν: (1) ο x είναι άνω φράγμα του A ,δηλαδή $x \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathrm{A}$ και (2) αν y είναι άνω φράγμα του A, τότε $x \leq y$.

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες. Σύμφωνα με τον Spivak (2001), το σημείο εκκίνησής μας θα είναι το Q, το οποίο υποθέτουμε διατεταγμένο σώμα, που περιέχει τα N και Z σαν υποσύνολα. Σε ένα κρίσιμο σημείο, για την απόδειξη της ιδιότητας α+(-α)=0, απαιτείται ένα λήμμα στο οποίο θα χρειαστεί να υποθέσουμε και κάτι ακόμα για το Q:

Έστω x ένα στοιχείο του Q με $x>0$. Τότε για κάθε y στο Q υπάρχει κάποιο n στο Ν τέτοιο ώστε $nx>y$.

Αυτή η υπόθεση, που ισχυρίζεται ότι οι ρητοί αριθμοί έχουν την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών, δεν προκύπτει από τις ιδιότητες ενός διατεταγμένου σώματος. Το σημαντικό σημείο για μας είναι όταν κατασκευάζεται αυστηρά το Q, οι ιδιότητες του διατεταγμένου σώματος εμφανίζονται σαν θεωρήματα, και το ίδιο συμβαίνει με αυτήν την πρόσθετη υπόθεση (Spivak, 2001).

Επίσης, αποδεικνύεται από τον Spivak (2001) το θεώρημα ότι, αν F είναι ένα οποιοδήποτε πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε είναι ισομορφικό με το $\Re$, δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση f από το $\Re$ στο F, με τις εξής ιδιότητες:

1) Αν $x \neq y$, τότε $f(x) \neq f(y)$
2) Αν $z \in F$, τότε $z = f(x)$, για κάποιο $x \in \Re$
3) Αν $x, y \in \Re$, τότε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

και επιπλέον

4) Αν $x < y$, τότε $f(x) < f(y)$.

Ένα διατεταγμένο σώμα F καλείται Ευκλείδειο αν ικανοποιείται η Ευκλείδεια ιδιότητα: $\forall \alpha \in F$, με $\alpha > 0$, υπάρχει η τετραγωνική ρίζα του α στο F, δηλαδή $\sqrt{\alpha} \in F$ (Hartshorne, 2000).

Ένα διατεταγμένο σώμα F καλείται Πυθαγόρειο αν ικανοποιείται η Πυθαγόρεια ιδιότητα: $\forall \alpha \in F$ το στοιχείο $1+\alpha^2$ έχει τετραγωνική ρίζα στο F, δηλαδή $\sqrt{1+\alpha^2} \in F$ (Hartshorne, 2000).

Ένα διατεταγμένο σώμα F καλείται Αρχιμήδειο αν ικανοποιείται η Αρχιμήδεια ιδιότητα: Έστω $\alpha \in F$, με $\alpha > 0$. Τότε $\forall \beta \in F$ υπάρχει $\nu \in \mathrm{N}$: $\nu\alpha > \beta$.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών έχει την Αρχιμήδεια ιδιότητα. Στην πραγματικότητα αυτή η υπόθεση είναι απαραίτητη, αφού δεν είναι αλήθεια ότι κάθε Ευκλείδειο διατεταγμένο σώμα ικανοποιεί την Αρχιμήδεια υπόθεση (Moise, 1990).

2.β. Μη Αρχιμήδεια σώματα

Ο Hilbert είχε πρόθεση το αξιωματικό του σύστημα να είναι απαλλαγμένο αντιφάσεων και τα αξιώματα να είναι ανεξάρτητα. Η πρόθεση αυτή ικανοποιείται με την υπόθεση ότι, η θεωρία των πραγματικών αριθμών είναι απαλλαγμένη αντιφάσεων. Έτσι, προκειμένου να αποδείξει τα παραπάνω, δημιουργεί αλγεβρικά μοντέλα, μέσω των οποίων μπορεί να μεταφέρει κάθε γεωμετρική πρόταση στο χώρο της Άλγεβρας, βρίσκοντας την ισοδύναμή της πρόταση, οπότε η «μη αντιφατικότητα» ή το «ανεξάρτητο» ανάγεται στην αντίστοιχη ιδιότητα της θεωρίας των πραγματικών αριθμών.

