



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μεταπτυχιακή Εργασία

*Στοχαστική Ανάλυση επιφανειών με τραχύτητα
με χρήση Μαρκοβιανών προτύπων*

Συγγραφέας:

Γεώργιος Σαρίδης

Επιβλέποντες:

Καθ. Απόστολος Μπουρνέτας

Δρ. Βασίλειος Κωνσταντούδης

Φεβρουάριος 2020

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο
πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου
Αθηνών.

Εγκρίθηκε την 14/02/2020, από την εξεταστική επιτροπή:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Απόστολος Μπουρνέτας	Καθηγητής	_____
Βασίλειος Κωνσταντούδης	Ερευνητής ΕΚΕΦΕ ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ	_____
Σάμης Τρέβεζας	Λέκτορας	_____



Εικόνα 1 Carl Friedrich Gauss

In the 1780s a provincial German schoolmaster gave his class the tedious assignment of summing the first 100 integers.

The teacher's aim was to keep the kids quiet for half an hour, but one young pupil almost immediately produced an answer: $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 5,050$.

*The smart aleck was **Carl Friedrich Gauss**, who would go on to join the short list of candidates for greatest mathematician ever. Gauss was not a calculating prodigy who added up all those numbers in his head. He had a deeper insight, in fact he had **recognized a certain pattern**: If you "fold" the series of numbers in the middle and add them in pairs— $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, and so on—all the pairs sum to 101. There are 50 such pairs, and so the grand total is simply 50×101 . The more general formula, for a list of consecutive numbers from 1 through n , is $n(n + 1)/2$.*

***Carl Friedrich Gauss** is sometimes referred to as the "**Prince of Mathematicians**" and the "greatest mathematician since antiquity". He has had a remarkable influence in many fields of mathematics and science and is ranked as one of history's most influential mathematicians.*

Abstract

Stochastic Analysis of rough surfaces implementing Markov models

The study of the roughness of the surfaces of the material bodies is both theoretical and practical. Theoretical because it most often manifests itself as a combination of random and organized variations of surface heights with a wide variety of concomitant growths over a wide range of scales. Practical because roughness affects a multitude of properties of surfaces (optical, tribological, mechanical, electrical, catalytic, ...) critical in many of their applications in many industries. For this reason, there is an extensive literature that extends from purely theoretical to fully applied studies. However, despite extensive literature, the effect of scale change on surface fluctuations and even less the interaction between fluctuations on different scales has not been extensively investigated. Existing methods mainly focus on the scale regime exhibiting fractal behavior which is usually quite limited scaling, leaving most scales where surface roughness is out of character.

In this thesis, we focus on this issue by drawing on recent publications [Waechter et al., European Physics Letters, 2003 and European Physics B, 2004] where surface roughness is considered a stochastic process that can be described by the models of Markovian chains.

We introduce a method by which spatial stochastic processes are mapped onto complex networks. As examples, we construct the networks for such spatial series as those for surface roughness. The networks are further studied by contrasting their geometrical properties, such as the mean length, diameter, clustering, and average number of connections per node. By comparing the network properties of the original spatial series investigated with those for the shuffled and surrogate series, we are able to quantify the effect of the long-range correlations and the fatness of the probability distribution functions of the series on the networks

constructed. Most importantly, we demonstrate that the spatial series can be reconstructed with precision by means of a simple random walk on their corresponding networks.

The steps that we will follow are as follows: a) understanding of the proposed methodology, b) targeted modification for application to nanoscale surface roughness, c) application to synthetic surfaces with fully controlled roughness, d) application to experimental surfaces and connection of results with those of other methods.

TOPIC:

KEYWORDS-PHRASES: Surface roughness, correlation length, random graphs, networks, spatial stochastic processes

Περίληψη

Στοχαστική Ανάλυση επιφανειών με τραχύτητα με χρήση Μαρκοβιανών προτύπων

Η μελέτη της τραχύτητας των επιφανειών των υλικών σωμάτων παρουσιάζει τόσο θεωρητικό όσο και πρακτικό ενδιαφέρον. Θεωρητικό επειδή τις περισσότερες φορές εκδηλώνεται ως σύμπλεξη τυχαίων και οργανωμένων διακυμάνσεων των υψών της επιφάνειας με μεγάλη ποικιλία και με ταυτόχρονη ανάπτυξή τους σε ένα ευρύ φάσμα κλιμάκων. Πρακτικό γιατί η τραχύτητα επηρεάζει μία πληθώρα ιδιοτήτων των επιφανειών (οπτικές, τριβολογικές, μηχανικές, ηλεκτρικές, καταλυτικές, ...) κρίσιμων σε πολλές εφαρμογές τους σε πολλούς κλάδους της βιομηχανίας. Γι'αυτό το λόγο, υπάρχει μία εκτεταμένη σχετική βιβλιογραφία που εκτείνεται από τις καθαρά θεωρητικές στις πλήρως εφαρμοσμένες μελέτες.

Ωστόσο, παρά την εκτεταμένη βιβλιογραφία, δεν έχει διερευνηθεί ιδιαίτερα η επίδραση της αλλαγής της κλίμακας στις διακυμάνσεις της επιφάνειας και ακόμη λιγότερο η αλληλοεπίδραση μεταξύ των διακυμάνσεων σε διαφορετικές κλίμακες. Οι υπάρχουσες μέθοδοι εστιάζουν κυρίως στην περιοχή κλιμάκων που επιδεικνύουν μορφοκλασματική (φράκταλ) συμπεριφορά που συνήθως είναι αρκετά περιορισμένη στις μικρές κλίμακες, αφήνοντας έξω από το πεδίο χαρακτηρισμού της το μεγαλύτερο μέρος των κλιμάκων που αναπτύσσεται η τραχύτητα των επιφανειών.

Στην εργασία αυτή, θα εστιάσουμε σε αυτό το ζήτημα παίρνοντας αφορμή από σχετικές πρόσφατες δημοσιεύσεις [Waechter et al., European Physics Letters, 2003 και European Physics B, 2004] σε γνωστά διεθνή περιοδικά όπου η τραχύτητα επιφανειών θεωρείται στοχαστική διαδικασία που μπορεί να περιγραφεί από τα πρότυπα των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Εισάγουμε μια μέθοδο με την οποία χαρτογραφούνται χωρικά στοχαστικές διεργασίες σε σύνθετα δίκτυα. Ως παραδείγματα,

κατασκευάζουμε τα δίκτυα για χωρικές σειρές όπως εκείνες που προκύπτουν από την τραχύτητα της επιφάνειας. Τα δίκτυα μελετώνται περαιτέρω, πέραν των γεωμετρικών τους ιδιοτήτων, αναφορικά με παραμέτρους των παραγόμενων δικτύων όπως το μέσο μήκος, η διάμετρος, η συσσωμάτωση και ο μέσος αριθμός συνδέσεων ανά κόμβο. Συγκρίνοντας τις ιδιότητες δικτύου της αρχικής χωρικής σειράς που ερευνήσαμε με εκείνες των παραγομένων για διαφορετικές κλίμακες. Το πιο σημαντικό είναι ότι αποδεικνύουμε ότι η χωρική σειρά μπορεί να ανακατασκευαστεί με ακρίβεια μέσω ενός απλού τυχαίου περιπάτου στο αντίστοιχο δίκτυο.

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε έχουν ως εξής: α) κατανόηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας, β) στοχευμένη τροποποίησή της για εφαρμογή στην τραχύτητα επιφανειών στη νανοκλίμακα, γ) εφαρμογή της σε συνθετικές επιφάνειες με πλήρως ελεγχόμενη τραχύτητα, δ) εφαρμογή σε πειραματικές επιφάνειες και σύνδεση των αποτελεσμάτων με αυτά άλλων μεθόδων.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Υπολογιστική και Μαθηματική Νανομετρολογία

ΛΕΞΕΙΣ-ΦΡΑΣΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Τραχύτητα επιφάνειας, μήκος συσχέτισης, τυχαίοι γράφοι, δίκτυα, χωρικές στοχαστικές διαδικασίες.

Ευχαριστίες

Προσεγγίζοντας την ολοκλήρωση του μεταπτυχιακού προγράμματος θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας .

Κατ' αρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες μου. Αρχικά τον καθηγητή και πρόεδρο του Τμήματος Μαθηματικών, κύριο Απόστολο Μπουρνέτα για την εμπιστοσύνη και την καθοδήγησή του τόσο κατά τη διάρκεια των σπουδών μου όσο και κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Συνάμα, επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά τον εξαιρετο ερευνητή του Εθνικού Κέντρου Έρευνας Φυσικών Επιστημών Δημόκριτος, κύριο Βασίλειο Κωνσταντούδη για την καθοριστική συμβολή του, τις παραγωγικές υποδείξεις του και το πολύ καλό κλίμα συνεργασίας που διαμόρφωσε συμβάλλοντας τα μέγιστα στην κατάρτιση της διπλωματικής μου εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Σάμη Τρέβεζα, λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών για την συμμετοχή του στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Φυσικά, επιθυμώ να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου οι οποίοι με στηρίζουν με κάθε τρόπο. Με ιδιαίτερη χαρά και υπερηφάνεια αφιερώνω την εργασία τόσο σε εκείνους όσο και στη μνήμη των παππούδων μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τη σύντροφο μου και εξαιρετη συνάδελφο Σοφία Τσιλίδου, με την βοήθεια και στήριξη της οποίας κατάφερα να ολοκληρώσω το πρόγραμμα των μέχρι τώρα Μαθηματικών μου σπουδών.

Γεώργιος Ι. Σαρίδης

Περιεχόμενα

Abstract	iv
Περίληψη	vi
Ευχαριστίες	viii
Λίστα Εικόνων	xi
Εισαγωγή	1
1. Επιφάνειες	2
1.1 Επιφάνειες και στοιχεία επιφανειών	2
1.1.1 Ορισμός και αναπαράσταση επιφανειών	2
1.2 Παρατήρηση επιφανειών	3
1.2.1 Ταξινόμηση επιφανειών από παρατήρηση	6
1.2.2 Περιοδικές επιφάνειες	6
1.2.3 Στοχαστικές επιφάνειες	7
1.2.4 Επιφάνειες Fractal	9
1.3 Μέτρηση και αναπαράσταση επιφανειών	12
2. Τραχύτητα Επιφανείας	18
2.1 Βασικά στοιχεία τραχύτητας επιφανειών	18
2.1.2 Πειραματική διαδικασία μέτρησης τραχύτητας	20
2.2 Παράμετροι χαρακτηρισμού τραχύτητας	21
2.2.1 Παράμετροι Περιγραφής Ύψους	21
2.2.2 Χωρικές παράμετροι	23
2.3 Εφαρμογές	24
3. Θεωρία Γράφων	25
3.1 Ορισμός Γράφου	26
3.2 Μη κατευθυνόμενοι και χωρίς βάρη γράφοι	27
3.3 Τυχαίοι Γράφοι (Random Graphs)	28
3.4 Χαρακτηριστικές Μετρικές Γράφων	29
4. Προτεινόμενη Μεθοδολογία Ανάλυσης Επιφανειών με Τραχύτητα	32

4.1	Δημιουργία γράφου περιγραφής της τραχύτητας μίας επιφάνειας	33
4.2	Δημιουργία Γράφων Κλίμακας r της τραχύτητας επιφάνειας	36
4.3	Ανάλυση Δεδομένων Γράφων	37
4.4	Σύνοψη διαδικασίας προτεινόμενης ανάλυσης τραχύτητας	38
5.	Αποτελέσματα	39
5.1	Δημιουργία Επιφανειών	40
5.1.1	Ντετερμινιστικές Επιφάνειες	40
5.1.2	Στοχαστικές επιφάνειες	43
5.2	Δημιουργία γράφων	44
5.2.1	Ντετερμινιστικές Επιφάνειες	44
5.2.2	Στοχαστικές επιφάνειες	58
5.3	Μελέτη μετρικών γράφων	68
5.3.1	Autocorrelation Function	68
5.3.2	Μέγιστη Απόσταση Κόμβων	73
5.3.3	Μέση Απόσταση Κόμβων	78
5.3.4	Συντελεστής Ομαδοποίησης Γράφων	83
5.3.5	Ιδιοτιμές Πινάκων Πιθανοτήτων Μετάβασης Γράφων	88
5.3.6	Μεταβάσεις σε ανώτερες κλάσεις	93
5.3.7	Ανάλυση αποτελεσμάτων	99
6.	Πειραματικό Μέρος	103
7.	Συμπεράσματα	108
8.	Παράρτημα	109
8.1	Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πραγματικού πίνακα	109
8.2	Διαγωνοποίηση πίνακα	110
8.3	Κώδικας Matlab	111
	Βιβλιογραφία	119

Λίστα Εικόνων

Εικόνα 1 Carl Friedrich Gauss	iii
Εικόνα 2 Οπτική παρατήρηση (χωρίς μεγέθυνση) επιφάνειας μετάλλων.....	3
Εικόνα 3 Οπτική παρατήρηση με χρήση ηλεκτρονικού μικροσκοπίου ($\times 200$) a.CS, b. CM, c. CT, d. CC, e. TS, f. TM, g. TT, h. TC. CS, TS, CT and TT group	4
Εικόνα 4 Παρατήρηση με χρήση Scanning Electron Microscope (SEM)	5
Εικόνα 5 Ταξινόμηση στερεών επιφανειών	6
Εικόνα 6 Fractal σχήματα.....	9
Εικόνα 7 Αυτο-ομοιότητα (self-similarity).....	9
Εικόνα 8 Ορισμός Διάστασης	11
Εικόνα 9 Διάσταση Hausdorff ή fractal διάσταση	11
Εικόνα 10 Διαφορά πραγματικού και μετρούμενου προφίλ επιφάνειας.....	13
Εικόνα 11 Γραφική Αναπαράσταση Διδιάστατης Επιφάνειας.....	13
Εικόνα 12 Μορφολογία στοχαστικών επιφανειών – κατανομές πιθανότητας [1]	14
Εικόνα 13 Skewness	16
Εικόνα 14 Kurtosis	16
Εικόνα 15 Αποκλίσεις από Ονομαστική Επιφάνεια.....	19
Εικόνα 16 Ανάλυση Αποκλίσεων Επιφανειών.....	20
Εικόνα 17 Δειγματοληψία Επιφανειών	20
Εικόνα 18 Γραφική παράσταση προφίλ επιφάνειας $z(x)$	22
Εικόνα 19 Προφίλ επιφανειών με το ίδιο R_a	23
Εικόνα 20 Η πόλη του Königsberg	25
Εικόνα 21 Αναπαράσταση γράφου	26
Εικόνα 22 Μη κατευθυνόμενος γράφος και κατευθυνόμενος γράφος.....	27
Εικόνα 23 Κβαντοποίηση προφίλ επιφάνειας	34
Εικόνα 24 Προκύπτων γράφος από κβαντοποίηση.....	34
Εικόνα 25 Αλυσίδα καταστάσεων με μεταβάσεις ενός βήματος	36
Εικόνα 26 Αλυσίδα καταστάσεων με μεταβάσεις δύο βημάτων	36
Εικόνα 27 Χρήση της παραχθείσας εφαρμογής για δημιουργία Gaussian Surface	39
Εικόνα 28 Χρήση της παραχθείσας εφαρμογής για δημιουργία Exponential Surface Profile	39
Εικόνα 29 Προφίλ τριγωνικού παλμού	40
Εικόνα 30 Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού	40
Εικόνα 31 Προφίλ τετραγωνικού παλμού	41

Εικόνα 32 Ημιτονοειδές προφίλ.....	41
Εικόνα 33 Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	42
Εικόνα 34 Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	42
Εικόνα 35 Προφίλ λευκού θορύβου.....	43
Εικόνα 36 Προφίλ προκύπτων γκαουσιανό ACF.....	43
Εικόνα 37 Προφίλ με εκθετικό ACF.....	44
Εικόνα 38 Γράφος κλίμακας 1 τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων.....	44
Εικόνα 39 Γράφος κλίμακας 5 τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων.....	45
Εικόνα 40 Γράφος κλίμακας 9 τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων.....	45
Εικόνα 41 Γράφος κλίμακας 45, τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων.....	46
Εικόνα 42 Γράφος κλίμακας 89, τριγωνικού παλμού 3001 σημείων.....	46
Εικόνα 43 Γράφος κλίμακας 1, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων.....	47
Εικόνα 44 Γράφος κλίμακας 5, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων.....	47
Εικόνα 45 Γράφος κλίμακας 45, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων.....	48
Εικόνα 46 Γράφος κλίμακας 89, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων.....	48
Εικόνα 47 Ημιτονοειδές προφίλ.....	52
Εικόνα 48 Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	54
Εικόνα 49 Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	57
Εικόνα 50 Προφίλ λευκού θορύβου.....	59
Εικόνα 51 Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή.....	63
Εικόνα 52 Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF.....	66
Εικόνα 53 Προφίλ τριγωνικού παλμού.....	68
Εικόνα 54 Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού.....	68
Εικόνα 55 Προφίλ τετραγωνικού παλμού.....	69
Εικόνα 56 Ημιτονοειδές προφίλ.....	69
Εικόνα 57 Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	70
Εικόνα 58 Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	70
Εικόνα 59 Προφίλ λευκού θορύβου.....	71
Εικόνα 60 Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή.....	71
Εικόνα 61 Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF.....	72
Εικόνα 62 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού.....	73
Εικόνα 63 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού.....	73
Εικόνα 64 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ τετραγωνικού παλμού.....	74

Εικόνα 65 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Ημιτονοειδές προφίλ	74
Εικόνα 66 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	75
Εικόνα 67 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ	75
Εικόνα 68 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ λευκού θορύβου	76
Εικόνα 69 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή	76
Εικόνα 70 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF	77
Εικόνα 71 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού.....	78
Εικόνα 72 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού.....	78
Εικόνα 73 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού..	79
Εικόνα 74 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ	79
Εικόνα 75 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	80
Εικόνα 76 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	80
Εικόνα 77 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου	81
Εικόνα 78 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή	81
Εικόνα 79 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF	82
Εικόνα 80 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού.....	83
Εικόνα 81 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού	83
Εικόνα 82 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού.....	84
Εικόνα 83 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ	84
Εικόνα 84 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ	85

Εικόνα 85 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ	85
Εικόνα 86 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου	86
Εικόνα 87 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτον από κανονική κατανομή ACF	86
Εικόνα 88 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτον από εκθετικό ACF	87
Εικόνα 89 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού	88
Εικόνα 90 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού.....	88
Εικόνα 91 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού.....	89
Εικόνα 92 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ.....	89
Εικόνα 93 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	90
Εικόνα 94 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ.....	90
Εικόνα 95 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου.....	91
Εικόνα 96 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτον από κανονικής κατανομής ACF.....	91
Εικόνα 97 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτον από εκθετικής κατανομής ACF.....	92
Εικόνα 98 Επιφάνεια με τραχύτητα	93
Εικόνα 99 Μέτρηση επιφάνειας υπό κλίμακα r	93
Εικόνα 100 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσεως της Κλίμακας,.....	94
Εικόνα 101 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσεως της Κλίμακας,.....	95
Εικόνα 102 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσεως της Κλίμακας,.....	95
Εικόνα 103 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ	96
Εικόνα 104 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ	96
Εικόνα 105 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ	97

Εικόνα 106 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας,.....	97
Εικόνα 107 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας,.....	98
Εικόνα 108 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας,.....	98
Εικόνα 109 Εισαγωγή πειραματικών δεδομένων.....	107

Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση επιφανειών παρουσιάζει μεγάλη σημασία στη σύγχρονη βιομηχανική τεχνολογία. Στη μικροσκοπική και νανοσκοπική κλίμακα όλων των πραγματικών επιφανειών εμφανίζεται τραχύτητα, η οποία επηρεάζει τις μηχανικές αλλά και πληθώρα άλλων ιδιοτήτων κάθε υλικού, οι οποίες με τη σειρά τους καθορίζουν την απόδοση, την αξιοπιστία καθώς και τον αναμενόμενο χρόνο ζωής των συναρμολογημάτων της βιομηχανικής τεχνολογίας.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει ένα τρόπο μοντελοποίησης της τραχύτητας των επιφανειών με χρήση δικτύων-γράφων και μαρκοβιανών μοντέλων. Συγκεκριμένα:

Στο **Κεφάλαιο 1** προσδιορίζεται το πλαίσιο της εργασίας με εισαγωγή και ανάλυση της έννοιας της επιφάνειας, της τραχύτητας και των παραμέτρων που τις χαρακτηρίζουν.

Στο **Κεφάλαιο 2** γίνεται η περιγραφή του προβλήματος της δυσκολίας μοντελοποίησης της τραχύτητας επιφανειών.

Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζονται τα απαραίτητα στοιχεία της Θεωρίας Γράφων. Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία μοντελοποίησης της τραχύτητας με χρήση γραφών με παράμετρο την κλίμακα παρατήρησης των επιφανειών.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε. Επιπρόσθετα, γίνεται αξιολόγηση της εν λόγω μεθοδολογίας και προτείνονται ιδέες για περαιτέρω μελέτη. Τέλος:

Στο **Κεφάλαιο 6** περιγράφεται μία πειραματική διαδικασία η οποία χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση των θεωρητικών αποτελεσμάτων των αναπτυσσόμενων δικτύων – γραφών με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 1^ο

1. Επιφάνειες

1.1 Επιφάνειες και στοιχεία επιφανειών

1.1.1 Ορισμός και αναπαράσταση επιφανειών

Η έννοια της επιφάνειας γίνεται αντιληπτή διαισθητικά από την καθημερινή εμπειρία της αλληλεπίδρασης του ανθρώπου με τη φύση. Μιλάμε λοιπόν για την επίπεδη επιφάνεια ενός τραπέζιου, την επιφάνεια μιας σφαίρας, ενός κώνου, ενός κυλίνδρου κλπ.

Στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, σαν επιφάνεια θεωρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου, τα οποία ικανοποιούν μια ορισμένη γεωμετρική ιδιότητα. Για παράδειγμα ως επιφάνεια της σφαίρας ορίζεται το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα δεδομένο σημείο. Μεταφράζοντας την γεωμετρική ιδιότητα στην αλγεβρική γλώσσα καταλήγουμε σε μια σχέση των συντεταγμένων (x, y, z) των σημείων της επιφάνειας, η οποία παίρνει την μορφή:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

Ο μαθηματικός ορισμός, λοιπόν, της έννοιας της επιφάνειας S είναι ο εξής:

Έστω A ένα (μη κενό) υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 και η συνάρτηση $F: A \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \rightarrow F(x, y, z)$. Το σύνολο $S \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ που είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^3 λέγεται επιφάνεια του \mathbb{R}^3 με αναλυτική εξίσωση $F(x, y, z) = 0$.

Αν η εξίσωση (1.1) επιλύεται ως προς μία από τις μεταβλητές της, έστω ως προς z δηλαδή $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, τότε η εξίσωση $z = f(x, y)$ λέγεται καρτεσιανή εξίσωση της επιφάνειας S .

$$z = f(x, y) \quad (1.2)$$

Μία άλλη γραφή των επιφανειών είναι η παραμετρική, σύμφωνα με την οποία η επιφάνεια εκφράζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1.3)$$

Επιπρόσθετα μια επιφάνεια δύναται να ορισθεί από τον τρόπο με τον οποίο παράγεται. Είναι φανερό ότι μια καμπύλη του χώρου, η οποία κινείται κατά έναν ορισμένο τρόπο, παράγει μια επιφάνεια. Όταν η καμπύλη είναι ευθεία γραμμή, η επιφάνεια λέγεται *ευθειογενής*. Τέτοιες επιφάνειες είναι π.χ. οι κωνικές, κυλινδρικές κ.λ.π. Επίσης, όταν η καμπύλη περιστρέφεται γύρω από κάποιον σταθερό άξονα, η επιφάνεια, η οποία παράγεται λέγεται *επιφάνεια εκ περιστροφής*.

Τέλος, οι επιφάνειες μπορούν να ταξινομηθούν σε δυο κατηγορίες, ανάλογα με την μορφή της αναλυτικής τους εξίσωσης:

α. σε *αλγεβρικές επιφάνειες*, όταν στην εξίσωση (1.1) η συνάρτηση F είναι πολυώνυμο ως προς x, y, z και ο βαθμός του πολυωνύμου λέγεται και βαθμός της επιφάνειας.

β. σε *υπερβατικές επιφάνειες* όταν η εξίσωση τους δεν είναι αλγεβρική π.χ. η επιφάνεια με εξίσωση

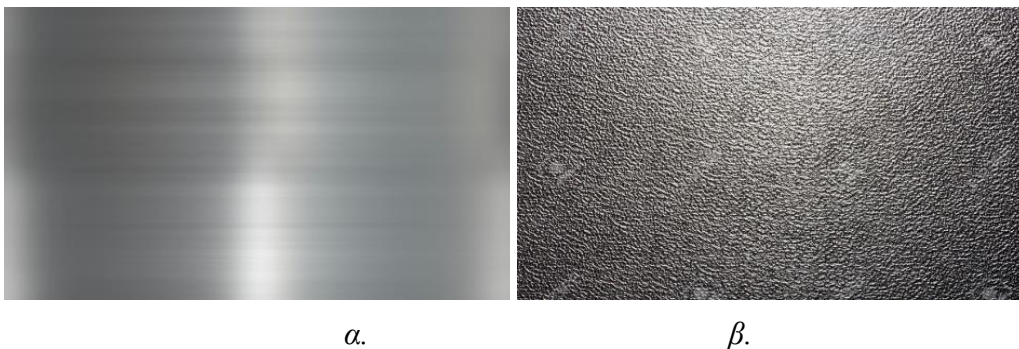
$$z - \sin(xy) = 0 \quad (1.4)$$

1.2 Παρατήρηση επιφανειών

Οι επιφάνειες χωρίζουν το χώρο σε δύο μέρη (υποχώρους) και αποτελούν το όριο ενός υλικού σώματος το οποίο χωρίζει το εσωτερικό του από το εξωτερικό του περιβάλλον.

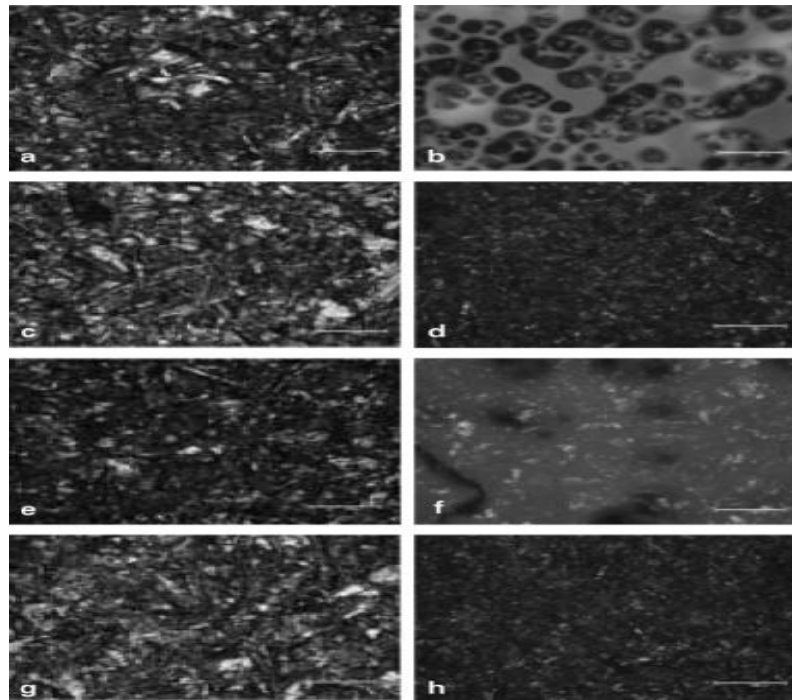
Η τοπογραφία μιας επιφάνειας μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα σύνολο δεδομένων το οποίο περιέχει τις συντεταγμένες των σημείων τα οποία συνιστούν την επιφάνεια. Ωστόσο, για την βέλτιστη απεικόνιση των χαρακτηριστικών τα οποία συνθέτουν την τοπογραφία μίας επιφάνειας, η απόσταση μεταξύ των γειτονικών μετρούμενων σημείων χρειάζεται να είναι σημαντικά μικρότερη από το μέγεθος αυτών των χαρακτηριστικών.

Η μορφολογία της επιφάνειας γίνεται, εν γένει, αντιληπτή μέσω της κατάλληλης αλληλεπίδρασης από τον παρατηρητή. Η μακροσκοπική παρατήρηση μπορεί να επιτευχθεί με χρήση των αισθήσεων του ανθρώπου (όραση, αφή) και αποκαλύπτει ελάχιστα χαρακτηριστικά της επιφάνειας, όπως το χρώμα, το σχήμα, οι ατέλειες – ανωμαλίες, η υφή καθώς και το βάρος του υλικού σώματος δύναται να αποκαλύψει (μέσω της πυκνότητας) την πρώτη ύλη. Στην παρούσα εργασία θα παραθέσουμε παραδείγματα μεταλλικών επιφανειών και θα επικεντρωθούμε στην υφή τους. Η μακροσκοπική οπτική παρατήρηση μεταλλικών επιφανειών μας δίνει εικόνες όπως οι παρακάτω.



Εικόνα 2 Οπτική παρατήρηση (χωρίς μεγέθυνση) επιφανειών μετάλλων

Επιπρόσθετα, είναι εφικτή η χρήση οπτικού μικροσκοπίου για την αναλυτικότερη παρατήρηση επιφανειών και της υφής τους. Ενδεικτικά παρατίθενται οι παρακάτω εικόνες.

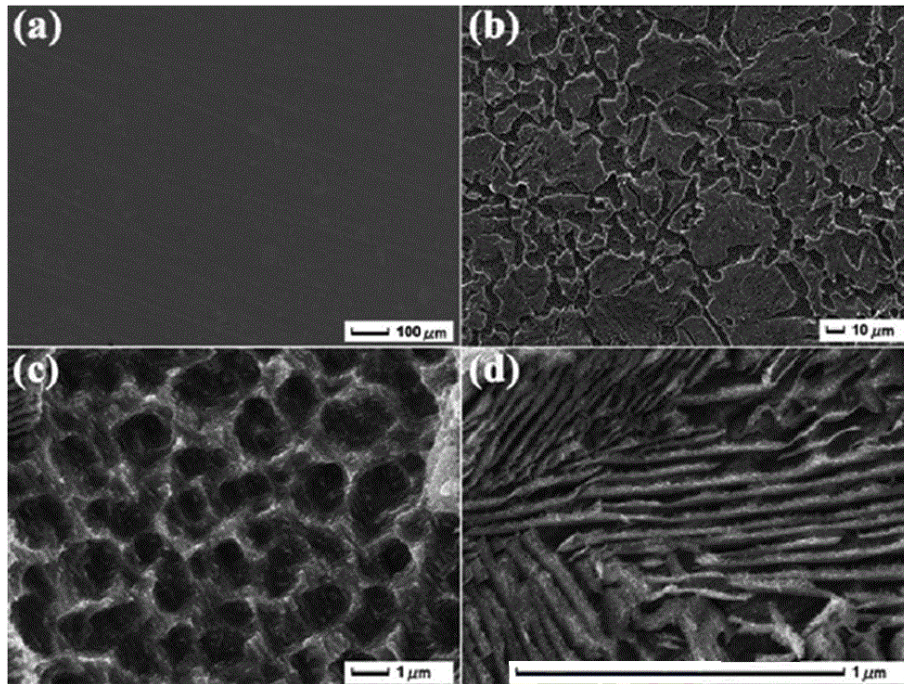


Εικόνα 3 Οπτική παρατήρηση με χρήση ηλεκτρονικού μικροσκοπίου ($\times 200$) a. CS, b. CM, c. CT, d. CC, e. TS, f. TM, g. TT, h. TC. CS, TS, CT and TT group

Από την παρατήρηση των επιφανειών με χρήση οπτικού μικροσκοπίου καθίσταται προφανές ότι η μορφολογία μίας επίπεδης επιφάνειας διαφέρει κατά πολύ από αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε μακροσκοπικά. Το γεγονός αυτό δημιουργεί την ανάγκη για παρατήρηση σε ολόένα και μικρότερες κλίμακες.

Η ανάγκη αυτή καθώς και η πρόοδος της τεχνολογίας προσέφεραν τη δυνατότητα παρατήρησης με χρήση ηλεκτρονικού μικροσκοπίου σάρωσης (Scanning Electron Microscope, SEM). Το SEM είναι ένα όργανο που λειτουργεί όπως περίπου και ένα οπτικό μικροσκόπιο μόνο που χρησιμοποιεί δέσμη ηλεκτρονίων υψηλής ενέργειας αντί για φως, για να εξετάσει αντικείμενα σε λεπτομερή κλίμακα. Τα ηλεκτρόνια λόγω της κυματικής τους φύσης μπορούν να εστιαστούν όπως και τα φωτεινά κύματα αλλά σε πολύ μικρότερη επιφάνεια (π.χ. κόκκος υλικού). Η δέσμη ηλεκτρονίων σαρώνει την επιφάνεια του δείγματος με το οποίο αλληλεπιδρά. Από την αλληλεπίδραση αυτή προκύπτουν πληροφορίες σε σχέση με τα άτομα των στοιχείων που απαρτίζουν το εξεταζόμενο υλικό. Από τα άτομα των στοιχείων εκπέμπονται κυρίως δευτερογενή (secondary) και οπισθοσκεδαζόμενα (backscattered) ηλεκτρόνια καθώς και ακτίνες X. Η ένταση των εκπεμπομένων ηλεκτρονίων επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας. Έτσι το SEM δίνει πληροφορίες που αφορούν κυρίως στη μορφολογία και στη σύσταση της επιφάνειας. Η παρατήρηση

επιφανειών με χρήση SEM μας προσφέρει μεγέθυνση 10.000 έως 50.000 x και καθιστά ευχερή την μικροσκοπία – νανοσκοπία. Ενδεικτικές εικόνες SEM παρατίθενται παρακάτω.

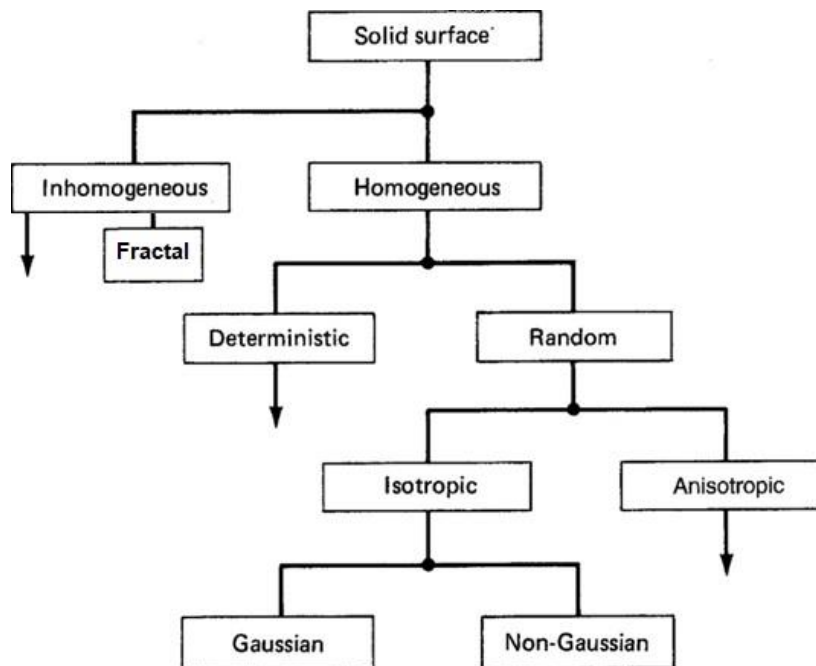


Εικόνα 4 Παρατήρηση με χρήση Scanning Electron Microscope (SEM)

Το ενδιαφέρον ωστόσο από την παρατήρηση της επιφάνειας ενός υλικού, κατ' ουσία, εστιάζεται στην εξαγωγή συμπερασμάτων αναφορικά με τις ιδιότητες του. Ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται αξιολογώντας στοιχεία τα οποία προκύπτουν από την παρατήρηση της μορφολογίας της επιφάνειας σε μακροσκοπική, μικροσκοπική αλλά και νανοσκοπική **κλίμακα**. Η μορφολογία της επιφάνειας έχει παρατηρηθεί και αποδειχθεί ότι επηρεάζει έντονα διάφορα φαινόμενα όπως για παράδειγμα την τριβή κατά την κίνηση ενός σώματος και κατ' επέκταση την πρόσφυση του, την γωνία επαφής δύο σωμάτων, την ακριβή επιφάνεια επαφής δύο υλικών καθώς και την απορρόφηση φωτονίων - ανάκλαση φωτός από ένα σώμα κ.α.. Τέλος, πλήθος ερευνών αποκαλύπτουν τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η τραχύτητα όπως π.χ. στη διασφάλιση της ποιότητας ενός στερεού σώματος, τον καθορισμό των συνθηκών επαφής υλικών, την τριβολογία (τριβή, λίπανση και φθορά) και την μεταφορά δυνάμεων σε συναρμολογήματα, την βελτιστοποίηση της αεροδυναμικής ενός σώματος κ.α..

1.2.1 Ταξινόμηση επιφανειών από παρατήρηση

Από την παρατήρηση των επιφανειών με χρήση των ανωτέρω μεθοδολογιών, προκύπτει μία κατηγοριοποίηση των στερεών επιφανειών σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα [1]:



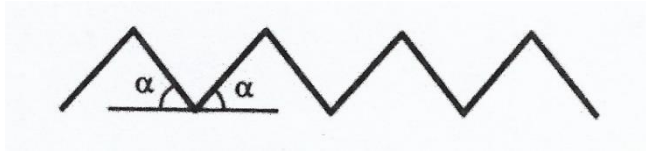
Εικόνα 5 Ταξινόμηση στερεών επιφανειών

Οι επιφάνειες δύνανται να διαχωριστούν σε ομογενείς και μη ομογενείς αναφορικά με την ομοιότητα τους στις διαφορετικές διαστάσεις (x,y). Οι ομογενείς επιφάνειες διακρίνονται σε ντετερμινιστικές και τυχαίες. Οι επιφάνειες ντετερμινιστικής φύσεως δύνανται να μελετηθούν με απλές αναλυτικές και εμπειρικές μεθόδους. Οι υφές της πλειονότητας των μηχανικών επιφανειών είναι τυχαίες, ισοτροπικές (ίσες συσχετίσεις προς όλες τις κατευθύνσεις) είτε ανισοτροπικές όπως επίσης Γκαουσιανές ή μη-Γκαουσιανές. Το κατά πόσον η κατανομή του ύψους της επιφάνειας είναι ισοτροπική ή ανισοτροπική και Γκαουσιανή ή μη-Γκαουσιανή εξαρτάται εν πολλοίς από τη φύση της μεθόδου κατεργασίας και παραγωγής της κάθε επιφάνειας.

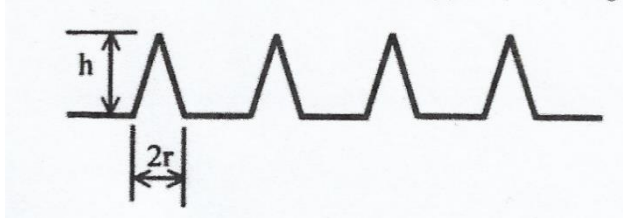
1.2.2 Περιοδικές επιφάνειες

Σε ό,τι αφορά τις ντετερμινιστικές επιφάνειες, δηλαδή τις επιφάνειες με αναλυτικά καθορισμένη γεωμετρική δομή, το ενδιαφέρον εστιάζεται στις περιοδικές επιφάνειες, οι οποίες αφορούν επιφάνειες ιδιαίτερης σημασίας και εφαρμογών που συναντώνται στη φύση. Παρακάτω διακρίνουμε κάποιες από τις σημαντικότερες κατηγορίες περιοδικών επιφανειών:

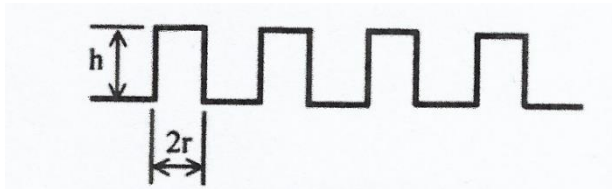
α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

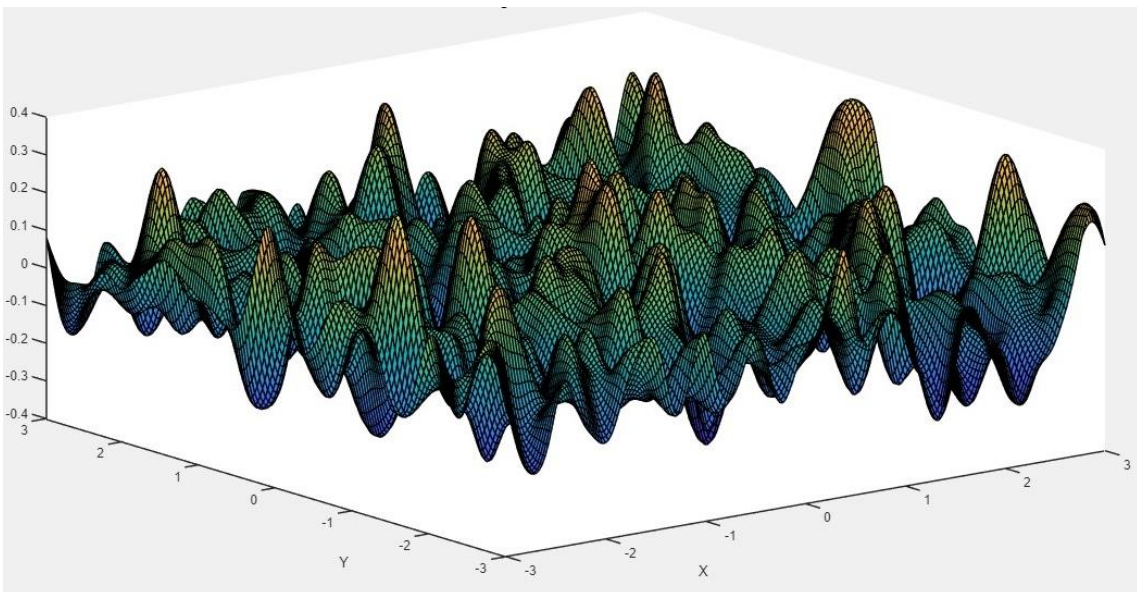
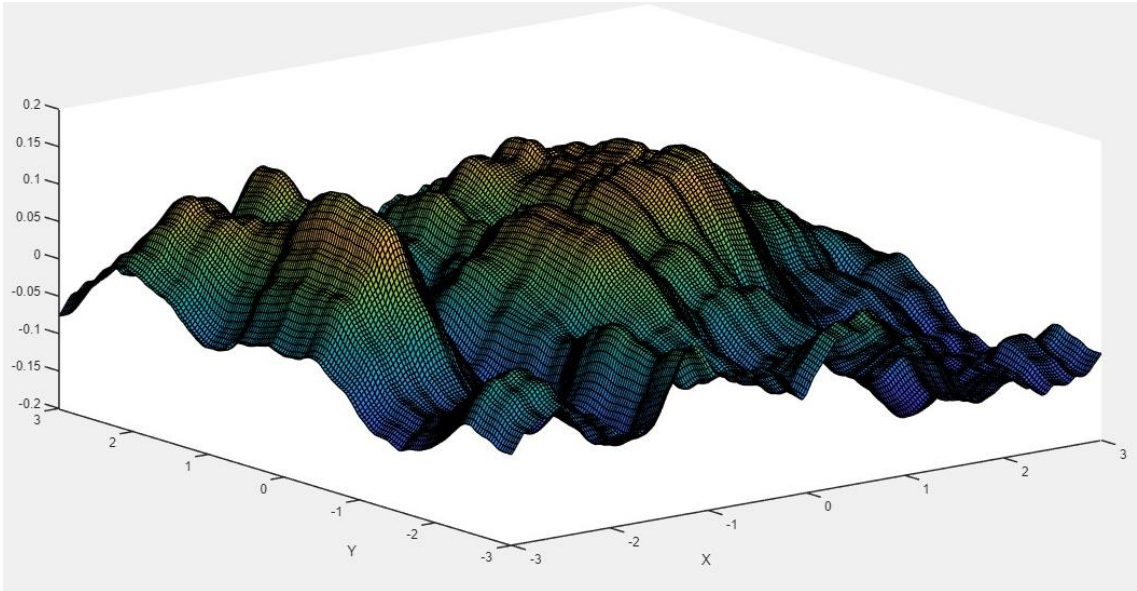
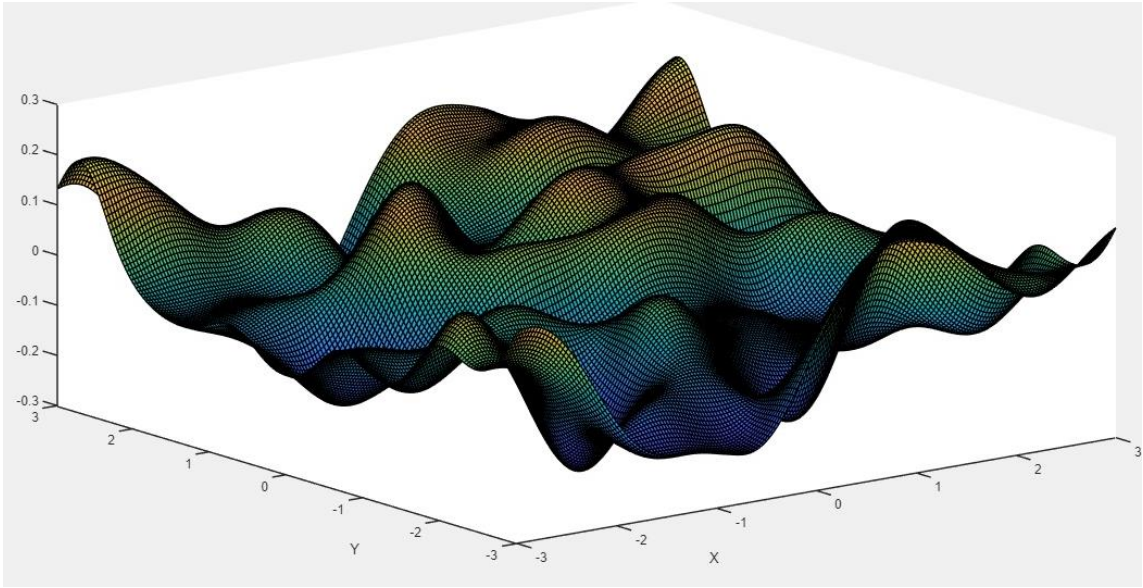


στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



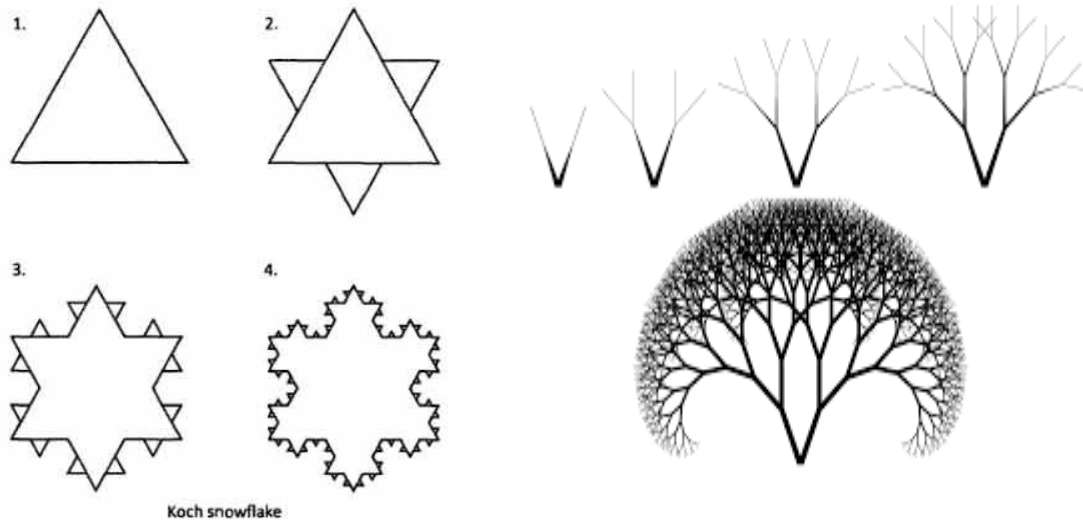
1.2.3 Στοχαστικές επιφάνειες

Μία άλλη κατηγορία επιφανειών με την οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία είναι οι στοχαστικές επιφάνειες. Οι επιφάνειες αυτές δεν παρουσιάζουν γεωμετρική δομή που να καθορίζεται από κάποια γνωστή συνάρτηση και οι τιμές του ύψους των αντιστοιχων προφίλ αυτών των επιφανειών ενέχει τυχαιότητα.



1.2.4 Επιφάνειες Fractal

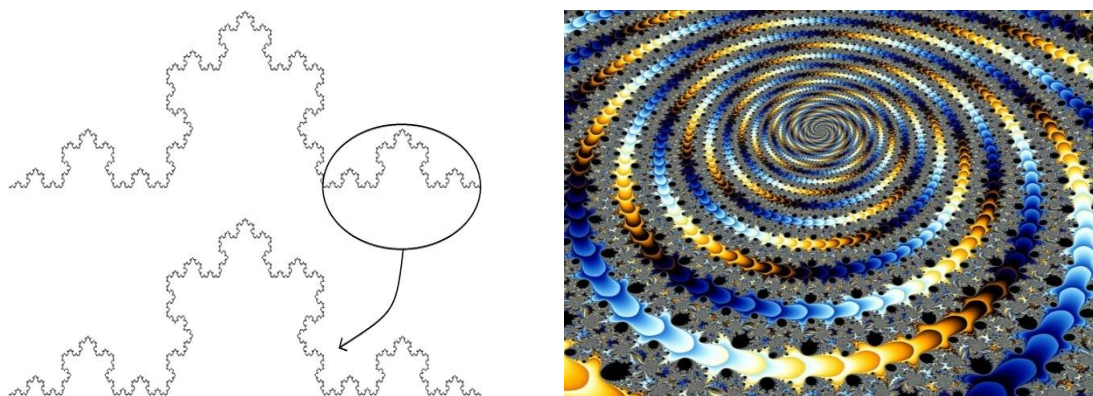
Με τον όρο φράκταλ (fractal) στα Μαθηματικά, τη Φυσική αλλά και σε πολλές επιστήμες ονομάζεται ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης.



Εικόνα 6 Fractal σχήματα

Ο όρος προτάθηκε από τον Μπενουά Μάντελμπροτ (Benoît Mandelbrot) το 1975 και προέρχεται από τη λατινική λέξη fractus, που σημαίνει "σπασμένος", "κατακερατισμένος". Στα ελληνικά έχει αποδοθεί ως μορφοκλασματικό σύνολο ή κλασματοειδές ή πολυσχιδές αλλά για να αποφευχθούν συγχύσεις ή παρανοήσεις έχει επικρατήσει ο όρος fractal.

Το φράκταλ παρουσιάζεται ως "μαγική εικόνα" που όσες φορές και να μεγεθυνθεί οποιοδήποτε τμήμα του θα συνεχίζει να παρουσιάζει ένα εξίσου πολύπλοκο σχέδιο με μερική ή ολική επανάληψη του αρχικού. Χαρακτηριστικό επομένως των φράκταλ είναι η αυτο-ομοιότητα (self-similarity) σε κάποιες δομές τους.



