ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμημα Μαθηματικων
Τμημα Μεθοδολογιας Ιστοριας και Θεωριας της Επιστημης
Τμημα Φιλοσοφιας - Παιδαγωγικων - Ψυχολογιας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης
Τμημα Επιστημων Αγωγης

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μη Λεκτικές Όψεις του Θυμικού στη Διδακτική

Σταματάκη Αναστασία
Δ201601

Επιβλέπων Καθηγητής
Παναγιώτης Σπύρου

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2019

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 9η Ιουνίου 2019 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	Πρ. Αναπλ. Καθηγητή
• Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
• Χ.Τριανταφύλλου	Επικ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	Πρ. Αναπλ. Καθηγητή
Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
Α. Μούτσιος-Ρέντζος	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών, Εξωτ. Συνεργάτης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- Τον κ. Σπύρου Παναγιώτη, όχι μόνο για τη τιμή που μου έκανε να είναι επιβλέπων στην παρούσα εργασία αλλά και για τη βοήθεια και τις συμβουλές του για την εκπόνηση αυτής.
- Τις κα. Τριανταφύλλου Χρυσαυγή και κα. Πόταρη Δέσποινα που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στη τριμελή επιτροπή αλλά και για τις γνώσεις που μου προσέφεραν μέσα από τα μαθήματά τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τον κ. Μούτσιο-Ρέντζο Ανδρέα, μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής, για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές, τις διορθώσεις, την υπομονή του και γενικότερα για το άριστο κλίμα συνεργασίας που είχαμε. Η καθοδήγησή του υπήρξε πολύ σημαντικός παράγοντας για την εργασία αυτή.
- Όλους του καθηγητές του ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών για τα εφόδια και τις γνώσεις που μου προσέφεραν.
- Τη γραμματεία του προγράμματος και ειδικά την Ελένη Κλη για την πολύτιμη βοήθειά τους και άριστη συνεννόηση που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών.
- Τους συμφοιτητές μου για τις ώρες χαράς, διασκέδασης αγωνίας, καθώς και για τις γνώσεις και τις απόψεις που μοιραστήκαμε κατά τον κύκλο σπουδών μας. Ιδιαίτερα την Ανθή για την στήριξη και την ενθάρρυνση που μου προσέφερε.
- Τις μαθήτριες και τους καθηγητές που συμμετείχαν εθελοντικά στην έρευνα αυτή, καθώς και τον διευθυντή του σχολείου που επέτρεψε την διεξαγωγή της.
- Τον φίλο μου και φιλόλογο, Παναγιώτη, για την φιλολογική επιμέλεια της παρούσας εργασίας.
- Τέλος την οικογένειά μου που με στηρίζει σε κάθε μου εγχείρημα.

Στη μνήμη της
γιαγιάς μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μελέτη διερευνήσαμε τη μαθηματική επιχειρηματολογία που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τόσο σε λεκτικό όσο και σε μη λεκτικό επίπεδο δίνοντας έμφαση στο τελευταίο. Σκοπός μας είναι η αποκάλυψη μη καταγεγραμμένων όψεων των διδακτικών πρακτικών που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη σε θυμικό επίπεδο.

Πρόκειται κυρίως για μια μεθοδολογική και θεωρητική προσέγγιση, που συναναλύει λεκτικές και μη λεκτικές όψεις της επιχειρηματολογίας, που αναπτύχθηκε σε επιλεγμένα διδακτικά επεισόδια, βασιζόμενοι στο απλό σχήμα του Toulmin, δεδομένα, εγγύηση ισχυρισμός. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των πλεονεκτημάτων και ιδιαίτερα της προστιθέμενης αξίας που μπορεί να προσφέρει στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών μια τέτοια ολιστική προσέγγιση ανάλυσης της μικρό-δομής των επιχειρημάτων.

Διευκρινίζεται ότι σε αυτό το πλαίσιο επιλέχθηκαν συγκεκριμένα επιχειρήματα και διδακτικά επεισόδια που βοηθούν στην ανάδειξη των πλεονεκτημάτων, αλλά και των περιορισμών της προτεινόμενης προσέγγισης. Αναλύοντας τη μικρό-δομή του κάθε επιχειρήματος που επιλέξαμε, μέσα από το απλό σχήμα του Toulmin, εξετάσαμε το κατά πόσο η μη λεκτική επικοινωνία του εκπαιδευτικού μέσα στο επιχείρημα ενεργοποιείται ως δεδομένο, ως εγγύηση ή ως ισχυρισμός και στη συνέχεια διερευνήσαμε εάν το μη λεκτικό στοιχείο του επιχειρήματος ενισχύει, συμπληρώνει ή λειτουργεί ανταγωνιστικά ως προς το λεκτικό επιχείρημα που αναπτύσσεται. Κάτι τέτοιο ισχυριζόμαστε ότι επιτρέπει την επαναθεώρηση του μαθηματικού επιχειρήματος που νομιμοποιεί ο/η εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, αποκαλύπτοντας με αυτό τον τρόπο περαιτέρω όψεις της πολυπλοκότητας της συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης.

Λέξεις Κλειδιά: επιχειρηματολογία, λεκτική επικοινωνία, μη λεκτική επικοινωνία, θυμικό στα μαθηματικά

ABSTRACT

In the present study, we explored the mathematical arguments developed by teachers in the classroom, both verbally and non-verbally, focusing on the latter with the aim of revealing unrecorded aspects of classroom teaching practices applied by teachers at the classroom at the level of affect.

It is primarily a methodological and theoretical perspective that combines both verbal and non-verbal aspects of the arguments developed in selected doctrinal episodes, based on Toulmin's simple form, given, assertion assertion. The purpose of the present research is to explore the advantages and especially the added value that mathematics teaching can offer in such a holistic approach to the analysis of the micro structure of arguments.

It is clarified that concrete arguments and doctrines were selected in this context to help highlight both the advantages and limitations of the proposed approach. Analyzing the micro structure of each argument we chose, through Toulmin's simple scheme, we examined whether teacher non-verbal communication within the argument is triggered as a given, as a guarantee or as a claim, and then investigated whether the non-verbal element of the argument reinforces, complements or operates competitively with regard to the verbal argument being developed. We claim that this allows the teacher to reconsider the mathematical argument legitimized during the teaching process, thus revealing further aspects of the complexity of mathematical knowledge formation

Keywords: reasoning, verbal communication, non verbal communication, affect in mathematics

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο της επικοινωνίας πραγματοποιείται στον άνθρωπο κυρίως μέσω δύο εκφραστικών οδών, της λεκτικής και της μη λεκτικής επικοινωνιακής οδού. Λεκτική και μη λεκτική επικοινωνία υπάρχει στις ανθρώπινες σχέσεις κάθε μορφής. Για πολλά χρόνια η έρευνα στο πεδίο των μαθηματικών ασχολείται με τη μη λεκτική επικοινωνία που αναπτύσσεται τόσο από εκπαιδευτικούς όσο και από μαθητές κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Με τον όρο μη λεκτική επικοινωνία εννοούμε όλα τα μέσα τα οποία οι άνθρωποι χρησιμοποιούν για να ανταλλάξουν πληροφορίες σε γνωστικό και συναισθηματικό επίπεδο. Τέτοια μέσα είναι οι χειρονομίες, η στάση του σώματος, οι εκφράσεις του προσώπου, το βλέμμα, η τονικότητα της φωνής κ.ά.. Η μη λεκτική επικοινωνία δεν έρχεται μόνο να συμπληρώσει τη λεκτική ενισχύοντας, διορθώνοντας ή δρώντας ανταγωνιστικά της αλλά αποτελεί πλέον μια αυτόνομη μορφή επικοινωνίας πολύ σημαντική για τις ανθρώπινες συναναστροφές πάσης φύσεως.

Έτσι, το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στο περιβάλλον της σχολικής τάξης όπου η μη λεκτική επικοινωνία του εκπαιδευτικού επηρεάζει τόσο τη λεκτική όσο και τη μη λεκτική επικοινωνία του ίδιου και των μαθητών. Σύμφωνα με τον Βρεττό (1994) καθώς επικοινωνούμε με τους άλλους δείχνουμε ή κάνουμε χειρονομίες, ξεροβήχουμε, χαμογελάμε, μορφάζουμε. Με άλλα λόγια μεταφέρουμε ποικίλα μηνύματα στους συνομιλητές μας. Συνεπώς, οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν και να μεταφράσουν τη μη λεκτική επικοινωνία του καθηγητή τους, γεγονός πολύ σημαντικό καθώς με αυτό τον τρόπο όχι μόνο επιτυγχάνεται πιο αποτελεσματικά η διαδικασία της μάθησης αλλά ο εκπαιδευτικός πλέον βρίσκεται σε θέση να προκαλέσει το ενδιαφέρον και την προσοχή των μαθητών, να μειώσει την επιθετικότητά τους σε στιγμές έντασης και να εξασφαλίσει την ηρεμία μέσα στην τάξη.

Στη σχολική τάξη τώρα αξίζει να δώσουμε μεγάλη σημασία στα συναισθήματα που εκφράζονται στο πρόσωπο και τη φωνή τόσο του καθηγητή όσο και των παιδιών. Ο Κοτσώνας (2018) υποστηρίζει πως στο πρόσωπο του καθηγητή γίνονται ορατά συναισθήματα που έχει ο ίδιος για τους μαθητές του, για το συγκεκριμένο μάθημα, για το σχολείο και έμμεσα για τον εαυτό του τα οποία οι μαθητές είναι σε θέση, ως υπερευαίσθητοι δέκτες, να αποκωδικοποιούν και σαφώς να επηρεάζονται από αυτά. Ο καθηγητής με τη χρήση μη λεκτικών στοιχείων στη διδασκαλία του μπορεί να απειλήσει, να ενθαρρύνει, να καθησυχάσει, να συνάψει μια συμφωνία, να προσφέρει μια ανταμοιβή (Χρηστάκης και Χαλάτσης, 2014).

Μιλώντας λοιπόν για τα συναισθήματα τα οποία αναπτύσσονται με χρήση της μη λεκτικής επικοινωνίας αξίζει να τονίσουμε ιδιαίτερα το ενδιαφέρον της έρευνας τα τελευταία χρόνια γύρω από το θυμικό. Ο όρος θυμικό με την στενή έννοια χρησιμοποιείται για να περιγράψει κυρίως τα αισθήματα και συναισθήματα κάποιου ανθρώπου, ενώ με την ευρύτερη έννοια χρησιμοποιείται ως ένας γενικός όρος για να περιγράψει μια ποικιλία πτυχών όχι μόνο γνωστικής φύσης αλλά και πεποιθήσεων, αντιλήψεων, στάσεων και κινήτρων.

Το θυμικό αποτελεί έναν τομέα ο οποίος έχει απασχολήσει πολύ τους ερευνητές, όμως λόγω της δυσκολίας εντοπισμού και μελέτης του, ακόμα δεν έχει αποσαφηνιστεί πλήρως. Ωστόσο, είναι αδιαμφισβήτητο πως κατά τη διαδικασία της μάθησης είναι πολύ σημαντικό να λαμβάνονται υπόψιν και οι πτυχές του θυμικού (αναλυτικότερα για το θυμικό θα μιλήσουμε στο παρακάτω μέρος της εργασία στην παράγραφο 2.3).

Στην παρούσα έρευνα θα γίνει προσπάθεια να μελετηθούν οι μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί κατά την επιχειρηματολογία τους, καθώς και οι επιπτώσεις που μπορεί να επιφέρουν οι ίδιες στο θυμικό τόσο των μαθητριών όσο και των ίδιων των εκπαιδευτικών. Οι έρευνες έχουν δείξει πως παρόλο που το μεγαλύτερο μέρος της επιχειρηματολογίας των εκπαιδευτικών είναι λεκτικό, η θέση της μη λεκτικής επικοινωνίας είναι πάρα πολύ σημαντική και επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τόσο την επικοινωνία όσο και τα συναισθήματα των μαθητών και των εκπαιδευτικών στο περιβάλλον της σχολικής τάξης.

2.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1. Μη Λεκτική Επικοινωνία

Με τον όρο λεκτική επικοινωνία αναφερόμαστε στη διαδικασία με την οποία οι άνθρωποι ανταλλάζουν πληροφορίες με γνωστικό και συναισθηματικό περιεχόμενο, όπως στάσεις, συναισθήματα, διαθέσεις και αξίες, χωρίς τη χρήση λέξεων, μέσω της γλώσσας του σώματος και συγκεκριμένα με τη χρήση εκφράσεων του προσώπου, νευμάτων, χειρονομιών, απτικής επαφής, εμφάνισης, βλέμματος κ.α.

Πολλά είναι τα ερωτήματα που έχουν απασχολήσει τους ερευνητές σχετικά με τη χρήση της μη λεκτικής επικοινωνίας, όπως ποιες είναι οι παιδαγωγικές επιδράσεις της μέσα στη μαθησιακή διαδικασία, κατά πόσον οι εκπαιδευτικοί έχουν επίγνωση της μη λεκτικής συμπεριφοράς που οι ίδιοι χρησιμοποιούν μέσα στη σχολική τάξη, καθώς και τις αρνητικές ή θετικές συνέπειές της στους μαθητές. Αν αναγνωρίζουν την σημαντικότητά της και τις επιδράσεις της, με ποιον τρόπο επιδιώκουν την ένταξη μη λεκτικών πτυχών επικοινωνίας στις καθημερινές τους διδακτικές πρακτικές και τι αντίκτυπο θεωρούν ότι έχει στην ανάπτυξη των διαπροσωπικών σχέσεων και στη δημιουργία κατάλληλου παιδαγωγικού κλίματος στην τάξη.

Έρευνες στην ανθρώπινη συμπεριφορά έχουν δείξει πως το 90% της επικοινωνίας πραγματοποιείται με χρήση διαύλων μη λεκτικής επικοινωνίας και μόλις το 10% με χρήση λεκτικών μέσων και κατ' επέκταση παρόμοια είναι τα ποσοστά και στην επικοινωνία μεταξύ μαθητών και καθηγητών μέσα στο σχολικό περιβάλλον (Κοτσώνας, 2018).

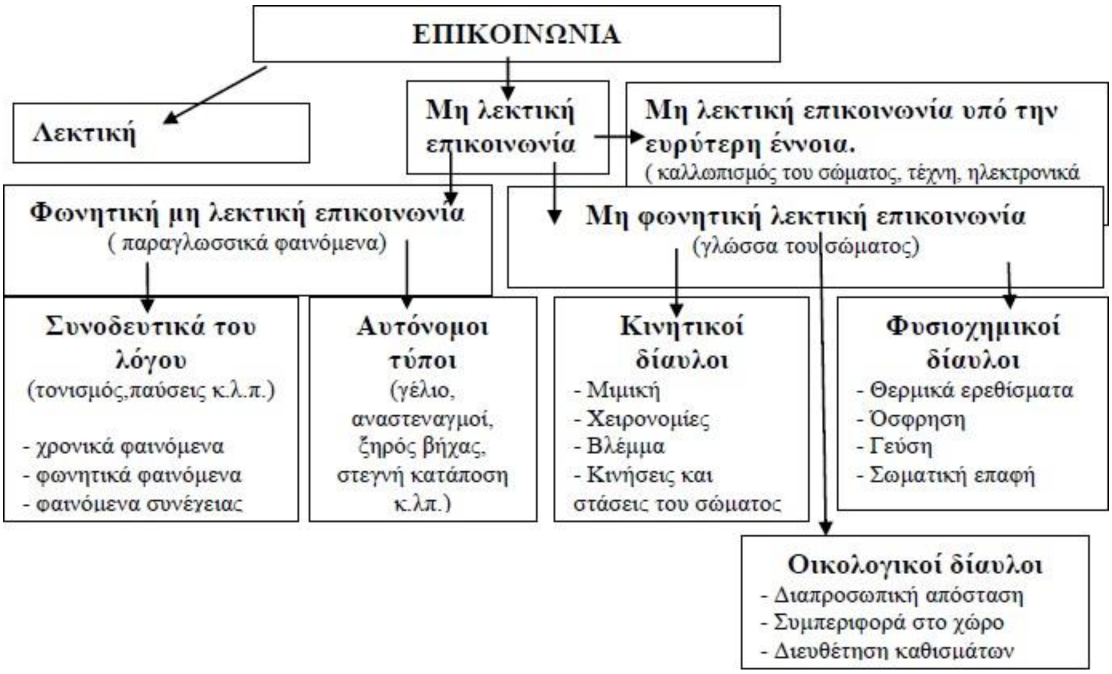
Με τον όρο μη λεκτική επικοινωνία εννοούμε κάθε μορφή μη γλωσσικής συμπεριφοράς η οποία γίνεται αντιληπτή με τις αισθήσεις και συμπληρώνει την ομιλία επηρεάζοντας έτσι την ανθρώπινη αλληλεπίδραση. Ο Σταμάτης (στο Μπαμπάλης και Τσιώλη, 2014), διακρίνει τη μη λεκτική επικοινωνία σε τρεις κατηγορίες: στη φωνητική μη λεκτική επικοινωνία (παραγλωσσικά φαινόμενα), στη μη φωνητική μη λεκτική επικοινωνία (γλώσσα του σώματος) και στη μη λεκτική επικοινωνία με την ευρύτερη έννοια(π.χ. καλλωπισμός του σώματος, τέχνη κ.ά.). Με βάση τον Βρεττό (1994), μορφές μη λεκτικής συμπεριφοράς είναι:

- Έκφραση και μορφασμοί του προσώπου
- Οπτική επαφή και επικοινωνία
- Οι κινήσεις των χεριών και του σώματος
- Οι κινήσεις και η στάση του σώματος
- Απόσταση και επικοινωνία εκπαιδευτικού – μαθητή
- Η σιωπή του εκπαιδευτικού
- Η φωνή του εκπαιδευτικού

Το φαινόμενο της επικοινωνίας πραγματοποιείται στον άνθρωπο κυρίως μέσω δύο εκφραστικών οδών, της λεκτικής και της μη λεκτικής επικοινωνιακής οδού, δηλαδή υπάρχει λεκτική και μη λεκτική επικοινωνία στις ανθρώπινες σχέσεις κάθε μορφής. Σύμφωνα με τους Χρηστάκη και Χαλάτση (2014) η μη λεκτική επικοινωνία δεν έρχεται μόνο να συμπληρώσει την λεκτική, επαληθεύοντας ή διαψεύδοντάς την, αλλά αποτελεί μια αυτόνομη θεμελιώδη και καθοριστική διάσταση της αλληλεπίδρασης των ανθρώπων. Η λεκτική επικοινωνία είναι η πλέον ανεπτυγμένη μορφή επικοινωνίας για την επίτευξη της οποίας χρησιμοποιείται η γλώσσα που διακρίνεται στον προφορικό και τον γραπτό λόγο. Μέσω της ομιλίας, πομπός και αποδέκτης μπορούν να εκφράσουν έννοιες και συναισθήματα, δίνοντας νόημα στις σκέψεις τους. Ο Σταμάτης (στο Κοτσώνας, 2018) αναφέρει πως κάθε ομιλητής κατά την επικοινωνιακή διαδικασία είτε ως πομπός – αποστολέας είτε ως δέκτης – παραλήπτης μεταδίδει και προσλαμβάνει πληθώρα μηνυμάτων και σημάτων μη λεκτικών από τον τόνο της φωνής και την επιλογή των λεκτικών στοιχείων, την αυθόρμητη ή προσεγμένη διατύπωση, το δισταγμό, τις επαναλήψεις, τις παύσεις, την εφαρμογή ή την παραβίαση των γλωσσικών κανόνων.

Οι Cosnier και Brossard (στο Χρηστάκης και Χαλάτσης, 2014) υποστηρίζουν πως η ανθρώπινη επικοινωνία είναι πολυδιαυλική. Όταν δηλαδή δύο άνθρωποι επικοινωνούν πρόσωπο με πρόσωπο, ο καθένας εκπέμπει και δέχεται μια πληθώρα επικοινωνιακών ερεθισμάτων. Άλλα είναι φωνοακουστικά (το λεξιλόγιο που θα χρησιμοποιηθεί, ο τόνος φωνής, το ύψος, η ένταση, η χροιά κ.ά.), άλλα είναι οπτικά (τύπος σώματος, ένδυση, σχήμα προσώπου, στάση σώματος, εκφράσεις προσώπου, χειρονομίες, κινήσεις κ.α.), άλλα οσφρητικά, άλλα απτικά κ.ά.

Κάθε άνθρωπος επικοινωνώντας μη λεκτικά χρησιμοποιεί το πρόσωπο (εκφράσεις), τα χέρια, ολόκληρο το σώμα του ή ορισμένα μέλη του προκειμένου να εκφράσει μηνύματα ακούσια ή εκούσια.. Σύμφωνα με τον Βρεττό (1994) καθώς επικοινωνούμε με τους άλλους δείχνουμε ή κάνουμε χειρονομίες, ξεροβήχουμε, χαμογελάμε, μορφάζουμε, με άλλα λόγια μεταφέρουμε ποικίλα μηνύματα στους συνομιλητές μας. Ο καθένας μπορεί να αντιληφθεί αν ο διπλανός του συμφωνεί ή διαφωνεί, αν είναι κουρασμένος ή θυμωμένος ακόμα κι αν παραμένει σιωπηλός. Σχηματικά, οι δίαυλοι μη λεκτικής επικοινωνίας μπορούν να παρουσιαστούν πολύ εύστοχα και συνοπτικά ως εξής (Κοτσώνας, 2018)



Σχήμα.1 Σχηματική παρουσίαση της μη λεκτικής επικοινωνίας με βάση τον Rosenbusch (1995).

Από τα παραπάνω, γίνεται σαφές ότι η μη λεκτική επικοινωνία αφορά κάθε τρόπο επικοινωνίας που διενεργείται εκτός του λόγου. Σχετίζεται όχι μόνο με τη γλώσσα του σώματος, δηλαδή τις χειρονομίες, τις εκφράσεις του προσώπου, τις κινήσεις του σώματος, το βλέμμα κ.τ.λ., αλλά ακόμα και τη σιωπή, τις παύσεις, τον τόνο της φωνής και τα παραγλωσσικά στοιχεία του λόγου, τη διαπροσωπική απόσταση, το άγγιγμα, τον χρόνο, το χώρο και κάθε άλλο στοιχείο που περιβάλλει τα άτομα που αλληλεπιδρούν.

Οι Μπαμπάλης και Τσώλη (2014), τονίζουν πως για την επιτυχημένη μη λεκτική επικοινωνία θα πρέπει τόσο ο πομπός όσο και ο αποδέκτης να έχουν ανεπτυγμένη, σε μεγάλο βαθμό, την ικανότητα αναγνώρισης και έκφρασης συναισθημάτων, διαχείρισης του άγχους και του στρες και αντίληψης των μηνυμάτων.

Ο Knapp (1982) προκειμένου να μελετηθεί καλύτερα η μη λεκτική συμπεριφορά περιέγραψε τέσσερις κύριες κατηγορίες της σε σχέση με την επικοινωνία. Αυτές είναι:

- η *κινηματική* (kinesics), ή αλλιώς γλώσσα του σώματος, όπου ανήκουν οι κινήσεις των χεριών του κεφαλιού, των ποδιών, αλλαγές στη στάση του σώματος, χειρονομίες, κατεύθυνση του βλέμματος και οι εκφράσεις του προσώπου,
- η *παραγλώσσα* (paralanguage),όπου ανήκουν οι φωνισμοί όπως η οξύτητα της φωνής, η ένταση, η συχνότητα, ο τραυλισμός, οι γεμάτες παύσεις (π.χ. εεε), οι σιωπηλές παύσεις, οι διακοπές και η μέτρηση του ρυθμού ομιλίας και του αριθμού των λέξεων που προφέρονται σε δεδομένη μονάδα χρόνου,
- η σωματική επαφή με τη μορφή του αγγίγματος και χαϊδέματος ή αγκαλιάσματος και
- η *γειτνιαστική* (proxemics), όπου ανήκουν οι κανόνες εδαφικότητας και η διαπροσωπική απόσταση στο χώρο.

Στο σημείο αυτό λοιπόν δημιουργείται η ανάγκη για τη μελέτη των στοιχείων αυτών μέσα στο σχολικό περιβάλλον και η κατανόηση της επίδρασής τους τόσο στους μαθητές όσο και στους καθηγητές. Η μαθησιακή ικανότητα των παιδιών εξαρτάται, μεταξύ άλλων, από την επικοινωνιακή ικανότητα του εκπαιδευτικού καθώς επίσης και από τα επικοινωνιακά μέσα και τις επικοινωνιακές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του περιβάλλοντος της σχολικής τάξης (Σταμάτης και Ψαρριανού, 2017).

Τα μη λεκτικά σήματα είναι ταχύτερα, αυθόρμητα, ειλικρινή και γι’ αυτό περισσότερο κατανοητά σε σχέση με πιο πολύπλοκες λεκτικές διατυπώσεις (Σταμάτης στο Κοτσώνας, 2018). Παρόλο που έχει διαπιστωθεί ότι τα 2/3 του χρόνου της διδασκαλίας καλύπτονται από την ομιλία του εκπαιδευτικού, τα μη λεκτικά μηνύματα που περιλαμβάνουν πομπό-αποδέκτη τόσο τον εκπαιδευτικό όσο και τους μαθητές είναι εμφανή, διαρκή και πολύ σημαντικά επειδή αποτυπώνουν όσα δεν μπορούν ή δεν επιτρέπεται να ειπωθούν με λέξεις και αφορούν τα συναισθήματα, τις ισορροπίες και τους κανόνες αυτορρύθμισης που προσδιορίζουν τη σχολική τάξη (Καράκιζα και Ντάβου,2014).

Η μη λεκτική συμπεριφορά του εκπαιδευτικού επιδρά και επηρεάζει την αντίστοιχη μη λεκτική συμπεριφορά του μαθητή, αλλά και η μη λεκτική συμπεριφορά του μαθητή τροφοδοτεί με ανάλογα ερεθίσματα τον εκπαιδευτικό (Holmes στο Κοτσώνας, 2018). Επίσης, έχει αποδειχθεί πως η μη λεκτική συμπεριφορά διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στη διαδικασία της διδασκαλίας, αφού μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον και την προσοχή των μαθητών, να μειώσει την επιθετικότητά τους σε στιγμές έντασης και να εξασφαλίσει την ηρεμία μέσα στη τάξη (Βρεττός στο Σταμάτης και Ψαρριανού, 2017).