Έστω Ρ είναι το σύνολο όλων των πολυωνύμων $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ με συντελεστές στο αριθμήσιμο σώμα S των κατασκευάσιμων αριθμών. Ένα πολυώνυμο f λέγεται θετικό αν παίρνει μόνο θετικές τιμές όταν το x είναι επαρκώς μεγάλο, δηλαδή αν υπάρχει ένας αριθμός k τέτοιος ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x > k$ και αρνητικό αν υπάρχει ένας αριθμός k τέτοιος ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x > k$. Αποδεικνύεται ότι $f > 0$ αν και μόνον αν ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου του f είναι > 0 (Moise, 1990).

Σύμφωνα με τον Moise (1990), το σύνολο Ρ είναι ένας Μη Αρχιμήδειος διατεταγμένος αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο.

Πράγματι, το Ρ είναι προφανώς κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Το $(\mathrm{P},+)$ είναι αβελιανή ομάδα, αφού ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση πολυωνύμων, αφού οι πραγματικοί αριθμοί έχουν αυτές τις ιδιότητες, περιέχει το μηδενικό πολυώνυμο ως ουδέτερο στοιχείο και το αντίθετο πολυώνυμο $-f$, $\forall f \in P$.

Επιπλέον το $(\mathrm{P},\cdot)$ είναι ημιομάδα, αφού ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Επίσης ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό και περιέχει το μοναδιαίο πολυώνυμο $g \equiv 1$.

Στο σύνολο Ρ ορίζουμε μια σχέση διάταξης, ορίζοντας $f < g$ να σημαίνει $g - f > 0$. Έτσι $f < g$ αν $f(x) < g(x)$ για κάθε x μεγαλύτερο από ένα ορισμένο k.

Ισχύει ότι κάθε πολυώνυμο (εκτός από το μηδενικό) είναι ή θετικό ή αρνητικό. Επομένως αν P_1 το σύνολο των θετικών στοιχείων του P, ισχύει ο νόμος της τριχοτόμησης και η κλειστότητα ως προς την πρόσθεση και ως προς τον πολλαπλασιασμό στο P_1.

Επομένως το σύνολο P ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις για ένα διατεταγμένο σώμα, με μοναδική εξαίρεση αυτή που λέει ότι, κάθε $f \neq 0$ έχει αντίστροφο.

Αφ' ετέρου το P είναι Μη Αρχιμήδειο. Αν πάρουμε για παράδειγμα: $\varepsilon = f$, με $f(x) = 1$ για κάθε x και $M = g$, με $g(x) = x$ για κάθε x, τότε $n\varepsilon < M$ για κάθε ακέραιο n, αφού ανεξάρτητα από τον ακέραιο n, έχουμε $n < x$ όταν $x > n$. Επομένως τα ε και M δεν ικανοποιούν την Αρχιμήδεια υπόθεση.

Μπορούμε να πούμε ότι το $f(x) = x$ είναι «απείρως μεγάλο συγκρινόμενο με» $g(x) = 1$.

Παρομοίως, αν $\varepsilon(x) = x$, $M(x) = x^2$, τότε $n\varepsilon < M$ για κάθε n, αφού $x^2 > nx$ όταν το x είναι αρκετά μεγάλο.

Επομένως υπάρχει ένας διατεταγμένος αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο που είναι Μη Αρχιμήδειος.

Ρητή ονομάζεται η συνάρτηση r του τύπου $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου f και g είναι πολυώνυμα με συντελεστές σε ένα ορισμένο σώμα και $g \neq 0$. Θεωρούμε ότι τα πολυώνυμά μας έχουν συντελεστές στο S. Μια ρητή συνάρτηση r λέγεται θετική αν υπάρχει ένας αριθμός k τέτοιος ώστε $r(x) > 0$ για κάθε $x > k$ και αρνητική αν υπάρχει ένας αριθμός k τέτοιος ώστε $r(x) < 0$ για κάθε $x > k$ (Moise, 1990).

Σύμφωνα με τον Hartshorne (2000), το σύνολο $\Re(x) = F$ όλων των ρητών συναρτήσεων του x είναι ένα Μη Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα.

Πράγματι, το F είναι προφανώς κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Το $(F,+)$ είναι αβελιανή ομάδα, αφού ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση ρητών συναρτήσεων, περιέχει ως ουδέτερο στοιχείο τη μηδενική συνάρτηση $r \equiv 0$ και ως αντίθετο στοιχείο την $-r$, $\forall r \in F$.

