



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Διδακτορική Διατριβή

---

Ολοκληρώσιμες δομές στη θεωρία πεδίου και τη θεωρία χορδών  
και ο ρόλος των συμμετριών στην επίτευξη ακριβών υπολογισμών

---

Σαγκριώτη Ευτυχία

Επιβλέπων καθηγητής: Κ. Σφέτσος

Αθήνα, 2020

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,  
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Πρόλογος</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Θεωρητικό υπόβαθρο</b>	<b>10</b>
2.1	Κβαντική Θεωρία Πεδίου . . . . .	10
2.1.1	Συναρτήσεις συσχετισμού και Ανάπτυγμα Γινομένου Τελεστών . . .	11
2.1.2	Θεωρία Επακανονικοποίησης . . . . .	12
2.2	Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου . . . . .	23
2.2.1	Σύμμορφοι μετασχηματισμοί . . . . .	23
2.2.2	Τανυστής Ενέργειας-Ορμής . . . . .	24
2.2.3	Άλγεβρα Virasoro . . . . .	25
2.2.4	Πρωτεύοντα πεδία σύμμορφης διάστασης $(h, \bar{h})$ . . . . .	26
2.2.5	Άλγεβρα των οιονεί-πρωτευόντων πεδίων . . . . .	28
2.2.6	Άλγεβρες ρευμάτων . . . . .	29
2.2.7	Ο Sugawara τανυστής ενέργειας-ορμής . . . . .	30
2.2.8	Συναρτήσεις συσχετισμού των ρευμάτων . . . . .	31
2.2.9	Kac-Moody Πρωτεύοντα πεδία . . . . .	32
2.3	Συνάρτηση κεντρικού φορτίου . . . . .	32
2.4	Μποζονική Θεωρία χορδών, σ-πρότυπα και ροή κατά Ricci . . . . .	34
2.5	Ανωμαλία ίχνους και ανωμαλία Weyl . . . . .	41
2.6	Κύριο Χειραλικό και Wess-Zumino-Witten πρότυπο . . . . .	45
2.6.1	Κύριο Χειραλικό Πρότυπο . . . . .	45
2.6.2	Wess-Zumino-Witten πρότυπα . . . . .	48
2.6.3	Συνσύνολα (Cosets) . . . . .	51
2.7	Πρότυπο Thirring . . . . .	52
2.8	Κλασική Ολοκληρωσιμότητα . . . . .	53
2.9	Poisson-Lie T-duality . . . . .	56
2.10	λ-παραμορφωμένα πρότυπα . . . . .	58
2.10.1	Απλά παραμορφωμένο πρότυπο . . . . .	59
2.10.2	Διπλά παραμορφωμένο πρότυπο . . . . .	98

2.10.3	Πρότυπα με γενικούς πίνακες παραμόρφωσης . . . . .	113
2.10.3.1	λ-παραμορφωμένο πρότυπο σε συσυνολικό χώρο . . . . .	116
<b>3</b>	<b>Ακριβείς υπολογισμοί κβαντικών μεγεθών για τα διάφορα πρότυπα</b>	<b>118</b>
3.1	Διπλά παραμορφωμένο πρότυπο με ίσα επίπεδα στις άλγεβρες ρευμάτων . .	118
3.1.1	Συναρτήσεις συσχετισμού και συναρτήσεις ομάδας επανακανονικοποίησης . . . . .	118
3.2	Διπλά παραμορφωμένο πρότυπο με άνισα επίπεδα στις άλγεβρες ρευμάτων .	132
3.3	Συναρτήσεις κεντρικού φορτίου και ροές ομάδας επανακανονικοποίησης . .	144
3.3.1	Ροές σε χώρους ομάδας . . . . .	146
3.4	Ανωμαλία Weyl και συνάρτηση κεντρικού φορτίου . . . . .	150
3.4.1	Η ακριβής $C$ -συνάρτηση για γενικό πίνακα παραμόρφωσης . . . . .	152
3.4.2	Η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου διγραμμικού τελεστή παραμόρφωσης	159
3.5	Ακριβή αποτελέσματα με τη χρήση της γεωμετρίας του χώρου των σταθερών ζεύξης . . . . .	160
3.5.1	Η ανώμαλη διάσταση των απλών ρευμάτων . . . . .	161
3.5.2	Η ανώμαλη διάσταση σύνθετων τελεστών ρευμάτων . . . . .	168
3.5.3	λ-παραμορφώσεις με διαφορετικά επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων . . . . .	179
3.5.4	λ-παραμορφώσεις με αυτό-και έτερο-αλληλεπιδράσεις . . . . .	186
3.5.5	Έλεγχος με τη χρήση της θεωρίας διαταραχών . . . . .	190
3.6	Μια νέα μέθοδος για τον ακριβή υπολογισμό ανώμαλων διαστάσεων . . . . .	198
3.6.1	Υπολογισμός ανώμαλων διαστάσεων . . . . .	200
3.6.1.1	Ανώμαλες διαστάσεις του απλού ρεύματος . . . . .	202
3.6.1.2	Η περίπτωση των δύο παραμέτρων ζεύξης με χρήση υποομάδας και συνσυνόλου . . . . .	208
3.6.1.3	Δύο παραδείγματα για την $SU(2)$ ομάδα . . . . .	211
3.7	Μία ακριβής συμμετρία ως προς όλες τις παραμέτρους σύζευξης . . . . .	218
3.7.1	Η περίπτωση χώρου ομάδας . . . . .	220
<b>A'</b>	<b>Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων</b>	<b>227</b>
<b>B'</b>	<b>Χρήσιμα Ολοκληρώματα</b>	<b>231</b>
<b>Γ'</b>	<b>Υπολογισμός του Αβελιανού μέρους της μετρικής Zamolodchikov</b>	<b>235</b>
<b>Δ'</b>	<b>Διαταρακτικός υπολογισμός της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων για τα πρωτεύοντα πεδία</b>	<b>237</b>
<b>Ε'</b>	<b>Η περίπτωση των τεσσάρων παραμέτρων ζεύξης</b>	<b>243</b>

---

ΣΤ' Επανακανονικοποίηση και διαφορομορφισμοί	246
Z' Υπολογισμός της μετρικής Zamolodchikov για την περίπτωση του γενικού πίνακα $\lambda_{ab}$	248
H' Η μετρική Zamolodchikov για τους $\mathcal{O}^{(m,n)}$ σύνθετους τελεστές	252
Θ' Στοιχεία θεωρίας ομάδων για την $SU(N)$	255
I' Συμπλήρωμα στους διαταρακτικούς υπολογισμούς	257
I.1 Για τον ολομορφικό τελεστή $\mathcal{O}^{(2,0)}$ . . . . .	259
ΙΑ' Συμπλήρωμα για την περίπτωση των άυτο- και έτερο-αλληλεπιδράσεων	263
ΙΒ' Ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης σε επίπεδο δύο-βρόγχων	265
ΙΒ'.1 Ίσα επίπεδα άλγεβρας . . . . .	269
ΙΓ' Σύμβολα Christoffel στο $\tilde{\lambda} = 0$ όριο	271
ΙΔ' Ανώμαλες διαστάσεις με διαφορομορφισμούς	272

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου Κ. Σφέτσο για τις γνώσεις, την στήριξη και την καθοδήγηση που μου προσέφερε απλόχερα καθ'όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Γ. Γεωργίου, Κ. Σιάμπο και Π. Πανόπουλο για την άψογη συνέργασία μας στα πλαίσια της κοινής μας έρευνας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, καθώς και τον αγαπημένο μου φίλο και συμφοιτητή Ι. Λυρή για την απεριόριστη στήριξή τους κατά τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών.

Η έρευνα που έγινε στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).



Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,  
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Εκτεταμένη Περίληψη

Στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής, μελετήθηκαν διδιάστατες παραμορφώσεις σύμμορφων θεωριών πεδίου που εμφανίζουν συγκεκριμένες συμμετρίες, ενώ έμφαση δόθηκε στην μελέτη των ιδιοτήτων των άνωθεν θεωριών κάτω από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκαν τα επονομαζόμενα  $\lambda$ -παραμορφωμένα  $\sigma$ -πρότυπα, τα οποία κατασκευάζονται από παραμορφώσεις Wess-Zumino-Witten (WZW) θεωριών στο χώρο μιας Lie ομάδας, κατά έναν όρο που περιλαμβάνει έναν κλασικά οριακό τελεστή, δι-γραμμικό ως προς τα ρεύματα της WZW θεωρίας, με πίνακα ζεύξης  $\lambda$ . Τα πρότυπα αυτά, για συγκεκριμένες επιλογές του πίνακα ζεύξης διατηρούν την ολοκληρωσιμότητά τους και μετά την παραμόρφωση. Επιπλέον, οι ενεργές δράσεις που τα περιγράφουν είναι αναλλοίωτες κάτω από έναν μετασχηματισμό δυϊκού τύπου, ο οποίος για μεγάλες τιμές του επιπέδου  $k$  της Kac-Moody άλγεβρας, περιλαμβάνει την αντιστροφή του πίνακα παραμόρφωσης και του στοιχείου της Lie ομάδας, καθώς και την αλλαγή προσήμου της τάξης  $k$ . Η συμμετρία αυτή επιτρέπει τον ακριβή, ως προς την παράμετρο παραμόρφωσης  $\lambda$ , υπολογισμό φυσικών μεγεθών, με ελάχιστη έως καθόλου χρήση της θεωρίας διαταραχών. Τα φυσικά μεγέθη που υπολογίζονται για τα πρότυπα αυτά όμως, συνεχίζουν να είναι διαταρακτικά ως προς το ανάπτυγμα  $1/k$ , με το  $k$  να τείνει στο άπειρο. Συνεπώς, η δυϊκού τύπου συμμετρία όπως περιγράφεται στην παράγραφο αυτή, επιτρέπει την εύρεση ακριβών αποτελεσμάτων στο  $\lambda$ , αλλά μέχρι την  $1/k$  τάξη. Στο πλαίσιο αυτό, υπολογίστηκαν οι  $\beta$ -συναρτήσεις, ανώμαλες διαστάσεις τελεστών και συναρτήσεις κεντρικού φορτίου για διαφορετικές γενικεύσεις των αρχικών  $\lambda$ -προτύπων που περιγράφηκαν παραπάνω, και ειδικότερα:

Υπολογίστηκαν οι  $\beta$ -συναρτήσεις και ανώμαλες διαστάσεις ρευμάτων και πρωτεύοντων πεδίων για την περίπτωση του συμμετρικού, διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου με διαγώνιο και ιστροπικό πίνακα παραμόρφωσης [51]. Στην περίπτωση αυτή, η παραμορφωμένη θεωρία εκφράζει την αλληλεπίδραση ρευμάτων που ανήκουν σε δύο διαφορετικές WZW δράσεις, και εμπλέκονται δύο αντίγραφα της ομάδας Lie με ίδια επίπεδα  $k$ .

Σε συνέχεια του προηγούμενου υπολογισμού, υπολογίστηκαν οι  $\beta$ -συναρτήσεις για την περίπτωση του μη-συμμετρικού, διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου με γενικό πίνακα παραμόρφωσης [52]. Στην περίπτωση αυτή, η παραμορφωμένη θεωρία εκφράζει την αλληλεπίδραση ρευμάτων που ανήκουν σε δύο διαφορετικές WZW δράσεις, και εμπλέκονται δύο αντίγραφα

της ομάδας Lie με διαφορετικά όμως επίπεδα  $k_1, k_2$ .

Ένας επιπλέον υπολογισμός που επιτεύχθηκε κατά τη διάρκεια της παρούσας διδακτορικής διατριβής, είναι αυτός της  $C$ -συνάρτησης κεντρικού φορτίου για την περίπτωση του μη-συμμετρικού, διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου με διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα παραμόρφωσης [54]. Η συνάρτηση κεντρικού φορτίου, σύμφωνα με το  $c$ -θεώρημα του Zamolodchikov, αποτελεί ένα μέτρο των ενεργών βαθμών ελευθερίας κατά τη ροή μιας διδιάστατης κβαντικής θεωρίας πεδίου κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Επιπλέον, στα σταθερά σημεία της ροής, η τιμή της ισούται με το κεντρικό φορτίο της αντίστοιχης σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Συνεπώς, μέσω του προσδιορισμού της προαναφερθείσας συνάρτησης κεντρικού φορτίου, έγινε εφικτή, όχι μόνο η περαιτέρω μελέτη των ιδιοτήτων διαφόρων ροών των  $\lambda$ -προτύπων κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης, αλλά και ο προσδιορισμός νέων σύμμορφων θεωριών στις χαμηλότερες ενέργειες, μέσω της εύρεσης του κεντρικού τους φορτίου [54].

Ως γενίκευση του άνωθεν υπολογισμού, υπολογίστηκε η  $C$ -συνάρτηση κεντρικού φορτίου μέσω του συντελεστή της ανωμαλίας Weyl για την περίπτωση του μη-συμμετρικού, διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου με γενικό πίνακα παραμόρφωσης [55]. Ο συντελεστής της ανωμαλίας Weyl αποτελεί ένα μέτρο της απόκλισης μιας θεωρίας σε καμπύλο χώρο από την αντίστοιχη σύμμορφή της, παρουσία επίπεδης μετρικής, και η ταύτισή του με την συνάρτηση κεντρικού φορτίου δεν είναι εν γένει τετριμμένη. Στο πλαίσιο της [55] υπολογίστηκε αρχικά ο συντελεστής ανωμαλίας κατά Weyl, και προέκυψε να ταυτίζεται με την συνάρτηση κεντρικού φορτίου στα υπό μελέτη πρότυπα, ενώ επιπροσθέτως υπολογίστηκε η ανώμαλη διάσταση για τον διγραμμικό τελεστή της παραμόρφωσης στην περίπτωση του γενικού πίνακα.

Πέραν των προαναφερθέντων υπολογισμών, βρέθηκε επιπλέον μια νέα τεχνική για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων τελεστών ρευμάτων και σύνθετων τελεστών ρευμάτων, με αποκλειστική χρήση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του χώρου των παραμέτρων ζεύξης και της ενεργού δράσης σε επίπεδο ενός βρόγχου, για όλες τις περιπτώσεις  $\lambda$ -προτύπων με διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα παραμόρφωσης [83]. Η μέθοδος αυτή είναι βασισμένη σε μια διαφορετική βήμιση της αρχικής δράσης που χρησιμοποιείται κατά την κατασκευή του  $\lambda$ -παραμορφωμένου προτύπου και αποφεύγει πλήρως τη χρήση της θεωρίας διαταραχών.

Ένα ακόμα σημαντικό βήμα που έγινε προς την κατανόηση των  $\lambda$ -προτύπων, ήταν η γενίκευση της δυϊκού τύπου συμμετρίας, προκειμένου να ισχύει και για πεπερασμένες τιμές του επιπέδου  $k$ , η οποία οδήγησε στην εύρεση, ακριβώς ως προς  $\lambda$ , αποτελεσμάτων, μέχρι τάξη  $1/k^2$  στο ανάπτυγμα για μεγάλα  $k$  [144]. Η γενίκευση αυτή έγινε για την περίπτωση του συμμετρικού, διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου, όπου και υπολογίστηκε για αυτό η μετρική του χώρου παραμέτρων ζεύξης, η  $\beta$ -συνάρτηση, η συνάρτηση κεντρικού φορτίου και η ανώμαλη διάσταση του διγραμμικού τελεστή σε τάξη  $1/k^2$ . Επιπλέον στην [144] υπολογίστηκε και η  $\beta$ -συνάρτηση σε τάξη  $1/k^2$  για το μη-συμμετρικό, διπλά παραμορφωμένο

πρότυπο, μέσω τεχνικών βαρύτητας.

Τέλος, βρέθηκε μία νέα τεχνική για τον υπολογισμό ανώμαλων διαστάσεων των απλών ρευμάτων για την περίπτωση του μη-συμμετρικού, διπλά παραμορφωμένου λ-προτύπου, με γενικό πίνακα παραμόρφωσης [147]. Η μέθοδος αυτή, στο όριο των ίσων επιπέδων  $k_1 = k_2$ , αναπαράγει τα αποτελέσματα του απλά παραμορφωμένου λ-προτύπου, ενώ συνυπολογίζει και την πιθανή συνεισφορά διαφορομορφισμών του χώρου στόχου στο τελικό αποτέλεσμα, οι οποίοι εμφανίζονται με τη μορφή αντισταθμιστικών όρων στη β-συνάρτηση και τις ανώμαλες διαστάσεις ρευμάτων.



# Extended Abstract

In the context of the present dissertation, deformations of two-dimensional Conformal Field Theories (CFTs) with specific symmetries have been studied, while emphasis was given to the study of the properties of the aforementioned theories under the Renormalization Group (RG) flow. More specifically, the so-called  $\lambda$ -deformed  $\sigma$ -models represent deformations of Wess-Zumino-Witten (WZW) models by a set of classically marginal, bilinear in the WZW currents, operators, through a deformation matrix  $\lambda$ . These models, for specific choices of the matrix  $\lambda$ , maintain their integrability even after the deformation. Furthermore, their effective actions are endowed with a duality-type symmetry, which (for large values of the level  $k$  of the underlying Kac-Moody algebra) involves the inversion of the deformation matrix and the group element, along with the change of the sign of  $k$ . This symmetry allows the exact, with respect to the deformation parameter  $\lambda$ , computation of physical quantities, with minimal to no use of perturbation theory. However, all physical quantities computed for these models are still perturbative with respect to the  $1/k$  expansion for large  $k$ . Thus, the duality-type symmetry, as described above, allows the computation of exact in  $\lambda$  results, but up to  $1/k$  in the large  $k$  expansion.

In this framework, the  $\beta$ -functions, the anomalous dimension of operators and the central charge  $C$ -functions have been computed for various generalizations of the original  $\lambda$ -deformed  $\sigma$ -models described above, using both field theory and gravity techniques. More specifically:

The  $\beta$ -functions and the anomalous dimensions of currents and affine primary fields have been computed, for the case of the doubly deformed, symmetric  $\lambda$ -model, with a diagonal and isotropic deformation matrix [51]. In this case, the deformed theory corresponds to the interaction of currents belonging to two different WZW theories, and two copies of the Lie group with identical  $k$  levels are involved.

As a follow up to the previous computations, the  $\beta$ -functions for the asymmetric, doubly deformed  $\lambda$ -model have been computed, for the case of a general, non-diagonal deformation matrix [52]. This model describes once again the interaction of two different WZW theories through current bilinears, but the two involved copies of the Lie group have now different Kac-Moody levels  $k_1$  and  $k_2$ .

---

Another computation that has been achieved during the present thesis, is the one regarding the  $C$ -function of the central charge for the doubly deformed, asymmetric  $\lambda$ -model, with a diagonal and isotropic deformation matrix [54]. According to the Zamolodchikov's  $c$ -theorem, the  $C$ -function is strongly related to the number of effective degrees of freedom of a two-dimensional field theory, during its RG flow. Moreover, at each fixed point of the flow, the value of the  $C$ -function equals to the central charge of the underlying CFT. Thus, through the computation of the aforementioned central charge function, not only the further study of the various properties of  $\lambda$ -models under the RG flow became feasible, but also the identification of new IR CFTs through their central charge.

As a generalization of the previous  $C$ -function computation, the Weyl anomaly coefficient was found, for the doubly deformed, asymmetric  $\lambda$ -model with a general deformation matrix [55]. The Weyl anomaly coefficient indicates the deviation of a theory in a curved space-time from the corresponding CFT in the presence of a flat metric, and in general, its identification with the central charge function is not trivial. In the context of [55], the Weyl anomaly coefficient was initially computed and turned out that for the  $\lambda$ -models at hand is indeed identified with the corresponding  $C$ -function. Furthermore, the anomalous dimension matrix for the current bilinear operators has also been computed, in the presence of a general deformation matrix.

In addition to the previous computations, a new method for the derivation of the anomalous dimensions for single and composite current operators has been derived, for all cases with diagonal and isotropic  $\lambda$ -matrix [83]. This method exploits only the geometrical data of the couplings space, along with the one-loop effective action of the model and is based in a modified gauging procedure of the initial action used in the derivation of the  $\lambda$ -models. The biggest asset of this technique is that it completely avoids the use of perturbation theory.

Another important step towards the understanding of  $\lambda$ -models, was the generalization of the duality-type symmetry, in such a way that it continues to be valid even when finite values of  $k$  are involved [144]. This generalization of the duality-type symmetry led to up to  $1/k^2$ , exact in  $\lambda$  results, with the possibility of studying physical quantities at even higher orders in  $1/k$ . This generalization was performed for the symmetric, doubly deformed  $\lambda$ -model for which, the  $\beta$ -function, the Zamolodchikov's metric, the anomalous dimension of the composite operators and the  $C$ -function were also computed up to order  $1/k^2$ . Moreover, the  $\beta$ -function for the doubly deformed, asymmetric model was also computed in [144] up to order  $1/k^2$ , with the use of gravitational techniques.

Finally, another new method was derived in [147] for the computation of the anomalous dimension of the single currents, for the case of a general deformation matrix. This technique was found for the case of the doubly deformed, asymmetric  $\lambda$ -model, but also

derives the results of the simply deformed model in the equal levels limit. An additional benefit of this method is that it also takes into account the possible contribution arising from the diffeomorphisms of the target space when these are needed. The latter appear as counterterms in the  $\beta$ -function and the currents' anomalous dimensions and alter their results.

# 1 Πρόλογος

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, σημαντική πρόοδος έχει επιτευχθεί μέσω της χβαντικής θεωρίας πεδίου ως προς την ερμηνεία των φυσικών αλληλεπιδράσεων και των συμμετριών που τις διέπουν, ενώ η χρήση της θεωρίας διαταραχών, καθιστά δυνατό τον προσεγγιστικό υπολογισμό πολλών φυσικών παραμέτρων και μεγεθών. Παρόλη τη χρησιμότητά της όμως, η θεωρία διαταραχών αδυνατεί να εφαρμοσθεί σε ισχυρά συζευγμένες θεωρίες, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη χβαντική χρωμοδυναμική που αποτελεί μη-Αβελιανή θεωρία βαθμίδας. Συνεπώς, η αδυναμία μελέτης τέτοιων θεωριών καθιστά εμφανή την ανάγκη εύρεσης νέων, μη-διαταρακτικών μεθόδων.

Είναι αρκετά σύνηθες, η δράση κλασικών θεωριών πεδίου να παρουσιάζει ορισμένες καθολικές συμμετρίες ανάλογα με τη φύση των πεδίων της θεωρίας και των παραμέτρων αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών. Η εύρεση νέων μη-διαταρακτικών συμμετριών σε χβαντικό επίπεδο, οι οποίες μπορεί να δρουν στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης της θεωρίας, παρουσιάζει μέγιστο ενδιαφέρον και χρησιμότητα, δεδομένου ότι ενδέχεται να επιβάλει περιορισμούς στις παρατηρήσιμες ποσότητες της εκάστοτε θεωρίας. Ένα σημαντικό παράδειγμα τέτοιας συμμετρίας, είναι η  $S$ -δύϊκότητα στην μέγιστα υπερσυμμετρική  $\mathcal{N} = 4$  SYM θεωρία πεδίου, που αντιστοιχεί στην αντιστροφή της Yang-Mills παραμέτρου ζεύξης  $g_{YM}$  για μηδενική γωνία  $\theta$ .

Παρόμοιας φύσης συμμετρία είναι η μη-διαταρακτική, χβαντική συμμετρία που εμφανίζει ο χώρος παραμέτρων ζεύξης των  $\lambda$ -παραμορφωμένων  $\sigma$ -προτύπων που μελετώνται στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Η συμμετρία αυτή, σε συνδυασμό με την ιδιάζουσα δομή των προτύπων αυτών, επιτρέπει την κατασκευή νέων μεθόδων και γενίκευση αυτών, για την εξαγωγή ακριβών αποτελεσμάτων χβαντικών μεγεθών. Σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, η διατήρηση της ολοκληρωσιμότητας των  $\lambda$ -προτύπων καθώς απομακρύνονται από το σύμμορφο σημείο μέσω παραμορφώσεων που περιλαμβάνουν σχετικούς τελεστές, όχι μόνο καθιστά προσιτή τη μελέτη τους, αλλά επιτρέπει και την προσέγγιση άλλων θεωριών μέσω αυτών.

Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου ότι η διαταρακτική τους μορφή αναπαριστά τη δράση του (γενικευμένου) μη-Αβελιανού, μποζονοποιημένου προτύπου Thirring, καθίσταται δυνατή η άμεση μελέτη του τελευταίου σε χβαντικό επίπεδο μέσω της ενεργού δράσεως των  $\lambda$ -προτύπων

[47, 38, 49]. Το πρότυπο Thirring, εκφράζει την αλληλεπίδραση τεσσάρων πεδίων Dirac και είναι στενά συνδεδεμένο με την χβαντική χρωμοδυναμική (ΚΧΔ) καθώς, στη μη-Αβελιανή μορφή του και στο όριο του μεγάλου αριθμού γεύσεων ( $N_f$ ) είναι ισοδύναμο με αυτήν. Στην μποζονοποιημένη μορφή του, ο όρος της αλληλεπίδρασης των τεσσάρων φερμιονίων, αναπαρίσταται μέσω ενός διγραμμικού όρου αλληλεπίδρασης μποζονικών ρευμάτων. Ένα μεγάλο άλμα προς τη κατανόηση τόσο των προτύπων Thirring, όσο και γενικεύσεών τους, έγινε μέσω του προσδιορισμού μιας κλασικής δράσης, η οποία περιλαμβάνει όλες τις χβαντικές διορθώσεις ως προς την παράμετρο της αλληλεπίδρασης [38]. Αυτή αντιστοιχεί στην προαναφερθείσα ενεργό δράση των υπό μελέτη λ-προτύπων, η οποία μέσω των συμμετριών που παρουσιάζει στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης, επιτρέπει την μελέτη και την εξαγωγή ακριβών αποτελεσμάτων για τα αντίστοιχα πρότυπα, χωρίς τη χρήση θεωρίας διαταραχών.

Επιπλέον, η δυνατότητα μελέτης των προτύπων αυτών ως σ-πρότυπα, επιτρέπει την προσέγγισή τους υπό το πρίσμα της θεωρίας χορδών και της αντιστοιχίας θεωριών πεδίου βαθμίδας/βαρύτητας. Με κατάλληλη εμβάπτυση σε υπερβαρυτικά υπόβαθρα [68],[69],[70], είναι δυνατή η περαιτέρω μελέτη τους στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT καθώς και η εύρεση ολοκληρωσίμων παραμορφώσεων σε AdS χώρους. Επιπροσθέτως, τα λ-πρότυπα μπορούν να συσχετιστούν με η-πρότυπα μέσω Poisson-Lie T-δυσιχότητας και αναλυτικής συνέχισης των παραμέτρων ζεύξης [73],[74],[80],[81],[57],[84], καθώς και με αφινικά Gaudin πρότυπα [96] ή συμπλεκτικές αναγωγές Chern-Simons θεωριών [88, 145, 146]. Τέλος, τα λ-παραμορφωμένα σ-πρότυπα προσφέρουν το κατάλληλο υπόβαθρο για τη μελέτη συστημάτων γύρω από το κρίσιμο σημείο και κατ' επέκταση τη μελέτη αλλαγών φάσης, ενώ η μελέτη της χβαντικής τους ολοκληρωσιμότητας, επιτρέπει τη συσχέτισή τους με πρότυπα χβαντικών αλυσίδων σπιν [148], επεκτείνοντας έτσι τις εφαρμογές τους και σε φυσική στερεάς κατάστασης.

Το περιεχόμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι αφιερωμένο στη μελέτη των χβαντικών ιδιοτήτων, διαφόρων παραλλαγών των αρχικών λ-προτύπων, κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης, και είναι οργανωμένο ως εξής:

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις απαραίτητες θεωρητικές έννοιες θεωρίας πεδίου και θεωρίας χορδών που χρειάζονται για την κατανόηση του κυρίως κειμένου της εργασίας, ενώ ταυτόχρονα γίνεται και μια εκτενής εισαγωγή στα λ-παραμορφωμένα σ-πρότυπα και τις ιδιότητές τους. Στο κεφάλαιο τρία, παρουσιάζεται η ανάλυση που έγινε στα πλαίσια της διατριβής, συνοδευόμενη από τα αντίστοιχα αποτελέσματα και σχολιασμούς. Η ανάλυση αυτή είναι επικεντρωμένη στον ακριβή υπολογισμό χβαντικών ποσοτήτων για τα λ-πρότυπα με τη χρήση μη-διαταραχτικών μεθόδων, και την μελέτη διαφόρων ιδιοτήτων και ροών που αυτά παρουσιάζουν κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Το κυρίως κείμενο συνοδεύεται από μια πληθώρα παραρτημάτων στα οποία παρουσιάζονται αναλυτικά συμπληρωματικοί υπολογισμοί για τις διάφορες ενότητες της εργασίας.

## 2 Θεωρητικό υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται οι βασικές θεωρητικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Επιπλέον γίνεται εισαγωγή στα υπό μελέτη  $\lambda$ -παραμορφωμένα πρότυπα και παρουσιάζονται κάποια από τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας που είναι απαραίτητα στα πλαίσια της εργασίας.

### 2.1 Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Η κβάντωση μιας κλασικής θεωρίας πεδίου εν γένει μπορεί να επιτευχθεί με δύο ισοδύναμες μεθόδους, την κανονική κβάντωση όπου τα κλασικά πεδία προάγονται σε τελεστές και την κβάντωση μέσω συναρτησιακών ολοκληρωμάτων.

Στον φορμαλισμό των συναρτησιακών ολοκληρωμάτων, μία κβαντική θεωρία πεδίου (ΚΘΠ) καθορίζεται από τη δράση  $S[\phi, g_i]$  η οποία αποτελεί ολοκλήρωμα μίας Λαγκρανζιανής πυκνότητας σε μια  $d$ -διάστατη πολλαπλότητα, είναι συναρτησιοειδές των πεδίων  $\phi$ , και συνάρτηση των παραμέτρων ζεύξης  $\{g_i\}$ . Αυτές συμπεριλαμβάνουν όλους τους όρους μάζας, καθώς και τις ισχύεις των αλληλεπιδράσεων ενώ μπορούν επίσης να θεωρηθούν σαν ένα σύνολο συντεταγμένων στον χώρο της θεωρίας.

Μία κβαντική θεωρία πεδίου συνεπώς προσδιορίζεται σε όρους ενός συναρτησιακού ολοκληρώματος

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\phi; g_i]\right) \quad (2.1.1)$$

Η ίδια ποσότητα είναι δυνατόν να ορισθεί και στην Ευκλείδια μορφή της, μετά από στροφή κατά Wick, περνώντας πλέον στον φανταστικό χρόνο.

Η δυσκολία ορισμού μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου έγκειται στην αδυναμία κατασκευής ενός καλώς ορισμένου μέτρου ολοκλήρωσης  $[d\phi]$  στον χώρο των πεδίων. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στην τοπικότητα των πεδίων και στον άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας από τους οποίους χαρακτηρίζεται το κάθε πεδίο καθιστώντας έτσι μία ολοκλήρωση τέτοιας φύσεως μη τετριμμένη.

Στη θεωρία διαταραχών, ένα σύμπτωμα αυτών των δυσκολιών στον προσδιορισμό του παραπάνω μεγέθους, παρουσιάζεται στις αποκλίσεις για μεγάλες ενέργειες (UV) που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα βρόγχων. Αυτές οι UV αποκλίσεις εμφανίζονται όταν η ορμή των εσωτερικών γραμμών στα διαγράμματα Feynman γίνεται μεγάλη και συνεπώς, είναι στενά συνδεδεμένες με την τοπικότητα του πεδίου, καθώς και με το γεγονός ότι το πεδίο έχει άπειρους βαθμούς ελευθερίας και μπορεί να κυμαίνεται σε όλες τις ενεργειακές κλίμακες, ακόμα και στις αυθαίρετα μεγάλες.

### 2.1.1 Συναρτήσεις συσχετισμού και Ανάπτυγμα Γινομένου Τελεστών

Η ολοκληρωτέα ποσότητα της (2.1.1) μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση βάρους για τον υπολογισμό αναμενόμενων τιμών της θεωρίας και συναρτήσεων συσχετισμού  $n$ -σημείων οι οποίες δίνονται από την ακόλουθη έκφραση

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = (-\hbar)^n \frac{\delta \mathcal{Z}[J; g_i]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \frac{\int [d\phi] e^{-\frac{S_E[\phi; g_i]}{\hbar}} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)}{\mathcal{Z}[0; g_i]}. \quad (2.1.2)$$

Στην πάνω σχέση  $S_E$  είναι η ευκλείδεια δράση μετά από στροφή κατά Wick του χρονικού άξονα, ενώ ως  $\mathcal{Z}[J; g_i] = \int [d\phi] e^{-(S_E[\phi; g_i] + \int dx \phi(x) J(x)) / \hbar}$  ορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση των συναρτήσεων συσχετισμού, με τα  $J$  να συμβολίζουν τις εξωτερικές πηγές ρευμάτων.

Όμως, κατά την κβάντωση μιας σχετικιστικής θεωρίας οι συναρτήσεις συσχέτισης των πεδιακών τελεστών παρουσιάζουν απειρισμούς που συνδέονται με τη φύση της εκάστοτε θεωρίας και τον αριθμό των χωροχρονικών διαστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, αποκλίσεις στις συναρτήσεις συσχετισμού εμφανίζονται στις υψηλές ενέργειες (UV αποκλίσεις) σε θεωρίες στις  $d \geq 2$  διαστάσεις με την μορφή αντίστροφων δυνάμεων ( $d > 2$ ) ή λογαρίθμου ( $d = 2$ ) της απόστασης, ενώ αποκλίσεις στις χαμηλές ενέργειες (IR αποκλίσεις) εμφανίζονται στις  $d = 2$  διαστάσεις με λογαριθμική μορφή για θεωρίες με άμαζους βαθμούς ελευθερίας.

Προκειμένου να μελετηθεί ο τρόπος απείρισμού των συναρτήσεων συσχετισμού εισάγεται η έννοια του *Γινομένου Κανονικά Ταξινομημένων Τελεστών* (Normal Ordered Product) το οποίο είναι πεπερασμένο, και του *Αναπτύγματος Γινομένου Τελεστών* (Operator Product Expansion (OPE)) το οποίο εμπεριέχει τους απειρισμούς.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια συνάρτηση συσχετισμού  $n$ -σημείων μπορεί να εκφραστεί ως

$$\langle \phi(x) \phi(y) \phi(z_1) \dots \phi(z_n) \rangle = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \langle \phi(z_1) \dots \phi(z_n) \rangle + \langle : \phi(x) \phi(y) : \phi(z_1) \dots \phi(z_n) \rangle$$

όπου ο πρώτος όρος εμπεριέχει τον απειρισμό για  $y \rightarrow x$ , ενώ ο δεύτερος όρος στο ίδιο όριο είναι πεπερασμένος εφόσον οι τελεστές μεταξύ των  $z_i$  είναι κανονικά ταξινομημένοι με αποτέλεσμα να μην αλληλεπιδρούν άμεσα. Η έκφραση αυτή ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό  $z_i$  δεδομένου ότι  $z_i \neq x, y$ .

Ο συλλογισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί στον ορισμό ενός νέου τελεστή

$$: \phi(x)\phi(y) := \phi(x)\phi(y) - \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \cdot \mathbb{1} \quad (2.1.3)$$

Δεδομένου του ότι και οι δύο όροι στο δεξί μέλος αποκλίνουν καθώς  $y \rightarrow x$ , ο νέος αυτός τελεστής δεν παρουσιάζει απειρισμούς στο όριο αυτό, αλλά αντιθέτως είναι καλώς ορισμένος ως τοπικός τελεστής (local operator) μέσω της σχέσης  $\lim_{y \rightarrow x} : \phi(x)\phi(y) :=: \phi^2 : (x)$ .

Αντιστρέφοντας την σχέση (2.1.3) μπορούμε να ορίσουμε για δύο τοπικούς τελεστές  $\mathcal{O}_j(x)$ ,  $\mathcal{O}_k(y)$  το Ανάπτυγμα Γινομένου Τελεστών όταν  $y \rightarrow x$  ως

$$\mathcal{O}_j(x)\mathcal{O}_k(y) \stackrel{y \rightarrow x}{\equiv} \sum_i C_{jk}^i(x-y)\mathcal{O}_i(y) + \text{πεπερασμένο} \quad (2.1.4)$$

όπου οι συντελεστές  $C_{jk}^i(x-y)$  είναι συναρτήσεις που περιλαμβάνουν τους διάφορους απειρισμούς.

Ο ορισμός (2.1.3) αποτελεί το πρώτο βήμα προς την θεμελίωση της θεωρίας της επανακανονικοποίησης, η οποία θα αναλυθεί εκτενώς στη συνέχεια. Η παρούσα υποενότητα αναλύεται εκτενέστερα στην [5].

## 2.1.2 Θεωρία Επακανονικοποίησης

Η βασική έννοια της θεωρίας της ομάδας επανακανονικοποίησης (Renormalization Group (RG)) είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο φαινόμενα σε διαφορετική ενεργειακή κλίμακα (ή ισοδύναμα κλίμακα μήκους) συνδέονται μεταξύ τους, υπό την απαίτηση ότι η περιγραφή των φυσικών φαινομένων παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αλλαγές της κλίμακας αυτής [4]. Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται η έννοια μιας ενεργούς θεωρίας σύμφωνα με την οποία η μελέτη ενός φυσικού συστήματος σε ενεργειακές κλίμακες μικρότερες μιας κλίμακας αναφοράς  $\mu$  είναι πιο αποδοτική όταν περιγράφεται από μία θεωρία όπου οι βαθμοί ελευθερίας ορίζονται περίπου στην κλίμακα  $\mu$ . Έτσι δεν υπάρχουν περιττοί βαθμοί ελευθερίας, και η περιγραφή είναι, υπο κάποια έννοια, βέλτιστη.

Όμως, η ενεργός θεωρία συνήθως δεν είναι αξιόπιστη σε ενεργειακές κλίμακες  $> \mu$ , και για αυτές τις κλίμακες μία νέα ενεργός θεωρία προκύπτει με νέους βαθμούς ελευθερίας.

Το σημαντικό σημείο είναι ότι θα υπάρχουν σχέσεις σύνδεσης των διαφόρων παραμέτρων (σταθερές ζεύξης, μάζες,...) μεταξύ των δύο περιγραφών στις δύο διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες.



Δύο απο τους τρόπους που υπάρχουν για την επανακανονικοποίηση της θεωρίας, δηλαδή για την αντιμετώπιση των απειρισμών που εμφανίζονται στην θεωρία διαταραχών είναι: α) είτε μέσω της επιβολής ενός ορίου αποκοπής στις ενέργειες ολοκλήρωσης της θεωρίας, β) είτε η τροποποίηση των ολοκληρωμάτων ορμής που προκύπτουν στους βρόγχους αλληλεπίδρασης μέσω αναλυτικής συνέχισης των χωροχρονικών τους διαστάσεων.

Αφού οι αποκλίσεις απομονωθούν και απαλειφθούν με την προσθήκη αντισταθμιστικών όρων (counter terms), οι ποσότητες που προκύπτουν είναι πεπερασμένες και ανταποκρίνονται στα φυσικά μεγέθη. Η θεωρία που χαρακτηρίζεται απο αυτά τα επανακανονικοποιημένα μεγέθη, ονομάζεται *επανακανονικοποιημένη*, ενώ η αρχική μη-επανακανονικοποιημένη. Οι κβαντικές θεωρίες μπορεί να είναι επανακανονικοποιήσιμες, μη-επανακανονικοποιήσιμες ή υπερ-επανακανονικοποιήσιμες, ανάλογα με τον αριθμό αντισταθμιστικών όρων που χρειάζεται να προστεθούν προκειμένου να απαλειφθούν οι απειρισμοί που προκύπτουν σε κβαντικό επίπεδο.

Στις επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες, εφόσον οι απειρισμοί που προκύπτουν σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών είναι ίδιου τύπου, αρκεί να προστεθεί ένα πεπερασμένο σύνολο αντισταθμιστικών όρων για τους όρους που εμφανίζονται στην αρχική δράση, οι συντελεστές των οποίων όμως πρέπει να επαναπροσδιορίζονται σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών. Στις μη-επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες, σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών προκύπτουν νέου τύπου απειρισμοί, με αποτέλεσμα να χρειάζεται ένα άπειρο σύνολο αντισταθμιστικών όρων, οι οποίοι εν γένει δεν αντιστοιχούν μόνο σε όρους που υπήρχαν στην αρχική δράση. Τέλος, για τις υπερ-επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες, καθώς αυξάνεται η τάξη των διαταραχών χρειάζονται λιγότεροι αντισταθμιστικοί όροι για την απαλοιφή των απειρισμών στους βρόγχους της κβαντικής θεωρίας.

Έστω τώρα μια φυσική ποσότητα  $F(g_i, l)_\mu$  η οποία εξαρτάται απο την κλίμακα μήκους  $l$  και απο την κλίμακα αποκοπής  $\mu$ . Η θεωρία επανακανονικοποίησης υποδηλώνει ότι το όριο αποκοπής της θεωρίας μπορεί να αλλάξει με τέτοιο τρόπο, ώστε η φυσική στις κλίμακες μήκους  $l > \mu^{-1}$  να παραμείνει αναλλοίωτη.

Αν αυτό ισχύει, τότε αναπόφευκτα οι σταθερές ζεύξης στη δράση πρέπει να αλλάζουν με το  $\mu$ , δηλαδή να είναι συναρτήσεις  $g_i(\mu)$ .

Η ιδέα αυτη συνοψίζεται στην εξίσωση μετασχηματισμού της ομάδας επανακανονικοποίησης (RG μετασχηματισμός)

$$F(g_i(\mu); l) = F(g_i(\mu'); l)_{\mu'} \quad (2.1.5)$$

ή ισοδύναμα στην εξίσωση

$$F(g_i(\mu); sl)_\mu = s^{-d_f} F(g_i(\mu/s); l)_\mu \quad (2.1.6)$$

όπου  $s$  είναι μία παράμετρος κατά την οποία αλλάζει το όριο αποκοπής ( $\mu \rightarrow \mu/s$ ), και  $d_f$  είναι η διάσταση μάζας της ποσότητας  $F$ .

Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών

$$g_i(\mu) = g_i(g_j(\mu'), \mu/\mu'), \quad (2.1.7)$$

ορίζουν την ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης της θεωρίας στον χώρο των σταθερών ζεύξης  $g_i(\mu)$ .

### $\beta$ -συνάρτηση και ανώμαλη διάσταση

Εφόσον τα παρατηρήσιμα μεγέθη μιας θεωρίας μπορούν να προσδιοριστούν από τη δράση, ο ίδιος ο  $RG$  μετασχηματισμός προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η δράση καθώς αλλάζει το όριο αποκοπής.

Η δράση με ένα συγκεκριμένο όριο αποκοπής είναι γνωστή ως *Wilsonian ενεργός δράση*  $S[\phi; \mu, g_i]$ , και αφού εξαρτάται από τις σταθερές ζεύξης, το όριο αποκοπής, αλλά και τα πεδία, ο μετασχηματισμός  $RG$  πρέπει να γενικευθεί ώστε να επιτρέπει αλλαγή και στην κανονικοποίηση των πεδίων ως

$$S[Z_\phi(\mu)^{1/2}\phi; \mu, g_i(\mu)] = S[Z_\phi(\mu')^{1/2}\phi; \mu', g_i(\mu')], \quad (2.1.8)$$

όπου  $Z_\phi$  είναι ο όρος που επανακανονικοποιεί την κυματοσυνάρτηση του πεδίου  $\phi$  (στην γενική περίπτωση πολλών πεδίων, το  $Z(\mu)$  είναι πίνακας). Ο παράγοντας  $Z_\phi(\mu)$  μπορεί να θεωρηθεί και ως η σταθερά ζεύξης του κινηματικού όρου.

Για το πιο απλό είδος κβαντικής θεωρίας πεδίου που εμπεριέχει ένα μόνο βαθμωτό πεδίο, η δράση μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα ενός κινηματικού όρου, και ενός γραμμικού συνδυασμού (σύνθετων εν γένει) τελεστών  $\mathcal{O}_i(x)$  οι οποίοι είναι δυνάμεις των πεδίων και των παραγώγων τους:  $\phi^n, \phi^n \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi, \dots$

$$S[\phi; \mu, g_i] = \int d^d x \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \sum_i \mu^{d-d_i} g_i \mathcal{O}_i(x) \right], \quad (2.1.9)$$

όπου  $d_i$  είναι οι διαστάσεις μάζας των  $\mathcal{O}_i(x)$  και  $d$  η διάσταση του χωρόχρονου.

Στην τελευταία σχέση οι σταθερές ζεύξης είναι αδιάστατες έχοντας πολλαπλασιασθεί με την κατάλληλη δύναμη του ορίου αποκοπής  $\mu$ , προκειμένου να είναι συνεπής η διαστατική ανάλυση.

### $\beta$ -συνάρτηση

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί της ομάδας επανακανονικοποίησης είναι κωδικοποιημένοι στην  $\beta$  συνάρτηση η οποία ορίζεται ως

$$\beta_i(g_j) = \mu \frac{dg_i(\mu)}{d\mu}. \quad (2.1.10)$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι  $\beta$ -συναρτήσεις είναι συναρτήσεις μόνο των παραμέτρων ζεύξης αυτών καθ'αυτών, και εξαρτώνται από το όριο αποκοπής έμμεσα μέσω των αυτών.

Το γεγονός ότι οι παράμετροι ζεύξης εμφανίζονται σαν συνδυασμοί  $\mu^{d-d_i}g_i$  στην δράση (2.1.9), σημαίνει ότι η  $\beta$ -συνάρτηση έχει την γενική μορφή

$$\beta_i(g_j) = \mu \frac{dg_i}{d\mu} = (d_i - d)g_i + \beta_i^{quant}(g_j). \quad (2.1.11)$$

- Ο πρώτος όρος προκύπτει από τον κλασικό επαναορισμό των παραμέτρων ζεύξης με τις δυνάμεις του  $\mu$  προκειμένου τα  $g_i$  να είναι αδιάστατα, ενώ

- Ο δεύτερος όρος έρχεται από το μη-τετριμμένο κβαντικό κομμάτι του  $RG$  μετασχηματισμού, το οποίο αντιστοιχεί σε μία μη τετριμμένη ολοκλήρωση των παραπάνω βαθμών ελευθερίας στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα.

Η σχέση αυτή θα αναλυθεί στην συνέχεια.

### ανώμαλη διάσταση

Η ανώμαλη διάσταση ενός πεδίου  $\phi$  σε όρους της ποσότητας  $Z_\phi(\mu)$  ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\gamma_\phi(g_i) = \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_\phi^{1/2}. \quad (2.1.12)$$

Ο λόγος για τον ορισμό αυτό είναι ότι από την (2.1.8) προκύπτει πως για τις ποσότητες που εξαρτώνται από τα πεδία, πρέπει η (2.1.5) να γενικευθεί προκειμένου να λαμβάνει υπόψιν της τον παράγοντα επανακανονικοποίησης των πεδίων. Συνεπώς, για μια συνάρτηση συσχετισμού  $n$  σημείων

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, g_i(\mu)) = \int [d\phi]_\mu e^{-S[\phi; \mu, g_i(\mu)]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n), \quad (\hbar = 1)$$

προκύπτει μια  $RG$  εξίσωση της μορφής

$$Z_\phi(\mu)^{-n/2} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu, g_i(\mu)) = Z_\phi(\mu')^{-n/2} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu', g_i(\mu')) \quad (2.1.13)$$

ή σύμφωνα με την (2.1.6)

$$G^{(n)}(sx_1, \dots, sx_n; \mu, g_i(\mu)) = \left[ \frac{Z_\phi(\mu)}{Z_\phi(\mu/s)} s^{d-2} \right]^{n/2} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu, g_i(\mu/s)). \quad (2.1.14)$$

Ο παράγοντας  $s^{n(d-2)/2}$  εδώ, αντανακλά τη διάσταση μάζας των  $n$  πεδίων που εισήχθησαν, και  $s \geq 1$ . Τώρα μπορεί να γίνει εμφανές γιατί το  $\gamma_\phi$  του ορισμού (2.1.12) είναι γνωστό ως ανώμαλη διάσταση:

Έστω ένας απειροστός μετασχηματισμός  $s = 1 + \delta s$ .

Σε αυτή την περίπτωση, οι πολλαπλασιαστικοί παράγοντες της (2.1.14), μπορούν να γραφούν ως

$$\left[ \frac{Z_\phi(\mu)}{Z_\phi(\mu/s)} s^{d-2} \right]^{n/2} = 1 + n \left[ \frac{1}{2}(d-2) + \gamma_\phi \right] \delta s, \quad (2.1.15)$$

όπου το δεξί μέλος της εξίσωσης προήλθε εφαρμόζοντας ανάπτυγμα Taylor γύρω από το  $s = 1$  και ο συντελεστής  $(d-2)/2$  αντιστοιχεί στην κλασική διάσταση μάζας ενός βαθμωτού πεδίου στις  $d$  διαστάσεις.

Απο εδώ είναι εμφανές ότι ένας *RG* μετασχηματισμός είναι κάτι παραπάνω από έναν μετασχηματισμό αλλαγής κλίμακας αφού έχει ως αποτέλεσμα η φυσική διάσταση μάζας του πεδίου  $\phi$  να δέχεται μια επιπλέον ανώμαλη συνεισφορά  $\gamma_\phi$ . Τέλος, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η  $\gamma_\phi$  εν γένει εξαρτάται από τις σταθερές ζεύξης και συνεπώς είναι έμμεσα μια συνάρτηση της ενεργειακής κλίμακας.

## Εξίσωση Callan-Symanzik

Η εξίσωση *Callan-Symanzik* είναι μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή μιας συνάρτησης συσχετισμού  $n$  σημείων ως προς την μεταβολή της ενεργειακής κλίμακας  $\mu$ .

Έστω η συνάρτηση συσχετισμού  $n$ -σημείων:

$G_B^{(n)}(x_1, \dots, x_n; m_B, g_B) = Z_\phi^{n/2} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; m, g, \mu)$ , όπου με δείκτη  $B$  συμβολίζονται οι μή-επανακανονικοποιημένες ποσότητες.

Δρώντας σε αυτήν με  $\mu \frac{d}{d\mu}$  και εφόσον το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από  $\mu$  προκύπτει

$$\begin{aligned} \mu \frac{dG_B^{(n)}}{d\mu} &= \mu \frac{dZ_\phi^{n/2}}{d\mu} G^{(n)} + \mu Z_\phi^{n/2} \frac{dG^{(n)}}{d\mu} = \\ &= n\gamma_\phi Z_\phi^{n/2} G^{(n)} + \mu Z_\phi^{n/2} \left( \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \mu} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mu} \right) = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιώντας τον ορισμό της προηγούμενης υποενότητας για την  $\beta$ -συνάρτηση και την ανώμαλη διάσταση, και ορίζοντας επιπλέον  $\gamma_m(g) = \frac{\mu}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu}$  προκύπτει η εξίσωση Callan-Symanzik

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} + n \gamma_\phi \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; m, g, \mu) = 0. \quad (2.1.16)$$

### Κρίσιμη επιφάνεια

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ενεργειακή κλίμακα  $\mu$  αντιπροσωπεύει την κλίμακα ενέργειας της υπό μελέτη φυσικής.

Αυτό που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον όμως σχετικά με τις ροές της ομάδας επανακανονικοποίησης  $g_i(\mu)$  είναι τα IR ( $\mu \rightarrow 0$ ) και UV ( $\mu \rightarrow \infty$ ) όριά τους, αφού αυτά υποδεικνύουν πως συμπεριφέρεται η θεωρία σε πολύ μικρές ή μεγάλες ενέργειες.

Όλες οι φυσικές μάζες που σχετίζονται με την σταθερά αποκοπής  $m/\mu$  αυξάνονται κατά τη ροή από τις υψηλές (UV) στις χαμηλές (IR) ενέργειες.

Αν σε μία θεωρία παρουσιάζεται χάσμα μάζας (mass gap), δηλαδή υπάρχουν μόνο πεδία με  $m \neq 0$ , τότε καθώς η  $\mu$  μειώνεται και παίρνει τιμή μικρότερη από τη μάζα του ελαφρύτερου πεδίου, δεν απομένουν φυσικοί βαθμοί ελευθερίας να διαδοθούν σε χαμηλότερη κλίμακα ορμής. Έτσι στο IR όριο προκύπτει μια «άδεια» θεωρία χωρίς διαδιδόμενες καταστάσεις.

Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης να ξεκινάει από την κρίσιμη επιφάνεια [4].

**Κρίσιμη επιφάνεια** είναι ο απειροδιάστατος υπόχωρος του χώρου των σταθερών ζεύξης για τον οποίο το χάσμα μάζας εξαφανίζεται. Αυτές οι θεωρίες συνεπώς έχουν ένα μη τετριμμένο IR όριο στο οποίο μόνο οι άμαζοι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν.

Σε αυτήν την περίπτωση, καθώς  $\mu \rightarrow 0$ , θα παραμείνουν οι άμαζοι βαθμοί ελευθερίας, και στις πιο συμβατικές θεωρίες, οι σταθερές ζεύξης τείνουν σε ένα σταθερό σημείο του RG:  $g_i(\mu) \rightarrow g_i^*$ , όπου η  $\beta$ -συνάρτηση μηδενίζεται

$$\mu \frac{dg_i(\mu)}{d\mu} \Big|_{g_j^*} = 0. \quad (2.1.17)$$

Είναι σημαντικό να τονιστεί εδώ ότι ο όρος επανακανονικοποίησης της κυματοσυνάρτησης και η ανώμαλη διάσταση δεν χρειάζεται να μηδενίζονται στα σταθερά σημεία  $g_i^*$ .

Αυτές οι θεωρίες στα σταθερά σημεία είναι πολύ ξεχωριστές, διότι έχοντας μόνο άμαζους βαθμούς ελευθερίας είναι στην ουσία θεωρίες αναλλοίωτες κάτω από αλλαγές κλίμακας. Η

αναλλοιότητα στην αλλαγή κλίμακας όμως, υπάγεται στην ομάδα των σύμμορφων μετασχηματισμών, και έτσι οι θεωρίες στα σταθερά (κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης) σημεία είναι επίσης γνωστές και ως *συμμορφες θεωρίες πεδίου* (*Conformal field theories* (CFTs))<sup>1</sup> και θα αναλυθούν στη συνέχεια.

Γυρνώντας τώρα στη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης, στην γειτονιά ενός σταθερού σημείου  $g_i^*$  όπου  $g_i = g_i^* + \delta g_i$ , η  $\beta$ -συνάρτηση μπορεί πάντα να γραμμικοποιηθεί ως

$$\mu \frac{dg_i}{d\mu} \Big|_{g_i^* = \delta g_i} = A_{ij} \delta g_j + \mathcal{O}(\delta g_j^2).$$

Σε μία κατάλληλη βάση  $\{\sigma_i\}$  για τα  $\{\delta g_i\}$ , ο συντελεστής  $A_{ij}$  του γραμμικού όρου είναι διαγώνιος

$$\mu \frac{d\sigma_i}{d\mu} = (\Delta_i - d)\sigma_i + \mathcal{O}(\sigma_i^2) \quad (2.1.18)$$

και ολοκληρώνοντας προκύπτει σε πρώτη τάξη ως προς τα  $\sigma_i$  ότι

$$\sigma_i(\mu) = \left( \frac{\mu}{\mu'} \right)^{\Delta_i - d} \sigma_i(\mu'). \quad (2.1.19)$$

Με  $\Delta_i$  συμβολίζεται εδώ η σύμμορφη διάσταση του νέου τελεστή  $\mathcal{O}_i$  στην καινούρια βάση που σχετίζεται με τη σταθερά ζεύξης  $\sigma_i$ . Η διάσταση  $\Delta_i$  εν γένει σε μία αλληλεπιδρούσα κβαντική θεωρία πεδίου δεν ταυτίζεται απαραίτητα με την διάσταση μάζας  $d_i$  του αρχικού  $\mathcal{O}_i$  τελεστή. Τότε η διαφορά

$$\gamma_i = \Delta_i - d_i$$

είναι η ανώμαλη διάσταση του τελεστή  $\mathcal{O}_i$ , σε αντιστοιχία με την ανώμαλη διάσταση του πεδίου  $\gamma_\phi$  που ορίστηκε στην (2.1.15).

Συμφωνα με την εξίσωση (2.1.19), μπορούν να ορισθούν τρεις κατηγορίες παραμέτρων ζεύξης, ανάλογα με τον τρόπο που αυτές αλλάζουν στην γειτονιά ενός σταθερού σημείου:

**Σχετικές (Relevant Coupling)** : Αν για μία παράμετρο ζεύξης ισχύει  $\Delta_i < d$ , τότε όπως φαίνεται απο την (2.1.19), η ροή αποκλίνει (μακριά απο το σταθερό σημείο) καθώς το  $\mu \rightarrow 0$ . Αυτές οι παράμετροι ζεύξης γίνονται σημαντικές στις χαμηλότερες ενέργειες.

**Μη-σχετικές (Irrelevant Coupling)** : Αν για μία παράμετρο ζεύξης ισχύει  $\Delta_i > d$ ,

<sup>1</sup>Εν γένει, ο μηδενισμός της  $\beta$ -συνάρτησης υποδηλώνει αναλλοιότητα κάτω απο μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας και όχι απαραίτητα σύμμορφη αναλλοιότητα, δεδομένου ότι η ομάδα των σύμμορφων μετασχηματισμών περιλαμβάνει επιπλέον μετασχηματισμούς εκτός από την αλλαγή κλίμακας. Παρόλα αυτά όμως, μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί αντιπαράδειγμα μοναδιακής θεωρίας στις δύο διαστάσεις (και σε επίπεδο χώρο) η οποία να είναι αναλλοίωτη κάτω απο μετασχηματισμούς κλίμακας και να μην είναι σύμμορφη.

τότε καθώς  $\mu \rightarrow 0$ , η ροή επιστρέφει προς το σταθερό σημείο. Τέτοιες παράμετροι ζεύξης είναι μικρές στις χαμηλότερες ενέργειες, και γίνονται σημαντικές στις υψηλότερες.

**Οριακές (Marginal Coupling) :** Αν για μία παράμετρο ζεύξης ισχύει  $\Delta_i = d$ , τότε είναι απαραίτητη η μελέτη ανώτερης τάξης στη θεωρία διαταραχών προκειμένου να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα για την συμπεριφορά της συγκεκριμένης ροής.

Αν μέσω των όρων μεγαλύτερης τάξης η παράμετρος ζεύξης αποκλίνει από/συγκλίνει προς το σταθερό σημείο, τότε αυτή ορίζεται ως *οριακώς σχετική/μη-σχετική* (marginally relevant/irrelevant).

Το τελευταίο ενδεχόμενο που υπάρχει είναι η παράμετρος ζεύξης να μην κυμαίνεται σε καμία τάξη, δηλαδή σε όλες τις τάξεις να ισχύει  $\Delta_i = d$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι μια *πραγματικά οριακή* (Truly Marginal) παράμετρος ζεύξης και αυτό συνεπάγεται ότι το αρχικό σταθερό σημείο είναι στην ουσία μέρος μιας ολόκληρης γραμμής απο σταθερά σημεία.

### Ενεργός δράση σε επίπεδο ενός βρόγχου

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, η σχέση (2.1.1) με την προσθήκη εξωτερικών πηγών αποτελεί την γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις συσχετισμού των πεδίων της εκάστοτε θεωρίας. Στο επίπεδο της θεωρίας διαταραχών εξεφρασμένης μέσω διαγραμμάτων Feynman, η (2.1.1) μπορεί να παράξει συναρτήσεις συσχετισμού που περιλαμβάνουν ως κβαντικές διορθώσεις όλους τους τύπους τέτοιων διαγραμμάτων.

Όμοια με την (2.1.1) και μέσω αυτής μπορεί αντίστοιχα να ορισθεί η γεννήτρια συνάρτηση για συναρτήσεις συσχετισμού πεδίων, οι οποίες όμως θα περιλαμβάνουν ως κβαντικές διορθώσεις μόνο συνδεδεμένα διαγράμματα Feynman ως

$$W[J] = \hbar \log [\mathcal{Z}[J]]. \quad (2.1.20)$$

Μέσω του ορισμού (2.1.20) μπορεί τώρα να εισαχθεί η έννοια μίας ενεργού δράσεως η οποία εν γένει διαφέρει ως έννοια από την ενεργό δράση που αναφέρθηκε προηγουμένως στα πλαίσια της επανακανονικοποίησης, και η σύνδεσή των δύο θα αναλυθεί στην επόμενη ενότητα. Η παρούσα ενεργός δράση αποτελεί μία μορφή κβαντικά διορθωμένης κλασικής δράσης και είναι γεννήτρια συνάρτηση των συναρτήσεων συσχετισμού για τα μη-αναγωγίσιμα διαγράμματα Feynman ενός σωματιδίου (One Particle Irreducible (1PI)).

Στο σημείο αυτό θα ορισθεί η ενεργός δράση  $\Gamma[\phi]$  ως ο μεταχηματισμός Legendre της

ποσότητας  $W[J]^2$  [5]

$$\Gamma[\phi] = J\phi - W[J], \quad \text{και} \quad J(x) = \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}. \quad (2.1.21)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός επιτρέπει την έκφραση των φυσικών ποσοτήτων σε όρους απόκρισης του φυσικού συστήματος  $\phi$  αντί σε όρους των πηγών  $J^3$ . Εδώ το  $\phi$  αντιπροσωπεύει το κλασικό πεδίο παρουσία εξωτερικών ρευμάτων (είναι συνάρτηση του χωρόχρονου και συναρτησιοειδές των εξωτερικών πηγών) το οποίο ισούται με την αναμενόμενη τιμή ενός κβαντικού πεδίου (τελεστή)  $\Phi$  μέσω της σχέσης<sup>4</sup>

$$\phi(x) = \phi(x)_J := \langle \Phi(x) \rangle_J = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int [d\Phi] \exp[-(S[\Phi] - J\Phi)/\hbar] \Phi(x)}{\int [d\Phi] \exp[-(S[\Phi] - J\Phi)/\hbar]}. \quad (2.1.22)$$

Το πεδίο της (2.1.22) ονομάζεται *Πεδίο Υποβάθρου (Background Field)* και εκφράζει την απόκριση του συστήματος ως προς την πηγή  $J$ . Η αλλαγή μεταβλητής αυτής από  $J$  σε  $\phi$  είναι αντιστρεπτή, και η χρησιμότητα του ορισμού της ενερού δράσης (2.1.21) γίνεται εμφανής στην θεωρία διαταραχών γύρω από την κλασική προσέγγιση.

Αυτό που πρέπει να σημειωθεί εδώ είναι ότι στην περίπτωση μηδενισμού των εξωτερικών πηγών  $J = 0$ , η (2.1.22) δίνει την αναμενόμενη τιμή του κβαντικού πεδίου  $\Phi$  στο κενό, η οποία ισούται με την τιμή του  $\phi$  στο ελάχιστο της  $\Gamma[\phi]$ , όπως προκύπτει από την δεύτερη σχέση της (2.1.21).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.1.21) είναι δυνατόν να γίνει ημικλασική προσέγγιση της θεωρίας αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του  $\hbar$  γύρω από το κλασικό όριο ( $\hbar \rightarrow 0$ ). Εύκολα αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε βαθμωτό πεδίο  $\phi$  ο υπολογισμός της ενεργού δράσης (2.1.21) σε πρώτη τάξη ως προς το  $\hbar$  είναι

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \frac{\hbar}{2} \log \det [S''[\phi]] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad S''[\phi] = \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}. \quad (2.1.23)$$

Η έκφραση αυτή ουσιαστικά αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα της ποσότητας  $S[\Phi] - J\Phi$  γύρω από το ελάχιστό της, το οποίο δίνεται από κάποιο  $\Phi_c$  για ένα δεδομένο  $J$ . Προφανώς το  $\Phi_c$  εξαρτάται από το  $J$  εφόσον το ελάχιστο της πάνω ποσότητας αλλάζει αν το  $J$  είναι διαφορετικό. Η συνθήκη ελαχιστοποίησης δίνει  $S'[\Phi_c] = J(x)$  και συνεπώς το  $\Phi_c$  αποτελεί σαγματικό σημείο για το ολοκλήρωμα διαδρομής που έχει ως εκθέτη την παραπάνω ποσότητα.

Το προαναφερθέν ανάπτυγμα λοιπόν μπορεί να συσχετισθεί με ένα ανάπτυγμα του κβαντι-

<sup>2</sup>Όπου  $J\phi = \int d^d x J(x)\phi(x)$

<sup>3</sup>Αντίστροφα, ο μετασχηματισμός Legendre της  $\Gamma[\phi]$  είναι η γεννήτρια συνάρτηση των συνδεδεμένων διαγραμμάτων Feynman  $W[J]$ .

<sup>4</sup>Το πεδίο  $\phi_J$  εξαρτάται από το  $J$  και αντίστοιχα το εξωτερικό ρεύμα  $J = J_\Phi$  εξαρτάται από το πεδίο  $\phi$ .



κού πεδίου  $\Phi$  γύρω απο το σαγματικό σημείο ως  $\Phi = \Phi_c + \sqrt{\hbar}\tilde{\Phi}$  και στη συνέχεια να γίνει η συσχέτιση του  $\Phi_c$  με το κλασικό πεδίο υποβάθρου  $\phi$  μέσω του μετασχηματισμού Legendre της σχέσης (2.1.22). Κάνοντας τον μετασχηματισμό αυτό γίνεται εμφανές ότι τα δύο πεδία ταυτίζονται μόνο στην μηδενική τάξη του  $\hbar$  ( $\phi = \Phi_c + \mathcal{O}(\hbar)$ ) και προκύπτει η σχέση (2.1.23).

Το ανάπτυγμα ως προς το  $\hbar$  αντιστοιχεί σε ανάπτυγμα σε βρόγχους (loop-expansion) στην θεωρία διαταραχών και για τον λόγο αυτό η ενεργός δράση της (2.1.23) ονομάζεται *Ενεργός Δράση στο επίπεδο ενός βρόγχου* (1-loop effective action).

### Wilsonian ενεργός δράση

Η ιδέα πάλι είναι η μετάβαση από μια φυσική στις υψηλές ενέργειες που οριοθετείται απο την σταθερά αποκοπής  $\mu$ , σε μία φυσική σε χαμηλότερες ενέργειες που θα οριοθετείται απο μία σταθερά αποκοπής  $\mu' = \mu/s^n$ ,  $s \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Η διαδικασία περιλαμβάνει συνοπτικά τα εξής βήματα [5]:

Ξεκινώντας από μια δράση  $\mathcal{A}[\Phi]$  και έχοντας ορίσει μια σταθερά αποκοπής  $\mu$  στις υψηλές ενέργειες προκειμένου να αποφευχθούν οι απειρισμοί των ολοκληρωμάτων βρόγχων που προκύπτουν μετά απο μετασχηματισμό Fourier των πεδίων, ακολουθεί μια διαδικασία ολοκλήρωσης ορμών σε ένα εύρος (κέλυφος) ενεργειών  $\mu/s < |k| < \mu$ , όπου  $|k|$  είναι οι εσωτερικές ορμές που ολοκληρώνονται στον αντίστοιχο βρόγχο. Η ολοκλήρωση αυτή στις μεγάλες ορμές αντιστοιχεί σε μία διαδικασία ευρεσης μέσης τιμής των κβαντικών διακυμάνσεων που προκαλούνται από κβαντικά φαινόμενα στις υπό ολοκλήρωση ενέργειες. Συνεπώς, μέσω της διαδικασίας αυτής ορίζεται ένα μέσο πεδίο  $\tilde{\Phi}$  και μία μέση δράση  $\mathcal{A}_{\text{eff}}[\tilde{\Phi}]$  η οποία αναφέρεται ως *ενεργός δράση κατά Wilson*. Στην συνέχεια ακολουθεί αλλαγή της ενεργειακής κλίμακας από  $\mu$  σε  $\mu/s$  και επαναορισμός των πεδίων. Το αποτέλεσμα αυτού του μετασχηματισμού είναι τα επανακανονικοποιημένα πεδία  $\Phi_R$  και μία επανακανονικοποιημένη δράση  $\mathcal{A}_R$  στην ενεργειακή κλίμακα  $\mu/s$ . Η επανακανονικοποιημένη δράση είναι ουσιαστικά η ενεργός κατά Wilson δράση μετά την αλλαγή μεταβλητής  $\tilde{\Phi} \rightarrow \Phi_R$ . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται  $n$  φορές μέχρι η ενεργειακή κλίμακα να μειωθεί στο επιθυμητό  $\mu'$ . Μέσα από αυτή τη διαδικασία δεν επαναορίζονται μόνο τα πεδία αλλά και οι παράμετροι ζεύξης της θεωρίας ως

$$\Phi_R = Z_\Phi(\mu)^{-1/2}\Phi_B, \quad (g_i)_R = Z_i(\mu)^{-1}(g_i)_B, \quad (2.1.24)$$

όπου με δείκτη B συμβολίζονται οι αρχικές ποσότητες της θεωρίας που παρουσιάζουν απειρισμούς.

Ο διαχωρισμός σε γρήγορες και αργές ορμές  $\Phi(k) = \Phi_{\text{αργό}}(k) + \Phi_{\text{γρήγορο}}(k)$  όπου το  $\Phi_{\text{αργό}}(k)$  αναφέρεται σε ορμές  $|k| < \mu/s$ , ενώ το  $\Phi_{\text{γρήγορο}}(k)$  αντιστοιχεί στις κβαντικές διορθώσεις για ορμές  $\mu/s < |k| < \mu$ , και η ολοκλήρωση στις γρήγορες, οδηγεί σε ένα συναρτησιακό

ολοκλήρωμα της μορφής

$$e^{-\mathcal{A}_{\text{eff}}[\Phi_{\text{αργό}}]} = \int [d\Phi_{\text{γρήγορο}}] e^{-\mathcal{A}[\Phi_{\text{αργό}} + \Phi_{\text{γρήγορο}}]}$$

Ο υπολογισμός αυτής της ποσότητας εν γένει είναι αρκετά δύσκολος και πολύπλοκος αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με τη βοήθεια της (2.1.23).

Για μία δράση ενός βαθμώτου πεδίου  $\Phi$  της μορφής

$$\mathcal{A}[\Phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + V[\Phi] \right], \quad (2.1.25)$$

το αποτέλεσμα που προκύπτει μέχρι πρώτη τάξη ως προς το  $\hbar$  είναι

$$\mathcal{A}_{\text{eff}}[\Phi_{\text{αργό}}] = \mathcal{A}[\Phi_{\text{αργό}}] + \frac{1}{2} \int d^d x \text{Tr}_\mu \log [k^2 + V''[\Phi_{\text{αργό}}(x)]]. \quad (2.1.26)$$

Σύμφωνα με τη μορφή της (2.1.25), η τελευταία σχέση έρχεται στην ακόλουθη μορφή

$$\mathcal{A}_{\text{eff}}[\Phi_{\text{αργό}}] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)_{\text{αργό}}^2 + V_{\text{eff}}[\Phi_{\text{αργό}}(x)] \right], \quad (2.1.27)$$

όπου το  $V_{\text{eff}}[\Phi_{\text{αργό}}(x)] = V[\Phi_{\text{αργό}}(x)] + \frac{1}{2} \text{Tr}_\mu \log [k^2 + V''[\Phi_{\text{αργό}}(x)]]$  αντιπροσωπεύει το ενεργό δυναμικό το οποίο περιλαμβάνει το αρχικό δυναμικό συν τις κβαντικές διορθώσεις από τις κβαντικές διακυμάνσεις που έχουν ολοκληρωθεί και έχει διαφορετική τιμή για διαφορετική σταθερά αποκοπής  $\mu$ . Η σχέση (2.1.26) μοιάζει πολύ με αυτήν της ενεργού δράσης σε επίπεδο ενός βρόγχου. Η διαφορά όμως είναι ότι στην πρώτη το ίχνος  $\text{Tr}_\mu = \int dk^0 \int_{\mu/s}^\mu \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}$  δηλώνει την ολοκλήρωση σε ένα συγκεκριμένο εύρος ορμών, ενώ στην δεύτερη η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο το εύρος των ορμών κάτω από την σταθερά αποκοπής  $\mu$ . Με την επανάληψη της διαδικασίας και την ολοκλήρωση όλων των ενδιάμεσων ορμών (γρήγορων και αργών), είναι δυνατή η ταύτιση της Wilsonian ενεργού δράσης με αυτήν στο επίπεδο ενός βρόγχου όπου όλες οι κβαντικές διακυμάνσεις θα συνεισφέρουν ως μια μέση τιμή στο πεδίο υποβάθρου.

Όλα τα παραπάνω αποτελούσαν το πρώτο βήμα για την επανακανονικοποίηση κατά Wilson. Στην συνέχεια, έχοντας βρεί την  $\mathcal{A}_{\text{eff}}[\Phi_{\text{αργό}}]$  πρέπει να γίνει αλλαγή κλίμακας και επαναορισμός των πεδίων ως  $\Phi_{\text{αργό}} = Z_\Phi(\mu)^{1/2} \Phi_R$  προκειμένου να προκύψουν οι επανακανονικοποιημένες ποσότητες. Όσον αφορά το ενεργό δυναμικό, ο επαναορισμός αυτός των πεδίων δεν αποτελεί πλέον απλά μία αλλαγή μεταβλητής εφόσον η αλλαγή του  $V_{\text{eff}}$  με την ενέργεια δέν είναι γραμμική ως προς το  $\Phi$  (προκύπτει μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση για την ροή του ενεργού δυναμικού με την ενέργεια).

## 2.2 Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου

Η σύμμορφη θεωρία πεδίου, αποτελεί μία ειδική περίπτωση θεωρίας πεδίου η οποία διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από ιδιαίτερες συμμετρίες. Στην ενότητα αυτή γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των χαρακτηριστικών των σύμμορφων μετασχηματισμών, βασισμένη στις αναφορές [1, 2, 3, 6, 7], καθώς και βασικών έννοιων και ορισμών της σύμμορφης θεωρίας πεδίου που χρησιμοποιούνται στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

### 2.2.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί

Ως σύμμορφοι μετασχηματισμοί, ορίζονται οι μετασχηματισμοί οι οποίοι διατηρούν την γωνία μεταξύ δύο αυθαίρετων καμπυλών που διασταυρώνονται σε κάποιο σημείο. Η διατήρηση της γωνίας μεταξύ δύο ανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$ , όπου  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$ , ισοδυναμεί με αναλλοιότητα, κατά έναν παράγοντα αλλαγής κλίμακας  $\Lambda(x)$ , της μετρικής  $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^{-1}(x) g_{\mu\nu}(x)$ . Ο παράγοντας  $\Lambda(x)$  μπορεί να προσδιορισθεί στην πεπερασμένη μορφή του ως εξής:

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της μετρικής ως τανυστή δεύτερης τάξης, προκύπτει ότι

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \Lambda^{-1}(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (2.2.1)$$

και στη συνέχεια παίρνοντας την ορίζουσα και στα δύο μέλη συνεπάγεται

$$\Lambda(x) = \left[ \det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right]^2. \quad (2.2.2)$$

Για έναν απειροστό μετασχηματισμό τώρα  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ , η (2.2.1) γίνεται

$$g_{\mu\nu} - (\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu) = \Lambda(x)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Στη συνέχεια, παίρνοντας το ίχνος της σχέσης αυτής προκύπτει (απειροστά) ότι  $\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial\epsilon)$ , όπου  $d$  είναι οι διαστάσεις του χώρου και εξάγεται η σύμμορφη εξίσωση κατά Killing (Conformal Killing Equation)

$$(\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu) = \frac{2}{d}(\partial\epsilon)g_{\mu\nu}. \quad (2.2.3)$$

Το σύνολο των σύμμορφων μετασχηματισμών αποτελεί μια ομάδα, η οποία έχει την ομάδα Poincare ως υποομάδα της, με την τελευταία να αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση του

$$\Lambda(x) = 1.$$

Η ομάδα των σύμμορφων μετασχηματισμών στις  $d > 2$  περιλαμβάνει τους μετασχηματισμούς που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα

Μετασχηματισμοί	Πεπερασμένη μορφή	Γεννήτορας	$\Lambda(x)$
Μεταθέσεις	$x'^{\mu} = x^{\mu} + \alpha^{\mu}$	$P^{\mu} = -i\partial_{\mu}$	1
Αλλαγή κλίμακας	$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$	$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}$	$\alpha^2$
Στροφές	$x'^{\mu} = M_{\nu}^{\mu}x^{\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})$	1
SCT	$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - (x \cdot x)\beta^{\mu}}{1 - 2(\beta \cdot x) + (\beta \cdot \beta)(x \cdot x)}$	$K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - (x \cdot x)\partial_{\mu})$	$(1 - 2\beta \cdot x + \beta^2 x^2)^2$

όπου SCT είναι οι Ειδικοί Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί (Special Conformal Transformations) και οι σύμμορφοι παράγοντες  $\Lambda(x)$  υπολογίζονται από τη σχέση (2.2.2).

Στις δύο διαστάσεις ( $d = 2$ ), όπου ορίζονται οι μιγαδικές συντεταγμένες  $z = \frac{1}{2}(\tau + i\sigma)$  και  $\bar{z} = \frac{1}{2}(\tau - i\sigma)$ , η ομάδα αυτή έχει άπειρο αριθμό γεννητόρων  $l_n = -z^{n+1}\partial_z$ . Οι γεννήτορες  $l_n$  των απειροστών σύμμορφων μετασχηματισμών, μαζί με τις σχέσεις μετάθεσής τους αποτελούν την *άλγεβρα Witt*:

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n} \quad , \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n)\bar{l}_{m+n}.$$

Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί που είναι καλώς ορισμένοι στη σφαίρα Riemann  $\mathbf{S}^2 = \mathbf{C} \cup \infty$ , είναι αυτοί που παράγονται από τους γεννήτορες  $\{l_{-1}, l_0, l_1\} \cup \{\bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_1\}$  οι οποίοι αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς του προηγούμενου πίνακα. Συνεπώς η πεπερασμένη μορφή τους αντιστοιχεί σε Möbius μετασχηματισμούς:  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , με  $ad - bc = 1$  της ομάδας  $SL(2, \mathbf{C})/\mathbf{Z}_2 \simeq SO(3, 1)$ .

Τέλος, στην περίπτωση των τριών και πάνω διαστάσεων ( $d \geq 3$ ) η ομάδα των σύμμορφων μετασχηματισμών στο  $\mathbf{R}^{p,q}$  είναι ισομορφική με την  $\mathbf{SO}(p+1, q+1)$ .

### 2.2.2 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Συνήθως μια θεωρία πεδίου ορίζεται σε όρους δράσης, από την οποία μπορούν να παραχθούν διάφορα αντικείμενα και ιδιότητες της θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα ο τανυστής ενέργειας-ορμής μπορεί να παραχθεί από την μεταβολή της δράσης ως προς την μετρική και συνεπώς κωδικοποιεί την συμπεριφορά της θεωρίας κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς της μορφής  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  με  $\delta g_{\mu\nu} \ll 1$ .

Στις δύο διαστάσεις όμως, η άλγεβρα των σύμμορφων μετασχηματισμών είναι απειροδιάστατη με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολύ ισχυροί περιορισμοί σε μία διδιάστατη σύμμορφη θεωρία πεδίου. Ειδικότερα, είναι δυνατό μία τέτοια θεωρία να μελετηθεί χωρίς να είναι καν γνωστή

η ακριβής μορφή της δράσης. Το μόνο που είναι απαραίτητο είναι η συμπεριφορά της θεωρίας κάτω από τους σύμμορφους μετασχηματισμούς, η οποία είναι κωδικοποιημένη στον τανυστή ενέργειας-ορμής.

Η μελέτη του τανυστή ενέργειας-ορμής για μία σύμμορφη θεωρία πεδίου οποιασδήποτε διάστασης, γίνεται μέσω ενός διατηρούμενου κατά Noether ρεύματος, το οποίο εκφράζει την αναλλοιότητα της θεωρίας κάτω από απειροστούς σύμμορφους μετασχηματισμούς της μορφής  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ . Το ρεύμα αυτό είναι  $J_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu$  και ικανοποιεί (σε κλασικό επίπεδο) την σχέση διατήρησης  $\partial^\mu J_\mu = 0$ , ενώ  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  είναι ο συμμετρικός τανυστής ενέργειας-ορμής της θεωρίας, η ακριβής μορφή του οποίου δεν είναι απαραίτητο να είναι γνωστή. Η σχέση διατήρησης του κλασικού ρεύματος Noether σε συνδυασμό με την σύμμορφη Killing εξίσωση (2.2.3) δίνει το σημαντικό αποτέλεσμα ότι:

Σε μία σύμμορφη θεωρία πεδίου ο τανυστής ενέργειας-ορμής έχει μηδενικό ίχνος

$$T_\mu{}^\mu = 0. \quad (2.2.4)$$

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων (και ευκλείδιας μετρικής) ο μηδενισμός του ίχνους του τανυστή ενέργειας-ορμής μεταφράζεται στον μηδενισμό των μη-διαγώνιων  $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$  στοιχείων και της ολομορφικότητας και αντι-ολομορφικότητας (ή χειραλικότητας και μη χειραλικότητας για Λορέντζια μετρική) των διαγώνιων στοιχείων  $T_{zz}(z, \bar{z}) = T(z)$  και  $T_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) = \bar{T}(\bar{z})$ .

### 2.2.3 Άλγεβρα Virasoro

Σε κβαντικό επίπεδο, ο τανυστής ενέργειας-ορμής μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent ως

$$T(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} L_m z^{m-2}, \quad L_m = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{m+1} T(z) dz, \quad (2.2.5)$$

όπου οι συντελεστές  $L_n, n \in \mathbb{Z}$  του αναπτύγματος ικανοποιούν την άλγεβρα Virasoro με κεντρικό φορτίο  $c$ . Η άλγεβρα αυτή αντιστοιχεί στην κεντρική επέκταση της άλγεβρας Witt των απειροστών σύμμορφων μετασχηματισμών και έχει τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \quad (2.2.6)$$

με τους  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  να είναι οι γεννήτορες των καθολικών σύμμορφων μετασχηματισμών  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ .

Η σχέση (2.2.6) προκύπτει από το OPE του τανυστή ενέργειας-ορμής με τον εαυτό του, το

οποίο παρουσιάζεται στην επόμενη υποενότητα.

#### 2.2.4 Πρωτεύοντα πεδία σύμμορφης διάστασης $(h, \bar{h})$

Αν ένα πεδίο στις δύο διαστάσεις μετασχηματίζεται κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς  $z \rightarrow f(z)$  ως

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (2.2.7)$$

ονομάζεται *πρωτεύον* πεδίο σύμμορφης διάστασης  $(h, \bar{h})$ , όπου το  $h$  αντιστοιχεί στην ολομορφική ενώ το  $\bar{h}$  στην αντι-ολομορφική διάσταση, και έχει συνολική σύμμορφη διάσταση  $\Delta = h + \bar{h}$ . Αν η σχέση (2.2.7) ισχύει μόνο για καθολικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς, δηλαδή για  $f \in SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ , τότε το πεδίο  $\phi$  λέγεται *οιονεί-πρωτεύον* πεδίο.

Ένα πρωτεύον πεδίο είναι πάντα οιονεί-πρωτεύον, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ένας εναλλακτικός ορισμός για τα πρωτεύοντα πεδία είναι ο εξής:

Ένα πεδίο  $\phi(z, \bar{z})$  λέγεται πρωτεύον με σύμμορφες διαστάσεις  $(h, \bar{h})$  αν το Ανάπτυγμα του Τανυστικού Γινομένου (OPE) του με τον τανυστή ενέργειας-ορμής  $T(z)$  έχει την ακόλουθη μορφή

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) + \dots \quad (2.2.8)$$

και όμοια για το αντι-ολομορφικό μέρος, με τις τελείες να υποδηλώνουν όρους με ομαλό όριο καθώς  $z \rightarrow w$ .

Το OPE αυτό ισοδυναμεί με τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης των συντελεστών Laurent

$$[L_m, \phi_n] = ((h-1)m - n)\phi_{m+n}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.9)$$

όπου  $L_n$  είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent (2.2.5) του τανυστή ενέργειας-ορμής, και  $\phi_n$  οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent του πεδίου  $\phi(z)$ , το οποίο αναλύεται ως

$$\phi(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n w^{n-h}, \quad \phi_n = \frac{1}{2\pi i} \oint w^{n+h-1} \phi(w) dw. \quad (2.2.10)$$

Τότε, η μετάβαση από την σχέση (2.2.8) στην (2.2.9) γίνεται παίρνοντας τον μεταθέτη των συντελεστών Laurent και αντικαθιστώντας από τις (2.2.5) και (2.2.10). Αυτό συνεπάγεται

την ακόλουθη σχέση

$$[L_m, \phi_n] = \oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+h-1} T(z) \phi(w) \quad (2.2.11)$$

$$- \oint_{|z|<|w|} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+h-1} \phi(w) T(z). \quad (2.2.12)$$

Απο την κβαντική θεωρία πεδίου είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις συσχετισμού ορίζονται ως γινόμενα χρονικά ταξινομημένων τελεστών.

Στο επίπεδο της σύμμορφης θεωρίας πεδίου, η χρονική ταξινόμηση αντιστοιχεί σε ακτινική ταξινόμηση μέσω της αλλαγής μεταβλητών:  $z = e^\tau e^{i\sigma}$  όπου  $|z| = e^\tau$  και έτσι, το γινόμενο δύο τελεστών  $A(z)B(w)$  έχει νόημα μόνο για  $|z| > |w|$ .

Συνεπώς, ορίζεται η *Ακτινική ταξινόμηση* δύο τελεστών ως

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{για } |z| > |w| \\ B(w)A(z) & \text{για } |z| < |w| \end{cases},$$

η οποία στο πλαίσιο ενός μεταθέτη χρησιμοποιείται ως εξής:

$$\oint dz [A(z), B(w)] = \oint_{|z|>|w|} dz A(z)B(w) - \oint_{|z|<|w|} B(w)A(z) = \oint_{C(w)} dz R(A(z)B(w)),$$

με το  $C(w)$  να αναφέρεται στην επικαμπύλια ολοκλήρωση σε κύκλο με κέντρο το  $w$ .

Η ακτινική ταξινόμηση για ευκολία συμβολίζεται απλά ως  $A(z)B(w)$  και αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα γινομένου των δύο τελεστών (OPE).

Γυρνώντας πάλι στην απόδειξη της σχέσης (2.2.9) και χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα επιχειρήματα, η (2.2.12) έρχεται στη μορφή

$$[L_m, \phi_n] = \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+h-1} T(z) \phi(w).$$

Αντικαθιστώντας τώρα το OPE που εμφανίστηκε στην πάνω σχέση από την (2.2.8), χρησιμοποιώντας τη σχέση των ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

και ολοκληρώνοντας διαδοχικά ως προς  $z$  και  $w$  αποδεικνύεται η έκφραση (2.2.9).

Τέλος, όσον αφορά το OPE του ταυστή ενέργειας-ορμής με τον εαυτό του, αυτό έχει την

μορφή

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}T'(w) + \text{ομαλοί όροι} \quad (2.2.13)$$

με το  $c$  να είναι αριθμός που σχετίζεται με τους βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας και του οποίου η σημασία αναλύεται στην επόμενη υποενοότητα καθώς και στην ενότητα της συνάρτησης κεντρικού φορτίου και της ανωμαλίας Weyl.

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι ο ταυσιτής ενεργειακής-ορμής είναι μεν οιοει-πρωτεύον πεδίο, αλλά δεν αποτελεί πρωτεύον πεδίο σύμφωνα με τον ορισμό που δώθηκε στην (2.2.8). Τέλος, από το OPE (2.2.13) και με χρήση του αναπτύγματος (2.2.5) για τον ταυσιτή ενεργειακής-ορμής, προκύπτει η άλγεβρα Virasoro της (2.2.6), μέσω μίας διαδικασίας όμοιας με αυτή που αναλύθηκε παραπάνω για την άλγεβρα των πρωτεύοντων πεδίων.

### 2.2.5 Άλγεβρα των οιοει-πρωτεύοντων πεδίων

Οι συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων για τα πρωτεύοντα πεδία προκύπτουν, μέσω των ισχυρών περιορισμών που επιβάλλει η αναλλοιώτητα κάτω από τους σύμμορφους μετασχηματισμούς, να είναι οι ακόλουθες [1, 2, 3, 7]

$$\langle \phi_i(z)\phi_j(w) \rangle = \frac{d_{ij}\delta_{h_i,h_j}}{(z-w)^{2h_i}}, \quad \langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}}, \quad (2.2.14)$$

με τις  $d_{ij}, C_{123}$  να είναι σταθερές και αντίστοιχες σχέσεις να ισχύουν για τον αντι-ολομορφικό τομέα.

Ο γενικότερος τύπος αυτών των συναρτήσεων συσχετισμού επιτρέπει την εξαγωγή [1] του γενικού τύπου για το OPE δύο ολομορφικών οιοει-πρωτεύοντων πεδίων σε όρους άλλων οιοει-πρωτεύοντων πεδίων και των παραγώγων τους (πεδία απόγονοι)

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_{k,n \geq 0} C_{ij}^k \frac{\alpha_{ijk}^n}{n!} \frac{1}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} \partial^{(n)} \phi_k(w),$$

με παράγοντες

$$\alpha_{ijk}^n = \binom{2h_k + n - 1}{n}^{-1} \binom{h_k + h_i - h_j + n - 1}{n}$$

και

$$C_{ijk} = C_{ij}^l d_{lk}.$$



Αναπτύσσοντας τώρα τα οιονεί-πρωτεύοντα πεδία  $\phi_i(z)$  σε σειρά Laurent

$$\phi_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{(i)m} z^{-m-h_i}, \quad \phi_{(i)m} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+h_i-1} \phi_i(z) \quad (2.2.15)$$

και δουλεύοντας με τα επικαμπύλια ολοκληρώματα όπως και πριν, μπορεί να εκφραστεί το OPE σαν σχέση μετάθεσης για τους συντελεστές Laurent των πεδίων ως

$$[\phi_{(i)m}, \phi_{(j)n}] = \sum_k C_{ij}^k p_{ijk}(m, n) \phi_{(k)m+n} + d_{ij} \delta_{m,-n} \binom{m+h_i-1}{2h_i-1}, \quad (2.2.16)$$

όπου

$$p_{ijk}(m, n) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}_0^+, r+s=h_i+h_j-h_k-1} C_{r,s}^{ijk} \binom{m+h_i-1}{r} \quad (2.2.17)$$

και

$$C_{r,s}^{ijk} = (-1)^r \frac{(2h_k-1)!}{(h_i+h_j+h_k-2)!} \prod_{t=0}^{s-1} (2h_i-2-r-t) \prod_{u=0}^{r-1} (2h_j-2-s-u) \quad (2.2.18)$$

### 2.2.6 Άλγεβρες ρευμάτων

Ένα ολομορφικό πεδίο  $J(z)$  με σύμμορφη διάσταση  $h=1$  ονομάζεται ρεύμα. Το ίδιο ισχύει και για ένα αντι-ολομορφικό πεδίο  $\bar{J}(\bar{z})$  με  $\bar{h}=1$ .

Σε μια θεωρία με  $N$  οιονεί-πρωτεύοντα ρεύματα  $J^a(z)$ ,  $a=1, \dots, N$ , τα οποία εκφράζονται με τη μορφή αναπτύγματος σε σειρά Laurent ως

$$J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n^a, \quad (2.2.19)$$

προκύπτει από την (2.2.16) η ακόλουθη άλγεβρα για τους συντελεστές  $J_n^a$

$$[J_m^a, J_n^b] = \sum_k C^{abc} p_{111}(m, n) J_{m+n}^c + d_{ab} m \delta_{m,-n}, \quad (2.2.20)$$

όπου σύμφωνα με την (2.2.17)  $p_{111}(m, n) = 1$ , ενώ  $C^{abc} = -C^{bac}$  λόγω της αντισυμμετρικότητας του μεταθέτη.

Στη συνέχεια, με τη διαγωνιοποίηση του πίνακα  $d_{ab}$  επέρχεται μια στροφή στα πεδία, και με μια αλλαγή κλίμακας επιτυγχάνεται  $d_{ab} = k \delta_{ab}$ , με το  $k$  να είναι μια σταθερά αναλογίας.

Γράφοντας λοιπόν τα πεδία στην νέα βάση και συμβολίζοντας την σταθερά  $C^{abc}$  με  $f^{abc}$ ,

προκύπτει για την άλγεβρα των συντελεστών Laurent η σχέση

$$[J_m^a, J_n^b] = f^{abc} J_{m+n}^c + km\delta^{ab}\delta_{m,-n}. \quad (2.2.21)$$

Η άλγεβρα αυτή ονομάζεται *Αφινική (Affine) Kac-Moody* άλγεβρα  $\mathfrak{g}_k$  και αποτελεί την κεντρική επέκταση μιας Lie άλγεβρας  $\mathfrak{g}$ , με τις σταθερές  $f^{abc}$  να είναι οι σταθερές δομής της, και το  $k$  να είναι η τάξη της. Οι μηδενικοί τρόποι ταλάντωσης ικανοποιούν την Lie άλγεβρα  $\mathfrak{g}$ , ενώ ο επιπλέον όρος με το  $k$  είναι ένας κεντρικός όρος, με την ίδια έννοια που η άλγεβρα Virasoro είναι μία κεντρική επέκταση της άλγεβρας Witt.

Οι σχέσεις μετάθεσης (2.2.21) είναι ισοδύναμες με το ακόλουθο OPE μεταξύ των ολομορφικών ρευμάτων

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{if^{abc}}{z-w}J^c(w) + \text{ομαλό}, \quad (2.2.22)$$

ενώ αντίστοιχες σχέσεις ικανοποιούνται και για τα αντι-ολομορφικά ρεύματα  $\bar{J}^a(\bar{z})$ , με

$$J^a(z)\bar{J}^b(\bar{w}) = \text{ομαλό}. \quad (2.2.23)$$

Είναι γεγονός ότι για κάθε απλή άλγεβρα Lie μπορεί να υπάρξει μία αντίστοιχη αφινική Kac-Moody η οποία συμβολίζεται ως  $\mathfrak{g}_k$  (ή  $\hat{\mathfrak{g}}_k$ ).

### 2.2.7 Ο Sugawara τανυστής ενέργειας-ορμής

Προκειμένου να παραχθεί μία άλγεβρα συμμετρίας απο τα ρεύματα η οποία θα είναι συμβατή με την άλγεβρα Virasoro, πρέπει να υπάρχει ένας τανυστής ενέργειας-ορμής  $T(z)$ , τέτοιος ώστε τα ρεύματα  $J^a(z)$  να έχουν σύμμορφη διάσταση  $h = 1$  ως προς αυτόν.

Ο *Sugawara τανυστής ενέργειας-ορμής* μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου που δίνεται απο μία άλγεβρα ρευμάτων  $\mathfrak{g}_k$  είναι [3, 1]

$$T(z) = \frac{1}{2(k+h^V)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} : J^a J^a : (z), \quad (2.2.24)$$

όπου  $k$  είναι η τάξη της Kac-Moody άλγεβρας  $\mathfrak{g}_k$ ,  $h^V$  είναι ο δυϊκός Coxeter αριθμός ο οποίος ισούται με την ιδιοτιμή του τετραγωνικού τελεστή Casimir στην συζυγή αναπαράσταση της άλγεβρας, και το  $::$  υποδηλώνει την κανονική διάταξη των πεδιακών ρευμάτων  $J^a(z)$ .

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τανυστή ενέργειας-ορμής της σχέσης (2.2.24), είναι δυνατόν να υπολογισθεί το *κεντρικό φορτίο* μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου που προσδιορίζεται

μέσω του OPE (2.2.13) και προκύπτει ότι

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^V}. \quad (2.2.25)$$

Επειδή ο Sugawara τανυστής ενέργειας-ορμής κατασκευάζεται από Kac-Moody ρεύματα, αναμένεται ένα Kac-Moody πρωτεύον πεδίο να είναι επίσης Virasoro πρωτεύον, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει γενικά.

### 2.2.8 Συναρτήσεις συσχετισμού των ρευμάτων

Έχοντας υπολογίσει την άλγεβρα για τα ρεύματα, και επαναορίζοντας αυτά ως  $J^a \mapsto J^a \sqrt{k}$  για λόγους διευκόλυνσης που θα γίνουν εμφανείς στην συνέχεια της εργασίας, εύκολα προκύπτουν για τις συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων οι ακόλουθες σχέσεις

$$\langle J_a(z_1) J_b(z_2) \rangle = \frac{\delta_{ab}}{(z_1 - z_2)^2}, \quad (2.2.26)$$

$$\langle J_a(z_1) J_b(z_2) J_c(z_3) \rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{f_{abc}}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_1 - z_3)}, \quad (2.2.27)$$

ενώ για την συνάρτηση συσχετισμού τεσσάρων σημείων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \langle J^a(x_1) J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) J^{a_3}(z_3) \rangle &= \frac{1}{k} \frac{f_{a_1 a c} f_{c a_2 a_3}}{(z_1 - x_1)(x_1 - z_2)(x_1 - z_3)(z_2 - z_3)} + \frac{\delta_{a a_1} \delta_{a_2 a_3}}{(x_1 - z_1)^2 (z_2 - z_3)^2} \\ &+ \text{κυκλικές μεταθέσεις των } 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

με  $f_{acd} f_{bcd} = -c_G \delta_{ab}$ <sup>5</sup>, όπου  $c_G$  είναι η ιδιοτιμή του τετραγωνικού τελεστή Casimir στην συζυγή αναπαράσταση της αντίστοιχης Lie άλγεβρας  $\mathfrak{g}$ . Η τελευταία σχέση προέκυψε μέσω χρήσης της ταυτότητας του Ward για τα ρεύματα

$$\begin{aligned} \langle J^a(z) J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) \dots J^{a_n}(z_n) \rangle &= \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{a a_i}}{(z - z_i)^2} \langle J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) \dots J^{a_{i-1}}(z_{i-1}) J^{a_{i+1}}(z_{i+1}) \dots J^{a_n}(z_n) \rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^n \frac{f_{a a_i b}}{z - z_i} \langle J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) \dots J^b(z_i) J^{a_n}(z_n) \rangle, \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

η οποία χρησιμοποιείται και για την εύρεση συναρτήσεων συσχετισμού περισσότερων σημείων.

<sup>5</sup>Η σχέση αυτή ισχύει όταν οι πίνακες  $t_a$  είναι ερμητιανοί οπότε οι σταθερές δομής είναι καθαρά φανταστικές. Στην αντίθετη περίπτωση  $f_{acd} f_{bcd} = +c_G \delta_{ab}$

### 2.2.9 Kac-Moody Πρωτεύοντα πεδία

Δεδομένης μίας απλής αναπαράστασης  $\rho$  μίας Lie άλγεβρας  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , ένα αφινικό πρωτεύον πεδίο  $\Phi^\rho(z)$  είναι ένα πεδίο που παίρνει τιμές στον χώρο της αναπαράστασης  $\rho$  έτσι ώστε

$$J^a(z)\Phi^\rho(w) = -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\rho(t^a)\Phi^\rho(w)}{w-z} + \mathcal{O}(1), \quad (2.2.30)$$

όπου το  $1/\sqrt{k}$  έχει προκύψει λόγω του επαναορισμού  $J^a \rightarrow J^a/\sqrt{k}$  των ρευμάτων που αναφέρθηκε και προηγουμένως. Ένα αφινικό πρωτεύον πεδίο είναι και πρωτεύον πεδίο κατά Virasoro όπως προκύπτει από την κατασκευή Sugawara και η σύμμορφη διάστασή του δίνεται σε όρους της ιδιοτιμής  $C_2(\rho)$  του τετραγωνικού τελεστή Casimir στην αναπαράσταση  $\rho$  από τη σχέση

$$\Delta_\rho = \frac{C_2(\rho)}{2(k+hV)}. \quad (2.2.31)$$

Από την αντιστοιχία τελεστή-κατάστασης [1, 3, 6, 7] που υπάρχει για τις σύμμορφες θεωρίες πεδίου, τα αφινικά πρωτεύοντα πεδία αντιστοιχούν σε αφινικές πρωτεύουσες καταστάσεις οι οποίες είναι αναπαραστάσεις μέγιστου βάρους (Highest weight representations) της άλγεβρας  $\mathfrak{g}_k$ .

## 2.3 Συνάρτηση κεντρικού φορτίου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η έννοια της συνάρτησης κεντρικού φορτίου για μία διδιάστατη επανακανονικοποιήσιμη κβαντική θεωρία πεδίου, όπως αναπτύχθηκε από τον A. B. Zamolodchikov στην [53]. Η έννοια της συνάρτησης κεντρικού φορτίου είναι στενά συνδεδεμένη με την μη-αντιστρεψιμότητα της ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης σε μία διδιάστατη κβαντική θεωρία πεδίου.

Ξεκινώντας από μία (Ευκλείδεια) δράση  $S = \int \mathcal{L}(g, \mu, x) d^2x$ , όπου  $\mu$  είναι μια σταθερά αποκοπής υψηλών ενεργειών και  $g = (g^1, g^2, \dots)$  μία οικογένεια αδιάστατων παραμέτρων ζεύξης οι οποίες αποτελούν συντεταγμένες ενός χώρου που ονομάζεται Χώρος παραμέτρων ζεύξης, η έννοια της συνάρτησης κεντρικού φορτίου εισάγεται ως εξής:

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα της επανακανονικοποίησης, ένας μετασχηματισμός της ομάδας αυτής σχετίζεται με αλλαγή της ενεργειακής κλίμακας και συνοδεύεται από την ολοκλήρωση των βαθμών ελευθερίας που ανήκουν σε ενέργειες μεγαλύτερες της σταθεράς αποκοπής για την κλίμακα αυτή. Η ολοκλήρωση αυτή προϊδεάζει για μία μη-αντιστρεπτή διαδικασία στον χώρο ροής των παραμέτρων ζεύξης κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Zamolodchikov

1. Υπάρχει μία (γνησίως φθίνουσα κατά τη ροή από τις υψηλές στις χαμηλές ενέργειες) συνάρτηση των σταθερών ζεύξης  $C(g) \geq 0$  ώστε

$$\frac{dC}{d\mu} \equiv \beta^i(g) \frac{\partial C(g)}{\partial g^i} \leq 0. \quad (2.3.1)$$

Ο επαναλαμβανόμενος δείκτης υποδηλώνει άθροιση, ενώ η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο στα σταθερά σημεία  $g = g^*$  της ομάδας επανακανονικοποίησης όπου  $\beta^i(g^*) = 0$ .

2. Τα σταθερά σημεία είναι στατικά για την  $C(g)$ , δηλαδή για  $\beta^i(g) = 0$  προκύπτει  $\frac{\partial C}{\partial g^i} = 0$ . Στα σταθερά αυτά κρίσιμα σημεία, η δισδιάστατη θεωρία πεδίου έχει μια απειροδιάστατη σύμμορφη συμμετρία με τους αντίστοιχους γεννήτορες να ικανοποιούν την άλγεβρα Virasoro της (2.2.6) με κεντρικό φορτίο  $c$ . Το κεντρικό φορτίο αυτό παίρνει διαφορετικές τιμές για διαφορετικά σταθερά σημεία εφόσον κάθε κρίσιμο σταθερό σημείο της ομάδας επανακανονικοποίησης αντιστοιχεί και σε μία διαφορετική σύμμορφη θεωρία πεδίου, συνεπώς  $c = c(g^*)$ .
3. Η τιμή της  $C(g)$  στα σταθερά σημεία ταυτίζεται με αυτήν του κεντρικού φορτίου της άλγεβρας Virasoro της αντίστοιχης σύμμορφης θεωρίας πεδίου, δηλαδή  $C(g^*) = c(g^*)$ .

Αυτές είναι οι υποθέσεις του επονομαζόμενου  $c$ -θεωρήματος του Zamolodchikov, ενώ η απόδειξή του βρίσκεται αναλυτικά στην [53] και βασίζεται σε συνθήκες επανακανονικοποιησιμότητας, θετικότητας και αναλλοιωότητας της θεωρίας κάτω από στροφές και μεταθέσεις, καθώς και ιδιότητες σύμμορφων θεωριών πεδίου στις δύο διαστάσεις. Εν συντομία, περιλαμβάνει τον ορισμό των κάτωθι συναρτήσεων σε μία συγκεκριμένη ενεργειακή κλίμακα

$$\tilde{C}(g) = 2z^4 \langle T(x)T(0) \rangle, \quad H_i(g) = z^2 x^2 \langle T(x)\Phi_i(0) \rangle, \quad G_{ij}(g) = x^4 \langle \Phi_i(x)\Phi_j(0) \rangle, \quad (2.3.2)$$

όπου  $x^2 = z\bar{z} = |z|^2$ ,  $T(x) = T_{zz}(x)$  η ολομορφική συνιστώσα του ταυυστή ενέργειας-ορμής και  $\Phi_i(g, x) = \frac{\partial \mathcal{L}(g, \mu, x)}{\partial g^i}$ .

Λόγω της συνθήκης θετικότητας της θεωρίας πεδίου, ο πίνακας  $G_{ij}(g)$  είναι θετικά ορισμένος και μπορεί να θεωρηθεί ως μετρική στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης της θεωρίας, ικανοποιώντας τη σχέση  $G^{ik}G_{kj} = \delta_j^i$ . Η μετρική αυτή πολλές φορές συναντάται και με την ονομασία *Μετρική του Zamolodchikov στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης*.

Είναι καλό να σημειωθεί εδώ ότι από τον υπολογισμό της πρώτης σχέσης της (2.3.2) σε σταθερό σημείο της ομάδας επανακανονικοποίησης και από τον ορισμό του κεντρικού φορτίου ως τον αριθμητικό παράγοντα στην συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων του ταυυστή ενέργειας-ορμής, προκύπτει ότι

$$\langle T(z)T(0) \rangle_{g^*} = z^{-4} \frac{\tilde{C}(g^*)}{2} = z^{-4} \frac{c(g^*)}{2}. \quad (2.3.3)$$

Επιστρέφοντας τώρα στο θεώρημα του Zamolodchikov, είναι εύκολο να αποδειχθεί με την χρήση της εξίσωσης Callan-Symanzik και την μορφή του πίνακα της ανώμαλης διάστασης

$$\gamma_i^j(g) \equiv \left( \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \beta^k \frac{\partial}{\partial g^k} \right) \Phi^i = (\partial_i \beta^j) \Phi_j, \quad (2.3.4)$$

ότι

$$\beta^i \partial_i C = -12 \beta^i \beta^j G_{ij}. \quad (2.3.5)$$

Πηγαίνοντας τώρα γύρω από ένα κρίσιμο σημείο  $g^*$  και διαλέγοντας ένα σύστημα συντεταγμένων στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης ώστε  $g^* = 0$ , μπορεί να γίνει το ανάπτυγμα της μετρικής του Zamolodchikov γύρω από την επίπεδη μετρική ως  $G_{ij}(g) = \delta_{ij} + \mathcal{O}(g^2)$ . Σε αυτή την περίπτωση, τα ανύσματα  $\Phi_i(g^*, x)$  είναι σύμμορφα πεδία και έχουν ανώμαλες διαστάσεις  $\Delta_i$ . Εφαρμόζοντας θεωρία διαταραχών γύρω από το  $g^* = 0$  και έπειτα απο λίγη άλγεβρα, εύκολα προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial C(g)}{\partial g^j} = -12 G_{ij} \beta^i(g) \quad (2.3.6)$$

γύρω από ένα σταθερό σημείο της ομάδας επανακανονικοποίησης.

## 2.4 Μποζονική Θεωρία χορδών, σ-πρότυπα και ροή κατά Ricci

Η θεωρία υπερχορδών αποτελεί μέχρι στιγμής την πιο επιτυχημένη προσπάθεια για την δημιουργία μιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας. Η προσθήκη της υπερσυμμετρίας στην μποζονική θεωρία χορδών συνεισφέρει στην απαλοιφή των αποκλίσεων που προκύπτουν κβαντικά στους βρόγχους αλληλεπίδρασης των βαρυτονίων καθώς και στην ύπαρξη φερμιονικής ύλης κατά την κβάντωση της θεωρίας χορδών. Θα γίνει εμφανές στη συνέχεια της ενότητας αυτής ότι η κβάντωση της βαρύτητας εμπεριέχει μία χαμηλοενεργειακή ενεργό δράση σε επίπεδο ενός βρόγχου που αντιστοιχεί σε κλασική βαρύτητα στις παραπάνω διαστάσεις, με την μόνη διαφορά πλέον ότι η παράμετρος που υποδεικνύει την τάξη του αναπτύγματος των βρόγχων δεν είναι το  $\hbar$  αλλά μία καινούρια παράμετρος  $\alpha'$  με διαστάσεις (μήκους)<sup>2</sup> που σχετίζεται με την καμπυλότητα του χώρου.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιασθούν συνοπτικά στοιχεία απο την μποζονική θεωρία χορδών με βάση τις [9, 10, 11]

Προκειμένου να μπορέσει να υπάρξει μία συνεπής θεωρία κβαντικής βαρύτητας, οι ακόλουθες απαιτήσεις θα πρέπει να ικανοποιούνται [9]:

1. Σε χαμηλές ενέργειες θα πρέπει να προκύπτει η θεωρία της γενικής σχετικότητας
2. Επίσης σε χαμηλές ενέργειες θα πρέπει η θεωρία να καταρρέει σε κάτι αντίστοιχο του Καθιερωμένου Προτύπου
3. Για να μπορεί να γίνεται λόγος για βαρύτητα θα πρέπει το φάσμα της κβαντικής θεωρίας να μπορεί να προβλέπει την ύπαρξη άμαζων βαθμών ελευθερίας με ελικότητα  $h = \pm 2$
4. Συμπεριλαμβάνοντας αλληλεπιδράσεις, η θεωρία θα πρέπει να παραμένει από μαθηματικής άποψης συνεπής.

### Μποζονική θεωρία χορδών και σ-πρότυπα

Σύμφωνα με τα προηγούμενα λοιπόν, ένας ωραίος τρόπος για να εισαχθεί η θεωρία χορδών είναι μέσω της γενικής σχετικότητας. Έστω η θεωρία της γενικής σχετικότητας σε  $d$  χωροχρονικές διαστάσεις με κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  και ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο ύλης  $\Phi$

$$S[g, \Phi] = \int d^d x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2} g^{mn} \partial_m \Phi \partial_n \Phi - \Lambda \right), \quad m, n = 1, \dots, d \quad (2.4.1)$$

όπου  $g_{mn}$  είναι η μετρική της αντίστοιχης πολλαπλότητας και  $R$  η βαθμωτή ποσότητα Ricci. Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς οι οποίοι αποτελούν συμμετρία της μετρικής, καθώς και κάτω από μια καθολική συμμετρία μεταθέσεων ως προς τα πεδία  $\Phi \rightarrow \Phi + a$ .

Σε αυτή τη δράση μπορούν να εισαχθούν τώρα επιπρόσθετες συμμετρίες με την προσθήκη επιπλέον βαθμωτών πεδίων και την εισαγωγή γραμμικών συνδυασμών γινομένων αυτών ως εξής

$$S[g, \Phi] = \int d^d x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2} g^{mn} \partial_m \Phi^i \partial_n \Phi^j M_{ij} - \Lambda \right), \quad i, j = 1, \dots, D \quad (2.4.2)$$

όπου ο πίνακας  $M_{ij}$  δεν εξαρτάται από τα πεδία  $\Phi$  και οι δείκτες  $i, j = 1, \dots, D$  ορίζουν έναν νέο  $D$ -διάστατο εσωτερικό χώρο με συντεταγμένες τα πεδία  $\Phi^i$ . Οι συμμετρίες της (2.4.2) τώρα είναι οι διαφορομορφισμοί στην  $d$ -διάστατη πολλαπλότητα, οι μεταθέσεις των πεδίων  $\Phi^i \rightarrow \Phi^i + a^i$  αλλά και η επιπλέον καθολική συμμετρία  $\Phi^i \rightarrow L^i_j \Phi^j$  με τους πίνακες  $L^i_j$  να ικανοποιούν τη σχέση  $L^T M L = M$ .

Αν ο πίνακας  $M = \mathbb{1}_{D \times D}$  τότε η καθολική συμμετρία αντιπροσωπεύει στροφές στον εσωτερικό  $D$ -διάστατο χώρο και εκφράζεται από την ομάδα  $SO(D)$ . Οι στροφές αυτές σε συνδυασμό με τις μεταθέσεις των πεδίων παράγουν την ομάδα Poincare στις  $D$  διαστάσεις, κάτω από την οποία είναι τελικά αναλλοίωτη η δράση (2.4.2). Οι εξισώσεις κίνησης ως προς

την μετρική της πολλαπλότητας για αυτή τη δράση είναι

$$\frac{\delta S}{\delta g_{mn}} = 0 \implies R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R + \Lambda g_{mn} = T_{mn}, \quad (2.4.3)$$

όπου  $R_{mn}$  είναι ο τανυστής Ricci που αντιστοιχεί στην  $g_{mn}$  και  $T_{mn}$  είναι ο Τανυστής Ενέργειας-Ορμής της θεωρίας με τα πεδία ύλης, ο οποίος ισούται με  $T_{mn} = M_{ij}(\partial_m \Phi^i \partial_n \Phi^j - g_{mn} g^{rs} \partial_r \Phi^i \partial_s \Phi^j)$ .

Πηγαίνοντας τώρα στις δύο χωροχρονικές διαστάσεις  $d = 2$  όπου υπάρχουν δύο συνεταγμένες  $(x^0, x^1) = (\tau, \sigma)$  και μετονομάζοντας επίσης

$$\Phi^i \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma), \quad M_{ij} \rightarrow \eta_{\mu\nu}, \quad g_{mn} \rightarrow h_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \quad \mu, \nu = 1, \dots, D,$$

είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο τανυστής Einstein μηδενίζεται, αφήνοντας από τις εξισώσεις κίνησης  $\Lambda g_{mn} = T_{mn}$ . Ξέροντας όμως την μορφή του τανυστή ενέργειας-ορμής και παίρνοντας το ίχνος προκύπτει  $T_m{}^m = h^{mn} T_{mn} = 0$ , συνεπώς η μόνη τιμή κοσμολογικής σταθεράς για την οποία οι εξισώσεις κίνησης είναι συνεπείς είναι η  $\Lambda = 0$ .

Μία επιπλέον πληροφορία που προκύπτει λόγω του μηδενισμού του ίχνους του τανυστή ενέργειας-ορμής, είναι ότι η θεωρία στον διδιάστατο χωρόχρονο έχει μία επιπλέον συμμετρία και είναι αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς.

Επιστρέφοντας τώρα στην δράση (2.4.2), ο όρος που περιλαμβάνει την καμπυλότητα Ricci στις δύο διαστάσεις είναι απλά μια σταθερά, η οποία σε ευκλείδια μορφή και για μία κλειστή Ριμάνεια επιφάνεια ταυτίζεται με το τοπολογικό αναλλοίωτο του αριθμού Euler, δίνοντας πληροφορίες για την τοπολογία της δισδιάστατης επιφάνειας  $\Sigma$

$$\chi = \int_{\Sigma} dt d\sigma \sqrt{-h} R, \quad t = i\tau.$$

Εφόσον λοιπόν είναι απλά ένας αριθμός, δεν συνεισφέρει δυναμικά στη δράση και μπορεί να παραλειφθεί για τώρα.

Αυτό που μένει από την δράση (2.4.2) στις  $d = 2$  χωροχρονικές διαστάσεις είναι

$$S[h_{mn}, X^\mu] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left( -\frac{1}{2} h^{mn} \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \eta_{\mu\nu} \right), \quad (2.4.4)$$

$$m, n = 1, 2, \quad \mu, \nu = 1, \dots, D.$$

Η δράση (2.4.4) είναι η δράση του *Polyakov* η οποία περιγράφει την διάδοση μιας χορδής μέσα σε ένα χώρο μεγαλύτερης διάστασης. Η χορδή καθώς κινείται διαγράφει μία δισδιάστατη επιφάνεια η οποία παραμετροποιείται από τους λατινικούς δείκτες και από τώρα και



στο εξής θα αναφέρεται ως *Κοσμικό Φύλλο* (*Worldsheet*), ενώ ο εσωτερικός χώρος μέσα στον οποίο είναι εμβαπτισμένη η διδιάστατη επιφάνεια παραμετροποιείται από τους ελληνικούς δείκτες και θα αναφέρεται ως *Χώρος στόχος* (*Target space*). Συνεπώς, η δράση αυτή περιγράφει μια απεικόνιση από το κοσμικό φύλλο της χορδής στον χώρο στόχο με μετρική  $\eta_{\mu\nu}$ .

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι τα πεδία  $X^\mu$  αποτελούν συντεταγμένες του χώρου στόχου, και συνεπώς αποτελούν ανύσματα για τον χώρο αυτό, ενώ όσον αφορά μετασχηματισμούς των συντεταγμένων  $(\tau, \sigma)$  του κοσμικού φύλλου, τα  $X^\mu$  συμπεριφέρονται ως βαθμωτά πεδία.

Οι συμμετρίες της δράσης (2.4.4) είναι:

-Αναλοιότητα κάτω από διαφορομορφισμούς  $\sigma^a \rightarrow \sigma^a(\tau, \sigma)$

-Αναλλοιότητα κάτω από την καθολική συμμετρία  $\delta X^\mu(\tau, \sigma) = a^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + b^\mu$ ,  $\delta h_{ab} = 0$

-Αναλοιότητα κάτω από μετασχηματισμούς Weyl που αντιστοιχούν σε ανακλιμάκωση της μετρικής κατά έναν παράγοντα  $h_{ab} \rightarrow e^{\Phi(\tau, \sigma)} h_{ab}$ ,  $\delta X^\mu = 0$ .

Όπως θα γίνει εμφανές στην επόμενη ενότητα, η τελευταία συμμετρία της δράσης αυτής ισχύει σε κλασικό επίπεδο/επίπεδη μετρική χώρου στόχου, ενώ σε κβαντικό επίπεδο/γενική μετρική χώρου στόχου υπεισέρχεται η αντίστοιχη ανωμαλία.

Η δράση (2.4.4) εμπίπτει στην κατηγορία των *Γραμμικών σ-πρότυπων* εφόσον η μετρική  $\eta_{\mu\nu}$  δεν εξαρτάται από τα πεδία  $X^\mu$ . Παρόλα αυτά όμως, η έκφραση (2.4.4) μπορεί να γενικευθεί έτσι ώστε στην θέση της  $\eta_{\mu\nu}$  να υπάρχει μια γενικευμένη μετρική καμπύλου χώρου  $G_{\mu\nu}(X)$ , η οποία θα εξαρτάται και από τα πεδία  $X^\mu$ . Στην περίπτωση αυτή το πρότυπο ονομάζεται *Μη-Γραμμικό σ-πρότυπο*.

Όπως θα αναλυθεί και στη συνέχεια, σε ένα σ-πρότυπο η χορδή μπορεί να είναι συζευγμένη εκτός από την μετρική και με άλλα αντικείμενα, όπως ένας αντισυμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης  $B_{\mu\nu}$  (σε αναλογία με το δυναμικό βαθμίδας  $A_\mu$  που υπάρχει στον ηλεκτρομαγνητισμό) ή ένα βαθμωτό πεδίο που ονομάζεται διαστελόνιο.

Μετά την κβάντωση της μποζονικής θεωρίας χορδών και την ανάλυση σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (διαδικασία η οποία αναλύεται στις [10, 9]), το φάσμα της θεωρίας των κλειστών χορδών μεταξύ των άλλων περιλαμβάνει και άμαζες αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz. Οι μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις αντιστοιχούν σε έναν συμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης, έναν αντισυμμετρικό και μία βαθμωτή ποσότητα. Η βαθμωτή ποσότητα αντιστοιχεί στο διαστελόνιο (dilaton), ο αντισυμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μια 2-μορφή  $B = B_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$  στον χώρο στόχο, ενώ ο συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης αντιστοιχεί στη μετρική του χώρου στόχου και αποτελεί έναν πολύ καλό υποψήφιο για το βαρυτόνιο. Προκειμένου να γίνει ξεκάθαρο το γεγονός ότι πρόκειται για το βαρυτόνιο,

πρέπει να μελετηθούν οι αλληλεπιδράσεις στα πλαίσια μιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας. Εδώ είναι ένα καλό σημείο για να τονισθεί ότι η αναλλοιωτότητα της θεωρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς που αναφέρθηκε πιο πάνω, είναι στο επίπεδο του κοσμικού φύλλου και όχι του χώρου στόχου στον οποίο βρίσκεται η βαρύτητα που μελετάται.

### Ροή κατά Ricci

Χρησιμοποιώντας την αναλλοιωτότητα κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς στο κοσμικό φύλλο είναι δυνατόν να υπάρξει μία καλώς ορισμένη θεωρία κβαντικής βαρύτητας στον χώρο στόχο, χωρίς απειρισμούς στις υψηλές ενέργειες. Οι προϋποθέσεις για μια καλώς ορισμένη UV θεωρία κβαντικής βαρύτητας θα μελετηθούν σε αυτή την υποενότητα.

