ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ – ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στο Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

Γεωργακοπούλου Βασιλική

Α.Μ. Δ201630

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Στυλιανός Νεγρεπόντης **Ομότιμος καθηγητής**

Αθήνα, Ιούνιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 29η Ιουνίου 2020 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Στυλιανό Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομότιμο καθηγητή
• Βασιλική Φαρμάκη	Καθηγήτρια
• Μιχαήλ Ανούση	Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Στυλιανό Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομότιμο καθηγητή
• Βασιλική Φαρμάκη	Καθηγήτρια
• Μιχαήλ Ανούση	Καθηγητή

Ευχαριστίες

Επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά τον Δάσκαλο και επιβλέποντα την παρούσα διπλωματική εργασία Ομότιμο Καθηγητή κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη, καθώς και την Καθηγήτρια κα Βασιλική Φαρμάκη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν και τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφεραν καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Μου έδωσαν τα αναγκαία εφόδια να μελετήσω, ένα μικρό, αλλά ουσιαστικό, μέρος από τα μοναδικά επιτεύγματα των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά και να κατανοήσω τη γοητευτική σύνδεσή τους με τα σύγχρονα μαθηματικά και τη φιλοσοφία.

Επίσης, θερμές ευχαριστίες εκφράζω στον Καθηγητή κ. Μιχάλη Ανούση για την τιμή που μου έκανε να είναι μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής.

Τέλος, ευχαριστώ την κα Διονυσία Μπακογιάννη για την πολύτιμη βοήθειά της ως γραμματέας του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών.

Περίληψη

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία παρουσιάζει το Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη με βάση κυρίως (α) τις Σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος «Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών - Στοιχεία Ευκλείδη» του Σ. Νεγρεπόντη στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, και (β) την αδημοσίευτη σε προκαταρτική μορφή εργασία των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη [ΝΦ2], η οποία αποτελεί προσχέδιο για ένα μέρος του τόμου 2 της Ιστορίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, τον οποίο συγγράφουν, και την οποία χρησιμοποιώ με την άδεια των συγγραφέων. Βασικό μέλημα της εργασίας [ΝΦ2] είναι αφενός η ανάδειξη εκείνων των Προτάσεων που χρησιμοποιούν την Αρχή του Ευδόξου (Όρος V.4) και την συνέπεια αυτής, Πρόταση V.8 (και της ισοδύναμης αντιθετο-αντίστροφης V.9), και αφετέρου η παρουσίαση ουσιωδώς απλούστερων αποδείξεων των βασικών Προτάσεων του Βιβλίου VI, συμπεριλαμβανομένων των Προτάσεων VI.23, VI.25, VI.27-31. Η παρουσίαση του Βιβλίου VI των *Στοιχείων* σε προκαταρτική μορφή είχε δοθεί στην Διπλωματική εργασία της Ιωάννας Δοργιάκη [Δ] το 2016.

Abstract

The current thesis presents Book VI of Euclid's Elements based mainly on (a) the Notes of the postgraduate course "History of Ancient Greek Mathematics - Euclid's Elements" by S. Negrepontis in the Postgraduate Program “Teaching and Methodology of Mathematics”, and (b) the unpublished Stylianos’ Negrepontis and Vasiliki’s Farmaki work [NF2], which is a draft for a part of volume 2 of the «History of Ancient Greek Mathematics», which they write, and which I use with the permission of the authors. The main concern of the work [NF2] is, on the one hand, the emergence of those propositions that use the Eudoxus’ Principle (Definition V.4) and its consequence, Proposition V.8 (and the equivalent contraposition V.9) and, on the other hand, the presentation of substantially simpler proofs of the basic Propositions of Book VI, including the Propositions VI.23, VI.25, VI.27-31. The presentation of Book VI of Euclid's Elements in a preliminary form was given to Ioanna’s Dorgiaki thesis [D] in 2016.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή **11**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Το Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη **19**
[1.1] Οι Ορισμοί του Βιβλίου VI – Πρωτότυπο 21
[1.2] Οι Προτάσεις του Βιβλίου VI – Πρωτότυπο 23
[1.3] Οι Ορισμοί του Βιβλίου VI - Σύγχρονη διατύπωση & σχολιασμός 71
[1.4] Οι Προτάσεις του Βιβλίου VI - Σύγχρονη διατύπωση & σχολιασμός 75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στο Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη **149**
Ενότητα 2.1: Από ισογωνιότητα ή παραλληλία σε αναλογία ή ομοιότητα και αντίστροφα 151
[2.1α] Η βασική Πρόταση VI.1 και οι στοιχειώδεις Προτάσεις VI.2α, 3α, 4, 8-12, 18, 24, 21 151
[2.1β] Οι μη στοιχειώδεις αντίστροφες Προτάσεις VI.2β, 3β, 5, 26 και οι Προτάσεις VI.6-7 167
Ενότητα 2.2: Από ισότητα εμβαδών σε αναλογία και αντίστροφα 175
[2.2α] Οι στοιχειώδεις Προτάσεις VI.13 & VI.14α-17α 175
[2.2β] Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.14β-17β 181
Ενότητα 2.3: Συγκείμενος Λόγος - Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.19-20 & VI.22-23 184
Ενότητα 2.4: Γενική παραβολή χωρίων 191
[2.4α] Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.25 και VI.29 191
[2.4β] Απλούστερες αποδείξεις από τον Σ. Νεγρεπόντη των Προτάσεων VI. 27, 28, 29 & 31 197

Σχηματική Λογική Δομή του Βιβλίου VI των *Στοιχείων* **209**

Παράρτημα Α΄ - Βιβλίο I των *Στοιχείων* **211**
Παράρτημα Β΄ - Βιβλίο II των *Στοιχείων* **227**
Παράρτημα Γ΄ - Βιβλίο V των *Στοιχείων* **233**

