Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Ανθρωπιστικών, Κοινωνικών
Επιστημών και Δικαίου

Δ . Π. Μ. Σ. «Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών και της Τεχνολογίας»

Διπλωματική Εργασία

ΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ (ΑΡΑΒΙΚΟ) ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ *ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ* ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΜΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Μαρίνα Γαλάνη

Αρ. Μητρώου: 002/16

Επιβλέπων: Γιάννης Χριστιανίδης (Καθηγητής τμήματος ΙΦΕ, ΕΚΠΑ)

Αθήνα, 2020

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του διαπανεπιστημιακού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών «Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών και της Τεχνολογίας», για την κατεύθυνση «Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών και της Τεχνολογίας». Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή τον Ιούλιο του 2020.

Μέλη τριμελούς επιτροπής:

Γιάννης Χριστιανίδης (επιβλέπων), Καθηγητής τμήματος ΙΦΕ, ΕΚΠΑ

Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος, Καθηγητής τμήματος ΙΦΕ, ΕΚΠΑ

Μιχάλης Σιάλαρος, Επίκουρος Καθηγητής τμήματος ΙΦΕ, ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής, τον καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Δημητρακόπουλο και τον επίκουρο καθηγητή κ. Μιχάλη Σιάλαρο για τις υποδείξεις και τις συμβουλές τους, και ξεχωριστά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γιάννη Χριστιανίδη για την πολύτιμη βοήθεια και την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και τις φίλες μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, για τη στήριξή τους και την κατανόηση που μου έδειξαν αυτό το διάστημα.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια έχει προταθεί ένας νέος τρόπος για την ανάγνωση των *Αριθμητικών* του Διόφαντου, που χρησιμοποιεί την νέα ιστοριογραφική κατηγορία της Προ-μοντέρνας άλγεβρας. Επισημαίνοντας τις διαφορές ανάμεσα στην Προ-μοντέρνα και τη μοντέρνα άλγεβρα, όπως αυτή διαμορφώνεται την περίοδο μετά τον Viète, η προσέγγιση αυτή υποστηρίζει τον αλγεβρικό χαρακτήρα του έργου.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι η παρουσίαση του τέταρτου βιβλίου των *Αριθμητικών* του Διόφαντου, το οποίο παραδίδεται σε αραβική μετάφραση που χρονολογείται στο τελευταίο τέταρτο του 9ου αιώνα.

Πιο συγκεκριμένα, δίνονται οι αναλύσεις των 44 λυμένων αριθμητικών προβλημάτων του βιβλίου, με τη βοήθεια των εννοιών και τεχνικών της Προ-μοντέρνας άλγεβρας. Εστιάζουμε στην ιδιαίτερη δομή που χαρακτηρίζει τις διοφαντικές επιλύσεις, στο ειδικό λεξιλόγιο και τις διαφορετικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται προκειμένου να μετατραπεί κάθε πρόβλημα σε εξίσωση.

Λέξεις-κλειδιά: Διόφαντος, *Αριθμητικά*, Ιστορία της Άλγεβρας, Προ-μοντέρνα άλγεβρα, Άλγεβρα, Αριθμητική, Αραβικά βιβλία των *Αριθμητικών*

Abstract

Over the last few years, a new way to conceptualize Diophantus' *Arithmetica* has been proposed, using the new historiographical category of premodern algebra. Pointing out the differences between premodern and modern, i.e. post-Vietan, algebra, this approach supports the algebraic character of Diophantus' work.

The purpose of the present dissertation, is to analyse the fourth book of Diophantus' *Arithmetica*, which survives in an Arabic translation made in the last quarter of the 9th century.

More specifically, we provide the analysis of the 44 solved arithmetical problems of the book, using the concepts and techniques of premodern algebra. We focus on the special structure of the Diophantine solutions, the technical vocabulary and the different techniques which are used in order to convert each problem into an equation.

Keywords: Diophantus, *Arithmetica*, History of Algebra, Premodern Algebra, Algebra, Arithmetic, Arabic books of *Arithmetica*

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Ο Διόφαντος: μια αινιγματική προσωπικότητα της επιστήμης της Ύστερης Αρχαιότητας

1.1.1 Βιογραφικά Στοιχεία

Το όνομα του Διόφαντου έγινε ευρέως γνωστό στον Δυτικό Κόσμο ύστερα από την συστηματική ενασχόληση των μεγάλων μαθηματικών του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα, François Viète και Pierre de Fermat με το σημαντικότερο σωζόμενο έργο του, τα *Αριθμητικά*. Οι επιλύσεις των αριθμητικών προβλημάτων που παρουσιάζονται στο έργο αποτέλεσαν σημείο αναφοράς για τους μαθηματικούς της νεότερης εποχής, οι οποίοι σύντομα στράφηκαν στην αναζήτηση λύσεων για τις διάφορες μορφές απροσδιόριστων εξισώσεων. Μέσα από τη μελέτη τους ανέπτυξαν νέες αλγεβρικές τεχνικές και οδηγήθηκαν σε σημαντικά αποτελέσματα που διαμόρφωσαν τον κλάδο της μοντέρνας Θεωρίας Αριθμών. Σήμερα, διδασκόμαστε Διοφαντική Ανάλυση, Θεωρία Διοφαντικής προσέγγισης ή Διοφαντική Γεωμετρία, όλα μαθηματικά πεδία που έλαβαν την ονομασία τους προς τιμήν του σπουδαίου Αλεξανδρινού μαθηματικού της Ύστερης Αρχαιότητας.

Παρά τη φήμη που απέκτησε ο Διόφαντος μέσα από το μαθηματικό του έργο, οι ιστορικές πληροφορίες που έχουμε στη διάθεσή μας σχετικά με τον συγγραφέα των *Αριθμητικών*, τον Διόφαντο, είναι λιγοστές. Έτσι, από ένα αριθμητικό επίγραμμα που αποδίδεται στον Μητρόδωρο και τον τίτλο των σωζόμενων χειρογράφων των *Αριθμητικών* , πληροφορούμαστε πως ο Διόφαντος έζησε 84 χρόνια, στην Αλεξάνδρεια (Heath 1910, 1–3, 10). Στο επίγραμμα περιγράφονται κάποιες λεπτομέρειες της ζωής του Διόφαντου, που δεν είναι βέβαιο ότι αντιστοιχούν σε αληθινά γεγονότα. Επίσης, δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα πότε ακριβώς έζησε ο Διόφαντος, και το χρονικό διάστημα εντός του οποίου τοποθετούμε τη δράση του καλύπτει πάνω από πέντε αιώνες. Δύο είναι οι αναφορές που μας οδηγούν σε συμπεράσματα. Στο έργο του ιδίου *Περί πολύγωνων αριθμών*, αναφέρεται το όνομα του μαθηματικού και αστρονόμου Υψικλή (Heath 1885) που έζησε κατά τον 2^{ο} αιώνα π.Χ., επομένως ο Διόφαντος έζησε μετά τον αιώνα αυτόν. Η δεύτερη αναφορά είναι του Θέωνα του Αλεξανδρινού (Christianidis and Megremi 2019, 3–5; Heath 1910, 11), που έζησε τον 4^{ο} αιώνα μ.Χ. Στα σχόλιά του στη *Μεγίστη* του Πτολεμαίου, αναφέρεται στον Διόφαντο δύο φορές. Άρα ο τελευταίος έζησε πριν τον 4^{ο} μ.Χ. αιώνα. Παρά τα ελλιπή στοιχεία, έχει επικρατήσει η άποψη ότι ο Διόφαντος ήταν μαθηματικός η ακμή του οποίου τοποθετείται στα τέλη του 3^{ου} αιώνα μ.Χ. (Christianidis and Megremi 2019, 5–7; Heath 1910, 16–17; Tannery 1912, 535–537) ή ακόμα και στις αρχές του 4^{ου} μ.Χ. αιώνα.

1.1.2 Εργογραφία

Τα έργα του Διόφαντου που είναι γνωστά σε εμάς είτε από αναφορές είτε από σωζόμενα χειρόγραφα, είναι τα εξής τέσσερα (Vogel 1971; Heath 1885): τα *Μοριαστικά*, τα *Πορίσματα*, τα *Αριθμητικά* και το *Περί πολύγωνων αριθμών*. Από αυτά σώζεται μόνο μέρος των δύο τελευταίων.

Ό,τι γνωρίζουμε σχετικά με τα *Μοριαστικά* και τα *Πορίσματα*, προκύπτει από αναφορές είτε του ιδίου του Διοφάντου είτε από άλλους σχολιαστές.

Συγκεκριμένα, οι πληροφορίες μας για το περιεχόμενο των *Μοριαστικών*, στηρίζονται σε μία ανώνυμη παρατήρηση ενός σχολιαστή της Νεοπλατωνικής σχολής της Αλεξάνδρειας (Christianidis and Megremi 2019, 7–9; Vogel 1971), πάνω στη μελέτη του Ιάμβλιχου για την *Αριθμητική Εισαγωγή* του Νικομάχου. Με βάση το σχόλιο πιθανολογείται ότι ο Διόφαντος παρουσίαζε στο έργο του έναν κατάλληλο συμβολισμό για τα κλάσματα, και κάποιους κανόνες για την εκτέλεση υπολογισμών με αυτά.

Στα *Πορίσματα* (Heath 1885; Vogel 1971) παραπέμπει τον αναγνώστη τρείς φορές το κείμενο των *Αριθμητικών*. Οι παραπομπές γίνονται όποτε ο Διόφαντος χρησιμοποιεί κάποια πρόταση ως λήμμα, χωρίς δηλαδή να δίνει την απόδειξή της. Έτσι, μολονότι δεν έχει βρεθεί κάποιο χειρόγραφο με ανάλογο περιεχόμενο, εκτιμάται πως τα *Πορίσματα* ήταν ξεχωριστό έργο, το οποίο περιελάμβανε προτάσεις της αριθμοθεωρίας με τις αποδείξεις τους. Έχει διατυπωθεί και άλλη μία υπόθεση, σύμφωνα με την οποία τα *Πορίσματα* αποτελούσαν τμήμα των *Αριθμητικών* το οποίο έχει χαθεί.

Από το έργο *Περί πολύγωνων αριθμών* σώζονται μόνο τμήματα (Heath, 1885; Vogel, 1971). Διαφέρει από τα *Αριθμητικά* καθώς ο χαρακτήρας του είναι αποδεικτικός και επιπλέον οι αποδείξεις που περιέχει είναι γεωμετρικές. Περιλαμβάνει κάποια λήμματα για τους πολύγωνους αριθμούς, που ήταν ήδη γνωστά στα ελληνικά μαθηματικά της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Δίνεται όμως ένας νέος ορισμός για τους πολύγωνους αριθμούς, που βασίζεται —όπως αναφέρεται και στο ίδιο το κείμενο— στον αντίστοιχο ορισμό του Υψικλή.

Τέλος, το πιο διαδεδομένο έργο του Διόφαντου είναι τα *Αριθμητικά*. Είναι μία συλλογή λυμένων αριθμητικών προβλημάτων που συνοδεύονται από μία εισαγωγή. Από την εισαγωγή πληροφορούμαστε ότι ολόκληρο το έργο ήταν χωρισμένο σε δεκατρία βιβλία (Diophantus 1893–95, I, 16.6–7). Σήμερα σώζονται τα έξι βιβλία στα Ελληνικά, και τέσσερα ακόμη βιβλία σε αραβική μετάφραση, που χρονολογείται στον 9ο αιώνα μ.Χ. Η εισαγωγή είναι σημαντικό τμήμα του έργου, καθώς εκεί περιγράφεται ο σκοπός της συγγραφής του και η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη λύση των προβλημάτων. Παρουσιάζονται επίσης με λεπτομέρεια οι τεχνικοί όροι της μεθόδου, καθώς και οι κανόνες βάσει των οποίων ο Διόφαντος τους μεταχειρίζεται.

1.2 Τα *Αριθμητικά* και η διάδοσή τους στον Αραβικό και τον Δυτικό Κόσμο

1.2.1 Τα σωζόμενα χειρόγραφα των *Αριθμητικών*

Τα ελληνικά χειρόγραφα που περιέχουν ολόκληρο το έργο ή αποσπάσματα αυτού είναι τριάντα τρία (Acerbi 2011; Allard 1982) και αφορούν, όπως αναφέρθηκε, τα έξι από τα δεκατρία βιβλία των *Αριθμητικών*. Τα ελληνικά χειρόγραφα ταξινομούνται σε δύο ομάδες, την επονομαζόμενη «Πλανούδειο», και την ομάδα των χειρογράφων που δεν κατάγονται από τον Πλανούδη.

Τα χειρόγραφα της Πλανούδειας ομάδας, ονομάζονται έτσι επειδή η ιστορική έρευνα έδειξε ότι κατάγονται όλα από ένα αρχέτυπο που ο ίδιος ο Βυζαντινός λόγιος Μάξιμος Πλανούδης είχε γράψει το 1292 ή το 1293. Από αυτό σώζονται μόνο 23 σελίδες στον κώδικα *Ambrosianus Et* 157 sup. Το παλαιότερο σωζόμενο χειρόγραφο αυτής της ομάδας, το οποίο φαίνεται ότι αντιγράφηκε απευθείας από το χειρόγραφο του Πλανούδη, είναι το *Marcianus gr*. 308 (Acerbi 2011; Allard 1982, 128).

Από τα χειρόγραφα που δεν ανήκουν στην Πλανούδειο ομάδα, αναφέρουμε το παλαιότερο στο οποίο φαίνεται ότι ανάγονται όλα τα υπόλοιπα, το *Matritensis gr*. 4678 που χρονολογείται στον 11ο αιώνα (Pérez Martín, 2006).

Σε αντίθεση με τον σχετικά μεγάλο αριθμό χειρογράφων που βρέθηκαν και αφορούν στα έξι από τα δέκα σωζόμενα βιβλία των *Αριθμητικών*, τα υπόλοιπα τέσσερα βιβλία διασώζονται σε αραβική μετάφραση η οποία παραδίδεται από ένα μοναδικό χειρόγραφο. Το χειρόγραφο χρονολογείται στον 12ο αιώνα, όμως η μετάφρασή του από την ελληνική στην αραβική γλώσσα εκτιμάται πως έγινε κατά τον 9ο αιώνα, από τον Qusṭā ibn Lūqā.

Σύμφωνα με μία από τις εκδοχές που υπάρχουν σχετικά την ανακάλυψη του αραβικού χειρογράφου, αυτό βρέθηκε μόλις το 1968 από τον καθηγητή και διευθυντή του Ινστιτούτου Ιστορίας των Αραβοϊσλαμικών Επιστημών της Φρανκφούρτης Fuat Sezgin, καταχωρισμένο με αριθμό 295 στη βιβλιοθήκη Astan Quds της πόλης Mashhad, στο Ιράν. Για το θέμα της ανακάλυψης υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις (Allard 1987; Chemla, Morelon, and Allard 1986, 351–351; Jaouiche 1987, 308–309; 1990; Morelon 1990; Toomer 1985; Rashed 1984, 3, lx–lxii).

Τα ελληνικά βιβλία αριθμούνται από τους ερευνητές με τους λατινικούς αριθμούς I έως VI. Αν αριθμήσουμε τα αραβικά με τους αριθμούς 4, 5, 6 και 7, τότε η διάταξη των σωζόμενων βιβλίων έχει διαμορφωθεί ως εξής: τα τρία πρώτα είναι τα ελληνικά με αριθμούς I, II και III· έπονται τα αραβικά βιβλία 4 έως και 7 και τέλος ακολουθούν τα τρία εναπομείναντα ελληνικά IV, V και VI για τα οποία δεν έχει διευκρινιστεί η ακριβής σειρά τοποθέτησης (Rashed and Houzel 2013, 5–7; Sesiano 1982, 4, 8).

Τα κυριότερα κριτήρια βάσει των οποίων ανασυγκροτήθηκε η ορθή διάταξη των βιβλίων είναι: (α) Οι πληροφορίες που λαμβάνουμε από τα έργα του Πέρση μαθηματικού του 11ου αιώνα al-Karajī, ο οποίος άντλησε εκτενώς από τον Διόφαντο· (β) το γεγονός ότι στις λύσεις συναντάμε παραπομπές σε άλλα σημεία του έργου, με αποτέλεσμα τα προβλήματα να συνδέονται με έναν τρόπο μεταξύ τους· και (γ) ο συνυπολογισμός του ότι σε καθένα βιβλίο τα προβλήματα είναι τοποθετημένα έτσι ώστε η δυσκολία αντιμετώπισής τους να αυξάνεται προοδευτικά. Το τελευταίο φαίνεται πως χαρακτηρίζει το σύνολο του έργου, και συνέβαλε στην οργάνωση των βιβλίων των *Αριθμητικών*. Δεν πρέπει βέβαια να ξεχνάμε ότι μια αναπροσαρμογή της παραπάνω σειράς δεν μπορεί να αποκλειστεί, εφ' όσον το χαμένο τμήμα του έργου ανακαλυφθεί.

1.2.2 Η ιστορία των ελληνικών χειρογράφων και οι μεταφράσεις τους

Χειρόγραφα των *Αριθμητικών* κυκλοφορούσαν στο Βυζάντιο. Από αλληλογραφία που έχει βρεθεί, γνωρίζουμε ότι τον Μιχαήλ Ψελλό (11ος αιώνας μ.Χ.) τον απασχολούσε το ζήτημα των τεχνικών όρων που χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος στις λύσεις των αριθμητικών του προβλημάτων (Christianidis and Megremi 2019, 5–6 ; Sesiano 1982, 16). Δύο αιώνες αργότερα, ο Γεώργιος Παχυμέρης παρουσιάζει στο έργο του Quadrivium έναν ορισμό των δυνάμεων του αγνώστου παρόμοιο με αυτόν που δίνεται στα *Αριθμητικά*, καθώς και κάποια από τα προβλήματα του βιβλίου I (Megremi and Christianidis 2015, 6–8; Sesiano 1982, 17). Η σημαντικότερη όμως απόδειξη της παρουσίας των διοφαντικών βιβλίων εκείνη την περίοδο, είναι το σχόλιο του Μάξιμου Πλανούδη πάνω στα δύο πρώτα βιβλία των *Αριθμητικών*. Ακόμη, από τις σωζόμενες επιστολές του βυζαντινού λόγιου, γνωρίζουμε πως είχε στη διάθεσή του τουλάχιστον τρία αντίγραφα των έξι ελληνικών βιβλίων (Heath 1885; Sesiano 1982).

Η πρώτη αναφορά στα χειρόγραφα του Διόφαντου στον Δυτικό κόσμο, έγινε το 1464 από τον Γερμανό μαθηματικό και αστρονόμο Johannes Müller, γνωστό ως Regiomontanus. Σε μία επιστολή του, αναφέρει ότι ανακάλυψε ένα χειρόγραφο των

Αριθμητικών στη Βενετία. Θεωρεί μάλιστα την ανακάλυψη αυτή πολύ σημαντική, αφού επισημαίνει πως τα δεκατρία βιβλία του Διόφαντου περιελάμβαναν το άνθος της αριθμητικής ή της άλγεβρας, όπως την ονόμαζαν οι Άραβες (Christianidis 2018, 40–41; Christianidis and Oaks 2013, 159; Heath 1910, 21–22).

Επιλεγμένα προβλήματα από τα *Αριθμητικά* πρωτοπαρουσιάστηκαν το 1572, ως τμήμα της *Άλγεβρας* του Rafael Bombelli (Bombelli, 1572). Μια πρώτη λατινική μετάφραση των έξι ελληνικών βιβλίων των *Αριθμητικών*, κυκλοφόρησε τρία χρόνια αργότερα, το 1575, από τον Γερμανό ουμανιστή Wilhelm Holtzman, γνωστό με το όνομα Xylander (Xylander, 1575). Η μετάφραση του ελληνικού κειμένου στα Λατινικά, που εκδόθηκε το 1621 από τον Γάλλο ουμανιστή και μαθηματικό Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (Bachet 1621), είναι και η διασημότερη αφού από αυτή μελέτησε τα διοφαντικά προβλήματα ο Fermat, και στα περιθώριά τους σημείωσε τα σχόλιά του. Το 1670 κυκλοφόρησε μία έκδοση επαυξημένη με τις σημειώσεις του Fermat, από τον γιό του Samuel de Fermat. Μεταφράσεις του κειμένου όπως αυτό διαμορφώθηκε έπειτα από επεξεργασία των διαθέσιμων χειρογράφων και οι οποίες χρησιμοποιούνται έως σήμερα είναι, η λατινική του Paul Tannery (1893–95), η αγγλική του Thomas L. Heath (Heath 1885), η γαλλική του Paul Ver Eecke (Diophante 1959) και η νεοελληνική του Ευάγγελου Σταμάτη (Diophantus 1963).

1.2.3 Το αραβικό χειρόγραφο

Το χειρόγραφο αποτελείται από ογδόντα φύλλα που φέρουν αρίθμηση. Σε κάθε φύλλο —με εξαίρεση το πρώτο και το τελευταίο— υπάρχουν είκοσι γραμμές γραπτού κειμένου. Στο πρώτο φύλλο αναφέρεται ο συγγραφέας του έργου, ο Διόφαντος, ο τίτλος του και ο μεταφραστής. Πέρα από αυτές τις βασικές πληροφορίες, στο χειρόγραφο καταγράφεται ακόμα το έτος συγγραφής του, η ημέρα κατά την οποία περατώθηκε η διαδικασία αυτή, καθώς και το όνομα του αντιγραφέα (Rashed 1984, 3, lxii–lxiv, lxiii; Sesiano 1982, 21–22).

Την ανακάλυψη του αραβικού χειρογράφου διεκδικούν, όπως προαναφέρθηκε, δύο ερευνητές, οι F. Sezgin και R. Rashed. Οι δύο διαθέσιμες εκδόσεις με μετάφραση του αραβικού κειμένου είναι, του Sesiano στα Αγγλικά (1982) και του Rashed στα Γαλλικά (1984). Εκτός από τη διαμάχη για την ανακάλυψη του χειρογράφου παρατηρείται μεγάλη διαφορά και στην ερμηνεία του από τους δύο ιστορικούς των μαθηματικών, η οποία έχει τη βάση της στις διαφορετικές αντιλήψεις τους για την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας. Ο Rashed ξεκινά υποστηρίζοντας τη θέση ότι τα *Αριθμητικά* είναι έργο αριθμητικής. Η πιο πρόσφατη προσπάθειά του αφορά μία ανάγνωση και κατανόηση των λύσεων των αριθμητικών προβλημάτων με τη βοήθεια της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας, όπου όμως επισημαίνει πως τα *Αριθμητικά* δεν είναι ούτε έργο άλγεβρας ούτε έργο αλγεβρικής γεωμετρίας, αλλά έργο αριθμητικής έστω και αν σε αυτό χρησιμοποιούνται αλγεβρικές τεχνικές! (Chemla, Morelon, and Allard 1986, 367–368, 372; Jaouiche 1987, 311; Rashed and Houzel 2013, vii). Αντίθετα, ο Sesiano παρουσιάζει τα προβλήματα με τη βοήθεια της μοντέρνας αλγεβρικής επίλυσης των πολυωνυμικών εξισώσεων (Chemla, Karine; Morelon, Regis; Allard 1986, 356–57).

Η μετάφραση του αραβικού χειρογράφου από τα ελληνικά, αποδίδεται στον Qusṭā ibn Lūqā, πολύγλωσσο και πολυμαθή του 9ου αιώνα, από το Μπάαλμπεκ της Συρίας. Έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στη Βαγδάτη όπου έκανε σπουδαίο μεταφραστικό έργο, τόσο φιλοσοφικών όσο και επιστημονικών συγγραμμάτων (Roshdi Rashed 1984, xvii; Sesiano 1982, 3). Υπάρχουν πηγές όπου ο Qusṭā ibn Lūqā αναφέρεται ως μεταφραστής αλλά και σχολιαστής των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Από τις ίδιες πηγές επιβεβαιώνεται και η κυκλοφορία μετάφρασης στον αραβικό κόσμο, για τουλάχιστον τα επτά πρώτα από τα βιβλία του Διόφαντου. Τόσο ο ιστορικός του 10ου αιώνα Ibn al-Nadīm, όσο και ο Σύριος γιατρός του 13ου αιώνα Ibn Abī Uṣaibia, στις βιογραφικές εγκυκλοπαίδειές τους αποδίδουν στον Qusṭā ibn Lūqā ένα σχόλιο πάνω σε τρία και άλλο μισό από τα βιβλία των *Αριθμητικών*. Ο al-Nadīm αναφέρει επιπλέον την πληροφορία, πως υπήρχε η αραβική μετάφραση ενός έργου του Διόφαντου, με θεματολογία την τέχνη της άλγεβρας. Το ίδιο υποστηρίζει και ο Σύριος Ibn al-ʻIbrī, σε ιστορικό έργο του, γραμμένο τον 13ο αιώνα (Christianidis 2018, 40; Rashed 1984, 3, xi–xii; Rashed and Houzel 2013, 4; Sesiano 1982, 8–10).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το περιεχόμενο των *Αριθμητικών*

Στο παρόν κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά του συνόλου του σωζόμενου μέρους των *Αριθμητικών*, δηλαδή τόσο των βιβλίων που βρέθηκαν στην αραβική, όσο και εκείνων που σώζονται στην ελληνική γλώσσα. Θα εστιάσουμε στην ορολογία που χρησιμοποιείται στο μαθηματικό κείμενο, στις μαθηματικές τεχνικές που εφαρμόζονται και στη δομή των λύσεων των αριθμητικών προβλημάτων. Ακόμη, θα παρουσιάσουμε το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιούμε για την ανάγνωση των *Αριθμητικών*. Το πλαίσιο βασίζεται στη νέα κατηγορία της ιστοριογραφίας των μαθηματικών, την Προ-μοντέρνα άλγεβρα. Θα εξηγήσουμε τον λόγο για τον οποίον με την υιοθέτηση αυτής της κατηγορίας μπορεί να προκύψει μια ερμηνεία της μαθηματικής πρακτικής που εφαρμόζεται στις διοφαντικές λύσεις η οποία να αποφεύγει αναχρονισμούς.

2.1 Η δομή και ο σκοπός των *Αριθμητικών*

Τα *Αριθμητικά* είναι μία συλλογή λυμένων προβλημάτων που συνοδεύεται από μία εισαγωγή. Στην εισαγωγή αναφέρεται η πληροφορία ότι το έργο αποτελούνταν από δεκατρία βιβλία. Από αυτά σήμερα σώζονται, τα έξι στα ελληνικά και τέσσερα ακόμα σε αραβική μετάφραση. Στα προβλήματα ζητείται ο προσδιορισμός των αριθμητικών τιμών κάποιων αριθμών που ικανοποιούν μια σειρά από συνθήκες. Οι αριθμοί αυτοί, οι οποίοι στο μαθηματικό κείμενο αναφέρονται ως «ζητούμενοι αριθμοί» (Diophantus, 1893-95, I, 24.8) χαρακτηρίζονται από ορισμένες ιδιότητες και καλούνται, όπως αναφέρθηκε, να ικανοποιήσουν κάποιες δοσμένες σχέσεις. Και οι δύο αυτές προϋποθέσεις διατυπώνονται στις εκφωνήσεις των προβλημάτων.

Όλα τα προβλήματα είναι αμιγώς αριθμητικά, αφού τα ζητούμενα στις εκφωνήσεις δεν πλαισιώνονται από κάποια ιστορία η οποία να εκφράζει πρακτικές ανάγκες του ανθρώπου, ή να συνδέει τις άγνωστες ποσότητες με κάποιο φυσικό ή γεωμετρικό μέγεθος. Συνηθέστερο την εποχή που εξετάζουμε ήταν τα προβλήματα να σχετίζονται με το μοίρασμα περιουσιών, εμπορικές και οικονομικές συναλλαγές, μετρήσεις εδαφών, ή υπολογισμούς στο πεδίο της αστρονομίας. Υπό αυτήν τη σκοπιά θα λέγαμε πως τα προβλήματα του Διόφαντου έχουν αφηρημένο χαρακτήρα, και ο τρόπος που υποδεικνύεται για την επίλυσή τους μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε αντίστοιχο πρακτικό πρόβλημα από τους τομείς που αναφέρθηκαν (Christianidis 2018, 39).

Σκοπός του έργου είναι να λυθούν τα επιλεγμένα αριθμητικά προβλήματα με έναν συγκεκριμένο τρόπο, έναντι άλλων μεθόδων επίλυσης που χρησιμοποιούνταν στα μαθηματικά εκείνης της περιόδου. Πέρα όμως από τον προφανή αυτόν σκοπό, διαφαίνεται και κάποια ακόμη πρόθεση του Διόφαντου. Υπάρχουν πολλές ενδείξεις στα λεγόμενα του Διόφαντου στην εισαγωγή του έργου, αλλά και εντός του μαθηματικού κειμένου, πως τα *Αριθμητικά* εξυπηρετούσαν και διδακτικούς σκοπούς. Αρχικά στο εισαγωγικό μέρος του έργου, απευθύνεται σε κάποιο πρόσωπο με το όνομα Διονύσιος, διαβεβαιώνοντάς τον πως με το πέρας της μελέτης των λύσεων των προβλημάτων, θα έχει κατανοήσει έναν τρόπο (Diophantus, 1893-95, I, 4.10-11) ώστε να μπορεί να λύνει κι αυτός με τη σειρά του προβλήματα. Έπειτα, η διδακτική πρόθεση φαίνεται και από τη μορφολογία του μαθηματικού κειμένου: τα προβλήματα είναι διατεταγμένα με τρόπο ώστε τα απλούστερα και θεμελιώδη, να προηγούνται των δυσκολότερων ή εκείνων των οποίων η λύση βασίζεται στα πρώτα (Christianidis, forthcoming (i); Diophantus, 1893, 14.25-16.6). Ακόμη, κατά τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων, διακρίνονται επεξηγηματικές παρατηρήσεις ή φράσεις που παραπέμπουν σε έμμεση καθοδήγηση του αναγνώστη-μελετητή. Αυτά τα στοιχεία, φανερώνουν την προσπάθεια του συγγραφέα να γίνει πλήρως κατανοητή η μαθηματική πρακτική που εφαρμόζει. Τέλος, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τεχνική που χρησιμοποιεί κατά την επίλυση ορισμένων προβλημάτων, οδηγεί τον Διόφαντο σε αδιέξοδο αντί για λύση. Παρ’ όλα αυτά, η αποτυχημένη αυτή προσπάθεια επίλυσης παρατίθεται αντί να καταγραφεί μόνο η σωστή, η οποία ακολουθεί αμέσως μετά (Diophantus, 1893-95, I, 158-160.11; Sesiano, 1982, 91.159-92.198).[1] Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως τρόπος διδασκαλίας, καθώς βοηθά τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να αναπτύξει την δεξιότητα επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων, να μάθει πώς να προβαίνει σε σωστές επιλογές (Christianidis, forthcoming (i)).

[1] Βλ. π.χ. τα προβλήματα III.10, και IV.8 & IV.9.

2.2 Ο τρόπος επίλυσης των προβλημάτων και τα χαρακτηριστικά των λύσεων

Ο γενικός τρόπος που αντιμετωπίζονται τα προβλήματα είναι η μετατροπή τους σε εξισώσεις (Christianidis, forthcoming (i)) οι οποίες στην ορολογία της εποχής αναφέρονται ως ισότητες μεταξύ «ειδών αριθμών» (Diophantus, 1893-95, I, 14.4–5). Την παραπάνω μετατροπή, ακολουθεί η λύση της εξίσωσης και κατ' επέκταση η λύση του προβλήματος. Όλη η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος πραγματοποιείται σε τρία στάδια, τα οποία θα περιγράψουμε σε επόμενη παράγραφο. Αυτός ο τρόπος επίλυσης των προβλημάτων επιλέγεται ανάμεσα σε άλλους διαθέσιμους τρόπους που χρησιμοποιούνται σε μαθηματικά κείμενα της εποχής, όπως η αναλογία (η μέθοδος των τριών), ο αριθμητικός συλλογισμός, ο επιλογισμός και η μέθοδος της ψευδούς παραδοχής (Christianidis, 2018, 39; forthcoming (i)).

Οι λύσεις των προβλημάτων περιορίζονται στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών. Τα πιο πολλά προβλήματα επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις. Ο σκοπός βέβαια του Διόφαντου ήταν να δώσει μία λύση σε κάθε πρόβλημα, παρ' όλο που γνώριζε ότι οι λύσεις δεν ήταν κατ' ανάγκην μοναδικές. Σε ορισμένα προβλήματα ωστόσο, δίνει δύο διαφορετικές λύσεις[2], με σκοπό να υποδείξει μια εναλλακτική τεχνική χειρισμού του ίδιου προβλήματος.

2.3 Ο χαρακτήρας του έργου

Προηγουμένως αναφέρθηκε πως σε κάθε πρόβλημα των *Αριθμητικών*, αντιστοιχίζεται μια ισότητα-εξίσωση προς επίλυση. Από αυτό και μόνο το στοιχείο των επιλύσεων, εύλογα προκύπτει το ερώτημα εάν η μαθηματική πρακτική που εφαρμόζεται στο σύνολο του έργου μπορεί να χαρακτηριστεί αλγεβρική. Ωστόσο, το ζήτημα αυτό δεν επιδέχεται μια γρήγορη και εύκολη απάντηση αφού έχει εκφραστεί πλήθος διαφορετικών απόψεων σε σχέση με τη μαθηματική παράδοση στην οποία μπορεί να ενταχθεί η πρακτική που εφαρμόζει ο Διόφαντος. Μάλιστα αμφισβητείται ακόμη και η θέση ότι υφίσταται κάποια ενιαία μέθοδος με την οποία αντιμετωπίζονται τα

[2] Προβλήματα από το Βιβλίο IV (αραβικό) με δύο λύσεις:13, 14, 15, 34, 42

προβλήματα των *Αριθμητικών* (Bernard and Christianidis, 2012, 23–42; Christianidis, 2016, 15; Christianidis, 2018, 43).

Διαδεδομένη ήταν η άποψη των μαθηματικών και των ιστορικών των μαθηματικών, που αναγνώριζε τα *Αριθμητικά* ως έργο άλγεβρας (Christianidis 2018, 41). Η άποψη αυτή προέρχεται από το μακρινό παρελθόν, καθώς διαδοχικά οι Άραβες (Sesiano 1982, 13) και οι δυτικοί μαθηματικοί του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης, μελετούσαν τα διοφαντικά χειρόγραφα ως αλγεβρικό έργο, παρά το γεγονός ότι η άλγεβρα ως όρος πρωτοπαρουσιάστηκε στην πραγματεία του Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī, *Al-kitab al-mukhtasar fi kisab al-jabr wa-l-muqābala*, στις αρχές του 9^{ου} αιώνα (περ. 830 μ.Χ.). Ακόμη και μαθηματικοί που δεν κάνουν άμεσες αναφορές στο όνομα του Διόφαντου έχουν ενσωματώσει τμήματα των *Αριθμητικών* στα βιβλία τους με αντικείμενο την άλγεβρα (Sesiano 1982, 10). Στα χρόνια που ακολούθησαν, πολλοί μαθηματικοί που επεξεργάστηκαν τα προβλήματα των *Αριθμητικών*, αναγνώρισαν στο πρόσωπο του Διόφαντου τον θεμελιωτή της άλγεβρας. Η θέση αυτή εδραιώθηκε, αφού οι Viète και Fermat που συνέβαλαν στην εξέλιξη της άλγεβρας, διάβασαν και βασίστηκαν στα προβλήματα που λύνει ο Διόφαντος στα *Αριθμητικά*. Έτσι το έργο τους συνδέθηκε με τη διοφαντική πρακτική, η οποία θεωρήθηκε αλγεβρική.

Παρ' ότι αναγνωρίζει τα *Αριθμητικά* σαν έργο άλγεβρας, η παραδοσιακή σχολή ιστοριογραφίας προσδιορίζει ως αντικείμενό τους, τη Θεωρία Εξισώσεων. Κι αυτό γιατί η στοιχειώδης άλγεβρα όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, έχει συνδεθεί θεμελιωδώς με τη θεωρία εξισώσεων. Αντιπροσωπευτική ανάγνωση των ελληνικών βιβλίων των *Αριθμητικών* υπό αυτήν τη σκοπιά είναι αυτή του Heath (1885; 1910). Στη συγκεκριμένη μελέτη, ο Heath ταυτίζει τα αριθμητικά προβλήματα με τις εξισώσεις που τους αντιστοιχούν. Έτσι, οδηγείται σε μια κατηγοριοποίηση των προβλημάτων με κριτήριο το είδος των εξισώσεων. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει είναι ότι ο Διόφαντος έλυνε «ορισμένες» εξισώσεις στο πρώτο βιβλίο, και «απροσδιόριστες» εξισώσεις στα υπόλοιπα βιβλία των *Αριθμητικών* (Christianidis 2018, 42–43). Εκτός από το γεγονός ότι η έννοια της ίδιας της εξίσωσης έχει αλλάξει πολύ με το πέρασμα των χρόνων, η θεώρηση αυτή παραγνωρίζει τον σκοπό του έργου, ο οποίος δεν ήταν η επίλυση εξισώσεων αλλά η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων με τη μετατροπή τους σε εξισώσεις (Christianidis 2018, 43). Στο πλαίσιο των *Αριθμητικών*, οι εξισώσεις αντιστοιχούν σε κάποιο συγκεκριμένο αριθμητικό πρόβλημα και δεν παρουσιάζονται αυτόνομα, ώστε η επίλυσή τους να θεωρηθεί αυτοσκοπός. Επιπλέον, τα προβλήματα αυτά δεν μπορούν να χαρακτηριστούν από την αρχή αλγεβρικά, καθώς η μετατροπή τους σε εξισώσεις δεν αποτελεί τον μόνο δυνατό τρόπο λύσης τους. Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι μια διάκριση των προβλημάτων των *Αριθμητικών* με βάση το είδος των εξισώσεων που τους αντιστοιχούν ή ακόμα και τον βαθμό αυτών των εξισώσεων, μπορεί να γίνει, εάν έχει ως σκοπό την καλύτερη κατανόηση της δομής του έργου από κάποιον μελετητή. Αντιμετωπίζει όμως προβλήματα αναχρονισμού, στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ως εργαλείο ερμηνείας των βιβλίων των *Αριθμητικών*, κι αυτό γιατί στηρίζεται στον μοντέρνο αλγεβρικό τρόπο σκέψης.

