

Αναπαραστάσεις της Schur άλγεβρας

Διπλωματική Εργασία

Χαράλαμπος Ευαγγέλου

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Μαλιάκας



Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα - 2020

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Προκαταρκτικά	4
1 Εισαγωγή	5
1.1 Υπενθυμίσεις.	5
1.2 Βασικά στοιχεία.	7
2 Πολυωνυμικές Αναπαραστάσεις της $GL_n(K)$: Η Schur άλγεβρα.	21
2.1 Βασικά Στοιχεία.	21
2.2 Οι κατηγορίες $M_K(n)$, $M_K(n, r)$.	26
2.3 Η άλγεβρα του Schur : $S_K(n, r)$.	28
2.4 Η απεικόνιση $e : KT \rightarrow S_K(n, r)$.	33
2.5 $\mathbb{Z}$ -forms.	38
2.6 Τα πρότυπα $E^{\otimes r}$, $D_r(E)$, $\Lambda^r E$.	47
2.7 Contravariant duality.	59
2.8 Το $A_K(n, r)$ ως KT -διπρότυπο.	70
3 Weights και Characters.	73
3.1 Weights.	73
3.2 Weights Spaces.	76
3.3 Βασικές ιδιότητες των Weight Spaces	83
3.4 Characters	96
3.5 Απλά πρότυπα στην $M_K(n, r)$	116
3.6 Skew symmetric functions και η κατασκευή των Schur functions .	127
3.7 Formal characters στην $M_K(n, r)$ όταν $chK = 0$.	138
4 Τα πρότυπα $D_{\lambda, K}$.	139
4.1 λ -tableaux.	139
4.2 Bideterminants.	144
4.3 Το πρότυπο $D_{\lambda, K}$.	148
4.4 Το Θεώρημα βάσης για το πρότυπο $D_{\lambda, K}$.	157
4.5 Το Λήμμα Carter-Lusztig.	162
4.6 Εφαρμογές του θεωρήματος βάσης.	172
4.7 $\mathbb{Z}$ -forms στο $D_{\lambda, K}$.	176
5 Τα πρότυπα Carter-Lusztig $V_{\lambda, K}$.	181
5.1 Το πρότυπο $V_{\lambda, K}$.	181
5.2 Το $V_{\lambda, K}$ σαν Carter-Lusztig πρότυπο.	184
5.3 Η Carter-Lusztig βάση του $V_{\lambda, K}$.	196
5.4 Εφαρμογές του θεωρήματος βάσης.	204
5.5 Contravariant forms στο $V_{\lambda, K}$.	211
5.6 $\mathbb{Z}$ -forms στο $V_{\lambda, K}$.	218

6	Θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας.	224
6.1	Ο συναρτητής $f : M_K(n, r) \longrightarrow \text{mod}KG(r)$ ($r \leq n$).	224
6.2	Γενική θεωρία του συναρτητή $f : \text{mod}S \longrightarrow \text{mod}Se$.	231
6.3	Εφαρμογή I. Specht πρότυπα και τα δυϊκά τους.	243
6.4	Εφαρμογή II. Απλά $KG(r)$ -πρότυπα, $\text{ch}K = p$.	253
	Αναφορές	266

Περίληψη

Οι αναπαραστάσεις της Schur άλγεβρας $S_K(n, r)$ ξεκίνησαν να μελετούνται από την ανάγκη που είχε δημιουργηθεί για την μελέτη των αναπαραστάσεων της $GL_n(\mathbb{C})$. Οι ρίζες του θέματος αυτού ξεκινάν από τη διδακτορική διατριβή του Schur [23] το 1901. Για την μελέτη των αναπαραστάσεων της $GL_n(\mathbb{C})$ ο Schur έδειξε ότι αρκεί να μελετήσει τις ομογενείς αναπαραστάσεις βαθμού r . Μάλιστα ο Schur έλυσε και το δεύτερο πρόβλημα, υπολογίζοντας όλους τους χαρακτήρες των irreducible αναπαραστάσεων μέσω των συμμετρικών πολυωνύμων S_λ (τα λεγόμενα Schur functions). Στη πορεία τα αποτελέσματα αυτά γενικεύθηκαν για τυχόν άπειρα σώματα K με $chK = 0$. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι στη περίπτωση που το K είναι πεπερασμένο σώμα, ο J.A. Green [5, σελ 269] υπολόγισε όλους τους χαρακτήρες πάνω από την $GL_n(K)$ (ο J.A. Green ασχολήθηκε και με την περίπτωση όπου το K είναι άπειρο σώμα και εν γένη το έργο του στη μελέτη των αναπαραστάσεων της $GL_n(K)$ θεωρείται ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους της σύγχρονης θεωρίας αναπαραστάσεων). Με βάση τα παραπάνω η μόνη περίπτωση που εκκρεμεί και συγκεντρώνει όλο το ερευνητικό ενδιαφέρον τη παρούσα στιγμή, είναι αυτή που $K =$ άπειρο σώμα με $chK = p > 0$.

Η παρούσα εργασία εστιάζεται κυρίως στη μελέτη των αναπαραστάσεων της $GL_n(K)$ όταν $K =$ άπειρο σώμα, με εφαρμογές κυρίως στη περίπτωση όπου $chK = 0$ (θα δούμε βέβαια και κάποιες εφαρμογές όταν $chK = p > 0$). Συγκεκριμένα χωρίζεται στα εξής τρία τμήματα:

i) Μελέτη των κατηγοριών $M_K(n, r)$ και $mod(S_K(n, r))$.

Καταρχάς $M_K(n, r) =$ αναπαραστάσεις ομογενή βαθμού r της $GL_n(K)$ και $mod(S_K(n, r)) =$ αναπαραστάσεις της $S_K(n, r)$. Θα μελετήσουμε βασικές ιδιότητες των δύο κατηγοριών και ιδιαιτέρως θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμες. Τα κεντρικά θεωρήματα θα είναι:

- a) $S_K(n, r) \simeq End_{KG(r)}(E^{\otimes r})$.
- b) Τα irreducible πρότυπα της $M_K(n, r)$ έρχονται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία του συνόλου $\Lambda^+(n, r) (=$ φθίνοντα partitions του $r)$.
- c) Σύγκριση του τυπικού χαρακτήρα ενός $V \in M_K(n, r)$ με το φυσικό του χαρακτήρα.

ii) Μελέτη των προτύπων $D_{\lambda, K}, V_{\lambda, K}$.

Θα μελετήσουμε βασικές ιδιότητες των δύο προτύπων ξεχωριστά. Θα δείξουμε ότι είναι δυϊκά μεταξύ τους και θα βρούμε μία K -βάση για το καθένα. Τα κεντρικά θεωρήματα θα είναι:

- a) Το $D_{\lambda, K}$ έχει K -βάση το σύνολο $\{(T_i : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard } \lambda\text{-tableaux}\}$.
- b) Το $V_{\lambda, K}$ έχει K -βάση το σύνολο $\{b_i = \xi_i, lfi \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard } \lambda\text{-tableaux}\}$.
- c) Αν $chK = 0$ τότε τα irreducible πρότυπα της $M_K(n, r)$ είναι τα $\{D_{\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ ή εναλλακτικά τα $\{V_{\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$.

iii) Εφαρμογές στη θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας $G(r)$

Στο κομμάτι αυτό θα δούμε ότι η μελέτη των αναπαραστάσεων της $G(r)$ ανάγεται στη μελέτη της υποάλγεβρας $S(\omega)$ της Schur άλγεβρας $S_K(n, r)$. Στη μελέτη αυτή εισάγουμε τα Specht πρότυπα $S_{T^\lambda, K}$. Τα κεντρικά θεωρήματα θα είναι:

- a) $S(\omega) \simeq KG(r)$.
- b) Αν $chK = 0$ τότε τα *irreducible* πρότυπα της $mod(KG(r))$ είναι τα $\{S_{T^\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$.
- c) Αν $chK = p > 0$ τότε τα *irreducible* πρότυπα της $mod(KG(r))$ έρχονται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα column p-regular partitions του $\Lambda^+(n, r)$. Ιδιαίτέρως τα *irreducible* πρότυπα της $M_K(n, r)$ που εμφυτεύονται μέσα στο $E^{\otimes r}$ έρχονται και αυτά σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα column p-regular partitions του $\Lambda^+(n, r)$.

Προκαταρκτικά

Η εργασία αυτή αποτελεί μία προσπάθεια κατανόησης του πρώτου μέρους του εξαιρετικού βιβλίου του J.A. Green [1]. Το βιβλίο του J.A. Green έχει το ιδιαίτερο πλεονέκτημα να εμβαθύνει σε προχωρημένα μαθηματικά αποτελέσματα χωρίς την απαίτηση μεγάλου πλήθους προαπαιτούμενων γνώσεων, με λίγα λόγια είναι αυτοτελές.

Το μόνο που θα χρειαστεί κανείς για να συμβαδίσει με το περιεχόμενο της εργασίας αυτής είναι τα εξής:

- i) Στοιχειώδης θεωρία ομάδων.
- ii) Βασικές γνώσεις μη-μεταθετικής άλγεβρας.
- iii) Multilinear άλγεβρα (τα πρώτα δύο κεφάλαια του βιβλίου του D. G. Northcott [3]).

1 Εισαγωγή

1.1 Υπενθυμίσεις.

Η παράγραφος αυτή αφιερώνεται σε κάποιες υπενθυμίσεις βασικών εννοιών που στη πορεία θα χρησιμοποιούμε χωρίς ιδιαίτερη μνεία.

Ορισμός 1.1.1. *i) Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και A ένα R -πρότυπο. Αν το A είναι δακτύλιος με την ιδιότητα $r \cdot (a \cdot b) = (r \cdot a) \cdot b = a \cdot (r \cdot b)$ για κάθε $r \in R, a, b \in A$, τότε θα λέμε ότι το A είναι R -άλγεβρα.*

Παρακάτω θα μας απασχολήσουν περιπτώσεις όπου $R = K$ σώμα.

ii) Έστω A, B δύο R -άλγεβρες, μία απεικόνιση $\phi : A \rightarrow B$ θα λέγεται ομομορφισμός R -αλγεβρών αν είναι ομομορφισμός δακτυλίων και R -προτύπων. Φυσιολογικά ορίζονται οι έννοιες του μονομορφισμού, επιμορφισμού και ισομορφισμού.

Παρατήρηση 1.1.1. *Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και K σώμα. Τότε:*

- i) Έστω A μία R -άλγεβρα, τότε $(r \cdot 1_A) \in C(A)$ για κάθε $r \in R$ (όπου $C(A) = \{s \in A \mid rs = sr, \forall s \in A\}$ = κέντρο του A).*
- ii) Αν R μία K -άλγεβρα, τότε η απεικόνιση $i : K \rightarrow R, k \mapsto k \cdot 1_A$, είναι μονομορφισμός K -αλγεβρών (όπου $K = K$ -άλγεβρα με φυσιολογικό τρόπο).*
- iii) Αν R μία K -άλγεβρα τότε κάθε R -πρότυπο V , γίνεται και K -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $k \cdot v := (k \cdot 1_R) \cdot v$ όπου $k \in K, v \in V$. Μάλιστα ισχύει $k \cdot (r \cdot v) = (k \cdot r) \cdot v = r \cdot (k \cdot v)$ για κάθε $k \in K, r \in R, v \in V$.*

Σημείωση: Αν το V ήταν δεξιό R -πρότυπο, τότε γίνεται K -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $k \cdot v := v \cdot (k \cdot 1_R)$ όπου $k \in K, v \in V$.

iv) Με τους συμβολισμούς του iii) κάθε ομομορφισμός R -προτύπων, είναι και K -προτύπων. Ιδιαίτερος κάθε ισομορφισμός R -προτύπων είναι και K -προτύπων.

Παρατήρηση 1.1.2. *Έστω Γ ημιομάδα, τότε ορίζεται η K -άλγεβρα της ημιομάδας Γ με K -βάση το Γ και συμβολίζεται $K[\Gamma]$ (ή $K\Gamma$). Συγκεκριμένα, έχουμε την εξής κατασκευή:*

- i) $K\Gamma := \bigoplus_{g \in \Gamma} K_g$, $K_g = K$, όπου το $\bigoplus_{g \in \Gamma} K_g$ είναι ελεύθερο K -πρότυπο με βάση το $\{e_h \mid h \in \Gamma\}$
 $(e_h : \Gamma \rightarrow \bigcup_{g \in \Gamma} K_g, e_h(h) = 1 \text{ και } e_h(x) = 0 \forall x \neq h)$. Συμβολικά $e_h := h$. Ιδιαίτερος αν $x \in K\Gamma$ τότε $x = \sum_{g \in \Gamma} k_g g$ όπου $\text{supp} x := \{g \in \Gamma \mid k_g \neq 0\} < \infty$ και η γραφή είναι μοναδική.*

ii) Το $K\Gamma$ γίνεται δακτύλιος, μάλιστα K -άλγεβρα με πολλαπλασιασμό την επιμεριστική, δηλαδή αν $x, y \in K\Gamma$ με $x = \sum_{g \in \Gamma} k_g g$, $y = \sum_{h \in \Gamma} k_h h$ (όπου $\text{supp}x, \text{supp}y < \infty$), τότε ορίζουμε $x \cdot y = \sum_{g \in \Gamma} \sum_{h \in \Gamma} (k_g k_h) gh$, όπου το gh είναι γινόμενο μέσα στην ημοιάδα Γ .

1.2 Βασικά στοιχεία.

Ορισμός 1.2.1. Έστω Γ ημοιάδα και V K -διανυσματικός χώρος (δηλαδή K -πρότυπο). Μία απεικόνιση $\tau : \Gamma \rightarrow \text{End}_K(V)$ με τις ιδιότητες $\tau(gh) = \tau(g)\tau(h)$, $\tau(1_\Gamma) = 1_{\text{End}_K(V)} = \mathbb{I}_V$, θα λέγεται αναπαράσταση (representation) της Γ στο V .

Επιπλέον ο τ επεκτείνεται σε ομομορφισμό K -αλγεβρών που καταχρηστικά θα τον συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα και είναι ο $\tau : K\Gamma \rightarrow \text{End}_K(V)$, $\tau(\sum_{g \in \Gamma} k_g g) = \sum_{g \in \Gamma} k_g \tau(g)$. Μάλιστα, στα παρακάτω όταν μιλάμε για αναπαράστασεις θα αναφέρουμε απευθείας τον ομομορφισμό K -αλγεβρών.

Σχόλιο. Υπενθυμίζουμε ότι το $\text{End}_K(V)$ είναι K -άλγεβρα με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τους φυσιολογικούς και πολλαπλασιασμό (δακτυλίου) την σύνθεση απεικονίσεων.

Παρατήρηση 1.2.1. *i)* Έστω V K -πρότυπο και $\tau : K\Gamma \rightarrow \text{End}_K(V)$ αναπαράσταση, τότε το V γίνεται (αριστερό) $K\Gamma$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $k \cdot v := \tau(k)(v)$ για κάθε $k \in K\Gamma$, $v \in V$. Μάλιστα ο η δομή K -προτύπου που επάγει το $K\Gamma$ στο V (δηλαδή $k \cdot v = (k \cdot 1_\Gamma) \cdot v$, όπου $k \in K, v \in V$) ταυτίζεται με την αρχική δομή K -προτύπου που είχε το V .

ii) Έστω V ένα $K\Gamma$ -πρότυπο, τότε το V γίνεται K -πρότυπο (βλέπε Παρατήρηση 1.1.1) και ορίζεται η αναπαράσταση $\tau : K\Gamma \rightarrow \text{End}_K(V)$, $k \mapsto \tau(k)$, όπου $\tau(k) : V \rightarrow V$, $\tau(k)(v) = k \cdot v$.

iii) Αν ξεκινήσουμε με μία αναπαράσταση $\tau : K\Gamma \rightarrow \text{End}_K(V)$ και πάρουμε το επαγόμενο $K\Gamma$ -πρότυπο και μετά την επαγόμενη αναπαράσταση αυτού, τότε θα πέσουμε πάλι πάνω στην τ . Ανάποδα, αν πάρουμε ένα $K\Gamma$ -πρότυπο V , μετά την επαγόμενη αναπαράσταση του και μετά το επαγόμενο $K\Gamma$ -πρότυπο αυτής, τότε θα πέσουμε πάλι στο ίδιο $K\Gamma$ -πρότυπο V . Συνεπώς τα *i*), *ii*) δεν έχει σημασία με ποια σειρά τα έχουμε. Συμβολικά γράφουμε $V = (V, \tau)$.

Απόδειξη.

Θα κάνουμε ενδεικτικά το *i*). Έστω $\tau : K\Gamma \rightarrow \text{End}_K(V)$ ομομορφισμός K -αλγεβρών $(*)$ και $v, u \in V, k, s \in K\Gamma$ τότε:

$$1_\Gamma \cdot v = \tau(1_\Gamma)(v) = \mathbb{I}_V(v) = v.$$

$$(k + s) \cdot v = \tau(k + s)(v) \stackrel{(*)}{=} (\tau(k) + \tau(s))(v) = \tau(k)(v) + \tau(s)(v) = k \cdot v + s \cdot v.$$

$$k \cdot (v + u) = \tau(k)(v + u) \stackrel{\tau(k) \in \text{End}_K(V)}{=} \tau(k)(v) + \tau(k)(u) = k \cdot v + k \cdot u.$$

$$k \cdot (s \cdot v) = k \cdot \tau(s)(v) = \tau(k)(\tau(s)(v)) = (\tau(k) \circ \tau(s))(v) = (\tau(k)\tau(s))(v) \stackrel{(*)}{=} \tau(ks)(v) = (ks) \cdot v.$$

Όσο για το τελευταίο σκέλος του *i*), αν $k \in K, v \in V$ τότε.

$$(k \cdot 1_\Gamma) \cdot v = \tau(k \cdot 1_\Gamma)(v) \stackrel{(*)}{=} (k\tau(1_\Gamma))(v) = (k\mathbb{I}_V)(v) = kv.$$

□

Παρατήρηση 1.2.2. Έστω $(V, \tau), (W, \omega)$ δύο $K\Gamma$ -πρότυπα. Μία K -γραμμική $f : V \rightarrow W$ είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων αν και μόνον αν $\omega(g) \circ f = f \circ \tau(g)$ για κάθε $g \in \Gamma$.

Απόδειξη.

Πράγματι, αν f ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων, τότε $f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$ για κάθε $g \in \Gamma$, δηλαδή $f(\tau(g)(v)) = \omega(g)(f(v)) \iff (f \circ \tau(g))(v) = (\omega(g) \circ f)(v)$ για κάθε $v \in V, g \in \Gamma$, άρα $\omega(g) \circ f = f \circ \tau(g)$ για κάθε $g \in \Gamma$. Ανάποδα, έστω $k \in K\Gamma, v \in V$, τότε $k = \sum_g k_g g$ και εφόσον $f = K$ -γραμμική έχουμε,

$$\begin{aligned} f(k \cdot v) &= \sum_g k_g f(g \cdot v) = \sum_g k_g f(\tau(g)(v)) = \sum_g k_g (f \circ \tau(g))(v) = \sum_g k_g (\omega(g) \circ f)(v) = \\ &= \sum_g k_g \omega(g)(f(v)) = \sum_g k_g g \cdot f(v) = \left(\sum_g k_g g \right) \cdot f(v) = k \cdot f(v) \end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.2.2. Έστω Γ ημιομάδα, K σώμα. Μία αντι-αναπαράσταση (*anti-representation*) της Γ σε ένα K -διανυσματικό χώρο V είναι μία απεικόνιση $\tau : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ με τις ιδιότητες $\tau(gh) = \tau(h)\tau(g)$, $\tau(1_\Gamma) = 1_{\text{End}_K(V)} = \mathbb{I}_V$.

Επιπλέον τ επεκτείνεται σε αντι-ομομορφισμό K -αλγεβρών (δηλαδή, K -γραμμική με $\tau(ks) = \tau(s)\tau(k)$ για κάθε $k, s \in K\Gamma$) που καταχρηστικά θα τον συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα και είναι ο $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$, $\tau(\sum_{g \in \Gamma} k_g g) = \sum_{g \in \Gamma} k_g \tau(g)$.

Παρατήρηση 1.2.3. *i)* Έστω V , K -πρότυπο και $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ αντί-αναπαράσταση, τότε το V γίνεται (δεξιό) $K\Gamma$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $v \cdot k := \tau(k)(v)$ για κάθε $k \in K\Gamma, v \in V$. Μάλιστα ο η δομή K -προτύπου που επάγει το $K\Gamma$ στο V (δηλαδή $k \cdot v = v \cdot (k \cdot 1_\Gamma)$, όπου $k \in K, v \in V$) ταυτίζεται με την αρχική δομή K -προτύπου που είχε το V .

ii) Έστω V ένα (δεξιό) $K\Gamma$ -πρότυπο, τότε το V γίνεται K -πρότυπο (βλέπε Παρατήρηση 1.1.1) και ορίζεται η αντί-αναπαράσταση $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$, $k \longmapsto \tau(k)$, όπου $\tau(k) : V \longrightarrow V$, $\tau(k)(v) = v \cdot k$.

iii) Αν ξεκινήσουμε με μία αντί-αναπαράσταση $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ και πάρουμε το επαγόμενο (δεξιό) $K\Gamma$ -πρότυπο και μετά την επαγόμενη αντί-αναπαράσταση αυτού, τότε θα πέσουμε πάλι πάνω στην τ . Ανάποδα, αν πάρουμε ένα (δεξιό) $K\Gamma$ -πρότυπο V , μετά την επαγόμενη αντί-αναπαράσταση του και μετά το επαγόμενο (δεξιό) $K\Gamma$ -πρότυπο αυτής, τότε θα πέσουμε πάλι στο ίδιο $K\Gamma$ -πρότυπο V . Συνεπώς τα *i), ii)* δεν έχει σημασία με ποια σειρά τα έχουμε. Συμβολικά γράφουμε $V = (V, \tau)$.

Απόδειξη.

Παρόμοια με της παρατήρησης για τα αριστερά $K\Gamma$ -πρότυπα.

□

Παρατήρηση 1.2.4. (Γενικά) Έστω R K -άλγεβρα και V K -πρότυπο τότε:

i) Έστω $B := \{e_i \mid i \in I\}$ μία K -βάση του R και $\tau : R \longrightarrow \text{End}_K(V)$ K -γραμμική απεικόνιση με $\tau(e_i e_j) = \tau(e_i)\tau(e_j)$, για κάθε $i, j \in I$. Τότε η τ είναι ομομορφισμό K -αλγεβρών. Ενώ αν $\tau(e_i e_j) = \tau(e_j)\tau(e_i)$ για κάθε $i, j \in I$, τότε η τ είναι αντί-ομομορφισμός K -αλγεβρών.

- ii) Έστω $\tau : R \longrightarrow \text{End}_K(V)$ ομομορφισμός K -αλγεβρών με $\tau(1_R) = \mathbb{I}_V$, τότε το V γίνεται R -πρότυπο με $r \cdot v := \tau(r)(v)$ για κάθε $r \in R, v \in V$. Επιπλέον η δομή K -προτύπου που επάγει το R στο V , δηλαδή $k \cdot v := (k \cdot 1_R) \cdot v$ για $k \in K, v \in V$, ταυτίζεται με την αρχική δομή K -προτύπου που είχε το V .
- iii) Έστω W ένα R -πρότυπο, τότε το W γίνεται K -πρότυπο (βλέπε Παρατήρηση 1.1.1) και ορίζεται ο ομομορφισμός K -αλγεβρών $\tau : R \longrightarrow \text{End}_K(W)$, όπου $\tau(r) : W \longrightarrow W$ με $\tau(r)(v) = r \cdot v$.
- iv) Αν ξεκινήσουμε με ένα ομομορφισμό K -αλγεβρών $\tau : R \longrightarrow \text{End}_K(V)$ και πάρουμε το επαγόμενο R -πρότυπο και μετά τον επαγόμενο ομομορφισμό K -αλγεβρών, τότε θα πέσουμε πάλι πάνω στην τ . Ανάποδα, αν πάρουμε ένα R -πρότυπο V , μετά την επαγόμενο ομομορφισμό K -αλγεβρών και μετά το επαγόμενο R -πρότυπο αυτού, τότε θα πέσουμε πάλι στο ίδιο R -πρότυπο V . Συνεπώς τα ii), iii) δεν έχει σημασία με ποια σειρά τα βλέπουμε.
- v) Αν $\tau : R \longrightarrow \text{End}_K(V)$ είναι αντί-ομομορφισμός K -αλγεβρών (δηλαδή $\tau(rs) = \tau(s)\tau(r)$, για κάθε $r, s \in R$), τότε έχουμε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά των i), ii), iii) για δεξιά R -πρότυπα.

Απόδειξη.

Τα ii), iii), iv), v) είναι παρόμοια με αυτά των προηγούμενων παρατηρήσεων. Ας δούμε το i) (χάνουμε τον ομομορφισμό, ενώ ο αντί-ομομορφισμός γίνεται παρόμοιος), έστω $r = \sum_{i \in I} k_i e_i$, $s = \sum_{j \in I} t_j e_j$, όπου $k_i, t_j \in K$, τότε:

$$\begin{aligned} \tau(rs) &= \tau\left(\sum_i \sum_j k_i t_j e_i e_j\right) = \sum_i \sum_j k_i t_j \tau(e_i e_j) = \\ &= \sum_i \sum_j k_i t_j \tau(e_i) \tau(e_j) = \left(\sum_{i \in I} k_i \tau(e_i)\right) \cdot \left(\sum_{j \in I} t_j \tau(e_j)\right) = \tau(r) \cdot \tau(s). \end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.2.3. Έστω Γ ημιομάδα και K σώμα, τότε ορίζουμε $K^\Gamma = \{f : \Gamma \longrightarrow K \mid f \text{ απεικόνιση}\}$.

Παρατήρηση 1.2.5. Το K^Γ είναι μία μεταθετική K -άλγεβρα με πρόσθεση, πολλαπλασιασμό (δακτυλίου) κατά σημείο και εξωτερικό πολλαπλασιασμό (K -προτύπου) τον φυσιολογικό. Επιπλέον,

$$1_{K^\Gamma} : \Gamma \longrightarrow K, g \longmapsto 1_K \text{ και } 0_{K^\Gamma} : \Gamma \longrightarrow K, g \longmapsto 0_K.$$

Σχόλιο. Στόχος μας είναι να δώσουμε δομή $K\Gamma$ -προτύπου στο K^Γ (ισοδύναμα να βρούμε μία αναπαράστασή της ημιομάδας Γ στο K^Γ).

Ορισμός 1.2.4. Έστω Γ ημιομάδα, K σώμα για κάθε $s \in \Gamma$ και $f \in K^\Gamma$ ορίζουμε τα εξής:

- i) Το δεξιό translate της f στο s , $R_s f : \Gamma \longrightarrow K$, $g \longmapsto f(gs)$
- ii) Το αριστερό translate της f στο s , $L_s f : \Gamma \longrightarrow K$, $g \longmapsto f(sg)$.

Παρατήρηση 1.2.6.

- i) Έστω $s \in \Gamma$ τότε η απεικόνιση $R_s : K^\Gamma \longrightarrow K^\Gamma$, $f \longmapsto R_s f$ είναι ομομορφισμός K -αλγεβρών. Ιδιαίτερος, η απεικόνιση $R : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(K^\Gamma)$, $s \longmapsto R_s$ είναι αναπαράσταση της Γ στο K^Γ .
- ii) Έστω $s \in \Gamma$ τότε η απεικόνιση $L_s : K^\Gamma \longrightarrow K^\Gamma$, $f \longmapsto L_s f$ είναι ομομορφισμός K -αλγεβρών. Ιδιαίτερος, η απεικόνιση $L : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(K^\Gamma)$, $s \longmapsto L_s$ είναι αντί-αναπαράσταση της Γ στο K^Γ .

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι στοιχειώδης, οπότε κάνουμε ενδεικτικά ένα κομμάτι του i), ενώ το ii) θα είναι παρόμοιο. Έστω $k \in K$, $f_1, f_2 \in K^\Gamma$ τότε:

$$R_s(f_1 + f_2) = R_s f_1 + R_s f_2: \quad R_s(f_1 + f_2)(g) = (f_1 + f_2)(gs) = f_1(gs) + f_2(gs) = R_s f_1(g) + R_s f_2(g) = (R_s f_1 + R_s f_2)(g), \text{ άρα } R_s(f_1 + f_2) = R_s f_1 + R_s f_2.$$

$$R_s(f_1 f_2) = (R_s f_1)(R_s f_2): \quad \text{Όμοια.}$$

$$R_s(kf) = kR_s f: \quad R_s(kf)(g) = (kf)(gs) = kf(gs) = kR_s(f)(g) = (kR_s f)(g), \text{ άρα } R_s(kf) = kR_s f.$$

Πάμε να δούμε ότι $R =$ αναπαράσταση. Πράγματι έστω $s, t \in \Gamma$ τότε:

$$R_{st} = R_s R_t: \quad \text{Έστω } f \in K^\Gamma, g \in \Gamma, \text{ τότε } (R_{st} f)(g) = f(gst) = (R_t f)(gs) = (R_s(R_t f))(g) = ((R_s \circ R_t)(f))(g), \text{ το } g \text{ ήταν τυχόν άρα } R_{st} f = (R_s \circ R_t)(f), \text{ το } f \text{ ήταν τυχόν άρα } R_{st} = R_s \circ R_t = R_s R_t.$$

$$R_{1_\Gamma} = \mathbb{I}_{K^\Gamma}: \quad (R_{1_\Gamma} f)(g) = f(g1_\Gamma) = f(g), \text{ άρα } R_{1_\Gamma} f = f = \mathbb{I}_{K^\Gamma}(f), \text{ δηλαδή } R_{1_\Gamma} = \mathbb{I}_{K^\Gamma}.$$

□

Πόρισμα 1.2.1. Θεωρώντας τις επεκτάσεις των R, L από το $K\Gamma$ στο $\text{End}_K(V)$ (που καταχρηστικά θα συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα), το K^Γ γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο ως εξής:

- i) (Αριστερό) $K\Gamma$ -πρότυπο με $k \circ f = R_k f$, $k \in K\Gamma$, $f \in K^\Gamma$. Ιδιαίτερος, αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $f \in K^\Gamma$ τότε $k \circ f = \sum_g k_g R_g f = \sum_g k_g (g \circ f)$.
- ii) (δεξιό) $K\Gamma$ -πρότυπο με $f \circ k = L_k f$, $k \in K\Gamma$, $f \in K^\Gamma$. Ιδιαίτερος, αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $f \in K^\Gamma$ τότε $f \circ k = \sum_g k_g L_g f = \sum_g k_g (f \circ g)$.
- iii) Το K^Γ είναι $(K\Gamma, K\Gamma)$ -διπρότυπο, δηλαδή για κάθε $s, t \in K\Gamma$, $f \in K^\Gamma$ ισχύει $(s \circ f) \circ t = s \circ (f \circ t)$.

Απόδειξη.

- i) Το πρώτο σκέλος είναι άμεσο από Παρατήρηση 1.2.1 το i). Όσο για το ιδιαίτερος, έχουμε $k \circ f = (\sum_g k_g g) \circ f = R(\sum_g k_g g)(f) = (\sum_g k_g R_g)(f) = \sum_g k_g R_g f$, όπου τρίτη ισότητα ισχύει γιατί η $R : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ είναι ομομορφισμός K-αλγεβρών. Το ii) είναι όμοιο.
- iii) Το κάνουμε πρώτα στη βάση του $K\Gamma$ και μετά γενικά. Πράγματι, έστω $g, h \in \Gamma$ τότε $(g \circ f) \circ h = R_g f \circ h = L_h(R_g f)$ και $g \circ (f \circ h) = g \circ L_h f = R_g(L_h f)$, όμως για κάθε $r \in \Gamma$ έχουμε,

$$(L_h(R_g f))(r) = (R_g f)(hr) = f((hr)g) = f(h(rg)) = (L_h f)(rg) = (R_g(L_h f))(r).$$

Συνεπώς $R_g(L_h f) = L_h(R_g f) \iff (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$. Γενικά τώρα αν $s = \sum_g k_g g$, $t = \sum_h k_h h \in K\Gamma$, τότε,

$$\begin{aligned} (s \circ f) \circ t &= (\sum_g k_g (g \circ f)) \circ t = \sum_g k_g (g \circ f) \circ t = \sum_g k_g (\sum_h k_h (g \circ f) \circ h) = \\ &= \sum_g \sum_h k_g k_h g \circ (f \circ h) = \sum_g k_g (g \circ (\sum_h k_h (f \circ h))) = \sum_g k_g (g \circ (f \circ t)) = s \circ (f \circ t). \end{aligned}$$

Όπου η πέμπτη ισότητα ισχύει από Παρατήρηση 1.1.1 iii)

□

Πρόταση 1.2.1. Έστω Γ ημιομάδα και K σώμα, θεωρούμε την K-αλγέβρα K^Γ και ξέρουμε ότι ορίζεται η K-άλγεβρα $K^\Gamma \otimes_K K^\Gamma = K^\Gamma \otimes K^\Gamma$ (με τις γνωστές πράξεις). Τότε υπάρχει μονομορφισμός K-αλγεβρών,

$$\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}, \text{ με } \phi(f \otimes g)(s, t) = f(s)g(t) \text{ για κάθε } f, g \in K^\Gamma, s, t \in \Gamma.$$

Απόδειξη.

Έστω $h : K^\Gamma \times K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$, με $h(f, g) : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow K$, $h(f, g)(s, t) = f(s)g(t)$. Η h είναι multilinear K-προτύπων, άρα υπάρχει ομομορφισμός K-προτύπων $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ με $\phi(f \otimes g) = h(f, g)$, ιδιαίτερος $\phi(f \otimes g)(s, t) = f(s)g(t)$ για κάθε $s, t \in \Gamma$. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι μονομορφισμός K-αλγεβρών. Πράγματι,

$$\phi \text{ ομομορφισμός K-αλγεβρών: } \phi((f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2)) = \phi(f_1 f_2 \otimes g_1 g_2), \text{ όμως,}$$

$$\phi(f_1 f_2 \otimes g_1 g_2)(s, t) = (f_1 f_2)(s) \cdot (g_1 g_2)(t) = f_1(s)g_1(t)f_2(t)g_2(t) = \phi(f_1 \otimes g_1)(s, t) \cdot \phi(f_2 \otimes g_2)(s, t).$$

Άρα $\phi((f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2)) = \phi(f_1 \otimes g_1)\phi(f_2 \otimes g_2)$. Γενικά, τώρα αν $x, y \in K^\Gamma \otimes K^\Gamma$, τότε $x = \sum_{i=1}^n f_i \otimes h_i$, $y = \sum_{j=1}^m g_j \otimes l_j$ και

$$\begin{aligned} \phi(x \cdot y) &= \phi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i \otimes h_i) \cdot (g_j \otimes l_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi((f_i \otimes h_i) \cdot (g_j \otimes l_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi(f_i \otimes h_i)\phi(g_j \otimes l_j) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \phi(f_i \otimes h_i)\right)\left(\sum_{j=1}^m \phi(g_j \otimes l_j)\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes h_i\right)\phi\left(\sum_{j=1}^m g_j \otimes l_j\right) = \phi(x)\phi(y) \end{aligned}$$

ϕ 1-1 : Έστω $\{g \mid g \in B\}$ K-βάση του K^Γ (υπάρχει εφόσον K^Γ είναι K-διανυσματικός χώρος), τότε το σύνολο $\{g \otimes h \mid g, h \in B\}$ είναι K-βάση του K-προτύπου $K^\Gamma \otimes K^\Gamma$. Έστω $x \in K^\Gamma \otimes K^\Gamma$ με $\phi(x) = 0$ τότε $x = \sum_{i=1}^n k_i(g_i \otimes h_i)$, $k_i \in K$, $g_i, h_i \in B$ και χ.β.γ $k_i \neq 0 \forall i$. Συνεπώς, $\sum_i k_i \phi(g_i \otimes h_i) = 0$, άρα για κάθε $s, t \in \Gamma$ έχουμε $\sum_i k_i \phi(g_i \otimes h_i)(s, t) = 0 \iff \sum_i k_i g_i(s) h_i(t) = 0$. Οπότε $\sum_i k_i g_i(s) h_i = 0$ για κάθε $s \in \Gamma$, άρα $k_i g_i(s) = 0 \forall i, s$ (αφού $\{h \mid h \in B\}$ K-βάση του K^Γ), δηλαδή $g_i(s) = 0 \forall i, s$ (αφού $k_i \neq 0$), άρα $g_i = 0 \forall i$, οπότε $x = 0$.

□

Ορισμός 1.2.5. Έστω Γ ημιομάδα και K σώμα, τότε ορίζουμε τις εξής απεικονίσεις:

$$\Delta : K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}, f \longmapsto \Delta f, \text{ όπου } \Delta f(s, t) = f(st).$$

$$\epsilon : K^\Gamma \longrightarrow K, f \longmapsto f(1_\Gamma).$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι Δ, ϵ είναι ομομορφισμοί K-αλγεβρών.

Για την απόδειξη των ομομορφισμών, ενδεικτικά θα κάνουμε το $\Delta(fg) = \Delta f \cdot \Delta g$ και όλα τα άλλα παρόμοια. Πράγματι, $(\Delta fg)(s, t) = (fg)(st) = f(st)g(st) = (\Delta f)(s, t)(\Delta g)(s, t)$, συνεπώς $\Delta fg = \Delta f \Delta g$.

Ορισμός 1.2.6. Ένα στοιχείο $f \in K^\Gamma$ θα λέγεται *finitary* (ή *representative function*) αν το KΓ-υποπρότυπο $K\Gamma \circ f = \langle f \rangle$ έχει την ιδιότητα $\dim_K \langle f \rangle < \infty$.

(Όπου υπενθυμίζουμε ότι το $\langle f \rangle$ το βλέπουμε σαν K-πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό όπως είδαμε στην Παρατήρηση 1.1.1 iii) ο οποίος ταυτίζεται με τον σύννηθη που έχουμε στο K^Γ λόγω Παρατήρησης 1.2.1 i))

Πρόταση 1.2.2. Έστω $f \in K^\Gamma$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

i) f είναι finitary

ii) Αν το αριστερό KΓ-υποπρότυπο $K\Gamma \circ f = \langle f \rangle$ έχει $\dim_K \langle f \rangle < \infty$

iii) Αν το δεξιό KΓ-υποπρότυπο $f \circ K\Gamma = \langle f \rangle$ έχει $\dim_K \langle f \rangle < \infty$

iv) $\Delta f \in \text{Im} \phi$ όπου $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο μονομορφισμός K-αλγεβρών. Μάλιστα το iv) είναι ισοδύναμο με τα εξής:

$$1) \Delta f = \sum_{i=1}^n \phi(f_i \otimes g_i) \text{ για κάποια } f_i, g_i \in K^\Gamma.$$

$$2) f(st) = \sum_i f_i(s) g_i(t), \forall s, t \in \Gamma.$$

$$3) t \circ f = \sum_i g_i(t) f_i, \forall t \in \Gamma.$$

$$4) f \circ s = \sum_i f_i(s) g_i, \forall s \in \Gamma.$$

Απόδειξη.

i) $\iff$ ii): Εξ' ορισμού.

ii) $\iff$ iii): Θα κάνουμε το ($\implies$) και όμοια το ($\impliedby$). Πράγματι, έστω ότι $\dim_K(K\Gamma \circ f) < \infty$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ μία K-βάση του $K\Gamma \circ f$. Για κάθε $g \in \Gamma$, υπάρχουν μοναδικά $\{k_i(g)\}_{i=1}^n \subseteq K$ ώστε,

$$g \circ f = \sum_{i=1}^n k_i(g) f_i.$$

Λόγο μοναδικότητας ορίζονται καλά οι απεικονίσεις $k_i : \Gamma \longrightarrow K$, $g \longmapsto k_i(g)$ και ισχύει

$$(f \circ s)(g) = f(sg) = (g \circ f)(s) = \sum_{i=1}^n k_i(g) f_i(s), \text{ για κάθε } g, s \in \Gamma.$$

Άρα $f \circ s = \sum_{i=1}^n f_i(s) k_i \in \text{span}_K\{k_i \mid i = 1, \dots, n\}$, για κάθε $s \in \Gamma$. Τώρα επειδή το Γ είναι K-βάση του $K\Gamma$ έπεται άμεσα ότι $f \circ K\Gamma \subseteq \text{span}_K\{k_i \mid i = 1, \dots, n\}$ και άρα $\dim_K(f \circ K\Gamma) < \infty$.

iii) $\implies$ iv): Έστω ότι το δεξιό KΓ-πρότυπο $f \circ K\Gamma$ έχει $\dim_K(f \circ K\Gamma) < \infty$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ μία K-βάση του. Τότε για κάθε $g \in \Gamma$ υπάρχουν μοναδικά $k_1(g), \dots, k_n(g) \in K$ ώστε,

$$f \circ g = \sum_{i=1}^n k_i(g) f_i \iff L_g f = \sum_{i=1}^n k_i(g) f_i \iff (L_g f)(s) = f(gs) = \sum_{i=1}^n k_i(g) f_i(s) \quad \forall s \in \Gamma.$$

Τώρα θεωρώντας τις απεικονίσεις $k_i : \Gamma \longrightarrow K$, $g \longmapsto k_i(g)$ (που είναι καλά ορισμένες λόγω μοναδικότητας των $k_i(g)$ που αναφέραμε πιο πάνω) είναι σαφές ότι $\Delta f(g, s) = \sum_{i=1}^n \phi(k_i \otimes f_i)(g, s) \quad \forall g, s \in \Gamma$.

Συνεπώς $\Delta f = \sum_{i=1}^n \phi(k_i \otimes f_i) = \phi(\sum_{i=1}^n k_i \otimes f_i) \in \text{Im} \phi$.

Πάμε να δείξουμε τις διάφορες ισοδύναμες μορφές του iv). Ενδεικτικά, κάνουμε το 2) $\implies$ 3) και τα άλλα όμοια. Πράγματι, από το 2) έχουμε:

$$(R_t f)(s) = f(st) = \sum_i f_i(s) g_i(t), \text{ για κάθε } s, t \in \Gamma.$$

Άρα $t \circ f = R_t f = \sum_i g_i(t) f_i$, για κάθε $t \in \Gamma$.

iv) $\implies$ i): Από την 3) ισοδύναμη μορφή του iv) έχουμε ότι το $K\Gamma \circ f$ είναι K-υποπρότυπο του $\text{span}_K(\{f_1, \dots, f_n\})$, άρα $\dim_K(K\Gamma \circ f) \leq \dim_K(\text{span}_K(\{f_1, \dots, f_n\})) < \infty$. □

Ορισμός 1.2.7. Το σύνολο όλων των finitary functions θα το συμβολίζουμε με $F = F(K^\Gamma)$.

Παρατήρηση 1.2.7. i) Το $F(K^\Gamma)$ είναι K-άλγεβρα (μάλιστα K-υπόάλγεβρα του K^Γ).

ii) Υπάρχει μονομορφισμός K-αλγεβρών $\phi_F : F \otimes F \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ώστε $\phi_F(f \otimes g) = \phi(f \otimes g)$ για κάθε $f, g \in K^\Gamma$. Όπου Προσοχή οι ποσότητες $f \otimes g \in F \otimes F$, $f \otimes g \in K^\Gamma \otimes K^\Gamma$ δεν είναι ίδιες παρόλο που έχουν τον ίδιο συμβολισμό.

Απόδειξη.

i) Έστω $f, g \in F$, $k \in K$ και $\{f_1, \dots, f_n\}, \{g_1, \dots, g_m\}$ K-βάσεις των KΓ-υποπροτύπων $K\Gamma \circ f$, $K\Gamma \circ g$ αντίστοιχα (υπάρχουν γιατί $f, g \in F$). Τότε έχουμε:

$kf \in F$: Αφού $K\Gamma \circ kf = K\Gamma \circ f$ και $\dim_K(K\Gamma \circ f) < \infty$.

$f - g \in F$: Αφού αν $t \in K\Gamma$, τότε $t \circ (f - g) = t \circ f - t \circ g = \sum_i k_i(t)f_i - \sum_j r_j(t)g_j \in \text{span}_K(\{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m\})$, όπου $k_i(t), r_j(t) \in K$. Συνεπώς $\dim_K(K\Gamma \circ (f - g)) \leq m + n < \infty$ και έτσι $f - g \in F$.

$fg \in F$: Έστω $t \in \Gamma$ τότε, υπάρχουν $k_i(t), r_j(t) \in K$, $i, j = 1, \dots, n$, ώστε $t \circ f = \sum_{i=1}^n k_i(t)f_i$ και $t \circ g = \sum_{j=1}^m r_j(t)g_j$. Οπότε,

$$t \circ (fg) = R_t(fg) \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 1.2.6}} (R_t f)(R_t g) = (t \circ f)(t \circ g) = \left(\sum_i k_i(t)f_i\right)\left(\sum_j r_j(t)g_j\right) = \sum_i \sum_j (k_i(t)r_j(t))f_i g_j \in \text{span}_K\{f_i g_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Συνεπώς $t \circ (fg) \in \text{span}_K\{f_i g_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$, για κάθε $t \in \Gamma$, άρα (επειδή Γ είναι K-βάση του $K\Gamma$) έχουμε $K\Gamma \circ (fg) \subseteq \text{span}_K\{f_i g_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ και έτσι $\dim_K(K\Gamma \circ (fg)) \leq mn < \infty$, δηλαδή $fg \in F$.

ii) Έστω $h : F \times F \longrightarrow K^\Gamma \otimes K^\Gamma$, $h(f, g) = f \otimes g$, η h είναι *multilinear* K-προτύπων, οπότε υπάρχει $\psi : F \otimes F \longrightarrow K^\Gamma \otimes K^\Gamma$ ώστε $\psi(f \otimes g) = f \otimes g$. Η ψ είναι και ομομορφισμός K-αλγεβρών (άμεσα) και θα δείξουμε ότι είναι 1-1. Πράγματι, έστω $\{g \mid g \in B\}$ K-βάση του F (υπάρχει εφόσον F είναι K-διανυσματικός χώρος), τότε το σύνολο $\{g \otimes h \mid g, h \in B\}$ είναι K-βάση του K-προτύπου $F \otimes F$. Έστω $x \in F \otimes F$ με $\psi(x) = 0$ τότε $x = \sum_{i=1}^n k_i(g_i \otimes h_i)$, $k_i \in K$, $g_i, h_i \in B$ (όπου χ.β.γ $k_i \neq 0 \forall i$) και άρα $\sum_{i=1}^n k_i \psi(g_i \otimes h_i) = \sum_{i=1}^n k_i(g_i \otimes h_i) = 0$ στο $K^\Gamma \otimes K^\Gamma$, τότε όμως αν θεωρήσουμε τον γνωστό μονομορφισμό $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$, έχουμε $\phi(\sum_{i=1}^n k_i(g_i \otimes h_i)) = 0$, άρα για κάθε $s, t \in \Gamma$ έχουμε $\sum_i k_i \phi(g_i \otimes h_i)(s, t) = 0 \iff \sum_i k_i g_i(s) h_i(t) = 0$. Οπότε, $\sum_i k_i g_i(s) h_i = 0$ για κάθε $s \in \Gamma$, άρα $k_i g_i(s) = 0 \forall i, s$ (αφού $\{h_i \mid i = 1, \dots, n\} \subseteq \{g \mid g \in B\} = \text{K-βάση του } F$), δηλαδή $g_i(s) = 0 \forall i, s$ (αφού $k_i \neq 0$), άρα $g_i = 0 \forall i$, οπότε $x = 0$. Τέλος η $\phi_F := \phi \circ \psi$ είναι η ζητούμενη απεικόνιση.

□

Θεώρημα 1.2.1. Έστω Γ ημιομάδα, K σώμα, τότε ισχύουν τα εξής:

- i) $\Delta(F) \subseteq \phi_F(F \otimes F)$, όπου $\phi_F : F \otimes F \longrightarrow \text{Im}\psi \subseteq K^{\Gamma \times \Gamma}$ (όπου ϕ_F είναι ισομορφισμός (επί του $\text{Im}\phi_F$)).
- ii) Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\Delta_F := \phi_F^{-1} \circ \Delta|_F : F \longrightarrow F \otimes F$, $\epsilon_F := \epsilon|_F : F \longrightarrow K$. Τότε το ζευγάρι $(F(K^\Gamma), \Delta_F, \epsilon_F)$ είναι K -coalgebra. Μάλιστα το F είναι K -bialgebra.

Απόδειξη.

Βλέπε [8, σελ. 72, Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 2.2.8, Λήμμα 2.2.9.]

□

Σχόλιο. Το Θεώρημα 1.2.1 και γενικά όσα αναφέρουμε σε αυτό το κεφάλαιο περί θεωρίας των K -coalgebras δεν θα μας χρειαστούν στα παρακάτω κεφάλαια και γι αυτό δεν θα τα αποδείξουμε. Παρά ταύτα είναι καλές αναφορές που γίνονται για να δούμε πως η θεωρία που πάμε να αναπτύξουμε εντάσσεται σε ένα γενικότερο και πιο ισχυρό πλαίσιο.

Ορισμός 1.2.8. Έστω V $K\Gamma$ -πρότυπο με $\dim_K V < \infty$ και $\{u_b \mid b \in B\}$ K -βάση του V . Τότε για κάθε $b \in B$, $g \in \Gamma$ υπάρχουν μοναδικά $r_{ab}(g) \in K$ ώστε $g \cdot u_b = \sum_{a \in B} r_{ab}(g)u_a$. Μάλιστα αν $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ η επαγόμενη αναπαράσταση τότε $\tau(g)(u_b) = g \cdot u_b = \sum_{a \in B} r_{ab}(g)u_a$. Τώρα, ορίζουμε τα εξής:

- i) Για κάθε $a, b \in B$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $r_{ab} \in K^\Gamma$, με $r_{ab} : \Gamma \longrightarrow K$, $g \longmapsto r_{ab}(g)$ και θα τις λέμε *coefficient functions* (συντελεστές συναρτήσεων) του $V = (V, \tau)$ ως προς την βάση $\{u_b \mid b \in B\}$.
- ii) Η K -γραμμική θήκη του $\{r_{ab} \mid a, b \in B\}$ στο K^Γ θα λέγεται *coefficient space* του $V = (V, \tau)$ και θα συμβολίζεται με $cf(V) = \text{span}_K \{r_{ab} \mid a, b \in B\}$.

Παρατήρηση 1.2.8. Έστω V $K\Gamma$ -πρότυπο με $\dim_K V < \infty$, τότε ο *coefficient space* $cf(V)$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής της βάσης.

Απόδειξη.

Έστω $\{u_b \mid b \in B\}$, $\{w_c \mid c \in C\}$ δύο βάσεις του V και οι αντίστοιχοι χώροι $cf_B(V), cf_C(V)$. Θα δείξουμε ότι $cf_C(V) \subseteq cf_B(V)$ και ο άλλος εγγλωτισμός όμοια. Έστω $g \in \Gamma$, $c \in C$, τότε $g \cdot w_c = \sum_{h \in C} r_{hc}(g)w_h$ και $w_c = \sum_{b \in B} k_{bc}u_b$, $k_{bc} \in K$. Συνεπώς,

$$g \cdot w_c = \sum_{b \in B} k_{bc}(g \cdot u_b) = \sum_{b \in B} k_{bc} \left(\sum_{a \in B} r_{ab}(g)u_a \right) = \sum_{b \in B} \sum_{a \in B} k_{bc} r_{ab}(g)u_a = \sum_{a \in B} \left(\sum_{b \in B} k_{bc} r_{ab}(g) \right) u_a.$$

Επιπλέον $u_a = \sum_{h \in C} z_{ha}w_h$, για κάποια $z_{ha} \in K$. Άρα από πριν έχουμε,

$$g \cdot w_c = \sum_{a \in B} ((\sum_{b \in B} k_{bc} r_{ab}(g)) (\sum_{h \in C} z_{ha} w_h)) = \sum_{a \in B} \sum_{b \in B} \sum_{h \in C} (k_{bc} r_{ab}(g) z_{ha}) w_h = \sum_{h \in C} (\sum_{a \in B} \sum_{b \in B} k_{bc} r_{ab}(g) z_{ha}) w_h.$$

Τελικά,

$$\sum_{h \in C} r_{hc}(g) w_h = g \cdot w_c = \sum_{h \in C} (\sum_{a \in B} \sum_{b \in B} k_{bc} r_{ab}(g) z_{ha}) w_h.$$

Συνεπώς λόγω βάσης έχουμε $r_{hc}(g) = \sum_{a \in B} \sum_{b \in B} k_{bc} z_{ha} r_{ab}(g)$ για κάθε $g \in \Gamma, h, c \in C$, δηλαδή $r_{hc} = \sum_{a \in B} \sum_{b \in B} k_{bc} z_{ha} r_{ab} \in cf_B(V)$, για κάθε $h, c \in C$ και κατά συνέπεια $cf_C(V) \subseteq cf_B(V)$. □

Ορισμός 1.2.9. Έστω V $K\Gamma$ -πρότυπο με $\dim_K V < \infty$ και βάση $\{u_b \mid b \in B\}$, τότε ορίζουμε $R := (r_{ab})_{a,b \in B}$ τον πίνακα των coefficient functions ο οποίος λέγεται αναλλοίωτος πίνακας (invariant matrix). Συμβολικά, $R(g) := (r_{ab}(g))_{a,b \in B}$.

Παρατήρηση 1.2.9. $R(gh) = R(g)R(h)$, $\forall g, h \in \Gamma$ και $R(1_\Gamma) = (\delta_{ab})_{a,b}$.

Απόδειξη.

$R(gh) = R(g)R(h)$: Έστω $\{u_b \mid b \in B\}$ βάση του V τότε,

$$(gh) \cdot u_b = g \cdot (h \cdot u_b) \iff \sum_{a \in B} r_{ab}(gh) u_a = g \cdot (\sum_{a \in B} r_{ab}(h) u_a) = \sum_{a \in B} r_{ab}(h) (g \cdot u_a) = \sum_{a \in B} (r_{ab}(h) (\sum_{c \in B} r_{ca}(g) u_c)) = \sum_{c \in B} (\sum_{a \in B} r_{ca}(g) r_{ab}(h)) u_c.$$

Άρα, $\sum_{c \in B} r_{cb}(gh) u_c = \sum_{c \in B} (\sum_{a \in B} r_{ca}(g) r_{ab}(h)) u_c$ και λόγω βάσης πρέπει $r_{cb}(gh) = \sum_{a \in B} r_{ca}(g) r_{ab}(h)$ $\forall g, h \in \Gamma$, συνεπώς $R(gh) = R(g)R(h)$.

$R(1_\Gamma) = (\delta_{ab})_{a,b}$: Καταρχάς, $u_b = 1_\Gamma \cdot u_b = \sum_{a \in B} r_{ab}(1_\Gamma) u_a$, άρα λόγω βάσης πρέπει

$$r_{ab}(1_\Gamma) = \begin{cases} 0_K, & a \neq b \\ 1_K, & a = b \end{cases}$$

Συνεπώς $r_{ab}(1_\Gamma) = \delta_{ab}$ και άρα $R(1_\Gamma) = (\delta_{ab})_{a,b}$. □

Πόρισμα 1.2.2. Έστω V $K\Gamma$ -πρότυπο με $\dim_K V < \infty$ και $cf(V) = \text{span}_K \{r_{ab} \mid a, b \in B\}$ τότε:

i) $\Delta(r_{ab}) = \phi(\sum_{c \in B} r_{ac} \otimes r_{cb})$ και $\epsilon(r_{ab}) = \delta_{ab}$ για κάθε $a, b \in B$. (Όπου $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο γνωστός μονομορφισμός).

ii) $cf(V) \leq F(K^\Gamma)$ (K -υποπρότυπο).

iii) Αν $C = cf(V)$ τότε υπάρχει μονομορφισμός K -προτύπων:

$$\phi_C : C \otimes C \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma} \text{ με } \phi_C(f \otimes g) = \phi(f \otimes g), \text{ για κάθε } f, g \in C.$$

Επιπλέον, θεωρώντας τις $\Delta_C := \phi_C^{-1} \circ \Delta|_C : C \longrightarrow C \otimes C$ (όπου η $\phi_C : C \otimes C \longrightarrow \text{Im} \phi_C$ είναι ισομορφισμός), $\epsilon_C := \epsilon|_C : C \longrightarrow K$, το ζευγάρι $(cf(V), \Delta_C, \epsilon_C)$ είναι K -coalgebra.

□

Απόδειξη.

i) Από προηγούμενη παρατήρηση έχουμε για κάθε $g, h \in \Gamma$ ότι,

$$\begin{aligned} R(gh) = R(g)R(h) &\iff r_{cb}(gh) = \sum_{a \in B} r_{ca}(g)r_{ab}(h) \iff \\ \Delta(r_{cb})(g, h) &= \left(\sum_{c \in B} \phi(r_{ac} \otimes r_{cb}) \right)(g, h) = \left(\phi \left(\sum_{c \in B} r_{ac} \otimes r_{cb} \right) \right)(g, h) \end{aligned}$$

$$\text{άρα } \Delta(r_{ab}) = \phi \left(\sum_{c \in B} r_{ac} \otimes r_{cb} \right). \text{ Επίσης } \epsilon(r_{ab}) = r_{ab}(1_\Gamma) = \delta_{ab} \text{ (αφού } (r_{ab}(1_\Gamma))_{a,b} = R(1_\Gamma) = (\delta_{ab})_{a,b}).$$

ii) Από το i) και Πρόταση 1.2.2 iv) έχουμε ότι $\{r_{ab} \mid a, b \in B\} \subseteq F(K^\Gamma)$ άρα,

$$cf(V) = \text{span}_K \{r_{ab} \mid a, b \in B\} \subseteq F(K^\Gamma).$$

iii) Η απόδειξη της ύπαρξης της ϕ_C είναι ίδια με αυτή της Παρατήρησης 1.2.7 ii). Επιπλέον η Δ_C είναι καλά ορισμένη καθώς από το i) ισχύει ότι $\Delta(C) \subseteq \text{Im} \phi_C$ (πράγματι $\Delta(r_{ab}) = \phi \left(\sum_{c \in B} r_{ac} \otimes r_{cb} \right) = \sum_{c \in B} \phi(r_{ac} \otimes r_{cb}) = \sum_{c \in B} \phi_C(r_{ac} \otimes r_{cb}) = \phi_C \left(\sum_{c \in B} r_{ac} \otimes r_{cb} \right)$) και άρα ορίζεται η σύνθεση $\phi_C^{-1} \circ \Delta|_C$. Όσο για την μεταθετικότητα των διαγραμμάτων η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος 1.2.1.

□

Ορισμός 1.2.10. Ένας K -υπόχωρος A του $F(K^\Gamma)$ με $\Delta(A) \subseteq \{\phi(\sum_i a_i \otimes b_i) \mid a_i, b_i \in A\}$ (συμβολικά: $\Delta(A) \subseteq A \otimes A$), θα λέγεται K -subcoalgebra του $F(K^\Gamma)$. Όπου $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο γνωστός μονομορφισμός K -προτύπων.

Σχόλιο. Ο λόγος που αποδίδουμε την ονομασία K -subcoalgebra σε έναν K -υπόχωρο του $F(K^\Gamma)$ με την ιδιότητα $\Delta(A) \subseteq A \otimes A$ αιτιολογείται από την παρακάτω παρατήρηση. Παρόλα αυτά, επειδή όπως είπαμε δεν εμβαθύνουμε στη θεωρία των K -coalgebras, η ονομασία K -subcoalgebra για εμάς θα είναι εντελώς τυπική παρά ουσιαστική και το μόνο που πρέπει να μας θυμίζει είναι τη συνθήκη $\Delta(A) \subseteq A \otimes A$.

Παρατήρηση 1.2.10. Έστω A μία K -subcoalgebra του $F(K^\Gamma)$, τότε υπάρχει μονομορφισμός K -προτύπων:

$$\phi_A : A \otimes A \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma} \text{ με } \phi_A(f \otimes g) = \phi(f \otimes g), \text{ για κάθε } f, g \in K^\Gamma.$$

(Όπου $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο μονομορφισμός της Πρότασης 1.2.1.)

Επιπλέον, θεωρώντας τις $\Delta_A := \phi_A^{-1} \circ \Delta|_A : A \longrightarrow A \otimes A$ (όπου η $\phi_A : A \otimes A \longrightarrow \text{Im} \phi_A$ είναι ισομορφισμός), $\epsilon_A := \epsilon|_A : A \longrightarrow K$, το ζευγάρι $(A, \Delta_A, \epsilon_A)$ είναι K -coalgebra.

Απόδειξη.

Η απόδειξη ύπαρξης της ϕ_A είναι παρόμοια με αυτή της Παρατήρησης 1.2.7 ii) ενώ η απόδειξη του δεύτερου σκέλους είναι παρόμοια με αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.1. □

Παρατήρηση 1.2.11. Για κάθε $f \in F(K^\Gamma)$, υπάρχει K^Γ -πρότυπο V με $\dim_K V < \infty$ και $f \in cf(V)$. Ιδιαίτερος, για το K^Γ -πρότυπο $\langle f \rangle = K^\Gamma \circ f$ ισχύει: $cf(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ και $\dim_K(\langle f \rangle) < \infty$.

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε το "ιδιαίτερος". Πράγματι, καταρχάς $\dim_K(\langle f \rangle) < \infty$ (αφού $f \in F(K^\Gamma)$) και $cf(\langle f \rangle) \subseteq \langle f \rangle$ (άμεσα). Επιπλέον αν $\{f_a \mid a \in B\}$ K -βάση του $\langle f \rangle$, τότε για κάθε $g \in \Gamma$ έχουμε,

$$g \circ f_b = \sum_{a \in B} r_{ab}(g) f_a \iff R_g f_b = \sum_a r_{ab}(g) f_a \iff (R_g f_b)(s) = \sum_a r_{ab}(g) f_a(s) \forall s \in \Gamma,$$

δηλαδή $f_b(sg) = \sum_a r_{ab}(g) f_a(s) \forall g, s \in \Gamma$, οπότε $f_b(g) = \sum_a f_a(1) r_{ab}(g) \forall g \in \Gamma$. Τελικά, $f_b = \sum_a f_a(1) r_{ab} \in cf(\langle f \rangle)$ για κάθε $b \in B$ και άρα $\langle f \rangle \subseteq cf(\langle f \rangle)$. □

Σχόλιο. Η παρατήρηση αυτή είναι και ο λόγος που τα *finitary functions* λέγονται και *representative functions*.

Ορισμός 1.2.11. i) Έστω S K -άλγεβρα τότε ορίζουμε με $\text{mod}(S)$ την κατηγορία με αντικείμενα τα αριστερά S -πρότυπα V με $\dim_K V < \infty$ (όπου υπενθυμίζουμε ότι το V είναι K -πρότυπο με $k \cdot v := (k \cdot 1_S) \cdot v$, $k \in K, v \in V$) και μορφισμούς τους ομομορφισμούς S -προτύπων.

Παρόμοια ορίζεται η κατηγορία $\text{mod}'(S)$ με αντικείμενα τα δεξιά S -πρότυπα V ώστε $\dim_K V < \infty$ (όπου $k \cdot v := v \cdot (k \cdot 1_S)$, $k \in K, v \in V$) και μορφισμούς τους ομομορφισμούς (δεξιών) S -προτύπων.

ii) Έστω A K -subcoalgebra της $F(K^\Gamma)$ τότε ορίζεται η κατηγορία $\text{mod}_A(K^\Gamma)$, με αντικείμενα τα αριστερά K^Γ -πρότυπα V ώστε $\dim_K V < \infty$ και $cf(V) \subseteq A$ και μορφισμούς τους ομομορφισμούς K^Γ -προτύπων. Παρόμοια ορίζεται η $\text{mod}_A'(K^\Gamma)$.

Σημείωση: Ένα K^Γ -πρότυπο V θα λέγεται A -rational, αν $cf(V) \subseteq A$.

Σχόλιο. Σύμφωνα με τον J.A.Green για εμάς μια μελέτη τύπου θεωρίας A -αναπαραστάσεων μίας ημοιάδας Γ πάνω από ένα σώμα K , θα είναι το εξής πρόβλημα:

Μας δίνεται μια A K -subcoalgebra της $F(K^\Gamma)$ και θέλουμε να μελετήσουμε πλήρως την κατηγορία $\text{mod}_A(K\Gamma)$.

Παρατήρηση 1.2.12. *i) Κάθε K -subcoalgebra του $F(K^\Gamma)$ είναι $K\Gamma$ -υποπρότυπο του K^Γ . Ιδιαίτερος, αν $V \in \text{mod}(K\Gamma)$, τότε το $\text{cf}(V)$ είναι $K\Gamma$ -υποπρότυπο του K^Γ .*

ii) Έστω $V, W \in \text{mod}(K\Gamma)$ με $V \simeq W$ (Ισομορφισμός στην $\text{mod}(K\Gamma)$). Τότε $\text{cf}(V) = \text{cf}(W)$ και μάλιστα αν A είναι K -subcoalgebra του $F(K^\Gamma)$, τότε $V \in \text{mod}_A(K\Gamma) \iff W \in \text{mod}_A(K\Gamma)$.

Απόδειξη.

- i)* Έστω A K -subcoalgebra του $F(K^\Gamma)$, τότε εξ' ορισμού το A είναι K -υπόχωρος, οπότε για $x, y \in A$ ισχύει $x - y \in A$. Μένει να δείξουμε ότι $k \cdot f \in A$ για κάθε $k \in K\Gamma, f \in A$, πράγματι, από υπόθεση ισχύει ότι $\Delta(f) = \phi(\sum_i f_i \otimes g_i), f_i, g_i \in A$, τότε όμως (κάνοντας πράξεις, βλέπε Πρόταση 1.2.2 το iv)3) $\iff$ iv)1)) για κάθε $s \in \Gamma$ έχουμε ότι $s \circ f = \sum_i g_i(s) f_i \in A$ (ανήκει στο A γιατί A K -υπόχωρος και $f_i \in A$), γενικά αν $k = \sum_s k_s s \in K\Gamma$ και $f \in A$, τότε $k \circ f = \sum_s k_s (s \circ f) \in A$ (ανήκει στο A από ειδική περίπτωση και επειδή A K -υπόχωρος). Όσο για το ιδιαίτερος, έστω $x \in \text{cf}(V)$ τότε $x = \sum_{a,b} k_{ab} r_{ab}$, όπου $k_{ab} \in K$ και $\text{cf}(V) = \text{span}_K\{r_{ab} \mid a, b \in B\}$, οπότε (από Πρόταση 1.2.2) $\Delta(x) = \sum_{a,b} k_{ab} \phi(\sum_{c \in B} r_{ac} \otimes r_{cb}) = \phi(\sum_{a,b} \sum_{c \in B} (k_{ab} r_{ac}) \otimes r_{cb})$, όπου $k_{ab} r_{ac}, r_{cb} \in \text{cf}(V)$, άρα $\text{cf}(V) = K$ -subcoalgebra και έτσι από πρώτο σκέλος $\text{cf}(V) = K\Gamma$ -υποπρότυπο.
- ii)* Έστω $f : V \rightarrow W$ ισομορφισμός $K\Gamma$ -πρωτύπων και $\{e_1, \dots, e_n\}$ K -βάση του V τότε το $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ είναι K -βάση του W (αυτό γιατί η f είναι και K -ισομορφισμός ως $K\Gamma$ -ισομορφισμός). Έστω $g \in \Gamma$, τότε $g \cdot f(e_j) = \sum_i r_{ij}^W(g) f(e_i)$ και $g \cdot f(e_j) = f(g \cdot e_j) = f(\sum_i r_{ij}^V(g) e_i) = \sum_i r_{ij}^V(g) f(e_i)$, άρα (λόγο βάσης) έχουμε ότι $r_{ij}^V(g) = r_{ij}^W(g)$, για κάθε $g \in \Gamma$, οπότε $r_{ij}^V = r_{ij}^W$ για κάθε i, j και άρα $\text{cf}(V) = \text{cf}(W)$.

□

Πρόταση 1.2.3. Έστω A K -subcoalgebra του $F(K^\Gamma)$ και $V, W \in \text{mod}_A(K\Gamma)$ τότε:

- i)* Κάθε $K\Gamma$ -υποπρότυπο του V ανήκει στη $\text{mod}_A(K\Gamma)$.
- ii)* Κάθε $K\Gamma$ -πρότυπο πηλίκου του V ανήκει στη $\text{mod}_A(K\Gamma)$.
- iii)* $V \oplus W \in \text{mod}_A(K\Gamma)$.

Απόδειξη.

- i) Έστω L ΚΓ-υποπρότυπο του V τότε είναι και Κ-υποπρότυπο, οπότε $\dim_K L \leq \dim_K V < \infty$. Μένει να δείξουμε ότι $cf(L) \subseteq A$, πράγματι, αν $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ είναι Κ-βάση του L τότε την επεκτείνουμε σε Κ-βάση έστω $B_1 = \{e_1, \dots, e_m, d_1, \dots, d_n\}$ του V (δηλαδή $B \subseteq B_1$) θεωρούμε τους coefficient spaces των L, V ως προς αυτές τις βάσεις έστω $cf_B(L), cf_{B_1}(V)$ αντίστοιχα (σημείωση, από Παρατήρηση 1.2.8 δεν μας επηρεάζει η επιλογή συγκεκριμένων βάσεων).

Ισχυρισμός: $cf_B(L) \subseteq cf_{B_1}(V)$.

Προφανώς, ανδειχθεί ο ισχυρισμός τελειώσαμε. Πράγματι, έστω $g \in \Gamma$ τότε $g \cdot e_j = \sum_{i=1}^m r_{ij}^L(g) e_i$

και $g \cdot e_j = \sum_{i=1}^m r_{ij}^V(g) e_i + \sum_{i=1}^n r_{ij}^V(g) d_i$, άρα (αφού B_1 είναι βάση) έχουμε $r_{ij}^L(g) = r_{ij}^V(g) \forall g \in \Gamma$, οπότε $r_{ij}^L = r_{ij}^V$ για κάθε $i, j = 1, \dots, m$. Συνεπώς $cf_B(L) \subseteq cf_{B_1}(V)$.

- ii) Έστω N ΚΓ-υποπρότυπο του V και $\{e_b \mid b \in B\}$ Κ-βάση του N , την οποία την επεκτείνουμε σε Κ-βάση του V έστω $\{e_b \mid b \in B\} \cup \{e_a \mid a \in A\}$, τότε το $\{e_a + N \mid a \in A\}$ είναι Κ-βάση του V/N . Έστω $g \in \Gamma$ και $a \in A$, τότε $g \cdot (e_a + N) = g \cdot e_a + N = (\sum_{b \in B} r_{ba}^V(g) e_b + \sum_{c \in A} r_{ca}^V(g) e_c) + N = \sum_{c \in A} r_{ca}^V(g) e_c + N = \sum_{c \in A} r_{ca}^V(g) (e_c + N)$, άρα $cf(V/N) = span_K \{r_{ca}^V \mid c, a \in A\} \subseteq cf(V)$

- iii) Καταρχάς $\dim_K(V \oplus W) = \dim_K V + \dim_K W < \infty$. Μένει ναδειχθεί ότι $cf(V \oplus W) \subseteq A$. Πράγματι, έστω $\{e_a \mid a \in A\}, \{e_b \mid b \in B\}$ βάσεις των V, W τότε το $\{(e_a, 0), (0, e_b) \mid a \in A, b \in B\}$ είναι βάση του $V \oplus W$. Έστω $g \in \Gamma$ τότε $g \cdot (e_a, 0) = (g \cdot e_a, 0) = (\sum_{c \in A} r_{ca}^V(g) e_c, 0) = \sum_{c \in A} r_{ca}^V(g) (e_c, 0) = \sum_{c \in A} r_{ca}^V(g) (e_c, 0) + \sum_{c \in B} 0_K(0, e_c)$, όμοια $g \cdot (0, e_b) = \sum_{c \in A} 0_K(e_c, 0) + \sum_{c \in B} r_{cb}^W(g) (0, e_c)$. Από τις τελευταίες σχέσεις έχουμε ότι $r_{cd}^{V \oplus W} = \begin{cases} r_{cd}^V, & c, d \in A \\ r_{cd}^W, & c, d \in B \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Συνεπώς $cf(V \oplus W) \subseteq A$.

□

2 Πολυωνυμικές Αναπαραστάσεις της $GL_n(K)$: Η Schur άλγεβρα.

2.1 Βασικά Στοιχεία.

Παρακάτω, K = άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Ορισμός 2.1.1. *i) Για κάθε $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$, ορίζουμε $c_{\mu\nu} \in K^\Gamma$ με $c_{\mu\nu} : \Gamma \longrightarrow K, g \longmapsto g_{\mu\nu}$ (όπου $g_{\mu\nu} = (\mu, \nu)$ -συντελεστής του g). Τα $c_{\mu\nu}$ μπορούμε να τα λέμε και *coordinate functions*.*

ii) Ορίζουμε με $A = A_K(n)$ την K -υποάλγεβρα του K^Γ που παράγεται από τα στοιχεία $\{c_{\mu\nu} \mid \mu, \nu \in \{1, \dots, n\}\}$. Δηλαδή $A_K(n) = \{f(c_{11}, \dots, c_{1n}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{nn}) \mid f(x_{11}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, \dots, x_{nn}]\}$

iii) Ορίζουμε με $A_K(n, r)$ το K -υποπρότυπο του $A_K(n)$ που αποτελείται από όλες τις πολυωνυμικές εκφράσεις των $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu, \nu}$ ομογενή βαθμού r . Δηλαδή,

$$A_K(n, r) = \{f(c_{11}, \dots, c_{1n}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{nn}) \mid f(x_{11}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, \dots, x_{nn}] \text{ και } f \text{ ομογενές βαθμού } r\}$$

Πρόταση 2.1.1. *i) Το $\{c_{\mu\nu} \mid \mu, \nu \in \{1, \dots, n\}\}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο πάνω από το K .*

ii) $\dim_K A_K(n, r) < \infty$, ιδιαιτέρως $\dim_K A_K(n, r) = \binom{n^2+r-1}{r}$.

iii) Η $A_K(n)$ είναι graded K -άλγεβρα από την οικογένεια των K -υποπροτύπων της, $(A_K(n, r))_{r \geq 0}$. Ιδιαιτέρως $A_K(n) = \bigoplus_{r \geq 0} A_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Έστω $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ με $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} x_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot x_{nn}^{i_{nn}}$ (όπου $i_{\mu\nu} = 0, \dots, m_{\mu\nu}$) και $f(c_{11}, \dots, c_{nn}) = 0$. Αν δείξουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής $k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} = 0$, τότε $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = 0$. Πράγματι, για κάθε $k \in K$ ορίζουμε:

$$g_k = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \dots & k^n \\ k^2 & (k^2)^2 & (k^2)^3 & \dots & (k^2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k^n & (k^n)^2 & (k^n)^3 & \dots & (k^n)^n \end{pmatrix} \text{ όπου } \det g_k = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \prod_{i=1}^n (g_k)_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \prod_{i=1}^n (k^i)^{\sigma(i)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) k^{\sum_{i=1}^n i\sigma(i)} = k^{\sum_{i=1}^n i^2} + \sum_{1 \neq \sigma \in S_n} s(\sigma) k^{\sum_{i=1}^n i\sigma(i)}. \text{ Τώρα, επειδή } \sum_{i=1}^n i\sigma(i) < \sum_{i=1}^n i^2 \text{ για κάθε}$$

$1 \neq \sigma \in S_n$ (έπεται από το Λήμμα 2.1.1 που θα δούμε παρακάτω), έχουμε ότι το πολυώνυμο

$$h(x) = x^{\sum_{i=1}^n i^2} + \sum_{1 \neq \sigma \in S_n} s(\sigma) x^{\sum_{i=1}^n i\sigma(i)} \text{ είναι μη-μηδενικό στο } K[x], \text{ οπότε δεν έχει άπειρες ρίζες.}$$

Έστω A το σύνολο των ριζών του $h(x)$, τότε $g_k \in \Gamma$ για κάθε $k \in K \setminus A$ (αφού $\det g_k \neq 0$ για κάθε $k \in K \setminus A$) και μάλιστα $|K \setminus A| = \infty$ (αφού $|K| = \infty$ και το $h(x)$ δεν έχει άπειρες ρίζες).

Από πριν έχουμε ότι $f(c_{11}, \dots, c_{nn}) = 0$, συνεπώς $f(c_{11}, \dots, c_{nn})(g_k) = 0$, $\forall k \in K \setminus A$, οπότε

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}^{i_{11}}(g_k) \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}}(g_k) = \\ &= \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k^{i_{11}} \cdot (k^2)^{i_{12}} \cdot (k^3)^{i_{13}} \cdot \dots \cdot (k^n)^{i_{1n}} \cdot \dots \cdot (k^n)^{i_{n1}} \cdot ((k^n)^2)^{i_{n2}} \cdot \dots \cdot ((k^n)^n)^{i_{nn}} = \\ &= \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k^{i_{11}+2i_{12}+3i_{13}+\dots+ni_{1n}+\dots+n \cdot i_{n1}+2ni_{n2}+\dots+n^2i_{nn}}, \text{ για κάθε } k \in K \setminus A. (*) \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $l(x) = \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} x^{i_{11}+2i_{12}+3i_{13}+\dots+ni_{1n}+\dots+n \cdot i_{n1}+2ni_{n2}+\dots+n^2i_{nn}} \in K[x]$, τότε το $l(x)$ είναι πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο όρο το $k_{m_{11}, \dots, m_{nn}}$ και άπειρες ρίζες από (*), άρα $k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} = 0$.

ii) Έστω $x \in A_K(n, r)$ τότε $x = \sum_{i_{11}+\dots+i_{nn}=r} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}}$, άρα $A_K(n, r) = \text{span}_K \{c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}} \mid i_{11} + \dots + i_{nn} = r\}$. Επιπλέον, το $\{c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}} \mid i_{11} + \dots + i_{nn} = r\}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητα άμεσα από το γεγονός ότι το $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu, \nu}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο.

iii) $A_K(n) = \sum_{r \geq 0} A_K(n, r)$: Αν $x \in A_K(n)$ τότε $x = f(c_{11}, \dots, c_{nn}) = \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}}$, όπου $k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}} \in A_K(n, i_{11} + \dots + i_{nn}) \forall i_{11}, \dots, i_{nn}$. Άρα $A_K(n) \subseteq \sum_{r \geq 0} A_K(n, r)$, ο άλλος εγκλεισμός είναι σαφές, οπότε $A_K(n) = \sum_{r \geq 0} A_K(n, r)$.

$A_K(n, r) \cap \sum_{s \neq r} A_K(n, s) = 0 \forall r$: Έστω $x \in A_K(n, r) \cap \sum_{s \neq r} A_K(n, s)$ τότε υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{r\}$, $|A| < \infty$, ώστε

$$x = \sum_{i_{11}+\dots+i_{nn}=r} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}} = \sum_{s \in A} \sum_{j_{11}+\dots+j_{nn}=s} k_{j_{11}, \dots, j_{nn}}^s c_{11}^{j_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{j_{nn}},$$

όπου $k_{i_{11}+\dots+i_{nn}}, k_{j_{11}, \dots, j_{nn}}^s \in K$. Επίσης θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{i_{11}+\dots+i_{nn}=r} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} x_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot x_{nn}^{i_{nn}} - \sum_{s \in A} \sum_{j_{11}+\dots+j_{nn}=s} k_{j_{11}, \dots, j_{nn}}^s x_{11}^{j_{11}} \cdot \dots \cdot x_{nn}^{j_{nn}},$$

το οποίο επειδή $r \neq s$ είναι σε μορφή αθροίσματος διακεκριμένων μονώνυμων παραγόντων (δηλαδή, δεν βγαίνουν άλλοι κοινοί παράγοντες), όμως $f(c_{11}, \dots, c_{nn}) = 0$ και $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu, \nu}$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο, οπότε $k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} = 0 \forall i_{11}, \dots, i_{nn}$ ώστε $i_{11}, \dots, i_{nn} = r$. Τελικά $x = 0$.

Επιπλέον επειδή γινόμενο ομογενών πολυωνύμων βαθμών r, s δίνει πολυώνυμο ομογενές βαθμού $r + s$, έχουμε ότι, αν $a_r \in A_K(n, r)$, $a_s \in A_K(n, s)$ τότε $a_r \cdot a_s \in A_K(n, r + s)$.

□

Λήμμα 2.1.1. (*Rearrangement - Permutation inequality*)

Έστω $0 < a_1 < \dots < a_n$, $0 < b_1 < \dots < b_n$. Τότε $\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} < \sum_{i=1}^n a_i b_i$, για κάθε $1 \neq \sigma \in S_n$.

Ισοδύναμα η ποσότητα $\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$ μεγιστοποιείται αν και μόνον αν $\sigma = 1$.

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την περίπτωση όπου $n = 2$. Για $n = 2$, $S_2 = \{1, \sigma = (12)\}$ και $a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} = a_1 b_2 + a_2 b_1$. Οπότε,

$$\begin{aligned} a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} < a_1 b_1 + a_2 b_2 &\iff a_1 b_2 - a_1 b_1 < a_2 b_2 - a_2 b_1 \iff \\ a_1(b_2 - b_1) < a_2(b_2 - b_1) &\xrightarrow{b_2 - b_1 > 0} a_1 < a_2 \end{aligned}$$

Αφού η τελευταία ισοδυναμία ισχύει, έχουμε πράγματι ότι $a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} < a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Γενικά τώρα, έστω $M = \max_{\sigma \in S_n} (\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)})$. Θα δείξουμε ότι: $\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = M \implies \sigma = 1$.

Το τελευταίο εξασφαλίζει άμεσα το ζητούμενο. Έστω για άτοπο, $1 \neq \sigma \in S_n$ και $\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = M$.

Εφόσον $\sigma \neq 1$, υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $\sigma(i) \neq i$ και έστω j το μικρότερο τέτοιο. Τότε $\sigma(j) \neq j$ και $\sigma(i) = i \ \forall i = 1, \dots, j-1$ (αν φυσικά $j > 1$) (*).

Από την (*) έπεται άμεσα ότι: $\sigma(j) > j$ και υπάρχει $k > j$ ώστε $\sigma(k) = j$ (**).

Από (**) και υπόθεση έχουμε ότι $a_j < a_k$ και $b_{\sigma(k)} = b_j < b_{\sigma(j)}$, οπότε από την ειδική περίπτωση $n = 2$, θέτοντας $c_1 = a_j$, $c_2 = a_k$, $d_1 = b_j$, $d_2 = b_{\sigma(j)}$, έχουμε ότι $c_1 d_2 + c_2 d_1 < c_1 d_1 + c_2 d_2$, ισοδύναμα:

$$a_j b_{\sigma(j)} + a_k b_{\sigma(k)} < a_j b_{\sigma(k)} + a_k b_{\sigma(j)}$$

Οπότε $M = \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = a_j b_{\sigma(j)} + a_k b_{\sigma(k)} + \sum_{i \neq j, k} a_i b_{\sigma(i)} < a_j b_{\sigma(k)} + a_k b_{\sigma(j)} + \sum_{i \neq j, k} a_i b_{\sigma(i)}$. Επιπλέον

θεωρούμε την μετάθεση $\tau \in S_n$, με $\tau(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \neq k, j \\ \sigma(k) & i = j \\ \sigma(j) & i = k \end{cases}$ (η τ είναι άμεσα καλά ορισμένη, γιατί (από

(**)) $j \neq k$). Τελικά,

$$M < a_j b_{\sigma(k)} + a_k b_{\sigma(j)} + \sum_{i \neq j, k} a_i b_{\sigma(i)} a_j b_{\tau(j)} = a_j b_{\tau(j)} + a_k b_{\tau(k)} + \sum_{i \neq j, k} a_i b_{\tau(i)} = \sum_{i=1}^n a_i b_{\tau(i)} \leq M$$

Το τελευταίο δίνει άτοπο, άρα $\sigma = 1$.

□

Πόρισμα 2.1.1. *i) Η απεικόνιση $\phi : A_K(n) \longrightarrow K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$, $\phi(f(c_{11}, \dots, c_{nn})) = f(x_{11}, \dots, x_{nn})$ είναι ισομορφισμός K -άλγεβρων. Τρόπο τινά, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu}$ σαν μεταβλητές.*

ii) Το $A_K(n, r)$ δεν είναι K -άλγεβρα για $r \geq 1$.

Απόδειξη.

- i) Το μόνο που θέλει προσοχή είναι το καλά ορισμένο της ϕ πράγμα που έπεται άμεσα από την αλγεβρική ανεξαρτησία των $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu}$.*
- ii) Έστω ότι ήταν K -άλγεβρα, τότε από Πρόταση 2.1.1 *iii*), αν $f(c_{11}, \dots, c_{nn}), g(c_{11}, \dots, c_{nn})$ μη μηδενικά στοιχεία του $A_K(n, r)$, πρέπει $f(c_{11}, \dots, c_{nn})g(c_{11}, \dots, c_{nn}) \in A_K(n, r) \cap A_K(n, 2r) = 0$, συνεπώς $0 = \phi(f(c_{11}, \dots, c_{nn})g(c_{11}, \dots, c_{nn})) = f(x_{11}, \dots, x_{nn})g(x_{11}, \dots, x_{nn})$, όμως $K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ είναι περιοχή, οπότε $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = 0$ ή $g(x_{11}, \dots, x_{nn}) = 0$, πράγμα που δίνει άμεσα $f(c_{11}, \dots, c_{nn}) = 0$ ή $g(c_{11}, \dots, c_{nn}) = 0$, άτοπο.*

□

Ορισμός 2.1.2. Θέτουμε $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$ και ορίζουμε $I(n, r) := \{i : \underline{r} \longrightarrow \underline{n} \mid i \text{ απεικόνιση}\}$, συμβολικά $i(\rho) = i_\rho$ και $i = (i_1, \dots, i_r)$. Επιπλέον θέτουμε $S_r = \text{συμμετρική ομάδα} := G(r)$ ή G .

Τώρα για κάθε $r \geq 1$ ορίζονται οι εξής δύο δράσεις της $G(r)$:

- Η $G(r)$ δρα από δεξιά στο $I(n, r)$ ως εξής, $\cdot : I(n, r) \times G(r) \longrightarrow I(n, r)$, $i \cdot \pi = i \circ \pi = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)})$. Θα γράφουμε $i \sim j$ αν ανήκουν στην ίδια $G(r)$ -τροχιά (ισοδύναμα, $\exists \pi \in G(r)$ ώστε $i \cdot \pi = j$). Ένα σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών, θα συμβολίζεται με $\mathcal{T}_o$.
- Η $G(r)$ δρα από δεξιά στο $I(n, r) \times I(n, r)$ ως εξής, $\cdot : (I(n, r) \times I(n, r)) \times G(r) \longrightarrow I(n, r) \times I(n, r)$, $(i, j) \cdot \pi = (i \cdot \pi, j \cdot \pi) = (i \circ \pi, j \circ \pi)$. Θα γράφουμε $(i, j) \sim (k, l)$ αν ανήκουν στην ίδια $G(r)$ -τροχιά (ισοδύναμα, $\exists \pi \in G(r)$ ώστε $(i, j) \cdot \pi = (k, l)$). Ένα σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών, θα συμβολίζεται με $\mathcal{T}$.

Σχόλιο. *i) Επί της ουσίας η δράση της $G(r)$ στο $I(n, r)$ είναι δράση "μετάθεσης θέσεων".*

ii) Δεν μπορούμε να δράσουμε από τα αριστερά με τον ίδιο τρόπο αφού αν $\pi \in G(r)$ και $i \in I(n, r)$ τότε δεν έχει νόημα η σύνθεση $\pi \circ i$ για $n \neq r$.

iii) Δεν είναι σωστό ότι: $(i \sim k \text{ και } j \sim l) \implies (i, j) \sim (k, l)$. Αυτό γιατί απαιτείτε το ίδιο π ώστε $i = k \cdot \pi$ και $j = l \cdot \pi$.

Ορισμός 2.1.3. Για κάθε $i, j \in I(n, r)$ ορίζουμε $c_{i,j} = c_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot c_{i_r j_r}$.

Παρατήρηση 2.1.1. *i)* Το σύνολο των διακεκριμένων $c_{i,j}$, $i, j \in I(n, r)$ αποτελεί K -βάση του $A_K(n, r)$.

ii) Τα $c_{i,j}$ δεν χαρακτηρίζονται μονοσήμαντα από το ζεύγος $(i, j) \in I(n, r) \times I(n, r)$.

iii) $c_{i,j} = c_{k,l} \iff (i, j) \sim (k, l) \iff \exists \pi \in G(r)$ ώστε $(i, j) \cdot \pi = (k, l)$.

iv) $(i, i) \sim (k, l) \iff k = l \sim i$. Ιδιαίτερος $c_{i,i} = c_{k,l} \iff k = l \sim i$.

Απόδειξη.

i) Το $A_K(n, r)$ αποτελείται από τις πολωνυμικές εκφράσεις των $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu}$ ομογενή βαθμού r , από αυτό και τον ορισμό του $c_{i,j}$ άμεσα έχουμε ότι $\{c_{i,j} \mid i, j \in I(n, r)\} \subseteq A_K(n, r)$ και $A_K(n, r) = \text{span}_K\{c_{i,j} \mid i, j \in I(n, r)\}$. Όσο για την γραμμική ανεξαρτησία, έπεται άμεσα από την αλγεβρική ανεξαρτησία των $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu}$.

ii) Έστω $r = 2$, $n = 5$, δηλαδή $\underline{r} = \{1, 2\}$, $\underline{n} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τις $i, j \in I(n, r)$ με $i = (4, 5)$, $j = (5, 4)$ και τότε $c_{i,j} = c_{45}c_{54} = c_{54}c_{45} = c_{j,i}$, ενώ $(i, j) \neq (j, i)$.

iii) Η δεύτερη ισοδυναμία είναι σαφές. Ας δούμε την πρώτη:

$(\Leftarrow)$: Αν $(i, j) \sim (k, l)$, τότε $\exists \pi \in G(r)$ ώστε $i\pi = k$, $j\pi = l$, άρα $c_{k,l} = c_{i\pi,j\pi} = c_{i_{\pi(1)j_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot c_{i_{\pi(r)j_{\pi(r)}}} = c_{i_1j_1} \cdot \dots \cdot c_{i_rj_r}$ (όπου η τρίτη ισότητα ισχύει αφού $\pi \in G(r)$ και $A_K(n) \subseteq K^\Gamma$ = μεταθετική K -άλγεβρα).

$(\Rightarrow)$: Αν $c_{i,j} = c_{k,l}$, τότε $c_{i_1j_1} \cdot \dots \cdot c_{i_rj_r} - c_{k_1l_1} \cdot \dots \cdot c_{k_rl_r} = 0$. Δηλαδή για τα αλγεβρικά ανεξάρτητα $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu}$ και το πολ/μο $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = x_{i_1j_1} \cdot \dots \cdot x_{i_rj_r} - x_{k_1l_1} \cdot \dots \cdot x_{k_rl_r}$, ισχύει $f(c_{11}, \dots, c_{nn}) = 0$, συνεπώς πρέπει $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = 0$ το οποίο συμβαίνει μόνο στη περίπτωση που: $x_{i_1j_1} \cdot \dots \cdot x_{i_rj_r} = x_{k_1l_1} \cdot \dots \cdot x_{k_rl_r} \iff$ μετά από αναδιάταξη έχουμε τις ίδιες μεταβλητές και στα δύο μέλη $\iff$ υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $i_{\pi(s)} = k_s$, $j_{\pi(s)} = l_s$ για κάθε $s \in \underline{r} \iff \exists \pi \in G(r)$ ώστε $(i, j) \cdot \pi = (k, l)$.

iv) Το $(\Leftarrow)$ είναι άμεσο. Αντίστροφα αν $(i, i) \sim (k, l)$ τότε υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $i\pi = k$, $i\pi = l$, άρα $k = l \sim i$.

□

Πόρισμα 2.1.2. Έστω $\mathcal{T}$ σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών του $I(n, r) \times I(n, r)$. Τότε το σύνολο $\{c_{i,j} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$ είναι K -βάση του $A_K(n, r)$. Ιδιαίτερος $|\mathcal{T}| = \binom{n^2+r-1}{r}$.

2.2 Οι κατηγορίες $M_K(n)$, $M_K(n, r)$.

Παρακάτω, K = άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Παρατήρηση 2.2.1. Έστω $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο σύννηθες μονομορφισμός K -αλγεβρών, τότε:

$$i) \Delta(c_{\mu\nu}) = \phi\left(\sum_{p \in \underline{n}} c_{\mu p} \otimes c_{p\nu}\right) \text{ και } \epsilon(c_{\mu\nu}) = \delta_{\mu\nu}, \text{ για κάθε } \mu, \nu \in \underline{n}.$$

$$ii) \Delta(c_{i,j}) = \phi\left(\sum_{s \in I(n,r)} c_{i,s} \otimes c_{s,j}\right) \text{ και } \epsilon(c_{i,j}) = \delta_{i,j}, \text{ για κάθε } i, j \in I(n, r).$$

Απόδειξη.

$$i) \Delta(c_{\mu\nu})(s, t) = c_{\mu\nu}(st) = \sum_{p \in \underline{n}} c_{\mu p}(s) c_{p\nu}(t) = \sum_{p \in \underline{n}} \phi(c_{\mu p} \otimes c_{p\nu})(s, t) = \left(\sum_{p \in \underline{n}} \phi(c_{\mu p} \otimes c_{p\nu})\right)(s, t) = \\ (\phi(\sum_{p \in \underline{n}} c_{\mu p} \otimes c_{p\nu}))(s, t), \text{ για κάθε } s, t \in \Gamma. \text{ Συνεπώς } \Delta(c_{\mu\nu}) = \phi\left(\sum_{p \in \underline{n}} c_{\mu p} \otimes c_{p\nu}\right). \text{ Επιπλέον, } \\ \epsilon(c_{\mu\nu}) = c_{\mu\nu}(1_\Gamma) = \delta_{\mu\nu}.$$

$$ii) \epsilon(c_{i,j}) = \epsilon(c_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot c_{i_r j_r}) = \epsilon(c_{i_1 j_1}) \cdot \dots \cdot \epsilon(c_{i_r j_r}) = \delta_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i_r j_r} = \begin{cases} 1, & i_k = j_k \quad \forall k \in \underline{r} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \\ \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}. \text{ Όσο για το άλλο, αν } i, j \in I(n, r) \text{ τότε έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} \Delta(c_{i,j}) &= \Delta(c_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot c_{i_r j_r}) = \Delta(c_{i_1 j_1}) \cdot \dots \cdot \Delta(c_{i_r j_r}) \\ &= (\phi(\sum_{s_1 \in \underline{n}} c_{i_1 s_1} \otimes c_{s_1 j_1})) \cdot \dots \cdot (\phi(\sum_{s_r \in \underline{n}} c_{i_r s_r} \otimes c_{s_r j_r})) \\ &= \sum_{s_1 \in \underline{n}} \dots \sum_{s_r \in \underline{n}} (\phi(c_{i_1 s_1} \otimes c_{s_1 j_1}) \cdot \dots \cdot \phi(c_{i_r s_r} \otimes c_{s_r j_r})) \\ &= \sum_{s_1 \in \underline{n}} \dots \sum_{s_r \in \underline{n}} \phi((c_{i_1 s_1} \otimes c_{s_1 j_1}) \cdot \dots \cdot (c_{i_r s_r} \otimes c_{s_r j_r})) \\ &= \sum_{s_1 \in \underline{n}} \dots \sum_{s_r \in \underline{n}} \phi((c_{i_1 s_1} \cdot \dots \cdot c_{i_r s_r}) \otimes (c_{s_1 j_1} \cdot \dots \cdot c_{s_r j_r})) \\ &= \sum_{s \in I(n,r)} \phi((c_{i_1 s_1} \cdot \dots \cdot c_{i_r s_r}) \otimes (c_{s_1 j_1} \cdot \dots \cdot c_{s_r j_r})) = \sum_{s \in I(n,r)} \phi(c_{i,s} \otimes c_{s,j}). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.2.1. Οι $A_K(n, r)$, $A_K(n)$ είναι K -subcoalgebra της $F(K^\Gamma)$. Ιδιαίτερω, αν $x \in A_K(n, r)$ τότε $\Delta(x) = \phi(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i)$, όπου $a_i, b_i \in A_K(n, r)$ (και όμοια αν $x \in A_K(n)$).

Απόδειξη.

$A_K(n) \subseteq F(K^\Gamma)$ και K -subcoalgebra: Πράγματι, αν $x = f(c_{11}, \dots, c_{nn}) \in A_K(n)$ τότε $x = \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}^{i_{nn}}$ και ισχύει:

$$\begin{aligned} \Delta(f(c_{11}, \dots, c_{nn})) &= \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} \Delta(c_{11})^{i_{11}} \cdot \dots \cdot \Delta(c_{nn})^{i_{nn}} \\ &= \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} \phi\left(\sum_{s_1 \in \underline{n}} c_{1s_1} \otimes c_{s_1 1}\right)^{i_{11}} \cdot \dots \cdot \phi\left(\sum_{s_n \in \underline{n}} c_{ns_n} \otimes c_{s_n n}\right)^{i_{nn}} \\ &= \phi\left(\sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} \left(\sum_{s_1 \in \underline{n}} c_{1s_1} \otimes c_{s_1 1}\right)^{i_{11}} \cdot \dots \cdot \left(\sum_{s_n \in \underline{n}} c_{ns_n} \otimes c_{s_n n}\right)^{i_{nn}}\right) \end{aligned}$$

Τώρα κάνοντας τις επιμεριστικές και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες $k \cdot (a \otimes b) = (ka) \otimes b$, $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (ab) \otimes (cd)$ είναι σαφές ότι $\Delta(x) \in \{\phi(\sum_i a_i \otimes b_i) \mid a_i, b_i \in A_K(n)\}$. Συνεπώς $\Delta(A_K(n)) \subseteq \{\phi(\sum_i a_i \otimes b_i) \mid a_i, b_i \in A_K(n)\}$, πράγμα που δείχνει και τα δύο ζητούμενα (Πρόταση 1.2.2, Ορισμός 1.2.10).

$A_K(n, r) \subseteq F(K^\Gamma)$ και K -subcoalgebra: Θέτουμε $I = I(n, r)$ και έστω $x \in A_K(n, r)$ τότε (εξ' ορισμού του $A_K(n, r)$) $x = \sum_{(i,j) \in I \times I} k_{(i,j)} c_{i,j}$, $k_{(i,j)} \in K$. Τότε $\Delta(x) = \sum_{(i,j) \in I \times I} k_{(i,j)} \Delta(c_{i,j}) = \sum_{(i,j) \in I \times I} k_{(i,j)} \phi\left(\sum_{s \in I} c_{i,s} \otimes c_{s,j}\right) = \phi\left(\sum_{(i,j) \in I \times I} \sum_{s \in I} (k_{(i,j)} c_{i,s} \otimes c_{s,j})\right) \in \{\phi(\sum_i a_i \otimes b_i) \mid a_i, b_i \in A_K(n, r)\}$

□

Ορισμός 2.2.1. Εφόσον $A_K(n), A_K(n, r)$ είναι K -subcoalgebras της $F(K^\Gamma)$, τότε ορίζονται οι κατηγορίες $\text{mod}_{A_K(n)}(K^\Gamma)$, $\text{mod}_{A_K(n,r)}(K^\Gamma)$ που θα συμβολίζουμε με $M_K(n), M_K(n, r)$ αντίστοιχα.

Σχόλιο. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό αναφέροντας ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Schur για την περίπτωση $K = \mathbb{C}$ και γενικεύθηκε ισχυρά από τον J.A.Green στην θεωρία των K -coalgebras (Βλέπε [18, σελ. 156], [1, σελ. 12, Remark]).

Θεώρημα 2.2.1. Έστω $V \in M_K(n)$ τότε υπάρχει οικογένεια K^Γ -υποπροτύπων $\{V_r\}_{r \geq 0}$ του V ώστε $V_r \in M_K(n, r)$ και $V = \bigoplus_{r \geq 0} V_r$.

Σχόλιο. Συνεπώς για την μελέτη της κατηγορίας $M_K(n)$, αρκεί να μελετήσουμε την κατηγορία $M_K(n, r)$. Οπότε, από εδώ και πέρα εστιάζουμε την προσοχή μας στην κατηγορία $M_K(n, r)$.

2.3 Η άλγεβρα του Schur : $S_K(n, r)$.

Παρακάτω, K = άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Ορισμός 2.3.1. Ορίζουμε $S_K(n, r) := A_K(n, r)^* = Hom_K(A_K(n, r), K)$. Η $S_K(n, r)$ λέγεται δυϊκός χώρος (dual space) του $A_K(n, r)$. Το $S_K(n, r)$ είναι K -πρότυπο με το σύνθηρες τρόπο.

Σχόλιο. Παρακάτω θα εφοδιάσουμε το $S_K(n, r)$ με δομή K -άλγεβρας και αυτή θα είναι η λεγόμενη άλγεβρα του Schur.

Υπενθύμιση 2.3.1. (Από Γραμμική Άλγεβρα). Έστω V K -πρότυπο με $dim_K V = n < \infty$ και βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$, τότε ορίζονται οι K -γραμμικές απεικονίσεις $\{f_1, \dots, f_n\}$ με $f_j(\sum_{i=1}^n k_i e_i) = k_j$ και αποτελούν βάση του δυϊκού χώρου V^* . Το $\{f_1, \dots, f_n\}$ λέγεται δυϊκή βάση της $\{e_1, \dots, e_n\}$. Ιδιαίτερώς $dim_K V = dim_K V^*$.

Ορισμός 2.3.2. Έστω $(i, j) \in I(n, r) \times I(n, r)$ τότε ορίζεται η K -γραμμική απεικόνιση

$$\xi_{i,j} : A_K(n, r) \longrightarrow K, \quad \xi_{i,j}(c_{p,q}) = \begin{cases} 1, & (i, j) \sim (p, q) \\ 0, & (i, j) \not\sim (p, q) \end{cases}.$$

για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$. (Εννοείται ότι πρώτα ορίσαμε την $\xi_{i,j}$ πάνω στη βάση $\{c_{p,q} \mid (p, q) \in \mathcal{T}\}$ του $A_K(n, r)$ και μετά επεκτείναμε K -γραμμικά). Μάλιστα, $\xi_{i,j}(c_{p,q}) = \begin{cases} 1, & (i, j) \sim (p, q) \\ 0, & (i, j) \not\sim (p, q) \end{cases}$ για κάθε $p, q \in I(n, r)$ (άμεσα από Παρατήρηση 2.1.1 iii) και το γεγονός ότι $\mathcal{T}$ = σύνολο αντιπροσώπων).

Πρόταση 2.3.1. Το σύνολο $\{\xi_{p,q} \mid (p, q) \in \mathcal{T}\}$ αποτελεί K -βάση του $S_K(n, r)$ και είναι δυϊκή της βάσης $\{c_{p,q} \mid (p, q) \in \mathcal{T}\}$ του $A_K(n, r)$. Ιδιαίτερώς, $dim_K S_K(n, r) = |\mathcal{T}| = \binom{n^2+r-1}{r}$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την δυϊκή βάση $\{f_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$ της $\{c_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$. Αν δείξουμε ότι $f_{p,q} = \xi_{p,q}$ τότε τελειώσαμε. Για το λόγο αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $f_{p,q}(c_{i,j}) = \xi_{p,q}(c_{i,j})$, $\forall (i, j) \in \mathcal{T}$. Πράγματι, έστω $(i, j) \in \mathcal{T}$. Αν $(i, j) \neq (p, q)$, τότε $f_{p,q}(c_{i,j}) = 0$ (εξ' ορισμού της $f_{p,q}$), επίσης $(i, j) \not\sim (p, q)$ (γιατί $(i, j), (p, q) \in \mathcal{T}$ = σύνολο αντιπροσώπων τροχιών και $(i, j) \neq (p, q)$) άρα $\xi_{p,q}(c_{i,j}) = 0$, συνεπώς $f_{p,q}(c_{i,j}) = \xi_{p,q}(c_{i,j})$. Ενώ αν $(i, j) = (p, q)$, τότε άμεσα $f_{p,q}(c_{i,j}) = \xi_{p,q}(c_{i,j}) = 1$.

□

Παρατήρηση 2.3.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$ τότε :

$$i) \xi_{i,j} = \xi_{k,l} \iff (i, j) \sim (k, l).$$

$$ii) \xi_{i,i} = \xi_{j,j} \iff i \sim j.$$

$$iii) \xi_{i,i} = \xi_{k,l} \iff k = l \sim i.$$

Απόδειξη.

$i)$: Έστω $(i, j) \sim (k, l)$, τότε είναι σαφές (εξ' ορισμού των $\xi_{i,j}, \xi_{k,l}$ και του γεγονότος ότι $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας) ότι $\xi_{i,j}(c_{p,q}) = \xi_{k,l}(c_{p,q}) \forall (p, q) \in \mathcal{T}$. Αντίστροφα, έστω $\xi_{i,j} = \xi_{k,l}$, τότε $\xi_{i,j}(c_{p,q}) = \xi_{k,l}(c_{p,q}) \forall (p, q) \in \mathcal{T}$, όμως $\mathcal{T}$ σύνολο αντιπροσώπων, οπότε υπάρχει $(s, t) \in \mathcal{T}$ ώστε $(s, t) \sim (k, l)$, έτσι $\xi_{i,j}(c_{s,t}) = \xi_{k,l}(c_{s,t}) = 1$, συνεπώς πρέπει (εξ' ορισμού της $\xi_{i,j}$) $(i, j) \sim (s, t)$ και έτσι $(i, j) \sim (k, l)$.

$$ii): \xi_{i,i} = \xi_{j,j} \xrightarrow{i} (i, i) \sim (j, j) \iff i \sim j.$$

$iii)$: Άμεσο από $i)$ και Παρατήρηση 2.1.1. $iv)$.

□

Πόρισμα 2.3.1. Έστω $A \subseteq I(n, r) \times I(n, r)$ με $\xi_{i,j} \neq \xi_{p,q}$, για κάθε $(i, j), (p, q) \in A$ με $(i, j) \neq (p, q)$. Τότε το σύνολο $\{\xi_{i,j}\}_{(i,j) \in A}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη.

Για κάθε $(i, j) \in A$, υπάρχει (μοναδικό) $(p_i, q_j) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (p_i, q_j) \iff \xi_{i,j} = \xi_{q_i, p_j}$. Όμως $\xi_{q_i, p_j} \neq \xi_{q_{i'}, p_{j'}}$, για κάθε $(i, j), (i', j') \in A$ με $(i, j) \neq (i', j')$ (αφού $\xi_{q_i, p_j} = \xi_{i,j} \neq \xi_{i', j'} = \xi_{q_{i'}, p_{j'}}$), άρα από Πρόταση 2.3.1 έπεται το ζητούμενο.

□

Υπενθύμιση 2.3.2. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και (A, Δ, ϵ) μία R -coalgebra τότε ο δυϊκός χώρος $A^* = \text{Hom}_R(A, R)$ γίνεται R -άλγεβρα, με πολλαπλασιασμό τον εξής, αν $f, g \in A^*$ τότε ορίζεται η R -γραμμική $fg : A \rightarrow R$, ώστε για κάθε $a \in A$ αν $\Delta(a) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ τότε $(fg)(a) = \sum_{i=1}^n f(a_i)g(b_i)$.

Σχόλιο. Η παραπάνω υπενθύμιση δόθηκε για να έχουμε μία γενικότερη εικόνα της κατάστασης, εν' τούτης δεν θα την χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος, αλλά θα δώσουμε μία απόδειξη ασθενώς παρόμοια (δηλαδή δουλεύει για την ειδική περίπτωση $S_K(n, r)$ που μας ενδιαφέρει, αλλά όχι για την γενική).

Πρόταση 2.3.2. Για κάθε $\xi, \eta \in S_K(n, r)$ ορίζουμε $\xi \cdot \eta = \xi\eta : A_K(n, r) \rightarrow K$, ώστε για κάθε $c \in A_K(n, r)$ αν $\Delta(c) = \phi(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i)$, $c_i, t_i \in A_K(n, r)$, (υπάρχει τέτοια γραφή από Πρόταση 2.2.1)

τότε $(\xi\eta)(c) = \sum_{i=1}^n \xi(c_i)\eta(t_i)$. (Όπου $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \rightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο γνωστός μονομορφισμός).

Η $\xi \cdot \eta$ είναι καλά ορισμένη K -γραμμική και ο χώρος $S_K(n, r)$ εφοδιασμένος με αυτό το γινόμενο γίνεται K -άλγεβρα με $1_{S_K(n, r)} = \epsilon|_{A_K(n, r)} = (\text{συμβολικά} = \epsilon)$.

Απόδειξη.

ξη καλὰ ορισμένη: Έστω $f : A_K(n, r) \times A_K(n, r) \longrightarrow K$, με $f(c, t) = \xi(c)\eta(t)$, τότε η f είναι *multilinear* K -προτύπων (άμεσα) και άρα υπάρχει $h : A_K(n, r) \otimes A_K(n, r) \longrightarrow K$, ομομορφισμός K -προτύπων με $h(c \otimes t) = \xi(c)\eta(t)$. Από Παρατήρηση 1.2.10 υπάρχει μονομορφισμός K -προτύπων $\phi_A : A_K(n, r) \otimes A_K(n, r) \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ με $\phi_A(c \otimes t) = \phi(c \otimes t)$ για κάθε $c, t \in A_K(n, r)$. Έστω ότι $\Delta(c) = \phi(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i) = \phi(\sum_{j=1}^m r_j \otimes l_j)$, όπου $c_i, t_i, r_j, l_j \in A_K(n, r)$, τότε επειδή ϕ_A 1-1 και h καλὰ ορισμένη, έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_A(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i) = \phi_A(\sum_{j=1}^m r_j \otimes l_j) &\iff \sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i = \sum_{j=1}^m r_j \otimes l_j \in A_K(n, r) \otimes A_K(n, r) \implies \\ h(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i) = h(\sum_{j=1}^m r_j \otimes l_j) &\iff \sum_{i=1}^n \xi(c_i)\eta(t_i) = \sum_{j=1}^m \xi(r_j)\eta(l_j) \end{aligned}$$

$\xi\eta \in S_K(n, r)$: Έστω $c_1, c_2 \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c_1) = \phi(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i)$, $\Delta(c_2) = \phi(\sum_{j=1}^m r_j \otimes l_j)$, τότε $\Delta(c_1 + c_2) = \phi(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i + \sum_{j=1}^m r_j \otimes l_j)$ και $(\xi\eta)(c_1 + c_2) = \sum_{i=1}^n \xi(c_i)\eta(t_i) + \sum_{j=1}^m \xi(r_j)\eta(l_j) = \xi\eta(c_1) + \xi\eta(c_2)$. Παρόμοια $\xi\eta(kc) = k\xi\eta(c)$, $k \in K$, $c \in A_K(n, r)$. Οπότε $\xi\eta \in S_K(n, r)$.

Πάμε να δείξουμε ότι $S_K(n, r)$ είναι K -άλγεβρα. Καταρχάς $S_K(n, r) = K$ -πρότυπο. Οπότε μένει να δείξουμε τα παρακάτω:

$\xi(\eta_1 + \eta_2) = \xi\eta_1 + \xi\eta_2$: Έστω $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes t_i)$, $c_i, t_i \in A_K(n, r)$, τότε $\xi(\eta_1 + \eta_2)(c) = \sum_i \xi(c_i)(\eta_1 + \eta_2)(t_i) = \sum_i \xi(c_i)\eta_1(t_i) + \sum_i \xi(c_i)\eta_2(t_i) = \xi\eta_1(c) + \xi\eta_2(c)$. Οπότε $\xi(\eta_1 + \eta_2) = \xi\eta_1 + \xi\eta_2$.

$(\xi_1 + \xi_2)\eta = \xi_1\eta + \xi_2\eta$: Όμοια με το προηγούμενο.

$(\xi_1\xi_2)\eta = \xi_1(\xi_2\eta)$: Αρχεί να δείξουμε $((\xi_1\xi_2)\eta)(c_{i,j}) = (\xi_1(\xi_2\eta))(c_{i,j}) \forall (i, j) \in \mathcal{T}$ (αφού $\{c_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ βάση του $A_K(n, r)$). Καταρχάς $\Delta(c_{i,j}) = \phi(\sum_{s \in I(n, r)} c_{i,s} \otimes c_{s,j})$. Οπότε,

$$\begin{aligned} (\xi_1(\xi_2\eta))(c_{i,j}) &= \sum_s \xi_1(c_{i,s})(\xi_2\eta)(c_{s,j}) = \sum_s \xi_1(c_{i,s})(\sum_t \xi_2(c_{s,t})\eta(c_{t,j})) = \\ \sum_t \sum_s \xi_1(c_{i,s})\xi_2(c_{s,t})\eta(c_{t,j}) &= \sum_t (\sum_s \xi_1(c_{i,s})\xi_2(c_{s,t}))\eta(c_{t,j}) = \sum_t (\xi_1\xi_2)(c_{i,t})\eta(c_{t,j}) = ((\xi_1\xi_2)\eta)(c_{i,j}). \end{aligned}$$

Άρα $(\xi_1\xi_2)\eta = \xi_1(\xi_2\eta)$.

$k(\xi\eta) = (k\xi)\eta = \xi(k\eta)$, $k \in K$: Παρόμοιας ιδεολογίας με το $\xi(\eta_1 + \eta_2) = \xi\eta_1 + \xi\eta_2$.

$\epsilon\xi = \xi\epsilon = \xi$: Έστω $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes t_i)$, $c_i, t_i \in A_K(n, r)$, τότε $\Delta(c)(g, s) = \phi(\sum_i c_i \otimes t_i)(g, s)$, $\forall g, s \in \Gamma$, δηλαδή $c(gs) = \sum_i c_i(g)t_i(s)$, $\forall g, s \in \Gamma$, άποτε $c(s) = \sum_i c_i(1)t_i(s) \forall s \in \Gamma$, έτσι $c = \sum_i c_i(1)t_i$. Τώρα, $(\epsilon\xi)(c) = \sum_i \epsilon(c_i)\xi(t_i) = \sum_i c_i(1)\xi(t_i) = \xi(\sum_i c_i(1)t_i) = \xi(c)$, άρα $\epsilon\xi = \xi$. Όμοια οι άλλες ισότητες.

□

Σχόλιο. Ενδεικτικά, κάποια σημεία της απόδειξης που δείχνουν ότι δεν δουλεύει στην γενική περίπτωση που είδαμε στην Υπενθύμιση 2.3.2 είναι εκεί που δείχνουμε ότι $(\xi_1\xi_2)\eta = \xi_1(\xi_2\eta)$ και $\epsilon\xi = \xi\epsilon = \xi$ (στην γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε την μεταθετικότητα των δύο διαγραμμάτων που επιβάλλει η coalgebra). Παρακάτω αποδίδουμε κάποιες γενικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στην $S_K(n, r)$.

Πρόταση 2.3.3. Έστω $i, j, k, l \in I(n, r)$, $\xi, \eta \in S_K(n, r)$ τότε,

$$i) (\xi\eta)(c_{p,q}) = \sum_{s \in I(n,r)} \xi(c_{p,s})\eta(c_{s,q}), \text{ για κάθε } p, q \in I(n, r).$$

$$ii) (\text{Κανόνας πολ/μού του Schur}). \xi_{i,j}\xi_{k,l} = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} (Z(i, j, k, l, p, q) \cdot 1_K) \xi_{p,q}, \text{ όπου } Z(i, j, k, l, p, q) = |\{s \in I(n, r) \mid (i, j) \sim (p, s) \text{ και } (k, l) \sim (s, q)\}|.$$

$$iii) \text{ Αν } j \approx k \text{ τότε } \xi_{i,j}\xi_{k,l} = 0. \text{ Άρα αν } \xi_{i,j}\xi_{k,l} \neq 0 \text{ τότε } j \sim k.$$

$$iv) \begin{aligned} a) & \xi_{i,i}\xi_{i,j} = \xi_{i,j} = \xi_{i,j}\xi_{j,j}. \\ b) & \xi_{i,i}^2 = \xi_{i,i} \text{ και αν } i \approx j \text{ τότε } \xi_{i,i}\xi_{j,j} = 0. \\ c) & \epsilon = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}. \end{aligned}$$

Απόδειξη.

$$i) \text{ Άμεσα εξ' ορισμού του πολ/μού στην } S_K(n, r) \text{ και της ταυτότητας } \Delta(c_{p,q}) = \sum_{s \in I(n,r)} c_{p,s} \otimes c_{s,q}.$$

$$ii) \text{ Έστω } \{c_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathcal{T}} \text{ η K-βάση του } A_K(n, r) \text{ και } (s, t) \in \mathcal{T}, \text{ τότε } (\xi_{i,j}\xi_{k,l})(c_{s,t}) = \sum_{h \in I(n,r)} \xi_{i,j}(c_{s,h})\xi_{k,l}(c_{h,t}),$$

$$\text{όπου } \xi_{i,j}(c_{s,h})\xi_{k,l}(c_{h,t}) = \begin{cases} 1_K, & \xi_{i,j}(c_{s,h}) = \xi_{k,l}(c_{h,t}) = 1. \\ 0_K, & \text{αλλιώς.} \end{cases} = \begin{cases} 1_K, & (i, j) \sim (s, h) \text{ και } (k, l) \sim (h, t). \\ 0_K, & \text{αλλιώς.} \end{cases}.$$

$$\text{Συνεπώς, } (\xi_{i,j}\xi_{k,l})(c_{s,t}) = (Z(i, j, k, l, s, t) \cdot 1_K) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} (Z(i, j, k, l, p, q) \cdot 1_K) \xi_{p,q}(c_{s,t}) \text{ (η τελευταία ισότητα ισχύει αφού } \mathcal{T} \text{ σύνολο αντιπροσώπων και } (s, t) \in \mathcal{T}). \text{ Συνεπώς, } \xi_{i,j}\xi_{k,l} = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} (Z(i, j, k, l, p, q) \cdot 1_K) \xi_{p,q}.$$

$$iii) \text{ Έστω } j \approx k \text{ τότε για κάθε } (p, q) \in \mathcal{T} \text{ έχουμε } \{s \in I(n, r) \mid (i, j) \sim (p, s) \text{ και } (k, l) \sim (s, q)\} = \emptyset, \text{ πράγματι αν ήταν μη-κενό τότε θα έπρεπε να υπάρχει } s \in I(n, r) \text{ ώστε } j \sim s \sim k, \text{ άτοπο. Άρα } Z(i, j, k, l, p, q) = 0 \text{ και από } ii) \text{ έχουμε } \xi_{i,j}\xi_{k,l} = 0.$$

$$iv) \begin{aligned} a) & \text{ Έστω } \{c_{s,t}\}_{(s,t) \in \mathcal{T}} \text{ η K-βάση του } A_K(n, r) \text{ και } (s, t) \in \mathcal{T} \text{ τότε,} \\ & \xi_{i,i}\xi_{i,j}(c_{s,t}) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} (Z(i, i, i, j, p, q) \cdot 1_K) \xi_{p,q}(c_{s,t}) = Z(i, i, i, j, s, t) \cdot 1_K \text{ (αφού } \mathcal{T} \text{ σύνολο αντιπροσώπων και } (s, t) \in \mathcal{T}) \text{ (*). Επιπλέον παρατηρούμε τα εξής:} \end{aligned}$$

$$Z(i, i, i, j, s, t) = 0 \text{ ή } 1 \text{ και μάλιστα } Z(i, i, i, j, s, t) = \begin{cases} 1, & (s, t) \sim (i, j). \\ 0, & (s, t) \approx (i, j). \end{cases} \quad (**).$$

Πράγματι, για το πρώτο, αν $B := \{h \in I(n, r) \mid (i, i) \sim (s, h) \text{ και } (i, j) \sim (h, t)\} = \emptyset$ τότε τελειώσαμε, ενώ αν είναι μη-κενό τότε για κάθε h μέσα εκεί, ισχύει $(i, i) \sim (s, h)$, δηλαδή $s = h \sim i$ (Παρατήρηση 2.1.1) και άρα $B = \{s\} \iff Z(i, i, i, j, s, t) = 1$. Πάμε το δεύτερο σκέλος τώρα, αν $(s, t) \sim (i, j)$ τότε υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $i = s\pi$, $j = t\pi$, δηλαδή $(i, i) \sim (s, s)$ και $(i, j) \sim (s, t)$, άρα $s \in B$ και από πρώτο σκέλος πρέπει $Z(i, i, i, j, s, t) = 1$. Αν όμως $(s, t) \approx (i, j)$ τότε $Z(i, i, i, j, s, t) = 0$ (αλλιώς $Z(i, i, i, j, s, t) = 1$, οπότε υπάρχει $h \in I(n, r)$ ώστε $(i, i) \sim (s, h)$ και $(i, j) \sim (h, t)$, δηλαδή $h = s \sim i$ και έτσι $(i, j) \sim (s, t)$, άτοπο).

$$\text{Τώρα από } (*), (**) \text{ έχουμε, } \xi_{i,i}\xi_{i,j}(c_{s,t}) = \begin{cases} 1_K, & (s, t) \sim (i, j). \\ 0_K, & (s, t) \approx (i, j). \end{cases} = \xi_{i,j}(c_{s,t}) \quad \forall (s, t) \in \mathcal{T}.$$

Άρα $\xi_{i,i}\xi_{i,j} = \xi_{i,j}$.

b) Άμεσο από $iv)a)$ και $iii)$.

c) Έστω $\{c_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$ η K-βάση του $A_K(n, r)$, αν $(p, q) \in \mathcal{T}$ τότε, $\epsilon(c_{p,q}) = \delta_{p,q} = \begin{cases} 1_K & p = q \\ 0_K & p \neq q \end{cases}$

$$\text{και (από Παρατήρηση 2.1.1 } iv), \text{ ορισμό των } \xi_{i,j}) \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}(c_{p,q}) = \begin{cases} 0_K & p \neq q \\ \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}(c_{p,p}) & p = q \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0_K & p \neq q \\ 1_K & p = q \end{cases} \quad (\text{η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί } (i, i) \sim (p, p) \iff i \sim p \text{ και επιπλέον}$$

$$\mathcal{T}_o = \text{σύνολο αντιπροσώπων}). \text{ Τελικά, } \epsilon(c_{p,q}) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}(c_{p,q}) \quad \forall (p, q) \in \mathcal{T}, \text{ έτσι } \epsilon = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}.$$

□

2.4 Η απεικόνιση $e : K\Gamma \longrightarrow S_K(n, r)$.

Παρακάτω $K = \text{άπειρο σώμα}$ και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Ορισμός 2.4.1. Για κάθε $g \in \Gamma$ ορίζουμε $e_g : A_K(n, r) \longrightarrow K$ με $e_g(c) = c(g)$, $\forall c \in A_K(n, r)$.

Παρατήρηση 2.4.1. $e_g \in S_K(n, r)$, $\forall g \in \Gamma$ και ισχύει ότι:

$$i) \quad e_g e_h = e_{gh}, \quad \forall g, h \in \Gamma.$$

$$ii) \quad e_1 = \epsilon|_{A_K(n, r)} \quad (\text{συμβολικά } e_1 = \epsilon)$$

Απόδειξη.

Καταρχάς $e_g = K$ -γραμμική (πράγματι, $e_g(c_1 + c_2) = (c_1 + c_2)(g) = c_1(g) + c_2(g) = e_g(c_1) + e_g(c_2)$ και $e_g(kc) = (kc)(g) = kc(g) = ke_g(c)$, $k \in K$, $c_1, c_2, c \in A_K(n, r)$).

$$\begin{aligned} i) \quad & \text{Έστω } c \in A_K(n, r) \text{ τότε (από Πρόταση 2.2.1)} \quad \Delta(c) = \phi\left(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i\right), \text{ όπου } c_i, t_i \in A_K(n, r) \\ & \text{και άρα (εξ' ορισμού του πολ/μού στην } S_K(n, r)) \quad (e_g e_h)(c) = \sum_i e_g(c_i) e_h(t_i) = \sum_i c_i(g) t_i(h) = \\ & \phi\left(\sum_{i=1}^n c_i \otimes t_i\right)(g, h) = \Delta(c)(g, h) = c(gh) = e_{gh}(c) \text{ Άρα } e_g e_h = e_{gh}. \end{aligned}$$

$$ii) \quad e_1(c) = c(1) = \epsilon(c), \text{ άρα } e_1 = \epsilon.$$

□

Ορισμός 2.4.2. Ορίζεται ο ομομορφισμός K -αλγεβρών $e : K\Gamma \longrightarrow S_K(n, r)$, $\sum_g k_g g \longmapsto \sum_g k_g e_g$.

Παρατήρηση 2.4.2. $i) \quad H e : K\Gamma \longrightarrow S_K(n, r)$ είναι πράγματι ομομορφισμός K -αλγεβρών.

$ii) \quad \text{Έστω } c \in A_K(n, r) \text{ τότε } c : \Gamma \longrightarrow K \text{ και έστω } \tilde{c} : K\Gamma \longrightarrow K, \text{ η } K\text{-γραμμική επέκταση της } c \text{ (δηλαδή } \tilde{c}(\sum_g k_g g) = \sum_g k_g c(g)). \text{ Τότε } e(k)(c) = \tilde{c}(k), \text{ για κάθε } k \in K\Gamma.$

Απόδειξη.

$i) \quad e$ καλά ορισμένη άμεσα (αφού Γ K -βάση του $K\Gamma$) και e ομομορφισμός K -προτύπων (σαφές).

$$\begin{aligned} e \text{ ομομορφισμός δακτυλίων: } \quad & \text{Έστω } x, y \in K\Gamma \text{ με } x = \sum_g k_g g \text{ και } y = \sum_h k_h h, \text{ τότε } e(xy) = \\ & e\left(\left(\sum_g k_g g\right)\left(\sum_h k_h h\right)\right) = e\left(\sum_g \sum_h k_g k_h gh\right) = \sum_g \sum_h k_g k_h e_{gh} = \sum_g \sum_h k_g k_h e_g e_h = \left(\sum_g k_g e_g\right)\left(\sum_h k_h e_h\right) = \\ & e\left(\sum_g k_g g\right) e\left(\sum_h k_h h\right) = e(x) e(y). \end{aligned}$$

$$ii) \quad \text{Έστω } k = \sum_g k_g g \in K\Gamma, \text{ τότε } e(k)(c) = e\left(\sum_g k_g g\right)(c) = \left(\sum_g k_g e_g\right)(c) = \sum_g k_g e_g(c) = \sum_g k_g c(g) = \tilde{c}(k).$$

□

Πρόταση 2.4.1. *i) $He : K\Gamma \longrightarrow S_K(n, r)$ είναι επί.*

ii) Έστω $f \in K^\Gamma$ τότε, $f \in A_K(n, r) \iff kere \subseteq \ker f \iff \tilde{f}(kere) = 0$. (Όπου $\tilde{f} : K\Gamma \longrightarrow K$ η K -γραμμική επέκταση της $f : \Gamma \longrightarrow K$).

Λήμμα 2.4.1. (Από Γραμμική Άλγεβρα).

*i) Έστω V K -πρότυπο με $\dim_K V = n < \infty$, τότε η απεικόνιση $\tau : V \longrightarrow V^{**}$, με $\tau(v) : V^* \longrightarrow K$ και $\tau(v)(f) = f(v)$ για κάθε $f \in V^*$ είναι ισομορφισμός K -προτύπων και λέγεται φυσικός ισομορφισμός.*

ii) Έστω V K -πρότυπο με $\dim_K V = n < \infty$ και $W \leq V^$ (γνήσιο K -υποπρότυπο) τότε υπάρχει $0 \neq v \in V$ ώστε $f(v) = 0, \forall f \in W$.*

Σχόλιο. Εν' γένη, το Λήμμα 2.4.1 δεν ισχύει όταν $\dim_K V = \infty$.

Απόδειξη. (Λήμματος)

i) Την τ πάνω κάτω την έχουμε συναντήσει και σε άλλα concepts όπως στην συναρτησιακή ανάλυση (στους αυτοπαθής χώρους Banach), οπότε θα είμαστε σύντομοι στην απόδειξή. Καταρχάς η τ είναι K -γραμμική με στοιχειώδεις πράξεις. Πάμε να δούμε τα 1-1, επί. Πράγματι έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση του V και $\{f_1, \dots, f_n\}$ η δυϊκή βάση του V^ (Υπενθύμιση 2.3.1), τότε:*

τ 1-1: Έστω $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i \in V$ με $\tau(v) = 0$, τότε $\tau(v)(f) = 0 \forall f \in V^*$, άρα $\tau(v)(f_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$, δηλαδή $f_i(v) = k_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Συνεπώς $v = 0$.