Βιβλιογραφία **241**

Εισαγωγή

Το Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη περιλαμβάνει 5 ορισμούς και 33 προτάσεις. Συνεχίζοντας τις εφαρμογές της θεωρίας των εμβαδών που εισάγει στο Βιβλίο I και αναπτύσσει στο Βιβλίο II, ο Ευκλείδης στο Βιβλίο VI εφαρμόζει στα ευθύγραμμα χωρία τη θεωρία των αναλογίων του Βιβλίου V. Επίσης, εισάγει την έννοια της ομοιότητας. Ασχολείται με κάθε είδους εφαρμογή που απορρέει από την ομοιότητα ευθυγράμμων χωρίων, όπως αναλογίες τμημάτων, αναλογίες εμβαδών, κατασκευές ευθυγράμμων χωρίων τα οποία είναι όμοια προς κάποιο δεδομένο ευθύγραμμο χωρίο και επιπλέον πληρούν κάποιες αλγεβρικές συνθήκες κ.ο.κ. Έτσι, το Βιβλίο VI μπορεί να θεωρηθεί φυσική επέκταση των Βιβλίων I, II και V των *Στοιχείων*.

Παραθέτουμε μια σύντομη περιγραφή του περιεχομένου του Βιβλίου VI, η οποία στα βασικά της σημεία ακολουθεί τη σύνοψη που δίνει ο Heath στο βιβλίο του *A History of Greek Mathematics.* ([H2], p. 391-397).

Το Βιβλίο VI ξεκινά με έναν ορισμό των ομοίων ευθυγράμμων σχημάτων, ακολουθεί ο ορισμός των αντιστρόφως ανάλογων σχημάτων, ο οποίος ωστόσο δε χρησιμοποιείται ποτέ, ο ορισμός της διαίρεσης μιας ευθείας με «σε άκρο και μέσο λόγο», ο «προβληματικός» ορισμός του ύψους ενός σχήματος και τέλος ο δυσνόητος ορισμός του συγκείμενου λόγου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι 33 προτάσεις του Βιβλίου αυτού. Η πρώτη και η τελευταία πρόταση του Βιβλίου VI είναι ανάλογες: Η πρώτη πρόταση αποδεικνύει ότι τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα, τα οποία έχουν κοινό ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των βάσεων και η τελευταία ότι σε ίσους κύκλους οι γωνίες έχουν το ίδιο λόγο με τα αντίστοιχα τόξα στα οποία βαίνουν, είτε είναι επίκεντρες, είτε εγγεγραμμένες. Είναι οι μοναδικές δύο προτάσεις του Βιβλίου VI που χρησιμοποιούν ευθέως τον ορισμό της αναλογίας V.5 και τη μέθοδο των ισοπολλαπλασίων. Η Πρόταση VI.1 κατασκευάζει μία αναλογία μεταξύ γραμμών και εμβαδών, ενώ η Πρόταση VI.33 κατασκευάζει μία αναλογία μεταξύ γωνιών και τόξων. Οι ενδιάμεσες προτάσεις χρησιμοποιούν άλλες ιδιότητες των αναλογιών, που έχουν παρουσιαστεί στο Βιβλίο V, αλλά δεν κατασκευάζουν νέες αναλογίες χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αναλογίας.

Η Πρόταση VI.1 αποτελεί τη βάση για ολόκληρο το Βιβλίο VI, καθώς χρησιμοποιείται, είτε άμεσα είτε έμμεσα, στις αποδείξεις των περισσοτέρων προτάσεων του Βιβλίου VI. Η απόδειξή της είναι σχεδόν τετριμμένη, από τη στιγμή που δόθηκε ο κατάλληλος ορισμός της αναλογίας, ο οποίος, εδώ, δεν είναι άλλος από τον Ορισμό V.5 του Ευδόξου, όπως τετριμμένη ήταν και με τον ορισμό της αναλογίας του Θεαίτητου, στον οποίο αναφέρεται ο Αριστοτέλης στο περίφημο χωριό των *Τοπικών,* 158b24-159a2.

Εξίσου σημαντική είναι και η επόμενη Πρόταση VI.2, η οποία αποδεικνύει ότι αν μία ευθεία τέμνει δύο πλευρές τριγώνου και είναι παράλληλη προς την τρίτη, τότε χωρίζει τις δύο πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντιστρόφως. Ακολουθεί η Πρόταση VI.3, στην οποία αποδεικνύεται ότι η εσωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει την απέναντι πλευρά σε μέρη τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο με το λόγο των πλευρών του τριγώνου που περιέχουν

την γωνία. Η πρόταση αυτή, αν και πολύ ενδιαφέρουσα, δε χρησιμοποιείται από τον Ευκλείδη στην απόδειξη κάποιας άλλης πρότασης του Βιβλίου VI.

Οι Προτάσεις VI.4-7 αποτελούν κριτήρια ομοιότητας τριγώνων: ισότητα των αντίστοιχων γωνιών (VI.4), αναλογία των αντίστοιχων πλευρών (VI.5), ισότητα μιας γωνίας του ενός τριγώνου με μια γωνία του άλλου και αναλογία των πλευρών που περιέχουν τις ίσες γωνίες (VI.6) και η «ιδιάζουσα» περίπτωση (VI.7) στην οποία μια γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια γωνία του άλλου, οι πλευρές που περιέχουν δύο άλλες γωνίες είναι ανάλογες και καθεμία από τις υπόλοιπες γωνίες είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη της ορθής γωνίας.

Μετά τη σημαντική πρόταση VI.8, που λέει ότι η κάθετος από την κορυφή της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου προς την απέναντι πλευρά διαιρεί το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα όμοια προς το αρχικό και όμοια μεταξύ τους, περνάμε στις Προτάσεις VI.9 και VI.10 και στην κατ' αναλογίαν διαίρεση δύο ευθειών (όπου η VI.9 είναι ειδική περίπτωση της VI.10) και στη συνέχεια στα προβλήματα της εύρεσης της τρίτης αναλόγου δύο ευθειών (VI.11), της τέταρτης αναλόγου τριών ευθειών (VI.12), καθώς και της μέσης αναλόγου δύο ευθειών (VI.13). Η πρόταση αυτή δεν είναι παρά μια άλλη, ισοδύναμη μορφή της πρότασης II.14, με την οποία καθίσταται δυνατή η τετραγωνοποίηση των ευθυγράμμων χωρίων.