Από την άλλη μεριά, έχουν εκφραστεί σύγχρονες απόψεις, με κυρίαρχη αυτή του Rashed, που υποστηρίζουν ότι τα *Αριθμητικά* είναι ένα έργο απλής αριθμητικής και τίποτα περισσότερο (Christianidis 2018, 41; Rashed and Houzel 2013, vii). Στο πλαίσιο αυτής της ερμηνείας όμως, δεν εξηγείται το γεγονός ότι το κείμενο δεν περιλαμβάνει αποκλειστικά πράξεις μεταξύ συγκεκριμένων αριθμών. Αντίθετα στις διοφαντικές λύσεις συντάσσονται παραστάσεις, τις οποίες στα σύγχρονα μαθηματικά θα ονομάζαμε αλγεβρικές. Κι αυτό γιατί, για τη σύνταξή τους χρησιμοποιείται μια ειδική τεχνητή ορολογία αλλά και πράξεις μεταξύ των τεχνικών όρων, ωσάν οι όροι αυτοί να είναι απλοί αριθμοί. Μία ακόμη σύγχρονη ερμηνευτική απόπειρα —που ξεκίνησε η I. G. Bashmakova και αργότερα υιοθετήθηκε και από τους Rashed και Houzel— συνδέει τις διοφαντικές λύσεις με τη μοντέρνα Αλγεβρική Γεωμετρία (Christianidis 2016; Rashed and Houzel 2013, 43–44; Bashmakova 1981). Το εγχείρημα αυτό έχει δεχθεί κριτική, καθώς εάν εξετασθούν παράλληλα οι δύο τρόποι λύσης των προβλημάτων, αυτός που ακολουθείται στα *Αριθμητικά* και ο τρόπος που χρησιμοποιεί την Αλγεβρική Γεωμετρία, φανερώνονται πολλές διαφορές μεταξύ τους. Σημαντικότερη διαφορά είναι ότι στην περίπτωση της λύσης με Αλγεβρική Γεωμετρία, το πρόβλημα γίνεται αντιληπτό από την αρχή ως μία εξίσωση (Christianidis 2018, 61).

Καθεμία από τις ερμηνευτικές προσεγγίσεις στις οποίες αναφερθήκαμε, επιχειρείται έχοντας ως δεδομένη μία ανιστορική αντίληψη για τον όρο «άλγεβρα» (Christianidis 2018, 36). Η αντίληψη αυτή συνήθως, ταυτίζει παλαιότερες αλγεβρικές πρακτικές, με τη μοντέρνα άλγεβρα. Σε αυτήν την περίπτωση είναι επόμενο, τα χαρακτηριστικά ενός έργου όπως τα *Αριθμητικά* που τοποθετείται χρονικά γύρω στον 3ο αιώνα, να είναι δύσκολο να ευθυγραμμιστούν με τις έννοιες και τις τεχνικές της μοντέρνας άλγεβρας.

Έτσι, έχει προταθεί μια διαφορετική ερμηνεία των *Αριθμητικών* από τον Γ. Χριστιανίδη, η οποία στηρίζεται στην αναγνώριση της ύπαρξης μιας ακόμη ιστορικής κατηγορίας της άλγεβρας, της «Προ-μοντέρνας άλγεβρας». Η νέα κατηγορία της «Προ-μοντέρνας άλγεβρας» αναδεικνύει τις διαφορές αλλά και τις ομοιότητες ανάμεσα σε πρόδρομες έννοιες της αλγεβρικής πρακτικής όπως αυτής που εφαρμόζεται στις διοφαντικές λύσεις, και στις σύγχρονες έννοιες του πολυωνύμου και της εξίσωσης. Με αυτήν την ερμηνεία μπορούν να εξηγηθούν οι ιδιαιτερότητες που παρουσιάζουν οι λύσεις των *Αριθμητικών*, χωρίς να απορριφθεί ο αλγεβρικός τους χαρακτήρας.

2.4 Ορολογία: καθημερινό και ειδικό λεξιλόγιο

Στα *Αριθμητικά*, η λειτουργία της αλγεβρικής μεθόδου έγκειται κατά κύριο λόγο στη μετατροπή των αριθμητικών προβλημάτων σε εξισώσεις. Ας δούμε πώς γίνεται όμως αυτή η μετατροπή. Θα πρέπει όλα τα διαθέσιμα δεδομένα, οι ισχύουσες σχέσεις και ιδιότητες των αριθμών που ζητούνται, να εκφραστούν σε μία νέα τεχνητή γλώσσα. Έτσι, χρησιμοποιούνται δύο ομάδες όρων, που ανήκουν σε διαφορετικές γλώσσες: σε μία γλώσσα για τις εκφωνήσεις των προβλημάτων, και σε μία δεύτερη για την κατάστρωση και τη λύση της εξίσωσης που αντιστοιχεί σε κάθε πρόβλημα.

Στις εκφωνήσεις των προβλημάτων ζητείται ο προσδιορισμός της αριθμητικής τιμής ενός ή περισσότερων αριθμών που ικανοποιούν μια ή περισσότερες συνθήκες. Οι αριθμοί αυτοί αποκαλούνται «ζητούμενοι», και είναι οι άγνωστοι του προβλήματος. Διατυπώνονται στην τρέχουσα γλώσσα —π.χ. Ελληνικά ή Αραβικά— με την καθημερινή της λειτουργία, και λειτουργούν ως κοινά ουσιαστικά (Christianidis, 2018, 46–47, forthcoming (i)).

Στον Πίνακα 1 σημειώνονται οι όροι της καθημερινής γλώσσας που χρησιμοποιούνται στις εκφωνήσεις των προβλημάτων και λειτουργούν ως κοινά ουσιαστικά:

Πίνακας 1

Αριθμοί στις εκφωνήσεις (κοινά ουσιαστικά)
αριθμός / πλευρά
τετράγωνος
κύβος
τετράγωνος πολλαπλασιασμένος με τον εαυτό του
τετράγωνος πολλαπλασιασμένος με κύβο ίδιας πλευράς
κύβος πολλαπλασιασμένος με τον εαυτό του

Για να επιτευχθεί όμως η μετατροπή του προβλήματος σε εξίσωση, πρέπει οι αρχικοί αυτοί όροι του καθημερινού λεξιλογίου, να μεταφραστούν σε τεχνικούς όρους της ειδικής γλώσσας. Με τη μετάφρασή τους, οι ζητούμενοι αριθμοί καθίστανται προσδιορισμένοι, παρ' όλο που παραμένουν άγνωστοι έως τη στιγμή που θα βρεθεί μία λύση της εξίσωσης. Τη στιγμή εκείνη, θα μπορεί να βρεθεί και η τιμή τους. Έτσι, οι ζητούμενοι αριθμοί, οι ισχύουσες σχέσεις μεταξύ των ζητούμενων αριθμών, αλλά και άλλοι αριθμοί που είναι απαραίτητοι για την κατασκευή της εξίσωσης, αποκτούν «όνομα», εκπεφρασμένο με τους τεχνικούς όρους ενός νέου ειδικού λεξιλογίου. Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται στις λύσεις ως κύρια ονόματα. Όσοι κι αν είναι οι ζητούμενοι αριθμοί του προβλήματος, τα «ονόματα» της τεχνητής γλώσσας που τους αποδίδονται, εκφράζονται με βάση τον ίδιο άγνωστο, τον Αριθμό. Ο Αριθμός μπορούμε να πούμε ότι αντιστοιχεί στον σύγχρονο άγνωστο x, χωρίς να ταυτίζεται όμως με αυτόν. Δομικά στοιχεία της τεχνητής γλώσσας είναι τα «είδη» αριθμών, τα οποία στη σύγχρονη μαθηματική ορολογία αντιστοιχούν στις διαφορετικές δυνάμεις του αγνώστου (Christianidis, 2018, 46–47, forthcoming (i)). Τους όρους της γλώσσας αυτής, ο Διόφαντος μπορεί και τους επεξεργάζεται, εκτελεί δηλαδή πράξεις μεταξύ των «ειδών». Οι κανόνες που διέπουν τον λογισμό με τα «είδη» παρατίθενται και εξηγούνται στην εισαγωγή του έργου (Diophantus, 1893-95, I, 6.22-12.21). Με την εφαρμογή των πράξεων μεταξύ των «ειδών» κατασκευάζονται διαδοχικά τα «πολυώνυμα» και η «εξίσωση» κάθε προβλήματος (Diophantus, 1893-95, I, 14.11–12). Τα «ονόματα» χρησιμοποιούνται καθ' όλη τη διάρκεια της κατάστρωσης και επίλυσης της εξίσωσης. Η επιστροφή από το τεχνητό περιβάλλον που ορίζει η ειδική γλώσσα, πίσω στο πεδίο που ορίζουν οι απλοί αριθμοί, γίνεται ύστερα από την εύρεση της αριθμητικής τιμής που αποτελεί λύση της εξίσωσης. Τότε, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, και αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου στα «ονόματα» των ζητούμενων αριθμών, βρίσκουμε τις τιμές τους, οι οποίες αποτελούν και την απάντηση του προβλήματος.

Ο Διόφαντος ορίζει ένα σύνολο από συντομογραφίες για τα διαφορετικά «είδη» αριθμών (Diophantus, 1893-95, I, 4.14-6.8) οι οποίες όμως δεν χρησιμοποιούνται με συνέπεια στα ελληνικά χειρόγραφα. Στο αραβικό χειρόγραφο δεν εμφανίζονται καθόλου συντομογραφίες, καθώς στη μετάφραση ακολουθείται η αραβική ορολογία, όπως αυτή παρουσιάζεται στην αλγεβρική πραγματεία του al-Khwārizmī. Εκεί, όλοι οι όροι εκφράζονται με λέξεις (Rashed 1984, 3, lxxxiii).

Στους παρακάτω πίνακες, δίνονται οι όροι της τεχνητής γλώσσας όπως αυτοί παρουσιάζονται στα χειρόγραφα που σώθηκαν στην ελληνική και στην αραβική γλώσσα. Επισημαίνουμε ξανά ότι οι όροι αυτοί δεν ταυτίζονται με τα σύγχρονα αλγεβρικά σύμβολα, τα οποία στην περίπτωσή μας είναι το x και οι δυνάμεις του. Μπορούμε να πούμε μόνο ότι είναι τα σύγχρονα αντίστοιχά τους.

Πίνακας 2

Ελληνικοί όροι	Αραβικοί όροι	Συντομογραφίες	Σύγχρονο αλγεβρικό σύμβολο
μονάς	dirham / ʿadad	$\overset{\circ}{M}$	1
αριθμός	jidhr / shayʾ	ϛ	x^1
δύναμις	māl	Δ^{Y}	x^2
κύβος	kaʿb	K^{Y}	x^3
δυναμοδύναμις	māl māl	$\Delta^{Y}\Delta$	x^4
δυναμόκυβος	māl kaʿb	ΔK^{Y}	x^5
κυβόκυβος	kaʿb kaʿb	$K^{Y}K$	x^6

Πίνακας 3

Όροι στα ελληνικά	Σύγχρονο αλγεβρικό σύμβολο
αριθμοστόν	x^{-1}
δυναμοστόν	x^{-2}
κυβοστόν	x^{-3}
δυναμοδυναμοστόν	x^{-4}
δυναμοκυβοστόν	x^{-5}
κυβοκυβοστόν	x^{-6}

Η σημασία των αραβικών όρων «dirham»/«ʿadad», «jidhr»/«shayʾ», «māl» και «kaʿb» είναι «ντιράμ (ασημένιο νόμισμα)»/«μονάδα», «ρίζα»/«πράγμα», «χρηματικό ποσό» ή «περιουσία», και «κύβος» αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τους πίνακες, παρατηρούμε ότι κάποιοι από τους τεχνικούς όρους συμπίπτουν με όρους που εμφανίζονται στις εκφωνήσεις των προβλημάτων, όπως οι όροι «αριθμός» και «κύβος» στην ελληνική (Christianidis, 2018, 47), και οι «māl» και «jidhr» στην αραβική γλώσσα (Oaks, 2009, 177). Ωστόσο, η λειτουργία τους σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις, είναι εντελώς διαφορετική. Το πλαίσιο εντός του οποίου χρησιμοποιούνται, μας βοηθά όταν τις συναντάμε να καταλαβαίνουμε σε ποιά από τις δύο ομάδες όρων ανήκουν (Christianidis forthcoming (i)).

Ένα παράδειγμα θα καταστήσει σαφέστερη τη μεταξύ τους διαφορά. Έστω ότι στην εκφώνηση κάποιου προβλήματος ζητείται «να βρεθεί ένας τετράγωνος αριθμός τέτοιος ώστε ...». Εδώ η λέξη «τετράγωνος» είναι από άποψη γραμματικής, κοινό ουσιαστικό, και προσδιορίζει τον ζητούμενο αριθμό μέσω μιας ιδιότητάς του. Περνώντας τώρα στο πλαίσιο επίλυσης του προβλήματος, στον «τετράγωνο» αυτόν αριθμό, μπορούν να αντιστοιχισθούν πολλές «ονομασίες». Ας θεωρήσουμε για το παράδειγμά μας τις εξής δύο: «1 Δύναμη» ή «1 Δυναμοδύναμη». Οι δύο αυτοί όροι ανήκουν στην ομάδα των τεχνικών όρων της ειδικής γλώσσας, και είναι αυτήν τη φορά κύρια ονόματα που συγκεκριμενοποιούν τον αριθμό που αναζητούμε, προσδιορίζοντας την ιδιαίτερη μορφή του σύμφωνα πάντα με την ιδιότητα που καθορίστηκε από την εκφώνηση. Έτσι, ο αριθμός που του έχει αποδοθεί όνομα, θα είναι συμβολικά $1x^2$ ή $1x^4$ αντίστοιχα. Και τα δυο αυτά «είδη», είναι «τετράγωνοι» αριθμοί.

Συμπεραίνουμε ότι περισσότερες της μίας μορφές αριθμού μπορούν να ικανοποιούν την ιδιότητα που μας υπαγορεύει ο όρος της εκφώνησης, «τετράγωνος» αριθμός. Η επιλογή ενός κατάλληλου ονόματος για τον αριθμό, θα εξαρτηθεί από πολλούς παράγοντες όπως από πιθανούς περιορισμούς ώστε η λύση να ανήκει στους θετικούς ρητούς αριθμούς, από επιπλέον στοιχεία που τον χαρακτηρίζουν ή και από τη γενικότερη απαίτηση, μια λύση στο πρόβλημα να προκύπτει εύκολα. Τέλος, μία επιπλέον επιθυμητή συνθήκη που καθορίζει την επιλογή ενός «ονόματος», είναι να μπορεί η εξίσωση που θα καταστρωθεί, να αναχθεί με απλοποίηση στην απλή μορφή όπου ένα «είδος» ισούται με ένα άλλο «είδος», δηλαδή: $ax^m = bx^n$, με $n, m \in \mathbb{Z}$ και $-9 \leq n, m \leq +9$, ή εάν αυτό δεν είναι εφικτό, τουλάχιστον στη μορφή όπου ένα «είδος» είναι ίσο με δύο «είδη», δηλαδή: $ax^m = bx^n + cx^k$ όπου οι αριθμοί n, m, k είναι τέτοιοι ώστε η εξίσωση να ανάγεται σε δευτεροβάθμια και οι συντελεστές a, b, c να είναι τέτοιοι ώστε να είναι επιλύσιμη (Diophantus, 1893-95, I, 14.21-24).

2.5 Πράξεις μεταξύ των «ειδών» αριθμών

Πέρα από την αναπαράσταση άγνωστων αριθμών με ειδική ορολογία, κρισιμότερο στοιχείο που καθιστά αλγεβρική τη διοφαντική πρακτική, είναι η ανάπτυξη ενός λογισμού με τα «είδη». Οι κανόνες των πράξεων περιγράφονται στην εισαγωγή των *Αριθμητικών* (Diophantus, 1893-95, I, 6.22-14.10). Οι πράξεις μεταξύ των τεχνικών όρων, είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός/διαίρεση, οι ίδιες δηλαδή με αυτές της απλής αριθμητικής, με τη διαφορά ότι οι τελευταίες αφορούν απλούς αριθμούς. Οι πρώτες αντίθετα, αφορούν όρους της Αριθμητικής Θεωρίας (Diophantus, 1893-95, I, 4.12-14), όπως αποκαλείται στην εισαγωγή η τεχνητή γλώσσα των διοφαντικών λύσεων. Κάποιες από τις πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν κατά τη λύση ενός προβλήματος, υποδεικνύονται στην εκφώνησή του. Καθεμία από τις πράξεις δηλώνεται με συγκεκριμένα ρήματα στα ελληνικά ή τα αραβικά. Αυτό που πρέπει να επισημάνουμε, είναι ότι το ρήμα «ισούται με» ή «είναι ίσο με», δεν χρησιμοποιείται στα *Αριθμητικά* για να δηλώσει το αποτέλεσμα πράξεων, όπως γίνεται στη σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα (Christianidis and Oaks 2013, 138; Oaks 2007, 6).

Στα ακόλουθα, θα κάνουμε χρήση ορισμένων όρων του σύγχρονου λεξιλογίου της άλγεβρας, προκειμένου να εξηγήσουμε τον τρόπο που εκτελούνται οι πράξεις στα *Αριθμητικά*. Θα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον, σύγχρονο συμβολισμό με κάποιες τροποποιήσεις, στα παραδείγματα: θα γράφουμε «⟶» για να δηλώσουμε το αποτέλεσμα μιας πράξης, «≔» για την απόδοση «ονόματος» σε κάποιον αριθμό και «=» για την «εξίσωση». Οι «συντελεστές» των «ειδών» θα γράφονται με σύγχρονους αριθμούς, και τα ίδια τα «είδη» θα γράφονται με τη σύγχρονη μορφή δυνάμεων του αγνώστου x. Για την καλύτερη κατανόηση, θα χρησιμοποιηθούν επίσης οι σύγχρονοι όροι: «συντελεστής», «μειωτέος», «αφαιρετέος», «μονώνυμο», «διώνυμο», «πολυώνυμο», «εξίσωση», «εκθέτης», «βαθμός της εξίσωσης».

<u>Πρόσθεση και αφαίρεση όμοιων «ειδών»</u>

Από την πρόσθεση ή αφαίρεση όμοιων «ειδών» (Christianidis 2018, 48–49; Oaks 2009, 180–81) προκύπτουν «είδη» όμοια με τα αρχικά ή κατά τη σύγχρονη ορολογία, «μονώνυμα». Ο «συντελεστής» του κάθε «μονωνύμου» υποδεικνύει το πλήθος του συγκεκριμένου «είδους» αριθμού, το οποίο προκύπτει έπειτα από την εκτέλεση της πράξης, και δεν σχετίζεται με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό της νεωτερικής άλγεβρας (Christianidis and Oaks 2013, 150–51). Γι’ αυτό και κάθε «είδος» αριθμού που συνοδεύεται από «συντελεστή» μεγαλύτερο της μονάδας, γράφεται σε πληθυντικό αριθμό. Οι μαθηματικοί των Μέσων Χρόνων αναφέρονταν σε αυτό που εμείς αποκαλούμε «συντελεστή» ενός όρου, ως «τον αριθμό» —στα αραβικά «ʿadad» (Oaks

2009, 178–79)— του όρου αυτού. Εξάλλου η ίδια η λέξη «coefficient» (συντελεστής) αποδίδεται στον François Viète (1591) (Oaks 2009, 180; 2017, 160), που σημαίνει πως η ανάγκη ύπαρξης αυτής της έννοιας προέκυψε πολύ αργότερα από την εποχή της οποίας τα μαθηματικά μελετάμε.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα πρόσθεσης όμοιων «ειδών», και η συμβολική του αναπαράσταση:

«1 Κύβος και 8 Κύβοι. Το άθροισμά τους είναι 9 Κύβοι».	Το άθροισμα των $1x^3$ και $8x^3$ είναι $9x^3$

<u>Πρόσθεση ανόμοιων «ειδών»</u>

Ας δούμε τώρα τί προκύπτει εάν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε ανόμοια «είδη». Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει κάποιο «πολυώνυμο». Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης διατυπώνεται στα ελληνικά χειρόγραφα με απλή παράθεση των «ειδών» στη σειρά, της οποίας η λειτουργία προσομοιάζει με εκείνη του συμπλεκτικού συνδέσμου της καθημερινής γλώσσας. Στα αραβικά χρησιμοποιείται η λέξη «wa», που σημαίνει «και». Κατά τη μεταφορά των εκφράσεων του πρωτότυπου κειμένου σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, αποφεύγουμε τη χρήση του συμβόλου «συν» / «+», διότι συχνά προκαλεί παρερμηνείες και δηλώνουμε την πράξη με λόγια. Όταν προστίθενται διαφορετικά «είδη» στα *Αριθμητικά*, το αποτέλεσμα θα πρέπει να γίνεται αντιληπτό ως μία συλλογή αντικειμένων αποτελούμενη από τα διαφορετικά αυτά «είδη», και όχι ως γραμμικός συνδυασμός των διαφορετικών δυνάμεων του αγνώστου x (Christianidis and Oaks 2013, 138, 151–52; Christianidis 2018, 48–49; Oaks 2009, 180–81).

Ακολουθεί ένα παράδειγμα πρόσθεσης ανόμοιων «ειδών», και η συμβολική του αναπαράσταση:

«…το τετράγωνο του κύβου είναι 1 Κυβόκυβος, και το τετράγωνο του τετραγώνου <είναι> 16 Δυναμοδυνάμεις. Το άθροισμά τους είναι 1 Κυβόκυβος <και> 16 Δυναμοδυνάμεις.»	Το άθροισμα των $1x^6$ και $16x^4$ είναι $1x^6 + 16x^4$

<u>Αφαίρεση ανόμοιων *ειδών*</u>

Παρόμοια σύγχυση μπορεί να δημιουργήσει και η χρήση του μοντέρνου συμβόλου «πλην» / «−», στις περιπτώσεις που θέλουμε να αναφερθούμε στο αποτέλεσμα της πράξης της αφαίρεσης μεταξύ διαφορετικών «ειδών». Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μη ύπαρξη αρνητικών ποσοτήτων στο σύμπαν των αριθμών της εποχής που μελετάμε, από την αφαίρεση μεταξύ διαφορετικών «ειδών» προκύπτουν ποσότητες «ελλιπείς». Έτσι, το «πλην» που καταχρηστικά χρησιμοποιούμε μεταξύ δύο αφαιρούμενων «ειδών», δηλώνει ότι στη συγκεκριμένη παράσταση η τιμή που εκφράζει ο «μειωτέος» δεν συμμετέχει ακέραια, αλλά παρουσιάζει έλλειμμα ίσο με την αριθμητική τιμή που εκφράζει ο «αφαιρετέος». Γι' αυτό και η εν λόγω έλλειψη πρέπει να αποκατασταθεί (Christianidis forthcoming (i); Christianidis and Oaks, 2013, 139, 152). Σε ορισμένα από τα σωζόμενα διοφαντικά κείμενα στα Ελληνικά, χρησιμοποιείται ένα ιδιαίτερο σύμβολο που μοιάζει με ανεστραμμένο Ψ, για να δηλώσει το αποτέλεσμα της αφαίρεσης μεταξύ των «ειδών» (Diophantus, 1893-95, I, 12.20-21). Στα υπόλοιπα, το αποτέλεσμα της πράξης εκφράζεται με τη λέξη «λεῖψις», ενώ στην αραβική γλώσσα η λέξη είναι «illa» (Oaks 2009, 181). Η πράξη της αφαίρεσης όπως και της πρόσθεσης μπορεί βέβαια να γίνει και μεταξύ δύο «πολυωνύμων».

Ακολουθεί ένα παράδειγμα αφαίρεσης ανόμοιων «ειδών», και η συμβολική του αναπαράσταση:

«Θέτουμε τον κύβο 1 Κύβο και πολλαπλασιάζουμε το τετράγωνο με την ίδια πλευρά, δηλαδή τη 1 Δύναμη, με 5 και με 10. Το αποτέλεσμα είναι 5 Δυνάμεις και 10 Δυνάμεις αντίστοιχα. Αφαιρώντας τα δύο αυτά αποτελέσματα από τον κυβικό αριθμό, έχουμε 1 Κύβο με έλλειψη 5 Δυνάμεις, και 1 Κύβο με έλλειψη 10 Δυνάμεις».	Αφαιρ. $5x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 5x^2$ και Αφαιρ. $10x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 10x^2$

Πολλαπλασιασμός/Διαίρεση μεταξύ των «ειδών»

Ο πολλαπλασιασμός/διαίρεση μεταξύ «ειδών» (Christianidis and Oaks 2013, 139–41), είναι ο τρόπος που νέα «είδη» δημιουργούνται. Τα «είδη» αυτά αντιστοιχούν στις σύγχρονες δυνάμεις του αγνώστου, και στην αραβική μετάφραση των *Αριθμητικών* φτάνουν έως και την ένατη δύναμή του (Sesiano 1982, 44–45). Στην εισαγωγή των *Αριθμητικών* περιγράφεται αναλυτικά η δημιουργία «ειδών», πρώτα από τους πολλαπλασιασμούς μεταξύ των θετικών δυνάμεων του αγνώστου (Diophantus, 1893-95, I, 8.1-15), έπειτα από τους πολλαπλασιασμούς μεταξύ των αρνητικών δυνάμεων του αγνώστου (Diophantus, 1893-95, I, 8.16-24) και τέλος από τους μεταξύ τους πολλαπλασιασμούς (Diophantus, 1893-95, I, 10.1-12.18). Την περιγραφή των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να προκύψουν τα «είδη», ακολουθεί ο κανόνας του πολλαπλασιασμού μεταξύ προστιθέμενων και αφαιρούμενων «ειδών» (Diophantus, 1893-95, I, 12.19-20).

Ακολουθεί ένα παράδειγμα πολλαπλασιασμού μεταξύ ανόμοιων «ειδών», και η συμβολική του αναπαράσταση:

«Τότε ο μεγαλύτερος κύβος είναι 64 Κύβοι, ο μικρότερος 1 Κύβος, και ο αριθμός που προκύπτει ως αποτέλεσμα του μεταξύ τους πολλαπλασιασμού είναι 64 Κυβόκυβοι.»	Το γινόμενο $64x^3$ επί $1x^3$ είναι $64x^6$

2.6 Η Προ-μοντέρνα Άλγεβρα

2.6.1 Η εισαγωγή της νέας κατηγορίας στην ιστοριογραφία των μαθηματικών

Είδαμε ότι οι ιστορικοί των μαθηματικών στην προσπάθειά τους να μελετήσουν τα *Αριθμητικά*, τα ενέταξαν ως μαθηματικό είδος στη στοιχειώδη μοντέρνα άλγεβρα, την απλή αριθμητική ή ακόμα, κάποιοι εξ αυτών, τα συνέδεσαν με τη μοντέρνα αλγεβρική γεωμετρία. Κάθε τέτοια ερμηνευτική απόπειρα, συνοδεύτηκε από μία σειρά από ασυμβατότητες ανάμεσα στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που παρουσιάζει το έργο και στις έννοιες και πρακτικές σύμφωνα με τις οποίες λειτουργεί καθεμία από τις προαναφερθείσες μαθηματικές περιοχές. Το ίδιο αποτέλεσμα προέκυψε και κατά την προσπάθεια ερμηνείας μεταγενέστερων από τα *Αριθμητικά* μαθηματικών έργων, των οποίων μάλιστα ο αλγεβρικός χαρακτήρας δεν έχει αμφισβητηθεί. Ωστόσο εκτιμήθηκε ότι η ερμηνεία τόσο των *Αριθμητικών* όσο και των εν λόγω μεταγενέστερων έργων με βάση σύγχρονα αλγεβρικά εργαλεία δεν κατόρθωσε να αποδώσει σωστά τη μαθηματική αντίληψη της χρονικής περιόδου της συγγραφής τους.

Μία διαδεδομένη άποψη στην ιστορία των μαθηματικών, είναι η σύνδεση των αρχών της μοντέρνας άλγεβρας με το έργο του François Viète (Christianidis 2018, 36). Έτσι, αν θεωρήσουμε δεδομένη την ύπαρξη αλγεβρικής πρακτικής στους αιώνες που προηγήθηκαν της διαμόρφωσης της μοντέρνας άλγεβρας, αναγνωρίζεται αυτομάτως ότι τα έργα που χρησιμοποιούν αλγεβρικές τεχνικές και γράφτηκαν πριν τον 16ο αιώνα, ανήκουν σε ένα πρώιμο αλγεβρικό στάδιο. Όσοι όμως υποστηρίζουν αυτήν την άποψη για την εξέλιξη της άλγεβρας, όπως ο Jacob Klein (1968), δεν εντόπισαν εκείνα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που θα μπορούσαν να ορίσουν έναν νέο τύπο άλγεβρας που να αντιστοιχεί σε όλα αυτά τα αλγεβρικά έργα που χρονολογούνται πριν από τον Viète.

Η μελέτη μαθηματικών πηγών που ανήκουν στην περίοδο πριν τον Viète, οδήγησε στην ανάγκη διάκρισης σταδίων στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας. Όπως σε όλους τους επιστημονικούς τομείς, έτσι και στα μαθηματικά οι έννοιες των διάφορων περιοχών τους, υπέστησαν μεταβολές μέσα στον χρόνο, σε τέτοιον βαθμό που η χαλαρή χρήση τους κατά τη μελέτη οποιουδήποτε μαθηματικού κειμένου, να επιφυλάσσει τον κίνδυνο διαστρέβλωσης του περιεχομένου του και παρανόησης του σκοπού συγγραφής του.

Κατά την πρώτη δεκαετία του 2000, μια διαφορετική οπτική στη μελέτη των μαθηματικών έργων της Ύστερης Αρχαιότητας, του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης έδωσαν οι Γ. Χριστιανίδης και J. Oaks, αναγνωρίζοντας την ανάγκη τυποποίησης των χαρακτηριστικών της πρώιμης περιόδου της άλγεβρας.

Η έννοια της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, εισήχθη ως νέα κατηγορία στην ιστοριογραφία των μαθηματικών, από τον J.Oaks. Στόχος του Oaks ήταν να χρησιμοποιηθεί σαν ερμηνευτικό εργαλείο αραβικών, λατινικών και ιταλικών μαθηματικών έργων του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης. Ο Γ. Χριστιανίδης, από την άλλη, υποστήριξε ότι η ίδια κατηγορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει και τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, και έτσι ανέπτυξε τη θέση υπέρ του αλγεβρικού χαρακτήρα των *Αριθμητικών* (Christianidis 2018, 39). Σύμφωνα, λοιπόν, με τα χαρακτηριστικά της νέας κατηγορίας της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, τα *Αριθμητικά* μπορούν να θεωρηθούν μέρος του συγκεκριμένου αλγεβρικού είδους.

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε την κατηγορία της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, και θα εντοπίσουμε τους λόγους για τους οποίους η ανάγνωση των *Αριθμητικών* μέσα από αυτήν την κατηγορία θα μας προσφέρει μια ερμηνεία μακριά από αναχρονισμούς και πλησιέστερα στη μαθηματική αντίληψη της εποχής του Διόφαντου. Με αυτόν τον τρόπο θα φανεί γιατί η εισαγωγή του όρου Προ-μοντέρνα άλγεβρα, συμβάλλει στην κατασκευή μιας πιο αξιόπιστης εικόνας των μαθηματικών παλαιότερων περιόδων .

2.6.2 Τα χαρακτηριστικά της Προ-μοντέρνας Άλγεβρας

Το σημαντικότερο στοιχείο της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, που την καθιστά ξεχωριστή κατηγορία από τη μοντέρνα άλγεβρα, είναι ο τρόπος που γίνονται κατανοητές στο πλαίσιό της οι δύο θεμελιώδεις αλγεβρικές έννοιες, που αργότερα διαμορφώθηκαν στους σύγχρονους όρους «πολυώνυμο» και «εξίσωση».

(α) Οι βασικές αλγεβρικές έννοιες στην πρώιμη μορφή τους: το «Πολυώνυμο» και η «Εξίσωση»

Το πολυώνυμο

Στη σύγχρονη άλγεβρα το πολυώνυμο μίας μεταβλητής γίνεται αντιληπτό ως γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων του αγνώστου. Η αντίληψη αυτή προϋποθέτει ότι οι πράξεις του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης αποτελούν στοιχεία της δομής του πολυωνύμου. Όμως, τα πολυώνυμα της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, δεν περιλαμβάνουν καθόλου πράξεις. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε αναλυτικά τη σημασία των λέξεων «και» και «λεῖψις», και πώς αυτές χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της κατασκευής ενός «πολυωνύμου». Περιγράψαμε επίσης την ιδιαίτερη λειτουργία των «συντελεστών» των δυνάμεων του αγνώστου, οι οποίοι είναι απλώς δείκτες του πλήθους κάθε «είδους» αριθμού που μετέχει σε μία παράσταση. Έτσι, με αυτά τα δεδομένα, μπορούμε να εξηγήσουμε ότι ένα «πολυώνυμο» στο στάδιο της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, γινόταν αντιληπτό ως μία συλλογή από «είδη» αριθμών (Christianidis and Oaks 2013, 137, 152–54; Christianidis 2018, 37–38; Oaks 2007, 5–6; 2009, 182). Να σημειώσουμε ότι οι πολυωνυμικοί συντελεστές, ή με την σωστή ορολογία οι «αριθμοί», ή τα «πλήθη» των «ειδών», δεν μπορούσαν να είναι άρρητοι αριθμοί. Κι αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό από το γεγονός ότι ένας άρρητος αριθμός, δεν μπορεί να αποτελέσει απάντηση στην ερώτηση «πόσα από το συγκεκριμένο «είδος» αριθμού, συμμετέχουν σε μια πολυωνυμική έκφραση;» (Christianidis 2018, 38; Oaks 2007, 9; 2009, 184).

Η εξίσωση

Ας εξετάσουμε τώρα την έννοια της εξίσωσης, η οποία εξαρτάται άμεσα από αυτήν του πολυωνύμου. Οι πολυωνυμικές «εξισώσεις» στην Προ-μοντέρνα άλγεβρα, με βάση τον τρόπο κατανόησης του «πολυωνύμου» που περιγράφηκε προηγουμένως, αποτελούν στατικές ισότητες μεταξύ δύο συλλογών από «είδη» αριθμών. Η ισότητα δεν εκφράζεται με κάποιο σύμβολο, αλλά με το ρήμα «ισούται με» ή τη φράση «είναι ίσο με» (Christianidis and Oaks 2013, 142–43). Στα αραβικά το αντίστοιχο ρήμα είναι «ʿadala» (Sesiano 1982, 47). Όπως και στη δομή των «πολυωνύμων», έτσι και σε αυτή των «εξισώσεων» δεν περιλαμβάνονται πράξεις, και η ισότητα γίνεται αντιληπτή σαν σταθερή σχέση μεταξύ των δύο αλγεβρικών παραστάσεων, εδώ δύο «πολυωνύμων». Όλες οι πράξεις έχουν εκτελεσθεί προτού να καταστρωθεί η «εξίσωση», οπότε και προκύπτουν τα «πολυώνυμα» τα οποία στη συνέχεια αποτελούν τα δύο μέλη της. Αντίθετα με την περίοδο που εξετάζουμε, στα σύγχρονα μαθηματικά η παρουσία πράξεων αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για τον ορισμό και την κατασκευή μιας εξίσωσης (Christianidis, forthcoming (i); Oaks, 2007, 6; 2009, 177; Christianidis and Oaks, 2013, 141–143).

Στα *Αριθμητικά*, μετά την απλοποίηση των «εξισώσεων» εμφανίζονται μόνο μονώνυμα και διώνυμα στα «δύο μέλη» των ισοτήτων. Δηλαδή οι «εξισώσεις» είναι διώνυμες ή τριώνυμες. Ο «βαθμός» των «εξισώσεων» τη στιγμή της κατασκευής τους μπορεί να είναι μεγαλύτερος του 2, τελικώς όμως ανάγονται σε «εξισώσεις» πρώτου και δευτέρου βαθμού. Στο τέταρτο αραβικό βιβλίο, εμφανίζονται και εξισώσεις τρίτου ή τετάρτου βαθμού, πάντοτε όμως στην ελλιπή μορφή $ax^3 = b$, όπου το $\frac{a}{b}$ είναι κυβικός αριθμός[3], ή στη μορφή $ax^4 = b$, όπου το $\frac{a}{b}$ είναι τετράγωνος αριθμός με πλευρά τετράγωνο αριθμό[4], αντίστοιχα.