τ επί: Εφόσον (από Υπενθύμιση 2.3.1) $\dim_K V = \dim_K V^* = \dim_K V^{**}$ και $\tau : V \longrightarrow V^{**}$ μονομορφισμός K -προτύπων, έπεται το επί (πράγματι, αφού λόγω του 1-1 πρέπει $\dim_K \text{Im} \tau = \dim_K V - \dim_K \ker \tau = \dim_K V = \dim_K V^{**}$, άρα $\text{Im} \tau = V^{**}$)

ii) Έστω $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ βάση του W με $m < n = \dim_K V^$ (αφού $W \leq V^*$), τότε επεκτείνουμε το B σε βάση $A = \{\phi_1, \dots, \phi_m, \psi_1, \dots, \psi_k\}$ του V^* (όπου $k > 0$ και $m + k = n$). Τώρα θεωρούμε την δυϊκή βάση του V^{**} ως προς την A , έστω $A^* = \{\phi_1^*, \dots, \phi_m^*, \psi_1^*, \dots, \psi_k^*\}$. Επιπλέον, από *i)* υπάρχουν $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k \in V$ ώστε $\tau(v_i) = \phi_i^*$ και $\tau(w_j) = \psi_j^*$ για κάθε $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k$. Τώρα, $\phi_i(w_1) = \tau(w_1)(\phi_i) = \psi_1^*(\phi_i) = 0, \forall i = 1, \dots, m$ (η τρίτη ισότητα ισχύει επειδή A^* δυϊκή βάση της A). Το τελευταίο σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ είναι βάση του W , δίνει ότι $f(w_1) = 0, \forall f \in W$.*

□

Απόδειξη. (Πρότασης)

i) Έστω ότι $Ime \leq S_K(n, r) = A_K(n, r)^*$ τότε (από Λήμμα 2.4.1) υπάρχει $0 \neq c \in A_K(n, r)$ ώστε $f(c) = 0, \forall f \in Ime$, δηλαδή $e_g(c) = 0, \forall g \in \Gamma$, άρα $c(g) = 0, \forall g \in \Gamma$, συνεπώς $c = 0$, άτοπο. Τελικά πρέπει $Ime = S_K(n, r)$.

ii) ($\implies$): Έστω $f \in A_K(n, r)$ και $k = \sum_g k_g g \in kere$, τότε $e(k) = 0 \iff \sum_g k_g e_g = 0 \implies \sum_g k_g e_g(f) = 0 \implies \sum_g k_g f(g) = 0 \implies \tilde{f}(k) = 0$, άρα $k \in \ker \tilde{f}$.

($\impliedby$): Έστω $f \in K^\Gamma$ με $kere \subseteq \ker \tilde{f}$. Τότε ορίζουμε $y : S_K(n, r) \rightarrow K, e(k) \mapsto \tilde{f}(k)$ και ισχύει ότι $y \in S_K(n, r)^* = A_K(n, r)^{**}$. Πράγματι,

y καλά ορισμένη: Καταρχάς κάθε στοιχείο του $S_K(n, r)$ έχει την μορφή $e(k)$ (αφού από i) η e είναι επί). Έστω τώρα $e(k_1) = e(k_2)$ τότε $k_1 - k_2 \in kere \subseteq \ker \tilde{f}$, συνεπώς $\tilde{f}(k_1 - k_2) = 0 \iff \tilde{f}(k_1) = \tilde{f}(k_2)$.

y ομομορφισμός K-προτύπων: $y(e(k_1) + e(k_2)) = y(e(k_1 + k_2)) = \tilde{f}(k_1 + k_2) = \tilde{f}(k_1) + \tilde{f}(k_2) = y(e(k_1)) + y(e(k_2))$. Όμοια το $y(ke(s)) = ky(e(s))$, για $k \in K, s \in K\Gamma$.

Τώρα από το Λήμμα 2.4.1, υπάρχει $c \in A_K(n, r)$ ώστε $\tau(c) = y$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \tau(c)(e(k)) &= y(e(k)), \forall k \in K\Gamma \iff e(k)(c) = \tilde{f}(k), \forall k \in K\Gamma \implies \\ e(g)(c) &= \tilde{f}(g) = f(g), \forall g \in \Gamma \iff c(g) = f(g), \forall g \in \Gamma \implies f = c \in A_K(n, r). \end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Εν' γένη η ιδιότητα του επί της απεικόνισης e δεν είναι εύκολο να αποδειχθεί κατασκευαστικά, καθώς για παράδειγμα στην περίπτωση του $S_K(2, 2)$ μπορούμε να βρούμε $i, j \in I(2, 2)$ ώστε $e(g) \neq \xi_{i,j}$ για κάθε $g \in \Gamma$, οπότε για την απόδειξη του επί είναι αναγκαίο να αναζητήσουμε ποσότητες της μορφής $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ ώστε $e(k) = \xi_{i,j}$, πράγμα που το καθιστά ακόμα δυσκολότερο, αφού όχι μόνο έχουμε να βρούμε αντιστρέψιμους πίνακες $g \in \Gamma$, αλλά και κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Πρόταση 2.4.2. Έστω $V \in \text{mod}(K\Gamma)$. Τότε, $V \in M_K(n, r) \iff kere \cdot V = 0$.

Απόδειξη.

Εφόσον $V \in \text{mod}(K\Gamma)$, αρκεί να δείξουμε ότι, $cf(V) \subseteq A_K(n, r) \iff kere \cdot V = 0$. Πράγματι, έστω $\{v_b \mid b \in B\}$ K-βάση του V , $\{r_{ab}\}_{a,b}$ τα coefficient functions και $\tilde{r}_{ab} : K\Gamma \rightarrow K$ οι K-γραμμικές επεκτάσεις των r_{ab} . Τότε:

$$kere \cdot V = 0 \iff kv = 0, \forall v \in V, k \in kere \quad (1)$$

$$\iff kv_b = 0 \forall b \in B, k \in kere \quad (2)$$

$$\iff \tilde{r}_{ab}(k) = 0, \forall a, b \in B, k \in kere \quad (3)$$

$$\iff \tilde{r}_{ab}(kere) = 0, \forall a, b \in B \quad (4)$$

Αιτιολόγηση της (2): Η $(\implies)$ είναι σαφές, ενώ για τη $(\impliedby)$ αν $v \in V$ τότε $v = \sum_{a \in B} r_a v_a$, $r_a \in K$, και $kv = \sum_{a \in B} r_a(kv_a) = 0$ (πρώτη ισότητα ισχύει αφού $K\Gamma = K$ -άλγεβρα και $V = K\Gamma$ -πρότυπο, Παρατήρηση 1.1.1 iii)).

Αιτιολόγηση της (3): Αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$, τότε, $kv_b = \sum_g k_g(gv_b) = \sum_g k_g(\sum_{a \in B} r_{ab}(g)v_a) = \sum_{a \in B} (\sum_g k_g r_{ab}(g))v_a = \sum_{a \in B} \tilde{r}_{ab}(k)v_a$, τώρα εφόσον $\{v_a \mid a \in B\}$ είναι K -βάση του V έχουμε ότι :

$$kv_b = 0, \forall b \in B, k \in \ker e \iff \sum_{a \in B} \tilde{r}_{ab}(k)v_a = 0, \forall b \in B, k \in \ker e \iff$$

$$\tilde{r}_{ab}(k) = 0, \forall a, b \in B, k \in \ker e.$$

Τελικά, έχουμε ότι $\ker e \cdot V = 0 \iff \tilde{r}_{ab}(\ker e) = 0, \forall a, b \in B$, άρα από Πρόταση 2.4.1 έπεται ότι $\ker e \cdot V = 0 \iff r_{ab} \in A_K(n, r), \forall a, b \in B \iff cf(V) \subseteq A_K(n, r)$. □

Παρατήρηση 2.4.3. i) Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε το V μπορεί να γίνει $S_K(n, r)$ -πρότυπο ώστε $V \in \text{mod}(S_K(n, r))$, με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $e(k) \cdot v := k \cdot v$ για κάθε $k \in K\Gamma, v \in V$. Επιπλέον η δομή K -προτύπου που επάγει η $S_K(n, r)$ στο V (δηλαδή, $k \cdot v := (k \cdot 1_{S_K(n, r)}) \cdot v, k \in K, v \in V$) είναι ίδια με την αρχική που είχε από την $K\Gamma$.

ii) Έστω $V \in \text{mod}(S_K(n, r))$, τότε το V μπορεί να γίνει $K\Gamma$ -πρότυπο ώστε $V \in M_K(n, r)$, με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $k \cdot v := e(k) \cdot v$ για κάθε $k \in K\Gamma, v \in V$. Επιπλέον η δομή K -προτύπου που επάγει η $K\Gamma$ στο V (δηλαδή, $k \cdot v := (k \cdot 1_{K\Gamma}) \cdot v, k \in K, v \in V$) είναι ίδια με την αρχική που είχε από την $K\Gamma$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς e επί, άρα το τυχόν στοιχείο στην $S_K(n, r)$ γράφεται ως $e(k)$ για $k \in K\Gamma$. Επίσης αν $k_1, k_2 \in K\Gamma$ με $e(k_1) = e(k_2)$ τότε $k_1 - k_2 \in \ker e$, όμως $\ker e \cdot V = 0$ (αφού $V \in M_K(n, r)$), άρα $(k_1 - k_2)v = 0 \iff k_1v = k_2v$. Όποτε ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος. Όσο για τις ιδιότητες του εξωτερικού πολ/μού είναι όλες άμεσες αφού e επιμορφισμός K -αλγεβρών (αυτή που θέλει προσοχή είναι η $1_{S_K(n, r)} \cdot v = v$, η οποία ισχύει καθώς $1_{S_K(n, r)} \xrightarrow{e \in \pi_1} e(1_{K\Gamma})$). Τώρα το τελευταίο σκέλος, έστω $k \in K, v \in V$, τότε $k \cdot v = (k \cdot 1_{S_K(n, r)}) \cdot v = (k \cdot e(1_{K\Gamma})) \cdot v = e(k \cdot 1_{K\Gamma}) \cdot v = (k \cdot 1_{K\Gamma})v = kv$.

ii) Το V είναι $K\Gamma$ -πρότυπο με τον ίδιο επαγόμενο εξωτερικό πολ/μό ως προς K παρόμοια με το i). Επιπλέον, αφού $V \in \text{mod}(S_K(n, r))$ και έχει την ίδια επαγόμενη δομή K -προτύπου και ως $K\Gamma$ -πρότυπο, αλλά και ως $S_K(n, r)$ -πρότυπο, τότε $\dim_K V < \infty$ και $V \in \text{mod}(K\Gamma)$. Όποτε αν δείξουμε ότι $cf(V) \subseteq A_K(n, r)$ τότε $V \in M_K(n, r)$, πράγματι από Πρόταση 2.4.2 αρκεί να δείξουμε ότι $\ker e \cdot V = 0$, πράγμα άμεσο εξ' ορισμού του εξωτερικού πολ/μού της $K\Gamma$ στο V . □

Σχόλιο. Από εδώ και κάτω, όταν έχουμε ένα $V \in M_K(n, r)$ θα το βλέπουμε σαν αντικείμενο της $\text{mod}(S_K(n, r))$ με το τρόπο που είδαμε στην παρατήρηση και ανάποδα αν $V \in \text{mod}(S_K(n, r))$, χωρίς κάποια ιδιαίτερη αναφορά.

Πόρισμα 2.4.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$ το οποίο είναι και $S_K(n, r)$ -πρότυπο (με $e(k) \cdot v = k \cdot v$, για κάθε $k \in K\Gamma$, $v \in V$), τότε ένα $U \subseteq V$ είναι $K\Gamma$ -υποπρότυπο αν και μόνον αν είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο, ιδιαιτέρως $\{K\Gamma\text{-υποπρότυπα του } V\} = \{S_K(n, r)\text{-υποπρότυπα του } V\}$. Επιπλέον αν $V, W \in M_K(n, r)$, τότε μία $f : V \rightarrow W$ είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων αν και μόνον αν είναι ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων.

Απόδειξη.

Άμεσο εξ' ορισμού του τρόπου που συνδέονται οι εξωτερικοί πολλαπλασιασμοί της $K\Gamma$ και $S_K(n, r)$ στο V (Παρατήρηση 2.4.3)

□

Σχόλιο. Η επόμενη παρατήρηση αν και απλή είναι αρκετά σημαντική, καθώς μας υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο θα δρα η $S_K(n, r)$ πάνω σε ένα πρότυπο της $M_K(n, r)$.

Παρατήρηση 2.4.4. Έστω $V \in M_K(n, r)$ και $\{v_b \mid b \in B\}$ (πεπερασμένη) K -βάση του V . Τότε $\xi \cdot v_b = \sum_{a \in B} \xi(r_{ab})v_a$, για κάθε $\xi \in S_K(n, r)$, $b \in B$. (Όπου $r_{ab} : \Gamma \rightarrow K$ τα coefficient functions).

Απόδειξη.

Καταρχάς έχει νόημα το $\xi(r_{ab})$ αφού $\xi : A_K(n, r) \rightarrow K$ και $cf(V) \subseteq A_K(n, r)$ (γιατί $V \in M_K(n, r)$). Τώρα, αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $b \in B$, έχουμε:

$$\begin{aligned} e(k) \cdot v_b &= k \cdot v_b = \sum_g k_g (g \cdot v_b) = \sum_g k_g \left(\sum_{a \in B} r_{ab}(g) v_a \right) = \\ &= \sum_{a \in B} \left(\sum_g k_g r_{ab}(g) \right) v_a = \sum_{a \in B} \left(\sum_g k_g e_g(r_{ab}) \right) v_a = \sum_{a \in B} \left(\left(\sum_g k_g e(g) \right) (r_{ab}) \right) v_a = \sum_{a \in B} e(k)(r_{ab}) v_a. \end{aligned}$$

Επειδή τα $k \in K\Gamma$, $b \in B$ ήταν τυχόν και $e : K\Gamma \rightarrow S_K(n, r)$ επί, έπεται το ζητούμενο για κάθε $\xi \in S_K(n, r)$, $b \in B$.

2.5 $\mathbb{Z}$ -forms.

Στο υποκεφάλαιο αυτό χοντρικά ο στόχος μας θα είναι η μελέτη της άλγεβρας του Schur και γενικά των κατηγοριών $M_K(n, r), \text{mod}(S_K(n, r))$, μέσω μιας μεθόδου αποξένωσης του σώματος K και μελέτης της "υπόλοιπης" άλγεβρας $S_K(n, r)$ πάνω από το $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Θεμέλιο έναρξης μίας τέτοιας μελέτης θα αποτελέσει η Πρόταση 2.5.1.

Ορισμός 2.5.1. *i)* Συμβολίζουμε με $S_{\mathbb{Z}}(n, r) := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i, j \in I(n, r)\}$ το $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπο του $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ που παραγέται (σαν $\mathbb{Z}$ -πρότυπο) από τα $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \in S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ ($i, j \in I(n, r)$).

ii) Συμβολίζουμε με $A_{\mathbb{Z}}(n, r) := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i, j \in I(n, r)\}$ το $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπο του $A_{\mathbb{Q}}(n, r)$ που παραγέται (σαν $\mathbb{Z}$ -πρότυπο) από τα $c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \in A_{\mathbb{Q}}(n, r)$ ($i, j \in I(n, r)$).

Σημείωση: από εδώ και πέρα όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στα στοιχεία των $S_K(n, r), A_K(n, r)$ (για λόγους αποφυγής σύγχυσης), απλά βάζουμε στη δύναμη το σώμα K .

Παρατήρηση 2.5.1. *i)* $S_{\mathbb{Z}}(n, r) = \{\xi \in S_{\mathbb{Q}}(n, r) \mid \xi(A_{\mathbb{Z}}(n, r)) \subseteq \mathbb{Z}\}$.

ii) Τα $S_{\mathbb{Z}}(n, r), A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ είναι ελεύθερα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα με $\mathbb{Z}$ -βάσεις τα $\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}, \{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$, αντίστοιχα. (Όπου υπενθυμίζουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι σύνολο αντιπροσώπων τροχιών της δεξιάς δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r) \times I(n, r)$).

iii) Το $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ είναι $\mathbb{Z}$ -υπόάλγεβρα του $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$. (Υπενθυμίζουμε ότι κάθε δακτύλιος είναι $\mathbb{Z}$ -άλγεβρα, άρα αρκεί το $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ να είναι υποδακτύλιος του $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$).

Απόδειξη.

i) " $\subseteq$ ": Έστω $\xi \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και $x \in A_{\mathbb{Z}}(n, r)$, τότε $x = \sum_{(i,j) \in I \times I} n_{i,j} c_{i,j}^{\mathbb{Q}}$ και $\xi = \sum_{(p,q) \in I \times I} m_{p,q} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}$, όπου $n_{i,j}, m_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $I = I(n, r)$. Συνεπώς $\xi(x) = \sum_{(p,q)} \sum_{(i,j)} m_{p,q} n_{i,j} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}})$, το τελευταίο ανήκει στο $\mathbb{Z}$, αφού $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) \in \{1, 0\}$ (από Ορισμός 2.3.2).

" $\supseteq$ ": Έστω $\eta \in \{\xi \in S_{\mathbb{Q}}(n, r) \mid \xi(A_{\mathbb{Z}}(n, r)) \subseteq \mathbb{Z}\}$, τότε από (Πρόταση 2.3.1) έχουμε ότι $\eta = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} q_{i,j} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}$, όπου $q_{i,j} \in \mathbb{Q}$. Από υπόθεση, για κάθε $(k, l) \in \mathcal{T}$, έχουμε $\mathbb{Z} \ni \eta(c_{k,l}^{\mathbb{Q}}) = q_{k,l}$, (η ισότητα ισχύει αφού $\mathcal{T}$ = σύνολο αντιπροσώπων) συνεπώς $\eta \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$.

ii) Κάνουμε το $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και όμοια το άλλο. Καταρχάς το $\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$ είναι $\mathbb{Q}$ -βάση του $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$, οπότε είναι άμεσα $\mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$. Μένει να δείξουμε ότι $S_{\mathbb{Z}}(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$, πράγματι ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι σαφές, ανάποδα αν $\xi \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$, τότε $\xi = \sum_{(p,q) \in I \times I} m_{p,q} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}$ όπου $m_{p,q} \in \mathbb{Z}$, όμως από Παρατήρηση

2.3.1 *i)* και επειδή $\mathcal{T}$ = σύνολο αντιπροσώπων, (βγάζοντας κοινούς παράγοντες) έχουμε $\xi = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \left(\sum_{(p,q) \sim (i,j)} m_{p,q} \right) \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \in \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$.

iii) Έστω $(i, j), (k, l) \in I(n, r) \times I(n, r)$, τότε $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}} = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z(i, j, k, l, p, q) \xi_{p,q} \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$
 (Πρόταση 2.3.3). Γενικά, αν $x, y \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ τότε $x = \sum_{(i,j) \in I \times I} n_{i,j} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}$, $y = \sum_{(k,l) \in I \times I} r_{k,l} \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}$, όπου $n_{i,j}, r_{k,l} \in \mathbb{Z}$, άρα $xy = \sum_{(i,j)} \sum_{(p,q)} n_{i,j} r_{k,l} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}$, όπου το τελευταίο ανήκει στο $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ από ειδική περίπτωση.

□

Υπενθύμιση 2.5.1. (Από *multilinear άλγεβρα*).

- i) Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και A, B δύο R -άλγεβρες, τότε το R -πρότυπο $A \otimes B$ γίνεται R -άλγεβρα με την ιδιότητα $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$, για κάθε $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$.
- ii) Έστω R, S μεταθετικοί δακτύλιοι, αν M είναι R -πρότυπο, S -πρότυπο με $r \cdot (s \cdot m) = s \cdot (r \cdot m)$, όπου $r \in R, s \in S$, τότε θα λέμε το M ότι είναι (R, S) -πρότυπο.
 Αν $M_1, \dots, M_{i-1}, M_{i+1}, \dots, M_n$ R -πρότυπα και M_i (R, S) -πρότυπο τότε το R -πρότυπο $M_1 \otimes_R \dots \otimes_R M_n$ γίνεται S -πρότυπο με την ιδιότητα $s \cdot (m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = m_1 \otimes \dots \otimes s \cdot m_i \otimes \dots \otimes m_n$, ιδιαιτέρως το $M_1 \otimes \dots \otimes M_n$ είναι (R, S) -πρότυπο.
- iii) Έστω R, S μεταθετικοί δακτύλιοι και A, B R -άλγεβρες ώστε το B να είναι (R, S) -πρότυπο. Τότε το R -πρότυπο $A \otimes B$ γίνεται R -άλγεβρα (όπως το i) και (R, S) -πρότυπο με την ιδιότητα $s \cdot (a \otimes b) = a \otimes s \cdot b$, για κάθε $s \in S, a, b \in B$. Ιδιαιτέρως το $A \otimes B$ είναι S -άλγεβρα.

Υπενθύμιση 2.5.2. (Από *multilinear άλγεβρα*)(Πάνω στα ελεύθερα R -πρότυπα).

- i) Έστω R μεταθετικός δακτύλιος, $M =$ ελεύθερο R -πρότυπο με R -βάση $\{m_b\}_{b \in B}$ και N ένα R -πρότυπο. Τότε το τυχόν στοιχείο $x \in M \otimes_R N$, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{b \in B} m_b \otimes n_b$, όπου $n_b \in N$ και πεπερασμένο το πλήθος όροι είναι μη-μηδενικοί. Παρόμοια πράγματα ισχύουν αν $x \in N \otimes_R M$.
- ii) Έστω R, S μεταθετικοί δακτύλιοι ώστε ο S να είναι (R, S) -πρότυπο (S -πρότυπο με τον φυσιολογικό τρόπο). Αν M είναι ελεύθερο R -πρότυπο με R -βάση το $\{v_b\}_{b \in B}$, τότε ορίζεται το (R, S) -πρότυπο $M \otimes_R S$ το οποίο είναι ελεύθερο S -πρότυπο με S -βάση το $\{v_b \otimes 1_S\}_{b \in B}$.

Απόδειξη. Το ii) έπεται άμεσα από το i) και μπορούμε να το δούμε.

$M = \text{span}_S\{v_b \otimes 1_S \mid b \in B\}$: Έστω $x \in M \otimes_R S$ τότε από i) γράφεται (μοναδικά) ως

$$x = \sum_{b \in B} v_b \otimes s_b = \sum_{b \in B} s_b \cdot (v_b \otimes 1_S), \quad s_b \in S.$$

$\{v_b \otimes 1_S \mid b \in B\}$ είναι S -γραμμικά ανεξάρτητο: Πράγματι, έστω $\{s_b\}_{b \in B} \subseteq S$ με $\sum_{b \in B} s_b \cdot (v_b \otimes 1_S) = 0$, τότε $\sum_{b \in B} v_b \otimes s_b = 0$ και από μοναδικότητα γραφής (Υπενθύμιση 2.5.2) έχουμε ότι $s_b = 0, \forall b \in B$. □

Σχόλιο. Οι υπενθυμίσεις 2.5.1, 2.5.2 αποτελούν κλασικά εργαλεία (με στοιχειώδεις αποδείξεις). Τα αναφέρουμε απλώς για να έχουμε μία γενικότερη εικόνα των ειδικών πραγμάτων που θα δούμε παρακάτω.

Πρόταση 2.5.1. *i) Έστω K =άπειρο σώμα τότε ορίζεται η $\mathbb{Z}$ -άλγεβρα $S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K$, η οποία γίνεται K -πρότυπο με την ιδιότητα $k' \cdot (a \otimes k) = a \otimes k'k$, για κάθε $a \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$, $k', k \in K$. Ιδιαίτερος το $S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ είναι K -άλγεβρα.*

ii) Υπάρχει ισομορφισμός K -αλγεβρών, $\phi : S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow S_K(n, r)$, με $\phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \xi_{i,j}^K$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Εφόσον τα $S_{\mathbb{Z}}(n, r), K$ είναι $\mathbb{Z}$ -άλγεβρες, τότε ορίζεται η $\mathbb{Z}$ -άλγεβρα $S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Επίσης το K είναι $(\mathbb{Z}, K)$ -πρότυπο (με το φυσιολογικό τρόπο), οπότε το συμπέρασμα έπεται από Υπενθύμιση 2.5.1 *iii*).

ii) Ξέρουμε ότι το σύνολο $\{\xi_{i,j}^K\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί K -βάση του $S_K(n, r)$. Επίσης επειδή το $\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί $\mathbb{Z}$ -βάση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$, τότε (από Υπενθύμιση 2.5.2 *ii*) το σύνολο $\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί K -βάση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Ιδιαίτερος $\dim_K S_K(n, r) = \dim_K (S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K) = |\mathcal{T}|$. Από τα τελευταία έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός K -προτύπων ώστε:

$$\phi : S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow S_K(n, r), \quad \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K \longmapsto \xi_{i,j}^K, \quad \text{για κάθε } (i, j) \in \mathcal{T}.$$

Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και άρα K -αλγεβρών. Πράγματι,

ϕ ομομορφισμός δακτυλίων: Θα κάνουμε την ειδική περίπτωση και μετά θα περάσουμε στην γενική. Έστω $(p, q), (i, j) \in \mathcal{T}$ τότε, $a := \phi((\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes k_1) \cdot (\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes k_2)) = \phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes k_1 k_2)$, όμως

$$\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} = \sum_{(k,l) \in \mathcal{T}} Z(i, j, p, q, k, l) \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}, \quad \text{άρα } a = \sum_{(k,l) \in \mathcal{T}} (Z(i, j, p, q, k, l) \cdot k_1 k_2) \xi_{k,l}^K =$$

$$= (k_1 k_2) \cdot \sum_{(k,l) \in \mathcal{T}} Z(i, j, p, q, k, l) \xi_{k,l}^K = (k_1 k_2) \cdot \xi_{i,j}^K \xi_{p,q}^K = (k_1 \xi_{i,j}^K) \cdot (k_2 \xi_{p,q}^K) = \phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes k_1) \cdot \phi(\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes k_2).$$

Γενικά, αν $x, y \in S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K$, τότε $x = \sum_{s=1}^m \xi_s \otimes k_s$ και $y = \sum_{t=1}^r \eta_t \otimes l_t$, όπου $\xi_s = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} n_{(i,j)}^{(s)} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}$,

$$\eta_t = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} n_{(p,q)}^{(t)} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \quad \text{και} \quad n_{(i,j)}^{(s)}, n_{(p,q)}^{(t)} \in \mathbb{Z}. \quad \text{Επομένως, } x = \sum_s \sum_{(i,j)} n_{(i,j)}^{(s)} \cdot (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes k_s) \quad \text{και} \quad y =$$

$$\sum_t \sum_{(p,q)} n_{(p,q)}^{(t)} \cdot (\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes l_t). \quad \text{Τώρα αφού } \phi \text{ ομομορφισμός } \mathbb{Z}\text{-προτύπων έχουμε}$$

$$\begin{aligned}
\phi(x \cdot y) &= \sum_s \sum_{(i,j)} \sum_t \sum_{(p,q)} n_{(i,j)}^{(s)} n_{(p,q)}^{(t)} \phi((\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes k_s)(\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes l_t)) \\
&= \sum_s \sum_{(i,j)} \sum_t \sum_{(p,q)} n_{(i,j)}^{(s)} n_{(p,q)}^{(t)} \phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes k_s) \phi(\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes l_t) \quad (\text{από ειδική περίπτωση}) \\
&= \left(\sum_s \sum_{(i,j)} n_{(i,j)}^{(s)} \phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes k_s) \right) \cdot \left(\sum_t \sum_{(p,q)} n_{(p,q)}^{(t)} \phi(\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes l_t) \right) = \phi(x) \phi(y)
\end{aligned}$$

Ως τώρα, έχουμε $\phi : S_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes K \longrightarrow S_K(n, r)$ ισομορφισμό K -αλγεβρών με $\phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \xi_{i,j}^K$, για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$, εμείς θα δείξουμε ότι η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $i, j \in I(n, r)$. Πράγματι, έστω $(i, j) \in I(n, r) \times I(n, r)$, τότε (επειδή $\mathcal{T} = \text{σύνολο αντιπροσώπων}$) υπάρχει (μοναδικό) $(p, q) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (p, q)$, δηλαδή $\xi_{i,j}^K = \xi_{p,q}^K$ και $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} = \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}$ (Παρατήρηση 2.3.1), έτσι $\phi(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \phi(\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \xi_{p,q}^K = \xi_{i,j}^K$.

□

Ορισμός 2.5.2. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$, ένα υποσύνολο $V_{\mathbb{Z}}$ του $V_{\mathbb{Q}}$, θα λέγεται $\mathbb{Z}$ -form αν ισχύουν τα εξής:

- i) $V_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_b \mid b \in B\}$, όπου $\{v_b \mid b \in B\}$ κάποια $\mathbb{Q}$ -βάση του $V_{\mathbb{Q}}$.
- ii) $V_{\mathbb{Z}}$ είναι κλειστό κάτω από την δράση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$. Δηλαδή, για κάθε $\xi \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και $x \in V_{\mathbb{Z}}$ ισχύει $\xi \cdot x \in V_{\mathbb{Z}}$. (Όπου το $V_{\mathbb{Q}}$ το βλέπουμε σαν $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ -πρότυπο σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.4.3)

Παράδειγμα 2.5.1. $S_{\mathbb{Q}}(n, r) \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $S_{\mathbb{Z}}(n, r) = \mathbb{Z}$ -form του $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$.

Απόδειξη.

Το $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ είναι $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ -πρότυπο με $\dim_{\mathbb{Q}} S_{\mathbb{Q}}(n, r) < \infty$ (Πρόταση 2.3.1) άρα $S_{\mathbb{Q}}(n, r) \in \text{mod}(S_{\mathbb{Q}}(n, r))$ συνεπώς το $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ γίνεται $\mathbb{Q}\Gamma_{\mathbb{Q}}$ -πρότυπο ώστε $S_{\mathbb{Q}}(n, r) \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ (Παρατήρηση 2.4.3). Τώρα $S_{\mathbb{Z}}(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$ (όπου $\{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\} = \mathbb{Q}$ -βάση του $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$) και προφανώς το $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ είναι κλειστό κάτω από τη δράση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$, αφού $S_{\mathbb{Z}}(n, r) = \mathbb{Z}$ -άλγεβρα.

□

Σχόλιο. Κάθε $\mathbb{Q}\Gamma_{\mathbb{Q}}$ -πρότυπο στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα $\mathbb{Z}$ -form. (Βλέπε [1, σελ. 16] ή [19, σελ. 256, Κεφάλαιο 6] ή [18, σελ. 158 (2.2c)])

- Παρατήρηση 2.5.2.**
- i) Με του συμβολισμούς του Ορισμού 2.5.2, το $V_{\mathbb{Z}}$ είναι κλειστό κάτω από την δράση της $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ αν και μόνον αν, $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_b \in V_{\mathbb{Z}}$ για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$ και $b \in B$.
 - ii) Το $V_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο με $\mathbb{Z}$ -βάση το $\{v_b \mid b \in B\}$.

Απόδειξη.

- i) Πράγματι το ($\implies$) είναι σαφές, ενώ ανάποδα τώρα, αν $\xi \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και $v \in V_{\mathbb{Z}}$, τότε $\xi = \sum_{(i,j) \in T} n_{i,j} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}$ (Παρατήρηση 2.5.1 ii)) και $x = \sum_{a \in B} m_a v_a$, με $n_{i,j}, m_a \in \mathbb{Z}$, συνεπώς,
 $\xi \cdot x = \sum_{(i,j)} \sum_a n_{i,j} m_a (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_a)$, όπου από ($\impliedby$) ανήκει στο $V_{\mathbb{Z}}$.
- ii) Αν δείξουμε ότι το $\{v_b \mid b \in B\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο τότε τελειώσαμε. Αυτό όμως ισχύει άμεσα καθώς είναι $\mathbb{Q}$ -γραμμικά ανεξάρτητο (ως $\mathbb{Q}$ -βάση του $V_{\mathbb{Q}}$) και $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

□

Ορισμός 2.5.3. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του. Τότε ορίζεται το $\mathbb{Z}$ -πρότυπο $V_K := V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$, το οποίο είναι K -πρότυπο με $k \cdot (v \otimes l) = v \otimes kl$, $v \in V$, $k, l \in K$ (βλέπε Υ-πενθύμιση 2.5.1 ii)).

Πρόταση 2.5.2. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$, $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\mathbb{Q}}$ και $\{v_b \mid b \in B\}$ η $\mathbb{Q}$ -βάση του $V_{\mathbb{Q}}$ με $V_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_b \mid b \in B\}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- i) Το $\{v_b \otimes 1_K \mid b \in B\}$ είναι K -βάση του $V_K = V_{\mathbb{Z}} \otimes K$. Ιδιαίτερος $\dim_K V_K = \dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z}}$.
- ii) a) Το V_K γίνεται $S_K(n, r)$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό, $\cdot : S_K(n, r) \times V_K \longrightarrow V_K$,
 $(\sum_{(i,j) \in T} k_{i,j} \xi_{i,j}^K) \cdot (\sum_{s=1}^m v_s \otimes k_s) := \sum_{(i,j)} \sum_s (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v_s) \otimes (k_{i,j} k_s)$, όπου $k_{i,j}, k_s \in K$ και $v_s \in V_{\mathbb{Z}}$.
 Ιδιαίτερος, $r \xi_{i,j}^K \cdot (v \otimes k) = (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v) \otimes rk$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, $v \in V_{\mathbb{Z}}$ και $k, r \in K$.
- b) Η δομή K -προτύπου που επάγει η $S_K(n, r)$ στο V_K (δηλαδή $k \cdot v := (k \cdot 1_{S_K(n, r)}) \cdot v$) ταυτίζεται με την αρχική δομή K -προτύπου που είχε (Ορισμό 2.5.3).
- c) $V_K = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \in M_K(n, r)$.
- iii) Έστω $R_{\mathbb{Q}} = (r_{ab}^{\mathbb{Q}})_{a,b}$ ο αναλλοίωτος πίνακας του $V_{\mathbb{Q}}$ ως προς την $\mathbb{Q}$ -βάση $\{v_b\}_{b \in B}$ και $R_K = (r_{ab}^K)_{a,b}$ ο αναλλοίωτος πίνακας του V_K ως προς την K -βάση $\{v_b \otimes 1_K\}_{b \in B}$ τότε:
- a) $r_{ab}^{\mathbb{Q}} \in A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $a, b \in B$ και $i, j \in I(n, r)$.
- b) $r_{ab}^{\mathbb{Q}} = \sum_{(i,j) \in T} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^{\mathbb{Q}}$ και $r_{ab}^K = \sum_{(i,j) \in T} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^K$, για κάθε $a, b \in B$.
- c) $\xi_{i,j}^K(r_{ab}^K) = \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ και $a, b \in B$.

Απόδειξη. (Πρότασης).

i) Το K είναι $(\mathbb{Z}, K)$ -πρότυπο, το $V_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο με $\mathbb{Z}$ -βάση το $\{v_b\}_{b \in B}$ άρα από Υπενθύμιση 2.5.2 το $V_K = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ είναι ελεύθερο K -πρότυπο με K -βάση το $\{v_b \otimes 1_K \mid b \in B\}$.

ii) a), b). Θα γίνει με χρήση της Παρατήρησης 1.2.4: Θεωρούμε $\tau : \{\xi_{i,j}^K \mid (i,j) \in \mathcal{T}\} \longrightarrow \text{End}_K(V_K)$ με $\tau(\xi_{i,j}^K)(\sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s) = \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes k_s$. Η $\tau(\xi_{i,j}^K)$ είναι άμεσα K -γραμμική και πρέπει να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, καταρχάς $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v_s \in V_{\mathbb{Z}}$ (αφού $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ -form) οπότε έχει νόημα η ποσότητα $(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v_s \otimes k_s) \in V_K$. Έστω τώρα $\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r = \sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση $\psi : V_{\mathbb{Z}} \times K \longrightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes K$, με $\psi(v, k) = \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v \otimes k$, η ψ είναι άμεσα multilinear $\mathbb{Z}$ -προτύπων, άρα υπάρχει ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων $\phi : V_{\mathbb{Z}} \otimes K \longrightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes K$ με $\phi(v \otimes k) = \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v \otimes k$. Τώρα, εφόσον $\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r = \sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t$, πρέπει $\phi(\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r) = \phi(\sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t) \iff \sum_{r=1}^n \phi(v_r \otimes k_r) = \sum_{t=1}^m \phi(y_t \otimes l_t) \iff \sum_{r=1}^n \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v_r \otimes k_r = \sum_{t=1}^m \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} y_t \otimes l_t \iff \tau(\xi_{i,j}^K)(\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r) = \tau(\xi_{i,j}^K)(\sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t)$. Έστω (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) $\tau : S_K(n, r) \longrightarrow \text{End}_K(V_K)$ η K -γραμμική επέκταση της τ . Τότε ισχύει ότι:

$$\tau(\xi_{i,j}^K \cdot \xi_{k,l}^K) = \tau(\xi_{i,j}^K) \circ \tau(\xi_{k,l}^K): \quad \text{Καταρχάς } \xi_{i,j}^K \xi_{k,l}^K = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z(i, j, k, l, p, q) \xi_{p,q}^K \text{ όπου για συντομία}$$

γράφουμε $Z(i, j, k, l, p, q) = Z_{p,q}$. Έστω $x = \sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s \in V_K$ τότε:

$$\begin{aligned} \tau(\xi_{i,j}^K \xi_{k,l}^K)(x) &= \left(\sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \cdot \tau(\xi_{p,q}^K) \right)(x) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \cdot \tau(\xi_{p,q}^K) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s \right) = \\ &= \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \cdot \left(\sum_{s=1}^n (\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes k_s \right) = \sum_{s=1}^n \left(\left(\sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \right) \cdot v_s \right) \otimes k_s = \sum_{s=1}^n \left((\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}) \cdot v_s \right) \otimes k_s = \\ &= \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot (\xi_{k,l}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s)) \otimes k_s = \tau(\xi_{i,j}^K) \left(\sum_{s=1}^n (\xi_{k,l}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes k_s \right) = \tau(\xi_{i,j}^K) (\tau(\xi_{k,l}^K)(x)) = \tau(\xi_{i,j}^K) \circ \tau(\xi_{k,l}^K)(x) \end{aligned}$$

Οπότε η $\tau : S_K(n, r) \longrightarrow \text{End}_K(V_K)$ είναι ομομορφισμός K -αλγεβρών και ισχύει $\tau(1_{S_K(n,r)}) = \mathbb{I}_{V_K}$. Πράγματι,

$$\tau(1_{S_K(n,r)}) = \mathbb{I}_{V_K}: \quad \text{Καταρχάς για το τυχόν } x = \sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s \in V_K \text{ ισχύει ότι}$$

$$\tau(r\xi_{i,j}^K) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s \right) = \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes rk_s \text{ για κάθε } i, j \in I(n, r), r \in K.$$

Πράγματι, έστω $i, j \in I(n, r)$ τότε υπάρχει (μοναδικό) $(k_i, l_j) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (k_i, l_j)$, άρα $\xi_{i,j}^K = \xi_{k_i, l_j}^K$ και $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} = \xi_{k_i, l_j}^{\mathbb{Q}}$, οπότε

$$\tau(r\xi_{i,j}^K) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s \right) = r\tau(\xi_{k_i, l_j}^K) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes k_s \right) = \sum_{s=1}^n (\xi_{k_i, l_j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes rk_s = \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes rk_s$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\tau(1_{S_K(n,r)})(x) &= \sum_{s=1} \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \tau(\xi_{i,i}^K)(v_s \otimes k_s) = \sum_{s=1} \sum_{i \in \mathcal{T}_o} (\xi_{i,i}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s) \otimes k_s = \sum_{s=1} (\sum_{i \in \mathcal{T}_o} (\xi_{i,i}^{\mathbb{Q}} \cdot v_s)) \otimes k_s \\ &= \sum_{s=1} ((\sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}^{\mathbb{Q}}) \cdot v_s) \otimes k_s = \sum_{s=1} (1_{S_{\mathbb{Q}}(n,r)} \cdot v_s) \otimes k_s = x = \mathbb{I}_{V_K}(x)\end{aligned}$$

Άρα $\tau(1_{S_K(n,r)}) = \mathbb{I}_{V_K}$.

Συνεπώς το V_K είναι $S_K(n,r)$ -πρότυπο με εξωτερικό πολ/μό τον εξής: $\xi \cdot v = \tau(\xi)(v)$ για κάθε $\xi \in S_K(n,r), v \in V_K$. Άμεσα επαληθεύεται ότι $(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{i,j}^K) \cdot (\sum_{s=1}^m v_s \otimes k_s) = \sum_{(i,j)} \sum_s (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v_s) \otimes (k_{i,j} k_s)$ και από αυτό που δείξαμε στην ταυτότητα $\tau(1_{S_K(n,r)}) = \mathbb{I}_{V_K}$, άμεσα επίσης επαληθεύεται ότι $r \xi_{i,j}^K \cdot (v \otimes k) = (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v) \otimes rk$ για κάθε $i, j \in I(n,r), v \in V_{\mathbb{Z}}$ και $k, r \in K$.

c). Το V_K είναι $S_K(n,r)$ -πρότυπο με $\dim_K V_K < \infty$ (από i) και ii) b)), άρα $V \in \text{mod}(S_K(n,r))$ και έτσι από Παρατήρηση 2.4.3 ii) έπεται ότι $V_K \in M_K(n,r)$.

iii) a). Έστω $b \in B$, τότε επειδή $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ -form έχουμε ότι $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_b \in V_{\mathbb{Z}}$, οπότε $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_b = \sum_{a \in B} n_{ab} v_a$,

όπου $n_{ab} \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον από Παρατήρηση 2.4.4 πρέπει $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_b = \sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \cdot v_b$, όμως $\{v_b\}_{b \in B}$

είναι $\mathbb{Q}$ -βάση άρα $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) = n_{ab} \in \mathbb{Z}$ για κάθε $(i,j) \in \mathcal{T}, a, b \in B$. Θα το δείξουμε τώρα για κάθε $i, j \in I(n,r)$, πράγματι αυτό είναι άμεσο αφού για κάθε $i, j \in I(n,r)$ υπάρχει (μοναδικό) $(k_i, l_j) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i,j) \sim (k_i, l_j) \iff \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} = \xi_{k_i, l_j}^{\mathbb{Q}}$, δηλαδή $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) = \xi_{k_i, l_j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}$. Όσο για το άλλο σκέλος, εφόσον $r_{ab}^{\mathbb{Q}} \in A_{\mathbb{Q}}(n,r)$ (αφού $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n,r)$), έχουμε $r_{ab}^{\mathbb{Q}} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} q_{i,j} c_{i,j}^{\mathbb{Q}}$, όπου

$q_{i,j} \in \mathbb{Q}$, τότε όμως (από πρώτο σκέλος και Ορισμό 2.3.2) πρέπει $\mathbb{Z} \ni \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) = q_{k,l}$ για κάθε $(k,l) \in \mathcal{T}$, άρα $r_{ab}^{\mathbb{Q}} \in A_{\mathbb{Z}}(n,r)$.

b). Από iii) a) έστω $r_{ab}^{\mathbb{Q}} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} n_{i,j} c_{i,j}^{\mathbb{Q}}, n_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Οπότε για κάθε $(k,l) \in \mathcal{T}$ έχουμε, $\xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) = \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} n_{i,j} c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} n_{i,j} \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) = n_{k,l}$. (η τελευταία ισότητα ισχύει αφού $(k,l) \in \mathcal{T}$ σύνολο αντιπροσώπων). Συνεπώς $r_{ab}^{\mathbb{Q}} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^{\mathbb{Q}}$. Πάμε να υπολογίσουμε τώρα τα $\{r_{ab}^K\}$,

θεωρούμε τον επιμορφισμό K -αλγεβρών $e_K : K\Gamma_K \longrightarrow S_K(n,r)$, και για κάθε $b \in B$ και $g \in \Gamma_K$ έχουμε:

Υπάρχουν (Πρόταση 2.3.1) $k_{i,j}(g) \in K$ με $e_K(g) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j}(g) \xi_{i,j}^K$ και μάλιστα $k_{i,j}(g) = c_{i,j}^K(g)$ (αφού $\forall (k,l) \in \mathcal{T}$ έχουμε $c_{k,l}^K(g) = e_K(g)(c_{k,l}^K) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j}(g) \xi_{i,j}^K(c_{k,l}^K) = k_{k,l}(g)$). Οπότε,

$$\begin{aligned}
g \cdot (v_b \otimes 1_K) &= e_K(g) \cdot (v_b \otimes 1_K) = \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} c_{i,j}^K(g) \xi_{i,j}^K \right) \cdot (v_b \otimes 1_K) \xrightarrow{iii)a)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} v_b \otimes c_{i,j}^K(g)) = \\
&= \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \left(\left(\sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) v_a \right) \otimes c_{i,j}^K(g) \right) \xrightarrow{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \cdot (v_a \otimes c_{i,j}^K(g)) = \\
&= \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^K(g) \cdot (v_a \otimes 1_K) = \sum_{a \in B} \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^K(g) \right) \cdot (v_a \otimes 1_K).
\end{aligned}$$

$$\text{οπότε } r_{ab}^K(g) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^K(g), \quad \forall g \in \Gamma_K, \quad \text{άρα } r_{ab}^K = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^K.$$

c). Από *iii)a)* έχουμε $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}$ άρα για κάθε $(k, l) \in \mathcal{T}$ από *iii)b)* έχουμε,

$$\xi_{k,l}^K(r_{ab}^K) = \xi_{k,l}^K \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) c_{i,j}^K \right) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^K) = \xi_{k,l}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K.$$

□

Πρόταση 2.5.3. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\mathbb{Q}}$ με $V_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_b \mid b \in B\}$ όπου $\{v_b \mid b \in B\}$ μία $\mathbb{Q}$ -βάση του $V_{\mathbb{Q}}$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ ώστε:

$$\delta_{\mathbb{Q}} : V_{\mathbb{Q}} \longrightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}, \quad v_b \longmapsto v_b \otimes 1.$$

Απόδειξη.

Καταρχάς $V_{\mathbb{Z}} = \text{ελεύθερο } \mathbb{Z}\text{-πρότυπο με βάση το } \{v_b \mid b \in B\}$ και $V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ με $\mathbb{Q}$ -βάση το $\{v_b \otimes 1_{\mathbb{Q}} \mid b \in B\}$ (Πρόταση 2.5.2), ιδιαιτέρως $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$. Οπότε υπάρχει ισομορφισμός $\mathbb{Q}$ -προτύπων έστω:

$$\delta_{\mathbb{Q}} : V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow V_{\mathbb{Q}}, \quad v_b \otimes 1 \longmapsto v_b.$$

$\delta_{\mathbb{Q}}$ ομομορφισμός στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$: Αρκεί να δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ -προτύπων. Έστω $\xi \in S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ με $\xi = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} q_{i,j} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}$ (όπου $q_{i,j} \in \mathbb{Q}$) και $x \in V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ με $x = \sum_{b \in B} q_b (v_b \otimes 1_{\mathbb{Q}}) = \sum_{b \in B} (v_b \otimes q_b)$ (όπου $q_b \in \mathbb{Q}$), τότε:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbb{Q}}(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot (v_b \otimes q_b)) &= \delta_{\mathbb{Q}}((\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_b) \otimes q_b) = \delta_{\mathbb{Q}}\left(\left(\sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) v_a\right) \otimes q_b\right) = \sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) q_b v_a = \\
q_b \sum_{a \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) v_a &= q_b (\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot v_b) = \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot (q_b v_b) = \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot \delta_{\mathbb{Q}}(v_b \otimes q_b).
\end{aligned}$$

(Σημείωση, $\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(r_{ab}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}$ από Πρόταση 2.5.2 iii)a)). Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{Q}}(\xi \cdot x) &= \delta_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \sum_{b \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot (v_b \otimes q_b)\right) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \sum_{b \in B} \delta_{\mathbb{Q}}(\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot (v_b \otimes q_b)) = \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \sum_{b \in B} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \cdot \delta_{\mathbb{Q}}(v_b \otimes q_b) = \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} q_{i,j} \xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}\right) \cdot \left(\sum_{b \in B} \delta_{\mathbb{Q}}(v_b \otimes q_b)\right) = \xi \cdot \delta_{\mathbb{Q}}(x). \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.5.4. Έστω ότι για κάθε άπειρο σώμα K έχουμε ένα αντικείμενο $W_K \in M_K(n, r)$. Λέμε ότι η οικογένεια $(W_K)_K$ ορίζεται πάνω από το $\mathbb{Z}$ (ή αλλιώς είναι $\mathbb{Z}$ -defined) αν υπάρχει $\mathbb{Z}$ -form έστω $W_{\mathbb{Z}}$ του $W_{\mathbb{Q}}$ και για κάθε K ισομορφισμός στην κατηγορία $M_K(n, r)$ έστω $\delta_K : W_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow W_K$. Τότε λέμε ότι η οικογένεια $(W_K)_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το $W_{\mathbb{Z}}$ και τους ισομορφισμούς $(\delta_K)_K$.

Παράδειγμα 2.5.2. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ που περιέχει $\mathbb{Z}$ -form (υπάρχουν τέτοια π.χ. το $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$). Τότε για κάθε άπειρο σώμα, θεωρούμε τα $V_K = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ και $\delta_K = \mathbb{I}_{V_K}$. Τότε η οικογένεια $(V_K)_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το $V_{\mathbb{Z}}$ και τους ισομορφισμούς $\mathbb{I}_{V_K} : V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K = V_K$. Πλουσιότερα παραδείγματα θα δούμε στις παρακάτω ενότητες.

Ορισμός 2.5.5. Έστω $(W_K)_K, (R_K)_K$ οικογένειες αντικειμένων της $M_K(n, r)$ οι οποίες είναι $\mathbb{Z}$ -defined από τα $W_{\mathbb{Z}}, R_{\mathbb{Z}}, (\delta_K)_K, (\eta_K)_K$ αντίστοιχα. Μία οικογένεια μορφισμών $(\theta_K)_K$ στην κατηγορία $M_K(n, r)$ με $\theta_K : W_K \longrightarrow R_K$ λέμε ότι είναι ορισμένη πάνω από το $\mathbb{Z}$ (ή $\mathbb{Z}$ -defined) αν ισχύουν τα παρακάτω:

i) $\theta_{\mathbb{Q}}(W_{\mathbb{Z}}) \subseteq R_{\mathbb{Z}}$.

ii) Για κάθε άπειρο σώμα έχουμε $\eta_K \circ (\theta_{\mathbb{Q}}|_{W_{\mathbb{Z}}} \otimes \mathbb{I}_K) = \theta_K \circ \delta_K$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται :

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbb{Z}} \otimes K & \xrightarrow{\theta_{\mathbb{Q}}|_{W_{\mathbb{Z}}} \otimes \mathbb{I}_K} & R_{\mathbb{Z}} \otimes K \\ \downarrow \delta_K & & \downarrow \eta_K \\ W_K & \xrightarrow{\theta_K} & R_K \end{array}$$

2.6 Τα πρότυπα $E^{\otimes r}$, $D_r(E)$, $\Lambda^r E$.

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Ορισμός 2.6.1. Έστω $E = E_K$ ένας K -διανυσματικός χώρος διάστασης n με βάση $\{e_\nu \mid \nu \in \underline{n}\}$. Το E γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο ως εξής:

- Δράση στις βάσεις των $K\Gamma, E_K$: Αν $g \in \Gamma$, $\nu \in \underline{n}$ τότε ορίζουμε $g \cdot e_\nu := \sum_{\mu \in \underline{n}} g_{\mu\nu} e_\mu = \sum_{\mu \in \underline{n}} c_{\mu\nu}(g) e_\mu$.
- Δράση γενικά (επιμεριστική): Αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$, $x = \sum_{\nu \in \underline{n}} r_\nu e_\nu \in E$, όπου $k_g, r_\nu \in K$, τότε ορίζουμε $k \cdot x := \sum_g \sum_{\nu \in \underline{n}} k_g r_\nu (g \cdot e_\nu)$.

Παρατήρηση 2.6.1. *i)* Το E είναι όντως καλά ορισμένο $K\Gamma$ -πρότυπο. Μάλιστα ο εξωτερικός πολ/μός του K στο E που έπεται από το $K\Gamma$, ταυτίζεται με τον αρχικό (δηλαδή $(k \cdot 1_{K\Gamma}) \cdot x = kx$, για κάθε $k \in K$, $x \in E$).

ii) Αν $\{r_{\mu\nu}\}_{\mu, \nu \in \underline{n}}$ τα coefficient functions ως (προς την βάση $\{e_\nu\}_{\nu \in \underline{n}}$), τότε $r_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}$ και άρα $cf(E) \leq A_K(n, 1)$, δηλαδή $E \in M_K(n, 1)$.

Απόδειξη.

i) Θα γίνει με χρήση της Παρατήρησης 1.2.1. Έστω $\tau : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(E)$, $\tau(g)(\sum_{\nu \in \underline{n}} k_\nu e_\nu) = \sum_{\nu \in \underline{n}} k_\nu (\sum_{\mu \in \underline{n}} g_{\mu\nu} e_\mu)$, για κάθε $g \in \Gamma$. Η $\tau(g)$ είναι καλά ορισμένη και K -γραμμική αφού $\{e_\nu\}_{\nu \in \underline{n}}$ είναι K -βάση του E . Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \tau(gh) &= \tau(g) \circ \tau(h): \text{ Επειδή } \tau(gh), \tau(g) \circ \tau(h) \text{ είναι } K\text{-γραμμικές, αρκεί να δείξουμε ότι} \\ &\text{ταυτίζονται πάνω στη } K\text{-βάση } \{e_\nu\}_{\nu \in \underline{n}}. \text{ Πράγματι, } (\tau(g) \circ \tau(h))(e_\nu) = \tau(g)(\sum_{\mu \in \underline{n}} h_{\mu\nu} e_\mu) = \\ &\sum_{\mu \in \underline{n}} h_{\mu\nu} \tau(g)(e_\mu) = \sum_{\mu \in \underline{n}} h_{\mu\nu} (\sum_{t \in \underline{n}} g_{t\mu} e_t) = \sum_{t \in \underline{n}} (\sum_{\mu \in \underline{n}} g_{t\mu} h_{\mu\nu}) e_t = \sum_{t \in \underline{n}} (gh)_{t\nu} e_t = \tau(gh)(e_\nu). \end{aligned}$$

$$\tau(1_\Gamma) = \mathbb{I}_E: \text{ Όπως πριν αρκεί να δειχθεί πάνω στη } K\text{-βάση } \{e_\nu\}_{\nu \in \underline{n}}. \text{ Πράγματι, } \tau(1_\Gamma)(e_\nu) = \sum_{\mu \in \underline{n}} (I_n)_{\mu\nu} e_\mu = (I_n)_{\nu\nu} e_\nu = e_\nu.$$

$$\begin{aligned} &\text{Έστω (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) } \tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(E) \text{ η } K\text{-γραμμική επέκταση της} \\ &\tau \text{ (που είναι ομομορφισμός } K\text{-αλγεβρών), τότε το } E \text{ γίνεται } K\Gamma\text{-πρότυπο με } k \cdot v = \tau(k)(v) \\ &\text{για κάθε } k \in K\Gamma, v \in E. \text{ Μάλιστα, αν } k = \sum_g k_g g, v = \sum_{\nu \in \underline{n}} r_\nu e_\nu, \text{ τότε } k \cdot v = \tau(k)(v) = \\ &(\sum_g k_g \tau(g))(\sum_{\nu \in \underline{n}} r_\nu e_\nu) = \sum_g k_g (\sum_{\nu \in \underline{n}} r_\nu \tau(g)(e_\nu)) = \sum_g \sum_{\nu \in \underline{n}} k_g r_\nu (g \cdot e_\nu). \end{aligned}$$

ii) $cf(E) \leq A_K(n, 1)$ άμεσα από ορισμό του εξωτερικού πολ/μού, ενώ $\dim_K E < \infty$ (από *i*) και υπόθεση για το E).

□

Υπενθύμιση 2.6.1. (Από *multilinear* άλγεβρα). Αν $M_1, \dots, M_n$ ελεύθερα R -πρότυπα (όπου R μεταθετικός με 1_R) με R -βάσεις $B_1, \dots, B_n$ αντίστοιχα. Τότε και το R -πρότυπο $M_1 \otimes \dots \otimes M_n$ είναι ελεύθερο R -πρότυπο με βάση $\{b_1 \otimes \dots \otimes b_n \mid b_i \in B_i\}$.

Ιδιαίτερος, αν E K -διανυσματικός χώρος διάστασης n με βάση $\{e_\nu \mid \nu \in \underline{n}\}$, τότε ο K -διανυσματικός χώρος $E^{\otimes r}$ έχει βάση το σύνολο $\{e_i = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \mid i \in I(n, r)\}$.

Ορισμός 2.6.2. Έστω $E = E_K$ ένας K -διανυσματικός χώρος διάστασης n με βάση $\{e_\nu \mid \nu \in \underline{n}\}$. Το $E^{\otimes r}$ γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο ως εξής:

- Δράση στις βάσεις των $K\Gamma, E^{\otimes r}$: Αν $g \in \Gamma, j \in I(n, r)$ τότε ορίζουμε $g \cdot e_j := (g \cdot e_{j_1}) \otimes \dots \otimes (g \cdot e_{j_r})$.
- Δράση γενικά (επιμεριστική): Αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma, x = \sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j \in E^{\otimes r}$, όπου $k_g, r_j \in K$, τότε ορίζουμε $k \cdot x := \sum_g \sum_{j \in I(n, r)} k_g r_j (g \cdot e_j) = \sum_g \sum_{j \in I(n, r)} k_g r_j ((g \cdot e_{j_1}) \otimes \dots \otimes (g \cdot e_{j_r}))$.

Παρατήρηση 2.6.2. i) Το $E^{\otimes r}$ είναι όντως καλά ορισμένο $K\Gamma$ -πρότυπο. Μάλιστα ο εξωτερικός πολ/μός του K στο $E^{\otimes r}$ που έπεται από το $K\Gamma$, ταυτίζεται με τον αρχικό (δηλαδή $(k \cdot 1_{K\Gamma}) \cdot x = kx$, για κάθε $k \in K, x \in E^{\otimes r}$).

ii) Αν $g \in \Gamma$ και $j \in I(n, r)$ τότε $g \cdot e_j = \sum_{i \in I(n, r)} g_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot g_{i_r j_r} e_i = \sum_{i \in I(n, r)} c_{i, j}(g) e_i$. Ιδιαίτερος, αν $\{r_{i, j}\}_{i, j}$ τα *coefficient functions* (ως προς την βάση $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$) τότε $r_{ij} = c_{i, j}$ και άρα $cf(E^{\otimes r}) \leq A_K(n, r)$, δηλαδή το $E^{\otimes r}$ ανήκει στην $M_K(n, r)$.

iii) Γενικά, $g \cdot (m_1 \otimes \dots \otimes m_r) = (g \cdot m_1) \otimes \dots \otimes (g \cdot m_r)$, για κάθε $m_1, \dots, m_r \in E$.

Απόδειξη.

i) Θα γίνει με χρήση της Παρατήρησης 1.2.1. Έστω $\tau : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$, με $\tau(g)(\sum_{i \in I(n, r)} k_i e_i) = \sum_{i \in I(n, r)} k_i (g \cdot e_{i_1} \otimes \dots \otimes g \cdot e_{i_r})$, για κάθε $g \in \Gamma$. Η $\tau(g)$ είναι καλά ορισμένη και K -γραμμική, άμεσα

αφού $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

$\tau(gh) = \tau(g) \circ \tau(h)$: Αφού $\tau(gh), \tau(g) \circ \tau(h)$ K -γραμμικές, αρκεί ναδειχθεί η ισότητα πάνω στη βάση $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$. Πράγματι, $\tau(gh)(e_i) = (gh) \cdot e_{i_1} \otimes \dots \otimes (gh) \cdot e_{i_r} = (g \cdot (h \cdot e_{i_1})) \otimes \dots \otimes (g \cdot (h \cdot e_{i_r})) = \tau(g)(h \cdot e_{i_1} \otimes \dots \otimes h \cdot e_{i_r}) = (\tau(g) \circ \tau(h))(e_i)$, όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει από Παρατήρηση 2.6.1 i).

$\tau(1_\Gamma) = \mathbb{I}_{E^{\otimes r}}$: Όμοια, αρκεί ναδειχθεί η ισότητα πάνω στην βάση. Πράγματι, $\tau(1_\Gamma)(e_i) = 1_\Gamma \cdot e_{i_1} \otimes \dots \otimes 1_\Gamma \cdot e_{i_r} = e_i$, όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει από Παρατήρηση 2.6.1 i).

Έστω (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) η K -γραμμική επέκταση $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$ (που είναι ομομορφισμός K -αλγεβρών). Τότε το $E^{\otimes r}$ γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο με $k \cdot v = \tau(k)(v)$,

για κάθε $k \in K\Gamma, v \in E^{\otimes r}$. Μάλιστα $(\sum_g k_g g) \cdot (\sum_{j \in I(n,r)} r_j e_j) = \tau(\sum_g k_g g)(\sum_{j \in I(n,r)} r_j e_j) = \sum_g k_g \tau(g)(\sum_{j \in I(n,r)} r_j e_j) = \sum_g k_g (\sum_j r_j \tau(g)(e_j)) = \sum_g \sum_j k_g r_j (g \cdot e_j)$.

ii) Για κάθε $g \in \Gamma$ και $j \in I(n, r)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g \cdot e_j &= g \cdot e_{j_1} \otimes \dots \otimes g \cdot e_{j_r} = (\sum_{\mu_1 \in \underline{n}} g_{\mu_1 j_1} e_{\mu_1}) \otimes \dots \otimes (\sum_{\mu_r \in \underline{n}} g_{\mu_r j_r} e_{\mu_r}) = \\ &= \sum_{\mu_1 \in \underline{n}} \dots \sum_{\mu_r \in \underline{n}} (g_{\mu_1 j_1} \cdot \dots \cdot g_{\mu_r j_r}) (e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r}) = \sum_{\mu \in I(n,r)} (g_{\mu_1 j_1} \cdot \dots \cdot g_{\mu_r j_r}) e_\mu = \\ &= \sum_{\mu \in I(n,r)} (c_{\mu_1 j_1}(g) \cdot \dots \cdot c_{\mu_r j_r}(g)) e_\mu = \sum_{\mu \in I(n,r)} c_{\mu, j}(g) e_\mu. \end{aligned}$$

Όσο για το ιδιαιτέρως, έχουμε $cf(E) \leq A_K(n, r)$ άμεσα από αυτό που δείξαμε μόλις ενώ $\dim_K E < \infty$ (από i) και το γεγονός ότι το $E^{\otimes r}$ έχει πεπερασμένη διάσταση ως προς τον αρχική δομή που παίρνει από το K).

iii) Έστω ότι $m_1 = \sum_{\nu_1=1}^n k_{1\nu_1} e_{\nu_1}, \dots, m_r = \sum_{\nu_r=1}^n k_{r\nu_r} e_{\nu_r}$, όπου $k_{1\nu_1}, \dots, k_{r\nu_r} \in K$. Τότε:

$$\begin{aligned} g \cdot (m_1 \otimes \dots \otimes m_r) &= \\ g \cdot (\sum_{\nu_1=1}^n \dots \sum_{\nu_r=1}^n k_{1\nu_1} \cdot \dots \cdot k_{r\nu_r} (e_{\nu_1} \otimes \dots \otimes e_{\nu_r})) &= \sum_{\nu_1=1}^n \dots \sum_{\nu_r=1}^n k_{1\nu_1} \cdot \dots \cdot k_{r\nu_r} (g \cdot (e_{\nu_1} \otimes \dots \otimes e_{\nu_r})) = \\ \sum_{\nu_1=1}^n \dots \sum_{\nu_r=1}^n k_{1\nu_1} \cdot \dots \cdot k_{r\nu_r} (g \cdot e_{\nu_1}) \otimes \dots \otimes (g \cdot e_{\nu_r}) &= (\sum_{\nu_1=1}^n k_{1\nu_1} (g \cdot e_{\nu_1})) \otimes \dots \otimes (\sum_{\nu_r=1}^n k_{r\nu_r} (g \cdot e_{\nu_r})) = \\ g \cdot (\sum_{\nu_1=1}^n k_{1\nu_1} e_{\nu_1}) \otimes \dots \otimes g \cdot (\sum_{\nu_r=1}^n k_{r\nu_r} e_{\nu_r}) &= g \cdot m_1 \otimes \dots \otimes g \cdot m_r. \end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Το $E^{\otimes r}$ σαν $K\Gamma$ -πρότυπο έχει αναλλοίωτο πίνακα $R = (c_{i,j})_{i,j \in I(n,r)} \in M_{n^r \times n^r}(K)$, όπου η διάταξη των στοιχείων $c_{i,j}$ πάνω στον πίνακα, μπορεί να γίνει ως εξής: Φτιάχνουμε μία στήλη (κάθετη

διάταξη) $n^r \times 1$ με όλα τα στοιχεία (από ακριβώς μία φορά) του $I(n, r)$ έστω $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n^r} \end{pmatrix}$, και μία γραμμή

(οριζόντια διάταξη) $n^r \times 1$ με όλα τα στοιχεία (από ακριβώς μία φορά) του $I(n, r)$ έστω $(j_1 \dots j_{n^r})$. Τέλος ορίζουμε στη (k, l) -θέση ο πίνακας R να έχει το στοιχείο c_{i_k, j_l} .

Πόρισμα 2.6.1. Έστω E K -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n με βάση $\{e_\nu \mid \nu \in \underline{n}\}$, τότε το $E^{\otimes r}$ γίνεται $S_K(n, r)$ -πρότυπο (Παρατήρηση 2.4.3) ώστε $E^{\otimes r} \in \text{mod}(S_K(n, r))$, με K -βάση $\{e_j := e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \mid j \in I(n, r)\}$. Επιπλέον $\xi \cdot e_j = \sum_{i \in I(n,r)} \xi(c_{i,j}) \cdot e_i$.

Απόδειξη.

Άμεσο από Παρατήρηση 2.6.2 ii) και Παρατήρηση 2.4.4.

□

Ορισμός 2.6.3. Το $E^{\otimes r}$ γίνεται δεξιό $KG(r)$ -πρότυπο ως εξής: Έστω $\{e_j := e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \mid j \in I(n, r)\}$ η σύννητες βάση του, τότε ορίζουμε:

- Δράση στις βάσεις $E^{\otimes r}, KG(r)$: $e_i \cdot \pi := e_{i \cdot \pi}$, όπου $i \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$ (βλέπε Ορισμό 2.1.2).
- Δράση γενικά (επιμεριστική): Αν $x = \sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j \in E^{\otimes r}$, $\sum_{\pi} k_{\pi} \pi \in KG(r)$, όπου $k_{\pi}, r_j \in K$, τότε ορίζουμε $x \cdot k := \sum_{j \in I(n, r)} \sum_{\pi} r_j k_{\pi} (e_j \cdot \pi) = \sum_{\pi} \sum_{j \in I(n, r)} k_{\pi} r_j (e_{j \cdot \pi})$.

Παρατήρηση 2.6.3. i) Το $E^{\otimes r}$ είναι όντως καλά ορισμένο $KG(r)$ -πρότυπο. Μάλιστα ο (αριστερός) εξωτερικός πολ/μός του K στο $E^{\otimes r}$ που έπεται από το $KG(r)$, ταυτίζεται με τον αρχικό (δηλαδή $k \cdot x := x \cdot (k \cdot 1_{KG(r)}) = kx$, για κάθε $k \in K$, $x \in E^{\otimes r}$).

ii) Το $E^{\otimes r}$ είναι $(KT, KG(r))$ -διπρότυπο και $(S_K(n, r), KG(r))$ -διπρότυπο. Δηλαδή $(k \cdot x) \cdot z = k \cdot (x \cdot z)$, για κάθε $k \in KT$ (ή $S_K(n, r)$), $x \in E^{\otimes r}$ και $z \in KG(r)$.

Απόδειξη.

i) Θα γίνει με χρήση της Παρατήρησης 1.2.3. Έστω $\tau : G(r) \longrightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$, με $\tau(\pi)(\sum_{i \in I(n, r)} k_i e_i) = \sum_{i \in I(n, r)} k_i (e_{i\pi})$, για κάθε $\pi \in G(r)$. Η $\tau(\pi)$ είναι καλά ορισμένη και K -γραμμική, άμεσα αφού

$\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

$\tau(st) = \tau(t) \circ \tau(s)$: Αφού $\tau(st), \tau(t) \circ \tau(s)$ K -γραμμικές, αρκεί ναδειχθεί η ισότητα πάνω στη βάση $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$. Πράγματι, $\tau(st)(e_i) = e_{(st)i} = e_{(s \cdot t)i} = \tau(t)(e_{si}) = (\tau(t) \circ \tau(s))(e_i)$.

$\tau(1_{G(r)}) = \mathbb{I}_{E^{\otimes r}}$: Όμοια, αρκεί ναδειχθεί η ισότητα πάνω στην βάση. Πράγματι, $\tau(1_{G(r)})(e_i) = e_{i \cdot 1_{G(r)}} = e_i$.

Έστω (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) η K -γραμμική επέκταση $\tau : KG(r) \longrightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$ (που είναι αντί-ομομορφισμός K -αλγεβρών). Τότε το $E^{\otimes r}$ γίνεται δεξιό $KG(r)$ -πρότυπο με $v \cdot k = \tau(k)(v)$, για κάθε $k \in KG(r)$, $v \in E^{\otimes r}$. Μάλιστα,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j \right) \cdot \left(\sum_{\pi} k_{\pi} \pi \right) &= \tau \left(\sum_{\pi} k_{\pi} \pi \right) \left(\sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j \right) = \\ &= \sum_{\pi} k_{\pi} \tau(\pi) \left(\sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j \right) = \sum_{\pi} k_{\pi} \left(\sum_j r_j \tau(\pi)(e_j) \right) = \sum_{\pi} \sum_j k_{\pi} r_j (e_{j \cdot \pi}) \end{aligned}$$

ii) Λόγο της σχέσης των εξωτερικών πολ/μών των $KT, S_K(n, r)$ (βλέπε Παρατήρηση 2.4.3) αρκεί ναδειχθεί ότι είναι $(KT, KG(r))$ -διπρότυπο. Το κάνουμε πρώτα στα βασικά στοιχεία. Πράγματι,

έστω $g \in \Gamma$, $j \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$, τότε $(g \cdot e_j) \cdot \pi = (\sum_{i \in I(n, r)} c_{i, j}(g) e_i) \cdot \pi = \sum_{i \in I(n, r)} c_{i, j}(g) e_{i \cdot \pi} = \sum_{i \in I(n, r)} c_{i \cdot \pi^{-1}, j}(g) e_i$, τώρα επειδή $(i \cdot \pi^{-1}, j) \sim (i, j \cdot \pi)$ έχουμε (από Παρατήρηση 2.1.1) ότι $(g \cdot e_j) \cdot \pi = \sum_{i \in I(n, r)} c_{i, j \cdot \pi}(g) e_i = g \cdot (e_j \cdot \pi) = g \cdot (e_j \cdot \pi)$. Γενικά τώρα, έστω $k = \sum_g k_g g$, $x = \sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j$, $z = \sum_{\pi} t_{\pi} \pi$, όπου $k_g, r_j, t_{\pi} \in K$, τότε:

$$(k \cdot x) \cdot z = (\sum_g \sum_j k_g r_j (g \cdot e_j)) \cdot z = \sum_g \sum_j \sum_{\pi} k_g r_j t_{\pi} (g \cdot e_j) \cdot \pi = \sum_g \sum_j \sum_{\pi} k_g r_j t_{\pi} g \cdot (e_j \cdot \pi) = (\sum_g k_g g) \cdot (\sum_j \sum_{\pi} r_j t_{\pi} (e_j \cdot \pi)) = k \cdot (x \cdot z).$$

□

Θεώρημα 2.6.1. (Schur) Έστω E K -διανυσματικός χώρος με $\dim_K E = n < \infty$ και θεωρούμε τον ομομορφισμό K -αλγεβρών $\psi : S_K(n, r) \longrightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$ που έπεται από το $S_K(n, r)$ -πρότυπο $E^{\otimes r}$. Τότε:

i) $\ker \psi = 0$ και $\text{Im} \psi = \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$.

ii) $S_K(n, r) \simeq \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$ (Ισομορφισμός K -αλγεβρών).

Απόδειξη.

Καταρχάς, $\psi : S_K(n, r) \longrightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$ με $\psi(\xi) : E^{\otimes r} \longrightarrow E^{\otimes r}$ και $\psi(\xi)(x) = \xi \cdot x$. Επιπλέον το ii) είναι άμεσο από το i) και το 1^ο Θεώρημα Ισομορφισμών. Μένει ναδειχθεί το i), πράγματι:

$\ker \psi = 0$: Αν $\psi(\xi_1) = \psi(\xi_2)$, τότε $\psi(\xi_1)(e_j) = \psi(\xi_2)(e_j)$ για κάθε $j \in I(n, r)$, δηλαδή $\xi_1 \cdot e_j = \xi_2 \cdot e_j$ για κάθε $j \in I(n, r)$. Άρα (από Πρόσχημα 2.6.1) $\sum_{i \in I(n, r)} \xi_1(c_{i, j}) e_i = \sum_{i \in I(n, r)} \xi_2(c_{i, j}) e_i$ για κάθε $j \in I(n, r)$. Συνεπώς $\xi_1(c_{i, j}) = \xi_2(c_{i, j})$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, άρα $\xi_1 = \xi_2$ (αφού το $A_K(n, r)$ παράγεται σαν K -πρότυπο από το σύνολο $\{c_{i, j} \mid i, j \in I(n, r)\}$).

$\text{Im} \psi = \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$: Αρχικά παρατηρούμε το εξής:

Παρατήρηση. Έστω $\theta \in \text{End}_K(E^{\otimes r})$, τότε, $\theta \in \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r}) \iff$ αν $(T_{i, j})$ είναι ο πίνακας της θ ως προς την βάση $\{e_i \mid i \in I(n, r)\}$ τότε $T_{i, j} = T_{i\pi, j\pi}$ για κάθε $\pi \in G(r)$, $i, j \in I(n, r)$.

Απόδειξη (Παρατήρησης). Έστω $\theta \in \text{End}_K(E^{\otimes r})$ τότε $\theta(e_j \cdot \pi) = \theta(e_{j\pi}) = \sum_{i \in I(n, r)} T_{i, j\pi} e_i$ και $\theta(e_j) \cdot \pi = (\sum_{i \in I(n, r)} T_{i, j} e_i) \cdot \pi = \sum_i T_{i, j} (e_i \cdot \pi) = \sum_i T_{i, j} e_{i\pi} = \sum_i T_{i\pi^{-1}, j} e_i$. Οπότε,

($\implies$): Αν $\theta \in \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$ τότε $\theta(e_j \cdot \pi) = \theta(e_j) \cdot \pi$ για κάθε $j \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$, άρα (λόγο βάσης) $T_{i, j\pi} = T_{i\pi^{-1}, j}$ για κάθε $j \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$, αφού ισχύει για κάθε i, π , βάζοντας $i\pi$ στη θέση του i έχουμε ότι $T_{i\pi, j\pi} = T_{i, j}$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$.

($\Leftarrow$): Αν $T_{i\pi,j\pi} = T_{i,j}$ για κάθε $j \in I(n,r)$, $\pi \in G(r)$. τότε $T_{i,j\pi} = T_{i\pi^{-1},j}$ για κάθε j, π ,
 όποτε από πάνω πρέπει $\theta(e_j \cdot \pi) = \theta(e_j) \cdot \pi$ για κάθε $j \in I(n,r)$, $\pi \in G(r)$. Έστω $x = \sum_{i \in I(n,r)} r_i e_i \in E^{\otimes r}$,
 $k = \sum_{\pi} t_{\pi} \pi \in KG(r)$, όπου $r_i, t_{\pi} \in K$, τότε:

$$\begin{aligned} \theta(x \cdot k) &= \theta\left(\sum_i \sum_{\pi} r_i t_{\pi} (e_i \cdot \pi)\right) = \sum_i \sum_{\pi} r_i t_{\pi} \theta(e_i \cdot \pi) = \\ &= \sum_i \sum_{\pi} r_i t_{\pi} (\theta(e_i) \cdot \pi) = \left(\sum_i r_i \theta(e_i)\right) \left(\sum_{\pi} t_{\pi} \pi\right) = \theta(x) \cdot k \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας, έστω $\mathcal{T}$ σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών του $I(n,r) \times I(n,r)$. Για κάθε $\omega \in \mathcal{T}$
 θέτουμε $\theta_{\omega} : E^{\otimes r} \rightarrow E^{\otimes r}$ τον ομομορφισμό K -προτύπων που προκύπτει από τον πίνακα $(T_{i,j}^{\omega})$ (ως προς
 την βάση $\{e_i \mid i \in I(n,r)\}$ του $E^{\otimes r}$) με $T_{i,j}^{\omega} = \begin{cases} 1_K, & (i,j) \sim \omega \\ 0_K, & (i,j) \not\sim \omega \end{cases}$. Δηλαδή $\theta_{\omega}(e_j) = \sum_{i \in I(n,r)} T_{i,j}^{\omega} e_i$,
 για κάθε $j \in I(n,r)$. Τώρα από τον ορισμό του $(T_{i,j}^{\omega})$ έχουμε άμεσα ότι $T_{i,j}^{\omega} = T_{i\pi,j\pi}^{\omega}$ για κάθε
 $i, j \in I(n,r)$, $\pi \in G(r)$. Συνεπώς από παρατήρηση, πρέπει $\theta_{\omega} \in \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$ για κάθε $\omega \in \mathcal{T}$.

Ισχυρισμός. *i)* $\text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r}) = \text{span}_K(\{\theta_{\omega} \mid \omega \in \mathcal{T}\})$.

ii) $\psi(\xi_{p,q}) = \theta_{(p,q)}$, $(p,q) \in \mathcal{T}$.

Έστω ότι αποδείξαμε τον ισχυρισμό. Τότε από Πρόταση 2.3.1 και το *ii)* του ισχυρισμού έχουμε ότι
 $\text{Im} \psi = \psi(S_K(n,r)) = \psi(\text{span}_K\{\xi_{p,q} \mid (p,q) \in \mathcal{T}\}) = \text{span}_K\{\psi(\xi_{p,q}) \mid (p,q) \in \mathcal{T}\} = \text{span}_K(\{\theta_{\omega} \mid \omega \in \mathcal{T}\}) = \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$.

Απόδειξη (Ισχυρισμού): *ii)* : Αρχεί να δείξουμε ότι $\psi(\xi_{p,q})(e_j) = \theta_{(p,q)}(e_j)$, για κάθε $j \in I(n,r)$.
 Πράγματι, $\psi(\xi_{p,q})(e_j) = \xi_{p,q} \cdot e_j = \sum_{i \in I(n,r)} \xi_{p,q}(c_{i,j}) e_i = \sum_{i \in I: (i,j) \sim (p,q)} e_i$ και $\theta_{(p,q)}(e_j) = \sum_{i \in I(n,r)} T_{i,j}^{(p,q)} e_i =$
 $\sum_{i \in I: (i,j) \sim (p,q)} e_i$ (η τελευταία ισότητα ισχύει εξ' ορισμού του πίνακα $(T_{i,j}^{\omega})$), συνεπώς $\psi(\xi_{p,q}) = \theta_{(p,q)}$.

i) : Ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι σαφές (αφού $\theta_{\omega} \in \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$ για κάθε $\omega \in \mathcal{T}$). Αντίστροφα,
 αν $\phi \in \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$, τότε από προηγούμενη παρατήρηση, αν $(T_{i,j})$ ο πίνακας της ϕ ως προς την
 βάση $\{e_i \mid i \in I(n,r)\}$ τότε $T_{i,j} = T_{i\pi,j\pi}$ για κάθε $i, j \in I(n,r)$, $\pi \in G(r)$, ιδιαιτέρως $(i,j) \sim$
 $(k,l) \iff T_{i,j} = T_{k,l}$. Τώρα για κάθε $\omega \in \mathcal{T}$ έχουμε $\theta_{\omega}(e_j) = \sum_i T_{i,j}^{\omega} e_i = \sum_{i \in I: (i,j) \sim \omega} e_i$ και
 $\phi(e_j) = \sum_{i \in I(n,r)} T_{i,j} e_i = \sum_{\omega \in \mathcal{T}} T_{\omega} \left(\sum_{i \in I(n,r): (i,j) \sim \omega} e_i \right) = \sum_{\omega \in \mathcal{T}} T_{\omega} \theta_{\omega}(e_j)$ (όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει από
 το "ιδιαιτέρως" πάνω, βγάζοντας κοινούς παράγοντες), άρα (επειδή $\{e_i \mid i \in I(n,r)\}$ βάση του $E^{\otimes r}$)
 $\phi = \sum_{\omega \in \mathcal{T}} T_{\omega} \theta_{\omega} \in \text{span}_K(\{\theta_{\omega} \mid \omega \in \mathcal{T}\})$. (Σημείωση, αν $\omega = (i,j)$ τότε με T_{ω} εννοούμε $T_{i,j}$).

□

Πόρισμα 2.6.2. Έστω E K -διανυσματικός χώρος διάστασης n και $\mathcal{T}$ σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών του $I(n, r) \times I(n, r)$. Αν $\psi : S_K(n, r) \rightarrow \text{End}_K(E^{\otimes r})$ ο ομομορφισμός K -αλγεβρών που έπεται από το $S_K(n, r)$ -πρότυπο $E^{\otimes r}$ τότε:

- i) Έστω $\theta \in \text{End}_K(E^{\otimes r})$. Τότε, $\theta \in \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r}) \iff$ αν $(T_{i,j})$ είναι ο πίνακας της θ ως προς την βάση $\{e_i \mid i \in I(n, r)\}$ τότε $T_{i,j} = T_{i\pi, j\pi}$ για κάθε $\pi \in G(r)$, $i, j \in I(n, r)$.
- ii) Το $\{\theta_\omega \mid \omega \in \mathcal{T}\}$ είναι K -βάση του $\text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$. Όπου θ_ω είναι η απεικόνιση που αντιστοιχεί στο πίνακα $(T_{i,j}^\omega)$ (ως προς την βάση $\{e_i \mid i \in I(n, r)\}$) με $T_{i,j}^\omega = \begin{cases} 1_K, & (i, j) \sim \omega \\ 0_K, & (i, j) \not\sim \omega \end{cases}$.
- iii) $\psi(\xi_{p,q}) = \theta_{p,q}$ για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$.
- iv) $\dim_K \text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r}) = \dim_K S_K(n, r) = \dim_K A_K(n, r) = |\mathcal{T}| = \binom{n^2+r-1}{r}$.

Απόδειξη.

Όλα τα σημεία του Πορίσματος (εκτός του iv) που έπεται από το προηγούμενο θεώρημα) τα είδαμε μέσα στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. □

Θεώρημα 2.6.2. (Schur) Έστω K άπειρο σώμα με $chK = 0$ ή $chK = p > r$. Τότε η $S_K(n, r)$ είναι ημιαπλή K -άλγεβρα. Ιδιαίτερος κάθε $V \in M_K(n, r)$ είναι ημιαπλό KT -πρότυπο (ισοδύναμα ημιαπλό $S_K(n, r)$ -πρότυπο).

Απόδειξη.

Από υπόθεση έχουμε ότι $chK = 0$ ή $chK \nmid |G(r)|$, οπότε από το Θεώρημα του Maschke πρέπει $KG(r)$ να είναι ημιαπλή K -άλγεβρα, συνεπώς από Θεώρημα του Wedderburn κάθε δεξιό $KG(r)$ -πρότυπο είναι ημιαπλό, άρα το $E^{\otimes r}$ είναι ημιαπλό (δεξιό) $KG(r)$ -πρότυπο. Συνεπώς από υπενθύμιση που θα δούμε πιο κάτω έχουμε ότι το $\text{End}_{KG(r)}(E^{\otimes r})$ είναι ημιαπλή K -άλγεβρα. Άρα από Θεώρημα 2.6.1 έχουμε ότι το $S_K(n, r)$ είναι ημιαπλή K -άλγεβρα. Όσο για το "ιδιαίτερος" πάλι από Wedderburn κάθε $S_K(n, r)$ -πρότυπο είναι ημιαπλό και επειδή κάθε απλό $S_K(n, r)$ -πρότυπο είναι και απλό KT -πρότυπο (άμεσα από Πόρισμα 2.4.1), έπεται απευθείας ότι κάθε ημιαπλό $S_K(n, r)$ -πρότυπο είναι ημιαπλό KT -πρότυπο στην $M_K(n, r)$. □

Υπενθύμιση 2.6.2. (Από την μη μεταθετική άλγεβρα). Έστω R K -άλγεβρα και M, N (δεξιά ή αριστερά) R -πρότυπα. Τότε

- i) $\text{End}_R(M^n) \simeq M_n(\text{End}_R(M))$ (Ισομορφισμός K -αλγεβρών).
- ii) Έστω $\{M_i\}_{i=1}^n, \{N_j\}_{j=1}^m$ οικογένειες R -προτύπων. Τότε $\text{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^n M_i, \bigoplus_{j=1}^m N_j) \simeq \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_R(M_i, N_j)$ (Ισομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων).

iii) Έστω $\{M_i\}_{i=1}^n$ οικογένεια R -προτύπων με $\text{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ για κάθε $i \neq j$ τότε $\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^n M_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{End}_R(M_i)$ (Ισομορφισμός K -αλγεβρών).

iv) (Λήμμα Schur). Αν M είναι απλό R -πρότυπο τότε το $\text{End}_R(M)$ είναι δακτύλιο διαίρεσης. Ενώ αν M, N απλά R -πρότυπα μη ισόμορφα τότε $\text{Hom}_R(M, N) = 0$.

v) Αν M ημιαπλό R -πρότυπο με $\dim_K M < \infty$, τότε το $\text{End}_R(M)$ είναι ημιαπλή K -άλγεβρα.

Απόδειξη.

Για λόγους οικονομίας, αλλά και επειδή αυτά είναι εν' γένη ευρέως γνωστά αποτελέσματα θα παραλείψουμε τις αποδείξεις των i), ii), iii), iv) (οι οποίες είναι στοιχειώδεις) και θα κάνουμε μόνο το v) (το οποίο αν κανείς ξέρει να αποδεικνύει το θεώρημα Wedderburn τότε μπορεί να το κάνει). Από υπόθεση πρέπει $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, όπου M_i απλά R -υποπρότυπα. Εφόσον, $\dim_K M < \infty$ τότε είναι και πεπερασμένο παραγόμενο R -πρότυπο και έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|I| < \infty$, ιδιαιτέρως (κάνοντας ένα "μάζεμα") μπορούμε να γράψουμε ότι $M \simeq \bigoplus_{j=1}^m M_j^{n_j}$ (Ισομορφισμός R -προτύπων) όπου $M_j \not\simeq M_i$ για κάθε $i \neq j$. Συνεπώς, $\text{End}_R(M) \simeq \text{End}_R(\bigoplus_{j=1}^m M_j^{n_j})$ (Ισομορφισμός K -αλγεβρών), τώρα για κάθε $i \neq j$ έχουμε από ii) και iv) ότι $\text{Hom}_R(M_i^{n_i}, M_j^{n_j}) \simeq \bigoplus_{i,j}^{n_i, n_j} \text{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$, άρα από iii) έχουμε $\text{End}_R(M) \simeq \bigoplus_{j=1}^m \text{End}_R(M_j^{n_j}) \simeq \bigoplus_{j=1}^m M_{n_j}(\text{End}_R(M_j))$ (Ισομορφισμοί K -αλγεβρών), και $\text{End}_R(M_j)$ δακτύλιος διαίρεσης, οπότε από Θεώρημα Wedderburn το $\text{End}_R(M)$ είναι ημιαπλή K -άλγεβρα. $\square$

Σχόλιο. Αν K άπειρο σώμα με $\text{ch} K = 0$ ή $\text{ch} K = p > r$, τότε από Θεώρημα 2.2.1 και Θεώρημα 2.6.2, έπεται ότι η μελέτη των κατηγοριών $M_K(n), M_K(n, r)$ ανάγεται στην μελέτη των απλών $K\Gamma$ -προτύπων της $M_K(n, r)$, δηλαδή των απλών $K\Gamma$ -προτύπων V , με $\dim_K V < \infty$ και $\text{cf}(V) \leq A_K(n, r)$.

Συνεχίζουμε τώρα με την μελέτη δύο πολύ σημαντικών παραδειγμάτων $K\Gamma$ -προτύπων, τα οποία είναι πηλίκια του $E^{\otimes r}$.

Ορισμός 2.6.4. Έστω E K -διανυσματικός χώρος πεπερασμένη διάστασης n τότε:

- i) Θεωρούμε το K -υποπρότυπο $H_r(E)$ του $E^{\otimes r}$ που παράγεται σαν K -πρότυπο από τα στοιχεία, $m_1 \otimes \dots \otimes m_r - m_{s(1)} \otimes \dots \otimes m_{s(r)}$, όπου $s \in G(r)$ και $m_i \in E$. Παρατηρούμε (βλέπε Παρατήρηση 2.6.4) ότι το $H_r(E)$ είναι και $K\Gamma$ -υποπρότυπο του $E^{\otimes r}$, οπότε ορίζεται το $K\Gamma$ -πρότυπο $E^{\otimes r}/H_r(E)$ και ανήκει στην $M_K(n, r)$ (από Πρόταση 1.2.3). Το $E^{\otimes r}/H_r(E)$ θα λέγεται r^{th} - symmetric power του E και θα συμβολίζεται με $D_{r,K} = D_r(E_K) = D_r(E)$

ii) Θεωρούμε το K -υποπρότυπο $J_r(E)$ του $E^{\otimes r}$ που παράγεται σαν K -πρότυπο από τα στοιχεία,

$m_1 \otimes \dots \otimes m_r$ που έχουν κάποια επανάληψη (δηλαδή $m_i = m_j$ για κάποια $i \neq j$). Παρατηρούμε (βλέπε Παρατήρηση 2.6.4) ότι το $J_r(E)$ είναι και $K\Gamma$ -υποπρότυπο του $E^{\otimes r}$, οπότε ορίζεται το $K\Gamma$ -πρότυπο $E^{\otimes r}/J_r(E)$ και ανήκει στην $M_K(n, r)$ (από Πρόταση 1.2.3). Το $E^{\otimes r}/J_r(E)$ θα λέγεται r^{th} - exterior power του E και θα συμβολίζεται με $\Lambda^r E = \Lambda^r E_K$.

(Σημείωση, αν $r = 1$ τότε θέτουμε $J_r(E) = E$).

Παρατήρηση 2.6.4. Τα $H_r(E), J_r(E)$ είναι πράγματι $K\Gamma$ -υποπρότυπα.

Απόδειξη.

Κάνουμε το $H_r(E)$ και όμοια το $J_r(E)$. Πράγματι, εξ' ορισμού του $H_r(E)$ (και επειδή Γ βάση του $K\Gamma$) εύκολα παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $x := g \cdot (m_1 \otimes \dots \otimes m_r - m_{s(1)} \otimes \dots \otimes m_{s(r)}) \in H_r(E)$, για κάθε $g \in \Gamma$, $m_1, \dots, m_r \in E$ και $s \in G(r)$. Πράγματι, (από Παρατήρηση 2.6.2 iii)) $x = (g \cdot m_1) \otimes \dots \otimes (g \cdot m_r) - (g \cdot m_{s(1)}) \otimes \dots \otimes (g \cdot m_{s(r)})$, αν θέσουμε τώρα $g \cdot m_i = b_i$ τότε $x = b_1 \otimes \dots \otimes b_r - b_{s(1)} \otimes \dots \otimes b_{s(r)} \in H_r(E)$. □

Υπενθύμιση 2.6.3. (Από *multilinear* άλγεβρα).

Εστω E K -διανυσματικός χώρος με βάση $\{e_\nu \mid \nu \in \underline{n}\}$. Συμβολικά θα γράφουμε $m_1 \dots m_r = m_1 \otimes \dots \otimes m_r + H_r(E)$ και $m_1 \wedge \dots \wedge m_r = m_1 \otimes \dots \otimes m_r + J_r(E)$. Επιπλέον ισχύουν τα παρακάτω:

- i) Για κάθε $m_1, \dots, m_r \in E$ και $\pi \in G(r)$ ισχύει $m_{\pi(1)} \dots m_{\pi(r)} = m_1 \dots m_r$, $m_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge m_{\pi(r)} = s(\pi)(m_1 \wedge \dots \wedge m_r)$.
- ii) Αν $\mathcal{T}_o$ σύνολο αντιπροσώπων τροχιών της $I(n, r)$ τότε σύνολο $\{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid i \in \mathcal{T}_o\}$ είναι K -βάση του $D_r(E)$.
- iii) Αν $r \leq n$ και $\mathcal{T}_o$ σύνολο αντιπροσώπων τροχιών της $I(n, r)$ τότε το σύνολο $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in \mathcal{T}_o \text{ και } i = 1-1\}$ είναι K -βάση του $\Lambda^r E$.

Παρατήρηση 2.6.5. i) Αν $\{r_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{T}_o}$ τα *coefficient functions* του $D_r(E)$ ως προς την βάση $\{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid i \in \mathcal{T}_o\}$, τότε $r_{ij} = \sum_{k \sim i} c_{k,j}$ (όπου εννοούμε $r_{ij} = \sum_{k \in [i]} c_{k,j}$)

ii) Αν $\mathcal{T}_o^* := \{i \in \mathcal{T}_o \mid i = 1-1\}$ και $\{r_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{T}_o^*}$ τα *coefficient functions* του $\Lambda^r E$ ως προς την βάση $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in \mathcal{T}_o \text{ και } i = 1-1\}$, τότε $r_{ij} = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) c_{i\pi,j} = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) c_{i,j\pi} = \det A_{i,j}$, όπου

$$A_{i,j} = (c_{i_k j_l})_{k,l=1,\dots,r}.$$

Απόδειξη.

i) Για κάθε $g \in \Gamma, j \in I(n, r)$ έχουμε:

$$g \cdot (e_{j_1} \dots e_{j_r}) = g \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} + H_r(E)) = g \cdot e_j + H_r(E) = \left(\sum_{i \in I(n, r)} c_{i,j}(g) e_i \right) + H_r(E) =$$

$$\sum_{i \in I(n, r)} c_{i,j}(g) (e_i + H_r(E)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \sum_{k \sim i} c_{k,j}(g) (e_k + H_r(E)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \left(\sum_{k \sim i} c_{k,j}(g) \right) (e_i + H_r(E))$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει εξ' ορισμού του $H_r(E)$. Συνεπώς, $r_{ij}(g) = \sum_{k \sim i} c_{k,j}(g)$.

ii) Έστω $g \in \Gamma$ τότε $g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) = g \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} + J_r(E)) = g \cdot e_j + J_r(E) = \left(\sum_{i \in I(n, r)} c_{i,j}(g) e_i \right) + J_r(E) =$

$$\sum_{i \in I(n, r)} c_{i,j}(g) (e_i + J_r(E)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \sum_{k \sim i} c_{k,j}(g) (e_k + J_r(E)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{k \sim i} c_{k,j}(g) (e_k + J_r(E)) =$$

$$\sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{k \in [i]} c_{k,j}(g) (e_k + J_r(E)), \text{ όπου η προτελευταία ισότητα ισχύει εξ' ορισμού του } J_r(E). \text{ Τώρα,}$$

αν $i \in \mathcal{T}_o^*$ έχουμε $[i] = \{i \cdot \pi \mid \pi \in G(r)\}$ και $i\pi \neq i\sigma$ για κάθε $\pi \neq \sigma$ (αφού αν $i\pi = i\sigma$, τότε $i(\pi(t)) = i(\sigma(t))$ για κάθε $t \in \underline{r}$, όμως $i = 1-1$, άρα $\pi(t) = \sigma(t)$ για κάθε t , δηλαδή $\pi = \sigma$, άτοπο). Συνεπώς, $g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{\pi \in G(r)} c_{i\pi,j}(g) (e_{i\pi} + J_r(E)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{\pi \in G(r)} c_{i\pi,j}(g) (e_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge e_{\pi(r)}) =$

$$\sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{\pi \in G(r)} c_{i\pi,j}(g) (s(\pi)(e_1 \wedge \dots \wedge e_r)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) c_{i\pi,j}(g) \right) e_1 \wedge \dots \wedge e_r. \text{ Οπότε}$$

$$r_{ij}(g) = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) c_{i\pi,j}(g). \text{ Ας δούμε τώρα τις άλλες ισότητες, πράγματι, επειδή } (i\pi, j) \sim (i, j\pi^{-1}) \text{ και } s(\pi) = s(\pi^{-1}), \text{ έχουμε}$$

$$\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) c_{i\pi,j} = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi^{-1}) c_{i, j\pi^{-1}} = \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) c_{i, j\sigma} =$$

$$\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) \left(\prod_{h=1}^r c_{i_h j_{\sigma(h)}} \right) = \det A_{i,j}.$$

□

Σχόλιο. Στην απόδειξη του ii) η συνθήκη, $i\pi \neq i\sigma$ για κάθε $\pi \neq \sigma$, όπου $i \in \mathcal{T}_o^*$, χρειάστηκε στο να αποφύγουμε επαναλήψεις όρων στο άθροισμα $\sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{\pi \in G(r)} c_{i\pi,j}(g) (e_{i\pi} + J_r(E))$ και έτσι να μπορέσουμε να το πούμε ότι είναι ίσο με το άθροισμα $\sum_{i \in \mathcal{T}_o^*} \sum_{k \in [i]} c_{k,j}(g) (e_k + J_r(E))$.

Παράδειγμα 2.6.1. Θεωρούμε για κάθε άπειρο σώμα K το $W_K := E_K^{\otimes r}$ όπου E_K είναι K -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n με K -βάση το $\{e_{\nu,K} \mid \nu \in \underline{n}\}$. Έστω επίσης η K -βάση $\{e_{i,K} := e_{i_1,K} \otimes \dots \otimes e_{i_r,K} \mid i \in I(n, r)\}$ του $E_K^{\otimes r}$. Τότε:

i) Το $W_{\mathbb{Z}} := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{e_{i,\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του $W_{\mathbb{Q}}$.

ii) Η οικογένεια $(W_K)_K = (E_K^{\otimes r})_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το $\mathbb{Z}$ -form $W_{\mathbb{Z}}$ και μία οικογένεια ισομορφισμών στην $M_K(n, r)$ έστω $(\delta_K)_K$, όπου $\delta_K : W_{\mathbb{Z}} \otimes K \longrightarrow W_K$, $e_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K \longmapsto e_{i,K}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.

Απόδειξη.

- i) Μένει ναδειχθεί ότι είναι κλειστό από την δράση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$. Πράγματι, έστω $\xi \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και $x \in W_{\mathbb{Z}}$ τότε (από Παρατήρηση 2.5.1) $\xi = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} n_{p,q} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}$ και $x = \sum_{j \in I(n,r)} n_j e_{j,\mathbb{Q}}$, όπου $n_{p,q}, n_j \in \mathbb{Z}$. Τώρα, $\xi \cdot x = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} \sum_{j \in I(n,r)} n_{p,q} n_j (\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot e_{j,\mathbb{Q}})$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot e_{j,\mathbb{Q}} \in W_{\mathbb{Z}}$. Πράγματι, $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot e_{j,\mathbb{Q}} = \sum_{i \in I(n,r)} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) e_{i,\mathbb{Q}}$, όπου $\xi_{p,q}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) \in \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Συνεπώς, $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot e_{j,\mathbb{Q}} \in W_{\mathbb{Z}}$ και άρα $\xi \cdot x \in W_{\mathbb{Z}}$.
- ii) Το σύνολο $\{e_{i,K}\}_{i \in I(n,r)}$ είναι K-βάση του W_K και από Πρόταση 2.5.2 i) το $\{e_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K\}_{i \in I(n,r)}$ είναι K-βάση του $W_{\mathbb{Z}} \otimes K$. Ιδιαίτερώς, $\dim_K W_K = \dim_K (W_{\mathbb{Z}} \otimes K)$. Οπότε υπάρχει ισομορφισμός K-προτύπων ώστε

$$\delta_K : W_{\mathbb{Z}} \otimes K \longrightarrow W_K, \quad e_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K \longmapsto e_{i,K}, \quad \text{για κάθε } i \in I(n, r).$$

Μένει να δείξουμε ότι η δ_K είναι ομομορφισμός $K\Gamma_K$ -προτύπων (ή ισοδύναμα $S_K(n, r)$ -προτύπων). Επειδή $\{e_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K\}_{i \in I(n,r)}$ K-βάση του $W_{\mathbb{Z}} \otimes K$ και $\{\xi_{i,j}^K\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ είναι K-βάση του $S_K(n, r)$, αρκεί να δείξουμε ότι $\delta_K(\xi_{p,q}^K \cdot (e_{j,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) = \xi_{p,q}^K \cdot \delta_K(e_{j,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)$, για κάθε $j \in I(n, r)$ και $(p, q) \in \mathcal{T}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \delta_K(\xi_{p,q}^K \cdot (e_{j,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) &= \delta_K((\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot e_{j,\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) = \delta_K((\sum_{i \in I(n,r)} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) e_{i,\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) = \\ &= \sum_{i \in I(n,r)} (\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K) e_{i,K} = \sum_{i \in I(n,r)} \xi_{p,q}^K(c_{i,j}^K) e_{i,K} = \xi_{p,q}^K \cdot e_{j,K} = \xi_{p,q}^K \cdot \delta_K(e_{j,\mathbb{Q}} \otimes 1_K). \end{aligned}$$

(Σημείωση: Άμεσα από τον ορισμό των $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}, \xi_{p,q}^K$ έπεται η ισότητα $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K = \xi_{p,q}^K(c_{i,j}^K)$).

Γενικά τώρα, αν $\xi \in S_K(n, r)$, $x \in W_{\mathbb{Z}} \otimes K$, τότε $\xi = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{i,j}^K$ και $x = \sum_{h \in I(n,r)} r_h (e_{h,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)$, όπου $k_{i,j}, r_h \in K$ και

$$\begin{aligned} \delta_K(\xi \cdot x) &= \delta_K(\sum_{(i,j)} \sum_h k_{i,j} r_h (\xi_{i,j}^K \cdot (e_{h,\mathbb{Q}} \otimes 1_K))) = \sum_{(i,j)} \sum_h k_{i,j} r_h \delta_K(\xi_{i,j}^K \cdot (e_{h,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) = \\ &= \sum_{(i,j)} \sum_h k_{i,j} r_h \xi_{i,j}^K \cdot \delta_K(e_{h,\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = (\sum_{(i,j)} k_{i,j} \xi_{i,j}^K) \cdot (\sum_h r_h \delta_K(e_{h,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) = \xi \cdot \delta_K(x). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.6.2. Θεωρούμε για κάθε άπειρο σώμα K το $W_K := D_r(E_K)$ όπου E_K είναι K -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n με K -βάση το $\{e_{\nu,K} \mid \nu \in \underline{n}\}$. Έστω επίσης η K -βάση $\{\tilde{e}_{i,K} := e_{i_1,K} \dots e_{i_r,K} \mid i \in \mathcal{T}_o\}$ του $D_r(E_K)$. Τότε:

i) Το $W_{\mathbb{Z}} = D_{r,\mathbb{Z}} := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \mid i \in \mathcal{T}_o\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του $W_{\mathbb{Q}}$.

ii) Η οικογένεια $(W_K)_K = (D_r(E_K))_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το $\mathbb{Z}$ -form $W_{\mathbb{Z}} = D_{r,\mathbb{Z}}$ και μία οικογένεια ισομορφισμών στην $M_K(n, r)$ έστω $(\delta_K)_K$, όπου $\delta_K : W_{\mathbb{Z}} \otimes K \longrightarrow W_K$, $\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K \longmapsto \tilde{e}_{i,K}$ για κάθε $i \in \mathcal{T}_o$. Μάλιστα $\delta_K(\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \tilde{e}_{i,K}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Μένει ναδειχθεί ότι είναι κλειστό από την δράση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$. Από Παρατήρηση 2.5.2 αρκεί να δείξουμε ότι $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot \tilde{e}_{j,\mathbb{Q}} \in W_{\mathbb{Z}}$ για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$ και $j \in \mathcal{T}_o$. Πράγματι, από Παρατηρήσεις 2.4.4-2.6.5 έχουμε ότι $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot \tilde{e}_{j,\mathbb{Q}} = \sum_{i \in I(n, r)} \xi_{p,q}(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} = \sum_{i \in I(n, r)} (\sum_{k \sim i} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{k,j}^{\mathbb{Q}})) \tilde{e}_{i,\mathbb{Q}}$ όπου $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \in \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Συνεπώς, $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot \tilde{e}_{j,\mathbb{Q}} \in W_{\mathbb{Z}}$.

ii) Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε $\delta_K : W_{\mathbb{Z}} \otimes K \longrightarrow W_K$ ισομορφισμό K -προτύπων με $\delta_K(\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \tilde{e}_{i,K}$, για κάθε $i \in \mathcal{T}_o$. Ιδιαίτερος για κάθε $i \in I(n, r)$ τότε υπάρχει $j \in \mathcal{T}_o$ ώστε $i \sim j$, τότε όμως από Υπενθύμιση 2.6.3 i) έχουμε ότι $\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} = \tilde{e}_{j,\mathbb{Q}}$ και $\tilde{e}_{i,K} = \tilde{e}_{j,K}$, οπότε $\delta_K(\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \delta_K(\tilde{e}_{j,\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \tilde{e}_{j,K} = \tilde{e}_{i,K}$. Μένει να δείξουμε ότι η δ_K είναι ομομορφισμός $K\Gamma_K$ -προτύπων (ή ισοδύναμα $S_K(n, r)$ -προτύπων) και όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\delta_K(\xi_{p,q}^K \cdot (\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) = \xi_{p,q}^K \cdot \delta_K(\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \delta_K(\xi_{p,q}^K \cdot (\tilde{e}_{j,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) &= \delta_K((\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \cdot \tilde{e}_{j,\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) = \delta_K((\sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \tilde{e}_{i,\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) = \\ &= \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \delta_K(\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \tilde{e}_{i,K}. (*) \end{aligned}$$

(όπου η προτελευταία ισότητα ισχύει αφού $\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) = \sum_{k \sim i} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}$). Επιπλέον,

$$\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K = \sum_{k \sim i} (\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{k,j}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K) = \sum_{k \sim i} \xi_{p,q}^K(c_{k,j}^K) = \xi_{p,q}^K(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^K). (**)$$

Τελικά από (*), (**) έχουμε,

$$\delta_K(\xi_{p,q}^K \cdot (\tilde{e}_{i,\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} (\xi_{p,q}^K(\sum_{k \sim i} c_{k,j}^K)) \tilde{e}_{i,K} = \xi_{p,q}^K \cdot \tilde{e}_{j,K}$$

(όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από Παρατήρηση 2.4.4 και Παρατήρηση 2.6.5).

□

2.7 Contravariant duality.

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Με λίγα λόγια, στόχος του υποκεφαλαίου αυτού είναι να μετατρέψουμε το δυϊκό χώρο V^* ενός αντικείμενου $V \in M_K(n, r)$ σε αντικείμενο της $M_K(n, r)$, και στη συνέχεια να δούμε πως συνδέεται με το ίδιο το V . Παρακάτω έχουμε τα εξής:

- Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε το V^* γίνεται δεξιό $K\Gamma$ -πρότυπο ώστε για $f \in V^*$, $g \in \Gamma$ $f \cdot g = fg : V \rightarrow K$, $(fg)(v) = f(g \cdot v)$. Γενικά, $f \cdot (\sum_g k_g g) = \sum_g k_g (f \cdot g)$.
- Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε το V^* γίνεται αριστερό $K\Gamma$ -πρότυπο ώστε για $f \in V^*$, $g \in \Gamma$ $g \cdot f = gf : V \rightarrow K$, $(gf)(v) = f(g^{-1} \cdot v)$. Γενικά, $(\sum_g k_g g) \cdot f = \sum_g k_g (g \cdot f)$.
- Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε το V^* γίνεται αριστερό $K\Gamma$ -πρότυπο ώστε για $f \in V^*$, $g \in \Gamma$ $g \cdot f = gf : V \rightarrow K$, $(gf)(v) = f(g^{tr} \cdot v)$. Γενικά, $(\sum_g k_g g) \cdot f = \sum_g k_g (g \cdot f)$. (όπου $g^{tr} = \text{o ανάστροφος πίνακας του } g$).

Σχόλιο. Από τις τρεις εκδοχές που είδαμε πάνω θα ασχοληθούμε εκτενώς με την τρίτη. Ο λόγος για την επιλογή αυτή θα φανεί παρακάτω.

Ορισμός 2.7.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$, τότε το $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ γίνεται αριστερό $K\Gamma$ -πρότυπο με $g \cdot f = gf : V \rightarrow K$, $(gf)(v) = f(g^{tr} \cdot v)$ και γενικά $(\sum_g k_g g) \cdot f = \sum_g k_g (g \cdot f)$. Αυτό το αριστερό $K\Gamma$ -πρότυπο θα το συμβολίζουμε με V^o και θα λέγεται *contravariant dual* του V .

Παρατήρηση 2.7.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$, τότε:

- Το V^o είναι πράγματι $K\Gamma$ -πρότυπο και ο εξωτερικός πολ/μός που επάγεται από το K στο V^o ταυτίζεται με τον αρχικό που είχε το V^* (δηλαδή $(k \cdot 1_{K\Gamma}) \cdot f = kf$, για κάθε $f \in V^o$, $k \in K$). Ιδιαίτερος $\dim_K V^o = \dim_K V^* = \dim_K V$ και τα V^* , V^o σαν K -πρότυπα είναι ίδια.
- Έστω $\{e_b\}_{b \in B}$ K -βάση του V και τα *coefficient functions* ως προς αυτή $\{r_{ab}\}_{a,b \in B}$, αν $\{e_b^*\}_{b \in B}$ η δυϊκή βάση του K -προτύπου $V^* = V^o$ με αντίστοιχα *coefficient functions* έστω $\{r_{ab}^o\}_{a,b \in B}$. Τότε, $r_{ab}^o(g) = r_{ba}(g^{tr})$ για κάθε $g \in \Gamma$, $a, b \in B$.
- $V^o \in M_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Θα γίνει με χρήση της Παρατήρηση 1.2.1. Έστω $\tau : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V^o)$, με $\tau(g)(f) = gf$, ώστε $(gf)(v) = f(g^{tr} \cdot v)$, για κάθε $v \in V$. Η $\tau(g)$ είναι καλά ορισμένη και K-γραμμική, πράγματι, για κάθε $f, h \in V^o$, $k \in K$:

$$\tau(g)(f+h) = \tau(g)(f) + \tau(g)(h): \quad \text{Για κάθε } v \in V \text{ έχουμε, } \tau(g)(f+h)(v) = (g(f+h))(v) = (f+h)(g^{tr} \cdot v) = f(g^{tr} \cdot v) + h(g^{tr} \cdot v) = \tau(g)(f)(v) + \tau(g)(h)(v). \text{ Συνεπώς, } \tau(g)(f+h) = \tau(g)(f) + \tau(g)(h).$$

$$\tau(g)(kf) = k\tau(g)(f): \quad \text{Όμοια με πάνω.}$$

Επιπλέον, ισχύουν τα παρακάτω:

$$\tau(st) = \tau(t) \circ \tau(s): \quad \text{Πράγματι, για κάθε } f \in V^o \text{ και } v \in V \text{ έχουμε } \tau(st)(f)(v) = ((st)f)(v) = f((st)^{tr} \cdot v) = f(t^{tr} \cdot (s^{tr} \cdot v)) = (tf)(s^{tr} \cdot v) = (s(tf))(v) = \tau(s)(\tau(t)(f)(v)) = ((\tau(s) \circ \tau(t))(f))(v). \text{ Το } v \text{ ήταν τυχόν, άρα } \tau(st)(f) = (\tau(s) \circ \tau(t))(f), \text{ όμως και το } f \text{ ήταν τυχόν, άρα } \tau(st) = \tau(t) \circ \tau(s).$$

$$\tau(1_\Gamma) = \mathbb{I}_{V^o}: \quad \text{Για κάθε } f \in V^o, v \in V \text{ έχουμε } \tau(1_\Gamma)(f)(v) = (1_\Gamma f)(v) = f(1_\Gamma^{tr} \cdot v) = f(1_\Gamma \cdot v) = f(v) = \mathbb{I}_{V^o}(f)(v). \text{ Το } v \text{ ήταν τυχόν, άρα } \tau(1_\Gamma)(f) = \mathbb{I}_{V^o}(f), \text{ όμως και το } f \text{ ήταν τυχόν, άρα } \tau(1_\Gamma) = \mathbb{I}_{V^o}.$$

Έστω (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) η K-γραμμική επέκταση $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V^o)$ (που είναι ομομορφισμός K-αλγεβρών). Τότε το V^o γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο με $k \cdot v = \tau(k)(v)$, για κάθε $k \in K\Gamma$, $v \in V^o$. Μάλιστα, αν $r = \sum_g k_g g$, $f \in V^o$, $r \cdot f = \tau(r)(f) = (\sum_g k_g \tau(g))(f) = \sum_g k_g \tau(g)(f) = \sum_g k_g (g \cdot f)$.

ii) Έστω $a, b \in B$ τότε $(g \cdot e_b^*)(e_a) = e_b^*(g^{tr} \cdot e_a) = e_b^*(\sum_{c \in B} r_{ca}(g^{tr})e_c) = \sum_c r_{ca}(g^{tr})e_b^*(e_c) = r_{ba}(g^{tr})e_b^*(e_b) = r_{ba}(g^{tr}) = \sum_c r_{bc}(g^{tr})e_c^*(e_a)$. Άρα $g \cdot e_b^* = \sum_c r_{bc}(g^{tr})e_c^* = \sum_a r_{ba}(g^{tr})e_a^*$. Επιπλέον $g \cdot e_b^* = \sum_a r_{ab}^o(g)e_a^*$, άρα λόγω K-βάσης, πρέπει $r_{ab}^o(g) = r_{ba}(g^{tr})$.

iii) Από i) το μόνο που μένει ναδειχθεί είναι ότι $cf(V^o) \subseteq A_K(n, r)$. Έστω $a, b \in B$ και $I(n, r) = I$ τότε από υπόθεση πρέπει $r_{ba} \in A_K(n, r)$ οπότε $r_{ba} = \sum_{(i,j) \in I \times I} k_{i,j} c_{i,j}$, $k_{i,j} \in K$, τότε όμως

$$\begin{aligned} r_{ab}^o(g) &= r_{ba}(g^{tr}) = \sum_{(i,j)} k_{i,j} c_{i,j}(g^{tr}) = \sum_{(i,j)} k_{i,j} c_{i_1 j_1}(g^{tr}) \cdot \dots \cdot c_{i_r j_r}(g^{tr}) = \\ &= \sum_{(i,j)} k_{i,j} c_{j_1 i_1}(g) \cdot \dots \cdot c_{j_r i_r}(g) = \sum_{(i,j)} k_{i,j} c_{j,i}(g) \end{aligned}$$

Οπότε $r_{ab}^o = \sum_{(i,j)} k_{i,j} c_{j,i} \in A_K(n, r)$, άρα $cf(V^o) \subseteq A_K(n, r)$.

□

Σχόλιο. Ας παρατηρήσουμε ότι το V^* σαν $K\Gamma$ -πρότυπο με $(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v)$ δεν έχει την ιδιότητα να ανήκει κατ' ανάγκη στην $M_K(n, r)$. Ένα κίνητρο για το λόγο αυτό είναι ότι στην απόδειξη του *iii*) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $c_{i,j}(g^{tr}) = c_{j,i}(g)$, ενώ το $c_{i,j}(g^{-1})$ δεν ξέρουμε με τι είναι ίσο.

Πρόταση 2.7.1. Υπάρχει απεικόνιση $J : S_K(n, r) \longrightarrow S_K(n, r)$ με τις εξής ιδιότητες:

- i) $J(\xi_{i,j}) = \xi_{j,i}$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$. Ιδιαίτερος $J = \text{επί}$.
- ii) $H J$ είναι involutory, anti-automorphism. Δηλαδή $J^2 = J \circ J = \text{id}$, K -γραμμική και $J(\xi_1 \xi_2) = J(\xi_2) J(\xi_1)$, για κάθε $\xi_1, \xi_2 \in S_K(n, r)$.
- iii) $J(\xi)(c_{i,j}) = \xi(c_{j,i})$ και $J(e_g) = e_{g^{tr}}$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, $g \in \Gamma$.
- iv) Το V^o ως αντικείμενο της $M_K(n, r)$ γίνεται $S_K(n, r)$ -πρότυπο ώστε $V^o \in \text{mod}(S_K(n, r))$ και $(\xi \cdot f)(v) = f(J(\xi) \cdot v)$ για κάθε $\xi \in S_K(n, r)$, $f \in V^o$, $v \in V$.

Απόδειξη.

- i) Ορίζουμε $f : \{\xi_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}} \longrightarrow S_K(n, r)$ με $f(\xi_{i,j}) = \xi_{j,i}$. Τότε (επειδή $\{\xi_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ είναι K -βάση του $S_K(n, r)$) η f επεκτείνεται σε ομομορφισμό K -προτύπων έστω $J : S_K(n, r) \longrightarrow S_K(n, r)$, με $J(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{i,j}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{j,i}$, όπου $k_{i,j} \in K$. Τώρα θα δείξουμε ότι $J(\xi_{i,j}) = \xi_{j,i}$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, πράγματι, έστω $i, j \in I(n, r)$, τότε υπάρχει $(p, q) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (p, q) \iff (j, i) \sim (q, p)$, οπότε $J(\xi_{i,j}) = J(\xi_{p,q}) = \xi_{q,p} = \xi_{j,i}$ (Παρατήρηση 2.3.1). Όσο για το επί έχουμε ότι $J(\xi_{j,i}) = \xi_{i,j}$ για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$, άρα $S_K(n, r) = \text{Im} J$.
- ii) $J = \text{involutory}$: Για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$ έχουμε $J(J(\xi_{i,j})) = J(\xi_{j,i}) = \xi_{i,j}$, όμως $\{\xi_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ είναι K -βάση του $S_K(n, r)$ και $J = K$ -γραμμική, άρα $J^2 = \mathbb{I}_{S_K(n, r)}$.
 $J = \text{anti-automorphism}$: $J = K$ -γραμμική το είδαμε στο i). Πάμε να δείξουμε ότι $J(\xi_1 \xi_2) = J(\xi_2) J(\xi_1)$, πράγματι, έστω $i, j, k, l \in I(n, r)$:
 $J(\xi_{i,j} \cdot \xi_{k,l}) = J(\xi_{k,l}) \circ J(\xi_{i,j})$: Αρκεί να δειχθεί η ισότητα πάνω στα $\{c_{i,j}\}_{i,j \in I(n, r)}$ (αφού $A_K(n, r) = \text{span}_K\{c_{i,j} \mid i, j \in I(n, r)\}$), πράγματι, έστω $p, q \in I(n, r)$ τότε:

$$J(\xi_{i,j} \cdot \xi_{k,l})(c_{p,q}) \stackrel{iii)}{=} (\xi_{i,j} \cdot \xi_{k,l})(c_{q,p}) = \sum_{h \in I(n, r)} \xi_{i,j}(c_{q,h}) \xi_{k,l}(c_{h,p}) =$$

$$\sum_{h \in I(n, r)} \xi_{j,i}(c_{h,q}) \xi_{l,k}(c_{p,h}) = (\xi_{l,k} \cdot \xi_{j,i})(c_{p,q}) = (J(\xi_{k,l}) \cdot J(\xi_{i,j}))(c_{p,q}).$$

Όπου η τρίτη ισότητα, ισχύει αφού $(i, j) \sim (q, h) \iff (j, i) \sim (h, q)$, δηλαδή (εξ' ορισμού) $\xi_{i,j}(c_{q,h}) = \xi_{j,i}(c_{h,q})$, και όμοια $\xi_{k,l}(c_{h,p}) = \xi_{l,k}(c_{p,h})$. Γενικά τώρα, έστω $x, y \in S_K(n, r)$ με

$$x = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} k_{p,q} \xi_{p,q}, \quad y = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} r_{i,j} \xi_{i,j}, \quad \text{όπου } k_{p,q}, r_{i,j} \in K \text{ τότε:}$$

$$\begin{aligned} J(x \cdot y) &= J\left(\sum_{(p,q)} \sum_{(i,j)} k_{p,q} r_{i,j} (\xi_{p,q} \cdot \xi_{i,j})\right) = \sum_{(p,q)} \sum_{(i,j)} k_{p,q} r_{i,j} J(\xi_{p,q} \cdot \xi_{i,j}) = \\ &= \sum_{(p,q)} \sum_{(i,j)} r_{i,j} k_{p,q} (J(\xi_{i,j}) \cdot J(\xi_{p,q})) = \left(\sum_{(i,j)} r_{i,j} J(\xi_{i,j})\right) \cdot \left(\sum_{(p,q)} k_{p,q} J(\xi_{p,q})\right) = J(y) \cdot J(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \text{Έστω } (p,q) \in \mathcal{T} \text{ τότε } J(\xi_{p,q})(c_{i,j}) &= \xi_{q,p}(c_{i,j}) = \begin{cases} 1, & (q,p) \sim (i,j) \\ 0, & (q,p) \not\sim (i,j) \end{cases} = \begin{cases} 1, & (p,q) \sim (j,i) \\ 0, & (p,q) \not\sim (j,i) \end{cases} = \\ &= \xi_{p,q}(c_{j,i}). \quad \text{Γενικά αν } \xi \in S_K(n,r) \text{ με } \xi = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} k_{p,q} \xi_{p,q}, \quad k_{p,q} \in K, \text{ τότε } J(\xi)(c_{i,j}) = \sum_{(p,q)} k_{p,q} J(\xi_{p,q})(c_{i,j}) = \\ &= \sum_{(p,q)} k_{p,q} \xi_{p,q}(c_{j,i}) = \xi(c_{j,i}). \end{aligned}$$

Επιπλέον, $J(e_g)(c_{i,j}) = e_g(c_{j,i}) = c_{j,i}(g) = c_{i,j}(g^{tr}) = e_{g^{tr}}(c_{i,j})$, όμως $A_K(n,r) = \text{span}_K\{c_{i,j} \mid i,j \in I(n,r)\}$, άρα $J(e_g) = e_{g^{tr}}$.

iv) Καταρχάς, υπενθυμίζουμε ότι το V^o γίνεται $S_K(n,r)$ -πρότυπο με $e(k) \cdot f = k \cdot f$ για κάθε $k \in K\Gamma$ (Παρατήρηση 2.4.3), όπου $e : K\Gamma \rightarrow S_K(n,r)$ ο γνωστός επιμορφισμός K -αλγεβρών. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $(e(k) \cdot f)(v) = f(J(e(k)) \cdot v)$ για κάθε $k \in K\Gamma$, $v \in V$. Πράγματι, έστω $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$, $v \in V$, όπου $k_g \in K$, τότε $(e(g) \cdot f)(v) = (g \cdot f)(v) = f(g^{tr} \cdot v) = f(e(g^{tr}) \cdot v) = f(J(e(g)) \cdot v)$. Τώρα $(e(k) \cdot f)(v) = ((\sum_g k_g e(g)) \cdot f)(v) = (\sum_g k_g (e(g) \cdot f))(v) = \sum_g k_g (e(g) \cdot f)(v) = \sum_g k_g f(J(e(g)) \cdot v) = f(\sum_g k_g (J(e(g)) \cdot v)) = f((\sum_g k_g J(e(g))) \cdot v) = f(J(e(k)) \cdot v)$.

□

Πρόταση 2.7.2. Έστω $V \in M_K(n,r)$, τότε ο φυσικός ισομορφισμός $\tau : V \rightarrow V^{**}$ επάγει ισομορφισμό $K\Gamma$ -προτύπων $\tau : V \rightarrow V^{oo}$. Ιδιαίτερώς $V \simeq V^{oo}$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων).

Απόδειξη.

Καταρχάς η $\tau : V \rightarrow V^{oo}$ είναι ισομορφισμός K -προτύπων (από Λήμμα 2.4.1). Μένει να δειχθεί ότι είναι ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων, πράγματι έστω $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $v \in V$, τότε για κάθε $f \in V^o$ έχουμε $\tau(g \cdot v)(f) = f(g \cdot v) = (g^{tr} \cdot f)(v) = \tau(v)(g^{tr} \cdot f) = (g \cdot \tau(v))(f)$, άρα $\tau(g \cdot v) = g \cdot \tau(v)$. Συνεπώς, $\tau(k \cdot v) = \tau(\sum_g k_g (g \cdot v)) = \sum_g k_g \tau(g \cdot v) = \sum_g k_g (g \cdot \tau(v)) = (\sum_g k_g g) \cdot \tau(v) = k \cdot \tau(v)$.

□

Ορισμός 2.7.2. Έστω $V, W \in M_K(n,r)$. Μία απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : V \times W \rightarrow K$ λέγεται K -bilinear (K -διπροσθετική) αν ισχύουν τα παρακάτω:

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w), \quad \text{για κάθε } v_1, v_2 \in V, \quad w \in W.$$

$$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2), \quad \text{για κάθε } v \in V, \quad w_1, w_2 \in W.$$

$(k \cdot v, w) = (v, k \cdot w) = k \cdot (v, w)$, για κάθε $v, w \in V$, $k \in K$.

Αν επιπλέον ισχύει $(\xi \cdot v, w) = (v, J(\xi) \cdot w)$, για κάθε $v, w \in V$, $\xi \in S_K(n, r)$, τότε η $(\cdot, \cdot)$ λέγεται *contravariant form*.

Πρόταση 2.7.3. Έστω $V, W \in M_K(n, r)$ και $\mathcal{A} := \{\text{contravariant forms } (\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K\}$, $\mathcal{B} := \{\text{ομομορφισμοί } K\Gamma\text{-προτύπων } \Lambda : V \longrightarrow W^o\}$. Τότε υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, ώστε $\phi((\cdot, \cdot)) = \Lambda : V \longrightarrow W^o$, με $\Lambda(v)(w) = (v, w)$.

Απόδειξη.

ϕ καλά ορισμένη: Πρέπει να δείξουμε ότι $\phi((\cdot, \cdot)) = \Lambda \in \mathcal{B}$. Πράγματι, για κάθε $v, u \in V$, $w \in W$ έχουμε $\Lambda(v+u)(w) = (v+u, w) = (v, w) + (u, w) = \Lambda(v)(w) + \Lambda(u)(w)$, συνεπώς $\Lambda(v+u) = \Lambda(v) + \Lambda(u)$, εύκολα δείχνουμε ότι Λ είναι και K -γραμμική. Επίσης αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ τότε $\Lambda(g \cdot v)(w) = (g \cdot v, w) = (e_g \cdot v, w) = (v, J(e_g) \cdot w) = \Lambda(v)(J(e_g) \cdot w) = (e_g \cdot \Lambda(v))(w) = (g \cdot \Lambda(v))(w)$, (όπου η πέμπτη ισότητα ισχύει από Πρόταση 2.7.1 iv)) το w ήταν τυχόν, άρα $\Lambda(g \cdot v) = g \cdot \Lambda(v)$, συνεπώς $\Lambda(k \cdot v) = \Lambda(\sum_g k_g (g \cdot v)) = \sum_g k_g \Lambda(g \cdot v) = \sum_g k_g (g \cdot \Lambda(v)) = (\sum_g k_g g) \cdot \Lambda(v) = k \cdot \Lambda(v)$.

ϕ 1-1: $\phi((\cdot, \cdot)_1) = \phi((\cdot, \cdot)_2) \implies \Lambda_1 = \Lambda_2 \implies \Lambda_1(v)(w) = \Lambda_2(v)(w)$, για κάθε $v \in V$, $w \in W$, άρα $(v, w)_1 = (v, w)_2 \forall v \in V$, $w \in W$ συνεπώς, $(\cdot, \cdot)_1 = (\cdot, \cdot)_2$.

ϕ επί: Έστω $\Lambda \in \mathcal{B}$ τότε ορίζουμε $(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$, με $(v, w) = \Lambda(v)(w)$. Τότε αν δείξουμε ότι $(\cdot, \cdot) \in \mathcal{A}$, έπεται άμεσα $\phi((\cdot, \cdot)) = \Lambda$. Πράγματι,

$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$: $(v_1 + v_2, w) = \Lambda(v_1 + v_2)(w)$, όμως Λ είναι K -γραμμική, οπότε $\Lambda(v_1 + v_2)(w) = (\Lambda(v_1) + \Lambda(v_2))(w) = \Lambda(v_1)(w) + \Lambda(v_2)(w) = (v_1, w) + (v_2, w)$.

$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$: $(v, w_1 + w_2) = \Lambda(v)(w_1 + w_2)$, όμως $\Lambda(v) \in W^o$, άρα $\Lambda(v)(w_1 + w_2) = \Lambda(v)(w_1) + \Lambda(v)(w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$.

$(k \cdot v, w) = (v, k \cdot w) = k \cdot (v, w)$, όπου $k \in K$: Όμοια με τα δύο προηγούμενα.

$(\cdot, \cdot)$ contravariant form : Έστω $k \in K\Gamma$ τότε $(e(k) \cdot v, w) = \Lambda(e(k) \cdot v)(w) = \Lambda(k \cdot v)(w) = (k \cdot \Lambda(v))(w) = (e(k) \cdot \Lambda(v))(w) = \Lambda(v)(J(e(k)) \cdot w) = (v, J(e(k)) \cdot w)$. Όπου η τρίτη ισότητα ισχύει επειδή $\Lambda \in \mathcal{B}$ και η πέμπτη από Πρόταση 2.7.1 iv).