Εικόνα 7 Αυτο-ομοιότητα (self-similarity)

Η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα των φράκταλ είναι ότι είναι γενικά πολύπλοκα ως προς τη μορφή τους, δηλαδή εμφανίζουν ανωμαλίες στη μορφή σε σχέση με τα συμβατικά γεωμετρικά σχήματα. Κατά συνέπεια δεν είναι αντικείμενα τα οποία μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Για να γίνει αντιληπτός αυτός ο διαχωρισμός των φράκταλ με την ευκλείδεια γεωμετρία, αναφέρουμε ότι, αν μεγεθύνουμε κάποιο αντικείμενο το οποίο μπορεί να οριστεί με την ευκλείδεια γεωμετρία, παραδείγματος χάριν την περιφέρεια μιας έλλειψης, αυτή μετά από αλληπάλληλες μεγεθύνσεις θα εμφανίζεται απλά ως ευθύγραμμο τμήμα. Η συμβατική ιδέα της καμπυλότητας η οποία αντιπροσωπεύει το αντίστροφο της ακτίνας ενός προσεγγίζοντος κύκλου, δεν μπορεί ωφέλιμα να ισχύσει στα φράκταλ επειδή αυτή εξαφανίζεται κατά τη μεγέθυνση. Αντίθετα, σε ένα φράκταλ, θα εμφανίζονται κατόπιν μεγεθύνσεων λεπτομέρειες που δεν ήταν ορατές σε μικρότερη κλίμακα μεγέθυνσης.

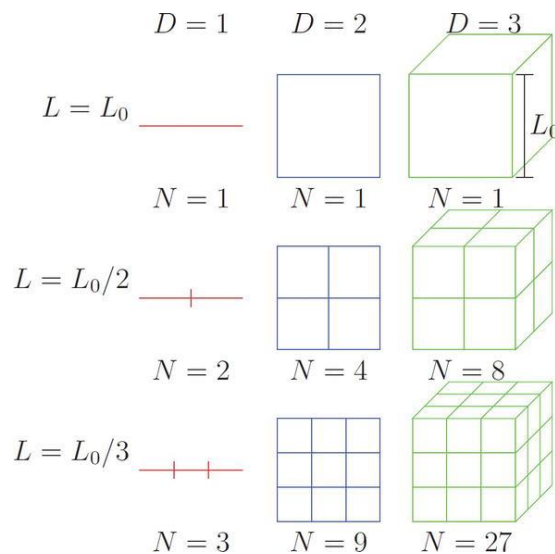
Φράκταλ απαντώνται και στη φύση, χωρίς όμως να υπάρχει άπειρη λεπτομέρεια στη μεγέθυνση όπως στα φράκταλ που προκύπτουν από μαθηματικές σχέσεις. Ως παραδείγματα φράκταλ στη φύση, αναφέρονται το σχέδιο των νιφάδων του χιονιού, τα φύλλα των φυτών ή οι διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την αναγκαιότητα εισαγωγής των φράκταλ αναφέρουμε το εξής παράδειγμα:

Η περίμετρος ενός νησιού εννοείται ότι είναι ορισμένη. Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε ακρίβεια ενός μέτρου για να την μετρήσουμε, θα την βρούμε μικρότερη από ότι πραγματικά είναι γιατί δεν θα μπορέσουμε να μετρήσουμε τις κοιλότητες που είναι μικρότερες του ενός μέτρου. Αν μετρήσουμε με ακρίβεια ενός εκατοστού, πάλι θα χάσουμε ορισμένες κοιλότητες. Έτσι καταλήγουμε σε απειροστά μικρή μονάδα μέτρησης και η περίμετρος του νησιού θα γίνει άπειρη. Η επιφάνεια όμως του νησιού, η έκτασή του δηλαδή, είναι ορισμένη. Το παράδοξο αυτό, το οποίο η Ευκλείδεια Γεωμετρία αδυνατεί να εξηγήσει, αντιμετωπίζεται με τα φράκταλ. Η λέξη fractal χρησιμοποιήθηκε από τον Mandelbrot για να περιγράψει αντικείμενα που ήταν ακανόνιστα για να χωρέσουν σε ένα παραδοσιακό γεωμετρικό πλαίσιο.

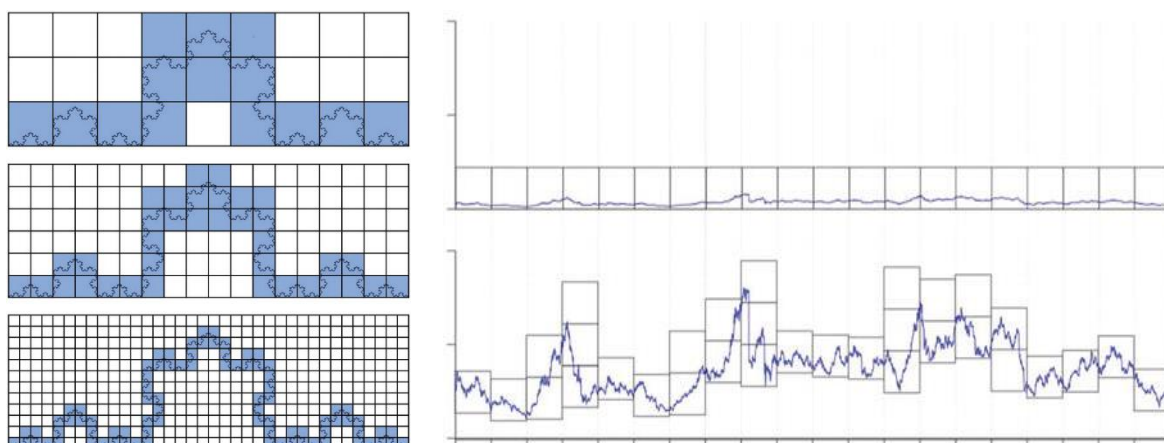
Ποιες είναι όμως οι ιδιότητες των fractals που είναι ανάλογες με αυτές της κλασικής γεωμετρίας; Η απάντηση βρίσκεται στην έννοια της διάστασης. Η

διάσταση ενός αντικειμένου είναι πολύ σημαντική έννοια. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι διάσταση είναι ο αριθμός των συντεταγμένων που χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο αντικείμενο. Για παράδειγμα, ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι μονοδιάστατο, ένα ορθογώνιο διδιάστατο κι ένας κύβος τριδιάστατος.



Εικόνα 8 Ορισμός Διάστασης

Για διαστάσεις πέραν του 3 χρησιμοποιούμε ως πρώτο συνθετικό το 'υπερ-' π.χ. υπερκύβος. Μ' αυτόν τον ορισμό η διάσταση είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Ο αριθμός που προκύπτει επαγωγικά ορίζοντας ως 0 τη διάσταση του σημείου, που αν το σύρουμε μπορεί να σχηματίσει μια ευθεία που είναι διάστασης 1 κι αυτή με τη σειρά της, αν συρθεί, ένα επίπεδο διάστασης 2 κ.ο.κ. θα προκύπτουν γεωμετρικά αντικείμενα με ακέραιες διαστάσεις. Το μέτρο του πώς ένα αντικείμενο "γεμίζει" το χώρο, που είναι η επέκταση του παραπάνω ορισμού λέγεται **διάσταση Hausdorff** ή **fractal διάσταση** και επιτρέπεται να λαμβάνει και μη ακέραιες τιμές.



Εικόνα 9 Διάσταση Hausdorff ή fractal διάσταση

1.3 Μέτρηση και αναπαράσταση επιφανειών

Καθίσταται λοιπόν κατανοητό ότι η έννοια της απολύτως λείας επιφάνειας, στα στερεά σώματα, δεν είναι εφικτό να υλοποιηθεί. Ανάλογα με τις ιδιότητες της πρώτης ύλης, από την οποία είναι κατασκευασμένο το στερεό, και τον τρόπο δημιουργίας των εξωτερικών επιφανειών του, η έννοια του λείου δύναται **μόνο** να προσεγγισθεί σε μικρό ή μεγαλύτερο βαθμό.

Η παρατήρηση της επιφάνειας, σε μικροσκοπική κλίμακα, αναδεικνύει ανωμαλίες της γεωμετρίας της, με τη μορφή διαδοχικών εξάρσεων/βυθίσεων του ανάγλυφου, το σύνολο των οποίων συνιστά την επιφανειακή τοπογραφία και καθορίζει πόσο λεία είτε πόσο τραχειά είναι μια επιφάνεια, ενώ η *οπτικοποίηση τους σε διάφορες κλίμακες αναδεικνύει περίπλοκες και τυχαίες γεωμετρικές δομές*.

Ένα μέρος της μικρο-νανομετρολογίας ερευνά μεθόδους χαρακτηρισμού των δομών αυτών. Από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την παρατήρηση των επιφανειών, προέκυψε η ανάγκη για τη παραμετροποίηση και τη ποσοτικοποίηση των δομών αυτών. Το ιδανικό αποτέλεσμα θα ήταν βέβαια η ακριβής περιγραφή και μέτρηση μιας επιφάνειας με πεπερασμένο πλήθος παραμέτρων.

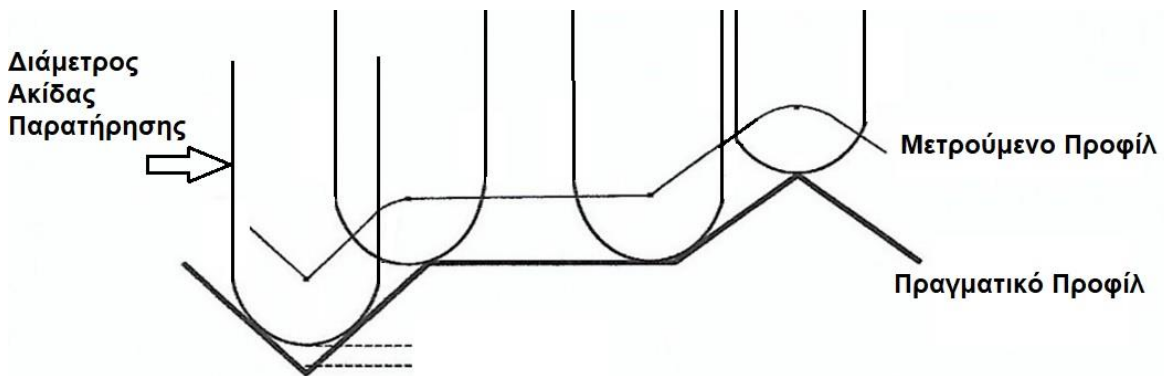
Για την ικανοποίηση της συγκεκριμένης απαίτησης αναπτύχθηκαν τεχνικές όπως η προφίλομετρία ακίδας (*Stylus Profilometry*) και η μικροσκοπία ατομικής δύναμης (*Atomic Force Microscopy (AFM)*). Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούνται για την καταγραφή των συντεταγμένων των σημείων μίας επιφάνειας μέσω της αλληλεπίδρασης των σημείων με κατάλληλη ακίδα. Οι συντεταγμένες των διακεκριμένων σημείων μετρώνται διαδοχικά και έτσι προσδιορίζεται η τοπογραφία μιας επιφάνειας, η οποία ουσιαστικά αποτελείται από, ένα σύνολο δεδομένων, τις συντεταγμένες των σημείων είτε κατά μήκος μιας γραμμής είτε σε μία περιοχή της υπό μέτρηση επιφάνειας.

Στην προφίλομετρία με επαφή, μία λεπτή ακίδα σύρεται ομαλά και σταθερά σε όλη την υπό εξέταση επιφάνεια. Η θέση της ακίδας στο επίπεδο της επιφάνειας καταγράφεται (συνήθως μέσω του συστήματος ενεργοποίησης κίνησης) και η κάθετη θέση της ακίδας καταγράφεται μέσω ενός μετατροπέα.

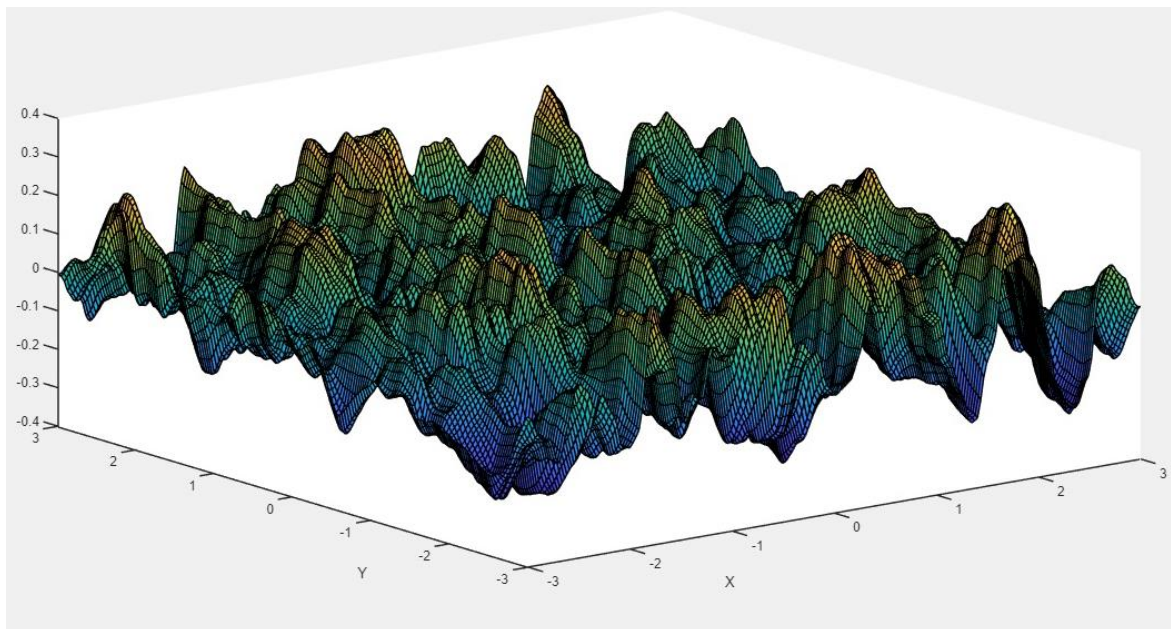
Η μέθοδος AFM χρησιμοποιεί πολύ λεπτότερη ακίδα πάνω σε ένα εύκαμπτο υποστήριγμα με έναν ενεργοποιητή πίεσης ο οποίος διατηρεί σταθερή τη δύναμη μεταξύ της επιφάνειας και της ακίδας. Με τη μέθοδο AFM οι συντεταγμένες μετρώνται με μεγαλύτερη ακρίβεια. Με τη μέθοδο *contact profilometry* προκύπτουν κάποιοι αναπόφευκτοι περιορισμοί οι οποίοι πηγάζουν από το σχήμα της ακίδας. Σε κάποιες εφαρμογές, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε

σημαντικό σφάλμα. Γενικά, όλες οι μέθοδοι που περιλαμβάνουν γραφίδες παράγουν εξομαλυσμένες επιφάνειες εξαιτίας των πεπερασμένων διαστάσεων της ακίδας.

Από τη στιγμή που τα τοπογραφικά δεδομένα έχουν συλλεγεί αναπαρίστανται γραφικά. Τα απλά προφίλ γραμμής μπορούν να παραχθούν από μετρήσεις σε μία περιοχή της επιφάνειας με τη μέθοδο της παρεμβολής. Η γραφική αναπαράσταση του προφίλ της επιφάνειας διαφέρει από το αντίστοιχο πραγματικό προφίλ (Εικόνα 10), δηλαδή το προφίλ που προκύπτει από την τομή της επιφάνειας με ένα επίπεδο.



Εικόνα 10 Διαφορά πραγματικού και μετρούμενου προφίλ επιφάνειας



Εικόνα 11 Γραφική Αναπαράσταση Διδιάστατης Επιφάνειας

Από τις μετρήσεις με προφίλομετρο και μικροσκόπιο ατομικής δύναμης έχει γίνει ξεκάθαρο ότι η πλειονότητα των επιφανειών έχει πολύπλοκα μορφολογικά χαρακτηριστικά των οποίων ο μαθηματικός χαρακτηρισμός είναι κρίσιμος αφού επηρεάζουν πολλές ιδιότητές τους. Δεδομένου λοιπόν ότι, η μέτρηση και η αναπαράσταση πραγματικών επιφανειών σε διάφορες

κλίμακες αναδεικνύει περίπλοκες και τυχαίες γεωμετρικές δομές, η μελέτη τους καθίσταται δυσχερής και στην παρούσα εργασία επιδιώκεται με χρήση της Στατιστικής.

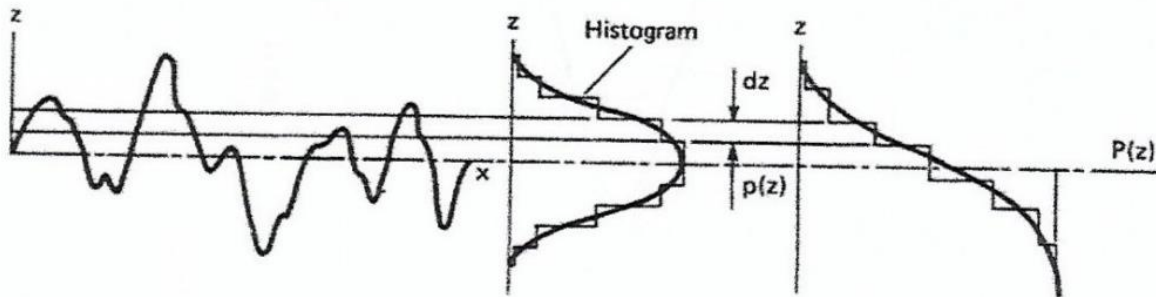
Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι το ύψος $z(x)$ του προφίλ μίας επιφάνειας είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κάποια κατανομή πιθανότητας. Αυτή η θεώρηση μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τα δεδομένα (τιμές ύψους του προφίλ της επιφάνειας) μέσω των παραμέτρων της κατανομής (μέτρα θέσης και διασποράς) οι οποίες εκτιμώνται από το δείγμα.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ) F_z της τυχαίας μεταβλητής $z(x)$ ορίζεται ως η πιθανότητα $F_z(z) = P(z(x) < z)$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) f_z ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος της σ.κ, δηλαδή:

$$f_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} \quad (1.5)$$

Αντίστροφα, $F_z(z) = \int_{R_1}^z f_z(x) dx$, όπου R_1 είναι το αριστερό άκρο του στηρίγματος της κατανομής. Επίσης, $\int_{R_1}^{R_2} f_z(z) dz = 1$, όπου R_1 και R_2 τα άκρα του στηρίγματος της κατανομής.

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την σύνδεση μεταξύ της μορφολογίας των στοχαστικών επιφανειών και των κατανομών πιθανότητας αρκεί να παρατηρήσουμε την παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 12 Μορφολογία στοχαστικών επιφανειών – κατανομές πιθανότητας [1]

Ο κατακόρυφος άξονας z αφορά τις τιμές ύψους ενός τυχαίου προφίλ μίας επιφάνειας (στην πραγματικότητα το πλήθος των τιμών αυτών είναι πεπερασμένο δεδομένου ότι αφορούν διακριτοποιημένο προφίλ επιφάνειας). Θεωρώντας το z τυχαία μεταβλητή παρουσιάζεται το ιστόγραμμα της z το οποίο απεικονίζει τη συχνότητα ή τον αριθμό των τιμών του ύψους που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες τιμές, οι οποίες ορίζουν μία κλάση, ως συνάρτηση του ύψους. Το ιστόγραμμα αυτό στην περίπτωση των γκαουσιανών επιφανειών, προσεγγίζεται αρκετά καλά με μία καμπύλη κανονικής κατανομής. Τέλος, παρουσιάζεται και το αντίστοιχο γράφημα της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής του ύψους z .

Η στατιστική ανάλυση, της υπό μελέτη κατανομής, είναι εφικτή με την εύρεση περιγραφικών στατιστικών μέτρων. Τα περιγραφικά μέτρα συνιστούν **εκτιμητές** των βασικών παραμέτρων της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που μελετάμε, οι οποίοι υπολογίζονται από τις παρατηρήσεις του δείγματος δίνοντας μας πληροφορίες για τα δεδομένα. Τα περιγραφικά στατιστικά μέτρα χωρίζονται, κατά βάση, σε τρεις κατηγορίες:

α. Τα **μέτρα θέσης** τα οποία μας δίνουν μία εικόνα για τη θέση των παρατηρήσεων στο εύρος των δεδομένων όπως η δειγματική μέση τιμή, η δειγματική διάμεσος και η δειγματική επικρατούσα τιμή.

β. Τα **μέτρα μεταβλητότητας** τα οποία μας πληροφορούν για την διασπορά (μεταβλητότητα) των δεδομένων γύρω από την μέση τιμή. Αυτά είναι η δειγματική διασπορά ή διακύμανση, το δειγματικό εύρος και τα ποσοστιαία σημεία.

γ. Τα **μέτρα λοξότητας και κύρτωσης** τα οποία μας δίνουν πληροφορίες για την μορφή της κατανομής του δείγματος όπως οι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης.

Όλοι οι παραπάνω παράμετροι καθορίζουν την μορφή της κατανομής και προκύπτουν από τον γενικό τύπο της ροπής ν-οστής τάξης για διάφορες τιμές του ν.

Η κεντρική ροπή ν-οστής τάξης για συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$E[(z - E(z))^ν] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - E(z))^ν f_z(z) dz \quad (1.6)$$

όπου E ο τελεστής της μέσης τιμής

$$E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_z(z) dz. \quad (1.7)$$

Για ν=1 και E(z)=0 προκύπτει η μέση τιμή ενώ για ν=2 η διασπορά

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - E(z))^2 f_z(z) dz \quad (1.8)$$

Για ν=3, παίρνουμε την κεντρική ροπή 3^{ης} τάξης

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z - E(z))^3 f_z(z) dz \quad (1.9)$$

η οποία διαιρεμένη με το σ^3 μας δίνει τον συντελεστή λοξότητας ή ασυμμετρίας (Skewness):

$$S_k = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (z - E(z))^3 f_z(z) dz}{\sigma^3} \quad (1.10)$$

Ο συντελεστής αυτός μας δίνει το μέγεθος της ασυμμετρίας της κατανομής γύρω από τη μέση τιμή της, δηλαδή το κατά πόσο υπάρχει διαφοροποίηση της μορφής της κατανομής αριστερά (θετική ασυμμετρία) ή δεξιά (αρνητική ασυμμετρία) από τη μέση τιμή της.

Τέλος, για $n=4$ προκύπτει η κεντρική ροπή 4^{ης} τάξης

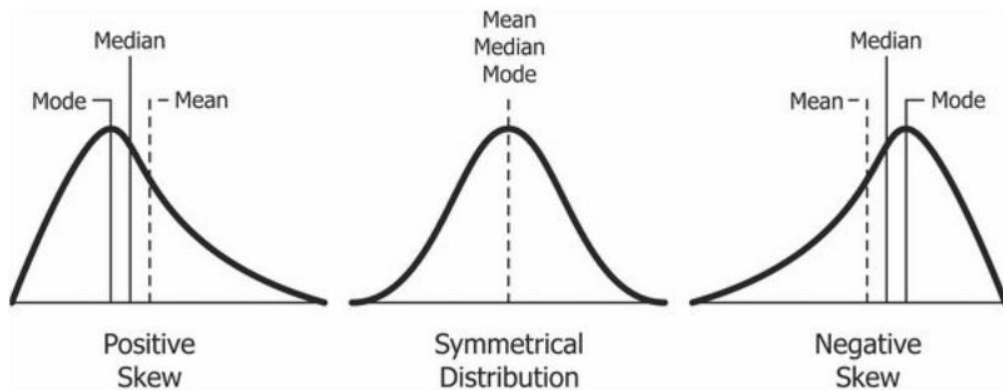
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z - E(z))^4 f_z(z) dz \quad (1.11)$$

η οποία διαιρεμένη με το σ^4 μας δίνει τον συντελεστή κύρτωσης (Kurtosis) του Pearson:

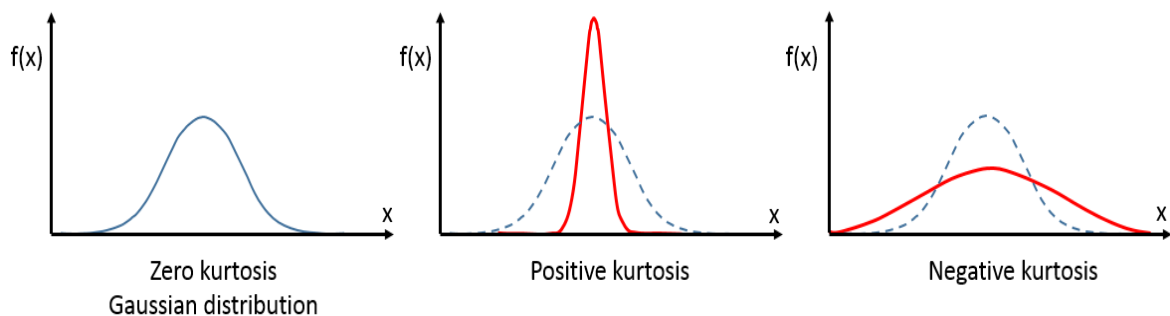
$$K = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (z - E(z))^4 f_z(z) dz}{\sigma^4} \quad (1.12)$$

Ο συντελεστής αυτός μας δίνει ένα μέτρο του πάχους της κατανομής. Αν $K > 3$ η κατανομή είναι λεπτόκυρτη ενώ αν $K < 3$ είναι πλατύκυρτη.

Για υπολογισμό των κεντρικών ροπών από το δείγμα αντικαθιστούμε τη θεωρητική μέση τιμή $E(z)$ με τη δειγματική \bar{Z} . Στη διακριτή περίπτωση το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται με άθροισμα.



Εικόνα 13 Skewness



Εικόνα 14 Kurtosis

Για την ειδική περίπτωση όπου $S_k=0$ και $K=3$ η κατανομή είναι η κανονική.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, τα δεδομένα των τιμών του ύψους τείνουν να ακολουθούν την κανονική κατανομή (Gaussian distribution) η οποία έχει την εξής σ.π.π:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.13)$$

όπου m η μέση τιμή και σ η τυπική απόκλιση. Πολλές φορές για λόγους απλούστευσης θεωρούμε την κανονικοποιημένη τυχαία μεταβλητή $z^* = \frac{z-m}{\sigma}$ της οποίας η σ.π.π είναι η παρακάτω:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^{*2}}{2}\right) \quad (1.14)$$

Η κανονική κατανομή συναντάται στη φύση καθώς και σε τεχνικές εφαρμογές όταν η θεωρούμενη ως τυχαία ποσότητα είναι το άθροισμα πολλών τυχαίων και μεταξύ τους ανεξάρτητων παραγόντων. Για παράδειγμα, όταν κατασκευάζεται μία μηχανική επιφάνεια υπάρχουν πολλοί τυχαίοι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την τραχύτητα και συνεπώς το ύψος της τραχύτητας ακολουθεί την κανονική κατανομή. Από την άλλη πλευρά, στη νανοτεχνολογία έχουμε σχεδιασμένη νανοδόμηση επιφανειών οπότε και αναμένουμε συχνές αποκλίσεις από την κανονικότητα.

Τέλος χρήζει αναφοράς το γεγονός ότι από την στατιστική θεώρηση του ύψους των προφίλ των επιφανειών απορρέουν μετρικές σχέσεις που καθιστούν ευχερέστερο τον χαρακτηρισμό των επιφανειών.

Κεφάλαιο 2^ο

2. Τραχύτητα Επιφανείας

2.1 Βασικά στοιχεία τραχύτητας επιφανειών

Η τραχύτητα είναι το βασικό κριτήριο της ποιότητας μιας επιφάνειας καθώς αποτελεί μία ποσοτικοποίηση της υφής της. Συγκεκριμένα, ως *τραχύτητα ορίζεται το μέτρο των κάθετων αποκλίσεων της πραγματικής επιφάνειας από την ιδανική (μαθηματική) της μορφή.*

Όσο μεγαλύτερες είναι αυτές οι αποκλίσεις, τόσο πιο τραχιά θεωρείται η επιφάνεια και όσο μικρότερες τόσο πιο λεία. Η τραχύτητα καθορίζει την ποιότητα και το είδος της κατεργασίας κατασκευής μίας επιφάνειας ενώ επιπλέον είναι πολύ σημαντικός παράγοντας αναφορικά τον τρόπο που αλληλοεπιδρά το εκάστοτε υλικό με το περιβάλλον του. Η αυξημένη τραχύτητα ενός υλικού ευθύνεται για την φθορά του προϊόντος του χρόνου, την εμφάνιση ρωγμών και διαβρώσεων καθώς και το μειωμένο σε σχέση με το αναμενόμενο χρόνο ζωής του.

Από την άλλη πλευρά, η αυξημένη τραχύτητα προσδίδει νέες ιδιότητες στο υλικό (βακτηριοκτονία, υπερυδροφοβικότητα, αντιανακλαστικότητα κ.α.) που μπορεί να φανούν εξαιρετικά χρήσιμες σε πολλές εφαρμογές.

Οι παράγοντες, που επηρεάζουν την τραχύτητα μιας κατεργασμένης επιφάνειας είναι οι ακόλουθοι:

- α. Η κινηματική της κατεργασίας κατασκευής του (σχετική κίνηση εργαλείου – τεμαχίου).
- β. Η πρώτη ύλη του κατεργαζόμενου τεμαχίου.
- γ. Η γεωμετρική μορφή του εργαλείου
- δ. Οι συνθήκες κατασκευής και η επιτυγχανόμενη ακρίβεια.
- ε. Οι ταλαντώσεις του συστήματος

Οι προαναφερθέντες παράγοντες οδηγούν στην δημιουργία των κάθετων αποκλίσεων από την ιδανική μορφή της επιφανείας, ως ακολούθως:

στ. Αποκλίσεις πρώτης τάξης, οι οποίες είναι μακρογεωμετρικές αποκλίσεις από την ονομαστική επιφάνεια (π.χ. αποκλίσεις από σφάλματα επιπεδότητας, παραλληλότητας κ.λ.π.). Οφείλονται κυρίως σε κακή στήριξη της πρώτης ύλης κατασκευής ή του αντίστοιχου εργαλείου.

ζ. Αποκλίσεις δεύτερης τάξης, είναι κυματώσεις της επιφάνειας με μεγάλη σχετικά περίοδο, οι οποίες μπορούν να αποδοθούν σε εκκεντρότητα του συνδυασμού πρώτης ύλης –

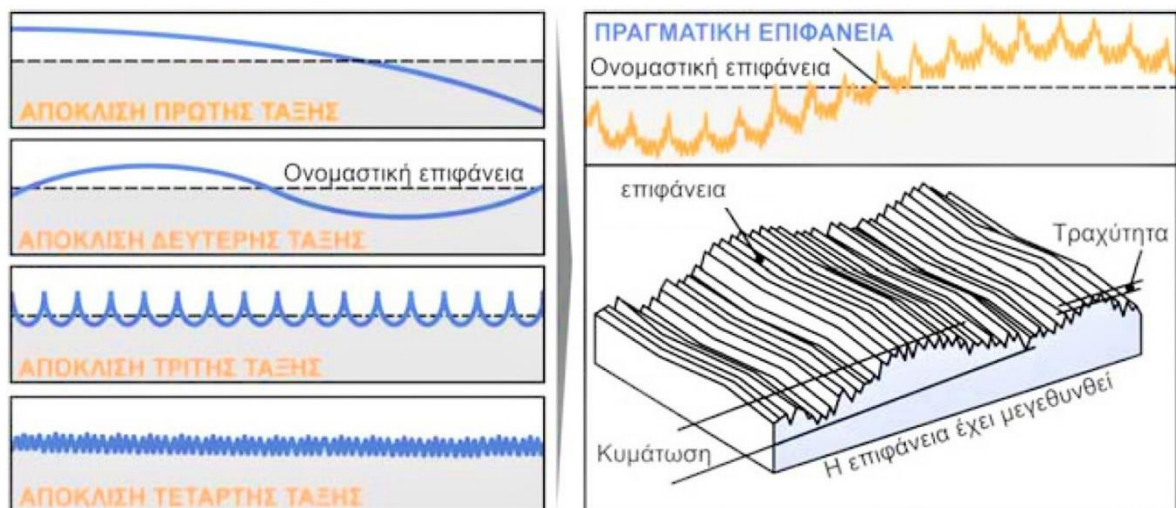
εργαλείου είτε σε ταλαντώσεις του συστήματος.

η. Αποκλίσεις τρίτης τάξης, είναι ανωμαλίες της επιφάνειας υπό μορφή αυλακώσεων, που οφείλονται σε ατέλειες στη μορφή των εργαλείων και στην κινηματική των κατεργασιών.

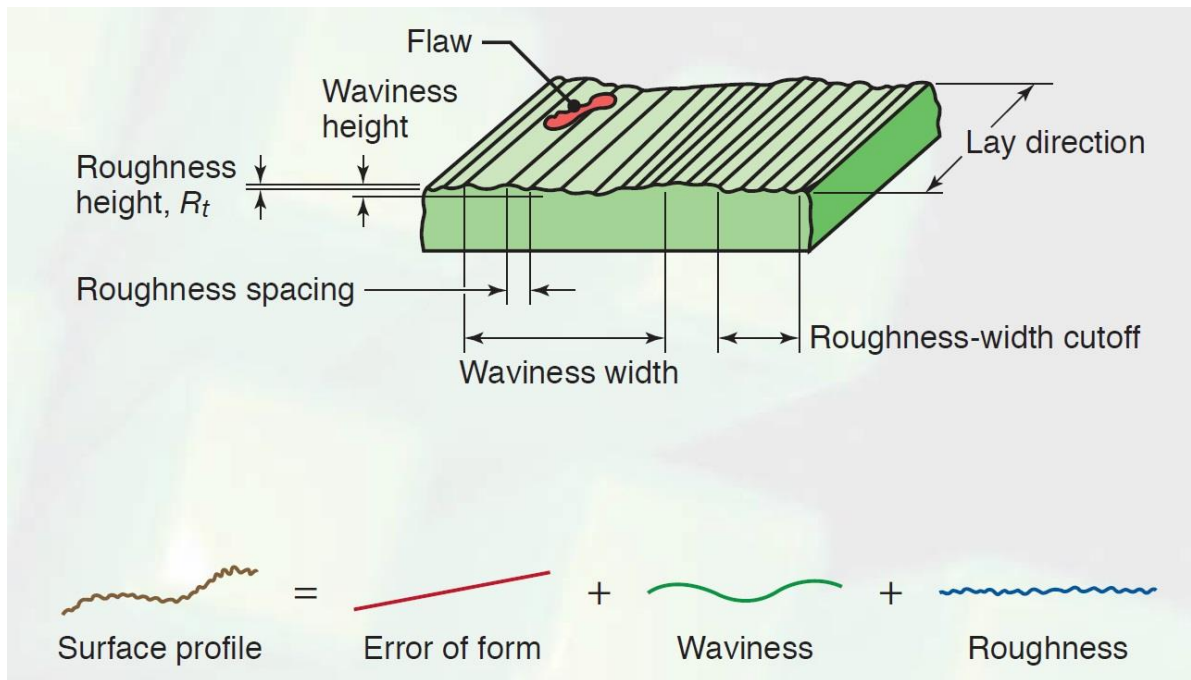
θ. Αποκλίσεις τέταρτης τάξης, είναι μικρογεωμετρικές ανωμαλίες της επιφάνειας, οι οποίες οφείλονται σε ατέλειες των μεθόδων και των εργαλείων κατασκευής της επιφάνειας

ι. Αποκλίσεις έκτης τάξης και ανώτερης τάξης: είναι ανωμαλίες της επιφάνειας, μικρογεωμετρικής μορφής, οι οποίες μπορούν να αποδοθούν σε χημικές επιδράσεις, σε μεταβολές στο κρυσταλλικό πλέγμα του μετάλλου κτλ.

Οι αποκλίσεις τρίτης και ανώτερης τάξεως, αναφερόμενες στη μικρομορφή της επιφάνειας, συνιστούν ότι ονομάζουμε τραχύτητα επιφάνειας.



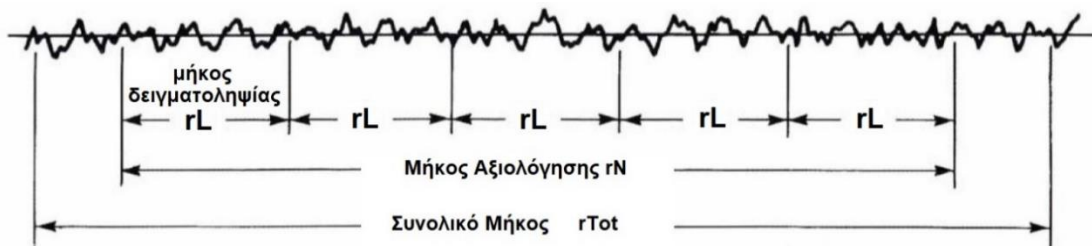
Εικόνα 15 Αποκλίσεις από Ονομαστική Επιφάνεια



Εικόνα 16 Ανάλυση Αποκλίσεων Επιφανειών

Η κατατομή (προφίλ) της επιφάνειας προσδιορίζεται με την ιχνηλάτηση των ανωμαλιών της, με τη χρήση τεχνικών που στηρίζονται σε μηχανικά, ηλεκτρικά ή οπτικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κατά τη σάρωση της επιφάνειας κατά το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Οι διατάξεις με τις οποίες επιτυγχάνεται η ιχνηλάτηση ονομάζονται Κατατομόμετρα ή Προφιλόμετρα ή Τραχύμετρα. Ανάλογα με το φαινόμενο στο οποίο στηρίζεται η λειτουργία τους, διακρίνουμε τα Μηχανικά Ταχύμετρα, Ηλεκτρομηχανικά Ταχύμετρα, Οπτικά Προφιλόμετρα, κ.λπ.

Δεδομένου ότι η τοπογραφία μιας επιφάνειας είναι δυνατό να περιλαμβάνει ανωμαλίες εξ' αιτίας της τραχύτητας, με διαφορετικές αποστάσεις και ύψη κορυφών. Για να πάρουμε μια αντιπροσωπευτική μέτρηση της τραχύτητας μίας επιφάνειας είναι απαραίτητο να επιλέξουμε ένα ικανοποιητικό μήκος ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να περιλαμβάνει ένα πλήρες αντιπροσωπευτικό δείγμα (rL) της επιφάνειας.



Εικόνα 17 Δειγματοληψία Επιφανειών

2.1.2 Πειραματική διαδικασία μέτρησης τραχύτητας

Για τη μέτρηση της τραχύτητας ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

- α. Τοποθετείται η εγκάρσια μονάδα μέτρησης πάνω στο προς μέτρηση δοκίμιο και

μία ακίδα (διαμάντι) διέρχεται από την επιφάνεια του δείγματος, της οποίας θέλουμε να μετρήσουμε την τραχύτητα. Το μετακινούμενο στέλεχος του οργάνου σαρώνει την προς μέτρηση επιφάνεια ενώ η ακίδα εφάπτεται στην επιφάνεια έτσι ώστε το στέλεχος να είναι παράλληλο με το οριζόντιο επίπεδο.

β. Οι κατακόρυφες κινήσεις της ακίδας μετατρέπονται σε ηλεκτρικό σήμα με τη χρήση ενός πιεζοκρυστάλλου και κατόπιν καταγράφεται σε αναλογικό όργανο. Το ηλεκτρικό σήμα φιλτράρεται, ενισχύεται και ψηφιοποιείται με χρήση Η/Υ (προγραμματισμός σε Matlab).

γ. Καταγράφουμε το προφίλ της επιφάνειας και τα απαιτούμενα στοιχεία για τον υπολογισμό των μετρικών της τραχύτητας, αφού έχουμε επιλέξει το κατάλληλο μήκος αποκοπής ή ολοκλήρωσης (cut-off length).

δ. Σχεδιάζουμε την κεντρική γραμμή της καταγραφείσας επιφάνειας.

ε. Υπολογίζεται η τραχύτητα καθώς και πλήθος μετρικών της.

στ. Σχεδιάζουμε την καμπύλη του προφίλ της επιφάνειας.

2.2 Παράμετροι χαρακτηρισμού τραχύτητας

Οι επιφάνειες, ακόμα και οι φαινομενικά λείες, παρουσιάζουν κάποια μορφολογία. Η τραχύτητα αποτελεί καθοριστικό στοιχείο της ποιότητας της επιφάνειας. Ωστόσο, η τιμή της τραχύτητας είναι ένα μέγεθος στοχαστικό και κατ' επέκταση δεν μετράται αλλά χαρακτηρίζεται. Για το χαρακτηρισμό της έχουν προταθεί διάφοροι παράμετροι ως προς τις οποίες ορίζονται και μέτρα της τραχύτητας, με διάφορα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

2.2.1 Παράμετροι Περιγραφής Ύψους

Η μέτρηση της γίνεται είτε κατά μήκος ενός μεμονωμένου προφίλ γραμμής ή κατά μήκος ενός σετ από παράλληλα προφίλ γραμμής (διάγραμμα επιφάνειας). Η τραχύτητα συνήθως χαρακτηρίζεται με μία από τις δύο στατιστικές παραμέτρους περιγραφής του ύψους της επιφάνειας που υποστηρίζεται από το Αμερικανικό Εθνικό Ίδρυμα Προτυποποίησης (ANSI-American National Standards Institute) και τον Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (ISO-International Standardization Organization). Οι παράμετροι αυτοί είναι:

α. το Ra, CLA (center line average) ή AA (arithmetic average)

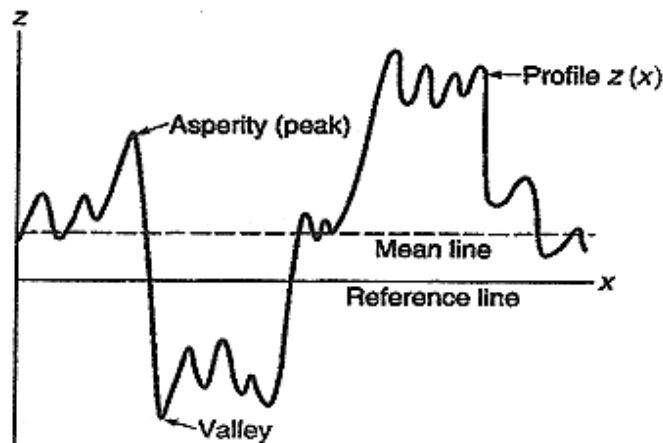
β. το RMS (root mean square) ή τυπική απόκλιση σ ή Rq.

Δύο άλλες στατιστικές παράμετροι περιγραφής του ύψους της επιφάνειας που σπάνια χρησιμοποιούνται είναι:

γ. η λοξότητα Sk (skewness)

δ. η κύρτωση K (kurtosis) και

ε. η ακραία τιμή ύψους R_{\max} (μέγιστη τιμή διαφοράς ύψους κορυφής-κοιλιάδας).



Εικόνα 18 Γραφική παράσταση προφίλ επιφάνειας $z(x)$

Υποθέτουμε ένα προφίλ επιφάνειας, $z(x)$, στο οποίο το ύψος μετριέται από την γραμμή αναφοράς. Ορίζουμε μία μέση γραμμή, έτσι ώστε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του προφίλ που βρίσκεται πάνω από τη μέση γραμμή και της μέσης γραμμής να είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του προφίλ που βρίσκεται κάτω από τη μέση γραμμή και της μέσης γραμμής. Το R_a είναι ο αριθμητικός μέσος των απολύτων τιμών των κάθετων αποκλίσεων από τη μέση γραμμή κατά μήκος του προφίλ. Η τυπική απόκλιση σ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμητικού μέσου των τετραγώνων των κάθετων αποκλίσεων από τη μέση γραμμή. Το $R_q = \text{RMS}$ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμητικού μέσου των τετραγώνων των κάθετων αποκλίσεων. Οι μαθηματικοί τύποι που περιγράφουν αυτά τα μεγέθη είναι:

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |z - m| dx, \text{ όπου } m = \frac{1}{L} \int_0^L z dx \quad (2.1)$$

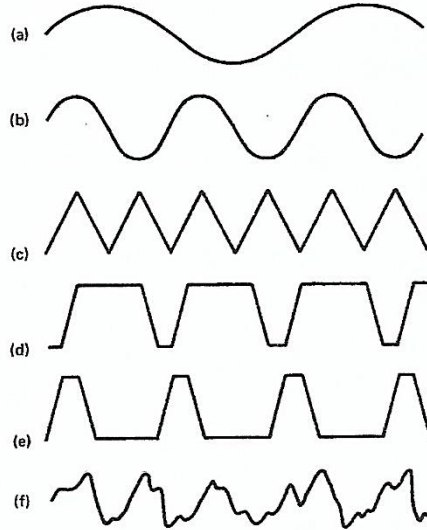
$$R_q^2 = \text{RMS}^2 = \frac{1}{L} \int_0^L (z^2) dx \quad (2.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{L} \int_0^L (z - m)^2 dx = \text{RMS}^2 - m^2 \text{ (variance)} \quad (2.3)$$

$$Sk = \frac{1}{\sigma^3 L} \int_0^L (z - m)^3 dx \quad (2.4)$$

$$K = \frac{1}{\sigma^4 L} \int_0^L (z - m)^4 dx \quad (2.5)$$

Παρότι οι παράμετροι ύψους συνιστούν ένα σημαντικό στοιχείο για τη μορφολογία των επιφανειών, ωστόσο αυτές καθαυτές δεν είναι επαρκείς καθώς δεν δύνανται να μας προσφέρουν έναν πλήρη χαρακτηρισμό για τα προφίλ των επιφανειών. Κατά κύριο λόγο, αυτές οι παράμετροι αφορούν τη σχετική κίνηση του προφίλ μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση. Συνεπώς, δεν μας παρέχουν καμία πληροφορία σχετικά με την κλίση, την μορφή και το μέγεθος των κορυφών όπως επίσης και για τη συχνότητα και την ομαλότητα της εμφάνισής τους. Είναι δυνατό για επιφάνειες των οποίων τα προφίλ διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό οι τιμές των R_a ή RMS να είναι ίσες, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 19 Προφίλ επιφανειών με το ίδιο R_a

2.2.2 Χωρικές παράμετροι

Είναι σαφές ότι για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών της τραχύτητας πέραν των παραμέτρων του ύψους της κυμάτωσης είναι απαραίτητο να έχουμε κάποια δεδομένα αναφορικά με την απόσταση των κορυφών της επιφάνειας. Δύο παράμετροι που χρησιμοποιούνται περιστασιακά είναι η peak density, $N_p(\eta)$ και η zero crossings density, N_0 . N_p είναι η πυκνότητα των κορυφών (τοπικών μεγίστων) του προφίλ της επιφάνειας σε αριθμό ανά μονάδα μήκους και η είναι η πυκνότητα των κορυφών της επιφάνειας σε αριθμό ανά μονάδα εμβαδού. N_p και η είναι μέτρα μεγίστων ανεξάρτητα από το ύψος. N_0 ορίζεται ως ο αριθμός των φορών που το προφίλ περνά πάνω από τη μέση γραμμή ανά μονάδα μήκους.

Μία τρίτη παράμετρος είναι το mean peak spacing (A_R) και ορίζεται ως ο μέσος όρος της απόστασης μεταξύ των κορυφών που έχουν μετρηθεί. Αυτή η παράμετρος είναι περίπου ίση με $\frac{1}{N_p}$. Άλλες παράμετροι που χρησιμοποιούνται σπάνια είναι η μέση κλίση (mean slope) και η μέση καμπυλότητα (mean curvature), οι οποίες είναι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του προφίλ της επιφάνειας αντίστοιχα.

Τέλος, μία σημαντική χωρική παράμετρος είναι το correlation length ξ (μήκος συσχέτισης). Για τον ορισμό του θα χρησιμοποιηθούν οι έννοιες των autocovariance (ACVF) και autocorrelation function (ACF). Για την συνάρτηση ύψους $z(x)$ η autocovariance function είναι η μέση τιμή του γινομένου δύο τιμών της συνάρτησης ύψους, $z(x)$ και $z(x+d)$, που απέχουν μεταξύ τους χωρική (οριζόντια) απόσταση d . Συγκεκριμένα δίνεται από τον τύπο:

$$R(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L z(x)z(x+d)dx \quad (2.6)$$

Όπου L είναι το μήκος δειγματοληψίας του προφίλ της επιφάνειας.

Η κανονικοποιημένη μορφή της ACVF είναι η autocorrelation function ACF, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\rho(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L\sigma^2} \int_0^L [z(x) - m][z(x+d) - m] dx \quad (2.7)$$

Το correlation length ορίζεται ως η μετατόπιση ξ για την οποία η ACF μεταξύ δύο σημείων συγκρατεί τις τιμές μικρότερες από $\frac{1}{e}$ όπου e η σταθερά του Euler ≈ 2.7183 . Συνεπώς, το correlation length προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\rho(d) = \frac{1}{e} \quad (2.8)$$

Αυτός ο ορισμός προκύπτει από το γεγονός ότι πολλές μηχανικές επιφάνειες διαπιστώνεται ότι έχουν εκθετική ACF, της μορφής:

$$C(d) = e^{-d/\xi} \quad (2.9)$$

Το correlation length συνιστά ένα δείκτη της ταχύτητας απόσβεσης των συσχετίσεων μεταξύ των γειτονικών σημείων μίας επιφάνειας και εμφάνισης της τυχειότητας. Είναι το μήκος πάνω από το οποίο η τιμή της ACF πέφτει σε ένα μικρό μέρος της αρχικής της τιμής

Όταν η $C(d)$ είναι κοντά στη μονάδα, δύο σημεία της επιφάνειας που απέχουν απόσταση d είναι ισχυρά συσχετισμένα. Αντίθετα, όταν η $C(d)$ παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν δύο σημεία της επιφάνειας που απέχουν απόσταση d μεταξύ τους είναι ασθενώς συσχετισμένα. Όταν η $C(d)$ παίρνει τιμές κάτω από $\frac{1}{e} \approx 0.36$ τότε τα σημεία της επιφάνειας που απέχουν απόσταση d μπορούν να θεωρηθούν ασυσχέτιστα. Το correlation length (ξ) μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα μέτρο της κατώτερης κλίμακας εμφάνισης τυχειότητας σε μία επιφάνεια.

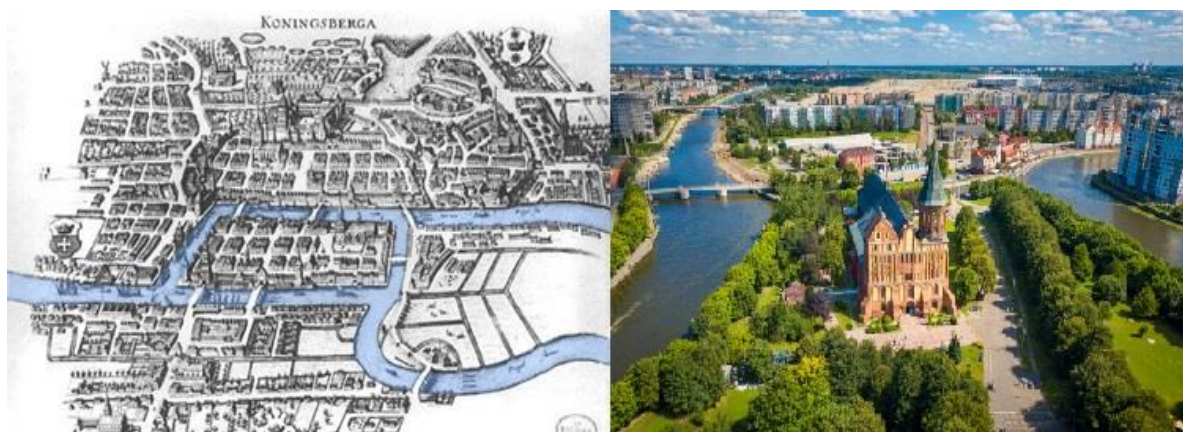
2.3 Εφαρμογές

Η τραχύτητα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό του πώς ένα πραγματικό αντικείμενο θα αλληλεπιδράσει με το περιβάλλον του. Ανώμαλες επιφάνειες φθείρονται πιο γρήγορα και έχουν υψηλότερους συντελεστές τριβής από λείες επιφάνειες. Η τραχύτητα είναι συχνά μια ένδειξη της απόδοσης ενός εξαρτήματος μηχανής, δεδομένου ότι ανωμαλίες στην επιφάνεια μπορούν να σχηματίζουν περιοχές πυρήνωσης για ρωγμές ή διάβρωση. Από την άλλη πλευρά, μεγαλύτερη τιμή τραχύτητας συνεπάγεται και καλύτερη πρόσφυση καθώς και ευχερέστερη μεταφορά των δυνάμεων μεταξύ συναρμολογημάτων. Παρόλαυτα, η τραχύτητα είναι συχνά ανεπιθύμητη και επιπλέον, είναι δύσκολο και δαπανηρό να ελεγχθεί κατά τη κατασκευή ενός εξαρτήματος. Μειώνοντας την τραχύτητα της επιφάνειας συνήθως αυξάνεται εκθετικά το κόστος κατασκευής του. Αυτό οδηγεί συχνά σε μια εξισορρόπηση μεταξύ του κόστους παραγωγής ενός στοιχείου και την απόδοσή του σε μια εφαρμογή.