Τέλος οι Σταμάτης και Ψαρριανού (2017) θεωρούν πως κάθε εκπαιδευτικός οφείλει να γνωρίζει την παιδαγωγική διάσταση της μη λεκτικής του επικοινωνίας στο περιβάλλον της τάξης, διότι αυτό μπορεί να οδηγήσει όχι μόνο στη δημιουργία καλών διαπροσωπικών σχέσεων με τους μαθητές αλλά και στην ανάπτυξη ενός θετικού κλίματος μάθησης και κατά συνέπεια ευκολότερης μεταλαμπάδευσης γνώσεων.

2.2.Εκφράσεις Προσώπου και Φωνή

Το πρόσωπο έχει αποτελέσει πηγή μελέτης πολλών ερευνητών για τον εντοπισμό στοιχείων μη λεκτικής επικοινωνίας. Αυτό μαζί με την ομιλία αποτελούν την πρωταρχική πηγή παροχής πληροφοριών καθώς πολλές φορές γνωστοποιεί την συναισθηματική κατάσταση του ατόμου, απεικονίζει τις εσωτερικές του στάσεις και εξασφαλίζει τη μη λεκτική ανατροφοδότηση (Knapp στο Κοτσώνας, 2018).

Τα χαμόγελα, ο καγχασμός, το χαζοχαμόγελο, το κατσούφιασμα, τα αναφιλητά και άλλες αλλαγές που συμβαίνουν στο πρόσωπο και στον τόνο φωνής είναι πάρα πολύ σημαντικές πτυχές την ανθρώπινης κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Έρευνες έχουν δείξει πως ανέκφραστα πρόσωπα και φωνές προδιαθέτουν ψυχικές αρρώστιες ενώ τα εκφραστικά πρόσωπα και οι φωνές θεωρούνται καθρέφτες της ψυχής (Russell κ.α., 2003)

Ο Ekman (στο Moutsios-Rentzos και Kalozoumi-Paizi, 2018) ορίζει πως τα συναισθήματα που εκδηλώνονται στις εκφράσεις του προσώπου και μπορούν να γίνουν αντιληπτά είναι τα εξής επτά: ο φόβος, η θλίψη, ο θυμός, η περιφρόνηση, η αποστροφή, η χαρά-ευτυχία και η έκπληξη. Για την έκφραση των συναισθημάτων αυτών βασικό ρόλο παίζουν οι κινήσεις του προσώπου και ο τόνος της φωνής (Busso κ.α., 2004).

Σύμφωνα με τη θεωρία του Tomkin (στο Russel, Bachorowski και Fernández-Dols, 2003), καθένα από τα βασικά συναισθήματα διαφέρει σε ένταση και αποτελείται από μια εγκεφαλική λειτουργία η οποία εγείρει όλες τις σημαντικές εκδηλώσεις συναισθημάτων συμπεριλαμβανομένου των εκφράσεων του προσώπου και της φωνής. Ο Busso και οι συνεργάτες του (2004) στην έρευνα τους, μελετώντας την αναγνώριση των συναισθημάτων που σχηματίζονται στο πρόσωπο και στον λόγο, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι κάποια από αυτά αναγνωρίζονται εύκολα μόνο από την μελέτη της φωνής, όπως είναι ο φόβος, ενώ για άλλα χρειάζεται να ληφθούν υπόψιν ταυτόχρονα οι εκφράσεις του προσώπου και η φωνή, όπως είναι η έκπληξη ή η χαρά.

Ωστόσο όπως, αναφέρουν οι Chronaki κ.α. (2015), έρευνες που έγιναν αργότερα για την αναγνώριση των συναισθημάτων υποδεικνύουν πως τόσο στους ενήλικες όσο και στα παιδιά τα συναισθήματα που εκφράζονται μέσω του προσώπου είναι πολύ πιο εύκολα αναγνωρίσιμα σε σχέση με αυτά που εκφράζονται μέσω της φωνής. Όταν όμως γλωσσικά στοιχεία και παραγλωσσικά στοιχεία στο λόγο φαίνεται να προδίδουν αντικρουόμενα συναισθήματα, οι ενήλικες είναι σε καλύτερη θέση να κατανοήσουν το πραγματικό αίσθημα που εκφράζεται εκείνη τη στιγμή εστιάζοντας σε χαρακτηριστικά της φωνής όπως είναι ο τόνος, το ύφος και ο ρυθμός.

Στο επίπεδο της σχολικής τάξης, αξίζει να δώσουμε μεγάλη σημασία στα συναισθήματα που εκφράζονται στο πρόσωπο και την φωνή τόσο του καθηγητή όσο και των παιδιών. Ο Κοτσώνας (2018) υποστηρίζει πως στο πρόσωπο του καθηγητή γίνονται ορατά συναισθήματα που έχει ο ίδιος για τους μαθητές του, για το συγκεκριμένο μάθημα, για το σχολείο και έμμεσα για τον εαυτό του τα οποία οι μαθητές είναι σε θέση, ως υπερευαίσθητοι δέκτες, να αποκωδικοποιούν και επομένως επηρεάζονται από αυτά. Ο καθηγητής με τη χρήση μη λεκτικών στοιχείων στη διδασκαλία του μπορεί να απειλήσει, να ενθαρρύνει, να καθησυχάσει, να συνάψει μια συμφωνία, να προσφέρει μια ανταμοιβή (Χρηστάκης και Χαλάτσης, 2014).

Στο πρόσωπο του εκπαιδευτικού μπορεί να αποτυπώνονται διάφοροι μορφασμοί, τικ, οι οποίοι σε συνδυασμό με την κίνηση των χεριών φανερώνουν ανασφάλεια και έλλειψη αυτοέλεγχου. Οι Καράκιζα και Ντάβου (2014) υποστηρίζουν πως το χαμόγελο, το βλέμμα και η φωνή του εκπαιδευτικού παίζουν σημαντικό ρόλο στην έκφραση των συναισθημάτων του κατά τη διδασκαλία του. Αναφέρουν πως η φωνή του εκπαιδευτικού με όλα τα προσωδιακά της γνωρίσματα (τονισμοί, ρυθμός και παύσεις του λόγου) αποτελεί στοιχείο αναγνώρισής του αλλά και στοιχείο της επαγγελματικής του ταυτότητας και φανερώνει τόσο την ψυχική του κατάσταση όσο και άλλα προσωπικά του γνωρίσματα (αυτοπεποίθηση, αβεβαιότητα, δυσαρέσκεια κ.α.)(Ellis και Beattie στο Καράκιζα και Ντάβου,2014). Ο τόνος της φωνής του εκπαιδευτικού είναι σημαντικός και για την διαμόρφωση ευχάριστου κλίματος στην τάξη, καθώς ο γρήγορος ή υπερβολικά γρήγορος ρυθμός μπορεί να προκαλέσει άγχος στους μαθητές, ο πολύ αργός φανερώνει νωχέλεια ή υπεροψία, ενώ ο εναλλασσόμενος συνήθως διατηρεί ή επαναφέρει το ενδιαφέρον των μαθητών (Browns, Strong και Rencher στο Καράκιζα και Ντάβου,2014).Τέλος η πολύ δυνατή φωνή θεωρείται απειλητική και φανερώνει ψυχική ένταση ενώ η σιγανή φανερώνει επιφυλακτικότητα, αβεβαιότητα και ανασφάλεια. Πολλές φορές ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί εναλλαγή από τη χαμηλή στη πιο δυνατή φωνή για να τραβήξει την προσοχή των μαθητών, γεγονός που δεν φαίνεται να τους αναστατώνει αλλά ούτε να τους χαλαρώνει. Η βαθιά φωνή συνήθως προκαλεί θετικά συναισθήματα ενώ η ψιλή φωνή μπορεί να προκαλέσει γέλιο και θυμό.

Η σιωπή του καθηγητή, τώρα, δεν σημαίνει απαραίτητα έλλειψη επικοινωνίας. Πολλές φορές ο εκπαιδευτικός επιλέγει να κάνει μια παύση, η οποία θα τον βοηθήσει στον αυτοέλεγχο του, ώστε να διατηρήσει την ψυχραιμία του, ή να ανακτήσει τις δυνάμεις του. Ακόμη, μπορεί να τον βοηθήσει να λύσει προβλήματα πειθαρχίας, να υπογραμμίσει τη σημασία αυτού που μόλις ειπώθηκε και να συγκεντρώσει την προσοχή των μαθητών. Πολλές φορές συνοδεύεται κι από το αντίστοιχο βλέμμα.

Όταν το βλέμμα του εκπαιδευτικού είναι έντονο και φιλικό αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών και ενθαρρύνει την συμμετοχή τους. Ωστόσο σημαντικό ρόλο παίζει και ο αποδέκτης αυτού του βλέμματος, αφού αν είναι καλός μαθητής τότε έχει θετικά αποτελέσματα, αν όμως είναι πιο αδύναμος μπορεί να θεωρηθεί επιτιμητικό, απειλητικό, υποτιμητικό. Η υπερβολική οπτική επαφή του εκπαιδευτικού με τον μαθητή μπορεί να προκαλέσει άγχος και επιθετικότητα, ενώ η ελάχιστη μπορεί να προκαλέσει αίσθημα απειθαρχίας και αναταραχής στην τάξη (Καράκιζα και Ντάβου, 2014).

Το χαμόγελο του εκπαιδευτικού είναι το πιο εύκολα αναγνωρίσιμο μη λεκτικό μέσο επικοινωνίας, όμως η ερμηνεία του δεν είναι πάντοτε τόσο εύκολη. Άλλες φορές χρησιμοποιείται για να εκφράσει θετικά συναισθήματα και άλλες αρνητικά. Μπορεί να αποτελέσει ένδειξη ικανοποίησης, χαράς, αποδοχής, συμπόνιας, φιλικής διάθεσης ενώ από την άλλη μπορεί να φανερώσει ειρωνεία, σαρκασμό, περιφρόνηση (Χρηστάκης και Χαλάτσης, 2014).

2.3. Θυμικό

2.3.1. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση Θυμικού

Τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερη έμφαση δίνεται στην έννοια του θυμικού και στο κατά πόσο αυτό συνδέεται με τη διδασκαλία, τόσο των μαθηματικών όσο και των υπολοίπων επιστημών. Ο όρος θυμικό συναντάται και χρησιμοποιείται με δύο έννοιες. Με τη στενή έννοια χρησιμοποιείται για να περιγράψει κυρίως τα αισθήματα και συναισθήματα κάποιου ανθρώπου, ενώ με την ευρύτερη έννοια χρησιμοποιείται ως ένας γενικότερος όρος για να περιγράψει πτυχές όχι μόνο γνωστικής φύσης αλλά και πεποιθήσεων, αντιλήψεων, στάσεων και κινήτρων. Για πολλά χρόνια οι ερευνητές διαχώριζαν τους δύο αυτούς τομείς και μελετούσαν ξεχωριστά τα αποτελέσματα που είχαν αντίστοιχα στη μάθηση. Ωστόσο τα αποτελέσματα αυτά άργησαν να φανούν επειδή η έρευνα γύρω από το θυμικό ήταν αρκετά δύσκολη αφού δεν είχε αναπτυχθεί το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο καθώς και τα κατάλληλα μέσα για γόνιμη μελέτη γύρω από αυτό. Πλέον υπάρχει η διαπίστωση πως στη διαδικασία της μάθησης είναι εξίσου σημαντικοί και οι δύο τομείς και μάλιστα ο ένας συνδέεται και καθορίζεται από τον άλλον.

Σχετικά με το θυμικό και τα μαθηματικά και ειδικότερα στους μαθητές των μαθηματικών, καθοριστικό ρόλο έπαιξε η θεωρία του McLeod . Με την πάροδο των χρόνων όλο και περισσότεροι ερευνητές άρχισαν να καταλαβαίνουν τη σημασία του τομέα αυτού και ανέπτυξαν τις δικές τους θεωρίες. Σύμφωνα λοιπόν με τον McLeod (1992) υπάρχουν τρεις καθοριστικές πτυχές του θυμικού οι οποίες είναι οι εξής: α)Οι μαθητές συγκροτούν συγκεκριμένες πεποιθήσεις τόσο γύρω από τα μαθηματικά όσο και γύρω από τον εαυτό τους, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στο πως αντιμετωπίζουν συναισθηματικά μαθηματικές καταστάσεις, β)οι μαθητές θα αναπτύσσουν συναισθήματα σίγουρα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών τα οποία είναι πιο πιθανό να γίνουν αντιληπτά όσο εκείνοι ασχολούνται με νέες μαθηματικές εργασίες και τέλος γ)οι μαθητές αναπτύσσουν θετικές ή αρνητικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά όταν έρχονται αντιμέτωποι όλο και πιο συχνά με τις ίδιες ή παρόμοιες μαθηματικές καταστάσεις.

Οι τρεις αυτές πτυχές διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τη σταθερότητά τους με τις πεποιθήσεις και τις στάσεις να είναι γενικά πιο σταθερές και ανθεκτικές στην αλλαγή, ενώ τα συναισθήματα μπορούν να αλλάξουν ραγδαία (McLeod, 1989). Επίσης, διαφέρουν και στους τρόπους με τους οποίους η γνωστική λειτουργία εμπλέκεται στη *συναισθηματική απόκριση* (affective response) καθώς και στο χρόνο που χρειάζονται για να εμφανιστούν. Οι πεποιθήσεις οικοδομούνται συνήθως αργά και μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Οι συναισθηματικές αντιδράσεις από την άλλη έχουν μια πιο δυνατή συναισθηματική συνιστώσα και μπορούν να σχηματιστούν σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Ωστόσο, όπως προαναφέραμε, με την πάροδο των χρόνων εμφανίστηκαν και άλλες πτυχές του θυμικού γύρω από τα μαθηματικά που βοήθησαν στην καλύτερη κατανόησή του. Μερικές από αυτές είναι οι αξίες, η ταυτότητα, το κίνητρο, οι νόρμες (Hannula, 2012), η αυτοπεποίθηση, η αυτορρύθμιση (McLeod, 1992) και η γνωστική λειτουργία (Hannula στο Eichler και Erens, 2015).Η Malmivnori οικοδόμησε τη δική της θεωρία σύμφωνα με την οποία το θυμικό είναι ένα στοιχείο της αυτορρύθμισης και της μαθηματικής συμπεριφοράς κάθε ατόμου (Roth και Walshaw, 2019).

Σύμφωνα με τον Hannula (2012) μερικοί ερευνητές ορίζουν τις στάσεις ως μια θετική ή αρνητική πλευρά του θυμικού, ενώ άλλοι θεωρούν τα συναισθήματα και τις πεποιθήσεις ως δυο συστατικά των στάσεων. Κάποιοι άλλοι θεωρούν πως οι στάσεις αποτελούνται από τρεις διαστάσεις: τη γνωστική, που περιλαμβάνει τις πεποιθήσεις, το θυμικό, που περιλαμβάνει τα συναισθήματα και την βουλητική που περιλαμβάνει τη συμπεριφορά. Οι DeBellis και Goldin (στο Hannula, 2012) δημιούργησαν μια δομή η οποία απαρτίζεται από στάσεις, πεποιθήσεις, συναισθήματα και αξίες για να δώσουν νόημα στο θυμικό που σχετίζεται με την επιστήμη των μαθηματικών.

Οι Zan κ.ά. (2006) ισχυρίστηκαν πως πτυχές του θυμικού, όπως είναι οι πεποιθήσεις, οι στάσεις και τα συναισθήματα παίζουν κρίσιμο ρόλο στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Έτσι, εισήγαγαν άλλες πτυχές, που έγιναν κεντρικές, όπως η αυτοπεποίθηση των μαθητών, το ενδιαφέρον και η περιέργεια, η ανάγκη του συσχετισμού του συναισθήματος με τη μαθηματική επίγνωση, η μεταγνώση, οι προσωπικοί, πολιτισμικοί και κοινωνικοί καθοριστικοί παράγοντες της συναισθηματικής εμπειρίας των μαθηματικών, τα συναισθήματα στην τάξη και τέλος τα συναισθήματα των καθηγητών.

Ο Hannula (2007) καταλήγει πως υπάρχουν τρεις διαφορετικές οντολογικές βάσεις για τον σχηματισμό εννοιολογικού πλαισίου του θυμικού σε μια πιο γενική μορφή. Αυτές είναι:

- οι θυμικές ανταποκρίσεις, ως μια πτυχή της ανθρώπινης φυσιολογίας,
- οι θυμικές εμπειρίες, ως πτυχή της ανθρώπινης ψυχολογίας και
- το θυμικό, ως μια πτυχή νορμών/κουλτούρας ενός γκρουπ ανθρώπων.

Ο ίδιος στο μοντέλο του θυμικού, που σχετίζεται με τα μαθηματικά, αναγνωρίζει τρεις επικαλυπτόμενες πτυχές: Το κίνητρο, τη γνωστική λειτουργία και το θυμικό που αποτελείται και από άλλες πτυχές (Eichler και Erens, 2015). Για παράδειγμα η πτυχή του κινήτρου χρησιμοποιείται για την ενσωμάτωση των πτυχών των στόχων, των αναγκών, στη διασταύρωση των τριών γενικών κατασκευών, των πεποιθήσεων και του συστήματος των πεποιθήσεων. Αυτό το μοντέλο που προτείνει εδώ ο Hannula μπορεί να θεωρηθεί μια εξελιγμένη μορφή του μοντέλου του McLeod, όπου τα συναισθήματα οι τάσεις και οι πεποιθήσεις τοποθετούνται από τα λιγότερο σταθερά και γνωστικά στα περισσότερο σταθερά και γνωστικά (Eichler και Erens, 2015).

Η μεταθεωρία, όπως ονομάστηκε, επειδή ήρθε μετά την πρώτη θεωρία που οικοδόμησε ο McLeod, σχετικά με το θυμικό στην επιστήμη των μαθηματικών βασίστηκε σε τρεις διακριτές διαστάσεις:

- στις γνωστικές, κινητηριακές και συναισθηματικές πτυχές του θυμικού,
- στις θυμικές καταστάσεις που αλλάζουν ραγδαία έναντι των σταθερών θυμικών χαρακτηριστικών και
- στη φυσιολογική (ή ενσώματη) και κοινωνική φύση του θυμικού.

Η γνωστική λειτουργία που αναφέρεται στην πρώτη διάσταση έχει να κάνει με την πληροφορία που δέχεται το άτομο τόσο από το περιβάλλον όσο και από τον εαυτό του, ενώ το κίνητρο σχετίζεται με τη συμπεριφορά, τους στόχους και τις επιλογές του ατόμου (Hannula, 2012).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι μελέτες οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί γύρω από το κίνητρο, όπου αναφέρουν ότι το κίνητρο και η επίτευξη του επιθυμητού αποτελέσματος είναι θετικά συσχετιζόμενα. Το κίνητρο είναι ευμετάβλητο στα πρώτα σχολικά χρόνια αλλά παγιώνεται αργότερα. Συνήθως τα αγόρια εμφανίζουν μεγαλύτερο κίνητρο για την εκμάθηση των μαθηματικών από ότι τα κορίτσια (Hannula, 2012). Επιπλέον, το κίνητρο έχει μια διακριτική επιρροή στις επιλογές του ατόμου, η οποία, δυστυχώς για τους ερευνητές, δεν μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά μέσα από γνωστικές και συναισθηματικές διαδικασίες.

Ο McLeod (1992) ωστόσο αναγνωρίζει στην αρχική του θεωρία πως μια πτυχή του θυμικού μπορεί να θεωρηθεί η αυτοπεποίθηση που αναπτύσσουν οι μαθητές, η οποία σχετίζεται με τα επιτεύγματα στα μαθηματικά, η συμμετοχή στο μάθημα των μαθηματικών και η αλληλεπίδραση μαθητών καθηγητών μέσα στο περιβάλλον της σχολικής τάξης. Αν οι μαθητές νιώθουν αυτοπεποίθηση στο να κάνουν μαθηματικά και πιστεύουν πως τα μαθηματικά δεν είναι τίποτα παραπάνω από υπολογιστικές ασκήσεις, η πεποίθηση τους πως τα μαθηματικά είναι πειθαρχία αποκτά άλλη όψη.

Επιπλέον, πολλές πτυχές του θυμικού φαίνεται να συνδυάζονται μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα τυπικές μελέτες, που σχετίζονται με τις πεποιθήσεις και τις στάσεις, τείνουν να κάνουν μια μίξη αυτοπεποιθήσεων «Είμαι καλός στα μαθηματικά» και συναισθηματικών χαρακτηριστικών «Μου αρέσουν τα μαθηματικά» (McLeod, 1992).

Ιδιαίτερη εστίαση έχει γίνει βέβαια στις τρεις βασικές πτυχές που αναφέρει ο McLeod στην θεωρία του για τα μαθηματικά και το θυμικό με μεταγενέστερους ερευνητές να προσθέτουν νέα στοιχεία στην κατανόησή τους.

2.3.2 Πεποιθήσεις

Ο Rokeach (στο McLeod,1992) κατατάσσει τις πεποιθήσεις σε κατηγορίες ως προς την *κεντρικότητά* (centrality) τους σε σχέση με το υποκείμενο. Αυτές που είναι πιο κεντρικές είναι αυτές που εκφράζουν μια επικρατέστερη άποψη, ενώ εκείνες γύρω από τις οποίες υπάρχουν διαφωνίες είναι λιγότερο κεντρικές. Ο D’Andrade υποστηρίζει πως οι πεποιθήσεις αναπτύσσονται σταδιακά μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται «καθοδηγούμενη ανακάλυψη», όπου τα παιδιά αντιδρούν στις καταστάσεις που βρίσκονται αναπτύσσοντας πεποιθήσεις βασισμένες στις εμπειρίες τους. Βασικό στοιχείο για τη διαμόρφωση τέτοιου είδους πεποιθήσεων είναι ο πολιτισμικός παράγοντας. Συγκεκριμένα, στη μαθηματική εκπαίδευση οι πεποιθήσεις που σχηματίζονται επηρεάζονται πολύ από τη πολιτισμική διαμόρφωση της σχολικής τάξης (Schoenfeld στο McLeod, 1992).

Οι ALberson και Nespor (στο Hannula, 2007) θεωρούν πως οι πεποιθήσεις είναι αμφισβητήσιμες ενώ η γνώση είναι γενικά επαληθεύσιμη. Ο ίδιος ο Hannula (2007) θεωρεί πως, όπως η γνώση, έτσι και οι ατομικές πεποιθήσεις του καθενός είναι διαψεύσιμες, καθώς νέες εμπειρίες μπορούν να προκαλέσουν παλιές πεποιθήσεις και να οδηγήσουν στην αλλαγή τους. Οι Op't Eyde, De Corte και Verschaffel (στο Hannula, 2007) υποστηρίζουν πως οι πεποιθήσεις σχηματίζονται καθαρά και μόνο από το κάθε άτομο ξεχωριστά, ενώ η γνώση είναι κοινωνικά κατασκευάσιμη. Τέλος οι Pehkonen και Pietila (στο Hannula, 2007), κατέληξαν στο να ορίσουν τις πεποιθήσεις ως υποκειμενική, βασισμένη στην εμπειρία και συχνά έμμεση, γνώση.

Ο McLeod (1989), αναφέρει πως υπάρχουν δύο κατηγορίες πεποιθήσεων που σχηματίζονται γύρω από τα μαθηματικά, οι μαθητές αναπτύσσουν μια ποικιλία πεποιθήσεων σχετικά με τα μαθηματικά ως μια πειθαρχία και τόσο οι μαθητές όσο και οι καθηγητές σχηματίζουν πεποιθήσεις σχετικά με τον εαυτό τους και τα μαθηματικά.

Με βάση την πρώτη κατηγορία οι μαθητές θεωρούν πως τα μαθηματικά είναι σημαντικά, δύσκολα και βασίζονται σε κανόνες. Πολλοί μαθητές χαρακτηριστικά αναφέρουν πως τα μαθηματικά είναι δύσκολα, αν δεν είναι δύσκολα τότε δεν είναι μαθηματικά(Kouba και McDonald, στο McLeod 1992). Σύμφωνα με τους Schoenfeld και Silver (στο McLeod 1992) οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά μπορούν να αποδυναμώσουν την ικανότητά τους να λύσουν μη συνηθισμένα προβλήματα. Ο Hannula(2007) διατυπώνει την θεώρηση πως οι δυσκολίες στην εκμάθηση των μαθηματικών είναι βαθιά αλληλένδετες με τις πεποιθήσεις που έχει καθένας για τον εαυτό του ως προς τα μαθηματικά αλλά και με τις πεποιθήσεις που έχει καθένας γύρω από το αντικείμενο των μαθηματικών. Σημαντικές είναι και οι φυλετικές διαφορές που φαίνεται να υπάρχουν με τα αγόρια να αναπτύσσουν υψηλότερη αντιληπτή ικανότητα στα μαθηματικά από ότι τα κορίτσια γεγονός που είναι χρήσιμο στην κατανόηση των συναισθηματικών αντιδράσεων των δύο φύλων απέναντι στα μαθηματικά.

Με βάση την δεύτερη κατηγορία ο McLeod (1992) θεωρεί πως οι πεποιθήσεις σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με τις έννοιες της μεταγνώσης και της αυτοεπίγνωσης. Σε αυτή τη κατηγορία εμφανίζονται διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα με τα αγόρια να έχουν περισσότερη αυτοπεποίθηση από τα κορίτσια ακόμα και όταν τα κορίτσια έχουν περισσότερους λόγους, κυρίως με βάση την επίδοσή τους, να αισθάνονται αυτοπεποίθηση. Ωστόσο, οι πεποιθήσεις σχετικά με τον εαυτό σχηματίζονται και λόγω της επιτυχίας ή της αποτυχίας. Υπάρχουν τρεις διαστάσεις σχετικά με αυτή τη θεωρία που έχουν να κάνουν με την θέση (εξωτερική ή εσωτερική) (locus internal or external), τη σταθερότητα (ικανότητα έναντι προσπάθειας) και τον έλεγχο του αιτιώδους παράγοντα (controllability of the causal agent). Για παράδειγμα, ένας μαθητής που αδυνατεί να λύσει ένα πρόβλημα λέει πως ήταν πολύ δύσκολο, μια αιτία που είναι εξωτερική, σταθερή και μη ελέγξιμη από το μαθητή, ενώ ένας μαθητής που καταφέρνει να λύσει ένα πρόβλημα μπορεί να αποδώσει την επιτυχία του στην προσπάθεια, μια αιτία που είναι εσωτερική, μη σταθερή και ελέγξιμη.