Επιπλέον το $(F,\cdot)$ είναι ημιομάδα, αφού ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Επίσης ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό, περιέχει ως ουδέτερο στοιχείο την μοναδιαία συνάρτηση $r \equiv 1$ και ως αντίστροφο στοιχείο την $\frac{1}{r}$, $\forall r \in F$ με $r \neq 0$.

Ισχύει ότι $r > 0$ αν και μόνο αν το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων συντελεστών των f και g είναι θετικό στο $\Re$. Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε ρητή συνάρτηση (εκτός από τη μηδενική) είναι είτε >0 είτε <0.

Στο σύνολο F ορίζουμε μια σχέση διάταξης, ορίζοντας $s < r$ να σημαίνει $r - s > 0$. Έτσι $s < r$ αν $s(x) < r(x)$ για κάθε x μεγαλύτερο από ένα ορισμένο k.

Ορίζουμε το σύνολο P_1 των θετικών στοιχείων του F να είναι το σύνολο εκείνων των συναρτήσεων r, που είναι θετικές για όλες τις αρκούντως μεγάλες τιμές:

$P_1 = \{ r \in F \mid \exists k \in \Re \text{ τέτοιο ώστε } r(x) > 0 \text{ για κάθε } x > k \}$.

Το σύνολο P_1 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή αν $r > 0$ και $s > 0$, τότε $r + s > 0$ και $r \cdot s > 0$, διότι το άθροισμα και το γινόμενο δύο εν τέλει θετικών συναρτήσεων είναι πάλι εν τέλει θετικά.

Για να δείξουμε ότι το (F, P_1) είναι ένα διατεταγμένο σώμα, απομένει να αποδείξουμε ότι αν $r \in F$, $r \neq 0$, τότε ή $r \in P_1$, ή $-r \in P_1$, αλλά όχι και τα δύο.

Πράγματι, αν $r \neq 0$, τότε είναι το πηλίκο των δύο μη μηδενικών πολυωνύμων $r = \frac{f(x)}{g(x)}$. Κάθε ένα από αυτά έχει ένα πεπερασμένο αριθμό ριζών. Αν πάρουμε το $k \in \Re$ μεγαλύτερο από όλες τις ρίζες των $f(x)$ και $g(x)$, τότε η r είναι συνεχής και ποτέ δεν μηδενίζεται, για κάθε $x > k$. Έτσι από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η r είναι ή πάντα θετική για $x > k$, ή πάντα αρνητική για $x > k$. Στην πρώτη περίπτωση $r \in P_1$, στη δεύτερη περίπτωση $-r \in P_1$.

Επομένως το F αποτελεί ένα διατεταγμένο σώμα.

Αλλά το F δεν είναι Αρχιμήδειο. Για να το δείξουμε θεωρούμε τη συνάρτηση $\varepsilon = r$, με $r(x) = 1$ για κάθε x και $M = s$, με $s(x) = x$ για κάθε x. Τότε $n\varepsilon < M$ για κάθε ακέραιο n, αφού ανεξάρτητα από τον ακέραιο n, έχουμε $n < x$ όταν $x > n$.

Επομένως τα ε και M δεν ικανοποιούν την Αρχιμήδεια υπόθεση, δηλαδή η ε είναι τόσο υπερβολικά μικρή, συγκρινόμενη με τη M, ώστε κανένα ακέραιο πολλαπλάσιο της ε δεν είναι μεγαλύτερο από τη M.
Άρα το F είναι ένα Μη Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα.
Παρομοίως, αν θεωρήσουμε $r_m(x) = x^m$, με $m = 1,2,3,...$ κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο nr_m της r_m είναι μικρότερο της r_{m+1}, αφού $x^{m+1} > nx^m$ όταν το x είναι αρκετά μεγάλο.
Σημειώστε ότι σε αυτό το σώμα έχουμε
$0 < 1 < 2 < ... < t < t+1 < t+2 < ... < t^2 < t^3 < ....$