(β) Η εμβέλεια της Προ-μοντέρνας άλγεβρας

Εκτός από τις δύο βασικές έννοιες του πολυωνύμου και της εξίσωσης, η Προ-μοντέρνα άλγεβρα εμφανίζει διαφορές από τη μοντέρνα και σε σχέση με τον σκοπό για τον οποίο επινοήθηκε και κατ' επέκταση το πεδίο εφαρμογής της. Πιο αναλυτικά, η διαμόρφωση

[3] Πβλ. τα προβλήματα IV.18, 20 και 22.

[4] Πβλ. το πρόβλημα IV.17.

της νεότερης άλγεβρας στηρίχθηκε σε μεγάλο βαθμό στη θεωρητική της λειτουργία, δηλαδή στη χρήση της για την περιγραφή θεωριών ή για αποδεικτικούς σκοπούς. Αντίθετα, η Προ-μοντέρνα άλγεβρα ήταν η πρακτική μέθοδος που επινοήθηκε για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων. Είναι συνεπώς φυσικό, ότι οι αλγεβριστές που δραστηριοποιήθηκαν από την εποχή της Ύστερης Αρχαιότητας έως την Αναγέννηση, θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά τους αποτελούσαν τμήμα του τομέα της Αριθμητικής (Christianidis and Megremi 2019, 8–9; Christianidis and Oaks 2013, 159–60; Christianidis 2018, 38–39; Oaks 2007, 1–2). Εξάλλου, για πολλούς αιώνες τη θεωρητική λειτουργία στα μαθηματικά εξυπηρετούσε με επιτυχία ο κλάδος της Γεωμετρίας.

(γ) Η σημειογραφία της Προ-μοντέρνας άλγεβρας

Είναι διαδεδομένη η διάκριση τριών κατηγοριών στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας από τον Nesselmann (Nesselmann 1942). Κριτήριο για τη συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση είναι η σημειογραφία της άλγεβρας, και με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν διαδοχικά η «ρητορική», η «συγκεκομμένη» και ως τελικό και πλέον εξελιγμένο στάδιο της άλγεβρας, η «συμβολική» άλγεβρα.

Με βάση αυτή τη θεώρηση, τα *Αριθμητικά* αντιμετωπίστηκαν ως αντιπροσωπευτικό έργο συγκεκομμένης άλγεβρας, λόγω των συντομογραφιών που φαίνεται πως εισήγαγε ο Διόφαντος για να εκφράσει τους τεχνικούς όρους της μαθηματικής πρακτικής του (Christianidis 2018, 44). Όμως, οι συντομογραφίες αυτές δεν χρησιμοποιούνται στο σύνολο των χειρογράφων, αφού σε πολλά από αυτά, οι λύσεις των προβλημάτων των *Αριθμητικών* εκφράζονται με τις αντίστοιχες λέξεις, δηλαδή εντάσσονται στην κατηγορία που ο Nesselmann ορίζει ως ρητορική άλγεβρα.

Τα έργα της αραβικής άλγεβρας από την άλλη πλευρά, ανήκουν στην κατηγορία της ρητορικής άλγεβρας, καθώς δεν παρατηρείται η χρήση συντομογραφιών. Αυτό συμβαίνει έως τον 12ο αιώνα, οπότε και αναπτύχθηκε στο Μαγκρέμπ ένα είδος συμβολισμού, παρόμοιο με αυτό του Διόφαντου, το οποίο όμως δεν καθιερώθηκε ως τρόπος διατύπωσης στα αλγεβρικά έργα των αιώνων που ακολούθησαν (Oaks 2007, 10–11, 14–15; 2009, 192–96).

Το βέβαιο συμπέρασμα στο οποίο μπορούμε να καταλήξουμε στηριζόμενοι στα παραπάνω δεδομένα, είναι ότι η σημειογραφία που χρησιμοποιείται στα έργα της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, διαφοροποιείται ανάλογα με τη γλώσσα της μαθηματικής παράδοσης εντός της οποίας εφαρμόζεται, καθώς και τον αιώνα κατά τον οποίο δραστηριοποιήθηκαν οι μαθηματικοί που τη χρησιμοποίησαν ως πρακτική. Οι κατηγορίες του Nesselmann δεν φαίνεται να χαρακτηρίζουν με απόλυτο τρόπο την εξέλιξη της άλγεβρας, από τη στιγμή που η πρώτη κατηγορία συγχέεται με τη δεύτερη στους αιώνες που προηγούνται της γέννησης της μοντέρνας άλγεβρας. Σίγουρα πάντως, οι όποιες συντομογραφίες ή συμβολικές διατυπώσεις που παρατηρούνται στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, δεν πρέπει να συσχετίζονται με τον μοντέρνο αλγεβρικό συμβολισμό που αναπτύσσεται από το 1600 μ.Χ. και ύστερα. Η Προ-μοντέρνα άλγεβρα όπως έχει οριστεί, δεν χαρακτηρίζεται από έναν ενιαίο και σταθερό τρόπο έκφρασης του ειδικού λεξιλογίου της. Σε έργα όπως τα *Αριθμητικά* αλλά και αυτά των Αράβων αλγεβριστών, χρησιμοποιούνται επιλυτικές διαδικασίες ίδιας δομής, και έτσι μπορούμε να τα εντάξουμε στην κατηγορία της Προ-μοντέρνας άλγεβρας παρ' όλο που δεν παρουσιάζουν ίδια σημειογραφία (Christianidis 2018, 38–39).

2.6.3 Τα στάδια των λύσεων

Κατά την επίλυση των προβλημάτων στην Προ-μοντέρνα άλγεβρα, ακολουθείται μία καθορισμένη σειρά διακριτών διαδικασιών. Από το σύνολο αυτών των διαδικασιών, διαμορφώνεται η χαρακτηριστική δομή των αλγεβρικών λύσεων που μελετάμε. Η δομή αυτή παρατηρείται και στις επιλύσεις των προβλημάτων του έργου του Διόφαντου. Τα στάδια μιας τέτοιας αλγεβρικής λύσης περιγράφονται από τον Oaks, όπως τα εντόπισε ύστερα από τις μελέτες του πάνω στην αραβική άλγεβρα (Oaks 2007, 6–8; 2009, 174–75):

- Στάδιο $1^{ο}$. Καταστρώνεται μια εξίσωση με αλγεβρικούς όρους.
- Στάδιο $2^{ο}$. Απλοποιείται η εξίσωση έως ότου στην περίπτωση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων προκύψει μία από τις έξι μορφές εξισώσεων των οποίων η επίλυση είχε τυποποιηθεί. Οι έξι μορφές των εξισώσεων δίνονται με μοντέρνο συμβολισμό, στον Πίνακα 4 .
- Στάδιο $3^{ο}$. Εφαρμόζεται ο κατάλληλος αλγόριθμος, αυτός δηλαδή που αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους έξι τύπους εξισώσεων, ούτως ώστε να επιτευχθεί η λύση της εξίσωσης.

Πίνακας 4

Απλές εξισώσεις	Σύνθετες εξισώσεις
$\alpha x^2 = bx$	$\alpha x^2 + bx = c$
$\alpha x^2 = c$	$\alpha x^2 + c = bx$
$bx = c$	$\alpha x^2 = bx + c$

Στη συνέχεια θα δούμε τι περιλαμβάνει καθένα από τα στάδια λύσεων της Προμοντέρνας άλγεβρας γενικά, αλλά και των *Αριθμητικών* ειδικότερα.

Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει δύο επιμέρους διαδικασίες, η διαδοχική εφαρμογή των οποίων οδηγεί στον σχηματισμό της εξίσωσης. Η πρώτη εξ αυτών είναι η απόδοση «ονομάτων» στους ζητούμενους από την εκφώνηση ή και σε άλλους απαραίτητους για την εξίσωση αριθμούς. Ακολουθεί η δεύτερη διαδικασία, η εκτέλεση δηλαδή πράξεων με τα «ονόματα».

Το δεύτερο στάδιο της απλοποίησης της εξίσωσης, περιλαμβάνει δύο διαδικασίες οι οποίες περιγράφονται στην εισαγωγή των *Αριθμητικών* (Diophantus, 1893-95, I, 14.11-20). Η πρώτη είναι η αποκατάσταση όλων των αφαιρούμενων «ειδών» που εμφανίζονται στην εξίσωση και είναι γνωστή με την αραβική της ονομασία «al-jabr». Η δεύτερη διαδικασία είναι η αναγωγή των όμοιων όρων, ή «al-muqābala» στα αραβικά. Πέρα από τις δύο γνωστές διαδικασίες απλοποίησης, με τον ίδιο σκοπό εφαρμόζονται κάποιες φορές και οι πράξεις του πολλαπλασιασμού/διαίρεσης (Christianidis and Oaks 2013, 144). Παραδείγματα μπορεί να βρεθούν στο τέταρτο αραβικό βιβλίο των *Αριθμητικών*, όπου θα δούμε ότι η διαίρεση εφαρμόζεται έπειτα από τις «al-jabr» και «al-muqābala» στην «εξίσωση», ώστε να προκύψουν μονώνυμα και διώνυμα μικρότερου βαθμού στα δύο μέλη της (Sesiano 1982, 106.764-766).

Στο δεύτερο στάδιο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση των *Αριθμητικών* οι μορφές στις οποίες καταλήγουν οι εξισώσεις μετά την απλοποίησή τους, είναι κατά κανόνα τρεις από τις έξι που δίνονται στον παραπάνω πίνακα, και συγκεκριμένα οι τρείς απλές. Σε αυτές θα πρέπει να προστεθούν και ακόμα δύο μορφές που εμφανίζονται στο τέταρτο αραβικό βιβλίο των *Αριθμητικών:* $ax^3 = b$ και $ax^4 = b$. Έτσι, όλες οι απλοποιημένες εξισώσεις έχουν μόνο μονώνυμα στα δύο μέλη τους. Αυτό βέβαια σχετίζεται με τις «έξυπνες» επιλογές ονομάτων που κάνει ο Διόφαντος, οι οποίες οδηγούν μόνο σε απλές εξισώσεις, εύκολα επιλύσιμες.

Εφ’ όσον οι εξισώσεις στα *Αριθμητικά* απλοποιούνται κατά βάση σε απλές μορφές, ο τρόπος λύσης τους είναι στοιχειώδης, και γίνεται χωρίς τη χρήση κάποιου γνωστού αλγορίθμου. Εξ’ άλλου, φαίνεται πως την περίοδο συγγραφής των *Αριθμητικών*, δεν είχε τυποποιηθεί η διαδικασία επίλυσης συγκεκριμένων μορφών εξισώσεων, ώστε να δίνονται ως γνωστή θεωρία προς εφαρμογή. Από τα σωζόμενα μαθηματικά έργα, πρώτη φορά ο al-Khwārizmī συμπεριλαμβάνει στην εισαγωγή της πραγματείας του τα βήματα που οδηγούν στη λύση κάθε μορφής εξίσωσης. Σαν συνέπεια στην περίπτωση του Διόφαντου έχουμε τον περιορισμό της έκτασης του τρίτου από τα στάδια των λύσεων. Έτσι, το τρίτο στάδιο μπορεί να συγχωνευθεί με το δεύτερο, την απλοποίηση δηλαδή της εξίσωσης. Στο τελευταίο στάδιο, θα μπορούσαμε να εντάξουμε την απάντηση, που πάντοτε δίνεται στις διοφαντικές λύσεις, αλλά και την επαλήθευση η οποία ενίοτε την ακολουθεί (Sesiano 1982, 50). Η απάντηση συνίσταται στην εύρεση των ζητούμενων από το πρόβλημα αριθμών, κάνοντας τις πράξεις που χρειάζεται. Κατά την επαλήθευση πραγματοποιείται ο έλεγχος των αποτελεσμάτων, κάνοντας αντικατάσταση των τιμών που βρέθηκαν, στα δεδομένα του προβλήματος.

Μια εναλλακτική κατανομή των σταδίων της αλγεβρικής λύσης για τα *Αριθμητικά* όπως παρουσιάζεται από τον Γ. Χριστιανίδη (Christianidis, forthcoming (i)), είναι η παρακάτω:

Στάδιο 1. Απόδοση ονομάτων στον ή στους ζητούμενους από την εκφώνηση του προβλήματος αριθμούς, καθώς και σε όποιον άλλον αριθμό χρειάζεται για την κατασκευή της εξίσωσης.

Στάδιο 2. Κατάστρωση μιας εξίσωσης, αποκλειστικά με τη χρήση όρων της τεχνητής γλώσσας.

Στάδιο 3. Απλοποίηση και λύση της εξίσωσης.

Σε κάθε περίπτωση, η δομή των λύσεων στα *Αριθμητικά* δεν αποκλίνει από το γενικό σχήμα λύσεων με Προ-μοντέρνα άλγεβρα που παρουσιάζει ο J. Oaks. Οι δύο τελευταίοι διαχωρισμοί των σταδίων, αντιπροσωπεύουν καλύτερα την έκταση που καταλαμβάνει η κάθε διαδικασία που αποτελεί μέρος της αλγεβρικής λύσης στα *Αριθμητικά*. Ακόμη, είναι ένας τρόπος να γίνει εμφανής η ιδιαίτερη σημασία της κάθε διαδικασίας σε μία διοφαντική λύση (Christianidis and Oaks 2013, 131–33).

2.6.4 Οι τεχνικές ονοματοδοσίας

Στα *Αριθμητικά*, το σημαντικότερο στάδιο των λύσεων των προβλημάτων όπως φαίνεται και από την έκταση που καταλαμβάνει έναντι των υπολοίπων σταδίων, είναι η διαδικασία απόδοσης ονομάτων στους αριθμούς των οποίων η εκφώνηση κάθε προβλήματος ζητά τον προσδιορισμό, καθώς και σε αριθμούς οι οποίοι εκφράζουν σχέσεις μεταξύ των ζητούμενων αριθμών και είναι απαραίτητοι για την κατάστρωση της εξίσωσης. Η διαδικασία της ονοματοδοσίας δεν παρουσιάζει ομοιομορφία σε όλα τα προβλήματα και στηρίζεται εν πολλοίς στην ικανότητα του ίδιου του λύτη να προβαίνει σε σωστές επιλογές, και όχι σε κάποιον γενικό κανόνα που του υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να αντιστοιχιστούν τα ονόματα στους ζητούμενους αριθμούς. Σε κάποιες περιπτώσεις ωστόσο, παρέχεται ευρετική εξήγηση της επιλογής των ονομάτων, ενώ σε άλλες υπάρχουν εμφανείς περιορισμοί που καθοδηγούν τον λύτη στην επιλογή τους. Παρά το γεγονός ότι σε κάθε πρόβλημα φαίνεται αυτά τα ζητήματα να αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερο τρόπο, μελετώντας το σύνολό τους μπορούμε να διακρίνουμε τη χρήση ορισμένων τεχνικών για την απόδοση ονομάτων. Όπως επισημαίνει ο Γ. Χριστιανίδης οι τεχνικές αυτές δεν αποτελούν μεθόδους επίλυσης των αριθμητικών προβλημάτων, αλλά μεθόδους ονοματοδοσίας των ζητούμενων και όσων άλλων αριθμών χρειαζόμαστε για να πραγματοποιηθεί η μετατροπή του προβλήματος σε εξίσωση. Συνεπώς, οι τεχνικές δεν αφορούν το σύνολο της λύσης, αλλά μέρος αυτής. Η λύση θα συνεχισθεί με την επίλυση της εξίσωσης που αντιστοιχεί σε κάθε πρόβλημα, όπως είδαμε και στην περιγραφή των σταδίων των διοφαντικών λύσεων (Christianidis 2018, 49–50).

Η μορφή της εξίσωσης η οποία θα αντιστοιχεί στο εκάστοτε πρόβλημα, άρα και η δυνατότητα επίλυσής της, εξαρτάται άμεσα από τα ονόματα που επιλέγονται να αποδοθούν στους ζητούμενους και τους υπόλοιπους αριθμούς που συμμετέχουν στην κατάστρωση της εξίσωσης. Στην περίπτωση που κάποια επιλογή δεν είναι κατάλληλη, ο λύτης δεν μπορεί να καταλήξει σε λύση του προβλήματος. Αυτός είναι και ο λόγος που κάποιες φορές διακόπτεται η ροή της επίλυσης του προβλήματος, αφού οι συγκεκριμένες επιλογές ονομάτων την οδήγησαν σε αδιέξοδο. Τότε η διαδικασία της ονοματοδοσίας επαναλαμβάνεται με νέο τρόπο. Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε τον λόγο για τον οποίο το στάδιο όπου λαμβάνουν χώρα οι ονοματοδοσίες, είναι το σημαντικότερο της λύσης του προβλήματος.

Η προσπάθεια αναγνώρισης και κατηγοριοποίησης των τεχνικών ονοματοδοσίας που χρησιμοποιούνται στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, παρουσιάζεται για πρώτη φορά σε άρθρο των Bernard και Χριστιανίδη του 2012 (Bernard and Christianidis 2012). Εκεί οι συγγραφείς παρουσιάζουν τις διαφορετικές τεχνικές όπως διέκριναν ότι χρησιμοποιούνται στα τρία πρώτα βιβλία των *Αριθμητικών*, και προτείνουν ονομασίες γι' αυτές.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε και θα περιγράψουμε ορισμένες από τις πιο βασικές τεχνικές αναφέροντας ένα παράδειγμα χρήσης τους, βασιζόμενοι στην αρθρογραφία τη σχετική με το ζήτημα της απόδοσης ονομάτων στις άγνωστες ποσότητες των προβλημάτων, καθώς και στη μελέτη των προβλημάτων του τέταρτου αραβικού βιβλίου των *Αριθμητικών*.

Η τεχνική της απευθείας ή αμεσολάβητης ονοματοδοσίας

Αρχικά θα παρατηρήσουμε ότι οι ονοματοδοσίες γίνονται με κάποια σειρά έτσι ώστε ορισμένες από αυτές που γίνονται σε δεύτερο χρόνο, να εξαρτώνται από άλλες οι οποίες προηγήθηκαν χρονικά. Θα ορίσουμε ως «αμεσολάβητη», εκείνη την επιλογή ονόματος που δεν εξαρτάται από καμία άλλη. Θα λέμε επίσης τότε, ότι το όνομα δίνεται «απευθείας». Πολλές φορές εφαρμόζεται ως πρώτη τεχνική ονοματοδοσίας, και τότε δεν υπάρχει ζήτημα δέσμευσής της από προηγούμενες επιλογές ονομάτων. Η τεχνική χρησιμοποιείται στα περισσότερα προβλήματα των *Αριθμητικών*.

Η τεχνική της εξαρτημένης ή μεσολαβημένης ονοματοδοσίας

Συχνά, από την επιλογή αντιστοίχισης ενός ονόματος σε κάποιον απροσδιόριστο αριθμό, προηγείται η επεξεργασία των δεδομένων του προβλήματος μέσω της εκτέλεσης μιας σειράς πράξεων. Από τις πράξεις αυτές προκύπτει το επιθυμητό όνομα. Ορίζουμε ως «μεσολαβημένη» ή «εξαρτημένη» τη συγκεκριμένη τεχνική. Θα λέμε επίσης, ότι το όνομα που προέκυψε με αυτόν τον τρόπο είναι «παράγωγο».

Η απόδοση ονόματος με επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος

Στο τέταρτο αραβικό βιβλίο των *Αριθμητικών*, συναντάμε την περίπτωση όπου προκειμένου να βρεθούν κατάλληλα ονόματα για κάποιους άγνωστους αριθμούς, χρειάζεται να λυθεί ένα νέο βοηθητικό πρόβλημα (υποπρόβλημα, όπως το έχουμε ονομάσει). Ο λύτης καταλήγει στο υποπρόβλημα, εφαρμόζοντας μία αλγεβρική διαδικασία. Το όνομα που προκύπτει ύστερα από την επίλυση του υποπροβλήματος, εξαρτάται βέβαια από τα δεδομένα του αρχικού προβλήματος ή από άλλα αποτελέσματα που βρέθηκαν στη διάρκεια της επίλυσής του. Αν και αυτό παραπέμπει στην εξαρτημένη ονοματοδοσία, θεωρούμε ότι ο συγκεκριμένος τρόπος εύρεσης ονομάτων για τους άγνωστους αριθμούς αποτελεί μια ξεχωριστή κατηγορία.

Η τεχνική της ονοματοδοσίας μέσω «μοντέλου»

Σε ορισμένες πιο σύνθετες περιπτώσεις, ο λύτης μπορεί, καθοδηγούμενος από τις συνθήκες της εκφώνησης του προβλήματος, να ανατρέξει σε μία αριθμητική σχέση ή σε έναν γνωστό «κανόνα» (με σύγχρονους όρους: «μια ταυτότητα»), που μπορεί να θεωρηθεί ως «μοντέλο» για τη συνθήκη του προβλήματος. Από το «μοντέλο» αυτό, αν διατυπωθεί με αλγεβρικούς, όπως θα λέγαμε σήμερα όρους, προκύπτουν τα ονόματα για τους αγνώστους.

Όσον αφορά την πρώτη κατηγορία, υπάρχουν περιπτώσεις που είναι εύκολο να βρεθούν κάποιοι συγκεκριμένοι αριθμοί που να ικανοποιούν μία δεδομένη συνθήκη του προβλήματος. Τότε σχηματίζεται μία σχέση όπου συμμετέχουν μόνο συγκεκριμένοι αριθμοί. Αν συμπληρωθούν τα κατάλληλα «είδη αριθμών», δηλαδή οι κατάλληλες δυνάμεις του αγνώστου, τότε η αρχική σχέση μπορεί να μετασχηματισθεί σε αλγεβρική, αφού κάθε στοιχείο της θα έχει μετατραπεί σε όρο της «Αριθμητικής Θεωρίας».

Όταν τα ονόματα των αριθμών που χρειάζονται για την κατάστρωση της εξίσωσης, επιλέγονται με βάση κάποια από τις δύο παραπάνω διαδικασίες, θα λέμε ότι χρησιμοποιείται η τεχνική «ονοματοδοσίας μέσω μοντέλου».

Η τεχνική «al-istiqraʾ»

Μια τεχνική που δεν χρησιμοποιείται στο πρώτο βιβλίο, εμφανίζεται όμως στα επόμενα βιβλία των *Αριθμητικών*, και τη συναντάμε συχνά στο τέταρτο αραβικό βιβλίο, είναι αυτή που τους επόμενους αιώνες οι μαθηματικοί του αραβικού κόσμου αποκαλούσαν «al-istiqraʾ» (Christianidis, forthcoming (ii)). Συνήθως χρησιμοποιείται όχι για να εξασφαλιστεί η έκφραση σε τεχνική ορολογία ενός εκ των ζητουμένων αριθμών, αλλά προκειμένου να μεταφραστούν στην τεχνητή γλώσσα άλλοι αριθμοί, απαραίτητοι για την κατασκευή της εξίσωσης. Η τεχνική της istiqraʾ εφαρμόζεται αμέσως προτού καταστρωθεί η εξίσωση, καθώς αποτελεί το τελευταίο βήμα για τη συμπλήρωσή της. Πιο συγκεκριμένα, πριν την εφαρμογή της τεχνικής, υπάρχει στη διάθεσή μας μία κατά το ήμισυ κατασκευασμένη εξίσωση, με προσδιορισμένο μόνο το ένα της μέλος, το οποίο είναι κάποιο «πολυώνυμο». Από τα δεδομένα είναι γνωστό πως αυτό το «πολυώνυμο» πρέπει να ισούται με κάποιο τετράγωνο ή κύβο, ο οποίος θα είναι αριθμός «απροσδιόριστος» έως τη στιγμή που θα του αποδοθεί ένα όνομα. Σκοπός της μεθόδου είναι να συμπληρωθεί η εξίσωση, επιλέγοντας κατάλληλα την πλευρά αυτού του τετραγώνου ή κύβου. Ο αριθμός αυτός θα αποκτήσει αλγεβρική μορφή με τη βοήθεια των «ειδών» της τεχνητής γλώσσας. Η μορφή του μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με την αλγεβρική έκφραση που συνιστά το πρώτο μέλος της υπό κατάστρωση εξίσωσης. Στα ελληνικά βιβλία των *Αριθμητικών*, η χρήση της τεχνικής istiqraʾ για την απόδοση ονομάτων, δηλώνεται με την τυποποιημένη έκφραση «πλάσσω τον τετράγωνο/κύβο από (πλευρά)…». Τις περισσότερες φορές η επιλογή δεν συνοδεύεται από κάποια δικαιολόγηση. Αντίθετα, στο τέταρτο αραβικό βιβλίο συναντάμε συχνά μια εξήγηση για την επιλογή. Το κριτήριο βάσει του οποίου επιλέγεται το όνομα για το τετράγωνο/κύβο, είναι να προκύπτει μια εξίσωση εύκολα επιλύσιμη στους θετικούς ρητούς.

Θα ακολουθήσουν παραδείγματα από τμήματα προβλημάτων των *Αριθμητικών*, προκειμένου να γίνουν κατανοητές οι τεχνικές απόδοσης ονομάτων στους ζητούμενους και σε όσους αριθμούς χρειάζονται για τη δημιουργία μίας επιλύσιμης εξίσωσης. Στην πρώτη στήλη των πινάκων, παρουσιάζεται η μετάφραση του μέρους κάθε προβλήματος όπου γίνεται η απόδοση ονόματος. Στη δεύτερη στήλη, σημειώνεται το όνομα που δίνεται κάθε φορά.

Πρόβλημα ΙΙ,8 (Diophantus, 1893-95, I, 90.8-92.14)

$T_A,\ T_B \mid T_A\ +\ T_B \longrightarrow 16$

Ας τεθεί ο πρώτος <ζητούμενος τετράγωνος αριθμός> 1 Δύναμη.	$T_A \coloneqq 1x^2$
Τότε ο άλλος <ζητούμενος τετράγωνος αριθμός> θα είναι 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμη. Επομένως, 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμη, θα πρέπει να ισούνται με έναν τετράγωνο αριθμό.	$T_B \coloneqq 16 - 1x^2$
Σχηματίζω τον τετράγωνο από οποιοδήποτε πλήθος Αριθμών με έλλειψη τόσες μονάδες όσες υπάρχουν στην πλευρά των 16 μονάδων. Έστω, από 2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδες.	$\sqrt{T} \coloneqq 2x - 4$

Το πρώτο όνομα δίνεται απευθείας, το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο και το τρίτο δίνεται με την τεχνική al-istiqra᾽.

Πρόβλημα ΙΙ,20 (Diophantus, 1893-95, I, 114.10–22)

$A, B \mid T_A + B \longrightarrow T_1, A + T_B \longrightarrow T_2$

Ας τεθεί ο πρώτος <ζητούμενος αριθμός> 1 Αριθμός, και ο άλλος <ζητούμενος αριθμός> 1 μονάδα <και> 2 Αριθμοί, έτσι ώστε το τετράγωνο του πρώτου, εάν προστεθεί στον δεύτερο, να δίνει ένα τετράγωνο.	$A \coloneqq 1x$ $B \coloneqq 1 + 2x$
Απομένει, το τετράγωνο του δεύτερου εάν προστεθεί στον πρώτο, να δίνει τετράγωνο. (…) Σχηματίζω τον τετράγωνο από 2 Αριθμούς με έλλειψη 2 μονάδες.	$\sqrt{T_2} \coloneqq 2x - 2$

Το πρώτο και το δεύτερο όνομα δίνονται μέσω μοντέλου (από ανάπτυγμα γνωστής ταυτότητας), και το τρίτο δίνεται με την τεχνική al-istiqra᾽.

Πρόβλημα ΙΙ,25 (Diophantus, 1893-95, I, 120.11–23)

$A, B \mid (A + B)^2 - A \longrightarrow T_1\ ,\ (A + B)^2 - B \longrightarrow T_2$

Πρώτα παίρνω κάποιον τετράγωνο, από τον οποίον αν αφαιρεθούν κάποιοι <κατάλληλα επιλεγμένοι> αριθμοί, <να> απομένει τετράγωνος <αριθμός>. Έστω ότι ο αριθμός αυτός είναι 16. Από αυτόν, όταν αφαιρεθούν 12 μονάδες, προκύπτει τετράγωνος, και πάλι όταν < αφαιρεθούν> 7 μονάδες, προκύπτει τετράγωνος.	$16 - 12 \longrightarrow 4,$ $16 - 7 \longrightarrow 9$
Τους θέτω … «εν Δυνάμει», ώστε ο ένας <να> είναι 12 Δυνάμεις, ο άλλος <να είναι> 7 Δυνάμεις, και <το τετράγωνο του αθροίσματός τους να είναι>16 Δυνάμεις, και απομένει ότι, όταν από το τετράγωνο του αθροίσματος, αφαιρεθεί οποιοσδήποτε από τους δύο <αριθμούς>, <το αποτέλεσμα> είναι ένας τετράγωνος.	$A \coloneqq 12x^2$, $B \coloneqq 7x^2$, $(A + B)^2 \coloneqq 16x^2$

Τα ονόματα δόθηκαν μέσω μοντέλου.

Πρόβλημα I,16 (Diophantus, 1893-95, I, 39.1–17)

$A, B, \Gamma \mid A + B \longrightarrow 20, B + \Gamma \longrightarrow 30, \Gamma + A \longrightarrow 40$

Ας τεθούν οι τρείς <ζητούμενοι αριθμοί μαζί> 1 Αριθμός.	$A + B + \Gamma \coloneqq 1x$
Και αφού ο πρώτος και ο δεύτερος κάνουν 20 μονάδες, εάν άρα αφαιρέσω 20 μονάδες από 1 Αριθμό, θα έχω ότι ο τρίτος είναι 1 Αριθμός με έλλειψη 20 μονάδες.	$\Gamma \coloneqq 1x - 20$
Με τον ίδιο τρόπο, ο πρώτος θα είναι 1 Αριθμός με έλλειψη 30 μονάδες	$A \coloneqq 1x - 30$
και ο δεύτερος 1 Αριθμός με έλλειψη 40 μονάδες.	$B \coloneqq 1x - 40$

Το πρώτο όνομα δίνεται απευθείας, και τα τρία επόμενα ονόματα είναι παράγωγα.

2.6.5 Η Απλοποίηση της «εξίσωσης»

Την κατάστρωση της εξίσωσης που αντιστοιχεί σε κάποιο αριθμητικό πρόβλημα, ακολουθεί η απλοποίησή της. Η εξίσωση όπως αρχικά κατασκευάζεται, είναι πιθανό να μοιάζει περίπλοκη και μη αντιμετωπίσιμη. Με την κατάλληλη επεξεργασία όμως, μπορεί να μετατραπεί σε μία εξίσωση φανερά επιλύσιμη. Πρέπει να επισημάνουμε ότι στα *Αριθμητικά*, η «τελική» εξίσωση, αυτή δηλαδή που έχει υποστεί επεξεργασία, δεν είναι κατ’ ανάγκη ισοδύναμη με την αρχική.

Η εξίσωση απλοποιείται με τη διαδοχική εφαρμογή δύο διαδικασιών από τον λύτη, αυτήν που θα λέγαμε αποκατάσταση, και τη διαδικασία που σε σύγχρονη ορολογία αποκαλούμε αναγωγή όμοιων όρων. Οι διαδικασίες αυτές περιγράφονται στην εισαγωγή των *Αριθμητικών* (Diophantus, 1893-95, I, 14.11-20), έγιναν όμως γνωστές με τις αραβικές τους ονομασίες al-jabr και al-muqābala, όπως δηλαδή παρουσιάζονται για πρώτη φορά στην αλγεβρική πραγματεία του al-Kwhārizmī (Christianidis and Oaks 2013, 143; Christianidis 2018, 50–51; Oaks 2007, 17–18).

Η al-jabr είναι ένα βήμα που εκτελεί ο λύτης, απ' τη στιγμή που στην εξίσωση υπάρχουν αφαιρούμενα «είδη». Σύμφωνα με τον ορισμό και τους κανόνες της αφαίρεσης μεταξύ των «ειδών», όσα «είδη» παρουσιάζουν έλλειψη πρέπει να αποκατασταθούν στην ακεραιότητά τους, προσθέτοντας και στα δύο μέλη τις ελλείψεις. Στο τέλος η εξίσωση θα αποτελείται αποκλειστικά από προστιθέμενα «είδη».

Έπειτα, με την al-muqābala, τα όμοια «είδη» συγκεντρώνονται, αφαιρώντας τα όμοια από τα όμοια όπως αναφέρεται στο κείμενο.

Παρατηρούμε ότι κατά την ονοματοδοσία των αριθμών που χρησιμοποιούνται στην εξίσωση, λαμβάνεται υπ' όψιν η επικείμενη απλοποίηση της εξίσωσης. Ακολουθεί ένα παράδειγμα από το δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών*, το οποίο παρουσιάζεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

Πρόβλημα II.20: Η τρίτη απόδοση ονόματος με την τεχνική al-istriqra', γίνεται με σκοπό να απλοποιηθεί ο δευτεροβάθμιος όρος, και η εξίσωση να λύνεται ευκολότερα. Έτσι,

- Με δεδομένο το πολυώνυμο $4x^2 + 1 + 5x$, ο λύτης ονοματίζει το τετράγωνο με το οποίο αυτό πρέπει να ισούται, $4x^2 + 4 - 8x$.
- Τότε, μετά την εφαρμογή της al-muqābala κατά την απλοποίηση της εξίσωσης, ο όρος $4x^2$ θα διαγραφεί. Με αυτόν τον τρόπο, μένει να λυθεί μία εξίσωση πρώτου βαθμού.

Όπως ήδη αναφέραμε στην ενότητα 2.6.3, περαιτέρω απλοποίηση της εξίσωσης επιτυγχάνεται με την εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού/διαίρεσης μεταξύ «ειδών» αριθμών.

2.7 Αναλυτική παρουσίαση της επίλυσης ενός προβλήματος από τα ελληνικά βιβλία των *Αριθμητικών*

Σε αυτήν την παράγραφο, θα παρουσιάσουμε ένα πρόβλημα των *Αριθμητικών* με τη βοήθεια της κατηγορίας της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, ώστε να διακρίνονται τα στάδια της λύσης του και οι ιδιαίτερες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή του σε εξίσωση. Εφ' όσον κύριος σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιαστούν με ανάλογο τρόπο τα προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου των *Αριθμητικών*, η επιλογή του παραδείγματος έγινε από τα ελληνικά βιβλία. Με αυτόν τον τρόπο, θα μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα προβλήματα από τις δύο ομάδες βιβλίων των *Αριθμητικών*, ώστε να διαπιστώσουμε τις ομοιότητες αλλά και να εντοπίσουμε πιθανές διαφορές. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα προβλήματα των αραβικών βιβλίων των *Αριθμητικών*, εκτός από την ιδιότητα του να αποτελούν αντίγραφα κάποιου αρχικού χειρογράφου, έχουν υποστεί συγχρόνως τη διαδικασία της μετάφρασης σε μία άλλη γλώσσα, κατά την οποία ενσωματώνουν ορισμένα χαρακτηριστικά της μαθηματικής παράδοσης στην οποία μεταφράζονται.

Το πρόβλημα παρουσιάζεται με τρόπο ώστε να γίνονται εμφανή τα διαδοχικά στάδια της επίλυσής του. Στη συνέχεια δίνεται ζεύγος πινάκων που ακολουθεί την πορεία επίλυσης του προβλήματος, έως ότου βρεθούν οι αριθμοί που αποτελούν τα ζητούμενά του. Αυτό σημαίνει πως περιλαμβάνει τον αριθμό και τις τεχνικές απόδοσης ονομάτων, τις πράξεις που εκτελούνται, την εξίσωση με τη λύση της, και τέλος την απάντηση του προβλήματος.

Πρόβλημα II,20 (Diophantus, 1893-95, I, 114.11–22)

Εκφώνηση:
Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε, όταν στον τετράγωνο που προκύπτει από τον καθέναν τους, προστεθεί ο άλλος <αριθμός>, <το αποτέλεσμα> είναι τετράγωνος <αριθμός>.

Κατάστρωση της Εξίσωσης:
Ας τεθεί ο πρώτος <ζητούμενος αριθμός> 1 Αριθμός, και ο δεύτερος 1 μονάδα <και> 2 Αριθμοί, έτσι ώστε όταν στο τετράγωνο του πρώτου προστεθεί ο δεύτερος, να προκύπτει τετράγωνος <αριθμός>.
Απομένει έτσι, όταν στο τετράγωνο του δεύτερου προστεθεί ο πρώτος, να προκύπτει τετράγωνος <αριθμός>.
Αλλά στο τετράγωνο του δεύτερου <αριθμού>, όταν προστεθεί ο πρώτος <αριθμός>, το αποτέλεσμα είναι 4 Δυνάμεις <και> 5 Αριθμοί <και> 1 μονάδα.
Αυτά <πρέπει να> είναι ίσα με έναν τετράγωνο <αριθμό>.

Σχηματίζω τον τετράγωνο από 2 Αριθμούς με έλλειψη 2 μονάδες. Ο ίδιος <ο τετράγωνος>, άρα, θα είναι 4 Δυνάμεις <και> 4 μονάδες με έλλειψη 8 Αριθμούς.