2.3.3. Στάσεις

Οι συναισθηματικές αντιδράσεις που περιλαμβάνουν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα μέτριας έντασης και λογικής σταθερότητας απαρτίζουν την πτυχή του θυμικού που ονομάσαμε στάσεις. Οι στάσεις αναπτύσσονται γύρω από δύο άξονες σύμφωνα με τον McLeod (1992): α)Η στάση μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της αυτοματοποίησης μιας επαναλαμβανόμενης συναισθηματικής αντίδρασης στα μαθηματικά, β)η μετάθεση της στάσης που ήδη υπάρχει σχετικά με ένα αντικείμενο σε ένα άλλο παρόμοιο, π.χ. ένα παιδί που έχει αρνητική στάση απέναντι στις αποδείξεις της γεωμετρίας μπορεί να μεταφέρει αυτή τη στάση και στις αποδείξεις στην άλγεβρα. Μαθητές που φοβούνται συγκεκριμένους τομείς τον μαθηματικών μπορούν τελικά να γίνουν χρόνια αγχώδεις (chronically anxious). Εάν ένας μαθητής έχει συχνές εμπειρίες με μη συνηθισμένα μαθηματικά προβλήματα θα μπορούσε να αναπτύξει μια στάση περιέργειας και ενθουσιασμού σχετικά με την επίλυση προβλήματος ή και άγχους και απέχθειας απέναντί τους. Το άγχος γύρω από τα μαθηματικά σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με το άγχος για το τεστ, ένα άγχος που φαίνεται να είναι περισσότερο συμπεριφοριστικής παρά γνωστικής φύσης, καθώς επίσης και με έναν γενικό φόβο γύρω από τα μαθηματικά συμπεριλαμβανομένου των σχολικών τάξεων, των εργασιών για το σπίτι κλπ (Hembree 1990).

Σημαντικά ήταν τα ευρήματα της έρευνας των Grouws και Cramer (στο McLeod,1992) τα οποία έδειξαν πως οι καθηγητές που έδιναν σημασία στους παράγοντες του θυμικού δημιουργούσαν στην τάξη τους ένα περιβάλλον όπου οι κοινωνικές νόρμες ενθάρρυναν τους μαθητές να είναι πιο ενθουσιώδεις και να απολαμβάνουν την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Οι μαθητές όμως συχνά βρίσκουν τους καθηγητές τους απόμακρους. Σύμφωνα με τους Roth και Walshaw (2019) για να οικοδομηθεί μια θετική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά πρέπει να αναπτυχθεί και μια καλή σχέση με τους καθηγητές τους. Είναι βασικό να γίνεται διάλογος μεταξύ καθηγητή και μαθητή σε ένα περιβάλλον όπου ο καθηγητής έχει κατασκευάσει μια σχέση βαθιάς φροντίδας και ανησυχίας για το πώς ο μαθητής του επηρεάζεται μέσα στην τάξη την ώρα που ασχολείται με τα μαθηματικά, καθώς επίσης και να δουλέψει με τον μαθητή ώστε να βρει τρόπους που θα ενισχύουν τη σχέση του με τα μαθηματικά.

Πέρα από τους καθηγητές όμως οι μαθητές επηρεάζονται πολύ για τις πεποιθήσεις που θα σχηματίσουν γύρω από τα μαθηματικά και από τους γονείς τους. Σύμφωνα με τους Parson,Adler και Kaczala (στο McLeod,1992) αυτού του είδους οι σχέσεις φαίνεται να αντικατοπτρίζουν σε ένα μεγάλο βαθμό τις κοινωνικές νόρμες όπως αυτές εκφράζονται από τους γονείς τους.

Πολλοί είναι και αυτοί που συσχετίζουν τις στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά ανάλογα με τα επιτεύγματά τους σε αυτά. Ο McLeod (1992) υποστηρίζει πως οι στάσεις που έχουν οι μαθητές απέναντι στα μαθηματικά δεν σχετίζονται με τα μαθηματικά τους επιτεύγματα, αναφέροντας χαρακτηριστικά πως μαθητές στην Ιαπωνία όταν ρωτήθηκαν για τα μαθηματικά απάντησαν πως τα αντιπαθούν παρόλο που οι επιδόσεις τους είναι πολύ υψηλές. Βέβαια τα επιτεύγματα των μαθητών συχνά σχετίζονται και με την τρίτη πτυχή του θυμικού που είναι τα συναισθήματα.

Ο Hannula (2002) καταλήγει στο συμπέρασμα πως το καταλληλότερο πλαίσιο για την μελέτη των στάσεων και των λεπτομερών αλλαγών τους, είναι αυτό που περιλαμβάνει τα συναισθήματα, τους συσχετισμούς, τις προσδοκίες και τις αξίες. Επισημαίνει, πως οι στάσεις ενός μαθητή ως προς τα μαθηματικά μπορούν να αλλάξουν δραματικά μέσα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα αν και αυτές θεωρούνται κατά κύριο λόγο αρκετά σταθερές από την στιγμή που θα σχηματιστούν. Τέλος, υποστηρίζει πως οι αρνητικές στάσεις που μπορεί να έχει κάποιος μαθητής μπορούν να αποτελέσουν μια πολύ χρήσιμη αμυντική στρατηγική μια θετικής αυτό-ιδέας (self-concept).

2.3.4. Συναισθήματα

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί των συναισθημάτων που πηγάζουν από τρεις διαφορετικές παραδόσεις σύμφωνα με τον Hannula (2015). Η Δαρβινική παράδοση εστιάζει στα επαναστατικά και βιολογικά θεμέλια των ανθρώπινων συναισθημάτων, η Φροϋδική παράδοση εστιάζει στον ρόλο τον συναισθημάτων στην ψυχοπαθολογία και η Γνωστική παράδοση η οποία εστιάζει στην αλληλεπίδραση των συναισθημάτων και των γνωστικών προσεγγίσεων.

Ο Buck (στο Hannula, 2012), αναφέρει πως υπάρχει μια γενική συμφωνία ότι τα συναισθήματα αποτελούνται από τρεις κατηγορίες: α)Τις φυσιολογικές διεργασίες που ρυθμίζουν το σώμα, β)την υποκειμενική εμπειρία που ρυθμίζει τη συμπεριφορά και γ)τις εκφραστικές διεργασίες που ρυθμίζουν τον κοινωνικό συντονισμό.

Ο McLeod(1992) αναφέρει πως τα συναισθήματα συνδέονται εκ φύσεως με το βιολογικό ανθρώπινο σώμα και με το κοινωνικό σύστημα και περιγράφει την συναισθηματική αντίδραση ως φόβο, άγχος, ντροπή και πανικό. Συνεχίζει, παρατηρώντας πως στην περίπτωση του άγχους ένας αγχώδης μαθητής από τη μία αισθάνεται φόβο (συναισθηματική κατάσταση) όταν έρχεται αντιμέτωπος με ένα μαθηματικό πρόβλημα και από την άλλη έχει και την τάση να νιώσει αυτόν τον φόβο (συναισθηματικό χαρακτηριστικό). Πολλές είναι οι έρευνες που έχουν ασχοληθεί με το άγχος που προκαλείται στους μαθητές όταν αυτοί έρχονται αντιμέτωποι με τα μαθηματικά. Μερικοί υποστηρίζουν πως το άγχος γύρω από τα μαθηματικά συχνά οφείλεται στην κακή επίδοση των μαθητών σε αυτά, όμως σύμφωνα με τον Hembree (1990) υπάρχει μια ποικιλία θεραπειών για την μείωσή του και την βελτίωση της επίδοσης, που περιλαμβάνει συστηματική απευαισθητοποίηση (systematic desensitization) και εκπαίδευση χαλάρωσης (relaxation training).

Νεότερες έρευνες στον τομέα αυτό έχουν δείξει πως το άγχος επιβραδύνει τη μαθηματική απόδοση των μαθητών ωστόσο δεν προκαλεί την κακή απόδοσή τους. Η επίδραση του μαθηματικού άγχους φαίνεται εντονότερη στα αγόρια παρά στα κορίτσια. Η αρνητική σχέση μεταξύ άγχους και απόδοσης βέβαια είναι σταθερή κατά μήκος των βαθμίδων εκπαίδευσης και των *εθνικών ομάδων* (ethnic groups). Όσοι νιώθουν μαθηματικό άγχος τείνουν να αποφεύγουν τα μαθηματικά και να μαθαίνουν λιγότερα όταν εκτίθενται σε αυτά. Ωστόσο, έχει αποδειχθεί πως το άγχος δεν σχετίζεται με τη γενική νοημοσύνη του ατόμου αλλά αναφέρεται κυρίως στην εμπειρία του φόβου (Xolocotzin, 2017).

Το άγχος γύρω από τα μαθηματικά δεν σχετίζεται μόνο με το αντικείμενο των μαθηματικών. Πολλοί μαθητές βρίσκονται σε αγχώδεις καταστάσεις όταν καλούνται να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, να σκεφτούν μια απάντηση για μια μαθηματική ερώτηση και κυρίως να δώσουν κάποιο γραπτό διαγώνισμα ή τεστ στο μάθημα των μαθηματικών. Οι Pekrun και Stephens(στο Muis et.al, 2015) αναφέρουν πως το άγχος που νιώθει ένας μαθητής σχετικά με τις εξετάσεις στα μαθηματικά μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες, όπως στην ανησυχία του ότι θα αποτύχει (γνωστικός παράγοντας), στο συναισθήματα νευρικότητας (θυμικός παράγοντας), στις αυξημένες καρδιαγγειακές ενεργοποιήσεις (φυσιολογικός παράγοντας), στην παρόρμηση να τα παρατήσει (κινητηριακός παράγοντας) και σε διάφορες εκφράσεις προσώπου που δείχνουν άγχος (εκφραστικός παράγοντας). Οι συναισθηματικές αντιδράσεις που μπορεί να έχει καθένας αλλάζουν ανάλογα με το εάν το άτομο που καλείται να λύσει ένα πρόβλημα στα μαθηματικά χαρακτηρίζεται ως αρχάριος ή ειδικός. Οι συναισθηματικές αντιδράσεις, η σύγχυση και η ευχαρίστηση της επίλυσης του προβλήματος είναι ίδιες και στις δύο κατηγορίες, όμως τα άτομα που χαρακτηρίζονται ως ειδικοί μπορούν πολύ πιο εύκολα να ελέγξουν αυτά τους τα συναισθήματα (McLeod, 1992).

Πέρα από το ειδικό κομμάτι του άγχους αρκετή έρευνα έχει γίνει και σχετικά με την εμπειρία του «Αχα!» και τα αποτελέσματα που μπορεί να έχει η συγκεκριμένη εμπειρία στους μαθητές των μαθηματικών. Αυτό που ονομάζεται ως η εμπειρία του «Αχα!» συμβαίνει όταν η λύση ενός προβλήματος έχει βρεθεί ή όταν νέα κομμάτια των μαθηματικών έχουν ανακαλυφθεί κάτω από μια στιγμή διορατικότητας, διαφώτισης. Μια τέτοια εμπειρία έχει ένα μετασχηματιστικό αποτέλεσμα που με τη σειρά του δημιουργεί θετικές στάσεις και πεποιθήσεις γύρω από τα μαθηματικά καθώς και γύρω από την ικανότητα των μαθητών να κάνουν μαθηματικά (Liljedahl, 2004). Μια τέτοια εμπειρία στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές και να τους βοηθήσει να αποκτήσουν θετικά συναισθήματα για τη μάθηση των μαθηματικών (McLeod, 1992).

Μερικές άλλες θεωρίες για τα συναισθήματα υποστηρίζουν ότι υπάρχει ένας σταθερός αριθμός βασικών συναισθημάτων, ενώ άλλες τα κατηγοριοποιούν σε ευρύτερες κατηγορίες, όπως είναι τα συναισθήματα επίτευξης και τα επιστημικά και κοινωνικά συναισθήματα (Scjukjlow et.al, 2017). Οι θετικές συναισθηματικές εμπειρίες σχετίζονται με τα ακαδημαϊκά επιτεύγματα των μαθητών και με την επιτυχία τους στον ακαδημαϊκό τομέα, ενώ οι αρνητικές συναισθηματικές εμπειρίες φέρουν τα αντίθετα αποτελέσματα. Συναισθήματα όπως η απόλαυση, η ελπίδα και η υπερηφάνεια προοικονομούν θετικά ακαδημαϊκά επιτεύγματα, ενώ συναισθήματα όπως η βαρεμάρα και η απόγνωση μπορούν να οδηγήσουν σε μείωση των επιτευγμάτων (Muis et.al, 2015).

Ο Pekrun και οι συνάδελφοί του (στο Muis et.al, 2015) μίλησαν για τα ακαδημαϊκά συναισθήματα τα οποία περιλαμβάνουν τα εξής τρία είδη:

- συναισθήματα επίτευξης, που σχετίζονται με αποτελέσματα επίτευξης ή δραστηριότητες επίτευξης,
- συναισθήματα δραστηριότητας που σχετίζονται με τα συναισθήματα που αναπτύσσονται κατά την εμπλοκή σε μια δραστηριότητα, όπως είναι για παράδειγμα η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος και
- συναισθήματα έκβασης, που περιλαμβάνουν κάθε είδους συναίσθημα έκβασης όπως επιτυχίας ή αποτυχίας.

Σαν μία προσθήκη στην πρόταση του Pekrun αρκετοί επιστήμονες μίλησαν και για τα επιστημικά συναισθήματα. Αυτά είναι τα συναισθήματα που εμφανίζονται όταν το αντικείμενο εστίασης είναι η γνώση και η διαδικασία της γνώσης. Παραδείγματα τέτοιων συναισθημάτων είναι η έκπληξη, η περιέργεια και η σύγχυση που δημιουργείται όταν υπάρχει κάποια απρόσμενη πληροφορία ή κάποια γνωστική δυσαρμονία (Kang et.al στο Muis et.al, 2015). Επίσης, τα επιστημικά συναισθήματα σχετίζονται και με διάφορες φάσεις της αυτορρύθμισης.

Σύμφωνα με τους Roth και Walshaw (2019)τα συναισθήματα θεωρούνται εμπλεκόμενες φυσιολογικές αντιδράσεις, και διακρίνονται από τη μη-συναισθηματική γνωστική λειτουργία ως συνέπειες γνωστικών διεργασιών, όπου προσδίδουν προσοχή και μνήμη και ενεργοποιούν τις τάσεις δράσεις. Έτσι, η εμπλοκή με τα συναισθήματα τείνει να ακολουθεί μια πνευματική οδό σαφώς εμφανή στις θεωρητικές προσεγγίσεις διαλογικής πρακτικής, σε συστήματα εκπροσώπησης και επικοινωνίας, σε μοντέλα που εστιάζουν στην αυτοαξιολόγηση και την αυτορρύθμιση και σε κοινωνικοπολιτισμικές οπτικές.

Αξίζει να αναφέρουμε πως τόσο τα θετικά όσο και τα αρνητικά συναισθήματα παίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση της αυτορρύθμισης, τη χρήση στρατηγικών και το κίνητρο (Muis et.al, 2015). Άλλες έρευνες συσχετίζουν τα συναισθήματα με τις στάσεις, την αυτοαποτελεσματικότητα και την συναισθηματική νοημοσύνη (Xolocotzin, 2017). Τα αρνητικά συναισθήματα βέβαια μπορούν να προέρχονται και από τις πεποιθήσεις και τις δυσκολίες του ατόμου να αναπτύξει βασικές γνωστικές ικανότητες ώστε να προβεί στη λύση ενός προβλήματος όπως είναι η κατανόηση των μαθηματικών συμβόλων, η δόμηση ενός προβλήματος και η ευελιξία στη σκέψη (Gómez και Chanóz στο Xolocotzin, 2017).

Αρκετή έρευνα έχει γίνει και γύρω από την θεώρηση των συναισθημάτων ως χαρακτηριστικά (traits).Σύμφωνα με αυτή την οπτική τα άτομα έχουν ένα συναισθηματικό προσανατολισμό ως προς τα μαθηματικά που είναι σταθερός και καθορίζεται από τις διαφορές που εμφανίζει καθένας στις πτυχές του θυμικού, όπως είναι οι στάσεις, οι πεποιθήσεις, οι στόχοι, το κίνητρο κλπ. (Xolocotzin, 2017). Οι συναισθηματικοί αυτοί προσανατολισμοί και η αλληλεπίδρασή τους με τις πτυχές του θυμικού και τις γνωστικές δομές είναι αξιόπιστοι προφήτες της μαθηματικής απόδοσης των μαθητών.

2.4 Επιχειρηματολογία και Σχήμα Toulmin

2.4.1. Επιχειρηματολογία

Για αρκετά χρόνια, όταν οι ερευνητές ήθελαν να μελετήσουν την μαθηματική επιχειρηματολογία και την τεκμηρίωσή της, στηρίζονταν κυρίως στα λεκτικά μέσα που χρησιμοποιούσε το άτομο που επιχειρηματολογούσε. Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια στροφή προς την ανάλυση των μη λεκτικών μέσων. Για αρκετό καιρό, οι έρευνες επικεντρώνονταν μόνη στη χρήση των χειρονομιών που προέκυπταν κατά την επιχειρηματολογία. Πλέον όμως μελετώνται και άλλοι μη λεκτικοί οδοί. Με άλλα λόγια οι έρευνες διευρύνονται στο πώς βοηθούν όλες οι δράσεις που πραγματοποιούνται μέσα στην τάξη στην επιχειρηματολογία αυτή καθ' εαυτή και όχι μόνο ως συνοδευτικό λεκτικών εκφράσεων. Συγκεκριμένα, οι Schwarz και Prusak (2016) υποστηρίζουν ότι τα μη λεκτικά κανάλια που χρησιμοποιούνται στην επιχειρηματολογία έρχονται να επιβεβαιώσουν την εγκυρότητα του επιχειρήματος και αρκετές φορές είναι πιο πειστικά από τα λεκτικά κανάλια. Τονίζουν πως αυτό συμβαίνει όχι γιατί τα μη λεκτικά κανάλια είναι απαραίτητα πιο πειστικά από τα λεκτικά, αλλά κυρίως γιατί είναι λιγότερο σαφή κι επομένως απαιτείται λιγότερη προσπάθεια για την κατανόησή τους. Επίσης, αναφέρουν πως στον τομέα της επιχειρηματολογίας στα μαθηματικά φαίνεται έντονη η τάση των ανθρώπων να χρησιμοποιούν την πολυτροπική επιχειρηματολογία για να ελαφρύνουν λίγο το γνωστικό φορτίο. Οι ερευνητές παρατήρησαν ότι παρόλο που η πολυτροπικότητα στη μαθηματική επιχειρηματολογία έχει αναγνωριστεί ότι είναι πανταχού παρούσα, οι λειτουργίες της στην επιχειρηματολογία και μάθηση δεν έχουν ακόμα κατανοηθεί και αναλυθεί.. Έτσι, η θεωρητική συνεισφορά των ερευνητών συνίσταται στην ταυτοποίηση κάποιων λειτουργιών των μη λεκτικών δράσεων ως προς τη μάθηση, μέσω της επιχειρηματολογίας.

Μελετώντας τη γνωστική σύγκρουση και την κοινωνικό-γνωστική σύγκρουση, στην οποία βρίσκονται οι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με κάποιες προκλητικές δραστηριότητες, οι μελετητές παρατηρούν την φύση της επιχειρηματολογίας που αναπτύσσεται. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις γνωστικές συγκρούσεις που λαμβάνουν χώρα όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με ένα μη αναμενόμενο γεγονός το οποίο τους προκαλεί έκπληξη, αβεβαιότητα, περιέργεια ή αμηχανία, αλλά και τις κοινωνικό – γνωστικές συγκρούσεις, όπου διαφορετικοί συμμετέχοντες εμπλέκονται και αντιμετωπίζουν επιχειρήματα ή στοιχεία που προκαλούν ή αμφισβητούν τις απόψεις τους, οι ερευνητές είναι σε θέση να εντοπίσουν την λειτουργία της πολυπτροπικότητας μέσω της επιχειρηματολογίας των ατόμων και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η πολυτροπική επιχειρηματολογία οδηγεί στη δημιουργία κοινωνικό – γνωστικών συγκρούσεων οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση.

Αρκετοί ερευνητές συμφωνούν πως στα θεμέλια της μαθηματικής κατανόησης βρίσκεται η επιχειρηματολογία και η απόδειξη ότι για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης είναι πολύ σημαντικό να μάθει το άτομο να αιτιολογεί (Stylianides, 2007·Mueller, Yankelewitz & Maher, 2010). Στα μαθηματικά, η απόδειξη και η επιχειρηματολογία είναι δύο έννοιες αλληλένδετες καθώς η απόδειξη είναι ένα συγκεκριμένο είδος επιχειρηματολογίας. Η απόδειξη στα μαθηματικά μπορεί να καθορίσει την αλήθεια μιας πρότασης. Η μαθηματική απόδειξη είναι ένας ισχυρός τρόπος επιβεβαίωσης ή διάψευσης εικασιών και αποδοχής της αλήθειας (Potari, Zachariades & Zaslavsky, 2010). Για να πραγματοποιηθεί κάτι τέτοιο πολλά επιχειρήματα συνδέονται λογικά μεταξύ τους ώστε να παραχθούν προτάσεις που έχουν ως τελικό στόχο την σύνθεση της απόδειξης. Σύμφωνα με τον Duval (στο Pedemonte, 2007)υπάρχει ένα δομικό κενό ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη, παρόλο που χρησιμοποιούν παρόμοιες γλωσσικές μορφές και συνδέσμους προτάσεων.

Η επιχειρηματολογία στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, οι οποίοι έχουν προσπαθήσει να την ορίσουν με διάφορους τρόπους. Ωστόσο, οι μεταξύ τους απόψεις δεν είναι και τόσο συμβατές με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αποδοθεί ένας ενιαίος ορισμός για την επιχειρηματολογία στην επιστήμη των μαθηματικών.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε μερικούς από τους ορισμούς της επιχειρηματολογίας που έχουν αποδοθεί από τους ερευνητές. Ο Krummheuer (1995) ορίζει ότι η επιχειρηματολογία σε οποιαδήποτε κατάσταση πρέπει να περιέχει *«δηλώσεις που σχετίζονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο τρόπο και που με αυτό τον τρόπο τελούνται συγκεκριμένες λειτουργίες οι οποίες βοηθούν στην αλληλεπιδραστική τους αποτελεσματικότητα»* (σελ. 247). Η Yackel (2001) διαχωρίζει την επεξήγηση από την αιτιολόγηση και την επιχειρηματολογία υποστηρίζοντας πως τελούν διαφορετικές λειτουργίες και γι' αυτό θα πρέπει να νοούνται ξεχωριστά. Ο Lithner (2003) για να ορίσει την επιχειρηματολογία αρχικά αναφέρεται στον συλλογισμό τον οποίο θεωρεί ως τον τρόπο σκέψης που υιοθετείται για την παραγωγή ισχυρισμών και καταλήγει σε συμπεράσματα. Η επιχειρηματολογία λοιπόν είναι η τεκμηρίωση, δηλαδή το μέρος του συλλογισμού που χρησιμοποιεί κάποιος όταν θέλει να πείσει τον εαυτό του ή κάποιον άλλον για την ορθότητα αυτού του συλλογισμού.

Σε αντίθεση με πολλούς ερευνητές που θεωρούν πως ο μαθηματικός συλλογισμός είναι ορατός μόνο σε μαθητές που ασχολούνται με υψηλού επιπέδου δραστηριότητες παραγωγικής φύσης, ο Lithner (2003) με τον όρο συλλογισμό εννοεί οποιονδήποτε συλλογισμό χρησιμοποιείται για την επίλυση μαθηματικών δραστηριοτήτων. Η Pedemonte (2008)ορίζει την επιχειρηματολογία ως ένα σύνολο λογικών αιτιολογήσεων που παρουσιάζονται ως συμπέρασμα, δηλαδή αναγνωρίζει την επιχειρηματολογία όταν αυτή νοείται σαν απόδειξη.

2.4.2. Το μοντέλο του Toulmin

Ο S.E. Toulmin ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη πρακτικών επιχειρημάτων. Η συνεισφορά του ήταν σημαντική, καθώς ανέπτυξε ένα σχήμα υπερδομής του επιχειρηματολογικού λόγου, παρουσιάζοντας ένα μοντέλο αναπαράστασης της οργάνωσης των επιχειρημάτων (Μοντέλο Επιχειρηματολογίας του Toulmin), το οποίο στην πορεία χρησιμοποιήθηκε για ανάλυση, αξιολόγηση και σύνθεση επιχειρηματολογικών δομών. Το μοντέλο που εισηγείται ο Toulmin για την αναπαράσταση της δομής των επιχειρημάτων είναι διαδικαστικό.

Αρχικά υπάρχει η διατύπωση μιας άποψης, παραδοχής, γνώμης, ή κρίσης η οποία χρίζει ανάλογης υποστήριξης. Η άποψη αυτή που πρέπει να υποστηριχθεί ονομάζεται *ισχυρισμός* (claim). Στη συνέχεια, ο ισχυρισμός αυτός θα πρέπει να τεκμηριωθεί με την αξιοποίηση συγκεκριμένων γεγονότων στα οποία στηρίζεται. Αυτά ονομάζονται *δεδομένα* (data).Τέλος έχουμε τον *εγγυητή* (warrant), ο οποίος παίζει τον ρόλο της αιτιολόγησης των δεδομένων που οδήγησαν στον συγκεκριμένο ισχυρισμό και θεωρείται αναγκαίος ακόμα και αν τα δεδομένα φαίνονται ακριβή και αποδεκτά. Ο εγγυητής μπορεί να είναι μια γενική δήλωση που αναφέρεται σε έναν κανόνα, αρχή, κλπ και λειτουργεί σαν γέφυρα μεταξύ δεδομένων και ισχυρισμού (Toulmin, 1958). Τα δεδομένα και ο εγγυητής φαίνεται να συνδέονται με μια στενή σχέση καθώς συχνά ένα στοιχείο μπορεί να επιτελέσει ταυτόχρονα διπλή λειτουργία. Ωστόσο, υπάρχει διαφορά ανάμεσά τους καθώς τα δεδομένα χρησιμοποιούνται με φανερό τρόπο ενώ ο εγγυητής με λανθάνοντα. Η ισχύς του εγγυητή μπορεί να εξασθενήσει αν υπάρχουν εξαιρέσεις στον κανόνα, οπότε έρχονται να προστεθούν στο μοντέλο συνθήκες *εξαίρεσης* (exception) ή *ανασκευής* (rebuttal). Σε αυτήν την περίπτωση ο ισχυρισμός θα πρέπει να αποδυναμωθεί με τη χρήση *προσδιορισμών* (qualifier) (πιθανόν, ενδεχομένως, αδύνατον, βεβαίως, υποθετικά, αναγκαστικά). Σε πολλές περιπτώσεις όταν η αλήθεια του εγγυητή δεν γίνεται άμεσα αποδεκτή είναι αναγκαία επιπλέον *στήριξη* (backing).