□

Ορισμός 2.7.3. Έστω $V, W \in M_K(n, r)$. Μία K -bilinear form $(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$ λέγεται *non-singular* (ή *non-degenerate*) αν ισχύουν τα εξής:

i) Αν $(v, w) = 0$ για κάθε $w \in W$ τότε $v = 0$.

ii) Αν $(v, w) = 0$ για κάθε $v \in V$ τότε $w = 0$.

Πρόταση 2.7.4. Έστω $V, W \in M_K(n, r)$, και $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ που είδαμε πριν. Τότε, μία απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$ είναι *non-singular contravariant form* αν και μόνον αν η απεικόνιση $\phi((\cdot, \cdot)) = \Lambda : V \longrightarrow W^o$ με $\Lambda(v)(w) = (v, w)$ είναι ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων ($\iff$ ισομορφισμός στην $M_K(n, r)$).

Απόδειξη.

($\Leftarrow$): Έστω $\Lambda : V \longrightarrow W^o$ ισομορφισμός στην $M_K(n, r)$ τότε από Πρόταση 2.7.3, η $(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$ με $(v, w) = \Lambda(v)(w)$ είναι contravariant form . Μένει να δείξουμε ότι είναι non-singular . Πράγματι, αν $(v, w) = 0$ για κάθε $w \in W$ τότε $\Lambda(v)(w) = 0$ για κάθε $w \in W$, δηλαδή $\Lambda(v) = 0$, όμως Λ είναι 1-1, άρα $v = 0$.

Έστω τώρα ότι $(v, w) = 0$ για κάθε $v \in V$. Θεωρούμε $\{e_1, \dots, e_n\}$ K-βάση του W και $\{f_1, \dots, f_n\}$ την αντίστοιχη δυϊκή K-βάση του W^o , (δηλαδή $f_i(\sum_{j=1}^n k_j e_j) = k_i$, όπου $k_j \in K$). Επειδή Λ είναι επί, τότε υπάρχουν $v_i \in V$ ώστε $\Lambda(v_i) = f_i$ για κάθε $i \in \underline{n}$, άρα από υπόθεση έχουμε ότι $(v_i, w) = 0 \iff \Lambda(v_i)(w) = 0 \iff f_i(w) = 0$ για κάθε $i \in \underline{n}$, άρα $w = 0$.

($\Rightarrow$): Έστω ότι $(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$ non-singular contravariant form , τότε από Πρόταση 2.7.3 η $\Lambda : V \longrightarrow W^o$ με $\Lambda(v)(w) = (v, w)$ είναι ομομορφισμός στην $M_K(n, r)$. Μένει ναδειχθεί ότι είναι 1-1 και επί. Πράγματι,

Λ 1-1: Αν $\Lambda(v) = 0$ τότε $\Lambda(v)(w) = 0$ για κάθε $w \in W$, συνεπώς $(v, w) = 0$ για κάθε $w \in W$, άρα από υπόθεση $v = 0$.

Λ επί : Επειδή Λ είναι K-γραμμική (ως ομομορφισμός KΓ-προτύπων) και 1-1, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_K V = \dim_K W^o$. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $\psi_1 : V \longrightarrow W^o$, $v \mapsto (v, -)$, όπου $(v, -) : W \longrightarrow K$, $w \mapsto (v, w)$. Η ψ_1 είναι K-γραμμική (άμεσα από τον ορισμό της και το γεγονός ότι $(\cdot, \cdot)$ K-bilinear) και 1-1 (αφού για $\psi_1(v) = 0$ τότε $(v, -) = 0$ δηλαδή $(v, w) = 0$ για κάθε $w \in W$, άρα $v = 0$), Συνεπώς $\psi_1 : V \longrightarrow W^o$ μονομορφισμός K-προτύπων, άρα $\dim_K V \leq \dim_K W^o$. Όμοια ορίζουμε ένα μονομορφισμό K-προτύπων $\psi_2 : W \longrightarrow V^o$ με $w \mapsto (-, w)$ και από Παρατήρηση 2.7.1 i) έχουμε $\dim_K W^o = \dim_K W \leq \dim_K V^o = \dim_K V$. Τελικά $\dim_K V = \dim_K W^o$.

□

Παράδειγμα 2.7.1. Για το KΓ-πρότυπο $E^{\otimes r} \in M_K(n, r)$ υπάρχει symmetric contravariant non-singular form $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^{\otimes r} \times E^{\otimes r} \longrightarrow K$, ώστε $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, όπου $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ η σύνηθης K-βάση του $E^{\otimes r}$. Ιδιαίτερος $E^{\otimes r} \simeq (E^{\otimes r})^o$ (Ισομορφισμός KΓ-προτύπων).

Απόδειξη.

Το ιδιαίτερος του Παραδείγματος ισχύει άμεσα αν εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (από Πρόταση 2.7.4). Τώρα, θέτουμε $I = I(n, r)$ και ορίζουμε $f : \{e_i\}_{i \in I} \times \{e_i\}_{i \in I} \longrightarrow K$ με $f(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, επειδή $\{e_i\}_{i \in I}$ είναι K-βάση του $E^{\otimes r}$ μπορούμε να επεκτείνουμε την f K-διπροσθετικά σε μία K-διπροσθετική απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^{\otimes r} \times E^{\otimes r} \longrightarrow K$ ώστε $\langle \sum_{i \in I} k_i e_i, \sum_{j \in I} r_j e_j \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} k_i r_j \delta_{i,j}$, όπου $k_i, r_j \in K$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle = \text{symmetric}$: Έστω $x, y \in E^{\otimes r}$, τότε $x = \sum_{i \in I} k_i e_i$, $y = \sum_{j \in I} r_j e_j$, για κάποια $k_i, r_j \in K$.

Τώρα $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \delta_{ji} = \langle e_j, e_i \rangle$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ οπότε,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} k_i r_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} k_i r_j \langle e_j, e_i \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle = \text{contravariant form}$: Έστω $\xi \in S_K(n, r)$, $x = \sum_{i \in I} k_i e_i \in E^{\otimes r}$, $y = \sum_{j \in I} r_j e_j \in E^{\otimes r}$ όπου

$k_i, r_j \in K$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle \xi \cdot e_i, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{h \in I} \xi(c_{h,i}) e_h, e_j \right\rangle = \sum_{h \in I} \xi(c_{h,i}) \langle e_h, e_j \rangle = \xi(c_{j,i}) \langle e_j, e_j \rangle = \xi(c_{j,i}) = \\ J(\xi)(c_{i,j}) &= \sum_{h \in I} J(\xi)(c_{h,j}) \langle e_i, e_h \rangle = \langle e_i, \sum_{h \in I} J(\xi)(c_{h,j}) e_h \rangle = \langle e_i, J(\xi) \cdot e_j \rangle\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\langle \xi \cdot x, y \rangle &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} k_i r_j \langle \xi \cdot e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} k_i r_j \langle e_i, J(\xi) \cdot e_j \rangle = \\ \left\langle \sum_{i \in I} k_i e_i, \sum_{j \in I} r_j (J(\xi) \cdot e_j) \right\rangle &= \left\langle \sum_{i \in I} k_i e_i, J(\xi) \cdot \left(\sum_{j \in I} r_j e_j \right) \right\rangle = \langle x, J(\xi) \cdot y \rangle.\end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle = \text{non-singular}$: Έστω $v = \sum_{i \in I} k_i e_i \in E^{\otimes r}$ με $\langle v, w \rangle = 0$ για κάθε $w \in E^{\otimes r}$, τότε $\langle \sum_{i \in I} k_i e_i, e_j \rangle = 0$ για κάθε $j \in I$, όμως $\langle \sum_{i \in I} k_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in I} k_i \langle e_i, e_j \rangle = k_j \langle e_j, e_j \rangle = k_j$, άρα $k_j = 0$ για κάθε $j \in I$, συνεπώς $v = 0$. Όμοια, αν $\langle v, w \rangle = 0$ για κάθε $v \in E^{\otimes r}$ τότε $w = 0$.

□

Ορισμός 2.7.4. Το contravariant form $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^{\otimes r} \times E^{\otimes r} \longrightarrow K$ το ονομάζουμε *canonical form* (κανονική μορφή) στο $E^{\otimes r}$.

Σχόλιο. Κλείνουμε την παράγραφο με κάποιες στοιχειώδεις παρατηρήσεις πάνω στην έννοια του *contravariant duality*.

Παρατήρηση 2.7.2. Έστω $V, W \in M_K(n, r)$ με $V \simeq W$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων), τότε $V^o \simeq W^o$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων).

Απόδειξη.

Έστω $\phi : W \longrightarrow V$ ο ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων, τότε θεωρούμε $\psi : V^o \longrightarrow W^o$, με $f \longmapsto f \circ \phi$. Τότε, άμεσα ψ είναι καλά ορισμένη και K -γραμμική. Επιπλέον,

$$\psi \text{ 1-1: } \psi(f_1) = \psi(f_2) \implies f_1 \circ \phi = f_2 \circ \phi \implies f_1 = f_1 \circ \phi \circ \phi^{-1} = f_2 \circ \phi \circ \phi^{-1} = f_2.$$

$$\psi \text{ επί: } \text{Αν } f \in W^o \text{ τότε } f \circ \phi^{-1} \in V^o \text{ και } \psi(f \circ \phi^{-1}) = f.$$

$$\psi \text{ ομομορφισμός } K\Gamma\text{-προτύπων: } \text{Έστω } k = \sum_g k_g g \in K\Gamma \text{ και } f \in V^o \text{ τότε } \psi(g \cdot f) = (g \cdot f) \circ \phi^{-1}.$$

Όμως, $((g \cdot f) \circ \phi)(v) = (gf)(\phi(v)) = f(g^{tr} \phi(v)) = f(\phi(g^{tr} \cdot v)) = (f \circ \phi)(g^{tr} \cdot v) = (g(f \circ \phi))(v) = (g \cdot \psi(f))(v)$ για κάθε $v \in V$, συνεπώς $\psi(g \cdot f) = g \cdot \psi(f)$. Τελικά, επειδή ψ K -γραμμική έχουμε, $\psi(k \cdot f) = \sum_g k_g \psi(g \cdot f) = \sum_g k_g (g \cdot \psi(f)) = (\sum_g k_g g) \cdot \psi(f) = k \cdot \psi(f)$.

□

Παρατήρηση 2.7.3. *i) Αν $V, W \in M_K(n, r)$ και $f : V \longrightarrow W$ ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων, τότε ορίζεται ο εξής ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων:*

$$f^\circ : W^\circ \longrightarrow V^\circ, \quad h \longmapsto h \circ f.$$

ii) Ορίζεται ο contravariant συναρτητής $\mathcal{F} := \circ : M_K(n, r) \longrightarrow M_K(n, r)$ ώστε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(V) &= V^\circ \\ \mathcal{F}(f : V \longrightarrow W) &= f^\circ : W^\circ \longrightarrow V^\circ\end{aligned}$$

Για κάθε $V, W \in M_K(n, r)$ και $f : V \longrightarrow W$ ομομορφισμό στην $M_K(n, r)$.

iii) Ο συναρτητής $\mathcal{F} = \circ$ είναι ακριβής. Δηλαδή, για κάθε ακριβή ακολουθία της $M_K(n, r)$ έστω

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

έπεται η εξής ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow N^\circ \xrightarrow{g^\circ} W^\circ \xrightarrow{f^\circ} V^\circ \longrightarrow 0$ της $M_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς η f° είναι άμεσα καλά ορισμένη και ομομορφισμός K -προτύπων. Επιπλέον,

f είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων: Επειδή το Γ είναι K -βάση του $K\Gamma$ και f είναι ομομορφισμός K -προτύπων τότε αρκεί να δείξουμε ότι,

$$f^\circ(g \cdot h) = g \cdot f^\circ(h), \quad \text{για κάθε } g \in \Gamma, h \in W^\circ.$$

Πράγματι, για κάθε $v \in V$ έχουμε:

$$\begin{aligned}f^\circ(g \cdot h)(v) &= ((g \cdot h) \circ f)(v) = (g \cdot h)(f(v)) = h(g^{tr} \cdot f(v)) = h(f(g^{tr} \cdot v)) = \\ &= (h \circ f)(g^{tr} \cdot v) = f^\circ(h)(g^{tr} \cdot v) \xrightarrow{f^\circ(h) \in V^\circ} (g \cdot f^\circ(h))(v)\end{aligned}$$

Το $v \in V$ ήταν τυχόν, άρα $f^\circ(g \cdot h) = g \cdot f^\circ(h)$, για κάθε $g \in \Gamma, h \in W^\circ$.

ii) Ο συναρτητής $\mathcal{F}$ είναι καλά ορισμένος: Άμεσα από i).

Έστω επίσης $f : V \longrightarrow W, g : N \longrightarrow V$ ομομορφισμοί στην $M_K(n, r)$ τότε:

$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$: Πράγματι, για κάθε $h \in W^\circ$ έχουμε,

$$\mathcal{F}(f \circ g)(h) = (f \circ g)^\circ(h) = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = g^\circ(h \circ f) = g^\circ(f^\circ(h)) = (g^\circ \circ f^\circ)(h).$$

$\mathcal{F}(\mathbb{I}_V) = \mathbb{I}_{V^\circ}$: Πράγματι, για κάθε $h \in V^\circ$ έχουμε,

$$\mathcal{F}(\mathbb{I}_V)(h) = \mathbb{I}_V^\circ(h) = \mathbb{I}_V \circ h = h = \mathbb{I}_{V^\circ}(h)$$

iii) Έστω η ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ (*). Τότε,

$g^\circ = 1-1$: Έστω $h \in N^\circ$ με $g^\circ(h) = 0$ τότε,

$$h \circ g = 0 \implies h(\text{Im}g) = 0 \xrightarrow{(*)} h(N) = 0 \implies h = 0.$$

$\text{Im}g^\circ \subseteq \ker f^\circ$: Για κάθε $h \in N^\circ$ έχουμε $f^\circ(g^\circ(h)) = f^\circ(h \circ g) = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \xrightarrow{(*)} 0$.

$\ker f^\circ \subseteq \text{Im}g^\circ$: Έστω $\gamma \in \ker f^\circ \subseteq W^\circ$ τότε,

$$f^\circ(\gamma) = 0 \iff \gamma(\text{Im}f) = 0 \xleftrightarrow{(*)} \gamma(\ker g) = 0. (**)$$

Τώρα, για κάθε $n \in N$ υπάρχει $w \in W$ ώστε $g(w) = n$ και ορίζουμε,

$$h : N \longrightarrow K \text{ με } h(n) := \gamma(w).$$

Παρατηρούμε ότι $h \in N^\circ$ και ως δούμε π.χ το καλά ορισμένο της h ,

h είναι καλά ορισμένη: Έστω $n_1 = n_2 \in N$ και $g(w_1) = n_1$, $g(w_2) = n_2$ τότε $g(w_1) = g(w_2) \iff w_1 - w_2 \in \ker g$ και άρα από (**) έχουμε $\gamma(w_1) = \gamma(w_2) \iff h(n_1) = h(n_2)$.

Τελικά $h \in N^\circ$ και $g^\circ(h) = \gamma$ (αφού για κάθε $w \in W$ $g^\circ(h)(w) = (h \circ g)(w) = h(g(w)) = \gamma(w)$). Άρα $\gamma \in \text{Im}g^\circ$.

$f^\circ = \text{επί}$: Επειδή $f^\circ : W^\circ \longrightarrow V^\circ$ ομομορφισμός K -προτύπων (ως ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων) αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_K \text{Im}f^\circ = \dim_K V^\circ$. Πράγματι, από Παρατήρηση 2.7.1 i) έχουμε

$$\begin{aligned} \dim_K \text{Im}f^\circ &= \dim_K W^\circ - \dim_K \ker f^\circ \xrightarrow{\ker f^\circ = \text{Im}g^\circ} \dim_K W^\circ - \dim_K \text{Im}g^\circ \xrightarrow{g^\circ \text{ 1-1}} \\ \dim_K W^\circ - \dim_K N^\circ &= \dim_K W - \dim_K N \xrightarrow{(*)} \dim_K W - (\dim_K W - \dim_K \ker g) = \\ \dim_K \ker g &= \dim_K \text{Im}f \xrightarrow{(*)} \dim_K V = \dim_K V^\circ. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.7.5. Έστω $V \in M_K(n, r)$

i) $V = \text{irreducible} \iff V^\circ = \text{irreducible}$. (Εννοείται σαν $K\Gamma$ -πρότυπα ($\iff S_K(n, r)$ -πρότυπα)).

ii) Αν το V έχει maximal $K\Gamma$ -πρότυπο ($\iff S_K(n, r)$ -πρότυπο) έστω V^{max} , τότε:

- Το V° έχει irreducible $K\Gamma$ -πρότυπο έστω V^{min} , με $V^{\text{min}} \simeq (V/V^{\text{max}})^\circ$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων $\iff S_K(n, r)$ -προτύπων).
- Αν επιπλέον το V έχει μοναδικό maximal $K\Gamma$ -πρότυπο, τότε και το V° έχει μοναδικό irreducible $K\Gamma$ -πρότυπο (ως προς ισομορφισμό).

Απόδειξη.

i) ($\implies$): Έστω $W \leq V^\circ$ και θεωρούμε την εξής ακριβής ακολουθία της $M_K(n, r)$:

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{i} V^\circ \xrightarrow{\pi} V^\circ/W \longrightarrow 0.$$

Όπου i, π οι σύννηθες ένθεση και προβολή. Τότε από Παρατήρηση 2.7.3 έπεται η εξής ακριβής ακολουθία της $M_K(n, r)$:

$$0 \longrightarrow (V^\circ/W)^\circ \xrightarrow{\pi^\circ} V^{\circ\circ} \xrightarrow{i^\circ} W^\circ \longrightarrow 0.$$

Το $V^{\circ\circ}$ είναι irreducible $K\Gamma$ -πρότυπο (αφού $V \simeq V^{\circ\circ}$, βλέπε Πρόταση 2.7.2). Οπότε (από 1^ο Θεώρημα Ισομορφισμών) πρέπει $(V^\circ/W)^\circ \simeq \text{Im}\pi^\circ \leq V^{\circ\circ} = \text{irreducible}$ (όπου ο ισομορφισμός είναι $K\Gamma$ -προτύπων και κατά συνέπεια και K -προτύπων). Συνεπώς,

$$\text{Im}\pi^\circ = 0 \text{ ή } \text{Im}\pi^\circ = V^{\circ\circ}$$

Αν $(V^\circ/W)^\circ \simeq \text{Im}\pi^\circ = 0$: Τότε $(V^\circ/W)^\circ = 0$ και από Παρατήρηση 2.7.1 i) πρέπει $\dim_K(V^\circ/W) = \dim_K(V^\circ/W)^\circ = 0$. Συνεπώς, $V^\circ/W = 0 \iff W = V^\circ$.

Αν $(V^\circ/W)^\circ \simeq \text{Im}\pi^\circ = V^{\circ\circ}$: Τότε από Παρατήρηση 2.7.1 i) πρέπει

$$\dim_K(V^\circ/W) = \dim_K V^\circ \iff \dim_K W = 0 \iff W = 0.$$

Τελικά $W = 0$ ή V° και άρα $V^\circ = \text{irreducible}$.

($\impliedby$): Από ($\implies$) πρέπει το $V^{\circ\circ}$ να είναι irreducible $K\Gamma$ -πρότυπο. Όμως από Πρόταση 2.7.2 ισχύει $V \simeq V^{\circ\circ}$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων) και έτσι $V = \text{irreducible } K\Gamma$ -πρότυπο.

ii) a) Εφόσον το $V^{\max}$ είναι maximal $K\Gamma$ -υποπρότυπο του V , τότε το $V/V^{\max}$ είναι irreducible $K\Gamma$ -πρότυπο της $M_K(n, r)$. Θεωρούμε την ακριβής ακολουθία της $M_K(n, r)$:

$$0 \longrightarrow V^{\max} \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/V^{\max} \longrightarrow 0.$$

Όπου i, π οι σύννηθες ένθεση και προβολή. Από Παρατήρηση 2.7.3 έπεται η εξής ακριβής ακολουθία της $M_K(n, r)$:

$$0 \longrightarrow (V/V^{\max})^\circ \xrightarrow{\pi^\circ} V^\circ \xrightarrow{i^\circ} (V^{\max})^\circ \longrightarrow 0.$$

Τελικά, από 1^ο Θεώρημα Ισομορφισμών και i) έχουμε ότι:

$$\text{irreducible } K\Gamma\text{-πρότυπο} = (V/V^{\max})^\circ \simeq \text{Im}\pi^\circ \leq V^\circ.$$

Από το παραπάνω έπεται άμεσα το ζητούμενο.

- b) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε irreducible $K\Gamma$ -υποπρότυπο του V° είναι ισόμορφο με το $K\Gamma$ -πρότυπο $(V/V^{max})^\circ$. Πράγματι, έστω W ένα irreducible $K\Gamma$ -υποπρότυπο του V° και η επαγόμενη ακριβής ακολουθία της $M_K(n, r)$:

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{i} V^\circ \xrightarrow{\pi} V^\circ/W \longrightarrow 0.$$

Όπου i, π οι σύνηθες ένθεση και προβολή. Από Παρατήρηση 2.7.3 έπεται η εξής ακριβής ακολουθία της $M_K(n, r)$:

$$0 \longrightarrow (V/W)^\circ \xrightarrow{\pi^\circ} V^{\circ\circ} \xrightarrow{i^\circ} W^\circ \longrightarrow 0.$$

Οπότε έχουμε ένα επιμορφισμό $K\Gamma$ -προτύπων $i^\circ : V^{\circ\circ} \longrightarrow W^\circ$, όμως $V^{\circ\circ} \simeq V$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων) και άρα έπεται (άμεσα) ένας επιμορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων έστω $f : V \longrightarrow W^\circ$. Συνεπώς,

$$V/\ker f \simeq W^\circ \stackrel{i)}{=} \text{irreducible } K\Gamma\text{-πρότυπο. } (*)$$

Από το τελευταίο πρέπει $\ker f = \text{maximal } K\Gamma\text{-πρότυπο του } V$ και αναγκαστικά από υπόθεση πρέπει $\ker f = V^{max}$. Οπότε από Πρόταση 2.7.2 και (*) έχουμε

$$(V/V^{max})^\circ \simeq W^{\circ\circ} \simeq W \text{ (Ισομορφισμός } K\Gamma\text{-προτύπων).}$$

□

Σχόλιο. Ας σημειωθεί ότι στο Κεφάλαιο 3 (βλέπε Πρόσμα 3.5.2) θα δούμε ότι ισχύει κάτι ισχυρότερο, συγκεκριμένα όταν $V = \text{irreducible}$ τότε $V \simeq V^\circ$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων).

2.8 Το $A_K(n, r)$ ως $K\Gamma$ -διπρότυπο.

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Υπενθύμιση 2.8.1. *i) Είδαμε στο κεφάλαιο 1 ότι το K^Γ είναι $K\Gamma$ -διπρότυπο με*

$$g \circ f = R_g f, \quad f \circ g = L_g f \quad \text{για κάθε } g \in \Gamma, \quad f \in K^\Gamma.$$

Μάλιστα αν $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο μονομορφισμός K -αλγεβρών (της Πρότασης 1.2.1), τότε για $\Delta f = \phi(\sum_i f_i \otimes h_i)$ έχουμε ότι $g \circ f = \sum_i h_i(g) f_i$ και $f \circ g = \sum_i f_i(g) h_i$.

ii) Έστω $c \in A_K(n, r)$ τότε $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, όπου $c_i, d_i \in A_K(n, r)$. (Πόρισμα 2.2.1).

Παρατήρηση 2.8.1. Έστω $A_K(n, r)$ ο K -υπόχωρος του K^Γ τότε:

i) Το $A_K(n, r)$ είναι $K\Gamma$ -διπρότυπο του K^Γ .

ii) Έστω $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, όπου $c_i, d_i \in A_K(n, r)$. Αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $\tilde{c}_i, \tilde{d}_i$ οι K -γραμμικές επεκτάσεις των c_i, d_i σε όλο $K\Gamma$, τότε $k \cdot c = \sum_i \tilde{d}_i(k) c_i$ και $c \cdot k = \sum_i \tilde{c}_i(k) d_i$

iii) $A_K(n, r) \in M_K(n, r), M_K'(n, r)$. Ιδιαίτέρως $cf(A_K(n, r)) = A_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Επειδή K^Γ είναι $K\Gamma$ -διπρότυπο, αρκεί να δείξουμε ότι το $A_K(n, r)$ είναι αριστερό και δεξιό $K\Gamma$ -υποπρότυπο, όμως $A_K(n, r)$ είναι ήδη K -υπόχωρος, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $k \cdot c, c \cdot k \in A_K(n, r)$ για κάθε $k \in K\Gamma, c \in A_K(n, r)$. Πράγματι (κάνουμε το ένα και το άλλο όμοια), έστω $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $c \in A_K(n, r)$, τότε από υπενθύμιση έχουμε ότι $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, όπου $c_i, d_i \in A_K(n, r)$, οπότε $k \cdot c = \sum_g k_g (g \circ c) = \sum_g k_g (\sum_i d_i(g) c_i) = \sum_g \sum_i k_g d_i(g) c_i \in A_K(n, r)$.

ii) Κάνουμε το ένα και το άλλο όμοια. Πράγματι, $k \cdot c = \sum_g k_g (g \circ c) = \sum_g k_g (\sum_i d_i(g) c_i) = \sum_g \sum_i k_g d_i(g) c_i = \sum_i \sum_g k_g d_i(g) c_i = \sum_i (\sum_g k_g d_i(g)) c_i = \sum_i \tilde{d}_i(k) c_i$

iii) Καταρχάς $\dim A_K(n, r) < \infty$ από Πρόταση 2.1.1 ii) και $A_K(n, r) = K\Gamma$ -πρότυπο. Μένει να δείξουμε ότι $cf(A_K(n, r)) \subseteq A_K(n, r)$. Πράγματι, θέτουμε $I = I(n, r)$ και έστω $(i, j) \in \mathcal{T}$ τότε (επειδή $\Delta c_{i,j} = \phi(\sum_k c_{i,k} \otimes c_{k,j})$) έχουμε $g \circ c_{i,j} = \sum_{k \in I} c_{k,j}(g) c_{i,k} = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} (\sum_{k \in I: (i,k) \sim (p,q)} c_{k,j}(g)) c_{p,q}$ (η τελευταία ισότητα ισχύει χρησιμοποιώντας ότι $\mathcal{T}$ = σύνολο αντιπροσώπων, την Παρατήρηση 2.1.1iii) και βγάζοντας κοινούς παράγοντες στο άθροισμα $\sum_{k \in I} c_{k,j}(g) c_{i,k}$). Τώρα επειδή $\{c_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$ είναι K -βάση του $A_K(n, r)$, έπεται άμεσα από την σχέση πάνω ότι τα coefficient function ζουν μέσα στο $A_K(n, r)$, άρα $cf(A_K(n, r)) \subseteq A_K(n, r)$.

□

Πόρισμα 2.8.1. Το $A_K(n, r)$ γίνεται $S_K(n, r)$ -διπρότυπο. Επιπλέον αν $\xi \in S_K(n, r)$ και $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, (όπου $c_i, d_i \in A_K(n, r)$) τότε $\xi \circ c = \sum_i \xi(d_i)c_i$ και $c \circ \xi = \sum_i \xi(c_i)d_i$.

Απόδειξη.

Κάνουμε το ένα και το άλλο όμοια. Έστω $e : K\Gamma \rightarrow S_K(n, r)$ επιμορφισμός K-αλγεβρών, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $e(k) \circ c = \sum_i e(k)(d_i)c_i$ για κάθε $k \in K\Gamma$. Πράγματι, έστω $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ τότε $e(k) \circ c = \sum_g k_g (e(g) \circ c) = \sum_g k_g (g \circ c) = \sum_g k_g (\sum_i d_i(g)c_i) = \sum_i (\sum_g k_g d_i(g))c_i = \sum_i e(k)(d_i)c_i$.

□

Πρόταση 2.8.1. Έστω η απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : S_K(n, r) \times A_K(n, r) \rightarrow K$ με $(\xi, c) = J(\xi)(c)$. Τότε:

i) $H(\cdot, \cdot)$ είναι non-singular contravariant form .

ii) Έστω $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i a_i \otimes b_i)$, (όπου $a_i, b_i \in A_K(n, r)$) και $\xi, \eta \in S_K(n, r)$ τότε :

$$(\xi \cdot \eta, c) = (\eta, J(\xi) \circ c) = (\xi, c \circ J(\eta)) = \sum_i (\xi, b_i)(\eta, a_i).$$

iii) a) $S_K(n, r) \simeq A_K(n, r)^o$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων $\iff S_K(n, r)$ -προτύπων).

b) $S_K(n, r)^o \simeq A_K(n, r)$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων $\iff S_K(n, r)$ -προτύπων).

(Όπου το $S_K(n, r)$ είναι $K\Gamma$ -πρότυπο αφού είναι $S_K(n, r)$ -πρότυπο).

Απόδειξη.

i) $(\cdot, \cdot)$ K-διπροσθετική: $(\xi_1 + \xi_2, c) = J(\xi_1 + \xi_2)(c) = (J(\xi_1) + J(\xi_2))(c) = J(\xi_1)(c) + J(\xi_2)(c) = (\xi_1, c) + (\xi_2, c)$ (όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή $J = K$ -γραμμική).

$(\xi, c_1 + c_2) = J(\xi)(c_1 + c_2) = J(\xi)(c_1) + J(\xi)(c_2) = (\xi, c_1) + (\xi, c_2)$ (όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή $J(\xi) \in S_K(n, r)$). Όμοια $(k\xi, c) = (\xi, kc) = k(\xi, c)$.

$(\cdot, \cdot)$ non-singular : Έστω $(\xi, c) = 0$ για κάθε $\xi \in S_K(n, r)$, δηλαδή $J(\xi)(c) = 0$ για κάθε $\xi \in S_K(n, r)$, έστω $c = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} c_{i,j}$, τότε για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$ έχουμε,

$$J(\xi_{q,p})(c) = 0 \iff \xi_{q,p}(c) = 0 \iff \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{q,p}(c_{i,j}) = 0 \iff k_{p,q} = 0.$$

Οπότε $c = 0$. Ανάποδα, αν $(\xi, c) = 0$ για κάθε $c \in A_K(n, r)$, τότε για $\xi = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{i,j}$, έχουμε $\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} (\xi_{i,j}, c) = 0 \iff \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} J(\xi_{i,j})(c) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{j,i}(c) = 0$ για κάθε $c \in A_K(n, r)$. Τώρα, επειδή $(i, j) \sim (p, q) \iff (j, i) \sim (q, p)$, έχουμε ότι $(q, p) \approx (j, i)$ για

κάθε $(i, j) \in \mathcal{T} \setminus \{(p, q)\}$ και $(p, q) \in \mathcal{T}$. Συνεπώς για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$ και $c = c_{q,p}$ έχουμε $0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} \xi_{j,i}(c_{q,p}) = k_{p,q}$, άρα $\xi = 0$.

$(\cdot, \cdot)$ contravariant form : Από Πρόταση 2.7.1 ii) και Πρόταση 2.3.2 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} (\xi \cdot \eta, c) &= J(\xi \cdot \eta)(c) = (J(\eta) \cdot J(\xi))(c) = \sum_i (\eta, a_i)(\xi, b_i) = \\ &= \sum_i (\eta, (\xi, b_i)a_i) = (\eta, \sum_i (\xi, b_i)a_i) = (\eta, \sum_i J(\xi)(b_i)a_i) = (\eta, J(\xi) \circ c) \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} (J(\eta) \cdot J(\xi))(c) &= \sum_i J(\eta)(a_i)J(\xi)(b_i) = \sum_i (\eta, a_i)(\xi, b_i) = \\ &= \sum_i (\xi, (\eta, a_i)b_i) = (\xi, \sum_i (\eta, a_i)b_i) = (\xi, \sum_i J(\eta)(a_i)b_i) = (\xi, c \circ J(\eta)) \end{aligned}$$

ii) Δείχθηκε στο i) εκεί που αποδείξαμε ότι $(\cdot, \cdot)$ είναι contravariant form.

iii) a) Άμεσο από i) και Πρόταση 2.7.4.

b) Άμεσο από iii)a), Πρόταση 2.7.2. και Παρατήρηση 2.7.2.

□

3 Weights και Characters.

3.1 Weights.

Υπενθυμίζουμε ότι η ομάδα $G(r)$ δρα στο $I(n, r)$ από δεξιά με $i \cdot \pi = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)})$, όπου $i = (i_1, \dots, i_r)$ και $\pi \in G(r)$.

Ορισμός 3.1.1. Έστω $i \in I(n, r)$, ορίζουμε $a = a_i = (a_1, \dots, a_n)$, όπου $a_\nu = |\{p \in \underline{r} \mid i_p = \nu\}|$ για κάθε $\nu \in \underline{n}$, συμβολικά γράφουμε $i \in a$. Επί της ουσίας, $a_\nu = (\text{πλήθος των φορών που η απεικόνιση } i : \underline{r} \rightarrow \underline{n} \text{ χτυπάει } \nu) = (\text{το πλήθος των φορών που εμφανίζεται το } \nu \text{ στην ακολουθία } (i_1, \dots, i_r))$.

Παρατήρηση 3.1.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$ με αντίστοιχα διανύσματα a_i, a_j . Τότε,
 $a_i = a_j \iff i \sim j \iff i, j \text{ ανήκουν στην ίδια } G(r)\text{-τροχιά.}$

Απόδειξη.

Μένει να δείξουμε την πρώτη ισοδυναμία. Πράγματι, $a_i = a_j \iff$ το πλήθος των φορών που χτυπάει το i την τιμή ν είναι ίδιο με αυτό που χτυπάει το j την τιμή ν , για κάθε $\nu \in \underline{n}$, ισοδύναμα (άμεσα) οι ακολουθίες $(i_1, \dots, i_r), (j_1, \dots, j_r)$ έχουν τα ίδια στοιχεία (αλλά ενδεχομένως με άλλη σειρά), ισοδύναμα υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $(i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)}) = (j_1, \dots, j_r)$, ισοδύναμα $i \cdot \pi = j \iff i \sim j$. □

Ορισμός 3.1.2. $\Lambda(n, r) = \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \underline{r}, \sum_{i=1}^n a_i = r\}$. Τα στοιχεία του $\Lambda(n, r)$ θα λέγονται *weights* (βάρη).

Παρατήρηση 3.1.2. Αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των $G(r)$ -τροχιών της δεξιάς δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r)$, τότε υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \Lambda(n, r)$, με $\phi([i]_{G(r)}) = a_i$.

Απόδειξη. ϕ καλά ορισμένη και 1-1: Από Παρατήρηση 3.1.1 έχουμε, $[i]_{G(r)} = [j]_{G(r)} \iff$

$$i \sim j \iff a_i = a_j \iff \phi([i]_{G(r)}) = \phi([j]_{G(r)}).$$

ϕ επί: Έστω $a \in \Lambda(n, r)$ τότε μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε $i \in I(n, r)$ ώστε $i \in a$ (π.χ. $i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{a_n})$, το i είναι καλά ορισμένο και ανήκει στο $I(n, r)$ (αφού $\sum_{i=1}^n a_i = r$ και $a_i \in \underline{r}$), ιδιαιτέρως $a = a_i$, άρα $\phi([i]) = a$. □

Παρατήρηση 3.1.3. Έστω $W = G(n)$, τότε

i) $H W$ δρα στο $I(n, r)$ από αριστερά ώστε αν $w \in W, i = (i_1, \dots, i_r) \in I(n, r)$ τότε $w \cdot i = w \circ i = (w(i_1), \dots, w(i_r))$.

ii) $H W$ δρα στο $\Lambda(n, r)$ από αριστερά ώστε αν $w \in W, a = (a_1, \dots, a_n) \in \Lambda(n, r)$, τότε $w \cdot a = w(a) = (a_{w^{-1}(1)}, \dots, a_{w^{-1}(n)})$.

Απόδειξη.

Τα παραπάνω είναι όντως καλά ορισμένες δράσεις (άμεσα), το μόνο που θέλει προσοχή είναι να επαληθεύσουμε ότι $w \cdot a = (a_{w^{-1}(1)}, \dots, a_{w^{-1}(n)}) \in \Lambda(n, r)$ (δηλαδή $\sum_i a_{w^{-1}(i)} = r$ και $a_{w^{-1}(i)} \in \underline{r}$), πράγμα που ισχύει καθώς το $w \cdot a$ είναι ένα "ανακάτεμα" των όρων του $a \in \Lambda(n, r)$. □

Υπενθύμιση 3.1.1. (Από Θεωρία Ομάδων). Έστω G ομάδα που δρα επί ενός συνόλου X και $\phi : X \rightarrow Y$ 1-1 και επί απεικόνιση. Τότε η G δρα στο Y με $g \cdot y := \phi(g \cdot \phi^{-1}(y))$.

Παρατήρηση 3.1.4. $i) (w \cdot i) \cdot \pi = w \cdot (i \cdot \pi)$ για κάθε $w \in W$, $i \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$.

$ii)$ Αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των $G(r)$ -τροχιών της δεξιάς δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r)$, και $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \Lambda(n, r)$ η 1-1 και επί αντιστοιχία που είδαμε, τότε η W δρα στο $\mathcal{A}$ με $w \cdot [i] := \phi^{-1}(w \cdot \phi([i]))$.

Επί της ουσίας η δράση της W στο $\mathcal{A}$ αυτό που κάνει είναι το εξής: αν $w \in W$ και $[i] \in \mathcal{A}$, τότε $w \cdot [i] = [j] = \text{τροχιά με αντιπρόσωπο οποιοδήποτε } j \in I(n, r) \text{ με αντίστοιχο διάνυσμα } a_j = w \cdot a_i$.

Απόδειξη.

$(w \cdot i) \cdot \pi = (w(i_1), \dots, w(i_r)) \cdot \pi = ((w \circ i)_1, \dots, (w \circ i)_r) \cdot \pi = ((w \circ i)_{\pi(1)}, \dots, (w \circ i)_{\pi(r)}) = (w(i(\pi(1))), \dots, w(i(\pi(r)))) = (w(i_{\pi(1)}), \dots, w(i_{\pi(r)})) = w \cdot (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)}) = w \cdot (i \cdot \pi)$. □

Παρατήρηση 3.1.5. Κάθε W -τροχιά του $\Lambda(n, r)$ περιέχει ακριβώς ένα διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ με $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Το λ θα λέγεται *dominant weights* της τροχιάς $[a]_W$.

Απόδειξη.

Έστω $[a]_W$ μία W -τροχιά του $\Lambda(n, r)$ τότε:

Υπαρξη: Είναι σαφές ότι υπάρχει $w \in W$ ώστε $a_{w(1)} \geq \dots \geq a_{w(n)}$ (διατάσεις σε φθίνουσα σειρά του όρους του $a = (a_1, \dots, a_n)$), όμως $w^{-1} \cdot a \in [a]_W$ και $w^{-1} \cdot a = (a_{w^{-1}(1)}, \dots, a_{w^{-1}(n)})$, άρα έπεται η ύπαρξη.

Μοναδικότητα: Έστω $x, y \in [a]_W$ με $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ και $x_1 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \geq \dots \geq y_n$. Τότε από υπόθεση υπάρχει $w \in W$ ώστε $x = w \cdot y \iff x_i = y_{w^{-1}(i)}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Συνεπώς $y_1 \geq \dots \geq y_n$ και $y_{w^{-1}(1)} \geq \dots \geq y_{w^{-1}(n)}$, πράγμα που επιβάλει (Παρατήρηση 3.1.6) $y_i = y_{w^{-1}(i)}$ για κάθε $i \in \underline{n}$, άρα $x_i = y_i$ για κάθε $i \in \underline{n} \iff x = y$. □

Παρατήρηση 3.1.6. Γενικά, αν έχουμε μία πεπερασμένη φθίνουσα (αντίστοιχα αύξουσα) ακολουθία $x_1 \geq \dots \geq x_n$ και ανακατεύοντας τους όρους της πάρουμε πάλι μία φθίνουσα (αντίστοιχα αύξουσα) ακολουθία, τότε πεύτουμε πάλι πάνω στην αρχική (τυπικά αν $w \in W = G(n)$ με $x_{w(1)} \geq \dots \geq x_{w(n)}$ τότε $x_i = x_{w(i)}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$).

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο n . Για $n = 2$ είναι σαφές. Έστω ότι ισχύει για $n - 1$, τότε (επειδή $x_1 \geq \dots \geq x_n$) $x_{w(1)} \leq x_1$ και (επειδή $x_{w(1)} \geq \dots \geq x_{w(n)}$) $x_1 \leq x_{w(1)}$, άρα $x_1 = x_{w(1)}$. Θέτουμε $y_i = x_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \dots, n - 1$ και έχουμε $y_1 \geq \dots \geq y_{n-1}$, επιπλέον υπάρχει $s \in G(n - 1)$ ώστε $y_{s(i)} = x_{w(i+1)}$, για κάθε $i = 1, \dots, n - 1$, οπότε έχουμε $y_1 \geq \dots \geq y_{n-1}$ και $y_{s(1)} \geq \dots \geq y_{s(n-1)}$, άρα από επαγωγική υπόθεση πρέπει $y_i = y_{s(i)}$ για κάθε $i = 1, \dots, n - 1$, ισοδύναμα $x_{i+1} = x_{w(i+1)}$ για κάθε $i = 1, \dots, n - 1$, δηλαδή $x_i = x_{w(i)}$ για κάθε $i = 2, \dots, n$. Τελικά $x_i = x_{w(i)}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. □

Ορισμός 3.1.3. Θα συμβολίζουμε με $\Lambda^+(n, r)$ το σύνολο των *dominant weights* του $\Lambda(n, r)$.

Πόρισμα 3.1.1. Το $\Lambda^+(n, r)$ είναι σύνολο αντιπροσώπων W -τροχιών του $\Lambda(n, r)$.

3.2 Weights Spaces.

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$. Επίσης παρακάτω κάθε $V \in M_K(n, r)$ το βλέπουμε και σαν $S_K(n, r)$ -πρότυπο όπως στην Παρατήρηση 2.4.3.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $i \in I(n, r)$ και $a \in \Lambda(n, r)$ με $i \in a$, τότε θα γράφουμε $\xi_{i,i} = \xi_a$.

Παρατήρηση 3.2.1. *i)* Ο παραπάνω ορισμός είναι καλά ορισμένος (δηλαδή αν $i, j \in a$, όπου $a \in \Lambda(n, r)$, τότε $\xi_{i,i} = \xi_{j,j}$).

ii) $1_{S_K(n,r)} = \epsilon = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i} = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \xi_a$. (Όπου $\mathcal{T}_o$ σύνολο αντιπροσώπων τροχιών της δεξιάς δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r)$).

$$iii) \xi_a \cdot \xi_b = \begin{cases} \xi_a, & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}$$

Απόδειξη.

i) Αν $i, j \in a \in \Lambda(n, r)$ τότε από Παρατήρηση 3.1.1 πρέπει $i \sim j$, τότε όμως $(i, i) \sim (j, j)$, συνεπώς $\xi_{i,i} = \xi_{j,j}$.

ii) Από Παρατήρηση 3.1.2 και το γεγονός ότι $\mathcal{T}_o$ = σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών εύκολα δείχνεται ότι η απεικόνιση $\psi : \mathcal{T}_o \rightarrow \Lambda(n, r)$, $i \mapsto a_i$ είναι 1-1 και επί, από αυτό άμεσα φαίνεται ότι $\epsilon = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i} = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{a_i} = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \xi_a$.

iii) Έστω $i \in a$ και $j \in b$ τότε $\xi_a = \xi_{i,i}$ και $\xi_b = \xi_{j,j}$. Αν $a = b$ τότε (από Παρατήρηση 3.1.1) $i \sim j$, συνεπώς $(i, i) \sim (j, j)$ και $\xi_{i,i} = \xi_{j,j}$, άρα (από Πρόταση 2.3.3) $\xi_a \cdot \xi_a = \xi_a$. Αν $a \neq b$ τότε (από Παρατήρηση 3.1.1) $i \not\sim j$, και έτσι από (από Πρόταση 2.3.3) $\xi_a \cdot \xi_b = 0$

□

Πρόταση 3.2.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$, ξέρουμε (από Παρατήρηση 2.4.3) ότι το V γίνεται $S_K(n, r)$ -πρότυπο. Αν για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ θεωρήσουμε τον K -υπόχωρο $\xi_a V = \{\xi_a \cdot v \mid v \in V\}$, τότε:

$$V = \bigoplus_{a \in \Lambda(n,r)} \xi_a V.$$

Απόδειξη.

Το $\xi_a V$ είναι άμεσα K -υπόχωρος. Τώρα,

$$V = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \xi_a V: \quad V = 1_{S_K(n,r)} \cdot V = \epsilon \cdot V = \left(\sum_{a \in \Lambda(n,r)} \xi_a \right) \cdot V \subseteq \sum_{a \in \Lambda(n,r)} (\xi_a \cdot V).$$

Ο άλλος εγκλεισμός είναι άμεσος.

$\xi_a V \cap \sum_{b \neq a} \xi_b V = 0, \quad \forall a \in \Lambda(n, r):$ Έστω $x \in \xi_a V \cap \sum_{b \neq a} \xi_b V$, τότε $x = \xi_a v_a = \sum_{b \neq a} \xi_b v_b$, όπου $v_a, v_b \in V$. Τώρα, από Παρατήρηση 3.2.1 *iii*) έχουμε τα εξής: $\xi_a \cdot x = \xi_a \cdot \xi_a \cdot v_a = \xi_a v_a = x$, συνεπώς $x = \xi_a \cdot x = \sum_{b \neq a} \xi_a \cdot \xi_b \cdot v_b = 0$.

□

Ορισμός 3.2.2. *i)* Συμβολίζουμε με $T_n(K)$ την διαγώνια υποομάδα της $GL_n(K)$ όπου $T_n(K) = \{x(t) \mid x(t) = \text{diag}(t_1, \dots, t_n), t_i \in K^* = K \setminus \{0\}\}$.

ii) Για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Lambda(n, r)$, ορίζουμε τον *multiplicative character* (πολλαπλασιαστικό χαρακτήρα) $\chi^a : T_n(K) \longrightarrow K^*$, $\chi^a(x(t)) = t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n}$.

iii) Έστω $V \in M_K(n, r)$, τότε για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Lambda(n, r)$ ορίζουμε τον *a-weight space* :

$$\begin{aligned} V^a &= \{v \in V \mid x(t) \cdot v = t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \cdot v, \quad \forall x(t) \in T_n(K)\}. \\ &= \{v \in V \mid x(t) \cdot v = \chi^a(x(t)) \cdot v, \quad \forall x(t) \in T_n(K)\}. \\ &= \{v \in V \mid e(x(t)) \cdot v = \chi^a(x(t)) \cdot v, \quad \forall x(t) \in T_n(K)\}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.2.2. Αν $a, b \in \Lambda(n, r)$ με $a \neq b$, τότε $\chi^a \neq \chi^b$.

Απόδειξη. Αν $a, b \in \Lambda(n, r)$ με $a \neq b$ και $\chi.β.γ$ $a_1 \neq b_1$ (όπου $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$). Για κάθε $k \in K^*$ ορίζουμε $d(k) = \text{diag}(k, 1, \dots, 1) \in T_n(K)$ και $\chi^a(d(k)) = k^{a_1}$, $\chi^b(d(k)) = k^{b_1}$. Τώρα επειδή το πολυώνυμο $f(x) = x^{a_1} - x^{b_1} \in K[x]$ είναι μη-μηδενικό (γιατί $a_1 \neq b_1$), δεν μπορεί έχεις ρίζες όλο το K^* (αφού $K^* = \text{άπειρο}$), συνεπώς υπάρχει $k_o \in K^*$ ώστε $k_o^{a_1} - k_o^{b_1} \neq 0 \iff \chi^a(d(k_o)) \neq \chi^b(d(k_o))$,

□

Παρατήρηση 3.2.3. Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε:

i) Το V^a είναι K -υπόχωρος του V για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.

ii) *a)* $e(x(t)) = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \xi_a$.

b) $e(x(t)) \cdot \xi_a = \xi_a \cdot e(x(t)) = t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \xi_a$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, $x(t) \in T_n(K)$.

iii) $\xi_b V^a = \begin{cases} V^a & b = a \\ 0 & b \neq a \end{cases}$, για κάθε $a, b \in \Lambda(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Το μόνο που θέλει προσοχή είναι το $k \cdot v \in V^a$ για κάθε $k \in K$ και $v \in V^a$. Πράγματι, από Παρατήρηση 1.1.1 *iii*) ισχύει $x(t) \cdot (k \cdot v) = k \cdot (x(t) \cdot v) = k \cdot (t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \cdot v) = t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \cdot (k \cdot v)$.

ii) a). Αρκεί να δειχθεί πάνω στη K-βάση $\{c_{i,j} \mid (i,j) \in \mathcal{T}\}$ του $A_K(n,r)$. Πράγματι, καταρχάς έστω $i \in a = (a_1, \dots, a_n) \in \Lambda(n,r)$, τότε:

$$e(x(t))(c_{i,j}) = c_{i,j}(x(t)) = c_{i_1 j_1}(x(t)) \dots c_{i_r j_r}(x(t)) = \begin{cases} t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_r} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Επιπλέον, $(\sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_b)(c_{i,j}) = \sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_b(c_{i,j})$. Τώρα, έστω $\mathcal{T}_o$ = σύνολο αντιστοιχιών της δράσης της $G(r)$ στο $I(n,r)$, τότε από Παρατήρηση 3.1.1 έχουμε ότι $\sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_b(c_{i,j}) = \sum_{k \in \mathcal{T}_o} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_{k,k}(c_{i,j})$ (όπου τα $b_1, \dots, b_n$ είναι τέτοια ώστε $k \in (b_1, \dots, b_n)$), επιπλέον από Παρατήρηση 2.1.1 ξέρουμε ότι $(k,k) \sim (i,j) \iff i = j \sim k$, οπότε,

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_o} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_{k,k}(c_{i,j}) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{T}_o} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_{k,k}(c_{i,i}) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \text{ επίσης εξ' ορισμού του } \mathcal{T}_o,$$

υπάρχει μοναδικό $k_o \in \mathcal{T}_o$ ώστε $i \sim k_o$ (τότε μάλιστα ισχύει $k_o \in a = (a_1, \dots, a_n)$). Συνεπώς,

$$(\sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_b)(c_{i,j}) = \begin{cases} t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \xi_{k_o, k_o}(c_{i,i}) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

b). Από a) και Παρατήρηση 3.2.1 iii) έχουμε:

$$e(x(t))\xi_a = (\sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_b) \cdot \xi_a = \sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} (\xi_b \xi_a) = t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \xi_a = \sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} (\xi_a \xi_b) = \xi_a (\sum_{b \in \Lambda(n,r)} t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \xi_b) = \xi_a \cdot e(x(t)).$$

iii) Καταρχάς παρατηρούμε ότι $\xi_a V \subseteq V^a$ (*).

Πράγματι, αν $\xi_a v \in \xi_a V$, τότε $x(t) \cdot (\xi_a v) = e(x(t)) \cdot (\xi_a v) = (e(x(t)) \cdot \xi_a) \cdot v = (t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \xi_a) \cdot v = t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} (\xi_a \cdot v)$, συνεπώς $\xi_a v \in V^a$. Τώρα,

Για $b \neq a$: Αν $y \in \xi_b V^a$ με $y = \xi_b \cdot v$ και $v \in V^a$. Τότε, επειδή $\xi_b V^a \subseteq \xi_b V \subseteq V^b$, έχουμε ότι $x(t) \cdot y = \chi^b(x(t)) \cdot y$, για κάθε $x(t) \in T_n(K)$. Επιπλέον, $x(t) \cdot y = (e(x(t)) \cdot \xi_b) \cdot v = (\xi_b \cdot e(x(t))) \cdot v = \xi_b(e(x(t)) \cdot v) = \xi_b(\chi^a(x(t)) \cdot v) = \chi^a(x(t))(\xi_b \cdot v) = \chi^a(x(t)) \cdot y$, για κάθε $x(t) \in T_n(K)$.

Τελικά $\chi^a(x(t)) \cdot y = \chi^b(x(t)) \cdot y$, για κάθε $x(t) \in T_n(K)$. Συνεπώς $(\chi^a(x(t)) - \chi^b(x(t))) \cdot y = 0$, για κάθε $x(t) \in T_n(K)$, από Παρατήρηση 3.2.2 και $a \neq b$, έχουμε ότι υπάρχει $d \in T_n(K)$ ώστε $\chi^a(d) - \chi^b(d) \neq 0$ (άρα αντιστρέψιμο στοιχείο του K), συνεπώς $(\chi^a(d) - \chi^b(d)) \cdot y = 0 \iff y = 0$. Οπότε $\xi_b V^a = 0$. (**)

Για $b = a$: Από (*), (**) έχουμε $V^a = 1_{S_K(n,r)} V^a = (\sum_{b \in \Lambda(n,r)} \xi_b) \cdot V^a \subseteq \sum_{b \in \Lambda(n,r)} \xi_b V^a = \xi_a V^a \subseteq V^a$. Άρα $\xi_a V^a = V^a$.

□

Πρόταση 3.2.2. Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε:

- i) $V^a = \xi_a V$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.
- ii) $V = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V^a$ (ευθύ εσωτερικό άθροισμα K -προτύπων).

Απόδειξη.

i) $\xi_a V \subseteq V^a$: Έστω $\xi_a v \in \xi_a V$ (όπου $v \in V$), τότε από Παρατήρηση 3.2.3 ii) έχουμε:

$$x(t) \cdot (\xi_a v) = e(x(t)) \cdot (\xi_a v) = (e(x(t)) \cdot \xi_a) \cdot v = (t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \xi_a) \cdot v = t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} (\xi_a v),$$

συνεπώς $\xi_a v \in V^a$.

$$V^a \subseteq \xi_a V: \text{ Από Παρατήρηση 3.2.3 iii) έχουμε } V^a = 1_{S_K(n, r)} \cdot V^a = \epsilon \cdot V^a = \left(\sum_{b \in \Lambda(n, r)} \xi_b \right) \cdot V^a \subseteq \sum_{b \in \Lambda(n, r)} (\xi_b \cdot V^a) = \xi_a V^a.$$

ii) Άμεσο από i) και Πρόταση 3.2.1.

□

Πόρισμα 3.2.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$, $a \in \Lambda(n, r)$ και $x \in V^a$. Τότε $\xi_b \cdot x = \begin{cases} x & b = a \\ 0 & b \neq a \end{cases}$.

Απόδειξη.

Αν $b \neq a$ τότε $\xi_b x = 0$ άμεσα από Παρατήρηση 3.2.3 iii). Ενώ αν $b = a$, τότε (από Πρόταση 3.2.2 και $x \in V^a$) έχουμε ότι $x = \xi_a v$, $v \in V$, συνεπώς από Παρατήρηση 3.2.1 iii) έχουμε $\xi_a x = x$.

□

Σχόλιο. Κλείνουμε την παράγραφο με τον υπολογισμό των *weight spaces* των $E^{\otimes r}$, $\Lambda^r E$. Στην πορεία το παράδειγμα του $\Lambda^r E$ θα παίξει κομβικό ρόλο στην απόδειξη σημαντικών θεωρημάτων.

Λήμμα 3.2.1. Έστω η σύννηθες (δεξιά) δράση της $G(r)$ στο $I(n, r)$ και $i \in I(n, r)$. Τότε:

- i) Αν $i = 1-1$, τότε όλα τα στοιχεία της τροχιάς $[i]_{G(r)}$ είναι 1-1. Ενώ αν i όχι 1-1, τότε κανένα στοιχείο της τροχιάς δεν είναι 1-1.
- ii) Η τροχιά $[i]_{G(r)}$ περιέχει ακριβώς μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση αν $i = 1-1$, ενώ δεν περιέχει καμία γνησίως αύξουσα συνάρτηση αν i όχι 1-1.

Απόδειξη.

i) Αν $i = 1-1$ τότε το $i \cdot \pi = i \circ \pi$ είναι 1-1 (ως σύνθεση τέτοιων) για κάθε $\pi \in G(r)$. Ενώ αν i όχι 1-1, τότε άμεσα το $i \cdot \pi = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)})$ δεν είναι 1-1 για κάθε $\pi \in G(r)$.

ii) Πράγματι, αν $i = 1-1$ τότε η ακολουθία $(i_1, \dots, i_r)$ μετά από αναδιάταξη γίνεται γνησίως αύξουσα, δηλαδή υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε το $i \cdot \pi = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)})$ να είναι γνησίως αύξουσα, μάλιστα $i \cdot \pi \in [i]_{G(r)}$, άρα το $[i]_{G(r)}$ περιέχει γνησίως αύξουσα. Αν j, k δύο γνησίως αύξουσες με $j, k \in [i]_{G(r)}$ τότε υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $j = k \cdot \pi$, δηλαδή $k, k\pi$ είναι γνησίως αύξουσες, συνεπώς (από Παρατήρηση 3.1.6) πρέπει $k = k\pi \iff k(i) = k(\pi(i)) \forall i \in \underline{r} \xLeftrightarrow{k, 1-1} \pi(i) = i \forall i \in \underline{r}$, οπότε $\pi = \text{ταυτοτική}$ και έτσι $j = k$.

Αν τώρα i όχι 1-1 τότε για κάθε $\pi \in G(r)$ το $i \cdot \pi = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(r)})$ δεν είναι 1-1 συνάρτηση, οπότε το $[i]_{G(r)}$ δεν περιέχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

□

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω $1 \leq r \leq n$ και E K -διανυσματικός χώρος διάστασης n με βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$, τότε:

i) Το KT -πρότυπο $\Lambda^r E$ έχει K -βάση το $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in I(n, r), i \nearrow\}$. (Όπου το σύμβολο $\nearrow$ σημαίνει γνησίως αύξουσα συνάρτηση).

ii) Έστω $a \in \Lambda(n, r)$ και (από Παρατήρηση 3.1.2) η μοναδική τροχιά $[i]_{G(r)}$ ώστε $i \in a$. Τότε:

$$(\Lambda^r E)^a = \begin{cases} \langle e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \rangle & \text{αν } i = 1-1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(ΑΣ σημειωθεί ότι η συνθήκη $i = 1-1$ είναι ανεξάρτητη του αντιπροσώπου της τροχιάς $[i]_{G(r)}$, λόγω του Λήμματος 3.2.1).

$$iii) \dim_K(\Lambda^r E)^a = \begin{cases} 1 & \text{αν υπάρχει } i = 1-1 \text{ με } i \in a \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{αν υπάρχει } i \nearrow \text{ με } i \in a \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Έστω $\mathcal{T}_o$ σύνολο αντιπροσώπων $G(r)$ -τροχιών του $I(n, r)$ τότε ξέρουμε (από Υπενθύμιση 2.6.3) ότι το $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in \mathcal{T}_o, i = 1-1\}$ είναι K -βάση του $\Lambda^r E$.

Με βάση το προηγούμενο λήμμα, από κάθε $G(r)$ -τροχιά επιλέγουμε αν έχει, την μοναδική γνησίως αύξουσα συνάρτηση που περιέχει, ενώ αν δεν έχει, επιλέγουμε μία τυχόν συνάρτηση η οποία αναγκαστικά δεν είναι 1-1. Έτσι φτιάχνεται ένα σύνολο αντιπροσώπων $\mathcal{T}_o$ όπου όλες οι 1-1 συναρτήσεις του είναι αναγκαστικά γνησίως αύξουσες και περιέχει όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις. Οπότε από αυτό που προαναφέραμε στην αρχή, έπεται ότι το $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in I(n, r), i \nearrow\}$ είναι K -βάση του $\Lambda^r E$.

ii) Έστω $i \in I(n, r)$ με $i = 1-1$ και $i \in a_i = (a_1, \dots, a_n) \in \Lambda(n, r)$. Τότε:

$$\langle e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \rangle \subseteq (\Lambda^r E)^{a_i} : \quad \text{Πράγματι έστω } x(t) = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in T_n(K), \text{ τότε :}$$

$$x(t) \cdot (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = x(t) \cdot (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} + J_r(E)) = (x(t) \cdot e_{i_1}) \otimes \dots \otimes (x(t) \cdot e_{i_r}) + J_r(E) = (x(t) \cdot e_{i_1}) \wedge \dots \wedge (x(t) \cdot e_{i_r}) = \left(\sum_{\mu \in \underline{n}} x(t)_{\mu i_1} e_\mu \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{\mu \in \underline{n}} x(t)_{\mu i_r} e_\mu \right) = (x(t)_{i_1 i_1} e_\mu) \wedge \dots \wedge (x(t)_{i_r i_r} e_\mu) = t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_r} \cdot (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} \cdot (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}).$$

Άρα $\langle e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \rangle \subseteq (\Lambda^r E)^{a_i}$.

Επιπλέον, αν $i = 1-1$ τότε $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \neq 0$ (αλλιώς αν $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = 0$, τότε από Ορισμό 2.6.4 ii) και Υπενθύμιση 2.6.3 θα είχαμε ότι $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \in J_r(E)$ που είναι άτοπο, αφού $i = 1-1$), οπότε $\dim_K(\Lambda^r E)^{a_i} \geq 1$ (*).

Συνεχίζοντας, από Πρόταση 3.2.2 έχουμε ότι $\Lambda^r E = \bigoplus_{a \in \Lambda(n,r)} (\Lambda^r E)^a$, άρα $\Lambda^r E \simeq \bigoplus_{a \in \Lambda(n,r)} (\Lambda^r E)^a$ (= ευθύ εξωτερικό άθροισμα). Αν θέσουμε $\Gamma = \{a \in \Lambda(n,r) \mid \text{υπάρχει } i \in I(n,r) \text{ με } i = 1-1 \text{ και } i \in a\}$, τότε $\Lambda^r E \simeq \left(\bigoplus_{a \in \Gamma} (\Lambda^r E)^a \right) \oplus \left(\bigoplus_{a \in \Gamma^c} (\Lambda^r E)^a \right)$ και άρα:

$$\dim_K \Lambda^r E = \sum_{a \in \Gamma} \dim_K (\Lambda^r E)^a + \sum_{a \in \Gamma^c} \dim_K (\Lambda^r E)^a. (**)$$

Επιπλέον $\dim_K \Lambda^r E = |\Gamma|$. Πράγματι, από i) έχουμε ότι $\dim_K \Lambda^r E = |\{i \in I(n,r) \mid i \in \mathcal{T}_o, i = 1-1\}|$. Επίσης η απεικόνιση $\phi : \{i \in I(n,r) \mid i \in \mathcal{T}_o, i = 1-1\} \rightarrow \Gamma, i \mapsto a_i$ (όπου a_i όπως στον Ορισμό 3.1.1) είναι 1-1 και επί.

ϕ 1-1: Έστω $\phi(i) = \phi(j)$ τότε (από Παρατήρηση 3.1.1) $i \sim j$ και επειδή $i, j \in \mathcal{T}_o = \text{σύνολο αντιπροσώπων}$, πρέπει $i = j$.

ϕ επί: Έστω $a \in \Gamma$, τότε υπάρχει $i = 1-1$ ώστε $i \in a$, όμως υπάρχει και $j \in \mathcal{T}_o$ με $j \sim i$ (και άρα $j = 1-1$ με $j \in a$), συνεπώς $\phi(j) = a_j = a$.

Τελικά $|\Gamma| = \dim_K \Lambda^r E$, άρα από (*) και (**) έπεται ότι για κάθε $a \in \Gamma$ πρέπει $\dim_K (\Lambda^r E)^a = 1$ και άρα $(\Lambda^r E)^a = \langle e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \rangle$, ενώ για κάθε $a \in \Gamma^c$ πρέπει $(\Lambda^r E)^a = 0$.

iii) Η πρώτη ισότητα είναι άμεση από ii). Ενώ η δεύτερη ισότητα ισχύει καθώς οι συνθήκες (υπάρχει $i = 1-1$ με $i \in a$), (υπάρχει $i \nearrow$ με $i \in a$) είναι ισοδύναμες από Λήμμα 3.2.1.

□

Παράδειγμα 3.2.2. Θεωρούμε το $E^{\otimes r} \in M_K(n,r)$ με την σύνθετη K -βάση $\{e_i \mid i \in I(n,r)\}$ τότε,

$$i) \xi_a \cdot e_i = \begin{cases} e_i & i \in a \\ 0 & i \notin a \end{cases}, \text{ για κάθε } i \in I(n,r), a \in \Lambda(n,r).$$

ii) Το σύνολο $\{e_i \mid i \in I(n,r), i \in a\}$ αποτελεί K -βάση του $(E^{\otimes r})^a$. Ιδιαίτερος, αν $j \in a$ τότε $\dim_K (E^{\otimes r})^a = |[j]_{G(r)}| = [G(r) : \text{Stab}_{G(r)}(j)]$.

Απόδειξη.

i) Έστω $j \in a$ τότε,

$$\xi_a \cdot e_i = \xi_{j,j} \cdot e_i \xrightarrow{\text{Πόρισμα 2.6.1}} \sum_{k \in I(n,r)} \xi_{j,j}(c_{k,i}) e_k \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 2.1.1 iv)}} \xi_{j,j}(c_{i,i}) e_i = \begin{cases} e_i & i \sim j \\ 0 & i \not\sim j \end{cases}.$$

Από το τελευταίο και το γεγονός ότι $i \sim j \iff i, j \in a$, έπεται άμεσα το ζητούμενο.

ii) Καταρχάς θέτουμε $I_a = \{i \in I(n, r) \mid i \in a\}$ και έχουμε :

$$\{e_i \mid i \in I_a\} \subseteq (E^{\otimes r})^a: \quad \text{Αν } i \in a, \text{ τότε } e_i = \xi_a \cdot e_i \in \xi_a E^{\otimes r} = (E^{\otimes r})^a.$$

$(E^{\otimes r})^a = \text{span}_K\{e_i \mid i \in I_a\}$: Ο ένας εγκλεισμός είναι άμεσος από πριν. Ανάποδα, αν $x \in (E^{\otimes r})^a$ τότε $\xi_a x = x$ και υπάρχουν $\{k_i\}_{i \in I(n, r)} \subseteq K$ ώστε $x = \sum_{i \in I(n, r)} k_i e_i$, οπότε,

$$x = \xi_a x = \sum_{i \in I(n, r)} k_i (\xi_a e_i) \stackrel{i)}{=} \sum_{i \in I_a} k_i e_i \in \text{span}_K\{e_i \mid i \in I_a\}.$$

$\{e_i \mid i \in I_a\} = K$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Άμεσα αφού $\{e_i \mid i \in I(n, r)\} = K$ -βάση του $E^{\otimes r}$.

□

3.3 Βασικές ιδιότητες των Weight Spaces

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$. Επίσης παρακάτω κάθε $V \in M_K(n, r)$ το βλέπουμε και σαν $S_K(n, r)$ —πρότυπο όπως στην Παρατήρηση 2.4.3.

Πρόταση 3.3.1. Έστω $w \in W = G(n)$ και $V \in M_K(n, r)$, τότε $V^a \simeq V^{w(a)}$ (Ισομορφισμός K —προτύπων). Ιδιαίτερος $\dim_K V^a = \dim_K V^{w(a)}$.

Απόδειξη.

Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ K -βάση του V , τότε το $\{e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}\}$ (αφού είναι το ίδιο το $\{e_1, \dots, e_n\}$) είναι και αυτό K -βάση του V . Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow V$, $e_i \mapsto e_{w(i)}$ και στην συνέχεια την επεκτείνουμε K -γραμμικά σε $\tilde{f} : V \rightarrow V$ με $\tilde{f}(e_i) = e_{w(i)}$, ιδιαίτερος η $\tilde{f}$ είναι ισομορφισμός K -προτύπων. Αν τώρα θέσουμε n_w τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $\tilde{f}$ ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $(e_1, \dots, e_n), (e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)})$, τότε:

$n_w \in \Gamma = GL_n(K)$ (αφού $\tilde{f}$ ισομορφισμός) και n_w έχει 1 στις $(w(i), i)$ θέσεις και 0 αλλού (*).

Τώρα ορίζουμε $\phi : V^a \rightarrow V^{w(a)}$, $v \mapsto n_w \cdot v$ και θα δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός K -προτύπων: ϕ καλά ορισμένη: Αρκεί να δείξουμε ότι $n_w \cdot v \in V^{w(a)}$ για κάθε $v \in V^a$. Πράγματι, έστω $x(t) = x(t_1, \dots, t_n) \in T_n(K)$ τότε $x(t) \cdot (n_w \cdot v) = (x(t) \cdot n_w) \cdot v$. Τώρα παρατηρούμε ότι $x(t) \cdot n_w = n_w \cdot x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)})$ (θα το δείξουμε στο τέλος), οπότε:

$$(x(t) \cdot n_w) \cdot v = (n_w \cdot x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)})) \cdot v = n_w \cdot (x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)}) \cdot v) = n_w \cdot (t_{w(1)}^{a_1} \cdot \dots \cdot t_{w(n)}^{a_n} \cdot v) = n_w \cdot (t_{w(1)}^{a_{w^{-1}(w(1))}} \cdot \dots \cdot t_{w(n)}^{a_{w^{-1}(w(n))}} \cdot v) = n_w \cdot (t_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot t_n^{a_{w^{-1}(n)}} \cdot v) = \chi^{w(a)}(x(t))(n_w \cdot v).$$

Τελικά $x(t) \cdot (n_w \cdot v) = \chi^{w(a)}(x(t))(n_w \cdot v)$, άρα $n_w \cdot v \in V^{w(a)}$.

$x(t) \cdot n_w = n_w \cdot x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)})$: Έστω $x(t) = (x_{ij})$, $x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)}) = (y_{ij})$, $n_w = (n_{ij})$. Ο πίνακας $x(t) \cdot n_w$ έχει στην (i, j) -θέση το στοιχείο $\sum_{s=1}^n x_{is} n_{sj} = x_{ii} n_{ij} = t_i n_{ij} = \begin{cases} t_{w(j)} & i = w(j) \\ 0 & i \neq w(j) \end{cases}$, (το τελευταίο ισχύει από (*)). Επίσης, ο πίνακας $n_w \cdot x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)})$ έχει στην (i, j) -θέση το $\sum_{s=1}^n n_{is} \cdot y_{sj} = n_{ij} \cdot t_{w(j)} = \begin{cases} t_{w(j)} & i = w(j) \\ 0 & i \neq w(j) \end{cases}$. Συνεπώς $x(t) \cdot n_w = n_w \cdot x(t_{w(1)}, \dots, t_{w(n)})$.

ϕ ομομορφισμός K -προτύπων: άμεσο.

ϕ 1-1: $\phi(v) = 0 \implies n_w \cdot v = 0 \implies v = 0$ (το τελευταίο ισχύει επειδή n_w αντιστρέψιμο).

ϕ επί: 1^ο Τρόπος. Εφόσον $\phi : V^a \rightarrow V^{w(a)}$ μονομορφισμός K -προτύπων, τότε για το επί, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_K V^a = \dim_K V^{w(a)}$, ιδιαίτερος (επειδή $\dim_K V^a \leq \dim_K V^{w(a)}$), αρκεί να δειχθεί ότι $\dim_K V^{w(a)} \leq \dim_K V^a$. Πράγματι, ξαναεφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε ότι η απεικόνιση $\psi : V^{w(a)} \rightarrow V^{w^{-1}(w(a))} = V^a$, $v \mapsto n_{w^{-1}} \cdot v$ είναι μονομορφισμός K -προτύπων, οπότε $\dim_K V^{w(a)} \leq \dim_K V^a$.

2^ο Τρόπος. Παρατηρούμε ότι $n_{w^{-1}} = n_w^{-1}$ (με την βοήθεια της (*)) ελέγχουμε κατά σημείο ότι $n_{w^{-1}} \cdot n_w = n_w \cdot n_{w^{-1}} = I_n$. Αν $v \in V^{w(a)}$ τότε $n_{w^{-1}} \cdot v \in V^{w^{-1}(w(a))} = V^a$ και $\phi(n_{w^{-1}} \cdot v) = n_w \cdot (n_{w^{-1}} \cdot v) = v$.

□

Πρόταση 3.3.2. Έστω $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} V_2 \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία στην $M_K(n, r)$ ($\Longleftrightarrow$ στην $\text{mod}(S_K(n, r))$), τότε οι παρακάτω ακολουθίες K -προτύπων είναι ακριβής:

$$i) 0 \longrightarrow \xi_a V_1 \xrightarrow{g|_{\xi_a V_1}} \xi_a V \xrightarrow{f|_{\xi_a V_2}} \xi_a V_2 \longrightarrow 0.$$

$$ii) 0 \longrightarrow V_1^a \xrightarrow{g|_{V_1^a}} V^a \xrightarrow{f|_{V_1^a}} V_2^a \longrightarrow 0.$$

Απόδειξη.

Από Πρόταση 3.2.2 αρκεί να δείξουμε το $i)$. Πράγματι,

Η ακολουθία $i)$ είναι καλά ορισμένη: Αυτό που πρέπει ναδειχθεί είναι ότι $g(\xi_a V_1) \subseteq \xi_a V$, $f(\xi_a V) \subseteq \xi_a V_2$. Κάνουμε το πρώτο (και το άλλο όμοια), πράγματι επειδή g ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων έχουμε $g(\xi_a V_1) = \xi_a g(V_1) \subseteq \xi_a V$.

$g|_{\xi_a V_1}, f|_{\xi_a V_2}$ ομομορφισμοί K -προτύπων: Εφόσον οι g, f είναι ομομορφισμοί $K\Gamma$ -προτύπων τότε είναι και K -προτύπων (Παρατήρηση 1.1.1 iii)), άρα οι $g|_{\xi_a V_1}, f|_{\xi_a V_2}$ είναι ομομορφισμοί K -προτύπων ως περιορισμοί τέτοιων.

Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $i)$ είναι ακριβής. Πράγματι,

$g|_{\xi_a V_1} = 1-1$: (ως περιορισμός της g που είναι 1-1).

$f|_{\xi_a V_2} = \text{επί}$: Αν $\xi_a v_2 \in \xi_a V_2$ (όπου $v_2 \in V_2$) τότε από το επί της f υπάρχει $v \in V$ με $f(v) = v_2$, οπότε $\xi_a v_2 = \xi_a f(v) = f(\xi_a v)$ (το τελευταίο ισχύει αφού f ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων).

$\text{Im} g|_{\xi_a V_1} = \ker f|_{\xi_a V}$: Από πριν έχουμε $g(\xi_a V_1) \subseteq \xi_a V$, ενώ από ακρίβεια της αρχικής ακολουθίας έχουμε ότι $g(\xi_a V_1) \subseteq \ker f$. Συνεπώς $\text{Im} g|_{\xi_a V_1} \subseteq \ker f|_{\xi_a V}$. Αντίστροφα, αν $x \in \ker f|_{\xi_a V}$, τότε $x = \xi_a v$ για κάποιο $v \in V$ και επιπλέον από ακρίβεια της αρχικής ακολουθίας υπάρχει $v_1 \in V_1$ ώστε $g(v_1) = x = \xi_a v$, τότε όμως (από Παρατήρηση 3.2.1 iii) $\xi_a g(v_1) = \xi_a(\xi_a v) \Longleftrightarrow g(\xi_a v_1) = \xi_a v = x$, δηλαδή $x \in \text{Im} g|_{\xi_a V_1}$, άρα $\text{Im} g|_{\xi_a V_1} \supseteq \ker f|_{\xi_a V}$.

□

Σχόλιο. Προχωράμε τώρα στη μελέτη συμπεριφοράς του $\text{tensor} \otimes$ με την κατηγορία $M_K(n, r)$ αλλά και τους a -weight spaces .

Ορισμός 3.3.1. Έστω $V, W \in \text{mod}(K\Gamma)$ τότε ορίζεται το $V \otimes W = V \otimes_K W$ και γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο

με εξωτερικό πολλαπλασιασμό: Αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$, $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \in V \otimes W$ (όπου $k_g \in K$, $v_i \in V$, $w_i \in W$), τότε $k \cdot x := \sum_g \sum_i k_g ((g \cdot v_i) \otimes (g \cdot w_i))$. Ιδιαίτερος $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$.

Παρατήρηση 3.3.1. $i)$ Ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός που ορίσαμε πιο πάνω, είναι πράγματι καλά ορισμένος και καθιστά το $V \otimes W$ $K\Gamma$ -πρότυπο.

$ii)$ Η δομή K -προτύπου που επάγει το $K\Gamma$ στο $V \otimes W$ με $k \cdot x = (k \cdot 1_\Gamma) \cdot x$, όπου $k \in K$, $x \in V \otimes W$, ταυτίζεται με την αρχική δομή K -προτύπου που είχε το $V \otimes W$.

iii) $V \otimes_K W \in \text{mod}(K\Gamma)$.

Απόδειξη.

i), ii) Θα γίνει με χρήση Παρατήρηση 1.2.1. Έστω $\tau : \Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V \otimes W)$, με $\tau(g)(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i) =$

$\sum_{i=1}^n (g \cdot v_i) \otimes (g \cdot w_i)$. Η $\tau(g)$ είναι άμεσα K -γραμμική και καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω

$x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$, $y = \sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j$ με $x = y$ (όπου $v_i, w_i \in V, a_j, b_j \in W$). Τότε θεωρούμε την

$\phi_g : V \times W \longrightarrow V \otimes W, (v, w) \longmapsto g \cdot v \otimes g \cdot w$, η ϕ_g είναι multilinear K -προτύπων, οπότε υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων $\psi_g : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$, με $\psi_g(v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w$. Τώρα, από το καλά ορισμένο της ψ_g έχουμε ότι $\psi_g(x) = \psi_g(y) \iff \sum_i g \cdot v_i \otimes g \cdot w_i = \sum_j g \cdot a_j \otimes g \cdot b_j \iff$

$\tau(g)(x) = \tau(g)(y)$. Επιπλέον ισχύουν τα παρακάτω:

$\tau(gh) = \tau(g) \circ \tau(h)$: Πράγματι, έστω $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \in V \otimes W$, τότε:

$$\tau(gh)(x) = \tau(gh)(\sum_i v_i \otimes w_i) = \sum_i ((gh) \cdot v_i) \otimes ((gh) \cdot w_i) = \sum_i (g \cdot (h \cdot v_i)) \otimes (g \cdot (h \cdot w_i)) =$$

$$\tau(g)(\sum_i (h \cdot v_i) \otimes (h \cdot w_i)) = \tau(g)(\tau(h)(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i)) = (\tau(g) \circ \tau(h))(x).$$

$\tau(1_\Gamma) = \mathbb{I}_{V \otimes W}$: Έστω $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \in V \otimes W$, τότε $\tau(1_\Gamma)(x) = \sum_i (1_\Gamma \cdot v_i) \otimes (1_\Gamma \cdot w_i) = x$.

Τώρα, θεωρούμε (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) την $\tau : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ K -γραμμική επέκταση της τ (που είναι ομομορφισμός K -αλγεβρών) και ξέρουμε ότι το $V \otimes W$ γίνεται $K\Gamma$ -πρότυπο

με $k \cdot x = \tau(k)(x)$ για κάθε $k \in K\Gamma$, $x \in V \otimes W$. Επιπλέον, αν $k = \sum_g k_g g$, $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$, τότε

$$\tau(k)(x) = (\sum_g k_g \tau(g))(x) = \sum_g k_g \tau(g)(x) = \sum_g k_g (\sum_{i=1}^n (g \cdot v_i) \otimes (g \cdot w_i)) = \sum_g \sum_i k_g ((g \cdot v_i) \otimes (g \cdot w_i)).$$

iii) Εφόσον $V, W \in \text{mod}(K\Gamma)$ τότε από Υπενθύμιση 2.6.1 και το ii) έχουμε ότι $V \otimes W \in \text{mod}(K\Gamma)$.

□

Πρόταση 3.3.3. i) Έστω $V \in M_K(n, r)$ και $W \in M_K(n, s)$ τότε $V \otimes_K W \in M_K(n, r + s)$. Εν' γέννη αν $V_1, \dots, V_m \in M_K(n, t_i)$, τότε $V_1 \otimes \dots \otimes V_m \in M_K(n, t_1 + \dots + t_m)$.

ii) Έστω $\{v_a\}_{a \in A}, \{w_b\}_{b \in B}$ K -βάσεις των V, W με coefficient functions $\{r_{ij}^V\}_{i,j \in A}, \{r_{ij}^W\}_{i,j \in B}$. Τότε το $\{v_a \otimes w_b \mid (a, b) \in A \times B\}$ είναι K -βάση του $V \otimes W$ (Υπενθύμιση 2.6.1) και

$$r_{(c,k),(a,b)}^{V \otimes W} = r_{ca}^V r_{kb}^W.$$

Απόδειξη.

Καταρχάς από Παρατήρηση 3.3.1 πρέπει $V \otimes W \in \text{mod}(K\Gamma)$. Μένει να δείξουμε ότι $\text{cf}(V \otimes W) \subseteq A_K(n, r+s)$. Για το σκοπό αυτό έστω $\{v_a\}_{a \in A}, \{w_b\}_{b \in B}$ K-βάσεις των V, W αντίστοιχα και coefficient functions $\{r_{ij}^V\}_{i,j \in A}, \{r_{ij}^W\}_{i,j \in B}$ πάλι αντίστοιχα. Τότε το $\{v_a \otimes w_b \mid (a, b) \in A \times B\}$ είναι K-βάση του $V \otimes W$ (Υπενθύμιση 2.6.1). Έστω $g \in \Gamma$ και $a \in A, b \in B$ τότε $g \cdot (v_a \otimes w_b) = (g \cdot v_a) \otimes (g \cdot w_b) = (\sum_{c \in A} r_{ca}^V(g)v_c) \otimes (\sum_{k \in B} r_{kb}^W(g)w_k) = \sum_{c \in A} \sum_{k \in B} r_{ca}^V(g)r_{kb}^W(g)(v_c \otimes w_k) = \sum_{(c,k) \in A \times B} r_{(c,k),(a,b)}^{V \otimes W}(g)(v_c \otimes w_k)$, όπου $r_{(c,k),(a,b)}^{V \otimes W} = r_{ca}^V r_{kb}^W \in A_K(n, r+s)$ (γιατί $r_{ca}^V \in A_K(n, r)$ και $r_{kb}^W \in A_K(n, s)$). $\square$

Πρόταση 3.3.4. Έστω $V \in M_K(n, s), W \in M_K(n, r)$ και $\gamma \in \Lambda(n, r+s)$. Επίσης θέτουμε $I_\gamma := \{(a, b) \in \Lambda(n, s) \times \Lambda(n, r) \mid a+b = \gamma\}$, τότε :

i) Το τυχόν στοιχείο $x \in (V \otimes W)^\gamma$ γράφεται ως $x = \sum_{i=1}^n v_{a_i} \otimes w_{b_i}$, όπου $(a_i, b_i) \in I_\gamma$ και

$$v_{a_i} \in V^{a_i}, w_{b_i} \in W^{b_i}.$$

ii) $(V \otimes W)^\gamma \simeq \bigoplus_{(a,b) \in I_\gamma} V^a \otimes W^b$ (συμβολικά $= \bigoplus_{a+b=\gamma} V^a \otimes W^b$), Ισομορφισμός K-προτύπων.

Υπενθύμιση 3.3.1. (Από μη-μεταθετική άλγεβρα). Έστω M R-πρότυπο με $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ και M_i ελεύθερο R-πρότυπο με βάση B_i . Τότε το M είναι ελεύθερο R-πρότυπο με βάση $B = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Απόδειξη. (Πρότασης 3.3.4). Για συντομία θέτουμε $I = I_\gamma$.

i) Έστω $B_a = \{e_{a1}, \dots, e_{ak_a}\}$, $D_b = \{z_{b1}, \dots, z_{br_b}\}$ K-βάσεις των V^a, W^b αντίστοιχα, για κάθε $a \in \Lambda(n, s)$ και $b \in \Lambda(n, r)$. Τότε από Πρόταση 3.2.2 και Υπενθύμιση 3.3.1 έχουμε ότι τα $B = \bigcup_{a \in \Lambda(n, s)} B_a$ και $D = \bigcup_{b \in \Lambda(n, r)} D_b$, είναι K-βάσεις των V, W αντίστοιχα. Συνεπώς το $\{e_{ai} \otimes z_{bj} \mid e_{ai} \in B, z_{bj} \in D\}$ είναι K-βάση του $V \otimes W$, τότε όμως αν $x \in (V \otimes W)^\gamma$ πρέπει:

$$x = \sum_{(a,b) \in \Lambda(n, s) \times \Lambda(n, r)} \sum_{i=1}^{k_a} \sum_{j=1}^{r_b} k_{ai, bj} (e_{ai} \otimes z_{bj}), \text{ όπου } k_{ai, bj} \in K \text{ (και η γραφή είναι μοναδική)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Επιπλέον, (επειδή } x \in (V \otimes W)^\gamma \text{) πρέπει } x(t) \cdot x &= t_1^{\gamma_1} \dots t_n^{\gamma_n} \cdot x, \forall x(t) \in T_n(K). \text{ Όμως, } x(t) \cdot x = \\ &= \sum_{(a,b)} \sum_i \sum_j k_{ai, bj} ((x(t) \cdot e_{ai}) \otimes (x(t) \cdot z_{bj})) = \sum_{(a,b)} \sum_i \sum_j k_{ai, bj} ((t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} e_{ai}) \otimes (t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} z_{bj})) = \\ &= \sum_{(a,b)} \sum_i \sum_j k_{ai, bj} t_1^{a_1+b_1} \dots t_n^{a_n+b_n} (e_{ai} \otimes z_{bj}). \text{ Τελικά,} \end{aligned}$$

$$\sum_{(a,b)} \sum_i \sum_j k_{ai, bj} t_1^{a_1+b_1} \dots t_n^{a_n+b_n} (e_{ai} \otimes z_{bj}) = \sum_{(a,b)} \sum_i \sum_j k_{ai, bj} t_1^{\gamma_1} \dots t_n^{\gamma_n} (e_{ai} \otimes z_{bj}).$$

Αφού $\{e_{ai} \otimes z_{bj} \mid e_{ai} \in B, z_{bj} \in D\}$ K-βάση του $V \otimes W$ τότε,

$$k_{ai,bj}t_1^{a_1+b_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n+b_n} = k_{ai,bj}t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n},$$

δηλαδή $(\chi^{a+b}(x(t)) - \chi^\gamma(x(t)))k_{ai,bj} = 0$ για κάθε $x(t) \in T_n(K)$.

Ας παρατηρήσουμε ότι αν $a + b \neq \gamma$ τότε από Παρατήρηση 3.2.2 υπάρχει $d \in T_n(K)$ ώστε $(\chi^{a+b}(d) - \chi^\gamma(d)) \neq 0$ (άρα αντιστρέψιμο στοιχείο), αυτό όμως δίνει $k_{ai,bj} = 0$ (για κάθε $a \in \Lambda(n, s), b \in \Lambda(n, r)$ ώστε $a + b \neq \gamma$). Τελικά,

$$x = \sum_{(a,b) \in I} \sum_i \sum_j k_{ai,bj} (e_{ai} \otimes z_{bj}) = \sum_{(a,b) \in I} \sum_i \sum_j (k_{ai,bj} e_{ai}) \otimes z_{bj}, \text{ όπου } k_{ai,bj} e_{ai} \in V^a \text{ και } z_{bj} \in V^b.$$

ii) Έστω $\phi : V \times W \longrightarrow \bigoplus_{(a,b) \in I} V^a \otimes W^b$, με $\phi(v, w) = (\xi_a v \otimes \xi_b w)_{(a,b) \in I}$. Η ϕ είναι (άμεσα)

multilinear K -προτύπων και συνεπώς υπάρχει $f : V \otimes W \longrightarrow \bigoplus_{(a,b) \in I} V^a \otimes W^b$ ομομορφισμός

K -προτύπων με $f(v \otimes w) = (\xi_a v \otimes \xi_b w)_{(a,b) \in I}$. Επίσης θέτουμε $\tilde{f} := f|_{(V \otimes W)^\gamma}$.

Τώρα, για κάθε $(a, b) \in I$ ορίζουμε $\psi_{a,b} : V^a \times W^b \longrightarrow (V \otimes W)^\gamma$, με $\psi_{a,b}(v, w) = v \otimes w$. Η $\psi_{a,b}$ είναι (άμεσα) multilinear K -προτύπων και καλά ορισμένη (δηλαδή $\psi_{a,b}(v, w) \in (V \otimes W)^\gamma$), πράγματι, αν $x(t) \in T_n(K)$, $v \in V^a$, $w \in W^b$ τότε:

$$\begin{aligned} x(t) \cdot (v \otimes w) &= (x(t) \cdot v) \otimes (x(t) \cdot w) = (t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} v) \otimes (t_1^{b_1} \cdot \dots \cdot t_n^{b_n} w) = \\ &= t_1^{a_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n} t_1^{b_1} \cdot \dots \cdot t_n^{b_n} (v \otimes w) = t_1^{a_1+b_1} \cdot \dots \cdot t_n^{a_n+b_n} (v \otimes w) = t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n} (v \otimes w) \end{aligned}$$

Οπότε υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων $\tilde{\psi}_{a,b} : V^a \otimes W^b \longrightarrow (V \otimes W)^\gamma$ με $\tilde{\psi}_{a,b}(v \otimes w) = v \otimes w$ (Προσοχή, άλλο το στοιχείο $v \otimes w \in V^a \otimes W^b$ και άλλο το στοιχείο $v \otimes w \in (V \otimes W)^\gamma$).

Με βάση τα προηγούμενα ορίζουμε $\tilde{\psi} : \bigoplus_{(a,b) \in I} V^a \otimes W^b \longrightarrow (V \otimes W)^\gamma$, με $\tilde{\psi}((x_{a,b})_{(a,b) \in I}) =$

$\sum_{(a,b) \in I} \tilde{\psi}_{a,b}(x_{a,b})$ η οποία είναι (άμεσα) καλά ορισμένη και ομομορφισμός K -προτύπων.

Ισχυρισμός: $\tilde{\psi} \circ \tilde{f} = Id_{(V \otimes W)^\gamma}$ και $\tilde{f} \circ \tilde{\psi} = Id_{\bigoplus_{(a,b) \in I} V^a \otimes W^b}$. Πράγματι,

$\tilde{\psi} \circ \tilde{f} = Id_{(V \otimes W)^\gamma}$: Έστω $x \in (V \otimes W)^\gamma$ τότε από i) υπάρχουν $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n \subseteq I$ ώστε $x = \sum_{i=1}^n v_{a_i} \otimes w_{b_i}$, όπου $v_{a_i} \in V^{a_i}$, $w_{b_i} \in W^{b_i}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{f}(x) &= \tilde{\psi}(\tilde{f}(\sum_i v_{a_i} \otimes w_{b_i})) = \sum_i \tilde{\psi}(\tilde{f}(v_{a_i} \otimes w_{b_i})) = \sum_i \tilde{\psi}((\xi_a v_{a_i} \otimes \xi_b w_{b_i})_{(a,b) \in I}) = \\ &= \sum_i \sum_{(a,b) \in I} \tilde{\psi}_{a,b}(\xi_a v_{a_i} \otimes \xi_b w_{b_i}) = \sum_i \sum_{(a,b) \in I} \xi_a v_{a_i} \otimes \xi_b w_{b_i} = \sum_i \xi_{a_i} v_{a_i} \otimes \xi_{b_i} w_{b_i} = \sum_i v_{a_i} \otimes w_{b_i} = x \end{aligned}$$

(όπου οι δύο προτελευταίες ισότητες ισχύουν από Πρόρισμα 3.2.1).

$\tilde{f} \circ \tilde{\psi} = Id \bigoplus_{(a,b) \in I} V^a \otimes W^b$: Έστω $x \in \bigoplus_{(a,b) \in I} V^a \otimes W^b$ τότε $x = (\sum_t v_{at} \otimes w_{bt})_{(a,b) \in I}$ και:

$$\begin{aligned} \tilde{f} \circ \tilde{\psi}(x) &= \tilde{f}(\sum_{(a,b) \in I} \tilde{\psi}_{a,b}(\sum_t v_{at} \otimes w_{bt})) = \tilde{f}(\sum_{(a,b) \in I} \sum_t v_{at} \otimes w_{bt}) = \\ &= \sum_{(a,b) \in I} \sum_t \tilde{f}(v_{at} \otimes w_{bt}) = \sum_{(a,b) \in I} \sum_t (\xi_k v_{at} \otimes \xi_l w_{bt})_{(k,l) \in I} = \sum_{(a,b) \in I} \sum_t (0, \dots, 0, \underbrace{v_{at} \otimes w_{bt}}_{(a,b) \text{--} \theta \acute{\epsilon} \sigma \eta}, 0, \dots) = \\ &= \sum_{(a,b) \in I} (0, \dots, 0, \sum_t v_{at} \otimes w_{bt}, 0, \dots) = (\sum_t v_{at} \otimes w_{bt})_{(a,b) \in I} = x \end{aligned}$$

(όπου η πέμπτη ισότητα ισχύει από Πρόγραμμα 3.2.1).

□

Σχόλιο. Συνεχίζουμε με τη μελέτη των a -weight spaces του covariant extension ενός $V \in M_K(n, r)$ ως προς την επέκταση σωμάτων $K \subseteq L$.

Ορισμός 3.3.2. Έστω $V \in M_K(n, r)$ και $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων, τότε ορίζουμε $V_L = V \otimes_K L$. (Συνηθίζεται να χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $V^L = V \otimes_K L$)

Παρατήρηση 3.3.2. *i)* Το V_L γίνεται $S_L(n, r)$ -πρότυπο ως εξής: Καταρχάς θεωρούμε $\{\xi_{i,j}^L\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ την L -βάση του $S_L(n, r)$. Αν $s \in S_L(n, r)$, $x \in V_L$ με $s = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \lambda_{i,j} \xi_{i,j}^L$, $x = \sum_t v_t \otimes l_t$, τότε ορίζουμε:

$$(\text{Επιμεριστική}) : s \cdot x := \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \sum_t (\xi_{i,j}^K v_t) \otimes (\lambda_{i,j} l_t).$$

Μάλιστα, $(\lambda \xi_{i,j}^L) \cdot (v \otimes l) = (\xi_{i,j}^K v) \otimes (\lambda l)$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$ και $\lambda \in L$. (Υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{T}$ όπως στον Ορισμός 2.1.2 ii))

ii) Ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος και καθιστά το V_L $S_L(n, r)$ -πρότυπο, ισοδύναμο $L\Gamma_L$ -πρότυπο.

iii) Η δομή L -προτύπου που επάγεται στο V_L από το $S_L(n, r)$ ταυτίζεται με την αρχική που είχε το $V_L = V \otimes_K L$ (δηλαδή $(\lambda \cdot 1_{S_L(n, r)}) \cdot x = \lambda x$ για κάθε $x \in V_L$ και $\lambda \in L$).

Απόδειξη.

Θα γίνει με χρήση της Παρατήρησης 1.2.3. Θεωρούμε $\tau : \{\xi_{i,j}^L \mid (i, j) \in \mathcal{T}\} \longrightarrow \text{End}_L(V \otimes_K L)$ με

$$\tau(\xi_{i,j}^L)(\sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s) = \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^K \cdot v_s) \otimes l_s. \text{ Η } \tau(\xi_{i,j}^L) \text{ είναι άμεσα } L\text{-γραμμική και πρέπει να δείξουμε ότι είναι}$$

καλά ορισμένη. Έστω $\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r = \sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση $\psi : V \times L \longrightarrow V \otimes_K L$, με

$\psi(v, l) = \xi_{i,j}^K v \otimes l$, η ψ είναι άμεσα multilinear K -προτύπων, άρα υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων $\phi : V \otimes L \longrightarrow V \otimes L$ με $\phi(v \otimes l) = \xi_{i,j}^K v \otimes l$. Τώρα, εφόσον $\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r = \sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t$, πρέπει $\phi(\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r) = \phi(\sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t) \iff \sum_{r=1}^n \phi(v_r \otimes k_r) = \sum_{t=1}^m \phi(y_t \otimes l_t) \iff \sum_{r=1}^n \xi_{i,j}^K v_r \otimes k_r = \sum_{t=1}^m \xi_{i,j}^K y_t \otimes l_t \iff \tau(\xi_{i,j}^L)(\sum_{r=1}^n v_r \otimes k_r) = \tau(\xi_{i,j}^L)(\sum_{t=1}^m y_t \otimes l_t)$.

Έστω (καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο) $\tau : S_L(n, r) \longrightarrow \text{End}_L(V \otimes_K L)$ η L -γραμμική επέκταση της τ (που είναι ομομορφισμός L -αλγεβρών), τότε:

$\tau(\xi_{i,j}^L \cdot \xi_{k,l}^L) = \tau(\xi_{i,j}^L) \circ \tau(\xi_{k,l}^L)$: Έστω $x = \sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \in V \otimes L$, τότε $\xi_{i,j}^L \xi_{k,l}^L = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z(i, j, k, l, p, q) \xi_{p,q}^L$, για συντομία γράφουμε $Z(i, j, k, l, p, q) = Z_{p,q}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau(\xi_{i,j}^L \xi_{k,l}^L)(x) &= \left(\sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \cdot \tau(\xi_{p,q}^L) \right)(x) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \cdot \tau(\xi_{p,q}^L) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \right) = \\ &= \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \cdot \left(\sum_{s=1}^n (\xi_{p,q}^K \cdot v_s) \otimes l_s \right) = \sum_{s=1}^n \left(\left(\sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z_{p,q} \xi_{p,q}^K \right) \cdot v_s \right) \otimes l_s = \sum_{s=1}^n \left((\xi_{i,j}^K \cdot \xi_{k,l}^K) \cdot v_s \right) \otimes l_s = \\ &= \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^K \cdot (\xi_{k,l}^K \cdot v_s)) \otimes l_s = \tau(\xi_{i,j}^L) \left(\sum_{s=1}^n (\xi_{k,l}^K \cdot v_s) \otimes l_s \right) = \tau(\xi_{i,j}^L) (\tau(\xi_{k,l}^L)(x)) = \tau(\xi_{i,j}^L) \circ \tau(\xi_{k,l}^L)(x) \end{aligned}$$

$\tau(1_{S_L(n,r)}) = \mathbb{I}_{V \otimes L}$: Καταρχάς ισχύει ότι $\tau(\lambda \xi_{i,j}^L) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \right) = \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^K \cdot v_s) \otimes \lambda l_s$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, $\lambda \in L$. Πράγματι, έστω $i, j \in I(n, r)$ τότε υπάρχει (μοναδικό) $(k_i, l_j) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (k_i, l_j)$, άρα $\xi_{i,j}^L = \xi_{k_i, l_j}^L$ και $\xi_{i,j}^K = \xi_{k_i, l_j}^K$, οπότε:

$$\tau(\lambda \xi_{i,j}^L) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \right) = \lambda \tau(\xi_{k_i, l_j}^L) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \right) = \sum_{s=1}^n (\xi_{k_i, l_j}^K \cdot v_s) \otimes \lambda l_s = \sum_{s=1}^n (\xi_{i,j}^K \cdot v_s) \otimes \lambda l_s. \text{ Τώρα,}$$

$$\begin{aligned} \tau(1_{S_L(n,r)}) \left(\sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \right) &= \sum_{s=1}^n \tau \left(\sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}^L \right) (v_s \otimes l_s) = \sum_{s=1}^n \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \tau(\xi_{i,i}^L) (v_s \otimes k_s) = \sum_{s=1}^n \sum_{i \in \mathcal{T}_o} (\xi_{i,i}^K \cdot v_s) \otimes l_s = \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{i \in \mathcal{T}_o} (\xi_{i,i}^K \cdot v_s) \right) \otimes l_s = \sum_{s=1}^n \left(\left(\sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi_{i,i}^K \right) \cdot v_s \right) \otimes l_s = \sum_{s=1}^n (1_{S_K(n,r)} \cdot v_s) \otimes l_s = \sum_{s=1}^n v_s \otimes l_s \end{aligned}$$

Άρα $\tau(1_{S_L(n,r)}) = \mathbb{I}_{V \otimes L}$.

Συνεπώς το $V \otimes L$ είναι $S_L(n, r)$ -πρότυπο με εξωτερικό πολ/μό τον εζήξ: $\xi \cdot v = \tau(\xi)(v)$ για κάθε $\xi \in S_L(n, r)$, $v \in V \otimes L$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \lambda_{i,j} \xi_{i,j}^L \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^m v_s \otimes l_s \right) &= \tau \left(\sum_{(i,j)} \lambda_{i,j} \xi_{i,j}^L \right) \left(\sum_s v_s \otimes l_s \right) = \left(\sum_{(i,j)} \lambda_{i,j} \tau(\xi_{i,j}^L) \right) \left(\sum_s v_s \otimes l_s \right) = \\ &= \sum_{(i,j)} \lambda_{i,j} \tau(\xi_{i,j}^L) \left(\sum_s v_s \otimes l_s \right) = \sum_{(i,j)} \lambda_{i,j} \left(\sum_s ((\xi_{i,j}^K \cdot v_s) \otimes l_s) \right) = \sum_{(i,j)} \sum_s (\xi_{i,j}^K \cdot v_s) \otimes (\lambda_{i,j} l_s) \end{aligned}$$

Τέλος από αυτό που δείξαμε στην ταυτότητα $\tau(1_{S_L(n,r)}) = \mathbb{I}_{V \otimes L}$ άμεσα επίσης επαληθεύεται ότι:
 $\lambda \xi_{i,j}^L \cdot (v \otimes l) = (\xi_{i,j}^K v) \otimes \lambda l$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, $v \in V$ και $l, \lambda \in L$.

□

Πρόταση 3.3.5. Έστω $V \in M_K(n, r)$ με K -βάση το $\{e_1, \dots, e_n\}$ και $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων. Τότε:

- i) Το $V_L = V \otimes_K L$ έχει βάση σαν L -πρότυπο το $\{e_1 \otimes 1_L, \dots, e_n \otimes 1_L\}$. Ιδιαίτερος $\dim_K V = \dim_L V_L$.
- ii) $V_L \in \text{mod}(S_L(n, r))$ και άρα $V_L \in M_L(n, r)$ με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $s \cdot x = e_L(s) \cdot x$ για κάθε $s \in L\Gamma_L$ και $x \in V_L$ (όπου $e_L : L\Gamma_L \rightarrow S_L(n, r)$, ο γνωστός επιμορφισμός L -αλγεβρών).

Υπενθύμιση 3.3.2. (Υπενθύμιση από την *multilinear άλγεβρα*). Έστω M, N R -πρότυπα (όπου R μεταθετικός) και M ελεύθερο με βάση $\{e_i\}_{i \in I}$. Τότε:

- i) Το τυχόν στοιχείο $x \in M \otimes_R N$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{i \in I} e_i \otimes n_i$, όπου $n_i \in N$ και πεπερασμένο το πλήθος n_i είναι μη-μηδενικά.
- ii) Έστω R υποδακτύλιος ενός μεταθετικού δακτυλίου S , τότε το S γίνεται με το σύννηθες τρόπο (R, S) -πρότυπο και άρα το $M \otimes_R S$ είναι φυσιολογικά (Υπενθύμιση 2.5.1) (R, S) -πρότυπο και μάλιστα ελεύθερο S -πρότυπο με βάση $\{e_i \otimes 1_S\}_{i \in I}$

Απόδειξη. (Υπενθύμισης).

Θα κάνουμε το ii). Πράγματι, καταρχάς το τυχόν στοιχείο του $x \in M \otimes_R S$ γράφεται (κατά μοναδικό τρόπο) ως $x = \sum_{i \in I} e_i \otimes s_i = \sum_{i \in I} s_i(e_i \otimes 1_S)$, όπου $s_i \in S$ και πεπερασμένο το πλήθος s_i είναι μη-μηδενικά. Όσο για την γραμμική ανεξαρτησία, αν $\sum_{i \in I} t_i(e_i \otimes 1_S) = \sum_{i \in I} s_i(e_i \otimes 1_S)$, όπου $s_i, t_i \in S$, τότε $\sum_{i \in I} e_i \otimes t_i = \sum_{i \in I} e_i \otimes s_i$ και από μοναδικότητα γραφής έχουμε $t_i = s_i$ για κάθε $i \in I$.

□

Απόδειξη. (Πρότασης).

Το i) είναι άμεσο από Υπενθύμιση 3.3.2 το i) (για $R = K$, $S = L$ και $M = V$). Όσο για το ii), εφόσον $V_L \in S_L(n, r)$ -πρότυπο με $\dim_L V_L < \infty$ (από i) και Παρατήρηση 3.3.2 iii)) τότε $V_L \in \text{mod}(S_L(n, r))$ και από Παρατήρηση 2.4.3 ii) έπεται ότι $V_L \in M_L(n, r)$.

□

Πρόταση 3.3.6. Έστω $V \in M_K(n, r)$ και $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων. Τότε :

- i) Για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, ισχύει $V_L^a = \text{span}_L(\{v \otimes 1_L \mid v \in V^a\}) = \text{span}_{\mathbb{Z}}(\{v \otimes l \mid v \in V^a, l \in L\})$ (συμβολικά $V_L^a = \text{span}_L(V^a \otimes 1_L)$).
- ii) $V_L^a \simeq V^a \otimes_K L$ (Ισομορφισμός L -προτύπων), για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.
- iii) $\dim_L V_L^a = \dim_K V^a$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.

Απόδειξη.

- i) $V_L^a \subseteq \text{span}_L(V^a \otimes 1_L)$: Έστω $x \in V_L^a$ τότε $x = \xi_a^L v$, όπου $v \in V_L$ με $v = \sum_i v_i \otimes l_i$ και $v_i \in V, l_i \in L$. Τώρα, $x = \xi_a^L v = \sum_i \xi_a^L (v_i \otimes l_i) = \sum_i (\xi_a^K v_i) \otimes l_i \in \text{span}_L(V^a \otimes 1_L)$ (η τελευταία ισότητα ισχύει αφού $V^a = \xi_a^K V$).

$V_L^a \supseteq \text{span}_L(V^a \otimes 1_L)$: Έστω $x \in \text{span}_L(V^a \otimes 1_L)$, τότε $x = \sum_i l_i (v_i \otimes 1_L)$, όπου $v_i \in V^a, l_i \in L$, δηλαδή $v_i = \xi_a^K w_i, w_i \in V$ και άρα $x = \sum_i l_i (\xi_a^K w_i \otimes 1_L) = \sum_i l_i \xi_a^L (w_i \otimes 1_L) \in V_L^a$.

- ii) Από Πρόταση 3.2.2 αρκεί να δείξουμε ότι $\xi_a^L V_L \simeq (\xi_a^K V) \otimes_K L$ (Ισομορφισμός L -προτύπων).

Θεωρούμε $\phi : \xi_a^K V \times L \rightarrow \xi_a^L V_L$ με $\phi(\xi_a^K v, l) = (\xi_a^K v) \otimes l = \xi_a^L (v \otimes l)$, τότε η ϕ είναι άμεσα multilinear K -προτύπων και άρα υπάρχει $g : \xi_a^K V \otimes_K L \rightarrow \xi_a^L V_L$, με $g((\xi_a^K v) \otimes l) = (\xi_a^K v) \otimes l$ (όπου παρά τον ίδιο συμβολισμό, έχουμε δύο διαφορετικά στοιχεία). Επιπλέον η g είναι και άμεσα ομομορφισμός L -προτύπων.

Τώρα θεωρούμε $\psi : V \times L \rightarrow \xi_a^K V \otimes_K L$ με $\psi(v, l) = (\xi_a^K v) \otimes l$, η ψ είναι άμεσα multilinear K -προτύπων και άρα υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων έστω $\tilde{\psi} : V \otimes_K L \rightarrow \xi_a^K V \otimes_K L$, με $\tilde{\psi}(v \otimes l) = (\xi_a^K v) \otimes l$. Επιπλέον η $\tilde{\psi}$ είναι άμεσα ομομορφισμός L -προτύπων. Τέλος θεωρούμε την $f := \tilde{\psi}|_{\xi_a^L V_L} : \xi_a^L V_L \rightarrow \xi_a^K V \otimes_K L$.

Ισχυρισμός: $f \circ g = \text{Id}_{\xi_a^K V \otimes_K L}$, $g \circ f = \text{Id}_{\xi_a^L V_L}$. Πράγματι,

$f \circ g = \text{Id}_{\xi_a^K V \otimes_K L}$: Έστω $x \in \xi_a^K V \otimes_K L$, τότε $x = \sum_i \xi_a^K v_i \otimes l_i$ και $f(g(x)) = \sum_i f(g(\xi_a^K v_i \otimes l_i)) = \sum_i f(\xi_a^K v_i \otimes l_i) = (\xi_a^K (\xi_a^K v_i)) \otimes l_i = \sum_i \xi_a^K v_i \otimes l_i = x$ (η τέταρτη ισότητα έπεται από Παρατήρηση 3.2.1).

$g \circ f = \text{Id}_{\xi_a^L V_L}$: Έστω $x \in \xi_a^L V_L$, τότε $x = \xi_a^L (\sum_i v_i \otimes l_i) = \sum_i (\xi_a^K v_i) \otimes l_i$, όπου $v_i \in V, l_i \in L$.

Τώρα $g(f(x)) = \sum_i g(f(\xi_a^K v_i \otimes l_i)) = g((\xi_a^K (\xi_a^K v_i)) \otimes l_i) = \sum_i g(\xi_a^K v_i \otimes l_i) = \sum_i (\xi_a^K v_i) \otimes l_i = x$.

- iii) Από ii) και Υπενθύμιση 3.3.2 ii) έχουμε $\dim_L V_L^a = \dim_L V^a \otimes_K L = \dim_K V^a$.

□

Σχόλιο. Προχωράμε τώρα στη μελέτη των *weight spaces* του *contravariant space* V^o . Επίσης θα δούμε πως συνδέονται οι *non-singular* μορφές με τους *weight spaces*.

Παρατήρηση 3.3.3. Έστω $V, W \in M_K(n, r)$ και $(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$ μία *contravariant form*. Τότε:

- i) $(V^a, W^b) = 0$ για κάθε $a, b \in \Lambda(n, r)$ με $a \neq b$. (Όπου $(V^a, W^b) = \{(v, w) \mid v \in V^a, w \in W^b\}$).
- ii) $H(\cdot, \cdot) : V \times W \longrightarrow K$ είναι *non-singular* αν και μόνον αν ο περιορισμός $(\cdot, \cdot) : V^a \times W^a \longrightarrow K$ είναι *non-singular* για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.

Απόδειξη.

- i) Έστω $a \neq b$ και $x \in V^a = \xi_a V$, $y \in W^b = \xi_b W$, τότε $x = \xi_a v$, $y = \xi_b w$ και $(x, y) = (\xi_a v, \xi_b w) = (v, J(\xi_a)\xi_b w) = (v, \xi_a \xi_b w) \stackrel{\text{Παρατήρηση 3.2.1}}{=} (v, 0) = 0$.
- ii) Έστω ότι η $(\cdot, \cdot)$ είναι *non-singular*. Έστω $w \in W^a$ με $(v, w) = 0$ για κάθε $v \in V^a$, αν δείξουμε ότι $(v, w) = 0$ για κάθε $v \in V$ τότε από υπόθεση πρέπει $w = 0$. Πράγματι, έστω $v \in V$ τότε (επειδή $V = \bigoplus_{b \in \Lambda(n, r)} V^b$) πρέπει $v = \sum_{b \in \Lambda(n, r)} v_b$, όπου $v_b \in V^b$, οπότε $(v, w) = \sum_{b \in \Lambda(n, r)} (v_b, w) \stackrel{i)}{=} (v_a, w) = 0$. Όμοια, αν $v \in V^a$ με $(v, w) = 0$ για κάθε $w \in W^a$, τότε $v = 0$ και έτσι η $(\cdot, \cdot)|_{V^a \times W^a}$ είναι *non-singular*.
Ανάποδα, έστω ότι η $(\cdot, \cdot)|_{V^a \times W^a}$ είναι *non-singular* για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$. Έστω $w \in W$ με $(v, w) = 0$ για κάθε $v \in V$. Επειδή $W = \bigoplus_{b \in \Lambda(n, r)} W^b$, έχουμε ότι $w = \sum_{b \in \Lambda(n, r)} w_b$, όπου $w_b \in W^b$. Επιπλέον από υπόθεση πρέπει $(v, w) = 0$ για κάθε $v \in V^a$ και κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, άρα για κάθε $v \in V^a$ και κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ πρέπει: $0 = (v, w) = \sum_{b \in \Lambda(n, r)} (v, w_b) \stackrel{i)}{=} (v, w_a)$. Συνεπώς (αφού $(\cdot, \cdot)|_{V^a \times W^a}$ είναι *non-singular*) έχουμε ότι $w_a = 0$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, δηλαδή $w = 0$. Όμοια, αν $v \in V$ με $(v, w) = 0$ για κάθε $w \in W$, τότε $v = 0$ και έτσι η $(\cdot, \cdot)$ είναι *non-singular*.

□

Πρόταση 3.3.7. Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε:

- i) Η μορφή $(\cdot, \cdot) : V \times V^o \longrightarrow K$ με $(v, f) = f(v)$ είναι *contravariant non-singular form*.
- ii) $V^a \simeq ((V^o)^a)^*$ (Ισομορφισμός K -προτύπων), για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$. Ιδιαίτερώς $\dim_K V^a = \dim_K (V^o)^a$.

Απόδειξη.

- i) Από Πρόταση 2.7.2 θεωρούμε τον φυσικό ισομορφισμό (ΚΤ-προτύπων) $\tau : V \longrightarrow V^{oo}$ και παρατηρούμε ότι $\tau = \Lambda = \phi((\cdot, \cdot))$, όπου Λ, ϕ όπως στην Πρόταση 2.7.3 (πράγματι, $\Lambda(v)(f) = (v, f) = f(v) = \tau(v)(f)$ για κάθε $v \in V, f \in V^o$, οπότε $\tau = \Lambda$). Συνεπώς από Πρόταση 2.7.4. και το γεγονός ότι $\tau =$ ισομορφισμό (ΚΤ-προτύπων), έπεται ότι η $(\cdot, \cdot)$ είναι contravariant non-singular form.
- ii) Από i) και Παρατήρηση 3.3.3 ii) έπεται ότι η $(\cdot, \cdot) : V^a \times (V^o)^a \longrightarrow K$ είναι non-singular για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$. Οπότε (χρησιμοποιώντας παρόμοια απόδειξη με αυτή της Πρότασης 2.7.4 για το $(\implies)$) έχουμε ότι η απεικόνιση $\Lambda : V^a \longrightarrow ((V^o)^a)^*$ με $\Lambda(v)(f) = (v, f) = f(v)$ για κάθε $v \in V^a$ και $f \in (V^o)^a$, είναι ισομορφισμός K-προτύπων. Τελικά, $\dim_K V^a = \dim_K ((V^o)^a)^*$, όμως από Υπενθύμιση 2.3.1 και το γεγονός ότι $\dim_K (V^o)^a < \infty$ έχουμε $\dim_K ((V^o)^a)^* = \dim_K (V^o)^a$.

□

Σχόλιο. Σαν τελευταίο κομμάτι αυτού του υποκεφαλαίου, θα μελετήσουμε την σχέση μεταξύ $\mathbb{Z}$ -forms και weight spaces .

Ορισμός 3.3.3. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\mathbb{Q}}$, τότε για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ ορίζουμε $V_{\mathbb{Z}}^a = \xi_a^{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Z}}$.

Παρατήρηση 3.3.4. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\mathbb{Q}}$, τότε:

- i) $V_{\mathbb{Z}}^a = V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{Q}}^a$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$. Ιδιαίτέρως τα $V_{\mathbb{Z}}^a$ είναι ελεύθερα $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπα του $V_{\mathbb{Z}}$ (αφού $V_{\mathbb{Z}} =$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο).
- ii) $V_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\mathbb{Z}}^a$.

Απόδειξη.

- i) $V_{\mathbb{Z}}^a \subseteq V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{Q}}^a$: Έστω $x \in V_{\mathbb{Z}}^a$ τότε $x = \xi_a^{\mathbb{Q}} v$ με $v \in V_{\mathbb{Z}}$, άρα $x \in V_{\mathbb{Z}}$ (αφού το $V_{\mathbb{Z}}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form) και $x \in V_{\mathbb{Q}}^a$ (αφού $V_{\mathbb{Q}}^a = \xi_a^{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}$), συνεπώς $x \in V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{Q}}^a$.

$V_{\mathbb{Z}}^a \supseteq V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{Q}}^a$: Έστω $x \in V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{Q}}^a$, τότε $x \in V_{\mathbb{Z}}$ και $\xi_a^{\mathbb{Q}} x = x$ (αφού $x \in V_{\mathbb{Q}}^a$ και Πόρισμα 3.2.1), συνεπώς $x \in V_{\mathbb{Z}}^a$.

- ii) $V_{\mathbb{Z}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\mathbb{Z}}^a$: Από i) άμεσα $\sum_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\mathbb{Z}}^a \subseteq V_{\mathbb{Z}}$. Ανάποδα, αν $x \in V_{\mathbb{Z}}$ τότε (επειδή $V = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V^a$) $x = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} x_a$, όπου $x_a \in V_{\mathbb{Q}}^a$. Όμως για κάθε $b \in \Lambda(n, r)$ έχουμε $\xi_b^{\mathbb{Q}} x \in V_{\mathbb{Z}}$ και $\xi_b^{\mathbb{Q}} x = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \xi_b^{\mathbb{Q}} x_a = \xi_b^{\mathbb{Q}} x_b = x_b$, συνεπώς $x_b \in V_{\mathbb{Z}} \cap V_{\mathbb{Q}}^b = V_{\mathbb{Z}}^b$. Τελικά $x = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} x_a$ με $x_a \in V_{\mathbb{Z}}^a$, άρα $V_{\mathbb{Z}} \subseteq \sum_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\mathbb{Z}}^a$.

$V_{\mathbb{Z}}^a \cap \sum_{b \neq a} V_{\mathbb{Z}}^b = 0$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$: $V_{\mathbb{Z}}^a \cap \sum_{b \neq a} V_{\mathbb{Z}}^b \subseteq \xi_a^{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} \cap \sum_{b \neq a} \xi_b^{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}}^a \cap \sum_{b \neq a} V_{\mathbb{Q}}^b = 0$ (το τελευταίο κάνει μηδέν αφού $V_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\mathbb{Q}}^a$).

□

Πρόταση 3.3.8. Έστω $(V_K)_K$ μία οικογένεια προτύπων της $M_K(n, r)$ $\mathbb{Z}$ -defined από το $\mathbb{Z}$ -form $V_{\mathbb{Z}}$ και την οικογένεια ισομορφισμών $(\delta_K)_K$ (Ορισμός 2.5.4). Τότε:

- i) $V_K^a = \text{span}_K\{\delta_K(\xi_a^{\mathbb{Q}}v \otimes 1_K) \mid v \in V_{\mathbb{Z}}\} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\delta_K(v \otimes k) \mid v \in V_{\mathbb{Z}}^a, k \in K\}$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.
- ii) $\dim_K V_K^a = \dim_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z}}^a$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, άρα η διάσταση $\dim_K V_K^a$ είναι ανεξάρτητη του σώματος K .

Απόδειξη.

- i) " $\subseteq$ ": Έστω $x \in V_K^a = \xi_a^K V_K$, τότε $x = \xi_a^K v$ με $v \in V_K$. Επειδή η $\delta_K : V_{\mathbb{Z}} \otimes K \rightarrow V_K$ είναι ισομορφισμός στην $M_K(n, r)$, τότε υπάρχει $y \in V_{\mathbb{Z}} \otimes K$ με $y = \sum_i v_i \otimes k_i$ (όπου $v_i \in V_{\mathbb{Z}}$, $k_i \in K$) και $v = \delta_K(y)$, οπότε:

$$\begin{aligned} x &= \xi_a^K \delta_K\left(\sum_i v_i \otimes k_i\right) = \delta_K\left(\xi_a^K \left(\sum_i v_i \otimes k_i\right)\right) = \delta_K\left(\sum_i (\xi_a^{\mathbb{Q}} v_i) \otimes k_i\right) = \sum_i \delta_K((\xi_a^{\mathbb{Q}} v_i) \otimes k_i) = \\ &= \sum_i \delta_K(k_i((\xi_a^{\mathbb{Q}} v_i) \otimes 1_K)) = \sum_i k_i \delta_K((\xi_a^{\mathbb{Q}} v_i) \otimes 1_K) \in \text{span}_K\{\delta_K(\xi_a^{\mathbb{Q}} v \otimes 1_K) \mid v \in V_{\mathbb{Z}}\} \end{aligned}$$

(η τρίτη ισότητα ισχύει από Πρόταση 2.5.2 ii)α) και η πέμπτη από Ορισμό 2.5.3).

- " $\supseteq$ ": Έστω $x \in \text{span}_K\{\delta_K(\xi_a^{\mathbb{Q}}v \otimes 1_K) \mid v \in V_{\mathbb{Z}}\}$, τότε $x = \sum_i k_i \delta_K(\xi_a^{\mathbb{Q}}v_i \otimes 1_K)$, όπου $k_i \in K$, $v_i \in V_{\mathbb{Z}}$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\xi_a^K x = x$, πράγματι, $\xi_a^K x = \sum_i k_i \delta_K(\xi_a^K (\xi_a^{\mathbb{Q}}v_i \otimes 1_K)) = \sum_i k_i \delta_K((\xi_a^{\mathbb{Q}}\xi_a^{\mathbb{Q}}v_i) \otimes 1_K) = \sum_i k_i \delta_K(\xi_a^{\mathbb{Q}}v_i \otimes 1_K) = x$.

- ii) Για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ έστω $\{v_a \mid v_a \in B_a\}$ μία $\mathbb{Z}$ -βάση του $V_{\mathbb{Z}}^a$ (υπάρχει γιατί $V_{\mathbb{Z}}^a = \mathbb{Z}$ -υποπρότυπο του ελεύθερου $\mathbb{Z}$ -προτύπου $V_{\mathbb{Z}}$), τότε το $\{v_a \mid v_a \in B_a, a \in \Lambda(n, r)\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -βάση του $V_{\mathbb{Z}}$ (αφού $V_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\mathbb{Z}}^a$ και Υπενθύμιση 3.3.1).

Ισχυρισμός: Το $\{\delta_K(v_a \otimes 1_K) \mid v_a \in B_a\}$ είναι K -βάση του V_K^a και άρα $\dim_K V_K^a = \dim_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z}}^a$.

$V_K^a = \text{span}_K\{\delta_K(v_a \otimes 1_K) \mid v_a \in B_a\}$: Καταρχάς, $\text{span}_K\{\delta_K(v_a \otimes 1_K) \mid v_a \in B_a\} \subseteq V_K^a$ (άμεσα από i) και $B_a \subseteq V_{\mathbb{Z}}^a$). Ανάποδα, αν $x \in V_K^a$, τότε από i) πρέπει $x = \sum_i k_i \delta_K(\xi_a^{\mathbb{Q}}v_i \otimes 1_K)$, όπου $v_i \in V_{\mathbb{Z}}$, όμως $\xi_a^{\mathbb{Q}}v_i = \sum_{v_a \in B_a} z_{ia} v_a$, όπου $z_{ia} \in \mathbb{Z}$, άρα $x = \sum_i \sum_{v_a \in B_a} z_{ia} k_i \delta(v_a \otimes 1_K) \in \text{span}_K\{\delta_K(v_a \otimes 1_K) \mid v_a \in B_a\}$.

$\{\delta_K(v_a \otimes 1_K) \mid v_a \in B_a\}$ K -γραμμικά ανεξάρτητα: Έστω $\sum_{v_a \in B_a} k_{v_a} \delta_K(v_a \otimes 1_K) = 0$, τότε $0 = \delta_K\left(\sum_{v_a \in B_a} k_{v_a} (v_a \otimes 1_K)\right) = \delta_K\left(\sum_{v_a \in B_a} v_a \otimes k_{v_a}\right)$, άρα $\sum_{v_a \in B_a} v_a \otimes k_{v_a} = 0 \in V_{\mathbb{Z}} \otimes K$ (αφού δ_K ισομορφισμός), συνεπώς από Υπενθύμιση 3.3.2 i) και αυτό που αναφέραμε στην αρχή, έπεται ότι $k_{v_a} = 0$ για κάθε $v_a \in B_a$.

□

Παρατήρηση 3.3.5. Έστω $V_{\mathbb{Q}} \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\mathbb{Q}}$ με $V_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_b \mid b \in B\}$ όπου $\{v_b \mid b \in B\}$ μία $\mathbb{Q}$ -βάση του $V_{\mathbb{Q}}$. Τότε :

i) (Υπενθύμιση). Υπάρχει ισομορφισμός στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ έστω $\delta_{\mathbb{Q}} : V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow V_{\mathbb{Q}}$ με $\delta_{\mathbb{Q}}(v_b \otimes 1_{\mathbb{Q}}) = v_b$, για κάθε $b \in B$.

ii) $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}^a = \dim_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z}}^a$ και $V_{\mathbb{Q}}^a = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\delta_{\mathbb{Q}}(\xi_a^{\mathbb{Q}} v \otimes 1_{\mathbb{Q}}) \mid v \in V_{\mathbb{Z}}\}$.

Απόδειξη.

i) Το ξέρουμε από Πρόταση 2.5.3.

ii) Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό που είδαμε στο i) η απόδειξη του ii) είναι ίδια με αυτή της Πρότασης 3.3.8 με $\mathbb{Q}$ στη θέση του σώματος K .

□

Σχόλιο. Το ii) της Παρατήρησης 3.3.5 δεν προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιας $\mathbb{Z}$ -defined οικογένειας $(V_K)_K$ της $M_K(n, r)$. Επιπλέον, η Παρατήρηση 3.3.5 θα μας χρειαστεί στο υποκεφάλαιο 5.6.

3.4 Characters

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$. Επίσης παρακάτω κάθε $V \in M_K(n, r)$ το βλέπουμε και σαν $S_K(n, r)$ —πρότυπο όπως στην Παρατήρηση 2.4.3.

Ορισμός 3.4.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε ο τυπικός χαρακτήρας (ή *character* ή *formal character*) του V ορίζεται να είναι το πολυώνυμο, $\Phi_V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^a) x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

Παρατήρηση 3.4.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε το $\Phi_V(x_1, \dots, x_n)$ είναι συμμετρικό και ομογενές πολυώνυμο βαθμού r .

Απόδειξη.

Καταρχάς, το $\Phi_V(x_1, \dots, x_n)$ είναι ομογενές άμεσα (αφού $a \in \Lambda(n, r)$). Μένει να δούμε ότι είναι συμμετρικό. Πράγματι, έστω $s \in G(n)$ τότε :

$$\begin{aligned} \Phi_V(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^a) \cdot x_{s(1)}^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{s(n)}^{a_n} = \\ &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^a) x_{s(1)}^{a_{s^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_{s(n)}^{a_{s^{-1}(n)}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^a) x_1^{a_{s^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{s^{-1}(n)}} \end{aligned}$$

Επιπλέον από Πρόταση 3.3.1 έχουμε $\dim_K V^a = \dim_K V^{s(a)}$, όπου $s(a) = (a_{s^{-1}(1)}, \dots, a_{s^{-1}(n)})$, συνεπώς $\Phi_V(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^{s(a)}) x_1^{a_{s^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{s^{-1}(n)}}$, όμως καθώς το a διατρέχει το $\Lambda(n, r)$, το ίδιο κάνει και το $s(a)$ (για την ακρίβεια $s \cdot \Lambda(n, r) = \Lambda(n, r)$ και $s \cdot a = s \cdot b \iff a = b$, για κάθε $a, b \in \Lambda(n, r)$), συνεπώς $\Phi_V(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^a) x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = \Phi_V(x_1, \dots, x_n)$. □

Ορισμός 3.4.2. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ τότε ορίζουμε $m_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

Το πολυώνυμο m_λ το λέμε μονώνυμη συμμετρική συνάρτηση (*monomial symmetric function*). (Υπενθυμίζουμε ότι $W = G(n)$ και δρα στο $\Lambda(n, r)$ όπως στην Παρατήρηση 3.1.3).

Σχόλιο. Το m_λ επι της ουσίας είναι το άθροισμα όλων των μονωνύμων $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ όπου το a διατρέχει όλες τις "μεταθέσεις" του $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Παρατήρηση 3.4.2. Έστω $V \in M_K(n, r)$ τότε

i) Το $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ είναι ομογενές βαθμού r και συμμετρικό, για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$.

ii) $\Phi_V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} (\dim_K V^\lambda) m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$.

Απόδειξη.

i) Έστω $s \in G(n)$ τότε:

$$\begin{aligned} m_\lambda(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) &= \sum_{a \in [\lambda]_W} x_{s(1)}^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{s(n)}^{a_n} = \\ &= \sum_{a \in [\lambda]_W} x_{s(1)}^{a_{s^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_{s(n)}^{a_{s^{-1}(n)}} = \sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_{s^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{s^{-1}(n)}}. \end{aligned}$$

Όμως $s \cdot a = (a_{s^{-1}(1)}, \dots, a_{s^{-1}(n)})$ και καθώς το a διατρέχει το $[\lambda]_W$, το ίδιο κάνει και το $s \cdot a$ (για την ακρίβεια $s \cdot [\lambda]_W = [\lambda]_W$ και $s \cdot a = s \cdot b \iff a = b$, για κάθε $a, b \in [\lambda]_W$), συνεπώς $m_\lambda(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) = \sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$. Η ομογένεια είναι άμεση αφού $[\lambda]_W \subseteq \Lambda(n, r)$.

ii) Εφόσον η W δρα στο $\Lambda(n, r)$ και $\Lambda^+(n, r)$ είναι σύνολο αντιπροσώπων τροχιών της δράσης (Πόρισμα 3.1.1) τότε $\Lambda(n, r) = \coprod_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} [\lambda]_W$ (ξένη ένωση). Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \Phi_V(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\dim_K V^a) x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} \left(\sum_{a \in [\lambda]_W} (\dim_K V^a) x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \right), \\ \text{όμως από Πρόταση 3.3.1 έχουμε } \Phi_V(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} ((\dim_K V^\lambda) \sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}) = \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} (\dim_K V^\lambda) m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Παρακάτω παραθέτουμε κάποιες από τις βασικές ιδιότητες που έχουν οι χαρακτήρες αντικειμένων της $M_K(n, r)$.