Κεφάλαιο 3^ο

3. Θεωρία Γράφων

Η παλιά πόλη του Königsberg (σημερινό Kaliningrad, Ρωσία) βρίσκεται δίπλα στον ποταμό Pregolya και έχει δυο νησάκια που επικοινωνούσαν με την πόλη μέσω επτά γεφυρών. Ο ποταμός ρέει γύρω από τα δυο νησάκια. και όλα τα γεφύρια, εκτός από ένα, συνδέουν τις όχθες με τις νησίδες, ενώ το άλλο συνδέει τα δυο νησάκια μεταξύ τους.



Εικόνα 20 Η πόλη του Königsberg

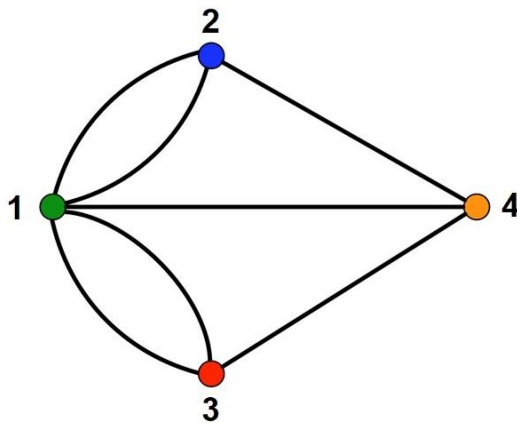
Οι κάτοικοι του Königsberg συνήθιζαν να κάνουν περίπατο στις γέφυρες και τους είχε προκύψει ένα πρόβλημα. **Είναι δυνατό να κάνει κάποιος τον περίπατο του και να περάσει και από τις 7 γέφυρες, χωρίς να περάσει από κάποια γέφυρα δεύτερη φορά;** Κανείς δεν μπορούσε να βρει τη λύση παρότι πολλοί το επιχειρούσαν.

Αυτός που έμελλε να το λύσει, ήταν ο Ελβετός μαθηματικός **Leonard Euler** ο οποίος ήταν την συγκεκριμένη περίοδο στην υπηρεσία της Ρωσίδας Τσαρίνας Αικατερίνης της μεγάλης, στην Αγία Πετρούπολη. Το 1736 ο **Euler** σταμάτησε στο Königsberg κι άκουσε για το πρόβλημα. Όχι μόνο το έλυσε αποδεικνύοντας ότι μια τέτοια διαδρομή δεν υπάρχει, αλλά έθεσε και τις βάσεις για το γνωστικό πεδίο των μαθηματικών που σήμερα ονομάζεται **θεωρία γράφων** (ή γραφημάτων).

3.1 Ορισμός Γράφου

Η Θεωρία Γράφων (graph theory) έχει εφαρμογές στη μηχανική, στις οικονομικές επιστήμες, στην πληροφορική κτλ και μελετά τις σχέσεις αντικείμενων τα οποία συνδέονται με κάποιο ορισμένο τρόπο.

Συγκεκριμένα, γράφος καλείται το σύνολο $G = (V, E)$ το οποίο αποτελείται από ένα επιμέρους σύνολο σημείων ή κορυφών ή κόμβων (τα οποία κατ' ουσία είναι τα μελετούμενα αντικείμενα) που συμβολίζονται με V (vertices) και ένα σύνολο E (edges) συνδέσμων ή ακμών (οι οποίες κατ' ουσία είναι οι σχέσεις των αντικειμένων) μεταξύ των στοιχείων του V .



Εικόνα 21 Αναπαράσταση γράφου

Τάξη $|V|$, ενός γραφήματος είναι ο αριθμός των κορυφών του. Το μέγεθος $|E|$, ενός γραφήματος είναι ο αριθμός των ακμών του. Κάθε κόμβος του γράφου χαρακτηρίζεται από το βαθμό του, ο οποίος είναι ίσος με τον αριθμό των ακμών που συνδέονται με αυτόν, όπου μια ακμή η οποία συνδέεται με την κορυφή (κάθε βρόγχος υπολογίζεται ως δύο ακμές, μία εξερχόμενη και μία εισερχόμενη στον κόμβο).

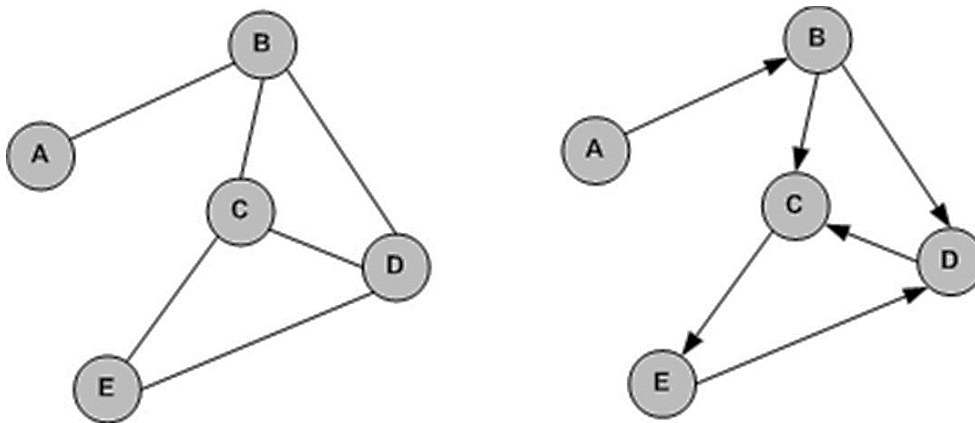
Επομένως, ένα γράφημα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ αποτελούμενο από ένα σύνολο V των κορυφών ή κόμβων μαζί με ένα E σύνολο από ακμές ή γραμμές, οι οποίες είναι υποσύνολα δύο στοιχείων V , δηλαδή, μια ακμή σχετίζεται με δύο κορυφές και η σχέση απεικονίζεται ως διατεταγμένο ζεύγος των κορυφών σε σχέση με τη συγκεκριμένη ακμή. Οι κορυφές που ανήκουν σε μια ακμή ονομάζονται άκρα της ακμής. Μια κορυφή μπορεί να υπάρχει σε ένα γράφημα και να μην ανήκει σε ακμή.

3.2 Μη κατευθυνόμενοι και χωρίς βάρη γράφοι

Ένας γράφος είναι κατευθυνόμενος ή μη κατευθυνόμενος, αν οι ακμές του είναι ή δεν είναι προσανατολισμένες προς μία κατεύθυνση, αντίστοιχα. Στον κατευθυνόμενο γράφο ο προσανατολισμός της ακμής συμβολίζεται με ένα βέλος. Στον μη κατευθυνόμενο γράφο τα ζεύγη των κορυφών που ορίζουν τις ακμές του στερούνται διάταξης. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ένας μη κατευθυνόμενος γράφος μπορεί να θεωρηθεί και ως συμμετρικός κατευθυνόμενος γράφος.

Ο μέγιστος αριθμός ακμών για ένα μη κατευθυνόμενο γράφο με n κορυφές είναι $n(n-1)/2$, ενώ ο αντίστοιχος αριθμός σε κατευθυνόμενο γράφο είναι $n(n-1)$. Ένας γράφος (κατευθυνόμενος ή μη), με τον μέγιστο αριθμό ακμών λέγεται πλήρης.

Ο μη κατευθυνόμενος γράφος είναι μια ειδική περίπτωση του κυρίου ορισμού του γράφου. Αν δύο διαφορετικές ακμές x και y προσπίπτουν σε κοινό κόμβο ονομάζονται γειτονικές ακμές. Με τον όρο γράφημα θα αναφερόμαστε σε ένα απλό, μη κατευθυνόμενο γράφο



Εικόνα 22 Μη κατευθυνόμενος γράφος και κατευθυνόμενος γράφος

Ένας γράφος G λέγεται μη σταθμισμένος αν στις ακμές του δεν έχει οριστεί μια συνάρτηση κόστους ή βάρους. Η συνάρτηση βάρους w μπορεί να μοντελοποιεί κόστος, απόσταση, χρόνο

Σταθμισμένος γράφος λέγεται το γράφημα όπου η κάθε ακμή του χαρακτηρίζεται από κάποιο αριθμό (έχει κάποια τιμή) που ονομάζεται βάρος ή βαρύτητα της ακμής.

3.3 Τυχαίοι Γράφοι (Random Graphs)

Το μοντέλο του τυχαίου γράφου εισήχθη το 1959 από τους Erdős και Rényi. Η Θεωρία των Τυχαίων Γράφων είναι ειδική κατηγορία της Θεωρίας Γράφων και αποτελεί συνδυασμό εννοιών από την παραδοσιακή Θεωρία Γράφων και την Θεωρία Πιθανοτήτων. Η Θεωρία Τυχαίων Γράφων είναι το βασικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη των δικτύων επικοινωνιών τα οποία είναι και αυτά που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην Επιστήμη των Δικτύων. Επίσης η Θεωρία Τυχαίων Γράφων προσφέρει ένα εναλλακτικό μοντέλο το οποίο είναι χρήσιμο για τη μελέτη δικτύων τα οποία ξεχωρίζουν για τη στοχαστική συμπεριφορά τους. Το μοντέλο αυτό επιτρέπει τη χρήση πολλών βαθμών τυχειότητας στο σχηματισμό και εξέλιξη των δικτύων, το οποίο δεν επιτρεπόταν με τη χρήση της απλής Θεωρίας Γράφων.

Ο τυχαίος γράφος έχει δύο παραμέτρους: μια παράμετρο n που ελέγχει το πλήθος των κόμβων στο γράφο και μια δεύτερη m που ελέγχει την πυκνότητα του γράφου δηλαδή το πλήθος των ακμών. Η κατανομή βαθμού των κόμβων είναι αυθαίρετη. Στην πιο κοινή εκδοχή ο τυχαίος γράφος $G(n, m)$ αντιστοιχεί στο σύνολο των γράφων με n κόμβους όπου επιλέγονται m ακμές από το σύνολο των $n(n-1)/2$ και τοποθετούνται στο γράφο. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή βαθμών μπορεί να προκύψει από ομοιόμορφη δειγματοληψία. Εναλλακτικά οι ακμές επιλέγονται με πιθανότητα p οπότε προκύπτει το μοντέλο $G(n, p)$. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή των βαθμών ακολουθεί την δυωνυμική κατανομή.

Το μοντέλο του τυχαίου γράφου είναι ιδιαίτερα δημοφιλές, χάρη της απλότητάς του και των ιδιοτήτων του. Χρησιμοποιείται ευρέως στη μοντελοποίηση συστημάτων για να μελετηθεί η συμπεριφορά τους. Όμως το ερώτημα είναι κατά πόσο το παραγόμενο μοντέλο ταιριάζει στα δίκτυα του πραγματικού κόσμου; Αυτό εξαρτάται από τον τρόπο σχηματισμού ενός δικτύου, δηλαδή από τον τρόπο που ο κάθε κόμβος επιλέγει τους γείτονές του. Αν η επιλογή είναι τυχαία τότε τυχαίο θα είναι και το δίκτυο που θα προκύψει.

3.4 Χαρακτηριστικές Μετρικές Γράφων

Μία μετρική με την οποία μπορούμε να μελετήσουμε έναν γράφο είναι ο **πίνακας γειτνίασης** ο οποίος χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τις ακμές ενός γράφου. Ο πίνακας γειτνίασης A ενός γραφήματος $G(V,E)$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $|V| \times |V|$ οι γραμμές και οι στήλες του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές του. Τα στοιχεία του πίνακα γειτνίασης ορίζονται με βάση τις ακμές του γραφήματος από τη σχέση:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.1)$$

όπου με i συμβολίζουμε τις γραμμές του πίνακα και με j τις στήλες του. Αν υπάρχει ακμή που ενώνει την κορυφή u_i με την κορυφή v_j τότε το στοιχείο a_{ij} του πίνακα γειτνίασης θα ισούται με 1, διαφορετικά με 0.

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης του είναι :

α. Το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής ή της στήλης που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή v_i είναι ίσο με το βαθμό της κορυφής, δηλαδή

$$\sum_{v_j \in V} A[v_i, v_j] = \sum_{v_j \in V} A[v_j, v_i] = \text{deg}(v_i) \quad (3.2)$$

β. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα γειτνίασης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος, δηλαδή

$$\sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} A[v_i, v_j] = 2|E| \quad (3.3)$$

Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός γράφου είναι το φάσμα του γράφου.

Μονοπάτι από έναν κόμβο σε έναν άλλο ενός γραφήματος ονομάζεται μια ακολουθία συνεχόμενων κόμβων, όπου κάθε κόμβος της ακολουθίας συνδέεται με τον επόμενο του μέσω ακμής). Δηλαδή είναι μια ακολουθία ακμών (e_1, \dots, e_k) όπου για κάθε i , $1 \leq i \leq k - 1$, το ένα άκρο (το τέλος για κατευθυνόμενο γράφημα) της ακμής e_i συμπίπτει με το άλλο άκρο (την αρχή) της ακμής e_{i+1} . Το μήκος ενός μονοπατιού, είναι το πλήθος των ακμών της ακολουθίας. Ένα μονοπάτι που αποτελείται από έναν μη επαναλαμβανόμενο κόμβο και δεν περιέχει καμία ακμή, είναι ένα τετριμμένο μονοπάτι μηδενικού μήκους. Ένα μονοπάτι είναι κατευθυνόμενο αν μπορούμε να πάμε από το ένα άκρο του στο άλλο και όχι το ανάποδο. Ενώ είναι μη κατευθυνόμενο όταν και οι δύο κατευθύνσεις του είναι δυνατές. Δύο μονοπάτια λέγονται ξένα ως προς τις ακμές, αν δεν έχουν καμία κοινή ακμή (παρότι μπορεί να τέμνονται).

Η **απόσταση** $d(u,v)$ μεταξύ δύο κόμβων (u,v) ενός γράφου G είναι το μικρότερο μονοπάτι που ενώνει αυτούς τους δύο κόμβους. Η απόσταση για κάθε κόμβο u,v που ενώνονται μεταξύ τους με κάποιο μονοπάτι έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$d(u,v) \geq 0, \text{ με } d(u,v)=0 \text{ αν και μόνο αν } u=v \quad (3.4)$$

$$d(u,v)=d(v,u) \quad (3.5)$$

Ένα μονοπάτι λέγεται **κύκλος**, αν καταλήγει στον ίδιο κόμβο από τον οποίο ξεκινά. Ένας κύκλος λέγεται απλός αν κανένας κόμβος δεν επαναλαμβάνεται, ενώ λέγεται σύνθετος αν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος που επαναλαμβάνεται. Επίσης, ένας κύκλος λέγεται κατευθυνόμενος αν διατρέχεται μόνο κατά μία κατεύθυνση. Αλλιώς, λέγεται μη κατευθυνόμενος. Ένας κύκλος μήκους k λέγεται άρτιος ή περιττός αν το k είναι άρτιο ή περιττό αντίστοιχα.

Ένα γράφημα ονομάζεται **κλίκα ή πλήρες γράφημα** αν κάθε ζευγάρι κορυφών του συνδέεται με ακμή. Η κλίκα n κορυφών συμβολίζεται με K_n και έχει ακριβώς $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές.

Ένα σύνολο κορυφών χωρίς καμία ακμή μεταξύ τους ονομάζεται σύνολο ανεξαρτησίας.

Η **συνδεσιμότητα** είναι μια βασική έννοια στη Θεωρία Γράφων η οποία χρησιμοποιείται για να μπορούμε να ποσοτικοποιούμε τις σχέσεις στα δίκτυα. Η συνδεσιμότητα κ ενός γράφου G είναι ο ελάχιστος αριθμός των σημείων τα οποία αν τα αφαιρέσουμε θα έχουμε ένα μη συνδεδεμένο ή τετριμμένο γράφο. Η συνδεσιμότητα-ακμών λ ενός γράφου G είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών τις οποίες αν αφαιρέσουμε θα καταλήξουμε σε ένα μη συνδεδεμένο ή τετριμμένο γράφο. Ο τετριμμένο γράφος είναι ένας γράφος που αποτελείται από έναν απομονωμένο κόμβο. Ένα γράφημα ονομάζεται συνδεδεμένο αν κάθε ζεύγος διακριτών κορυφών στο γράφημα είναι συνδεδεμένο. Αλλιώς, το γράφημα ονομάζεται μη συνδεδεμένο. Για ένα μη συνδεδεμένο γράφημα ισχύει $\kappa(G)=0$ και για ένα γράφο τάξης p ισχύει $\kappa(K_p)=p-1$ αφού θα πρέπει να αφαιρέσουμε $p-1$ κόμβους για να καταλήξουμε σε τετριμμένο γράφο τάξης 1.

Έστω G γράφημα και έστω $S \subseteq V(G)$, **γειτονιά του S** στο G καλείται το σύνολο $NG(S) = \{u \in V(G) \setminus S \mid \exists v \in S : \{v, u\} \in E(G)\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των κορυφών του G που είναι συνδεδεμένες με την v και δεν ανήκουν στο S . Αν για μια κορυφή $x \in V(G)$ ισχύει ότι $NG(x) = \emptyset$ τότε λέμε ότι η x είναι απομονωμένη κορυφή.

Ο **βαθμός ενός κόμβου (Degree)** είναι ένα μέτρο του κατά πόσο ένας κόμβος συνδεδεμένος είναι με τους υπόλοιπους κόμβους του γραφήματος. Η τιμή του ισούται με το πλήθος των

γειτόνων του συγκεκριμένου κόμβου. Επιπρόσθετα, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε την τιμή του μέτρου αυτού, διαιρώντας με το πλήθος των πιθανών γειτόνων του, δηλαδή με $n-1$. Με την συγκεκριμένη μεθοδολογία βλέπουμε πόσο μεγάλη είναι η γειτονιά του κάθε κόμβου, σε σχέση με το γράφημα ολόκληρο. Για κάθε κόμβο, λοιπόν, έχουμε:

Degree = $\text{deg}(i)$ = πλήθος των γειτόνων του i .

Normalized Degree = $\text{Ndeg}(i)$ = Πλήθος των γειτόνων του i / Πλήθος όλων των πιθανών γειτόνων του i .

Προφανώς, οι τιμές που μπορεί να πάρει ο βαθμός ενός κόμβου είναι από 0 έως $n-1$, ενώ οι τιμές του κανονικοποιημένου βαθμού είναι στο διάστημα $[0,1]$. Επίσης, σε αντίθεση με τις τιμές του βαθμού που είναι ακέραιες, οι τιμές του κανονικοποιημένου βαθμού είναι πραγματικές. Ο βαθμός του κόμβου μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος. Για παράδειγμα, σε ένα δίκτυο στο οποίο μελετάται η διάδοση πληροφοριών, κάποιος κόμβος με μεγαλύτερο βαθμό από κάποιον άλλον είναι πιο πιθανό να μεταφέρει μία πληροφορία. Το μέγεθος του βαθμού ενός κόμβου μπορεί να ερμηνευτεί και σαν την δυνατότητα κάποιου κόμβου να αλληλεπιδράσει άμεσα με τους υπόλοιπους κόμβους του γραφήματος. Το μέτρο αυτό, παρότι μας δίνει κάποια αίσθηση κεντρικότητας, δεν μπορεί να προσδιορίσει τη θέση που έχει ο κόμβος μας στο γράφημα. Για παράδειγμα, μπορεί δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό να βρίσκονται ο ένας στο κέντρο του γραφήματος και ο άλλος κοντά στα άκρα του.

Ο **συντελεστής ομαδοποίησης** (Clustering Coefficient) $C(i)$ ενός κόμβου χρησιμοποιείται στα δίκτυα για να χαρακτηρίσει τη δομή του τοπικά, δηλαδή σε επίπεδο κόμβου. Ο συντελεστής αυτός εκφράζει την τριαδική διαδικασία σε ένα δίκτυο. Με τον όρο τριαδική διαδικασία εννοείται η διαδικασία κατά την οποία δύο γείτονες ενός κόμβου είναι και μεταξύ τους γείτονες. Ο συντελεστής ομαδοποίησης εκφράζει την πιθανότητα οι κόμβοι με κοινό γείτονα, να έχουν επίσης γείτονα έναν ακόμη κόμβο. Δηλαδή υπολογίζει την απευθείας σύνδεση μεταξύ των γειτόνων του κόμβου i .

Ο συντελεστής ομαδοποίησης υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$C_i = \frac{\text{πλήθος ακμών μεταξύ των γειτόνων του κόμβου } i}{\text{πλήθος δυνατών ακμών μεταξύ των γειτόνων του κόμβου } i}$$

Κεφάλαιο 4^ο

4. Προτεινόμενη Μεθοδολογία Ανάλυσης Επιφανειών με Τραχύτητα

Η μελέτη της τραχύτητας των επιφανειών των υλικών σωμάτων, όπως έχουμε ήδη αντιληφθεί, παρουσιάζει τόσο θεωρητικό όσο και πρακτικό ενδιαφέρον. Η ανάγκη αυτή προέκυψε αρχικά στους μηχανολόγους μηχανικούς, οι οποίοι αντιμετώπισαν το πρόβλημα της τριβής και εστίασαν στην τραχύτητα των επιφανειών, ως παράγοντα φθοράς των συναρμολογημάτων που σχεδιάζουν και κατασκευάζουν.

Η τραχύτητα, όμως, όπως και η μορφολογία της επιφάνειας, γίνεται αντιληπτή μέσω της κατάλληλης αλληλεπίδρασης της επιφάνειας από τον παρατηρητή. Η παρατήρηση των επιφανειών σε διάφορες κλίμακες αποκαλύπτει ότι η μορφολογία των επιφανειών διαφέρει κατά πολύ από αυτό που παρατηρείται μακροσκοπικά.

Στην νανοτεχνολογία, η τραχύτητα συνεχίζει πολλές φορές να έχει τον “κακό χαρακτήρα” της τριβής και της φθοράς, σε πολλές εφαρμογές, όμως, της νανοτεχνολογίας η τραχύτητα χρησιμοποιείται. Είναι δηλαδή οργανικό κομμάτι των ιδιοτήτων ενός υλικού. Η τραχύτητα, λοιπόν, στην νανοτεχνολογία δημιουργεί μια συγκεκριμένη δομή στην επιφάνεια μας, η οποία εν συνεχεία προσδίδει μία συγκεκριμένη λειτουργία (λειτουργική ιδιότητα) στην επιφάνεια.

Η λειτουργικότητα αυτών των περίπλοκων και τυχαίων γεωμετρικών δομών μας επιβάλλει την ανάγκη για την αναλυτικότερη μελέτη αυτών.

Η μελέτη αυτή όμως δεν είναι εφικτή με τα εργαλεία και τις χρησιμοποιούμενες παραμέτρους που είδαμε στο Κεφάλαιο 2.

Το βασικό μας κίνητρο είναι ένας πιο λεπτομερής χαρακτηρισμός της επιφανειακής μορφολογίας καθώς και η λεπτομερής αποτύπωση των συσχετίσεων που εμφανίζονται στις επιφάνειες. Αξίζει πέραν των ανωτέρω να αναφέρουμε ότι για την επίτευξη της αναλυτικότερης περιγραφής της τραχύτητας επικεντρωθήκαμε στην ανάγκη περιγραφής των συσχετίσεων μεταξύ σημείων της επιφάνειας συναρτήσει της κλίμακας ώστε να ποσοτικοποιηθούν οι περίπλοκες δομές και η χωρική διαδρομή τους προς την τυχαιότητα στις μεγάλες κλίμακες. Παραδοσιακά αυτό γίνεται με τις συναρτήσεις συσχέτισης που όμως σε κάθε κλίμακα υπολογίζονται με **μέσους όρους** οπότε **ΔΕΝ** περιγράφουν τα τυχόν δίκτυα των συσχετίσεων που υπάρχουν σε κάθε κλίμακα. Αυτό εκτιμήθηκε ότι θα μπορούσε να

επιτευχθεί με τη χρήση γράφων σε κάθε κλίμακα που οι ιδιότητές τους θα χαρακτηρίζουν τα δίκτυα των συσχετίσεων στην επιφάνεια.

Για το λόγο αυτό στην παρούσα εργασία εισάγουμε μια μέθοδο με την οποία χαρτογραφείται σε γράφους η τραχύτητα της επιφάνειας ενός σώματος, ενώ επισημαίνεται ότι η μέθοδος δύναται να επεκταθεί σε πλείστες εφαρμογές και επιπρόσθετα να εφαρμοσθεί και να αξιοποιηθεί για την ανάλυση χρονοσειρών.

4.1 Δημιουργία γράφου περιγραφής της τραχύτητας μίας επιφάνειας

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η μελέτη της τραχύτητας των επιφανειών με έναν διαφορετικό τρόπο που βασίζεται στην αξιοποίηση της θεωρίας των γράφων. Αρχικά εφαρμόζεται η διαδικασία της παρ. 2.1.2 της παρούσας. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζονται τα δεδομένα ύψους κατά μήκος τους προφίλ μίας επιφάνειας. Κάθε σημείο του προφίλ της επιφάνειας χαρακτηρίζεται από δύο συντεταγμένες (x,z) , την οριζόντια (x) καθώς και την κατακόρυφη (z). Για κάθε επιφάνεια δύναται να υπολογισθεί το εύρος ύψους ήτοι :

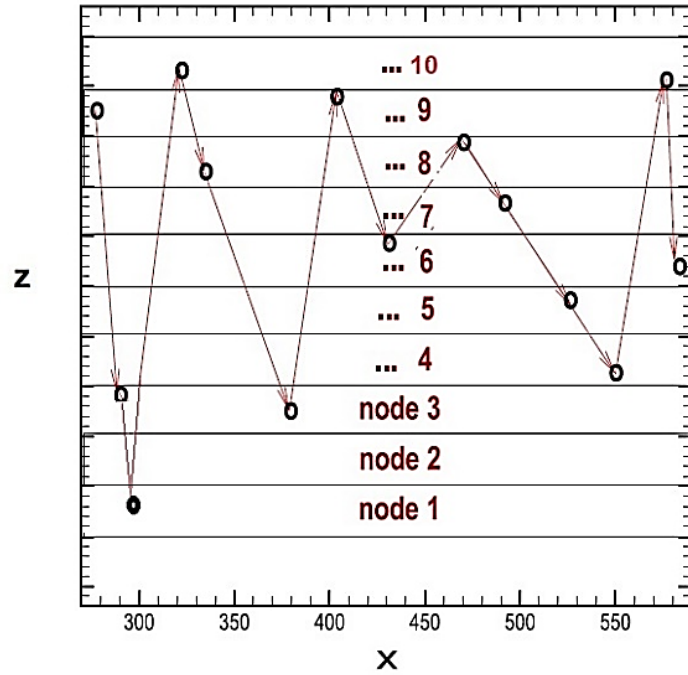
$$R = Z_{\max} - Z_{\min}$$

Για κάθε επιφάνεια δημιουργείται ένας γράφος $G(V,E)$, όπου V είναι το πλήθος των κορυφών του γράφου και E είναι το πλήθος των ακμών του γράφου. Το πλήθος (n) των κόμβων των γράφων ορίστηκε να είναι δέκα (10) και καθένας από αυτούς ορίζει μία κλάση στην οποία κατηγοριοποιούνται τα σημεία του προφίλ της επιφάνειας σύμφωνα με την κατακόρυφη απόσταση τους από το αντίστοιχο σημείο της επιφάνειας για το οποίο το ύψος είναι ελάχιστο (Z_{\min}).

Συγκεκριμένα, ορίστηκε ότι στην κλάση του κόμβου i ανήκουν τα σημεία της επιφάνειας με ύψος z για τα οποία ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$z_{\min} + (i - 1) * R/10 \leq z \leq z_{\min} + i * R/10$$

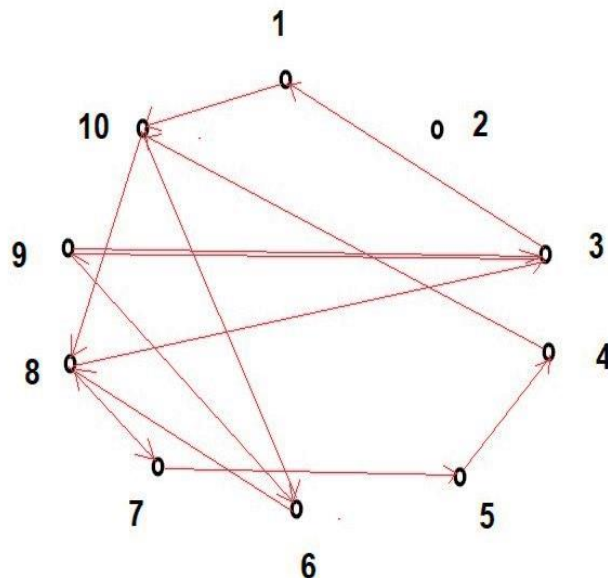
Η οπτική αναπαράσταση αυτής της κατηγοριοποίησης φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 23 Κβαντοποίηση προφίλ επιφάνειας

Η ανωτέρω διαδικασία θα αναφέρεται και ως **κβαντοποίηση** για λόγους συντομίας.

Επιπρόσθετα ορίστηκε ο πίνακας συνδεσιμότητας $W = [w_{ij}]$ για τον γράφο (Εικόνα 23), με το στοιχείο w_{ij} να είναι 1 έφ'όσον ο κόμβος i συνδέεται με τον κόμβο j και 0 σε αντίθετη περίπτωση.



Εικόνα 24 Προκύπτων γράφος από κβαντοποίηση

Ο πίνακας συνδεσιμότητας που αντιστοιχεί στον γράφο είναι ο παρακάτω

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο $P = [p_{ij}]$ όπου

$$p_{ij} = w_{ij} / \sum_{j=1}^n w_{ij}$$

είναι η πιθανότητα έφασον βρισκόμαστε στον κόμβο i σε ένα βήμα να μεταβούμε στον κόμβο j .

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης του παραδείγματος των εικόνων 23 και 24 είναι ο:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επιπρόσθετα, με την ανωτέρω διαδικασία μετατρέπεται η χωροσειρά της Εικόνας 23 σε αλυσίδα διακριτών καταστάσεων (από 1 έως 10, όσες και οι κλάσεις του ύψους). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η χωροσειρά μετατρέπεται στην παρακάτω σειρά καταστάσεων.

93(10)83968754(10)6

Με την περιγραφείσα διαδικασία το προφίλ της επιφάνειας μετατρέπεται από υπεραριθμήσιμο πλήθος σημείων σε ένα γράφο πεπερασμένων καταστάσεων και σε μία αντίστοιχη αλυσίδα καταστάσεων.

4.2 Δημιουργία Γράφων Κλίμακας r της τραχύτητας επιφάνειας

Προκειμένου να επιτύχουμε την αλληλεπίδραση μας, ως παρατηρητές της εκάστοτε επιφάνειας, σε διαφορετική ακρίβεια και κλίμακα επιλέξαμε να μελετήσουμε τις επιφάνειες σε διαφορετικές κλίμακες r , δηλαδή με μεταβάσεις βήματος μεγέθους ίσου με το r .

Για κάθε επιφάνεια δημιουργήθηκε μία ακολουθία γράφων $G_r(V, E_r)$, όπου r είναι η κλίμακα παρατήρησης της επιφάνειας, V είναι το πλήθος των κορυφών του γράφου και E_r είναι το πλήθος των ακμών του γράφου.

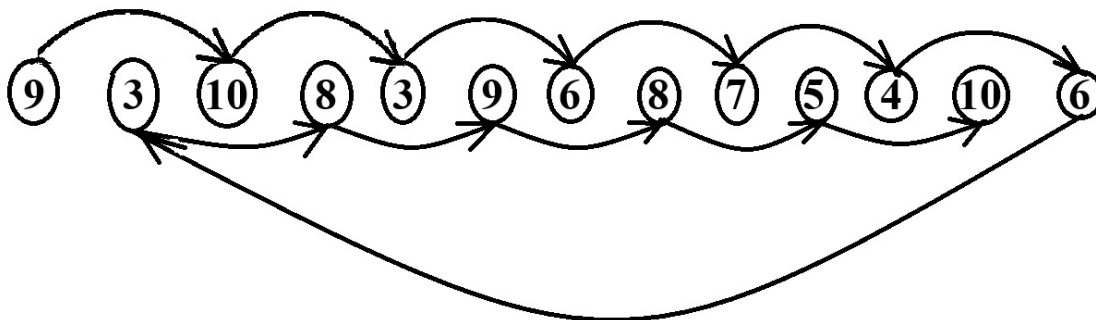
Οι νέοι γράφοι δημιουργήθηκαν από τον αρχικό γράφο θεωρώντας μεταβάσης r βημάτων αντί ενός βήματος.

α. Η αρχική αλυσίδα είναι η **93(10)83968754(10)6**



Εικόνα 25 Αλυσίδα καταστάσεων με μεταβάσεις ενός βήματος

β. Με την συγκεκριμένη διαδικασία η αλυσίδα του παραδείγματος της παραγράφου 4.1 της παρούσας εργασίας μετατρέπεται ως ακολούθως για κλίμακα $r=2$.



Εικόνα 26 Αλυσίδα καταστάσεων με μεταβάσεις δύο βημάτων

Άρα η αλυσίδα καταστάσεων με κλίμακα 2 (μεταβάσεις δύο βημάτων) είναι η

9(10)3674638985(10)

Επιπρόσθετα ορίστηκαν οι πίνακες συνδεσιμότητας $\mathbf{W}_r = [w_{ij}^r]$ για κάθε γράφο, όπου r είναι η κλίμακα παρατήρησης της επιφάνειας με το στοιχείο w_{ij}^r να είναι 1 έφσον ο κόμβος i συνδέεται με τον κόμβο j και 0 σε αντίθετη περίπτωση.

Καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης κλίμακας r . Ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $P_r = [p_{ij}^r]$ όπου

$$p_{ij}^r = w_{ij}^r / \sum_{j=1}^n w_{ij}^r$$

είναι η πιθανότητα έφσον βρισκόμαστε στον κόμβο i σε r βήματα να μεταβούμε στον κόμβο j .

4.3 Ανάλυση Δεδομένων Γράφων

Για την αξιολόγηση των στοιχείων από την ανωτέρω διαδικασία μετατροπής της τραχύτητας σε γράφους διαφόρων κλιμάκων καθώς και στους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης, αξιοποιήθηκαν οι γνώσεις από τις *Μαρκοβιανές Αλυσίδες (M.A.)*.

Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι στις M.A. με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης \mathbf{P} οι πιθανότητες p_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots$) αποτελούν τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε ένα βήμα και εξαιτίας αυτού ονομάζονται, επίσης, πιθανότητες μετάβασης 1ης τάξης. Ο όρος “μετάβαση” δεν χρησιμοποιείται με την στενή έννοια του όρου κατά την οποία οι καταστάσεις i και j πρέπει να είναι διαφορετικές. Αντίθετα, τίποτα από τα προηγούμενα δεν αποκλείει να έχουμε πιθανότητα $p_{ii} > 0$ και συνεπώς το σύστημα να παραμένει στην ίδια κατάσταση για μια ακόμη χρονική περίοδο.

Με εφαρμογή του *Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας* είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες υψηλότερων τάξεων που ορίζονται από τη σχέση (για μία ομογενή Μαρκοβιανή Αλυσίδα)

$$p_{ij}^{(k)} = \mathbf{P}[X_k = j | X_0 = i] = \mathbf{P}[X_{n+k} = j | X_n = i], (k = 1, 2, \dots)$$

οι οποίες είναι γνωστές ως πιθανότητες μετάβασης k -τάξεως.

Οι πιθανότητες του n -βήματος μετάβασης ικανοποιούν το *Θεώρημα Chapman-Kolmogorov*, σύμφωνα με το οποίο για οποιοδήποτε k ($0 < k < n$)

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{0 < k < n} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}$$

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει σε μορφή πινάκων ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης n -τάξης ισούται με το την n -οστή δύναμη του πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης, δηλαδή

$$P^{(n)} = P^n$$

Στην παρούσα εργασία οι αλυσίδες καταστάσεων που προκύπτουν από τις διαδικασίες των παραγράφων 4.1. και 4.2 δημιουργούν τους γράφους $G_r(V, E_r)$ για τους οποίους το σύνολο καταστάσεων S είναι πεπερασμένο με s έστω στοιχεία. Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων n -οστής τάξεως P είναι συνεπώς ένας τετραγωνικός στοχαστικός πίνακας $s \times s$ και η ανάλυση και μελέτη του δύναται να επιτευχθεί με το σύνολο των εργαλείων που μας δίνει η γραμμική άλγεβρα (ήτοι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποίηση πινάκων, δυνάμεις πινάκων ως αυτά παρατίθενται στο Παράρτημα).

4.4 Σύνοψη διαδικασίας προτεινόμενης ανάλυσης τραχύτητας

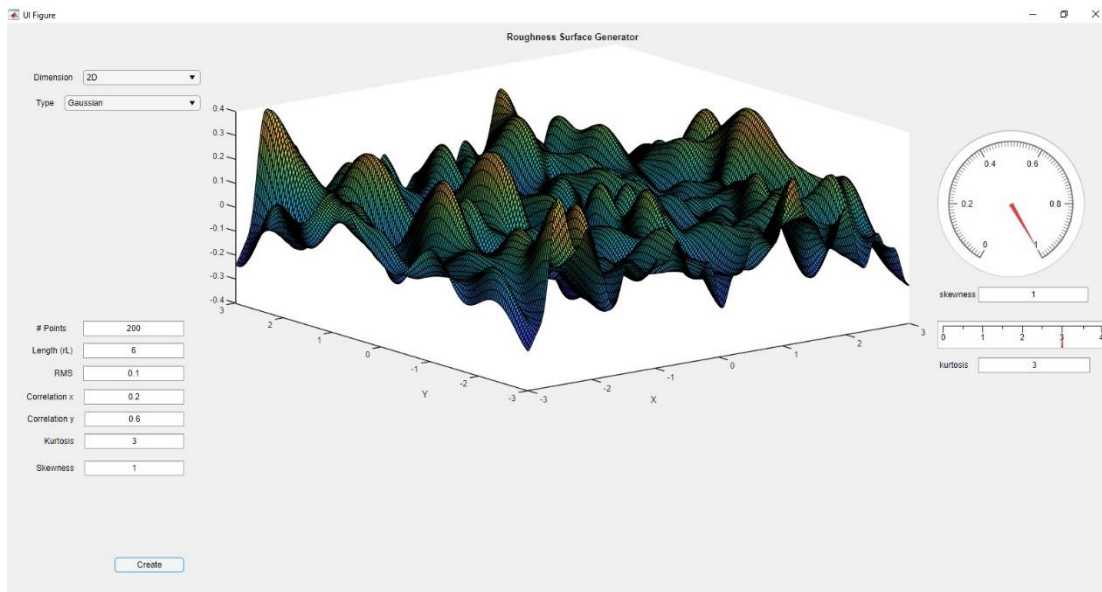
Για την ανάλυση λοιπόν της τραχύτητας μίας επιφάνειας προτάθηκαν και ακολουθήθηκαν τα παρακάτω βήματα:

- α. Δημιουργία της επιφάνειας ή παρατήρηση μίας ήδη υπάρχουσας συνεχούς επιφάνειας
- β. Μέτρηση της επιφάνειας, δηλαδή διακριτοποίηση της σε πεπερασμένο πλήθος σημείων.
- γ. Κβαντοποίηση των δεδομένων
- δ. Δημιουργία του γράφου κλίμακας 1
- ε. Δημιουργία των γράφων κλίμακας r
- στ. Μελέτη των γράφων και των αντίστοιχων μετρικών τους
- ζ. Μελέτη των πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης των διαφόρων κλιμάκων και συμπερασματολογία μέσω των ιδιοτιμών, των ιδιοδιανυσμάτων και των στάσιμων διανυσμάτων πιθανότητας.

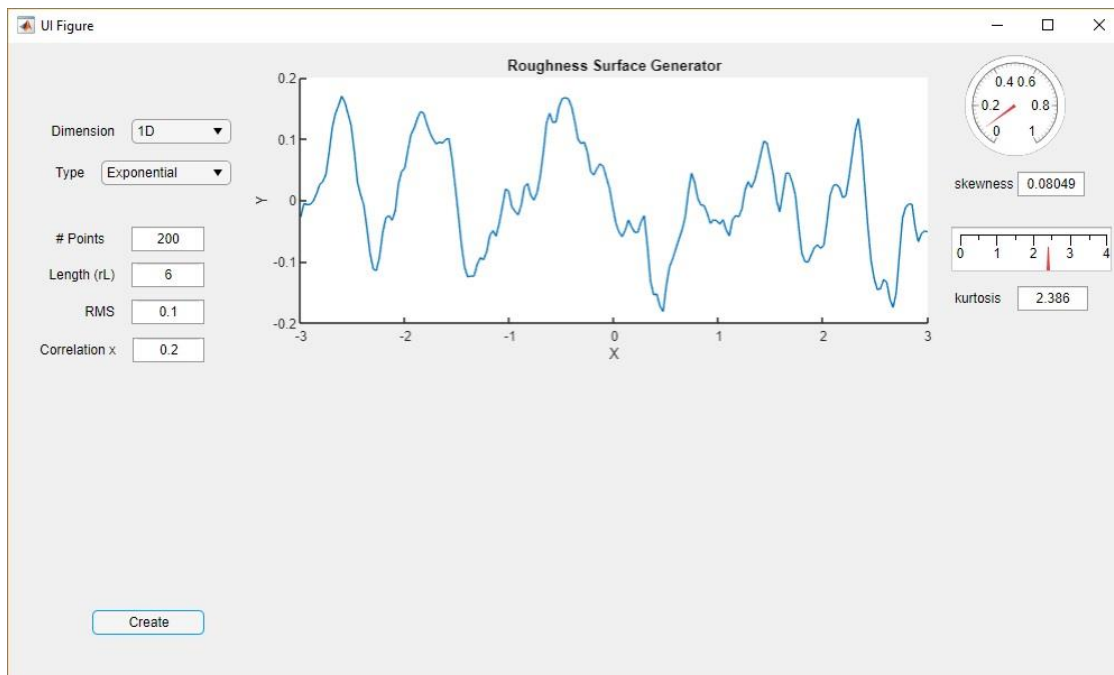
5. Αποτελέσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μία νέα μεθοδολογία προσέγγισης και ανάλυσης της τραχύτητας των επιφανειών με χρήση γράφων οι οποίοι προκύπτουν από παρατήρηση των επιφανειών σε διάφορες κλίμακες.

Οι επιφάνειες δημιουργήθηκαν μέσω εφαρμογής (*surface generator.mlapp*) η οποία αναπτύχθηκε με γραφή κώδικα στο περιβάλλον του Matlab. Συγκεκριμένα κατασκευάστηκε εφαρμογή με την οποία είναι εφικτή η δημιουργία επιφανειών αλλά και προφίλ επιφανειών τόσο ντετερμινιστικών όσο και τυχαίων αλλά και αντίστοιχων δομής φράκταλ



Εικόνα 27 Χρήση της παραχθείσας εφαρμογής για δημιουργία Gaussian Surface



Εικόνα 28 Χρήση της παραχθείσας εφαρμογής για δημιουργία Exponential Surface Profile

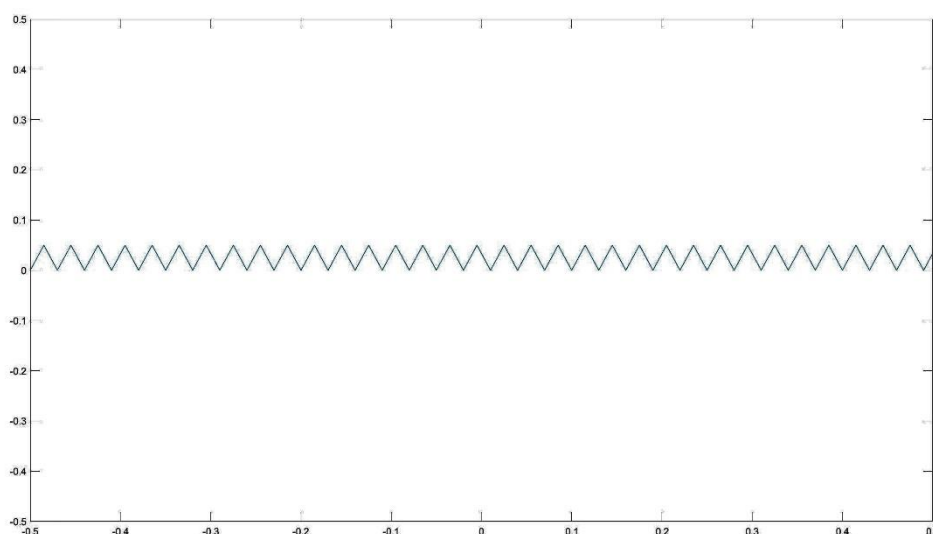
5.1 Δημιουργία Επιφανειών

Δημιουργήθηκαν τεχνητές επιφάνειες με χρήση κώδικα Matlab. Οι επιφάνειες που εξετάστηκαν και αναλύθηκαν ήταν οι περιοδικές ντετερμινιστικές της παραγράφου 1.2.2 καθώς και στοχαστικές επιφάνειες οι οποίες προέκυψαν από εκθετική και κανονική κατανομή.