Πιο συνοπτικά λοιπόν το μοντέλο του Toulmin αποτελείται από τα εξής στοιχεία, καθένα από τα οποία έχει διαφορετική σημασία στην επιχειρηματολογία:

i. **Ισχυρισμός** (claim): η δήλωση την οποία θέλει να στηρίξει ο ομιλητής και με αυτήν να πείσει το κοινό του,

ii. **Δεδομένα** (data): τα δεδομένα θεμελίωσης και αιτιολόγησης του ισχυρισμού (Ι),

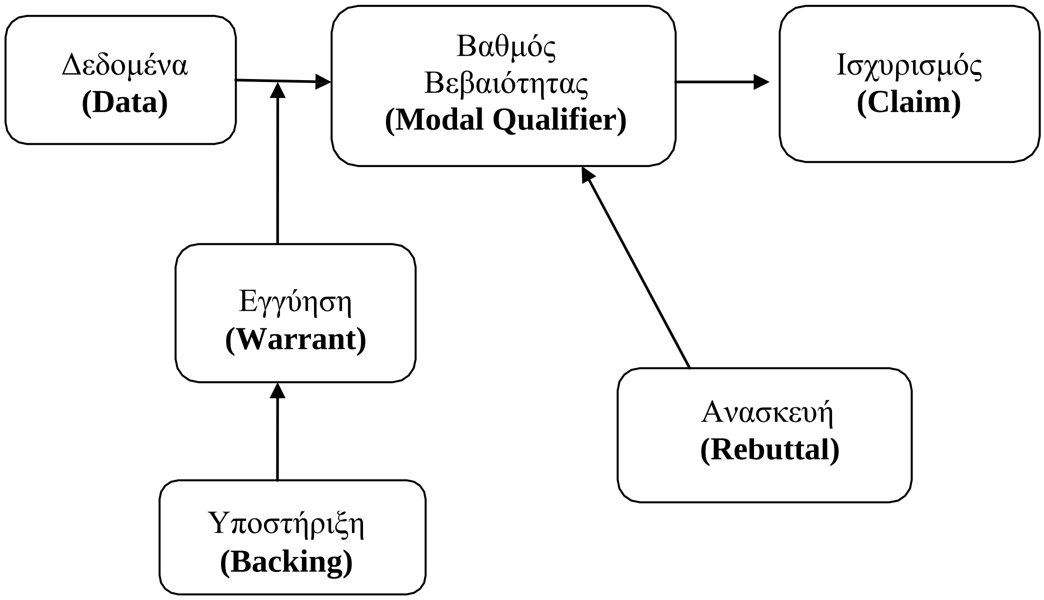
iii. **Εγγύηση** (warrant): ο συνδετικός κανόνας μεταξύ δεδομένων (Δ) και ισχυρισμού (Ι),

iv. **Υποστήριξη** (backing): η τεκμηρίωση της εγγύησης (Ε),

v. **Βαθμός βεβαιότητας** (modal qualifier): δηλώσεις (π.χ. μάλλον, πιθανόν, προφανώς) που περιγράφουν τη βεβαιότητα με την οποία έχει υποβληθεί ο ισχυρισμός (Ι),

vi. **Ανασκευή** (rebuttal): προϋποθέσεις υπό τις οποίες δεν ισχύει ο ισχυρισμός ή οι δηλώσεις που περιγράφουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η εγγύηση δεν θα ήταν έγκυρη.

Το μοντέλο του Toulmin μπορεί να αναπαρασταθεί σχηματικά ως εξής:



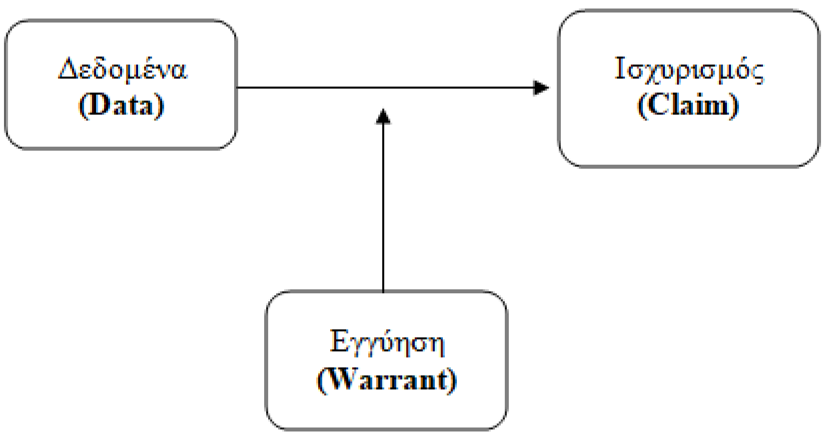
Σχήμα.2. Σχηματική Απόδοση Μοντέλου Toulmin (1958).

Από τα έξι στοιχεία του εκτεταμένου μοντέλου του Toulmin, ο ισχυρισμός, τα δεδομένα και ο εγγυητής υπάρχουν σε κάθε επιχείρημα, ενώ η ανασκευή ο βαθμός βεβαιότητας και η υποστήριξη μπορούν να απουσιάζουν. Η ύπαρξη ή μη στήριξης εξαρτάται από την άμεση ή μη αποδοχή του εγγυητή. Άμεση αποδοχή του εγγυητή συνεπάγεται μη αναγκαιότητα της στήριξης.

Σχετικά με τις συνθήκες παρουσίας ανασκευής και προσδιορισμών βαθμού βεβαιότητας ο Toulmin παρατηρεί πως στις περιπτώσεις ύπαρξης ανασκευής, ο ισχυρισμός πρέπει να αποδυναμώνεται με τη χρήση προσδιορισμού βεβαιότητας, χωρίς αυτό να σημαίνει πως η παρουσία προσδιορισμού στον ισχυρισμό υποδηλώνει ανασκευή του εγγυητή. Είναι πιθανό ο εγγυητής να μην αφορά σε έναν απόλυτο κανόνα. Τα δεδομένα αποτελούνται από γεγονότα προς υποστήριξη της θέσης. Τα γεγονότα ωστόσο μπορούν να έχουν και άλλη λειτουργία στην επιχειρηματολογία, όπως το να αναφέρονται στη στήριξη του εγγυητή ή να επιβεβαιώνουν / να αρνούνται την πλήρωση των συνθηκών ανασκευής του εγγυητή (Παγκουρέλια, 2013).

Ο Toulmin αποκαλεί ένα επιχείρημα έγκυρο αν έχει ακολουθηθεί σωστά η απαιτούμενη διαδικασία και εάν ο εγγυητής για το βήμα από τα δεδομένα στον ισχυρισμό είναι επαρκής και μπορεί να θεωρηθεί υποχρεωτικός. Όπως σημειώνει και η Παγκουρέλια (2013), ο εγγυητής είναι το κρίσιμο στοιχείο στον καθορισμό της εγκυρότητας της επιχειρηματολογίας, εφόσον εμφανώς καταδεικνύει ότι το πέρασμα από τα δεδομένα στο συμπέρασμα αιτιολογείται και μάλιστα δείχνει και γιατί συμβαίνει αυτό.

Συνοψίζοντας, ο εγγυητής αντλεί την ισχύ του από τη στήριξη και η στήριξη μπορεί να διαφοροποιείται στα διάφορα πεδία της επιχειρηματολογίας. Σε κάθε επιχειρηματολογικό πεδίο θα πρέπει να διευκρινίζεται ποιοι εγγυητές μπορούν να θεωρηθούν έγκυροι και με ποιο τρόπο πρέπει να υποστηριχθούν. Ο Krummheuer (1995) ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το μοντέλο του Toulmin στην έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών, όχι όμως με την ολοκληρωμένη του μορφή, για να αναλύσει τα μαθηματικά επιχειρήματα. Το διαμόρφωσε σε αυτό που αναφέρεται ως τριαδικό μοντέλο (Mariotti, 2006) ή αλλιώς βασικό μοντέλο (Pedemonte ,2007), όπου περιέχονται μόνο τα δεδομένα (Δ), η εγγύηση (Ε) και ο ισχυρισμός (Ι).



Σχήμα.3. Σχήμα Toulmin όπως χρησιμοποιείται από τον Krummheuer (1995).

2.5 Η παρούσα μελέτη

Η επιχειρηματολογία είναι μια βασική πτυχή της επιστήμης των μαθηματικών και κρίνεται πολύ σημαντική για την διαδικασία της μάθησης και της κατανόησης των διάφορων μαθηματικών εννοιών. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί ένας άνθρωπος να παραθέσει τα επιχειρήματά του, με σκοπό να πείσει για την ορθότητα του ισχυρισμού του είναι εξίσου σημαντικός και πολλές φορές δεν περιορίζεται στην λεκτική επικοινωνία, που μπορεί να αναπτυχθεί μεταξύ πομπού και αποδέκτη, αλλά επεκτείνεται και στη μη λεκτική επικοινωνία. Η χρήση μη λεκτικών μέσων επικοινωνίας, παραγλωσσικών στοιχείων, όπως είναι οι χειρονομίες, η στάση του σώματος, ο τόνος της φωνής, και οι εκφράσεις του προσώπου μπορούν να επιφέρουν στον αποδέκτη γνωστικές και συναισθηματικές επιπτώσεις.

Στην παρούσα μελέτη αναλύουμε τις όψεις της μη λεκτικής επικοινωνίας που διενεργείται μέσα στη σχολική τάξη, εστιάζοντας στον εκπαιδευτικό. Οι όψεις αυτές αφορούν τις εκφράσεις του προσώπου του, τον τόνο της φωνής του, το βλέμμα και τα παραλεκτικά στοιχεία που χρησιμοποιεί. Τονίζουμε τη σημασία του ρόλου του εκπαιδευτικού, διότι επηρεάζει με τον τρόπο διδασκαλίας του και τη συμπεριφορά του τον μαθητή, προκαλώντας του ποικίλα συναισθήματα (θετικά η αρνητικά). Μελετάμε κυρίως τον τόνο της φωνής του εκπαιδευτικού αλλά και τις εκφράσεις του προσώπου του, καθώς όπως αναφέρει και η βιβλιογραφία, συνήθως γίνεται συνδυασμός αυτών των δυο μη λεκτικών μορφών επικοινωνίας. Παρατηρώντας λοιπόν τον εκπαιδευτικό θέλουμε να δούμε αρχικά, κατά πόσο χρησιμοποιεί μορφές μη λεκτικής επικοινωνίας κατά τη διάρκεια της επιχειρηματολογίας του εστιάζοντας στο πρόσωπο και τη φωνή. Επιπλέον, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τι είδους συναισθήματα είναι πιθανό να προάγει στην τάξη με τη χρήση μη λεκτικών επικοινωνιακών μέσων στην διδασκαλία του και κατά πόσο έχει επίγνωση ο ίδιος για το κλίμα που διαμορφώνει μέσα στην τάξη με αυτή του τη συμπεριφορά. Συνεπώς, τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης είναι τα εξής:

1. Τι είδους μη λεκτική επικοινωνία αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί μέσα στην σχολική τάξη κατά την επιχειρηματολογία τους.

2. Πώς η φωνή των εκπαιδευτικών και οι αλλαγές σε αυτήν, καθώς και οι διάφορες εκφράσεις του προσώπου τους, επηρεάζουν την επιχειρηματολογία.

3. Κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί έχουν επίγνωση των συνεπειών της μη λεκτικής τους συμπεριφοράς μέσα στην σχολική τάξη.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινίσουμε πως όταν αναφερόμαστε στη φωνή εννοούμε διακυμάνσεις στον τόνο φωνής, εναλλαγές δηλαδή στην ένταση καθώς και παύσεις, διαστήματα σιωπής του εκάστοτε εκπαιδευτικού, αλλαγές στη χροιά της φωνής.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1. Μέθοδοι και Διαδικασίες

3.1.1. Δείγμα / Συμμετέχοντες

Αρχικά θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε από δύο ερευνήτριες, καθώς με την συνάδελφο είχαμε παρόμοιο αντικείμενο μελέτης. Ωστόσο, η ανάλυση των δεδομένων έγινε εξατομικευμένα αφού καθεμία ασχολήθηκε με διαφορετικές πτυχές των δεδομένων. Το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε για την ολοκλήρωση των διαδικασιών της έρευνας ήταν περίπου δύο μήνες. Η έρευνα έλαβε χώρα στο Ράλλειο Γυμνάσιο Θηλέων Πειραιά. Η επιλογή του σχολείου οφείλεται στο γεγονός ότι η μία από τις δύο ερευνήτριες υπήρξε παλιά μαθήτρια του σχολείου, οπότε η προσβασιμότητα ήταν αρκετά εύκολη. Όπως αναφέρεται και στο όνομα του σχολείου, τα παιδιά που φοιτούν σε αυτό είναι μόνο κορίτσια, γεγονός που δεν επηρεάζει την έρευνά μας καθώς εμείς μελετήσαμε τους εκπαιδευτικούς.

Η έρευνα είχε ως στόχο της τους εκπαιδευτικούς, όπως αναφέραμε και παραπάνω, γι' αυτόν το λόγο μελετήσαμε τρεις από τους τέσσερις μαθηματικούς που δίδασκαν στο γυμνάσιο. Οι τρεις τους ήταν άντρες με αρκετή εμπειρία στη διδασκαλία. Για λόγους ερευνητικής δεοντολογίας και συνέπειας δεν θα αναφέρουμε τα πραγματικά ονόματα των εκπαιδευτικών, αντιθέτως θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες κωδικές ονομασίες. Έτσι, στον καθηγητή της Α γυμνασίου θα αναφερόμαστε ως ο καθηγητής Α, στον καθηγητή της Β γυμνασίου ως ο καθηγητής Β και στον καθηγητή της Γ γυμνασίου ως ο καθηγητής Γ.

Αναλυτικότερα ο καθηγητής Α είναι απόφοιτος του Μαθηματικού τμήματος των Αθηνών από το 1982, εργάστηκε σε νυχτερινό σχολείο για τρία χρόνια και στη συνέχεια το 1991 διορίστηκε στο δημόσιο. Δίδαξε για τέσσερα χρόνια σε σχολεία στην επαρχία και ύστερα επέστρεψε στην Αθήνα όπου εργάστηκε για επτά χρόνια στο Υπουργείο Παιδείας ασκώντας διοικητικά καθήκοντα. Από το 2003 κατέχει οργανική θέση στο Ράλλειο Γυμνάσιο Θηλέων Πειραιά και τα τελευταία εννέα χρόνια τελεί καθήκοντα υποδιευθυντή. Η εμπειρία του στη διδασκαλία, την οποία έχει αποκτήσει αυτά τα περίπου τριάντα ένα χρόνια που εργάζεται ως εκπαιδευτικός, προέρχεται από την εργασία του σε δημόσια σχολεία καθώς δεν έχει εργαστεί καθόλου σε φροντιστήρια και με ιδιαίτερα μαθήματα ασχολήθηκε μόλις για δύο χρόνια μέχρι να διοριστεί στο δημόσιο.

Ο καθηγητής Γ είναι επίσης απόφοιτος του τμήματος Μαθηματικών της Αθήνας, ενώ περίπου δέκα χρόνια πριν ολοκλήρωσε τις σπουδές του στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα της Διδακτικής των Μαθηματικών που προσφέρεται από το Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο της Κύπρου. Ξεκίνησε να εργάζεται ως εκπαιδευτικός σε φροντιστήρια μέσης εκπαίδευσης και συνολικά αριθμεί περίπου τριάντα χρόνια στην εκπαίδευση. Διορίστηκε στο δημόσιο και εργάστηκε για περίπου τέσσερα χρόνια σε σχολεία στην επαρχία επιστρέφοντας στη συνέχεια στην Αθήνα όπου για είκοσι χρόνια εργάστηκε σε πρότυπα Λύκεια στον Πειραιά. Τα τελευταία πέντε χρόνια διδάσκει στο Ράλλειο Γυμνάσιο. Από τους τρεις εκπαιδευτικούς που μελετήσαμε το καθηγητής Γ είναι ο μόνος που έχει πραγματοποιήσει μεταπτυχιακές σπουδές και μάλιστα στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ο ίδιος θεωρεί ότι οι σπουδές του αυτές τον βοήθησαν αρκετά στη βελτίωση της διδασκαλίας του, τον ίδιο ως εκπαιδευτικό καθώς επίσης και ότι του προσέφεραν νέες εμπειρίες και γνώσεις στους τομείς τόσο των μαθηματικών όσο και της παιδαγωγικής επιστήμης.

3.1.2. Διαδικασίες

Το χρονικό διάστημα της έρευνας διήρκησε περίπου δύο ημερολογιακούς μήνες. Σε αυτό συμπεριλαμβάνονται συναντήσεις με τους καθηγητές πριν και μετά την διεξαγωγή της έρευνας καθώς και η περίοδος συλλογής δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα αυτό σε τρία στάδια. Το πρώτο στάδιο απαρτίζεται από δύο συναντήσεις που πραγματοποιήσαμε με τους εκπαιδευτικούς στο χώρο του σχολείου, με σκοπό να ληφθεί η απαραίτητη άδεια για την διεξαγωγή της έρευνας, καθώς και να γίνει μια πρώτη γνωριμία με αυτούς. Σε αυτές τις συναντήσεις εξηγήσαμε αναλυτικά στους εκπαιδευτικούς τον σκοπό της έρευνας , το πλαίσιο στο οποίο θα διεξαγόταν και τον τρόπο συλλογής των δεδομένων και εφόσον συμφώνησαν να συνεργαστούν μαζί μας περάσαμε στο επόμενο στάδιο το οποίο ήταν η συλλογή των δεδομένων.

Στο δεύτερο στάδιο η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε αφού προηγήθηκε συζήτηση με τους καθηγητές σχετικά με τις ώρες διδασκαλίας τους και το πρόγραμμά τους. Οι καθηγητές στη συνέχεια μας ενημέρωσαν για τους διάφορους περιορισμούς που υπήρχαν λόγω των σχολικών δρωμένων που είχαν προγραμματιστεί να διεξαχθούν εκείνη την περίοδο (εκπαιδευτικές εκδρομές, περίπατοι, σχολικές εορτές, εκπαιδευτικά project, κλπ) καθώς και για το μαθηματικό περιεχόμενο των διδασκαλιών τους και έτσι, κατόπιν συνεννόησης, συμφωνήθηκαν οι ώρες για την παρακολούθηση. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με βιντεοσκόπηση των μαθημάτων των διδασκόντων που είχε συμφωνηθεί κάτω από κάποιες προϋποθέσεις. Σύμφωνα με αυτές, συμφωνήθηκε από την αρχή πως στο βίντεο δεν θα φαίνεται το πρόσωπο καμίας μαθήτριας καθώς η κάμερα θα είναι εστιασμένη αυστηρά πάνω στον καθηγητή και ότι τα συγκεκριμένα βίντεο δεν θα προβληθούν πουθενά παρά μόνο από τις ερευνήτριες και θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Για τους λόγους αυτούς, η κάμερα είχε στηθεί σε τρίποδο στο πίσω μέρος της εκάστοτε αίθουσας, εστιασμένη στον καθηγητή ώστε να μην φαίνονται οι μαθήτριες ενώ ταυτόχρονα να μπορέσουμε να αποτυπώσουμε καλύτερα τα στοιχεία που μας ενδιέφεραν να μελετήσουμε. Η μία ερευνήτρια χειριζόταν την κάμερα, ακολουθώντας την πορεία του καθηγητή μέσα στην τάξη όταν αυτός μετακινούνταν και μερικές φορές εστιάζοντας στο πρόσωπο για την αποτύπωση των εκφράσεών του. Η άλλη ερευνήτρια κρατούσε σημειώσεις πεδίου οι οποίες αργότερα χρησιμοποιήθηκαν για την σύνταξη των ερωτήσεων της συνέντευξης σε συνδυασμό με τα αποσπάσματα από τις διδασκαλίες.

Πιο συγκεκριμένα παρακολουθήσαμε και καταγράψαμε τέσσερις ώρες του καθηγητή Α, τέσσερις ώρες του καθηγητή Β και τέσσερις ώρες του καθηγητή Γ. Η επιλογή των τμημάτων που παρακολουθήσαμε έγινε τυχαία, ανάλογα με τις ώρες του εκπαιδευτικού, καθώς στην παρούσα έρευνα δεν μας ενδιαφέρουν τόσο πολύ οι μαθήτριες και το μαθηματικό περιεχόμενο του μαθήματος, όσο ο εκπαιδευτικός και συγκεκριμένα η συμπεριφορά του κατά την διδασκαλία.

Μάλιστα αρκετές φορές έτυχε να παρακολουθήσουμε την παράδοση της ίδιας μαθηματικής ενότητας σε διαφορετικά τμήματα δύο ή τρεις συνεχόμενες ώρες. Γεγονός που πάλι δεν επηρεάζει την έρευνά μας καθώς εμείς επικεντρωθήκαμε στην μη λεκτική συμπεριφορά του εκπαιδευτικού, ανεξάρτητα από το μαθητικό του κοινό και την μαθηματική έννοια που παρουσίαζε. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε πως παρατηρήσαμε και κάποιες μικρές αλλαγές στην συμπεριφορά των εκπαιδευτικών από τμήμα σε τμήμα της οποίες αποδώσαμε στην ώρα που παρακολουθήσαμε (π.χ. πρώτη ώρα έναντι πέμπτης ώρας) καθώς και στο μαθησιακό υπόβαθρο που υπήρχε (πιο δυνατά τμήματα, λιγότερο δυνατά τμήματα). Τα τμήματα αποτελούνταν κατά μέσο όρο από 20 – 23 μαθήτριες το καθένα, και κάθε σχολική ώρα διαρκούσε 45’ .Τα θρανία ήταν τοποθετημένα σε στήλες, όπως είναι στα περισσότερα σχολεία στην Ελλάδα, επιτρέποντας στους καθηγητές να περνάνε ανάμεσα από τις μαθήτριες ελέγχοντας την πρόοδο τους σε κάποια ερωτήματα που τους έθεταν. Καθώς όπως αναφέραμε δεν θέλαμε να φαίνονται καθόλου τα πρόσωπα των μαθητριών τους πίνακες τους χρησιμοποιούσαν μόνο οι εκπαιδευτικοί σε όλες τις διδακτικές ώρες που χρειάστηκε να παρακολουθήσουμε για την έρευνα. Κάποιες στιγμές δημιουργήθηκε η ανάγκη να διακόψουμε για μερικά δευτερόλεπτα την βιντεοσκόπηση για την αποφυγή εμφάνισης μαθητριών ή γιατί υπήρξαν διακοπές στο μάθημα από άλλους συναδέλφους.

Η βιντεοσκόπηση ξεκινούσε μόλις χτυπούσε το κουδούνι για να ορίσει την σχολική ώρα. Εμείς είχαμε τοποθετήσει την κάμερα από το προηγούμενο διάλειμμα, όπως αναφέραμε παραπάνω στο πίσω μέρος της αίθουσας κοιτώντας προς τον πίνακα και είχαμε λάβει τις θέσεις μας δίπλα σε αυτή για να μπορούμε να την χειριζόμαστε. Τις πρώτες φορές που μπαίναμε σε ένα τμήμα οι καθηγητές ενημέρωναν τις μαθήτριες για την παρουσία μας και για τον σκοπό για τον οποίο βρισκόμασταν στο σχολείο καθώς επίσης και για τις συνθήκες κάτω από την οποία θα έπρεπε να πραγματοποιηθεί η έρευνα λόγω των αυστηρών περιορισμών της βιντεοσκόπησης. Εφόσον οι μαθήτριες συναινούσαν, ξεκινούσε η βιντεοσκόπηση της διδασκαλίας. Η βιντεοκάμερα ήταν τοποθετημένη στο πίσω μέρος των αιθουσών ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο οπτικό πεδίο, για την καταγραφή των κινήσεων και των εκφράσεων του προσώπου του εκπαιδευτικού. Ένας άλλος λόγος για την τοποθέτηση της βιντεοκάμερας σε αυτό το σημείο ήταν το ότι δεν θέλαμε να ενοχλήσουμε τον διδάσκοντα ούτε να αποσπάσουμε την προσοχή των μαθητριών. Στηριζόταν πάνω σε τρίποδο και είχαμε την δυνατότητα να μετακινούμε την κεφαλή της ακολουθώντας την πορεία των καθηγητών μέσα στην αίθουσα, καθώς επίσης και να εστιάζουμε στα πρόσωπά τους σε στιγμές που θεωρούσαμε πως θα μας βοηθούσαν στην ανάλυση της συμπεριφοράς τους.

Τέλος στο τρίτο στάδιο της έρευνας πραγματοποιήσαμε συνεντεύξεις με τους καθηγητές. Όλες έγιναν την ίδια μέρα στο χώρο του σχολείου. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε πως συνέντευξη καταφέραμε να πάρουμε μόνο από τους δύο εκπαιδευτικούς που παρακολουθήσαμε, τον Α και τον Γ, καθώς ο Β δεν ήταν διαθέσιμος. Συνεπώς για τα διδακτικά επεισόδια του Β που θα αναλύσουμε παρακάτω θα αρκεστούμε μόνο στις βιντεοσκοπήσεις των διδασκαλιών του που παρακολουθήσαμε.

Σχετικά με τις συνεντεύξεις τώρα, η μία πραγματοποιήθηκε στο γραφείο του διευθυντή και η άλλη σε μία από τις αίθουσες διδασκαλίας του σχολείου. Πάλι έγινε βιντεοσκόπηση των συνεντεύξεων καθώς θέλαμε να αποτυπώσουμε και εκεί ότι τυχόν μη λεκτικά μέσα χρησιμοποιούσε ο εκπαιδευτικός. Οι συνεντεύξεις διήρκησαν κατά μέσο όρο 30-40 λεπτά και σε αυτές αρχικά ζητήσαμε από τους καθηγητές να μας παραθέσουν κάποια στοιχεία για την πορεία τους στον χώρο της εκπαίδευσης. Έπειτα αφού είχαμε κάνει μια πρώτη μελέτη του υλικού που είχαμε συλλέξει από τις διδασκαλίες (βίντεο, ηχογραφήσεις και σημειώσεις πεδίου) και κατασκευάσαμε κάποια ερωτηματολόγια για τη διεξαγωγή της συνέντευξης, τους ζητήσαμε να παρακολουθήσουν κάποια από τα στιγμιότυπα τις διδασκαλίας τους που κρίναμε χρήσιμα για την παρούσα έρευνα και τους υποβάλαμε τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Αναλυτικότερα για τις ερωτήσεις και στα στιγμιότυπα θα αναφερθούμε στις υποενότητες 3.2 και 4.1 αντίστοιχα.