Χρησιμοποιώντας το Μη Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα F όλων των ρητών συναρτήσεων, που περιγράφηκε παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα Μη Αρχιμήδειο Πυθαγόρειο διατεταγμένο σώμα Ω' που το περιέχει.
Ο Hartshorne (2000) προκειμένου να το κατασκευάσει, θεωρεί το $\Re(t) = F$ ως ένα υποσύνολο του συνόλου Φ όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων από το $\Re$ στο $\Re$, που ορίζονται σε όλο το $\Re$ εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, και έχουν μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό ριζών (εκτός από την ίδια την μηδενική συνάρτηση). Το Φ δεν είναι σώμα, αφού αν πάρουμε για παράδειγμα τις συναρτήσεις 2 και $2+\sin t$ που ανήκουν στο Φ, η διαφορά τους $\sin t$ δεν ανήκει στο Φ, αφού έχει άπειρες πολλές ρίζες.
Λέμε ότι η $\phi \in \Phi$ είναι θετική αν $\exists a_0 \in \Re$ για το οποίο $\phi(x) > 0$, για κάθε $x > a_0$. Το υποσύνολο P_Φ των θετικών συναρτήσεων του Φ, σαφώς ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού του διατεταγμένου σώματος, ακόμη και αν το Φ δεν είναι σώμα, αφού μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα (a_0, ∞) που δεν μηδενίζεται είναι ή πάντα θετική ή πάντα αρνητική.
Τώρα ας θεωρήσουμε το Ω' ως το σύνολο όλων των στοιχείων του Φ που μπορούν να ληφθούν από το F μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού πράξεων $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, και της «πράξης»: $c \to \sqrt{1+c^2}$, όπου c δηλώνει μιαν οποιαδήποτε συνάρτηση που έχει ήδη παραχθεί δυνάμει των παραπάνω πέντε πράξεων.
Για να δείξουμε ότι το Ω' είναι σώμα θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα

Έστω F σώμα, υποσύνολο του Ω' και έστω $\omega \in F$, $\sqrt{1+\omega^2} \notin F$.

Τότε το

$$F' = \left\{ \alpha + \beta\sqrt{1+\omega^2} \mid \alpha, \beta \in F \right\}$$

είναι επίσης υποσύνολο του Ω' και είναι σώμα.

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά θα δείξουμε ότι το F' είναι υποσύνολο του Ω', δηλαδή θα δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του F' ανήκει στο Ω'. Αφού οι α, β, ω λαμβάνονται από το $F = \Re(t)$ με ένα πεπερασμένο αριθμό πράξεων $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, $c \to \sqrt{1+c^2}$ είναι στοιχεία του F'. Τα στοιχεία του F' καθορίζονται εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων όπου οι α, β, ω δεν μπορούν να οριστούν και είναι συνεχείς, αφού συνεχείς είναι οι α, β, ω.

Το μόνο πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι η $\alpha + \beta\sqrt{1+\omega^2}$ έχει μόνο πεπερασμένα πολλές ρίζες. Κάθε ρίζα t_0 αυτής της συνάρτησης ικανοποιεί $\alpha(t_0) + \beta(t_0)\sqrt{1+\omega(t_0)^2} = 0$.

Διαχωρίζοντας τα δύο κομμάτια, υψώνοντας στο τετράγωνο και συνδυάζοντας ξανά παίρνουμε $\alpha(t_0)^2 - \beta(t_0)^2\left(1+\omega(t_0)^2\right) = 0$.

Με άλλα λόγια, το t_0 είναι μία ρίζα της συνάρτησης $\alpha^2 - \beta^2\left(1+\omega^2\right) \in F$.

Επομένως, υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλές ρίζες, αφού $F \subseteq \Omega'$. Παρατήρησε ότι, η $\alpha + \beta\sqrt{1+\omega^2}$ δεν ταυτίζεται με το 0 διότι τότε $\sqrt{1+\omega^2} \in F$. Έτσι η $\alpha + \beta\sqrt{1+\omega^2}$ έχει μόνο πεπερασμένα πολλές ρίζες και έτσι $F' \subseteq \Omega'$.