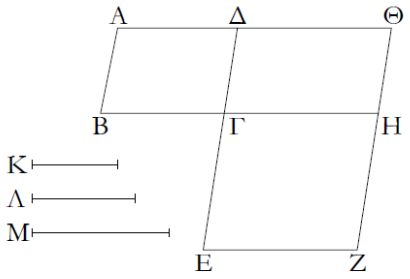
Στις Προτάσεις VI.14 και VI.15 αποδεικνύεται ότι στα ίσα παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες και αντίστροφα. Για την απόδειξη των προτάσεων αυτών ο Ευκλείδης τοποθετεί τις ίσες γωνίες απέναντι τη μία στην άλλη, έτσι ώστε οι πλευρές τους να βρίσκονται στην ίδια ευθεία, συμπληρώνει κατάλληλα το σχήμα και εφαρμόζει την Πρόταση VI.1.

Από την Πρόταση VI.14 συνάγονται άμεσα οι Προτάσεις VI.16 και VI.17 (ειδική περίπτωση της VI.16), οι οποίες λένε ότι αν τέσσερις (ή τρεις) ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τους μέσους όρους της αναλογίας (ή το τετράγωνο με πλευρά το μέσο όρο της αναλογίας) και αντίστροφα.

Οι Προτάσεις VI.18-22 που ακολουθούν ασχολούνται με τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα. Η Πρόταση VI.18, η οποία είναι γενίκευση της Πρότασης II.46, αναφέρεται στην κατασκευή ευθυγράμμου χωρίου με μια πλευρά δοθείσα ευθεία, ομοίου και «ομοίως κείμενου» προς δοθέν ευθύγραμμο χωρίο. Η VI.19 (με το Πόρισμα που ακολουθεί), καθώς και η VI.20 είναι ιδιαίτερα σημαντικές προτάσεις, οι οποίες αποδεικνύουν ότι ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων (ή όμοιων πολυγώνων γενικότερα) είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους. Η Πρόταση VI.21 εκφράζει τη μεταβατική ιδιότητα της ομοιότητας και χρησιμοποιείται συχνά στην απόδειξη των επόμενων προτάσεων, ενώ αντίθετα δε χρησιμοποιούνται ποτέ ούτε η VI.20, ούτε η VI.22, η οποία λέει ότι αν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, τότε τα όμοια και ομοίως αναγεγραμμένα επί αυτών ευθύγραμμα σχήματα θα είναι ανάλογα και αντίστροφα.

Η Πρόταση VI.23 (τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν το ένα προς το άλλο λόγο ίσο με το συγκείμενο λόγο εκ των λόγων των πλευρών τους) είναι σημαντική γιατί μας εισάγει στην πρακτική χρήση της μεθόδου της σύνθεσης (δηλαδή του πολλαπλασιασμού) λόγων, μιας

πράξης με ευρεία εφαρμογή στην γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων. Ο Ευκλείδης, βέβαια, δεν ορίζει ποτέ ξεκάθαρα τις έννοιες «**συγκείμενος λόγος**» ή «**σύνθεση λόγων**», όμως η σημασία αυτών των όρων αποσαφηνίζεται σε μεγάλο βαθμό μέσα από την απόδειξη αυτής της πρότασης: Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ΒΓΔ και ΕΓΗ να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το σχήμα συμπληρώνεται με το παραλληλόγραμμο ΔΓΗΘ. Στην συνέχεια θεωρείται μια τυχαία ευθεία Κ και από την Πρόταση VI.12 (εύρεση τέταρτης αναλόγου) βρίσκεται μια άλλη ευθεία Λ, τέτοια ώστε $\frac{ΒΓ}{ΓΗ} = \frac{Κ}{Λ}$ και πάλι μια τρίτη ευθεία Μ, τέτοια ώστε $\frac{ΔΓ}{ΓΕ} = \frac{Λ}{Μ}$. Αλλά, ο λόγος ο οποίος «σύγκειται» από τους λόγους $\frac{Κ}{Λ}$ και $\frac{Λ}{Μ}$ είναι ο $\frac{Κ}{Μ}$ και συνεπώς ο $\frac{Κ}{Μ}$ είναι ο «συγκείμενος λόγος εκ των λόγων των πλευρών».



Η πολύ σημαντική Πρόταση VI.25, της κατασκευής ενός ευθυγράμμου σχήματος ομοίου προς ένα δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και ίσου προς ένα άλλο δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, είναι αναμφίβολα Πυθαγόρεια. Το δοθέν σχήμα (έστω Π) προς το οποίο το ζητούμενο ευθύγραμμο σχήμα πρέπει να είναι όμοιο μετασχηματίζεται, από την Πρόταση Ι.44 σε παραλληλόγραμμο με την ίδια βάση ΒΓ. Τότε, το άλλο σχήμα (έστω Μ), προς το οποίο το ζητούμενο σχήμα πρέπει να είναι ίσο, μετασχηματίζεται, από την Πρόταση Ι.45, σε παραλληλόγραμμο με βάση ΓΖ (που σχηματίζει ευθεία γραμμή με την ΒΓ) και με το ίδιο ύψος με το άλλο παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, από την Πρόταση VI.1, $\frac{Π}{Μ} = \frac{ΒΓ}{ΓΖ}$. Αρκεί, τώρα, να πάρουμε τη μέση ανάλογο ΗΘ των ευθειών ΒΓ και ΓΖ και να κατασκευάσουμε με βάση την ΗΘ ένα ευθύγραμμο σχήμα όμοιο προς το Π, το οποίο έχει ως βάση τη ΒΓ (Πρόταση VI.18). Η ορθότητα της κατασκευής επιβεβαιώνεται από το Πόρισμα της Πρότασης VI.19, που λέει ότι, αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε ο λόγος της πρώτης προς την τρίτη ισούται με το λόγο του σχήματος επί της πρώτης προς το όμοιό του και ομοίως αναγραφόμενο επί της δεύτερης.