Επίλυση της εξίσωσης:
Και ο Αριθμός γίνεται $\frac{3}{13}$ <μονάδες>.

Απάντηση στο πρόβλημα:
Θα είναι τότε ο πρώτος <ζητούμενος αριθμός> $\frac{3}{13}$ <μονάδες>, και ο δεύτερος $\frac{19}{13}$ <μονάδες>,

Επαλήθευση:
και <οι αριθμοί αυτοί> επαληθεύουν το πρόβλημα.

Η συμβολική διατύπωση του προβλήματος είναι: $A, B \mid T_A + B \longrightarrow T_1,\ T_B + A \longrightarrow T_2$

Η επίλυση του προβλήματος ξεκινά με την απόδοση ονομάτων στους δύο ζητούμενους αριθμούς ($A \coloneqq 1x$ $\mathit{και}$ $B \coloneqq 1 + 2x$). Εδώ χρησιμοποιείται η τεχνική της ονοματοδοσίας μέσω μοντέλου, καθώς τα δύο ονόματα που επιλέχθηκαν με βάση τον κανόνα που εμείς γράφουμε $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2$, ικανοποιούν την πρώτη από τις συνθήκες που δόθηκαν στην εκφώνηση. Αυτό που απομένει τώρα, είναι να ισχύει η δεύτερη συνθήκη. Μετά την εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων με τα ονόματα, προκύπτει το πολυώνυμο $4x^2 + 5x + 1$. Ο λύτης γνωρίζει από την εκφώνηση πως αυτό πρέπει να ισούται με έναν τετράγωνο αριθμό, επομένως, το πολυώνυμο αποτελεί το ένα από τα δύο μέλη μιας εξίσωσης. Επιλέγοντας κατάλληλο όνομα για την πλευρά του τετραγώνου αριθμού με την istiqra' τεχνική ($\sqrt{T_2} \coloneqq 2x - 2$), η εξίσωση συμπληρώνεται. Η εξίσωση δεν διατυπώνεται ούτε γίνεται αναλυτικά η απλοποίησή της, αλλά παρατίθεται μόνο η λύση της ($x = \frac{3}{13}$). Ακολουθεί η απάντηση στο πρόβλημα ($A = \frac{3}{13}$ $\mathit{και}$ $B = \frac{19}{13}$), χωρίς να γίνονται οι αντικαταστάσεις της τιμής του Αριθμού στα ονόματα των ζητούμενων αριθμών. Επαλήθευση δεν γίνεται, παρά μόνο η επίλυση του προβλήματος τελειώνει με τη διαπίστωση πως οι δύο αριθμοί που βρέθηκαν ικανοποιούν τις συνθήκες που τίθενται στην εκφώνηση.

Ονοματοδοσία	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
$B \coloneqq 1 + 2x$		
	$<$ Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2 >$	

	<Προσθέτουμε $1x^2$ και $1 + 2x \longrightarrow 1x^2 + 1 + 2x$ >	
	<Το τετράγωνο του $1 + 2x$ είναι $4x^2 + 4x + 1$>	
	Προσθέτουμε το τετράγωνο του $1 + 2x$ και το $1x \longrightarrow 4x^2 + 5x + 1$	
		$4x^2 + 5x + 1$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$\sqrt{T_2} \coloneqq 2x - 2$		
	Το τετράγωνο του $2x - 2$ είναι $4x^2 + 4 - 8x$	
		<$4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 + 4 - 8x$ >

Αρχική εξίσωση	Απλοποιημένη εξίσωση	Λύση	Απάντηση
<$4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 + 4 - 8x$ >		$x = \frac{3}{13}$	$A = \frac{3}{13}, B = \frac{19}{13}$

Παρατηρούμε ότι κατά την επίλυση του προβλήματος ΙΙ,20 παραλείπονται κάποια από τα στάδια, ή καλύτερα δεν παρουσιάζονται γραπτώς. Αυτό συμβαίνει γιατί η εκτέλεσή τους θεωρείται εύκολη υπόθεση για τον λύτη. Το μέρος της επίλυσης που παραλείπεται συνηθέστερα, είναι η απλοποίηση της εξίσωσης και η επαλήθευση για τις τιμές των ζητούμενων αριθμών που βρέθηκαν. Ακόμη, οι πράξεις δεν εκτελούνται αναλυτικά και ορισμένες φορές δεν διατυπώνεται η εξίσωση που πρέπει να λυθεί, όπως συμβαίνει στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Από τα προηγούμενα, γίνεται φανερό ότι το σημαντικότερο από τα στάδια της λύσης του προβλήματος είναι η απόδοση ονομάτων στους αριθμούς, ώστε να επιτευχθεί η μετατροπή του προβλήματος σε εξίσωση. Για τις υπόλοιπες διαδικασίες, δεν θεωρείται σκόπιμο να δοθεί κάποια υπόδειξη, εφ’ όσον έχει περιγραφεί ο τρόπος που διεκπεραιώνονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το Βιβλίο IV (αραβικό) των *Αριθμητικών*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το κεντρικό θέμα της παρούσας εργασίας, δηλαδή τα αριθμητικά προβλήματα που περιλαμβάνει το πρώτο από τα σωζόμενα βιβλία των *Αριθμητικών* του Διόφαντου, στην αραβική γλώσσα. Η ανάγνωση των προβλημάτων και των επιλύσεών τους θα γίνει με βάση την Προ-μοντέρνα άλγεβρα, μία λεπτομερής περιγραφή της οποίας έγινε στο κεφάλαιο που προηγήθηκε.

Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά δύο προβλήματα με τις λύσεις τους, που θα χρησιμεύσουν ως υποδείγματα για την κατανόηση των τεχνικών που χρησιμοποιούνται σε όλα τα υπόλοιπα προβλήματα του βιβλίου.

Κατόπιν θα παραθέσουμε πίνακες για όλα τα προβλήματα, όπου θα φαίνονται τα στάδια της επίλυσής τους, και κυρίως οι τεχνικές απόδοσης ονομάτων στους αριθμούς ώστε να μετατραπεί το πρόβλημα σε εξίσωση.

Τέλος, θα διατυπώσουμε τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από αυτήν τη μελέτη και αφορούν στις ιδιαιτερότητες που παρουσιάζουν τα προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου των *Αριθμητικών*.

Προτού όμως προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αριθμητικών προβλημάτων, ας εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο ξεκινά το τέταρτο αραβικό βιβλίο.

3.1 Η εισαγωγή του τέταρτου αραβικού βιβλίου

Το τέταρτο αραβικό βιβλίο ξεκινά με ένα εισαγωγικό μέρος, το οποίο παρ’ όλο που δεν είναι το ίδιο εκτεταμένο όπως η εισαγωγή των ελληνικών χειρογράφων, παρουσιάζει ομοιότητες με εκείνη.

Στην αρχή της εισαγωγής γίνεται αναφορά στα προβλήματα που περιλαμβάνουν τα προηγούμενα βιβλία των *Αριθμητικών*. Ο συγγραφέας εξηγεί, πως όλα τα προηγούμενα προβλήματα, μετατράπηκαν σε ισότητες ανάμεσα σε δύο «είδη» αριθμών, τους Αριθμούς και τις Δυνάμεις, αλλά και τα «είδη» που προκύπτουν ως συνδυασμοί αυτών.

Επισημαίνει ότι σκόπιμα ξεκίνησε με τα απλούστερα «είδη», ώστε να γίνουν εύκολα αντιληπτές οι έννοιες που χρησιμοποιεί, στον αναγνώστη που δεν είναι εξοικειωμένος με τον συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης προβλημάτων (Sesiano 1982, 87.10).

Ύστερα όμως, προλογίζοντας το περιεχόμενο του παρόντος βιβλίου, πληροφορεί τον αναγνώστη ότι θα πραγματευτεί τα «είδη» αριθμών που αποκαλεί «στερεά» (δηλαδή τους Κύβους), καθώς και τους συνδυασμούς τους με τα δύο πρώτα «είδη» (Αριθμούς και Δυνάμεις).

Όπως και στην ελληνική εισαγωγή, τονίζει πως θα καθοδηγήσει τον μελετητή σταδιακά, ώστε να κατακτήσει την τέχνη της επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Μάλιστα, διευκρινίζει ότι τα προβλήματα θα είναι πολλά σε αριθμό και κάθε τύπου, ώστε με το πέρας της μελέτης τους, ο αναγνώστης να έχει αποκτήσει την εμπειρία να αντιμετωπίζει ακόμη και προβλήματα που δεν έχει συναντήσει στο βιβλίο (Sesiano 1982, 87.15).

Στη συνέχεια παρουσιάζει αναλυτικά τους κανόνες δημιουργίας των «ειδών» αριθμών που προκύπτουν από τον μεταξύ τους πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, και αντιστοιχούν στην τρίτη έως και την έκτη δύναμη του αγνώστου. Με όμοιο τρόπο αναφέρεται ο σχηματισμός των διαφορετικών «ειδών» και στην ελληνική εισαγωγή (Sesiano 1982, 88.20-30).

Στο τελευταίο εισαγωγικό τμήμα του βιβλίου, γίνεται λόγος για τον τρόπο απλοποίησης της εξίσωσης στην οποία μετατρέπεται το κάθε πρόβλημα. Σε αυτό υποδεικνύεται το στάδιο στο οποίο ο λύτης θα πρέπει να διαιρέσει και τα δύο μέλη της εξίσωσης, με το «είδος» εκείνο που αντιστοιχεί στη μικρότερη δύναμη του αγνώστου. Τελικά η εξίσωση, ύστερα από τη διαδοχική εφαρμογή των al-jabr, al-muqābala και τη διαίρεση, θα καταλήξει στην απλή μορφή «ένα "είδος" ίσο με έναν αριθμό» (Sesiano 1982, 88.35-40).

Το τέταρτο αραβικό βιβλίο περιλαμβάνει 44 προβλήματα, όπως αναφέρεται και στο τέλος του βιβλίου (Sesiano 1982, 125.1615).

3.2 Προβλήματα από το Βιβλίο IV

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά δύο από τα προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου. Αρχικά θα δίνεται η απόδοση κάθε προβλήματος στα ελληνικά, έτσι ώστε να φαίνονται τα στάδια της επίλυσης. Έπειτα, θα ακολουθεί το σχόλιο πάνω στις τεχνικές ονοματοδοσίας που χρησιμοποιούνται και την εξίσωση που προκύπτει ύστερα από την επεξεργασία των ονομάτων με πράξεις. Τέλος, θα δοθεί ένας πίνακας όπου το πρόβλημα θα διατυπώνεται με συμβολικό τρόπο, και όπου, επίσης με συμβολικό τρόπο, θα παρουσιάζονται όλες οι διαδικασίες που πραγματοποιούνται έως ότου επιτευχθεί η λύση του.

Πρόβλημα 25 (Sesiano 1982, 104-105; Rashed 1984, 40-42)

Εκφώνηση:
Θέλουμε να βρούμε δύο αριθμούς, τον έναν τετράγωνο και τον άλλον κυβικό, τέτοιους ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους, να είναι ένα τετράγωνο.

Κατάστρωση της εξίσωσης:
Θέτουμε την πλευρά του κύβου 1 Αριθμό, έτσι ώστε ο <ίδιος ο> κύβος <να> είναι 1 Κύβος, και θέτουμε την πλευρά του τετράγωνου <αριθμού> οποιοδήποτε πλήθος Αριθμών, ας είναι 2 Αριθμοί, ο οποίος <τετράγωνος> θα είναι τότε 4 Δυνάμεις.
Το τετράγωνο του κύβου είναι 1 Κυβόκυβος, και το τετράγωνο του τετραγώνου <είναι> 16 Δυναμοδυνάμεις.
Το άθροισμά τους είναι 1 Κυβόκυβος <και> 16 Δυναμοδυνάμεις, και αυτό <πρέπει να> είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό.

Είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί ο αριθμός που είναι η πλευρά αυτού του τετραγώνου.
Λέμε τότε: εάν θέσουμε την πλευρά αυτή ένα πλήθος Δυνάμεων, το τετράγωνο που είναι ίσο με 1 Κυβόκυβο <και>16 Δυναμοδυνάμεις <θα> είναι ένα πλήθος Δυναμοδυνάμεων.
Έπειτα από την αφαίρεση των 16 Δυναμοδυνάμεων που είναι κοινές, και από τα δύο μέλη, απομένει ένα πλήθος Δυναμοδυνάμεων ίσο με 1 Κυβόκυβο,
Και η διαίρεση και των δύο με 1 Δυναμοδύναμη, που είναι η μικρότερη σε βαθμό από <τα «είδη» που υπάρχουν στα> δύο μέλη, δίνει 1 Δύναμη ίση με έναν αριθμό.
Αυτός ο αριθμός, αφού είναι ίσος με 1 Δύναμη, πρέπει να είναι ένα τετράγωνο.
Αλλά το συγκεκριμένο τετράγωνο είναι η διαφορά των Δυναμοδυνάμεων από έναν τετράγωνο αριθμό μεγαλύτερο του 16.
Έτσι πρέπει, το πλήθος των Δυναμοδυνάμεων να είναι ένας τετράγωνος αριθμός, που να διαφέρει από το 16 κατά έναν τετράγωνο αριθμό.
Συνεπώς οδηγούμαστε στο να αναζητήσουμε δύο τετράγωνους αριθμούς που έχουν διαφορά 16.
Βρίσκουμε τότε το μεγαλύτερο τετράγωνο 25, και το μικρότερο τετράγωνο 9.
Έτσι, θέτουμε το τετράγωνο που είναι ίσο με 1 Κυβόκυβο <και> 16 Δυναμοδυνάμεις, 25 Δυναμοδυνάμεις, η πλευρά του οποίου είναι 5 Δυνάμεις.

Απλοποίηση:
Αφαιρώντας τις 16 Δυναμοδυνάμεις, που είναι κοινές, και από τα δύο μέλη, προκύπτει 1

Κυβόκυβος ίσος με 9 Δυναμοδυνάμεις.
Έτσι, 1 Δύναμη ισούται με 9 <μονάδες>.

Λύση της εξίσωσης:
Καθώς η 1 Δύναμη είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1 Αριθμό, και το 9 είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 3, ο Αριθμός είναι 3 <μονάδες>.

Απάντηση:
Αφού υποθέσαμε την πλευρά του κύβου να είναι 1 Αριθμός, η πλευρά είναι 3 και ο κύβος <είναι> 27.
Και αφού υποθέσαμε την πλευρά του τετραγώνου να είναι 2 Αριθμοί, η πλευρά είναι 6 και το τετράγωνο <είναι > 36.

Επαλήθευση:
Το τετράγωνο του 27 είναι 729, και το τετράγωνο του 36 είναι 1296.
Το άθροισμά τους είναι 2025, το οποίο είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 45.

Συμπέρασμα:
Άρα, βρήκαμε δύο αριθμούς, τον έναν κυβικό και τον άλλον τετράγωνο, τέτοιους ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους <να> είναι ένα τετράγωνο, και αυτοί είναι οι 27 και 36.
Αυτό είναι που θέλαμε να βρούμε.

Το πρόβλημα διατυπώνεται συμβολικά ως εξής: $T_A, K_B \mid T_{T_A} + T_{K_B} \longrightarrow T$

Η λύση του ξεκινάει με την απευθείας απόδοση ονομάτων στις πλευρές των ζητούμενων αριθμών ($B \coloneqq 1x$ και $A \coloneqq 2x$). Ακολουθεί ο προσδιορισμός των ίδιων των αριθμών και στη συνέχεια, μετά από τις πράξεις που υποδεικνύονται από την εκφώνηση, κατασκευάζεται το διώνυμο $1x^6 + 16x^4$. Το διώνυμο αυτό αποτελεί το ένα μέλος μιας εξίσωσης, καθώς είναι γνωστό από τα δεδομένα πως πρέπει να ισούται με έναν τετράγωνο αριθμό T. Έτσι, ο λύτης δίνει ένα κατάλληλο όνομα στον τετράγωνο αριθμό, χρησιμοποιώντας την τεχνική al-istiqraʾ. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, το όνομα δεν μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα καθώς υπάγεται σε έναν περιορισμό. Ο περιορισμός αυτός σχετίζεται με την τελική μορφή της υπό διαμόρφωση εξίσωσης η οποία αναμένεται να είναι δευτέρου βαθμού ή $\alpha x^2 = b$. Αυτό, ο Διόφαντος το αντιμετωπίζει, αναπτύσσοντας μία αλγεβρική διαδικασία που στοχεύει στον προσδιορισμό του ονόματος του T. Στο πλαίσιο αυτής, καταστρώνει μια εξίσωση η οποία με σύγχρονους όρους γίνεται αντιληπτή ως παραμετρική. Έτσι, στη θέση του ονόματος του τετραγώνου T, θεωρείται ένα πλήθος Δυναμοδυνάμεων, έστω μx^4, όπου το μ είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Τότε, η εξίσωση που θα οδηγήσει στον προσδιορισμό του μ, είναι η $1x^6 + 16x^4 = \mu x^4$. Προχωρώντας στην απλοποίησή της ($1x^2 = \mu - 16$), ο λύτης καταλήγει πως ο αριθμός μ που αναζητείται, πρέπει να είναι το μεγαλύτερο από δύο τετράγωνα που έχουν διαφορά 16. Αν και δεν υπάρχει σχετική αναφορά στο κείμενο, ένα κατάλληλο μ μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια του ήδη λυμένου προβλήματος ΙΙ.10 από το δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών*. Στηριζόμενοι στο ΙΙ,10, το υποπρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_\Gamma, T_\Delta \mid T_\Gamma - T_\Delta \longrightarrow 16$

Τότε οι πίνακες για τη λύση του θα είναι οι παρακάτω:

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$\Delta \coloneqq 1x$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
$\Gamma \coloneqq 1x + 2$		
	Το τετράγωνο του $1x + 2$ είναι $1x^2 + 4 + 4x$	
	Αφαιρώ $1x^2$ από $1x^2 + 4 + 4x \longrightarrow 4x + 4$	
		$16 = 4x + 4$

Αρχική εξίσωση	Απλοποίηση	Λύση	Απάντηση
$16 = 4x + 4$			
		$x = 3$	
			$T_\Delta = 9\,, T_\Gamma = 25$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση βέβαια, η λύση που δίνεται στο υποπρόβλημα, δηλαδή οι δύο τετράγωνοι αριθμοί 25 και 9, είναι προφανής. Τότε ο ζητούμενος μ είναι ο τετράγωνος αριθμός 25. Με την παραπάνω διαδικασία βρέθηκε το πλήθος των Δυναμοδυνάμεων που αντιστοιχεί στον τετράγωνο αριθμό T. Έτσι, στον αριθμό αποδίδεται το όνομα $25x^4$. Η επίλυση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται με την κατάστρωση της εξίσωσης $1x^6 + 16x^4 = 25x^4$. Για την απλοποίησή της εφαρμόζεται al-muqābala και διαίρεση με $1x^4$. Έπειτα λύνεται η εξίσωση εξηγώντας πώς από δύο τετράγωνα που είναι ίσα, μπορεί κάποιος να περάσει στην ισότητα των αντίστοιχων πλευρών. Στη συνέχεια αναφέρονται οι πράξεις που οδηγούν στην εύρεση των ζητούμενων αριθμών A και B. Τέλος, γίνεται η επαλήθευση και διατυπώνεται το συμπέρασμα του προβλήματος.

Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra', που εδώ προϋποθέτει την επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος. Έτσι, η τρίτη ονοματοδοσία, προκύπτει από τον συνδυασμό δύο τεχνικών.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι με τη λύση του υποπροβλήματος βρέθηκε και η τιμή του Αριθμού, ή αλλιώς του αγνώστου x. Παρ' όλα αυτά, η επίλυση του κύριου προβλήματος συνεχίστηκε κανονικά, αφού στόχος ήταν να συμπληρωθεί και να λυθεί η εξίσωση $1x^6 + 16x^4 = 25x^4$.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$B \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
$A \coloneqq 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$	
	Το τετράγωνο του $1x^3$ είναι $1x^6$	
	Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$	
	Προσθέτω $1x^6$ και $16x^4 \longrightarrow 1x^6 + 16x^4$	
		$1x^6 + 16x^4$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$T \coloneqq 25x^4$		
		$1x^6 + 16x^4 = 25x^4$

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^6 + 16x^4 = 25x^4$			
	Αφαιρώ $16x^4$ και από τα δύο μέλη:		
	$1x^6 = 9x^4$		
	Διαιρώ με $1x^4$:		
	$1x^2 = 9$		
		$x = 3$	
			$K_B = 27$, $T_A = 36$

Πρόβλημα 34 (Sesiano1982, 110-113; Rashed 1984, 58-62)

Εκφώνηση:
Θέλουμε να βρούμε δύο αριθμούς, τον έναν κυβικό και τον άλλον τετράγωνο, έτσι ώστε όταν στον κύβο προστεθεί ο τετράγωνος, να προκύπτει τετράγωνος αριθμός
και όταν από τον κύβο αφαιρεθεί ο τετράγωνος, να προκύπτει επίσης τετράγωνος αριθμός.

Κατάστρωση της εξίσωσης:
Θέτουμε τον κύβο 1 Κύβο και τον τετράγωνο 4 Δυνάμεις.
Τότε 1 Κύβος <και> 4 Δυνάμεις είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό,
και 1 Κύβος με έλλειψη 4 Δυνάμεις ισούται ομοίως με έναν τετράγωνο αριθμό.

Το αντιμετωπίζουμε πρώτα με τη μέθοδο της διπλής ισότητας:

Κατάστρωση της 1ης εξίσωσης:
Παίρνουμε τη διαφορά των εν λόγω τετραγώνων, δηλαδή 8 Δυνάμεις, και ψάχνουμε δύο

αριθμούς (δηλ. πλήθη Αριθμών) έτσι ώστε το γινόμενό τους να είναι 8 Δυνάμεις.
Έστω ότι οι αριθμοί αυτοί είναι 2 Αριθμοί και 4 Αριθμοί.
Η διαφορά τους είναι 2 Αριθμοί, το μισό των οποίων είναι 1 Αριθμός.
Το τετράγωνο του 1 Αριθμού είναι 1 Δύναμη, και αυτή ισούται με 1 Κύβο με έλλειψη 4 Δυνάμεις.

Απλοποίηση της 1ης εξίσωσης:
Προσθέτοντας τότε τις 4 Δυνάμεις και στα δύο μέλη, προκύπτει 1 Κύβος ίσος με 5 Δυνάμεις.

Κατάστρωση της 2ης εξίσωσης:
Και πάλι, εάν προσθέσουμε τους 2 Αριθμούς στους 4 Αριθμούς, παίρνουμε 6 Αριθμούς, το μισό των οποίων είναι 3 Αριθμοί,
το τετράγωνο των οποίων είναι 9 Δυνάμεις,
και αυτές ισούνται με 1 Κύβο <και> 4 Δυνάμεις.

Απλοποίηση της 2ης εξίσωσης:
Αφαιρώντας τότε τις 4 Δυνάμεις, που είναι κοινές, και από τα δύο μέλη, παίρνουμε 1 Κύβο ίσο με 5 Δυνάμεις.

Κατάστρωση της εξίσωσης :
Έτσι, η εξίσωση που προέκυψε είναι 1 Κύβος ίσος με 5 Δυνάμεις, αφού οι δύο εξισώσεις κατέληξαν στην ίδια <εξίσωση>.

Απλοποίηση της εξίσωσης:
Ας τα διαιρέσουμε όλα αυτά με 1 Δύναμη,

Λύση:
Προκύπτει τότε ο Αριθμός ίσος με 5 <μονάδες>.

Απάντηση:
Έτσι, η πλευρά του κύβου είναι 5, και ο κύβος 125,
και η πλευρά του τετραγώνου είναι 10, και ο τετράγωνος 100.

Επαλήθευση:
Από την πρόσθεση του 100 στον κυβικό αριθμό προκύπτει 225, ο οποίος είναι ένας τετράγωνος αριθμός με πλευρά 15.
Και από την αφαίρεση του ίδιου <αριθμού> από τον κυβικό αριθμό προκύπτει 25, που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 5.

(Τώρα) θα πραγματευθούμε επίσης <το πρόβλημα> με τρόπο ώστε να αποφύγουμε τη διπλή ισότητα:

Κατάστρωση της εξίσωσης :
Λέμε: 1 Κύβος <και> 4 Δυνάμεις <πρέπει να> είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό.

Εάν θέσουμε την πλευρά του ένα πλήθος Αριθμών, το τετράγωνο <θα> είναι ένα πλήθος Δυνάμεων, ίσο με 1 Κύβο <και> 4 Δυνάμεις.
Από την αφαίρεση των 4 Δυνάμεων και από τα δύο μέλη, αφού είναι κοινές, προκύπτει 1 Κύβος ίσος με ένα πλήθος Δυνάμεων,
και από τη διαίρεση και των δύο με 1 Δύναμη, προκύπτει 1 Αριθμός από τον 1 Κύβο, και ένας αριθμός από τις Δυνάμεις.
Συνεπώς, ο αριθμός που έχει υποτεθεί να είναι ο Αριθμός στο πρόβλημα, ισούται με το πλήθος των Δυνάμεων που απέμειναν.

Και πάλι <λέμε>: 1 Κύβος με έλλειψη 4 Δυνάμεις είναι ίσος με έναν τετράγωνο αριθμό.

Εάν θέσουμε επίσης την πλευρά του <τετραγώνου> ένα πλήθος Αριθμών, το τετράγωνο <θα είναι> ένα πλήθος Δυνάμεων.
Από την προσθήκη των 4 Δυνάμεων και στα δύο μέλη προκύπτει 1 Κύβος ίσος με ένα πλήθος Δυνάμεων,
Και συνεπώς, ο αριθμός που έχει υποτεθεί να είναι ο Αριθμός στο πρόβλημα, ισούται με το πλήθος των Αριθμών που αθροίζονται.

Συνεπώς, είναι απαραίτητο το πλήθος των Δυνάμεων που απομένουν στην πρώτη εξίσωση, να είναι ίσο με το πλήθος των Δυνάμεων που αθροίζονται στη δεύτερη εξίσωση.
Αλλά το πλήθος των Δυνάμεων που απέμειναν στην πρώτη εξίσωση, είναι αυτό που απομένει από έναν τετράγωνο αριθμό, αφού του αφαιρεθούν 4 <μονάδες>,
ενώ το πλήθος των Δυνάμεων που αθροίζονται στη δεύτερη εξίσωση, είναι ένας αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα ενός τετράγωνου αριθμού και 4 <μονάδων>.
Έτσι, θα πρέπει να ψάξουμε δύο τετράγωνους αριθμούς, τέτοιους ώστε ο μεγαλύτερος <από αυτούς> ελαττωμένος κατά 4 <μονάδες>, να είναι ίσος με τον μικρότερο <από αυτούς> όταν αυτός αυξηθεί κατά 4 <μονάδες>.
Άρα, πρέπει να αναζητήσουμε δύο τετράγωνους αριθμούς με διαφορά 8 <μονάδες>.
<Δύο> τέτοιοι <αριθμοί> είναι οι $12\frac{1}{4}$ και $20\frac{1}{4}$.

Θέτουμε τον μεγαλύτερο τετράγωνο <αριθμό>, που είναι ίσος με 1 Κύβο <και> 4 Δυνάμεις, $20\frac{1}{4}$ Δυνάμεις,
και τον μικρότερο τετράγωνο <αριθμό>, που είναι ίσος με 1Κύβο με έλλειψη 4 Δυνάμεις, $12\frac{1}{4}$ Δυνάμεις.

Απλοποίηση της εξίσωσης:
Τότε, και από τις δύο εξισώσεις, θα προκύψει 1 Κύβος ίσος με $16\frac{1}{4}$ Δυνάμεις.

Λύση:
Έτσι, ο Αριθμός ισούται με $16\frac{1}{4}$ <μονάδες>.

Απάντηση:
Αφού θέσαμε την πλευρά του κύβου 1 Αριθμό, η πλευρά του κύβου είναι $16\frac{1}{4}$, και ο κύβος $4291\frac{1}{64}$
Και αφού θέσαμε την πλευρά του τετραγώνου 2 Αριθμούς, η εν λόγω πλευρά είναι $32\frac{1}{2}$, και το τετράγωνο $1056\frac{1}{4}$.

Επαλήθευση:
Από την προσθήκη του τελευταίου <αριθμού> στον κυβικό αριθμό, προκύπτει $5347\frac{17}{64}$, ο οποίος είναι ένας τετράγωνος αριθμός,

και από την αφαίρεση του ίδιου <αριθμού> από τον κυβικό αριθμό προκύπτει $3234\frac{49}{64}$, οποίος είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $56\frac{7}{8}$.

Συμπέρασμα:
Άρα, βρήκαμε δύο αριθμούς, τον έναν κυβικό και τον άλλον τετράγωνο, τέτοιους ώστε όταν στον κυβικό αριθμό προστεθεί ο τετράγωνος να προκύπτει τετράγωνος αριθμός,

και όταν <ο κυβικός αριθμός> ελαττωθεί κατά τον τετράγωνο <αριθμό>, να προκύπτει και πάλι τετράγωνος αριθμός.

Η συμβολική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$K_A, T_B \,\big|\, K_A + T_B \longrightarrow T_1\,,\ K_A - T_B \longrightarrow T_2$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα τα ονόματα στους ζητούμενους αριθμούς αποδίδονται απευθείας ($K_A \coloneqq 1x^3$ *και* $T_B \coloneqq 4x^2$). Μετά τις πράξεις, προκύπτουν δύο υπό διαμόρφωση εξισώσεις, τις οποίες ο λύτης καλείται να συμπληρώσει. Προτείνονται δύο επιλύσεις για το πρόβλημα.

Πρώτη επίλυση

Η πρώτη επίλυση γίνεται με διπλή ισότητα, έναν τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων που έχει ήδη παρουσιαστεί στο δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών* (πρόβλημα ΙΙ,11). Η διαδικασία στηρίζεται στον γνωστό κανόνα (ταυτότητα) που εκφράζει τη διαφορά δύο τετραγώνων σαν γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά των ριζών. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε συμβολίσει τα τετράγωνα με T_1 και T_2 , με τα οποία ισούνται αντίστοιχα τα διώνυμα $1x^3 + 4x^2$ και $1x^3 - 4x^2$. Παρατηρώντας ότι η μεταξύ τους διαφορά $8x^2$ είναι γινόμενο των $2x$ και $4x$, ο λύτης προσδιορίζει τα ονόματα των δύο τετραγώνων, εκτελώντας μία καθορισμένη ακολουθία πράξεων. Έτσι, τα δύο ονόματα $T_2 \coloneqq 1x^2$ και $T_1 \coloneqq 9x^2$ είναι παράγωγα. Οι πράξεις αναφέρονται αναλυτικά, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Τα τετράγωνα βρέθηκαν έτσι που η απλοποίηση της μίας ή της άλλης εξίσωσης που συμπληρώνουν, να οδηγεί στην ίδια εξίσωση, $1x^3 = 5x^2$. Τη λύση της εξίσωσης, ακολουθεί η απάντηση στο πρόβλημα, δηλαδή οι αριθμοί 125 και 100.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$ $T_B \coloneqq 4x^2$		
	<Προσθέτω $1x^3$ και $4x^2 \longrightarrow 1x^3 + 4x^2$ > <Αφαιρώ $4x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 4x^2$ >	
		i.$1x^3 + 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii.$1x^3 - 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)

	Αφαιρώ $1x^3 - 4x^2$ από το $1x^3 + 4x^2 \longrightarrow 8x^2$ Το $8x^2$ αναλύεται σε γινόμενο των $2x$ επί $4x$ Αφαιρώ $2x$ από $4x \longrightarrow 2x$ Το μισό του $2x$ είναι $1x$ Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
$T_2 \coloneqq 1x^2$		ii. $1x^3 - 4x^2 = 1x^2$
	Προσθέτω $2x$ και $4x \longrightarrow 6x$ Το μισό του $6x$ είναι $3x$ Το τετράγωνο του $3x$ είναι $9x^2$	
$T_1 \coloneqq 9x^2$		i. $1x^3 + 4x^2 = 9x^2$

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
ii. $1x^3 - 4x^2 = 1x^2$ i.$1x^3 + 4x^2 = 9x^2$	ii.προσθέτω $4x^2$ και στα δύο μέλη: $1x^3 = 5x^2$ i.αφαιρώ $4x^2$ και από τα δύο μέλη: $1x^3 = 5x^2$ i/ii. Διαιρώ με $1x^2$: $1x = 5$	$x = 5$	$K_A = 125, T_B = 100$

Δεύτερη επίλυση:

Η δεύτερη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, παρουσιάζεται ως εναλλακτική επιλογή στην ήδη γνωστή διαδικασία της διπλής ισότητας. Η απόδοση ονομάτων στους τετράγωνους αριθμούς T_1 και T_2 που συμπληρώνουν τις δύο εξισώσεις, γίνεται με την τεχνική al-istiqra'. Η περίπτωση όμως παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα, καθώς οι εξισώσεις που πρέπει να συμπληρωθούν είναι δύο. Οι επιλογές του λύτη πρέπει να είναι τέτοιες ώστε και οι δύο υπό διαμόρφωση εξισώσεις, να απλοποιηθούν σε μία επιλύσιμη εξίσωση. Ο στόχος αυτός περιγράφεται στα προβλήματα 40 και 42, και προκειμένου να επιτευχθεί ακολουθείται ένα σκεπτικό ανάλογο με εκείνο που περιγράφηκε στο πρόβλημα 25. Ειδικότερα, στη θέση του ονόματος καθενός από τα τετράγωνα T_1 και T_2, αντιστοιχίζεται ένα πλήθος Δυνάμεων, έστω $\mu_1 x^2$ και $\mu_2 x^2$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Τότε, στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής διαδικασίας από την οποία θα προκύψουν οι τιμές για τα μ_1 και μ_2 , σχηματίζονται οι ακόλουθες εξισώσεις τις οποίες εμείς αντιλαμβανόμαστε ως παραμετρικές: $1x^3 + 4x^2 = \mu_1 x^2$ και $1x^3 - 4x^2 = \mu_2 x^2$. Όταν απλοποιηθούν, θα προκύψουν τελικά δύο διαφορετικές εκφράσεις για τον Αριθμό, ή τον άγνωστο x, οι $1x = \mu_1 - 4$ και $1x = \mu_2 + 4$. Εξισώνοντάς τες, ο λύτης βρίσκει τη συνθήκη που θα πρέπει να πληρούν οι δύο τετράγωνοι αριθμοί μ_1 και μ_2 . Συγκεκριμένα, απαιτείται η μεταξύ τους διαφορά να είναι 8. Ένα τέτοιο ζεύγος αριθμών, μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια του αντίστοιχου λυμένου προβλήματος του δεύτερου βιβλίου των *Αριθμητικών,* ΙΙ.10. Επιλέγονται οι αριθμοί $20\frac{1}{4}$ και $12\frac{1}{4}$.

Το υποπρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_\Gamma, T_\Delta \mid T_\Gamma - T_\Delta \longrightarrow 8$

Τότε οι πίνακες για τη λύση του θα είναι οι παρακάτω:

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$\Delta \coloneqq 1x$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
$\Gamma \coloneqq 1x + 1$		
	Το τετράγωνο του $1x + 1$ είναι $1x^2 + 1 + 2x$	
	Αφαιρώ $1x^2$ από $1x^2 + 1 + 2x \longrightarrow 2x + 1$	
		$8 = 2x + 1$

Αρχική εξίσωση	Απλοποίηση	Λύση	Απάντηση
$8 = 2x + 1$			
		$x = 3\frac{1}{2}$	
			$T_\Delta = 12\frac{1}{4}$, $T_\Gamma = 20\frac{1}{4}$

Με την παραπάνω διαδικασία, βρέθηκαν τα πλήθη των Δυνάμεων που αντιστοιχούν στους τετράγωνους αριθμούς T_1 και T_2 . Έτσι, στους δύο αριθμούς αποδίδονται τα ονόματα $20\frac{1}{4}x^2$ και $12\frac{1}{4}x^2$. Η επίλυση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται με την κατάστρωση των δύο εξισώσεων $1x^3 + 4x^2 = 20\frac{1}{4}x^2$ και $1x^3 - 4x^2 = 12\frac{1}{4}x^2$. Οι δύο εξισώσεις απλοποιούμενες ανάγονται στην $1x^3 = 16\frac{1}{4}x^2$. Ακολουθεί η λύση της, η εύρεση των δύο ζητούμενων αριθμών K_A και T_B , και η επαλήθευση που γίνεται αναλυτικά. Το συμπέρασμα που διατυπώνεται στο πρόβλημα αυτό, είναι λιγότερο λεπτομερές, καθώς αναφέρεται και στις δύο διαφορετικές λύσεις που βρέθηκαν.