Πρόταση 3.4.1. i) Έστω $V, W \in M_K(n, r)$ με $V \simeq W$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων), τότε $\Phi_V = \Phi_W$.

ii) a) Έστω μία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} V_2 \longrightarrow 0$ στην $M_K(n, r)$. Τότε, $\Phi_V = \Phi_{V_1} + \Phi_{V_2}$.

b) Έστω $V \in M_K(n, r)$ και $W \leq V$ ($K\Gamma$ -υποπρότυπο), τότε $\Phi_{V/W} = \Phi_V - \Phi_W$.

c) Έστω $V \in M_K(n, r)$ και $V_1, \dots, V_n \in M_K(n, r)$ με $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ (ευθύ εσωτερικό ή εξωτερικό άθροισμα), τότε $\Phi_{V_1 \oplus \dots \oplus V_n} = \Phi_{V_1} + \dots + \Phi_{V_n}$.

iii) Έστω μία σειρά $K\Gamma$ -υποπροτύπων $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_l = V$ στην $M_K(n, r)$. Τότε,

$$\Phi_V = \sum_{r=1}^l \Phi_{V_r/V_{r-1}}.$$

iv) Έστω $V_1, \dots, V_m$ με $V_i \in M_K(n, t_i)$, τότε $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_m \in M_K(n, t_1 + \dots + t_m)$ και

$$\Phi_{V_1 \otimes \dots \otimes V_m} = \prod_{i=1}^m \Phi_{V_i}.$$

v) $\Phi_V = \Phi_{V^\circ}$.

Σχόλιο. Εν γένη το αντίστροφο του i) δεν ισχύει. Παρόλα αυτά παρακάτω θα δούμε ότι το αντίστροφο ισχύει όταν $chK = 0$.

Απόδειξη.

i) Έστω $f : V \rightarrow W$ ο ισομορφισμός K -προτύπων τότε η $f|_{\xi_a V} : \xi_a V \rightarrow f(\xi_a V)$ είναι ισομορφισμός K -προτύπων (είναι ομομορφισμός K -προτύπων εξ' ορισμού του εξωτερικού πολλαπλασιασμού του K στο V , Παρατήρηση 1.1.1 iii)). Επίσης $f(\xi_a V) = \xi_a f(V) = \xi_a W = W^a$, άρα η $f|_{V^a} : V^a \rightarrow W^a$ είναι ισομορφισμός K -προτύπων και συνεπώς $\dim_K V^a = \dim_K W^a$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, άρα $\Phi_V = \Phi_W$.

ii) a) Από Πρόταση 3.3.2 η ακολουθία $0 \rightarrow V_1^a \xrightarrow{g|_{V_1^a}} V^a \xrightarrow{f|_{V_1^a}} V_2^a \rightarrow 0$ είναι ακριβής K -προτύπων. Τότε όμως από ακρίβεια πρέπει $V^a / \ker f|_{V_1^a} \simeq V_2^a$ και $\ker f|_{V_1^a} \simeq V_1^a$ (Ισομορφισμοί K -προτύπων). Συνεπώς, $\dim_K V_2^a = \dim_K (V^a / \ker f|_{V_1^a}) = \dim_K V^a - \dim_K (\ker f|_{V_1^a}) = \dim_K V^a - \dim_K V_1^a$, άρα $\dim_K V^a = \dim_K V_1^a + \dim_K V_2^a$. Από το τελευταίο έπεται άμεσα ότι $\Phi_V = \Phi_{V_1} + \Phi_{V_2}$.

b) Άμεσο από ii)a) αν θεωρήσουμε την ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/W \rightarrow 0$ K -προτύπων. (Όπου i, π οι φυσιολογικές ένθεση και προβολή).

c) Έστω $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ (ευθύ εξωτερικό άθροισμα). Θα γίνει με επαγωγή. Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{i} V_1 \oplus \dots \oplus V_n \xrightarrow{\pi} V_2 \oplus \dots \oplus V_n \rightarrow 0$ στην $M_K(n, r)$ (όπου $i(v_1) = (v_1, 0, \dots, 0)$ και $\pi(v_1, \dots, v_n) = (v_2, \dots, v_n)$). Για $n = 2$ έχουμε άμεσα από ii)a) ότι $\Phi_{V_1 \oplus V_2} = \Phi_{V_1} + \Phi_{V_2}$, ενώ για $n \geq 2$ έχουμε πάλι από ii)a) ότι $\Phi_{V_1 \oplus \dots \oplus V_n} = \Phi_{V_1} + \Phi_{V_2 \oplus \dots \oplus V_n} \stackrel{\text{Επαγωγή}}{=} \Phi_{V_1} + \Phi_{V_2} + \dots + \Phi_{V_n}$. Αν τώρα $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ (ευθύ εσωτερικό άθροισμα), τότε $V \simeq V_1 \times \dots \times V_n =$ (ευθύ εξωτερικό άθροισμα) και το συμπέρασμα έπεται από i) και αυτό που δείξαμε μόλις.

iii) Άμεσο από ii)b) και το γεγονός ότι $\Phi_0 = 0 \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

iv) Το πρώτο σκέλος έπεται από Πρόταση 3.3.3. Το δεύτερο σκέλος θα γίνει με επαγωγή στο m . Πράγματι, για $m = 2$, έστω $V \in M_K(n, s)$, $W \in M_K(n, r)$, τότε με τους συμβολισμούς της Πρότασης 3.3.4 έχουμε ότι $\dim_K (V \otimes W)^\gamma = \sum_{a+b=\gamma} \dim_K (V^a \otimes W^b) = \sum_{a+b=\gamma} \dim_K (V^a) \dim_K (W^b)$ (η τελευταία ισότητα ισχύει από Υπενθύμιση 2.6.1).

Συνεπώς $\Phi_{V \otimes W} = \sum_{\gamma \in \Lambda(n, r+s)} \left(\sum_{a+b=\gamma} \dim_K (V^a) \dim_K (W^b) \right) x_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\gamma_n}$. Από την άλλη,

$$\Phi_V \cdot \Phi_W = \left(\sum_{a \in \Lambda(n, s)} (\dim_K V^a) x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \right) \left(\sum_{b \in \Lambda(n, r)} (\dim_K W^b) x_1^{b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n} \right) =$$

$\sum_{a \in \Lambda(n,s)} \sum_{b \in \Lambda(n,r)} \dim_K(V^a) \dim_K(W^b) x_1^{a_1+b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n+b_n}$, οπότε βγάζοντας κοινούς παράγοντες εύκολα έπεται ότι $\Phi_{V \otimes W} = \Phi_V \Phi_W$. Γενικά τώρα, από Παρατήρηση 3.4.3ii) και i) έχουμε ότι $\Phi_{V_1 \otimes \dots \otimes V_m} = \Phi_{V_1 \otimes (V_2 \otimes \dots \otimes V_n)} = \Phi_{V_1} \Phi_{V_2 \otimes \dots \otimes V_n} \stackrel{\text{Επαγωγή}}{=} \Phi_{V_1} \Phi_{V_2} \dots \Phi_{V_n}$.

v) Άμεσο από Πρόταση 3.3.7 ii).

□

Παρατήρηση 3.4.3. i) (Υπενθύμιση από *multilinear άλγεβρα*). Έστω $M_1, \dots, M_n, N_1, \dots, N_k$ R -προτύπα (όπου R = μεταθετικός) τότε υπάρχει ισομορφισμός R -προτύπων

$$\phi : (M_1 \otimes_R \dots \otimes_R M_n) \otimes_R (N_1 \otimes_R \dots \otimes_R N_k) \longrightarrow M_1 \otimes_R \dots \otimes_R M_n \otimes_R N_1 \otimes_R \dots \otimes_R N_k \text{ ώστε:}$$

$$\phi((m_1 \otimes \dots \otimes m_n) \otimes (n_1 \otimes \dots \otimes n_k)) = m_1 \otimes \dots \otimes m_n \otimes n_1 \otimes \dots \otimes n_k, \text{ για κάθε } m_i \in M_i, n_j \in N_j.$$

ii) Στην περίπτωση που $M_i \in M_K(n, r_i)$, $N_j \in M_K(n, t_j)$ και $R = K$, τότε η απεικόνιση ϕ που είδαμε στο i) είναι ισομορφισμός KT -προτύπων.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε το ii). Από i) έχουμε ότι η ϕ είναι ισομορφισμός K -προτύπων, οπότε μένει να δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός KT -προτύπων. Για συντομία ας πούμε ότι $n = 1$ και $k = 2$, οπότε $\phi : M_1 \otimes (N_1 \otimes N_2) \longrightarrow M_1 \otimes N_1 \otimes N_2$. Έστω λοιπόν $x \in M_1 \otimes (N_1 \otimes N_2)$, $k \in KT$, τότε $x = \sum_{i=1}^s m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2})$ και $k = \sum_g k_g g$, όπου $k_g \in K, m_{i1} \in M_1, n_{ij} \in N_j$. Οπότε από Ορισμό 3.3.1:

$$\begin{aligned} \phi(g \cdot (m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2}))) &= \phi((g \cdot m_{i1}) \otimes (g \cdot (n_{i1} \otimes n_{i2})))) = \phi((g \cdot m_{i1}) \otimes ((g \cdot n_{i1}) \otimes (g \cdot n_{i2}))) = \\ &= (g \cdot m_{i1}) \otimes (g \cdot n_{i1}) \otimes (g \cdot n_{i2}) = g \cdot (m_{i1} \otimes n_{i1} \otimes n_{i2}) = g \cdot \phi((m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2}))). \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} \phi(k \cdot x) &= \phi\left(\sum_g \sum_i k_g g \cdot (m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2})))\right) = \sum_g \sum_i k_g \phi(g \cdot (m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2}))) = \\ &= \sum_g \sum_i k_g g \cdot \phi((m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2}))) = \left(\sum_g k_g g\right) \cdot \phi\left(\sum_i (m_{i1} \otimes (n_{i1} \otimes n_{i2}))\right) = k \cdot \phi(x). \end{aligned}$$

□

Ορισμός 3.4.3. Έστω $1 \leq r \leq n$ και $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$ τότε ορίζουμε το στοιχείο $e_r :=$

$m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ και το λέμε r -στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο (ή r^{th} -elementary symmetric function).

Παράδειγμα 3.4.1. Έστω $1 \leq r \leq n$, E K -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n , τότε $\Phi_{\Lambda^r E} = e_r = m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}$.

Απόδειξη.

Καταρχάς, $\Phi_{\Lambda^r E}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} \dim_K(\Lambda^r E)^\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ και από Παράδειγμα 3.2.1 ι-

σχύει ότι $\dim_K(\Lambda^r E)^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{αν υπάρχει } l \in I(n, r) \text{ με } l \nearrow \text{ και } l \in \lambda \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$, για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$. Έστω

$l \in I(n, r)$ με $l \nearrow$ (γνησίως αύξουσα) και $l \in \lambda$, τότε (επειδή $l = 1-1$) για το διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ισχύει ότι $\lambda_i = 0$ ή 1 . Επίσης, (επειδή $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$) αν $\lambda_{i_0} = 0$ για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, τότε πρέπει $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \geq i_0$. Συνεπώς $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0)$, όμως $\sum_i \lambda_i = r$, άρα $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0)$.

Με λίγα λόγια, αν υπάρχει $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ για το οποίο να υπάρχει $l \in I(n, r)$ με $l \nearrow$ και $l \in \lambda$, τότε $\lambda = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, μάλιστα για το λ αυτό υπάρχει πράγματι τέτοιο l (π.χ. το $l \in I(n, r)$ με $l(i) = i$ για κάθε $i \in \underline{r}$), οπότε $\Phi_{\Lambda^r E} = 1 \cdot m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)} = e_r$

□

Πόρισμα 3.4.1. Έστω E K -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n και $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ ένα *partition* του r (δηλαδή $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_t \geq 0$ και $\sum_{i=1}^t \mu_i = r$) με $\mu_1 \leq n$ (και άρα $\mu_i \leq n$ για κάθε i). Τότε:

i) $\Lambda^{\mu_1} E \otimes \dots \otimes \Lambda^{\mu_t} E \in M_K(n, r)$.

ii) $\Phi_{\Lambda^{\mu_1} E \otimes \dots \otimes \Lambda^{\mu_t} E} = e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_t}$, όπου $e_{\mu_i} = m_{(\underbrace{1, \dots, 1}_{\mu_i}, 0, \dots, 0)}$.

Απόδειξη.

Το i) έπεται από Πρόταση 3.3.3, ενώ το ii) από Πρόταση 3.4.1 iv) και Παράδειγμα 3.4.1.

□

Υπενθύμιση 3.4.1. (Από την μεταθετική άλγεβρα)

i) Συμβολίζουμε με $Sym(n, r)$ το $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπο του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ που αποτελείται από τα συμμετρικά πολυώνυμα ομογενή βαθμού r .

ii) Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, τότε για κάθε $t \in \underline{n}$ ορίζουμε όπως πριν τα $e_t := m_{(\underbrace{1, \dots, 1}_t, 0, \dots, 0)}$ και θα τα λέμε στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα του $R[x_1, \dots, x_n]$. Ιδιαίτερος:

$$e_1 = m_{(1, 0, \dots, 0)} = x_1 + \dots + x_n$$

$$e_2 = m_{(1, 1, 0, \dots, 0)} = x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n =$$

$$\vdots$$

$$e_n = m_{(1, \dots, 1)} = x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

$$\text{Γενικά, } e_t = \sum_{i_1 < \dots < i_t} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_t}, \text{ όπου τα } i_1, \dots, i_t \text{ διατρέχουν το } \underline{n} \text{ ώστε } i_1 < \dots < i_t.$$

iii) (Θεμελιώδες Θεώρημα συμμετρικών πολυωνύμων). Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα 1_R , τότε κάθε συμμετρικό πολυώνυμο στον $R[x_1, \dots, x_n]$ είναι πολυώνυμο των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων. (Δηλαδή αν $f(x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$, τότε υπάρχει $g(x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$ ώστε $g(e_1, \dots, e_n) = f(x_1, \dots, x_n)$). (Βλέπε [12, σελ. 14-16]).

Θεώρημα 3.4.1. Έστω E K -διανυσματικός χώρος διάστασης n και $r \geq 0$. Τότε:

i) $Sym(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\Phi_{\Lambda^{\mu_1} E \otimes \dots \otimes \Lambda^{\mu_t} E} \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t) \text{ partition του } r \text{ με } \mu_1 \leq n\}$.

ii) $Sym(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\Phi_V \mid V \in M_K(n, r)\}$.

Λήμμα 3.4.1. Έστω $1 \leq r \leq n$, τότε $Sym(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_t} \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t) \text{ partition του } r \text{ με } \mu_1 \leq n\}$

Απόδειξη.

Καταρχάς $\{e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_t} \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t) \text{ partition του } r \text{ με } \mu_1 \leq n\} \subseteq Sym(n, r)$ (αφού γινόμενο συμμετρικών πολυωνύμων είναι άμεσα συμμετρικό και το $e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_t}$ είναι ομογενές βαθμού $\sum_{i=1}^t \mu_i = r$, ως γινόμενο ομογενών πολυωνύμων βαθμών $\mu_1, \dots, \mu_t$ αντίστοιχα). Άρα έπεται ο εγκλεισμός " $\subseteq$ ". Ανάποδα, αν $f(x_1, \dots, x_n) \in Sym(n, r)$ τότε από Υπενθύμιση 3.4.1 υπάρχει $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, με $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n}^{\lambda_1, \dots, \lambda_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$, $n_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{Z}$ και $g(e_1, \dots, e_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. Δηλαδή,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n}^{\lambda_1, \dots, \lambda_n} n_{i_1, \dots, i_n} e_1^{i_1} \cdot \dots \cdot e_n^{i_n} = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \underline{\lambda_1} \times \dots \times \underline{\lambda_n}} n_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{e_1 \cdot \dots \cdot e_1}_{i_1} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_n \cdot \dots \cdot e_n}_{i_n}.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\underline{\lambda_1} \times \dots \times \underline{\lambda_n} = \bigsqcup_{s=1}^{\lambda_1 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot n} A_s$, όπου $A_s := \{(i_1, \dots, i_n) \in \underline{\lambda_1} \times \dots \times \underline{\lambda_n} \mid \underbrace{1 + \dots + 1}_{i_1} + \dots + \underbrace{n + \dots + n}_{i_n} = s\}$. Ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " και η ξένη ένωση είναι άμεσα, μένει να δειχθεί ο εγκλεισμός " $\subseteq$ ", πράγματι αν $x = (i_1, \dots, i_n) \in \underline{\lambda_1} \times \dots \times \underline{\lambda_n}$, τότε $i_1 \cdot 1 + \dots + i_n \cdot n \leq \lambda_1 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot n$, οπότε έχει νόημα να πούμε $x \in A_{i_1 \cdot 1 + \dots + i_n \cdot n}$ και έπεται το ζητούμενο. Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{s=1}^{\lambda_1 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot n} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in A_s} n_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{e_1 \cdot \dots \cdot e_1}_{i_1} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_n \cdot \dots \cdot e_n}_{i_n}.$$

Όμως κάθε πολυώνυμο $f_s(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in A_s} n_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{e_1 \cdot \dots \cdot e_1}_{i_1} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_n \cdot \dots \cdot e_n}_{i_n}$, όπου $(i_1, \dots, i_n) \in A_s$,

είναι ομογενές βαθμού s και το $f(x_1, \dots, x_n)$ είναι ομογενές βαθμού r , άρα $f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$ για κάθε $s \neq r$ (αυτό γιατί το $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι graded $\mathbb{Z}$ -άλγεβρα από την οικογένεια $\{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ όπου $B_n = \{g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \mid g \text{ ομογενές βαθμού } m\}$).

Τελικά $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in A_r} n_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{e_1 \cdot \dots \cdot e_1}_{i_1} \dots \underbrace{e_n \cdot \dots \cdot e_n}_{i_n}$ και το $(\underbrace{n, \dots, n}_{i_n}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{i_1})$ είναι partition του r , συνεπώς $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{span}_{\mathbb{Z}}\{e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_t} \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t) \text{ partition του } r \text{ με } \mu_1 \leq n\}$.

□

Απόδειξη. (Θεωρήματος)

Το $i)$ είναι άμεσο από Πρόγραμμα 3.4.1 και Λήμμα 3.4.1. Ενώ το $ii)$ είναι άμεσο από $i)$.

□

Σχόλιο. Το σύνολο γεννητόρων $\{\Phi_V \mid V \in M_K(n, r)\}$ του $\text{Sym}(n, r)$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του άπειρου σώματος K . Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την έννοια του φυσικού χαρακτήρα φ_V (natural character) και την σύγκρισή του με τον formal character Φ_V .

Ορισμός 3.4.4. Έστω $(V, \rho) \in M_K(n, r)$ (όπου $\rho : K\Gamma \longrightarrow \text{End}_K(V)$ η επαγόμενη αναπαράσταση), τότε ορίζουμε τον natural character $\varphi_V : \Gamma \longrightarrow K$, $\varphi_V(g) = \text{Trace}(\rho(g))$ (εν' συντομία $\text{tr}(\rho(g))$).

Σχόλιο. $i)$ Όταν λέμε $\text{Trace}(\rho(g))$ θα εννοούμε το trace του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $\rho(g) : V \longrightarrow V$ ως προς οποιαδήποτε K -βάση του V .

$ii)$ Η τιμή του $\text{Trace}(\rho(g))$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής της βάσης του V , καθώς όλοι αυτοί οι πίνακες της $\rho(g)$ ως προς τις διάφορες βάσεις, είναι όμοιοι και ξέρουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο trace (όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο trace άμεσα εξ' ορισμού της ομοιότητας και από την ιδιότητα $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$).

Παρατήρηση 3.4.4. Έστω $(V, \rho) \in M_K(n, r)$ και $\{v_a\}_{a \in B}$ μία K -βάση του V με αναλλοίωτο πίνακα $R = (r_{ab})$. Τότε:

$i)$ $\varphi_V(g) = \text{tr} R(g)$.

$ii)$ $\varphi_V = \sum_{a \in B} r_{aa} \in A_K(n, r)$.

Απόδειξη.

$i)$ Εξ' ορισμού της φ_V , αν $(\rho(g) : B, B)$ ο πίνακας της $\rho(g)$ ως προς την βάση $\{v_a\}_{a \in B}$ του V , τότε $\varphi_V(g) = \text{tr}(\rho(g) : B, B)$. Το $(\rho(g) : B, B)$ έχει στην (i, j) -θέση το k_{ij} που προκύπτει από την σχέση $\rho(g)(v_j) = \sum_{\lambda=1}^n k_{\lambda j} e_{\lambda}$, επιπλέον $k_{ij} = r_{ij}(g)$ (αφού $\rho(g)(v_j) = g \cdot v_j$ και εξ' ορισμού των coefficient functions (Ορισμός 1.2.8)). Τελικά $(\rho(g) : B, B) = R(g)$ και έπεται το ζητούμενο.

$ii)$ Από $i)$ έχουμε ότι $\varphi_V = \sum_{a \in B} r_{aa} \in A_K(n, r)$.

□

Πρόταση 3.4.2. Έστω $V \in M_K(n, r)$, $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων και $V_L = V \otimes_K L \in M_L(n, r)$. Τότε:

i) $\Phi_V = \Phi_{V_L}$.

ii) $\varphi_{V_L}|_{\Gamma_K} = \varphi_V$, όπου $\Gamma_K = GL_n(K)$, $\Gamma_L = GL_n(L)$ με $\Gamma_K \subseteq \Gamma_L$ και $\varphi_{V_L} : \Gamma_L \rightarrow L$.

Απόδειξη.

i) Άμεσο από Πρόταση 3.3.6 iii).

ii) Έστω $(V, \rho), (V_L, \rho_L)$ με $\rho : K\Gamma_K \rightarrow \text{End}_K(V)$ και $\rho_L : L\Gamma_L \rightarrow \text{End}_L(V_L)$. Έστω $g \in \Gamma_K$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\varphi_{V_L}(g) = \varphi_V(g) \iff \text{tr} \rho_L(g) = \text{tr} \rho(g)$.

Για το λόγο αυτό έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ K -βάση του V και $\{e_1 \otimes 1_L, \dots, e_n \otimes 1_L\}$ η L -βάση του V_L (Πρόταση 3.3.5). Αν δείξουμε ότι $(\rho_L(g) : \{e_i \otimes 1_L\}_i) = (\rho_K(g) : \{e_i\}_i)$ (πίνακες γραμμικών απεικονίσεων), τότε έπεται άμεσα ότι $\varphi_{V_L}(g) = \varphi_V(g)$.

Έστω $e_L : L\Gamma_L \rightarrow S_L(n, r)$, $e_K : K\Gamma_K \rightarrow S_K(n, r)$ οι γνωστοί επιμορφισμοί αλγεβρών, τότε:

Ισχυρισμός: $e_L(g) \cdot (e_m \otimes 1_L) = (e_K(g) \cdot e_m) \otimes 1_L$.

Πράγματι, έστω $e_L(g) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^L$, όπου $l_{i,j} \in L$ (και $\mathcal{T}$ όπως Πρόταση 2.3.1, Ορισμός 2.3.2).

Τότε για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$ έχουμε $e_L(g)(c_{p,q}^L) = l_{p,q} \iff c_{p,q}^L(g) = l_{p,q} \iff_{g \in \Gamma_K} c_{p,q}^K(g) = l_{p,q}$, συνεπώς $l_{p,q} \in K$ για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} e_L(g) \cdot (e_m \otimes 1_L) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\xi_{i,j}^K e_m) \otimes (l_{i,j} 1_L) \stackrel{l_{i,j} \in K}{=} \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} (l_{i,j} \xi_{i,j}^K e_m) \otimes 1_L = \\ &= \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^K e_m \right) \otimes 1_L = \left(\left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^K \right) \cdot e_m \right) \otimes 1_L. \end{aligned}$$

Οπότε αν δείξουμε ότι $\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^K = e_K(g)$, τότε αποδείχθηκε ο ισχυρισμός. Πράγματι, υπεν-

θυμίζουμε ότι το $\{c_{p,q}^K\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$ είναι K -βάση του $A_K(n, r)$ και $e_K(g)(c_{p,q}^K) = c_{p,q}^K(g) = c_{p,q}^L(g) \stackrel{\text{πριν}}{=} l_{p,q} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^K(c_{p,q}^K)$, για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}$, άρα $e_K(g) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^K$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Συνεπώς $\rho_L(g)(e_m \otimes 1_L) = g \cdot (e_m \otimes 1_L) = e_L(g) \cdot (e_m \otimes 1_L) \stackrel{\text{ισχ}}{=} (e_K(g) \cdot e_m) \otimes 1_L = (g \cdot e_m) \otimes 1_L = (\rho_K(g)(e_m)) \otimes 1_L$. Δηλαδή $\rho_L(g)(e_m \otimes 1_L) = (\rho_K(g)(e_m)) \otimes 1_L$, οπότε αν $\rho_K(g)(e_m) = g \cdot e_m = \sum_{i=1}^n r_{im}(g)e_i$, όπου $r_{im}(g) \in K$, τότε $\rho_L(g)(e_m \otimes 1_L) = \sum_{i=1}^n r_{im}(g)(e_i \otimes 1_L)$, για κάθε $m = 1, \dots, n$. Από το τελευταίο έπεται ότι $(\rho_L(g) : \{e_i \otimes 1_L\}_i) = (\rho_K(g) : \{e_i\}_i) \iff \varphi_{V_L}(g) = \varphi_V(g)$.

□

Θεώρημα 3.4.2. Έστω $(V, \rho) \in M_K(n, r)$ και $g \in GL_n(K)$, αν $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ είναι οι ιδιοτιμές του g (ενδεχομένως σε κάποια επέκταση του σώματος K) τότε $\varphi_V(g) = \Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

Λήμμα 3.4.2. *i) Υπάρχουν μη μηδενικά πολυώνυμα $f_{11}(x), \dots, f_{nn}(x) \in K[x]$ ώστε για άπειρα $k \in K$ ο πίνακας $g_k = (f_{ij}(k))_{i,j}$ να είναι διαγωνοποιήσιμος και αντιστρέψιμος.*

ii) Έστω $D := \{g \in \Gamma \mid g = \text{διαγωνοποιήσιμος}\}$. Αν $f, h \in A_K(n)$ με $f|_D = h|_D$, τότε $f = h$.

Απόδειξη.

i) Πριν ξεκινήσουμε θα μας χρειαστεί η εξής παρατήρηση:

Αν $0 < a_1 < \dots < a_n$, $0 < b_1 < \dots < b_n$ είναι δύο ακολουθίες φυσικών αριθμών, τότε το

$$\text{πολυώνυμο } f(x) = \det(g_x) \text{ είναι μη-μηδενικό, όπου } g_x = \begin{pmatrix} (x^{a_1})^{b_1} & (x^{a_1})^{b_2} & \dots & (x^{a_1})^{b_n} \\ (x^{a_2})^{b_1} & (x^{a_2})^{b_2} & \dots & (x^{a_2})^{b_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x^{a_n})^{b_1} & (x^{a_n})^{b_2} & \dots & (x^{a_n})^{b_n} \end{pmatrix}.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \prod_{i=1}^n (g_x)_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \prod_{i=1}^n (x^{a_i})^{b_{\sigma(i)}} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) x^{\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}} = x^{\sum_{i=1}^n a_i b_i} + \sum_{1 \neq \sigma \in S_n} s(\sigma) x^{\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}} \end{aligned}$$

Από το τελευταίο και το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^n a_i b_i > \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$ για κάθε $1 \neq \sigma \in S_n$ (βλέπε Λήμμα 2.1.1 - *permutation inequality*), έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ και αποδείχθηκε η παρατήρηση.

Έστω ο πίνακας $g_x = \begin{pmatrix} x & x^2 & \dots & x^n \\ x^2 & (x^2)^2 & \dots & (x^2)^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^n & (x^n)^2 & \dots & (x^n)^n \end{pmatrix}$, τότε από παρατήρηση στην αρχή έχουμε ότι

το $f(x) = \det g_x$ είναι μη-μηδενικό πολ/μο στο $K[x]$, οπότε έχει πεπερασμένες το πλήθος ρίζες. Επιπλέον $|K| = \infty$, άρα $f(k) = \det g_k \neq 0$ για άπειρα $k \in K$, ισοδύναμα $g_k \in \Gamma$ για άπειρα το πλήθος $k \in K$. Έστω $A = \{k \in K \mid g_k \in \Gamma\}$, τότε $|A| = \infty$.

Ξέρουμε (από γραμμική άλγεβρα) ότι $g_k^{-1} = \frac{1}{\det g_k} \text{adj}(g_k)$, όπου ο $\text{adj}(g_k)$ έχει στην (i, j) -θέση το στοιχείο $(-1)^{i+j} \det(g_k)_{ji}$ (όπου $(g_k)_{ji}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον g_k την j -γραμμή και i -στήλη).

Έστω $\lambda \in \mathbb{Z}$ με $\lambda > M + n$, όπου $M = \max_{i,j} \deg(g_x)_{ij}$ και θεωρούμε τον πίνακα $h_k = \text{diag}(k, k^2, \dots, k^{n-1}, k^\lambda)$ για κάθε $k \in B := A \setminus 0_K$. Τότε ο πίνακας $g_k h_k g_k^{-1}$ είναι άμεσα αντιστρέψιμος και διαγωνοποιήσιμος για κάθε $k \in B$, ιδιαιτέρως $|B| = \infty$. Συνεπώς, ο πίνακας

$$D_k = (\det g_k) \cdot g_k h_k g_k^{-1} = g_k \cdot \text{diag}(k, k^2, \dots, k^{n-1}, k^\lambda) \cdot \text{adj}(g_k)$$

είναι άμεσα αντιστρέψιμος και διαγωνοποιήσιμος, για κάθε $k \in B$ (όπου $|B| = \infty$).

Ισχυρισμός: Ο D_k έχει σε κάθε (i, j) -θέση, στοιχείο της μορφής $f_{ij}(k)$, όπου $0 \neq f_{ij}(x) \in K[x]$.

Πράγματι, θα υπολογίσουμε το γινόμενο $D_k = g_k \cdot \text{diag}(k, k^2, \dots, k^{n-1}, k^\lambda) \cdot \text{adj}(g_k)$. Καταρχάς, άμεσα έχουμε:

$$\text{diag}(k, k^2, \dots, k^{n-1}, k^\lambda) \cdot \text{adj}(g_k) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}k \cdot \det(g_k)_{11} & \dots & (-1)^{1+n}k \cdot \det(g_k)_{n1} \\ (-1)^{2+1}k^2 \cdot \det(g_k)_{12} & \dots & (-1)^{2+n}k^2 \cdot \det(g_k)_{n2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}k^\lambda \cdot \det(g_k)_{1n} & \dots & (-1)^{n+n}k^\lambda \cdot \det(g_k)_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Οπότε } D_k = \begin{pmatrix} k & \dots & k^n \\ k^2 & \dots & (k^2)^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k^n & \dots & (k^n)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}k \cdot \det(g_k)_{11} & \dots & (-1)^{1+n}k \cdot \det(g_k)_{n1} \\ (-1)^{2+1}k^2 \cdot \det(g_k)_{12} & \dots & (-1)^{2+n}k^2 \cdot \det(g_k)_{n2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}k^\lambda \cdot \det(g_k)_{1n} & \dots & (-1)^{n+n}k^\lambda \cdot \det(g_k)_{nn} \end{pmatrix}.$$

Αν ονομάσουμε τους πίνακες του γινομένου πάνω με $(a_{ij})_{i,j}$, $(b_{ij})_{i,j}$ αντίστοιχα, τότε ο D_k έχει στην (i, j) -θέση το στοιχείο:

$$\sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} = (k^i)^n (-1)^{n+j} k^\lambda \det(g_k)_{jn} + \sum_{s=1}^{n-1} (k^i)^s (-1)^{s+j} k^s \det(g_k)_{js} =$$

$$(-1)^{n+j} k^{in+\lambda} \det(g_k)_{jn} + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+j} k^{is+s} \det(g_k)_{js}$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $f_{ij}(x) = (-1)^{n+j} x^{in+\lambda} \det(g_x)_{jn} + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+j} x^{is+s} \det(g_x)_{js}$, όπου $f_{ij}(k) = (D_k)_{ij}$. Αν δείξουμε ότι $f_{ij}(x) \neq 0$ τότε τελειώσαμε. Πράγματι, εξ' ορισμού του πίνακα g_x έχουμε ότι ο πίνακας $(g_x)_{jn}$ είναι της μορφής που προϋποθέτει η παρατήρηση που κάναμε στην αρχή της απόδειξης, άρα $0 \neq \det(g_x)_{jn} \in K[x]$ και συνεπώς $0 \neq (-1)^{n+j} x^{in+\lambda} \det(g_x)_{jn} \in K[x]$. Επιπλέον, από την υπόθεση $\lambda > M + n$, για κάθε $s = 1, \dots, n-1$ έχουμε:

$$\deg((-1)^{n+j} x^{in+\lambda} \det(g_x)_{jn}) = \deg(x^{in+\lambda} \det(g_x)_{jn}) > \deg(x^{in+M+n} \det(g_x)_{jn}) =$$

$$\deg(x^{in+n}) + \deg(x^M \det(g_x)_{jn}) > \deg((-1)^{s+j} x^{is+s}) + \deg(\det(g_x)_{js}) = \deg((-1)^{s+j} x^{is+s} \det(g_x)_{js})$$

Συνεπώς $\deg((-1)^{n+j} x^{in+\lambda} \det(g_x)_{jn}) > \deg((-1)^{s+j} x^{is+s} \det(g_x)_{js})$ για κάθε $s = 1, \dots, n-1$, άρα $f_{ij}(x) \neq 0$.

- ii) Αρκεί να δείξουμε ότι: Αν $\phi \in A_K(n)$ και $\phi(g) = 0$ για κάθε $g \in D$, τότε $\phi = 0$. Αν δείξουμε αυτό, τότε η γενική περίπτωση έπεται άμεσα θεωρώντας την $\phi = f - h \in A_K(n)$ και εφαρμόζοντας την ειδική περίπτωση. Έστω λοιπόν $\phi \in A_K(n)$ με $\phi|_D = 0$, τότε υπάρχει $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} x_{11}^{i_{11}} \cdot \dots \cdot x_{nn}^{i_{nn}} \in K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$, (όπου $i_{\mu\nu} = 0, \dots, m_{\mu\nu}$) ώστε $\phi = f(c_{11}, \dots, c_{nn})$. Αν δείξουμε ότι $k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} = 0$, τότε $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = 0$. Από i) υπάρχουν μη-μηδενικά $f_{11}(x), \dots, f_{nn}(x) \in K[x]$ ώστε για άπειρα $k \in K$ ο πίνακας $g_k = (f_{ij}(k))_{i,j}$

να είναι διαγωνοποιήσιμος και αντιστρέψιμος. Συνεπώς από υπόθεση πρέπει $\phi(g_k) = 0$ για άπειρα $k \in K$, άρα:

$$0 = \sum_{i_{11}, \dots, i_{nn}} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} c_{11}(g_k)^{i_{11}} \cdot \dots \cdot c_{nn}(g_k)^{i_{nn}} = \\ k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} f_{11}(k)^{m_{11}} \cdot \dots \cdot f_{nn}(k)^{m_{nn}} + \sum_{(i_{11}, \dots, i_{nn}) \neq (m_{11}, \dots, m_{nn})} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} f_{11}(k)^{i_{11}} \cdot \dots \cdot f_{nn}(k)^{i_{nn}}$$

Οπότε το πολυώνυμο:

$$f(x) := k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} f_{11}(x)^{m_{11}} \cdot \dots \cdot f_{nn}(x)^{m_{nn}} + \sum_{(i_{11}, \dots, i_{nn}) \neq (m_{11}, \dots, m_{nn})} k_{i_{11}, \dots, i_{nn}} f_{11}(x)^{i_{11}} \cdot \dots \cdot f_{nn}(x)^{i_{nn}}$$

έχει άπειρες ρίζες στο K και άρα είναι μηδενικό. Συνεπώς αν $r :=$ μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $f(x)$, τότε $r = 0$. Ας υπολογίσουμε το r : Πράγματι, έστω r_{ij} ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $f_{ij}(x)$, τότε $r_{ij} \neq 0$ για κάθε i, j (αφού $f_{ij}(x) \neq 0$) οπότε άμεσα βλέπουμε ότι

$$r = k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} r_{11}^{m_{11}} \cdot \dots \cdot r_{nn}^{m_{nn}} \text{ και άρα πρέπει } k_{m_{11}, \dots, m_{nn}} = 0.$$

□

Σχόλιο. Όλη η ιδέα της απόδειξης του ii) του λήμματος κρύβεται στο σημείο όπου εξασφαλίσαμε ότι $f_{ij}(x) \neq 0$ ($\iff r_{ij} \neq 0$) για κάθε i, j . Αν δεν ίσχυε αυτό τότε δεν θα είχαμε κατ' ανάγκη μεγιστοβάθμιο συντελεστή του $f(x)$ που να περιέχει το $k_{m_{11}, \dots, m_{nn}}$. Το ii) του λήμματος δεν ισχύει φυσικά γενικά στο K^Γ .

Απόδειξη. (Θεωρήματος).

Έστω $K \subseteq L$ μία επέκταση σωμάτων με $L =$ αλγεβρικά κλειστό (δηλαδή κάθε πολυώνυμο πάνω από το L έχει όλες του τις ρίζες στο L), ξέρουμε ότι υπάρχει πάντα. Ο λόγος που θεωρούμε την επέκταση είναι επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $g \in \Gamma_K$ μπορεί να μην έχει όλες του τις ρίζες (ισοδύναμα τις ιδιοτιμές του g) στο K . Αν δείξουμε ότι $\varphi_{V_L}(g) = \Phi_{V_L}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ τότε τελειώσαμε, καθώς από Πρόταση 3.4.2 έχουμε ότι $\Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \Phi_{V_L}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \varphi_{V_L}(g) = \varphi_{V_L}|_{\Gamma_K}(g) = \varphi_V(g)$. Με βάση τα προαναφερθέντα, μπορούμε να θεωρήσουμε χ.β.γ ότι $K =$ αλγεβρικά κλειστό.

Θα χωρίσουμε την απόδειξη στα εξής τρία βήματα:

- i) Έστω $C = (c_{\mu\nu})$ τότε $\det(xI_n - C) = x^n - f_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n$, όπου $f_r \in A_K(n, r)$ και $f_r(g) = e_r(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ για κάθε $r = 1, \dots, n$.
- ii) $\varphi_V(g) = \Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ για κάθε $g \in \Gamma_K$ με $g =$ διαγωνοποιήσιμος.
- iii) $\varphi_V(g) = \Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ για κάθε $g \in \Gamma_K$.

Απόδειξη του i):

$$\det(xI_n - C) = \sum_{s \in S_n} \operatorname{sgn}(s) \prod_{i=1}^n (xI_n - C)_{is(i)} = \prod_{i=1}^n (x - c_{ii}) + \sum_{1 \neq s \in S_n} \operatorname{sgn}(s) \prod_{i=1}^n (xI_n - C)_{is(i)} =$$

$$\prod_{i=1}^n (x - c_{ii}) + \sum_{1 \neq s \in S_n} \operatorname{sgn}(s) \left(\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \operatorname{Fix}s} c_{is(i)} \right), \text{ όπου } \operatorname{Fix}s = \{i \in \underline{n} \mid s(i) = i\}.$$

Τώρα, επαγωγικά μπορεί ναδειχθεί ότι $\prod_{i=1}^n (x - c_{ii}) = x^n - g_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} g_{n-1} x + (-1)^n g_n$, όπου $g_r \in A_K(n, r)$ (θα γίνει στο τέλος). Επίσης θέτουμε $|\operatorname{Fix}s| = n_s \leq n$ και για κάθε $1 \neq s \in S_n$ έχουμε (θα γίνει στο τέλος) ότι $\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) = x^{n_s} - h_1 x^{n_s-1} + \dots + (-1)^{n_s-1} h_{n_s-1} x + (-1)^{n_s} h_{n_s}$, όπου $h_r \in A_K(n, r)$ για κάθε $r = 1, \dots, n_s$. Επομένως, θέτοντας $f_s = \prod_{i \notin \operatorname{Fix}s} c_{is(i)} \in A_K(n, n - n_s)$, έχουμε ότι:

$$\operatorname{sgn}(s) \left(\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \operatorname{Fix}s} c_{is(i)} \right) = (-1)^{n-n_s} \left(\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) \right) \cdot f_s =$$

$$(-1)^{n-n_s} f_s x^{n_s} + (-1)^{n-(n_s-1)} f_s h_1 x^{n_s-1} + \dots + (-1)^{n-1} f_s h_{n_s-1} x + (-1)^n f_s h_{n_s}$$

όπου $f_s \in A_K(n, n_s)$, $f_s h_1 \in A_K(n, n - (n_s - 1))$, ..., $f_s h_{n_s} \in A_K(n, n)$.

Με λίγα λόγια το γινόμενο $\operatorname{sgn}(s) \left(\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \operatorname{Fix}s} c_{is(i)} \right)$ είναι ένα πολυώνυμο της μορφής $(-1)^{n-k} z_{n-k} x^k + (-1)^{n-(k-1)} z_{n-(k-1)} x^{k-1} + \dots + (-1)^{n-1} z_{n-1} x + (-1)^n z_n$, όπου $z_r \in A_K(n, r)$, τότε όμως βγάζοντας κοινούς παράγοντες από τον $n - k$ όρο και μετά του πολυωνύμου $\prod_{i=1}^n (x - c_{ii})$ (δηλαδή τον $(-1)^{n-k} g_{n-k} x^k$) έχουμε ότι το πολυώνυμο $\prod_{i=1}^n (x - c_{ii}) + \operatorname{sgn}(s) \left(\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \operatorname{Fix}s} c_{is(i)} \right)$ είναι της μορφής που ζητάει η εκφώνηση, κάνοντας το αυτό για κάθε $1 \neq s \in S_n$ έχουμε ότι το πολυώνυμο $\det(xI_n - C) = \prod_{i=1}^n (x - c_{ii}) + \sum_{1 \neq s \in S_n} \operatorname{sgn}(s) \left(\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii}) \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \operatorname{Fix}s} c_{is(i)} \right)$ είναι της μορφής που ζητάει η εκφώνηση.

Μένει να δειχθεί γιατί παίρνουν τις μορφές που είδαμε πιο πάνω, τα πολ/μα $\prod_{i=1}^n (x - c_{ii})$, $\prod_{i \in \operatorname{Fix}s} (x - c_{ii})$.

Εμείς θα δείξουμε το εξής γενικότερο:

$$\text{Έστω } \{b_i\}_{i=1}^m \subseteq A_K(n, 1) \text{ τότε } \prod_{i=1}^m (x - b_i) = x^m - g_1 x^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1} g_{m-1} x + (-1)^m g_m,$$

όπου $g_r \in A_K(n, r)$.

Πράγματι, για $m = 2$ έχουμε ότι $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + (-1)^2 b_1 b_2$, όπου $b_1 + b_2 \in A_K(n, 1)$, $b_1 b_2 \in A_K(n, 2)$. Έστω $m \geq 2$, τότε:

$$\prod_{i=1}^m (x - b_i) = (x - b_m) \prod_{i=1}^{m-1} (x - b_i) \stackrel{\text{επαγωγή}}{=} (x - b_m)(x^{m-1} - g_1 x^{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} g_{m-1}) =$$

$$(x^m - g_1 x^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1} g_{m-1} x) + (-b_m x^{m-1} + (-1)^2 b_m g_1 x^{m-2} + \dots + (-1)^m g_{m-1} b_m) =$$

$$x^m - \underbrace{(b_m + g_1)}_{\in A_K(n, 1)} x^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1} \underbrace{(g_{m-1} + g_{m-2} b_m)}_{\in A_K(n, m-1)} x + (-1)^m \underbrace{g_{m-1} b_m}_{\in A_K(n, m)}.$$

Τέλος πρέπει να δείξουμε ότι $f_r(g) = e_r(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Για να μην υπάρχει σύγχυση θα συμβολίζουμε το στοιχείο $e_r \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ με $e_r = e_r^n$ (δηλαδή υπάρχει διάκριση ως προς τις μεταβλητές). Τώρα, εξ' ορισμού των ιδιοτιμών, έχουμε ότι $\det(xI_n - C(g)) = \det(xI_n - g) = \prod_{i=1}^n (x - \zeta_i)$, και με επαγωγή στο n θα δείξουμε ότι $\prod_{i=1}^n (x - \zeta_i) = x^n - e_1^n(\zeta_1, \dots, \zeta_n)x^{n-1} + \dots + (-1)^n e_n^n(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, πράγμα που εξάγει άμεσα την σχέση $f_r(g) = e_r(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ για κάθε $r = 1, \dots, n$. Πράγματι, για $n = 2$ έχουμε ότι:

$$\det(xI_2 - C(g)) = (x - \zeta_1)(x - \zeta_2) = x^2 - (\zeta_1 + \zeta_2)x + (-1)^2 \zeta_1 \zeta_2 = x^2 - e_1^2(\zeta_1, \zeta_2)x + (-1)^2 e_2^2(\zeta_1, \zeta_2).$$

Έστω $n \geq 2$ τότε $\prod_{i=1}^{n-1} (x - \zeta_i) = x^{n-1} - e_1^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} e_{n-1}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$. Τότε, παρόμοια με αυτό που δείξαμε πιο πάνω για το $\prod_{i=1}^m (x - b_i)$ (με ζ_n αντί b_m και $e_i^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ αντί g_i), κάνοντας πράξεις έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (x - \zeta_i) &= (x - \zeta_n) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \zeta_i) = x^n - (\zeta_n + e_1^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}))x^{n-1} + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} (e_{n-1}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) + e_{n-2}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\zeta_n)x + (-1)^n e_{n-1}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\zeta_n \end{aligned}$$

Όμως ως παρατηρήσουμε ότι :

$$\begin{aligned} e_1^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) + \zeta_n &= e_1^n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ e_2^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) + \zeta_n e_1^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) &= e_2^n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ &\vdots \\ e_{n-1}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) + e_{n-2}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\zeta_n &= e_{n-1}^n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ e_{n-1}^{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\zeta_n &= e_n^n(\zeta_1, \dots, \zeta_n). \end{aligned}$$

Απόδειξη του ii):

Έστω $g \in \Gamma_K$ με $g = \text{διαγωνοποιήσιμος}$, τότε υπάρχει $z \in \Gamma_K$ ώστε $zgz^{-1} = \text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Επιπλέον αν B μία K -βάση του V , τότε $\varphi_V(g) = \varphi_V(zgz^{-1})$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \varphi_V(zgz^{-1}) &= \text{tr}(\rho(zgz^{-1}) : B) = \\ \text{tr}(\rho(z) \circ \rho(g) \circ \rho(z^{-1}) : B) &= \text{tr}((\rho(z) : B) \cdot (\rho(g) : B) \cdot (\rho(z^{-1}) : B)) \stackrel{\text{tr}(AC)=\text{tr}(CA)}{=} \\ \text{tr}((\rho(z) : B) \cdot (\rho(z^{-1}) : B) \cdot (\rho(g) : B)) &= \text{tr}((\rho(z) \circ \rho(z^{-1}) : B) \cdot (\rho(g) : B)) = \\ \text{tr}(\text{Id}_V : B) \cdot (\rho(g) : B) &= \text{tr}(I_n \cdot (\rho(g) : B)) = \varphi_V(g) \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν δείξουμε ότι $\varphi_V(zgz^{-1}) = \Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, τότε τελειώσαμε. Πράγματι, αρχικά έχουμε $\varphi_V(zgz^{-1}) = \varphi_V(\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)) = \text{tr} \rho(\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n))$. Τώρα για τον υπολογισμό του $\text{tr} \rho(\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n))$ θα διαλέξουμε κατάλληλη βάση του V . Για την ακρίβεια, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ διαλέγουμε μία K -βάση

του V^a , έστω $B_a = \{e_1^a, \dots, e_{l_a}^a\}$ και (αφού $V = \bigoplus_{a \in \Lambda(n,r)} V^a$) ξέρουμε από Υπενθύμιση 3.3.1 ότι

το $B = \bigcup_{a \in \Lambda(n,r)} B_a$ είναι K -βάση του V . Τώρα $\rho(\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n))(e_i^a) = \text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \cdot e_i^a \stackrel{e_i^a \in V^a}{=} \zeta_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \zeta_n^{a_n} e_i^a$, για κάθε $i = 1, \dots, l_a$. Συνεπώς ο πίνακας $(\rho(\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)) : B)$ έχει στην διαγώνιο το στοιχείο $\zeta_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \zeta_n^{a_n}$ $l_a = \dim_K V^a$ -φορές για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, άρα $\text{tr}(\rho(\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)) : B) = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \dim_K V^a \zeta_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \zeta_n^{a_n} = \Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

Απόδειξη του iii):

Εφόσον $\Phi_V \in \text{Sym}(n, r)$, τότε από Λήμμα 3.4.1 έχουμε ότι $\Phi_V = \sum_{\mu \in M} b_\mu e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_t}$, όπου $b_\mu \in \mathbb{Z}$ και $M = \{(\mu_1, \dots, \mu_t) \mid t \in \mathbb{N} \text{ και } \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t) = \text{partition του } r\}$. Επίσης ορίζουμε $\psi : \Gamma_K \rightarrow K$ με $\psi = \sum_{\mu \in M} (b_\mu \cdot 1_K) \cdot f_{\mu_1} \cdot \dots \cdot f_{\mu_t} \in A_K(n, r)$ και από βήμα i) έχουμε ότι $\Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \psi(g)$ για κάθε $g \in \Gamma_K$. Άρα από βήμα ii) έχουμε ότι $\varphi_V(g) = \psi(g)$ για κάθε $g \in \Gamma_K$ με $g = \text{διαγωνοποιήσιμο}$. Τέλος από Λήμμα 3.4.2 έχουμε ότι $\varphi_V(g) = \psi(g)$ για κάθε $g \in \Gamma$, οπότε $\Phi_V(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \varphi_V(g)$, για κάθε $g \in \Gamma$. □

Σχόλιο. Στη συνέχεια και μέχρι το τέλος της παραγράφου αυτής στόχος μας είναι η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4.3. Έστω $V_1, \dots, V_t \in M_K(n, r)$ μη-ισόμορφα ανά δύο *absolutely irreducible* πρότυπα με *characters* $\Phi_1, \dots, \Phi_t$ αντίστοιχα. Τότε το σύνολο $\{\Phi_1, \dots, \Phi_t\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\text{Sym}(n, r)$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, θα χρειαστούμε κάποιες υπενθυμίσεις από την μη-μεταθετική άλγεβρα. Οι υπενθυμίσεις αφορούν κυρίως την έννοια του *absolutely irreducibility* και το Θεώρημα *Frobenius-Schur*.

Υπενθύμιση 3.4.2. (Μη-μεταθετική άλγεβρα)

i) Έστω $R = K$ -άλγεβρα, $V \in \text{mod}(R)$ και $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων. Τότε έχουμε τα εξής αντικείμενα:

- Ορίζεται το K -πρότυπο $V^L := V \otimes_K L$, που γίνεται L -πρότυπο ώστε $\lambda \cdot (v \otimes l) = v \otimes \lambda l$, για κάθε $v \in V$, $\lambda, l \in L$.
- Ορίζεται το K -πρότυπο $R^L := R \otimes_K L$, που γίνεται L -άλγεβρα ώστε $\lambda \cdot (r \otimes l) = r \otimes \lambda l$ και $(r_1 \otimes l_1) \cdot (r_2 \otimes l_2) = r_1 r_2 \otimes l_1 l_2$ για κάθε $r_1, r_2 \in R$, $\lambda, l, l_1, l_2 \in L$.
- Το V^L γίνεται R^L -πρότυπο ώστε $(r \otimes \lambda) \cdot (v \otimes l) = r v \otimes \lambda l$, για κάθε $r \in R$, $v \in V$, $\lambda, l \in L$. Μάλιστα η δομή L -προτύπου που επάγει το R^L στο V^L (δηλαδή $\lambda \cdot v = (\lambda \cdot 1_{R^L}) \cdot v$, για $\lambda \in L, v \in V$) ταυτίζεται με την αρχική δομή L -προτύπου που είχε το V^L .

- ii) Αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ η K -βάση του V τότε το $\{e_1 \otimes 1_L, \dots, e_n \otimes 1_L\}$ είναι L -βάση του V^L . Ιδιαίτερώς $V^L \in \text{mod}(R^L)$.
- iii) Έστω $R = K$ -άλγεβρα και $V \in \text{mod}(R)$ με $V = \text{irreducible}$ (δηλαδή απλό R -πρότυπο). Λέμε ότι το V είναι *absolutely irreducible* αν για κάθε επέκταση σωμάτων $K \subseteq L$, το V^L είναι *irreducible* R^L -πρότυπο.

Απόδειξη.

- i) Τα δύο πρώτα είναι άμεσα από Υπενθύμιση 2.5.1. Μένει να δείξουμε το τρίτο. Πράγματι,

Έστω $s \in R^L$, $v \in V^L$ με $s = \sum_{i=1}^n r_i \otimes \lambda_i$, $v = \sum_{j=1}^m v_j \otimes l_j$ τότε ορίζουμε:

$$s \cdot v := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_i v_j \otimes \lambda_i l_j.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων του εξωτερικού πολλαπλασιασμού είναι άμεσες με πράξεις. Αυτό που έχει αξία να δούμε είναι το καλά ορισμένο. Πράγματι, έστω $\sum_{i=1}^n r_i^{(1)} \otimes \lambda_i^{(1)} = \sum_{i=1}^n r_i^{(2)} \otimes \lambda_i^{(2)} \in R^L$ και $\sum_{j=1}^m v_j^{(1)} \otimes l_j^{(1)} = \sum_{j=1}^m v_j^{(2)} \otimes l_j^{(2)} \in V^L$. Για κάθε $j = 1, \dots, m$ θεωρούμε την

$f_j : R \times L \longrightarrow V^L$, $f_j(r, \lambda) = r v_j^{(1)} \otimes \lambda l_j^{(1)}$. Η f_j είναι multilinear K -προτύπων, συνεπώς υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων $h_j : R^L \longrightarrow V^L$ με $h_j(r \otimes \lambda) = r v_j^{(1)} \otimes \lambda l_j^{(1)}$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} h_j\left(\sum_i r_i^{(1)} \otimes \lambda_i^{(1)}\right) &= h_j\left(\sum_i r_i^{(2)} \otimes \lambda_i^{(2)}\right) \quad \forall j \iff \\ \sum_i r_i^{(1)} v_j^{(1)} \otimes \lambda_i^{(1)} l_j^{(1)} &= \sum_i r_i^{(2)} v_j^{(1)} \otimes \lambda_i^{(2)} l_j^{(1)} \quad \forall j \implies \\ \sum_j \sum_i r_i^{(1)} v_j^{(1)} \otimes \lambda_i^{(1)} l_j^{(1)} &= \sum_j \sum_i r_i^{(2)} v_j^{(1)} \otimes \lambda_i^{(2)} l_j^{(1)} \quad (*). \end{aligned}$$

Παρόμοια για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζεται ομομορφισμός K -προτύπων έστω $g_i : V^L \longrightarrow R^L$ με $g_i(v \otimes l) = r_i^{(2)} v \otimes \lambda_i^{(2)} l$ και συνεπώς:

$$\begin{aligned} g_i\left(\sum_j v_j^{(1)} \otimes l_j^{(1)}\right) &= g_i\left(\sum_j v_j^{(2)} \otimes l_j^{(2)}\right) \quad \forall i \iff \\ \sum_j r_i^{(2)} v_j^{(1)} \otimes \lambda_i^{(2)} l_j^{(1)} &= \sum_j r_i^{(2)} v_j^{(2)} \otimes \lambda_i^{(2)} l_j^{(2)} \quad \forall i \implies \\ \sum_i \sum_j r_i^{(2)} v_j^{(1)} \otimes \lambda_i^{(2)} l_j^{(1)} &= \sum_i \sum_j r_i^{(2)} v_j^{(2)} \otimes \lambda_i^{(2)} l_j^{(2)} \quad (**). \end{aligned}$$

Από (*), (**) έπεται το καλά ορισμένο. Όσο για το δεύτερο σκέλος, αν $\lambda \in L$ και $v = \sum_i v_i \otimes l_i \in V^L$, τότε $(\lambda \cdot 1_{R^L}) \cdot v = (1_R \otimes \lambda) \cdot (\sum_i v_i \otimes l_i) = \sum_i 1_R v_i \otimes \lambda l_i = \sum_i v_i \otimes \lambda l_i = \lambda v$.

ii) Είναι άμεσο από Υπενθύμιση 3.3.2.

□

Λήμμα 3.4.3. Έστω $R = K$ -άλγεβρα, $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων και V, W R -πρότυπα με $\dim_K V < \infty$ (δηλαδή $V \in \text{mod}(R)$). Τότε υπάρχει ισομορφισμός L -προτύπων :

$$\Theta : \text{Hom}_R(V, W) \otimes_K L \longrightarrow \text{Hom}_{R^L}(V^L, W^L).$$

όπου $\Theta(f \otimes \lambda)(v \otimes l) = f(v) \otimes \lambda l$, για κάθε $v \in V$, $\lambda, l \in L$, $f \in \text{Hom}_R(V, W)$.

Απόδειξη. (Βλέπε [21, σελ. 110, (7.4) Lemma] ή [4, σελ. 200, (29.5)])

Έστω $\{a_i \mid i \in I\}$ K -βάση του L και $\{e_1, \dots, e_n\}$ K -βάση του V . Για κάθε $(f, \lambda) \in \text{Hom}_R(V, W) \times L$, θεωρούμε την $\phi_{f, \lambda} : V \times L \longrightarrow W^L$ με $\phi_{f, \lambda}(v, l) = f(v) \otimes l\lambda$, η ϕ είναι άμεσα multilinear K -προτύπων, άρα υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων $f_\lambda : V^L \longrightarrow W^L$ ώστε $f_\lambda(v \otimes l) = f(v) \otimes l\lambda$, για κάθε $v \in V$, $l \in L$. Μάλιστα η f_λ είναι ομομορφισμός R^L -προτύπων, πράγματι έστω $r = \sum_{i=1}^m r_i \otimes l_i \in R^L$, $v = \sum_{j=1}^t v_j \otimes \lambda_j \in V^L$ τότε:

$$\begin{aligned} f_\lambda((r_i \otimes l_i) \cdot (v_j \otimes \lambda_j)) &= f_\lambda(r_i v_j \otimes l_i \lambda_j) = f(r_i v_j) \otimes l_i \lambda_j = \\ r_i f(v_j) \otimes l_i \lambda_j &= (r_i \otimes l_i) \cdot (f(v_j) \otimes \lambda \lambda_j) = (r_i \otimes l_i) \cdot f_\lambda((v_j \otimes \lambda_j)). \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f_\lambda(r \cdot v) = \sum_i \sum_j f_\lambda((r_i \otimes l_i) \cdot (v_j \otimes \lambda_j)) = \sum_i \sum_j (r_i \otimes l_i) \cdot f_\lambda((v_j \otimes \lambda_j)) = r \cdot f(v)$. Άρα $f_\lambda \in \text{Hom}_{R^L}(V^L, W^L)$ για κάθε $(f, \lambda) \in \text{Hom}_R(V, W) \times L$. Έτσι ορίζεται:

$$h : \text{Hom}_R(V, W) \times L \longrightarrow \text{Hom}_{R^L}(V^L, W^L), (f, \lambda) \longmapsto f_\lambda$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η h είναι multilinear K -προτύπων και άρα υπάρχει ομομορφισμός K -προτύπων $\Theta : \text{Hom}_R(V, W) \otimes_K L \longrightarrow \text{Hom}_{R^L}(V^L, W^L)$ ώστε $\Theta(f \otimes \lambda) = f_\lambda$, μάλιστα η Θ είναι ομομορφισμός L -προτύπων (πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \text{Hom}_R(V, W)$, $l, \lambda \in L$ ισχύει: $\Theta(l \cdot (f \otimes \lambda)) = \Theta(f \otimes l\lambda) = l \cdot \Theta(f \otimes \lambda) \iff f_{l\lambda} = l f_\lambda$, το τελευταίο όμως ελέγχεται εύκολα κατά σημείο). Πάμε τώρα να δείξουμε ότι Θ είναι 1-1 και επί:

Θ 1-1: Έστω $x \in \text{Hom}_R(V, W) \otimes_K L$ με $\Theta(x) = 0$. Από Υπενθύμιση 2.5.2 έχουμε $x = \sum_{i \in I} g_i \otimes a_i$ όπου πεπερασμένο το πλήθος όροι είναι μη-μηδενικοί και η γραφή είναι μοναδική. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I} \Theta(g_i \otimes a_i) \implies \sum_{i \in I} \Theta(g_i \otimes a_i)(v \otimes 1_L) = 0 \quad \forall v \in V \implies \sum_{i \in I} g_i(v) \otimes a_i = 0 \quad \forall v \in V \\ &\xrightarrow{\text{Υπενθ 2.5.2}} g_i(v) = 0 \quad \forall v \in V, i \in I \implies g_i = 0 \quad \forall i \in I \implies x = 0. \end{aligned}$$

Θ επί: Έστω $f \in \text{Hom}_{R^L}(V^L, W^L)$, τότε (από Υπενθύμιση 2.5.2) $f(v \otimes 1_L) = \sum_{i \in I} g_i(v) \otimes a_i$ (*), όπου πεπερασμένο το πλήθος όροι είναι μη-μηδενικοί και η γραφή είναι μοναδική. Για κάθε $i \in I$ θεωρούμε τις απεικονίσεις $g_i : V \longrightarrow W$, $v \longmapsto g_i(v)$.

Ισχυρισμός. *i) $g_i \in \text{Hom}_R(V, W)$.*

ii) Πεπερασμένο το πλήθος g_i είναι μη-μηδενικά.

Απόδειξη (ισχυρισμού):

i) Καταρχάς, g_i είναι καλά ορισμένες από μοναδικότητα γραφής στην σχέση (). Στη συνέχεια έστω $v_1, v_2 \in V$, $r \in R$, τότε:*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} g_i(v_1 + v_2) \otimes a_i &= f((v_1 + v_2) \otimes 1_L) = f(v_1 \otimes 1_L) + f(v_2 \otimes 1_L) = \\ \sum_{i \in I} g_i(v_1) \otimes a_i + \sum_{i \in I} g_i(v_2) \otimes a_i &= \sum_{i \in I} (g_i(v_1) + g_i(v_2)) \otimes a_i \end{aligned}$$

Από το τελευταίο και μοναδικότητα γραφής στην (*) έχουμε ότι $g_i(v_1 + v_2) = g_i(v_1) + g_i(v_2)$ για κάθε $i \in I$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} g_i(rv) \otimes a_i &= f(rv \otimes 1_L) = f((r \otimes 1_L) \cdot (v \otimes 1_L)) = \\ (r \otimes 1_L) \cdot f(v \otimes 1_L) &= (r \otimes 1_L) \cdot \left(\sum_{i \in I} g_i(v) \otimes a_i \right) = \sum_{i \in I} r g_i(v) \otimes a_i \end{aligned}$$

Από το τελευταίο και μοναδικότητα γραφής στην (*) έχουμε ότι $g_i(rv) = r g_i(v)$ για κάθε $i \in I$.

ii) Για κάθε $j \in \underline{n}$ θεωρούμε το σύνολο $A_j := \{i \in I \mid g_i(e_j) \neq 0\}$. Παρατηρούμε ότι $|A_j| < \infty$ για κάθε $j \in \underline{n}$, πράγματι, $f(e_j \otimes 1_L) = \sum_{i \in I} g_i(e_j) \otimes a_i$ όπου πεπερασμένο το πλήθος όροι είναι μη-μηδενικοί, άρα $g_i(e_j) \otimes a_i \neq 0$ για πεπερασμένο το πλήθος $i \in I$, όμως για τα $i \in I$ με $g_i(e_j) \otimes a_i = 0$, πρέπει από Υπενθύμιση 2.5.2 να ισχύει $g_i(e_j) = 0$, συνεπώς $|A_j| < \infty$. Έστω τώρα το $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, τότε $|A| < \infty$ και επειδή $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι K-βάση του V , έχουμε ότι $g_i = 0 \ \forall i \notin A$.

Με βάση τώρα τον ισχυρισμό ορίζεται καλά το στοιχείο $h = \sum_{i \in I} g_i \otimes a_i$ και $\Theta(h) = f$, πράγματι αν

$x = \sum_{j=1}^m v_j \otimes l_j$, τότε:

$$\begin{aligned} \Theta(h)(v_j \otimes l_j) &= \sum_{i \in I} \Theta(g_i \otimes a_i)(v_j \otimes l_j) = \sum_{i \in I} g_i(v_j) \otimes l_j a_i = \\ l_j \left(\sum_{i \in I} g_i(v_j) \otimes a_i \right) &= l_j f(v_j \otimes 1_L) = f(v_j \otimes l_j) \end{aligned}$$

Από το τελευταίο έχουμε $\Theta(h)(x) = \sum_j \Theta(h)(v_j \otimes l_j) = \sum_j f(v_j \otimes l_j) = f(x)$. Άρα $\Theta(h) = f$.

□

Παρατήρηση 3.4.5. Μέσα από την απόδειξη του Λήμματος 3.4.3 παρατηρούμε ότι χωρίς την υπόθεση $\dim_K V < \infty$, η Θ πάλι ορίζεται και είναι μονομορφισμός L -προτύπων.

Λήμμα 3.4.4. Έστω $K \subseteq L$ επέκταση σωμάτων. Τότε

i) Υπάρχει ισομορφισμός L -αλγεβρών $\psi : S_L(n, r) \longrightarrow S_K(n, r)^L = S_K(n, r) \otimes_K L$ ώστε,

$$\psi\left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} l_{i,j} \xi_{i,j}^L\right) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} \xi_{i,j}^K \otimes l_{i,j}. \text{ Μάλιστα } \psi(\lambda \xi_{i,j}^L) = \xi_{i,j}^K \otimes \lambda \text{ για κάθε } i, j \in I(n, r), \lambda \in L.$$

ii) Έστω $V \in \text{mod}(S_K(n, r))$ τότε το $V^L = V \otimes_K L$ γίνεται $S_K(n, r)^L$ -πρότυπο και κατά συνέπεια $S_L(n, r)$ -πρότυπο με εξωτερικό πολ/μό: $s \cdot x := \psi(s) \cdot x$, για κάθε $s \in S_L(n, r)$, $x \in V^L$. Επιπλέον η δομή $S_L(n, r)$ -προτύπου που δώσαμε στο V^L ταυτίζεται με αυτή που ξέρουμε από την Παρατήρηση 3.3.2.

Απόδειξη.

i) Η ιδέα είναι ίδια με αυτή της απόδειξης της Πρότασης 2.5.1 ii).

Ξέρουμε ότι το σύνολο $\{\xi_{i,j}^L\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί L -βάση του $S_L(n, r)$. Επίσης επειδή το $\{\xi_{i,j}^K\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί K -βάση του $S_K(n, r)$, τότε (από Υπενθύμιση 3.3.2 ii)) το σύνολο $\{\xi_{i,j}^K \otimes 1_L\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί L -βάση του $S_K(n, r) \otimes_K L$. Ιδιαίτερώς $\dim_L S_L(n, r) = \dim_L (S_K(n, r) \otimes_K L) = |\mathcal{T}|$. Από τα τελευταία έχουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός L -προτύπων ώστε:

$$\phi : S_K(n, r) \otimes_K L \longrightarrow S_L(n, r), \quad \xi_{i,j}^K \otimes 1_L \longmapsto \xi_{i,j}^L, \text{ για κάθε } (i, j) \in \mathcal{T}.$$

Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και άρα L -αλγεβρών. Πράγματι,

ϕ ομομορφισμός δακτυλίων: Επειδή ϕ ομομορφισμός L -προτύπων και το $\{\xi_{i,j}^K \otimes 1_L\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ αποτελεί L -βάση του $S_K(n, r) \otimes_K L$, αρκεί να δείξουμε για κάθε $(p, q), (i, j) \in \mathcal{T}$ ότι ισχύει $\phi((\xi_{i,j}^K \otimes 1_L) \cdot (\xi_{p,q}^K \otimes 1_L)) = \phi(\xi_{i,j}^K \otimes 1_L) \cdot \phi(\xi_{p,q}^K \otimes 1_L)$. Πράγματι,

$$\phi((\xi_{i,j}^K \otimes 1_L) \cdot (\xi_{p,q}^K \otimes 1_L)) = \phi\left(\sum_{(k,l) \in \mathcal{T}} Z(i, j, p, q, k, l) \xi_{k,l}^K \otimes 1_L\right) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{T}} (Z(i, j, p, q, k, l) \cdot 1_L) \xi_{k,l}^L =$$

$$\sum_{(k,l) \in \mathcal{T}} Z(i, j, p, q, k, l) \xi_{k,l}^L = \xi_{i,j}^L \cdot \xi_{p,q}^L = \phi(\xi_{i,j}^K \otimes 1_L) \cdot \phi(\xi_{p,q}^K \otimes 1_L).$$

Συνεπώς έχουμε $\psi = \phi^{-1} : S_L(n, r) \longrightarrow S_K(n, r)^L$ ισομορφισμό L -αλγεβρών με $\psi(\xi_{i,j}^L) = \xi_{i,j}^K \otimes 1_L$, για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$. Εμείς θα δείξουμε ότι η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $i, j \in I(n, r)$. Πράγματι, έστω $(i, j) \in I(n, r) \times I(n, r)$, τότε (επειδή $\mathcal{T}$ = σύνολο αντιπροσώπων) υπάρχει (μοναδικό) $(p, q) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (p, q)$, δηλαδή $\xi_{i,j}^L = \xi_{p,q}^L$ και $\xi_{i,j}^K = \xi_{p,q}^K$ (Παρατήρηση 2.3.1), έτσι $\psi(\xi_{i,j}^L) = \phi(\xi_{p,q}^L) \xrightarrow{(p,q) \in \mathcal{T}} \xi_{p,q}^K \otimes 1_L = \xi_{i,j}^K \otimes 1_L$. Άρα $\psi(\lambda \xi_{i,j}^L) = \lambda \psi(\xi_{i,j}^L) = \xi_{i,j}^K \otimes \lambda$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$, $\lambda \in L$.

ii) Το δεύτερο σκέλος έπεται άμεσα με πράξεις (δεδομένου του τύπου της ψ).

□

Υπενθύμιση 3.4.3. (Μη-μεταθετική άλγεβρα)

- i) Έστω $R = K$ -άλγεβρα, $V \in \text{mod}(R)$ και $\{e_1, \dots, e_n\}$ μία K -βάση του V , τότε ορίζονται τα *coordinate functions* $f_{ij} : R \rightarrow K$ από την σχέση $r \cdot e_j = \sum_{i=1}^n f_{ij}(r)e_i$, μάλιστα το f_{ij} είναι K -γραμμική.
- ii) Θεώρημα (Frobenious-Schur): Έστω K αλγεβρικά κλειστό σώμα, $R = K$ -άλγεβρα και $M_1, \dots, M_k$ *irreducible* R -πρότυπα, μη ισόμορφα ανά δύο με $\dim_K M_r = n_r$ (για κάθε $1 \leq r \leq k$) και αντιστοιχα *coordinate functions* τα $\{f_{ij}^{(r)}\}_{i,j}$. Τότε το σύνολο $\{f_{ij}^{(r)} \mid 1 \leq i, j \leq n_r, 1 \leq r \leq k\}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Το Θεώρημα Frobenious-Schur είναι ένα αρκετά φημισμένο αποτέλεσμα στην θεωρία αναπαραστάσεων (representation theory) και μια απόδειξη του μπορεί να βρει κανείς στο [4, σελ.183]

□

Σχόλιο. Είμαστε έτοιμοι τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.4.3 και να κλείσουμε εδώ την παράγραφο αυτή.

Απόδειξη. (Θεωρήματος 3.4.3)

Ιδέα: Θέλουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Frobenious-Schur, αλλά μας λείπει η υπόθεση του αλγεβρικού κλειστού σώματος. Για το λόγο αυτό θα περάσουμε στα πρότυπα $V_1^L, \dots, V_t^L$, όπου $K \subseteq L = \text{αλγεβρικά κλειστό}$. Αυτή η μετάβαση δεν μας πειράζει καθώς οι χαρακτήρες μένουν ίδιοι όπως είδαμε στην Πρόταση 3.4.2. Αναλυτικά έχουμε τα εξής:

Έστω $K \subseteq L = \text{αλγεβρικά κλειστό}$ (υπάρχει πάντα τέτοια επέκταση). Τότε ορίζονται τα $V_1^L, \dots, V_t^L$ και είναι *irreducible* και μη-ισόμορφα ανά δύο $S_K(n, r)^L$ -πρότυπα (*).

Πράγματι, τα $V_1^L, \dots, V_t^L$ είναι *irreducible* (αφού τα $V_1, \dots, V_t$ είναι *absolutely irreducible*). Όσο για το δεύτερο σκέλος, επειδή τα $V_1, \dots, V_t$ είναι μη-ισόμορφα *irreducible* $S_K(n, r)$ -πρότυπα (ως μη-ισόμορφα *irreducible* πρότυπα στην $M_K(n, r)$) τότε πρέπει $\text{Hom}_{S_K(n, r)}(V_i, V_j) = 0$ για κάθε $i \neq j$, συνεπώς από Λήμμα 3.4.3 πρέπει $\text{Hom}_{S_K(n, r)^L}(V_i^L, V_j^L) = 0$ για κάθε $i \neq j$, άρα άμεσα τα $V_1^L, \dots, V_t^L$ είναι μη-ισόμορφα $S_K(n, r)^L$ -πρότυπα.

Από Λήμμα 3.4.4 i) υπάρχει $\psi : S_L(n, r) \rightarrow S_K(n, r)^L$ (Ισομορφισμός L -αλγεβρών) άρα τα $V_1^L, \dots, V_t^L$ γίνονται $S_L(n, r)$ -πρότυπα με εξωτερικό πολ/μό τον εξής: $s \cdot x := \psi(s)x$, για κάθε $s \in S_L(n, r)$, $x \in V_i^L$.

Τώρα από (*) εύκολα έπεται τα $V_1^L, \dots, V_t^L$ είναι *irreducible* και μη-ισόμορφα ανά δύο $S_L(n, r)$ -πρότυπα ($\iff L\Gamma_L$ -πρότυπα, παράγραφος 2.4), με $\dim_L V_i^L < \infty$ (από Υπενθύμιση 3.4.2 ii) και γεγονός ότι

$\dim_K V_i < \infty$). Μάλιστα από Λήμμα 3.4.4 ii) το δεύτερο σκέλος μπορούμε να κάνουμε χρήση της Πρότασης 3.4.2 και να πούμε ότι $\Phi_V = \Phi_{V^L}$.

Τελικά, έχουμε L -αλγεβρικά κλειστό, $L\Gamma_L = L$ -άλγεβρα, $V_1^L, \dots, V_t^L$ μη-ισόμορφα *irreducible* $L\Gamma_L$ -πρότυπα με $\dim_L V_i^L = n_i < \infty$ για κάθε $i = 1, \dots, t$. Άρα θεώρημα των Frobenius-Schur, το σύνολο των *coordinate functions* $\{\tilde{r}_{\kappa\lambda}^{(i)} \mid 1 \leq \kappa, \lambda \leq n_i, 1 \leq i \leq t\}$ είναι L -γραμμικά ανεξάρτητο. Ας σημειωθεί ότι τα $\tilde{r}_{\kappa\lambda}^{(i)} : L\Gamma_L \rightarrow L$ είναι οι L -γραμμικές επεκτάσεις των $r_{\kappa\lambda}^{(i)} : \Gamma_L \rightarrow L$ που είναι τα *coefficient functions*. (**)

Στη συνέχεια θεωρούμε τους φυσικούς χαρακτήρες ϕ_i^L των $L\Gamma_L$ -προτύπων V_i^L και τις L -γραμμικές επεκτάσεις αυτών, έστω $\tilde{\phi}_i^L : L\Gamma_L \rightarrow L$. Από Παρατήρηση 3.4.4, έχουμε ότι $\phi_i^L = \sum_{j=1}^{n_i} r_{jj}^{(i)}$ και επομένως

$$\tilde{\phi}_i^L = \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{r}_{jj}^{(i)}.$$

Τώρα από (**) έπεται ότι το σύνολο $\{\tilde{\phi}_i^L \mid i = 1, \dots, t\}$ είναι L -γραμμικά ανεξάρτητο. (***)

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν $z_1, \dots, z_t \in \mathbb{Z}$ όχι όλα μηδέν ώστε $z_1\Phi_1 + \dots + z_t\Phi_t = 0$. Τότε, η σχέση $\Phi_V = \Phi_{V^L}$, δίνει ότι $z_1\Phi_{V_1^L} + \dots + z_t\Phi_{V_t^L} = 0$, οπότε άμεσα από Θεώρημα 3.4.2 καταλήγουμε στις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} z_1\phi_1^L(g) + \dots + z_t\phi_t^L(g) &= 0 \quad \forall g \in \Gamma_L \implies \\ z_1\tilde{\phi}_1^L(l) + \dots + z_t\tilde{\phi}_t^L(l) &= 0 \quad \forall l \in L\Gamma_L \implies \\ (z_1 \cdot 1_L)\tilde{\phi}_1^L + \dots + (z_t \cdot 1_L)\tilde{\phi}_t^L &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς από (***) πρέπει $(z_i \cdot 1_L) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, t$, πράγμα που θα δείξουμε ότι είναι αδύνατο διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς την χαρακτηριστική του σώματος L . Πράγματι,

Αν $chL = 0$: Τότε εξ' ορισμού της χαρακτηριστικής έχουμε ότι $z_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, t$, άτοπο.

Αν $chL = p > 0$: Τότε μπορούμε να πούμε χ.β.γ ότι υπάρχει i_0 ώστε $p \nmid z_{i_0}$. Πράγματι, αν $p \mid z_i$ για κάθε i , τότε υπάρχουν $z'_1, \dots, z'_t \in \mathbb{Z}$ ώστε:

$$pz'_1\Phi_1 + \dots + pz'_t\Phi_t = 0 \iff z'_1\Phi_1 + \dots + z'_t\Phi_t = 0.$$

Όπου η ισοδυναμία ισχύει επειδή το $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι περιοχή. Επαναλαμβάνοντας την διαδοχικά την ίδια διαδικασία μπορούμε να καταλήξουμε σε $z_1^*, \dots, z_t^* \in \mathbb{Z}$ ώστε να υπάρχει i_0 με $p \nmid z_{i_0}^*$ και $z_1^*\Phi_1 + \dots + z_t^*\Phi_t = 0$. Από το τελευταίο έπεται ότι $(z_1^* \cdot 1_L)\tilde{\phi}_1^L + \dots + (z_t^* \cdot 1_L)\tilde{\phi}_t^L = 0$, άρα από (***) $(z_{i_0}^* \cdot 1_L) = 0 \iff p \mid z_{i_0}^*$, άτοπο.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε άτοπο και έτσι έπεται το ζητούμενο. □

3.5 Απλά πρότυπα στην $M_K(n, r)$

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$. Επίσης παρακάτω κάθε $V \in M_K(n, r)$ το βλέπουμε και σαν $S_K(n, r)$ —πρότυπο όπως στην Παρατήρηση 2.4.3.

Στόχος της παραγράφου αυτής, είναι να μελετήσουμε τα απλά (*irreducible*) πρότυπα της $M_K(n, r)$. Γενικά, θα προσδιορίσουμε το πλήθος τους και θα εξάγουμε κάποιες πληροφορίες για τους χαρακτήρες τους. Μάλιστα, στη παράγραφο 3.7 θα αναφέρουμε ακριβώς τους χαρακτήρες όλων των απλών προτύπων για $chK = 0$. Πριν φτάσουμε στο κεντρικό θεώρημα, είναι μία καλή ευκαιρία να δούμε ένα παράδειγμα *irreducible* προτύπου. Για την εύρεση ενός τέτοιου παραδείγματος σημαντική είναι η παρακάτω παρατήρηση (που συνδέει την έννοια του *irreducible* προτύπου, με τον χαρακτήρα του).

Παρατήρηση 3.5.1. Έστω $V \in M_K(n, r)$, τότε ισχύουν τα εξής:

- i) Αν το Φ_V δεν μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα μη-τετριμμένων συμμετρικών πολυωνύμων, τότε $V = \text{irreducible}$ στην $M_K(n, r)$.
- ii) Για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, το m_λ δεν μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα μη-τετριμμένων συμμετρικών πολυωνύμων. Οπότε, αν υπάρχει $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, ώστε $\Phi_V = m_\lambda$, τότε, $V = \text{irreducible}$ στην $M_K(n, r)$.

Απόδειξη.

- i) Έστω $0 \leq W \leq V$, τότε $\Phi_V = \Phi_{V/W} + \Phi_W$, όπου τα $\Phi_{V/W}$, Φ_W είναι συμμετρικά πολυώνυμα του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Συνεπώς, από υπόθεση πρέπει $\Phi_{V/W} = 0$ ή $\Phi_W = 0$, δηλαδή $V/W = 0$ ή $W = 0$, ισοδύναμα $V = W$ ή $W = 0$. (Σημείωση: αν $V \in M_K(n, r)$, με $\Phi_V = 0$, τότε $\dim_K V^a = 0$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ και επειδή $V = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V^a$, έπεται ότι $V = 0$).
- ii) Αυτό που θέλει απόδειξη, είναι το πρώτο κομμάτι (χαραώς το δεύτερο έπεται από το i)). Καταρχάς, $m_\lambda = \sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$, όπου η γραφή αυτή είσαι σε μορφή αθροισμάτων διακεκριμένων μονώνυμων παραγόντων. Αν δείξουμε ότι, η παραπάνω γραφή δεν έχει μη-μηδενικό συμμετρικό "υπομήμα", τότε τελειώσαμε. Πράγματι, έστω m'_λ ένα γνήσιο υπομήμα του m_λ , δηλαδή, υπάρχει $\emptyset \neq A \subsetneq [\lambda]_W$, ώστε $m'_\lambda = \sum_{a \in A} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$. Τότε, υπάρχει $\sigma \in W$ και $b \in A$, ώστε $\sigma \cdot b \notin A$ (πράγματι, έστω $b \in A$, τότε πρέπει να υπάρχει $\sigma \in W$, ώστε $\sigma \cdot b \notin A$, αλλιώς, αν $\sigma \cdot b \in A$ για κάθε $\sigma \in W$, τότε $[b]_W \subseteq A \xrightarrow{b \in [\lambda]_W} [\lambda]_W \subseteq A$, άτοπο). Με βάση το τελευταίο, θα δείξουμε ότι, το m'_λ δεν είναι συμμετρικό, πράγματι,

$$\begin{aligned} m'_\lambda(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= \sum_{a \in A} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n} = \sum_{a \in A} x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_{\sigma^{-1}(n)}} = \\ &= \sum_{a \in A} x_1^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{\sigma^{-1}(n)}} = x_1^{b_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{b_{\sigma^{-1}(n)}} + \sum_{b \neq a} x_1^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{\sigma^{-1}(n)}} \end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι το μονώνυμο $x_1^{b_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{b_{\sigma^{-1}(n)}}$, δεν αποτελεί μονώνυμο παράγοντα του πολυωνύμου $m'_\lambda = \sum_{a \in A} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$. Πράγματι, αν αποτελούσε, τότε έπρεπε να υπάρχει $a \in A$, ώστε, $x_1^{b_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{b_{\sigma^{-1}(n)}} = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$, δηλαδή $b_{\sigma^{-1}(i)} = a_i \ \forall i = 1, \dots, n$, ισοδύναμα $\sigma \cdot b = a \in A$, άτοπο. Από το τελευταίο έχουμε ότι $m'_\lambda(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \neq m'_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ και έτσι το m'_λ δεν είναι συμμετρικό.

□

Παράδειγμα 3.5.1. Για κάθε $1 \leq r \leq n$, το $\Lambda^r E$ είναι *irreducible* πρότυπο της $M_K(n, r)$.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $\Phi_{\Lambda^r E} = e_r = m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}$, άρα από προηγούμενη παρατήρηση έπεται το ζητούμενο.

□

Σχόλιο. Προχωράμε τώρα στο κεντρικό θεώρημα της παραγράφου. Για το σκοπό αυτό παραθέτουμε κάποιες βασικές υπενθυμίσεις και λήμματα.

Ορισμός 3.5.1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1_R τότε:

i) Ορίζεται ολική διάταξη στα μονώνυμα πολυωνύμου του $R[x_1, \dots, x_n]$ ως εξής:

$$x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} > x_1^{b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n} \iff \text{η πρώτη μη μηδενική διαφορά } (a_i - b_i) \text{ είναι θετική.}$$

Η διάταξη αυτή θα λέγεται λεξικογραφική ή *Gaussian*. (Παράδειγμα, $x_1^2 x_2 > x_1 x_2^2 > x_1 x_2$).

Σημείωση: Παρόμοια ορίζεται η λεξικογραφική διάταξη στο $\Lambda(n, r)$.

ii) Έστω $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} r_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} \in R[x_1, \dots, x_n]$, όπου $r_{i_1, \dots, i_n} \in R$ και $i_j = 0, \dots, m_j$. Καλούμε κυρίαρχο μονώνυμο παράγοντα (ή *leading term*) του $f(x_1, \dots, x_n)$, το μεγαλύτερο (ως προς την λεξικογραφική διάταξη) μη-μηδενικό μονώνυμο $r_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$.

Σχόλιο. Προσοχή, με την λεξικογραφική διάταξη ο *leading term* ενός πολυωνύμου δεν είναι κατ' ανάγκη ο μεγιστοβάθμιος όρος του.

Λήμμα 3.5.1. Έστω $n, r \geq 1$ τότε:

i) Το σύνολο $\{m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -βάση του $Sym(n, r)$. (Όπου $m_\lambda = \sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$).

ii) $Sym(n, r) \simeq \mathbb{Z}^{|\Lambda^+(n, r)|}$ (Ισομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων).

Απόδειξη.

i) $Sym(n, r) = span_{\mathbb{Z}}\{m_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$: Ο εγχειρισμός " $\supseteq$ " είναι σαφές. Ανάποδα, έστω $f(x_1, \dots, x_n) \in Sym(n, r)$, τότε $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=r} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$, όπου $n_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{Z}$ και επιπλέον το $f(x_1, \dots, x_n)$ είναι συμμετρικό. Τώρα, αν $W = G(n)$, ξέρουμε από Πρόγραμμα 3.1.1 ότι $\Lambda(n, r) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} [\lambda]_W$, οπότε:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1+\dots+i_n=r} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} = \\ &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} \left(\sum_{a \in [\lambda]_W} n_a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \right). \quad (**) \end{aligned}$$

Ισχυρισμός: $n_c = n_b$ για κάθε $c, b \in [\lambda]_W$.

Πράγματι, αν $c, b \in [\lambda]_W$ τότε υπάρχει $\sigma \in W = G(n)$ ώστε $c = \sigma \cdot b$ και θέτουμε για συντομία $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ και $x^a = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$. Τότε :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} &\stackrel{(**)}{=} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \stackrel{(**)}{=} \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n} = \\ &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_{\sigma^{-1}(n)}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x_1^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{\sigma^{-1}(n)}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x^{\sigma \cdot a} = \\ &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_{(\sigma^{-1} \cdot \sigma) \cdot a} x^{\sigma \cdot a} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_{\sigma^{-1} \cdot a} x^a = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_{\sigma^{-1} \cdot a} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}. \end{aligned}$$

Η προτελευταία ισότητα ισχύει γιατί $\sigma \cdot \Lambda(n, r) = \Lambda(n, r)$ και $\sigma \cdot a \neq \sigma \cdot d$ για κάθε $a, d \in \Lambda(n, r)$ με $a \neq d$. Τελικά, $\sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n_{\sigma^{-1} \cdot a} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$, συνεπώς $n_a = n_{\sigma^{-1} \cdot a}$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, οπότε $n_b = n_{\sigma^{-1} \cdot c} = n_c$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τέλος από ισχυρισμό και (**) έχουμε ότι:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} n_{\lambda} \left(\sum_{a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} n_{\lambda} m_{\lambda} \in span_{\mathbb{Z}}\{m_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}.$$

$\{m_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\} = \mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητα: Έστω $\{n_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} \subseteq \mathbb{Z}$ με $\sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} n_{\lambda} m_{\lambda} = 0 \iff \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} \sum_{a \in [\lambda]_W} n_{\lambda} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = 0. \quad (*)$

Ισχυρισμός: Έστω $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda^+(n, r)$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ τότε,

- i) $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \neq x_1^{b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n}$ για κάθε $a \in [\lambda_1]_W, b \in [\lambda_2]_W$.
- ii) $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \neq x_1^{b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n}$ για κάθε $a \neq b$ με $a, b \in [\lambda]_W$.

Πράγματι, το $ii)$ είναι σαφές, όσο για το $i)$, αν είχαμε $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = x_1^{b_1} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n}$, τότε θα έπρεπε $a_i = b_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $a = b$. Συνεπώς, $[\lambda_1]_W \cap [\lambda_2]_W \neq \emptyset \iff [\lambda_1]_W = [\lambda_2]_W$, όμως $\Lambda^+(n, r) = \text{σύνολο αντιπροσώπων, άρα } \lambda_1 = \lambda_2, \text{ άτοπο.}$

Τέλος, από ισχυρισμό έχουμε ότι το άθροισμα στην $(*)$ είναι σε μορφή αθροίσματος διακεκριμένων (ως προς τις δυνάμεις) μονώνυμων παραγόντων του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, συνεπώς $n_\lambda = 0, \forall \lambda \in \Lambda^+(n, r)$.

$ii)$ Από $i)$ έχουμε $\dim_{\mathbb{Z}} \text{Sym}(n, r) = \dim_{\mathbb{Z}} |\Lambda^+(n, r)|$, άρα $\text{Sym}(n, r) \simeq \mathbb{Z}^{|\Lambda^+(n, r)|}$.

□

Λήμμα 3.5.2. (Υπενθύμιση από μη-μεταθετική άλγεβρα).

$i)$ Έστω R δακτύλιος και V ένα ελεύθερο R -πρότυπο με R -βάση την $\{e_1, \dots, e_n\}$. Τότε το σύνολο $B = \{e_1\} \cup \{e_i + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}e_j \mid i = 2, \dots, n\}$, όπου $\{r_{ij}\}_{i,j} \subseteq R$, είναι R -βάση του M .

$ii)$ Έστω $R = K$ -άλγεβρα και $0 \neq V \in \text{mod}(R)$, τότε το V περιέχει απλό R -πρότυπο.

Απόδειξη.

$i)$ Θα το κάνουμε για $n = 3$ όπου θα φανεί ξεκάθαρα ποια είναι η ιδέα για την γενική περίπτωση. Καταρχάς, $B = \{e_1, e_2 + r_{21}e_1, e_3 + (r_{31}e_1 + r_{32}e_2)\}$.

$B = R$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Έστω $\{r_i\}_{i=1}^n \subseteq R$ με $r_1e_1 + r_2(e_2 + r_{21}e_1) + r_3(e_3 + (r_{31}e_1 + r_{32}e_2)) = 0$, τότε $(r_1 + r_2r_{21} + r_3r_{31})e_1 + (r_2 + r_3r_{32})e_2 + r_3e_3 = 0$. Από το τελευταίο έχουμε ότι $r_3 = r_2 + r_3r_{32} = r_1 + r_2r_{21} + r_3r_{31} = 0$, το οποίο δίνει άμεσα $r_3 = r_2 = r_1 = 0$.

$V = \text{span}_R B$: Έστω $v \in V$, τότε υπάρχουν $r_1, r_2, r_3 \in R$ ώστε $v = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3$. Επιπλέον, $v = r_3(e_3 + (r_{31}e_1 + r_{32}e_2)) + (r_2 - r_3r_{32})(e_2 + r_{21}e_1) + (r_1 - r_3r_{31} - r_2r_{21} + r_3r_{32}r_{21})e_1$. Με λίγα λόγια η ιδέα είναι: Ξεκινώντας από τον n -όρο της βάσης B , κάθε φορά να βάζουμε κατάλληλο συντελεστή λ_i μπροστά από τον i -όρο της βάσης B , ώστε να εμφανίζεται στοιχείο της μορφής $(r_ie_i + re_i + \text{'κάτι'})$ ώστε το re_i να διαγράφεται με το στοιχείο r^*e_i που έχει δημιουργηθεί από το προηγούμενο άθροισμα $\sum_{t=n}^{i+1} \lambda_t(e_t + \sum_{j<t} r_{tj}e_j)$.

$ii)$ Αν $V = \text{απλό}$, τότε τελειώσαμε, αν V όχι απλό τότε υπάρχει $W_1 \in \text{mod}(R)$ ώστε $0 \neq W_1 \subsetneq V$, μάλιστα το W_1 θα είναι και K -υποπρότυπο του V με $\dim_K W_1 < \dim_K V < \infty$. Αν W_1 όχι απλό R -πρότυπο τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το W_1 και παίρνουμε $W_2 \in \text{mod}(R)$ ώστε $0 \neq W_2 \subsetneq W_1 \subsetneq V$ με $\dim_K W_2 < \dim_K W_1 < \dim_K V < \infty$. Είναι σαφές ότι η διαδικασία αυτή κάποια στιγμή τελειώνει και μάλιστα καταλήγει σε απλό R -πρότυπο.

□

Ορισμός 3.5.2. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n, r)$, τότε ορίζουμε το διάγραμμα (*diagram*) του λ να είναι το σύνολο $[\lambda] := \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leq s, 1 \leq t \leq \lambda_s\}$. Σχηματικά μπορούμε να το βλέπουμε ως εξής:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & (\lambda_1 - \text{το πλήθος κουκίδες}) \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & & & (\lambda_2 - \text{το πλήθος κουκίδες}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & & & \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & & & & & (\lambda_n - \text{το πλήθος κουκίδες}) \end{array}$$

Ας σημειωθεί ότι το σχήμα αυτό δεν είναι πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο.

Τέλος παρατηρούμε ότι ορίζεται ένα καινούργιο *partition* του r το $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$, όπου $\mu_i =$ πλήθος κουκίδων της i -στήλης. Ιδιαίτέρως, $\mu \in \Lambda^+(\lambda_1, r)$, $\mu_i = |\{j \mid \lambda_j \geq i\}|$ και $\mu_i \leq n$ για κάθε i . Το μ θα λέγεται συζυγής (*conjugate*) *partition* του λ .

Σχόλιο. Τελειώνουμε την προετοιμασία μας για το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου, υπενθυμίζοντας την έννοια του *absolutley irreducible* προτύπου (Υπενθύμιση 3.4.2) και χαρακτηρίζοντας την.

Λήμμα 3.5.3. (Χαρακτηρισμός των *absolutley irreducible* προτύπων).

Έστω R K -άλγεβρα και V *irreducible* R -πρότυπο με $\dim_K V < \infty$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) Το V είναι *absolutley irreducible* R -πρότυπο.
- ii) $\text{End}_R(V) \simeq K$ (Ισομορφισμός K -προτύπων).
- iii) Η απεικόνιση $\phi : K \longrightarrow \text{End}_R(V)$ με $\phi(k)(v) = k \cdot v$ για κάθε $k \in K$, $v \in V$, είναι επιμορφισμός K -προτύπων.

Απόδειξη. Μία απόδειξη μπορούμε να βρούμε στα [4, σελ. 202] ή [21, σελ. 111, (7.5) Theorem].

□

Πόρισμα 3.5.1. Έστω R K -άλγεβρα και V *irreducible* R -πρότυπο με $\dim_K V < \infty$, τότε:

- i) Αν $K = \text{αλγεβρικά κλειστό}$, τότε $V = \text{absolutley irreducible}$ R -πρότυπο.
- ii) Αν επιπλέον το V είναι *absolutley irreducible* R -πρότυπο, τότε για κάθε επέκταση σωμάτων $K \subseteq L$, το V^L είναι *absolutley irreducible* R^L -πρότυπο.

Απόδειξη.

- i) Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{End}_R(V) \simeq K$ (Ισομορφισμός K -προτύπων), πράγμα που είναι γνωστό και ως παραλλαγή του Λήμματος του *Schur* για αλγεβρικά κλειστά σώματα.

Έστω B μία K -βάση του V , όπου $|B| < \infty$. Αν $f \in \text{End}_R(V)$, οι ιδιοτιμές της f σαν K -γραμμική απεικόνιση είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $(f : B, B)$. Τώρα επειδή $K = \text{αλγεβρικά κλειστό}$, το χαρακτηριστικό πολ/μο του $(f : B, B)$ έχει όλες του τις ρίζες στο K , οπότε (εξ' ορισμού

της ιδιοτιμής) υπάρχει $\lambda \in K$ ώστε $\ker(f - \lambda \mathbb{I}_V) \neq 0$. Επιπλέον, εύκολα $\ker(f - \lambda \mathbb{I}_V) = R$ -υποπρότυπο του V που είναι *irreducible*, άρα $\ker(f - \lambda \mathbb{I}_V) = V \iff f = \lambda \mathbb{I}_V$. Επίσης ως παρατηρήσουμε ότι η f έχει μοναδική ιδιοτιμή (αφού αν μ ήταν μία άλλη ιδιοτιμή, τότε όπως πριν θα είχαμε $f = \mu \mathbb{I}_V \iff \lambda \mathbb{I}_V = \mu \mathbb{I}_V \xrightarrow{V \neq 0} \lambda = \mu$).

Τέλος η απεικόνιση $\Phi : \text{End}_R(V) \longrightarrow K, f \longmapsto \lambda$ είναι άμεσα ισομορφισμός K -προτύπων (μάλιστα K -αλγεβρών).

- ii) Από υπόθεση για το V έχουμε ότι το V^L είναι *irreducible* R^L -πρότυπο, και από Λήμμα 3.5.3 πρέπει $\text{End}_R(V) \simeq K$ (Ισομορφισμός K -προτύπων). Τέλος από και Λήμμα 3.4.4, έχουμε τους εξής ισομορφισμούς L -προτύπων:

$$\text{End}_{R^L}(V^L) \simeq \text{End}_R(V) \otimes_K L \simeq K \otimes_K L \simeq L.$$

Οπότε πάλι από Λήμμα 3.5.3 έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.5.1. Έστω $n \geq 1, r \geq 0$ και K =άπειρο σώμα. Τότε,

- i) Για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ υπάρχει *absolutley irreducible* πρότυπο $F_{\lambda, K}$ στην $M_K(n, r)$ με χαρακτήρα $\Phi_{\lambda, K}$ που έχει *leading term* (ως προς την λεξικογραφική διάταξη) το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.
- ii) Το σύνολο $\{\Phi_{\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ αποτελεί $\mathbb{Z}$ -βάση του $\text{Sym}(n, r)$.
- iii) Για κάθε *irreducible* πρότυπο $V \in M_K(n, r)$ υπάρχει μοναδικό $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ ώστε $V \simeq F_{\lambda, K}$ (Ισομορφισμός K Γ-προτύπων).

Απόδειξη.

- i) Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και χωρίζουμε την απόδειξη στα εξής βήματα:

- 1) Υπάρχει $V \in M_K(n, r)$ ώστε το Φ_V να έχει *leading term* το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.
- 2) Υπάρχει $U \in M_K(n, r)$ ώστε $U = \text{irreducible}$ πρότυπο και το Φ_U να έχει *leading term* το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.
- 3) Το U είναι *absolutley irreducible*.

Απόδειξη του 1): Έστω $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το *conjugate partition* του λ και E ένας K -διανυσματικός χώρος με $\dim_K E = n$. Εξ' ορισμού του *conjugate partition* πρέπει $\mu_i \leq n$ για κάθε i , οπότε από Πρόγραμμα 3.4.1 έχουμε ότι το $V = \Lambda^{\mu_1} E \otimes \dots \otimes \Lambda^{\mu_{\lambda_1}} E$ ανήκει στη $M_K(n, r)$ και $\Phi_V = e_{\mu_1} \cdot \dots \cdot e_{\mu_{\lambda_1}}$. Μένει να δείξουμε ότι το Φ_V έχει *leading term* το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$. Πράγματι, εξ' ορισμού το e_{μ_i} έχει *leading term* το $x_1 \cdot \dots \cdot x_{\mu_i}$ και άρα το Φ_V έχει *leading term* το $\prod_{i=1}^{\lambda_1} x_1 \cdot \dots \cdot x_{\mu_i} \stackrel{(*)}{=} x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$, όπου για να δούμε γιατί ισχύει η ισότητα $(*)$ μπορούμε βάλουμε

τα $x_1 \cdot \dots \cdot x_{\mu_i}$ κάθετα το ένα δίπλα στο άλλο και μετά να τα πολλαπλασιάσουμε, σχηματικά θα έχουμε το εξής:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 & \cdots & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 & \cdots & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{\mu_1} & x_{\mu_2} & \cdots & x_{\mu_{\lambda_i}} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{\mu_{\lambda_1}} \end{array}$$

Το παραπάνω σχήμα εξ' ορισμού του *conjugate partition* είναι επί της ουσίας το διάγραμμα του $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ με μεταβλητές στις θέσεις των κουκίδων, άρα η i -γραμμή έχει λ_i το πλήθος κουκίδες και έτσι έπεται ότι $\prod_{i=1}^{\lambda_1} x_1 \cdot \dots \cdot x_{\mu_i} = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.

Απόδειξη του 2): Έστω $V \in M_K(n, r)$ το πρότυπο που βρήκαμε στο 1) τότε $\dim_K V < \infty$, άρα σαν K -πρότυπο είναι του *Artin* και της *Neother*, όμως επειδή και κάθε αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία $K\Gamma$ -υποπροτύπων του V είναι αυτόματα και ακολουθία K -υποπροτύπων (εξ' ορισμού του εξωτερικού πολ/μού του K στο V , δηλαδή $k \cdot v = (k \cdot 1_{K\Gamma}) \cdot v$), έχουμε άμεσα ότι το V είναι του *Artin* και *Neother* σαν $K\Gamma$ -πρότυπο, άρα έχει συνθετική σειρά, έστω $0 = V_0 \subseteq \dots \subseteq V_m = V$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K V^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} &= \Phi_V = \sum_{s=1}^m \Phi_{V_s/V_{s-1}} = \\ \sum_{s=1}^m \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K (V_s/V_{s-1})^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \left(\sum_{s=1}^m \dim_K (V_s/V_{s-1})^a \right) x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \end{aligned}$$

Από το παραπάνω πρέπει $\dim_K V^a = \sum_{s=1}^m \dim_K (V_s/V_{s-1})^a$ για κάθε $s = 1, \dots, m$ (**). Τώρα εξ' ορισμού του Φ_V και το γεγονός ότι ο *leading term* του είναι το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$, πρέπει $\dim_K V^\lambda = 1$, άρα $1 = \sum_{s=1}^m \dim_K (V_s/V_{s-1})^\lambda$, δηλαδή υπάρχει $t \in \{1, \dots, m\}$ ώστε $\dim_K (V_t/V_{t-1})^\lambda = 1$. Θέτουμε $U = V_t/V_{t-1}$, όπου U απλό $K\Gamma$ -πρότυπο με $\dim_K U^\lambda = 1$, οπότε μένει δείξουμε ότι το Φ_U έχει *leading term* το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.

Πράγματι, το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$ συμμετέχει στο $\sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K U^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = \Phi_U$ (αφού $\dim_K U^\lambda = 1$).

Αν δείξουμε ότι $\dim_K U^a = 0$ για κάθε a ώστε $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} > x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$, τότε τελειώσαμε. Έστω λοιπόν $a \in \Lambda(n, r)$ με $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} > x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$, τότε, επειδή $\Phi_V = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K V^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$

και $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} = \text{leading term}$ του Φ_V , πρέπει:

$$\dim_K V^a = 0 \iff \sum_{s=1}^m \dim_K (V_s/V_{s-1})^a = 0 \implies \dim_K U^a = 0.$$

Απόδειξη του 3): Από Λήμμα 3.5.3, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $f \in \text{End}_{K\Gamma}(U)$ είναι *scalar*

(δηλαδή υπάρχει $k_f \in K$ ώστε $f = k_f \mathbb{I}_U$). Έστω $f \in \text{End}_{K\Gamma}(U)$ ($\iff f \in \text{End}_{S_K(n,r)}(U)$) τότε,

$$f(U^\lambda) = f(\xi_\lambda U) = \xi_\lambda f(U) \subseteq \xi_\lambda U = U^\lambda.$$

Συνεπώς $f|_{U^\lambda} \in \text{End}_K(U^\lambda)$, όμως είδαμε στο 2) ότι $\dim_K U^\lambda = 1$, άρα υπάρχει $a \in K$ ώστε $f|_{U^\lambda} = a \mathbb{I}_{U^\lambda}$ (γενικά, αν $g \in \text{End}_K(V)$ με $\dim_K V = 1$ και $\{e_1\}$ μία K -βάση του V , τότε $g = k_1 \mathbb{I}_V$, όπου $k_1 \in K$ ώστε $g(e_1) = k_1 e_1$).

Εμείς θα δείξουμε ότι $f = a \mathbb{I}_U$. Πράγματι, έστω $N = \{u \in U \mid f(u) = a \cdot u\}$, τότε το N είναι $K\Gamma$ -υποπρότυπο του U (άμεσα αφού f είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων) και $N \neq 0$ (αφού $U^\lambda \subseteq N$ και $\dim_K U^\lambda = 1$). Όμως $U = \text{απλό } K\Gamma\text{-πρότυπο}$, άρα $N = U \iff f = a \mathbb{I}_U$.

ii) Από Λήμμα 3.5.1, το $\{m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -βάση του $\text{Sym}(n, r)$, οπότε για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ υπάρχουν $\{z_\mu^\lambda\}_{\mu \in \Lambda^+(n, r)} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε:

$$\Phi_{\lambda, K} = \sum_{\mu \in \Lambda^+(n, r)} z_\mu^\lambda m_\mu = \sum_{\mu \in \Lambda^+(n, r)} \sum_{a \in [\mu]_W} z_\mu^\lambda x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} (*)$$

Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι το $\Lambda(n, r)$ επιδέχεται ολική διάταξη, την λεξικογραφική και μάλιστα αν $a, b \in \Lambda(n, r)$ τότε $a > b \iff x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} > x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$. Τώρα, επειδή το $\Phi_{\lambda, K}$ έχει *leading term* το $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ και η $(*)$ είναι σε μορφή αθροίσματος διακεκριμένων (ως προς τις δυνάμεις) μονώνυμων παραγόντων του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ (αυτό το επιχείρημα το έχουμε ξανά δει στη απόδειξη του Λήμματος 3.5.1 προς το τέλος) πρέπει $z_\mu^\lambda = 0$ για κάθε $\mu > \lambda$. Οπότε,

$$\Phi_{\lambda, K} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} z_\mu^\lambda m_\mu, \quad \forall \lambda \in \Lambda^+(n, r).$$

Συνεπώς από Λήμμα 3.5.2 ii) έχουμε το ζητούμενο.

iii) Έστω $K \subseteq L = \text{αλγεβρικά κλειστό}$, τότε για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ ορίζεται το $F_{\lambda, K}^L = F_{\lambda, K} \otimes_K L$ που είναι $S_L(n, r)$ -πρότυπο ώστε $F_{\lambda, K}^L \in \text{mod}(S_L(n, r)) \iff F_{\lambda, K}^L \in M_L(n, r)$ (βλέπε Λήμμα 3.4.4). Θα χωρίσουμε την απόδειξη στα εξής βήματα:

- 1) Για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ το $F_{\lambda, K}^L$ είναι *absolutley irreducible* $S_L(n, r)$ -πρότυπο.
- 2) Για κάθε *irreducible* πρότυπο $X \in M_L(n, r)$ υπάρχει $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ ώστε $X \simeq F_{\lambda, K}^L$ (Ισομορφισμός $L\Gamma_L$ -προτύπων).
- 3) Για κάθε *irreducible* πρότυπο $V \in M_K(n, r)$ υπάρχει μοναδικό $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ ώστε $V \simeq F_{\lambda, K}$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων).

Απόδειξη του 1): Από υπόθεση για το $F_{\lambda, K}$ έχουμε ότι το $F_{\lambda, K}^L$ είναι *irreducible* $S_L(n, r)^L$ -πρότυπο, άρα από Λήμμα 3.4.4 γίνεται *irreducible* $S_L(n, r)$ -πρότυπο. Τώρα από Πρόταση 3.5.1 i) για το

$S_L(n, r)$ –πρότυπο $F_{\lambda, K}^L$, έπεται το ζητούμενο.

Απόδειξη του 2): Έστω *irreducible* πρότυπο $X \in M_L(n, r)$ με $X \not\cong F_{\lambda, K}^L$ για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$. Τότε το $\{F_{\lambda, K}^L \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\} \cup \{X\}$ είναι σύνολο από μη-ισόμορφα $L\Gamma_L$ –πρότυπα της $M_L(n, r)$. Πράγματι, για $\lambda_1 \neq \lambda_2$ πρέπει $F_{\lambda_1, K}^L \not\cong F_{\lambda_2, K}^L$, αλλιώς θα είχαμε $\Phi_{F_{\lambda_1, K}^L} = \Phi_{F_{\lambda_2, K}^L} \iff \Phi_{F_{\lambda_1, K}} = \Phi_{F_{\lambda_2, K}}$, όπου το τελευταίο είναι άτοπο καθώς τα $\Phi_{F_{\lambda_1, K}}, \Phi_{F_{\lambda_2, K}}$ έχουν διαφορετικούς *leading terms*. Επίσης $X = \text{absolutley irreducible } S_L(n, r)$ –πρότυπο (αφού $X = \text{irreducible } S_L(n, r)$ –πρότυπο και Πρόρισμα 3.5.1 i)).

Οπότε το σύνολο $\mathcal{A} = \{F_{\lambda, K}^L \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\} \cup \{X\}$ αποτελείται από *absolutley irreducible* $S_L(n, r)$ –πρότυπα μη ισόμορφα ανά δύο. Όμως $\text{End}_{L\Gamma_L}(\mathcal{A}) = \text{End}_{S_L(n, r)}(\mathcal{A}) \simeq L$ (Ισομορφισμός L –προτύπων), για κάθε $A \in \mathcal{A}$, άρα το σύνολο $\mathcal{A}$ αποτελείται από *absolutley irreducible* $L\Gamma_L$ –πρότυπα (στην $M_L(n, r)$) μη ισόμορφα ανά δύο. Το τελευταίο μαζί με το Θεώρημα 3.4.3, δίνουν ότι το σύνολο $\{\Phi_{F_{\lambda, K}^L} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\} \cup \{\Phi_X\} \subseteq \text{Sym}(n, r)$ είναι $\mathbb{Z}$ –γραμμικά ανεξάρτητο με πλήθος στοιχείων παραπάνω από το $\dim_{\mathbb{Z}} \text{Sym}(n, r)$, άτοπο.

Απόδειξη του 3): Έστω $V \in M_K(n, r)$ με $V = \text{irreducible}$, τότε ορίζεται το $S_L(n, r)$ –πρότυπο V^L (ώστε $V^L \in \text{mod}(S_L(n, r))$), ισοδύναμα $V^L \in M_L(n, r)$. Από Λήμμα 3.5.2 ii) το V^L περιέχει *irreducible* $S_L(n, r)$ –υποπρότυπο (ισοδύναμα $L\Gamma_L$ –υποπρότυπο) έστω X . Τώρα από 2), υπάρχει $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ ώστε $X \simeq F_{\lambda, K}^L$ (Ισομορφισμός $L\Gamma_L$ –προτύπων), άρα $\text{Hom}_{S_L(n, r)}(F_{\lambda, K}^L, V^L) \neq 0$. Επιπλέον έχουμε τους εξής ισομορφισμούς L –προτύπων:

$$0 \neq \text{Hom}_{S_L(n, r)}(F_{\lambda, K}^L, V^L) \simeq \text{Hom}_{S_K(n, r)^L}(F_{\lambda, K}^L, V^L) \simeq \text{Hom}_{S_K(n, r)}(F_{\lambda, K}, V) \otimes_K L.$$

Από το τελευταίο έπεται ότι $\text{Hom}_{S_K(n, r)}(F_{\lambda, K}, V) \neq 0$. Έστω $0 \neq f \in \text{Hom}_{S_K(n, r)}(F_{\lambda, K}, V)$, τότε (επειδή τα $F_{\lambda, K}, V$ είναι *irreducible* $K\Gamma$ –πρότυπα $\iff S_K(n, r)$ –πρότυπα) η f είναι ισομορφισμός $K\Gamma$ –προτύπων $\iff S_K(n, r)$ –πρότυπων.

Όσο για την μοναδικότητα, αν υπάρχει $\mu \neq \lambda$ με $F_{\mu, K} \simeq V \simeq F_{\lambda, K}$, τότε θα πρέπει $\Phi_{F_{\mu, K}} = \Phi_{F_{\lambda, K}}$, άτοπο αφού έχουν διαφορετικά *leading terms*.

□

Πόρισμα 3.5.2. Έστω $n \geq 1$, $r \geq 0$ και $K = \text{άπειρο σώμα}$. Τότε:

- i) Το $\{F_{\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι *full set* από *irreducible* πρότυπα στην $M_K(n, r)$ ($\iff$ στην $\text{mod}(S_K(n, r))$). (*full set*: σημαίνει ανά δύο μη ισόμορφα και κάθε άλλο *irreducible* πρότυπο είναι ισόμορφο με κάποιο από αυτά).
- ii) Έστω $V_1, V_2 \in M_K(n, r)$ *irreducible* $K\Gamma$ –πρότυπα. Τότε, $\Phi_{V_1} = \Phi_{V_2} \iff V_1 \simeq V_2$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ –προτύπων).
- iii) Έστω $V \in M_K(n, r)$ *irreducible* $K\Gamma$ –πρότυπο, τότε $V \simeq V^\circ$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ –προτύπων).

Απόδειξη. Τα $i), ii)$ είναι άμεσα. Όσο για το $iii)$ από Πρόταση 2.7.5 έχουμε ότι τα V, V° είναι irreducible και επειδή $\Phi_{V^\circ} = \Phi_V$ (βλέπε Πρόταση 3.4.1) έπεται από το $ii)$ ότι $V \simeq V^\circ$. $\square$

Θεώρημα 3.5.2. Έστω $n \geq 1, r \geq 0$ και K άπειρο σώμα με $chK = 0$ ή $chK = p > r$. Αν $V, W \in M_K(n, r)$, τότε $V \simeq W \iff \Phi_V = \Phi_W$.

Απόδειξη.

Το $(\implies)$ το ξέρουμε γενικά (ανεξαρτήτως χαρακτηριστικής του K). Ανάποδα, έστω $\Phi_V = \Phi_W$. Από Θεώρημα 2.6.2 έχουμε ότι τα V, W είναι ημιαπλά $K\Gamma$ -πρότυπα, άρα $V = \bigoplus_{i \in I} V_i, W = \bigoplus_{j \in J} W_j$, όπου V_i, W_j είναι απλά $K\Gamma$ -υποπρότυπα των V, W αντίστοιχα. Τώρα, επειδή $\dim_K V, \dim_K W < \infty$ έπεται ότι τα V, W είναι και πεπερασμένα παραγόμενα $K\Gamma$ -πρότυπα, έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|I|, |J| < \infty$. Από το τελευταίο και το Πρόσιμα 3.5.2 $i)$, έχουμε ότι:

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} F_{\lambda, K}^{n_\lambda} \text{ και } W \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} F_{\lambda, K}^{m_\lambda}.$$

όπου ενδέχεται κάποια n_λ, m_λ να είναι μηδέν. Από τα τελευταία έχουμε,

$$\Phi_V = \Phi_W \iff \Phi_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} F_{\lambda, K}^{n_\lambda}} = \Phi_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} F_{\lambda, K}^{m_\lambda}} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} n_\lambda \Phi_{\lambda, K} = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)} m_\lambda \Phi_{\lambda, K}$$

Συνεπώς, από Θεώρημα 3.5.1 $ii)$ έχουμε $n_\lambda = m_\lambda \forall \lambda \in \Lambda^+(n, r)$, άρα $V \simeq W$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων). $\square$

Παράδειγμα 3.5.2. (Υπολογισμός του $F_{(1)^r, K}$). Έστω $1 \leq r \leq n, \lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$ και ορίζουμε $F_{\lambda, K} := F_{(1)^r, K}$

$i)$ Το $e_r = m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}$ έχει leading term το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} = x_1 \cdot \dots \cdot x_r$.

$ii)$ Αν E K -πρότυπο με $\dim_K E = n$ τότε:

$$F_{(1)^r, K} \simeq \Lambda^r E, \text{ Ισομορφισμός } K\Gamma\text{-προτύπων} (\iff S_K(n, r)\text{-προτύπων}).$$

Απόδειξη.

$i)$ Καταρχάς $e_r = m_\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} + \sum_{\lambda \neq a \in [\lambda]_W} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$, όπου $[\lambda]_W = \{w \cdot \lambda \mid w \in W = G(n)\}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $[\lambda]_W \neq \{\lambda\}$ αλλιώς το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Ισχυρισμός. Αν $w \cdot \lambda \neq \lambda$, τότε $w \cdot \lambda < \lambda$. Ιδιαίτερος $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} < x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$ για κάθε $a \in [\lambda]_W \setminus \{\lambda\}$ και έτσι έπεται το ζητούμενο. (Η διάταξη είναι η λεξικογραφική).

Πράγματι, έστω $w \in W$ με $(\lambda_{w^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{w^{-1}(n)}) = w \cdot \lambda \neq \lambda$, τότε υπάρχει $s \in \{1, \dots, r\}$ ώστε $\lambda_{w^{-1}(s)} \neq \lambda_s$. (αφού αν $\lambda_{w^{-1}(i)} = \lambda_i = 1$ για κάθε $i \leq r$ τότε εξ'ορισμού του $\lambda = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ θα πρέπει $\lambda_{w^{-1}(i)} = 0$ για κάθε $i > r$, οπότε $w \cdot \lambda = \lambda$, άτοπο). Έστω τώρα το ελάχιστο τέτοιο s (δηλαδή $\lambda_{w^{-1}(i)} = \lambda_i$ για κάθε $i < s$ και $\lambda_{w^{-1}(s)} \neq \lambda_s$) τότε $\lambda_{w^{-1}(s)} \neq \lambda_s \stackrel{s \leq r}{=} 1$ και άρα $\lambda_{w^{-1}(s)} = 0$. Τελικά $\lambda_{w^{-1}(i)} = \lambda_i$ για κάθε $i < s$ και $0 = \lambda_{w^{-1}(s)} < \lambda_s = 1$, συνεπώς $w \cdot \lambda < \lambda$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

ii) Καταρχάς (από Παράδειγμα 3.4.1) έχουμε $\Phi_{\Lambda^r E} = e_r$ άρα από Θεώρημα 3.5.1 έπεται το ζητούμενο.

□

Σχόλιο. Το παραπάνω παράδειγμα ταξινομεί-υπολογίζει τα απλά $K\Gamma$ -πρότυπα $F_{(1)^r, K}$ για γενική χαρακτηριστική του σώματος K . Εν' γένη για $chK = 0$ έχουν υπολογιστεί τα $F_{\lambda, 0} = F_{\lambda, K}$ όπως θα δούμε παρακάτω (βλέπε Πόρισμα 5.4.1 ii)). Για $chK = p > 0$ δεν έχουν υπολογιστεί ακόμη τα $F_{\lambda, p} = F_{\lambda, K}$ και οι χαρακτήρες $\Phi_{\lambda, p}$ (εν τούτης αποτελεί το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας αναπαράστάσεων).

3.6 Skew symmetric functions και η κατασκευή των Schur functions.

Παρακάτω θέτουμε $W = G(n)$.

Η παράγραφος αυτή αποτελεί ένα μικρό διάλειμμα από τον καθαρά αλγεβρικό χαρακτήρα που είχαν οι προηγούμενες παράγραφοι και έχει ως στόχο την μελέτη των συμμετρικών και skew ("σχεδόν") συμμετρικών πολυωνύμων. Επιπλέον θα δούμε μία ιδιαίτερη κατασκευή, αυτή των Schur functions. Παρακάτω, η μελέτη των Schur functions θα δώσει ότι μας δίνει μία πλήρη περιγραφή της κατηγορίας $M_K(n, r)$ όταν $chK = 0$. (Πλούσια σχετική βιβλιογραφία αποτελεί τα [5, σελ. 40], [6, σελ. 1-10])

Υπενθύμιση 3.6.1. i) $HW = G(n)$ δρα στο $\mathbb{N}^n$ από τα αριστερά ως εξής:

$$\pi \cdot (a_1, \dots, a_n) := (a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}), \text{ για κάθε } \pi \in W, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n.$$

ii) Με τον ίδιο τρόπο η W δρα από τα αριστερά στο $\Lambda(n, r)$.

Ορισμός 3.6.1. Έστω $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$

i) Θα λέμε το $f(x_1, \dots, x_n)$ symmetric αν: $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \sigma \in W$.

Θα συμβολίζουμε με Λ_n (ή $Sym(n)$) το σύνολο των symmetric πολυωνύμων του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ και είναι σαφές ότι το Λ_n είναι $\mathbb{Z}$ -υπόαλγεβρα του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

ii) Θα λέμε το $f(x_1, \dots, x_n)$ skew symmetric αν: $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = s(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \sigma \in W$.

Θα συμβολίζουμε με A_n το σύνολο των skew symmetric πολυωνύμων του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ και είναι σαφές ότι το A_n είναι $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπο του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ (αλλά όχι υποδακτύλιος).

Παρατήρηση 3.6.1. Έστω $f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, τότε:

i) Αν $f, g \in A_n$ τότε $fg \in A_n$.

ii) Αν $f, g \in A_n$ με $g \mid f$ τότε $f/g \in A_n$.

iii) Αν $f \in \Lambda_n, g \in A_n$ τότε $fg \in A_n$.

Από iii) έπεται άμεσα ότι το A_n γίνεται φυσιολογικά Λ_n -πρότυπο.

Απόδειξη. Τα ii), iii) είναι άμεσα όπως επίσης και το i) (αφού $s(\sigma)^2 = 1$ για κάθε $\sigma \in W$).

□

Ορισμός 3.6.2. Έστω $a \in \mathbb{N}^n$, συμβολικά θα γράφουμε $x^a = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$.

Παρατήρηση 3.6.2. Έστω $f(x_1, \dots, x_n) \in A_n$ με $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ όπου χ.β.γ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i_j = 0, \dots, m$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ (αν χρειαστεί μηδενίζουμε τους συντελεστές $n_{i_1, \dots, i_n}$ που δεν χρειάζονται). Τότε,

i) $n_{i_1, \dots, i_n} = s(\sigma) n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$, για κάθε $\sigma \in W$. (Μάλιστα, $n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = s(\sigma) n_{i_1, \dots, i_n}$).

ii) Αν η ακολουθία $(i_1, \dots, i_n)$ έχει επανάληψη (δηλαδή υπάρχουν $k \neq r$ με $i_k = i_r$) τότε $n_{i_1, \dots, i_n} = 0$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς θέτουμε $I = \{0, \dots, m\} \times \dots \times \{0, \dots, m\} \subseteq \mathbb{N}^n$ και συμβολίζουμε το τυχόν $i \in I$ με $i = (i_1, \dots, i_n)$, μάλιστα μπορούμε να γράφουμε $n_{i_1, \dots, i_n} = n_{(i_1, \dots, i_n)}$. Επιπλέον είναι σαφές ότι $w \cdot I \subseteq I$ για κάθε $w \in W$ (μάλιστα $w \cdot I = I$), οπότε ορίζεται καλά η δράση του W στο $I \subseteq \mathbb{N}^n$. Τώρα, από υπόθεση πρέπει $f(x_1, \dots, x_n) = s(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ και άρα:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} &= s(\sigma) \sum_{i_1, \dots, i_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{i_n} = \\ s(\sigma) \sum_{i_1, \dots, i_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}^{i_{\sigma^{-1}(n)}} &= \sum_{i_1, \dots, i_n} s(\sigma) n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}} = \\ \sum_{i \in I} s(\sigma) n_i x^{\sigma \cdot i} &= \sum_{i \in I} s(\sigma) n_{\sigma^{-1}(\sigma \cdot i)} x^{\sigma \cdot i} = \sum_{i \in I} s(\sigma) n_{\sigma^{-1} \cdot i} x^i \stackrel{\sigma I = I}{=} \sum_{i_1, \dots, i_n} s(\sigma) n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} \end{aligned}$$

Δηλαδή $\sum_{i_1, \dots, i_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} s(\sigma) n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ και άρα $n_{i_1, \dots, i_n} = s(\sigma) n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$, για κάθε $\sigma \in W$.

ii) Αν η ακολουθία $(i_1, \dots, i_n)$ έχει επανάληψη έστω χ.β.γ $i_1 = i_2$, τότε θεωρώντας τη μετάθεση $\sigma = (12) \in W$ έχουμε:

$$n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = n_{i_1, \dots, i_n} \stackrel{i)}{=} s(\sigma) n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = -n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}.$$

Οπότε $n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = -n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} \iff n_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = 0$ και άρα $n_{i_1, \dots, i_n} = 0$.

□

Σχόλιο. Εφόσον περιγράψαμε στοιχειωδώς τα στοιχεία του A_n , πάμε να βρούμε μία $\mathbb{Z}$ -βάση του.

Ορισμός 3.6.3. Έστω $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}$ τότε ορίζεται το πολυώνυμο του $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$:

$$a_a = a_a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in W} s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{w^{-1}(n)}} = \sum_{w \in W} s(w) x^{w \cdot a}.$$

Παρατήρηση 3.6.3. Έστω $a \in \mathbb{N}^n$ τότε, $a_a = \sum_{w \in W} s(w)x_1^{a_{w(1)}} \cdots x_n^{a_{w(n)}} = \sum_{w \in W} s(w)x_{w(1)}^{a_1} \cdots x_{w(n)}^{a_n}$

Απόδειξη. $a_a \stackrel{s(w)=s(w^{-1})}{=} \sum_{w \in W} s(w^{-1})x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_n^{a_{w^{-1}(n)}} = \sum_{w \in W} s(w)x_1^{a_{w(1)}} \cdots x_n^{a_{w(n)}}.$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει αφού καθώς το w διατρέχει το W το ίδιο κάνει και το w^{-1} . Επίσης,

$$a_a = \sum_{w \in W} s(w^{-1})x_{w(w^{-1}(1))}^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_{w(w^{-1}(n))}^{a_{w^{-1}(n)}} = \sum_{w \in W} s(w)x_{w(1)}^{a_1} \cdots x_{w(n)}^{a_n}.$$

Όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει καθώς $w^{-1} \in G(n)$ και άρα τα στοιχεία(-γινόμενα) $x_{w(1)}^{a_1} \cdots x_{w(n)}^{a_n}$, $x_{w(w^{-1}(1))}^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_{w(w^{-1}(n))}^{a_{w^{-1}(n)}}$ έχουν τους ίδιους όρους με ενδεχομένως άλλη σειρά. □

Παρατήρηση 3.6.4. Έστω $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ τότε,

- i) Το a_a είναι skew symmetric και $a_{\sigma \cdot a} = s(\sigma)a_a$, για κάθε $\sigma \in W$.
- ii) $a_a = \det((x_i^{a_j})_{i,j})$.
- iii) $a_a = 0$, αν το $a = (a_1, \dots, a_n)$ έχει επανάληψη (δηλαδή δύο ίδια στοιχεία σε διαφορετικές θέσεις).
- iv) Αν το $a = (a_1, \dots, a_n)$ δεν έχει επανάληψη, τότε το $a_a \neq 0$ και είναι ομογενές βαθμού $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$.