Με τις Προτάσεις VI.27, 28, 29 φθάνουμε στα τελικά προβλήματα της Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων. Μία από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων ήταν η μέθοδος γνωστή ως **παραβολή χωρίων (application of areas)**, η οποία έγινε ένα πανίσχυρο εργαλείο στα χέρια των κατοπινών Ελλήνων γεωμετρών. Λέμε ότι ένα δοθέν χωρίο **παραβάλλεται** (παραβάλλειν, apply) σε μία ευθεία γραμμή, όταν ένα ορθογώνιο ή ένα παραλληλόγραμμο, ίσο προς το δοθέν χωρίο, κατασκευάζεται επί της ευθείας αυτής γραμμής. Το χωρίο, λέμε, ότι **υπολείπεται** (ελλείπειν, be deficient, fall short) όταν το ορθογώνιο ή το παραλληλόγραμμο κατασκευάζεται επί ενός μέρους της ευθείας, ενώ ότι **υπερβάλλει** (υπερβάλλειν, exceed), όταν κατασκευάζεται επί της προεκταθείσας ευθείας. Έχουμε, λοιπόν, αντίστοιχα, **παραβολή χωρίων, παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη** και **παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή.**

Η μέθοδος της παραβολής χωρίων αναπτύσσεται στις ακόλουθες προτάσεις των Στοιχείων: Ι.44-45, ΙΙ.5-6, ΙΙ.11 και VI.27-29. Αυτές οι προτάσεις είναι το γεωμετρικό ισοδύναμο της αλγεβρικής λύσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, όχι μόνο ειδικών περιπτώσεων, αλλά στη πιο γενική τους μορφή, όταν αυτές οι εξισώσεις έχουν μία θετική, πραγματική ρίζα. Έτσι,

μπορούμε να πούμε, ότι η παραβολή χωρίων είναι ένα ζωτικό μέρος της «**γεωμετρικής άλγεβρας**» (“**geometrical algebra**”) των αρχαίων Ελλήνων, οι οποίοι χειρίζονταν τα γεωμετρικά σχήματα με την άνεση που εμείς σήμερα χειριζόμαστε τα αλγεβρικά σύμβολα. Αν και η συγκεκριμένη μορφή των προτάσεων 27-29 του βιβλίου VI δεν μπορεί να αποδοθεί στους Πυθαγόρειους, καθώς στηρίζονται στην θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου, δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία, όπως μαρτυρά και ο Εύδημος, ότι η μέθοδος έχει τις ρίζες της στην Πυθαγόρεια σχολή, και πολύ πιθανό να είναι δημιούργημα του ίδιου του Πυθαγόρα.

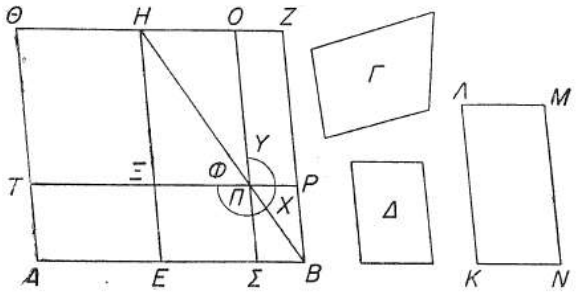
Ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων. ὅταν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαρατείνῃς, τότε παραβάλλειν ἐκεῖνο τὸ χωρίον φασίν, ὅταν μεῖζον δὲ ποιήσῃς τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτός, τότε ἐλλείπειν. καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐνταῦθα δὲ τῆς παραβολῆς ἐδεήθη τῷ δοθέντι τριγώνῳ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσον ἐθέλων παραβαλεῖν [παραλληλόγραμμον?], παραβαλεῖν [παραλληλόγραμμον?], ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλογράμμου τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον, ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὡρισμένην παραβολήν·

Πρόκλος, Εις Ευκλείδην, 419,15-420,12

Μια λεπτομερής εξέταση των προτάσεων VI. 27, 28, 29 είναι απαραίτητη λόγω της μεγάλης ιστορικής σπουδαιότητάς τους, η οποία απορρέει από το γεγονός ότι η μέθοδος της παραβολής χωρίων χρησιμοποιούνταν σταθερά από τους αρχαίους Έλληνες στη λύση προβλημάτων. Συνιστούν τη βάση για το Βιβλίο Χ των *Στοιχείων*, καθώς και για την πραγματεία των κωνικών τομών του Απολλώνιου. Τα προβλήματα καθεαυτά διατυπώνονται στις Προτάσεις VI.28, 29: Σε μία δοθείσα ευθεία γραμμή να παραβληθεί παραλληλόγραμμο ίσο προς δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και «ελλείπον» (ή «υπερβάλλον») κατά ένα παραλληλόγραμμο σχήμα όμοιο προς δοθέν παραλληλόγραμμο. Στην Πρόταση VI.27 παρέχεται ο «διορισμός», δηλαδή ο προσδιορισμός της συνθήκης που είναι αναγκαία για τη λύση του προβλήματος στην περίπτωση της παραβολής κατ' έλλειψη (VI.28): Το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο πρέπει (σε αυτή την περίπτωση) να μην είναι μεγαλύτερο από το παραλληλόγραμμο που αναγράφεται στη μισή ευθεία και είναι όμοιο προς το έλλειμμα. Ας δούμε πιο αναλυτικά την Πρόταση VI.28.