Τα δύο ονόματα δόθηκαν με την τεχνική al-istiqraʾ που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος, του II.10.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$		
$T_B \coloneqq 4x^2$		
	<Προσθέτω $1x^3$ και $4x^2 \longrightarrow 1x^3 + 4x^2$>	
	<Αφαιρώ $4x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 4x^2$>	
		i. $1x^3 + 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1)
		ii. $1x^3 - 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 20\frac{1}{4}x^2$		
$T_2 \coloneqq 12\frac{1}{4}x^2$		
		i. $1x^3 + 4x^2 = 20\frac{1}{4}x^2$
		ii. $1x^3 - 4x^2 = 12\frac{1}{4}x^2$

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $1x^3 + 4x^2 = 20\frac{1}{4}x^2$			
ii. $1x^3 - 4x^2 = 12\frac{1}{4}x^2$			
	i/ii. $1x^3 = 16\frac{1}{4}x^2$		
		$x = 16\frac{1}{4}$	
			$K_A = 4291\frac{1}{64}$, $T_B = 1056\frac{1}{4}$

3.3 Πίνακες για τα 44 προβλήματα

Πρόβλημα 1

Γενική διατύπωση: $K_A, K_B \,\big|\, K_A + K_B \longrightarrow T$

Ονοματοδοσία	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
$B \coloneqq 2x$		
	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$ Προσθέτω $1x^3$ και $8x^3 \longrightarrow 9x^3$	
		$9x^3$ πρέπει να ισούται με ένα τετράγωνο (T)
$\sqrt{T} = 6x$		
	Το τετράγωνο του $6x$ είναι $36x^2$	
		$9x^3 = 36x^2$

Τα δύο πρώτα ονόματα δόθηκαν απευθείας, ενώ το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική εξίσωση	Απλοποιημένη εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$9x^3 = 36x^2$			
	Διαιρώ με $1x^2$: $9x = 36$		
		$x = 4$	
			$K_A = 64,\ K_B = 512$

Πρόβλημα 2

Γενική διατύπωση: $K_A, K_B \,\big|\, K_B - K_A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσία	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
$B \coloneqq 2x$		
	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$ Αφαιρώ $1x^3$ από $8x^3 \longrightarrow 7x^3$	
		$7x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 7x$		
	Το τετράγωνο του $7x$ είναι $49x^2$	
		$7x^3 = 49x^2$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας. Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική εξίσωση	Απλοποιημένη εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$7x^3 = 49x^2$			

	Διαιρώ με $1x^2$: $7x = 49$	$x = 7$	$K_A = 343, K_B = 2744$

Πρόβλημα 3

Γενική διατύπωση: $T_A, T_B \,|\, T_A + T_B \longrightarrow K$

Ονοματοδοσία	Πράξεις	Εξίσωση
$T_A \coloneqq 1x^2$ $T_B \coloneqq 4x^2$	Προσθέτω $1x^2$ και $4x^2 \longrightarrow 5x^2$	$5x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 1x$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	$5x^2 = 1x^3$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας. Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική εξίσωση	Απλοποιημένη εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$5x^2 = 1x^3$	Διαιρώ με $1x^2$: $1x = 5$	$x = 5$	$T_A = 25, T_B = 100$

Πρόβλημα 4

Γενική διατύπωση: $T_A, T_B \mid T_B - T_A \longrightarrow K$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$ $B \coloneqq 5x$	Το τετράγωνο του $5x$ είναι $25x^2$ Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ Αφαιρώ $1x^2$ από $25x^2 \longrightarrow 24x^2$	$24x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κύβο (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2x$	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$	$24x^2 = 8x^3$

Τα δύο πρώτα ονόματα δόθηκαν απευθείας. Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'.

ΑρχικήΕξίσωση	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
$24x^2 = 8x^3$	Διαιρώ με $1x^2$: $8x = 24$		

		$x = 3$	$T_A = 9\,, T_B = 225$

Πρόβλημα 5

Γενική διατύπωση: $T_A, T_B \mid T_A \cdot T_B \longrightarrow K$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$T_A \coloneqq 1x^2$		
$B \coloneqq 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$	
	Πολλαπλ. $1x^2$ επί $4x^2 \longrightarrow 4x^4$	
		$4x^4$ πρέπει να ισούται με έναν κυβικό αριθμό (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2x$		
	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$	
		$4x^4 = 8x^3$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας. Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική Εξίσωση	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
$4x^4 = 8x^3$			
	Διαιρώ με $1x^3$: $8 = 4x$		
		$x = 2$	
			$T_A = 4\,, T_B = 16$

Πρόβλημα 6

Γενική διατύπωση: $T_A, K_B \mid T_A \cdot K_B \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
$B \coloneqq 2x$		
	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$	
	Πολλαπλ. $1x^2$ επί $8x^3 \longrightarrow 8x^5$	
		$8x^5$ πρέπει να ισούται με ένα τετράγωνο (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 4x^2$		
	Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$	
		$8x^5 = 16x^4$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας. Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'. Το τελευταίο όνομα δόθηκε έπειτα από μία διαδικασία που αφορούσε στην κατάλληλη επιλογή του «είδους» του τετραγώνου T. Κριτήριο γι' αυτήν την επιλογή, ήταν η δημιουργία της απλούστερης δυνατής εξίσωσης. Στο σκεπτικό που αναπτύσσεται από τον Διόφαντο, ο T θεωρείται διαδοχικά ότι είναι ένα πλήθος από x ή x^2, και εξετάζεται η τελική μορφή της εξίσωσης για καθεμία από τις περιπτώσεις. Τελικά, η πλευρά του τετραγώνου T ορίστηκε να είναι ένα πλήθος από x^2, και όχι από x.

ΑρχικήΕξίσωση	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
$8x^5 = 16x^4$	Διαιρώ με $1x^4$: $8x = 16$	$x = 2$	$T_A = 4$, $K_B = 64$

Πρόβλημα 7

Γενική διατύπωση: $T_A, K_B \mid T_A \cdot K_B \longrightarrow K$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
$B \coloneqq 4x$	Ο κύβος του $4x$ είναι $64x^3$ Πολλαπλ. $1x^2$ επί $64x^3 \longrightarrow 64x^5$	
		$64x^5$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2x^2$	Ο κύβος του $2x^2$ είναι $8x^6$	$64x^5 = 8x^6$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας. Το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra'. Η εξήγηση για την επιλογή του τρίτου ονόματος, δίνεται αναπτύσσοντας το ίδιο σκεπτικό με αυτό του Προβλήματος 6.

ΑρχικήΕξίσωση	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
$64x^5 = 8x^6$	Διαιρώ με $1x^5$: $8x = 64$	x = 8	$T_A = 64$, $K_B = 32{,}768$

Πρόβλημα 8

Γενική διατύπωση: $K_A, K_B \mid K_A \cdot K_B \longrightarrow T$

Η επίλυση του προβλήματος 8, αφήνεται ημιτελής. Τα ίδια ζητούμενα έχει το αμέσως επόμενο πρόβλημα με αριθμό 9, όπου και παρουσιάζεται η λύση ολοκληρωμένη. Παρ' όλα αυτά, στην πρώτη προσπάθεια, αναπτύσσεται το σκεπτικό βάσει του οποίου επιλέγονται τα κατάλληλα ονόματα για τους ζητούμενους αριθμούς, ώστε η εξίσωση στην οποία μετατρέπεται το πρόβλημα να έχει λύση στους θετικούς ρητούς.

Η λύση ξεκινά με τις απευθείας αποδόσεις ονομάτων στους δύο ζητούμενους αριθμούς, $A \coloneqq 1x$ και $B \coloneqq 2x$. Έπειτα από την εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων, επιχειρείται να βρεθεί ο τετράγωνος αριθμός T, με τον οποίον πρέπει να ισούνται τα $8x^6$. Η επιλογή του σωστού ονόματος για τον T, είναι αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής διαδικασίας. Έτσι, ο T επιλέγεται να είναι ένα πλήθος από x^4, έστω μx^4, με μ ένα τετράγωνο. Τότε, θεωρείται μια εξίσωση, με σκοπό να προσδιοριστεί κάποιο κατάλληλο μ. Αυτήν τη φορά, ο λύτης οδηγείται σε ένα βοηθητικό πρόβλημα, η επίλυση του οποίου θα φανερώσει κατάλληλα ονόματα τόσο για το τετράγωνο T όσο και για τον μεγαλύτερο ζητούμενο κύβο K_B, αφού η αρχική επιλογή αποδείχθηκε λανθασμένη. Αν ο κύβος K_B είναι νx^3, με ν έναν κύβο, προκύπτει η εξίσωση $\nu x^6 = \mu x^4$. Από την απαίτηση η τελική εξίσωση δευτέρου βαθμού να έχει λύση στους θετικούς ρητούς, προκύπτει ότι $\frac{\mu}{\nu}$ πρέπει να είναι τετράγωνος αριθμός. Δεδομένου ότι ο μ είναι ένα τετράγωνο και ο ν είναι ένας κύβος, ο λύτης οδηγείται στο ακόλουθο υποπρόβλημα:

$T_1, K_1 \mid T_1 \cdot K_1 \longrightarrow T_2$, όπου $T_2 = \mu$, $K_1 = \nu$ και ο τετράγωνος T_1 είναι ο x^2

Αλλά αυτό είναι το πρόβλημα 6, οπότε μία λύση είναι ο τετράγωνος 4 και ο κύβος 64. Το κείμενο σταματά σε αυτό το σημείο και η λύση του αρχικού προβλήματος δεν ολοκληρώνεται. Ο αναγνώστης στο τέλος της διαδικασίας, μπορεί να συμπεράνει πως το όνομα της πλευράς του μεγαλύτερου κύβου αναθεωρήθηκε σε $4x$ (αφού το ν είναι 64), και στην πλευρά του τετραγώνου T, δίνεται το όνομα $16x^2$ (αφού το μ είναι 256).

Να σημειώσουμε ότι με την επίλυση του υποπροβλήματος, βρέθηκε και η τιμή του άγνωστου αριθμού x.

Πρόβλημα 9

Γενική διατύπωση: $K_A, K_B \mid K_A \cdot K_B \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$B := 4x$		
$A := 1x$		
	Ο κύβος του $4x$ είναι $64x^3$	
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
	Πολλαπλ. $1x^3$ επί $64x^3 \longrightarrow 64x^6$	
		$64x^6$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} := 16x^2$		
	Το τετράγωνο του $16x^2$ είναι $256x^4$	
		$64x^6 = 256x^4$

Εάν λάβουμε υπ' όψιν μας το ημιτελές Πρόβλημα 8 που προηγήθηκε, το όνομα του μικρότερου ζητούμενου κύβου δόθηκε απευθείας, και τα ονόματα του μεγαλύτερου κύβου και της πλευράς του τετραγώνου προέκυψαν ύστερα από την επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος (Πρόβλημα 6).

Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$64x^6 = 256x^4$			
	Διαιρώ με $1x^4$: $64x^2 = 256$		
	Διαιρώ με 64 : $1x^2 = 4$		
		$x = 2$	
			$K_A = 8$, $K_B = 512$

Στο σχόλιο που ακολουθεί τη λύση του προβλήματος, περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο ο λύτης μπορεί να μετατρέψει ένα πρόβλημα που η συνθήκη του περιλαμβάνει το πηλίκο κάποιων αριθμών, σε ισοδύναμο πρόβλημα που η συνθήκη του να περιλαμβάνει το γινόμενο δύο αριθμών. Τότε, θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα από τα ήδη λυμένα προβλήματα για την επίλυσή του, όπως ακριβώς έγινε με το πρόβλημα 8/9.

Πρόβλημα 10

Γενική διατύπωση: $K_A \mid$ αν $\mu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $K_A + \mu T_A \longrightarrow T$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid \; K_A + 10T_A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
	Προσθ. στο $1x^3$, 10 φορές το $1x^2 \longrightarrow 1x^3 + 10x^2$	
		$1x^3 + 10x^2$ πρέπει να είναι ίσο με ένα τετράγωνο (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 4x$		
	Το τετράγωνο του $4x$ είναι $16x^2$	
		$1x^3 + 10x^2 = 16x^2$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας, το δεύτερο με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^3 + 10x^2 = 16x^2$			
	Αφαιρώ $10x^2$ και από τα δύο μέλη : $6x^2 = 1x^3$		
	Διαιρώ με $1x^2$: $x = 6$		
		$x = 6$	
			$K_A = 216$

Πρόβλημα 11

Γενική διατύπωση: $K_A \mid \, \alpha\nu \;\; \mu \in \mathbb{Q}^+ \; \tau \acute{o} \tau \varepsilon \;\; K_A - \mu T_A \longrightarrow T$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid K_A - 6T_A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
	Αφαιρώ από το $1x^3$ το 6-πλάσιο του $1x^2 \longrightarrow 1x^3 - 6x^2$	
		$1x^3 - 6x^2$ πρέπει να είναι ίσο με ένα τετράγωνο (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$	
		$1x^3 - 6x^2 = 4x^2$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας, το δεύτερο με την τεχνική al-istiqra’.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^3 - 6x^2 = 4x^2$	Προσθέτω το $6x^2$ και στα δύο μέλη: $1x^3 = 10x^2$ Διαιρώ με $1x^2$: $1x = 10$	$x = 10$	$K_A = 1000$

Πρόβλημα 12

Γενική διατύπωση: $K_A \,\Big|\, \alpha\nu\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ K_A + \mu T_A \longrightarrow K$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \,\Big|\, K_A + 10T_A \longrightarrow K$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ <Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$> Προσθ. στο $1x^3$, το 10-πλάσιο του $1x^2 \longrightarrow\ 1x^3 + 10x^2$	
		$1x^3 + 10x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κύβο (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2x$	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$	
		$1x^3 + 10x^2 = 8x^3$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας, το δεύτερο με την τεχνική al-istiqra’.

Εξίσωση	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^3 + 10x^2 = 8x^3$	Αφαιρώ $1x^3$ και από τα δύο μέλη: $10x^2 = 7x^3$ Διαιρώ με $1x^2$: $7x = 10$	$x = \frac{10}{7}$	$K_A = \frac{1000}{7 \cdot 7 \cdot 7}$

Πρόβλημα 13

Γενική διατύπωση: $K_A \,\Big|\, \alpha\nu\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ K_A - \mu T_A \longrightarrow K$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \,\Big|\, K_A - 7T_A \longrightarrow K$

Πρώτη επίλυση

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση

$A \coloneqq 1x$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ <Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$> Αφαιρώ από το $1x^3$, το 7-πλάσιο του $1x^2$ $\longrightarrow 1x^3 - 7x^2$	$1x^3 - 7x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq \frac{1}{2}x$	Ο κύβος του $\frac{1}{2}x$ $\longrightarrow \frac{1}{8}x^3$	$1x^3 - 7x^2 = \frac{1}{8}x^3$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας, το δεύτερο με την τεχνική al-istiqra’.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^3 - 7x^2 = \frac{1}{8}x^3$	Αποκαθιστώ και κάνω αναγωγή: $\frac{7}{8}x^3 = 7x^2$ Διαιρώ με $1x^2$: $\frac{7}{8}x = 7$	$x = 8$	$K_A = 512$

Δεύτερη επίλυση

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 2x$ $< \sqrt[3]{K} \coloneqq 1x >$	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$ <Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ > Αφαιρώ $1x^3$ από το $8x^3$ $\longrightarrow 7x^3$	$7x^3$ ισούται με 7 φορές τον τετράγωνο αριθμό T_A
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$ 7 φορές το $4x^2 \longrightarrow 28x^2$	$7x^3 = 28x^2$

Σε αυτήν τη δεύτερη λύση του προβλήματος, τα δύο ονόματα δίνονται απευθείας.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$7x^3 = 28x^2$	Διαιρώ με $1x^2$: $7x = 28$	$x = 4$	$K_A = 512$

Στα ακόλουθα, θα συμβολίσουμε με $T_{\sqrt[3]{K}}$ *το τετράγωνο που έχει πλευρά την* $\sqrt[3]{K}$ *, όπου Κ ένας κύβος.*

Πρόβλημα 14

Γενική διατύπωση: $A \mid \alpha\nu\ \mu, \nu \in \mathbb{Q}^{+}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \mu A \longrightarrow K,\ \nu A \longrightarrow T$

Πρώτη επίλυση

I_{α}. Συγκεκριμένη διατύπωση: $A \mid\ 10A \longrightarrow K,\ 5A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	5 φορές το $1x\ \longrightarrow 5x$ 10 φορές το $1x\ \longrightarrow 10x$	
		$10x$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό (K) $5x$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$T_{\sqrt[3]{K}} \coloneqq 1\frac{1}{4}x$		
	Διαιρώ το $10x$ με $1\frac{1}{4}x\ \longrightarrow 8$	
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 8$		
	Ο κύβος του 8 είναι 512	
		$10x = 512$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας. Το δεύτερο όνομα προέκυψε από μία παραδοχή που έγινε με σκοπό να συνδέσει τα δεδομένα, και να προχωρήσει η λύση: όπως προκύπτει από την εκφώνηση του προβλήματος, ο ζητούμενος αριθμός ικανοποιεί δύο εν δυνάμει εξισώσεις, τις: $10x\ \longrightarrow$ Κ και $5x\ \longrightarrow\ T$. Ο Διόφαντος υποθέτει πως τα όμοια μεγέθη που προκύπτουν από το παραπάνω τετράγωνο και τον κύβο, αυτά που στον πίνακα αποδίδονται με T και $T_{\sqrt[3]{K}}$, ικανοποιούν την αναλογία $T_{\sqrt[3]{K}}\ = \frac{1}{4}T$. Τίθεται η προϋπόθεση ο λόγος τους να είναι τετράγωνος αριθμός. Έτσι, και οι αντίστοιχες πλευρές θα έχουν ρητό λόγο. Από την παραπάνω παραδοχή, με βάση τα δεδομένα, προκύπτει το δεύτερο όνομα. Το τρίτο όνομα είναι παράγωγο, καθώς είναι το αποτέλεσμα της πράξης που εκτελείται με βάση τον απλό κανόνα: το πηλίκο της διαίρεσης ενός κύβου πλευράς a, με το τετράγωνο πλευράς a, είναι η ίδια η πλευρά a.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$10x = 512$			
		$x = 51\frac{1}{5}$	

			$A = 51\frac{1}{5}$

ΙΙ$_{\alpha}$. Δεύτερη συγκεκριμένη διατύπωση: $A \mid 5A \longrightarrow K,\ 10A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	5 φορές το $1x \longrightarrow 5x$ 10 φορές το $1x \longrightarrow 10x$	
		$5x$ πρέπει να ισούται με έναν κυβικό αριθμό (K) $10x$ πρέπει να ισούται με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$T_{\sqrt[3]{K}} \coloneqq 2\frac{1}{2}x$		
	Διαιρώ το $5x$ με $2\frac{1}{2}x \longrightarrow 2$	
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2$		
	Ο κύβος του 2 είναι 8	
		$5x = 8$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας. Το δεύτερο όνομα προέκυψε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, έπειτα από την παραδοχή ότι $T_{\sqrt[3]{K}} = \frac{1}{4}T$. Το τρίτο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$5x = 8$			
		$x = \frac{8}{5}$	
			$A = \frac{8}{5}$

Ι$_{\beta}$. Πρώτη συγκεκριμένη διατύπωση: $A \mid 10A \longrightarrow K,\ 5A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	5 φορές το $1x \longrightarrow 5x$ 10 φορές το $1x \longrightarrow 10x$	
		$10x$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό, (K) $5x$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό, (T)
$T_{\sqrt[3]{K}} \coloneqq 20x$		

$\sqrt[3]{K} \coloneqq \frac{1}{2}$	Διαιρώ το $10x$ με $20x \longrightarrow \frac{1}{2}$ Ο κύβος του $\frac{1}{2}$ είναι $\frac{1}{8}$	$10x = \frac{1}{8}$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας. Το δεύτερο όνομα προέκυψε από την επιπλέον συνθήκη, που αυτήν τη φορά είναι η αναλογία $T_{\sqrt[3]{K}} = 4T$. Το τρίτο όνομα είναι παράγωγο, και προκύπτει όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$10x = \frac{1}{8}$		$x = \frac{1}{80}$	$A = \frac{1}{80}$

Ι$_β$. Δεύτερη συγκεκριμένη διατύπωση: $A \mid 5A \longrightarrow K,\ 10A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$	5 φορές το $1x \longrightarrow 5x$ 10 φορές το $1x \longrightarrow 10x$	$5x$ πρέπει να ισούται με έναν κυβικό αριθμό (K) $10x$ πρέπει να ισούται με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$T_{\sqrt[3]{K}} \coloneqq 40x$ $\sqrt[3]{K} \coloneqq \frac{1}{8}$	Διαιρώ $5x$ με $40x \longrightarrow \frac{1}{8}$ Ο κύβος του $\frac{1}{8}$ είναι $\frac{1}{512}$	$5x = \frac{1}{512}$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας. Το δεύτερο όνομα προέκυψε από την επιπλέον συνθήκη, που όπως στην προηγούμενη περίπτωση είναι η αναλογία $T_{\sqrt[3]{K}} = 4T$. Το τρίτο όνομα είναι παράγωγο, και προκύπτει όπως και στις περιπτώσεις που προηγήθηκαν.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση

$5x = \frac{1}{512}$		$x = \frac{1}{2560}$	$A = \frac{1}{2560}$

Δεύτερη επίλυση

Ι'$_{\alpha}$. Πρώτη συγκεκριμένη διατύπωση: $A \,\big|\, 10A \longrightarrow K,\ 5A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ Πολλαπλ. $\frac{1}{10}$ επί $1x^3 \longrightarrow \frac{1}{10}x^3$	
$A \coloneqq \frac{1}{10}x^3$		
	5 φορές το $\frac{1}{10}x^3 \longrightarrow \frac{1}{2}x^3$	
		$\frac{1}{2}x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x \longrightarrow 4x^2$	
		$\frac{1}{2}x^3 = 4x^2$

Το πρώτο όνομα δίνεται απευθείας, το δεύτερο είναι παράγωγο, ενώ για την τρίτη ονοματοδοσία χρησιμοποιείται η τεχνική al-istiqra'.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$\frac{1}{2}x^3 = 4x^2$			
	Διαιρώ με $1x^2$: $\frac{1}{2}x = 4$		
		$x = 8$	
			$A \coloneqq 51\frac{1}{5}$

Ι'$_{\beta}$. Πρώτη συγκεκριμένη διατύπωση: $A \,\big|\, 10A \longrightarrow K,\ 5A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$\sqrt{T} \coloneqq 1x$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ Πολλαπλ. $\frac{1}{5}$ επί $1x^2 \longrightarrow \frac{1}{5}x^2$	
$A \coloneqq \frac{1}{5}x^2$		

	10 φορές το $\frac{1}{5}x^2 \longrightarrow 2x^2$	$2x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 1x$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	$2x^2 = 1x^3$

Τα ονόματα δίνονται ακριβώς με τους ίδιους τρόπους όπως και προηγουμένως.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$2x^2 = 1x^3$	Διαιρώ με $1x^2$: $1x = 2$	$x = 2$	$A \coloneqq \frac{4}{5}$

Πρόβλημα 15

Γενική διατύπωση: $A \mid$ αν $\mu, \nu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu A \longrightarrow K,\ \nu A \longrightarrow T_{\sqrt[3]{K}}$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $A \mid 10A \longrightarrow K,\ 4A \longrightarrow T_{\sqrt[3]{K}}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$	10 φορές το $1x \longrightarrow 10x$ 4 φορές το $1x \longrightarrow 4x$	$10x$ πρέπει να ισούται με έναν κύβο (K) $4x$ πρέπει να ισούται με έναν τετράγωνο $(T_{\sqrt[3]{K}})$
	Διαιρώ $10x$ με $4x \longrightarrow 2\frac{1}{2}$	
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2\frac{1}{2}$		
	Το τετράγωνο του $2\frac{1}{2}$ είναι $6\frac{1}{4}$	$4x = 6\frac{1}{4}$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας και το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο αφού προέκυψε από εκτέλεση πράξης που βασίζεται σε απλό κανόνα.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$4x = 6\frac{1}{4}$	Πολλαπλ. με 4: $16x = 25$		

		$x = \frac{25}{16}$	$< A = \frac{25}{16} >$

Δεύτερη επίλυση

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 1x$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ $<$ πολλαπλ. $\frac{1}{10}$ επί $1x^3 \longrightarrow \frac{1}{10}x^3 >$	
$A \coloneqq \frac{1}{10}x^3$	4 φορές το $\frac{1}{10}x^3 \longrightarrow \frac{4}{10}x^3$	$\frac{4}{10}x^3$ πρέπει να ισούται με ένα τετράγωνο (T)
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	$\frac{4}{10}x^3 = 1x^2$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας και το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

ΑρχικήΕξίσωση	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
$\frac{4}{10}x^3 = 1x^2$	Πολλαπλ. επί 10: $4x^3 = 10x^2$ Διαιρώ με $1x^2$: $4x = 10$	$x = 2\frac{1}{2}$	$A = \frac{25}{16}$

Ακολουθεί μία παρατήρηση όπου ο λύτης εξηγεί πώς γίνεται να βρεθούν ένας κύβος και ένα τετράγωνο σε συγκεκριμένη αναλογία. Θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα, με τον εξής τρόπο: βρίσκουμε δύο αριθμούς μ και ν στην αναλογία που θέλουμε, έστω την 3:1 . Τότε, αρκεί να αναζητήσουμε έναν αριθμό A, τέτοιον ώστε:

$A \,\middle|\, αν\ μ, ν \in \mathbb{N}\ με\ μ = 3ν,\ τότε\ μA \longrightarrow K,\ νA \longrightarrow T\quad (\text{ή } νA \longrightarrow K,\ μA \longrightarrow T)$

Το παραπάνω πρόβλημα λύνεται σύμφωνα με το πρόβλημα 14.

Πρόβλημα 16

Γενική διατύπωση: $A, B \mid$ αν $\mu \in \mathbb{N}$ τότε $\mu A \longrightarrow K,\ \mu B \longrightarrow \sqrt[3]{K}$
Συγκεκριμένη διατύπωση: $A, B \mid 10A \longrightarrow K,\ 10B \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$B \coloneqq 1x$		
	10 φορές το $1x \longrightarrow 10x$	
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 10x$		
	Ο κύβος του $10x$ είναι $1000x^3$	
$A \coloneqq 300x^2$		
	10 φορές το $300x^2 \longrightarrow 3000x^2$	
		$1000x^3 = 3000x^2$

Το πρώτο και το τρίτο όνομα δόθηκαν απευθείας. Η δεύτερη ονομασία είναι παράγωγη. Το τρίτο όνομα δόθηκε απευθείας, με τρόπο ώστε η τελική εξίσωση να είναι πρωτοβάθμια και επομένως επιλύσιμη στους θετικούς ρητούς αριθμούς.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1000x^3 = 3000x^2$			
	Διαιρώ με $1x^2$: $1000x = 3000$		
		$x = 3$	
			$B = 3, A = 2700$

Πρόβλημα 17

Γενική διατύπωση: $T_A, T_B \mid αν\ \frac{A}{B} = \lambda, \lambda \in \mathbb{Q}^+$ και $\mu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu T_A \longrightarrow K,\ \mu T_B \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Συνθήκη επιλυσιμότητας: $\lambda \cdot \mu$ πρέπει να είναι ένας τετράγωνος αριθμός

Συγκεκριμένη διατύπωση: $T_A, T_B \mid αν\ \frac{A}{B} = 20$ τότε $5T_A \longrightarrow K,\ 5T_B \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$B \coloneqq 1x$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ <20 φορές το $1x \longrightarrow 20x$ >	
$A \coloneqq 20x$		
	Το τετράγωνο του $20x \longrightarrow 400x^2$ 5 φορές το $400x^2 \longrightarrow 2000x^2$ 5 φορές το $1x \longrightarrow 5x^2$ Ο κύβος του $5x^2$ είναι $125x^6$	
		$125x^6 = 2000x^2$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας και το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$125x^6 = 2000x^2$	Διαιρώ με $1x^2$:$125x^4 = 2000$ $1x^4 = 16$	$x = 2$	$T_B = 4, T_A = 1600$

Στο πρόβλημα δεν δίνεται κάποια εξήγηση για τον τρόπο με τον οποίο τέθηκε το κριτήριο για τον λόγο των ζητούμενων αριθμών και του δεδομένου αριθμού μ. Παραπέμπουμε για την περιγραφή της διαδικασίας, στα προβλήματα με αριθμούς 20 και 21 που ακολουθούν.

Πρόβλημα 18

Γενική διατύπωση: $K_A, K_B \,\middle|\, αν\ \frac{A}{B} = λ, λ \in \mathbb{Q}^+$και $μ \in \mathbb{Q}^+$ τότε $μK_A \longrightarrow T,\ μK_B \longrightarrow \sqrt{T}$

Συνθήκη επιλυσιμότητας: μ πρέπει να είναι ένας κυβικός αριθμός

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, K_B \,\middle|\, αν\ \frac{A}{B} = 3$ τότε $8K_A \longrightarrow T,\ 8K_B \longrightarrow \sqrt{T}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$B := 1x$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ <3 φορές το $1x \longrightarrow 3x>$	
$A := 3x$	Ο κύβος του $3x$ είναι $27x^3$ 8 φορές το $27x^3 \longrightarrow 216x^3$ 8 φορές το $1x^3 \longrightarrow 8x^3$ Το τετράγωνο του $8x^3$ είναι $64x^6$	$216x^3 = 64x^6$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας και το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$216x^3 = 64x^6$	Διαιρώ με $1x^3$: $216 = 64x^3$ $1x^3 = 3\frac{3}{8}$	$x = 1\frac{1}{2}$	$K_B = 3\frac{3}{8}, K_A = 91\frac{1}{8}$

Και εδώ, ο περιορισμός στην επιλογή του δεδομένου αριθμού μπορεί να βρεθεί μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται στα προβλήματα 21 και 22.

Πρόβλημα 19

Γενική διατύπωση: $A \mid$ αν $\mu, \nu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu A \longrightarrow K,\ \nu A \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Συνθήκη επιλυσιμότητας: μ · ν πρέπει να είναι ένας τετράγωνος αριθμός

Συγκεκριμένη διατύπωση: $A \mid\ 20A \longrightarrow K,\ 5A \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	5 φορές το $1x \longrightarrow 5x$	
	20 φορές το $1x \longrightarrow 20x$	
	Διαιρώ το $20x$ με $5x \longrightarrow 4$	
	Η πλευρά των 4 μονάδων είναι 2	
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 2$		
		$5x = 2$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας και το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$5x = 2$			
		$x = \frac{2}{5}$	
			$A = \frac{2}{5}$

Η ίδια διαδικασία δίνει και σε αυτό το πρόβλημα το κριτήριο για την επιλογή των δύο δεδομένων αριθμών μ και ν.

Πρόβλημα 20

Γενική διατύπωση: $K_A \mid$ αν $\mu, \nu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu K_A \longrightarrow T,\ \nu K_A \longrightarrow \sqrt{T}$

Συνθήκη επιλυσιμότητας: $\mu \div \nu^2$ (ή $\nu \div \mu^2$) ή πρέπει να είναι ένας κυβικός αριθμός

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid 200K_A \longrightarrow T,\ 5K_A \longrightarrow \sqrt{T}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
	Πολλαπλ. $1x^3$ επί 200 $\longrightarrow 200x^3$	
	Πολλαπλ. $1x^3$ επί 5 $\longrightarrow 5x^3$	
	Διαιρώ το $200x^3$ με $5x^3 \longrightarrow 40$	
$\sqrt{T} \coloneqq 40$		
		$5x^3 = 40$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας και το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$5x^3 = 40$	$1x^3 = 8$	$x = 2$	$K_A = 8$

Από τη διαδικασία που περιγράφεται στα προβλήματα 21 και 22, μπορεί να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι δύο δεδομένων αριθμοί μ και ν.

Πρόβλημα 21

Γενική διατύπωση : $T_A \mid$ αν $\mu, \nu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu T_A \longrightarrow K,\ \nu T_A \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Συνθήκη επιλυσιμότητας: μ · ν πρέπει να είναι τετράγωνο ενός τετράγωνου αριθμού

Συγκεκριμένη διατύπωση: $T_A \mid 40\frac{1}{2} T_A \longrightarrow K,\ 2T_A \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$T_A \coloneqq 1x^2$		
	Πολλαπλ. $1x^2$ επί $40\frac{1}{2} \longrightarrow 40\frac{1}{2}x^2$	
	Πολλαπλ. $1x^2$ επί $2 \longrightarrow 2x^2$	
	Διαιρώ το $40\frac{1}{2}x^2$ με $2x^2 \longrightarrow 20\frac{1}{4}$	
$T_{\sqrt[3]{K}} \coloneqq 20\frac{1}{4}$		
		$(2x^2)^2 = 20\frac{1}{4}$

Το όνομα στον ζητούμενο τετράγωνο αριθμό, δόθηκε απευθείας. Το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$(2x^2)^2 = 20\frac{1}{4}$	$1x^2 = 2\frac{1}{4}$	$(x = 1\frac{1}{2})$	$T_A = 2\frac{1}{4}$

Την απάντηση του προβλήματος, ακολουθεί η εξήγηση της επιλογής του κριτηρίου βάσει του οποίου έγινε η επιλογή των δύο δεδομένων αριθμών μ και ν. Η υπόθεση ότι το όνομα του ζητούμενου τετραγώνου είναι το $1x^2$, ισχύει και γι' αυτήν τη διαδικασία. Αφού το όνομα αντικατασταθεί στις συνθήκες του προβλήματος, χρησιμοποιείται ο απλός κανόνας για να προκύψει το πρώτο κριτήριο που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί μ και ν: το πηλίκο $\frac{\mu}{\nu}$ θα είναι ένας τετράγωνος αριθμός, αφού είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του K κύβου και της πλευράς του, $\sqrt[3]{K}$. Μάλιστα το τετράγωνο θα έχει την ίδια πλευρά με τον κύβο K. Από την τελευταία παρατήρηση και τη δεύτερη συνθήκη του προβλήματος, προκύπτει το επόμενο κριτήριο που πρέπει να ικανοποιούν οι δεδομένοι αριθμοί: το πηλίκο $\sqrt{\frac{\mu}{\nu}} \div \nu$ θα πρέπει να είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Θεωρώντας τα ισοδύναμα των δύο κριτηρίων, προκύπτει πως το γινόμενο $\mu \cdot \nu$ θα πρέπει να είναι τετράγωνος αριθμός, που να έχει πλευρά έναν τετράγωνο αριθμό.

Πρόβλημα 22

Γενική διατύπωση: $K_A \mid$ αν $\mu, \nu \in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu K_A \longrightarrow K,\ \nu K_A \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Συνθήκη επιλυσιμότητας: το πηλίκο μ ÷ ν πρέπει να είναι ένας τετράγωνος αριθμός T

και το πηλίκο $\sqrt{T} \div$ ν πρέπει να είναι ένας κυβικός αριθμός K_1

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid 91\frac{1}{8}K_A \longrightarrow K,\ 2K_A \longrightarrow \sqrt[3]{K}$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$		
	Πολλαπλ. το $1x^3$ επί 2 $\longrightarrow 2x^3$	
	Πολλαπλ. το $1x^3$ επί $91\frac{1}{8} \longrightarrow 91\frac{1}{8}x^3$	
	<Διαιρώ το $91\frac{1}{8}x^3$ με $2x^3 \longrightarrow (6\frac{3}{4})^2$ >	
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 6\frac{3}{4}$		
		$< 2x^3 = 6\frac{3}{4} >$

Το όνομα στον ζητούμενο κυβικό αριθμό, δίνεται απευθείας. Το δεύτερο όνομα είναι παράγωγο.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$< 2x^3 = 6\frac{3}{4} >$			
	$< 1x^3 = \left(1\frac{1}{2}\right)^3 >$		
		$< x = 1\frac{1}{2} >$	
			$K_A = 3\frac{3}{8}$

Είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα ότι έχει ήδη παρουσιαστεί ο τρόπος που καθορίζονται τα κριτήρια για την επιλογή των δεδομένων αριθμών. Παρ' όλα αυτά, το μεγαλύτερο μέρος του κειμένου που αντιστοιχεί στο πρόβλημα 22, αφορά στη λεπτομερή παρουσίαση της ίδιας διαδικασίας, καθώς και στον τρόπο επιλογής ενός ζεύγους αριθμών που ικανοποιεί τα κριτήρια αυτά.

Η διαδικασία ξεκινά με την απόδοση του ονόματος $1x^3$ στον ζητούμενο κυβικό αριθμό K_A. Έπειτα, κάνοντας αντικατάσταση στις δύο συνθήκες του προβλήματος και αξιοποιώντας τον κανόνα της διαίρεσης ενός κύβου με την πλευρά του, προκύπτει πως το πηλίκο $\frac{\mu}{\nu}$ πρέπει να είναι ένα τετράγωνο. Στη συνέχεια, από χρήση της δεύτερης συνθήκης του προβλήματος, προκύπτει και ότι το πηλίκο $\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}}{\nu}$ πρέπει να είναι ένας κύβος.

Ακολουθεί ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η επιλογή των δεδομένων αριθμών. Αρχικά σταθεροποιείται ο ένας από τους δύο αριθμούς, αυτός που και στα δύο κριτήρια εμφανίζεται ως διαιρέτης, και συμβολίσαμε με ν (ν = 2). Στη συνέχεια, σύμφωνα με τη δεύτερη συνθήκη για τους δεδομένους αριθμούς, επιλέγεται ο $\frac{27}{4}$, έτσι ώστε $\frac{27}{4} \div 2$ είναι κύβος. Κατόπιν, μπορεί να βρεθεί το τετράγωνο $\frac{\mu}{\nu}$, το οποίο θα είναι $\left(\frac{27}{4}\right)^2$.