Η δράση του Polyakov σε έναν χώρο με καμπυλότητα που εκφράζεται από την γενικευμένη μετρική  $G_{\mu\nu}(X)$

$$S_P = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X), \quad (2.4.5)$$

αποτελεί ουσιαστικά μία δισδιάστατη κβαντική θεωρία πεδίου στο κοσμικό φύλλο, με τα βαθμωτά πεδία  $X$  να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω της μετρικής  $G_{\mu\nu}$  του χώρου στόχου, η οποία σε αυτή την περίπτωση αποτελεί την παράμετρο ζεύξης των αλληλεπιδράσεων. Αυτή η δισδιάστατη κβαντική θεωρία πεδίου ερμηνεύεται ως η διάδοση της χορδής σε έναν χώρο στόχο με μετρική  $ds^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$ .

Παρόλα αυτά όμως, η δράση (2.4.5) είναι μία μη-γραμμική θεωρία, η οποία στερείται ακόμα και έναν σωστά κανονικοποιημένο κινηματικό όρο. Προκειμένου να εμφανισθεί ο κινηματικός όρος ορθά κανονικοποιημένος, εφαρμόζεται ανάπτυγμα της δράσης γύρω από ένα πεδίο υποβάθρου  $\bar{x}^\mu$  θεωρώντας μικρές κβαντικές (αδιάστατες) διακυμάνσεις  $Y^\mu(\tau, \sigma)$  γύρω από αυτό ακολουθώντας την ίδια λογική που εφαρμόστηκε για την ενεργό δράση στο επίπεδο ενός βρόγχου. Αντικαθιστώντας λοιπόν  $X^\mu(\tau, \sigma) = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\tau, \sigma)$  στη πάνω δράση προκύπτει

$$S_P = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a Y^\mu \partial_b Y^\nu G_{\mu\nu}(\bar{x} + \sqrt{\alpha'} Y).$$

Στη γλώσσα της θεωρίας διαταραχών, έχοντας θεωρήσει τις κβαντικές διακυμάνσεις  $Y$  πολύ μικρές, το ανάπτυγμα κατά Taylor δίνει για την μετρική

$$G_{\mu\nu}(\bar{x} + \sqrt{\alpha'} Y) = G_{\mu\nu}(\bar{x}) + \sqrt{\alpha'} \left. \frac{\partial G_{\mu\nu}(X)}{\partial X^\rho} \right|_{X=\bar{x}} Y^\rho + \frac{\alpha'}{2} \left. \frac{\partial^2 G_{\mu\nu}(X)}{\partial X^\rho \partial X^\sigma} \right|_{X=\bar{x}} Y^\rho Y^\sigma + \dots,$$

όπου η  $G_{\mu\nu}(\bar{x})$  έχει ως στοιχεία απλά αριθμούς και οι τελείτσες δηλώνουν όρους ανώτερης τάξης ως προς τη σταθερά  $\alpha'$ . Εισάγοντας το ανάπτυγμα αυτό στην τελευταία δράση, ο

κινηματικός όρος παίρνει τη μορφή

$$G_{\mu\nu}(\bar{x})\partial_a Y^\mu \partial_b Y^\nu,$$

η οποία όμως δεν είναι ακόμα ορθά κανονικοποιημένη δεδομένου ότι περιλαμβάνει μίξη των πεδίων  $Y^\mu$ . Το εμπόδιο αυτό μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας τις κανονικές Ριμάνειες συντεταγμένες (Riemann Normal Coordinates) και αναπτύσσοντας την γενική μετρική  $G_{\mu\nu}$  γύρω από την επίπεδη  $\eta_{\mu\nu}$  ως  $G_{\mu\nu}(\bar{x}) = \eta_{\mu\nu} + \alpha' R_{\mu\nu\rho\gamma}(\bar{x})Y^\rho Y^\gamma$  όπου  $R_{\mu\nu\rho\gamma}$  είναι ο τανυστής Riemann. Κάνοντάς το αυτό, σε πρώτη τάξη ως προς την σταθερά  $\alpha'$ , προκύπτει ο ορθά κανονικοποιημένος κινηματικός όρος  $\partial_a Y^\mu \partial_b Y^\nu \eta_{\mu\nu}$  και όροι αλληλεπίδρασης της μορφής

$$\mathcal{L}_{int} = \alpha' R_{\mu\rho\nu\gamma}(\bar{x})Y^\rho Y^\gamma \partial_a Y^\mu \partial_b Y^\nu h^{ab} \sqrt{-h}. \quad (2.4.6)$$

Από την μορφή των αλληλεπιδράσεων (και θεωρώντας τώρα για ευκολία επίπεδη τη μετρική στο κοσμικό φύλλο) είναι εμφανές ότι οι κορυφές αλληλεπίδρασης τεσσάρων σημείων στα διαγράμματα Feynman θα είναι ανάλογες της ποσότητας  $\alpha' R_{\mu\rho\nu\gamma}(\bar{x})k_a^\mu k^{a\nu}$ , και συνεπώς οι αποκλίσεις που θα εμφανιστούν στις ολοκληρώσεις στο επίπεδο του ενός βρόγχου της θεωρία διαταραχών θα είναι  $\alpha' R_{\mu\rho\nu\gamma} k_a^\mu k^{a\nu} \eta^{\rho\gamma} \log(\mu/\mu')$  όπου  $\mu$  είναι μία κλίμακα αποκοπής και  $\mu'$  μια άλλη ενεργειακή κλίμακα αναφοράς.

Η εμφάνιση αυτών των απειρισμών υποδηλώνει ότι για να είναι καλώς ορισμένη η θεωρία στις υψηλές ενέργειες, η μετρική  $G_{\mu\nu}(\bar{x})$  πρέπει να επαναορισθεί με την προσθήκη αντισταθμιστικών όρων, ως μια επανακανονικοποιημένη παράμετρος ζεύξης.

Η μετρική επαναορίζεται ως  $G_{\mu\nu}^{new}(\bar{x}) = G_{\mu\nu}(\bar{x}) + \alpha' R_{\mu\nu}(\bar{x}) \log(\mu/\mu')$ . Επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς με την νέα αυτή μετρική, τα αποτελέσματα μέχρι και το επίπεδο ενός βρόγχου θα βγουν πεπερασμένα.

Όμως, εφόσον η μετρική αποτελεί παράμετρο ζεύξης, είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός της ροής της παραμέτρου αυτής με την ενέργεια στα πλαίσια της ομάδας επανακανονικοποίησης. Η  $\beta$ -συνάρτηση που προκύπτει στο επίπεδο του ενός βρόγχου είναι [9, 10, 11]

$$\beta_{\mu\nu} = \mu' \frac{\partial G_{\mu\nu}^{new}}{\partial \mu'} = \alpha' R_{\mu\nu}(\bar{x}) + \mathcal{O}(\alpha'^2) \quad (2.4.7)$$

Η ροή αυτή στον χώρο στόχο ονομάζεται *Ροή κατά Ricci*.

Προφανώς, διατήρηση της αναλλοιώτητάς κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς στο κοσμικό φύλλο επιβάλλει τον μηδενισμό της παραπάνω  $\beta$ -συνάρτησης. Ο μη-μηδενισμός της (2.4.7) συνδέεται με την απόκτηση μη-μηδενικού ίχνους του τελεστή ενέργειας-ορμής της σύμμορφης θεωρίας, πού αντιστοιχεί με τη σειρά του στην ύπαρξη σύμμορφης ανωμαλίας

στην θεωρία σε κβαντικό επίπεδο και θα αναλυθεί εκτενώς σε επόμενη ενότητα του κεφαλαίου.

Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι μία κλειστή μποζονική χορδή μπορεί να έχει και άλλες άμαζες αναπαραστάσεις όπως αυτή του πεδίου του διαστελονίου και του αντισυμμετρικού ταυστή  $B_{\mu\nu}$ .

Ξεκινώντας τώρα από μία γενική δράση

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left( \sqrt{-h} h^{ab} G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X) \right) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \int d^2\sigma \sqrt{-h} \Phi(\tau, \sigma) R^{(2)}, \quad (2.4.8)$$

όπου  $\Phi(\tau, \sigma)$  είναι το διαστελόνιο,  $\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba} = 1$  και  $R^{(2)}$  είναι η καμπυλότητα Ricci στο κοσμικό φύλλο, υπάρχουν τρεις διαφορετικές παραμέτρους ζεύξης:  $G_{\mu\nu}(X)$ ,  $B_{\mu\nu}(X)$  και  $\Phi(X)$ . Δουλεύοντας όπως πριν με την μέθοδο του πεδίου υποβάθρου, υπολογίζονται οι β-συναρτήσεις για τις άνωθεν παραμέτρους ζεύξης σε επίπεδο ενός βρόγχου ως προς την σταθερά  $\alpha'$  να είναι [9, 10, 11]

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)} &= \alpha' \left( R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu{}^{\lambda\rho} \right), \\ \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)} &= \alpha' \left( -\frac{1}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \nabla^\lambda \Phi H_{\lambda\mu\nu} \right), \\ \bar{\beta}^{(\Phi)} &= \alpha' \left( -R + \frac{H^2}{12} - 4\nabla^2 \Phi + 4(\nabla_\mu \Phi)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

όπου η  $H = dB$  είναι μια 3-μορφή στον χώρο στόχο που ονομάζεται στρέψη, και  $H^2 = H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu}$ .<sup>6</sup> Στην πραγματικότητα, οι σχέσεις που παρουσιάζονται στην (2.4.9) δεν είναι ακριβώς οι β-συναρτήσεις, αλλά οι συντελεστές Weyl οι οποίοι αναλύονται στην επόμενη υποενότητα. Αυτοί διαφέρουν από τις β-συναρτήσεις κατά κάποιους διαφορομορφισμούς (αυτός είναι και ο λόγος που συμβολίστηκαν με  $\bar{\beta}$  αντί για  $\beta$ ) και σχετίζονται με τον μη-μηδενισμό του ίχνους του ταυστή ενέργειας-ορμής όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Αναλλοιώτητα κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς επιβάλλει και οι τρεις αυτοί συντελεστές να μηδενίζονται ανεξάρτητα  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)} = \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)} = \bar{\beta}^{(\Phi)} = 0$ . Ο μηδενισμός αυτός όμως παραπέμπει στο ότι οι εξισώσεις αυτές έχουν προκύψει ως εξισώσεις κίνησης μιας δράσης στις παραπάνω διαστάσεις του χώρου στόχου. Όντως οι εξισώσεις (2.4.9) ικανοποιούν μια

<sup>6</sup>Μία σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι ο όρος του διαστελονίου στη δράση (2.4.8) μπαίνει σε ανώτερη τάξη ως προς την σταθερά  $\alpha'$  του αναπτύγματος. Ο όρος αυτός δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Weyl σε αντίθεση με την δράση η οποία σε επίπεδο δέντρου (tree-level) πρέπει να είναι. Σε επίπεδο ενός βρόγχου όμως, ο όρος αυτός έχει συνεισφορά σε ίδια τάξη με τους άλλους δύο όρους με αποτέλεσμα να εξουδετερώνεται η συνεισφορά του από τις αντίστοιχες κβαντικές συνεισφορές. Έτσι, η κλασική έλλειψη αναλλοιώτητας κάτω από μετασχηματισμούς Weyl στον όρο του διαστελονίου, αντισταθμίζεται σε επίπεδο ενός βρόγχου από τις συνεισφορές των  $G_{\mu\nu}$  και  $B_{\mu\nu}$ .

συνθήκη ολοκληρωσιμότητας που υποδεικνύει ότι προέρχονται από μία Λαγκρανζιανή, και συνεπώς ο μηδενισμός τους σε επίπεδο ενός βρόγχου αντιστοιχεί σε εξισώσεις κίνησης μίας κλασικής θεωρίας βαρύτητας στις παραπάνω διαστάσεις με δράση

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{26}X \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left[ R - \frac{1}{12} H^2 + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2), \quad \kappa_0 \propto \alpha'^{12}. \quad (2.4.10)$$

Η δράση αυτή είναι μια χαμηλοενεργειακή ενεργός δράση κλασικής βαρύτητας σε επίπεδο ενός βρόγχου ως προς το  $\alpha'$  και συνεπώς είναι έγκυρη για μικρές καμπυλότητες/μεγάλες αποστάσεις. Η θεωρία αυτή της κλασικής βαρύτητας περιλαμβάνει ως μποζονικά πεδία το διαστέλιον  $\Phi$ , το  $B_{\mu\nu}$  και τη  $G_{\mu\nu}$ . Το γεγονός αυτό αποδεικνύει ότι η συμμετρική μη-αναγωγίσιμη αναπαράσταση της ομάδας Lorentz  $G_{\mu\nu}$  αντιστοιχεί όντως σε βαρυτόνιο που διαδίδεται στον χώρο στόχο.

Οι εξισώσεις της (2.4.9) έχουν προκύψει σε πρώτη τάξη ως προς την σταθερά  $\alpha'$ . Οι υπολογισμοί σε επίπεδο δύο βρόγχων θα παρουσιάζουν διορθώσεις τάξης  $\mathcal{O}(\alpha'^2)$  και ο μηδενισμός τους θα αντιστοιχεί επίσης σε εξισώσεις κίνησης κάποιας δράσης η οποία σε πρώτη τάξη θα είναι πάλι η (2.4.10).

Οι ροές που προκύπτουν στο επίπεδο των δύο-βρόγχων είναι [130, 131]

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^{(G)} &= \alpha' R_{(\mu\nu)} + \frac{\alpha'^2}{2} \left( R^{\alpha\beta\gamma}{}_{[\nu} R_{\mu)\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} R^{\beta\gamma\alpha}{}_{[\nu} R_{\mu)\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} R_{\alpha(\mu\nu)\beta} (H^2)^{\alpha\beta} \right) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \\ \beta_{\mu\nu}^{(B)} &= \alpha' R_{[\mu\nu]} + \frac{\alpha'^2}{2} \left( R^{\alpha\beta\gamma}{}_{[\nu} R_{\mu)\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} R^{\beta\gamma\alpha}{}_{[\nu} R_{\mu)\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} R_{\alpha[\mu\nu]\beta} (H^2)^{\alpha\beta} \right) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \\ \beta^{(\Phi)} &= -\frac{\alpha'}{2} \left( G^{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{4} (H^2)^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2) \right) \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{24} H^2 \\ &\quad + \frac{\alpha'^2}{16} \left( R^2_{\lambda\mu\nu\rho} - \frac{11}{2} R^{\alpha\beta\rho\sigma} H_{\alpha\beta\lambda} H_{\rho\sigma}{}^\lambda + \frac{5}{24} H^2 + \frac{3}{8} (H^2_{\mu\nu})^2 + \frac{3}{4} \nabla_\lambda H_{\alpha\beta\gamma} \nabla^\lambda H^{\alpha\beta\gamma} \right) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

και εξαρτώνται από το σχήμα ομαλοποίησης.

## 2.5 Ανωμαλία ίχνους και ανωμαλία Weyl

Έστω μια κβαντική θεωρία πεδίου σε επίπεδη μετρική με δράση  $S_{\text{flat}}$ . Αυτή μπορεί να συζευχθεί σε ένα καμπύλο χώρο μετρικής  $g_{\mu\nu}$ , με αναλλοίωτο κάτω από διαφορομορφισμούς τρόπο, ως

$$S' = S_{\text{curved}} + \int d^d x R F(\Phi_i), \quad (2.5.1)$$

όπου η  $S_{\text{curved}}$  είναι η δράση  $S_{\text{flat}}$  με την επίπεδη μετρική  $\eta_{\mu\nu}$  αντικατεστημένη από την γενική  $g_{\mu\nu}$  του καμπύλου χώρου, το  $R$  είναι η βαθμωτή ποσότητα Ricci και το  $F(\Phi_i)$  είναι ένα αυθαίρετο συναρτησιοειδές των πεδίων της θεωρίας. Η μορφή (2.5.1) δεν είναι μοναδική καθώς υπάρχει ελευθερία στον τρόπο με τον οποίο μπορεί να γίνει ζεύξη της θεωρίας στο καμπύλο υπόβαθρο. Ανεξαρτήτως του τρόπου ζεύξης, όλες οι πιθανές δράσεις ταυτίζονται με την  $S_{\text{flat}}$  στο όριο  $R = 0$  του επίπεδου χώρου, αλλά οι αντίστοιχοι τελεστές ενέργειας-ορμής δεν ταυτίζονται απαραίτητα στο όριο αυτό. Για την περίπτωση της (2.5.1) οι δύο τελεστές ενέργειας-ορμής συνδέονται μέσω της σχέσης [12]

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla^2 g_{\mu\nu})F(\Phi_i), \quad (2.5.2)$$

η οποία όμως δεν είναι η πιο γενική μορφή για τον τελεστή ενέργειας-ορμής, δεδομένης της ελευθερίας που αναφέρθηκε προηγουμένως. Πηγαίνοντας στο όριο του επίπεδου χώρου, η διαφορά των ταυστών ενέργειας-ορμής των δύο θεωριών δίνεται από την (2.5.2) με  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ .

Στις δύο διαστάσεις τώρα, η γενικότερη μορφή της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων του τελεστή ενέργειας-ορμής στο χώρο ορμών, για μία μοναδιακή κβαντική θεωρία (όχι απαραίτητα σύμμορφη) με αναλλοιώτητα κάτω από διαφορομορφισμούς, είναι [12]

$$\langle T_{ab}(p)T_{cd}(-p) \rangle_{\text{flat}} = \tilde{p}_a \tilde{p}_b \tilde{p}_c \tilde{p}_d f(p^2), \quad (2.5.3)$$

όπου  $f(p^2)$  είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του τετραγώνου της ορμής και  $\tilde{p}_a = \epsilon_{ab} p^b$ . Ο τελευταίος ορισμός ισχύει μόνο για την περίπτωση των δύο διαστάσεων, με το  $\epsilon_{ab}$  να είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός ταυστής στις διαστάσεις αυτές. Η μορφή (2.5.3) είναι η μόνη που σέβεται την συμμετρικότητα και τη διατήρηση του ταυστή ενέργειας-ορμής στις δύο διαστάσεις.

Υποθέτοντας επιπλέον αναλλοιώτητα της θεωρίας κάτω από μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας η ποσότητα στο δεξί μέλος της (2.5.3) είναι μία σταθερά και από διαστατική ανάλυση προκύπτει ότι η συνάρτηση  $f(p^2) = c/p^2$  με το  $c$  να είναι ένας συντελεστής αναλογίας. Έτσι, παίρνοντας το ίχνος της (2.5.3) ως προς τους  $a, b$  δείκτες προκύπτει ότι

$$\langle T_a^a(p)T_{cd}(-p) \rangle_{\text{flat}} = c \tilde{p}_c \tilde{p}_d = c(p_c p_d - \eta_{cd} p^2). \quad (2.5.4)$$

Παίρνοντας ξανά το ίχνος, ως προς τους  $c, d$  δείκτες τώρα, προκύπτει ότι

$$\langle T_a^a(p)T_c^c(-p) \rangle_{\text{flat}} = c p^2,$$

το δεξί μέλος της οποίας στον χώρο των θέσεων ισούται με  $c\Box\delta^{(2)}(x)$ , οπότε για  $x \neq 0$  συνεπάγεται

$$\langle T_a^a(x)T_b^b(0) \rangle_{\text{flat}} = 0 \implies T_a^a = 0. \quad (2.5.5)$$

Από εδώ προκύπτει ότι σε επίπεδη μετρική, μια δισδιάστατη, μοναδιακή κβαντική θεωρία πεδίου, συμμετρική κάτω από μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας, είναι αναγκαστικά και σύμμορφη.

Έστω τώρα ένας δισδιάστατος καμπύλος χώρος με μία γενική μετρική  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ . Τότε το ίχνος του ταυυστή ενέργειας-ορμής δίνεται από τη σχέση

$$\langle T_a^a(0) \rangle_{g_{ab}=\eta_{ab}+h_{ab}} = \int [d\Phi_i] T_a^a e^{-S_{\text{flat}} + \int d^2x h_{ab} T^{ab}}. \quad (2.5.6)$$

Αναπτύσσοντας τον δεύτερο όρο του εκθετικού για μικρές διαταραχές γύρω από την επίπεδη μετρική και χρησιμοποιώντας ότι σε επίπεδο χώρο  $\langle T_a^a \rangle_{\text{flat}} = 0$ , η (2.5.6) γίνεται

$$\langle T_a^a(0) \rangle_{g_{ab}=\eta_{ab}+h_{ab}} = \int d^2x \langle T_a^a(0)T_{cd}(x) \rangle_{\text{flat}} h^{cd}(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

Η (2.5.4) στο χώρο των θέσεων είναι

$$\langle T_a^a(x)T_{cd}(0) \rangle_{\text{flat}} = c(\partial_c\partial_d - \eta_{cd}\partial^2)\delta^{(2)}(x), \quad (2.5.7)$$

η οποία ουσιαστικά αντιστοιχεί σε όρους επαφής, οι οποίοι στη περίπτωση της επίπεδης μετρικής μπορούσαν να παραλειφθούν αλλά στον καμπύλο χώρο ολοκληρώνονται δίνοντας στην (2.5.6) την ακόλουθη μη-μηδενική συνεισφορά

$$\langle T_a^a(0) \rangle_{g_{ab}=\eta_{ab}+h_{ab}} = c(\partial_a\partial_b - \eta_{ab}\partial^2)h^{ab}(0) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.5.8)$$

Επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς και για υψηλότερες τάξεις διαταραχών αποδεικνύεται [12] ότι όλοι οι όροι που προκύπτουν επαναθροίζονται σχηματίζοντας τη βαθμωτή ποσότητα Ricci. Συνεπώς, το ίχνος του ταυυστή ενέργειας-ορμής σε έναν καμπύλο χώρο δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\langle T_a^a \rangle_{\text{curved}} = -\frac{c}{24\pi}R^{(2)}} \quad (2.5.9)$$

όπου η σταθερά  $c$  αποτελεί μέτρο της απόκλισης της θεωρίας του καμπύλου χώρου από την αντίστοιχη σύμμορφη θεωρία της επίπεδης μετρικής με κεντρικό φορτίο  $c$  και προκειμένου η θεωρία να είναι μοναδιακή, πρέπει  $c > 0$ .

Η σχέση (2.5.9) εκφράζει την *ανωμαλία Weyl*, τονίζοντας ότι σε αντίθεση με την περίπτωση της επίπεδης μετρικής όπου κάθε συμμετρική κάτω από αλλαγές κλίμακας θεωρία πεδίου

ήταν ταυτόχρονα και σύμμορφη, στην περίπτωση του καμπύλου χώρου εμφανίζεται μία ανωμαλία.

Αντίστοιχα, ο μη-μηδενισμός των σχέσεων (2.4.9) (και 2.4.11) τώρα, κάνει φανερή την παραβίαση της αναλλοιωτότητας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς στο κβαντικό επίπεδο. Αυτό ισοδυναμεί με την παραβίαση της αναλλοιωτότητας κάτω από Weyl μετασχηματισμούς της μετρικής  $g_{ab} \rightarrow e^{\Phi(\tau,\sigma)} g_{ab}$  που εμφανίζεται σε θεωρίες πάνω σε καμπύλο κοσμικό φύλλο. Η ανωμαλία αυτή εμφανίζεται και στον υπολογισμό του ταυστή ενέργειας-ορμής για την δράση (2.4.5) αλλά με την μετρική  $G_{\mu\nu}$  αντικατεστημένη από την επανακανονικοποιημένη σε 1-βρόγχο μετρική  $G_{\mu\nu}^{new}$ . Το ίχνος του ταυστή αυτού δεν μηδενίζεται και προκύπτει να ισούται με [10, 11]

$$T_a^a = -\frac{1}{2\pi} R_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)} \partial X^\mu \partial X^\nu. \quad (2.5.10)$$

Όμοιες σχέσεις προκύπτουν και όταν συμπεριληφθεί η ύπαρξη διαστελονίου και του πεδίου  $B_{\mu\nu}$ , με τρεις διαφορετικές συνεισφορές στον μη-μηδενισμό του ίχνους [10, 11]

$$\langle T_a^a \rangle = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{i}{2\pi\alpha'} \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2\pi} \bar{\beta}^{(\Phi)} R^{(2)}, \quad (2.5.11)$$

όπου οι  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)}$ ,  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)}$  και  $\bar{\beta}^{(\Phi)}$ , σε επίπεδο ενός βρόγχου, δίνονται από την (2.4.9). Γίνεται λοιπόν προφανές πως οι μη-μηδενικοί συντελεστές του ίχνους του ταυστή ενέργειας-ορμής συνδέονται με τις β-συναρτήσεις και κατ' επέκταση με την παραβίαση της συμμετρίας Weyl σε κβαντικό επίπεδο. Για το λόγο αυτό οι συντελεστές της (2.5.11) ονομάζονται και συντελεστές Weyl.

Ο όρος με τον συντελεστή  $\bar{\beta}^{(\Phi)}$  συνεισφέρει μόνο στην περίπτωση καμπύλου κοσμικού φύλλου και έχει την ίδια μορφή με το δεξί μέλος της (2.5.9). Συνεπώς η ανωμαλία Weyl εκφράζεται από τον συντελεστή Weyl του διαστελονίου και αποτελεί μια γενίκευση του κεντρικού φορτίου της άλγεβρας Virasoro στο πλαίσιο των μη-γραμμικών σ-προτύπων.

Ένα πιθανό πρόβλημα που μπορεί να δημιουργηθεί σχετικά με το άνωθεν επιχείρημα είναι το γεγονός ότι ενώ το κεντρικό φορτίο της άλγεβρας Virasoro είναι αριθμός, η  $\bar{\beta}^{(\Phi)}$  είναι εν γένει μια συνάρτηση που εξαρτάται από τις συντεταγμένες του χωροχρόνου  $X^\mu$ . Το πρόβλημα αυτό λύνεται ως εξής: Αν υπάρχει η απαίτηση το σ-πρότυπο να είναι μία σύμμορφη θεωρία πεδίου, τότε επιβάλλεται ο μηδενισμός των  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)}$  και  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)}$  διαφορετικά θα υπάρχει Weyl ανωμαλία ακόμα και σε επίπεδο κοσμικό φύλλο. Η συνθήκη αυτή του μηδενισμού  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)} = \bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)} = 0$  συνεπάγεται ότι η  $\bar{\beta}^{(\Phi)}$  είναι όντως σταθερή και ανεξάρτητη από τις χωροχρονικές συντεταγμένες [11].



Μία παρατήρηση εδώ είναι ότι παρόλο που σε επίπεδο κοσμικό φύλλο ο όρος αλληλεπίδρασης με το διαστελόνιο στη δράση (2.4.8) μηδενίζεται, η διαφοράσή του ως προς τη μετρική του κοσμικού φύλλου παραμένει πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι έχοντας συμπεριλάβει έναν τέτοιο όρο στην αρχική δράση ενός καμπύλου κοσμικού φύλλου, επέρχεται αλλαγή στον δισδιάστατο τανυστή ενέργειας-ορμής (2.5.11) ακόμα και στο όριο που το κοσμικό φύλλο γίνεται επίπεδο<sup>7</sup>.

Σε επίπεδο δισδιάστατο χώρο στόχο τώρα, οι  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)}$  και  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)}$  αποτελούν την πλήρη έκφραση της ανωμαλίας Weyl και προκειμένου η ανωμαλία αυτή να μηδενιστεί θα πρέπει οι συντελεστές αυτοί να μηδενίζονται ανεξάρτητα, όπως φαίνεται και από την (2.5.11). Παρόλα αυτά, αν ο χώρος στόχος της θεωρίας είναι ο χώρος μίας Lie ομάδας τότε, ακόμα και αν ο τανυστής Ricci στο κοσμικό φύλλο είναι διάφορος του μηδενός, η ανωμαλία λόγω της  $G_{\mu\nu}$  μπορεί να αντισταθμιστεί με την επιλογή κατάλληλου αντισυμμετρικού πεδίου  $B_{\mu\nu}$ . Στο πλαίσιο των σ-προτύπων ο όρος αυτός αναφέρεται ως Wess-Zumino όρος και αναλύεται στην επόμενη ενότητα [11].

## 2.6 Κύριο Χειραλικό και Wess-Zumino-Witten πρότυπο

Στην ενότητα αυτή θα αναλυθεί το Κύριο Χειραλικό Πρότυπο (Principal Chiral Model (PCM)) στις δύο διαστάσεις, καθώς και η τροποποίησή του με την προσθήκη ενός Wess-Zumino όρου, η οποία αντιστοιχεί στο Wess-Zumino-Witten (WZW) πρότυπο. Θα συζητηθούν επίσης οι συμμετρίες του, τα αντίστοιχα διατηρούμενα ρεύματα και η άλγεβρά τους σε κβαντικό επίπεδο. Τέλος θα γίνει η κατασκευή του Sugawara τανυστή ενέργειας-ορμής προκειμένου να γίνει εμφανές ότι το WZW πρότυπο αποτελεί μία δισδιάστατη σύμμορφη θεωρία πεδίου. Λεπτομέρειες για αυτήν την ενότητα βρίσκονται στην [14].

### 2.6.1 Κύριο Χειραλικό Πρότυπο

Θεωρώντας την σφαίρα Riemann ως την συμπαγοποίηση μίας δισδιάστατης επιφάνειας με Ευκλείδια μετρική και μία κβαντική θεωρία πεδίου πάνω σε αυτήν, θα μελετηθεί το Κύριο Χειραλικό Πρότυπο με χώρο στόχο μία ημι-απλή ομάδα Lie  $G$ . Η απαίτηση για ημι-απλή ομάδα Lie είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός μη-εκφυλισμένου αναλλοίωτου ίχνους της αντίστοιχης άλγεβρας  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Πιο συγκεκριμένα, για δύο στοιχεία-πίνακες της άλγεβρας Lie  $X$  και  $Y$ , μπορεί να ορισθεί ένα μη-εκφυλισμένο αναλλοίωτο γινόμενο ως  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY)$ . Το ίχνος αυτό φέρει την κανονικοποίηση  $\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$  για δύο γεννήτορες στην θεμελι-

<sup>7</sup> Στο όριο που το  $R \rightarrow 0$ , ο τελευταίος όρος της (2.5.11) μηδενίζεται, αλλά η συνεισφορά του διαστελονίου συνεχίζει να υπάρχει στις  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(G)}$  και  $\bar{\beta}_{\mu\nu}^{(B)}$  όπως εμφανίζεται στις (2.4.9)

ώδη αναπαράσταση της Lie άλγεβρας.

Τα πεδία του προτύπου αυτού συμβολίζονται ως  $g(z, \bar{z}) \in G$  και αποτελούν πίνακες σε κάποια πιστή αναπαράσταση της ομάδας  $G$ . Συνεπώς, τα πεδία αυτά αποτελούν μια απεικόνιση

$$g : S^2 \rightarrow G, \quad (2.6.1)$$

που αναπαριστά την εμβάπτιση της διδιάστατης σφαίρας Riemann στον χώρο στόχο της ομάδας  $G$ .

Εστω τώρα η δράση

$$S_{\text{PCM}} = \frac{1}{4K^2} \int_{S^2} d^2z \operatorname{tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g). \quad (2.6.2)$$

Εφόσον το  $g$  είναι ένα στοιχείο της ομάδας  $G$ , η ποσότητα  $g^{-1} \partial_\mu g$  είναι ένα στοιχείο της αντίστοιχης Lie άλγεβρας, και πιο συγκεκριμένα, το  $g^{-1} dg$  είναι η pullback της Maurer-Cartan μορφής στην  $S^2$  κάτω από την απεικόνιση που ορίζει το  $g$ .

Η δράση (2.6.2) αντιστοιχεί στο Κύριο Χειραλικό Πρότυπο και έχει μία καθολική συμμετρία  $G \times G$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow g_L g(z, \bar{z}) g_R^{-1} \quad (2.6.3)$$

για κάποια σταθερά στοιχεία  $g_L, g_R \in G$ .

Η θεωρία αυτή είναι σύμμορφη σε κλασικό επίπεδο. Παρόλα αυτά, ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης για την παράμετρο  $K^2$  αποδεικνύει την παραβίαση της αναλλοιώτητας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς σε κβαντικό επίπεδο όπου και προκύπτει μία αρνητική  $\beta$ -συνάρτηση, υποδεικνύοντας ότι η θεωρία γίνεται ασυμπτωτικά ελεύθερη σε κβαντικό επίπεδο. Η μη-μηδενική αυτή  $\beta$ -συνάρτηση είναι και ο λόγος τροποποίησης της δράσης (2.6.2) κατά έναν (τοπολογικό) όρο προκειμένου να προκύψει μια δράση που θα αντιστοιχεί σε μια σύμμορφη θεωρία πεδίου σε κβαντικό επίπεδο. Η δράση αυτή ονομάζεται Wess-Zumino-Witten δράση και θα αναλυθεί στην επόμενη υποενότητα.

Επιστρέφοντας τώρα στο PCM, οι κλασικές εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την διαφορίση της δράσης (2.6.2) ως προς το στοιχείο  $g$  είναι οι

$$\partial_\mu (g^{-1} \partial^\mu g) = 0 \quad (2.6.4)$$

και συνεπώς, τα διατηρούμενα ρεύματα  $J^\mu(z, \bar{z})$  τα οποία είναι στοιχεία της Lie άλγεβρας ( $J_a^\mu t^a$ ) είναι  $J^\mu = g^{-1} \partial^\mu g$ . Πιο συγκεκριμένα, αυτό το διατηρούμενο ρεύμα σχετίζεται με

την συμμετρία της δράσης κάτω από δεξί πολλαπλασιασμό του στοιχείου  $g \rightarrow gg_R^{-1}$ . Το αντίστοιχο ρεύμα για τον πολλαπλασιασμό από τα αριστερά είναι το  $\bar{J} = \partial^\mu gg^{-1}$  και είναι επίσης διατηρούμενο. Όντως, οι εξισώσεις κίνησης (2.6.4) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως

$$\partial_\mu(g^{-1}\partial^\mu g) = 0 \iff g\partial_\mu(g^{-1}\partial^\mu g)g^{-1} = \partial_\mu(\partial^\mu gg^{-1}) = 0 \quad (2.6.5)$$

ενώ σε μιγαδικές συντεταγμένες η αρχή διατήρησης γράφεται ως

$$\partial J_{\bar{z}} + \bar{\partial} J_z = 0, \quad \partial = \partial_z, \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}. \quad (2.6.6)$$

Σε μία σύμμορφη θεωρία πεδίου είναι προτιμητέο να υπάρχουν ολομορφικές και αντι-ολομορφικές (διατηρούμενες) ποσότητες, δηλαδή και οι δύο όροι της πάνω εξίσωσης να μηδενίζονται ανεξάρτητα. Αυτή η απαίτηση είναι σε πλήρη αναλογία με την διατήρηση του ταχυστή ενέργειας-ορμής σε μία σύμμορφη θεωρία όπου ισχύει  $\partial T_{\bar{z}\bar{z}} + \bar{\partial} T_{zz} = 0$  και  $\bar{\partial} T_{zz} + \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$  και ο μηδενισμός του ίχνους του ταχυστή επιτρέπει τον ορισμό των ολομορφικών και αντι-ολομορφικών ποσοτήτων  $T \equiv T_{zz}$ ,  $\bar{T} \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}$  όπως αναλύθηκε και σε προηγούμενη ενότητα.

Παρόλα αυτά ο ανεξάρτητος αυτός μηδενισμός δεν ισχύει για την περίπτωση του PCM. Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης είναι η ερμηνεία του ρεύματος  $J^\mu$  ως το δυναμικό βαθμίδας για την ομάδα βαθμίδας  $G$ . Εύκολα αποδεικνύεται για το  $J^\mu$  ότι ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu + [J_\mu, J_\nu] = 0. \quad (2.6.7)$$

Αν στην (2.6.6) και οι δύο όροι μηδενίζονταν ανεξάρτητα, τότε αυτό θα σήμαινε ότι και το δυϊκό ρεύμα  $\epsilon^{\mu\nu} J_\nu$  θα έπρεπε να είναι διατηρούμενο. Παρόλα αυτά όμως, με χρήση της πάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu} J_\nu) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu) = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[J_\mu, J_\nu] = -\epsilon^{\mu\nu} J_\mu J_\nu. \quad (2.6.8)$$

Η έκφραση αυτή μηδενίζεται μόνο για μία Αβελιανή Lie άλγεβρα, οπότε εν γένει τα ρεύματα του PCM δεν διατηρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και η θεωρία δεν περιλαμβάνει ολομορφικά και αντι-ολομορφικά ρεύματα. Σαν συνέπεια αυτού, δεν αναμένεται η διδιάστατη θεωρία να είναι αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς στο χβαντικό επίπεδο αν η ομάδα του χώρου στόχου δεν είναι Αβελιανή.

Για την περίπτωση Αβελιανής ομάδας, η δράση (2.6.2) όντως ορίζει μία σύμμορφη θεωρία πεδίου και σε χβαντικό επίπεδο και ο Wess-Zumino όρος που θα εισαχθεί αμέσως από κάτω μηδενίζεται. Πράγματι, το WZW πρότυπο μίας Αβελιανής Lie Άλγεβρας  $\mathbb{R}^n$  αντιστοιχεί στη θεωρία  $n$  ελεύθερων μποζονίων.

Η επόμενη υποενότητα πραγματεύεται την περίπτωση μη-Αβελιανών αλγεβρών Lie όπου όπως θα γίνει εμφανές, η προσθήκη του τοπολογικού WZ όρου στη δράση (2.6.2) οδηγεί σε ολομορφικές και αντι-ολομορφικές συνιστώσες διατηρούμενων ρευμάτων και συνεπώς σε μία σύμμορφη θεωρία.

### 2.6.2 Wess-Zumino-Witten πρότυπα

Προκειμένου να παρακαμφθεί το πρόβλημα της μη-ολομορφικότητας στην μη-Αβελιανή περίπτωση, η δράση του PCM τροποποιείται με την προσθήκη του WZ όρου

$$\begin{aligned}\Gamma[g] &\equiv -\frac{i}{12\pi} \int_{B^3} d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{tr}(g^{-1} \partial^\alpha g g^{-1} \partial^\beta g g^{-1} \partial^\gamma g) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{B^3} \text{tr}(g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg),\end{aligned}\tag{2.6.9}$$

οπότε ορίζεται η δράση

$$S[g] = S_{\text{PCM}}[g] + k\Gamma[g],\tag{2.6.10}$$

η οποία όμως δεν αποτελεί ακόμα τη δράση του WZW προτύπου. Τα πεδία  $g \in G$  της (2.6.9) είναι ορισμένα στην Ριμάνεια σφαίρα  $S^2$ , η οποία τώρα μπορεί να θεωρηθεί το σύνορο μίας τρισδιάστατης μπάλας  $B^3$  και αποτελούν  $C^\infty$ -απεικονίσεις  $g : S^2 \rightarrow G$ . Τέτοιες απεικονίσεις ταξινομούνται από την δεύτερη ομάδα ομοτοπίας  $\pi_2(G)$ , όπου για Lie ομάδες ισχύει  $\pi_2(G) = 0$ . Αυτό σημαίνει πως κάθε απεικόνιση όπως η προηγούμενη είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση, η οποία μπορεί να επεκταθεί στο εσωτερικό της  $S^2$ . Η επέκταση αυτή θα συμβολισθεί πάλι με  $g$  όμως τώρα ισχύει  $g : B^3 \rightarrow G$  και στο σύνορο της τρισδιάστατης μπάλας  $\partial B^3 = S^2$  θα ισούται με την αρχική απεικόνιση  $g : S^2 \rightarrow G$ . Η επέκταση αυτή εν γένει δεν είναι μοναδική και συνεπώς, προκειμένου η WZW θεωρία  $e^{-S[g]}$  να είναι καλώς ορισμένη, θα πρέπει να μην εξαρτάται από την επιλογή της επέκτασης του  $g$  μέσα στην  $S^2$ . Ο WZ όρος είναι αναλλοίωτος κάτω από μικρές αλλαγές του  $g$  και εξαρτάται μόνο από τις πιθανές τάξεις ομοτοπίας, οι οποίες σχετίζονται με την ομάδα ομοτοπίας  $\pi_3(G)$ . Πιό συγκεκριμένα,

$$\delta\Gamma[g] = -\frac{i}{4\pi} \int_{S^2} \text{tr}(g^{-1} \delta g d(g^{-1} dg)),\tag{2.6.11}$$

οπότε ο  $\Gamma$  είναι αναλλοίωτος αν μηδενίζεται η αμελητέα μεταβολή του  $g$  στην  $S^2$ .

Για κάθε συμπαγή, συνεκτική, απλή ομάδα Lie ισχύει  $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$  και συνεπώς οι διαφορετικές επεκτάσεις του  $g$  οδηγούν σε όρους  $\Gamma[g]$  που διαφέρουν μεταξύ τους κατά κάποιο ακέραιο. Έτσι, όλες οι πιθανές επεκτάσεις του  $g$  στην  $S^2$  δίνουν την ίδια τιμή  $e^{S[g]}$  αρκεί να ισχύει ότι  $k \in \mathbb{Z}$ .

Το  $k$  αυτό ονομάζεται επίπεδο ή τάξη της WZW θεωρίας και ουσιαστικά ταυτίζεται με την τάξη της αντίστοιχης υποκείμενης αφινικής Kac-Moody άλγεβρας  $\mathfrak{g}_k$ , με  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , και

συνεπώς σχετίζεται με τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας αυτής.

Προκειμένου η θεωρία να είναι μοναδιακή (unitary) θα πρέπει  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ , ενώ για την περίπτωση μη-συμπαγούς Lie ομάδας δεν υπάρχει η άνωθεν συνθήκη κβάντωσης του  $k$  στους ακεραίους.

Από γεωμετρική σκοπιά ο WZ όρος, εφόσον είναι εξ' ορισμού πλήρως αντισυμμετρικός, μπορεί να ορισθεί μέσω μιας μιας (αρμονικής) 3-μορφής  $H$  στο χώρο της ομάδας  $G$ , η οποία αντιστοιχεί στην στρέψη της υποκείμενης πολλαπλότητας. Πιο συγκεκριμένα, η υπό ολοκλήρωση ποσότητα της (2.6.9) αντιστοιχεί στην pullback της στρέψης  $H$  στην τρισδιάστατη μπάλα  $B^3$ . Συμβολίζοντας την pullback με  $g^*$  ισχύει

$$\Gamma[g] = \int_{B^3} g^* H. \quad (2.6.12)$$

Γυρνώντας τώρα στις εξισώσεις κίνησης του κλασικού προτύπου, με την επιλογή  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  και  $K^2 = \pi/k$ , από τις (2.6.6) και (2.6.11) προκύπτει

$$\partial(g^{-1}\bar{\partial}g) = 0, \quad (2.6.13)$$

με το αντι-ολομορφικό διατηρούμενο ρεύμα να είναι  $\bar{J} \equiv kg^{-1}\bar{\partial}g$  και

$$\bar{\partial}(\partial gg^{-1}) = g\partial(g^{-1}\bar{\partial}g)g^{-1} = 0, \quad (2.6.14)$$

με ολομορφικό διατηρούμενο ρεύμα  $J \equiv -k\partial gg^{-1}$ .

Η επιλογή αυτή των  $k$  και  $K^2$  ορίζει την δράση του WZW προτύπου

$$S_{WZW,k}[g] = \frac{k}{4\pi} \int_{S^2} d^2z \operatorname{tr}(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial^\mu g) + \Gamma[g], \quad (2.6.15)$$

το οποίο αποτελεί ένα μη-γραμμικό  $\sigma$ -πρότυπο και μπορεί να έρθει στη χαρακτηριστική μορφή (2.4.8). Η ολομορφικότητα και αντι-ολομορφικότητα των διατηρούμενων ρευμάτων, προκύπτει τώρα από μία ενισχυμένη συμμετρία που διέπει την καινούρια δράση (2.6.15). Η αρχική καθολική  $G \times G$  συμμετρία έχει επεκταθεί σε μία τοπική  $G(z) \times G(\bar{z})$  συμμετρία που δρά ως

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow g_L(z)g(z, \bar{z})g_R^{-1}(\bar{z}), \quad (2.6.16)$$

όπου τώρα το  $g_L(z)$  είναι μία αυθαίρετη ολομορφική απεικόνιση από την  $S^2$  στην ομάδα  $G$ , ενώ το  $g_R(\bar{z})$  μία αυθαίρετη αντι-ολομορφική απεικόνιση από την  $S^2$  στην  $G$ .

Η προηγούμενη ανάλυση ήταν κυρίως κλασική, και συνεπώς ακόμα δεν έχει αποδειχθεί ότι η θεωρία WZW είναι σύμμορφη σε κβαντικό επίπεδο. Ο σύνηθης τρόπος μετάβασης από κλασική σε κβαντική θεωρία είναι ο υπολογισμός των αγκύλων Poisson και η μετέπειτα κανονική κβάντωσή τους με την αντικατάστασή τους από κανονικές σχέσεις μετάθεσης. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στις σχέσεις μετάθεσης της Kac-Moody άλγεβρας (2.2.21) με το επίπεδο  $k$  να είναι η ίδια, κβαντισμένη στους θετικούς ακεραίους σταθερά, που εμφανίζεται και στη δράση (2.6.15). Από τις σχέσεις μετάθεσης αυτές προκύπτει και το αντίστοιχο OPE των σχέσεων (2.2.22) και (2.2.23).

Πρέπει να τονισθεί εδώ ότι η άλγεβρα (2.2.21) δεν είναι η άλγεβρα συμμετρίας της θεωρίας. Μόνο οι μηδενικοί τρόποι ταλάντωσης του αναπτύγματος Laurent αντιστοιχούν σε διατηρούμενα ρεύματα που ικανοποιούν την αρχική άλγεβρα  $\mathfrak{g}$  η οποία είναι η άλγεβρα συμμετρίας της θεωρίας.

Προκειμένου να αποδειχθεί ότι η θεωρία είναι σύμμορφη θα πρέπει ο τανυστής ενέργειας-ορμής της να ικανοποιεί την άλγεβρα Virasoro η οποία σε όρους αναπτύγματος τανυστικού γινομένου εκφράζεται μέσω της (2.2.13) για κάποιο κεντρικό φορτίο  $c$ . Κλασικά, ο τανυστής ενέργειας-ορμής δίνεται από τη σχέση

$$T(z) = \frac{1}{2k} \delta_{ab} J^a(z) J^b(z) = \frac{1}{2k} J^a(z) J^a(z). \quad (2.6.17)$$

Μία αντίστοιχη κβαντική έκφραση θα πρέπει να περιλαμβάνει κανονική ταξινόμηση προκειμένου η αναμενόμενη τιμή του κενού να είναι πεπερασμένη. Προκύπτει ότι ο συντελεστής αναλογίας επιδέχεται κβαντικές διορθώσεις, οπότε μετονομάζεται σε  $\gamma$  και πρέπει να προσδιορισθεί

$$T(z) \equiv \gamma : J^a J^a : (z), \quad (2.6.18)$$

όπου η κανονική ταξινόμηση αναφέρεται στο πεπερασμένο μέρος του OPE  $J^a(z) J^b(w)$  καθώς  $z \rightarrow w$ , και συνεπώς δεν υπάρχουν UV αποκλίσεις.

Το πεπερασμένο μέρος αυτό προκύπτει από την ολοκλήρωση

$$: J^a J^a : (z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-z} J^a(x) J^a(z). \quad (2.6.19)$$

Ο τανυστής αυτός είναι ολομορφικός ακόμα και σε κβαντικό επίπεδο όπως πρέπει. Ο υπολογισμός του παράγοντα  $\gamma$  περιλαμβάνει τον υπολογισμό του μη-πεπερασμένου μέρους του OPE  $J^a(z) T(w)$  και την απαίτηση η σύμμορφη διάσταση του ρεύματος  $J^a(z)$  να είναι 1. Τελικά, υπολογίζεται ότι [1, 3, 14]  $\gamma = 1/2(k + h^V)$  και συνεπώς ο τανυστής ενέργειας-ορμής του WZW προτύπου προκύπτει να είναι ο Sugawara τανυστής της σχέσης (2.2.24).

Αυτό υποδηλώνει ότι το OPE  $T(z) T(w)$  όντως αντιστοιχεί σε μία άλγεβρα Virasoro με

κεντρικό φορτίο αυτό της (2.2.25) το οποίο, αν το επίπεδο  $k$  είναι θετικός ακέραιος, περιορίζεται στο εύρος τιμών  $\text{rank } \mathfrak{g} \leq c_{\mathfrak{g}} \leq \dim \mathfrak{g}$ . Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται ότι η σύμμορφη άλγεβρα όντως ικανοποιείται και σε κβαντικό επίπεδο και έτσι τα WZW πρότυπα ορίζουν σύμμορφες θεωρίες πεδίου.

Αν η άλγεβρα  $\mathfrak{g}$  είναι ημι-απλή  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^j \mathfrak{g}_i$ , τότε μπορεί να ορισθεί ο ακόλουθος ταυυστής ενέργειας-ορμής

$$T_{\mathfrak{g}}(z) = \sum_{i=1}^j T_{\mathfrak{g}_i}(z). \quad (2.6.20)$$

Πάλι θα ικανοποιείται η άλγεβρα Virasoro, αλλά αυτή τη φορά με κεντρικό φορτίο

$$c_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^j c_{\mathfrak{g}_i}. \quad (2.6.21)$$

Τέλος, όσον αφορά τα πεδία μίας WZW θεωρίας, αν η ομάδα  $G$  είναι συμπαγής, τότε το φάσμα της θεωρίας αποτελείται από αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους και όλες οι συναρτήσεις συσχετισμού μπορούν να παραχθούν από συναρτήσεις συσχετισμού των αφινικών πρωτευόντων πεδίων με την χρήση της ταυτότητας Ward. Επιπλέον, αν η διδιάστατη επιφάνεια της θεωρίας είναι η σφαίρα του Riemann όπως εδώ, τότε οι συναρτήσεις συσχετισμού υπακούουν την εξίσωση Knizhnic-Zamolodchikov

$$\left( \partial_{w_i} - \frac{1}{k + h^V} \sum_{j \neq i} \frac{(t_{R_i})^a \otimes (t_{R_j})^a}{w_i - w_j} \langle \phi_{R_1}(w_1) \dots \phi_{R_N}(w_N) \rangle \right) = 0.$$

### 2.6.3 Συνσύνολα (Cosets)

Μία συνσυνολική θεωρία, είναι μια θεωρία που αντιστοιχεί σε μία βαθμισμένη WZW θεωρία όπου μία υποομάδα  $H$  της  $G$  έχει βαθμιστεί. Αυτό μπορεί να αποτυπωθεί και σε επίπεδο δράσης και υπάρχουν δύο είδη συνσυνολικών θεωριών αναλόγως από την μορφή της υποομάδας της  $G$  που βαθμίζεται. Συνήθως αυτό συμβολίζεται ως κλάσμα δύο αφινικών Kac-Moody αλγεβρών. Αν η άλγεβρα του παρονομαστή αντιστοιχεί στην Cartan υποάλγεβρα της άλγεβρας του αριθμητή, τότε η συνσυνολική θεωρία αποτελεί μία *Παραφερμιονική θεωρία (Parafermion Theory)*, ενώ για την περίπτωση που η άλγεβρα του παρονομαστή είναι μία διαγώνια υποάλγεβρα της άλγεβρας του αριθμητή, η θεωρία εμπίπτει στην κατηγορία των *Ελάχιστων προτύπων (Minimal Models)*.

Η κατασκευή μίας συνσυνολικής θεωρίας ξεκινάει από ένα WZW πρότυπο άλγεβρας  $\mathfrak{g}_k$  και τη βάνθμιση μίας υποάλγεβρας  $\mathfrak{h}_{k'} \subset \mathfrak{g}_k$  της άλγεβρας αυτής. Η χειραλική άλγεβρα (δη-

λαδή τα ολομορφικά πεδία της βαθμισμένης θεωρίας), αποτελείται από όλα τα ολομορφικά πεδία του αρχικού  $\mathfrak{g}_k$  WZW προτύπου που έχουν πεπερασμένο *OPE* με τα Kac-Moody πεδία της  $\mathfrak{h}_k$ .

Αποδεικνύεται [1, 3] ότι μπορεί πάντα να βρεθεί ταχυστής ενέργειας-ορμής για την περίπτωση των συνσυνολικών θεωριών και αυτός είναι

$$T^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = T^{\mathfrak{g}} - T^{\mathfrak{h}} \quad (2.6.22)$$

όπου με  $T^{\mathfrak{g}}$  συμβολίζεται ο ταχυστής ενέργειας-ορμής της θεωρίας του αριθμητή και με  $T^{\mathfrak{h}}$  αυτός της θεωρίας του παρονομαστή. Ο ταχυστής  $T^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  ικανοποιεί το ακόλουθο *OPE* με τον εαυτό του

$$T^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(z)T^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(w) \sim \frac{c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{h}}}{2(z-w)^4} + \frac{2T^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(w)}{z-w}, \quad (2.6.23)$$

από όπου προκύπτει ότι η συνσυνολική θεωρία είναι επίσης μια σύμμορφη θεωρία αλλά με κεντρικό φορτίο

$$c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{h}}. \quad (2.6.24)$$

## 2.7 Πρότυπο Thirring

Το πρότυπο Thirring [15] είναι μία πλήρως επιλύσιμη κβαντική θεωρία πεδίου, η οποία περιγράφει τις αυτο-αλληλεπιδράσεις ενός πεδίου Dirac  $\psi = (\psi_+, \psi_-)$  στις  $(1+1)$  διαστάσεις μέσω της δράσης

$$S = \int d^2x \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{g}{2} \int d^2x (\bar{\psi}\gamma^a\psi) (\bar{\psi}\gamma_a\psi).$$

Στην πάνω σχέση,  $g$  είναι η παράμετρος ζεύξης,  $m$  η μάζα των πεδίων Dirac και  $\gamma^a$  για  $a = 1, 2$  είναι οι γάμμα πίνακες στους δύο διαστάσεις.

Η περίπτωση του Thirring προτύπου με  $m = 0$  είναι πλήρως επιλύσιμη, υπό την έννοια ότι είναι γνωστός ο τύπος για τις συναρτήσεις συσχετισμού  $n$ -σημείων των πεδίων [16, 17, 18]. Έχει αποδειχθεί [19] ότι υπάρχει μία ισοδυναμία μεταξύ του προτύπου Thirring και των sine-Gordon προτύπων. Παρόλο που τα τελευταία είναι καθαρά μποζονικά πρότυπα, το άμαζο Thirring πρότυπο είναι ισοδύναμο με αυτό ελεύθερων μποζονίων (επίσης τα φερμιόνια με μάζα είναι ισοδύναμα με τα sine-Gordon μποζόνια). Το φαινόμενο αυτό είναι πιο γενικό στις δύο διαστάσεις και ονομάζεται μποζονοποίηση [1].



## 2.8 Κλασική Ολοκληρωσιμότητα

Στην ενότητα αυτή θα αναπτυχθεί εν συντομία η έννοια της κλασικής ολοκληρωσιμότητας ενός συστήματος [13].

### Ολοκληρωσιμότητα στην κλασική μηχανική

Στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό ορίζεται ο χώρος φάσεων  $\mathcal{M} = \{q^i, p_i\}$  ως ο συμπλεκτικός χώρος άρτιας διάστασης που παραμετροποιείται από τις συντεταγμένες της θέσης  $q^i(t)$  και της ορμής  $p_i(t)$ , οι οποίες είναι συναρτήσεις του χρόνου  $t$ . Πάνω σε έναν τέτοιο χώρο, ορίζεται η κανονική δομή της αγκύλης Poisson  $\{ , \}_{\text{P.B.}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  για δύο συναρτήσεις του φασικού χώρου  $F$  και  $G$  ως

$$\{F, G\}_{\text{P.B.}} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad (2.8.1)$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες

1. Διγραμμικότητα:  $\{F, \lambda G + \mu H\}_{\text{P.B.}} = \lambda \{F, G\}_{\text{P.B.}} + \mu \{F, H\}_{\text{P.B.}}$
2. Αντισυμμετρικότητα:  $\{F, G\}_{\text{P.B.}} = -\{G, F\}_{\text{P.B.}}$
3. Ταυτότητα του Jacobi:  $\{F, \{G, H\}\}_{\text{P.B.}} + \{G, \{H, F\}\}_{\text{P.B.}} + \{H, \{F, G\}\}_{\text{P.B.}} = 0$
4. Κανόνας του Leibniz:  $\{F, GH\}_{\text{P.B.}} = G\{F, H\} + \{F, G\}H$

μετατρέποντας έτσι τις  $\mathbb{C}^\infty$  συναρτήσεις του  $\mathcal{M}$  σε μία απειροδιάστατη άλγεβρα.

Έστω τώρα η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος  $\mathcal{H}(q^i, p_i)$ . Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης είναι οι εξισώσεις Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}(q^i, p_i)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(q^i, p_i)}{\partial q^i}, \quad (2.8.2)$$

όπου η τελεία συμβολίζει την ολική χρονική παράγωγο, και οι οποίες μέσω του ορισμού (2.8.1) ανάγονται στις

$$\dot{q}^i = \{\mathcal{H}, q^i\}, \quad \dot{p}_i = \{\mathcal{H}, p_i\}. \quad (2.8.3)$$

Η λύση των εξισώσεων κίνησης ενός συστήματος τώρα, αντιστοιχεί εν γένει σε μία καμπύλη  $I(t) = (q^i(t), p_i(t)) \subseteq \mathcal{M}$  στον χώρο φάσεων.

Εάν δεν υπάρχει άμεση χρονική εξάρτηση στη Χαμιλτονιανή,  $\dot{\mathcal{H}} = \partial_t \mathcal{H} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$ , η συνάρτηση  $\mathcal{H}$  αποτελεί μια διατηρούμενη ποσότητα, ή αλλιώς ένα *Ολοκληρώμα Κίνησης*,

και οι λύσεις περιορίζονται σε μία υπερεπιφάνεια του χώρου  $\mathcal{M}$  που ορίζεται από τη σχέση  $\mathcal{H} = E = \text{σταθερά}$  (για σταθερή ενέργεια).

Ανάλογα από το υπό μελέτη σύστημα, μπορούν να βρεθούν περαιτέρω ολοκληρώματα κίνησης  $F(q^i, p_i)$ , τα οποία είναι συναρτήσεις του φασικού χώρου  $\mathcal{M}$  με την ιδιότητα

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \{\mathcal{H}, F\} = 0. \quad (2.8.4)$$

Η συνθήκη αυτή ορίζει υπερεπιφάνειες στον χώρο  $\mathcal{M}$  στις οποίες περιορίζονται οι λύσεις του συστήματος, ενώ οι συναρτήσεις  $F$  αντιστοιχούν στις διατηρούμενες ποσότητες της θεωρίας.

Ένα σύστημα με χώρο φάσεων  $\mathcal{M}$ , όπου  $\dim \mathcal{M} = 2n$ , λέγεται *ολοκληρώσιμο* (κατά *Liouville*) αν έχει

- $n$  ανεξάρτητα (με τη σύνηθη έννοια της γραμμικής άλγεβρας),
- παντού διαφορίσιμα (ως προς τις  $p_k, q^k$  μεταβλητές),
- ολοκληρώματα κίνησης  $F_k, k = 1, \dots, n$  ( $\dot{F}_k = \{F_k, \mathcal{H}\} = 0$ )
- που μετατίθενται μεταξύ τους κατά Poisson (in involution):  $\{F_k, F_l\} = 0, \forall k, l = 1, \dots, n$ <sup>8</sup>

και είναι πλήρως επιλύσιμο υπό την έννοια ότι αρκεί να λυθεί ένας πεπερασμένος αριθμός αλγεβρικών εξισώσεων και ολοκληρωμάτων.

Μία από τις δομές που είναι ιδιαίτερα σημαντικές σε ολοκληρώσιμα συστήματα είναι αυτή του ζεύγους Lax. Το ζεύγος Lax είναι ένα ζεύγος πινάκων  $L, M$ , τα στοιχεία των οποίων είναι συναρτήσεις του χώρου των φάσεων. Η χαρακτηριστική ιδιότητα του ζεύγους αυτού είναι ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{L} = [M, L], \quad (2.8.5)$$

η οποία ισοδυναμεί με ένα πλήρες σύνολο εξισώσεων κίνησης. Συνεπώς, σε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα, οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να έρθουν στην μορφή ενός ζεύγους Lax. Έτσι λοιπόν, εάν μπορεί να βρεθεί ένα ζεύγος Lax για ένα σύστημα κλασικής μηχανικής, ο πίνακας  $L$  του ζεύγους αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράξει ένα σύνολο ολοκληρωμάτων κίνησης  $F_k$

$$F_k := \text{Tr} L^k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.8.6)$$

<sup>8</sup>Η τελευταία συνθήκη είναι συνθήκη ισχυρής ολοκληρωσιμότητας.

όπου αν  $k > n$ , προκύπτει ένα ήδη υπάρχον ολοκλήρωμα κίνησης  $F_k$ . Οι ποσότητες (2.8.6) είναι τετριμένα διατηρούμενες λόγω της κυκλικής ιδιότητας του ίχνους

$$\frac{d}{dt}F_k = k\text{Tr}(L^{k-1}\dot{L}) = k\text{Tr}(L^{k-1}[M, L]) = 0. \quad (2.8.7)$$

### Ολοκληρωσιμότητα στην κλασική θεωρία πεδίου

Έστω τώρα η κλασική μηχανική ενός μονοδιάστατου πεδίου  $\phi(\sigma)$ , όπου μαζί με την εξέλιξη του χρόνου αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα  $(1+1)$ -διάστατων πεδίων  $\phi(\tau, \sigma)$ . Εφόσον σε κάθε χρονική στιγμή το πεδίο  $\phi(\tau, \sigma)$  μπορεί να αναπτυχθεί κατά Taylor ή κατά Fourier με άπειρους ανεξάρτητους συντελεστές, ο χώρος των φάσεων για ένα τέτοιο σύστημα είναι απειροδιάστατος. Συνεπώς, η εξασφάλιση της ολοκληρωσιμότητας κατά Liouville προϋποθέτει την ύπαρξη απείρων ολοκληρωμάτων κίνησης και σκοπός είναι η εύρεση ενός ζεύγους Lax που θα μπορεί να περιγράψει τις άπειρες αυτές σταθερές κίνησης.

Στη θεωρία πεδίου λοιπόν χρειάζονται άπειρες διατηρούμενες ποσότητες προκειμένου να εξασφαλισθεί η ολοκληρωσιμότητα ενός συστήματος, και έτσι το ζεύγος Lax είναι απειροδιάστατο. Εναλλακτικά, το ζεύγος Lax αυτό μπορεί να ορισθεί μέσω μίας συνεχούς παραμέτρου  $\zeta \in \mathbb{C}$  που ονομάζεται φασματική παράμετρος (spectral parameter). Τότε, το ανάπτυγμα Taylor ως προς την παράμετρο αυτή οδηγεί σε έναν άπειρο αριθμό διατηρούμενων ποσοτήτων.

Σε όρους τοπικών συναρτήσεων της θεωρίας πεδίου, εισάγεται η έννοια της *σύνδεσης Lax*  $A_a(\tau, \sigma; \zeta)$ ,  $a = \tau, \sigma$  η οποία ουσιαστικά είναι μια 1-μορφή  $A(\zeta) = A_\sigma(\zeta)d\sigma + A_\tau(\zeta)d\tau$ <sup>9</sup> που ικανοποιεί τη συνθήκη επίπεδου χώρου (flatness condition)

$$dA(\zeta) = A(\zeta) \wedge A(\zeta) \quad \text{ή} \quad \dot{A}_\sigma(\zeta) - A'_\tau(\zeta) + [A_\sigma(\zeta), A_\tau(\zeta)] = 0. \quad (2.8.8)$$

Τα ολοκληρώματα κίνησης προκύπτουν τώρα από το ζεύγος Lax, το οποίο με τη σειρά του προκύπτει μέσω του τελεστή της παράλληλης μετατόπισης (διατεταγμένο ως προς τη διαδρομή ολοκλήρωμα ή γραμμή Wilson) της σύνδεσης Lax  $A(\zeta)$ . Συνεπώς, το ζεύγος Lax (για την περίπτωση περιοδικών συνοριακών συνθηκών  $A(\tau, \sigma + l; \zeta) = A(\tau, \sigma; \zeta)$ ) ορίζεται ως

$$L(\zeta) = P \exp \int_0^l d\sigma A_\sigma(\zeta), \quad M(\zeta) = A_\tau(\zeta) \Big|_{\sigma=0}, \quad (2.8.9)$$

$$\text{με την εξίσωση Lax} \quad \dot{L}(\zeta) = [M(\zeta), L(\zeta)], \quad (2.8.10)$$

<sup>9</sup>Στις συνετεταγμένες του κώνου φωτός ισχύει  $A = A_+(\zeta)dx^+ + A_-(\zeta)dx^-$ ,  $x^\pm = \tau \pm \sigma$

όπου ο  $L(\zeta)$  είναι ο πίνακας της μονοδρομίας κατά Lax. Τα ίχνη των δυνάμεων του πίνακα  $L$  διατηρούνται

$$F_k(\zeta) = \text{Tr}L(\zeta)^k, \quad (2.8.11)$$

και αναπτύσσοντας γύρω από κάποιο σημείο κατά Taylor, προκύπτουν οι άπειρες διατηρούμενες ποσότητες που αντιστοιχούν στα ολοκληρώματα κίνησης

$$F_k(\zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{F_k^{(r)}}{\zeta^r}, \quad (2.8.12)$$

τα οποία αποδεικνύεται [13] ότι είναι μεταξύ τους in involution.

## 2.9 Poisson-Lie T-duality

Μια θεμελιώδης έννοια στη θεωρία χορδών είναι αυτή της Αβελιανής T-δυσικότητας [20, 21] η οποία, στην πιο καθαρή της μορφή δηλώνει ότι μια θεωρία κλειστών χορδών είναι αναλλοίωτη κάτω από την αντιστροφή της ακτίνας ενός κύκλου στον χώρο-στόχο της. Προκειμένου η δυσικότητα αυτή να είναι εφαρμόσιμη, θα πρέπει ο χώρος-στόχος να έχει μία ή περισσότερες Αβελιανές ισομετρίες. Ωστόσο, οι γενικές ισομετρίες σχηματίζουν μη-Αβελιανές ομάδες ισομετρίας. Η προσπάθεια επέκτασης της T-δυσικότητας από Αβελιανές ομάδες ισομετριών σε μη-Αβελιανές είναι μη-τετριμένη εφόσον υπάρχουν χβαντικές διορθώσεις οι οποίες δεν είναι εύκολα διαχειρίσιμες. Ακόμα όμως και για την την κλασική προσέγγιση όπου οι διορθώσεις αυτές μπορούν να παραλειφθούν, ο δυσικός χώρος-στόχος μπορεί να μην εμφανίζει τις απαραίτητες ισόμετριες που απαιτούνται για την ανάκτηση του αρχικού χώρου-στόχου. Για αυτή την περίπτωση, αποδεικνύεται [22, 23] ότι κάτω από συγκεκριμένες περιστάσεις [24] δεν είναι απαραίτητη η ύπαρξη ισομετριών προκειμένου να ισχύει η T-δυσικότητα σε κλασικό επίπεδο. Η γενικευμένη αυτή έννοια της T-δυσικότητας, ονομάζεται Poisson-Lie T-δυσικότητα, και περιλαμβάνει την Αβελιανή και μη-Αβελιανή T-δυσικότητα ως ειδικές περιπτώσεις. Τα κλασικά Poisson-Lie T-δυσικά σ-πρότυπα συνδέονται μέσω ενός κανονικού μετασχηματισμού του χώρου των φάσεών τους, και συνεπώς είναι πλήρως ισοδύναμα [23, 28] μεταξύ τους. Παρόλο που δεν υπάρχει μια πλήρης ισοδυναμία σε χβαντικό επίπεδο, η Poisson-Lie T-δυσικότητα είναι πολύ χρήσιμη λόγω δύο αξιοσημείωτων ιδιοτήτων που παρουσιάζει:

- Κάτω από ήπιες υποθέσεις, οι λύσεις της β-συνάρτησης σε επίπεδο ενός βρόγχου της θεωρίας διαταραχών διατηρούνται [29, 30, 31], υποδεικνύοντας ότι η δυσικότητα αυτή αποτελεί μια απεικόνιση μεταξύ σύμμορφων θεωριών πεδίου.
- Όλα τα γνωστά παραδείγματα διδιάστατων σ-προτύπων που είναι κλασικά ολοκληρώσιμα, έχουν Poisson-Lie συμμετρία.

Για την μελέτη της (Poisson-Lie, μη-Αβελιανής) T-δυστικότητα, είναι απαραίτητη η έννοια της διπλέτας Drinfeld (Drinfeld double)  $\mathcal{D}$ . Για μια Lie ομάδα  $D$ , της οποίας η άλγεβρα  $\mathcal{D}$  (ως γραμμικός χώρος) μπορεί να αναλυθεί σε ένα ευθύ άθροισμα διανυσματικών χώρων  $\mathcal{G}$  και  $\tilde{\mathcal{G}}$ , οι οποίοι με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε μεγίστως ισοτροπικές υποάλγεβρες της  $\mathcal{D}$  ως προς ένα μη-εκφυλισμένο, αναλλοίωτο διγραμμικό γινόμενο στην  $\mathcal{D}$ , ορίζεται η διπλέτα Drinfeld  $\mathcal{D}$  [32]. Ένας ισοτροπικός υπόχωρος της άλγεβρας  $\mathcal{D}$  είναι τέτοιος ώστε το αναλλοίωτο γινόμενο οποιονδήποτε δύο ανυσμάτων του να είναι μηδενικό (ως μέγιστα ισοτροπικός ορίζεται αυτός που δεν μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω διατηρώντας την ισομετρία του). Οποιαδήποτε τέτοια ανάλυση της διπλέτας σε ζεύγος μεγίστων ισοτροπικών αλγεβρών  $\mathcal{D} = \mathcal{G} + \tilde{\mathcal{G}}$ , αναφέρεται συνήθως ως τριπλέτα Manin (Manin triple), ενώ οι ομάδες Lie που αντιστοιχούν στις άλγεβρες  $\mathcal{G}$  και  $\tilde{\mathcal{G}}$  συμβολίζονται με  $G, \tilde{G}$ .

Οι τριπλέτες Manin που αντιστοιχούν σε μία διπλέτα Drinfeld συμβολίζονται με  $M(\mathcal{D})$  και αντιστοιχούν στον κλασματικό χώρο (modular space) των  $\sigma$ -προτύπων που συνδέονται μεταξύ τους μέσω μετασχηματισμού Poisson-Lie T-δυστικότητας<sup>10</sup>. Εν γένει, ο  $M(\mathcal{D})$  έχει τουλάχιστον δύο σημεία:  $\mathcal{G} + \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{D}$  και  $\tilde{\mathcal{G}} + \mathcal{G} = \mathcal{D}$ .

Μια ταξινόμηση τώρα των διαφόρων T-δυστικότητας που υπάρχουν, δίνεται μέσω των ακόλουθων κατηγοριών διπλετών Drinfeld:

1. Αβελιανές διπλέτες, οι οποίες αντιστοιχούν στην καθιερωμένη Αβελιανή T-δυστικότητα [20, 33].
2. Ημί-Αβελιανές διπλέτες (όπου υπάρχει η ανάλυση  $\mathcal{D} = \mathcal{G} + \tilde{\mathcal{G}}$  με την  $\tilde{\mathcal{G}}$  να είναι Αβελιανή<sup>11</sup>), οι οποίες αντιστοιχούν στην καθιερωμένη μη-Αβελιανή T-δυστικότητα μεταξύ ενός  $G$ -ισομετρικού  $\sigma$ -πρότυπου με χώρο-στόχο την ομάδα  $G$ , και ενός μη-ισομετρικού  $\sigma$ -πρότυπου με χώρο-στόχο την άλγεβρα  $\tilde{\mathcal{G}}$  αναπαριστάμενη ως Αβελιανή ομάδα [34, 35, 36].
3. Μη-Αβελιανές διπλέτες (όλες οι υπόλοιπες). Αντιστοιχούν στην μη-τετριμμένη Poisson-Lie T-δυστικότητα που περιγράφεται στην [22], όπου κανένα από τα δύο πρότυπα του ζεύγους της δυστικότητας δεν είναι ισομετρικό ως προς τη δράση της ομάδας, η οποία δρά στον χώρο-στόχο της.

Όσον αφορά την κβαντική έκφραση της δυστικότητας, για τα διδιάστατα  $\sigma$ -πρότυπα με χώρο-στόχο μια Lie ομάδα  $G$ , στην περίπτωση Αβελιανής ομάδας ισομετριών είναι δυνατός ο

<sup>10</sup>Στην Αβελιανή περίπτωση η διπλέτα Drinfeld είναι η  $\mathcal{D} = U(1)^{2d}$ , και ο κλασματικός χώρος της είναι  $M(\mathcal{D}) = O(d, d, \mathbb{Z})$ .

<sup>11</sup>Η ημι-Αβελιανή διπλέτα αντιστοιχεί στην συνεφαπτόμενη δέσμη του χώρου ομάδας  $G$ , με την δομή της ομάδας να δίνεται από το ημι-ευθύ γινόμενο της  $G$  και της συνάλγεβράς της  $\tilde{\mathcal{G}}$ , πάνω στην οποία δρά η  $G$  μέσω συζυγίας.

ορισμός περιοδικών συνθηκών για τις δυϊκές συντεταγμένες, έτσι ώστε η δυϊκότητα να ισχύει και σε χβαντικό επίπεδο (τα φάσματα των δύο θεωριών να ταυτίζονται). Αντιθέτως, για την μη-Αβελιανή περίπτωση αυτό δεν είναι δυνατό εφόσον κάποιες από τις συντεταγμένες της δυϊκής γεωμετρίας πρέπει να παραμείνουν μη-συμπαγείς. Συνεπώς, η μη-Αβελιανή δυϊκότητα είναι στην ουσία μια απεικόνιση μεταξύ διαφορετικών σύμμορφων θεωριών πεδίου. Υπάρχει μία γενίκευση των ιδεών αυτών στην Poisson-Lie T-δυϊκότητα στις [22, 25, 26, 27].

## 2.10 λ-παραμορφωμένα πρότυπα

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια εισαγωγή στην έννοια των λ-παραμορφωμένων προτύπων βασισμένη στις αναφορές [38, 39, 40, 44, 45, 47, 49, 50, 56]. Θα παρουσιασθούν αναλυτικά η θεωρία, η κατασκευή και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή αποτελεσμάτων στις θεωρίες αυτές, καθώς και οι διάφορες τροποποιήσεις που μπορούν να γίνουν οδηγώντας σε διαφορετικές λ-παραμορφωμένες θεωρίες.

Τα πρότυπα αυτά εισήχθησαν στην [38] ως ολοκληρώσιμα πρότυπα που παρεμβάλλονται μεταξύ μίας WZW θεωρίας με αφινική άλγεβρα ρευμάτων  $\mathfrak{g}_k$  ( $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ) και του μη-Αβελιανού T-δυϊκού του Κύριου Χειραλικού Προτύπου.

Τα πρότυπα αυτά προκύπτουν με φυσικό τρόπο μετά την βάρθρωση μιας αρχικής δράσης που αποτελείται από το άθροισμα ενός Κύριου Χειραλικού και ενός WZW προτύπου. Η δράση για τα λ-πρότυπα που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο αποτελεί μία ενεργό δράση που περιλαμβάνει όλες τις χβαντικές διορθώσεις ως προς την παράμετρο ζεύξης  $\lambda$  αλλά σε πρώτη τάξη ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλη τάξη  $k$  (η οποία παίζει τον ρόλο του  $\hbar$  στη θεωρία πεδίου ή αντίστοιχα του  $\alpha'$  στη θεωρία χορδών) της υποκείμενης Kac-Moody άλγεβρας. Η παράμετρος ζεύξης  $\lambda$  όπως προκύπτει από την διαδικασία της βάρθρωσης στην γενική της μορφή είναι ένας  $\dim G \times \dim G$  πίνακας και στην διαταρακτική του μορφή (για τα στοιχεία του  $\lambda_{ab} \ll 1$ ) αποτελεί την παράμετρο παραμόρφωσης μίας σύμμορφης θεωρίας κατά έναν όρο διργαμμικό ως προς τα ρεύματα της WZW θεωρίας.

Η θεωρία στην διαταρακτική της μορφή ταυτίζεται με το μη-Αβελιανό, μποζονοποιημένο Thirring πρότυπο μέσω επιχειρημάτων που θα αναλυθούν στη συνέχεια της ενότητας αυτής και συνεπώς, η ενεργός δράση των λ-προτύπων που προκύπτει από την διαδικασία της βάρθρωσης αποτελεί την ενεργό δράση σε επίπεδο ενός βρόγχου, του μποζονοποιημένου προτύπου Thirring.

Το αξιοσημείωτο όμως των λ-προτύπων είναι ότι εμφανίζουν μία επιπλέον χβαντική συμμετρία η οποία εμπλέκει την παράμετρο ζεύξης, το επίπεδο της υποκείμενης Kac-Moody άλγεβρας και το στοιχείο  $g$  της ομάδας  $G$ . Η επιπλέον αυτή συμμετρία που είναι συμμε-

τρία της ενεργού δράσης, επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό φυσικών μεγεθών της κβαντικής θεωρίας πεδίου όπως συναρτήσεων συσχετισμού, συναρτήσεων της ομάδας επανακανονικοποίησης και της συνάρτησης κεντρικού φορτίου. Συνεπώς, τα κβαντικά μεγέθη της θεωρίας μπορούν να υπολογιστούν σε όλες τις τάξεις του αναπτύγματος διαταραχών ως προς την παράμετρο παραμόρφωσης και σε πρώτη τάξη στο ανάπτυγμα του  $1/k$  για  $k \rightarrow \infty$ .

Παρόλο που τα πρότυπα αυτά παρουσιάστηκαν αρχικά ως ένας τρόπος διατάραξης μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου διατηρώντας την ολοκληρωσιμότητα της αρχικής θεωρίας, οι χρήσιμες ιδιότητές και συμμετρίες τους επέτρεψαν την κατασκευή και μελέτη νέων, πιο περίπλοκων  $\lambda$ -προτύπων. Τα γενικευμένα αυτά  $\lambda$ -πρότυπα περιλαμβάνουν θεωρίες σε συν-συνολικούς χώρους αντί για χώρους ομάδας, καθώς και  $\lambda$ -πρότυπα διαφορετικού τύπου αλληλεπιδράσεων των Kac-Moody ρευμάτων, όπου η ολοκληρωσιμότητα της αρχικής θεωρίας μπορεί να διατηρείται ή όχι, ανάλογα με τη μορφή του πίνακα  $\lambda$  της παραμόρφωσης. Οι γενικεύσεις αυτές παρουσιάζονται και αναλύονται μία-μία στη συνέχεια της ενότητας αυτής.

Τέλος, οι εφαρμογές των προτύπων αυτών είναι πολυδιάστατες εφόσον εκτείνονται από τη θεωρία χορδών, την AdS/CFT αντιστοιχία και την προσέγγιση ισχυρά συζευγμένων μη-Αβελιανών θεωριών βαθμίδας, σε μελέτη αλλαγής φάσεων στατιστικών συστημάτων και αλυσίδων σπίν [148]. Τα  $\lambda$ -πρότυπα είναι επίσης στενά συνδεδεμένα [73],[74],[80],[81],[57],[84] με τις λεγόμενες  $\eta$ -παραμορφώσεις προτύπων σε χώρους ομάδας [73],[74] ή συνσυνολικούς χώρους [76],[77],[78] μέσω της Poisson-Lie T-δυσικότητας και μίας αναλυτικής συνέχισης των συντεταγμένων και των παραμέτρων των  $\sigma$ -προτύπων [81],[57],[84]. Υπάρχουν επίσης εμβραπίσεις των  $\lambda$ -προτύπων ως λύσεις υπερβαρύτητας [68],[69],[70], καθώς και υλοποιήσεις τους μέσω αφινικών Gaudin προτύπων [96]. Τέλος,  $\lambda$ -πρότυπα προκύπτουν και μέσω συμπλεκτικής αναγωγής Chern-Simons θεωριών από παραπάνω διαστάσεις [88, 145, 146].

### 2.10.1 Απλά παραμορφωμένο πρότυπο

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι σύμμορφες θεωρίες συνσυνολικών προτύπων επιδέχονται έναν Λαγκρανζιανό φορμαλισμό σε όρους βαθμισμένων WZW προτύπων. Σε αυτές τις κατασκευές, σημείο αφετηρίας είναι μία WZW δράση με μία  $G_L \times G_R$  συμμετρία άλγεβρας ρευμάτων (μίας Lie ομάδας  $G$ ), της οποίας βαθμίζεται μία διαγώνια υποομάδα  $H$  εισάγοντας κάποια μη-δυναμικά πεδία βαθμίδας στην αντίστοιχη Lie άλγεβρα. Μετά την ολοκλήρωση των πεδίων αυτών προκύπτει ένα  $\sigma$ -πρότυπο που αντιστοιχεί σε μία  $G/H$  σύμμορφη θεωρία πεδίου η οποία χαρακτηρίζεται από μία ανηγμένη ομάδα ισομετριών σε σχέση με την αρχική WZW θεωρία<sup>12</sup>.

<sup>12</sup>Εάν η  $H$  αποτελεί μέγιστη υποομάδα της  $G$ , τότε ο τελικός χώρος δεν θα έχει καμία ισομετρία.

## Συμμετρικό απλά παραμορφωμένο πρότυπο

### Κατασκευή

Έχοντας την πάνω ιδέα ως αφετηρία, το Κύριο Χειραλικό Πρότυπο [91] σε Λορέντζιο δισδιάστατο χώρο κοσμικού φύλλου και στις συντεταγμένες του κώνου φωτός<sup>13</sup> είναι

$$S_{PCM}(\tilde{g}) = -\frac{\kappa^2}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(\tilde{g}^{-1} \partial_+ \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial_- \tilde{g}), \quad \tilde{g} \in G, \quad (2.10.2)$$

το οποίο αντιστοιχεί στην (2.6.2) με συνολική παράμετρο ζεύξης  $\kappa^2 = -\pi/4K^2$ . Το πρότυπο αυτό έχει μία καθολική συμμετρία  $G_L \times G_R$  και είναι ολοκληρώσιμο. Επιπλέον, η WZW θεωρία που ορίζεται από την (2.6.15) έχει μία  $G_{L,\text{cur}} \times G_{R,\text{cur}}$  συμμετρία άλγεβρας ρευμάτων και προφανώς, όντας μία σύμμορφη θεωρία πεδίου, είναι και αυτή ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, το άθροισμα των δύο αυτών δράσεων θα αντιστοιχεί σε μια ολοκληρώσιμη θεωρία σε έναν χώρο-στόχο διάστασης  $2\dim G$ .

Συμβολίζοντας με  $G_{\text{diag,cur}}$  την διαγώνια υποομάδα της  $G_{L,\text{cur}} \times G_{R,\text{cur}}$ , βαθμίζεται η  $G_L \times G_{\text{diag,cur}}$  της άνωθεν συμμετρίας. Η προκύπτουσα θεωρία, όπως θα αποδειχθεί, θα διατηρήσει την καθολική συμμετρία ως προς την αρχική  $G_R$  ομάδα. Κατά την διαδικασία της βαθμίσωσης, αντικαθίστανται οι απλές παράγωγοι της  $S_{PCM}(\tilde{g})$  με τις αντίστοιχες συναλλοίωτες  $\partial_\pm \tilde{g} \rightarrow D_\pm \tilde{g} = \partial_\pm \tilde{g} - A_\pm \tilde{g}$  και προκύπτει η βαθμισμένη δράση  $S_{gPCM}(\tilde{g}; A_\pm)$ , με τα πεδία  $A_\pm$  να αντιστοιχούν στα μη-δυναμικά πεδία βαθμίδας. Για την περίπτωση της WZW δράσης, η αντικατάσταση αυτή των παραγώγων με τις αντίστοιχες συναλλοίωτες δεν δουλεύει και η αρχική WZW δράση αντικαθίσταται με την βαθμισμένη  $G/G$  WZW δράση σε επίπεδο  $k$

$$\begin{aligned} S_{gWZW}(g; A_\pm) &= k S_{WZW}(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(iA_- J_+ - iA_+ J_- + A_- g A_+ g^{-1} - A_- A_+) \\ &= k S_{WZW} + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma (iA_-^a J_+^a - iA_+^a J_-^a + A_+^a (D^T - \mathbb{1})_{ab} A_-^b), \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

<sup>13</sup>Οι συμβάσεις για τις συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} \sigma^\pm &= \tau \pm \sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-) \\ \partial_\pm &= \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma), \quad \partial_\tau = \partial_+ + \partial_-, \quad \partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-, \quad d^2\sigma = d\tau \wedge d\sigma = -\frac{d\sigma^+ \wedge d\sigma^-}{2} \end{aligned} \quad (2.10.1)$$



όπου

$$\begin{aligned} J_+^a &= -i\text{Tr}(t^a \partial_+ g g^{-1}) = R_\mu^a \partial_+ X^\mu, & J_-^a &= -i\text{Tr}(t^a g^{-1} \partial_- g) = L_\mu^a \partial_- X^\mu, \\ R^a &:= -i\text{Tr}(t^a d g g^{-1}) = R_\mu^a dX^\mu, & L^a &:= -i\text{Tr}(t^a g^{-1} d g) = L_\mu^a dX^\mu, \\ D_{ab} &= \text{Tr}(t_a g t_b g^{-1}), & R^a &= D_{ab} L^b. \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Οι σχέσεις (2.10.4) εκφράζουν τις (αναλλοιώτες κάτω από αριστερή και δεξιά δράση της ομάδας  $G$ ) Mauer-Cartan μορφές, όπως αυτές ορίζονται για μία συμπαγή, απλή Lie ομάδα  $G$  με το αντίστοιχο στοιχείο ομάδας να παραμετροποιείται από τις συντεταγμένες  $X^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, \dim G$  του χώρου-στόχου της ομάδας αυτής. Ο πίνακας  $D$  είναι ο ορθογώνιος πίνακας που συνδέει την αριστερή με την δεξιά αναλλοιώτη Mauer-Cartan μορφή και ταυτίζεται με την συζυγή δράση της ομάδας  $G$  στην άλγεβρα  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Οι Mauer-Cartan μορφές και ο ορθογώνιος πίνακας που τις συνδέει ικανοποιούν τις σχέσεις

$$dL^a = \frac{1}{2} f_{abc} L^b \wedge L^c, \quad dR^a = -\frac{1}{2} f_{abc} R^b \wedge R^c, \quad dD_{ab} = D_{ac} f_{cbe} L^e. \quad (2.10.5)$$

Οι πίνακες  $t^a$ ,  $a = 1, \dots, \dim G$  είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας  $\mathfrak{g}$  και συνεπώς ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης  $[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$ , ενώ από εδώ και στο εξής η κανονικοποίηση τους θα είναι η  $\text{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}$ .

Μέσω των ορισμών (2.10.4) οι  $S_{PCM}(\tilde{g})$  και  $S_{WZW}(g)$  μπορούν να ξαναγραφούν ως

$$\begin{aligned} S_{WZW,k}(g) &= \frac{k}{2\pi} \int d^2\sigma L_\mu^a L_\nu^a \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu + \frac{k}{12\pi} \int_{B^3} f_{abc} L^a \wedge L^b \wedge L^c, \\ S_{PCM} &= \frac{1}{\pi} \int E_{ab} L_+^a L_-^b = \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma E_{ab} L_\mu^a L_\nu^b \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu, \end{aligned} \quad (2.10.6)$$

με τον πίνακα  $E_{ab}$  να είναι ένας γενικός πίνακας ζεύξης που εδώ αντιστοιχεί με  $E_{ab} = \kappa^2 \delta_{ab}$ . Οι μορφές (2.10.6) των δύο δράσεων θα χρειασθούν πιο μετά για τον προσδιορισμό της μετρικής του χώρου στόχου και του αντισυμμετρικού ταυστή  $B_{\mu\nu}$  μέσω της δράσης του λ-παραμορφωμένου προτύπου.

Επιστρέφοντας τώρα στην διαδικασία της βάρθμισης, η συνολική βαθμισμένη δράση

$$S_{\text{tot}}(\tilde{g}, g; A_\pm) = S_{gPCM}(\tilde{g}; A_\pm) + S_{gWZW}(g; A_\pm) \quad (2.10.7)$$

μένει αναλλοιώτη κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\tilde{g} \rightarrow \Lambda^{-1} \tilde{g}, \quad g \rightarrow \Lambda^{-1} g \Lambda, \quad A_\pm \rightarrow \Lambda^{-1} A_\pm \Lambda - \Lambda^{-1} \partial_\pm \Lambda \quad (2.10.8)$$

για ένα στοιχείο  $\Lambda(\sigma^+, \sigma^-) \in G$ .

Λόγω της συμμετρίας βαθμίδας αυτής, μπορούν να εξαλειφθούν  $\dim G$  βαθμοί ελευθερίας μεταξύ των στοιχείων  $\tilde{g}, g \in G$ , και εφόσον η ομάδα  $G$  δρά ελεύθερα στο  $\tilde{g}$ , επιλέγεται η βαθμίδα

$$\tilde{g} = \mathbb{1}. \quad (2.10.9)$$

Η συνολική δράση (2.10.7) μετά την επιλογή της βαθμίδας γίνεται

$$S_{g.f.}(g; A_{\pm}) = S_{WZW}(g) + \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(-ikA_+J_- + ikJ_+A_- - A_+MA_-), \quad (2.10.10)$$

όπου έχει ορισθεί ο πίνακας

$$M = \kappa^2 \mathbb{1} - k(D^T - \mathbb{1}) = (k + \kappa^2)(\mathbb{1} - \lambda D^T), \quad (2.10.11)$$

με την παράμετρο  $\lambda$  να είναι

$$\lambda = \frac{k}{k + \kappa^2}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (2.10.12)$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η δράση (2.10.10) είναι αναλλοίωτη κάτω από την καθολική συμμετρία

$$g \rightarrow \Lambda_0^{-1}g\Lambda_0, \quad A_{\pm} \rightarrow \Lambda_0^{-1}A_{\pm}\Lambda_0, \quad \Lambda_0 \in G. \quad (2.10.13)$$

Η διαφορίση τώρα της δράσης (2.10.10) ως προς τα πεδία βαθμίδας δίνει

$$A_+^a = ikM_{ba}^{-1}J_+^b, \quad A_-^a = -ikM_{ab}^{-1}J_-^b \quad (2.10.14)$$

και στη συνέχεια, αντικαθιστώντας αυτά στην Λαγκρανζιανή προκύπτει η ενεργός δράση του λ-προτύπου

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{2\pi} \int d^2\sigma J_+^a (\lambda^{-1} - D^T)_{ab}^{-1} J_-^b, \quad (2.10.15)$$

ή χρησιμοποιώντας τις Mauer-Cartan μορφές της σχέσης (2.10.4)

$$S_{k,\lambda}(g) = \frac{k}{4\pi} \int d^2\sigma J_+ D J_- + \frac{k}{48\pi} \int_{B^3} f_{abc} L^a \wedge L^b \wedge L^c + \frac{k}{2\pi} \int d^2\sigma J_+ (\lambda^{-1} - D^T)^{-1} J_-. \quad (2.10.16)$$

Είναι προφανές ότι η δράση (2.10.15) και (2.10.16) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό (2.10.13) για το στοιχείο  $g \in G$ , καθώς και κάτω από μετασχηματισμούς

γενικευμένης ομοτιμίας

$$\sigma^+ \leftrightarrow \sigma^-, \quad g \rightarrow g^{-1}, \quad \lambda \rightarrow \lambda^T. \quad (2.10.17)$$

Εκτός από αυτές τις δύο συμμετρίες όμως, είναι εύκολο να δειχθεί από την μορφή (2.10.16) της δράσης ότι το  $\lambda$ -πρότυπο εμφανίζει άλλη μία συμμετρία σε κβαντικό επίπεδο. Η νέα αυτή συμμετρία

$$\lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad k \rightarrow -k, \quad g \rightarrow g^{-1} \quad (2.10.18)$$

είναι μια δυϊκού τύπου συμμετρία ως προς τον (εν γένει) πίνακα της παραμέτρου ζεύξης  $\lambda$  και εκφράζεται ως

$$S_{-k, \lambda^{-1}}(g^{-1}) = S_{k, \lambda}(g), \quad (2.10.19)$$

μέσα από τους μετασχηματισμούς

$$g \rightarrow g^{-1} : \quad D \rightarrow D^T, \quad J_+^a \rightarrow D_{ba} J_+^b, \quad J_-^a \rightarrow -D_{ab} J_-^b.$$

Όπως θα γίνει αντιληπτό και στην συνέχεια, η συμμετρία αυτή διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στον ακριβή υπολογισμό κβαντικών μεγεθών εφόσον η επιβολή της σε κβαντικό επίπεδο οδηγεί σε ακριβή αποτελέσματα χωρίς εκτενή χρήση της θεωρίας διαταραχών.

Για έναν γενικό πίνακα  $\lambda = k(k\mathbf{1} + E)^{-1}$  με τα στοιχεία των συνιστωσών του να είναι  $\lambda_{ab} \ll 1$ , η γραμμική μορφή της (2.10.15)

$$S_{k, \lambda}(g) = S_{WZW, k}(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \lambda_{ab} J_+^a J_-^b + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (2.10.20)$$

αντιστοιχεί σε μία WZW θεωρία διαταραγμένη κατά ένα σύνολο κλασικά οριακών τελεστών, διγραμμικών ως προς τα ρεύματα της WZW θεωρίας. Οι δύο πρώτοι όροι του πάνω αναπτύγματος αντιστοιχούν στο μη-Αβελιανό μποζονοποιημένο Thirring πρότυπο.

Η δράση (2.10.20) είναι αναλλοίωτη κάτω από την καθολική συμμετρία (2.10.13) καθώς και κάτω από τη συμμετρία της γενικευμένης ομοτιμίας (2.10.17) αλλά δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από την συμμετρία δυϊκού τύπου (2.10.18) (σε κλασικό τουλάχιστον επίπεδο).

Έχει γίνει η υπόθεση [49],[47] ότι η δράση (2.10.15) αντιστοιχεί στην ενεργό δράση σε επίπεδο όλων των βρόγχων ως προς  $\lambda$  και ενός βρόγχου ως προς το  $1/k$  ανάπτυγμα, του μποζονοποιημένου μη-Αβελιανού προτύπου Thirring. Η υπόθεση αυτή βασίστηκε στα ακόλουθα φυσικά επιχειρήματα:

1. Για μικρά  $\lambda_{ab}$  η δράση (2.10.15) γίνεται αυτή του μη-Αβελιανού Thirring προτύπου.

2. Και οι δύο δράσεις έχουν κοινές τις πολύ σημαντικές συμμετρίες (2.10.13),(2.10.17), (2.10.18). Η δράση (2.10.20) δεν εμφανίζει την τελευταία συμμετρία σε κλασικό επίπεδο, παρόλα αυτά όμως, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα μέσω ολοκληρωμάτων διαδρομών έχει αποδειχθεί [46] ότι η ενεργός δράση του μη-Αβελιανού Thirring προτύπου πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία δυϊκότητας αυτή  $(\lambda, k) \rightarrow (\lambda^{-1}, -k)$  (για  $k \gg 1$ ).
3. Το πιο ισχυρό φυσικό επιχείρημα είναι ότι μέχρι τάξη  $1/k$ , η ακριβής ως προς τις παραμέτρους ζεύξης  $\lambda_{ab}$   $\beta$ -συνάρτηση που έχει υπολογισθεί για την (2.10.15) στις [49],[47],[82], ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει για την (2.10.20) από την άθροιση σε όλους τους βρόγχους της θεωρίας διαταραχών.
4. Έχει αποδειχθεί μαθηματικά [44] ότι στο κλασικό όριο, η άλγεβρα των αγκύλων Poisson που προκύπτουν για την (2.10.20) είναι ένας τρόπος έκφρασης της ενεργού δράσης (2.10.15) [38].

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τα  $\lambda$ -παραμορφωμένα πρότυπα όπως κατασκευάστηκαν στην [38] και [49] αποτελούν ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις για συγκεκριμένες επιλογές του πίνακα  $\lambda$ . Πιο συγκεκριμένα, η ολοκληρωσιμότητα της αρχικής θεωρίας διατηρείται για διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$  στην περίπτωση που ο χώρος-στόχος είναι μία Lie ομάδα  $G$  ή ένας συμμετρικός ή ημί-συμμετρικός συνσυνολικός χώρος [38],[48],[66],[67], καθώς και για συγκεκριμένες μορφές γενικού πίνακα [56, 57], οι οποίες παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

### Ολοκληρωσιμότητα

Στην υποενότητα αυτή θα αποδειχθεί η ολοκληρωσιμότητα του απλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου για συγκεκριμένες μορφές του πίνακα  $\lambda$  [56]. Για το λόγο αυτό, στη διαδικασία της βαθμίσωσης συμμετέχει το PCM με γενικό πίνακα ζεύξης  $E_{ab}$  και ο γενικός πίνακας παραμόρφωσης  $\lambda$  ορίζεται μέσω αυτού ως  $E = k(\lambda^{-1} - \mathbb{1})$ . Στη δράση που προκύπτει από το άθροισμα των βαθμισμένων

$$S_{gWZW,k}(g; A_{\pm}) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{\pi} \int \text{Tr}(A_- \partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1} \partial_- g + A_- g A_+ g^{-1} - A_- A_+),$$

$$S_{gPCM,E}(\tilde{g}; A_{\pm}) = -\frac{1}{\pi} \int E_{ab} \text{Tr}(t^a \tilde{g}^{-1} D_+ \tilde{g}) \text{Tr}(t^b \tilde{g}^{-1} D_- \tilde{g}), \quad (2.10.21)$$

επιλέγεται η βαθμίδα  $\tilde{g} = \mathbb{1}$  και η μετέπειτα διαφορίση της δράσης που προκύπτει ως προς τα πεδία βαθμίδας  $A_{\pm}$ , συνεπάγεται τις εξισώσεις κίνησης

$$D_+ g g^{-1} = (\lambda^{-T} - \mathbb{1}) A_+, \quad g^{-1} D_- g = -(\lambda^{-1} - \mathbb{1}) A_-, \quad (2.10.22)$$

με  $D_{\pm}g = \partial_{\pm}g - [A_{\pm}, g]$ , ή ισοδύναμα

$$A_+ = (\lambda^{-T} - D)^{-1}J_+, \quad A_- = -(\lambda^{-1} - D^T)^{-1}J_-. \quad (2.10.23)$$

Επιπλέον, με διαφορίση ως προς τα στοιχεία της ομάδας  $g \in G$  προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} D_-(D_+gg^{-1}) &= F_{+-}, & D_+(g^{-1}D_-g) &= F_{+-}, \\ \text{με } F_{+-} &= \partial_+A_- - \partial_-A_+ - [A_+, A_-]. \end{aligned} \quad (2.10.24)$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες λόγω του ότι  $[D_+, D_-]g = [g, F_{+-}]$ . Αντικαθιστώντας τις τελευταίες στις (2.10.22) προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης του απλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου <sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \partial_+A_- - \partial_-(\lambda^{-T}A_+) &= [\lambda^{-T}A_+, A_-], \\ \partial(\lambda^{-1}A_-) - \partial_-A_+ &= [A_+, \lambda^{-1}, A_-]. \end{aligned} \quad (2.10.25)$$

Για να είναι ολοκληρώσιμη η θεωρία, αρκεί οι εξισώσεις κίνησης (2.10.25) να μπορούν να έρθουν στη μορφή μίας Lax εξίσωσης

$$d\mathcal{L} = \mathcal{L} \wedge \mathcal{L} \quad \text{ή} \quad \partial_+\mathcal{L}_- - \partial_-\mathcal{L}_+ = [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-], \quad (2.10.26)$$

για κάποια  $\mathcal{L}_{\pm} = \mathcal{L}_{\pm}(\tau, \sigma, \zeta)$ , όπου  $\zeta \in \mathbb{C}$  είναι μία φασματική παράμετρος.

Οι περιπτώσεις του πίνακα  $\lambda$  για τις οποίες η θεωρία διατηρεί την ολοκληρωσιμότητά της μετά την παραμόρφωση είναι:

1. Για την περίπτωση ημι-απλής ομάδας  $G$  [38],[66] με διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$  οι εξισώσεις κίνησης (2.10.25) γίνονται

$$\partial_{\pm}A_{\mp} = \pm \frac{1}{1 + \lambda} [A_+, A_-] \quad (2.10.27)$$

και το ζεύγος Lax είναι

$$\mathcal{L}_{\pm} = \frac{2}{1 + \lambda \zeta \mp 1} \zeta A_{\pm}. \quad (2.10.28)$$

2. Για το συμμετρικό συνσύνολο  $G/H$ , όπου  $H$  είναι μια ημι-απλή υποομάδα της  $G$ , με πίνακα  $\lambda = \text{diag}(\mathbb{1}_{\dim H}, \lambda \mathbb{1}_{\dim G/H})$ . Στην περίπτωση αυτή τα πεδία βαθμίδας χωρίζονται

<sup>14</sup>Αναλυτικά, για έναν τετραγωνικό πίνακα  $M$  ισχύει  $MA_+ = M_{bc}A_+^c t_b$  και  $[MA_+, A_-] = f_{bcd}M_{ce}A_+^e A_-^d t_b$ .

στο μέρος που ανήκει στην υποομάδα  $H$  και το συνσύνολο  $G/H$  ως

$$A_{\pm} = A_{\pm}^h + A_{\pm}^{g/h}, \quad A_{\pm}^h \in \mathcal{L}(H), \quad A_{\pm}^{g/h} \in \mathcal{L}(G/H),$$

όπου με  $\mathcal{L}(H)$  και  $\mathcal{L}(G/H)$  συμβολίζεται το σύνολο των γεννητόρων του  $\mathcal{L}(G)$  που έχουν δείκτες υποομάδας ή συνσυνόλου αντίστοιχα. Εφόσον το  $G/H$  είναι ένας συμμετρικός χώρος (δηλαδή  $f_{\alpha\beta\gamma} = 0$  όταν τα  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι συνσυνολικοί δείκτες), οι σχέσεις (2.10.25) γίνονται

$$\begin{aligned} \partial_+ A_-^h - \partial_- A_+^h &= [A_+^h, A_-^h] + \frac{1}{\lambda} [A_+^{g/h}, A_-^{g/h}] \\ \partial_{\pm} A_{\mp}^{g/h} &= -[A_{\mp}^{g/h}, A_{\pm}^h] \end{aligned} \quad (2.10.29)$$

και το ζεύγος Lax που ικανοποιεί την (2.10.26) είναι

$$\mathcal{L}_{\pm} = A_{\pm}^h + \frac{\zeta^{\pm 1}}{\sqrt{\lambda}} A_{\pm}^{g/h}. \quad (2.10.30)$$

3. Για την ειδική περίπτωση  $G = SU(2)$  με διαγώνιο, πλήρως ανισοτροπικό πίνακα  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , στη βάση  $t_a = -i\sigma_a/\sqrt{2}$ , όπου  $\sigma_a$  είναι οι πίνακες Pauli, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\partial_{\pm} A_{\mp}^1 = \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{(1-\lambda_1^2)\lambda_2\lambda_3} \left[ (\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3) A_{\pm}^2 A_{\mp}^3 - (\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2) A_{\pm}^3 A_{\mp}^2 \right] \quad (2.10.31)$$

και κυκλικές εναλλαγές στα 1,2,3.

Το ζεύγος Lax  $\mathcal{L}_{\pm} = \mathcal{L}_{\pm}^a t_a$  έχει συνιστώσες

$$\mathcal{L}^a = \sqrt{z_{\pm}(\zeta) + c_a^2 X_{\pm}^a} \quad (\text{χωρίς άθροιση στα } a), \quad z_{\pm} \in \mathbb{C}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (2.10.32)$$

με

$$X_{\pm}^1 = \frac{A_{\pm}^1}{\lambda_1 \sqrt{(1-\lambda_2^2)(1-\lambda_3^2)}}, \quad c_1 = \lambda_1 - \lambda_2\lambda_3$$

και κυκλικές εναλλαγές στα 1,2,3,

ενώ η λύση της συνθήκης

$$(z_+ z_- - c_1^2 c_2^2 - c_2^2 c_3^2 - c_3^2 c_1^2)^2 = 4c_1^2 c_2^2 c_3^2 (z_+ + z_- + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

που υπακούουν τα  $z_{\pm}$  εισάγει την φασματική παράμετρο  $\zeta$ . Όταν  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  τα

αποτελέσματα συμπίπτουν με αυτά της πρώτης περίπτωσης για διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα  $\lambda$  και  $G = SU(2)$ .

4. Για την περίπτωση γενικού, συμμετρικού, συνσυνολικού χώρου  $G/H$  επίσης προκύπτει ολοκληρώσιμη θεωρία.
5. Για την περίπτωση της  $\lambda$ -παραμόρφωσης του Yang-Baxter προτύπου [57] με  $\lambda = k(k\mathbb{1} + E)^{-1}$ , με τον πίνακα  $E$  να είναι  $E = \frac{1}{\tilde{t}}(\mathbb{1} - \tilde{\eta}\mathcal{R})^{-1}$  αντιστοιχώντας σε μία παραμόρφωση με δύο παραμέτρους  $\tilde{t}$  και  $\tilde{\eta}$ , και τον πίνακα  $R$  να ικανοποιεί την τροποποιημένη Yang-Baxter εξίσωση. Ορίζοντας

$$\tilde{A}_{\pm} = (\mathbb{1} \pm \tilde{\eta}\mathcal{R})^{-1}A_{\pm}$$

και

$$a = \frac{1 + c^2\tilde{\eta}^2\tilde{\lambda}_0}{1 + \tilde{\lambda}_0}, \quad \tilde{\lambda}_0 = \frac{k\tilde{t}}{1 + k\tilde{t}}, \quad c^2 = 1, -1, 0,$$

οι (2.10.25) γίνονται

$$\pm \partial_{\pm}\tilde{A}_{\mp} = \tilde{\eta}[\mathcal{R}\tilde{A}_{\pm}, \tilde{A}_{\mp}] + a[\tilde{A}_{+}, \tilde{A}_{-}], \quad (2.10.33)$$

ενώ το ζεύγος Lax είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pm} &= (\alpha_{\pm}\mathbb{1} \pm \tilde{\eta}\mathcal{R})(\mathbb{1} \pm \tilde{\eta}\mathcal{R})^{-1}A_{\pm}, \\ \alpha_{\pm} &= \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\zeta}{\zeta \mp 1}, \quad \alpha_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - c^2\tilde{\eta}^2}, \quad \alpha_2 = 2\sqrt{\alpha^2 - c^2\tilde{\eta}^2}. \end{aligned} \quad (2.10.34)$$

6. Για την συνσυνολική εκδοχή της τελευταίας περίπτωσης επίσης υπάρχει ολοκληρώσιμη θεωρία [57].

### Μη-Αβελιανό T-δυϊκό και Ψευδοδυϊκό χειραλικό όριο

Εκτός από το όριο των μικρών  $\lambda_{ab}$  που οδηγεί στην (2.10.20), υπάρχουν άλλα δύο ενδιαφέροντα όρια στα οποία η δράση (2.10.15) είναι καλώς ορισμένη. Αυτά είναι όταν η σταθερά ζεύξης πλησιάζει τα όρια  $\lambda \rightarrow \pm 1$ . Για την περίπτωση ενός γενικού πίνακα  $\lambda$  τα όρια αυτά είναι

- Μη-Αβελιανό T-δυϊκό του PCM

$$\lambda_{ab} = \delta_{ab} - \frac{E_{ab}}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad g = \mathbb{1} + i\frac{v_a t^a}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (2.10.35)$$

με τον πίνακα  $E_{ab}$  να είναι ένας γενικός τετραγωνικός πίνακας διάστασης  $\dim G$ . Σε αυτό το όριο προκύπτει

$$J_{\pm}^a = \frac{\partial_{\pm} v^a}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad D_{ab} = \delta_{ab} + \frac{f_{ab}}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad f_{ab} = -if_{abc}v^c.$$

Έχοντας διαλέξει τις σταθερές δομής να είναι πλήρως φανταστικές το  $f_{ab}$  είναι πραγματική ποσότητα. Σε αυτό το όριο, η δράση (2.10.15) γίνεται

$$S_{\text{non-Abel}}(v) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_+ v^a (E + f)_{ab}^{-1} \partial_- v^b, \quad (2.10.36)$$

η οποία αντιστοιχεί στο μη-Αβελιανό T-δυϊκό (ως προς την δράση της ομάδας  $G_L$  του σ-προτύπου) του PCM με έναν γενικό πίνακα ζεύξης  $E_{ab}$ .

Σε αυτό το όριο, ο WZW όρος της (2.10.15) δεν συμμετέχει καθόλου.

- Ψευδοδυϊκό χειραλικό όριο

$$\lambda_{ab} = -\delta_{ab} + \frac{E_{ab}}{k^{1/3}}, \quad g = \mathbb{1} + i\frac{v_a t^a}{k^{1/3}} + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.10.37)$$

με τον πίνακα  $E_{ab}$  να είναι πάλι ένας γενικός τετραγωνικός πίνακας διάστασης  $\dim G$ . Η αρχική κατασκευή της δράσης (2.10.15) επέβαλε, για συμπαγείς ομάδες  $G$ , τον περιορισμό  $0 < \lambda < 1$  για τις σταθερές ζεύξης. Παρόλα αυτά όμως, από την στιγμή που θα παραχθεί η δράση, μπορεί να επεκταθεί το εύρος τιμών των παραμέτρων  $\lambda$ . Έτσι και αλλιώς η δυϊκού τύπου συμμετρία (2.10.18) το απαιτεί αυτό. Προκειμένου να μελετηθεί το ψευδοχειραλικό όριο, το εύρος των παραμέτρων  $\lambda$  επεκτείνεται και στους αρνητικούς και η ισοδύναμη μορφή της δράσης, όπου ο τετραγωνικός όρος της WZW δράσης έχει συμπεριληφθεί στον όρο παραμόρφωσης είναι

$$S_{k,\lambda}(g) = \frac{k}{4\pi} \int d^2\sigma J_+^a \left[ (\lambda^{-1} - D^T)^{-1} (\lambda^{-1} + D^T) D \right]_{ab} J_-^b - \frac{ik}{48\pi} \int_{B^3} f_{abc} L^a \wedge L^b \wedge L^c,$$

με τις σταθερές δομής να είναι πλήρως φανταστικές.

Οι διάφορες ποσότητες της δράσης αυτής αναπτύσσονται γύρω από την μονάδα όπως και πριν, με το  $k$  αντικατεστημένο με  $k^{1/3}$  και έτσι στο όριο (2.10.37) αυτή γίνεται

$$S_{\text{Pseudodual}}(v) = \frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \partial_+ v^a \partial_- v^b \left( E_{ab} + \frac{1}{3} f_{ab} \right). \quad (2.10.38)$$

Εφόσον το αντισυμμετρικό τμήμα του πίνακα  $E_{ab}$  οδηγεί σε ολικές παραγώγους, ο



πίνακας  $E_{ab}$  στην πάνω δράση μπορεί να θεωρηθεί συμμετρικός. Τότε, για  $E_{ab} = \delta_{ab}/b^{2/3}$  η δράση (2.10.38) ταυτίζεται με τη δράση του Ψευδοχειραλικού προτύπου [136].

Στο όριο αυτό, το τετραγωνικό μέρος της WZW δράσης και ο όρος παραμόρφωσης της (2.10.15) συμμετέχουν εξίσου προκειμένου το αποτέλεσμα να είναι πεπερασμένο, αλλά ο καθένας ξεχωριστά αποκλίνει.

Εφόσον τα δύο παραπάνω όρια του μη-Αβελιανού και του Ψευδοδουϊκού προτύπου υπάρχουν και είναι καλώς ορισμένα σε επίπεδο δράσης, θα πρέπει επίσης να υπάρχουν και να είναι καλώς ορισμένα και στο επίπεδο των διαφόρων φυσικών ποσοτήτων, όπως οι συναρτήσεις συσχετισμού, οι συναρτήσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης κ.α. Η ύπαρξη αυτών των ορίων διευκολύνει υπερβολικά την εύρεση μεγεθών που περιλαμβάνουν όλες τις διορθώσεις σε επίπεδο κβαντικών βρόγχων μη-διαταρακτικά.

### Γενικές Ιδιότητες

Για τα επόμενα κεφάλαια χρειάζεται το OPE των WZW ρευμάτων (2.2.22) και (2.2.23) σε Ευκλείδιο χώρο με μιγαδικές συντεταγμένες  $z = \frac{1}{2}(\tau + i\sigma)$  και  $\bar{z}$ , καθώς και το OPE των ρευμάτων με τα αφινικά πρωτεύοντα πεδία της σύμμορφης θεωρίας (2.2.30).

Για τα ολομορφικά ρεύματα, θεωρώντας έναν επαναορισμό τους ως  $J^a \rightarrow J^a/\sqrt{k}$ , το μη-πεπερασμένο μέρος του OPE είναι [90],[137]

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f_{abc}}{\sqrt{k}} \frac{J^c(w)}{z-w} \quad (2.10.39)$$

και όμοια για τα αντιολομορφικά  $\bar{J}(\bar{z})$ , με τις σταθερές δομής  $f_{abc}$  να είναι καθαρά φανταστικές, ενώ το OPE  $J^a(z)\bar{J}^b(\bar{w})$  είναι πεπερασμένο.

Οι συναρτήσεις συσχετισμού δύο, τριών και τεσσάρων σημείων για τα ολομορφικά ρεύματα στη σύμμορφη θεωρία πεδίου δίνονται από τις σχέσεις (2.2.26),(2.2.27) και (2.2.28) αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις συσχετισμού που περιέχουν ολομορφικά και αντιολομορφικά ρεύματα μηδενίζονται στο σύμμορφο σημείο αλλά στην παραμορφωμένη θεωρία επιδέχονται λ-διορθώσεις, ενώ  $\langle J \rangle = \langle \bar{J} \rangle = 0$ .

Όσον αφορά τα αφινικά πρωτεύοντα πεδία της σύμμορφης θεωρίας  $\Phi_{i,i'}(z, \bar{z})$ , αυτά μετασχηματίζονται κάτω από μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις  $R$  και  $R'$  με πίνακες  $t^a$  και  $\tilde{t}^a$ , κάτω από τη δράση των ρευμάτων  $J^a$  και  $\bar{J}^a$  και έτσι,  $i = 1, \dots, \dim R$ ,  $i' = 1, \dots, \dim R'$ .

Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} J_a(z)\Phi_{i,i'}(w, \bar{w}) &= -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(t_a)^{i'} \Phi_{j,i'}(w, \bar{w})}{z-w}, \\ \bar{J}_a(\bar{z})\Phi_{i,i'}(w, \bar{w}) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(\tilde{t}_a)^{j'} \Phi_{i,j'}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}}. \end{aligned} \quad (2.10.40)$$

Τα πεδία αυτά είναι ταυτόχρονα και πρωτεύοντα κατά Virasoro με σύμμορφες ολομορφικές και αντι-ολομορφικές διαστάσεις [137]

$$\Delta_R = \frac{c_R}{2k + c_G}, \quad \bar{\Delta}_{R'} = \frac{c_{R'}}{2k + c_G}, \quad (2.10.41)$$

όπου τα  $c_R, c_{R'}, c_G \geq 0$  αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του τετραγωνικού τελεστή Casimir στις αναπαραστάσεις  $R, R'$  και την συζυγή αναπαράσταση για την οποία  $(t_a)_{bc} = f_{abc}$ , αντίστοιχα. Τα στοιχεία αυτά ορίζονται ως

$$(t_a t_a)_i^j = c_R \delta_i^j, \quad (\tilde{t}_a \tilde{t}_a) = c_{R'} \delta_{i'}^{j'}, \quad f_{acd} f_{bcd} = -c_G \delta_{ab}. \quad (2.10.42)$$

Οι συναρτήσεις συσχετισμού δύο σημείων για τα πρωτεύοντα πεδία στο σύμμορφο σημείο είναι σε αναλογία με την (2.2.14) (αν συμπεριληφθεί και η αντι-ολομορφική συνεισφορά)

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(z_1, \bar{z}_2) \Phi_{j,j'}^{(2)}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{\delta_{ij} \delta_{i'j'}}{z_{12}^{2\Delta_R} \bar{z}_{12}^{2\Delta_{R'}}}, \quad z_{12} = z_1 - z_2, \quad (2.10.43)$$

όπου οι εκθέτες τονίζουν το γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις για τα διαφορετικά πρωτεύοντα πεδία στις συναρτήσεις συσχετισμού, μπορούν εν γένει να διαφέρουν. Ωστόσο, στην συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων, οι αναπαραστάσεις αυτές πρέπει να είναι συζυγείς η μία της άλλης για τον ολομορφικό και αντι-ολομορφικό τομέα ξεχωριστά και συνεπώς, έχουν τις ίδιες σύμμορφες διαστάσεις. Οι πίνακες  $t^a$  και  $\tilde{t}^a$  είναι ερμητιανοί και συνεπώς, προκύπτει για την αναπαράσταση (1) και την συζυγή της (2) ότι

$$t_a^{(1)} = t_a, \quad \tilde{t}_a^{(1)} = \tilde{t}_a, \quad t_a^{(2)} = -t_a^*, \quad \tilde{t}_a^{(2)} = -\tilde{t}_a^*. \quad (2.10.44)$$

Το μείον στον ορισμό της συζυγούς αναπαράστασης είναι πολύ σημαντικό προκειμένου οι πίνακες να ικανοποιούν την ίδια Lie άλγεβρα. Θα φανεί στη συνέχεια ότι και στην παραμορφωμένη θεωρία, προκειμένου οι συναρτήσεις συσχετισμού που περιλαμβάνουν δύο πρωτεύοντα πεδία να μη μηδενίζονται, θα πρέπει επίσης οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις τους να είναι συζυγής η μία της άλλης.

Έστω τώρα τρία αφινικά πρωτεύοντα πεδία που μετασχηματίζονται κάτω από τις αναπαραστάσεις  $(R_i, R'_i), i = 1, 2, 3$ . Τότε, σύμφωνα με την (2.2.14), η συνάρτηση συσχετισμού

τριών σημείων για αυτά είναι

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(z_1, \bar{z}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(z_2, \bar{z}_2) \Phi_{k,k'}^{(3)}(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \frac{C_{ii',jj',kk'}}{z_{12}^{\Delta_{12;3}} z_{13}^{\Delta_{13;2}} z_{23}^{\Delta_{23;1}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{12;3}} \bar{z}_{13}^{\bar{\Delta}_{13;2}} \bar{z}_{23}^{\bar{\Delta}_{23;1}}},$$

με

$$\Delta_{ij;k} = \Delta_{R_i} + \Delta_{R_j} - \Delta_{R_k}.$$
(2.10.45)

Οι σταθερές δομής  $C_{ii',jj',kk'}$  εξαρτώνται από τις αναπαραστάσεις καθώς επίσης και από το επίπεδο  $k$  της άλγεβρας.

Υπάρχουν επίσης συναρτήσεις συσχετισμού μεταξύ πρωτεύοντων πεδίων και ρευμάτων, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$\langle J_a(z) \Phi_{i,i'}^{(1)}(z_1, \bar{z}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ij,i'j'}}{z_{12}^{2\Delta_R} \bar{z}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right),$$
(2.10.46)

$$\langle \bar{J}_a(\bar{z}) \Phi_{i,i'}^{(1)}(z_1, \bar{z}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ij,i'j'}}{z_{12}^{2\Delta_R} \bar{z}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_2} \right).$$

Στις σχέσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι προκειμένου να προκύψει ένα μη-μηδενικό αποτέλεσμα, πρέπει οι αναπαραστάσεις κάτω από τις οποίες μετασχηματίζονται τα πρωτεύοντα πεδία να είναι συζυγείς η μία της άλλης για τον ολομορφικό και αντι-ολομορφικό τομέα ανεξάρτητα. Τότε, τα πρωτεύοντα πεδία έχουν τις ίδιες σύμμορφες διαστάσεις. Με  $\mathbb{1}_R$  και  $\mathbb{1}_{R'}$  συμβολίζονται τα ταυτοτικά στοιχεία των αναπαραστάσεων  $R$  και  $R'$  αντίστοιχα. Συναρτήσεις συσχέτισης με δύο ρεύματα και ένα αφινικό πρωτεύον πεδίο μηδενίζονται στο σύμμορφο σημείο και παραμένουν μηδέν και στην παραμορφωμένη θεωρία.

Όσον αφορά τη συμμετρία δυϊκού τύπου (2.10.18) τώρα, ένα αφινικό πρωτεύον πεδίο  $\Phi^{(1)}$  μεταχηματίζεται, κάτω από την αντιστροφή του στοιχείου  $g \in G$ , στο συζυγές του. Πιο συγκεκριμένα,

$$\Phi_{i,i'}^{(1)}(g^{-1}) = \Phi_{i',i}^{(2)}(g),$$
(2.10.47)

το οποίο σημαίνει για τους πίνακες της αναπαράστασης ότι

$$t^{(1)} \leftrightarrow \tilde{t}^{(2)}, \quad t^{(2)} \leftrightarrow \tilde{t}^{(1)}.$$
(2.10.48)

Αν η αντιστροφή του  $g \in G$  ακολουθηθεί και από μετασχηματισμό ομοτιμίας  $\sigma \rightarrow -\sigma$  τότε

$$t^{(1)} \leftrightarrow -\tilde{t}^{(2)}, \quad t^{(2)} \leftrightarrow -\tilde{t}^{(1)} \quad (2.10.49)$$

και επιπλέον τα  $J^a$  και  $\bar{J}^a$  αλλάζουν μεταξύ τους  $J^a \leftrightarrow \bar{J}^a$ .