5.1.1 Ντετερμινιστικές Επιφάνειες

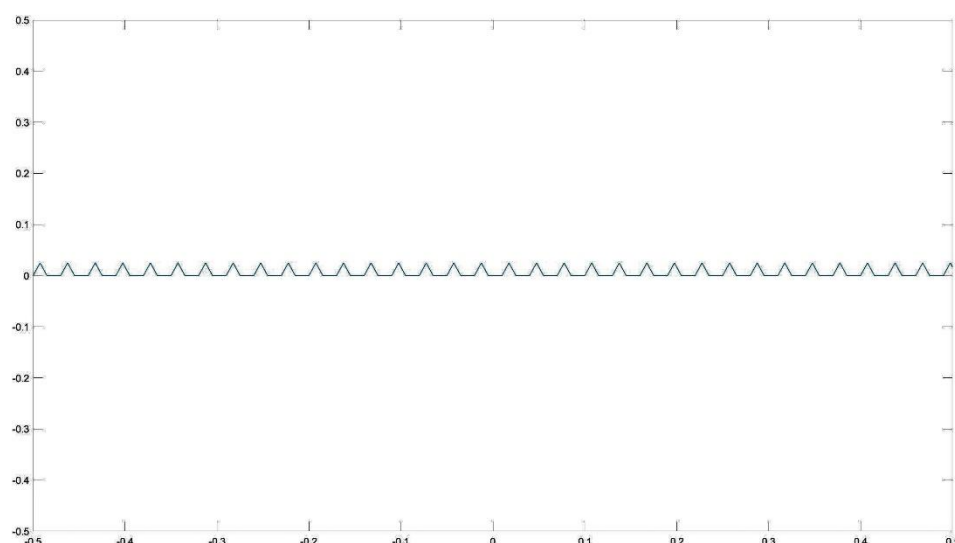
Παρακάτω διακρίνουμε κάποιες από τις σημαντικότερες κατηγορίες περιοδικών επιφανειών:

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



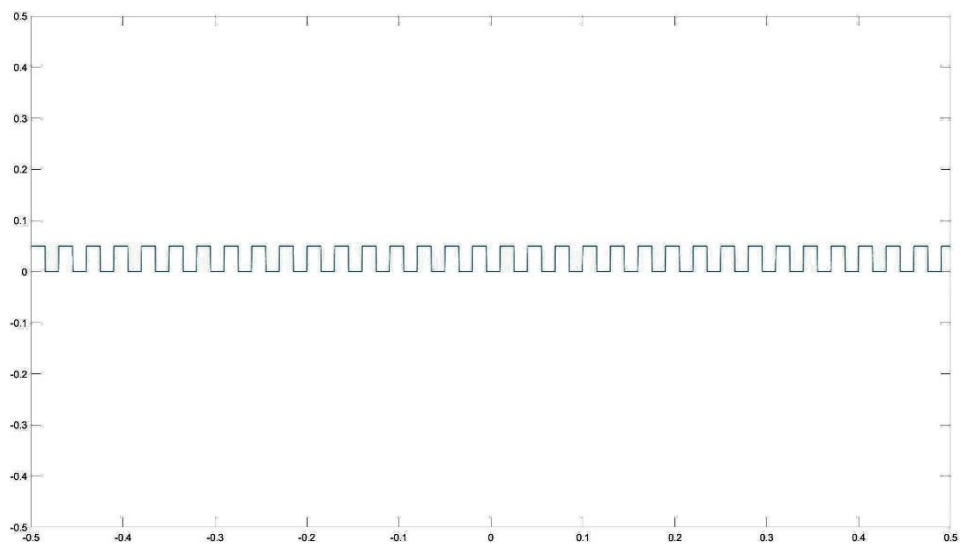
Εικόνα 29 Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



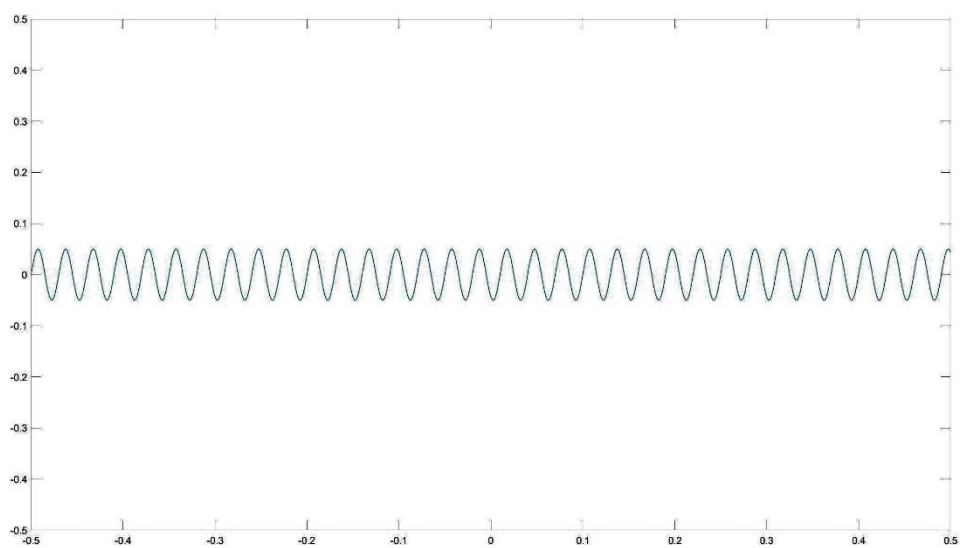
Εικόνα 30 Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



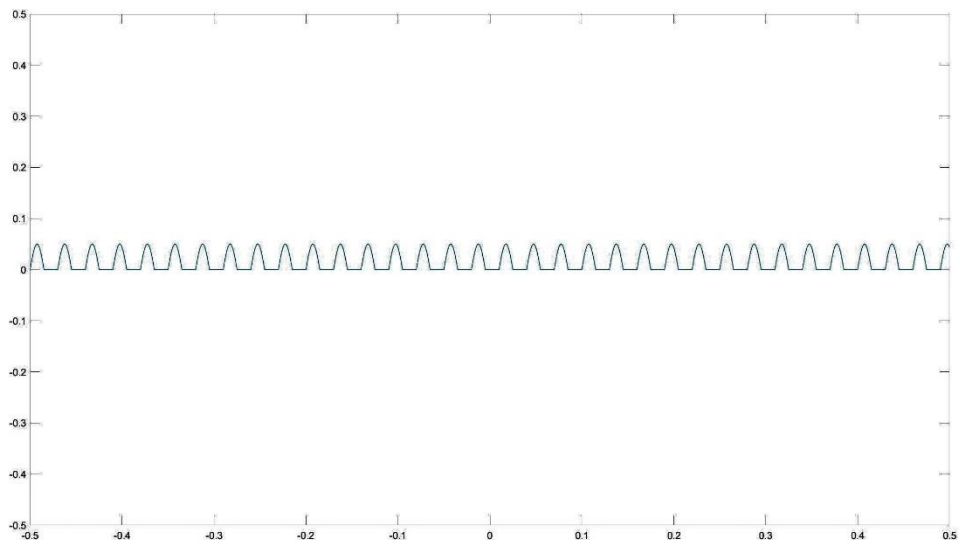
Εικόνα 31 Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



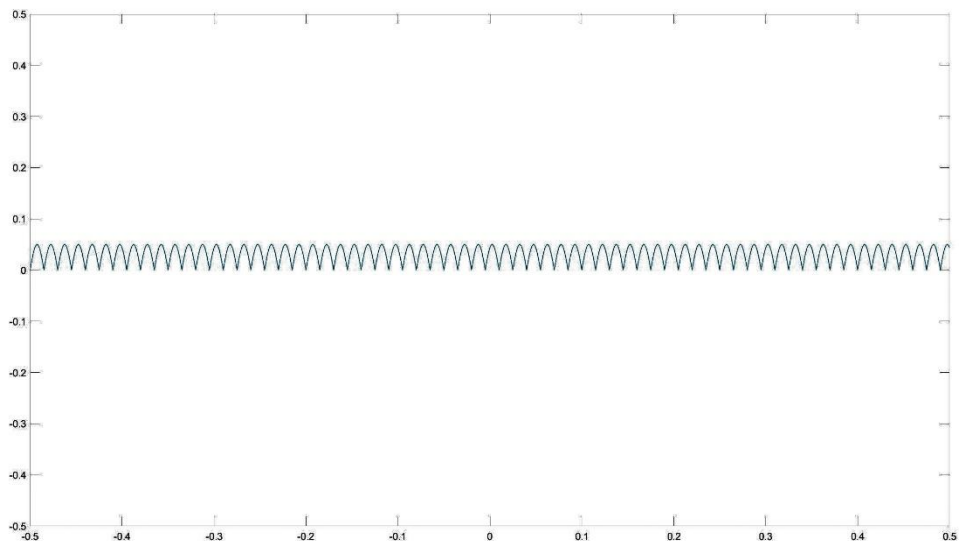
Εικόνα 32 Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 33 Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

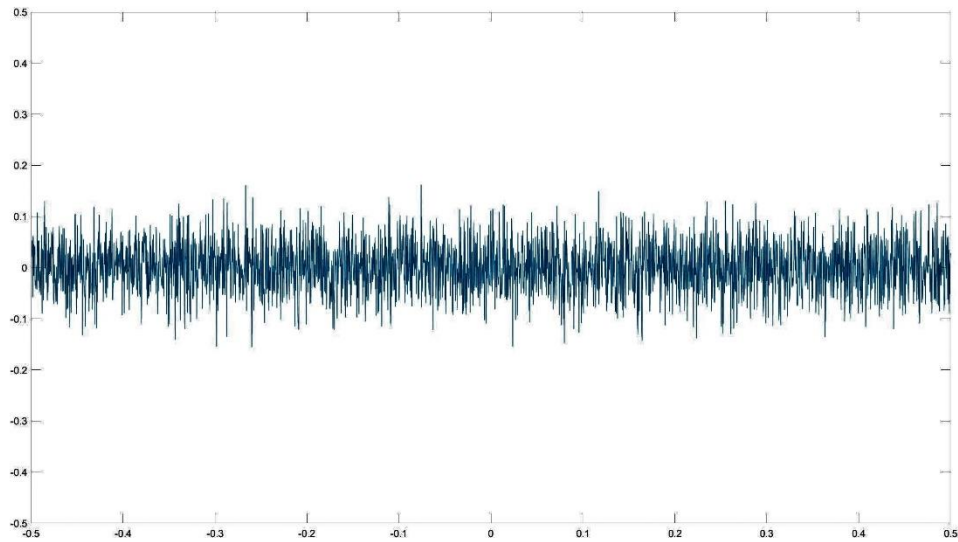


Εικόνα 34 Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

5.1.2 Στοχαστικές επιφάνειες

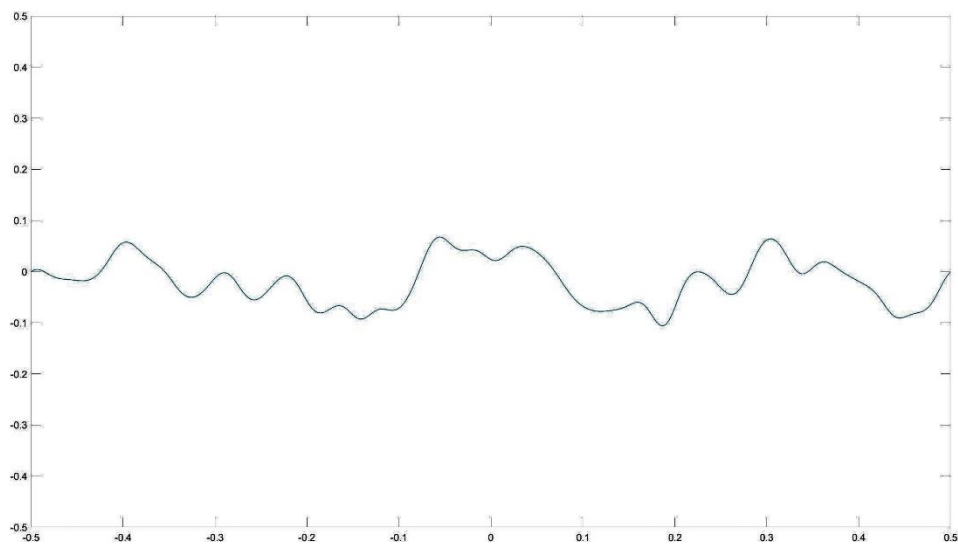
Οι στοχαστικές επιφάνειες με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι οι παρακάτω:

α. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



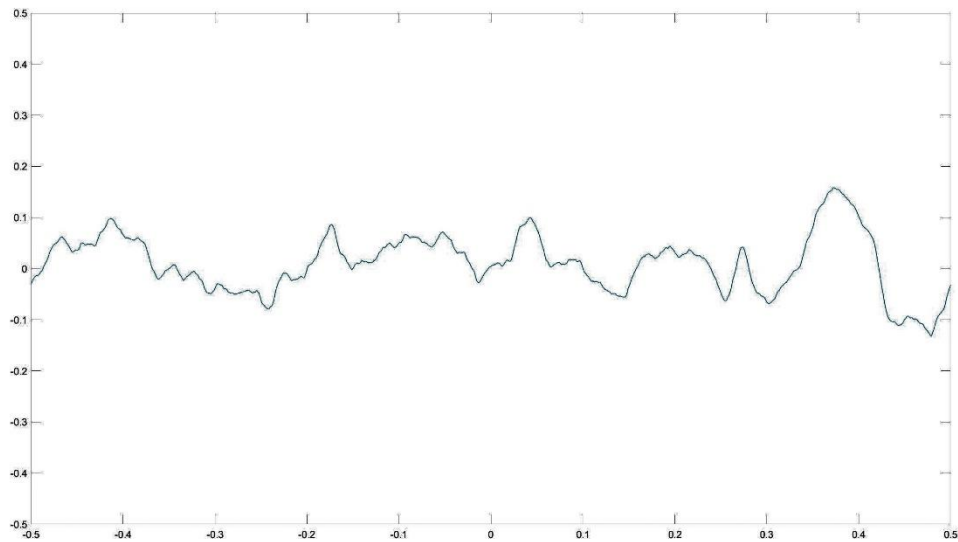
Εικόνα 35 Προφίλ λευκού θορύβου

β. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή με υπέρθεση γκαουσιανού ACF



Εικόνα 36 Προφίλ προκύπτων γκαουσιανό ACF

γ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή με υπέρθεση εκθετικού ACF



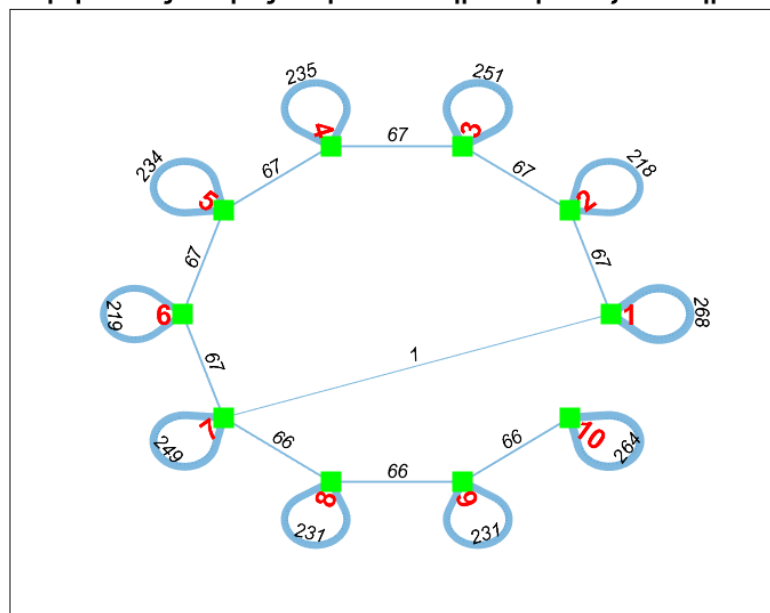
Εικόνα 37 Προφίλ με εκθετικό ACF

5.2 Δημιουργία γράφων

5.2.1 Ντετερμινιστικές Επιφάνειες

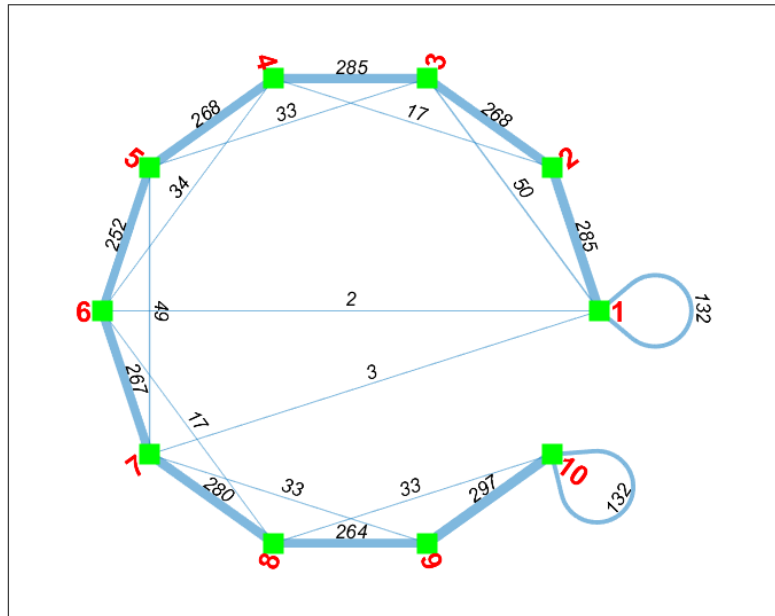
α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού

Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



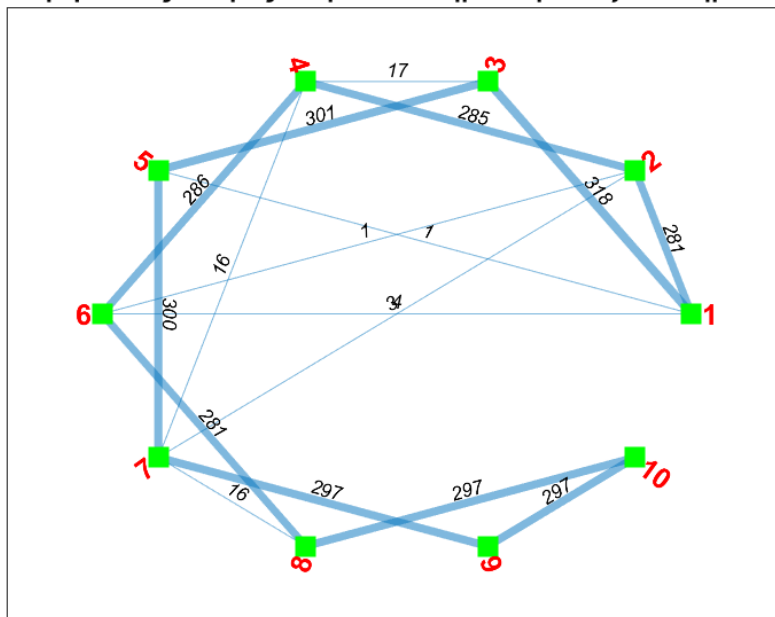
Εικόνα 38 Γράφος κλίμακας 1 τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων

Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



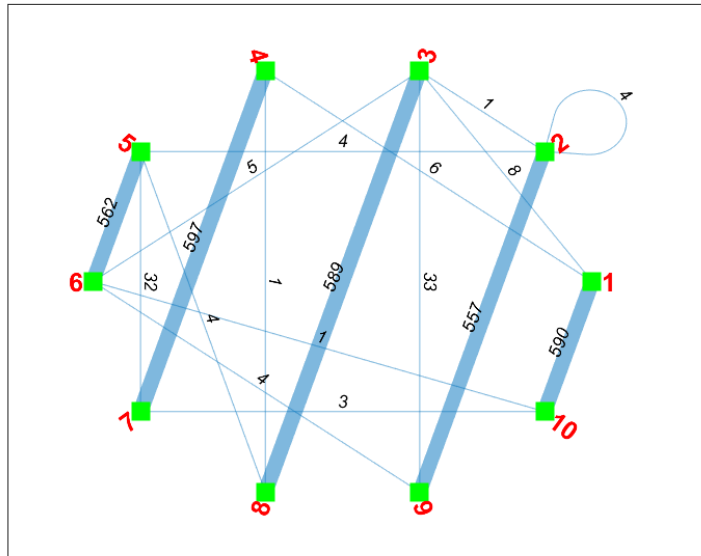
Εικόνα 39 Γράφος κλίμακας 5 τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων

Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :9 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



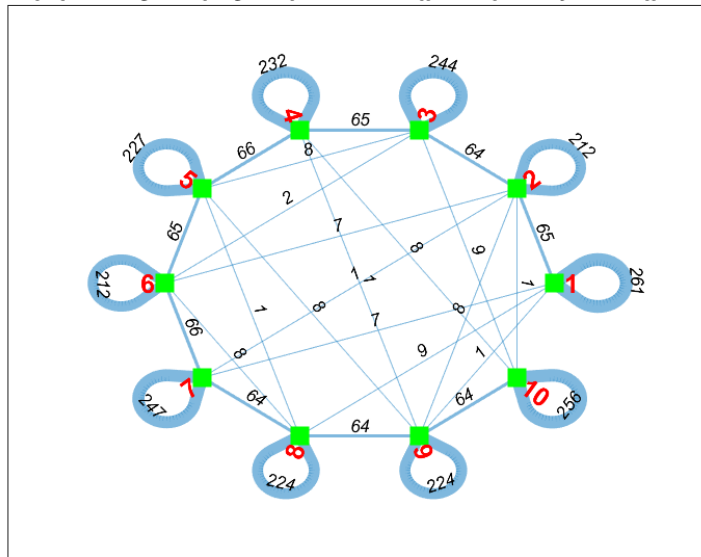
Εικόνα 40 Γράφος κλίμακας 9 τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων

Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :45 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Εικόνα 41 Γράφος κλίμακας 45, τριγωνικού παλμού, 3001 σημείων

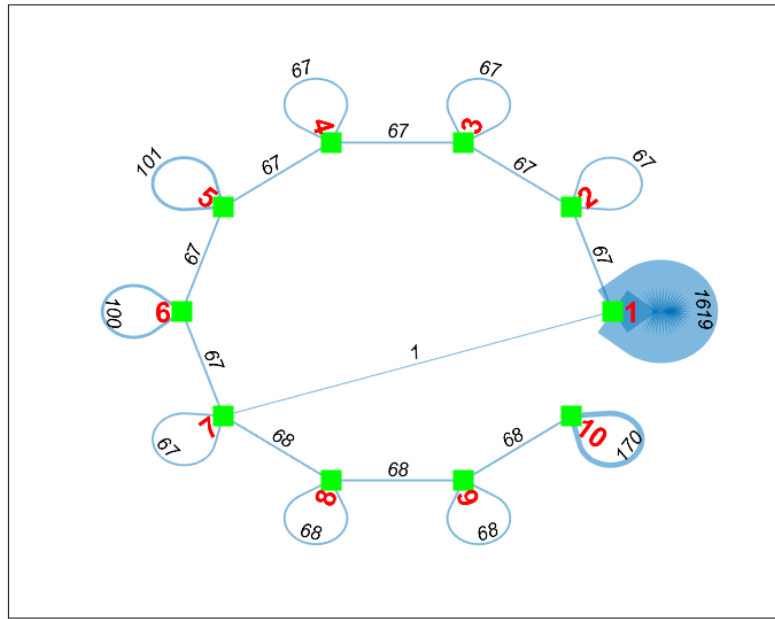
Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Εικόνα 42 Γράφος κλίμακας 89, τριγωνικού παλμού 3001 σημείων

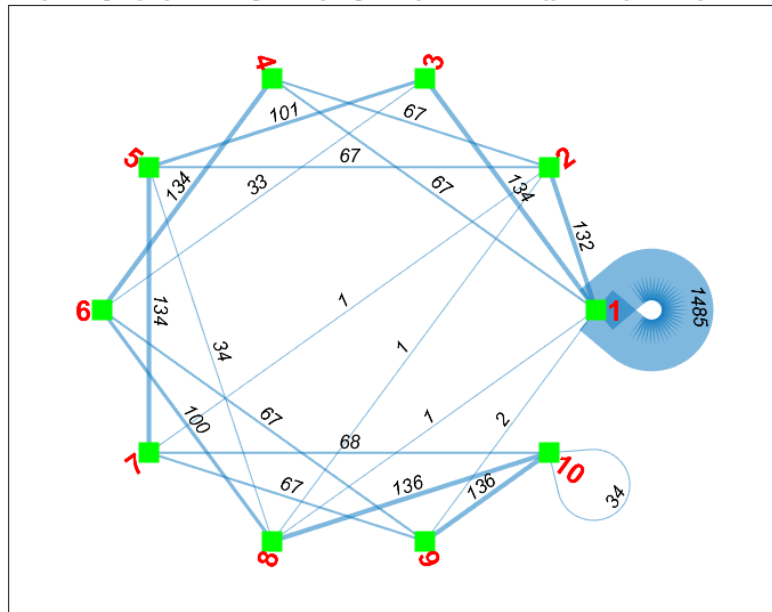
β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

Ανορθωμένος Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



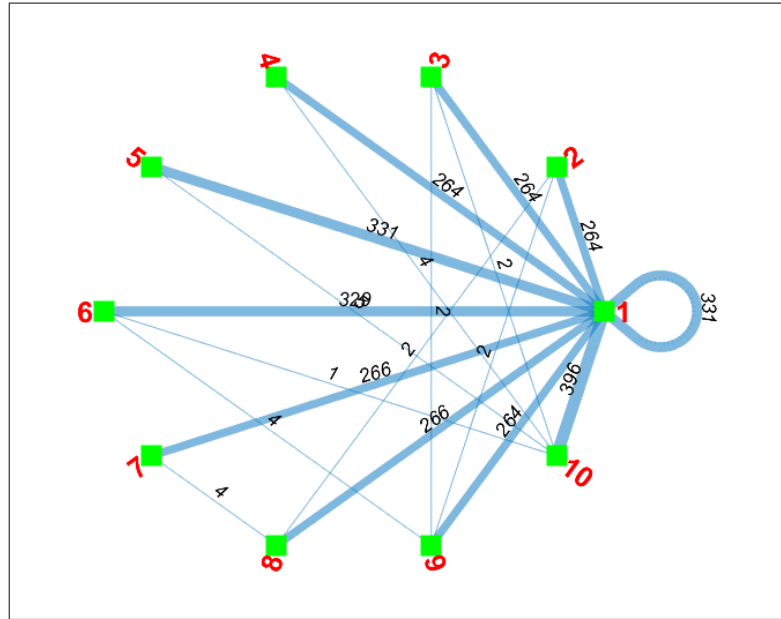
Εικόνα 43 Γράφος κλίμακας 1, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων

Ανορθωμένος Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



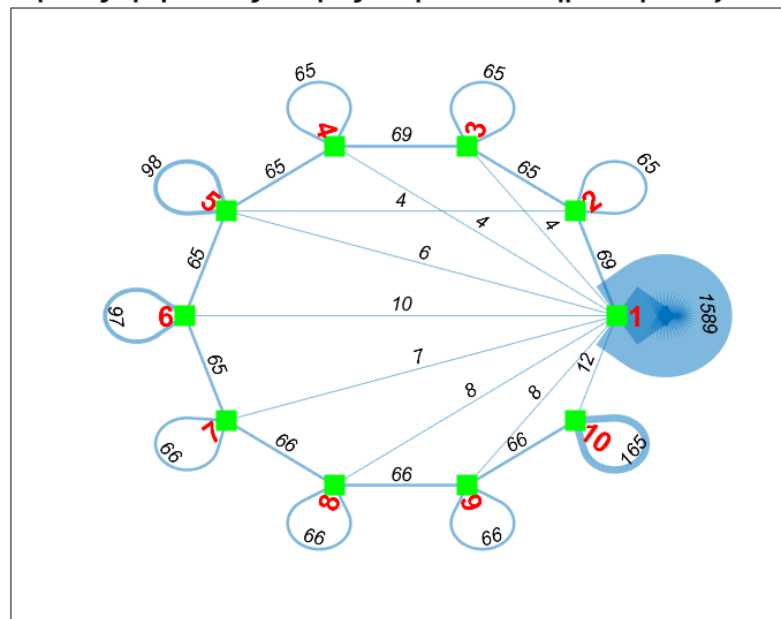
Εικόνα 44 Γράφος κλίμακας 5, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων

Ανορθωμένος Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :45 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



Εικόνα 45 Γράφος κλίμακας 45, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων

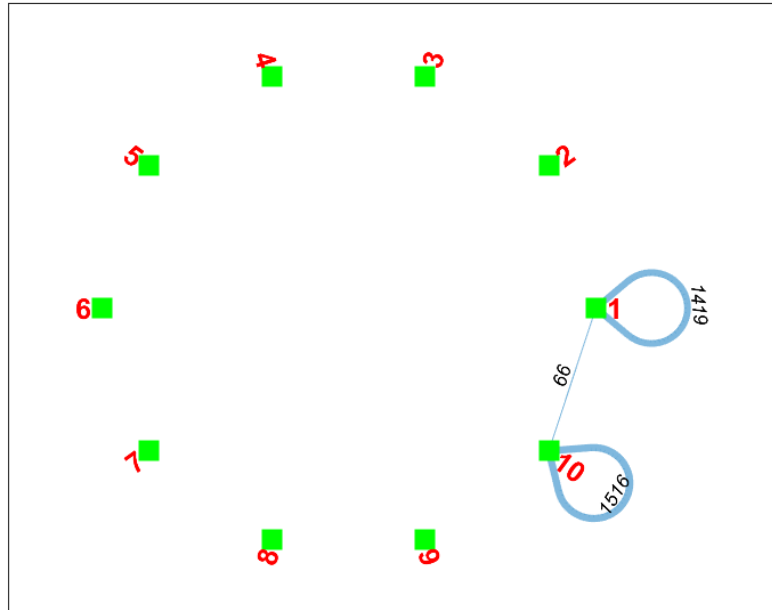
Ανορθωμένος Τριγωνικός Παλμός/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



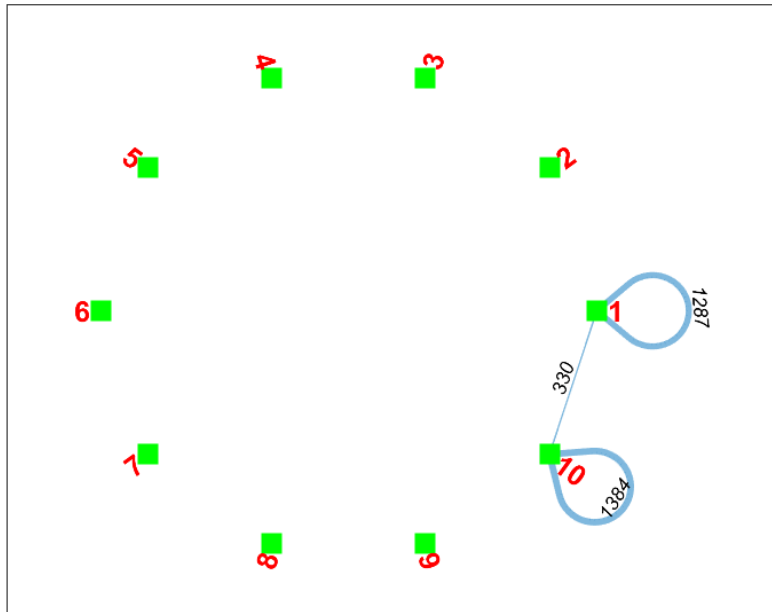
Εικόνα 46 Γράφος κλίμακας 89, ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού 3001 σημείων

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού

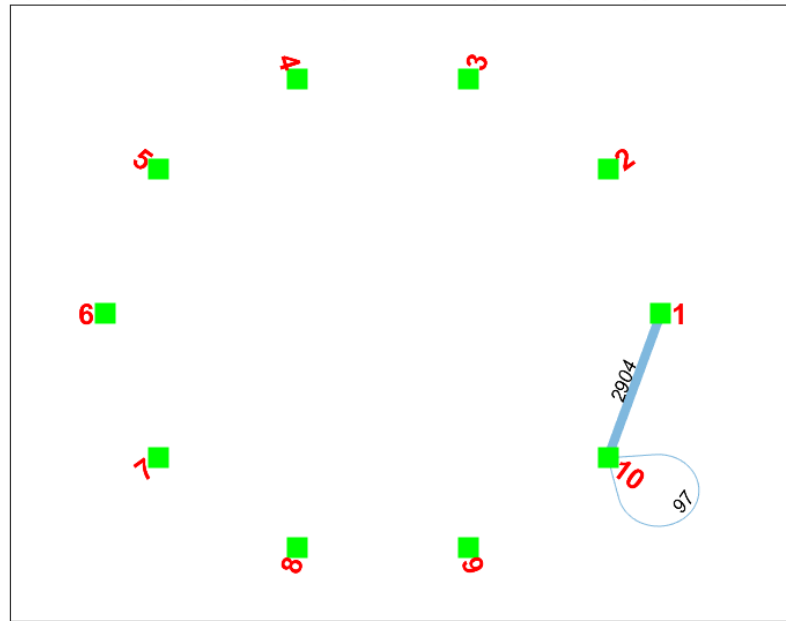
Τετραγωνικός Παλμός/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



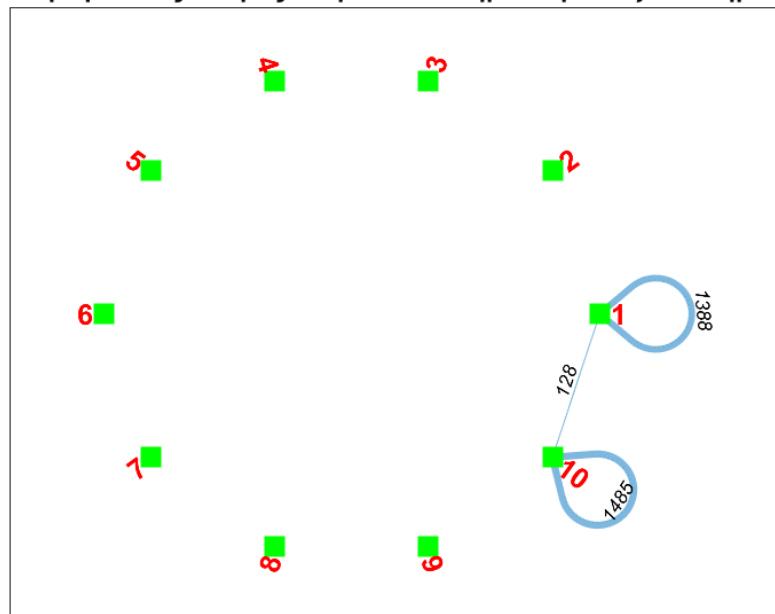
Τετραγωνικός Παλμός/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Τετραγωνικός Παλμός/ κλίμακα :45 σημεία / με το ξ =91 σημεία

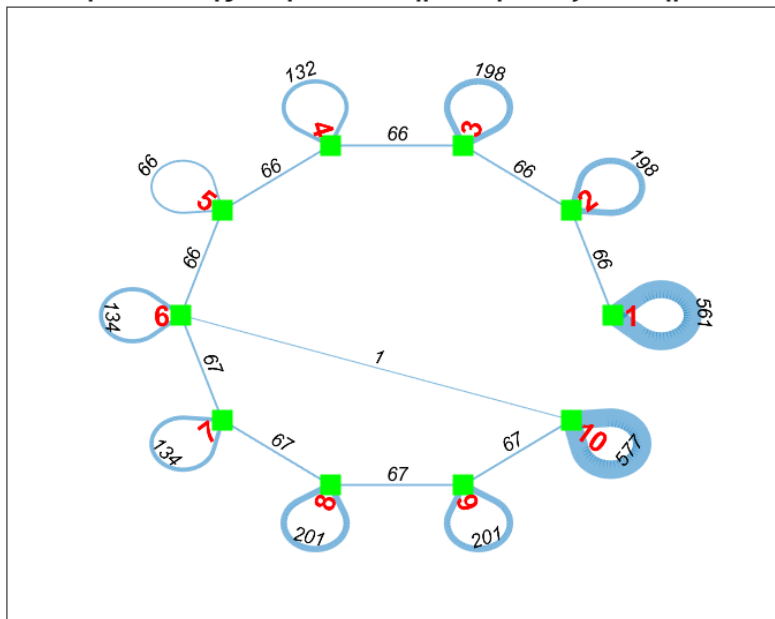


Τετραγωνικός Παλμός/ κλίμακα :89 σημεία / με το ξ =91 σημεία

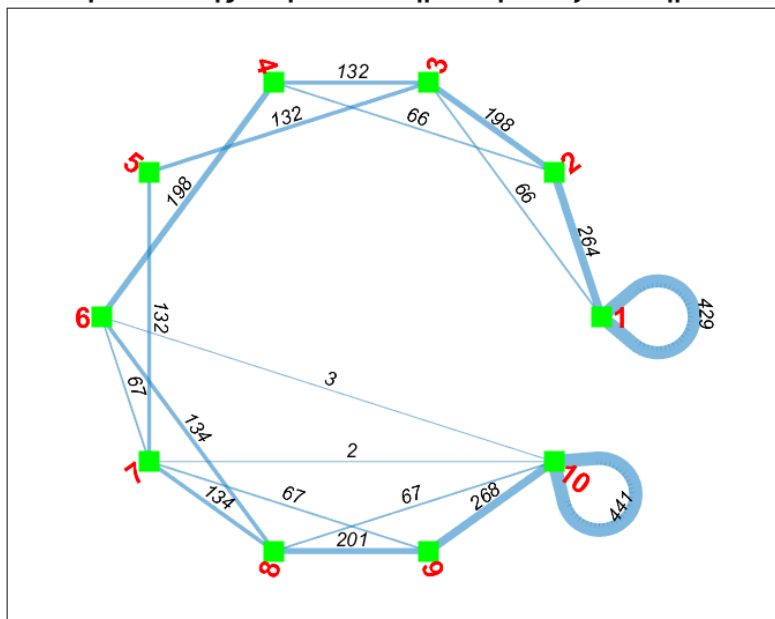


δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας

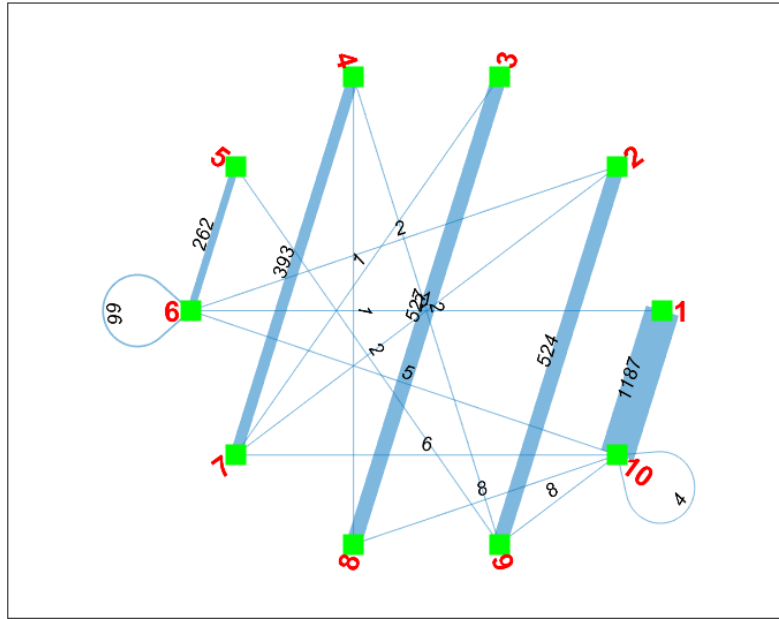
Ημιτονοειδής/ κλίμακα :1 σημεία / με το ξ =91 σημεία



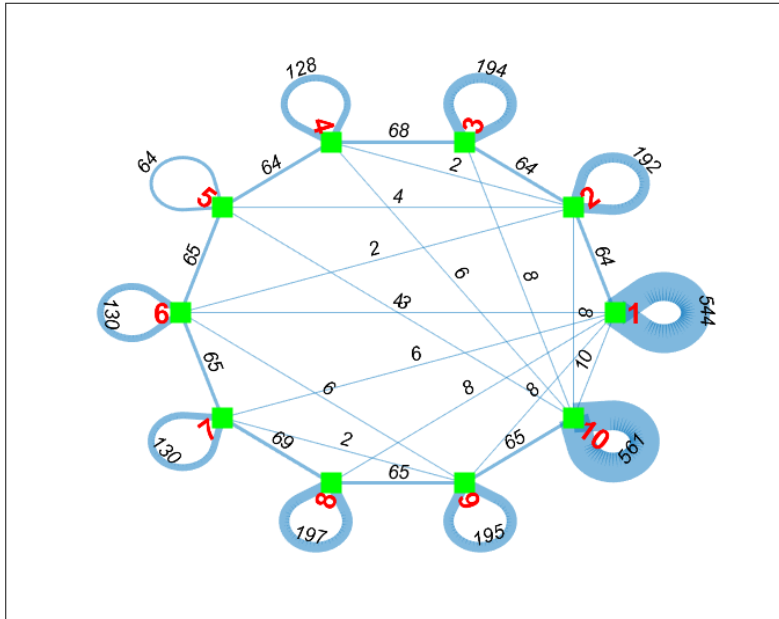
Ημιτονοειδής/ κλίμακα :5 σημεία / με το ξ =91 σημεία



Ημιτονοειδής/ κλίμακα :45 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



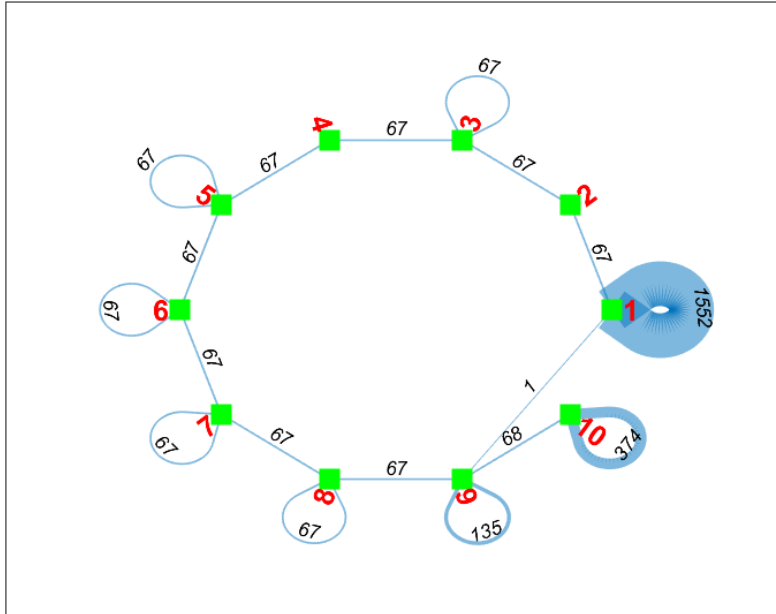
Ημιτονοειδής/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



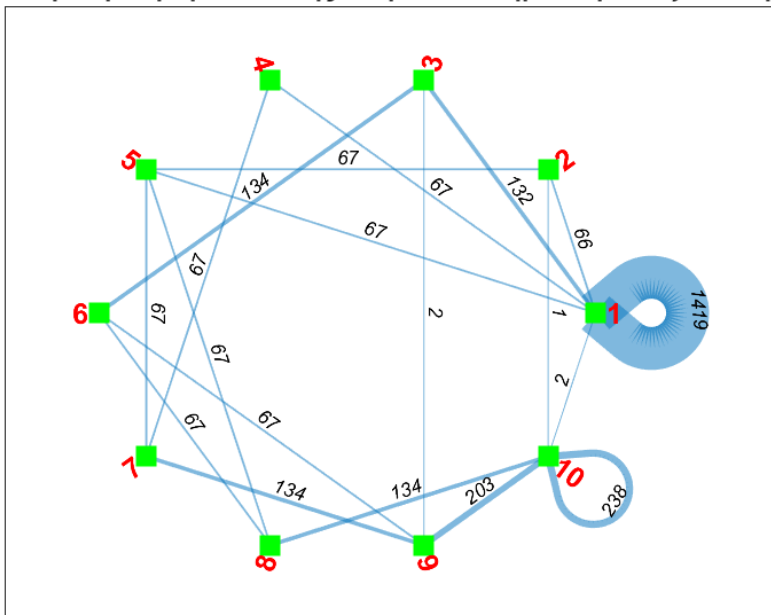
Εικόνα 47 Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

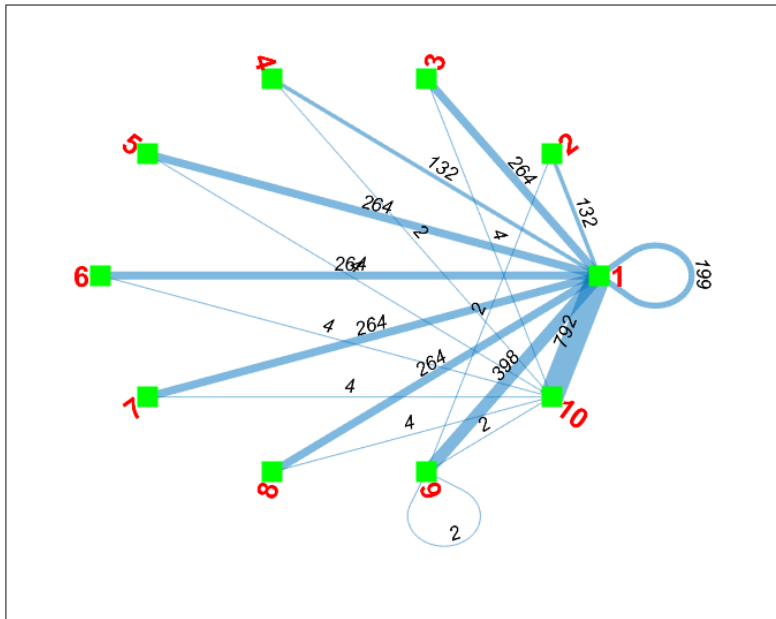
Ημιανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



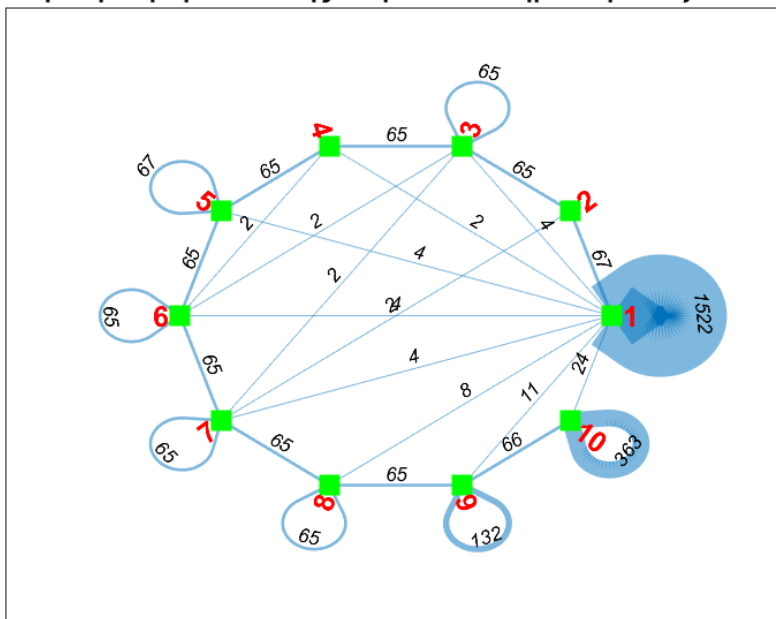
Ημιανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Ημιανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :45 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



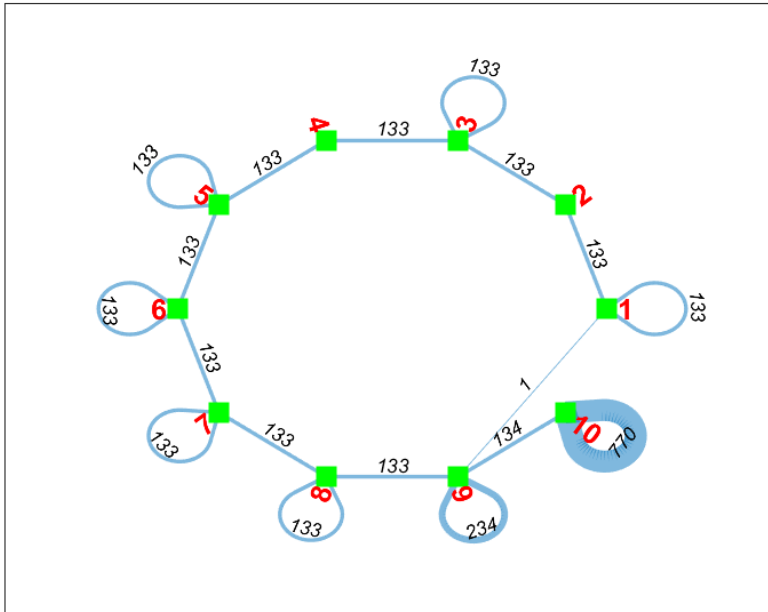
Ημιανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



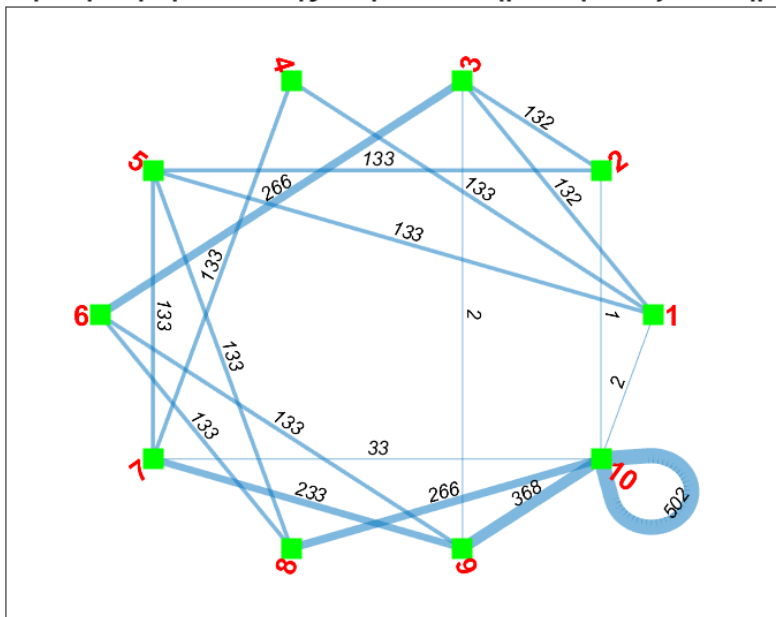
Εικόνα 48 Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

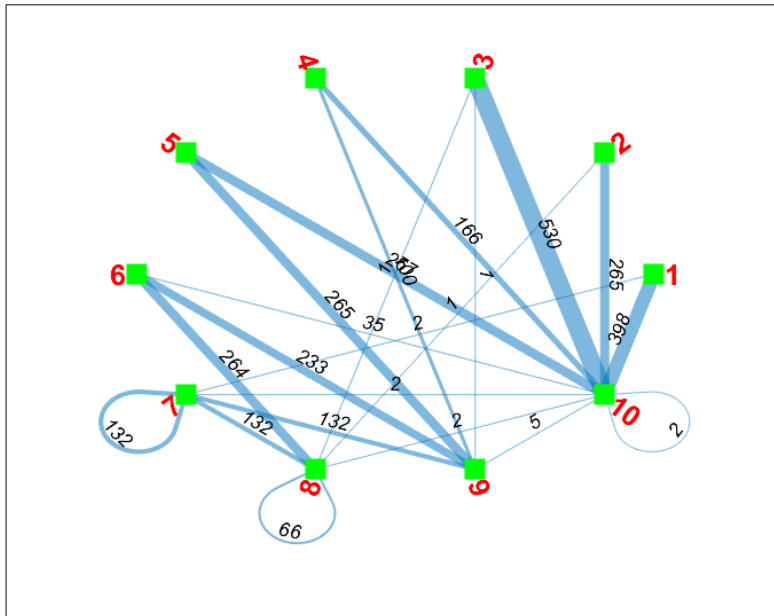
Ανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



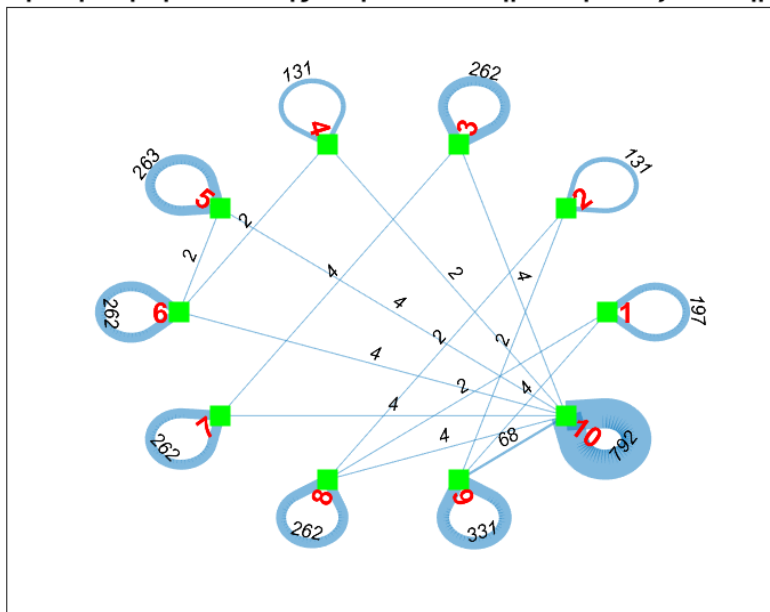
Ανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



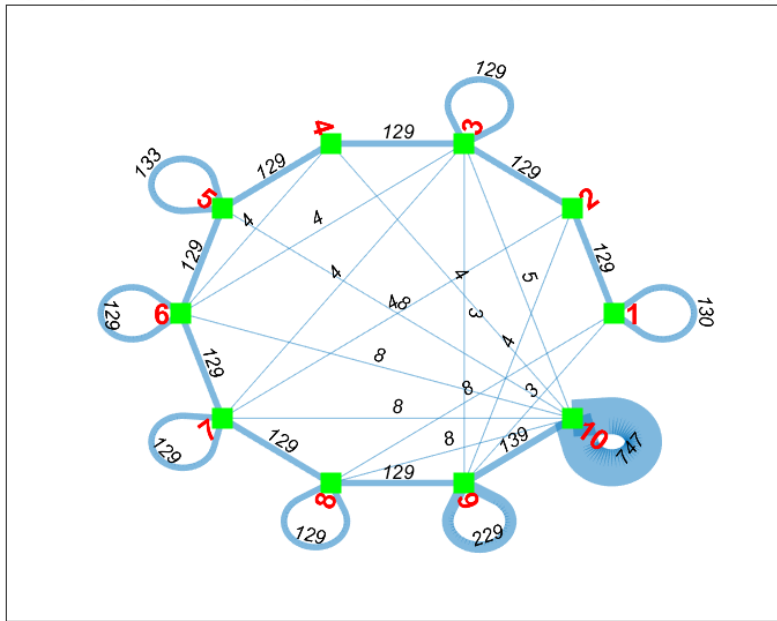
Ανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :21 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Ανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :45 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Ανορθωμένη Ημιτονοειδής/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



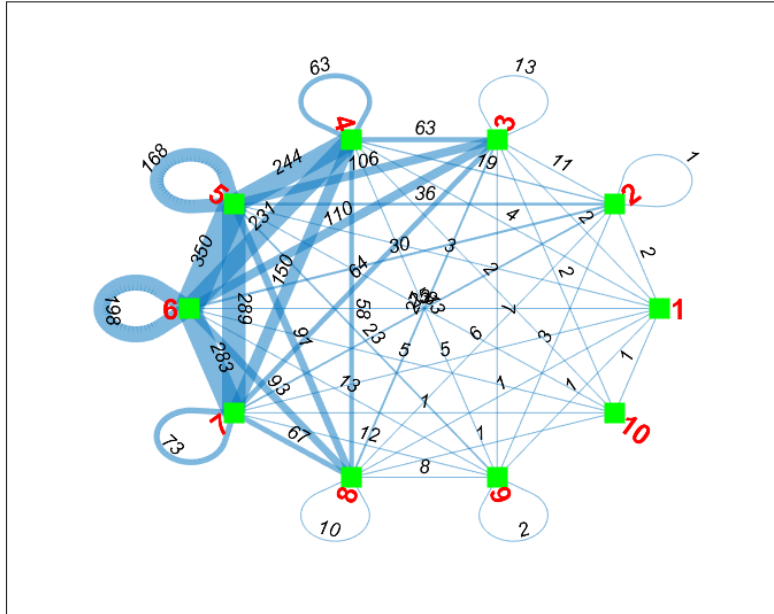
Εικόνα 49 Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

5.2.2 Στοχαστικές επιφάνειες

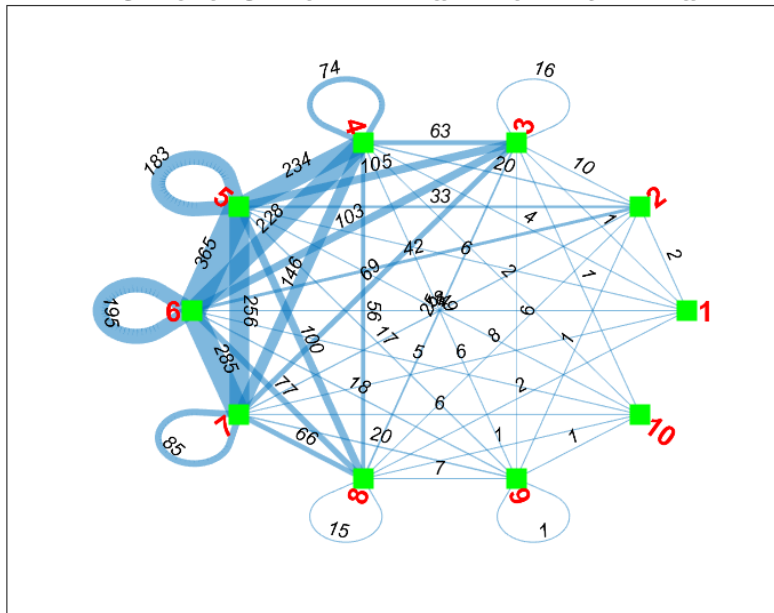
Οι στοχαστικές επιφάνειες με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι οι παρακάτω:

α. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου

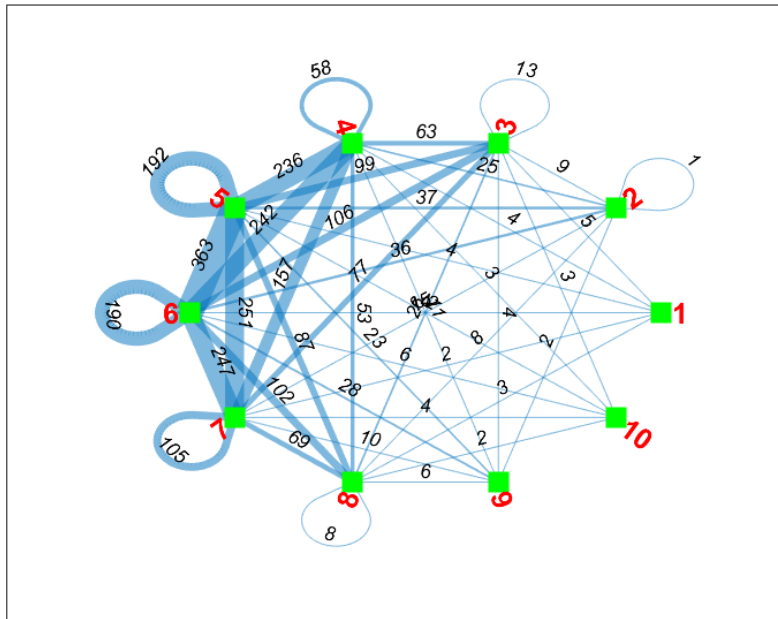
Λευκός Θόρυβος/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



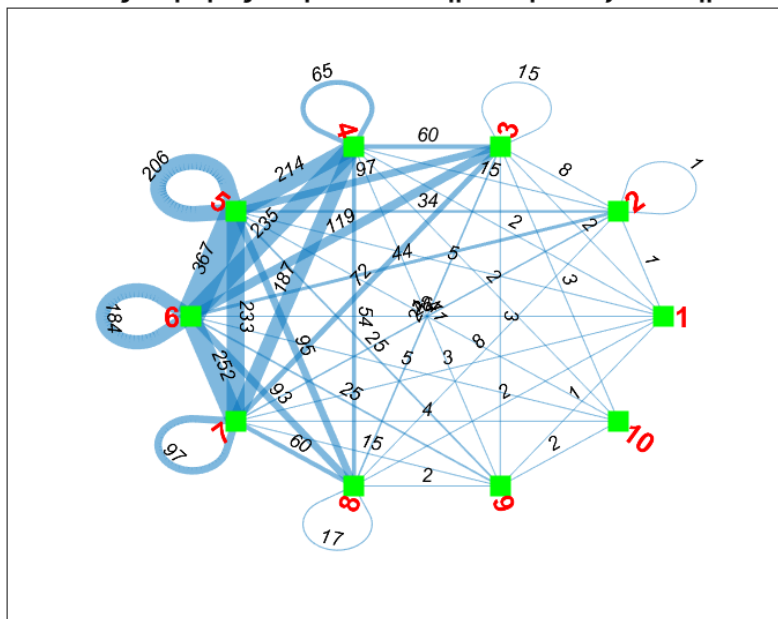
Λευκός Θόρυβος/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



Λευκός Θόρυβος/ κλίμακα :21 σημεία / με το ξ =91 σημεία

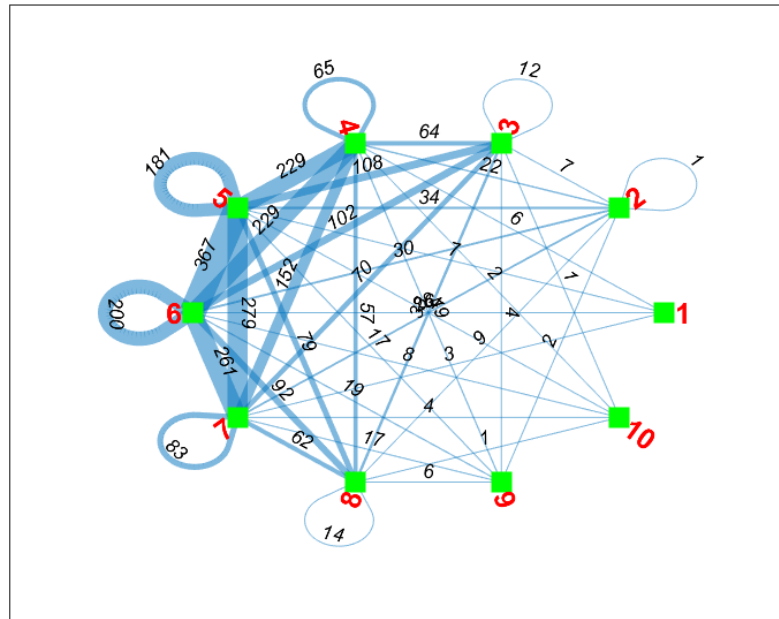


Λευκός Θόρυβος/ κλίμακα :45 σημεία / με το ξ =91 σημεία



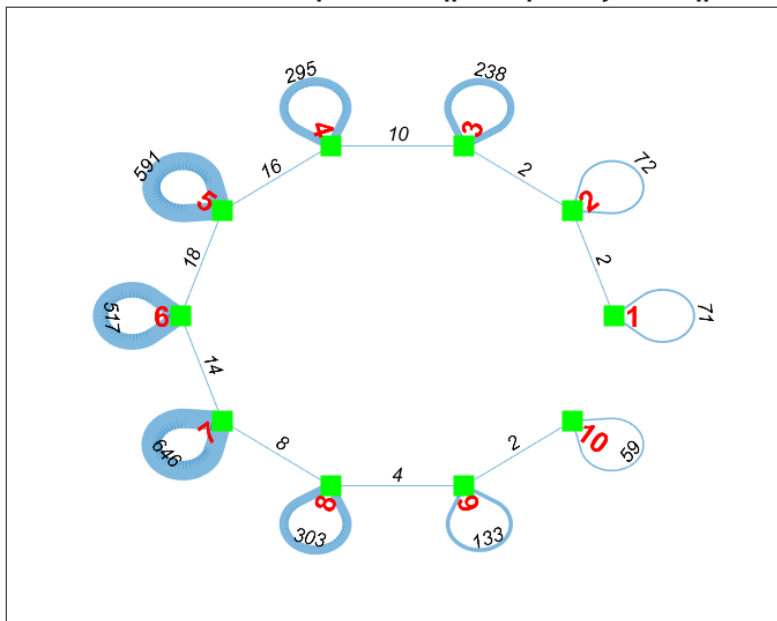
Εικόνα 50 Προφίλ λευκού θορύβου

Λευκός Θόρυβος/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία

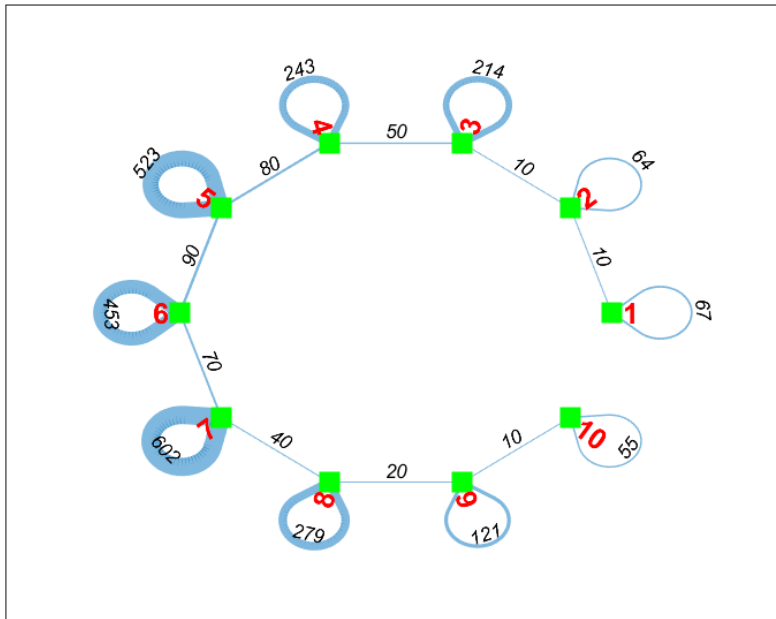


β. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή

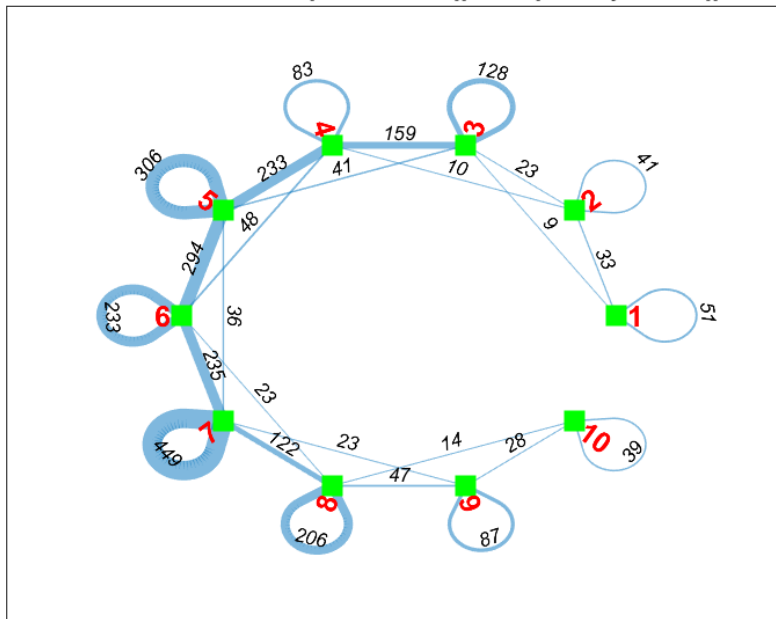
Gaussian Surface/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



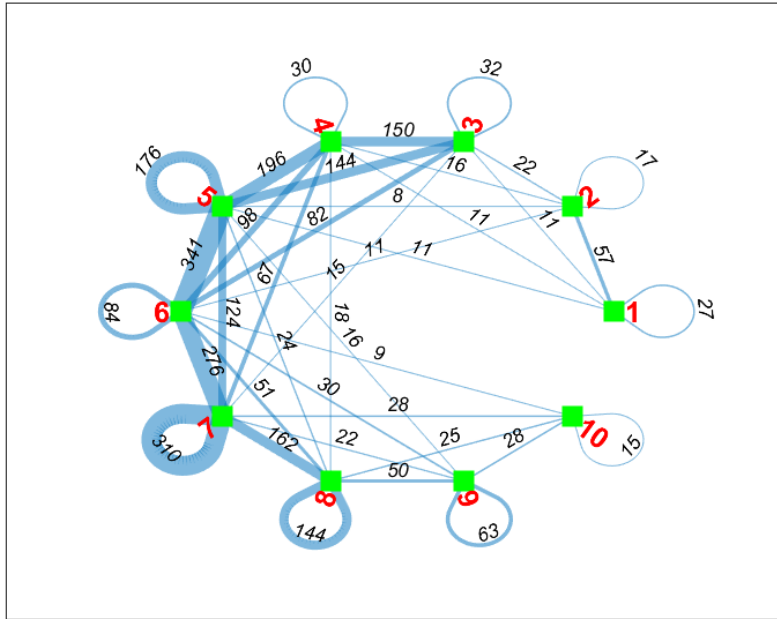
Gaussian Surface/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



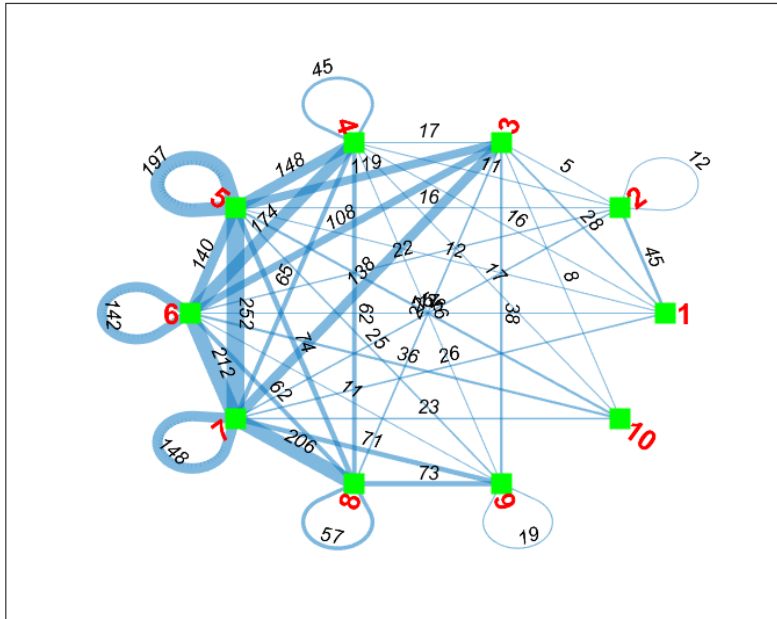
Gaussian Surface/ κλίμακα :21 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



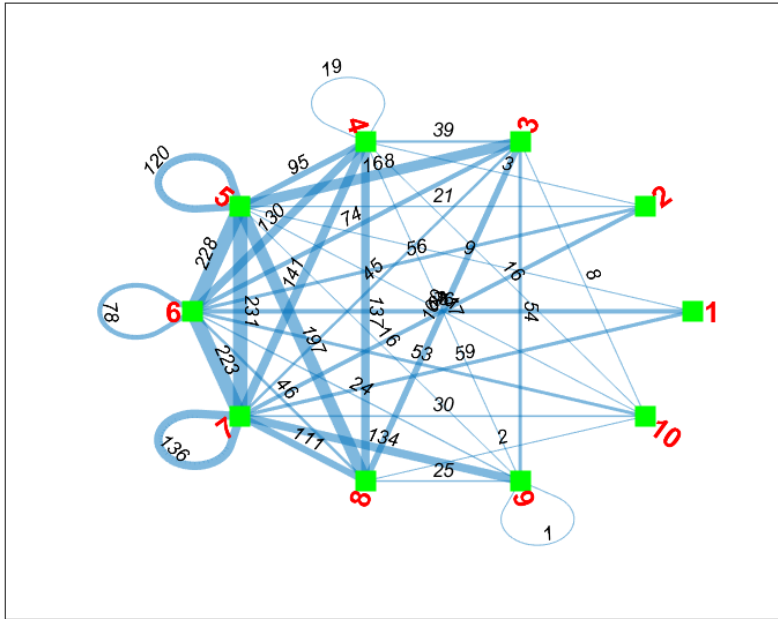
Gaussian Surface/ κλίμακα :45 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



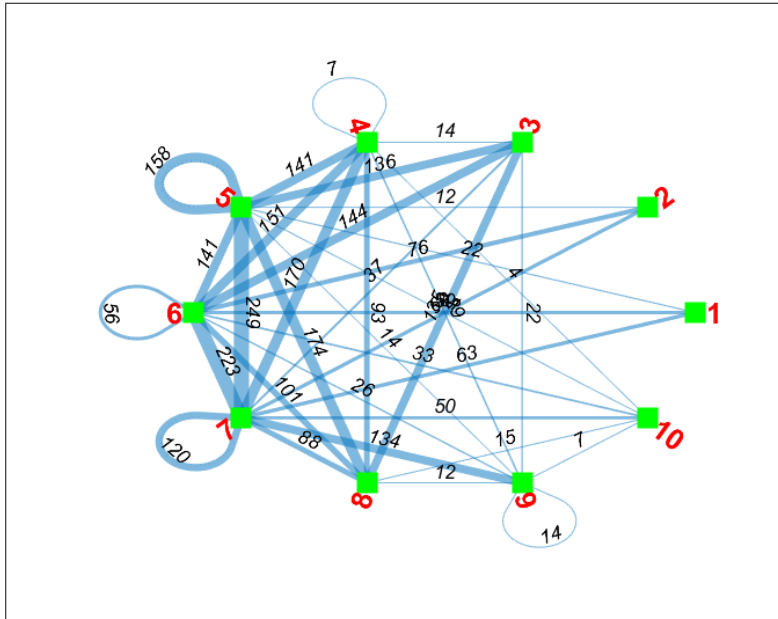
Gaussian Surface/ κλίμακα :89 σημεία / με το $\xi=91$ σημεία



Gaussian Surface/ κλίμακα :181 σημεία / με το ξ =91 σημεία



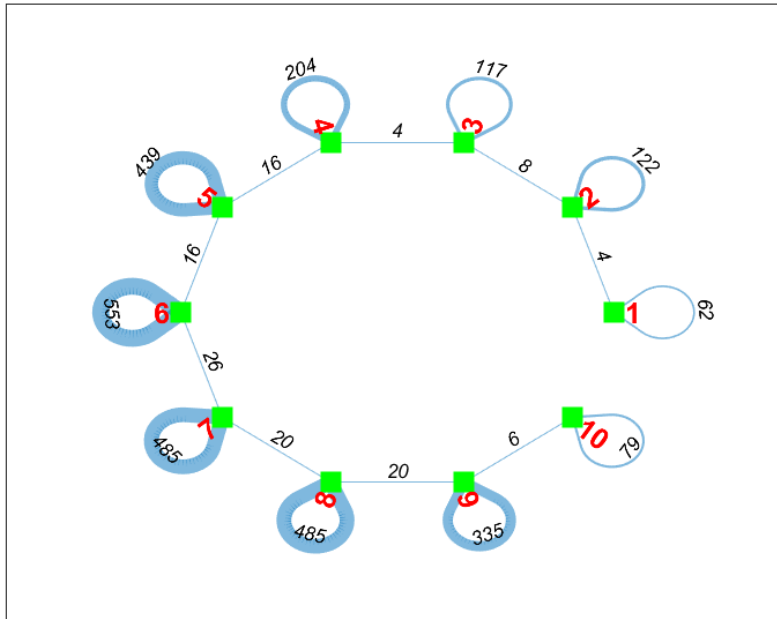
Gaussian Surface/ κλίμακα :201 σημεία / με το ξ =91 σημεία



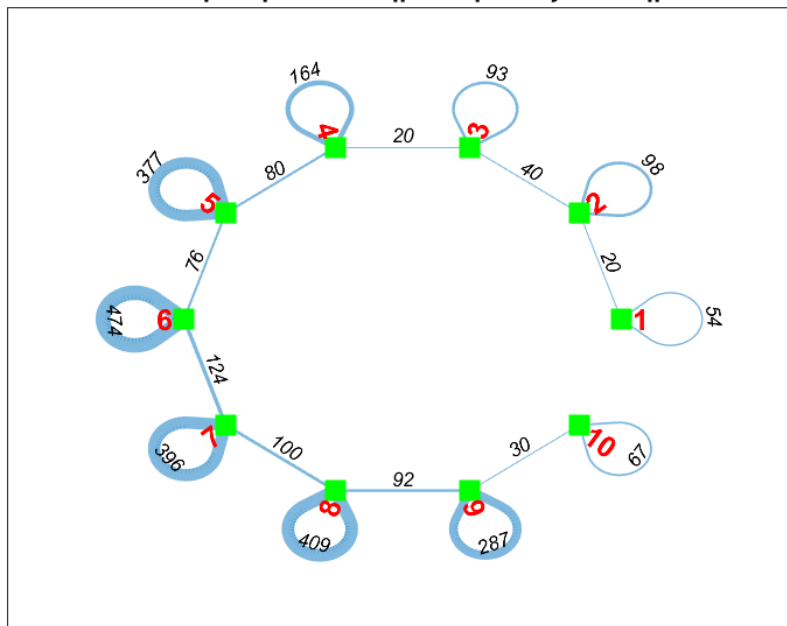
Εικόνα 51 Προφίλ προκύπτουν από κανονική κατανομή

γ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από εκθετικό ACF

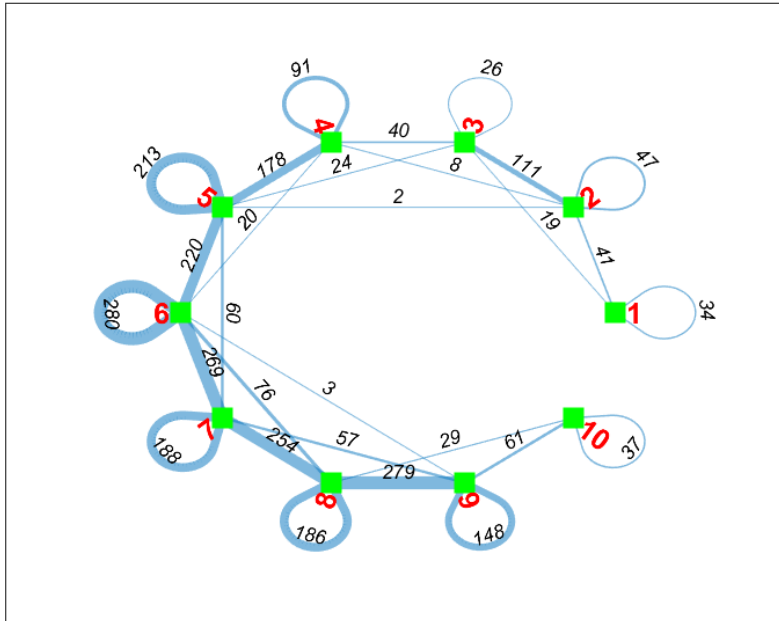
Εκθετική/ κλίμακα :1 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



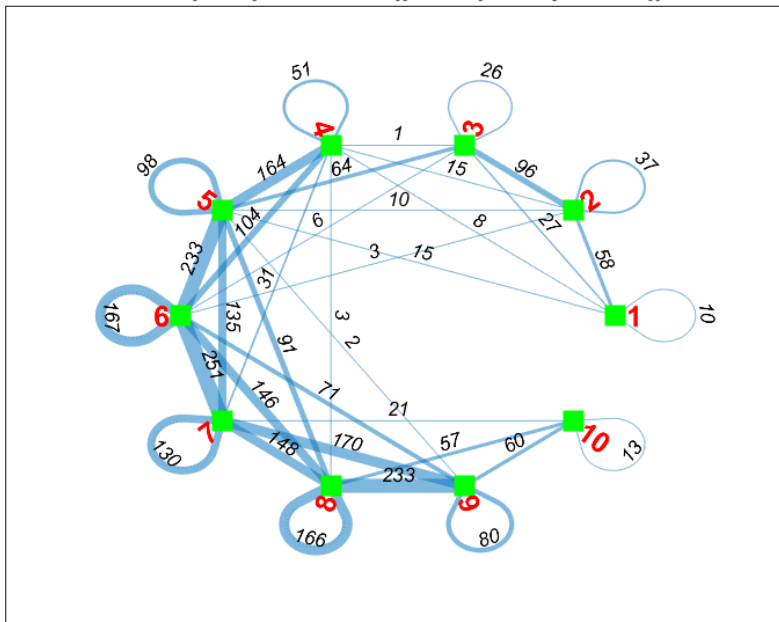
Εκθετική/ κλίμακα :5 σημεία / με το $\xi = 91$ σημεία



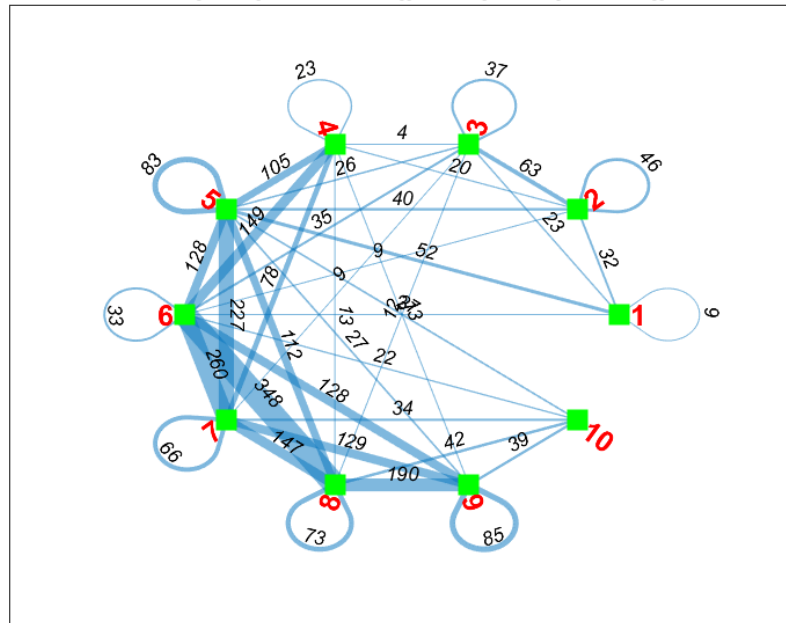
Εκθετική/ κλίμακα :21 σημεία / με το ξ =91 σημεία



Εκθετική/ κλίμακα :45 σημεία / με το ξ =91 σημεία

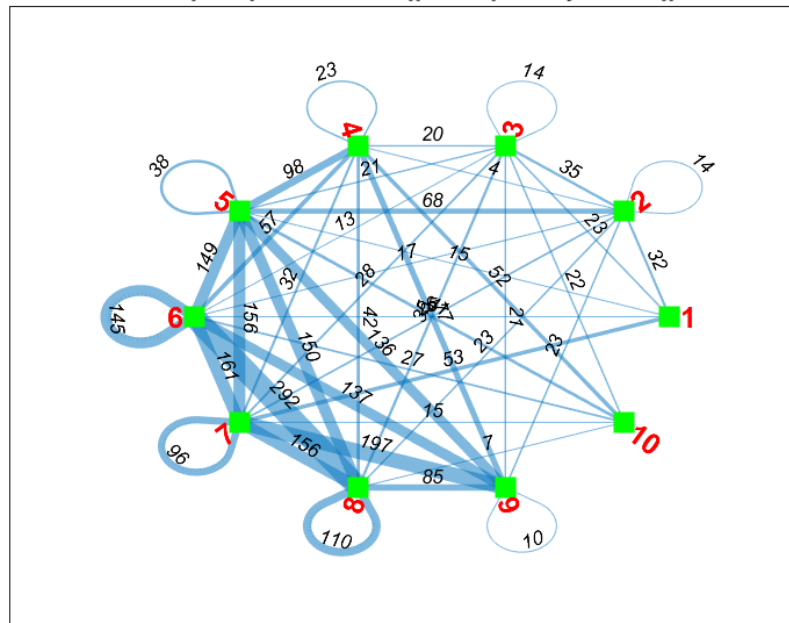


Εκθετική/ κλίμακα :89 σημεία / με το ξ =91 σημεία

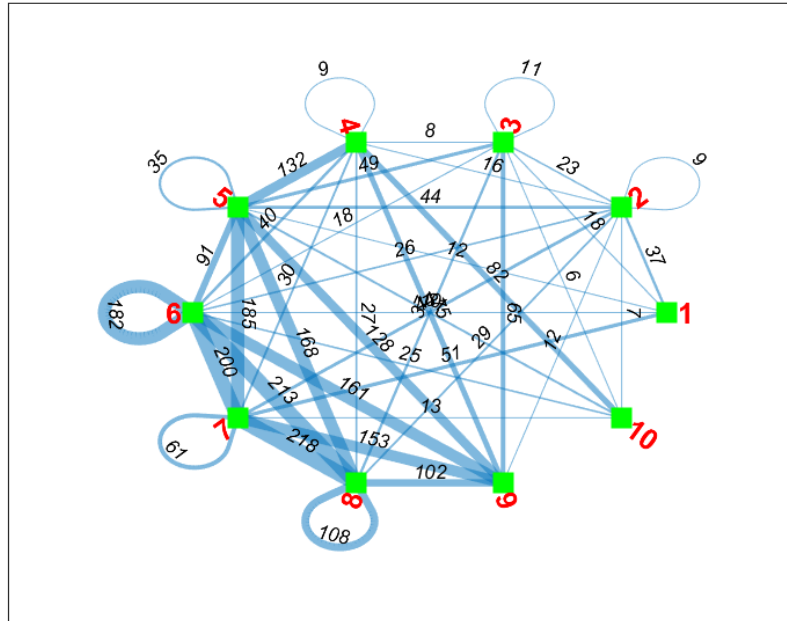


Εικόνα 52 Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF

Εκθετική/ κλίμακα :181 σημεία / με το ξ =91 σημεία



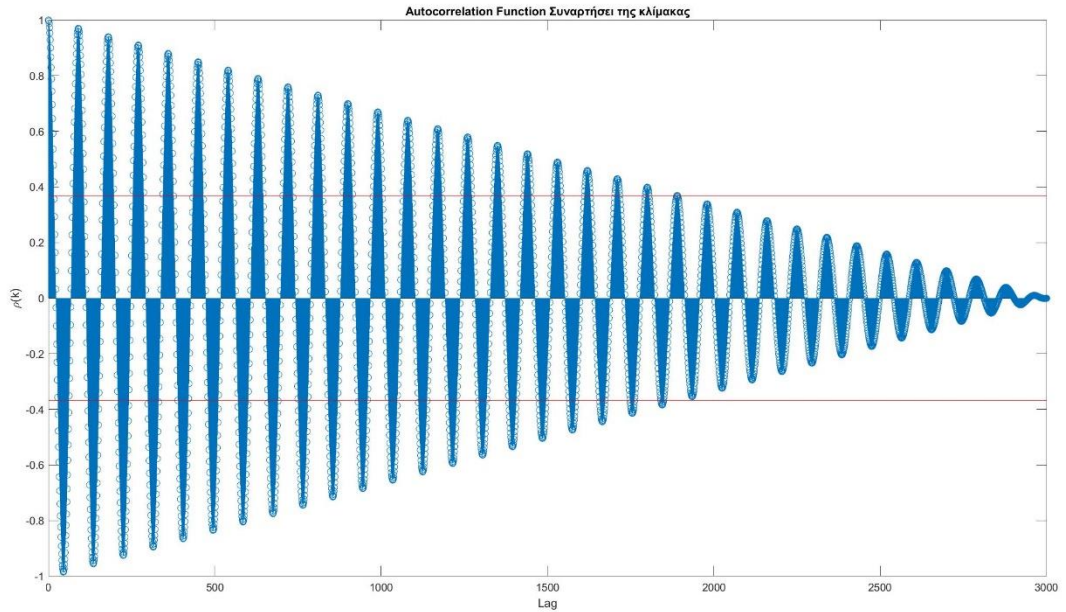
Εκθετική/ κλίμακα :201 σημεία / με το ξ =91 σημεία



5.3 Μελέτη μετρικών γράφων

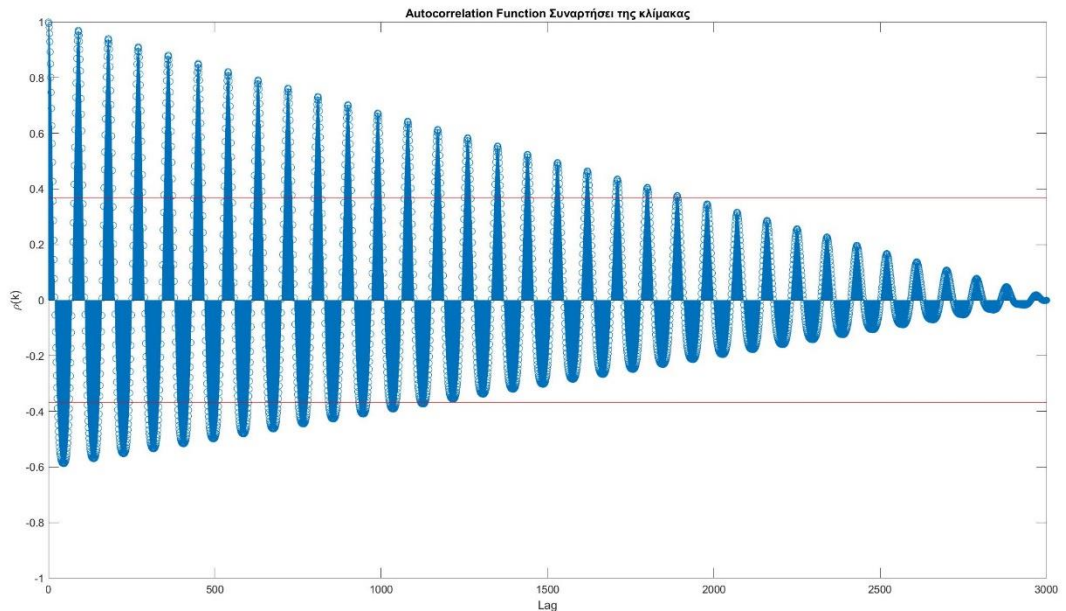
5.3.1 Autocorrelation Function

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



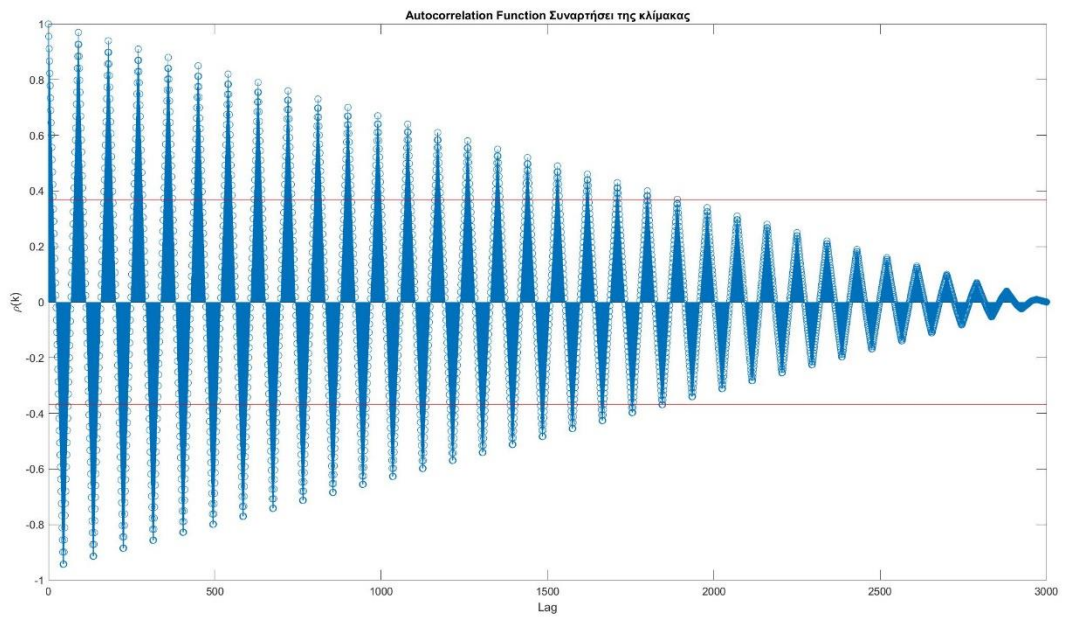
Εικόνα 53 Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



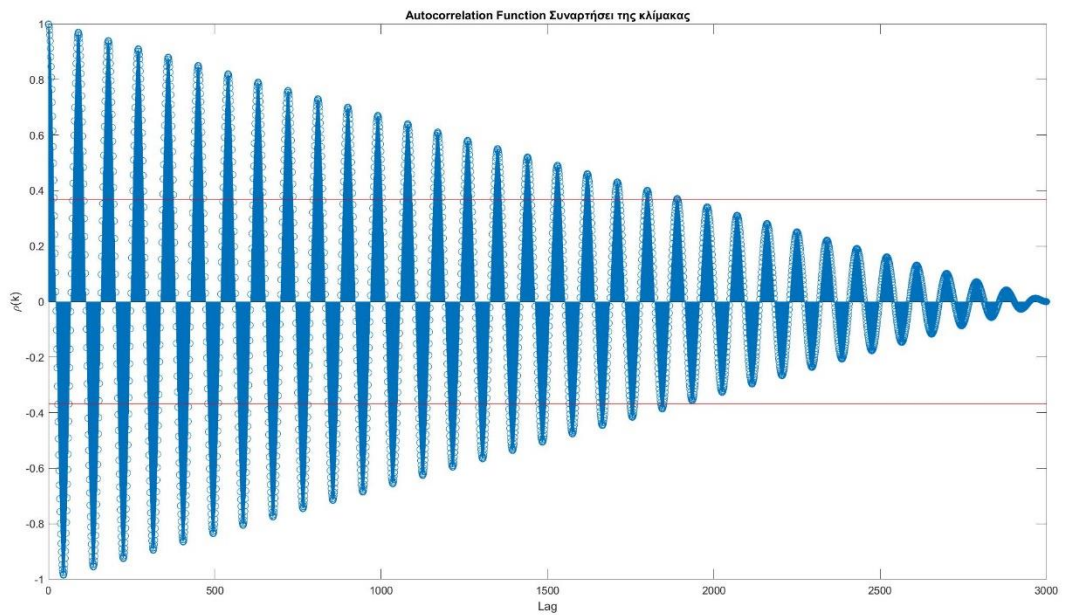
Εικόνα 54 Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



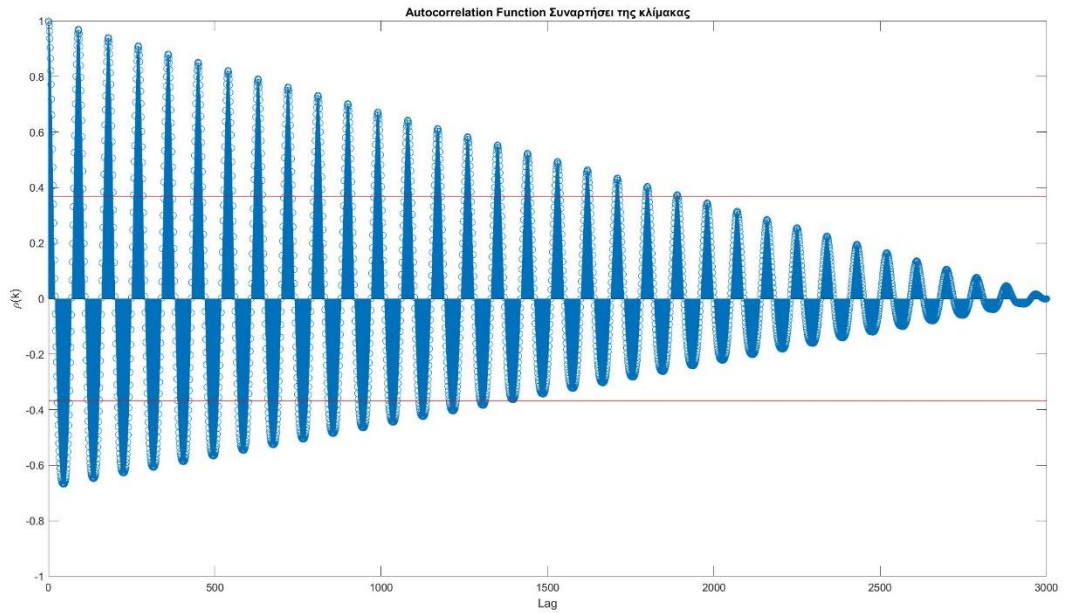
Εικόνα 55 Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



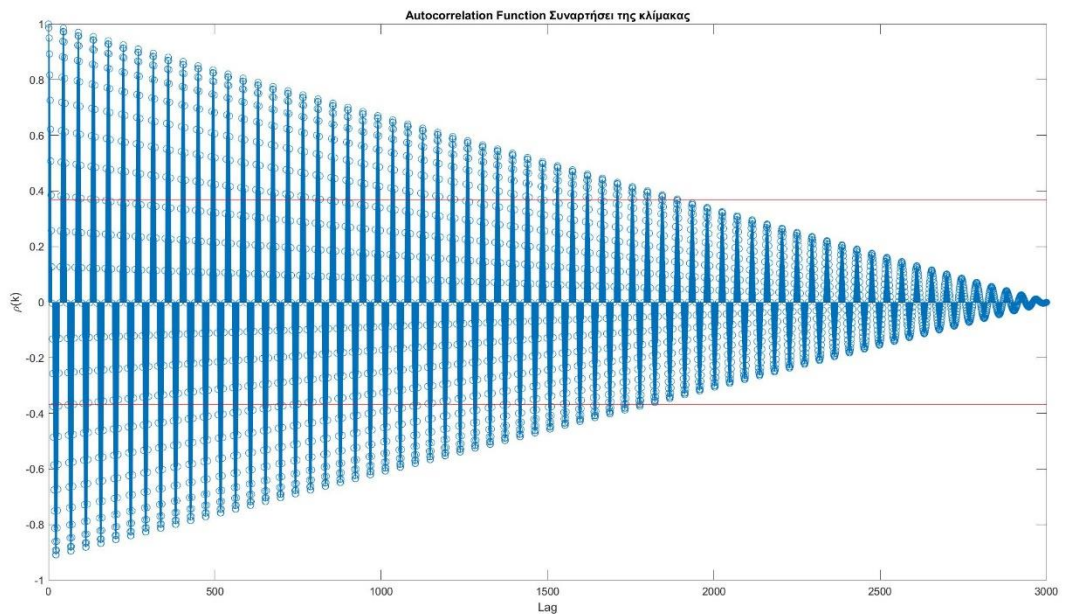
Εικόνα 56 Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 57 Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

στ. Προφίλ πλήρως ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

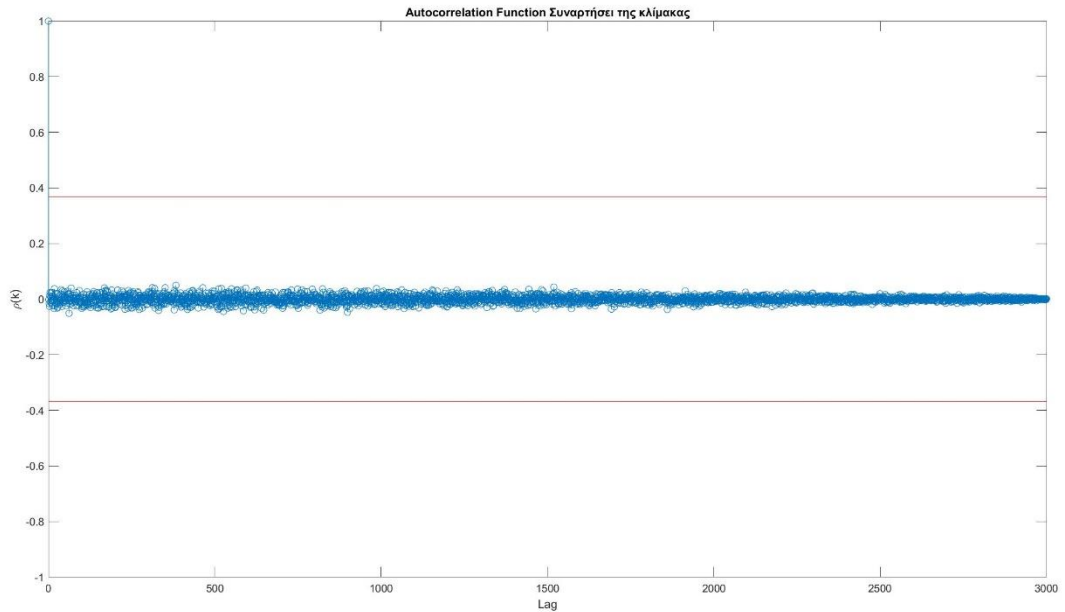


Εικόνα 58 Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

Στοχαστικές επιφάνειες

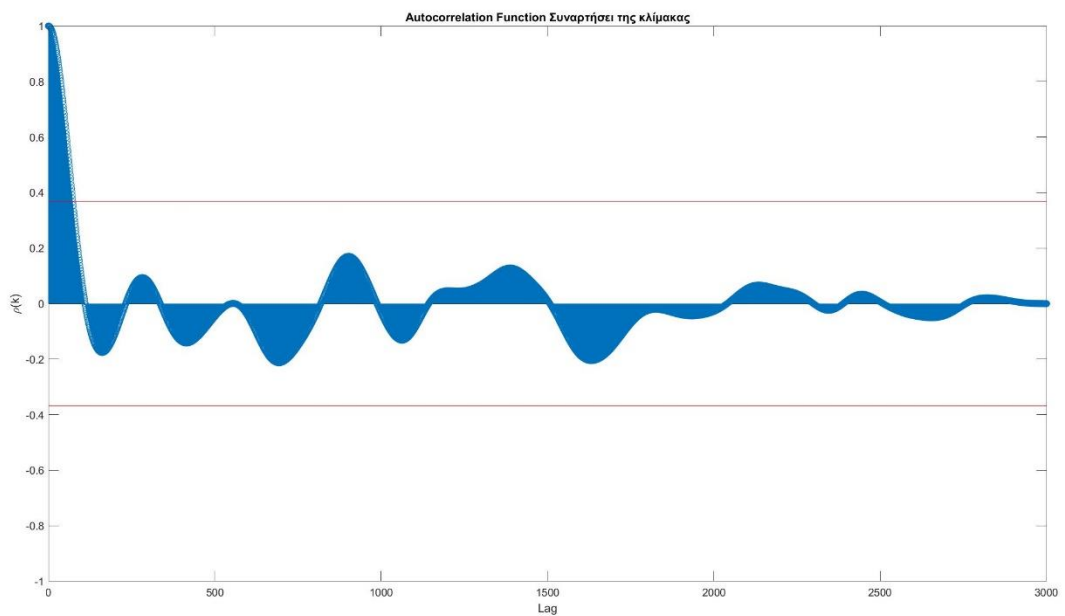
Οι στοχαστικές επιφάνειες με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι οι παρακάτω:

ζ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



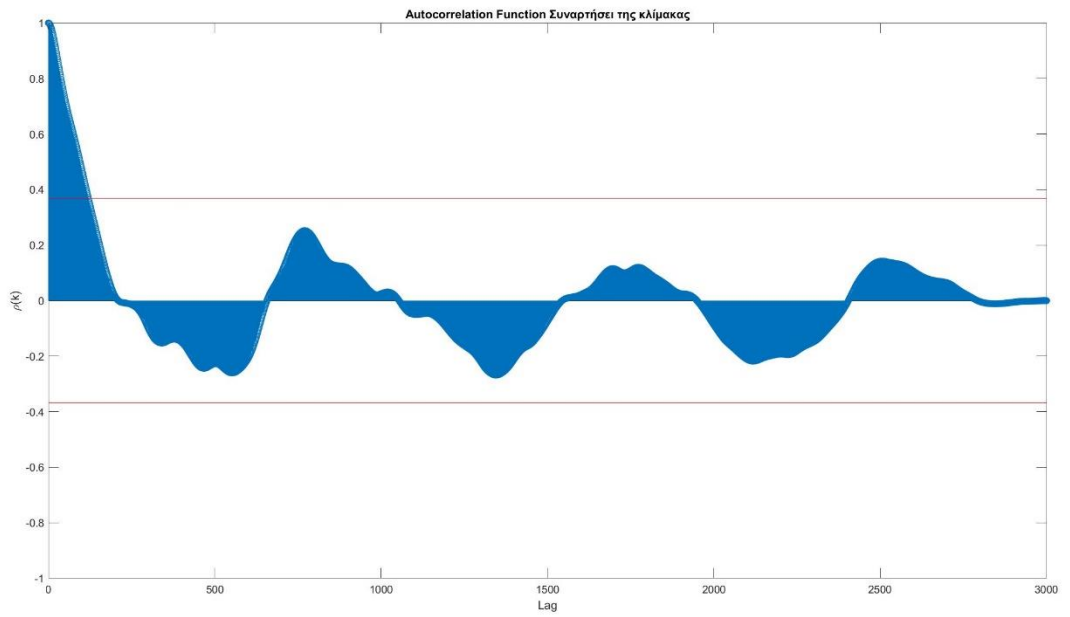
Εικόνα 59 Προφίλ λευκού θορύβου

η. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή



Εικόνα 60 Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή

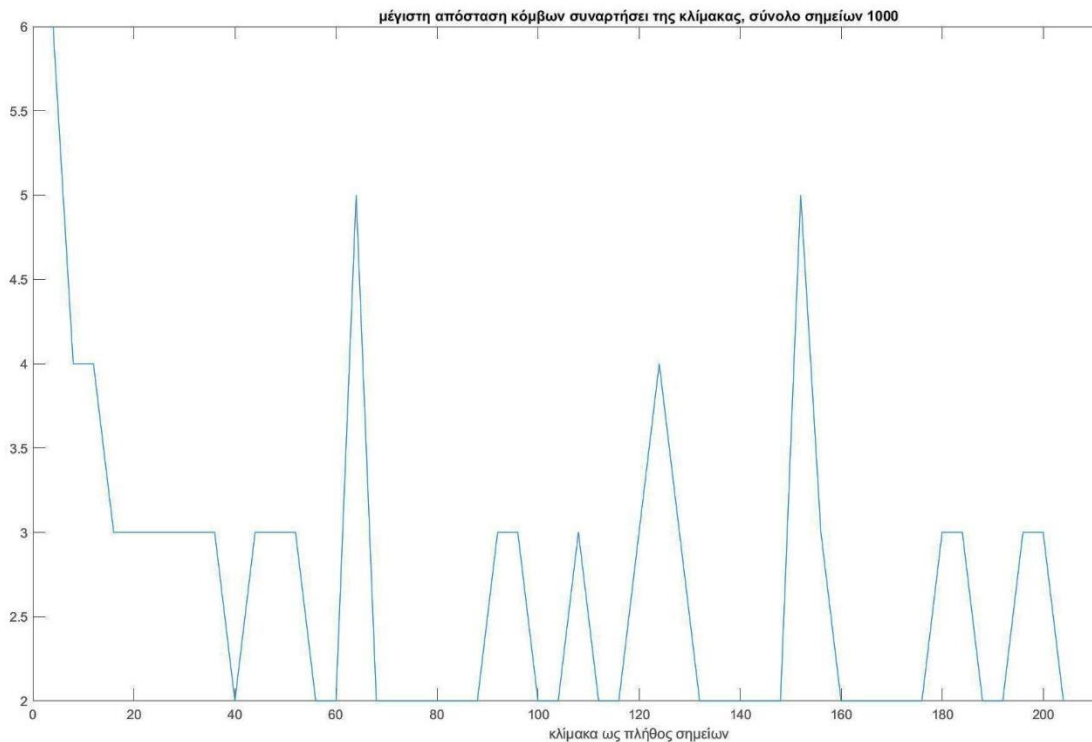
θ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσα από εκθετικό ACF