Απόδειξη.

i) a_a είναι skew symmetric: Έστω $\sigma \in W$ τότε από Παρατήρηση 3.6.1 έχουμε,

$$\begin{aligned} a_a(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= \sum_{w \in W} s(w)x_{w(\sigma(1))}^{a_1} \cdots x_{w(\sigma(n))}^{a_n} = s(\sigma) \sum_{w \in W} s(w)s(\sigma)x_{w(\sigma(1))}^{a_1} \cdots x_{w(\sigma(n))}^{a_n} = \\ &= s(\sigma) \sum_{w \in W} s(w\sigma)x_{(w\sigma)(1)}^{a_1} \cdots x_{(w\sigma)(n)}^{a_n} = s(\sigma) \sum_{\pi \in W\sigma} s(\pi)x_{\pi(1)}^{a_1} \cdots x_{\pi(n)}^{a_n} \stackrel{W\sigma=W}{=} s(\sigma)a_a(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Όσο για το δεύτερο σκέλος έχουμε,

$$\begin{aligned} a_{\sigma \cdot a} &= \sum_{w \in W} s(w)x^{w \cdot (\sigma \cdot a)} = s(\sigma) \sum_{w \in W} s(w)s(\sigma)x^{(w\sigma) \cdot a} = s(\sigma) \sum_{w \in W} s(w\sigma)x^{(w\sigma) \cdot a} = \\ &= s(\sigma) \sum_{\pi \in W\sigma} s(\pi)x^{\pi \cdot a} \stackrel{W\sigma=W}{=} s(\sigma)a_a. \end{aligned}$$

ii) Υπενθυμίζουμε από την γραμμική άλγεβρα το εξής: $\det((a_{ij})_{i,j}) = \sum_{w \in W} s(w)(\prod_{i=1}^n a_{iw(i)})$. Οπότε,

$$\det((x_i^{a_j})_{i,j}) = \sum_{w \in W} s(w)(\prod_{i=1}^n x_i^{a_{w(i)}}) = \sum_{w \in W} s(w)x^{w^{-1} \cdot a} \stackrel{s(w)=s(w^{-1})}{=} \sum_{w \in W} s(w^{-1})x^{w^{-1} \cdot a} = a_a$$

iii) Έστω ότι $a_i = a_j$ για $i \neq j$ και χ.β.γ $i < j$ τότε,

$$a_a \stackrel{ii)}{=} \det((x_i^{a_j})_{i,j}) = \det \begin{pmatrix} \cdots & x_1^{a_i} & \cdots & x_1^{a_j} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & x_n^{a_i} & \cdots & x_n^{a_j} & \cdots \end{pmatrix} = 0$$

Η τελευταία ορίζουσα κάνει μηδέν γιατί έχει δύο διακεκριμένες στήλες ίσες (τις i, j).

iv) Εφόσον το a δεν έχει επανάληψη (δηλαδή $a_i \neq a_j$ για κάθε $i \neq j$) τότε όλα τα στοιχεία $\{(a_{w^{-1}(1)}, \dots, a_{w^{-1}(n)})\}_{w \in W}$ είναι διάφορα ανά δύο, οπότε το $a_a = \sum_{w \in W} s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_n^{a_{w^{-1}(n)}}$ είναι γραμμένο σε άθροισμα διακεκριμένων μονώνυμων παραγόντων. Επιπλέον $\sum_{i=1}^n a_{w^{-1}(i)} = |a|$ για κάθε $w \in W$, άρα το a_a είναι ομογενές βαθμού $|a|$.

□

Ορισμός 3.6.4. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τότε ορίζουμε,

i) $L^+(n) := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$.

ii) $\Lambda^+(n) := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \mid a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0\}$.

Παρατήρηση 3.6.5. i) Έστω $a \in L^+(n)$ τότε τα πολυώνυμα $\{s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_n^{a_{w^{-1}(n)}}\}_{w \in W}$ είναι διακεκριμένα ανά δύο και άρα αποτελούν τους διακεκριμένους μονώνυμους παράγοντες του a_a . (Εν' γέννη δεν είναι σωστό, π.χ. βλέπε Παρατήρηση 3.6.2 iii)).

ii) Έστω $a, b \in L^+(n)$ με $a \neq b$ τότε τα πολυώνυμα a_a, a_b δεν έχουν κοινό μονώνυμο παράγοντα.

Απόδειξη. Καταρχάς $a_a = \sum_{w \in W} s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_n^{a_{w^{-1}(n)}}$, $a_b = \sum_{w \in W} s(w) x_1^{b_{w^{-1}(1)}} \cdots x_n^{b_{w^{-1}(n)}}$.

Εφόσον όλα τα στοιχεία της ακολουθίας $a = (a_1, \dots, a_n)$ είναι διακεκριμένα ανά δύο (γιατί $a \in L^+(n)$) τότε τα πολυώνυμα $\{s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdots x_n^{a_{w^{-1}(n)}}\}_{w \in W}$ είναι διακεκριμένα ανά δύο και άρα (εξ' ορισμού του a_a) αποτελούν τους μονώνυμους παράγοντες του a_a . Όμοια για το a_b .

Έστω για άτοπο ότι τα a_a, a_b έχουν κάποιον κοινό μονώνυμο παράγοντα, τότε υπάρχουν $\sigma, \pi \in W$, ώστε $s(\sigma) x_1^{a_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_n^{a_{\sigma^{-1}(n)}} = s(\pi) x_1^{b_{\pi^{-1}(1)}} \cdots x_n^{b_{\pi^{-1}(n)}}$, δηλαδή:

$$a_{\sigma^{-1}(i)} = b_{\pi^{-1}(i)}, \text{ για κάθε } i = 1, \dots, n.$$

Οπότε $\sigma \cdot a = \pi \cdot b \iff (\pi^{-1}\sigma) \cdot a = b$. Οπότε βρήκαμε $w \in W$ ώστε $w \cdot a = b$, τότε όμως θα έχουμε:

$$a_1 > \dots > a_n \geq 0 \text{ και } a_{w^{-1}(1)} > \dots > a_{w^{-1}(n)} \geq 0.$$

Το τελευταίο επιβάλλει $w = 1$ άρα $a = b$, άτοπο. Συνεπώς τα a_a, a_b δεν έχουν κοινό μονώνυμο παράγοντα.

□

Λήμμα 3.6.1. Έστω $I_m = I := \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0, \dots, m\} \text{ και το } a \text{ δεν έχει επανάληψη}\} \subseteq \mathbb{N}^n$ (για κάποιο $m \in \mathbb{N}$), τότε $w \cdot I = I$ για κάθε $w \in W$ και έτσι η δράση της W στο I ορίζεται καλά. Ιδιαίτερώς αν θέσουμε $I_m^+ = I^+ := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in I \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$ τότε:

i) $I = \bigsqcup_{a \in I^+} [a]_W$, όπου $[a]_W = W$ -τροχιά του I .

ii) Έστω $a \in I^+$ τότε $\sigma \cdot a \neq \pi \cdot a$, για κάθε $\sigma, \pi \in W$ με $\sigma \neq \pi$.

Απόδειξη.

$wI = I$ για κάθε $w \in W$: Καταρχάς αν $a = (a_1, \dots, a_n) \in I, w \in W$ τότε $w \cdot a = (a_{w^{-1}(1)}, \dots, a_{w^{-1}(n)})$ και επειδή το $w \cdot a$ είναι μία μετάθεση των στοιχείων του a είναι σαφές ότι $a_{w^{-1}(i)} \in \{0, \dots, m\}$ με $a_{w^{-1}(i)} \neq a_{w^{-1}(j)}$ για κάθε $i \neq j$. Άρα $w \cdot I \subseteq I$ για κάθε $w \in W$. Ανάποδα αν $a \in I$ τότε από πριν έχουμε $w^{-1} \cdot a \in I$ και άρα $a = w \cdot (w^{-1} \cdot a) \in w \cdot I$. Τελικά $wI = I$.

i) Καταρχάς είναι σαφές ότι $\bigsqcup_{a \in I^+} [a]_W \subseteq I$. Ανάποδα, αν $a \in I$ είναι σαφές ότι υπάρχει μετάθεση (που να βάζει σε γνησίως φθίνουσα σειρά τα στοιχεία του $a = (a_1, \dots, a_n)$) έστω $w \in W$ με $a_{w(1)} > \dots > a_{w(n)} \geq 0$, δηλαδή $b := w^{-1} \cdot a \in I^+$ και $a = w \cdot b \in [b]_W \subseteq \bigsqcup_{a \in I^+} [a]_W$. Τελικά $\bigsqcup_{a \in I^+} [a]_W = I$. Μένει να δείξουμε ότι η ένωση είναι ξένη. Έστω $a, b \in I^+$ με $a \neq b$ και $[a]_W \cap [b]_W \neq \emptyset$, τότε $[a]_W = [b]_W$ και άρα υπάρχει $\sigma \in W$ ώστε $a = \sigma b$, οπότε:

$$a_1 > \dots > a_n \geq 0 \text{ και } a_{\sigma^{-1}(1)} > \dots > a_{\sigma^{-1}(n)} \geq 0.$$

Το τελευταίο επιβάλλει $\sigma = 1$ και έτσι $a = b$, άτοπο. Συνεπώς η ένωση $\bigsqcup_{a \in I^+} [a]_W$ είναι ξένη.

ii) Έστω $\sigma, \pi \in W$ με $\sigma \cdot a = \pi \cdot a \iff (\pi^{-1}\sigma) \cdot a$, τότε θέτουμε $w = \pi^{-1}\sigma \in W$ και έχουμε:

$$a_1 > \dots > a_n \geq 0 \text{ και } a_{w^{-1}(1)} > \dots > a_{w^{-1}(n)} \geq 0.$$

Το τελευταίο επιβάλλει $w = 1$ και έτσι $a = b$.

□

Πρόταση 3.6.1.

i) Το σύνολο $\{a_a\}_{a \in L^+(n)}$ αποτελεί $\mathbb{Z}$ -βάση του A_n .

ii) Έστω $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0) \in L^+(n)$ τότε το σύνολο $\{a_{\lambda+\delta}\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)}$ αποτελεί $\mathbb{Z}$ -βάση του A_n .

Απόδειξη.

i) $\{a_a\}_{a \in L^+(n)} = \mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητα: Έστω $B \subseteq L^+(n)$ (όπου $|B| < \infty$) και $\{n_b\}_{b \in B} \subseteq \mathbb{Z}$ με $\sum_{b \in B} n_b a_b = 0$. Από Παρατήρηση 3.6.5 ii) θα πρέπει $n_b a_b = 0$, για κάθε $b \in B$. Οπότε,

$$\sum_{w \in W} n_b s(w) x_1^{b_{w^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{b_{w^{-1}(n)}} = 0, \text{ για κάθε } b \in B.$$

Όμως το παραπάνω άθροισμα είναι γραμμένο σε άθροισμα διακεκριμένων μονωνύμων παραγόντων (βλέπε Παρατήρηση 3.6.5 i)) οπότε $n_b s(w) = 0$, για κάθε $b \in B$, $w \in W$, δηλαδή $n_b = 0 \forall b \in B$.

$A_n = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{a_a \mid a \in L^+(n)\}$: Έστω $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} n_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} \in A_n$ όπου χ.β.γ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i_j = 0, \dots, m$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ (αν χρειαστεί μηδενίζουμε τους συντελεστές $n_{i_1, \dots, i_n}$ που δεν χρειάζονται).

Επιπλέον θεωρούμε το $I = \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0, \dots, m\} \text{ και το } a \text{ δεν έχει επανάληψη}\}$ και θέτουμε $n_{a_1, \dots, a_n} = n_{(a_1, \dots, a_n)}$ τότε από Παρατήρηση 3.6.2 και Λήμμα 3.6.1 έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{Παρατήρηση 3.6.2 ii)}}{=} \sum_{a \in I} n_a x^a \stackrel{\text{Λήμμα 3.6.1 i)}}{=} \sum_{a \in I^+} \sum_{b \in [a]_W} n_b x^b \stackrel{\text{Λήμμα 3.6.1 ii)}}{=} \\ &\sum_{a \in I^+} \sum_{\sigma \in W} n_{\sigma \cdot a} x^{\sigma \cdot a} \stackrel{\text{Παρατήρηση 3.6.2 i)}}{=} \sum_{a \in I^+} \sum_{\sigma \in W} s(\sigma^{-1}) n_a x^{\sigma \cdot a} = \sum_{a \in I^+} n_a \left(\sum_{\sigma \in W} s(\sigma) x^{\sigma \cdot a} \right) = \sum_{a \in I^+} n_a a_a. \end{aligned}$$

ii) Από i) αρκεί να δείξουμε ότι $L^+(n) = \{\lambda + \delta\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)}$. Πράγματι, καταρχάς είναι σαφές ότι $\{\lambda + \delta\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)} \subseteq L^+(n)$. Ανάποδα αν $a = (a_1, \dots, a_n) \in L^+(n)$ τότε $a_1 > \dots > a_n \geq 0$ και ως γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών πρέπει

$$a_1 \geq n-1, \quad a_2 \geq (n-2), \quad \dots, \quad a_n \geq 0.$$

Από το τελευταίο θέτοντας $\lambda_i = a_i - (n-i) \geq 0$, έχουμε ότι $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Πράγματι επειδή $a_i > a_{i+1}$, τότε $a_i \geq a_{i+1} + 1$ και άρα $\lambda_i = a_i - (n-i) \geq a_{i+1} + 1 - (n-i) = \lambda_{i+1}$. Οπότε $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n)$ και άμεσα $a = \lambda + \delta$.

□

Σχόλιο. Αφού μελετήσαμε κάποια βασικά πράγματα γύρω από το $\mathbb{Z}$ -πρότυπο A_n , ας προχωρήσουμε στην κατασκευή του Schur function (για την οποία το μόνο που θα χρειαστούμε από τα προηγούμενα είναι τον ορισμό του a_a). Πριν συνεχίσουμε, επειδή παρακάτω θα μιλήσουμε για διαιρετότητα στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, ας υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες και ιδιότητες από τη βασική θεωρία δακτυλίων.

Υπενθύμιση 3.6.2. (Από την μεταθετική άλγεβρα). Έστω R μία περιοχή μοναδική παραγοντοποίησης (Π.Μ.Π) τότε,

i) (Ορισμός). Έστω $r, a, b \in R$ τότε,

- a) Το r λέγεται ανάγωγο στοιχείο του R αν δεν είναι αντιστρέψιμο και επιπλέον κάθε γραφή της μορφής $r = cd$ ($c, d \in R$) επιβάλλει c ή d να είναι αντιστρέψιμο.
- b) Λέμε ότι τα a, b είναι συντροφικά αν υπάρχει $d \in R$ αντιστρέψιμο, ώστε $a = db$.

c) Λέμε ότι τα a, b είναι σχετικά πρώτα μεταξύ τους αν δεν υπάρχει ανάγωγο στοιχείο $p \in R$ ώστε $p \mid a, b$.

ii) Έστω $a, b, r \in R$ με a, b είναι σχετικά πρώτα μεταξύ τους και $a, b \mid r$. Τότε $ab \mid r$. (Εννοείται αυτό γενικεύεται για $a_1, \dots, a_n$ σχετικά πρώτα ανά δύο).

iii) (Θεώρημα). Ο δακτύλιος $R[x_1, \dots, x_n]$ είναι Π.Μ.Π.

iv) Τα στοιχεία $\{x_i - x_j\}_{i < j}$ είναι όλα μη-συντροφικά ανάγωγα στοιχεία του $R[x_1, \dots, x_n]$ και άρα σχετικά πρώτα μεταξύ τους.

Απόδειξη.

Για τα i), ii), iii) μπορεί κανείς να βρει αρκετές πληροφορίες στο [11, Κεφάλαιο 2]. Ας δούμε ενδεικτικά το iv). Έστω $i < j$ τότε:

Καταρχάς είναι σαφές ότι το $x_i - x_j$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Έστω τώρα $x_i - x_j = fg$, όπου $(f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n])$, τότε $f = \sum_{k=0}^n f_k x_n^k$, $g = \sum_{r=0}^m g_r x_n^r$ με $f_i, g_i \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ και αναγκαστικά (αφού $x_i - x_j = fg$) πρέπει $n, m = 0$, οπότε $f = f_0$, $g = g_0$ και $x_i - x_j = f_0 g_0$ όπου $f_0, g_0 \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε να έχουμε $x_i - x_j = f'_0 g'_0$, όπου $f = f'_0$, $g = g'_0$ και $f'_0, g'_0 \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_j]$, όμως το $x_i - x_j$ είναι ανάγωγο στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{j-1}][x_j]$ (γενικά τα στοιχεία $x - a, -x + a$ με $a \in R$, είναι πάντα ανάγωγα στο δακτύλιο $R[x]$), άρα f'_0 ή g'_0 αντιστρέψιμο στο $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_j]$, δηλαδή $f = f'_0 = \pm 1$ ή $g = g'_0 = \pm 1$. Έτσι το $x_i - x_j$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. □

Πρόταση 3.6.2. i) Έστω $a \in L^+(n)$, τότε $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \mid a_a$.

ii) Έστω $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$, τότε $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det((x_i^{n-j})_{i,j}) = a_\delta$.

Ας σημειωθεί το πολυώνυμο $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ είναι η γνωστή ορίζουσα Vandermonde : $\det((x_i^{n-j})_{i,j})$.

Απόδειξη.

i) Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $x_i - x_j \mid a_a$, για κάθε $1 \leq i < j \leq n$. Για $n = 2$ έχουμε

$$a_a = \det \begin{pmatrix} x_1^{a_1} & x_1^{a_2} \\ x_2^{a_1} & x_2^{a_2} \end{pmatrix} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} - x_1^{a_2} x_2^{a_1} \stackrel{a_2 < a_1}{=} x_1^{a_2} x_2^{a_2} (x_1^{a_1-a_2} - x_2^{a_1-a_2}) = x_1^{a_2} x_2^{a_2} (x_1 - x_2) \cdot (\text{κάτι}).$$

Έστω $n \geq 2$, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $a_a = \det((x_i^{a_j})_{i,j})$ θα κάνουμε ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε γραμμή διάφορη των i, j -γραμμών. Ας πούμε χ.β.γ ότι $i, j \neq 1$, τότε θέτουμε $A = (x_i^{a_j})_{i,j}$ και με ανάπτυξη ως προς τη πρώτη γραμμή έχουμε:

$$a_a = (-1)^{1+1} x_1^{a_1} \det A_{11} + (-1)^{1+2} x_1^{a_2} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} x_1^{a_n} \det A_{1n}.$$

Όπου A_{1k} είναι ο πίνακας A με διαγραμμένες την 1-γραμμή και k -στήλη, δηλαδή:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} x_2^{a_2} & \cdots & x_2^{a_n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{a_2} & \cdots & x_n^{a_n} \end{pmatrix}, \dots, A_{1n} = \begin{pmatrix} x_2^{a_2} & \cdots & x_2^{a_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{a_2} & \cdots & x_n^{a_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι πίνακες A_{1k} είναι σε μορφή όπως ο A με $n-1$ μεταβλητές και $a_2 > \dots > a_{k-1} > a_{k+1} > \dots > a_n \geq 0$, άρα από επαγωγική υπόθεση και το γεγονός ότι $i, j \neq 1$ (δηλαδή υπάρχουν στον πίνακα A_{1k} οι μεταβλητές x_i, x_j) πρέπει $x_j - x_i \mid \det A_{1k}$, για κάθε $k = 1, \dots, n$. Οπότε $x_j - x_i \mid \det A = a_a$.

Συνεπώς $x_i - x_j \mid a_a \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ για κάθε $1 \leq i < j \leq n$. Επιπλέον από Υπενθύμιση 3.6.2 έχουμε ότι τα πολυώνυμα $\{x_i - x_j\}_{i < j}$ είναι όλα σχετικά πρώτα ανά δύο και ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι Π.Μ.Π, άρα $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \mid a_a$.

ii) Είναι άμεσο από την σημείωση που δώσαμε.

□

Πόρισμα 3.6.1. Έστω $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$ τότε για κάθε $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n)$ ισχύει $a_\delta \mid a_{\lambda+\delta}$ και έτσι ορίζεται το πολυώνυμο:

$$S_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n].$$

Όπου $a_{\lambda+\delta} = \det((x_i^{n+\lambda_j-j})_{i,j})$ και $a_\delta = \det((x_i^{n-j})_{i,j})$.

Ορισμός 3.6.5. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$ με $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, τότε το πολυώνυμο:

$$S_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

θα λέγεται *Schur function*.

Πόρισμα 3.6.2. Έστω $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$ τότε:

- i) Το a_δ διαιρεί κάθε στοιχείο του A_n .
- ii) Η απεικόνιση $\phi : \Lambda_n \longrightarrow A_n, f \longmapsto a_\delta f$ είναι ισομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων.
- iii) Το A_n είναι ελεύθερο Λ_n -πρότυπο με Λ_n -βάση το $\{a_\delta\}$. Ιδιαίτερος $A_n = \Lambda_n a_\delta$.

Απόδειξη.

i) Έστω $f(x_1, \dots, x_n) \in A_n$ τότε από Πρόταση 3.6.1 υπάρχουν $\{n_a\}_{a \in L^+(n)} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{a \in L^+(n)} n_a a_a$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα από Πρόταση 3.6.2.

ii) Η ϕ είναι καλά ορισμένη άμεσα από Παρατήρηση 3.6.1. Η ϕ είναι 1-1 άμεσα αφού το $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι περιοχή. Επίσης είναι άμεσα ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων. Μένει να δείξουμε ότι είναι επί, πράγματι αν $g \in A_n$ τότε από i) ισχύει $g/a_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ και εύκολα (επειδή $g, a_\delta \in A_n$) έχουμε $g/a_\delta \in \Lambda_n$ και κατά συνέπεια $\phi(g/a_\delta) = g$.

iii) $A_n = \Lambda_n a_\delta$: Έστω $f \in A_n$ τότε από Πρόταση 3.6.1 υπάρχουν $\{n_a\}_{a \in L^+(n)} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε $f = \sum_{a \in L^+(n)} n_a a_a$. Επιπλέον από i) και Παρατήρηση 3.6.1 ii) έχουμε $\{a_a/a_\delta\}_{a \in L^+(n)} \subseteq \Lambda_n$, οπότε

$$f = \left(\sum_{a \in L^+(n)} n_a a_a/a_\delta \right) a_\delta \in \Lambda_n a_\delta.$$

Μένει να δείξουμε ότι το $\{a_\delta\}$ είναι Λ_n -γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι αν $f \in \Lambda_n$ με $f a_\delta = 0$, τότε επειδή το $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι περιοχή και $a_\delta \neq 0$ πρέπει $f = 0$.

□

Θεώρημα 3.6.1. Έστω $n, r \in \mathbb{N}$ τότε:

- i) Το σύνολο $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)}$ αποτελεί $\mathbb{Z}$ -βάση του $\Lambda_n = \text{Sym}(n)$.
- ii) Το σύνολο $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)}$ αποτελεί $\mathbb{Z}$ -βάση του $\text{Sym}(n, r)$.

Λήμμα 3.6.2. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος, A graded R -άλγεβρα από την οικογένεια $\{A_n\}_{n \geq 0}$ και επιπλέον A είναι περιοχή. Αν $x, y \in A$ με $0 \neq x \in A_n$, $0 \neq xy \in A_m$, τότε $m \geq n$ και $y \in A_{m-n}$.

Απόδειξη. Καταρχάς από υπόθεση έχουμε $A = \bigoplus_{r \geq 0} A_r$. Έστω λοιπόν $y = \sum_{r \geq 0} y_r$ όπου $y \in A_r$ και $a_m \in A_m$ ώστε $0 \neq a_m = xy = \sum_{r \geq 0} xy_r$ (όπου $xy_r \in A_{n+r}$). Από το τελευταίο και το γεγονός ότι $A = \bigoplus_{r \geq 0} A_r$ έπεται άμεσα $xy_r = 0$ για κάθε $r \geq 0$ με $r + n \neq m$ και επιπλέον υπάρχει $r_0 \geq 0$ ώστε $n + r_0 = m$ και $a_m = xy_{r_0}$. Ιδιαίτέρως $m \geq n$ και $r_0 = m - n$. Επιπλέον η σχέση $xy_r = 0$ για κάθε $r \geq 0$ με $r + n \neq m$ είναι ισοδύναμη με το να έχουμε $xy_r = 0$ για κάθε $0 \leq r \neq m - n$, αλλά $A =$ περιοχή και $x \neq 0$ οπότε $y_r = 0$ για κάθε $0 \leq r \neq m - n$. Τελικά $y = y_{m-n} \in A_{m-n}$.

□

Απόδειξη. (Θεωρήματος).

- i) $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)} \subseteq \text{Sym}(n)$: Άμεσα αφού $S_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ και $a_{\lambda+\delta}, a_\delta \in A_n$ (βλέπε Παρατήρηση 3.6.1 ii)).

$\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)} = \mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Έστω $\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)} \subseteq \mathbb{Z}$ με $\sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda S_\lambda = 0$ τότε,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda (a_{\lambda+\delta}/a_\delta) = 0 \iff a_\delta \cdot \left(\sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda (a_{\lambda+\delta}/a_\delta) \right) = 0 \iff \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda a_{\lambda+\delta} = 0$$

Από το τελευταίο όμως και το γεγονός ότι το $\{a_{\lambda+\delta}\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)}$ είναι $\mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο (βλέπε Πρόταση 3.6.1) έχουμε ότι $n_\lambda = 0$ για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n)$.

$Sym(n) = span_{\mathbb{Z}}\{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^+(n)\}$: Έστω $f \in \Lambda_n = Sym(n)$, τότε (από Παρατήρηση 3.6.1 iii)) πρέπει $a_\delta f \in A_n$, οπότε (από Πρόταση 3.6.1) υπάρχουν $\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε $a_\delta f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda a_{\lambda+\delta}$. Όμως $a_\delta \mid a_{\lambda+\delta}$ και έτσι $f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda (a_{\lambda+\delta}/a_\delta) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda S_\lambda$

ii) Καταρχάς ξέρουμε το $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι graded $\mathbb{Z}$ -άλγεβρα από την οικογένεια $\{B_r\}_{r \geq 0}$, όπου $B_r = \{f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ είναι ομογενές βαθμού } r\}$. Επίσης για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in L^+(n)$ θέτουμε $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$ και έχουμε:

$\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)} \subseteq Sym(n, r)$: Όπως στο i) έχουμε $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)} \subseteq \Lambda_n = Sym(n)$ και μένει να δείξουμε ότι είναι ομογενή βαθμού r . Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ τότε

$$S_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \iff a_{\lambda+\delta} S_\lambda = a_\delta, \text{ όπου } \delta = (n-1, n-2, \dots, 0) \in L^+(n).$$

Αφού $\lambda + \delta, \delta \in L^+(n)$ τότε από Παρατήρηση 3.6.4 iv) έχουμε

$$0 \neq a_{\lambda+\delta} = a_\delta S_\lambda \in B_{|\lambda+\delta|}, \quad 0 \neq a_\delta \in B_{|\delta|}.$$

Συνεπώς από Λήμμα 3.6.2 το $S_\lambda \in B_{|\lambda+\delta|-|\delta|} \stackrel{|\lambda+\delta|=|\lambda|+|\delta|}{=} B_{|\lambda|}$.

$\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)} = \mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Άμεσα από i) καθώς $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)} \subseteq \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)}$.

$Sym(n, r) = span_{\mathbb{Z}}\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)}$: Έστω $f \in Sym(n, r) \subseteq Sym(n) = \Lambda_n$, τότε (από i)) υπάρχουν $\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n)} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda S_\lambda \iff a_\delta f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n)} n_\lambda a_{\lambda+\delta}.$$

Τώρα από Παρατήρηση 3.6.4 iv) έχουμε $a_\delta \in B_{|\delta|}$, $a_{\lambda+\delta} \in B_{|\lambda+\delta|} = B_{|\lambda|+|\delta|}$, $a_\delta f \in B_{|\delta|+r}$. Οπότε

$$a_\delta f - \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n): |\lambda+\delta|=|\delta|+r} n_\lambda a_{\lambda+\delta} = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n): |\lambda+\delta| \neq |\delta|+r} n_\lambda a_{\lambda+\delta} \in (B_{|\delta|+r} \cap \sum_{n \neq |\delta|+r} B_n).$$

Όμως $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$, άρα $a_\delta f - \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n): |\lambda+\delta|=|\delta|+r} n_\lambda a_{\lambda+\delta} = 0$. Επιπλέον, $|\lambda + \delta| = |\delta| + r \iff |\lambda| = r$ και άρα $a_\delta f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)} n_\lambda a_{\lambda+\delta} \iff f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+(n,r)} n_\lambda S_\lambda$.

□

Παρατήρηση 3.6.6. *i) Για κάθε $a \in L^+(n)$ το a_a έχει leading term το $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$.*

ii) Για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n)$ το S_λ έχει leading term το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.

Απόδειξη.

$$i) \ a_a = \sum_{w \in W} s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{w^{-1}(n)}} = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} + \sum_{1 \neq w \in W} s(w) x_1^{a_{w^{-1}(1)}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{w^{-1}(n)}}$$

Ισχυρισμός. $a = (a_1, \dots, a_n) > (a_{w^{-1}(1)}, \dots, a_{w^{-1}(n)}) = w \cdot a$, για κάθε $1 \neq w \in W$.

Πράγματι, επειδή $a \in L^+(n)$ πρέπει $a_1 > \dots > a_n \geq 0$. Έστω $1 \neq w \in W$ και s το μικρότερο στοιχείο του $\underline{n}$ ώστε $w^{-1}(s) \neq s$, τότε $w^{-1}(i) = i$ για κάθε $i < s$ και άρα $w^{-1}(s) \in \{s+1, \dots, n\}$. Από τα τελευταία έχουμε $a_i = a_{w^{-1}(i)}$ για κάθε $i < s$ και $a_s > a_{w^{-1}(s)}$, συνεπώς $a > w \cdot a$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε και το συμπέρασμα έπεται άμεσα από αυτόν.

ii) Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n)$ και $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0) \in L^+(n)$ τότε

$$S_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta \iff a_\delta S_\lambda = a_{\lambda+\delta}.$$

Έστω $kx_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$ (όπου $k \in \mathbb{Z}$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$) ο leading term του S_λ . Επιπλέον δ , $\lambda+\delta \in L^+(n)$ και άρα από *i)* τα a_δ , $a_{\lambda+\delta}$ έχουν leading terms τα $x_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\delta_n}$, $x_1^{\lambda_1+\delta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n+\delta_n}$ αντίστοιχα. Όμως ο leading term του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι το γινόμενο των leading term των πολυωνύμων, οπότε

$$kx_1^{k_1+\delta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n+\delta_n} = (kx_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n})(x_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\delta_n}) = x_1^{\lambda_1+\delta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n+\delta_n}$$

Από το τελευταίο έπεται ότι $k = 1$ και $k_i = \lambda_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

□

3.7 Formal characters στην $M_K(n, r)$ όταν $chK = 0$.

Παρακάτω K άπειρο σώμα και $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$.

Η παράγραφος 3.6 αποτελεί μία καλή βάση για να μπορέσουμε να συζητήσουμε τι πραγματικά γίνεται στην κατηγορία $M_K(n, r)$ όταν $chK = 0$. Συγκεκριμένα, έχουμε τα παρακάτω.

Ορισμός 3.7.1. Έστω $chK = 0$ τότε για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ ορίζουμε $F_{\lambda, K} := F_{\lambda, 0}$ και $\Phi_{\lambda, K} := \Phi_{\lambda, 0}$.

Θεώρημα 3.7.1. Έστω $chK = 0$ τότε $\Phi_{\lambda, 0} = S_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$.

Απόδειξη. Μία στοιχειώδης απόδειξη προσφέρεται στο [1, σελ. 30-31], προτού όμως ανατρέξει κανείς εκεί θα χρειαστεί κάποιες επιπλέον προαπαιτούμενες ιδιότητες των Schur functions που θα βρει στο [5, σελ. 62-64, 17-24] ή στο [6, σελ. 1-10].

□

Στα Κεφάλαια 4-5 (βλέπε Πρόρισμα 5.4.1 i)) θα δούμε μία ακόμη καλύτερη περιγραφή του $\Phi_{\lambda, 0}$ μέσω του προτύπου $D_{\lambda, K}$ και της θεωρίας των λ -tableaux. Γενικά η εύρεση των $\Phi_{\lambda, K}$ όταν $chK = p > 0$ δεν έχει επιτευχθεί ακόμα, εντούτοις αποτελεί το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας αναπαραστάσεων.

4 Τα πρότυπα $D_{\lambda,K}$.

4.1 λ -tableaux.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n, r)$, τότε ορίζουμε το διάγραμμα (*diagram*) του λ να είναι το σύνολο $[\lambda] := \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leq s, 1 \leq t \leq \lambda_s\}$. Σχηματικά μπορούμε να το βλέπουμε ως εξής:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & (\lambda_1 - \text{το πλήθος κουκίδες}) \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \cdots & \bullet & & & (\lambda_2 - \text{το πλήθος κουκίδες}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & & & \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & & & & & (\lambda_n - \text{το πλήθος κουκίδες}) \end{array}$$

Ας σημειωθεί ότι το σχήμα αυτό δεν είναι πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ορίζεται ένα καινούργιο *partition* του r το $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$, όπου $\mu_i = \text{πλήθος κουκίδων της } i\text{-στήλης}$. Ιδιαίτερος, $\mu \in \Lambda^+(\lambda_1, r)$, $\mu_i = |\{j \mid \lambda_j \geq i\}|$ και $\mu_i \leq n$, για κάθε i . Το μ θα λέγεται συζυγής (*conjugate*) *partition* του λ .

Παράδειγμα 4.1.1. Για $\lambda = (3, 3, 2, 1) \in \Lambda^+(4, 9)$ έχουμε:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{l} 1) \text{ Σχήμα:} \\ 2) \text{ conjugate partition : } \mu = (4, 3, 2) \in \Lambda^+(3, 9). \end{array} \end{array}$$

Ορισμός 4.1.2. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, μία απεικόνιση $\Phi : [\lambda] \longrightarrow A$, όπου $A = \text{σύνολο}$, θα λέγεται λ -tableaux.

Παρατήρηση 4.1.1. Αν $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, τότε $||[\lambda]|| = r$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία 1-1 και επί απεικόνιση $\Phi : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$.

Ορισμός 4.1.3. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, μία 1-1 και επί απεικόνιση $T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ θα λέγεται *basic* λ -tableaux. Θα συμβολίζουμε τις εικόνες του T^λ με $T^\lambda(s, t) = x(s, t)$ και σχηματικά ο πίνακας που θα αναπαριστά το T^λ θα είναι ο παρακάτω:

$$\begin{array}{ccccccc} x(1, 1) & x(1, 2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x(1, \lambda_1) \\ x(2, 1) & x(2, 2) & \cdots & \cdots & \cdots & & & x(2, \lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & & \\ x(n, 1) & x(n, 2) & \cdots & x(n, \lambda_n) & & & & \end{array}$$

Συνήθως για συντομία θα γράφουμε $T = T^\lambda$.

Σχόλιο. Κάθε στοιχείο $p \in \underline{r}$, εμφανίζεται ακριβώς μία φορά στο σχήμα του προηγούμενου ορισμού. Η έννοια του *basic* λ -tableaux αντικαθιστά τις κουκίδες του διαγράμματος του λ με αριθμούς και έτσι δίνει ώθηση για περαιτέρω μελέτη.

Παρατήρηση 4.1.2. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ ένα basic λ -tableaux και $\sigma \in G(r)$. Τότε το σ καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές $\sigma(x(s, t))$, $(s, t) \in [\lambda]$ (αφού για το τυχόν $i \in \underline{r}$ υπάρχει μοναδικό $(s_i, t_i) \in [\lambda]$ ώστε $x(s_i, t_i) = i$).

Σχόλιο. Ο λόγος για τον οποίο κάναμε την παραπάνω παρατήρηση, είναι επειδή παρακάτω θα συνηθίζουμε να μελετάμε τα στοιχεία $\sigma \in G(r)$ πάνω στο σύνολο $\{x(s, t) \mid (s, t) \in [\lambda]\} = \underline{r}$.

Υπενθύμιση 4.1.1. i) Έστω $G = G(r)$ η συμμετρική ομάδα. Αν $X \subseteq \underline{r}$, τότε ορίζουμε το σύνολο $\Sigma_X := \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(i) = i, \forall i \notin X\}$ που είναι υποομάδα της $G(r)$. Ιδιαίτέρως $\sigma(X) = X$ για κάθε $\sigma \in \Sigma_X$.

ii) Έστω $X_1, \dots, X_n \subseteq \underline{r}$, $\mu \in X_i \cap X_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ τότε:

- a) $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$ για κάθε $i \neq j$ και $\sigma_i \in \Sigma_{X_i}$, $\sigma_j \in \Sigma_{X_j}$.
- b) $\Sigma_{X_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{X_n} \leq G(r)$.

Απόδειξη.

Το i) είναι άμεσο. Όσο για το ii), εφόσον $X_i \cap X_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$, τότε όλες οι μεταθέσεις του Σ_{X_i} είναι ξένες ως προς τις μεταθέσεις του Σ_{X_j} για κάθε $i \neq j$, όμως ξένες μεταθέσεις μετατίθενται στο γινόμενο και έτσι έπεται το a). Επιπλέον, αν $s, t \in \Sigma_{X_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{X_n}$, τότε $s = s_1 \cdot \dots \cdot s_n$, $t = t_1 \cdot \dots \cdot t_n$ και $s \cdot t^{-1} = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \cdot t_n^{-1} \cdot \dots \cdot t_1^{-1} \stackrel{a)}{=} s_1 t_1^{-1} \cdot \dots \cdot s_n t_n^{-1} \in \Sigma_{X_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{X_n}$ και έτσι έπεται το b). □

Ορισμός 4.1.4. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ ένα basic λ -tableaux, τότε ορίζουμε:

- i) $R_p = R_p(T) = \{x(p, k) \mid 1 \leq k \leq \lambda_p\} = p$ -γραμμή, όπου $1 \leq p \leq n$.
- ii) $R(T) = \Sigma_{R_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{R_n} = \text{row stabilizer} \leq G(r)$.
- iii) $C_q = C_q(T) = \{x(k, q) \mid 1 \leq k, q \leq \lambda_k\} = q$ -στήλη, όπου $1 \leq q \leq \lambda_1$.
- iv) $C(T) = \Sigma_{C_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{C_{\lambda_1}} = \text{column stabilizer} \leq G(r)$.

Παρατήρηση 4.1.3. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ ένα basic λ -tableaux, τότε:

- i) a) $R(T) = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(R_p) = R_p \forall 1 \leq p \leq n\}$. Ιδιαίτέρως, $\sigma \in R(T) \iff \sigma(x(s, t)) = x(s, t^*), \forall (s, t) \in [\lambda]$ και κάποιο t^* (που ενδεχομένως εξαρτάται από το (s, t)).
- b) $C(T) = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(C_q) = C_q \forall 1 \leq q \leq \lambda_1\}$. Ιδιαίτέρως, $\sigma \in C(T) \iff \sigma(x(s, t)) = x(s^*, t), \forall (s, t) \in [\lambda]$ και κάποιο s^* (που ενδεχομένως εξαρτάται από το (s, t)).
- ii) Προσοχή, αν $\sigma \in R(T)$ τότε με βάση το i), θα διατηρεί και όχι σταθεροποιεί κατ' ανάγκη τις γραμμές του T (παρόμοια για $\sigma \in C(T)$). Επίσης τα $R(T), C(T)$ εξαρτώνται από την επιλογή του basic λ -tableaux.

iii) $C(T) = \Sigma_{C_1} \otimes \dots \otimes \Sigma_{C_{\lambda_1}}$ και $R(T) = \Sigma_{R_1} \otimes \dots \otimes \Sigma_{R_n}$ (όπου εννοούμε ευθέα γινόμενα).

iv) $C(T) \cap R(T) = 1$.

Απόδειξη.

i) Κάνουμε το $R(T)$ και όμοια το $C(T)$. Θέτουμε $A = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(R_p) = R_p \forall 1 \leq p \leq n\}$ και θα δείξουμε ότι $R(T) = A$. Καταρχάς, επειδή η $T : [\lambda] \rightarrow \underline{r}$ είναι 1-1 και επί, έπεται άμεσα ότι $\underline{r} = \bigsqcup_{p=1}^n R_p$ (ξένη ένωση). Οπότε έχουμε:

$A \subseteq R(T)$: Έστω $\sigma \in A$, τότε για κάθε $p \in \underline{n}$ ορίζουμε $\sigma_p \in G(r)$ με $\sigma_p(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \in R_p \\ i & i \notin R_p \end{cases}$.

Επειδή $\underline{r} = \bigsqcup_{p=1}^n R_p$ και $\sigma \in A$, έπεται ότι η σ_p είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον (από τον τύπο της

σ_p) έχουμε ότι $\sigma_p \in \Sigma_{R_p}$ και $\sigma \stackrel{(*)}{=} \prod_{p=1}^n \sigma_p \in \Sigma_{R_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{R_n} = R(T)$. Μένει να αιτιολογήσουμε την (*), έστω λοιπόν $i \in \underline{r}$, τότε υπάρχει $p_i \in \underline{n}$ ώστε $i \in R_{p_i}$, συνεπώς $\sigma(i) \in R_{p_i}$ (αφού $\sigma \in A$) και:

$$\left(\prod_{p=1}^n \sigma_p\right)(i) = (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{p_i} \cdot \dots \cdot \sigma_n)(i) \stackrel{i \in R_{p_i}}{=} (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{p_i})(i) \stackrel{i \in R_{p_i}}{=} (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma)(i) \stackrel{\sigma(i) \in R_{p_i}}{=} \sigma(i).$$

$R(T) \subseteq A$: Έστω $\sigma \in R(T) = \Sigma_{R_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{R_n}$, τότε $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n$, όπου $\sigma_i \in \Sigma_{R_i}$. Έστω $1 \leq p \leq n$ και $t \in R_p$ τότε:

$$\sigma(t) = (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n)(t) \stackrel{t \in R_p}{=} (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_p)(t) \stackrel{\sigma_p(t) \in R_p}{=} \sigma_p(t) \in R_p.$$

Άρα $\sigma(R_p) \subseteq R_p$, όμως η σ είναι 1-1 και $|R_p| < \infty$, άρα $\sigma(R_p) = R_p$. Το p ήταν τυχόν, άρα $\sigma \in A$.

iii) Κάνουμε το $C(T)$ και όμοια το $R(T)$:

$C(T) = \Sigma_{C_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{C_{\lambda_1}}$: Εξ' ορισμού.

$\Sigma_{C_q} \triangleleft C(T)$ για κάθε $q = 1, \dots, \lambda_1$: Πράγματι, έστω $s \in \Sigma_{C_q}$ και $\sigma \in C(T)$, με $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{\lambda_1}$, όπου $\sigma_i \in \Sigma_{C_i}$. Αφού $C_i \cap C_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$, τότε από Υπενθύμιση 4.1.1 ii) a) έχουμε ότι $\sigma \cdot s \cdot \sigma^{-1} = \sigma_q \cdot s \cdot \sigma_q^{-1} \in \Sigma_{C_q}$.

$\Sigma_{C_q} \cap \prod_{j \neq q} \Sigma_{C_j} = 1$ για κάθε $q = 1, \dots, \lambda_1$: Έστω $\sigma \in \Sigma_{C_q} \cap \prod_{j \neq q} \Sigma_{C_j}$, τότε $\sigma(i) = i$ για κάθε $i \notin C_q$ (αφού $\sigma \in \prod_{j \neq q} \Sigma_{C_j}$) και $\sigma(i) = i$ για κάθε $i \in C_q$ (αφού $\sigma \in \Sigma_{C_q}$), άρα $\sigma(i) = i, \forall i \in \underline{r}$.

iv) Έστω ότι $\sigma \in C(T) \cap R(T)$. Αν $i \in \underline{r}$, τότε υπάρχει $(s, t) \in [\lambda]$ ώστε $x(s, t) = i$, άρα από i), πρέπει $\sigma(x(s, t)) = x(s, t) = i$.

□

Ορισμός 4.1.5. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux και $i \in I(n, r)$. Τότε ορίζεται ένα νέο λ -tableaux το $T_i := i \circ T : [\lambda] \longrightarrow \underline{n}$ και σχηματικά ο πίνακας που θα αναπαριστά το T_i θα είναι ο παρακάτω:

$$\begin{array}{ccccccc} i_{x(1,1)} & i_{x(1,2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & i_{x(1,\lambda_1)} \\ i_{x(2,1)} & i_{x(2,2)} & \cdots & \cdots & \cdots & i_{x(2,\lambda_2)} & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & \\ i_{x(n,1)} & i_{x(n,2)} & \cdots & i_{x(n,\lambda_n)} & & & \end{array}$$

Παράδειγμα 4.1.2. Έστω $\lambda = (3, 2, 0) \in \Lambda^+(3, 5)$, τότε το $T^\lambda = \begin{pmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{pmatrix}$ είναι ένα basic λ -tableaux, $\mu \in R(T) = \Sigma_{\{1,3,5\}} \cdot \Sigma_{\{2,4\}}$ και $C(T) = \Sigma_{\{1,2\}} \cdot \Sigma_{\{3,4\}} \cdot \Sigma_{\{5\}}$. Επιπλέον, αν $i \in I(3, 5)$ τότε $T_i = \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_5 \\ i_2 & i_4 & \end{pmatrix}$.

Παρατήρηση 4.1.4. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, $T = T^\lambda$ basic λ -tableaux και $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το conjugate partition του λ . Τότε,

i) Για κάθε $q = 1, \dots, \lambda_1$, κάθε μετάθεση στη $\Sigma_{C_q} (\leq S_r)$ χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα από μία μετάθεση στη S_{μ_q} και ανάποδα. Συγκεκριμένα,

η απεικόνιση $\Phi : S_{\mu_q} \longrightarrow \Sigma_{C_q}$, $\sigma_q \longmapsto \sigma'_q$, όπου $\sigma'_q(x(s, t)) = \begin{cases} x(\sigma_q(s), q) & t = q \\ x(s, t) & t \neq q \end{cases}$, είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

ii) Για κάθε $p = 1, \dots, n$, κάθε μετάθεση στη $\Sigma_{R_p} (\leq S_r)$ χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα από μία μετάθεση στη S_{λ_p} και ανάποδα. Συγκεκριμένα,

η απεικόνιση $\Phi : S_{\lambda_p} \longrightarrow \Sigma_{R_p}$, $\sigma_p \longmapsto \sigma'_p$, όπου $\sigma'_p(x(s, t)) = \begin{cases} x(p, \sigma_p(t)) & s = p \\ x(s, t) & s \neq p \end{cases}$, είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

Απόδειξη. Κάνουμε το i) καθώς το ii) είναι παρόμοιο. Πράγματι,

Φ καλά ορισμένη: Αρκεί να δείξουμε ότι η σ'_q είναι καλά ορισμένη. Καταρχάς η ποσότητα $x(\sigma_q(s), q)$ έχει νόημα για κάθε $(s, q) \in [\lambda]$ αφού $\sigma_q \in S_{\mu_q}$ και $\mu_q = \text{μήκος της } q\text{-στήλης}$. Έστω $x(s_1, t_1) = x(s_2, t_2)$ τότε (επειδή $T = 1-1$ και επί) $s_1 = s_2$ και $t_1 = t_2$, άρα άμεσα έπεται ότι $\sigma'_q(x(s_1, t_1)) = \sigma'_q(x(s_2, t_2))$.

Φ 1-1: Έστω $\sigma'_q(x(s_1, t_1)) = \sigma'_q(x(s_2, t_2))$. Από τον τύπο της σ'_q και επειδή $T = 1-1$ και επί, έπεται ότι $t_1 = t_2$ και $(s_1 = s_2 \text{ ή } \sigma_q(s_1) = \sigma_q(s_2))$, όμως $\sigma_q = 1-1$, άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $t_1 = t_2$ και $s_1 = s_2$, δηλαδή $x(s_1, t_1) = x(s_2, t_2)$.

Φ επί: Αφού Φ είναι 1-1 και $|\Sigma_{C_q}| = |C_q|! = \mu_q! = |S_{\mu_q}|$, έπεται το επί.

□

Σχόλιο. Η παραπάνω παρατήρηση θα μπορούσε κανείς να πει ότι είναι αναμενόμενη αφού:

- i) Τα στοιχεία του Σ_{C_q} επί της ουσία σταθεροποιούν όλα τα στοιχεία έξω από το C_q και μεταθέτουν μόνο τα στοιχεία της στήλης C_q η οποία έχει μήκος μ_q , δηλαδή μιλάμε για μεταθέσεις μ_q –το πλήθος στοιχείων.
- ii) Τα στοιχεία του Σ_{R_p} επί της ουσία σταθεροποιούν όλα τα στοιχεία έξω από το R_p και μεταθέτουν μόνο τα στοιχεία της γραμμής R_p η οποία έχει μήκος λ_p , δηλαδή μιλάμε για μεταθέσεις λ_p –το πλήθος στοιχείων.

Ας σημειωθεί ότι η Παρατήρηση 4.1.4 αν και τεχνική θα παίζει το ρόλο της στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.1.

4.2 Bideterminants.

Παρακάτω, $K = \text{άπειρο σώμα}$.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda$ basic λ -tableaux, τότε ορίζουμε το bideterminant των i, j να είναι:

$$(T_i : T_j)_K = (T_i : T_j) := \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{i,j\sigma} \in A_K(n, r).$$

Όπου $s(\sigma) = \text{το πρόσημο της μετάθεσης } \sigma$.

Παρατήρηση 4.2.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$, τότε

$$i) (T_i : T_j) = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{i,j\sigma} = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{i\sigma,j}$$

$$ii) \text{ Για κάθε } \sigma \in C(T) \text{ ισχύει } (T_i : T_{j\sigma}) = (T_{i\sigma} : T_j) = s(\sigma)(T_i : T_j).$$

Απόδειξη.

$$i) \text{ Εφόσον } (i, j\sigma) \sim (i\sigma^{-1}, j), \text{ τότε } c_{i,j\sigma} = c_{i\sigma^{-1},j}, \text{ επίσης } s(\sigma) = s(\sigma^{-1}), \text{ άρα:}$$

$$(T_i : T_j) = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma^{-1}) c_{i\sigma^{-1},j} = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{i\sigma,j}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή καθώς το σ διατρέχει το $C(T)$, το ίδιο κάνει και το σ^{-1} .

$$ii) \text{ Έστω } \sigma \in C(T), \text{ θα δείξουμε ότι } (T_i : T_{j\sigma}) = s(\sigma)(T_i : T_j) \text{ (και η άλλη ισότητα όμοια). Πράγματι,}$$

$$\begin{aligned} (T_i : T_{j\sigma}) &= \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) c_{i,(j\sigma)\pi} \stackrel{s(\sigma)^2=1}{=} s(\sigma)^2 \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) c_{i,(j\sigma)\pi} = \\ &= s(\sigma) \sum_{\pi \in C(T)} s(\sigma\pi) c_{i,j(\sigma\pi)} \stackrel{(*)}{=} s(\sigma) \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) c_{i,j\pi} = s(\sigma)(T_i : T_j). \end{aligned}$$

Αιτιολόγηση της (*): Αφού $\sigma \in C(T)$, τότε $\sigma C(T) = C(T)$, επιπλέον $\sigma\tau \neq \sigma\pi$, $\forall \tau, \pi \in C(T)$ με $\tau \neq \pi$. Συνεπώς καθώς το π διατρέχει το $C(T)$, το ίδιο κάνει και το $\sigma\pi$.

□

Υπενθύμιση 4.2.1. (Laplacian formula) Έστω $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times n}(R)$, όπου R δακτύλιος. Τότε,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right) = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right).$$

Πρόταση 4.2.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, $T = T^\lambda$ basic λ -tableaux και $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το conjugate partition του λ . Τότε:

i) Αν για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$ θεωρήσουμε τους πίνακες $A_t = (c_{i_{x(s,t)}j_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t}$ τότε:

$$(T_i : T_j) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det A_t.$$

ii) Αν το T_i (ή το T_j) έχει στήλη με δύο ίδια στοιχεία σε διαφορετικές θέσεις, τότε $(T_i : T_j) = 0$.

Απόδειξη.

i) Έστω $A_t = (a_{ss'}^t)_{s,s'=1,\dots,\mu_t}$ με $a_{ss'}^t = c_{i_{x(s,t)}j_{x(s',t)}}$, τότε:

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det A_t &= \prod_{t=1}^{\lambda_1} \left(\sum_{\sigma \in S_{\mu_t}} s(\sigma) \left(\prod_{s=1}^{\mu_t} a_{s\sigma(s)}^t \right) \right) = \\ &= \sum_{\sigma_1 \in S_{\mu_1}} \cdots \sum_{\sigma_{\lambda_1} \in S_{\mu_{\lambda_1}}} s(\sigma_1) \cdots s(\sigma_{\lambda_1}) \left(\prod_{s=1}^{\mu_1} a_{s\sigma_1(s)}^1 \right) \cdots \left(\prod_{s=1}^{\mu_{\lambda_1}} a_{s\sigma_{\lambda_1}(s)}^{\lambda_1} \right) = \\ &= \sum_{\sigma_1 \in S_{\mu_1}} \cdots \sum_{\sigma_{\lambda_1} \in S_{\mu_{\lambda_1}}} s(\sigma_1) \cdots s(\sigma_{\lambda_1}) \left(\prod_{s=1}^{\mu_1} c_{i_{x(s,1)}j_{x(\sigma_1(s),1)}} \right) \cdots \left(\prod_{s=1}^{\mu_{\lambda_1}} c_{i_{x(s,\lambda_1)}j_{x(\sigma_{\lambda_1}(s),\lambda_1)}} \right) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \sum_{\sigma_1 \in \Sigma_{C_1}} \cdots \sum_{\sigma_{\lambda_1} \in \Sigma_{C_{\lambda_1}}} s(\sigma_1) \cdots s(\sigma_{\lambda_1}) \left(\prod_{s=1}^{\mu_1} c_{i_{x(s,1)}j_{\sigma_1(x(s,1))}} \right) \cdots \left(\prod_{s=1}^{\mu_{\lambda_1}} c_{i_{x(s,\lambda_1)}j_{\sigma_{\lambda_1}(x(s,\lambda_1))}} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum_{\sigma_1 \in \Sigma_{C_1}} \cdots \sum_{\sigma_{\lambda_1} \in \Sigma_{C_{\lambda_1}}} s(\sigma_1 \cdots \sigma_{\lambda_1}) \left(\prod_{s=1}^{\mu_1} c_{i_{x(s,1)}j_{(\sigma_1 \cdots \sigma_{\lambda_1})(x(s,1))}} \right) \cdots \left(\prod_{s=1}^{\mu_{\lambda_1}} c_{i_{x(s,\lambda_1)}j_{(\sigma_1 \cdots \sigma_{\lambda_1})(x(s,\lambda_1))}} \right) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \left(\prod_{s=1}^{\mu_1} c_{i_{x(s,1)}j_{\sigma(x(s,1))}} \right) \cdots \left(\prod_{s=1}^{\mu_{\lambda_1}} c_{i_{x(s,\lambda_1)}j_{\sigma(x(s,\lambda_1))}} \right) \stackrel{(4)}{=} \\ &= \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{i_1(j\sigma)_1} \cdots c_{i_r(j\sigma)_r} = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{i,j\sigma} = (T_i : T_j). \end{aligned}$$

Αιτιολόγηση της (1): Άμεσο από Παρατήρηση 4.1.4.

Αιτιολόγηση της (2): Άμεσο εξ' ορισμού των Σ_{C_q} .

Αιτιολόγηση της (3): Άμεσο, αφού από Παρατήρηση 4.1.3 έχουμε $C(T) = \Sigma_{C_1} \otimes \dots \otimes \Sigma_{C_{\lambda_1}}$, δηλαδή το τυχόν $\sigma \in C(T)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{\lambda_1}$, όπου $\sigma_q \in \Sigma_{C_q}$. (Ας σημειωθεί ότι αν είχαμε μόνο $C(T) = \Sigma_{C_1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{C_{\lambda_1}}$, τότε δεν θα ίσχυε η ισότητα). Γενικά, αν έχουμε μία συνάρτηση $f : G \rightarrow F$, όπου F αβελιανή ομάδα και $G = G_1 \otimes \dots \otimes G_n$, τότε
$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g_1 \in G_1} \dots \sum_{g_n \in G_n} f(g_1 \cdot \dots \cdot g_n).$$

Αιτιολόγηση της (4): Επειδή $T : [\lambda] \rightarrow \underline{r}$ είναι 1-1 και επί, τότε καθώς το s διατρέχει το $\{1, \dots, \mu_q\}$ τότε το $x(s, q)$ διατρέχει όλη την q -στήλη του T , αν το κάνουμε αυτό για κάθε $q = 1, \dots, \lambda_1$, τότε το $x(s, q)$ διατρέχει όλο το πίνακα του T , δηλαδή όλο το $\underline{r}$. Άρα επί της ουσίας στο γινόμενο $\left(\prod_{s=1}^{\mu_1} c_{i_{x(s,1)}j_{\sigma(x(s,1))}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\prod_{s=1}^{\mu_{\lambda_1}} c_{i_{x(s,\lambda_1)}j_{\sigma(x(s,\lambda_1))}} \right)$ βλέπουμε το γινόμενο των $c_{i_1(j\sigma)_1}, \dots, c_{i_r(j\sigma)_r}$ ενδεχομένως με άλλη σειρά, όμως η K^Γ είναι μεταθετική K -άλγεβρα, άρα έπεται η (4).

ii) Έστω ότι $i_{x(s_1, t_0)} = i_{x(s_2, t_0)}$ για κάποια t_0 , $s_1 \neq s_2$. Με τους συμβολισμούς του i) έχουμε ότι $(T_i : T_j) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det A_t$. Ας παρατηρήσουμε ότι $\det A_{t_0} = 0$ και έτσι έπεται το ζητούμενο.

$$\text{Πράγματι, εξ' ορισμού έχουμε ότι } A_{t_0} = \begin{pmatrix} c_{i_{x(1,t_0)}j_{x(1,t_0)}} & \dots & c_{i_{x(1,t_0)}j_{x(\mu_{t_0},t_0)}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i_{x(s_1,t_0)}j_{x(1,t_0)}} & \dots & c_{i_{x(s_1,t_0)}j_{x(\mu_{t_0},t_0)}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i_{x(s_2,t_0)}j_{x(1,t_0)}} & \dots & c_{i_{x(s_2,t_0)}j_{x(\mu_{t_0},t_0)}} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}. \text{ Ο } A_{t_0} \text{ έχει}$$

δύο διακεκριμένες γραμμές ίσες (τις s_1 και s_2), άρα $\det A_{t_0} = 0$.

□

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω $\lambda = (3, 2, 0) \in \Lambda^+(3, 5)$, $\mu = (2, 2, 1)$ (το conjugate) και $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{pmatrix}$ ένα basic λ -tableau. Αν $l, i \in I(3, 5)$ $\mu \in T_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \end{pmatrix}$, $T_i = \begin{pmatrix} a & d & f \\ b & e & \end{pmatrix}$. Τότε

$$\begin{aligned} (T_l : T_i) &= \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det((c_{l_{x(s,t)}i_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t}) = \\ &= |(c_{l_{x(s,1)}i_{x(s',1)}})_{s,s'=1,2}| \cdot |(c_{l_{x(s,2)}i_{x(s',2)}})_{s,s'=1,2}| \cdot |(c_{l_{x(s,3)}i_{x(s',3)}})_{s,s'=1}| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} c_{1a} & c_{1b} \\ c_{2a} & c_{2b} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} c_{1d} & c_{1e} \\ c_{2d} & c_{2e} \end{pmatrix} \right| \cdot |(c_{1f})| \in A_K(3, 5). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ (το conjugate), T ένα basic λ -tableaux.

Έστω επίσης $l \in I(n, r)$ $\mu \in T_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & & \\ 3 & 3 & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}$, δηλαδή $l_{x(s,t)} = s$ για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$.

Αν συμβολίσουμε $\mu \in C(m)$ τον $m \times m$ κύριο υποπίνακα του $C = (c_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1, \dots, n}$, τότε,

$$(T_l : T_l) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(C(\mu_t)).$$

Απόδειξη.

$$(T_l : T_l) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det((c_{l_{x(s,t)} l_{x(s',t)}})_{s,s'=1, \dots, \mu_t}) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det((c_{ss'})_{s,s'=1, \dots, \mu_t}) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(C(\mu_t)).$$

□

4.3 Το πρότυπο $D_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Σχόλιο. Ξεκινάμε με κάποιες υπενθυμίσεις από το 2.8 κεφάλαιο.

Υπενθύμιση 4.3.1. *i) Είδαμε στο κεφάλαιο 1 ότι το K^Γ είναι $K\Gamma$ -διπρότυπο με*

$$g \circ f = R_g f, \quad f \circ g = L_g f \quad \text{για κάθε } g \in \Gamma, \quad f \in K^\Gamma.$$

Μάλιστα αν $\phi : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma \times \Gamma}$ ο μονομορφισμός K -αλγεβρών (της Πρότασης 1.2.1), τότε για $\Delta f = \phi(\sum_i f_i \otimes h_i)$ έχουμε ότι $g \circ f = \sum_i h_i(g) f_i$ και $f \circ g = \sum_i f_i(g) h_i$.

ii) Έστω $c \in A_K(n, r)$ τότε $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, για κάποια $c_i, d_i \in A_K(n, r)$. (Πόρισμα 2.2.1).

Υπενθύμιση 4.3.2. *Έστω $A_K(n, r)$ ο K -υπόχωρος του K^Γ τότε:*

i) Το $A_K(n, r)$ είναι $K\Gamma$ -διπούποπρότυπο του K^Γ .

ii) Έστω $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, όπου $c_i, d_i \in A_K(n, r)$. Αν $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ και $\tilde{c}_i, \tilde{d}_i$ οι K -γραμμικές επεκτάσεις των c_i, d_i σε όλο $K\Gamma$, τότε $k \cdot c = \sum_i \tilde{d}_i(k) c_i$ και $c \cdot k = \sum_i \tilde{c}_i(k) d_i$.

Ιδιαίτερος, για κάθε $g \in \Gamma$, $i, j \in I(n, r)$, έχουμε $g \circ c_{i,j} = \sum_{s \in I(n, r)} c_{s,j}(g) c_{i,s}$ και $c_{i,j} \circ g = \sum_{s \in I(n, r)} c_{i,s}(g) c_{s,j}$.

iii) $A_K(n, r) \in M_K(n, r)$, $M'_K(n, r)$. Ιδιαίτερος $cf(A_K(n, r)) = A_K(n, r)$.

Πόρισμα 4.3.1. *Το $A_K(n, r)$ γίνεται $S_K(n, r)$ -διπρότυπο. Επιπλέον αν $\xi \in S_K(n, r)$ και $c \in A_K(n, r)$ με $\Delta(c) = \phi(\sum_i c_i \otimes d_i)$, (όπου $c_i, d_i \in A_K(n, r)$) τότε $\xi \circ c = \sum_i \xi(d_i) c_i$ και $c \circ \xi = \sum_i \xi(c_i) d_i$. Ιδιαίτερος, $\xi \circ c_{p,q} = \sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i,q}) c_{p,i}$, $c_{p,q} \circ \xi = \sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{p,i}) c_{i,q}$ για κάθε $p, q \in I(n, r)$, $\xi \in S_K(n, r)$.*

Απόδειξη.

Κάνουμε το ένα και το άλλο όμοια. Έστω $e : K\Gamma \longrightarrow S_K(n, r)$ επιμορφισμός K -αλγεβρών, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $e(k) \circ c = \sum_i e(k)(d_i) c_i$ για κάθε $k \in K\Gamma$. Πράγματι, έστω $k = \sum_g k_g g \in K\Gamma$ τότε $e(k) \circ c = \sum_g k_g (e(g) \circ c) = \sum_g k_g (g \circ c) = \sum_g k_g (\sum_i d_i(g) c_i) = \sum_i (\sum_g k_g d_i(g)) c_i = \sum_i e(k)(d_i) c_i$. $\square$

Ορισμός 4.3.1. *Ορίζουμε $l \in I(n, r)$ με $l(x(s, t)) = s$ για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$.*

Παρατήρηση 4.3.1. *i) Hl είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται από την επιλογή του $\text{basic } \lambda\text{-tableaux}$.*

$$ii) T_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & & \\ \vdots & & & & & \\ n & \cdots & n & & & \end{pmatrix}$$

iii) $l \in \lambda$ (σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1). Ιδιαίτερος $\xi_\lambda = \xi_{l,l} \in S_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Αν $r_1 = r_2$ τότε (επειδή $T = \text{επί}$) $\exists (s_1, t_1), (s_2, t_2) \in [\lambda]$ ώστε $x(s_1, t_1) = r_1 = r_2 = x(s_2, t_2)$, όμως $T = 1\text{-}1$ άρα $s_1 = s_2$ και $t_1 = t_2$. Συνεπώς, $l_{r_1} = l_{x(s_1, t_1)} = s_1 = s_2 = l_{x(s_2, t_2)} = l_{r_2}$.

$$ii) T_l = \begin{pmatrix} l_{x(1,1)} & l_{x(1,2)} & \cdots & l_{x(1,t)} & \cdots & l_{x(1,\lambda_1)} \\ l_{x(2,1)} & l_{x(2,2)} & \cdots & l_{x(2,\lambda_2)} & & \\ \vdots & & & & & \\ l_{x(n,1)} & \cdots & l_{x(n,\lambda_n)} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & & \\ \vdots & & & & & \\ n & \cdots & n & & & \end{pmatrix}$$

iii) Από ii) και το γεγονός ότι $T : [\lambda] \rightarrow \underline{r}$ είναι 1-1 και επί, έπεται άμεσα το ζητούμενο.

□

Ορισμός 4.3.2. Ορίζουμε $D_{\lambda,K} := \text{span}_K(\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r)\})$ και είναι K -υπόχωρο του $A_K(n, r)$.

Παρατήρηση 4.3.2. *i) Το $D_{\lambda,K}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του $\text{basic } \lambda\text{-tableaux}$.*

ii) Έστω $j \in I(n, r)$, τότε $\xi \circ (T_l : T_j) = \sum_{i \in I} \xi(c_{i,j})(T_l : T_i)$ για κάθε $\xi \in S_K(n, r)$

iii) Το $D_{\lambda,K}$ είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο ($\iff K\Gamma$ -υποπρότυπο) του $A_K(n, r)$. Ιδιαίτερος, $D_{\lambda,K} \in \text{mod}(S_K(n, r)) \iff D_{\lambda,K} \in M_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Έστω T, T' δύο $\text{basic } \lambda\text{-tableaux}$ και $l, l' \in I(n, r)$ με $l_{x(s,t)} = s$ και $l'_{x'(s,t)} = s$ για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ (όπου $T(s, t) = x(s, t)$ και $T'(s, t) = x'(s, t)$). Έστω επίσης τα:

$$D_{\lambda,K} = \text{span}_K(\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r)\}) \text{ και } D'_{\lambda,K} = \text{span}_K(\{(T'_{l'} : T'_i) \mid i \in I(n, r)\}).$$

Θα δείξουμε ότι $D_{\lambda,K} \subseteq D'_{\lambda,K}$ και όμοια ο άλλος εγκλεισμός. Πράγματι, επειδή T, T' είναι 1-1 και επί, τότε υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $T' = \pi \circ T$ (*) (συγκεκριμένα $\pi = T' \circ T^{-1}$). Τώρα για κάθε $j \in I(n, r)$ έχουμε:

$$T'_j = j \circ T' = j \circ (\pi \circ T) = (j \circ \pi) \circ T = (j \cdot \pi) \circ T = T_{j\pi}.$$

Συνεπώς, $T'_j = T_{j\pi}$ για κάθε $j \in I(n, r)$, όποτε (για $j\pi^{-1}$ στη θέση του j) έχουμε και $T'_{j\pi^{-1}} = T_j$ (**). Επιπλέον ισχύει ότι $l' = l\pi^{-1}$, πράγματι, για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ έχουμε:

$$l'(x'(s, t)) = s = l(x(s, t)) \stackrel{(*)}{=} l(\pi^{-1}(x'(s, t)))$$

Συνεπώς, $l' \circ T' = (l\pi^{-1}) \circ T' \iff l' = l\pi^{-1} (***)$. Τέλος, για κάθε $i \in I(n, r)$ έχουμε:

$$(T_l : T_i) \stackrel{(**)}{=} (T'_{l\pi^{-1}} : T'_{i\pi^{-1}}) \stackrel{(***)}{=} (T'_{l'} : T'_{i\pi^{-1}}) \in D'_{\lambda, K}.$$

Οπότε εξ' ορισμού του $D_{\lambda, K}$ πρέπει $D_{\lambda, K} \subseteq D'_{\lambda, K}$.

ii) Έστω $\xi \in S_K(n, r)$ και $i \in I(n, r)$, τότε:

$$\begin{aligned} \xi \circ (T_l : T_j) &= \xi \circ \left(\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l\sigma, j} \right) = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) (\xi \circ c_{l\sigma, j}) = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \left(\sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i, j}) c_{l\sigma, i} \right) = \\ &= \sum_{i \in I(n, r)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \xi(c_{i, j}) c_{l\sigma, i} = \sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i, j}) \left(\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l\sigma, i} \right) = \sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i, j}) (T_l : T_i). \end{aligned}$$

iii) Το ότι το $D_{\lambda, K}$ είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $A_K(n, r)$ είναι άμεσο από ii). Επίσης, $\dim_K D_{\lambda, K} \leq \dim_K A_K(n, r) < \infty$, άρα $D_{\lambda, K} \in \text{mod}(S_K(n, r)) \iff D_{\lambda, K} \in M_K(n, r)$.

□

Πρόταση 4.3.1. Υπάρχει επιμορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων ($\iff$ $K\Gamma$ -προτύπων):

$$\varphi_K : E^{\otimes r} \longrightarrow D_{\lambda, K}, \quad \mu \varphi_K(e_j) = (T_l : T_j) \quad \forall j \in I(n, r).$$

Για συντομία θα γράφουμε $\varphi_K = \varphi$.

Απόδειξη.

Ξέρουμε ότι το $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$ (βλέπε Υπενθύμιση 2.6.1). Ορίζουμε,

$$f : \{e_i\}_{i \in I(n, r)} \longrightarrow D_{\lambda, K}, \quad e_i \longmapsto (T_l : T_i).$$

και την επεκτείνουμε σε K -γραμμική έστω $\varphi : E^{\otimes r} \longrightarrow D_{\lambda, K}$ η οποία είναι επί (γιατί $D_{\lambda, K} = \text{span}_K(\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r)\})$). Θα δείξουμε ότι η φ είναι ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων. Πράγματι, έστω $\xi \in S_K(n, r)$ και $x = \sum_{j \in I(n, r)} k_j e_j \in E^{\otimes r}$, όπου $k_j \in K$, τότε,

$$\varphi(\xi \cdot e_j) = \varphi\left(\sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i, j}) e_i\right) = \sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i, j}) \varphi(e_i) = \sum_{i \in I(n, r)} \xi(c_{i, j}) (T_l : T_i) = \xi \circ (T_l : T_j) = \xi \circ \varphi(e_j).$$

Συνεπώς, $\varphi(\xi \cdot e_j) = \xi \circ \varphi(e_j)$ για κάθε $j \in I(n, r)$. Τώρα επειδή η φ είναι K -γραμμική, έχουμε,

$$\varphi(\xi \cdot x) = \sum_{i \in I(n,r)} k_i \varphi(\xi \cdot e_i) = \sum_{i \in I(n,r)} k_i (\xi \circ \varphi(e_j)) = \xi \circ \varphi(\sum_{i \in I(n,r)} k_i e_j) = \xi \cdot \varphi(x).$$

□

Σχόλιο. Παρακάτω παραθέτουμε δύο σημαντικά παραδείγματα τα οποία στην επόμενη παράγραφο θα μας δώσουν κίνητρο για την εύρεση K-βάσης του $D_{\lambda,K}$.

Παράδειγμα 4.3.1. Έστω $\lambda = (r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$ και ορίζουμε για basic λ -tableaux το $T = (x(1, 1) \dots x(1, r)) = (1 \ 2 \dots r)$ (συμβολικά θα γράφουμε $D_{\lambda,K} := D_{r,K}$). Τότε,

- i) $T_l = (1 \dots 1)$, $T_i = (i_1 \dots i_r)$, $(T_l : T_i) = c_{1i_1} \cdot \dots \cdot c_{1i_r}$ για κάθε $i \in I(n, r)$ (συμβολικά: $c_{1i_1} \cdot \dots \cdot c_{1i_r} = c_{1,i}$, όπου $1 \in I(n, r)$ με $1(p) = 1$ για κάθε $p \in \underline{r}$).
- ii) Αν $\mathcal{T}_o = \text{σύνολο αντιπροσώπων } G(r)\text{-τροχιών της δεξιάς δράσης της } G(r) \text{ στο } I(n, r)$ τότε το $\{(T_l : T_i) \mid i \in \mathcal{T}_o\}$ αποτελεί K-βάση του $D_{r,K}$.
- iii) Υπάρχει $\phi : D_{r,K} \longrightarrow D_r(E)$ ισομορφισμός KΓ-προτύπων ($\Longleftrightarrow S_K(n, r)$ -προτύπων) ώστε $\phi((T_l : T_i)) = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.

Απόδειξη.

- i) $T_l = (l_{x(1,1)} \dots l_{x(1,r)}) = (1 \dots 1)$ και $T_i = (i_{x(1,1)} \dots i_{x(1,r)}) = (i_1 \dots i_r)$. Επιπλέον, το $\mu = (\underbrace{1, \dots, 1}_r)$ είναι το conjugate partition του λ και από Πρόταση 4.2.1 έχουμε,

$$(T_l : T_i) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det((c_{l_{x(s,t)} i_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t}) = \prod_{t=1}^r \det((c_{l_{x(1,t)} i_{x(1,t)}})) = \prod_{t=1}^r \det((c_{1i_t})) = c_{1i_1} \cdot \dots \cdot c_{1i_r}.$$

- ii) Αν $1 \in I(n, r)$ με $1(i) = 1$ για κάθε $i \in \underline{r}$, τότε $D_{r,K} \stackrel{i)}{=} \text{span}_K(\{c_{1,i} \mid i \in I(n, r)\})$. Επιπλέον, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ ισχύει, $(1, i) \sim (1, j) \Longleftrightarrow i \sim j$ (αυτό γιατί $1 \cdot \pi = 1$ για κάθε $\pi \in G(r)$). Συνεπώς,

$$c_{1,i} = c_{1,j} \Longleftrightarrow (1, i) \sim (1, j) \Longleftrightarrow i \sim j, \forall i, j \in I(n, r). (*)$$

Άρα, $D_{r,K} = \text{span}_K(\{c_{1,i} \mid i \in \mathcal{T}_o\})$. Επίσης, από (*) και ορισμό του $\mathcal{T}_o$, έχουμε ότι τα $\{c_{1,i}\}_{i \in \mathcal{T}_o}$ είναι διακεκριμένα ανά δύο, άρα (από Παρατήρηση 2.1.1 ii)) το σύνολο $\{c_{1,i}\}_{i \in \mathcal{T}_o}$ είναι και K-γραμμικά ανεξάρτητο.

- iii) Καταρχάς υπενθυμίζουμε ότι το $D_r(E)$ έχει K-βάση το $\{e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid i \in \mathcal{T}_o\}$ και coefficient functions ως προς αυτή τη βάση, τα $\{r_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{T}_o}$, όπου $r_{ij} = \sum_{k \sim i} c_{k,j}$ (βλέπε Υπενθύμιση 2.6.3). Τώρα, $\dim_K D_r(E) = \dim_K D_{r,K}$ με K-βάσεις $\{e_{i_1} \cdots e_{i_r}\}_{i \in \mathcal{T}_o}$, $\{c_{1,i}\}_{i \in \mathcal{T}_o}$, αντίστοιχα, άρα έπεται ένας ισομορφισμός K-προτύπων $\phi : D_{r,K} \longrightarrow D_r(E)$, με $\phi(c_{1,i}) = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ για κάθε $i \in \mathcal{T}_o$.

Ισχυρισμός.

- 1) $\phi(c_{1,i}) = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.
- 2) $H \phi$ είναι ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων.

Απόδειξη(Ισχυρισμού). Καταρχάς, είδαμε στο ii) ότι $c_{1,i} = c_{1,j} \iff i \sim j$ (**). Οπότε,

- 1) Αν $i \in I(n, r)$ τότε υπάρχει (μοναδικό) $j \in \mathcal{T}_o$ ώστε $i \sim j$ (αφού $\mathcal{T}_o$ =σύνολο αντιπροσώπων), άρα $c_{1,i} = c_{1,j}$ και $e_{i_1} \cdots e_{i_r} = e_{j_1} \cdots e_{j_r}$ (βλέπε Υπενθύμιση 2.6.3). Συνεπώς,

$$\phi(c_{1,i}) = \phi(c_{1,j}) \xrightarrow{j \in \mathcal{T}_o} e_{j_1} \cdots e_{j_r} = e_{i_1} \cdots e_{i_r}.$$

- 2) Έστω $\xi \in S_K(n, r)$ και $x = \sum_{j \in \mathcal{T}_o} k_j c_{1,j} \in D_{r,K}$, $k_j \in K$. Τότε,

$$\begin{aligned} \phi(\xi \circ c_{1,j}) &= \phi\left(\sum_{i \in I(n,r)} \xi(c_{i,j}) c_{1,i}\right) \stackrel{(**)}{=} \phi\left(\sum_{i \in \mathcal{T}_o} \left(\sum_{k \sim i} \xi(c_{k,j})\right) c_{1,i}\right) = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \left(\sum_{k \sim i} \xi(c_{k,j})\right) e_{i_1} \cdots e_{i_r} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \left(\xi\left(\sum_{k \sim i} c_{k,j}\right)\right) e_{i_1} \cdots e_{i_r} = \sum_{i \in \mathcal{T}_o} \xi(r_{ij}) e_{i_1} \cdots e_{i_r} = \xi \cdot (e_{j_1} \cdots e_{j_r}) = \xi \cdot \phi(c_{1,j}). \end{aligned}$$

Άρα, $\phi(\xi \circ c_{1,j}) = \xi \cdot \phi(c_{1,j})$ για κάθε $j \in \mathcal{T}_o$. Τώρα επειδή η ϕ είναι K -γραμμική έχουμε,

$$\phi(\xi \circ x) = \sum_{j \in \mathcal{T}_o} k_j \phi(\xi \circ c_{1,j}) = \sum_{j \in \mathcal{T}_o} k_j (\xi \cdot \phi(c_{1,j})) = \xi \cdot \phi\left(\sum_{j \in \mathcal{T}_o} k_j c_{1,j}\right) = \xi \cdot \phi(x).$$

□

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω $r \leq n$, $\lambda = \underbrace{(1, \dots, 1)}_r, 0, \dots, 0 \in \Lambda^+(n, r)$ και ορίζουμε για *basic* λ -tableaux

$$\text{το } T = \begin{pmatrix} x(1,1) \\ \vdots \\ x(r,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ r \end{pmatrix} \text{ (συμβολικά θα γράφουμε } D_{\lambda,K} := D_{(1)^r,K}). \text{ Τότε,}$$

$$i) \ T_l = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}, \ T_i = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{pmatrix}, \ (T_l : T_i) = \det((c_{si_{s'}})_{s,s'=1,\dots,r}) \text{ για κάθε } i \in I(n, r). \text{ Ιδιαίτερος,}$$

$$l(s) = s, \ \forall s \in \underline{r}.$$

ii) Το $\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), \ i \nearrow\}$ αποτελεί K -βάση του $D_{(1)^r,K}$ (όπου το $\nearrow$ σημαίνει γνησίως αύξουσα συνάρτηση).

iii) Υπάρχει $\phi : D_{(1)^r,K} \longrightarrow \Lambda^r E$ ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων ($\iff S_K(n, r)$ -προτύπων) ώστε, $\phi((T_l : T_i)) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Αν $\mu = (r)$ το conjugate partition του λ , τότε,

$$(T_l : T_i) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det((c_{l_{x(s,t)} i_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t}) = \det((c_{l_{x(s,1)} i_{x(s',1)}})_{s,s'=1,\dots,r}) = \det((c_{s i_{s'}})_{s,s'=1,\dots,r})$$

ii) Καταρχάς, $(T_l : T_i) = 0$ αν i όχι 1-1 (αυτό γιατί αν i όχι 1-1, τότε ο T_i που είναι μία στήλη, θα έχει δύο ίδια στοιχεία σε διαφορετικές θέσεις, άρα από Πρόταση 4.2.1 έπεται $(T_l : T_i) = 0$). Άρα $D_{(1)^r, K} = \text{span}_K \{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), i \text{ 1-1}\} (*)$. Επίσης, εξ' ορισμού του T πρέπει $C(T) = G(r)$. Οπότε, αν $i \sim j$, τότε υπάρχει $\pi \in G(r) = C(T)$ ώστε $i = j \cdot \pi$ και από Παρατήρηση 4.2.1 έχουμε, $(T_l : T_i) = s(\pi) \cdot (T_l : T_j) (**)$. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι αν $i = 1-1$ τότε η τροχιά $[i]_{G(r)}$ περιέχει ακριβώς μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση (βλέπε Λήμμα 3.2.1) (***)).

Από (*), (**) και (***) έχουμε ότι $D_{(1)^r, K} = \text{span}_K \{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r) i \nearrow\}$. Μένει να δείξουμε την K-γραμμική ανεξαρτησία. Πράγματι, θέτουμε $I^* := \{i \in I(n, r) \mid i \nearrow\}$ και έστω $\{k_i\}_{i \in I^*} \subseteq K$ ώστε $\sum_{i \in I^*} k_i (T_l : T_i) = 0 \xLeftrightarrow{C(T)=G(r)} \sum_{i \in I^*} \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) k_i c_{l, i\sigma} = 0$, τότε,

Ισχυρισμός.

- 1) $c_{l, i\sigma} \neq c_{l, j\sigma'}, \forall \sigma, \sigma' \in G(r)$ και $\forall i, j \in I^*$ με $i \neq j$.
- 2) $c_{l, i\sigma} \neq c_{l, i\sigma'}, \forall \sigma, \sigma' \in G(r)$ με $\sigma \neq \sigma'$ και $\forall i \in I^*$.

Απόδειξη(Ισχυρισμού).

- 1) Έστω για άτοπο, $i, j \in I^*$ με $i \neq j$ και $\sigma, \sigma' \in G(r)$ ώστε $c_{l, i\sigma} = c_{l, j\sigma'}$, τότε $(l, i\sigma) \sim (l, j\sigma')$, άρα $i\sigma \sim j\sigma' \iff i \sim j$, άτοπο από (***)).
- 2) Έστω για άτοπο, $\sigma, \sigma' \in G(r)$ με $\sigma \neq \sigma'$ και $i \in I^*$, ώστε $c_{l, i\sigma} = c_{l, i\sigma'}$, τότε υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $l = l\pi$ και $i\sigma = i\sigma'\pi$. Τώρα από i) έχουμε ότι $l(s) = (l\pi)(s) \iff s = \pi(s)$ για κάθε $s \in \underline{r}$, οπότε $\pi = 1_{G(r)}$, άρα,

$$i\sigma = i\sigma' \iff i = i\sigma'\sigma^{-1} \xLeftrightarrow{i \in I^*} \sigma'\sigma^{-1} = 1 \iff \sigma = \sigma'.$$

Το τελευταίο είναι άτοπο και έτσι έπεται το ζητούμενο. (Ας σημειωθεί επίσης ότι, στις ισοδυναμίες πάνω χρησιμοποιήσαμε το εξής: Αν $i \in I(n, r)$, $\sigma \in G(r)$ ώστε $i, i\sigma$ να είναι γνησίως αύξουσες, τότε $\sigma = 1$.)

Τέλος, με βάση τον ισχυρισμό έχουμε ότι τα $\{c_{l, i\sigma}\}_{i \in I^*, \sigma \in G(r)}$ είναι διακεκριμένα ανά δύο, άρα από Παρατήρηση 2.1.1 i), είναι K-γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπώς $k_i = 0$ για κάθε $i \in I^*$.

iii) Καταρχάς υπενθυμίζουμε ότι το $\Lambda^r E$ έχει K-βάση το $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in I^*\}$ (βλέπε Παράδειγμα 3.2.1 i)), όπου $I^* = \{i \in I(n, r) \mid i \nearrow\}$ και coefficient functions ως προς αυτή τη βάση, τα $\{r_{ij}\}_{i, j \in I^*}$, όπου $r_{ij} = \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) c_{i\sigma, j}$ (βλέπε Υπενθύμιση 2.6.3). Τώρα, $\dim_K \Lambda^r E = \dim_K D_{(1)^r, K}$ με K-βάσεις $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}_{i \in I^*}$, $\{(T_l : T_i)\}_{i \in I^*}$, αντίστοιχα, άρα έπεται ένας ισομορφισμός K-προτύπων $\phi : D_{(1)^r, K} \longrightarrow \Lambda^r E$, με $\phi((T_l : T_i)) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ για κάθε $i \in I^*$.

Ισχυρισμός.

- 1) $\phi((T_l : T_i)) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.
- 2) $H \phi$ είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων.

Απόδειξη(Ισχυρισμού).

- 1) Έστω $i \in I(n, r)$. Αν i όχι 1-1, τότε $(T_l : T_i) = 0$ και $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = 0$ (βλέπε Ορισμό 2.6.4 ii), άρα $\phi((T_l : T_i)) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = 0$. Ενώ, αν i είναι 1-1, τότε από Λήμμα 3.2.1 ii), υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $i\pi \nearrow \iff i\pi \in I^*$, τότε όμως,

$$\begin{aligned} \phi((T_l : T_i)) &= \phi((T_l : T_{i\pi\pi^{-1}})) \xrightarrow{\pi^{-1} \in G(r)=C(T)} \phi(s(\pi^{-1})(T_l : T_{i\pi})) \stackrel{i\pi \in I^*}{=} \\ &s(\pi^{-1})e_{i_{\pi(1)}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\pi(r)}} \xrightarrow{\text{Υπενθύμιση 2.6.3}} s(\pi^{-1})s(\pi)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \end{aligned}$$

Τελικά, $\phi((T_l : T_i)) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ για κάθε $i \in I(n, r)$.

- 2) Θα δείξουμε ότι η $\psi := \phi^{-1} : \Lambda^r E \longrightarrow D_{(1)r,K}$, είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων. Επειδή η ψ είναι ομομορφισμός K -προτύπων και τα $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid i \in I^*\}$, Γ είναι K -βάσεις των $\Lambda^r E$, $K\Gamma$ αντίστοιχα, αρκεί να δείξουμε ότι $\psi(g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})) = g \circ \psi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})$, για κάθε $i \in I^*$, $g \in \Gamma$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \psi(g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})) &= \psi \left(\sum_{i \in I^*} r_{ij}(g)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \right) = \\ &\psi \left(\sum_{i \in I^*} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i\sigma,j}(g) \right) (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \right) = \sum_{i \in I^*} \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i\sigma,j}(g)(T_l : T_i) \xrightarrow{C(T)=G(r)} \\ &\sum_{i \in I^*} \sum_{\sigma \in G(r)} \sum_{\pi \in G(r)} s(\sigma)s(\pi)c_{i\sigma,j}(g)c_{l,i\pi} = \sum_{i \in I^*} \sum_{\pi \in G(r)} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)s(\pi)c_{i\sigma,j}(g) \right) c_{l,i\pi} \stackrel{(*)}{=} \\ &\sum_{i \in I^*} \sum_{\pi \in G(r)} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma^{-1}\pi)c_{i\pi,j\sigma^{-1}\pi}(g) \right) c_{l,i\pi} = \sum_{i \in I^*} \sum_{\pi \in G(r)} \left(\sum_{\tau \in G(r)} s(\tau)c_{i\pi,j\tau}(g) \right) c_{l,i\pi}. \end{aligned}$$

Όπου η $(*)$ ισχύει γιατί $(i\sigma, j) \sim (i\pi, j\sigma^{-1}\pi)$ και $s(\sigma) = s(\sigma^{-1})$. Από την άλλη έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} g \circ \psi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) &= g \circ (T_l : T_j) \stackrel{i}{=} g \circ \det((c_{sj_{s'}})_{s,s'=1,\dots,r}) = \\ &g \circ \left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \prod_{s=1}^r c_{sj_{\pi(s)}} \right) \xrightarrow{l(s)=s} g \circ \left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)c_{l,j\pi} \right) = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)(g \circ c_{l,j\pi}) = \\ &\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \left(\sum_{i \in I(n,r)} c_{i,j\pi}(g)c_{l,i} \right) = \sum_{i \in I(n,r)} \left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)c_{i,j\pi}(g) \right) c_{l,i} = \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in I(n,r)} (T_i : T_j)(g) c_{l,i} \stackrel{(**)}{=} \sum_{i \in I(n,r), i \neq 1} (T_i : T_j)(g) c_{l,i} \stackrel{(***)}{=} \sum_{i \in I^*} \sum_{\pi \in G(r)} (T_{i\pi} : T_j)(g) c_{l,i\pi} \stackrel{G(r)=C(T)}{=} \\ \sum_{i \in I^*} \sum_{\pi \in G(r)} \left(\sum_{\tau \in G(r)} s(\tau) c_{i\pi, j\tau}(g) \right) c_{l,i\pi}.$$

Αιτιολόγηση της (**): Από i) έχουμε ότι $T_i = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{pmatrix}$, άρα από Πρόταση 4.2.1 έπεται

άμεσα το ζητούμενο.

Αιτιολόγηση της (* * *): Από Λήμμα 3.2.1 έχουμε ότι $\{i \in I(n,r) \mid i \neq 1\} = \bigsqcup_{i \in I^*} [i]_{G(r)}$,

επιλέον για κάθε $i \in I^*$ έχουμε $[i]_{G(r)} = \{i \cdot \pi \mid \pi \in G(r)\}$ και $i\pi \neq i\sigma$ για κάθε $\pi, \sigma \in G(r)$ με $\pi \neq \sigma$ (αυτό γιατί, αν $i\pi = i\sigma$, τότε $i = i\sigma\pi^{-1}$, δηλαδή οι $i, i\sigma\pi^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσες και έτσι αναγκαστικά πρέπει $\sigma\pi^{-1} = 1 \iff \sigma = \pi$, άτοπο).

Από αυτά που δείξαμε, έπεται ότι $\psi(g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})) = g \circ \psi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})$, για κάθε $i \in I^*$, $g \in \Gamma$.

□

Σχόλιο. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή, με την μελέτη του δεξιού λ -weight space ${}^\lambda A_K(n,r) = A_K(n,r) \circ \xi_\lambda$ και την σύνδεση του με το $D_{\lambda,K}$.

Παρατήρηση 4.3.3. Έστω ${}^\lambda A_K(n,r) := A_K(n,r) \circ \xi_\lambda$, ο δεξιός λ -weight space τότε,

$$i) \quad c_{i,j} \circ \xi_\lambda = c_{i,j} \circ \xi_{l,l} = \begin{cases} c_{i,j}, & i \in \lambda \iff i \sim l \\ 0, & i \notin \lambda \iff i \approx l \end{cases}, \text{ για κάθε } i, j \in I(n,r).$$

$$ii) \quad c_{i,j} \in {}^\lambda A_K(n,r) \iff i \in \lambda, \text{ για κάθε } i, j \in I(n,r).$$

iii) Το $\{c_{i,j} \mid i \in \lambda, (i,j) \in \mathcal{T}\}$ είναι K -βάση του ${}^\lambda A_K(n,r)$ (όπου υπενθυμίζουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι όπως στον Ορισμό 2.1.2). Ιδιαίτέρως, ${}^\lambda A_K(n,r) = \text{span}_K \{c_{l,i} \mid i \in I(n,r)\}$.

iv) Το ${}^\lambda A_K(n,r)$ είναι αριστερό $S_K(n,r)$ -πρότυπο ($\iff K\Gamma$ -πρότυπο). Ιδιαίτέρως, ${}^\lambda A_K(n,r) \in \text{mod}(S_K(n,r)) \iff {}^\lambda A_K(n,r) \in M_K(n,r)$.

Απόδειξη.

i) Έστω $i, j \in I(n,r)$, τότε,

$$c_{i,j} \circ \xi_{l,l} = \sum_{s \in I(n,r)} \xi_{l,l}(c_{i,s}) c_{s,j} \stackrel{(*)}{=} \xi_{l,l}(c_{i,i}) c_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & i \in \lambda \iff i \sim l \\ 0 & i \notin \lambda \iff i \approx l \end{cases}.$$

Όπου η $(*)$ ισχύει άμεσα από Ορισμό 2.3.2 και Παρατήρηση 2.1.1 iv).

ii) Έστω $i, j \in I(n, r)$. Αν $i \in \lambda$ τότε από i) έχουμε ότι $c_{i,j} = c_{i,j} \circ \xi_\lambda \in {}^\lambda A_K(n, r)$. Ανάποδα, αν $c_{i,j} \in {}^\lambda A_K(n, r)$, τότε $c_{i,j} = c \circ \xi_\lambda$, όπου $c \in A_K(n, r)$, άρα από Πρόταση 2.3.3 iv) b) πρέπει,

$$c_{i,j} \circ \xi_\lambda = (c \circ \xi_\lambda) \circ \xi_\lambda = c \circ \xi_\lambda = c_{i,j}$$

Άρα από i) και το γεγονός ότι $c_{i,j} \neq 0$, πρέπει $i \in \lambda$.

iii) ${}^\lambda A_K(n, r) = \text{span}_K\{c_{i,j} \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\}$: Ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι άμεσος από i). Ανάποδα, έστω $c \in {}^\lambda A_K(n, r)$, τότε από Πρόταση 2.1.2, $c = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} c_{i,j}$, όπου $k_{i,j} \in K$. Τώρα (επειδή $c \in {}^\lambda A_K(n, r)$) άμεσα (από Πρόταση 2.3.3 iv) b)) βλέπουμε ότι $c = c \circ \xi_\lambda$ και άρα,

$$c = c \circ \xi_\lambda \iff c = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} (c_{i,j} \circ \xi_\lambda) \xrightarrow{i)} c = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}, i \in \lambda} k_{i,j} c_{i,j}$$

$\{c_{i,j} \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\} = K$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Άμεσο αφού είναι υποσύνολο του K -γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\{c_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$ (βλέπε Πρόταση 2.1.2).

Όσο για το δεύτερο σκέλος, από ii) έπεται άμεσα ότι $\text{span}_K\{c_{l,i}\}_{i \in I(n, r)} \subseteq {}^\lambda A_K(n, r)$. Ανάποδα, αν $(i, j) \in \mathcal{T}$ με $i \in \lambda$, τότε $i \sim l$, οπότε υπάρχει $\pi_i \in G(r)$ ώστε $i\pi_i = l$, συνεπώς $c_{i,j} = c_{i\pi_i, j\pi_i} = c_{l, j\pi_i} \in \text{span}_K\{c_{l,i}\}_{i \in I(n, r)}$. Από το τελευταίο έπεται ότι ${}^\lambda A_K(n, r) \subseteq \text{span}_K\{c_{l,i}\}_{i \in I(n, r)}$.

iv) Καταρχάς $\dim_K {}^\lambda A_K(n, r) < \infty$ (ως K -υπόχωρος του $A_K(n, r)$). Επίσης, επειδή ${}^\lambda A_K(n, r) = A_K(n, r) \circ \xi_\lambda$ και $A_K(n, r) = \text{αριστερό}(KT, KT)$ -διπρότυπο $\iff (S_K(n, r), S_K(n, r))$ -διπρότυπο, έπεται άμεσα ότι ${}^\lambda A_K(n, r) = S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $A_K(n, r)$. Από τα τελευταία έχουμε ${}^\lambda A_K(n, r) \in \text{mod}(S_K(n, r)) \iff {}^\lambda A_K(n, r) \in M_K(n, r)$.

□

Σχόλιο. Ας σημειωθεί ότι το ${}^\lambda A_K(n, r)$ είναι αριστερό, αλλά όχι δεξιό $S_K(n, r)$ -πρότυπο. Παρόμοια το $A_K(n, r)^\lambda$ είναι δεξιό, αλλά όχι αριστερό $S_K(n, r)$ -πρότυπο.

Πρόταση 4.3.2. $D_{\lambda, K} \subseteq {}^\lambda A_K(n, r)$, KT -υποπρότυπο ($\iff S_K(n, r)$ -υποπρότυπο).

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $(T_l : T_i) \in {}^\lambda A_K(n, r)$ για κάθε $i \in I(n, r)$. Το τελευταίο όμως είναι σαφές από προηγούμενη παρατήρηση, καθώς $(T_l : T_i) = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l, i\sigma}$.

□

4.4 Το Θεώρημα βάσης για το πρότυπο $D_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Στη παράγραφο αυτή, θα διατυπώσουμε το Θεώρημα βάσης για το πρότυπο $D_{\lambda,K}$ και θα αποδείξουμε μόνο το πρώτος μέρος αυτού (που είναι η γραμμική ανεξαρτησία). Προτού όμως ξεκινήσουμε, ας δούμε πως μπορείς να οδηγηθεί κανείς σε αυτό το θεώρημα.

Κίνητρο. Στη παράγραφο 4.3 είδαμε τα εξής δύο παραδείγματα,

- i) Το $D_{r,K}$ έχει K -βάση το σύνολο $\{(T_l : T_i) \mid i \in \mathcal{T}_o\}$, όπου $\mathcal{T}_o =$ σύνολο αντιπροσώπων δεξιών $G(r)$ -τροχιών και $T_i = (i_1, \dots, i_r)$. Επιπλέον, κάθε $G(r)$ -τροχιά περιέχει (ακριβώς) μία αύξουσα συνάρτηση (προσοχή, όχι κατ' ανάγκη γνησίως αύξουσα), άρα μπορούμε να θέσουμε $\mathcal{T}_o = \{i \in I(n, r) \mid i \text{ αύξουσα}\}$. Συνεπώς, το $D_{r,K}$ έχει K -βάση το $\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r) \text{ και } i \text{ αύξουσα}\}$. Συμβολικά, θα λέμε ότι έχει K -βάση το σύνολο,

$$\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i = (i_1 \leq \dots \leq i_r)\}.$$

- ii) Αν $r \leq n$, τότε το $D_{(1)^r, K}$ έχει K -βάση το $\{(T_l : T_i) \mid i \in I^*\}$, όπου $I^* = \{i \in I(n, r) \mid i \text{ γνησίως αύξουσα}\}$ και $T_i = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{pmatrix}$. Συμβολικά θα λέμε ότι έχει K -βάση το σύνολο

$$\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i = \begin{pmatrix} i_1 \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ i_r \end{pmatrix}\}.$$

Σχόλιο. Με βάση τα δύο παραπάνω παραδείγματα, αναγόμαστε στην έννοια του *standard λ -tableaux* και στην συνέχεια στη διατύπωση του θεωρήματος βάσης για το $D_{\lambda,K}$.

Ορισμός 4.4.1. Έστω $i \in I(n, r)$, θα λέμε ότι το λ -tableaux T_i είναι *standard*, αν κάθε γραμμή του είναι αύξουσα (από αριστερά προς τα δεξιά) και κάθε στήλη του είναι γνησίως αύξουσα (από πάνω προς τα κάτω).

Θεώρημα 4.4.1. (Βάσης του $D_{\lambda,K}$). Το $D_{\lambda,K}$ έχει K -βάση το σύνολο $\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i \text{ standard}\}$.

Λήμμα 4.4.1. i) Έστω $\pi \in G(r)$, τότε, $l\pi = l \iff \pi \in R(T)$.

ii) Έστω $i, j \in I(n, r)$, τότε, $c_{l,i} = c_{l,j} \iff \exists \pi \in R(T) \text{ με } T_i = T_{j\pi} (\iff i = j\pi)$.

Απόδειξη.

i) ($\implies$). Έστω $l\pi = l$, τότε για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$, αν $\pi(x(s, t)) = x(s', t')$ έχουμε,

$$l\pi(x(s, t)) = l(x(s, t)) \iff l(x(s', t')) = s \iff s' = s.$$

Συνεπώς, $\pi(x(s, t)) = x(s, t')$ για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$, άρα $\pi \in R(T)$.

($\impliedby$). Έστω $\pi \in R(T)$, τότε για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ έχουμε,

$$l(\pi(x(s, t))) \stackrel{\pi \in R(T)}{=} l(x(s, t')) = s = l(x(s, t)).$$

Άρα $l\pi \circ T = l \circ T$, όμως $T = 1-1$ και επί, άρα $l\pi = l$.

ii) Έστω $i, j \in I(n, r)$ τότε,

$$\begin{aligned} c_{l,i} = c_{l,j} &\iff (l, i) \sim (l, j) \iff \exists \pi \in G(r) \text{ ώστε } l\pi = l \text{ και } i\pi = j \stackrel{i}{\iff} \\ &\exists \pi \in R(T) \text{ ώστε } i\pi = j \iff i\pi \circ T = j \circ T \iff T_{i\pi} = T_j. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 4.4.2. Έστω $i \in I(n, r)$, τότε θέτουμε $\beta(i) = (\beta_1(i), \dots, \beta_n(i))$, όπου $\beta_s(i) =$ το άθροισμα της s -γραμμής του T_i (δηλαδή, $\beta_s(i) = \sum_{t=1}^{\lambda_s} i_{x(s,t)}$).

Υπενθύμιση 4.4.1. Το σύνολο $\mathbb{N}^n$ διατάσσεται ολικά, μέσω της λεξικογραφικής διάταξης:

$$(a_1, \dots, a_n) > (b_1, \dots, b_n) \iff \text{η πρώτη μη-μηδενική ποσότητα } (a_i - b_i) \text{ είναι θετική.}$$

Λήμμα 4.4.2. Έστω $i, j \in I(n, r)$ τότε,

i) Αν $\pi \in R(T)$, τότε $\beta(i\pi) = \beta(i)$.

ii) Αν $c_{l,i} = c_{l,j}$, τότε $\beta(i) = \beta(j)$. Δηλαδή, αν $\beta(i) \neq \beta(j)$, τότε $c_{l,i} \neq c_{l,j}$.

iii) Αν T_i standard και $1 \neq \pi \in C(T)$, τότε $\beta(i\pi) > \beta(i)$.

Απόδειξη.

i) Έστω $\pi \in R(T)$ τότε $\pi(\{x(s, 1), \dots, x(s, \lambda_s)\}) = \{x(s, 1), \dots, x(s, \lambda_s)\}$, για κάθε $s = 1, \dots, n$.
Οπότε, για κάθε $s = 1, \dots, n$ έχουμε,

$$\beta_s(i) = \sum_{t=1}^{\lambda_s} i_{x(s,t)} = \sum_{t=1}^{\lambda_s} i_{\pi(x(s,t))} = \sum_{t=1}^{\lambda_s} (i \circ \pi)(x(s, t)) = \sum_{t=1}^{\lambda_s} i\pi_{x(s,t)} = \beta_s(i\pi).$$

Άρα $\beta(i) = \beta(i\pi)$.

ii) Αν $c_{l,i} = c_{l,j}$, τότε από Λήμμα 4.4.1 υπάρχει $\pi \in R(T)$ ώστε $i = j\pi$, άρα $\beta(i) = \beta(j\pi) \stackrel{i)}{=} \beta(j)$.

iii) Καταρχάς, έχουμε

$$T_i = \begin{pmatrix} i_{x(1,1)} & i_{x(1,2)} & \cdots & i_{x(1,\lambda_1)} \\ \vdots & & & \\ i_{x(n,1)} & \cdots & i_{x(n,\lambda_n)} \end{pmatrix}, T_{i\pi} = \begin{pmatrix} (i\pi)_{x(1,1)} & (i\pi)_{x(1,2)} & \cdots & (i\pi)_{x(1,\lambda_1)} \\ \vdots & & & \\ (i\pi)_{x(n,1)} & \cdots & (i\pi)_{x(n,\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

Πάμε να συγκρίνουμε ένα-ένα τους όρους των $\beta(i), \beta(i\pi)$, όπου $\beta(i) = (\beta_1(i), \dots, \beta_n(i))$, $\beta(i\pi) = (\beta_1(i\pi), \dots, \beta_n(i\pi))$:

Έστω $\beta_1(i) = \sum_{t=1}^{\lambda_s} i_{x(s,t)}$ και $\beta_1(i\pi) = \sum_{t=1}^{\lambda_s} (i\pi)_{x(s,t)}$. Επειδή $T_i = standard$ και $\pi \in C(T)$, έχουμε ότι $i_{x(1,t)} \leq i_{\pi(x(1,t))} = (i\pi)_{x(1,t)}$ (*), για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$, συνεπώς $\beta_1(i) \leq \beta_1(i\pi)$. Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν $\beta_1(i) < \beta_1(i\pi)$: Τότε, $\beta(i) < \beta(i\pi)$ και τελειώσαμε.

2) Αν $\beta_1(i) = \beta_1(i\pi)$: Τότε, θα δείξουμε ότι $i_{x(1,t)} = (i\pi)_{x(1,t)}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$. Πράγματι, αν υπάρχει t_0 ώστε $i_{x(1,t_0)} \neq (i\pi)_{x(1,t_0)}$, τότε από (*) έχουμε $i_{x(1,t_0)} < (i\pi)_{x(1,t_0)}$ και

$$\beta_1(i) = i_{x(1,t_0)} + \sum_{t \neq t_0} i_{x(1,t)} < (i\pi)_{x(1,t_0)} + \sum_{t \neq t_0} (i\pi)_{x(1,t)} = \beta_1(i\pi)$$

Το τελευταίο είναι άτοπο, άρα $i_{x(1,t)} = (i\pi)_{x(1,t)} = i_{\pi(x(1,t))}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$. Επιπλέον, πάλι επειδή $T_i = standard$ και $\pi \in C(T)$, πρέπει $\pi(x(1,t)) = x(1,t)$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$. Δεδομένου ότι $\beta_1(i) = \beta_1(i\pi)$, προχωράμε στη σύγκριση των $\beta_2(i)$ και $\beta_2(i\pi)$.

Καταρχάς, θα δείξουμε ότι $i_{x(2,t)} \leq (i\pi)_{x(2,t)}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$. Πράγματι, επειδή $\pi \in C(T)$, τότε $\pi(x(2,t)) \in \{x(1,t), \dots, x(\mu_2,t)\}$, όπου $\mu = conjugate\ partition$, όμως πριν είδαμε ότι $\pi(x(1,t)) = x(1,t)$, άρα $\pi(x(2,t)) \in \{x(2,t), \dots, x(\mu_2,t)\}$. Από το τελευταίο και το γεγονός ότι $T_i = standard$, έχουμε ότι $i_{x(2,t)} \leq (i\pi)_{x(2,t)}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$ (**).

Τώρα, από αυτό που δείξαμε πάνω έχουμε άμεσα ότι $\beta_2(i) \leq \beta_2(i\pi)$ και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

2)α) Αν $\beta_2(i) < \beta_2(i\pi)$: Τότε, (επειδή $\beta_1(i) = \beta_1(i\pi)$) $\beta(i) < \beta(i\pi)$ και τελειώσαμε.

2)β) Αν $\beta_2(i) = \beta_2(i\pi)$: Τότε, θα δείξουμε ότι $i_{x(2,t)} = (i\pi)_{x(2,t)}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$. Πράγματι αν υπάρχει t_0 ώστε $i_{x(2,t_0)} \neq (i\pi)_{x(2,t_0)}$, τότε από (**) πρέπει $i_{x(2,t_0)} < (i\pi)_{x(2,t_0)}$ και

$$\beta_2(i) = i_{x(2,t_0)} + \sum_{t \neq t_0} i_{x(2,t)} < (i\pi)_{x(2,t_0)} + \sum_{t \neq t_0} (i\pi)_{x(2,t)} = \beta_2(i\pi)$$

Το τελευταίο είναι άτοπο, άρα $i_{x(2,t)} = (i\pi)_{x(2,t)}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$. Συνεπώς, έχουμε $i_{x(2,t)} = (i\pi)_{x(2,t)} = i_{\pi(x(2,t))}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$, $T_i = standard$ και $\pi \in C(T)$, άρα $\pi(x(2,t)) = x(2,t)$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$.

Ως τώρα, δεδομένου ότι $\beta_1(i) = \beta_1(i\pi)$, $\beta_2(i) = \beta_2(i\pi)$, έχουμε ότι $\pi(x(1,t)) = x(1,t)$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$ και $\pi(x(2,t)) = x(2,t)$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_2$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, δύο πράγματα μπορεί να προκύψουν:

- i) $\pi(x(s, t)) = x(s, t)$, για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$, δηλαδή $\pi = 1$, ή,
 ii) υπάρχει $s_0 \in \underline{n}$ ώστε $\beta_{s_0}(i) < \beta_{s_0}(i\pi)$ και $\beta_s(i) = \beta_s(i\pi)$ για κάθε $s \leq s_0 - 1$, δηλαδή $\beta(i) < \beta(i\pi)$

Το πρώτο ενδεχόμενο είναι αδύνατο (αφού $\pi \neq 1$), άρα $\beta(i) < \beta(i\pi)$.

□

Σχόλιο. Το επιχείρημα iii) του Λήμματος 4.4.2 αποτελεί το πυρήνα της απόδειξης της K -γραμμικής ανεξαρτησίας για το θεώρημα βάσης. Επιπλέον, θα μας φανεί χρήσιμο και στα παρακάτω κεφάλαια.

Πρόταση 4.4.1. (Μέρος I του θεωρήματος βάσης για το $D_{\lambda, K}$).

Το σύνολο $\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i \text{ standard}\}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $D_{\lambda, K}$.

Απόδειξη.

Έστω $H = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$, και $(k_i)_{i \in H} \subseteq K$ ώστε $\sum_{i \in H} k_i(T_l : T_i) = 0$. Τότε,

$$0 = \sum_{i \in H} \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) k_i c_{l, i\pi} = \sum_{i \in H} k_i c_{l, i} + \sum_{i \in H} \sum_{\pi \in C(T) \setminus \{1\}} s(\pi) k_i c_{l, i\pi}. (*)$$

Ισχυρισμός.

- 1) $c_{l, i} \neq c_{l, j\pi}$, $\forall i, j \in H$, $\forall \pi \in C(T) \setminus \{1\}$.
- 2) $c_{l, i} \neq c_{l, j}$, $\forall i, j \in H$ με $i \neq j$.

Απόδειξη(Ισχυρισμού).

- 1) Έστω $i, j \in H$ και $1 \neq \pi \in C(T)$, ώστε $c_{l, i} = c_{l, j\pi}$. Τότε από Λήμμα 4.4.1, υπάρχει $s \in R(T)$ ώστε $i = j\pi s$, άρα,

$$\beta(i) = \beta(j\pi s) \stackrel{\text{Λήμμα 4.4.2}}{=} \beta(j\pi) > \beta(j),$$

όπου η ανισότητα ισχύει από Λήμμα 4.4.2 (αφού $T_j = \text{standard}$ και $1 \neq \pi \in C(T)$).

Επιπλέον, $is^{-1}\pi^{-1} = j$, άρα $T_{is^{-1}\pi^{-1}} = T_j = \text{standard}$, οπότε

$$\beta(j) = \beta(is^{-1}\pi^{-1}) < \beta(is^{-1}\pi^{-1}\pi) = \beta(is^{-1}) \stackrel{s^{-1} \in R(T)}{=} \beta(i),$$

όπου η ανισότητα ισχύει από Λήμμα 4.4.2 (αφού $T_{is^{-1}\pi^{-1}} = \text{standard}$ και $1 \neq \pi \in C(T)$). Συνεπώς $\beta(i) < \beta(j) < \beta(i)$, άτοπο.

- 2) Έστω $i, j \in H$ με $c_{l,i} = c_{l,j}$. Αν δείξουμε ότι $i = j$, τελειώσαμε. Πράγματι, από Λήμμα 4.4.1, υπάρχει $\sigma \in R(T)$ ώστε $i = j\sigma \iff T_i = T_{j\sigma}$. Έτσι, $i(x(s, t)) = j\sigma(x(s, t))$, $\forall (s, t) \in [\lambda]$. Αν δείξουμε ότι $j(x(s, t)) = j\sigma(x(s, t))$, $\forall (s, t) \in [\lambda]$, τότε θα έχουμε $T_j = T_{j\sigma} \iff j = j\sigma = i$ και άρα τελειώσαμε.

Έστω λοιπόν $s \in \underline{n}$, επειδή $T_j = \text{standard}$ και $T_{j\sigma} = T_i = \text{standard}$, έχουμε ότι:

$$j_{x(s,1)} \leq \dots \leq j_{x(s,\lambda_s)} \text{ και } j_{\sigma(x(s,1))} \leq \dots \leq j_{\sigma(x(s,\lambda_s))}.$$

Επιπλέον, $\sigma(\{x(s, 1), \dots, x(s, \lambda_s)\}) = \{x(s, 1), \dots, x(s, \lambda_s)\}$ (αφού $\sigma \in R(T)$), άρα (από Παρατήρηση 3.1.6) έχουμε $j_{x(s,t)} = j_{\sigma(x(s,t))}$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_s$. Το s ήταν τυχόν, άρα $j(x(s, t)) = j\sigma(x(s, t))$, $\forall (s, t) \in [\lambda]$ και έτσι αποδείχθηκε και το 2).

Τώρα, επειδή διακεκριμένα $\{c_{i,j}\}$ είναι K-γραμμικά ανεξάρτητα (βλέπε Παρατήρηση 2.1.1 i)), πρέπει από (*) και Ισχυρισμό 1) να ισχύει $\sum_{i \in H} k_i c_{l,i} = 0$, όμως από Ισχυρισμό 2) έπεται $k_i = 0 \forall i \in H$. □

Παρατήρηση 4.4.1. Έστω $\sigma \in R(T)$ και $i, j \in I(n, r)$ ώστε τα λ -tableaux T_i, T_j να είναι *standard*. Τότε,

i) $T_{j\sigma} = \text{standard} \iff j\sigma = j$.

ii) $c_{l,i} = c_{l,j} \iff i = j$.

Απόδειξη.

i) Η συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) είναι σαφές. Ανάποδα, αν $T_{j\sigma} = \text{standard}$, τότε όπως στην απόδειξη του Ισχυρισμού 2) (στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.1) έχουμε ότι $j = j\sigma$.

ii) Η συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) είναι σαφές. Ανάποδα, αν $c_{l,i} = c_{l,j}$, τότε υπάρχει $\sigma \in R(T)$ ώστε $T_{j\sigma} = T_i = \text{standard}$, συνεπώς $i = j\sigma \stackrel{i)}{=} j$. □

4.5 Το Λήμμα Carter-Lusztig.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Στη παράγραφο αυτή στόχος μας είναι να αποδείξουμε το άλλο μισό κομμάτι του θεωρήματος βάσης για το $D_{\lambda, K}$. Για την απόδειξη του θα χρησιμοποιήσουμε ένα συνδυαστικό λήμμα, συγκεκριμένα το Λήμμα Carter-Lusztig. Το λήμμα αυτό αποτελεί την καρδιά της απόδειξης του θεωρήματος βάσης. Ας σημειωθεί ότι το Λήμμα Carter-Lusztig έχει αρκετές παραλλαγές (είτε αλγεβρικού, είτε καθαρά συνδυαστικού χαρακτήρα) όπως επίσης και εφαρμογές.

Σχόλιο. Παρακάτω, όπως προαναφέραμε και στην αρχή, θα δώσουμε την συνδυαστική εκδοχή του λήμματος Carter Lusztig, πράγμα που μας στερεί ώθηση για διαίσθηση ή κίνητρα. Για μία πιο πλήρη και φυσιολογική μελέτη του λήμματος Carter Lusztig, όπως επίσης και των Garnir relation που το συνοδεύουν μπορεί να ανατρέξει κανείς στις εξής αναφορές [20, σελ. 27-30], [10, σελ. 91-94], [9, σελ 211-216].

Ορισμός 4.5.1. (Garnir relations, προετοιμασία) Έστω $f : I(n, r) \longrightarrow F$ μία απεικόνιση, $F =$ αβελιανή ομάδα και $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το conjugate partition του λ . Για κάθε $h \in \{1, \dots, \lambda_1 - 1\}$ και $q \in \{1, \dots, \mu_{h+1}\}$, θέτουμε:

- i) $J = \{x(1, h+1), \dots, x(q, h+1)\} \subseteq C_{h+1} = (h+1)$ -στήλη του T .
- ii) $J' = \{x(q, h), \dots, x(\mu_h, h)\} \subseteq C_h = h$ -στήλη του T .
- iii) $Y = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(i) = i \ \forall i \notin J \cup J'\} = \Sigma_{J \cup J'}$ και $X = C(T) \cap Y$ (όπου $X \leq Y \leq G(r)$).
- iv) $G(J)$ ένα σύνολο αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων του X στο Y .

Με βάση τα παραπάνω, για κάθε $i \in I(n, r)$ ορίζετε η ποσότητα $\sum_{\sigma \in G(J)} s(\sigma) f(i\sigma)$.

Παρατήρηση 4.5.1. (Τρόπος εύρεσης του $G(J)$). Με βάση τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1, έχουμε ότι:

$$\sigma_1 X = \sigma_2 X \iff \sigma_1(J) = \sigma_2(J) \text{ ή } \sigma_1(J') = \sigma_2(J'), \text{ για κάθε } \sigma_1, \sigma_2 \in Y.$$

Οπότε, για την εύρεση ενός $G(J)$, αρκεί να βρούμε μία οικογένεια από στοιχεία $\{\sigma_i\}_{i \in I} \subseteq Y$ ώστε για κάθε $A \subseteq J \cup J'$ με $|A| = |J|$ (όμοια αν $|A| = |J'|$), να υπάρχει μοναδικό $i_A \in I$ ώστε $\sigma_{i_A}(J) = A$.

Απόδειξη.

Έστω $\sigma_1, \sigma_2 \in Y \leq G(r)$, τότε,

$$\begin{aligned} \sigma_1 X = \sigma_2 X &\iff \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in X = C(T) \cap Y \xrightarrow{\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in Y} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in C(T) \xrightarrow{\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in Y} \\ \sigma_1 \sigma_2^{-1}(J) = J \text{ ή } \sigma_1 \sigma_2^{-1}(J') = J' &\iff \sigma_1(J) = \sigma_2(J) \text{ ή } \sigma_1(J') = \sigma_2(J') \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.5.1. (Carter-Lusztig). Έστω $f : I(n, r) \longrightarrow F$ μία απεικόνιση και $F = \text{αβελιανή ομάδα}$. Έστω επίσης ότι η f ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- i) $f(i) = 0$, αν το T_i έχει στήλη με δύο ίδια στοιχεία σε διακεκριμένες θέσεις.
- ii) $f(i\sigma) = s(\sigma)f(i)$, για κάθε $i \in I(n, r)$ και $\sigma \in C(T)$.
- iii) (Garnir relations). $\sum_{\sigma \in G(J)} s(\sigma)f(i\sigma) = 0$, για κάθε $i \in I(n, r)$, $h \in \{1, \dots, \lambda_1 - 1\}$ και $q \in \{1, \dots, \mu_{h+1}\}$ (όπου $G(J)$ είναι όπως τον Ορισμό 4.5.1).

Τότε $\text{Im} f \subseteq \text{span}_{\mathbb{Z}}\{f(i) \mid i \in I(n, r), T_i \text{ standard}\}$.

Παρατήρηση 4.5.2. Η συνθήκη ii) του Λήμματος Carter – Lusztig εξασφαλίζει ότι τα Garnir relations, είναι ανεξάρτητα της επιλογής του σύνολου αντιπροσώπων $G(J)$. Δηλαδή, αν $G(J)'$ ένα άλλο σύνολο αντιπροσώπων, τότε $\sum_{\sigma \in G(J)} s(\sigma)f(i\sigma) = \sum_{\sigma \in G(J)'} s(\sigma)f(i\sigma)$.

Υπενθύμιση 4.5.1. (Από τη Θεωρία Ομάδων). Έστω G ομάδα, $H \leq G$ και T, T' δύο σύνολα αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων της H στη G , τότε:

- i) Για κάθε $g \in G$, υπάρχουν μοναδικά $t_g \in T$, $h_g \in H$, ώστε $g = t_g h_g$.
- ii) Έστω για κάθε $\nu \in T$, τα μοναδικά $t_\nu \in T'$, $h_\nu \in H$, ώστε $\nu = t_\nu h_\nu$. Τότε η απεικόνιση $\phi : T \longrightarrow T', \nu \longmapsto t_\nu$ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. (Υπενθύμισης).

- i) Από υπόθεση έχουμε $G = \bigcup_{t \in T} tH$ και έτσι άμεσα έπεται η ύπαρξη των t_g, h_g . Αν υπήρχαν t'_g, h'_g με $g = t_g h_g = t'_g h'_g$, τότε $t_g^{-1} t'_g \in H \iff t_g H = t'_g H$, όμως $T =$ σύνολο αντιπροσώπων, άρα $t_g = t'_g$ και κατά συνέπεια $h_g = h'_g$.
- ii) Η ϕ είναι καλά ορισμένη: Άμεσα από μοναδικότητα της γραφής.
Η ϕ είναι 1-1: Αν $\phi(\nu_1) = \phi(\nu_2)$ τότε,

$$t_{\nu_1} = t_{\nu_2} \iff \nu_1 h_{\nu_1}^{-1} = \nu_2 h_{\nu_2}^{-1} \iff \nu_2^{-1} \nu_1 = h_{\nu_2}^{-1} h_{\nu_1} \in H,$$

δηλαδή $\nu_1 H = \nu_2 H$, όμως $\nu_1, \nu_2 \in T$, άρα $\nu_1 = \nu_2$.

Η ϕ είναι επί: Έστω $\sigma \in T'$, τότε υπάρχουν $\tau_\sigma \in T$, $h_\sigma \in H$ ώστε $\sigma = \tau_\sigma h_\sigma \iff \tau_\sigma = \sigma h_\sigma^{-1}$. Από το τελευταίο έχουμε $\phi(\tau_\sigma) = \sigma$.

□

Απόδειξη. (Παρατήρησης 4.5.2)

Από υπενθύμιση, για το τυχόν $\nu \in G(J) \subseteq Y$, υπάρχουν μοναδικά $\sigma_\nu \in G(J)'$, $\pi_\nu \in X$, ώστε $\nu = \sigma_\nu \pi_\nu$. Επιπλέον, η απεικόνιση $\phi : G(J) \longrightarrow G(J)'$, $\nu \longmapsto \sigma_\nu$ είναι 1-1 και επί. Με βάση αυτά, έχουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f(i\nu) &= \sum_{\nu \in G(J)} s(\sigma_\nu \pi_\nu) f(i\sigma_\nu \pi_\nu) \stackrel{\pi_\nu \in C(T)}{=} \sum_{\nu \in G(J)} s(\sigma_\nu) s(\pi_\nu) s(\pi_\nu) f(i\sigma_\nu) = \\ &= \sum_{\nu \in G(J)} s(\sigma_\nu) f(i\sigma_\nu) = \sum_{\sigma \in G(J)'} s(\sigma) f(i\sigma). \end{aligned}$$

□

Απόδειξη. (Λήμματος Carter-Lusztig).

Για συντομία στους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1, θέτουμε:

- 1) $C_{h+1}(T) = \{b_1, \dots, b_s\}$ και $J = \{b_1, \dots, b_q\}$, όπου $b_i = x(i, h+1)$, $s = \mu_{h+1}$.
- 2) $C_h(T) = \{a_1, \dots, a_t\}$ και $J' = \{a_q, \dots, a_t\}$, όπου $a_i = x(i, h)$, $t = \mu_h$.

$$3) \ T = \begin{pmatrix} & a_1 & b_1 & & \\ & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & a_q & b_q & \cdots & \\ & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & a_s & b_s & \cdots & \\ & \vdots & & & \\ & a_t & & & \end{pmatrix} \text{ και } Y = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(i) = i, \forall i \notin \{b_1, \dots, b_q, a_q, \dots, a_t\}\}.$$

Επιπλέον, είναι σαφές ότι αν $\pi \in Y$ τότε $\pi(\{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}) = \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$.

Προχωράμε στην απόδειξη του λήμματος ξεκινώντας με κάποιες παρατηρήσεις. Έστω $i \in I(n, r)$ τότε:

- i) Μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.γ ότι όλες οι στήλες του T_i έχουν όλα τους τα στοιχεία διακεκριμένα ανά δύο αλλιώς από υπόθεση πρέπει $f(i) = 0$ και έτσι τελειώσαμε.
- ii) Υπάρχει $\sigma \in C(T)$ ώστε κάθε στήλη του $T_{i\sigma}$ να είναι σε γνησίως αύξουσα σειρά (από πάνω προς τα κάτω). Επιπλέον έχουμε,

$$f(i\sigma) = s(\sigma)f(i) \iff f(i) = s(\sigma)f(i\sigma).$$

- iii) Έστω $h \in \{1, \dots, \lambda_1 - 1\}$, $q \in \{1, \dots, s\}$ με:

$$T_i = \begin{pmatrix} \cdots & i_{a_1} & \leq & i_{b_1} & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ \cdots & i_{a_{q-1}} & \leq & i_{b_{q-1}} & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ \cdots & i_{a_q} & > & i_{b_q} & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} (*) \text{ και } G(J) \text{ ώστε } 1 \in G(J).$$

Τότε για κάθε $1 \neq \sigma \in G(J)$ ισχύει ένα από τα παρακάτω δύο ενδεχόμενα:

- a) Ο $T_{i\sigma}$ έχει κάποια στήλη με δύο ίδια στοιχεία σε διακεκριμένες θέσεις και άρα $f(i\sigma) = 0$.
- b) Όλες οι στήλες του $T_{i\sigma}$ έχουν όλα τους τα στοιχεία διακεκριμένα ανά δύο και αν πάρουμε (με βάση το ii) $\pi_\sigma = \pi \in C(T)$ ώστε κάθε στήλη του $T_{i\sigma\pi}$ να είναι σε γνησίως αύξουσα σειρά, τότε έχουμε ότι:

$$T_{i\sigma\pi} = \begin{pmatrix} \cdots & i_{\sigma\pi(a_1)} & \leq & i_{\sigma\pi(b_1)} & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ \cdots & i_{\sigma\pi(a_q)} & \leq & i_{\sigma\pi(b_q)} & \cdots \\ \cdots & \wedge & & \wedge & \cdots \\ \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ιδιαίτέρως, $f(i\sigma\pi_\sigma) = s(\pi_\sigma)f(i\sigma)$, δηλαδή $f(i\sigma) = s(\pi_\sigma)f(i\sigma\pi_\sigma)$. Οπότε, αν θέσουμε $B := \{\sigma \in G(J) \mid T_{i\sigma} \text{ όπως στο b)}\}$ τότε,

$$f(i) = - \sum_{1 \neq \sigma \in G(J)} f(i\sigma) = - \sum_{1 \neq \sigma \in B} s(\pi_\sigma)f(i\sigma\pi_\sigma).$$

Τα $i), ii)$ είναι άμεσα. Αυτό που θέλει απόδειξη είναι το $iii)$. Έστω $1 \neq \sigma \in G(J)$. Αν $T_{i\sigma}$ είναι όπως στο a), τότε τελειώσαμε. Αν το $T_{i\sigma}$ δεν είναι όπως στο a) τότε όλες οι στήλες του $T_{i\sigma}$ έχουν όλα τους τα στοιχεία διακεκριμένα ανά δύο (**). Από $ii)$ παίρνουμε $\pi_\sigma \in C(T)$ που για συντομία ας το πούμε σκέτα π , ώστε το $T_{i\sigma\pi}$ να έχει όλες τις στήλες γνησίως αύξουσες. Με την βοήθεια του παρακάτω λήμματος θα αποδείξουμε το $iii)b)$.

Λήμμα 4.5.2. Έστω $\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ \vdots & \vdots \\ m_l & n_l \\ \vdots & \vdots \\ m_r & \end{pmatrix}$ δύο στήλες από αριθμούς, όπου $r \geq l$ και όλα τα στοιχεία σε κάθε

στήλη είναι διακεκριμένα ανά δύο. Αν $q \in \{1, \dots, l\}$ και $m_{i_1}, \dots, m_{i_q}$ διάφορα όλα ανά δύο, ώστε κάθε m_{i_j} να είναι μικρότερο από $l - (j - 1)$ το πλήθος στοιχεία της δεύτερης στήλης, τότε βάζοντας τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} m_{k_1} & \leq & n_{t_1} \\ \wedge & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k_q} & \leq & n_{t_q} \\ \wedge & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

των δύο στηλών σε γνησίως αύξουσα σειρά, δημιουργείτε η εξής κατάσταση:

Για να μην αποπροσανατολιζόμαστε ας αποδείξουμε το Λήμμα 4.5.2 στο τέλος. Έστω $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το *conjugate partition* του λ , επειδή $\sigma \in G(J) \subseteq Y = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(j) = j, \forall j \notin J \cup J'\}$, έχουμε:

$$C_h(T_{i\sigma}) = \begin{pmatrix} i_{a_1} \\ \vdots \\ i_{a_{q-1}} \\ i_{\sigma(a_q)} \\ \vdots \\ i_{\sigma(a_t)} \end{pmatrix}, \quad C_{h+1}(T_{i\sigma}) = \begin{pmatrix} i_{\sigma(b_1)} \\ \vdots \\ i_{\sigma(b_q)} \\ i_{b_{q+1}} \\ \vdots \\ i_{b_s} \end{pmatrix}.$$

Τώρα, τα $i_{a_1}, \dots, i_{a_{q-1}}$ είναι διακεκριμένα ανά δύο (άμεσα από υπόθεση για το T_i , βλέπε (*)) με την ιδιότητα κάθε i_{a_j} ($j = 1, \dots, q - 1$) να είναι μικρότερο από $s - (j - 1)$ το πλήθος στοιχεία της στήλης $C_{h+1}(T_{i\sigma})$. Πράγματι, αν $j \leq q - 1$, τότε (από υπόθεση για το T_i , βλέπε (*)) πρέπει το i_{a_j} να είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο από τα $\{i_{b_{q+1}}, \dots, i_{b_s}\} \subseteq C_{h+1}(T_{i\sigma})$. Επίσης, το i_{a_j} είναι μικρότερο από τουλάχιστον $q - (j - 1)$ το πλήθος στοιχεία από τα $\{i_{\sigma(b_1)}, \dots, i_{\sigma(b_q)}\}$, αυτό γιατί, $\{i_{\sigma(b_1)}, \dots, i_{\sigma(b_q)}\} \subseteq \{i_{a_q}, \dots, i_{a_t}\} \cup \{i_{b_1}, \dots, i_{b_q}\}$ και i_{a_j} είναι γνήσια μικρότερο από κάθε στοιχείο του συνόλου $\{i_{a_q}, \dots, i_{a_t}\}$ και μικρότερο από τουλάχιστον $q - (j - 1)$ το πλήθος στοιχεία από τα $\{i_{b_1}, \dots, i_{b_q}\}$ (από υπόθεση για το T_i , βλέπε (*)). Συνεπώς, για κάθε $j \leq q - 1$, το i_{a_j} είναι $\leq$ από τουλάχιστον $(s - q) + q - (j - 1) = s - (j - 1)$ το πλήθος στοιχεία από την στήλη $C_{h+1}(T_{i\sigma})$.