3.2. Ερευνητικά Εργαλεία

Η έρευνά μας αφορά τον εκπαιδευτικό και κυρίως αρχικά την παρατήρηση των εκφράσεων του προσώπου του, των διακυμάνσεων στη φωνή του, των παύσεων του και γενικότερα των μη λεκτικών μέσων που χρησιμοποιεί κατά την επιχειρηματολογία του καθώς και τον ρόλο που παίζουν αυτά στη διδασκαλία του. Για το λόγο αυτό ήταν αναγκαία η χρήση μέσων που θα μας επέτρεπαν να καταγράψουμε με όσο τον δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια αυτά τα στοιχεία. Συνεπώς χρησιμοποιήσαμε μια βιντεοκάμερα, ένα μαγνητόφωνο για την καλύτερη καταγραφή της φωνής και ένα μπλοκ στο οποίο κρατήθηκαν οι σημειώσεις πεδίου και συντάχθηκαν αργότερα οι ερωτήσεις που χρησιμοποιήσαμε στις συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς.

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε ήταν οι δώδεκα διδακτικές ώρες που μαγνητοσκοπήθηκαν, τέσσερις από καθένα από τους τρεις εκπαιδευτικούς που μελετήσαμε, δυο συνεντεύξεις, μία σε καθένα από τους εκπαιδευτικούς στηριζόμενη στο ερωτηματολόγιο που κατασκευάσαμε και τέλος οι σημειώσεις πεδίου που κρατήσαμε κατά την παρακολούθηση. Οι ηχογραφήσεις που καταγράψαμε με μαγνητόφωνο δεν χρησιμοποιήθηκαν καθώς διαπιστώσαμε κατά την παρακολούθηση των βίντεο πως ο ήχος ήταν αρκετά καθαρός και μπορέσαμε να δουλέψουμε μόνο αυτά.

Η δομή των ερωτηματολογίων που χρησιμοποιήθηκαν για τις συνεντεύξεις ήταν η ίδια για όλους τους εκπαιδευτικούς. Στην αρχή καθένας τους καλούνταν να μας δώσει κάποιες πληροφορίες για τον εαυτό του, να μας γνωστοποιήσει το διδακτικό του υπόβαθρο. Στη συνέχεια οι ερωτήσεις γίνονταν πιο στοχευμένες πάνω στα διδακτικά περιστατικά που είχαμε εντοπίσει. Αρχικά τους ζητούσαμε να παρατηρήσουν το απόσπασμα από τη διδασκαλία τους και στη συνέχεια οι ερωτήσεις που γίνονταν αφορούσαν το γνωστικό ή και μαθησιακό στόχο του εκπαιδευτικού μέσα από το μη λεκτικό μέσο που χρησιμοποιούσε. Στο τέλος κάθε διδακτικού αποσπάσματος τους ρωτούσαμε για τα συναισθήματα που θεωρούσαν πως προκαλούσε η μη λεκτική τους συμπεριφορά, τόσο στους ίδιους όσο και στις μαθήτριές τους.

3.3Ανάλυση Δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα διερευνούμε την επιχειρηματολογία που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τόσο σε λεκτικό όσο και σε μη λεκτικό επίπεδο, με στόχο την αποκάλυψη μη καταγεγραμμένων όψεων που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί σε γνωστικό και θυμικό επίπεδο.

Πρόκειται για μια μεθοδολογική και θεωρητική οπτική που αναλύει ταυτόχρονα λεκτικές κι μη λεκτικές όψεις της επιχειρηματολογίας των εκπαιδευτικών που αναπτύχθηκε σε επιλεγμένα διδακτικά επεισόδια, για την ανάλυση των οποίων χρησιμοποιήθηκε το σχήμα του Toulmin όπως αυτό χρησιμοποιείτε από τον Krummheuer. Το λεγόμενο βασικό μοντέλο, το οποίο αποτελείται από τον ισχυρισμό, τα δεδομένα και την εγγύηση.

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των πλεονεκτημάτων και ιδιαίτερα της προστιθέμενης αξίας που μπορεί να προσφέρει στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών μια ολιστική ανάλυση της μικρο δομής των επιχειρημάτων. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινίσουμε πως τα επιχειρήματα και τα διδακτικά επεισόδια επιλέχθηκαν με σκοπό να βοηθήσουν την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων αλλά και των περιορισμών της προτεινόμενης προσέγγισης.

Αναλύοντας την μικρο δομή του κάθε επιχειρήματος που επιλέξαμε μέσα στο βασικό σχήμα του Toulmin εξετάσαμε το κατά πόσο η μη λεκτική επικοινωνία ενεργοποιείται ως δεδομένο, ως εγγύηση ή ως ισχυρισμός και στη συνέχεια διερευνήσαμε αν ρο μη λεκτικό στοιχείο του επιχειρήματος ενισχύει, συμπληρώνει ή δρα ανταγωνιστικά ως προς το λεκτικό επιχείρημα που αναπτύσσεται..

Κάτι τέτοιο ισχυριζόμαστε πως επιτρέπει την αναθεώρηση του μαθηματικού επιχειρήματος που νομιμοποιεί ο/η εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, αποκαλύπτοντας με αυτό τον τρόπο περαιτέρω όψεις της μαθηματικής γνώσης.

Σχετικά με την καταγραφή και την ανάλυση της φωνής των εκπαιδευτικών υπάρχουν πολλοί τρόποι και μέσα που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε όπως τα ντεσιμπελόμετρα και τα ειδικά προγράμματα καταγραφής ήχων. Έχοντας στην διάθεσή μας μόνο το υλικό από τα βίντεο, καθώς το μικρόφωνο δεν ήταν τοποθετημένο πάνω στους καθηγητής συνεπώς δεν μπορούσαμε να έχουμε τόσο προσεγμένη καταγραφή των αλλαγών τονικότητας της φωνής, θα χρησιμοποιήσουμε μια δική μας κλίμακα για να καθορίσουμε την αλλαγή στη φωνή. Η κλίμακα αυτή παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Φωνή	**Συμβολισμός**	**Επεξήγηση**
Χαμηλή Τονικότητα Φωνής	ΧΤ	Όταν μιλά πιο χαμηλόφωνα από ότι Συνήθως
Υψηλή Τονικότητα Φωνής	ΥΤ	Όταν μιλά πιο δυνατά από ότι συνήθως
Εκφραστική Τονικότητα Φωνής	ΕΤ	Όταν αλλάζει την χροιά της φωνής φανερώνοντας κάποιο συναίσθημα π.χ. απογοήτευση, απορία, αυστηρότητας
Ρυθμική Τονικότητα Φωνής	ΡΤ	Όταν δίνει κάποιο ρυθμό στις λέξεις που χρησιμοποιεί π.χ. τραγουδά, τραβάει τις λέξεις
Συλλαβισμός	Σ	Όταν συλλαβίζει
Παύση	Π	Όταν σταματά να μιλά

Πίνακας 1. Κατηγοριοποίηση Τονικότητας Φωνής

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Διδακτικά Επεισόδια

Παρακάτω παρουσιάζονται όλα τα διδακτικά επεισόδια που εντοπίσαμε και κρίναμε άξια προς ανάλυση. Τα επεισόδια αυτά έχουν καταγραφεί ανά τάξη ξεκινώντας από την Α γυμνασίου και καταλήγοντας στη Γ γυμνασίου. Χρειάζεται να σημειωθεί στο σημείο αυτό πως σε αρκετά αποσπάσματα εντοπίσαμε και καταγράψαμε και κάποιες έντονες χειρονομίες και κινήσεις σώματος του εκάστοτε εκπαιδευτικού, οι οποίες όμως δεν θα αναλυθούν στην παρούσα έρευνα καθώς δεν αποτελούν κομμάτι της μελέτης μας.

4.1.1. Διδακτικό επεισόδιο 1

Ο καθηγητής Α στην διδακτική αυτή ώρα διδάσκει το κεφάλαιο της γεωμετρίας του σχολικού βιβλίου που αφορά τα παραλληλόγραμμα. Αφού έχουν καταλήξει στον ορισμό των παραλληλογράμμων σχεδιάζει ένα παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ, φέρνει το ευθύγραμμο τμήμα ΛΝ και ρωτάει τις μαθήτριες πώς ονομάζεται αυτό το ευθύγραμμο τμήμα. Μια μαθήτρια απαντά «διαγώνιος» και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Κ: Αυτή λοιπόν εδώ, αυτό το ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται διαγώνιος(σχήμα 4.1.1.1), λοιπόν (στο σημείο αυτό κάνει μια παύση) αυτό λοιπόν εδώ θα το δούμε και όταν δούμε τις ιδιότητες ονομάζεται διαγώνιος. Τώρα η διαγώνιος στο παραλληλόγραμμο ενώνει δυο απέναντι κορυφές. Δυο απέναντι κορυφές (αυξάνει λίγο την ένταση της φωνής, αλλάζει λίγο την χροιά του μιλώντας σε πιο αυστηρό τόνο και κάνει μια έκφραση με το πρόσωπό του γουρλώνοντας τα μάτια του).

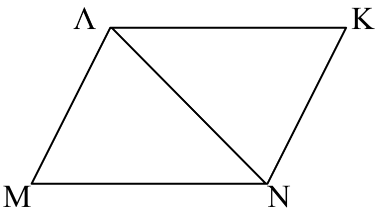
Λίγο παρακάτω ο καθηγητής συνεχίζει,

Κ: Πριν στο Α5 που έκανα ένα ρεζουμέ λέω, τι ονομάζεται διαγώνιος; Και τι μου λέει κάποια; (κάνει μια παύση σε αυτό το σημείο) η διαγώνιος ενώνει δυο απέναντι…(παύση)

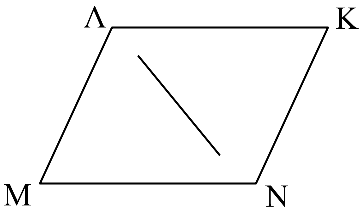
Μ: Γωνίες

Κ: Γωνίες μου είπε (αλλάζει ο τόνος της φωνής του δηλώνοντας απογοήτευση). Η γωνία είναι όλο αυτό εδώ μέσα (δείχνει το εσωτερικό του παραλληλογράμμου που έχει κατασκευάσει στον πίνακα), έτσι; Τι ενώνει, αυτό με αυτό; (φτιάχνει μια γραμμή που δεν ακουμπά στις κορυφές του παραλληλογράμμου, σχήμα 4.1.1.2.). Τι έχουμε πει ότι πρέπει να λέμε σε ένα ευθύγραμμο τμήμα; Τι ενώνει! Ή από πού ξεκινάει και που καταλήγει.

Τα σχήματα που σχεδιάστηκαν σε αυτό το απόσπασμα ήταν τα εξής:

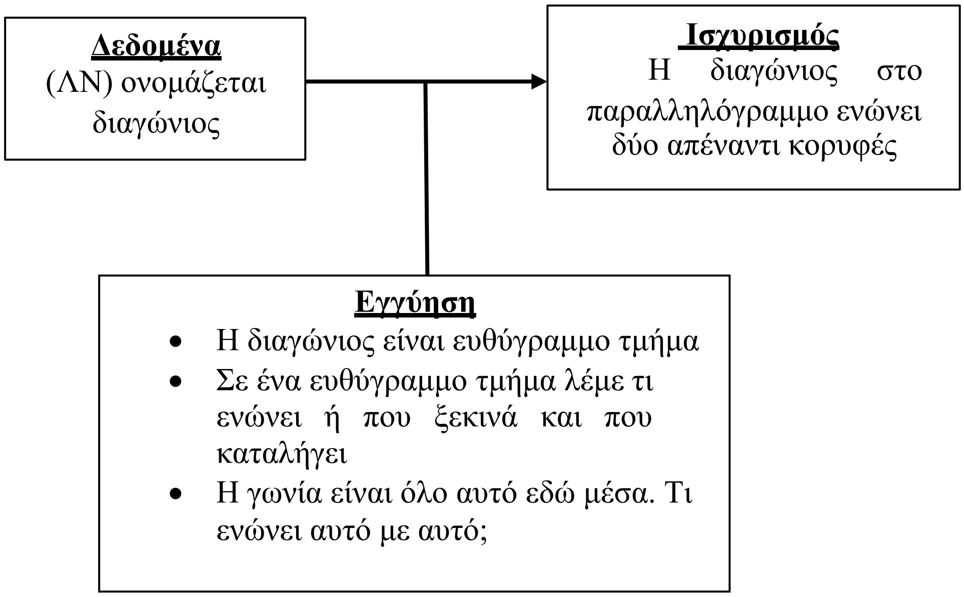


Σχήμα 4.1.1.1



Σχήμα 4.1.1.2

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Αυτή λοιπόν εδώ, αυτό το ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται διαγώνιος Κ: Τώρα η διαγώνιος στο παραλληλόγραμμο ενώνει δυο απέναντι κορυφές. Δυο απέναντι κορυφές (αυξάνει λίγο την ένταση της φωνής, αλλάζει λίγο την χροιά του μιλώντας σε πιο αυστηρό τόνο και κάνει μια έκφραση με το πρόσωπό του γουρλώνοντας τα μάτια του). Κ: Γωνίες μου είπε (αλλάζει ο τόνος της φωνής του δηλώνοντας απογοήτευση και κάνει μια μικρή παύση). Η γωνία είναι όλο αυτό εδώ μέσα (δείχνει το εσωτερικό του παραλληλογράμμου που έχει κατασκευάσει στον πίνακα), έτσι; Τι ενώνει, αυτό με αυτό; (φτιάχνει μια γραμμή που δεν ακουμπά στις κορυφές του

<table>
<tr><td></td><td>παραλληλογράμμου, σχήμα 4.1.1.2.). Τι έχουμε πει ότι πρέπει να λέμε σε ένα ευθύγραμμο τμήμα; Τι ενώνει! Ή από πού ξεκινάει και που καταλήγει.</td></tr>
<tr><td>Μη Λεκτική Επικοινωνία</td><td>ΥΤ, ΕΤ, Π</td></tr>
<tr><td>Σχήμα Toulmin</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Άρρητο</td><td>Εγγύηση: Η γωνία είναι η τομή δύο ημιεπιπέδων και εφόσον η διαγώνιος είναι ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να ενώνει δύο γωνίες</td></tr>
</table>

Πίνακας 2. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.1

Το επιχείρημα στο επεισόδιο αυτό βρίσκεται στο σημείο όπου ο καθηγητής γνωστοποιεί λεκτικά στις μαθήτριες πως η διαγώνιος στο παραλληλόγραμμο ενώνει δύο απέναντι κορυφές. Αφού έχει ήδη κατασκευάσει στον πίνακα ένα παραλληλόγραμμο και έχει τραβήξει ήδη το ευθύγραμμο τμήμα ΛΝ χρησιμοποιώντας ως δεδομένο το ότι το ΛΝ είναι διαγώνιος του παραλληλογράμμου. Σε αυτό το επιχείρημα έχουμε αρκετές εγγυήσεις. Αρχικά η διαγώνιος είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο δηλώνεται ρητά από τον εκπαιδευτικό Α, το οποίο όπως ήδη γνωρίζουν οι μαθήτριες έχει αρχή και τέλος, ορίζεται δηλαδή από δύο σημεία του επιπέδου. Αυτή η διευκρίνιση πάλι δίνεται ρητά, λεκτικά από τον καθηγητή. Ωστόσο χρησιμοποιείται και άλλη μια εγγύηση. Αφού έχουν δώσει την απάντηση πως ενώνει δύο κορυφές ο καθηγητής αναφέρει στις μαθήτριες πως σε άλλο τμήμα του έδωσαν την απάντηση πως ενώνει δύο γωνίες. Με αφορμή αυτή τη λανθασμένη απάντηση λοιπόν εξηγεί στις μαθήτριες πως δεν γίνεται να ενώνει δύο γωνίες χωρίς όμως να δηλώνει ξεκάθαρα πως επειδή ως γωνία ορίζεται η τομή δύο ημιεπιπέδων και αποτελείται από άπειρα σημεία, το ευθύγραμμο τμήμα που πρέπει να έχει και αρχή και τέλος δεν θα μπορούσε ποτέ να ενώνει δύο γωνίες. Συνεπώς και η διαγώνιος δεν μπορεί να ενώνει δύο γωνίες.

Σε αυτό το επεισόδιο εντοπίσαμε δύο σημεία στα οποία εμφανίζεται μη λεκτική επικοινωνία το πρώτο είναι όταν ο εκπαιδευτικός Α ορίζει την διαγώνιο ως το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Εδώ παρατηρούμε πως ο εκπαιδευτικός αυξάνει την ένταση, καθώς επίσης αλλάζει και το χρωματισμό της φωνής του υποδηλώνοντας ένα πιο αυστηρό τόνο. Επιπλέον αλλάζει την έκφραση του προσώπου του γουρλώνοντας έντονα τα μάτια του. Η μη λεκτική του επικοινωνία σε αυτό το σημείο έρχεται να ενισχύσει τον ισχυρισμό του για τη διαγώνιο και συνάμα να τονίσει την σημαντικότητα ενός σωστού ορισμού στα μαθηματικά.

Το επόμενο σημείο είναι αυτό όπου αναφέρει στις μαθήτριες μια λανθασμένη απάντηση που πήρε από άλλο τμήμα, ότι η διαγώνιος ενώνει δυο απέναντι γωνίες. Εδώ αλλάζει την χροιά της φωνής του αφήνοντας να εννοηθεί ένα αίσθημα απογοήτευσης ως προς τη λανθασμένη απάντηση. Η μη λεκτική επικοινωνία εδώ εμφανίζεται σε μια από τις εγγυήσεις του ισχυρισμού και δρα ως ενίσχυση στην εγγύηση καθώς καθιστά σαφές στις μαθήτριες πως δεν γίνεται η διαγώνιος να ενώνει δύο απέναντι γωνίες. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν ο καθηγητής προσπαθεί να καταστίσει σαφές στις μαθήτριες πως μια τέτοια απάντηση είναι λανθασμένη χωρίς να χρειαστεί ο ίδιος να χρησιμοποιήσει την λεκτική επικοινωνία.

4.1.2. Διδακτικό επεισόδιο 2

Και αυτό το επεισόδιο λαμβάνει χώρα στην Α γυμνασίου. Εδώ, στη συνέχεια της ίδιας διδακτικής ώρας με το προηγούμενο επεισόδιο , ο καθηγητής Α αναφέρεται στα ύψη του παραλληλογράμμου. Πραγματοποιείται ο εξής διάλογος:

Κ: Ύψος στο παραλληλόγραμμο ονομάζουμε την απόσταση δύο παραλλήλων πλευρών του. Αυτή εδώ την απόσταση των δύο αυτών πλευρών(σχήμα 4.1.2.1.) Για να φέρω λοιπόν το ύψος τι θα κάνω; Θα βάλω τον χάρακα μου να σχηματίζει ορθή γωνία (βάζει το τρίγωνο να πατάει στην μια πλευρά του παραλληλογράμμου) , θα φέρω αυτή (τραβάει το ύψος κάπου στη μέση των πλευρών), να λοιπόν το ύψος. Πόσα τέτοια ύψη μπορώ να φέρω;

Μ: Άπειρα.

Κ: Άπειρα(σχήμα 4.1.2.2.). Τώρα όμως για το ύψος, όλες οι πλευρές μπορούν να ονομαστούν βάσεις του παραλληλογράμμου, όπως και στα τρίγωνα. Άρα πόσα διαφορετικά (αυξάνει λίγο τον τόνο της φωνής του) ύψη υπάρχουν σε ένα παραλληλόγραμμο; Στο τρίγωνο είχαμε τρία διαφορετικά ύψη, εδώ πέρα στο παραλληλόγραμμο, πόσα διαφορετικά ύψη υπάρχουν;

$Μ_1$: Άπειρα.

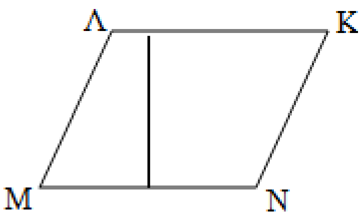
Κ: Αυτά είναι τα ίδια (δείχνει όλα τα παράλληλα ύψη που έχει τραβήξει μεταξύ των δύο ίδιων παράλληλων πλευρών του παραλληλογράμμου), έτσι;

$Μ_2$: Δύο.

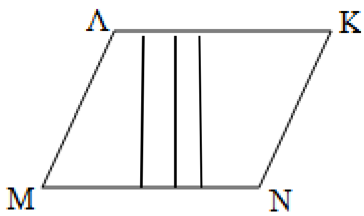
Κ: Το άλλο πιο είναι; Να πάρω τον χάρακά μου και να βρω την απόσταση αυτών των δύο τώρα…

Κ: Λοιπόν, άρα σε ένα παραλληλόγραμμο πόσα διαφορετικά ύψη μπορώ να σχεδιάσω; Πόσα διαφορετικά (τονίζει πολύ έντονα την λέξη διαφορετικά και παίρνει μια έκφραση προσώπου γουρλώνοντας έντονα τα μάτια), μπορώ να σχεδιάσω; Δύο!

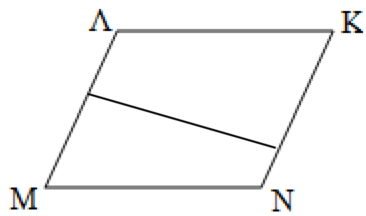
Τα σχήματα στο απόσπασμα αυτό είναι τα παρακάτω:



Σχήμα 4.1.2.1.



Σχήμα 4.1.2.2.



Σχήμα 4.1.2.3.

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Λοιπόν, άρα σε ένα παραλληλόγραμμο πόσα διαφορετικά ύψη μπορώ να σχεδιάσω; Πόσα διαφορετικά (τονίζει πολύ έντονα την λέξη διαφορετικά και παίρνει μια έκφραση προσώπου γουρλώνοντας έντονα τα μάτια), μπορώ να σχεδιάσω; Δύο!
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΕΤ έκφραση προσώπου: έντονο γούρλωμα ματιών
Σχήμα Toulmin	**Δεδομένα** ένα παραλληλόγραμμο **Ισχυρισμός** Πόσα διαφορετικά ύψη, μπορώ να σχεδιάσω; Δύο **Εγγύηση** • Ο ορισμός του ύψους ως το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα • Όλες οι αποστάσεις ανάμεσα στις δυο παράλληλες πλευρές είναι το ίδιο ύψος.
Άρρητο	

Πίνακας 3. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.2

Στο απόσπασμα, το επιχείρημα του εκπαιδευτικού Α είναι πως σε κάθε παραλληλόγραμμο υπάρχουν δύο διαφορετικά ύψη. Ο ισχυρισμός του λοιπόν είναι πως τα ύψη που είναι διαφορετικά είναι δύο και ως δεδομένο έχουμε ότι το σχήμα μας είναι παραλληλόγραμμο. Νωρίτερα, από το κομμάτι του διαλόγου που χρησιμοποιήσαμε, έχει δοθεί ο ορισμός του ύψους λεκτικά από τον καθηγητή. Ύψος ορίζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο παραλλήλων πλευρών ενός παραλληλογράμμου. Επιπλέον, έχει προηγηθεί ένας διάλογος κατά τον οποίο ο καθηγητής Α και οι μαθήτριες έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι μπορώ να φέρω άπειρα ύψη όμως μεταξύ των ίδιων παραλλήλων όλα αυτά τα ύψη είναι ίσα μεταξύ τους. Ο καθηγητής πάλι σε αυτό το σημείο λεκτικά αναφέρει ρητά πως όλα αυτά τα ύψη που προαναφέραμε είναι ίδια.

Ως μη λεκτική επικοινωνία εντοπίσαμε την αλλαγή στην τονικότητα της φωνή και τον έντονο τονισμό της λέξης διαφορετικά όταν καταλήγει πως σε ένα παραλληλόγραμμο μπορώ να φέρω δύο διαφορετικά ύψη. Στο σημείο αυτό η μη λεκτική επικοινωνία του έρχεται να ενισχύσει τον ισχυρισμό του καθώς πάλι θέλει να εφιστήσει την προσοχή των μαθητριών στο ότι τα διαφορετικά ύψη είναι δύο, σε αντίθεση με τα ύψη τα οποία γενικά μπορώ να φέρω σε ένα παραλληλόγραμμο, που είναι άπειρα. Θεωρούμε πως ο έντονος τονισμός της λέξης διαφορετικά καθώς και το γούρλωμα των ματιών έρχονται να ενισχύσουν τον ισχυρισμό του, λαμβάνοντας επίσης υπόψιν και τον διάλογο που προηγήθηκε με μια μαθήτρια, η οποία όταν ρωτήθηκε πόσα διαφορετικά ύψη υπάρχουν, απάντησε άπειρα επηρεασμένη από τα άπειρα ύψη που έχει γενικά ένα παραλληλόγραμμο, ισχυρισμός που είχε δηλωθεί νωρίτερα κατά τη διάρκεια της ίδιας διδακτικής ώρας.

4.1.3. Διδακτικό επεισόδιο 3

Το τελευταίο επεισόδιο από την Α γυμνασίου αφορά ένα κομμάτι της άλγεβρας και συγκεκριμένα πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών. Ο καθηγητής Α έχει βάλει στις μαθήτριες να λύσουν την εξής αριθμητική παράσταση: $2(-21-5+27)-5(9-11)-3(-15+18)$

Καθώς περνά από τα θρανία των μαθητριών για να ελέγξει την πρόοδό τους, σταματά πάνω από μια μαθήτρια και ακολουθεί ο εξής μονόλογος:

Κ:Που το βρήκες παιδάκι μου το 111; -15+18 πόσο μας κάνει; Πόσο, -33 (αυξάνει έντονα τον τόνο της φωνής και αφήνει μια χροιά απορίας); Κατεβαίνεις 15 σκαλοπάτια και μετά ανεβαίνεις 18 και είσαι το υπόγειο κάτω, στα έγκατα της γης;

Το επεισόδιο αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς εδώ βλέπουμε πώς αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός την λανθασμένη απάντηση μιας μαθήτριας. Ο ισχυρισμός του σε αυτό το σημείο είναι ότι η απάντηση της μαθήτριας είναι λανθασμένη και δηλώνεται άρρητα με τη φράση *που το βρήκες παιδάκι μου το 111;* Τα δεδομένα του επιχειρήματός του είναι οι αριθμοί που έχουν δοθεί μέσα στην αριθμητική παράσταση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η εγγύηση που χρησιμοποιείτε σε αυτό το απόσπασμα. Ο καθηγητής βάζει την μαθήτρια στη διαδικασία να τοποθετήσει το σώμα της σε μια σκάλα την οποία ανεβοκατεβαίνει. Έχουμε σε αυτό λοιπόν το σημείο την ενσωμάτωση της μαθήτριας στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Αρχικά έχει γίνει μια αντιστοίχιση του συνόλου των ακέραιων αριθμών με το σύνολο των σκαλοπατιών και οριστεί μια νόρμα μέσα στην σχολική τάξη, ίσως από προηγούμενα μαθήματα, πως το -1 σημαίνει κατεβαίνω ένα σκαλοπάτι και το +1 ανεβαίνω ένα σκαλοπάτι.