Εικόνα 61 Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF

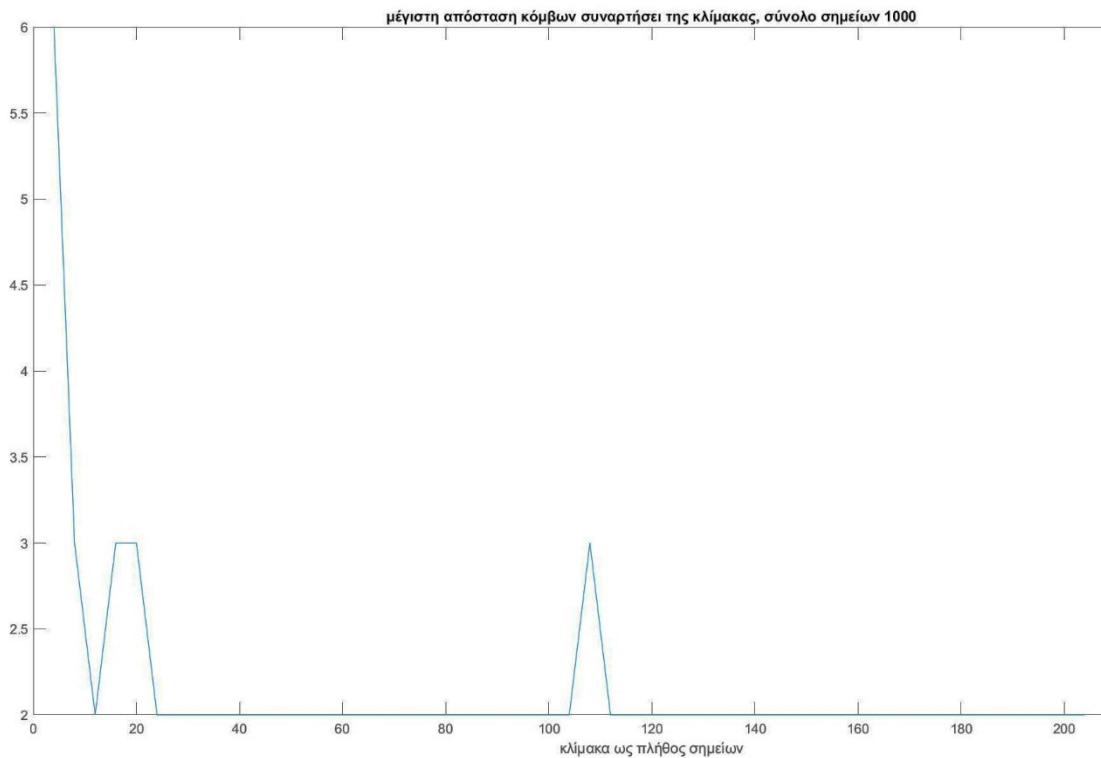
5.3.2 Μέγιστη Απόσταση Κόμβων

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



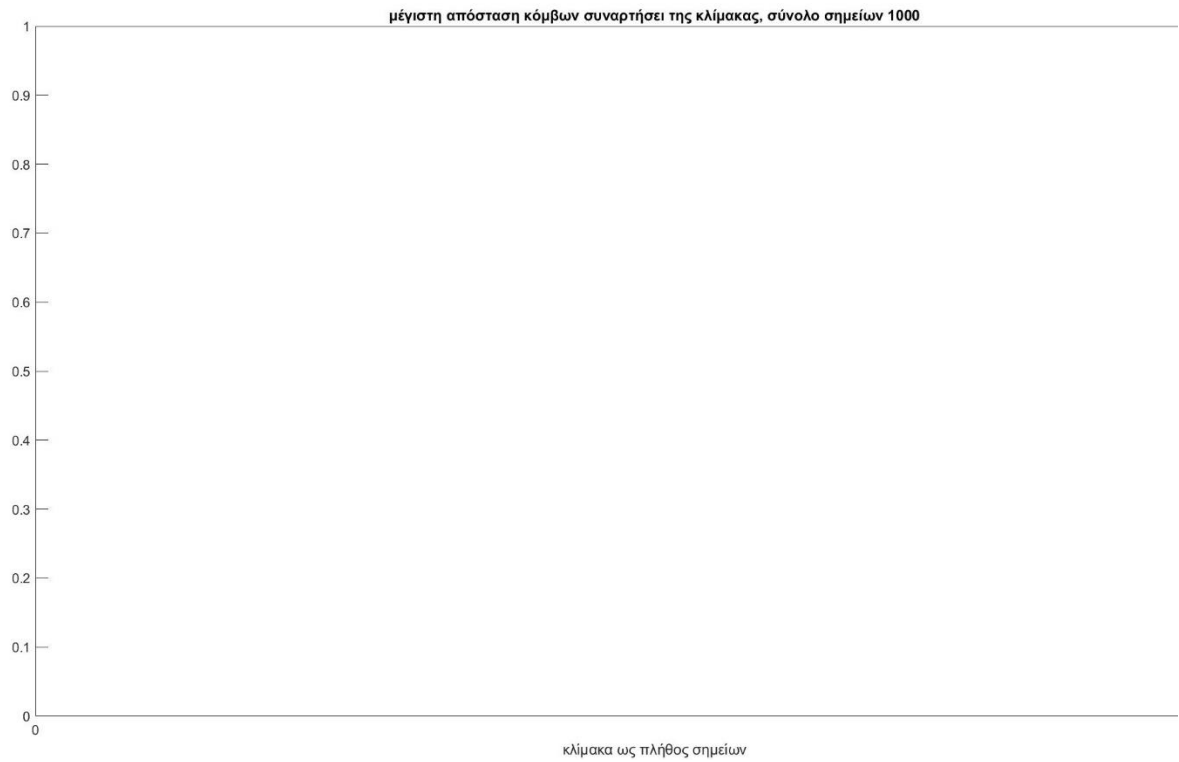
Εικόνα 62 Μέγιστη απόσταση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



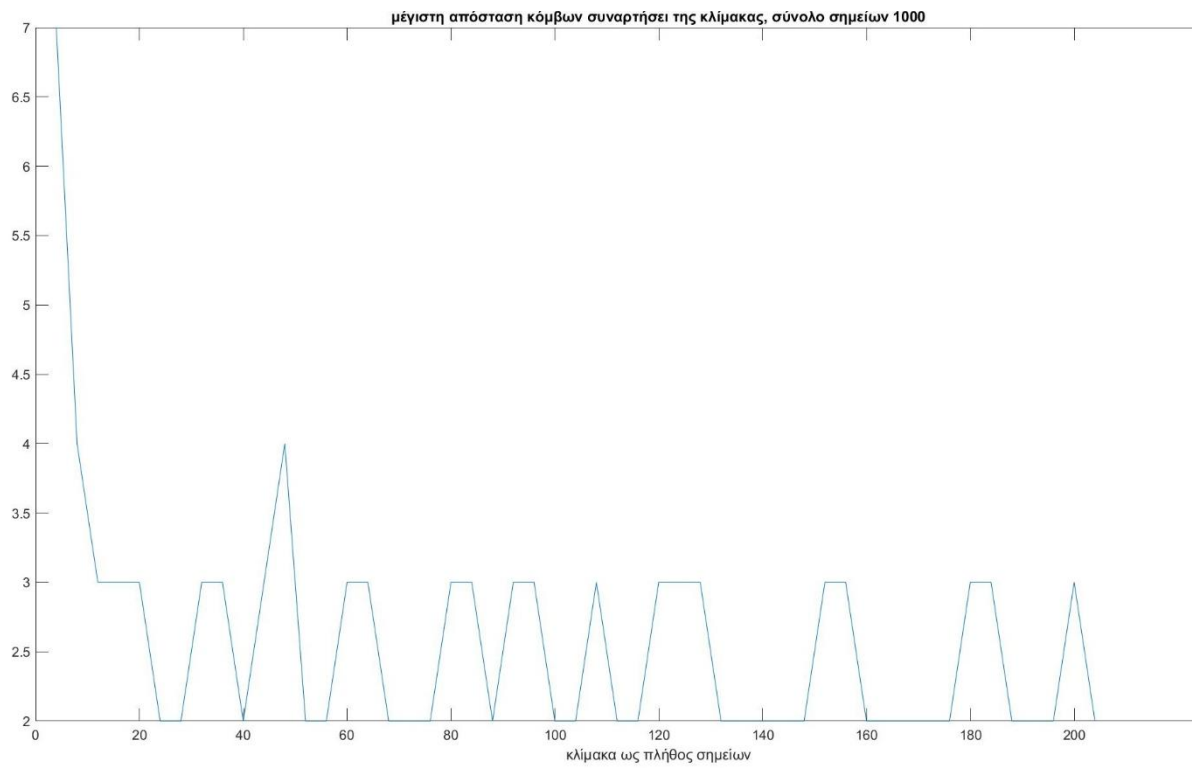
Εικόνα 63 Μέγιστη απόσταση συναρτήσει της Κλίμακας Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



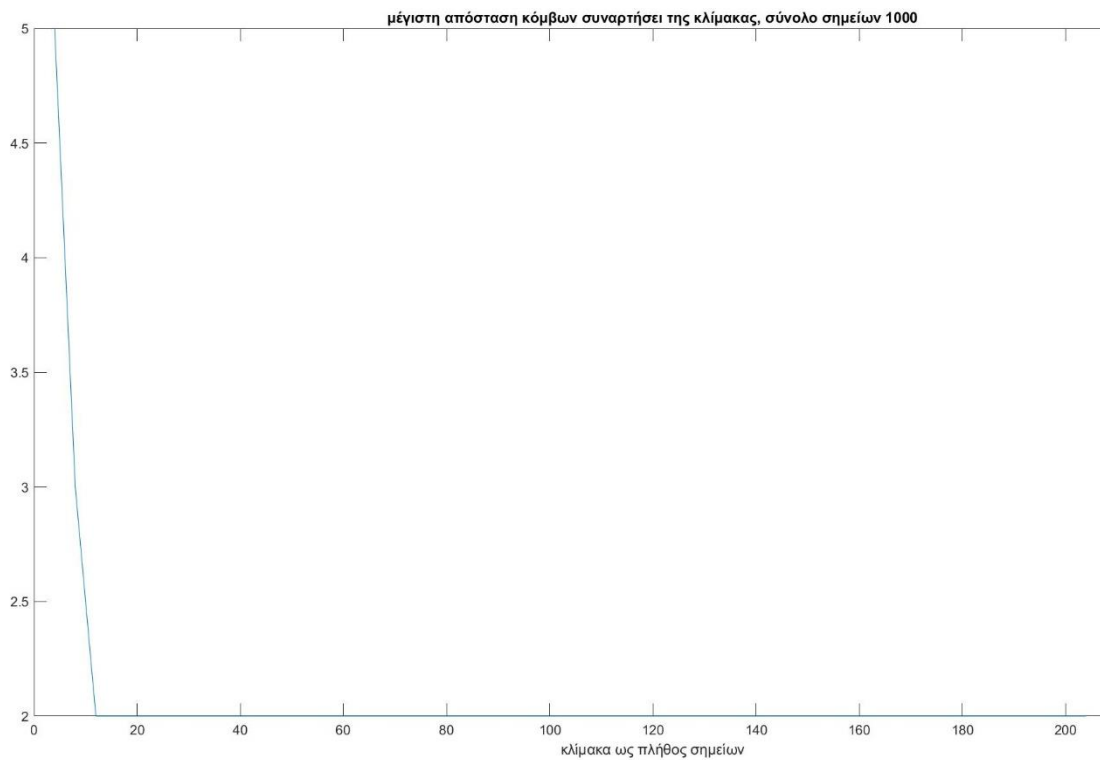
Εικόνα 64 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



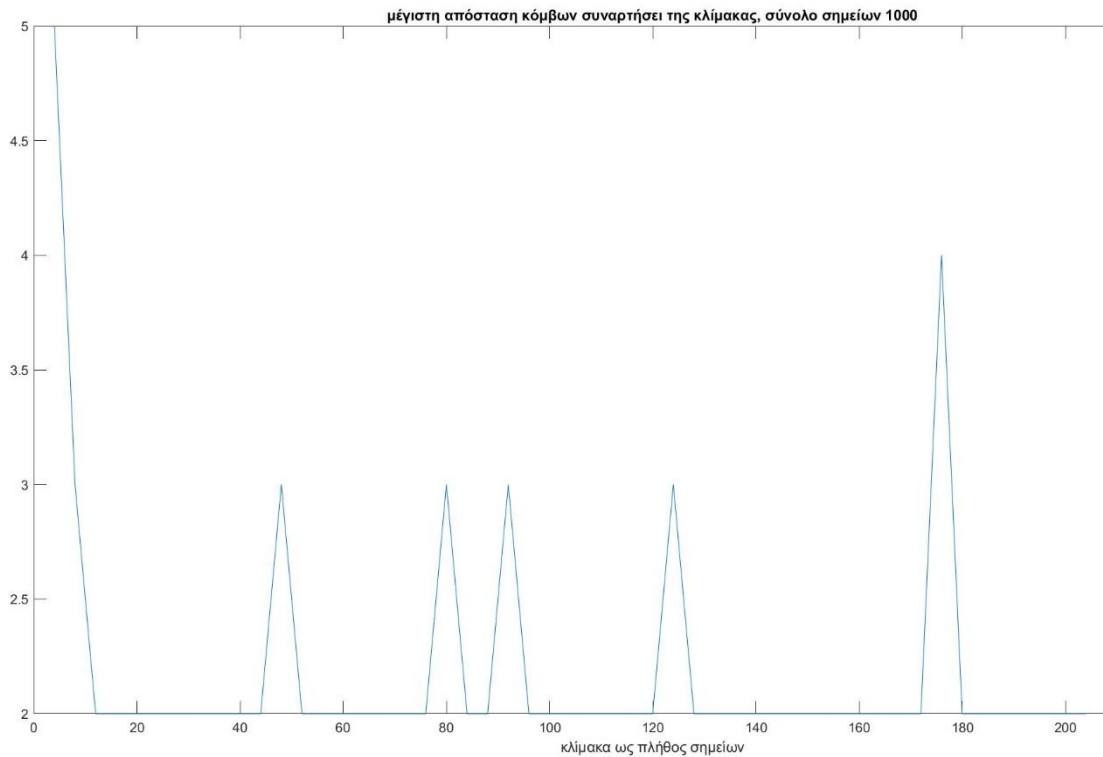
Εικόνα 65 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 66 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

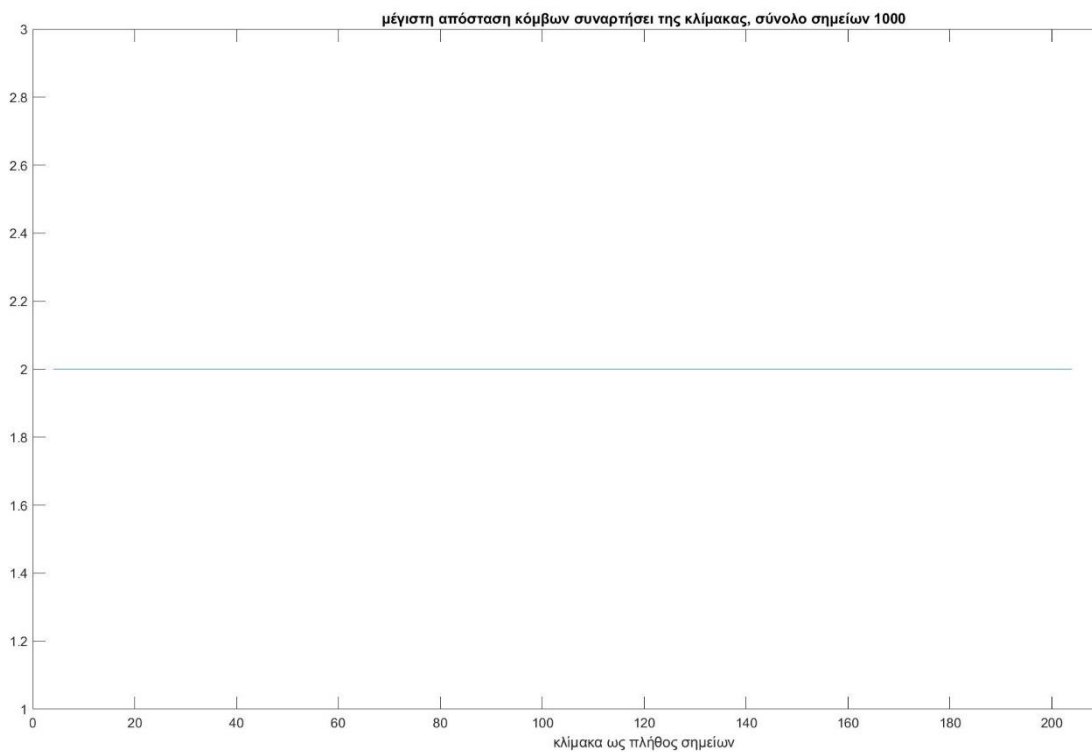


Εικόνα 67 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

Στοχαστικές επιφάνειες

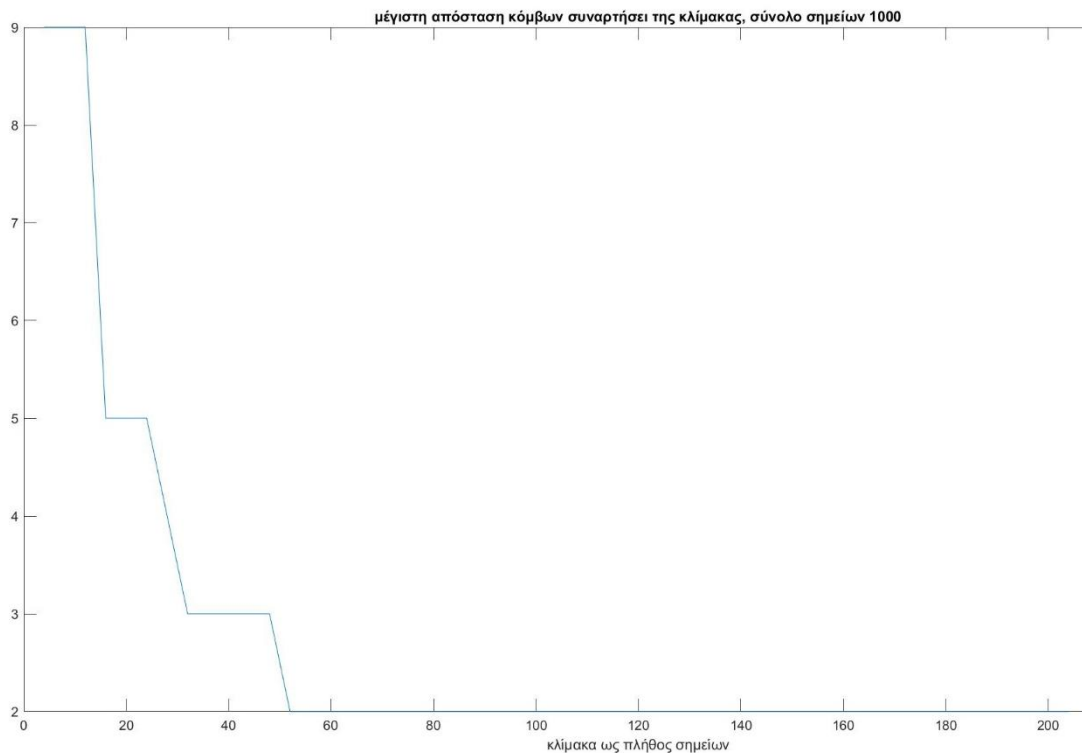
Οι στοχαστικές επιφάνειες με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι οι παρακάτω:

ζ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



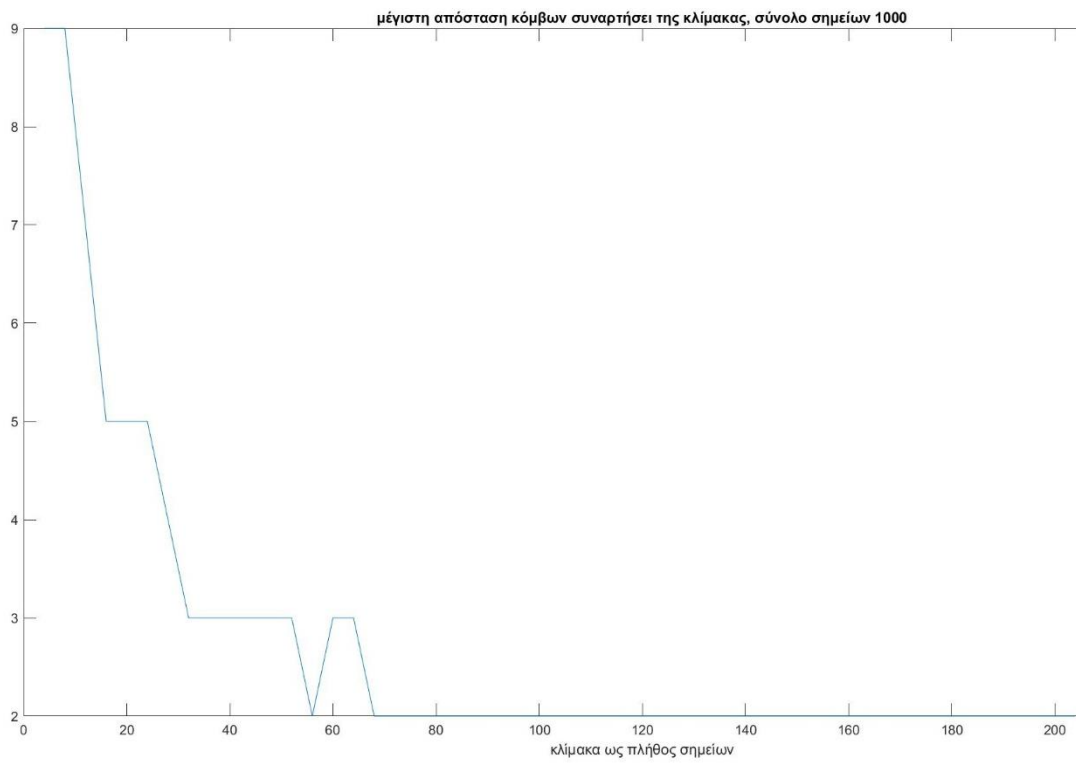
Εικόνα 68 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ λευκού θορύβου

η. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή



Εικόνα 69 Μέγιστη απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή

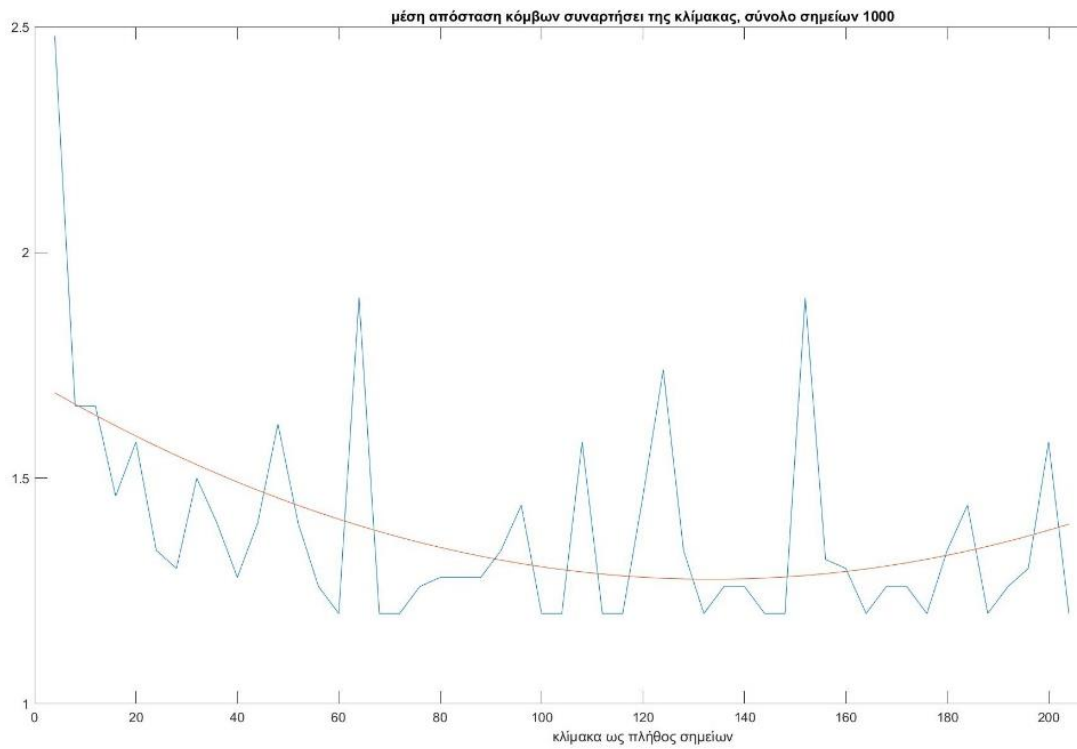
θ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσα από εκθετικό ACF



Εικόνα 70 Μέγιστη απόσταση συναρτήσει της Κλίμακας Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF

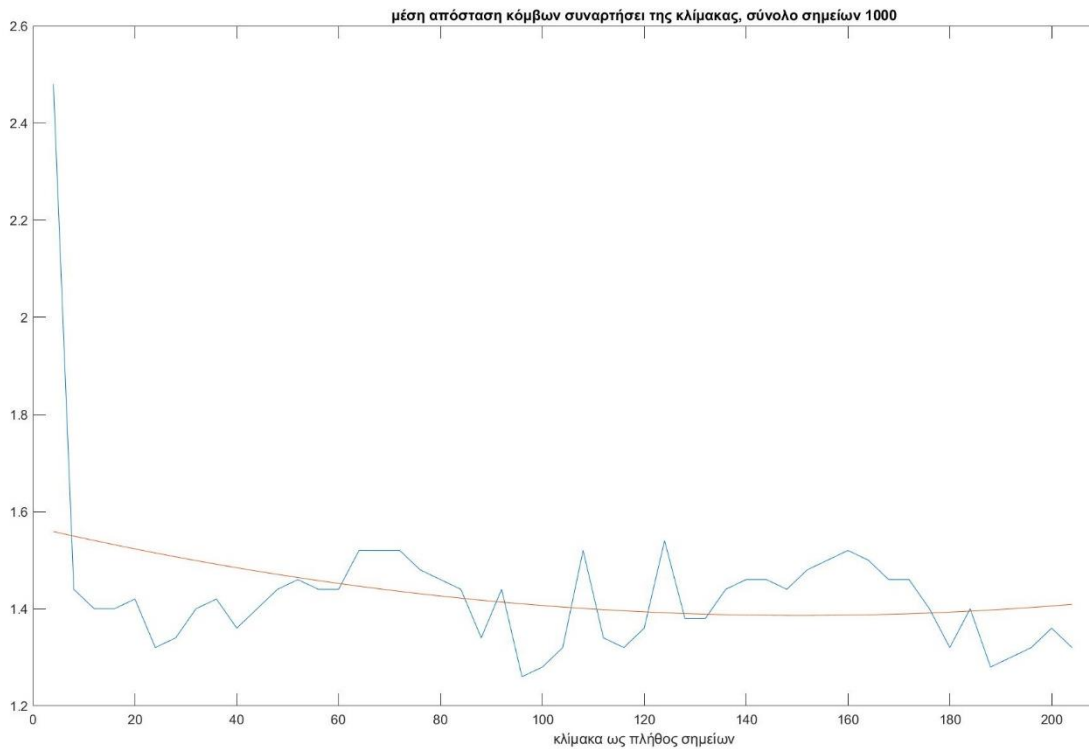
5.3.3 Μέση Απόσταση Κόμβων

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



Εικόνα 71 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



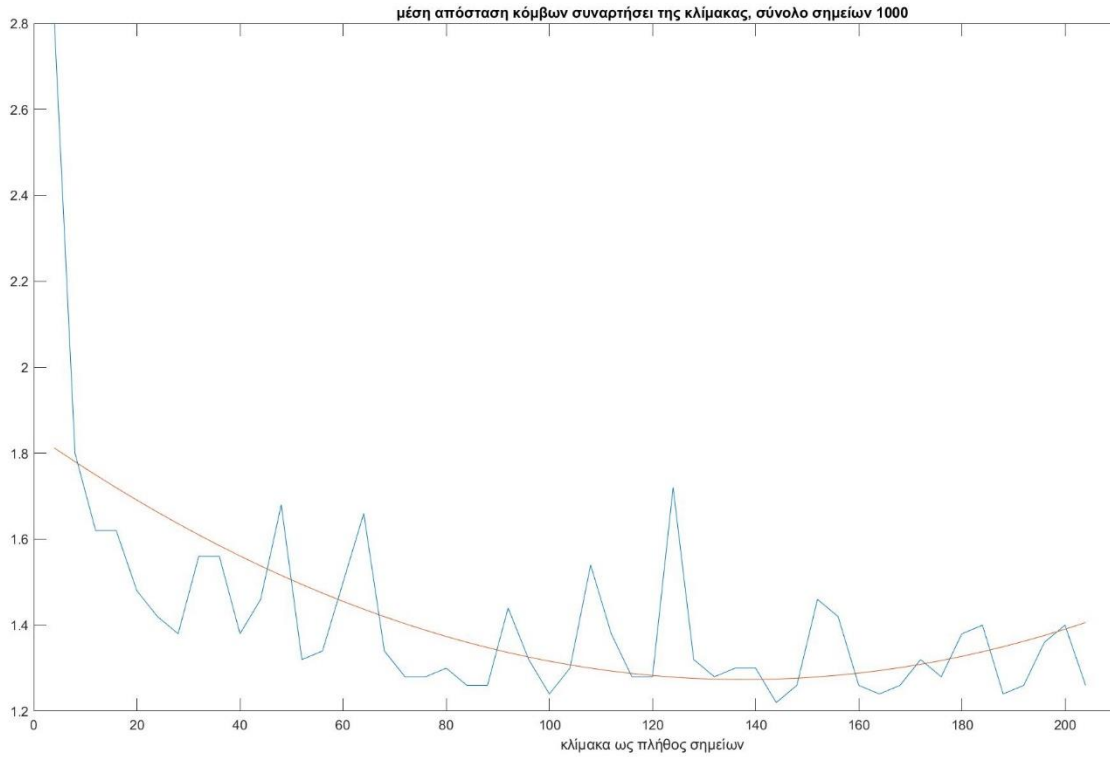
Εικόνα 72 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



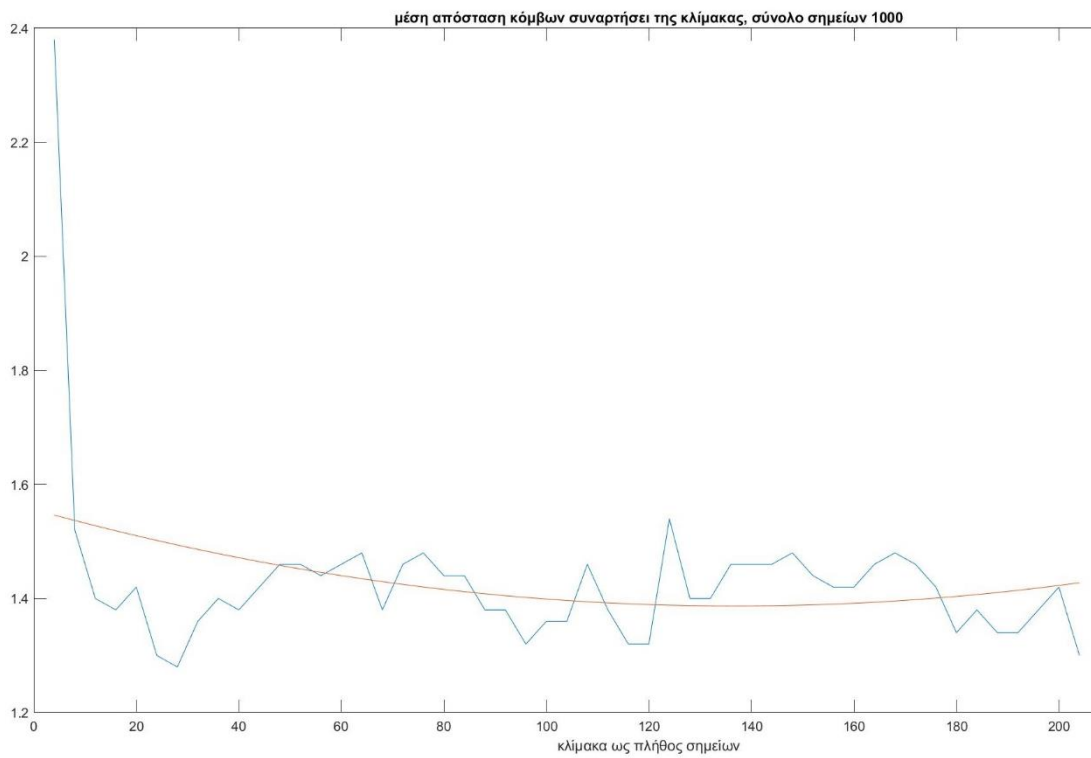
Εικόνα 73 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



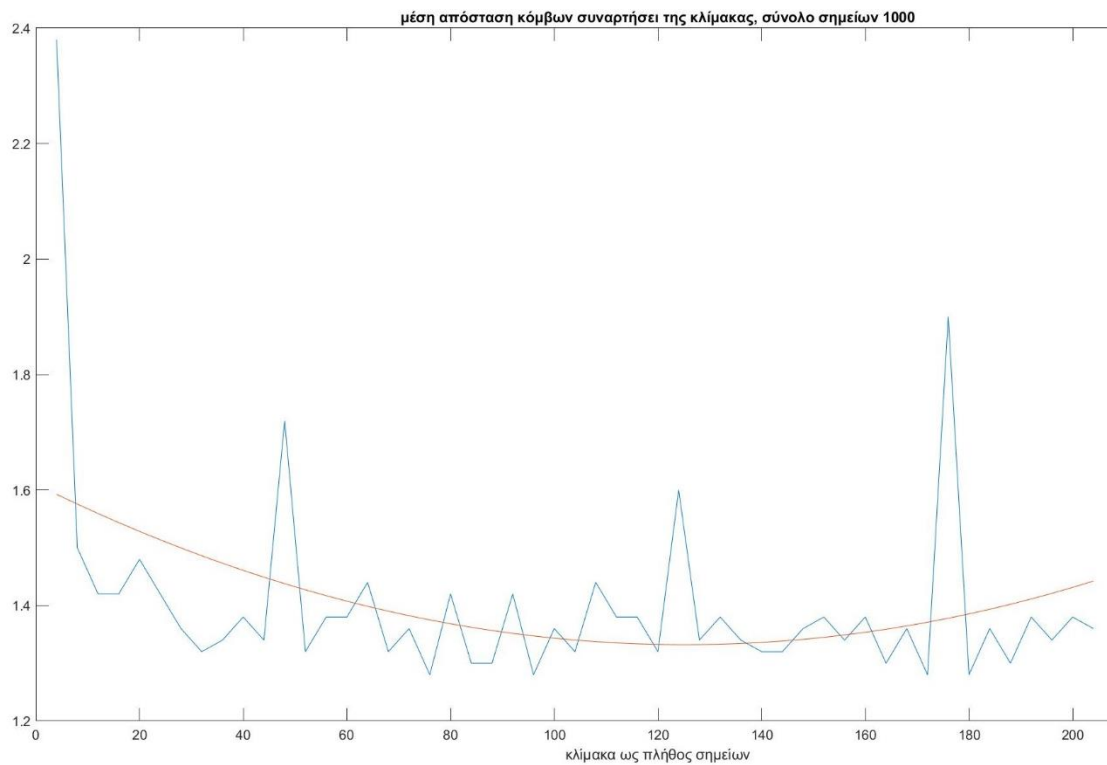
Εικόνα 74 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 75 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας

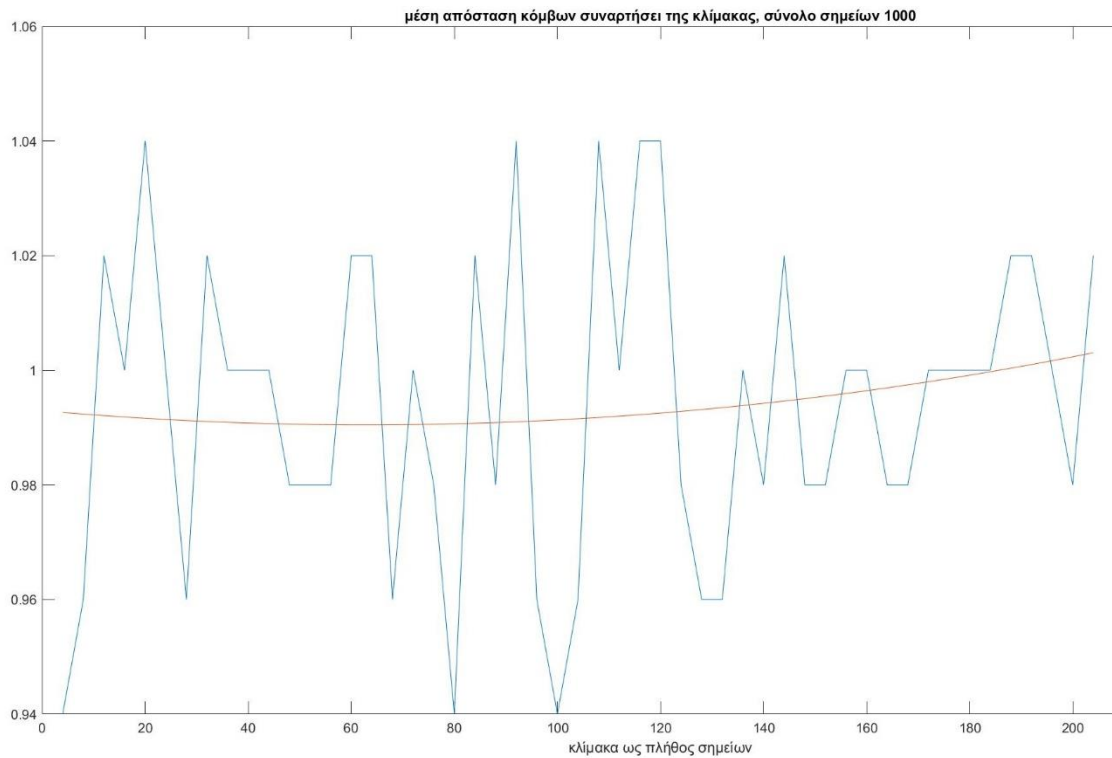


Εικόνα 76 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

Στοχαστικές επιφάνειες

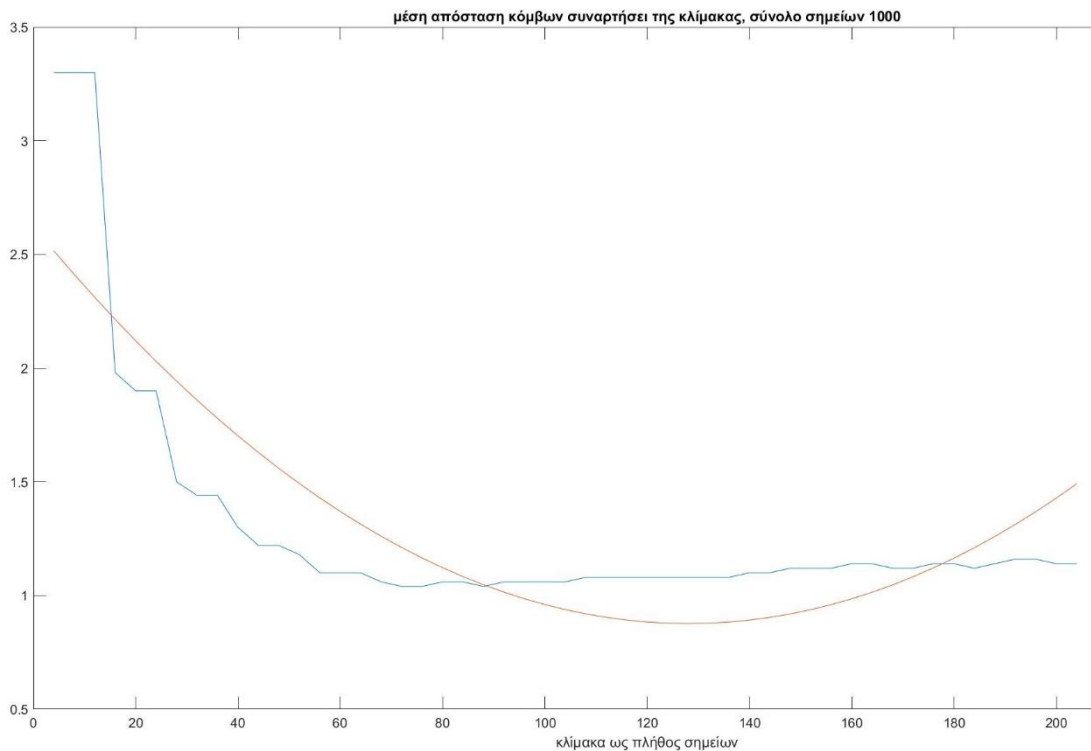
Οι στοχαστικές επιφάνειες με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι οι παρακάτω:

ζ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



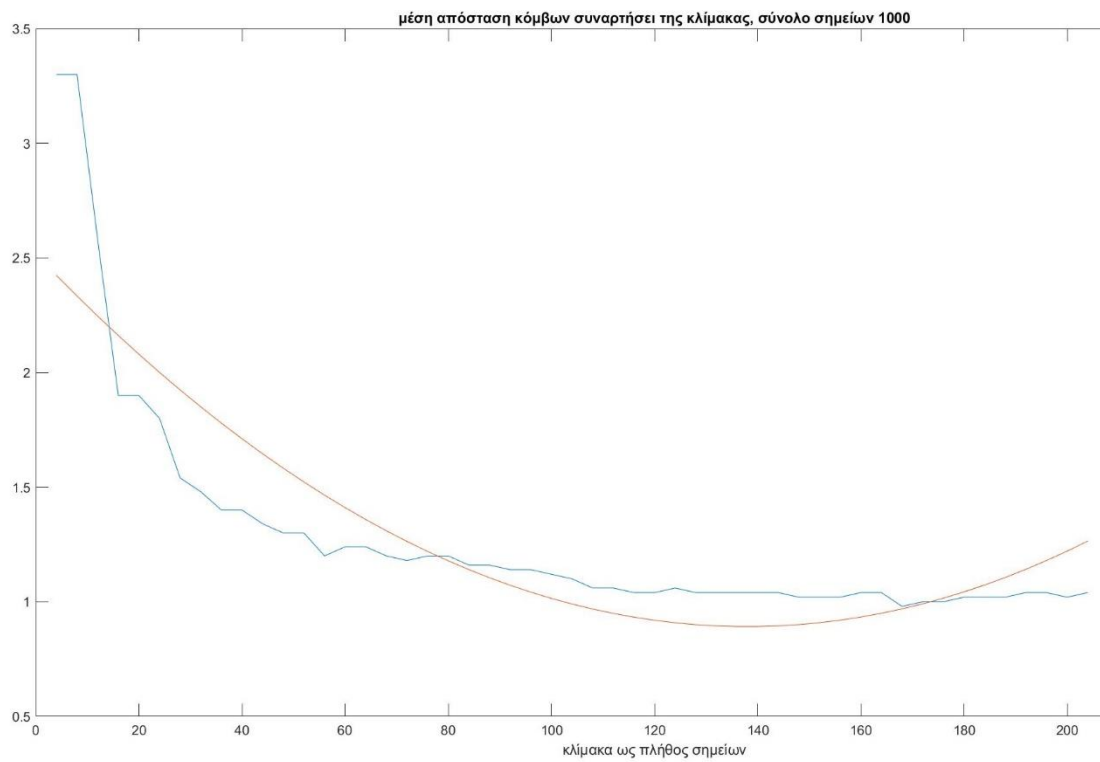
Εικόνα 77 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου

η. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή



Εικόνα 78 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από κανονική κατανομή

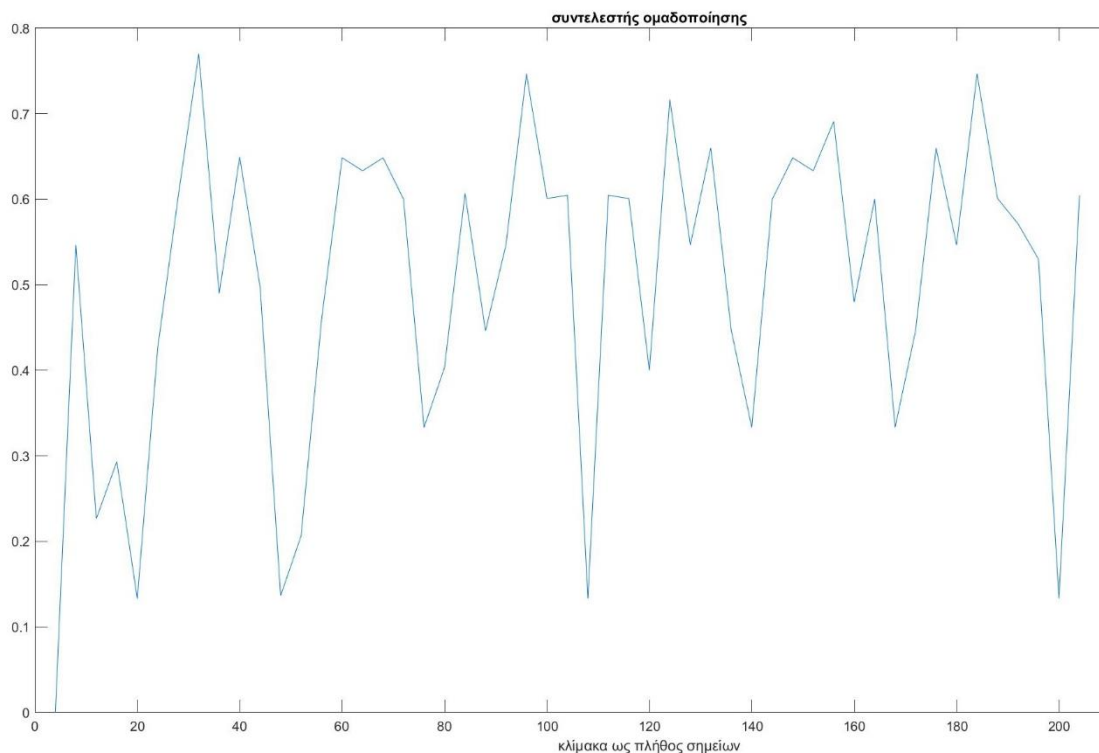
θ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από εκθετικό ACF



Εικόνα 79 Μέση απόσταση συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF

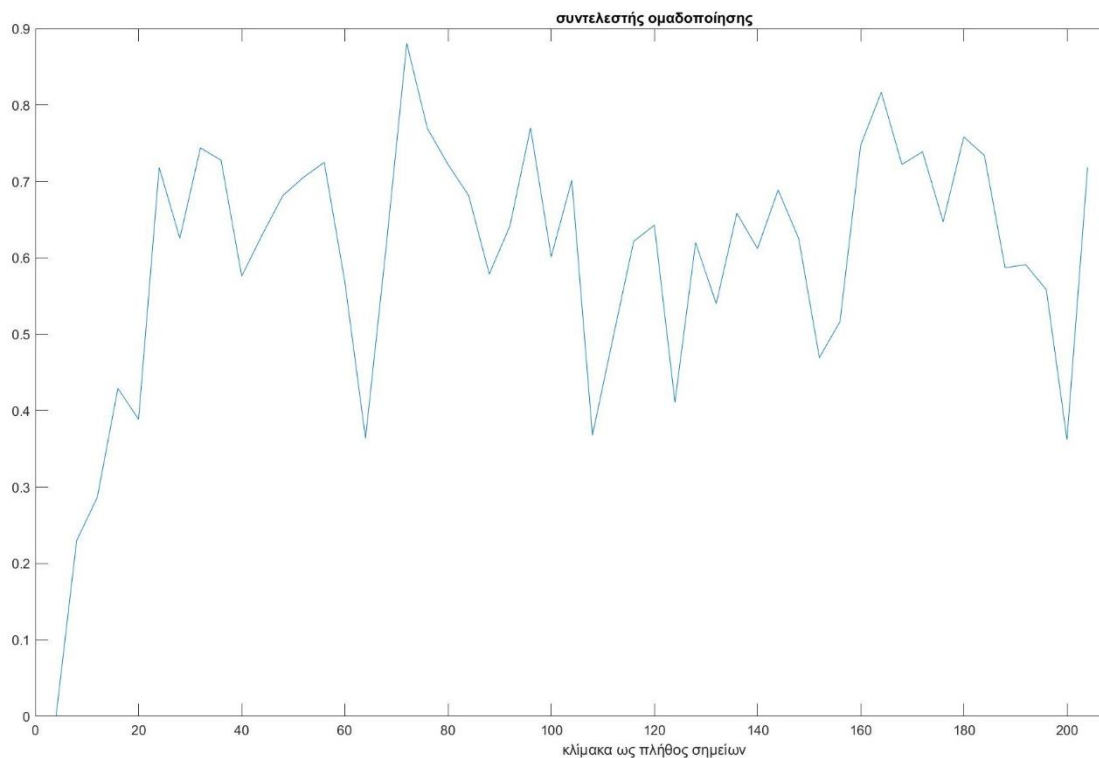
5.3.4 Συντελεστής Ομαδοποίησης Γράφων

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



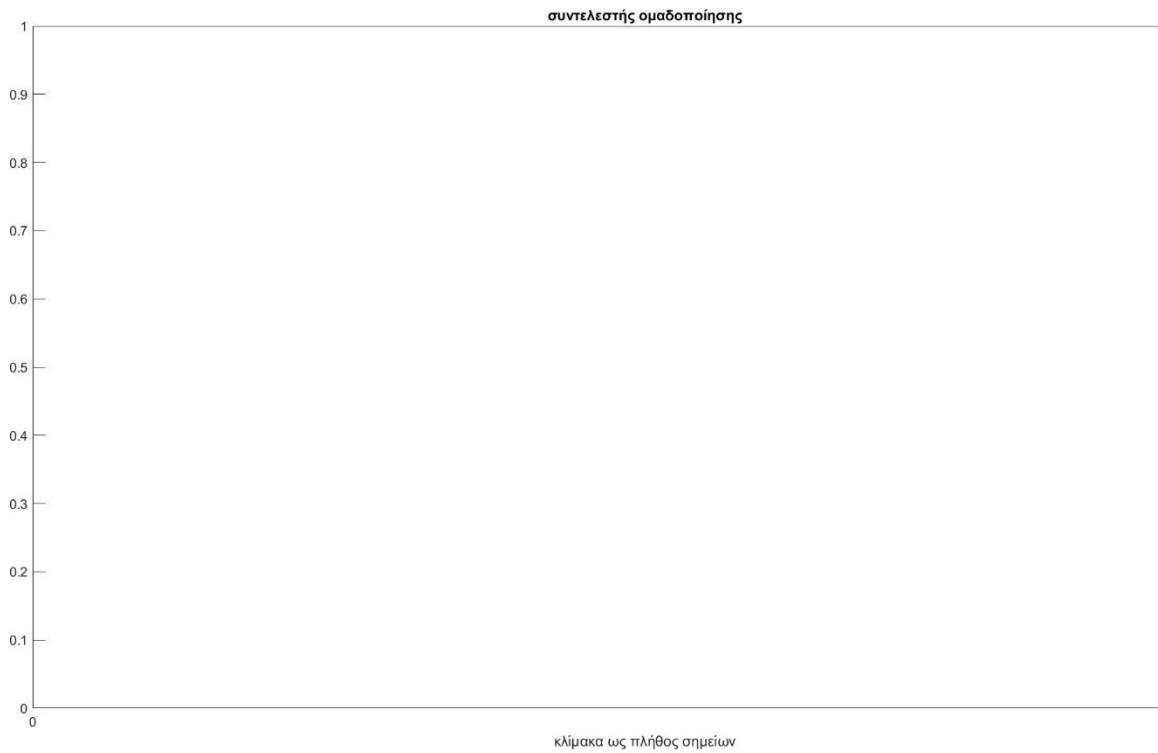
Εικόνα 80 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



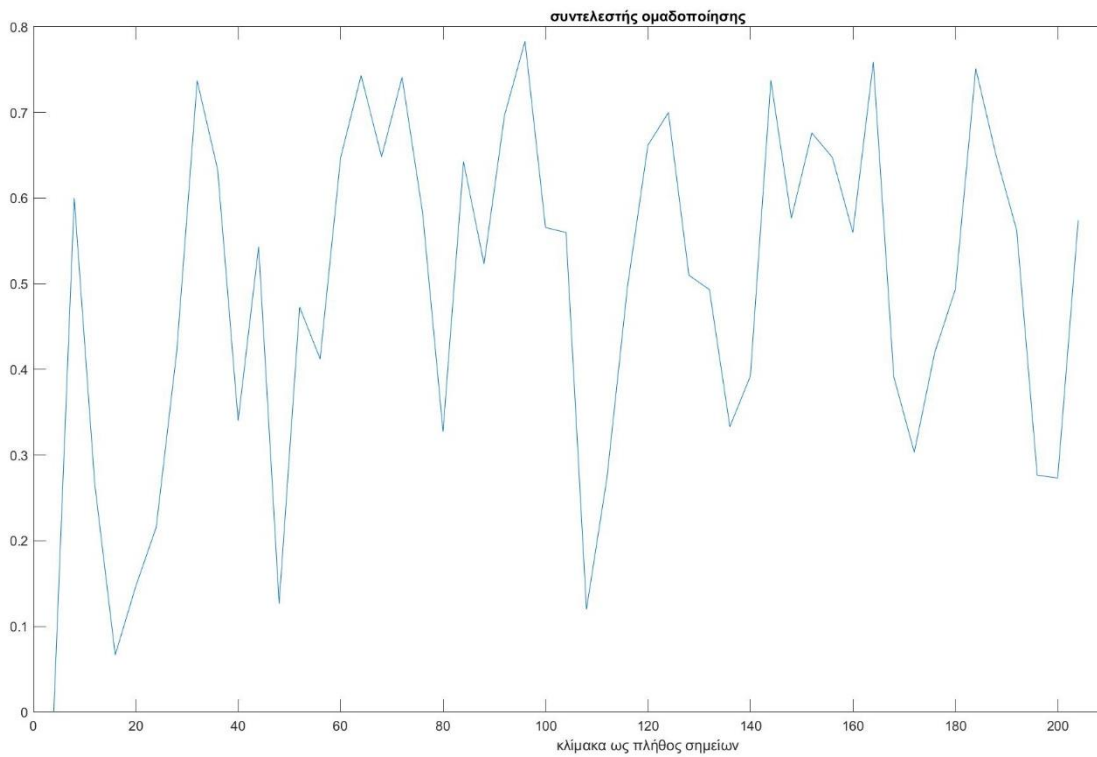
Εικόνα 81 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