Για να δείξουμε ότι το F' είναι σώμα είναι προφανές κλειστό ως προς τις πράξεις $+$, $-$, $\cdot$. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό και ως προς τη $\div$, απαλείφουμε τον παρονομαστή πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή τους:

$$\frac{a+b\sqrt{f}}{c+d\sqrt{f}} \cdot \frac{c-d\sqrt{f}}{c-d\sqrt{f}} = \frac{\left(a+b\sqrt{f}\right)\left(c-d\sqrt{f}\right)}{c^2-d^2 f}.$$

Τώρα για να αποδείξουμε ότι το Ω' είναι σώμα, θεωρούμε τις $\alpha,\beta\in\Omega'$ και πρέπει να δείξουμε ότι $\alpha\pm\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}\in\Omega'$ (υπό την προϋπόθεση ότι $\beta\neq 0$). Καθώς η α λήφθηκε από το $F=\Re(t)$, με έναν πεπερασμένο αριθμό πράξεων $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, $\omega\to\sqrt{1+\omega^2}$, εφαρμόζοντας το λήμμα κάθε φορά παίρνουμε μία τετραγωνική ρίζα. Έτσι παίρνουμε ένα υπόσωμα $F\subseteq\Omega'$ το οποίο περιέχει την α.

Τώρα, ξεκινώντας από το F και εφαρμόζοντας το λήμμα ξανά κάθε φορά χρησιμοποιούμε μια τετραγωνική ρίζα στην περιγραφή του β, και έτσι παίρνουμε ένα σώμα $F\subseteq G\subseteq\Omega'$, με $\alpha,\beta\in G$. Τότε σαφώς $\alpha\pm\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}\in G\subseteq\Omega'$.

Επομένως το Ω' είναι σώμα.

Το Ω' είναι διατεταγμένο σώμα, αφού λαμβάνοντας το σύνολο P' των θετικών στοιχείων του $P'=P_\Phi\cap\Omega'$, το P' ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού του διατεταγμένου σώματος, αφού τις ικανοποιεί και το P_Φ.

Αφού το Ω' είναι σώμα, η Πυθαγόρεια ιδιότητα είναι εύκολη, διότι για κάθε $c\in\Phi$, η $1+c^2$ είναι επίσης μια συνάρτηση αυστηρά θετική όπου ορίζεται (σε όλα εκτός από τον πεπερασμένο αριθμό σημείων όπου η c δεν ορίζεται), άρα η $1+c^2\in\Phi$. Έτσι αν $c\in\Omega'$, τότε επίσης και η $\sqrt{1+c^2}\in\Omega'$.

Επομένως κατασκευάσαμε το Ω' ως ένα Πυθαγόρειο διατεταγμένο σώμα και αφού περιέχει το Μη Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα F όλων των ρητών συναρτήσεων, θα είναι και Μη Αρχιμήδειο.

Ο Hartshorne (2000) αναφέρει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε, με παρόμοιο τρόπο, ένα Μη Αρχιμήδειο Ευκλείδειο διατεταγμένο σώμα Κ΄, που περιέχει το $F=\Re(t)$.

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι ο χώρος Φ' αποτελείται από συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο διάστημα (α_0,∞) του $\Re$, οι οποίες δεν μηδενίζονται ποτέ.

Δύο συναρτήσεις f στο (α_0,∞) και g στο (α_1,∞) είναι ισοδύναμες αν $\exists\alpha_2>\alpha_0,\alpha_1$ έτσι ώστε $f=g$ στο (α_2,∞). Λέμε ότι η f είναι θετική αν για κάποιο α_0, $f(x)>0$, για κάθε $x>a_0$.

Το σύνολο $P_{\Phi'}$ των θετικών συναρτήσεων σαφώς ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού του διατεταγμένου σώματος. Σημειώστε ξανά ότι το Φ' δεν είναι σώμα. Αλλά αν $\phi\in\Phi'$, $\phi>0$, τότε $\sqrt{\phi}\in\Phi'$ επίσης.

Τώρα παίρνουμε το K' ως το σύνολο όλων των στοιχείων του Φ', τα οποία μπορούν να ληφθούν από το $F=\Re(t)$ μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού πράξεων $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, και $\phi>0\to\sqrt{\phi}$.

Τότε αποδεικνύεται ότι το K' είναι διατεταγμένο σώμα παίρνοντας ως το σύνολο των θετικών στοιχείων το $P'=\mathrm{K}'\cap P_{\Phi'}$ και είναι Ευκλείδειο.

2.γ. Αλγεβροποίηση Γεωμετρίας και μοντέλα

Τα αξιώματα των πέντε ομάδων του Hilbert (1975) δεν εμφανίζουν αντιφάσεις μεταξύ τους, δηλαδή δεν είναι δυνατό, με λογικά συμπεράσματα από αυτά τα ίδια, να παραχθεί μια συνέπεια που να αντιφάσκει προς κάποιο από τα διατυπωμένα αξιώματα.