Η μη λεκτική επικοινωνία που φανερώνεται σε αυτό το κομμάτι, δηλαδή η αύξηση του τόνου της φωνής και το έντονο ύφος της έρχεται και πάλι να ενισχύσει τον άρρητο ισχυρισμό του εκπαιδευτικού Α πως η απάντηση της μαθήτριας είναι λανθασμένη. Στο απόσπασμα αυτό αξίζει επίσης να αναφέρουμε πως το ύφος του εκπαιδευτικού είναι αρκετά ειρωνικό ως προς την απάντηση της μαθήτρια γεγονός που ίσως την εμποδίζει από το να συγκεντρωθεί στην παράσταση και να σκεφτεί την σωστή απάντηση, καθώς επίσης και να δημιουργεί ένα λιγότερο προσιτό κλίμα για την αποδοχή λανθασμένων απαντήσεων.

Λεκτική Επικοινωνία	Κ:Που το βρήκες παιδάκι μου το 111; -15+18 πόσο μας κάνει; Πόσο, -33 (αυξάνει έντονα τον τόνο της φωνής και αφήνει μια χροιά απορίας); Κατεβαίνεις 15 σκαλοπάτια και μετά ανεβαίνεις 18 και είσαι το υπόγειο κάτω, στα έγκατα της γης;
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ , ΕΤ
Σχήμα Toulmin	**Δεδομένα** -15+18 **Ισχυρισμός** Που το βρήκες παιδάκι μου το 111; **Εγγύηση** • Κατεβαίνεις 15 σκαλοπάτια και μετά ανεβαίνεις 18 • Νοητική αντιστοιχία: – Συνόλου Σκαλοπατιών-Συνόλου Ακέραιων Αριθμών – Πράξεων στους Ακεραίους-μετακίνηση του σώματος των μαθητριών ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας σκαλοπάτια – Νόρμα της τάξης πως το -1 σημαίνει ένα σκαλοπάτι κάτω
Άρρητο	**Ισχυρισμός:** Η μαθήτρια έκανε λάθος **Εγγύηση:** Η νοητική αντιστοιχία που περιγράφεται στο σχήμα του Toulmin

Πίνακας 4. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.3

4.1.4. Διδακτικό επεισόδιο 4

Εδώ έχουμε ένα επεισόδιο από την Β γυμνασίου. Ο καθηγητής Β έχει δώσει στις μαθήτριες την εξίσωση $y = \frac{1}{2}x = 0,5x$ έχει φτιάξει έναν πίνακα τιμών, τον έχει συμπληρώσει και έχει κατασκευάσει την γραφική παράσταση της ευθείας. Θέλει να τους δείξει πως είναι ευθεία η γραφική παράσταση και τοποθετώντας τα σημεία και ενώνοντάς τα προκύπτει όντως η ευθεία. Ακολουθεί λοιπόν ο παρακάτω μονόλογος:

Κ: Εσείς μπορείτε να βγάλετε ότι παριστάνουν ευθεία αυτά τα σημεία; Για να δούμε. Τριγωνομετρικά. Αυτή δεν είναι μια ανηφόρα; Πώς θα ανέβεις την ανηφόρα; Πόσο ψηλά ανεβαίνεις (κάνει μια κίνηση με το χέρι του ανεβάζοντάς το προς τα πάνω) ανάλογα με το πόσο οριζόντια πας (πάλι κάνει κίνηση με το χέρι του μετακινώντας το οριζόντια προς τα δεξιά). Τι είναι αυτό; Το πόσο ανεβαίνουμε σε σχέση με το πόσο οριζόντια πάμε; Η ε-φα-πτο-μένη (προφέρει την λέξη με λίγο πιο έντονη φωνή και συλλαβιστά, κουνώντας ταυτόχρονα τα χέρια του πάνω κάτω).

Λίγο πιο μετά συνεχίζει λέγοντας:

Κ:Λέμε τώρα μισό χιλιόμετρο ανεβαίνει ψηλά, πάει ανά χιλιόμετρο, μισό προς ένα είναι η κλίση ποια είναι κορίτσια; Η εφαπτομένη της γωνίας ω, το είδαμε;

Κ: Φυσικά εδώ τα ψ προς χ τι είναι σίγουρα; Α-να-λο-γα (και σε αυτό το σημείο αυξάνει λίγο τον τόνο της φωνής και λέει συλλαβιστά την λέξη ανάλογα). Δηλαδή μισό προς ένα δεν είναι ίσο με ένα προς δύο; Ε, για πάμε στο άλλο. Το άλλο τι λέει; Ανεβαίνω ψηλά ένα χιλιόμετρο όταν πάω οριζόντια πόσα χιλιόμετρα; Δύο. Το είδατε;

Συμπληρώνει στον τύπο της εφαπτομένης που έχει γράψει $\varepsilon\varphi\omega = \frac{0,5}{1}$ το $\varepsilon\varphi\omega = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$ και συνεχίζει:

Κ: Αυτή αν είναι πάλι ας πούμε ξέρω ‘γω, ω΄, ας πούμε η κλίση αυτή εδώ ποια είναι κορίτσια; Για την ΟΒ; Ένα προς δύο δεν είναι ίσο με μισό προς ένα, πάλι δεν είναι η εφαπτομένη ω; Τι θα πει λοιπόν ότι ο πρώτος ανηφορικός δρόμος και ο δεύτερος ανηφορικός δρόμος έχουν την ίδια γωνία; Ότι είναι ο ίδιος δρόμος(αυξάνει την ένταση της φωνής του και κάνει κινεί τα χέρια του προς τα πάνω μετακινώντας και όλο του το σώμα).

Υπάρχουν δύο επιχειρήματα σε αυτό το απόσπασμα που μπορούμε να αναλύσουμε και δίνονται στους παρακάτω πίνακες

Λεκτική Επικοινωνία	Κ:Φυσικά εδώ τα ψ προς χ τι είναι σίγουρα; Α-να-λο-γα (και σε αυτό το σημείο αυξάνει λίγο τον τόνο της φωνής και λέει συλλαβιστά την λέξη ανάλογα). Δηλαδή μισό προς ένα δεν είναι ίσο με ένα προς δύο; Ε, για πάμε στο άλλο. Το άλλο τι λέει; Ανεβαίνω ψηλά ένα χιλιόμετρο όταν πάω οριζόντια πόσα χιλιόμετρα; Δύο. Το είδατε;
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ , Σ
Σχήμα Toulmin	**Δεδομένα** Φυσικά εδώ τα ψ προς χ τι είναι σίγουρα; Α-να-λο-γα → **Ισχυρισμός** Ο λόγος είναι σταθερός; **Εγγύηση** μισό προς ένα δεν είναι ίσο με ένα προς δύο
Άρρητο	**Ισχυρισμός:** Ο λόγος είναι σταθερός

Πίνακας 5. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.4 (α)

Το πρώτο επιχείρημα είναι πως τα ποσά που είναι ανάλογα έχουν σταθερό λόγο. Ο ορισμός λοιπόν των ανάλογων ποσών. Ο εκπαιδευτικός Β στο σημείο αυτό δεν αναφέρει λεκτικά τον ισχυρισμό του στις μαθήτριες. Ως δεδομένο χρησιμοποιεί ότι τα ποσά που δίνονται είναι ανάλογα και ως εγγύηση χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες των σημείων του πίνακα, βρίσκοντας τους λόγους τους και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι όλα βγάζουν το ίδιο σταθερό πηλίκο.

Η μη λεκτική επικοινωνία του εκπαιδευτικού Β στο απόσπασμα αυτό εντοπίζεται στην αύξηση της έντασης της φωνής του και τον έντονο τονισμό πιο συγκεκριμένα της λέξης ανάλογα. Ο εκπαιδευτικός Β όχι μόνο τονίζει έντονα την λέξη αλλά την προφέρει και συλλαβιστά, θέλοντας να τονίσει τη σημασία του γεγονότος πως τα ποσά είναι ανάλογα, καθώς επίσης και να εντάξει τις μαθήτριες στην διαδικασία εξαγωγής συμπεράσματος, αφού πολλές μαθήτριες συλλάβιζαν μαζί με τον εκπαιδευτικό τη λέξη. Με αυτόν τον τρόπο ο καθηγητής Β δημιουργεί ένα ευχάριστο κλίμα μέσα στην τάξη παρακινώντας τις μαθήτριες να συμμετάσχουν και να δείξουν ίσως κάποιο ενδιαφέρον για το μάθημα.

Το επόμενο επιχείρημα του αποσπάσματος αυτού είναι το παρακάτω

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Το πόσο ανεβαίνουμε σε σχέση με το πόσο οριζόντια πάμε; Η ε-φα-πτο-μένη (προφέρει την λέξη με λίγο πιο έντονη φωνή και συλλαβιστά, κουνώντας ταυτόχρονα τα χέρια του πάνω κάτω). Κ: Τι θα πει λοιπόν ότι ο πρώτος ανηφορικός δρόμος και ο δεύτερος ανηφορικός δρόμος έχουν την ίδια γωνία; Ότι είναι ο ίδιος δρόμος(αυξάνει την ένταση της φωνής του και κάνει κινεί τα χέρια του προς τα πάνω μετακινώντας και όλο του το σώμα).
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ , Σ

Σχήμα **Toulmin**	**<u>Δεδομένα</u>** ο πρώτος ανηφορικός δρόμος και ο δεύτερος ανηφορικός δρόμος έχουν την ίδια γωνία → **<u>Ισχυρισμός</u>** είναι ο ίδιος δρόμος **<u>Εγγύηση</u>** Η κλίση είναι η εφαπτομένη της γωνίας
Άρρητο	**Δεδομένα:** Η ενσώματη εμπλοκή των μαθητριών με το ότι ανεβαίνουν την ανηφόρα

Πίνακας 6. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.4 (β)

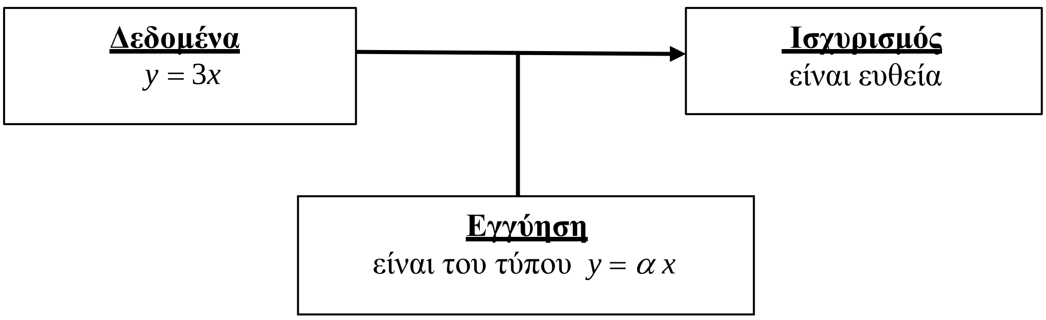
Το επιχείρημα του εκπαιδευτικού Β στο απόσπασμα αυτό είναι πως σημεία που βρίσκονται πάνω σε ευθείες που έχουν την ίδια κλίση βρίσκονται στην ουσία πάνω στην ίδια ευθεία. Παρομοιάζει την ευθεία με μια ανηφόρα και ισχυρίζεται πως η ανηφόρα πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία που έχει δώσει στον πίνακα τιμών είναι η ίδια. Ως δεδομένα έχουμε τις συντεταγμένες των σημείων καθώς και το ότι η κλίση κάθε ευθείας πάνω στην οποία κινείτε κάθε σημείο είναι ίδια. Η εγγύηση που χρησιμοποιεί είναι πως εφόσον η κλίση είναι ίδια και η κλίση είναι η εφαπτομένη της γωνίας, τότε όλες αυτές οι ανηφόρες θα σχηματίζουν την ίδια γωνία, συνεπώς θα είναι η ίδια ανηφόρα. Εδώ βέβαια, εμφανίζεται και η ενσώματη εμπλοκή των μαθητριών καθώς καλούνται να ανέβουν την ανηφόρα, να μπουν λοιπόν στην διαδικασία να σκεφτούν πως θα μετακινήσουν το σώμα τους, την οποία θα χαρακτηρίσουμε ως μια άρρητη μορφή εγγύησης για τον ισχυρισμό του εκπαιδευτικού Β.

Σε αυτό το απόσπασμα η μη λεκτική μορφή επικοινωνίας που εφαρμόζει ο καθηγητής είναι η αύξηση της έντασης της φωνής του καθώς επίσης και ο συλλαβισμός της λέξης εφαπτομένη. Ο συλλαβισμός της λέξης εφαπτομένη έρχεται να συμπληρώσει την εγγύηση που χρησιμοποιεί για τον ισχυρισμό του ο εκπαιδευτικός στο απόσπασμα αυτό καθώς επίσης πάλι, όπως στο προηγούμενο απόσπασμα, είναι ένας τρόπος για να παρακινήσει τις μαθήτριες να παρακολουθήσουν το μάθημα, να συμμετάσχουν στην εξαγωγή του συμπεράσματος και να δημιουργήσει ένα ευχάριστο κλίμα μάθησης μέσα στη σχολική τάξη.

4.1.5. Διδακτικό επεισόδιο 5

Συνεχίζοντας με τον καθηγητή Β σε ένα άλλο τμήμα της Β γυμνασίου δίνει μια άσκηση του σχολικού βιβλίου όπου στην αρχή ζητά από της μαθήτριες να συμπληρώσουν τον πίνακα των ανάλογων ποσών που τους δίνεται και στη συνέχεια τους ζητά να φτιάξουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Κ: Η συνάρτηση $y = 3x$ είναι του τύπου (γουρλώνει τα μάτια πολύ έντονα αυξάνει λίγο την φωνή και κάνει και έντονες κινήσεις με τα χέρια), $y = \alpha x$, άρα είναι ευθεία, ε; Αυτό δε λέει ο κανόνας;

<table>
<tr><td>Λεκτική Επικοινωνία</td><td>Κ: Η συνάρτηση $y = 3x$ είναι του τύπου (γουρλώνει τα μάτια πολύ έντονα αυξάνει λίγο την φωνή και κάνει και έντονες κινήσεις με τα χέρια), $y = \alpha x$, άρα είναι ευθεία, ε; Αυτό δε λέει ο κανόνας;</td></tr>
<tr><td>Μη Λεκτική Επικοινωνία</td><td>ΥΤ
Έκφραση προσώπου: έντονο γούρλωμα ματιών</td></tr>
<tr><td>Σχήμα Toulmin</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Άρρητο</td><td></td></tr>
</table>

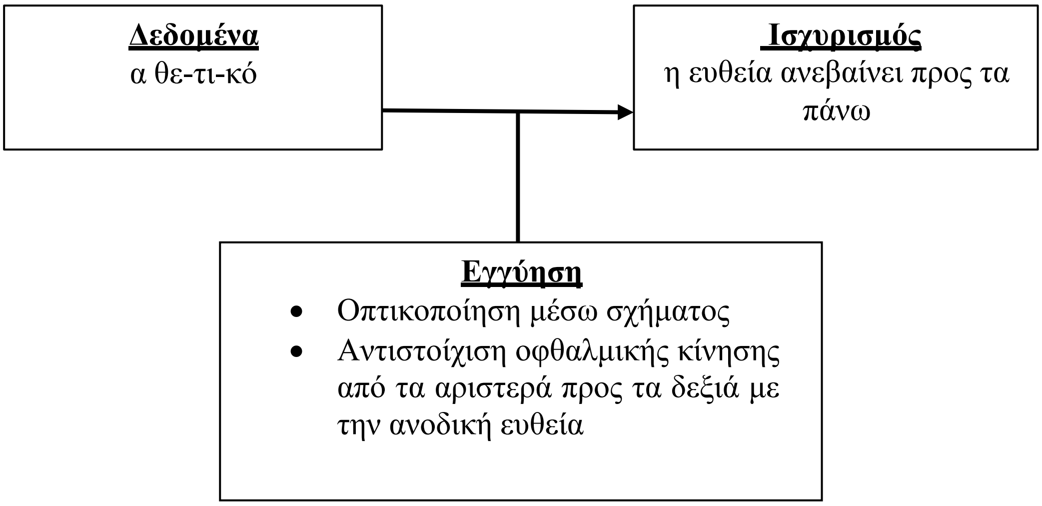
Πίνακας 7. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.5

Στο απόσπασμα αυτό ο ισχυρισμός του εκπαιδευτικού είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$ παριστάνει ευθεία. Ως δεδομένο χρησιμοποιεί τον τύπο της συνάρτησης όπως έχει δοθεί από την άσκηση του σχολικού βιβλίου και ως εγγύηση τον κανόνα πως όλες οι εξισώσεις της μορφής $y = \alpha x$ παριστάνουν ευθείες. Η μη λεκτική επικοινωνία του εκπαιδευτικού Β στο απόσπασμα αυτό εντοπίζεται στο έντονο γούρλωμα των ματιών και στην αύξηση του τόνου της φωνής του, τα οποία δρουν συμπληρωματικά στα δεδομένα του ισχυρισμού. Ο εκπαιδευτικός θέλει να τονίσει πως η συγκεκριμένη συνάρτηση που δίνεται εφόσον είναι αυτής της μορφής, την οποία γενική μορφή υποθέτουμε πως ξέρουν οι μαθήτριες από παλαιότερα μαθήματα, θα παριστάνει σίγουρα ευθεία. Προσπαθεί έτσι να τις κάνει να ανατρέξουν σε παλαιότερα βιώματα που είχαν μέσα στη σχολική τους τάξη κατά τη διάρκεια της χρονιάς αυτής, έτσι, ώστε να θυμηθούν τους κανόνες και τη θεωρία για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

4.1.6. Διδακτικό επεισόδιο 6

Τελευταίο επεισόδιο από τον καθηγητή Β όπου σε μια άλλη διδακτική ώρα, δίνει στις μαθήτριες τον τύπο για την ευθεία γράφοντας στον πίνακα: «Οι συναρτήσεις του τύπου $y = \alpha x$ έχουν (G_f) γραφική παράσταση μια ευθεία ε(Ο,Α(1,α)), που διέρχεται από τα σημεία Ο(0,0) και Α(1,α)». Πάει λοιπόν τώρα να κατασκευάσει την γραφική παράσταση της $y = 3x$ θέλοντας να δείξει πως όταν το α είναι θετικό η ευθεία ανεβαίνει. Βάζει λοιπόν τα σημεία Ο(0,0) και Α(1,α) με το $\alpha > 0$ και λέει στις μαθήτριες:

Κ: Άρα θα πάρουμε τον χάρακα ας πούμε και θα κάνουμε την ευθεία, την βλέπουμε αυτήν την ευθεία; Άμα την διαβάσουμε από τα αριστερά(κάνει μια πολύ έντονη κίνηση με τα χέρια του) τι βλέπουμε; Ότι η ευθεία ανεβαίνει προς τα (κάνει μια μικρή παύση σε αυτό το σημείο) πάνω. Άρα αυτή είναι το γράφημα G_f με α θε-τι-κο (τονίζει την λέξη θετικό και την προφέρει συλλαβιστά).

Λεκτική Επικοινωνία	Ότι η ευθεία ανεβαίνει προς τα (κάνει μια μικρή παύση σε αυτό το σημείο) πάνω. Άρα αυτή είναι το γράφημα G_f με α θε-τι-κό (τονίζει την λέξη θετικό και την προφέρει συλλαβιστά).
Μη Λεκτική Επικοινωνία	Π, Σ , ΥΤ
Σχήμα Toulmin	
Άρρητο	

Πίνακας 8. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.6

Στο απόσπασμα αυτό, το επιχείρημα του εκπαιδευτικού ότι όταν μια ευθεία έχει α θετικό τότε αυτή ανεβαίνει. Ο ισχυρισμός είναι πως η ευθεία ανεβαίνει. Τα δεδομένα που χρησιμοποιεί για τον ισχυρισμό του είναι ότι το α είναι θετικό, το οποίο ορίζει από την αρχή μόνος του ως εγγύηση. Στο επιχείρημα αυτό χρησιμοποιείται κυρίως η οπτικοποίηση που προσφέρει το σχήμα το οποίο έχει κατασκευάσει ήδη ο εκπαιδευτικός στον πίνακα καθώς και η αντιστοίχιση της οφθαλμικής κίνησης που γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά ακολουθώντας την ανοδική πορεία της δοθείσας ευθείας.

Η μη λεκτική του επικοινωνία στο απόσπασμα αυτό αποτελείται από μια μικρή παύση που κάνει στην αρχή, όταν αναφέρει πως η ευθεία ανεβαίνει προς τα πάνω, καθώς και από τον συλλαβισμό της λέξης θετικό όταν αναφέρεται στο α της ευθείας. Η παύση που λαμβάνει χώρα στο συγκεκριμένο σημείο πραγματοποιείται για να δώσει λίγο χρόνο στις μαθήτριες να δουν την γραφική παράσταση και να συνειδητοποιήσουν πως πηγαίνει προς τα πάνω από μόνες τους. Έτσι, ο εκπαιδευτικός Β προσπαθεί να εντάξει τις μαθήτριες στο μάθημα δίνοντάς τους χρόνο να συγκροτήσουν τις σκέψεις τους γύρω από τη μορφή της παράστασης. Ο συλλαβισμός της λέξης θετικό και ο έντονος τονισμός της ενισχύουν τα δεδομένα του ισχυρισμού. Ο συλλαβισμός σε αυτό το σημείο διαφέρει λίγο από τους προηγούμενους επειδή συμβαίνει κυρίως για να τονίσει τη σημασία της θετικής κλίσης της ευθείας σε σχέση με την μορφή της γραφικής παράστασης.

4.1.7. Διδακτικό επεισόδιο 7

Τα επόμενα επεισόδια αφορούν τον καθηγητή Γ που διδάσκει στην Γ γυμνασίου. Στο πρώτο διδακτικό επεισόδιο ο καθηγητής έχει δώσει την εξίσωση $x + 3y = 5$ και έχει κατασκευάσει και την γραφική της παράσταση. Ζητά από τις μαθήτριες να βρουν ποιο είναι το σημείο που τέμνει η ευθεία αυτή τον άξονα x΄x και ποιο είναι το σημείο που τέμνει τον άξονα y΄y.

Κ: Τι ξέρετε; Όποιο σημείο βρίσκεται πάνω στον y΄y τι έχει; Τι έχει; (κοιτά έντονα μια μαθήτρια που θέλει να μιλήσει γουρλώνει τα μάτια), τι έχει; Έχει (κάνει μια μικρή παύση εδώ) το x ίσο με μηδέν (γενικά μιλάει λίγο έντονα και σε αυτό εδώ το σημείο χαμηλώνει αρκετά τον τόνο της φωνής του).

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Τι ξέρετε; Όποιο σημείο βρίσκεται πάνω στον y΄y τι έχει; Τι έχει; (κοιτά έντονα μια μαθήτρια που θέλει να μιλήσει γουρλώνει τα μάτια), τι έχει; Έχει (κάνει μια μικρή παύση εδώ) το x ίσο με μηδέν (γενικά μιλάει λίγο έντονα και σε αυτό εδώ το σημείο χαμηλώνει αρκετά τον τόνο της φωνής του).
Μη Λεκτική Επικοινωνία	Π , ΧΤ Έκφραση προσώπου: έντονο γούρλωμα ματιών
Σχήμα Toulmin	**<u>Δεδομένα</u>** σημείο βρίσκεται πάνω στον y΄y τι έχει **<u>Ισχυρισμός</u>** x ίσο με μηδέν **<u>Εγγύηση</u>** • Οπτικοποίηση μέσω σχήματος • Η διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε τετμημένη ενός σημείου με προβολή πάνω στον άξονα x΄x
Άρρητο	**Εγγύηση:** Η διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε τετμημένη ενός σημείου με προβολή πάνω στον άξονα x΄x

Πίνακας 9. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.7

Στο επεισόδιο αυτό, το επιχείρημα του εκπαιδευτικού Γ είναι πως τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα y΄y έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν. Ο ισχυρισμός του είναι ότι η τετμημένη είναι ίση με το μηδέν, x=0. Τα δεδομένα του είναι πως το σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y. Ως εγγύηση εδώ έχουμε την οπτικοποίηση που προσφέρει το σχήμα που έχει ήδη σχεδιάσει ο εκπαιδευτικός στον πίνακα αλλά και την διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε την τετμημένη ενός σημείου λαμβάνοντας υπόψη μας την προβολή του πάνω στον άξονα x΄x. Η δεύτερη αυτή εγγύηση δεν δηλώνεται λεκτικά από τον εκπαιδευτικό καθώς αυτή η διαδικασία θεωρείται γνωστή από προηγούμενα χρόνια.

Η μη λεκτική επικοινωνία που χρησιμοποιεί εδώ ο καθηγητής Γ είναι μια μικρή παύση που κάνει όταν αναφέρει πως το σημείο, αφού είναι πάνω στον y΄y, έχει x ίσο με το μηδέν και το χαμήλωμα της έντασης της φωνής του πάλι στο ίδιο σημείο. Η παύση σε αυτό το σημείο γίνεται επειδή θέλει να δώσει λίγο χρόνο στη μαθήτρια στην οποία υποβάλλει το ερώτημα να σκεφτεί την απάντηση. Σε συνδυασμό με το έντονο γούρλωμα των ματιών ο καθηγητής προσπαθεί να παρακινήσει τη μαθήτρια να ανατρέξει στις πιθανές γνώσεις που έχει και συνάμα την ενθαρρύνει να συμμετάσχει στη διαδικασία μάθησης μέσα στην τάξη.

4.1.8. Διδακτικό επεισόδιο 8

Αυτό το επεισόδιο έρχεται ως συνέχεια του προηγούμενου καθώς ο καθηγητής Γ καταλήγει στο συμπέρασμα πως για να βρούμε τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες πρέπει να μηδενίζουμε αντίστοιχα μία μία τις συντεταγμένες.