Ας υποθέσουμε ότι Δ είναι το δοθέν παραλληλόγραμμο προς το οποίο το έλλειμμα, πρέπει να είναι όμοιο. Διχοτομούμε την ΑΒ στο Ε, και στο μισό ΕΒ αναγράφουμε το παραλληλόγραμμο ΗΕΒΖ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΗΒ και συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΘΑΒΖ. Θεωρούμε τώρα ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ΘΑ και φέρουμε ΤΡ παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΗΒ στο Π. Φέρουμε,

επίσης, την ΟΠΣ παράλληλη στην ΤΑ. Τότε, το παραλληλόγραμμο ΤΑΣΠ είναι ένα παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στην ΑΒ, αλλά ελλείπον κατά ένα παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ, αφού το έλλειμμα είναι το παραλληλόγραμμο ΠΣΒΡ, που είναι όμοιο προς το ΕΖ (Πρόταση VI.24). (Με τον ίδιο τρόπο, αν το Τ βρισκόταν στην προέκταση της ΘΑ και η ΤΡ έτεμνε την προέκταση της ΗΒ στο Ρ, θα είχαμε παραβάλλει ένα παραλληλόγραμμο στην ΑΒ, αλλά υπερέχον κατά ένα παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ).



Τώρα, ας θεωρήσουμε το παραλληλόγραμμο ΑΠ, ελλείπον κατά το ΣΡ όμοιο και ομοίως κείμενο με το Δ. Αφού ΑΞ=ΕΡ και ΞΣ=ΠΖ, έπεται ότι το παραλληλόγραμμο ΑΠ είναι ίσο με το γνώμονα ΥΦΧ, και το πρόβλημα είναι έτσι αυτό της κατασκευής του γνώμονα ΥΦΧ ίσου (κατά το εμβαδό) με το ευθύγραμμο σχήμα Γ. Ο γνώμων, προφανώς, δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από το παραλληλόγραμμο ΕΖ, οπότε το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από αυτό το παραλληλόγραμμο. Αυτός είναι ο *διορισμός* που δίνεται στην VI.27.

Αφού ο γνώμων είναι ίσος με το Γ, έπεται ότι ΗΞΠΟ=ΕΖ-Γ. Συνεπώς, προκειμένου να κατασκευάσουμε τον ζητούμενο γνώμωνα, δεν έχουμε παρά να σχεδιάσουμε στη γωνία ΖΗΕ το παραλληλόγραμμο ΗΞΠΟ=ΕΖ-Γ και όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ. Αυτό πράγματι κάνει ο Ευκλείδης: Κατασκευάζει, από την Πρόταση VI.25, παραλληλόγραμμο ΛΚΜΝ=ΕΖ-Γ και όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ και μετά σχεδιάζει ΗΞΠΟ ίσο με αυτό. Το πρόβλημα έτσι έχει λυθεί, καθώς το ΤΑΣΠ είναι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο.

Για να δείξουμε την αντιστοιχία της προηγούμενης μεθόδου με την λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ας θεωρήσουμε $\mathrm{AB} = \alpha, \Pi\Sigma = \mathrm{x}$ και έστω $\frac{\beta}{\gamma}$ ο λόγος των πλευρών του Δ. Τότε, $\Sigma\mathrm{B} = \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{x}$. Τότε, αν μ είναι κάποια σταθερά, (στην πραγματικότητα το ημίτονο μιας γωνίας ενός από τα παραλληλόγραμμα), $\mathrm{A}\Pi = \mu\left(\alpha\mathrm{x} - \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{x}^2\right)$, οπότε η εξίσωση προς λύση είναι:

$$\mu\left(\alpha x - \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{x}^2\right) = \Gamma.$$

Η αλγεβρική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\mathrm{x} = \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\Gamma}{\mu}\right)}.$$

Ο Ευκλείδης δίνει μόνο μία λύση (αυτή που αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο), αλλά γνώριζε προφανώς ότι υπάρχουν δύο και πως θα μπορούσε να δείξει τη δεύτερη στο σχήμα.

Για μία πραγματική λύση πρέπει το χωρίο Γ να μην είναι μεγαλύτερο από το $\mu \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4}$, το οποίο είναι το εμβαδό του ΕΖ. Αυτό, βέβαια, αντιστοιχεί στην Πρόταση VI.27. Παρατηρούμε ότι αυτό που στην πραγματικότητα κάνει ο Ευκλείδης είναι να βρει το παραλληλόγραμμο ΗΞΠΟ, (το οποίο είναι δοσμένου εμβαδού $\mu \cdot \text{ΗΞ} \cdot \text{ΞΠ} = \mu \cdot \text{ΗΞ}^2 \cdot \frac{\beta}{\gamma}$) και είναι ίσο με ΕΖ-Γ. Δηλαδή, βρίσκει ΗΞ, τέτοιο ώστε $\text{ΗΞ}^2 = \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\Gamma}{\mu}\right)$ ή διαφορετικά βρίσκει ευθεία γραμμή ίση με $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\Gamma}{\mu}\right)}$. Οπότε, το x είναι πλέον γνωστο, αφού:

$$x = \text{ΗΕ} - \text{ΗΞ} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{2} - \text{ΗΞ}.$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, πόσο στενά η μέθοδος της παραβολής χωρίων του Ευκλείδη ακολουθεί την αλγεβρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Η λύση της VI.29 είναι ακριβώς η ίδια, τηρουμένων βέβαια των αναλογιών. Σε αυτήν την περίπτωση μία λύση υπάρχει πάντα, οπότε δεν απαιτείται *διορισμός*, όπως στην VI.28.