Ένα αλγεβρικό μοντέλο από στοιχεία, στο οποίο να εκπληρώνονται όλα τα αξιώματα των πέντε ομάδων, σύμφωνα με τον Hilbert (1975), δημιουργείται από το σώμα Ω όλων εκείνων των αλγεβρικών αριθμών που προκύπτουν όταν, ξεκινώντας με τον αριθμό 1, εφαρμόζουμε πεπερασμένο πλήθος φορών τις πράξεις $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ και την «πράξη»: $\omega \to \sqrt{1+\omega^2}$, όπου ω δηλώνει εκάστοτε έναν αριθμό που έχει ήδη παραχθεί δυνάμει των αναφερόμενων πέντε πράξεων. Το $\Omega \subset \Re$ είναι κλειστό ως προς τις απεικονίσεις.

Ως «επίπεδο» θεωρείται το $\Omega \times \Omega$, ως «σημεία» του τα διατεταγμένα ζεύγη αριθμών (x_i, y_i), με $x_i, y_i \in \Omega$, και ως «ευθείες» οι (u, v, w) όπου $u^2 + v^2 \neq 0$ και $u, v, w \in \Omega$.

I) Η «σύμπτωση» ορίζεται ως εξής: $(x, y)\sigma(u, v, w) \Leftrightarrow ux + vy + w \equiv 0$ και εκφράζει πως το σημείο (x, y) κείται επί της ευθείας (u, v, w).

Το μοντέλο αυτό είναι το Ευκλείδειο, μόνο αντί για $\Re \times \Re$ έχουμε $\Omega \times \Omega$.

II) Αν (x_1, y_1), $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$, … είναι σημεία πάνω σε μια ευθεία, μπορεί η διατεταγμένη σειρά τους πάνω σε αυτή να είναι έτσι διευθετημένη, ώστε οι αριθμοί x_1, x_2, x_3, … είτε οι y_1, y_2, y_3, … κατά αυτή τη σειρά, να ελαττώνονται σταθερά ή να αυξάνονται.

Επομένως η έννοια του «μεταξύ» ορίζεται ως εξής:

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) - (x_3, y_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 \\ x_1 > x_2 > x_3 \\ y_1 < y_2 < y_3 \\ y_1 > y_2 > y_3 \end{cases}$$

δηλαδή ορίζει τη διάταξη ή ως προς την x συντεταγμένη, ή ως προς την y συντεταγμένη.

III) Για να θεσμοθετηθεί η «συμφωνία» και οι «μεταφορές ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών, σύμφωνα με τις γνωστές μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ορίζονται οι μετασχηματισμοί:

Α) Μεταφορά: $x' \equiv x+\alpha$, $y' \equiv y+\beta$

Ο μετασχηματισμός της μορφής αυτής παρέχει την παράλληλη μετατόπιση - μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.

Β) Κατοπτρισμός: $x' \equiv x$, $y' \equiv -y$

Ο μετασχηματισμός της μορφής αυτής παρέχει μια αξονική συμμετρία ως προς της ευθεία $y=0$.

Γ) Στροφή: $x' \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}x - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}y$, $y' \equiv \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}x + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}y$

όπου $\alpha, \beta \in \Omega$, και το σημείο (x', y') προκύπτει από τη στροφή του τυχαίου σημείου (x, y) κατά γωνία $\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$, με κέντρο στροφής το Ο, αν O το σημείο $(0,0)$, E το σημείο $(1,0)$ και Γ ένα τυχαίο σημείο (α, β).

Η ρίζα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ανήκει στο Ω, διότι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \equiv |\alpha| \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}$. Επομένως ισχύουν και τα αξιώματα της «ισότητας».

Είναι προφανές ότι εκπληρώνεται και το «Αρχιμήδειο αξίωμα» V_1, όμως το «αξίωμα της γραμμικής πληρότητας» V_2 δεν εκπληρώνεται. Επομένως, θα πρέπει κάθε αντίφαση στα πορίσματα από τα γραμμικά και επίπεδα αξιώματα I – IV και V_1 να διακρίνεται επίσης και στην αριθμητική του σώματος Ω (Hilbert, 1975).