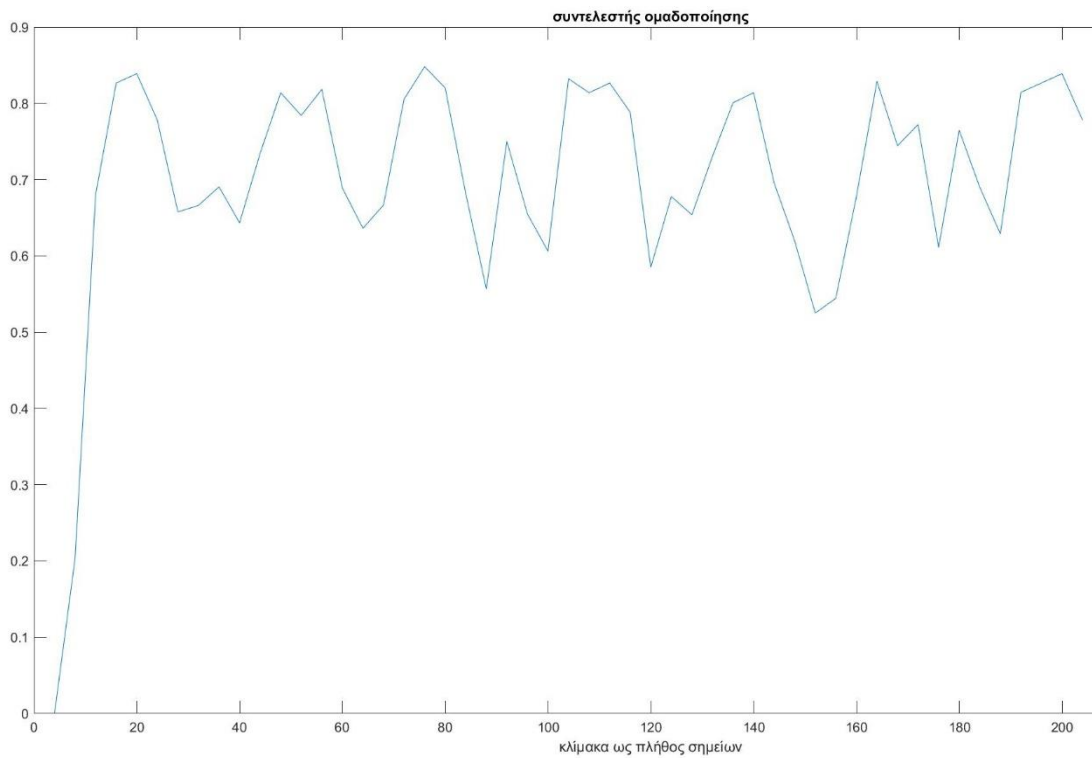
Εικόνα 82 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



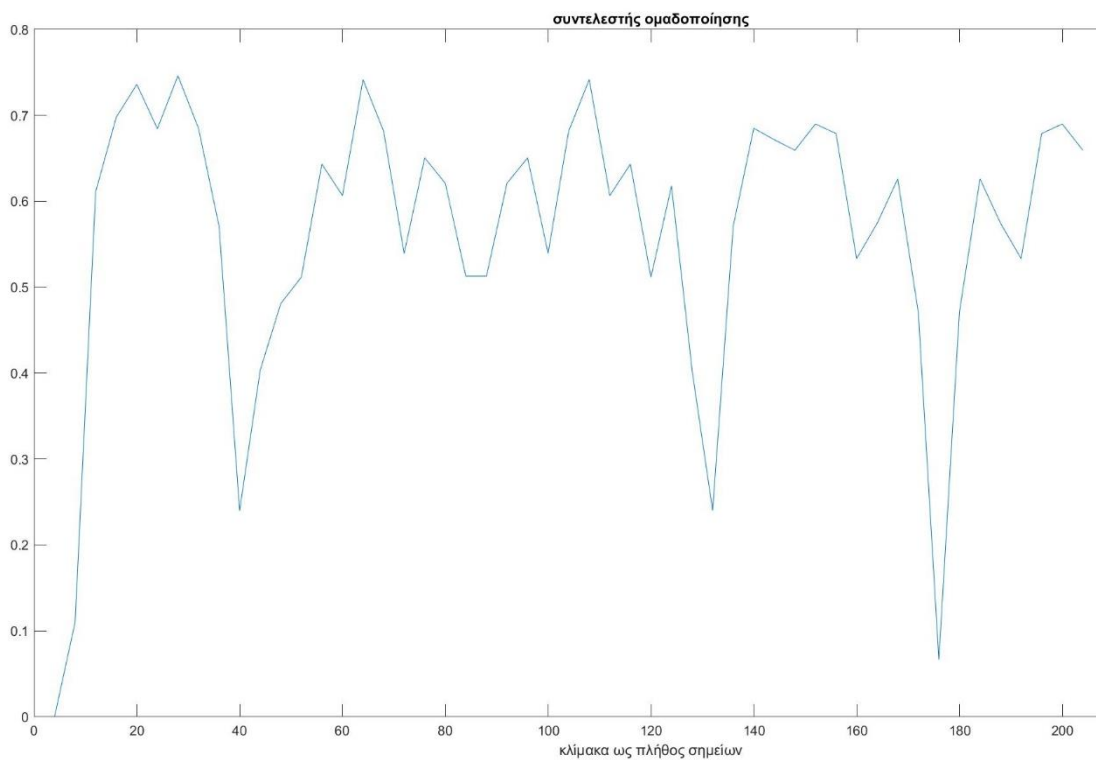
Εικόνα 83 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 84 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

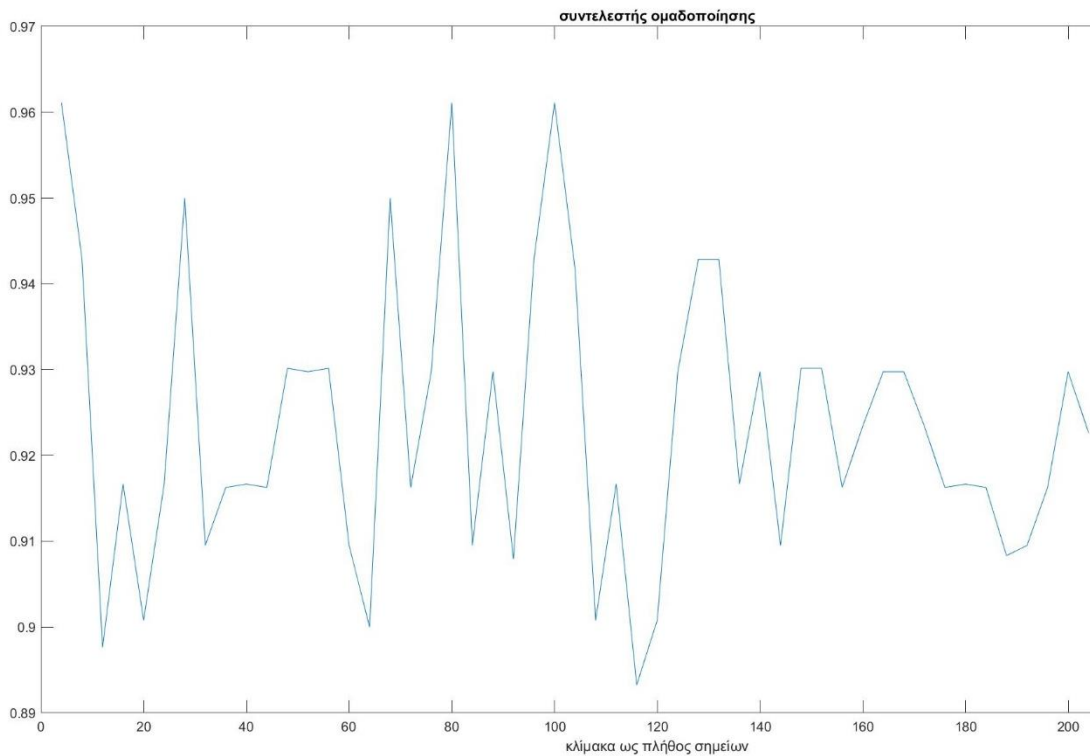
στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 85 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

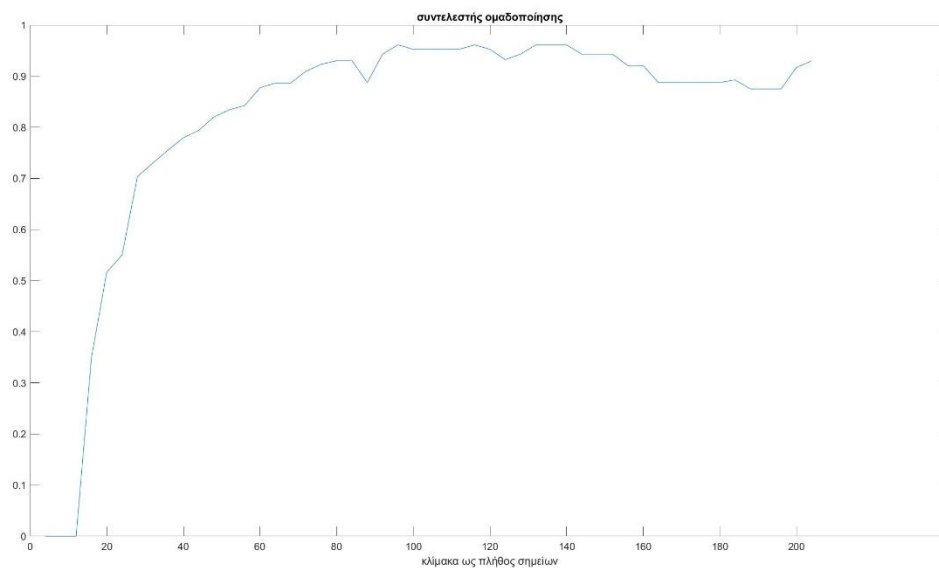
Στοχαστικές επιφάνειες

ζ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



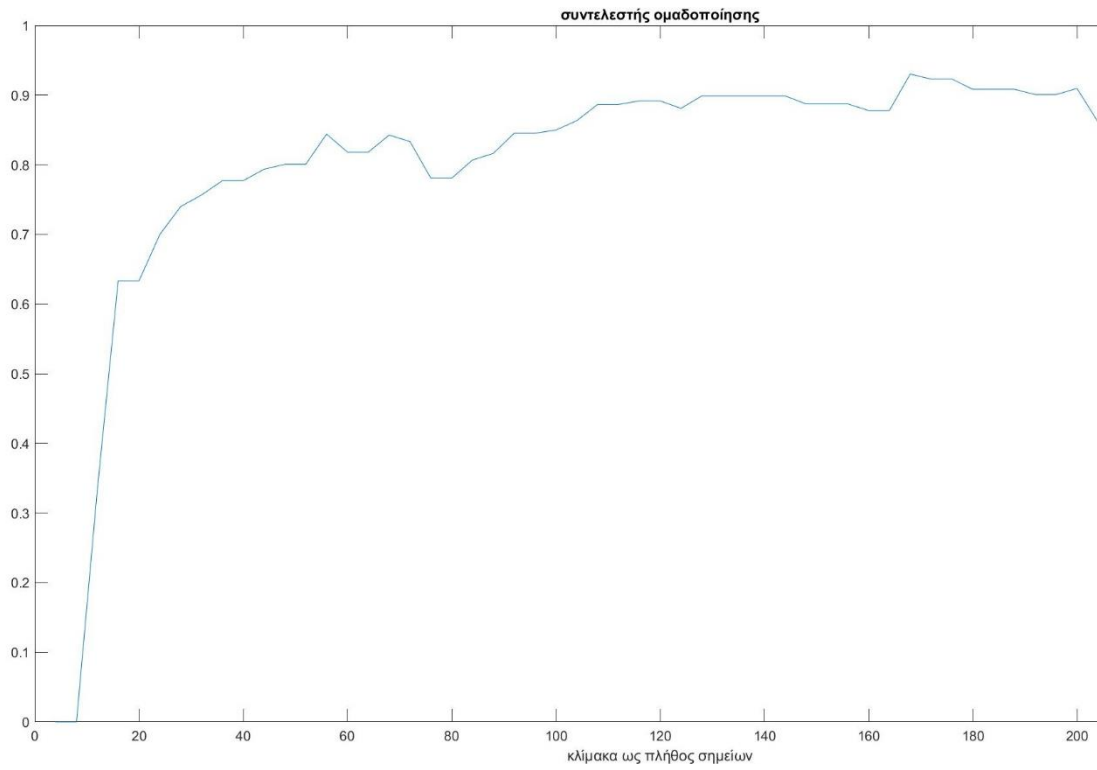
Εικόνα 86 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου

η. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονική κατανομή ACF



Εικόνα 87 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτον από κανονική κατανομή ACF

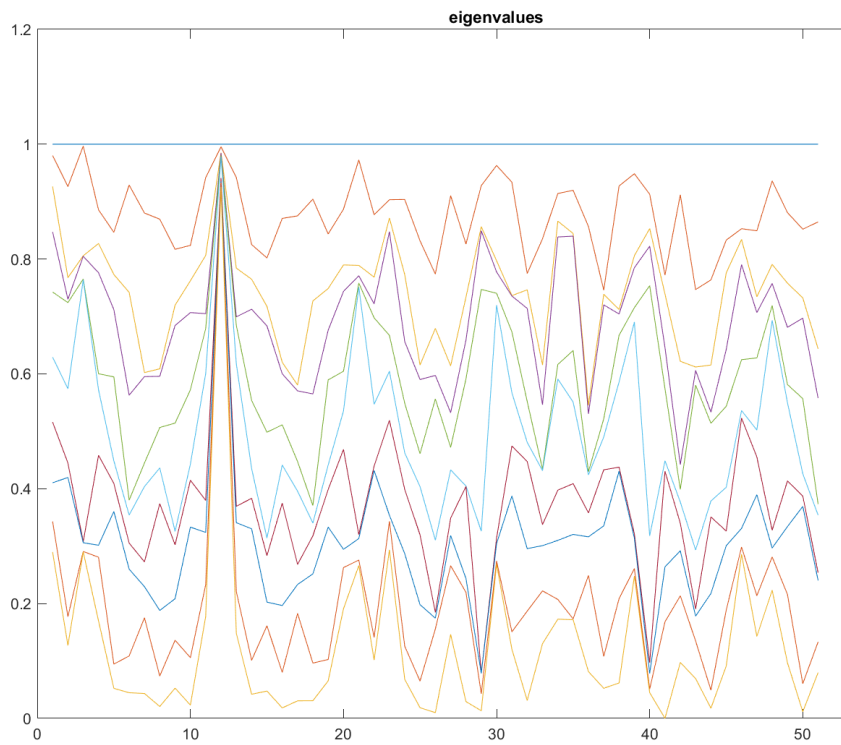
θ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από εκθετικό ACF



Εικόνα 88 Συντελεστής Ομαδοποίησης συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από εκθετικό ACF

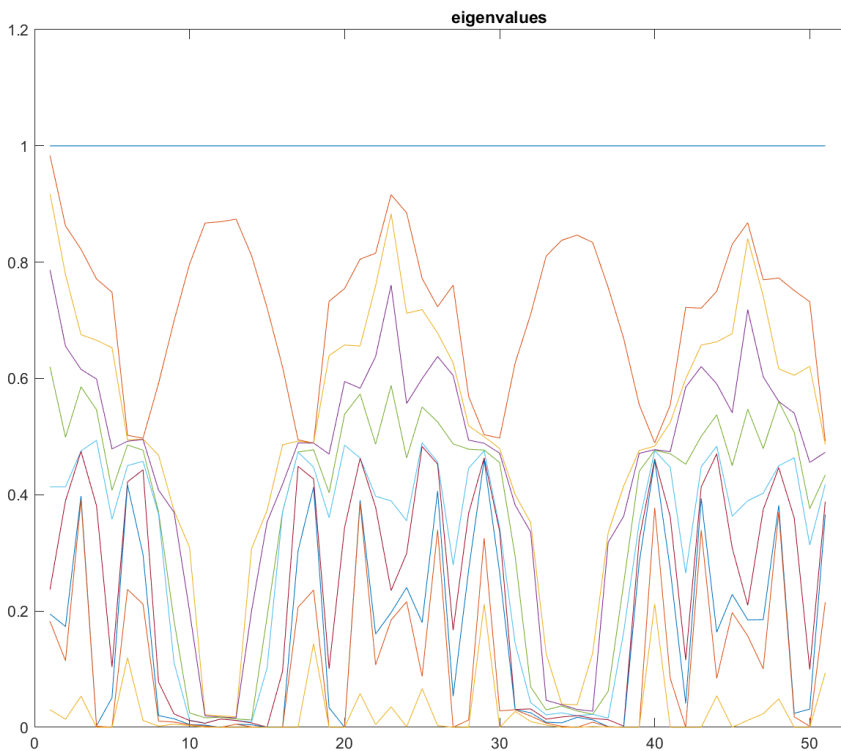
5.3.5 Ιδιοτιμές Πινάκων Πιθανοτήτων Μετάβασης Γράφων

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



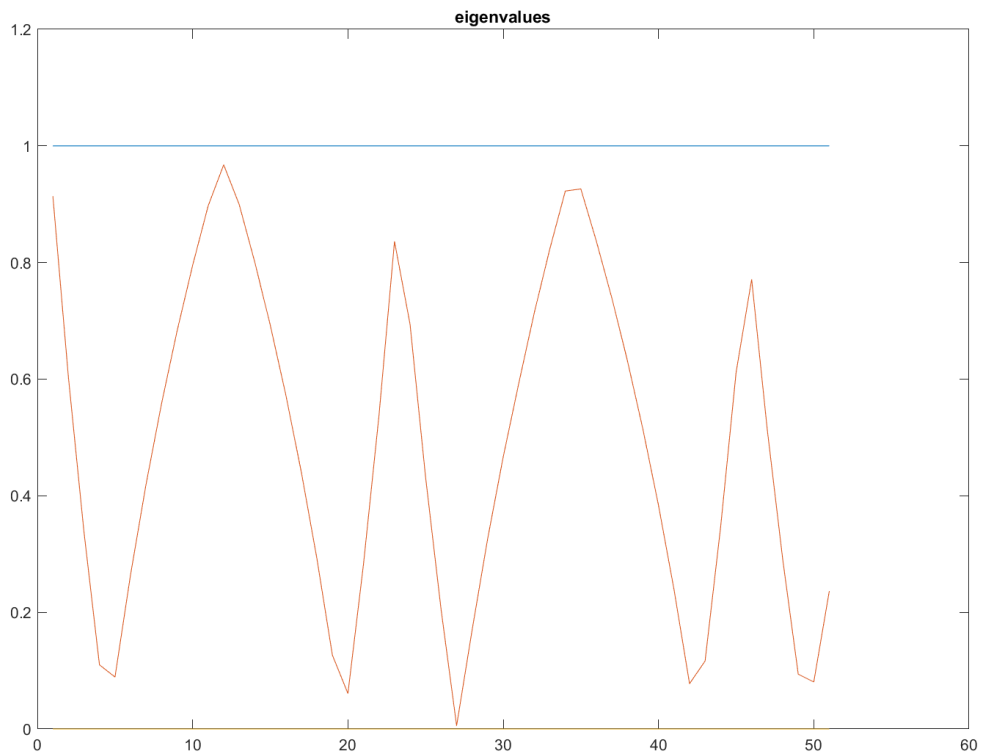
Εικόνα 89 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



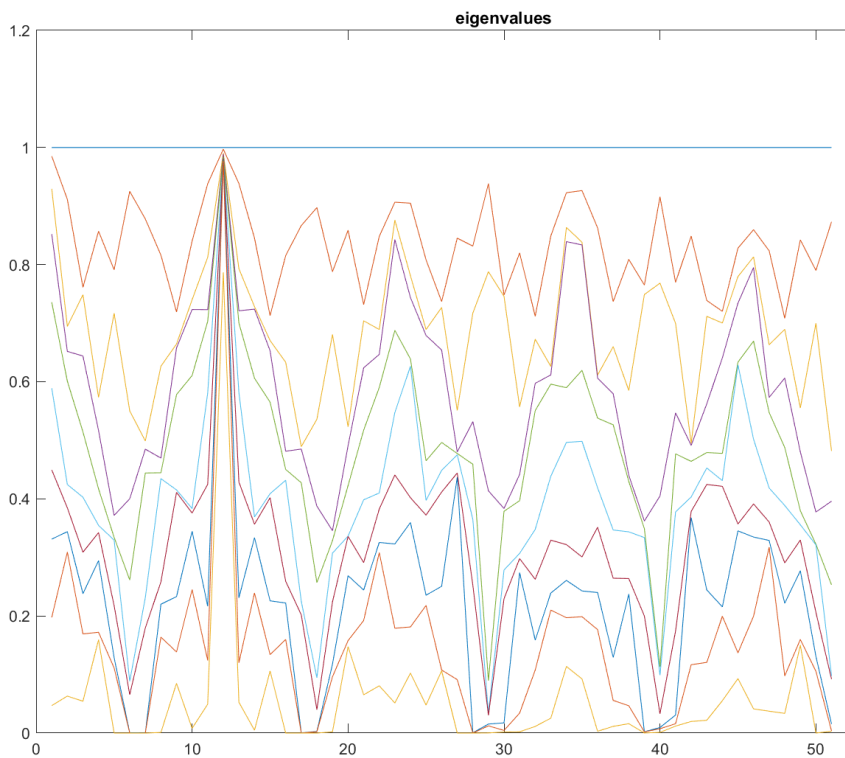
Εικόνα 90 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



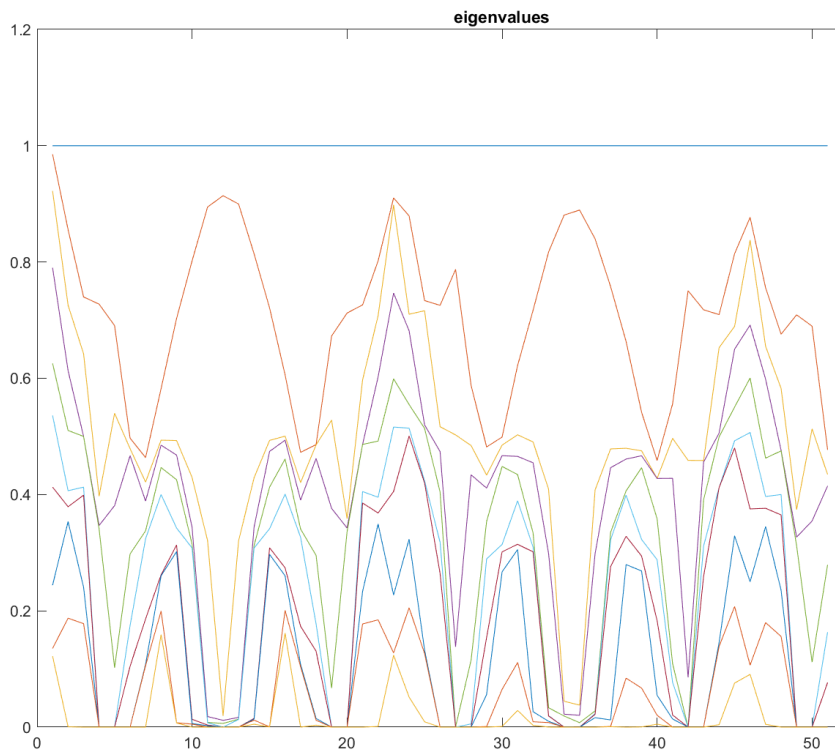
Εικόνα 91 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



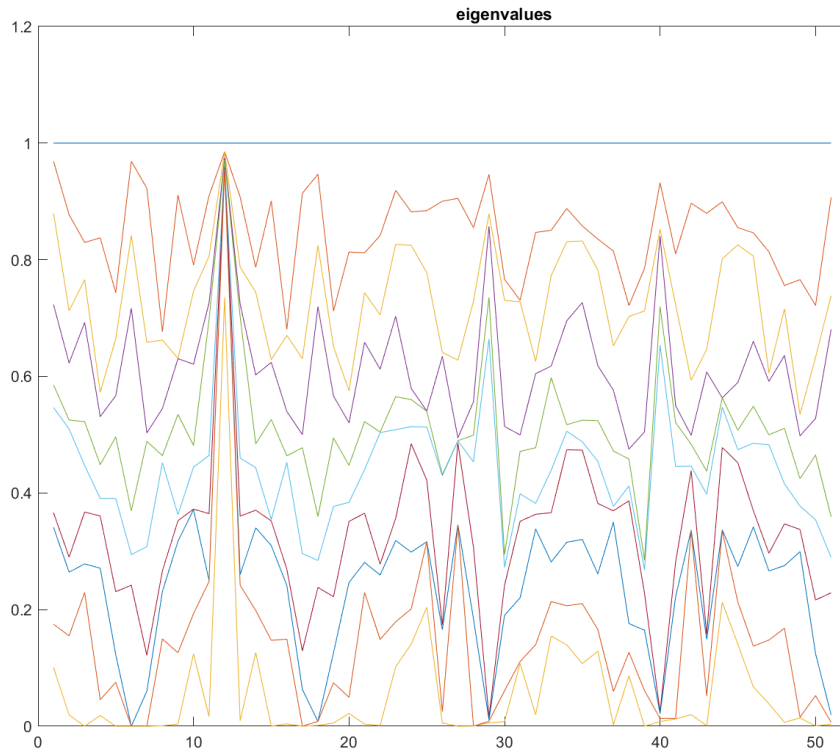
Εικόνα 92 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 93 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

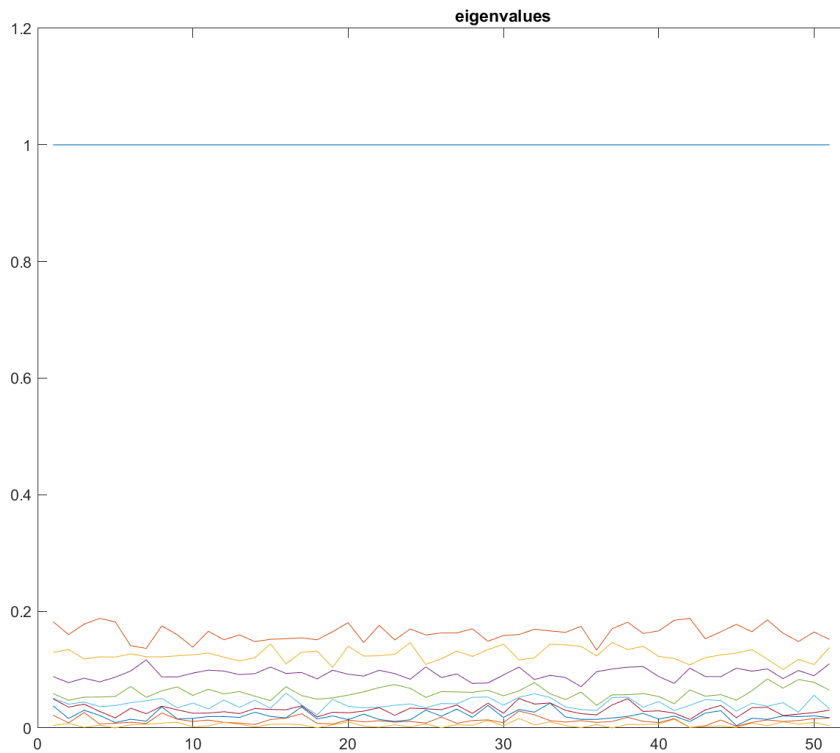
στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 94 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

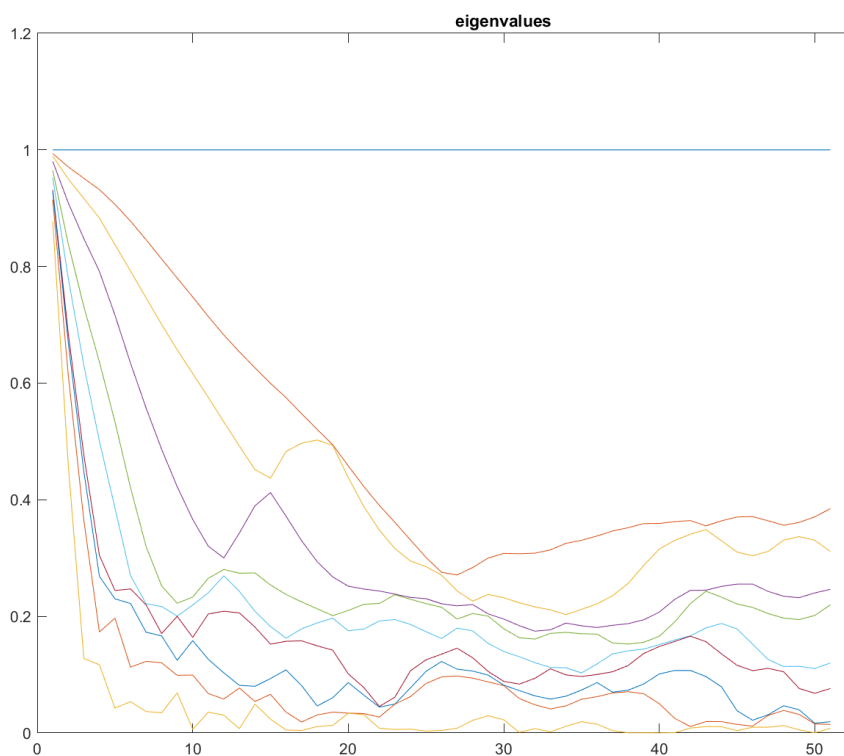
Στοχαστικές επιφάνειες

ζ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



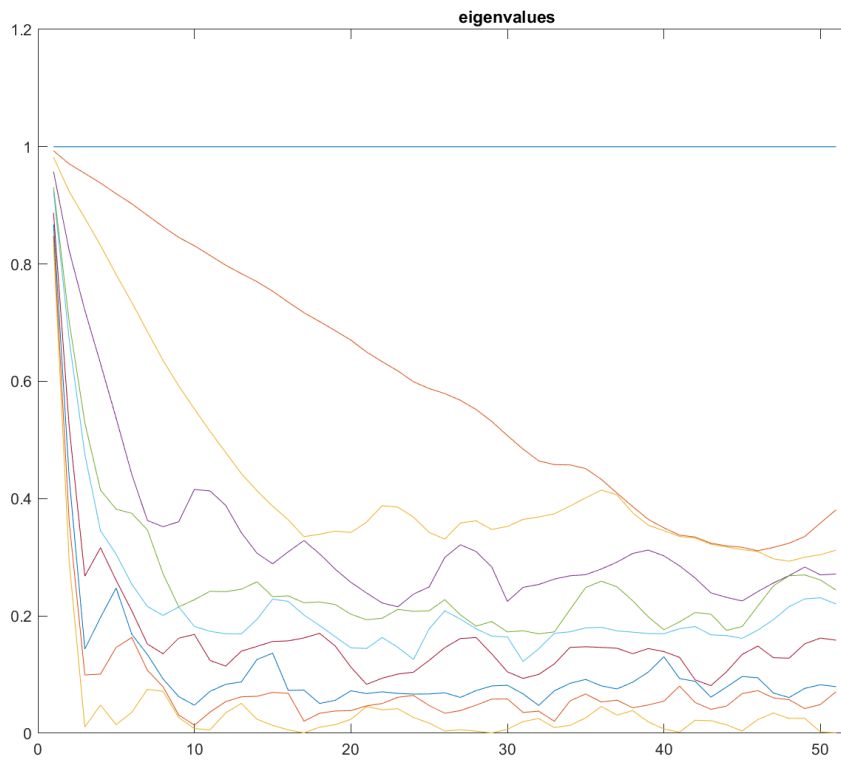
Εικόνα 95 Ιδιοτιμές συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου

η. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονικής κατανομής ACF



Εικόνα 96 Ιδιοτιμές συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από κανονικής κατανομής ACF

θ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από εκθετικής κατανομής ACF

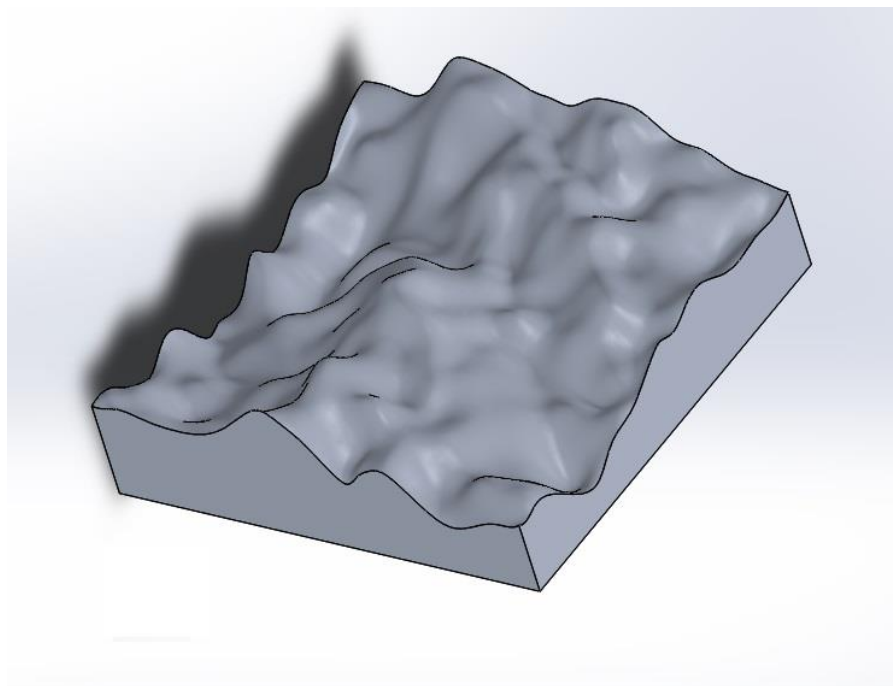


Εικόνα 97 Ιδιοτιμές συναρτήσεως της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από εκθετικής κατανομής ACF

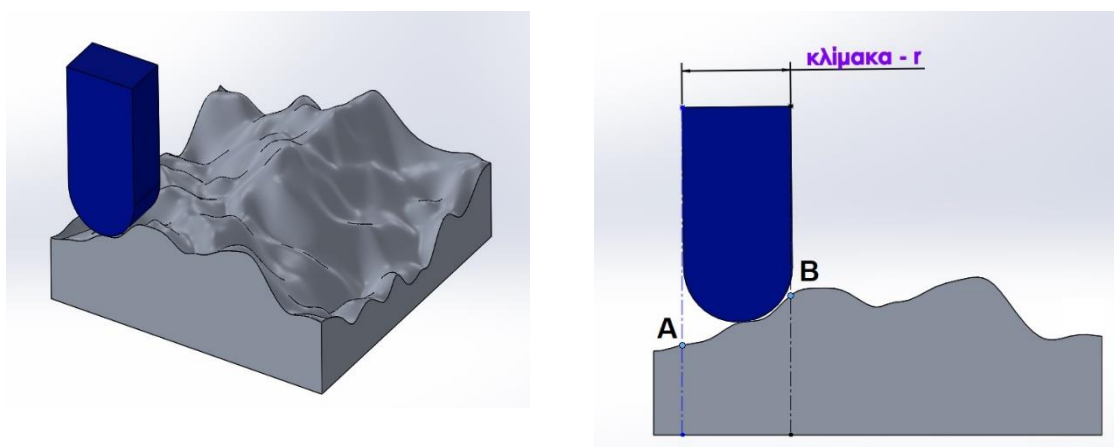
5.3.6 Μεταβάσεις σε ανώτερες κλάσεις

Πέραν των υπολοίπων μετρικών που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των προκύπτοντων γράφων εξετάστηκε η μετρική που προκύπτει από το άθροισμα των πιθανοτήτων μετάβασης από χαμηλότερη σε υψηλότερη κλάση. Αυτή η μετρική ουσιαστικά αφορά τις μεταβάσεις από σημείο χαμηλού ύψους (της επιφάνειας) σε αντίστοιχο μεγαλύτερου ύψους.

Συγκεκριμένα, αν διαθέτουμε μία επιφάνεια όπως αυτή στην ακόλουθη εικόνα και την παρατηρούμε χρήση ακίδας τραχυμέτρου σε μικροσκοπική κλίμακα r (Εικόνα α & β)



Εικόνα 98 Επιφάνεια με τραχύτητα



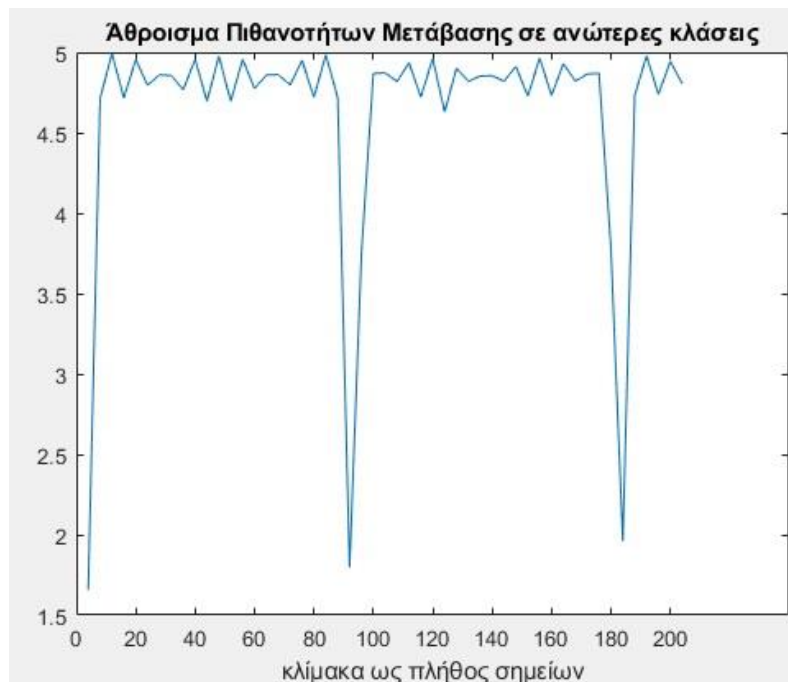
Εικόνα 99 Μέτρηση επιφάνειας υπό κλίμακα r

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι κατά την κίνηση της ακίδας από αριστερά προς τα δεξιά, το τραχύμετρο καταγράφει το ύψος της επιφάνειας με διάστημα δειγματοληψίας ίσο με την

κλίμακα r . Άρα το τραχύμετρο καταγράφει το ύψος των σημείων A και B. Τα ύψη αυτά καταχωρούνται στις αντίστοιχες κλάσεις. Μετάβαση από χαμηλότερη σε υψηλότερη κλάση υποδεικνύει την δυσχέρεια της κίνησης της ακίδας. Το Άθροισμα των Πιθανοτήτων Μετάβασης από χαμηλότερη σε υψηλότερη κλάση είναι κατ' ουσία το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πάνω από την κύρια διαγώνιο και είναι ένδειξη της αντίστασης στην κίνηση της ακίδας διαμέτρου ίση με την κλίμακα r .

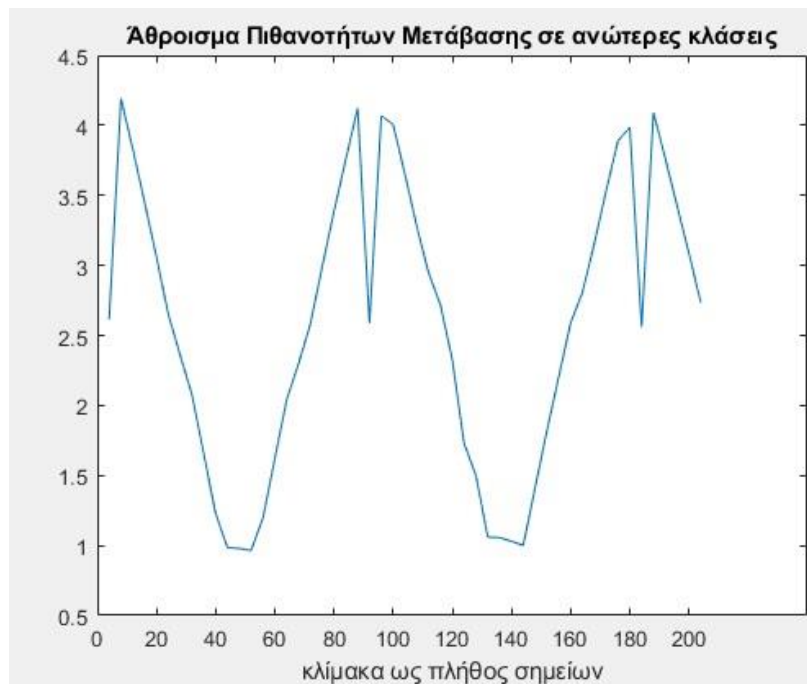
Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζεται η συγκεκριμένη μετρική για τις διάφορες επιφάνειες που μελετήθηκαν.

α. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τριγωνικού παλμού



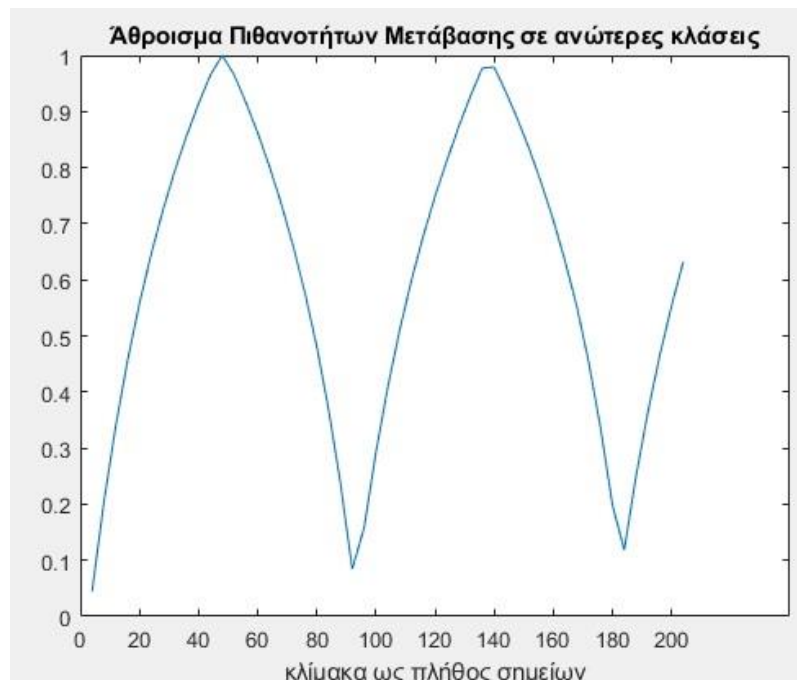
Εικόνα 100 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ τριγωνικού παλμού

β. Προφίλ επιφάνειας, μορφής ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού



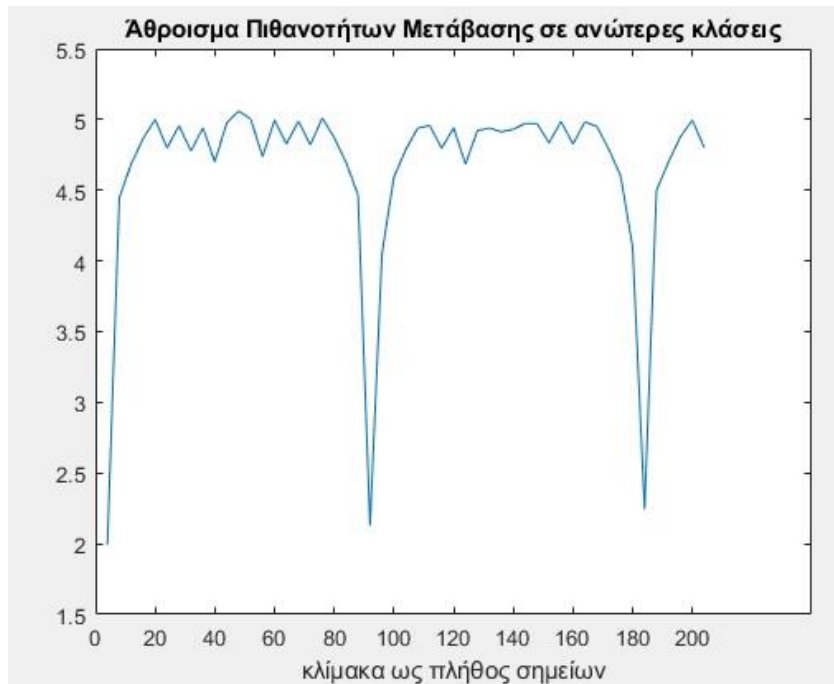
Εικόνα 101 Αθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ ημιανορθωμένου τριγωνικού παλμού

γ. Προφίλ επιφάνειας, μορφής τετραγωνικού παλμού



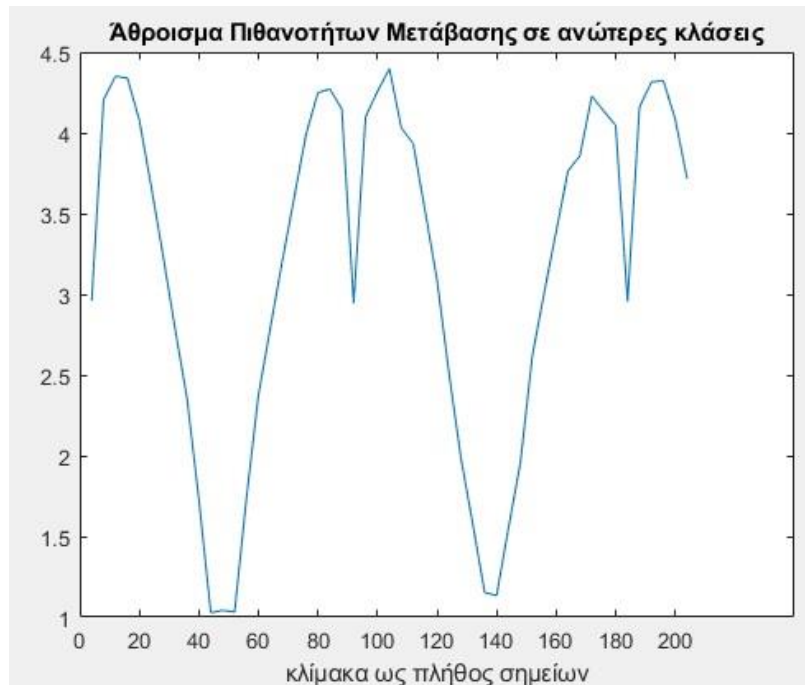
Εικόνα 102 Αθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ τετραγωνικού παλμού

δ. Προφίλ ημιτονοειδούς επιφάνειας



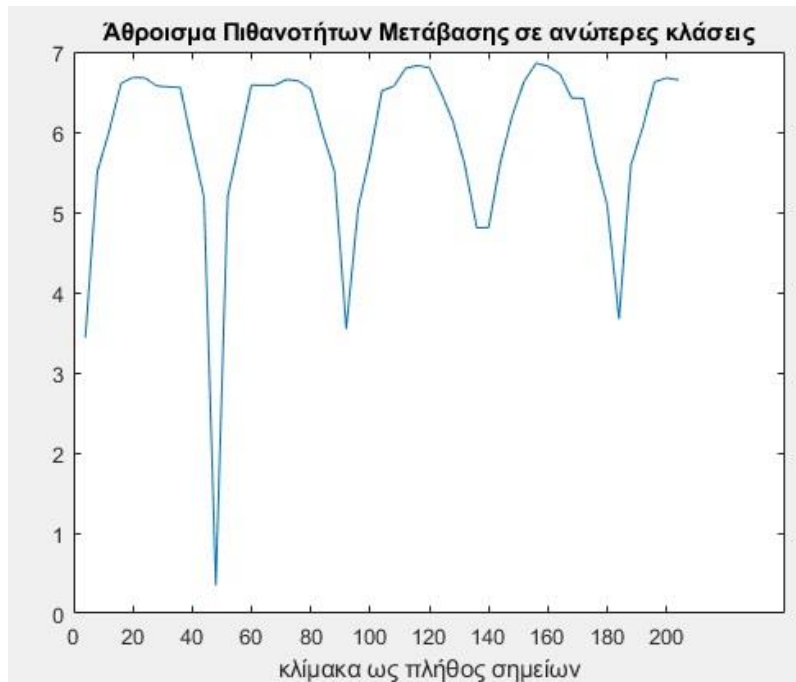
Εικόνα 103 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Ημιτονοειδές προφίλ

ε. Προφίλ ημιανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 104 Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Ημιανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

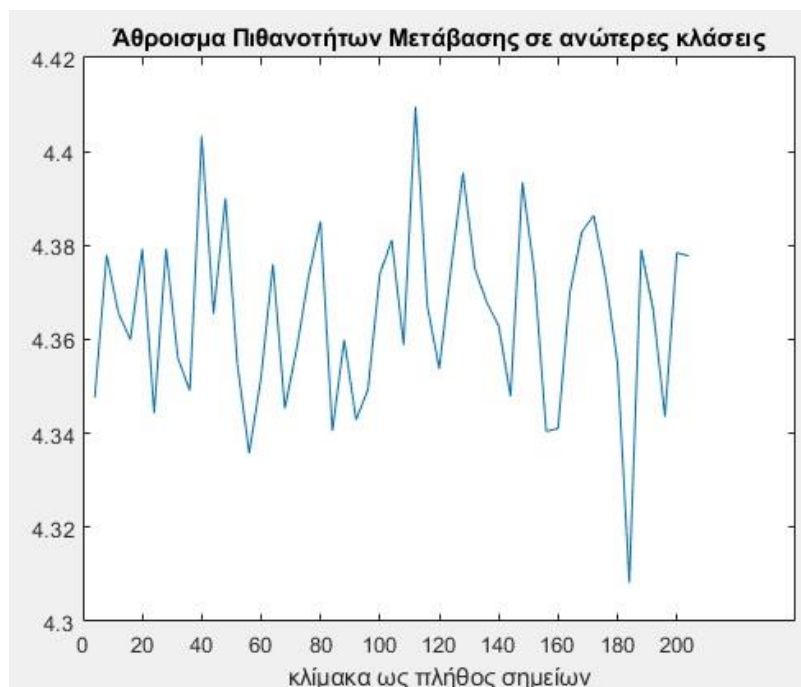
στ. Προφίλ πλήρους ανορθωμένης ημιτονοειδούς επιφάνειας



Εικόνα 105 Αθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Πλήρως Ανορθωμένο Ημιτονοειδές Προφίλ

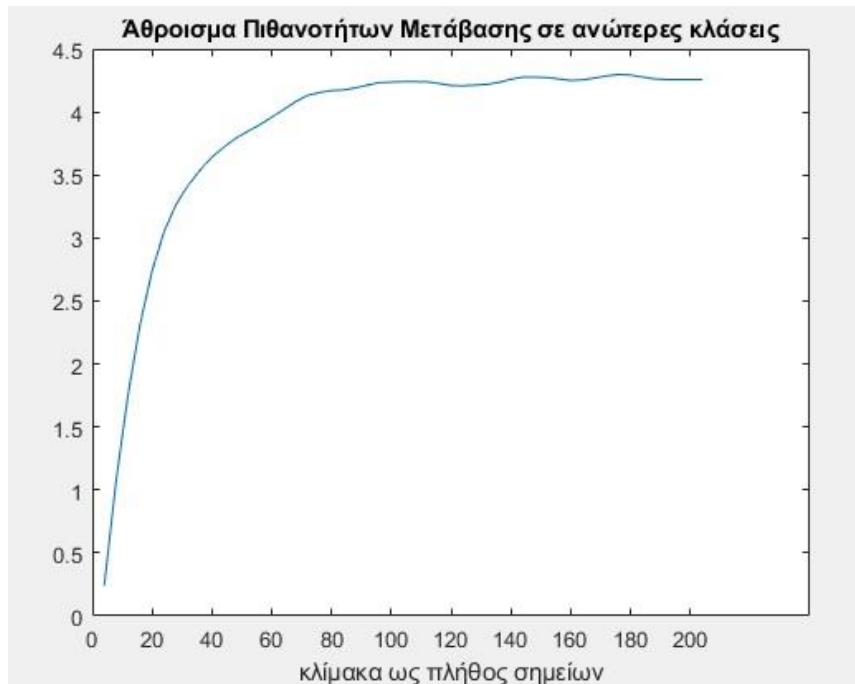
Στοχαστικές επιφάνειες

ζ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας τύπου λευκού θορύβου



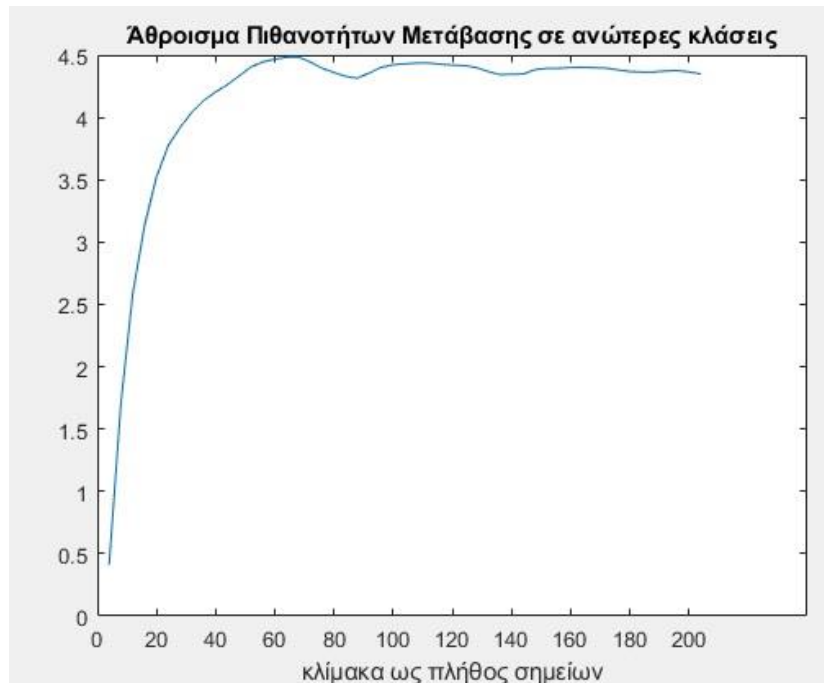
Εικόνα 106 Αθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ λευκού θορύβου

η. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από κανονικής κατανομής ACF



Εικόνα 107 Αθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από κανονικής κατανομής ACF

θ. Προφίλ στοχαστικής επιφάνειας προκύπτουσας από εκθετικής κατανομής ACF



Εικόνα 108 Αθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερη κλάση συναρτήσει της Κλίμακας, Προφίλ προκύπτων από εκθετικής κατανομής ACF

5.3.7 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Το βασικό κίνητρο της παρούσας εργασίας ήταν η λεπτομερής αποτύπωση της επιφανειακής μορφολογίας καθώς και η αποκάλυψη των συσχετίσεων που εμφανίζονται στις επιφάνειες συναρτήσει της κλίμακας. Για το λόγο αυτό χαρτογραφήθηκαν σε γράφους με παράμετρο την κλίμακα παρατήρησης ντετερμινιστικές και στοχαστικές επιφάνειες. Οι γράφοι αυτοί οπτικοποιήθηκαν και κατασκευάστηκαν οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης τόσο για λόγους παρατήρησης όσο και για λόγους αναδημιουργίας των επιφανειών σε δεδομένη κλίμακα. Επιπρόσθετα εξετάστηκαν οι μετρικές των γράφων οι οποίες εκτιμήθηκε ότι είναι ενδεικτικές για τις παρατηρούμενες επιφάνειες. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν οι παρακάτω μετρικές:

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, όπως ήταν αναμενόμενο, δεν μας παρείχε ιδιαίτερες πληροφορίες αναφορικά με τις επιφάνειες μας. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι οι ντετερμινιστικές περιοδικές επιφάνειες παρουσιάζουν μεγάλες τιμές αυτοσυσχέτισης για το μεγαλύτερο μήκος της παρατηρούμενης επιφάνειας, ενώ οι στοχαστικές επιφάνειες παρουσιάζουν μεγάλη συσχέτιση για μήκος ίσο περίπου με το correlation length της επιφάνειας.