### Συναρτήσεις συσχετισμού

Ο ακριβής υπολογισμός των συναρτήσεων συσχετισμού δύο και τριών σημείων για τα ρεύματα και τα πρωτεύοντα πεδία της παραμορφωμένης θεωρίας βρίσκεται αναλυτικά στην [44] και θα παρουσιασθεί συνοπτικά στην υποενότητα αυτή.

Για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συσχετισμού της  $\lambda$ -θεωρίας γίνεται εκτενής χρήση της συμμετρίας (2.10.18) που εμφανίζει η ενεργός δράση (2.10.15).

Όπως είναι αναμενόμενο, η θεωρία (2.10.15) δεν παραμένει σύμμορφη στο κβαντικό επίπεδο, και συνεπώς τα αρχικά ρεύματα της WZW δράσης αναμένεται να δέχονται  $\lambda$ -διορθώσεις και να γίνονται ενδεδυμένα

$$J_+^a(g)_{k,\lambda} = \frac{1}{1+\lambda} (\mathbb{1} - \lambda D)_{ab}^{-1} J_+^b, \quad J_-^a(g)_{k,\lambda} = -\frac{1}{1+\lambda} (\mathbb{1} - \lambda D^T)_{ab}^{-1} J_-^b. \quad (2.10.50)$$

Για αυτά ισχύει

$$J_\pm^a(g^{-1})_{-k,\lambda^{-1}} = \lambda^2 J_\pm^a(g)_{k,\lambda}, \quad (2.10.51)$$

όπου οι δείκτες  $k, \lambda$  αναφέρονται στις ενδεδυμένες ποσότητες οι οποίες ικανοποιούν νέες σχέσεις μετάθεσης και OPEs που έχουν λάβει  $\lambda$ -συνεισφορές [44].

Πηγαίνοντας σε Ευκλείδια υπογραφή<sup>15</sup>, η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων για τα ολομορφικά ρεύματα της παραμορφωμένης θεωρίας δίνεται από τη σχέση

$$\langle J^a(x_1) J^b(x_2) \rangle_{k,\lambda} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{k,\lambda}} \int [dg] J^a[g(x_1)]_{k,\lambda} J^b[g(x_2)]_{k,\lambda} e^{-S_{k,\lambda}[g]}, \quad (2.10.53)$$

με την  $S_{k,\lambda}[g]$  να είναι η δράση (2.10.15) και η συνάρτηση επιμερισμού είναι

$$\mathcal{Z}_{k,\lambda} = \int [dg] e^{-S_{k,\lambda}[g]} = \int [dg^{-1}] e^{-S_{k,\lambda}[g^{-1}]} = \int [dg] e^{-S_{-k,\lambda^{-1}}[g]} = \mathcal{Z}_{-k,\lambda^{-1}}, \quad (2.10.54)$$

<sup>15</sup>Οι αντίστοιχες συμβάσεις σε Ευκλείδιο χώρο είναι

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\tau + i\sigma), & \bar{z} &= \frac{1}{2}(\tau - i\sigma), & \tau &= z + \bar{z}, & \sigma &= -i(z - \bar{z}) \\ \partial &= \partial_z = \partial_\tau - i\partial_\sigma, & \bar{\partial} &= \partial_{\bar{z}} = \partial_\tau + i\partial_\sigma, & d^2z &= dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2i} d\tau \wedge d\sigma. \end{aligned} \quad (2.10.52)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι το μέτρο της ολοκλήρωσης είναι αναλλοίωτο κάτω από  $g \rightarrow g^{-1} \implies [dg^{-1}] = [dg]$ . Οπότε, η συνάρτηση επιμερισμού της θεωρίας είναι αναλλοίωτη κάτω από την (2.10.18).

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (2.10.51) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \int [dg] J^a[g(x_1)]_{k,\lambda} J^b[g(x_2)]_{k,\lambda} e^{-S_{k,\lambda}[g]} \\ &= \int [dg^{-1}] J^a[g^{-1}(x_1)]_{k,\lambda} J^b[g^{-1}(x_2)]_{k,\lambda} e^{-S_{k,\lambda}[g^{-1}]} \\ &= \frac{1}{\lambda^4} \int [dg] J^a[g(x_1)]_{-k,\lambda^{-1}} J^b[g(x_2)]_{-k,\lambda^{-1}} e^{-S_{-k,\lambda^{-1}}[g]}. \end{aligned} \quad (2.10.55)$$

Αυτό οδηγεί σε μία μη-τετριμένη ταυτότητα για την συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων των ρευμάτων της  $\lambda$ -θεωρίας

$$\lambda^2 \langle J^a(x_1) J^b(x_2) \rangle_{k,\lambda} = \lambda^{-2} \langle J^a(x_1) J^b(x_2) \rangle_{-k,\lambda^{-1}}, \quad (2.10.56)$$

η οποία μπορεί να γενικευθεί για συναρτήσεις συσχετισμού ολομορφικών και αντι-ολομορφικών ρευμάτων περισσότερων σημείων ως

$$\lambda^{n+m} \langle J^{a_1} \dots J^{a_n} \bar{J}^{b_1} \dots \bar{J}^{b_m} \rangle_{k,\lambda} = \lambda^{-n-m} \langle J^{a_1} \dots J^{a_n} \bar{J}^{b_1} \dots \bar{J}^{b_m} \rangle_{-k,\lambda^{-1}}. \quad (2.10.57)$$

Οι συνολικοί παράγοντες  $\lambda$  μπορούν να απορροφηθούν με έναν επαναορισμό των ρευμάτων  $J$  και αυτό θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με αυτό της [46], το οποίο προέκυψε χρησιμοποιώντας την δράση (2.10.20) του μη-Αβελιανού Thirring προτύπου. Το πλεονέκτημα όμως χρήσης της ενεργού δράσης (2.10.15) είναι ότι μπορεί να εφαρμοσθεί η συμμετρία δυϊκότητας (2.10.18) σε συναρτήσεις συσχετισμού που περιέχουν πρωτεύοντα πεδία της παραμορφωμένης θεωρίας τα οποία κάτω από τον μετασχηματισμό αυτό συμπεριφέρονται όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη υποενότητα.

Στα Ευκλείδια ολοκληρώματα διαδρομής η δράση εμφανίζεται στον εκθέτη ως  $e^{-S}$ . Η δράση που χρησιμοποιείται για την εύρεση των συναρτήσεων συσχετισμού των  $\lambda$ -προτύπων είναι αυτή του Μη-Αβελιανού Thirring προτύπου (2.10.20) στην οποία γίνεται ανάπτυγμα γύρω από την σύμμορφη WZW θεωρία για μικρή παράμετρο παραμόρφωσης  $\lambda$ . Αυτό δεν έρχεται σε αντιπαράθεση με την προηγούμενη ανάλυση όπου χρησιμοποιήθηκε η (2.10.15) εφόσον η τελευταία ταυτίζεται με την ενεργό δράση του μη-Αβελιανού προτύπου Thirring και συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί η αφετηρία για τον υπολογισμό  $1/k$  διορθώσεων σε χβαντικό επίπεδο. Σχηματικά, για έναν αριθμό γενικών πεδίων  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , οι συναρτήσεις συσχετισμού σε

τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  περιλαμβάνουν αθροίσματα εκφράσεων της μορφής

$$\langle F_1(x_1, \bar{x}_1) F_2(x_2, \bar{x}_2) \dots \rangle_\lambda^{(n)} = \frac{1}{n!} \left( -\frac{\lambda}{\pi} \right)^n \int d^2 z_{1\dots n} \langle F_1(x_1, \bar{x}_1) J^{a_1}(z_1) \dots J^{a_n}(z_n) \bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1) \dots \bar{J}^{a_n}(\bar{z}_n) F_2(x_2, \bar{x}_2) \rangle, \quad (2.10.58)$$

όπου  $d^2 z_{1\dots n} := d^2 z_1 \dots d^2 z_n$ .

Με χρήση συναιρέσεων όπου εφαρμόζονται τα κατάλληλα OPEs και η ταυτότητα του Ward η οποία για την περίπτωση των ρευμάτων παίρνει τη μορφή (2.2.29), είναι δυνατόν οι συναρτήσεις συσχετισμού  $n$  σημείων να εκφραστούν μέσω συναρτήσεων συσχετισμού  $n-1$  και  $n-2$  σημείων, και αναδρομικά να υπολογισθούν με τη χρήση των συναρτήσεων συσχετισμού δύο και τριών σημείων οι οποίες είναι γνωστές.

Όπως γίνεται προφανές λοιπόν, στους υπολογισμούς αυτούς προκύπτουν πολλαπλά ολοκληρώματα τα οποία χρειάζονται κανονικοποίηση. Το σχήμα ομαλοποίησης που ακολουθείται στην πλειοψηφία των υπολογισμών της παρούσας εργασίας είναι το εξής:

1. Η σειρά των ολοκληρώσεων επιλέγεται να είναι από τα αριστερά προς τα δεξιά  $d^2 z_{1\dots n}$  και οι ενδιάμεσες μεταθέσεις ολοκληρωμάτων δεν επιτρέπονται, εφόσον τα ολοκληρώματα εμφανίζουν αποκλίσεις και τα αντίστοιχα όρια δεν μετατίθενται απαραίτητα.
2. Τα εσωτερικά σημεία  $z_i$ , δεν μπορούν να συμπίπτουν με τα εξωτερικά  $x_i$  αλλά μπορούν να συμπίπτουν με άλλα εσωτερικά  $z_{j \neq i}$ , καθώς επίσης επιτρέπονται και όροι-επαφής (contact-terms) μεταξύ των εξωτερικών σημείων<sup>16</sup>. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο ολοκλήρωσης αντιστοιχεί σε έναν χώρο

$$D_n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_n : |z_i - x_j| > \epsilon, \epsilon > 0\}, \quad \forall i, j, \quad (2.10.59)$$

για μια σταθερά αποκοπής μικρών αποστάσεων  $\epsilon$ . Φυσικά, ο χώρος αυτός ολοκλήρωσης επιτρέπει τον απειρισμό των ολοκληρωμάτων στις μεγάλες αποστάσεις, συνεπώς οι ολοκληρώσεις θεωρούνται έγκυρες όταν πραγματοποιούνται σε έναν χώρο χαρακτηριστικής ακτίνας  $R$  με τα εξωτερικά  $x_i$  να μην περιλαμβάνονται σε αυτόν και  $R \gg |x_i|$ . Οι τελευταίες συνθήκες οδηγούν σε πραγματικά αποτελέσματα, αναλλοίωτα κάτω από μεταθέσεις.

<sup>16</sup> Αυτό δεν είναι μέρος του σχήματος ομαλοποίησης, αλλά μία επιλογή που διευκολύνει τους υπολογισμούς. Σύμφωνα με το σχήμα αυτό οι  $\delta$ -συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι

$$\delta^{(2)}(z_i - x_j) = 0, \quad \delta^{(2)}(z_i - z_j) \text{ (ολοκληρώνεται κανονικά)}, \quad \delta^{(2)}(x_i - x_j) \text{ (παραμένει)}$$

Ο τρόπος υπολογισμού τέτοιων ολοκληρωμάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα Α', ενώ τα αποτελέσματα χρήσιμων ολοκληρωμάτων βρίσκονται στο παράρτημα Β'.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω και με χρήση των ολοκληρωμάτων του παραρτήματος Β', έπειτα από αρκετούς υπολογισμούς οι οποίοι βρίσκονται αναλυτικά στην [44] προκύπτουν οι συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων, διαταρακτικά μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  και  $\mathcal{O}(1/k)$  να είναι:

-Για τα ρεύματα

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^2} \left( 1 - 2\frac{c_G}{k}\lambda^3 + \frac{c_G}{k}(\lambda^2 - 2\lambda^3) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \frac{1}{k}\mathcal{O}(\lambda^4) \right) \quad (2.10.60)$$

$$\begin{aligned} \langle J^a(x_1)\bar{J}^b(\bar{x}_2) \rangle_\lambda &= -\pi\lambda\delta^{ab}\delta^{(2)}(x_{12}) \\ &\quad - \frac{\lambda^2 c_G}{k}\delta^{ab} \left[ \frac{1}{|x_{12}|^2} + \pi\delta^{(2)}(x_{12}) \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) \right] \\ &\quad + 2\frac{\lambda^3 c_G}{k}\delta^{ab} \left[ \frac{1}{|x_{12}|^2} + \pi\delta^{(2)}(x_{12}) \left( 1 - \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) \right] + \frac{1}{k}\mathcal{O}(\lambda^4) \end{aligned} \quad (2.10.61)$$

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)J^c(x_3) \rangle_\lambda = \frac{1}{\sqrt{k}} \left( 1 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \lambda^3 \right) \frac{f_{abc}}{x_{12}x_{13}x_{23}} + \frac{1}{\sqrt{k}}\mathcal{O}(\lambda^4) \quad (2.10.62)$$

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\bar{J}^c(\bar{x}_3) \rangle_\lambda = \frac{\lambda(1-\lambda)}{\sqrt{k}} \frac{\bar{x}_{12}f_{abc}}{x_{12}^2\bar{x}_{23}\bar{x}_{13}} + \frac{1}{\sqrt{k}}\mathcal{O}(\lambda^3), \quad (2.10.63)$$

ενώ οι συναρτήσεις συσχετισμού  $\langle \bar{J}\bar{J}\bar{J} \rangle$  και  $\langle \bar{J}\bar{J}J \rangle$  προκύπτουν εύκολα από τις πάνω με μετασχηματισμό ομοτιμίας.

-Για τα πρωτεύοντα πεδία

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_2)\Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda &= \frac{1}{x_{12}^{2\Delta_R}\bar{x}_{12}^{2\Delta_{R'}}} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{k}(c_R + c_{R'}) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) (\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'} \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda \frac{1+\lambda^2}{k} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} (t_a \otimes t_a^*) \right] + \frac{1}{k}\mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned} \quad (2.10.64)$$

όπου εμφανίζεται ένας όρος ανάμιξης των πεδίων ο οποίος μπορεί να διαγωνιοποιηθεί. Εισάγοντας τον διπλό δείκτη  $I = (ii')$ , μπορεί να βρεθεί ένας πίνακας  $U$  ανεξάρτητος του  $\lambda$  και  $k$ , ώστε

$$(t_a \otimes t_a^*)_{IJ} = U_{IK}N_{KL}(U^{-1})_{LJ}, \quad N_{IJ} = N_I\delta_{IJ}, \quad (2.10.65)$$

με τα  $N_{IJ}$  να είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $t_a \otimes t_a^*$ . Τότε, στη νέα βάση

$$\tilde{\Phi}_I^{(1)} = (U^{-1})_I^J \Phi_J^{(1)}, \quad \tilde{\Phi}_I^{(2)} = U_I^J \Phi_J^{(2)}, \quad (2.10.66)$$

η συνάρτηση συσχετισμού (2.10.64) γίνεται διαγώνια και γράφεται ως

$$\langle \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{IJ}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( 1 + \delta_I^{(\Phi)} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right), \quad (2.10.67)$$

όπου διαταραχτικά

$$\delta_I^{(\Phi)} = \frac{1}{k} \left( -2\lambda(1 + \lambda^2)N_I + \lambda^2(c_R + c_{R'}) + \mathcal{O}(\lambda^4) \right). \quad (2.10.68)$$

Η συνάρτηση συσχετισμού τριών σημείων στην διαγώνια βάση προκύπτει αντίστοιχα μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda)$  να είναι

$$\langle \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \tilde{\Phi}_K^{(3)}(x_3, \bar{x}_3) \rangle_\lambda = -\frac{\lambda}{k} \frac{\tilde{C}_{IJK}}{x_{12}^{\Delta_{12;3}} x_{13}^{\Delta_{13;2}} x_{23}^{\Delta_{23;1}} \bar{x}_{12}^{\bar{\Delta}_{12;3}} \bar{x}_{13}^{\bar{\Delta}_{13;2}} \bar{x}_{23}^{\bar{\Delta}_{23;1}}} \left( (N_I^{(1)} + N_I^{(2)} - N_I^{(3)}) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \text{κυκλικές εναλλαγές στα } 1,2,3 \right), \quad (2.10.69)$$

με  $N_I^{(i)}$  τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα  $(t_a^{(i)} \otimes t_a^{(i)*})_I^J = (U^{(i)})_I^K (N^{(i)})_K^L (U^{(i)})_L^{-1J}$  για την κάθε αναπαράσταση των  $\tilde{\Phi}_I^{(i)} = (U^{(i)})_I^{-1J} \Phi_J^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  και  $\tilde{C}_{IJK} = (U^{(1)})_I^{-1M} (U^{(2)})_J^{-1N} (U^{(3)})_K^{-1L} C_{MNL}$ .

-Για τις ανάμικτες

$$\langle J^a(x_3) \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) \frac{(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'} - \lambda(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'}}{\sqrt{k} x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( \frac{1}{x_{13}} - \frac{1}{x_{23}} \right), \quad (2.10.70)$$

$$\langle \bar{J}^a(\bar{x}_3) \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'} - \lambda(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{\sqrt{k} x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( \frac{1}{\bar{x}_{13}} - \frac{1}{\bar{x}_{23}} \right). \quad (2.10.71)$$

Από τις διαταραχτικές αυτές εκφράσεις είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι ακριβείς ως προς  $\lambda$  και σε  $\mathcal{O}(1/k)$  εκφράσεις αξιοποιώντας την δυϊκού τύπου συμμετρία (2.10.18) ως εξής:

Ξεκινώντας από τη συνάρτηση συσχέτισης τριών σημείων για τα ρεύματα, γίνεται η υπόθεση



για την ακριβή της μορφή

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)J^c(x_3) \rangle_\lambda = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}} \frac{f_{abc}}{x_{12}x_{13}x_{23}}, \quad (2.10.72)$$

όπου η  $f(\lambda)$  είναι αναλυτική παντού με  $f(0) = 1$  προκειμένου να υπάρχει συμφωνία με το αποτέλεσμα της σύμμορφης θεωρίας για  $\lambda = 0$ . Η μορφή των πόλων προέκυψε ξέροντας ότι τα μόνα σημεία ανωμαλίας της ενεργού δράσης είναι τα  $\lambda = \pm 1$ , ενώ οι δυνάμεις τους 1 και 3 αντίστοιχα, προέκυψαν με απαίτηση η συνάρτηση συσχετισμού να είναι καλώς ορισμένη στα δύο όρια του μη-Αβελιανού T-δύϊκού και Ψευδοχειραλικού προτύπου αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, απαιτώντας η (2.10.72) να είναι αναλλοίωτη κάτω από την (2.10.18) προκύπτει ότι η  $f(\lambda)$  είναι πολυώνυμο το πολύ δεύτερης τάξης ως προς το  $\lambda$

$$\lambda^2 f(\lambda^{-1}) = f(\lambda) \implies f(\lambda) = 1 + c\lambda + \lambda^2. \quad (2.10.73)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην (2.10.72) και απαιτώντας για μικρό  $\lambda$  το ανάπτυγμα της να ταυτίζεται με την διαταρακτική έκφραση (2.10.60) μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda)$ , προσδιορίζεται η σταθερά  $c$  και προκύπτει η ακόλουθη, ακριβής στο  $\lambda$ , έκφραση μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)J^c(x_3) \rangle_\lambda = \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}} \frac{f_{abc}}{x_{12}x_{13}x_{23}}. \quad (2.10.74)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία αλλά με αρχική υπόθεση

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\bar{J}^c(\bar{x}_3) \rangle_\lambda = \frac{\lambda f(\lambda)}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}} \frac{\bar{x}_{12}f_{abc}}{x_{12}^2\bar{x}_{23}\bar{x}_{23}} \quad (2.10.75)$$

και απαιτώντας  $f(0) = 0$ , προκύπτει και η ακριβής μορφή της συνάρτησης συσχετισμού  $\langle JJ\bar{J} \rangle$

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\bar{J}^c(\bar{x}_3) \rangle_\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}} \frac{\bar{x}_{12}f_{abc}}{x_{12}^2\bar{x}_{23}\bar{x}_{23}}, \quad (2.10.76)$$

το ανάπτυγμα της οποίας μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  ταυτίζεται με την (2.10.63).

Όσον αφορά τις ακριβείς εκφράσεις των συναρτήσεων συσχετισμού που εμπεριέχουν πρωτεύοντα πεδία, θα δοθούν στην αμέσως επόμενη υποενότητα αφού όπως θα γίνει φανερό σχετίζονται με τις ανώμαλες διαστάσεις των πεδίων.

Για τις ανάμικτες συναρτήσεις συσχετισμού που περιλαμβάνουν ένα ρεύμα και δύο πρω-

τεύοντα πεδία, η αρχική υπόθεση είναι της μορφής

$$\langle J^a(x_3)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2)\rangle_\lambda = \frac{f_1(\lambda)(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'} - \lambda f_2(\lambda)(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'}}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}x_{12}^{2\Delta_R}\bar{x}_{12}^{2\Delta_{R'}}} \left( \frac{1}{x_{13}} - \frac{1}{x_{23}} \right), \quad (2.10.77)$$

με τις συναρτήσεις  $f_1(\lambda)$  και  $f_2(\lambda)$  να είναι παντού αναλυτικές και  $f_1(0) = f_2(0) = 1$ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, προκύπτει για την  $\langle J^a\Phi_{i,i'}^{(1)}\Phi_{j,j'}^{(2)}\rangle$  από την (2.10.77) ότι

$$\langle J^a(x_3)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2)\rangle_\lambda = -\frac{(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'} - \lambda(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'}}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}x_{12}^{2\Delta_R-1}\bar{x}_{12}^{2\Delta_{R'}}x_{13}x_{23}}. \quad (2.10.78)$$

Όμοια για την  $\langle \bar{J}^a\Phi_{i,i'}^{(1)}\Phi_{j,j'}^{(2)}\rangle$

$$\langle J^a(x_3)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2)\rangle_\lambda = \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'} - \lambda(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}x_{12}^{2\Delta_R}\bar{x}_{12}^{2\Delta_{R'}-1}\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}}. \quad (2.10.79)$$

Κατά τη διάρκεια των παραπάνω υπολογισμών γίνεται εμφανές ότι προκειμένου να προσδιορισθεί η ακριβής ως προς  $\lambda$  μορφή των συναρτήσεων συσχετισμού, χρειάζονται τα αντίστοιχα διαταρακτικά αποτελέσματα (2.10.60)-(2.10.71) μόνο μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , ενώ η τρίτη τάξη λειτουργεί ως έλεγχος και όντως ταυτίζεται με τον όρο τρίτης τάξης των αναπτυγμάτων (2.10.74)-(2.10.79) για μικρό  $\lambda$ .

### Συναρτήσεις ομάδας επανακανονικοποίησης

Όπως είναι προφανές, οι δράσεις (2.10.15) και (2.10.20) δεν αντιστοιχούν πλέον σε μία θεωρία που παραμένει σύμμορφη σε κβαντικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι σε επίπεδο παραμέτρων ζεύξης θα προκύψει μια μη-μηδενική  $\beta$ -συνάρτηση, ενώ σε επίπεδο τελεστών οτι αυτοί θα αποκτήσουν  $\lambda$ -διορθώσεις και συνεπώς ανώμαλες διαστάσεις κάτω από την ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης. Τα ενδεδυμένα (dressed) ρεύματα (2.10.50) που προκύπτουν από τις  $\lambda$ -διορθώσεις των αρχικών είναι ανάλογα με τα πεδία βαθμίδας  $A_\pm$  της (2.10.14) κατά έναν παράγοντα που εξαρτάται από το  $\lambda$  και για  $\lambda = 0$  ταυτίζονται με τα ρεύματα της WZW θεωρίας [44].

Στο σύμμορφο σημείο  $\lambda = 0$ , οι κλασικές διαστάσεις των ολομορφικών και αντι-ολομορφικών αυτών ρευμάτων είναι (1,0) και (0,1) αντίστοιχα. Παρόλα αυτά μόλις ενεργοποιηθούν οι αλληλεπιδράσεις  $\lambda \neq 0$  η ολομορφική διάσταση του  $J$  γίνεται  $(1 + \gamma_J/2, \gamma_J/2)$ . Φυσικά, η συνολική ανώμαλη διάσταση που αποκτά ο τελεστής  $J$  είναι το άθροισμα των δύο που ισούται με  $\gamma_J$ . Συνεπώς, από διαστατική ανάλυση, η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων για

τα ολομορφικά ρεύματα μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη γενική μορφή

$$G_{ab}(x_1, x_2) = \langle J^a(x_1) \bar{J}^b(x_2) \rangle_\lambda = G_0(\lambda, k) \frac{\delta_{ab} \epsilon^{2\gamma_J}}{x_{12}^{1+\gamma_J/2} \bar{x}_{12}^{2\gamma_J/2}}, \quad (2.10.80)$$

όπου  $G_0(\lambda, k)$  είναι μία γενική συνάρτηση των αδιάστατων (κλασικά) παραμέτρων  $\lambda$  και  $k$ . Το ανάπτυγμα για  $\gamma_J \ll 1$  δίνει

$$G_{ab}(x_1, x_2) = \delta_{ab} \frac{G_0(\lambda, k)}{x_{12}^2} \left( 1 + \gamma_J \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) + \dots \quad (2.10.81)$$

Όπως φαίνεται λοιπόν, η ανώμαλη διάσταση προκύπτει ως ο συντελεστής του λογαριθμικού όρου στο ανάπτυγμα της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων και συνεπώς, για τον υπολογισμό της αρκεί ο προσδιορισμός του όρου αυτού.

Από την (2.10.60) προκύπτει λοιπόν ότι διαταρακτικά μέχρι  $\mathcal{O}(\lambda^3)$

$$\gamma^{(J)} = \frac{c_G}{k} \left( \lambda^2 - 2\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4) \right) \quad (2.10.82)$$

και

$$G_0(k, \lambda) = 1 - 2 \frac{c_G}{k} \left( \lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4) \right). \quad (2.10.83)$$

Όσον αφορά την συνάρτηση συσχετισμού  $\langle J \bar{J} \rangle$ , αυτή θα πρέπει να μηδενίζεται στο σύμμορφο σημείο και η γενική μορφή της είναι

$$\begin{aligned} \langle J^a(x_1) \bar{J}^b(\bar{x}_2) \rangle_\lambda &= \delta_{ab} \frac{\tilde{G}_0(k, \lambda)}{|x_{12}|^2} \left( 1 + \gamma^{(J)} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) \\ &+ \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_{12}) \left( A(k, \lambda) + B(k, \lambda) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right), \end{aligned} \quad (2.10.84)$$

όπου οι συναρτήσεις  $A(k, \lambda)$ ,  $B(k, \lambda)$  και  $\tilde{G}_0(k, \lambda)$  προσδιορίζονται διαταρακτικά από την (2.10.61), ενώ η ανώμαλη διάσταση  $\gamma^{(J)}$  είναι αυτή της (2.10.82). Έτσι, φαίνεται ότι διαταρακτικά η (2.10.61) και η (2.10.84) παίρνουν την μορφή

$$\langle J^a(x_1) \bar{J}^b(x_2) \rangle_\lambda = -\gamma^{(J)} \frac{\delta_{ab}}{|x_{12}|^2} + \text{όροι επαφής}. \quad (2.10.85)$$

Οι όροι επαφής στην (2.10.84) σε αυτή την περίπτωση επιτρέπονται, αφού η ποσότητα  $\langle J \bar{J} \rangle$  είναι πραγματική.

Για την εύρεση της ακριβούς μορφής της ανώμαλης διάστασης αρκεί να γίνει η υπόθεση

$$\gamma^{(J)} = \frac{c_G}{k} \frac{f(\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}, \quad (2.10.86)$$

με τους πόλους του παρονομαστή να έχουν επιλεγεί ξανά σύμφωνα με τα επιχειρήματα της προηγούμενης υποενότητας, και την  $f(\lambda)$  να είναι μια αναλυτική συνάρτηση του  $\lambda$ , η οποία μετά από την απαίτηση  $\gamma^{(J)}(k, \lambda) = \gamma^{(J)}(-k, \lambda^{-1})$  προκύπτει να είναι ένα πολυώνυμο το πολύ τέταρτης τάξης ως προς  $\lambda$

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^3 + a_0\lambda^4.$$

Από εδώ γίνεται εμφανές ότι προκειμένου να προσδιορισθούν οι συντελεστές της χρειάζεται το διαταραχτικό ανάπτυγμα  $\langle JJ \rangle$  μέχρι δεύτερη τάξη μόνο. Εισάγοντας την (2.10.1) στην (2.10.86) και συγκρίνοντας το ανάπτυγμά της με την (2.10.82) προσδιορίζονται οι συντελεστές  $a_0, a_1, a_2$  και προκύπτει η ακριβής μορφή της ανώμαλης διάστασης για τους τελεστές ρευμάτων να είναι

$$\gamma^{(J)} = \frac{c_G}{k} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \geq 0. \quad (2.10.87)$$

Για τον υπολογισμό της  $\beta$ -συνάρτησης υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που θα αναλυθούν σταδιακά και σε επόμενες ενότητες. Για τώρα επιλέγεται η ευκολότερη μέθοδος η οποία είναι η χρήση της συμμετρίας όπως και πριν, δεδομένου ότι ο πίνακας ζεύξης έχει την απλούστερη μορφή του (διαγώνιος και ισοτροπικός). Συνεπώς, αρκεί να γίνει πάλι μια υπόθεση της μορφής

$$\beta^\lambda = -\frac{c_G}{2k} \frac{g(\lambda)}{(1+\lambda)^2} \quad (2.10.88)$$

και με την επιβολή της συμμετρίας (2.10.18)<sup>17</sup> η  $g(\lambda)$  προκύπτει πάλι πολυώνυμο το πολύ τέταρτης τάξης  $g(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_1\lambda^3 + b_0\lambda^4$ .

Για την εύρεση των συντελεστών της  $g(\lambda)$  χρειάζεται η διαταραχτική μορφή της  $\beta$ -συνάρτησης τουλάχιστον μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  η οποία μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία πεδίου, οι σχέσεις που συνδέουν τις αρχικές, μη-επανακανονικοποιημένες ποσότητες με τις επανακανονικοποιημένες είναι οι

$$J_0^a = Z^{1/2} J^a, \quad \bar{J}_0^a = Z^{1/2} \bar{J}^a, \quad \lambda_0 = Z_1 \lambda, \quad (2.10.89)$$

<sup>17</sup>Στον μετασχηματισμό  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$  εδώ, λόγω του ορισμού της  $\beta$ -συνάρτησης εμπλέκεται η παράγωγος και ουσιαστικά η  $\beta$ -συνάρτηση μετασχηματίζεται σαν άνυσμα.

όπου με δείκτη 0 συμβολίζονται οι αρχικές, και για τις συναρτήσεις συσχετισμού ισχύει

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2) \rangle = Z^{-1} \langle J_0^a(x_1)J_0^b(x_2) \rangle, \quad \langle J^a(x_1)\bar{J}^b(\bar{x}_2) \rangle = Z^{-1} \langle J_0^a(x_1)\bar{J}_0^b(\bar{x}_2) \rangle.$$

Κάνοντας την υπόθεση

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= 1 + 2\frac{c_G}{k}\lambda^3 - \frac{c_G}{k}(c_1\lambda^2 + c_2\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4))\ln(\epsilon^2\mu^2), \\ Z_1 &= 1 - \frac{c_G}{k(c_3\lambda + c_4\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3))}\ln(\epsilon^2\mu^2) \end{aligned} \quad (2.10.90)$$

προκειμένου να υπάρχει συμβατότητα με το σύμμορφο σημείο, και χρησιμοποιώντας τα διαταρακτικά αποτελέσματα (2.10.60), (2.10.61) για τις μη-επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις συσχετισμού με το  $1/|x_{12}|$  αντικατεστημένο με την ενεργειακή κλίμακα  $\mu$ , προκύπτει από τις (2.10.1) μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  ότι

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = -\frac{1}{2}, \quad c_4 = 1. \quad (2.10.91)$$

Συνεπώς, η διαταρακτική μορφή της  $\beta$ -συνάρτησης μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  και  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  είναι

$$\beta^\lambda = \frac{1}{2}\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{2}\lambda Z_1\mu\frac{dZ_1^{-1}}{d\mu} = -\frac{c_G}{2k}(\lambda^2 - 2\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4)) \quad (2.10.92)$$

και συγκρίνοντας με το ανάπτυγμα της (2.10.88) προκύπτει  $b_0 = b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$  και

$$\beta^\lambda = -\frac{c_G}{2k}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \leq 0. \quad (2.10.93)$$

Η έκφραση αυτή υποδεικνύει ότι ο διγραμμικός στα ρεύματα τελεστής της παραμόρφωσης είναι οριακά σχετικός.

Επίσης, προκύπτει πάλι η ανώμαλη διάσταση ως

$$\gamma^{(J)} = \mu\frac{d\ln Z^{1/2}}{d\mu} = \frac{c_G}{k}(\lambda^2 - 2\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4)),$$

η οποία ταυτίζεται με την (2.10.82). Ο υπολογισμός της ακριβής έκφρασης για την ανώμαλη διάσταση μπορεί να επιτευχθεί και μέσω της εξίσωσης Callan-Symanzik [50], δεδομένου όμως ότι η μορφή της  $\beta$ -συνάρτησης είναι γνωστή.

Ένας άλλος υπολογισμός που μπορεί να γίνει, είναι αυτός για την ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή  $\mathcal{O}_i$  που οφείλεται για την παραμόρφωση του WZW προτύπου κατά τον παράγοντα  $\lambda^i\mathcal{O}_i$ . Ο υπολογισμός αυτός καθορίζει αν ο κλασικά οριακός τελεστής  $\mathcal{O}_i$  γίνεται

σχετικός ή μη-σχετικός παρουσία των αλληλεπιδράσεων  $\lambda^i$ . Για τον υπολογισμό αυτό, απαιτείται η εύρεση της μετρικής του Zamolodchikov (2.3.2) στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης, δηλαδή της συνάρτησης συσχετισμού  $g_{ij} = \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle |x_{12}|^4$ . Αυτή υπολογίζεται διαταρακτικά και έπειτα με τη χρήση αναδρομικών σχέσεων προκύπτει η ακριβής μορφή της στο παράρτημα Γ'. Σύμφωνα με την [58] η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων  $G_{ij} = \langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \rangle$ , και η μετρική Zamolodchikov  $g_{ij}$  παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} G_{ij} &\sim G_{0|ij}(\lambda^i, k) |x_{12}|^{-2(2+\gamma)} = \left( \delta_{ij}^m + \gamma_i^m \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \dots \right) G_{0|mj}(\lambda^i, k) |x_{12}|^{-4}, \\ g_{ij}(\lambda^i, t) &= g_{ij}^{(0)}(\lambda^i) + 2\pi t \nabla_i \nabla_j V + \mathcal{O}(t^2) = g_{ij}^{(0)}(\lambda^i) - t \nabla_{(i} \beta_{j)} + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned} \quad (2.10.94)$$

όπου  $\gamma_i^j$  είναι ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης των σύνθετων τελεστών  $\mathcal{O}_i$ ,  $t = \ln(|x_{12}|^2 \mu^2)$  με  $\mu$  μια αυθαίρετη κλίμακα επανακανονικοποίησης και  $A_{(ij)} := A_i A_j + A_j A_i$ . Επίσης, η  $g_{ij}^{(0)}$  αναφέρεται στο πεπερασμένο μέρος της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων, ενώ το  $V$  στο ενεργό δυναμικό. Όσον αφορά την συναλλοίωτη παράγωγο που εμφανίζεται στην (2.10.94), η συγγενής σύνδεση της υπολογίζεται με βάση την μετρική  $g_{ij}^{(0)}$ . Τέλος, η μετρική αυτή χρησιμοποιείται και για την αλλαγή των δεικτών της  $\beta$ -συνάρτησης απο συναλλοίωτους σε ανταλλοίωτους και αντίστροφα  $\beta_i = g_{ij}^{(0)} \beta^j = g_{ij}^{(0)} \frac{d\lambda^i}{d \ln \mu^2}$ .

Από την (2.10.94) προκύπτει αμέσως ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης  $\gamma_i^j$  ως ο συντελεστής του λογαριθμικού όρου αφού έχει απομονωθεί το πεπερασμένο  $g_{ij}^{(0)}$  κομμάτι και είναι

$$\begin{aligned} \gamma_i^j(\lambda^i) &= \nabla_{(i} \beta_{k)} g^{(0)kj} = \nabla_i \beta^j + \nabla^j \beta_i \\ &= \partial_i \beta^j + g^{(0)jm} \left( g_{in}^{(0)} \partial_m \beta^n + \beta^n \partial_n g_{im}^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (2.10.95)$$

Ο πίνακας (2.10.95) μετασχηματίζεται σαν σύνθετος τανυστής κάτω από διαφορομορφισμούς των συντεταγμένων  $\lambda^i$ . Όπως προέκυψε από την (2.10.93) η κύρια συνεισφορά της  $\beta$ -συνάρτησης ως προς την παράμετρο  $k$  είναι ανάλογη του  $1/k$ , και συνεπώς αφού το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του πίνακα της ανώμαλης διάστασης μέχρι αυτή την τάξη στο  $k$  αλλά με όλες τις  $\lambda$ -συνεισφορές, χρειάζεται μόνο το κομμάτι της μετρικής  $g_{ij}^{(0)}$  που είναι ανεξάρτητο του  $k$ . Η ακριβής ως προς  $\lambda$ , Αβελιανή μορφή της μετρικής αυτής για την περίπτωση του Thirring προτύπου με διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα υπολογίζεται στο παράρτημα Γ' και είναι

$$g_{11}^{(0)} = \frac{\dim G}{(1 - \lambda^2)^2}. \quad (2.10.96)$$

Έτσι ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης προκύπτει να είναι απλά μία συνάρτηση του  $\lambda$

$$\gamma = 2\partial_\lambda \beta(\lambda) + \beta \frac{\partial_\lambda g_{11}^{(0)}}{g_{11}^{(0)}} \quad (2.10.97)$$

και τελικά

$$\gamma = -\frac{2c_G \lambda(1-\lambda(1-\lambda))}{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \leq 0, \quad (2.10.98)$$

επιβεβαιώνοντας ότι ο διγραμμικός τελεστής είναι οριακά σχετικός. Η έκφραση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία (2.10.18) όπως ήταν αναμενόμενο.

Μια παρατήρηση εδώ είναι ότι η έκφραση (2.10.98) για την ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή, ξεκινάει από τάξη  $\mathcal{O}(\lambda)$  σε αντίθεση με την ανώμαλη διάσταση του απλού ρεύματος που ξεκινάει από  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ . Παρόλα αυτά σε καμία έκφραση δεν υπάρχει όρος μηδενικής τάξης ως προς  $\lambda$ , όπως είναι αναμενόμενο για έναν οριακά σχετικό τελεστή.

Για την περίπτωση της  $G = SU(2)$  με πίνακα  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  και τρεις τελεστές  $\mathcal{O}_i = J^i(z)\bar{J}^i(\bar{z})$ ,  $i = 1, 2, 3$  (χωρίς άθροιση στον δείκτη  $i$ ) οι οποίοι παραμορφώνουν την σύμμορφη θεωρία κατά έναν συνδυασμό  $\sum_i \lambda^i \mathcal{O}_i/\pi$ , προκύπτει το  $k$ -ανεξάρτητο μέρος της μετρικής Zamolodchikov  $g_{ij}^{(0)}$  να είναι ένας διαγώνιος πίνακας της μορφής

$$g_{ij}^{(0)} = \frac{\delta_{ij}}{(1 - (\lambda^i)^2)^2}. \quad (2.10.99)$$

Γενικεύοντας το αποτέλεσμα του παραρτήματος Γ', όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά σε αυτήν την τάξη ως προς  $1/k$  ανάπτυγμα, διότι δεν υπάρχουν συνδεδεμένα διαγράμματα που να μπορούν να συνεισφέρουν στο Αβελιανό μέρος της συνάρτησης συσχετισμού  $\langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \rangle$  όταν  $i \neq j$ . Παρόλα αυτά, αυτό δεν ισχύει όταν οι μη-Αβελιανοί όροι του αντίστοιχου OPE ρευμάτων οι οποίοι είναι ανάλογοι του  $f_{ijk}/\sqrt{k}$  συνυπολογισθούν. Αυτοί οι όροι όμως όντας ανάλογοι του  $1/\sqrt{k}$  υπεισέρχονται σε ανώτερη τάξη ως προς το ανάπτυγμα στο  $1/k$ , και εφόσον η  $\beta$ -συνάρτηση είναι ήδη τάξης  $\mathcal{O}(1/k)$  και το ζητούμενο είναι η ανώμαλη διάσταση του διγραμμικού τελεστή μέχρι αυτή την τάξη, όλοι οι μη-διαγώνιοι όροι της μετρικής μπορούν να αγνοηθούν.

Όσον αφορά τους διαγώνιους όρους, ο υπολογισμός τους ανάγεται σε αυτόν του διαγώνιου και ισοτροπικού πίνακα  $\lambda$ . Αυτό συμβαίνει γιατί η μόνη κορυφή αλληλεπίδρασης που συνεισφέρει στον υπολογισμό της  $\langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_i \rangle$  σε μηδενική τάξη ως προς  $1/k$ , είναι αυτή που περιλαμβάνει μόνο τον  $\mathcal{O}_i$ , δηλαδή η  $\lambda^i \mathcal{O}_i/\pi$ . Οι άλλες δύο κορυφές αλληλεπίδρασης δίνουν διαγράμματα φυσαλίδας εφόσον στην Αβελιανή προσέγγιση, ρεύματα με διαφορετικούς δείκτες ομάδας δεν μπορούν να συναιρεθούν. Έτσι προκύπτει η (2.10.99) και μέσω αυτής υπολογίζεται ο  $3 \times 3$  πίνακας της ανώμαλης διάστασης των τελεστών  $\mathcal{O}_i$  από την (2.10.95)

$$\begin{aligned} \gamma_i^i &= 2\partial_i \beta^i + \frac{1}{g_{ii}^{(0)}} \partial_i g_{ii}^{(0)} \beta^i, \quad \text{χωρίς άθροιση στα } i = 1, 2, 3, \\ \gamma_i^j &= \partial_i \beta^j + \frac{(1 - (\lambda^j)^2)^2}{(1 - (\lambda^i)^2)^2} \partial_j \beta^i, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2.10.100)$$

Αντικαθιστώντας τις ακριβείς εκφράσεις των  $\beta$ -συναρτήσεων [59]

$$\beta^1 = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda^3\lambda^1)(\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2)}{k(1 - (\lambda^2)^2)(1 - (\lambda^3)^2)}, \quad \text{κυκλικές εναλλαγές στα 1,2,3} \quad (2.10.101)$$

προκύπτει ότι η ακριβής έκφραση για τον πίνακα της ανώμαλης διάστασης μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  είναι

$$\begin{aligned} \gamma_1^1 &= -\frac{44\lambda^1\lambda^2\lambda^3 - (1 + (\lambda^1)^2)((\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2)}{k(1 - (\lambda^1)^2)(1 - (\lambda^2)^2)(1 - (\lambda^3)^2)}, \\ \gamma_1^2 &= -\frac{4(1 + (\lambda^1)^2)(1 + (\lambda^2)^2)\lambda^3 - 2\lambda^1\lambda^2(1 + (\lambda^3)^2)}{k(1 - (\lambda^1)^2)^2(1 - (\lambda^3)^2)} \end{aligned} \quad (2.10.102)$$

και κυκλικές εναλλαγές στα 1,2,3.

Ο πίνακας (2.10.102) μετασχηματίζεται σαν μεικτός τανυστής κάτω από τους διαφορομορφισμούς (2.10.18)

$$\gamma_i^j((\lambda^i)^{-1}, -k) = \left(\frac{\lambda^i}{\lambda^j}\right)^2 \gamma_i^j(\lambda^i, k). \quad (2.10.103)$$

Τέλος, όσον αφορά τις ανώμαλες διαστάσεις των πρωτεύοντων πεδίων, μπορούν να υπολογισθούν από τον συντελεστή του λογαριθμικού όρου του διαταρακτικού αποτελέσματος (2.10.67), συμπεριλαμβάνοντας όμως στην έκφραση αυτή και την συνεισφορά του  $k$ -εξαρτώμενου μέρους των σύμμορφων διαστάσεων  $\Delta_R$  και  $\bar{\Delta}_{R'}$  μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$

$$\begin{aligned} \gamma_{R,R'}^{(I)}(k, \lambda) \Big|_{\text{pert.}} &= \frac{c_R}{2k} + \frac{\delta_I^{(\Phi)}}{2} = \\ &= \frac{1}{2k} [c_R - 2N_I\lambda(1 + \lambda^2) + \lambda^2(c_R + c_{R'}) + \mathcal{O}(\lambda^4)]. \end{aligned} \quad (2.10.104)$$

Η αντίστοιχη υπόθεση για την ακριβή έκφραση εδώ είναι

$$\gamma_{R,R'}^{(I)}(k, \lambda) = -\frac{f(\lambda)N_I + f_1(\lambda)c_R + f_2(\lambda)c_{R'}}{2k(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3}, \quad (2.10.105)$$

όπου οι συναρτήσεις  $f, f_1, f_2$  είναι αναλυτικές στο  $\lambda$ . Απαιτώντας

$$\gamma_{R,R'}^{(I)}(-k, \lambda^{-1}) = \gamma_{R',R}^{(I)}(k, \lambda) \quad (2.10.106)$$

και χρησιμοποιώντας τον τρόπο (2.10.47) με τον οποίο τα πρωτεύοντα πεδία μετασχηματίζονται κάτω από τη συμμετρία (2.10.18) προκύπτει για τις άγνωστες συναρτήσεις

$$\lambda^4 f(1/\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda^4 f_1(1/\lambda) = f_2(\lambda), \quad \lambda^4 f_2(\lambda) = f_1(\lambda)$$



και συγκρίνοντας τελικά με το διαταρακτικό αποτέλεσμα (2.10.104),

$$f(\lambda) = 2\lambda(1 + \lambda)^2, \quad f_1(\lambda) = -(1 + \lambda)^2, \quad f_2(\lambda) = -\lambda^2(1 + \lambda)^2.$$

Η ακριβής έκφραση της ανώμαλης διάστασης των αφινικών πρωτεύοντων πεδίων είναι

$$\gamma_{R,R'}^{(I)}(k, \lambda) = -\frac{2\lambda N_I - c_R - \lambda^2 c_{R'}}{2k(1 - \lambda^2)}, \quad (2.10.107)$$

ενώ η ακριβής έκφραση της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων για πρωτεύοντα πεδία προκύπτει τελικά να είναι

$$\langle \Phi_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{IJ}}{x_{12}^{\gamma_{R,R'}^{(I)}(k,\lambda)} \bar{x}_{12}^{\gamma_{R',R}^{(I)}(k,\lambda)}}. \quad (2.10.108)$$

Με όμοια διαδικασία, προκύπτει η ακριβής έκφραση της συνάρτησης συσχετισμού τριών σημείων μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$

$$\langle \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \tilde{\Phi}_K^{(3)}(x_3, \bar{x}_3) \rangle_\lambda = \frac{\tilde{C}_{IJK}(k, \lambda)}{x_{12}^{\gamma_{12;3}/2} x_{13}^{\gamma_{13;2}/2} x_{23}^{\gamma_{23;1}/2} \bar{x}_{12}^{\bar{\gamma}_{12;3}/2} \bar{x}_{13}^{\bar{\gamma}_{13;2}/2} \bar{x}_{23}^{\bar{\gamma}_{23;1}/2}}, \quad (2.10.109)$$

όπου

$$\begin{aligned} \gamma_{12;3} = & -\frac{1}{2k(1 - \lambda^2)} \left( 2\lambda(N_I^{(1)} + N_I^{(2)} - N_I^{(3)}) \right. \\ & \left. - c_{R_1} - c_{R_2} + c_{R_3} - \lambda^2(c_{R'_1} + c_{R'_2} - c_{R'_3}) \right) \end{aligned} \quad (2.10.110)$$

και

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{12;3} = & -\frac{1}{2k(1 - \lambda^2)} \left( 2\lambda(N_I^{(1)} + N_I^{(2)} - N_I^{(3)}) \right. \\ & \left. - c_{R'_1} - c_{R'_2} + c_{R'_3} - \lambda^2(c_{R_1} + c_{R_2} - c_{R_3}) \right). \end{aligned} \quad (2.10.111)$$

Τα υπόλοιπα  $\gamma_{ij;k}$  και  $\bar{\gamma}_{ij;k}$  προκύπτουν με κυκλικές μεταθέσεις των 1,2,3.

Όσον αφορά τους συντελεστές  $C_{IJK}(k, \lambda)$ , στο σημείο  $\lambda = 0$  καθορίζονται πλήρως από τα δεδομένα της σύμμορφης θεωρίας πεδίου και έτσι θεωρούνται γνωστοί. Σε γενικές γραμμές μπορούν να αναπτυχθούν διαταρακτικά ως

$$\tilde{C}_{IJK}(k, \lambda) = \tilde{C}_{IJK}^{(0)} + \frac{1}{k} \tilde{C}_{IJK}^{(1)}(\lambda) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (2.10.112)$$

όπου οι  $\tilde{C}_{IJK}^{(0)}$  είναι ανεξάρτητοι του  $\lambda$ . Αυτό συμβαίνει γιατί ένας  $k$ -εξαρτώμενος τέτοιος όρος, με μόνους πιθανούς πόλους στα  $\lambda = \pm 1$  και αναλλοίωτος κάτω από τον  $(k, \lambda) \rightarrow (-k, \lambda^{-1})$  μετασχηματισμό, δεν θα ήταν πεπερασμένος ούτε στο μη-Αβελιανό T-δύϊκό, ούτε στο Ψευδοδύϊκό όριο. Προκειμένου να υπολογισθεί η πρώτη διόρθωση της συνάρτησης συσχετισμού τριών σημείων των πρωτεύοντων πεδίων, γίνεται μία υπόθεση της μορφής

$$C_{IJK}^{(1)}(\lambda) = \frac{f_{IJK}(\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}. \quad (2.10.113)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι κάτω από την συμμετρία (2.10.18) συνδυασμένη με μετασχηματισμό ομοτιμίας ισχύει  $\Phi_I^{(i)}(x_i, \bar{x}_i) \rightarrow \Phi_I^{(i)}(\bar{x}_i, x_i)$  και  $\tilde{C}_{IJK}(-k, \lambda^{-1}) = \tilde{C}_{IJK}(k, \lambda)$  προκύπτει ότι

$$\lambda^4 f_{IJK}(\lambda^{-1}) = f_{IJK}(\lambda) \implies f_{IJK}(\lambda) = \tilde{C}_{IJK}^{(1)}(0)(1 + \lambda^4) + a_{IJK}^{(1)}(\lambda + \lambda^3) + a_{IJK}^{(2)}\lambda^2,$$

με  $a_{IJK}^{(1)} = a_{IJK}^{(2)} = 0$  και το  $\tilde{C}_{IJK}^{(1)}(0)$  να προσδιορίζεται από τα δεδομένα της σύμμορφης θεωρίας. Συνεπώς

$$\tilde{C}_{IJK}^{(1)} = \frac{\tilde{C}^{(1)}(0)(1 + \lambda^4)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}. \quad (2.10.114)$$

Για την περίπτωση γενικού πίνακα  $\lambda_{ab}$ , ο διαταρακτικός υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης και της ανώμαλης διάστασης είναι αρκετά επίπονος και συνήθως μη εφικτός, οπότε ακολουθούνται διαφορετικές μέθοδοι οι οποίες αναλύονται αντίστοιχα στα κεφάλαια 2 και 3 στις αντίστοιχες ενότητες.

## Άλγεβρα

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται τα  $\lambda$ -διορθωμένα OPEs και οι μεταθέτες ίσου χρόνου για τα ρεύματα και τα πρωτεύοντα πεδία της παραμορφωμένης θεωρίας, όπως αυτά προκύπτουν από τις αντίστοιχες συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων. Τα αποτελέσματα αυτά είναι μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  και περιλαμβάνουν όλες τις συνεισφορές ως προς την παράμετρο  $\lambda$ .

-Τα OPEs είναι [44]

$$\begin{aligned}
J^a(x_1)J^b(x_2) &= \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{2+\gamma^{(J)}}\bar{x}_{12}^{\gamma^{(J)}}} + c(\lambda)\frac{f_{abc}J^c(x_2)}{x_{12}} + d(\lambda)\frac{f_{abc}\bar{J}^c(\bar{x}_2)\bar{x}_{12}}{x_{12}^2} + \dots, \\
J^a(x_1)\bar{J}^b(\bar{x}_2) &= -\gamma^{(J)}\frac{\delta_{ab}}{|x_{12}|^2} + d(\lambda)\frac{f_{abc}\bar{J}^c(\bar{x}_2)}{x_{12}} + d(\lambda)\frac{f_{abc}J^c(x_2)}{\bar{x}_{12}} + \dots, \\
J^a(x_1)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) &= -\frac{(t_a)_i{}^m\Phi_{m,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) - \lambda(\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'}\Phi_{i,m'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2)}{x_{12}\sqrt{k(1-\lambda^2)}} + \dots, \\
\bar{J}^a(\bar{x}_1)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) &= \frac{(\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'}\Phi_{i,m'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) - \lambda(t_a)_i{}^m\Phi_{m,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2)}{\bar{x}_{12}\sqrt{k(1-\lambda^2)}} + \dots, \\
\tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) &= \frac{\tilde{C}_{IJK}(k, \lambda)\tilde{\Phi}_K^{(3)}(x_2, \bar{x}_2)}{x_{12}^{\gamma_{12;3}}\bar{x}_{12}^{\bar{\gamma}_{12;3}}} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.10.115}$$

όπου  $\gamma^{(J)}$  είναι η ανώμαλη διάσταση του ρεύματος (2.10.87), οι συναρτήσεις  $\tilde{C}_{IJK}$  δίνονται στην (2.10.112) και οι διαστάσεις  $\gamma_{12;3}$ ,  $\bar{\gamma}_{12;3}$  στις (2.10.110) και (2.10.111) αντίστοιχα, ενώ

$$c(\lambda) = \sqrt{\frac{(1-\lambda^3)^2}{k(1-\lambda^2)^3}}, \quad d(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2(1-\lambda)^2}{k(1-\lambda^2)^3}}.$$

Έχοντας τα παραπάνω OPEs, εύκολα υπολογίζονται οι σχέσεις μετάθεσης ίσου χρόνου για τα ρεύματα και τα πρωτεύοντα πεδία μέσω μίας διαδικασίας χρονικής ταξινόμησης

$$[f(\sigma_1, \tau), g(\sigma_2, \tau)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(\sigma_1, \tau + i\epsilon)g(\sigma_2, \tau) - g(\sigma_2, \tau + i\epsilon)f(\sigma_1, \tau)].$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, σε συνδυασμό με τα άνωθεν OPEs και τις ακόλουθες αναπαραστάσεις της  $\delta$ -συνάρτησης του Dirac

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sigma - i\epsilon} - \frac{1}{\sigma + i\epsilon} \right) &= 2\pi i \delta(\sigma), \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2} - \frac{1}{(\sigma + i\epsilon)^2} \right) &= -2\pi i \delta'(\sigma), \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma + i\epsilon}{(\sigma - i\epsilon)^2} - \frac{\sigma - i\epsilon}{(\sigma + i\epsilon)^2} \right) &= 2\pi i \delta(\sigma),
\end{aligned}$$

προκύπτει τελικά

$$\begin{aligned}
[J^a(\sigma_1), J^b(\sigma_2)] &= 2\pi i \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}) + 2\pi f_{abc} (c(\lambda)J^c(\sigma_2) - d(\lambda)\bar{J}^c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12}), \\
[\bar{J}^a(\sigma_1), \bar{J}^b(\sigma_2)] &= -2\pi i \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}) + 2\pi f_{abc} (c(\lambda)\bar{J}^c(\sigma_2) - d(\lambda)J^c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12}), \\
[J^a(\sigma_1), \bar{J}^b(\sigma_2)] &= 2\pi d(\lambda) f_{abc} (J^c(\sigma_2) + \bar{J}^c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12})
\end{aligned} \tag{2.10.116}$$

και

$$\begin{aligned} [\Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_1)\Phi_{j,j'}^{(2)}(\sigma_2)] &= 0, & (2.10.117) \\ [J^a(\sigma_1), \Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_2)] &= -\frac{2\pi}{\sqrt{k(1-\lambda^2)}} \left( (t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(\sigma_2) - \lambda(\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(\sigma_2) \right) \delta(\sigma_{12}), \\ [\bar{J}^a(\sigma_1), \Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_2)] &= \frac{2\pi}{\sqrt{k(1-\lambda^2)}} \left( (\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(\sigma_2) - \lambda(t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(\sigma_2) \right) \delta(\sigma_{12}). \end{aligned}$$

Ορίζοντας

$$S^a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{1-\lambda^2}} (J^a - \lambda \bar{J}^a), \quad \bar{S}^a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{1-\lambda^2}} (\bar{J}^a - \lambda J^a), \quad (2.10.118)$$

οι σχέσεις μετάθεσης (2.10.116) και (2.10.117) προκύπτουν να είναι ισομορφικές με δύο μετατιθέμενα αντίγραφα αλγεβρας ρευμάτων με αντίθετα επίπεδα  $k$

$$\begin{aligned} [S^a(\sigma_1), S^b(\sigma_2)] &= \frac{ik}{2\pi} \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}) + f_{abc} S^c(\sigma_2) \delta(\sigma_{12}), \\ [\bar{S}^a(\sigma_1), \bar{S}^b(\sigma_2)] &= -\frac{ik}{2\pi} \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}) + f_{abc} \bar{S}^c(\sigma_2) \delta(\sigma_{12}), \\ [S^a(\sigma_1), \bar{S}^b(\sigma_2)] &= 0, \\ [S^a(\sigma_1), \Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_2)] &= -(t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(\sigma_2) \delta(\sigma_{12}), \\ [\bar{S}^a(\sigma_1), \Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_2)] &= (\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(\sigma_2) \delta(\sigma_{12}). \end{aligned} \quad (2.10.119)$$

Παίρνοντας το κλασικό όριο των (2.10.116) και μέσω ενός επαναορισμού των ρευμάτων, προκύπτουν οι αντίστοιχες  $\lambda$ -παραμορφωμένες αγκύλες Poisson ως το κλασικό όριο των OPEs των ρευμάτων

$$\begin{aligned} \{I_{\pm}^a(\sigma_1), I_{\pm}^b(\sigma_2)\}_{\text{P.B.}} &= -iq^2 f_{abc} (I_{\mp}^c(\sigma_2) - (1+2x)I_{\pm}^c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12}) \pm 2q^2 \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}), \\ \{I_{\pm}^a(\sigma_1), I_{\mp}^b(\sigma_2)\}_{\text{P.B.}} &= iq^2 f_{abc} (I_{+}^c(\sigma_2) + I_{-}^c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12}), \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} q = 2d(\lambda) &= \frac{q'}{\sqrt{k(1-\lambda^2)}}, \quad \frac{c(\lambda)}{d(\lambda)} = 1+2x, \quad x = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}, \quad q' = \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \\ I_{+}^a &= q'(D^T - \lambda \mathbb{1})_{ab}^{-1} L_{\mu}^b \partial_{+} X^{\mu}, \quad I_{-}^a = -q'(D - \lambda \mathbb{1})_{ab}^{-1} R_{\mu}^b \partial_{-} X^{\mu}. \end{aligned}$$

Οι αγκύλες αυτές, αντιστοιχούν στην παραμόρφωση της κανονικής δομής του ιστροπικού PCM, και έχοντας παραχθεί με χρήση της δράσης (2.10.20), αποτελούν μια μαθηματική απόδειξη ότι η (2.10.15) δράση είναι όντως η ενεργός δράση του προτύπου Thirring, δεδομένου ότι η τελευταία αποτελεί μια έκφραση των αγκύλων αυτών [38].

### Μη-συμμετρικό απλά παραμορφωμένο πρότυπο

Στην υποενοότητα αυτή η υπό μελέτη θεωρία [45] αντιστοιχεί στην παραμόρφωση μίας σύμμορφης θεωρίας με ομάδα συμμετρίας  $G_{k_L} \times G_{k_R}$  κατά έναν κλασικά οριακό τελεστή, δι-γραμμικό ως προς τα ρεύματα της σύμμορφης θεωρίας. Οι ομάδες  $G_{k_{L,R}}$  είναι συμπαγείς, ημί-απλές ομάδες Lie και η θεωρία έχει μία άλγεβρα ρευμάτων  $\mathfrak{g}_{k_L} \times \mathfrak{g}_{k_R}$ . Συνεπώς, τα ρεύματα της αρχικής σύμμορφης θεωρίας ικανοποιούν τα δύο αντίγραφα άλγεβρας ρευμάτων μέσω των αντίστοιχων OPEs, τα οποία σε Ευκλείδια υπογραφή είναι

$$\begin{aligned} J^a(z)J^b(w) &= \frac{\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f_{abc}}{\sqrt{k_L}} \frac{J_c(w)}{z-w} + \dots, \\ \bar{J}^a(\bar{z})\bar{J}^b(\bar{w}) &= \frac{\delta_{ab}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{f_{abc}}{\sqrt{k_R}} \frac{\bar{J}_c(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots, \\ J^a(z)\bar{J}^b(\bar{w}) &= \text{ομαλό}, \end{aligned} \quad (2.10.120)$$

με τις τάξεις των αντίστοιχων αλγεβρών  $k_L, k_R \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Εδώ, ο επαναορισμός των ρευμάτων είναι ο  $J^a \rightarrow J^a/\sqrt{k_L}$ ,  $\bar{J}^a \rightarrow \bar{J}^a\sqrt{k_R}$  και η δράση που αντιστοιχεί στην θεωρία σε Ευκλείδιο χώρο (και για  $\lambda_{ab} = \lambda\delta_{ab}$ ) είναι

$$S = S_{\text{WZW};k_L,k_R}(g) - \frac{\lambda}{\pi} \int d^2z J_a(z)\bar{J}_a(\bar{z}). \quad (2.10.121)$$

Η ενδιαφέρουσα ιδιότητα που παρουσιάζει η μη-συμμετρική αυτή θεωρία έναντι της (2.10.20) είναι ότι η πρώτη κάτω από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης προς τις χαμηλές ενέργειες εμφανίζει ένα δεύτερο σταθερό σημείο στο πλαίσιο ασθενούς σταθεράς ζεύξης  $\lambda < 1$ , σε αντίθεση με την τελευταία η οποία ρεεί προς την περιοχή ισχυρής ζεύξης για  $\lambda = 1$ <sup>18</sup>.

Στην περίπτωση της μη-συμμετρικής θεωρίας, η ενεργός δράση (αντίστοιχη της (2.10.15)) για την (2.10.121) παρουσιάζεται σε επόμενη ενότητα μιας και η ακριβής μορφή της δεν χρειάζεται για τώρα, και έχει αποδειχθεί ότι παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μια γενίκευση της προηγούμενης δυϊκού τύπου συμμετρίας (2.10.18) για μεγάλα  $k_{L,R}$

$$k_L \rightarrow -k_R, \quad k_R \rightarrow -k_L, \quad \lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad \text{για } k_{L,R} \gg 1. \quad (2.10.122)$$

Το επιχείρημα αυτό ισχύει χωρίς να έχει συμπεριληφθεί ο μετασχηματισμός ομοτιμίας  $z \leftrightarrow \bar{z}$ , και η εφαρμογή του πάνω μετασχηματισμού σε διάφορες εκφράσεις που περιλαμβάνουν ρίζες, θα πρέπει να θεωρείται ως η αναλυτική συνέχιση  $(k_L, k_R) \rightarrow e^{i\pi}(k_R, k_L)$  και  $1 - \lambda \rightarrow e^{i\pi}\lambda^{-1}(1 - \lambda)$ .

<sup>18</sup>Ως περιοχή ισχυρής ζεύξης αναφέρεται η περιοχή όπου η  $\beta$ -συνάρτηση αποκτάει πόλους.

Τέλος, όσον αφορά τα όρια  $\lambda \rightarrow \pm 1$ , σε αυτήν την περίπτωση έχουν την μορφή

$$\lambda = \pm 1 - \frac{b}{(k_L k_R)^6}, \quad k_{L,R} \rightarrow \infty, \quad (2.10.123)$$

όπου το  $b$  είναι η νέα παράμετρος ζεύξης και το όριο θεωρείται ανεξάρτητα για τα δύο πρόσημα. Η (2.10.123) αποτελεί ένα ευθύ ανάλογο του ορίου  $\lambda = -1$  για το ψευδοδυϊκό πρότυπο το οποίο υπάρχει σε επίπεδο ενεργού δράσης για  $k_L = k_R$  και στην περίπτωση  $k_L \neq k_R$  συνεχίζει να υπάρχει. Αυτό δεν ισχύει για την περίπτωση του μη-Αβελιανού T-δυϊκού ορίου  $\lambda = 1$ , το οποίο ενώ υπάρχει για  $k_L = k_R$ , στην μη-συμμετρική περίπτωση δεν ορίζεται και η διάκριση μεταξύ των δύο ορίων  $\lambda \rightarrow 1$  και  $\lambda \rightarrow -1$  παύει να υπάρχει.

### Συναρτήσεις συσχετισμού

Οι συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων για τα ρεύματα στο σύμμορφο σημείο προκύπτουν σύμφωνα με τα OPEs (2.10.120) να είναι αυτές της (2.2.26) και (2.2.27) με την τάξη  $k$  αντικατεστημένη με  $k_L$  για την ολομορφική και  $k_R$  για την αντι-ολομορφική έκφραση αντίστοιχα. Το ίδιο ισχύει και για την ταυτότητα του Ward (2.2.29).

Όμοια, για τα αφινικά πρωτεύοντα πεδία που περιλαμβάνει η θεωρία, οι σχέσεις (2.10.40)-(2.10.44) και (2.10.46)-(2.10.48) της προηγούμενης ενότητας συνεχίζουν να ισχύουν με μόνη διαφορά ότι όπου υπάρχει το επίπεδο  $k$  είναι αντικατεστημένο με τα  $k_{L,R}$  για τις ολομορφικές και αντι-ολομορφικές ποσότητες αντίστοιχα. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα αφινικά πρωτεύοντα πεδία είναι και πρωτεύοντα κατά Virasoro, με τα αντίστοιχα κεντρικά φορτία εδώ να είναι

$$c_L = \frac{2k_L \dim G}{2k_L + c_G}, \quad c_R = \frac{2k_R \dim G}{2k_R + c_G}. \quad (2.10.124)$$

Στην συζυγή αναπαράσταση της άλγεβρας στην οποία  $(t_a)_{bc} = (\tilde{t}_a)_{bc} = -f_{abc}$ , για τα πρωτεύοντα πεδία  $\Phi_{a,b}$  ισχύει

$$\begin{aligned} J^a(z) \Phi_{b,c}(w, \bar{w}) &= \frac{1}{\sqrt{k_L}} \frac{f_{abd} \Phi_{d,c}(w, \bar{w})}{z - w}, \\ \bar{J}^a(\bar{z}) \Phi_{b,c}(w, \bar{w}) &= \frac{1}{\sqrt{k_R}} \frac{f_{acd} \Phi_{b,d}(w, \bar{w})}{\bar{z} - \bar{w}}. \end{aligned} \quad (2.10.125)$$

Σε τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  η συνάρτηση συσχετισμού  $\langle J_a(x_1) J_b(x_2) \rangle_\lambda$  περιλαμβάνει αθροίσματα των εκφράσεων

$$\begin{aligned} \langle J_a(x_1) J_b(x_2) \rangle_\lambda^{(n)} &= \frac{1}{n!} \left( -\frac{\lambda}{\pi} \right)^n \\ &\times \int d^2 z_{1\dots n} \langle J_a(x_1) J_{a_1}(z_1) \dots J_{a_n}(z_n) J_b(x_2) \rangle \langle \bar{J}_{a_1}(\bar{z}_1) \dots \bar{J}_{a_n}(\bar{z}_n) \rangle. \end{aligned} \quad (2.10.126)$$

Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς με την περίπτωση του συμμετρικού προτύπου και κάνοντας τις απαιτούμενες συναίρέσεις των ρευμάτων χρησιμοποιώντας τις (2.10.120) και τα ολοκληρώματα του παραρτήματος Β', προκύπτει τελικά ότι

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^2} \left( 1 - 2\frac{c_G}{\sqrt{k_L k_R}}\lambda^3 + \left( \frac{c_G}{k_L}\lambda^2 - 2\frac{c_G}{\sqrt{k_L k_R}}\lambda^3 \right) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \frac{1}{k_{L,R}}\mathcal{O}(\lambda^4) \right). \quad (2.10.127)$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων για τον σύνθετο διγραμμικό τελεστή  $\mathcal{O}(z, \bar{z}) = J_a(z)\bar{J}_a(\bar{z})$  μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  και  $\mathcal{O}(1/k_{L,R})$  προκύπτει να είναι

$$\langle \mathcal{O}(x_1, \bar{x}_1)\mathcal{O}(x_2, \bar{x}_2) \rangle = -\frac{c_G \dim G}{\sqrt{k_L k_R}} \frac{\lambda}{|x_{12}|^4} \left( 2 - 3\lambda(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) \right) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2},$$

με  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_L}{k_R}}$ . (2.10.128)

Όμοια υπολογίζεται διαταρακτικά μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  η συνάρτηση συσχετισμού τριών σημείων για τα ολομορφικά ρεύματα

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)J^c(x_3) \rangle_\lambda = \left[ \frac{1}{\sqrt{k_L}} \left( 1 + \frac{3}{2}\lambda^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{k_R}\lambda^3} \right] \frac{f_{abc}}{x_{12}x_{13}x_{23}} + \dots, \quad (2.10.129)$$

και η μικτή μέχρι  $\mathcal{O}(\lambda^2)$

$$\langle J^a(x_1)J^b(x_2)\bar{J}^c(\bar{x}_3) \rangle_\lambda = \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_L}} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{k_R}} \right) \frac{f_{abc}\bar{x}_{12}}{x_{12}^2\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} + \dots, \quad (2.10.130)$$

ενώ για τα πρωτεύοντα πεδία προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων μέχρι  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  και  $\mathcal{O}(1/k_{L,R})$

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{1}{x_{12}^{2\Delta_R}\bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left[ \left( 1 + \lambda^2 \left( \frac{c_R}{k_L} + \frac{c_{R'}}{k_R} \right) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) (\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'} \right. \\ \left. - 2\lambda \frac{1 + \lambda^2}{\sqrt{k_L k_R}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} (t_a \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'} \right] + \frac{1}{k_{L,R}}\mathcal{O}(\lambda^4), \quad (2.10.131)$$

με

$$\Delta_R = \frac{c_R}{2k_L + c_G}, \quad \bar{\Delta}_{R'} = \frac{c_{R'}}{2k_R + c_G}. \quad (2.10.132)$$

Στη διαγώνια βάση των  $\tilde{\Phi}_I^{(i)}$  η (2.10.131) γίνεται

$$\langle \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{IJ}}{x_{12}^{2\Delta_R}\bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( 1 + \delta_I^{(\Phi)} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right), \quad (2.10.133)$$

όπου

$$\delta_I^{(\Phi)} = -2\lambda \frac{1 + \lambda^2}{\sqrt{k_L k_R}} N_I + \lambda^2 \left( \frac{c_R}{k_L} + \frac{c_{R'}}{k_R} \right) + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.10.134)$$

Από τα παραπάνω διαταρακτικά αποτελέσματα, είναι δυνατόν με τη κατάλληλη υπόθεση και την επιβολή της συμμετρίας (2.10.122) να προσδιορισθούν οι ακριβείς μορφές για τις διάφορες συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων της θεωρίας. Στις διάφορες υποθέσεις τώρα, ο πόλος του παρονομαστή θα έχει την μορφή  $(1 - \lambda^2)^3$  προκειμένου οι ακριβείς ποσότητες να είναι καλώς ορισμένες στο όριο (2.10.123).

Ο αναλυτικός υπολογισμός μπορεί να βρεθεί στην [45] και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι

$$\langle J^a(x_1) J^b(x_2) J^c(x_3) \rangle_\lambda = \frac{1 - \lambda_0 \lambda^3}{\sqrt{k_L} (1 - \lambda^2)^3} \frac{f_{abc}}{x_{12} x_{13} x_{23}} + \dots, \quad (2.10.135)$$

$$\langle J^a(x_1) J^b(x_2) \bar{J}^c(\bar{x}_3) \rangle_\lambda = \frac{\lambda(\lambda_0^{-1} - \lambda)}{\sqrt{k_R} (1 - \lambda^2)^3} \frac{f_{abc} \bar{x}_{12}}{x_{12}^2 \bar{x}_{13} \bar{x}_{23}} + \dots, \quad (2.10.136)$$

ενώ η ακριβής ως προς  $\lambda$  μορφή των  $\langle \bar{J} \bar{J} \bar{J} \rangle$  και  $\langle \bar{J} \bar{J} J \rangle$  προκύπτει αντίστοιχα από τις πάνω με μετασχηματισμό ομοτιμίας  $x_{ij} \rightarrow \bar{x}_{ij}$  και  $(k_L, k_R) \rightarrow (k_R, k_L)$ .

Επιπλέον,

$$\langle \tilde{\Phi}_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_2) \tilde{\Phi}_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle = \frac{\delta_{IJ}}{x_{12}^{\gamma_{I;R,R'}^{(L)}} \bar{x}_{12}^{\gamma_{I;R,R'}^{(R)}}}, \quad (2.10.137)$$

όπου  $\gamma_{I;R,R'}^{(L)}$  και  $\gamma_{I;R,R'}^{(R)}$  είναι οι ανώμαλες διαστάσεις που αποκτά ο ολομορφικός και αντιολομορφικός τομέας των πρωτευόντων πεδίων, οι ακριβείς εκφράσεις των οποίων, μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k_{L,R})$ , δίνονται στην επόμενη υποενότητα.

Τέλος,

$$\langle J_a(x_3) \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = - \frac{(t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'} - \lambda_0 \lambda (\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'}}{\sqrt{k_L} (1 - \lambda^2) x_{12}^{2\Delta_R - 1} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}} x_{13} x_{23}} \quad (2.10.138)$$

και

$$\langle \bar{J}_a(\bar{x}_3) \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \tilde{t}_a^*)_{ii',jj'} - \lambda_0^{-1} \lambda (t_a \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{\sqrt{k_R} (1 - \lambda^2) x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'} - 1} \bar{x}_{13} \bar{x}_{23}}. \quad (2.10.139)$$

### Συναρτήσεις ομάδας επανακανονικοποίησης

Σε γενικές γραμμές η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων, μπορεί να έρθει στη μορφή

$$\langle J_a(x_1) J_b(x_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{2+\gamma_L} \bar{x}_{12}^{\gamma_L}} \quad \text{και} \quad \langle \bar{J}_a(\bar{x}_1) \bar{J}_b(\bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{\gamma_R} \bar{x}_{12}^{2+\gamma_R}}, \quad (2.10.140)$$



με την παραμόρφωση κωδικοποιημένη στις ανώμαλες διαστάσεις  $\gamma_L$  και  $\gamma_R$  που αποκτούν τα ολομορφικά και αντι-ολομορφικά ρεύματα. Τα ρεύματα αυτά, όπως είναι φανερό, παρουσία της παραμόρφωσης παύουν να είναι (αντι)ολομορφικά και οι διαστάσεις τους γίνονται  $(1 + \gamma_L/2, \gamma_L/2)$  για το  $J_a$  και  $(\gamma_R/2, 1 + \gamma_R/2)$  για το  $\bar{J}_a$ .

Από το συντελεστή του λογαριθμικού όρου της διαταρακτικής έκφρασης (2.10.127) προκύπτει ότι

$$\gamma_L(k_L, k_R, \lambda) = \frac{c_G}{k_L} \lambda^2 - 2 \frac{c_G}{\sqrt{k_L k_R}} \lambda^3 + \dots \quad (2.10.141)$$

ενώ αντίστοιχα, για τα πρωτεύοντα πεδία προκύπτει συμπεριλαμβάνοντας και το  $k$ -εξαρτώμενο μέρος των  $\Delta_R$  και  $\bar{\Delta}_{R'}$  μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k_{L,R})$  ότι

$$\begin{aligned} \gamma_{I;R,R'}^{(L)} &= (k, \lambda) \Big|_{\text{perturb.}} = \frac{c_R}{k_L} + \delta_I^{(\Phi)} = \\ &= \frac{c_R}{k_L} (1 + \lambda^2) + \frac{c_{R'}}{k_R} \lambda^2 - 2 \frac{\lambda(1 + \lambda^2)}{\sqrt{k_L k_R}} N_I + \mathcal{O}(\lambda^4). \end{aligned} \quad (2.10.142)$$

Από τις εκφράσεις αυτές, μέσω των κατάλληλων υποθέσεων και τη χρήση της συμμετρίας (2.10.122), προκύπτουν οι ακόλουθες ακριβείς ως προς  $\lambda$  εκφράσεις για τις ανώμαλες διαστάσεις μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k_{L,R})$  για τα ρεύματα

$$\gamma_L(k_L, k_R, \lambda) = \frac{c_G}{k_R} \frac{\lambda^2 (\lambda - \lambda_0^{-1})^2}{(1 - \lambda^2)^3} + \dots, \quad (2.10.143)$$

$$\gamma_R(k_L, k_R, \lambda) = \frac{c_G}{k_L} \frac{\lambda^2 (\lambda - \lambda_0)^2}{(1 - \lambda^2)^3} + \dots \quad (2.10.144)$$

και για τα πρωτεύοντα πεδία

$$\gamma_{I;R,R'}^{(L)}(k_L, k_R, \lambda) = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left( \frac{c_R}{k_L} + \frac{c_{R'}}{k_R} \lambda^2 - 2 \frac{\lambda}{\sqrt{k_L k_R}} N_I \right), \quad (2.10.145)$$

$$\gamma_{I;R,R'}^{(R)}(k_L, k_R, \lambda) = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left( \frac{c_{R'}}{k_R} + \frac{c_R}{k_L} \lambda^2 - 2 \frac{\lambda}{\sqrt{k_L k_R}} N_I \right). \quad (2.10.146)$$

Η ανώμαλη διάσταση για τον σύνθετο, διγραμμικό τελεστή δίνεται από τη σχέση (2.10.95) και είναι

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(k_L, k_R, \lambda) = c_G \lambda \frac{3(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda(1 + \lambda^2) - 2(1 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}{\sqrt{k_L k_R} (1 - \lambda^2)^3} + \dots, \quad (2.10.147)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η  $\beta$ -συνάρτηση [60]

$$\frac{d\lambda}{d \ln \mu^2} = - \frac{c_G}{2\sqrt{k_L k_R}} \frac{\lambda^2 (\lambda - \lambda_0) (\lambda - \lambda_0^{-1})}{(1 - \lambda^2)^2} \quad (2.10.148)$$

και το Αβελιανό μέρος της μετρικής του Zamolodchikov

$$g_0 = \frac{\dim G}{(1 - \lambda^2)^2}.$$

Είναι φανερό ότι η ροή (2.10.148) εμφανίζει τρία σταθερά σημεία  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \lambda_0$  και  $\lambda = \lambda_0^{-1}$ . Το  $\lambda = 0$  είναι το UV σταθερό σημείο που εμφανίζεται και στην περίπτωση του συμμετρικού  $\lambda$ -πρότυπου ενώ τα άλλα δύο είναι καινούρια. Θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $k_L < k_R$  και άρα  $\lambda_0 < 1$ , τότε το σημείο  $\lambda = \lambda_0$  είναι ένα IR σταθερό σημείο για την ροή ενώ το  $\lambda = \lambda_0^{-1}$  αποτελεί ένα UV σταθερό σημείο. Παρόλα αυτά όμως, η περιοχή  $\lambda > 1$  απορρίπτεται ως μη φυσική, διότι μέσω της (2.10.122) προκύπτει ότι μια τέτοια θεωρία με τις τάξεις της άλγεβρας ρευμάτων να είναι θετικοί ακέραιοι, είναι ισοδύναμη με μία θεωρία με  $\lambda < 1$  αλλά αρνητικές τάξεις άλγεβρας. Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη υποενότητα, η αρνητική τάξη άλγεβρας παραβιάζει την μοναδιακότητα της θεωρίας και συνεπώς το σταθερό σημείο  $\lambda = \lambda_0^{-1}$  πρέπει να απορριφθεί ως μη φυσικό.

Όσον αφορά το IR σταθερό σημείο  $\lambda = \lambda_0$  τώρα, οι ανώμαλες διαστάσεις των διαφόρων τελεστών γίνονται

$$\gamma_L(k_L, k_R, \lambda_0) = \frac{c_G}{k_R - k_L}, \quad \gamma_R(k_L, k_R, \lambda_0) = 0, \quad \gamma^{(\odot)}(k_L, k_R, \lambda_0) = \frac{c_G}{k_R - k_L}. \quad (2.10.149)$$

Όπως είναι προφανές, η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή ισούται με το άθροισμα των ανώμαλων διαστάσεων των δύο ρευμάτων που τον συγκροτούν όπως ακριβώς είναι αναμενόμενο για δύο αποσυζευγμένες σύμμορφες θεωρίες πεδίου. Σε αντίθεση με την συμμετρική περίπτωση, όπου η  $\gamma^{(\odot)}$  είναι καθαρά μη-θετική, εδώ η ανώμαλη διάσταση αυτή δεν έχει σταθερό πρόσημο κατά τη ροή  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ . Ξεκινάει αρνητική, φτάνει σε ένα ελάχιστο, και στη συνέχεια φτάνει την θετική τιμή της (2.10.149) εκφράζοντας έτσι το γεγονός ότι η διαταραχή είναι σχετική κοντά στο  $\lambda = 0$  και μη-σχετική κοντά στο  $\lambda = \lambda_0$ .

Όσον αφορά τα ρεύματα,  $\gamma_R = 0$  σημαίνει ότι το  $\bar{J}_a$  παραμένει με διάσταση (0,1), και συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί καθαρά αντι-ολομορφικό ρεύμα όχι μόνο στο σημείο  $\lambda = 0$  αλλά και στο  $\lambda = \lambda_0$ . Επιπλέον, στο σημείο  $\lambda = \lambda_0$  ο συντελεστής της ακριβής έκφρασης για την  $\langle \bar{J} \bar{J} \bar{J} \rangle$  γίνεται  $1/\sqrt{k_R - k_L}$ , γεγονός που υποδεικνύει ότι στο νέο σύμμορφο σημείο  $\lambda = \lambda_0$ , το αντι-ολομορφικό ρεύμα παράγει την ίδια άλγεβρα με αυτή που παρήγαγε και στο UV  $\lambda = 0$ , αλλά με μικρότερη τάξη  $k_R \rightarrow k_R - k_L$ .

Αντίθετα, το  $J_a$  στο  $\lambda = \lambda_0$  έχει διάσταση  $(1 + \gamma_L/2, \gamma_L/2)$  με το  $\gamma_L$  να είναι αυτό της (2.10.149). Ο μη-μηδενισμός της ανώμαλης διάστασης  $\gamma_L$  προμηνύει ότι στην νέα αυτή σύμμορφη θεωρία, το αρχικό ρεύμα  $J_a$  έχει αποκτήσει νέα χαρακτηριστικά. Πράγματι, όντας στην περιοχή  $k_{L,R} \gg 1$ , αυτό αντιστοιχεί σε έναν τελεστή που μετασχηματίζεται στην

συζυγή αναπαράσταση μίας άλγεβρας ρευμάτων τάξης  $k_R - k_L$ . Η καινούρια άλγεβρα ρευμάτων καθώς και η φύση της σύμμορφης θεωρίας στο IR σταθερό σημείο θα αναλυθούν περισσότερο στην επόμενη υποενότητα.

### Άλγεβρα

Μέσω των συναρτήσεων συσχετισμού δύο και τριών σημείων για τα ρεύματα και τα αφινικά πρωτεύοντα πεδία, μπορούν να εξαχθούν τα διάφορα OPEs της παραμορφωμένης θεωρίας. Οι ακριβείς εκφράσεις για όλες τις τάξεις του  $\lambda$  που προκύπτουν μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k_{L,R})$  είναι

$$\begin{aligned}
J_a(x_1)J_b(x_2) &= \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^2} + a_L \frac{f_{abc}J_c(x_2)}{x_{12}} + b_L \frac{f_{abc}\bar{J}_c(\bar{x}_2)\bar{x}_{12}}{x_{12}^2} + \dots, \\
\bar{J}_a(\bar{x}_1)\bar{J}_b(\bar{x}_2) &= \frac{\delta_{ab}}{\bar{x}_{12}^2} + a_R \frac{f_{abc}\bar{J}_c(\bar{x}_2)}{\bar{x}_{12}} + b_R \frac{f_{abc}J_c(x_2)x_{12}}{\bar{x}_{12}^2} + \dots, \\
J_a(x_1)\bar{J}_b(\bar{x}_2) &= b_R \frac{f_{abc}\bar{J}_c(\bar{x}_2)}{x_{12}} + b_L \frac{f_{abc}J_c(x_2)}{\bar{x}_{12}} + \dots, \\
J_a(x_1)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) &= -\frac{(t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) - \lambda_0 \lambda (\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2)}{x_{12} \sqrt{k_L} (1 - \lambda^2)} + \dots, \\
\bar{J}_a(\bar{x}_1)\Phi_{i,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) &= \frac{(\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2) - \lambda_0^{-1} \lambda (t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(x_2, \bar{x}_2)}{\bar{x}_{12} \sqrt{k_R} (1 - \lambda^2)} + \dots, \\
\Phi_I^{(1)}(x_1, \bar{x}_1)\Phi_J^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) &= C_{IJK}\Phi_K^{(3)}(x_2, \bar{x}_2) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.10.150}$$

με τα  $C_{IJK}$  να είναι αριθμοί που αντιστοιχούν στις σταθερές δομής του δακτυλίου των αφινικών πρωτεύοντων πεδίων, και

$$\begin{aligned}
a_L &= \frac{1 - \lambda_0 \lambda^3}{\sqrt{k_L} (1 - \lambda^2)^3}, & b_L &= \frac{\lambda(\lambda_0^{-1} - \lambda)}{\sqrt{k_R} (1 - \lambda^2)^3}, \\
a_R &= \frac{1 - \lambda_0^{-1} \lambda^3}{\sqrt{k_R} (1 - \lambda^2)^3}, & b_R &= \frac{\lambda(\lambda_0 - \lambda)}{\sqrt{k_L} (1 - \lambda^2)^3}.
\end{aligned}$$

Από τις (2.10.150) προκύπτουν με αντίστοιχο τρόπο όπως και στην συμμετρική περίπτωση οι ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης ίσου χρόνου για τα ρεύματα

$$\begin{aligned}
[J_a(\sigma_1), J_b(\sigma_2)] &= 2\pi i \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}) + 2\pi f_{abc} (a_L J_c(\sigma_2) - b_L \bar{J}_c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12}), \\
[\bar{J}_a(\sigma_1), \bar{J}_b(\sigma_2)] &= -2\pi i \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}) + 2\pi f_{abc} (a_R \bar{J}_c(\sigma_2) - b_R J_c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12}), \\
[J_a(\sigma_1), \bar{J}_b(\sigma_2)] &= 2\pi f_{abc} (b_L J_c(\sigma_2) + b_R \bar{J}_c(\sigma_2)) \delta(\sigma_{12})
\end{aligned} \tag{2.10.151}$$

και για τα πρωτεύοντα πεδία

$$\begin{aligned} [\Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_1)\Phi_{j,j'}^{(2)}(\sigma_2)] &= 0, & (2.10.152) \\ [J_a(\sigma_1), \Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_2)] &= -\frac{2\pi}{\sqrt{k_L(1-\lambda^2)^3}} \left( (t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(\sigma_2) - \lambda_0 \lambda (\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(\sigma_2) \right) \delta(\sigma_{12}), \\ [\bar{J}_a(\sigma_1), \Phi_{i,i'}^{(1)}(\sigma_2)] &= \frac{2\pi}{\sqrt{k_R(1-\lambda^2)^3}} \left( (\tilde{t}_a^*)_{i'}{}^{m'} \Phi_{i,m'}^{(1)}(\sigma_2) - \lambda_0^{-1} \lambda (t_a)_i{}^m \Phi_{m,i'}^{(1)}(\sigma_2) \right) \delta(\sigma_{12}). \end{aligned}$$

Το κλασικό όριο των (2.10.151) προκύπτει να είναι η διπαραμετρική παραμόρφωση των αγκύλων Poisson του ισοτροπικού PCM [64]

$$\begin{aligned} \{I_{\pm}^a(\sigma_1), I_{\pm}^b(\sigma_2)\}_{\text{P.B.}} &= -ie^2 f_{abc} \left( (1 \pm \rho) I_{\mp}^c(\sigma_2) - (1 \mp \rho + 2x(1 \pm \rho)) I_{\pm}^c(\sigma_2) \right) \delta(\sigma_{12}) \pm 2e^2 \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}), \\ \{I_{\pm}^a(\sigma_1), I_{\mp}^b(\sigma_2)\}_{\text{P.B.}} &= ie^2 f_{abc} \left( (1 + \rho) I_{+}^c(\sigma_2) + (1 - \rho) I_{-}^c(\sigma_2) \right) \delta(\sigma_{12}), \end{aligned} \quad (2.10.153)$$

όπου τα ρεύματα έχουν επαναορισθεί ως

$$j_a \rightarrow -\frac{1}{e} I_{+}^a, \quad \bar{J}_a \rightarrow -\frac{1}{e} I_{-}^a$$

και

$$\begin{aligned} e^2 &= 4b_R^2(1-\rho)^{-2} = 4b_L^2(1+\rho)^{-2} = \frac{(\lambda_0^{1/2} + \lambda_0^{-1/2})^2}{\sqrt{k_L k_R}} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}, & (2.10.154) \\ x &= \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}, \quad \rho = \frac{(1-\lambda_0)(1+\lambda)}{(1+\lambda_0)(1-\lambda)}. \end{aligned}$$

Οι παράμετροι (2.10.154) είναι αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό (2.10.122), όπως και η άλγεβρα (2.10.153).

Ορίζοντας στη συνέχεια

$$\Sigma_{\pm}^a = \frac{k_{L,R}}{4} \left( (1-\lambda)(1 \pm \rho) + 2\lambda \right) \left( I_{\mp}^a - \frac{1}{\lambda} I_{\pm}^a \right),$$

γίνεται εμφανές ότι οι παραπάνω αγκύλες Poisson είναι ισομορφικές με δύο μετατιθέμενες άλγεβρες ρευμάτων με επίπεδα  $k_{L,R}$

$$\{\Sigma_{\pm}^a(\sigma_1), \Sigma_{\pm}^b(\sigma_2)\}_{\text{P.B.}} = -i f_{abc} \Sigma_{\pm}^c(\sigma_2) \delta(\sigma_{12}) \pm \frac{k_{L,R}}{2} \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}), \quad (2.10.155)$$

ενώ η συμμετρία (2.10.122) απλά εναλλάσσει τις δύο αυτές αγκύλες μεταξύ τους.

Γυρνώντας στο IR σύμμορφο σημείο  $\lambda = \lambda_0$ , τα OPEs (2.10.150) των ρευμάτων γίνονται

$$\begin{aligned} J_a(x_1)J_b(x_2) &= \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^2} + \frac{k_R + k_L}{\sqrt{k_L k_R (k_R - k_L)}} \frac{f_{abc} J_c(x_2)}{x_{12}} + \frac{1}{\sqrt{k_R - k_L}} \frac{f_{abc} \bar{J}_c(\bar{x}_2) \bar{x}_{12}}{x_{12}^2}, \\ \bar{J}_a(\bar{x}_1)\bar{J}_b(\bar{x}_2) &= \frac{\delta_{ab}}{\bar{x}_{12}^2} + \frac{1}{\sqrt{k_R - k_L}} \frac{f_{abc} \bar{J}_c(\bar{x}_2)}{\bar{x}_{12}} + \dots, \\ J_a(x_1)\bar{J}_b(\bar{x}_2) &= \frac{1}{\sqrt{k_R - k_L}} \frac{f_{abc} J_c(x_2)}{\bar{x}_{12}} + \dots \end{aligned} \quad (2.10.156)$$

Τα OPEs αυτά είναι έγκυρα μέχρι πρώτη τάξη ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλα  $k_{L,R}$  και εμφανίζουν επίσης αναλλοιώτητα κάτω από αλλαγές  $(k_L, k_R) \rightarrow -(k_R, k_L)$  ως κατάλοιπο της συμμετρίας (2.10.122) για την σταθερή τιμή του  $\lambda = \lambda_0$ .

Η μεσαία σειρά των (2.10.156) αντιστοιχεί όντως σε μία άλγεβρα ρευμάτων  $\mathfrak{g}_{k_R - k_L}$  όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ενώ η τρίτη σειρά εκφράζει έναν μη-τετριμένο μετασχηματισμό του  $J_a$  κάτω από το  $\bar{J}_a$ . Από τη μορφή αυτού του OPE και της ανώμαλης διάστασης  $\gamma_L$  που αποκτά το  $J_a$ , φαίνεται ότι αυτό αντιστοιχεί σε έναν σύνθετο τελεστή της μορφής  $J_a = \tilde{\Phi}_{b,a} \tilde{J}_b$  όπου το  $\tilde{\Phi}$  είναι ένα πεδίο που μετασχηματίζεται στην συζυγή αναπαράσταση (2.10.125) ενώ το  $\tilde{J}_a$  παράγει μία άλγεβρα ρευμάτων. Παρόλα αυτά όμως, ο ολομορφικός τομέας της IR θεωρίας δεν αποτελεί μια θεωρία άλγεβρας ρευμάτων αλλά μία συνσυνολική σύμμορφη θεωρία πεδίου και σαν τέτοια, τα αντίστοιχα ολομορφικά πεδία δεν είναι ρεύματα, αλλά μη-Αβελιανά παραφερμιόνια [138], οι διαστάσεις των οποίων αποκλίνουν από τη μονάδα κατά  $1/k$ -διορθώσεις. Όσον αφορά τα πεδία  $\tilde{\Phi}$ , στο όριο  $k_{L,R} \rightarrow \infty$ , η αριστερή τους αναπαράσταση είναι προσεγγιστικά όμοια με την συζυγή αναπαράσταση. Για τον αντι-ολομορφικό τομέα, η παραπάνω δήλωση είναι ακριβής όπως προκύπτει και από την (2.10.125) με  $k_R \rightarrow k_R - k_L$ , η οποία σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το OPE του  $\bar{J}_a$  με το  $\tilde{J}_b$  είναι πεπερασμένο αναπαράγει την τρίτη σειρά των (2.10.156).

Τέλος, η πρώτη σειρά των (2.10.156) αναπαράγεται μέσω κατάλληλης κανονικοποίησης των σταθερών δομής της οιονεί-άλγεβρας ρευμάτων  $\tilde{J}_a$ , χρησιμοποιώντας επίσης ότι  $\partial \Phi_{c,a} \Phi_{c,b} \sim f_{abc} J_c$  και όμοια για την αντι-ολομορφική παράγωγο.

Όλα τα παραπάνω, υποστηρίζουν το επιχείρημα [60],[139] ότι η χαμηλοενεργειακή σύμμορφη θεωρία είναι μια συνσυνολική θεωρία, και πιο συγκεκριμένα, ότι η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης είναι τέτοια ώστε

$$G_{k_L} \times G_{k_R} \xrightarrow{\text{IR}} \frac{G_{k_L} \times G_{k_R - k_L}}{G_{k_R}} \times G_{k_R - k_L}. \quad (2.10.157)$$

Το πάνω επιχείρημα προτάθηκε με βάση ότι το άθροισμα των κεντρικών φορτίων του αριστερόστροφου και δεξιόστροφου τομέα θα πρέπει να μειώνεται κατά τη διάρκεια της ροής της θεωρίας προς το IR, σύμφωνα με το θεώρημα συνάρτησης κεντρικού φορτίου του Zamolodchikov, ενώ η διαφορά των δύο κεντρικών φορτίων θα πρέπει να παραμένει σταθερή. Αυτό όντως φαίνεται να ισχύει εφόσον για  $k_R > k_L$  το κεντρικό φορτίο της αντι-ολομορφικής άλγεβρας Virasoro (2.10.124) είναι μεγαλύτερο από αυτό της ολομορφικής. Έτσι η θεωρία είναι χειραλική, υπάρχει ανωμαλία βαθμίδας, και ο τανυστής ενέργειας-ορμής δεν μπορεί να συζευχθεί με την μετρική του διδιάστατου κοσμικού φύλλου χωρίς την παρουσία ανωμαλίας. Το πρόβλημα αυτό λύνεται με την προσθήκη χειραλικής μάζας προκειμένου τα επίπεδα της δεξιόστροφης και αριστερόστροφης της άλγεβρας ρευμάτων να εξισωθούν οδηγώντας σε ίσα κεντρικά φορτία για τους αντίστοιχους δύο τομείς της άλγεβρας Virasoro. Όμως, οι νέοι χειραλικοί βαθμοί ελευθερίας, δέν συμμετέχουν στην ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης και για αυτό το λόγο η διαφορά  $k_R - k_L$  καθώς και η  $c_R - c_L$  παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της ροής.

Παρόλα αυτά, τα παραπάνω επιχειρήματα είναι μόνο ενδεικτικά και για την απόδειξη της πρότασης (2.10.157) χρειάζεται ο ακριβής υπολογισμός της  $c$ -συνάρτησης κεντρικού φορτίου του Zamolodchikov. Ο αναλυτικός αυτός υπολογισμός παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3 στην αντίστοιχη υποενότητα και το αποτέλεσμά του επιβεβαιώνει την υπόθεση (2.10.157).

## 2.10.2 Διπλά παραμορφωμένο πρότυπο

Το κύριο αντικείμενο της παρούσας υποενότητας είναι σύμμορφες θεωρίες πεδίου αποτελούμενες από το άθροισμα δύο διαφορετικών WZW προτύπων με ίδια [39] ή διαφορετική [40] τάξη άλγεβρας ρευμάτων, διαταραγμένες από διγραμμικούς τελεστές που αναμιγνύουν τα δύο διαφορετικά WZW πρότυπα. Η κατασκευή της ενεργού δράσης τέτοιων παραμορφώσεων βασίζεται σε μη-συμμετρική βάνιση (ως προς τον δεξιόστροφο και αριστερόστροφο τομέα) των WZW θεωριών. Η τελική παραμορφωμένη θεωρία σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις θα είναι πάλι αναλλοίωτη κάτω από μια μη-διαταρακτική συμμετρία που θα εμπεριέχει την αντιστροφή των παραμέτρων ζεύξης, ενώ η αρχική ολοκληρωσιμότητα της θεωρίας θα διατηρείται και μετά την παραμόρφωση.

## Συμμετρικό διπλά παραμορφωμένο πρότυπο

### Κατασκευή

Για την περίπτωση του συμμετρικού διπλά παραμορφωμένου προτύπου, η αρχική σύμμορφη θεωρία που διαταράσσεται είναι το άθροισμα δύο WZW προτύπων με ίδιας τάξης  $k$  άλγεβρα ρευμάτων  $S_{\text{CFT}}(g_1, g_2) = S_{\text{WZW},k}(g_1) + S_{\text{WZW},k}(g_2)$  με τα  $g_{1,2}$  να ανήκουν σε μία συμπαγή,

ημι-απλή ομάδα Lie.

Η κατασκευή της ενεργού δράσης αυτών των προτύπων γίνεται όπως και των αντίστοιχων απλά παραμορφωμένων, με την διαφορά ότι η συμμετρικά βαθμιασμένη WZW δράση (2.10.3) αντικαθίσταται από την [140]

$$S_k(g, A_{\pm}, B_{\pm}) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ g g^{-1} - B_+ g^{-1} \partial_- g + A_- g B_+ g^{-1} - \frac{1}{2} A_- A_+ - \frac{1}{2} B_+ B_-), \quad (2.10.158)$$

όπου υπάρχουν δύο διαφορετικού τύπου πεδία βαθμιάδας  $A_{\pm}$  και  $B_{\pm}$  που παίρνουν τιμές στην άλγεβρα, ενώ

$$S_{WZW,k}(g) = \frac{k}{2\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(g^{-1} \partial_- g) + \frac{k}{12\pi} \int \text{Tr}(g^{-1} dg)^3, \quad (2.10.159)$$

όπου ο συντελεστής του τοπολογικού WZ όρου έχει προκύψει με χρήση της ταυτότητας Polyakov-Wiegman

$$S_{WZW,k}(g_1 g_2) = S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) - \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(g_1^{-1} \partial_- g_1 \partial_+ g_2 g_2^{-1}). \quad (2.10.160)$$

Η δράση (2.10.158) δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμιάδας, αντιθέτως, κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\delta g = g u_R - u_L g, \quad \delta A_{\pm} = -\partial_{\pm} u_L + [A_{\pm}, u_L], \quad \delta B_{\pm} = -\partial_{\pm} u_R + [B_{\pm}, u_R],$$

με διαφορετικές απειροστές παραμέτρους  $u_L$  και  $u_R$  για τον αριστερόστροφο και δεξιόστροφο μετασχηματισμό αντίστοιχα, μετασχηματίζεται ως

$$\delta S_k(g, A_{\pm}, B_{\pm}) = \frac{k}{2\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}[(A_+ \partial_- u_L - A_- \partial_+ u_L) - (B_+ \partial_- u_R - B_- \partial_+ u_R)],$$

κάνοντας εμφανή την ύπαρξη μιας κλασικής ανωμαλίας βαθμιάδας. Η ανωμαλία αυτή είναι ανεξάρτητη από το στοιχείο  $g \in G$ , κάτι που χρησιμοποιείται στην κατασκευή του υπό μελέτη λ-πρότυπου.

Συνδυάζοντας την βαθμιασμένη δράση (2.10.158) με άλλη μία ίδιου τύπου, αλλά με τα πεδία

βαθμίδας  $A_{\pm}, B_{\pm}$  εναλλαγμένα, καθώς και με δύο βαθμισμένα PCMs προκύπτει

$$\begin{aligned}
S_k(g_1, g_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, A_{\pm}, B_{\pm}) = & S_{WZW,k}(g_1, A_{\pm}, B_{\pm}) + S_{WZW,k}(g_2, B_{\pm}, A_{\pm}) \\
& - \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(t^a \tilde{g}_1^{-1} D_+ \tilde{g}_1) E_{1ab} \text{Tr}(t^b \tilde{g}_1^{-1} D_- \tilde{g}_1) \\
& - \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(t^a \tilde{g}_2^{-1} D_+ \tilde{g}_2) E_{2ab} \text{Tr}(t^b \tilde{g}_2^{-1} D_- \tilde{g}_2),
\end{aligned} \quad (2.10.161)$$

όπου οι πίνακες  $E_{1,2}$  παραμετροποιούν τις παραμέτρους ζεύξης των δύο PCM και οι συναλλοιώτες παραγωγίσεις των  $\tilde{g}_{1,2}$  ορίζονται ως

$$D_{\pm} \tilde{g}_1 = \partial_{\pm} \tilde{g}_1 - A_{\pm} \tilde{g}_1, \quad D_{\pm} \tilde{g}_2 = \partial_{\pm} \tilde{g}_2 - B_{\pm} \tilde{g}_2.$$

Η τελευταία δράση είναι αναλλοιώτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\begin{aligned}
\delta g_1 &= g_1 u_R - u_L g_1, & \delta g_2 &= g_2 u_L - u_R g_2, \\
\delta \tilde{g}_1 &= -u_L \tilde{g}_1, & \delta \tilde{g}_2 &= -u_R \tilde{g}_2 \\
\delta A_{\pm} &= -\partial_{\pm} u_L + [A_{\pm}, u_L], & \delta B_{\pm} &= -\partial_{\pm} u_R + [B_{\pm}, u_R]
\end{aligned}$$

και μάλιστα οι δύο τελευταίες γραμμές της (2.10.161) που αφορούν τα PCMs είναι αναλλοιώτες από μόνες τους. Αυτό σημαίνει πως ο όρος  $S_{WZW,k}(g_2, B_{\pm}, A_{\pm})$ , παρόλο που εξαρτάται από  $g_2$ , συνεισέφερε στην άρση της ανωμαλίας βαθμίδας που παρουσίαζε η βαθμισμένη W-ZW δράση (2.10.158).

Επιλέγοντας τη βαθμίδα  $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \mathbb{1}$  και ορίζοντας τις παραμέτρους

$$\lambda_i = k(k\mathbb{1} + E_i)^{-1}, \quad i = 1, 2, \quad (2.10.162)$$

οι οποίες θα προκύψουν να είναι και οι παράμετροι της παραμόρφωσης, προκύπτει τελικά η βαθμισμένη δράση

$$\begin{aligned}
S_k(g_1, g_2, A_{\pm}, B_{\pm}) = & S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) \\
& + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - B_+ g_1^{-1} \partial_- g_1 + A_- g_1 B_+ g_1^{-1} - A_+ \lambda_1^{-1} A_- \\
& B_- \partial_+ g_2 g_2^{-1} - A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2 + B_- g_2 A_+ g_2^{-1} - B_+ \lambda_2^{-1} B_-).
\end{aligned} \quad (2.10.163)$$

Στη συνέχεια, διαφορίζοντας ως προς τα πεδία βαθμίδας προκύπτει

$$\begin{aligned}
A_+ &= i(\mathbb{1} - \lambda_1^T D_1 \lambda_2^T D_2)^{-1} \lambda_1^T (J_{1+} + D_1 \lambda_2^T J_{2+}), \\
A_- &= -i(\mathbb{1} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1} \lambda_1 (J_{2-} + D_2^T \lambda_2 J_{1-})
\end{aligned} \quad (2.10.164)$$



και

$$\begin{aligned} B_+ &= i(\mathbb{1} - \lambda_2^T D_2 \lambda_1^T D_1)^{-1} \lambda_2^T (J_{2+} + D_2 \lambda_1^T J_{1+}), \\ B_- &= -i(\mathbb{1} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1} \lambda_2 (J_{1-} + D_1^T \lambda_1 J_{2-}), \end{aligned} \quad (2.10.165)$$

με

$$\begin{aligned} J_{i+}^a &= -i \text{Tr}(t^a \partial_+ g_i g_i^{-1}), \quad J_{i-}^a = -i \text{Tr}(t^a g_i^{-1} \partial_- g_i), \\ (D_i)_{ab} &= \text{Tr}(t^a g_i t^b g_i^{-1}), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.10.166)$$

Αντικαθιστώντας στη δράση (2.10.163) προκύπτει η δράση του  $\sigma$ -προτύπου, η οποία σε μορφή πίνακα είναι

$$\begin{aligned} S_{k,\lambda_1,\lambda_2}(g_1, g_2) &= S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) \\ &+ \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \begin{pmatrix} J_{1+} & J_{2+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{21} \lambda_1 D_2^T \lambda_2 & \Lambda_{21} \lambda_1 \\ \Lambda_{12} \lambda_2 & \Lambda_{12} \lambda_2 D_1^T \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{1-} \\ J_{2-} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10.167)$$

όπου έχουν ορισθεί επιπλέον οι ακόλουθοι πίνακες

$$\Lambda_{12} = (\mathbb{1} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1}, \quad \Lambda_{21} = (\mathbb{1} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1}. \quad (2.10.168)$$

Η δράση (2.10.167) έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

1. Αναλλοιότητα κάτω από την εναλλαγή των δύο αρχικών προτύπων, δηλαδή κάτω από την εναλλαγή των δεικτών  $1 \leftrightarrow 2$ .
2. Αναλλοιότητα κάτω από τη δυϊκού τύπου συμμετρία

$$k \rightarrow -k, \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_1^{-1}, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_2^{-1}, \quad g_1 \rightarrow g_2^{-1}, \quad g_2 \rightarrow g_1^{-1}, \quad (2.10.169)$$

κάτω από την οποία

$$\begin{aligned} D_1 &\rightarrow D_2^T, & J_{1+} &\rightarrow -D_2^T J_{2+}, & J_{1-} &\rightarrow -D_2 J_{2-}, \\ D_2 &\rightarrow D_1^T, & J_{2+} &\rightarrow -D_1^T J_{1+}, & J_{2-} &\rightarrow -D_1 J_{1-}. \end{aligned}$$

3. Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες συμμετρίες, προκύπτει αναλλοιότητα της δράσης (2.10.167) κάτω από

$$k \rightarrow -k, \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_2^{-1}, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_1^{-1}, \quad g_1 \rightarrow g_1^{-1}, \quad g_2 \rightarrow g_2^{-1}. \quad (2.10.170)$$

4. Ανάλογα με την μορφή των πινάκων  $\lambda_i$  η (2.10.167) μπορεί να εμφανίζει κάποιες

καθολικές ισομετρίες. Για την περίπτωση που οι πίνακες αυτοί είναι ανάλογοι του ταυτοτικού, εμφανίζει την ακόλουθη καθολική συμμετρία

$$g_1 \rightarrow \Lambda_L^{-1} g_1 \Lambda_R, \quad g_2 \rightarrow \Lambda_R^{-1} g_2 \Lambda_L, \quad \Lambda_L, \Lambda_R \in G, \quad (2.10.171)$$

η οποία για διαφορετικές επιλογές των  $\lambda_i$  μπορεί να είναι μερικώς ή ολικώς παραβιασμένη.

Όταν τα στοιχεία των πινάκων  $\lambda_i$  είναι μικρά, η δράση (2.10.167) παίρνει τη διαταρακτική μορφή

$$S_{k,\lambda_1,\lambda_2} = S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma (\lambda_1^{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b + \lambda_2^{ab} J_{2+}^a J_{1-}^b) + \dots \quad (2.10.172)$$

αναπαριστώντας μια παραμόρφωση των αρχικών WZW προτύπων κατά δύο διγραμμικούς όρους αλληλεπίδρασης ρευμάτων. Η διαφορά αυτού του προτύπου από το (2.10.20) είναι ότι οι αλληλεπιδράσεις στην προκειμένη περίπτωση είναι μεταξύ ρευμάτων που ανήκουν σε διαφορετικά WZW πρότυπα με ίδια τάξη άλγεβρας ρευμάτων  $k$ <sup>19</sup>.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι εάν ένας από τους  $\lambda_i$  πίνακες είναι μηδενικός, τότε η διαταρακτική δράση (2.10.172) είναι ακριβής ως προς τον άλλο πίνακα [141],[142].

### Ολοκληρωσιμότητα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται εν συντομία η απόδειξη ότι η θεωρία (2.10.167) είναι κλασικά ολοκληρώσιμη για συγκεκριμένες επιλογές των πινάκων  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  για τις οποίες προκύπτει η (2.10.15) (για  $\lambda = \lambda_1$  και  $\lambda = \lambda_2$  ξεχωριστά).

Για να δειχθεί η κατά Liouville ολοκληρωσιμότητα της θεωρίας αρκεί να δειχθεί ότι οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν με την βοήθεια ενός ζεύγους Lax και ότι τα ολοκληρώματα κίνησης που προκύπτουν είναι μεταξύ τους in involution, δηλαδή μετατιθέμενα κατά Poisson.

Ξεκινώντας από την βαθμισμένη δράση (2.10.163) και διαφορίζοντας ως προς τα πεδία βαθμίδας  $A_{\pm}$ ,  $B_{\pm}$  προκύπτουν οι εξισώσεις (2.10.164) και (2.10.165) οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να έρθουν στη μορφή

$$D_+ g_1 g_1^{-1} = (\lambda_1^{-T} - 1)A_+, \quad g_2^{-1} D_- g_2 = -(\lambda_1^{-1} - 1)A_1 \quad (2.10.173)$$

και

$$D_+ g_2 g_2^{-1} = (\lambda_2^{-T} - 1)B_+, \quad g_1^{-1} D_- g_1 = -(\lambda_2^{-1} - 1)B_-, \quad (2.10.174)$$

<sup>19</sup>Το πρότυπο (2.10.167),(2.10.172) διαφέρει επίσης από την περίπτωση αλληλεπίδρασης δύο διαφορετικών WZW προτύπων με  $k_1 \neq k_2$  που θα εξετασθεί αμέσως μετά.

ένώ από τη διαφορίση ως προς  $g_1, g_2$  προκύπτουν οι

$$D_-(D_+g_1g_1^{-1}) = F_{+-}^{(A)}, \quad D_-(D_+g_2g_2^{-1}) = F_{+-}^{(B)}, \quad (2.10.175)$$

με

$$F_{+-}^{(A)} = \partial_+A_- - \partial_-A_+ - [A_+, A_-], \quad F_{+-}^{(B)} = \partial_+B_- - \partial_-B_+ - [B_+, B_-]. \quad (2.10.176)$$

Οι τελευταίες, γράφονται ισοδύναμα και ως

$$D_+(g_1^{-1}D_-g_1) = F_{+-}^{(B)}, \quad D_+(g_2^{-1}D_-g_2)F_{+-}^{(A)}. \quad (2.10.177)$$

Οι διάφορες συναλλοίωτες παράγωγοι ορίζονται με βάση τον τρόπο που μετασχηματίζονται τα διάφορα αντικείμενα πάνω στα οποία δρουν. Για παράδειγμα, η  $D_{\pm}g_1 = \partial_{\pm}g_1 - A_{\pm}g_1 + g_1B_{\pm}$  εμπεριέχει και τα  $A_{\pm}$  και τα  $B_{\pm}$  πεδία βαθμίδας, ενώ η  $D_-(D_+g_1g_1^{-1}) = \partial_-(D_+g_1g_1^{-1}) - [A_-, (D_+g_1g_1^{-1})]$  μόνο τα  $A_{\pm}$ .

Αντικαθιστώντας τους περιορισμούς (2.10.173) και (2.10.174) στις (2.10.175) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις κίνησης για το διπλά παραμορφωμένο  $\lambda$ -πρότυπο

$$\begin{aligned} \partial_+A_- - \partial_-(\lambda_1^{-T}A_+) &= [\lambda_1^{-T}A_+, A_-], \\ \partial_+(\lambda_1^{-1}A_-) - \partial_-A_+ &= [A_+, \lambda_1^{-1}A_-] \end{aligned} \quad (2.10.178)$$

και

$$\begin{aligned} \partial_+B_- - \partial_-(\lambda_2^{-T}B_+) &= [\lambda_2^{-T}B_+, B_-], \\ \partial_+(\lambda_2^{-1}B_-) - \partial_-B_+ &= [B_+, \lambda_2^{-1}B_-]. \end{aligned} \quad (2.10.179)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις γίνεται φανερό ότι οι εξισώσεις κίνησης χωρίζονται σε δύο ίδιες μορφής σύνολα τα οποία φαίνεται να είναι αποσυζευγμένα το ένα από το άλλο, παρόλο που τα πεδία  $A_{\pm}$  και  $B_{\pm}$  εξαρτώνται και από τα  $(g_1, \lambda_1)$  και τα  $(g_2, \lambda_2)$ . Κάθε σύνολο εξισώσεων κίνησης από τα δύο πάνω ταυτίζεται με το αντίστοιχο (2.10.25) που θα προέκυπτε κάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς στο απλά παραμορφωμένο πρότυπο (2.10.15), και πιο συγκεκριμένα στη βαθμισμένη δράση (2.10.10) πριν την αντικατάσταση των πεδίων βαθμίδας, κρατώντας είτε το  $\lambda_1 = \lambda$  είτε  $\lambda_2 = \lambda$ . Συνεπώς, όλες οι επιλογές πινάκων που καταλήγουν σε ολοκληρώσιμες θεωρίες για το απλά παραμορφωμένο πρότυπο και μελετήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, δίνουν ολοκληρώσιμες θεωρίες και στην περίπτωση της διπλής παραμόρφωσης, με τα ζεύγη Lax τώρα να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\partial_+\mathcal{L}_-^{(i)} - \partial_-\mathcal{L}_+^{(i)} = [\mathcal{L}_+^{(i)}, \mathcal{L}_-^{(i)}], \quad \mathcal{L}_{\pm}^{(i)} = \mathcal{L}_{\pm}^{(i)}(\tau, \sigma; \zeta_i), \quad \zeta_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2. \quad (2.10.180)$$

Πρέπει να τονισθεί εδώ, οτί προτού εξαχθεί αυτό το συμπέρασμα για την ολοκληρωσιμότητα των διπλά παραμορφωμένων προτύπων έχει προηγηθεί έλεγχος [39] ότι τα διατηρούμενα φορτία που προκύπτουν από τα σύνολα ολοκληρώσιμων προτύπων (2.10.178) και (2.10.179) είναι in involution μεταξύ τους και συνεπώς τα άπειρα φορτία που παράγονται από τα  $\mathcal{L}_{\pm}^{(1)}$  και  $\mathcal{L}_{\pm}^{(2)}$  είναι ανεξάρτητα.

### Μη-συμμετρικό διπλά παραμορφωμένο πρότυπο

Το πρότυπο που παρουσιάζεται σε αυτήν την υποενότητα μελετάται αναλυτικά στην [40] και αποτελεί μία γενίκευση του διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου που αναλύθηκε προηγουμένως. Η διαταρακτική θεωρία τώρα αντιστοιχεί στην παραμόρφωση μίας σύμμορφης θεωρίας πεδίου η οποία αποτελείται από το άθροισμα δύο WZW δράσεων με διαφορετικά, αυτή τη φορά, επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων

$$S_{k_1, k_2, \lambda_1 \lambda_2}(g_1, g_2) = S_{WZW, k_1}(g_1) + S_{WZW, k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma (\lambda_1^{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b + \lambda_2^{ab} J_{2+}^a J_{1-}^b) + \dots \quad (2.10.181)$$

Η διαφορά αυτού του προτύπου από το αντίστοιχο συμμετρικό είναι ότι κάτω από την ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης προς τις χαμηλές ενέργειες, η μη-συμμετρική θεωρία ρέει σε ένα καινούριο σταθερό σημείο. Κατά την κατασκευή της θεωρίας προκύπτουν δύο παράμετροι παραμόρφωσης  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  και η φύση της νέας θεωρίας στο καινούριο σταθερό σημείο εξαρτάται από την ροή των δύο αυτών παραμέτρων.

### Κατασκευή

Η εύρεση της ενεργού δράσεως που αντιστοιχεί στην (2.10.181) βασίζεται πάλι στην διαδικασία της μη-συμμετρικής (ως προς τον αριστερόστροφο και δεξιόστροφο τομέα) βάρθμισης της WZW δράσης (2.10.158). Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αυτά της ενότητας για το απλά παραμορφωμένο μη-συμμετρικό πρότυπο, μετά την επιλογή βαθμίδας  $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \mathbb{1}$  προκύπτει η δράση

$$S(g_1, g_2; A_{\pm}, B_{\pm}) = S_{WZW, k_1}(g_1) + S_{WZW, k_2}(g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma \text{Tr}(A_+ \lambda_1^{-1} A_- + B_+ \lambda_2^{-1} B_-) + \frac{k_1}{\pi} \int d^2 \sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - B_+ g_1^{-1} \partial_- g_1 + A_- g_1 B_+ g_1^{-1}) + \frac{k_2}{\pi} \int d^2 \sigma \text{Tr}(B_- \partial_+ g_2 g_2^{-1} - A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2 + B_- g_2 A_+ g_2^{-1}), \quad (2.10.182)$$

με

$$\lambda_i = \sqrt{k_1 k_2} \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \mathbb{1} + E_i \right)^{-1}. \quad (2.10.183)$$

Ουσιαστικά η δράση αυτή με  $k_1 = k_2$  ταυτίζεται με την (2.10.163). Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα οι μη-συμμετρικά βαθμισμένες WZW θεωρίες έχουν διαφορετικά επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων.

Η διαφορίση ως προς τα πεδία βαθμίδας δίνει

$$\begin{aligned} A_+ &= i(\mathbb{1} - \lambda_1^T D_1 \lambda_2^T D_2)^{-1} \lambda_1^T (\lambda_0 J_{1+} + D_1 \lambda_2^T J_{2+}), \\ A_- &= -i(\mathbb{1} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1} \lambda_1 (\lambda_0^{-1} J_{2-} + D_2^T \lambda_2 J_{1-}) \end{aligned} \quad (2.10.184)$$

και

$$\begin{aligned} B_+ &= i(\mathbb{1} - \lambda_2^T D_2 \lambda_1^T D_1)^{-1} \lambda_2^T (\lambda_0^{-1} J_{2+} + D_2 \lambda_1^T J_{1+}), \\ B_- &= -i(\mathbb{1} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1} \lambda_2 (\lambda_0 J_{1-} + D_1^T \lambda_1 J_{2-}), \end{aligned} \quad (2.10.185)$$

με  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$ .