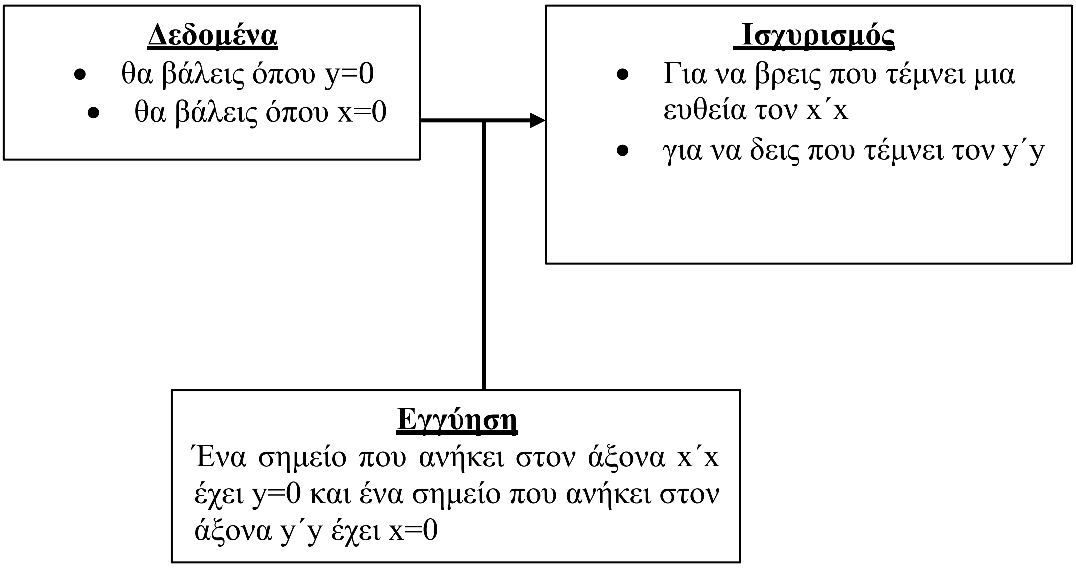
Κ: Για να βρω λοιπόν που μια ευθεία τέμνει τον x΄x τι κάνω; (αρκετά μεγάλη παύση) Για να βρω που μια ευθεία τέμνει τον x΄x τι θα βάλω; Όπου; (λίγο πιο έντονη φωνή)

Μ: Όπου y=0.

Κ: Για να βρεις που τέμνει μια ευθεία τον x΄x θα βάλεις όπου y=0 και για να δεις που τέμνει τον y΄y θα βάλεις όπου x=0 (κανονική λίγο πιο χαμηλή φωνή πιο ότι συνήθως). Καταλάβατε λοιπόν πως μπορώ να προσδιορίσω τα σημεία που μια ευθεία τέμνει τους άξονες(πιο έντονη φωνή);

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Για να βρω λοιπόν που μια ευθεία τέμνει τον x΄x τι κάνω; (αρκετά μεγάλη παύση) Για να βρω που μια ευθεία τέμνει τον x΄x τι θα βάλω; Όπου; (λίγο πιο έντονη φωνή) Μ: Όπου y=0. Κ: Για να βρεις που τέμνει μια ευθεία τον x΄x θα βάλεις όπου y=0 και για να δεις που τέμνει τον y΄y θα βάλεις όπου x=0 (κανονική λίγο πιο χαμηλή φωνή πιο ότι συνήθως). Καταλάβατε λοιπόν πως μπορώ να προσδιορίσω τα σημεία που μια ευθεία τέμνει τους άξονες(πιο έντονη φωνή);
Μη Λεκτική Επικοινωνία	Π, ΥΤ, ΧΤ, ΥΤ

<table>
<tr><td>Σχήμα

Toulmin</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Άρρητο</td><td>Εγγύηση: Χρησιμοποιεί τον ισχυρισμό του επεισοδίου 7 ως εγγύηση για αυτό εδώ το επιχείρημα</td></tr>
</table>

Πίνακας 10. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.8

Το επιχείρημα του εκπαιδευτικού στο σημείο αυτό είναι η μεθοδολογία ουσιαστικά την οποία χρησιμοποιούμε για να βρούμε τα σημεία όπου μια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων τέμνει τους άξονες. Έχουμε δύο ισχυρισμούς στο επιχείρημα αυτό, ότι η ευθεία θα τέμνει τον x΄x και τον y΄y και ως δεδομένα χρησιμοποιούμε πως το y θα είναι μηδέν για την πρώτη περίπτωση και το x θα είναι μηδέν για την δεύτερη περίπτωση. Η εγγύηση που χρησιμοποιείται σε αυτό το επιχείρημα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς είναι ο ισχυρισμός του προηγούμενου επιχειρήματος συμπληρωμένος με το ότι για να βρίσκεται ένα σημείο στον άξονα x΄x έχει την τεταγμένη του ίση με το μηδέν, y=0.

Η μη λεκτική επικοινωνία που χρησιμοποιεί σε αυτό το απόσπασμα ο εκπαιδευτικός Γ είναι μια αρκετά μεγάλη παύση στο σημείο όπου ρωτά τις μαθήτριες τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε που η ευθεία τέμνει τον x΄x καθώς και εναλλαγές στην τονικότητα της φωνής του καθ’ όλη τη διάρκεια της επιχειρηματολογίας του. Η παύση που γίνεται έχει ως σκοπιμότητα την παροχή ενός μικρού χρονικού διαστήματος στις μαθήτριες για να μπουν στη διαδικασία της σκέψης. Ωστόσο, παρατηρούμε πως όσο περνά ο χρόνος και ο εκπαιδευτικός δεν λαμβάνει μια απάντηση ξανακάνει,. με πιο έντονη φωνή αυτή τη φορά, την ερώτηση που έθεσε στην αρχή και όταν τελικά κάποια μαθήτρια του απαντά βλέπουμε πως χαμηλώνει αρκετά την φωνή του, μιλώντας πιο χαμηλόφωνα από ότι συνήθως. Στη συνέχεια όταν φτάνει στο σημείο να γενικεύσει και να δώσει το συμπέρασμα παρατηρούμε πως αυξάνει πάλι πολύ την φωνή του και μιλά πιο έντονα. Στο σημείο αυτό η μη λεκτική επικοινωνία που χρησιμοποιεί βλέπουμε πως έρχεται να ενισχύσει τον ισχυρισμό του.

4.1.9. Διδακτικό επεισόδιο 9

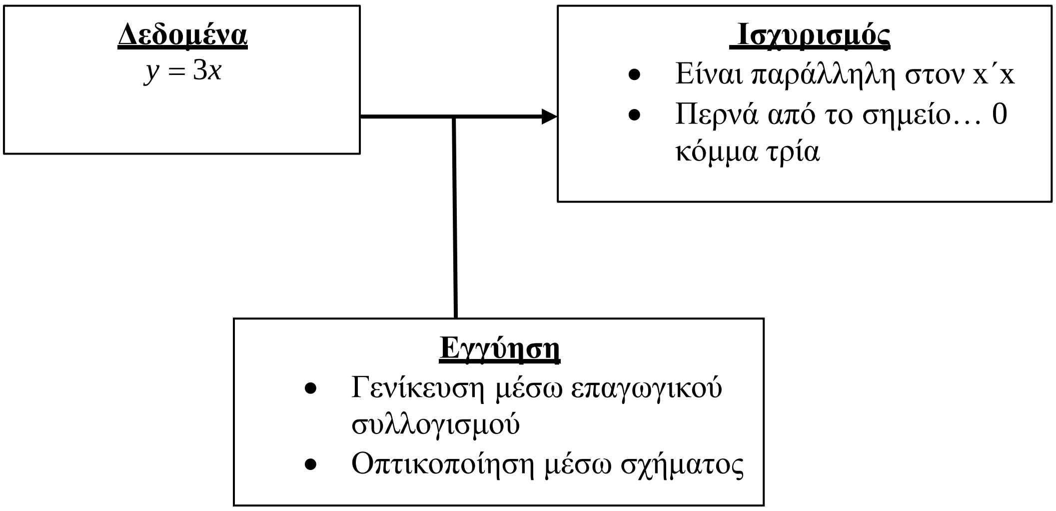
Συνεχίζουμε με την άλγεβρα της Γ γυμνασίου. Στο επεισόδιο αυτό ο καθηγητής Γ θέλει να περάσει στις πιο ειδικές μορφές εξισώσεων και έτσι δίνει στις μαθήτριες την εξίσωση $y = 3x$. Αφού οι μαθήτριες δίνουν διάφορα σημεία και ο καθηγητής Γ κατασκευάζει την ευθεία στους άξονες στον πίνακα, ρωτά τις μαθήτριες τι παρατηρούν.

Μ: Είναι παράλληλη στον x΄x.

Κ: Είναι παράλληλη (τονίζει πολύ έντονα την λέξη παράλληλη) στον x΄x.Αυτή η ευθεία είναι παράλληλη στον x΄x και περνά από το σημείο (εδώ δείχνει το σημείο της ευθείας που βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y και το τονίζει με τον μαρκαδόρο λίγο πιο έντονα), αυτό το σημείο, ποιο σημείο είναι;

Μ: 0 κόμμα…(σταματά)

Κ: Πες το, 0 κόμμα (κάνει και αυτός παύση και κουνά έντονα το κεφάλι και γουρλώνει και τα μάτια παίρνοντας ένα ύφος ώστε να κάνει την μαθήτρια να προσπαθήσει να συνεχίσει, αλλά τελικά απαντά μόνος του) τρία.

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Είναι παράλληλη (τονίζει πολύ έντονα την λέξη παράλληλη) στον x΄x.Αυτή η ευθεία είναι παράλληλη στον x΄x και περνά από το σημείο (εδώ δείχνει το σημείο της ευθείας που βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y και το τονίζει με τον μαρκαδόρο λίγο πιο έντονα), αυτό το σημείο, ποιο σημείο είναι; Μ: 0 κόμμα…(σταματά) Κ: Πες το, 0 κόμμα (κάνει και αυτός παύση και κουνά έντονα το κεφάλι και γουρλώνει και τα μάτια παίρνοντας ένα ύφος ώστε να κάνει την μαθήτρια να προσπαθήσει να συνεχίσει, αλλά τελικά απαντά μόνος του) τρία.
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ , Π Έκφραση προσώπου: γουρλώνει και τα μάτια παίρνοντας ένα ύφος ώστε να κάνει την μαθήτρια να προσπαθήσει να συνεχίσει
Σχήμα Toulmin	
Άρρητο	**Εγγύηση:** Γενίκευση μέσω επαγωγικού συλλογισμού

Πίνακας 11. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.9

Το επιχείρημα που αποσπάσματος αυτού είναι πως κάθε ευθεία που έχει τη μορφή y=β είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και περνά από το σημείο (0,β). για το συγκεκριμένο επιχείρημα ωστόσο πριν προβεί στη γενίκευση χρησιμοποιεί την ευθεία y=3x ως παράδειγμα. Ο ισχυρισμός του λοιπόν είναι πως η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και πως περνά από το σημείο (0,3). Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται είναι ο τύπος της ευθείας y=3x και η εγγύηση που χρησιμοποιείται είναι η γενίκευση μέσω του επαγωγικού συλλογισμού, η οποία δηλώνεται άρρητα. Άλλη μία εγγύηση που πρέπει να βάλουμε υπόψιν μας στο σημείο αυτό είναι και η οπτικοποίηση μέσω του σχήματος που έχει σχεδιάσει ήδη ο εκπαιδευτικός στον πίνακα.

Η μη λεκτική επικοινωνία που παρατηρείται στο συγκεκριμένο απόσπασμα είναι ο έντονος τονισμός της λέξεις παράλληλη στο σημείο όπου ο εκπαιδευτικός αναφέρει πως η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον x΄x. Ο έντονος τονισμός της λέξης αυτής δρα ως ενίσχυση στον ισχυρισμό του και χρησιμοποιείται στο σημείο αυτό για να τονίσει την σημαντικότητα της παραλληλίας που αναφέρει.

Μια ακόμα μορφή μη λεκτικής επικοινωνίας που εντοπίζεται είναι μια παύση που κάνει καθώς και μια έντονη έκφραση με το πρόσωπό του. Η παύση γίνεται για να δώσει χρόνο στη μαθήτρια να σκεφτεί την σωστή απάντηση και με την έντονη έκφραση του προσώπου προσπαθεί να ωθήσει την μαθήτρια στο να συνεχίσει τον ισχυρισμό της και να δώσει την τελική απάντηση υποδηλώνοντας άρρητα πως η σκέψη που ακολουθεί η μαθήτρια είναι σωστή. Την βοηθά σε αυτό το σημείο να αποκτήσει αυτοπεποίθηση για τον εαυτό της και να δώσει την απάντησή της, καθώς ο καθηγητής φαίνεται να εγκρίνει τον συλλογισμό της.

4.1.10. Διδακτικό επεισόδιο 10

Ο καθηγητής Γ σε αυτό το επεισόδιο θέλει να προβεί στη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

Κ: Λοιπόν, τώρα θέλω να μου λύσετε εσείς ένα σύστημα τέτοιο, γραφικά πάντα, γιατί θα μάθουμε αργότερα ότι υπάρχει κι άλλος τρόπος για να λύνουμε τέτοια συστήματα. Εγώ θέλω γραφικά, δηλαδή να κάνετε τις ευθείες, σ’ ένα σύστημα αξόνων, όπως δουλέψαμε τώρα. Σας δίνω εγώ το σύστημα… Μάλλον… Να το θέσουμε διαφορετικά. Εάν ο Μήτσος κινείται πάνω στην ευθεία $2x + y = 3$ … ο Μήτσος, ε? Μην τον ξεχνάμε! Και η Ευλαμπία κινείται πάνω στην ευθεία $x - 2y = -1$. Να μου βρείτε αν ο Μήτσος και η Ευλαμπία θα συναντηθούν.

Αργότερα, μέσα στην ίδια διδακτική ώρα και αφού έχουν λύσει το προηγούμενο πρόβλημα, ο καθηγητής βάζει ένα άλλο σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και τους ζητάει να το λύσουν. Μετά από κάποια λεπτά που έχει αφήσει τις μαθήτριες να δουλέψουν ατομικά στα τετράδιά τους, ξεκινάει ο διάλογος:

Κ: Λοιπόν, τι βρήκες Μ1?

Μ1: Ότι δεν τέμνονται.

Κ: Ότι οι δύο ευθείες δεν τέμνονται… Λοιπόν για να πάμε να κατασκευάσουμε μια μια τις ευθείες. Να δούμε αν έχετε δίκιο. Γιατί το θέμα είναι σοβαρό ε? Εδώ πάνω σε αυτή την ευθεία έχει δώσει ραντεβού η Αφροξυλάνθη με τον Ίππασο .Λοιπόν για να δούμε τώρα εάν θα συναντηθούνε!

Κ: Κοιτάξτε πώς κατάντησε ο Ίππασος. Από τον καημό του κατάντησε έτσι! Η Αφροξυλάνθη φταίει! Θα δείτε γιατί!

Στο επόμενο και τελευταίο απόσπασμα που συμπληρώνει αυτό το επεισόδιο, οι μαθήτριες έχουν λύσει το πρόβλημα που τέθηκε στο προηγούμενο απόσπασμα χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές μεθοδολογίες που έχουν διδαχθεί και χωρίς καμία περεταίρω αναφορά στο πλαίσιο του προβλήματος που είχε αρχικά οριστεί (εάν θα συναντηθούν η Αφροξυλάνθη και ο Ίππασος). Κατασκευάζοντας τις γραφικές παραστάσεις και των δύο ευθειών πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο, οι μαθήτριες παρατηρούν ότι οι ευθείες προκύπτουν να είναι παράλληλες.

Κ: Τι παρατηρούμε?

Μ: Είναι παράλληλες!

Κ: Ότι οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες. Βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο δηλαδή και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Άρα(αυξάνει λίγο την ένταση της φωνής του), για προσέχετε εδώ! Η Αφροξυλάνθη με τον Ίππασο θα συναντηθούνε?

Μ: Όχι!

Κ: Τι τραγουδάει η Αφροξυλάνθη στον Ίππασο? Παράλληλα, περπατάμε παράλληλα! (Ο καθηγητής στο σημείο αυτό τραγουδά το παράλληλα περπατάμε παράλληλα στο ρυθμό του αντίστοιχου τραγουδιού).

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Ότι οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες. Βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο δηλαδή και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Άρα (αυξάνει λίγο την ένταση της φωνής του), για προσέχετε εδώ! Η Αφροξυλάνθη με τον Ίππασο θα συναντηθούνε? Μ: Όχι! Κ: Τι τραγουδάει η Αφροξυλάνθη στον Ίππασο? Παράλληλα, περπατάμε παράλληλα! (Ο καθηγητής στο σημείο αυτό τραγουδά το παράλληλα περπατάμε παράλληλα στο ρυθμό του αντίστοιχου τραγουδιού).
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ, ΡΤ
Σχήμα Toulmin	**Δεδομένα** Σχήμα **Ισχυρισμός** • ευθείες αυτές είναι παράλληλες • θα συναντηθούνε… Όχι! **Εγγύηση** Βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο δηλαδή και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

Άρρητο	**Δεδομένα:** Οπτικοποίηση μέσω σχήματος

Πίνακας 12. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.10

Το επιχείρημα του εκπαιδευτικού σε αυτό το απόσπασμα είναι πως ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο είναι παράλληλες. Ο ισχυρισμός είναι παράλληλες και δεν θα συναντηθούν, ενώ τα δεδομένα μας είναι το σχήμα που κατασκεύασε ο καθηγητής με χρήση των τύπων των ευθειών που είχαν δοθεί στην αρχή. Η εγγύηση που δίνεται και λεκτικά σε αυτό το σημείο είναι πως οι ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Στο απόσπασμα αυτό ο καθηγητής φέρνει τον μεταφορικό λόγο μέσα στα μαθηματικά καθώς μιλάει για συνάντηση ευθειών και μάλιστα στο σημείο αυτό έχουμε την ενσώματη εμπλοκή των μαθητριών, ή πιο σωστά της Αφροξυλάνθης και του Ίππασου.

Η μη λεκτική επικοινωνία που χρησιμοποιείται στο συγκεκριμένο απόσπασμα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς πέρα από την αύξηση του τόνου φωνής σε ένα σημείο υπάρχει και μια μελωδικότητα αφού ο εκπαιδευτικός καταλήγει στο συμπέρασμα με τη χρήση ενός τραγουδιού. Η αύξηση του τόνου της φωνής στο σημείο αυτό πραγματοποιείτε για να επιστήσει την προσοχή των μαθητριών και να επαναφέρει την τάξη καθώς είχε δημιουργηθεί ένα πιο ευχάριστο κλίμα στην αίθουσα λόγω του πλαισίου στο οποίο δόθηκε η άσκηση, συνάντηση της Αφροξυλάνθης με τον Ίπασσο δηλαδή. Η χρήση του τραγουδιού στο σημείο αυτό έχει ως στόχο να ελαφρύνει το κλίμα που επικρατεί μέσα στην τάξη καθώς επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε πως λειτουργεί ως ενίσχυση της μνήμης των μαθητριών, καθώς ο συσχετισμός του τραγουδιού με τις παράλληλες ευθείες που σχεδίασαν θα λειτουργήσει συνειρμικά έτσι ώστε να το ανακαλούν όταν ερωτώνται ποιες ευθείες είναι παράλληλες πιο εύκολα.

4.1.11. Διδακτικό επεισόδιο 11

Στο τελευταίο επεισόδιο ο καθηγητής Γ δίνει στις μαθήτριες την εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$, ως αποτέλεσμα γενίκευσης των περιπτώσεων που είχαν μελετήσει πιο πριν και τις ρωτάει αν πάντα η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία. Τους δίνει εν τέλει την εξίσωση $0x + 0\,y = 0$ και αφού γίνεται μια συζήτηση με μια μαθήτρια καταλήγει στο εξής:

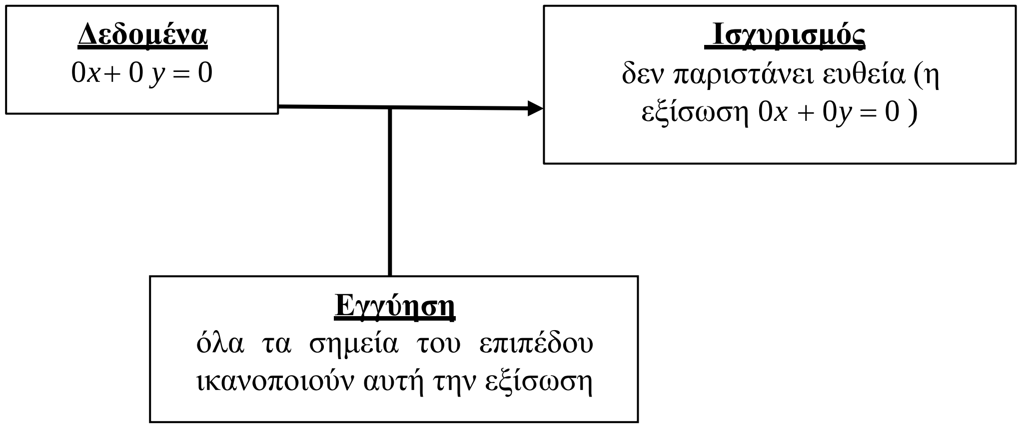
Κ: Ό,τι (τονίζει το ότι πολύ έντονα και το τραβάει πολύ λέει δηλαδή «ooooo,τι») να βάλεις στο y και ό,τι (πάλι το τονίζει με τον ίδιο τρόπο που το είπε στην αρχή) και να βάλεις στο x αυτή εδώ ικανοποιείται. Μιλάμε για όλα (τονίζει πολύ έντονα την λέξη όλα και την τραβάει και αυτή όπως το ό,τι, δηλαδή λέει «όοοολα») τα σημεία του επιπέδου ικανοποιούν αυτή την εξίσωση. Αυτή λοιπόν δεν παριστάνει ευθεία.

Αρα η μοναδική αυτή εδώ η εξίσωση να μην παριστάνει ευθεία (κυκλώνει την εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$), ποια είναι; Να είναι ταυτόχρονα (τονίζει έντονα την λέξη ταυτόχρονα) και το α και το β μηδέν. Η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ παριστάνει πάντα (τονίζει πάρα πολύ έντονα την λέξη πάντα) ευθεία, εκτός από την περίπτωση που είναι ταυτόχρονα (τονίζει πάρα πολύ έντονα την λέξη ταυτόχρονα) και το α και το β μηδέν (γουρλώνει έντονα τα μάτια) και τα δύο.

Στο επεισόδιο αυτό μπορούμε να εντοπίσουμε δύο επιχειρήματα του καθηγητή

Το πρώτο δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Ό,τι (τονίζει το ότι πολύ έντονα και το τραβάει πολύ λέει δηλαδή «ooooo,τι») να βάλεις στο y και ό,τι (πάλι το τονίζει με τον ίδιο τρόπο που το είπε στην αρχή) και να βάλεις στο x αυτή εδώ ικανοποιείται. Μιλάμε για όλα (τονίζει πολύ έντονα την λέξη όλα και την τραβάει και αυτή όπως το ό,τι, δηλαδή λέει «όοοολα») τα σημεία του επιπέδου ικανοποιούν αυτή την εξίσωση. Αυτή λοιπόν δεν παριστάνει ευθεία.
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ, ΡΤ

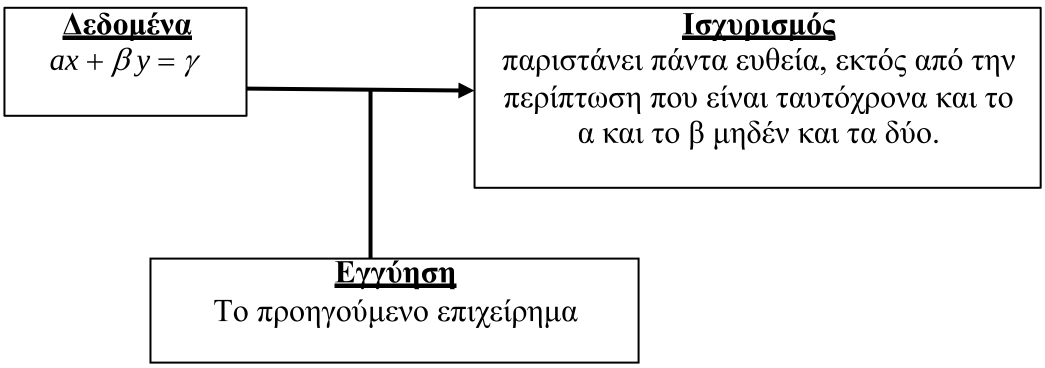
Σχήμα **Toulmin**	
Άρρητο	

Πίνακας 13. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.11 (α)

Το πρώτο λοιπόν επιχείρημα είναι πως μια εξίσωση της μορφής $0x + 0\,y = 0$ δεν παριστάνει ευθεία. Ο ισχυρισμός του εκπαιδευτικού είναι πως δεν παριστάνει ευθεία και το δεδομένο είναι η εξίσωση $0x + 0\,y = 0$. Η εγγύηση που δίνεται και αυτή λεκτικά είναι πως όλα τα σημεία του επιπέδου ικανοποιούν αυτή την εξίσωση.

Η μη λεκτική επικοινωνία του εκπαιδευτικού στο επιχείρημα αυτό είναι οι έντονοι τονισμοί που κάνει στις λέξεις όλα και ό,τι καθώς και το τράβηγμα του ο που κάνει και στις δύο, η οποία έρχεται να συμπληρώσει την εγγύηση και να την ενισχύσει.