Η Πρόταση VI.30, που ακολουθεί, χρησιμοποιεί την VI.29 για να διαιρέσει μια ευθεία γραμμή σε άκρο και μέσο λόγο (το ίδιο πρόβλημα όπως η II.11), ενώ η πρόταση VI.31 αποτελεί μια γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος I.47, δείχνοντας πως αντί για τετράγωνα μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε όμοια σχήματα στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Εκτός από το γεγονός ότι βασίζεται στην καινούργια θεωρία αναλογιών, το Βιβλίο VI δεν φαίνεται να περιέχει κανένα θέμα που δεν ήταν ήδη γνωστό πριν τον Ευκλείδη. Ούτε η γενίκευση της Πρότασης I.47 στην VI.31, για την οποία ο Πρόκλος εκφράζει τόσο θαυμασμό, προέρχεται από τον Ευκλείδη, αφού, ο Ιπποκράτης ο Χίος αποδεικνύει ότι ισχύει για ημικύκλια που έχουν σχεδιαστεί στις τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Το Βιβλίο V χρησιμοποιεί και βασίζεται στην Αρχή του Ευδόξου και στην Αρχή του Ελαχίστου (αυτές οι δύο αρχές είναι αναγκαίες για την απόδειξη της V.8), χωρίς καμία χρήση γεωμετρικών αιτημάτων, ιδιαίτερα του Πέμπτου Αιτήματος, ενώ το Βιβλίο VI βασίζεται στη Αρχή του Ευδόξου και την Αρχή του Ελαχίστου, αφενός, και στο Πέμπτο Αίτημα αφετέρου, ιδίως μέσω της Πρότασης I.36.

Σε αντίθεση με το Βιβλίο V, που θεωρείται ένα κείμενο υψηλής μαθηματικής ποιότητας, το Βιβλίο VI, έχει αρκετές ατέλειες τις οποίες προσπαθούμε να αναδείξουμε με το σχολιασμό που ακολουθεί κάθε πρόταση. Δεν περιέχει βέβαια λάθη, αλλά ούτε και οι αποδείξεις που δίνονται είναι οι καλύτερες δυνατές. Επίσης, η δομή του βιβλίου αυτού δεν είναι αρκετά στέρεα. Υπάρχουν αρκετές επαναλήψεις, ενώ κάποιες φορές δίνονται πρώτα προτάσεις σε ειδική μορφή και μετά αποδεικνύονται πιο γενικές προτάσεις και γενικότερα υπάρχουν πολλές βελτιώσεις που θα μπορούσαν να γίνουν σε αυτό το Βιβλίο.

Η παρουσίαση του Βιβλίου VI, στην παρούσα διπλωματική εργασία, έχει χωριστεί σε δύο κύρια κεφάλαια:

Το κεφάλαιο 1, στο πρώτο μέρος του, περιλαμβάνει το πρωτότυπο κείμενο, στο οποίο έχουν επισημανθεί οι προτάσεις προηγούμενων βιβλίων, που χρησιμοποιούνται κάθε φορά

για την εξαγωγή συμπερασμάτων, όπως αυτές σημειώνονται στα αντίστοιχα βιβλία των Heath [H1] και Fitzpatrick [F]. Περιλαμβάνει, επίσης, στο δεύτερο μέρος του, μια προσπάθεια απόδοσης του αρχαίου κειμένου στα νέα ελληνικά, καθώς και εκτενή αποσπάσματα από τα σχόλια του Heath [H1]. Για τη σύγχρονη διατύπωση του αρχαίου κειμένου έγινε παραβολή του πρωτότυπου, τόσο με την αγγλική μετάφραση του Heath [H1], όσο και με την ελληνική μετάφραση του Ευάγγελου Σταμάτη [Σ]. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από τη διπλωματική εργασία της κας Δοργιάκη [Δ]. Μολονότι η σύγχρονη διατύπωση δεν ακολουθεί το αρχαίο κείμενο κατά λέξη, έγινε προσπάθεια και το πρωτότυπο να μην αλλοιωθεί και να επιτευχθεί μια πιο απλοποιημένη παρουσίαση, υιοθετώντας το σύγχρονο συμβολισμό. Για παράδειγμα, στο αρχαίο κείμενο μια αναλογία εκφράζεται ως εξής: «έστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον». Εμείς απλά θα γράφουμε:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΓΖ}}.$$

Θα κρατήσουμε, ωστόσο, το συμβολισμό του Ευκλείδη για τα παραλληλόγραμμα, τα οποία αρκετά συχνά συμβολίζονται με τα γράμματα που αντιστοιχούν σε δύο απέναντι κορυφές του. Επίσης, ο όρος ευθεία, οποτεδήποτε χρησιμοποιείται, θα έχει την έννοια που της απέδιδε ο Ευκλείδης και που αντιστοιχεί στο σημερινό ευθύγραμμο τμήμα. Σε όλη την έκταση της παρούσας εργασίας ο λόγος ευθυγράμμων σχημάτων θα αναφέρεται στο λόγο των εμβαδών τους, ενώ η ισότητα ή ανισότητα ευθυγράμμων σχημάτων θα αναφέρεται, αντίστοιχα, στην ισότητα ή ανισότητα των εμβαδών τους. Έτσι, π.χ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ (ΑΒΓ=ΔΕΖ) σημαίνει ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα κατά το εμβαδόν, ενώ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο από το τρίγωνο ΔΕΖ (ΑΒΓ>ΔΕΖ) σημαίνει ότι το ΑΒΓ υπερέχει κατά το εμβαδό από το ΔΕΖ.

Το κεφάλαιο 2 περιλαμβάνει την αδημοσίευτη, σε προκαταρτική μορφή, εργασία των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη [ΝΦ2], βασικό μέλημα της οποίας είναι αφενός η ανάδειξη εκείνων των Προτάσεων που χρησιμοποιούν την Αρχή του Ευδόξου (Όρος V.4) και την συνέπεια αυτής, Πρόταση V.8 (και της ισοδύναμης αντιθετο-αντίστροφης V.9), και αφετέρου η παρουσίαση ουσιωδώς απλούστερων αποδείξεων των βασικών Προτάσεων του Βιβλίου VI, συμπεριλαμβανομένων των βασικών Προτάσεων VI.23, VI.25, VI.27-31. Σε όλη την έκταση του Κεφαλαίου 2, οι προτάσεις στις οποίες ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση θα χωρίζονται σε δύο υποπροτάσεις: εκείνη στην οποία ισχύει η αρχή του Ευδόξου -θα συμβολίζεται με ένα α (π.χ. VI.2α)- και εκείνη στην οποία δεν ισχύει -θα συμβολίζεται με ένα β (π.χ. VI.2β).