Τέλος, από το πρώτο κριτήριο που προσδιορίστηκε, μπορεί να βρεθεί το μ το οποίο θα προκύπτει από το γινόμενο $\nu \cdot \left(\frac{27}{4}\right)^2$, αφού ν = 2. Ο μ βρέθηκε τελικά να είναι ο αριθμός $91\frac{1}{8}$.

Έτσι, για τον προσδιορισμό των δεδομένων αριθμών, ο λύτης έπρεπε να λύσει ένα βοηθητικό πρόβλημα που προέκυψε. Στο κείμενο προτάσσεται αυτή η διαδικασία, καθώς αποτελεί προϋπόθεση για τη συγκεκριμένη διατύπωση του κύριου προβλήματος.

Η επίλυση του αρχικού προβλήματος δεν γίνεται αναλυτικά, παρά μόνο δίνεται η υπόδειξη να ακολουθηθεί η πορεία επίλυσης των προηγούμενων προβλημάτων. Αναφέρεται μόνο το όνομα που αντιστοιχεί στον ζητούμενο αριθμό και η τελική του τιμή. Κατόπιν γίνεται η επαλήθευση.

Στο κείμενο γίνεται η παρατήρηση, πως η διαδικασία που παρουσιάζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να εφαρμοστεί σε καθένα από τα προβλήματα που εμπλέκει δοδομένους αριθμούς, προκειμένου ο λύτης να βρει τα κατάλληλα κριτήρια για την επιλογή τους.

Στα παρακάτω θα σημειώνουμε με T_T , T_K , K_T , K_K τα «τετράγωνο τετραγώνου», «τετράγωνο κύβου», «κύβος τετραγώνου» και «κύβος κύβου» αντίστοιχα.

Πρόβλημα 23

Γενική διατύπωση: $T_A\,, T_B \;\Big|\; T_{T_A} + T_{T_B} \longrightarrow K$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$T_A \coloneqq 1x^2$		
$B \coloneqq 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$	
	Το τετράγωνο του $1x^2$ είναι $1x^4$	
	Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$	
	Προσθέτω $1x^4$ και $16x^4 \longrightarrow 17x^4$	
		$17x^4$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κυβικό αριθμό (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 3x$		
	Ο κύβος του $3x$ είναι $27x^3$	
		$17x^4 = 27x^3$

Τα δύο πρώτα ονόματα δόθηκαν απευθείας, και το τρίτο όνομα δόθηκε με την τεχνική al-istiqra’.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$17x^4 = 27x^3$			
	<Διαιρώ με $1x^3$:>		
	$17x = 27$		
		$x = \frac{27}{17}$	
			$T_A = \frac{729}{289}, T_B = \frac{2916}{289}$

Πρόβλημα 24

Γενική διατύπωση: $T_A, T_B \mid T_{T_B} - T_{T_A} \longrightarrow K$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A = 1x$		
$B = 2x$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$	
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$	
	<το τετράγωνο του $1x^2$ είναι $1x^4$ >	
	<το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$ >	
	Αφαιρώ $1x^4$ από $16x^4 \longrightarrow 15x^4$	
		$15x^4$ πρέπει να είναι ίσο με έναν κύβο (K)
$\sqrt[3]{K} \coloneqq 5x$		
	Διαιρώ το $15x^4$ με $5x \longrightarrow 3x^3$	
	<το τετράγωνο του $5x$ είναι $25x^2$>	
		$3x^3 = 25x^2$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας, ενώ το τρίτο με την τεχνική al-istiqra’.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$3x^3 = 25x^2$			
	Διαιρώ με $1x^2$: $3x = 25$		
		$x = 8\frac{1}{3}$	
			$T_A = 69\frac{4}{9}$, $T_B = 277\frac{7}{9}$

Παρατηρούμε ότι τα μονώνυμα που βρίσκονται στα δύο μέλη της εξίσωσης, έχουν ήδη υποστεί απλοποίηση από το στάδιο εκτέλεσης των πράξεων.

Πρόβλημα 25

Γενική διατύπωση: $T_A, K_B \mid T_{T_A} + T_{K_B} \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$B = 1x$		
	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$	
$A = 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$ Το τετράγωνο του $1x^3$ είναι $1x^6$ Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$ Προσθέτω $1x^6$ και $16x^4 \longrightarrow 1x^6 + 16x^4$	
		$1x^6 + 16x^4$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$T \coloneqq 25x^4$		
		$1x^6 + 16x^4 = 25x^4$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra' που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος. Το υποπρόβλημα αντιστοιχεί στο πρόβλημα II.10 των *Αριθμητικών.*

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^6 + 16x^4 = 25x^4$			
	Αφαιρώ $16x^4$ και από τα δύο μέλη: $1x^6 = 9x^4$ Διαιρώ με $1x^4$: $1x^2 = 9$		
		$x = 3$	
			$K_B = 27,\ T_A = 36$

Το όνομα του τετραγώνου αριθμού T δεν μπορεί να επιλεγεί με τυχαίο τρόπο, καθώς η απλοποιημένη εξίσωση αναμένεται να είναι δευτέρου βαθμού. Γι' αυτό, ακολουθείται μία αλγεβρική διαδικασία ώστε να βρεθεί το κριτήριο που περιορίζει την επιλογή του ονόματος. Αυτό επιτυγχάνεται καταστρώνοντας μια εξίσωση που με σύγχρονους όρους θα χαρακτηρίζαμε παραμετρική. Με δεδομένο το πρώτο μέλος της υπό διαμόρφωση εξίσωσης $1x^6 + 16x^4$, το τετράγωνο T επιλέγεται να είναι ένα πλήθος από Δυναμοδυνάμεις, έστω μx^4 σε μοντέρνο συμβολισμό, όπου μ ένας τετράγωνος αριθμός. Τότε συμπληρώνεται η εξίσωση $1x^6 + 16x^4 = \mu x^4$, με σκοπό να προσδιοριστεί ένα κατάλληλο μ .Έπειτα από την εφαρμογή al-jabr, al-muqābala αλλά και την απλοποίησή της με διαίρεση, προκύπτει ότι $x^2 = \mu - 16$. Προκειμένου η εξίσωση να είναι επιλύσιμη, η διαδικασία καταλήγει σε ένα υποπρόβλημα το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_1, T_2 \mid T_2 - T_1 \longrightarrow 16$, όπου $T_1 = x^2$ και $T_2 = \mu$

Η λύση του υποπροβλήματος δίνεται αμέσως, αφού αντιστοιχεί στο ήδη λυμένο πρόβλημα II.10 του δεύτερου βιβλίου των *Αριθμητικών:* είναι τα τετράγωνα 25 και 9. Παρατηρούμε πως το μεγαλύτερο από τα δύο τετράγωνα αντιστοιχεί στον συντελεστή μ .Τώρα μπορεί να αποδοθεί το κατάλληλο όνομα στον τετράγωνο T, να συμπληρωθεί η εξίσωση στην οποία μετατρέπεται το κυρίως πρόβλημα ($1x^6 + 16x^4 = 25x^4$) , και κατόπιν να λυθεί.

Επισημαίνουμε ότι με την επίλυση του υποπροβλήματος βρέθηκε και ο άγνωστος αριθμός x . Παρ' όλα αυτά, το γεγονός παραβλέπεται, και η επίλυση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται κανονικά.

Πρόβλημα 26

Γενική διατύπωση (πρώτη περίπτωση): $K_A, T_B \mid T_{K_A} - T_{T_B} \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$		
$T_B = 4x^2$		
	Το τετράγωνο του $1x^3$ είναι $1x^6$	
	Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$	
	Αφαιρώ $16x^4$ από $1x^6 \longrightarrow 1x^6 - 16x^4$	
		$1x^6 - 16x^4$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 3x^2$		
	Το τετράγωνο του $3x^2$ είναι $9x^4$	
		$1x^6 - 16x^4 = 9x^4$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra' που προϋποθέτει την επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος.

Το σκεπτικό είναι όμοιο με εκείνο του προβλήματος 25. Έτσι, αν ο τετράγωνος T θεωρηθεί να είναι μx^4 με μ τετράγωνο αριθμό, το υποπρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$T_1, T_2 \mid T_2 - T_1 \longrightarrow 16$, όπου $T_1 = \mu$ και $T_2 = x^2$

Το υποπρόβλημα αντιστοιχεί και πάλι στο πρόβλημα ΙΙ.10. Έτσι, ο κατάλληλος «συντελεστής» για το όνομα του T προκύπτει να είναι το 9 και το τρίτο όνομα που δίνεται είναι $\sqrt{T} \coloneqq 3x^2$.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^6 - 16x^4 = 9x^4$			
	Προσθέτω $16x^4$ και στα δύο μέλη: $1x^6 = 25x^4$		
	<διαιρώ με $1x^4$:> $1x^2 = 25$		
		$x = 5$	
			$K_A = 125,\ T_B = 100$

Γενική διατύπωση (δεύτερη περίπτωση): $K_A, T_B \mid T_{T_B} - T_{K_A} \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση

$K_A \coloneqq 1x^3$ $B = 5x$	< το τετράγωνο του $1x^3$ είναι $1x^6$ > < το τετράγωνο του $5x$ είναι $25x^2$ > <το τετράγωνο του $25x^2$ είναι $625x^4$ > <αφαιρώ $1x^6$ από $625x^4 \longrightarrow 625x^4 - 1x^6$ >	
		$625x^4 - 1x^6$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$T \coloneqq 225x^4$		$625x^4 - 1x^6 = 225x^4$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra᾽ που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος.

Εάν το T θεωρηθεί να είναι ένα πλήθος Δυναμοδυνάμεων μx^4 με μ τετράγωνο αριθμό, το υποπρόβλημα που οδηγεί στην επιλογή του τελευταίου ονόματος, μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως:

$T_1, T_2 \mid 625 \longrightarrow T_1 + T_2$, όπου $T_1 = x^2$ και $T_2 = \mu$ δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Αυτήν τη φορά υπάρχει ρητή αναφορά στο κείμενο, που παραπέμπει τον αναγνώστη στο δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών*. Το ήδη λυμένο πρόβλημα που αντιστοιχεί στο υποπρόβλημα είναι το ΙΙ.8, και το μ επιλέγεται να είναι το 225.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$625x^4 - 1x^6 = 225x^4$	<αποκατάσταση, αναγωγή και διαίρεση>: $1x^2 = 400$	$x = 20$	$K_A = 8000,\ T_B = 10{,}000$

Πρόβλημα 27

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid \alpha\nu\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ T_{K_A} + \mu T_B \longrightarrow T$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid T_{K_A} + 5T_B \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$	Το τετράγωνο του $1x^3$ είναι $1x^6$	
$B \coloneqq 2x^2$	Το τετράγωνο του $2x^2$ είναι $4x^4$ 5 φορές το $4x^4 \longrightarrow 20x^4$ Προσθέτω $20x^4$ και $1x^6 \longrightarrow 1x^6 + 20x^4$	
		$1x^6 + 20x^4$ πρέπει να είναι ίσο με ένα τετράγωνο (T)

$T \coloneqq 36x^4$		$1x^6 + 20x^4 = 36x^4$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra' , που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος.

Το σκεπτικό για την τρίτη ονοματοδοσία είναι όμοιο με εκείνο που ακολουθήθηκε στα προβλήματα 25 και 26. Εάν το T θεωρηθεί να είναι μx^4 με μ τετράγωνο αριθμό, το υποπρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής:

$T_1, T_2 \mid T_2 - T_1 \longrightarrow 20$, όπου $T_1 = x^2$ και $T_2 = \mu$, δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Το παραπάνω πρόβλημα συμπεριλαμβάνεται στα ήδη λυμένα των *Αριθμητικών*, και αντιστοιχεί στο ΙΙ.10. Δύο τετράγωνοι αριθμοί που ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος είναι οι 36 και 16, και έτσι το μ βρέθηκε να είναι 36.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^6 + 20x^4 = 36x^4$	Αφαιρώ $20x^4$ και από τα δύο μέλη: $16x^4 = 1x^6$ Διαιρώ με $1x^4$: $16 = 1x^2$	$x = 4$	$K_A = 64$, $T_B = 1024$

Πρόβλημα 28

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \,\big|\, αν\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ τότε\ T_{T_B} + \mu K_A \longrightarrow T$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \,\big|\, T_{T_B} + 10K_A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$	10 φορές το $1x^3 \longrightarrow 10x^3$	
$B \coloneqq 2x$	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$ Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$ Προσθέτω $16x^4$ και $10x^3 \longrightarrow 16x^4 + 10x^3$	$16x^4 + 10x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 6x^2$	Διαιρώ το $16x^4 + 10x^3$ με $6x^2 \longrightarrow 2\frac{2}{3}x^2 + 1\frac{2}{3}x$	$2\frac{2}{3}x^2 + 1\frac{2}{3}x = 6x^2$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra'.

Παρατηρούμε πως πραγματοποιείται διαίρεση πριν την κατάστρωση της εξίσωσης, με βάση τον κανόνα ότι το πηλίκο της διαίρεσης ενός τετραγώνου με την πλευρά του, είναι η ίδια η πλευρά του τετραγώνου. Έτσι, από το διώνυμο $16x^4 + 10x^3$ προκύπτει ένα άλλο μικρότερου βαθμού. Με αυτόν τον τρόπο, η εξίσωση που καταστρώνεται είναι δεύτερου και όχι τετάρτου βαθμού.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$2\frac{2}{3}x^2 + 1\frac{2}{3}x = 6x^2$	Αφαιρώ $2\frac{2}{3}x^2$ και από τα δύο μέλη: $3\frac{1}{3}x^2 = 1\frac{2}{3}x$ <διαιρώ με $1x$:> $3\frac{1}{3}x = 1\frac{2}{3}$	$x = \frac{1}{2}$	$K_A = \frac{1}{8}, T_B = 1$

Πρόβλημα 29

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_{K_A} + T_{T_B} \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$	Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$	
$B \coloneqq 2x^2$	Το τετράγωνο του $2x^2$ είναι $4x^4$ Το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$ Προσθέτω $16x^8$ και $1x^9 \longrightarrow 1x^9 + 16x^8$	$1x^9 + 16x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 6x^4$	Το τετράγωνο του $6x^4$ είναι $36x^8$	$1x^9 + 16x^8 = 36x^8$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra’.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^9 + 16x^8 = 36x^8$	Αφαιρώ $16x^8$ και από τα δύο μέλη: $1x^9 = 20x^8$ Διαιρώ με $1x^8$: $1x = 20$	$x = 20$	$K_A = 8000$, $T_B = 640{,}000$

Πρόβλημα 30

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_{K_A} - T_{T_B} \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$		
	Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$	
$B \coloneqq 2x^2$		
	Το τετράγωνο του $2x^2$ είναι $4x^4$ Το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$ <αφαιρώ $16x^8$ από $1x^9 \longrightarrow 1x^9 - 16x^8$ >	
		$1x^9 - 16x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 2x^4$		
	Το τετράγωνο του $2x^4$ είναι $4x^8$	
		$1x^9 - 16x^8 = 4x^8$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra᾿.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$1x^9 - 16x^8 = 4x^8$			
	Προσθέτω $16x^8$ και στα δύο μέλη: $1x^9 = 20x^8$ Διαιρώ με $1x^8$: $1x = 20$		
		$x = 20$	
			$K_A = 8000$, $T_B = 640{,}000$

Στο σχόλιο που ακολουθεί, ο λύτης παρατηρεί τα αποτελέσματα των προβλημάτων 29 και 30, και συμπεραίνει ότι ταυτίζονται. Επομένως, μπορεί να βρεθούν δύο αριθμοί, ο ένας κυβικός και ο δεύτερος τετράγωνος, που να ικανοποιούν τα ζητούμενα των δύο προβλημάτων ταυτόχρονα.

Πρόβλημα 31

Γενική διατύπωση: $T_A, K_B \mid T_{T_A} - K_{K_B} \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_B \coloneqq 1x^3$		
	Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$	
$A \coloneqq 2x^2$		
	Το τετράγωνο του $2x^2$ είναι $4x^4$ Το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$ Αφαιρώ $1x^9$ από $16x^8 \longrightarrow 16x^8 - 1x^9$	
		$16x^8 - 1x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 2x^4$		
	Διαιρώ το $16x^8 - 1x^9$ με $2x^4 \longrightarrow 8x^4 - \frac{1}{2}x^5$	

	$8x^4 - \frac{1}{2}x^5 = 2x^4$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra'.

Παρατηρούμε πως, όπως και στο πρόβλημα 28, η διαίρεση που πραγματοποιείται πριν την κατάστρωση της εξίσωσης, «απλοποιεί» το αρχικό διώνυμο $16x^8 - 1x^9$. Έτσι, η εξίσωση που καταστρώνεται είναι πέμπτου και όχι ενάτου βαθμού.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$8x^4 - \frac{1}{2}x^5 = 2x^4$	Προσθέτω $\frac{1}{2}x^5$ και στα δύο μέλη: $8x^4 = 2x^4 + \frac{1}{2}x^5$ Αφαιρώ $2x^4$ και από τα δύο μέλη: $6x^4 = \frac{1}{2}x^5$ <Διαιρώ με $1x^4$:> $\frac{1}{2}x = 6$	$x = 12$	$K_B = 1728, T_B = 82{,}944$

Πρόβλημα 32

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid αν\ μ \in \mathbb{Q}^+ \ τότε\ K_{K_A} + μT_B K_A \longrightarrow T$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_{K_A} + 5T_B K_A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$	Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$	
$B \coloneqq 2x^3$	Το τετράγωνο του $2x^3$ είναι $4x^6$ Πολλαπλ. $4x^6$ επί $1x^3 \longrightarrow 4x^9$ 5 φορές $4x^9 \longrightarrow 20x^9$ Προσθέτω $1x^9$ και $20x^9 \longrightarrow 21x^9$	$21x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 7x^4$	Το τετράγωνο του $7x^4$ είναι $49x^8$	$21x^9 = 49x^8$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$21x^9 = 49x^8$	Διαιρώ με $1x^8$: $21x = 49$		

		$x = 2\frac{1}{3}$	$K_A = \frac{343}{27}, T_B = \frac{470,596}{729}$

Πρόβλημα 33

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid \alpha\nu\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ K_{K_A} - \mu T_B K_A \longrightarrow T$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_{K_A} - 3T_B K_A \longrightarrow T$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$		
	Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$	
$B \coloneqq \frac{1}{2}x^3$		
	Το τετράγωνο του $\frac{1}{2}x^3$ είναι $\frac{1}{4}x^6$	
	Πολλαπλ. το $\frac{1}{4}x^6$ με $1x^3 \longrightarrow \frac{1}{4}x^9$	
	3 φορές το $\frac{1}{4}x^9 \longrightarrow \frac{3}{4}x^9$	
	Αφαιρώ $\frac{3}{4}x^9$ από $1x^9 \longrightarrow \frac{1}{4}x^9$	
		$\frac{1}{4}x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T)
$\sqrt{T} \coloneqq 1x^4$		
	<Το τετράγωνο του $1x^4$ είναι $1x^8$ >	
		$\frac{1}{4}x^9 = 1x^8$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας και το τρίτο με την τεχνική al-istiqra'.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
$\frac{1}{4}x^9 = 1x^8$			
	Διαιρώ με $1x^8$: $\frac{1}{4}x = 1$		
		$x = 4$	
			$K_A = 64, T_B = 1204$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι συνθήκες των δύο τελευταίων προβλημάτων είναι παρόμοιες, ο λύτης διευκρινίζει ότι με ανάλογο τρόπο μπορούν να λυθούν και άλλα προβλήματα που θεωρούνται του ίδιου τύπου με τα 32 και 33, όπως τα ακόλουθα:

i. $K_A, T_B \mid \alpha\nu\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ T_{T_B} + \mu T_B K_A \longrightarrow T$

ii. $K_A, T_B \mid \alpha\nu\ \mu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ K_{T_B} + \mu T_B K_A \longrightarrow T$

Πρόβλημα 34

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \,\middle|\, K_A + T_B \longrightarrow T_1,\ K_A - T_B \longrightarrow T_2$

Πρώτη επίλυση: χρησιμοποιώντας τη διπλή ισότητα

Στην πρώτη λύση για το πρόβλημα, γίνεται χρήση της τεχνικής που ο Διόφαντος ονομάζει διπλή ισότητα. Η διαδικασία στηρίζεται στον γνωστό κανόνα (ταυτότητα) που εκφράζει τη διαφορά δύο τετραγώνων σαν γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά των ριζών τους. Τα δύο τετράγωνα στην περίπτωσή μας, είναι τα διώνυμα $1x^3 + 4x^2$ και $1x^3 - 4x^2$, όπως γίνεται φανερό και από τον πίνακα. Ακολουθεί μία συγκεκριμένη σειρά από πράξεις, η οποία έχει παρουσιαστεί στο πρόβλημα ΙΙ.11 των *Αριθμητικών*. Υποθέτοντας ότι η διαφορά $8x^2$ αναλύεται στο γινόμενο των $2x$ και $4x$, μπορούν να βρεθούν οι τετράγωνοι αριθμοί T_1και T_2. Οι τετράγωνοι αριθμοί που βρέθηκαν, συμπληρώνουν τις δύο εξισώσεις, οι οποίες απλοποιούμενες καταλήγουν στην ίδια εξίσωση, $1x^3 = 5x^2$. Οι πράξεις φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$		
$T_B \coloneqq 4x^2$		
	<Προσθέτω $1x^3$ και $4x^2 \longrightarrow 1x^3 + 4x^2$ >	
	<Αφαιρώ $4x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 4x^2$ >	
		$1x^3 + 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1)
		$1x^3 - 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
	Αφαιρώ $1x^3 - 4x^2$ από $1x^3 + 4x^2 \longrightarrow 8x^2$	
	Το $8x^2$ αναλύεται σε γινόμενο των $2x$ και $4x$	
	Αφαιρώ το $2x$ από $4x \longrightarrow 2x$	
	Το μισό του $2x \longrightarrow 1x$	
	Το τετράγωνο του $1x \longrightarrow 1x^2$	
$T_2 \coloneqq 1x^2$		
		ii. $1x^3 - 4x^2 = 1x^2$
	Προσθέτω $2x$ και $4x \longrightarrow 6x$	
	Το μισό του $6x \longrightarrow 3x$	
	Το τετράγωνο του $3x \longrightarrow 9x^2$	
$T_1 \coloneqq 9x^2$		
		i. $1x^3 + 4x^2 = 9x^2$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας, και τα επόμενα δύο είναι παράγωγα.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
ii. $1x^3 - 4x^2 = 1x^2$			
i. $1x^3 + 4x^2 = 9x^2$			
	ii.προσθέτω $4x^2$ και στα δύο μέλη: $1x^3 = 5x^2$		
	i. αφαιρώ $4x^2$ και από τα δύο μέλη: $1x^3 = 5x^2$		
	i/ii.διαιρώ με $1x^2$: $1x = 5$		

	$x = 5$	$K_A = 125\,, T_B = 100$

Δεύτερη επίλυση:

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$		
$T_B \coloneqq 4x^2$		
	<Προσθέτω $1x^3$ και $4x^2 \longrightarrow 1x^3 + 4x^2$>	
	<Αφαιρώ $4x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 4x^2$>	
		i. $1x^3 + 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1)
		ii. $1x^3 - 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 20\frac{1}{4}x^2$		
$T_2 \coloneqq 12\frac{1}{4}x^2$		
		i. $1x^3 + 4x^2 = 20\frac{1}{4}x^2$
		ii. $1x^3 - 4x^2 = 12\frac{1}{4}x^2$

Τα πρώτα δύο ονόματα δόθηκαν απευθείας, όπως και στην πρώτη προτεινόμενη λύση. Τα επόμενα δύο ονόματα δόθηκαν με χρήση της τεχνικής al-istiqra', που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος. Ο λύτης οδηγείται στο υποπρόβλημα κατόπιν μιας αλγεβρικής διαδικασίας, αντίστοιχης με εκείνη που ακολουθήθηκε σε προηγούμενα προβλήματα. Η διαφορά είναι ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση, καταστρώνονται δύο εξισώσεις, με σκοπό να προσδιοριστούν κατάλληλα τα ονόματα των τετράγωνων αριθμών T_1 και T_2. Οι δύο εξισώσεις, που με σύγχρονους όρους αντιλαμβανόμαστε ως παραμετρικές, θα πρέπει μετά την απλοποίησή τους να καταλήγουν στην ίδια επιλύσιμη εξίσωση. Στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο αριθμούς T_1 και T_2 , αντιστοιχίζεται ένα πλήθος Δυνάμεων, έστω $\mu_1 x^2$ και $\mu_2 x^2$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Οι εξισώσεις $1x^3 + 4x^2 = \mu_1 x^2$ και $1x^3 + 4x^2 = \mu_2 x^2$ που σχηματίζονται, θα απλοποιηθούν στις $x = \mu_1 - 4$ και $x = \mu_2 + 4$. Για να βρεθούν δύο κατάλληλα μ_1 και μ_2, εξισώνονται οι δύο εκφράσεις για τον άγνωστο αριθμό x. Η διαδικασία οδηγεί σε ένα υποπρόβλημα, το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_3, T_4 \mid T_3 - T_4 \longrightarrow 8$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$, δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Το πρόβλημα αυτό ανήκει στα ήδη λυμένα, και είναι το II.10. Η λύση που δίνεται είναι το ζεύγος $20\frac{1}{4}$ και $12\frac{1}{4}$. Τότε, αποδίδονται τα κατάλληλα ονόματα στους τετράγωνους αριθμούς T_1 και T_2 που συμπληρώνουν τις δύο εξισώσεις, και η λύση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται από το σημείο που είχε σταματήσει. Οι δύο εξισώσεις $1x^3 + 4x^2 = 20\frac{1}{4}x^2$ και $1x^3 - 4x^2 = 12\frac{1}{4}x^2$ θα καταλήξουν μετά την απλοποίησή τους, στην εξίσωση που φαίνεται στη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα. Ακολουθεί η λύση της εξίσωσης και η εύρεση των ζητούμενων αριθμών.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $1x^3 + 4x^2 = 20\frac{1}{4}x^2$ ii. $1x^3 - 4x^2 = 12\frac{1}{4}x^2$			
	i/ii. $1x^3 = 16\frac{1}{4}x^2$		
		$x = 16\frac{1}{4}$	
			$K_A = 4291\frac{1}{64}$, $T_B = 1056\frac{1}{4}$

Πρόβλημα 35

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \,\big|\, T_B + K_A \longrightarrow T_1$, $T_B - K_A \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$ $T_B \coloneqq 4x^2$		
	<Προσθέτω $4x^2$ και $1x^3 \longrightarrow 4x^2 + 1x^3$ > <Αφαιρώ $4x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 4x^2 - 1x^3$ >	
		i. $4x^2 + 1x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $4x^2 - 1x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 7\frac{21}{25}x^2$ $T_2 \coloneqq \frac{4}{25}x^2$		
		i. $4x^2 + 1x^3 = 7\frac{21}{25}x^2$ ii. $4x^2 - 1x^3 = \frac{4}{25}x^2$

Τα δύο πρώτα ονόματα δόθηκαν απευθείας. Για τα ονόματα των τετραγώνων T_1και T_2 , χρησιμοποιήθηκε η τεχνική al-istiqra' , που προϋποθέτει τη λύση ενός υποπροβλήματος. Το σκεπτικό που ακολουθείται είναι ίδιο με αυτό της δεύτερης λύσης που προτάθηκε για το πρόβλημα 34. Αρχικά, στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο αριθμούς T_1και T_2 , αντιστοιχίζεται ένα πλήθος Δυνάμεων, έστω $\mu_1 x^2$ και $\mu_2 x^2$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Οι εξισώσεις $4x^2 + 1x^3 = \mu_1 x^2$ και $4x^2 - 1x^3 = \mu_2 x^2$ που σχηματίζονται, θα απλοποιηθούν στις $x = \mu_1 - 4$ και $x = 4 - \mu_2$. Για να βρεθούν δύο κατάλληλα μ_1 και μ_2, εξισώνονται οι δύο εκφράσεις για τον άγνωστο αριθμό x. Η διαδικασία οδηγεί σε ένα υποπρόβλημα, το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_3, T_4 \,\big|\,$ αν $4 + 4 \longrightarrow 8$ τότε $8 \longrightarrow T_3 + T_4$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί με $T_3 \neq T_4$

Το πρόβλημα αυτό, περιλαμβάνεται στο δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών*, και είναι το II.9. Η λύση που δίνεται είναι το ζεύγος $7\frac{21}{25}$ και $\frac{4}{25}$. Με την παραπάνω διαδικασία, βρέθηκαν τα πλήθη των Δυνάμεων που αντιστοιχούν στους τετράγωνους αριθμούς T_1 και T_2, και μπορούν να τους αποδοθούν κατάλληλα ονόματα. Η επίλυση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $4x^2 + 1x^3 = 7\frac{21}{25}x^2$ ii. $4x^2 - 1x^3 = \frac{4}{25}x^2$	i/ii.κάνω αποκατάσταση και αναγωγή:$3x^2 + \frac{21}{25}x^2 = 1x^3$ Διαιρώ με $1x^2$: $3\frac{21}{25} = 1x$	$x = 3\frac{21}{25}$	$K_A = \frac{884{,}736}{15{,}625}$, $T_B = \frac{36{,}864}{625}$

Πρόβλημα 36

Γενική διατύπωση: $K_A \,\middle|\, \alpha\nu\ \mu, \nu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ K_A + \mu T_A \longrightarrow T_1\ ,\ K_A - \nu T_A \longrightarrow T_2$

I. Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \,\middle|\, K_A + 4T_A \longrightarrow T_1\ ,\ K_A - 5T_A \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$K_A \coloneqq 1x^3$	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ Προσθέτω $1x^3$ και 4 φορές το $1x^2 \longrightarrow 1x^3 + 4x^2$ Από το $1x^3$ αφαιρώ 5 φορές το $1x^2 \longrightarrow 1x^3 - 5x^2$	i. $1x^3 + 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $1x^3 - 5x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 25x^2$ $T_2 \coloneqq 16x^2$		i. $1x^3 + 4x^2 = 25x^2$ ii. $1x^3 - 5x^2 = 16x^2$

Το πρώτο όνομα δίνεται απευθείας. Ακολουθεί η διατύπωση και η λύση ενός υποπροβλήματος, χωρίς να έχει προηγηθεί η διαδικασία που στοχεύει στον προσδιορισμό των ονομάτων για τα τετράγωνα T_1και T_2. Το υποπρόβλημα βέβαια, αφορά στην εύρεση αυτών των ονομάτων, όπως φαίνεται από το κείμενο που ακολουθεί τη διατύπωσή του. Υποθέτουμε ότι η εν λόγω διαδικασία έχει γίνει νοητά, εάν λάβουμε υπ’ όψιν μας τις επιλύσεις των προβλημάτων 34_{I} , 35 , αλλά και όλων των προβλημάτων που έπονται και που μπορούμε να τα εντάξουμε στην ίδια ομάδα. Έτσι, παρ’ ότι φαίνεται να έχει παραλειφθεί η εξήγηση, θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη λύση, βασίζεται στο ίδιο σκεπτικό. Το υποπρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_3, T_4 \mid T_3 - T_4 \longrightarrow 9$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$, δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Η λύση που δίνεται, είναι οι τετράγωνοι αριθμοί 25 και 16. Το πρόβλημα αντιστοιχεί στο ήδη λυμένο ΙΙ.10. Η επίλυση του κυρίως προβλήματος συνεχίζεται με τις πράξεις για τον σχηματισμό των διωνύμων $1x^3 + 4x^2$ και $1x^3 - 5x^2$, και τη συμπλήρωση των δύο εξισώσεων αποδίδοντας κατάλληλα ονόματα στους τετράγωνους T_1και T_2 . Σε αυτό το σημείο φαίνεται πως η επίλυση του υποπροβλήματος ήταν απαραίτητη για την επιλογή των δύο ονομάτων. Οι δύο εξισώσεις καταλήγουν ύστερα από απλοποίηση στην $1x^3 = 21x^2$. Ο ζητούμενος κύβος υπολογίζεται, αφού λυθεί η εξίσωση.

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $1x^3 + 4x^2 = 25x^2$ ii. $1x^3 - 5x^2 = 16x^2$			
	i.αφαιρώ $4x^2$ και από τα δύο μέλη: $1x^3 = 21x^2$ ii.προσθέτω $5x^2$ και στα δύο μέλη: $1x^3 = 21x^2$ i/ii.Διαιρώ με $1x^2$: $1x = 21$		
		$x = 21$	
			$K_A = 9261$

ΙΙ. Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid K_A + 5T_A \longrightarrow T_1$, $K_A - 4T_A \longrightarrow T_2$

Η δεύτερη περίπτωση του προβλήματος δίνεται περισσότερο ως παρατήρηση, αφού δεν συνοδεύεται από αναλυτική επίλυση. Αναφέρεται κατευθείαν η τιμή του άγνωστου αριθμού x, και οι τιμές των ζητούμενων αριθμών. Τέλος, γίνεται η επαλήθευση.

Η κατασκευή του πίνακα βασίστηκε στη λύση της πρώτης περίπτωσης. Οι ονοματοδοσίες γίνονται με όμοιο τρόπο.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$< K_A \coloneqq 1x^3 >$		
	$<$ το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2 >$	
		<i. $1x^3 + 5x^2$πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) >
$< T_1 \coloneqq 25x^2 >$		
		<ii. $1x^3 - 4x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2) >
$< T_2 \coloneqq 16x^2 >$		
		<i. $1x^3 + 5x^2 = 25x^2$ > <ii. $1x^3 - 4x^2 = 16x^2$

Αρχική Εξίσωση	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
<i. $1x^3 + 5x^2 = 25x^2$ > <ii. $1x^3 - 4x^2 = 16x^2$ >			
	<i.αφαιρώ $5x^2$ και από τα δύο μέλη: $1x^3 = 20x^2$> <ii.προσθέτω $4x^2$ και στα δύο μέλη: $1x^3 = 20x^2$> <i/ii. διαιρώ με $1x^2$: $1x = 20$>		
		$x = 20$	
			$K_A = 8000$

Πρόβλημα 37

Γενική διατύπωση: $K_A \,\big|\, αν\ \mu, \nu \in \mathbb{Q}^+\ τότε\ K_A + \mu T_A \longrightarrow T_1,\ K_A + \nu T_A \longrightarrow T_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \,\big|\, K_A + 5T_A \longrightarrow T_1,\ K_A + 10T_A \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ 5 φορές το $1x^2 \longrightarrow 5x^2$ 10 φορές το $1x^2 \longrightarrow 10x^2$ Προσθέτω $1x^3$ και $5x^2 \longrightarrow 1x^3 + 5x^2$ Προσθέτω $1x^3$ και $10x^2 \longrightarrow 1x^3 + 10x^2$	
		i. $1x^3 + 5x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $1x^3 + 10x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 = 53\frac{7}{9}x^2$ $T_2 = 58\frac{7}{9}x^2$		
		i. $1x^3 + 5x^2 = 53\frac{7}{9}x^2$ ii. $1x^3 + 10x^2 = 58\frac{7}{9}x^2$

Το πρώτο όνομα δόθηκε απευθείας. Για τα ονόματα των τετραγώνων T_1και T_2, ακολουθείται σκεπτικό ίδιο με αυτό της δεύτερης λύσης που προτάθηκε για το πρόβλημα 34. Αρχικά, στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο αριθμούς T_1και T_2 , αντιστοιχίζεται ένα πλήθος Δυνάμεων, έστω $\mu_1 x^2$ και $\mu_2 x^2$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Οι εξισώσεις $1x^3 + 5x^2 = \mu_1 x^2$ και $1x^3 + 10x^2 = \mu_2 x^2$ που σχηματίζονται, θα απλοποιηθούν στις $1x = \mu_1 - 5$ και $1x = \mu_2 - 10$. Για να βρεθούν δύο κατάλληλα μ_1 και μ_2, εξισώνονται οι δύο εκφράσεις για τον άγνωστο αριθμό x. Η διαδικασία οδηγεί σε ένα υποπρόβλημα, το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_3, T_4 \,\big|\, T_4 - T_3 \longrightarrow 5$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί και $T_3 > 5$.