Αντικαθιστώντας στη δράση (2.10.182) προκύπτει η δράση του  $\sigma$ -προτύπου, η οποία σε μορφή πίνακα είναι η

$$\begin{aligned} S_{k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2}(g_1, g_2) &= S_{WZW, k_1}(g_1) + S_{WZW, k_2}(g_2) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \begin{pmatrix} J_{1+} & J_{2+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \Lambda_{21} \lambda_1 D_2^T \lambda_2 & k_2 \lambda_0 \Lambda_{21} \lambda_1 \\ k_1 \lambda_0^{-1} \Lambda_{12} \lambda_2 & k_2 \Lambda_{12} \lambda_2 D_1^T \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{1-} \\ J_{2-} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10.186)$$

όπου έχουν ορισθεί επιπλέον οι πίνακες

$$\Lambda_{12} = (\mathbb{1} - \lambda_2 D_1^T \lambda_1 D_2^T)^{-1}, \quad \Lambda_{21} = (\mathbb{1} - \lambda_1 D_2^T \lambda_2 D_1^T)^{-1}. \quad (2.10.187)$$

Τα πάνω αποτελέσματα για  $k_1 = k_2$  ταυτίζονται με αυτά για το απλά παραμορφωμένο μη-συμμετρικό πρότυπο και η δράση (2.10.186) εμφανίζει τις ίδιες συμμετρίες με την (2.10.167) με μόνη διαφορά ότι η δυϊκού τύπου συμμετρία τώρα είναι

$$k_1 \rightarrow -k_2, \quad k_2 \rightarrow -k_1, \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_1^{-1}, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_2^{-1}, \quad g_1 \rightarrow g_2^{-1}, \quad g_2 \rightarrow g_1^{-1}, \quad (2.10.188)$$

ενώ ο γενικευμένος μετασχηματισμός ομοτιμίας γίνεται

$$\sigma \rightarrow -\sigma, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_i^T, \quad k_1 \rightarrow k_2, \quad k_2 \rightarrow k_1, \quad g_1 \rightarrow g_2^{-1}, \quad g_2 \rightarrow g_1^{-1}. \quad (2.10.189)$$

Για μικρές τιμές των στοιχείων των πινάκων  $\lambda_i$  η δράση (2.10.186) παίρνει τη μορφή της (2.10.181) αναπαριστώντας αλληλεπιδράσεις μεταξύ ρευμάτων δύο WZW προτύπων με διαφορετικά επίπεδα άλγεβρας. Συνεπώς, η πρώτη μπορεί να θεωρηθεί η ενεργός δράση της τελευταίας, εμπεριέχοντας όλες τις χβαντικές διορθώσεις προς τις παραμέτρους παραμόρφωσης  $\lambda_i$ .

Παρόλο που η δράση (2.10.181) είναι συμμετρική ως προς τις δεξιόστροφες και αριστερόστροφες άλγεβρες ρευμάτων των δύο WZW προτύπων, αναπαράγει πλήρως τα αποτελέσματα της χειραλικής θεωρίας (2.10.121) με  $k_1 = k_L$  και  $k_2 = k_R$

$$S = S_{WZW;k_1,k_2}(g) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma \lambda^{ab} J_+^a J_-^b, \quad (2.10.190)$$

και συνεπώς, με  $\lambda_2 = 0$  μπορεί να θεωρηθεί και ως η ενεργός δράση της χειραλικής θεωρίας. Αυτό συμβαίνει διότι όλες οι συναρτήσεις συσχετισμού που περιλαμβάνουν τελεστές του συνόλου  $\mathcal{O} = \{J_{1+}^a, J_{2-}^a, J_{1+}^a J_{2-}^b, \dots\}$  ή οποιονδήποτε άλλο σύνθετο τελεστή που κατασκευάζεται από αυτούς, μπορεί να υπολογισθεί σαν να μην υπήρχε η κορυφή της (2.10.181) που είναι ανάλογη του  $\lambda_2$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το OPE των ρευμάτων που εμφανίζονται στην πρώτη κορυφή αλληλεπίδρασης της (2.10.181) με αυτά που εμφανίζονται στην δεύτερη είναι πεπερασμένο. Έτσι, ο περιορισμός στο σύνολο  $\mathcal{O}$  τελεστών ισοδυναμεί με  $\lambda_2 = 0$  και οι χβαντικές ποσότητες σε όλες τις τάξεις ως προς  $\lambda$  και σε τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  ταυτίζονται για τα δύο πρότυπα (2.10.181), (2.10.190) όπως θα φανεί και στην συνέχεια.

Δουλεύοντας στο όριο  $\lambda_2 \rightarrow 0$  και μετονομάζοντας το  $\lambda_1$  σε  $\lambda$ , η δράση (2.10.186) απλοποιείται στην

$$S_{k_1,k_2,\lambda}(g_1, g_2) = S_{WZW,k_1}(g_1) + S_{WZW,k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma \lambda_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b, \quad (2.10.191)$$

κάνοντας την διαταρακτική έκφραση (2.10.181) ακριβή ως προς  $\lambda^{20}$ . Εφόσον τα ρεύματα  $J_{2+}^a$  και  $J_{1-}^a$  δεν εμφανίζονται στη δράση (2.10.191) δεν αποκτούν ανώμαλες διαστάσεις και συνεπώς, η θεωρία αυτή θα πρέπει να έχει χειραλικά και αντι-χειραλικά διατηρούμενα ρεύματα. Όντως, με την χρήση των ταυτοτήτων  $(D^T \partial_- D)^{ab} = f^{ab}_c J_-^c$  και  $(\partial_+ D D^T)^{ab} = f^{ab}_c J_+^c$ , οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη διαφόριση της δράσης ως προς τα στοιχεία της ομάδας έρχονται στη μορφή

$$\begin{aligned} \partial_- \mathcal{J}_+ &= 0, & \mathcal{J}_+ &= \lambda_0^{-1} J_{2+} + D_2 \lambda^T J_{1+} \\ \partial_+ \mathcal{J}_- &= 0, & \mathcal{J}_- &= \lambda_0 J_{1-} + D_1^T \lambda J_{2-}, \end{aligned} \quad (2.10.192)$$

<sup>20</sup>Η περίπτωση αυτή αλλά με  $k_1 = k_2$  έχει εξεταστεί στις [141],[142].

όπου τα νέα χειραλικά και αντι-χειραλικά διατηρούμενα ρεύματα  $\mathcal{J}_\pm$  αποτελούν παραμορφώσεις των  $J_{2+}$  και  $J_{1-}$ , με τα οποία ταυτίζονται για  $\lambda = 0$ . Αυτό είναι συνεπές με το μηδενισμό των ανώμαλων διαστάσεών τους.

### Ολοκληρωσιμότητα

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζεται η απόδειξη για την ολοκληρωσιμότητα της (2.10.186) με τους πίνακες  $\lambda_i$  να είναι διαγώνιοι και ισοτροπικοί:  $(\lambda_1)_{ab} = \lambda_1 \delta_{ab}$  και  $(\lambda_2)_{ab} = \lambda_2 \delta_{ab}$ <sup>21</sup>. Δουλεύοντας όπως και πριν και διαφορίζοντας τη βαθμισμένη δράση (2.10.182) ως προς τα πεδία βαθμίδας προκύπτουν οι περιορισμοί

$$\begin{aligned} D_+ g_1 g_1^{-1} &= (\lambda_0^{-1} \lambda_1^{-T} - 1) A_+, & g_2^{-1} D_- g_2 &= -(\lambda_0 \lambda_1^{-1} - 1) A_-, \\ D_+ g_2 g_2^{-1} &= (\lambda_0 \lambda_2^{-T} - 1) B_+, & g_1^{-1} D_- g_1 &= -(\lambda_0^{-1} \lambda_2^{-1} - 1) B_-, \end{aligned} \quad (2.10.193)$$

ενώ διαφορίζοντας ως προς τα στοιχεία της ομάδας προκύπτουν πάλι οι (2.10.175)-(2.10.177). Αντικαθιστώντας τις πρώτες στις τελευταίες, προκύπτουν για διαγώνιους πίνακες  $(\lambda_i)_{ab} = \lambda_i \delta_{ab}$  οι εξισώσεις κίνησης

$$\partial_- A_+ = -\frac{1 - \lambda_0 \lambda_1}{1 - \lambda_1^2} [A_+, A_-], \quad \partial_+ A_- = \frac{1 - \lambda_0^{-1} \lambda_1}{1 - \lambda_1^2} [A_+, A_-] \quad (2.10.194)$$

και

$$\partial_- B_+ = -\frac{1 - \lambda_0^{-1} \lambda_2}{1 - \lambda_2^2} [B_+, B_-], \quad \partial_+ B_- = \frac{1 - \lambda_0 \lambda_2}{1 - \lambda_2^2} [B_+, B_-]. \quad (2.10.195)$$

Τα ζεύγη Lax  $\mathcal{L}_\pm(\tau, \sigma; \zeta_i)$  με  $\zeta_i \in \mathbb{C}$  που ικανοποιούν τις αντίστοιχες εξισώσεις

$$\partial_+ \mathcal{L}_-^{(i)} - \partial_- \mathcal{L}_+^{(i)} = [\mathcal{L}_+^{(i)}, \mathcal{L}_-^{(i)}]$$

είναι

$$\mathcal{L}_\pm^{(1)} = \frac{2\zeta_1}{\zeta_1 \mp 1} \tilde{A}_\pm, \quad \tilde{A}_+ = \frac{1 - \lambda_0^{-1} \lambda_1}{1 - \lambda_1^2} A_+, \quad \tilde{A}_- = \frac{1 - \lambda_0 \lambda_1}{1 - \lambda_1^2} A_- \quad (2.10.196)$$

για την (2.10.194), και

$$\mathcal{L}_\pm^{(2)} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 \mp 1} \tilde{B}_\pm, \quad \tilde{B}_+ = \frac{1 - \lambda_0 \lambda_2}{1 - \lambda_2^2} B_+, \quad \tilde{B}_- = \frac{1 - \lambda_0^{-1} \lambda_2}{1 - \lambda_2^2} B_- \quad (2.10.197)$$

για την (2.10.195).

Προκειμένου να ολοκληρωθεί η απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας, πρέπει επίσης να δειχθεί ότι τα διατηρούμενα φορτία που παράγονται από τα δύο ζεύγη εξισώσεων είναι μεταξύ τους in

<sup>21</sup>Για την περίπτωση  $k_1 = k_2$  η ολοκληρωσιμότητα έχει αποδειχθεί στις [39],[62].

involution. Μέσω ενός επαναορισμού των ενδεδυμένων ρευμάτων προκειμένου να γραφούν συναρτήσει των πεδίων βαθμίδας

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_+^{(1)} &= D_+ g_1 g_1^{-1} + A_+ - A_-, & \mathcal{J}_-^{(1)} &= -g_1^{-1} D_- g_1 + B_- - B_+, \\ \mathcal{J}_+^{(2)} &= D_+ g_2 g_2^{-1} + B_+ - B_-, & \mathcal{J}_-^{(2)} &= -g_2^{-1} D_- g_2 + A_- - A_+, \end{aligned} \quad (2.10.198)$$

οι εξισώσεις κίνησης (2.10.193) γίνονται

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_+^{(1)} &= \lambda_0^{-1} \lambda_1^T A_+ - A_-, & \mathcal{J}_-^{(1)} &= \lambda_0^{-1} \lambda_2^{-1} B_- - B_+, \\ \mathcal{J}_+^{(2)} &= \lambda_0 \lambda_2^{-T} B_+ - B_-, & \mathcal{J}_-^{(2)} &= \lambda_0 \lambda_1^{-1} A_- - A_+.\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας στη συνέχεια τις εξισώσεις αυτές, προκύπτουν τα πεδία  $A_\pm$  και  $B_\pm$  συναρτήσει των ενδεδυμένων ρευμάτων τα οποία ικανοποιούν τέσσερα αντίγραφα άλγεβρας ρευμάτων

$$\{\mathcal{J}_\pm^{(i)a}(\sigma_1), \mathcal{J}_\pm^{(i)b}(\sigma_2)\} = \frac{2}{k_i} f_{abc} \mathcal{J}^{(i)c} \delta(\sigma_{12}) + \frac{2}{k_i} \delta_{ab} \delta'(\sigma_{12}), \quad \{\mathcal{J}_\pm^{(i)a}, \mathcal{J}_\mp^{(i)b}\} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Είναι τώρα εύκολο να δειχθεί ότι  $\{A_\pm, B_\pm\}_{\text{P.B.}} = 0$  αποδεικνύοντας ότι τα διατηρούμενα φορτία που παράγονται από τα ζεύγη Lax (2.10.196) είναι in involution με αυτά που παράγονται από τα (2.10.197) και συνεπώς, η θεωρία (2.10.186) με διαγώνιους και ισοτροπικούς πίνακες παραμόρφωσης διατηρεί την ολοκληρωσιμότητά της.

### Συναρτήσεις ομάδας επανακανονικοποίησης

Το γεγονός ότι οι δύο σύμμορφες θεωρίες της (2.10.181) είναι αποσυζευγμένες υπονοεί ότι δεν υπάρχει μίξη μεταξύ των δύο παραμέτρων παραμόρφωσης  $\lambda_{1,2}$ . Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως οι  $\beta$ -συναρτήσεις και οι ανώμαλες διαστάσεις ταυτίζονται με αυτήν του απλά παραμορφωμένου μη-συμμετρικού προτύπου για  $k_L = k_1$  και  $k_R = k_2$ . Πιο συγκεκριμένα, οι  $\beta$ -συναρτήσεις για διαγώνιους και ισοτροπικούς πίνακες παραμόρφωσης είναι

$$\frac{d\lambda_i}{d \ln \mu^2} = -\frac{c_G}{2\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda_i^2 (\lambda_i - \lambda_0)(\lambda_i - \lambda_0^{-1})}{(1 - \lambda_i^2)^2}. \quad (2.10.199)$$

Για την απόδειξη αυτού του επιχειρήματος, έχει υπολογισθεί η  $\beta$ -συνάρτηση της διπλά παραμορφωμένης μη-συμμετρικής θεωρίας [40] ως η ροή κατά Ricci, με χρήση τεχνικών βαρύτητας  $\sigma$ -προτύπων.

Συνοπτικά, ξεκινώντας από την δράση (2.10.191) με τις παραμέτρους  $\lambda_2 = 0$  και  $(\lambda_1)_{ab} =$



$\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}^{22}$ , η  $\beta$ -συνάρτηση σε πρώτη τάξη ως προς το  $1/k$  δίνεται από την (2.4.7)

$$\frac{d}{dt}(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}^-, \quad (2.10.200)$$

όπου ο ταυιστής Ricci σε αυτήν την περίπτωση περιλαμβάνει και την στρέψη της πολλαπλότητας της ομάδας  $G$  η οποία ορίζεται ως

$$H = dB = H_0 + H_\lambda, \quad B = B_0 + \lambda_0 \lambda R^a \wedge L^{\hat{a}}, \quad (2.10.201)$$

με το  $B_0$  να αντιστοιχεί στη 2-μορφή των δύο WZW προτύπων,  $L^{\hat{a}} = L_2^a$  και  $R^a = R_1^a$  να είναι η αριστερή και δεξιά Mauer-Cartan μορφή αντίστοιχα όπως ορίστηκαν στην (2.10.4) και

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{1}{6} f_{abc} \left( \lambda_0^2 R^a \wedge R^b \wedge R^c + L^{\hat{a}} \wedge L^{\hat{b}} \wedge L^{\hat{c}} \right) \\ H_\lambda &= \lambda_0 \lambda d(R^a \wedge L^{\hat{a}}). \end{aligned} \quad (2.10.202)$$

Σε όλα τα παραπάνω και σε ότι ακολουθεί έχει παραλειφθεί ένας συνολικός κοινός παράγοντας  $k_2/2$ .

Στη συνέχεια, γράφοντας τη μετρική  $ds^2 = \lambda_0^2 R^a R^a + L^{\hat{a}} L^{\hat{a}} + 2\lambda_0 \lambda R^a L^{\hat{a}}$  στη μορφή

$$ds^2 = e^a e^a + e^{\hat{a}} e^{\hat{a}}, \quad (2.10.203)$$

ορίζεται το σύστημα αναφοράς

$$e^a = \lambda_0 \sqrt{1 - \lambda^2} R^a, \quad e^{\hat{a}} = L^{\hat{a}} + \lambda_0 \lambda R^a. \quad (2.10.204)$$

Στο νέο σύστημα αναφοράς, η στρέψη είναι

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{6} f_{abc} \left( \frac{1 - 3\lambda^2 + 2\lambda_0 \lambda^3}{\lambda_0 (1 - \lambda^2)^{3/2}} e^a \wedge e^b \wedge e^c + e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\lambda(1 - \lambda_0 \lambda)}{\lambda_0 (1 - \lambda^2)} e^{\hat{a}} \wedge e^b \wedge e^c \right), \end{aligned} \quad (2.10.205)$$

απ' όπου προκύπτουν τα στοιχεία

$$H_{abc} = -\frac{1 - 3\lambda^2 + 2\lambda_0 \lambda^3}{\lambda_0 (1 - \lambda^2)^{3/2}} f_{abc}, \quad H_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = -f_{abc}, \quad H_{\hat{a}bc} = -\frac{\lambda(1 - \lambda_0 \lambda)}{\lambda_0 (1 - \lambda^2)} f_{abc}.$$

<sup>22</sup>Αυτό είναι συνεπές εφόσον το σημείο  $\lambda_2 = 0$  αποτελεί σταθερό UV σημείο της ροής κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης.

Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία αυτά και εισάγοντας τον συμβολισμό  $A = (a, \hat{a})$  για τις συνιστώσες των δύο ομάδων αντίστοιχα, είναι δυνατός ο υπολογισμός της σπιν σύνδεσης με στρέψη

$$\omega_{AB}^{\pm} = \omega_{AB} \pm H_{ABC}e^C = \omega_{AB|C}^{\pm}e^C, \quad (2.10.206)$$

όπου η απλή σπιν σύνδεση δίνεται από τη σχέση

$$de^A + \omega^A_B \wedge e^B = 0. \quad (2.10.207)$$

Τέλος, έχοντας τα στοιχεία  $\omega_{AB}^-$  υπολογίζεται ο γενικευμένος ταυυστής Riemann με στρέψη

$$R_{AB}^- = \frac{1}{2}R_{ABCD}^-e^C \wedge e^D = d\omega_{AB}^- + \omega_{AC}^- \wedge \omega_{CB}^-, \quad (2.10.208)$$

από τον οποίο προκύπτει ο ταυυστής Ricci. Μετά από λίγη άλγεβρα και την αλλαγή βάσης σε  $R^a, L^{\hat{a}}$  προκειμένου το σύστημα αναφοράς να είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου  $\lambda$ , προκύπτει η β-συνάρτηση για το διπλά παραμορφωμένο μη-συμμετρικό πρότυπο, η οποία επαναφέροντας τον παράγοντα  $k_2/2$ , ταυίζεται με την (2.10.199).

Από τους μη-τετριμένους μηδενισμούς των β-συναρτήσεων (2.10.199)  $\lambda_i = \lambda_0, \lambda_0^{-1}$  και θεωρώντας το σταθερό σημείο  $\lambda_i = \lambda_0 < 1$  ως το μόνο φυσικό με τα ίδια επιχειρήματα της ενότητας του μη-συμμετρικού απλά παραμορφωμένου προτύπου, είναι προφανές ότι η θεωρία ρέει κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης σε μία καινούρια σύμμορφη θεωρία στις χαμηλές ενέργειες. Η φύση της καινούριας σύμμορφης θεωρίας εξαρτάται από τον τρόπο που γίνεται η ροή. Υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις που θα εξετασθούν παρακάτω: Η μία είναι να ρέουν και οι δύο παράμετροι ζεύξης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης, ενώ η άλλη αντιστοιχεί στο να είναι πακτωμένο το  $\lambda_2$  στο UV σταθερό σημείο  $\lambda_2 = 0$  και να ρέει μόνο το  $\lambda_1 = \lambda$ .

### 1. Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$

Η αντίστοιχη σύμμορφη θεωρία προκύπτει αντικαθιστώντας στην (2.10.186)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ . Οι συμμετρίες αυτής της θεωρίας όμως, γίνονται πιο εύκολα εμφανείς από την δράση (2.10.182) η οποία γίνεται

$$\begin{aligned} S = & S_{WZW, k_1}(g_1) + S_{WZW, k_2}(g_2) \\ & + \frac{k_1}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - B_+ g_1^{-1} \partial_- g_1 + A_- g_1 B_+ g_1^{-1}) \\ & + \frac{k_2}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(B_- \partial_+ g_2 g_2^{-1} - A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2 + B_- g_2 A_+ g_2^{-1} - A_+ A_- - B_+ B_-). \end{aligned} \quad (2.10.209)$$

Για την μελέτη της φύσης της νέας αυτής σύμμορφης θεωρίας, εφαρμόζονται οι απει-

ροστοί μετασχηματισμοί

$$\begin{aligned}\delta g_1 &= g_1 u_R - u_L g_1, & \delta g_2 &= g_2 u_L - u_R g_2, \\ \delta A_{\pm} &= -\partial_{\pm} u_L + [A_{\pm}, u_L], & \delta B_{\pm} &= -\partial_{\pm} u_R + [B_{\pm}, u_R]\end{aligned}$$

στην πάνω δράση, η οποία αλλάζει κάτω από αυτούς ως

$$\delta S = \frac{k_2 - k_1}{\pi} \int d^2 \sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ u_L + B_+ \partial_- u_R).$$

Προφανώς, εάν  $u_L = u_L(\sigma^-)$  και  $u_R = u_R(\sigma^+)$  η (2.10.209) παραμένει αναλλοίωτη. Πιο λεπτομερής ανάλυση των συμμετριών της σύμμορφης αυτής θεωρίας επιτυγχάνεται γράφοντας τα πεδία βαθμίδας ως

$$A_{\pm} = \partial_{\pm} h_{\pm} h_{\pm}^{-1}, \quad B_{\pm} = \partial_{\pm} k_{\pm} k_{\pm}^{-1}, \quad h_{\pm}, k_{\pm} \in G. \quad (2.10.210)$$

Τότε, η πεπερασμένη μορφή των προηγούμενων απειροστών μετασχηματισμών είναι ισοδύναμη με τους μετασχηματισμούς  $h_{\pm} \rightarrow L^{-1} h_{\pm}$ ,  $k_{\pm} \rightarrow R^{-1} k_{\pm}$  και η δράση (2.10.209), χρησιμοποιώντας την σχέση Polyakov-Wiegmann, έρχεται στη μορφή

$$\begin{aligned}S &= S_{k_1}(h_-^{-1} g_1 k_+) + S_{k_2 - k_1}(k_-^{-1} g_2 h_+) - S_{k_2}(h_-^{-1} h_+) \\ &+ S_{k_1}(k_-^{-1} g_2 h_+) - S_{k_2}(k_-^{-1} k_+) + S_{k_2 - k_1}(h_-^{-1}) + S_{k_2 - k_1}(k_+),\end{aligned} \quad (2.10.211)$$

με  $S_{k_i} \equiv S_{WZW; k_i}$ . Η ομάδα συμμετρίας της σύμμορφης θεωρίας γίνεται εμφανής μετά την αλλαγή μεταβλητής  $g_1 \rightarrow g_1 h_+ k_+^{-1}$  και  $g_2 \rightarrow k_- h_-^{-1} g_2$ , όπου η δράση γράφεται ως

$$\begin{aligned}S &= S_{k_1}(h_-^{-1} g_1 h_+) + S_{k_2 - k_1}(h_-^{-1} g_2 h_+) - S_{k_2}(h_-^{-1} h_+) \\ &+ S_{k_1}(h_-^{-1} g_2 h_+) - S_{k_2}(k_-^{-1} k_+) + S_{k_2 - k_1}(h_-^{-1}) + S_{k_2 - k_1}(k_+).\end{aligned} \quad (2.10.212)$$

Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στην βαθμισμένη WZW δράση της συνσυνολικής σύμμορφης θεωρίας

$$\left. \frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}}{G_{k_2}} \right|_L \otimes \left. \frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}}{G_{k_2}} \right|_R, \quad (2.10.213)$$

υποδεικνύοντας τον δεξιόστροφο και τον αριστερόστροφο τομέα. Η αναλλοιώτητα κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς γίνεται εμφανής μέσα από τους μετασχηματισμούς

$$h_+ \rightarrow h_+ \Omega(\sigma^-), \quad k_+ \rightarrow k_+ \Omega(s^-), \quad h_- \rightarrow h_- \tilde{\Omega}(\sigma^+), \quad k_- \rightarrow k_- \tilde{\Omega}(\sigma^+),$$

κάτω από τους οποίους η δεύτερη σειρά της (2.10.212) παράγει δύο αντίγραφα (δεξι-

όστροφο και αριστερόστροφο) άλγεβρας ρευμάτων της ομάδας  $G$ , αλλά για μηδενική τάξη άλγεβρας. Συνεπώς, για μοναδιακές αναπαραστάσεις το αποτέλεσμα είναι τετρίμενο.

Η δράση (2.10.212) εμφανίζει επιπλέον αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} h_{\pm} &\rightarrow L^{-1}(\sigma^{-})h_{\pm}, & k_{\pm} &\rightarrow R^{-1}(\sigma^{+})k_{\pm}, \\ g_1 &\rightarrow L^{-1}(\sigma^{-})g_1L(\sigma^{-}), & g_2 &\rightarrow L^{-1}(\sigma^{-})g_2L(\sigma^{-}). \end{aligned}$$

Αυτό παράγει μια θεωρία άλγεβρας ρευμάτων

$$G_{k_2-k_1}|_L \otimes G_{k_2-k_1}|_R. \quad (2.10.214)$$

Συνδυάζοντας τις (2.10.213), (2.10.214) προκύπτει η ροή της σύμμορφης θεωρίας από τις υψηλές ενέργειες  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  στις χαμηλές  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  να είναι

$$G_{k_1} \otimes G_{k_2} \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}, \quad (2.10.215)$$

με δύο όμοια αντίγραφα για τον αριστερόστροφο και τον δεξιόστροφο τομέα. Η ροή αυτή ταυτίζεται με αυτήν του απλά παραμορφωμένου μη-συμμετρικού προτύπου που μελετήθηκε σε προηγούμενη ενότητα.

2. Για  $\lambda_1 = \lambda_0$  και  $\lambda_2 = 0$

Για την περίπτωση  $\lambda_2 = 0$ , η δράση (2.10.186) ή ισοδύναμα η (2.10.181) μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της ταυτότητας Polyakov-Wiegmann ως

$$S = S_{k_1}(g_2g_1) + S_{k_2-k_1}(g_2). \quad (2.10.216)$$

Αυτό είναι το άθροισμα δύο WZW προτύπων με δύο αντίγραφα άλγεβρας ρευμάτων  $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$  για τον αριστερόστροφο και δεξιόστροφο τομέα. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση, η θεωρία ρέει από μία υψηλοενεργειακή σύμμορφη θεωρία η οποία είναι το άθροισμα δύο WZW προτύπων, ένα με τάξη άλγεβρας ρευμάτων  $k_1$  και ένα με  $k_2$ , σε μία χαμηλοενεργειακή σύμμορφη θεωρία που αποτελείται πάλι από το άθροισμα δύο WZW προτύπων, το ένα με επίπεδο άλγεβρας ρευμάτων  $k_1$  ενώ το άλλο με  $k_2 - k_1$ . Πιο συγκεκριμένα

$$G_{k_1} \times G_{k_2} \xrightarrow{\mathbb{R}} G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}, \quad (2.10.217)$$

με ίδιο αριστερόστροφο και δεξιόστροφο αντίγραφο άλγεβρας ρευμάτων. Πάλι η σύμμορφη θεωρία των χαμηλών ενεργειών έχει μικρότερο κεντρικό φορτίο από ότι αυτή στις υψηλές ενέργειες, και συνεπώς η ροή αυτή είναι συμβατή με το θεώρημα του

Zamolodchikov.

Τα παραπάνω αποτελέσματα για τις ροές ισχύουν και στην περίπτωση που τα  $k_{1,2}$  είναι πεπερασμένα, και παρόλο που η μορφή του  $\lambda_0$  ενδέχεται να αλλάζει, η φύση του παραμένει ίδια.

Τέλος, αξίζει να τονισθεί ότι η παραπάνω ανάλυση είναι έγκυρη για  $\lambda_0 < 1$ . Όταν  $k_1 = k_2$  και  $\lambda_0 = 1$ , το σταθερό σημείο της ροής στις χαμηλές ενέργειες παύει να υφίσταται και η θεωρία έχει νόημα μόνο αν προσεγγιστεί μέσω του μη-Αβελιανού T-δυϊκού ορίου [62] για το PCM.

### 2.10.3 Πρότυπα με γενικούς πίνακες παραμόρφωσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα λ-πρότυπα στην πιο γενική μορφή τους (2.10.15). Για γενικό πίνακα  $\lambda_{ab}$  η ολοκληρωσιμότητα της θεωρίας δεν διατηρείται εν γένει και επιπλέον η θεωρία δεν εμφανίζει καμία ισομετρία. Παρόλα αυτά η συμμετρία (2.10.18) συνεχίζει να ισχύει όντας συμμετρία της ενεργού δράσης (2.10.15). Η παρούσα ενότητα αφιερώνεται στην ανάλυση του υπολογισμού της β-συνάρτησης για το απλά παραμορφωμένο πρότυπο με γενικό πίνακα  $\lambda_{ab}$  και είναι βασισμένη στην [49].

#### Συναρτήσεις ομάδας επανακανονικοποίησης

Ο υπολογισμός της β-συνάρτησης του προτύπου (2.10.15) θα παρουσιασθεί συνοπτικά στην υποενότητα αυτή και βασίζεται στη χρήση τεχνικών βαρύτητας και της μεθόδου πεδίου υποβάθρου για τα σ-πρότυπα.

Από την μετρική που αντιστοιχεί στην δράση (2.10.15), παραλείποντας έναν συνολικό παράγοντα  $k/2\pi$ , εξάγονται τα εξής δύο συστήματα αναφοράς

$$ds^2 = \begin{cases} g_{ab}e^ae^b, & g_{ab} = (\mathbb{1} - \lambda^T\lambda)_{ab}, & e^a = (D - \lambda)_{ab}^{-1}R^b, \\ \tilde{g}_{ab}\tilde{e}^a\tilde{e}^b, & \tilde{g}_{ab} = (\mathbb{1} - \lambda\lambda^T)_{ab}, & \tilde{e}^a = (D^T - \lambda^T)_{ab}^{-1}L^b, \end{cases} \quad (2.10.218)$$

όπου ανάλογα με το σύστημα αναφοράς η αντίστοιχη μετρική και η αντίστροφη της  $g^{ab} = g_{ab}^{-1}$ ,  $\tilde{g}^{ab} = \tilde{g}_{ab}^{-1}$  μετατρέπει τους δείκτες από συναλλοίωτους σε ανταλλοίωτους και αντίστροφα.

Ο πίνακας που συνδέει τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι

$$\tilde{e}^a = \Lambda_{ab}e^b, \quad \Lambda = (\mathbb{1} - D\lambda^T)^{-1}(D - \lambda) = (D^T - \lambda^T)^{-1}(\mathbb{1} - D^T\lambda), \quad (2.10.219)$$

ο οποίος μετασχηματίζεται κάτω από την (2.10.18) ως  $\Lambda \rightarrow \lambda^T\Lambda\lambda^{-1}$ , ικανοποιεί την ταυτότητα  $\Lambda^T(\mathbb{1} - \lambda\lambda^T)\Lambda = \mathbb{1} - \lambda^T\lambda$  και είναι ορθογώνιος μόνο για διαγώνιο και ισοτροπικό

πίνακα  $\lambda_{ab} = \lambda\delta_{ab}$ .

Από τη δράση (2.10.15) προκύπτει επίσης η αντισυμμετρική 2-μορφή

$$B = \frac{k}{\pi} \left( B_0 + R^T \lambda \wedge e \right) = \frac{k}{\pi} \left( B_0 - L^T \lambda^T \wedge \tilde{e} \right) \quad (2.10.220)$$

και η αντίστοιχη 3-μορφή  $H = dB$

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_\lambda, \quad H_0 = dB_0 = -\frac{1}{6} f_{abc} L^a \wedge L^b \wedge L^c = -\frac{1}{6} f_{abc} R^a \wedge R^b \wedge R^c \\ H &= -\frac{1}{6} \left[ f_{abc} - \lambda_{ad} \lambda_{be} \lambda_{cf} f_{def} + 3\Lambda_{cf}^{-T} (\lambda_{mf} f_{abm} - \lambda_{ad} \lambda_{be} f_{def}) \right] \tilde{e}^a \wedge \tilde{e}^b \wedge \tilde{e}^c. \end{aligned} \quad (2.10.221)$$

Δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς των  $\tilde{e}^a$  οι αντίστοιχες σπιν συνδέσεις  $\tilde{\omega}_{ab}$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{ab} &= \tilde{\omega}_{ab|c} \tilde{e}^c, \quad \tilde{\omega}_{ab} = -\tilde{\omega}_{ba}, \quad \tilde{\omega}_{ab|c} = \frac{1}{2} \left( \tilde{C}_{abc} - \tilde{C}_{cab} + \tilde{C}_{bca} \right), \\ d\tilde{e}^a &= \frac{1}{2} \tilde{C}^a{}_{bc} \tilde{e}^b \wedge \tilde{e}^c, \quad \tilde{C}^a{}_{bc} := -\tilde{C}^a{}_{cb}, \quad \tilde{C}_{abc} := \tilde{g}_{ad} \tilde{C}^d{}_{bc}. \end{aligned} \quad (2.10.222)$$

Μετά από λίγη άλγεβρα και τη χρήση ταυτοτήτων που παρουσιάζεται αναλυτικά στην [49] προκύπτει ότι

$$d\tilde{e}^a = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{am} \left( f_{mbc} \lambda_{me} \lambda_{bn} \lambda_{cl} f_{enl} + \Lambda_{mf}^{-T} (\lambda_{ef} f_{ebc} - \lambda_{bn} \lambda_{cl} f_{fnl}) \right) \tilde{e}^b \wedge \tilde{e}^c, \quad (2.10.223)$$

από όπου υπολογίζονται τα στοιχεία  $\tilde{\omega}_{ab|c}$ .

Η γενικευμένη σπιν σύνδεση  $\tilde{\omega}_{ab}^-$  που περιλαμβάνει και τη στρέψη

$$\tilde{\omega}_{ab}^- = \tilde{\omega}_{ab|c}^- \tilde{e}^c, \quad \tilde{\omega}_{ab|c}^- = \tilde{\omega}_{ab|c} - \frac{1}{2} \tilde{H}_{abc}, \quad (2.10.224)$$

προκύπτει να είναι

$$\tilde{\omega}_{ab|c}^- = \Lambda_{cd}^{-T} (\lambda_{md} f_{mab} - \lambda_{am} \lambda_{bn} f_{dmn}), \quad (2.10.225)$$

ενώ για τον υπολογισμό του γενικευμένου ταυυστή Ricci

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ab}^\pm &= \partial_c \tilde{\omega}^{\pm c}{}_{a|b} - \tilde{\omega}_{ac|d}^\pm \tilde{\omega}_b^{\mp d|c} - \nabla_b^\pm \tilde{\omega}^{\pm c}{}_{a|c}, \\ \tilde{\omega}_{ab|c}^\pm - \tilde{\omega}_{ac|b}^\mp &= \tilde{C}_{abc}, \quad \partial_a = \tilde{e}_a^\mu \partial_\mu, \end{aligned} \quad (2.10.226)$$

χρειάζεται η εξωτερική παράγωγος του πίνακα  $\Lambda^{-T}$  και τελικά προκύπτει ότι

$$\tilde{R}_{ab}^- = -(\lambda_{li} f_{alp} - \lambda_{aq} \lambda_{pl} f_{qil})(\lambda_{ce} f_{rme} - \lambda_{nr} \lambda_{dm} f_{ndc}) g^{im} \tilde{g}^{pc} \Lambda_{rb}^{-1} - \tilde{\nabla}_b^- \tilde{\omega}^{-c}{}_{a|c}. \quad (2.10.227)$$

Η  $\beta$ -συνάρτηση σε επίπεδο ενός βρόγχου για ένα γενικό  $\sigma$ -πρότυπο δίνεται από την έκφραση [63],[143]

$$\frac{dG_{\mu\nu}}{dt} + \frac{dB_{\mu\nu}}{dt} = R_{\mu\nu}^- + \nabla_\nu^+ \xi_\mu, \quad t = \ln \mu^2, \quad (2.10.228)$$

όπου ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε διαφορομορφισμούς κατά μήκος ενός ανύσματος  $\xi^\mu$ . Οι διαφορομορφισμοί αυτοί έχουν τον ρόλο αντισταθμιστικών όρων σε περίπτωση που η μορφή του πίνακα  $\lambda$  είναι τέτοια ώστε να δημιουργούνται νέες ροές κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Στην περίπτωση του γενικού πίνακα  $\lambda$  οι όροι αυτοί απαλείφονται, θεωρώντας ότι  $\tilde{\xi}_a = \tilde{\omega}^{-c}{}_{a|c}$ . Περνώντας στο σύστημα αναφοράς του εφαπτόμενου χώρου  $\tilde{e}^a = \tilde{e}_\mu^a dX^\mu$  με

$$\frac{dG_{\mu\nu}}{dt} = \tilde{\beta}_{ab}^{(G)} \tilde{e}_\mu^a \tilde{e}_\nu^b, \quad \frac{dB_{\mu\nu}}{dt} = \tilde{\beta}_{ab}^{(B)} \tilde{e}_\mu^a \tilde{e}_\nu^b, \quad (2.10.229)$$

προκύπτει

$$\tilde{\beta}_{ab}^{(G)} + \tilde{\beta}_{ab}^{(B)} = \tilde{R}_{ab}^- + \tilde{\nabla}_b^- \tilde{\xi}_a, \quad \tilde{\xi}_a = \tilde{\omega}^{-c}{}_{a|c}, \quad (2.10.230)$$

και τελικά, με επαναφορά του παράγοντα  $k$

$$\boxed{\frac{d\lambda_{ab}}{dt} = \frac{1}{2k} \text{Tr} \left( \mathcal{N}_a(\lambda) \mathcal{N}_b(\lambda^T) \right) = \frac{1}{2k} \mathcal{N}(\lambda)_{ap}{}^m \mathcal{N}(\lambda^T)_{bm}{}^p}, \quad (2.10.231)$$

$$\text{με: } (\mathcal{N}_a(\lambda))_p{}^m = (\lambda_{ac} \lambda_{pd} f_{cdi} - f_{apc} \lambda_{ci}) g^{im} =: \mathcal{N}(\lambda)_{ap}{}^m.$$

Η ροή (2.10.231) παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

1. Ικανοποιεί τη συνθήκη  $\lambda f(\lambda^{-1})\lambda = f(\lambda)$  λόγω του μετασχηματισμού

$$\lambda_{ap}{}^m \rightarrow \lambda_{ac}^{-1} \lambda_{pd}^{-1} \lambda_{mn} \mathcal{N}(\lambda)_{cd}{}^n. \quad (2.10.232)$$

2. Σέβεται τη συμμετρία

$$g \rightarrow g_0^{-1} g g_0, \quad \lambda \rightarrow D_0^T \lambda D_0, \quad D_0^{ab} = \text{Tr}(t^a g_0 t^b g_0^{-1})$$

που παρουσιάζει η δράση (2.10.15), για ένα σταθερό στοιχείο της ομάδας  $g_0 \in G$ , μέσω του μετασχηματισμού

$$\mathcal{N}(\lambda)_{ap}{}^m \rightarrow (D_0)_{ca} (D_0)_{qp} (D_0)_{nm} \mathcal{N}(\lambda)_{cq}{}^n.$$

3. Διατηρεί τη μορφή της κάτω από  $\lambda \rightarrow \lambda^T$ .

4. Ένας συμμετρικός πίνακας  $\lambda$  παραμένει συμμετρικός κάτω από τη ροή (2.10.231).
5. Ένας καθαρά αντισυμμετρικός πίνακας  $\lambda$  δεν είναι συνεπής με τη ροή (2.10.231), γεγονός που σημαίνει ότι αν σε μία ενεργειακή κλίμακα ο πίνακας  $\lambda_{ab}$  είναι αντισυμμετρικός, δεν θα παραμείνει έτσι κατά τη διάρκεια της ροής.
6. Στην ειδική περίπτωση που  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$  ή  $\lambda_{ab} = \lambda (D_0)_{ab}$ , η (2.10.231) ταυτίζεται με την (2.10.93).
7. Είναι σε συμφωνία με τη γενική θεώρηση ότι

$$\frac{d\lambda_{ab}}{dt} = -\frac{1}{2k} f_{ace} f_{bdf} \lambda_{cd} \lambda_{ef} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

για μία σύμμορφη θεωρία πεδίου διαταραγμένη από τελεστές με διάσταση μάζας δύο, όπως στην προκειμένη περίπτωση.

8. Περιλαμβάνει τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης του μη-Αβελιανού T-δυϊκού προτύπου.

### 2.10.3.1 $\lambda$ -παραμορφωμένο πρότυπο σε συσυνολικό χώρο

Έστω τώρα μια υποομάδα  $H \subset G$ . Χρησιμοποιώντας για τους δείκτες τον συμβολισμό  $A = (a, \alpha)$ , όπου τα κεφαλαία γράμματα αντιστοιχούν σε δείκτες της ομάδας  $G$ , τα πεζά λατινικά σε δείκτες της υποομάδας  $H$  και τα πεζά ελληνικά χρησιμοποιούνται για αυτούς του συνσυνόλου  $G/H$ , επιλέγεται ο πίνακας  $\lambda_{AB}$  με στοιχεία

$$\lambda_{ab} = \lambda_H \delta_{ab}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{G/H} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.10.233)$$

Η επιλογή αυτή είναι συμβατή με την (2.10.231) μόνο για την περίπτωση συμμετρικών συνσυνολικών χώρων  $G/H$ , στους οποίους οι σταθερές δομής  $f_{\alpha\beta\gamma} = 0$  και ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$f_{abc} f_{abd} = c_H \delta_{cd}, \quad f_{\alpha\beta c} f_{\alpha\beta d} = (c_G - c_H) \delta_{cd}, \quad f_{c\beta\gamma} f_{c\beta\delta} = \frac{c_G}{2} \delta_{\gamma\delta}. \quad (2.10.234)$$

Για το πρότυπο αυτό προκύπτουν οι  $\beta$ -συναρτήσεις

$$\frac{d\lambda_H}{dt} = -\frac{c_G \lambda_{G/H}^2 (1 - \lambda_H^2)^2 + c_H (\lambda_H^2 - \lambda_{G/H}^2) (1 - \lambda_H^2 \lambda_{G/H}^2)}{2k(1 + \lambda_H)^2 (1 - \lambda_{G/H})^2}, \quad (2.10.235)$$

$$\frac{d\lambda_{G/H}}{dt} = -\frac{c_G \lambda_{G/H} (\lambda_H - \lambda_{G/H}^2)}{2k(1 + \lambda_H) (1 - \lambda_{G/H}^2)}. \quad (2.10.236)$$



Στο όριο που  $\lambda_{G/H} = 0$  η ροή του πίνακα  $\lambda_{AB}$  ταυτίζεται με αυτή του απλά παραμορφωμένου συμμετρικού προτύπου με διαγώνιο πίνακα  $\lambda$  (2.10.93) με τα  $(\lambda, c_G)$  αντικατεστημένα από τα  $(\lambda_H, c_H)$ <sup>23</sup>.

Έχοντας τις συναρτήσεις  $\beta$  είναι δυνατό να υπολογισθεί τώρα ο πίνακας των ανώμαλων διαστάσεων για τον διγραμμικό τελεστή της παραμόρφωσης από τη σχέση (2.10.95). Συμβολίζοντας για ευκολία τα  $\lambda_H$  και  $\lambda_{G/H}$  με  $\lambda^1$  και  $\lambda^2$  αντίστοιχα, και παρατηρώντας ότι η μηδενική ως προς  $1/k$  τάξη της μετρικής Zamolodchikov  $g_{ij}^{(0)}$ ,  $i = 1, 2$  είναι ένας  $2 \times 2$  πίνακας με στοιχεία

$$g_{11}^{(0)} = \frac{\dim H}{(1 - (\lambda^1)^2)^2}, \quad g_{22}^{(0)} = \frac{\dim G - \dim H}{(1 - (\lambda^2)^2)^2}, \quad (2.10.237)$$

προκύπτει ο πίνακας των ανώμαλων διαστάσεων

$$\begin{aligned} \gamma_1^1 &= -\frac{2 c_H \lambda^1 (1 - (1 - \lambda^1) \lambda^1) (1 + (\lambda^2)^4) + (\lambda^2)^2 (c_H (1 - 2\lambda^1 - 2(\lambda^1)^3 + (\lambda^1)^4) - c_G (1 - (\lambda^1)^2)^2)}{k (1 - \lambda^1) (1 + \lambda^1)^3 (1 - (\lambda^2)^2)^2}, \\ \gamma_1^2 &= -\frac{1 (c_G (\dim G + \dim H) - 2c_H \dim H) \lambda^2 (1 + (\lambda^2)^2)}{2k (\dim G - \dim H) (1 + \lambda^1)^2 (1 - (\lambda^2)^2)}, \\ \gamma_2^1 &= -\frac{1 (c_G (\dim G + \dim H) - 2c_H \dim H) (1 - \lambda_1)^2 \lambda^2 (1 + (\lambda^2)^2)}{2k \dim H (1 - (\lambda^2)^2)^3}, \\ \gamma_2^2 &= -\frac{c_G \lambda^1 (1 + 3(\lambda^2)^2) - (\lambda^2)^2 (3 + (\lambda^2)^2)}{k (1 + \lambda^1) (1 - (\lambda^2)^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.10.238)$$

ο οποίος μετασχηματίζεται σαν μεικτός τανυστής κάτω από τον διαφορομορφισμό που εισάγει η (2.10.18).

<sup>23</sup>Στην πραγματικότητα, η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε γενικά συνσύνολα όπου ο πίνακας  $\lambda$  είναι μπλοκ-διαγώνιος της μορφής  $\lambda = \lambda_H \otimes \mathbb{O}_{G/H}$  με το  $\lambda_H$  να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης  $\dim H$ . Στην περίπτωση αυτή, η δράση (2.10.15) διατηρεί τη μορφή της, αλλά με πίνακα ζεύξης  $\lambda_H$  αντί για  $\lambda$  και τους δείκτες  $a, b$  να παίρνουν τιμές στην  $H$ . Η ερμηνεία αυτού του πιο γενικού προτύπου είναι αυτή του μη-Αβελιανού Thirring προτύπου για μια ομάδα  $G$ , όπου ο όρος διαταραχής είναι διγραμμικός στα ρεύματα της  $H \subset G$ .

## 3 Ακριβείς υπολογισμοί κβαντικών μεγεθών για τα διάφορα πρότυπα

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί το κύριο μέρος της διδακτορικής διατριβής και είναι βασισμένο στις [51, 52, 54, 55, 83, 144, 147]. Σε ό,τι ακολουθεί, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την μελέτη της συμπεριφοράς και των κβαντικών ιδιοτήτων ενός εύρους  $\lambda$ -παραμορφωμένων προτύπων.

### 3.1 Διπλά παραμορφωμένο πρότυπο με ίσα επίπεδα στις άλγεβρες ρευμάτων

Στην ενότητα αυτή υπολογίζονται οι  $\beta$ -συναρτήσεις και οι ανώμαλες διαστάσεις ρευμάτων και πρωτευόντων πεδίων για το διπλά παραμορφωμένο  $\lambda$ -πρότυπο με ίσα επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων [51]. Η ενεργός δράση της θεωρίας αυτής δίνεται από την (2.10.167), ενώ η διαταραχτική της μορφή από την (2.10.172). Ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης για την περίπτωση της ομάδας θα γίνει τόσο για διαγώνιο, όσο και για γενικό πίνακα παραμόρφωσης, ενώ ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης σε συνολικό χώρο καθώς και ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων των διαφόρων τελεστών της θεωρίας γίνεται για διαγώνιους (και ισοτροπικούς) πίνακες παραμόρφωσης.

#### 3.1.1 Συναρτήσεις συσχετισμού και συναρτήσεις ομάδας επανακανονικοποίησης

##### Περίπτωση χώρου ομάδας

Στην περίπτωση διαγώνιων και ισοτροπικών πινάκων, αφετηρία είναι η δράση (2.10.172) με  $(\lambda_1)_{ab} = \lambda_1 \delta_{ab}$  και  $(\lambda_2)_{ab} = \lambda_2 \delta_{ab}$ . Δουλεύοντας σε Ευκλείδια υπογραφή και συμβολίζοντας την Ευκλείδια εκδοχή των ρευμάτων  $J_{i+}^a, J_{i-}^a$  με  $J_i^a$  και  $\bar{J}_i^a$  αντίστοιχα, οι τελεστές ρευμάτων και οι σύνθετοι τελεστές που κατασκευάζονται από αυτά μπορούν να χωρισθούν σε δύο σύνολα. Το ένα σύνολο περιλαμβάνει τους  $J_1^a, \bar{J}_2^a$  και όλους τους σύνθετους τελεστές που

μπορούν να κατασκευασθούν από αυτούς τους δύο, ενώ το άλλο σύνολο περιλαμβάνει τους  $J_2, \bar{J}_1$  και όλους τους αντίστοιχους σύνθετους τελεστές

$$\mathcal{O} = \{J_1^a, \bar{J}_2^a, J_1^a \bar{J}_2^b, \dots\}, \quad \tilde{\mathcal{O}} = \{J_2^a, \bar{J}_1^a, J_2^a \bar{J}_1^b, \dots\}. \quad (3.1.1)$$

Μέσω αυτού του διαχωρισμού προκύπτει, ότι όλες οι συναρτήσεις συσχετισμού που περιλαμβάνουν αποκλειστικά ρεύματα είναι δυνατόν να χωρισθούν επίσης σε δύο σύνολα.

Μία συνάρτηση συσχετισμού που περιλαμβάνει έναν αυθαίρετο αριθμό από τελεστές  $\mathcal{O}$  και  $\tilde{\mathcal{O}}$ , στην πιό γενική της μορφή γράφεται ως

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i(z_i) \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{O}}_j(z_j) \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i(z_i) \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{O}}_j(z_j) e^{-\frac{1}{\pi} \int d^2z \left( (\lambda_1)_{ab} J_1^a \bar{J}_2^b + (\lambda_2)_{ab} J_2^a \bar{J}_1^b \right)} \right\rangle_0, \quad (3.1.2)$$

όπου με  $\langle \dots \rangle_0$  στο δεξί μέλος της (3.1.2) συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή ως προς την ελεύθερη σύμμορφη θεωρία με δράση  $S_k(g_1) + S_k(g_2)$ , ενώ το αριστερό μέλος αναφέρεται στην αναμενόμενη τιμή ως προς την παραμορφωμένη θεωρία με δράση την (2.10.172).

Η κρίσιμη παρατήρηση εδώ, είναι ότι η συγκεκριμένη μορφή των κορυφών αλληλεπίδρασης της (2.10.172) οδηγεί σε μία παραγοντοποίηση των συναρτήσεων συσχέτισης. Αυτό συμβαίνει διότι οι τελεστές  $\mathcal{O}$  μπορούν να συναιρεθούν μόνο ρεύματα προερχόμενα από το ανάπτυγμα του  $e^{-\frac{1}{\pi} \int d^2z (\lambda_1)_{ab} J_1^a \bar{J}_2^b}$ , ενώ οι τελεστές  $\tilde{\mathcal{O}}$  μπορούν να συναιρεθούν μόνο με ρεύματα που προέρχονται από το ανάπτυγμα της κορυφής  $e^{-\frac{1}{\pi} \int d^2z (\lambda_2)_{ab} J_2^a \bar{J}_1^b}$ . Συνεπώς, η (3.1.2) γράφεται ως

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i(z_i) \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{O}}_j(z_j) \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i(z_i) \right\rangle \cdot \left\langle \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{O}}_j(z_j) \right\rangle, \quad (3.1.3)$$

όπου

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i(z_i) \right\rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}_1} \left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i(z_i) e^{-\frac{1}{\pi} \int d^2z (\lambda_1)_{ab} J_1^a \bar{J}_2^b} \right\rangle_0, \\ \left\langle \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{O}}_j(z_j) \right\rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}_2} \left\langle \prod_{j=1}^m \tilde{\mathcal{O}}_j(z_j) e^{-\frac{1}{\pi} \int d^2z (\lambda_2)_{ab} J_2^a \bar{J}_1^b} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι σε επίπεδο τελεστών ρευμάτων, οι συναρτήσεις συσχετισμού του διπλά παραμορφωμένου, συμμετρικού προτύπου μπορούν να προκύψουν από δύο όμοια αντίγραφα, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε ένα απλά παραμορφωμένο λ-πρότυπο με πίνακα ζεύξης  $(\lambda_1)_{ab}$  ή  $(\lambda_2)_{ab}$ . Αυτή η παραγοντοποίηση των συναρτήσεων συσχετισμού ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου εμπλέκονται καθαρά τελεστές ρευμάτων. Εάν υπάρχουν επιπλέον τελεστές που αντιστοιχούν σε αφινικά πρωτεύοντα πεδία μία τέτοια παραγοντοποίηση

δεν είναι εφικτή, εκτός φυσικά από περιπτώσεις που τα πρωτεύοντα πεδία μετασχηματίζονται τετριμμένα κάτω από τη δράση της δεξιόστροφης και αριστερόστροφης άλγεβρας ρευμάτων. Το επιχείρημα αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι στη δράση (2.10.167) του  $\sigma$ -προτύπου, τα στοιχεία  $g_1$  και  $g_2$  της ομάδας αλληλεπιδρούν μη-τετριμμένα, με αποτέλεσμα η δράση αυτή να μη μπορεί να έρθει στη μορφή αθροίσματος δύο απλά παραμορφωμένων  $\lambda$ -προτύπων με πίνακες  $(\lambda_1)_{ab}$  και  $(\lambda_2)_{ab}$ .

Η άνωθεν παραραγοντοποίηση της (3.1.3) συνεπάγεται ότι οι  $\beta$ -συναρτήσεις για τις παραμέτρους ζεύξης  $\lambda_{1,2}$  είναι ίδιες με αυτήν του απλά παραμορφωμένου προτύπου. Αυτό συμβαίνει διότι ο υπολογισμός τους βασίζεται μόνο στις συναρτήσεις συσχετισμού των ρευμάτων με αποτέλεσμα να έρχονται και αυτές στη μορφή δύο αντιγράφων απλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου. Η ανάλυση αυτή είναι έγκυρη για όλες τις τιμές των πινάκων παραμόρφωσης  $\lambda_{1,2}$  και μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  στο ανάπτυγμα ως προς το επίπεδο  $k$  της άλγεβρας ρευμάτων. Έτσι, για την περίπτωση διαγώνιων και ισοτροπικών πινάκων ζεύξης προκύπτει μέχρι  $\mathcal{O}(1/k)$  τάξη η ακριβής ως προς  $\lambda_i$  έκφραση [58, 59, 47]

$$\beta_i := \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{c_G \lambda_i^2}{2k(1 + \lambda_i)^2}, \quad t := \ln \mu^2, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.5)$$

Με όμοια επιχειρήματα, τα ζεύγη ρευμάτων  $(J_1^a, \bar{J}_2^a)$  και  $(J_2^a, \bar{J}_1^a)$  αποκτούν ανώμαλες διαστάσεις που εξαρτώνται μόνο από το  $\lambda_1$  ή  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Για την ισοτροπική περίπτωση, οι ακριβείς εκφράσεις μέχρι τάξη  $1/k$  είναι και οι δύο θετικές και δίνονται από τις σχέσεις [50, 44]

$$\gamma^{(J_{1+})} = \gamma^{(J_{2-})} = \frac{c_G \lambda_1^2}{k(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_1)^3}, \quad \gamma^{(J_{2+})} = \gamma^{(J_{1-})} = \frac{c_G \lambda_2^2}{k(1 - \lambda_2)(1 + \lambda_2)^3}. \quad (3.1.6)$$

Η παραπάνω συλλογιστική πορεία, καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή, μπορούν να γενικευθούν (χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της [45]) για την περίπτωση του μη-συμμετρικού διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου όπου οι τάξεις των δύο αλγεβρών ρευμάτων δεν είναι οι ίδιες. Η γενίκευση αυτή παρουσιάζεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Όσον αφορά τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων για τα πρωτεύοντα πεδία, αυτός ακολουθεί τις [44, 45]. Σε αντίθεση με τις ανώμαλες διαστάσεις τελεστών που εμπεριείχαν μόνο ρεύματα, αυτές των πρωτευόντων πεδίων αναμένεται να εξαρτώνται ταυτόχρονα τόσο από το  $\lambda_1$  όσο και από το  $\lambda_2$  και εν γένει να διαφέρουν από τα αντίστοιχα αποτελέσματα [44, 45] του απλά παραμορφωμένου προτύπου. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι τα πρω-

τεύοντα πεδία εν γένει μετασχηματίζονται κάτω από τη δράση τόσο της αριστερόστροφης, όσο και της δεξιόστροφης άλγεβρας ρευμάτων.

Η σύμμορφη θεωρία του υπό μελέτη προτύπου περιλαμβάνει δύο είδη αφινικών πρωτευόντων πεδίων, που ανήκουν στα δύο αρχικά WZW πρότυπα και μετασχηματίζονται κάτω από τη δράση των αντίστοιχων δεξιόστροφων και αριστερόστροφων αλγεβρών ρευμάτων. Η υπόλοιπη μελέτη θα γίνει για ένα από αυτά, έστω το  $\Phi_{i,i'}(z, \bar{z})$  το οποίο κάτω από τη δάση των ρευμάτων  $J_1^a$  και  $\bar{J}_1^a$  μετασχηματίζεται στις μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις  $R$  και  $R'$ , με τους αντίστοιχους πίνακες να είναι οι  $t_a$  και  $\tilde{t}_a$ . Οι δείκτες  $i$  και  $i'$  τρέχουν στις αναπαραστάσεις  $R$  και  $R'$  και τα συγκεκριμένα πρωτεύοντα πεδία δεν επηρεάζονται από τη δράση των ρευμάτων  $J_2^a, \bar{J}_2^a$  του δεύτερου WZW προτύπου. Έτσι, τα σχετικά OPEs είναι

$$\begin{aligned} J_1^a(z)\Phi_{i,i'}(w, \bar{w}) &= -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(t_a)_{i'}^j \Phi_{j,i'}(w, \bar{w})}{z-w}, \\ \bar{J}_1^a(\bar{z})\Phi_{i,i'}(w, \bar{w}) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(\tilde{t}_a)^{j'}_{i'} \Phi_{i,j'}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}}, \\ J_2^a(z)\Phi_{i,i'}(w, \bar{w}) &= \text{ομαλό}, \quad \bar{J}_2^a(\bar{z})\Phi_{i,i'}(w, \bar{w}) = \text{ομαλό}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Οι συμβάσεις για τους πίνακες των αναπαραστάσεων είναι<sup>1</sup>  $[t_a, t_b] = f_{abc}t_c$ ,  $[\tilde{t}_a, \tilde{t}_b] = f_{abc}\tilde{t}_c$ , ενώ οι σύμμορφες διαστάσεις των πρωτευόντων πεδίων και οι διάφορες ιδιότητες που εμφανίζουν τα πεδία αυτά και οι πίνακες αναπαραστάσεων δίνονται από τις σχέσεις (2.10.41)-(2.10.49).

Για τον προσδιορισμό των ανώμαλων διαστάσεων των πρωτευόντων πεδίων γίνεται χρήση της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων (2.10.43) και της θεωρίας διαταραχών, η οποία κατεβάζει ρεύματα από τον όρο του εκθετικού που αντιστοιχεί στις κορυφές αλληλεπίδρασης. Συνεπώς, η διαταραχτική έκφραση αυτής της συνάρτησης συσχετισμού θα έχει, για  $(\lambda_1)_{ab} = \lambda_1 \delta_{ab}$  και  $(\lambda_2)_{ab} = \lambda_2 \delta_{ab}$ , όρους της μορφής  $\lambda_1^n \lambda_2^m \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) (J_1^a \bar{J}_1^a)^n (J_2^b \bar{J}_2^b)^m \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle$ , όπου το  $\Phi^{(1)}$  συμβολίζει έναν τελεστή που αντιστοιχεί σε ένα αφινικό πρωτεύον πεδίο, ενώ το  $\Phi^{(2)}$  συμβολίζει τον μιγαδικό συζυγή του. Το  $\Phi^{(1)}$  μετασχηματίζεται σύμφωνα με την (3.1.7) ενώ το  $\Phi^{(2)}$  μετασχηματίζεται με όμοιο τρόπο αλλά με τους πίνακες  $t_a$  και  $\tilde{t}_a$  αντικατεστημένους με  $-t_a^*$  και  $-\tilde{t}_a^*$  αντίστοιχα.

Όσον αφορά τον διαταραχτικό υπολογισμό τώρα, με λίγη ανάλυση γίνεται εμφανές ότι δεν υπάρχει συνεισφορά από όρους τάξης  $1/k$  που περιέχουν γινόμενα των  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ . Το επιχείρημα για αυτό το συμπέρασμα είναι το εξής:

<sup>1</sup>Εδώ οι σταθερές δομής της ομάδας θεωρούνται καθαρά φανταστικές. Στη συγκεκριμένη ενότητα και στις ενότητες που ακολουθούν οι σταθερές δομής θεωρούνται καθαρά φανταστικές για τους υπολογισμούς στα πλαίσια της σύμμορφης θεωρίας πεδίου και πραγματικές στους υπολογισμούς που εμπεριέχουν τεχνικές βαρύτητας.

- Έστω  $n$  περιττό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγεται πρώτα ένα από τα  $\bar{J}_2^a$  ρεύματα και εφαρμόζεται η ταυτότητα του Ward. Το ρεύμα αυτό δεν μπορεί να συναιρευθεί με ένα από τα εξωτερικά πρωτεύοντα πεδία αλλά μόνο με κάποιο άλλο  $\bar{J}_2^b$  και μόλις γίνει η συναίρεση, σύμφωνα με το OPE (2.10.39), ο μη-Αβελιανός όρος τάξης  $1/\sqrt{k}$  θα περιέχει ένα άλλο  $\bar{J}_2^c$  ρεύμα. Τα εναπομείναντα, άρτια στον αριθμό πλέον  $\bar{J}_2^a$  ρεύματα θα πρέπει να συναιρευθούν μεταξύ τους μόνο μέσω Αβελιανών όρων, εφόσον διαφορετικά θα προκύπτουν όροι τάξης μεγαλύτερης από  $1/k$ , οι οποίοι έχει επιλεγεί να αγνοούνται.

Στη συνέχεια επιλέγεται το ρεύμα  $J_1^a$  για να εφαρμοσθεί η ταυτότητα Ward. Αυτό, μπορεί να συναιρευθεί είτε με ένα άλλο ρεύμα ίδιου είδους μέσω του μη-Αβελιανού μέρους του αντίστοιχου OPE, είτε με ένα από τα εξωτερικά πρωτεύοντα πεδία. Και στις δύο περιπτώσεις θα έχει ήδη προκύψει ο επιθυμητός  $1/k$  όρος της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων και σαν συνέπεια, τα ρεύματα που σχετίζονται με την δεύτερη κορυφή αλληλεπίδρασης  $(J_2^b \bar{J}_1^b)^m$  θα πρέπει να συναιρευθούν μόνο μεταξύ τους, αποδίδοντας τελικά ένα μη-συνδεδεμένο διάγραμμα.

- Έστω τώρα άρτιο  $n$ . Όπως και προηγουμένως, επιλέγεται το ρεύμα  $\bar{J}_2^a$  και εφαρμόζεται η ταυτότητα Ward. Όσον αφορά το Αβελιανό μέρος της συναίρεσης αυτής, τουλάχιστον ένα από τα  $J_1^a$  ρεύματα πρέπει να συναιρευθεί με ένα από τα εξωτερικά πρωτεύοντα πεδία διαφορετικά όλα τα ρεύματα της κορυφής  $(J_1^a \bar{J}_2^a)^n$  θα συναιρούνται μεταξύ τους καταλήγοντας σε μη-συνδεδεμένα διαγράμματα. Όμως, η συναίρεση του  $J_1^a$  με ένα εξωτερικό πεδίο θα αφήσει περιττό αριθμό από  $J_1^a$  ρεύματα, που σημαίνει ότι ένα ακόμα  $J_1^a$  θα πρέπει να συναιρευθεί με εξωτερικό πεδίο αποδίδοντας τον όρο ανάλογο του  $1/k$ . Έτσι, τα ρεύματα που σχετίζονται με τη δεύτερη κορυφή αλληλεπίδρασης  $(J_2^b \bar{J}_1^b)^m$  πρέπει πάλι αναγκαστικά να συναιρευθούν μόνο μεταξύ τους, αποδίδοντας ξανά μη-συνδεδεμένο διάγραμμα. Όσον αφορά το μη-Αβελιανό μέρος της συναίρεσης του  $\bar{J}_2^a$ , μετά τη συναίρεση προκύπτει περιττός αριθμός  $\bar{J}_2^b$  ρευμάτων, που σημαίνει ότι μια δεύτερη μη-Αβελιανή συναίρεση είναι απαραίτητη. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ο  $1/k$  παράγοντας και όπως και πριν, τα ρεύματα που προέρχονται από τη δεύτερη κορυφή αλληλεπίδρασης αναγκαστικά συναιρούνται μεταξύ τους μόνο, καταλήγοντας σε μη-συνδεδεμένο διάγραμμα.

Συνεπώς, στη διαταραχτική έκφραση δεν παράγονται ποτέ όροι που περιέχουν γινόμενα των  $\lambda_1 \lambda_2$ . Αυτό σημαίνει ότι η ανώμαλη διάσταση των πρωτευόντων πεδίων θα έχει τη γενική μορφή

$$\gamma_{R,R'} = \frac{f_1(\lambda_1)c_R + f_2(\lambda_1)c_{R'}}{k(1-\lambda_1)(1+\lambda_1)^3} + \frac{h_1(\lambda_2)c_R + h_2(\lambda_2)c_{R'}}{k(1-\lambda_2)(1+\lambda_2)^3}, \quad (3.1.8)$$

όπου η δομή των πόλων έχει προκύψει από το γεγονός ότι οι  $\beta_{\lambda_1}$  και  $\beta_{\lambda_2}$  συναρτήσεις του διπλά παραμορφωμένου προτύπου έχουν την ίδια έκφραση με αυτή του απλά παραμορφωμένου προτύπου. Τότε, ξέροντας τις  $\beta$ -συναρτήσεις, μπορεί με τη χρήση της εξίσωσης Callan-Symanzik όπως στην [50], να προσδιοριστεί η γενική μορφή (3.1.8) της ανώμαλης διάστασης. Για την εύρεση των άγνωστων πολυωνυμικών συναρτήσεων  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $h_1$  και  $h_2$  της (3.1.8), γίνεται χρήση της συμμετρίας (2.10.169), καθώς και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή της θεωρίας διαταραχών και παρουσιάζονται στο παράρτημα Δ'. Από την (Δ'.18) προκύπτει

$$\gamma_{R,R'} = \frac{c_R}{k} (1 + \lambda_1^2(1 + \lambda_1^2)) + \frac{c_{R'}}{k} \lambda_2^2(1 + \lambda_2^2) + \mathcal{O}(\lambda^5/k). \quad (3.1.9)$$

Η συμμετρία (2.10.169) σε συνδυασμό με την  $\mathbb{Z}_2$  συμμετρία του προτύπου κάτω από την ανταλλαγή  $(g_1, \lambda_1)$  με  $(g_2, \lambda_2)$ , δίνει τον ακόλουθο περιορισμό για τις ανώμαλες διαστάσεις

$$\gamma_{R',R}(k, \lambda_1, \lambda_2) = \gamma_{R,R'}(-k, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1}). \quad (3.1.10)$$

Η εναλλαγή των αναπαραστάσεων  $R$  και  $R'$  σχετίζεται με το γεγονός ότι κάτω από τη συνδυασμένη συμμετρία, η αντιστροφή των στοιχείων της ομάδας  $g_i \mapsto g_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , καταλήγει στην ανταλλαγή των αναπαραστάσεων  $R$  και  $R'$  [44]. Τότε, η (3.1.10) συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις  $f_1$ ,  $f_2$  και  $h_1$ ,  $h_2$  υπακούουν τις σχέσεις

$$f_1(\lambda_1) = h_2(\lambda_1^{-1})\lambda_1^4, \quad f_2(\lambda_1) = h_1(\lambda_1^{-1})\lambda_1^4. \quad (3.1.11)$$

Έτσι, τα άγνωστα πολυώνυμα είναι το πολύ τάξης  $\lambda_1^2$  και προσδιορίζονται από την απαίτηση να υπάρχει συμφωνία του αναπτύγματος της (3.1.8) με το διαταρακτικό ανάπτυγμα (3.1.9). Στην ουσία, χρειάζεται μόνο το διαταρακτικό ανάπτυγμα μέχρι τάξη  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  από το οποίο προκύπτει  $f_2 = h_1 = 0$  και  $f_1(\lambda) = (1 + \lambda)^2$ ,  $h_2(\lambda) = \lambda^2(1 + \lambda)^2$ . Τελικά, η ακριβής ως προς τα  $\lambda_{1,2}$  έκφραση της ανώμαλης διάστασης για τα πρωτεύοντα πεδία μέχρι τάξη  $1/k$  είναι

$$\gamma_{R,R'} = \frac{c_R}{k} \frac{1}{1 - \lambda_1^2} + \frac{c_{R'}}{k} \frac{\lambda_2^2}{1 - \lambda_2^2}. \quad (3.1.12)$$

η οποία αναπαράγει το διαταρακτικό αποτέλεσμα (3.1.9) μέχρι τέταρτη τάξη ως προς τα  $\lambda_i$ <sup>2</sup>. Είναι προφανές ότι σε αντίθεση με την ανώμαλη διάσταση των ρευμάτων, αυτή των πρωτεύοντων πεδίων εξαρτάται ταυτόχρονα και από τις δύο παραμέτρους  $\lambda_{1,2}$ . Επιπλέον, συγκρίνοντας με τις ανώμαλες διαστάσεις των πρωτεύοντων πεδίων που προέκυψαν στην περίπτωση του απλά παραμορφωμένου προτύπου [44], μία κύρια διαφορά είναι ότι στο διπλά

<sup>2</sup>Η  $\bar{\gamma}_{R,R'}$  δύναμη του όρου  $\bar{x}_{12}^2$  στη συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων των πρωτεύοντων πεδίων δίνεται από την (3.1.12) με τα  $c_R$  και  $c_{R'}$  ανταλλαγμένα.

παραμορφωμένο πρότυπο δεν προκύπτει όρος ανάλογος των ιδιοτιμών του πίνακα  $t_a \otimes t_a^*$ . Ο λόγος που ένας τέτοιος πίνακας δεν εμφανίζεται εδώ, είναι ότι στην απλή περίπτωση ο όρος παραμόρφωσης ήταν διγραμμικός ως προς τα ρεύματα του ίδιου WZW προτύπου, ενώ στο διπλά παραμορφωμένο πρότυπο, οι διγραμμικοί όροι της παραμόρφωσης απαρτίζονται από ρεύματα διαφορετικών WZW προτύπων.

Προκειμένου να αποδειχθεί το άνωθεν επιχείρημα σχετικά με την απεμπλοκή των ροών για τους δύο πίνακες ζεύξης, υπολογίζονται αναλυτικά οι  $\beta$ -συναρτήσεις για την περίπτωση διαγώνιων και ισοτροπικών πινάκων  $(\lambda_i)_{ab} = \lambda_i \delta_{ab}$ ,  $i = 1, 2$ . Ο υπολογισμός αυτός ακολουθεί την [61] και γίνεται με τη χρήση μιας κλασικής λύσης υποβάθρου και τον προσδιορισμό των κβαντικών διακυμάνσεων γύρω από αυτήν. Οι  $\beta$ -συναρτήσεις του διπλά παραμορφωμένου συμμετρικού προτύπου υπολογίζονται τόσο για την περίπτωση του χώρου ομάδας  $G$ , όσο και για αυτήν συμμετρικού συνσυνολικού χώρου  $G/H$ .

Για την περίπτωση του χώρου ομάδας, οι εξισώσεις κίνησης (2.10.178) και (2.10.179) έρχονται στη μορφή [39] (με  $A_{\pm} \mapsto A_{\pm}^1$  και  $B_{\pm} \mapsto A_{\pm}^2$  σύμφωνα με τους συμβολισμούς αυτής της παραγράφου)

$$\partial_{\pm} I_{\mp}^i = \mp \frac{1}{2} [I_{+}^i, I_{-}^i], \quad i = 1, 2, \quad (3.1.13)$$

όπου

$$I_{\pm}^i = -\frac{2}{1 + \lambda_i} A_{\pm}^i, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.14)$$

Έστω τώρα στοιχεία της ομάδας  $G$  της μορφής<sup>3</sup>

$$g_i = e^{\sigma^{\alpha} \Theta_{\alpha}^i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.15)$$

με τα στοιχεία  $\Theta_{\alpha}^i$  να είναι αυθαίρετα, σταθερά, μετατιθέμενα στοιχεία της Lie άλγεβρας  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Στο κλασικό αυτό πλαίσιο, τα κλασικά πεδία βαθμίδας υπολογίζονται με αντικατάσταση των κλασικών λύσεων (3.1.15) στις (2.10.164), (2.10.165)

$$\begin{aligned} A_{+}^1 &= \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} (\Theta_{+}^1 + \lambda_2 \Theta_{+}^2), & A_{-}^1 &= -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} (\Theta_{-}^2 + \lambda_2 \Theta_{-}^1), \\ A_{+}^2 &= \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} (\Theta_{+}^2 + \lambda_1 \Theta_{+}^1), & A_{-}^2 &= -\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} (\Theta_{-}^1 + \lambda_1 \Theta_{-}^2). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Έτσι, τα  $I_{\pm}^i$ , με  $i = 1, 2$  γίνονται σταθεροί, μετατιθέμενοι πίνακες οι οποίοι σε ότι ακολουθεί συμβολίζονται με  $I_{0,\pm}^i$ , και οι εξισώσεις κίνησης πράγματι ικανοποιούνται από αυτούς. Η

<sup>3</sup>Σε ότι ακολουθεί, με  $\sigma^{\alpha}$ ,  $\alpha = \pm$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες του κοσμικού φύλλου.



αντίστοιχη Λαγκρανζιανή υπολογισμένη με τα πεδία υποβάθρου είναι

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{k}{2\pi(1-\lambda_1\lambda_2)} \begin{pmatrix} \Theta_+^1 & \Theta_+^2 \\ \Theta_-^1 & \Theta_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 \\ 2\lambda_2 & 1+\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_-^1 \\ \Theta_-^2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.17)$$

Στη συνέχεια, για την εύρεση της  $\beta$ -συνάρτησης χρειάζεται ο υπολογισμός της ενεργού δράσης σε επίπεδο ενός βρόγχου. Πιο συγκεκριμένα, θέτοντας  $I_{\pm}^i = I_{0,\pm}^i + \delta I_{\pm}^i$ , η διαταραχή των εξισώσεων κίνησης (3.1.13) έρχεται στη μορφή γύρω από τα πεδία υποβάθρου (3.1.16)

$$\mathcal{D}^i \begin{pmatrix} \delta I_+^i \\ \delta I_-^i \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.18)$$

προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας διαταραχών

$$\mathcal{D}^i = \begin{pmatrix} \partial_- - \frac{1}{2}\tilde{I}_-^i & \frac{1}{2}\tilde{I}_+^i \\ \frac{1}{2}\tilde{I}_-^i & \partial_+ - \frac{1}{2}\tilde{I}_+^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.19)$$

με

$$\left(\tilde{I}_{\pm}^i\right)_{ab} = i f_{abc} I_{0,\pm c}^i, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.20)$$

Η ενεργός Λαγκρανζιανή σε επίπεδο ενός βρόγχου, μετά από στροφή κατά Wick σε Ευκλείδια υπογραφή<sup>4</sup> και στο χώρο ορμών, προκύπτει μετά από ολοκλήρωση των κβαντικών διακυμάνσεων που εμφανίζονται στο Γκαουσιανό ολοκλήρωμα διαδρομής να είναι

$$-\mathcal{L}_E^{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \int^{\mu} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathcal{D}}^2 \end{pmatrix}^{-1/2}, \quad (3.1.21)$$

όπου

$$\hat{\mathcal{D}}^i = \begin{pmatrix} p_- - \frac{1}{2}\tilde{I}_-^i & \frac{1}{2}\tilde{I}_+^i \\ \frac{1}{2}\tilde{I}_-^i & p_+ - \frac{1}{2}\tilde{I}_+^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad p_{\pm} = \frac{1}{2}(p_1 \pm i p_2). \quad (3.1.22)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η ορίζουσα που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα της (3.1.21)

$$\ln \det \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathcal{D}}^2 \end{pmatrix} = \ln \det \hat{\mathcal{D}}^1 + \ln \det \hat{\mathcal{D}}^2, \quad (3.1.23)$$

<sup>4</sup>Η αναλυτική συνέχιση είναι  $(\tau, \sigma) \mapsto (i\sigma_1, \sigma_2)$  και συνεπώς  $(p_0, p_1) \mapsto (ip_1, p_2)$ .

όπου

$$\begin{aligned} \ln \det \widehat{\mathcal{D}}^i &= \ln \det C + \text{Tr} \ln (\mathbb{1}_2 + C^{-1} E_i) , \\ C &= \begin{pmatrix} p_- & 0 \\ 0 & p_+ \end{pmatrix} , \quad E_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tilde{I}_-^i & \tilde{I}_+^i \\ \tilde{I}_-^i & -\tilde{I}_+^i \end{pmatrix} , \quad i = 1, 2 . \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Αναπτύσσοντας για μεγάλες ορμές τον όρο που εξαρτάται από τα πεδία

$$\text{Tr} \ln (\mathbb{1}_2 + C^{-1} E_i) = -\frac{\text{Tr} \left( \tilde{I}_+^i p_- + \tilde{I}_-^i p_+ \right)^2}{2p^4} + \mathcal{O} \left( \frac{p_{\pm}^4}{p^8} \right) , \quad i = 1, 2 , \quad (3.1.25)$$

οι λογαριθμικές αποκλίσεις στην (3.1.21), προέρχονται μόνο από τον όρο του αναπτύγματος που παρουσιάζεται πάνω. Μετά από την ολοκλήρωση ως προς τις ορμές, προκύπτει η

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E^{\text{eff}} &= -\mathcal{L}^{(0)} - \frac{1}{4\pi} \text{Tr} \left( \tilde{I}_+^1 \tilde{I}_-^1 + \tilde{I}_+^2 \tilde{I}_-^2 \right) \ln \mu \\ &= -\mathcal{L}^{(0)} - \frac{c_G}{4\pi} \left( I_{0,+a}^1 I_{0,-a}^1 + I_{0,+a}^2 I_{0,-a}^2 \right) \ln \mu , \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η (3.1.20). Μετά από αντικατάσταση των (3.1.14), (3.1.16) και (3.1.17) στην πάνω σχέση, η  $\beta$ -συνάρτηση σε επίπεδο ενός βρόγχου προκύπτει με την απαίτηση η ενεργός Λαγκρανζιανή (3.1.26) να είναι ανεξάρτητη της ενεργειακής κλίμακας  $\mu$ . Έπειτα από απλούς υπολογισμούς, το αποτέλεσμα που προκύπτει ταυτίζεται με αυτό της (3.1.5) που παράχθηκε με τη χρήση θεωρίας διαταραχών. Η συμφωνία αυτή των δύο αποτελεσμάτων αποτελεί μια μη-τετριμένη απόδειξη ότι η (2.10.167) αντιστοιχεί όντως στην ενεργό δράση (που περιλαμβάνει όλες τις  $\lambda$ -διορθώσεις) του γραμμικοποιημένου προτύπου (2.10.172).

Ο υπολογισμός των  $\beta$ -συναρτήσεων σε συμμετρικό συνσυνολικό χώρο παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο της υποενότητας.

Στη συνέχεια θα υπολογισθεί μέσω ροής κατά Ricci, η  $\beta$ -συνάρτηση για την περίπτωση ενός γενικού πίνακα ζεύξης  $\lambda_{ab}$ , και για την ειδική περίπτωση  $\lambda_2 = 0$ ,  $(\lambda_1)_{ab} = \lambda_{ab}$ . Στην περίπτωση αυτή, η δράση έχει τη μορφή

$$S_{k,\lambda}(g_1, g_2) = S_k(g_1) + S_k(g_2) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \lambda_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b , \quad (3.1.27)$$

η οποία δεν αντιστοιχεί σε μία προσεγγιστική μορφή της (2.10.167) για μικρά στοιχεία  $\lambda_{ab}$ , αλλά αντιθέτως περιλαμβάνει όλες τις κβαντικές διορθώσεις ως προς τον πίνακα της

παραμόρφωσης.

Από τη δράση αυτή προκύπτει η μετρική

$$ds^2 = R^a R^a + L^{\hat{a}} L^{\hat{a}} + 2\lambda_{ab} R^a L^{\hat{b}}, \quad (3.1.28)$$

όπου

$$\begin{aligned} R^a &= -i \operatorname{Tr}(t^a dg_1 g_1^{-1}), & L^{\hat{a}} &= -i \operatorname{Tr}(t^a g_2^{-1} dg_2), \\ dL^a &= \frac{1}{2} f_{abc} L^b \wedge L^c, & dR^a &= -\frac{1}{2} f_{abc} R^b \wedge R^c. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Έτσι, οι δείκτες με  $\wedge$  αντιστοιχούν στις Maurer-Cartan μορφές του στοιχείου  $g_2$ , ενώ οι απλοί δείκτες σε αυτές του  $g_1$ . Εισάγοντας το σύστημα συντεταγμένων

$$e^a = R^a, \quad e^{\hat{a}} = L^{\hat{a}} + \lambda_{ba} R^b, \quad (3.1.30)$$

το συμβολισμό  $A = (a, \hat{a})$  για τους δείκτες των δύο ομάδων και παραλείποντας έναν συνολικό παράγοντα  $k/2\pi$ , η μετρική έρχεται στη μορφή

$$ds^2 = \tilde{g}_{ab} e^a e^b + e^{\hat{a}} e^{\hat{a}} = G_{AB} e^A e^B, \quad (3.1.31)$$

όπου  $\tilde{g}_{ab} = (\mathbb{1} - \lambda\lambda^T)_{ab}$ , ενώ αργότερα θα χρειαστεί και η έκφραση που προκύπτει από τη  $\tilde{g}_{ab}$  αντικαθιστώντας το  $\lambda$  με το ανάστροφό του  $g_{ab} = (\mathbb{1} - \lambda^T\lambda)_{ab}$ . Η 2-μορφή που προκύπτει από τη δράση (3.1.27) είναι

$$B = B_0 + \lambda_{ab} R^a \wedge L^{\hat{b}}, \quad (3.1.32)$$

όπου  $B_0$  είναι η 2-μορφή που αντιστοιχεί στα δύο WZW πρότυπα με

$$H_0 = dB_0 = -\frac{1}{6} f_{abc} \left( R^a \wedge R^b \wedge R^c + L^{\hat{a}} \wedge L^{\hat{b}} \wedge L^{\hat{c}} \right). \quad (3.1.33)$$

Η μετρική  $G_{AB}$  του εφαπτόμενου, στην πολλαπλότητα που ορίζει η ομάδα, χώρου είναι σταθερή με αποτέλεσμα οι σπιν συνδέσεις  $\omega_{AB}$  να είναι αντισυμμετρικές και ένας πρακτικός τρόπος υπολογισμού τους είναι μέσω του ορισμού των ποσοτήτων  $C^A{}_{BC} = -C^A{}_{CB}$  ως

$$de^A = \frac{1}{2} C^A{}_{BC} e^B \wedge e^C, \quad C_{ABC} = G_{AD} C^D{}_{BC}. \quad (3.1.34)$$

Τότε,

$$\omega_{AB} = \omega_{AB|C} e^C = \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{CAB} + C_{BCA}) e^C, \quad (3.1.35)$$

μέσω των οποίων ορίζονται επίσης οι χρήσιμες ποσότητες  $\omega_{AB|C}$ . Εφαρμόζοντας τα παραπάνω σε συνδυασμό με την (3.1.30) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\omega_{ab} &= -\frac{1}{2}(\tilde{g}_{ad}f_{dbc} - \tilde{g}_{cd}f_{dab} + \tilde{g}_{bd}f_{dca})e^c + \frac{1}{2}(\lambda_{dc}f_{dab} - \lambda_{ad}\lambda_{be}f_{cde})e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}} &= \frac{1}{2}(f_{ade}\lambda_{bd}\lambda_{ce} - \lambda_{da}f_{dbc})e^c, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}} &= -f_{abd}\lambda_{cd}e^c + \frac{1}{2}f_{abc}e^{\hat{c}}.\end{aligned}\quad (3.1.36)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η 3-μορφή που αντιστοιχεί στην (3.1.32)

$$\begin{aligned}H = dB &= \left(-\frac{1}{6}f_{abc} - \frac{1}{3}\lambda_{ad}\lambda_{be}\lambda_{cf}f_{def} + \frac{1}{2}f_{abd}(\lambda\lambda^T)_{cd}\right)e^a \wedge e^b \wedge e^c \\ &+ \frac{1}{2}(f_{ade}\lambda_{bd}\lambda_{ce} - \lambda_{da}f_{dbc})e^{\hat{a}} \wedge e^b \wedge e^c - \frac{1}{6}f_{abc}e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}},\end{aligned}\quad (3.1.37)$$

με χρήση της οποίας προκύπτουν οι ακόλουθες γενικευμένες σπιν συνδέσεις που περιέχουν στρέψη

$$\begin{aligned}\omega_{ab}^+ &= (-f_{abc} - \lambda_{ad}\lambda_{be}\lambda_{cf}f_{def} + (\lambda\lambda^T)_{ad}f_{dbc} + (\lambda\lambda^T)_{bd}f_{adc})e^c, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^+ &= (f_{ade}\lambda_{bd}\lambda_{ce} - \lambda_{da}f_{dbc})e^c, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^+ &= -f_{abd}\lambda_{cd}e^c\end{aligned}\quad (3.1.38)$$

και

$$\begin{aligned}\omega_{ab}^- &= (\lambda_{ad}\lambda_{be}\lambda_{cf}f_{def} - (\lambda\lambda^T)_{cd}f_{abd})e^c + (\lambda_{dc}f_{dab} - \lambda_{ad}\lambda_{be}f_{dec})e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^- &= 0, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^- &= -f_{abd}\lambda_{cd}e^c + f_{abc}e^{\hat{c}}.\end{aligned}\quad (3.1.39)$$

Τέλος, έχοντας τις γενικευμένες συνδέσεις σπιν, είναι δυνατός ο υπολογισμός του ταυυστή Ricci που επίσης περιλαμβάνει στρέψη μέσω της σχέσης

$$R_{AB}^{\pm} = \partial_C \omega^{\pm C}{}_{A|B} - \omega_{AC|D}^{\pm} \omega_B^{\mp D|C} - \nabla_B^{\pm} \omega^{\pm C}{}_{A|C}, \quad (3.1.40)$$

όπου  $\partial_A = e_A^M \partial_M$ . Ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί σε διαφορομορφισμούς που σχετίζονται με το

$$\omega^{\pm C}{}_{A|C} = (\partial_M e_N^C - \partial_N e_M^C) e_A^M e_C^N, \quad (3.1.41)$$

το οποίο είναι ένα άνυσμα του χώρου-στόχου της ομάδας. Οι β-συναρτήσεις σε επίπεδο ενός βρόγχου δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = R_{MN}^- + \nabla_N^+ \xi_M, \quad (3.1.42)$$

όπου ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε διαφορομορφισμούς κατά μήκος του  $\xi^M$ . Η από πάνω σχέση, μπορεί να ξαναγραφεί ως προς το σύστημα αναφοράς του εφαπτώμενου χώρου  $e^A = e_M^A dX^M$  ως

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = (R_{AB}^- + \nabla_B^- \xi_A) e_M^A e_N^B. \quad (3.1.43)$$

Το αριστερό μέλος της πάνω εξίσωσης, με χρήση της (3.1.30), δίνει

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = \frac{d\lambda_{ab}}{dt} R_M^a L_N^b = \frac{d\lambda_{ab}}{dt} e_M^a (e_N^b - \lambda_{cb} e_N^c), \quad (3.1.44)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε επίσης η ελευθερία των διαφορομορφισμών προκειμένου να απορροφηθεί ο όρος  $\nabla_B^- \omega^{-C}{}_{A|C} e_M^A e_N^B$  του  $R_{MN}^-$ , διαλέγοντας  $\xi_A = \omega^{-C}{}_{A|C}$ . Χρησιμοποιώντας τα τελευταία σε συνδυασμό με τις (3.1.38)-(3.1.40), (3.1.43) και επαναφέροντας τον παράγοντα  $k$  ο οποίος δεν ρέει κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης, προκύπτει η β-συνάρτηση για τον πίνακα  $\lambda_{ab}$  να είναι

$$\boxed{\frac{d\lambda_{ab}}{dt} = \frac{1}{2k} \mathcal{N}(\lambda)_{ac} {}^d \mathcal{N}(\lambda^T)_{bd}{}^c}, \quad (3.1.45)$$

με

$$\mathcal{N}(\lambda)_{ab}{}^c = (\lambda_{ae} \lambda_{bd} f_{edf} - f_{abe} \lambda_{ef}) g^{fc}. \quad (3.1.46)$$

Η έκφραση αυτή είναι ίδια με την (2.10.231) [49] και για διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα παραμόρφωσης ταυτίζεται με την (3.1.5), η οποία με τη σειρά της ταυτίζεται με την (2.10.93) [47].

Σύμφωνα με τη μορφή της δράσης (3.1.27) τα ρεύματα  $J_{2+}^a$  και  $J_{1-}^a$  δεν αποκτούν ανώμαλες διαστάσεις εφόσον δεν εμφανίζονται σε αυτήν. Αυτό συνεπάγεται ότι η δράση αυτή έχει χειραλικά και αντιχειραλικά διατηρούμενα ρεύματα. Οι εξισώσεις κίνησης ως προς τα στοιχεία  $g_{1,2}$  της ομάδας  $G$  μπορούν εύκολα να παραχθούν και αντιστοιχούν σε αυτές που προκύπτουν από τις (2.10.178) και (2.10.179) μετά από αντικατάσταση των (2.10.164), (2.10.165) και θέτοντας  $\lambda_2 = 0$  και  $\lambda_1 = \lambda$ . Έτσι προκύπτει<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \lambda \partial_+ J_{2-} + \partial_- J_{1+} &= i[J_{1+}, \lambda J_{2-}], \\ \partial_+ J_{2-} + \lambda^T \partial_- J_{1+} &= i[\lambda^T J_{1+}, J_{2-}] \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

<sup>5</sup> Οι εξισώσεις (3.1.48) για τη δράση (3.1.27) είχαν παραχθεί αρχικά στην [100].

και

$$\begin{aligned} \partial_- \mathcal{J}_+ &= 0, & \mathcal{J}_+ &= J_{2+} + D_2 \lambda^T J_{1+}, \\ \partial_+ \mathcal{J}_- &= 0, & \mathcal{J}_- &= J_{1-} + D_1^T \lambda J_{2-}. \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

Η πρώτη (δεύτερη) των (3.1.47) είναι ισοδύναμη με την δεύτερη (πρώτη) των (3.1.48), κάτι που αποδεικνύεται με τη χρήση των ταυτοτήτων  $(D^T \partial_- D)^{ab} = f^{ab}_c J_-^c$  και  $(\partial_+ D D^T)^{ab} = f^{ab}_c J_+^c$ . Τα άνωθεν χειραλικά και αντι-χειραλικά διατηρούμενα ρεύματα  $\mathcal{J}_\pm$  αποτελούν παραμορφώσεις των  $J_{2+}$  και  $J_{1-}$  αντίστοιχα, με τα οποία ταυτίζονται για  $\lambda = 0$ . Αυτό είναι σε συμφωνία με το γεγονός ότι δεν αποκτούν ανώμαλες διαστάσεις.

### Περίπτωση συνσυνολικού χώρου

Έστω τώρα η περίπτωση παραμόρφωσης δύο συνσυνολικών σύμμορφων θεωριών που αντιστοιχούν σε συμμετρικό συνσυνολικό χώρο  $G/H$ ,  $H \subset G$ . Ακολουθώντας τις συμβάσεις που εισήχθησαν στο αντίστοιχο κομμάτι της θεωρίας, οι πίνακες παραμόρφωσης  $(\lambda_i)_{AB}$  με  $A = (a, \alpha)$  έχουν μη-μηδενικά στοιχεία

$$(\lambda_i)_{ab} = \delta_{ab}, \quad (\lambda_i)_{\alpha\beta} = \lambda_i \delta_{\alpha\beta}, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.49)$$

Χωρίζοντας τα πεδία σε αυτά της υποομάδας  $H$  και αυτά του συνσυνόλου  $G/H$

$$I_\pm^i = I_\pm^{h|i} + I_\pm^{g/h|i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.50)$$

οι εξισώσεις κίνησης είναι της μορφής [39]

$$\begin{aligned} \partial_+ I_-^{h|i} - \partial_- I_+^{h|i} + [I_+^{h|i}, I_-^{h|i}] + [I_+^{g/h|i}, I_-^{g/h|i}] &= 0, \\ \partial_\pm I_\mp^{g/h|i} &= [I_\mp^{g/h|i}, I_\pm^{h|i}], \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

με

$$I_\pm^{h|i} = -A_\pm^{h|i}, \quad I_\pm^{g/h|i} = -\frac{A_\pm^{g/h|i}}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.52)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι για συμμετρικούς χώρους  $f_{\alpha\beta\gamma} = 0$ . Η υπολειπόμενη ελευθερία βαθμίδας εξαλείφεται επιλέγοντας τη βαθμίδα που ικανοποιεί τη συνθήκη<sup>6</sup>

$$\partial_+ I_-^{h|i} + \partial_- I_+^{h|i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.53)$$

<sup>6</sup>Η επιλογή διαφορετικής βαθμίδας (που θα περιλαμβάνει αναγκαστικά μόνο τα  $A_\pm^{h|i}$ ) δεν επηρεάζει τη μορφή της ενεργού Λαγκρανζιανής που προκύπτει σε επίπεδο ενός βρόγχου, και συνεπώς η αντίστοιχη β-συνάρτηση δεν εξαρτάται από την επιλογή βαθμίδας, όπως είναι αναμενόμενο.

Όπως και στην περίπτωση του χώρου ομάδας, για την εύρεση της  $\beta$ -συνάρτησης χρειάζεται ο προσδιορισμός ενός πεδίου υποβάθρου που αποτελεί λύση των κλασικών εξισώσεων κίνησης. Η επιλογή κλασικής λύσης είναι αυτή της (3.1.15), με τη διαφορά ότι τα στοιχεία  $\Theta_\alpha^i$ ,  $i = 1, 2$  αποτελούν τώρα αυθαίρετα, μετατιθέμενα, σταθερά στοιχεία της  $\mathfrak{g}/\hbar$ . Η κλασική Λαγκρανζιανή  $\mathcal{L}^{(0)}$  υπολογισμένη ως προς τα πεδία υποβάθρου έχει την ίδια μορφή με την (3.1.17) και επιπλέον, τα πεδία βαθμίδας του συνσυνόλου  $A_\pm^{g/h^1}$  και  $A_\pm^{g/h^2}$  παίρνουν τη μορφή της (3.1.16), ενώ αυτά της υποομάδας  $A_\pm^{h^1} = A_\pm^{h^2} = 0$ . Η διαταραχή των εξισώσεων κίνησης (3.1.51) και της συνθήκης (3.1.53) γύρω από τα κλασικά πεδία υποβάθρου δίνει

$$\mathcal{D}^i \begin{pmatrix} \delta I_+^{g/h^i} \\ \delta I_-^{g/h^i} \\ \delta I_+^{h^i} \\ \delta I_-^{h^i} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.54)$$

με τον πίνακα των διαταραχών να είναι

$$\mathcal{D}^i = \begin{pmatrix} \partial_- & 0 & 0 & \tilde{I}_+^{g/h^i} \\ 0 & \partial_+ & \tilde{I}_-^{g/h^i} & 0 \\ \tilde{I}_-^{g/h^i} & -\tilde{I}_+^{g/h^i} & -\partial_- & \partial_+ \\ 0 & 0 & \partial_- & \partial_+ \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.55)$$

με

$$\left( \tilde{I}_\pm^{g/h^i} \right)_{\alpha\beta} = i f_{\alpha\beta\gamma} I_{\pm\gamma}^{g/h^i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.56)$$

Στο χώρο των ορμών, η ενεργός Λαγκρανζιανή σε επίπεδο ενός βρόγχου, μετά από στροφή κατά Wick για το πέρασμα σε ευκλείδια υπογραφή, παίρνει τη μορφή (3.1.21) με τη διαφορά ότι τώρα

$$\hat{\mathcal{D}}^i = \begin{pmatrix} p_- & 0 & 0 & \tilde{I}_+^{g/h^i} \\ 0 & p_+ & \tilde{I}_-^{g/h^i} & 0 \\ \tilde{I}_-^{g/h^i} & -\tilde{I}_+^{g/h^i} & -p_- & p_+ \\ 0 & 0 & p_- & p_+ \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.57)$$

Δουλεύοντας όπως και για την περίπτωση της ομάδας, προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E^{\text{eff}} &= -\mathcal{L}^{(0)} - \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left( \tilde{I}_+^{g/h^1} \tilde{I}_-^{g/h^1} + \tilde{I}_+^{g/h^2} \tilde{I}_-^{g/h^2} \right) \ln \mu, \\ &= -\mathcal{L}^{(0)} - \frac{cG}{\pi} \left( I_{+\alpha}^{g/h^1} I_{-\alpha}^{g/h^1} + I_{+\alpha}^{g/h^2} I_{-\alpha}^{g/h^2} \right) \ln \mu, \end{aligned} \quad (3.1.58)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η (3.1.56) και το γεγονός ότι για συμμετρικούς χώρους  $f_{\alpha\beta\gamma} = 0$ . Όπως και πριν, η  $\beta$ -συνάρτηση σε επίπεδο ενός βρόγχου (που εκφράζεται μέσω του  $1/k$  αναπτύγματος) προκύπτει απαιτώντας η αντίστοιχη ενεργός δράση (3.1.58) να είναι ανεξάρτητη

της ενεργειακής κλίμακας  $\mu$ . Το αποτέλεσμα για αυθαίρετες σταθερές  $\Theta_\alpha^i$  είναι

$$\beta_i = -\frac{c_G \lambda_i}{2k} \quad i = 1, 2 \quad (3.1.59)$$

και ταυτίζεται με αυτό των  $SU(2)/U(1)$   $\lambda$ -παραμορφωμένων συνσυνόλων που προκύπτει με τη χρήση τεχνικών βαρύτητας στην [47] και γενικεύεται για  $\lambda$ -παραμορφώσεις αυθαίρετων συμμετρικών  $G/H$  συνσυνολικών σύμορφων θεωριών πεδίου στην [61].

## 3.2 Διπλά παραμορφωμένο πρότυπο με άνισα επίπεδα στις άλγεβρες ρευμάτων

Στην ενότητα αυτή, που βασίζεται στην [52], υπολογίζεται η  $\beta$ -συνάρτηση για το διπλά παραμορφωμένο μη-συμμετρικό πρότυπο με γενικούς πίνακες  $(\lambda_i)_{ab}$ ,  $i = 1, 2$ , το οποίο εκφράζεται από τις δράσεις των σχέσεων (2.10.186) και (2.10.181). Σύμφωνα με τη συζήτηση της προηγούμενης ενότητας [51], η παραγοντοποίηση των συναρτήσεων συσχετισμού που περιλαμβάνουν απλούς ή σύνθετους τελεστές ρευμάτων, συνεπάγεται την απεμπλοκή των δύο  $\beta$ -συναρτήσεων για τα  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  καταλήγοντας σε δύο αντίγραφα  $\beta$ -συναρτήσεων του απλά παραμορφωμένου προτύπου για  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση ισοτροπικών παραμέτρων ζεύξης  $(\lambda_i)_{ab} = \lambda_i \delta_{ab}$  το αποτέλεσμα είναι αυτό της (2.10.199)

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{c_G}{2\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda_i^2 (\lambda_i - \lambda_0) (\lambda_i - \lambda_0^{-1})}{(1 - \lambda_i^2)^2}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad i = 1, 2, \quad t = \ln \mu^2. \quad (3.2.1)$$

Συνεπώς, σε ότι ακολουθεί είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η δράση (2.10.186) με  $\lambda_2 = 0$  και  $\lambda_1 = \lambda$ , η οποία απλοποιείται στην

$$S_\lambda = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2\sigma \lambda_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b. \quad (3.2.2)$$

### Ενεργός δράση σε επίπεδο ενός βρόγχου

Αρχικά παρουσιάζεται ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης για τη θεωρία με έναν πίνακα ζεύξης μέσω της ενεργού θεωρίας σε επίπεδο ενός βρόγχου και των κβαντικών διακυμάνσεων γύρω από ένα κλασικό υπόβαθρο.

Ακολουθώντας τη μέθοδο όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα [61, 51], αρχικά προσδιορίζεται μια κλασική λύση υποβάθρου και στη συνέχεια υπολογίζονται οι κβαντικές διακυμάνσεις γύρω από αυτή. Η μέθοδος αυτή για τον προσδιορισμό της  $\beta$ -συνάρτησης, μέχρι τώρα έχει χρησιμοποιηθεί για περιπτώσεις διαγώνιου και ισοτροπικού πίνακα  $\lambda$ , και συνεπώς



για ολοκληρώσιμα πρότυπα. Με την εφαρμογή της στην παρούσα ενότητα για μη διαγώνιο πίνακα ζεύξης, αποδεικνύεται η εγκυρότητά της και για την περίπτωση μη-ολοκληρώσιμων θεωριών.

Οι εξισώσεις κίνησης της (3.2.2) δίνονται από τις σχέσεις [40]

$$\begin{aligned}\lambda_0 \partial_+ A_- - \lambda^{-T} \partial_- A_+ &= [\lambda^{-T} A_+, A_-], \\ \lambda^{-1} \partial_+ A_- - \lambda_0^{-1} \partial_- A_+ &= [A_+, \lambda^{-1} A_-],\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

όπου

$$A_+ = i\lambda_0 \lambda^T J_{1+}, \quad A_- = -i\lambda_0^{-1} \lambda J_{2-}. \quad (3.2.4)$$

Έστω μια λύση υποβάθρου των (3.2.3) για την οποία η Λαγκρανζιανή πυκνότητα της (3.2.2) παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_{k_1}(g_1) + \mathcal{L}_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \lambda_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b. \quad (3.2.5)$$

Στη συνέχεια, από την διαταραχή των εξισώσεων κίνησης (3.2.3) γύρω από το υπόβαθρο προκύπτει ένας όρος ανάλογος του πίνακα διαταραχών

$$\begin{pmatrix} (\lambda^{-T})_{ab} \partial_- - i f_{acd} A_-^c (\lambda^{-T})_{db} & -\lambda_0 \delta_{ab} \partial_+ - i f_{abc} (\lambda^{-T})_{cd} A_+^d \\ \lambda_0^{-1} \delta_{ab} \partial_- + i f_{abc} (\lambda^{-1})_{cd} A_-^d & -(\lambda^{-1})_{ab} \partial_+ + i f_{acd} A_+^c (\lambda^{-1})_{db} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_+^b \\ \delta A_-^b \end{pmatrix} = 0.$$

Τότε, περνώντας στο χώρο ορμών, η ενεργός Λαγκρανζιανή σε επίπεδο ενός βρόγχου και σε Ευκλείδιο χώρο, προκύπτει με ολοκλήρωση των διακυμάνσεων στο Γκαουσιανό ολοκλήρωμα διαδρομών, να είναι

$$-\mathcal{L}^{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \int^\mu \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \det \mathcal{D}^{-1/2}, \quad d^2 p = dp_1 dp_2, \quad (3.2.6)$$

με τον πίνακα  $\mathcal{D}$  να δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} (\lambda^{-T})_{ab} p_- - i f_{acd} A_-^c (\lambda^{-T})_{db} & -\lambda_0 \delta_{ab} p_+ - i f_{abc} (\lambda^{-T})_{cd} A_+^d \\ \lambda_0^{-1} \delta_{ab} p_- + i f_{abc} (\lambda^{-1})_{cd} A_-^d & -(\lambda^{-1})_{ab} p_+ + i f_{acd} A_+^c (\lambda^{-1})_{db} \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

και  $p_\pm = \frac{1}{2}(p_1 \pm ip_2)$ . Για τον υπολογισμό της β-συνάρτησης, χρειάζεται η λογαριθμική απόκλιση (ως προς την ενεργειακή κλίμακα  $\mu$ ) που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα της (3.2.6).

Για να απομονωθεί ο όρος με τον λογάριθμο, αρχικά ξαναγράφεται η ορίζουσα ως

$$\ln \det \mathcal{D} = \ln \det E + \text{Tr} \ln (\mathbb{1}_{2\text{dim}G} + E^{-1} F), \quad (3.2.8)$$

όπου

$$E = \begin{pmatrix} \lambda^{-T} p_- & -\lambda_0 p_+ \mathbb{1}_{\dim G} \\ \lambda_0^{-1} p_- \mathbb{1}_{\dim G} & -\lambda^{-1} p_+ \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix},$$

$$P_{ab} = -i f_{acd} A_-^c (\lambda^{-T})_{db}, \quad Q_{ab} = -i f_{abc} (\lambda^{-T})_{cd} A_+^d,$$

$$S_{ab} = i f_{abc} (\lambda^{-1})_{cd} A_-^d, \quad T_{ab} = i f_{acd} A_+^c (\lambda^{-1})_{db}.$$

Ο αντίστροφος του πίνακα E είναι

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A}{p_-} & \frac{B}{p_-} \\ \frac{C}{p_+} & \frac{D}{p_+} \end{pmatrix},$$

με τα διάφορα στοιχεία του να δίνονται από τις σχέσεις

$$A = \lambda^T \tilde{g}^{-1}, \quad B = -\lambda_0 \lambda^T \lambda g^{-1}, \quad C = \lambda_0^{-1} \lambda \lambda^T \tilde{g}^{-1}, \quad D = -\lambda g^{-1},$$

$$g = \mathbb{1}_{\dim G} - \lambda^T \lambda, \quad \tilde{g} = \mathbb{1}_{\dim G} - \lambda \lambda^T \quad \text{με} \quad \lambda g^{-1} = \tilde{g}^{-1} \lambda. \quad (3.2.9)$$

Έπειτα, αναπτύσσεται ο όρος της (3.2.8) που εξαρτάται από τα πεδία και ο πρώτος όρος του αναπτύγματος αυτού δίνει τη μόνη μη-μηδενική λογαριθμική συνεισφορά στην (3.2.6)

$$\text{Tr} \ln (\mathbb{1}_{2\dim G} + E^{-1} F) = -\frac{1}{p_+ p_-} \text{Tr}(A Q + B S)(C P + D R) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p_{\pm}^2}\right).$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$(A Q + B S)_{ab} = -i \lambda_0 (\lambda^T \tilde{g}^{-1})_{ac} (g \lambda^{-1})_{db} (\lambda^{-1})_{qp} \mathcal{N}_{cp}^d(\lambda, \lambda_0^{-1}) A_+^q,$$

$$(C P + D R)_{ab} = -i \lambda_0^{-1} (\lambda g^{-1})_{ac} (\tilde{g} \lambda^{-T})_{db} (\lambda^{-1})_{pq} \mathcal{N}_{cp}^d(\lambda^T, \lambda_0) A_-^q,$$

όπου έχει ορισθεί το

$$\mathcal{N}_{ab}^c(\lambda, \lambda_0^{-1}) = (\lambda_{ae} \lambda_{bd} f_{edf} - \lambda_0^{-1} \lambda_{ef} f_{abe}) g^{fc} \quad \text{και} \quad g^{ab} = g_{ab}^{-1}. \quad (3.2.10)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (3.2.6), προκύπτει

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} - \frac{1}{2} \int^{\mu} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p_+ p_-} \mathcal{N}_{ac}^d(\lambda, \lambda_0^{-1}) \mathcal{N}_{bd}^c(\lambda^T, \lambda_0) J_{1+}^a J_{2-}^b$$

$$= \dots + \frac{1}{\pi} \left( \sqrt{k_1 k_2} \lambda_{ab} - \ln \mu \mathcal{N}_{ac}^d(\lambda, \lambda_0^{-1}) \mathcal{N}_{bd}^c(\lambda^T, \lambda_0) \right) J_{1+}^a J_{2-}^b, \quad (3.2.11)$$

όπου οι τελείες συμβολίζουν τις δύο WZW δράσεις που δεν εξαρτώνται από το  $\lambda$ . Η ακριβής ως προς  $\lambda$  μορφή της  $\beta$ -συνάρτησης σε επίπεδο ενός βρόγχου, προκύπτει πάλι από την

απαίτηση η ενεργός δράση να είναι ανεξάρτητη από την κλίμακα αποκοπής  $\mu$  και ισούται με

$$\frac{d\lambda_{ab}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}_{ac}{}^d(\lambda, \lambda_0^{-1}) \mathcal{N}_{bd}{}^c(\lambda^T, \lambda_0). \quad (3.2.12)$$

Τα επίπεδα  $k_{1,2}$  διατηρούν την τοπολογική τους φύση σε επίπεδο ενός βρόγχου ως προς το ανάπτυγμα σε  $1/k_{1,2}$  για μεγάλα  $k_{1,2}$ , καθώς δεν ρέουν με την ενεργειακή κλίμακα.

Το σύστημα ροών της (3.2.12) περιλαμβάνει σαν υποπερίπτωση αυτήν του συμμετρικού προτύπου  $k_1 = k_2$  [49, 51] με  $\beta$ -συνάρτηση την (3.1.45), ενώ για την περίπτωση διαγώνιου και ισοτροπικού πίνακα  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$  ταυτίζεται με την (3.2.1). Επιπλέον, η (3.2.12) είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό<sup>7</sup>

$$\lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad k_{1,2} \rightarrow -k_{2,1},$$

λόγω της ιδιότητας

$$\mathcal{N}_{ab}{}^c(\lambda, \lambda_0^{-1}) \rightarrow \lambda_0 \lambda_{ad}^{-1} \lambda_{be}^{-1} \lambda_{cm} \mathcal{N}_{de}{}^m(\lambda, \lambda_0^{-1}),$$

και επίσης διατηρεί τη μορφή της κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\lambda \rightarrow \lambda^T, \quad k_{1,2} \rightarrow k_{2,1}.$$

Στην πραγματικότητα, ένας συμμετρικός πίνακας ζεύξης  $\lambda$ , παραμένει συμμετρικός κάτω από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης, όπως φαίνεται και από την (3.2.12). Για αυτό το σύνολο πινάκων ζεύξης υπάρχει ανάλογος τύπος στη βιβλιογραφία [60] ο οποίος είναι ισοδύναμος με αυτόν της (3.2.12).

### Τεχνικές βαρύτητας

Σε ότι ακολουθεί, θα ξαναπαραχθεί η (3.2.12), μέσω ροής κατά Ricci ακολουθώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στις [49, 51]. Η μετρική που προκύπτει από την (3.2.2) είναι η

$$ds^2 = R^a R^a + \lambda_0^{-2} L^{\hat{a}} L^{\hat{a}} + 2\lambda_0^{-1} \lambda_{ab} R^a L^{\hat{b}}, \quad (3.2.13)$$

με τις Maurer-Cartan μορφές να είναι αυτές που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, όπως και ο συμβολισμός  $A = (a, \hat{a})$  των δεικτών για τις δύο ομάδες.

Επιλέγοντας τώρα τη γραμμική βάση

$$e^a = R^a, \quad e^{\hat{a}} = \lambda_{ba} R^b + \lambda_0^{-1} L^{\hat{a}}, \quad (3.2.14)$$

<sup>7</sup> Ο μετασχηματισμός αυτός πρέπει να θεωρηθεί ως η αναλυτική συνέχιση:  $k_{1,2} \rightarrow e^{i\pi} k_{2,1}$ .

η μετρική ξαναγράφεται ως

$$ds^2 = \tilde{g}_{ab}e^a e^b + e^{\hat{a}}e^{\hat{a}} = G_{AB}e^A e^B,$$

όπου στους υπολογισμούς παραλείπεται ξανά ένας κοινός παράγοντας  $\frac{k_1}{2\pi}$ . Εφόσον η μετρική του εφαπτόμενου χώρου  $G_{AB}$  είναι σταθερή, η σύνδεση σπίν  $\omega_{AB}$  είναι αντισυμμετρική και υπολογίζεται μέσω των ποσοτήτων  $C^A{}_{BC} = -C^A{}_{CB}$  από τη σχέση

$$de^A = \frac{1}{2}C^A{}_{BC}e^B \wedge e^C, \quad C_{ABC} = G_{AD}C^D{}_{BC}.$$

Τότε,

$$\omega_{AB} = \omega_{AB|C}e^C = \frac{1}{2}(C_{ABC} - C_{CAB} + C_{BCA})e^C,$$

από όπου προκύπτουν και οι χρήσιμες ποσότητες  $\omega_{AB|C}$ . Εφαρμόζοντας τα παραπάνω σε συνδυασμό με την (3.2.14) προκύπτουν τα ακόλουθα στοιχεία των σπιν συνδέσεων

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= -\frac{1}{2}(\tilde{g}_{ad}f_{abc} - \tilde{g}_{cd}f_{dab} + \tilde{g}_{bd}f_{dca})e^c + \frac{1}{2}(\lambda_{dc}f_{dab} - \lambda_0\lambda_{ad}\lambda_{be}f_{cde})e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}} &= \frac{1}{2}(\lambda_0f_{ade}\lambda_{bd}\lambda_{ce} - \lambda_{da}f_{dbc})e^c, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}} &= -\lambda_0\lambda_{cd}f_{abd}e^c + \frac{1}{2}\lambda_0f_{abc}e^{\hat{c}}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Προκειμένου να υπολογισθούν οι γενικευμένες σπιν συνδέσεις με στρέψη χρειάζεται η 2-μορφή της (3.2.2), η οποία δίνεται από τη σχέση

$$B = B_0 + \lambda_0^{-1}\lambda_{ab}R^a \wedge L^{\hat{b}}, \quad (3.2.16)$$

με το  $B_0$  να είναι η 2-μορφή που αντιστοιχεί στα δύο WZW πρότυπα με στρέψη

$$H_0 = dB_0 = -\frac{1}{6}f_{abc}R^a \wedge R^b \wedge R^c - \frac{\lambda_0^{-2}}{6}f_{abc}L^{\hat{a}} \wedge L^{\hat{b}} \wedge L^{\hat{c}}.$$

Η στρέψη που αντιστοιχεί στην συνολική 2-μορφή  $B$  του παραμορφωμένου προτύπου είναι

$$\begin{aligned} H = dB &= -\frac{1}{6}(f_{abc} - 3f_{abd}(\lambda\lambda^T)_{cd} + 2\lambda_0\lambda_{ad}\lambda_{be}\lambda_{cf}f_{def})e^a \wedge e^b \wedge e^c + \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda_0\lambda_{ce}\lambda_{bd}f_{ade} - \lambda_{da}f_{dbc})e^{\hat{a}} \wedge e^b \wedge e^c - \frac{\lambda_0}{6}f_{abc}e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

από την οποία προκύπτουν τα στοιχεία της γενικευμένης σπιν σύνδεσης ως

$$\omega_{AB}^{\pm} = \omega_{AB} \pm \frac{1}{2}H_{ABC}e^C = \omega_{AB|C}^{\pm}e^C.$$

Χρήση της πάνω σχέσης σε συνδυασμό με τις (3.2.16) και (3.2.17) δίνει

$$\begin{aligned}\omega_{ab}^+ &= (-f_{abc} - \lambda_0 \lambda_{ad} \lambda_{be} \lambda_{cf} f_{def} + (\lambda \lambda^T)_{ad} f_{dbc} + (\lambda \lambda^T)_{bd} f_{adc}) e^c, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^+ &= (\lambda_0 \lambda_{bd} \lambda_{ce} f_{ade} - \lambda_{da} f_{dbc}) e^c, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^+ &= -\lambda_0 f_{abd} \lambda_{cd} e^c,\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

και

$$\begin{aligned}\omega_{ab}^- &= (\lambda_0 \lambda_{ad} \lambda_{be} \lambda_{cf} f_{def} - (\lambda \lambda^T)_{cd} f_{dab}) e^c + (\lambda_{dc} f_{dab} - \lambda_0 \lambda_{ad} \lambda_{be} f_{dec}) e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^- &= 0, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^- &= -\lambda_0 f_{abd} \lambda_{cd} e^c + \lambda_0 f_{abc} e^{\hat{c}}.\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

Είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός του ταυυστή Ricci με στρέψη

$$R_{AB}^\pm = \partial_C \omega^{\pm C}{}_{A|B} - \omega^{\pm AC|D} \omega_B^{\mp D|C} - \nabla_B^\pm \omega^{\pm C}{}_{A|C}.$$

Οι συναρτήσεις ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης σε επίπεδο ενός βρόγχου δίνονται από τη σχέση [63, 101, 102]

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = R_{MN}^- + \nabla_N^+ \xi_M, \tag{3.2.20}$$

ή ισοδύναμα στο σύστημα συντεταγμένων  $e^A = e^A_M dX^M$  του εφαπτόμενου χώρου από τη σχέση

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = (R_{AB}^- + \nabla_B^- \xi_A) e^A_M e^B_N, \tag{3.2.21}$$

με τον δεύτερο όρο να αντιστοιχεί σε διαφορομορφισμούς κατά μήκος του  $\xi^M$ . Αυτός ο όρος μπορεί να απορροφηθεί διαλέγοντας το άνυσμα  $\xi_A = \omega^{-C}{}_{A|C}$ . Το αριστερό μέλος της πάνω εξίσωσης ισούται με

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = 2 \frac{d\lambda_{ab}}{dt} \left( e^a_M e^{\hat{b}}_N - \lambda_{cb} e^a_M e^c_N \right).$$

Αντικαθιστώντας το στην (3.2.21) και επαναφέροντας τον συνολικό παράγοντα  $k_1$ , ο οποίος δεν ρέει, προκύπτει πάλι η  $\beta$ -συνάρτηση (3.2.12) σε επίπεδο ενός βρόγχου, αποδεικνύοντας ότι η χρήση της μεθόδου πεδίου υποβάθρου για την εύρεση της  $\beta$ -συνάρτησης σε μη ολοκληρώσιμο σύστημα, που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι εγκυρη.

### Η περίπτωση των δύο πινάκων

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι  $\beta$ -συναρτήσεις για την περίπτωση που και οι δύο πίνακες ζεύξης είναι μη-μηδενικοί και αποδεικνύεται ότι το αποτέλεσμα όντως αντιστοιχεί σε δύο αντίγραφα του απλά παραμορφωμένου προτύπου. Η δράση σε αυτή τη περίπτωση είναι η (2.10.186) και ο υπολογισμός των  $\beta$ -συναρτήσεων γίνεται με τη μέθοδο του πεδίου υποβάθρου αφού είναι απλούστερος, σε αυτή την περίπτωση, από τη χρήση βαρύτητας.

Σημείο αφετηρίας είναι η δράση [40]

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1, \lambda_2} &= S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2\sigma \operatorname{Tr}(A_+ \lambda_1^{-1} A_- + B_+ \lambda_2^{-1} B_-) \\ &+ \frac{k_1}{\pi} \int d^2\sigma \operatorname{Tr}(A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - B_+ g_1^{-1} \partial_- g_1 + A_- g_1 B_+ g_1^{-1}) \\ &+ \frac{k_2}{\pi} \int d^2\sigma \operatorname{Tr}(B_- \partial_+ g_2 g_2^{-1} - A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2 + B_- g_2 A_+ g_2^{-1}), \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

η οποία, μετά την αντικατάσταση των πεδίων βαθμίδας καταλήγει στην (2.10.186).