Η μέγιστη απόσταση των κόμβων, του συνόλου των γράφων βαίνει μειούμενη με την αύξηση της κλίμακας παρατήρησης. Ο γράφος του λευκού θορύβου παρουσιάζει σταθερή μέγιστη απόσταση ίση με 2 (δηλαδή απαιτούνται το πολύ δύο βήματα για την μετάβαση από οποιοδήποτε κόμβο σε οποιοδήποτε άλλο). Επιπρόσθετα διαπιστώνεται ότι όταν κάποιος γράφος υπό κάποια κλίμακα παρουσιάζει μέγιστη απόσταση ίση με 2, τότε ο γράφος προσομοιάζει τον λευκό θόρυβο.

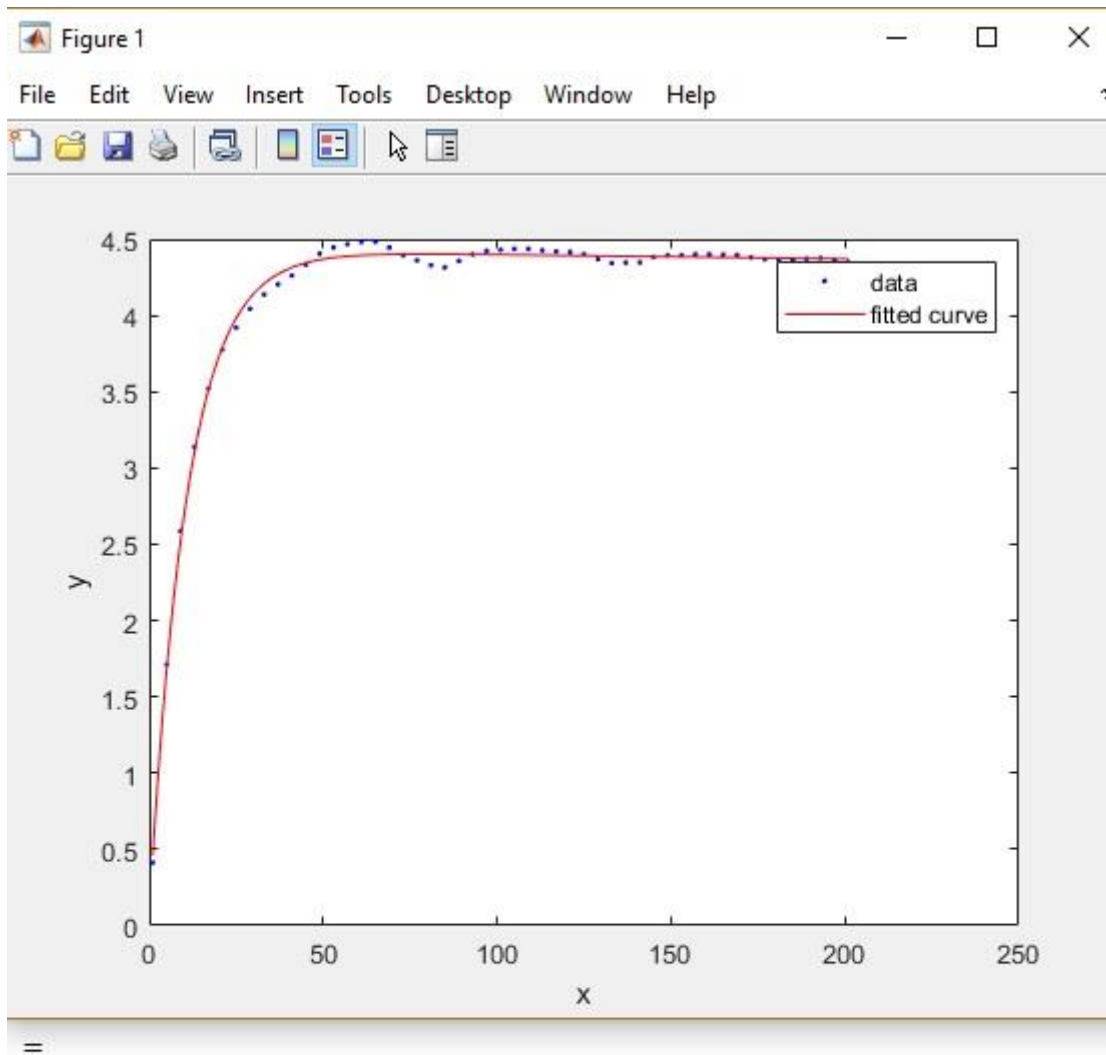
Η μέση απόσταση των κόμβων, του συνόλου των γράφων βαίνει μειούμενη με την αύξηση της κλίμακας παρατήρησης. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι η μέση απόσταση των γράφων πέφτει εκθετικά από μία τιμή περί το 2.5 για κλίμακα παρατήρησης ένα σημείο, έως 1.4 για κλίμακα παρατήρησης ίση με το correlation length. Ο γράφος του λευκού θορύβου παρουσιάζει σταθερή μέση απόσταση με τιμές από 0.94 έως 1.04 (δηλαδή απαιτείται κατά μέσο όρο ένα βήμα για την μετάβαση από οποιοδήποτε κόμβο σε οποιοδήποτε άλλο. Λίγοτερο από 1 βήμα απαιτείται όταν μιλάμε για βρόγχο).

Ο συντελεστής ομαδοποίησης των γράφων, βαίνει αυξανόμενος με την αύξηση της κλίμακας παρατήρησης για τις στοχαστικές επιφάνειες. Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε ότι ο συντελεστής των γράφων κυμαίνεται από 0.1 έως 0.8 για τις περιοδικές ντετερμινιστικές επιφάνειες. Επιπλέον, παρατηρήθηκε αύξηση της μέσης τιμής του συντελεστή ομαδοποίησης από τον τριγωνικό στον ανορθωμένο τριγωνικό παλμό καθώς και από ημιτονοειδή στον

ανορθωμένο ημιτονοειδή παλμό. Η αύξηση αυτή υποδηλώνει την ύπαρξη plateau παρατηρήσεων και εκτιμάται ότι η συνεχής αύξηση του συντελεστή ομαδοποίησης συναρτήσει της κλίμακας παρατήρησης υποδηλώνει δημιουργία plateau που ομαδοποιούν τις παρατηρήσεις. Ο γράφος του λευκού θορύβου παρουσιάζει σταθερό συντελεστή ομαδοποίησης με τιμές από 0.89 έως 0.96 (δηλαδή όλοι οι κόμβοι γειτνιάζουν). Οι υψηλές τιμές του συγκεκριμένου συντελεστή καθιστούν έναν γράφο πλήρη.

Οι Ιδιοτιμές των πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης, παρουσιάζουν την αναμενόμενη συμπεριφορά (όπως αυτή καθορίζεται από την γραμμική άλγεβρα και τις εξισώσεις Charman Kolmogorov). Συγκεκριμένα όλοι οι πίνακες παρουσιάζουν μία μοναδιαία ιδιοτιμή. Το πλήθος των μοναδιαίων ιδιοτιμών είναι ίσο με τις απορροφητικές κλάσεις του κάθε δικτύου. Δεδομένου ότι η αλυσίδα είναι πεπερασμένη και αδιαχώριστη η μοναδιαία ιδιοτιμή είναι μοναδική. Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι μικρότερες της μονάδας κατά απόλυτη τιμή και η εξέλιξη τους με βάση την κλίμακα παρατήρησης για τις στοχαστικές επιφάνειες είναι υπερβολική (λ^n με $0 < \lambda < 1$). Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε ότι οι ιδιοτιμές των περιοδικών ντετερμινιστικών επιφανειών παρουσιάζουν περιοδικότητα στην μεταβολή τους παρόμοια με την περιοδικότητα της εκάστοτε επιφάνειας (correlation length). Ο γράφος του λευκού θορύβου παρουσιάζει ιδιοτιμές σταθερές με τιμές από 0.1 έως 0.2. Τιμές των ιδιοτιμών ενός πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης σε αυτό το εύρος (0.1-0.2) υποδηλώνουν έναν τυχαίο γράφο.

Το άθροισμα πιθανοτήτων μετάβασης σε ανώτερες κλάσεις, βαίνει αυξανόμενο με την αύξηση της κλίμακας παρατήρησης για τις στοχαστικές επιφάνειες. Συγκεκριμένα η αύξηση που παρατηρείται είναι εκθετική με την κλίμακα της παρατήρησης (όπως φαίνεται και στις ακόλουθες εικόνες). Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε ότι το άθροισμα αυτό για τους γράφους κυμαίνεται από 1 έως 5 για τις στοχαστικές επιφάνειες. Επιπλέον, παρατηρήθηκε αυξημένη τιμή στον ανορθωμένο τριγωνικό παλμό καθώς και στον ανορθωμένο ημιτονοειδή παλμό. Η αυξημένη αυτή τιμή υποδηλώνει την αυξημένη κύρτωση στην επιφάνεια μας και κατ'επέκταση την εμφανή προτίμηση της επιφάνειας μας να κινηθεί σε υψηλότερα από ότι σε χαμηλότερα σημεία. Ο γράφος του λευκού θορύβου παρουσιάζει σταθερό άθροισμα πιθανοτήτων μετάβασης σε ανώτερες κλάσεις με τιμές από 4.3 έως 4.4.

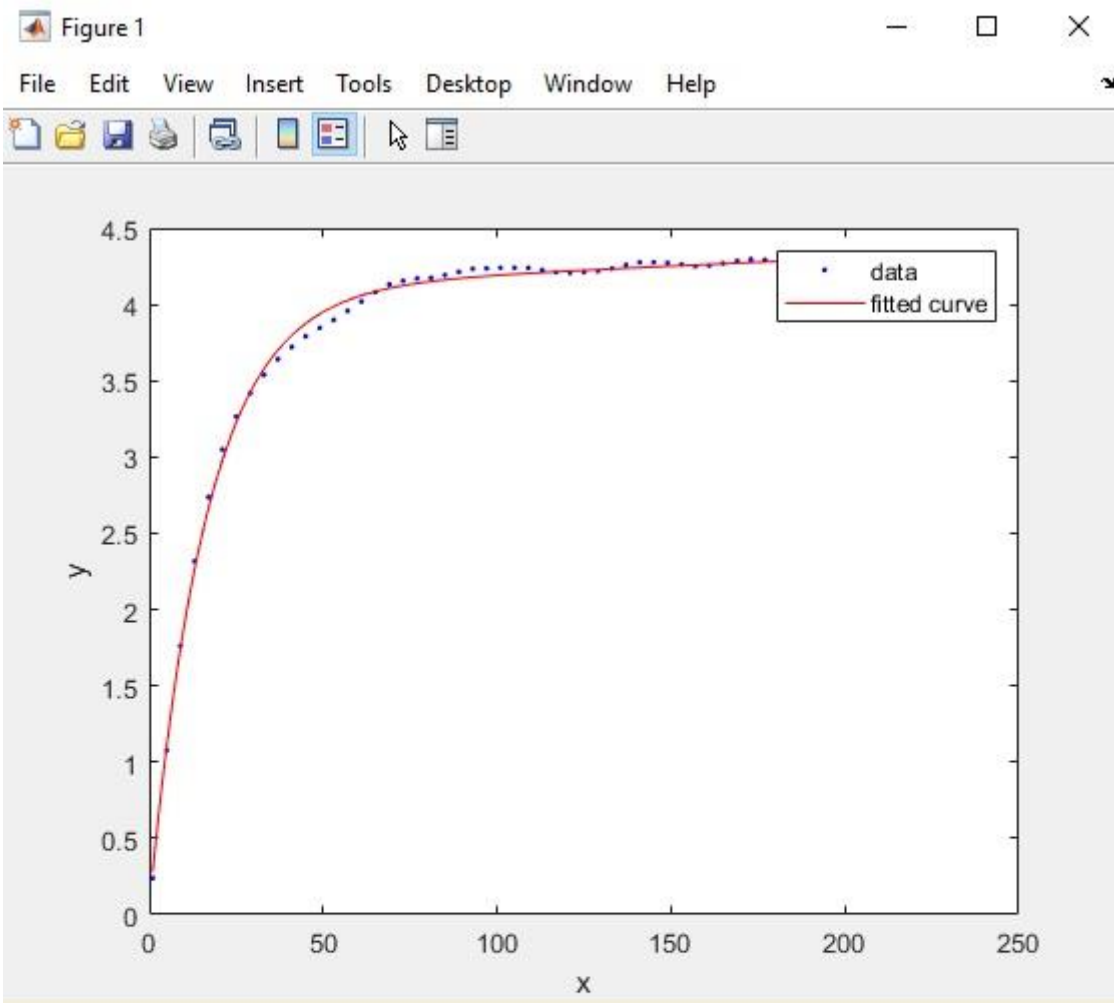


General model Exp2:

$$f(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) + c \cdot \exp(d \cdot x)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a =	4.428	(4.387, 4.468)
b =	-6.477e-05	(-0.000134, 4.481e-06)
c =	-4.348	(-4.444, -4.253)
d =	-0.09174	(-0.09566, -0.08781)



General model Exp2:

$$f(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) + c \cdot \exp(d \cdot x)$$

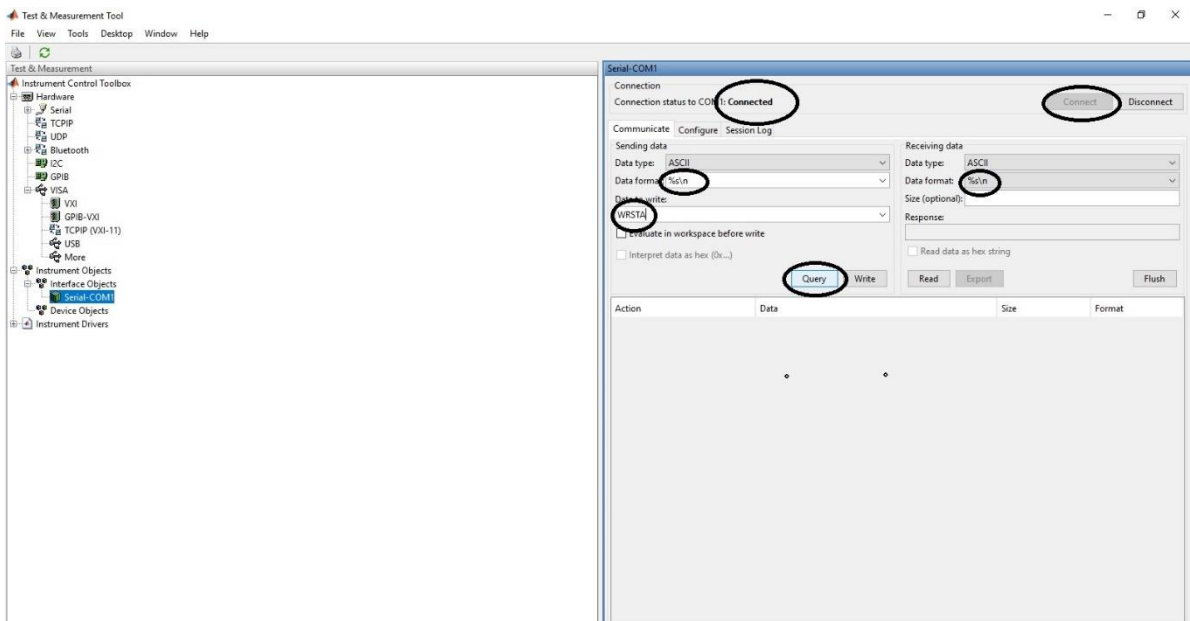
Coefficients (with 95% confidence bounds):

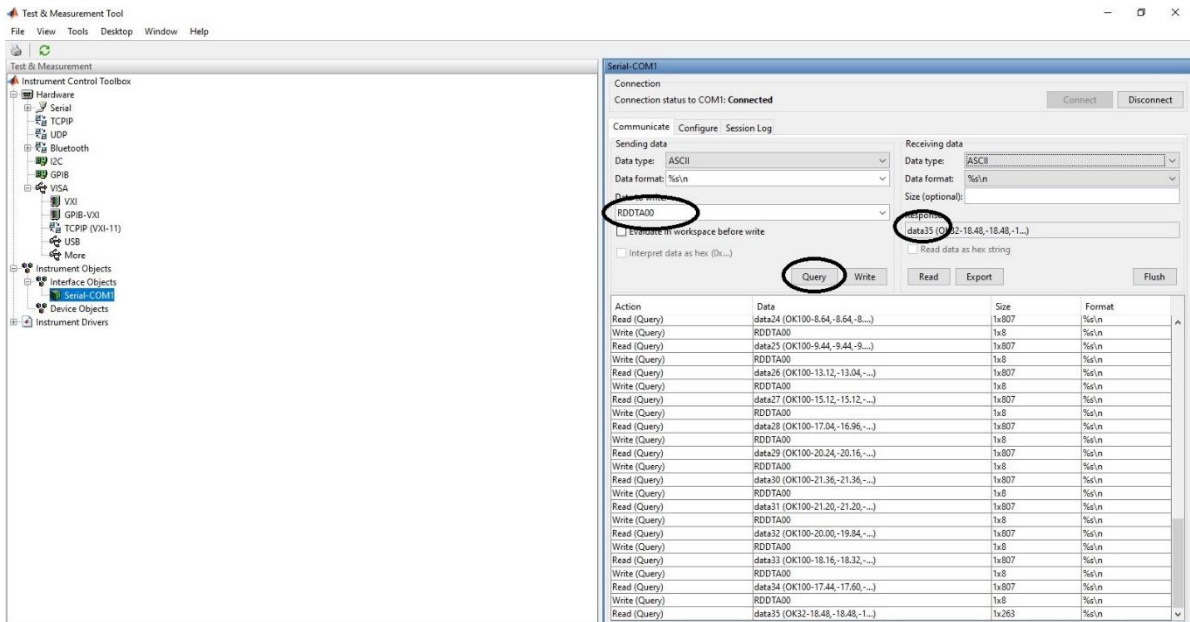
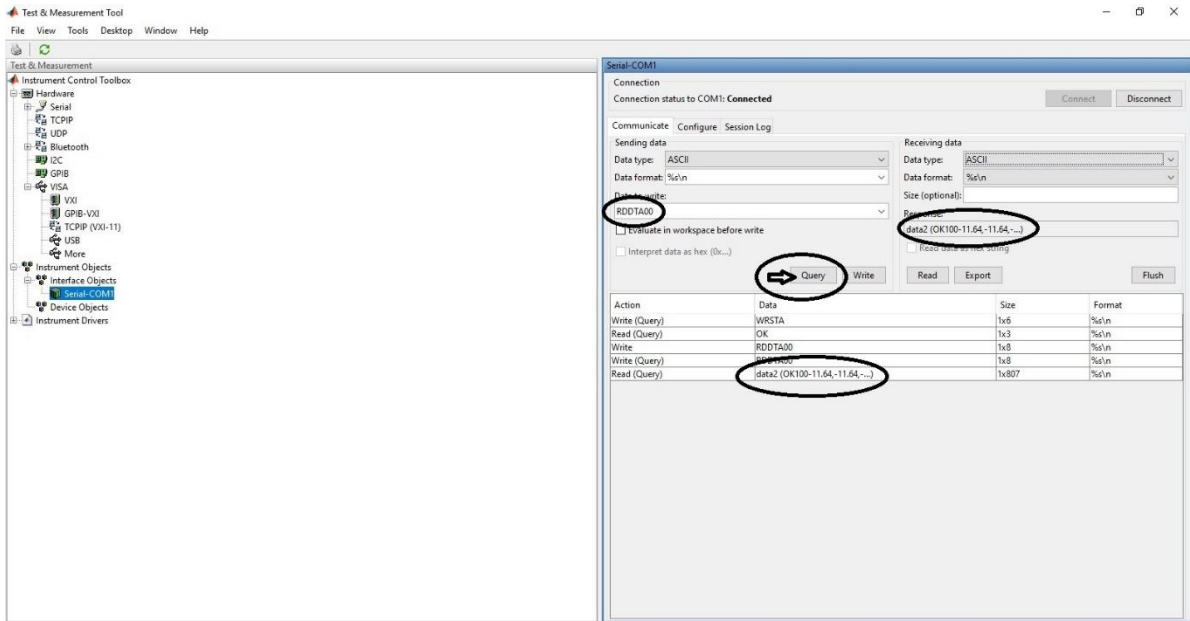
a =	4.101	(4.05, 4.151)
b =	0.0002408	(0.0001534, 0.0003282)
c =	-4.059	(-4.141, -3.977)
d =	-0.06026	(-0.06286, -0.05765)

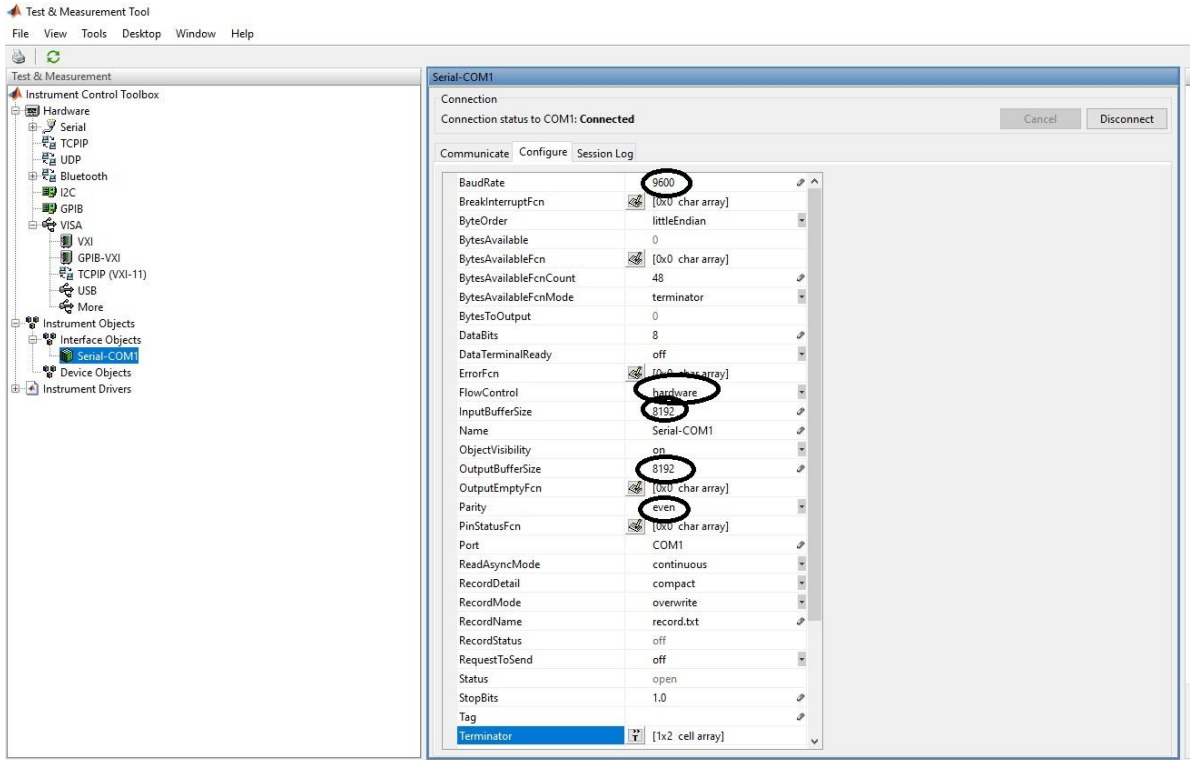
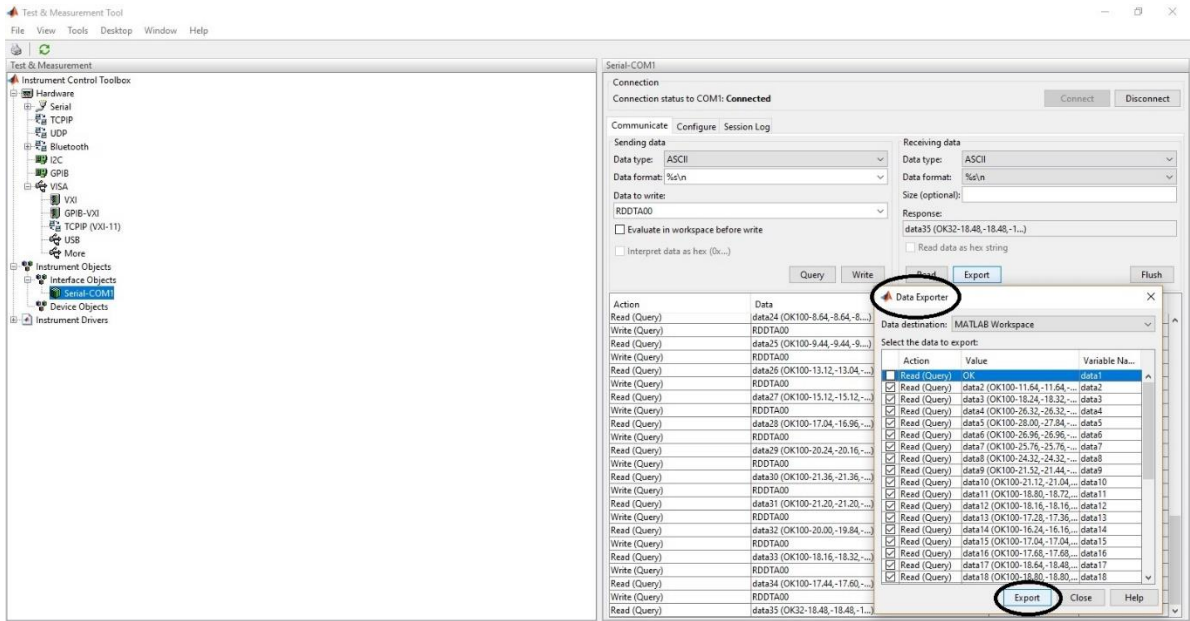
6. Πειραματικό Μέρος

Για την αξιοποίηση της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας με πειραματικά δεδομένα τραχύτητας, χρησιμοποιήθηκε τραχυτόμετρο Mitutoyo SJ-201P το οποίο παρασχέθηκε από την Πολεμική Αεροπορία για τις ανάγκες της εργασίας.

Οι διαδικασίες διασύνδεσης της συσκευής, ο προγραμματισμός με χρήση Matlab και η μέτρηση μίας επιφάνειας παρουσιάζεται στις παρακάτω εικόνες.







7. Συμπεράσματα

Με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε επιτυγχάνεται μια λεπτομερής αποτύπωση της επιφανειακής μορφολογίας καθώς και αποκαλύπτονται “κρυφές” συσχετίσεις που εμφανίζονται στις επιφάνειες συναρτήσεως της κλίμακας παρατήρησης.

Συνοψίζοντας, διαπιστώθηκαν και επισημαίνονται τα ακόλουθα:

- α. Το correlation length μίας επιφάνειας συσχετίζεται ισχυρά με την μέση απόσταση των κόμβων των δημιουργούμενων δικτύων καθώς και με το ρυθμό που μειώνεται η απόσταση αυτή με την αύξηση της κλίμακας παρατήρησης..
- β. Το διάνυσμα της στάσιμης κατανομής (π) που προκύπτει για τα δημιουργούμενα δίκτυα είναι το κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια που ορίζουν τα ιδιοδιανύσματα των μη μοναδιαίων ιδιοτιμών.
- γ. Το πλήθος των μοναδιαίων ιδιοτιμών των πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης των δικτύων, καθορίζουν το πλήθος των απορροφητικών κλάσεων του κάθε δικτύου.
- δ. Οι ιδιοτιμές και η διαδικασία της διαγωνοποίησης των πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης κλίμακας 1, δύνανται να επεξηγήσουν τις μεταβάσεις μεγαλύτερης κλίμακας.
- ε. Το πλήθος και η θέση των τοπικών μεγίστων του συντελεστή ομαδοποίησης συνάδει με το correlation length της κάθε επιφάνειας. Επιπλέον διαπιστώνεται ότι η παρατήρηση σε κλίμακες πολλαπλάσιες του correlation length αποκαλύπτει τυχαίους γράφους.
- στ. Η ύπαρξη καθώς και το πλήθος των βρόγχων σε έναν γράφο είναι ένδειξη ύπαρξης τοπικών ακροτάτων για την επιφάνεια στην συγκεκριμένη κλάση ύψους.

Αναμφισβήτητα, η αναπτυχθείσα μεθοδολογία προσεγγίζει με νέο τρόπο την μελέτη και την ανάλυση επιφανειών. Πρόκληση θα αποτελούσε η εφαρμογή της σε πραγματικά δεδομένα 3d επιφανειών με ιδιαίτερες λειτουργικές ιδιότητες (π.χ. υδροφοβικότητα) καθώς και η μελέτη χρονοσειρών σε διάφορες κλίμακες παρατήρησης.

Για μελλοντική ερευνητική δουλειά, προτείνεται η χρήση της νέας αυτής μεθοδολογίας σε πραγματικές επιφάνειες και γενικά σε μια πραγματική διαδικασία παραγωγής νανοδομών.

Τέλος, προτείνεται η πραγματοποίηση επέκτασης της σύνδεσης των δομικών και λειτουργικών παραμέτρων των επιφανειών και διασύνδεση τους με τις μετρικές των προκύπτοντων γράφων.

8. Παράρτημα

8.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πραγματικού πίνακα

Έστω ένας $(n \times n)$ πίνακας A . Το διάνυσμα x είναι ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) του A αν

$$Ax = \lambda x .$$

Το λ είναι η ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x . Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα διανύσματα που παραμένουν αναλλοίωτα στον ανωτέρω μετασχηματισμό. Όταν δηλαδή τα διανύσματα αυτά με τον πίνακα A το αποτέλεσμα είναι κάποιο πολλαπλάσιο διάνυσμα. Ο μετασχηματισμός αυτός λοιπόν αφήνει αναλλοίωτο τον υποχώρο που σηματοδοτεί το ιδιοδιάνυσμα. Με τον τρόπο αυτό τα ιδιοδιανύσματα με τις αντιστοιχούσες ιδιοτιμές των περιγράφουν τον γραμμικό μετασχηματισμό.

Όταν ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι πίνακας πεπερασμένης διάστασης οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες ενός πολυωνύμου n βαθμού. Οπότε συνυπολογίζοντας και τη πολλαπλότητα των ριζών θα υπάρχουν n ιδιοτιμές. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε ιδιοδιάνυσμα πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$(A - \lambda I)x = 0 .$$

Όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Εάν πρόκειται να έχουμε μη τετριμμένη λύση τότε απαιτείται ο πίνακας $A - \lambda I$ να μην είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή για να είναι το x ιδιοδιάνυσμα θα πρέπει η ιδιοτιμή λ να είναι τέτοια ώστε

$$\det(A - \lambda I) = 0 ,$$

δηλαδή πρέπει να είναι μία εκ των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(A - \lambda I) = 0$, που είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού. Έτσι υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και επιλύοντας τις γραμμικές εξισώσεις $Ax = \lambda x$ για κάθε λ τα ιδιοδιανύσματα.

Αποδεικνύεται ότι αν όλες οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές τότε υπάρχουν και n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Πολλές φορές όμως οι ιδιοτιμές έχουν πολλαπλότητα και ο αριθμός των γραμμικών ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων είναι μικρότερος της διάστασης του χώρου.

8.2 Διαγωνοποίηση πίνακα

Ορισμός

Ένας πίνακας ονομάζεται διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι διαγώνιος.

Αν ισχύει ο Ορισμός, τότε λέμε ότι εφαρμόζεται μια διαγωνοποίηση στον πίνακα A και γράφουμε $D = Q^{-1}AQ$ είτε ισοδύναμα $A = Q^{-1}DQ$.

Η ανωτέρω ισότητα είναι ακριβώς ο ορισμός ομοιότητας των πινάκων A, D γι' αυτό συχνά χρησιμοποιούμε αυτόν ως ισοδύναμο ορισμό διαγωνοποίησης πίνακα, ο δε πίνακας Q ονομάζεται πίνακας ομοιότητας.

Ορισμός

Ένας πίνακας ονομάζεται διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Πρόταση

Ένας πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αν διακεκριμένες ιδιοτιμές. Αν ένα πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ τότε $A^k = Q \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)Q^{-1}$ για κάθε φυσικό αριθμό k .

Θεώρημα 1. Εάν ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με το πλήθος στοιχείων s τότε για τις ιδιοτιμές του $\lambda_j (j = 1, \dots, s)$ του πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P ισχύει:

$$|\lambda_j| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

Επιπρόσθετα, εφόσον ο στοχαστικός $(s \times s)$ πίνακας P έχει διαφορετικές ιδιοτιμές γράφεται υπό την μορφή (διαγωνιοποιείται) $P = Q D Q^{-1}$, όπου D διαγώνιος $(s \times s)$ πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ του P και Q ένας αντιστρέψιμος $(s \times s)$ πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του P . Ως εκ τούτου ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης k -τάξης ο οποίος με τη σειρά του ισούται με το την k -οστή δύναμη του πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης δύναται από την παρακάτω σχέση $P^k = Q D^k Q^{-1}$.

8.3 Κώδικας Matlab

Στην παράγραφο αυτή παρατίθεται ενδεικτικά τμήμα του κώδικα που συντάχθηκε και χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας.

```
*****
tic
total=10;
for cas=1:10
rL=1;
h=0.05;
ksi=0.03;
step=4;
nmax=201;
points=3001;
total=10;
switch cas
    case 1
%Gaussian Surface
[y,x]=rsgenglD(points,rL,h,ksi);
    case 2
%Ημιτονοειδής
[x,y]=sinn(h,ksi,rL/ksi,points);
    case 3
%Τυχαία
x=-rL/2+(1/points)*rL*(1:points);y=0.05*rand(1,points);
    case 4
%Λευκός Θόρυβος
x=-
rL/2+(1/points)*rL*(1:points);y1=wgn(points,rL,0)';y=((1/20)*
y1);
    case 5
%Τριγωνικός Παλμός
[x,y]=trisurf(h,ksi,rL/ksi,points);
    case 6
%Τετραγωνικός Παλμός
[x,y]=tetrasurf(h,ksi,rL/ksi,points);
    case 7
%Ανορθωμένος Τριγωνικός Παλμός
[x,y]=trivoid(h,ksi,rL/ksi,points);
    case 8
%Ημιανορθωμένη Ημιτονοειδής
[x,y]=sinan(h,ksi,rL/ksi,points);
    case 9
%Ανορθωμένη Ημιτονοειδής
[x,y]=sindan(h,ksi,rL/ksi,points);
    case 10
%Εκθετική
[y,x]=rsgene1D(points,rL,h,ksi);
end
```

```

figuresdir= 'C:\Users\George\Desktop\MscResults\'
fid=fopen('050120.m');
fseek(fid,0,'bof');
% set linenum to the desired line number that you want to
import
linenum = 12+(cas-1)*3;
% use '%s' if you want to read in the entire line or use '%f'
if you want to read only the first numeric value
C = textscan(fid,'%s',1,'delimiter','\n',
'headerlines',linenum-1);
fseek(fid,0,'bof');
% set linenum to the desired line Number that you want to
import
linenum = 12+(cas-1)*3;
CC= textscan(fid,'%s',1,'delimiter','\n',
'headerlines',linenum);
str=string(C);
str = erase(str,"%")
strcc=string(CC);
strcc = erase(strcc,"%")
fname=strcat(figuresdir,str);
mkdir(fname);
plot(x,y)
title(strcc)
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
saveas(gcf,fullfile(fname, str),'jpeg')

plot(x,y)
axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5])
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
strsmall=strcat(str,'_b');
title(strcc)
saveas(gcf,fullfile(fname, strsmall),'jpeg')

[acf,lags,bounds] =autocorr(y,3000);
stem(lags,acf); xlabel('Lag'); ylabel('\rho(k)');
axis([0 3001 -1 1])
hold on;
h = line(lags,exp(-1)*ones(length(acf),1));
h1 = line(lags,-exp(-1)*ones(length(acf),1));
set(h,'color',[1 0 0]);
set(h1,'color',[1 0 0]);
hold off
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
strsmall1=strcat(str,'_c');
title('Autocorrelation Function συναρτήσεως της κλίμακας')
saveas(gcf,fullfile(fname, strsmall1),'jpeg')

pppp=zeros(10,nmax,total,total);

```

```

mapping1
loop=0;
fnameexcel=strcat(fname,'\',str,','.', 'xlsx');
xlswrite(fnameexcel,1) % #
for n=1:step:nmax
    loop=loop+1;
    %n=1+round(length(x1(:,2))*(i-1)/100);
    G1 = graph(x1(:,2), [x1(n+1:length(x1(:,2))),2];
x1(1:n,2)];

    for ii=1:N
        for jj=1:N
            ppppp(cas,loop,ii,jj)=edgecount(G1,ii,jj);
        end
    end
    probp=squeeze(ppppp(cas,loop, :, :));

probbp=probp./((sum(probp,2)==zeros(N,1))+sum(probp,2)).*ones
(N,N);
[V,D]=eig(probbp);

    numloop=(loop-1)*11+2;
%%eSheet1 = eSheet1.get('Range', 'A1:E1');
%%eSheet1.MergeCells = 1;
%%eSheet1.Value = 'text here';
%%eSheet1.Font.ColorIndex = 3
%%eSheet1.Font.Bold = 1;
    Range = [char('a'), num2str(numloop)];
    %RangeT = strcat(char('a'),num2str(numloop-
1)):strcat(char('j'),num2str(numloop-1))
    RangeD = [char('L'), num2str(numloop)];
    RangeV = [char('W'), num2str(numloop)];
    writematrix(probbp,fnameexcel,'Sheet',1,'Range',Range)
    writematrix(D,fnameexcel,'Sheet',1,'Range',RangeD)
    writematrix(V,fnameexcel,'Sheet',1,'Range',RangeV)
    for ii=1:N
        for jj=1:N
            prob(cas,loop,ii,jj)=probbp(ii,jj);
        end
    end
    probd(cas,loop,ii,jj)=D(ii,jj);
    end
    end
    probdd=sort(max(abs(squeeze(probd(cas,loop, :, :)))));

    for iiii=1:N
        for jjjj=1:N
            vert(iiii,jjjj)=(iiii<jjjj);
            vert2(iiii,jjjj)=(iiii<jjjj)*(jjjj-iiii);
        end
    end
end

```

```

fr=0;
fr=sum(sum(probpp.*vert));
friction(cas,loop)=fr;
fr2=0;
fr2=sum(sum(probpp.*vert2));
friction2(cas,loop)=fr2;
plot(friction(cas,:))
title('Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερες κλάσεις')
xticks([0:5:ceil(nmax/step)])

xticklabels({'0';'20';'40';'60';'80';'100';'120';'140';'160';
'180';'200';'220'})
xlabel('κλίμακα ως πλήθος σημείων')
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
saveas(gcf,fullfile(fname, 'friction'),'jpeg')

plot(friction2(cas,:))
title('Βεβαρημένο Άθροισμα Πιθανοτήτων Μετάβασης σε ανώτερες
κλάσεις')
xticks([0:5:ceil(nmax/step)])

xticklabels({'0';'20';'40';'60';'80';'100';'120';'140';'160';
'180';'200';'220'})
xlabel('κλίμακα ως πλήθος σημείων')
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
saveas(gcf,fullfile(fname, 'friction2'),'jpeg')
for iii=1:N
probddd(cas,loop,1,iii)=probdd(N+1-iii);
end

[G1,ei,ec] = simplify(G1,'keepselfloops');

%figure(i+1)
% h=plot(G1,'EdgeLabel',ec)
% h.LineWidth=0.5*ec/min(ec);
%title(['αλυσίδα ',num2str(n),' out of ',
num2str(length(x1(:,2)))])
dist(n)=mean(mean(distances(G1)));
maxdist(n)=max(max(distances(G1)));
clustco(n,1)=mean(clusteringcoef(G1));
end
plot(clustco(1:step:nmax))
title('συντελεστής ομαδοποίησης')
xticks([0:5:ceil(nmax/step)])

xticklabels({'0';'20';'40';'60';'80';'100';'120';'140';'160';
'180';'200';'220'})
xlabel('κλίμακα ως πλήθος σημείων')
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
saveas(gcf,fullfile(fname, 'clusteco'),'jpeg')

```

```

    distn=dist(1:step:n);
plot(distn)
    xticks([0:5:ceil(nmax/step)])

xticklabels({'0';'20';'40';'60';'80';'100';'120';'140';'160';
'180';'200';'220'})
    p = polyfit((1:ceil(nmax/step)),distn,2);
    y1 = polyval(p,(1:ceil(nmax/step)));
    hold on
    plot((1:ceil(nmax/step)),y1)
        xticks([0:5:ceil(nmax/step)])

xticklabels({'0';'20';'40';'60';'80';'100';'120';'140';'160';
'180';'200';'220'})
    xlabel('κλίμακα ως πλήθος σημείων')
    hold off

title('μέση απόσταση κόμβων συναρτήσεως της κλίμακας, σύνολο
σημείων 1000')
xlabel('κλίμακα ως πλήθος σημείων')
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
saveas(gcf,fullfile(fname,'mesi apostasi'),'jpeg')

maxdistn=maxdist(1:step:n);
plot(maxdistn)
    xticks([0:5:ceil(nmax/step)])

xticklabels({'0';'20';'40';'60';'80';'100';'120';'140';'160';
'180';'200';'220'})
title('μέγιστη απόσταση κόμβων συναρτήσεως της κλίμακας,
σύνολο σημείων 1000')
xlabel('κλίμακα ως πλήθος σημείων')
set(gcf,'WindowState','fullscreen')
saveas(gcf,fullfile(fname,'megisti apostasi'),'jpeg')

i=0;
for f=1:step:nmax
    i=i+1;
    %n=1+round(length(x1(:,2))*(i-1)/100);
    G1 = graph(x1(:,2),[x1(f+1:length(x1(:,2))),2];
x1(1:f,2));
    [G1,ei,ec] = simplify(G1,'keepselfloops');
    figuresdir= 'C:\Users\George\Desktop\MscResults\'
    fid=fopen('050120.m');
    % set linenum to the desired line number that you want to
import
        fseek(fid,0,'bof');
    linenum = 12+(cas-1)*3;
    % use '%s' if you want to read in the entire line or use '%f'
if you want to read only the first numeric value

```

```

C = textscan(fid,'%s',1,'delimiter','\n',
'headerlines',linenum-1);
str=string(C);
figure(2*i-1)
    %figure(2*i-1)
    subplot(3,2,[1:4])
    h=plot(G1,'Layout', 'circle',
'EdgeLabel',ec,'NodeLabelColor','r','Marker','s','NodeColor',
'g','MarkerSize', 10,'NodeFontSize',12,'NodeFontWeight',
'bold')
    %h.LineWidth=0.5*ec/min(ec);

    title(['η χρησιμοποιούμενη κλίμακα είναι ανά
',num2str(f),' σημεία από τα ', num2str(length(x1(:,2))),'
συνολικά σημεία της επιφάνειας.'])
    D = degree(G1);
    subplot(3,2,5)
    plot(D)
    title(['βαθμός του κάθε κόμβου'])

    subplot(3,2,6)
    X=1:N;fitdist(D,'Gamma'); A=[ans.a, ans.b];
PDF1=gampdf(X,A(1,1),A(1,2));PDF=(N/4).*PDF1./max(PDF1);
hist(D);hold on;plot(X,PDF);
    title(['Gamma με  $\alpha=$ ',num2str(A(1,1)),' και  $\beta=$ ',
num2str(A(1,2))])
    hold off;

    filename=['αλυσίδα ',num2str(f),' out of ',
num2str(length(x1(:,2)))]
    fname=strcat(figuresdir,str);
    mkdir(fname);
    set(gcf,'WindowState','fullscreen')
    saveas(figure(2*i-1),fullfile(fname, filename), 'jpeg')
    %saveas(figure(2*i-1),fullfile(fname, filename), 'jpeg')
    %dist(n)=mean(mean(distances(G1)));
    %maxdist(n)=max(max(distances(G1)));
figure(2*i)
FF=1000000000;
F=f+FF;
filename2=[num2str(F)];
    fname2=strcat(figuresdir,str,'\','bmpfiles');
    mkdir(fname2);

h1=plot(G1,'Layout', 'circle',
'EdgeLabel',ec,'NodeLabelColor','r','Marker','s','NodeColor',
'g','MarkerSize', 10,'NodeFontSize',12,'NodeFontWeight',
'bold')
h1.LineWidth=2*ec/mean(ec);

```

```

str1=strcat(strcc, '/ κλίμακα :',num2str(f),' σημεία / με το
ξ = ',num2str(ceil(ksi/rL*length(x1(:,2)))),' σημεία' );
title(str1)
saveas(figure(2*i),fullfile(fname2, filename2), 'bmp')
end
% Make an avi movie from a collection of PNG images in a
folder.
% Specify the folder.
myFolder = fname2;
if ~isdir(myFolder)
    errorMessage = sprintf('Error: The following folder does
not exist:\n%s', myFolder);
    uiwait(warndlg(errorMessage));
    return;
end
% Get a directory listing.
filePattern = fullfile(myFolder, '*.bmp');
pngFiles = dir(filePattern);
% Open the video writer object.

fname3=fullfile(fname2,'\ ',str);
writerObj = VideoWriter(fname3);
writerObj.FrameRate = 1;
open(writerObj);
% Go through image by image writing it out to the AVI file.
for frameNumber = 1 : length(pngFiles)
    % Construct the full filename.
    baseFileName = pngFiles(frameNumber).name;
    fullFileName = fullfile(myFolder, baseFileName);
    % Display image name in the command window.
    fprintf(1, 'Now reading %s\n', fullFileName);
    % Display image in an axes control.
    thisimage = imread(fullFileName);
    imshow(thisimage); % Display image.
    drawnow; % Force display to update immediately.
    % Write this frame out to the AVI file.
    writeVideo(writerObj, thisimage);
end
% Close down the video writer object to finish the file.
close(writerObj);
for ip=1:N
    fig2=plot(probddd(cas, :, ip));
    hold on
end
title('eigenvalues')
saveas(fig2,fullfile(fname2, filename2), 'png')

%clearvars -except pppp
%ppppp=squeeze(pppp(1, :, :))
clc
close all

```



```

%clear
end
filename = 'last.mat';
save(filename)
toc
%C = edgecount(G,s,t)
%DBCONT
%prob=ppppp./(sum(ppppp,2).*ones(10,10))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%e = actxserver('Excel.Application');
% Add a workbook.
%%eWorkbook = e.Workbooks.Add;
%%e.Visible = 1;
% Make the first sheet active.
%%eSheets = e.ActiveWorkbook.Sheets;
%%eSheet1.Activate

% Merge Cells
%%eSheet1 = eSheet1.get('Range', 'A1:E1');
%%eSheet1.MergeCells = 1;
%%eSheet1.Value = 'text here';
%%eSheet1.Font.ColorIndex = 3
%%eSheet1.Font.Bold = 1;
%filename = 'C:\Users\George\Desktop\patientdata.xlsx';
%writematrix(a,filename,'Sheet',test,'Range','D1')
*****

```

Βιβλιογραφία

- [1] Bharat Bhushan The Ohio State University Surface Roughness Analysis and Measurement Techniques
- [2] P.Erdős, A.Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. Budapest Academy, 1960.
- [3] SM Fazeli, AH Shirazi, GR Jafari (2008) Probing rough surfaces: Markovian versus non-Markovian processes, New Journal of Physics 10 (8), 083020
- [4] ISO 4287:1997 Geometrical Product Specifications (GPS) -- Surface texture: Profile method -- Terms, definitions and surface texture parameters
- [5] Lacasa L., Luque B., Ballesteros F., Luque J. & Nuño J.C. (2008). From time series to complex networks: the visibility graph. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 105, 13, 4972-4975.
- [6] Lacasa L., Luque B., Nuño J.C. & Luque J. (2009). The Visibility Graph: a new method for estimating the Hurst exponent of fractional Brownian motion. EPL 86, 30001 (2009).
- [7] Lacasa, L. & Toral, R. (2010). Description of stochastic and chaotic series using visibility graphs. Phys. Rev. E 82, 036120 (2010).
- [8] AH Shirazi et. al (2009) Mapping stochastic processes onto complex networks
Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2009 (07), P07046
- [9] Τραχύτητα στην πολυπλοκότητα και νανοτεχνολογία, Βασίλης Κωνσταντούδης, INN, ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος
- [10] ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ»
Καθ. Απ. Μπουρνέτας