Αποδεικνύεται, στον Hilbert (1975), ότι αν αντί του σώματος Ω επιλέξουμε το σώμα των πραγματικών αριθμών $\Re$, τότε θα πάρουμε τη συνήθη Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου, όπου σε αυτή εκπληρώνονται όλα τα αξιώματα $\mathrm{I}_{1\text{-}3}$, II, III, IV και V.

Ο Hilbert (1975) υποστηρίζει ότι, υπάρχει απεριόριστο πλήθος Γεωμετριών, όπου εκπληρώνονται τα αξιώματα I – IV και το V_1, αντιθέτως όμως υπάρχει μόνο μία, η Αναλυτική Γεωμετρία, στην οποία ισχύει συγχρόνως και το αξίωμα πληρότητας V_2.

Για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία του «Αρχιμήδειου αξιώματος» V_1, πρέπει να κατασκευάζουμε μια Γεωμετρία στην οποία να εκπληρώνονται όλα τα αξιώματα εκτός από τα αξιώματα V. Χρησιμοποιώντας το Μη Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα F όλων των ρητών συναρτήσεων, που περιγράφηκε παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα Μη Αρχιμήδειο Ευκλείδειο διατεταγμένο σώμα Ω που το περιέχει.

Για αυτόν τον σκοπό, ο Hilbert (1975), κατασκευάζει το σώμα $\Omega(t)$ όλων εκείνων των αλγεβρικών συναρτήσεων του t που προκύπτουν από το t μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού πράξεων $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, (πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης) και της «πράξης»: $\omega \to \sqrt{1+\omega^2}$, όπου ω δηλώνει μια οποιαδήποτε συνάρτηση, που έχει ήδη παραχθεί δυνάμει των παραπάνω πέντε πράξεων.

Το σώμα $\Omega(t)$ περιέχει μόνο πραγματικές συναρτήσεις από το $\Re$ στο $\Re$, αφού οι πέντε αναφερόμενες πράξεις είναι όλες μονοσήμαντα εκτελεστές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και επομένως τα στοιχεία του $\Omega(t)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Ως επίπεδο θεωρείται το $\Omega(t)\times\Omega(t)$, όπου το $\Omega(t)$ είναι ανάλογο του Ω, αλλά αντί για το 1 τώρα αρχίζουμε από το t. Άρα προκύπτουν συναρτήσεις του t, δηλαδή $\omega=\omega(t)$. Επίσης $\Omega\subset\Omega(t)$, διότι $1=\frac{t}{t}$.

Λέμε ότι η $c\in\Omega(t)$ είναι θετική αν $\exists a_0\in\Re$ για το οποίο $c(t)>0$, για κάθε $t>a_0$.

Επειδή η c είναι μια αλγεβρική συνάρτηση του t, έπεται ότι, σε κάθε περίπτωση, μπορεί να μηδενίζεται μόνο για πεπερασμένο πλήθος τιμών του t και επομένως για αρκούντως μεγάλες θετικές τιμές του t, θα είναι πάντοτε θετική ή πάντοτε αρνητική.

Επομένως το υποσύνολο P_Ω των θετικών συναρτήσεων του Ω, σαφώς ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού του διατεταγμένου σώματος.

Αν c_1, $c_2\in\Omega(t)$ θα λέμε ότι $c_1>c_2$ ή $c_1<c_2$ $\Leftrightarrow$ $\exists t_0$: $c(t)=c_1(t)-c_2(t)>0$ ή $c(t)=c_1(t)-c_2(t)<0$ $\forall t>t_0$. Με αυτόν τον καθορισμό είναι δυνατή μια «διάταξη», η οποία είναι ανάλογη προς εκείνη των πραγματικών αριθμών.

Θέλουμε να δείξουμε ότι το «Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου» είναι ανεξάρτητο, δηλαδή υπάρχει μοντέλο όπου δεν ισχύει αυτό, αλλά ισχύουν όλα τα άλλα.

Έστω ν ένας τυχαίος θετικός ακέραιος, τότε για τους ‘αριθμούς’ ν και t του σώματος $\Omega(t)$ ισχύει $\nu<t$, αφού η διαφορά $\nu-t$, θεωρούμενη ως συνάρτηση του t, είναι προφανώς πάντα αρνητική για επαρκώς μεγάλες θετικές τιμές του t.

Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τον Hilbert (1975), οι αριθμοί 1 και t του σώματος $\Omega(t)$, που και οι δύο είναι >0, έχουν την ιδιότητα: «ένα οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του πρώτου μένει πάντοτε μικρότερο από τον δεύτερο», δηλαδή $\nu \cdot 1 < t$.
Τα $\omega(t)$ είναι τα σημεία του μοντέλου μας, για τα οποία ισχύουν όλα όσα είπαμε πριν για μεταφορές κ.λπ., όχι όμως και το «Αξίωμα Αρχιμήδους - Ευδόξου». Πρόκειται για «Μη Αρχιμήδεια Γεωμετρία».

Για να βοηθήσουμε την οπτικοποίηση μιας Μη Αρχιμήδειας Γεωμετρίας, ο Hartshorne (2000) μας προτρέπει να φανταστούμε για μια στιγμή ότι ζούμε σε ένα Μη Αρχιμήδειο σύμπαν. Ό,τι βλέπουμε με τα τηλεσκόπιά μας είναι πολύ μεγάλα, αλλά ακόμα πεπερασμένα, αποστάσεις. Ό,τι παρατηρούμε με τα κύκλοτρα και τον επιταχυντή σωματιδίων είναι πολύ μικρά, αλλά ακόμα πεπερασμένα, ποσότητες. Και ακόμη έξω πέρα από τα μακρύτερα αστέρια υπάρχουν άλλα παράλληλα σύμπαντα και μέσα σε κάθε στοιχειώδες σωματίδιο υπάρχουν απειροστοί κόσμοι άγνωστοι σε μας. Ίσως ασκούν κάποια υποσυνείδητη επιρροή στη ζωή μας; Πως θα μπορούσαμε να καθορίσουμε αν το σύμπαν μας είναι πράγματι Μη Αρχιμήδειο όταν βλέπουμε μόνο το πεπερασμένο μέρος του;

Βιβλιογραφία

1. Bonola, R. (1955). *Non Euclidian Geometry.* New York: Dover.

2. Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond.* New York: Springer.

3. Heath, T. (1908). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements* (Vol. II). University Press, Cambridge.

4. Heath, T. (1908). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements* (Vol. III). University Press, Cambridge.

5. Heath, T. (2001). *Ιστορία των Νεότερων Μαθηματικών* (Τόμ. I). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

6. Heath, T. L. (2002). *The works of Archemedes.* New York: Dover.

7. Hilbert, D. (1975). *Θεμέλια της Γεωμετρίας.* (Σ. Παπαδόπουλος, Μεταφρ.) Αθήνα: Τροχαλία.

8. Hjelmslev, J. (1950). Eudoxus' Axiom and Archimedes' Lemma. *Centaurus 1,* pp. 2-11.

9. Moise, E. (1990). *Elementary geometry from an advanced standpoint* (3rd ed.). Addison-Wesley.

10. Spivak, M. (2001). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (7η εκδ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

11. Struik, D. (1966). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών.* I. Ζαχαρόπουλος.

12. Thiele, R. (2003). Antiquity. In Jahnke, Hans Niels (Ed.), *A History of Analysis.* American Mathetical Society, London Mathetical Society.

13. Ανδρεαδάκης, Σ. (1986). *Εισαγωγή στην Άλγεβρα.* Αθήνα.

14. Νεγρεπόντης, Σ., & Φαρμάκη, Β. (2019). *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών* (Τόμ. I). Αθήνα: Εκκρεμές.

15. Παπασταυρίδης, Σ. (1984). Γεωμετρικές Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη. *Μαθηματική Επιθεώρηση*(27), σσ. 1-34.

16. Σταμάτης , Ε. (1957). *Ευκλείδου Στερεομετρία* (Τόμ. IV). Αθήνα: Ο.Ε.Σ.Β.

17. Σταμάτης, Ε. (1953). *Ευκλείδου Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών* (Τόμ. II). Αθήνα: Ο.Ε.Σ.Β.

18. Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Περί Ασυμμέτρων* (Τόμ. III). Αθήνα: Ο.Ε.Σ.Β.

19. Στράντζαλος, Χ. (1987). *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.* Αθήνα: Καρδαμίτσα.

20. Συγγραφική Ομάδα. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία", Η Γεωμετρία του Επιπέδου* (Τόμ. I). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

21. Συγγραφική Ομάδα. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία", Η Γεωμετρία του χώρου* (Τόμ. III). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

22. Συγγραφική ομάδα. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία", Θεωρία Αριθμών* (Τόμ. II). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.