Οι εξισώσεις κίνησης της (3.2.22) είναι απλά δύο αντίγραφα των (3.2.3) για τους πίνακες ζεύξης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα [40]

$$\begin{aligned} \lambda_0 \partial_+ A_- - \lambda_1^{-T} \partial_- A_+ &= [\lambda_1^{-T} A_+, A_-], \\ \lambda_1^{-1} \partial_+ A_- - \lambda_0^{-1} \partial_- A_+ &= [A_+, \lambda_1^{-1} A_-] \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

και

$$\begin{aligned} \lambda_0^{-1} \partial_+ B_- - \lambda_2^{-T} \partial_- B_+ &= [\lambda_2^{-T} B_+, B_-], \\ \lambda_2^{-1} \partial_+ B_- - \lambda_0 \partial_- B_+ &= [B_+, \lambda_2^{-1} B_-], \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

ενώ οι εκφράσεις των πεδίων βαθμίδας συναρτήσεως των ρευμάτων και των στοιχείων της ομάδας δίνονται από τις (2.10.184), (2.10.185) [40]. Συνεπώς, το αντίστοιχο μέρος των (3.2.6) και (3.2.8) που παρουσιάζει μη-μηδενική, λογαριθμική απόκλιση, παραγοντοποιείται και μετά από την ολοκλήρωση ως προς  $d^2p$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \ln \mu &\left( \mathcal{N}_{ac}^d(\lambda_1, \lambda_0^{-1}) \mathcal{N}_{bd}^c(\lambda_1^T, \lambda_0) (\lambda_1^{-1})_{ea} (\lambda_1^{-1})_{fb} A_+^e A_-^f \right. \\ &\left. + \mathcal{N}_{ac}^d(\lambda_2, \lambda_0) \mathcal{N}_{bd}^c(\lambda_2^T, \lambda_0^{-1}) (\lambda_2^{-1})_{ea} (\lambda_2^{-1})_{fb} B_+^e B_-^f \right), \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

με τα  $\mathcal{N}$  να είναι αυτά της (3.2.10). Τότε, εύκολα αποδεικνύεται ότι η (3.2.22) ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d\mathcal{L}^{(0)}}{dt} = -\frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \left( \frac{d(\lambda_1^{-1})_{ef}}{dt} A_+^e A_-^f + \frac{d(\lambda_2^{-1})_{ef}}{dt} B_+^e B_-^f \right). \quad (3.2.26)$$

και απαιτώντας ανεξαρτησία της ενεργού δράσης από την κλίμακα αποκοπής  $\mu$ , προκύπτουν τελικά

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d(\lambda_1)_{ab}}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}_{ac}{}^d(\lambda_1, \lambda_0^{-1}) \mathcal{N}_{bd}{}^c(\lambda_1^T, \lambda_0), \\ \frac{d(\lambda_2)_{ab}}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}_{ac}{}^d(\lambda_2, \lambda_0) \mathcal{N}_{bd}{}^c(\lambda_2^T, \lambda_0^{-1}). \end{aligned}} \quad (3.2.27)$$

Όπως και στην περίπτωση του ενός πίνακα ζεύξης, οι ροές αυτές είναι αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς

$$\lambda_{1,2} \rightarrow \lambda_{1,2}^{-1}, \quad k_{1,2} \rightarrow -k_{2,1}$$

και

$$\lambda_{1,2} \rightarrow \lambda_{1,2}^T, \quad k_{1,2} \rightarrow k_{2,1},$$

με τα επίπεδα  $k_{1,2}$  των άλγεβρών να διατηρούν την τοπολογική τους φύση σε επίπεδο ενός βρόγχου ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλα  $k_{1,2}$ . Επιπλέον, το σύνολο των ροών αυτών είναι αναλλοίωτο κάτω από εναλλαγή των δεικτών 1 και 2 και τέλος, στην περίπτωση διαγώνιων και ισοτροπικών πινάκων  $(\lambda_{1,2})_{ab} = \lambda_{1,2} \delta_{ab}$ , οι (3.2.27) ταυτίζονται ξανά με τις (2.10.199).

### Περίπτωση συνσυνολικού χώρου

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η  $\beta$ -συνάρτηση (3.2.12) της δράσης (3.2.2) για το απλό παράδειγμα που ο χώρος της ομάδας  $G$  χωρίζεται σε αυτόν μιας υποομάδας  $H \subset G$  και ενός μη-συμμετρικού αυτή τη φορά συνσυνόλου  $G/H$ , το οποίο θα προκύψει να έχει κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Χρησιμοποιώντας πάλι τον συμβολισμό  $A = (a, \alpha)$  για τους δείκτες όπως εισήχθει στην αντίστοιχη ενότητα της θεωρίας, το κάθε ένα από τα δύο υποσύνολα της θεωρίας για την ομάδα  $G$  παραμορφώνεται διαφορετικά, και συνεπώς υπάρχουν δύο παράμετροι παραμόρφωσης που αντιστοιχούν στα ακόλουθα στοιχεία του πίνακα  $\lambda_{AB}$

$$\lambda_{ab} = \lambda_H \delta_{ab}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.2.28)$$

Cosets	$c_G$	$c_H$	$c_{G/H}$
$SU(3)/U(1)^2$	6	0	2
$Sp(4)/SU(2) \times U(1)$	4	4	2
$G_2/SU(3)$	8	6	8/3

Πίνακας 3.1: Μη-τετριμμένα, εξαδιάστατα παραδείγματα για μη-συμμετρικούς Einstein χώρους.

Στη συνέχεια, από τη σχέση (3.2.10) υπολογίζονται οι διάφορες συνιστώσες

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{ab}{}^c(\lambda; \lambda_0) &= -\frac{\lambda_H(\lambda_0 - \lambda_H)}{1 - \lambda_H^2} f_{abc}, & \mathcal{N}_{\alpha\beta}{}^c(\lambda; \lambda_0) &= \frac{\lambda^2 - \lambda_0\lambda_H}{1 - \lambda_H^2} f_{\alpha\beta c}, \\
\mathcal{N}_{\alpha\beta}{}^\gamma(\lambda; \lambda_0) &= -\frac{\lambda(\lambda_0 - \lambda)}{1 - \lambda^2} f_{\alpha\beta\gamma}, & \mathcal{N}_{\alpha b}{}^\gamma(\lambda; \lambda_0) &= -\frac{\lambda(\lambda_0 - \lambda_H)}{1 - \lambda^2} f_{\alpha b\gamma}, \\
\mathcal{N}_{a\beta}{}^\gamma(\lambda; \lambda_0) &= -\frac{\lambda(\lambda_0 - \lambda_H)}{1 - \lambda^2} f_{a\beta\gamma}, \\
\mathcal{N}_{a\beta}{}^c &= \mathcal{N}_{ab}{}^\gamma = \mathcal{N}_{\alpha b}{}^c = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

ενώ για κάθε ημι-απλή ομάδα  $G$  ισχύουν οι ταυτότητες ομάδας

$$f_{ACD}f_{BCD} = c_G\delta_{AB}, \quad f_{acd}f_{bcd} = c_H\delta_{ab}, \quad f_{a\gamma\delta}f_{b\gamma\delta} = (c_G - c_H)\delta_{ab}. \tag{3.2.30}$$

Επιπλέον, εισάγεται η σχέση

$$f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} = c_{G/H}\delta_{\alpha\beta}, \tag{3.2.31}$$

η οποία, σε αντίθεση με τις (3.2.30) δεν αποτελεί κάποιου είδους ταυτότητα και ισχύει μόνο για την περίπτωση συμμετρικών χώρων όπου  $c_{G/H} = 0$ , καθώς και για μη-συμμετρικούς χώρους Einstein για τους οποίους  $c_{G/H} \neq 0$ .<sup>8</sup> Τότε, συνεπάγεται και η σχέση

$$f_{\alpha\gamma c}f_{\beta\gamma c} = \frac{1}{2}(c_G - c_{G/H})\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.2.32}$$

Μη-τετριμμένα παραδείγματα για τα οποία ισχύει η (3.2.31) χωρίς να μηδενίζεται το αριστερό της μέλος είναι δεκαδιάστατες συμπαγοποιήσεις βαρυτικών υποβάθρων και θεωριών βαθμίδας σε τέσσερις διαστάσεις, καθώς και τα τρία εξαδιάστατα παραδείγματα [103, 104, 105, 106] του πίνακα 3.1. Εν γένει,  $c_G > c_H, c_{G/H}$ , αλλά δεν υπάρχει συγκεκριμένη σχέση μεταξύ των  $c_H$  και  $c_{G/H}$ .

<sup>8</sup>Ο ταυιστής Ricci για μη-συμμετρικούς χώρους με μετρική Killing  $\delta_{\alpha\beta}$ , είναι

$$R_{\alpha\beta} = f_{a\beta\gamma}f_{\beta b\gamma} + \frac{1}{4}f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} = \frac{c_G}{2}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} = \frac{c_G}{4}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}f_{a\beta\gamma}f_{\beta b\gamma}.$$

Συνεπώς, απαιτώντας έναν χώρο Einstein, προκύπτει η (3.2.31) ή η (3.2.32).



Προκύπτει ότι η επιλογή (3.2.28) είναι συμβατή εάν και μόνο εάν η εξίσωση (3.2.31) ικανοποιείται, και τότε προκύπτουν οι ακόλουθες β-συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_H}{dt} &= -\frac{(\lambda_H - \lambda_0)(\lambda_H - \lambda_0^{-1})}{2\sqrt{k_1 k_2}} \left( c_H \frac{\lambda_H^2}{(1 - \lambda_H^2)^2} + (c_G - c_H) \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} \right), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \left( c_{G/H} \frac{\lambda^2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^{-1})}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{c_G - c_{G/H}}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\lambda}{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda_H^2)} \left( (\lambda_0^{-1} - \lambda_H)(\lambda_0 \lambda_H - \lambda^2) + (\lambda_0 - \lambda_H)(\lambda_0^{-1} \lambda_H - \lambda^2) \right) \right), \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

οι οποίες είναι αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad \lambda_H \rightarrow \lambda_H^{-1}, \quad k_{1,2} \rightarrow -k_{2,1}. \quad (3.2.34)$$

Αυτή η συμμετρία προκύπτει από την αντίστοιχη των υποβάθρων για τα σ-πρότυπα, η οποία πρέπει να εφαρμοσθεί ως αναλυτική συνέχιση, και πιο συγκεκριμένα ως  $(k_1, k_2) \rightarrow e^{i\pi}(k_2, k_1)$  και  $(1 - \lambda) \rightarrow e^{-i\pi} \lambda^{-1}(1 - \lambda)$ , στις περιπτώσεις που εμφανίζονται τετραγωνικές ρίζες. Το τελευταίο σύστημα εξισώσεων ρών εμφανίζει ως σταθερά σημεία κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης τα

$$(\lambda_H, \lambda) = (0, 0), (\lambda_0, 0), (\lambda_0, \lambda_0), (\lambda_0^{-1}, 0), (\lambda_0^{-1}, \lambda_0^{-1}),$$

με  $0 < \lambda_0 < 1$  χωρίς βλάβη της γενικότητας. Συνεπώς, εφόσον τα επίπεδα των αλγεβρών είναι θετικοί ακέραιοι, τα σταθερά σημεία που εμφανίζουν φυσική σημασία είναι τα τρία πρώτα, και οι ροές που ορίζονται ως προς αυτά παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα 3.1.

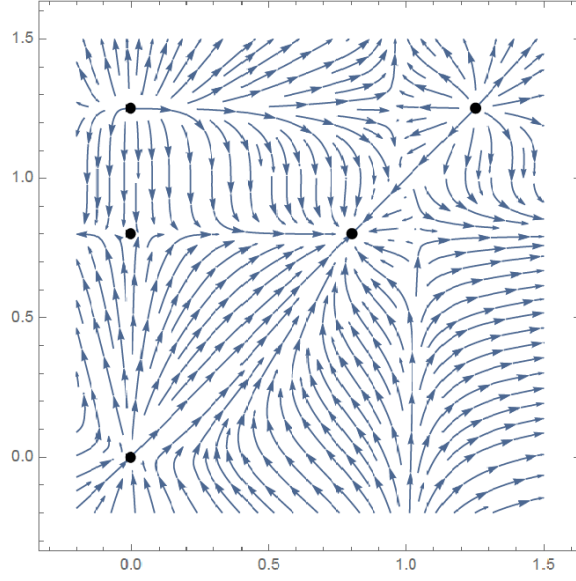
Η περίπτωση  $\lambda_H = \lambda_0$  είναι συνεπής με τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης (3.2.33), όταν  $\lambda_0 \neq 1$ . Τότε, για την εναπομείνουσα παράμετρο ζεύξης προκύπτει

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G - c_{G/H}}{4k_1} \frac{\lambda(\lambda_0^2 - \lambda^2)}{1 - \lambda^2} - \frac{c_{G/H}}{2\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda^2(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0^{-1} - \lambda)}{(1 - \lambda^2)^2}. \quad (3.2.35)$$

Η άνωθεν β-συνάρτηση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$  και  $k_{1,2} \rightarrow -k_{2,1}$ , η οποία είναι κατάλοιπο της (3.2.34) μετά την απαίτηση  $\lambda_H = \lambda_0$ .
2. Εμφανίζει ένα σταθερό σημείο για  $\lambda = 0$ , γύρω από το οποίο η β-συνάρτηση (3.2.35) γίνεται

$$\beta \simeq -\frac{(c_G - c_{G/H})\lambda}{4k_2} + \mathcal{O}(\lambda^2).$$



Σχήμα 3.1: Ροές της ομάδας επανακανονικοποίησης στο επίπεδο  $(\lambda, \lambda_H)$  ( $\lambda$ -οριζόντιος άξονας) για την περίπτωση του  $G_2/SU(3)$  συνσυνόλου, βλ. πίνακα 3.1 με  $\lambda_0 = 0.8$ . Προφανώς, το σημείο  $(\lambda_0, \lambda_0)$  είναι ένα IR ευσταθές σημείο.

Έτσι, ο τελεστής που οφείλεται για τη διαταραχή είναι σχετικός και έχει διάσταση

$$\Delta = 2 - \frac{c_G - c_{G/H}}{2k_2}.$$

Το σημείο αυτό δεν είναι ακόμα ξεκάθαρο αν αντιστοιχεί σε μία σύμμορφη θεωρία πεδίου.

3. Δεδομένου ότι  $\lambda_0 \neq 1$ , εμφανίζει ένα δεύτερο σταθερό σημείο στις χαμηλές ενέργειες για  $\lambda = \lambda_0$ . Η αντίστοιχη σύμμορφη θεωρία πεδίου, που αντιστοιχεί στην (3.2.2) στο σημείο αυτό, έχει βρεθεί ότι είναι μία  $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$  σύμμορφη θεωρία [40]. Η  $\beta$ -συνάρτηση (3.2.35) για  $\lambda$  κοντά στο σύμμορφο σημείο  $\lambda_0$  είναι

$$\beta \simeq \frac{c_G(\lambda - \lambda_0)}{2(k_2 - k_1)} + \mathcal{O}(\lambda - \lambda_0)^2,$$

και συνεπώς ο τελεστής της παραμόρφωσης έχει διάσταση

$$\Delta = 2 + \frac{c_G}{k_2 - k_1}.$$

4. Για ίσα επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων,  $\lambda_0 = 1$  και η  $\beta$ -συνάρτηση (3.2.35) είναι

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{2k} \left( \frac{c_G - c_{G/H}}{2} \lambda + c_{G/H} \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right). \quad (3.2.36)$$

Μια σημαντική σημείωση εδώ, είναι ότι το σημείο  $\lambda_H = 1$  δεν αποτελεί σταθερό σημείο κάτω από τη ροή (3.2.33), εκτός και αν η υποομάδα  $H$  είναι Αβελιανή. Παρόλα αυτά, η έκφραση (3.2.36) συνεχίζει να ισχύει, όπως αποδεικνύεται αμέσως παρακάτω όπου γίνεται αναλυτικά ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης για την περίπτωση του συνσυνόλου. Η  $\beta$ -συνάρτηση που προκύπτει δεν εμφανίζει νέο σταθερό σημείο στις χαμηλές ενέργειες αλλά αντιθέτως, η θεωρία ρέει προς μια περιοχή ισχυρής ζεύξης.

Σε ότι ακολουθεί παρουσιάζεται ο αναλυτικός υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης (3.2.36) για την περίπτωση του συνσυνόλου  $G/H$  μέσω της μεθόδου των πεδίων υποβάθρου.

Αναπαράγοντας όπως και προηγουμένως τις τεχνικές των [61, 51], προσδιορίζεται ένα κλασικό υπόβαθρο και υπολογίζονται οι κβαντικές διακυμάνεις γύρω από αυτό. Διαχωρίζοντας τις εξισώσεις κίνησης σε αυτές της υποομάδας και αυτές του συνσυνόλου ( $A_{\pm}^h = A_{\pm}^a t_a$ ,  $A_{\pm}^{g/h} = A_{\pm}^a t_a$ ), για τον πίνακα ζεύξης  $\lambda_{AB}$

$$\lambda_{ab} = \delta_{ab}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta},$$

προκύπτει ότι [39]

$$\begin{aligned} \partial_{\pm} A_{\mp}^{g/h} &= -[A_{\mp}^{g/h}, A_{\pm}^h] \pm \alpha [A_{\pm}^{g/h}, A_{\mp}^{g/h}], \\ \partial_{+} A_{-}^h - \partial_{-} A_{+}^h &= [A_{+}^h, A_{-}^h] + \beta [A_{+}^{g/h}, A_{-}^{g/h}], \\ \alpha &= \frac{1}{1+\lambda}, \quad \beta = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Επιπλέον, περιορίζεται η εναπομείνουσα ελευθερία βαθμίδας μέσω επιλογής της βαθμίδας που ικανοποιεί τη συναλλοίωτη συνθήκη

$$\partial_{+} A_{-}^h + \partial_{-} A_{+}^h = 0. \quad (3.2.38)$$

Αρχικά, επιλέγεται η λύση υποβάθρου των (3.2.37) και (3.2.38)

$$A_{\pm}^a = 0, \quad A_{+}^{\alpha} = i\lambda J_{1+}^{\alpha}, \quad A_{-}^{\alpha} = -i\lambda J_{2-}^{\alpha},$$

όπου ουσιαστικά επιλέγεται  $A_{\pm}^h = 0$ , προκειμένου να γίνεται προβολή στο συνσύνολο  $G/H$ . Τότε, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα για το προηγούμενο υπόβαθρο γίνεται

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_{k_1}(g_1) + \mathcal{L}_{k_2}(g_2) + \frac{k}{\pi} \lambda J_{1+}^{\alpha} J_{2-}^{\alpha}. \quad (3.2.39)$$

Στη συνέχεια διαταράσσονται οι εξισώσεις κίνησης (3.2.37) και η συνθήκη επιλογής βαθμίδας

(3.2.38), και για τις διαταραχές  $(\delta A_{\pm}^{g/h}, \delta A_{\pm}^h)$  προκύπτει

$$\begin{pmatrix} \partial_- + \alpha \tilde{A}_-^{g/h} & -\alpha \tilde{A}_+^{g/h} & 0 & -\tilde{A}_+^{g/h} \\ -\alpha \tilde{A}_-^{g/h} & \partial_+ + \alpha \tilde{A}_+^{g/h} & -\tilde{A}_-^{g/h} & 0 \\ -\beta \tilde{A}_-^{g/h} & \beta \tilde{A}_+^{g/h} & -\partial_- & \partial_+ \\ 0 & 0 & \partial_- & \partial_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_+^{g/h} \\ \delta A_-^{g/h} \\ \delta A_+^h \\ \delta A_-^h \end{pmatrix} = 0,$$

με  $(\tilde{A}_{\pm}^{g/h})_{AB} = i f_{AB\gamma} A_{\pm}^{\gamma}$ . Για τον υπολογισμό της ενεργού δράσης σε επίπεδο ενός βρόγχου γίνεται στροφή κατά Wick σε Ευκλείδιο χώρο και ολοκληρώνονται οι διακυμάνεις στο Γκαουσιανό ολοκλήρωμα διαδρομών. Τελικά, το αποτέλεσμα στον χώρο των ορμών είναι

$$-\mathcal{L}_E^{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \int^{\mu} \frac{dp_1 dp_2}{(2\pi)^2} \ln \det \mathcal{D}^{-1/2}, \quad (3.2.40)$$

όπου

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} p_- + \alpha \tilde{A}_-^{g/h} & -\alpha \tilde{A}_+^{g/h} & 0 & -\tilde{A}_+^{g/h} \\ -\alpha \tilde{A}_-^{g/h} & p_+ + \alpha \tilde{A}_+^{g/h} & -\tilde{A}_-^{g/h} & 0 \\ -\beta \tilde{A}_-^{g/h} & \beta \tilde{A}_+^{g/h} & -p_- & p_+ \\ 0 & 0 & p_- & p_+ \end{pmatrix}. \quad (3.2.41)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, μετά από λίγους υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_E^{\text{eff}} &= \mathcal{L}^{(0)} + \frac{\ln \mu}{\pi} \lambda^2 (\alpha^2 f_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\delta} + \beta f_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\delta}) J_+^{1\gamma} J_-^{2\delta} \\ &= \dots + \frac{1}{\pi} \left( k\lambda \delta_{\gamma\delta} + \frac{\ln \mu}{\pi} \lambda^2 (\alpha^2 f_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\delta} + \beta f_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\delta}) \right) J_+^{1\gamma} J_-^{2\delta}, \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

όπου οι τελείες δηλώνουν πάλι όρους που είναι ανεξάρτητοι της παραμέτρου  $\lambda$ . Η β-συνάρτηση προκύπτει ξανά μετά από την απαίτηση η (3.2.42) να είναι ανεξάρτητη από την ενεργειακή κλίμακα αποκοπής  $\mu$  και χρησιμοποιώντας τις (3.2.31), (3.2.32) και τους ορισμούς των  $\alpha, \beta$  της (3.2.37) προκύπτει η (3.2.36).

### 3.3 Συναρτήσεις κεντρικού φορτίου και ροές ομάδας επανακανονικοποίησης

Στην ενότητα αυτή υπολογίζεται η ακριβής μορφή της  $C$ -συνάρτησης κεντρικού φορτίου, σύμφωνα με το θεώρημα του Zamolodchikov [53]. Ο υπολογισμός γίνεται μέσω τεχνικών θεωρίας πεδίου και επαναλαμβάνεται για ένα σύνολο ολοκληρώσιμων (ή μη-ολοκληρώσιμων)  $\lambda$ -παραμορφωμένων προτύπων με διαφορετικές ιδιότητες [39, 40, 68, 65]. Η ενότητα αυτή βασίζεται στην [54] και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ακριβή σε όλες τις τάξεις ως

προς τις εκάστοτε παραμέτρους παραμόρφωσης, και μέχρι πρώτη τάξη στο ανάπτυγμα  $1/k$  για μεγάλα  $k$ .

Το θεώρημα του Zamolodchikov για διδιάστατες θεωρίες πεδίου, παρουσιάστηκε αναλυτικά στην αντίστοιχη ενότητα της θεωρίας και συνοπτικά εκφράζει την μη-αντιστροφικότητα της ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης μέσω μιας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή παίρνει τιμές κατά τη διάρκεια της ροής μιας υψηλοενεργειακής σύμμορφης θεωρίας, προς μία νέα σύμμορφη θεωρία στις χαμηλές ενέργειες. Χαρακτηριστικό είναι ότι οι τιμές της μονότονης αυτής συνάρτησης στα σταθερά σημεία της ομάδας επανακανονικοποίησης, ταυτίζονται με το κεντρικό φορτίο της άλγεβρας Virasoro των αντίστοιχων σύμμορφων θεωριών στα σημεία αυτά. Το φυσικό περιεχόμενο του θεωρήματος αυτού, είναι ότι εφόσον ο τανυστής ενέργειας-ορμής συζεύγεται με όλους τους βαθμούς ελευθερίας μιας θεωρίας, η  $C$ -συνάρτηση είναι ένα μέτρο των ενεργών βαθμών ελευθερίας σε μία συγκεκριμένη ενεργειακή κλίμακα. Αυτό είναι σε συμφωνία με το γεγονός ότι καθώς χαμηλώνει η ενεργειακή κλίμακα, όλο και περισσότεροι βαθμοί ελευθερίας μεγαλύτερων ενεργειών αποσυζεύγονται από τη δυναμική των χαμηλότερων ενεργειών της θεωρίας, οδηγώντας έτσι σε μία γνησίως φθίνουσα  $C$ -συνάρτηση.

Σε μία γενική δισδιάστατη κβαντική θεωρία πεδίου με παραμέτρους ζεύξης  $\lambda_i$ , υπάρχει μία συνάρτηση  $C(\lambda_i)$  που ικανοποιεί τη σχέση (2.3.5)<sup>9</sup>

$$\frac{dC}{d \ln \mu^2} = \beta^i \partial_i C = 24 G_{ij} \beta^i \beta^j, \quad (3.3.1)$$

όπου  $\beta^i = \frac{d\lambda^i}{d \ln \mu^2}$  και  $G_{ij}$  είναι η μετρική Zamolodchikov στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης, που προσδιορίζεται μέσω των συναρτήσεων συσχετισμού των σύνθετων, διγραμμικών τελεστών της παραμόρφωσης. Λύσεις της εξίσωσης αυτής με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, προσδιορίζουν την  $C$ -συνάρτηση της θεωρίας. Εφόσον οι  $\beta$ -συναρτήσεις και οι μετρικές  $G_{ij}$  έχουν υπολογισθεί σε όλες τις τάξεις του διαταρακτικού ανάπτυγματος για τα  $\lambda$ -πρότυπα [58, 59, 60] και [40, 65, 50, 51], γίνεται επίσης δυνατός ο ακριβής υπολογισμός των  $C$ -συναρτήσεων για τα διάφορα υπό μελέτη  $\lambda$ -πρότυπα.

Σε γενικές γραμμές, κοντά σε ένα σταθερό σημείο  $g^*$  της ομάδας επανακανονικοποίησης οι  $\beta$ -συναρτήσεις είναι ανάλογες των παραμέτρων ζεύξης (βλ. την ανάλυση γύρω από την (2.1.18)) και συνεπώς γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η

<sup>9</sup>Ο διαφορετικός αριθμητικός συντελεστής της (3.3.1) από την (2.3.5) οφείλεται στη διαφορετική σύμβαση του ορισμού της  $\beta$ -συνάρτησης

σχέση της  $\beta$ -συνάρτησης με τη  $C$ -συνάρτηση να προσεγγίζεται από την έκφραση

$$\beta^i = \frac{1}{24} G^{ij} \partial_j C + \dots, \quad \text{όπου: } G^{ij} = G_{ij}^{-1}, \quad (3.3.2)$$

εκφράζοντας μία μονότονη ροή μεταξύ δύο σταθερών σημείων. Η σχέση αυτή είναι σε συμφωνία με την (3.3.1) και γίνεται ισότητα για την περίπτωση που υπάρχει μία μόνο σταθερά ζεύξης. Εάν υπάρχει λύση για το σύστημα εξισώσεων (3.3.2) ως ισότητες, τότε η (3.3.1) έχει σίγουρα λύση που οδηγεί σε μία μονότονα φθίνουσα συμπεριφορά κατά τη ροή από τις υψηλές προς τις χαμηλές ενέργειες, όπως απαιτείται από το θεώρημα κεντρικού φορτίου.

### 3.3.1 Ροές σε χώρους ομάδας

Αρχικά υπολογίζεται η  $C$ -συνάρτηση για τα πρότυπα που κατασκευάστηκαν στην [40] και η γραμμικοποιημένη δράση τους για μικρές παραμέτρους ζεύξης<sup>10</sup>  $(\lambda_{1,2})_{ab}$  γύρω από το κρίσιμο σημείο είναι η (2.10.181)

$$S_{\lambda_1, \lambda_2} = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma ((\lambda_1)_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b + (\lambda_2)_{ab} J_{2-}^a J_{1+}^b). \quad (3.3.3)$$

Οι υπολογισμοί που ακολουθούν γίνονται για διαγώνιους και ισοτροπικούς πίνακες ζεύξης  $(\lambda_i)_{ab} = \lambda_i \delta_{ab}$  προκειμένου να υπάρχουν δύο μόνο παράμετροι, ενώ μία γενίκευση με τέσσερις παραμέτρους ζεύξης παρουσιάζεται στο παράρτημα Ε'.

Η μετρική Zamolodchikov στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης μπορεί να υπολογισθεί σε όλες τις τάξεις στα  $\lambda_{1,2}$  και στο όριο των μεγάλων  $k_{1,2}$  και δίνεται από τη σχέση [58, 50]

$$G_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} \frac{\dim G}{(1 - \lambda_i^2)^2}, \quad (3.3.4)$$

η οποία εξαρτάται μόνο από το Αβελιανό μέρος του OPE των ρευμάτων<sup>11</sup>. Ξέροντας τη  $\beta$ -συνάρτηση στη γειτονιά ενός σταθερού σημείου μιας σύμμορφης θεωρίας, στις υψηλές ή τις χαμηλές ενέργειες, είναι δυνατόν με ολοκλήρωση της (3.3.2), να προκύψει επίσης η συμπεριφορά της  $C$ -συνάρτησης στη γειτονιά του σημείου αυτού. Η σταθερά ολοκλήρωσης προσδιορίζεται απαιτώντας η  $C$ -συνάρτηση στο σύμμορφο σημείο να ταυτίζεται με το κεντρικό φορτίο της αντίστοιχης σύμμορφης θεωρίας.

Σε ότι ακολουθεί θεωρείται, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $k_2 \geq k_1$  και ορίζονται οι

<sup>10</sup> Η ακριβής μορφή της ενεργού δράσης (2.10.186) δεν χρειάζεται στην παρούσα ανάλυση.

<sup>11</sup> Η μετρική παίρνει τη μορφή (3.3.4) εφόσον οι διγραμμικοί τελεστές  $J_{1+}^a J_{2-}^b$  και  $J_{2+}^a J_{1-}^b$  της (3.3.3) δεν αλληλεπιδρούν. Συνεπώς, είναι ένα διπλό αντίγραφο της περίπτωσης με τη μία παράμετρο ζεύξης [58, 50].

ακόλουθοι συνδυασμοί των επιπέδων  $k_{1,2}$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \leq 1, \quad k = \sqrt{k_1 k_2}.$$

Οι  $\beta$ -συναρτήσεις για τις παραμέτρους ζεύξης έχουν υπολογισθεί επακριβώς ως προς τα  $\lambda_i$  και σε πρώτη τάξη για  $k \gg 1$ , μέσω τεχνικών τόσο θεωρίας πεδίου [60, 45] όσο και βαρύτητας [40] και είναι οι (2.10.199)

$$\beta^i(\lambda_i; \lambda_0) = -\frac{c_G \lambda_i^2 (\lambda_i - \lambda_0)(\lambda_i - \lambda_0^{-1})}{2k (1 - \lambda_i^2)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.3.5)$$

Η πάνω σχέση υποδεικνύει ότι οι ροές για το  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι αποσυζευγμένες και ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία της ομάδας επανακανονικοποίησης, ένα στις υψηλές ενέργειες για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  και ένα στις χαμηλές με  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ . Κοντά στο σταθερό σημείο των υψηλών ενεργειών, προκύπτει διαταραχτικά

$$\beta^i(\lambda_i; \lambda_0) = -\frac{c_G}{2k} \lambda_i^2 + \mathcal{O}(\lambda_i^3), \quad i = 1, 2,$$

ενώ το κεντρικό φορτίο της αντίστοιχης σύμμορφης θεωρίας προκύπτει από το άθροισμα των κεντρικών φορτίων των δύο WZW προτύπων με τάξεις άλγεβρας ρευμάτων  $k_{1,2}$  αντίστοιχα. Κάνοντας το ανάπτυγμα σε  $1/k_{1,2}$  και κρατώντας τους δύο όρους πρώτης τάξης, προκύπτει

$$c_{UV} = \frac{2k_1 \dim G}{2k_1 + c_G} + \frac{2k_2 \dim G}{2k_2 + c_G} = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) + \dots \quad (3.3.6)$$

Χρησιμοποιώντας επίσης τον κυρίαρχο όρο κοντά στο  $\lambda_i = 0$ , της μετρικής  $G_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \dim G$ , λύνοντας την (3.3.2) συνεπάγεται η ακόλουθη διαταραχτική έκφραση για τη  $C$ -συνάρτηση

$$C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{k} \left( \frac{1}{2} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) + 2\lambda_1^3 + 2\lambda_2^3 \right) + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (3.3.7)$$

Όπως η ενεργός δράση και η  $\beta$ -συνάρτηση, έτσι και η συνάρτηση κεντρικού φορτίου του  $\sigma$ -προτύπου (2.10.186) πρέπει να έχει τη γενικευμένη συμμετρία<sup>12</sup>

$$\lambda_i \rightarrow \frac{1}{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \quad k_1 \rightarrow -k_2, \quad k_2 \rightarrow -k_1, \quad (3.3.8)$$

κάτω από την οποία η παράμετρος ως προς την οποία γίνεται το ανάπτυγμα αλλάζει πρόσημο  $k \rightarrow -k$ . Τα δύο σταθερά σημεία για τα  $\lambda_i$  ως προς τον άνωθεν μετασχηματισμό είναι τα

<sup>12</sup>Στο επίπεδο της ενεργού δράσης (3.3.3), η συμμετρία (3.3.8) συνοδεύεται από μια αντιστροφή των στοιχείων της ομάδας  $g_{1,2} \rightarrow g_{2,1}^{-1}$ , βλ. τις εξισώσεις (2.12) και (2.14) της [40]. Αυτό γενικεύει την παρόμοια συμμετρία της [47] για το απλά παραμορφωμένο πρότυπο [38].

$\lambda_i = \pm 1$ , και προκειμένου να είναι καλώς ορισμένα τα αναπτύγματα της (3.3.5) γύρω από τα σημεία αυτά, τα  $\lambda_i$  αναπτύσσονται ως

$$\lambda_i = \pm 1 - \frac{b_i}{k^{1/3}}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \lambda_0 = \text{σταθερό}. \quad (3.3.9)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με ότι έχει προηγηθεί [50], η  $C$ -συνάρτηση μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  πρέπει να έχει τη μορφή

$$C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{4k} \left( \frac{f(\lambda_1; \lambda_0)}{(1 - \lambda_1^2)^3} + \frac{f(\lambda_2; \lambda_0)}{(1 - \lambda_2^2)^3} \right), \quad (3.3.10)$$

με την αναλυτική συνάρτηση  $f(\lambda; \lambda_0)$  να υπακούει, λόγω της (3.3.8), τη συνθήκη  $f(\lambda; \lambda_0) = \lambda^6 f(\lambda^{-1}; \lambda_0^{-1})$ . Έτσι λοιπόν, η  $f(\lambda; \lambda_0)$  πρέπει να είναι ένα πολυώνυμο το πολύ 6ου βαθμού ως προς το  $\lambda$ , με συντελεστές που εν γένει εξαρτώνται από το  $\lambda_0$ . Συγκρίνοντας με το διαταραχτικό αποτέλεσμα (3.3.7) προκύπτει ότι

$$f(\lambda; \lambda_0) = (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2 - 3\lambda^4 + \lambda^6) + 8\lambda^3. \quad (3.3.11)$$

Σημειώνεται ότι η  $C(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}; \lambda_0^{-1}) = C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0)$  όντας αναλλοίωτη κάτω από την (3.3.8).

Ένας πολύ πιο εύκολος τρόπος προσδιορισμού της  $C$ -συνάρτησης είναι μέσω της (3.3.1) από την οποία συνεπάγεται η (3.3.2). Για την διαγώνια μετρική (3.3.4) προκύπτουν δύο διαφορικές εξισώσεις για την  $C$ -συνάρτηση

$$\partial_{\lambda_i} C = 24G_{\lambda_i \lambda_i} \beta^{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.3.12)$$

οι οποίες είναι ακριβείς ως προς τα  $\lambda_{1,2}$  αντίστοιχα. Η αόριστη ολοκλήρωση ως προς  $\lambda_1$  δίνει ως σταθερά ολοκλήρωσης μία συνάρτηση ως προς  $\lambda_2$  και αντίθετα. Το συναρτησιακό μέρος αυτών προσδιορίζεται απαιτώντας συμβατότητα μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων για την συνάρτηση  $C$ , ενώ η σταθερά της ολοκλήρωσης προκύπτει εφαρμόζοντας  $C(0, 0; \lambda_0) = c_{UV}$ . Το τελικό αποτέλεσμα που προκύπτει για την  $C$ -συνάρτηση μέσω αυτού του υπολογισμού ταυτίζεται με την (3.3.10) και (3.3.11).

### Η περίπτωση ίσων επιπέδων $k_1 = k_2$

Για την περίπτωση των ίσων επιπέδων όπου  $\lambda_0 = 1$ , και θεωρώντας επίσης ότι  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , η  $C$ -συνάρτηση (3.3.10) παίρνει τη μορφή

$$C(\lambda) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{k} \frac{1 + 2\lambda + 2\lambda^3 + \lambda^4}{(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3}. \quad (3.3.13)$$



Η πάνω  $C$ -συνάρτηση αντιστοιχεί σε αυτήν του απλά παραμορφωμένου προτύπου της [38], το οποίο γίνεται ισχυρά συζευγμένο για  $\lambda = \pm 1$ . Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως [38], [44], αυτό που έχει φυσικό νόημα κοντά σε αυτά τα δύο σημεία είναι το μη-Αβελιανό  $T$ -δύϊκό και το ψευδοδύϊκό όριο (3.3.9) του προτύπου, για  $\lambda = 1$  και  $\lambda = -1$  αντίστοιχα και στα όρια αυτά, η  $C$ -συνάρτηση είναι όντως πεπερασμένη.

Η  $C$ -συνάρτηση για την συγκεκριμένη περίπτωση, δηλαδή για το μποζονοποιημένο μη-Αβελιανό πρότυπο Thirring, έχει υπολογισθεί και προηγουμένως στις [58, 46], όχι όμως στην συναλλοιώτη μορφή (3.3.13). Όντως, το ενεργό δυναμικό που υπολογίστηκε στην [58] ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση με την  $C$ -συνάρτηση. Ωστόσο, σε αντίθεση με αυτήν, το ενεργό δυναμικό δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από τη μη-διαταρακτική συμμετρία  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$ ,  $k \rightarrow -k$ .<sup>13</sup>

**Η ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2}$  στην  $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2 - k_1}$**

Αναπτύσσοντας την (3.3.10) γύρω από το σταθερό σημείο στις χαμηλές ενέργειες  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  προκύπτει

$$C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{k} \frac{1 + \lambda_0^4}{2\lambda_0(1 - \lambda_0^2)} + \mathcal{O}(\lambda - \lambda_0)^2. \quad (3.3.14)$$

Ο κυρίαρχος όρος πρέπει να αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα του κεντρικού φορτίου της χαμηλοενεργειακής σύμμορφης θεωρίας πεδίου για μεγάλα  $k$ , η οποία έχει βρεθεί [40] ότι αντιστοιχεί στην συνσυνολική θεωρία  $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2 - k_1}$ .<sup>14</sup> Το κεντρικό φορτίο της θεωρίας αυτής για  $k \gg 1$  ταυτίζεται όντως με την  $C(\lambda_0, \lambda_0; \lambda_0)$  μέχρι τάξη  $1/k$  όπως πρέπει, αποτελώντας έναν μη-τεριμμένο έλεγχο για την ακριβή έκφραση (3.3.10).

**Η ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2}$  στην  $G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}$**

Όπως γίνεται εμφανές από τις  $\beta$ -συναρτήσεις (3.3.5), είναι συνεπές να θεωρηθεί μηδενική μία από τις δύο σταθερές ζεύξης, έστω  $\lambda_2 = 0$ . Μετονομάζοντας το  $\lambda_1$  σε  $\lambda$ , οι (3.3.10),

<sup>13</sup> Για συγκεκριμένες ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις του ιστροπικού PCM [109], ο συντελεστής της Weyl ανωμαλίας του  $\sigma$ -προτύπου στον NS-NS τομέα [107, 108] παρουσιάζεται στην [110]. Αυτός μπορεί να ερμηνευθεί σαν την «Γενικευμένη συνάρτηση κεντρικού φορτίου». Ωστόσο, όπως τονίζεται στην [107, 108] δεν μπορεί εν γένει να ταυτισθεί με την  $C$ -συνάρτηση του Zamolodchikov εφόσον η ροή της είναι εν γένει μη-μονότονη λόγω της αοριστίας που παρουσιάζει η μετρική στον χώρο των σταθερών ζεύξης  $(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi)$ . Η μελέτη της σχέσης της  $C$ -συνάρτησης του Zamolodchikov με τον συντελεστή της ανωμαλίας Weyl παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

<sup>14</sup> Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το κεντρικό φορτίο της  $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2 - k_1}$  είναι αναλλοίωτο κάτω από την επέκταση της συμμετρίας (3.3.8) η οποία περιλαμβάνει τον ακόλουθο μετασχηματισμό για τα επίπεδα της άλγεβρας ρευμάτων

$$k_1 \rightarrow -k_2 - c_G, \quad k_2 \rightarrow -k_1 - c_G,$$

που ισχύει πέραν του ορίου για μεγάλο  $k$ . Η περίπτωση αυτή γενίκευσης της συμμετρίας (3.3.8) για πεπερασμένο επίπεδο  $k$  μελετάται σε επόμενη ενότητα

(3.3.11) παίρνουν τη μορφή

$$C(\lambda, 0; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2) + 4\lambda^3}{(1 - \lambda^2)^3}. \quad (3.3.15)$$

Στη συνέχεια, αναπτύσσοντας γύρω από το IR σταθερό σημείο στο  $\lambda = \lambda_0$  προκύπτει

$$C(\lambda_0, 0; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{1}{\lambda_0(1 - \lambda_0^2)} + \mathcal{O}(\lambda - \lambda_0)^2. \quad (3.3.16)$$

Ο κυρίαρχος όρος στο άνωθεν  $1/k$  ανάπτυγμα, πρέπει να ταυτίζεται με τον αντίστοιχο του αναπτύγματος του κεντρικού φορτίου της χαμηλοενεργειακής σύμμορφης θεωρίας, η οποία αποτελείται από το άθροισμα δύο WZW προτύπων, το ένα με επίπεδο  $k_1$  και το άλλο με  $k_2 - k_1$  [40]. Πράγματι, για  $k \gg 1$  το ανάπτυγμα του κεντρικού φορτίου της θεωρίας αυτής ταυτίζεται με την  $C(\lambda_0; \lambda_0)$  μέχρι τάξη  $1/k$  όπως ήταν αναμενόμενο.

Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι η (3.3.15) δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$  και  $k \rightarrow -k$ . Ωστόσο, το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο εφόσον σε αυτό το άκρο της ροής, το κεντρικό φορτίο  $c_{\text{IR}}$  της σύμμορφης θεωρίας στις χαμηλές ενέργειες δεν είναι ούτε αυτό αναλλοίωτο κάτω από τον προηγούμενο μετασχηματισμό.

**Η ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$  στην  $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$**

Άλλη μία συνεπής επιλογή παραμέτρων ζεύξης είναι να θεωρηθεί η μία, έστω η  $\lambda_2$  ίση με  $\lambda_0$ , και να μετονομασθεί η  $\lambda_1$  σε  $\lambda$ . Για την επιλογή αυτή, η γενική έκφραση (3.3.10) της  $C(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_0)$  έρχεται στη μορφή

$$C(\lambda, \lambda_0; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{1 - 3\lambda^2 + \lambda_0^4 \lambda^4 (3 - \lambda^2) + 4\lambda_0(1 - \lambda_0^2)\lambda^3}{\lambda_0(1 - \lambda_0^2)(1 - \lambda^2)^3}. \quad (3.3.17)$$

Γύρω από το UV σταθερό σημείο για  $\lambda = 0$  προκύπτει σαν κυρίαρχος όρος η (3.3.16) όπως ήταν αναμενόμενο, εφόσον το IR σταθερό σημείο της παρούσας ροής ταυτίζεται με το UV σταθερό σημείο της προηγούμενης. Ομοίως, κοντά στο IR σταθερό σημείο για  $\lambda = \lambda_0$  προκύπτει η (3.3.14) όπως πρέπει. Αυτή η  $C$ -συνάρτηση είναι αναλλοίωτη κάτω από  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$  και  $k \rightarrow -k$ .

## 3.4 Ανωμαλία Weyl και συνάρτηση κεντρικού φορτίου

Σε συνέχεια της προηγούμενης ενότητας υπολογίζεται η  $C$ -συνάρτηση για το διπλά παραμορφωμένο, μη-συμμετρικό  $\lambda$ -πρότυπο της (2.10.186) για γενικό πίνακα  $\lambda_{ab}$  μέσω του

συντελεστή της ανωμαλίας Weyl [55]. Επιπλέον υπολογίζονται η μετρική του χώρου των παραμέτρων ζεύξης και η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή της παραμόρφωσης για γενικό πίνακα ζεύξης και αποδεικνύεται η ταύτιση του συντελεστή της Weyl ανωμαλίας με την  $C$ -συνάρτηση του Zamolodchikov.

Σημείο αφετηρίας είναι η δράση (2.10.186), η οποία στη διαταρακτική της μορφή είναι η ακόλουθη

$$S_{k_1, k_2}^{\lambda_1, \lambda_2} = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \left( (\lambda_1)_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b + (\lambda_2)_{ab} J_{2+}^a J_{1-}^b \right) + \dots, \quad (3.4.1)$$

όπου  $k = \sqrt{k_1 k_2}$  και  $S_{k_i}$  με  $i = 1, 2$ , είναι οι WZW δράσεις για τα στοιχεία  $g_i \in G$ , μιας ημι-απλής, συμπαγούς και απλά συνδεδεμένης Lie ομάδας  $G$ . Στην περίπτωση αυτή που θα χρησιμοποιηθούν τεχνικές βαρύτητας, οι ερμητιανοί γεννήτορες  $t^a$  της άλγεβρας ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης  $[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c$ , με τις σταθερές δομής  $f_{abc}$  να είναι πραγματικές, ενώ χρησιμοποιείται η κανονικοποίηση  $\text{Tr}(t^a t^b) = \delta_{ab}$ .

Η ενεργός δράση (2.10.186), η οποία δεν χρειάζεται για την παρούσα μελέτη, περιέχει όλες τις κβαντικές διορθώσεις ως προς τα  $\lambda_i$  μέχρι  $1/k$  τάξη και παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό

$$g_1 \rightarrow g_2^{-1}, \quad g_2 \rightarrow g_1^{-1}, \quad k_1 \rightarrow -k_2, \quad k_2 \rightarrow -k_1, \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_1^{-1}, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_2^{-1}, \quad (3.4.2)$$

ο οποίος είναι προφανές ότι δεν αποτελεί συμμετρία της γραμμικοποιημένης δράσης (3.4.1).

Όπως αναλύθηκε σε προηγούμενες ενότητες, το OPE μεταξύ των δύο όρων της διαταραχής (3.4.1) είναι μηδενικό, με αποτέλεσμα να υπάρχει μία παραγοντοποίηση των συναρτήσεων συσχέτισης που περιλαμβάνουν ρεύματα και σύνθετους τελεστές ρευμάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι αντίστοιχες  $\beta$ -συναρτήσεις έχουν τη μορφή δύο αντιγράφων του απλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -πρότυπου [52]. Αυτή η κατασκευή επεκτείνεται και σε ένα πρότυπο με πολλαπλούς πίνακες παραμόρφωσης και έναν αυθαίρετο αριθμό από WZW πρότυπα με έτερο-αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους στην [62]. Λόγω της παραπάνω ιδιότητας της παραγοντοποίησης, είναι ευκολότερη και ισοδύναμη με τον πλήρη υπολογισμό, η περίπτωση που  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda$  και η γραμμικοποιημένη ως προς  $\lambda_{ab}$  μορφή της δράσης είναι επίσης ακριβής [40]

$$S_{k_1, k_2}^\lambda = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + k \frac{\lambda_{ab}}{\pi} \int d^2\sigma J_{1+}^a J_{2-}^b. \quad (3.4.3)$$

Οι ακριβείς  $\beta$ -συναρτήσεις για αυτή την περίπτωση παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα μέχρι τάξη  $1/k$  ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλο  $k$  [52]. Μια επέκταση των υπολογισμών αυτών για την περίπτωση που η επιλογή του πίνακα  $\lambda_{ab}$  δημιουργεί καινούριες κατευθύνσεις

ροών, επιβάλλει την προσθήκη διαφορομορφισμών ως αντισταθμιστικούς όρους στο πλαίσιο της ομάδας επανακανονικοποίησης. Η περίπτωση των διαφορομορφισμών μελετάται στο παράρτημα ΣΤ' και η γενικευμένη  $\beta$ -συνάρτηση έχει τη μορφή

$$\beta^{ab} = \frac{d\lambda_{ab}}{dt} = \frac{1}{2k} \mathcal{N}_{ac}{}^d (\mathcal{N}_{bd}{}^{(T)c} + g_{bd}\zeta^c), \quad (3.4.4)$$

με

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{ab}{}^c &= \mathcal{N}_{ab}{}^c(\lambda, \lambda_0^{-1}) = (\lambda_{ae}\lambda_{bd}f_{edf} - \lambda_0^{-1}\lambda_{ef}f_{abe})g^{fc}, & \mathcal{N}_{ab}{}^{(T)c} &= \mathcal{N}_{ab}{}^c(\lambda^T, \lambda_0), \\ g_{ab} &= (\mathbb{1} - \lambda^T\lambda)_{ab}, & \tilde{g}_{ab} &= (\mathbb{1} - \lambda\lambda^T)_{ab}, & g^{ab} &= g_{ab}^{-1}, & \tilde{g}^{ab} &= \tilde{g}_{ab}^{-1}, \\ \zeta^c &= \text{σταθερά}, & \lambda_0 &= \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} < 1, & k &= \sqrt{k_1 k_2}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Η σταθερά  $\zeta^a$  σχετίζεται με τους διαφορομορφισμούς και η  $\beta$ -συνάρτηση απουσία διαφορομορφισμών και για  $\lambda_0 = 1$  έχει υπολογισθεί προηγουμένως στην αντίστοιχη ενότητα και βρίσκεται στις [51] και [49].

### 3.4.1 Η ακριβής $C$ -συνάρτηση για γενικό πίνακα παραμόρφωσης

Στην υποενότητα αυτή υπολογίζεται μέχρι τάξη  $1/k$  η ακριβής ως προς τα  $(\lambda_{1,2})_{ab}$  έκφραση της  $C$ -συνάρτησης του Zamolodchikov, μέσω του συντελεστή της ανωμαλίας Weyl για γενικό πίνακα  $\lambda_{ab}$ . Η  $C$ -συνάρτηση που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, πρέπει να αποτελεί λύση των πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων [53]

$$\frac{dC}{dt} = \beta^i \partial_i C = 24G_{ij}\beta^i\beta^j \geq 0, \quad \beta^i = \frac{d\lambda_i}{dt}, \quad t = \ln \mu^2, \quad (3.4.6)$$

στη γενικευμένη μορφή τους, όπου  $G_{ij}$  είναι η μετρική Zamolodchikov στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης και να έχει όλες τις ιδιότητες που προβλέπονται από το αντίστοιχο  $c$ -θεώρημα.

#### Η μετρική του Zamolodchikov

Σύμφωνα με τα προηγούμενα επιχειρήματα, η μετρική στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης παίρνει και αυτή τη μορφή δύο αντιγράφων του απλού  $\lambda$ -προτύπου. Συνεπώς, για τον υπολογισμό της αρκεί η περίπτωση  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda$  της οποίας η ενεργός δράση δίνεται από την (3.4.3). Πηγαίνοντας σε Ευκλείδιο κοσμικό φύλλο με μιγαδικές συντεταγμένες

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau + i\sigma)$  και  $\bar{z}$ , προκύπτει η δράση

$$S_{k_1, k_2}^\lambda = S_{k_1}(\mathfrak{g}_1) + S_{k_2}(\mathfrak{g}_2) - \frac{\lambda_{ab}}{\pi} \int d^2z \mathcal{O}_{ab}(z, \bar{z}), \quad \mathcal{O}_{ab}(z, \bar{z}) = J_1^a(z) \bar{J}_2^b(\bar{z}), \quad (3.4.7)$$

με τα επαναορισμένα ολομορφικά ρεύματα  $J_i^a \rightarrow J_i^a/\sqrt{k_i}$ , να ικανοποιούν το ακόλουθο OPE

$$J_i^a(z_1) J_i^b(z_2) = \frac{\delta_{ab}}{z_{12}^2} + \frac{i f_{abc} J_i^c(z_2)}{\sqrt{k_i} z_{12}} + \dots, \quad z_{12} = z_1 - z_2, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.8)$$

και αντίστοιχα για τα αντι-ολομορφικά  $\bar{J}_i^a(\bar{z})$ .

Για τους υπολογισμούς που ακολουθούν, χρειάζεται μόνο το Αβελιανό,  $k$ -ανεξάρτητο μέρος της μετρικής Zamolodchikov  $G_{ab|cd}$ . Ο αναλυτικός υπολογισμός της για την περίπτωση της (3.4.7) παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα Ζ', και το αποτέλεσμα είναι

$$\langle \mathcal{O}_{ab}(x_1, \bar{x}_1) \mathcal{O}_{cd}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda = \frac{G_{ab|cd}}{|x_{12}|^4}, \quad (3.4.9)$$

με την  $G_{ab|cd}$  να δίνεται από τη σχέση

$$G_{ab|cd} = \frac{1}{2} (\tilde{g}^{-1} \otimes g^{-1})_{ab|cd} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ac} g^{bd}, \quad (3.4.10)$$

όπου τα  $g, \tilde{g}$  είναι αυτά που ορίστηκαν στην (3.4.5). Αυτός είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας εφόσον αποτελείται από το ευθύ γινόμενο δύο τέτοιων και η αντίστροφη μετρική δίνεται ως

$$G^{ab|cd} = (G^{-1})_{ab|cd} = 2(\tilde{g} \otimes g)_{ab|cd} = 2\tilde{g}_{ac} g_{bd}, \quad G_{ab|mn} G^{mn|cd} = \delta_a^c \delta_b^d. \quad (3.4.11)$$

Το αντίστοιχο στοιχείο μήκους στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης είναι μη-αρνητικό

$$d\ell^2 = G_{ab|cd} d\lambda_{ab} d\lambda_{cd} \geq 0 \quad (3.4.12)$$

και επιπλέον αναλλοίωτο κάτω από το μετασχηματισμό  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ , εφόσον

$$g^{-1} \rightarrow -\lambda g^{-1} \lambda^T, \quad \tilde{g}^{-1} \rightarrow -\lambda^T \tilde{g}^{-1} \lambda. \quad (3.4.13)$$

### Ο συντελεστής της ανωμαλίας κατά Weyl

Ο υπολογισμός της  $C$ -συνάρτησης (3.4.6) για το σ-πρότυπο που αντιστοιχεί στην (3.4.1) εμπλέκει τη βασική ιδιότητα που ισχύει για την  $C$ -συνάρτηση

$$\frac{dC}{dt} = \sum_{i=1}^2 \beta_i^{ab} \frac{\partial C}{\partial (\lambda_i)_{ab}} = 24 \sum_{i=1}^2 G_{ab|cd}^i \beta_i^{ab} \beta_i^{cd} = 12 \sum_{i=1}^2 \text{Tr} (\beta_i^T \tilde{g}_i^{-1} \beta_i g_i^{-1}) \geq 0, \quad (3.4.14)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η (3.4.10) και η (3.4.12). Οι  $\beta_i^{ab}$  με  $i = 1, 2$  είναι οι  $\beta$ -συναρτήσεις που αντιστοιχούν στους δύο πίνακες ζεύξης  $(\lambda_i)_{ab}$ . Μια λύση της (3.4.14) είναι η

$$(\beta_i)_{ab} = \frac{1}{24} \frac{\partial C}{\partial (\lambda_i)_{ab}}, \quad \text{όπου:} \quad (\beta_i)_{ab} = G_{ab|cd}^i \beta_i^{cd}, \quad (3.4.15)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η  $(\beta_i)_{ab} d(\lambda_i)_{ab}$  είναι μια κλειστή 1-μορφή. Ωστόσο, η ολοκλήρωση της (3.4.15) είναι ακόμα πολύ περίπλοκη και για το λόγο αυτό χρειάζεται να βρεθεί μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού της  $C$ -συνάρτησης αυτής. Όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, η  $C$ -συνάρτηση για το πρότυπο (3.4.1) δίνεται σε όρους του συντελεστή της ανωμαλίας Weyl ως [107, 108]

$$\begin{aligned} C_{\text{double}} &= 2 \dim G - 3 \left( R - \frac{1}{12} H^2 + 4 \nabla^2 \Phi - 4 (\partial \Phi)^2 \right) \\ &= 2 \dim G - 3 \left( R_- + \frac{1}{6} H^2 + 4 \nabla^2 \Phi - 4 (\partial \Phi)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

και πράγματι ικανοποιεί την (3.4.15). Στην δεύτερη σειρά χρησιμοποιήθηκε η καμπυλότητα Ricci με στρέψη  $R_- = R - \frac{1}{4} H^2$ , διότι αυτή η μορφή της  $C$ -συνάρτησης διευκολύνει τους μελλοντικούς υπολογισμούς.

Εν γένει, η (3.4.16) εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $X^\mu$  του χώρου-στόχου και είναι σταθερή εάν και μόνο εάν

$$4 \frac{dG_{\mu\nu}}{dt} \partial^\nu \Phi + \frac{dB_{\nu\rho}}{dt} H_\mu{}^{\nu\rho} = 2 \nabla^\nu \left( \frac{dG_{\mu\nu}}{dt} \right), \quad (3.4.17)$$

με τις  $\beta$ -συναρτήσεις σε επίπεδο ενός βρόγχου για τα  $G_{\mu\nu}$  και  $B_{\mu\nu}$  να δίνονται από τις σχέσεις [63, 101, 102]

$$\begin{aligned} \frac{dG_{\mu\nu}}{dt} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\nu}^2 + 2 \nabla_\mu \partial_\nu \Phi, \\ \frac{dB_{\mu\nu}}{dt} &= -\frac{1}{2} \nabla_\rho (e^{-2\Phi} H^\rho{}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Για σύμμορφα υπόβαθρα η συνθήκη (3.4.17) ικανοποιείται τετριμμένα.

Γυρνώντας στα υπό μελέτη πρότυπα, των οποίων η γραμμικοποιημένη μορφή δίνεται από την (3.4.1) και ακολουθώντας τα επιχειρήματα της προηγούμενης υποενότητας, η  $C$ -συνάρτηση παίρνει τη μορφή δύο αντιγράφων του απλού  $\lambda$ -παραμορφωμένου προτύπου<sup>15</sup>

$$C_{\text{double}}(\lambda_1, \lambda_2; k, \lambda_0) = C_{\text{single}}(\lambda_1; k, \lambda_0) + C_{\text{single}}(\lambda_2; k, \lambda_0^{-1}) - c_{\text{UV}}, \quad (3.4.19)$$

όπου η  $C_{\text{single}}(\lambda; k, \lambda_0)$ , αντιστοιχεί σε αυτή της απλά παραμορφωμένης περίπτωσης, με δράση (3.4.3). Η εξάρτηση από τα επίπεδα  $k_1$  και  $k_2$  της άλγεβρας, είναι μέσω των παραμέτρων  $0 < \lambda_0 < 1$  και  $k \gg 1$ . Επιπλέον, ο τελευταίος όρος της (3.4.19) αντιστοιχεί στο κεντρικό φορτίο της σύμμορφης θεωρίας στις υψηλές ενέργειες, και έχει συμπεριληφθεί στην πάνω σχέση προκειμένου να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$C_{\text{double}}(0, 0; k, \lambda_0) = C_{\text{single}}(0; k, \lambda_0) = C_{\text{single}}(0; k, \lambda_0^{-1}) = c_{\text{UV}}. \quad (3.4.20)$$

Συγκεκριμένα, από την κατασκευή Sugawara προκύπτει αναπτύσσοντας για μεγάλο  $k$  ότι,

$$c_{\text{UV}} = \frac{2k_1 \dim G}{2k_1 + c_G} + \frac{2k_2 \dim G}{2k_2 + c_G} = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (3.4.21)$$

Συνεπώς, ο υπολογισμός της συνολικής  $C$ -συνάρτησης για το διπλά παραμορφωμένο, μη-συμμετρικό πρότυπο, απλοποιείται, καθώς ανάγεται στον υπολογισμό μόνο της  $C_{\text{single}}(\lambda; k, \lambda_0)$ , ο οποίος εξαρτάται εκτενώς από τα αποτελέσματα της ενότητας 2.1.2 της [52]. Για την περίπτωση του γενικού πίνακα παραμόρφωσης, ο συντελεστής της ανωμαλίας Weyl απλοποιείται δραστηρικά εφόσον οι διαφορομορφισμοί  $\xi_A$  μηδενίζονται<sup>16</sup>

$$\xi_A = \omega^{-C}{}_{A|C} = 0, \quad (3.4.22)$$

<sup>15</sup> Για μία γενική παραμόρφωση που περιλαμβάνει μόνο έτερο-αλληλεπιδράσης κυκλικού τύπου με τη μορφή [62]  $\mathcal{L}_{\text{pert}} = \frac{k}{\pi} \sum_{i=1}^n \lambda_{i+1}^{ab} J_{(i+1)+}^a J_{i-}^b$ , με  $J_{(n+1)\pm}^a = J_{1\pm}^a$ , η έκφραση (3.4.19) γενικεύεται στην

$$C_n(\lambda_i; k_i) = \sum_{i=1}^n C_{\text{single}}\left(\lambda_i; \sqrt{k_i k_{i+1}}, \sqrt{\frac{k_i}{k_{i+1}}}\right) - (n-1) c_{\text{UV}}, \quad k_{n+1} = k_1, \quad c_{\text{UV}} = \sum_{i=1}^n \frac{2k_i \dim G}{2k_i + c_G}.$$

<sup>16</sup> Για συγκεκριμένες μορφές του πίνακα  $\lambda_{ab}$ , ίσως χρειάζεται η προσθήκη ενός επιπλέον διαφορομορφισμού προκειμένου να εξασφαλισθεί ότι η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης είναι συνεπής. Βλ. τη σχέση (3.4.4) και τον τρόπο που παράγεται στο παράρτημα ΣΤ'. Σε αυτή την περίπτωση, πρέπει να συμπεριληφθεί και η συνεισφορά του διαστελονίου στην  $\beta$ -συνάρτηση, καθώς και στην (3.4.16).

αντιστοιχώντας σε ένα σταθερό διαστελόνιο, εφόσον  $\xi_A = 2 \partial_A \Phi$ . Σε αυτή την περίπτωση, ο συντελεστής της Weyl ανωμαλίας απλοποιείται στον

$$C_{\text{single}}(\lambda; k, \lambda_0) = 2 \dim G - 3 \left( R_- + \frac{1}{6} H^2 \right). \quad (3.4.23)$$

Τονίζεται εδώ ότι παρόλο που για τον υπολογισμό της  $C_{\text{double}}$  χρειάζεται να γίνει χρήση της μη-διαταρακτικής δράσης (2.10.186), για τον υπολογισμό της  $C_{\text{single}}$  αρκεί η απλή δράση (3.4.3).

Συνεχίζοντας τον υπολογισμό, η καμπυλότητα Ricci με στρέψη μπορεί να εκφραστεί σε όρους της  $\beta$ -συνάρτησης ως

$$R_- = -2 \operatorname{Tr} \left( \frac{d\lambda}{dt} \lambda^T \tilde{g}^{-1} \right) = \frac{d}{dt} \ln \det \tilde{g}. \quad (3.4.24)$$

Η σχέση αυτή δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό (3.4.2)

$$R_- \rightarrow -2 \operatorname{Tr} \left( \frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1} \tilde{g}^{-1} \right). \quad (3.4.25)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η  $H^2$ , χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της 3-μορφής  $H$  που υπολογίστηκαν στο σύστημα αναφοράς της (3.2.14). Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\lambda_0}{k} \left( I_{abc} I_{pqr} \tilde{g}^{ap} \tilde{g}^{bq} \tilde{g}^{cr} + 3 \mathcal{N}_{bc}{}^d \mathcal{N}_{qr}{}^e g_{de}^2 \tilde{g}^{bq} \tilde{g}^{cr} + c_G \dim G \right), \\ I_{abc} &= \lambda_0^{-1} f_{abd} \tilde{g}_{cd} + \mathcal{N}_{bc}{}^d (\lambda^T \tilde{g})_{da} + \mathcal{N}_{ca}{}^d (\lambda^T \tilde{g})_{db}, \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

το οποίο, όπως και η  $R_-$  δεν παραμένει αναλλοίωτο κάτω από το μετασχηματισμό (3.4.2). Έπειτα, αντικαθιστώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα στην (3.4.23), μετά από λίγη άλγεβρα προκύπτει τελικά η

$$\begin{aligned} C_{\text{single}}(\lambda; k, \lambda_0) &= \left( 2 - \frac{c_G \lambda_0}{2k} \right) \dim G + 6 \operatorname{Tr} (\beta \lambda^T \tilde{g}^{-1}) \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{2k} \left( I_{abc} I_{pqr} \tilde{g}^{ap} \tilde{g}^{bq} \tilde{g}^{cr} + 3 \mathcal{N}_{bc}{}^d \mathcal{N}_{qr}{}^e g_{de}^2 \tilde{g}^{bq} \tilde{g}^{cr} \right). \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Τέλος, το μόνο που έχει μείνει, είναι να ελεγχθεί με αντικατάσταση του πάνω στην (3.4.19) και χρήση των (3.4.4) και (3.4.10), ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.4.15) όντως ικανοποιείται χωρίς την προσθήκη διαφορομορφισμών. Αυτό δεν έχει ελεγχθεί στην πλήρη γενικότητά του, αλλά ελέγχθηκε με τη χρήση του προγράμματος Mathematica για διάφορα παραδείγματα των ομάδων  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ ,  $SP(4)$ ,  $G_2$  και για διαφορετικούς πίνακες



$(\lambda_i)_{ab}$  που δεν οδηγούσαν στην εμφάνιση νέων ροών, και όντως υπάρχει συνέπεια. Το γεγονός αυτό αφήνει ελάχιστη αμφιβολία για το κατά πόσο, με τα άνωθεν δεδομένα, η (3.4.15) ικανοποιείται στη γενική περίπτωση.

Για την περίπτωση ενός διαγώνιου και ιστροπικού πίνακα  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$ , η (3.4.27) ταυτίζεται με την (3.3.15) (ή αντίστοιχα με την (2.14) της [54]), που αντιστοιχεί σε μια ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2}$  στις υψηλές ενέργειες ( $\lambda = 0$ ) στην  $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$  στις χαμηλές ενέργειες ( $\lambda = \lambda_0$ ) [40], σε συμφωνία και με την προηγούμενη ενότητα. Για την περίπτωση δύο διαγώνιων και ιστροπικών πινάκων ζεύξης  $(\lambda_{1,2})_{ab} = \lambda_{1,2} \delta_{ab}$ , η (3.4.19) ταυτίζεται με τη σχέση (2.11) της [54], που αντιστοιχεί στη ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2}$  στις υψηλές ενέργειες ( $\lambda_{1,2} = 0$ ) στην  $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$  στις χαμηλές ενέργειες ( $\lambda_{1,2} = \lambda_0$ ) [40], όπως αυτή περιγράφηκε και στην προηγούμενη ενότητα.

Τέλος, με εξαίρεση μια σταθερά, η  $C_{\text{single}}$  παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό (3.4.2),

$$C_{\text{single}}(\lambda^{-1}; -k, \lambda_0^{-1}) - C_{\text{single}}(\lambda; k, \lambda_0) = \frac{c_G \dim G}{2k} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) . \quad (3.4.28)$$

Αυτό έχει ως συνέπεια, με χρήση και της (3.4.19) να αποδεικνύεται η αναλλοιότητα της  $C_{\text{double}}(\lambda_1, \lambda_2; k, \lambda_0)$  κάτω από τη μη-διαταρακτική συμμετρία (3.4.2). Αξιοσημείωτο είναι ότι, ισότητα των  $C$ -συναρτήσεων επιτυγχάνεται κάτω από αυτό το μετασχηματισμό μόνο όταν και οι δύο παράμετροι ζεύξης είναι ελεύθερες να αλλάζουν κάτω από την ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης, προκειμένου και οι δύο να ρέουν προς την κοινή, σταθερή τιμή τους στις χαμηλές ενέργειες.

### Το ανιστροπικό παράδειγμα της $SU(2)$

Στην ανιστροπική, διαγώνια περίπτωση της  $SU(2)$  υπάρχουν έξι παράμετροι ζεύξης που παραμετροποιούνται ως

$$(\lambda_1)_{ab} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) , \quad \text{και} \quad (\lambda_2)_{ab} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3) , \quad (3.4.29)$$

ενώ οι μετρικές στον χώρο των παραμέτρων αυτών, δίνονται από τις σχέσεις

$$G_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2(1 - \lambda_a^2)^2} , \quad \tilde{G}_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2(1 - \tilde{\lambda}_a^2)^2} , \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.4.30)$$

Για τον υπολογισμό των  $\beta$ -συναρτήσεων σε τάξη  $1/k$  και επακριβώς ως προς τις παραμέτρους παραμόρφωσης για αυτό το πρότυπο, χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα των [60, 52]. Προ-

κύπτει τελικά [49]

$$\beta^1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{2(1 + \lambda_1^2)\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{k(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)} \quad (3.4.31)$$

και κυκλικές εναλλαγές στα  $\lambda_{1,2,3}$  για τις υπόλοιπες  $\beta$ -συναρτήσεις των  $\lambda_i$ ,  $i = 2, 3$ , ενώ οι  $\beta$ -συναρτήσεις για τα  $\tilde{\lambda}_a$ , προκύπτουν αντικαθιστώντας απλά τα  $\lambda_a$  με  $\tilde{\lambda}_a$ . Τα σταθερά σημεία αυτών των ροών και οι αντίστοιχες σύμμορφες θεωρίες πεδίου, σύμφωνα με προηγούμενες αναλύσεις είναι [40]

$$\begin{aligned} \text{UV} : \quad & \lambda_{1,2} = 0 = \tilde{\lambda}_{1,2}, \quad SU(2)_{k_1} \times SU(2)_{k_2}, \\ \text{IR}_1 : \quad & \lambda_a = \lambda_0 = \tilde{\lambda}_a, \quad \frac{SU(2)_{k_1} \times SU(2)_{k_2 - k_1}}{SU(2)_{k_2}} \times SU(2)_{k_2 - k_1}, \\ \text{IR}_2 : \quad & \lambda_a = \lambda_0, \quad \tilde{\lambda}_a = 0, \quad SU(2)_{k_1} \times SU(2)_{k_2 - k_1}. \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

Ένα σχόλιο εδώ, σε σχέση με το σταθερό σημείο των υψηλών ενεργειών, είναι ότι η επιλογή των  $\lambda_{1,2} = 0 = \tilde{\lambda}_{1,2}$  είναι θέμα σύμβασης, εφόσον και άλλα ζεύγη από  $\lambda$  θα μπορούσαν να έχουν επιλεγεί. Είναι εμφανές ότι το σημείο αυτο αντιστοιχεί σε μία ακριβή σύμμορφη θεωρία πεδίου, καθώς οι παράμετροι  $(\lambda_3, \tilde{\lambda}_3)$  μπορούν να απορροφηθούν με ένα  $O(4, 4)$  μετασχηματισμό δυϊκότητας στο ακριβές  $SU(2)_{k_1} \times SU(2)_{k_2}$  υπόβαθρο των χορδών. Αυτό είναι σε αντιστοιχία με το να ήταν η διαταραχή της μορφής  $\mathcal{L}_{\text{pert}} = \frac{k}{\pi} \left( \lambda_3 J_{1+}^3 J_{2-}^3 + \tilde{\lambda}_3 J_{2+}^3 J_{1-}^3 \right)$ , δηλαδή στην Cartan υποάλγεβρα της  $SU(2) \times SU(2)$ , και συνεπώς ακριβώς οριακή για όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών.

Ορίζοντας  $\beta_a = G_{ab}\beta^b$ , αποδεικνύεται ότι η ποσότητα  $\beta_a d\lambda_a$  αντιστοιχεί σε μία κλειστή, 1-μορφή και όμοια με την (3.4.15) προκύπτει ότι

$$\beta_a = \frac{1}{24} \frac{\partial C_{\text{double}}}{\partial \lambda_a}, \quad \tilde{\beta}_a = \frac{1}{24} \frac{\partial C_{\text{double}}}{\partial \tilde{\lambda}_a}, \quad (3.4.33)$$

με

$$\begin{aligned} C_{\text{double}}(\lambda_a, \tilde{\lambda}_a; k, \lambda_0) &= c_{\text{UV}} - \frac{6}{k} \left( f(\lambda_a; \lambda_0) + f(\tilde{\lambda}_a; \lambda_0) \right), \\ f(\lambda_a; \lambda_0) &= \frac{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 - \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2)}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)}, \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

όπου  $c_{\text{UV}}$  είναι το κεντρικό φορτίο στο UV σταθερό σημείο (3.4.32) του  $\lambda_{1,2} = 0 = \tilde{\lambda}_{1,2}$

$$c_{\text{UV}} = 6 - \frac{6}{k} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (3.4.35)$$

Τέλος, η  $C$ -συνάρτηση της (3.4.34) είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό

$$\lambda_a \rightarrow \lambda_a^{-1}, \quad \tilde{\lambda}_a \rightarrow \tilde{\lambda}_a^{-1}, \quad k \rightarrow -k, \quad \lambda_0 \rightarrow \lambda_0^{-1} \quad (3.4.36)$$

και επίσης αναπαράγει το σωστό κεντρικό φορτίο για τις σύμμορφες θεωρίες στα UV και IR<sub>1,2</sub> σταθερά σημεία της (3.4.32).

### 3.4.2 Η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου διγραμμικού τελεστή παραμόρφωσης

Στην υποενότητα αυτή υπολογίζεται ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης για τον διγραμμικό ως προς τα ρεύματα, τελεστή της παραμόρφωσης. Για τον υπολογισμό αυτό χρειάζονται τα αποτελέσματα της [58]

$$\langle \mathcal{O}_{ab}(x_1, \bar{x}_1) \mathcal{O}_{cd}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\lambda, k} = \frac{G_{cd|mn}}{|x_{12}|^4} \left( \delta_a^m \delta_b^n + \gamma_{ab}{}^{mn} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2} \right), \quad (3.4.37)$$

όπου

$$\gamma_{ab}{}^{cd} = \nabla_{ab} \beta^{cd} + \nabla^{cd} \beta_{ab} = \nabla_{ab} \beta^{cd} + G_{ab|mn} G^{cd|pq} \nabla_{pq} \beta^{mn}, \quad (3.4.38)$$

και  $\nabla_{ab} \beta^{cd} = \partial_{ab} \beta^{cd} + \Gamma_{ab|mn}^{cd} \beta^{mn}$ . Τα  $\Gamma_{ab|mn}^{cd}$  είναι τα σύννηθη σύμβολα του Christoffel και υπολογίζονται μέσω της μετρικής Zamolodchikov (3.4.10) ως

$$\Gamma_{m_1 m_2 | n_1 n_2}^{p_1 p_2} = \frac{1}{2} G^{p_1 p_2 | q_1 q_2} \left( \partial_{m_1 m_2} G_{q_1 q_2 | n_1 n_2} + \partial_{n_1 n_2} G_{q_1 q_2 | m_1 m_2} - \partial_{q_1 q_2} G_{m_1 m_2 | n_1 n_2} \right), \quad (3.4.39)$$

όπου για τη μερική παραγωγή χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $\partial_{m_1 m_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{m_1 m_2}}$ . Με τη βοήθεια της ταυτότητας  $\lambda g^{-1} = \tilde{g}^{-1} \lambda$ , το αποτέλεσμα έρχεται στη μορφή

$$\Gamma_{m_1 m_2 | n_1 n_2}^{p_1 p_2} = \delta_{n_1}^{p_1} \delta_{m_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 n_2} + \delta_{m_1}^{p_1} \delta_{n_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 m_2} \quad (3.4.40)$$

και μετά από λίγη άλγεβρα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για την ανώμαλη διάσταση (3.4.38)

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^{cd} = \frac{1}{2k} & \left( \delta_{ap} \delta_{bq} \delta^{cm} \delta^{dn} + G_{ab|mn} G^{cd|pq} \right) \left\{ \mathcal{N}_{ni}^{(T)k} \left[ (\delta_{mp} \lambda_{ks} - \delta_{pk} \lambda_{ms}) f_{qsf} g^{fi} - \lambda_0^{-1} f_{mkp} g^{qi} \right. \right. \\ & + \lambda_{pl} (\mathcal{N}_{mk}{}^l g^{qi} + \mathcal{N}_{mk}{}^q g^{li}) \left. \right] + \mathcal{N}_{mk}{}^i \left[ (\delta_{nq} \lambda_{si} - \delta_{iq} \lambda_{sn}) f_{psf} \tilde{g}^{fk} - \lambda_0 f_{niq} \tilde{g}^{pk} \right. \\ & \left. \left. + \lambda_{lq} (\mathcal{N}_{ni}^{(T)p} \tilde{g}^{lk} + \mathcal{N}_{ni}^{(T)l} \tilde{g}^{pk}) \right] + \delta_p^m \mathcal{N}_{lr}{}^s \mathcal{N}_{ns}^{(T)r} (\lambda g^{-1})_{lq} + \delta_q^n \mathcal{N}_{mr}{}^s \mathcal{N}_{ls}^{(T)r} (\lambda g^{-1})_{pl} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

Η περίπλοκη αυτή έκφραση έχει προέλθει από μια συναλλοίωτη μορφή και συνεπώς, κάτω από τον μετασχηματισμό της δυϊκού-τύπου σύμμετριας, μετασχηματίζεται σαν μικτός τανυστής ως

$$\gamma_{ab}{}^{cd} \rightarrow \lambda_{ea} \lambda_{bf} \lambda_{cg}^{-1} \lambda_{hd}^{-1} \gamma_{ef}{}^{gh}. \quad (3.4.42)$$

Για την περίπτωση διαγώνιου και ισοτροπικού πίνακα παραμόρφωσης  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^{cd} = & c_G \lambda^2 \frac{(1 + \lambda^2)(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) - 4\lambda}{(1 - \lambda^2)^3} \delta_{ac} \delta_{bd} + \frac{\lambda^2(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) - 2\lambda}{(1 - \lambda^2)^2} f_{ace} f_{bde} \\ & + \lambda^2 \frac{(1 + 3\lambda^2)(\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) - 2\lambda(3 + \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)^3} f_{ade} f_{bce}. \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

Η αντίστοιχη ανώμαλη διάσταση προκύπτει από το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\gamma_{ab}{}^{cd} \delta_{cd} = \gamma \delta_{ab} \quad (3.4.44)$$

και ταυτίζεται με την σχέση (2.16) της [45]

$$\gamma = c_G \lambda \frac{3(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda(1 + \lambda^2) - 2(1 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}{k(1 - \lambda^2)^3}, \quad (3.4.45)$$

όπως ήταν αναμενόμενο. Περαιτέρω έλεγχοι της (3.4.41) για ίσα επίπεδα άλγεβρας περιλαμβάνουν την περίπτωση της  $SU(2)$  με διαγώνιο αλλά ανισοτροπικό πίνακα ζεύξης, καθώς και την περίπτωση με δύο παραμέτρους παραμόρφωσης για το συμμετρικό συνσύνολο. Στις περιπτώσεις αυτές η (3.4.41) ταυτίζεται με τις (2.10.102) και (2.10.238) αντίστοιχα.

Τέλος, όταν η παραμόρφωση περιορίζεται στην Cartan υποάλγεβρα, τότε η (3.4.41) για τις αντίστοιχες ανώμαλες διαστάσεις μηδενίζεται, όντας συμβατή με το γεγονός ότι η διαταραχή είναι ακριβώς οριακή.

### 3.5 Ακριβή αποτελέσματα με τη χρήση της γεωμετρίας του χώρου των σταθερών ζεύξης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια καινούρια μέθοδος για τον ακριβή, ως προς την παράμετρο παραμόρφωσης, υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων σύνθετων τελεστών για ένα σύνολο  $\lambda$ -παραμορφωμένων προτύπων. Η μέθοδος αυτή εκμεταλλεύεται δεδομένα του χώρου των παραμέτρων ζεύξης, καθώς και την ενεργό δράση σε επίπεδο ενός βρόγχου προκειμένου να αποφευχθούν πλήρως οι μακροσκελείς διαταρακτικοί υπολογισμοί. Ότι ακολουθεί είναι βασισμένο στην [83].

### 3.5.1 Η ανώμαλη διάσταση των απλών ρευμάτων

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζεται η μεθοδολογία στην πιο απλή μορφή των λ-παραμορφωμένων σ-προτύπων [38]. Η νέα μέθοδος υπολογισμού των ανώμαλων διαστάσεων είναι βασισμένη σε μία τροποποίηση της συνηθισμένης διαδικασίας βαθμίσωσης που εφαρμόζεται για την εύρεση της ενεργού δράσης του εκάστοτε λ-προτύπου.

Σημείο αφετηρίας αυτή τη φορά είναι το άθροισμα μιας WZW δράσης  $S_k(g)$  σε επίπεδο  $k$  για ένα στοιχείο ομάδας  $g \in G$  [90], μίας PCM δράσης [91] για ένα στοιχείο ομάδας  $\tilde{g} \in G$  με συνολική παράμετρο ζεύξης  $\kappa^2$  και ενός όρου που περιέχει το χειραλικό ρεύμα του αρχικού WZW προτύπου. Πιο συγκεκριμένα, η δράση αυτή είναι η

$$S_{k,\kappa^2,s}(g, \tilde{g}) = S_k(g) - \frac{\kappa^2}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial_-\tilde{g}) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(s\tilde{g}^{-1}\partial_+\tilde{g}), \quad (3.5.1)$$

όπου ο τελευταίος όρος έχει πίνακα ζεύξης  $s = s^a t_a$  και ο συνολικός συντελεστής  $k$  εισήχθει για μεγαλύτερη διευκόλυνση σε μελλοντικούς υπολογισμούς. Ο επιπλέον όρος είναι βοηθητικός, και ο λόγος που προστίθεται στη δράση, όπως θα φανεί στην συνέχεια αυτής της ενότητας, είναι ότι επιτρέπει την εύρεση της ανώμαλης διάστασης του απλού τελεστή ρευμάτων, για το απλά παραμορφωμένο πρότυπο [38] χωρίς την χρήση θεωρίας διαταραχών.

Σε ότι ακολουθεί, όλοι οι πίνακες αναπτύσσονται στη βάση των πινάκων αναπαράστασης  $t_a$ , οι οποίοι είναι πάλι κανονικοποιημένοι ως  $\text{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}$  και υπακούουν τις σχέσεις μετάθεσης  $[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c$ , με τις σταθερές δομής της άλγεβρας να είναι πραγματικές. Όπως και σε προηγούμενες ενότητες, βαθμίζεται πάλι η καθολική συμμετρία που δρά ως  $g \rightarrow \Lambda^{-1} g \Lambda$  και  $\tilde{g} \rightarrow \Lambda^{-1} \tilde{g}$ . Η αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας δράση που προκύπτει είναι

$$S_{k,E}(g, \tilde{g}, A_{\pm}) = S_k(g, A_{\pm}) - \frac{\kappa^2}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(\tilde{g}^{-1} D_+ \tilde{g} \tilde{g}^{-1} D_- \tilde{g}) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(s \tilde{g}^{-1} D_+ \tilde{g}), \quad (3.5.2)$$

όπου οι  $D_{\pm} \tilde{g} = (\partial_{\pm} - A_{\pm}) \tilde{g}$  είναι οι συναλλοίωτες παράγωγοι και ο πρώτος όρος είναι ο σύνηθης όρος της βαθμισμένης WZW δράσης [92]

$$S_k(g, A_{\pm}) = S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1} \partial_- g + A_- g A_+ g^{-1} - A_- A_+). \quad (3.5.3)$$

Επιλέγοντας τη βαθμίδα  $\tilde{g} = \mathbb{1}$ , η (3.5.2) γίνεται

$$S_{k,\lambda,s}(g, A_{\pm}) = S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \operatorname{Tr}(A_- \partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1} \partial_- g + A_- g A_+ g^{-1}) - \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \operatorname{Tr}(\lambda^{-1} A_+ A_- + s A_+) , \quad (3.5.4)$$

όπου

$$\lambda^{-1} = 1 + \frac{\kappa^2}{k} . \quad (3.5.5)$$

Προκειμένου να υπολογισθούν οι εξισώσεις κίνησης, αρχικά διαφορίζεται η πάνω δράση ως προς τα πεδία βαθμίδας  $A_{\pm}$  δίνοντας τις συνθήκες

$$\begin{aligned} D_+ g g^{-1} + (1 - \lambda^{-1}) A_+ &= 0 , \\ g^{-1} D_- g - (1 - \lambda^{-1}) A_- + s &= 0 , \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

και έπειτα ως προς τα στοιχεία της ομάδας  $g$  δίνοντας

$$D_-(D_+ g g^{-1}) = F_{+-} \iff D_+(g^{-1} D_- g) = F_{+-} . \quad (3.5.7)$$

Οι συναλλοίωτες παραγωγίσεις των στοιχείων  $g$  τώρα ορίζονται ως  $D_{\pm} g = \partial_{\pm} g - [A_{\pm}, g]$ , και ως συνήθως

$$F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ - [A_+, A_-] . \quad (3.5.8)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.5.6) στις (3.5.7) προκύπτουν τελικά οι εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \partial_- A_+ - \lambda \partial_+ A_- + [A_+, A_-] &= 0 , \\ \partial_+ A_- - \lambda \partial_- A_+ - [A_+, A_-] - \lambda [A_+, s] &= 0 . \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Στη συνέχεια, λύνοντας τις συνθήκες (3.5.6) ως προς τα πεδία βαθμίδας και αντικαθιστώντας τα στη δράση (3.5.4) προκύπτει η δράση ενός σ-προτύπου. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από την δράση που αντιστοιχεί στα  $\lambda$ -παραμορφωμένα σ-πρότυπα με διαγώνιο και ιστροπικό πίνακα παραμόρφωσης  $\lambda$ , συν έναν επιπλέον όρο, γραμμικό ως προς την παράμετρο παραμόρφωσης  $s$ . Ειδικότερα, προκύπτει

$$A_+ = i(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D)^{-1} J_+ , \quad A_- = -(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D^T)^{-1} (iJ_- + s) , \quad (3.5.10)$$

όπου

$$J_+ = -i\partial_+ g g^{-1} , \quad J_- = -ig^{-1} \partial_- g , \quad D_{ab} = \operatorname{Tr}(t^a g t^b g^{-1}) , \quad (3.5.11)$$

και η δράση έρχεται στη μορφή

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma J_+(\lambda^{-1}\mathbb{1} - D^T)^{-1}J_- - \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(sA_+). \quad (3.5.12)$$

Είναι προφανές ότι για  $s = 0$ , η πάνω δράση ταυτίζεται με την (2.10.15) της αρχικής  $\lambda$ -παραμορφωμένης θεωρίας της [38].

Στη συνέχεια υπολογίζεται η ανώμαλη διάσταση του ρεύματος  $J_{\pm}^a$  επακριβώς ως προς την παράμετρο  $\lambda$  και μέχρι πρώτη τάξη ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλο  $k$  στο όριο  $s = 0$ , δηλαδή στην αρχική  $\lambda$ -παραμορφωμένη θεωρία. Το όριο αυτό αποδεικνύεται ότι είναι συνεπές με τις  $\beta$ -συναρτήσεις, όπως ήταν αναμενόμενο. Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι το ρεύμα  $J_+$  είναι «ενδεδυμένο» και έχει αντικατασταθεί από το  $A_+$  όπως φαίνεται και από τον τελευταίο όρο της (3.5.12). Προφανώς, το  $\lambda \rightarrow 0$  συνεπάγεται ότι  $A_+ \sim J_+$ .

### Υπολογισμός των $\beta$ -συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζονται οι  $\beta$ -συναρτήσεις των παραμέτρων ζεύξης  $\lambda$  και  $s$  με χρήση της μεθόδου του πεδίου υποβάθρου για τα  $\lambda$ -πρότυπα, η οποία παρουσιάστηκε αρχικά στην [61] και στην συνέχεια γενικεύθηκε στην [52], όπως αναλύθηκε και σε προηγούμενες ενότητες της παρούσας εργασίας.

Αρχικά επιλέγεται ως υπόβαθρο το  $g = e^{\sigma^+\theta_+ + \sigma^-\theta_-}$ , όπου οι πίνακες  $\theta_{\pm}$  είναι σταθεροί και μετατίθενται μεταξύ τους. Τότε, τα ρεύματα και ο ορθογώνιος πίνακας  $D$  γίνονται  $J_{\pm} = -i\theta_{\pm}$  και  $D = \mathbb{1}$ , και από την (3.5.10) προκύπτουν τα πεδία βαθμίδας υποβάθρου να είναι τα

$$A_+^{(0)} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\theta_+, \quad A_-^{(0)} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}(\theta_- + s). \quad (3.5.13)$$

Πράγματι η επιλογή αυτή για το υπόβαθρο αποτελεί λύση των κλασικών εξισώσεων κίνησης (3.5.9) και η Λαγκρανζιανή πυκνότητα της δράσης (3.5.12) γίνεται

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{k}{2\pi} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\theta_+\theta_- + 2\frac{s\lambda}{1-\lambda}\theta_+ \right). \quad (3.5.14)$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας τις ακόλουθες διακυμάνσεις των πεδίων υποβάθρου γύρω από τις κλασικές λύσεις (3.5.13)

$$A_{\pm} = A_{\pm}^{(0)} + \delta A_{\pm}, \quad (\tilde{A}_{\pm}^{(0)})_{ab} = if_{abc}(A_{\pm}^{(0)})_c, \quad \tilde{s}_{ab} = if_{abc}s_c, \quad (3.5.15)$$

προκύπτουν οι γραμμικοποιημένες διακυμάνσεις των εξισώσεων κίνησης

$$\begin{aligned} -(\lambda\partial_+ + \tilde{A}_+^{(0)})\delta A_- + (\partial_- + \tilde{A}_-^{(0)})\delta A_+ &= 0, \\ (\partial_+ + \tilde{A}_+^{(0)})\delta A_- - (\lambda\partial_- + \tilde{A}_-^{(0)} + \lambda\tilde{s})\delta A_+ &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Αυτές μπορούν να έρθουν στη μορφή

$$\hat{D} \begin{pmatrix} \delta A_- \\ \delta A_+ \end{pmatrix} = 0, \quad (3.5.17)$$

όπου ο τελεστής  $\hat{D}$  περιέχει πρώτης τάξης παραγώγους ως προς τις συντεταγμένες του κοσμικού φύλλου. Μετά από αναλυτική συνέχιση σε Ευκλείδιο χώρο, στο χώρο των ορμών, σύμφωνα με τις γνωστές πλέον συμβάσεις [41], αντικαθίστανται οι  $(\partial_+, \partial_-)$  με  $\frac{1}{2}(\bar{p}, p) \equiv (p_+, p_-)$ . Τότε προκύπτει  $\hat{D} = \hat{C} + \hat{F}$ , με

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} -\lambda p_+ & p_- \\ p_+ & -\lambda p_- \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} -\tilde{A}_+^{(0)} & \tilde{A}_-^{(0)} \\ \tilde{A}_+^{(0)} & -\tilde{A}_-^{(0)} - \lambda \tilde{s} \end{pmatrix}, \quad (3.5.18)$$

όπου ο πίνακας  $\hat{C}$  περιέχει όλη την εξάρτηση από τις ορμές. Ολοκληρώνοντας τις διακυμάνσεις στο Γκαουσιανό ολοκλήρωμα διαδρομών, προκύπτει η ακόλουθη ενεργός Λαγκρανζιανή για το υπό μελέτη πρότυπο

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \int^\mu \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln(\det \hat{D})^{-1/2}. \quad (3.5.19)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό εμφανίζει λογαριθμικές αποκλίσεις για μεγάλες τιμές της ενεργειακής κλίμακας  $\mu$ . Οι αποκλίσεις αυτές απομονώνονται μέσω του αναπτύγματος της ολοκληρωτέας ποσότητας για μεγάλες ορμές και εντοπίζονται στους όρους που είναι ανάλογοι του  $\frac{1}{|p|^2}$  με  $|p|^2 = p\bar{p}$ . Εφόσον οι τιμές του πίνακα  $\hat{C}$  αυξάνουν με την αύξηση της ορμής  $|p|$ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ανάπτυγμα

$$\ln(\det \hat{D}) = \ln \det \hat{C} + \text{Tr}(\hat{C}^{-1} \hat{F}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{C}^{-1} \hat{F})^2 + \dots. \quad (3.5.20)$$

Ο τελευταίος όρος του αναπτύγματος αυτού είναι ο μόνος που συνεισφέρει στις προαναφερθείσες λογαριθμικές αποκλίσεις που είναι σημαντικές στην παρούσα ανάλυση, δίνοντας μια συνεισφορά

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \frac{1}{16\pi^2} \int^\mu d^2 p \text{Tr}(\hat{C}^{-1} \hat{F})^2 + \dots. \quad (3.5.21)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται το πάνω ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση  $p = r e^{i\phi}$ ,  $\bar{p} = r e^{-i\phi}$  στις πολικές συντεταγμένες, σύμφωνα με την οποία το μέτρο ολοκλήρωσης γίνεται  $d^2 p = r dr d\phi$ . Η ολοκλήρωση ως προς  $r$ , δίνει τον απαραίτητο παράγοντα  $\ln \mu$ ,



και πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}^{(0)} + \frac{c_G}{2\pi} \ln \mu^2 \left( \frac{A_+^{(0)} A_-^{(0)}}{(1+\lambda)^2} + \frac{s\lambda A_+^{(0)}}{(1-\lambda)(1+\lambda)^2} \right) \\ &= \mathcal{L}^{(0)} - \frac{c_G}{2\pi} \ln \mu^2 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} \theta_+ \theta_- . \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Η δεύτερη σειρά της πάνω σχέσης προέκυψε με αντικατάσταση της (3.5.13) για τα πεδία βαθμίδας της κλασικής λύσης υποβάθρου, καθώς και με τον υπολογισμό του ίχνους  $\text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_-^{(0)}) = c_G (A_+^{(0)})^a (A_-^{(0)})^a$  και  $\text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} \tilde{s}) = c_G (A_+^{(0)})^a$  με  $f_{acd} f_{bcd} = c_G \delta_{ab}$ . Σε ότι έπεται, παραλείπεται ο δείκτης του  $s^a$ , εφόσον το αποτέλεσμα της β-συνάρτησης και αργότερα της ανώμαλης διάστασης δεν θα εξαρτάται από αυτό.

Όπως στη θεωρία πεδίου, έτσι και εδώ, απαιτείται η ενεργός δράση (3.5.22) να είναι ανεξάρτητη της ενεργειακής κλίμακας  $\mu$ , δηλαδή  $\partial_{\ln \mu^2} \mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$ . Για μεγάλα  $k \gg 1$  η παράγωγος αυτή δρά μόνο στις παραμέτρους ζεύξης της  $\mathcal{L}^{(0)}$ , και ορίζοντας ως συνήθως  $\beta^\lambda = \partial_{\ln \mu^2} \lambda$  και  $\beta^s = \partial_{\ln \mu^2} s$ , προκύπτει τελικά

$$\beta^\lambda = -\frac{c_G}{2k} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}, \quad \beta^s = \frac{c_G}{2k} \frac{s\lambda}{(1-\lambda)(1+\lambda)^2}. \quad (3.5.23)$$

Για διευκόλυνση σε μελλοντικούς υπολογισμούς, ορίζεται η ενεργός παράμετρος ζεύξης<sup>17</sup>

$$\tilde{\lambda} \sim s\lambda, \quad (3.5.24)$$

η οποία αντικαθιστά την  $s$  σε ότι ακολουθεί. Η β-συνάρτηση για τη νέα παράμετρο  $\tilde{\lambda}$ , υπολογίζεται από τη σχέση  $\beta^{\tilde{\lambda}} = \frac{d\tilde{\lambda}}{d\ln \mu^2} = \beta^\lambda \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \lambda} + \beta^s \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial s}$  και προκύπτει να είναι

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = \frac{c_G}{2k} \frac{\lambda^2 \tilde{\lambda}}{(1-\lambda)(1+\lambda)^2}. \quad (3.5.25)$$

### Η ανώμαλη διάσταση των απλών ρευμάτων

Μέχρι στιγμής οι παράμετροι ζεύξης  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$  ήταν πεπερασμένες, όμως για μικρές τιμές τους, η δράση (3.5.12) γίνεται

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma (\lambda J_+^a J_-^a + \tilde{\lambda} J_+^a) + \dots . \quad (3.5.26)$$

<sup>17</sup>Η σταθερά αναλογίας είναι απλά ένα  $-i$ . Αυτός ο επαναορισμός προκύπτει από το γεγονός ότι η παράμετρος  $s$  είναι καθαρά φανταστική στις παρούσες συμβάσεις, βλ. (3.5.1), και η συμπεριληψή ή παράλειψή του, δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα της ανώμαλης διάστασης.

Για την μελέτη της γενικότερης περίπτωσης, η διαταραχή ως προς το απλό ρεύμα αντικαθίσταται από μία γενικότερη, με τελεστές

$$\lambda^i \mathcal{O}_i, \quad (3.5.27)$$

κάθε ένας από τους οποίους έχει μια κλασική διάσταση, και οι  $\beta$ -συναρτήσεις για τις διάφορες παραμέτρους ζεύξης συμβολίζονται με  $\beta^i$ . Υπάρχει επίσης μια μετρική στον χώρο που παραμετροποιείται από αυτές τις παραμέτρους ζεύξης, η οποία ορίζεται μέσω των συναρτήσεων συσχετισμού δύο σημείων των τελεστών  $\mathcal{O}_i$  [58], με το στοιχείο μήκους που της αντιστοιχεί να δίνεται από τη σχέση  $ds^2 = G_{ij}^{(0)} d\lambda^i d\lambda^j$ . Η επανακανονικοποιησιμότητα, σε συνδυασμό με την εξίσωση Callan-Symanzik δίνουν την εξίσωση

$$\gamma_i^j = \partial_i \beta^j + G^{(0)jm} \left( G_{in}^{(0)} \partial_m \beta^n + \beta^n \partial_n G_{im}^{(0)} \right), \quad (3.5.28)$$

όπου  $\beta_i = G_{ij}^{(0)} \beta^j$ . Έστω τώρα η περίπτωση με δύο παραμέτρους ζεύξης  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$ . Εν γένει, σε αυτή τη περίπτωση εμφανίζεται μίξη των δύο τελεστών, ακόμα και αν αρχικά δεν υπήρχε στο σύμμορφο σημείο και επομένως η ανώμαλη διάστασή τους εκφράζεται μέσω ενός πίνακα  $\gamma_i^j$ , του οποίου και τα τέσσερα στοιχεία είναι μη-μηδενικά. Έστω τώρα ότι μία από τις παραμέτρους ζεύξης, για παράδειγμα η  $\tilde{\lambda}$ , μπορεί να τεθεί μηδέν με συνεπή τρόπο, με την αντίστοιχη  $\beta$ -συνάρτηση να είναι επίσης μηδενική  $\beta^{\tilde{\lambda}} = 0$ . Γίνεται επιπλέον η υπόθεση, ότι στο όριο αυτό η μίξη μεταξύ των δύο τελεστών παύει να υφίσταται και τότε, τα μόνα μη-μηδενικά στοιχεία του πίνακα της ανώμαλης διάστασης είναι τα  $\gamma_\lambda^\lambda$  και  $\gamma_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}}$ . Για την υπό μελέτη περίπτωση οι τελεστές είναι οι  $\mathcal{O}_1 = J_+^a J_-^a$  και  $\mathcal{O}_2 = J_+^a$ , με τον τελευταίο να παραβιάζει την συμμετρία κατά Lorentz της θεωρίας, επιτρέποντας μια μίξη μεταξύ των δύο αυτών τελεστών. Ωστόσο, στο όριο  $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$  η αναλλοιώτητα της θεωρίας κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς αποκαθίσταται και παύει να υπάρχει μίξη μεταξύ τελεστών διαφορετικής χειραλικότητας.

Κοντά στο σημείο  $\tilde{\lambda} = 0$  γίνεται η ακόλουθη γενική υπόθεση για τη μορφή της μετρικής στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης

$$G_{\lambda\lambda}^{(0)}(\lambda, \tilde{\lambda}) = g_{\lambda\lambda}^{(0)}(\lambda) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}), \quad G_{\lambda\tilde{\lambda}}^{(0)}(\lambda, \tilde{\lambda}) = g_{\lambda\tilde{\lambda}}^{(0)}(\lambda) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}), \quad G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^{(0)} = \mathcal{O}(\tilde{\lambda}), \quad (3.5.29)$$

καθώς και η υπόθεση ότι  $\beta^{\tilde{\lambda}} = \mathcal{O}(\tilde{\lambda})$ , οι οποίες προκύπτουν ως συνέπεια της υπόθεσης αποσύζευξης για  $\tilde{\lambda} = 0$ . Τότε, στο όριο  $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$  με χρήση της (3.5.29) προκύπτει ότι

$$\gamma_{\mathcal{O}_1} = \gamma_\lambda^\lambda = 2\partial_\lambda \beta^\lambda + \beta^\lambda \partial_\lambda \ln g_{\lambda\lambda}^{(0)} \quad (3.5.30)$$

και

$$\gamma_{\mathcal{O}_2} = \gamma_{\bar{\lambda}} = 2\partial_{\bar{\lambda}}\beta^{\bar{\lambda}} + \beta^{\lambda}\partial_{\lambda}\ln g_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}^{(0)}. \quad (3.5.31)$$

Έτσι, στο όριο αυτό προκύπτει η αρχική  $\lambda$ -παραμορφωμένη θεωρία με μία μόνο παράμετρο ζεύξης  $\lambda$ , δηλαδή η (3.5.12) χωρίς τον τελευταίο όρο. Ωστόσο, το κέρδος από αυτή τη διαδικασία είναι ότι με αυτόν τον τρόπο, προκύπτει μία επιπλέον έκφραση για την ανώμαλη διάσταση του τελεστή  $\mathcal{O}_2$ , το οποίο ήταν και το ζητούμενο. Σημειώνεται ότι για τα στοιχεία της μετρικής Zamolodchokon μόνο οι όροι μηδενικής τάξης  $g_{ii}^{(0)}$  του αναπτύγματος για  $k \rightarrow \infty$  χρειάζονται, εφόσον οι  $\beta$ -συναρτήσεις στις (3.5.30) και (3.5.31) είναι ήδη τάξης  $\mathcal{O}(1/k)$ . Επιπροσθέτως, ακόμα και ο συνολικός συντελεστής μπροστά από τις ακριβείς τους εκφράσεις μέχρι αυτήν την τάξη είναι άνευ σημασίας για το τελικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, για την υπό μελέτη περίπτωση, χρησιμοποιώντας την (H.8) προκύπτει

$$g_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}^{(0)} = \frac{\dim G}{(1-\lambda^2)^2}, \quad g_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}^{(0)} \sim \frac{1}{1-\lambda^2}. \quad (3.5.32)$$

Τότε, από την (3.5.30) συνεπάγεται η ανώμαλη διάσταση για τον σύνθετο τελεστή

$$\gamma_{J_+J_-} = -\frac{2c_G}{k} \frac{\lambda(1-\lambda(1-\lambda))}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}, \quad (3.5.33)$$

η οποία έχει υπολογισθεί και στην [44] με τη χρήση της ίδιας γεωμετρικής μεθόδου. Επιπλέον, ο υπολογισμός του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.5.31) αναπαράγει το αποτέλεσμα

$$\gamma_{J_+} = \frac{c_G}{k} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}. \quad (3.5.34)$$

για την ανώμαλη διάσταση του απλού  $J_+$ , η οποία πρώτη φορά υπολογίσθηκε στην [44] χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του χώρου των παραμέτρων ζεύξης

$$k \rightarrow -k, \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda}, \quad (3.5.35)$$

σε συνδυασμό με αποτελέσματα από την εφαρμογή της θεωρίας διαταραχών σε χαμηλές τάξεις ως προς την παράμετρο  $\lambda$ .

Στην συνέχεια εφαρμόζεται η ίδια μεθοδολογία για των υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων πιο σύνθετων τελεστών στο απλά παραμορφωμένο  $\lambda$ -πρότυπο.

### 3.5.2 Η ανώμαλη διάσταση σύνθετων τελεστών ρευμάτων

Στην ενότητα αυτή γενικεύεται ο προηγούμενος φορμαλισμός προκειμένου να γίνει δυνατός ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων για γενικούς σύνθετους τελεστές της μορφής

$$\mathcal{O}^{(m,n)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} J_+^{a_1} \dots J_+^{a_m} J_-^{b_1} \dots J_-^{b_n} . \quad (3.5.36)$$

Εκ κατασκευής, ο ταυστικός συντελεστής  $S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n}$  πρέπει να είναι συμμετρικός στους πρώτους  $m$  και τους τελευταίους  $n$  δείκτες ξεχωριστά. Ωστόσο, δεν υπάρχει καμία ιδιότητα συμμετρίας που να συνδέει τα  $a_i$  και τα  $b_i$ . Ο ταυστής αυτός μπορεί να αναλυθεί σε μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας  $G$ . Όπως συνέβη και στην προηγούμενη περίπτωση για το απλό ρεύμα, έτσι κι εδώ, παρουσία της αλληλεπίδρασης ο τελεστής  $\mathcal{O}^{(m,n)}$  θα αντικατασταθεί από τον ενδεδυμένο τελεστή  $\mathcal{O}_\lambda^{(m,n)}$  του οποίου η μορφή παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Σημείο αφετηρίας τώρα είναι η δράση (3.5.2) αλλά με τον  $s$ -όρο της δεύτερης σειράς αντικατεστημένο από

$$\frac{ks}{\pi} \int d^2\sigma S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} (\tilde{g}^{-1} D_+ \tilde{g})^{a_1} \dots (\tilde{g}^{-1} D_+ \tilde{g})^{a_m} (\tilde{g}^{-1} D_- \tilde{g})^{b_1} \dots (\tilde{g}^{-1} D_- \tilde{g})^{b_n} , \quad (3.5.37)$$

επί έναν παράγοντα  $(-1)^{m+n+1}$  ο οποίος παραλείπεται προκειμένου οι εκφράσεις που ακολουθούν να είναι όσο το δυνατόν πιο απλές. Η δράση αυτή είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, και η συνθήκη επιλογής βαθμίδας  $\tilde{g} = \mathbb{1}$  οδηγεί στη δράση

$$\begin{aligned} S_{k,\lambda,s}(g, A_\pm) = & S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(A_- \partial_+ g g^{-1} - A_+ g^{-1} \partial_- g + A_- g A_+ g^{-1}) \\ & - \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \left( \lambda^{-1} \text{Tr}(A_+ A_-) + s \mathcal{A}_{+-}^{(m,n)} \right) , \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

με τα  $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}$  να είναι

$$\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_m} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_n} . \quad (3.5.39)$$

Οι εξισώσεις της (3.5.38) ως προς τα  $A_-$  και  $A_+$  είναι

$$\begin{aligned} D_+ g g^{-1} &= (\lambda^{-1} - 1) A_+ + n s \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} , \\ g^{-1} D_- g &= -(\lambda^{-1} - 1) A_- - m s \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} , \end{aligned} \quad (3.5.40)$$

όπου έχουν ορισθεί τα ανύσματα  $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}$  και  $\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}$  με στοιχεία

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)})_a &= S_{a\dots a_{m-1}; b_1\dots b_n} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_{m-1}} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_n}, \\ (\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')})_b &= S_{a_1\dots a_m; b\dots b_{n-1}} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_m} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

Έτσι, οι τόνοι υποδεικνύουν ότι ένας από τους δείκτες δεν είναι συναιρεμένος και έχει παραμείνει ανοιχτός στον αντίστοιχο ταυστικό συντελεστή.

Διαφορίζοντας τη δράση ως προς τα στοιχεία της ομάδας  $g \in G$ , προκύπτουν οι ίδιες εξισώσεις κίνησης (3.5.7) εφόσον ο  $s$ -όρος της (3.5.38) δεν εξαρτάται από αυτά. Αντικαθιστώντας τις συνθήκες (3.5.40) στην (3.5.7) προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \partial_+ A_- - \partial_- A_+ &= \lambda^{-1} [A_+, A_-] - m s D_+ \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}, \\ \lambda^{-1} \partial_- A_+ - \partial_+ A_- &= -\lambda^{-1} [A_+, A_-] - n s D_- \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}, \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

όπου οι συναλλοίωτες παράγωγοι δρουν με τον σύννητη τρόπο  $D_+ \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} = \partial_+ \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} - [A_+, \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}]$  και  $D_- \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} = \partial_- \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} - [A_-, \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}]$ . Σαν αποτέλεσμα, οι εξισώσεις κίνησης αυτές μπορούν να γραφούν αποκλειστικά σε όρους των πεδίων βαθμίδας.

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση μιας κλασικής λύσης που να ικανοποιεί τις (3.5.40) και (3.5.42) οι οποίες, στην προκειμένη περίπτωση είναι μη-γραμμικές. Το γεγονός αυτό καθιστά τη λύση τους αρκετά πιο δύσκολη σε σχέση με την απλή περίπτωση της προηγούμενης υποενοότητας. Παρόλα αυτά όμως, εφόσον σκοπός είναι στο τέλος να τεθεί η παράμετρος ζεύξης  $s$  ίση με μηδέν, αρκεί να βρεθεί μια συμβατή λύση μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(s)$ . Αυτή είναι η

$$\begin{aligned} A_+ &= i(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D)^{-1} J_+ - ns(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D)^{-1} \mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} + \mathcal{O}(s^2), \\ A_- &= -i(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D^T)^{-1} J_- - ms(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D^T)^{-1} \mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

Τονίζεται εδώ ότι στον δεύτερο όρο κάθε μίας από τις πάνω σχέσεις, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι ορισμοί της σχέσης (3.5.41) για τα πεδία βαθμίδας, αλλά μόνο μέχρι την πρώτη τάξη ως προς την παράμετρο  $s$ . Ο λόγος είναι ότι οι όροι αυτοί είναι ήδη πολλαπλασιασμένοι με  $s$  και άρα γραμμικοί σε αυτήν παράμετρο, γεγονός που αρκεί για την περίπτωση  $s = 0$  που θα θεωρηθεί μετά το πέρας των υπολογισμών. Αντικαθιστώντας στη δράση (3.5.38) προκύπτει ότι

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma J_+(\lambda^{-1} \mathbb{1} - D^T)^{-1} J_- - \frac{kS}{\pi} \int d^2\sigma \mathcal{A}_{+-}^{(m,n)} + \mathcal{O}(s^2), \quad (3.5.44)$$

όπου όπως και πριν, στα  $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}$  πρέπει να αντικατασταθούν μόνο οι μηδενικής τάξης (ως προς  $s$ ) όροι των πεδίων βαθμίδας (3.5.43). Οι δύο πρώτοι όροι της (3.5.44) αντιστοιχούν στη

δράση του  $\lambda$ -παραμορφωμένου  $\sigma$ -προτύπου, όπως γινόταν και στην (3.5.12). Από την πάνω δράση προκύπτει επίσης η μορφή του  $\lambda$ -ενδεδυμένου  $\mathcal{O}^{(m,n)}$  τελεστή της (3.5.36). Αυτός είναι ο

$$\mathcal{O}_\lambda^{(m,n)} = \mathcal{A}_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_m} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_n} , \quad (3.5.45)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός (3.5.39). Είναι προφανές ότι για μικρές τιμές του  $\lambda$ , ο  $\mathcal{O}_\lambda^{(m,n)}$  ανάγεται στον τελεστή  $\mathcal{O}^{(m,n)}$  της (3.5.36) με μία  $\lambda$ -εξαρτώμενη σταθερά αναλογίας, η οποία όμως δεν επηρεάζει τις ανώμαλες διαστάσεις του τελεστή.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η (3.5.44) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον γενικευμένο μετασχηματισμό  $k \rightarrow -k$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ ,  $g \rightarrow g^{-1}$ ,  $s \rightarrow s\lambda^{m+n}$ , ο οποίος σε όρους της ενεργούς παραμέτρου ζεύξης γράφεται ως

$$k \rightarrow -k, \quad \lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad g \rightarrow g^{-1}, \quad \tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}/\lambda^{m+n} . \quad (3.5.46)$$

Η συμμετρία αυτή θα πρέπει να αντανακλάται σε όλες τις φυσικές ποσότητες. Συνεπώς, όσον αφορά το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = G_{\lambda\lambda} d\lambda^2 + G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} d\tilde{\lambda}^2 + 2G_{\lambda\tilde{\lambda}} d\lambda d\tilde{\lambda} , \quad (3.5.47)$$

αυτό θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο μέχρι πρώτη τάξη ως προς το  $\tilde{\lambda}$  κάτω από το μετασχηματισμό (3.5.46). Η μελέτη γίνεται για το  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο, στο οποίο η  $G_{\lambda\tilde{\lambda}}$  όντας γραμμική στο  $\tilde{\lambda}$ , δεν συνεισφέρει. Επιπροσθέτως, στο όριο αυτό, ο πρώτος όρος μετασχηματίζεται ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους και συνεπώς είναι από μόνος του αναλλοίωτος κάτω από τον (3.5.46). Η απαίτηση αναλλοιώτητας της  $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}$  κάτω από τον (3.5.46) συνεπάγεται τη συνθήκη  $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}(\lambda) = \lambda^{-2m-2n} G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}(1/\lambda)$  με έναν συνολικό παράγοντα προσήμου που δεν παίζει ρόλο στα διάφορα αποτελέσματα. Η σχέση αυτή όντως ικανοποιείται από το στοιχείο  $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}$  της (H'.8).

### Υπολογισμός των $\beta$ -συναρτήσεων

Όπως και πριν, επιλέγεται η παραμετροποίηση του στοιχείου ομάδας  $g = e^{\sigma^+ \theta_+ + \sigma^- \theta_-}$  με δύο στοιχεία  $\theta_\pm$  που ανήκουν στην Cartan υποάλγεβρα της  $G$ , ώστε  $J_\pm = -i\theta_\pm$  και  $D = \mathbb{1}$ . Οι εκφράσεις των πεδίων βαθμίδας για την πάνω λύση παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} A_+^{(0)} &= \frac{\lambda}{1-\lambda} (\theta_+ - n s \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n)}) + \mathcal{O}(s^2) , \\ A_-^{(0)} &= -\frac{\lambda}{1-\lambda} (\theta_- + m s \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}) + \mathcal{O}(s^2) . \end{aligned} \quad (3.5.48)$$

Τα πεδία  $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}$  και  $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}$  προκύπτουν από τον ορισμό (3.5.41) με αντικατάσταση των  $A_{\pm}$  από τις κλασικές τους τιμές και πιο συγκεκριμένα, από την αντικατάσταση  $s$ -ανεξάρτητου όρου της (3.5.48). Επιπλέον, οι (3.5.48) πρέπει να ικανοποιούν τις (3.5.42). Αυτό εξασφαλίζεται εάν τα  $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}$  και  $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}$  ανήκουν στην Cartan υποάλγεβρα επίσης, όμοια με τα  $\theta_{\pm}$ . Αυτό ισχύει για την παραπάνω επιλογή υποβάθρου διότι τα στοιχεία των ταυιστών  $S_{aa_1\dots a_{m-1};b_1\dots b_n}$  και  $S_{a_1\dots a_m;bb_1\dots b_{n-1}}$  μηδενίζονται εάν τα  $a_i$  και  $b_j$  είναι δείκτες στην Cartan υποάλγεβρα, εκτός και αν τα  $a$  και  $b$  είναι επίσης Cartan δείκτες.

Είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός της δράσης (3.5.44) για την κλασική λύση (3.5.48). Σε πρώτη τάξη ως προς  $s$  προκύπτει

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{k}{2\pi} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \theta_+ \theta_- + 2s (-1)^n \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^{m+n} \theta_{+-}^{(m,n)} \right) + \mathcal{O}(s^2), \quad (3.5.49)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο ανάλογος της (3.5.39) ορισμός

$$\theta_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1\dots a_m;b_1\dots b_n} \theta_+^{a_1} \dots \theta_+^{a_m} \theta_-^{b_1} \dots \theta_-^{b_n}. \quad (3.5.50)$$

Σημειώνεται ότι για  $m = 1, n = 0$ , η (3.5.49) ανάγεται στην (3.5.14). Στη συνέχεια υπολογίζονται οι διακυμάνσεις της (3.5.42) γύρω από την κλασική λύση μέχρι πρώτη τάξη ως προς  $s$  και το αποτέλεσμα για τη πρώτη εξίσωση της (3.5.42) είναι

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda \delta_{ab} \partial_- - (\tilde{A}_-^{(0)})_{ab} + m(m-1)s\lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)})_{ab} \partial_+ - im s \lambda f_{abc} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)})_c \right. \\ & \quad \left. + m(m-1)s\lambda (\tilde{A}_+^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)})_{cb} \right) \delta A_+^b \\ & + \left( \delta_{ab} \partial_+ + (\tilde{A}_+^{(0)})_{ab} + mns\lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{ab} \partial_+ + mns\lambda (\tilde{A}_+^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{cb} \right) \delta A_-^b = 0. \end{aligned} \quad (3.5.51)$$

Όμοια, οι διακυμάνσεις για την δεύτερη εξίσωση της (3.5.42) δίνουν

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda \delta_{ab} \partial_+ - (\tilde{A}_+^{(0)})_{ab} + n(n-1)s\lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')})_{ab} \partial_- - ins \lambda f_{abc} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')})_c \right. \\ & \quad \left. + n(n-1)s\lambda (\tilde{A}_-^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')})_{cb} \right) \delta A_-^b \\ & + \left( \delta_{ab} \partial_- + (\tilde{A}_-^{(0)})_{ab} + mns\lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{ba} \partial_- + mns\lambda (\tilde{A}_-^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{bc} \right) \delta A_+^b = 0, \end{aligned} \quad (3.5.52)$$

και έχουν επίσης ορισθεί οι ποσότητες

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{+-}^{(m'',n)})_{ab} &= S_{aba_1\dots a_{m-2};b_1\dots b_n} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_{m-2}} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_n}, \\ (\mathcal{A}_{+-}^{(m,n'')})_{ab} &= S_{a_1\dots a_m;abb_1\dots b_{n-2}} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_m} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_{n-2}}, \\ (\mathcal{A}_{+-}^{(m',n')})_{ab} &= S_{aa_1\dots a_{m-1};bb_1\dots b_{n-1}} A_+^{a_1} \dots A_+^{a_{m-1}} A_-^{b_1} \dots A_-^{b_{n-1}}, \end{aligned} \quad (3.5.53)$$

στις οποίες όπως και προηγουμένως οι τόνοι υποδεικνύουν ότι δύο δείκτες του ταυιστή  $S$  δεν είναι συναιρεμένοι. Οι εξισώσεις (3.5.51) και (3.5.52) των διακυμάνσεων μπορούν να ξαναγραφούν στη μορφή (3.5.17) με  $\hat{D} = \hat{C} + \hat{F}$ . Περνώντας στον χώρο ορμών προκύπτει

$$\hat{C} = \hat{C}_0 + s \hat{C}_1, \quad \hat{F} = \hat{F}_0 + s \hat{F}_1, \quad (3.5.54)$$

όπου

$$\hat{C}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda p_+ & p_- \\ p_+ & -\lambda p_- \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_0 = \begin{pmatrix} -\tilde{A}_+^{(0)} & \tilde{A}_-^{(0)} \\ \tilde{A}_+^{(0)} & -\tilde{A}_-^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3.5.55)$$

και

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda E p_- & \lambda B p_- \\ \lambda \tilde{B} p_+ & -\lambda \tilde{E} p_+ \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda F & \lambda C \\ \lambda \tilde{C} & -\lambda \tilde{F} \end{pmatrix}. \quad (3.5.56)$$

Κάθε ένα από τα στοιχεία των πινάκων (3.5.55) και (3.5.56) είναι από μόνο του ένας πίνακας με δύο δείκτες. Πιο αναλυτικά, τα διάφορα στοιχεία είναι

$$\begin{aligned} B_{ab} &= mn(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{ba}, & E_{ab} &= -n(n-1)(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')})_{ab}, \\ \tilde{B}_{ab} &= mn(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{ab}, & \tilde{E}_{ab} &= -m(m-1)(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)})_{ab}, \\ F_{ab} &= -n(n-1)(\tilde{A}_-^{(0)})_{ac}(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')})_{cb} + inf_{abc}(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')})_c, \\ \tilde{F}_{ab} &= -m(m-1)(\tilde{A}_+^{(0)})_{ac}(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)})_{cb} + imf_{abc}(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)})_c, \\ C_{ab} &= mn(\tilde{A}_-^{(0)})_{ac}(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{bc}, & \tilde{C}_{ab} &= mn(\tilde{A}_+^{(0)})_{ac}(\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{cb}. \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

Έχοντας τις εκφράσεις αυτές, είναι δυνατός ο άμεσος υπολογισμός του ίχνους του πίνακα  $(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2$  της (3.5.21), κρατώντας μόνο όρους που θα δώσουν μη-μηδενική συνεισφορά μετά της ολοκλήρωση ως προς την γωνία των πολικών συντεταγμένων. Η ολοκλήρωση αυτή θα συνεισφέρει κατά έναν επιπλέον συντελεστή  $2\pi$  και τελικά υπολογίζεται ότι

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{C}^{-1}\hat{F})^2 &= \text{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2 \\ &+ 2s \left( \text{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_1) - \text{Tr}((\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_1) \right) + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά κάθε ένα από τα ίχνη του δεξιού μέλους της (3.5.58) προκύπτει

$$\text{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2 = -\frac{8c_G}{r^2} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} \theta_+\theta_- - \frac{8(m+n)c_G\lambda s}{r^2(1-\lambda)(1+\lambda)^2} \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n)}, \quad (3.5.59)$$

και

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_1) &= \frac{4\lambda}{r^2(1-\lambda)(1+\lambda)^2} \left( \text{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}F + \tilde{A}_+^{(0)}\tilde{F}) \right. \\ &\left. - \lambda \text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}C + \tilde{A}_-^{(0)}\tilde{C}) \right), \end{aligned} \quad (3.5.60)$$



ενώ το τελευταίο ίχνος ισούται με

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_1) &= \frac{4\lambda}{r^2(1-\lambda)(1+\lambda)^3} \left( \text{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} + \tilde{E}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + E\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)} + B\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)} - \lambda\text{Tr}(B\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} + \tilde{B}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) \right). \end{aligned} \quad (3.5.61)$$

Όπως και προηγουμένως, τα διάφορα ίχνη που εμφανίζονται στις (3.5.60) και (3.5.61) υπολογίζονται ανά περίπτωση, εφόσον το αποτέλεσμα εξαρτάται από την μορφή του τελεστή που έχει επιλεγεί και την συγκεκριμένη μορφή του αντίστοιχου ταυστή  $S$  για κάθε περίπτωση.