Το πρόβλημα αυτό ανήκει στα ήδη λυμένα βιβλία, και είναι το ΙΙ.10. Η λύση που δίνεται είναι το ζεύγος $53\frac{7}{9}$ και $58\frac{7}{9}$. Με την παραπάνω διαδικασία, βρέθηκαν τα πλήθη των Δυνάμεων που αντιστοιχούν στους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2, και μπορούν να τους αποδοθούν κατάλληλα ονόματα. Η επίλυση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αρχική Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $1x^3 + 5x^2 = 53\frac{7}{9}x^2$ ii. $1x^3 + 10x^2 = 58\frac{7}{9}x^2$			
	i/ii. $1x^3 = 48\frac{7}{9}x^2$ Διαιρώ με $1x^2$: $1x = 48\frac{7}{9}$		
		$x = 48\frac{7}{9}$	
			$K_A = \frac{84{,}606{,}519}{9 \cdot 9 \cdot 9}$

Πρόβλημα 38

Γενική διατύπωση: $K_A \mid \alpha\nu\ \mu, \nu \in \mathbb{Q}^+\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ K_A - \mu T_A \longrightarrow T_1,\ K_A - \nu T_A \longrightarrow T_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid K_A - 5T_A \longrightarrow T_1,\ K_A - 10T_A \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ 5 φορές το $1x^2 \longrightarrow 5x^2$ 10 φορές το $1x^2 \longrightarrow 10x^2$ Αφαιρώ $5x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 5x^2$ Αφαιρώ $10x^2$ από $1x^3 \longrightarrow 1x^3 - 10x^2$	
		i. $1x^3 - 5x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $1x^3 - 10x^2$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 9x^2$ $T_2 \coloneqq 4x^2$		
		i. $1x^3 - 5x^2 = 9x^2$ ii. $1x^3 - 10x^2 = 4x^2$

Το όνομα του ζητούμενου κύβου δόθηκε απευθείας. Για να δοθούν τα ονόματα των τετραγώνων T_1και T_2, ακολουθείται η διαδικασία που παρουσιάστηκε στο πρόβλημα 34. Αρχικά, στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο αριθμούς T_1και T_2, αντιστοιχίζεται ένα πλήθος Δυνάμεων, έστω $\mu_1 x^2$ και $\mu_2 x^2$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Οι εξισώσεις $1x^3 - 5x^2 = \mu_1 x^2$ και $1x^3 - 10x^2 = \mu_2 x^2$ που σχηματίζονται, θα απλοποιηθούν στις $1x = \mu_1 + 5$ και $1x = \mu_2 + 10$. Για να βρεθούν δύο κατάλληλα μ_1 και μ_2, εξισώνονται οι δύο εκφράσεις για τον άγνωστο αριθμό x. Η διαδικασία οδηγεί σε ένα υποπρόβλημα, το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$T_3, T_4 \mid T_3 - T_4 \longrightarrow 5$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Μία περίπτωση του προβλήματος, έχει ήδη λυθεί σε προηγούμενο βιβλίο των *Αριθμητικών*, και είναι το πρόβλημα II.10. Η λύση που δίνεται εδώ, είναι το ζεύγος 9 και 4. Τότε, είναι δυνατόν να αποδοθούν κατάλληλα ονόματα στους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2 , και η επίλυση του αρχικού προβλήματος προχωρά όπως και στα προβλήματα που προηγήθηκαν.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $1x^3 - 5x^2 = 9x^2$ ii. $1x^3 - 10x^2 = 4x^2$	i/ii. $1x^3 = 14x^2$	$x = 14$	$K_A = 2744$

Πρόβλημα 39

Γενική διατύπωση: $K_A \mid \text{αν } \mu, \nu \in \mathbb{Q}^+ \text{ τότε } \mu T_A - K_A \longrightarrow T_1,\ \nu T_A - K_A \longrightarrow T_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A \mid 3T_A - K_A \longrightarrow T_1,\ 7T_A - K_A \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$		
	Το τετράγωνο του $1x$ είναι $1x^2$ 3 φορές το $1x^2 \longrightarrow 3x^2$ 7 φορές το $1x^2 \longrightarrow 7x^2$ Αφαιρώ $1x^3$ από $3x^2 \longrightarrow 3x^2 - 1x^3$ Αφαιρώ $1x^3$ από $7x^2 \longrightarrow 7x^2 - 1x^3$	
		i. $3x^2 - 1x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $7x^2 - 1x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 2\frac{1}{4}x^2$ $T_2 \coloneqq 6\frac{1}{4}x^2$		
		i. $3x^2 - 1x^3 = 2\frac{1}{4}x^2$ ii. $7x^2 - 1x^3 = 6\frac{1}{4}x^2$

Το όνομα του ζητούμενου κύβου δίνεται απευθείας. Η διαδικασία που ακολουθείται ώστε να βρεθούν κατάλληλα ονόματα για τα τετράγωνα T_1και T_2 , δεν διαφέρει από εκείνη που παρουσιάσαμε στο πρόβλημα 34. Αν διατηρήσουμε τους ίδιους συμβολισμούς και στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο αριθμούς T_1και T_2 αντιστοιχισθεί ένα πλήθος Δυνάμεων $\mu_1 x^2$ και $\mu_2 x^2$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί, θα σχηματισθούν οι εξισώσεις $3x^2 - 1x^3 = \mu_1 x^2$ και $7x^2 - 1x^3 = \mu_2 x^2$. Η διαδικασία οδηγεί με όμοιο τρόπο, στο ακόλουθο υποπρόβλημα:

$T_3, T_4 \mid T_4 - T_3 \longrightarrow 4$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί και $T_3 < 3$.

Το πρόβλημα αντιστοιχεί στο ΙΙ.10 των *Αριθμητικών*. Η λύση που δίνεται είναι το ζεύγος $2\frac{1}{4}$ και $6\frac{1}{4}$. Τότε, αποδίδονται κατάλληλα ονόματα στους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2 , και η επίλυση του αρχικού προβλήματος προχωρά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $3x^2 - 1x^3 = 2\frac{1}{4}x^2$ ii. $7x^2 - 1x^3 = 6\frac{1}{4}x^2$			
	i/ii. $1x^3 = \frac{3}{4}x^2$		
		$x = \frac{3}{4}$	
			$K_A = \frac{27}{8 \cdot 8}$

Πρόβλημα 40

Γενική διατύπωση: $T_A, K_B \mid T_{T_A} + K_B \longrightarrow T_1,\ T_{T_A} - K_B \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξίσωση
$A \coloneqq 2x$		
	Το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$ Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$	
$B \coloneqq 4x$		
	Ο κύβος του $4x$ είναι $64x^3$ Προσθέτω $16x^4$ και $64x^3 \longrightarrow 16x^4 + 64x^3$ Αφαιρώ $64x^3$ από $16x^4 \longrightarrow 16x^4 - 64x^3$	
		i. $16x^4 + 64x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $16x^4 - 64x^3$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 31\frac{9}{25}x^4$ $T_2 \coloneqq \frac{16}{25}x^4$		
		i. $16x^4 + 64x^3 = 31\frac{9}{25}x^4$ ii. $16x^4 - 64x^3 = \frac{16}{25}x^4$

Τα ονόματα στις πλευρές των ζητούμενων αριθμών, δίνονται απευθείας. Προκειμένου να επιλεγούν ονόματα για τους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2 , εφαρμόζεται η αλγεβρική διαδικασία που πρωτοπαρουσιάστηκε στο πρόβλημα 34. Αυτήν τη φορά, στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο τετράγωνους αριθμούς, αντιστοιχίζεται ένα πλήθος Δυναμοδυνάμεων, έστω $\mu_1 x^4$ και $\mu_2 x^4$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Τότε, θα σχηματισθούν οι εξισώσεις $16x^4 + 64x^3 = \mu_1 x^4$ και $16x^4 - 64x^3 = \mu_2 x^4$. Η διαδικασία οδηγεί με όμοιο τρόπο, στο ακόλουθο υποπρόβλημα:

$T_3, T_4 \mid$ αν $16 + 16 \longrightarrow 32$ τότε $32 \longrightarrow T_3 + T_4$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Η επίλυση του υποπροβλήματος, μπορεί να στηριχθεί στο ΙΙ.9 που συμπεριλαμβάνεται σε προηγούμενο βιβλίο των *Αριθμητικών.* Η λύση που δίνεται είναι το ζεύγος $31\frac{9}{25}$ και $\frac{16}{25}$. Τότε, αποδίδονται κατάλληλα ονόματα στους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2 , και η επίλυση του αρχικού προβλήματος προχωρά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $16x^4 + 64x^3 = 31\frac{9}{25}x^4$ ii. $16x^4 - 64x^3 = \frac{16}{25}x^4$			
	i/ii. $64x^3 = 15\frac{9}{25}x^4$ Διαιρώ με $1x^3$: $15\frac{9}{25}x = 64$		
		$x = 4\frac{1}{6}$	
			$T_A = 69\frac{4}{9}, K_B = 4629 + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}$

Πρόβλημα 41

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_A + T_{T_B} \longrightarrow T_1,\ K_A - T_{T_B} \longrightarrow \mathrm{T}_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$< B \coloneqq 2x >$		
	<το τετράγωνο του $2x$ είναι $4x^2$ > το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$	
$< A \coloneqq 4x >$		
	<ο κύβος του $4x$ είναι $64x^3$ > <προσθέτω $64x^3$ και $16x^4 \longrightarrow 64x^3 + 16x^4$ > <αφαιρώ $16x^4$ από $64x^3 \longrightarrow 64x^3 - 16x^4$ >	
		i. $64x^3 + 16x^4$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $64x^3 - 16x^4$ πρέπει να είναι

		ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 36x^4$ $T_2 \coloneqq 4x^4$		i. $64x^3 + 16x^4 = 36x^4$ ii. $64x^3 - 16x^4 = 4x^4$

Στις πλευρές του ζητούμενου κύβου και τετραγώνου, δίνονται ονόματα απευθείας. Ακολουθεί η γνώριμη διαδικασία για να βρεθούν τα ονόματα στους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο πρόβλημα 34_{II} . Με βάση την υπόθεση ότι οι τετράγωνοι θα είναι ένα πλήθος Δυναμοδυνάμεων, έστω $\mu_1 x^4$ και $\mu_2 x^4$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί, θα σχηματισθούν οι εξισώσεις $64x^3 + 16x^4 = \mu_1 x^4$ και $64x^3 - 16x^4 = \mu_2 x^4$. Η διαδικασία οδηγεί με όμοιο τρόπο στο ακόλουθο υποπρόβλημα, το οποίο θα φανερώσει ένα κριτήριο για τη σωστή επιλογή των ονομάτων των T_1και T_2:

$T_3, T_4 \mid T_3 - T_4 \longrightarrow 32$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Το πρόβλημα αυτό αντιστοιχεί στο ΙΙ.10 από τα ήδη λυμένα προβλήματα. Η λύση που δίνεται είναι το ζεύγος των τετράγωνων αριθμών 36 και 4. Τότε, αποδίδονται κατάλληλα ονόματα στους τετράγωνους αριθμούς T_1και T_2 , και η επίλυση του αρχικού προβλήματος προχωρά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $64x^3 + 16x^4 = 36x^4$ ii. $64x^3 - 16x^4 = 4x^4$	i/ii. $64x^3 = 20x^4$ Διαιρώ με $1x^3$:$20x = 64$	$x = 3\frac{1}{5}$	$T_B = 40\frac{24}{25}$, $K_A = 2097\frac{95}{625}$

Πρόβλημα 42

Ι. Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_{K_A} + T_{T_B} \longrightarrow \mathrm{T}_1$, $K_{K_A} - T_{T_B} \longrightarrow \mathrm{T}_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$A \coloneqq 2x$	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$ Ο κύβος του $8x^3$ είναι $512x^9$	
$B \coloneqq 4x^2$	το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$ το τετράγωνο του $16x^4$ είναι $256x^8$	
		i. $512x^9 + 256x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $512x^9 - 256x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)

Στο κείμενο, εξετάζονται διαδοχικά όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα. Παρατηρούμε ότι σε καμία από τις προτεινόμενες λύσεις, δεν δίνεται το τελικό αποτέλεσμα. Συμπεραίνουμε ότι ο Διόφαντος ενδιαφέρεται περισσότερο να παρουσιάσει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ο λύτης μπορεί να δουλέψει, όταν κληθεί να αντιμετωπίσει αντίστοιχα προβλήματα.

Τα ονόματα στις πλευρές των δύο ζητούμενων αριθμών δίνονται απευθείας, και οι ονοματοδοσίες αυτές ισχύουν για καθεμία από τις τρείς λύσεις που ακολουθούν.

Πρώτη επίλυση: με «διπλοϊσότητα»

Ο τρόπος αυτός παρουσιάστηκε αναλυτικά κατά την επίλυση του προβλήματος 34_I. Στο κείμενο που εξετάζουμε δίνεται η καθοδήγηση για μια επίλυση ίδιου τύπου. Αρχικά υπολογίζεται η διαφορά των δύο τετραγώνων, δηλαδή αφαιρείται το $512x^9 - 256x^8$ από το $512x^9 + 256x^8$, και το αποτέλεσμα προκύπτει $512x^8$. Έπειτα αναφέρεται πως η διαφορά αυτή, πρέπει να αναλυθεί σε γινόμενο δύο παραγόντων του «είδους» των Δυναμοδυνάμεων, έστω μx^4 και νx^4 . Στο επόμενο βήμα τετραγωνίζεται το ημιάθροισμα των δύο παραγόντων, το οποίο θα ισούται με το μεγαλύτερο τετράγωνο, δηλαδή το $512x^9 + 256x^8$. Το μικρότερο τετράγωνο $512x^9 - 256x^8$, θα ισούται με το τετράγωνο της ημιδιαφοράς των δύο παραγόντων. Επισημαίνεται ότι και από τις δύο εξισώσεις, έπειτα από εφαρμογή των al-jabr και al-muqābala, θα προκύψει ότι $512x^9$ ισούται με το ίδιο πλήθος από x^8. Έπειτα από τη διαίρεση με x^8, μπορεί να βρεθεί η τιμή του Αριθμού. Τέλος, θα υπολογιστούν ο ζητούμενος κύβος και τετράγωνο, ανατρέχοντας στα ονόματα που τους έχουν αποδοθεί και κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις.

Σε αυτόν τον πρώτο τρόπο αντιμετώπισης, τα ονόματα των τετραγώνων είναι παράγωγα.

Δεύτερη επίλυση:

Σε αυτήν τη λύση, γίνεται μια επισκόπηση της διαδικασίας που εφαρμόζεται στα περισσότερα προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου, από το 34_{II} έως το τέλος του. Τα ονόματα για τα τετράγωνα T_1και T_2 δίνονται με χρήση της τεχνικής al-istiqra', που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος. Ο λύτης οδηγείται στο υποπρόβλημα, εφαρμόζοντας μία αλγεβρική διαδικασία η οποία ξεκινά αντιστοιχίζοντας στη θέση του ονόματος καθενός από τους δύο αριθμούς T_1και T_2 , ένα πλήθος από το «είδος» x^8, έστω $\mu_1 x^8$ και $\mu_2 x^8$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Κατόπιν, καταστρώνονται οι εξισώσεις $512x^9 + 256x^8 = \mu_1 x^8$ και $512x^9 - 256x^8 = \mu_2 x^8$. Από την απλοποίησή τους, προκύπτουν δύο εκφράσεις για τον άγνωστο αριθμό x. Όταν οι δύο εκφράσεις εξισωθούν, ο λύτης θα οδηγηθεί στο εξής υποπρόβλημα:

$T_3, T_4 \mid T_3 - T_4 \longrightarrow 512$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Το υποπρόβλημα αντιστοιχεί στο ΙΙ.10, επομένως η λύση του εξασφαλίζεται, και οι αριθμοί που θα βρεθούν θα συμπληρώσουν τα ονόματα των τετράγωνων αριθμών T_1και T_2 . Τότε, οι εξισώσεις θα έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε να καταλήγουν στην ίδια απλοποιημένη εξίσωση, από την οποία θα βρεθεί ο άγνωστος αριθμός x. Στο τέλος θα υπολογισθούν οι τιμές των ζητούμενων αριθμών.

Τρίτη επίλυση : καταστρώνοντας εξισώσεις μικρότερου βαθμού

Η τρίτη δυνατότητα αντιμετώπισης του προβλήματος, δεν έχει παρουσιαστεί σε κάποιο από τα προβλήματα που προηγήθηκαν. Ωστόσο, υπάρχει η επισήμανση στο κείμενο ότι μπορεί να εφαρμοστεί στα περισσότερα από τα προβλήματα με αριθμό από το 34 έως το 44. Η ίδια πρακτική χρησιμοποιείται στο τελευταίο πρόβλημα του βιβλίου.

Η λογική του επιχειρήματος είναι πως τα διώνυμα $512x^9 + 256x^8$ και $512x^9 - 256x^8$, όντας τετράγωνα, μπορούν να απλοποιηθούν στα απλούστερα δυνατά τετράγωνα T_1' και T_2' , διαιρούμενα με κάποιο κατάλληλο τετράγωνο. Εδώ το τετράγωνο-διαιρέτης είναι το $16x^8$. Τα διώνυμα-πηλίκα είναι συνεπώς τα $32x + 16$ και $32x - 16$ αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να κατασκευαστούν δύο εξισώσεις μικρότερου βαθμού. Σε αυτό το σημείο, διατυπώνεται το ακόλουθο υποπρόβλημα:

$\varGamma \mid \varGamma + 16 \longrightarrow T_1'$, $\varGamma - 16 \longrightarrow T_2'$, όπου T_1' και T_2' τετράγωνοι αριθμοί.

Η λύση του δεν δίνεται, αλλά μπορεί να βρεθεί όπως στα προηγούμενα προβλήματα. Επιστρέφοντας στο κυρίως πρόβλημα, επισημαίνεται ότι ο άγνωστος αριθμός θα βρεθεί εάν ο $\varGamma$ διαιρεθεί με 32. Κατόπιν οι ζητούμενοι αριθμοί μπορούν να υπολογισθούν.

ΙΙ. Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid T_{T_B} + K_{K_A} \longrightarrow T_1 , T_{T_B} - K_{K_A} \longrightarrow T_2$

Η επίλυση της δεύτερης περίπτωσης του προβλήματος γίνεται αναλυτικά. Ο τρόπος με τον οποίον αντιμετωπίζεται το πρόβλημα, αντιστοιχεί στον δεύτερο από τους τρείς που περιγράφηκαν στην πρώτη περίπτωση.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$A \coloneqq 2x$		
	Ο κύβος του $2x$ είναι $8x^3$ Ο κύβος του $8x^3$ είναι $512x^9$	
$B \coloneqq 4x^2$		
	Το τετράγωνο του $4x^2$ είναι $16x^4$ Το τετράγωνο του $16x^4$ είναι $256x^8$	
		i. $256x^8 + 512x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $256x^8 - 512x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 501\frac{19}{25}x^8$		
$T_2 \coloneqq 10\frac{6}{25}x^8$		
		<i. $256x^8 + 512x^9 = 501\frac{19}{25}x^8$ > <ii. $256x^8 - 512x^9 = 10\frac{6}{25}x^8$ >

Τα δύο πρώτα ονόματα δίνονται απευθείας. Για τα ονόματα των δύο τετράγωνων αριθμών T_1και T_2 , ακολουθείται η αλγεβρική διαδικασία που καταλήγει σε ένα βοηθητικό πρόβλημα. Στη θέση των ονομάτων των τετραγώνων, θεωρούνται τα «είδη» που αντιστοιχούν στην όγδοη δύναμη του αγνώστου x^8, έστω $\mu_1 x^8$ και $\mu_2 x^8$ αντίστοιχα, όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί. Κατόπιν, καταστρώνονται οι εξισώσεις $256x^8 + 512x^9 = \mu_1 x^8$ και $256x^8 - 512x^9 = \mu_2 x^8$. Από την απλοποίησή τους, προκύπτουν δύο εκφράσεις για τον άγνωστο αριθμό x. Εξισώνοντας αυτές όπως έχουμε δει στις προηγούμενες περιπτώσεις, προκύπτει το ακόλουθο υποπρόβλημα:

$T_3, T_4 \mid$ αν $256 + 256 \longrightarrow 512$, τότε $512 \longrightarrow\ T_3 + T_4$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί και $T_3 \neq T_4$.

Το υποπρόβλημα αντιστοιχεί στο II.9, και η λύση που δίνεται είναι τα τετράγωνα $501\frac{19}{25}$ και $10\frac{6}{25}$. Σε αυτό το σημείο, αποδίδονται τα ονόματα στους τετράγωνους T_1 και T_2 . Η επίλυση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται, καταστρώνοντας τις δύο εξισώσεις. Στο κείμενο δίνεται κατευθείαν η απλοποιημένη εξίσωση, η οποία προκύπτει από τις δύο αρχικές, όπως φαίνεται στη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα. Την εύρεση του αγνώστου αριθμού x, ακολουθεί ο υπολογισμός των δύο ζητούμενων αριθμών.

Για να βρεθούν τα κατάλληλα ονόματα των τετραγώνων T_1 και T_2 , χρησιμοποιήθηκε η τεχνική al-istiqra' , που προϋποθέτει την επίλυση ενός υποπροβλήματος. Το συγκεκριμένο υποπρόβλημα, αντιστοιχεί σε μία περίπτωση του προβλήματος II.9.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
<i. $256x^8 + 512x^9 = 501\frac{19}{25}x^8$ >			
<ii. $256x^8 - 512x^9 = 10\frac{6}{25}x^8$ >			
	i/ii. $512x^9 = 245\frac{19}{25}x^8$		
	Διαιρώ με $1x^8$:		
	$512x = 245\frac{19}{25}$		
		$x = \frac{12}{25}$	
			$K_A = \frac{13{,}824}{25^3}, T_B = \frac{331{,}776}{625^2}$

Πρόβλημα 43

Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid$ αν μ, ν $\in \mathbb{Q}^+$ $τότε\ \ K_{K_A} +\ \mu T_{T_B} \longrightarrow T_1,\ K_{K_A} -\ \nu T_{T_B} \longrightarrow \mathrm{T}_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid\ K_{K_A} +\ 1\frac{1}{4} T_{T_B} \longrightarrow T_1\ ,\ \ K_{K_A} -\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})\, T_{T_B} \longrightarrow \mathrm{T}_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A := 1x^3$		
	Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$	
$B := 2x^2$		
	Το τετράγωνο του $2x^2$ είναι $4x^4$	
	Το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$	
	Πολλαπλ. το $1\frac{1}{4}$ επί $16x^8 \longrightarrow 20x^8$	

	Προσθέτω $1x^9$ και $20x^8 \longrightarrow 1x^9 + 20x^8$ Πολλαπλ. $\frac{3}{4}$ επί $16x^8 \longrightarrow 12x^8$ Αφαιρώ $12x^8$ από $1x^9 \longrightarrow 1x^9 - 12x^8$	
		i. $1x^9 + 20x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $1x^9 - 12x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
$T_1 \coloneqq 36x^8$ $T_2 \coloneqq 4x^8$		
		i. $1x^9 + 20x^8 = 36x^8$ ii. $1x^9 - 12x^8 = 4x^8$

Τα δύο ονόματα των ζητούμενων αριθμών δίνονται απευθείας. Για να βρεθούν τα κατάλληλα ονόματα των τετραγώνων T_1και T_2 , χρησιμοποιήθηκε η τεχνική al-istiqra' , που προϋποθέτει τη λύση ενός υποπροβλήματος. Ακολουθείται η διαδικασία που πρωτοπαρουσιάστηκε στο πρόβλημα 34_{II}. Στη θέση των ονομάτων των δύο τετραγώνων, θεωρούνται δύο αριθμοί από τα «είδη» που αντιστοιχούν στην όγδοη δύναμη του αγνώστου x^8 . Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, σχηματίζονται δύο εξισώσεις που αποσκοπούν στον προσδιορισμό των «συντελεστών» αυτών των «ειδών». Αν οι «συντελεστές» συμβολισθούν με μ_1 και μ_2 , όπου μ_1 και μ_2 τετράγωνοι αριθμοί, στο τέλος της διαδικασίας θα προκύψει το παρακάτω υποπρόβλημα:

$T_3, T_4 \mid T_4 + 32 \longrightarrow T_3$, όπου $T_3 = \mu_1$ και $T_4 = \mu_2$ δύο τετράγωνοι αριθμοί.

Το υποπρόβλημα είναι ισοδύναμο με την αναζήτηση δύο τετραγώνων που έχουν διαφορά 32 μονάδες, και αυτό παραπέμπει στο πρόβλημα II.10 των *Αριθμητικών*. Σε κάθε περίπτωση, η λύση του δίνεται κατευθείαν, αφού καθίσταται προφανής από τη διατύπωση του υποπροβλήματος. Οι δύο τετράγωνοι είναι οι 4 και 36. Η λύση του αρχικού προβλήματος συνεχίζεται, ύστερα από την απόδοση ονομάτων στους T_1και T_2 . Οι εξισώσεις συμπληρώνονται, απλοποιούνται σε μία κοινή που δίνει αποτέλεσμα 16.

Αρχικές Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i. $1x^9 + 20x^8 = 36x^8$ ii. $1x^9 - 12x^8 = 4x^8$	i/ii.κάνω αποκατάσταση, αναγωγή και διαίρεση	$x = 16$	$K_A = 4096,\ T_B = 262{,}144$

Πρόβλημα 44

I. Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid$ αν μ, ν $\in \mathbb{Q}^+$ $\textit{τότε}$ $\mu T_{T_B} + K_{K_A} \longrightarrow T_1,\ \nu T_{T_B} + K_{K_A} \longrightarrow T_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid 3T_{T_B} + K_{K_A} \longrightarrow T_1,\ 8T_{T_B} + K_{K_A} \longrightarrow T_1$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$A \coloneqq 1x$		

$B \coloneqq 2x^2$	Ο κύβος του $1x$ είναι $1x^3$ Ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$ Το τετράγωνο του $2x^2$ είναι $4x^4$ Το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$ 3 φορές $16x^8 \longrightarrow 48x^8$ 8 φορές $16x^8 \longrightarrow 128x^8$ Προσθέτω $1x^9$ και $48x^8 \longrightarrow 1x^9 + 48x^8$ Προσθέτω $1x^9$ και $128x^8 \longrightarrow 1x^9 + 128x^8$ Διαιρώ $1x^9 + 48x^8$ με $1x^8 \longrightarrow 1x + 48$ Διαιρώ $1x^9 + 128x^8$ με $1x^8 \longrightarrow 1x + 128$	i. $1x^9 + 48x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1) ii. $1x^9 + 128x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2) i'. $1x + 48$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1') ii'. $1x + 128$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2')

Η πορεία επίλυσης του προβλήματος είναι διαφορετική από εκείνη που ακολουθείται στα περισσότερα προβλήματα της τελευταίας ομάδας, με αριθμούς 34 έως και 43. Συμπίπτει ωστόσο, με την τρίτη λύση που προτάθηκε για το πρόβλημα 42.

Αρχικά, δίνονται τα ονόματα στους δύο ζητούμενους αριθμούς, απευθείας. Έπειτα, αφού κατασκευασθούν τα διώνυμα $1x^9 + 48x^8$ και $1x^9 + 128x^8$, διαιρούνται με τον κατάλληλο τετράγωνο αριθμό. Ο τετράγωνος αυτός είναι η όγδοη δύναμη του άγνωστου αριθμού, ή το x^8 . Τα νέα διώνυμα που προκύπτουν από την πράξη, είναι τετράγωνοι αριθμοί, εφ' όσον καθένα τους είναι πηλίκο μιας διαίρεσης μεταξύ δύο τετράγωνων. Ας τα ονομάσουμε T_1' και T_2' . Τώρα, ο λύτης καλείται να συμπληρώσει δύο εξισώσεις που περιλαμβάνουν μόνο την πρώτη δύναμη του άγνωστου αριθμού x. Με αυτόν τον τρόπο, το αρχικό πρόβλημα διαμορφώθηκε στο εξής απλούστερο:

$\Gamma \mid 48 + \Gamma \longrightarrow T_1', \ 128 + \Gamma \longrightarrow T_2'$, όπου T_1' και T_2' τετράγωνοι αριθμοί.

Στο παραπάνω πρόβλημα, ο Γ συμπίπτει με τον άγνωστο αριθμό x. Επομένως η απάντηση που δίνεται, το 16, είναι ο ίδιος ο Αριθμός. Πιθανολογούμε ότι ο λύτης δεν προχωρά στην απαλοιφή του αγνώστου x, επειδή στη μορφή που το δίνεται το πρόβλημα, μπορεί εύκολα να βρεθεί μια λύση. Διαφορετικά, το πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί ώστε να αντιστοιχεί στο II.10, ή να παραμείνει ως έχει και να αξιοποιηθεί το πρόβλημα II.11 των *Αριθμητικών*.

Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i'. $1x + 48$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1') ii'. $1x + 128$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2')		$x = 16$	$K_A = 4096, \ T_B = 262{,}144$

II. Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid$ αν μ, ν $\in \mathbb{Q}^+$ $τότε$ $K_{K_A} - \mu T_{T_B} \longrightarrow T_1,\ K_{K_A} - \nu T_{T_B} \longrightarrow T_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid K_{K_A} - 3T_{T_B} \longrightarrow T_1\ , K_{K_A} - 8T_{T_B} \longrightarrow T_2$

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$	<ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$ >	
$T_B \coloneqq 4x^4$	<το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$ >	
	<3 φορές το $16x^8 \longrightarrow 48x^8$ >	
	<8 φορές το $16x^8 \longrightarrow 128x^8$ >	
	<αφαιρώ $48x^8$ από $1x^9 \longrightarrow 1x^9 - 48x^8$>	
		i. $1x^9 - 48x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1)
	<αφαιρώ $128x^8$ από $1x^9 \longrightarrow 1x^9 - 128x^8$>	
		ii. $1x^9 - 128x^8$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
	Διαιρώ $1x^9 - 48x^8$ με $1x^8 \longrightarrow 1x - 48$	
		i'. $1x - 48$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1')
	Διαιρώ $1x^9 - 128x^8$ με $1x^8 \longrightarrow 1x - 128$	
		ii'. $1x - 128$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2')

Τα πρώτα δύο ονόματα δίνονται απευθείας. Κατόπιν, ακολουθείται μια διαδικασία όπως και στην πρώτη περίπτωση. Τα τετράγωνα T_1 και T_2 απλοποιούνται στα T_1' και T_2' αντίστοιχα, διαιρούμενα με τον τετράγωνο $1x^8$. Με τα νέα δεδομένα, το αρχικό πρόβλημα διαμορφώθηκε στο εξής απλούστερο:

$\Gamma \mid \Gamma - 48 \longrightarrow T_1'$, $\Gamma - 128 \longrightarrow T_2'$, όπου T_1' και T_2' τετράγωνοι αριθμοί.

Το νέο πρόβλημα αντιστοιχεί στο ήδη λυμένο πρόβλημα II.13. Δίνεται ως λύση το 192, που είναι και ο άγνωστος Αριθμός.

Παρατηρούμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί δεν υπολογίζονται με βάση την τιμή που βρέθηκε για τον άγνωστο αριθμό. Αντίθετα, υποθέτουμε για λόγους δυσκολίας εκτέλεσης των πράξεων με τον τριψήφιο αριθμό 192, ο υπολογισμός των ζητούμενων αριθμών προχωρά αξιοποιώντας τις αναλογίες μεταξύ των πλευρών από τους κύβους και τα τετράγωνα της συγκεκριμένης, και της πρώτης περίπτωσης του προβλήματος 44. Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με A_1 και B_1 τις πλευρές των ζητούμενων κύβου και τετραγώνου αντίστοιχα, αλλά και x_1 τον άγνωστο αριθμό για το πρόβλημα 44_I, αναφέρεται το γεγονός ότι $\frac{A}{A_1} = \frac{x}{x_1} = \frac{192}{16} = \frac{12}{1}$ και $\frac{B}{B_1} = \frac{2x^2}{2{x_1}^2} = \left(\frac{12}{1}\right)^2 = \frac{144}{1}$. Συνεπώς οι αριθμοί K_A και T_B υπολογίζονται για $A = 12\ και\ B = 144$.

Εξισώσεις	ΑπλοποιημένηΕξίσωση	Λύση	Απάντηση
i’. $1x - 48$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1') ii’. $1x - 128$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2')		$x = 192$	$K_A = 1728$, $T_B = 20{,}736$

III. Γενική διατύπωση: $K_A, T_B \mid$ αν μ, ν $\in \mathbb{Q}^+$ τότε $\mu T_{T_B} - K_{K_A} \longrightarrow T_1$, $\nu T_{T_B} - K_{K_A} \longrightarrow T_2$

Συγκεκριμένη διατύπωση: $K_A, T_B \mid 3T_{T_B} - K_{K_A} \longrightarrow T_1$, $8T_{T_B} - K_{K_A} \longrightarrow T_2$

Ο τρόπος αντιμετώπισης αυτής της τρίτης περίπτωσης του προβλήματος, δεν διαφέρει από εκείνον των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.

Ονοματοδοσίες	Πράξεις	Εξισώσεις
$K_A \coloneqq 1x^3$ $T_B \coloneqq 4x^4$	<ο κύβος του $1x^3$ είναι $1x^9$ <το τετράγωνο του $4x^4$ είναι $16x^8$ > <3 φορές το $16x^8 \longrightarrow 48x^8$ > <8 φορές το $16x^8 \longrightarrow 128x^8$ > <αφαιρώ $1x^9$ από $16x^8 \longrightarrow 48x^8 - 1x^9$>	
		i. $48x^8 - 1x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1)
	<αφαιρώ $1x^9$ από $128x^8 \longrightarrow 128x^8 - 1x^9$>	ii. $128x^8 - 1x^9$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2)
	Διαιρώ $48x^8 - 1x^9$ με $1x^8 \longrightarrow 48 - 1x$	i’. $48 - 1x$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1')
	Διαιρώ $128x^8 - 1x^9$ με $1x^8 \longrightarrow 128 - 1x$	ii’. $128 - 1x$ πρέπει να είναι ίσο με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2')

Τα δύο πρώτα ονόματα δίνονται απευθείας. Βασιζόμενος στο ίδιο ακριβώς σκεπτικό, ο Διόφαντος διαιρεί τα τετράγωνα T_1και T_2 με το τετράγωνο $1x^8$, και έτσι προκύπτουν τα νέα τετράγωνα T_1' και T_2' . Από τις δύο εξισώσεις που καταστρώνονται όπως φαίνεται στην τρίτη στήλη του ανωτέρω πίνακα, προκύπτει το ακόλουθο απλούστερο πρόβλημα:

$\Gamma \mid 48 - \Gamma \longrightarrow T_1', \; 128 - \Gamma \longrightarrow T_2'$, όπου T_1' και T_2' τετράγωνοι αριθμοί.

Το ήδη λυμένο πρόβλημα στο οποίο αντιστοιχεί το παραπάνω, είναι το ΙΙ.12. Μία λύση του μπορεί να βρεθεί και με δοκιμή. Η λύση που δίνεται για τον αριθμό Γ είναι το 47, ο οποίος είναι και ο Αριθμός. Στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός των ζητούμενων αριθμών.

Εξισώσεις	Απλοποιημένη Εξίσωση	Λύση	Απάντηση
i'. $48 - 1x$ πρέπει να είναι ίσα με έναν τετράγωνο αριθμό (T_1') ii'. $128 - 1x$ πρέπει να είναι ίσα με έναν τετράγωνο αριθμό (T_2')		$x = 47$	$K_A = 103{,}823$, $T_B = 19{,}518{,}724$

3.4 Συμπεράσματα

Αφού εξετάσαμε αναλυτικά και τα 44 προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου των *Αριθμητικών* στο πλαίσιο της κατηγορίας της Προ-μοντέρνας άλγεβρας, μπορούμε να προχωρήσουμε σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τις ιδιαίτερες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή των προβλημάτων σε εξισώσεις, καθώς και με τα διαφορετικά χαρακτηριστικά που παρουσιάζει το συγκεκριμένο κείμενο συγκρινόμενο με τα βιβλία του έργου που σώζονται στα ελληνικά.

3.4.1 Η δομή των προβλημάτων του τέταρτου αραβικού βιβλίου

Τα προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου είναι παρουσιασμένα πολύ πιο αναλυτικά από εκείνα των ελληνικών βιβλίων των *Αριθμητικών*. Στο στάδιο της κατάστρωσης της εξίσωσης, η εκτέλεση των περισσότερων πράξεων περιγράφεται λεπτομερώς, οι κανόνες που χρησιμοποιούνται αναφέρονται ακόμα κι αν είναι πολύ απλοί, και παρέχεται εξήγηση για τον τρόπο που επιλέγονται τα περισσότερα από τα ονόματα των άγνωστων αριθμών. Σχετικά με τα υπόλοιπα στάδια της επίλυσης των προβλημάτων, η απλοποίηση της εξίσωσης γίνεται πάντα βήμα – βήμα, και σε κάθε πρόβλημα, μετά την εύρεση των ζητούμενων αριθμών γίνεται επαλήθευση για να επιβεβαιωθεί η ισχύς των σχέσεων που διατυπώνονται στις εκφωνήσεις. Στο τέλος, δίνεται ένα συμπέρασμα, όπου αναφέρονται οι συγκεκριμένοι αριθμοί που αποτελούν τη λύση του προβλήματος, οι ιδιότητές τους και οι συνθήκες που ικανοποιούν.

3.4.2 Υποπροβλήματα

Η απόδοση ονομάτων στους αριθμούς που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή κάθε προβλήματος σε εξίσωση, δεν είναι το ίδιο απλή σε όλες τις περιπτώσεις. Για την επιλογή ορισμένων ονομάτων, χρειάζεται να ακολουθηθεί μία αλγεβρική διαδικασία κατά την οποία διαμορφώνονται εξισώσεις που με σύγχρονους όρους θα χαρακτηρίζαμε παραμετρικές. Η διαδικασία αυτή, καταλήγει σε ένα βοηθητικό πρόβλημα, ή υποπρόβλημα όπως το αποκαλέσαμε, η επίλυση του οποίου είναι απαραίτητη για την εύρεση των κατάλληλων ονομάτων.