Συνεχίζοντας, επειδή $1 \neq \sigma \in G(J)$, πρέπει να υπάρχει $r \geq q$, ώστε $\sigma(a_r) \in J \subseteq C_{h+1}$. Πράγματι, αν $\sigma(J') \subseteq J'$, τότε $\sigma(J') = J'$ και άρα από Παρατήρηση 4.5.1, πρέπει $\sigma X = 1X$, όμως $G(J)$ σύνολο αντιπροσώπων, άρα $\sigma = 1$, άτοπο. Θα δείξουμε ότι το $i_{\sigma(a_r)}$ είναι μικρότερο από $s - (q - 1)$ το πλήθος στοιχεία της στήλης $C_{h+1}(T_{i\sigma})$. Εφόσον $\sigma(a_r) \in J = \{b_1, \dots, b_q\} \subseteq C_{h+1}(T)$, έχουμε ότι το $i_{\sigma(a_r)}$ είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του $\{i_{b_{q+1}}, \dots, i_{b_s}\} \subseteq C_{h+1}(T_{i\sigma})$. Επίσης, (παρόμοια με πάνω) επειδή $1 \neq \sigma \in G(J)$, πρέπει να υπάρχει $z \leq q$, ώστε $\sigma(b_z) \in J'$. Συνεπώς, $i_{\sigma(b_z)} \in \{i_{a_q}, \dots, i_{a_t}\}$ και $i_{\sigma(a_r)} \in \{i_{b_1}, \dots, i_{b_q}\}$, τότε όμως από υπόθεση για το T_i (βλέπε (*)) έχουμε ότι $i_{\sigma(a_r)} < i_{\sigma(b_z)}$. Άρα το $i_{\sigma(a_r)}$ είναι μικρότερο από $(s - q) + 1 = s - (q - 1)$ το πλήθος στοιχεία της στήλης $C_{h+1}(T_{i\sigma})$.

Τελικά τα στοιχεία $i_{a_1}, \dots, i_{a_{q-1}}, i_{\sigma(a_r)}$ είναι διάφορα ανά δύο (από (**)), και ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 4.5.2, οπότε το $T_{i\sigma\pi}$ είναι όπως προβλέπει το b). Έτσι αποδείξαμε και το iii).

Τώρα με βάση τα i), ii), iii) έπεται σχεδόν άμεσα το ζητούμενο. Πράγματι, θέτουμε για συντομία $A = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{f(i) \mid i \in I(n, r), T_i \text{ standard}\}$. Έστω $j \in I(n, r)$, τότε από i) μπορούμε να υποθέσουμε

ότι όλες οι στήλες του T_j έχουν όλα τα στοιχεία τους διακεκριμένα ανά δύο. Στην συνέχεια, από *ii*) υπάρχει $\nu \in C(T)$ ώστε $f(j) = s(\nu)f(j\nu)$ και το $T_{j\nu}$ να έχει όλες τις στήλες σε γνησίως αύξουσα σειρά. Τώρα, αν και όλες οι γραμμές του $T_{j\nu}$ είναι σε αύξουσα σειρά, τότε έπεται άμεσα ότι $f(j) \in A$, ενώ αν υπάρχει γραμμή του $T_{j\nu}$ που δεν είναι αύξουσα, τότε θα έχουμε μία κατάσταση για το $T_{j\nu}$ όπως στην υπόθεση του *iii*) (για $j\nu$ στη θέση του i) και σύμφωνα με τους συμβολισμούς του *iii*) μπορούμε να γράψουμε $f(j\nu) = \sum_{1 \neq \sigma \in B} s(\pi_\sigma)f(j\nu\sigma\pi_\sigma)$, όπου τώρα τα $T_{j\nu\sigma\pi_\sigma}$ έχουν "διορθωμένο" το σημείο το οποίο μας εμπόδιζε να είναι *standard* ο $T_{j\nu}$. Εφαρμόζοντας τις ίδιες διαδικασίες για τα $T_{j\nu\sigma\pi_\sigma}$, "διορθώνονται" όλα τα παθολογικά σημεία και έτσι καταλήγουμε ότι $f(j) = \sum_{s=1}^m n_s f(j_s)$, όπου $n_s \in \mathbb{Z}$ και $T_{j_s} = \text{standard}$, δηλαδή $f(j) \in A$.

□

Απόδειξη. (Λήμματος 4.5.2). Πράγματι, έστω ότι βάλουμε σε γνησίως αύξουσα σειρά τα στοιχεία

των δύο στηλών, δηλαδή έχουμε,

$$\begin{pmatrix} m_{k_1} & n_{t_1} \\ \wedge & \wedge \\ \vdots & \vdots \\ m_{k_q} & n_{t_q} \\ \wedge & \wedge \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι $m_{k_1} \leq n_{t_1}$, $m_{k_2} \leq n_{t_2}$, $m_{k_3} \leq n_{t_3}$ και όμοια τα υπόλοιπα. Πράγματι,

$m_{k_1} \leq n_{t_1}$: Αφού m_{k_1} είναι το μικρότερο στοιχείο της πρώτης στήλης, πρέπει $m_{k_1} < m_{i_1} \leq$ από l το πλήθος στοιχεία της δεύτερης στήλης, δηλαδή $m_{k_1} \leq$ από κάθε στοιχείο της δεύτερης στήλης και έτσι έχουμε $m_{k_1} \leq n_{t_1}$.

$m_{k_2} \leq n_{t_2}$: Έστω για άτοπο ότι $m_{k_2} > n_{t_2}$, τότε θα είχαμε την εξής κατάσταση:

$$\begin{pmatrix} m_{k_1} & \leq & n_{t_1} \\ \wedge & & \wedge \\ m_{k_2} & > & n_{t_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \wedge & & \wedge \\ m_{k_q} & & n_{t_q} \\ \wedge & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Όπως φαίνεται στο τελευταίο πίνακα, τα στοιχεία $m_{k_2}, \dots, m_{k_r}$ θα είναι $\leq$ από το πολύ $l - 2$ το πλήθος στοιχεία της δεύτερης στήλης, άρα (από υπόθεση) πρέπει $m_{i_1}, m_{i_2} \notin \{m_{k_2}, \dots, m_{k_r}\}$ και έτσι $m_{i_1} = m_{i_2} = m_{k_1}$, άτοπο (αφού τα $m_{i_1}, \dots, m_{i_q}$ διάφορα όλα ανά δύο).

$m_{k_3} \leq n_{t_3}$: Με παρόμοιο επιχείρημα όπως στο $m_{k_2} \leq n_{t_2}$, καταλήγουμε ότι $m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3} \in \{m_{k_1}, m_{k_2}\}$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση ότι τα $m_{i_1}, \dots, m_{i_q}$ είναι διάφορα όλα ανά δύο.

□

Θεώρημα 4.5.1. Έστω $f : I(n, r) \longrightarrow D_{\lambda, K}$, με $f(i) = (T_i : T_i)$. Τότε, με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος Carter-Lusztig και άρα,

$$Imf \subseteq span_{\mathbb{Z}}\{(T_i : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\}.$$

Σχόλιο. Οι ιδιότητες $i), ii)$ του Λήμματος Carter Lusztig επαληθεύονται άμεσα από την θεωρία που έχουμε ήδη αναπτύξει για τα *bideterminants*. Παρά ταύτα η ιδιότητα $iii)$ δεν είναι προφανής και για να την αποδείξουμε θα χρειαστούμε το παρακάτω συνδυαστικό λήμμα (όπου η ιδέα της απόδειξής του οφείλεται στο J.A. Green [10, σελ. 92-93]).

Λήμμα 4.5.3. Με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1 ισχύουν τα παρακάτω:

- $i)$ Υπάρχει $\phi : YC(T) \longrightarrow YC(T)$ 1-1 και επί, ώστε για κάθε $\sigma \in YC(T)$ υπάρχει $\rho_\sigma \in R(T)$ με $\rho_\sigma = 2$ -κύκλος και $\phi(\sigma) = \sigma\rho_\sigma$. Ιδιαίτερος, $\rho_\sigma^2 = 1$, $s(\rho_\sigma) = -1$ και $\phi(\phi(\sigma)) = \sigma$.
- $ii)$ Το $YC(T)$ γράφεται σαν ξένη ένωση συνόλων της μορφής $\{\pi, \pi\kappa\}$, όπου $\pi \in YC(T)$, $\kappa \in R(T)$ και $\kappa = 2$ -κύκλος (ιδιαίτερος $s(\kappa) = -1$). (ΑΣ σημειωθεί ότι το κ εξαρτάται από το π).

Απόδειξη.

- $ii)$ Καταρχάς, $YC(T) = \bigcup_{\sigma \in YC(T)} \{\sigma, \phi(\sigma)\}$ (*), όπου (από i)) $\phi(\sigma) = \sigma\rho_\sigma$, με $\rho_\sigma = 2$ -κύκλος και $\rho_\sigma \in R(T)$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $\sigma_1, \sigma_2 \in YC(T)$, ισχύει,

$$\{\sigma_1, \phi(\sigma_1)\} = \{\sigma_2, \phi(\sigma_2)\} \text{ ή } \{\sigma_1, \phi(\sigma_1)\} \cap \{\sigma_2, \phi(\sigma_2)\} = \emptyset. (**)$$

Πράγματι, αν $\{\sigma_1, \phi(\sigma_1)\} \cap \{\sigma_2, \phi(\sigma_2)\} = \emptyset$ τότε τελειώσαμε, ενώ αν $\{\sigma_1, \phi(\sigma_1)\} \cap \{\sigma_2, \phi(\sigma_2)\} \neq \emptyset$, τότε $\sigma_1 = \sigma_2$ ή $\sigma_1 = \phi(\sigma_2)$. Στην περίπτωση που $\sigma_1 = \sigma_2$, έπεται άμεσα ότι $\{\sigma_1, \phi(\sigma_1)\} = \{\sigma_2, \phi(\sigma_2)\}$, ενώ αν $\sigma_1 = \phi(\sigma_2)$, τότε από i) πρέπει $\phi(\sigma_1) = \phi(\phi(\sigma_2)) = \sigma_2$ και έτσι πάλι έχουμε $\{\sigma_1, \phi(\sigma_1)\} = \{\sigma_2, \phi(\sigma_2)\}$.

Τελικά, από τις (*), (**) έπεται το ζητούμενο.

- $i)$ Για συντομία στους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1, θέτουμε:

$$1) C_{h+1}(T) = \{b_1, \dots, b_s\} \text{ και } J = \{b_1, \dots, b_q\}, \text{ όπου } b_i = x(i, h+1), s = \mu_{h+1}.$$

$$2) C_h(T) = \{a_1, \dots, a_t\} \text{ και } J' = \{a_q, \dots, a_t\}, \text{ όπου } a_i = x(i, h), t = \mu_h.$$

$$3) T = \begin{pmatrix} & a_1 & b_1 & & \\ & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & a_q & b_q & \cdots & \\ & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & a_s & b_s & \cdots & \\ & \vdots & & & \\ & a_t & & & \end{pmatrix} \text{ και } Y = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(i) = i, \forall i \notin \{b_1, \dots, b_q, a_q, \dots, a_t\}\}.$$

Επιπλέον, είναι σαφές ότι αν $\pi \in Y$ τότε $\pi(\{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}) = \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$ και

$$\pi(i) = i \text{ για κάθε } i \notin \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}.$$

Συνεχίζοντας, έστω $\sigma \in YC(T)$, τότε $\sigma = \pi c$ με $\pi \in Y, c \in C(T)$ και ισχύει ότι:

Ισχυρισμός. Υπάρχει $i \in \{1, \dots, s\}$ ώστε $\{\sigma(a_i), \sigma(b_i)\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$.

Απόδειξη. (Ισχυρισμού). Καταρχάς όλα τα στοιχεία $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s$ είναι είναι διάφορα ανά δύο (άμεσα αφού $a_i = x(i, h)$, $b_j = x(j, h+1)$ και $T = 1-1$, επί (ως basic λ -tableaux)). Επομένως (επειδή $\sigma \in G(r)$) πρέπει:

Τα στοιχεία $\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_t), \sigma(b_1), \dots, \sigma(b_s)$ είναι όλα διάφορα ανά δύο (*).

Επίσης $\sigma(\{a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s\}) = \{a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s\}$ (**). Πράγματι, επειδή $\sigma = 1-1$ αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma(\{a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s\}) \subseteq \{a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s\}$ (* * *). Όμως τα π, c έχουν την ιδιότητα (* * *) εξ' ορισμού των $Y, C(T)$ άρα (αφού $\sigma = \pi c$) πρέπει $\sigma(\{a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s\}) \subseteq \{a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s\}$.

Τώρα έστω για άτοπο ότι $\{\sigma(a_j), \sigma(b_j)\} \not\subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$, για κάθε $j \in \{1, \dots, s\}$. Τότε από (*) υπάρχουν τουλάχιστον $s - t$ το πλήθος στοιχεία από τα $\{\sigma(a_1), \sigma(b_1), \dots, \sigma(a_s), \sigma(b_s)\}$ που να μην περιέχονται στο σύνολο $\{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$ και έτσι από (**) θα πρέπει να περιέχονται στο σύνολο $\{a_1, \dots, a_{q-1}, b_{q+1}, \dots, b_s\}$ το οποίο έχει $q-1 + (s-q) = s-1$ το πλήθος στοιχεία, δηλαδή $s \leq s-1$, άτοπο. Συνεπώς υπάρχει $i \in \{1, \dots, s\}$ ώστε $\{\sigma(a_i), \sigma(b_i)\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$.

Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Από ισχυρισμό μπορούμε να επιλέξουμε ελάχιστο τέτοιο $i(\sigma) \in \{1, \dots, s\}$. Συνοψίζοντας:

$\{\sigma(a_{i(\sigma)}), \sigma(b_{i(\sigma)})\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$, $\forall \sigma \in YC(T)$ (και $i(\sigma)$ ελάχιστο στο σύνολο $\{1, \dots, s\}$ ως προς αυτή την ιδιότητα). (*)

Για κάθε $\sigma \in YC(T)$, ορίζουμε τον 2-κύκλο $\rho_\sigma = (a_{i(\sigma)} b_{i(\sigma)}) \in G(r)$ και θεωρούμε την απεικόνιση:

$$\phi : YC(T) \longrightarrow YC(T), \sigma \longmapsto \sigma \rho_\sigma.$$

Είναι σαφές ότι $\rho_\sigma \in R(T)$ και θα δείξουμε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί. Πράγματι,

ϕ καλά ορισμένη: Αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma \rho_\sigma \in YC(T)$, για κάθε $\sigma \in YC(T)$. Πράγματι,

$$\sigma \rho_\sigma = \sigma(a_{i(\sigma)} b_{i(\sigma)}) = \sigma(a_{i(\sigma)} b_{i(\sigma)}) \sigma^{-1} \sigma.$$

(Γενική) Παρατήρηση: $\tau \cdot (a b) \cdot \tau^{-1} = (\tau(a) \tau(b))$ για κάθε $\tau \in G(r)$, $a, b \in \underline{r}$.

Απόδειξη(Παρατήρησης). Θα το ελέγξουμε κατά σημείο. Έστω $i \in \underline{r}$, τότε

$$(\tau \cdot (a b) \cdot \tau^{-1})(i) = \begin{cases} \tau(\tau^{-1}(i)) & \tau^{-1}(i) \neq a, b \\ \tau(b) & \tau^{-1}(i) = a \\ \tau(a) & \tau^{-1}(i) = b \end{cases} = \begin{cases} i & i \neq \tau(a), \tau(b) \\ \tau(b) & i = \tau(a) \\ \tau(a) & i = \tau(b) \end{cases} = (\tau(a) \tau(b))(i).$$

Το $i \in \mathcal{I}$ ήταν τυχόν, άρα $\tau \cdot (a \ b) \cdot \tau^{-1} = (\tau(a) \ \tau(b))$. Η Παρατήρηση αποδείχθηκε.

Με βάση τη παρατήρηση έχουμε $\sigma\rho_\sigma = (\sigma(a_{i(\sigma)}) \ \sigma(b_{i(\sigma)}))\sigma$, όπου $(\sigma(a_{i(\sigma)}) \ \sigma(b_{i(\sigma)})) \in Y$ (άμεσα αφού $\{\sigma(a_{i(\sigma)}), \sigma(b_{i(\sigma)})\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$ και ορισμό του Y) και $\sigma \in YC(T)$, δηλαδή $\sigma\rho_\sigma \in YC(T)$. Έτσι η ϕ είναι καλά ορισμένη.

ϕ 1-1: Για την απόδειξη του 1-1 θα χρειαστούμε τον παρακάτω ισχυρισμό (μέσα από την απόδειξη του οποίου φαίνεται ο λόγος που πήραμε $i(\sigma)$ ελάχιστο):

Ισχυρισμός. Για κάθε $\sigma \in YC(T)$, έχουμε $\sigma\rho_\sigma \in YC(T)$ και $i(\sigma) = i(\sigma\rho_\sigma)$.

Απόδειξη. (Ισχυρισμού). Καταρχάς $\sigma\rho_\sigma \in YC(T)$ αφού δείξαμε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη.

$i(\sigma\rho_\sigma) \leq i(\sigma)$: Αφού $\rho_\sigma = (a_{i(\sigma)} \ b_{i(\sigma)})$, τότε $\{\sigma\rho_\sigma(a_{i(\sigma)}), \sigma\rho_\sigma(b_{i(\sigma)})\} = \{\sigma(b_{i(\sigma)}), \sigma(a_{i(\sigma)})\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$ (το $\subseteq$ ισχύει από (*)). Συνεπώς από ελαχιστικότητα του $i(\sigma\rho_\sigma)$ (βλέπε (*)) πρέπει $i(\sigma\rho_\sigma) \leq i(\sigma)$.

$i(\sigma) \leq i(\sigma\rho_\sigma)$: Αν δείξουμε ότι $\{\sigma(a_{i(\sigma\rho_\sigma)}), \sigma(b_{i(\sigma\rho_\sigma)})\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$, τότε από ελαχιστικότητα του $i(\sigma)$ (βλέπε (*)) θα πρέπει $i(\sigma) \leq i(\sigma\rho_\sigma)$. Δείχνουμε ότι $\sigma(a_{i(\sigma\rho_\sigma)}) \in \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$ και όμοια για το $\sigma(b_{i(\sigma\rho_\sigma)})$. Καταρχάς, από (*) έχουμε,

$$\{\sigma(a_{i(\sigma)}), \sigma(b_{i(\sigma)})\}, \{\sigma\rho_\sigma(a_{i(\sigma\rho_\sigma)}), \sigma\rho_\sigma(b_{i(\sigma\rho_\sigma)})\} \subseteq \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}. (**)$$

Όμως $\rho_\sigma = (a_{i(\sigma)} \ b_{i(\sigma)})$ οπότε,

$$\sigma(a_{i(\sigma\rho_\sigma)}) = \begin{cases} \sigma\rho_\sigma(a_{i(\sigma\rho_\sigma)}) & a_{i(\sigma\rho_\sigma)} \neq a_{i(\sigma)}, b_{i(\sigma)} \\ \sigma(a_{i(\sigma)}) & a_{i(\sigma\rho_\sigma)} = a_{i(\sigma)} \\ \sigma(b_{i(\sigma)}) & a_{i(\sigma\rho_\sigma)} = b_{i(\sigma)} \end{cases},$$

όπου σε κάθε περίπτωση από (**) έπεται ότι $\sigma(a_{i(\sigma\rho_\sigma)}) \in \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$ (όμοια $\sigma(b_{i(\sigma\rho_\sigma)}) \in \{a_q, \dots, a_t, b_1, \dots, b_q\}$). Συνεπώς από αυτά που αναφέραμε πάνω πρέπει $i(\sigma) \leq i(\sigma\rho_\sigma)$.

Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Με βάση τον ισχυρισμό θα δείξουμε το 1-1. Έστω $\phi(\sigma_1) = \phi(\sigma_2) \iff \sigma_1\rho_{\sigma_1} = \sigma_2\rho_{\sigma_2}$ τότε,

$$\sigma_1\rho_{\sigma_1} = \sigma_2\rho_{\sigma_2} \implies i(\sigma_1\rho_{\sigma_1}) = i(\sigma_2\rho_{\sigma_2}) \implies i(\sigma_1) = i(\sigma_2) \implies \rho_{\sigma_1} = \rho_{\sigma_2}.$$

Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει γιατί εξ'ορισμού $\rho_\sigma = (a_{i(\sigma)} \ b_{i(\sigma)})$. Συνεπώς $\rho_{\sigma_1} = \rho_{\sigma_2}$ και $\sigma_1 = \sigma_2$.

ϕ επί: Άμεσα αφού $\phi : YC(T) \longrightarrow YC(T)$, 1-1 και $|YC(T)| < \infty$.

□

Απόδειξη. (Θεωρήματος 4.5.1)

Οι $i), ii)$ υποθέσεις του λήμματος Carter-Lusztig έπονται άμεσα από Πρόταση 4.2.1 $ii)$ και Παρατήρηση 4.2.1 $iii)$. Όσο για τη $iii)$, καταρχάς παρατηρούμε ότι $YC(T) = G(J)C(T)$ και μάλιστα για το τυχόν στοιχείο $\pi \in YC(T)$ υπάρχουν μοναδικά $\nu_\pi \in G(J)$, $\sigma_\pi \in C(T)$ ώστε $\pi = \nu_\pi \sigma_\pi (*)$.

Πράγματι, καταρχάς $G(J)C(T) \subseteq YC(T)$ (αφού $G(J) \subseteq Y$), ανάποδα, αν $\pi \in YC(T)$ τότε $\pi = y c$, με $y \in Y$, $c \in C(T)$, όμως εξ' ορισμού του $G(J)$, υπάρχουν $\nu_\pi \in G(J)$, $x_\pi \in X = C(T) \cap Y$ ώστε $y = \nu_\pi x_\pi$ και άρα $\pi = \nu_\pi (x_\pi c) \in G(J)C(T)$, συνεπώς $YC(T) \subseteq G(J)C(T)$. Όσο για την μοναδικότητα, αν $\nu_1, \nu_2 \in G(J)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in C(T)$ με $\nu_1 \sigma_1 = \nu_2 \sigma_2$, τότε $\nu_2^{-1} \nu_1 = \sigma_2 \sigma_1^{-1} \in C(T) \cap Y = X$, συνεπώς $\nu_1 X = \nu_2 X$, όμως $G(J) =$ είναι σύνολο αντιπροσώπων, άρα $\nu_1 = \nu_2$ και κατά συνέπεια $\sigma_1 = \sigma_2$. Συνεχίζοντας, έχουμε,

$$\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f(i\nu) = \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) (T_l : T_{i\nu}) = \sum_{\nu \in G(J)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\nu \sigma) c_{l, i\nu \sigma} \stackrel{(*)}{=} \sum_{\pi \in YC(T)} s(\pi) c_{l, i\pi}.$$

Από Λήμμα 4.5.3 $ii)$, υπάρχει $A \subseteq YC(T)$ ώστε $YC(T) = \bigsqcup_{\pi \in A} \{\pi, \pi \kappa_\pi\}$, όπου $\kappa_\pi \in R(T)$ με $s(\kappa_\pi) = -1$. Συνεπώς, $\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f(i\nu) = \sum_{\pi \in A} (s(\pi) c_{l, i\pi} + s(\pi \kappa_\pi) c_{l, i\pi \kappa_\pi})$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} & s(\pi) c_{l, i\pi} + s(\pi \kappa_\pi) c_{l, i\pi \kappa_\pi} \stackrel{(l, i\pi \kappa_\pi) \sim (l\kappa_\pi^{-1}, i\pi)}{=} s(\pi) c_{l, i\pi} + s(\pi) s(\kappa_\pi) c_{l\kappa_\pi^{-1}, i\pi} \stackrel{\text{Λήμμα 4.4.1 } i)}{=} \\ & s(\pi) c_{l, i\pi} - s(\pi) c_{l, i\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά, } \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f(i\nu) = 0.$$

□

Θεώρημα 4.5.2. (Μερος II του θεωρήματος βάσης για το $D_{\lambda, K}$).

- $i)$ Το $\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i \text{ standard}\}$ είναι K -βάση του $D_{\lambda, K}$.
- $ii)$ Έστω $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i \text{ standard}\}$ και $j \in I(n, r)$. Τότε υπάρχουν $\{n_i\}_{i \in I^*} \subseteq \mathbb{Z}$, ώστε για κάθε άπειρο σώμα K να ισχύει $(T_l : T_j)_K = \sum_{i \in I^*} n_i (T_l : T_i)_K$. Δηλαδή οι συντελεστές $\{n_i\}_{i \in I^*}$ είναι ανεξάρτητοι της επιλογής του K .

Απόδειξη.

- $i)$ Την γραμμική ανεξαρτησία την είδαμε στο προηγούμενη παράγραφο (Πρόταση 4.4.1). Επιπλέον, έστω $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i \text{ standard}\}$, τότε από θεώρημα 4.5.1 έχουμε:

$$D_{\lambda, K} = \text{span}_K \{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r)\} \subseteq \text{span}_K \{(T_l : T_i) \mid i \in I^*\} \subseteq D_{\lambda, K}.$$

$$\text{Άρα } D_{\lambda, K} = \text{span}_K \{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r), T_i \text{ standard}\}.$$

- $ii)$ Είναι άμεσο από το γεγονός ότι η απόδειξη του Λήμματος Carter-Lusztig, όπως επίσης και η απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.1 δεν εμπλέκουν-χρησιμοποιούν πουνθενά το σώμα K .

□

4.6 Εφαρμογές του θεωρήματος βάσης.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Πρόταση 4.6.1. Έστω $a \in \Lambda(n, r)$, $j \in I(n, r)$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$i) \quad \xi_a \circ (T_l : T_j) = \begin{cases} (T_l : T_j) & j \in a \\ 0 & j \notin a \end{cases}. \text{ Ιδιαίτερώς } \{(T_l : T_i) \mid i \in a\} \subseteq D_{\lambda, K}^a.$$

$$ii) \quad a) \text{ Αν } (T_l : T_j) \neq 0, \text{ τότε, } (T_l : T_j) \in D_{\lambda, K}^a \iff j \in a.$$

$$b) \text{ Το σύνολο } \{(T_l : T_i) \mid i \in a, T_i \text{ standard}\} \text{ είναι } K\text{-βάση του } D_{\lambda, K}^a.$$

iii) $\dim_K D_{\lambda, K}^a = |\{i \in I(n, r) \mid i \in a, T_i = \text{standard}\}|$ και άρα η διάσταση του $D_{\lambda, K}^a$ και ακόμα γενικότερα ο χαρακτήρας $\Phi_{D_{\lambda, K}^a}$ είναι σταθερός και ανεξάρτητος του σώματος K .

Απόδειξη.

i) Έστω $k \in I(n, r)$ με $k \in a$, τότε $\xi_a = \xi_{k, k}$, οπότε,

$$\begin{aligned} \xi_a \circ (T_l : T_j) &\stackrel{\text{Παρατήρηση 4.3.2}}{=} \sum_{i \in I(n, r)} \xi_{k, k}(c_{i, j})(T_l : T_i) \stackrel{\text{Παρατήρηση 2.1.1iv}}{=} \\ \xi_{k, k}(c_{j, j})(T_l : T_j) &= \begin{cases} (T_l : T_j) & j \in a \\ 0 & j \notin a \end{cases} \end{aligned}$$

$$ii) \quad a) (\Leftarrow): \text{ Έστω } j \in a, \text{ τότε } (T_l : T_j) \stackrel{i)}{=} \xi_a \circ (T_l : T_j) \in D_{\lambda, K}^a.$$

($\Rightarrow$): Έστω $(T_l : T_j) \in D_{\lambda, K}^a$, τότε (από Πρόσβαση 3.2.1) $\xi_a \circ (T_l : T_j) = (T_l : T_j) \neq 0$, άρα αναγκαστικά πρέπει $j \in a$.

b) Από i) έχουμε, $B_a := \{(T_l : T_i) \mid i \in a, T_i \text{ standard}\} \subseteq D_{\lambda, K}^a$. Επιπλέον, το B_a είναι K -γραμμικά ανεξάρτητο από Θεώρημα βάσης για το $D_{\lambda, K}$. Μένει να δείξουμε ότι $D_{\lambda, K}^a = \text{span}_K B_a$. Πράγματι, θέτουμε $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i \text{ standard}\}$ και έστω $x \in D_{\lambda, K}^a$, τότε $\xi_a \circ x = x$ και από Θεώρημα 4.5.2, υπάρχουν $\{k_i\}_{i \in I^*} \subseteq K$, ώστε, $x = \sum_{i \in I^*} k_i (T_l : T_i)$.

Συνεπώς,

$$x = \xi_a \circ x = \sum_{i \in I^*} k_i (\xi_a \circ (T_l : T_i)) \stackrel{i)}{=} \sum_{i \in B_a} k_i (T_l : T_i).$$

iii) Άμεσο από ii)b).

□

Παρατήρηση 4.6.1. (Σύνδεση της απεικόνισης l με τα *standard λ -tableaux*).

i) Έστω $\sigma \in G(r)$. Τότε, $T_{l\sigma} = \text{standard} \iff \sigma \in R(T)$.

ii) Έστω $i \in I(n, r)$ με $i \sim l$ ($\iff i \in \lambda$) και $T_i = \text{standard}$. Τότε $i = l$.

Σχόλιο. Η προηγούμενη παρατήρηση, παρά την τεχνική της φύση, θα μας φανεί χρήσιμη για την μελέτη του χώρων $D_{\lambda, K}^\lambda$, $D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda$ (και παρακάτω, των χώρων $V_{\lambda, K}^\lambda$, $V_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda$).

Απόδειξη.

i) Αν $\sigma \in R(T)$, τότε (από Λήμμα 4.4.1) $l = l\sigma \iff T_{l\sigma} = T_l = \text{standard}$. Αντίστροφα, έστω $\sigma \in G(r)$, ώστε $T_{l\sigma} = \text{standard}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\sigma \in R(T)$. Διαισθητικά είναι

αναμενόμενο, καθώς $T_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & & \\ \vdots & & & & & \\ n & \cdots & n & & & \end{pmatrix}$ και οπότε το μόνο ανακάτεμα στοιχείων

που θα μπορούσε να διατηρήσει τον πίνακα *standard*, είναι ανακάτεμα των γραμμών του.

Τυπικά, θα δείξουμε ότι $l\sigma(x(s, t)) = s = l(x(s, t))$, για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ (και άρα $l\sigma = l$). Πράγματι,

1) $l\sigma(x(1, t)) = 1$, $\forall t = 1, \dots, \lambda_1$: Έστω ότι $l\sigma(x(s_0, t_0)) = 1$ τότε (επειδή $T_{l\sigma} = \text{standard}$) πρέπει,

$$1 = l\sigma(x(s_0, t_0)) > l\sigma(x(s, t_0)) \geq 1, \forall s < s_0.$$

Από το τελευταίο δεν πρέπει να υπάρχουν s ώστε $s < s_0$ και άρα $s_0 = 1$. Συνεπώς, αν $l\sigma(x(s, t)) = 1$, τότε πρέπει $s = 1$. Επιπλέον $l\sigma \in \lambda$ (που σημαίνει ότι το $l\sigma$ χτυπάει λ_1 -φορές το 1), άρα $l\sigma(x(1, t)) = 1$, $\forall t = 1, \dots, \lambda_1$.

2) $l\sigma(x(2, t)) = 2$, $\forall t = 1, \dots, \lambda_2$: Έστω ότι $l\sigma(x(s_0, t_0)) = 2$, τότε από 1) πρέπει $s_0 \geq 2$ και $l\sigma(x(s, t_0)) \geq 2$, $\forall s \geq 2$ (αφού στο 1) είδαμε ότι αν $l\sigma(x(s, t_0)) = 1$, τότε πρέπει $s = 1$). Οπότε (επειδή $T_{l\sigma} = \text{standard}$) πρέπει,

$$2 = l\sigma(x(s_0, t_0)) > l\sigma(x(s, t_0)) \geq 2, \forall 2 \leq s < s_0.$$

Από το τελευταίο δεν πρέπει να υπάρχουν s ώστε $2 \leq s < s_0$, δηλαδή $s_0 \leq 2$ και έτσι $s_0 = 2$ (αφού πάνω είδαμε ότι $s_0 \geq 2$). Συνεπώς, αν $l\sigma(x(s, t)) = 2$, τότε πρέπει $s = 2$. Επιπλέον $l\sigma \in \lambda$ (που σημαίνει ότι το $l\sigma$ χτυπάει λ_2 -φορές το 2), άρα $l\sigma(x(2, t)) = 2$, $\forall t = 1, \dots, \lambda_2$.

Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να δείξουμε ότι $l\sigma(x(s, t)) = s = l(x(s, t))$, για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ και άρα $l\sigma = l$.

ii) Εφόσον $i \in l$, τότε υπάρχει $\sigma \in G(r)$ ώστε $i = l\sigma$, άρα $T_{l\sigma} = T_i = \text{standard}$, συνεπώς (από i)) $\sigma \in R(T)$ και $l = l\sigma = i$.

□

Πόρισμα 4.6.1. $D_{\lambda,K}^\lambda = K(T_l : T_l) = \text{span}_K\{(T_l : T_l)\}$. Ιδιαίτερος, $\dim_K D_{\lambda,K}^\lambda = 1$.

Απόδειξη.

Έστω $I = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$, τότε,

$$D_{\lambda,K}^\lambda \xrightarrow{\text{Πρόταση 4.6.1}} \text{span}_K\{(T_l : T_i) \mid i \in \lambda, i \in I^*\} \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 4.6.1}} \text{span}_K\{(T_l : T_l)\} = K(T_l : T_l).$$

□

Πρόταση 4.6.2. *i) Έστω $a \in \Lambda(n, r)$ με $\lambda < a$ (ως προς την λεξικογραφική διάταξη) τότε,*

$$\{i \in I(n, r) \mid i \in a, T_i = \text{standard}\} = \emptyset \text{ και άρα } \dim_K D_{\lambda,K}^a = 0.$$

$$ii) \Phi_{D_{\lambda,K}} = \sum_{a \leq \lambda} \dim_K D_{\lambda,K}^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}, \text{ ιδιαίτερος το } \Phi_{D_{\lambda,K}} \text{ έχει leading term το } x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Απόδειξη.

i) Έστω $a = (a_1, \dots, a_n) > \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και ας υποθέσουμε για άτοπο ότι υπάρχει $i \in a$ με $T_i = \text{standard}$. Τότε έχουμε,

1) Αν $i_{x(s,t)} = 1$ τότε $s = 1$: Έστω ότι $i_{x(s_0,t_0)} = 1$ τότε (επειδή $T_i = \text{standard}$) πρέπει,

$$1 = i_{x(s_0,t_0)} > i_{x(s,t_0)} \geq 1, \forall s < s_0.$$

Από το τελευταίο έπεται ότι δεν πρέπει να υπάρχουν s ώστε $s < s_0$ και άρα $s_0 = 1$.

Τώρα $i \in a$ που σημαίνει ότι το i χτυπάει a_1 —φορές το 1. Επιπλέον η πρώτη γραμμή του T_i έχει μήκος λ_1 , συνεπώς πρέπει από 1) να ισχύει $a_1 \leq \lambda_1$, όμως και $\lambda_1 \leq a_1$ (αφού $a > \lambda$), άρα $a_1 = \lambda_1$. Ιδιαίτερος $i_{x(1,t)} = 1$, για κάθε $t = 1, \dots, \lambda_1$ (*).

2) Αν $i_{x(s,t)} = 2$ τότε $s = 2$: Έστω ότι $i_{x(s_0,t_0)} = 2$, τότε από (*) πρέπει $s_0 \geq 2$. Επιπλέον από 1) και το γεγονός ότι $T_i = \text{standard}$ έχουμε,

$$2 = i_{x(s_0,t_0)} > i_{x(s,t_0)} \geq 2, \forall 1 < s < s_0.$$

Από το τελευταίο έπεται ότι δεν πρέπει να υπάρχουν s ώστε $1 < s < s_0$, άρα $s_0 \leq 2$. Από πάνω είχαμε και $s_0 \geq 2$, άρα $s_0 = 2$.

Τώρα $i \in a$ που σημαίνει ότι το i χτυπάει a_2 —φορές το 2. Επιπλέον η δεύτερη γραμμή του T_i έχει μήκος λ_2 , συνεπώς πρέπει από 2) να ισχύει $a_2 \leq \lambda_2$, όμως και $\lambda_2 \leq a_2$ (αφού $a_1 = \lambda_1$ και $a > \lambda$), άρα $a_2 = \lambda_2$.

Συνεχίζοντας έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι $a_j = \lambda_j$, για κάθε $j = 1, \dots, n$. Άρα $a = \lambda$, άτοπο (αφού $\lambda < a$). Οπότε $\{i \in I(n, r) \mid i \in a, T_i = \text{standard}\} = \emptyset$ και από Πρόταση 4.6.1 πρέπει $\dim_K D_{\lambda,K}^a = 0$

ii) Από i) και ορισμό του formal character έπεται άμεσα ότι $\Phi_{D_{\lambda,K}} = \sum_{a \leq \lambda} \dim_K D_{\lambda,K}^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$.

Συνεπώς το $\Phi_{D_{\lambda,K}}$ έχει έχει leading term το $\dim_K D_{\lambda,K}^\lambda x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$, όπου $\dim_K D_{\lambda,K}^\lambda = 1$ (βλέπε Πόρισμα 4.6.1).

□

Θεώρημα 4.6.1. i) $\Phi_{D_{\lambda,K}} = S_\lambda$.

ii) Αν $\text{char} K = 0$, τότε το $D_{\lambda,K}$ είναι irreducible $K\Gamma$ -πρότυπο ($\iff S_K(n, r)$ -πρότυπο).

Απόδειξη.

i) Βλέπε [1, σελ. 39] ή [5, σελ. 101, (6.4)] ή (προτεινόμενη) [24].

ii) Ξέρουμε (από το Κεφάλαιο 3) ότι αν $chK = 0$, τότε $\Phi_{F_{\lambda,K}} = S_\lambda$. Συνεπώς, στη περίπτωση όπου $chK = 0$, έχουμε $\Phi_{\lambda,K} = \Phi_{D_{\lambda,K}}$, άρα από Θεώρημα 3.5.2, $D_{\lambda,K} \simeq F_{\lambda,K} = \text{irreducible } K\Gamma\text{-πρότυπο}$.

Μία εναλλακτική απόδειξη χωρίς να ξέρουμε ποιοι είναι (ακριβώς) χαρακτήρες των $D_{\lambda,K}, F_{\lambda,0}$ (δηλαδή χωρίς το Θεώρημα 4.6.1 i) και χωρίς να έχουμε γνώση ότι $\Phi_{\lambda,0} = S_\lambda$) μπορούμε να παράξουμε στη παράγραφο 5.4 (βλέπε Πόρισμα 5.4.1)

□

4.7 $\mathbb{Z}$ -forms στο $D_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Πρόταση 4.7.1. *i) Το $D_{\lambda,\mathbb{Z}} := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του $D_{\lambda,\mathbb{Q}}$. Ιδιαίτερώς, $D_{\lambda,\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}$*

ii) Η οικογένεια $(D_{\lambda,K})_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το $D_{\lambda,\mathbb{Z}}$ και μία οικογένεια ισομορφισμών $(d_K)_K$, όπου $d_K : D_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow D_{\lambda,K}$, με $d_K((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = (T_l : T_i)_K$, για κάθε $i \in I(n, r)$. (Υπενθύμιζουμε ότι οι ισομορφισμοί $(d_K)_K$ είναι στην $M_K(n, r) \iff$ στην $\text{mod}(S_K(n, r))$).

iii) $D_{\lambda,\mathbb{Z}}^\lambda = \mathbb{Z}(T_l : T_l) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_l)_{\mathbb{Q}}\}$. Ιδιαίτερώς το $D_{\lambda,\mathbb{Z}}^\lambda$ είναι κυκλικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο με $\dim_{\mathbb{Z}} D_{\lambda,\mathbb{Z}}^\lambda = 1$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς θα δείξουμε ότι,

$$D_{\lambda,\mathbb{Z}} := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}. (*)$$

Πράγματι, ο εγκλεισμός " $\subseteq$ " είναι σαφές. Ανάποδα, ξέρουμε ότι η απεικόνιση

$$f : I(n, r) \longrightarrow D_{\lambda,\mathbb{Q}}, \quad i \longmapsto (T_l : T_i)_{\mathbb{Q}},$$

έχει την ιδιότητα $\text{Im} f \subseteq \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\}$ (βλέπε Θεώρημα 4.5.1) και έτσι έπεται η (*). Όσο για την ιδιότητα του $\mathbb{Z}$ -form, από (*) και το γεγονός ότι το $\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\}$ είναι $\mathbb{Q}$ -βάση του $D_{\lambda,\mathbb{Q}}$, αρκεί να δείξουμε ότι $D_{\lambda,\mathbb{Z}}$ είναι κλειστό κάτω από την δράση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$. Έστω $i, j, k \in I(n, r)$ τότε,

$$\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}} \circ (T_l : T_k)_{\mathbb{Q}} = \sum_{p \in I(n, r)} \underbrace{\xi_{i,j}^{\mathbb{Q}}(c_{p,k}^{\mathbb{Q}})}_{1 \text{ ή } 0} (T_l : T_p)_{\mathbb{Q}} \in D_{\lambda,\mathbb{Z}}. (**)$$

Συνεπώς, από Παρατήρηση 2.5.2 το $D_{\lambda,\mathbb{Z}}$ είναι κλειστό κάτω από την δράση του $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$.

ii) Έστω $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$, τότε για κάθε σώμα K , τα $D_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$, $D_{\lambda,K}$ (από Πρόταση 2.5.2 i)) έχουν K -βάσεις τα $\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K\}_{i \in I^*}$, $\{(T_l : T_i)_K\}_{i \in I^*}$ αντίστοιχα (και άρα $\dim_K D_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes K = \dim_K D_{\lambda,K}$). Συνεπώς, ορίζεται ο παρακάτω ισομορφισμός K -προτύπων

$$d_K : D_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow D_{\lambda,K}, \quad \text{με } d_K((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = (T_l : T_i)_K, \quad \text{για κάθε } i \in I^*.$$

Μένει να δούμε τα παρακάτω,

i) $d_K((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = (T_l : T_i)_K$, για κάθε $i \in I(n, r)$.

ii) Η d_K είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων ($\iff S_K(n, r)$ -προτύπων).

Απόδειξη των $i), ii)$:

- $i)$ Εμείς αυτό που ξέρουμε είναι ότι $\delta_K((T_l : T_i)_\mathbb{Q} \otimes 1_K) = (T_l : T_i)_K$, για κάθε $i \in I^*$. Έστω λοιπόν $j \in I(n, r)$, τότε, από Θεώρημα 4.5.2 $ii)$, υπάρχουν $\{n_i\}_{i \in I^*} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε $(T_l : T_j)_\mathbb{Q} = \sum_{i \in I^*} n_i (T_l : T_i)_\mathbb{Q}$ και $(T_l : T_j)_K = \sum_{i \in I^*} n_i (T_l : T_i)_K$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} d_K((T_l : T_j)_\mathbb{Q} \otimes 1_K) &= d_K\left(\left(\sum_{i \in I^*} n_i (T_l : T_i)_\mathbb{Q}\right) \otimes 1_K\right) = \\ &= \sum_{i \in I^*} n_i d_K((T_l : T_i)_\mathbb{Q} \otimes 1_K) \stackrel{i \in I^*}{=} \sum_{i \in I^*} n_i (T_l : T_i)_K = (T_l : T_j)_K. \end{aligned}$$

- $ii)$ Επειδή τα $\{\xi_{i,j}^K\}_{(i,j) \in \mathcal{T}}$, $\{(T_l : T_p)_\mathbb{Q} \otimes 1_k\}_{p \in I^*}$ είναι K -βάσεις των $S_K(n, r)$, $D_{\lambda, \mathbb{Z}} \otimes K$ αντίστοιχα και d_K = ομομορφισμός K -προτύπων, αρκεί να δείξουμε ότι,

$$d_K(\xi_{i,j}^K \cdot ((T_l : T_p)_\mathbb{Q} \otimes 1_k)) = \xi_{i,j}^K \circ d_K((T_l : T_p)_\mathbb{Q} \otimes 1_k), \text{ για κάθε } (i, j) \in \mathcal{T}, p \in I^*.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} d_K(\xi_{i,j}^K \cdot ((T_l : T_p)_\mathbb{Q} \otimes 1_k)) &= d_K((\xi_{i,j}^\mathbb{Q} \circ (T_l : T_p)_\mathbb{Q}) \otimes 1_k) = d_K\left(\left(\sum_{k \in I(n, r)} \xi_{i,j}^\mathbb{Q}(c_{k,p}^\mathbb{Q})(T_l : T_k)_\mathbb{Q}\right) \otimes 1_K\right) = \\ &= \sum_{k \in I(n, r)} \xi_{i,j}^\mathbb{Q}(c_{k,p}^\mathbb{Q}) \delta_K((T_l : T_k)_\mathbb{Q} \otimes 1_K) \stackrel{i)}{=} \sum_{k \in I(n, r)} \xi_{i,j}^\mathbb{Q}(c_{k,p}^\mathbb{Q})(T_l : T_k)_K. (*) \end{aligned}$$

Επιπλέον, με βάση των Ορισμό 2.3.2, έχουμε (άμεσα) ότι $\xi_{i,j}^K(c_{k,p}^K) = \xi_{i,j}^\mathbb{Q}(c_{k,p}^\mathbb{Q}) \cdot 1_K$, συνεπώς,

$$\begin{aligned} d_K(\xi_{i,j}^K \cdot ((T_l : T_p)_\mathbb{Q} \otimes 1_K)) &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k \in I(n, r)} \xi_{i,j}^K(c_{k,p}^K)(T_l : T_k)_K = \xi_{i,j}^K \circ (T_l : T_p)_K \stackrel{i)}{=} \\ &= \xi_{i,j}^K \circ d_K((T_l : T_p)_\mathbb{Q} \otimes 1_K). \end{aligned}$$

- $iii)$ Καταρχάς, θέτουμε $I^* := \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$. Έχουμε τα εξής,

$D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda \subseteq \mathbb{Z}(T_l : T_l)_\mathbb{Q}$: Έστω $x \in D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda = \xi_\lambda^\mathbb{Q} D_{\lambda, \mathbb{Z}}$, τότε (από $i)$) υπάρχουν $\{n_i\}_{i \in I^*} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε,

$$\begin{aligned} x &= \xi_\lambda^\mathbb{Q} \cdot \left(\sum_{i \in I^*} n_i (T_l : T_i)_\mathbb{Q}\right) = \sum_{i \in I^*} n_i (\xi_\lambda^\mathbb{Q} \cdot (T_l : T_i)_\mathbb{Q}) \stackrel{\text{Πρόταση 4.6.1}}{=} \\ &= \sum_{i \in I^*, i \in \lambda} n_i (T_l : T_i)_\mathbb{Q} \stackrel{\text{Παρατήρηση 4.6.1}}{=} n_l (T_l : T_l)_\mathbb{Q} \in \mathbb{Z}(T_l : T_l)_\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}(T_l : T_l)_\mathbb{Q} \subseteq D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda$: Άμεσο από $i)$.

$\dim_{\mathbb{Z}} D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda = 1$: Εφόσον το σύνολο $B = \{(T_l : T_i)_\mathbb{Q} \mid i \in I^*\}$ αποτελεί $\mathbb{Q}$ -βάση του $D_{\lambda, \mathbb{Q}}$ και $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, τότε (από $i)$) το B αποτελεί και $\mathbb{Z}$ -βάση του $D_{\lambda, \mathbb{Z}}$, επιπλέον $(T_l : T_l)_\mathbb{Q} \in B$ και $D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda = \mathbb{Z}(T_l : T_l)_\mathbb{Q}$, άρα $\dim_{\mathbb{Z}} D_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda = 1$.

□

Σχόλιο. Στην παράγραφο 4.3 (βλέπε Παρατήρηση 4.3.3) είδαμε ότι ο δεξιός λ -weight space ${}^\lambda A_K(n, r)$ ανήκει στην κατηγορία $M_K(n, r)$ και επιπλέον $D_{\lambda, K} \subseteq {}^\lambda A_K(n, r)$. Στη παράγραφο αυτή θα δούμε ότι, η οικογένεια $({}^\lambda A_K(n, r))_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined όπως επίσης και η οικογένεια των ενθέσεων $D_{\lambda, K} \hookrightarrow {}^\lambda A_K(n, r)$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined (βλέπε Ορισμό 2.5.5).

Υπενθύμιση 4.7.1. ${}^\lambda A_K(n, r) \in M_K(n, r)$ ($\iff {}^\lambda A_K(n, r) \in \text{mod}(S_K(n, r))$) και το σύνολο $\{c_{i,j}^K \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\}$ είναι μία K -βάση του. (Βλέπε Παρατήρηση 4.3.3).

Πρόταση 4.7.2. i) Το ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του ${}^\lambda A_{\mathbb{Q}}(n, r)$.
Ιδιαίτερος, ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i, j \in I(n, r), i \in \lambda\}$.

ii) Η οικογένεια προτύπων $({}^\lambda A_K(n, r))_K$ της $M_K(n, r)$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και μία οικογένεια ισομορφισμών $(a_K)_K$, όπου $a_K : {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow {}^\lambda A_K(n, r)$, με $a_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = c_{i,j}^K$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ με $i \in \lambda$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς θα δείξουμε ότι,

$${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i, j \in I(n, r), i \in \lambda\}.$$

Πράγματι, ο εγκλεισμός " $\subseteq$ " είναι σαφές. Ανάποδα, αν $x \in \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), i \in \lambda\}$, τότε $x = \sum_{i \in I(n, r), i \in \lambda} n_i c_{i,j}^{\mathbb{Q}}$, όπου $n_i \in \mathbb{Z}$. Τώρα, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ με $i \in \lambda$, υπάρχει $(k, p) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (k, p)$ (βλέπε Ορισμό 2.1.2), ιδιαιτέρως $c_{i,j}^{\mathbb{Q}} = c_{k,p}^{\mathbb{Q}}$ και $k \sim i \iff k \in \lambda$. Από το τελευταίο έπεται ότι $x \in \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\}$.

Το ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ είναι $\mathbb{Z}$ -form : Από Παρατήρηση 2.5.2, αρκεί να δείξουμε ότι, $\xi_{k,p}^{\mathbb{Q}} \circ c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \in {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ για κάθε $(k, p), (i, j) \in \mathcal{T}$, $i \in \lambda$. Πράγματι, $\xi_{k,p}^{\mathbb{Q}} \circ c_{i,j}^{\mathbb{Q}} = \sum_{h \in I(n, r)} \xi_{k,p}^{\mathbb{Q}}(c_{h,j}^{\mathbb{Q}}) c_{i,h}^{\mathbb{Q}}$, όπου το τελευταίο ανήκει ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$, γιατί $\xi_{k,p}^{\mathbb{Q}}(c_{h,j}^{\mathbb{Q}}) \in \{1, 0\}$ και ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i, j \in I(n, r), i \in \lambda\}$.

ii) Επειδή τα $\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\}$, $\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K \mid i \in \lambda, (i, j) \in \mathcal{T}\}$ είναι K -βάσεις των ${}^\lambda A_K(n, r)$, ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ αντίστοιχα (και άρα $\dim_K {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K = \dim_K {}^\lambda A_K(n, r)$), έπεται άμεσα ο παρακάτω ισομορφισμός K -προτύπων,

$$a_K : {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow {}^\lambda A_K(n, r), \text{ με } a_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = c_{i,j}^K, \text{ για κάθε } (i, j) \in \mathcal{T}, i \in \lambda.$$

Μένει να δείξουμε ότι,

i) $a_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = c_{i,j}^K$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ με $i \in \lambda$.

ii) Η a_K είναι ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων.

Απόδειξη των i), ii):

i) Εμείς ξέρουμε ότι $a_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = c_{i,j}^K$, για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$ με $i \in \lambda$. Έστω λοιπόν $i, j \in I(n, r)$ με $i \in \lambda$, τότε (από Ορισμό 2.1.2) υπάρχει $(p, q) \in \mathcal{T}$ ώστε $(i, j) \sim (p, q)$, συνεπώς $c_{i,j}^{\mathbb{Q}} = c_{p,q}^{\mathbb{Q}}$, $c_{i,j}^K = c_{p,q}^K$ και $p \sim i \iff p \in \lambda$. Άρα,

$$a_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = a_K(c_{p,q}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = c_{p,q}^K = c_{i,j}^K.$$

ii) Επειδή η a_K είναι ομομορφισμός K -προτύπων και τα σύνολα $\{\xi_{p,q}^K\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$, $\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K\}_{i \in \lambda, (i,j) \in \mathcal{T}}$ είναι K -βάσεις των $S_K(n, r)$, ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes K$ αντίστοιχα, αρκεί να δείξουμε ότι,

$$a_K(\xi_{p,q}^K \cdot (c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) = \xi_{p,q}^K \circ a_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K), \text{ για κάθε } (i, j), (p, q) \in \mathcal{T} \text{ με } i \in \lambda.$$

Πράγματι, για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$ με $i \in \lambda$ έχουμε,

$$\begin{aligned} a_K(\xi_{p,q}^K \cdot (c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K)) &= a_K((\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}} \circ c_{i,j}^{\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) = a_K((\sum_{s \in I(n, r)} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{s,j}^{\mathbb{Q}}) c_{i,s}^{\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) \stackrel{\xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{s,j}^{\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Z}}{=} \\ &= \sum_{s \in I(n, r)} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{s,j}^{\mathbb{Q}}) a_K(c_{i,s}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) \stackrel{i)}{=} \sum_{s \in I(n, r)} \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{s,j}^{\mathbb{Q}}) c_{i,s}^K \stackrel{\xi_{p,q}^K(c_{s,j}^K) = \xi_{p,q}^{\mathbb{Q}}(c_{s,j}^{\mathbb{Q}}) \cdot 1_K}{=} \sum_{s \in I(n, r)} \xi_{p,q}^K(c_{s,j}^K) c_{i,s}^K = \\ &= \xi_{p,q}^K \circ c_{i,j}^K = \xi_{p,q}^K \circ \delta(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.7.3. Έστω $(D_{\lambda, K})_K$, $({}^\lambda A_K(n, r))_K$ οι οικογένειες της $M_K(n, r)$ που είδαμε πριν, οι οποίες είναι $\mathbb{Z}$ -defined από τα $\mathbb{Z}$ -forms $D_{\lambda, \mathbb{Z}}$, ${}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ αντίστοιχα και τις οικογένειες ισομορφισμών $(d_K)_K$, $(a_K)_K$ αντίστοιχα (που είδαμε στις Προτάσεις 4.7.1, 4.7.2). Αν για κάθε σώμα K (εννοείται πάντα άπειρο) θεωρήσουμε την ένθεση $\theta_K : D_{\lambda, K} \hookrightarrow {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$, τότε η οικογένεια ομομορφισμών (της $M_K(n, r)$) $(\theta_K)_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined.

Απόδειξη. Με βάση των Ορισμό 2.5.5, αρκεί να δείξουμε τα παρακάτω,

i) $\theta_{\mathbb{Q}}(D_{\lambda, \mathbb{Z}}) \subseteq {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$.

ii) $a_K \circ (\theta_{\mathbb{Q}}|_{D_{\lambda, \mathbb{Z}}} \otimes Id_K) = \theta_K \circ d_K$, για κάθε άπειρο σώμα K .

Απόδειξη των i), ii):

i) Ξέρουμε ότι $D_{\lambda, \mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\theta_{\mathbb{Q}}((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}}) \in {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$, για κάθε $i \in I(n, r)$. Πράγματι,

$$\theta_{\mathbb{Q}}((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}}) = (T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l, i\sigma}^{\mathbb{Q}},$$

όμως (από Παρατήρηση 4.3.1) $l \in \lambda$ και άρα από Πρόταση 4.7.2 πρέπει $\theta_{\mathbb{Q}}((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}}) \in {}^\lambda A_{\mathbb{Z}}(n, r)$.

ii) Επειδή οι απεικονίσεις $\theta_K \circ d_K$, $a_K \circ (\theta_{\mathbb{Q}}|_{D_{\lambda, \mathbb{Z}}} \otimes Id_K)$ είναι ομομορφισμοί K -προτύπων και το σύνολο $B = \{(T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K \mid T_i = \text{standard}\}$ είναι K -βάση του $D_{\lambda, \mathbb{Z}} \otimes K$ (βλέπε Πρόταση 2.5.2 i)), τότε αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα πάνω στο σύνολο B . Πράγματι, έστω $i \in I(n, r)$ με $T_i = \text{standard}$, τότε,

$$\theta_K \circ d_K((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \theta_K((T_l : T_i)_K) = (T_l : T_i)_K. (*)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} a_K \circ (\theta_{\mathbb{Q}}|_{D_{\lambda, \mathbb{Z}}} \otimes Id_K)((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) &= a_K(\theta_{\mathbb{Q}}|_{D_{\lambda, \mathbb{Z}}}((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}}) \otimes Id_K(1_K)) = a_K((T_l : T_i)_{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = \\ a_K((\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l, i\sigma}^{\mathbb{Q}}) \otimes 1_K) &= \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) a_K(c_{l, i\sigma}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) \stackrel{l \in \lambda}{=} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l, i\sigma}^K = (T_l : T_i)_K. (**) \end{aligned}$$

Από (*), (**) έπεται το ζητούμενο.

□

Πρόταση 4.7.4. i) Το $A_{\mathbb{Z}}(n, r) := \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid (i, j) \in \mathcal{T}\}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του $A_{\mathbb{Q}}(n, r)$. Ιδιαίτε-
ρώς, $A_{\mathbb{Z}}(n, r) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \mid i, j \in I(n, r)\}$.

ii) Η οικογένεια προτύπων $(A_K(n, r))_K$ της $M_K(n, r)$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined από το $A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ και μία οικογένεια ισομορφισμών $(A_K)_K$, όπου $A_K : A_{\mathbb{Z}}(n, r) \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow A_K(n, r)$, $\mu \in A_K(c_{i,j}^{\mathbb{Q}} \otimes 1_K) = c_{i,j}^K$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$.

iii) Έστω $(D_{\lambda, K})_K$, $(A_K(n, r))_K$ οι οικογένειες της $M_K(n, r)$ που είδαμε πριν, οι οποίες είναι $\mathbb{Z}$ -defined από τα $\mathbb{Z}$ -forms $D_{\lambda, \mathbb{Z}}$, $A_{\mathbb{Z}}(n, r)$ αντίστοιχα και τις οικογένειες ισομορφισμών $(d_K)_K$, $(A_K)_K$ αντίστοιχα. Αν για κάθε άπειρο σώμα K θεωρήσουμε την ένθεση $\theta_K : D_{\lambda, K} \hookrightarrow A_{\mathbb{Z}}(n, r)$, τότε η οικογένεια ομομορφισμών (της $M_K(n, r)$) $(\theta_K)_K$ είναι $\mathbb{Z}$ -defined.

Απόδειξη. Η απόδειξη δανείζεται ακριβώς-παρόμοιες ιδέες με αυτές των προηγούμενων τριών Προτάσεων.

□

5 Τα πρότυπα Carter-Lusztig $V_{\lambda,K}$.

5.1 Το πρότυπο $V_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Υπενθύμιση 5.1.1. *i) Στη παράγραφο 4.3 είδαμε το παρακάτω επιμορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων ($\Longleftrightarrow$ $K\Gamma$ -προτύπων),*

$$\varphi_K : E_K^{\otimes r} \longrightarrow D_{\lambda,K}, \text{ με } \varphi_K(e_j) = (T_l : T_j), \text{ για κάθε } j \in I(n, r).$$

Εν' συντομία, θα γράφουμε $E_K^{\otimes r} = E^{\otimes r}$ και $\varphi_K = \varphi$.

ii) Στο 2.7 είδαμε ότι υπάρχει η παρακάτω K -bilinear, non-singular, contravariant form ,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^{\otimes r} \times E^{\otimes r} \longrightarrow K, \text{ με } \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \text{ για κάθε } i, j \in I(n, r).$$

Μάλιστα, η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ καλείται κανονική μορφή.

Ορισμός 5.1.1. Έστω $N_K := \ker \varphi_K$ τότε ορίζουμε,

$$V_{\lambda,K} := \{x \in E^{\otimes r} \mid \langle x, N_K \rangle = 0\}.$$

Το $V_{\lambda,K}$ θα λέγεται ορθογώνιο συμπλήρωμα του N_K ως προς την κανονική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Παρατήρηση 5.1.1. *i) Η ακολουθία $0 \longrightarrow N_K \hookrightarrow E^{\otimes r} \xrightarrow{\varphi_K} D_{\lambda,K} \longrightarrow 0$, είναι ακριβή στην $M_K(n, r)$ ($\Longleftrightarrow$ στην $\text{mod}(S_K(n, r))$)*

ii) Το $V_{\lambda,K}$ είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο ($\Longleftrightarrow$ $K\Gamma$ -υποπρότυπο) του $E^{\otimes r}$.

iii) Το $V_{\lambda,K}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του basic λ -tableaux T .

Απόδειξη.

i) Είναι άμεσο από Υπενθύμιση 5.1.1.

ii) Έστω $x, y \in V_{\lambda,K}$ και $\xi \in S_K(n, r)$ τότε,

$$x - y \in V_{\lambda,K}: \quad \langle x - y, N_K \rangle = \langle x, N_K \rangle - \langle y, N_K \rangle \stackrel{x, y \in N_K}{=} 0.$$

$$\xi \cdot x \in V_{\lambda,K}: \quad \text{Καταρχάς, } J(\xi) \cdot N_K \subseteq N_K \text{ (επειδή το } N_K \text{ είναι } S_K(n, r)\text{-υποπρότυπο του } E^{\otimes r}), \\ \text{συνεπώς, } \langle \xi \cdot x, N_K \rangle = \langle x, J(\xi) \cdot N_K \rangle \stackrel{x \in V_{\lambda,K}}{=} 0$$

iii) Άμεσο από ορισμό του $V_{\lambda,K}$ και το γεγονός ότι το $D_{\lambda,K}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του basic λ -tableaux (βλέπε Παρατήρηση 4.3.2 i)).

□

Ορισμός 5.1.2. Ορίζουμε την απεικόνιση $(\ , \) : V_{\lambda,K} \times D_{\lambda,K} \longrightarrow K$, με $(x, \varphi_K(y)) = \langle x, y \rangle$.

Παρατήρηση 5.1.2. Η απεικόνιση $(\ , \)$, είναι καλά ορισμένη, K -bilinear, contravariant form, και left-non-singular (δηλαδή, αν $(x, z) = 0$, $\forall z \in D_{\lambda,K}$, τότε $x = 0$).

Απόδειξη.

Η $(\ , \)$ είναι καλά ορισμένη: Έστω $x_1, x_2 \in V_{\lambda,K}$, $y_1, y_2 \in E^{\otimes r}$, ώστε $x_1 = x_2 = x$ και $\varphi_K(y_1) = \varphi_K(y_2)$. Τότε $y_1 - y_2 \in N_K$ και άρα,

$$\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \iff \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1, y_2 \rangle \iff (x_1, \varphi_K(y_1)) = (x_2, \varphi_K(y_2)).$$

Η $(\ , \)$ είναι K -bilinear : Άμεσο από το γεγονός ότι η $\langle \ , \ \rangle$ είναι K -bilinear και η φ_K ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων και άρα και ομομορφισμός K -προτύπων.

Η $(\ , \)$ είναι contravariant form : Έστω $x \in V_{\lambda,K}$, $y \in E^{\otimes r}$ και $\xi \in S_K(n, r)$, τότε,

$$(\xi \cdot x, \varphi_K(y)) = \langle \xi \cdot x, y \rangle = \langle x, J(\xi) \cdot y \rangle = (x, \varphi_K(J(\xi) \cdot y)) = (x, J(\xi) \cdot \varphi_K(y)).$$

Η $(\ , \)$ είναι left-non-singular : Πράγματι, έστω $(x, z) = 0$, $\forall z \in D_{\lambda,K}$, τότε,

$$(x, \varphi_K(y)) = 0, \forall y \in E^{\otimes r} \iff \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in E^{\otimes r}.$$

Συνεπώς $x = 0$ (αφού η $\langle \ , \ \rangle$ είναι non-singular).

□

Σχόλιο. Εν' γέννη, η απεικόνιση $(\ , \)$ είναι και right-non-singular και άρα non-singular. Μία απόδειξη για την ιδιότητα αυτή, μπορούμε να εξάγουμε από την παράγραφο 5.3 (Πόρισμα 5.3.1). Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι η $(\ , \)$ είναι όντως non-singular, τότε έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πρόταση 5.1.1. Η απεικόνιση $(\ , \)$ είναι contravariant, non-singular και άρα ισχύουν τα παρακάτω,

i) $V_{\lambda,K} \simeq D_{\lambda,K}^\circ$ (Ισομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων $\iff K\Gamma$ -προτύπων).

ii) $\Phi_{V_{\lambda,K}} = \Phi_{D_{\lambda,K}^\circ} = \Phi_{D_{\lambda,K}} (= S_\lambda)$

iii) Αν $chK = 0$ τότε, $V_{\lambda,K} \simeq D_{\lambda,K} \simeq F_{\lambda,K} = \text{irreducible}$ στην $M_K(n, r)$. Ιδιαίτερος, τα $V_{\lambda,K}, D_{\lambda,K}$ είναι irreducible στην $M_K(n, r)$.

Απόδειξη.

i) Άμεσο από Πρόταση 2.7.4.

ii) Άμεσο από *i)* και Πρόταση 3.4.1 *i)*. (Όσο για το $\Phi_{D_{\lambda,K}} = S_{\lambda}$ βλέπε Θεώρημα 4.6.1).

iii) Αφού $chK = 0$, τότε, $\Phi_{F_{\lambda,0}} = S_{\lambda} \stackrel{ii)}{=} \Phi_{V_{\lambda,K}} = \Phi_{D_{\lambda,K}}$, άρα από Θεώρημα 3.5.2 έπεται το ζητούμενο. Μια εναλλακτική απόδειξη του *iii)* χωρίς να έχουμε γνώση ότι $\Phi_{F_{\lambda,0}} = S_{\lambda}, \Phi_{D_{\lambda,K}} = S_{\lambda}$ (δηλαδή χωρίς τα Θεώρημα 4.6.1, Θεώρημα 3.7.1) δίνεται παρακάτω από το Πόρισμα 5.4.1.

□

5.2 Το $V_{\lambda,K}$ σαν Carter-Lusztig πρότυπο.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Σε όλη την έκταση της παραγράφου, υιοθετούμε τους συμβολισμούς που είχαμε στο Λήμμα Carter-Lusztig (βλέπε παράγραφο 4.5, Ορισμό 4.5.1).

Ορισμός 5.2.1. Ορίζουμε τα εξής υποσύνολα του $E^{\otimes r}$.

- i) $\mathcal{R}_1 := \{e_i \mid i \in I(n, r) \text{ και το } T_i \text{ έχει δύο ίδιες τιμές σε διαφορετικές θέσεις της ίδια στήλης}\}.$
- ii) $\mathcal{R}_2 := \{e_i - s(\sigma)e_{i\sigma} \mid i \in I(n, r), \sigma \in C(T)\}.$
- iii) $\mathcal{R}_3 := \left\{ \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu)e_{i\nu} \mid i \in I(n, r), \emptyset \neq J \subseteq \{x(1, h+1), \dots, x(q, h+1)\}, h \in \{1, \dots, \lambda_1 - 1\} \text{ και } q \in \{1, \dots, \mu_{h+1}\} \right\}.$
- iv) $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3.$

Πρόταση 5.2.1. (Περιγραφή του $V_{\lambda,K}$ μέσω του Λήμματος Carter-Lusztig).

- i) $N_K = \text{span}_K \mathcal{R}.$
- ii) $V_{\lambda,K} = \{x \in E^{\otimes r} \mid \langle x, \mathcal{R}_s \rangle = 0, s = 1, 2, 3\}.$

Απόδειξη.

- i) $\text{span}_K \mathcal{R} \subseteq N_K$: Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{R}_s \subseteq N_K$ για κάθε $s = 1, 2, 3$. Πράγματι,

1) Έστω $e_i \in \mathcal{R}_1$, τότε, $\varphi_K(e_i) = (T_l : T_i) \xrightarrow{\text{Πρόταση 4.2.1}} 0$, άρα $e_i \in \ker \varphi_K = N_K$.

2) Έστω $e_i - s(\sigma)e_{i\sigma} \in \mathcal{R}_2$, με $i \in I(n, r)$ και $\sigma \in C(T)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \varphi_K(e_i - s(\sigma)e_{i\sigma}) &= \varphi_K(e_i) - s(\sigma)\varphi_K(e_{i\sigma}) = \\ (T_l : T_i) - s(\sigma)(T_l : T_{i\sigma}) &\xrightarrow{\sigma \in C(T)} (T_l : T_i) - s(\sigma)s(\sigma)(T_l : T_i) = 0 \end{aligned}$$

3) Έστω $\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu)e_{i\nu} \in \mathcal{R}_3$, τότε, από Θεώρημα 4.5.1 έχουμε,

$$\varphi_K\left(\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu)e_{i\nu}\right) = \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu)\varphi_K(e_{i\nu}) = \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu)(T_l : T_{i\nu}) = 0.$$

$N_K \subseteq \text{span}_K \mathcal{R}$: Ας θέσουμε για συντομία $N' := \text{span}_K \mathcal{R}$ και $I^* := \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$. Τότε, θεωρούμε το K -πρότυπο $F = E^{\otimes r}/N'$ και την απεικόνιση

$$\psi : F \longrightarrow D_{\lambda,K}, \quad x + N' \longmapsto \varphi_K(x).$$

Ισχύουν τα παρακάτω,

a) Η $\psi : F \longrightarrow D_{\lambda,K}$, είναι ισομορφισμός K -προτύπων.

b) Το σύνολο $\{e_i + N'\}_{i \in I^*}$ είναι K -βάση του F .

Απόδειξη των a), b):

Καταρχάς, η ψ είναι καλά ορισμένη, αφού για $x_1 + N' = x_2 + N'$, τότε $x_1 - x_2 \in N' = \text{span}_K \mathcal{R} \subseteq N_K = \ker \varphi_K$, άρα $\varphi_K(x_1) = \varphi_K(x_2)$. Επίσης η ψ είναι άμεσα ομομορφισμός K -προτύπων.

Τώρα, αφήνουμε για λίγο την ψ και πάμε να δείξουμε το b). Θεωρούμε την απεικόνιση,

$f : I(n, r) \longrightarrow F$, $i \longmapsto e_i + N'$ και παρατηρούμε ότι (άμεσα από τον ορισμό του N') ικανοποιεί της υποθέσεις του Λήμματος Carter-Lusztig, συνεπώς,

$$\{e_i + N' \mid i \in I(n, r)\} = \text{Im} f \subseteq \text{span}_{\mathbb{Z}}\{f(i) \mid i \in I^*\} \subseteq \text{span}_K\{f(i) \mid i \in I^*\} \subseteq F.$$

Επιπλέον, $F = \text{span}_K\{e_i + N' \mid i \in I(n, r)\}$ (αφού το $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$), άρα με βάση τα πιο πάνω έχουμε ότι,

$$F = \text{span}_K\{e_i + N' \mid i \in I(n, r)\} \subseteq \text{span}_K\{f(i) \mid i \in I^*\} \subseteq F.$$

Συνεπώς $F = \text{span}_K\{f(i) \mid i \in I^*\}$. Όσο για την K -γραμμική ανεξαρτησία, έστω $\{k_i\}_{i \in I^*} \subseteq K$ με $\sum_{i \in I^*} k_i(e_i + N') = 0$, τότε,

$$0 = \psi\left(\sum_{i \in I^*} k_i(e_i + N')\right) = \sum_{i \in I^*} k_i \psi(e_i + N') = \sum_{i \in I^*} k_i \varphi_K(e_i) = \sum_{i \in I^*} k_i(T_l : T_i),$$

άρα από Θεώρημα 4.5.2, έχουμε $k_i = 0$, για κάθε $i \in I^*$. Έτσι δείχτηκε το b).

Τώρα, επειδή $\psi(e_i + N') = \varphi_K(e_i) = (T_l : T_i)$ για κάθε $i \in I^*$ και τα σύνολα $\{e_i + N'\}_{i \in I^*}$, $\{(T_l : T_i)\}_{i \in I^*}$ είναι K -βάσεις των F , $D_{\lambda,K}$ αντίστοιχα, πρέπει η ψ να είναι ισομορφισμός K -προτύπων.

Τελικά, έχουμε $\{x + N' \mid x \in \ker \varphi_K = N_K\} \subseteq \ker \psi \stackrel{\psi^{-1}}{=} 0 = \{N'\}$. Άρα, $x + N' = N'$, για κάθε $x \in N_K$, δηλαδή $N_K \subseteq N' = \text{span}_K \mathcal{R}$.

ii) Άμεσα από i) και ορισμό του $V_{\lambda,K}$.

□

Σχόλιο. Με βάση την προηγούμενη πρόταση και την επόμενη υπενθύμιση, μπορούμε να δώσουμε μία περιγραφή των στοιχείων του $V_{\lambda,K}$ μέσω του Λήμματος Carter-Lusztig. Συχνά μάλιστα, τα πρότυπα $V_{\lambda,K}$ αναφέρονται ως πρότυπα Carter-Lusztig.

Υπενθύμιση 5.2.1.

i) Το $E^{\otimes r}$ είναι δεξιό $KG(r)$ -πρότυπο, με $e_i \cdot \pi = e_{i\pi}$, για κάθε $i \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$. Ιδιαίτέρως, το $E^{\otimes r}$ είναι $(K\Gamma, KG(r))$ -διπρότυπο.

ii) $\langle x\pi, y \rangle = \langle x, y\pi^{-1} \rangle$, για κάθε $x, y \in E^{\otimes r}$ και $\pi \in G(r)$.

Απόδειξη.

Το i) το ξέρουμε από την παράγραφο 2.6. Όσο για το ii), έστω $x, y \in E^{\otimes r}$ και $\pi \in G(r)$, τότε $x = \sum_{i \in I(n, r)} k_i e_i$, $y = \sum_{j \in I(n, r)} r_j e_j$. Οπότε,

$$\langle e_i \cdot \pi, e_j \rangle = \langle e_{i\pi}, e_j \rangle = \delta_{i\pi j} \xrightarrow{i\pi=j \iff i=j\pi^{-1}} \delta_{ij\pi^{-1}} = \langle e_i, e_{j\pi^{-1}} \rangle = \langle e_i, e_j \cdot \pi^{-1} \rangle.$$

Με βάση το παραπάνω και το γεγονός ότι η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι K -bilinear, έχουμε ότι,

$$\langle x \cdot \pi, y \rangle = \sum_i \sum_j k_i r_j \langle e_i \cdot \pi, e_j \rangle = \sum_i \sum_j k_i r_j \langle e_i, e_j \cdot \pi^{-1} \rangle = \langle x, y\pi^{-1} \rangle.$$

□

Πρόταση 5.2.2. (Περιγραφή των στοιχείων του $V_{\lambda, K}$ μέσω του Λήμματος Carter-Lusztig). Το $V_{\lambda, K}$ είναι το σύνολο των σημείων $x \in E^{\otimes r}$ που ικανοποιούν της παρακάτω τρεις συνθήκες:

i) $\langle x, e_i \rangle = 0$, για κάθε $i \in I(n, r)$, ώστε το T_i έχει δύο ίδιες τιμές σε διαφορετικές θέσεις της ίδιας στήλης.

ii) $x\sigma = s(\sigma)x$, για κάθε $\sigma \in C(T)$.

iii) $\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu)x\nu^{-1} = 0$, για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq \{x(1, h+1), \dots, x(q, h+1)\}$, $h \in \{1, \dots, \lambda_1 - 1\}$ και $q \in \{1, \dots, \mu_{h+1}\}$.

Απόδειξη.

Θέτουμε $A := \{x \in E^{\otimes r} \mid x \text{ ικανοποιεί τις i), ii), iii)\}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $A = V_{\lambda, K}$. Ισοδύναμα (από Πρόταση 5.2.1) αρκεί να δείξουμε ότι $A = \{x \in E^{\otimes r} \mid \langle x, \mathcal{R}_s \rangle = 0, s = 1, 2, 3\}$.

$A \subseteq V_{\lambda, K}$: Έστω $x \in A$ και θέλουμε να δείξουμε ότι, $\langle x, \mathcal{R}_s \rangle = 0$, για κάθε $s = 1, 2, 3$. Πράγματι,

1) Έστω $e_i \in \mathcal{R}_1$, τότε $\langle x, e_i \rangle = 0$, γιατί το x ικανοποιεί την i) και $e_i \in \mathcal{R}_1$.

2) Έστω $e_i - s(\sigma)e_{i\sigma} \in \mathcal{R}_2$, όπου $\sigma \in C(T)$, τότε,

$$\begin{aligned} \langle x, e_i - s(\sigma)e_{i\sigma} \rangle &= \langle x, e_i \rangle - s(\sigma)\langle x, e_{i\sigma} \rangle = \langle x, e_i \rangle - s(\sigma)\langle x, e_i\sigma \rangle = \\ &= \langle x, e_i \rangle - s(\sigma)\langle x\sigma^{-1}, e_i \rangle = \langle x - s(\sigma)x\sigma^{-1}, e_i \rangle \xrightarrow{x \in A} \langle 0, e_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

3) Έστω $\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) e_{i\nu} \in \mathcal{R}_3$, τότε,

$$\begin{aligned} \langle x, \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) e_{i\nu} \rangle &= \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) \langle x, e_{i\nu} \rangle = \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) \langle x, e_i \nu \rangle = \\ &= \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) \langle x \nu^{-1}, e_i \rangle = \langle \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) x \nu^{-1}, e_i \rangle \stackrel{x \in A}{=} \langle 0, e_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

$V_{\lambda, K} \subseteq A$: Έστω $x \in V_{\lambda, K}$ τότε,

- 1) $\langle x, \mathcal{R}_1 \rangle = 0$, δηλαδή $\langle x, e_i \rangle = 0$ για κάθε $i \in I(n, r)$, ώστε το T_i έχει δύο ίδιες τιμές σε διαφορετικές θέσεις της ίδιας στήλης. Οπότε το x ικανοποιεί την *i*).
- 2) $\langle x, \mathcal{R}_2 \rangle = 0$, δηλαδή $\langle x, e_i - s(\sigma) e_{i\sigma} \rangle = 0$, για κάθε $i \in I(n, r)$ και $\sigma \in C(T)$. Τώρα, (όπως στην περίπτωση $A \subseteq V_{\lambda, K}$) κάνοντας πράξεις έχουμε ότι $0 = \langle x, e_i - s(\sigma) e_{i\sigma} \rangle = \langle x - s(\sigma) x \sigma^{-1}, e_i \rangle$, για κάθε $i \in I(n, r)$. Όμως το $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$, άρα $\langle x - s(\sigma) x \sigma^{-1}, y \rangle = 0$, για κάθε $y \in E^{\otimes r}$. Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι non-singular, οπότε $x - s(\sigma) x \sigma^{-1} = 0 \iff x \sigma = s(\sigma) x$, για κάθε $\sigma \in C(T)$. Άρα το x ικανοποιεί την *ii*).
- 3) Παρόμοια με το 2) μπορούμε να δείξουμε ότι το x ικανοποιεί την *iii*).

□

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω $\lambda = (r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$, συμβολικά θα γράφουμε $V_{\lambda, K} = V_{r, K}$ και ισχύουν τα εξής:

- i) $V_{r, K} = \{x \in E^{\otimes r} \mid x\nu = x \text{ για κάθε αντιμετάθεση } \nu \text{ της } G(r)\}$. Με βάση αυτό το $V_{r, K}$ θα λέγεται *space of symmetric tensors*.
- ii) $V_{r, K} \simeq D_{r, K}^\circ \simeq D_r(E)^\circ$ (Ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων)
- iii)
 - a) Το σύνολο $\{v_a = \sum_{i \in a} e_i \mid a \in \Lambda(n, r)\}$ είναι K -βάση του $V_{r, K}$.
 - b) $\xi_b v_a = \begin{cases} v_a & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}$, για κάθε $a, b \in \Lambda(n, r)$. Ιδιαίτερος $V_{r, K}^a = K v_a$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.
 - c) $\Phi_{V_{r, K}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = h_r = \text{complete symmetric function}$.
- iv) Έστω η γνωστή K -βάση $\{(T_l : T_j) \mid j \in \mathcal{T}_o\}$ του $D_{r, K}$, και $\{v_a = \sum_{i \in a} e_i \mid a \in \Lambda(n, r)\}$ η K -βάση του $V_{r, K}$. Τότε η *contravariant form* $(\cdot, \cdot) : V_{r, K} \times D_{r, K} \longrightarrow K$, δίνεται από το τύπο,

$$(v_a, (T_l : T_j)) = \begin{cases} 1 & j \in a \\ 0 & j \notin a \end{cases}, \text{ για κάθε } j \in \mathcal{T}_o, a \in \Lambda(n, r).$$

Απόδειξη.

i) Από υπόθεση έχουμε ότι $T = (x(1, 1), \dots, x(1, r)) = \text{γραμμή}$, οπότε $C(T) = 1$. Επίσης,

$$V_{r,K} = \{x \in E^{\otimes r} \mid x \text{ ικανοποιεί τις συνθήκες } i), ii), iii) \text{ της Πρόταση 5.2.2} \}$$

Η συνθήκη i) είναι κενή, καθώς $T = \text{γραμμή}$. Η συνθήκη ii) ισχύει για κάθε $x \in E^{\otimes r}$, καθώς $C(T) = 1$. Οπότε,

$$V_{r,K} = \{x \in E^{\otimes r} \mid \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) x \nu^{-1} = 0, \text{ για κάθε μη κενό } J \}. (*)$$

Θέτουμε $A = \{x \in E^{\otimes r} \mid x \nu = x \text{ για κάθε αντιμετάθεση } \nu \text{ της } G(r)\}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $A = V_{r,K}$. Πράγματι,

$V_{r,K} \subseteq A$: Έστω $x \in V_{r,K}$ και $\nu = (\nu_1 \nu_2) = \text{αντιμετάθεση της } G(r)$, τότε θεωρούμε ένα καινούργιο basic λ -tableaux, το $T_\nu = (\nu_1 \nu_2 * \dots *)$ (όπου τα $*$ δεν μας νοιάζει τι είναι) και βλέπουμε το $D_{r,K}$ και κατα συνέπεια το $V_{r,K}$ ως προς το basic λ -tableaux T_ν (μπορούμε γιατί τα $V_{\lambda,K}, D_{\lambda,K}$ είναι ανεξάρτητα της επιλογής του basic λ -tableaux). Με του συμβολισμούς του Λήμματος Carter-Lusztig (βλέπε Ορισμό 4.5.1), θέτοντας $h = 1$, $q = 1$ και $J = \{\nu_2\} \subseteq C_2(T_\nu)$, $J' = \{\nu_1\} \subseteq C_1(T_\nu)$, έχουμε ότι $\nu \in Y$ και (από Παρατήρηση 4.5.1) τα σύμπλοκα $1X$, νX είναι διάφορα μεταξύ τους, με την ιδιότητα κάθε άλλο σύμπλοκο zX (με $z \in Y$) να είναι ίσο με κάποιο από τα δύο. Άρα το $\{1, \nu\}$ αποτελεί σύνολο αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων του Y/X , συνεπώς μπορούμε να θέσουμε $G(J) = \{1, \nu\}$. Τώρα, επειδή $x \in V_{r,K}$, από (*) έχουμε,

$$\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) x \nu^{-1} = 0 \iff s(1)x1^{-1} + s(\nu)x\nu^{-1} = 0 \iff x = x\nu^{-1} \iff x\nu = x.$$

$A \subseteq V_{r,K}$: Έστω $x \in A$. Με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1, επειδή $T = \text{γραμμή}$, για κάθε $h \in \{1, \dots, \lambda_1 - 1\}$, έχουμε αναγκαστικά $q = 1$ και $J = \{x(1, h+1)\}$, $J' = \{x(1, h)\}$, οπότε $Y = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(i) = i \forall i \notin J \cup J'\} = \{1, \pi = (x(1, h) x(1, h+1))\}$. Είναι σαφές από Παρατήρηση 4.5.1, ότι τα σύμπλοκα $1X$, πX είναι διάφορα και αναγκαστικά (επειδή $Y = \{1, \pi\}$) κάθε σύνολο αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων έστω $G(J)$, είναι ακριβώς το $\{1, \pi\}$. Συνεπώς,

$$\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) x \nu^{-1} = 1x1^{-1} + s(\pi)x\pi^{-1} = x - x\pi^{-1} = x - x\pi \stackrel{x \in A}{=} 0$$

Άρα από (*), πρέπει $x \in V_{r,K}$.

ii) Άμεσα από Πρόταση 5.1.1 (και το σχόλιο πριν από αυτή) έχουμε ότι $V_{r,K} \simeq D_{r,K}^\circ$. Επιπλέον, από Παράδειγμα 4.3.1 έχουμε $D_{r,K} \simeq D_r(E)$, άρα (από Παρατήρηση 2.7.2) $D_{r,K}^\circ \simeq D_r(E)^\circ$

iii) a) Έστω $B = \{v_a = \sum_{i \in a} e_i \mid a \in \Lambda(n, r)\}$ τότε:

$B \subseteq V_{r,K}$: Έστω $v_a \in B$, όπου $a \in \Lambda(n, r)$, τότε (από i) αρκεί να δείξουμε ότι $v_a \nu = v_a$, για κάθε αντιμετάθεση ν . Πράγματι, έστω (ακόμα πιο γενικά) $\nu \in G(r)$ και $j \in a$, τότε

$$v_a \nu = \sum_{i \in a} e_i \nu = \sum_{i \in a} e_{i\nu} = \sum_{i \in [j]} e_{i\nu} = \sum_{i \in [j] \cdot \nu} e_i \xrightarrow{[j] \cdot \nu = [j]} \sum_{i \in [j]} e_i = \sum_{i \in a} e_i = v_a$$

$B = K$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Καταρχάς, το $\{e_i\}_{i \in I(n,r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$. Επίσης, για κάθε $a, b \in \Lambda(n, r)$ με $a \neq b$, πρέπει $e_i \neq e_j$, για κάθε $i \in a, j \in b$ (*) (αλλιώς, αν $e_i = e_j$, τότε, λόγω βάσης πρέπει $i = j$, άτοπο γιατί $i \in a, j \in b$ και $a \neq b$). Έστω λοιπόν $\{k_a\}_{a \in \Lambda(n,r)} \subseteq K$, με $\sum_{a \in \Lambda(n,r)} k_a v_a = 0$. Τότε, από (*) και εξ'ορισμού των v_a έχουμε ότι $k_a v_a = 0$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, δηλαδή, $\sum_{i \in a} k_a e_i = 0$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$, άρα $k_a = 0$ για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.

$V_{r,K} = \text{span}_K B$: Ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι άμεσος (αφού $B \subseteq V_{r,K}$). Έστω $x \in V_{r,K}$, τότε $x = \sum_{i \in I(n,r)} k_i e_i$, όπου $k_i \in K$. Για κάθε $i, j \in I(n, r)$, θα δείξουμε τα παρακάτω:

- 1) Για κάθε αντιμετάθεση $\nu \in G(r)$, ισχύει $k_i = k_{i\nu}$.
- 2) Αν $i \sim j$, τότε $k_i = k_j$.

Απόδειξη των $i), ii)$:

- 1) Εφόσον $x \in V_{r,K}$, τότε $x = x\nu$, για κάθε αντιμετάθεση $\nu \in G(r)$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I(n,r)} k_i e_i = x = x\nu &= \sum_{i \in I(n,r)} k_i e_{i\nu} = \sum_{i \in I(n,r)} k_{i\nu^{-1}} e_{i\nu} = \\ &= \sum_{i \in I(n,r) \cdot \nu} k_{i\nu^{-1}} e_i \xrightarrow{I(n,r) \cdot \nu = I(n,r)} \sum_{i \in I(n,r)} k_{i\nu^{-1}} e_i \xrightarrow{\nu = \nu^{-1}} \sum_{i \in I(n,r)} k_{i\nu} e_i \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{e_i\}_{i \in I(n,r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$, άρα $k_i = k_{i\nu}$.

- 2) Έστω $i \sim j$, τότε υπάρχει $\pi \in G(r)$, ώστε $i = j\pi$. Επιπλέον κάθε μετάθεση γράφεται πάντα σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων, οπότε $\pi = \nu_1 \cdot \dots \cdot \nu_k$, όπου $\nu_i =$ αντιμετάθεση. Συνεπώς,

$$k_i = k_{j\pi} = k_{j\nu_1 \dots \nu_k} \stackrel{1)}{=} k_j.$$

Έστω $\mathcal{T}_o$ το σύνολο αντιπροσώπων τροχιών δράσης της $G(r)$ στη $I(n, r)$. Τότε, με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι $x = \sum_{t \in \mathcal{T}_o} k_t (\sum_{i \in [t]} e_i)$. Επιπλέον, για κάθε $t \in \mathcal{T}_o$, έστω $a_t \in \Lambda(n, r)$ με

$$t \in a_t, \text{ τότε } x = \sum_{t \in \mathcal{T}_o} k_t (\sum_{i \in a_t} e_i) = \sum_{t \in \mathcal{T}_o} k_t v_{a_t} \in \text{span}_K B$$

b), c) Έστω $k \in b$, τότε $\xi_b = \xi_{k,k}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \xi_b v_a &= \sum_{j \in a} \xi_{k,k} e_j = \sum_{j \in a} \sum_{i \in I(n,r)} \xi_{k,k}(c_{i,j}) e_i \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 2.1.1 iv)}} \\ \sum_{j \in a} \xi_{k,k}(c_{j,j}) e_j &= \begin{cases} \sum_{j \in a} e_j & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} = \begin{cases} v_a & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}. \end{aligned}$$

Άρα $v_a = \xi_a v_a \in V_{r,K}^a$. Συνεπώς, $Kv_a \subseteq V_{r,K}^a$. Από την άλλη, αν $x \in V_{r,K}^a$, τότε $\xi_a x = x$ και $x = \sum_{b \in \Lambda(n,r)} k_b v_b$, για κάποια $k_b \in K$, άρα,

$$x = \xi_a x = \sum_{b \in \Lambda(n,r)} k_b \xi_a v_b = k_a \xi_a v_a = k_a v_a \in Kv_a.$$

Άρα $V_{r,K}^a \subseteq Kv_a$ και έτσι $V_{r,K}^a = Kv_a$. Ιδιαίτέρως, $\dim_K V_{r,K}^a = 1$ για κάθε $a \in \Lambda(n,r)$ και κατά συνέπεια $\Phi_{V_{r,K}} = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$.

iv)

$$\begin{aligned} (v_a, (T_l : T_j)) &= (\sum_{i \in a} e_i, \varphi_K(e_j)) = \langle \sum_{i \in a} e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in a} \langle e_i, e_j \rangle = \\ &= \begin{cases} \langle e_j, e_j \rangle & j \in a \\ 0 & j \notin a \end{cases} = \begin{cases} 1 & j \in a \\ 0 & j \notin a \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 5.2.1. (Παραλλαγή του iv) του προηγούμενου παραδείγματος).

$$i) \text{ Έστω } a, b \in \Lambda(n,r) \text{ και } j \in b, \text{ τότε } (v_a, (T_l : T_j)) = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}.$$

ii) Ξέρουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων, έστω,

$$\phi : D_{r,K} \longrightarrow D_r(E), \text{ με } \phi((T_l : T_j)) = e_{j_1} \cdots e_{j_r}, \text{ για κάθε } j \in I(n,r).$$

Με βάση τα παραπάνω, έπεται άμεσα η εξής *non-singular, contravariant form* :

$$(\ , \)_E : V_{r,K} \times D_r(E) \longrightarrow K, \text{ με } (x, z)_E = (x, \phi^{-1}(z))$$

Για κάθε $j \in I(n,r)$, $b \in \Lambda(n,r)$, με $j \in b$, θα γράφουμε $e^b = e_{j_1} \cdots e_{j_r}$ (είναι καλά ορισμένο ο συμβολισμός, αφού, αν $i, j \in b$ τότε $j \sim i$ και από Υπενθύμιση 2.6.3, πρόκει $e_{j_1} \cdots e_{j_r} = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$). Οπότε, αν $a, b \in \Lambda(n,r)$ και $j \in b$, έχουμε,

$$(v_a, e^b)_E = (v_a, (T_l : T_j)) \stackrel{i)}{=} \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}.$$

Παράδειγμα 5.2.2. Έστω $r \leq n$ και $\lambda = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$, συμβολικά θα γράφουμε $V_{\lambda, K} = V_{(1)^r, K}$ και ισχύουν τα εξής:

- i) $V_{(1)^r, K} = \{x \in E^{\otimes r} \mid x\sigma = s(\sigma)x, \forall \sigma \in G(r) \text{ και } \langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in I(n, r), \text{ ώστε } i \text{ όχι } 1\text{-}1\}$. Με βάση αυτό το $V_{(1)^r, K}$ θα λέγεται *space of antisymmetric tensors*.
- ii) $\Phi_{V_{(1)^r, K}} = \Phi_{D_{(1)^r, K}^\circ} = \Phi_{D_{(1)^r, K}} = \Phi_{\Lambda^r E} = e_r = m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}$
- iii) Το $V_{(1)^r, K}$ είναι irreducible πρότυπο της $M_K(n, r)$ ($\iff$ της $\text{mod}(S_K(n, r))$).
- iv) Το σύνολο $\{ \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) e_{i\pi} \mid i \in I(n, r), i \nearrow \}$ είναι K -βάση του $V_{(1)^r, K}$ (με το σύμβολο $\nearrow$ εννοούμε γνησίως αύξουσα συνάρτηση). Μάλιστα, $\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) e_{i\pi} = e_i \cdot (\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \pi)$.
- v) Υπάρχει $\phi : \Lambda^r E \longrightarrow V_{(1)^r, K}$ ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων ($\iff S_K(n, r)$ -προτύπων) ώστε, $\phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) e_{i\pi} = e_i \cdot (\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \pi)$, για κάθε $i \in I(n, r)$.
- vi) Τα πρότυπα $V_{(1)^r, K}$, $V_{(1)^r, K}^\circ$, $D_{(1)^r, K}$, $D_{(1)^r, K}^\circ$, $\Lambda^r E$ είναι όλα irreducible και ισόμορφα στην $M_K(n, r)$ ($\iff$ στην $\text{mod}(S_K(n, r))$).

Απόδειξη.

Από υπόθεση έχουμε ότι $T = \begin{pmatrix} x(1, 1) \\ \vdots \\ x(r, 1) \end{pmatrix} = \text{στήλη}$, οπότε $C(T) = G(r)$.

- i) Καταρχάς, $V_{(1)^r, K} = \{x \in E^{\otimes r} \mid x \text{ ικανοποιεί της συνθήκες } i), ii), iii) \text{ της Πρότασης 5.2.2}\}$. Η συνθήκη $iii)$ είναι κενή, καθώς $T = \text{στήλη}$, η συνθήκη $ii)$ παίρνει τη μορφή, $x\pi = s(\pi)x$, για κάθε $\pi \in G(r)$ (αφού $C(T) = G(r)$) και η συνθήκη $i)$ παίρνει τη μορφή $\langle x, e_i \rangle = 0$ αν i όχι 1-1 (αφού $T_i = \begin{pmatrix} i_{x(1,1)} \\ \vdots \\ i_{x(r,1)} \end{pmatrix}$). Με βάση τα προαναφερθέντα, έπεται το $i)$.

- ii) Όλες οι ιδιότητες είναι άμεσες από γνωστή θεωρία, συγκεκριμένα,

$$\Phi_{V_{(1)^r, K}} \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.1.1}} \Phi_{D_{(1)^r, K}^\circ} \xrightarrow{\text{Πρόταση 3.4.1 v)}} \Phi_{D_{(1)^r, K}} \xrightarrow{\text{Παράδειγμα 4.3.2}} \Phi_{\Lambda^r E} \xrightarrow{\text{Παράδειγμα 3.4.1}} e_r = m_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}$$

- iii) Άμεσο από $ii)$ και Παρατήρηση 3.5.1.

- iv) Έστω $B = \{ \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) e_{i\pi} \mid i \in I(n, r), i \nearrow \}$, τότε,

$B \subseteq V_{(1)^r, K}$: Έστω $x = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) e_{i\pi} \in B$ (όπου $i \nearrow$), θα δείξουμε ότι $x \in V_{(1)^r, K}$ με την βοήθεια το $i)$. Πράγματι, αν $\sigma \in G(r)$, $j \in I(n, r)$ με j όχι 1-1, τότε,

$$(\alpha') \quad x\sigma = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)(e_{i\pi} \cdot \sigma) = s(\sigma) \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)s(\sigma)e_{i\pi\sigma} = s(\sigma) \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi\sigma)e_{i\pi\sigma} = s(\sigma)x$$

$$(\beta') \quad \langle x, e_j \rangle = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)\langle e_{i\pi}, e_j \rangle \stackrel{i\pi \neq j}{=} 0. \text{ Ας σημειωθεί ότι } i\pi \neq j, \text{ γιατί η } i\pi = i \circ \pi \text{ είναι 1-1} \\ \text{(ως σύνθεση τέτοιων), ενώ η } j \text{ όχι 1-1.}$$

$B = K$ -γραμμικά ανεξάρτητο: Καταρχάς, θέτουμε $I_a := \{i \in I(n, r) \mid i \nearrow\}$. Έστω λοιπόν, $\{k_i\}_{i \in I_a} \subseteq K$, με $\sum_{i \in I_a} k_i \left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi} \right) = 0 \iff \sum_{i \in I_a} \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)k_i e_{i\pi} = 0$. (*)

Παρατηρούμε το εξής: Αν $i, j \in I_a$ και $\pi, \sigma \in G(r)$, τότε, $e_{i\pi} = e_{j\sigma} \iff i = j$ και $\sigma = \pi$. (**)

Πράγματι, αν $e_{i\pi} = e_{j\sigma}$, (επειδή $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$) τότε $i\pi = j\sigma \iff i = j\sigma\pi^{-1}$. Άρα οι $j, j\sigma\pi^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσες. Το τελευταίο επιβάλλει $\sigma\pi^{-1} = 1 \iff \sigma = \pi$ και κατ' συνέπεια $i = j$. Η (**) αποδείχθηκε.

Τώρα, από (*), (**) και το γεγονός ότι το $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$, έχουμε ότι $s(\pi)k_i = 0 \iff k_i = 0$, για κάθε $i \in I_a$.

$V_{(1)^r, K} = \text{span}_K B$: Καταρχάς, από την (**) (που δείξαμε πάνω) και αφού το $\{e_i\}_{i \in I(n, r)}$ είναι K -βάση του $E^{\otimes r}$, έχουμε άμεσα ότι $\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi} \neq \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{j\pi}$ για κάθε $i, j \in I_a$ με $i \neq j$, οπότε $|B| = |I_a|$. Επιπλέον, $V_{(1)^r, K} \simeq D_{(1)^r, K}^\circ$ (ισομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων, άρα και K -προτύπων), άρα,

$$\dim_K V_{(1)^r, K} = \dim_K D_{(1)^r, K}^\circ = \dim_K D_{(1)^r, K} \stackrel{\text{Παράδειγμα 4.3.2}}{=} |I_a| = |B|.$$

Συνεπώς, $V_{(1)^r, K} = \text{span}_K B$.

v) Καταρχάς, θέτουμε $I_a = \{i \in I(n, r) \mid i \nearrow\}$ και τα $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}_{i \in I_a}$, $\{\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}\}_{i \in I_a}$ αποτελούν K -βάσεις των $\Lambda^r E$, $V_{(1)^r, K}$, ιδιαιτέρως $\dim_K \Lambda^r E = \dim_K V_{(1)^r, K}$. Συνεπώς, υπάρχει ισομορφισμός K -προτύπων, έστω,

$$\phi : \Lambda^r E \longrightarrow V_{(1)^r, K}, \quad \mu \in \phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}, \quad \text{για κάθε } i \in I_a.$$

Ισχυρισμός.

- 1) $\phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}$, για κάθε $i \in I(n, r)$.
- 2) $H\phi$ είναι ομομορφισμός $K\Gamma$ -προτύπων.

Απόδειξη(Ισχυρισμού).

- 1) Εμείς ξέρουμε ότι $\phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}$, για κάθε $i \in I_a$. Έστω $i \in I(n, r)$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν i είναι 1-1: Τότε, υπάρχει $\sigma \in G(r)$ ώστε $i\sigma \in I_a$, δηλαδή $i\sigma \nearrow$, τότε όμως,

$$\begin{aligned} \phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) &\stackrel{\text{Υπενθύμιση 2.6.3}}{=} \phi(s(\sigma)e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\sigma(r)}}) = \\ s(\sigma)\phi(e_{(i\sigma)_1} \wedge \dots \wedge e_{(i\sigma)_r}) &\stackrel{i\sigma \in I_a}{=} s(\sigma) \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\sigma\pi} = \sum_{\pi \in G(r)} s(\sigma\pi)e_{i\sigma\pi} = \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}. \end{aligned}$$

Αν i όχι 1-1: Τότε, από Ορισμό 2.6.4 ii) και Υπενθύμιση 2.6.3, έχουμε ότι $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = 0$ και άρα $\phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = 0$. Επιπλέον, (από Λήμμα 5.2.1, το οποίο θα ζητήσουμε πιο κάτω για να μην ξεφύγουμε από το βασικό σκοπό μας), έχουμε ότι $\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi} = 0$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε το ζητούμενο και έτσι έπεται το 1).

- 2) Επειδή, η $\phi : \Lambda^r E \longrightarrow V_{(1)r,K}$ είναι ομομορφισμός K-προτύπων και τα Γ , $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}_{i \in I_a}$, αποτελούν K-βάσεις των $K\Gamma$, $\Lambda^r E$, αντίστοιχα, τότε αρκεί να δείξουμε,

$$\phi(g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})) = g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}), \text{ για κάθε } j \in I_a.$$

Για το σκοπό αυτό, έστω $\{r_{ij}\}_{i,j \in I_a}$ τα coefficient functions του $\Lambda^r E$ ως προς την βάση $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}_{i \in I_a}$, όπου ξέρουμε (από Παρατήρηση 2.6.5) ότι $r_{ij} = \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i\sigma,j}$. Τότε,

αν $g \in \Gamma$, $j \in I_a$, έχουμε,

$$\begin{aligned} \phi(g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})) &= \phi\left(\sum_{i \in I_a} r_{ij}(g)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\right) = \sum_{i \in I_a} r_{ij}(g)\left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}\right) = \\ \sum_{i \in I_a} \sum_{\sigma \in G(r)} \sum_{\pi \in G(r)} s(\sigma)s(\pi)c_{i\sigma,j}(g)e_{i\pi} &= \sum_{i \in I_a} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i\sigma,j}(g)\right)\left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi)e_{i\pi}\right). (*) \end{aligned}$$

Από την άλλη έχουμε,

$$\begin{aligned} g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) &= g \cdot \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)e_{j\sigma}\right) = \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)(g \cdot e_{j\sigma}) \stackrel{\text{Παρατήρηση 2.6.2 ii)}}{=} \\ \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)\left(\sum_{i \in I(n,r)} c_{i,j\sigma}(g)e_i\right) &= \sum_{i \in I(n,r)} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i,j\sigma}(g)\right)e_i. (**) \end{aligned}$$

Τώρα, επειδή $g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) \in V_{(1)r,K}$, πρέπει από i να ισχύει $\langle g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}), e_h \rangle = 0$, για κάθε $h \in I(n,r)$, με h όχι 1-1. Όμως,

$$0 = \langle g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}), e_h \rangle = \sum_{i \in I(n,r)} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i,j\sigma}(g)\right)\langle e_i, e_h \rangle = \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{h,j\sigma}(g)$$

$$\text{Συνεπώς, από } (**)\text{ έχουμε, } g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) = \sum_{i \text{ 1-1}} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)c_{i,j\sigma}(g)\right)e_i. (***)$$

Συνεχίζοντας, από Λήμμα 3.2.1 έχουμε ότι $\{i \in I(n,r) \mid i \text{ 1-1}\} = \bigsqcup_{i \in I_a} [i]_{G(r)}$ (ξένη ένωση) και $i\pi' \neq i\pi$, για κάθε $i \in I_a$, $\pi', \pi \in G(r)$ με $\pi' \neq \pi$ (πράγματι, αν $i\pi' = i\pi$, τότε $i = i\pi'\pi^{-1}$,

άρα οι $i, i\pi'\pi^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσες, πράγμα που επιβάλλει $\pi'\pi^{-1} = 1 \iff \pi' = \pi$, άτοπο). Από το τελευταίο και την $(***)$, έπεται ότι,

$$\begin{aligned} g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}) &= \sum_{i \in I_a} \sum_{h \in [i]_{G(r)}} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) c_{h,j\sigma}(g) \right) e_h = \\ &= \sum_{i \in I_a} \sum_{\pi \in G(r)} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) c_{i\pi,j\sigma}(g) \right) e_{i\pi} = \sum_{i \in I_a} \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\pi) s(\sigma^{-1}) c_{i\pi,j\sigma}(g) \right) e_{i\pi} \stackrel{(i\pi,j\sigma) \sim (i\pi\sigma^{-1},j)}{=} \\ &= \sum_{i \in I_a} \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\pi\sigma^{-1}) c_{i\pi\sigma^{-1},j}(g) \right) e_{i\pi} = \sum_{i \in I_a} \sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) c_{i\sigma,j}(g) \right) e_{i\pi} = \\ &= \sum_{i \in I_a} \left(\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) c_{i\sigma,j}(g) \right) \left(\sum_{\pi \in G(r)} s(\pi) e_{i\pi} \right). \quad (***) \end{aligned}$$

Τελικά, από $(*)$, $(****)$, έπεται ότι $\phi(g \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})) = g \cdot \phi(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})$, για κάθε $j \in I_a$.

vi) Από Πρόταση 5.1.1, Παράδειγμα 4.3.2 και το v), έχουμε τους εξής ισομορφισμούς:

$$D_{(1)^r,K}^\circ \simeq V_{(1)^r,K} \simeq \Lambda^r E \simeq D_{(1)^r,K}.$$

Επιπλέον, από τον ισομορφισμό $D_{(1)^r,K}^\circ \simeq V_{(1)^r,K}$ και την Πρόταση 2.7.2, έπεται ότι

$$D_{(1)^r,K} \simeq D_{(1)^r,K}^{\circ\circ} \simeq V_{(1)^r,K}^\circ.$$

Το συμπέρασμα έπεται από τα προηγούμενα και το iii).

□

Σχόλιο. Από το παραπάνω παράδειγμα, μας έχει μείνει να αιτιολογήσουμε την σχέση :

$$\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) e_{j\sigma} = 0, \text{ για κάθε } j \in I(n,r) \text{ με } j \text{ όχι } 1-1.$$

Η σχέση αυτή είναι καθαρά συνδυαστικής φύσης, όπως θα φανεί από την απόδειξη που θα δώσουμε.

Λήμμα 5.2.1. (Γενική ιδιότητα).

i) Έστω $f : I(n,r) \longrightarrow A$ απεικόνιση και A αβελιανή ομάδα, τότε για κάθε $j \in I(n,r)$ με j όχι 1-1, ισχύει $\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) f(j\sigma) = 0$.

ii) Αν $j \in I(n,r)$ με j όχι 1-1, τότε $\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma) e_{j\sigma} = 0$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς, αφού j όχι 1-1, μπορούμε χ.β.γ να υποθέσουμε ότι $j(1) = j(2)$. Πράγματι, αφού j όχι 1-1, τότε υπάρχουν $t \neq s$, ώστε $j(t) = j(s)$, θεωρώντας $\pi \in G(r)$ ώστε $j\pi(1) = j\pi(2)$ (π.χ. $\pi = (1t)(2s)$), έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\sigma) &= \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\pi\pi^{-1}\sigma) = s(\pi) \sum_{\sigma \in G(r)} s(\pi^{-1}\sigma)f(j\pi(\pi^{-1}\sigma)) = \\ s(\pi) \sum_{\sigma' \in G(r)} s(\sigma')f(j\pi\sigma') &= s(\pi) \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\pi\sigma). \end{aligned}$$

Από το τελευταίο, έπεται ότι $\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\sigma) = 0 \xLeftrightarrow{s(\pi)=\pm 1} \sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\pi\sigma) = 0$ και έτσι μπορούμε χ.β.γ να πούμε ότι $j(1) = j(2)$.

Τώρα, για κάθε $(n, m) \in \underline{r} \times \underline{r}$, ορίζουμε $A_{n,m} = \{\sigma \in G(r) \mid \sigma(n) = 1, \sigma(m) = 2\}$, $R = \{(n, m) \in \underline{r} \times \underline{r} \mid n \neq m\}$ και είναι σαφές ότι $G(r) = \bigsqcup_{(n,m) \in R} A_{n,m}$. Οπότε,

$$\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\sigma) = \sum_{(n,m) \in R} \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) = \sum_{(n,m) \in \underline{r} \times \underline{r}, n \neq m} \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma). (*)$$

Από το παραπάνω, έπεται ότι το $\sum_{\sigma \in G(r)} s(\sigma)f(j\sigma)$ γράφεται σαν άθροισμα στοιχείων της μορφής:

$\sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) + \sum_{\sigma \in A_{m,n}} s(\sigma)f(j\sigma)$, όπου το (m, n) διατρέχει κάποιο υποσύνολο $R' \subseteq R$ (συγκεκριμένα, $R' = \{(n, m) \in \underline{r} \times \underline{r} \mid n < m\}$). Αν δείξουμε τον παρακάτω ισχυρισμό, τότε τελειώσαμε.

Ισχυρισμός. $\sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) + \sum_{\sigma \in A_{m,n}} s(\sigma)f(j\sigma) = 0$, για κάθε $(n, m) \in \underline{r} \times \underline{r}$, $\mu \in n \neq m$.

Απόδειξη(Ισχυρισμού). Έστω η απεικόνιση, $\phi : A_{n,m} \longrightarrow A_{m,n}$, $\sigma \longmapsto \sigma \cdot (mn)$. Η ϕ είναι άμεσα καλά ορισμένη, 1-1 και επί, συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) + \sum_{\sigma \in A_{m,n}} s(\sigma)f(j\sigma) &= \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) + \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma \cdot (mn))f(j \cdot (\sigma(mn))) = \\ \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) - \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j \cdot (\sigma(mn))) &= (**). \end{aligned}$$

Επιπλέον, $j\sigma \cdot (mn) = j\sigma$ για κάθε $\sigma \in A_{n,m}$, πράγματι $(j\sigma(mn))(i) = j\sigma(i)$ για κάθε $i \neq n, m$, $(j\sigma(mn))(n) = j\sigma(m) = j(2) = j(1) = j\sigma(n)$ και όμοια $(j\sigma(mn))(m) = j\sigma(m)$. Από το τελευταίο και την $(**)$ έπεται ότι,

$$\sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) + \sum_{\sigma \in A_{m,n}} s(\sigma)f(j\sigma) = \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) - \sum_{\sigma \in A_{n,m}} s(\sigma)f(j\sigma) = 0.$$

ii) Άμεσα από i) αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $f : I(n, r) \longrightarrow E^{\otimes r}$, $i \longmapsto e_i$.

□

5.3 Η Carter-Lusztig βάση του $V_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Στη παράγραφο αυτή, στόχος μας είναι να βρούμε μία K -βάση για το $V_{\lambda,K}$. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι εφόσον ξέρουμε μία βάση για το $D_{\lambda,K}$ και $V_{\lambda,K} \simeq D_{\lambda,K}^\circ$, τότε μπορούμε απλά να θεωρήσουμε την δυϊκή βάση του $D_{\lambda,K}$ για το $V_{\lambda,K}$. Παρ' όλα αυτά, οι Carter-Lusztig βρήκαν μία άλλη βάση του $V_{\lambda,K}$, η οποία αποδεικνύει ότι το $V_{\lambda,K}$ είναι κυκλικό $S_K(n, r)$ -πρότυπο ($\Longleftrightarrow$ KG -πρότυπο). Πριν μιλήσουμε για το κεντρικό θεώρημα, ξεκινάμε με κάποιες βασικές έννοιες και παρατηρήσεις.

Ορισμός 5.3.1. Έστω $X \subseteq G(r)$, τότε ορίζουμε τις εξής ποσότητες της K -άλγεβρας $KG(r)$:

$$[X] := \sum_{\pi \in X} \pi, \quad \{X\} = \sum_{\pi \in X} s(\pi)\pi.$$

Ορισμός 5.3.2. Έστω $l \in I(n, r)$ η γνωστή απεικόνιση (βλέπε Ορισμό 4.3.1), τότε ορίζουμε,

$$f_l := e_l\{C(T)\} = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)e_{l\pi} \in E^{\otimes r}.$$

Υπενθύμιση 5.3.1. Το $E^{\otimes r}$ είναι $(KG, KG(r))$ -διπρότυπο ($\Longleftrightarrow$ $(S_K(n, r), KG(r))$ -διπρότυπο), όπως είδαμε στο 2.6 (συγκεκριμένα Παρατήρηση 2.6.3).

Πρόταση 5.3.1. i) $f_l \in V_{\lambda,K}$

ii) Αν $j \in I(n, r)$ με $j \not\sim l$, τότε $\xi_{i,j}f_l = 0$.

iii) Έστω $S_K(n, r)f_l = \langle f_l \rangle$ το κυκλικό $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $V_{\lambda,K}$, τότε,

$$\langle f_l \rangle = \text{span}_K\{\xi_{i,j}f_l \mid i, j \in I(n, r)\} = \text{span}_K\{\xi_{i,l}f_l \mid i \in I(n, r)\}.$$

Απόδειξη.

i) Θα γίνει με χρήση της Πρότασης 5.2.2. Πράγματι,

(α') Έστω $i \in I(n, r)$, ώστε το T_i να έχει δύο ίδια στοιχεία σε διαφορετικές θέσεις της ίδιας στήλης, τότε,

$$\langle f_l, e_i \rangle = \langle e_l\{C(T)\}, e_i \rangle = \sum_{\pi \in C(T)} \langle e_{l\pi}, e_i \rangle.$$

Αν δείξουμε ότι, $l\pi \neq i$, για κάθε $\pi \in C(T)$, τότε $\langle f_l, e_i \rangle = 0$ και έτσι τελειώσαμε. Πράγματι, αν υπάρχει $\pi \in C(T)$ ώστε $l\pi = i$, τότε $T_{l\pi} = T_i$ και άρα το $T_{l\pi}$ έχει δύο ίδια στοιχεία σε διαφορετικές θέσεις της ίδιας στήλης (*). Το τελευταίο είναι άτοπο γιατί ο πίνακας $T_{l\pi}$ είναι ένα ανακάτεμα των στηλών του T_l που δεν έχουν την ιδιότητα (*), συγκεκριμένα αν $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το conjugate partition του λ , τότε για κάθε $h \in \{1, \dots, \lambda_1\}$, έχουμε $l\pi(\{x(1, h), \dots, x(\mu_h, h)\}) = l(\{x(1, h), \dots, x(\mu_h, h)\}) = \{1, \dots, \mu_h\}$, από το τελευταίο, φαίνεται ότι το $T_{l\pi}$ δεν έχει την ιδιότητα (*).

(β') Έστω $\sigma \in C(T)$, τότε,

$$\begin{aligned} f_l \sigma &= \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) e_{l\pi\sigma} \xrightarrow{s(\sigma)^2=1} s(\sigma) \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) s(\sigma) e_{l\pi\sigma} = \\ &= s(\sigma) \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi\sigma) e_{l\pi\sigma} \xrightarrow{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \sum_{\pi' \in C(T)} s(\pi') e_{l\pi'} = s(\sigma) f_l \end{aligned}$$

(γ') Η τρίτη συνθήκη, συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς στηρίζεται σε μέρος της απόδειξη του Λήμματος Carter-Lusztig. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f_l \nu^{-1} &= \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) \left(\sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) e_{l\pi} \right) \nu^{-1} = \sum_{\nu \in G(J)} \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) s(\nu) e_{l\pi\nu^{-1}} \xrightarrow{s(\nu)=s(\nu^{-1})} \\ &= \sum_{\nu \in G(J)} \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi\nu^{-1}) e_{l\pi\nu^{-1}} = \sum_{\nu \in G(J)} \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi^{-1}\nu^{-1}) e_{l\pi^{-1}\nu^{-1}} = \sum_{\nu \in G(J)} \sum_{\pi \in C(T)} s((\nu\pi)^{-1}) e_{l(\nu\pi)^{-1}}. \end{aligned}$$

Επειδή το $G(J)$ είναι σύνολο αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων του $X = C(T) \cap Y$ στο Y (με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.5.1) έχουμε ότι $YC(T) = G(J)C(T)$ και για το τυχόν στοιχείο $\pi \in YC(T)$, υπάρχουν μοναδικά $\nu_\pi \in G(J)$, $\sigma_\pi \in C(T)$, ώστε $\pi = \nu_\pi \sigma_\pi$ (π.χ. το αποδείξαμε αυτό στην αρχή του θεωρήματος 4.5.2). Οπότε έχουμε,

$$\sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f_l \nu^{-1} = \sum_{\pi \in YC(T)} s(\pi^{-1}) e_{l\pi^{-1}}.$$

Όμως από Λήμμα 4.5.3, ξέρουμε ότι υπάρχει $A \subseteq YC(T)$, ώστε $YC(T) = \bigsqcup_{\pi \in A} \{\pi, \pi\kappa_\pi\}$, με $\kappa_\pi \in R(T)$ και $s(\kappa_\pi) = -1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in G(J)} s(\nu) f_l \nu^{-1} &= \sum_{\pi \in A} (s(\pi^{-1}) e_{l\pi^{-1}} + s((\pi\kappa_\pi)^{-1}) e_{l(\pi\kappa_\pi)^{-1}}) = \\ &= \sum_{\pi \in A} (s(\pi^{-1}) e_{l\pi^{-1}} - s(\pi^{-1}) e_{l\kappa_\pi^{-1}\pi^{-1}}) \xrightarrow{l\kappa_\pi^{-1}=l} \sum_{\pi \in A} (s(\pi^{-1}) e_{l\pi^{-1}} - s(\pi^{-1}) e_{l\pi^{-1}}) = 0. \end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι, $l\kappa_\pi^{-1} = l$, επειδή $\kappa_\pi^{-1} \in R(T)$ και Λήμμα 4.4.1.

ii) Από υπενθύμιση 5.3.1 έχουμε,

$$\xi_{i,j} f_l = \xi_{i,j} (e_l \{C(T)\}) = (\xi_{i,j} e_l) \{C(T)\} = \left(\sum_{h \in I(n,r)} \xi_{i,j}(c_{h,l}) e_h \right) \{C(T)\} \xrightarrow{l \approx j} 0.$$

Ας σημειωθεί ότι, $j \approx l \implies (i, j) \approx (h, l)$ και άρα $\xi_{i,j}(c_{h,l}) = 0$.

iii) Αρκεί να δείξουμε τους παρακάτω εγκλεισμούς,

$$\langle f_l \rangle \subseteq A := \text{span}_K \{ \xi_{i,j} f_l \mid i, j \in I(n, r) \} \subseteq B := \text{span}_K \{ \xi_{i,l} f_l \mid i \in I(n, r) \} \subseteq \langle f_l \rangle.$$

$\langle f_l \rangle \subseteq A$: Ξέρουμε (άμεσα από Πρόταση 2.3.1) ότι $S_K(n, r) = \text{span}_K \{ \xi_{i,j} \mid i, j \in I(n, r) \}$. Συνεπώς για το τυχόν $x = \xi f_l \in \langle f_l \rangle$, υπάρχουν $\{k_{i,j}\}_{i,j \in I(n,r)} \subseteq K$, ώστε $\xi = \sum_{i,j \in I(n,r)} k_{i,j} \xi_{i,j}$ και άρα $x = (\sum_{i,j \in I(n,r)} k_{i,j} \xi_{i,j}) f_l = \sum_{i,j \in I(n,r)} k_{i,j} (\xi_{i,j} f_l) \in A$.

$A \subseteq B$: Έστω $i, j \in I(n, r)$, τότε $\xi_{i,j} f_l = \begin{cases} \xi_{i,j} f_l & j \sim l \\ 0 & j \not\sim l \end{cases}$. Στην περίπτωση που $j \sim l$, έπεται ότι υπάρχει $\pi \in G(r)$, ώστε $j = l\pi$ και άρα $(i, j) = (i, l\pi) \sim (i\pi^{-1}, l)$, δηλαδή $\xi_{i,j} = \xi_{i\pi^{-1}, l}$. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση πρέπει $\xi_{i,j} f_l \in B$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ και έτσι $A \subseteq B$.
 $B \subseteq \langle f_l \rangle$: Άμεσο αφού εξ' ορισμού, $\langle f_l \rangle = S_K(n, r) f_l$

□

Ορισμός 5.3.3. Για κάθε $i \in I(n, r)$, ορίζουμε $b_i = \xi_{i,l} f_l \in V_{\lambda, K}$.

Λήμμα 5.3.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$, τότε,

- i) $\xi_{i,l} e_l = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h$, όπου οι τροχιές είναι ως προς την δεξιά δράση του $R(T)$ ($\leq G(r)$) στο $I(n, r)$.
ii) $(b_i, (T_l : T_j)) = \langle \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h, e_j \{C(T)\} \rangle = \langle \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h, \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) e_{j\sigma} \rangle$.

Απόδειξη.

- i) Πράγματι, $\xi_{i,l} e_l = \sum_{h \in I(n,r)} \xi_{i,l}(c_{h,l}) e_h \xrightarrow{\text{Ορισμός 2.3.2}} \sum_{h \in I(n,r): (i,l) \sim (h,l)} e_h$. Όμως, $(i, l) \sim (h, l) \iff \exists \pi \in G(r)$ ώστε $i = h\pi$ και $l = l\pi$. Συνεπώς, από Λήμμα 4.4.1 έχουμε,

$$(i, l) \sim (h, l) \iff \exists \pi \in R(T) \text{ ώστε } i = h\pi \iff h \in [i]_{R(T)}.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\xi_{i,l} e_l = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h$.

- ii) Έστω $\varphi_K : E^{\otimes r} \longrightarrow D_{\lambda, K}$, η γνωστή απεικόνιση (από Πρόταση 4.3.1), τότε,

$$\begin{aligned}
(b_i, (T_l : T_j)) &= (b_i, \varphi_K(e_j)) \xrightarrow{\text{Ορισμός 5.1.2}} \langle b_i, e_j \rangle = \langle \xi_{i,l} e_l \{C(T)\}, e_j \rangle = \\
&\langle \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \xi_{i,l} e_l \sigma, e_j \rangle \xrightarrow{\text{Υπενθύμιση 5.2.1}} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \langle \xi_{i,l} e_l, e_j \sigma^{-1} \rangle = \\
&\langle \xi_{i,l} e_l, \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma^{-1}) e_j \sigma^{-1} \rangle = \langle \xi_{i,l} e_l, e_j (\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma^{-1}) \sigma^{-1}) \rangle \stackrel{i)}{=} \\
&\langle \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h, e_j \{C(T)\} \rangle \stackrel{\acute{\alpha}\mu\epsilon\sigma\alpha}{=} \langle \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h, \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) e_j \sigma \rangle.
\end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Το παραπάνω λήμμα, ήταν το πρώτο κομμάτι του θεωρήματος και ήταν τρόπο τινά υπολογιστικό. Το επόμενο λήμμα, αποτελεί τον πυρήνα του θεωρήματος και έχει ως ιδέα την δημιουργία ενός *unimodular* πίνακα της μορφής $(\Omega(i, j))_{i, j \in I^*}$, όπου $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$ και $\Omega(i, j) = (b_i, (T_l : T_j))$. Το πρόβλημα όμως εδώ είναι ότι θέλουμε να εφοδιάσουμε το I^* με κατάλληλη ολική διάταξη, πράγμα που διαπραγματευόμαστε παρακάτω.

Ορισμός 5.3.4. Για κάθε $i, j \in I(n, r)$, ορίζουμε $\Omega(i, j) = (b_i, (T_l : T_j))$.

Παρατήρηση 5.3.1. Έστω $i, j \in I(n, r)$ και $A := \{\sigma \in C(T) \mid i, j \sigma \text{ βρίσκονται στη ίδια } R(T)\text{-τροχιά}\}$, τότε

$$\Omega(i, j) = (b_i, (T_l : T_j)) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in A} s(\sigma) \cdot 1_K & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}.$$

Απόδειξη.

Από Λήμμα 5.3.1 ii), έχουμε,

$$\begin{aligned}
\Omega(i, j) &= (b_i, (T_l : T_j)) = \langle \sum_{h \in [i]_{R(T)}} e_h, \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) e_j \sigma \rangle = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) \langle e_h, e_j \sigma \rangle = \\
&\sum_{h \in [i]_{R(T)}} \sum_{\sigma \in C(T), h=j\sigma} s(\sigma) \cdot 1_K = \begin{cases} \sum_{\sigma \in A} s(\sigma) \cdot 1_K & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}.
\end{aligned}$$

□

Υπενθύμιση 5.3.2. i) Έστω $i \in I(n, r)$, τότε θέτουμε $\beta(i) = (\beta_1(i), \dots, \beta_n(i))$, όπου $\beta_s(i) =$ το άθροισμα της s -γραμμής του T_i (δηλαδή, $\beta_s(i) = \sum_{t=1}^{\lambda_s} i_{x(s,t)}$).

ii) Το $\mathbb{N}^n$ διατάσσεται ολικά μέσω της λεξικογραφικής διάταξης και έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε λεξικογραφικά τα $\{\beta(i)\}_{i \in I(n,r)}$ μεταξύ τους.

iii) Έστω $i \in I(n,r)$, τότε ορίζεται s -γραμμή του T_i να είναι το $R_s(T_i) = (i_{x(s,1)}, \dots, i_{x(s,\lambda_s)}) \in \mathbb{N}^{\lambda_s}$. (Ορίζουμε έτσι γραμμές του T_i για να μπορέσουμε στην πορεία να τις συγκρίνουμε λεξικογραφικά).

Λήμμα 5.3.2. Μπορούμε να εφοδιάσουμε το $I(n,r)$ με κάποια ολική διάταξη " $<$ ", ώστε για κάθε $i, j \in I(n,r)$ να ισχύει: $\beta(i) < \beta(j) \implies i < j$. Συγκεκριμένα ορίζουμε τη παρακάτω διάταξη:

- Αν $i = j$, τότε δεν έχουμε κάτι να πούμε.
- Αν $i \neq j$, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
 - 1) Αν $\beta(i) > \beta(j)$, τότε ορίζουμε $i > j$.
 - 2) Αν $\beta(i) < \beta(j)$, τότε ορίζουμε $i < j$.
 - 3) Αν $\beta(i) = \beta(j)$, τότε, συγκρίνουμε λεξικογραφικά γραμμή προς γραμμή τους πίνακες των λ -tableaux T_i, T_j και το λ -tableau που εμφανίζει για πρώτη φορά γνήσια μεγαλύτερη γραμμή καθορίζει το μεγαλύτερο στοιχείο.
 Συγκεκριμένα, θεωρούμε το μικρότερο s_0 ώστε, $R_s(T_i) = R_s(T_j)$ για κάθε $s < s_0$ και $R_{s_0}(T_i) \neq R_{s_0}(T_j)$. (υπάρχει τέτοιο, αλλιώς $T_j = T_i \iff i = j$, άτοπο) και ορίζουμε:

$$i > j \iff R_{s_0}(T_i) > R_{s_0}(T_j).$$

Συμβολικά για το την περίπτωση 3): αν π.χ. $i > j$, τότε θα γράφουμε $\beta(i > j)$.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι η παραπάνω διάταξη είναι ολική.

1) Έστω $i, j \in I(n,r)$, τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω: $i > j$, $i < j$, $i = j$.

Το ότι ισχύει ένα από τα παραπάνω είναι άμεσο από τον ορισμό. Πάμε να δούμε γιατί ισχύει ακριβώς ένα από αυτά. Πράγματι,

Έστω ότι $i = j$: Τότε δεν μπορεί να έχουμε $i < j$ ή $i > j$ γιατί αυτό προϋποθέτει ότι $i \neq j$.