Φαίνεται εύκολα ότι για μικρό  $s$ , στον τελευταίο όρο της (3.5.44) ισχύει  $\mathcal{A}_{\pm}^{(m,n)} \sim \mathcal{O}^{(m,n)}$ . Έτσι, η δράση του  $\sigma$ -προτύπου (3.5.44) για μικρές τιμές των  $\lambda$  και  $s$  προσεγγίζεται από την

$$S = S_k(g) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \left( \lambda J_+^a J_-^a + \tilde{\lambda} \mathcal{O}^{(m,n)} \right) + \dots, \quad (3.5.62)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η ενεργός παράμετρος ζεύξης

$$\tilde{\lambda} \sim s\lambda^{m+n}. \quad (3.5.63)$$

Αυτή είναι ένα ανάλογο της (3.5.26) για την περίπτωση του απλού ρεύματος. Συνεπώς, παίρνοντας το όριο  $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$  είναι δυνατός ο υπολογισμός της ανώμαλης διάστασης του τελεστή  $\mathcal{O}_\lambda^{(m,n)}$ .

Αυτό γίνεται εφαρμόζοντας την (3.5.31), όπου η  $\beta^{\tilde{\lambda}}$  τώρα αντιστοιχεί στην καινούρια παράμετρο ζεύξης και τα στοιχεία της μετρικής είναι

$$g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^{(0)} \sim \frac{1}{(1-\lambda^2)^{m+n}}. \quad (3.5.64)$$

Ο συνολικός συντελεστής αναλογίας δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της ανώμαλης διάστασης και μπορεί να βρεθεί στο παράρτημα Η όπου υπολογίζεται αναλυτικά η μετρική αυτή. Πλέον, μένει μόνο ο υπολογισμός της  $\beta^{\tilde{\lambda}}$ , ο οποίος όμως είναι δύσκολος εν γένει, εφόσον για έναν αυθαίρετο ταυστή  $S$  στον τελεστή της (3.5.36) αναμένεται να υπάρχει μίξη των τελεστών κάτω από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης, ακόμα και αν αυτός αντιστοιχεί σε μη-αναγωγίσιμη αναπαράσταση της  $G$ .

Στην επόμενη παράγραφο μελετώνται σημαντικές περιπτώσεις για τις οποίες δεν συμβαίνει μίξη των ταυστών και υπολογίζονται οι ανώμαλες διαστάσεις τους.

Στο σημείο αυτό αναφέρονται δύο πιθανοί προβληματισμοί που μπορεί να υπάρχουν. Αρχι-

κά, η μέθοδος του πεδίου υποβάθρου υπό την παρουσία των εν γένει μη-σχετικών τελεστών  $\mathcal{O}^{(m,n)}$  μπορεί να παρουσιάζει ασυνέπειες. Ωστόσο, στην υπό μελέτη περίπτωση, σκοπός δεν είναι η εξαγωγή αποτελεσμάτων ως προς την παράμετρο  $\tilde{\lambda}$  σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών, αλλά μέχρι μόνο την πρώτη τάξη για μικρές τιμές του. Επιπλέον, θα πρέπει να είναι μαθηματικά συνεπές η επιλογή  $\tilde{\lambda} = 0$ . Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν είναι εμφανές ότι η επιλογή αυτή είναι πράγματι συμβατή παρόλο που εμπλέκονται μη-σχετικοί τελεστές, όπως ήταν συμβατή και για την περίπτωση του απλού ρεύματος.

Ένας δεύτερος προβληματισμός που μπορεί να προκύψει, σχετίζεται με την υπόθεση για την μορφή της (3.5.37). Είναι προφανές ότι αυτή δεν είναι η πιο γενική μορφή που μπορεί να έχει ένας αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας τανυστής. Θα μπορούσε να προστεθεί έναντι αυτού, ένας άλλος όρος με πολλαπλές συναλλοίωτες παραγώγους που θα δρούσαν στα στοιχεία της ομάδας  $\tilde{g}$  ή/και στην 2-μορφή  $F_{+-}$ . Μετά από την επιλογή της βαθμίδας  $\tilde{g} = \mathbb{1}$  τέτοιοι όροι θα δημιουργούσαν τελεστές που θα συμπεριφέρονταν σαν απόγονα πεδία (descendant-like operators) με παραγώγους της μορφής  $\partial_+ A_\pm$  και μεταθέτες  $[A_+, A_-]$  για τα πεδία βαθμίδας. Τότε, για μικρές τιμές του  $\lambda$ , οι όροι αυτοί θα αντιστοιχούν σε παραγωγίσεις ρευμάτων  $\partial_+ J_\pm$  και σχέσεις μετάθεσης μεταξύ τους  $[J_+, J_-]$ . Οι τελεστές που θα προέκυπταν με  $m(n)$  στον αριθμό χειραλικά (αντι-χειραλικά) ρεύματα και παραγώγους  $\partial_+(\partial_-)$  μπορούν εν γένει να εμφανίζουν μίξη με τον τελεστή της (3.5.36). Μέσω της χρήση θεωρίας διαταραχών αποδεικνύεται ότι μια τέτοια μίξη δεν εμφανίζεται μέχρι την τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$ , αλλά δεν αποκλείεται να υπάρχει σε υψηλότερη τάξη. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ο εξής: Έστω σχηματικά η γενική αλληλεπικάλυψη  $\langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \rangle$ , όπου  $\mathcal{O}_i \in \{\mathcal{O}^{(m,n)}, \tilde{\mathcal{O}}^{(m,n)}\}$  με τους  $\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n)}$  να είναι τελεστές τύπου απογόνων. Η αλληλεπικάλυψη είναι της μορφής

$$\langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle = \frac{1}{x_{12}^{2m} x_{12}^{2n}} \left( A_{ij} + B_{ij} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right), \quad (3.5.65)$$

με τους πίνακες A,B να έχουν την ακόλουθη εξάρτηση από το  $k$  στο ανάπτυγμα για  $k \gg 1$

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1/\sqrt{k}) \\ \mathcal{O}(1/\sqrt{k}) & \mathcal{O}(1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1/k) & \mathcal{O}(1/k^{3/2}) \\ \mathcal{O}(1/k^{3/2}) & \mathcal{O}(1/k) \end{pmatrix}. \quad (3.5.66)$$

Ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης τότε δίνεται από τη σχέση  $\gamma = A^{-1}B$  και συνεπώς, δεν υπάρχει μίξη εφόσον τα μη-διαγώνια στοιχεία της είναι τάξης  $\mathcal{O}(1/k^{3/2})$  και για την παρούσα ανάλυση δεν λαμβάνονται υπόψιν.

### Σημαντικά παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή μελετώνται κάποια σημαντικά παραδείγματα τελεστών που στο UV όριο συντίθενται αποκλειστικά από έναν αριθμό χειραλικών ρευμάτων, καθώς επίσης και μικτών τελεστών που περιλαμβάνουν τόσο χειραλικά, όσο και αντι-χειραλικά ρεύματα. Για τους τελεστές της δεύτερης κατηγορίας, εμφανίζεται εν γένει μίξη που σχετίζεται με την θεωρία αναπαραστάσεων των αντίστοιχων τελεστών. Για την περίπτωση του σύνθετου τελεστή που περιλαμβάνει δύο χειραλικά  $J_+$  και ένα αντι-χειραλικό  $J_-$  ρεύμα όμως, δεν εμφανίζεται τετοιου είδους μίξη.

Οι υπολογισμοί που ακολουθούν είναι εστιασμένοι στην περίπτωση της ομάδας  $SU(N)$ , για την οποία μερικές χρήσιμες σχέσεις παρουσιάζονται στο παράρτημα Θ'.

- Ο χειραλικός τελεστής  $\mathcal{O}^{(m,n)}$

Σαν πρώτο παράδειγμα εξετάζεται ο τελεστής που στο σύμμορφο σημείο έχει τη μορφή

$$\mathcal{O}^{(m,0)} = d_{a_1 \dots a_m}^{(m)} J_+^{a_1} \dots J_+^{a_m} , \quad (3.5.67)$$

όπου ο  $d_{a_1 \dots a_m}^{(m)}$  είναι ο πλήρως συμμετρικός, τάξης  $m$  ταυστής της  $SU(N)$ . Στο σύμμορφο σημείο ο τελεστής της (3.5.67) αντιστοιχεί σε ένα πρωτεύον πεδίο διάστασης  $m$  [93] με  $m \geq 3$ , ενώ για  $m = 2$  το πεδίο αυτό είναι ανάλογο του ταυστή ενέργειας-ορμής. Η λ-ενδεδυμένη μορφή του τελεστή (3.5.67) δίνεται από την (3.5.45) με  $n = 0$ . Για τους τελεστές που έχουν τη μορφή (3.5.67) δεν εμφανίζεται μίξη τους με άλλους τελεστές όπως θα φανεί στη συνέχεια, και επιπλέον απλοποιήσεις προκύπτουν στην εφαρμογή της μεθόδου για τον υπολογισμό των β-συναρτήσεων και των ανώμαλων διαστάσεών τους. Πράγματι, οι περισσότεροι από τους πίνακες της (3.5.57) μηδενίζονται, και για τα μη-μηδενικά ίχνη που εμφανίζονται στις (3.5.60) και (3.5.61), προκύπτουν

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} \tilde{F}) &= m(c_G + (m-1)\Delta_m) \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,0)} = 0 , \\ \text{Tr}(\tilde{E} \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) &= m(m-1)\Delta_m \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,0)} = -m c_G \mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,0)} , \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

όπου στα τελευταία βήματα χρησιμοποιήθηκε η (Θ'.11) η οποία είναι έγκυρη για  $m = 2, 3, \dots$ . Τότε, η (3.5.21) με την (3.5.49) υπολογισμένη για  $n = 0$  δίνεται από τη

σχέση

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{k}{2\pi} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \theta_+ \theta_- + 2 \frac{\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)^m} \theta_{+-}^{(m,0)} \right) \\
 & - \frac{c_G}{2\pi} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} \ln \mu^2 \left( \theta_+ \theta_- + \frac{m\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)^{m-1}(1+\lambda)} \theta_{+-}^{(m,0)} \right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2),
 \end{aligned} \tag{3.5.69}$$

με την ενεργό παράμετρο ζεύξης να είναι  $\tilde{\lambda} \sim s\lambda^m$ . στη συνέχεια, απαιτώντας  $\partial_{\ln \mu^2} \mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$  προκύπτει σε πρώτη τάξη ως προς το  $1/k$  η έκφραση της  $\beta^\lambda$  (3.5.23) καθώς και η

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = \frac{c_G}{2k} \frac{m\tilde{\lambda}\lambda^3}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2). \tag{3.5.70}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.5.31) σε συνδυασμό με τη μετρική (3.5.64) για  $n = 0$ , προκύπτει τελικά ότι

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}} = 0. \tag{3.5.71}$$

Μια παρατήρηση εδώ είναι ότι για την περίπτωση του  $m = 1$  η (Θ'.11) δεν μπορεί να εφαρμοστεί και το αποτέλεσμα για τις ανώμαλες διαστάσεις είναι αυτό του απλού ρεύματος της (3.5.34).

Το αποτέλεσμα της (3.5.71) είναι ισχυρό και έχει μια απλή εξήγηση. Η  $\lambda$ -παραμορφωμένη δράση έχει δύο καλώς ορισμένα όρια για  $k \rightarrow \infty$ . Αυτά είναι το μη-Αβελιανό T-δουικό και το ψευδοδουικό για  $\lambda \rightarrow 1, -1$  με τρόπο τέτοιο ώστε οι ποσότητες  $k(1-\lambda)$  και  $k(1+\lambda)^3$  να παραμένουν πεπερασμένες [38, 44]. Η παραπάνω δήλωση, υποδεικνύει ότι η ανώμαλη διάσταση για οποιονδήποτε τελεστή  $\mathcal{O}$  πρέπει να έχει τη γενική μορφή

$$\gamma_{\mathcal{O}} = \frac{c_G}{k} \frac{\lambda^n f(\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^3}, \tag{3.5.72}$$

όπου το  $n$  είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος του οποίου οι τιμές εξαρτώνται από τον κυρίαρχο όρο του διαταρακτικού ως προς  $\lambda$  αποτελέσματος, ή είναι μηδέν εάν ο τελεστής έχει από μόνος του ένα  $\frac{1}{k}$  ανάπτυγμα ακόμα και στο σύμμορφο σημείο για  $\lambda = 0$ . Η συνάρτηση  $f(\lambda)$  είναι αναλυτική στο  $\lambda$ . Επιπλέον, η συμμετρία (3.5.35) πρέπει να αντανακλάται στην ανώμαλη διάσταση του τελεστή, η οποία θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη. Αυτό το επιχείρημα εξάγει τη συνθήκη

$$\lambda^{2(2-n)} f(1/\lambda) = f(\lambda). \tag{3.5.73}$$

Για  $n = 0, 1, 2$ , η συνάρτηση  $f(\lambda)$  είναι ένα τέταρτης, δεύτερης και μηδενικής τάξης πολυώνυμο. Ωστόσο, για  $n \geq 3$  η εξίσωση (3.5.73) δεν ικανοποιείται εκτός και αν  $f(\lambda) = 0$  οδηγώντας έτσι σε μία μηδενική ανώμαλη διάσταση. Συνεπώς, αν προκύψει μηδενικό διαταραχτικό αποτέλεσμα μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , τότε η ανώμαλη διάσταση θα είναι μηδενική σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών ως προς  $\lambda$ . Το επιχείρημα αυτό είναι έγκυρο μέχρι  $\mathcal{O}(1/k)$ , και παρόμοιες δηλώσεις μπορούν να γίνουν για μεγαλύτερες τάξεις του  $k$ -αναπτύγματος. Οι αντίστοιχοι διαταραχτικοί υπολογισμοί για το παράδειγμα του χειραλικού τελεστή παρουσιάζονται αναλυτικά σε επόμενη υποενότητα.

Ένα σημαντικό σχόλιο για την περίπτωση του χειραλικού τελεστή είναι το εξής: Ο  $J_+^a J_+^a$  τελεστής στο  $\lambda = 0$  σύμμορφο σημείο, είναι ανάλογος με τη χειραλική συνιστώσα του αντίστοιχου ταυστή ενέργειας-ορμής. Στη  $\lambda$ -παραμορφωμένη θεωρία, ο ρόλος του ταυστή ενέργειας-ορμής διαδραματίζεται από την παραμόρφωση του σύνθετου ταυστή  $J_+^a J_+^a$ , δηλαδή τον  $\mathcal{O}_\lambda^{(2,0)}$ . Έτσι,

$$\mathcal{O}_\lambda^{(2,0)} = \mathcal{A}_{+-}^{(2,0)} \sim J_+(1 - \lambda D^T)^{-1}(1 - \lambda D)^{-1}J_+ \sim T_{++} . \quad (3.5.74)$$

Η τελευταία σχέση αναλογίας με τον  $T_{++}$  προκύπτει μέσω του υπολογισμού του ταυστή ενέργειας-ορμής από την  $\lambda$ -παραμορφωμένη δράση (3.5.12) (με  $s = 0$ ). Όπως και για κάθε  $\sigma$ -πρότυπο, αυτός είναι κλασικά, χειραλικά διατηρούμενος, ικανοποιώντας τη σχέση  $\partial_- T_{++} = 0$ . Μία λιγότερο τετριμμένη δήλωση είναι ότι κλασικά, ισχύει επίσης η ακόλουθη σειρά από χειραλικούς νόμους διατήρησης

$$\partial_- \mathcal{O}_\lambda^{(m,0)} = 0 , \quad m = 2, 3, \dots , \quad (3.5.75)$$

με αυτόν του  $T_{++}$  να είναι απλά ο πρώτος όρος της πάνω σειράς. Αυτό είναι μία συνέπεια του γεγονότος ότι οι κλασικές εξισώσεις κίνησης για το  $\lambda$ -παραμορφωμένο πρότυπο έρχονται στη μορφή

$$\partial_\mp A_\pm = \mp \frac{1}{1 + \lambda} [A_+, A_-] , \quad (3.5.76)$$

καθώς και της ταυτότητας (Θ'.10) της θεωρίας ομάδων<sup>18</sup>. Είναι προφανές ότι και η ανώμαλη διάσταση του τελεστή  $\mathcal{O}_\lambda^{(0,n)}$  που αποτελείται μόνο από αντιχειραλικά ρεύματα είναι επίσης μηδέν. Τέλος, παρόλο που είναι λιγότερο προφανές, με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι ανώμαλες διαστάσεις τελεστών της μορφής  $\mathcal{O}_\lambda^{(m,0)} \mathcal{O}_\lambda^{(0,n)}$

<sup>18</sup>Το γεγονός ότι  $\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}} = 0$  είναι συμβατό με την (3.5.75). Η εξίσωση (Θ'.10) παύει να ισχύει σε κβαντικό επίπεδο. Ο λόγος είναι η μορφή του τελεστή που χρησιμοποιείται, η οποία δίνεται από την (3.5.45) με χρήση της (3.5.10) (για  $s = 0$ ) και αποκτά  $1/k$ -διορθώσεις. Αυτό είναι σε συμφωνία με το γεγονός ότι η θεωρία δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς ήδη από την τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$ .

μηδενίζονται επίσης.

- Ο μεικτός τελεστής  $\mathcal{O}^{(2,1)}$

Το επόμενο παράδειγμα που μελετάται είναι αυτό για τον μικτό τανυστή

$$\mathcal{O}^{(2,1)} = d_{abc} J_+^a J_+^b J_-^c, \quad (3.5.77)$$

όπου ο  $d_{abc}$  είναι ο πλήρως συμμετρικός τανυστής τρίτης τάξης της  $SU(N)$ . Ο τελεστής αυτός δεν αναμειγνύεται με άλλους κατά τη διάρκεια της ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης και η  $\lambda$ -ενδεδυμένη μορφή του δίνεται από την (3.5.45) για  $m = 2$  και  $n = 1$ . Εφόσον το πεδίο  $Q^a = d_{abc} J_+^b J_+^c$  είναι πρωτεύον με διάσταση 2 [93], ο τελεστής  $\mathcal{O}^{(2,1)}$  στο σύμμορφο σημείο αντιστοιχεί επίσης σε ένα πρωτεύον πεδίο με ολομορφική και αντι-ολομορφική (σε Ευκλείδιο χώρο) διάσταση ίση με 2 και 1, αντίστοιχα.

Θέτοντας το  $n = 1$ , κάποιοι από τους πίνακες της (3.5.57) μηδενίζονται ή απλοποιούνται σημαντικά. Τότε τα διάφορα ίχνη που εμφανίζονται στις (3.5.60) και (3.5.61) υπολογίζονται να είναι

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)} F) &= \text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} \tilde{F}) = \text{Tr}(\tilde{B} \tilde{A}_-^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) = -\text{Tr}(\tilde{E} \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) \\ &= \text{Tr}(B \tilde{A}_-^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) = \text{Tr}(\tilde{B} \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_-^{(0)}) = \text{Tr}(B \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_-^{(0)}) \\ &= \text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} C) = \text{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)} \tilde{C}) \\ &= -c_G \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^3} \theta_{+-}^{(2,1)} + \mathcal{O}(s), \end{aligned} \quad (3.5.78)$$

όπου έχει κρατηθεί μόνο ο όρος μηδενικής τάξης ως προς  $s$  του αποτελέσματος, διότι οι πάνω όροι είναι ήδη πολλαπλασιασμένοι με  $s$  στην (3.5.58) (μέσω των (3.5.60) και (3.5.61)). Τότε, η (3.5.21) με την (3.5.49) υπολογισμένη για  $m = 2$  και  $n = 1$  γίνεται

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\frac{k}{2\pi} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \theta_+ \theta_- - 2 \frac{\tilde{\lambda}}{(1-\lambda)^3} \theta_{+-}^{(2,1)} \right) \\ &\quad - \frac{c_G}{2\pi} \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2} \ln \mu^2 \left( \lambda \theta_+ \theta_- - \frac{\tilde{\lambda}(2+\lambda+2\lambda^2)}{(1-\lambda)^2(1+\lambda)} \theta_{+-}^{(2,1)} \right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2), \end{aligned} \quad (3.5.79)$$

όπου σε αυτή την περίπτωση η ενεργός παράμετρος ζεύξης είναι  $\tilde{\lambda} = s\lambda^3$ . Απαιτώντας πάλι  $\partial_{\ln \mu^2} \mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$  προκύπτει μέχρι πρώτη τάξη στο  $1/k$  ανάπτυγμα η έκφραση της

(3.5.23) για την  $\beta^\lambda$  καθώς επίσης και η

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = -\frac{c_G}{2k} \frac{\tilde{\lambda}\lambda(2 - \lambda(2 + \lambda))}{(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2). \quad (3.5.80)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την (3.5.31) με την μετρική της (3.5.64) για  $m = 2$  και  $n = 1$  προκύπτει

$$\gamma_{\mathcal{O}_\lambda^{(2,1)}} = -\frac{2c_G}{k} \frac{\lambda(1 - \lambda(1 - \lambda))}{(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3}, \quad (3.5.81)$$

η οποία ταυτίζεται με την  $\gamma_{J_+J_-}$  της (3.5.33).

### 3.5.3 $\lambda$ -παραμορφώσεις με διαφορετικά επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων

Στην ενότητα αυτή γενικεύεται ο φορμαλισμός που παρουσιάστηκε προηγουμένως για την περίπτωση των ανώμαλων διαστάσεων σύνθετων τελεστών ρευμάτων με τα επίπεδα της χειραλικής και αντι-χειραλικής άλγεβρας να πλέον είναι διαφορετικά. Η αναλυτική κατασκευή και οι ιδιότητες των προτύπων αυτών παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα της θεωρίας. Οι όροι διαταραχής που αναγκάζουν τη ροή της θεωρίας μακριά από το σύμμορφο σημείο είναι οι  $J_{1+}J_{2-}$  και  $J_{2+}J_{1-}$ , με τους δείκτες 1 και 2 να αναφέρονται στο πρώτο ή το δεύτερο WZW πρότυπο και στο αντίστοιχο επίπεδο άλγεβρας  $k_1$  ή  $k_2$ . Το πρότυπο αυτό απλοποιείται σημαντικά αν θεωρηθεί μηδέν η παράμετρος ζεύξης μπροστά από τον δεύτερο όρο της παραμόρφωσης. Τότε, είναι συνεπές στα πλαίσια αυτά να μελετηθούν τελεστές που έχουν παρόμοια μορφή με αυτούς της (3.5.36) και δίνονται από τη σχέση

$$\mathcal{O}^{(m,n)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} J_{1+}^{a_1} \dots J_{1+}^{a_m} J_{2-}^{b_1} \dots J_{2-}^{b_n}. \quad (3.5.82)$$

Όπως και στην περίπτωση των συμμετρικών  $\lambda$ -παραμορφώσεων της προηγούμενης υποενότητας, έτσι και εδώ ο συνολικός τενσοριακός συντελεστής θα πρέπει να είναι συμμετρικός στους πρώτους  $m$  και τους τελευταίους  $n$  δείκτες ανεξάρτητα, ενώ δεν υπάρχει καμία σχέση συμμετρίας που να συνδέει τους  $a_i$  δείκτες με τους  $b_i$ .

Σημείο αφετηρίας τώρα είναι η δράση (2.10.182) αλλά με το  $\lambda_2 \rightarrow 0$  και το  $\lambda_1$  μετονομασμένο σε  $\lambda$ . Το όριο αυτό, είναι συνεπές σε κβαντικό επίπεδο στο πλαίσιο της ροής της ομάδας επανακανονικοποίησης, και ο κυρίαρχος όρος διαταραχής για μικρό  $\lambda$  είναι ο  $J_{1+}J_{2-}$ . Τότε, ο τελευταίος όρος της πρώτης γραμμής της σχέσης (2.10.182) παραμένει πεπερασμένος αν προηγηθεί ο επαναορισμός του  $B_\pm$  σε  $B_\pm \rightarrow \sqrt{\lambda_2} B_\pm$  και μετά ακολουθήσει το όριο  $\lambda_2 \rightarrow 0$ .

Στο όριο αυτό, η ανάλογη της (3.5.38) ενεργός δράση, είναι

$$S_{k_i, \lambda, s}(g_i, A_{\pm}) = \sum_{i=1}^2 S_{k_i}(g_i) + \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \operatorname{Tr}(k_1 A_- \partial_+ g_1 g_1^{-1} - k_2 A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2\sigma \left( \lambda^{-1} \operatorname{Tr}(A_+ A_-) + s \mathcal{A}_{+-}^{(m, n)} \right), \quad (3.5.83)$$

όπου όπως και πριν, οι εκφράσεις των  $\mathcal{A}_{+-}^{(m, n)}$  δίνονται από την (3.5.39). Κατά τη διαδικασία αυτή, το πεδίο βαθμίδας  $B_{\pm}$  έχει αποσυζευχθεί, και αυτός είναι ο λόγος που στην πάνω δράση έχει παραλειφθεί ο όρος  $\operatorname{Tr}(B_+ B_-)$  παρόλο που η παράμετρος ζεύξης του είναι μη-μηδενική.

Οι εξισώσεις κίνησης της (3.5.83) ως προς τα  $A_-$  και  $A_+$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} D_+ g_1 g_1^{-1} &= (\lambda_0^{-1} \lambda^{-1} - 1) A_+ + \lambda_0^{-1} n s \mathcal{A}_{+-}^{(m, n')}, \\ g_2^{-1} D_- g_2 &= -(\lambda_0 \lambda^{-1} - 1) A_- - \lambda_0 m s \mathcal{A}_{+-}^{(m', n)}, \end{aligned} \quad (3.5.84)$$

όπου έχουν ορισθεί οι συναλλοίωτες παράγωγοι  $D_+ g_1 = \partial_+ g_1 - A_+ g_1$  και  $D_- g_2 = \partial_- g_2 + g_2 A_-$ , ενώ τα ανύσματα  $\mathcal{A}_{+-}^{(m, n')}$  και  $\mathcal{A}_{+-}^{(m', n)}$  είναι αυτά της (3.5.41). Επιπλέον, αντί για τις σταθερές  $k_1$  και  $k_2$  χρησιμοποιούνται οι παράμετροι

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad k = \sqrt{k_1 k_2}. \quad (3.5.85)$$

Στη συνέχεια, διαφορίζοντας τη δράση ως προς τα στοιχεία ομάδας  $g_1$  και  $g_2$  προκύπτουν οι ακόλουθες δύο εξισώσεις,

$$\partial_-(D_+ g_1 g_1^{-1}) - [A_-, D_+ g_1 g_1^{-1}] = F_{+-}, \quad \partial_-(D_+ g_2 g_2^{-1}) = 0, \quad (3.5.86)$$

οι οποίες ισοδύναμα γράφονται και ως

$$\partial_+(g_1^{-1} D_- g_1) = 0, \quad \partial_+(g_2^{-1} D_- g_2) - [A_+, g_2^{-1} D_- g_2] = F_{+-}. \quad (3.5.87)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τους περιορισμούς (3.5.84) στις (3.5.86) και (3.5.87) συνεπάγονται οι εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \lambda_0 \lambda^{-1} \partial_+ A_- - \partial_- A_+ &= \lambda_0 \lambda^{-1} [A_+, A_-] - \lambda_0 m s D_+ \mathcal{A}_{+-}^{(m', n)}, \\ \lambda_0^{-1} \lambda^{-1} \partial_- A_+ - \partial_+ A_- &= -\lambda_0^{-1} \lambda^{-1} [A_+, A_-] - \lambda_0^{-1} n s D_- \mathcal{A}_{+-}^{(m, n')}, \end{aligned} \quad (3.5.88)$$



όπου οι συναλλοίωτες παράγωγοι δρουν μέσω του ορισμού τους όπως παρουσιάζεται κάτω από την (3.5.42). Με τον τρόπο αυτό, οι εξισώσεις κίνησης γράφονται μόνο συναρτήσει των πεδίων βαθμίδας, και η λύση των συνθηκών (3.5.84) ως προς αυτά δίνει

$$\begin{aligned} A_+ &= i\lambda_0\lambda J_{1+} - ns\lambda\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')} + \mathcal{O}(s^2), \\ A_- &= -i\lambda_0^{-1}\lambda J_{2-} - ms\lambda\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)} + \mathcal{O}(s^2), \end{aligned} \quad (3.5.89)$$

όπου στα  $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n')}$  και  $\mathcal{A}_{+-}^{(m',n)}$  έχουν αντικατασταθεί πάλι μόνο οι κυρίαρχοι όροι του ορισμού (3.5.41). Τέλος, η αντικατάσταση των πάνω λύσεων στην (3.5.83) οδηγεί στη διαταρακτική δράση

$$S = \sum_{i=1}^2 S_{k_i}(g_i) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \left( \lambda J_{1+}^a J_{2-}^a - s\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)} \right) + \mathcal{O}(s^2). \quad (3.5.90)$$

Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι εφόσον στο  $\mathcal{A}_{+-}^{(m,n)}$  της δράσης αυτής χρησιμοποιείται μόνο ο κυρίαρχος ως προς  $s$  όρος, η λ-ενδεδυμένη μορφή των πεδίων βαθμίδας διαφέρει από τα αρχικά διατηρούμενα ρεύματα μόνο κατά μία τετριμμένη ολική σταθερά, σε αντίθεση με την περίπτωση (3.5.43) της απλής λ-παραμόρφωσης. Το γεγονός αυτό, έχει ως συνέπεια να μην αλλάζει ο τελεστής της (3.5.82) κάτω από λ-παραμορφώσεις.

### Υπολογισμός των β-συναρτήσεων

Για τη συνέχεια των υπολογισμών χρειάζεται πρώτα να βρεθεί μια κλασική λύση των (3.5.88). Ωστόσο, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, η λύση αυτή αρκεί να είναι έγκυρη μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(s)$ . Έυκολα φαίνεται ότι η επιλογή των στοιχείων ομάδας  $g_i = e^{\sigma^+\theta_+^{(i)} + \sigma^-\theta_-^{(i)}}$ ,  $i = 1, 2$  με τις παραμέτρους  $\theta_{\pm}^{(i)}$  να ανήκουν στην Cartan υποάλγεβρα της  $G$  και  $J_{i\pm} = -i\theta_{\pm}^{(i)}$ , αποτελεί μία τέτοια λύση. Επιπλέον, οι εκφράσεις για τα πεδία βαθμίδας υπολογισμένα σε αυτή τη κλασική λύση είναι

$$\begin{aligned} A_+^{(0)} &= \lambda_0\lambda\theta_+^{(1)} - ns\lambda\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')} + \mathcal{O}(s^2), \\ A_-^{(0)} &= -\lambda_0^{-1}\lambda\theta_-^{(2)} - ms\lambda\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)} + \mathcal{O}(s^2), \end{aligned} \quad (3.5.91)$$

και στον ορισμό (3.5.41) τώρα, για τα  $A_{\pm}$  χρησιμοποιούνται οι κλασικές τους εκφράσεις (3.5.91). Επιπροσθέτως, οι (3.5.91) πρέπει να ικανοποιούν τις (3.5.88), κάτι που εξασφαλίζεται αν τα  $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)}$  και  $\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')}$  ανήκουν στην Cartan υποάλγεβρα της  $G$ , όπως και τα  $\theta_{\pm}$ . Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτό ισχύει εφόσον τα στοιχεία  $S_{aa_1\dots a_{m-1}; b_1\dots b_n}$  και  $S_{a_1\dots a_m; bb_1\dots b_{n-1}}$  του τανυστή μηδενίζονται αν τα  $a_i$  και  $b_j$  είναι Cartan δείκτες, ενώ τα  $a$  ή  $b$  όχι.

Η γραμμική ως προς  $s$  δράση (3.5.83) υπολογισμένη στο κλασικό υπόβαθρο (3.5.91) είναι

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \left( k_1 \theta_+^{(1)} \theta_-^{(1)} + k_2 \theta_+^{(2)} \theta_-^{(2)} + 2k \lambda \theta_+^{(1)} \theta_-^{(2)} + 2ks (-1)^n \lambda_0^{m-n} \lambda^{m+n} \theta_{+-}^{(m,n)} \right) + \mathcal{O}(s^2), \quad (3.5.92)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος, παρόμοιος με τον (3.5.50) ορισμός

$$\theta_{+-}^{(m,n)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} \theta_+^{(1)a_1} \dots \theta_+^{(1)a_m} \theta_-^{(2)b_1} \dots \theta_-^{(2)b_n}. \quad (3.5.93)$$

Οι γραμμικές διακυμάνσεις της (3.5.88) γύρω από τη κλασική λύση είναι

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda_0^{-1} \lambda \delta_{ab} \partial_- - (\tilde{A}_-^{(0)})_{ab} + m(m-1) s \lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)})_{ab} \partial_+ - i m s \lambda f_{abc} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n)})_c \right. \\ & \quad \left. + m(m-1) s \lambda (\tilde{A}_+^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m'',n)})_{cb} \right) \delta A_+^b \\ & + \left( \delta_{ab} \partial_+ + (\tilde{A}_+^{(0)})_{ab} + m n s \lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{ab} \partial_+ + m n s \lambda (\tilde{A}_+^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{cb} \right) \delta A_-^b = 0 \end{aligned} \quad (3.5.94)$$

για την πρώτη σειρά της (3.5.88), ενώ όμοια για την δεύτερη σειρά της προκύπτει

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda_0 \lambda \delta_{ab} \partial_+ - (\tilde{A}_+^{(0)})_{ab} + n(n-1) s \lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')})_{ab} \partial_- - i n s \lambda f_{abc} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n')})_c \right. \\ & \quad \left. + n(n-1) s \lambda (\tilde{A}_-^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n'')})_{cb} \right) \delta A_-^b \\ & + \left( \delta_{ab} \partial_- + (\tilde{A}_-^{(0)})_{ab} + m n s \lambda (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{ba} \partial_- + m n s \lambda (\tilde{A}_-^{(0)})_{ac} (\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m',n')})_{bc} \right) \delta A_+^b = 0, \end{aligned} \quad (3.5.95)$$

όπου οι ποσότητες με τους δύο τόνους ορίζονται στην (3.5.53). Οι διακυμάνσεις αυτές μπορούν να ξαναγραφούν στη μορφή της (3.5.17) με  $\hat{D} = \hat{C} + \hat{F}$ . Στο χώρο των ορμών προκύπτει

$$\hat{C} = \hat{C}_0 + s \hat{C}_1, \quad \hat{F} = \hat{F}_0 + s \hat{F}_1, \quad (3.5.96)$$

με

$$\hat{C}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda \lambda_0 p_+ & p_- \\ p_+ & -\lambda \lambda_0^{-1} p_- \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_0 = \begin{pmatrix} -\tilde{A}_+^{(0)} & \tilde{A}_-^{(0)} \\ \tilde{A}_+^{(0)} & -\tilde{A}_-^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3.5.97)$$

και

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda E p_- & \lambda B p_- \\ \lambda \tilde{B} p_+ & -\lambda \tilde{E} p_+ \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda F & \lambda C \\ \lambda \tilde{C} & -\lambda \tilde{F} \end{pmatrix}, \quad (3.5.98)$$

όπου όλοι οι πίνακες που εμφανίζονται στις (3.5.97) και (3.5.98) έχουν ορισθεί στην (3.5.57).

Είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός του ίχνους  $\text{Tr}(\hat{C}^{-1} \hat{F})^2$  της (3.5.21). Κρατώντας μόνο όρους που δίνουν μη-μηδενική συνεισφορά μετά από την ολοκλήρωση στις γωνίες (η οποία συνεισφέρει κατά έναν επιπλέον παράγοντα  $2\pi$ ), ο υπολογισμός του κάθε ίχνους που υπάρχει

στο δεξί μέλος της (3.5.58) ξεχωριστά, συνεπάγεται

$$\mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2 = -\frac{8c_G}{r^2} \frac{\lambda(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^{-1})}{(1 - \lambda^2)^2} \left( \lambda\theta_+^{(1)}\theta_-^{(2)} + (m+n)s\mathcal{A}_{+-}^{(0)(m,n)} \right) \quad (3.5.99)$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_1) &= \frac{4\lambda}{r^2(1 - \lambda^2)^2} \left( (1 - \lambda_0^{-1}\lambda)\mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}F) + (1 - \lambda_0\lambda)\mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{F}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda(\lambda - \lambda_0^{-1})\mathrm{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)}C) + \lambda(\lambda - \lambda_0)\mathrm{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{C}) \right), \end{aligned} \quad (3.5.100)$$

καθώς και

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((\hat{C}_0^{-1}\hat{F}_0)^2\hat{C}_0^{-1}\hat{C}_1) &= \frac{4\lambda}{r^2(1 - \lambda^2)^3} \left( (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^{-1})\mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{E}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)} + E\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)} + B\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)} \right) \\ &\quad - \lambda\lambda_0(\lambda - \lambda_0^{-1})^2\mathrm{Tr}(B\tilde{A}_-^{(0)}\tilde{A}_+^{(0)}) - \lambda\lambda_0^{-1}(\lambda - \lambda_0)^2\mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{A}_+^{(0)}\tilde{A}_-^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.5.101)$$

Τα διάφορα ίχνη που εμφανίζονται στις (3.5.60) και(3.5.61) πρέπει να υπολογισθούν ανά περίπτωση, εφόσον το αποτέλεσμά τους εξαρτάται από τη μορφή του τελεστή που έχει επιλεγεί.

Για μικρές τιμές της παραμέτρου  $s$ , η δράση του  $\sigma$ -προτύπου (3.5.83) παίρνει τη μορφή

$$S = \sum_{i=1}^2 S_{k_i}(g_i) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma \left( \lambda J_{1+}^a J_{2-}^a + \tilde{\lambda} \mathcal{O}^{(m,n)} \right) + \dots, \quad (3.5.102)$$

όπου ο τελεστής του τελευταίου όρου ορίζεται στην (3.5.82) και η ενεργός παράμετρος ζεύξης στην (3.5.63).

Έτσι, πηγαίνοντας στο όριο  $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$  προκύπτει η ανώμαλη διάσταση του τελεστή  $\mathcal{O}^{(m,n)}$  στα πλαίσια της διπλά  $\lambda$ -παραμορφωμένης μη-συμμετρικής θεωρίας. Αυτό επιτυγχάνεται με εφαρμογή της (3.5.31) όπου τώρα η  $\beta^{\tilde{\lambda}}$  αντιστοιχεί στον τελεστή αυτόν, ενώ τα στοιχεία την μετρικής δίνονται πάλι από την (3.5.64). Αυτό που μένει να υπολογισθεί είναι η  $\beta^{\tilde{\lambda}}$  και μέσω αυτής η ανώμαλη διάσταση, κάτι που παρουσιάζεται στη συνέχεια για την περίπτωση των δύο βασικών παραδειγμάτων που μελετήθηκαν και προηγουμένως.

### Σημαντικά παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζονται οι ανώμαλες διαστάσεις των σύνθετων τελεστών για τα δύο παραδείγματα της προηγούμενης υποενότητας, αυτή τη φορά όμως στα πλαίσια του διπλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου με διαφορετικά επίπεδα άλγεβρας ρευμάτων.

- Ο χειραλικός τελεστής  $\mathcal{O}^{(m,0)}$

Έστω τελεστές της μορφής

$$\mathcal{O}^{(m,0)} = d_{a_1 \dots a_m}^{(m)} J_{1+}^{a_1} \dots J_{1+}^{a_m}, \quad (3.5.103)$$

οι οποίοι, όμοια με την (3.5.67), για  $m \geq 3$  και στο σύμμορφο σημείο είναι πρωτεύοντα πεδία διάστασης  $m$  [93], ενώ για  $m = 2$  είναι ανάλογοι με τον ταυστή ενέργειας-ορμής. Για  $n = 0$  οι περισσότεροι από τους πίνακες της (3.5.57) μηδενίζονται και οι υπολογισμοί απλοποιούνται σημαντικά. Έτσι, τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τα μη-μηδενικά ίχνη των (3.5.100) και (3.5.101), είναι αυτά της (3.5.68). Τότε, η (3.5.21) με χρήση της (3.5.92) για  $n = 0$  παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{k_1}{2\pi} \theta_+^{(1)} \theta_-^{(1)} - \frac{k_2}{2\pi} \theta_+^{(2)} \theta_-^{(2)} - \frac{k}{\pi} \lambda \theta_+^{(1)} \theta_-^{(2)} - \frac{k}{\pi} \tilde{\lambda} \lambda_0^m \theta_{+-}^{(m,0)} \\ & - \frac{\ln \mu^2}{2\pi} \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} \left( c_G (\lambda - \lambda_0) (\lambda - \lambda_0^{-1}) \theta_+^{(1)} \theta_-^{(2)} \right. \\ & \left. + m \tilde{\lambda} \lambda_0^m \frac{\lambda - \lambda_0^{-1}}{1 - \lambda^2} \left( c_G (1 - \lambda^2) + \Delta_m (m - 1) (1 - \lambda_0 \lambda) \right) \theta_{+-}^{(m,0)} \right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2), \end{aligned} \quad (3.5.104)$$

όπου όπως και πριν, το  $\tilde{\lambda} = s\lambda^m$  αντιστοιχεί στην ενεργό παράμετρο ζεύξης. Στη συνέχεια, απαιτώντας  $\partial_{\ln \mu^2} \mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$  προκύπτει σε πρώτη τάξη ως προς  $1/k$  η έκφραση της  $\beta^\lambda$  (2.10.199) για την περίπτωση διαφορετικών επιπέδων άλγεβρας [40]

$$\beta^\lambda = -\frac{c_G \lambda^2 (\lambda - \lambda_0) (\lambda - \lambda_0^{-1})}{2k (1 - \lambda^2)^2}, \quad (3.5.105)$$

καθώς επίσης και η  $\beta$ -συνάρτηση για την ενεργό παράμετρο  $\tilde{\lambda}$

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = -\frac{m \lambda^2 (\lambda - \lambda_0^{-1}) \left( c_G (1 - \lambda^2) + (m - 1) \Delta_m (1 - \lambda \lambda_0) \right) \tilde{\lambda}}{2k (1 - \lambda^2)^3} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2). \quad (3.5.106)$$

Τέλος, από την (3.5.31) με χρήση της μετρικής (3.5.64) για  $n = 0$  προκύπτει για την ανώμαλη διάσταση

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}} = \left( c_G + (m - 1) \Delta_m \right) \frac{m \lambda^2 (1 - \lambda \lambda_0)^2}{k_1 (1 - \lambda^2)^3}. \quad (3.5.107)$$

Αμέσως φαίνεται ότι για  $m \geq 2$  η ανώμαλη διάσταση των χειραλικών τελεστών μηδε-

νίζεται λόγω της ταυτότητας (Θ'.11) της θεωρίας ομάδων και συνεπώς

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(m,0)}} = 0, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (3.5.108)$$

όπως είχε προκύψει και για την περίπτωση των ίσων επιπέδων άλγεβρας.

Ωστόσο, για την περίπτωση ενός μόνο χειραλικού ρεύματος, δηλαδή για  $m = 1$ , η ταυτότητα (Θ'.11) δεν ισχύει, και η (3.5.107) δίνει το αποτέλεσμα

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(1,0)}} = \frac{c_G \lambda^2 (\lambda - \lambda_0^{-1})^2}{k_2 (1 - \lambda^2)^3}, \quad (3.5.109)$$

το οποίο είναι σε πλήρη συμφωνία με την ανώμαλη διάσταση του χειραλικού ρευματος που παρουσιάζεται στην θεωρία και έχει υπολογιστεί στην (2.10.144) (με  $k_2 = k_R$ ) και την (2.9) της [45].

Σημειώνεται εδώ ότι εφόσον οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να έρθουν στη μορφή

$$\partial_{\mp} A_{\pm} = \mp \frac{1 - \lambda_0^{\pm 1} \lambda}{1 - \lambda^2} [A_+, A_-], \quad (3.5.110)$$

ισχύει πάλι ο κλασικός νόμος διατήρησης (3.5.75).

Τέλος, εφαρμόζοντας τα ίδια βήματα, εύκολα αποδεικνύεται ότι και οι σύνθετοι τελεστές που αποτελούνται από έναν αυθαίρετο αριθμό  $J_{2-}$  ρευμάτων, έχουν επίσης μηδενική ανώμαλη διάσταση. Αυτό ισχύει επίσης τετριμμένα και για σύνθετους τελεστές που συντίθεται από έναν αυθαίρετο αριθμό  $J_{2+}$  ή  $J_{1-}$  ρευμάτων, εφόσον αυτά τα δύο ρεύματα δεν εμφανίζονται στον τελεστή  $J_{1+} J_{2-}$  που παραμορφώνει την αρχική σύμμορφη θεωρία πεδίου.

- Ο μικτός τελεστής  $\mathcal{O}^{(2,1)}$

Έστω τώρα ο μικτός τελεστής

$$\mathcal{O}^{(2,1)} = d_{abc} J_{1+}^a J_{1+}^b J_{2-}^c, \quad (3.5.111)$$

όπου ο  $d_{abc}$  είναι ο πλήρως συμμετρικός τανυστής τρίτης τάξης της  $SU(N)$ . Για τα

διάφορα ίχνη που εμφανίζονται στην (3.5.60) και την (3.5.61) υπολογίζεται ότι

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)} F) &= \text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} \tilde{F}) = \text{Tr}(\tilde{B} \tilde{A}_-^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) = -\text{Tr}(\tilde{E} \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) \\
 &= \text{Tr}(B \tilde{A}_-^{(0)} \tilde{A}_+^{(0)}) = \text{Tr}(\tilde{B} \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_-^{(0)}) = \text{Tr}(B \tilde{A}_+^{(0)} \tilde{A}_-^{(0)}) \\
 &= \text{Tr}(\tilde{A}_+^{(0)} C) = \text{Tr}(\tilde{A}_-^{(0)} \tilde{C}) \\
 &= -c_G \lambda_0 \lambda^3 \theta_{+-}^{(2,1)} + \mathcal{O}(s) ,
 \end{aligned} \tag{3.5.112}$$

όπου παρουσιάζεται μόνο η μηδενικής τάξης ως προς  $s$  συνεισφορά του πάνω υπολογισμού, εφόσον οι όροι αυτοί είναι ήδη πολλαπλασιασμένοι με  $s$ . Τότε, από την (3.5.21) με χρήση της (3.5.92) για  $m = 2$  και  $n = 1$  προκύπτει η ενεργός Λαγκρανζιανή

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_{\text{eff}} &= -\frac{1}{2\pi} \left( k_1 \theta_+^{(1)} \theta_-^{(1)} + k_2 \theta_+^{(2)} \theta_-^{(2)} + 2k \lambda \theta_+^{(1)} \theta_-^{(2)} - 2k \tilde{\lambda} \lambda_0 \theta_{+-}^{(2,1)} \right) \\
 &\quad - \frac{\ln \mu^2}{2\pi} \frac{c_G \lambda}{(1 - \lambda^2)^2} \left( \lambda(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^{-1}) \theta_+^{(1)} \theta_-^{(2)} \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{\lambda} \frac{2\lambda_0 - 3\lambda - \lambda_0 \lambda(3\lambda_0 - 5\lambda + \lambda^3)}{1 - \lambda^2} \theta_{+-}^{(2,1)} \right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2) ,
 \end{aligned} \tag{3.5.113}$$

με την ενεργό παράμετρο ζεύξης  $\tilde{\lambda} = s\lambda^3$ . Απαιτώντας πάλι  $\partial_{\ln \mu^2} \mathcal{L}_{\text{eff}} = 0$  υπολογίζεται σε πρώτη τάξη ως προς το  $1/k$ -ανάπτυγμα η έκφραση της (3.5.105) για την  $\beta^\lambda$  και επιπλέον η

$$\beta^{\tilde{\lambda}} = -\frac{c_G \tilde{\lambda} \lambda (2 - 3\lambda \lambda_0^{-1} + \lambda(5\lambda - \lambda^3 - 3\lambda_0))}{2k (1 - \lambda^2)^3} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2) . \tag{3.5.114}$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την (3.5.31) με την μετρική της (3.5.64) ξανά για  $m = 2$  και  $n = 1$  προκύπτει η ανώμαλη διάσταση

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(2,1)}} = c_G \lambda \frac{3(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda(1 + \lambda^2) - 2(1 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}{k(1 - \lambda^2)^3} , \tag{3.5.115}$$

η οποία ταυτίζεται με αυτή του τελεστή  $J_{1+}^a J_{2-}^a$  της σχέσης (2.10.147) ή της σχέσης (2.16) της [45] με  $k_1 = k_L$ ,  $k_2 = k_R$  και  $k = \sqrt{k_L k_R}$ .

### 3.5.4 $\lambda$ -παραμορφώσεις με αυτό-και έτερο-αλληλεπιδράσεις

Στην υποενότητα αυτή μελετώνται τα πρότυπα της [41] που περιέχουν ταυτόχρονα αλληλεπιδράσεις ρευμάτων του ίδιου WZW προτύπου μαζί με αλληλεπιδράσεις ρευμάτων που αντιστοιχούν σε διαφορετικά WZW πρότυπα.

Η γραμμικοποιημένη δράση για τα πρότυπα αυτού του είδους έχει τη μορφή

$$S_{k_1, k_2, \lambda, \tilde{\lambda}}(g_1, g_2) = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{k_1}{\pi} \lambda \int d^2\sigma J_{1+} J_{1-} + \frac{k_2}{\pi} \tilde{\lambda} \int d^2\sigma J_{2+} J_{1-} + \mathcal{O}(\lambda \tilde{\lambda}) . \quad (3.5.116)$$

Οι ακριβείς  $\beta$ -συναρτήσεις για το πρότυπο αυτό δίνονται από τις (4.19) και (4.20) της [41] να είναι οι

$$\begin{aligned} \beta^\lambda(\lambda, \tilde{\lambda}) &= -\frac{c_G \lambda (1 - \lambda)}{2\Delta^2} \left( k_1 \lambda (1 - \lambda) - k_2 \tilde{\lambda}^2 (1 + \lambda - \tilde{\lambda}) \right) , \\ \beta^{\tilde{\lambda}}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= -\frac{c_G \tilde{\lambda} (1 - \tilde{\lambda})}{2\Delta^2} \left( k_1 (1 - \lambda) \left( \tilde{\lambda} - \lambda (\lambda - \tilde{\lambda}) \right) - k_2 \tilde{\lambda}^2 \right) , \end{aligned} \quad (3.5.117)$$

με

$$\Delta = k_1 (1 - \lambda^2) - k_2 \tilde{\lambda}^2 \quad (3.5.118)$$

και τα σταθερά τους σημεία κάτω από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης δίνονται από την (4.31) της ίδιας αναφοράς. Όπως αναφέρεται και στην ενότητα 4.1 της [41] είναι εύχρηστο να ξαναγραφεί η (3.5.116), μετά από έναν επαναορισμό των ρευμάτων  $J_{i\pm} \rightarrow J_{i\pm}/\sqrt{k_i}$ ,  $i = 1, 2$ , ως

$$S_{k_1, k_2, \Lambda} = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \mathcal{J}_{+A} \Lambda_{AB} \mathcal{J}_{-B} , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1} & 0 \\ \lambda_0^{-1} \tilde{\lambda} \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.5.119)$$

$$\mathcal{J}_\pm^A = \left( J_{1\pm}^a, J_{2\pm}^{a'} \right) , \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} ,$$

όπου και οι δύο δείκτες ομάδας παίρνουν τιμές στο εύρος  $a, a' = 1, 2, \dots, \dim G$ . Παρόλο που ο πίνακας  $\Lambda$  εδώ είναι μη-αντιστρέψιμος, αυτό δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς που ακολουθούν, εφόσον πουθενά δεν είναι απαραίτητη η αντιστροφή του.

### Υπολογισμός της μετρικής του Zamolodchikov

Σε ότι ακολουθεί, υπολογίζεται η μετρική στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης για την δράση (3.5.116), για πεπερασμένες τιμές και των δύο παραμέτρων ζεύξης. Η μορφή της μετρικής αυτής για γενικό πίνακα  $\lambda_{ab}$  έχει υπολογισθεί στην [55] και παρουσιάζεται αναλυτικά σε προηγούμενη ενότητα της παρούσας εργασίας. Υιοθετώντας τον συμβολισμό  $A = (a, a')$  για τους δείκτες των δύο ομάδων, ισχύει

$$ds^2 = G_{AB|CD} d\Lambda_{AB} d\Lambda_{CD} , \quad G_{AB|CD} = \frac{\dim G}{2} (\tilde{g}^{-1})_{AC} (g^{-1})_{BD} , \quad (3.5.120)$$

όπου

$$g_{AB} = (\mathbb{1} - \Lambda^T \Lambda)_{AB} , \quad \tilde{g}_{AB} = (\mathbb{1} - \Lambda \Lambda^T)_{AB} . \quad (3.5.121)$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα  $\Lambda$  της (3.5.119) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} k_1^{-1} \Delta \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 \Delta^{-1} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} , \\ \tilde{g} &= \begin{pmatrix} (1 - \lambda^2) \mathbb{1} & -\lambda_0^{-1} \lambda \tilde{\lambda} \mathbb{1} \\ -\lambda_0^{-1} \lambda \tilde{\lambda} \mathbb{1} & (1 - \lambda_0^{-2} \tilde{\lambda}^2) \mathbb{1} \end{pmatrix} , \\ \tilde{g}^{-1} &= \frac{k_1}{\Delta} \begin{pmatrix} (1 - \lambda_0^{-2} \tilde{\lambda}^2) \mathbb{1} & \lambda_0^{-1} \lambda \tilde{\lambda} \mathbb{1} \\ \lambda_0^{-1} \lambda \tilde{\lambda} \mathbb{1} & (1 - \lambda^2) \mathbb{1} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (3.5.122)$$

και η ακριβής μορφή της μετρικής στον διδιάστατο χώρο των παραμέτρων ζεύξης  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$  είναι

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{11|11} d\Lambda_{11}^2 + G_{21|21} d\Lambda_{21}^2 + 2G_{11|21} d\Lambda_{11} d\Lambda_{21} \\ &= \frac{k_1 \dim G}{2\Delta^2} \left( (k_1 - k_2 \tilde{\lambda}^2) d\lambda^2 + k_2 (1 - \lambda^2) \lambda_0^{-2} d\tilde{\lambda}^2 + 2k_2 \lambda \tilde{\lambda} d\lambda d\tilde{\lambda} \right) . \end{aligned} \quad (3.5.123)$$

Η μετρική αυτή, τουλάχιστον τοπικά, αντιστοιχεί σε έναν  $AdS_2$  χώρο, εφόσον η αντίστοιχη καμπυλότητα κατά Ricci είναι  $R = -4/\dim G$ . Επιπλέον, η (3.5.123) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό

$$k_1 \rightarrow -k_1 , \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda} , \quad \tilde{\lambda} \rightarrow \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} . \quad (3.5.124)$$

της [41] που αποτελεί συμμετρία για την αντίστοιχη ενεργό δράση της (3.5.116), καθώς και για τις  $\beta$ -συναρτήσεις της σχέσης (3.5.23).

### Υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων

Για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων των δύο σύνθετων διγραμμικών ως προς τα ρεύματα τελεστών της παραμόρφωσης, ακολουθείται η διαδικασία των [50, 55]. Για τη γενική μετρική (3.5.120) τα σύμβολα Cristoffel υπολογίζονται από τη σχέση

$$\Gamma_{M_1 M_2 | N_1 N_2}^{P_1 P_2} = \delta_{N_1}^{P_1} \delta_{M_2}^{P_2} (\Lambda g^{-1})_{M_1 N_2} + \delta_{M_1}^{P_1} \delta_{N_2}^{P_2} (\Lambda g^{-1})_{N_1 M_2} . \quad (3.5.125)$$

Όσον αφορά τον πίνακα της ανώμαλης διάστασης, αυτός υπολογίζεται από τη σχέση [58]

$$\gamma_{AB}{}^{CD} = \nabla_{AB} \beta^{CD} + \nabla^{CD} \beta_{AB} = \nabla_{AB} \beta^{CD} + G_{AB|MN} G^{CD|PQ} \nabla_{PQ} \beta^{MN} , \quad (3.5.126)$$



όπου

$$\nabla_{AB}\beta^{CD} = \partial_{AB}\beta^{CD} + \Gamma_{AB|MN}^{CD}\beta^{MN}, \quad \partial_{AB} = \frac{\partial}{\partial\Lambda_{AB}}. \quad (3.5.127)$$

Τα μη-μηδενικά στοιχεία του ταυιστή της ανώμαλης διάστασης που επιβιώνουν είναι τα  $\gamma_{ab}^{cd}$ ,  $\gamma_{ab}^{c'd}$ ,  $\gamma_{a'b}^{cd}$ ,  $\gamma_{a'b}^{c'd}$ ,  $\gamma_{ab'}^{cd}$ ,  $\gamma_{ab'}^{c'd}$ ,  $\gamma_{a'b'}^{cd}$ ,  $\gamma_{a'b'}^{c'd}$  και η ακριβής μορφή τους βρίσκεται στο παράρτημα ΙΑ'. Θεωρώντας τον ταυιστή αυτό σαν έναν  $4 \times 4$  πίνακα με δείκτες  $\{1 = ab, 2 = a'b, 3 = ab', 4 = a'b'\}$  μπορεί πλέον να διαγωνιοποιηθεί ως προς τα ιδιοανύσματα των νέων ροών.

Σε αυτόν τον υπολογισμό υπάρχουν δύο σημαντικά όρια στα οποία οι ιδιοτιμές του πάνω πίνακα που αντιστοιχούν στα κατάλληλα ιδιοανύσματα μπορούν να ερμηνευθούν ως οι ανώμαλες διαστάσεις των αρχικών τελεστών:

1. Στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο, μόνο ο όρος  $J_{1+}J_{1-}$  των άυτο-αλληλεπιδράσεων επιβιώνει στην δράση (3.5.116) και οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στους τελεστές  $J_{1+}J_{1-}$  και  $J_{2+}J_{1-}$  είναι οι ακόλουθες

$$\gamma_{J_{1+}J_{1-}} = -\frac{2c_G}{k_1}\lambda \frac{1 - \lambda(1 - \lambda)}{(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3}, \quad \gamma_{J_{2+}J_{1-}} = \frac{c_G}{k_1} \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3}. \quad (3.5.128)$$

Στα πάνω αποτελέσματα, η ανώμαλη διάσταση  $\gamma_{J_{1+}J_{1-}}$  ταυίζεται με αυτήν του  $J_{1+}J_{1-}$  σύνθετου τελεστή για το απλά παραμορφωμένο, συμμετρικό πρότυπο της [50] (βλ. επίσης την (3.5.33)), ενώ η  $\gamma_{J_{2+}J_{1-}}$  είναι η ανώμαλη διάσταση του  $J_{1-}$  (και του  $J_{1+}$  αντίστοιχα λόγω ισοτροπίας και συμμετρικότητας του προτύπου) για το ίδιο πρότυπο όπως και η (3.5.34). Αυτό ήταν αναμενόμενο, εφόσον στο όριο αυτό το  $J_{2+}$  δεν αλληλεπιδρά, υποδεικνύοντας ότι  $\gamma_{J_{2+}J_{1-}} = \gamma_{J_{1-}} = \gamma_{J_{1+}}$ .

2. Στο  $\lambda = 0$  όριο, μόνο ο όρος  $J_{2+}J_{1-}$  των έτερο-αλληλεπιδράσεων επιβιώνει στην δράση (3.5.116). Τότε, επαναορίζοντας  $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda_0\tilde{\lambda}$ , οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στους τελεστές  $J_{1+}J_{1-}$  και  $J_{2+}J_{1-}$  είναι οι

$$\begin{aligned} \gamma_{J_{1+}J_{1-}} &= \frac{c_G}{k_1} \tilde{\lambda}^2 \frac{(1 - \lambda_0\tilde{\lambda})^2}{(1 - \tilde{\lambda}^2)^3}, \\ \gamma_{J_{2+}J_{1-}} &= \frac{c_G}{\sqrt{k_1k_2}} \tilde{\lambda} \frac{3(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\tilde{\lambda}(1 + \tilde{\lambda}^2) - 2(1 + 4\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda}^4)}{(1 - \tilde{\lambda}^2)^3}. \end{aligned} \quad (3.5.129)$$

Όπως και πριν, η  $\gamma_{J_{1+}J_{1-}}$  ταυίζεται με την ανώμαλη διάσταση του  $J_{1-}$  (εφόσον το  $J_{1+}$  δεν εμφανίζεται στη δράση) του απλά παραμορφωμένου μη-συμμετρικού προτύπου της [45], ενώ η  $\gamma_{J_{2+}J_{1-}}$  είναι η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή  $J_{2+}J_{1-}$  για το ίδιο πρότυπο.

Η προαναφερθείσα μέθοδος εξαγωγής των ανώμαλων διαστάσεων για απλούς και σύνθετους

τελεστές μέσω συγκεκριμένων ορίων για τις παραμέτρους ζεύξης μπορεί να γενικευθεί και για πιο περίπλοκα πρότυπα όπως αυτά της [42]. Τέτοιες γενικεύσεις αναλύονται σε επόμενες ενότητες της παρούσας εργασίας.

### 3.5.5 Έλεγχος με τη χρήση της θεωρίας διαταραχών

Σε ότι ακολουθεί ελέγχονται με τη χρήση της θεωρίας διαταραχών τα προηγούμενα ακριβή αποτελέσματα που παράχθηκαν σε αυτή την ενότητα. Όλοι οι διαταρακτικοί υπολογισμοί λαμβάνουν χώρα σε ευκλείδια υπογραφή.

Από την εξίσωση Callan-Symanzik συνεπάγεται ότι μέχρι τάξη  $\frac{1}{k}$  η συνάρτηση συσχέτισμού δύο δημείων για έναν τελεστή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$G_{ab}(x_1, x_2) = G_0(k, \lambda) \frac{\delta_{ab}}{x_{12}^{2\Delta} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}}} \left( 1 + \gamma \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \dots \right), \quad (3.5.130)$$

όπου  $(\Delta, \bar{\Delta})$  είναι οι ολομορφικές και αντι-ολομορφικές διαστάσεις του τελεστή στο σύμμορφο σημείο, και  $(\gamma, \bar{\gamma})$  είναι οι αντίστοιχες ανώμαλες διαστάσεις τάξης  $\mathcal{O}(1/k)$ . Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη ενότητα, η συνάρτηση  $G_0(k, \lambda)$  είναι μια συνολική κανονικοποίηση (η οποία αναπτύσσεται και κρατώνται μόνο δυνάμεις μέχρι  $\mathcal{O}(1/k)$ ), ενώ το  $\epsilon$  είναι μια σταθερά αποκοπής για τις μικρές αποστάσεις. Οι δείκτες  $a, b$  παίρνουν τιμές σε μία γενική μη-αναγωγίσιμη αναπαράσταση της ομάδας  $G$ . Σημειώνεται ότι οι διαστάσεις  $\Delta$  και  $\bar{\Delta}$  μπορεί να εξαρτώνται από το  $k$ , αλλά στην (3.5.130) συνεισφέρει μόνο το  $k$ -ανεξάρτητο μέρος τους.

Υπενθυμίζεται εδώ ότι η συνάρτηση συσχέτισμού  $n$  σημείων για έναν γενικό σύνθετο πεδίο  $\Phi(x)$  δίνεται από τη σχέση

$$\langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [D\Phi] \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) e^{-S_k - \frac{\lambda}{\pi} \int d^2z J^a \bar{J}^a}. \quad (3.5.131)$$

Όσον αφορά τους σύνθετους τελεστές ρευμάτων, στις συμβάσεις της υποενότητας αυτής, χρησιμοποιείται το ακόλουθο OPE για τα ρεύματα

$$J^a(z_1) J^b(z_2) = \frac{\delta^{ab}}{z_{12}^2} + \frac{i f^{abc}}{\sqrt{k}} \frac{J^c(z_2)}{z_{12}}, \quad (3.5.132)$$

από το οποίο προκύπτουν οι ακόλουθες συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων

$$\begin{aligned}\langle J^a(z_1)J^b(z_2) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{z_{12}^2}, \\ \langle J^a(z_1)J^b(z_2)J^c(z_3) \rangle &= \frac{if^{abc}}{\sqrt{k}} \frac{1}{z_{12}z_{13}z_{23}},\end{aligned}\tag{3.5.133}$$

ενώ στην εύρεση συναρτήσεων συσχετισμού περισσότερων σημείων εμπλέκονται οι ταυτότητες του Ward για σύμμορφες θεωρίες πεδίου. Τέλος, χρειάζεται προσοχή στην κανονική διάταξη των μη-Αβελιανών ρευμάτων η οποία, ακολουθώντας το παράρτημα Α' της [93], συμβολίζεται με  $(AB)$  για δύο τελεστές  $A$  και  $B$ , ενώ με  $(ABC) = (A(BC))$  και ούτω καθεξής, για περισσότερους.

### Οι χειραλικοί τελεστές $\mathcal{O}^{(m,0)}$ μέχρι τάξη $\mathcal{O}(\lambda^2)$

Προφανώς η ανώμαλη διάσταση σε τάξη  $\mathcal{O}(\lambda)$  μηδενίζεται, και η πρώτη μη-τετριμένη συνεισφορά στην ανώμαλη διάσταση του  $\mathcal{O}^{(m,0)}$  έρχεται από τους δύο βρόγχους ως

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^{(m,0)}(x_1)\mathcal{O}^{(m,0)}(x_2) \rangle_{\lambda^2} &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \int d^2z_1 d^2z_2 \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{z}_1)\bar{J}^{c_2}(\bar{z}_2) \rangle \\ &\times d_{a_1 \dots a_m}^{(m)} d_{b_1 \dots b_m}^{(m)} \langle (J^{a_1} \dots J^{a_m})(x_1) (J^{b_1} \dots J^{b_m})(x_2) J^{c_1}(z_1) J^{c_2}(z_2) \rangle,\end{aligned}\tag{3.5.134}$$

όπου όλη η  $k$ -εξάρτηση έρχεται από την ολομορφική συνάρτηση συσχετισμού. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Ward για το ρεύμα στο σημείο  $z_1$  και παραλείποντας για τώρα τους ταυιστές  $d$ , το ολομορφικό μέρος της πάνω συνάρτησης συσχετισμού ισούται με

$$\begin{aligned}&\frac{m}{(z_1 - x_1)^2} \langle \delta^{c_1(a_1}(J^{a_2} \dots J^{a_m})(x_1) (J^{b_1} \dots J^{b_m})(x_2) J^{c_2}(z_2) \rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{m}{(z_1 - x_1)} \langle f^{ec_1(a_1}(J^{a_2} \dots J^{a_m}) J^e)(x_1) (J^{b_1} \dots J^{b_m})(x_2) J^{c_2}(z_2) \rangle \\ &+ \frac{m}{(z_1 - x_2)^2} \langle (J^{a_1} \dots J^{a_m})(x_1) \delta^{c_1(b_1}(J^{b_2} \dots J^{b_m})(x_2) J^{c_2}(z_2) \rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{m}{(z_1 - x_2)} \langle (J^{a_1} \dots J^{a_m})(x_1) f^{ec_1(b_1}(J^{b_2} \dots J^{b_m}) J^e)(x_2) J^{c_2}(z_2) \rangle,\end{aligned}\tag{3.5.135}$$

όπου το  $m$  προέρχεται από τη σύμβαση συμμετροποίησης που περιγράφεται στο παράρτημα Θ'. Στη συνέχεια, η συναίρεση του  $J^{c_2}(z_2)$  όταν συνδυαστεί με την αντι-ολομορφική συνεισφορά δίνει είτε μηδέν, είτε όρους που αντιστοιχούν σε διαγράμματα φυσαλίδας. Κάνοντας την ολοκλήρωση ως προς  $z_1$  για τον πρώτο και τον τρίτο όρο, προκύπτουν όροι ανάλογοι δ-συναρτήσεων μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών σημείων, οι οποίοι στο παρόν σχήμα

ομαλοποίησης μηδενίζονται<sup>19</sup> [44]. Τέλος, εφαρμόζοντας την ταυτότητα Ward για το ρεύμα του σημείου  $z_2$  και επαναφέροντας τους ταχυστές  $d$ , το ολομορφικό μέρος της συνάρτησης συσχετισμού, πολλαπλασιασμένο με ένα  $\delta^{c_1 c_2}$  που έρχεται από το αντι-ολομορφικό μέρος της, έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \frac{m}{k} \frac{d_{a_1 \dots a_m}^{(m)} d_{b_1 \dots b_m}^{(m)}}{(z_2 - x_1)(z_1 - x_1)} \left( f^{c_1 a_1 e} f^{c_1 e f} \langle (J^f J^{a_1} \dots J^{a_m})(x_1) (J^{b_1} \dots J^{b_m})(x_2) \rangle \right. \\ & \quad \left. + (m-1) f^{c_1 a_1 e} f^{c_1 a_2 f} \langle (J^e J^f J^{a_3} \dots J^{a_m})(x_1) (J^{b_1} \dots J^{b_m})(x_2) \rangle \right) \\ & + \frac{m^2}{k} \frac{d_{a_1 \dots a_m}^{(m)} d_{b_1 \dots b_m}^{(m)} f^{c_1 a_1 e} f^{c_1 b_1 f}}{(z_2 - x_1)(z_1 - x_2)} \langle (J^e J^{a_2} \dots J^{a_m})(x_1) (J^f J^{b_2} \dots J^{b_m})(x_2) \rangle \\ & \quad + (x_1 \leftrightarrow x_2) . \end{aligned} \tag{3.5.136}$$

Η μορφή αυτή είναι ήδη τάξης  $1/k$ , οπότε χρειάζεται μόνο το Αβελιανό μέρος της εναπομένουσας συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων

$$\langle J^{a_1 \dots a_m}(x_1) J^{b_1 \dots b_m}(x_2) \rangle \Big|_{\text{Abel}} = \frac{m!}{x_{12}^{2m}} \delta_{(b_1}^{a_1} \delta_{b_2}^{a_2} \dots \delta_{b_m)}^{a_m} . \tag{3.5.137}$$

Η παρένθεση στο δεξί μέλος της (3.5.137) συμβολίζει την πλήρη συμμετροποίηση των δεικτών  $b_1, \dots, b_n$ . Αντικαθιστώντας την (3.5.137) στην (3.5.136) και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (Θ'.11), (Θ'.12) προκύπτει ότι

$$\gamma_{\mathcal{O}(m,0)} = 0 , \tag{3.5.138}$$

μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , το οποίο είναι σε πλήρη συμφωνία με την (3.5.71).

Αξίζει να σχολιασθεί εδώ ότι τα αποτελέσματα των ανώμαλων διαστάσεων για τους διάφορους τελεστές, καθώς και αυτά των β-συναρτήσεων, μέχρι την τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  δεν εξαρτώνται από το σχήμα ομαλοποίησης, αλλά μόνο από το γεγονός ότι οι αποκλίσεις μέχρι αυτή την τάξη όντως αναιρούνται. Πιο συγκεκριμένα, κοιτώντας τις (3.14) και (3.15) της [44], μια αλλαγή του πεπερασμένου μέρους των  $Z_1$  και  $Z$  κατά έναν όρο τάξης  $1/k$ , δεν επηρεάζει σε τάξη  $1/k$  ούτε τη  $\gamma$  ούτε την  $\beta_\lambda$ . Για τον ίδιο λόγο, όλες οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών που υπολογίζονται σε αυτή την υποενοότητα, είναι ανεξάρτητες του σχήματος ομα-

<sup>19</sup>Το πρόβλημα της διατήρησης μιας καθορισμένης σειράς στην εκτέλεση των ολοκληρώσεων [44] ταυτίζεται με αυτό για το ποιές δ-συναρτήσεις είναι μη μηδενικές στο κάθε σχήμα ομαλοποίησης. Εάν θεωρούνταν όλες οι δ-συναρτήσεις μη-μηδενικές, τότε η σειρά των ολοκληρώσεων δεν θα έπαιζε ρόλο και κάθε φορά που θα εμφανιζόταν ένας απειρισμός για μικρές αποστάσεις, θα γινόταν εισαγωγή της σταθεράς αποκοπής  $\epsilon$ . Στους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιείται το σχήμα ομαλοποίησης της [44] προκειμένου να μειωθεί ο αριθμός των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται.

λοποίησης μέχρι την τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$ , ενώ η εξάρτηση από αυτό υπεισέρχεται σε τάξη  $\mathcal{O}(1/k^2)$ .

**Ο χειραλικός τελεστής  $\mathcal{O}^{(2,0)}$  μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^3)$**

Έστω τώρα ο ολομορφικός τελεστής  $\mathcal{O}^{(2,0)}$  ο οποίος είναι ανάλογος με την ολομορφική συνιστώσα του ταχυστή ενέργειας-ορμής  $T$  (βλ. και την ανάλυση κοντά στην (3.5.74)). Συνεπώς, γίνονται οι υπολογισμοί για αυτόν τον τελεστή, ο οποίος έχει τα εξής βασικά OPEs

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^2} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{T'(w)}{z-w}, \\ J^a(z)T(w) &= \frac{J^a(w)}{(z-w)^2}. \end{aligned} \quad (3.5.139)$$

Οι ακόλουθες συναρτήσεις συσχετισμού τεσσάρων σημείων είναι αναγκαίες για τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν σε αυτήν την παράγραφο:

$$\langle T(z_1)T(z_2)J^a(z_3)J^b(z_4) \rangle = \delta^{ab} \left( \frac{c/2}{z_{34}^2 z_{12}^4} + \frac{1}{z_{12}^2 z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{1}{z_{12}^2 z_{14}^2 z_{23}^2} \right), \quad (3.5.140)$$

όπου  $c = \frac{2k \dim G}{2k + c_G}$  είναι το κεντρικό φορτίο της WZW θεωρίας και

$$\langle J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2)J^{a_3}(z_3)T(z_4) \rangle = \frac{f^{a_1 a_2 a_3}}{\sqrt{k}} \left( \frac{1}{z_{12} z_{24}^2 z_{34}^2} - \frac{1}{z_{13} z_{24}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{23} z_{14}^2 z_{24} z_{34}} \right). \quad (3.5.141)$$

Η πρώτη μη-μηδενική κβαντική συνεισφορά στην ανώμαλη διάσταση έρχεται από την τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ . Εφόσον ο ταχυστής ενέργειας-ορμής είναι ένα οιωνεί-πρωτεύον πεδίο, επαναλαμβάνονται οι υπολογισμοί της προηγούμενης παραγράφου, οι οποίοι αυστηρά μιλώντας είναι έγκυροι για  $m \geq 3$ . Τότε,

$$\langle T(x_1)T(x_2) \rangle_{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \langle \bar{J}^a(\bar{z}_1) \bar{J}^b(\bar{z}_2) \rangle \langle T(x_1)T(x_2)J^{a_1}(z_1)J^{a_2}(z_2) \rangle, \quad (3.5.142)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.5.140), προκύπτει για το συνδεδεμένο κομμάτι της πάνω σχέσης ότι

$$\begin{aligned} \langle T(x_1)T(x_2) \rangle_{\lambda^2} &= \frac{\lambda^2 \dim G}{2\pi^2 x_{12}^2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \left( \frac{1}{(z_1 - x_1)^2 (z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(z_1 - x_2)^2 (z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.5.143)$$

Τέλος, κάνοντας την ολοκλήρωση ως προς  $z_2$ , εμφανίζεται μια  $\delta$ -συνάρτηση της μορφής  $\delta^{(2)}(z_2 - x_i)$  με  $i = 1, 2$ , η οποία είναι μηδέν σύμφωνα με τα προηγούμενα. Συνεπώς,

$$\langle T(x_1)T(x_2) \rangle_{\lambda^2} = 0 . \quad (3.5.144)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η τρίτη τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  με συνεισφορά

$$\begin{aligned} \langle T(x_1)T(x_2) \rangle_{\lambda^3} = & -\frac{\lambda^3}{6\pi^3} \int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 \langle \bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}^{a_3}(\bar{z}_3) \rangle \times \\ & \langle T(x_1)T(x_2) J^{a_1}(z_1) J^{a_2}(z_2) J^{a_3}(z_3) \rangle . \end{aligned} \quad (3.5.145)$$

Η αντι-ολομορφική συνάρτηση συσχετισμού τριών σημείων δίνεται από την (3.5.133), ενώ η ολομορφική συνάρτηση πέντε σημείων, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Ward για το ρεύμα του σημείου  $z_1$ , γίνεται

$$\begin{aligned} & \frac{if^{a_1 a_2 c}}{\sqrt{k} z_{12}} \langle J^c(z_2) J^{a_3}(z_3) T(x_1) T(x_2) \rangle + \frac{if^{a_1 a_3 c}}{\sqrt{k} z_{13}} \langle J^{a_2}(z_2) J^c(z_3) T(x_1) T(x_2) \rangle \\ & + \frac{1}{(z_1 - x_1)^2} \langle J^{a_2}(z_2) J^{a_3}(z_3) J^{a_1}(x_1) T(x_2) \rangle + \frac{1}{(z_1 - x_2)^2} \langle J^{a_2}(z_2) J^{a_3}(z_3) T(x_1) J^{a_1}(x_2) \rangle . \end{aligned} \quad (3.5.146)$$

Χρησιμοποιώντας άλλη μια φορά την (3.5.140) και την (3.5.141) η συνεισφορά της τρίτης τάξης στη συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων του τελεστή  $\mathcal{O}^{(2,0)}(x)$  έρχεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \langle T(x_1)T(x_2) \rangle_{\lambda^3} = & \frac{c_G \dim G \lambda^3}{3\pi^3 x_{12}^2 k} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3}{\bar{z}_{12} \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \times \\ & \left\{ \frac{1}{z_{12}(z_2 - x_1)^2 (z_3 - x_2)^2} - \frac{1}{z_{13}(z_2 - x_1)^2 (z_3 - x_2)^2} \right. \\ & + \frac{1}{z_{23}(z_1 - x_1)^2 (z_3 - x_2)^2} - \frac{1}{(z_1 - x_1)^2 (z_2 - x_1)(z_3 - x_2)^2} \\ & \left. + \frac{x_{12}}{(z_1 - x_1)^2 (z_2 - x_2)^2 (z_3 - x_1)(z_3 - x_2)} \right\} , \end{aligned} \quad (3.5.147)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η συμμετρία κάτω από εναλλαγή των  $x_1 \leftrightarrow x_2$  προκειμένου να μειωθούν οι όροι στην πάνω σχέση. Ο λεπτομερής υπολογισμός αυτής της έκφρασης δίνεται στο παράρτημα Γ και καταλήγει στο αποτέλεσμα

$$\langle T(x_1)T(x_2) \rangle_{\lambda^3} = 0 . \quad (3.5.148)$$

Όπως είναι αναμενόμενο, ο μηδενισμός της συνάρτησης συσχετισμού μέχρι τρίτη τάξη, σε συνδυασμό με την δυϊκού-τύπου συμμετρία της ενεργού δράσης, οδηγεί στον μηδενισμό όλων των κβαντικών διορθώσεων για την συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων του ταυυστή  $T \sim \mathcal{O}^{(2,0)}$ .

**Ο μικτός τελεστής  $\mathcal{O}^{(2,1)}$  μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$**

Η ανώμαλη διάσταση του τελεστή  $\mathcal{O}^{(2,1)}$  δίνεται από την (3.5.33) και για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , παίρνει τη μορφή

$$\gamma_{\mathcal{O}^{(2,1)}} = -\frac{2c_G}{k}(\lambda - 3\lambda^2) + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (3.5.149)$$

Σε ότι ακολουθεί, γίνεται επαλήθευση του πάνω αποτελέσματος με τη χρήση της θεωρίας διαταραχών.

Το OPE που χρησιμοποιείται αν ληφθεί υπόψη η κανονική διάταξη για τους σύνθετους τελεστές ρευμάτων είναι

$$\begin{aligned} J^a(z)(J^b J^c)(w) &= \frac{\delta_{ab}}{(z-w)^2} J^c(w) + \frac{\delta_{ac}}{(z-w)^2} J^b(w) + \frac{i}{\sqrt{k}} \frac{f_{abc}}{(z-w)^3} \\ &+ \frac{i}{\sqrt{k}} \frac{f_{abe}}{z-w} (J^e J^c)(w) + \frac{i}{\sqrt{k}} \frac{f_{ace}}{z-w} (J^b J^e)(w) - \frac{1}{k} \frac{f_{abe} f_{ecd}}{(z-w)^2} J^d(w). \end{aligned} \quad (3.5.150)$$

Στην συνέχεια, προκειμένου τα αποτελέσματα που θα προκύψουν να είναι ορθώς κανονικοποιημένα, χρειάζεται η κλασική συνεισφορά σε μηδενική τάξη ως προς  $\lambda$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle_{\lambda^0} &= d_{a_1 a_2 c_1} d_{b_1 b_2 c_2} \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1) (J^{b_1} J^{b_2})(x_2) \rangle \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1) J^{c_2}(\bar{x}_2) \rangle \\ &= \frac{4(N^2 - 4) \dim G}{N x_{12}^4 \bar{x}_{12}^2}, \end{aligned} \quad (3.5.151)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι (3.5.137), (3.5.133) και (Θ'.6).

Η συνεισφορά σε πρώτη τάξη  $\mathcal{O}(\lambda)$  είναι

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle_{\lambda} &= -\frac{\lambda}{\pi} d_{a_1 a_2 c_1} d_{b_1 b_2 c_2} \int d^2 z_1 \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1) \bar{J}^{c_2}(\bar{x}_2) \bar{J}^{d_1}(\bar{z}_1) \rangle \\ &\times \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1) (J^{b_1} J^{b_2})(x_2) J^{d_1}(z_1) \rangle \end{aligned} \quad (3.5.152)$$

και υπολογίζοντας το ολομορφικό μέρος χωριστά προκύπτει για αυτό η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1) (J^{b_1} J^{b_2})(x_2) J^{d_1}(z_1) \rangle &= \frac{2i}{\sqrt{k}(z_1 - x_1)} f^{ed_1(a_1} \langle (J^{a_2} J^e)(x_1) (J^{b_1} J^{b_2})(x_2) \rangle \\ &+ \frac{2i}{\sqrt{k}(z_1 - x_2)} f^{ed_1(b_1} \langle (J^{b_2} J^e)(x_2) (J^{a_1} J^{a_2})(x_1) \rangle. \end{aligned} \quad (3.5.153)$$

Μαζεύοντας τα παραπάνω και με χρήση της (3.5.137) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle_\lambda &= \frac{4\lambda}{\pi k} d_{a_1 c_1 a_2} d_{a_2 c_2 e} f_{e d_1 a_1} \frac{f_{c_1 c_2 d_1}}{\bar{x}_{12}} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} \\ &+ \frac{4\lambda}{\pi k} d_{b_1 c_2 b_2} d_{b_2 c_1 e} f_{e d_1 b_1} \frac{f_{c_1 c_2 d_1}}{\bar{x}_{12}} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)}, \end{aligned} \quad (3.5.154)$$

όπου αντικαθιστώντας την (Θ'.7) και το ολοκλήρωμα (I'.5) προκύπτει τελικά

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle = \frac{4(N^2 - 4) \dim G}{N} \frac{1}{x_{12}^4 \bar{x}_{12}^2} \left( -\frac{2c_G}{k} \lambda \right) \frac{1}{x_{12}^4 \bar{x}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}. \quad (3.5.155)$$

Η συνεισφορά σε επίπεδο δύο βρόγχων ως προς την παράμετρο  $\lambda$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle_{\lambda^2} &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2} d_{a_1 a_2 c_1} d_{b_1 b_2 c_2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1) \bar{J}^{c_2}(\bar{x}_2) \bar{J}^{d_1}(\bar{z}_1) \bar{J}^{d_2}(\bar{z}_2) \rangle \\ &\times \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1) (J^{b_1} J^{b_2})(x_2) J^{d_1}(z_1) J^{d_2}(z_2) \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.156)$$

όπου το αντι-ολομορφικό μέρος είναι απλά η συνάρτηση συσχετισμού τεσσάρων σημείων

$$\begin{aligned} \langle \bar{J}^{c_1}(\bar{x}_1) \bar{J}^{c_2}(\bar{x}_2) \bar{J}^{d_1}(\bar{z}_1) \bar{J}^{d_2}(\bar{z}_2) \rangle &= \frac{\delta^{d_1 d_2} \delta^{c_1 c_2}}{\bar{z}_{12}^2 \bar{x}_{12}^2} + \frac{\delta^{d_1 c_1} \delta^{d_2 c_2}}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)^2 (\bar{z}_2 - \bar{x}_2)^2} + \frac{\delta^{d_1 c_2} \delta^{d_2 c_1}}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)^2 (\bar{z}_2 - \bar{x}_1)^2} \\ &- \frac{1}{k} \frac{1}{\bar{x}_{12}} \left( \frac{f^{d_1 d_2 e} f^{c_1 c_2 e}}{\bar{z}_{12} (\bar{z}_2 - \bar{x}_1) (\bar{z}_2 - \bar{x}_2)} - \frac{f^{d_1 c_1 e} f^{d_2 c_2 e}}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1) (\bar{z}_2 - \bar{x}_1) (\bar{z}_2 - \bar{x}_2)} \right. \\ &\left. + \frac{f^{d_1 c_2 e} f^{d_2 c_1 e}}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_2) (\bar{z}_2 - \bar{x}_1) (\bar{z}_2 - \bar{x}_2)} \right), \end{aligned} \quad (3.5.157)$$



και το ολομορφικό, έχοντας υπόψιν ότι πολλαπλασιάζεται με  $d_{a_1 a_2 c_1} d_{b_1 b_2 c_2}$ , δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1)(J^{b_1} J^{b_2})(x_2)J^{d_1}(z_1)J^{d_2}(z_2) \rangle &= \frac{\delta_{d_1 d_2}}{z_{12}^2} \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1)(J^{b_1} J^{b_2})(x_2) \rangle \\
 &+ \left(2 + \frac{c_G}{2k}\right) \frac{\delta_{d_1 a_1}}{(z_1 - x_1)^2} \langle J^{a_2}(x_1)J^{d_2}(z_2)(J^{b_1} J^{b_2})(x_2) \rangle \\
 &+ \left(2 + \frac{c_G}{2k}\right) \frac{\delta_{d_1 b_1}}{(z_1 - x_2)^2} \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1)J^{d_2}(z_2)J^{b_2}(x_2) \rangle \\
 &+ \frac{i}{\sqrt{k}} \frac{f_{d_1 a_1 e}}{z_1 - x_1} \langle (J^e J^{a_2} + J^{a_2} J^e)(x_1)J^{d_2}(z_2)(J^{b_1} J^{b_2})(x_2) \rangle \\
 &+ \frac{i}{\sqrt{k}} \frac{f_{d_1 b_1 e}}{z_1 - x_2} \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1)J^{d_2}(z_2)(J^e J^{b_2} + J^{b_2} J^e)(x_2) \rangle \\
 &+ \frac{i}{\sqrt{k}} \frac{f_{d_1 d_2 e}}{z_{12}} \langle (J^{a_1} J^{a_2})(x_1)J^e(z_2)(J^{b_1} J^{b_2})(x_2) \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.5.158}$$

Ευκολα υπολογίζεται ότι

$$\langle J^a(x_1)(J^b J^c)(x_2)J^d(z) \rangle = \left(2 + \frac{c_G}{2k}\right) \frac{\delta^{d(b\delta^c)a}}{(z - x_2)^2 x_{12}^2}, \tag{3.5.159}$$

ενώ όλες οι υπόλοιπες συναρτήσεις συσχετισμού που εμφανίζονται στην (3.5.158) αντιστοιχούν σε αναδιατάξεις δεικτών της (3.5.153). Στη συνέχεια, όσον αφορά τους όρους που συνεισφέρουν στην ανώμαλη διάσταση, μετά από πολλαπλασιασμό του ολομορφικού με το αντι-ολομορφικό μέρος, προκύπτει ένα σύνολο ολοκληρωμάτων προς υπολογισμό. Χρησιμοποιώντας τις (Θ'.7) και (Θ'.6), τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στον υπολογισμό αυτό είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)^2 (z_1 - x_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2)^2 z_{12}} &= -\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}, \\
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)^2 (z_1 - x_2)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2) z_{12}} &= \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}, \\
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)^2 (z_2 - x_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2)^2 z_{12}} &= -\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}, \\
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)^2 (z_2 - x_2)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2)^2 z_{12}} &= \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}^2}, \\
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - x_2) z_{12}^2} &= \frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}, \\
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)(\bar{z}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2) z_{12}^2} &= -\frac{\pi^2}{\bar{x}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}, \\
 \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(z_1 - x_1)^2 (z_2 - x_2)^2 (\bar{z}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2) \bar{z}_{12}} &= -\frac{2\pi^2}{x_{12}^2 \bar{x}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi^2}{x_{12}^2 \bar{x}_{12}}.
 \end{aligned} \tag{3.5.160}$$

Έχοντας αυτά, είναι εύκολο να ξεχωρίσουν οι όροι που συνεισφέρουν στην ανώμαλη διάσταση. Κάνοντας τις ολοκληρώσεις που προκύπτουν με τη χρήση των (3.5.160), προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle_{\lambda^2} = \frac{1}{x_{12}^4 \bar{x}_{12}^2} \frac{4(N^2 - 4)}{N} \frac{\dim G}{x_{12}^4 \bar{x}_{12}^2} \left( \frac{6c_G \lambda^2}{k} \right) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}. \quad (3.5.161)$$

Τέλος, μαζεύοντας τα αποτελέσματα μέχρι δεύτερη τάξη στο  $\lambda$ , προκύπτει η διαταρακτική μορφή της συναρτήσεως συσχετισμού δύο σημείων να είναι

$$\langle \mathcal{O}^{(2,1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2,1)}(x_2) \rangle = \frac{4(N^2 - 4)}{N} \frac{\dim G}{x_{12}^4 \bar{x}_{12}^2} \left( 1 - \frac{2c_G}{k} (\lambda - 3\lambda^2) \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \right) + \dots, \quad (3.5.162)$$

όπου οι τελείες δηλώνουν όρους που συνεισφέρουν σε τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  στη συνολική σταθερά κανονικοποίησης ή όρους ανώτερης τάξης ως προς το ανάπτυγμα για μικρό  $\lambda$  της ανώμαλης διάστασης (3.5.130). Αποδείχθηκε λοιπόν, ότι η ανώμαλη διάσταση μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , δίνεται πράγματι από τη σχέση (3.5.149).

### 3.6 Μια νέα μέθοδος για τον ακριβή υπολογισμό ανώμαλων διαστάσεων

Η ενότητα αυτή είναι βασισμένη στην [147] και στα πλαίσια της παρουσιάζεται ένας καινούριος τρόπος υπολογισμού των ανώμαλων διαστάσεων για τους απλούς τελεστές ρευμάτων των  $\lambda$ -παραμορφωμένων προτύπων, με γενικό πίνακα παραμόρφωσης.

Η μοναδική μέχρι τώρα μέθοδος για τον ακριβή υπολογισμό ανώμαλων διαστάσεων ρευμάτων, ήταν η χρήση διαταραχών σε συνδυασμό με την δυϊκού τύπου συμμετρία, όπως έχει αναλυθεί σε προηγούμενες ενότητες της εργασίας, η οποία επέτρεπε την εύρεση ακριβών αποτελεσμάτων ως προς τη σταθερά ζεύξης. Η σύνηθης αυτή μέθοδος δίνει αποτελέσματα για την περίπτωση που ο πίνακας της παραμόρφωσης είναι διαγώνιος και ισοτροπικός, όμως για την περίπτωση ενός γενικού πίνακα ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων για τα απλά ρεύματα δεν είναι δυνατός με τη χρήση διαταραχών, λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας που παρουσιάζουν οι υπολογισμοί και η πιθανή αδυναμία εφαρμογής της απαίτησης αναλλοιωτότητας κάτω από τη δυϊκού τύπου συμμετρία. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια νέα μέθοδος για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων των απλών ρευμάτων, η οποία έχει εφαρμογή και σε περιπτώσεις γενικών πινάκων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε ένα συνδυασμό των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα και εκμεταλλεύεται μονάχα τα δεδομένα του χώρου των παραμέτρων ζεύξης σε συνδυασμό με έναν επιπρόσθετο όρο αλληλεπίδρασης που αποσυσζεύγεται σε κάποιο κατάλληλο όριο, προκειμένου να εξαχθεί

το αποτέλεσμα για τις ανώμαλες διαστάσεις των απλών ρευμάτων από αυτό των ανώμαλων διαστάσεων των σύνθετων τελεστών.

Σε ότι ακολουθεί αναλύεται η μέθοδος για την περίπτωση του διπλά παραμορφωμένου, ασυμμετρικού  $\lambda$ -προτύπου με ενεργό δράση την (2.10.186), ενώ τα αποτελέσματα για την περίπτωση του απλού  $\lambda$ -προτύπου μπορούν να προκύψουν παίρνοντας τα κατάλληλα όρια.

Σημείο αφετηρίας είναι η γραμμικοποιημένη μορφή (2.10.181) της προαναφερθείσας δράσης, η οποία για  $\lambda_2 = 0$  γίνεται

$$S_\lambda(g_1, g_2) = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma \lambda_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b. \quad (3.6.1)$$

Σκοπός τώρα είναι η εύρεση των ανώμαλων διαστάσεων των  $J_{1+}$  και  $J_{2-}$  ρευμάτων για το πρότυπο της (3.6.1). Για να επιτευχθεί αυτό, προστίθεται στην άνωθεν δράση ένας νέος όρος αλληλεπίδρασης, ο οποίος εμπλέκει ένα τρίτο αντίγραφο  $G_{k_3}$  της ημι-απλής ομάδας  $G$  με Kac-Moody ρεύματα  $J_{3\pm}$  και πίνακα ζεύξης  $\tilde{\lambda}_{ab}$ . Συνεπώς, η νέα δράση πλέον είναι η

$$S_{\lambda, \tilde{\lambda}}(g_1, g_2, g_3) = \sum_{i=1}^3 S_{k_i}(g_i) + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2 \sigma \lambda_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b + \frac{\sqrt{k_1 k_3}}{\pi} \int d^2 \sigma \tilde{\lambda}_{ab} J_{1+}^a J_{3-}^b, \quad (3.6.2)$$

η οποία είναι ακριβής ως προς τις παραμέτρους ζεύξης [42].

Είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων των δύο σύνθετων τελεστών  $J_{1+} J_{2-}$  και  $J_{1+} J_{3-}$ , καθώς και αυτή του  $J_{1+}$ .

Η ιδέα είναι η ακόλουθη: Η δράση (3.6.2) μπορεί να έρθει στη μορφή

$$S_{\lambda, \tilde{\lambda}}(g_1, g_2, g_3) = \sum_{i=1}^3 S_{k_i}(g_i) + \frac{1}{\pi} \int d^2 \sigma \mathcal{J}_+^A \Lambda_{AB} \mathcal{J}_-^B, \quad (3.6.3)$$

όπου τα ρεύματα έχουν επαναορισθεί ως  $J_{i\pm}^a \rightarrow J_{i\pm}^a / \sqrt{k_i}$  και  $\mathcal{J}_\pm^A = (J_{1\pm}^a, J_{2\pm}^{\hat{a}}, J_{3\pm}^{\tilde{a}})$ . Επιπλέον, έχει εισαχθεί ο συμβολισμός του τριπλού δείκτη  $A = (a, \hat{a}, \tilde{a})$ , ο οποίος χαρακτηρίζει τους δείκτες που ανήκουν στο πρώτο, δεύτερο και τρίτο αντίγραφο της ομάδας  $G$  αντίστοιχα. Ο πίνακας  $\Lambda$  της παραμόρφωσης είναι τώρα ο <sup>20</sup>

$$\Lambda_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{a\hat{b}} & \tilde{\lambda}_{a\tilde{b}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6.4)$$

<sup>20</sup>Ο πίνακας  $\Lambda$  εδώ δεν είναι αντιστρέψιμος. Ωστόσο, το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα που εξάγονται, εφόσον δεν είναι αναγκαία η αντιστροφή του στα πλαίσια της παρούσας ενότητας.

Για το πρότυπο (3.6.3) είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων  $(\gamma_{J_{1+}J_{2-}})_{ab}{}^{cd}$  και  $(\gamma_{J_{1+}J_{3-}})_{ab}{}^{cd}$  για τους δύο σύνθετους τελεστές, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της γεωμετρίας του χώρου των παραμέτρων ζεύξης. Στη συνέχεια, παίρνοντας το όριο  $\tilde{\lambda}_{ab} = 0$ , το ρεύμα  $J_{3-}$  αποσυζεύγεται από την δράση και κατά συνέπεια δεν αποκτά ανώμαλες διαστάσεις, επιτρέποντας με αυτό τον τρόπο την ταύτιση της ανώμαλης διάστασης του σύνθετου τελεστή  $(\gamma_{J_{1+}J_{3-}})_{ab}{}^{cd}$  με αυτήν του απλού τελεστή  $(\gamma_{J_{1+}})_a{}^c$ . Η ανάλυση αυτή μπορεί να γίνει με συνεπή τρόπο, εφόσον στο προαναφερθέν όριο, ο πίνακας  $\gamma_{AB}{}^{CD}$  της ανώμαλης διάστασης των διγραμμικών στα ρεύματα τελεστών προκύπτει να είναι μπλόκ-διαγώνιος, δηλώνοντας ότι δεν υπάρχει ανάμιξη μεταξύ σύνθετων τελεστών που ανήκουν σε διαφορετικά μπλόκ του πίνακα αυτού.

Είναι προφανές, ότι λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει η ενεργός δράση της (2.10.181) κάτω από τον γενικευμένο μετασηματισμό ομοτιμίας (2.10.189), η ανώμαλη διάσταση για το αντιχειραλικό ρεύμα  $J_{2-}$ , προκύπτει από το αποτέλεσμα της  $\gamma_{J_{1+}}$  με αντικατάσταση του  $\lambda$  με  $\lambda^T$  και ανταλλαγή των  $k_1 \leftrightarrow k_2$ .

Ωστόσο, ένας πιο αυστηρός τρόπος υπολογισμού της ανώμαλης διάστασης του  $J_{2-}$ , είναι μέσω μιας κατάλληλης τροποποίησης της διαδικασίας που περιγράφηκε παραπάνω. Σε αυτή την περίπτωση, ο όρος που περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση με το βοηθητικό αντίγραφο της Lie ομάδας και προστίθεται στη δράση (3.6.1), πρέπει να είναι της μορφής  $\frac{\sqrt{k_1 k_3}}{\pi} \tilde{\lambda}_{ab} J_{3+}^a J_{2-}^b$ . Με αυτόν τον τρόπο, η ανώμαλη διάσταση του  $J_{3+}^a J_{2-}^b$  ανάγεται στην  $(\gamma_{J_{2-}})_a{}^b$  στο όριο  $\tilde{\lambda}_{ab} = 0$ . Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, ο  $\Lambda$  πίνακας σε αυτή την περίπτωση θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\Lambda_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_{ab} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6.5)$$

Τέλος, μέσω των αποτελεσμάτων για τις ανώμαλες διαστάσεις των  $J_{1+}$  και  $J_{2-}$ , προκύπτουν εύκολα οι ανώμαλες διαστάσεις των απλών ρευμάτων  $J_{1-}$  και  $J_{2+}$  που εμφανίζονται στην δεύτερη κορυφή αλληλεπίδρασης της (2.10.181), με απλή αντικατάσταση του πίνακα  $\lambda_1$  με τον  $\lambda_2$  και εναλλαγή των επιπέδων  $k_1 \leftrightarrow k_2$ .

### 3.6.1 Υπολογισμός ανώμαλων διαστάσεων

Στην υποενότητα αυτή υπολογίζονται οι ανώμαλες διαστάσεις των ρευμάτων  $J_{1+}$  και  $J_{2-}$  και το τελικό αποτέλεσμα παρουσιάζεται στην (3.6.28). Ο γενικός τύπος για την εύρεση των ανώμαλων διαστάσεων των σύνθετων τελεστών δίνεται από τις σχέσεις (3.4.37)-(3.4.38), με τα σύμβολα Christoffel των (3.4.39), (3.4.40). Στα πλαίσια της παρούσας ενότητας οι

προαναφερθείσες σχέσεις γράφονται συναρτήσει του πίνακα  $\Lambda$  ως

$$\langle J_{1+}^A J_{2-}^B(x_1, \bar{x}_1) J_{1+}^C J_{2-}^D(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\lambda, k} = \frac{G_{CD|MN}}{|x_{12}|^4} \left( \delta_A^M \delta_B^N + \gamma_{AB}{}^{MN} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2} \right), \quad (3.6.6)$$

όπου

$$\gamma_{AB}{}^{CD} = \nabla_{AB} \beta^{CD} + \nabla^{CD} \beta_{AB} = \nabla_{AB} \beta^{CD} + G_{AB|MN} G^{CD|PQ} \nabla_{PQ} \beta^{MN}, \quad (3.6.7)$$

με την

$$\nabla_{AB} \beta^{CD} = \partial_{AB} \beta^{CD} + \Gamma_{AB|MN}^{CD} \beta^{MN}, \quad \partial_{AB} \beta^{CD} = \frac{\partial \beta^{CD}}{\partial \Lambda_{AB}}, \quad (3.6.8)$$

να είναι η συναλλοίωτη παράγωγος, όπως ορίζεται στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης (για τα διαφορετικά μπλόκ) του πίνακα  $\Lambda$ . Τα σύμβολα Christoffel που χρησιμοποιούνται στις συναλλοίωτες παραγώγους σε αυτόν το χώρο, ορίζονται μέσω της μετρικής Zamolodchikov

$$\begin{aligned} G_{AB|CD} &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{AC} g^{BD}, \quad \tilde{g}_{AB} = (1 - \Lambda \Lambda^T)_{AB}, \quad g_{AB} = (1 - \Lambda^T \Lambda)_{AB}, \\ \tilde{g}^{AB} &= \tilde{g}_{AB}^{-1}, \quad g^{AB} = g_{AB}^{-1}, \quad G_{AB|MN} G^{MN|CD} = \delta_A^C \delta_B^D, \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

και δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \Gamma_{M_1 M_2 | N_1 N_2}^{P_1 P_2} &= \frac{1}{2} G^{P_1 P_2 | Q_1 Q_2} (\partial_{M_1 M_2} G_{Q_1 Q_2 | N_1 N_2} + \partial_{N_1 N_2} G_{Q_1 Q_2 | M_1 M_2} - \partial_{Q_1 Q_2} G_{M_1 M_2 | N_1 N_2}) \\ &= \delta_{N_1}^{P_1} \delta_{N_2}^{P_2} (\Lambda g^{-1})_{M_1 N_2} + \delta_{M_1}^{P_1} \delta_{N_2}^{P_2} (\Lambda g^{-1})_{N_1 M_2}. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Επιπλέον, για τις  $\beta$ -συναρτήσεις ισχύει ότι

$$\beta^{AB} = \frac{d\Lambda_{AB}}{d \ln \mu^2}, \quad \beta_{AB} = G_{AB|CD} \beta^{CD}. \quad (3.6.11)$$

Θεωρώντας τα επίπεδα  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  και στη συνέχεια επαναφέροντάς τα μέσω ενός επαναορισμού των σταθερών δομής [42] των τριών αντιγράφων της άλγεβρας ως  $F_{ABC} = (f_{abc}/\sqrt{k_1}, f_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}/\sqrt{k_2}, f_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}/\sqrt{k_3})^{21}$ , εύκολα προκύπτουν οι  $\beta$ -συναρτήσεις της (3.2.12) στην ακόλουθη μορφή

$$\beta^{AB} = \frac{1}{2} \mathcal{N}_{AC}{}^D(\Lambda) \mathcal{N}_{BD}{}^C(\Lambda^T), \quad \mathcal{N}_{AB}{}^C(\Lambda) = (\Lambda_{AE} \Lambda_{BD} F_{EDF} - \Lambda_{EF} F_{ABE}) g^{FC}. \quad (3.6.12)$$

<sup>21</sup>Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του  $F_{ABC}$  με μικτούς δείκτες είναι μηδέν, εφόσον τα τρία αντίγραφα της ομάδας Lie θεωρούνται ανεξάρτητα. Επιπλέον,  $F_{ABC} \in \mathbb{R}$ .

### 3.6.1.1 Ανώμαλες διαστάσεις του απλού ρεύματος

Σε ότι ακολουθεί, υπολογίζονται μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$ , οι ακριβείς ως προς  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$   $\beta$ -συναρτήσεις, για τα δύο μπλοκ παραμέτρων ζεύξης της (3.6.2), καθώς επίσης και οι ακριβείς στο  $\lambda$  και μηδενικής τάξης ως προς  $1/k$  ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών  $J_{1+}J_{2-}$ ,  $J_{1+}J_{3-}$  και  $J_{1+}$ ,  $J_{2-}$ .

#### Ακριβείς $\beta$ -συναρτήσεις ως προς όλες τις παραμέτρους ζεύξης

Στην περίπτωση της δράσης (3.6.2) ο  $\Lambda_{AB}$  πίνακας, είναι αυτός της (3.6.4) και η  $\beta$ -συναρτηση είναι της μορφής

$$\beta^{AB} = \frac{d\Lambda_{AB}}{d \ln \mu^2} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{a\bar{b}} & \beta^{a\bar{b}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.13)$$

όπου

$$\beta^{a\bar{b}} = \frac{1}{2} \mathcal{N}_{aC}{}^D(\Lambda) \mathcal{N}_{\bar{b}D}{}^C(\Lambda^T), \quad \beta^{a\bar{b}} = \frac{1}{2} \mathcal{N}_{aC}{}^D(\Lambda) \mathcal{N}_{\bar{b}D}{}^C(\Lambda^T), \quad (3.6.14)$$

και

$$\Lambda_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{a\bar{b}} & \tilde{\lambda}_{a\bar{b}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^T)_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\lambda^T)_{\bar{a}b} & 0 & 0 \\ (\tilde{\lambda}^T)_{\bar{a}b} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.15)$$

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} \delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda^T \lambda)_{\bar{a}\bar{b}} & -(\lambda^T \tilde{\lambda})_{\bar{a}\bar{b}} \\ 0 & -(\tilde{\lambda}^T \lambda)_{\bar{a}\bar{b}} & (1 - \tilde{\lambda}^T \tilde{\lambda})_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad g^{AB} = \begin{pmatrix} \delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda, \tilde{\lambda})_{\bar{a}\bar{b}} & h(\lambda, \tilde{\lambda})_{\bar{a}\bar{b}} \\ 0 & h(\tilde{\lambda}, \lambda)_{\bar{a}\bar{b}} & f(\tilde{\lambda}, \lambda)_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{pmatrix} \Delta_{ab}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}^{AB} = \begin{pmatrix} \Delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad \Delta = (1 - \lambda \lambda^T - \tilde{\lambda} \tilde{\lambda}^T)^{-1},$$

$$f(\lambda, \tilde{\lambda}) = \lambda^T \Delta (1 - \tilde{\lambda} \tilde{\lambda}^T) \lambda^{-T}, \quad h(\lambda, \tilde{\lambda}) = \lambda^T \Delta \tilde{\lambda}, \quad \lambda^{-T} = (\lambda^{-1})^T.$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία της (3.6.13) είναι όντως μηδενικά, όπως επιβεβαιώνεται και με χρήση της σχέσης (3.6.12) και κατά συνέπεια, δεν χρειάζεται η χρήση διαφορομορφισμών στο ρόλο αντισταθμιστικών όρων, εφόσον δεν παράγονται νέες διευθύνσεις ροής κατώ από τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης. Παρόλα αυτά, μέσα στα επιμέρους  $\beta^{a\bar{b}}$  και  $\beta^{a\bar{b}}$  μπλόκ, είναι δυνατό να προκύψουν νέες ροές ανάλογα με την επιλογή των πινάκων  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$ . Σε αυτή την περίπτωση, οι νέες ροές που προκύπτουν πρέπει να ακυρωθούν με τη χρήση κατάλληλων διαφορομορφισμών. Η γενική περίπτωση χρήσης διαφορομορφισμών αναλύεται στο παράρτημα ΙΔ'.

Επιστρέφοντας τώρα στην (3.6.14) τα μόνια μη-νηδενικά στοιχεία των  $\mathcal{N}_{ab}{}^C(\Lambda)$  και  $\mathcal{N}_{\hat{a}B}{}^C(\Lambda^T)$  είναι τα

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{ab}{}^{\hat{c}}(\Lambda) &= \frac{1}{\sqrt{k_2}}N_{ab}{}^{\hat{c}}(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0^{-1}) + \frac{1}{\sqrt{k_3}}\tilde{N}_{ab}{}^{\hat{c}}(\lambda, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_0^{-1}), \\ \mathcal{N}_{ab}{}^{\tilde{c}}(\Lambda) &= \frac{1}{\sqrt{k_2}}\tilde{N}_{ab}{}^{\tilde{c}}(\tilde{\lambda}, \lambda, \lambda_0^{-1}) + \frac{1}{\sqrt{k_3}}N_{ab}{}^{\tilde{c}}(\tilde{\lambda}, \lambda, \tilde{\lambda}_0^{-1}), \\ \mathcal{N}_{\hat{a}\hat{b}}{}^c(\Lambda^T) &= \frac{1}{\sqrt{k_1}}\tilde{\mathcal{N}}_{\hat{a}\hat{b}}{}^c(\lambda^T, \tilde{\lambda}, \lambda_0), \\ \mathcal{N}_{\hat{a}\hat{b}}{}^c(\Lambda^T) &= \frac{1}{\sqrt{k_1}}(\lambda^T)_{\hat{a}e}(\tilde{\lambda}^T)_{\tilde{b}d}f_{edf}\Delta_{fc},\end{aligned}\tag{3.6.16}$$

όπου

$$\begin{aligned}N_{ab}{}^\gamma(A, B, \alpha) &= (A_{ae}A_{bd}f_{edf} - \alpha A_{ef}f_{abe})(A^T\Delta(1 - BB^T)A^{-T})_{f\gamma}, \\ \tilde{N}_{ab}{}^\gamma(A, B, \alpha) &= (B_{ae}B_{bd}f_{edf} - \alpha B_{ef}f_{abe})(B^T\Delta A)_{f\gamma}, \quad \text{όπου } \gamma = (\hat{c}, \tilde{c}), \\ \tilde{\mathcal{N}}_{\hat{a}\hat{b}}{}^c(A, B, \alpha) &= (A_{ae}A_{bd}f_{edf} - \alpha A_{ef}f_{abe})\Delta_{fc}, \quad \Delta = \Delta(A, B), \\ \lambda_0 &= \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad \tilde{\lambda}_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_3}}.\end{aligned}\tag{3.6.17}$$

Οι ακριβείς στο  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$   $\beta$ -συναρτήσεις, μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$ , προκύπτουν να είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned}\beta^{a\hat{b}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}}\left(N_{ac}{}^{\hat{d}}(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0^{-1})\tilde{\mathcal{N}}_{\hat{b}\hat{d}}{}^c(\lambda^T, \tilde{\lambda}, \lambda_0) + \tilde{N}_{ac}{}^{\hat{d}}(\tilde{\lambda}, \lambda, \lambda_0^{-1})\lambda_{\hat{b}e}^T\tilde{\lambda}_{\hat{d}i}^T\Delta_{fc}f_{eif}\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{k_1k_3}}\left(\tilde{N}_{ac}{}^{\hat{d}}(\lambda, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_0^{-1})\tilde{\mathcal{N}}_{\hat{b}\hat{d}}{}^c(\lambda^T, \tilde{\lambda}, \lambda_0) + N_{ac}{}^{\hat{d}}(\tilde{\lambda}, \lambda, \tilde{\lambda}_0^{-1})\lambda_{\hat{b}e}^T\tilde{\lambda}_{\hat{d}i}^T\Delta_{fc}f_{eif}\right),\end{aligned}\tag{3.6.18}$$

$$\begin{aligned}\beta^{a\tilde{b}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}}\left(N_{ac}{}^{\tilde{d}}(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0^{-1})\tilde{\lambda}_{\tilde{b}e}^T\lambda_{\tilde{d}i}^T\Delta_{fc}f_{eif} + \tilde{N}_{ac}{}^{\tilde{d}}(\tilde{\lambda}, \lambda, \lambda_0^{-1})\tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{b}\tilde{d}}{}^c(\tilde{\lambda}^T, \lambda, \tilde{\lambda}_0)\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{k_1k_3}}\left(\tilde{N}_{ac}{}^{\tilde{d}}(\lambda, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_0^{-1})\tilde{\lambda}_{\tilde{b}e}^T\lambda_{\tilde{d}i}^T\Delta_{fc}f_{eif} + N_{ac}{}^{\tilde{d}}(\tilde{\lambda}, \lambda, \tilde{\lambda}_0^{-1})\tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{b}\tilde{d}}{}^c(\tilde{\lambda}^T, \lambda, \tilde{\lambda}_0)\right).\end{aligned}\tag{3.6.19}$$

Μπορούν τώρα να μελετηθούν κάποια σημαντικά όρια για τις άνωθεν  $\beta$ -συναρτήσεις:<sup>22</sup>

- Στο διαγώνιο  $\lambda_{a\bar{b}} = \lambda\delta_{ab}$  και  $\tilde{\lambda}_{a\bar{b}} = \tilde{\lambda}\delta_{ab}$  όριο, οι ακριβείς στα  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$   $\beta$ -συναρτήσεις είναι

$$\begin{aligned}\beta_\lambda(\lambda, \tilde{\lambda}) &= -\frac{c_G}{2} \left( \frac{f_1(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0)}{\sqrt{k_1 k_2}} + \frac{f_2(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0)}{\sqrt{k_1 k_3}} \right), \\ \beta_{\tilde{\lambda}}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= -\frac{c_G}{2} \left( \frac{f_2(\tilde{\lambda}, \lambda, \lambda_0)}{\sqrt{k_1 k_2}} + \frac{f_1(\tilde{\lambda}, \lambda, \lambda_0)}{\sqrt{k_1 k_3}} \right), \\ f_1(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0) &= \lambda^2(\lambda - \lambda_0^{-1})(\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 \tilde{\lambda}^2) \Delta_{\text{διαγ.}}^2, \\ f_2(\lambda, \tilde{\lambda}, \lambda_0) &= \lambda \tilde{\lambda}^2 (\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0^{-1})(1 - \lambda_0 \lambda) \Delta_{\text{διαγ.}}^2, \quad \Delta_{\text{διαγ.}} = (1 - \lambda^2 - \tilde{\lambda}^2)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.6.20}$$

Σημειώνεται εδώ ότι οι  $\beta$ -συναρτήσεις των (3.6.18) και (3.6.19) είναι συζευγμένες ακόμα και στο διαγώνιο όριο. Αυτό ήταν αναμενόμενο, διότι παρόλο που τα ρεύματα διαφορετικών αντίγραφων της ομάδας  $G$  έχουν μηδενικό OPE, και οι δύο κορυφές αλληλεπίδρασης της (3.6.2) περιέχουν το χειραλικό ρεύμα  $J_{1+}$  το οποίο έχει μη-μηδενικό OPE με τον εαυτό του. Επιπλέον, οι σχέσεις της (3.6.20) ταυτίζονται με τη σχέση (4.7) της [42] για  $n = 4$  και με  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \lambda$  και  $\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}$ , όπως ήταν αναμενόμενο.

- Στο όριο  $\tilde{\lambda} = 0$  και  $\lambda_{a\bar{b}} = \lambda\delta_{ab}$  οι  $\beta$ -συναρτήσεις γίνονται

$$\beta_\lambda(\lambda, 0, \lambda_0) = -\frac{c_G}{2\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda^2(\lambda - \lambda_0^{-1})(\lambda - \lambda_0)}{(1 - \lambda^2)^2}, \quad \beta_{\tilde{\lambda}}(\lambda, 0, \tilde{\lambda}_0) = 0,\tag{3.6.21}$$

με την  $\beta_\lambda$  να αντιστοιχεί στη  $\beta$ -συνάρτηση (3.6.21) του διπλά παραμορφωμένου, μη-συμμετρικού  $\lambda$ -προτύπου [52, 45] με αντίγραφα ομάδας  $G_{k_1}$  και  $G_{k_2}$  όπως ήταν αναμενόμενο.

- Στο όριο  $\lambda = 0$  και  $\tilde{\lambda}_{a\bar{b}} = \tilde{\lambda}\delta_{ab}$ , η  $\beta_\lambda(0, \tilde{\lambda}, \lambda_0) = 0$ , ενώ η  $\beta_{\tilde{\lambda}}(0, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_0)$  είναι ίδια με την  $\beta_\lambda$  της (3.6.21) αλλά με το  $k_2$  αντικατεστημένο με  $k_3$ , αντιστοιχώντας ξανά στη  $\beta$ -συνάρτηση του διπλά παραμορφωμένου, μη-συμμετρικού προτύπου, αλλά τώρα με αντίγραφα ομάδας  $G_{k_1}$  και  $G_{k_3}$ , όπως ήταν αναμενόμενο.

### Ανώμαλες διαστάσεις στο όριο αποσύζευξης

Εφόσον στόχος είναι ο υπολογισμός της ανώμαλης διάστασης του  $J_{1+}$  για το πρότυπο που περιγράφεται από τη δράση (3.6.1), είναι εφικό οι ενδιάμεσοι υπολογισμοί να γίνουν απεύθειας στο όριο  $\tilde{\lambda} = 0$ , το οποίο απλοποιεί αρκετά τα ενδιάμεσα βήματα. Δεδομένου ότι τα

<sup>22</sup>Στα όρια αυτά χρησιμοποιείται η σχέση  $f_{acd}f_{bcd} = c_G\delta_{ab}$ .



σύμβολα του Christoffel στη δεύτερη σειρά της (3.6.10) δεν περιέχουν πλέον παραγωγίσεις ως προς τα  $\tilde{\lambda}$ , για τον υπολογισμό των διαφορών στοιχείων της (3.6.7) χρειάζονται μόνο όροι τάξης  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^0)$  στη μετρική, και μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda})$  στις  $\beta$ -συναρτήσεις. Στο όριο αυτό λοιπόν, προκύπτουν οι ακόλουθες ποσότητες

$$\begin{aligned} \Lambda_{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{a\hat{b}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (\Lambda^T)_{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\lambda^T)_{\hat{a}b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ g_{AB} &= \begin{pmatrix} \delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda^T \lambda)_{\hat{a}\hat{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\hat{a}\hat{b}} \end{pmatrix}, & g^{AB} &= \begin{pmatrix} \delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda^T \lambda)_{\hat{a}\hat{b}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\hat{a}\hat{b}} \end{pmatrix}, & (3.6.22) \\ \tilde{g}_{AB} &= \begin{pmatrix} \Delta_{ab}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\hat{a}\hat{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\hat{a}\hat{b}} \end{pmatrix}, & \tilde{g}^{AB} &= \begin{pmatrix} \Delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\hat{a}\hat{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\hat{a}\hat{b}} \end{pmatrix}, & \Delta &= (1 - \lambda \lambda^T)^{-1}. \end{aligned}$$

και η γραμμική, ως προς  $\tilde{\lambda}$ , μορφή των  $\beta$ -συναρτήσεων (3.6.18) και (3.6.19) μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} \beta^{a\hat{b}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}'_{ac} \hat{d} \mathcal{N}'_{\hat{b}\hat{d}}{}^{(T)c} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2), \\ \beta^{a\hat{b}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}'_{ac} \hat{d} \tilde{\lambda}_{\hat{b}e}^T \lambda_{\hat{a}i}^T \tilde{g}^{fc} f_{elf} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2), & (3.6.23) \\ \mathcal{N}'_{ab}{}^{\hat{c}} &= \mathcal{N}'_{ab}{}^{\hat{c}}(\lambda, \lambda_0^{-1}) = (\lambda_{a\hat{e}} \lambda_{\hat{b}\hat{d}} f_{\hat{e}\hat{d}\hat{f}} - \lambda_0^{-1} \lambda_{e\hat{f}} f_{abe}) g^{\hat{f}\hat{c}}, \\ \mathcal{N}'_{\hat{a}\hat{b}}{}^{(T)c} &= \mathcal{N}'_{\hat{a}\hat{b}}{}^{(T)c}(\lambda^T, \lambda_0) = (\lambda_{\hat{a}e}^T \lambda_{\hat{b}\hat{d}}^T f_{edf} - \lambda_0 \lambda_{\hat{e}\hat{f}}^T f_{\hat{a}\hat{b}\hat{e}}) \tilde{g}^{fc}, \end{aligned}$$

με τα στοιχεία των  $g$  και  $\tilde{g}$  να είναι αυτά της (3.6.22). Όπως είναι αναμενόμενο, η  $\beta^{a\hat{b}}$  ταυτίζεται με την (3.2.12), αντιστοιχώντας στη  $\beta$ -συνάρτηση του διπλά παραμορφωμένου, μη-συμμετρικού προτύπου της (3.6.1).