Το δεύτερο επιχείρημα δίνεται από τον εξής πίνακα

Λεκτική Επικοινωνία	Κ: Αρα η μοναδική αυτή εδώ η εξίσωση να μην παριστάνει ευθεία (κυκλώνει την εξίσωση $ax+\beta y=\gamma$), ποια είναι; Να είναι ταυτόχρονα (τονίζει έντονα την λέξη ταυτόχρονα) και το α και το β μηδέν. Η εξίσωση $ax+\beta y=\gamma$ παριστάνει πάντα (τονίζει πάρα πολύ έντονα την λέξη πάντα) ευθεία, εκτός από την περίπτωση που είναι ταυτόχρονα (τονίζει πάρα πολύ έντονα την λέξη ταυτόχρονα) και το α και το β μηδέν (γουρλώνει έντονα τα μάτια) και τα δύο.
Μη Λεκτική Επικοινωνία	ΥΤ Έκφραση προσώπου: έντονο γούρλωμα ματιών
Σχήμα Toulmin	
Άρρητο	**Εγγύηση:** Χρησιμοποιεί το προηγούμενο επιχείρημα ως αντιπαράδειγμα για να καταλήξει στον ισχυρισμό του επιχειρήματος αυτού

Πίνακας 14. Ανάλυση Διδακτικού Επεισοδίου 4.1.11 (β)

Το τελευταίο επιχείρημα της ανάλυσής μας είναι πως για να παριστάνει μια ευθεία της μορφής $ax+\beta y=\gamma$ ευθεία θα πρέπει τουλάχιστον ένα από τα α,β να μην είναι μηδέν. Ο ισχυρισμός του εκπαιδευτικού είναι πως όλες οι εξισώσεις της μορφής $ax+\beta y=\gamma$ παριστάνουν πάντα ευθεία εκτός από την περίπτωση όπου και το α και το β είναι ταυτόχρονα μηδέν. Τα δεδομένα του είναι η εξίσωση $ax + \beta y = \gamma$ και η εγγύηση δηλώνεται άρρητα στο συγκεκριμένο επιχείρημα και είναι το ακριβώς παραπάνω επιχείρημα, δηλαδή το ότι η εξίσωση της μορφής $0x + 0y = 0$ δεν παριστάνει ευθεία.

Η μη λεκτική επικοινωνία του αποσπάσματος αυτού είναι ο έντονος τονισμός κάποιων λέξεων και η αύξηση της έντασης ης φωνής σε κάποια συγκεκριμένα σημεία καθώς και μια έντονη έκφραση προσώπου, συγκεκριμένα το έντονο γούρλωμα των ματιών. Οι τονισμοί των λέξεων πάντα ταυτόχρονα λειτουργούν σαν ενίσχυση στον ισχυρισμό του καθώς με αυτόν τον τρόπο θέλει να δηλώσει αρχικά τη σημαντικότητα της χρήσης τέτοιου είδους λέξεων στα μαθηματικά, και επιπλέον την μοναδικότητα της περίπτωσης αυτής της εξίσωσης που δεν παριστάνει ευθεία.

5.ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1.Συζήτηση-Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα διερευνήσαμε την επιχειρηματολογία που ανέπτυξαν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη τόσο σε λεκτικό όσο και σε μη λεκτικό επίπεδο, με στόχο την αποκάλυψη μη καταγεγραμμένων όψεων που εφάρμοσαν οι εκπαιδευτικοί σε γνωστικό και θυμικό επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα μελετήσαμε το είδος της μη λεκτικής επικοινωνίας που ανέπτυξαν κατά την επιχειρηματολογίας τους εστιάζοντας στη φωνή και στις εκφράσεις του προσώπου τους, τι είδους συναισθήματα εγείρει αυτή τους η μη λεκτική επικοινωνία, τόσο στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς όσο και στις μαθήτριες και κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τις επιπτώσεις που έχει η χρήση τέτοιας μορφής επικοινωνίας στη διδασκαλία τους.

Τα επεισόδια που επιλέξαμε να μελετήσουμε φανερώνουν το πώς η μη λεκτική επικοινωνία των εκπαιδευτικών και πιο συγκεκριμένα τα παραγλωσσικά στοιχεία της, τόνος, ύφος, χροιά, ρυθμός φωνής, γέλιο, εκφράσεις προσώπου έχει επιπτώσεις τόσο σε γνωστικό, όσο και σε θυμικό επίπεδο.

Πιο συγκεκριμένα σε αρκετά διδακτικά επεισόδια παρατηρήσαμε πως οι εκπαιδευτικοί έκαναν πολλές φορές παύσεις κατά τη διάρκεια της επιχειρηματολογίας τους. Οι έρευνες έχουν δείξει πως όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο δεν οφείλεται απαραίτητα σε έλλειψη επικοινωνίας αλλά μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι για να μπορέσει ο εκπαιδευτικός να διατηρήσει την ψυχραιμία του και τον αυτοέλεγχό του, όπως παρατηρούμε πως συνέβη στο επεισόδιο 1 όπου ο καθηγητής φανερά ενοχλημένος από την λανθασμένη απάντηση που έδωσε μια μαθήτρια σχετικά με τη διαγώνιο παραλληλογράμμου κάνει μια μικρή παύση προτού συνεχίσει. Η ενόχληση του εκπαιδευτικού στο σημείο αυτό να αναφέρουμε πως φανερώνεται και από τη χροιά της φωνής του, καθώς αυτή αποκτά θα λέγαμε έναν τόνο απογοήτευσης.

Ένας άλλος λόγος για τον οποίο ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει να κάνει παύση στην ομιλία του, είναι για να δώσει τον κατάλληλο χρόνο στους μαθητές του να σκεφτούν κάτι το οποίο μόλις ρώτησε ή κάτι το οποίο μόλις ισχυρίστηκε και θεωρεί πως είναι αρκετά σημαντικό. Κατανοώντας έτσι τη δυσκολία των μαθηματικών, ο εκπαιδευτικός καταφέρνει να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών καθώς επίσης λαμβάνει υπόψη του και τις δυσκολίες τους δίνοντας τους τον απαιτούμενο χρόνο για να σκεφτούν, καλλιεργώντας έτσι ένα κλίμα κατανόησης και εμπιστοσύνης μέσα στη σχολική τάξη. Η χρήση αυτή της παύσης παρατηρείτε στα επεισόδια 6, 7, 8 και 9. Αξίζει σε αυτό το σημείο να δώσουμε ιδιαίτερη σημασία στο επεισόδιο 9 όπου ο εκπαιδευτικός κάνει μια ερώτηση σε μια μαθήτρια και ενώ περιμένει να του απαντήσει, κατά τη διάρκεια της «δειλής» επιχειρηματολογίας της μαθήτριας, ο εκπαιδευτικός Γ παίρνει μια έντονη έκφραση προσώπου, φιλική προς την μαθήτρια, προσπαθώντας να την παρακινήσει να συνεχίσει τη σκέψη της δηλώνοντας άρρητα πως είναι σωστή. Εδώ παρατηρούμε πως ο καθηγητής Γ με αυτή του την κίνηση καλλιεργεί ένα περιβάλλον, όπου οι μαθήτριες αισθάνονται ασφαλείς να εκφράσουν την άποψή τους χωρίς άγχος για το αν αυτή θα είναι λανθασμένη ή όχι. Η δημιουργία ενός ευχάριστου κλίματος αναβαθμίζει την πολυφωνία μέσα στην τάξη με αποτέλεσμα οι μαθήτριες να ενθαρρύνονται περισσότερο σχετικά με την ενεργή συμμετοχή τους στο μάθημα.

Στα περισσότερα διδακτικά επεισόδια που μελετήσαμε οι εκπαιδευτικοί επέλεγαν να αυξήσουν τον τόνο της φωνής τους κατά τη διάρκεια της επιχειρηματολογίας τους. Σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει η μη λεκτική αυτή μορφή επικοινωνίας έχει διάφορες ερμηνείες. Άλλες φορές ο εκπαιδευτικός επιλέγει να αυξήσει την ένταση της φωνής του για να τονίσει πως το συγκεκριμένο σημείο είναι πολύ σημαντικό και θα πρέπει οι μαθητές να προσέξουν πάρα πολύ γιατί είτε εισάγεται μια νέα μαθηματική έννοια, είτε δίνεται ο αυστηρός ορισμός μιας μαθηματικής έννοιας ή τέλος γιατί το σημείο που τονίζεται είναι το πιο σημαντικό σημείο του ισχυρισμού του εκπαιδευτικού. Κάτι τέτοιο παρατηρήσαμε πως συνέβη στα επεισόδια 1, 2, 4, 9 και 11.

Αξίζει να μείνουμε λίγο στο απόσπασμα 1 που αφορούν τον εκπαιδευτικό Α, ο οποίος αυξάνει την ένταση της φωνής του όταν αναφέρει πως η διάμετρος ενώνει δύο απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Ο εκπαιδευτικός Α καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας του που παρακολουθήσαμε φάνηκε να επιμένει πολύ στη διατύπωση σωστών ορισμών για τις μαθηματικές έννοιες που πραγματεύεται στο μάθημά του. Αργότερα όταν του ζητήθηκε στη συνέντευξη να μας δώσει κάποια στοιχεία για τον εαυτό του μας τόνισε πως θεωρεί πολύ σημαντική την διατύπωση σωστών ορισμών στα μαθηματικά. Ανέφερε χαρακτηριστικά πως ρωτάει στην αρχή κάθε μαθήματος τις μαθήτριες τη θεωρία που διδάχθηκαν στο προηγούμενο μάθημα. Παρατηρούμε λοιπόν πως στο επεισόδιο αυτό με την αύξηση του τόνου φωνής, η οποία συνοδεύεται και από μία πολύ έντονη έκφραση του προσώπου, γουρλώνει έντονα τα μάτια, φανερώνεται ξεκάθαρα αυτή του η στάση απέναντι στα μαθηματικά. Την στάση αυτή σαφώς και την κατανοούν και οι μαθήτριες, οι οποίες όντας υποκείμενα μιας μικρής κοινωνίας που ορίζετε ως η σχολική τάξη τείνουν να υιοθετήσουν τις νόρμες της και να δημιουργήσουν την πεποίθηση πως τα μαθηματικά είναι μια αυστηρή επιστήμη.

Ένα ακόμα απόσπασμα στο οποίο ο εκπαιδευτικός αυξάνει την ένταση της φωνής του είναι το απόσπασμα 3. Το απόσπασμα αυτό επιλέχθηκε καθώς βλέπουμε την χρήση της μη λεκτικής επικοινωνίας του εκπαιδευτικού Α όταν μια μαθήτρια δίνει μια λανθασμένη απάντηση. Ο έντονος τόνος στη φωνή και η αυξημένη ένταση δηλώνουν μια ψυχική ένταση που βιώνει ο εκπαιδευτικός όταν έρχεται αντιμέτωπος με το λάθος. Φανερώνει ένα αίσθημα απορίας και ανησυχίας ίσως και απογοήτευσης ως προς την μαθήτρια δημιουργώντας μια ένταση μεταξύ καθηγητή και μαθήτριας κατά τη διάρκεια αυτού του επεισοδίου. Επιπλέον ο ειρωνικός τόνος της ομιλίας του εκπαιδευτικού σύμφωνα με έρευνες γύρω από τα συναισθήματα προάγει τη δημιουργία αρνητικών συναισθημάτων τόσο ως προς τον εκπαιδευτικό αλλά και κυρίως ως προς τα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός Α παρατηρήσαμε πως αρκετές φορές δημιουργεί ένα κλίμα ειρωνείας μέσα στην σχολική τάξη. Χωρίς να ξέρουμε τις νόρμες που έχουν οικοδομηθεί από την αρχή της σχολικής χρονιάς και μη έχοντας μιλήσει με μαθήτριες, με κάθε επιφύλαξη βασιζόμενοι σε διάφορες έρευνες γύρω από τα συναισθήματα μπορούμε να υποθέσουμε πως μια τέτοια συμπεριφορά ίσως οδηγήσει αργότερα σε αποξένωση των πιο αδύναμων μαθητριών από τα μαθηματικά και χάσιμο του ενδιαφέροντος τόσο για το μάθημα στην σχολική τάξη όσο και για την επιστήμη των μαθηματικών γενικότερα, καθώς δημιουργείται στους μαθητές ένα συναίσθημα χαμηλής αυτοεκτίμησης σχετικά με την κατανόηση και τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως όταν ο εκπαιδευτικός Α ρωτήθηκε στη συνέντευξη για το αν θεωρεί πως αναπτύσσονται συναισθήματα μέσα στην τάξη κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, εκείνος δεν αναγνώρισε την ύπαρξή τους. Χαρακτηριστικά μας απάντησε πως «Όχι. Είναι μαθηματικά, τι συναισθήματα να δημιουργηθούν; ». Καταλαβαίνουμε συνεπώς, πως ο καθηγητής Α όχι μόνο δε βρίσκεται σε θέση να αναγνωρίσει τα συναισθήματα που μπορεί να προκαλεί η συμπεριφορά του στις μαθήτριες ταυτόχρονα αδυνατεί να διανοηθεί ανάπτυξη συναισθημάτων γύρω από τα μαθηματικά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας αυτών.

Αυξημένο τόνο φωνής παρατηρούμε και στα αποσπάσματα 4, 6 και 10. Τα δύο πρώτα επεισόδια αφορούν τον εκπαιδευτικό Β και το τελευταίο τον εκπαιδευτικό Γ. Τα αναφέρουμε μαζί αυτά καθώς πέρα από τον αυξημένο τόνο φωνής παρατηρήσαμε και αλλαγές στο ρυθμό της ομιλίας τους. Συγκεκριμένα ο εκπαιδευτικός Β και στα δύο αποσπάσματα που αναφέραμε παραπάνω θέλοντας να δώσει περισσότερη έμφαση στις λέξεις «ανάλογα», «εφαπτομένη», «θετικό» αποφασίζει να τις εκφράσει με πιο δυνατή φωνή αλλά και συλλαβίζοντάς τες. Παρατηρήσαμε από τις απομαγνητοφωνήσεις πως όταν συνέβαινε κάτι τέτοιο οι μαθήτριες από μόνες τους έμπαιναν σε μια διαδικασία επανάληψης των λέξεων που συλλάβιζε ο καθηγητής ταυτόχρονο με αυτόν, ακόμα και αν δεν πρόσεχαν ιδιαίτερα της επιχειρηματολογία του νωρίτερα. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως με αυτόν τον τρόπο ο εκπαιδευτικός Β καταφέρνει να επαναφέρει το ενδιαφέρον και την προσοχή των μαθητριών στο μάθημα καθώς ταυτόχρονα της εντάσσει στη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων.

Το περιστατικό που αφορά τον εκπαιδευτικό Γ που αναφέρουμε παραπάνω έχει να κάνει με την εισαγωγή ενός τραγουδιού στη διατύπωση του ισχυρισμού του. Ο εκπαιδευτικός Γ αξίζει να αναφέρουμε πως καθ' όλη τη διάρκεια των διδασκαλιών του που παρατηρήσαμε χρησιμοποιούσε αρκετές φορές τον μεταφορικό λόγο και προσπαθούσε σε πολλά σημεία να εντάξει καθημερινές συνήθειες των μαθητριών στα πλαίσια του μαθηματικού επιχειρήματος που οικοδομούσε. Ένα τέτοιο περιστατικό ήταν και αυτό όπου όταν κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι ευθείες ήταν παράλληλες εκείνος άρχισε να τραγουδά «παράλληλα, περπατάμε παράλληλα». Στο σημείο αυτό τόσο οι μαθήτριες όσο και ο εκπαιδευτικός ξέσπασαν σε γέλια. Έρευνες δείχνουν πως το γέλιο δημιουργεί ένα ευχάριστο κλίμα μέσα στη σχολική τάξη και βοηθά τον εκπαιδευτικό στο να φανεί πιο προσιτός προς τους μαθητές του, σπάει λίγο την αυστηρή ρουτίνα των μαθηματικών ασκήσεων και δημιουργεί τόσο σε μαθητές όσο και σε εκπαιδευτικούς ένα ευχάριστο συναίσθημα γύρω από τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Σε αυτά τα τρία τελευταία αποσπάσματα που αναφέραμε στα 4, 6 και 10 παρατηρήσαμε επίσης ως οι εκπαιδευτικοί έχτιζαν ένα βιωματικό πλαίσιο για τις μαθήτριες. Και οι δύο παρομοίαζαν τις ευθείες με δρόμος και ζητούσαν από τις μαθήτριες να τοποθετήσουν τους εαυτούς τους πάνω σε αυτές και να μετακινηθούν. Τέτοιου είδους τρόποι διδασκαλίας επηρεάζουν την δημιουργία πεποιθήσεων από τους μαθητές καθώς έχουν την τάση να δημιουργούν πεποιθήσεις βασισμένες στις εμπειρίες τους. Έτσι μια ευχάριστη βιωματική εμπειρία με τα μαθηματικά μπορεί να προκαλέσει θετικές πεποιθήσεις και στάσεις απέναντί τους. Βέβαια σημαντική για να οικοδομηθεί μια θετική στάση από τους μαθητές απέναντι στα μαθηματικά είναι η δημιουργία καλών σχέσεων με τους καθηγητές τους. Γεγονός που φαίνεται πως συνειδητοποιεί ο εκπαιδευτικός Γ καθώς όταν ρωτήθηκε για το συγκεκριμένο απόσπασμα, αλλά και γενικά για τις απόψεις του περί διδασκαλίας μας είπε: «το κάνω γιατί είναι άλλο να μπαίνουν σε ένα παιχνίδι και άλλο να βλέπουν μόνο μαθηματικά. Θέλω να παίζουν με εργαλείο τα μαθηματικά. Αν μπορούμε να το καταφέρουμε αυτό, θα είναι και ευχάριστο το μάθημα. Άρα θα έχουμε πετύχει»

Στο σημείο αυτό να τονίσουμε πως ο καθηγητής Γ έχει παρακολουθήσει το Μεταπτυχιακό της Διδακτικής των Μαθηματικών που προσφέρεται από το Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών σε συνεργασία με το πανεπιστήμιο της Κύπρου. Στη συνέντευξη όταν ρωτήθηκε κατά πόσο θεωρεί πως τον βοήθησε το μεταπτυχιακό αυτό στη διδασκαλία του, μας απάντησε πως τον βοήθησε πάρα πολύ, καθώς τον βοήθησε να καταλάβει πολλά γύρω από τη διδασκαλία και να σκεφτεί πράγματα που δεν περνούσαν από το μυαλό του.

Σχετικά με την τονικότητα της φωνής παρατηρήσαμε στο επεισόδιο 8 εναλλαγές από χαμηλότερες εντάσεις σε υψηλότερες και αντίστροφα κατά την διατύπωση του επιχειρήματος του εκπαιδευτικού Γ. Οι εναλλαγές στην τονικότητα της φωνής υποδηλώνουν πως ο εκπαιδευτικός στο σημείο αυτό θέλει να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητριών και να επιστήσει την προσοχή τους στο επιχείρημα που αναλύει. Στο συγκεκριμένο απόσπασμα ουσιαστικά περιγράφει την μεθοδολογία εύρεσης σημείων τομής ευθείας που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων με τους άξονες.

Συμπερασματικά οι εκπαιδευτικοί κάνουν πολύ συχνή χρήση μη λεκτικής επικοινωνίας κατά την επιχειρηματολογίας τους είτε εκούσια είτε ακούσια. Όπως προτείνει και η βιβλιογραφία παρατηρούμε πως μια τέτοια μορφή μη λεκτικής επικοινωνίας βοηθά κατά την διατύπωση ενός επιχειρήματος από τους εκπαιδευτικούς και δημιουργεί ένα ευνοϊκό περιβάλλον μάθησης, επηρεάζοντας με πολλούς τρόπους το θυμικό τόσο των μαθητριών όσο και των ίδιων των εκπαιδευτικών. Από τη μεριά τους οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν τις περισσότερες φορές επίγνωση των συνεπειών της μη λεκτικής τους επικοινωνίας, τόσο στις μαθήτριες όσο και στους ίδιους με εξαίρεση τον εκπαιδευτικό που είχε παρακολουθήσει το μεταπτυχιακό της Διδακτικής των Μαθηματικών.

5.2. Επεκτάσεις Έρευνας

Παρόλο που η έρευνά μας είχε αρκετούς περιορισμούς όπως, το γεγονός πως οι καθηγητές πολλές φορές διατύπωναν τα επιχειρήματά τους με τη μορφή ερωτήσεων και το δείγμα ήταν αρκετά μικρό και έτσι δεν υπάρχει η δυνατότητα γενίκευσης, πιστεύουμε πως με βάση τα ευρήματα της παρούσας έρευνας και τις επεκτάσεις που μπορούν να λάβουν χώρα μια τέτοιου είδους προσέγγιση μπορεί να προσφέρει αρκετά στον κλάδο της διδακτικής των μαθηματικών.

Μερικές προεκτάσεις που προτείνουμε λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω είναι:

- η διεξαγωγή της έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα εκπαιδευτικών, ώστε να προκύψουν ασφαλέστερα ως προς τη γενίκευση αποτελέσματα,
- η διεξαγωγή της έρευνας να πραγματοποιηθεί σε ένα βάθος χρόνου ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε εκτενέστερα τους καθηγητές και τυχόν αλλαγές στον τρόπο διδασκαλίας τους,
- να μελετηθούν και οι μαθητές ως προς την επιχειρηματολογία που διατυπώνουν καθώς επίσης ίσως και ως προς τα συναισθήματα που αναπτύσσουν μέσα στη σχολική τάξη, ίσως με τη χρήση ερωτηματολογίων ή με συνεντεύξεις

- τέλος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρο το μοντέλο του Toulmin για να γίνει καλύτερη ανάλυση των επιχειρημάτων που διατυπώνονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσα στη σχολική τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Βρεττός, Ι. (1994). *Μη λεκτική συμπεριφορά και επικοινωνία στη σχολική τάξη: Άσκηση με Μικροδιδασκαλία,* Στο Ι. Βρεττός (Επ.*) Μη Λεκτική Συμπεριφορά και Επικοινωνία στη σχολική τάξη*. Θεσσαλονίκη:. Art of Text

Busso, C., Deng, Z., Yildirim, S., Bulut, M., Min Lee, C., Kazemzadeh, A., Lee, S., Neumann, U., & Narayanan, S. (2004). Analysis of Emotion Recognition using Facial Expressions, Speech and Multimodal Information. Proceedings *of the 6th international conference on Multimodal interfaces* (Vol. 4 , pp.205-211)

Chronaki, G., Hadwin, J .A., Garner, M., Maurage, P., & Sonuga-Bake E.J.S. (2015). The development of emotion recognition from facial expressions and non-liguistic vocalizations during childhood. *British Journal of Development Psychology,* 33, 218-236.

Eichler A., Erens R. (2015) Domain-Specific Belief Systems of Secondary Mathematics Teachers. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds), From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education. Advances in Mathematics Education. (pp179-200).Switzerland: Springer International Publishing.

Hannula, S. M. (2002). Attitudes towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics,* 49, 25-46

Hannula, S. M. (2007). Ginnish research on affect in mathematics: blended theories, mixed methods and some findings. *ZDM Mathematics Education,* 39, 197-203.

Hannula, S. M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied an social theories. *Research in Mathematics Education,* 14(2), 137-161.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(1), 33-46.

Καράκιζα, Τ., & Ντάβου, Μ. (2014). Η μη λεκτική επικοινωνία στη σχολική τάξη. Στο H.G Klinzing,, Ν. Πολεμικός, Α. Κοντάκος, & Π.Ι Σταμάτης(Επ.), *Μη λεκτική Επικοινωνία στην Εκπαίδευση :Θεωρία και Πράξη* 1, (σελ. 111-142). Αθήνα: Διάδραση.

Κοτσώνας, Γ. (2018). *Απόψεις των εκπαιδευτικών για το ρόλο της μη λεκτικής επικοινωνίας στη μαθησιακή διαδικασία* (Αδημοσίευτη Διπλωματική Εργασία).Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.

Knapp, M. L. (1984). The Study of Nonverbal Behaviour Vis-a-vis Human Communication Theory . In A. Wolfgang (Ed.), Nonverbal Behaviour *: Perspective, Application, Intercultural Insights*, (pp. 15-40). New York: Hogrefe

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In: P. Cobb & H. Bauershfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures*, (pp. 220-269). NJ: Erlbaum.

Liljedahl, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect the effect of AHA!! Experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 36(2-3), 219-234.

Lithner, J. (2003). Student;s mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 29-55.

Μπαμπάλης, Θ., & Τσώλη, Κ. (2014). Μη λεκτική επικοινωνία και συναισθηματική νοημοσύνη σε μαθητές του δημοτικού. Στο H.G Klinzing, Ν. Πολεμικός, Α. Κοντάκος, & Π.Ι Σταμάτης (Επ.), *Μη λεκτική Επικοινωνία στην Εκπαίδευση :Θεωρία και Πράξη* 1, (σελ. 111-142). Αθήνα: Διάδραση

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Dordrecht: Brill Sense.

Mueller, M., Maher C.A. & Yankelewitz D. (2010). *Rules Without Reasons: Allowing Students to Rethink Previous Conceptions*, 7, 307-320.

McLeod D. B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. In: D. B. McLeod, Adams V.M. (ed) *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 245-258). New York: Verlag

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Moutsios-Rentzos, A., & Kalozoumi-Paizi, F. (2017). Revisiting Odysseus' proving journeys to proof: The 'convergent- bounded' question. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.), Proceedings of *Cerme* (Vol. 10, pp. 219-226)

Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., Di Leo, I., & Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, 42, 172-185.

Παγκουρέλια, Ε. Δ. (2013). *Ανάπτυξη Επιχειρηματολογίας στο Λύκειο: Εκπαιδευτικές Πρακτικές* (Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή). Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος.

Potari, D., Zachariades, T. & Zaslavsky, O. (2010). Mathematics Teachers’ Reasoning for Refuting Students’ Invalid Claims. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of *Cerme* (Vol 6, pp. 281-290)

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?.*Educational Studies in Mathematics,* 66, 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation an algebraic proof. *ZDM Mathematics Education,* 40, 385-400.

Roth, W. M., & Walshaw, M. (2019). Affect and emotions in mathematics education: toward a holistic psychology of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 111-125.

Russell, J. A., Bachorowski, J, & Fernández-Dols, J. (2003). Facial and vocal expressions of emotions. *Annual Review of Psychology,* 54, 329-349.

Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM Mathematics Education*, 49, 307-322.

Schwarz, B. B., & Prusak, N. (2016). The importance of multi-modality in mathematical argumentation. In F. Paglieri, L. Bonelli & S. Felletti (Eds.), *Cognitive approaches to argumentation and persuasion* (pp. 387-406).United Kingdom: College Publications

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38, 289-321. Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. UK: Cambridge University Press

Χρηστάκης, Ν., & Χαλάτσης, Π. (2014). Μη λεκτική επικοινωνία, διδακτική πράξη και ζωή στη σχολική τάξη. Στο H.G Klinzing, Ν. Πολεμικός, Α. Κοντάκος, & Π.Ι Σταμάτης(Επ.), *Μη λεκτική Επικοινωνία στην Εκπαίδευση :Θεωρία και Πράξη* 1, (σελ. 111-142). Αθήνα: Διάδραση

Xolocotzin, U.E., (2017). An Overview of growth and trends of current research on emotions and mathematics. *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning* (pp.3-41).

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Proceedings of the *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1-4, pp. 65-634). Utrecht, The Netherlands

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannnula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 113-121.