Έστω ότι $i < j$: Τότε (εξ' ορισμού) έχουμε $i \neq j$ και $\beta(i) < \beta(j)$ ή $\beta(i < j)$. Αν είχαμε ότι $\beta(i) < \beta(j)$, τότε δεν μπορούμε να έχουμε $i > j$ (αφού αυτό προϋποθέτει $\beta(i) \geq \beta(j)$, άτοπο), ενώ αν είχαμε $\beta(i < j)$, τότε $\beta(i) = \beta(j)$ και σύμφωνα με τους συμβολισμούς πάνω πρέπει, $R_{s_0}(T_i) < R_{s_0}(T_j)$, οπότε ούτε τώρα $i > j$ (αλλιώς $R_{s_0}(T_i) > R_{s_0}(T_j)$, άτοπο).

Έστω ότι $i < j$: Όμοια με πάνω δεν γίνεται $i > j$ ή $i = j$.

2) Έστω $i, j, k \in I(n,r)$ με $i \leq j \leq k$, τότε $i \leq k$.

Καταρχάς, αν $i = j$ ή $j = k$, τότε άμεσα έχουμε $i \leq k$ και έτσι τελειώσαμε. Έστω λοιπόν $i < j < k$ και πάμε να δείξουμε ότι $i < k$. Εφόσον $i < j < k$, τότε ισχύουν τα εξής:

$$(\beta(i) < \beta(j) \text{ ή } \beta(i < j)) \text{ και } (\beta(j) < \beta(k) \text{ ή } \beta(j < k)).$$

Θα δείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση έπεται $i < k$. Πράγματι,

Αν $\beta(i) < \beta(j)$ και $\beta(j) < \beta(k)$: Τότε $\beta(i) < \beta(k)$ (γιατί η λεξικογραφική διάταξη είναι ολική) και άρα $i < k$.

Αν $\beta(i) < \beta(j)$ και $\beta(j) = \beta(k)$: Τότε $\beta(i) < \beta(j) = \beta(k)$ και άρα $i < k$.

Αν $\beta(i) = \beta(j)$ και $\beta(j) < \beta(k)$: Τότε $\beta(i) = \beta(j) < \beta(k)$ και άρα $i < k$.

Αν $\beta(i) = \beta(j)$ και $\beta(j) = \beta(k)$: Τότε $\beta(i) = \beta(j) = \beta(k)$ και υπάρχουν $\lambda_0, \rho_0 \in \underline{n}$, ώστε:

(α') $R_{\lambda_0}(T_i) < R_{\lambda_0}(T_j)$ και $R_\lambda(T_i) = R_\lambda(T_j)$, για κάθε $\lambda < \lambda_0$.

(β') $R_{\rho_0}(T_j) < R_{\rho_0}(T_k)$ και $R_\rho(T_j) = R_\rho(T_k)$, για κάθε $\rho < \rho_0$.

Καταρχάς, αν $\lambda_0 = 1$, τότε $R_1(T_i) < R_1(T_j) \leq R_1(T_k)$ και άρα $i < k$. Ενώ αν $\lambda_0 > 1$, τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

a). Έστω $R_\lambda(T_i) = R_\lambda(T_k)$, για κάθε $\lambda < \lambda_0$: Τότε $R_\lambda(T_j) = R_\lambda(T_i) = R_\lambda(T_k)$, για κάθε $\lambda < \lambda_0$, πράγμα που επιβάλλει $\lambda_0 \leq \rho_0$ (βλέπε (β')). Επιπλέον, $R_{\lambda_0}(T_i) < R_{\lambda_0}(T_j) \leq R_{\lambda_0}(T_k)$ (η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $\lambda_0 \leq \rho_0$). Οπότε, $R_{\lambda_0}(T_i) < R_{\lambda_0}(T_k)$ και $R_\lambda(T_i) = R_\lambda(T_k)$, για κάθε $\lambda < \lambda_0$, άρα $i < k$.

b). Έστω ότι υπάρχει $r < \lambda_0$ με $R_r(T_i) \neq R_r(T_k)$: Τότε έστω r το μικρότερο τέτοιο, δηλαδή $R_\lambda(T_i) = R_\lambda(T_k)$, για κάθε $\lambda < r$ (μπορούμε χ.β.γ, να πούμε ότι $r > 1$, αλλιώς $R_1(T_i) \leq R_1(T_j) \leq R_1(T_k)$ και άρα $i < k$). Αν δείξουμε $R_r(T_i) < R_r(T_k)$, τότε έπεται $i < k$ και έτσι τελειώσαμε. Πράγματι, εφόσον $r < \lambda_0$, από (α') έχουμε $R_r(T_i) = R_r(T_j)$. Επιπλέον, για κάθε $\lambda < r$, έχουμε $R_\lambda(T_j) \leq R_\lambda(T_i) \leq R_\lambda(T_k)$, πράγμα που επιβάλλει $r \leq \rho_0$ (βλέπε (β')). Τώρα, επειδή $r \leq \rho_0$ και $R_r(T_i) \neq R_r(T_k)$, από (β') πρέπει $r = \rho_0$, άρα $R_r(T_i) < R_r(T_j) < R_r(T_k)$.

Σε κάθε περίπτωση $i < k$ και έτσι αποδείχθηκε και το 2).

□

Ορισμός 5.3.5. Έστω $I^* := \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$, τότε ορίζουμε το πίνακα:

$$\Omega = (\Omega(i, j))_{i, j \in I^*},$$

όπου η διάταξη στις συντεταγμένες γίνεται σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα.

Πρόταση 5.3.2. Ο πίνακας $\Omega = (\Omega(i, j))_{i, j \in I^*}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- i) Ο Ω είναι κάτω τριγωνικός, δηλαδή $\Omega(i, j) = 0$, για κάθε $i < j$.
- ii) $\Omega(i, i) = 1$, για κάθε $i \in I^*$ και άρα $\det \Omega = 1$.
- iii) $\Omega(i, j) \in \mathbb{Z}_{1K}$, για κάθε $i, j \in I^*$.

Απόδειξη.

i) Έστω $i, j \in I^*$ με $i < j$. Έχουμε, $\Omega(i, j) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in A} s(\sigma) \cdot 1_K & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$, όπου $A := \{\sigma \in$

$C(T) \mid i, j\sigma \text{ βρίσκονται στη ίδια } R(T)\text{-τροχιά}\}$ και $\beta(i) \leq \beta(j)$ (από Λήμμα 5.3.2). Θα δείξουμε ότι $A = \emptyset$. Πράγματι, έστω για άτοπο ότι $A \neq \emptyset$, τότε υπάρχουν $\sigma \in C(T)$, $\pi \in R(T)$, ώστε $i = j\sigma\pi$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $\sigma = 1$: Τότε, $i = j\pi \iff T_i = T_{j\pi}$, άρα από Παρατήρηση 4.4.1 i), έχουμε $j = j\pi = i$, άτοπο αφού $i < j$.

Αν $\sigma \neq 1$: Τότε, $\beta(i) \xrightarrow{\pi^{-1} \in R(T)} \beta(i\pi^{-1}) = \beta(j\sigma) > \beta(j)$ (η ανισότητα ισχύει από Λήμμα 4.4.2). Το τελευταίο είναι άτοπο, γιατί $\beta(i) \leq \beta(j)$.

Σε κάθε περίπτωση $A = \emptyset$, άρα $\Omega(i, j) = 0$.

ii) $\Omega(i, i) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in A} s(\sigma) \cdot 1_K & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$, όπου $A = \{\sigma \in C(T) \mid i, i\sigma \text{ βρίσκονται στη ίδια } R(T)\text{-τροχιά}\}$.

Θα δείξουμε ότι $A = \{1\}$ (όπου είναι σαφές ότι $1 \in A$). Πράγματι, αν $\sigma \in A$, τότε υπάρχει $\pi \in R(T)$, ώστε $i\pi = i\sigma$, οπότε $\beta(i) \xrightarrow{\pi \in R(T)} \beta(i\pi) = \beta(i\sigma)$, το τελευταίο σε συνδυασμό με το Λήμμα 4.4.2iii), επιβάλλει $\sigma = 1$. Τέλος από i) και αυτό που δείξαμε μόλις, έπεται άμεσα ότι $\det \Omega = 1$.

iii) Άμεσο από Παρατήρηση 5.3.1.

□

Θεώρημα 5.3.1. (Βάσης του $V_{\lambda, K}$ [9, σελ. 218, Theorem 3.5])

i) Το σύνολο $\{b_i = \xi_{i,l}f_l \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\}$ είναι K -βάση του $V_{\lambda, K}$.

ii) Το $V_{\lambda, K}$ είναι κυκλικό $S_K(n, r)$ -πρότυπο και μάλιστα $V_{\lambda, K} = S_K(n, r)f_l = \langle f_l \rangle$.

Απόδειξη.

i) Θέτουμε $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$ και $B = \{b_i \mid i \in I^*\}$. Τότε,

$B \subseteq V_{\lambda, K}$: Για κάθε $i \in I(n, r)$, έχουμε $b_i = \xi_{i,l}f_l$ και $f_l \in V_{\lambda, K}$, άρα $b_i \in V_{\lambda, K}$.

B είναι K -γραμμικά ανεξάρτητο: Έστω $\{k_i\}_{i \in I^*} \subseteq K$, με $\sum_{i \in I^*} k_i b_i = 0$. Αν $j \in I^*$, τότε,

$$0 = \left(\sum_{i \in I^*} k_i b_i, (T_l : T_j) \right) = \sum_{i \in I^*} k_i (b_i, (T_l : T_j)) = \sum_{i \in I^*} k_i \Omega(i, j) \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.3.2}} \sum_{i \geq j} k_i \Omega(i, j) = k_j + \sum_{i > j} k_i \Omega(i, j)$$

Δηλαδή, $k_j + \sum_{i>j} k_i \Omega(i, j) = 0$, για κάθε $j \in I^*$ (*). Με βάση αυτό, θα δείξουμε ότι $k_j = 0$, για κάθε $j \in I^*$. Πράγματι, έστω $j_1 := \max I^*$, τότε από (*) πρέπει $0 = k_{j_1} + \sum_{i>j_1} k_i \Omega(i, j) = k_{j_1}$. Στη συνέχεια, έστω $j_2 := \max(I^* \setminus \{j_1\})$, τότε $0 = k_{j_2} + \sum_{i>j_2} k_i \Omega(i, j) = k_{j_2} + k_{j_1} \Omega(j_1, j_2) = k_{j_2}$. Συνεχίζοντας έτσι (π.χ. $j_3 := \max(I^* \setminus \{j_1, j_2\})$, ...), καταλήγουμε ότι $k_j = 0$, $\forall j \in I^*$.

$V_{\lambda, K} = \text{span}_K B$: Από Παρατήρηση 5.1.2, ξέρουμε ότι $\eta(,) : V_{\lambda, K} \times D_{\lambda, K} \longrightarrow K$, είναι left-non-singular, οπότε η απεικόνιση $\Lambda : V_{\lambda, K} \longrightarrow D_{\lambda, K}^\circ$, με $\Lambda(v) = (v, -)$, είναι μονομορφισμός K-προτύπων (μάλιστα KΓ-προτύπων). Άρα $\dim_K V_{\lambda, K} \leq \dim_K D_{\lambda, K}^\circ = \dim_K D_{\lambda, K} \stackrel{\text{Θεώρημα 4.5.2}}{=} |I^*| = |B|$ (η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το B είναι K-γραμμικά ανεξάρτητο). Τελικά, $B = \text{span}_K B$ και $\dim_K V_{\lambda, K} \leq |B|$, άρα $V_{\lambda, K} = \text{span}_K B$.

ii) Καταρχάς $\langle f_l \rangle \subseteq V_{\lambda, K}$ (αφού $f_l \in V_{\lambda, K}$). Ανάποδα, έστω $x \in V_{\lambda, K}$, τότε υπάρχουν $\{k_i\}_{i \in I^*} \subseteq K$, ώστε $x = \sum_{i \in I^*} k_i b_i = \sum_{i \in I^*} k_i \xi_{i, l} f_l = (\sum_{i \in I^*} k_i \xi_{i, l}) f_l \in S_K(n, r) f_l = \langle f_l \rangle$.

□

Πόρισμα 5.3.1. Η απεικόνιση $\eta(,) : V_{\lambda, K} \times D_{\lambda, K} \longrightarrow K$, είναι non-singular.

Απόδειξη.

Ξέρουμε από Παρατήρηση 5.1.2 ότι η απεικόνιση $\eta(,)$ είναι contravariant, left-non-singular (δηλαδή, αν $\eta(x, z) = 0$, $\forall z \in D_{\lambda, K}$, τότε $x = 0$). Συνεπώς, η απεικόνιση $\Lambda : V_{\lambda, K} \longrightarrow D_{\lambda, K}^\circ$, $\Lambda(v)(w) = \eta(v, w)$ είναι μονομορφισμός K-προτύπων (μάλιστα KΓ-προτύπων). Επιπλέον, από θεώρημα βάσης έχουμε ότι $\dim_K V_{\lambda, K} = \dim_K D_{\lambda, K}^\circ$, άρα η Λ είναι και επί. Τελικά η Λ είναι ισομορφισμός KΓ-προτύπων και έτσι από Πρόταση 2.7.4 πρέπει $\eta(,)$ να είναι non-singular.

□

5.4 Εφαρμογές του θεωρήματος βάσης.

Πρόταση 5.4.1. Έστω $i \in I(n, r)$ και $a \in \Lambda^+(n, r)$, τότε:

$$i) \quad \xi_a b_i = \begin{cases} b_i & i \in a \\ 0 & i \notin a \end{cases}. \text{ Ιδιαίτερώς, } \{b_j \mid j \in I(n, r), j \in a\} \subseteq V_{\lambda, K}^a.$$

$$ii) \quad \text{Αν } b_i \neq 0, \text{ τότε } b_i \in V_{\lambda, K}^a \iff i \in a.$$

$$iii) \quad \text{Το σύνολο } \{b_i \mid i \in a, T_i = \text{standard}\} \text{ είναι } K\text{-βάση του } V_{\lambda, K}^a.$$

Απόδειξη.

$i)$ Έστω $k \in a$, τότε $\xi_a = \xi_{k, k}$ και από ιδιότητες στην Πρόταση 2.3.3, έχουμε,

$$\xi_a b_i = \xi_{k, k}(\xi_{i, l} f_l) = (\xi_{k, k} \xi_{i, l}) f_l = \begin{cases} (\xi_{i, i} \xi_{i, l}) f_l & i \sim k \\ 0 & i \not\sim k \end{cases} = \begin{cases} \xi_{i, l} f_l & i \sim k \\ 0 & i \not\sim k \end{cases} = \begin{cases} b_i & i \in a \\ 0 & i \notin a \end{cases}.$$

$ii)$ Αν $i \in a$, τότε $b_i \stackrel{i)}{=} \xi_a b_i \in \xi_a V_{\lambda, K} = V_{\lambda, K}^a$. Ανάποδα, αν $b_i \in V_{\lambda, K}^a$, τότε (από Πόρισμα 3.2.1) $\xi_a b_i = b_i \neq 0$, πράγμα που επιβάλλει $i \in a$.

$iii)$ Καταρχάς, (από $i)$) $\{b_i \mid i \in a, T_i = \text{standard}\} \subseteq V_{\lambda, K}^a$ και $\{b_i \mid i \in a, T_i = \text{standard}\} = K$ -γραμμικά ανεξάρτητο, από Θεώρημα 5.3.1. Μένει να δείξουμε ότι $V_{\lambda, K}^a = \text{span}_K \{b_i \mid i \in a, T_i = \text{standard}\}$ (όπου ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι άμεσο). Πράγματι, έστω $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$, αν $x \in V_{\lambda, K}^a$, τότε υπάρχουν $\{k_i\}_{i \in I^*} \subseteq K$ ώστε $x = \sum_{i \in I^*} k_i b_i$. Οπότε,

$$x \stackrel{x \in V_{\lambda, K}^a}{=} \xi_a x = \sum_{i \in I^*} k_i (\xi_a b_i) \stackrel{i)}{=} \sum_{i \in I^*, i \in a} k_i b_i \in \text{span}_K \{b_i \mid i \in a, T_i = \text{standard}\}.$$

□

Πρόταση 5.4.2. Έστω $chK = 0$ και $\varphi : E^{\otimes r} \longrightarrow D_{\lambda, K}$, η γνωστή απεικόνιση με $\varphi(e_i) = (T_l : T_i)$, για κάθε $i \in I(n, r)$. Τότε η απεικόνιση,

$$\varphi|_{V_{\lambda, K}} : V_{\lambda, K} \longrightarrow D_{\lambda, K}$$

είναι ισομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων ($\iff$ $K\Gamma$ -προτύπων) με $\varphi(f_l) = |C(T)|(T_l : T_l)$.

Απόδειξη. Καταρχάς από Πρόταση 4.3.1 ξέρουμε ότι η φ είναι ομομορφισμός $S_K(n, r)$ -προτύπων. Τώρα επειδή $chK = 0$, πρέπει από Πρόταση 5.1.1 τα $V_{\lambda, K}, D_{\lambda, K}$ να είναι irreducible $S_K(n, r)$ -πρότυπα. Οπότε, αν δειχθεί ότι $\phi \neq 0$, έπεται απευθείας $\phi =$ ισομορφισμός. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\varphi(f_l) &= \varphi\left(\sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)e_{l\pi}\right) = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)\varphi(e_{l\pi}) = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)(T_l : T_{l\pi}) \stackrel{\text{Παρατήρηση 4.2.1 ii)}}{=} \\ &\sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)s(\pi)(T_l : T_l) = \sum_{\pi \in C(T)} (T_l : T_l) = |C(T)|(T_l : T_l) = (|C(T)| \cdot 1_K)(T_l : T_l).\end{aligned}$$

Όμως $(|C(T)| \cdot 1_K)(T_l : T_l) \neq 0$, αλλιώς αν $(|C(T)| \cdot 1_K)(T_l : T_l) = 0$, τότε επειδή $(|C(T)| \cdot 1_K) \neq 0$ (γιατί $|C(T)| \neq 0$ και $chK = 0$), πρέπει $(T_l : T_l) = 0$, άτοπο (αφού $T_l = standard$ και το σύνολο $\{(T_l : T_i) \mid T_i = standard\}$, αποτελεί K-βάση του $D_{\lambda, K}$).

□

Σχόλιο. Προχωράμε τώρα στη μελέτη των μέγιστων $S_K(n, r)$ -υποπροτύπων του $V_{\lambda, K}$. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να μελετήσουμε πρώτα τον λ -weight space $V_{\lambda, K}^\lambda$.

Πρόταση 5.4.3. *i) $b_l = f_l$.*

ii) $V_{\lambda, K}^\lambda = Kf_l = span_K\{f_l\} =$ κυκλικό K -πρότυπο. Ιδιαίτερος, $dim_K V_{\lambda, K}^\lambda = 1$.

Απόδειξη.

i) Καταρχάς έχουμε,

$$b_l = \xi_{l,l}f_l = \xi_{l,l} \cdot \left(\sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)e_{l\pi}\right) = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)(\xi_{l,l} \cdot e_{l\pi}) = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)\left(\sum_{i \in I(n, r)} \xi_{l,l}(c_{i,l\pi})e_i\right).$$

Τώρα, (από Παρατήρηση 2.1.1 iv)) έχουμε $(l, l) \sim (i, l\pi) \iff l\pi = i \sim l$, οπότε,

$$b_l = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)\xi_{l,l}(c_{l\pi, l\pi})e_{l\pi} = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)e_{l\pi} = f_l.$$

ii) Από Πρόταση 5.4.1, έχουμε,

$$V_{\lambda, K}^\lambda = span_K\{b_i \mid i \in \lambda, T_i = standard\} \stackrel{\text{Παρατήρηση 4.6.1}}{=} span_K\{b_l\} \stackrel{i)}{=} span_K\{f_l\}$$

□

Παρατήρηση 5.4.1. Έστω $M \prec V_{\lambda, K}$ (γνήσιο $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο), τότε $M \subseteq \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda, K}^a$. (όπου στο άθροισμα εννοούμε ότι το a διατρέχει το $\Lambda(n, r) \setminus \{\lambda\}$).

Απόδειξη.

Από Θεώρημα 5.3.1 και υπόθεση έχουμε ότι, $M \leq V_{\lambda,K} = S_K(n,r)f_l$, συνεπώς $f_l \notin M$. Επιπλέον από Ορισμό 3.2.2 *iii*), έχουμε ότι $M^\lambda = M \cap V_{\lambda,K}^\lambda \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.2}} M \cap Kf_l \xrightarrow{f_l \notin M} 0$. Τελικά, από Πρόταση 3.2.2, έχουμε,

$$M = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} M^a = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} M \cap V_{\lambda,K}^a = \sum_{a \neq \lambda} M \cap V_{\lambda,K}^a \subseteq \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$$

□

Πρόταση 5.4.4.

- i) Το $V_{\lambda,K}$ έχει μοναδικό μέγιστο (*maximal*) $S_K(n,r)$ -υποπρότυπο ($\iff$ $K\Gamma$ -υποπρότυπο) που θα το συμβολίζουμε με $V_{\lambda,K}^{max}$. Μάλιστα $f_l \notin V_{\lambda,K}^{max} \subseteq \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$.
- ii) $V_{\lambda,K}^{max} = \sum_{M \leq V_{\lambda,K}} M$ = το άθροισμα όλων των γνήσιων $S_K(n,r)$ -υποπροτύπων του $V_{\lambda,K}$. Ιδιαίτερα, το $V_{\lambda,K}^{max}$ περιέχει όλα τα γνήσια $S_K(n,r)$ -υποπρότυπα του $V_{\lambda,K}$.

Απόδειξη.

Θέτουμε $W = \sum_{M \leq V_{\lambda,K}} M$ και από Παρατήρηση 5.4.1 έχουμε $W \subseteq \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$. Επίσης, $f_l \notin \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$ (και άρα $f_l \notin W$). Πράγματι, αν είχαμε ότι $f_l \in \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$, τότε (επειδή $f_l = b_l \in V_{\lambda,K}^\lambda$) θα έπρεπε $b_l \in V_{\lambda,K}^\lambda \cap \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$, όμως $V = \bigoplus_{a \in \Lambda(n,r)} V^a$, συνεπώς $b_l = 0$, άτοπο (γιατί $T_l = \text{standard}$ και άρα από Θεώρημα 5.3.1 το b_l αποτελεί στοιχείο της K -βάσης του $V_{\lambda,K}$).

Ως τώρα, $f_l \notin W \subseteq \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda,K}^a$. Μένει να δείξουμε ότι $W = \text{maximal } S_K(n,r)\text{-υποπρότυπο του } V_{\lambda,K}$ και μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα. Πράγματι, $W = \text{maximal}$: Καταρχάς, $W \subsetneq V_{\lambda,K}$ (αφού $f_l \notin W$). Στη συνέχεια, έστω $W \leq U \leq V_{\lambda,K}$, αν $U = V_{\lambda,K}$, τότε τελειώσαμε, ενώ αν $U \subsetneq V_{\lambda,K}$, τότε εξ' ορισμού του W , πρέπει $U \leq W$ και άρα $W = U$. Συνεπώς, $W = \text{maximal}$.

Μοναδικότητα: Έστω W' ένα άλλο *maximal* $S_K(n,r)$ -υποπρότυπο του $V_{\lambda,K}$, τότε πρέπει $W' \subsetneq V_{\lambda,K}$ και άρα εξ' ορισμού του W , έχουμε $W' \subseteq W \subsetneq V_{\lambda,K}$. Από μεγιστικότητα του W' , έπεται $W = W'$.

□

Πρόταση 5.4.5. Ορίζεται το *irreducible* $S_K(n,r)$ -πρότυπο πηλίκου $V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max}$ και ισχύει,

$$V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max} \simeq F_{\lambda,K}, \text{ Ισομορφισμός } S_K(n,r)\text{-προτύπων } (\iff K\Gamma\text{-προτύπων}).$$

Ιδιαίτερος, $\Phi_{V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max}} = \Phi_{\lambda,K}$.

Υπενθύμιση 5.4.1. Έστω $W, V \in M_K(n, r)$ με $W \leq V$, τότε:

$$(\text{leading term του } \Phi_W) \leq (\text{leading term του } \Phi_V)$$

όπου η σύγκριση γίνεται ως προς την λεξικογραφική διάταξη που είδαμε στον Ορισμό 3.5.1.

Απόδειξη. (Υπενθύμισης).

Καταρχάς, $\Phi_W = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K W^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ και $\Phi_V = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K V^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ (όπου οι γραφές είναι σε μορφή αθροίσματος διακεκριμένων μονώνυμων παραγόντων). Επιπλέον, από Ορισμό 3.2.2 iii), έχουμε $W^a = W \cap V^a$, οπότε $\dim_K W^a \leq \dim_K V^a$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$. Από το τελευταίο έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

Απόδειξη. (Πρότασης 5.4.4)

Καταρχάς, από Πρόταση 5.1.1 έχουμε ότι $\Phi_{V_{\lambda, K}} = \Phi_{D_{\lambda, K}}$ όπου το $\Phi_{D_{\lambda, K}}$ έχει leading term το $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$ (βλέπε Πρόταση 4.6.2). Οπότε από Υπενθύμιση 5.4.1 έχουμε,

$$(\text{leading term του } \Phi_{V_{\lambda, K}^{max}}) \leq (\text{leading term του } \Phi_{V_{\lambda, K}}) = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$$

Ισχυρισμός: $(\text{leading term του } \Phi_{V_{\lambda, K}^{max}}) < (\text{leading term του } \Phi_{V_{\lambda, K}}) = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}$.

Πράγματι, $\Phi_{V_{\lambda, K}^{max}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K (V_{\lambda, K}^{max})^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ και $(V_{\lambda, K}^{max})^\lambda = 0$, αφού

$$(V_{\lambda, K}^{max})^\lambda = V_{\lambda, K}^{max} \cap V_{\lambda, K}^\lambda \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.2}} V_{\lambda, K}^{max} \cap Kf_l \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.4}} 0.$$

Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Συνεχίζοντας, έχουμε $\Phi_{V_{\lambda, K}/V_{\lambda, K}^{max}} = \Phi_{V_{\lambda, K}} - \Phi_{V_{\lambda, K}^{max}}$, άρα από ισχυρισμό πρέπει,

$$(\text{leading term του } \Phi_{V_{\lambda, K}/V_{\lambda, K}^{max}}) = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Το τελευταίο σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.5.1, δίνει ότι $V_{\lambda, K}/V_{\lambda, K}^{max} \simeq F_{\lambda, K}$. □

Πρόταση 5.4.6.

i) Το $D_{\lambda, K}$ έχει μοναδικό irreducible ΚΓ–πρότυπο ($\iff S_K(n, r)$ –πρότυπο) έστω $D_{\lambda, K}^{min}$. Επιπλέον,

$$D_{\lambda, K}^{min} \simeq V/V_{\lambda, K}^{max} \simeq F_{\lambda, K} \text{ (Ισομορφισμοί ΚΓ–προτύπων ($\iff S_K(n, r)$ –προτύπων))}.$$

ii) $(D_{\lambda, K}^{min})^\lambda = K(T_l : T_l)$. Ιδιαίτερος $\dim_K(D_{\lambda, K}^{min})^\lambda = 1$.

iii) $D_{\lambda, K}^{min} = S_K(n, r)(T_l : T_l) = K\Gamma(T_l : T_l) = \langle (T_l : T_l) \rangle$

Απόδειξη. Θα κάνουμε το $i)$ και μέσα από την απόδειξη του θα φανούν τα $ii), iii)$.

Ξέρουμε από Πρόταση 5.4.4 ότι το $V_{\lambda,K}$ έχει μοναδικό maximal KT -πρότυπο έστω $V_{\lambda,K}^{max}$ και άρα από Πρόταση 2.7.5 $ii)b, a)$ υπάρχει μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) irreducible KT -πρότυπο έστω V^{min} του $V_{\lambda,K}^\circ$ με $V^{min} \simeq (V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max})^\circ$ (Ισομορφισμός KT -προτύπων ($\iff S_K(n, r)$ -προτύπων)) και συνεπώς από Πρόταση 3.5.2 έχουμε:

$$V^{min} \simeq V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max} \text{ (Ισομορφισμός } KT\text{-προτύπων } (\iff S_K(n, r)\text{-προτύπων))}$$

Τώρα, επειδή $V_{\lambda,K}^\circ \simeq D_{\lambda,K}$ (Ισομορφισμός KT -προτύπων), έπεται εύκολα ότι το $D_{\lambda,K}$ έχει μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) irreducible KT -πρότυπο έστω $D_{\lambda,K}^{min}$ με $D_{\lambda,K}^{min} \simeq V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max}$.

Επιπλέον από Πρόταση 5.4.5 έχουμε $V_{\lambda,K}/V_{\lambda,K}^{max} \simeq F_{\lambda,K}$. Εμείς θα δείξουμε (ακόμα ισχυρότερα) ότι το $D_{\lambda,K}$ έχει μοναδικό irreducible KT -πρότυπο ως προς ισότητα. Πράγματι, έστω D ένα τυχόν irreducible KT -πρότυπο του $D_{\lambda,K}$, τότε:

Από αυτά που υπόθηκαν πάνω, πρέπει $D \simeq D_{\lambda,K}^{min} \simeq F_{\lambda,K}$. Έστω $f : D \longrightarrow F_{\lambda,K}$ ο ισομορφισμός KT -προτύπων ($\iff S_K(n, r)$ -προτύπων) και κατ' συνέπεια K -προτύπων τότε,

$$f(D^\lambda) = f(\xi_\lambda D) = \xi_\lambda f(D) = \xi_\lambda F_{\lambda,K} = F_{\lambda,K}^\lambda.$$

Οπότε η $f|_{D^\lambda} : D^\lambda \longrightarrow F_{\lambda,K}^\lambda$ είναι ισομορφισμός K -προτύπων και έτσι,

$$\dim_K D^\lambda = \dim_K F_{\lambda,K}^\lambda \xrightarrow{\text{Θεώρημα 3.5.1 } i)} 1$$

Επιπλέον,

$$D^\lambda \xrightarrow{\text{Ορισμός 3.2.2}} D \cap D_{\lambda,K}^\lambda \xrightarrow{\text{Πρόταση 4.6.1}} D \cap K(T_l : T_l)$$

Τελικά το D^λ είναι K -υποπρότυπο του $K(T_l : T_l)$ με $\dim_K D^\lambda = \dim_K K(T_l : T_l) = 1$, άρα $D^\lambda = K(T_l : T_l)$. Συνεπώς το τυχόν irreducible KT -υποπρότυπο έστω D του $D_{\lambda,K}$, περιέχει το στοιχείο $(T_l : T_l)$ που είναι μη μηδενικό (αφού $T_l = \text{standard}$ και άρα αποτελεί βασικό στοιχείο του $D_{\lambda,K}$, βλέπε Θεώρημα 4.5.2), άρα

$$0 \neq KT(T_l : T_l) = S_K(n, r)(T_l : T_l) \leq D = \text{irreducible}$$

και αναγκαστικά $D = KT(T_l : T_l) = S_K(n, r)(T_l : T_l)$. Έτσι έπεται η μοναδικότητα. □

Σχόλιο. Μία πιο αναλυτική-οικονομική περιγραφή του $D_{\lambda,K}^{min}$ μέσω της $S_K(n, r)$ δίνεται από τη παρακάτω παρατήρηση. Η αναφορά στο πρότυπο $D_{\lambda,K}^{min}$ και γενικά στη περιγραφή του, θα μας φανεί ιδιαίτερα γόνιμη στη παράγραφο 6.4.

Παρατήρηση 5.4.2. $D_{\lambda,K}^{min} = \text{span}_K \{ \xi_{i,l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in I(n, r) \}$ και $\xi_{i,l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} (T_l : T_h)$.

Απόδειξη.

Για συντομία θέτουμε $S = S_K(n, r)$ και από Πρόταση 5.4.6 έχουμε $D_{\lambda, K}^{min} = S(T_l : T_l)$, οπότε,

$$span_K \{ \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in I(n, r) \} \subseteq D_{\lambda, K}^{min} : \quad \text{Άμεσα αφού } D_{\lambda, K}^{min} = S(T_l : T_l).$$

$D_{\lambda, K}^{min} \subseteq span_K \{ \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in I(n, r) \}$: Έστω $x \in D_{\lambda, K}^{min} = S(T_l : T_l)$, τότε (από Πρόταση 2.3.1) υπάρχουν $\{k_{i, j}\}_{(i, j) \in \mathcal{T}} \subseteq K$ ώστε

$$x = \left(\sum_{(i, j) \in \mathcal{T}} k_{i, j} \xi_{i, j} \right) \circ (T_l : T_l) = \sum_{(i, j) \in \mathcal{T}} k_{i, j} (\xi_{i, j} \circ (T_l : T_l)). \quad (*)$$

Όμως για κάθε $(i, j) \in \mathcal{T}$ (από Παρατήρηση 4.3.2) έχουμε,

$$\xi_{i, j} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in I(n, r)} \xi_{i, j}(c_{h, l})(T_l : T_h).$$

Από το παραπάνω, αν $j \approx l$, πρέπει $\xi_{i, j} \circ (T_l : T_l) = 0$. Ενώ αν $j \sim l$, τότε υπάρχει $\pi_j \in G(r)$, ώστε

$$l\pi_j = j \text{ και έτσι } \xi_{i, j} = \xi_{i, l\pi_j} \xrightarrow{(i\pi_j^{-1}, l) \sim (i, l\pi_j)} \xi_{i\pi_j^{-1}, l}. \text{ Συνεπώς,}$$

$$x \xrightarrow{(*)} \sum_{(i, j) \in \mathcal{T}, j \sim l} k_{i, j} (\xi_{i\pi_j^{-1}, l} \circ (T_l : T_l)) \in span_K \{ \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in I(n, r) \}$$

$\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} (T_l : T_h)$: Καταρχάς, $\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in I(n, r)} \xi_{i, l}(c_{h, l})(T_l : T_h)$, όμως από Λήμμα 4.4.1 i) έχουμε $(i, l) \sim (h, l) \iff \exists \pi \in R(T) \text{ ώστε } i\pi = h \iff h \in [i]_{R(T)}$. Άρα, $\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} (T_l : T_h)$.

□

Σχόλιο. Με βάση τη Πρόταση 5.4.6 μπορούμε να δώσουμε μία εναλλακτική απόδειξη για το γεγονός ότι τα *formal characters* $\{\Phi_{\lambda, 0}\}_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)}$ είναι ακριβώς τα *Schur functions* $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+(n, r)}$. Επίσης μπορούμε να δώσουμε και εναλλακτικές αποδείξεις του Θεωρήματος 4.6.1 και Πρόταση 5.1.1 iii).

Πόρισμα 5.4.1. (Εναλλακτικές αποδείξεις κάποιων παλιών αποτελεσμάτων). Έστω $chK = 0$ τότε,

$$i) \quad \Phi_{F_{\lambda, K}} := \Phi_{\lambda, 0} = \Phi_{D_{\lambda, K}} (= S_\lambda).$$

$$ii) \quad D_{\lambda, K} \simeq V_{\lambda, K} \simeq F_{\lambda, 0} = \text{irreducible πρότυπο της } M_K(n, r) (\iff \text{της } S_K(n, r)). \quad (\text{Όπου οι Ισομορφισμοί είναι } K\Gamma\text{-προτύπων } (\iff S_K(n, r)\text{-προτύπων}).$$

Απόδειξη.

- i) Καταρχάς, είναι σαφές ότι οι Προτάσεις 5.4.4, 5.4.5, 5.4.6, όπως επίσης και το Θεώρημα βάσης για το $V_{\lambda,K}$ (που χρησιμοποιείται για την απόδειξη αυτών) δεν χρησιμοποιούν πουνθενά το γεγονός ότι $\Phi_{\lambda,0} = S_\lambda$ (που ξέρουμε με βάση την απόδειξη του Κεφαλαίου 3.6-3.7), άρα δικαιούμαστε να τις χρησιμοποιήσουμε για αυτήν την εναλλακτική απόδειξη που θέλουμε να δώσουμε.

Εφόσον $chK = 0$ τότε η K -άλγεβρα $S_K(n, r)$ είναι ημιαπλή (βλέπε Θεώρημα 2.6.2), άρα από Θεώρημα Wedderburn το $D_{\lambda,K}$ είναι ημιαπλό $S_K(n, r)$ -πρότυπο ($\iff$ KT -πρότυπο), άρα υπάρχει σύνολο I ώστε,

$$D_{\lambda,K} = \bigoplus_{i \in I} D_i, \quad D_i = \text{απλά } S_K(n, r)\text{-πρότυπα } (\iff KT\text{-πρότυπα}) \text{ (ευθύ εσωτερικό άθροισμα)}.$$

Επειδή $\dim_K D_{\lambda,K} < \infty$ τότε το $D_{\lambda,K}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο K -πρότυπο και άρα (άμεσα) πεπερασμένα παραγόμενο $S_K(n, r)$ -πρότυπο, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|I| < \infty$. Από το τελευταίο και τη Πρόταση 5.4.6 πρέπει να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$D_{\lambda,K} \simeq \bigoplus_{i=1}^n F_{\lambda,0}, \text{ Ισομορφισμός } S_K(n, r)\text{-προτύπων } (\iff KT\text{-προτύπων}). \quad (*)$$

Συνεπώς $\Phi_{D_{\lambda,K}} \xrightarrow{\text{Πρόταση 3.4.1}} n\Phi_{F_{\lambda,0}}$. Οπότε,

$$\sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K D_{\lambda,K}^a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = \Phi_{D_{\lambda,K}} = n\Phi_{F_{\lambda,0}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} n \dim_K F_{\lambda,0}^a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$

Συνεπώς, $1 \xrightarrow{\text{Πόρισμα 4.6.1}} \dim_K D_{\lambda,K}^\lambda = n \dim_K F_{\lambda,0}^\lambda \xrightarrow{\text{Θεώρημα 3.5.1 i)}} n$. Άρα από (*) πρέπει $D_{\lambda,K} \simeq F_{\lambda,0}$ και κατά συνέπεια $\Phi_{F_{\lambda,0}} := \Phi_{\lambda,0} = \Phi_{D_{\lambda,K}}$.

- ii) Είδαμε στην απόδειξη του i) ότι $D_{\lambda,K} \simeq F_{\lambda,0}$ (Ισομορφισμός KT -προτύπων), άρα $D_{\lambda,K}$ =irreducible πρότυπο. Συνεπώς από Πρόταση 2.7.5 πρέπει το $D_{\lambda,K}^\circ$ να είναι irreducible KT -πρότυπο, όμως $D_{\lambda,K}^\circ \simeq V_{\lambda,K}$, άρα το $V_{\lambda,K}$ είναι irreducible KT -πρότυπο και έτσι από Πόρισμα 3.5.2 έχουμε,

$$V_{\lambda,K} \simeq V_{\lambda,K}^\circ \simeq D_{\lambda,K} \simeq F_{\lambda,0} \text{ (Ισομορφισμοί } KT\text{-προτύπων } (\iff S_K(n, r)\text{-προτύπων}).$$

□

Σχόλιο. Με βάση το παραπάνω πόρισμα έχουμε ότι

$$\Phi_{\lambda,0} \xrightarrow{\text{Πρόταση 4.6.1}} \sum_{a \in \Lambda(n, r)} |\{i \in I(n, r) \mid i \in a, T_i = \text{standard}\}| x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$

Η παραπάνω περιγραφή του $\Phi_{\lambda,0}$ είναι αρκετά αναλυτική, παρόλα αυτά μία τελευταία πινελιά θα ήταν να είχαμε ένα κλειστό τύπο για τον πληθάρημο $|\{i \in I(n, r) \mid i \in a, T_i = \text{standard}\}|$. Ο τύπος που αναζητάμε είναι γνωστός ως *hook formula* (βλέπε [22, σελ. 2, Theorem 1]). Τέλος, είναι αρκετά ενδιαφέρων το γεγονός ότι ξεκινήσαμε από την μελέτη ενός καθαρά αλγεβρικού προβλήματος που ήταν η μελέτη των irreducible KT -προτύπων της $M_K(n, r)$ και καταλήξαμε σε ένα καθαρά συνδυαστικό πρόβλημα που είναι η *hook formula* (εννοείται στην περίπτωση όπου $chK = 0$).

5.5 Contravariant forms στο $V_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Στη παράγραφο αυτή, στόχος μας είναι η μελέτη των *contravariant forms* του $V_{\lambda,K}$. Συγκεκριμένα, θα ταξινομήσουμε-προσδιορίσουμε όλα τα *contravariant forms* ως προς ένα συγκεκριμένο. Τέλος θα δώσουμε μία εναλλακτική περιγραφή του προτύπου $V_{\lambda,K}^{max}$.

Σχόλιο. Για την μελέτη των *contravariant forms* στο $V_{\lambda,K}$ θα μελετήσουμε ένα ευρύτερο υποπρότυπο, συγκεκριμένα το $E^{\otimes r}\{C(T)\}$.

Παρατήρηση 5.5.1. Έστω $E^{\otimes r}\{C(T)\} := \{x\{C(T)\} \mid x \in E^{\otimes r}\}$, τότε,

- i) Το $E^{\otimes r}\{C(T)\}$ είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο ($\iff$ $K\Gamma$ -υποπρότυπο) του $E^{\otimes r}$.
- ii) $V_{\lambda,K} \leq E^{\otimes r}\{C(T)\}$
- iii) $\langle x\{C(T)\}, y \rangle = \langle x, y\{C(T)\} \rangle$, για κάθε $x, y \in E^{\otimes r}$.

Απόδειξη.

- i) Άμεσο αφού το $E^{\otimes r}$ είναι $(S_K(n, r), KG(r))$ -διπρότυπο (βλέπε Παρατήρηση 2.6.3 ii)).
- ii) Ξέρουμε από Θεώρημα 5.3.1 ότι $V_{\lambda,K} = \langle f_l \rangle = S_K(n, r)f_l$, όπου $f_l = e_l\{C(T)\} \in E^{\otimes r}\{C(T)\}$. Συνεπώς, από i) έπεται ότι $V_{\lambda,K} \leq E^{\otimes r}\{C(T)\}$
- iii) Έστω $x, y \in E^{\otimes r}$, τότε από Υπενθύμιση 5.2.1 έχουμε,

$$\begin{aligned} \langle x\{C(T)\}, y \rangle &= \left\langle \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)x\pi, y \right\rangle = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)\langle x\pi, y \rangle = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)\langle x, y\pi^{-1} \rangle = \\ &= \langle x, \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)y\pi^{-1} \rangle = \langle x, \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi^{-1})y\pi^{-1} \rangle = \langle x, y\{C(T)\} \rangle. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 5.5.1. Έστω η απεικόνιση $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle : E^{\otimes r}\{C(T)\} \times E^{\otimes r}\{C(T)\} \longrightarrow K$, με τύπο:

$$\langle\langle x\{C(T)\}, y\{C(T)\} \rangle\rangle := \langle x, y\{C(T)\} \rangle = \langle x\{C(T)\}, y \rangle.$$

Η $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$ είναι καλά ορισμένη *symmetric contravariant form*.

Απόδειξη.

Η $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$ είναι καλά ορισμένη: Έστω $x_1\{C(T)\} = x_2\{C(T)\}$ και $y_1\{C(T)\} = y_2\{C(T)\}$, τότε από Παρατήρηση 5.5.1 iii) έχουμε,

$$\begin{aligned} \langle\langle x_1\{C(T)\}, y_1\{C(T)\} \rangle\rangle &= \langle x_1, y_1\{C(T)\} \rangle = \langle x_1, y_2\{C(T)\} \rangle = \\ &= \langle x_1\{C(T)\}, y_2 \rangle = \langle x_2\{C(T)\}, y_2 \rangle = \langle\langle x_2\{C(T)\}, y_2\{C(T)\} \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Η $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ είναι contravariant form : Έστω $x, y \in E^{\otimes r}$ και $\xi \in S_K(n, r)$. Εφόσον $E^{\otimes r}$ είναι $(S_K(n, r), KG(r))$ -διπρότυπο και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι contravariant form έχουμε,

$$\langle\langle \xi \cdot (x\{C(T)\}), y\{C(T)\} \rangle\rangle = \langle\langle (\xi \cdot x)\{C(T)\}, y\{C(T)\} \rangle\rangle = \langle \xi \cdot x, y\{C(T)\} \rangle = \langle x, J(\xi) \cdot (y\{C(T)\}) \rangle = \langle x, (J(\xi) \cdot y)\{C(T)\} \rangle = \langle x\{C(T)\}, (J(\xi) \cdot y)\{C(T)\} \rangle = \langle\langle x\{C(T)\}, J(\xi) \cdot (y\{C(T)\}) \rangle\rangle.$$

Η $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ είναι symmetric : Έστω $x, y \in E^{\otimes r}$, επειδή η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^{\otimes r} \times E^{\otimes r} \rightarrow K$ είναι symmetric, έπεται ότι,

$$\langle\langle x\{C(T)\}, y\{C(T)\} \rangle\rangle = \langle x, y\{C(T)\} \rangle = \langle y\{C(T)\}, x \rangle = \langle y, x\{C(T)\} \rangle = \langle\langle y\{C(T)\}, x\{C(T)\} \rangle\rangle.$$

□

Παρατήρηση 5.5.2. (Σύνδεση των contravariant forms $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

$$\langle x, y \rangle = |C(T)| \langle\langle x, y \rangle\rangle, \text{ για κάθε } x, y \in E^{\otimes r}\{C(T)\}.$$

Ιδιαίτερος, αν $chK = 0$ ή $chK = p \nmid |C(T)|$, τότε $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \frac{1}{|C(T)|} \langle x, y \rangle$.

Απόδειξη.

Έστω $x = x_1\{C(T)\}$, $y = y_1\{C(T)\} \in E^{\otimes r}\{C(T)\}$, τότε,

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1\{C(T)\}, y_1\{C(T)\} \rangle = \langle x_1, y_1\{C(T)\}^2 \rangle. (*)$$

Θα δείξουμε ότι $\{C(T)\}^2 = |C(T)|\{C(T)\}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \{C(T)\}^2 &= \{C(T)\} \cdot \{C(T)\} = \left(\sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)\pi \right) \cdot \left(\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)\sigma \right) = \sum_{\pi \in C(T)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\pi)s(\sigma)\pi\sigma = \\ &= \sum_{\pi \in C(T)} \left(\sum_{\sigma \in C(T)} s(\pi\sigma)\pi\sigma \right) \stackrel{\pi \in C(T) \leq G(r)}{=} \sum_{\pi \in C(T)} \left(\sum_{\tau \in C(T)} s(\tau)\tau \right) = \sum_{\pi \in C(T)} \{C(T)\} = |C(T)|\{C(T)\}. \end{aligned}$$

Από (*) έχουμε $\langle x, y \rangle = |C(T)| \langle x_1, y_1\{C(T)\} \rangle = |C(T)| \langle\langle x, y \rangle\rangle$.

□

Πόρισμα 5.5.1. Εφόσον $V_{\lambda, K} \leq E^{\otimes r}\{C(T)\}$, έχουμε τα εξής:

i) Η απεικόνιση $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_{V_{\lambda, K} \times V_{\lambda, K}}$ είναι symmetric contravariant form στο $V_{\lambda, K}$.

ii) $\langle\langle f_l, f_l \rangle\rangle = 1$. Ιδιαίτερος η απεικόνιση $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_{V_{\lambda, K} \times V_{\lambda, K}}$ είναι μη-μηδενική.

Για την αποφυγή μακροσκελών συμβολισμών, αντί να γράφουμε $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_{V_{\lambda, K} \times V_{\lambda, K}}$, θα λέμε απλά, θεωρούμε το contravariant form $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ στο $V_{\lambda, K}$ ή θα γράφουμε $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_{V_{\lambda, K}}$.

Απόδειξη. Το *i*) είναι άμεσο από Πρόταση 5.5.1. Όσο για το *ii*) έχουμε,

$$\langle\langle f_l, f_l \rangle\rangle = \langle\langle e_l\{C(T)\}, e_l\{C(T)\} \rangle\rangle = \langle e_l, e_l\{C(T)\} \rangle = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) \langle e_l, e_{l\pi} \rangle.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι, $l = l\pi \iff \pi = 1$, για κάθε $\pi \in C(T)$. Αυτό γιατί $T_l = \text{standard}$ και (από Λήμμα 4.4.2) $\beta(l) < \beta(l\pi)$, για κάθε $1 \neq \pi \in C(T)$. Συνεπώς, $\langle\langle f_l, f_l \rangle\rangle = \langle e_l, e_l \rangle = 1$. □

Θεώρημα 5.5.1. Έστω $(,)$ ένα contravariant form στο $V_{\lambda, K}$ και θέτουμε $c = (f_l, f_l) \in K$. Τότε,

$$(,) = c\langle\langle , \rangle\rangle.$$

Οπότε κάθε contravariant form $(,)$ στο $V_{\lambda, K}$, διαφέρει κατά μία σταθερά $c \in K$ από την contravariant form $\langle\langle , \rangle\rangle$ στο $V_{\lambda, K}$.

Απόδειξη.

Ισχυρισμός. Για κάθε $x, y \in V_{\lambda, K}$, υπάρχει $k_{x, y} \in K$, ανεξάρτητο της $(,)$, ώστε $(x, y) = k_{x, y}(f_l, f_l)$. (Όταν λέμε ανεξάρτητο, εννοούμε ότι και για κάθε άλλη contravariant form έστω $(,)'$, ισχύει πάλι $(x, y)' = k_{x, y}(f_l, f_l)'$).

Πράγματι, έστω $x, y \in V_{\lambda, K} = \langle f \rangle$ και μία τυχόν contravariant form στο $V_{\lambda, K}$, έστω $(,)$, τότε υπάρχουν $\xi_x, \xi_y \in S_K(n, r)$, ώστε $x = \xi_x f_l$, $y = \xi_y f_l$. Οπότε,

$$(x, y) = (f_l, J(\xi_x)\xi_y f_l) = (f_l, (J(\xi_x)\xi_y)f_l)$$

Θέτουμε $v_{x, y} = J(\xi_x)\xi_y f_l \in V_{\lambda, K}$ και έχουμε $(x, y) = (f_l, v_{x, y})$. Επιπλέον, $V_{\lambda, K} = \bigoplus_{a \in \Lambda(n, r)} V_{\lambda, K}^a$,

άρα υπάρχουν $v_{x, y}^a \in V_{\lambda, K}^a$, ώστε $v_{x, y} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} v_{x, y}^a$. Επίσης, $f_l \in V_{\lambda, K}^\lambda$ (Πρόταση 5.4.3) και άρα $\xi_\lambda f_l = f_l$. Οπότε,

$$\begin{aligned} (x, y) &= (f_l, v_{x, y}) = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (f_l, v_{x, y}^a) = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (\xi_\lambda f_l, v_{x, y}^a) = \\ &= \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (f_l, J(\xi_\lambda)v_{x, y}^a) \xrightarrow{J(\xi_\lambda)=\xi_\lambda} \sum_{a \in \Lambda(n, r)} (f_l, \xi_\lambda v_{x, y}^a) \xrightarrow{\text{Πόρισμα 3.2.1}} (f_l, v_{x, y}^\lambda). \end{aligned}$$

Τώρα, επειδή $v_{x, y}^\lambda \in V_{\lambda, K}^\lambda = K f_l$, πρέπει να υπάρχει $k_{x, y} \in K$, ώστε $v_{x, y}^\lambda = k_{x, y} f_l$. Συνεπώς,

$$(x, y) = (f_l, v_{x, y}^\lambda) = (f_l, k_{x, y} f_l) = k_{x, y}(f_l, f_l).$$

Είναι σαφές από την κατασκευή ότι το $k_{x, y}$ είναι ανεξάρτητο της $(,)$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έστω $(,)$, μία contravariant form στο $V_{\lambda, K}$, τότε από τον ισχυρισμό έχουμε ότι, $(x, y) = k_{x, y}(f_l, f_l)$ και $\langle\langle x, y \rangle\rangle = k_{x, y}\langle\langle f_l, f_l \rangle\rangle = k_{x, y}$. Από τα τελευταία έπεται ότι, $(x, y) = (f_l, f_l)\langle\langle x, y \rangle\rangle$, για κάθε $x, y \in V_{\lambda, K}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.5.2. Κάθε contravariant form $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ στο $V_{\lambda, K}$ είναι symmetric.

Θεώρημα 5.5.2. ([13, σελ. 362 Theorem 3B]). Το radical (ριζικό) του $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V_{\lambda, K}}$, είναι ακριβώς το $V_{\lambda, K}^{max}$, δηλαδή,

$$V_{\lambda, K}^{max} = \{v \in V_{\lambda, K} \mid \langle v, V_{\lambda, K} \rangle = 0\}.$$

Απόδειξη.

Θέτουμε $M = \{v \in V_{\lambda, K} \mid \langle v, V_{\lambda, K} \rangle = 0\}$. Το M είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $V_{\lambda, K}$ άμεσα από το γεγονός ότι η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι contravariant form (η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του που είχαμε για το $V_{\lambda, K}$ ότι είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $E^{\otimes r}$, βλέπε απόδειξη Παρατήρησης 5.1.1 ii). Τώρα έχουμε τα εξής:

$M \leq V_{\lambda, K}^{max}$: Καταρχάς, $M \subseteq V_{\lambda, K}$ αφού $\langle f_l, f_l \rangle = 1$. Επιπλέον, το M είναι $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $V_{\lambda, K}$, οπότε $M \leq V_{\lambda, K}$. Άρα από Πρόταση 5.4.4 έχουμε $M \leq \sum_{N \leq V_{\lambda, K}} N = V_{\lambda, K}^{max}$.

$V_{\lambda, K}^{max} \leq M$: Έστω $x \in V_{\lambda, K}^{max}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $x \in M$, για το λόγο αυτό έστω $y \in V_{\lambda, K} = \langle f_l \rangle$, τότε υπάρχει $\xi_y \in S_K(n, r)$, ώστε $y = \xi_y f_l$. Οπότε,

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \xi_y f_l \rangle = \langle J(\xi_y)x, f_l \rangle.$$

Όμως, $J(\xi_y)x \in V_{\lambda, K}^{max} \subseteq \sum_{a \neq \lambda} V_{\lambda, K}^a$ (βλέπε Πρόταση 5.4.4 ή Παρατήρηση 5.4.1), δηλαδή υπάρχουν $x^a \in V_{\lambda, K}^a$ ώστε $J(\xi_y)x = \sum_{a \neq \lambda} x^a$ και έτσι,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{a \neq \lambda} \langle x^a, f_l \rangle \stackrel{f_l \in V_{\lambda, K}^\lambda}{=} \sum_{a \neq \lambda} \langle x^a, \xi_\lambda f_l \rangle = \\ &= \sum_{a \neq \lambda} \langle J(\xi_\lambda)x^a, f_l \rangle = \sum_{a \neq \lambda} \langle \xi_\lambda x^a, f_l \rangle \stackrel{\text{Πόρισμα 3.2.1}}{=} 0. \end{aligned}$$

Το $y \in V_{\lambda, K}$ ήταν τυχόν, άρα $\langle x, V_{\lambda, K} \rangle = 0 \iff x \in M$.

□

Σχόλιο. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την μελέτη του contravariant form $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V_{\lambda, K}}$ και του $V_{\lambda, K}^{max}$ στην περίπτωση όπου $\lambda = (r, 0, \dots, 0)$.

Παράδειγμα 5.5.1. Έστω $\lambda = (\lambda, 0, \dots, 0)$, τότε $V_{\lambda, K} = V_{r, K}$ (βλέπε Παράδειγμα 5.2.1) και ισχύουν τα παρακάτω:

i) $E^{\otimes r}\{C(T)\} = E^{\otimes r}$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Ιδιαίτερος $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V_{r, K}} = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{V_{r, K}}$.

ii) Έστω $\{v_a = \sum_{i \in a} e_i \mid a \in \Lambda(n, r)\}$ η K -βάση του $V_{r,K}$, επίσης για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ ορίζουμε $(r, a) = \frac{r!}{a_1! \cdots a_n!}$. Τότε $(r, a) \in \mathbb{N}$ και ισχύει:

$$\langle v_a, v_b \rangle = \begin{cases} (r, a) \cdot 1_K & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}, \text{ για κάθε } a, b \in \Lambda(n, r).$$

iii) Έστω $chK = p > 0$, τότε θα γράφουμε $V_{\lambda,K} = V_{r,p}$, $V_{\lambda,K}^{max} = V_{r,p}^{max}$ και ισχύουν τα παρακάτω:

a) $v_a \in V_{r,p}^{max} \iff p \mid (r, a)$. Ιδιαίτερώς, $V_{r,p}^{max} = \{v \in V_{r,p} \mid \langle v, V_{r,p} \rangle = 0\}$ και το σύνολο $\{v_a \mid p \mid (r, a)\}$ αποτελεί K -βάση του $V_{r,p}^{max}$.

b) Το *irreducible* πρότυπο $V_{r,p}/V_{r,p}^{max}$ έχει K -βάση το $\{v_a + V_{r,p}^{max} \mid a \in \Lambda(n, r), p \nmid (r, a)\}$.

Ιδιαίτερώς $(V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a = K(v_a + V_{r,p}^{max})$ και $\dim_K(V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a = \begin{cases} 1 & p \nmid (r, a) \\ 0 & p \mid (r, a) \end{cases}$, για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$.

c) $\Phi_{V_{r,p}/V_{r,p}^{max}} = \Phi_{F_{r,p}} = \sum_{a: p \nmid (r,a)} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ και $\Phi_{V_{r,p}^{max}} = \sum_{a: p \mid (r,a)} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$.

iv) Αν $chK = 0$, τότε θα γράφουμε $V_{\lambda,K} = V_{r,0}$, $V_{\lambda,K}^{max} = V_{r,0}^{max}$ και ισχύει $V_{r,0} = \text{irreducible}$ με $V_{r,0}^{max} = 0$

Απόδειξη.

i) Εφόσον $\lambda = (r, 0, \dots, 0)$, τότε $T^\lambda = (x(1, 1), \dots, x(1, r)) = \text{γραμμή και άρα } C(T) = 1$. Από το τελευταίο, έπεται άμεσα το ζητούμενο.

ii) Καταρχάς, ξέρουμε από Παράδειγμα 5.2.1 ότι το σύνολο $\{v_a = \sum_{i \in a} e_i \mid a \in \Lambda(n, r)\}$ είναι όντως K -βάση του $V_{r,K}$. Στη συνέχεια, έστω $a, b \in \Lambda(n, r)$, τότε,

$$\langle v_a, v_b \rangle = \left\langle \sum_{i \in a} e_i, \sum_{j \in b} e_j \right\rangle = \sum_{i \in a} \sum_{j \in b} \langle e_i, e_j \rangle.$$

Αν $a \neq b$, τότε $i \neq j$, για κάθε $i \in a, j \in b$. Επομένως $\langle v_a, v_b \rangle = 0$, για $a \neq b$. Από την άλλη, αν $a = b$, σταθεροποιούμε το $h \in I(n, r)$, με $h = (h_1, \dots, h_r) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{a_n})$. Άμεσα

βλέπουμε ότι $h \in a$ και έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned} \langle v_a, v_b \rangle &= \sum_{i \in [h]_{G(r)}} \sum_{j \in [h]_{G(r)}} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in [h]_{G(r)}} \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i \in [h]_{G(r)}} 1_K = \\ &|[h]| \cdot 1_K = [G(r) : \text{Stab}_{G(r)}(h)] \cdot 1_K = \frac{r!}{a_1! \cdots a_n!} \cdot 1_K = (r, a) \cdot 1_K \end{aligned}$$

Μένει να αιτιολογήσουμε την σχέση $|Stab_{G(r)}(h)| = a_1! \cdot \dots \cdot a_n!$. Πράγματι,

$$Stab_{G(r)}(h) = \{\sigma \in G(r) \mid h\sigma = h\} = \{\sigma \in G(r) \mid (h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(r)}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{a_n})\}.$$

Με βάση το τελευταίο, αν $\sigma \in Stab_{G(r)}(h)$ τότε έχουμε,

Πιθανές τιμές του $\sigma(1)$: $\{1, \dots, a_1\}$ (a_1 το πλήθος).

Πιθανές τιμές του $\sigma(2)$: $\{1, \dots, a_1\} \setminus \{\sigma(1)\}$ ($a_1 - 1$ το πλήθος).

$\vdots$

Πιθανές τιμές του $\sigma(a_1)$: $\{1, \dots, a_1\} \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(a_1 - 1)\}$ (1 το πλήθος).

Άρα για τα $\sigma(1), \dots, \sigma(a_1)$ έχουμε $a_1!$ επιλογές (σημείωση, αν $a_1 = 0$, τότε $a_1! = 1$). Συνεχίζουμε,

Πιθανές τιμές του $\sigma(a_1 + 1)$: $\{a_1 + 1, \dots, a_1 + a_2\}$ (a_2 το πλήθος).

Πιθανές τιμές του $\sigma(a_1 + 2)$: $\{a_1 + 1, \dots, a_1 + a_2\} \setminus \{\sigma(a_1 + 1)\}$ ($a_2 - 1$ το πλήθος).

$\vdots$

Πιθανές τιμές του $\sigma(a_1 + a_2)$: $\{a_1 + 1, \dots, a_1 + a_2\} \setminus \{\sigma(a_1 + 1), \dots, \sigma(a_1 + (a_2 - 1))\}$ (1 το πλήθος).

Άρα για τα $\sigma(a_1 + 1), \dots, \sigma(a_1 + a_2)$ έχουμε $a_2!$ επιλογές (σημείωση, αν $a_2 = 0$, τότε $a_2! = 1$).

Συνεχίζοντας έτσι, τελικά έχουμε $a_1! \cdot \dots \cdot a_n!$ επιλογές για την σ .

iii) α) Επειδή το $\{v_a\}_{a \in \Lambda(n,r)}$ είναι K-βάση του $V_{r,p}$, μπορούμε να γράψουμε,

$$\begin{aligned} V_{r,p}^{max} &\stackrel{\text{Θεώρημα 5.5.2}}{=} \{v \in V_{r,p} \mid \langle \langle v, V_{r,p} \rangle \rangle = 0\} \stackrel{i)}{=} \{v \in V_{r,p} \mid \langle v, V_{r,p} \rangle = 0\} = \\ &\{v \in V_{r,p} \mid \langle v, v_a \rangle = 0, \text{ για κάθε } a \in \Lambda(n,r)\} \end{aligned}$$

Έστω λοιπόν $b \in \Lambda(n,r)$, τότε,

$$\begin{aligned} v_b \in V_{r,p}^{max} &\iff \langle v_b, v_a \rangle = 0, \text{ για κάθε } a \in \Lambda(n,r) \stackrel{ii)}{\iff} \\ \langle v_b, v_b \rangle &= 0 \iff (r,b) \cdot 1_K = 0 \stackrel{chK=p}{\iff} p \mid (r,b). \end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\{v_a \mid p \mid (r,a)\}$ αποτελεί K-βάση του $V_{r,p}^{max}$. Από ii) (ή Παράδειγμα 5.2.1) αρκεί να δείξουμε ότι $V_{r,p}^{max} = \text{span}_K \{v_a \mid p \mid (r,a)\}$. Ο εγκλεισμός " $\supseteq$ " είναι σαφές από αυτά που δείξαμε πριν. Όσο για τον εγκλεισμό " $\subseteq$ ", έστω $x \in V_{r,p}^{max}$, τότε υπάρχουν $\{k_a\}_{a \in \Lambda(n,r)} \subseteq K$, ώστε $x = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} k_a v_a$. Αν δείξουμε ότι $k_b = 0$, για κάθε $b \in \Lambda(n,r)$ με $p \nmid (r,b)$, τότε $x = \sum_{p \mid (r,a)} k_a v_a$ και τελειώσαμε. Πράγματι, έστω $b \in \Lambda(n,r)$ με $p \nmid (r,b)$, τότε,

$$0 \stackrel{x \in V_{r,p}^{max}}{=} \langle x, v_b \rangle = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} k_a \langle v_a, v_b \rangle = k_b \langle v_b, v_b \rangle = k_b (r,b) \cdot 1_K,$$

συνεπώς, $k_b (r,b) \cdot 1_K = 0$, όμως $p \nmid (r,b)$ και $chK = p$, άρα πρέπει $k_b = 0$.

b) Θέτουμε $B = \{a \in \Lambda(n, r) \mid p \nmid (r, a)\}$ και από ii) έχουμε ότι,

$$V_{r,p}/V_{r,p}^{max} = \text{span}_K\{v_a + V_{r,p}^{max} \mid a \in \Lambda(n, r)\} \xrightarrow{iii)a)} \text{span}_K\{v_a + V_{r,p}^{max} \mid a \in \Lambda(n, r), p \nmid (r, a)\}.$$

Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\{v_a + V_{r,p}^{max}\}_{a \in B}$ είναι K-γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, έστω $\{k_a\}_{a \in B} \subseteq K$, με $\sum_{a \in B} k_a(v_a + V_{r,p}^{max}) = 0 \iff \sum_{a \in B} k_a v_a \in V_{r,p}^{max}$. Τότε από iii)a) έχουμε,

$$\langle \sum_{a \in B} k_a v_a, v_b \rangle = 0, \forall b \in B \iff \sum_{a \in B} k_a \langle v_a, v_b \rangle = 0, \forall b \in B \xleftrightarrow{ii)} k_b(r, b) \cdot 1_k = 0, \forall b \in B$$

Άρα $k_b(r, b) \cdot 1_k = 0$, για κάθε $b \in \Lambda(n, r)$ με $p \nmid (r, b)$, όμως $chK = p$ και έτσι πρέπει $k_b = 0$, για κάθε $b \in B$. Μένει να αποδειχθεί το ιδιαιτέρως. Πράγματι,

$K(v_a + V_{r,p}^{max}) \subseteq (V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a$: Αρχεί να δείξουμε ότι $v_a + V_{r,p}^{max} \in (V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a$. Πράγματι,

$$\xi_a(v_a + V_{r,p}^{max}) = \xi_a v_a + V_{r,p}^{max} \xrightarrow{\text{Παράδειγμα 5.2.1 iii)}} v_a + V_{r,p}^{max}.$$

Άρα $v_a + V_{r,p}^{max} = \xi_a(v_a + V_{r,p}^{max}) \in (V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a$. Συνεπώς, $K(v_a + V_{r,p}^{max}) \subseteq (V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a$.

$(V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a \subseteq K(v_a + V_{r,p}^{max})$: Έστω $x \in (V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a$, τότε $x = \sum_{b: p \nmid (r, b)} k_b(v_b + V_{r,p}^{max})$,

για κάποια $k_a \in K$ και $\xi_a x = x$, οπότε,

$$x = \xi_a x = \sum_{b: p \nmid (r, b)} k_b(\xi_a v_b + V_{r,p}^{max}) \xrightarrow{\text{Παράδειγμα 5.2.1 iii)}} k_a(v_a + V_{r,p}^{max}) \in K(v_a + V_{r,p}^{max}).$$

Συνεπώς $(V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a \subseteq K(v_a + V_{r,p}^{max})$

c) Καταρχάς $\Phi_{V_{r,p}/V_{r,p}^{max}} = \Phi_{F_{r,p}}$, άμεσα από Πρόταση 5.4.5. Επιπλέον,

$$\Phi_{V_{r,p}/V_{r,p}^{max}} = \sum_{a \in \Lambda(n, r)} \dim_K(V_{r,p}/V_{r,p}^{max})^a x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \xrightarrow{b)} \sum_{a: p \nmid (r, a)} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$$

και

$$\begin{aligned} \Phi_{V_{r,p}^{max}} &\xrightarrow{\text{Πρόταση 3.4.1 ii)b)}} \Phi_{V_{r,p}} - \Phi_{V_{r,p}/V_{r,p}^{max}} \xrightarrow{\text{Παράδειγμα 5.2.1 iii)}} \\ &\sum_{a \in \Lambda(n, r)} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} - \sum_{a: p \nmid (r, a)} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} = \sum_{a: p \mid (r, a)} x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}. \end{aligned}$$

iv) Άμεσα από Πρόταση 5.1.1 iii).

□

5.6 $\mathbb{Z}$ -forms στο $V_{\lambda,K}$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Ως τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου 5, θέτουμε σαν στόχο μας την μελέτη των $\mathbb{Z}$ -forms του $V_{\lambda,K}$. Για την ακρίβεια, θα δώσουμε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα από $\mathbb{Z}$ -forms του $V_{\lambda,K}$ και στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε άλλο $\mathbb{Z}$ -form βρίσκεται ανάμεσα σε αυτά.

Ορισμός 5.6.1. *i) (Υπενθύμιση).*

$$a) V_{\lambda, \mathbb{Q}} = \{x \in E_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \mid \langle x, N_{\mathbb{Q}} \rangle = 0\}, \text{ όπου } N_{\mathbb{Q}} = \ker \varphi_{\mathbb{Q}}.$$

$$b) E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{e_{i, \mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}. \text{ Μάλιστα το } E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \text{ είναι } \mathbb{Z}\text{-form του } E_{\mathbb{Q}}^{\otimes r} \text{ (βλέπε Παράδειγμα 2.6.1)}.$$

$$ii) V_{\lambda, \mathbb{Z}} := E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}}.$$

Παράδειγμα 5.6.1. *i) Το $V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ έχει $\mathbb{Z}$ -βάση το $B := \{b_{i, \mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\}$. Ιδιαίτέρως, $V_{\lambda, \mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{b_{i, \mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r), T_i = \text{standard}\} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{b_{i, \mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}$.*

ii) Το $V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$.

iii) $V_{\lambda, \mathbb{Z}} = S_{\mathbb{Z}}(n, r)_{fl}$, δηλαδή το $V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ είναι κυκλικό $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ -πρότυπο.

Για συντομία θα γράφουμε $b_{i, \mathbb{Q}} = b_i$.

Απόδειξη.

i) Ξέρουμε από Θεώρημα 5.3.1, ότι το σύνολο B αποτελεί $\mathbb{Q}$ -βάση του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$, άρα (επειδή $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$) το B είναι $\mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητο. Οπότε μένει να δειχθεί $\text{span}_{\mathbb{Z}} B = V_{\lambda, \mathbb{Z}}$.

$\text{span}_{\mathbb{Z}} B \subseteq V_{\lambda, \mathbb{Z}}$: Αρκεί να δείξουμε $B \subseteq V_{\lambda, \mathbb{Z}}$. Πράγματι, αν $b_{i, \mathbb{Q}} \in B$, τότε,

$$b_{i, \mathbb{Q}} = \xi_{i, l} fl = \xi_{i, l} \cdot \left(\sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) e_{l\pi} \right) = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) (\xi_{i, l} e_{l\pi}) \in E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}} = V_{\lambda, \mathbb{Z}}.$$

Το τελευταίο ανήκει στο $E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r}$, γιατί το $E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form.

$V_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq \text{span}_{\mathbb{Z}} B$: Θέτουμε $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$ και έστω $x \in V_{\lambda, \mathbb{Z}} = E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}}$, τότε από Θεώρημα 5.3.1 υπάρχουν $\{q_i\}_{i \in I^*} \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε $x = \sum_{i \in I^*} q_i b_{i, \mathbb{Q}}$. Αν δείξουμε $\{q_i\}_{i \in I^*} \subseteq \mathbb{Z}$, τότε $x \in \text{span}_{\mathbb{Z}} B$ και τελειώσαμε. Καταρχάς παρατηρούμε ότι,

$$\sum_{i \in I^*} q_i \Omega(i, j) = \sum_{i \in I^*} q_i (b_{i, \mathbb{Q}}, (T_l : T_j)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\text{Ορισμός 5.1.2}} \sum_{i \in I^*} q_i \langle b_{i, \mathbb{Q}}, e_{j, \mathbb{Q}} \rangle = \langle x, e_j \rangle, \text{ για κάθε } j \in I^*.$$

Επιπλέον, $\langle x, e_j \rangle \in \mathbb{Z}$ (αυτό γιατί $x \in V_{\lambda, \mathbb{Z}} = E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}}$, οπότε $x = \sum_{i \in I(n, r)} n_i e_i$ για κάποια $\{n_i\}_{i \in I(n, r)} \subseteq \mathbb{Z}$ και $\langle x, e_j \rangle = \sum_{i \in I(n, r)} n_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in I(n, r)} n_i \delta_{ij} \in \mathbb{Z}$). Συνεπώς, από Πρόταση 5.3.2, έχουμε,

$$\sum_{i \geq j} q_i \Omega(i, j) = \sum_{i \in I^*} q_i \Omega(i, j) \in \mathbb{Z}, \text{ για κάθε } j \in I^*. (*)$$

Από το τελευταίο και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\Omega(i, j) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $i, j \in I^*$ (βλέπε Πρόταση 5.3.2), θα δείξουμε το ζητούμενο. Πράγματι, έστω $j_1 := \max I^*$, τότε από (*) πρέπει $\mathbb{Z} \ni \sum_{i \geq j_1} q_i \Omega(i, j_1) = q_{j_1} + \sum_{i > j_1} q_i \Omega(i, j_1) = q_{j_1}$. Στη συνέχεια, έστω $j_2 := \max(I^* \setminus \{j_1\})$, τότε $\mathbb{Z} \ni q_{j_2} + \sum_{i > j_2} q_i \Omega(i, j_2) = q_{j_2} + q_{j_1} \Omega(j_1, j_2)$, όμως $q_{j_1}, \Omega(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}$, άρα $q_{j_2} \in \mathbb{Z}$. Συνεχίζοντας έτσι (π.χ. $j_3 := \max(I^* \setminus \{j_1, j_2\})$, ...), καταλήγουμε ότι $q_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in I^*$.

Μένει να δείξουμε ότι $V_{\lambda, \mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{b_{i, \mathbb{Q}} \mid i \in I(n, r)\}$. Ο εγκλεισμός " $\subseteq$ " είναι σαφές. Όσο για το αντίστροφο, για κάθε $i \in I(n, r)$, είδαμε πάνω ότι $b_{i, \mathbb{Q}} = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi)(\xi_{i, l} e_{l\pi}) \in E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}} = V_{\lambda, \mathbb{Z}}$, δηλαδή έπεται και ο " $\supseteq$ ".

- ii) Από i), αρκεί ναδειχθεί ότι το $V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ είναι κλειστό από την δράση της $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$, αυτό όμως είναι άμεσο καθώς $V_{\lambda, \mathbb{Z}} = E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ και τα $E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r}, V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ είναι κλειστά κάτω από την δράση της $S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ (το $E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r}$ ως $\mathbb{Z}$ -form του $E_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ και το $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ ως $S_{\mathbb{Q}}(n, r)$ -πρότυπο με $S_{\mathbb{Z}}(n, r) \subseteq S_{\mathbb{Q}}(n, r)$).
- iii) $V_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq S_{\mathbb{Z}}(n, r)f_l$: Έστω $x \in V_{\lambda, \mathbb{Z}}$, τότε (από i)) υπάρχουν $\{n_i\}_{i \in I(n, r)} \subseteq \mathbb{Z}$ ώστε,

$$x = \sum_{i \in I(n, r)} n_i b_{i, \mathbb{Q}} = \sum_{i \in I(n, r)} n_i \xi_{i, l} f_l = \left(\sum_{i \in I(n, r)} n_i \xi_{i, l} \right) f_l \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)f_l.$$

$S_{\mathbb{Z}}(n, r)f_l \subseteq V_{\lambda, \mathbb{Z}}$: Καταρχάς, $f_l = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) e_{l\pi} \in E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r}$ και $f_l \in V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ (από Θεώρημα 5.3.1).

Άρα $f_l \in E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}} = V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ και κατ' συνέπεια $S_{\mathbb{Z}}(n, r)f_l \subseteq S_{\mathbb{Z}}(n, r)V_{\lambda, \mathbb{Z}} \stackrel{ii)}{=} V_{\lambda, \mathbb{Z}}$.

□

Σχόλιο. Πρίν προχωρήσουμε στο επόμενο παράδειγμα βασικού $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$, θα αναφέρουμε (για λόγους πληρότητας) μια σχεδόν άμεση παρατήρηση που θα χρησιμεύσει στη κατασκευή του.

Παρατήρηση 5.6.1. i) Έστω $V, W \in M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ και $\phi : V \rightarrow W$ ισομορφισμός στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$. Ένα $V_{\mathbb{Z}} \subseteq V$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του V αν και μόνον αν το $\phi(V_{\mathbb{Z}})$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του W .

ii) Έστω $V \in M_K(n, r)$, $V_{\mathbb{Z}}$ ένα $\mathbb{Z}$ -form του V και $0 \neq q \in \mathbb{Q}$, τότε και το $qV_{\mathbb{Z}}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form.

Απόδειξη.

- i) Έστω $\{v_b \mid b \in B\}$ η $\mathbb{Q}$ -βάση του V ώστε $V_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_b \mid b \in B\}$. Τότε το $\{\phi(v_b) \mid b \in B\}$ είναι $\mathbb{Q}$ -βάση του W με $\phi(V_{\mathbb{Z}}) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\phi(v_b) \mid b \in B\}$. Επιπλέον επειδή η ϕ είναι ομομορφισμός στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ ($\iff$ στην $\text{mod}(S_{\mathbb{Q}}(n, r))$) και $S_{\mathbb{Z}}(n, r) \subseteq S_{\mathbb{Q}}(n, r)$, έχουμε,

$$S_{\mathbb{Z}}(n, r)\phi(V_{\mathbb{Z}}) = \phi(S_{\mathbb{Z}}(n, r)V_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{V_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\text{-form}} \phi(V_{\mathbb{Z}}).$$

Όσο για το αντίστροφο, αν το $\phi(V_{\mathbb{Z}})$ είναι $\mathbb{Z}$ -form, τότε με βάση αυτό που δείξαμε στο ευθύ, θα πρέπει το $\phi^{-1}(\phi(V_{\mathbb{Z}})) = V_{\mathbb{Z}}$ να είναι $\mathbb{Z}$ -form του V .

- ii) Έστω $\{v_b \mid b \in B\}$ η $\mathbb{Q}$ -βάση του V ώστε $V_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{v_b \mid b \in B\}$. Τότε το $\{qv_b \mid b \in B\}$ είναι $\mathbb{Q}$ -βάση του V ώστε $qV_{\mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{qv_b \mid b \in B\}$. Επιπλέον,

$$S_{\mathbb{Z}}(n, r)(qV_{\mathbb{Z}}) = q(S_{\mathbb{Z}}(n, r)V_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{V_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\text{-form}} qV_{\mathbb{Z}}.$$

Άρα το $qV_{\mathbb{Z}}$ είναι $\mathbb{Z}$ -form .

□

Παράδειγμα 5.6.2. i) (Υπενθύμιση) Ορίζεται ισομορφισμός στην $M_{\mathbb{Q}}(n, r)$ έστω

$$\varphi : V_{\lambda, \mathbb{Q}} \longrightarrow D_{\lambda, \mathbb{Q}}, \quad \mu \in \varphi(f_l) = |C(T)|(T_l : T_l). \quad (\text{βλέπε Πρόταση 5.4.2}).$$

- ii) Έστω $D_{\lambda, \mathbb{Z}} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(T_l : T_l) \mid l \in I(n, r)\}$ το γνωστό $\mathbb{Z}$ -form του $D_{\lambda, \mathbb{Q}}$ (Πρόταση 4.7.1). Τότε το $X_{\lambda, \mathbb{Z}} := \varphi^{-1}(|C(T)|D_{\lambda, \mathbb{Z}})$ είναι $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$.

Απόδειξη.

Το i) το ξέρουμε από Πρόταση 5.4.2 και το ii) έπεται άμεσα από Παρατήρηση 5.6.1.

□

Παρατήρηση 5.6.2. $V_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda} = X_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda} = \mathbb{Z}f_l$.

Απόδειξη.

$V_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda} = \mathbb{Z}f_l$: Καταρχάς $f_l \in E_{\mathbb{Z}}^{\otimes r} \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}} = V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ και $f_l \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.3}} b_l = \xi_{l, l} f_l = \xi_{\lambda} f_l \in V_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda}$. Άρα $\mathbb{Z}f_l \subseteq V_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda}$. Αντίστροφα, αν $x \in V_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda} \subseteq V_{\lambda, \mathbb{Z}}$, τότε $\xi_{\lambda} x = x$ και (από Παράδειγμα 5.6.1) $x = \sum_{i \in I^*} n_i b_{i, \mathbb{Q}}$, όπου $n_i \in \mathbb{Z}$ και $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$. Συνεπώς,

$$x = \xi_{\lambda} x = \xi_{\lambda} \left(\sum_{i \in I^*} n_i b_{i, \mathbb{Q}} \right) = \left(\sum_{i \in I^*} n_i \xi_{\lambda} b_{i, \mathbb{Q}} \right) \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.1}} \sum_{i \in I^*, i \in \lambda} n_i b_{i, \mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 4.6.1}}$$

$$n_l b_{l, \mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.3}} n_l f_l \in \mathbb{Z}f_l$$

$X_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda} = \mathbb{Z}f_l$: Πράγματι,

$$X_{\lambda, \mathbb{Z}}^{\lambda} = \xi_{\lambda} \varphi^{-1}(|C(T)|D_{\lambda, \mathbb{Z}}) = \varphi^{-1}(|C(T)|\xi_{\lambda} D_{\lambda, \mathbb{Z}}) \xrightarrow{\text{Πρόταση 4.7.1}}$$

$$\varphi^{-1}(|C(T)|\mathbb{Z}(T_l : T_l)) = \mathbb{Z} \varphi^{-1}(|C(T)|(T_l : T_l)) \xrightarrow{\text{Πρόταση 5.4.2}} \mathbb{Z}f_l.$$

□

Σχόλιο. Η παραπάνω παρατήρηση δεν είναι τυχαία, εν γένη ισχύει κάτι γενικότερο όπως θα δούμε παρακάτω.

Παρατήρηση 5.6.3. (Γενικά). Έστω L ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$, τότε,

i) (Υπενθύμιση). $L^\lambda = L \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda$ και $\dim_{\mathbb{Z}} L^\lambda = \dim_{\mathbb{Q}} V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda = 1$.

ii) Υπάρχει $0 \neq y \in \mathbb{Q}$ ώστε $L^\lambda = \mathbb{Z}(yf_l)$. Ιδιαίτερώς, το $y^{-1}L$ είναι $\mathbb{Z}$ -form με $(y^{-1}L)^\lambda = \mathbb{Z}f_l$.

Απόδειξη.

i) Άμεσο από Παρατήρηση 3.3.4 i) και Παρατήρηση 3.3.5 ii).

ii) Ξέρουμε από Πρόταση 5.4.3 ότι $V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda = \mathbb{Q}f_l$, οπότε $\dim_{\mathbb{Z}} L^\lambda \stackrel{i)}{=} \dim_{\mathbb{Q}} V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda = 1$. Συνεπώς, υπάρχει $a \in L^\lambda$ ώστε $L^\lambda = \mathbb{Z}a$. Όμως $L^\lambda = L \cap V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda$, άρα $a \in V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda = \mathbb{Q}f_l$ και έτσι πρέπει να υπάρχει $0 \neq y \in \mathbb{Q}$ ώστε $a = yf_l$. Ιδιαίτερώς $L^\lambda = \mathbb{Z}(yf_l)$. Όσο για το τελευταίο σκέλος, το $y^{-1}L$ είναι $\mathbb{Z}$ -form άμεσα από Παρατήρηση 5.6.1 και επιπλέον,

$$(y^{-1}L)^\lambda = \xi_\lambda(y^{-1}L) = y^{-1}\xi_\lambda L = y^{-1}\mathbb{Z}(yf_l) = \mathbb{Z}f_l.$$

□

Σχόλιο. Η παραπάνω παρατήρηση επί της ουσίας μας λέει ότι η διαδικασία απαλοιφής του y από τον γεννήτορα f_l δεν μας χάνει ουσιώδη πληροφορία. Οπότε θα μπορούσε κανείς να μελετήσει τα $\mathbb{Z}$ -forms του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ έστω L με την ιδιότητα $L^\lambda = \mathbb{Z}f_l$. Συνεχίζοντας τώρα, παρακάτω θα δούμε πως συνδέονται τα $\mathbb{Z}$ -forms $X_{\lambda, \mathbb{Z}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ και ως εφαρμογή αυτού (αλλά και όσων είπαμε ως τώρα) θα πάρουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου.

Πρόταση 5.6.1. Έστω $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ η γνωστή symmetric contravariant form στο $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ (βλέπε Πρόγραμμα 5.5.1) τότε,

$$X_{\lambda, \mathbb{Z}} = \{y \in V_{\lambda, \mathbb{Q}} \mid \langle \langle y, V_{\lambda, \mathbb{Z}} \rangle \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

Λήμμα 5.6.1. Έστω L ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ με $L^\lambda = \mathbb{Z}f_l$. Τότε $L \subseteq \{y \in V_{\lambda, \mathbb{Q}} \mid \langle \langle y, V_{\lambda, \mathbb{Z}} \rangle \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$.

Απόδειξη. (Λήμματος).

Έστω $x \in L$ και $v \in V_{\lambda, \mathbb{Z}}$. Τότε (επειδή $V_{\lambda, \mathbb{Z}} = S_{\mathbb{Z}}(n, r)f_l$) υπάρχει $\xi \in S_{\mathbb{Z}}(n, r)$ ώστε $v = \xi f_l$, οπότε $\langle \langle x, v \rangle \rangle = \langle \langle J(\xi)x, f_l \rangle \rangle$. Τώρα, επειδή L είναι $\mathbb{Z}$ -form και $J(S_{\mathbb{Z}}(n, r)) = S_{\mathbb{Z}}(n, r)$, έπεται

ότι $J(\xi)x \in L$, άρα (επειδή $L = \bigoplus_{a \in \Lambda(n,r)} L^a$ (βλέπε Παρατήρηση 3.3.4)) υπάρχουν $x^a \in L^a$, ώστε

$$J(\xi)x = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} x^a. \text{ Συνεπώς,}$$

$$\begin{aligned} \langle \langle x, v \rangle \rangle &= \langle \langle J(\xi)x, f_l \rangle \rangle = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \langle \langle x^a, f_l \rangle \rangle \xrightarrow{f_l \in V_{\lambda, \mathbb{Q}}^\lambda, \text{ (Πρόταση 5.4.3)}} \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \langle \langle x^a, \xi_\lambda f_l \rangle \rangle = \\ &= \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \langle \langle J(\xi_\lambda)x^a, f_l \rangle \rangle = \sum_{a \in \Lambda(n,r)} \langle \langle \xi_\lambda x^a, f_l \rangle \rangle \xrightarrow{\text{Πόρισμα 3.2.1}} \langle \langle x^\lambda, f_l \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Αφού $x^\lambda \in L^\lambda = \mathbb{Z}f_l$, τότε υπάρχει n_λ ώστε $x^\lambda = n_\lambda f_l$ και

$$\langle \langle x, v \rangle \rangle = \langle \langle n_\lambda f_l, f_l \rangle \rangle \xrightarrow{\langle \langle f_l, f_l \rangle \rangle = 1 \text{ (Πόρισμα 5.5.1)}} n_\lambda \in \mathbb{Z}.$$

Το $v \in V_{\lambda, \mathbb{Z}}$ ήταν τυχόν και άρα $\langle \langle x, V_{\lambda, \mathbb{Z}} \rangle \rangle \subseteq \mathbb{Z}$.

□

Απόδειξη. (Πρότασης 5.6.1)

Ο εγκλεισμός " $\subseteq$ " είναι άμεσος από το Λήμμα 5.6.1 καθώς $X_{\lambda, \mathbb{Z}}^\lambda = \mathbb{Z}f_l$ (βλέπε Παρατήρηση 5.6.2). Θέτουμε $Y_{\lambda, \mathbb{Z}} = \{y \in V_{\lambda, \mathbb{Q}} \mid \langle \langle y, V_{\lambda, \mathbb{Z}} \rangle \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$ και μένει να δειχθεί ότι $Y_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq X_{\lambda, \mathbb{Z}}$. Πράγματι, έστω $z \in Y_{\lambda, \mathbb{Z}}$, θεωρούμε την γνωστή απεικόνιση $\varphi : V_{\lambda, \mathbb{Q}} \rightarrow D_{\lambda, \mathbb{Q}}$ (Πρόταση 5.4.2) και από Θεώρημα 4.5.2 υπάρχουν $\{q_j\}_{j \in I^*} \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε $\frac{1}{|C(T)|} \varphi(z) = \sum_{j \in I^*} q_j (T_l : T_j)$ (όπου $I^* = \{i \in I(n, r) \mid T_i = \text{standard}\}$).

Συνεπώς,

$$\varphi(z) = \sum_{j \in I^*} q_j |C(T)| (T_l : T_j), \quad q_j \in \mathbb{Q}. (*)$$

Συνεχίζοντας, εφόσον (από Παράδειγμα 5.6.1) $\{b_i\}_{i \in I^*} \subseteq V_{\lambda, \mathbb{Z}}$, τότε $\langle \langle z, b_i \rangle \rangle \in \mathbb{Z}$, για κάθε $i \in I^*$ (αφού $z \in Y_{\lambda, \mathbb{Z}}$). Όμως,

$$\begin{aligned} \langle \langle z, b_i \rangle \rangle &= \langle \langle b_i, z \rangle \rangle \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 5.5.2}} \frac{1}{|C(T)|} \langle b_i, z \rangle = \frac{1}{|C(T)|} \langle b_i, \varphi^{-1}(\sum_{j \in I^*} q_j |C(T)| (T_l : T_j)) \rangle = \\ &= \sum_{j \in I^*} q_j \langle b_i, \varphi^{-1}((T_l : T_j)) \rangle \xrightarrow{\text{Ορισμός 5.1.2}} \sum_{j \in I^*} q_j (b_i, (T_l : T_j)) = \sum_{j \in I^*} q_j \Omega(i, j) \end{aligned}$$

άρα $\sum_{j \in I^*} q_j \Omega(i, j) \in \mathbb{Z}$, για κάθε $i \in I^*$. Συνεπώς, από Πρόταση 5.3.2, έχουμε,

$$\sum_{j \leq i} q_j \Omega(i, j) = \sum_{j \in I^*} q_j \Omega(i, j) \in \mathbb{Z}, \text{ για κάθε } i \in I^*. (**)$$

Από το τελευταίο και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\Omega(i, j) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $i, j \in I^*$ (βλέπε Πρόταση 5.3.2), θα δείξουμε ότι $\{q_j\}_{j \in I^*} \subseteq \mathbb{Z}$. Πράγματι, έστω $i_1 := \min I^*$, τότε από (**) πρέπει $\mathbb{Z} \ni \sum_{j \leq i_1} q_j \Omega(i_1, j) = q_{i_1} + \sum_{j < i_1} q_j \Omega(i_1, j) = q_{i_1}$. Στη συνέχεια, έστω $i_2 := \min(I^* \setminus \{i_1\})$, τότε $\mathbb{Z} \ni$

$q_{i_2} + \sum_{j < i_2} q_j \Omega(i, j) = q_{i_2} + q_{i_1} \Omega(i_1, i_2)$, όμως $q_{i_1}, \Omega(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}$, άρα $q_{i_2} \in \mathbb{Z}$. Συνεχίζοντας έτσι (π.χ. $i_3 := \min(I^* \setminus \{i_1, i_2\}), \dots$), καταλήγουμε ότι $q_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in I^*$. Τελικά, από (*) έχουμε

$$z = \varphi^{-1}(|C(T)|(\sum_{j \in I^*} q_j(T_l : T_j))), \quad q_j \in \mathbb{Z}.$$

Οπότε $z \in \varphi^{-1}(|C(T)|D_{\lambda, \mathbb{Z}}) = X_{\lambda, \mathbb{Z}}$.

□

Θεώρημα 5.6.1. ([14, σελ. 681]). Έστω L ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ με $L^\lambda = \mathbb{Z}f_l$. Τότε,

$$V_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq L \subseteq X_{\lambda, \mathbb{Z}}.$$

Απόδειξη.

Από Πρόταση 5.6.1 και Λήμμα 5.6.1 έχουμε ότι $L \subseteq X_{\lambda, \mathbb{Z}}$. Επιπλέον $f_l \in L$ (αφού $L^\lambda = \mathbb{Z}f_l$) οπότε,

$$V_{\lambda, \mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{Παράδειγμα 5.6.1}} S_{\mathbb{Z}}(n, r)f_l \subseteq S_{\mathbb{Z}}(n, r)L = L.$$

Τελικά $V_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq L \subseteq X_{\lambda, \mathbb{Z}}$.

□

Θεώρημα 5.6.2. (Γενίκευση). Έστω L ένα $\mathbb{Z}$ -form του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$. Τότε υπάρχει $0 \neq y \in \mathbb{Q}$ ώστε $L^\lambda = \mathbb{Z}(yf_l)$ και

$$yV_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq L \subseteq yX_{\lambda, \mathbb{Z}}$$

Απόδειξη.

Από Παρατήρηση 5.6.3 ii) υπάρχει τέτοιο y και ιδιαιτέρως το $y^{-1}L$ είναι $\mathbb{Z}$ -form με $(y^{-1}L)^\lambda = \mathbb{Z}f_l$. Συνεπώς, από Θεώρημα 5.6.1 έχουμε $V_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq y^{-1}L \subseteq X_{\lambda, \mathbb{Z}} \iff yV_{\lambda, \mathbb{Z}} \subseteq L \subseteq yX_{\lambda, \mathbb{Z}}$.

□

Σχόλιο. Με λίγα λόγια τα Θεωρήματα 5.6.1 και 5.6.2 μας δίνουν άνω και κάτω φράγματα για τα $\mathbb{Z}$ -forms του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$. Συγκεκριμένα, από Παρατήρηση 5.6.3 ii) όλα τα $\mathbb{Z}$ -forms L του $V_{\lambda, \mathbb{Q}}$ έχουν την ιδιότητα $L^\lambda = \mathbb{Z}(yf_l)$ (όπου το y εξαρτάται από το L). Στην περίπτωση που $L^\lambda = \mathbb{Z}f_l$ τα φράγματα είναι ανεξάρτητα του L , ενώ στην περίπτωση που $L^\lambda = \mathbb{Z}(yf_l)$ τα φράγματα διαστέλονται συμμετρικά από τον συντελεστή y .

6 Θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας.

6.1 Ο συναρτητής $f : M_K(n, r) \longrightarrow \text{mod}KG(r)$ ($r \leq n$).

Παρακάτω, όπου K εννοούμε πάντα άπειρο σώμα.

Γενικά στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας $G(r)$ (ισοδύναμα να μελετήσουμε την κατηγορία $\text{mod}(KG(r))$). Στη παράγραφο αυτή θα δώσουμε μία εναλλακτική περιγραφή της άλγεβρας $KG(r)$ μέσω της άλγεβρας $S_K(n, r)$ του Schur. Μία τέτοια περιγραφή θα ήταν ιδανική στη περίπτωση μας, καθώς έχουμε ήδη αναπτύξει αρκετή θεωρία γύρω από την κατηγορία $\text{mod}(S_K(n, r))$ και την ισοδύναμη αυτής $M_K(n, r)$.

Ορισμός 6.1.1. *i)* Για συντομία από εδώ και κάτω θα γράφουμε $S = S_K(n, r)$.

ii) Έστω $a \in \Lambda(n, r)$, τότε ορίζεται η K -υποάλγεβρα $S(a) = \xi_a S \xi_a$ του S .

Παρατήρηση 6.1.1. Η $S(a)$ είναι όντως K -υποάλγεβρα της S και $1_{S(a)} = \xi_a \neq 1_S$.

Απόδειξη.

$S(a) = K$ -υποπρότυπο: Έστω $s_1, s_2 \in S$ και $k \in K$, τότε

$$\xi_a s_1 \xi_a - \xi_a s_2 \xi_a = \xi_a (s_1 - s_2) \xi_a \in S(a) \text{ και}$$

$$k(\xi_a s_1 \xi_a) \stackrel{S=K\text{-}\alpha\lambda\gamma\epsilon\beta\rho\alpha}{=} \xi_a k s_1 \xi_a \in S(a).$$

$S(a) = K$ -υποδαχτύλιος: Έστω $s_1, s_2 \in S$, τότε,

$$(\xi_a s_1 \xi_a)(\xi_a s_2 \xi_a) = \xi_a (s_1 \xi_a \xi_a s_2) \xi_a \in S(a).$$

$1_{S(a)} = \xi_a \neq 1_S$: Καταρχάς $\xi_a \stackrel{\text{Πρόταση 2.3.3 iv)b)}}{=} \xi_a \xi_a \xi_a \in S(a)$. Είναι σαφές από Πρόταση 2.3.3 iv)b) ότι $1_{S(a)} = \xi_a$. Μένει να δειχθεί ότι $\xi_a \neq 1_S$. Πράγματι, από Πρόταση 2.3.2 και Παρατήρηση 3.2.1 έχουμε $1_S = \epsilon = \sum_{b \in \Lambda(n, r)} \xi_b$. Έστω λοιπόν για άτοπο ότι $1_{S(a)} = 1_S$, τότε θα έπρεπε $\sum_{b \neq a} \xi_b = 0$ που είναι αδύνατο (αφού π.χ. αν σταθεροποιήσουμε $c \in \Lambda(n, r)$ και $i \in I(n, r)$ με $c \neq a$ και $i \in c$, τότε $(\sum_{b \neq a} \xi_b)(c_{i,i}) = \xi_c(c_{i,i}) = \xi_{i,i}(c_{i,i}) = 1_K \neq 0_K$).

□

Υπενθύμιση 6.1.1. Έστω G ομάδα και $H \leq G$, ορίζουμε το σύνολο των διπλών συμπλόκων της H στη G να είναι το $H \backslash G / H = \{HxH \mid x \in G\}$.

Πρόταση 6.1.1. Έστω $a \in \Lambda(n, r)$ τότε ισχύουν τα παρακάτω,

i) Αν $i \in I(n, r)$ με $i \in a$, τότε $S(a) = \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$.

ii) Αν $i \in I(n, r)$ με $i \in a$, τότε,

a) $\xi_{i\pi, i} = \xi_{i\pi', i} \iff$ τα π, π' ανήκουν στο ίδιο διπλό σύμπλοκο της $G_a = \text{Stab}_{G(r)}(i)$.

b) Έστω $\mathcal{T}_a$ ένα σύνολο αντιπροσώπων διπλών συμπλόκων του $G_a \backslash G(r)/G_a$, τότε το σύνολο $\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in \mathcal{T}_a\}$ αποτελεί K -βάση του $S(a)$.

Απόδειξη.

i) $\text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\} \subseteq S(a)$: Από Πρόταση 2.3.3 iv) για κάθε $\pi \in G(r)$, έχουμε

$$\xi_{i\pi, i} = \xi_{i\pi, i\pi} \xi_{i\pi, i} \xrightarrow{i\pi \sim i \in a} \xi_a \xi_{i\pi, i} \xi_a \in S(a).$$

Συνεπώς $\text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\} \subseteq S(a)$.

$S(a) \subseteq \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$: Αρκεί να δείξουμε την παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση. Έστω $k, h \in I(n, r)$, τότε $\xi_a \xi_{k, h} \xi_a \in \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$

Πράγματι, από Πρόταση 2.3.3 (Κανόνα πολ/μού του Schur) έχουμε:

$$\xi_a \xi_{k, h} = \xi_{i, i} \xi_{k, h} = \sum_{(p, q) \in \mathcal{T}} Z(i, i, k, h, p, q) \xi_{p, q}.$$

Όπου $Z(i, i, k, h, p, q) = |B|$ με $B = \{s \in I(n, r) \mid (i, i) \sim (p, s) \text{ και } (k, h) \sim (s, q)\}$. Όμως,

$$(i, i) \sim (p, s) \iff p = s \sim i, \text{ οπότε } B = \begin{cases} \{p\} & p \sim i \text{ και } (p, q) \sim (k, h) \\ \emptyset & \text{αλλιώς} \end{cases} \text{ και άρα:}$$

$$Z(i, i, k, h, p, q) = \begin{cases} 1 & p \sim i \text{ και } (p, q) \sim (k, h) \\ 0 & p \not\sim i \end{cases}, \text{ για κάθε } (p, q) \in \mathcal{T}.$$

Συνεπώς, θέτοντας $\mathcal{T}_{i, k, h} = \{(p, q) \in \mathcal{T} \mid p \sim i \text{ και } (p, q) \sim (k, h)\}$ έχουμε ότι,

$$\xi_a \xi_{k, h} = \sum_{(p, q) \in \mathcal{T}_{i, k, h}} \xi_{p, q}.$$

Τώρα, $\xi_a \xi_{k, h} \xi_a = \sum_{(p, q) \in \mathcal{T}_{i, k, h}} \xi_{p, q} \xi_a$ και πάλι με την βοήθεια του κανόνα πολ/μού του Schur για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}_{i, k, h}$ έχουμε,

$$\xi_{p, q} \xi_{i, i} = \sum_{(r, t) \in \mathcal{T}} Z(p, q, i, i, r, t) \xi_{r, t}.$$

όπου $Z(p, q, i, r, t) = |\{s \in I(n, r) \mid (p, q) \sim (r, s) \text{ και } (i, i) \sim (s, t)\}|$ και παρόμοια με πριν αν θέσουμε $\mathcal{T}_{i,p,q} = \{(r, t) \in \mathcal{T} \mid (p, q) \sim (r, t) \text{ και } t \sim i\}$, έχουμε ότι:

$$\xi_{p,q}\xi_a = \sum_{(r,t) \in \mathcal{T}_{i,p,q}} \xi_{r,t}.$$

Τελικά, $\xi_a \xi_{k,h} \xi_a = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}_{i,k,h}} \sum_{(r,t) \in \mathcal{T}_{i,p,q}} \xi_{r,t}$. Όμως για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}_{i,k,h}$ και $(r, t) \in \mathcal{T}_{i,p,q}$ (εξ' ορισμού των $\mathcal{T}_{i,k,h}$, $\mathcal{T}_{i,p,q}$) έχουμε $r \sim p \sim i \sim t$. Οπότε για κάθε $(p, q) \in \mathcal{T}_{i,k,h}$ και $(r, t) \in \mathcal{T}_{i,p,q}$ υπάρχουν $\pi, \sigma \in G(r)$ ώστε $\xi_{r,t} = \xi_{i\pi, i\sigma} \xrightarrow{(i\pi, i\sigma) \sim (i\pi\sigma^{-1}, i)} \xi_{i\pi\sigma^{-1}, i} \in \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$. Από το τελευταίο έπεται ότι $\xi_a \xi_{k,h} \xi_a \in \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$ και η παρατήρηση αποδείχθηκε.

Γενικά τώρα, αν $\xi \in S$, τότε από Πρόταση 2.3.1 υπάρχουν $\{k_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{T}} \subseteq K$, ώστε $\xi = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} k_{p,q} \xi_{p,q}$ και άρα από Παρατήρηση, $\xi_a \xi \xi_a = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} k_{p,q} (\xi_a \xi_{p,q} \xi_a) \in \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$. Συνεπώς $S(a) \subseteq \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in G(r)\}$.

- ii) a) ($\implies$): Έστω $\xi_{i\pi, i} = \xi_{i\pi', i}$, τότε $(i\pi, i) \sim (i\pi', i)$, οπότε υπάρχει $\sigma \in G(r)$ ώστε $i\pi = i\pi'\sigma$ και $i = i\sigma$. Δηλαδή $\pi'\sigma\pi^{-1} \in G_a$ και $\sigma \in G_a$. Θέτοντας $g_a := \pi'\sigma\pi^{-1} \in G_a$ έχουμε ότι:

$$\pi' = g_a \pi \sigma^{-1} \in G_a \pi G_a \text{ και } \pi \in G_a \pi G_a.$$

($\impliedby$): Έστω $\pi, \pi' \in G_a \pi G_a$, τότε $\pi = sxt$ και $\pi' = s'xt'$, όπου $s, t, s', t' \in G_a$. Επιπλέον, αν θέσουμε $\sigma = t^{-1}t'$, έχουμε:

$$\begin{aligned} i\pi\sigma &= isxt' = ixt' = is'xt' = i\pi' \\ i\sigma &= it^{-1}t' = i. \end{aligned}$$

Από τα τελευταία έπεται $(i\pi, i) \sim (i\pi', i) \iff \xi_{i\pi, i} = \xi_{i\pi', i}$.

- b) Από i) και ii)a) έχουμε άμεσα $S(a) = \text{span}_K\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in \mathcal{T}_a\}$. Επιπλέον από ii)a) έχουμε $\xi_{i\pi, i} \neq \xi_{i\pi', i}$, για κάθε $\pi, \pi' \in \mathcal{T}_a$ με $\pi \neq \pi'$, άρα από Πρόταση 2.3.1 το σύνολο $\{\xi_{i\pi, i} \mid \pi \in \mathcal{T}_a\}$ είναι και K-γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Παρατήρηση 6.1.2. Έστω $a \in \Lambda(n, r)$ και $V \in M_K(n, r)$, τότε το V^a γίνεται φυσιολογικά $S(a)$ -πρότυπο, ώστε $V^a \in \text{mod}(S(a))$. Μάλιστα ο εξωτερικός πολ/μός του K στο V^a που έπεται από την K -άλγεβρα $S(a)$, ταυτίζεται με τον αρχικό που είχε το V^a (δηλαδή $(k \cdot 1_{S(a)}) \cdot v = kv$, για κάθε $k \in K$, $v \in V^a$).

(Ας σημειωθεί ότι ο εξωτερικός πολ/μός του $S(a)$ στο V^a είναι ο περιορισμός του $\cdot : S \times V \longrightarrow V$ στην $S(a) \subseteq S$ και στο $V^a \subseteq V$.)

Απόδειξη.

Καταρχάς ο εξωτερικός πολ/μός είναι καλά ορισμένος, αφού αν $s \in S(a)$, $x \in V^a = \xi_a V$, τότε $s = \xi_a \xi_a$, $x = \xi_a v$ για κάποια $\xi \in S$, $v \in V$ και $s \cdot x = \xi_a(\xi \xi_a \xi_a v) \in \xi_a V = V^a$. Επιπλέον, $1_{S(a)} \cdot x = \xi_a(\xi_a v) \stackrel{\xi_a^2 = \xi_a}{=} x$ και όσο για τις υπόλοιπες ιδιότητες του V^a σαν $S(a)$ -προτύπου επαληθεύονται όλες άμεσα καθώς $S(a) \subseteq S$, $V^a \subseteq V$ και $V = S$ -πρότυπο. Τέλος, για κάθε $k \in K$ έχουμε $(k \cdot 1_{S(a)}) \cdot x = k \xi_a \xi_a v = k \xi_a v = kx$.

□

Πόρισμα 6.1.1. Για κάθε $a \in \Lambda(n, r)$ ορίζεται ο συναρτητής $f_a : M_K(n, r) \longrightarrow \text{mod} S(a)$ ώστε:

$$\begin{aligned} f_a(V) &= V^a \\ f_a(\theta : V \longrightarrow W) &= \theta^a = \theta|_{V^a} : V^a \longrightarrow W^a, \end{aligned}$$

για κάθε $V, W \in M_K(n, r)$ και $\theta : V \longrightarrow W$ ομομορφισμό στην $M_K(n, r)$.

Απόδειξη.

Οι ιδιότητες του συναρτητή επαληθεύονται άμεσα. Αυτό που έχει κάπως αξία να ελέγξουμε είναι ότι η απεικόνιση θ^a είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, για κάθε $x = \xi_a v \in \xi_a V = V^a$ ισχύει,

$$\theta(x) = \theta(\xi_a v) \stackrel{(*)}{=} \xi_a \theta(v) \in \xi_a W = W^a.$$

Όπου η $(*)$ ισχύει γιατί η θ είναι ομομορφισμός στη $M_K(n, r)$ και ισοδύναμα στην $\text{mod} S_K(n, r)$.

□

Ορισμός 6.1.2. Έστω $r \leq n$ τότε υιοθετούμε τους εξής συμβολισμούς:

$$i) \ \omega = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$$

$$ii) \ \text{Θέτουμε } u \in I(n, r) \text{ με } u(i) = i, \text{ για κάθε } i \in \underline{r}. \text{ (Συμβολικά: } u = (u_1, \dots, u_r) = (1, 2, \dots, r)).$$

Παρατήρηση 6.1.3. Έστω $r \leq n$ τότε,

$$i) \ u \in \omega.$$

$$ii) \ G_\omega = \text{Stab}_{G(r)}(u) = 1.$$

$$iii) \ \text{Κάθε } i \in \omega \text{ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως } i = u\pi_i, \text{ για κάποιο } \pi_i \in G(r).$$

Απόδειξη.

Το $i)$ είναι άμεσο όσα για τα άλλα έχουμε

$$ii) \ u\pi = u \iff u(\pi(i)) = u(i) \ \forall i \in \underline{r} \iff \pi(i) = i \ \forall i \in \underline{r} \iff \pi = 1.$$

- iii) Αν $i \in \omega$, τότε $i \sim u$ και άρα υπάρχει $\pi \in G(r)$ ώστε $i = u\pi$. Επίσης, αν υπήρχε άλλο π' ώστε $u\pi' = i$, τότε $u\pi = u\pi' \iff \pi'\pi^{-1} \in G_\omega = 1$, άρα $\pi = \pi'$.

□

Πρόταση 6.1.2. Έστω $r \leq n$ τότε,

- i) Το σύνολο $\{\xi_{u\pi,u} \mid \pi \in G(r)\}$ είναι K -βάση του $S(\omega)$.
ii) a) $\xi_{u\pi,u}\xi_{u\sigma,u} = \xi_{u\pi\sigma,u}$, για κάθε $\pi, \sigma \in G(r)$.
b) Υπάρχει ο παρακάτω ισομορφισμός K -αλγεβρών

$$\phi : S(\omega) \longrightarrow KG(r), \quad \xi_{u\pi,u} \longmapsto \pi, \quad \text{για κάθε } \pi \in G(r).$$

Απόδειξη.

- i) Έστω $\mathcal{T}_\omega$ ένα σύνολο αντιπροσώπων διπλών συμπλόκων του $G_\omega \backslash G(r)/G_\omega$, τότε το σύνολο $\{\xi_{u\pi,u} \mid \pi \in \mathcal{T}_\omega\}$ αποτελεί K -βάση του $S(\omega)$ (βλέπε Πρόταση 6.1.1). Όμως

$$G_\omega = 1 \iff G_\omega \backslash G(r)/G_\omega = \{\{\pi\} \mid \pi \in G(r)\},$$

άρα $\mathcal{T}_\omega = G(r)$ και έπεται το ζητούμενο.

- ii) a) Όλη ιδέα είναι η εφαρμογή του κανόνα πολ/μού του Schur με κατάλληλο (για ευκολία) σύνολο αντιπροσώπων. Έστω $\mathcal{T}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων τροχιών της δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r) \times I(n, r)$, ώστε $(u\pi, u) \in \mathcal{T}$, τότε από Πρόταση 2.3.3 έχουμε,

$$\xi_{u\pi,u}\xi_{u\sigma,u} = \sum_{(p,q) \in \mathcal{T}} Z(u\pi, u, u\sigma, u, p, q)\xi_{p,q}.$$

Όπου $Z(u\pi, u, u\sigma, u, p, q) = |B := \{s \in I(n, r) \mid (u\pi, u) \sim (p, s) \text{ και } (u\sigma, u) \sim (s, q)\}|$ και για λόγους διάκρισης γράφουμε $B = B(u\pi, u, u\sigma, u, p, q)$.

Ισχυρισμός. $Z(u\pi, u, u\sigma, u, p, q) = \begin{cases} 1 & (p, q) = (u\pi\sigma, u) \\ 0 & (p, q) \neq (u\pi\sigma, u) \end{cases}$ και άρα $\xi_{u\pi,u}\xi_{u\sigma,u} = \xi_{u\pi\sigma,u}$.

Πράγματι, έστω $(p, q) \in \mathcal{T}$ με $B(u\pi, u, u\sigma, u, p, q) \neq \emptyset$ και $s \in B(u\pi, u, u\sigma, u, p, q)$ τότε υπάρχουν $\pi_0, \sigma_0 \in G(r)$ (που εξαρτώνται από το s) ώστε :

$$\begin{aligned} u\pi\pi_0 &= p, \quad u\pi_0 = s \\ u\sigma\sigma_0 &= s, \quad u\sigma_0 = q. \quad (*) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι,

$$u\sigma\sigma_0 = u\pi_0 \iff u\sigma\sigma_0\pi_0^{-1} = u \iff \sigma\sigma_0\pi_0^{-1} \in G_\omega = 1 \iff \sigma\sigma_0\pi_0^{-1} = 1 \iff \sigma = \pi_0\sigma_0^{-1}.$$

Επιπλέον, $(p, q) \stackrel{(*)}{=} (u\pi\pi_0, u\sigma_0) \sim (u\pi\pi_0\sigma_0^{-1}, u) = (u\pi\sigma, u)$. Συνεπώς $(p, q) \sim (u\pi\sigma, u)$ και $(u\pi\sigma, u), (p, q) \in \mathcal{T} = \text{σύνολο αντιπροσώπων τροχιών, άρα } (p, q) = (u\pi\sigma, u)$.

Ως τώρα δείξαμε ότι, αν $B(u\pi, u, u\sigma, u, p, q) \neq \emptyset$ τότε πρέπει $(p, q) = (u\pi\sigma, u)$, οπότε $Z(u\pi, u, u\sigma, u, p, q) = 0$ για $(p, q) \neq (u\pi\sigma, u)$. Μένει να δούμε τι γίνεται όταν $(p, q) = (u\pi\sigma, u)$. Θεωρούμε το $B(u\pi, u, u\sigma, u, u\pi\sigma, u)$ και είναι σαφές ότι $u\sigma \in B(u\pi, u, u\sigma, u, u\pi\sigma, u)$. Από την άλλη, αν $s \in B(u\pi, u, u\sigma, u, u\pi\sigma, u)$ τότε υπάρχουν $\pi_0, \sigma_0 \in G(r)$ (που εξαρτώνται από το s) ώστε :

$$\begin{aligned} u\pi\pi_0 &= u\pi\sigma, \quad u\pi_0 = s \\ u\sigma\sigma_0 &= s, \quad u\sigma_0 = u. \quad (*) \end{aligned}$$

Οπότε $\sigma_0 \in G_\omega = 1$ και $s = u\sigma\sigma_0 = u\sigma = \text{σταθερό}$. Άρα $B(u\pi, u, u\sigma, u, u\pi\sigma, u) = \{u\sigma\}$ και έτσι $Z(u\pi, u, u\sigma, u, p, q) = 1$ για $(p, q) = (u\pi\sigma, u)$

- b) Τα σύνολα $\{\xi_{u\pi, u}\}_{\pi \in G(r)}$, $\{\pi\}_{\pi \in G(r)}$ αποτελούν K -βάσεις των K -αλγεβρών $S(\omega)$, $KG(r)$, ιδιαιτέρως $\dim_K S(\omega) = \dim_K KG(r)$. Άρα έπεται ισομορφισμός K -προτύπων ώστε:

$$\phi : S(\omega) \longrightarrow KG(r), \quad \xi_{u\pi, u} \longmapsto \pi, \quad \text{για κάθε } \pi \in G(r).$$

Η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων: Πράγματι, έστω $x, y \in S(\omega)$ τότε $x = \sum_{\pi \in G(r)} k_\pi \xi_{u\pi, u}$, $y =$

$\sum_{\sigma \in G(r)} r_\sigma \xi_{u\sigma, u}$, για κάποια $k_\pi, r_\sigma \in K$. Τώρα,

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= \phi\left(\left(\sum_{\pi \in G(r)} k_\pi \xi_{u\pi, u}\right)\left(\sum_{\sigma \in G(r)} r_\sigma \xi_{u\sigma, u}\right)\right) = \sum_{\pi \in G(r)} \sum_{\sigma \in G(r)} k_\pi r_\sigma \phi(\xi_{u\pi, u} \xi_{u\sigma, u}) \stackrel{a)}{=} \\ &\sum_{\pi \in G(r)} \sum_{\sigma \in G(r)} k_\pi r_\sigma \phi(\xi_{u\pi\sigma, u}) = \sum_{\pi \in G(r)} \sum_{\sigma \in G(r)} k_\pi r_\sigma \pi\sigma = \left(\sum_{\pi \in G(r)} k_\pi \pi\right)\left(\sum_{\sigma \in G(r)} r_\sigma \sigma\right) = \phi(x)\phi(y). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 6.1.4. Έστω $r \leq n$ και $\phi : S(\omega) \longrightarrow KG(r)$ ο ισομορφισμός K -αλγεβρών με $\xi_{u\pi, u} \longmapsto \pi$, για κάθε $\pi \in G(r)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω,

- i) Αν $V \in \text{mod} S(\omega)$, τότε το V γίνεται $KG(r)$ -πρότυπο με $r \cdot v := \phi^{-1}(r)v$, για κάθε $r \in KG(r)$, $v \in V$. Ιδιαιτέρως $V \in \text{mod} KG(r)$ και

$$\pi \cdot v = \xi_{u\pi, u}v, \quad \text{για κάθε } \pi \in G(r).$$

Μάλιστα ο εξωτερικός πολ/μός του K στο V που επάγεται από την K -άλγεβρα $KG(r)$, ταυτίζεται με τον αρχικό (δηλαδή $(k \cdot 1_{KG(r)}) \cdot v = kv$, για κάθε $k \in K$, $v \in V$).

ii) Αν $V \in \text{mod}KG(r)$, τότε το V γίνεται $S(\omega)$ -πρότυπο με $\xi \cdot v := \phi(\xi)v$, για κάθε $\xi \in S(\omega)$, $v \in V$.
Ιδιαίτερος $V \in \text{mod}S(\omega)$ και

$$\xi_{u\pi, u} \cdot v = \pi v, \text{ για κάθε } \pi \in G(r).$$

Μάλιστα ο εξωτερικός πολ/μός του K στο V που επάγεται από την K -άλγεβρα $S(\omega)$, ταυτίζεται με τον αρχικό (δηλαδή $(k \cdot 1_{S(\omega)}) \cdot v = kv$, για κάθε $k \in K$, $v \in V$). Ιδιαίτερος $V \in \text{mod}S(\omega)$.

Απόδειξη.

Κάνουμε το ii) και το i) όμοια. Πράγματι, επειδή η $\phi : S(\omega) \rightarrow KG(r)$ είναι ισομορφισμός K -αλγεβρών τότε ξέρουμε ότι το V γίνεται $S(\omega)$ -πρότυπο με $\xi \cdot v := \phi(\xi)v$. Επίσης,

$$(k \cdot 1_{S(\omega)}) \cdot v = \phi(k \cdot 1_{S(\omega)})v = k\phi(1_{S(\omega)})v = (k \cdot 1_{KG(r)})v = kv.$$

Αφού ο καινούργιος εξωτερικός πολ/μός του K ταυτίζεται με τον παλιό και επιπλέον $V \in \text{mod}KG(r)$, τότε $V \in \text{mod}S(\omega)$. □

Πόρισμα 6.1.2. ($r \leq n$). Έστω $V \in \text{mod}KG(r)$ (παρόμοια αν $V \in \text{mod}S(\omega)$) το οποίο είναι και $S(\omega)$ -πρότυπο σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.1.4, τότε ένα $U \subseteq V$ είναι $KG(r)$ -υποπρότυπο αν και μόνον αν είναι $S(\omega)$ -υποπρότυπο, ιδιαίτερος $\{KG(r)\text{-υποπρότυπα του } V\} = \{S(\omega)\text{-υποπρότυπα του } V\}$. Επιπλέον αν $V, W \in \text{mod}KG(r)$, τότε μία $f : V \rightarrow W$ είναι ομομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων αν και μόνον αν είναι ομομορφισμός $S(\omega)$ -προτύπων.

Απόδειξη.

Έπεται άμεσα από τον τρόπο που συνδέονται οι εξωτερικοί πολ/μοι των $S(\omega), KG(r)$ στο V . □

Σύμβαση 6.1.1. Από εδώ και κάτω όταν έχουμε ένα $KG(r)$ -πρότυπο στην $\text{mod}KG(r)$ θα το βλέπουμε σαν $S(\omega)$ -πρότυπο της $\text{mod}S(\omega)$ όπως προβλέπει η Παρατήρηση 6.1.4 (και ανάποδα) χωρίς να γίνεται κάποια ιδιαίτερη αναφορά.

Ορισμός 6.1.3. Έστω $r \leq n$ τότε ορίζεται ο συναρτητής $f_\omega : M_K(n, r) \rightarrow \text{mod}KG(r)$

$$f_\omega(V) = V^\omega$$

$$f_\omega(\theta : V \rightarrow W) = \theta^\omega = \theta|_{V^\omega} : V^\omega \rightarrow W^\omega,$$

για κάθε $V, W \in M_K(n, r)$ και $\theta : V \rightarrow W$ ομομορφισμό στην $M_K(n, r)$. Όπου ξέρουμε ότι $V^\omega \in \text{mod}S(\omega)$ και το V^ω το βλέπουμε σαν $KG(r)$ -πρότυπο με $V^\omega \in \text{mod}KG(r)$, όπως στη Παρατήρηση 6.1.4. (Ας σημειωθεί ότι ο συναρτητής f_ω καλείται και *Schur functor*.)

Σχόλιο. i) Η θεωρία που είδαμε για την K -άλγεβρα $S(\omega)$ γενικεύεται και στη K -άλγεβρα $S(a)$, όπου $a \in \Lambda(n, r)$. Συγκεκριμένα $S(a) \simeq H_K(G, G_a) = \text{Hecke ring}$ (βλέπε [1, σελ. 54-55, Remark]). Προς το παρόν όμως θα περιοριστούμε στην $S(\omega)$.

ii) Με αφορμή τη Παρατήρηση 6.1.4 και το Πόρισμα 6.1.2, έχουμε ότι η μελέτη της κατηγορίας $\text{mod}KG(r)$ είναι ισοδύναμη με τη μελέτη της κατηγορίας $\text{mod}S(\omega)$.

6.2 Γενική θεωρία του συναρτητή $f : \text{mod}S \longrightarrow \text{mod}Se$.

Στην περασμένη παράγραφο είδαμε ότι η μελέτη της κατηγορίας $\text{mod}KG(r)$ είναι ισοδύναμη με την μελέτη της κατηγορίας $\text{mod}(S(\omega)) = \text{mod}(\xi_\omega S \xi_\omega)$ (όπου $S = S_K(n, r)$). Στη παράγραφο αυτή στόχος μας είναι να δούμε πως συνδέονται οι κατηγορίες $\text{mod}S$ και $\text{mod}(\xi_\omega S \xi_\omega)$. Ο λόγος για τον οποίο θέτουμε έναν τέτοιο στόχο, είναι επειδή ήδη ξέρουμε πολλά πράγματα για την $\text{mod}S$ ($\iff$ την $M_K(n, r)$), οπότε μία τέτοια σύνδεση θα μας διευκόλυνε ιδιαίτερα. Στα πλαίσια της παραγράφου αυτής θα δούμε κάτι ακόμα γενικότερο, συγκεκριμένα για την τυχόν K -άλγεβρα S (πεπερασμένης διάστασης) θα δούμε πως συνδέονται οι κατηγορίες $\text{mod}S$ και $\text{mod}Se$ όπου $0 \neq e \in S$ με $e = \text{idempotent}$.

Κίνητρο. Από Πρόρισμα 3.5.2 ή Θεώρημα 3.5.1, ξέρουμε ότι το σύνολο $\{F_{\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι *full set* από *irreducible* πρότυπα της $M_K(n, r)$, άρα (από Παρατήρηση 2.4.3 και Πρόρισμα 2.4.1) είναι *full set* από *irreducible* πρότυπα της $\text{mod}S$. Οπότε γενάτε το εξής ερώτημα:

Πως από ένα *full set* από *irreducible* πρότυπα της $\text{mod}S$ μπορούμε να εξάγουμε ένα *full set* από *irreducible* πρότυπα της $\text{mod}S(\omega) = \text{mod}(\xi_\omega S \xi_\omega)$;

Σύμβαση 6.2.1. Παρακάτω όπου S εννοούμε μία τυχαία K -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης πάνω από το K και $0 \neq e \in S$ ένα *idempotent* στοιχείο της (δηλαδή $e^2 = e$).

Παρατήρηση 6.2.1. Έστω S K -άλγεβρα $0 \neq e$ *idempotent* στοιχείο της. Τότε:

- i) Η eSe είναι K -υπόάλγεβρα του S , με $1_{eSe} = e$.
- ii) Έστω $V \in \text{mod}S$, τότε το K -υποπρότυπο eV γίνεται φυσιολογικά eSe -πρότυπο. Μάλιστα ο εξωτερικός πολ/μός του K στο eV που έπεται από την K -άλγεβρα eSe , ταυτίζεται με τον αρχικό που είχε το eV (δηλαδή $(k \cdot 1_{eSe}) \cdot v = kv$, για κάθε $k \in K$, $v \in eV$). Ιδιαίτερος $eV \in \text{mod}(eSe)$. (Ας σημειωθεί ότι ο εξωτερικός πολ/μός του eSe στο eV είναι ο περιορισμός του $\cdot : S \times V \longrightarrow V$ στην $eSe \subseteq S$ και στο $eV \subseteq V$.)
- iii) Ορίζεται ο συναρτητής $f : \text{mod}S \longrightarrow \text{mod}Se$ ώστε:

$$\begin{aligned} f(V) &= eV \\ f(\theta : V \longrightarrow W) &= \theta_e := \theta|_{eV} : eV \longrightarrow eW, \end{aligned}$$

για κάθε $V, W \in \text{mod}S$ και $\theta : V \longrightarrow W$ ομομορφισμό στην $\text{mod}S$.

Απόδειξη.

Οι ιδέες απόδειξης των i), ii), iii) είναι ακριβώς ίδιες κατά αντιστοιχία με αυτές της απόδειξης των Παρατήρηση 6.1.1, Παρατήρηση 6.1.2 και Πρόρισμα 6.1.1. Αυτό γιατί, το μόνο που χρησιμοποιούμε εκεί είναι ότι $\xi_a^2 = \xi_a$, πράγμα που ισχύει και για το e (δηλαδή $e^2 = e$).

□

Σύμβαση 6.2.2. Από εδώ και κάτω όταν έχουμε ένα $V \in \text{mod}S$, τότε το eV θα το βλέπουμε πάντα σαν eSe -πρότυπο της $\text{mod}(eSe)$ έτσι όπως είδαμε στην Παρατήρηση 6.2.1 ii) εκτός αν αναφέρεται κάτι άλλο.

Παρατήρηση 6.2.2. Ο συναρτητής $f : \text{mod}S \rightarrow \text{mod}eSe$ είναι ακριβής. Δηλαδή, για κάθε ακριβής ακολουθία στη $\text{mod}S$ έστω $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\theta} V \xrightarrow{\lambda} V'' \rightarrow 0$ η παρακάτω ακολουθία:

$$0 \rightarrow eV' \xrightarrow{\theta_e} eV \xrightarrow{\lambda_e} eV'' \rightarrow 0,$$

είναι ακριβής στην $\text{mod}eSe$.

Απόδειξη.

Η ακολουθία $0 \rightarrow eV' \xrightarrow{\theta_e} eV \xrightarrow{\lambda_e} eV'' \rightarrow 0$ είναι καλά ορισμένη: Αυτό που πρέπει ναδειχθεί είναι ότι $\theta(eV') \subseteq eV$, $\lambda(eV) \subseteq eV''$. Κάνουμε το πρώτο (και το άλλο όμοια), πράγματι επειδή θ ομομορφισμός S -προτύπων έχουμε $\theta(eV') = e\theta(V') \subseteq eV$.

θ_e, λ_e ομομορφισμοί eSe -προτύπων: Οι θ_e, λ_e είναι ομομορφισμοί eSe -προτύπων ως περιορισμοί των θ, λ που είναι ομομορφισμοί S -προτύπων με $eSe \subseteq S$.

Μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $0 \rightarrow eV' \xrightarrow{\theta_e} eV \xrightarrow{\lambda_e} eV'' \rightarrow 0$ είναι ακριβής. Πράγματι,

$\theta_e = 1-1$: (ως περιορισμός της θ που είναι 1-1).

$\lambda_e = \text{επί}$: Αν $ev_2 \in eV''$ (όπου $v_2 \in V''$) τότε από το επί της λ υπάρχει $v \in V$ με $\lambda(v) = v_2$, οπότε $ev_2 = e\lambda(v) = \lambda(ev) = \lambda_e(ev)$.

$\text{Im}\theta_e = \ker\lambda_e$: Από πριν έχουμε $\theta_e(eV') \subseteq eV$, ενώ από ακρίβεια της αρχικής ακολουθίας έχουμε ότι $\theta(eV') = \theta_e(eV') \subseteq \ker\lambda$. Συνεπώς $\text{Im}\theta_e \subseteq eV \cap \ker\lambda = \ker\lambda_e$. Αντίστροφα, αν $x \in \ker\lambda_e$, τότε $x = ev$ για κάποιο $v \in V$ και επιπλέον από ακρίβεια της αρχικής ακολουθίας υπάρχει $v_1 \in V'$ ώστε $\theta(v_1) = x = ev$, τότε όμως

$$e\theta(v_1) = e(ev) \iff \theta(ev_1) = ev = x,$$

δηλαδή $x = \theta(ev_1) = \theta_e(ev_1) \in \text{Im}\theta_e$, άρα $\text{Im}\theta_e \supseteq \ker\lambda_e$.