Στις αποδείξεις των Προτάσεων του Βιβλίου VI των *Στοιχείων*, όπως ήδη αναφέραμε, χρησιμοποιούνται Προτάσεις από τα Βιβλία I και II, αλλά κυρίως από το Βιβλίο V, που περιλαμβάνει τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου. Αυτές τις προτάσεις τις παρουσιάζουμε, χωρίς απόδειξη, σε ειδικά παραρτήματα στο τέλος της παρούσας εργασίας. Οι προτάσεις των Βιβλίων I και II παρουσιάζονται με τη μορφή που δίνονται στο βιβλίο των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη [ΝΦ1], ενώ οι προτάσεις του Βιβλίου V, ακολουθούν τις σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά-Στοιχεία Ευκλείδη» [Ν].

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ ([H1], σ.187)

Η θεωρία των αναλογιών διατυπώθηκε στο Βιβλίο V σε μία άψογη γενική μορφή που εφαρμόζεται σε όλα τα είδη μεγεθών (μολονότι η αναπαράσταση των μεγεθών με ευθείες γραμμές της δίνει μια γεωμετρική εμφάνιση). Είναι τώρα απαραίτητο να εφαρμόσουμε τη θεωρία στην ειδική περίπτωση της γεωμετρικής διερεύνησης. Το μόνο που απαιτείται ακόμα ώστε αυτό να καταστεί δυνατό, είναι μια απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου μεγέθους που φέρει σε οποιοδήποτε δοθέν πεπερασμένο μέγεθος οποιοδήποτε δοθέντα πεπερασμένο λόγο. Και αυτή η απόδειξη δίδεται, όσον αφορά στο θέμα της γεωμετρίας, από την VI.12 η οποία δείχνει πώς κατασκευάζεται η τέταρτη ανάλογος όταν δοθούν τρεις ευθείες γραμμές.
Θα πρέπει να αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την τεράστια χρησιμότητα της θεωρίας των αναλογιών. Ήδη στα Βιβλία I και II γνωρίσαμε ένα σημαντικό μέρος αυτού που αποκαλείται γεωμετρική άλγεβρα, τη μέθοδο, πιο συγκεκριμένα, της παραβολής χωρίων (application of areas). Έχουμε δει ότι αυτή η μέθοδος, που λειτουργεί με την αναπαράσταση των γινομένων δύο μεγεθών ως ορθογωνίων, μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε κάποιες ειδικές δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Αλλά οι περιορισμοί μιας τέτοιας μεθόδου είναι προφανείς. Όσο τα γενικά μεγέθη αναπαριστώνται από ευθείες γραμμές μόνο, δεν μπορούμε, αν η γεωμετρία μας είναι επίπεδη, να χειριστούμε γινόμενα με περισσότερα από δύο τέτοια μεγέθη. Και ακόμα και με τη χρήση τριών διαστάσεων, δεν μπορούμε να δουλέψουμε με γινόμενα με περισσότερα από τρία μεγέθη, καθώς δεν μπορεί να αποδοθεί γεωμετρική σημασία σε ένα τέτοιο γινόμενο. Ο περιορισμός αυτός παύει να υφίσταται από τη στιγμή που μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα γενικό μέγεθος, που αντιστοιχεί σε αυτό που δηλώνουμε με ένα γράμμα στην άλγεβρα, με ένα λόγο. Και αυτό μπορούμε να το κάνουμε, διότι στη γενική θεωρία των αναλογιών που διατυπώνεται στο Βιβλίο V, ένας λόγος μπορεί να είναι ο λόγος δύο ασύμμετρων μεγεθών, καθώς, επίσης, και σύμμετρων. Οι λόγοι μπορούν να συντίθενται επ' άπειρον (compounded ad infinitum) και η διαίρεση ενός λόγου με κάποιον άλλο είναι εξίσου εύκολη, καθώς είναι το ίδιο με τη σύνθεση του πρώτου λόγου με τον αντίστροφο του δεύτερου. Έτσι, για παράδειγμα, βλέπουμε αμέσως ότι οι συντελεστές σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση της πλέον γενικής μορφής μπορούν να αναπαρασταθούν από λόγους μεταξύ ευθειών γραμμών και η λύση που δίδεται με τις μεθόδους των Βιβλίων I και II για τα προβλήματα που αντιστοιχούν σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις με συγκεκριμένους συντελεστές μπορεί να επεκταθεί για να καλύψει οποιαδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικές ρίζες. Όπως υποδεικνύεται, μπορούμε να εκτελέσουμε, με σύνθεση λόγων, την πράξη που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών μεγεθών, και αυτό σε οποιοδήποτε βαθμό. Μπορούμε να διαιρέσουμε μεγέθη συνθέτοντας ένα λόγο με τον αντίστροφο του λόγου που παριστάνει τον διαιρέτη. Για την πρόσθεση και αφαίρεση μεγεθών, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεωμετρικό ισοδύναμο του κοινού παρανομαστή, το οποίο επιτυγχάνεται μέσω της τέταρτης αναλόγου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

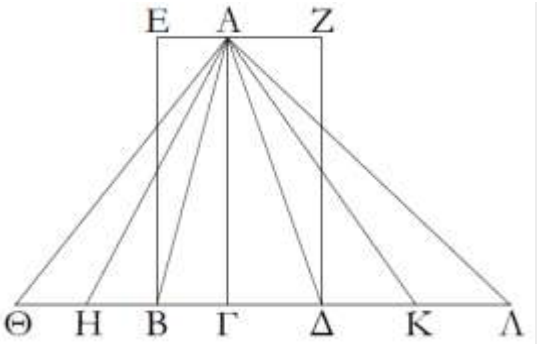
Το Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

[1.1] Οι Ορισμοί του Βιβλίου VI – Πρωτότυπο

Όρος VI.1	Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.
Όρος VI.2	[Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.]
Όρος VI.3	Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.
Όρος VI.4	Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.
Όρος VI.5	[Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.]