Για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων των δύο σύνθετων τελεστών, χρειάζονται οι συναλλοίωτες παράγωγοι των δύο προηγούμενων  $\beta$ -συναρτήσεων στο όριο  $\tilde{\lambda} = 0$ . Τα δύο στοιχεία της ανώμαλης διάστασης που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι τα  $(\gamma_{J_1+J_2-})_{a\hat{b}}{}^{c\hat{d}}$  και  $(\gamma_{J_1+J_3-})_{a\hat{b}}{}^{c\hat{d}}$  που αντιστοιχούν στους σύνθετους τελεστές των κορυφών αλληλεπίδρασης της δράσης (3.6.2). Οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες των συμβόλων Christoffel βρίσκονται στο παράρτημα II', ενώ με χρήση των (3.6.22) και (3.6.23), προκύπτουν οι αντίστοιχες

μερικές παράγωγοι στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο να είναι οι

$$\begin{aligned}\partial_{m\hat{n}}\beta^{a\hat{b}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}} \left( \mathcal{K}_{ac;m\hat{n}}{}^{\hat{d}} \mathcal{N}'_{\hat{d}\hat{a}}{}^{(T)c} + \mathcal{N}'_{ac}{}^{\hat{d}} \mathcal{K}_{\hat{b}\hat{d};\hat{n}m}{}^c \right), & \partial_{m\hat{n}}\beta^{a\bar{b}} &= 0, \\ \partial_{m\hat{n}}\beta^{a\hat{b}} &= 0, & \partial_{m\hat{n}}\beta^{a\bar{b}} &= \frac{\delta_{\hat{n}}{}^{\bar{b}}}{2\sqrt{k_1k_2}} \mathcal{N}'_{ac}{}^{\hat{d}} \lambda_{\hat{d}l}^T \tilde{g}^{fc} f_{mlf},\end{aligned}\quad (3.6.24)$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ab;i\hat{j}}{}^{\hat{c}} &= \mathcal{K}_{ab;i\hat{j}}{}^{\hat{c}}(\lambda, \lambda_0^{-1}) = (\delta_{ai}\lambda_{b\hat{d}} - \delta_{bi}\lambda_{a\hat{d}}) f_{\hat{j}\hat{d}\hat{f}} g^{\hat{f}\hat{c}} - \lambda_0^{-1} f_{abi} g^{\hat{j}\hat{c}} + \mathcal{N}'_{ab}{}^{\hat{d}} (\lambda_{i\hat{k}} \delta_{\hat{j}\hat{d}} + \lambda_{i\hat{d}} \delta_{\hat{j}\hat{k}}) g^{\hat{k}\hat{c}}, \\ \mathcal{K}_{\hat{a}\hat{b};\hat{j}i}{}^c &= \mathcal{K}_{\hat{a}\hat{b};\hat{j}i}{}^c(\lambda^T, \lambda_0) = (\delta_{\hat{a}\hat{j}} \lambda_{\hat{b}d}^T - \delta_{\hat{b}\hat{j}} \lambda_{\hat{a}d}^T) f_{idf} \tilde{g}^{fc} - \lambda_0 f_{\hat{a}\hat{b}\hat{j}} \tilde{g}^{ic} + \mathcal{N}'_{\hat{a}\hat{b}}{}^{(T)d} (\lambda_{\hat{j}\hat{k}}^T \delta_{id} + \lambda_{\hat{j}d}^T \delta_{i\hat{k}}) \tilde{g}^{kc}.\end{aligned}$$

Τέλος, από την (3.6.7) με αντικατάσταση των (3.6.22), (3.6.24) και (Π'.1) προκύπτουν τα στοιχεία των ανώμαλων διαστάσεων για τους σύνθετους τελεστές που εμφανίζονται στη δράση (3.6.2), να είναι

$$\begin{aligned}\gamma_{a\hat{b}}{}^{c\hat{d}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}} \left[ \mathcal{K}_{ce;a\hat{b}}{}^{\hat{s}} \mathcal{N}'_{\hat{d}\hat{s}}{}^{(T)e} + \mathcal{N}'_{ce}{}^{\hat{s}} \mathcal{K}_{\hat{d}\hat{s};\hat{b}a}{}^e + \left( \delta_m^c \delta_{\hat{b}}^{\hat{d}} (\lambda g^{-1})_{a\hat{n}} + \delta_a^c \delta_{\hat{n}}^{\hat{d}} (\lambda g^{-1})_{m\hat{b}} \right) \mathcal{N}'_{me}{}^{\hat{s}} \mathcal{N}'_{\hat{n}\hat{s}}{}^{(T)e} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}^{am} g^{\hat{b}\hat{n}} \tilde{g}_{cp} g_{\hat{d}\hat{q}} \left( \mathcal{K}_{me;p\hat{q}}{}^{\hat{s}} \mathcal{N}'_{\hat{n}\hat{s}}{}^{(T)e} + \mathcal{N}'_{me}{}^{\hat{s}} \mathcal{K}_{\hat{n}\hat{s};\hat{q}p}{}^e \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}^{am} g^{\hat{b}\hat{n}} \tilde{g}_{cp} g_{\hat{d}\hat{q}} \left( \delta_i^m \delta_{\hat{q}}^{\hat{n}} (\lambda g^{-1})_{p\hat{j}} + \delta_p^m \delta_{\hat{j}}^{\hat{n}} (\lambda g^{-1})_{i\hat{q}} \right) \mathcal{N}'_{ie}{}^{\hat{s}} \mathcal{N}'_{\hat{j}\hat{s}}{}^{(T)e} \right],\end{aligned}\quad (3.6.25)$$

το οποίο, μετά από λίγη άλγεβρα, ταυτίζεται με την (3.4.41), καθώς και με την (3.4.45) στο διαγώνιο όριο  $\lambda_{a\hat{b}} = \lambda \delta_{ab}$ , αντιστοιχώντας στην ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή  $J_{1+} J_{2-}$  όπως ήταν αναμενόμενο, και

$$\begin{aligned}\gamma_{a\hat{b}}{}^{c\bar{d}} &= \frac{\delta_{\hat{b}}{}^{\bar{d}}}{2\sqrt{k_1k_2}} \left[ \mathcal{N}'_{ce}{}^{\hat{s}} \lambda_{\hat{s}l}^T \tilde{g}^{fe} f_{alf} + (\lambda g^{-1})_{a\hat{m}} \mathcal{N}'_{ce}{}^{\hat{s}} \mathcal{N}'_{\hat{m}\hat{s}}{}^{(T)e} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}^{am} \tilde{g}_{cp} \left( \mathcal{N}'_{me}{}^{\hat{s}} \lambda_{\hat{s}l}^T \tilde{g}^{fe} f_{plf} + (\lambda g^{-1})_{p\hat{i}} \mathcal{N}'_{me}{}^{\hat{s}} \mathcal{N}'_{\hat{i}\hat{s}}{}^{(T)e} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.6.26)$$

Ωστόσο, υπάρχουν τρία ακόμα μη-μηδενικά στοιχεία που δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}{}^{cd} &= \Gamma_{ab|m\hat{n}}{}^{cd} \beta^{m\hat{n}} + \tilde{g}^{am} g^{bn} \tilde{g}_{cp} g_{dq} \Gamma_{pq|s\hat{r}}{}^{mn} \beta^{s\hat{r}}, \\ \gamma_{\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{c}\hat{d}} &= \Gamma_{\hat{a}\hat{b}|\hat{m}\hat{n}}{}^{\hat{c}\hat{d}} \beta^{\hat{m}\hat{n}} + \tilde{g}^{\hat{a}\hat{m}} g^{\hat{b}\hat{n}} \tilde{g}_{\hat{c}\hat{p}} g_{\hat{d}\hat{q}} \Gamma_{\hat{p}\hat{q}|\hat{s}\hat{r}}{}^{\hat{m}\hat{n}} \beta^{s\hat{r}}, \\ \gamma_{\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{c}\bar{d}} &= \Gamma_{\hat{a}\hat{b}|\hat{m}\hat{n}}{}^{\hat{c}\bar{d}} \beta^{\hat{m}\hat{n}} + \tilde{g}^{\hat{a}\hat{m}} g^{\hat{b}\hat{n}} \tilde{g}_{\hat{c}\hat{p}} g_{\hat{d}\hat{q}} \Gamma_{\hat{p}\hat{q}|\hat{s}\hat{r}}{}^{\hat{m}\hat{n}} \beta^{s\hat{r}},\end{aligned}\quad (3.6.27)$$

ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά στο όριο αποσύζευξης  $\tilde{\lambda} = 0$ . Είναι τώρα δυνατή η μετονομασία όλων των δυνατών ζευγών από δείκτες ως  $(ab) = \mathcal{A}$ ,  $(a\hat{b}) = \mathcal{B}$ ,

$(\tilde{a}\tilde{b}) = \mathcal{C}$ ,  $(\hat{a}\hat{b}) = \mathcal{D}$ , κτλ. έτσι ώστε να προκύψει ένας  $9 \times 9$  πίνακας, όπου κάθε στοιχείο του αντιστοιχεί σε ένα  $(\dim G \times \dim G)$ -διάστατο υποπίνακα. Γίνεται έτσι φανερό ότι όλα τα άνωθεν μη-μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην διαγώνιο αυτού του πίνακα, και συνεπώς, στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές των αντίστοιχων σύνθετων τελεστών. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα στοιχεία που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι τα  $\gamma_{ab}^{cd}$  και  $\gamma_{ab}^{c\tilde{d}}$  που αντιστοιχούν στους διγραμμικούς τελεστές  $J_{1+}J_{2-}$  και  $J_{1+}J_{3-}$  αντίστοιχα. Σημειώνεται εδώ ότι η (3.6.26) έχει προκύψει με τη μορφή τανυστικού γινομένου, με το  $G_{k_3}$  αντίγραφο της ομάδας να είναι αποσυζευγμένο. Το αποτέλεσμα αυτό κανονικά θα αντιστοιχούσε στην ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή  $J_{1+}J_{3-}$ , αλλά εφόσον ισχύει το  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο, το ρεύμα  $J_{3-}$  δεν εμφανίζεται στη δράση, και συνεπώς δεν αποκτά ανώμαλες διαστάσεις.

Έτσι,  $(\gamma_{J_{1+}J_{3-}})_{ab}^{c\tilde{d}} = (\gamma_{J_{1+}})_a^c \delta_b^{\tilde{d}}$ , όπου

$$\begin{aligned} (\gamma_{J_{1+}})_a^c = \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \left[ \mathcal{N}'_{ce} \hat{s} \lambda_{sl}^T \tilde{g}^{fe} f_{alf} + (\lambda g^{-1})_{am} \mathcal{N}'_{ce} \hat{s} \mathcal{N}'_{m\hat{s}}^{(T)e} \right. \\ \left. + \tilde{g}^{am} \tilde{g}_{cp} \left( \mathcal{N}'_{me} \hat{s} \lambda_{sl}^T \tilde{g}^{fe} f_{plf} + (\lambda g^{-1})_{p\hat{i}} \mathcal{N}'_{me} \hat{s} \mathcal{N}'_{i\hat{s}}^{(T)e} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

και τα  $\mathcal{N}'$  είναι αυτά της (3.6.23). Επιπλέον, στο διαγώνιο και ισοτροπικό όριο  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$

$$(\gamma_{J_{1+}})_a^c = \gamma_a^c = \frac{c_G \lambda^2 (\lambda - \lambda_0^{-1})^2}{k_2 (1 - \lambda^2)^3} \delta_a^c \quad (3.6.29)$$

η οποία, όσον αφορά τους δείκτες που αναφέρονται στο πρώτο αντίγραφο της Lie ομάδας, ταυτίζεται με την (2.10.143) με  $k_2 = k_R$ , αντιστοιχώντας στην ανώμαλη διάσταση του απλού χειραλικού ρεύματος  $J_{1+}$ .

Τέλος, η ανώμαλη διάσταση του αντι-χειραλικού ρεύματος  $J_{2-}$  προκύπτει από την (3.6.28) αντικαθιστώντας το  $\lambda$  με  $\lambda^T$  και εναλλάσσοντας τα επίπεδα  $k_1 \leftrightarrow k_2$ , σύμφωνα με την επιχειρηματολογία που έγινε στην αρχή της υποενότητας αυτής. Αυτό έχει επίσης ελεγχθεί διεξοδικά με τη χρήση της μεθόδου του βοηθητικού αντιγράφου της ομάδας Lie. Ωστόσο, ο μακροσκελής αυτός υπολογισμός δεν παρουσιάζεται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, εφόσον στην ουσία αποτελεί επανάληψη των βημάτων της παρούσας παραγράφου, αλλά με χρήση του πίνακα ζεύξης (3.6.5), και παράγει όντως το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Πρέπει να τονισθεί σε αυτό το σημείο, ότι το σωστό αποτέλεσμα για την ανώμαλη διάσταση του  $J_{2-}$  που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, δεν μπορεί να προκύψει από την τελευταία σχέση της (3.6.27), για τους λόγους που αναλύονται στη συνέχεια.

Οι υπόλοιπες τρεις μη-μηδενικές ιδιοτιμές της σχέσης (3.6.27), αντιστοιχούν σε ένα μέρος των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών  $J_{1+}J_{1-}$ ,  $J_{2+}J_{2-}$  ανδ  $J_{3+}J_{2-}$  αντίστοιχα. Οι τε-

λεστές αυτοί δεν εμφανίζονται στη δράση (3.6.2), αλλά εμφανίζουν μη-μηδενική ανώμαλη διάσταση, που προκύπτει ως συνεισφορά από τα επιμέρους απλά ρεύματα  $J_{1+}$  και  $J_{2-}$ , τα οποία εμφανίζονται στην αρχική δράση (ακόμα και στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο) και αποκτούν ανώμαλες διαστάσεις. Ωστόσο, οι σχέσεις της (3.6.27) δεν αντιστοιχούν στις πλήρεις ανώμαλες διαστάσεις αυτών των τελεστών, εφόσον εμπεριέχουν μόνο τη συνεισφορά που προκύπτει από την αλληλεπίδραση του  $J_{1+}J_{2-}$  με τον εαυτό του<sup>23</sup>. Προκειμένου να προκύψει το συνολικό αποτέλεσμα για τις ανώμαλες διαστάσεις αυτών των τελεστών, πρέπει αυτοί να συμπεριληφθούν αρχικά στη δράση, όμοια με την περίπτωση του βοηθητικού  $J_{1+}J_{3-}$ , και στη συνέχεια να θεωρηθεί το όριο όπου οι παράμετροι ζεύξης τους πάνε στο μηδέν<sup>24</sup>. Τότε, θα εμφανιστεί μια επιπρόσθετη συνεισφορά στη ανώμαλη διάσταση του βοηθητικού  $J_{i+}J_{j-}$ , λόγω της αλληλεπίδρασής του με τον εαυτό του. Αυτή η συνεισφορά εμφανίζεται στην (3.6.7) ως η μερική παράγωγος της αντίστοιχης  $\beta$ -συνάρτησης, και στο όριο που η βοηθητική παράμετρος ζεύξης πάει στο μηδέν, επιβιώνει και συνεισφέρει μόνο στην ανώμαλη διάσταση του αντίστοιχου τελεστή, χωρίς να επηρεάζει τα αποτελέσματα για τους υπόλοιπους. Αυτό συμβαίνει διότι στο όριο αποσύζευξης, στο οποίο ανακτάται το  $\lambda$ -πρότυπο της (3.6.1), η μετρική Zamolodchikov είναι μπλόκ-διαγώνια, και εφόσον η  $\beta$ -συνάρτηση της βοηθητικής παραμέτρου ζεύξης μηδενίζεται, δεν εμφανίζεται μίξη στις ανώμαλες διαστάσεις. Έχοντας παρουσιάσει τα άνωθεν επιχειρήματα, γίνεται πλέον φανερό για ποιόν λόγο είναι αδύνατο να προκύψει από την τελευταία σχέση της (3.6.27) το σωστό αποτέλεσμα για τις ανώμαλες διαστάσεις του  $J_{2-}$ .

### 3.6.1.2 Η περίπτωση των δύο παραμέτρων ζεύξης με χρήση υποομάδας και συνσυνόλου

Έστω τώρα ξανά το πρότυπο της (3.6.1), αλλά με τους δείκτες της ομάδας χωρισμένους σε δείκτες μιας υποομάδας  $H \subset G$  και του αντίστοιχου συνσυνόλου  $G/H$ . Ο δείκτης  $A$  της προηγούμενης υποενότητας τροποποιείται, ώστε  $A = (a, \alpha)$ , όπου οι Λατινικοί/Ελληνικοί δείκτες υποδηλώνουν στοιχεία της υποομάδας/συνσυνόλου. Τα καπελάκια και οι περισπωμένες της προηγούμενης υποενότητας, παραλείπονται τώρα από τον συμβολισμό των δεικτών εφόσον ό,τι ακολουθεί αναφέρεται απευθείας στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο, όπου όλα τα αποτελέσματα

<sup>23</sup> Η συνεισφορά στις ανώμαλες διαστάσεις της (3.6.27) έρχεται μόνο από την αλληλεπίδραση του  $J_{1+}J_{2-}$  με τον εαυτό του, και όχι με τον  $J_{1+}J_{3-}$ , εφόσον στο όριο  $\lambda = 0$  όλα τα σύμβολα του Christoffel που εμφανίζονται στην (3.6.27) πολλαπλασιάζονται μόνο με την  $\beta^{ab}$ , και επιπλέον δεν περιέχουν μερικές παραγώγους ως προς το  $\lambda_{ab}$ . Η περίπτωση της (3.6.26) διαφέρει, εφόσον έχουν συμπεριληφθεί παραγωγίσεις ως προς το  $\tilde{\lambda}_{ab}$ .

<sup>24</sup> Η διαδικασία αυτή θα πρέπει να γίνει ανεξάρτητα για τον κάθε σύνθετο τελεστή, προκειμένου να αποφευχθεί η εμφάνιση πιθανής μίξης στον πίνακα της ανώμαλης διάστασης, λόγω παραγωγής νέων διευθύνσεων στη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης. Για παράδειγμα, αν ο τελεστής  $J_{3+}J_{2-}$  προστεθεί στην (3.6.1), τότε τα μόνα δύο μη-μηδενικά στοιχεία της  $\beta^{AB}$  θα πρέπει να είναι τα  $\beta^{ab}$  και  $\beta^{\tilde{a}\tilde{b}}$ . Σε διαφορετική περίπτωση, η διαδικασία θα πρέπει να τροποποιηθεί προκειμένου να συμπεριληφθούν διαφορομορφισμοί, και ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης μπορεί να προκύψει μη-διαγώνιος.

εξαρτώνται μόνο από το  $\lambda_{ab} \rightarrow \lambda_{AB}$ . Τότε, για μη-συμμετρικούς, Einstein χώρους ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις [103, 104]

$$\begin{aligned} f_{ACD}f_{BCD} &= c_G\delta_{AB}, & f_{acd}f_{bcd} &= c_H\delta_{ab}, & f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} &= c_{G/H}\delta_{\alpha\beta}, \\ f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} &= (c_G - c_H)\delta_{ab}, & f_{\alpha\gamma c}f_{\beta\gamma c} &= \frac{1}{2}(c_G - c_{G/H})\delta_{\alpha\beta}, & f_{ab\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

όπου τα  $c_G, c_H$  είναι οι ιδιοτιμές του τετραγωνικού τελεστή Casimir στην συζυγή αναπαράσταση για την ομάδα  $G$  και την υποομάδα  $H$  αντίστοιχα, ενώ το  $c_{G/H}$  είναι απλά μία σταθερά. Για συμμετρικούς χώρους  $f_{\alpha\beta\gamma} = 0$  και  $c_{G/H} = 0$ .

Για ό,τι ακολουθεί στη συνέχεια, έχει θεωρηθεί το όριο  $\tilde{\lambda} = 0$  στην (3.6.2), όπου αναχάται η δράση (3.6.1). Για μια διαγώνια  $\lambda_{AB}$  παραμόρφωση, όπου η θεωρία της υποομάδας και του συνσυνόλου έχουν διαγορευτικές παραμέτρους παραμόρφωσης, τα μη-μηδενικά στοιχεία του πίνακα  $\lambda_{AB}$  είναι τα  $\lambda_{ab} = \lambda_H\delta_{ab}$  και  $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{G/H}\delta_{\alpha\beta}$ . Σκοπός της παρούσας υποενότητας είναι ο υπολογισμός των ανώμαλων διαστάσεων για τα απλά ρεύματα της υποομάδας και του συνσυνόλου  $J_{1+}^a, J_{1+}^\alpha$  για το  $\lambda$ -πρότυπο της (3.6.1), χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας. Η (3.6.26) ξαναγράφεται ως

$$\gamma_{AB}{}^{CD} = \frac{\delta_B^D}{2\sqrt{k_1k_2}}\gamma_A^C, \quad A = (a, \alpha), \quad (3.6.31)$$

όπου, επαναεκφράζοντάς την (3.6.28) σε όρους των  $\beta$ -συναρτήσεων, προκύπτει

$$\begin{aligned} \gamma_A^C &= \mathcal{N}'_{CE}{}^S \lambda_{SL}^T \tilde{g}^{FE} f_{ALF} + 2\sqrt{k_1k_2}(\lambda g^{-1})_{AM}\beta^{CM} \\ &+ \tilde{g}^{AM} \tilde{g}_{CP} \left( \mathcal{N}'_{ME}{}^S \lambda_{SL}^T \tilde{g}^{FE} f_{PLF} + 2\sqrt{k_1k_2}(\lambda g^{-1})_{PI}\beta^{MI} \right), \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

με τους κεφαλαίους δείκτες τώρα να εκφράζουν στοιχεία της υποομάδας και του συνσυνόλου. Οι  $\beta$ -συναρτήσεις ( $\beta^{ab}, \beta^{\alpha\beta}$ ) είναι οι διαγώνιες της (3.2.33), ενώ τα διάφορα στοιχεία του  $\mathcal{N}'$

δίνονται από την (3.6.23) και είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}'_{ab}{}^c(\lambda_H; \lambda_0^{-1}) &= -\frac{\lambda_H(\lambda_0^{-1} - \lambda_H)}{1 - \lambda_H^2} f_{abc} , \\
\mathcal{N}'_{\alpha\beta}{}^c(\lambda_H, \lambda_{G/H}; \lambda_0^{-1}) &= \frac{\lambda_{G/H}^2 - \lambda_0^{-1}\lambda_H}{1 - \lambda_H^2} f_{\alpha\beta c} , \\
\mathcal{N}'_{\alpha\beta}{}^\gamma(\lambda_{G/H}; \lambda_0^{-1}) &= -\frac{\lambda_{G/H}(\lambda_0^{-1} - \lambda_{G/H})}{1 - \lambda_{G/H}^2} f_{\alpha\beta\gamma} , \\
\mathcal{N}'_{ab}{}^\gamma(\lambda_H, \lambda_{G/H}; \lambda_0^{-1}) &= -\frac{\lambda_{G/H}(\lambda_0^{-1} - \lambda_H)}{1 - \lambda_{G/H}^2} f_{ab\gamma} , \\
\mathcal{N}'_{a\beta}{}^\gamma(\lambda_H, \lambda_{G/H}; \lambda_0^{-1}) &= -\frac{\lambda_{G/H}(\lambda_0^{-1} - \lambda_H)}{1 - \lambda_{G/H}^2} f_{a\beta\gamma} , \\
\mathcal{N}'_{ab}{}^c &= \mathcal{N}'_{ab}{}^\gamma = \mathcal{N}'_{\alpha\beta}{}^c = 0 .
\end{aligned} \tag{3.6.33}$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια ότι για την παρούσα επιλογή του πίνακα παραμόρφωσης, τα στοιχεία  $g$  και  $\tilde{g}$  της (3.6.22) είναι

$$\begin{aligned}
g_{ab} &= \tilde{g}_{ab} = (1 - \lambda_H^2)\delta_{ab}, & g_{\alpha\beta} &= \tilde{g}_{\alpha\beta} = (1 - \lambda_{G/H}^2)\delta_{\alpha\beta}, \\
g^{ab} &= \tilde{g}^{ab} = (1 - \lambda_H^2)^{-1}\delta_{ab}, & g^{\alpha\beta} &= \tilde{g}^{\alpha\beta} = (1 - \lambda_{G/H}^2)^{-1}\delta_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

η (3.6.32) δίνει το αποτέλεσμα  $\gamma_a{}^c = (\gamma_{J_{1+}^H})\delta_a{}^c$ , με

$$\gamma_{J_{1+}^H} = \frac{k_2(\lambda_0^{-1} - \lambda_H)^2}{(1 - \lambda_{G/H}^2)^2(1 - \lambda_H^2)^3} \left[ c_G \lambda_{G/H}^2 (1 - \lambda_H^2)^2 - c_H (\lambda_{G/H}^2 - \lambda_H^2) (1 - \lambda_{G/H}^2 \lambda_H^2) \right] \tag{3.6.34}$$

για την ανώμαλη διάσταση του ρεύματος  $J_{1+}^a$  της υποομάδας, και  $\gamma_\alpha{}^\gamma = (\gamma_{J_{1+}^{G/H}})\delta_\alpha{}^\gamma$

$$\begin{aligned}
\gamma_{J_{1+}^{G/H}} &= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \frac{1}{(1 - \lambda_{G/H}^2)^3 (1 - \lambda_H^2)} \left[ c_G (1 - \lambda_{G/H}^2) \times \right. \\
&\quad \times \left( \lambda_0^{-1} (\lambda_{G/H}^2 + \lambda_H^2) + \lambda_{G/H}^2 (\lambda_0 (\lambda_{G/H}^2 + \lambda_H^2) - 4\lambda_H) \right) \\
&\quad + c_{G/H} (\lambda_{G/H} - \lambda_H) \left( \lambda_0^{-1} (1 + \lambda_{G/H}^2) (\lambda_{G/H} + \lambda_H) \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda_{G/H}^2 (\lambda_0 (1 + \lambda_{G/H}^2) (\lambda_{G/H} + \lambda_H) - 4(1 + \lambda_H \lambda_{G/H})) \right) \right] \tag{3.6.35}
\end{aligned}$$

για την ανώμαλη διάσταση του ρεύματος  $J_{1+}^\alpha$  του συνσυνόλου, ενώ  $\gamma_a{}^\gamma = \gamma_\alpha{}^c = 0$ .

Σημειώνεται εδώ ότι και η (3.6.34) αλλά και η (3.6.35) είναι αναλλοίωτες κάτω από την συμμετρία (3.2.34) και στο όριο  $\lambda_{G/H} = \lambda_H = \lambda$  ταυτίζονται με την (3.6.29) όπως ήταν

αναμενόμενο. Επιπλέον, στο όριο  $\lambda_{G/H} = 0$ , η (3.6.34) ανάγεται με συνεπή τρόπο στην (3.6.29) με τα  $c_G$  και  $\lambda$  αντικατεστημένα με  $c_H$  και  $\lambda_H$  αντίστοιχα, εκφράζοντας την ανώμαλη διάσταση του απλού ρεύματος μίας  $\lambda_H$ -παραμορφωμένης θεωρίας με ομάδα  $G$ , όπου μόνο η θεωρία της υποομάδας έχει παραμορφωθεί με παράμετρο παραμόρφωσης  $\lambda_H$ . Με εναλλαγή των  $k_1$  και  $k_2$  στις (3.6.34) και (3.6.35), προκύπτουν οι ανώμαλες διαστάσεις των  $J_{2-}^a$  και  $J_{2-}^a$  ρευμάτων για την υποομάδα και το συνσύνολο. Τέλος, στο όριο των ίσων επιπέδων με  $\lambda_0 = 1$  προκύπτει η ανώμαλη διάσταση  $\gamma_{J_{\pm}^H} = \gamma_{J_{\pm}^H}$  και  $\gamma_{J_{\pm}^{G/H}} = \gamma_{J_{\pm}^{G/H}}$  για τα ρεύματα της υποομάδας και του συνσυνόλου του απλά παραμορφωμένου, συμμετρικού  $\lambda$ -προτύπου.

### 3.6.1.3 Δύο παραδείγματα για την $SU(2)$ ομάδα

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζονται δύο παραδείγματα για  $G = SU(2)$ . Το πρώτο αφορά έναν διαγώνιο και πλήρως ανισοτροπικό πίνακα παραμόρφωσης, ενώ το δεύτερο έναν γενικό, μη-διαγώνιο πίνακα και σαν υποπερίπτωση αυτού εξετάζεται ο πίνακας του ολοκληρώσιμου προτύπου της [57]. Τα δύο αυτά παραδείγματα αποδεικνύονται αρκετά διαφωτιστικά σχετικά με τα αποτελέσματα που προκύπτουν με την εφαρμογή της μεθόδου της παρούσας ενότητας.

#### Η διαγώνια και ανισοτροπική περίπτωση

Εστω τώρα η περίπτωση της  $SU(2)$  με διαγώνιο αλλά πλήρως ανισοτροπικό πίνακα της μορφής

$$\lambda_{ab} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (3.6.36)$$

και τις ακόλουθες  $\beta$ -συναρτήσεις

$$\beta_{\lambda_1} = \frac{(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2\lambda_2\lambda_3(1 + \lambda_1^2)}{\sqrt{k_1 k_2}(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)}, \quad \text{και κυκλικές εναλλαγές στα 1,2,3.} \quad (3.6.37)$$

Για αυτή την επιλογή του πίνακα  $\lambda$ , η δίνει έναν διαγώνιο πίνακα ανώμαλης διάστασης ρευμάτων, με στοιχεία

$$\gamma_1^{-1} = (\gamma_{J_{1+}})_1^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_0^{-1} + \lambda_0\lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)} \quad (3.6.38)$$

και κυκλικές εναλλαγές στα 1,2,3. Στο όριο  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ , η (3.6.38) ανάγεται στην (3.6.29) με  $c_G = 4$ , ενώ για ίσα επίπεδα  $k_1 = k_2$ , στο ισοτροπικό όριο προκύπτει η (2.10.87), ξανά με  $c_G = 4$ , αντιστοιχώντας στην ανώμαλη διάσταση του απλού ρεύματος για την  $SU(2)$ . Επιπλέον, τα στοιχεία της (3.6.38) με τις κυκλικές εναλλαγές τους, είναι

αναλλοίωτα κάτω από την δυϊκού τύπου συμμετρία ( $k_1 \rightarrow -k_2, k_2 \rightarrow -k_1, \lambda_i \rightarrow 1/\lambda_i$ ), όπως ήταν αναμενόμενο. Σημειώνεται εδώ επίσης, ότι για  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  η (3.6.38) ταυτίζεται με τα  $\gamma_1^1$  και  $\gamma_2^2$  στοιχεία της (3.6.35) με  $c_G = 4, c_H = 0$  και  $c_{G/H} = 0$ , αντιστοιχώντας στο  $SU(2)/U(1)$  συμμετρικό συνσύνολο. Επιπροσθέτως, στο χαμηλοενεργειακό σταθερό σημείο της ροής ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$ ), η (3.6.38) ισούται με  $\frac{4}{k_2 - k_1}$ , ενώ η ανώμαλη διάσταση του αντι-χειραλικού ρεύματος μηδενίζεται, αναπαράγοντας τα αποτελέσματα της [45]. Τέλος, από την (3.6.25) υπολογίζεται ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης για τον σύνθετο τελεστή  $J_{1+}J_{2-}$ , με μόνα μη-μηδενικά στοιχεία τα

$$\begin{aligned}\gamma_{1\hat{1}}^{1\hat{1}} &= -\frac{2}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{8\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 + \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)}, \\ \gamma_{1\hat{1}}^{2\hat{2}} &= -\frac{4}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda_3(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2) - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda_1 \lambda_2(1 + \lambda_3^2)}{(1 - \lambda_1^2)^2(1 - \lambda_3^2)}, \\ \gamma_{1\hat{2}}^{1\hat{2}} &= \gamma_{2\hat{1}}^{2\hat{1}} = \frac{2}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)}, \\ \gamma_{1\hat{2}}^{2\hat{1}} &= \gamma_{2\hat{1}}^{1\hat{2}} = \frac{2}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{2\lambda_3(1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2) - (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})\lambda_1 \lambda_2(1 + \lambda_3^2)}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2)},\end{aligned}\tag{3.6.39}$$

και κυκλικές εναλλαγές τους στα 1,2,3. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι τα δύο πρώτα αποτελέσματα της (3.6.39) μαζί με τις κυκλικές εναλλαγές τους, μπορούν να αναπαραχθούν και μέσω της (3.6.7), χρησιμοποιώντας την ανηγμένη  $3 \times 3$  μετρική του χώρου των παραμέτρων ζεύξεως, με στοιχείο μήκους

$$(ds)^2 = G_{ab|cd} d\lambda_{ab} d\lambda_{cd} = \frac{(d\lambda_1)^2}{(1 - \lambda_1^2)^2} + \frac{(d\lambda_2)^2}{(1 - \lambda_2^2)^2} + \frac{(d\lambda_3)^2}{(1 - \lambda_3^2)^2},$$

αντί για την  $9 \times 9$  μετρική που εκφράζεται μέσω του τανυστικού γινομένου (3.6.9). Σε αυτόν τον ανηγμένο χώρο, προκύπτει ένας  $3 \times 3$  πίνακας για την ανώμαλη διάσταση, ο οποίος αναφέρεται μόνο στους τελεστές που υπάρχουν στη δράση (δηλαδή τους  $J_{1+}^1 J_{2-}^1, J_{1+}^2 J_{2-}^2, J_{1+}^3 J_{2-}^3$ , όπου οι πάνω δείκτες συμβολίζουν τα αντίστοιχα στοιχεία της  $su(2)$ ) με παραμέτρους ζεύξης  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  αντίστοιχα. Αντιθέτως, στον συνολικό χώρο των παραμέτρων ζεύξης που περιγράφεται από την  $9 \times 9$  μετρική, εμφανίζονται επιπλέον στοιχεία που αντιστοιχούν στο πλήρες φάσμα των σύνθετων τελεστών  $J_{1+}^i J_{2-}^j$ , με τους δείκτες  $i, j$  να παίρνουν τιμές στην συζυγή αναπαράσταση της  $su(2)$ . Φυσικά, μετά από διαγωνιοποίηση και των δύο πινάκων ανώμαλων διαστάσεων, οι τρεις ιδιοτιμές του ανηγμένου πίνακα, συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο ιδιοτιμών του  $9 \times 9$  πίνακα. Ο λόγος που στον συνολικό χώρο εμφανίζονται και στοιχεία ανώμαλων διαστάσεων για τελεστές που δεν υπάρχουν στη δράση, είναι διότι το αποτέλεσμα (3.6.25) προέκυψε θεωρώντας όλα τα στοιχεία του πίνακα ζεύξης  $\lambda_{ab}$  (και συνεπώς της  $\beta^{ab}$ ) μη-μηδενικά (δηλαδή, στην αρχική δράση όλες οι αλληλεπιδράσεις



ήταν παρούσες). Αυτό διαφέρει από την περίπτωση των αποτελεσμάτων (3.6.25)-(3.6.27) τα οποία παράχθηκαν θεωρώντας πως ο πίνακας  $\Lambda_{AB}$  και η αντίστοιχη  $\beta^{AB}$  έχουν μόνο δύο μη-μηδενικά στοιχεία, και η συνεισφορά από τις παραγωγίσεις των  $\beta$ -συναρτήσεων ως προς τις μηδενικές παραμέτρους ζεύξης του πίνακα  $\Lambda$  δεν έχουν συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς<sup>25</sup>. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι σχέσεις της (3.6.27) αντιστοιχούν μόνο σε ένα μέρος των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών που δεν εμφανίζονται στη δράση με όρο παραμόρφωσης  $\mathcal{J}_{1+}^A \Lambda_{AB} \mathcal{J}_{2-}^B$  (όπου οι κεφαλαίοι δείκτες  $A = (a, \hat{a}, \tilde{a})$  αντιπροσωπεύουν τα τρία αντίγραφα της ομάδας  $G$  και ο πίνακας  $\Lambda$  είναι αυτός της (3.6.4)), ενώ τα επιπλέον στοιχεία που εμφανίζονται στην (3.6.39) αντιστοιχούν στην πλήρη έκφραση των ανώμαλων διαστάσεων για τους τελεστές που δεν εμφανίζονται στη δράση με όρο παραμόρφωσης  $\mathcal{J}_{1+}^a \lambda_{ab} \mathcal{J}_{2-}^b$  (όπου οι δείκτες παίρνουν τιμές στη συζυγή αναπαράσταση της  $su(2)$  και ο πίνακας  $\lambda$  είναι αυτός της (3.6.36)).

Πρέπει να σημειωθεί επίσης σε αυτό το σημείο, ότι για περιπτώσεις, όπως αυτή του επόμενου παραδείγματος, όπου δύο ή περισσότερα στοιχεία του πίνακα  $\lambda_{ab}$  δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του ανηγμένου και του πλήρους χώρου παραμέτρων ζεύξης δεν είναι εφικτή. Αυτό συμβαίνει διότι στον ανηγμένο χώρο, οι σύνθετοι τελεστές διαφέρουν από αυτούς του πλήρους χώρου και έτσι, οι διευθύνσεις των διαφόρων ροών στους δύο χώρους δεν είναι άμεσα συγκρίσιμες.

Τέλος, υπάρχει μία επιπλέον λεπτομέρεια που αξίζει να αναλυθεί, σχετικά με τη συνεισφορά που προκύπτει από τις συναλλοίωτες παραγωγούς ως προς τις παραμέτρους ζεύξης που έχουν τεθεί μηδέν. Το θέμα αυτό προκύπτει όταν γίνεται χρήση της (3.6.25) για τον υπολογισμό του  $9 \times 9$  πίνακα των ανώμαλων διαστάσεων στον πλήρη χώρο παραμέτρων ζεύξης. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, εμφανίζονται επιπλέον στοιχεία που αντιστοιχούν στην ανώμαλη διάσταση σύνθετων τελεστών των οποίων οι παράμετροι ζεύξης έχουν θεωρηθεί μηδεν στη δράση. Μία εύλογη ερώτηση τότε, είναι αν η συνεισφορά από αυτές τις παραμέτρους ζεύξης, επηρεάζει τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τους σύνθετους τελεστές που εμφανίζονται στην αρχική δράση. Η απάντηση είναι ότι όντως τα επηρεάζει, και εν γένει η ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων θα πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή. Οι μόνες περιπτώσεις για τις οποίες τα αποτελέσματα που παράγονται με αυτό τον τρόπο είναι ασφαλή, είναι αυτές για τις οποίες ο  $9 \times 9$  πίνακας της μετρικής είναι διαγώνιος (δηλαδή τα στοιχεία  $g$  και  $\tilde{g}$  είναι διαγώνια) και οι  $\beta$ -συναρτήσεις για τις παραμέτρους που έχουν τεθεί

<sup>25</sup>Ωστόσο, οι μερικές παράγωγοι που υπάρχουν μέσα στα σύμβολα του Christoffel συνεχίζουν να συνεισφέρουν, παρά το γεγονός ότι για τις παραμέτρους  $\lambda_{ab}$ ,  $\lambda_{\hat{a}\hat{b}}$  και  $\lambda_{\tilde{a}\tilde{b}}$  έχει θεωρηθεί το μηδενικό όριο. Αυτό συμβαίνει διότι ο τύπος της δεύτερης γραμμής στην (3.6.10) έχει προκύψει θεωρώντας όλα τα στοιχεία του  $\Lambda$  πίνακα, μη-μηδενικά. Έτσι, για τα στοιχεία (3.6.27), το μηδενικό όριο των αντίστοιχων παραμέτρων ζεύξης αφήνει μια μη-μηδενική συνεισφορά στην ανώμαλη διάσταση. Παρόλα αυτά, στην (3.6.26) (και (3.6.28)) δεν χρειάζεται η παραπάνω ανάλυση, εφόσον όλα τα στοιχεία του  $\tilde{\lambda}_{ab}$  μπορούν να θεωρηθούν μη-μηδενικά κατά την παραγωγή της, και στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο, η εναπομείνουσα συνεισφορά είναι ακριβώς αυτή που χρειάζεται προκειμένου να εξαχθεί το σωστό, μη-μηδενικό αποτέλεσμα (3.6.26) (και (3.6.28)).

μηδέν είναι επίσης μηδενικές (δηλαδή το μηδενικό όριο είναι συμβατό με τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης). Αυτό εξασφαλίζει ότι όλες οι δυνατές συνεισφορές που θα προέκυπταν από τις συναλλοιώτες παραγωγούς (από τις μερικές παραγωγίσεις των  $\beta$ -συναρτήσεων αλλά και από το κομμάτι των συμβόλων Christoffel) μηδενικών παραμέτρων ζεύξης, πολλαπλασιάζονται με την αντίστοιχη (μηδενική)  $\beta$ -συνάρτηση και συνεπώς δεν συνεισφέρουν. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο  $\gamma_{ij}^{m\hat{n}}$  θα αποκτά μόνο συνεισφορά από τους όρους  $\partial_{ij}\beta^{m\hat{n}}$  και  $\Gamma_{ij|pq}^{m\hat{n}}\beta^{pq}$ , όπου η  $\partial_{ij}$  και  $\beta^{pq}$  τώρα, αντιστοιχούν μόνο σε παραμέτρους ζεύξης που υπάρχουν στη δράση. Με αυτό τον τρόπο, προκύπτουν ανώμαλες διαστάσεις για τελεστές που δεν υπάρχουν στην αρχική δράση, και ταυτόχρονα εξασφαλίζεται ότι αυτοί οι τελεστές δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα τελεστών που όντως εμφανίζονται στην δράση. Και τα δύο παραδείγματα της  $SU(2)$  που παρουσιάζονται στην παρούσα υποενότητα έχουν διαγώνια μετρική Zamolodchikov και το μηδενικό όριο των συγκεκριμένων  $\lambda$ -στοιχείων είναι συμβατό με τη ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης. Συνεπώς, και τα δύο αποτελέσματα που παρουσιάζονται για τις ανώμαλες διαστάσεις των σύνθετων τελεστών στα παραδείγματα αυτά, είναι έγκυρα.

Το παραπάνω πρόβλημα, δεν εμφανίζεται στην περίπτωση παραγωγής της σχέσης (3.6.28) με χρήση των συμβόλων Christoffel (3.6.10) για τον πίνακα  $\Lambda_{AB}$ . Παρόλο που η δεύτερη σειρά της (3.6.10) που χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς, έχει παραχθεί για γενικό πίνακα  $\Lambda_{AB}$  με όλα τα στοιχεία του μη-μηδενικά, στο όριο που όλα τα μπλόκ-στοιχεία του  $\Lambda_{AB}$  (εκτός από το  $\lambda_{a\hat{b}}$ ) πηγαίνουν στο μηδέν, η  $9 \times 9$  μετρική είναι διαγώνια (βλ. (3.6.22)). Εφόσον η μετρική αυτή εμφανίζεται μπροστά από τις παραγωγίσεις στον ορισμό των συμβόλων Christoffel, μπορεί να αντικατασταθεί απευθείας εκεί, από τη διαγώνια μορφή της στο όριο αποσύζευξης (όλα τα  $\Lambda_{AB}$  στοιχεία είναι μηδέν, εκτός από τον  $\lambda_{a\hat{b}}$  υποπίνακα), και η έκφραση του  $\Gamma_{ab|m\hat{n}}^{cd}\beta^{m\hat{n}}$  που εμπλέκεται στον υπολογισμό της  $\gamma_{a\hat{b}}^{cd}$  είναι

$$\Gamma_{ab|m\hat{n}}^{cd}\beta^{m\hat{n}} = \frac{1}{2}\tilde{g}_{cq_1}g_{\tilde{d}\tilde{q}_2}[\partial_{a\hat{b}}(\tilde{g}^{q_1m}g^{\tilde{q}_2\hat{n}}) + \partial_{m\hat{n}}(\tilde{g}^{q_1a}g^{\tilde{q}_2\hat{b}}) + \partial_{c\hat{d}}(\tilde{g}^{am}g^{\hat{b}\hat{n}})]\beta^{m\hat{n}}.$$

Γίνεται πλέον εμφανές, ότι οι παραγωγίσεις ως προς  $\lambda_{a\hat{b}}$  δεν δημιουργούν κανένα πρόβλημα, εφόσον οι μερικές παράγωγοι ως προς τα στοιχεία αυτού του υποπίνακα, πολλαπλασιάζονται με τις αντίστοιχες  $\beta^{a\hat{b}}$  (οι οποίες σε ένα συνεπές μηδενικό όριο κάποιων  $\lambda_{a\hat{b}}$  στοιχείων, είναι μη-μηδενικές μόνο για παραμέτρους ζεύξης που υπάρχουν στη δράση)<sup>26</sup>.

<sup>26</sup>Παραγωγίσεις ως προς τον  $\lambda_{a\hat{b}}$  υποπίνακα (ή οποιονδήποτε άλλο υποπίνακα εκτός του  $\lambda_{a\hat{b}}$ ) δεν δημιουργούν πρόβλημα, εφόσον υπάρχει η ελευθερία επιλογής όλων των στοιχείων του (τους) ώστε να είναι μη-μηδενικά. Συνεπώς, οι μερικές παράγωγοι ως προς αυτούς είναι πάντοτε καλώς ορισμένες.

### Η μη-διαγώνια περίπτωση

Είναι τώρα δυνατή η μετάβαση στη μη-διαγώνια περίπτωση με έναν πίνακα παραμόρφωσης της ακόλουθης μορφής

$$\lambda_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6.40)$$

Η επιλογή του άνωθεν πίνακα δεν παράγει καινούριες ροές κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης και συνεπώς δεν χρειάζεται η συμπερίληψη διαφορομορφισμών στους υπολογισμούς. Έτσι, οι  $\beta$ -συναρτήσεις δίνονται απλώς με αντικατάσταση του πίνακα (3.6.40) στη σχέση (3.6.23) να είναι οι

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_1} &= \lambda_1 f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & \beta_{\lambda_2} &= \lambda_2 f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2(1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3}{\sqrt{k_1 k_2}(1 - \lambda_3^2)(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \\ \beta_{\lambda_3} &= -\frac{2}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_0^{-1} - \lambda_3)}{(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.6.41)$$

Δεδομένου ότι σε όλους τους προηγούμενους υπολογισμούς για την  $\gamma_{AB}{}^{CD}$  έχουν χρησιμοποιηθεί οι παραγωγίσεις  $\partial_{IJ}\Lambda_{AB} = \delta_{IA}\delta_{JB}$ , θεωρώντας όλα τα στοιχεία του πίνακα  $\Lambda$  ανεξάρτητα μεταξύ τους, θα πρέπει εν γένει πίνακες σαν τον (3.6.40) να αντιμετωπίζονται με προσοχή. Ωστόσο, εφόσον στον υπολογισμό της (3.6.28) στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο συνεισφέραν μόνο παραγωγίσεις ως προς το  $\tilde{\lambda}$ , είναι δυνατή η απλή αντικατάσταση του πίνακα (3.6.40) στο αποτέλεσμα (3.6.28). Πρέπει να αναφερθεί εδώ ότι εν γένει αυτό δεν ισχύει για την περίπτωση της ανώμαλης διάστασης του σύνθετου τελεστή  $J_{1+}J_{2-}$ , εφόσον για την εξαγωγή της σχέσης (3.6.25), έχει χρησιμοποιηθεί η μερική παράγωγος  $\partial_{a\bar{b}}\beta^{c\bar{d}}$ , θεωρώντας όλα τα στοιχεία του  $\lambda$  πίνακα μη-μηδενικά και ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Τότε, από την (3.6.28) προκύπτουν τα ακόλουθα στοιχεία ανώμαλων διαστάσεων για τα απλά ρεύματα

$$\begin{aligned} \gamma_1^1 = \gamma_2^2 &= \frac{2}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda_0^{-1}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(1 + \lambda_0^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)) - 4\lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2(1 - \lambda_3^2)}, \\ \gamma_3^3 &= \frac{4}{\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\lambda_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_0^{-1} - \lambda_3)^2}{(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2(1 - \lambda_3^2)}, \end{aligned} \quad (3.6.42)$$

ενώ όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά<sup>27</sup>. Μία παρατήρηση εδώ είναι ότι το όριο  $\lambda_2 = 0$  και  $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda$  είναι συνεπές, και στα πλαίσιά του, η σχέση (3.6.42) ανάγεται στην (3.6.29) όπως ήταν αναμενόμενο. Για ακόμα μία φορά, το αποτέλεσμα (3.6.42) είναι αναλλοίωτο κάτω από τη συμμετρία (2.10.188), που περιλαμβάνει την αντιστροφή του πίνακα  $\lambda_{a\bar{b}}$  και την ανταλλαγή των επιπέδων  $k_1 \leftrightarrow k_2$ .

Στη συνέχεια, αν επιβληθεί περαιτέρω μείωση των ανεξάρτητων κατευθύνσεων ροής του πίνακα  $\lambda_{a\bar{b}}$ , όπως στην ολοκληρώσιμη περίπτωση της [57] όπου

$$\lambda_1 = \frac{\zeta^2(1+\lambda)^2 + 4\lambda}{\zeta^2(1+\lambda)^2 + 4}, \quad \lambda_2 = \frac{2\zeta(1-\lambda^2)}{\zeta^2(1+\lambda)^2 + 4}, \quad \lambda_3 = \lambda, \quad (3.6.43)$$

οι διαφορομορφισμοί είναι απαραίτητοι προκειμένου να γίνει εφικτή η συνεπής αναγωγή του τρισδιάστατου χώρου των παραμέτρων ζεύξης  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  σε έναν διδιάστατο με παραμέτρους τις  $(\lambda, \zeta)$ .

Σύμφωνα με το παράρτημα ΙΔ', προκύπτει ο διαφορομορφισμός  $\hat{\zeta}'(\lambda, \zeta; \lambda_0) = (0, 0, \hat{\zeta}^3(\lambda, \zeta; \lambda_0))$  με

$$\hat{\zeta}^3(\lambda, \zeta; \lambda_0) = \zeta \frac{(1 + \lambda_0^{-2})(4\lambda + (1 + \lambda)^2\zeta^2) - 2\lambda_0^{-1}(4(1 - \lambda + \lambda^2) + (1 + \lambda)^2\zeta^2)}{4\sqrt{2}(\lambda - \lambda_0^{-1})(1 - \lambda)^2}, \quad (3.6.44)$$

ο οποίος αντιστοιχεί σε μία γενίκευση του προτύπου που αναλύεται στην [57], με διαφορετικά Kac-Moody επίπεδα.

Τότε, οι  $\beta$ -συναρτήσεις για τις νέες παραμέτρους ζεύξης  $\lambda$  και  $\zeta$ , υπό την παρουσία του διαφορομορφισμού (3.6.44) είναι

$$\beta_\lambda = -\frac{(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0^{-1} - \lambda)(4 + (1 + \lambda)^2\zeta^2)(4\lambda^2 + (1 + \lambda)^2\zeta^2)}{8\sqrt{k_1 k_2}(1 - \lambda)^2},$$

$$\beta_\zeta = \frac{(2 + \lambda_0 + \lambda_0^{-1})\zeta(16\lambda^2 + 4(1 + \lambda^2)(1 + \lambda)^2\zeta^2 + (1 + \lambda)^4\zeta^4)}{16\sqrt{k_1 k_2}(1 - \lambda)(1 + \lambda)^3}. \quad (3.6.45)$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι  $\beta_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  της (3.6.41) αποκτούν μια επιπρόσθετη συνεισφορά της μορφής  $\mathfrak{D}^{a\bar{b}}$  όπως δίνεται από τη σχέση (ΙΔ'.2). Έτσι, συνδυάζοντας την (3.6.7) με τις (ΙΔ'.3) και (ΙΔ'.7) στην (ΙΔ'.8), ο πίνακας της ανώμαλης διάστασης για το  $J_{1+}$  ρεύμα,

<sup>27</sup> Η διαγώνια μορφή του πίνακα των ανώμαλων διαστάσεων σε αυτό το παράδειγμα προέκυψε λόγω του ότι τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα (3.6.40) έχουν αντίθετες τιμές. Φυσικά, για οποιαδήποτε άλλη επιλογή μη-διαγώνιου πίνακα, η ανώμαλη διάσταση αναμένεται να είναι μη-διαγώνιας μορφής πίνακας.

Ένα τέτοιο παράδειγμα, είναι η διαγώνια περίπτωση της  $SU(2)$  με τον συμμετρικό πίνακα  $\lambda_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ , όπου επίσης δεν χρειάζονται διαφορομορφισμοί. Τότε, ο πίνακας  $(\gamma_{J_{1+}})_a^c$  της ανώμαλης διάστασης είναι μη-διαγώνιος, και κάθε στοιχείο του συνεχίζει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τον δυϊκό τύπου μετασχηματισμό (2.10.188).

θα πρέπει να δίνεται από την (3.6.42) με μία επιπλέον συνεισφορά της μορφής  $\frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} (\delta_p^a \delta_c^m + \tilde{g}^{am} \tilde{g}_{cp}) (\lambda_0 \lambda_{ps} \mathcal{N}'_{mr}{}^s - f_{mrp}) \hat{\zeta}^r$ . Ωστόσο, στο παρόν παράδειγμα, η συνεισφορά των διαφορομορφισμών στην ανώμαλη διάσταση προκύπτει να είναι μηδενική, και συνεπώς, η (3.6.42) παραμένει ως έχει. Τα στοιχεία της, σε όρους των παραμέτρων ζεύξης  $\lambda$  και  $\zeta$  γράφονται ως

$$\begin{aligned} \gamma_1^1 = \gamma_2^2 &= \frac{1}{8\sqrt{k_1 k_2} (1 - \lambda^2)^3} \left[ (4\lambda^2 + (1 + \lambda)^2 \zeta^2) \left( (1 + \lambda)^2 \zeta^2 (\lambda_0 (1 + \lambda^2) - 4\lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 8\lambda(2 - \lambda_0 \lambda) \right) + \lambda_0^{-1} (32\lambda^2 + 4(1 + \lambda)^2 (1 + 3\lambda^2) \zeta^2 + (1 + \lambda)^4 (1 + \lambda^2) \zeta^4) \right] \\ \gamma_3^3 &= \frac{\lambda_0 (\lambda - \lambda_0^{-1})^2 (4 + (1 + \lambda)^2 \zeta^2) (4\lambda^2 + (1 + \lambda)^2 \zeta^2)}{4\sqrt{k_1 k_2} (1 - \lambda^2)^3} \end{aligned} \quad (3.6.46)$$

και είναι αναλλοίωτα κάτω από το μετασχηματισμό

$$\lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad \zeta \rightarrow -\zeta, \quad k_1 \rightarrow -k_2, \quad k_2 \rightarrow -k_1,$$

ο οποίος είναι η έκφραση της δυϊκού τύπου συμμετρίας στον ανηγμένο χώρο με συντεταγμένες τις παραμέτρους ζεύξης  $(\lambda, \zeta)$ .

Τέλος, ακολουθούν κάποια σχόλια αναφορικά με τις ανώμαλες διαστάσεις των σύνθετων τελεστών. Είναι πάλι δυνατός ο υπολογισμός του πίνακα των ανώμαλων διαστάσεων, τόσο στον συνολικό χώρο με απεύθείας χρήση της σχέσης (3.6.25), όσο και στον ανηγμένο χώρο, υπολογίζοντας πρώτα την αντίστοιχη  $3 \times 3$  μετρική

$$(ds)^2 = \frac{(d\lambda_1)^2}{(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} + \frac{(d\lambda_2)^2}{(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{(d\lambda_3)^2}{(1 - \lambda_3^2)^2}.$$

Ωστόσο, όπως σχολιάστηκε και στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου, μια άμεση σύγκριση μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων είναι άνευ σημασίας. Στην προκειμένη περίπτωση, με πίνακα παραμόρφωσης αυτόν της σχέσης (3.6.40), οι τελεστές που εμφανίζονται στη δράση, στον ανηγμένο χώρο ομαδοποιούνται στους:  $\mathcal{O}^1 = J_{1+}^1 J_{2-}^1 + J_{1+}^2 J_{2-}^2$ ,  $\mathcal{O}^2 = J_{1+}^1 J_{2-}^2 - J_{1+}^2 J_{2-}^1$  και  $\mathcal{O}^3 = J_{1+}^3 J_{2-}^3$  με παραμέτρους ζεύξης  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$  αντίστοιχα. Γίνεται τώρα εμφανές, ότι το μόνο αποτέλεσμα ανώμαλης διάστασης που μπορεί να συγκριθεί (και να είναι ίσο) με αυτό του συνολικού χώρου, είναι αυτό που αντιστοιχεί στον τελεστή  $J_{1+}^3 J_{2-}^3$ . Φυσικά, οι τρεις ιδιοτιμές του ανηγμένου πίνακα της ανώμαλης διάστασης, εμφανίζονται πάλι ως υποσύνολο των ιδιοτιμών του  $9 \times 9$  πίνακα.

### 3.7 Μία ακριβής συμμετρία ως προς όλες τις παραμέτρους σύζευξης

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται μια γενίκευση της δυϊκού τύπου συμμετρίας και κάποια από τα ακριβή σε επίπεδο ενός βρόγχου αποτελέσματα της εργασίας επεκτείνονται σε δύο βρόγχους ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλα  $k$ , παραμένοντας ακριβή ως προς τις παραμέτρους της παραμόρφωσης.

Σημείο αφετηρίας είναι η δράση του διπλά παραμορφωμένου, συμμετρικού  $\lambda$ -προτύπου (2.10.167) με  $(\lambda_2)_{ab} = 0$  και  $(\lambda_1)_{ab} = \lambda_{ab}$  [39, 40] και πιο συγκεκριμένα,

$$S = S_{WZW;k}(g_1) + S_{WZW;k}(g_2) + \frac{k\lambda_{ab}}{\pi} \int d^2\sigma J_{1+}^a J_{2-}^b, \quad (3.7.1)$$

όπου σύμφωνα με τις συμβάσεις και τους ορισμούς που ίσχυαν μέχρι τώρα,  $S_{WZW;k}(g)$  είναι η WZW δράση σε επίπεδο  $k$  [90]

$$S_k(g) = \frac{k}{2\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(\partial_+ g^{-1} \partial_- g) + S_{WZ,k}(g), \quad S_{WZ,k}(g) = \frac{k}{12\pi} \int_B \text{Tr}(g^{-1} dg)^3. \quad (3.7.2)$$

Ο πρώτος λόγος επιλογής της συγκεκριμένης δράσης έναντι αυτής του απλά παραμορφωμένου προτύπου είναι ότι, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, η γραμμικοποιημένη μορφή (3.7.1) είναι στην πραγματικότητα η ενεργός δράση για το υπό μελέτη πρότυπο, η οποία περιλαμβάνει όλα τα κβαντικά φαινόμενα που σχετίζονται με την παράμετρο παραμόρφωσης  $\lambda_{ab}$ , και συνεπώς δεν επιδέχεται περαιτέρω  $\lambda$ -διορθώσεις. Ο δεύτερος λόγος επιλογής της (3.7.1) έναντι της (2.10.20) είναι ότι, όπως αποδείχθηκε σε προηγούμενη ενότητα και στην [51] μέσω επιχειρημάτων σύμμορφης θεωρίας πεδίου, και οι δύο αυτές δράσεις έχουν την ίδια  $\beta$ -συνάρτηση για την παράμετρο  $\lambda_{ab}$  σε όλες τις τάξεις τόσο ως προς το  $\lambda_{ab}$ , όσο και ως προς το ανάπτυγμα σε  $1/k$ . Αυτό ισχύει αυστηρά μόνο στην περίπτωση που έχει επιλεγεί να μηδενίζεται η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων μεταξύ ενός χειραλικού και ενός αντιχειραλικού ρεύματος. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι αυτή ακριβώς η επιλογή είναι που κάνει φανερή τη δυϊκού τύπου συμμετρία [46]. Ο τρίτος λόγος επιλογής της (3.7.1) είναι ότι δεν επιδέχεται κβαντικές διορθώσεις, σε αντίθεση με τη δράση του απλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου.

Η δράση (3.7.1) έχει δύο ενδιαφέροντα όρια, για  $\lambda_{ab} \rightarrow \pm\delta_{ab}$ , που αντιστοιχούν στο PCM και το Ψευδοχειραλικό πρότυπο. Πιο συγκεκριμένα, για το  $\lambda_{ab} \rightarrow \delta_{ab}$  όριο, η (3.7.1) ξανα-

γράφεται ως

$$S = S_k(g_2 g_1) + (\lambda_{ab} - \delta_{ab}) \int d^2\sigma J_{1+}^a J_{2-}^b, \quad (3.7.3)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα Polyakov–Wiegmann (PW) [116]<sup>28</sup>. Στην συνέχεια, εστιάζοντας στο όριο

$$\lambda_{ab} = \delta_{ab} - \frac{E_{ab}}{k}, \quad k \gg 1, \quad g_1 = g_2^{-1} \left( \mathbb{1} + i \frac{u^a t_a}{\sqrt{k}} \right) + \dots, \quad (3.7.4)$$

η δράση (3.7.3) παίρνει τη μορφή ενός PCM προτύπου, με  $\dim G$  επιπρόσθετα ελεύθερα μποζόνια  $u^a$

$$S_{\text{PCM}} = -\frac{E_{ab}}{\pi} \int d^2\sigma \text{Tr}(t^a g_2^{-1} \partial_+ g_2) \text{Tr}(t^b g_2^{-1} \partial_- g_2) + \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_+ u^a \partial_- u^a. \quad (3.7.5)$$

Σημειώνεται εδώ ότι ένα παρόμοιο της (3.7.4) όριο, για το απλά παραμορφωμένο πρότυπο της [38], οδηγεί στο μη-Αβελιανό T-δυσικό του PCM σ-πρότυπο. Αυτό ήταν αναμενόμενο, εφόσον η (3.7.1) είναι κανονικά ισοδύναμη [62] με το άθροισμα μίας WZW δράσης και της λ-παραμορφωμένης δράσης της [38]. Τα δύο αυτά όρια απλώς συνδέουν το PCM πρότυπο με το μη-Αβελιανό T-δυσικό του, τα οποία είναι γνωστό ότι είναι επίσης κανονικά ισοδύναμα [117, 118]. Το όριο αυτό είναι ένας τρόπος για να αποκτήσει νόημα η θεωρία στις χαμηλές ενέργειες, δηλαδή όταν το  $\lambda$  πλησιάζει τη μονάδα και επικρατούν φαινόμενα ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

Όσον αφορά το  $\lambda_{ab} \rightarrow -\delta_{ab}$  όριο, η (3.7.1) ξαναγράφεται με χρήση της ταυτότητας PW ως

$$S = S_k(g_2 g_1^{-1}) + 2S_{\text{WZ},k}(g_1) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma (D_1 + \lambda)_{ab} J_{1+}^a J_{2-}^b. \quad (3.7.6)$$

Εστιάζοντας τώρα στο λίγο διαφορετικό όριο

$$\begin{aligned} \lambda_{ab} &= -\delta_{ab} + \frac{E_{ab}}{k^{1/3}}, \quad k \gg 1, \\ g_1 &= \mathbb{1} + i \frac{v^a t_a}{2k^{1/3}} - i \frac{u^a t_a}{2k^{1/2}} + \dots, \quad g_2 = \mathbb{1} + i \frac{v^a t_a}{2k^{1/3}} + i \frac{u^a t_a}{2k^{1/2}} + \dots, \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

η δράση (3.7.6) παίρνει τη μορφή του γενικευμένου ψευδοχειραλικού προτύπου της [44], το οποίο προκύπτει παίρνοντας ένα παρόμοιο όριο με αυτό της (3.7.7) στο απλά παραμορφωμένο

<sup>28</sup>Στις συμβάσεις της παρούσας εργασίας, η ταυτότητα PW είναι η ακόλουθη

$$S_k(g_2 g_1) = S_k(g_1) + S_k(g_2) + \frac{k}{\pi} \int d^2\sigma J_{1+}^a J_{2-}^a.$$

πρότυπο, σύν κάποια επιπλέον  $\dim G$  ελεύθερα μποζόνια  $u^a$

$$S_{\text{pseudo}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \left( E_{ab} + \frac{1}{3} f_{ab} \right) \partial_+ v^a \partial_- v^b + \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_+ u^a \partial_- u^a, \quad (3.7.8)$$

όπου  $f_{ab} = f_{abc} v^c$ . Για διαγώνιο πίνακα  $E_{ab}$ , η (3.7.8) είναι το σύννηθες ψευδοδύϊκό πρότυπο της [136]. Όπως και σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, τα δύο αυτά όρια πρέπει να υπάρχουν και να είναι καλώς ορισμένα και σε κβαντικό επίπεδο, όσον αφορά τις φυσικές ποσότητες που υπολογίζονται.

### 3.7.1 Η περίπτωση χώρου ομάδας

Στην ενότητα αυτή υπολογίζεται η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης που αντιστοιχεί στην δράση (3.7.1), σε επίπεδο δύο-βρόγχων ως προς το  $1/k$  ανάπτυγμα. Ο υπολογισμός γίνεται για την περίπτωση μιας ημι-απλής Lie ομάδας  $G$  και για διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα παραμόρφωσης  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$  με τεχνικές βαρύτητας, και παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα IB'. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι το υπό μελέτη πρότυπο είναι επανακανονικοποιήσιμο σε τάξη  $1/k^2$ , και ότι δεν χρειάζονται διαφορομορφισμοί ή επιπλέον αντισταθμιστικοί όροι.

Η  $\beta$ -συνάρτηση για την παράμετρο  $\lambda$  είναι (IB'.1)

$$\beta^\lambda(\lambda) = \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G}{2k} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{c_G^2}{2k^2} \frac{\lambda^4(1-2\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^5}, \quad (3.7.9)$$

όπου  $t = \ln \mu^2$ ,  $\mu$  είναι η κλίμακα της ομάδας επανακανονικοποίησης και  $c_G$  είναι η ιδιοτιμή του τετραγωνικού τελεστή Casimir στη συζυγή αναπαράσταση της ημι-απλής ομάδας  $G$ , δηλαδή  $f_{acd} f_{bcd} = c_G \delta_{ab}$  με τις σταθερές δομής  $f_{abc}$  εδώ να είναι πραγματικές. Η τάξη  $k$  δεν ρέει ούτε σε επίπεδο δύο-βρόγχων, διατηρώντας έτσι την τοπολογική φύση της και σε αυτήν την τάξη. Τέλος, η πάνω  $\beta$ -συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη στα δύο όρια γύρω από το  $\lambda = \pm 1$  που αναλύθηκαν παραπάνω και μελετώνται αναλυτικά στην παράγραφο IB'.1 του παραρτήματος IB'.

## Η συμμετρία

Έχει γίνει η υπόθεση στην [46] ότι πέραν του κυρίαρχου ως προς το  $1/k$  ανάπτυγμα όρου, η θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad k \rightarrow -k - c_G, \quad (3.7.10)$$

αλλά εύκολα φαίνεται ότι η (3.7.9) δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό αυτό σε τάξη  $1/k^2$ . Επιπλέον, αναφέρεται επίσης στην [46], ότι η συμμετρία (3.7.10)



είναι εμφανής μόνο για την περίπτωση που η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων για ένα χειραλικό και ένα αντι-χειραλικό ρεύμα μηδενίζεται. Το γεγονός ότι η  $\beta$ -συνάρτηση (3.7.9) σε επίπεδο δύο-βρόγχων δεν σέβεται τη συμμετρία (3.7.10), υποδεικνύει ότι το σχήμα ομαλοποίησης που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς μέσω τεχνικών βαρύτητας, δεν είναι συμβατό με το συμμετρικό ως προς τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα σχήμα ομαλοποίησης της σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Ωστόσο, μέσω ενός επαναορισμού της παραμέτρου  $\lambda$ , είναι δυνατόν να βρεθεί ένα κατάλληλο σχήμα ομαλοποίησης στο οποίο η  $\beta$ -συνάρτηση θα σέβεται τη συμμετρία (3.7.10) σε τάξη  $1/k^2$ . Με βάση τη γενική δομή της  $\beta$ -συνάρτησης αλλά και των ανώμαλων διαστάσεων του σύνθετου τελεστή [50] μέχρι την τάξη  $1/k$ , γίνεται η εξής υπόθεση για τον επαναορισμό της παραμέτρου  $\lambda$

$$\lambda = \tilde{\lambda} \left( 1 + \frac{c_G}{k} \frac{P(\tilde{\lambda})}{(1 - \tilde{\lambda})(1 + \tilde{\lambda})^3} \right), \quad (3.7.11)$$

όπου η  $P(\tilde{\lambda})$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση του  $\tilde{\lambda}$ . Στη συνέχεια, επιβάλλεται η  $\beta$ -συνάρτηση να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό

$$\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}^{-1}, \quad k \rightarrow -k - c_G, \quad (3.7.12)$$

γεγονός που επιβάλλει η  $P(\tilde{\lambda})$  να ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\tilde{\lambda}^3 P'(\tilde{\lambda}^{-1}) - \tilde{\lambda} P'(\tilde{\lambda}) + \frac{\tilde{\lambda}^4(\tilde{\lambda}^2 - 3)}{1 - \tilde{\lambda}^2} P(\tilde{\lambda}^{-1}) + \frac{1 - 3\tilde{\lambda}^2}{1 - \tilde{\lambda}^2} P(\tilde{\lambda}) + 1 - \tilde{\lambda}^4 = 0. \quad (3.7.13)$$

Η εξίσωση αυτή έχει ως λύση το πολυώνυμο τετάρτου βαθμού

$$P(\tilde{\lambda}) = (1 - \tilde{\lambda}^2) [(1 + d_0)\tilde{\lambda}^2 + d_1\tilde{\lambda} + d_0], \quad (3.7.14)$$

όπου οι  $d_{0,1}$  είναι δύο αυθαίρετες σταθερές (η μία εκ των οποίων εμφανίζεται λόγω του ότι η διαφορική εξίσωση εμπεριέχει όρους τόσο  $\tilde{\lambda}$ , όσο και  $1/\tilde{\lambda}$  ως ορίσματα της  $P(\tilde{\lambda})$ ). Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη επαναπαραμετροποίηση στην (3.7.9), προκύπτει ότι

$$\beta^{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) = -\frac{c_G \tilde{\lambda}^2}{2k(1 + \tilde{\lambda})^2} - \frac{c_G^2 \tilde{\lambda}^2 [d_0(1 - \tilde{\lambda}^2)^2 + \tilde{\lambda}^2(\tilde{\lambda}^2 + 2\tilde{\lambda} - 2)]}{2k^2(1 - \tilde{\lambda})(1 + \tilde{\lambda})^5}. \quad (3.7.15)$$

Μια παρατήρηση εδώ είναι ότι παρόλο που η σταθερά  $d_1$  δεν εμφανίζεται στην πάνω έκφραση, η  $d_0$  εμφανίζεται και συνεπώς πρέπει να προσδιορισθεί. Για τον υπολογισμό αυτό λαμβάνεται υπόψιν η εξάρτηση του πάνω αποτελέσματος από το σχήμα ομαλοποίησης όσον αφορά το  $k$ , και το ζητούμενο είναι η ταύτιση αυτού του σχήματος ομαλοποίησης με το αντίστοιχο των διαταραχών της σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Χρησιμοποιώντας το τελευταίο,

για μικρό  $\tilde{\lambda}$  η αντίστοιχη συνεισφορά στη  $\beta$ -συνάρτηση μπορεί μόνο να είναι της μορφής  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2/k)$  ενώ όροι της μορφής  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2/k^2)$  δεν πρέπει να εμφανίζονται. Εναλλακτικά, η ανώμαλη διάσταση του σύνθετου τελεστή  $J^a \bar{J}^a$  διαταρακτικά είναι μίας τάξης μικρότερη ως προς  $\tilde{\lambda}$  από ότι η  $\beta$ -συνάρτηση<sup>29</sup>. Όμως, αυτή η ανώμαλη διάσταση δεν μπορεί να έχει όρο τάξης  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}/k^2)$  εφόσον, ένας γραμμικός στο  $\tilde{\lambda}$  όρος θα προέκυπτε από μία μόνο διαταρακτική εισαγωγή του τελεστή στην συνάρτηση επιμερισμού δύο σημείων. Η μονή εισαγωγή όμως καταλήγει σε ολοκληρώματα που περιλαμβάνουν ένα γινόμενο από μία ολομορφική και μία αντι-ολομορφική συνάρτηση συσχετισμού τριών σημείων και στις κανονικοποιήσεις της παρούσας εργασίας κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις συσχετισμού συνεισφέρει κατά έναν όρο  $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$  [50, 45]. Συνεπώς, πρέπει να γίνει η απαίτηση, ο όρος τάξης  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2/k^2)$  της (3.7.15) να μηδενίζεται. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας για παράδειγμα  $d_0 = 0$ , όπου σε αυτήν την περίπτωση ο δεύτερος όρος της (3.7.15) δίνει μια συνεισφορά  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^4/k^2)$ . Η επιλογή αυτή όμως είναι προβληματική εφόσον στη συνέχεια εμφανίζονται μη-αναλυτικοί όροι με κλάδους της μορφής  $\ln \frac{1-\tilde{\lambda}}{1+\tilde{\lambda}}$ , κατά τον υπολογισμό της  $C$ -συνάρτησης. Η απουσία τέτοιας μορφής όρων επιβάλλει το  $d_0 = -1/2$  το οποίο επιλέγεται και χρησιμοποιείται σε ότι ακολουθεί. Με την τελευταία επιλογή όμως για την  $d_0$ , η  $\beta$ -συνάρτηση (3.7.15) περιλαμβάνει όρο τάξης  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2/k^2)$ , ο οποίος προκειμένου να απαλειφθεί χρειάζεται να γίνει επαναορισμός της διαταρακτικής παραμέτρου από  $1/k$  σε  $1/k_G$ , όπου το  $k_G$  είναι το  $k$  αλλαγμένο κατά μία σταθερά ανάλογη του  $c_G$ . Προκύπτει ότι ο σωστός επαναορισμός είναι τελικά

$$k_G = k + \frac{c_G}{2}. \quad (3.7.16)$$

Αυτός είναι ο σωστός συνδυασμός του  $k$  και  $c_G$  που εμφανίζεται και στην κατασκευή κατά Sugawara του τανυστή ενέργειας-ορμής για τις σύμμορφες θεωρίες με άλγεβρες ρευμάτων, καθώς και στις σύμμορφες διαστάσεις των αντίστοιχων πρωτευόντων τελεστών. Τότε η (3.7.15) απλοποιείται στην

$$\beta^{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) = -\frac{c_G \tilde{\lambda}^2}{2k_G(1+\tilde{\lambda})^2} - \frac{c_G^2 \tilde{\lambda}^3(1-\tilde{\lambda}+\tilde{\lambda}^2)}{2k_G^2(1-\tilde{\lambda})(1+\tilde{\lambda})^5}. \quad (3.7.17)$$

Η πάνω σχέση είναι συναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό (3.7.12) ή ισοδύναμα σε όρους του  $k_G$  κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\tilde{\lambda} \rightarrow \tilde{\lambda}^{-1}, \quad k_G \rightarrow -k_G. \quad (3.7.18)$$

<sup>29</sup> Διαταρακτικά, η εξίσωση ιδιοτιμών είναι της μορφής  $\beta_{ab} = \gamma_{ab}{}^{cd} \lambda_{cd} \stackrel{\lambda_{ab} \equiv \lambda^{\delta ab}}{=} \gamma_{ab} \lambda$ .

Φαίνεται λοιπόν ότι η θεωρία διαταραχών οργανώνεται αυθόρμητα γύρω από μία σύμμορφη θεωρία πεδίου με τάξη  $k_G$  η οποία παραμαρφώνεται από έναν όρο  $\frac{k_G \tilde{\lambda}}{\pi} J_+ J_-$ . Μάλιστα, η συναλλοιωτήτα επιτυγχάνεται για τους δύο όρους του αναπτύγματος  $1/k_G$  ξεχωριστά, γεγονός που υποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός (3.7.18) πιθανότατα αποτελεί μια ακριβή συμμετρία για όλες τις τάξεις του αναπτύγματος  $1/k_G$  για μεγάλο  $k_G$ . Το γεγονός αυτό μπορεί να φανεί χρήσιμο για τον υπολογισμό της  $\beta$ -συνάρτησης μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k_G^3)$  ή μεγαλύτερη.

### Η μετρική Zamolodchikov

Εστω η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων<sup>30</sup>

$$G_{\tilde{\lambda}}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = \langle \mathcal{O}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{\tilde{\lambda}}, \quad (3.7.19)$$

όπου ο διγραμμικός ως προς τα ρεύματα τελεστής της διαταραχής είναι

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) = J_1^a(z) \bar{J}_2^a(\bar{z}). \quad (3.7.20)$$

Τα ρεύματα  $J^a$  ικανοποιούν μια άλγεβρα ρευμάτων τάξης  $k_G$  με OPEs<sup>31</sup>

$$J^a(z_1) J^b(z_2) = \frac{\delta_{ab}}{z_{12}^2} + \frac{i}{\sqrt{k_G}} \frac{f_{abc} J^c(z_2)}{z_{12}}, \quad z_{12} = z_1 - z_2, \quad (3.7.21)$$

ενώ το OPE των  $J^a$  με τα  $\bar{J}^a$  είναι ομαλό.

Από την (3.7.19) προκύπτει η ακόλουθη μορφή για την μετρική του Zamolodchikov

$$g(\tilde{\lambda}; k) = |z_{12}|^{2(2+\gamma^{(0)})} \epsilon^{-2\gamma^{(0)}} G_{\tilde{\lambda}}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2), \quad (3.7.22)$$

όπου  $\gamma^{(0)}$  είναι η ανώμαλη διάσταση του τελεστή  $\mathcal{O}$  που δίνεται από τη σχέση [58, 50]

$$\gamma^{(0)} = 2\partial_{\tilde{\lambda}} \beta^{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) + \beta^{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) \partial_{\tilde{\lambda}} \ln g(\tilde{\lambda}; k_G). \quad (3.7.23)$$

Το πεπερασμένο μέρος της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων πρέπει να συμπεριφέρεται ως

$$g(\tilde{\lambda}; k_G) = \frac{1}{2} \frac{\dim G}{(1 - \tilde{\lambda}^2)^2} \left( 1 + \frac{c_G}{k_G} \frac{Q(\tilde{\lambda})}{(1 - \tilde{\lambda})(1 + \tilde{\lambda})^3} \right), \quad (3.7.24)$$

<sup>30</sup> Περνώντας σε Ευκλείδιο χώρο ορίζονται για το κοσμικό φύλλο οι μιγαδικές συντεταγμένες  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau + i\sigma)$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau - i\sigma)$ .

<sup>31</sup> Τα ρεύματα έχουν επαναορισθεί ως  $J^a \rightarrow J^a/\sqrt{k_G}$ .

όπου ο μηδενικής τάξης όρος ως προς το  $1/k$  ανάπτυγμα έχει υπολογισθεί στις [58, 50]. Οι πόλοι στα  $\tilde{\lambda} = \pm 1$  και η τάξη τους επιλέχθηκαν ώστε το στοιχείο μήκους

$$(ds)^2 = g(\tilde{\lambda}; k_G)(d\tilde{\lambda})^2, \quad (3.7.25)$$

να είναι πεπρασμένο στα όρια (IB'.2) και (IB'.3) του PCM και του ψευδοδυϊκού προτύπου αντίστοιχα. Η συνάρτηση  $Q(\tilde{\lambda})$  είναι παντού αναλυτική με  $Q(0) = 0$ , ώστε να υπάρχει συμφωνία με το αποτέλεσμα της σύμμορφης θεωρίας [54]

$$g(0; k_G) = \frac{1}{2} \dim G. \quad (3.7.26)$$

Απαιτώντας η (3.7.25) να είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία (3.7.18) προκύπτει η συνθήκη

$$\tilde{\lambda}^4 Q(\tilde{\lambda}^{-1}) = Q(\tilde{\lambda}), \quad (3.7.27)$$

η οποία έχει ως λύση ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού της μορφής

$$Q(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} (c_1 + c_2 \tilde{\lambda} + c_1 \tilde{\lambda}^2), \quad (3.7.28)$$

όπου έγινε χρήση της (3.7.26). Δεδομένου ότι η μετρική Zamolodchikov δεν έχει πεπερασμένη συνεισφορά μέχρι την τάξη  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2)$  [50, 45], συνεπάγεται ότι  $c_{1,2} = 0$ , και η (3.7.24) απλοποιείται στην

$$g(\tilde{\lambda}; k_G) = \frac{1}{2} \frac{\dim G}{(1 - \tilde{\lambda}^2)^2}, \quad (3.7.29)$$

δηλαδή οι πιθανές  $\mathcal{O}(1/k_G)$ -διορθώσεις είναι μηδέν.

### Η $C$ -συνάρτηση και οι ανώμαλες διαστάσεις του σύνθετου τελεστή

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται η  $C$ -συνάρτηση μέσω του  $c$ -θεωρήματος του Zamolodchikov [53], ακολουθώντας τη διαδικασία της [54]. Ισχύει ότι [53]

$$\frac{dC}{dt} = \beta^i \partial_i C = 24 g_{ij} \beta^i \beta^j \geq 0. \quad (3.7.30)$$

Για μία μόνο παράμετρο ζεύξης  $\tilde{\lambda}$  η πάνω σχέση απλοποιείται στην πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση

$$\partial_{\tilde{\lambda}} C_{\text{single}}(\tilde{\lambda}; k) = 24 g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} \beta^{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}), \quad g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} = g(\tilde{\lambda}; k_G), \quad (3.7.31)$$

με λύση

$$C_{\text{single}}(\tilde{\lambda}; k_G) = c_{UV} + 24 \int_0^{\tilde{\lambda}} d\tilde{\lambda}_1 g(\tilde{\lambda}_1; k_G) \beta^{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}_1), \quad (3.7.32)$$

όπου  $c_{UV}$  είναι το κεντρικό φορτίο της σύμμορφης θεωρίας  $G_k \times G_k$  στις υψηλές ενέργειες, και πιο συγκεκριμένα

$$c_{UV} = 2 \frac{2k \dim G}{2k + c_G} = \dim G \left( 2 - \frac{c_G}{k_G} \right). \quad (3.7.33)$$

Η ολοκλήρωση (3.7.32), δίνει

$$C_{\text{single}}(\tilde{\lambda}; k_G) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{k_G} \frac{1 + 2\tilde{\lambda}}{(1 - \tilde{\lambda})(1 + \tilde{\lambda})^3} - \frac{3c_G^2 \dim G}{2k_G^2} \frac{\tilde{\lambda}^4}{(1 - \tilde{\lambda})^2(1 + \tilde{\lambda})^6}. \quad (3.7.34)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε συμφωνία με τα αντίστοιχα της [54] μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k_G)$ . Επιπλέον, με εξαίρεση μια σταθερά, η (3.7.34) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την (3.7.18) μέχρι τάξη  $1/k_G^2$ ,

$$C_{\text{single}}(\tilde{\lambda}^{-1}; -k_G) = C_{\text{single}}(\tilde{\lambda}; k_G) + \frac{c_G \dim G}{k_G}. \quad (3.7.35)$$

Μια παρατήρηση εδώ είναι ότι στη μορφή της  $C$ -συνάρτησης, όντως δεν εμφανίζονται μη-αναλυτικοί όροι με κλάδους της μορφής  $\ln \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ . Αυτό είναι αποτέλεσμα της επιλογής  $d_0 = -1/2$  στην (3.7.15), όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Τέτοιοι όροι δεν είναι δυνατόν να εμφανισθούν, όπως είναι εμφανές και από το ανάπτυγμα γύρω από το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας για ελεύθερο πεδίο στην [119].

Τέλος, υπολογίζονται οι ανώμαλες διαστάσεις του  $\mathcal{O}$  μέχρι την τάξη  $1/k_G^2$ . Εισάγοντας τις (3.7.17) και (3.7.29) στην (3.7.23), προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\gamma^{(\mathcal{O})} = \frac{2c_G}{k_G} \frac{\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^2)}{(1 - \tilde{\lambda})(1 + \tilde{\lambda})^3} - \frac{c_G^2}{k_G^2} \frac{\tilde{\lambda}^2(3 - 2\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^2)(1 - 2\tilde{\lambda} + 3\tilde{\lambda}^2)}{(1 - \tilde{\lambda})^2(1 + \tilde{\lambda})^6}, \quad (3.7.36)$$

το οποίο είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα της [54] μέχρι τάξη  $1/k$  [50]. Επιπλέον, η (3.7.36) είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία (3.7.18) μέχρι τάξη  $1/k_G^2$ , όπου η αναλλοιότητα επιτυγχάνεται πάλι ξεχωριστά για κάθε όρο της.

### Σύνδεση με το απλά παραμορφωμένο $\lambda$ -πρότυπο της $G_k$

Έστω τώρα το  $\lambda$ -παραμορφωμένο  $\sigma$ -πρότυπο της  $G_k$  [38]. Το πρότυπο αυτό έχει την ίδια  $\beta$ -συνάρτηση, μετρική Zamolodchikov και ανώμαλη διάσταση, με το  $\lambda$ -παραμορφωμένο πρότυπο της  $G_k \times G_k$ . Η ισοδυναμία αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η διαταραχή της σύμμορφης θεωρίας με τη συγκεκριμένη άλγεβρα ρευμάτων οφείλεται στον ίδιο διγραμμικό τελεστή ρευμάτων [51]. Παρόλα αυτά όμως, το σύμμορφο σημείο των υψηλών ενεργειών διαφέρει,

και το κεντρικό φορτίο σε αυτή την περίπτωση δίνεται από τη σχέση

$$c_{UV} = \frac{2k \dim G}{2k + c_G} = \dim G \left(1 - \frac{c_G}{2k_G}\right). \quad (3.7.37)$$

Συνεπώς, η  $C$ -συνάρτηση τώρα είναι διαφορετική από αυτήν της (3.7.34) και μέσω των (3.7.17), (3.7.29) και (3.7.32) υπολογίζεται να είναι η

$$C(\tilde{\lambda}; k_G) = \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k_G} \frac{1 + 2\tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda}^3 + \tilde{\lambda}^4}{(1 - \tilde{\lambda})(1 + \tilde{\lambda})^3} - \frac{3c_G^2 \dim G}{2k_G^2} \frac{\tilde{\lambda}^4}{(1 - \tilde{\lambda})^2(1 + \tilde{\lambda})^6}. \quad (3.7.38)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό της (3.7.10).

# Α' Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται τα διάφορα ολοκληρώματα που προκύπτουν από τη θεωρία διαταραχών μέσω ενός παραδείγματος.

Έστω αρχικά το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{d^2z}{(x_1 - z)(\bar{z} - \bar{x}_2)}. \quad (\text{A'.1})$$

Ο χώρος ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος αυτού είναι

$$\mathcal{D}_n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_n : |z_1 - x_j| > \epsilon, \epsilon > 0\}$$

και πιο συγκεκριμένα, ο  $\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}$ .

Εφόσον η συνάρτηση εντός του ολοκληρώματος δεν είναι (αντι)ολομορφική, γίνεται χρήση του θεωρήματος Stokes στις δύο διαστάσεις όπου

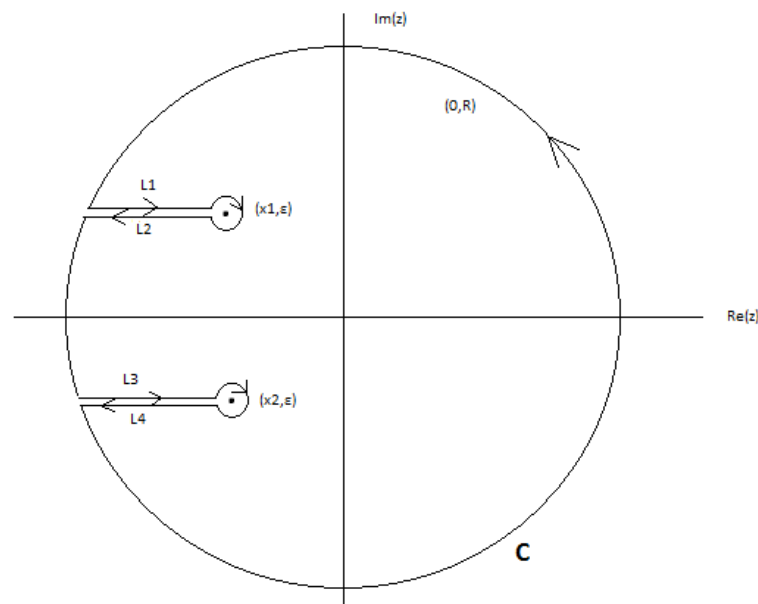
$$\int \int_{\mathcal{D}_n} \left( \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) d^2z = \frac{i}{2} \oint_{\partial \mathcal{D}_n} (f(z, \bar{z})d\bar{z} - \bar{f}(z, \bar{z})dz), \quad (\text{A'.2})$$

με  $f(z, \bar{z}) = U(z, \bar{z}) - iV(z, \bar{z})$  και  $\bar{f}(z, \bar{z}) = U(z, \bar{z}) + iV(z, \bar{z})$ , και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται στην κλειστή διαδρομή  $C$  που φαίνεται στο σχήμα Α'.1.

Για το ολοκλήρωμα (Α'.1) προκύπτει ότι

$$\bar{f}(z, \bar{z}) = \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)}, \quad f(z, \bar{z}) = 0.$$

Για ευκολία, εάν είναι εφικτό, επιλέγεται η παράγουσα έτσι ώστε μέσα στο όρισμα του  $\ln$  εμφανίζεται το μέτρο στο τετράγωνο προκειμένου να αποφευχθούν τα σημεία διακλάδωσης της συνάρτησης κατά την ολοκλήρωση διαδρομής.



Σχήμα Α'.1

Σχήμα Α'.1: Διαδρομή ολοκλήρωσης

Η σχέση (Α'.2) συνεπάγεται την ακόλουθη ισότητα για το υπό εξέταση ολοκλήρωμά

$$\begin{aligned}
 I &= \int \int_{R^2 - \{x_1, x_2\}} \frac{d^2 z}{(x_1 - z)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = -\frac{i}{2} \left( \oint_C \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)} dz \right) = \\
 &= \frac{1}{2i} \left( \oint_{(x_1, \epsilon)} + \oint_{(x_2, \epsilon)} + \oint_{(0, R)} + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right),
 \end{aligned}$$

όπου  $(x_i, r)$  υπονοεί την ολοκλήρωση σε κύκλο κέντρου  $x_i$  και ακτίνας  $r$ . Εδώ  $\epsilon \rightarrow 0$  και εν γένει  $R \rightarrow \infty$  προκειμένου να συμπεριληφθεί στην ολοκλήρωση όλο το μιγαδικό επίπεδο (για  $R \gg |x_1|, |x_2|$ ).

Όσον αφορά τα ολοκληρώματα στις διαδρομές  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , οι αντίστοιχες συνεισφορές είναι ίσες και αντίθετες εφόσον δεν υπάρχει κλάδος στην υπό ολοκλήρωση συνάρτηση, με αποτέλεσμα να μηδενίζονται.

Έτσι,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2i} \left( \oint_{(x_1, \epsilon)} \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)} dz + \oint_{(x_2, \epsilon)} \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)} dz + \oint_{(0, R)} \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)} dz \right) = \\
 &= (J + K + M).
 \end{aligned}$$



Η συνεισφορά του κύκλου γύρω από το  $x_1$  στην ολοκλήρωση είναι

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2i} \oint_{(x_1, \epsilon)} \frac{\ln |z - x_2|^2}{(z - x_1)} dz = -\frac{1}{2i} \oint_{|u|=\epsilon} \frac{\ln |u + x_{12}|^2}{u} du = \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\ln |\epsilon e^{i\theta} + x_{12}|^2}{\epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta = -\frac{1}{2i} \int_{\pi}^{-\pi} \ln |\epsilon e^{i\theta} + x_{12}|^2 d\theta \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η αλλαγή μεταβλητής  $u = z - x_1$  με  $du = dz$ , ενώ στην τρίτη η  $u = \epsilon e^{i\theta}$  με  $du = i \epsilon e^{i\theta} d\theta$ .

Για  $\epsilon \rightarrow 0$  προκύπτει τελικά το αποτέλεσμα

$$J = -\frac{1}{2i} (-2\pi i) \ln |x_{12}|^2 \Rightarrow J = \pi \ln |x_{12}|^2. \quad (\text{A'.3})$$

Όμοια υπολογίζεται και η συνεισφορά από το κυκλάκι με κέντρο το  $x_2$  και ακτίνα  $\epsilon$ , θέτοντας αυτή τη φορά  $u = z - x_2$ . Προκύπτει

$$K = -\frac{1}{2i} \int_{\pi}^{-\pi} i \epsilon \frac{\ln \epsilon^2}{-x_{12}} e^{i\theta} d\theta \Rightarrow K = 0. \quad (\text{A'.4})$$

Τέλος, για τον μεγάλο κύκλο ακτίνας  $R$  η συνεισφορά είναι

$$M = -\frac{1}{2i} \oint_{(0, R)} \frac{\ln |z - x_2|^2}{(x_1 - z)} dz = -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |Re^{i\theta} - x_2|^2}{(x_1 - Re^{i\theta})} i Re^{i\theta} d\theta,$$

το οποίο στο όριο  $R \gg |x_1|, |x_2|$  που η κλειστή διαδρομή  $C$  περικλείει όλο το μιγαδικό επίπεδο, γίνεται

$$M = -\pi \ln R^2 \quad (\text{A'.5})$$

Προσθέτοντας τώρα τις (A'.3), (A'.4) και (A'.5) προκύπτει για το αρχικό ολοκλήρωμα ότι

$$I = \pi \ln \frac{|x_1 - x_2|^2}{R^2}. \quad (\text{A'.6})$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζονται και τα υπόλοιπα ολοκληρώματα του παραρτήματος Β', με μόνη διαφορά ότι ίσως χρειασθεί κάποια να αναχθούν σε απλούστερα κλάσματα ή να γίνει ανάπτυγμα κατά Taylor προτού εφαρμοσθεί το όριο  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Όσον αφορά τον απειρισμό των ολοκληρώματων αυτών για  $R \rightarrow \infty$ , η συνολική συνεισφορά σε τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  για τις διάφορες ποσότητες της θεωρίας, περιλαμβάνει ολοκληρώματα ίδιας μορφής αλλά με αντίθετα πρόσημα, καθώς και μία σταθερά αποκοπής  $\epsilon$  για την περίπτωση που  $x_1 \rightarrow x_2$ . Έτσι, οι όροι με απειρισμούς ( $\ln R^2, \ln^2 R^2, \dots$ ) από τα διάφορα ολοκληρώματα μέχρι αυτή την τάξη αλληλοακυρώνονται και τα πάνω αποτελέσματά είναι της

---

μορφής  $\ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}$ . Για τον λόγο αυτό, στα αποτελέσματα του κυρίως κειμένου της εργασίας αντικαθίστανται απευθείας μόνο τα πεπερασμένα μέρη των ολοκληρωμάτων αυτών.

## B' Χρήσιμα Ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{d^2 z}{(x_1 - z)(\bar{z} - \bar{x}_1)} = \pi \ln \epsilon^2 \\
 I_2 &= \int \frac{d^2 z}{(x_1 - z)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = \pi \ln |x_{12}|^2 \\
 I_3 &= \int \frac{d^2 z}{(x_1 - z)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{x_{12}} \\
 I_4 &= \int \frac{d^2 z}{(x_1 - z)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}} \\
 I_5 &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_1)^2} = 0 \\
 I_6 &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_1)} = 0 \\
 I_7 &= \int \frac{d^2 z}{(x_1 - z)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = \pi^2 \delta^{(2)}(x_{12}) \\
 I_8 &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_1)} = -\frac{\pi}{x_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \\
 I_9 &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \\
 I_{10} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{23}} \ln \frac{|x_{12}|^2}{|x_{13}|^2} \\
 I_{11} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = -\frac{\pi}{x_{12}} \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} \\
 I_{12} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{23}} \frac{x_{23}}{x_{12}x_{13}} \\
 I_{13} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{|x_{12}|^2} \\
 I_{14} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_1)} = \frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \\
 I_{15} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{16} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi}{\bar{x}_{12}^2} \\
I_{17} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = \frac{\pi}{|x_{12}|^2} \\
I_{18} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}x_{12}^2} \\
I_{19} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = -\frac{\pi}{x_{12}^2} \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} - \pi^2 \frac{\delta^{(2)}(x_{23})}{x_{12}} \\
I_{20} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)} = \frac{\pi}{x_{12}x_{23}} \ln \frac{|x_{24}|^2}{|x_{34}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}x_{13}} \ln \frac{|x_{14}|^2}{|x_{34}|^2} \\
I_{21} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)^2} = \frac{\pi}{x_{12}x_{13}} \left( \frac{1}{\bar{x}_{14}} - \frac{1}{\bar{x}_{34}} \right) - \frac{\pi}{x_{12}x_{23}} \left( \frac{1}{\bar{x}_{24}} - \frac{1}{\bar{x}_{34}} \right) \\
I_{22} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)} = -\frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{34}} \ln \frac{|x_{13}|^2|x_{24}|^2}{|x_{14}|^2|x_{23}|^2} \\
I_{23} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)^2} = -\frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{23}^2} \ln \frac{|x_{13}|^2|x_{24}|^2}{|x_{14}|^2|x_{23}|^2} + \frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{23}} \left( \frac{1}{\bar{x}_{24}} - \frac{1}{\bar{x}_{14}} \right) \\
I_{24} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)(\bar{z} - \bar{x}_5)} = \frac{\pi}{x_{12}x_{23}\bar{x}_{45}} \ln \frac{|x_{24}|^2|x_{35}|^2}{|x_{34}|^2|x_{25}|^2} \\
&\quad - \frac{\pi}{x_{12}x_{13}\bar{x}_{45}} \ln \frac{|x_{14}|^2|x_{35}|^2}{|x_{34}|^2|x_{15}|^2} \\
I_{25} &= \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)(\bar{z} - \bar{x}_5)^2} = \\
&\quad = \frac{\pi}{x_{12}x_{23}\bar{x}_{45}^2} \ln \frac{|x_{24}|^2|x_{35}|^2}{|x_{34}|^2|x_{25}|^2} + \frac{\pi}{x_{12}x_{23}\bar{x}_{45}} \left( \frac{1}{\bar{x}_{25}} - \frac{1}{\bar{x}_{35}} \right) \\
&\quad - \frac{\pi}{x_{12}x_{13}\bar{x}_{45}^2} \ln \frac{|x_{14}|^2|x_{35}|^2}{|x_{34}|^2|x_{15}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}x_{13}\bar{x}_{45}} \left( \frac{1}{\bar{x}_{15}} - \frac{1}{\bar{x}_{35}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{2} \ln^2 |x_{12}|^2 \\
L_2 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{\bar{x}_{12}} \ln |x_{12}|^2 \\
L_3 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{x_{12}} (1 + \ln |x_{12}|^2) \\
L_4 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_1)^2} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}} - \frac{\pi}{\bar{x}_{12}} \ln |x_{12}|^2 \\
L_5 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_1)^2} = 0 \\
L_6 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{\bar{x}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \\
L_7 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = \pi \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} \ln |x_{12}|^2 + \frac{\pi}{\bar{x}_{13}} \ln |x_{23}|^2 \\
L_8 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{|x_{12}|^2} \\
L_9 &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{|x_{12}|^2} \\
L_{10} &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\pi}{|x_{12}|^2} \\
L_{11} &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = \frac{\pi}{\bar{x}_{13}x_{23}} - \frac{\pi}{x_{12}} \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} \\
L_{12} &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)(z - x_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_1)} = -\frac{\pi}{x_{12}^2} - \frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} \\
L_{13} &= \int \frac{d^2z}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|z - x_2|^2} = -\frac{\pi}{|x_{12}|^2} \\
L_{14} &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = \frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{13}} \ln \frac{|x_{13}|^2}{|x_{23}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}} \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} \ln |x_{12}|^2 \\
L_{15} &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_3|^2}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = -\frac{\pi}{x_{12}} \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{13}\bar{x}_{23}} + \frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{13}} \ln |x_{13}|^2 - \frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{23}} \ln |x_{23}|^2 \\
L_{16} &= \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_3)(\bar{z} - \bar{x}_4)} = \frac{\pi}{x_{12}\bar{x}_{34}}
\end{aligned}$$

$$L_{17} = \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = \frac{\pi}{x_{12}^2 \bar{x}_{13} \bar{x}_{23}} - \frac{\pi}{x_{12} \bar{x}_{13} x_{23}} - \frac{\pi}{x_{12}^2 \bar{x}_{13} \bar{x}_{23}} \ln |x_{12}|^2 + \frac{\pi}{x_{12}^2 \bar{x}_{13}} \ln \frac{\ln |x_{13}|^2}{\ln |x_{23}|^2}$$

$$L_{18} = \int d^2z \frac{\ln |z - x_1|^2}{(z - x_1)^2(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = \frac{\pi}{x_{12} |x_{13}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}^2 \bar{x}_{13}} \left( \ln \frac{|x_{13}|^2}{|x_{23}|^2} - \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_{23}} \ln |x_{12}|^2 \right)$$

$$L_{19} = \int d^2z \frac{\ln |z - x_3|^2}{(z - x_1)(z - x_2)^2(\bar{z} - \bar{x}_3)^2} = -\frac{\pi}{x_{12}^2 \bar{x}_{13} \bar{x}_{23}} + \frac{\pi}{x_{12} |x_{23}|^2} + \frac{\pi}{x_{12}^2} \left( \frac{\ln |x_{13}|^2}{\bar{x}_{13}} - \frac{\ln |x_{23}|^2}{\bar{x}_{23}} \right)$$

$$L_{20} = \int \frac{d^2z}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} \ln \frac{|z - x_1|^2}{|x_{12}|^2} = \frac{\pi}{|x_{12}|^2}$$

$$L_{21} = \int \frac{d^2z}{(z - x_1)^2(\bar{z} - \bar{x}_2)^2} \ln \frac{|z - x_3|^2}{|x_{23}|^2} = -\frac{\pi}{x_{12} \bar{x}_{23}} + \frac{\pi}{x_{13} \bar{x}_{12} \bar{x}_{23}}$$

# Γ' Υπολογισμός του Αβελιανού μέρους της μετρικής Zamolodchikov

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά ο υπολογισμός της Αβελιανής ( $k$ -ανεξάρτητης) συνεισφοράς στην μετρική του Zamolodchikov (2.10.99) για την περίπτωση του μη-Αβελιανού προτύπου Thirring με διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα ζεύξης  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$ , όπως υπολογίσθηκε στο Α.2 παράρτημα της [50].

Αρχικά, η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων  $G_0$  μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα σε δυνάμεις της παραμέτρου ζεύξης  $\lambda$  ως

$$G_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{\pi^{2n}(2n)!} G_0^{(2n)}, \quad (\Gamma'.1)$$

με

$$\begin{aligned} \frac{G_0^{(n)}}{|x_{12}|^4} = & \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i \langle J^a(x_1) J^{a_1}(z_1) \dots J^{a_n}(z_n) J^b(x_2) \rangle \times \\ & \times \langle \bar{J}^a(\bar{x}_1) \bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1) \dots \bar{J}^{a_n}(\bar{z}_n) J^b(\bar{x}_2) \rangle. \end{aligned} \quad (\Gamma'.2)$$

Το ανάπτυγμα της  $G_0$  είναι μόνο σε άρτιες δυνάμεις του  $\lambda$  αφού οποιαδήποτε συνάρτηση συσχετισμού περιέχει περιττό αριθμό ολομορφικών ή αντι-ολομορφικών ρευμάτων μηδενίζεται.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν, από τα δεξιά προς τα αριστερά, ξεκινώντας με την ολοκλήρωση ως προς  $z_1$ . Για να γίνει η ολοκλήρωση αυτή θα πρέπει να είναι γνωστοί όλοι οι πιθανοί τρόποι με τους οποίους τα δύο ρεύματα στο σημείο  $z_1$  μπορούν να συναιρεθούν με τα υπόλοιπα ρεύματα της (Γ'.2) χρησιμοποιώντας το OPE (2.10.39).

Θεωρώντας τα σημεία  $x_i$  ως εξωτερικά σημεία και τα  $z_i$  ως εσωτερικά, υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορούν να γίνουν οι συναιρέσεις:

-Και τα δύο ρεύματα του σημείου  $z_1$  να συναιρεθούν με εσωτερικά. Αυτό σημαίνει ότι το  $J^{a_1}(z_1)$  πρέπει να συναιρεθεί με οποιοδήποτε άλλο  $J^{a_i}(z_i)$ ,  $i \neq 1$ . Προφανώς οι πιθανοί τέτοιοι συνδυασμοί είναι  $(n-1)$ . Αν για παράδειγμα το  $J^{a_1}(z_1)$  συναιρεθεί με το  $J^{a_2}(z_2)$ , τότε το δεύτερο ρεύμα στο σημείο  $z_1$ ,  $\bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1)$  μπορεί να συναιρεθεί με οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα  $(n-2)$  ρεύματα των σημείων  $z_3, \dots, z_n$ , αλλά όχι με το  $\bar{J}^{a_2}(\bar{z}_2)$  διότι αυτό θα αντιστοιχούσε σε διαγράμματα φυσσαλίδας. Συνεπώς, προκύπτουν  $(n-1)(n-2)$  διαγράμματα από την συναίρεση ρευμάτων εσωτερικού με εσωτερικό σημείο.

-Ένα από τα ρεύματα του σημείου  $z_1$  να συναιρεθεί με ρεύμα σε εσωτερικό σημείο, ενώ το άλλο με ρεύμα σε εξωτερικό. Σε αυτή την περίπτωση το  $J^{a_1}(z_1)$  συναιρείται με το εξωτερικό ολομορφικό του  $x_1$ . Τότε, το αντι-ολομορφικό ρεύμα στο  $\bar{z}_1$  θα πρέπει να συναιρεθεί αναγκαστικά με κάποιο από τα  $(n-1)$  εσωτερικά προκειμένου να αποφευχθεί η συνεισφορά μη-συνδεδεμένων διαγραμμάτων. Προκύπτουν  $4(n-1)$  τέτοιες συναιρέσεις, όπου το 4 έρχεται λόγω των πιθανοτήτων το  $J^{a_1}(z_1)$  να συναιρεθεί με το  $J^a(x_1)$  ή το  $J^b(x_2)$  (δίνοντας έναν παράγοντα 2), ή το  $\bar{J}^{a_1}(\bar{z}_1)$  να συναιρεθεί με τα δύο αντίστοιχα εξωτερικά αντι-ολομορφικά ρεύματα των  $\bar{x}_1$  και  $\bar{x}_2$  (δίνοντας άλλον ένα παράγοντα 2).

Από τις Αβελιανές συναιρέσεις, τα μόνα ολοκληρώματα που προκύπτουν είναι της μορφής

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{x}_2)^2} = \pi^2 \delta^{(2)}(x_{12}) \quad (\Gamma'.3)$$

δίνοντας συνεχώς  $\delta$ -συναρτήσεις που ολοκληρώνονται καταλήγοντας στην ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$G_0^{(n)} = \pi^2((n-1)(n-2) + 4(n-1))G_0^{(n-2)} = \pi^2(n-1)(n+2)G_0^{(n-2)}. \quad (\Gamma'.4)$$

Αντικαθιστώντας επαγωγικά τις  $G_0^{(n-i)}$  προκύπτει ότι ο  $n$ -οστός όρος του αναπτύγματος θα έχει τη μορφή

$$G_0^{(n)} = \frac{\pi^n}{2}(n+2)!!(n-1)!!G_0^{(0)} = \frac{\pi^n}{2}(n+2)n!G_0^{(0)}, \quad n = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (\Gamma'.5)$$

όπου η  $G_0^{(0)} = \dim G$  αντιπροσωπεύει την συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων της ελεύθερης θεωρίας ( $\lambda = 0$ ) που δίνεται από την  $G_0^{(0)} = \langle J^a(x_1)J^b(x_2) \rangle \langle \bar{J}^a(\bar{x}_1)\bar{J}^b(\bar{x}_2) \rangle |x_{12}|^4$ .

Αντικαθιστώντας την  $G_0^{(2m)}$  στο αρχικό ανάπτυγμα και υπολογίζοντας το άθροισμα, προκύπτει το Αβελιανό μέρος της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων για τον σύνθετο τελεστή της παραμόρφωσης να είναι

$$G_0 = \dim G \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m}}{\pi^{2m}(2m)!} \pi^{2m} \frac{1}{2}(2m+2)(2m)! \right) = \frac{\dim G}{(1-\lambda^2)^2}. \quad (\Gamma'.6)$$



## Δ' Διαταρακτικός υπολογισμός της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων για τα πρωτεύοντα πεδία

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο υπολογισμός της συνάρτησης συσχετισμού  $\langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle$  μέχρι τέταρτη τάξη ως προς τις παραμέτρους παραμόρφωσης  $\mathcal{O}(\lambda_{1,2}^4)$  και μέχρι πρώτη τάξη στο ανάπτυγμα για μεγάλο  $k$ . Πιο συγκεκριμένα, ότι ακολουθεί αφορά πρωτεύοντα πεδία που μετασχηματίζονται μη-τετριμμένα κάτω από τα  $J_1^a$  και  $\bar{J}_1^a$  σύμφωνα με την (3.1.7).

**Πρώτη τάξη  $\mathcal{O}(\lambda)$ :** Είναι προφανές ότι υπάρχει μηδενική συνεισφορά σε πρώτη τάξη, οπότε

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda^{(1)} = 0. \quad (\Delta'.1)$$

**Δεύτερη τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ :** Προκύπτει

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda^{(2)} = \frac{1}{2! \pi^2} \int d^2 z_{12} (\lambda_1^2 A_2 + \lambda_2^2 B_2), \quad (\Delta'.2)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_2 &= \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) J_1^{a_1}(z_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle, \\ B_2 &= \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) J_2^{a_1}(z_1) \bar{J}_1^{a_1}(\bar{z}_1) J_2^{a_2}(z_2) \bar{J}_1^{a_2}(\bar{z}_2) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle. \end{aligned} \quad (\Delta'.3)$$

Όπως φαίνεται, όροι ανάλογοι του γινομένου  $\lambda_1 \lambda_2$  δεν συνεισφέρουν, για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο κυρίως κείμενο. Ξεκινώντας με συναρτήσεις του  $J_1^{a_1}$ , ακολουθούμενες από συναρτήσεις του  $\bar{J}_2^{a_1}$  με το  $\bar{J}_2^{a_2}$  προκύπτει

$$A_2 = \frac{c_R}{k} \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\Delta_{R'}}} \left( \frac{1}{\bar{z}_{12}^2(z_1 - x_1)(z_2 - x_1)} - \frac{1}{\bar{z}_{12}^2(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)} - \frac{1}{\bar{z}_{12}^2(z_1 - x_2)(z_2 - x_1)} + \frac{1}{\bar{z}_{12}^2(z_1 - x_2)(z_2 - x_2)} \right), \quad (\Delta'.4)$$

ενώ η αντίστοιχη έκφραση για το  $B_2$  προκύπτει μετά από μετασχηματισμό ομοτιμίας στο  $A_2$  να είναι

$$B_2 = \frac{c_{R'}}{k} \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \left( \frac{1}{z_{12}^2(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_1)} - \frac{1}{z_{12}^2(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2)} \right. \\ \left. - \frac{1}{z_{12}^2(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)(\bar{z}_2 - \bar{x}_1)} + \frac{1}{z_{12}^2(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2)} \right). \quad (\Delta'.5)$$

Στη συνέχεια, γίνεται η ολοκλήρωση της  $(\Delta'.2)$ , διαλέγοντας την σειρά των ολοκληρώσεων από αριστερά προς τα δεξιά. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία κάτω από την εναλλαγή  $x_1 \leftrightarrow x_2$  υπολογίζεται το τελικό αποτέλεσμα της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων για τα πρωτεύοντα πεδία μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^2/k)$

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\lambda}^{(2)} = \frac{1}{k} (c_R \lambda_1^2 + c_{R'} \lambda_2^2) \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2}, \quad (\Delta'.6)$$

όπου όλα τα ολοκληρώματα που χρησιμοποιήθηκαν βρίσκονται στο παράρτημα Β'.

**Τρίτη τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^3)$ :** Σε αυτή την τάξη προκύπτει

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\lambda}^{(3)} = -\frac{1}{3! \pi^3} \int d^2 z_{123} (\lambda_1^3 A_3 + \lambda_2^3 B_3), \quad (\Delta'.7)$$

όπου

$$A_3 = \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) J_1^{a_1}(z_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle, \\ B_3 = \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) J_2^{a_1}(z_1) \bar{J}_1^{a_1}(\bar{z}_1) J_2^{a_2}(z_2) \bar{J}_1^{a_2}(\bar{z}_2) J_2^{a_3}(z_3) \bar{J}_1^{a_3}(\bar{z}_3) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle \quad (\Delta'.8)$$

και πάλι υπάρχει απουσία όρων ανάλογων του γινομένου  $\lambda_1 \lambda_2$ . Επιπλέον, κάτω από μετασχηματισμό ομοτιμίας όπου  $J_i \leftrightarrow \bar{J}_i$  και  $z_i \leftrightarrow \bar{z}_i$ ,  $c_R \leftrightarrow c_{R'}$ , η συνεισφορά από τα  $A_3$  και  $B_3$  δεν είναι ανεξάρτητη. Αμέσως προκύπτει ότι

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{f_{a_1 a_2 a_3}}{\bar{z}_{12} \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) J_1^{a_1}(z_1) J_1^{a_2}(z_2) J_1^{a_3}(z_3) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle$$

και στη συνέχεια εφαρμόζεται η ταυτότητα Ward για το ρεύμα  $J_1^a$ . Όταν αυτό συναρείται με κάποιο άλλο εσωτερικό ρεύμα, το Αβελιανό μέρος δεν δίνει συνεισφορά αφού μηδενίζεται λόγω του γινομένου του με τον συνολικό παράγοντα  $f_{a_1 a_2 a_3}$ . Το μη-Αβελιανό μέρος επίσης δεν δίνει συνεισφορά μέχρι την τάξη  $1/k$ . Όταν το  $J^{a_1}$  συναρείται με ένα εξωτερικό  $\Phi$  προκύπτει ο όρος τάξης  $1/k$ . Περαιτέρω συναιρέσεις καταλήγουν είτε σε μη-συνδεδεμένα διαγράμματα, είτε σε όρους μεγαλύτερης τάξης στο ανάπτυγμα ως προς  $1/k$ . Όμοια επιχειρήματα ισχύουν και για την περίπτωση του  $B_3$ . Συνεπώς, όλες οι συνεισφορές τάξης  $\mathcal{O}(\lambda^3)$

είναι μηδενικές και

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\lambda}^{(3)} = 0. \quad (\Delta'.9)$$

**Τέταρτη τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^4)$ :** Σε αυτή τη τάξη το αποτέλεσμα έχει διάφορους όρους. Έχοντας (σύμφωνα με τη συζήτηση στο κυρίως κείμενο) αποκλείσει τους μεικτούς σε  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  όρους προκύπτει ότι

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\lambda}^{(4)} = \frac{1}{4!\pi^4} \int d^2 z_{1234} (\lambda_1^4 A_4 + \lambda_2^4 B_4), \quad (\Delta'.10)$$

με

$$A_4 = \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} J_1^{a_1}(z_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \quad (\Delta'.11)$$

και το  $B_4$  να εξάγεται με εφαρμογή μετασχηματισμού ομοτιμίας του  $A_4$ . Για τον υπολογισμό του όρου  $A_4$ , εφαρμόζεται η ταυτότητα Ward για το  $J_1^{a_1}$  και δίνει

$$\begin{aligned} A_4 = & -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(t_{a_1}^{(1)})_i{}^l}{z_1 - x_1} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\ & -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(t_{a_1}^{(2)})_j{}^l}{z_1 - x_2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{l,j'}^{(2)} \rangle \\ & + \frac{\delta_{a_1 a_2}}{z_{12}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{f_{a_1 a_2 c}}{z_{12}} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^c(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\ & + \frac{\delta_{a_1 a_3}}{z_{13}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{f_{a_1 a_3 c}}{z_{13}} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^c(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^{a_4}(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\ & + \frac{\delta_{a_1 a_4}}{z_{14}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{f_{a_1 a_4 c}}{z_{14}} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) J_1^{a_2}(z_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) J_1^{a_3}(z_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) J_1^c(z_4) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle. \end{aligned} \quad (\Delta'.12)$$

Οι δύο πρώτες γραμμές της  $(\Delta'.12)$  αντιστοιχούν σε συναίρεση του  $J_1^{a_1}$  με εξωτερικά πεδία, ενώ οι υπόλοιπες, σε Αβελιανές και μη-Αβελιανές συναιρέσεις του με τα  $J^{a_2}$ ,  $J^{a_3}$  και  $J^{a_4}$ .

Η πρώτη γραμμή της  $(\Delta'.12)$  μετά από περαιτέρω συναιρέσεις πρώτα με το  $J_1^{a_2}$  και μετά με

το  $J_1^{a_3}$  και το  $J_1^{a_4}$ , συνεπάγεται μέχρι  $1/k$  την έκφραση

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \left( \frac{(t_{a_1})_i^l (t_{a_2})_l^m}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_1)z_{34}^2} \langle \Phi_{m,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \right. \\
& - \frac{(t_{a_1})_i^l (t_{a_2}^*)_j^m}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)z_{34}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_4) \Phi_{m,j'}^{(2)} \rangle \\
& + \frac{(t_{a_1})_i^l (t_{a_4})_l^m}{(z_1 - x_1)(z_4 - x_1)z_{23}^2} \langle \Phi_{m,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\
& - \frac{(t_{a_1})_i^l (t_{a_4}^*)_j^m}{(z_1 - x_1)(z_4 - x_2)z_{23}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{m,j'}^{(2)} \rangle \\
& - \frac{(t_{a_1})_i^l f_{a_2 a_3 a_4}}{(z_1 - x_1)z_{23}z_{34}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\
& + \frac{(t_{a_1})_i^l (t_{a_3})_l^m}{(z_1 - x_1)(z_3 - x_1)z_{24}^2} \langle \Phi_{m,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\
& - \frac{(t_{a_1})_i^l (t_{a_3}^*)_j^m}{(z_1 - x_1)(z_3 - x_2)z_{24}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_4) \Phi_{m,j'}^{(2)} \rangle \\
& \left. - \frac{(t_{a_1})_i^l f_{a_2 a_4 a_3}}{(z_1 - x_1)z_{24}z_{34}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \right), \tag{\Delta'.13}
\end{aligned}$$

όπου έχει υπολογισθεί μόνο η συνεισφορά όρων που αντιστοιχούν σε συνδεδεμένα διαγράμματα. Από την δεύτερη σειρά της  $(\Delta'.12)$ , προκύπτει επίσης μια παρόμοια έκφραση. Η συνεισφορά από την τρίτη σειρά της  $(\Delta'.12)$ , η οποία έχει προκύψει μετά από μία Αβελιανή συναίρεση μεταξύ ρευμάτων, είναι

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \left( \frac{(t_{a_3})_i^l (t_{a_4})_l^m}{(z_3 - x_1)(z_4 - x_1)z_{12}^2} \langle \Phi_{m,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \right. \\
& - \frac{(t_{a_3})_i^l (t_{a_4}^*)_j^m}{(z_3 - x_1)(z_4 - x_2)z_{12}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{m,j'}^{(2)} \rangle \\
& - \frac{(t_{a_3}^*)_j^l (t_{a_4})_i^m}{(z_3 - x_2)(z_4 - x_1)z_{12}^2} \langle \Phi_{m,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{l,j'}^{(2)} \rangle \\
& + \frac{(t_{a_3}^*)_j^l (t_{a_4}^*)_l^m}{(z_3 - x_2)(z_4 - x_2)z_{12}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{m,j'}^{(2)} \rangle \\
& - \frac{f_{a_3 a_4 c} (t_{a_c})_i^l}{(z_4 - x_1)z_{34}z_{12}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\
& \left. + \frac{f_{a_3 a_4 c} (t_{a_c}^*)_j^l}{(z_4 - x_2)z_{34}z_{12}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{l,j'}^{(2)} \rangle \right). \tag{\Delta'.14}
\end{aligned}$$

Οι υπόλοιποι όροι της  $(\Delta'.12)$  που αντιστοιχούν σε Αβελιανές συναιρέσεις μεταξύ ρευμάτων δίνουν παρόμοιες συνεισφορές.

Τέλος, η τέταρτη σειρά της  $(\Delta'.12)$ , που έχει προκύψει από μη-Αβελιανές συναιρέσεις ρευ-

μάτων δίνει

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{k} \left( \frac{(t_{ac})_i^l f_{a_1 a_2 c}}{(z_2 - x_1) z_{12}} \frac{\delta_{a_3 a_4}}{z_{34}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \right. \\
& - \frac{(t_{ac}^*)_j^l f_{a_1 a_2 c}}{(z_2 - x_2) z_{12}} \frac{\delta_{a_3 a_4}}{z_{34}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{l,j'}^{(2)} \rangle \\
& + \frac{(t_{a_4})_i^l f_{a_1 a_2 a_3}}{(z_4 - x_1) z_{12} z_{23}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\
& - \frac{(t_{a_4}^*)_j^l f_{a_1 a_2 a_3}}{(z_4 - x_2) z_{12} z_{23}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{l,j'}^{(2)} \rangle \\
& + \frac{(t_{a_3})_i^l f_{a_1 a_2 a_4}}{(z_3 - x_1) z_{12} z_{24}^2} \langle \Phi_{l,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle \\
& \left. - \frac{(t_{a_3}^*)_j^l f_{a_1 a_2 a_4}}{(z_3 - x_2) z_{12} z_{24}^2} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{l,j'}^{(2)} \rangle \right) , \tag{\Delta'.15}
\end{aligned}$$

όπου πάλι έχει συμπεριληφθεί μόνο η συνεισφορά όρων που αντιστοιχούν σε συνδεδεμένα διαγράμματα. Οι υπόλοιποι όροι της (Δ'.12) που έχουν προέλθει από μη-Αβελιανές συναιρέσεις ρευμάτων καταλήγουν σε παρόμοια αποτελέσματα.