□

Πρόταση 6.2.1. Έστω V irreducible πρότυπο της $\text{mod}S$, τότε:

$$eV = 0 \text{ ή } eV \text{ είναι irreducible πρότυπο της } \text{mod}(eSe).$$

Απόδειξη.

Αν $eV = 0$ τότε τελειώσαμε. Έστω ότι $eV \neq 0$ και $0 \neq W$ eSe -υποπρότυπο του eV .

Ισχυρισμός. $W = eW$

Αν $x \in W$, τότε $x = ev$ για κάποιο $v \in V$ και $x = ev \xrightarrow{e^2=e} eev = ex \in eW$, οπότε $W = eW$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Από τον ισχυρισμό έχουμε $sW = seW$, για κάθε $s \in S$ και άρα $\sum_{s \in S} sW = \sum_{s \in S} seW$. Το $\sum_{s \in S} sW$ είναι άμεσα S -υποπρότυπο του V και μη-μηδενικό (αφού $0 \neq W \subseteq \sum_{s \in S} sW$), όμως $V = \text{irreducible}$ άρα $\sum_{s \in S} seW = \sum_{s \in S} sW = V$. Συνεπώς,

$$e\left(\sum_{s \in S} seW\right) = eV \iff \sum_{s \in S} eseW = eV.$$

Αν δείξουμε ότι $\sum_{s \in S} eseW = W$, τότε $W = eV$ και άρα $eV = \text{irreducible}$. Πράγματι $\sum_{s \in S} eseW \subseteq W$ (αφού $W = eSe$ -υποπρότυπο του eV) και $W = eW = e^2W = (e1e)W \subseteq \sum_{s \in S} eseW$.

□

Πόρισμα 6.2.1. Έστω V irreducible πρότυπο της $\text{mod}S$, τότε:

$$f(V) = 0 \text{ ή } f(V) \text{ είναι irreducible πρότυπο της } \text{mod}(eSe).$$

Ορισμός 6.2.1. Έστω $V \in \text{mod}S$, τότε ορίζουμε το εξής S -υποπρότυπο του V :

$$V_{(e)} = \text{άθροισμα όλων των } S\text{-υποπροτύπων } V_0 \text{ του } V \text{ με } eV_0 = 0$$

$$\text{Συμβολικά: } V_{(e)} = \sum_{V_0 \leq V: eV_0=0} V_0.$$

Παρατήρηση 6.2.3. Έστω $V \in \text{mod}S$ τότε,

$$i) \quad eV_{(e)} = 0$$

ii) Το $V_{(e)}$ είναι το μεγαλύτερο S -υποπρότυπο του V που περιέχεται στο $(1-e)V$ (δηλαδή για κάθε άλλο S -υποπρότυπο W του V με $W \subseteq (1-e)V$ πρέπει $W \subseteq V_{(e)}$).

Απόδειξη. Το i) είναι άμεσο (εξ' ορισμού του $V_{(e)}$). Όσο για το ii) έχουμε:

$$V_{(e)} \subseteq (1-e)V: \quad \text{Έστω } x \in V_{(e)}, \text{ τότε } ex \stackrel{i)}{=} 0 \iff x = x - ex = (1-e)x \in (1-e)V_{(e)} \subseteq (1-e)V.$$

$V_{(e)}$ είναι το μεγαλύτερο S -υποπρότυπο του V που περιέχεται στο $(1-e)V$: Έστω W S -υποπρότυπο του $(1-e)V$, τότε $eW \subseteq e(1-e)V = (e - e^2)V = 0$. Εφόσον $eW = 0$, τότε εξ' ορισμού του $V_{(e)}$ πρέπει $W \subseteq V_{(e)}$.

□

Παρατήρηση 6.2.4. *i) Έστω $V \in \text{mod}S$, τότε ορίζεται το S -πρότυπο $a(V) = V/V_{(e)}$ και για κάθε ομομορφισμό S -προτύπων $\theta : V \longrightarrow W$ ισχύει:*

$$a) \theta(V_{(e)}) \subseteq W_{(e)}$$

$$b) \text{ Επάγεται ο ομομορφισμός } S\text{-προτύπων, } a(\theta) : a(V) \longrightarrow a(W), v + V_{(e)} \longmapsto \theta(v) + W_{(e)}.$$

ii) Ορίζεται ο συναρτητής $a : \text{mod}S \longrightarrow \text{mod}S$ ώστε:

$$a(V) = V/V_{(e)}$$

$$a(\theta : V \longrightarrow W) = a(\theta) : a(V) \longrightarrow a(W),$$

για κάθε $V, W \in \text{mod}S$ και $\theta : V \longrightarrow W$ ομομορφισμό στην $\text{mod}S$.

Απόδειξη.

i) a) $\theta(V_{(e)}) = S$ -υποπρότυπο του W (αφού θ ομομορφισμός S -προτύπων) και $e\theta(V_{(e)}) = \theta(eV_{(e)}) = \theta(0) = 0$, άρα εξ' ορισμού του $W_{(e)}$ έχουμε $\theta(V_{(e)}) \subseteq W_{(e)}$.

b) Μόνο το καλά ορισμένο έχει αξία να ελεγχθεί. Πράγματι,

$$\begin{aligned} v_1 + V_{(e)} = v_2 + V_{(e)} &\implies v_1 - v_2 \in V_{(e)} \implies \theta(v_1) - \theta(v_2) \in \theta(V_{(e)}) \subseteq W_{(e)} \implies \\ \theta(v_1) + W_{(e)} &= \theta(v_2) + W_{(e)} \end{aligned}$$

ii) Όλες οι ιδιότητες του συναρτητή επαληθεύονται άμεσα.

□

Πρόταση 6.2.2. *Έστω $V \in \text{mod}S$ και $a_V : V \longrightarrow a(V)$, $v \longmapsto v + V_{(e)}$, η φυσική προβολή. Τότε ο συναρτητής $f : \text{mod}S \longrightarrow \text{mod}(eSe)$ επάγει τον εξής ισομορφισμό στην $\text{mod}(eSe)$:*

$$f(a_V) : f(V) \longrightarrow f(a(V)).$$

Δηλαδή, η απεικόνιση $a_V|_{eV} : eV \longrightarrow e(V/V_{(e)})$, είναι ισομορφισμός eSe -προτύπων.

Λήμμα 6.2.1. $(1 - e)V \cap eV = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $x \in (1 - e)V \cap eV$, τότε $x = (1 - e)v = ev'$, για κάποια $v, v' \in V$. Συνεπώς,

$$x = ev' = e^2v' = e(1 - e)v = ev - e^2v = 0$$

□

Απόδειξη. (Πρότασης).

$f(a_V) =$ ομομορφισμός eSe –προτύπων: Άμεσο αφού a_V είναι ομομορφισμός στην $modS$ και f είναι συναρτητής από την $modS$ στην $mod eSe$.

$f(a_V) =$ επί: Έστω $x \in f(a(V)) = e(V/V_{(e)})$, τότε $x = e(v + V_{(e)})$, για κάποιο $v \in V$ και

$$x = ev + V_{(e)} = a_V(ev) = a_V|_{eV}(ev) = f(a_V)(ev).$$

$f(a_V) = 1-1$: $\ker f(a_V) = \ker a_V|_{eV} = \ker a_V \cap eV = V_{(e)} \cap eV$, άρα από Παρατήρηση 6.2.3 έχουμε $\ker f(a_V) \subseteq (1 - e)V \cap eV = 0$.

□

Σχόλιο. Μελετήσαμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες του συναρτητή f και συγκεντρώνουμε τώρα την προσοχή μας στην κατασκευή συναρτητών $h : mod(eSe) \rightarrow modS$ που να αποτελούν "αντίστροφο" (έστω και μερικώς αντίστροφο) για το συναρτητή $f : modS \rightarrow mod(eSe)$.

Ορισμός 6.2.2. Έστω $W \in mod(eSe)$, τότε ορίζουμε το $\mathbb{Z}$ –πρότυπο $h(W) := Se \otimes_{eSe} W$.

Υπενθύμιση 6.2.1. (Από την *multilinear* μη-μεταθετική άλγεβρα).

Έστω R, S δακτύλιοι, A ένα δεξίο R –πρότυπο και B ένα αριστερό R –πρότυπο. Τότε:

i) Ορίζεται το $\mathbb{Z}$ –πρότυπο $A \otimes_R B$.

ii) Αν επιπλέον A είναι (S, R) –διπρότυπο (δηλαδή αριστερό S –πρότυπο και δεξίο R –πρότυπο με $(sx)r = s(xr)$, για κάθε $s \in S, x \in A, r \in R$) τότε το $A \otimes_R B$ είναι S –πρότυπο με

$$s \cdot (a \otimes b) = (sa) \otimes b, \text{ για κάθε } s \in S, a \in A, b \in B.$$

iii) Έστω $f : A \rightarrow A'$ ομομορφισμός δεξιών R –προτύπων και $g : B \rightarrow B'$ ομομορφισμός αριστερών R –προτύπων τότε:

a) Ορίζεται ένας ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ –προτύπων $f \otimes g : A \otimes_R B \rightarrow A' \otimes_R B'$ ώστε

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b).$$

b) Αν επιπλέον τα A, A' είναι (S, R) –διπρότυπα και η f ομομορφισμός αριστερών S –προτύπων τότε η $f \otimes g$ είναι ομομορφισμός S –προτύπων.

c) Αν $f' : A' \rightarrow C$ ομομορφισμός δεξιών R –προτύπων και $g : B' \rightarrow K$ ομομορφισμός αριστερών R –προτύπων, τότε $(f \otimes g) \circ (f' \otimes g') = (f \circ f') \otimes (g \circ g')$.

Παρατήρηση 6.2.5. *i) Το Se είναι φυσιολογικά δεξιό eSe -πρότυπο, οπότε αν W ένα αριστερό eSe -πρότυπο, τότε ορίζεται καλά το $\mathbb{Z}$ -πρότυπο $h(W) = Se \otimes_{eSe} W$.*

ii) Το Se είναι (S, eSe) -διπρότυπο (δηλαδή $(sx)s' = s(xs')$, για κάθε $s \in S$, $x \in Se$, $s' \in eSe$) οπότε το $h(W) = Se \otimes_{eSe} W$ γίνεται S -πρότυπο ώστε: $s \cdot (a \otimes b) = (sa) \otimes b$, για κάθε $s \in S$, $a \in Se$ και $b \in W$. Ιδιαίτερώς $h(W) \in \text{mod} S$.

iii) Αν $V, W \in \text{mode} Se$ και $\psi : V \rightarrow W$ ομομορφισμός eSe -προτύπων τότε ορίζεται ο ομομορφισμός S -προτύπων:

$$h(\psi) := 1_{Se} \otimes \psi : Se \otimes_{eSe} V \rightarrow Se \otimes_{eSe} W.$$

Όπου $(1_{Se} \otimes \psi)(a \otimes b) = 1_{Se}(a) \otimes \psi(b) = a \otimes \psi(b)$, για κάθε $a \in Se$, $b \in V$. (με 1_{Se} εννοούμε την ταυτοτική)

iv) Ορίζεται ο συναρτητής $h : \text{mod}(eSe) \rightarrow \text{mod} S$ ώστε:

$$h(V) = Se \otimes_{eSe} V$$

$$h(\theta : V \rightarrow W) = h(\theta) := 1_{Se} \otimes \theta : h(V) \rightarrow h(W)$$

για κάθε $V, W \in \text{mod}(eSe)$ και $\theta : V \rightarrow W$ ομομορφισμό στην $\text{mode} Se$.

Απόδειξη.

ii) Το $h(W)$ είναι S -πρότυπο άμεσα από Υπενθύμιση 6.2.1 ii). Μένει να δείξουμε ότι $h(W) \in \text{mod} S$, ισοδύναμα $\dim_K h(W) < \infty$. Πράγματι, για αρχή έχουμε ότι $\dim_K Se < \infty$ (αφού $\dim_K S < \infty$ και $Se = K$ -υποπρότυπο του S) και $\dim_K W < \infty$ (αφού $W \in \text{mod}(eSe)$). Έστω λοιπόν $\{a_1, \dots, a_m\}$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ K -βάσεις των Se, W αντίστοιχα.

Ισχυρισμός. $h(W) = Se \otimes_{eSe} W = H := \text{span}_K \{a_i \otimes b_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$.

Πράγματι, έστω $a \in Se$, $b \in W$, τότε $a = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ και $b = \sum_{j=1}^m r_j b_j$, για κάποια $k_i, r_j \in K$. Τότε με βάση την Παρατήρηση 1.1.1 iii) έχουμε:

$$\begin{aligned} a \otimes b &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_i a_i) \otimes ((r_j \cdot 1_{eSe}) b_j) \xrightarrow{r_j \cdot 1_{eSe} \in eSe} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_i a_i (r_j \cdot 1_{eSe})) \otimes b_j \xrightarrow{S=K\text{-άλγεβρα}} \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_i r_j a_i e) \otimes b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_i r_j \cdot 1_S) \cdot (a_i e \otimes b_j) = \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m k_i r_j (a_i e \otimes b_j) \xrightarrow{a_i e = a_i, \text{ γιατί } a_i \in Se} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m k_i r_j (a_i \otimes b_j) \in H \end{aligned}$$

Άρα $h(W) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{a \otimes b \mid a \in Se, b \in W\} \subseteq H$, συνεπώς $\dim_K h(W) < \infty$.

iv) Ο συναρτητής h είναι καλά ορισμένος από ii) και από Υπενθύμιση 6.2.1 iii) έχουμε:

$$h(\mathbb{I}_V) = 1_{Se} \otimes \mathbb{I}_V = \mathbb{I}_{Se \otimes_{eSe} W} \text{ και}$$

$$h(\theta_1 \circ \theta_2) = 1_{Se} \otimes (\theta_1 \circ \theta_2) = (1_{Se} \circ 1_{Se}) \otimes (\theta_1 \circ \theta_2) = (1_{Se} \otimes \theta_1) \circ (1_{Se} \otimes \theta_2) = h(\theta_1) \circ h(\theta_2).$$

□

Πρόταση 6.2.3. ($h = \text{μερικώς αντίστροφος συναρτητής του } f$). Έστω $W \in \text{mod}(eSe)$ τότε,

$$i) \ f(h(W)) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{e \otimes w \mid w \in W\} \xrightarrow{\text{συμβ}} e \otimes W.$$

ii) Υπάρχει ισομορφισμός στην modeSe :

$$\phi : W \longrightarrow f(h(W)), \ w \longmapsto e \otimes w.$$

Ιδιαίτερος $W \simeq f(h(W)) = eh(W)$ (Ισομορφισμός eSe -προτύπων).

Απόδειξη.

i) $f(h(W)) \subseteq e \otimes W$: Έστω $x \in f(h(W)) = eh(W)$, τότε $x = e(\sum_{i=1}^n s_i e \otimes w_i)$, για κάποια $s_i \in S, w_i \in W$, οπότε,

$$x = e(\sum_{i=1}^n s_i e \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n (es_i e) \otimes w_i \xrightarrow{e^2=e} \sum_{i=1}^n (ees_i e) \otimes w_i \xrightarrow{es_i e \in eSe} \sum_{i=1}^n e \otimes (es_i e)w_i \in e \otimes W.$$

$e \otimes W \subseteq f(h(W))$: Επειδή $f(h(W)) = S$ -πρότυπο τότε αρκεί να δείξουμε ότι $e \otimes w \in f(h(W))$, για κάθε $w \in W$. Πράγματι, $e \otimes w = (ee) \otimes w = e(e \otimes w) \in e(Se \otimes_{eSe} W) = eh(W) = f(h(W))$.

ii) Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : W \longrightarrow f(h(W)), \ w \longmapsto e \otimes w$ και έχουμε:

$\phi = \text{καλά ορισμένη}$: Πράγματι, $\phi(w) = e \otimes w \in e \otimes W = f(h(W))$, για κάθε $w \in W$.

$\phi = \text{ομομορφισμός } eSe\text{-προτύπων}$: Έστω $w_1, w_2 \in W$ και $ese \in eSe$ τότε,

$$\phi(w_1 + w_2) = e \otimes (w_1 + w_2) = e \otimes w_1 + e \otimes w_2 \text{ και}$$

$$\phi((ese) \cdot w) = e \otimes esew = eese \otimes w = esee \otimes w \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 6.2.5 ii)}} ese \cdot (e \otimes w) = ese\phi(w).$$

$\phi = \text{επί}$: Άμεσο από i).

$\phi = 1\text{-}1$: Έστω $\eta : Se \times W \longrightarrow W, (se, w) \longmapsto (ese) \cdot w$. Η η είναι άμεσα καλά ορισμένη και eSe -διπροσθετική (π.χ. $\eta(se \cdot (es'e), w) = e(se \cdot (es'e))w = ese \underbrace{((es'e)w)}_{\in W} = \eta(se, (es'e) \cdot w)$,

οι άλλες ιδιότητες της διπροσθετικότητας είναι σαφές). Συνεπώς, ορίζεται ένας ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων $\tilde{\eta} : Se \otimes_{eSe} W \longrightarrow W$ με $\tilde{\eta}(se \otimes w) = (ese) \cdot w$, για κάθε $s \in S, w \in W$. Επιπλέον,

$$(\tilde{\eta} \circ \phi)(w) = \tilde{\eta}(e \otimes w) = \tilde{\eta}(1_{Se} \otimes w) = (e1_{Se}) \cdot w = ew = 1_{eSe}w \xrightarrow{W \in \text{modeSe}} w.$$

Άρα $(\tilde{\eta} \circ \phi) = \mathbb{I}_W$ και έτσι πρέπει $\phi = 1\text{-}1$.

□

Σχόλιο. Ο συναρτητής $h : \text{mod}(eSe) \longrightarrow \text{mod}S$ παρόλο που είναι "μερικώς αντίστροφος" του f , υστερεί στο γεγονός ότι δεν απεικονίζει κατ' ανάγκη irreducible eSe -πρότυπα σε irreducible S -πρότυπα (πράγμα που έκανε (ανάποδα) "μερικώς" ο συναρτητής f , βλέπε Πρόγραμμα 6.2.1). Παρόλα αυτά με την βοήθεια του h μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο συναρτητή όπως θα δούμε παρακάτω.

Πρόταση 6.2.4. Έστω W irreducible eSe -πρότυπο της $\text{mode}Se$, τότε,

- i) Το $h(W)_{(e)}$ είναι γνήσιο S -υποπρότυπο του $h(W)$ και περιέχει κάθε άλλο γνήσιο S -υποπρότυπο του $h(W)$.
- ii) Το $h(W)_{(e)}$ είναι το μοναδικό maximal S -υποπρότυπο του $h(W)$.
- iii) Το $a(h(W))$ είναι irreducible S -πρότυπο της $\text{mod}S$.

Απόδειξη.

- i) $h(W)_{(e)} \subsetneq h(W)$: Πράγματι, από Πρόταση 6.2.2 και Πρόταση 6.2.3 έχουμε:

$$f(a(h(W))) \simeq f(h(W)) \simeq W \neq 0 \text{ (Ισομορφισμοί } eSe \text{ - προτύπων)}.$$

Από τα παραπάνω πρέπει $a(h(W)) \neq 0 \iff h(W)/h(W)_{(e)} \neq 0 \iff h(W)_{(e)} \subsetneq h(W)$.

Το $h(W)_{(e)}$ περιέχει κάθε άλλο γνήσιο S -υποπρότυπο του $h(W)$: Έστω V ένα γνήσιο S -υποπρότυπο του $h(W)$. Εφόσον το W είναι irreducible eSe -πρότυπο της $\text{mode}Se$ και $eh(W) = f(h(W)) \simeq W$ (Ισομορφισμός eSe -προτύπων) τότε και το $eh(W)$ είναι irreducible eSe -πρότυπο της $\text{mode}Se$. Τώρα, θεωρούμε το eSe -πρότυπο eV (βλέπε Παρατήρηση 6.2.1) και διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (α') Αν $eV = 0$: Τότε εξ' ορισμού (βλέπε Ορισμό 6.2.1) πρέπει $V \subseteq h(W)_{(e)}$ και τελειώσαμε.
- (β') Αν $eV \neq 0$: Τότε $0 \neq eV \subseteq eh(W) = \text{irreducible } eSe\text{-πρότυπο, άρα } eV = eh(W)$.
Δηλαδή,

$$h(W) \supsetneq V \supseteq SeV = Seh(W) \stackrel{(*)}{=} h(W), \text{ άτοπο.}$$

Μένει να αιτιολογήσουμε την (*). Πράγματι, $Seh(W) \subseteq h(W)$ (αφού $h(W) = S$ -πρότυπο), ανάποδα αν $x \in h(W) = Se \otimes_{eSe} W$ τότε $x = \sum_{i=1}^n s_i e \otimes w_i$ για κάποια $s_i \in S$, $w_i \in W$, δηλαδή $x = \sum_{i=1}^n s_i e \cdot (1_{Se} \otimes w_i) \in Seh(W)$.

- ii) $h(W)_{(e)} = \text{maximal}$: Καταρχάς (από i)) $h(W)_{(e)} \subsetneq h(W)$. Συνεχίζοντας, αν V S -πρότυπο με $h(W)_{(e)} \subseteq V \subseteq h(W)$, τότε από i) είτε $V = h(W)$ είτε $V \subsetneq h(W)$ και άρα $V = h(W)_{(e)}$.
- $h(W)_{(e)} = \text{μοναδικό maximal}$: Αν V ένα άλλο maximal S -υποπρότυπο του $h(W)$, τότε $V \subsetneq h(W)$, άρα (από i)) $V \subseteq h(W)_{(e)} \subsetneq h(W)$, όμως $V = \text{maximal}$ και έτσι $V = h(W)_{(e)}$.

iii) Άμεσο από ii) και το γεγονός ότι $a(h(W)) = h(W)/h(W)_{(e)}$ (βλέπε Παρατήρηση 6.2.4 i)).

□

Παρατήρηση 6.2.6. Έστω $a : \text{mod} S \rightarrow \text{mod} S$, $h : \text{mod}(eSe) \rightarrow \text{mod} S$ οι γνωστοί συναρτητές τότε ορίζεται ο συναρτητής:

$$h^* := ah : \text{mod}(eSe) \rightarrow \text{mod} S \text{ με}$$

$$h^*(W) = a(h(W)) = h(W)/h(W)_{(e)}$$

$$h^*(\theta : V \rightarrow W) = a(h(\theta)) = a(1_{Se} \otimes \theta) : a(h(V)) \rightarrow a(h(W)),$$

για κάθε $V, W \in \text{mod} eSe$ και $\theta : V \rightarrow W$ ομομορφισμό στην $\text{mod} eSe$.

Απόδειξη. Η h^* είναι καλά ορισμένος συναρτητής ως σύνθεση συναρτητών.

□

Πρόταση 6.2.5. i) Έστω $W \in \text{mod} eSe$ τότε $f(h^*(W)) = e(h(W)/h(W)_{(e)})$ και υπάρχει ισομορφισμός eSe -προτύπων:

$$\phi : W \rightarrow f(h^*(W)), w \mapsto e \otimes w + h(W)_{(e)}.$$

Ιδιαίτερος, $f(h^*(W)) \simeq W$ (Ισομορφισμός eSe -προτύπων).

ii) Η h^* απεικονίζει irreducible eSe -πρότυπα σε irreducible S -πρότυπα. (Δηλαδή αν V είναι irreducible eSe -πρότυπο της $\text{mod}(eSe)$ τότε το $h^*(V) = h(V)/h(V)_{(e)}$ είναι irreducible S -πρότυπο της $\text{mod} S$).

Απόδειξη.

i) Καταρχάς $f(h^*(W)) = f(a(h(W)))$ και από Πρόταση 6.2.3 και Πρόταση 6.2.2 έχουμε τους παρακάτω ισομορφισμούς eSe -προτύπων:

$$f(h^*(W)) = f(a(h(W))) \simeq f(h(W)) \simeq W \text{ (Ισομορφισμοί } eSe \text{ - προτύπων)}.$$

Όσο για την εύρεση του ισομορφισμού που κάνει τη δουλειά, έχουμε από τις Πρόταση 6.2.3, Πρόταση 6.2.2 του εξής ισομορφισμού eSe -προτύπων:

$$\begin{aligned} \phi : W &\rightarrow f(h(W)), w \mapsto e \otimes w \\ f(a_{h(W)}) &= a|_{eh(W)} : f(h(W)) \rightarrow f(a(h(W))), x \mapsto x + h(W)_{(e)} \end{aligned}$$

Η σύνθεση $f(a_{h(W)}) \circ \phi$ είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός.

ii) Έστω W irreducible eSe -πρότυπο της $\text{mod}(eSe)$, τότε (από Πρόταση 6.2.4) το $h^*(W) = a(h(W))$ είναι irreducible S -πρότυπο της $\text{mod} S$.

□

Σχόλιο. Η προηγούμενη πρόταση εκπληρώνει σχεδόν όλες μας τις προσδοκίες μας. Συγκεκριμένα φτιάξαμε ένα συναρτητή $\text{mod}(eSe) \longrightarrow \text{mod}S$ ώστε να αποτελεί δεξιά-μερικώς αντίστροφο του f και επιπλέον να απεικονίζει *irreducible* πρότυπα σε *irreducible* πρότυπα. Η h^* μπορεί να μην αποτελεί εν' γένη αριστερά-μερικώς αντίστροφη, αλλά μπορεί να αντιστρέφει τον f από τα αριστερά πάνω στα *irreducible* πρότυπα της $\text{mod}S$ όπως θα δούμε παρακάτω (πράγμα που μας αρκεί για να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα της παραγράφου).

Πρόταση 6.2.6. Έστω $V \in \text{mod}S$ *irreducible* πρότυπο με $f(V) = eV \neq 0$. Τότε $h^*(f(V)) = h(eV)/h(eV)_{(e)}$ και υπάρχει ισομορφισμός S -προτύπων έστω:

$$\phi : h^*(f(V)) \longrightarrow V, \quad se \otimes ev + h(f(V))_{(e)} \longmapsto sev, \quad \text{για κάθε } s \in S, v \in V.$$

Δηλαδή $h^*(f(V)) \simeq V$ (Ισομορφισμός S -προτύπων). (Αναλυτικά, $\frac{Se \otimes_e Se eV}{(Se \otimes_e Se eV)_{(e)}} \simeq V$).

Απόδειξη.

Έστω $\psi : Se \times eV \longrightarrow V, (se, ev) \longmapsto seev = sev$, όπου $s \in S, v \in V$. Η ϕ είναι άμεσα καλά ορισμένη και eSe -διπροσθετική (π.χ. $\psi(se \cdot (es'e), ev) = \psi((ses')e, ev) = ses'eev = see \underbrace{(s'eev)}_{\in V} = \psi(se, e(s'eev)) = \psi(se, (es'e) \cdot ev)$). Συνεπώς έπεται ένας ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων,

$$\beta : Se \otimes_{eSe} eV \longrightarrow V, \quad se \otimes ev \longmapsto seev = sev, \quad \forall s \in S, v \in V.$$

Άμεσα η β είναι και ομομορφισμός S -προτύπων. Επιπλέον, $Se \otimes_{eSe} eV = h(f(V))$ και ισχύουν τα παρακάτω:

$\text{Im}\beta = V$: Εφόσον $eV \neq 0$, τότε υπάρχει $v_1 \in V$, ώστε $ev_1 \neq 0$ και $\beta(1se \otimes ev_1) = 1seev_1 = ev_1 \neq 0$. Συνεπώς $0 \neq \text{Im}\beta \subseteq V = \text{irreducible } S\text{-πρότυπο}$, άρα $\text{Im}\beta = V$. (Σημείωση: αν και δεν μας χρειάζεται, εύκολα δείχνεται ότι $SeV = \text{Im}\beta$).

$\ker\beta = h(f(V))_{(e)}$: Εφόσον $Se \otimes_{eSe} eV = h(f(V))$ και $h(f(V))/\ker\beta \simeq \text{Im}\beta = V = \text{irreducible } S\text{-πρότυπο}$, τότε πρέπει $\ker\beta = \text{maximal } S\text{-υποπρότυπο του } h(f(V))$. Όμως από Πρόταση 6.2.1 (αφού $eV \neq 0, V = \text{irreducible } S\text{-πρότυπο}$) έχουμε ότι $f(V) = \text{irreducible } eSe\text{-πρότυπο}$ και άρα από Πρόταση 6.2.4 $\ker\beta = h(f(V))_{(e)}$.

Τελικά, $h^*(f(V)) = a(h(f(V))) = h(f(V))/h(f(V))_{(e)} = h(f(V))/\ker\beta \simeq \text{Im}\beta = V$ (Ισομορφισμός S -προτύπων). Μάλιστα η απεικόνιση που κάνει τη δουλειά (σύμφωνα με το 1^ο Θεώρημα Ισομορφισμών) είναι η

$$g : h(f(V))/\ker\beta \longrightarrow \text{Im}\beta, \quad x + \ker\beta \longmapsto \beta(x)$$

Ιδιαιτέρως, $\ker\beta = h(f(V))_{(e)}$ και αν $se \otimes ev \in h(f(V)) = Se \otimes_{eSe} eV$, τότε $g(se \otimes ev + h(f(V))_{(e)}) = \beta(se \otimes ev) = seev = sev$.

□

Θεώρημα 6.2.1. Έστω $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ένα *full set* από irreducible S -πρότυπα της $\text{mod}S$, τότε το σύνολο $\{eV_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, eV_\lambda \neq 0\}$ είναι *full set* από irreducible eSe -πρότυπα της $\text{mod}(eSe)$. Μάλιστα για κάθε $\lambda \in \Lambda$ με $eV_\lambda \neq 0$ ισχύει ότι,

$$V_\lambda \simeq h^*(eV_\lambda) = \frac{Se \otimes_{eSe} eV_\lambda}{(Se \otimes_{eSe} eV_\lambda)_{(e)}} \text{ (Ισομορφισμός } S \text{ - προτύπων).}$$

Απόδειξη.

Το $\{eV_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, eV_\lambda \neq 0\}$ = σύνολο από irreducible eSe -πρότυπα της $\text{mod}(eSe)$: άμεσα από Πρόταση 6.2.1.

Για κάθε $\lambda \neq \mu$ και $eV_\lambda, eV_\mu \neq 0$ πρέπει $eV_\lambda \not\simeq eV_\mu$: Πράγματι, αν είχαμε $g : eV_\lambda \rightarrow eV_\mu$ ισομορφισμός eSe -προτύπων στην $\text{mod}(eSe)$ τότε επειδή $h^* : \text{mod}(eSe) \rightarrow \text{mod}S$ είναι συναρτητής πρέπει η απεικόνιση $h^*(g) : h^*(eV_\lambda) \rightarrow h^*(eV_\mu)$ να είναι ισομορφισμός S -προτύπων. Συνεπώς από Πρόταση 6.2.6 έχουμε,

$$V_\lambda \simeq h^*(f(V_\lambda)) = h^*(eV_\lambda) \simeq h^*(eV_\mu) = h^*(f(V_\mu)) \simeq V_\mu \text{ (Ισομορφισμός } S \text{ - προτύπων).}$$

Το τελευταίο είναι άτοπο από υπόθεση για το σύνολο $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, άρα $eV_\lambda \not\simeq eV_\mu$.

Για κάθε irreducible eSe -πρότυπο της $\text{mod}(eSe)$ έστω W , υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ ώστε $eV_\lambda \simeq W$: Πράγματι, από Πρόταση 6.2.5 *ii*) πρέπει $h^*(W) = \text{irreducible } S\text{-πρότυπο της } \text{mod}S$ και από υπόθεση πρέπει να υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ και $g : h^*(W) \rightarrow V_\lambda$ (Ισομορφισμός S -προτύπων). Τώρα, επειδή $f : \text{mod}S \rightarrow \text{mod}(eSe)$ είναι συναρτητής πρέπει η $f(g) : f(h^*(W)) \rightarrow f(V_\lambda) = eV_\lambda$ να είναι ισομορφισμός eSe -προτύπων. Συνεπώς, από Πρόταση 6.2.5 έχουμε,

$$0 \neq W \simeq f(h^*(W)) \simeq eV_\lambda \text{ (Ισομορφισμοί } eSe \text{ - προτύπων)}$$

□

Σχόλιο. Το Θεώρημα 6.2.1 απαντάει στο ερώτημα που θέσαμε στη αρχή της παραγράφου. Παρ' όλα αυτά γεννάει ένα καινούργιο ερώτημα το οποίο λείπει:

$$\text{Πο είναι το σύνολο } \Lambda' := \{\lambda \in \Lambda \mid eV_\lambda \neq 0\};$$

Όπως θα δούμε στις παραγράφους 6.3 – 6.4, αυτό το σύνολο μπορεί να μεταβάλετε ανάλογα με την χαρακτηριστική του σώματος K .

Σχόλιο. Μία ενδιαφέρον ισοδύναμη παραλλαγή της υπόθεσης $eV \neq 0$ που θα μας χρησιμεύσει στην απόδειξη του θεωρήματος του James (βλέπε παράγραφο 6.4), πηγάζει από την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 6.2.7. Έστω $V \in \text{mod} S$, τότε ισχύουν τα εξής:

i) $\text{Hom}_S(Se, V) \simeq eV$ (Ισομορφισμός K -προτύπων).

ii) Αν V irreducible S -πρότυπο τότε,

$$eV \neq 0 \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } S\text{-προτύπων } \phi : Se \longrightarrow V.$$

(Δηλαδή $eV \neq 0 \iff$ το V είναι ομομορφική εικόνα του Se).

Απόδειξη.

i) Έστω $\phi : \text{Hom}_S(Se, V) \longrightarrow eV$, με $\phi(f) = f(e)$. Τότε,

ϕ καλά ορισμένη: Αρκεί να δείξουμε ότι $f(e) \in eV$, για κάθε $f \in \text{Hom}_S(Se, V)$. Πράγματι,

$$f(e) = f(e^2) \xrightarrow{f \in \text{Hom}_S(Se, V)} ef(e) \in eV.$$

ϕ 1-1: Πράγματι, έστω $f_1, f_2 \in \text{Hom}_S(Se, V)$ τότε:

$$\begin{aligned} \phi(f_1) = \phi(f_2) &\iff f_1(e) = f_2(e) \implies sf_1(e) = sf_2(e), \forall s \in S \implies \\ f_1(se) = f_2(se) \forall s \in S &\implies f_1 = f_2. \end{aligned}$$

ϕ ομομορφισμός K -προτύπων: Άμεσο.

ϕ επί: Έστω $ev \in eV$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση

$$f_v : Se \longrightarrow V, se \longmapsto (se) \cdot v, \text{ για κάθε } s \in S.$$

$f_v \in \text{Hom}_S(Se, V)$ (π.χ $f_v(s'(se)) = f_v(s'se) = (s'se) \cdot v = s' \cdot ((se) \cdot v) = s'f_v(se)$, για κάθε $s', s \in S$) και $f_v(e) = f_v(1Se) = ev$.

ii) Καταρχάς, $eV \neq 0 \xLeftrightarrow{i)} \text{Hom}_S(Se, V) \neq 0$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει $f : Se \longrightarrow V$ μη-μηδενικός ομομορφισμός S -προτύπων, οπότε $0 \neq \text{Im} f \leq V = \text{irreducible}$, πράγμα που σημαίνει $\text{Im} f = V$.

□

6.3 Εφαρμογή I. Specht πρότυπα και τα δυϊκά τους.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Στη παράγραφο αυτή στόχος μας είναι να εφαρμόσουμε την γενική θεωρία που αναπτύξαμε στο 6.2 πάνω στο συναρτητή του Schur $f : M_K(n, r) \longrightarrow \text{mod}KG(r)$, για $r \leq n$. Θα μελετήσουμε τα Specht πρότυπα και τον τρόπο που συνδέονται με την κατηγορία $\text{mod}KG(r)$ για γενική χαρακτηριστική του σώματος K . Παρ' ταύτα το κεντρικό θεώρημα της παραγράφου θα δίνει μία περιγραφή της $\text{mod}KG(r)$ στη περίπτωση όπου $chK = 0$.

Σύμβαση 6.3.1. Σε όλη την έκταση της παραγράφου 6.3 δουλεύουμε με $r \leq n$ και θα έχουμε τους εξής συμβολισμούς:

- i) $S = S_K(n, r)$ και $G = G(r)$. (Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό G όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε κυκλικά $KG(r)$ -πρότυπα με γεννήτορα x και θα γράφουμε KGx αντί $KG(r)x$).
- ii) $\omega = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$, $u \in I(n, r)$ με $u(i) = i$, για κάθε $i \in \underline{r}$ και $l \in I(n, r)$ με $l(x(s, t)) = s$, για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ (βλέπε Ορισμό 4.3.1).

Υπενθύμιση 6.3.1. i) a) Το σύνολο $\{\xi_{u\pi, u} \mid \pi \in G(r)\}$ είναι K -βάση του $S(\omega)$.
b) Υπάρχει ο παρακάτω ισομορφισμός K -αλγεβρών

$$\phi : S(\omega) \longrightarrow KG(r), \quad \xi_{u\pi, u} \longmapsto \pi, \quad \text{για κάθε } \pi \in G(r).$$

- ii) (1^ο Παραλλαγή του συναρτητή του Schur). Ορίζεται ο συναρτητής $f_\omega : \text{mod}S \longrightarrow \text{mod}S(\omega)$

$$\begin{aligned} f_\omega(V) &= V^\omega \\ f_\omega(\theta : V \longrightarrow W) &= \theta^\omega = \theta|_{V^\omega} : V^\omega \longrightarrow W^\omega, \end{aligned}$$

για κάθε $V, W \in \text{mod}S$ και $\theta : V \longrightarrow W$ ομομορφισμό στην $\text{mod}S$ (βλέπε Παρατήρηση 6.1.2).

- iii) (2^ο Παραλλαγή του συναρτητή του Schur). Ορίζεται ο συναρτητής $f_\omega : M_K(n, r) \longrightarrow \text{mod}KG(r)$

$$\begin{aligned} f_\omega(V) &= V^\omega \\ f_\omega(\theta : V \longrightarrow W) &= \theta^\omega = \theta|_{V^\omega} : V^\omega \longrightarrow W^\omega, \end{aligned}$$

για κάθε $V, W \in M_K(n, r)$ και $\theta : V \longrightarrow W$ ομομορφισμό στην $M_K(n, r)$. Όπου ξέρουμε ότι $V^\omega \in \text{mod}S(\omega)$ (βλέπε Παρατήρηση 6.1.2) και το V^ω το βλέπουμε σαν $KG(r)$ -πρότυπο με $V^\omega \in \text{mod}KG(r)$, όπως στη Παρατήρηση 6.1.4.

Υπενθύμιση 6.3.2. *i)* $D_{\lambda,K} := \text{span}_K\{(T_l : T_i) \mid i \in I(n, r)\}$, όπου $(T_l : T_i) := \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) c_{l,i\pi}$.

ii) $D_{\lambda,K} \subseteq {}^\lambda A_K(n, r) = A_K(n, r) \circ \xi_\lambda$ (βλέπε Πρόρισμα 4.3.2).

iii) $[R(T)] = \sum_{\pi \in R(T)} \pi \in KG(r)$, $\{C(T)\} = \sum_{\pi \in C(T)} s(\pi) \pi \in KG(r)$.

Παρατήρηση 6.3.1. *i)* $D_{\lambda,K}^\omega \subseteq {}^\lambda A_K(n, r)^\omega = \xi_\omega \circ A_K(n, r) \circ \xi_\lambda$.

ii) *a)* $\xi_\omega \circ c_{i,j} \circ \xi_\lambda = \begin{cases} c_{i,j} & i \sim l \text{ και } j \sim u \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

b) ${}^\lambda A_K(n, r)^\omega = \text{span}_K\{c_{l,u\pi} \mid \pi \in G(r)\} = \sum_{\pi \in G(r)} K c_{l,u\pi}$

Απόδειξη.

i) Άμεσο από Υπενθύμιση 6.3.2 *ii)*.

ii) *a)* Ξέρουμε (από Παρατήρηση 2.8.1) ότι το $A_K(n, r)$ είναι ΚΓ-διπρότυπο, οπότε $\xi_\omega \circ c_{i,j} \circ \xi_\lambda = \xi_\omega \circ (c_{i,j} \circ \xi_\lambda)$. Τώρα, από Πρόρισμα 2.8.1 έχουμε,

$$c_{i,j} \circ \xi_\lambda \xrightarrow{l \in \lambda} c_{i,j} \circ \xi_{l,l} = \sum_{s \in I(n, r)} \xi_{l,l}(c_{i,s}) c_{s,j} \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 2.1.1 iv)}} \xi_{l,l}(c_{i,i}) c_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & i \sim l \\ 0 & i \not\sim l \end{cases}.$$

Επιπλέον, πάλι με βάση το Πρόρισμα 2.8.1 έχουμε,

$$\xi_\omega \circ c_{i,j} \xrightarrow{u \in \omega} \xi_{u,u} \circ c_{i,j} = \sum_{s \in I(n, r)} \xi_{u,u}(c_{s,j}) c_{i,s} \xrightarrow{\text{Παρατήρηση 2.1.1 iv)}} \xi_{u,u}(c_{j,j}) c_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & j \sim u \\ 0 & j \not\sim u \end{cases}.$$

Επομένως, $\xi_\omega \circ c_{i,j} \circ \xi_\lambda = \xi_\omega \circ (c_{i,j} \circ \xi_\lambda) = \begin{cases} c_{i,j} & i \sim l \text{ και } j \sim u \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

b) $\text{span}_K\{c_{l,u\pi} \mid \pi \in G(r)\} \subseteq {}^\lambda A_K(n, r)^\omega$: Επειδή $l \sim l$ και $u\pi \sim u$, πρέπει

$$c_{l,u\pi} \xrightarrow{ii)a)} \xi_\omega \circ c_{l,u\pi} \circ \xi_\lambda \in {}^\lambda A_K(n, r)^\omega, \text{ για κάθε } \pi \in G(r).$$

Συνεπώς $\text{span}_K\{c_{l,u\pi} \mid \pi \in G(r)\} \subseteq {}^\lambda A_K(n, r)^\omega$.

${}^\lambda A_K(n, r)^\omega \subseteq \text{span}_K\{c_{l,u\pi} \mid \pi \in G(r)\}$: Έστω $x \in {}^\lambda A_K(n, r)^\omega$, τότε υπάρχει $c \in A_K(n, r)$ ώστε $x = \xi_\omega \circ c \circ \xi_\lambda$. Από Πρόρισμα 2.1.2 υπάρχουν $\{k_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}} \subseteq K$ ώστε $c = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} c_{i,j}$, επίσης θέτουμε $\mathcal{T}_{l,u} := \{(i, j) \in \mathcal{T} \mid i \sim l \text{ και } j \sim u\}$ και έχουμε,

$$x = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j} (\xi_\omega \circ c_{i,j} \circ \xi_\lambda) \xrightarrow{ii)a)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}_{l,u}} k_{i,j} c_{i,j}. (*)$$

Όμως για $(i, j) \in \mathcal{T}_{l,u}$, υπάρχουν $\sigma, \pi \in G(r)$, ώστε $i = l\pi$ και $j = u\sigma$, οπότε:

$$c_{i,j} = c_{l\pi, u\sigma} \xrightarrow{(l\pi, u\sigma) \sim (l, u\sigma\pi^{-1})} c_{l, u\sigma\pi^{-1}}.$$

Από το τελευταίο και (*) έχουμε ότι $x \in \text{span}_K\{c_{l, u\pi} \mid \pi \in G(r)\}$.

□

Πρόταση 6.3.1. *i) Το ${}^{\lambda}A_K(n, r) = A_K(n, r) \circ \xi_{\lambda}$ είναι αριστερό $S = S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $A_K(n, r)$, οπότε το ${}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega}$ είναι φυσιολογικά $S(\omega)$ -πρότυπο και ισοδύναμα $KG(r)$ -πρότυπο με $\pi \cdot x = \xi_{u\pi, u} \circ x$, για κάθε $x \in {}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega}$, $\pi \in G(r)$.*

ii) a) $c_{l, u\pi} = c_{l, u\pi'} \iff \pi' \in \pi R(T) \iff \pi' R(T) = \pi R(T)$.

b) Έστω $R = \text{σύνολο αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων της } R(T) \text{ στη } G(r)$, τότε το σύνολο $\{c_{l, u\pi} \mid \pi \in R\}$ αποτελεί K -βάση του ${}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega}$.

iii) Έστω $KG[R(T)] = \langle [R(T)] \rangle$ το κυκλικό $KG(r)$ -πρότυπο της $KG(r)$. Τότε Υπάρχει ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων έστω:

$$\phi = \phi_{\lambda, \omega} : {}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega} \longrightarrow KG[R(T)], \quad \mu \in \phi(c_{l, u\pi}) = \pi[R(T)], \text{ για κάθε } \pi \in G(r).$$

Ιδιαίτέρως το σύνολο $\{\pi[R(T)] \mid \pi \in R\}$ αποτελεί K -βάση του κυκλικού $KG(r)$ -προτύπου $KG[R(T)]$.

Απόδειξη.

i) Το ${}^{\lambda}A_K(n, r) = A_K(n, r) \circ \xi_{\lambda}$ είναι αριστερό $S = S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $A_K(n, r)$ άμεσα από Παρατήρηση 2.8.1 i), έπειτα από Παρατήρηση 6.1.2 το ${}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega}$ γίνεται φυσιολογικά $S(\omega)$ -πρότυπο και άρα από Παρατήρηση 6.1.4 γίνεται $KG(r)$ -πρότυπο με $\pi \cdot x = \xi_{u\pi, u} \circ x$, για κάθε $x \in {}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega}$, $\pi \in G(r)$.

ii) a) Έστω $\pi, \pi' \in G(r)$ τότε,

$$\begin{aligned} c_{l, u\pi} = c_{l, u\pi'} &\xLeftrightarrow{(*)} \exists \sigma \in R(T) \text{ ώστε } u\pi = u\pi'\sigma \iff u = u\pi'\sigma\pi^{-1} \xLeftrightarrow{(**)} \\ \pi'\sigma\pi^{-1} \in G_{\omega} = 1 &\iff \pi'\sigma = \pi \iff \pi' \in \pi R(T) \iff \pi' R(T) = \pi R(T). \end{aligned}$$

Η (*) ισχύει από Λήμμα 4.4.1 το ii) και η (**) ισχύει από Παρατήρηση 6.1.3.

b) ${}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega} = \text{span}_K\{c_{l, u\pi} \mid \pi \in R\}$: Άμεσα από Παρατήρηση 6.3.1 ii)b) και αυτό που δείξαμε στο ii)a).

$\{c_{l, u\pi} \mid \pi \in R\} = K$ -γραμμικά ανεξάρτητα: Επειδή $R = \text{σύνολο αντιπροσώπων αριστερών συμπλόκων της } R(T) \text{ στη } G(r)$ τότε από ii)a) όλα τα στοιχεία του $\{c_{l, u\pi}\}_{\pi \in R}$ είναι διάφορα ανά δύο. Συνεπώς από Παρατήρηση 2.1.1 έχουμε το ζητούμενο.

iii) Έστω R όπως στο ii)b) και θεωρούμε απεικόνιση $f : \{c_{l, u\pi}\}_{\pi \in R} \longrightarrow KG[R(T)]$ με $f(c_{l, u\pi}) = \pi[R(T)]$, για κάθε $\pi \in R$. Επειδή το $\{c_{l, u\pi}\}_{\pi \in R}$ είναι K -βάση του ${}^{\lambda}A_K(n, r)^{\omega}$, η f επεκτείνεται σε ομομορφισμό K -προτύπων έστω:

$\phi = \phi_{\lambda, \omega} : {}^\lambda A_K(n, r)^\omega \longrightarrow KG[R(T)]$, με $\phi(c_{l, u\pi}) = \pi[R(T)]$, για κάθε $\pi \in R$.

Ισχυρισμός. Ισχύει κάτι γενικότερο: $\phi(c_{l, u\pi}) = \pi[R(T)]$, για κάθε $\pi \in G(r)$.

Πράγματι, αν $\pi \in G(r)$ τότε εξ' ορισμού του R , υπάρχει $\sigma \in R$ ώστε $\pi R(T) = \sigma R(T)$. Άρα,

$$\phi(c_{l, u\pi}) \stackrel{ii)a)}{=} \phi(c_{l, u\sigma}) \stackrel{\sigma \in R}{=} \sigma[R(T)].$$

Οπότε αν δείξουμε ότι $\sigma[R(T)] = \pi[R(T)]$, ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. Πράγματι, εφόσον $\pi R(T) = \sigma R(T)$, τότε υπάρχει $\pi' \in R(T)$ ώστε $\pi\pi' = \sigma$, οπότε,

$$\sigma[R(T)] = \pi\pi'[R(T)] = \pi\pi' \sum_{s \in R(T)} s = \pi \sum_{s \in R(T)} \pi' s \stackrel{\pi' \in R(T) \leq G(r)}{=} \pi \sum_{s' \in R(T)} s' = \pi[R(T)].$$

Τελειώσαμε με τον ισχυρισμό και πάμε να δείξουμε ότι η ϕ είναι ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων.

Η ϕ είναι επί: Έστω $x \in KG[R(T)]$, τότε $x = k[R(T)]$ για κάποιο $k \in KG(r)$. Επιπλέον, υπάρχουν $\{k_\pi\}_{\pi \in G(r)} \subseteq K$ ώστε $k = \sum_{\pi \in G(r)} k_\pi \pi$, οπότε,

$$x = \left(\sum_{\pi \in G(r)} k_\pi \pi \right) [R(T)] = \sum_{\pi \in G(r)} k_\pi (\pi[R(T)]) \stackrel{\text{Ισχυρισμός}}{=} \sum_{\pi \in G(r)} k_\pi \phi(c_{l, u\pi}) = \phi \left(\sum_{\pi \in G(r)} k_\pi c_{l, u\pi} \right).$$

Η ϕ είναι 1-1: Έστω $x \in {}^\lambda A_K(n, r)^\omega$ με $\phi(x) = 0$. Από ii)b) υπάρχουν $\{k_\pi\}_{\pi \in R}$ ώστε $x = \sum_{\pi \in R} k_\pi c_{l, u\pi}$. Οπότε,

$$0 = \phi(x) = \phi \left(\sum_{\pi \in R} k_\pi c_{l, u\pi} \right) = \sum_{\pi \in R} k_\pi (\pi[R(T)]) = \sum_{\pi \in R} \sum_{\sigma \in R(T)} k_\pi \pi \sigma. (*)$$

Παρατήρηση. Για κάθε $\pi, \pi' \in R$, $\sigma, \sigma' \in R(T)$ ισχύει ότι: $\pi\sigma = \pi'\sigma' \iff \pi = \pi'$ και $\sigma = \sigma'$.

Πράγματι, αν $\pi\sigma = \pi'\sigma'$, τότε $\pi = \pi' \underbrace{\sigma'\sigma^{-1}}_{\in R(T)}$, άρα $\pi R(T) = \pi' R(T)$ και αναγκαστικά (αφού

$\pi, \pi' \in R$) έχουμε $\pi = \pi'$ και κατά συνέπεια $\sigma = \sigma'$. Η παρατήρηση αποδείχθηκε.

Με βάση την παρατήρηση έχουμε ότι όλα τα στοιχεία $\pi\sigma$ στο άθροισμα (*) είναι διακεκριμένα ανά δύο, άρα εφόσον το $G(r)$ αποτελεί K -βάση του $KG(r)$, έχουμε ότι $k_\pi = 0$, για κάθε $\pi \in R$. Οπότε $x = 0$.

Η ϕ είναι ομομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων: Επειδή η $\phi : {}^\lambda A_K(n, r)^\omega \longrightarrow KG[R(T)]$ είναι ομομορφισμός K -προτύπων και τα σύνολα $\{c_{l, u\pi}\}_{\pi \in R}$, $\{\pi\}_{\pi \in G(r)}$ αποτελούν K -βάσεις των ${}^\lambda A_K(n, r)^\omega$, $KG(r)$ αντίστοιχα, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(\sigma \cdot c_{l, u\pi}) = \sigma \cdot \phi(c_{l, u\pi})$, για κάθε $\sigma \in G(r)$. Πράγματι,

$$\sigma \cdot c_{l, u\pi} \stackrel{i)}{=} \xi_{u\sigma, u} \circ c_{l, u\pi} \stackrel{\text{Πόρισμα 2.8.1}}{=} \sum_{k \in I(n, r)} \xi_{u\sigma, u}(c_{k, u\pi}) c_{l, k}. (**)$$

Επίσης,

$$(u\sigma, u) \sim (k, u\pi) \iff \exists p \in G(r) \text{ ώστε } u\sigma p = k \text{ και } up = u\pi \iff \\ u\sigma p = k \text{ και } p\pi^{-1} \in G_\omega = \text{Stab}_{G(r)}(u) = 1 \iff u\sigma p = k \text{ και } p = \pi \implies u\sigma\pi = k$$

Άρα από (**) έχουμε $\sigma \cdot c_{l,u\pi} = \xi_{u\sigma,u}(c_{u\sigma\pi,u\pi})c_{l,u\sigma\pi} = c_{l,u\sigma\pi}$. Συνεπώς,

$$\phi(\sigma \cdot c_{l,u\pi}) = \phi(c_{l,u\sigma\pi}) = \sigma\pi[R(T)] = \sigma \cdot (\pi[R(T)]) = \sigma \cdot \phi(c_{l,u\pi}).$$

□

Υπενθύμιση 6.3.3. *i) Το $D_{\lambda,K}^\omega$ έχει K -βάση το $\{(T_l : T_i) \mid i \in \omega, T_i = \text{standard}\}$.*

- ii) a) $D_{\lambda,K}^\omega = \text{span}_K\{(T_l : T_{u\pi}) \mid \pi \in G(r)\}$
b) Το σύνολο $\{(T_l : T_{u\pi}) \mid \pi \in G(r), T_{u\pi} = \text{standard}\}$ αποτελεί K -βάση του $D_{\lambda,K}^\omega$.*

Απόδειξη.

Το *i)* είναι άμεσο από Πρόταση 4.6.1. Όσο για το *ii)* (από Παρατήρηση 6.1.3 *iii)*) τα *a), b)* είναι άμεσα Πρόταση 4.6.1.

□

Πρόταση 6.3.2. Έστω $\phi = \phi_{\lambda,\omega} : {}^\lambda A_K(n, r)^\omega \longrightarrow KG[R(T)]$ ο ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων που είδαμε πριν, τότε,

- i) $\phi((T_l : T_{u\pi})) = \pi\{C(T)\}[R(T)]$, για κάθε $\pi \in G(r)$.
ii) $\phi(D_{\lambda,K}^\omega) = KG\{C(T)\}[R(T)] = \langle \{C(T)\}[R(T)] \rangle =$ κυκλικό $KG(r)$ -πρότυπο της $KG(r)$.
iii) Η $\phi|_{D_{\lambda,K}^\omega} : D_{\lambda,K}^\omega \longrightarrow KG\{C(T)\}[R(T)]$ είναι ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων.*

Απόδειξη.

i) Έστω $\pi \in G(r)$ τότε,

$$\phi((T_l : T_{u\pi})) = \phi\left(\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)c_{l,u\pi\sigma}\right) = \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)\phi(c_{l,u\pi\sigma}) \xrightarrow{\text{Πρόταση 6.3.1 ii)}} \\ \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)\pi\sigma[R(T)] = \pi\left(\sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)\sigma[R(T)]\right) = \pi\{C(T)\}[R(T)].$$

ii) Εφόσον ϕ ομομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων (άρα ομομορφισμός και K -προτύπων) έχουμε,

$$\phi(D_{\lambda,K}^\omega) = \phi(\text{span}_K\{(T_l : T_{u\pi}) \mid \pi \in G(r)\}) = \text{span}_K\{\phi((T_l : T_{u\pi})) \mid \pi \in G(r)\} \xrightarrow{i)} \\ \text{span}_K\{\pi\{C(T)\}[R(T)] \mid \pi \in G(r)\} \xrightarrow{G(r)=K\text{-βάση του } KG(r)} KG\{C(T)\}[R(T)].$$

iii) Άμεσο από ii).

□

Ορισμός 6.3.1. Ορίζουμε $S_{T,K} := KG\{C(T)\}[R(T)] = \langle \{C(T)\}[R(T)] \rangle =$ κυκλικό $KG(r)$ –πρότυπο της $KG(r)$. Το $S_{T,K}$ θα λέγεται *Specht* πρότυπο.

Θεώρημα 6.3.1. (Περιγραφή της $modKG(r)$ μέσω των *Specht* προτύπων).

i) a) Υπάρχει ισομορφισμός $KG(r)$ –προτύπων έστω

$$\phi = \phi_{T,K} : D_{\lambda,K}^{\omega} \longrightarrow S_{T,K}, \text{ με } \phi((T_l : T_{u\pi})) = \pi\{C(T)\}[R(T)], \text{ για κάθε } \pi \in G(r).$$

b) Το σύνολο $\{\pi\{C(T)\}[R(T)] \mid \pi \in G(r), T_{u\pi} = \text{standard}\}$ αποτελεί K –βάση για το *Specht* πρότυπο $S_{T,K}$.

ii) Έστω $chK = 0$ τότε:

a) Το $S_{T,K}$ είναι *irreducible* $KG(r)$ –πρότυπο.

b) Για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, έστω T^λ ένα *basic* λ –tableau τότε θέτοντας $S_{\lambda,K} = S_{T^\lambda,K}$ έχουμε ότι το $\{S_{\lambda,K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι *full set* από *irreducible* $KG(r)$ –πρότυπα της $modKG(r)$.

Απόδειξη.

i) Είναι άμεσο από Πρόταση 6.3.2 και Υπενθύμιση 6.3.3.

ii) Κάνουμε απευθείας το b) από το οποίο έπεται άμεσα το a). Ξέρουμε από Πόρισμα 3.5.2, ότι το σύνολο $\{F_{\lambda,K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ αποτελεί *full set* από *irreducible* $K\Gamma$ –πρότυπα της $M_K(n, r)$. Όμως $chK = 0$ και (από Πόρισμα 5.4.1) $\Phi_{D_{\lambda,K}} = \Phi_{F_{\lambda,K}} (= S_\lambda)$, άρα (από Πόρισμα 3.5.2)

$$D_{\lambda,K} \simeq F_{\lambda,K} \text{ (Ισομορφισμός } K\Gamma\text{–προτύπων) για κάθε } \lambda \in \Lambda^+(n, r).$$

Συνεπώς το σύνολο $\{D_{\lambda,K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ αποτελεί *full set* από *irreducible* $K\Gamma$ –πρότυπα της $M_K(n, r)$. Ιδιαίτέρως (από Παρατήρηση 2.4.3 και Πόρισμα 2.4.1) το σύνολο $\{D_{\lambda,K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ αποτελεί *full set* από *irreducible* $S = S_K(n, r)$ –πρότυπα της $modS$. Οπότε (από Θεώρημα 6.2.1) το σύνολο $\{D_{\lambda,K}^{\omega} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r), D_{\lambda,K}^{\omega} \neq 0\}$ είναι *full set* από *irreducible* $S(\omega)$ –πρότυπα της $modS(\omega)$. Στη συνέχεια από Υπενθύμιση 6.3.3 i) (και το γεγονός ότι υπάρχουν $i \in I(n, r)$ ώστε $i \in \omega$ και $T_i = \text{standard}$) έχουμε ότι $D_{\lambda,K}^{\omega} \neq 0$, για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και έτσι:

$$\text{Το } \{D_{\lambda,K}^{\omega} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\} \text{ είναι } \text{full set από } \text{irreducible } S(\omega)\text{–πρότυπα της } modS(\omega).$$

Όμως (από Πρόταση 6.1.2) $S(\omega) \simeq KG(r)$ (Ισομορφισμός K –αλγεβρών) και άρα (από Παρατήρηση 6.1.4 και Πόρισμα 6.1.2) έχουμε ότι το σύνολο $\{D_{\lambda,K}^{\omega} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι *full set* από *irreducible* $KG(r)$ –πρότυπα της $modKG(r)$ (όπου $\pi \cdot x = \xi_{u\pi, u} \circ x$, για κάθε $x \in D_{\lambda,K}^{\omega}$, $\pi \in G(r)$). Τέλος $S_{T^\lambda, K} \simeq D_{\lambda,K}^{\omega}$ (Ισομορφισμός $KG(r)$ –προτύπων) για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και άρα,

Το $\{S_{T^\lambda, K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι full set από irreducible $KG(r)$ -πρότυπα της $\text{mod} KG(r)$.

□

Σχόλιο. Είδαμε ότι τα Specht πρότυπα συνδέονται άμεσα με τα πρότυπα $D_{\lambda, K}$. Όμως ξέρουμε ότι το πρότυπο $V_{\lambda, K}$ είναι το δυικό του $D_{\lambda, K}$, οπότε είναι εύλογο κανείς να μελετήσει τα δυικά Specht πρότυπα μέσω του $V_{\lambda, K}$.

Υπενθύμιση 6.3.4. i) Το $V_{\lambda, K}$ αποτελεί $S_K(n, r)$ -υποπρότυπο του $E^{\otimes r}$.

$$ii) \xi_a \cdot e_i = \begin{cases} e_i & i \in a \\ 0 & i \notin a \end{cases}, \text{ για κάθε } i \in I(n, r), a \in \Lambda(n, r).$$

iii) Το σύνολο $\{e_i \mid i \in I(n, r), i \in a\}$ αποτελεί K -βάση του $(E^{\otimes r})^a$.

Πρόταση 6.3.3. i) Το σύνολο $\{e_{u\pi} \mid \pi \in G(r)\}$ είναι K -βάση του $(E^{\otimes r})^\omega$.

ii) Ξέρουμε ότι το $(E^{\otimes r})^\omega$ είναι $S(\omega)$ -πρότυπο, ισοδύναμα $KG(r)$ -πρότυπο με:

$$\sigma \cdot e_{u\pi} = \xi_{u\sigma, u} \cdot e_{u\pi} = e_{u\sigma\pi}, \text{ για κάθε } \sigma, \pi \in G(r).$$

iii) Υπάρχει ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων έστω,

$$\phi : (E^{\otimes r})^\omega \longrightarrow KG(r), \text{ με } \phi(e_{u\pi}) = \pi, \text{ για κάθε } \pi \in G(r).$$

Απόδειξη.

i) Άμεσο από Υπενθύμιση 6.3.4 και Παρατήρηση 6.1.3 iii)

ii) Αυτό που θέλει έλεγχο είναι η σχέση $\xi_{u\sigma, u} \cdot e_{u\pi} = e_{u\sigma\pi}$ (τα υπόλοιπα έπονται από την Παρατήρηση 6.1.4). Πράγματι, $\xi_{u\sigma, u} \cdot e_{u\pi} = \sum_{i \in I(n, r)} \xi_{u\sigma, u}(c_{i, u\pi}) e_i$. Επιπλέον,

$$(u\sigma, u) \sim (i, u\pi) \iff \exists \tau \in G(r) : u\sigma\tau = i \text{ και } u\tau = u\pi,$$

όμως $u\tau = u\pi \iff \tau\pi^{-1} \in G_\omega = \text{Stab}_{G(r)}(u) = 1 \iff \tau = \pi$. Οπότε $(u\sigma, u) \sim (i, u\pi) \iff u\sigma\pi = i$, συνεπώς,

$$\xi_{u\sigma, u} \cdot e_{u\pi} = \sum_{i \in I(n, r)} \xi_{u\sigma, u}(c_{i, u\pi}) e_i = \xi_{u\sigma, u}(c_{u\sigma\pi, u\pi}) e_{u\sigma\pi} \xrightarrow{(u\sigma, u) \sim (u\sigma\pi, u\pi)} e_{u\sigma\pi}$$

iii) Τα σύνολα $\{e_{u\pi}\}_{\pi \in G(r)}$, $\{\pi\}_{\pi \in G(r)}$ είναι K -βάσεις των $(E^{\otimes r})^\omega$, $KG(r)$ αντίστοιχα, ιδιαιτέρως $\dim_K(E^{\otimes r})^\omega = \dim_K KG(r)$. Άρα υπάρχει ισομορφισμός K -προτύπων έστω,

$$\phi : (E^{\otimes r})^\omega \longrightarrow KG(r), \quad \mu \in \phi(e_{u\pi}) = \pi, \quad \text{για κάθε } \pi \in G(r).$$

Επιπλέον από ii) έχουμε $\phi(\sigma \cdot e_{u\pi}) = \phi(e_{u\sigma\pi}) = \sigma\pi = \sigma \cdot \phi(e_{u\pi})$, για κάθε $\pi \in G(r)$. Οπότε (από αυτά που αναφέραμε πάνω) η ϕ πρέπει να είναι και ομομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων, άρα ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων.

□

Υπενθύμιση 6.3.5. i) Το $V_{\lambda,K}^\omega$ έχει K -βάση το $\{b_i \mid i \in \omega, T_i = \text{standard}\}$.

ii) a) $V_{\lambda,K}^\omega = \text{span}_K\{b_{u\pi} \mid \pi \in G(r)\}$

b) Το σύνολο $\{b_{u\pi} \mid \pi \in G(r), T_{u\pi} = \text{standard}\}$ αποτελεί K -βάση του $V_{\lambda,K}^\omega$.

Απόδειξη. Άμεσα από Πρόταση 5.4.1 και Παρατήρηση 6.1.3 iii).

□

Πρόταση 6.3.4. Έστω $\phi : (E^{\otimes r})^\omega \longrightarrow KG(r)$ ο ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων που είδαμε πριν, τότε,

i) a) $b_{u\pi} = e_u\pi[R(T)]\{C(T)\}$, για κάθε $\pi \in G(r)$

b) $\phi(b_{u\pi}) = \pi[R(T)]\{C(T)\}$.

ii) $\phi(V_{\lambda,K}^\omega) = KG[R(T)]\{C(T)\} = \langle [R(T)]\{C(T)\} \rangle =$ κυκλικό $KG(r)$ -υποπρότυπο της $KG(r)$.

iii) Η απεικόνιση $\phi|_{V_{\lambda,K}^\omega} : V_{\lambda,K}^\omega \longrightarrow KG[R(T)]\{C(T)\}$ είναι ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων.

Απόδειξη.

i) a) Καταρχάς, $b_{u\pi} = \xi_{u\pi, lfl} = \xi_{u\pi, lel}\{C(T)\} \xrightarrow{\text{Λήμμα 5.3.1}} (\sum_{h \in [u\pi]_{R(T)}} e_h)\{C(T)\}$. Επιπλέον, $u\pi\sigma \neq u\pi\sigma'$ για κάθε $\sigma, \sigma' \in R(T)$ με $\sigma \neq \sigma'$ (αφού αν $u\pi\sigma = u\pi\sigma'$, τότε από Παρατήρηση 6.1.3 iii) πρέπει $\pi\sigma = \pi\sigma' \iff \sigma = \sigma'$). Συνεπώς

$$b_{u\pi} = (\sum_{\sigma \in R(T)} e_{u\pi\sigma})\{C(T)\} = e_u\pi(\sum_{\sigma \in R(T)} \sigma)\{C(T)\} = e_u\pi[R(T)]\{C(T)\}.$$

b) Έστω $\pi \in G(r)$ τότε,

$$\begin{aligned} \phi(b_{u\pi}) &= \phi(e_u\pi[R(T)]\{C(T)\}) = \phi(\sum_{\tau \in R(T)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)e_{u\pi\tau\sigma}) \xrightarrow{\text{Πρόταση 6.3.3}} \\ &\sum_{\tau \in R(T)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma)\pi\tau\sigma = \pi[R(T)]\{C(T)\}. \end{aligned}$$

ii) Επειδή η ϕ είναι ομομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων (άρα και K -προτύπων) έχουμε:

$$\begin{aligned}\phi(V_{\lambda,K}^\omega) &= \phi(\text{span}_K\{b_{u\pi} \mid \pi \in G(r)\}) = \text{span}_K\{\phi(b_{u\pi}) \mid \pi \in G(r)\} \stackrel{i)}{=} \\ &\text{span}_K\{\pi[R(T)]\{C(T)\} \mid \pi \in G(r)\} \stackrel{G(r)=K\text{-βάση του } KG(r)}{=} KG[R(T)]\{C(T)\}.\end{aligned}$$

iii) Άμεσο από ii).

□

Ορισμός 6.3.2. Ορίζουμε $\bar{S}_{T,K} := KG[R(T)]\{C(T)\} = \langle [R(T)]\{C(T)\} \rangle =$ κυκλικό $KG(r)$ -πρότυπο της $KG(r)$. Το $\bar{S}_{T,K}$ θα λέγεται δυϊκό Specht πρότυπο.

Θεώρημα 6.3.2. (Περιγραφή της $\text{mod}KG(r)$ μέσω των δυϊκών Specht προτύπων).

i) α) Υπάρχει ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων έστω

$$\phi = \bar{\phi}_{T,K} : V_{\lambda,K}^\omega \longrightarrow \bar{S}_{T,K}, \text{ με } \phi(b_{u\pi}) = \pi[R(T)]\{C(T)\}, \text{ για κάθε } \pi \in G(r).$$

β) Το σύνολο $\{\pi[R(T)]\{C(T)\} \mid \pi \in G(r), T_{u\pi} = \text{standard}\}$ αποτελεί K -βάση για του δυϊκού Specht πρότυπου $\bar{S}_{T,K}$.

ii) Έστω $chK = 0$ τότε:

α) Το $\bar{S}_{T,K}$ είναι irreducible $KG(r)$ -πρότυπο.

β) Για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, έστω T^λ ένα basic λ -tableaux τότε θέτοντας $\bar{S}_{\lambda,K} = \bar{S}_{T^\lambda,K}$ έχουμε ότι το $\{\bar{S}_{\lambda,K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι full set από irreducible $KG(r)$ -πρότυπα της $\text{mod}KG(r)$.

Απόδειξη.

i) Είναι άμεσο από Πρόταση 6.3.4 και Υπενθύμιση 6.3.5.

ii) Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτή του Θεωρήματος 6.3.1, βάζοντας $V_{\lambda,K}$ στη θέση του $D_{\lambda,K}$ (αυτό γιατί $\Phi_{V_{\lambda,K}} \stackrel{\text{Πρόταση 5.1.1}}{=} \Phi_{D_{\lambda,K}}$)

□

Σχόλιο. Οπότε καταφέραμε να περιγράψουμε την κατηγορία $\text{mod}KG(r)$ μέσω των Specht προτύπων $S_{T,K}, \bar{S}_{T,K}$. Αυτό που εκκρεμεί να αιτιολογηθεί, είναι η ονομασία περί δυικότητας των $S_{T,K}, \bar{S}_{T,K}$, πράγμα που πραγματεύεται το επόμενο Θεώρημα.

Παρατήρηση 6.3.2. *i)* (Υπενθύμιση). Ξέρουμε ότι υπάρχει *non-singular, contravariant form* έστω $(\cdot, \cdot) : V_{\lambda, K} \times D_{\lambda, K} \longrightarrow K$.

ii) Ο περιορισμός $(\cdot, \cdot) : V_{\lambda, K}^\omega \times D_{\lambda, K}^\omega \longrightarrow K$ είναι *non-singular, K-bilinear form των $KG(r)$ -προτύπων $V_{\lambda, K}^\omega, D_{\lambda, K}^\omega$ και μάλιστα:*

$$(\pi \cdot x, y) = (x, \pi^{-1} \cdot y), \text{ για κάθε } x \in V_{\lambda, K}^\omega, y \in D_{\lambda, K}^\omega, \pi \in G(r).$$

Απόδειξη.

i) Το ξέρουμε από Ορισμό 5.1.2 και Πόρισμα 5.3.1.

ii) Η $(\cdot, \cdot) : V_{\lambda, K}^\omega \times D_{\lambda, K}^\omega \longrightarrow K$ είναι *non-singular, K-bilinear form* άμεσα από Παρατήρηση 3.3.3. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} (\pi \cdot x, y) &\stackrel{\text{Παρατήρηση 6.1.4}}{=} (\xi_{u\pi, u} \cdot x, y) = (x, J(\xi_{u\pi, u}) \cdot y) = (x, \xi_{u, u\pi} \cdot y) \stackrel{(u, u\pi) \sim (u\pi^{-1}, u)}{=} \\ &= (x, \xi_{u\pi^{-1}, u} \cdot y) = (x, \pi^{-1} \cdot y). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.3.3. Υπάρχει *invariant, K-bilinear form* έστω $(\cdot, \cdot)_S : \bar{S}_{T, K} \times S_{T, K} \longrightarrow K$ ώστε:

$$(\pi[R(T)]\{C(T)\}, \pi'\{C(T)\}[R(T)])_S = (b_{u\pi}, (T_l : T_{u\pi'})) = \Omega(u\pi, u\pi') = \sum_{\sigma \in A_{\pi, \pi'}} s(\sigma)1_K,$$

όπου $A_{\pi, \pi'} = \{\sigma \in C(T) \mid \text{τα } u\pi, u\pi'\sigma \text{ ανήκουν στην ίδια } R(T)\text{-τροχιά}\}$, για κάθε $\pi, \pi' \in G(r)$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τους γνωστούς ισομορφισμούς $KG(r)$ -προτύπων (άρα και K -προτύπων) έστω

$$\phi = \phi_{T, K} : D_{\lambda, K}^\omega \longrightarrow S_{T, K} \text{ και } \psi = \bar{\phi}_{T, K} : V_{\lambda, K}^\omega \longrightarrow \bar{S}_{T, K}$$

(βλέπε Θεώρημα 6.3.1 και Θεώρημα 6.3.2). Τότε από Παρατήρηση 6.3.2 *ii)* ορίζεται (άμεσα) η εξής *non-singular, K-bilinear form* :

$$(\cdot, \cdot)_S : \bar{S}_{T, K} \times S_{T, K} \longrightarrow K, \text{ με } (x, y)_S := (\phi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} (\pi[R(T)]\{C(T)\}, \pi'\{C(T)\}[R(T)])_S &= (\phi^{-1}(\pi[R(T)]\{C(T)\}), \psi^{-1}(\pi'\{C(T)\}[R(T)])) = \\ &= (b_{u\pi}, (T_l : T_{u\pi'})) \stackrel{\text{Ορισμός 5.3.4}}{=} \Omega(u\pi, u\pi') \stackrel{\text{Παρατήρηση 5.3.1}}{=} \sum_{\sigma \in A_{\pi, \pi'}} s(\sigma). \end{aligned}$$

Η $(\cdot, \cdot)_S$ είναι *invariant* : Έστω $x \in \bar{S}_{T, K}$, $y \in S_{T, K}$ και $\pi \in G(r)$ τότε,

$$\begin{aligned} (\pi \cdot x, \pi \cdot y)_S &= (\phi^{-1}(\pi \cdot x), \psi^{-1}(\pi \cdot y)) = (\pi \cdot \phi^{-1}(x), \pi \cdot \psi^{-1}(y)) \stackrel{\text{Παρατήρηση 6.3.2}}{=} \\ &= (\phi^{-1}(x), \pi^{-1} \cdot \pi \cdot \psi^{-1}(y)) = (\phi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)) = (x, y)_S \end{aligned}$$

□

6.4 Εφαρμογή II. Απλά $KG(r)$ -πρότυπα, $chK = p$.

Παρακάτω, K άπειρο σώμα, $\Gamma = \Gamma_K = GL_n(K)$, $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \longrightarrow \underline{r}$ basic λ -tableaux.

Στη παράγραφο 6.3 δώσαμε μία περιγραφή της κατηγορίας $modKG(r)$ όταν $chK = 0$ (για $r \leq n$). Σε αυτή τη παράγραφο, θα δούμε ότι για $chK = p$ τα πράγματα είναι διαφορετικά.

Κίνητρο. Ξέρουμε ότι το σύνολο $\{F_{\lambda,K} \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι full set από irreducible πρότυπα στη $M_K(n, r) \iff$ στην $modS_K(n, r)$. Άρα από Θεώρημα 6.2.1 και Παρατήρηση 6.1.4 το σύνολο $\{F_{\lambda,K}^\omega \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r), F_{\lambda,K}^\omega \neq 0\}$ αποτελεί full set από irreducible της $modKG(r)$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1 με τη βοήθεια ότι $chK = 0$ είδαμε πως $F_{\lambda,K}^\omega \simeq D_{\lambda,K}^\omega \neq 0$, για κάθε $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ και άρα το σύνολο $\{F_{\lambda,K}^\omega \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r)\}$ είναι full set από irreducible πρότυπα στη $modKG(r)$. Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το εξής:

Πιο είναι το σύνολο $\{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid F_{\lambda,K}^\omega \neq 0\}$ όταν $chK = p$;

Ξεκινάμε την μελέτη μας, με κάποιες βασικές υπενθυμίσεις και συμβάσεις.

Σύμβαση 6.4.1. Σε όλη την έκταση της παραγράφου 6.4 δουλεύουμε για $r \leq n$ και θα έχουμε τους εξής συμβολισμούς:

- i) $S = S_K(n, r)$ και $G = G(r)$. (Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό G όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε κυκλικά $KG(r)$ -πρότυπα με γεννήτορα x και θα γράφουμε KGx αντί $KG(r)x$).
- ii) $\omega = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0) \in \Lambda^+(n, r)$, $u \in I(n, r)$ με $u(i) = i$, για κάθε $i \in \underline{r}$ και $l \in I(n, r)$ με $l(x(s, t)) = s$, για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ (βλέπε Ορισμό 4.3.1).

Παρατήρηση 6.4.1. Έστω $X_{\lambda,K} := D_{\lambda,K}^{min}$, τότε

$$X_{\lambda,K}^\omega \simeq F_{\lambda,K}^\omega \text{ (Ισομορφισμός } KG(r)\text{-προτύπων), για κάθε } \lambda \in \Lambda^+(n, r).$$

Ιδιαίτερος το σύνολο $\{X_{\lambda,K}^\omega \mid \lambda \in \Lambda^+(n, r), X_{\lambda,K}^\omega \neq 0\}$ είναι full set από irreducible της $modKG(r)$.

Απόδειξη. Ξέρουμε (από Πρόταση 5.4.6) ότι $F_{\lambda,K} \simeq D_{\lambda,K}^{min} = X_{\lambda,K}$ (Ισομορφισμός KG -προτύπων $\iff$ S -προτύπων). Αν $\theta : F_{\lambda,K} \longrightarrow D_{\lambda,K}^{min}$ ο ισομορφισμός S -προτύπων τότε (από Παρατήρηση 6.2.1) η απεικόνιση $f_\omega(\theta) = \theta|_{F_{\lambda,K}^\omega} : F_{\lambda,K}^\omega \longrightarrow X_{\lambda,K}^\omega$ είναι ισομορφισμός $S(\omega)$ -προτύπων, ισοδύναμα (από Παρατήρηση 6.1.4) ισομορφισμός $KG(r)$ -προτύπων. Το ιδιαίτερος έπεται άμεσα από αυτά που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου (βλέπε Κίνητρο στην αρχή).

□

Σχόλιο. Με βάση τη τελευταία παρατήρηση μπορούμε να στρέψουμε τη προσοχή μας στην μελέτη του συνόλου $\{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid X_{\lambda, K}^\omega \neq 0\}$ καθώς για το $X_{\lambda, K} = D_{\lambda, K}^{min}$ έχουμε αρκετές πληροφορίες. Ξεκινάμε λοιπόν την προεργασία για το κεντρικό θεώρημα με ένα υπολογιστικό λήμμα πάνω στο πρότυπο $D_{\lambda, K}^{min}$.

Λήμμα 6.4.1.

$$i) \quad X_{\lambda, K} = D_{\lambda, K}^{min} = span_K\{\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in I(n, r)\} \quad \text{και} \quad \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} (T_l : T_h).$$

$$ii) \quad X_{\lambda, K}^\omega = span_K\{\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in \omega\} \quad \text{και} \quad \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{\sigma \in R(T)} (T_l : T_{i\sigma}), \quad \text{για κάθε } i \in \omega.$$

Απόδειξη.

i) Το ξέρουμε από Παρατήρηση 5.4.2

ii) $span_K\{\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in \omega\} \subseteq X_{\lambda, K}^\omega$: Πράγματι, αν $i \in \omega$ τότε,

$$\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = (\xi_{i, i} \xi_{i, l}) \circ (T_l : T_l) = \xi_\omega \circ (\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l)) \in X_{\lambda, K}^\omega.$$

Το τελευταίο ανήκει στο $X_{\lambda, K}^\omega$, καθώς (από i)) $\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \in D_{\lambda, K}^{min} = X_{\lambda, K}$.

$X_{\lambda, K}^\omega \subseteq span_K\{\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in \omega\}$: Έστω $x \in X_{\lambda, K}^\omega$, τότε (από i)) υπάρχουν $\{k_i\}_{i \in I(n, r)}$ ώστε $x = \sum_{i \in I(n, r)} k_i(\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l))$ και επιπλέον $\xi_\omega x = x$. Οπότε,

$$x = \xi_\omega x = \sum_{i \in I(n, r)} k_i((\xi_{u, u} \xi_{i, l}) \circ (T_l : T_l)).$$

Τώρα, αν $u \approx i \iff i \notin \omega$, τότε $\xi_{u, u} \xi_{i, l} = 0$. Ενώ αν $u \sim i \iff i \in \omega$, τότε $\xi_{u, u} = \xi_{i, i}$ και άρα $\xi_{u, u} \xi_{i, l} = \xi_{i, l}$. Οπότε, $x = \sum_{i \in I(n, r), i \in \omega} k_i(\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l)) \in span_K\{\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) \mid i \in \omega\}$.

$$\xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{\sigma \in R(T)} (T_l : T_{i\sigma}), \quad \text{για κάθε } i \in \omega: \quad \text{Καταρχάς, } \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} (T_l : T_h).$$

Τώρα, εφόσον $i \in \omega$, έπεται ότι: $i\pi \neq i\sigma$ για κάθε $\pi, \sigma \in R(T)$ με $\pi \neq \sigma$. (*)

Πράγματι, εφόσον $i \sim u$ τότε υπάρχει $\tau \in G(r)$ ώστε $i = u\tau$, οπότε,

$$i\pi = i\sigma \iff \pi\sigma^{-1} \in Stab_{G(r)}(i) = \tau Stab_{G(r)}(u)\tau^{-1} = \tau G_\omega \tau^{-1} = 1 \iff \pi = \sigma.$$

$$\text{Συνεπώς, } \xi_{i, l} \circ (T_l : T_l) = \sum_{h \in [i]_{R(T)}} (T_l : T_h) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\sigma \in R(T)} (T_l : T_{i\sigma}).$$

□

Παρατήρηση 6.4.2. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n, r)$ και $T = T^\lambda : [\lambda] \rightarrow \underline{r}$ ένα basic λ -tableaux.

Τότε, το πλήθος των στηλών μήκους q είναι
$$= \begin{cases} \lambda_q - \lambda_{q+1} & 1 \leq q \leq n-1 \\ \lambda_n & q = n \end{cases}.$$

Απόδειξη.

Το ζητούμενο έπεται άμεσα κοιτώντας τον πίνακα που αναπαριστά το basic λ -tableaux έστω:

$$\begin{array}{cccccccc} x(1, 1) & x(1, 2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x(1, \lambda_1) \\ x(2, 1) & x(2, 2) & \cdots & \cdots & \cdots & x(2, \lambda_2) & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & & \\ x(n, 1) & x(n, 2) & \cdots & x(n, \lambda_n) & & & & \end{array}$$

□

Ορισμός 6.4.1. Ένα partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n, r)$ θα λέγεται column p -regular αν:

$$0 \leq \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n \leq p - 1.$$

Ορισμός 6.4.2. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n, r)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το conjugate partition και $T = T^\lambda : [\lambda] \rightarrow \underline{r}$ ένα basic λ -tableaux, τότε:

i) (Υπενθύμιση) Για κάθε $q \in \{1, \dots, \lambda_1\}$ ορίζεται η q -στήλη του T να είναι το σύνολο $C_q(T) = C_q := \{x(1, q), \dots, x(\mu_q, q)\}$.

ii) Ορίζεται η υποομάδα $R_C(T)$ του $R(T)$ που διατηρεί το σύνολο των στηλών του T . Δηλαδή,

$$R_C(T) := \{\theta \in R(T) \mid \text{για κάθε } t \in \{1, \dots, \lambda_1\}, \text{ υπάρχει } q_t \in \{1, \dots, \lambda_1\} \text{ ώστε } \theta(C_t) = C_{q_t}\}.$$

(Προσοχή, τα στοιχεία της $R_C(T)$ διατηρούν το σύνολο των στηλών και όχι κατ' ανάγκη τις στήλες).

Λήμμα 6.4.2. (Μέρος I)

i) $|R_C(T)| = (\lambda_1 - \lambda_2)! \cdot \dots \cdot (\lambda_{n-1} - \lambda_n)! \cdot \lambda_n!$.

ii) $(T_l : T_i) = (T_l : T_{i\theta})$, για κάθε $i \in I(n, r)$, $\theta \in R_C(T)$.

Απόδειξη.

i) Έστω $\theta \in R_C(T)$, επειδή θ 1-1 και επί τότε $\mu_t = l(C_t) = l(\theta(C_t)) = l(C_{q_t}) = \mu_{q_t}$ (όπου με l εννοούμε το μήκος της στήλης). Επίσης επειδή $\theta \in R_C(T) \subseteq R(T)$, πρέπει να στέλνει στοιχεία της s -γραμμής της στήλης C_t σε στοιχεία της s -γραμμής της στήλης C_{q_t} δηλαδή,

$$\theta(x(s, t)) = x(s, q_t) \text{ για κάθε } s = 1, \dots, \mu_t.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} R_C(T) &= \{\theta \in G(r) \mid \forall t \in \{1, \dots, \lambda_1\}, \exists q_t \in \{1, \dots, \lambda_1\} \text{ ώστε } \theta(x(s, t)) = x(s, q_t) \forall s = 1, \dots, \mu_t\} \\ &= \{\theta \in G(r) \mid \theta \text{ ανταλλάζει στήλες ίδιου μήκους του } T\} \end{aligned}$$

Όπου όταν λέμε ότι η θ ανταλλάζει δύο στήλες ίδιου μήκους έστω C_a, C_b , εννοούμε $\theta(x(s, a)) = x(s, b)$ για κάθε $s = 1, \dots, \mu_a = \mu_b$.

Με βάση την περιγραφή που δώσαμε για το $R_C(T)$, για να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων του αρκεί να μετρήσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να εναλλάξουμε τις στήλες ίδιου μήκους του basic λ -tableaux T .

Έστω λοιπόν $\theta \in R_C(T)$ και $q \in \{1, \dots, n\}$. Θέτουμε με m_q το πλήθος των στηλών μήκους q και θα δείξουμε ότι οι πιθανές εναλλαγές μεταξύ των στηλών μήκους q είναι $m_q!$. Πράγματι αν $C_1^{(q)}, \dots, C_{m_q}^{(q)}$ όλες οι στήλες μήκους q , τότε επειδή $\theta = 1-1$ και επί και τα σύνολα $C_1^{(q)}, \dots, C_{m_q}^{(q)}$ είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε:

$$\begin{aligned} \theta(C_1^{(q)}) &= m_q - \epsilon_{\text{πιλογής}} \\ \theta(C_2^{(q)}) &= (m_q - 1) - \epsilon_{\text{πιλογής}} \\ &\vdots \\ \theta(C_{m_q}^{(q)}) &= 1 - \epsilon_{\text{πιλογή}} \end{aligned}$$

Το q ήταν τυχόν και εζ' ορισμού του basic λ -tableaux έχουμε ότι $\underline{r} = \bigsqcup_{q=1}^n (\bigsqcup_{j=1}^{m_q} C_j^{(q)})$ (ξένες ενώσεις), άρα για την $\theta : \underline{r} \longrightarrow \underline{r}$ έχουμε,

$$m_1! \cdot \dots \cdot m_n! \stackrel{\text{Παρατήρηση 6.4.2}}{=} (\lambda_1 - \lambda_2)! \cdot \dots \cdot (\lambda_{n-1} - \lambda_n)! \cdot \lambda_n! \text{ το πλήθος επιλογής.}$$

ii) Έστω $i \in I(n, r)$, $\theta \in R_C(T)$, τότε ξέρουμε από Πρόταση 4.2.1 ότι:

$$\begin{aligned} (T_l : T_i) &= \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(c_{l_{x(s,t)} i_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t} = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(c_{s i_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t} \cdot (*) \\ (T_l : T_{i\theta}) &= \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(c_{l_{x(s,t)} (i\theta)_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t} = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(c_{s (i\theta)_{x(s',t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t}. \end{aligned}$$

Τώρα, επειδή $\theta \in R_C(T)$ (είδαμε στο i)) ότι: $\forall t \in \{1, \dots, \lambda_1\}$ υπάρχει (μοναδικό επειδή T, θ είναι 1-1) $q_t \in \{1, \dots, \lambda_1\}$ ώστε $\theta(x(s, t)) = x(s, q_t) \forall s = 1, \dots, \mu_t$. Οπότε,

$$(T_l : T_{i\theta}) = \prod_{t=1}^{\lambda_1} \det(c_{s i_{x(s',q_t)}})_{s,s'=1,\dots,\mu_t} \cdot (**)$$

Με βάση αυτό που αναφέραμε πάνω, η αντιστοιχία $q : \{1, \dots, \lambda_1\} \longrightarrow \{1, \dots, \lambda_1\}$, $t \longmapsto q_t$ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί. Άρα οι όροι του γινομένου $(**)$ είναι ίδιοι με τους όρους του γινομένου $(*)$ (ενδεχομένως με άλλη σειρά), συνεπώς $(T_l : T_i) = (T_l : T_{i\theta})$.

□

Σχόλιο. Το Λήμμα 6.4.2 αποτελεί το πρώτο κομμάτι της απόδειξης του Θεωρήματος *Clausen-James*. Το επόμενο λήμμα που θα δούμε αποτελεί το δεύτερο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος. Η κεντρική ιδέα του δεύτερου λήμματος είναι:

Στα πρώτα δύο βήματα να υπολογίσει το στοιχείο $\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) \in X_{\lambda,K}^\omega$ μέσω των *coordinate functions* $\{c_{i,j}\}_{i,j \in I(n,r)}$ και στα επόμενα δύο βήματα να δημιουργήσει συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύει $\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) \neq 0$ (δηλαδή $X_{\lambda,K}^\omega \neq 0$).

Παρατήρηση 6.4.3. Έστω $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\lambda_1})$ το *conjugate partition* του λ , τότε ορίζεται καλά ένα στοιχείο $\vartheta \in C(T)$ ώστε:

$$\vartheta(x(s, t)) = x(\mu_t + 1 - s, t), \text{ για κάθε } (s, t) \in [\lambda].$$

Σχόλιο: Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το στοιχείο $\vartheta \in C(T)$ επί της ουσίας έχει την ιδιότητα να στρέφει ανάποδα τις στήλες του λ -tableaux T_l , δηλαδή ο $T_{l\theta}$ έχει για στήλες τις ανάποδες του T_l .

Απόδειξη.

ϑ καλά ορισμένη και 1-1: Έστω $x_1, x_2 \in \underline{r}$ με $x_1 = x_2$, τότε (αφού $T^\lambda = \text{basic } \lambda\text{-tableaux}$) υπάρχουν $(s_1, t_1) \in [\lambda]$, $(s_2, t_2) \in [\lambda]$ ώστε $x_1 = x(s_1, t_1)$ και $x_2 = x(s_2, t_2)$. Οπότε,

$$x_1 = x_2 \iff x(s_1, t_1) = x(s_2, t_2) \iff s_1 = s_2 \text{ και } t_1 = t_2 \iff$$

$$\mu_{t_1} + 1 - s_1 = \mu_{t_2} + 1 - s_2 \text{ και } t_1 = t_2 \iff \vartheta(x(s_1, t_1)) = \vartheta(x(s_2, t_2)) \iff \vartheta(x_1) = \vartheta(x_2).$$

Επίσης η ϑ είναι επί (αφού $\vartheta : \underline{r} \longrightarrow \underline{r}$ 1-1) και $\vartheta \in C(T)$ άμεσα από τον τύπο της ϑ .

□

Λήμμα 6.4.3. (Μέρος II)

i) Για κάθε $\pi \in G(r)$ θέτουμε $A_\pi := \{(\sigma, \tau) \in C(T) \times R(T) \mid (l\sigma, u\tau) \sim (l\pi, u)\}$ και ισχύει:

$$\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) = \left(\sum_{(\sigma, \tau) \in A_\pi} s(\sigma) \right) c_{l\pi, u} + \sum_{(\sigma, \tau) \in A_\pi^c} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau}.$$

ii) Για κάθε $\pi \in C(T)$ θέτουμε $N_\pi = |\{\tau \in R(T) \mid l\pi\tau = l\pi\}|$ και ισχύει $\sum_{(\sigma, \tau) \in A_\pi} s(\sigma) = N_\pi s(\pi)$.

iii) $N_\vartheta = \text{γινόμενο αριθμών οι οποίοι είναι } \leq \max\{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n\}$

iv) Έστω $chK = p$ και $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ με $\lambda = \text{column } p\text{-regular}$, τότε $\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) \neq 0$.

Σχόλιο. Αν και δεν θα μας χρειαστεί, έχει αξία να αναφέρουμε ότι για το *iii*) του Λήμματος ισχύει το εξής ισχυρότερο: $N_\theta = \prod_{q \geq 1} ((\lambda_q - \lambda_{q-1})!)^q$.

Απόδειξη.

i) Από Λήμμα 6.4.1 *ii*) έχουμε,

$$\begin{aligned} \xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) &= \sum_{\tau \in R(T)} (T_l : T_{u\tau}) = \sum_{\tau \in R(T)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l,u\tau\sigma} \frac{(l\sigma^{-1}, u\tau) \sim (l, u\tau\sigma), s(\sigma) = s(\sigma^{-1})}{=} \\ &= \sum_{\tau \in R(T)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma^{-1}) c_{l\sigma^{-1}, u\tau} = \sum_{\tau \in R(T)} \sum_{\sigma \in C(T)} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau} = \sum_{\sigma \in C(T)} \sum_{\tau \in R(T)} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau} = \\ &= \sum_{(\sigma, \tau) \in C(T) \times R(T)} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau} = \left(\sum_{(\sigma, \tau) \in A_\pi} s(\sigma) \right) c_{l\pi, u} + \sum_{(\sigma, \tau) \in A_\pi^c} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau}. \end{aligned}$$

ii) Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την επόμενη παρατήρηση:

Παρατήρηση. Έστω $\pi \in C(T)$ και $(\sigma, \tau) \in C(T) \times R(T)$ τότε:

$$(\sigma, \tau) \in A_\pi \iff \sigma = \pi \text{ και } l\pi\tau = l\pi.$$

Απόδειξη. (Παρατήρησης).

$$(\Leftarrow): \quad (l\pi, u) \cdot \tau = (l\pi\tau, u\tau) = (l\pi, u\tau) = (l\sigma, u\tau), \text{ άρα } (l\sigma, u\tau) \sim (l\pi, u) \iff (\sigma, \tau) \in A_\pi.$$

$$(\Rightarrow): \quad \text{Έστω } \pi \in C(T), (\sigma, \tau) \in C(T) \times R(T) \text{ με } (\sigma, \tau) \in A_\pi, \text{ τότε υπάρχει } \gamma \in G(r) \text{ ώστε,}$$

$$l\pi\gamma = l\sigma \text{ και } u\gamma = u\tau.$$

$$\text{Όμως } u\gamma = u\tau \iff \gamma\tau^{-1} \in G_\omega = \text{Stab}_{G(r)}(u) = 1 \iff \gamma = \tau. \text{ Οπότε } l\pi\tau = l\sigma. (*)$$

Αν δείξουμε ότι $\pi = \sigma$ τότε το $(\Rightarrow)$ αποδείχθηκε. Για το λόγο αυτό θα δείξουμε πρώτα ότι $T_{l\pi} = T_{l\sigma}$. Καταρχάς, (επειδή $\pi, \sigma \in G(r)$) έχουμε $\text{Im}l = \text{Im}l\pi = \text{Im}l\sigma$, οπότε $\text{Im}T_l = \text{Im}T_{l\pi} = \text{Im}T_{l\sigma}$. Αν δείξουμε ότι το τυχόν $m \in \text{Im}T_l$ βρίσκεται στις ίδιες γραμμές και στήλες των λ -tableaux $T_{l\pi}, T_{l\sigma}$, τότε $T_{l\pi} = T_{l\sigma}$. Έστω $m \in \text{Im}T_l$ τότε:

Το m ανήκει στις ίδιες στήλες των $T_{l\pi}, T_{l\sigma}$: Έστω ότι $l\sigma(x(s, t)) = m$. Επειδή $\sigma, \pi \in C(T)$ έχουμε $\sigma(C_t) = \pi(C_t) = C_t$, οπότε υπάρχει $(s', t) \in [\lambda]$ ώστε $\sigma(x(s, t)) = \pi(x(s', t))$, δηλαδή $l\pi(x(s', t)) = m$. Όμοια αν $l\pi(x(s, t)) = m$, τότε υπάρχει $(s', t) \in [\lambda]$ ώστε $l\sigma(x(s', t)) = m$.

Το m ανήκει στις ίδιες γραμμές των $T_{l\pi}, T_{l\sigma}$: Έστω ότι $l\sigma(x(s, t)) = m$. Από $(*)$ έχουμε $l\pi\tau(x(s, t)) = m$, όμως (επειδή $\tau \in R(T)$) υπάρχει $(s, t') \in [\lambda]$ ώστε $\tau(x(s, t)) = x(s, t')$ και άρα $l\pi(x(s, t')) = m$. Ανάποδα, αν $l\pi(x(s, t)) = m$, τότε πάλι (επειδή $\tau \in R(T)$) υπάρχει $(s, t') \in [\lambda]$ ώστε $\tau(x(s, t)) = x(s, t')$ και άρα $m = l\pi\tau(x(s, t')) \stackrel{(*)}{=} l\sigma(x(s, t'))$.

Το $m \in \text{Im}T_l$ ήταν τυχόν, άρα $T_{l\pi} = T_{l\sigma} \iff l\pi = l\sigma$. Συνεπώς από Λήμμα 4.4.1 *i*) πρέπει $\pi\sigma^{-1} \in R(T)$, (όμως $\pi, \sigma^{-1} \in C(T)$) άρα $\pi\sigma^{-1} \in R(T) \cap C(T) = 1 \iff \pi = \sigma$.

iii) Καταρχάς, $N_\vartheta = |\{\tau \in R(T) \mid l\vartheta\tau = l\vartheta\}|$. Για να μελετήσουμε το πληθύνισμα N_ϑ αρκεί να μελετήσουμε το σύνολο $B_\vartheta := \{\tau \in R(T) \mid l\vartheta\tau = l\vartheta\}$. Εξ' ορισμού του $R(T)$ ισχύει άμεσα ότι:

$$\tau \in R(T) \iff \forall (s, t) \in [\lambda], \exists \text{ μοναδικό } \tau_s(t) \in \{1, \dots, \lambda_1\} \text{ ώστε } \tau(x(s, t)) = x(s, \tau_s(t)).$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau \in B_\vartheta &\iff \tau \in R(T) \text{ και } l\vartheta\tau = l\vartheta \iff l\vartheta(x(s, \tau_s(t))) = l\vartheta(x(s, t)), \forall (s, t) \in [\lambda] \iff \\ &l(x(\mu_{\tau_s(t)} + 1 - s, \tau_s(t))) = l(x(\mu_t + 1 - s, t)), \forall (s, t) \in [\lambda] \iff \\ &\mu_{\tau_s(t)} + 1 - s = \mu_t + 1 - s \quad \forall (s, t) \in [\lambda] \iff \mu_{\tau_s(t)} = \mu_t \quad \forall (s, t) \in [\lambda]. \end{aligned}$$

Ιδιαιτέρως,

$$\begin{aligned} B_\vartheta &= \{\tau \in R(T) \mid \tau(x(s, t)) = x(s, \tau_s(t)) \text{ και } \mu_{\tau_s(t)} = \mu_t, \forall (s, t) \in [\lambda]\} \\ &= \{\tau \in R(T) \mid \tau \text{ απεικονίζει τα στοιχεία κάθε στήλης του } T \text{ σε στοιχεία στηλών ίδιου μήκους}\} \end{aligned}$$

(Σχόλιο: Ενδέχεται η τ να απεικονίζει στοιχεία ίδιας στήλης σε διαφορετικές ίδιου μήκους στήλες, πράγμα που διαφοροποιεί ασθενώς τα σύνολα $B_\vartheta, R_C(T)$).

Έστω λοιπόν $\tau \in B_\vartheta$, για να υπολογίσουμε το πλήθος επιλογών για το τ αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος επιλογών για τις τιμές $\tau(i)$ με $i \in \underline{r}$, όμως η $T : [\lambda] \rightarrow \underline{r}$ είναι 1-1 και επί, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος επιλογών για τις τιμές $\tau(x(s, t))$ με $(s, t) \in [\lambda]$.

Για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ έχουμε $\tau(x(s, t)) = x(s, \tau_s(t))$ και $\mu_{\tau_s(t)} = \mu_t$. Οπότε για το $x(s, t)$ η απεικόνιση τ έχει τόσες επιλογές να το απεικονίσει όσες είναι και οι στήλες του T μήκους μ_t , δηλαδή (από Παρατήρηση 6.4.2) έχει $\begin{cases} \lambda_{\mu_t} - \lambda_{\mu_t+1} & 1 \leq \mu_t \leq n-1 \\ \lambda_n & \mu_t = n. \end{cases}$ - το πλήθος επιλογές. Από

το τελευταίο έχουμε ότι για κάθε $(s, t) \in [\lambda]$ το πλήθος επιλογών για τη τιμή $\tau(x(s, t))$ είναι $\leq \max\{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n\}$, άρα το πλήθος επιλογών για το στοιχείο $\tau \in B_\vartheta$ είναι γινόμενο αριθμών οι οποίοι είναι $\leq \max\{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n\}$.

iv) Καταρχάς,

$$\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) \stackrel{i)}{=} \left(\sum_{(\sigma, \tau) \in A_\vartheta} s(\sigma) c_{l\vartheta, u} + \sum_{(\sigma, \tau) \in A_\vartheta^c} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau} \stackrel{ii)}{=} (N_\vartheta s(\vartheta) \cdot 1_K) c_{l\vartheta, u} + \sum_{(\sigma, \tau) \in A_\vartheta^c} s(\sigma) c_{l\sigma, u\tau} \right).$$

Θέτουμε $a = N_\vartheta s(\vartheta) \cdot 1_K$ και αν δείξουμε ότι $a \neq 0$, τότε $\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) \neq 0$ (αυτό γιατί αν $\xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) = 0$, τότε επειδή διακεκριμένα $c_{i,j}$ είναι K-γραμμικά ανεξάρτητα (Παρατήρηση 2.1.1 i)) θα πρέπει εξ' ορισμού του A_ϑ να ισχύει $ac_{l\vartheta, u} = 0$, δηλαδή $a = 0$ άτοπο). Πράγματι, εφόσον $\lambda = \text{column p-regular}$ τότε $0 \leq \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n \leq p-1$, άρα από το iii) έπεται ότι

$$p \nmid N_\vartheta s(\vartheta) \stackrel{chK=p}{\iff} a = N_\vartheta s(\vartheta) \cdot 1_K \neq 0.$$

□

Θεώρημα 6.4.1. (Clausen [15, σελ. 184 Lemma 6.4], James [16, Theorem 3.2]).

Έστω $chK = p > 0$, $X_{\lambda,K} = D_{\lambda,K}^{min}$ και (όπως πάντα) $r \leq n$, τότε:

$$\{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid F_{\lambda,K}^\omega \neq 0\} = \{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid X_{\lambda,K}^\omega \neq 0\} = \{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid \lambda = \text{column } p\text{-regular}\}.$$

Ιδιαίτερώς τα σύνολα $\{F_{\lambda,K}^\omega \mid \lambda = \text{column } p\text{-regular}\}$, $\{X_{\lambda,K}^\omega \mid \lambda = \text{column } p\text{-regular}\}$ είναι full sets από irreducible $KG(r)$ -πρότυπα της $\text{mod}KG(r)$.

Απόδειξη.

Από Παρατήρηση 6.4.1 είναι όλα άμεσα εκτός από την ισότητα

$$\{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid X_{\lambda,K}^\omega \neq 0\} = \{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid \lambda = \text{column } p\text{-regular}\}.$$

Για συντομία θέτουμε $\Lambda' := \{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid \lambda = \text{column } p\text{-regular}\}$, $H := R_C(T)$ και έχουμε:

$\{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid X_{\lambda,K}^\omega \neq 0\} \subseteq \Lambda'$: Έστω $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$ με $X_{\lambda,K}^\omega \neq 0$. Ας υποθέσουμε για άτοπο ότι $\lambda \notin \Lambda'$, τότε υπάρχει $k \in \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n\}$ ώστε $k \geq p$, οπότε $p \mid k!$. Άρα από Λήμμα 6.4.2 έχουμε:

$$p \mid |H|.$$

Θεωρούμε την δεξιά δράση της H στην $R(T)$: $R(T) \times H \longrightarrow R(T)$, $(r, h) \longmapsto rh$. Αν R_H είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων H -τροχιών, τότε για κάθε $i \in \omega$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in R(T)} (T_l : T_{i\tau}) &= \sum_{\sigma \in R_H} \sum_{s \in [\sigma]_H} (T_l : T_{is}) \xrightarrow{\sigma h_1 = \sigma h_2 \iff h_1 = h_2, \forall h_1, h_2 \in H} \\ &= \sum_{\sigma \in R_H} \sum_{\theta \in H} (T_l : T_{i\sigma\theta}) \xrightarrow{\text{Λήμμα 6.4.2}} \sum_{\sigma \in R_H} |H| (T_l : T_{i\sigma}) \xrightarrow{chK=p \mid |H|} 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς $X_{\lambda,K}^\omega \xrightarrow{\text{Λήμμα 6.4.1}} \text{span}_K \left\{ \sum_{\tau \in R(T)} (T_l : T_{i\tau}) \mid i \in \omega \right\} = 0$, άτοπο αφού $X_{\lambda,K}^\omega \neq 0$. Άρα πρέπει $\lambda \in \Lambda'$.

$\Lambda' \subseteq \{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid X_{\lambda,K}^\omega \neq 0\}$: Έστω $\lambda \in \Lambda'$, τότε από Λήμμα 6.4.3 iv) και Λήμμα 6.4.1 ii) ισχύει ότι,

$$0 \neq \xi_{u,l} \circ (T_l : T_l) \in X_{\lambda,K}^\omega.$$

Συνεπώς πρέπει $\lambda \in \{\lambda \in \Lambda^+(n, r) \mid X_{\lambda,K}^\omega \neq 0\}$.

□

Σχόλιο. Το θεώρημα James-Clausen εκτός από την σημαντικότητα που έχει μόνο του σαν αποτέλεσμα, δίνει επίσης και άλλα ενδιαφέρον πορίσματα, ένα από αυτά είναι το Θεώρημα 6.4.2 (του James). Για να φτάσουμε όμως εκεί θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση η οποία είναι γενικού περιεχομένου και ανεξάρτητη από όσα έχουμε πει ως τώρα στη παράγραφο 6.4.

Πρόταση 6.4.1. *i) Θεωρούμε το $S\xi_\omega$ το οποίο είναι αριστερό S -πρότυπο και δεξιό $S(\omega)$ -πρότυπο ισοδύναμα δεξιό $KG(r)$ -πρότυπο (με $s \cdot \pi = s \cdot \xi_{u\pi, u}$, για κάθε $\pi \in G(r)$, $s \in S\xi_\omega$).*

ii) Το σύνολο $\{\xi_{i, u} \mid i \in I(n, r)\}$ αποτελεί K -βάση του $S\xi_\omega$.

iii) Υπάρχει ισομορφισμός αριστερών S -προτύπων και δεξιών $KG(r)$ -προτύπων έστω,

$$\phi : S\xi_\omega \longrightarrow E^{\otimes r}, \text{ με } \phi(\xi_{i, u}) = e_i, \text{ για κάθε } i \in I(n, r).$$

Λήμμα 6.4.4. (Εφαρμογή του Κανόνα Πολλαπλασιασμού του Schur).

i) $(i, u) \sim (j, u) \iff i = j$. Ιδιαίτερος $\xi_{i, u} = \xi_{j, u} \iff i = j$.

ii) $\xi_{p, q} \cdot \xi_{i, u} = \sum_{h \in I(n, r)} \xi_{p, q}(c_{h, i}) \xi_{h, u}$, για κάθε $p, q, i \in I(n, r)$.

iii) $\xi_{i, u} \cdot \xi_{u\pi, u} = \xi_{i\pi, u}$, για κάθε $i \in I(n, r)$, $\pi \in G(r)$.

Απόδειξη. (Λήμματος)

i) $(i, u) \sim (j, u) \iff \exists \pi \in G(r)$ με $i = j\pi$ και $u = u\pi$. Όμως $u\pi = u \iff \pi = 1$ και έτσι έπεται το ζητούμενο.

ii) Από i) έχουμε $(i, u) \approx (j, u)$ για κάθε $i, j \in I(n, r)$ με $i \neq j$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύνολο αντιπροσώπων τροχιών $\mathcal{T}$ (της δεξιάς δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r) \times I(n, r)$), ώστε $\{(i, u)\}_{i \in I(n, r)} \subseteq \mathcal{T}$. Τώρα, από Πρόταση 2.3.3 (Κανόνα πολ/μού του Schur) έχουμε,

$$\xi_{p, q} \cdot \xi_{i, u} = \sum_{(x, y) \in \mathcal{T}} Z(p, q, i, u, x, y) \xi_{x, y}.$$

Όπου $Z(p, q, i, u, x, y) = |\{s \in I(n, r) \mid (p, q) \sim (x, s) \text{ και } (i, u) \sim (s, y)\}|$ και θα συμβολίζουμε το ενδιάμεσο σύνολο με $B(p, q, i, u, x, y)$. Έστω $(x, y) \in \mathcal{T}$ με $B(p, q, i, u, x, y) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $s \in I(n, r)$ και $\pi, \sigma \in G(r)$ (που εξαρτώνται από το s) ώστε:

$$\begin{aligned} p\pi &= x \text{ και } q\pi = s \\ i\sigma &= s \text{ και } u\sigma = y \end{aligned}$$

Οπότε $(x, y) = (p\pi, u\sigma) \sim (p\pi\sigma^{-1}, u)$ και $(x, y), (p\pi\sigma^{-1}, u) \in \mathcal{T} =$ σύνολο αντιπροσώπων τροχιών, άρα πρέπει $(x, y) = (p\pi\sigma^{-1}, u)$. Με λίγα λόγια δείξαμε ότι: Αν $(x, y) \in \mathcal{T}$ με $B(p, q, i, u, x, y) \neq \emptyset$, τότε $(x, y) \in \{(i, u)\}_{i \in I(n, r)}$. Οπότε,

$$B(p, q, i, u, x, y) = \emptyset (\iff Z(p, q, i, u, x, y) = 0), \text{ για κάθε } (x, y) \in \mathcal{T} \setminus \{(i, u)\}_{i \in I(n, r)}.$$

Συνεπώς $\xi_{p, q} \cdot \xi_{i, u} = \sum_{h \in I(n, r)} Z(p, q, i, u, h, u) \xi_{h, u} (**)$. Συνεχίζοντας έχουμε,

Ισχυρισμός. $Z(p, q, i, u, h, u) = \xi_{p,q}(c_{h,i})$, για κάθε $h \in I(n, r)$.

Πράγματι, έστω $B(p, q, i, u, h, u) \neq \emptyset$ και $s \in B(p, q, i, u, h, u)$, τότε υπάρχουν $\pi, \sigma \in G(r)$ (που εξαρτώνται από το s) ώστε:

$$\begin{aligned} p\pi &= h \text{ και } q\pi = s \\ i\sigma &= s \text{ και } u\sigma = u \end{aligned}$$

Από πάνω έπεται ότι $\sigma \in G_\omega = \text{Stab}_{G(r)}(u) = 1$, και άρα $s = i$. Συνεπώς $B(p, q, i, u, h, u) \subseteq \{i\}$ και έτσι:

$$B(p, q, i, u, h, u) = \begin{cases} \{i\} & (p, q) \sim (h, i) \text{ και } (i, u) \sim (i, u) \\ \emptyset & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \{i\} & (p, q) \sim (h, i) \\ \emptyset & (p, q) \not\sim (h, i) \end{cases}.$$

Από το τελευταίο έπεται ότι $Z(p, q, i, u, h, u) = \xi_{p,q}(c_{h,i})$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τελικά από (**) και Ισχυρισμό έχουμε ότι $\xi_{p,q} \cdot \xi_{i,u} = \sum_{h \in I(n, r)} \xi_{p,q}(c_{h,i}) \xi_{h,u}$.

iii) Έστω ένα σύνολο αντιπροσώπων τροχιών $\mathcal{T}$ (της δεξιάς δράσης της $G(r)$ στο $I(n, r) \times I(n, r)$), ώστε $(i\pi, u) \in \mathcal{T}$. Τώρα, από Πρόταση 2.3.3 (Κανόνα πολ/μού του Schur) έχουμε,

$$\xi_{i,u} \cdot \xi_{u\pi, u} = \sum_{(x, y) \in \mathcal{T}} Z(i, u, u\pi, u, x, y) \xi_{x, y}.$$

Όπου $Z(i, u, u\pi, u, x, y) = |\{s \in I(n, r) \mid (i, u) \sim (x, s) \text{ και } (u\pi, u) \sim (s, y)\}|$ και θα συμβολίζουμε το ενδιάμεσο σύνολο με $B(i, u, u\pi, u, x, y)$. Έστω $(x, y) \in \mathcal{T}$ με $B(i, u, u\pi, u, x, y) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $s \in I(n, r)$ και $\tau, \sigma \in G(r)$ (που εξαρτώνται από το s) ώστε:

$$\begin{aligned} i\tau &= x \text{ και } u\tau = s \\ u\pi\sigma &= s \text{ και } u\sigma = y \end{aligned}$$

Τότε $u\tau = u\pi\sigma \iff \pi\sigma\tau^{-1} \in G_\omega = 1 \iff \pi\sigma = \tau$ και άρα,

$$(x, y) = (i\tau, u\sigma) \sim (i\tau\sigma^{-1}, u) = (i\pi, u)$$

Συνεπώς, $(x, y) \sim (i\pi, u)$ και $(x, y), (i\pi, u) \in \mathcal{T} = \text{σύνολο αντιπροσώπων τροχιών}$, άρα πρέπει $(x, y) = (i\pi, u)$. Με λίγα λόγια δείξαμε ότι: Αν $(x, y) \in \mathcal{T}$ με $B(i, u, u\pi, u, x, y) \neq \emptyset$, τότε $(x, y) = (i\pi, u)$. Οπότε,

$$B(p, q, i, u, x, y) = \emptyset (\iff Z(p, q, i, u, x, y) = 0), \text{ για κάθε } (x, y) \neq (i\pi, u).$$

Συνεπώς $\xi_{i,u} \cdot \xi_{u\pi, u} = Z(i, u, u\pi, u, i\pi, u) \xi_{i\pi, u}$ (**). Συνεχίζοντας έχουμε,

Ισχυρισμός. $Z(i, u, u\pi, u, i\pi, u) = 1$.

Πράγματι, έστω $B(i, u, u\pi, u, i\pi, u) \neq \emptyset$ και $s \in B(i, u, u\pi, u, i\pi, u)$, τότε υπάρχουν $\tau, \sigma \in G(r)$ (που εξαρτώνται από το s) ώστε:

$$\begin{aligned} i\tau &= i\pi \text{ και } u\tau = s \\ u\pi\sigma &= s \text{ και } u\sigma = u \end{aligned}$$

Από πάνω έπεται ότι $\sigma \in G_\omega = \text{Stab}_{G(r)}(u) = 1$, και άρα $s = u\pi$. Συνεπώς $B(i, u, u\pi, u, i\pi, u) \subseteq \{u\pi\}$, μάλιστα (άμεσα) $u\pi \in B(i, u, u\pi, u, i\pi, u)$ και έτσι $B(i, u, u\pi, u, i\pi, u) = \{u\pi\}$. Από το τελευταίο έπεται ότι $Z(i, u, u\pi, u, i\pi, u) = 1$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τελικά από $(**)$ και Ισχυρισμό έχουμε ότι $\xi_{i,u} \cdot \xi_{u\pi,u} = \xi_{i\pi,u}$.

□

Απόδειξη. (Πρότασης 6.4.1)

- i) Έπεται με παρόμοιο τρόπο από αυτό που έπεται και η Παρατήρηση 6.1.4.
ii) $\text{span}_K\{\xi_{i,u} \mid i \in I(n, r)\} = S\xi_\omega$: Καταρχάς, από Πρόταση 2.3.3 έχουμε

$$\xi_{i,u} = \xi_{i,u}\xi_{u,u} \xrightarrow{u \in \omega} \xi_{i,u}\xi_\omega \in S\xi_\omega, \text{ για κάθε } i \in I(n, r).$$

Οπότε $\text{span}_K\{\xi_{i,u} \mid i \in I(n, r)\} \subseteq S\xi_\omega$. Ανάποδα, αν $x \in S\xi_\omega$ τότε $x = \xi\xi_\omega$ για κάποιο $\xi \in S$. Από Πρόταση 2.3.1 υπάρχουν $\{k_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{T}} \subseteq K$, ώστε $\xi = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j}\xi_{i,j}$ και άρα

$$x = \xi = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} k_{i,j}\xi_{i,j}\xi_{u,u} \xrightarrow{\text{Πρόταση 2.3.3}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}, j \sim u} k_{i,j}\xi_{i,j}\xi_{u,u}.$$

Όμως, αν $(i, j) \in \mathcal{T}$ με $j \sim u$, τότε υπάρχει $\pi_j \in G(r)$ ώστε $j = u\pi_j$, οπότε

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} &= \xi_{i,u\pi_j} \xrightarrow{(i,u\pi_j) \sim (i\pi_j^{-1},u)} \xi_{i\pi_j^{-1},u} \text{ και άρα,} \\ x &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}, j \sim u} k_{i,j}\xi_{i\pi_j^{-1},u}\xi_{u,u} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}, j \sim u} k_{i,j}\xi_{i\pi_j^{-1},u} \in \text{span}_K\{\xi_{i,u} \mid i \in I(n, r)\}. \end{aligned}$$

$\{\xi_{i,u} \mid i \in I(n, r)\} = K$ -γραμμικά ανεξάρτητα: Από Λήμμα 6.4.4 i) έχουμε $\xi_{i,u} \neq \xi_{j,u}$, για κάθε $i, j \in I(n, r)$ με $i \neq j$. Επιπλέον διακεκριμένα $\xi_{i,j}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητα (βλέπε Πόρισμα 2.3.1) και έτσι έχουμε ζητούμενο.

- iii) Τα σύνολα $\{\xi_{i,u} \mid i \in I(n, r)\}$, $\{e_i \mid i \in I(n, r)\}$ είναι K -βάσεις των $S\xi_\omega$, $E^{\otimes r}$, ιδιαιτέρως $\dim_K S\xi_\omega = \dim_K E^{\otimes r}$. Οπότε έπεται ένας ισομορφισμός K -προτύπων έστω:

$$\phi : S\xi_\omega \longrightarrow E^{\otimes r}, \text{ με } \xi_{i,u} \longmapsto e_i, \text{ για κάθε } i \in I(n, r).$$

Μένει να δείξουμε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δεξιών $KG(r)$ –προτύπων και αριστερών S –προτύπων:

ϕ ομομορφισμός αριστερών S –προτύπων: Επειδή τα σύνολα $\{\xi_{i,u}\}_{i \in I(n,r)}$, $\{\xi_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{T}}$ είναι K –βάσεις των $S\xi_\omega$, S αντίστοιχα και η ϕ είναι ομομορφισμός K –προτύπων τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\phi(\xi_{p,q} \cdot \xi_{i,u}) = \xi_{p,q} \cdot \phi(\xi_{i,u}), \text{ για κάθε } (p,q) \in \mathcal{T}, i \in I(n,r).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \phi(\xi_{p,q} \cdot \xi_{i,u}) &\stackrel{\text{Λήμμα 6.4.4}}{=} \phi\left(\sum_{h \in I(n,r)} \xi_{p,q}(c_{h,i})\xi_{h,u}\right) = \sum_{h \in I(n,r)} \xi_{p,q}(c_{h,i})\phi(\xi_{h,u}) = \\ &\sum_{h \in I(n,r)} \xi_{p,q}(c_{h,i})e_h \stackrel{\text{Πόρισμα 2.6.1}}{=} \xi_{p,q} \cdot e_i = \xi_{p,q} \cdot \phi(\xi_{i,u}). \end{aligned}$$

ϕ ομομορφισμός δεξιών $KG(r)$ –προτύπων: Επειδή τα σύνολα $\{\xi_{i,u}\}_{i \in I(n,r)}$, $\{\pi\}_{\pi \in G(r)}$ είναι K –βάσεις των $S\xi_\omega$, $KG(r)$ αντίστοιχα και η ϕ είναι ομομορφισμός K –προτύπων τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\phi(\xi_{i,u} \cdot \pi) = \phi(\xi_{i,u}) \cdot \pi \text{ για κάθε } i \in I(n,r), \pi \in G(r).$$

Πράγματι,

$$\phi(\xi_{i,u} \cdot \pi) = \phi(\xi_{i,u} \cdot \xi_{u\pi,u}) \stackrel{\text{Λήμμα 6.4.4}}{=} \phi(\xi_{i\pi,u}) = e_{i\pi} = e_i \cdot \pi = \phi(\xi_{i,u}) \cdot \pi.$$

□

Θεώρημα 6.4.2. (*James [16, Theorem 3.2]*).

i) Έστω $V \in M_K(n,r)$ irreducible KG –πρότυπο. Τότε:

$$V^\omega \neq 0 \text{ αν και μόνον αν το } V \text{ είναι ισόμορφο με υποπρότυπο του } E^{\otimes r}.$$

ii) Έστω $chK = p > 0$, τότε το $F_{\lambda,K}$ εμφυτεύεται στο $E^{\otimes r}$ (σαν KG –πρότυπο $\iff$ S –πρότυπο) αν και μόνο αν $\lambda = \text{column } p\text{-regular}$.

Απόδειξη.

i) Η ιδέα πηγάζει μέσα από την ακρίβεια του dual συναρτητή $\mathcal{F} := \circ : M_K(n,r) \longrightarrow M_K(n,r)$ (βλέπε Παρατήρηση 2.7.3) και τη Παρατήρηση 6.2.7.

Έστω $V^\omega \neq 0$: Τότε από Παρατήρηση 6.2.7 υπάρχει $f : S\xi_\omega \longrightarrow V$ επιμορφισμός S –προτύπων ($\iff$ KG –προτύπων), όμως (από Πρόταση 6.4.1) $S\xi_\omega \simeq E^{\otimes r}$ (Ισομορφισμός S –προτύπων $\iff$

KG -προτύπων) οπότε έπεται (άμεσα) ένας επιμορφισμός KG -προτύπων έστω $g : E^{\otimes r} \longrightarrow V$. Τώρα θεωρούμε την ακριβή ακολουθία KG -προτύπων:

$$0 \longrightarrow \ker g \xrightarrow{i} E^{\otimes r} \xrightarrow{g} V \longrightarrow 0$$

Όπου $i : \ker g \longrightarrow E^{\otimes r}$ η ένθεση. Τότε από ακρίβεια του συναρτητή ο έπεται η εξής ακριβής ακολουθία :

$$0 \longrightarrow V^\circ \xrightarrow{g^\circ} (E^{\otimes r})^\circ \xrightarrow{i^\circ} (\ker g)^\circ \longrightarrow 0$$

Άρα το V° είναι ισόμορφο (σαν KG -πρότυπο) με υποπρότυπο του $(E^{\otimes r})^\circ$. Όμως, από Παράδειγμα 2.7.1 και Πρόσμα 3.5.2 έχουμε:

$$(E^{\otimes r})^\circ \simeq E^{\otimes r} \text{ και } V^\circ \simeq V \text{ (Ισομορφισμοί } KG \text{ - προτύπων)}.$$

Έτσι έπεται (άμεσα) ότι το V είναι ισόμορφο με υποπρότυπο του $E^{\otimes r}$.

Έστω ότι το V είναι ισόμορφο με υποπρότυπο του $E^{\otimes r}$: Τότε υπάρχει μονομορφισμός KG -προτύπων έστω $g : V \longrightarrow E^{\otimes r}$ και έπεται η εξής ακριβή ακολουθία KG -προτύπων:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{g} E^{\otimes r} \xrightarrow{\pi} E^{\otimes r}/\text{Im } g \longrightarrow 0$$

Όπου $\pi : \ker g \longrightarrow E^{\otimes r}$ η φυσική προβολή. Συνεπώς, από ακρίβεια του συναρτητή ο έπεται η εξής ακριβής ακολουθία :

$$0 \longrightarrow (E^{\otimes r}/\text{Im } g)^\circ \xrightarrow{\pi^\circ} (E^{\otimes r})^\circ \xrightarrow{g^\circ} (V)^\circ \longrightarrow 0$$

Άρα έχουμε έναν επιμορφισμό KG -προτύπων έστω $g^\circ : (E^{\otimes r})^\circ \longrightarrow (V)^\circ$. Όμως, όπως πριν $(E^{\otimes r})^\circ \simeq E^{\otimes r}$ και $V^\circ \simeq V$ (Ισομορφισμοί KG -προτύπων), οπότε έπεται (άμεσα) ένας επιμορφισμός KG -προτύπων ($\Longleftrightarrow S$ -προτύπων) έστω $\bar{g} : E^{\otimes r} \longrightarrow V$. Εφόσον $S\xi_\omega \simeq E^{\otimes r}$ (Ισομορφισμός S -προτύπων), τότε έπεται ένας επιμορφισμός S -προτύπων $\tilde{g} : S\xi_\omega \longrightarrow V$, άρα από Παρατήρηση 6.2.7 πρέπει $V^\omega \neq 0$.

ii) Από i) και Θεώρημα 6.4.1 έχουμε ότι το $F_{\lambda,K}$ εμφυτεύεται στο $E^{\otimes r}$ αν και μόνον αν $F_{\lambda,K}^\omega \neq 0$ αν και μόνον αν λ =column p-regular .

□

Σχόλιο. Έχοντας το θεώρημα *James-Clausen* βρισκόμαστε πολύ κοντά και σε άλλα σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν τα *Specht* πρότυπα και ακόμα γενικότερα την θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδα $G(r)$. Παρόλα αυτά είναι ένα καλό σημείο να κλείσουμε την εργασία αυτή με το θεώρημα του *James* (το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές και θα μπορούσε κανείς να το βάλει σε μία από τις κορυφές της εργασίας, καθώς για να το αποδείξουμε χρησιμοποιήσαμε έμμεσα ή άμεσα την πλειονότητα των εργαλείων που αναπτύξαμε στα κεφάλαια 1-6).

Αναφορές

1. J.A. Green, Polynomial Representations of GL_n 2nd corrected and augmented edition with an Appendix on Schensted Correspondence and Littelmann Paths by K.Erdmann, J.A. Green and M. Schocker, 2007.
2. Stuart Martin, Schur Algebras and Representation Theory, 1993.
3. D. G. Northcott, Multilinear Algebra, 1984.
4. Charles W. Curtis, Irving Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, 1962.
5. I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition, 1995.
6. I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials, University Lecture Series, Vol 12, 1998.
7. Claudio Procesi, Lie Groups An Approach through Invariants and Representations, 2007.
8. Eiichi Abe, Hopf Algebras, 1977.
9. Carter, Roger W., Lusztig, George, On the Modular Representations of the General Linear and Symmetric Groups, Mathematische Zeitschrift, 1974.
10. M.H Peel, Specht modules and symmetric groups, 1975.
11. Μιχάλης Μαλιάκας, Ολυμπία Ταλέλλη, Πρότυπα πάνω από Περιοχές Κυρίων Ιδεωδών και Εφαρμογές, 2009.
12. Μιχάλης Μαλιάκας, Εισαγωγή στη Μεταθετική Άλγεβρα, 2008.
13. W.J. Wong. Irreducibles modular representations of finite Chevalley groups, 1972.
14. D-N Verma, The role of affine Weyl groups in the representation theory of algebraic Chevalley groups and their Lie algebra. In I. M. Gelfand, editor, Lie groups and their representations, pages 653–705. John Wiley and Sons, New York, 1975.
15. M. Clausen. Letter place algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups, I. Adv. in Math., 33:161–191, 1979.
16. G. D. James. The decomposition of tensors over fields of prime characteristic. Math. Z., 172:161–178, 1980.
17. G. D. James. The representation theory of the symmetric group, volume 682 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1978.
18. J. A. Green. Locally finite representations. J. Algebra, 41:137–171, 1976.

19. R. Brauer. On modular and p-adic representations of algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 25:252–258, 1939.
20. G. D. James, The Representation Theory of the Symmetric Groups, 1978.
21. T.Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, 1991.
22. Jason Bandlow, An elementary proof of the hook formula, 2007.
23. I. Schur. Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Dissertation, Berlin, 1901. In I. Schur, Gesammelte Abhandlungen I, 1–70, Springer, Berlin, 1973.
24. Robert A. Proctor, Equivalence of the Combinatorial and the Classical Definitions of Schur Functions, 1987.