Τα υποπροβλήματα αποτελούν ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των διοφαντικών λύσεων του τέταρτου βιβλίου των *Αριθμητικών*. Εμφανίζονται σε 16 από τα 44 προβλήματά του. Συνήθως στο κείμενο δεν υπάρχει σχετική αναφορά, αλλά τα περισσότερα υποπροβλήματα αντιστοιχούν σε ήδη λυμένα προβλήματα του δεύτερου βιβλίου των *Αριθμητικών*. Ρητή αναφορά στο δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών*, γίνεται μόνο στα προβλήματα 26 και 35 (Sesiano 1982, 106.741-742).Τα προβλήματα από το δεύτερο βιβλίο των *Αριθμητικών* που χρησιμοποιούνται ως βοηθητικά, είναι τα II.8, II.9, II.10, II.11, II.12 και II.13. Συναντάμε βέβαια και υποπροβλήματα, των οποίων η λύση είναι προφανής. Εξαίρεση στα παραπάνω, αποτελεί το πρόβλημα 8/9, όπου χρησιμοποιείται το λυμένο πρόβλημα με αριθμό 6, του ίδιου του τέταρτου αραβικού βιβλίου (Sesiano 1982, 92.170-175). Ακόμη, το υποπρόβλημα που προκύπτει στο πρόβλημα 22, δεν αντιστοιχεί σε κάποιο ήδη λυμένο πρόβλημα, και λύνεται επιτόπου (Sesiano 1982, 102.600-609).

Αναφέραμε προηγουμένως ότι η λύση των υποπροβλημάτων συμβάλλει στον προσδιορισμό των ονομάτων ορισμένων αριθμών που συμμετέχουν στις εξισώσεις. Αυτό παρατηρείται στους παρακάτω δύο τύπους προβλημάτων:

- Στα προβλήματα όπου η επιλογή των ονομάτων για κάποιους άγνωστους αριθμούς, δεσμεύεται από το γεγονός ότι η τελική εξίσωση στην οποία μετασχηματίζεται το πρόβλημα είναι δευτέρου βαθμού. Τέσσερα προβλήματα ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία, τα 8/9, 25, 26 και 27.
- Σε όσα προβλήματα ο λύτης καλείται να διαχειριστεί δύο εξισώσεις, δηλαδή τα έντεκα τελευταία προβλήματα του βιβλίου, με αριθμούς από το 34 έως και το 44. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα ονόματα δύο τετράγωνων αριθμών πρέπει να επιλεγούν με τέτοιον τρόπο ώστε οι δύο υπό διαμόρφωση εξισώσεις, να ανάγονται σε μία.

Ιδιαίτερα θα αναφερθούμε στο πρόβλημα 44 (44_I , 44_{II} *και* 44_{III}). Τα αντίστοιχα βοηθητικά προβλήματα είναι διατυπωμένα έτσι ώστε η λύση τους να συμπίπτει με την τιμή του Αριθμού, ή αγνώστου x.

Μία ακόμα περίπτωση όπου η επίλυση του βοηθητικού προβλήματος δεν σχετίζεται με κάποια ονοματοδοσία, συναντάμε στο πρόβλημα 22. Συγκεκριμένα, με τη λύση του προσδιορίζονται οι δύο «δεδομένοι» αριθμοί, έτσι ώστε το αρχικό πρόβλημα να καθίσταται επιλύσιμο.

3.4.3 Η τεχνική al-istiqra' στο τέταρτο αραβικό βιβλίο

Στα περισσότερα προβλήματα του τέταρτου αραβικού βιβλίου, συναντάμε περιπτώσεις όπου το ήδη κατασκευασμένο μέλος της υπό διαμόρφωση εξίσωσης, πρέπει να εξισωθεί με έναν αριθμό τετράγωνο ή κυβικό, με τρόπο ώστε να προκύπτει λύση. Τις πιο πολλές φορές, προκειμένου να βρεθεί ένα κατάλληλο όνομα για τον τετράγωνο ή τον κύβο, χρησιμοποιείται η τεχνική istiqra'. Σε όλες τις περιπτώσεις των προβλημάτων που μελετήσαμε, η εξίσωση συμπληρώνεται από ένα μονώνυμο, δηλαδή κάποιο ax^n, όπου $n \in \{2,3,4,6,8\}$. Για να βρεθεί κάποιο μονώνυμο που να συμπληρώνει μια επιλύσιμη εξίσωση, θα πρέπει:

i. Να επιλεγεί ένα κατάλληλο «είδος» αριθμού και
ii. Να επιλεγεί ένας κατάλληλος «συντελεστής» αυτού του «είδους» αριθμού.

Το μονώνυμο που θα επιλεγεί, εξαρτάται από τους όρους που αποτελούν το κατασκευασμένο μέλος της εξίσωσης, οι οποίοι μπορεί να είναι

(I) μονώνυμο κάποιου βαθμού ax^n, όπου $n \in \{2,3,4,5,9\}$
(II) διώνυμο της μορφής $ax^n \pm bx^m$ όπου $n, m \in \{2,3,4,6,8,9\}$ και $|n-m| = 1$ ή 2

Τότε, εάν ισχύει η περίπτωση (I):

Για την επιλογή του «είδους»: λαμβάνεται υπ' όψιν η ιδιότητα που πρέπει να έχει ο αριθμός, δηλαδή αν το μονώνυμο είναι τετράγωνο ή κύβος, καθώς και τα «είδη» που συνιστούν το πρώτο μέλος της υπό διαμόρφωση εξίσωσης. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια οι εκθέτες στα δύο μέλη της εξίσωσης να έχουν τη μικρότερη δυνατή διαφορά.

Για την επιλογή του «συντελεστή»:

- Αν η διαφορά αυτή είναι 1, θα προκύπτει τελική εξίσωση της μορφής $ax = b$, οπότε ο «συντελεστής» επιλέγεται χωρίς ιδιαίτερο περιορισμό, μιας και η λύση μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ρητός αριθμός (τα έντεκα προβλήματα με αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 23, 24, 32 και 33).

- Δεν συναντάμε καμία περίπτωση που να χρησιμοποιείται τεχνική al-istiqraʾ και η διαφορά αυτή να είναι 2.

Εάν ισχύει η περίπτωση (ΙΙ):

Για την επιλογή του «είδους»: το «είδος» του μονωνύμου που συμπληρώνει την εξίσωση, αντιστοιχεί σε ένα από τα δύο «είδη» που εμφανίζονται στο πρώτο μέλος, δηλαδή x^n ή x^m, ανάλογα και με το αν το μονώνυμο πρέπει να είναι ένα τετράγωνο ή κύβος

Για την επιλογή του «συντελεστή» :

- Η επιλογή του συντελεστή εξαρτάται και πάλι από τη διαφορά των εκθετών n και m. Εάν αυτή είναι 1, θα προκύψει τελική εξίσωση της μορφής $cx = d$, οπότε η επιλογή του «συντελεστή» μπορεί να γίνει «αυθαίρετα», όπως αναφέρεται και στο ίδιο το κείμενο (τα οκτώ προβλήματα με αριθμούς 10, 11, 12, 13, 28, 29, 30 και 31).
- Εάν η διαφορά των εκθετών m και n είναι 2, η τελική μορφή της εξίσωσης θα είναι $cx^2 = d$. Τότε, το $\frac{c}{d}$ θα πρέπει να είναι τετράγωνος αριθμός. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση τα c και d προκύπτουν ύστερα από την απλοποίηση της εξίσωσης με al-jabr, al-muqābala και διαίρεση. Έτσι, ο λύτης χρειάζεται να προχωρήσει σε μία αλγεβρική διαδικασία για να προσδιορίσει το κριτήριο επιλογής του «συντελεστή». Στο τέλος, θα βρεί έναν κατάλληλο «συντελεστή» λύνοντας ένα βοηθητικό πρόβλημα (τα τρία προβλήματα με αριθμούς 25, 26 και 27).

Τέλος, η τεχνική al-istiqraʾ εφαρμόζεται στα δέκα προβλήματα με αριθμούς 34 έως και 43. Ο λύτης καλείται να συμπληρώσει δύο κατά το ήμισυ κατασκευασμένες εξισώσεις, με τους κατάλληλους τετράγωνους αριθμούς. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα συμπληρωμένα μέλη αποτελούνται από διώνυμα της μορφής $ax^n \pm bx^m$ όπου $n, m \in \{2, 3, 4, 8, 9\}$ και ισχύει ότι $|n - m| = 1$. Άρα οι τελικές εξισώσεις θα είναι της μορφής $cx = d$. Τα ονόματα θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε οι δύο αρχικές εξισώσεις, να αναχθούν στην ίδια εξίσωση. Το «είδος» των τετραγώνων επιλέγεται εύκολα, όπως στην προηγούμενη περίπτωση istiqraʾ. Η συνθήκη την οποία πρέπει να ικανοποιούν οι «συντελεστές», προκύπτει έπειτα από την αλγεβρική διαδικασία που περιγράψαμε στο πρόβλημα 34_{II} . Για να βρεθεί ένα ζεύγος αριθμών που να επαληθεύει τη συνθήκη, χρησιμοποιούνται κάποια ήδη λυμένα προβλήματα των *Αριθμητικών*. Αφού βρεθούν οι «συντελεστές», δίνονται τα ονόματα στα τετράγωνα και οι δύο εξισώσεις συμπληρώνονται με μονώνυμα της μορφής ax^n, όπου $n \in \{2,4,8\}$.

Έτσι, στο τέταρτο αραβικό βιβλίο των *Αριθμητικών*, συναντούμε περιπτώσεις που η τεχνική al-istiqraʾ εφαρμόζεται σε συνδυασμό με αυτήν της επίλυσης ενός βοηθητικού προβλήματος.

3.4.4 Ο τρόπος διάταξης των προβλημάτων και μια προσπάθεια ομαδοποίησής τους

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια προσπάθεια να ομαδοποιήσουμε τα προβλήματα, ανάλογα με τις τεχνικές ονοματοδοσίας που χρησιμοποιούνται για την επίλυσή τους. Ξεκινάμε με τα δεκαεννέα προβλήματα όπου τα ονόματα δίνονται απευθείας και με την al-istiqraʾ τεχνική (τα έντεκα με αριθμούς 1 έως και 7 και 10 έως και 13, και τα εξής οκτώ: 23, 24 και 28 έως και 33). Αν στηριζόμασταν στις διατυπώσεις τους, δεν θα τα εντάσσαμε σε μία ομάδα. Κι αυτό γιατί κάποια αφορούν αθροίσματα και άλλα γινόμενα τετραγώνων ή κύβων, σε κάποια ο ζητούμενος αριθμός είναι ένας ενώ σε άλλα είναι δύο. Μεσολαβούν οκτώ προβλήματα στα οποία χρησιμοποιείται μόνο η αμεσολάβητη και η εξαρτημένη τεχνική ονοματοδοσίας (αυτά με αριθμούς 15 έως και 22). Ακολουθεί μια ομάδα δεκατριών προβλημάτων (τα 25, 26, 27 και τα 34 έως και 43) όπου τα ονόματα στους ζητούμενους αριθμούς δίνονται απευθείας, ενώ χρησιμοποιείται η τεχνική al-istiqraʾ σε συνδυασμό με την επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος, για την απόδοση ονομάτων στους τετράγωνους αριθμούς που συμπληρώνουν τις εξισώσεις. Αν κοιτάξουμε όμως τις διατυπώσεις τους, αποτελούν δύο ξεχωριστές ομάδες προβλημάτων, όπως επισημάναμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Εξαίρεση στα προηγούμενα, αποτελούν τα προβλήματα 8/9 και 14, όπου για να δοθούν κάποια ονόματα χρειάζεται να λυθεί ένα υποπρόβλημα στο πρώτο, και να βρεθεί μία κατάλληλη αναλογία στο δεύτερο. Για το πρόβλημα 14 προτείνεται και δεύτερη λύση, όπου χρησιμοποιείται η αμεσολάβητη, η εξαρτημένη και η al-istiqraʾ τεχνική ονοματοδοσίας . Τέλος, στο πρόβλημα 44 τα ονόματα δίνονται απευθείας, και ο Αριθμός προκύπτει από την επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος.

Βέβαια, υπάρχουν και προβλήματα που ξεχωρίζουν σαν ομάδα, αφενός από τις ομοιότητες που παρουσιάζουν στις συνθήκες τους, αφετέρου από τα σχόλια που συναντάμε στο κείμενο. Για παράδειγμα, μετά το πρόβλημα 22, υποδεικνύεται η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για να βρεθεί η συνθήκη επιλυσιμότητας των πέντε προβλημάτων που προηγήθηκαν (Sesiano 1982, 103, 610). Παρόμοιες παρατηρήσεις γίνονται και στα προβλήματα 33 (Sesiano 1982, 110, 950-955) και 42 (Sesiano 1982, 120-121, 1360-65, 1410).

Παρατηρώντας τα «είδη» που χρησιμοποιούνται, διαπιστώνουμε ότι γίνονται πιο σύνθετα στα τελευταία προβλήματα: ενώ στην αρχή ο λύτης μεταχειρίζεται τετράγωνα και κύβους, από τη μέση του βιβλίου (συγκεκριμένα από το πρόβλημα 23) στα δεδομένα των προβλημάτων εισάγονται συνθήκες που αφορούν τετράγωνα τετραγώνων ή κύβων, και κύβους τετραγώνων ή κύβων. Μάλιστα, στο πρόβλημα 29 (Sesiano 1982, 107, 795-800), εμφανίζονται για πρώτη φορά τα «είδη» που αντιστοιχούν στην όγδοη (kaʿb kaʿb māl) και την ένατη δύναμη (kaʿb kaʿb kaʿb) του άγνωστου αριθμού (Sesiano 1982, 45).

Από τα παραπάνω, θα πρέπει να παρατηρήσουμε πως τα πρώτα προβλήματα είναι απλούστερα, ενώ τα επόμενα είναι πιο σύνθετα και χρειάζεται ένας συνδυασμός τεχνικών ώστε να αποδοθούν τα ονόματα στους άγνωστους αριθμούς.

3.4.5 Δύο ή περισσότερες προτεινόμενες λύσεις και ο διδακτικός σκοπός του έργου

Υπάρχουν πέντε προβλήματα για τα οποία δίνονται δύο ή περισσότεροι τρόποι αντιμετώπισης. Αυτά είναι τα προβλήματα με αριθμούς 13, 14, 15, 34 και 42. Με εξαίρεση το πρόβλημα 15, στις διαφορετικές λύσεις αλλάζουν και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την απόδοση ονομάτων στους άγνωστους αριθμούς. Επίσης, στα 14 και 34, διαφέρουν και οι τιμές των ζητούμενων αριθμών που αποτελούν την απάντηση του προβλήματος. Μάλιστα στο Πρόβλημα 42 αντί να δοθεί η λύση, απλά σκιαγραφείται κάθε πιθανή τεχνική αντιμετώπισής του. Οι εναλλακτικές λύσεις, παρατίθενται πιθανόν για διδακτικούς σκοπούς.

Ο διδακτικός σκοπός του βιβλίου, φαίνεται και από τον τρόπο που παρουσιάζεται το πρόβλημα 8/9 . Ένα από τα ονόματα που επιλέγονται στην αρχή, δεν οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος. Ωστόσο, η λάθος επιλογή αναφέρεται, για να διορθωθεί στην πορεία της επίλυσης του προβλήματος.

4. Επίλογος

Είδαμε ότι τα *Αριθμητικά* θεωρούνται το σημαντικότερο σωζόμενο έργο της Ύστερης Αρχαιότητας, όπου παρουσιάζεται αναλυτικά η αλγεβρική πρακτική ως τρόπος λύσης αριθμητικών προβλημάτων. Δεν είναι όμως το μοναδικό τέτοιο έργο της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Ιστορικές πηγές μαρτυρούν την ύπαρξη μιας παράδοσης αλγεβρικής πρακτικής, για την οποία κύρια απόδειξη αποτελεί ο πάπυρος του Michigan με αριθμό 620, που χρονολογείται στον 2ο μ.Χ. αιώνα (Robbins 1929, 321–29; 1936, 143–44). Εκεί σώζονται τμήματα από τις λύσεις τριών αριθμητικών προβλημάτων, και από την ανακατασκευή τους γίνεται φανερό πως ακολουθούν μια αλγεβρική δομή όπως αυτή των διοφαντικών προβλημάτων: όλοι οι ζητούμενοι αριθμοί εκφράζονται με βάση έναν άγνωστο που δηλώνεται με το γράμμα ς , εκτελούνται πράξεις με τον άγνωστο και ύστερα από την εύρεση της τιμής του, γίνεται ο υπολογισμός των ζητούμενων αριθμών. Οι επιλύσεις αυτές περιλαμβάνουν και επαλήθευση. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι τα προβλήματα αυτά, αν και απλά, είναι αμιγώς αριθμητικά, όπως εκείνα των *Αριθμητικών*.

Η ύπαρξη έργων αλγεβρικού χαρακτήρα προγενέστερων ή σύγχρονων με τα *Αριθμητικά* επιβεβαιώνεται και από αναφορές. Ο Μιχαήλ Ψελλός αποδίδει ένα μαθηματικό έργο με ανάλογο χαρακτήρα σε κάποιον με το όνομα Ανατόλιος (Christianidis and Megremi 2019, 5–7) και ο Ibn al-Nadim αναφέρει τον Ίππαρχο (Christianidis 2018, 40) ως συγγραφέα ενός βιβλίου άλγεβρας. Ακόμη, φαίνεται πως χρησιμοποιούνταν ορισμένοι τρόποι για την έκφραση των σημερινών δυνάμεων του αγνώστου, διαφορετικοί από εκείνον του Διόφαντου (Christianidis and Megremi 2019, 6; Sesiano 1982, 43–44).

Τα στοιχεία που φανερώνουν ότι τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου δεν ήταν το μοναδικό έργο που χρησιμοποιούσε την αλγεβρική πρακτική για την επίλυση προβλημάτων, παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τους ιστορικούς των μαθηματικών, καθώς ενισχύουν την άποψη πως τα *Αριθμητικά* δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται ως μία περίπτωση ασύνδετη με τη μαθηματική παράδοση της εποχής τους. Το ίδιο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι μελέτες για το κατά πόσο η άλγεβρα εξακολουθούσε να χρησιμοποιείται ως επιλυτική μέθοδος για προβλήματα, κατά το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε ανάμεσα στην εποχή του Διόφαντου και την ανάπτυξη της αλγεβρικής παράδοσης στο Ισλάμ. Ιδιαίτερα, θα επισημάνουμε τη συμβολή του τρόπου των λύσεων που παρουσιάζεται στα *Αριθμητικά*, στην καθιέρωση της μεθόδου της άλγεβρας. Πράγματι, φαίνεται ότι υπάρχουν στοιχεία, από τα οποία προκύπτει ότι η χρήση της άλγεβρας συνεχίστηκε και μετά τα χρόνια του Διόφαντου. Θα αναφερθούμε πρώτα στον Θέωνα, ο οποίος εκτός του ότι αναπτύσσει κάποιους κανόνες εκτέλεσης πράξεων κατ' αναλογία των κανόνων που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος για τις πράξεις μεταξύ των «ειδών» αριθμών, λύνει και ένα πρόβλημα αστρονομίας με την αλγεβρική μέθοδο, σύμφωνα με τον τρόπο που επιλύεται το πρόβλημα I.9 των *Αριθμητικών* (Christianidis and Megremi 2019, 4). Ακόμα μία απόδειξη για τη χρήση άλγεβρας με τον τρόπο που παρουσιάζεται στα βιβλία του Διόφαντου, είναι τα σχόλια που συνοδεύουν μια ομάδα αριθμητικών επιγραμμάτων της Παλατινής Ανθολογίας, που εκτιμάται ότι γράφτηκε κατά τον 9^{ο} ή τις αρχές του 10^{ου} αιώνα μ.Χ. Τα συγκεκριμένα επιγράμματα σώζονται σε ένα μοναδικό χειρόγραφο με την ονομασία *Parisinus suppl. gr*. 384. Όσα από αυτά συνοδεύονται από συστηματικά σχόλια, αποδίδονται σε κάποιον με το όνομα Μητρόδωρος, για τον οποίον οι μελετητές συμφωνούν πως έζησε την περίοδο της Ύστερης Αρχαιότητας, αλλά όχι μετά τον 6^{ο} αιώνα. Στα σχόλια γίνεται αναδιατύπωση των προβλημάτων, και δίνεται μία λύση αλγεβρική, αντίστοιχη των διοφαντικών λύσεων. Σε κάποιες από τις λύσεις του σχολιαστή, αναφέρεται εκείνο το πρόβλημα από τα *Αριθμητικά* που ακολουθείται σαν πρότυπο. Τα στάδια της επίλυσης στα αριθμητικά επιγράμματα, φανερώνουν έναν σχολιαστή που ήταν εξοικειωμένος με τον αλγεβρικό τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων (Christianidis and Megremi 2019, 12–13; Tannery 1912, 445, 531). Τέλος, σε ένα απόσπασμα του έργου Ζωή του Ιωάννη του Δαμασκηνού, στηρίζεται ο ισχυρισμός ότι η μέθοδος του Διόφαντου διδασκόταν στα στελέχη του χαλιφάτου που εργάζονταν πάνω στα οικονομικά, κατά τον 7^{ο} προς 8^{ο} αιώνα (Christianidis and Megremi 2019, 9–12).

Ανάπτυξη της αλγεβρικής πρακτικής παρατηρείται αδιαμφισβήτητα από τον 9^{ο} αιώνα και έπειτα, στον αραβικό κόσμο. Σε σχέση με τα *Αριθμητικά,* είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι μεταφράζονταν, διδάσκονταν και μελετώνταν από τους μαθηματικούς της εποχής. Την ίδια περίοδο, το έργο του Διόφαντου μνημονεύεται από έναν αριθμό συγγραφέων του αραβικού κόσμου, ενώ φαίνεται πως κάποιοι μαθηματικοί εξακολουθούν και γράφουν σχόλια πάνω σε αυτό (Sesiano 1982, 10–13; Rashed 1984, 3, xxxii-xxxiii, lxix-lxx). Το πιο σημαντικό όμως είναι πως τμήματα ή και ολόκληρα βιβλία των *Αριθμητικών* έχουν ενσωματωθεί με πολύ μικρές αλλαγές στο έργο Fahri του Πέρση μαθηματικού του 10^{ου} αιώνα al-Karaji (Sesiano 1982, 5, 10–11; Rashed 1984, 3, xxxv-xxxvi). Απόδειξη της ενασχόλησης με τα διοφαντικά προβλήματα στον αραβικό κόσμο, αποτελεί βέβαια και η ανακάλυψη της αραβικής μετάφρασης των τεσσάρων βιβλίων των *Αριθμητικών*.

Σχετικά με την πρόσληψη του έργου του Διόφαντου κατά τη βυζαντινή περίοδο, υπάρχουν πληροφορίες που αποδεικνύουν την κυκλοφορία χειρογράφων των *Αριθμητικών*, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο πρώτο μέρος της εργασίας. Επισημαίνουμε ξανά τη συνεισφορά των δύο λόγιων της εποχής, των Γεώργιου Παχυμέρη και Μάξιμου Πλανούδη στην αναπαραγωγή και τον σχολιασμό των προβλημάτων που περιλαμβάνονται στα πρώτα βιβλία του έργου (Christianidis, forthcoming (ii)).

Μετακινούμενοι στον Δυτικό Κόσμο, θα πρέπει να τονίσουμε τον ρόλο των Ουμανιστών της Αναγέννησης στη συλλογή και διάσωση χειρογράφων της ελληνικής και ρωμαϊκής γραμματείας της Αρχαιότητας. Αναφέρουμε ως παράδειγμα τους πάπες Νικόλαο Ε’ και Σέξτο Δ’, που ενδιαφερόμενοι να δημιουργήσουν μία μεγάλη βιβλιοθήκη στο Βατικανό, αφιέρωσαν παπικούς πόρους για τη συγκέντρωση, μετάφραση στα λατινικά και αντιγραφή συγγραμμάτων της αρχαιότητας, στα οποία συμπεριλαμβάνονταν έργα μαθηματικού περιεχομένου. Στις λίστες των διαθέσιμων χειρογράφων της βιβλιοθήκης για τα έτη 1455, 1475 και 1481, εμφανίζονται τα χειρόγραφα των *Αριθμητικών Vat. gr*. 304, *Vat. gr*. 191 και *Vat. gr*. 200 αντίστοιχα. Επίσης, στις καταγραφές των δανεισμών των έργων της βιβλιοθήκης που αφορούν στο χρονικό διάστημα από το 1518 έως το 1547, αναφέρονται και τα βιβλία του Διόφαντου. Λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι οι δανεισμοί γίνονταν με κύριο σκοπό τη δημιουργία αντιγράφων, τα χειρόγραφα της βιβλιοθήκης του Βατικανού αποτέλεσαν τη βάση των αντιγράφων των μαθηματικών κειμένων που κυκλοφορούσαν εκείνη την περίοδο στην Ιταλία. Όπως παρατηρεί ο Rose, φαίνεται πως στην αναγέννηση των μαθηματικών κατά τον 15ο αιώνα, καταλυτικός ήταν ο ρόλος της πνευματικής κίνησης του Ουμανισμού (Rose 1973, 73–89).

Η στροφή της προσοχής των ουμανιστών μελετητών προς τις ελληνορωμαϊκές πηγές για κάθε επιστημονικό πεδίο, συντελέστηκε στο πλαίσιο της προσπάθειας συγκρότησης μιας ιστορίας για τον εκάστοτε τέτοιον κλάδο, αποδεσμευμένης από μεσαιωνικές και αραβικές ρίζες. Έτσι, μετά την άλωση της Πόλης όταν πλήθος χειρογράφων έφτασε στη Δύση, το 1464, ο Regiomontanus γνωστοποίησε την ύπαρξη του έργου του Διόφαντου, εκτιμώντας παράλληλα ότι το περιεχόμενό του ήταν αλγεβρικό. Παρ’ όλο που ο

Regiomontanus ανέδειξε τη σημασία των *Αριθμητικών*, ορισμένοι μαθηματικοί, κυρίως Ιταλοί (Pacioli, de la Roche, Cardano, Tartaglia, Stifel) που επηρεάζονταν από την παράδοση των αβακιστών, αναγνώριζαν την αραβική προέλευση των αλγεβρικών πρακτικών, και δεν αναφέρονταν στο έργο του Διόφαντου (Cifoletti 1996, 126-127). Ανάμεσα στους Ιταλούς μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με τα *Αριθμητικά*, κάνουμε ξεχωριστή αναφορά στον Bombelli, ο οποίος αφού μελέτησε τα βιβλία από ένα διαθέσιμο χειρόγραφο της βιβλιοθήκης του Βατικανού, ενέταξε 147 διοφαντικά προβλήματα στην Άλγεβρά του, που εκδόθηκε το 1572 (Christianidis 2018, 40–41; Cifoletti 1996, 124–126; Heath 1885; Heath 1910, 18-20).

Την ίδια περίοδο στη Γερμανία, φαίνεται πως το έργο του Διοφάντου απασχόλησε τους μαθηματικούς Johannes Scheubel και Caspar Peceur (Christianidis, forthcoming (ii); Cifoletti, 1996) καθώς και τον λόγιο Joachim Camerarius. Μάλιστα, από τον συμβολισμό για τις δυνάμεις του άγνωστου αριθμού ή x,που παραθέτει ο Camerarius στο έργο του *De Logistica*, προκύπτει πως είχε δει κάποιο χειρόγραφο ή αντίγραφο των *Αριθμητικών* (Reich 2003, 81–84). Αργότερα, το 1575, ο ουμανιστής Xylander εξέδωσε την πρώτη μετάφραση των ελληνικών βιβλίων των *Αριθμητικών* στα Λατινικά.

Οι Γάλλοι αλγεβριστές του 16ου αιώνα, στράφηκαν και προς τα βιβλία των *Αριθμητικών* συμπεριλαμβάνοντάς τα σε μια γενεαλογία για την άλγεβρα (Jacques Peletier, Petrus Ramus, Guillaume Gosselin (Cifoletti 1996, 129, 133, 137; Christianidis, forthcoming (ii)). Ήταν η στιγμή που ενισχυόταν σταδιακά η προσπάθεια για κριτική ανάγνωση και ερμηνεία των πηγών, μεταξύ των οποίων σημαντική θέση πια είχαν αποκτήσει τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου (Cifoletti 1996, 138).

Από όλα τα παραπάνω ιστορικά στοιχεία, μπορούμε να συμπεράνουμε πως τα *Αριθμητικά* αποτελούν ένα κομμάτι της ιστορίας της άλγεβρας, ως ένα μαθηματικό έργο Προ-μοντέρνας άλγεβρας. Πρώτα απ' όλα, συνέβαλαν στην εκμάθηση της αλγεβρικής πρακτικής και την καθιέρωση της χρήσης της για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων, κατά τους αιώνες που ακολούθησαν τη συγγραφή τους. Παρ' όλα αυτά, φαίνεται πως συνηθιζόταν να μελετώνται περισσότερο τα πρώτα βιβλία του έργου. Με την ανάπτυξη της αραβικής άλγεβρας, τα διοφαντικά προβλήματα μελετήθηκαν, και ένας αριθμός τους ενσωματώθηκε στο έργο των μαθηματικών του Ισλάμ. Στη Δύση επικράτησε αρχικά η αραβική παράδοση, στα χρόνια όμως της Αναγέννησης το έργο του Διόφαντου αναδείχθηκε. Τα *Αριθμητικά* επανήλθαν στο προσκήνιο τους επόμενους αιώνες. Αν και είναι ένα έργο της Ύστερης Αρχαιότητας, το περιεχόμενό του αποδείχτηκε πιο σύγχρονο από την εποχή του. Γι' αυτό και τα προβλήματα που περιλαμβάνει, δεν σταμάτησαν να απασχολούν κάποιους από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς των νεότερων χρόνων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Acerbi, F., ed. 2011. *Diofanto, De Polygonis Numeris. Introduzione, Testo Critico. Traduzione Italiana e Commento Di Fabio Acerbi*. Pisa/Roma: Fabrizio Serra Editore.
2. Allard, A. 1982. "La tradition du texte grec des Arithmétiques de Diophante d'Alexandrie." *Revue d'histoire des textes* 12–13: 57–138.
3. Bachet, C. G., ed. 1621. *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex, et de Numeris Multangulis Liber Unus. Nunc Primùm Gracè et Latinè Editi, Atque Absolutissimis Commentariis Illustrati. Auctore Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco Sebusiano*. Lutetiae Parisiorum: Sumptibus Hieronymi Drovart, via Jacobæa, sub Scuto Solari.
4. Bashmakova, Isabella Grigoryevna. 1981. "Arithmetic of Algebric Curves from Diophantus to Poincaré." *Historia Mathematica* 8: 393–416.
5. Bernard, Alain, and Jean Christianidis. 2012. "A New Analytical Framework for the Understanding of Diophantus' Arithmetica I-III." *Archive for History of Exact Sciences* 66: 1–69.
6. Bombelli, R. 1572. *L'algebra Parte Maggiore Dell' Ari-metica Divisa in Tre Libri*. Bologna: Nella stamperia di Giovanni Rossi.
7. Chemla, Karine; Morelon, Regis; Allard, André. 1986. "La tradition arabe de Diophante d'Alexandrie: A propos de quatre livres des *Arithmétiques* perdues en grec retrouvés en arabe." *L'antiquite Classique* 55: 351–75.
8. Christianidis, Jean. 2016. "La démarche de Diophante démystifiée: L' algèbre Prémoderne au service de la résolution de problèmes." In *Actes du XIIème collogue Maghrébin sur l' histoire des mathématiques arabes*, 41–69. Marrakech: École Normale Supérieure.
9. ———. 2018. "Diophantus and Premodern Algebra. New Light on an Old Image." In *Revolutions and Continuity in Greek Mathematics*, edited by M. Sialaros, 35–65. Berlin, Boston, Boston: Walter de Gruyter.
10. ———. Forthcoming (i). "Why Do We Speak of Algebra in Relation to Diophantus." In *A Worldwide Approach to the Early History of Algebra*, edited by Karine Chemla and Miao Tian.
11. ———. Forthcoming (ii). "Diophantus of Alexandria." In *Oxford Classical Dictionary*.
12. Christianidis, J., and J. A. Oaks. 2013. "Practicing Algebra in Late Antiquity: The Problem-Solving of Diophantus of Alexandria." *Historia Mathematica* 40 (2): 127–163.
13. Christianidis, J., and A. Megremi. 2019. "Tracing the Early History of Algebra: Testimonies on Diophantus in the Greek-Speaking World (4th–7th Century CE)." *Historia Mathematica* 47: 16–38.
14. Cifoletti, Giovanna. 1996. "The Creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century." In *L' Europe mathématique/ Mathematical Europe : Histoires, mythes, identités*, edited by Catherine Goldstein, Jeremy Gray, and Jim Ritter, Maison des sciences de l' homme, 121–42. Paris.
15. Diophante. 1959. *Diophante d'Alexandrie, les six livres Arithmétiques et le livre des Nombres Polygones. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par P. Ver Eecke*. Bruges: Desclée de Brouwer.
16. Diophantus. 1893-95. *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graeciis commentarii*, 2 Vols. Edited by Paul Tannery. Teubner. Leipzig.

17. ———. 1963. *Διοφάντου Αριθμητικά. Η Άλγεβρα Των Αρχαίων Ελλήνων.* Edited by Ευάγγελος Σταματης. Athens: ΟΕΔΒ.
18. Heath, T. L. 1885. *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.
19. ———. 1910. *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra, 2nd Edition*. Cambridge: Cambridge University Press.
20. Jaouiche, K. 1987. "Review of (Rashed, 1984)." *Annals of Science* 44: 308–311.
21. ———. 1988. Review of Diophante 1984 (Rashed 1984). *Annals of Science* 44: 308–311.
22. ———. 1990. "Correspondence: Réponse de M. K. Jaouiche." *Annals of Science* 47: 407–409.
23. Klein, J. 1968. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Translated by E. Brann. Cambridge, MA: The MIT Press.
24. Megremi, A., and J. Christianidis. 2015. "Theory of Ratios in Nicomachus' Arithmetica and Series of Arithmetical Problems in Pachymeres' Quadrivium: Reflections about a Possible Relationship." *SHS Web of Conferences* 22: #00006.
25. Nesselmann, G. H. F. 1842. *Versuch Einer Kritischen Geschichte Der Algebra*, First Part: *Die Algebra Der Griechen*. Berlin: G. Reimer.
26. Oaks, Jeffrey A. 2007. "Medieval Arabic Algebra as an Artificial Language." *Journal of Indian Philosophy* 35: 543–75.
27. ———. 2009. "Polynomials and Equations in Arabic Algebra." *Archive for History of Exact Sciences* 63: 169–203.
28. ———. 2017. "Irrational 'Coefficients' in Renaissance Alebra." *Science in Context* 30 (2): 141–72.
29. Pérez Martín, I. 2006. "Maxime Planude et le Diophantus Matritensis (Madrid, Biblioteca Nacional, Ms. 4678): Un paradigme de la récupération des textes anciens dans la 'Renaissance Paléologue.'" *Byzantion* 76: 433–462.
30. Rashed, R., and C. Houzel. 2013. *Les 'Arithmétiques' de Diophante. Lecture historique et mathématique*. Walter de Gruyter. Berlin/Boston.
31. Rashed, Roshdi. 1984. *Diophante, Les Arithmétiques,* t. 3: *Livre IV,* t. 4: *Livres V–VII. Texte établi et traduit par R. Rashed*. Edited by R. Rashed. Paris: Les Belles Lettres.
32. Reich, Karin. 2003. "Die Rezeption Diophants Im 16. Jahrhundert." *N.T.M* 11: 80–89.
33. Robbins, Eggleston Frank. 1929. "P. Mich. 620: A Series of Arithmetical Problems." *Chicago Journals* 24 No. 4 (Classical Philology): 321–29.
34. ———. 1936. "Algebraic Problems." In *Papyri in the University of Michigan Collection, Michigan Papyri, Vol. III*, edited by John Garrett Winter, University of Michigan Press, 143–47. Ann Arbor.
35. Rose, Paul Lawrence. 1973. "Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento." *Studies in the Renaissance* 20: 46–105.
36. Sesiano, J. 1982. *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qusṭā Ibn Lūqā*. New York/Heidelberg/Berlin: Springer-Verlag.
37. Tannery, P. 1912. "Sur la religion des derniers mathématiciens de l'antiquité." In *Mémoires Scientifiques de Paul Tannery*, edited by J. L. Heiberg and H. G. Zeuthen, II:527–539. Toulouse/Paris: E. Privat/Gauthier-Villars.
38. Toomer, G. J. 1985. "Chronique II: Réponse concernant la Chronique de A. Allard et R. Rashed sur la traduction de l'Arithmétique de Diophante." *Revue Des Questions Scientifiques* 156 (2): 237–241.
39. Vogel, K. 1971. "Diophantus of Alexandria." In *Dictionary of Scientific Biography, Vol. IV*, edited by C. C. Gillispie, 110–19. New York: Charles Scribner's Sons.

40. Xylander (ed.) (1575) *Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticarum Libri sex, quorum primi duo adiecta habent Scholia Maximi (ut coniecturs est) Planudis. Item Liber de Numeris polugonis seu Multabgulis. Opus incomparabile, uerae Arithmeticae Logisticae perfectionem continens*. Basileae: per Eusebium Episcopium, et Nicolai Fr. haeredes.