Στις προηγούμενες εκφράσεις εμφανίζεται μία συνάρτηση συσχετισμού έξι σημείων, η οποία περιλαμβάνει δύο εξωτερικά πρωτεύοντα πεδία και τέσσερα ρεύματα. Εφόσον έχει προκύψει ήδη ο συντελεστής  $1/k$  μπροστά από τους εκάστοτε υπολογισμούς, στον υπολογισμό αυτής της συνάρτησης συσχετισμού, μέχρι αυτή την τάξη, αρκεί να ληφθούν υπόψιν μόνο οι Αβελιανές συναιρέσεις μεταξύ των ρευμάτων. Το αποτέλεσμα σε τάξη  $\mathcal{O}(1)$  είναι

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{i,i'}^{(1)} \bar{J}_2^{a_1}(\bar{z}_1) \bar{J}_2^{a_2}(\bar{z}_2) \bar{J}_2^{a_3}(\bar{z}_3) \bar{J}_2^{a_4}(\bar{z}_4) \Phi_{j,j'}^{(2)} \rangle &= \left( \frac{\delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4}}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{\delta_{a_1 a_3} \delta_{a_2 a_4}}{z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{\delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3}}{z_{14}^2 z_{23}^2} \right) \\
&\times \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} . \tag{\Delta'.16}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (Δ'.10), σε συνδυασμό με τη συμμετρία κάτω από την εναλλαγή των εξωτερικών σημείων  $x_1 \leftrightarrow x_2$  και μετά από συναίρεση των δεικτών της ομάδας προκύπτει ότι

$$\langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda^{(4)} = \frac{1}{k} (c_R \lambda_1^4 + c_{R'} \lambda_2^4) \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2} . \tag{\Delta'.17}$$

Προσθέτοντας τα διαταρακτικά αποτελέσματα των (Δ'.1), (Δ'.6), (Δ'.9) και (Δ'.17), προκύπτει τελικά η ακόλουθη συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων για τα αφινικά πρωτεύοντα

πεδία της θεωρίας μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(\lambda^4/k)$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{i,i'}^{(1)}(x_1, \bar{x}_1) \Phi_{j,j'}^{(2)}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda &= \frac{1}{k} (c_R \lambda_1^2 (1 + \lambda_1^2) + c_{R'} \lambda_2^2 (1 + \lambda_2^2)) \\ &\times \frac{(\mathbb{1}_R \otimes \mathbb{1}_{R'})_{ii',jj'}}{x_{12}^{2\Delta_R} \bar{x}_{12}^{2\bar{\Delta}_{R'}}} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2} + \mathcal{O}(\lambda^5/k), \end{aligned} \quad (\Delta'.18)$$

από την οποία εξάγεται η διαταρακτική έκφραση για την ανώμαλη διάσταση (3.1.9) του κυρίως κειμένου.

## Ε΄ Η περίπτωση των τεσσάρων παραμέτρων ζεύξης

Στο παράρτημα αυτό υπολογίζεται η  $C$ -συνάρτηση για τα πρότυπα που κατασκευάστηκαν στην [40], αλλά με πιο γενικούς πίνακες ζεύξης αυτή τη φορά. Αφετηρία είναι η δράση (3.3.3) και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό  $A = (a, \alpha)$  χωρίζεται η ομάδα  $G$  σε μια υποομάδα  $H$  και ένα συνσύνολο  $G/H$ , με τους πεζούς λατινικούς και ελληνικούς δείκτες να συμβολίζουν τα στοιχεία της υποομάδας και του συνσυνόλου αντίστοιχα. Τότε, για μη-συμμετρικούς  $G/H$  χώρους Einstein [103, 104] ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} f_{ACD}f_{BCD} &= c_G\delta_{AB}, & f_{acd}f_{bcd} &= c_H\delta_{ab}, & f_{\alpha\gamma\delta}f_{\beta\gamma\delta} &= c_{G/H}\delta_{\alpha\beta}, \\ f_{\alpha\gamma\delta}f_{b\gamma\delta} &= (c_G - c_H)\delta_{ab}, & f_{\alpha\gamma c}f_{\beta\gamma c} &= \frac{1}{2}(c_G - c_{G/H})\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Μεταξύ αυτών, η μη-τετριμένη σχέση που ουσιαστικά ορίζει έναν μη-συμμετρικό χώρο Einstein είναι αυτή που εκφράζεται με τη βοήθεια μόνο ελληνικών δεικτών.

Σε ότι ακολουθεί επιλέγονται ως πίνακες παραμόρφωσης οι διαγώνιοι  $(\lambda_i)_{AB} = \lambda_{H_i}\delta_{ab} + \lambda_i\delta_{\alpha\beta}$ , όπου οι  $\lambda_{H_i}$  και  $\lambda_i$  συμβολίζουν τις παραμέτρους παραμόρφωσης της υποομάδας και του συνσυνόλου αντίστοιχα. Οι  $\beta$ -συναρτήσεις για κάθε  $(\lambda_i)_{AB}$  δίνονται από τις σχέσεις (3.2.33) [52]

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_H} &= -\frac{(\lambda_H - \lambda_0)(\lambda_H - \lambda_0^{-1})}{2k} \left( c_H \frac{\lambda_H^2}{(1 - \lambda_H^2)^2} + (c_G - c_H) \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} \right), \\ \beta_\lambda &= -\frac{1}{2k} \left( c_{G/H} \frac{\lambda^2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^{-1})}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{c_G - c_{G/H}}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\lambda}{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda_H^2)} \left( (\lambda_0^{-1} - \lambda_H)(\lambda_0\lambda_H - \lambda^2) + (\lambda_0 - \lambda_H)(\lambda_0^{-1}\lambda_H - \lambda^2) \right) \right), \end{aligned}$$

οι οποίες είναι αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\lambda \rightarrow \lambda^{-1}, \quad \lambda_H \rightarrow \lambda_H^{-1}, \quad k_{1,2} \rightarrow -k_{2,1},$$

και έχουν τα ακόλουθα σταθερά σημεία

$$(\lambda_H, \lambda) = \{(0, 0), (\lambda_0, \lambda_0), (\lambda_0, 0)\}. \quad (E'.2)$$

Η μετρική Zamolodchikov  $G_{ij}$  του χώρου παραμέτρων ζεύξης, στην περίπτωση αυτή είναι η

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G_{ij}^{(1)} & 0 \\ 0 & G_{ij}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad G_{ij}^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{\dim G/H}{(1-\lambda_i^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\dim H}{(1-\lambda_{H_i}^2)^2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (E'.3)$$

Από την (3.3.2) με χρήση της (E'.3) προκύπτουν τέσσερις διαφορικές εξισώσεις. Ωστόσο, από τις  $\beta$ -συναρτήσεις προκύπτει ότι οι παράμετροι ζεύξης  $(\lambda_1)_{AB}$  και  $(\lambda_2)_{AB}$  είναι ανεξάρτηστες η μία της άλλης και συνεπώς, οι προκύπτουσες μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι ανά ζεύγη αποσυσζευγμένες. Η γενική λύση των εξισώσεων αυτών δίνεται από τη σχέση

$$C(\lambda_1, \lambda_{H_1}, \lambda_2, \lambda_{H_2}; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{1}{4k} \left( \tilde{C}(\lambda_1, \lambda_{H_1}, \lambda_0) + \tilde{C}(\lambda_2, \lambda_{H_2}; \lambda_0) \right), \quad (E'.4)$$

όπου

$$\tilde{C}(\lambda, \lambda_H; \lambda_0) = \frac{1}{(1-\lambda^2)^3} \left( c_G \dim G g_1 + c_G \dim H g_2 + c_H \dim H g_3 \right),$$

με τις συναρτήσεις  $g_i(\lambda, \lambda_H; \lambda_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  να δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} g_1 &= (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2 - 3\lambda^4 + \lambda^6) + 8\lambda^3, \\ g_2 &= 12\lambda^2(\lambda_0 + \lambda_0^{-1} - 2\lambda) - \frac{12\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1-\lambda_H^2)}(\lambda_0 + \lambda_0^{-1} - 2\lambda_H), \\ g_3 &= -2((\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 + 3\lambda^2) - 8\lambda^3) + \frac{2(1-\lambda^2)}{(1-\lambda_H^2)^3} \left[ (\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 + 4\lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda^4 - 3(1 + \lambda^2)^2 \lambda_H^2 + 6\lambda^2 \lambda_H^4) + 4(1 + 4\lambda^2 + \lambda^4) \lambda_H^3 - 12\lambda^2 \lambda_H(1 + \lambda_H^4) \right]. \end{aligned}$$

Για να προκύψει η (E'.4) χρησιμοποιήθηκε η συνθήκη συμβατότητας

$$c_{G/H} = c_G - \frac{2 \dim H (c_G - c_H)}{\dim G/H},$$

η οποία αποδεικνύεται εύκολα παίρνοντας τα κατάλληλα ίχνη ως προς τους ελεύθερους δείκτες των σχέσεων της δεύτερης σειράς στην (E'.1). Η συνάρτηση (E'.4) πράγματι δίνει τις σωστές τιμές κεντρικού φορτίου (3.3.6) και (3.3.14) των σύμμορφων θεωριών στις υψηλές και χαμηλές ενέργειες αντίστοιχα. Επιπλέον, παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό  $(\lambda_i \rightarrow \lambda_i^{-1}, \lambda_{H_i} \rightarrow \lambda_{H_i}^{-1}, \lambda_0 \rightarrow \lambda_0^{-1}, k \rightarrow -k)$ , ικανοποιεί την (3.3.1), έχει τη σωστή συμπεριφορά όταν  $\lambda = \lambda_H$  ή  $\lambda = 0$  και φθίνει μονότονα κατά τη διάρκεια της ροής της



ομάδας επανακανονικοποίησης από τις υψηλές στις χαμηλές ενέργειες.

### Άλλες σημαντικές ροές

1. Για  $\lambda_2 = \lambda_{H_2} = 0$  και  $\lambda_1 = \lambda_{H_1} = \lambda$ , η (Ε'.4) παίρνει τη μορφή

$$C(\lambda, \lambda, 0, 0; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 - 3\lambda^2) + 4\lambda^3}{(1 - \lambda^2)^3},$$

η οποία είναι αναλλοίωτη, εκτός από μια μη-μηδενική σταθερά, κάτω από την δυϊκού-τύπου συμμετρία και δίνει το σωστό κεντρικό φορτίο για  $\lambda = \lambda_0$  που αντιστοιχεί σε μία ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2}$  στην  $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ .

2. Για  $\lambda_2 = \lambda_{H_2} = \lambda_0$  και  $\lambda_1 = \lambda_{H_1} = \lambda$ , η (Ε'.4) γίνεται

$$C(\lambda, \lambda, \lambda_0, \lambda_0; \lambda_0) = 2 \dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} \frac{1 - 3\lambda^2 + 4\lambda_0^4 \lambda^4 (3 - \lambda^2) + \lambda_0 (1 - \lambda_0^2) \lambda^3}{\lambda_0 (1 - \lambda_0^2) (1 - \lambda^2)^3},$$

αναπαριστώντας τη ροή από την  $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$  στην  $\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}$ , με το σωστό IR κεντρικό φορτίο για  $\lambda = \lambda_0$ .

3. Για  $\lambda_{1,2} = 0$  και  $\lambda_{H_1} = \lambda_{H_2} = \lambda$ , η (Ε'.4) έρχεται στη μορφή

$$C(0, \lambda, 0, \lambda; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) - \frac{c_H \dim H}{k} \frac{\lambda^3 (4 + \lambda(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda^2 - 3))}{(1 - \lambda^2)^3}.$$

4. Τέλος, για  $\lambda_{1,2} = 0 = \lambda_{H_2}$  και  $\lambda_{H_1} = \lambda$ , (Ε'.4) γίνεται

$$C(0, \lambda, 0, \lambda; \lambda_0) = 2\dim G - \frac{c_G \dim G}{2k} (\lambda_0 + \lambda_0^{-1}) - \frac{c_H \dim H}{2k} \frac{\lambda^3 (4 + \lambda(\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(\lambda^2 - 3))}{(1 - \lambda^2)^3}.$$

Οι χαμηλοενεργειακές σύμμορφες θεωρίες πεδίου των περιπτώσεων 3 και 4, δεν έχουν αναγνωρισθεί ακόμα.

## ΣΤ' Επανακανονικοποίηση και διαφορομορφισμοί

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι η εξαγωγή της σχέσης (3.4.4) για τη β-συνάρτηση του σ-προτύπου (3.4.3) παρουσία διαφορομορφισμών  $\xi$ .

Έστω η ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης σε επίπεδο ενός βρόγχου [63, 101, 102]

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = R_{MN}^- + \nabla_N^+ \xi_M + \nabla_{[M} \zeta_{N]}, \quad t = \ln \mu^2, \quad (\Sigma\Gamma'.1)$$

όπου  $\mu$  είναι η ενεργειακή κλίμακα,  $R_{MN}^-$  είναι ο τανυστής Ricci με στρέψη, και τα  $(\xi_M, \zeta_M)$  αντιστοιχούν σε διαφορομορφισμούς και μετασχηματισμούς βαθμίδας αντίστοιχα.

Για το παρόν παράρτημα λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι διαφορομορφισμοί  $\xi_M$ , και η πάνω έκφραση, μπορεί να ξαναγραφεί ισοδύναμα στο σύστημα αναφοράς  $e^A = e^A_M dX^M$  του εφαπτώμενου χώρου ως

$$\frac{d}{dt}(G_{AB} + B_{AB}) = R_{AB}^- + \nabla_B^- \xi_A. \quad (\Sigma\Gamma'.2)$$

Ο όρος  $\xi_A$  περιέχει δύο συνεισφορές [52]

$$\xi_A = \omega^{-C}{}_{A|C} + \hat{\xi}_A, \quad (\Sigma\Gamma'.3)$$

όπου η πρώτη μηδενίζεται λόγω της (3.4.22) και η δεύτερη λαμβάνει υπόψιν της επιπλέον διαφορομορφισμούς που μπορεί να χρειάζονται, προκειμένου να εξασφαλίζεται συμβατότητα για τις ροές της ομάδας επανακανονικοποίησης στην περίπτωση συγκεκριμένης επιλογής πίνακα  $\lambda_{ab}$ . Στην συνέχεια, ξαναγράφεται ο όρος  $\hat{\xi}_A$  ως

$$\nabla_B^- \hat{\xi}_A = e_B^M \left( \partial_M \hat{\xi}_A + \omega_A^{-C}{}_{|M} \hat{\xi}_C \right), \quad (\Sigma\Gamma'.4)$$

όπου το  $e_A^M$  είναι το αντίστροφο του  $e^A_M$ , δηλαδή  $e^A_M e_A^N = \delta_M^N$ . Αντικαθιστώντας την (ΣΤ'.4) στην (ΣΤ'.2), σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της ενότητας 2.1.2 της [52],

προκύπτει το ακόλουθο συνεπές σύστημα εξισώσεων για τις ροές

$$\frac{d\lambda_{ab}}{dt} = \frac{1}{2k} \mathcal{N}_{ac}{}^d \left( \mathcal{N}_{bd}{}^{(T)c} - \lambda_0 g_{bd} \tilde{g}^{ce} \hat{\xi}_e \right), \quad \hat{\xi}_e = \text{σταθερά}, \quad (\Sigma T'.5)$$

που παίρνει τη μορφή (3.4.4) με  $\zeta^c = -\lambda_0 \tilde{g}^{ce} \hat{\xi}_e$ .

## Z' Υπολογισμός της μετρικής Zamolodchikov για την περίπτωση του γενικού πίνακα $\lambda_{ab}$

Στο παράρτημα αυτό υπολογίζεται η μετρική Zamolodchikov (3.4.10) για τον σύνθετο τελεστή  $\mathcal{O}_{ab}$  της (3.4.7).

Η μετρική στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης συσχέτισμού δύο-σημείων [53] της (3.4.9). Ακολουθώντας την μεθοδολογία του παραρτήματος Γ', η συνάρτηση συσχέτισμού δύο σημείων αναπτύσσεται στη σειρά

$$\begin{aligned} G_{ab|cd} &= |x_{12}|^4 \langle \mathcal{O}_{ab}(x_1, \bar{x}_1) \mathcal{O}_{cd}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_\lambda \\ &= G_{ab|cd}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) \frac{G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)}}{\pi^{2n} (2n)!}, \end{aligned} \quad (Z'.1)$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)}}{|x_{12}|^4} &= \int d^2 z_1 \dots d^2 z_{2n} \langle J_1^a(x_1) J_1^{a_1}(z_1) \dots J_1^{a_{2n}}(z_{2n}) J_1^c(x_2) \rangle \\ &\quad \langle \bar{J}_2^b(\bar{x}_1) \bar{J}_2^{b_1}(\bar{z}_1) \dots \bar{J}_2^{b_{2n}}(\bar{z}_{2n}) \bar{J}_2^d(\bar{x}_2) \rangle, \end{aligned} \quad (Z'.2)$$

με τη συνάρτηση δύο σημείων του  $\mathcal{O}_{ab}$  στο σύμμορφο σημείο να είναι

$$G_{ab|cd}^{(0)} = |x_{12}|^4 \langle \mathcal{O}_{ab}(x_1, \bar{x}_1) \mathcal{O}_{cd}(x_2, \bar{x}_2) \rangle_{\text{CFT}} = \delta_{ac} \delta_{bd} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ab|cd}. \quad (Z'.3)$$

Συνεχίζοντας με την (Z'.2), μετά από τις κατάλληλες συναιρέσεις προκειμένου να αποφευχθούν διαγράμματα φυσαλίδας και μη-συνδεδεμένα διαγράμματα, και κρατώντας μόνο το

Αβελιανό μέρος που προκύπτει από τις συναυρέσεις αυτές, παράγεται η αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} &= (2n-1)(2n-2) \delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_3} G_{aa_3 a_4 \dots a_{2n} c | bb_2 b_4 \dots b_{2n} d}^{(2n-2)} \\ &+ 2(2n-1) \delta_{aa_1} \delta_{b_1 b_2} G_{a_2 a_3 \dots a_{2n} c | bb_3 b_4 \dots b_{2n} d}^{(2n-2)} \\ &+ 2(2n-1) \delta_{a_1 a_2} \delta_{bb_1} G_{aa_3 a_4 \dots a_{2n} c | b_2 b_3 \dots b_{2n} d}^{(2n-2)}, \end{aligned} \quad (Z'.4)$$

η οποία λύνεται από την

$$\left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} = \pi^{2n} (2n)! \sum_{m=0}^n (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m}, \quad n \geq 1. \quad (Z'.5)$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ως εξής:

- Είναι προφανές ότι για  $n = 1$  η (Z'.5) ισχύει, εφόσον από τις (Z'.4) και (Z'.3) προκύπτει

$$\begin{aligned} \lambda_{a_1 b_1} \lambda_{a_2 b_2} G_{aa_1 a_2 c | bb_1 b_2 d}^{(2)} &= 2\pi^2 (\lambda_{a_1 b_1} \lambda_{a_2 b_2} \delta_{aa_1} \delta_{b_1 b_2} G_{a_2 c | b d}^{(0)} + \lambda_{a_1 b_1} \lambda_{a_2 b_2} \delta_{a_1 a_2} \delta_{bb_1} G_{ac | b_2 d}^{(0)}) \\ &= 2\pi^2 ((\lambda \lambda^T)_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ac} (\lambda^T \lambda)_{bd}). \end{aligned}$$

- Έστω ότι η (Z'.5) ισχύει για κάθε τάξη μέχρι  $n - 1$

$$\left( \prod_{i=1}^{2n-2} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n-2} c | bb_1 \dots b_{2n-2} d}^{(2n-2)} = \pi^{2n-2} (2n-2)! \sum_{m=0}^{n-1} (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m-1}. \quad (Z'.6)$$

- Τότε, αποδεικνύεται ότι η (Z'.5) ισχύει για τάξη  $n$ . Πολλαπλασιάζοντας την (Z'.4) με τα  $\lambda$  προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} &= \\ &= (2n-1)(2n-2) (\lambda \lambda^T \lambda)_{a_3 b_2} \left( \prod_{i=4}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_3 a_4 \dots a_{2n} c | bb_2 b_4 \dots b_{2n} d}^{(2n-2)} \\ &+ 2(2n-1) (\lambda \lambda^T)_{aa_2} \left( \prod_{i=3}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{a_2 a_3 \dots a_{2n} c | bb_3 b_4 \dots b_{2n} d}^{(2n-2)} \\ &+ 2(2n-1) (\lambda^T \lambda)_{bb_1} \left( \prod_{i=3}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_3 \dots a_{2n} c | b_1 b_3 b_4 \dots b_{2n} d}^{(2n-2)}. \end{aligned}$$

Στους δύο τελευταίους όρους, μπορεί αμέσως να αντικατασταθεί η (Z'.6) για  $G^{(2n-2)}$ . Ωστόσο, εφόσον οι συναυρέμενοι δείκτες του πρώτου όρου δεν ακολουθούν το μοτίβο της (Z'.6), χρειάζεται λίγη παραπάνω δουλειά για τον όρο αυτό. Στην πρώτη σειρά,

αντικαθίσταται λοιπόν η  $G^{(2n-2)}$  από την αναδρομική της σχέση (Ζ'.4). Προκύπτει

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi^4} \left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} = \\
& = (2n-1) \dots (2n-4) (\lambda \lambda^T \lambda)_{a_3 b_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{b_2 b_5} \left( \prod_{i=4}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_5 a_6 \dots a_{2n} c | bb_4 b_6 \dots b_{2n} d}^{(2n-4)} \\
& + 2(2n-1) \dots (2n-3) (\lambda \lambda^T \lambda)_{a_3 b_2} \delta_{aa_3} \delta_{b_2 b_4} \left( \prod_{i=4}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{a_4 a_5 \dots a_{2n} c | bb_5 b_6 \dots b_{2n} d}^{(2n-4)} \\
& + 2(2n-1) \dots (2n-3) (\lambda \lambda^T \lambda)_{a_3 b_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{bb_2} \left( \prod_{i=4}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_5 \dots a_{2n} c | b_4 b_5 \dots b_{2n} d}^{(2n-4)} \\
& + 2\pi^{2n-4} (2n-1)! (\lambda \lambda^T)_{aa_2} \sum_{m=0}^{n-1} (\lambda \lambda^T)_{a_2 c}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m-1} \\
& + 2\pi^{2n-4} (2n-1)! (\lambda^T \lambda)_{bb_1} \sum_{m=0}^{n-1} (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{b_1 d}^{n-m-1},
\end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη και τρίτη σειρά μπορεί πάλι να χρησιμοποιηθεί η (Ζ'.6), αυτή τη φορά για την  $G^{(2n-4)}$ . Αυτό που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi^4} \left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} = \\
& = (2n-1) \dots (2n-4) (\lambda^T \lambda \lambda^T \lambda \lambda^T)_{b_4 a_5} \left( \prod_{i=6}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_5 a_6 \dots a_{2n} c | bb_4 b_6 \dots b_{2n} d}^{(2n-4)} \\
& + 2\pi^{2n-4} (2n-1)! (\lambda \lambda^T \lambda \lambda^T)_{aa_4} \sum_{m=0}^{n-2} (\lambda \lambda^T)_{a_4 c}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m-2} \\
& + 2\pi^{2n-4} (2n-1)! (\lambda^T \lambda \lambda^T \lambda)_{bb_4} \sum_{m=0}^{n-2} (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{b_4 d}^{n-m-2} \\
& + 2\pi^{2n-4} (2n-1)! (\lambda \lambda^T)_{aa_2} \sum_{m=0}^{n-1} (\lambda \lambda^T)_{a_2 c}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m-1} \\
& + 2\pi^{2n-4} (2n-1)! (\lambda^T \lambda)_{bb_1} \sum_{m=0}^{n-1} (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{b_1 d}^{n-m-1}.
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας την αντικατάσταση της αναδρομικής σχέσης για την πρώτη σειρά μέχρι την μηδενική τάξη  $G^{(0)}$  (όπου ο όρος που περιέχει συναρτήσεις εσωτερικών με εξωτερικά σημεία έχει μηδενικό συντελεστή), μόνο όροι που προέρχονται από τις συναρτήσεις

εσωτερικών με εξωτερικά σημεία επιβιώνουν, δίνοντας τελικά

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} = \\ & = 2(2n-1)! \pi^{2n} \sum_{p=1}^n \sum_{m=0}^{n-p} \left( (\lambda \lambda^T)_{ac}^{m+p} (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m-p} + (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m} \right), \end{aligned}$$

με το διπλό άθροισμα να ξαναγράφεται ως

$$\sum_{p=1}^n \sum_{m=0}^{n-p} \left( (\lambda \lambda^T)_{ac}^{m+p} (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m-p} + (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m} \right) = n \sum_{m=0}^n (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m}.$$

Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτει τελικά

$$\left( \prod_{i=1}^{2n} \lambda_{a_i b_i} \right) G_{aa_1 \dots a_{2n} c | bb_1 \dots b_{2n} d}^{(2n)} = \pi^{2n} (2n)! \sum_{m=0}^n (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m}. \quad (Z'.7)$$

Η χρήση της τελευταίας έκφρασης στην (Z'.1) συνεπάγεται

$$\begin{aligned} G_{ab|cd} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\lambda \lambda^T)_{ac}^m (\lambda^T \lambda)_{bd}^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \lambda^T)_{ac}^n \times \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda^T \lambda)_{bd}^m \\ &= (\mathbb{1} - \lambda \lambda^T)_{ac}^{-1} (\mathbb{1} - \lambda^T \lambda)_{bd}^{-1} = \tilde{g}^{ac} g^{bd} = (\tilde{g}^{-1} \otimes g^{-1})_{ab|cd}. \end{aligned} \quad (Z'.8)$$

Μια σημαντική παρατήρηση εδώ είναι το γεγονός ότι στην απόδειξη αυτή δεν προκύπτει ο παράγοντας  $1/2$  που υπάρχει μπροστά από τη μετρική της (3.4.10). Για να γίνει κατανοητός ο λόγος που συμβαίνει αυτό, πρέπει να μελετηθεί σε επίπεδο συναρτήσεων συσχετισμού. Έστω η διπλά παραμορφωμένη δράση (3.4.1) με  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Περνώντας σε Ευκλείδιο κοσμικό φύλλο με αναλυτική συνέχιση, και επαναορίζοντας τα ρεύματα  $J_i^a \rightarrow J_i^a / \sqrt{k_i}$  (όπως στη σχέση (3.4.7)), προκύπτει η δράση

$$\begin{aligned} S_{k_1, k_2}^\lambda &= S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) - \frac{\lambda_{ab}}{\pi} \int d^2z \hat{\mathcal{O}}_{ab}(z, \bar{z}) + \dots, \\ \hat{\mathcal{O}}_{ab} &= \mathcal{O}_{ab} + \tilde{\mathcal{O}}_{ab}, \quad \mathcal{O}_{ab} = J_1^a(z) \bar{J}_2^b(\bar{z}), \quad \tilde{\mathcal{O}}_{ab} = J_2^a(z) \bar{J}_1^b(\bar{z}). \end{aligned} \quad (Z'.9)$$

Η κανονικοποίηση της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων του τελεστή  $\hat{\mathcal{O}}_{ab}$  στη μονάδα χρειάζεται προκειμένου να υπάρχει συμφωνία με τις συμβάσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη του  $c$ -θεωρήματος της (3.4.6) στην [53] και εισάγει έναν επιπλέον συντελεστή  $1/2$  στην (3.4.10). Σημειώνεται ότι για την περίπτωση του απλά παραμορφωμένου  $\lambda$ -προτύπου [38] ο αντίστοιχος συντελεστής είναι μονάδα [58, 50].

## Η' Η μετρική Zamolodchikov για τους $\mathcal{O}^{(m,n)}$ σύνθετους τελεστές

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο υπολογισμός του κυρίαρχου όρου ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλο  $k$  της μετρικής (3.5.36) στον χώρο των παραμέτρων ζεύξης. Ο υπολογισμός γίνεται αυστηρά για το όριο  $k \rightarrow \infty$  όπου η άλγεβρα των ρευμάτων γίνεται Αβελιανή. Η δράση (3.5.62) που προκύπτει από την παραμόρφωση του WZW προτύπου, σε Ευκλείδιο χώρο γράφεται ως

$$S = S_{WZW} - \frac{1}{\pi} \int d^2z \left( \lambda \mathcal{O} + \tilde{\lambda} \mathcal{O}^{(m,n)} \right), \quad (\text{H'.1})$$

$$\mathcal{O} = J^a \bar{J}^a, \quad \mathcal{O}^{(m,n)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} J^{a_1} \dots J^{a_m} \bar{J}^{b_1} \dots \bar{J}^{b_n}.$$

Ακολουθώντας πάλι την μεθοδολογία του παραρτήματος Γ', υπολογίζεται επακριβώς ως προς  $\lambda$  και σε μηδενική τάξη ως προς  $\tilde{\lambda}$  το Αβελιανό μέρος της μετρικής Zamolodchikov στο χώρο των παραμέτρων ζεύξης  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$ . Στους υπολογισμούς που ακολουθούν θεωρείται ότι  $m \geq n$ , αλλά το αποτέλεσμα της μετρικής είναι το ίδιο και για  $m < n$ .

Για τη συνιστώσα  $G_{\lambda\lambda} = |x_{12}|^4 \langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle$  της μετρικής, σε τάξη  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^0)$ , το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της απλά παραμορφωμένης περίπτωση  $\lambda$ -προτύπου, που υπολογίζεται στην [50] και στο παράρτημα Γ' της παρούσας εργασίας. Το μη-διαγώνιο στοιχείο  $G_{\lambda\tilde{\lambda}}$  υπολογίζεται από την συνάρτηση συσχετισμού  $\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}^{(m,n)}(x_2) \rangle$  και είναι μηδέν σε τάξη  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda}^0)$  σε συμφωνία με την υπόθεση που έγινε στην (3.5.29). Έτσι, μένει μόνο ο υπολογισμός του Αβελιανού μέρους της  $G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} = x_{12}^{2m} \bar{x}_{12}^{2n} \langle \mathcal{O}^{(m,n)}(x_1) \mathcal{O}^{(m,n)}(x_2) \rangle$ , επακριβώς ως προς  $\lambda$  και σε μηδενική τάξη ως προς  $\tilde{\lambda}$ .

Σύμφωνα με την γνωστή πλέον μεθοδολογία, αναπτύσσεται η άνωθεν ποσότητα σε δυνάμεις του  $\lambda$  ως

$$\langle \mathcal{O}^{(m,n)} \mathcal{O}^{(m,n)} \rangle = G^{(0)} + \sum_{r=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\pi^r r!} G^{(r)}, \quad (\text{H'.2})$$



όπου προφανώς, για  $k \rightarrow \infty$  μόνο άρτιοι όροι συνεισφέρουν. Κατά συνέπεια, προκύπτει ότι

$$G^{(0)} = S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} S_{c_1 \dots c_m; d_1 \dots d_n} \langle J^{a_1} \dots J^{a_m}(x_1) J^{c_1} \dots J^{c_m}(x_2) \rangle \\ \times \langle \bar{J}^{b_1} \dots \bar{J}^{b_n}(\bar{x}_1) \bar{J}^{d_1} \dots \bar{J}^{d_n}(\bar{x}_2) \rangle = \frac{m!n!S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n}^2}{x_{12}^{2m} \bar{x}_{12}^{2n}} \quad (\text{H'.3})$$

και ότι

$$G^{(r)} = \int d^2 z_1 \dots d^2 z_r S_{a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_n} S_{c_1 \dots c_m; d_1 \dots d_n} \langle J^{a_1} \dots J^{a_m}(x_1) J^{e_1}(z_1) \dots J^{e_r}(z_r) J^{c_1} J^{c_m}(x_2) \rangle \\ \times \langle \bar{J}^{b_1} \dots \bar{J}^{b_n}(\bar{x}_1) \bar{J}^{e_1}(\bar{z}_1) \dots \bar{J}^{e_r}(\bar{z}_r) \bar{J}^{d_1} \dots \bar{J}^{d_n}(\bar{x}_2) \rangle . \quad (\text{H'.4})$$

Θεωρώντας τώρα τα σημεία  $z_1, \dots, z_k$  ως εσωτερικά, ενώ τα  $x_{1,2}$  ως εξωτερικά και κάνοντας τις συναρτήσεις αποφεύγοντας τη συνεισφορά από μη-συνδεδεμένα διαγράμματα και διαγράμματα φυσαλίδες, είναι δυνατόν να βρεθεί μία αναδρομική σχέση για την  $G^{(r)}$ . Επιλέγοντας τα ρεύματα  $J^{e_1}(z_1)$  και  $\bar{J}^{e_1}(\bar{z}_1)$  της πάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι επιτρεπόμενες συναρτήσεις είναι είτε τύπου εσωτερικό με εσωτερικό σημείο είτε εσωτερικό με εξωτερικό, τα ολομορφικά  $J^{e_1}$  μπορούν να συναρτηθούν με οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα  $(r-1)$  εσωτερικά ρεύματα  $J^{e_i}$  (με  $i \neq 1$ ). Αυτό πρέπει να συνδυαστεί με την συναίρεση του αντιολομορφικού ρεύματος  $\bar{J}^{e_1}$  με ένα από τα υπόλοιπα  $(r-2)$  εσωτερικά  $\bar{J}^{e_j}$  (με  $j \neq 1, i$ , προκειμένου να αποφευχθούν μη-συνδεδεμένα διαγράμματα και φυσαλίδες) ή με κάποιο από τα  $2n$  εξωτερικά  $\bar{J}^{b_i}$  και  $\bar{J}^{d_i}$ . Επιπλέον όμως, το ολομορφικό  $J^{e_1}$  μπορεί να συναρτηθεί με οποιοδήποτε από τα  $2m$  εξωτερικά ρεύματα  $J^{a_i}$  και  $J^{c_i}$  και το αποτέλεσμα που θα προκύψει να συνδυαστεί με τις συναρτήσεις του  $\bar{J}^{e_1}$  με κάποιο από τα υπόλοιπα  $(r-1)$  εσωτερικά  $\bar{J}^{e_i}$  (με  $i \neq 1$ ).

Έτσι, για την  $G^{(r)}$  προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$G^{(r)} = \pi^2 [(r-1)(r-2) + 2n(r-1) + 2m(r-1)] G^{(r-2)} \\ = \pi^2 (r-1)(r+2(m+n-1)) G^{(r-2)} , \quad (\text{H'.5})$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{d^2 z}{(z-x)^2 (\bar{z}-\bar{y})^2} = \pi^2 \delta^{(2)}(x-y)$ . Λύνοντας την πάνω σχέση, συνεπάγεται ότι

$$G^{(r)} = \pi^{2k} \frac{(r-1)!! (r+2(m+n-1))!!}{(2(m+n)-2)!!} G^{(0)} \quad (\text{H'.6})$$

και με αντικατάσταση αυτής στην (H'.2), προκύπτει μετά τον υπολογισμό του αθροίσματος το αποτέλεσμα

$$\langle \mathcal{O}^{(m,n)} \mathcal{O}^{(m,n)} \rangle = \frac{m!n!S_{a_1\dots a_m; b_1\dots b_n}^2}{x_{12}^{2m} \bar{x}_{12}^{2n} (1-\lambda^2)^{m+n}}, \quad m \geq n. \quad (\text{H'.7})$$

Συνοψίζοντας, τα Αβελιανά (για  $k \rightarrow \infty$ ), ακριβή ως προς  $\lambda$  αλλά  $\tilde{\lambda}$ -ανεξάρτητα στοιχεία της μετρικής Zamolodchikov, δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} G_{\lambda\lambda} &= \frac{\dim G}{(1-\lambda^2)^2} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}), \quad G_{\lambda\tilde{\lambda}} = \mathcal{O}(\tilde{\lambda}), \\ G_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}} &= \frac{m!n!S_{a_1\dots a_m; b_1\dots b_n}^2}{(1-\lambda^2)^{m+n}} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}). \end{aligned} \quad (\text{H'.8})$$

Σημειώνεται πως στην ειδική περίπτωση  $m=2, n=0$  πρέπει να χρησιμοποιηθεί ότι  $S_{ab;0} = \delta_{ab}$ .

## Θ' Στοιχεία θεωρίας ομάδων για την $SU(N)$

Στο παράρτημα αυτό χρησιμοποιούνται οι αναφορές [97, 98, 99]. Έστω μία βάση από  $N \times N$  πίνακες  $\{t_a\}$ ,  $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$  με μηδενικό ίχνος και τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$\text{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab} . \quad (\Theta'.1)$$

Το γινόμενο δύο από αυτών μπορεί να αναλυθεί ως

$$t_a t_b = \frac{\delta_{ab}}{N} \mathbb{1}_{N \times N} + \frac{1}{2} (i f_{abc} + d_{abc}) t_c , \quad (\Theta'.2)$$

όπου οι σταθερές  $f_{abc}$  είναι πλήρως αντισυμμετρικές και οι  $d_{abc}$  είναι πλήρως συμμετρικές και με μηδενικό ίχνος. Ο συντελεστής του πρώτου όρου προκύπτει από τη συνθήκη της κανονικοποίησης και στην παρούσα κανονικοποίηση οι ιδιοτιμές του τετραγωνικού τελεστή Casimir είναι

$$c_G = 2N . \quad (\Theta'.3)$$

Για μία δεδομένη μη-αναγωγίσιμη αναπαράσταση  $R$  με στοιχεία  $(t_a)_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \dim R$  η σχέση πληρότητας γράφεται ως

$$(t_a)_{\alpha\beta} (t_a)_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} . \quad (\Theta'.4)$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων οδηγεί στις ακόλουθες ταυτότητες

$$\begin{aligned} f_{abe} f_{cfe} + f_{cae} f_{bfe} + f_{bce} f_{afe} &= 0 , \\ d_{abe} f_{cfe} + d_{cae} f_{bfe} + d_{bce} f_{afe} &= 0 , \\ f_{abe} f_{cfe} &= \frac{4}{N} (\delta_{ac} \delta_{bf} - \delta_{bc} \delta_{af}) + d_{ace} d_{bfe} - d_{bce} d_{afe} . \end{aligned} \quad (\Theta'.5)$$

Από την τελευταία, συναιρώντας με  $\delta_{bf}$  και μετονομάζοντας τους δείκτες προκύπτει η

$$d_{acd}d_{bcd} = 2\frac{N^2 - 4}{N}\delta_{ab} , \quad (\Theta'.6)$$

ενώ από την (Θ'.5) με συναίρεση και μετονομασία των δεικτών προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} f_{eaf}f_{fbg}f_{gce} &= -Nf_{abc} , \\ d_{eaf}f_{fbg}f_{gce} &= -Nd_{abc} , \\ d_{eaf}d_{fbg}f_{gce} &= \frac{N^2 - 4}{N}f_{abc} , \\ d_{eaf}d_{fbg}d_{gce} &= \frac{N^2 - 12}{N}d_{abc} . \end{aligned} \quad (\Theta'.7)$$

Συμμετρικοί ταυιστές με περισσότερους δείκτες υπολογίζονται αναδρομικά ως

$$d_{a_1 a_2 \dots a_{m+1}}^{(m+1)} = d_{a(a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m a_{m+1})a}^{(m)} , \quad m = 3, 4, \dots , \quad (\Theta'.8)$$

όπου κατά τη συμμετροποίηση λαμβάνεται υπόψιν ο κατάλληλος συντελεστής, για παράδειγμα,

$$d_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(4)} = \frac{1}{3}(d_{aa_1 a_2} d_{a_3 a_4 a} + d_{aa_3 a_1} d_{a_2 a_4 a} + d_{aa_2 a_3} d_{a_1 a_4 a}) . \quad (\Theta'.9)$$

Η ακόλουθη ταυτότητα είναι αρκετά χρήσιμη

$$f_{ab(a_1} d_{a_2 a_3 \dots a_m)b}^{(m)} = 0 \quad (\Theta'.10)$$

και μπορεί εύκολα να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο  $C^{(m)} = d_{a_1 a_2 \dots a_m} t^{a_1} t^{a_2} \dots t^{a_m}$  είναι ο τελεστής Casimir και για αυτό  $[C^{(m)}, t^a] = 0, a = 1, 2, \dots, \dim G$ . Από αυτό, με τις κατάλληλες συναιρέσεις δειτών, προκύπτουν οι ταυτότητες

$$d_{ab(a_1 \dots a_{m-2}}^{(m)} f_c) b d f_{d a e} = \Delta_m d_{c e a_1 \dots a_{m-2}} , \quad \Delta_m = -\frac{c_G}{m-1} , \quad m = 2, 3, \dots , \quad (\Theta'.11)$$

και

$$f_{d e a} f_{d b(a} d_{a_1 \dots a_{m-2} c)b}^{(m)} = 0 . \quad (\Theta'.12)$$

Σημειώνεται εδώ ότι για την περίπτωση που  $m = 2$ , η σύμβαση που χρησιμοποιείται είναι η  $d_{ab}^{(2)} = \delta_{ab}$ .

# Γ' Συμπλήρωμα στους διαταρακτικούς υπολογισμούς

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται οι λεπτομερείς υπολογισμοί για τις διαταρακτικές συνεισφορές στο αποτέλεσμα της ανώμαλης διάστασης που παρουσιάζεται στο κυρίως κείμενο.

Η βασική τεχνική ολοκλήρωσης που χρησιμοποιείται στα πλαίσια της θεωρίας διαταραχών στην παρούσα εργασία είναι αυτή που παρουσιάζεται αναλυτικά στο παράρτημα Α', για τα ολοκληρώματα του παραρτήματος Β'. Συνοπτικά, η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί το θεώρημα Stokes στις δύο διαστάσεις

$$\int_M d^2x \partial_\mu F^\mu = \frac{i}{2} \int_{\partial M} \{d\bar{z}F^z - dzF^{\bar{z}}\}, \quad (\text{I.1})$$

όπου  $M$  είναι η αντίστοιχη δισδιάστατη επιφάνεια και  $\partial M$  είναι το σύνορό της, με θετικό δείκτη στροφής όταν αυτό διαγράφεται αριστερόστροφα. Οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις δεν είναι ολομορφικές, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η εφαρμογή του θεωρήματος του Cauchy, αλλά είναι εύκολο ναδειχθεί ότι οι μόνες συνεισφορές στα ολοκληρώματα προέρχονται από τις ολοκληρώσεις των διαδρομών γύρω από τους πόλους. Στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμόζεται μερική ολοκλήρωση, με τις μεταβλητές  $z$  και  $\bar{z}$  να συμπεριφέρονται ως ανεξάρτητες, και τη συνεισφορά των επιφανειακών όρων να είναι εν γένει μη-μηδενική. Σε ότι ακολουθεί, τα σημεία  $x_i$  θεωρούνται εξωτερικά, ενώ τα  $z_i$  εσωτερικά,  $i = 1, 2$ . Το πρώτο σύνολο ολοκληρωμάτων του παραρτήματος Β' που χρειάζεται είναι τα

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{x}_2)^2} = \pi \delta^{(2)}(x_1-x_2), \quad (\text{I.2})$$

$$\int \frac{d^2z}{(z-x_1)^2(\bar{z}-\bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{x_{12}}, \quad \int \frac{d^2z}{(z-x_1)(\bar{z}-\bar{x}_2)^2} = \frac{\pi}{\bar{x}_{12}}, \quad (\text{I.3})$$

$$\int \frac{d^2z}{(z_1-x_1)(z_1-x_2)(\bar{z}_1-\bar{x}_2)} = \frac{\pi}{x_{12}} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2}, \quad (\text{I.4})$$

$$\int \frac{d^2z}{(z_1-x_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_1)(\bar{z}_1-\bar{x}_2)} = -\frac{\pi}{\bar{x}_{12}} \ln \frac{\varepsilon^2}{|x_{12}|^2}. \quad (\text{I.5})$$

Άλλα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στους ενδιάμεσους υπολογισμούς των ανώμαλων διαστάσεων διαταραχτικά είναι

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)^2 (\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)} = \frac{\pi}{\bar{z}_{12}} \left( \frac{1}{z_1 - x_2} - \frac{1}{z_2 - x_2} \right), \quad (\text{I.6})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - z_1)(z - x_1)^2 (\bar{z} - \bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{\bar{z}_1 - \bar{x}_1} \frac{1}{(z_1 - x_1)^2}, \quad (\text{I.7})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)(z - x_1)^2 (\bar{z} - \bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{x_{12}^2} \left( \frac{1}{\bar{x}_2 - \bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{x}_1 - \bar{z}_1} \right), \quad (\text{I.8})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_2)} - \int \frac{d^2 z}{(z - x_2)(\bar{z} - \bar{x}_1)} = -\pi \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}, \quad (\text{I.9})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z_1 - z)(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)} = \frac{\pi}{\bar{z}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|z_{12}|^2}, \quad (\text{I.10})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - \bar{z}_2)} = \frac{\pi}{\bar{z}_{12}} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2}, \quad (\text{I.11})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2 (\bar{z} - \bar{z}_1)^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|z - z_1|^2} = -\frac{\pi}{|z_1 - x_1|^2}, \quad (\text{I.12})$$

και

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 z}{(z - x_1)^2 (\bar{z} - \bar{z}_1)^2} \ln \frac{|z - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} \\ &= \frac{\pi}{x_{12}} \left( \frac{1}{\bar{x}_1 - \bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{x}_2 - \bar{z}_1} \right) + \frac{\pi}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)(z_1 - x_1)}, \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

καθώς και

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{|z_1 - x_1|^2}, \quad (\text{I.14})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_1)(z - x_2)(\bar{z} - \bar{z}_1)^2} = \frac{\pi}{x_{12}} \left( \frac{1}{\bar{x}_1 - \bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{x}_2 - \bar{z}_1} \right), \quad (\text{I.15})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)^2 (z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_1)} = -\frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi}{x_{12}^2}, \quad (\text{I.16})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)^2 (z - x_1)(\bar{z} - \bar{x}_2)} = \frac{\pi}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}, \quad (\text{I.17})$$

$$\int \frac{d^2 z}{(z - x_2)^2 (\bar{z} - \bar{z}_1)^2} \ln \frac{|z - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} = \frac{\pi}{|z_1 - x_2|^2}. \quad (\text{I.18})$$

## Γ.1 Για τον ολομορφικό τελεστή $\mathcal{O}^{(2,0)}$

Γυρνώντας στην (3.5.147) υπάρχει ένα σύνολο πέντε ολοκληρωμάτων, τα οποία στα πλαίσια αυτού του παραρτήματος συμβολίζονται με  $I_1, \dots, I_5$ . Ξεκινώντας από το  $I_1$ , αυτό δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{z_{12}(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \\ &= \pi \int \frac{d^2 z_1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{z_{12}(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} - \pi \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{z_{12}(z_2 - x_1)^2 (z_2 - x_2) \bar{z}_{12}^2}, \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση

$$\frac{1}{\bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} = \frac{1}{\bar{z}_{12}} \left( \frac{1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \right). \quad (\text{I.2})$$

Ο πρώτος όρος που προκύπτει από την εφαρμογή της σχέσης αυτής στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (I.1) αναιρείται με το πρώτο ολοκλήρωμά της, και τελικά μένει

$$I_1 = -\pi \int \frac{d^2 z_1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2}. \quad (\text{I.3})$$

Το σπάσιμο ξανά του ολοκληρώματος με το  $z_2$  περιέχει τρεις όρους

$$\frac{1}{(z_2 - x_2)(z_2 - x_1)^2} = \frac{1}{x_{12}^2} \left( \frac{1}{z_2 - x_2} - \frac{1}{z_2 - x_1} \right) + \frac{1}{x_{12}} \frac{1}{(z_2 - x_1)^2}, \quad (\text{I.4})$$

αλλά ο τρίτος μηδενίζεται στο συγκεκριμένο σχήμα ομαλοποίησης που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Έτσι, προκύπτει τελικά ότι

$$I_1 = \frac{\pi^2}{x_{12}^2} \left( \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} - \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} \right), \quad (\text{I.5})$$

και κάνοντας την ολοκλήρωση, το αποτέλεσμα είναι

$$I_1 = -\frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}. \quad (\text{I.6})$$

Συνεχίζοντας με το  $I_2$ , αυτό δίνεται από τη σχέση

$$I_2 = \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{z_{13}(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}}. \quad (\text{I.7})$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (I.4) και αντικαθιστώντας το  $z_2$  με  $z_3$  προκύπτει

$$I_2 = \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}} \left( \frac{1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{z_{13} \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2) \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} + \frac{1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \right), \quad (\text{I.8})$$

ενώ με τη βοήθεια των (I.10), (I.11) και (I.6), το ολοκλήρωμα  $I_2$  γίνεται

$$I_2 = \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|z_{12}|^2} \\ + \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} \\ - \pi \int \frac{d^2 z_1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)(z_2 - x_1)^2 \bar{z}_{12}^2}. \quad (\text{I.9})$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (I.12), (I.13) και (I.8) προκύπτει ότι

$$I_2 = -\pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2 (z_1 - x_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} - \frac{\pi^2}{x_{12}} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2 (\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} \\ + \frac{\pi^2}{x_{12}^2} \left( \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} - \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)(\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} \right) \\ + \pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_2)^2 (z_1 - x_1)(\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} \quad (\text{I.10})$$

και τελικά, η χρήση των (I.16), (I.9) και (I.17) οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$I_2 = \frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}. \quad (\text{I.11})$$

Έπειτα υπολογίζεται το  $I_3$  που δίνεται από την

$$I_3 = \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{z_{23}(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}}. \quad (\text{I.12})$$

Εφαρμόζοντας την (I.4) προκύπτει

$$I_3 = \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}} \left\{ \frac{1}{(z_2 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{z_{23} \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(z_2 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2) \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} + \frac{1}{z_2 - x_2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}} \right\}, \quad (\text{I.13})$$



ενώ με εφαρμογή των (I.10) με  $z_1 \rightarrow z_2$ , (I.11) και (I.6) αντίστοιχα,

$$I_3 = \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \left\{ - \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}} \ln \frac{\epsilon^2}{|z_{12}|^2} + \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} + \frac{1}{z_1 - x_2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2) \bar{z}_{12}^2} \right\}. \quad (\text{I.14})$$

Από την (I.8) με  $x_1 \rightarrow x_2$  και την (I.18) προκύπτει μία απαλοιφή μεταξύ του δεύτερου και τρίτου όρου της πάνω σχέσης και αυτό που μένει τελικά είναι

$$I_3 = \pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2) (\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} = -\frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} - \frac{\pi^3}{x_{12}^2}, \quad (\text{I.15})$$

όπου έγινε χρήση της (I.16).

Όσον αφορά το

$$I_4 = \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1) \bar{z}_{12}} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)^2 \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}}, \quad (\text{I.16})$$

η χρήση της (I.6) συνεπάγεται

$$I_4 = \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2)} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1) \bar{z}_{12}^2} - \pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_1) (z_2 - x_2) \bar{z}_{12}^2}, \quad (\text{I.17})$$

ενώ η εφαρμογή της (I.15) δίνει

$$I_4 = -\pi^2 \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2) (\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} - \frac{\pi^2}{x_{12}} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (\bar{z}_1 - \bar{x}_2)}. \quad (\text{I.18})$$

Τέλος, με τη βοήθεια της (I.17) προκύπτει ότι

$$I_4 = -\frac{\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2} + \frac{\pi^3}{x_{12}^2}. \quad (\text{I.19})$$

Τέλος, το

$$I_5 = x_{12} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12} (z_2 - x_2)^2} \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_1) (z_3 - x_2) \bar{z}_{13} \bar{z}_{23}}, \quad (\text{I.20})$$

μπορεί να γραφεί ως

$$-x_{12} \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \int \frac{d^2 z_2}{\bar{z}_{12}(z_2 - x_2)^2} \left\{ \int \frac{d^2 z_3}{(x_1 - z_3)\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} + \int \frac{d^2 z_3}{(z_3 - x_2)\bar{z}_{13}\bar{z}_{23}} \right\} \quad (\text{I'.21})$$

και με εφαρμογή της (I'.11) η σχέση αυτή γίνεται

$$\pi \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2} \left\{ \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_1|^2}{|z_1 - x_1|^2} - \int \frac{d^2 z_2}{(z_2 - x_2)^2 \bar{z}_{12}^2} \ln \frac{|z_2 - x_2|^2}{|z_1 - x_2|^2} \right\}. \quad (\text{I'.22})$$

Χρησιμοποιώντας άλλη μια φορά τις (I'.13) και (I'.18) συνεπάγεται ότι

$$I_5 = \frac{\pi^2}{x_{12}} \left\{ \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} + \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2) (\bar{z}_1 - \bar{x}_1)} - \int \frac{d^2 z_1}{(z_1 - x_1)^2 (z_1 - x_2) (\bar{z}_1 - \bar{x}_2)} \right\}, \quad (\text{I'.23})$$

από το οποίο προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα

$$I_5 = \frac{2\pi^3}{x_{12}^2} \ln \frac{\epsilon^2}{|x_{12}|^2}. \quad (\text{I'.24})$$

Τότε, συνδυάζοντας όλα τα αποτελέσματα,

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0, \quad (\text{I'.25})$$

όπως παρουσιάστηκε στο κυρίως κείμενο.

# ΙΑ' Συμπλήρωμα για την περίπτωση των αυτο- και έτερο-αλληλεπιδράσεων

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο πίνακας των ανώμαλων διαστάσεων για το πρότυπο της [41] το οποίο περιλαμβάνει ταυτόχρονα αυτο- και έτερο-αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ρευμάτων των WZW προτύπων. Τα διάφορα στοιχεία του ταχυστή της ανώμαλης διάστασης παρουσιάζονται παρακάτω και είναι ακριβή ως προς το  $\lambda$  και ως προς το  $\tilde{\lambda}$

$$\gamma_{ab}{}^{cd} = -\frac{c_G}{\Delta^3} \left( 2k_1^2 f_1(\lambda) + k_2^2 f_2(\lambda, \tilde{\lambda}) - k_1 k_2 f_3(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d,$$

$$f_1(\lambda) = (1 - \lambda)^2 \lambda (1 - (1 - \lambda)\lambda), \quad f_2(\lambda, \tilde{\lambda}) = \lambda \tilde{\lambda}^4 (2\tilde{\lambda} - 3\lambda),$$

$$f_3(\lambda, \tilde{\lambda}) = (1 - \lambda) \tilde{\lambda}^2 (3\lambda^3 + (1 - \tilde{\lambda})^2 - 5\lambda^2 \tilde{\lambda} + \lambda(3 + \tilde{\lambda}^2)),$$

$$\gamma_{ab}{}^{c'd} = \frac{c_G(1 - \tilde{\lambda})\lambda\tilde{\lambda}}{\Delta^4} \left( \sqrt{k_1^5 k_2} f_4(\lambda, \tilde{\lambda}) - \sqrt{k_1 k_2^5} f_5(\lambda, \tilde{\lambda}) + \sqrt{k_1^3 k_2^3} f_6(\lambda, \tilde{\lambda}) \right), \delta_a^c \delta_b^d,$$

$$f_4(\lambda, \tilde{\lambda}) = (1 - \lambda)^2 (1 + \lambda) (2 - \lambda + 2\lambda^2 - 3\tilde{\lambda}(1 + \lambda)),$$

$$f_5(\lambda, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^4 (3 + 3\lambda - 2\tilde{\lambda}), \quad f_6(\lambda, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^2 (1 - \lambda) (1 + \tilde{\lambda} + \lambda(7 + \lambda + \tilde{\lambda})),$$

$$\gamma_{a'b}{}^{cd} = \frac{c_G(1 - \lambda)\lambda\tilde{\lambda}}{\Delta^4} \left( \sqrt{k_1^5 k_2} f_4(\lambda, \tilde{\lambda}) - \sqrt{k_1 k_2^5} f_5(\lambda, \tilde{\lambda}) + \sqrt{k_1^3 k_2^3} f_6(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d,$$

με τις προηγούμενες  $f_4, f_5, f_6,$

$$\begin{aligned}\gamma_{a'b}{}^{c'd} &= \frac{c_G}{\Delta^3} \left( k_1^2 f_7(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_2^2 f_8(\tilde{\lambda}) + k_1 k_2 f_9(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d, \\ f_7(\lambda, \tilde{\lambda}) &= (1 - \lambda)^2 (\lambda^2 - 2\tilde{\lambda}(1 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) + 3\tilde{\lambda}^2(1 + \lambda)^2), \\ f_8(\tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^4(3 - 2\tilde{\lambda}), \\ f_9(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2(1 - \lambda)(3 + \lambda(3 + \lambda(6 + \lambda))) - 8\tilde{\lambda} - \lambda\tilde{\lambda}(8 + 5\lambda) + 3\tilde{\lambda}^2(1 + \lambda),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}{}^{cd'} &= \frac{c_G \lambda^2}{2\Delta^3} \left( -k_1^2 f_{10}(\lambda) + k_2^2 f_{11}(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_1 k_2 f_{12}(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d, \\ f_{10}(\lambda) &= 2\lambda(1 - \lambda)^2, \quad f_{11}(\lambda, \tilde{\lambda}) = \lambda\tilde{\lambda}^4(\lambda - \tilde{\lambda}), \\ f_{12}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2(1 - \lambda)(2 + 3\lambda - \tilde{\lambda}(3 + \lambda + \lambda^2) + \tilde{\lambda}^2(1 + \lambda)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{ab'}{}^{c'd'} &= \frac{c_G \lambda_0^{-1} \lambda \tilde{\lambda}}{2\Delta^3} \left( -k_1^2 f_{13}(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_2^2 f_{14}(\lambda, \tilde{\lambda}) + k_1 k_2 f_{15}(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d, \\ f_{13}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \lambda(1 - \lambda(3 - \tilde{\lambda}^2) + \lambda^2(2 - \tilde{\lambda})) + \tilde{\lambda}(1 - \tilde{\lambda}), \quad f_{14}(\lambda, \tilde{\lambda}) = f_{11}(\lambda, \tilde{\lambda}), \\ f_{15}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2(2 + \lambda(1 - 2\lambda) - \tilde{\lambda}(3 - \lambda - \lambda^3) + \tilde{\lambda}^2(1 - \lambda^2)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{a'b'}{}^{cd'} &= -\frac{c_G \lambda \tilde{\lambda}}{2\Delta^3} \left( \sqrt{k_1^3 k_2} f_{16}(\lambda, \tilde{\lambda}) + \sqrt{k_1 k_2^3} f_{17}(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d, \\ f_{16}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= (1 - \lambda)^2 (\lambda(1 - \lambda) + \tilde{\lambda}(1 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) - \tilde{\lambda}^2(1 + \lambda)^2), \\ f_{17}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2(-2 + \lambda^2(1 + \lambda^2) + \tilde{\lambda}(2 - \lambda - \lambda^3))\end{aligned}$$

χολ

$$\begin{aligned}\gamma_{a'b'}{}^{c'd'} &= \frac{c_G \tilde{\lambda}^2}{2\Delta^3} \left( k_2^2 f_{18}(\lambda, \tilde{\lambda}) - k_1 k_2 f_{19}(\lambda, \tilde{\lambda}) \right) \delta_a^c \delta_b^d, \\ f_{18}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^2(2(1 - \tilde{\lambda}) - \lambda^3(\lambda - \tilde{\lambda})), \\ f_{19}(\lambda, \tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}(2(1 - \tilde{\lambda}) + \lambda^5) - \lambda^2((1 - \tilde{\lambda})(2 + 3\tilde{\lambda}) - \lambda(3 - 2\tilde{\lambda}) + \lambda^2(1 + \tilde{\lambda}^2)).\end{aligned}$$

## IB' Ροή της ομάδας επανακανονικοποίησης σε επίπεδο δύο-βρόγχων

Σκοπός αυτού του παραρτήματος είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης ροής κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης για το πρότυπο που περιγράφεται από τη δράση

$$S_{k_1, k_2}(g_1, g_2) = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{k\lambda}{\pi} \int d^2\sigma J_{1+}^a J_{2-}^a, \quad k = \sqrt{k_1 k_2}, \quad (\text{IB'.1})$$

στο οποίο, σε αντίθεση με το (3.7.1) τα δύο επίπεδα  $k_1$  και  $k_2$  δεν είναι ίσα. Τα πρότυπα αυτά ρέουν από μια ακριβή σύμμορφη θεωρία  $G_{k_1} \times G_{k_2}$  στις υψηλές ενέργειες για  $\lambda = 0$  σε μία ακριβή σύμμορφη θεωρία  $G_{k_2-k_1} \times G_{k_1}$  στις χαμηλές ενέργειες για  $\lambda = \lambda_0$  [40]. Ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k^2)$  αποδεικνύει ότι τα πρότυπα αυτά είναι επανακανονικοποιήσιμα μέχρι αυτήν την τάξη και δεν χρειάζεται η προσθήκη διαφορομορφισμών ή αντισταθμιστικών όρων.

Για το πρότυπο (IB'.1) προκύπτει το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = R^a R^a + \lambda_0^{-2} L^{\hat{a}} L^{\hat{a}} + 2\lambda_0^{-1} \lambda R^a L^{\hat{a}}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad (\text{IB'.2})$$

και η 2-μορφή

$$B = B_0 + \lambda_0^{-1} \lambda R^a \wedge L^{\hat{a}}, \quad (\text{IB'.3})$$

όπου το  $B_0$  είναι η 2-μορφή που αντιστοιχεί στα δύο WZW πρότυπα για επίπεδα  $k_{1,2}$  με την αντίστοιχη στρέψη να είναι η

$$H_0 = dB_0 = -\frac{1}{6} f_{abc} \left( R^a \wedge R^b \wedge R^c + \lambda_0^{-2} L^{\hat{a}} \wedge L^{\hat{b}} \wedge L^{\hat{c}} \right). \quad (\text{IB'.4})$$

Στα παραπάνω αποτελέσματα έχει παραλειφθεί ξανά ένας συνολικός συντελεστής  $k_1/2\pi$ , και οι Mauer-Cartan 1-μορφές δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R^a &= -i\text{Tr}(t^a dg_1 g_1^{-1}), & L^{\hat{a}} &= -i\text{Tr}(t^a g_2^{-1} dg_2), \\ dR^a &= -\frac{1}{2}f_{abc}R^b \wedge R^c, & dL^{\hat{a}} &= \frac{1}{2}f_{abc}L^{\hat{b}} \wedge L^{\hat{c}}, \end{aligned} \quad (\text{IB'.5})$$

όπου οι δείκτες χωρίς καπέλο και με καπέλο συμβολίζουν τις Mauer-Cartan 1-μορφές υπολογισμένες για τα στοιχεία ομάδας  $g_1$  και  $g_2$  αντίστοιχα. Εισάγοντας την βάση

$$e^a = R^a, \quad e^{\hat{a}} = \lambda R^a + \lambda_0^{-1} L^{\hat{a}} \quad (\text{IB'.6})$$

και τον διπλό συμβολισμό  $A = (a, \hat{a})$  για τους δείκτες, το στοιχείο μήκους γράφεται ως

$$ds^2 = (1 - \lambda^2)e^a e^a + e^{\hat{a}} e^{\hat{a}} = G_{AB} e^A e^B. \quad (\text{IB'.7})$$

Οι συνδέσεις σπιν και η στρέψη για τη δράση (IB'.1) δίνονται από τις σχέσεις (3.2.16) και (3.2.17) ή αντίστοιχα από τις (2.14) και (2.16) της [52]. Για διαγώνιο και ισοτροπικό πίνακα ζεύξης  $\lambda_{ab} = \lambda \delta_{ab}$  γίνονται

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= -\frac{1}{2}(1 - \lambda^2)f_{abc}e^c + \frac{\lambda}{2}(1 - \lambda_0\lambda)f_{abc}e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}} &= \omega_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{\lambda}{2}(\lambda_0\lambda - 1)f_{abc}e^c, \\ \omega_{\hat{a}b} &= -\lambda_0\lambda f_{abc}e^c + \frac{\lambda_0}{2}f_{abc}e^{\hat{c}}, \end{aligned} \quad (\text{IB'.8})$$

όπου τα  $\omega_{AB}$  είναι αντισυμμετρικά, εφόσον η μετρική (IB'.7) είναι σταθερή και

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{6}(1 - \lambda^2(3 - 2\lambda_0\lambda))f_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c \\ &\quad - \frac{\lambda}{2}(1 - \lambda_0\lambda)f_{abc}e^{\hat{a}} \wedge e^b \wedge e^c - \frac{\lambda_0}{6}f_{abc}e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}}. \end{aligned} \quad (\text{IB'.9})$$

Για τον υπολογισμό σε επίπεδο δύο βρόγχων, χρειάζονται οι σπιν συνδέσεις με στρέψη  $\omega_{AB}^-$

$$\omega_{AB}^- = \omega_{AB|C}^- e^C = \left( \omega_{AB|C} - \frac{1}{2}H_{ABC} \right) e^C, \quad (\text{IB'.10})$$

τα στοιχεία των οποίων δίνονται από τις σχέσεις [52]

$$\begin{aligned}\omega_{ab}^- &= \lambda^2(\lambda_0\lambda - 1)f_{abc}e^c + \lambda(1 - \lambda_0\lambda)f_{abc}e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^- &= \omega_{a\hat{b}}^- = 0, \\ \omega_{\hat{a}\hat{b}}^- &= -\lambda_0\lambda f_{abc}e^c + \lambda_0 f_{abc}e^{\hat{c}}.\end{aligned}\tag{IB'.11}$$

Είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός της Riemann 2-μορφής με στρέψη  $\Omega_{AB}^-$ , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_{AB}^- = \frac{1}{2}R_{ABCD}^- e^C \wedge e^D = d\omega_{AB}^- + \omega_{AC}^- \wedge \omega_{CB}^-, \tag{IB'.12}$$

με τις αντίστοιχες συνιστώσες να είναι οι

$$R_{ABCD}^- = (\omega^K_{C|D} - \omega^K_{D|C}) \omega_{AB|K}^- + \omega_{AK|C}^- \omega^{-K}_{B|D} - \omega_{AK|D}^- \omega^{-K}_{B|C}, \tag{IB'.13}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι τα  $\omega_{AB|C}$  είναι σταθερά. Χρησιμοποιώντας τις πάνω σχέσεις, υπολογίζονται τα μη-μηδενικά στοιχεία του τανυστή Riemann τα οποία είναι

$$\begin{aligned}R_{abcd}^- &= R_1 f_{abe} f_{cde}, & R_{abcd}^- &= R_2 f_{abe} f_{cde}, & R_{abcd}^- &= R_3 f_{abe} f_{cde}, \\ R_1 &= \lambda^3 \Lambda, & R_2 &= -\lambda^2 \Lambda, & R_3 &= \lambda \Lambda, & \Lambda &= \frac{(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0\lambda - 1)}{1 - \lambda^2},\end{aligned}\tag{IB'.14}$$

ενώ όλα τα υπόλοιπα μηδενίζονται. Επιπλέον για τον υπολογισμό της  $\beta$ -συνάρτησης σε επίπεδο δύο-βρόγχων ως προς το  $1/k$  ανάπτυγμα, χρειάζεται η ποσότητα  $H_{AB}^2 = H_{ACD}H_B^{CD}$ , με στοιχεία

$$\begin{aligned}(H^2)_{ab} &= c_G H_1 \delta_{ab}, & H_1 &= \frac{1 - 4\lambda^2 + \lambda^4 (7 + 2\lambda_0(\lambda_0 - \lambda(4 - \lambda_0\lambda)))}{(1 - \lambda^2)^2}, \\ (H^2)_{\hat{a}\hat{b}} &= c_G H_2 \delta_{\hat{a}\hat{b}}, & H_2 &= \frac{\lambda(1 - \lambda_0\lambda)(1 - \lambda^2(3 - 2\lambda_0\lambda))}{(1 - \lambda^2)^2}, \\ (H^2)_{\hat{a}\hat{b}} &= c_G H_3 \delta_{\hat{a}\hat{b}}, & H_3 &= \frac{\lambda^2(1 - \lambda_0\lambda)^2 + \lambda_0^2(1 - \lambda^2)^2}{(1 - \lambda^2)^2}.\end{aligned}\tag{IB'.15}$$

Πλέον είναι δυνατός ο υπολογισμός της  $\beta$ -συνάρτησης σε τάξη  $1/k^2$  για το πρότυπο της (IB'.1), η οποία δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dt}(G_{MN} + B_{MN}) = \left(\beta_{AB}^{(1)} + \beta_{AB}^{(2)}\right) e^A_M e^B_N, \tag{IB'.16}$$

με  $t = \ln \mu^2$ , όπου το  $\mu$  να είναι η κλίμακα επανακανονικοποίησης και [126]-[132]<sup>1</sup>

$$\beta_{AB}^{(1)} = R_{AB}^-, \quad \beta_{AB}^{(2)} = R_{ACDE}^- \left( R^{-CDE}{}_B - \frac{1}{2} R^{-DEC}{}_B \right) + \frac{1}{2} (H^2)^{CD} R_{CABD}^-. \quad (\text{IB'.17})$$

Το αριστερό μέλος της (IB'.16) ισούται με

$$\frac{d}{dt} (G_{MN} + B_{MN}) = 2 \frac{d\lambda}{dt} (e^a{}_M e^{\hat{a}}{}_N - \lambda e^a{}_M e^a{}_N). \quad (\text{IB'.18})$$

Επιπλέον, η συνεισφορά σε επίπεδο ενός βρόγχου  $\beta^{(1)}$  υπολογίζεται στην [52] και το αποτέλεσμα είναι

$$\beta_{ab}^{(1)} = c_G \delta_{ab} \frac{R_1}{1 - \lambda^2}, \quad \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(1)} = \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(1)} = 0, \quad \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(1)} = c_G \delta_{\hat{a}\hat{b}} \frac{R_2}{1 - \lambda^2}, \quad (\text{IB'.19})$$

με  $\beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(1)} = -\lambda \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(1)}$ .

Όσον αφορά τη συνεισφορά σε επίπεδο δύο-βρόγχων  $\beta_{AB}^{(2)}$ , εφαρμόζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, συνεπάγεται ότι<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \beta_{ab}^{(2)} &= c_G^2 \delta_{ab} \left( \frac{R_1^2}{(1 - \lambda^2)^3} + \frac{1}{2} \frac{R_2^2 - H_1 R_1}{(1 - \lambda^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{H_2 R_2}{1 - \lambda^2} \right), \\ \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)} &= \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)} = 0, \\ \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)} &= c_G^2 \delta_{\hat{a}\hat{b}} \left( \frac{R_1 R_2}{(1 - \lambda^2)^3} + \frac{1}{2} \frac{R_2 R_3 - H_1 R_2}{(1 - \lambda^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{H_2 R_3}{1 - \lambda^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{IB'.20})$$

με  $\beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)} = -\lambda \beta_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)}$ . Αντικαθιστώντας τις (IB'.18), (IB'.19), (IB'.20) στην (IB'.16) και επαναφέροντας τον συνολικό παράγοντα  $k_1$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \beta^\lambda(\lambda; \lambda_0) &= \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G \lambda^2 (\lambda - \lambda_0) (\lambda - \lambda_0^{-1})}{2k (1 - \lambda^2)^2} \\ &+ \frac{c_G^2 \lambda^4 (\lambda - \lambda_0) (\lambda - \lambda_0^{-1}) ((\lambda_0 + \lambda_0^{-1})(1 + 5\lambda^2) - 8\lambda - 4\lambda^3)}{4k^2 (1 - \lambda^2)^5} \end{aligned} \quad (\text{IB'.21})$$

και ότι τα επίπεδα  $k_{1,2}$  δεν ρέουν, διατηρώντας έτσι την τοπολογική τους φύση και σε επίπεδο δύο βρόγχων. Για ίσα επίπεδα  $k_1 = k_2$ , η (IB'.21) ταυτίζεται με την (3.7.9). Επίσης, μέχρι την τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  η έκφραση (IB'.21) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό  $k_{1,2} \rightarrow -k_{2,1}$  και  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ , αλλά η επέκταση της συμμετρίας αυτής σε τάξη δύο-βρόγχων

<sup>1</sup>Χρησιμοποιείται η σχέση (7) από την Hull–Townsend [128] ή ισοδύναμα η σχέση (4.26) της Osborn [132]. Στις παρούσες συμβάσεις για τον γενικευμένο ταυστή Riemann, έχει γίνει η αντικατάσταση  $+\rightarrow -$  και ο επαναορισμός  $H \rightarrow H/2$ , λόγω της διαφορετικής κανονικοποίησης του πεδίου  $H = dB$ .

<sup>2</sup>Όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα  $f_{aa_1 a_2} f_{ba_2 a_3} f_{ca_3 a_1} = \frac{c_G}{2} f_{abc}$ , η οποία αποδεικνύεται εύκολα μέσω χρήσης της ταυτότητας του Jacobi.



δεν είναι τετριμμένη.

## IB'.1 Ίσα επίπεδα άλγεβρας

Για την περίπτωση των ίσως επιπέδων  $k_1 = k = k_2$ , η (IB'.21) απλοποιείται σημαντικά και παίρνει τη μορφή

$$\beta^\lambda(\lambda) = \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G}{2k} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{c_G^2}{2k^2} \frac{\lambda^4(1-2\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)^5}. \quad (\text{IB'.1})$$

Η πάνω έκφραση έχει δύο όρια που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Αυτά είναι το  $\lambda = 1$  και το  $\lambda = -1$  για  $k \rightarrow \infty$  - διατηρώντας την τοπολογική του φύση σε τάξη  $1/k^2$  ως προς το ανάπτυγμα για μεγάλο  $k$ , τα οποία αντιστοιχούν στο ισοτροπικό PCM και στο ψευδοδυϊκό χειραλικό πρότυπο<sup>3</sup>. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσοντας γύρω από τα  $\lambda = 1$  και  $\lambda = -1$  προκύπτει

$$\lambda = 1 - \frac{\kappa^2}{k}, \quad k \gg 1, \quad \frac{d\kappa^2}{dt} = \frac{c_G}{8} + \frac{c_G^2}{64\kappa^2} \quad (\text{IB'.2})$$

και

$$\lambda = -1 + \frac{1}{b^{2/3}k^{1/3}}, \quad k \gg 1, \quad \frac{db}{dt} = \frac{3}{4}c_G b^3 - \frac{9}{8}c_G^2 b^5. \quad (\text{IB'.3})$$

Σε ότι ακολουθεί αποδεικνύεται ότι οι προηγούμενες εκφράσεις, οι οποίες προέκυψαν παίρνοντας κάποια καλώς ορισμένα όρια, ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν από το PCM και το ψευδοδυϊκό πρότυπο αντίστοιχα.

Έστω η δράση (3.7.5) για ένα ισοτροπικό PCM με  $E_{ab} = 2\kappa^2\delta_{ab}$ , όπου το  $\kappa$  παίζει το ρόλο της παραμέτρου ζεύξης. Αυτό είναι ένα μη-γραμμικό σ-πρότυπο που περιέχει μόνο τον συμμετρικό όρο της μετρικής, και συνεπώς οι  $\beta$ -συναρτήσεις του απλοποιούνται στις [101, 133, 134, 135]:

$$\frac{dG_{\mu\nu}}{dt} = R_{\mu\nu} - R_{\mu\kappa\rho\sigma}R^{\rho\sigma\kappa}{}_{\nu}, \quad (\text{IB'.4})$$

όπου  $G_{\mu\nu} = 2\kappa^2 R_{\mu}^a R_{\nu}^a$ . Χρησιμοποιώντας την από πάνω σχέση, εύκολα προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\frac{d\kappa^2}{dt} = \frac{c_G}{8} + \frac{c_G^2}{64\kappa^2}, \quad (\text{IB'.5})$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με την (IB'.2).

Έστω τώρα η δράση (3.7.8) για το ψευδοδυϊκό χειραλικό πρότυπο [136], με  $G_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2b^{2/3}}$  και  $B_{ab} = \frac{1}{6}f_{abc}v^c$ . Αυτό είναι ένα σ-πρότυπο με στρέψη, του οποίου οι  $\beta$ -συναρτήσεις δίνονται

<sup>3</sup>Ανάλογα όρια υπάρχουν και για την περίπτωση του απλού  $\lambda$ -παραμορφωμένου προτύπου [38, 44], και αντιστοιχούν στο μη-αβελιανό T-δυϊκό του ισοτροπικού PCM και στο ψευδοδυϊκό χειραλικό πρότυπο αντίστοιχα.

από τις (IB'.16), (IB'.17). Χρησιμοποιώντας τα από πάνω προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{4}c_G b^3 - \frac{9}{8}c_G^2 b^5, \quad (\text{IB'.6})$$

το οποίο ταυτίζεται με την (IB'.3).

## IIΓ' Σύμβολα Christoffel στο $\tilde{\lambda} = 0$ όριο

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται τα σύμβολα του Christoffel που χρειάστηκαν για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων (3.6.25)-(3.6.27), στο όριο  $\tilde{\lambda} = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{m_1 m_2 | n_1 \hat{n}_2}^{p_1 p_2} &= \delta_{n_1}^{p_1} \delta_{m_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2}, & \Gamma_{m_1 \hat{m}_2 | n_1 n_2}^{p_1 p_2} &= \delta_{m_1}^{p_1} \delta_{n_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} \\
 \Gamma_{m_1 m_2 | \hat{n}_1 \hat{n}_2}^{\hat{p}_1 p_2} &= \delta_{\hat{n}_1}^{\hat{p}_1} \delta_{m_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2}, & \Gamma_{\hat{m}_1 \hat{m}_2 | n_1 n_2}^{\hat{p}_1 p_2} &= \delta_{\hat{m}_1}^{\hat{p}_1} \delta_{n_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} \\
 \Gamma_{m_1 m_2 | \tilde{n}_1 \hat{n}_2}^{\tilde{p}_1 p_2} &= \delta_{\tilde{n}_1}^{\tilde{p}_1} \delta_{m_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2}, & \Gamma_{\tilde{m}_1 \hat{m}_2 | n_1 n_2}^{\tilde{p}_1 p_2} &= \delta_{\tilde{m}_1}^{\tilde{p}_1} \delta_{n_2}^{p_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} \\
 \Gamma_{m_1 \hat{m}_2 | \hat{n}_1 \hat{n}_2}^{\hat{p}_1 \hat{p}_2} &= \delta_{\hat{n}_1}^{\hat{p}_1} \delta_{\hat{m}_2}^{\hat{p}_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2}, & \Gamma_{\hat{m}_1 \hat{m}_2 | n_1 \hat{n}_2}^{\hat{p}_1 \hat{p}_2} &= \delta_{\hat{m}_1}^{\hat{p}_1} \delta_{\hat{n}_2}^{\hat{p}_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} \\
 \Gamma_{m_1 \hat{m}_2 | n_1 \tilde{n}_2}^{p_1 \tilde{p}_2} &= \delta_{m_1}^{p_1} \delta_{\tilde{n}_2}^{\tilde{p}_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2}, & \Gamma_{m_1 \tilde{m}_2 | n_1 \hat{n}_2}^{p_1 \tilde{p}_2} &= \delta_{m_1}^{p_1} \delta_{\tilde{m}_2}^{\tilde{p}_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2} & (II\Gamma'.1) \\
 \Gamma_{m_1 \hat{m}_2 | \tilde{n}_1 \hat{n}_2}^{\tilde{p}_1 \hat{p}_2} &= \delta_{\tilde{n}_1}^{\tilde{p}_1} \delta_{\hat{m}_2}^{\hat{p}_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2}, & \Gamma_{\tilde{m}_1 \hat{m}_2 | n_1 \hat{n}_2}^{\tilde{p}_1 \hat{p}_2} &= \delta_{\tilde{m}_1}^{\tilde{p}_1} \delta_{\hat{n}_2}^{\hat{p}_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} \\
 \Gamma_{\hat{m}_1 \hat{m}_2 | n_1 \tilde{n}_2}^{\hat{p}_1 \tilde{p}_2} &= \delta_{\hat{m}_1}^{\hat{p}_1} \delta_{\tilde{n}_2}^{\tilde{p}_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2}, & \Gamma_{\hat{m}_1 \tilde{m}_2 | \hat{n}_1 \hat{n}_2}^{\hat{p}_1 \tilde{p}_2} &= \delta_{\hat{n}_1}^{\hat{p}_1} \delta_{\tilde{m}_2}^{\tilde{p}_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2} \\
 \Gamma_{m_1 \tilde{m}_2 | \tilde{n}_1 \hat{n}_2}^{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2} &= \delta_{\tilde{n}_1}^{\tilde{p}_1} \delta_{\tilde{m}_2}^{\tilde{p}_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2}, & \Gamma_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 | n_1 \tilde{n}_2}^{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2} &= \delta_{\tilde{m}_1}^{\tilde{p}_1} \delta_{\tilde{n}_2}^{\tilde{p}_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} \\
 \Gamma_{m_1 \hat{m}_2 | n_1 \hat{n}_2}^{p_1 \hat{p}_2} &= \delta_{n_1}^{p_1} \delta_{\hat{m}_2}^{\hat{p}_2} (\lambda g^{-1})_{m_1 \hat{n}_2} + \delta_{m_1}^{p_1} \delta_{\hat{n}_2}^{\hat{p}_2} (\lambda g^{-1})_{n_1 \hat{m}_2} .
 \end{aligned}$$

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν στο όριο αποσύζευξης.

## ΙΔ' Ανώμαλες διαστάσεις με διαφορομορφισμούς

Έστω τώρα ότι η επιλογή του πίνακα ζεύξης είναι τέτοια, ώστε να δημιουργούνται καινούριες διευθύνσεις ρών κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Τότε, προκειμένου να είναι συνεπής η ροή κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης, πρέπει να συμπεριληφθούν στους υπολογισμούς και διαφορομορφισμοί, οι οποίοι θα παίζουν το ρόλο αντισταθμιστικών όρων και θα ακυρώνουν τις ροές που εμφανίζονται στις νέες διευθύνσεις. Σε αυτή την περίπτωση, η πιο γενική μορφή της  $\beta$ -συναρτήσης δίνεται από τη σχέση (3.4.4), και στα πλαίσια της ενότητας 3.6 παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\Lambda_{AB}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{N}_{AC}{}^D \mathcal{N}_{BD}^{(T)C} + \mathcal{N}_{AC}{}^D g_{BD} \hat{\zeta}^C \right), \quad \hat{\zeta}^C = -\tilde{g}^{CE} \hat{\xi}_E, \quad (\text{ΙΔ'.1})$$

όπου τα  $\hat{\zeta}$  και  $\hat{\xi}$  είναι σταθερές ως προς τις συντεταγμένες του χωρόχρονου, αλλά εν γένει εξαρτώνται από τις παραμέτρους ζεύξης και τα επίπεδα  $k_{1,2}$ .

Ο πρώτος όρος της (ΙΔ'.1) αντιστοιχεί στα σύννηθη στοιχεία των  $\beta$ -συναρτήσεων (3.6.18) και (3.6.19) (ή (3.6.23)) του κύριου κειμένου, ενώ ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην επιπρόσθετη συνεισφορά που έρχεται από τους διαφορομορφισμούς. Τα ακριβή ως προς  $\lambda$  και  $\tilde{\lambda}$  στοιχεία του διαφορομορφισμού που θα πρέπει να προστεθούν στις (3.6.18) και (3.6.19) δίνονται από την πάνω σχέση με χρήση των στοιχείων  $g$  και  $\mathcal{N}$  της (3.6.15) και (3.6.16) αντίστοιχα.

Σε ότι ακολουθεί, υπολογίζεται η συνεισφορά του επιπρόσθετου όρου των διαφορομορφισμών στις  $\beta$ -συναρτήσεις της (3.6.23) και στις ανώμαλες διαστάσεις (3.6.25) και (3.6.28), μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(1/k)$  και στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο. Ορίζοντας

$$\mathfrak{D}^{AB} = \frac{1}{2} \mathcal{N}_{AC}{}^D g_{BD} \hat{\zeta}^C,$$

μετά από λίγη άλγεβρα, προκύπτουν οι ακόλουθες συνεισφορές στη  $\beta^{ab}$  και  $\beta^{a\bar{b}}$  μέχρι  $\mathcal{O}(\tilde{\lambda})$  τάξη

$$\mathfrak{D}^{ab} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}'_{ac}{}^{\hat{d}} g_{\hat{b}\hat{d}} \hat{\zeta}^{tc}, \quad \mathfrak{D}^{a\bar{b}} = -\frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \tilde{\lambda}_{r\bar{b}} f_{acr} \hat{\zeta}^{tc}, \quad \hat{\zeta}^{tc} = \sqrt{k_2} \hat{\zeta}^c, \quad (\text{I}\Delta'.2)$$

ενώ  $\mathfrak{D}^{ab} = \mathfrak{D}^{\hat{a}B} = \mathfrak{D}^{\bar{a}B} = 0$ ,  $B = (b, \hat{b}, \bar{b})$ . Οι εκφράσεις για τα  $\mathcal{N}'$  και το  $g$  στην (IΔ'.2) δίνονται από τις σχέσεις (3.6.22) και (3.6.23).

Οι ανώμαλες διαστάσεις για τους σύνθετους τελεστές, δίνονται πάλι από την (3.6.7), αλλά τώρα με τη  $\beta$ -συνάρτηση της (IΔ'.1). Οι ανώμαλες διαστάσεις που θα υπολογιστούν υπό την παρουσία διαφορομορφισμών, θα διαφέρουν από αυτές που έχουν υπολογισθεί στο κυρίως κείμενο, κατά μία επιπρόσθετη συνεισφορά της μορφής

$$\nabla_{AB} \mathfrak{D}^{CD} + \nabla^{CD} \mathfrak{D}_{AB} = \nabla_{AB} \mathfrak{D}^{CD} + G_{AB|MN} G^{CD|PQ} \nabla_{PQ} \mathfrak{D}^{MN}. \quad (\text{I}\Delta'.3)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων των διαφόρων τελεστών, θα χρειαστεί η συναλλοίωτη παράγωγος  $\nabla_{AB} \mathfrak{D}^{CD}$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\partial_{ab} g_{\hat{c}\hat{d}} = -(\delta_{\hat{b}\hat{c}} \lambda_{a\hat{d}} + \delta_{\hat{a}\hat{b}} \lambda_{ac})$ , προκύπτουν οι ακόλουθοι μη-μηδενικοί όροι

$$\nabla_{ab} \mathfrak{D}^{cd} = \Gamma_{ab|mn}^{cd} \mathfrak{D}^{mn}, \quad \nabla_{\hat{a}\hat{b}} \mathfrak{D}^{\hat{c}\hat{d}} = \Gamma_{\hat{a}\hat{b}|m\hat{n}}^{\hat{c}\hat{d}} \mathfrak{D}^{m\hat{n}}, \quad \nabla_{\bar{a}\bar{b}} \mathfrak{D}^{\bar{c}\bar{d}} = \Gamma_{\bar{a}\bar{b}|m\bar{n}}^{\bar{c}\bar{d}} \mathfrak{D}^{m\bar{n}}, \quad (\text{I}\Delta'.4)$$

όπου τα στοιχεία του  $\Gamma_{AB|MN}^{CD}$  και του  $\mathfrak{D}^{AB}$  είναι αυτά των σχέσεων (II'.1) και (IΔ'.2) αντίστοιχα και

$$\nabla_{\hat{a}\hat{b}} \mathfrak{D}^{\hat{c}\hat{d}} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{k_1 k_2}} \left( \mathcal{K}_{cr;ab}{}^{\hat{s}}(\lambda, \lambda_0^{-1}) + \mathcal{N}'_{mr}{}^{\hat{s}} \delta_a^c (\lambda g^{-1})_{m\hat{b}} \right. \\ \left. + \mathcal{N}'_{cr}{}^{\hat{k}} g^{\hat{b}\hat{s}} \lambda_{a\hat{k}} + \mathcal{N}'_{cr}{}^{\hat{s}} \partial_{ab} \right) g_{\hat{d}\hat{s}} \hat{\zeta}^{tr}, \quad (\text{I}\Delta'.5)$$

$$\nabla_{\bar{a}\bar{b}} \mathfrak{D}^{\bar{c}\bar{d}} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{k_1 k_2}} \mathcal{N}'_{cr}{}^{\hat{s}} g_{\hat{d}\hat{s}} \partial_{ab} \hat{\zeta}^{tr}, \quad (\text{I}\Delta'.6)$$

$$\nabla_{ab} \mathfrak{D}^{c\bar{d}} = \frac{\delta_b^{\bar{d}}}{2\sqrt{k_1 k_2}} (\lambda_0 \lambda_{a\hat{s}} \mathcal{N}'_{cr}{}^{\hat{s}} - f_{cra}) \hat{\zeta}^{tr}, \quad (\text{I}\Delta'.7)$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί τα σύμβολα Christoffel της (II'.1). Τα στοιχεία των  $\mathcal{N}'$  και  $g$  δίνονται ξανά από τις (3.6.22), (3.6.23), ενώ τα στοιχεία του  $\mathcal{K}$  είναι αυτά που ορίζονται κάτω από τη σχέση (3.6.24). Φυσικά, οι συνεισφορές που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, είναι αυτές που θα προστεθούν στα στοιχεία  $\gamma_{ab}^{c\bar{d}}$  και  $\gamma_{ab}^{\bar{c}\bar{d}}$ , δηλαδή οι εξισώσεις (IΔ'.5) και (IΔ'.7). Παρατηρείται ξανά ότι οι συνεισφορές των (IΔ'.4), (IΔ'.5) και (IΔ'.7) αντιστοιχούν

σε διαγώνια στοιχεία ενός  $9 \times 9$  πίνακα, σε αντίθεση με τη συνεισφορά της (ΙΔ'.6) στην  $\gamma_{ab}^{cd}$  η οποία αντιστοιχεί σε μη-διαγώνιο στοιχείο του προαναφερθέντος  $9 \times 9$  πίνακα. Αν το  $\hat{\zeta}'$  περιέχει γραμμικό ως προς το  $\tilde{\lambda}$  όρο, τότε η (ΙΔ'.6) είναι διάφορη του μηδενός, και υπάρχει μίξη των δύο σύνθετων τελεστών που υπάρχουν στη δράση (3.6.2), η οποία παραμένει και στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο. Ωστόσο, από τη μορφή που έχει η  $\beta^{ab}$  στην (3.6.23), είναι εμφανές ότι ο πίνακας  $\tilde{\lambda}$  επηρεάζει τη ροή του  $\lambda_{ab}$  σε τάξη  $\tilde{\lambda}^2$  και υψηλότερη. Αυτό σημαίνει ότι οποιοσδήποτε όρος διαφορομορφισμού χρησιμοποιηθεί για να ακυρώσει τις νέες ροές που προκύπτουν στον υποπίνακα  $\beta^{ab}$ , θα είναι της μορφής  $\hat{\zeta}'(\lambda, \tilde{\lambda}; \lambda_0) = \hat{\zeta}'_{(0)}(\lambda; \lambda_0) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^2)$ . Έτσι, στο  $\tilde{\lambda} = 0$  όριο, η (ΙΔ'.6) μηδενίζεται και το όριο αυτό όντως αποτελεί όριο αποσύζευξης. Συνοψίζοντας, η γενική μορφή του ταυιστή των ανόμαλων διαστάσεων υπό την παρουσία διαφορομορφισμών είναι

$$(\gamma_{AB}^{CD})_{\text{diff.}} = \gamma_{AB}^{CD} + (\delta_A^P \delta_B^Q \delta_M^C \delta_N^D + G_{AB|MN} G^{CD|PQ}) \nabla_{PQ} \mathfrak{D}^{MN}, \quad (\text{ΙΔ'.8})$$

όπου τα στοιχεία της  $\gamma_{AB}^{CD}$  είναι αυτά των (3.6.25), (3.6.26) και (3.6.27), ενώ τα μη-μηδενικά στοιχεία του  $\nabla_{PQ} \mathfrak{D}^{MN}$  είναι αυτά στις (ΙΔ'.4), (ΙΔ'.5) και (ΙΔ'.7).

Μια τελική παρατήρηση σχετικά με τους διαφορομορφισμούς, είναι η ακόλουθη: Η επιλογή του πίνακα  $\lambda_{ab}$  μπορεί επίσης να επηρεάσει τις ροές στον υποπίνακα της  $\beta^{ab}$  και να παράξει καινούριες διευθύνσεις ροής. Παρόλα αυτά, εφόσον η επιλογή του  $\tilde{\lambda}_{ab}$  δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα στο όριο αποσύζευξης, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αποφευχθεί με κατάλληλη επιλογή του υποπίνακα  $\tilde{\lambda}$  ώστε όλα τα στοιχεία του να είναι μη-μηδενικά και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπώς, είναι αρκετό η επιλογή του διαφορομορφισμού  $\hat{\zeta}'$  να είναι τέτοια ώστε να διορθώνει μόνο τις ροές στον  $\beta^{ab}$  υποπίνακα.

# Βιβλιογραφία

- [1] Introduction to conformal field theory, R.Blumenhagen,E.Plauschinn
- [2] CFT lecture notes, P.Ginsparg
- [3] Conformal field theory, P.Di Francesco,P.Mathieu,D.Senechal
- [4] Renormalization group and fixed points in quantum field theory, Timothy J.Hollowood.
- [5] Quantum Field Theory II, PSI lectures 2018-2019, Francois David.
- [6] Quantum Field Theory III, PSI lectures 2017-2018, Jaume Gomis, Gang Xu and Daniel Wohns.
- [7] Conformal Field theory, PSI lectures 2011-2012, Jaume Gomis.
- [8] Conformal Field Theory, PSI lectures 2014-2015, Jaume Gomis, Pedro Vieira, Freddy Cachazo.
- [9] String Theory (Review), PSI lectures 2011-2012, Freddy Cachazo.
- [10] String Theory, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos ,David Tong.
- [11] Sigma Models and String Theory, TASI Lectures, Curt Callan and LÁrus Thorlacius.
- [12] c-theorem in various dimensions, Advanced String School 2015, ICTS-TIFR, Zohar Kormagodski.
- [13] Integrability in QFT and AdS/CFT, lecture notes, Niklas Beisert, ABGP Doctoral School, 2014
- [14] Wess-Zumino-Witten models, lecture notes, Lorenz Eberhardt,YRISW PhD School in Vienna 2019
- [15] W. Thirring , *A Soluble Relativistic Field Theory?* Annals of Physics **3** (1958) 91–112, doi:10.1016/0003-4916(58)90015-0.

- 
- [16] K. Johnson, *Solution of the Equations for the Green's Functions of a two Dimensional Relativistic Field Theory*, Il Nuovo Cimento 20 (4) (1961) 773, doi:10.1007/BF02731566.
- [17] C. R. Hagen , *New Solutions of the Thirring Model*, Il Nuovo Cimento **B51** (1967) 169, doi:10.1007/BF02712329.
- [18] B. Klaiber , *The Thirring Model*, Lect. Theor. Phys. **10A** (1968) 141–176, OSTI 4825853.
- [19] S. Coleman , *Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model*, Physical Review **D11 (8)** (1975) 2088, doi:10.1103/PhysRevD.11.2088.
- [20] T. H. Buscher, *A symmetry of the string background field equations*, Phys. Lett. **B194** (1987) 59-62.
- [21] T. H. Buscher, *Path integral derivation of quantum duality in non-linear  $\sigma$ -models*, Phys. Lett. **B201** (1988) 466-472.
- [22] C. Klimcik and P. Severa , *Dual non-Abelian duality and the Drinfeld double*, Phys. Lett. **B351** (1995) 455-462, [hep-th/9502122].
- [23] C. Klimcik and P. Severa , *Poisson-Lie T-duality and loop groups of Drinfeld doubles*, Phys. Lett. **B372** (1996) 65-71, [hep-th/9512040].
- [24] C. Klimcik , *Poisson-Lie T-duality*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **46** (1996) 116-121, [hep-th/9509095].
- [25] A. Y. Alekseev, C. Klimcik, and A. A. Tseytlin , *Quantum Poisson-Lie T-duality and WZNW model*, Nucl. Phys. **B458** (1996) 430, arXiv:9509123 [hep-th].
- [26] C. Klimcik, and P. Severa , *Non-Abelian Momentum Winding Exchange*, Phys. Lett. **B383** (1996) 281, arXiv:9605212 [hep-th].
- [27] C. Klimcik, and P. Severa , *Open Strings and D-Branes in WZNW model*, Phys. Lett. **B488** (1997) 653, arXiv:9609112 [hep-th].
- [28] K. Sfetsos, , *Canonical equivalence of nonisometric sigma models and Poisson-Lie T-duality*, Nucl. Phys. **B517** (1998) 549-566, [hep-th/9710163].
- [29] K. Sfetsos, , *Poisson-Lie T-duality beyond the classical level and the renormalization group*, Phys. Lett. **B432** (1998) 365-375, [hep-th/9803019].



- [30] K. Sfetsos and K. Siampos, *Quantum equivalence in Poisson-Lie T-duality*, JHEP **06** (2009) 082, arXiv:0904.4248 [hep-th].
- [31] G. Valent, C. Klimcik and R. Squellari, *One loop renormalizability of the Poisson-Lie  $\sigma$ -models*, Phys. Lett. **B678** (2009) 143-148, arXiv:0902.1459 [hep-th].
- [32] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, in Proc. ICM, MSRI, Berkeley (1986) 708,  
F. Falceto and K. Gawedzki, J. Gerom. Phys. 11 (1993) 251,  
A. Yu. Alekseev and A. Z. Malkin, Commun. Math. Phys. 162 (1994) 147.
- [33] M. J. Duff, Nucl. Phys. **B335** (1990) 610;  
M. Rocek and E. Verlinde, Nucl. Phys. **B373** (1992) 630;  
A. Giveon and M. Rocek, Nucl. Phys. **B380** (1992) 128;  
E. Kiritsis, Nucl. Phys. **B405** (1993) 109, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2871;  
E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, J. Barbon and Y. Lozano, Nucl. Phys. **B415** (1994) 71;  
A. Giveon, E. Rabinovici and G. Veneziano, Nucl. Phys. **B322** (1989) 167;  
K. A. Meissner and G. Veneziano, Phys. Lett. **B267** (1991) 33;  
E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano, Phys. Lett. **B336** (1994) 183;  
C. Klimcik and P. Severa, Mod. Phys. Lett. **A10** (1995) 323, hep-th/9411003.
- [34] X. de la Ossa and F. Quevedo *Duality Symmetries from Non-Abelian Isometries in String Theory*, Nucl. Phys. **B403** (1993) 377, arXiv:hep-th/9210021.
- [35] B. E. Fridling and A. Jevicki, *Dual representations and ultraviolet divergences in nonlinear  $\sigma$ -models*, Phys. Lett. **B134** (1984) 70.
- [36] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Quantum equivalence of dual field theories*, Ann. Phys. **162** (1984) 31.
- [37] String theory and the non-Abelian Thirring model, D.Kutasov, Physics Letters B vol.227 (1989)
- [38] K. Sfetsos, *Integrable interpolations: From exact CFTs to non-Abelian T-duals*, Nucl. Phys. **B880** (2014) 225, arXiv:1312.4560 [hep-th].
- [39] G. Georgiou and K. Sfetsos, *A new class of integrable deformations of CFTs*, JHEP **1703** (2017) 083, arXiv:1612.05012 [hep-th].
- [40] G. Georgiou and K. Sfetsos, *Integrable flows between exact CFTs*, JHEP **1711** (2017) 078, arXiv:1707.05149 [hep-th].

- 
- [41] G. Georgiou and K. Sfetsos, *Novel all loop actions of interacting CFTs: Construction, integrability and RG flows*, Nucl. Phys. **B937** (2018) 371, arXiv:1809.03522 [hep-th].
- [42] G. Georgiou and K. Sfetsos, *The most general  $\lambda$ -deformation of CFTs and integrability*, JHEP **1903** (2019) 094, arXiv:1812.04033 [hep-th].
- [43] S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, *Integrable asymmetric  $\lambda$ -deformations*, JHEP **1904**, 094 (2019) arXiv:1902.04142 [hep-th].
- [44] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *All-loop correlators of integrable  $\lambda$ -deformed  $\sigma$ -models*, Nucl. Phys. **B909** (2016) 360, 1604.08212 [hep-th].
- [45] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos,  *$\lambda$ -deformations of left-right asymmetric CFTs*, Nucl. Phys. **B914** (2017) 623, arXiv:1610.05314 [hep-th].
- [46] D. Kutasov, *Duality Off the Critical Point in Two-dimensional Systems With Nonabelian Symmetries*, Phys. Lett. **B233** (1989) 369.
- [47] G. Itsios, K. Sfetsos and K. Siampos, *The all-loop non-Abelian Thirring model and its RG flow*, Phys. Lett. **B733** (2014) 265, arXiv:1404.3748 [hep-th].
- [48] G. Itsios, K. Sfetsos and K. Siampos and A. Torrielli, *The classical Yang–Baxter equation and the associated Yangian symmetry of gauged WZW-type theories*, Phys. Lett. **B889** (2014) 64, arXiv:1409.0554 [hep-th].
- [49] K. Sfetsos and K. Siampos, *Gauged WZW-type theories and the all-loop anisotropic non-Abelian Thirring model*, Nucl. Phys. **B885** (2014) 583, arXiv:1405.7803 [hep-th].
- [50] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *All-loop anomalous dimensions in integrable  $\lambda$ -deformed  $\sigma$ -models*, Nucl. Phys. **B901** (2015) 40, arXiv:1509.02946 [hep-th].
- [51] G. Georgiou, E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *Quantum aspects of doubly deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B919** (2017) 504, arXiv:1703.00462 [hep-th].
- [52] E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *RG flows for  $\lambda$ -deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B930** (2018) 499, arXiv:1801.10174 [hep-th].
- [53] A.B. Zamolodchikov, *Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory*, JETP Lett. **43** (1986) 730.
- [54] G. Georgiou, P. Panopoulos, E. Sagkrioti, K. Sfetsos, K. Siampos, *The exact C-function in integrable  $\lambda$ -deformed theories*, Phys. Lett. **B782** (2018) 613-18, arXiv:1805.03731 [hep-th].

- [55] E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *Weyl anomaly and the C-function in  $\lambda$ -deformed CFTs*, Nucl. Phys. **B938** (2019) 426, arXiv:1810.04189 [hep-th].
- [56] K. Sfetsos and K. Siampos, *The anisotropic  $\lambda$ -deformed  $SU(2)$  model is integrable*, Phys. Lett. **B743** (2015) 160, arXiv:1412.5181 [hep-th].
- [57] K. Sfetsos, K. Siampos and D.C. Thompson, *Generalised integrable  $\lambda$ - and  $\eta$ -deformations and their relation*, Nucl. Phys. **B899** (2015) 489, arXiv:1506.05784 [hep-th].
- [58] D. Kutasov, *String Theory and the Nonabelian Thirring Model*, Phys. Lett. **B227** (1989) 68.
- [59] B. Gerganov, A. LeClair and M. Moriconi, *On the beta function for anisotropic current interactions in 2-D*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4753, hep-th/0011189.
- [60] A. LeClair, *Chiral stabilization of the renormalization group for flavor and color anisotropic current interactions*, Phys. Lett. **B519** (2001) 183, hep-th/0105092.
- [61] C. Appadu and T.J. Hollowood, *Beta function of  $k$  deformed  $AdS_5 \times S^5$  string theory*, JHEP **1511** (2015) 095, arXiv:1507.05420 [hep-th].
- [62] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *Double and cyclic  $\lambda$ -deformations and their canonical equivalents*, Phys. Lett. **B771** (2017) 576, arXiv:1704.07834 [hep-th].
- [63] G. Ecker and J. Honerkamp, *Application of invariant renormalization to the nonlinear chiral invariant pion Lagrangian in the one-loop approximation*, Nucl. Phys. **B35** (1971) 481.  
J. Honerkamp, *Chiral multiloops*, Nucl. Phys. **B36** (1972) 130.  
D. Friedan, *Nonlinear Models in Two Epsilon Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1057 and *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, Annals Phys. **163** (1985) 318.
- [64] J. Balog, P. Forgacs, Z. Horvath and L. Palla, *A New family of  $SU(2)$  symmetric integrable sigma models*, Phys. Lett. **B324** (1994) 403, hep-th/9307030.
- [65] K. Sfetsos and K. Siampos, *Integrable Deformations of the  $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$  coset CFTs*, Nucl. Phys. **B927** (2018) 124, arXiv:1710.02515 [hep-th].
- [66] T.J. Hollowood, J.L. Miramontes and D.M. Schmidt, *Integrable Deformations of Strings on Symmetric Spaces*, JHEP **1411** (2014) 009, arXiv:1407.2840 [hep-th].

- [67] T.J. Hollowood, J.L. Miramontes and D. Schimdtt, *An Integrable Deformation of the  $AdS_5 \times S^5$  Superstring*, J. Phys. **A47** (2014) 49, 495402, arXiv:1409.1538 [hep-th].
- [68] K. Sfetsos and D.C. Thompson, *Spacetimes for  $\lambda$ -deformations*, JHEP **1412** (2014) 164, arXiv:1410.1886 [hep-th].
- [69] S. Demulder, K. Sfetsos and D.C. Thompson, *Integrable  $\lambda$ -deformations: Squashing Coset CFTs and  $AdS_5 \times S^5$* , JHEP **07** (2015) 019, arXiv:1504.02781 [hep-th].
- [70] R. Borsato, A.A. Tseytlin and L. Wulff, *Supergravity background of  $\lambda$ -deformed model for  $AdS_2 \times S^2$  supercoset*, Nucl. Phys. **B905** (2016) 264, arXiv:1601.08192 [hep-th].
- [71] Y. Chervonyi and O. Lunin, *Supergravity background of the  $\lambda$ -deformed  $AdS_3 \times S^3$  supercoset*, Nucl. Phys. **B910** (2016) 685, arXiv:1606.00394 [hep-th].
- [72] R. Borsato and L. Wulff, *Target space supergeometry of  $\eta$  and  $\lambda$ -deformed strings*, JHEP **1610** (2016) 045, arXiv:1608.03570 [hep-th].
- [73] C. Klimčík, *YB sigma models and  $dS/AdS$  T-duality*, JHEP **0212** (2002) 051, hep-th/0210095.
- [74] C. Klimčík, *On integrability of the YB sigma-model*, J. Math. Phys. **50** (2009) 043508, arXiv:0802.3518 [hep-th].
- [75] C. Klimčík, *Integrability of the bi-Yang–Baxter sigma-model*, Letters in Mathematical Physics **104** (2014) 1095, arXiv:1402.2105 [math-ph].
- [76] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, *On classical  $q$ -deformations of integrable sigma-models*, JHEP **1311** (2013) 192, arXiv:1308.3581 [hep-th].
- [77] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, *An integrable deformation of the  $AdS_5 \times S^5$  superstring action*, Phys. Rev. Lett. **112**, 051601, arXiv:1309.5850 [hep-th].
- [78] G. Arutyunov, R. Borsato and S. Frolov, *S-matrix for strings on  $\eta$ -deformed  $AdS_5 \times S^5$* , JHEP **1404** (2014) 002, arXiv:1312.3542 [hep-th].
- [79] K. Sfetsos, *Duality invariant class of two-dimensional field theories*, Nucl. Phys. **B561** (1999) 316, [hep-th/9904188].
- [80] B. Vicedo, *Deformed integrable  $\sigma$ -models, classical R-matrices and classical exchange algebra on Drinfel'd doubles*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 355203, arXiv:1504.06303 [hep-th].

- [81] B. Hoare and A.A. Tseytlin, *On integrable deformations of superstring sigma models related to  $AdS_n \times S^n$  supercosets*,  
Nucl. Phys. **B897** (2015) 448, arXiv:1504.07213 [hep-th].
- [82] A.A. Tseytlin, *On a 'Universal' class of WZW type conformal models*,  
Nucl. Phys. **B418** (1994) 173, hep-th/9311062.
- [83] G. Georgiou, P. Panopoulos, E. Sagkrioti, K. Sfetsos, *Exact results from the geometry of couplings and the effective action*,  
Nucl. Phys. **B948** (2019) ..., arXiv:1906.00984v2 [hep-th].
- [84] C. Klimčík,  *$\eta$  and  $\lambda$  deformations as  $\mathcal{E}$ -models*,  
Nucl. Phys. **B900** (2015) 259, arXiv:1508.05832 [hep-th].
- [85] C. Klimčík, *Poisson–Lie T-duals of the bi-Yang–Baxter models*,  
Phys. Lett. **B760** (2016) 345, arXiv:1606.03016 [hep-th].
- [86] B. Hoare and F.K. Seibold, *Poisson-Lie duals of the  $\eta$ -deformed  $AdS_2 \times S^2 \times T^6$  superstring*, JHEP **1808** (2018) 107, arXiv:1807.04608 [hep-th].
- [87] O. Lunin and W. Tian, *Scalar fields on  $\lambda$ -deformed cosets*,  
Nucl. Phys. **B938** (2019) 671, arXiv:1808.02971 [hep-th].
- [88] D.M. Schmidt, *Integrable Lambda Models And Chern-Simons Theories*,  
JHEP **1705** (2017) 012, arXiv:1701.04138 [hep-th]  
and *Lambda Models From Chern-Simons Theories*,  
JHEP **1811** (2018) 111, arXiv:1808.05994 [hep-th].
- [89] S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, *D-branes in  $\lambda$ -deformations*,  
JHEP **1809** (2018) 015, arXiv:1806.10712 [hep-th].
- [90] E. Witten, *Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions*,  
Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455.
- [91] A.M. Polyakov, *Interaction of Goldstone Particles in Two-Dimensions. Applications to Ferromagnets and Massive Yang-Mills Fields*, Phys. Lett. **B59** (1975) 79.  
K. Pohlmeyer, *Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints*, Commun. Math. Phys. **46** (1976) 207.  
M. Luscher, *Quantum Nonlocal Charges and Absence of Particle Production in the Two-Dimensional Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. **B135** (1978) 1.  
M. Luscher and K. Pohlmeyer, *Scattering of Massless Lumps and Nonlocal Charges*

- in the Two-Dimensional Classical Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. **B137** (1978) 46.
- [92] D. Karabali, Q.H. Park, H.J. Schnitzer and Z. Yang, *A GKO Construction Based on a Path Integral Formulation of Gauged Wess-Zumino-Witten Actions*, Phys. Lett. **B216** (1989) 307.  
D. Karabali and H.J. Schnitzer, *BRST Quantization Of The Gauged WZW Action And Coset Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B329** (1990) 649.  
K. Gawedzki and A. Kupiainen, *G/H Conformal Field Theory from Gauged WZW Model*, Phys. Lett. **B215** (1988) 119.
- [93] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. SurrIDGE and K. Schoutens, *Extensions Of The Virasoro Algebra Constructed From Kac-Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 348.
- [94] Y. Y. Goldschmidt and E. Witten, *Conservation Laws in Some Two-dimensional Models*, Phys. Lett. **B91** (1980) 392
- [95] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro and B. Vicedo, *Integrable coupled sigma-models*, Phys. Rev. Lett. **122** (2019) no.4, 041601, arXiv:1811.12316 [hep-th].
- [96] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro and B. Vicedo, *Assembling integrable  $\sigma$ -models as affine Gaudin models*, JHEP **1906** (2019) 017, arXiv:1903.00368 [hep-th].
- [97] J.A. de Azcarraga, A.J. Macfarlane, A.J. Mountain, J.C. Perez Bueno, *Invariant tensors for simple groups*, Nucl.Phys. **B510** (1998) 657-687, physics/9706006.
- [98] L.M. Kaplan and M. Resnikoff, *Matrix Products and the Explicit 3, 6, 9, and 12-j Coefficients of the Regular Representation of  $SU(n)$* , Math. Phys. **8** (1967) 2194.
- [99] A.J. MacFarlane, A. Sudbery, and P.H. Weisz, *On Gell-Mann's  $\lambda$ -Matrices,  $d$ - and  $f$ -tensors, octets, and parametrizations of  $SU(3)$* , Comm. Math. Phys. Volume **11** (1968) 77-90.
- [100] C.M. Hull and O.A. Solovev, *Conformal points and duality of non-Abelian Thirring Models and interacting WZNW models*, Nucl. Phys. **B459** (1996) 243, hep-th/9503021.
- [101] D. Friedan, *Nonlinear Models in Two Epsilon Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1057 and *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, Annals Phys. **163** (1985) 318.

- [102] T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Geometry, Topology and Supersymmetry in Nonlinear Models*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1799.  
E. Braaten, T.L. Curtright and C.K. Zachos, *Torsion and Geometrostasis in Nonlinear Sigma Models*, Nucl. Phys. **B260** (1985) 630.  
B.E. Fridling and A.E.M. van de Ven, *Renormalization of Generalized Two-dimensional Nonlinear  $\sigma$ -Models*, Nucl. Phys. **B268** (1986) 719.
- [103] P. Forgacs, Z. Horvath and L. Palla, *Spontaneous Compactification To Nonsymmetric Spaces*, Z. Phys. **C30** (1986) 261.
- [104] D. Lüst, *Compactification of Ten-dimensional Superstring Theories Over Ricci Flat Coset Spaces*, Nucl. Phys. **B276** (1986) 220.
- [105] F. Müller-Hoissen and R. Stückl, *Coset Spaces and Ten-dimensional Unified Theories*, Class. Quant. Grav. **5** (1988) 27.
- [106] P. Manousselis and G. Zoupanos, *Supersymmetry breaking by dimensional reduction over coset spaces*, Phys. Lett. **B504** (2001) 122, hep-ph/0010141.
- [107] A.A. Tseytlin, *Conditions of Weyl Invariance of Two-dimensional  $\sigma$  model From Equations of Stationarity of 'Central Charge' Action*, Phys. Lett. **B194** (1987) 63.
- [108] A.A. Tseytlin, *On sigma model RG flow, 'central charge' action and Perelman's entropy*, Phys. Rev. **D75** (2007) 064024, hep-th/0612296.
- [109] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, *Integrable double deformation of the principal chiral model*, Nucl. Phys. **B891** (2015) 312, arXiv:1410.8066 [hep-th].
- [110] S. Demulder, S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, *Classical and Quantum Aspects of Yang-Baxter Wess-Zumino Models*, JHEP **1803** (2018) 041, arXiv:1711.00084 [hep-th].
- [111] D. Bernard and A. Leclair, *Residual Quantum Symmetries of the Restricted Sine-Gordon Theories*, Nucl. Phys. **B340** (1990) 721.
- [112] C. Crnkovic, G. M. Sotkov and M. Stanishkov, *Renormalization Group Flow for General  $SU(2)$  Coset Models*, Phys. Lett. **B226** (1989) 297.
- [113] C. Ahn, D. Bernard and A. LeClair, *Fractional Supersymmetries in Perturbed Coset CFTs and Integrable Soliton Theory*, Nucl. Phys. **B346** (1990) 409.
- [114] Al. B. Zamolodchikov, *TBA equations for integrable perturbed  $SU(2)_k \times SU(2)_l / SU(2)_{k+l}$  coset models*, Nucl. Phys. **B366** (1991) 122.

- V. A. Fateev and Al. B. Zamolodchikov, *Integrable perturbations of ZN parafermion models and the  $O(3)$  sigma model*, Phys. Lett. **B271** (1991) 91.
- [115] F. Ravanini, *Thermodynamic Bethe ansatz for  $G_k \times G_l / G_{k+l}$  coset models perturbed by their  $\phi_{1,1,Adj}$  operator*, Phys. Lett. **B282**, 73 (1992), hep-th/9202020.
- [116] A.M. Polyakov and P.B. Wiegmann, *Theory of Nonabelian Goldstone Bosons*, Phys. Lett. **B131**, 121 (1983).
- [117] T. Curtright and C.K. Zachos, *Currents, charges, and canonical structure of pseudodual chiral models*, Phys. Rev. **D49**, 5408 (1994), hep-th/9401006.
- [118] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano, *A Canonical approach to duality transformations*, Phys. Lett. **B336**, 183 (1994), hep-th/9406206.
- [119] G. Georgiou and K. Sfetsos, *Field theory and  $\lambda$ -deformations: Expanding around the identity*, arXiv:1910.01056 [hep-th].
- [120] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, *Scale Invariance Sigma Models On Homogeneous Spaces*, Phys. Lett. **B194**, 69 (1987).
- [121] L.A. Pando Zayas and A. A. Tseytlin, *Conformal sigma models for a class of  $T^{p,q}$  spaces*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 5125, hep-th/0007086.
- [122] K. Bardakci, M.J. Crescimanno and E. Rabinovici, *Parafermions From Coset Models*, Nucl. Phys. **B344** (1990) 344.
- [123] K. Bardakci, M. J. Crescimanno and S. Hotes, *Parafermions from nonabelian coset models*, Nucl. Phys. **B349** (1991) 439.
- [124] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Parafermionic Currents in the Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory and Selfdual Critical Points in  $Z(n)$  Invariant Statistical Systems*, Sov. Phys. JETP **62**, 215 (1985) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **89**, 380 (1985)].
- [125] B. Hoare, N. Levine and A.A. Tseytlin, *Integrable 2d sigma models: quantum corrections to geometry from RG flow*, Nucl. Phys. **B949**, 114798 (2019), arXiv:1907.04737 [hep-th].
- [126] T.L. Curtright and C.K. Zachos, *Geometry, Topology and Supersymmetry in Non-linear Models*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1799.
- [127] E. Braaten, T.L. Curtright and C.K. Zachos, *Torsion and Geometrostasis in Non-linear Sigma Models*, Nucl. Phys. **B260** (1985) 630.



- [128] C.M. Hull and P.K. Townsend, *The Two Loop Beta Function for  $\sigma$  Models With Torsion*, Phys. Lett. **B191** (1987) 115.
- [129] C.M. Hull and P. K. Townsend, *String Effective Actions From  $\sigma$  Model Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B301** (1988) 197.
- [130] R.R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Two loop beta function for the generalized bosonic sigma model*, Phys. Lett. **B191**, 354 (1987).
- [131] R.R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Order alpha-prime (Two Loop) Equivalence of the String Equations of Motion and the Sigma Model Weyl Invariance Conditions: Dependence on the Dilaton and the Antisymmetric Tensor*, Nucl. Phys. **B293**, 385 (1987).
- [132] H. Osborn, *General Bosonic  $\sigma$  Models and String Effective Actions*, Annals Phys. **200** (1990) 1.
- [133] G. Ecker and J. Honerkamp, *Application of invariant renormalization to the non-linear chiral invariant pion Lagrangian in the one-loop approximation*, Nucl. Phys. **B35** (1971) 481.
- [134] J. Honerkamp, *Chiral multiloops*, Nucl. Phys. **B36** (1972) 130.
- [135] D.H. Friedan, *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, Annals Phys. **163** (1985) 318.
- [136] C.R. Nappi, *Some properties of an Analog of the Nonlinear  $\sigma$ -model*, Phys. Rev. **D21** (1980) 418.
- [137] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, *Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two-Dimensions*, Nucl. Phys. **B247** (1984) 83.
- [138] K. Bardakci, M.J. Crescimanno and S. Hotes, *Parafermions from nonabelian coset models*, Nucl. Phys. **B349** (1991) 439.
- [139] N. Andrei, M. R. Douglas, A. Jerez, *Chiral liquids in one dimension: A Non-Fermi-liquid class of fixed points*, cond-mat/9803134 & Phys. Rev. **B58**, 7619 (1998).
- [140] E. Witten, *On Holomorphic factorization of WZW and coset models*, Commun. math. Phys. **144** (1992) 189.
- [141] O.A. Solovev, *Towards conversion of the space of Thirring models into the model space for groups*, Phys. Lett. **B309** (1993) 275.

- 
- [142] C.M. Hull and O.A Solovev, *Conformal points and duality of non-Abelian Thirring Models and interacting WZNW models*, Nucl.Phys. **B459** (1996) 243, hep-th/9503021.
- [143] T.L. Curtright and C.K. Zachos, *Geometry, Topology and Supersymmetry in Non-linear Models*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1799.  
E. Braaten, T.L. Curtright and C.K. Zachos, *Torsion and Geometrostasis in Nonlinear Sigma Models*, Nucl. Phys. **B260** (1985) 630.  
B.E. Fridling and A.E.M. van de Ven, *Renormalization of Generalized Two-dimensional Nonlinear  $\sigma$ -Models*, Nucl. Phys. **B268** (1986) 719.
- [144] G. Georgiou, E. Sagkrioti, K. Sfetsos, K. Siampos, *An exact symmetry in  $\lambda$ -deformed  $\sigma$ -models*, JHEP **2020** 83 (2020), arxiv: 1911.02027 [hep-th].
- [145] D. M. Schmidtt, *Lambda models from Chern-Simons theories*, JHEP **2018** 111 (2018), arxiv: 1808.05994 [hep-th].
- [146] D. M. Schmidtt, *Holomorphic Chern-Simons theory and lambda models: PCM case*, arxiv: 1912.07569 [hep-th].
- [147] E. Sagkrioti, *A ghost group all-loop procedure in  $\lambda$ -deformed  $\sigma$ -models*, To appear.
- [148] C. Appadu, T. J. Hollowood, D. Price, D. C. Thompson, *Quantum Anisotropic Sigma and Lambda Models as Spin Chains*, J. Phys. A:Math. Theor. **51** 405401 (2018), arxiv: 1802.06016 [hep-th].