[1.2] Οι Προτάσεις του Βιβλίου VI – Πρωτότυπο

Πρόταση VI.1	Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.



Απόδειξη: Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι [ὁσαιδηποτοῦν] αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

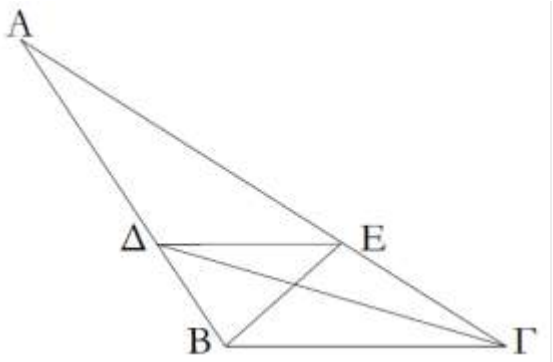
Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ,
[Πρόταση I.38] ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ
[Πρόταση I.38] ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΛ τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΛ τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἥ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΛΓ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως,
[Ορισμός V.5] ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου, καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

[Πρόταση I.34] Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ

[Πρόταση V.15] παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ
[Πρόταση V.11] τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.2	Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.



Απόδειξη: Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς
[Πρόταση I.38] βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ· ἄλλο
[Πρόταση V.7] δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ
[Πρόταση VI.1] τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς
[Πρόταση V.11] τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

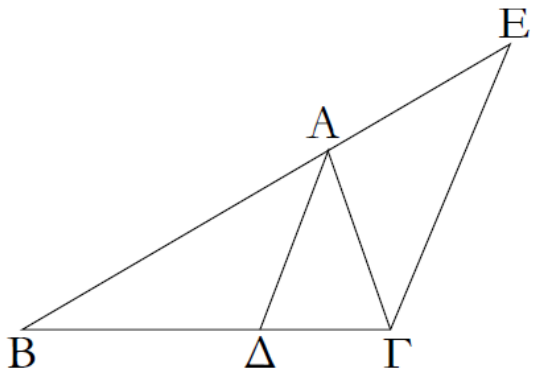
Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ
[Πρόταση VI.1] ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ
[Πρόταση V.11] τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν
[Πρόταση V.9] αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς
[Πρόταση I.39] αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.3	Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.



Απόδειξη: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ
[Πρόταση I.29] ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ
[Πρόταση I.29] ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ
[Πρόταση I.6] πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ
[Πρόταση VI.2] ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

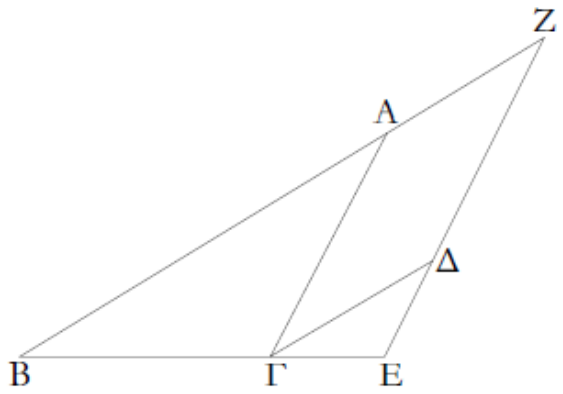
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ
[Πρόταση VI.2] ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ·
[Πρόταση V.11] καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση ἄρα ἡ ΑΓ
[Πρόταση V.9] τῇ ΑΕ·

[Πρόταση I.5] ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ [ἐστιν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ
[Πρόταση I.29] ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.4	Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

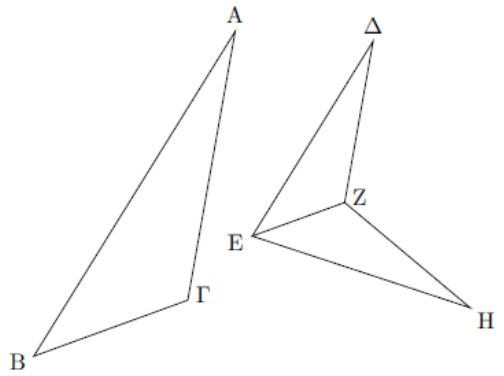


Απόδειξη: Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι
[Πρόταση I.17] δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι
[Αίτημα 5] συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός
[Πρόταση I.28] ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν
[Πρόταση I.28] ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τὴν ΖΕ
[Πρόταση I.34] ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ.
[Πρόταση VI.2] ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ
[Πρόταση V.16] παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ
[Πρόταση VI.2] ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς
[Πρόταση V.16] τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.
[Πρόταση V.22] Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.5	Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

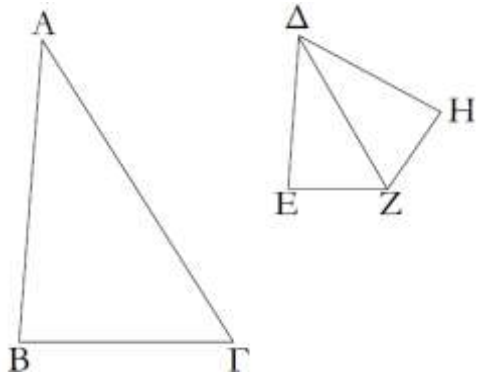


Απόδειξη: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ
[Πρόταση I.23] ἄρα ἡ πρὸς τῷ Α λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ
[Πρόταση I.32] τρίγωνον τῷ ΕΗΖ [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας
[Πρόταση VI.4] ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, [οὕτως] ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν
[Πρόταση V.11] ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ
[Πρόταση V.9] ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΗ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον
[Πρόταση I.8] τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ
[Πρόταση I.4] ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.6	Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

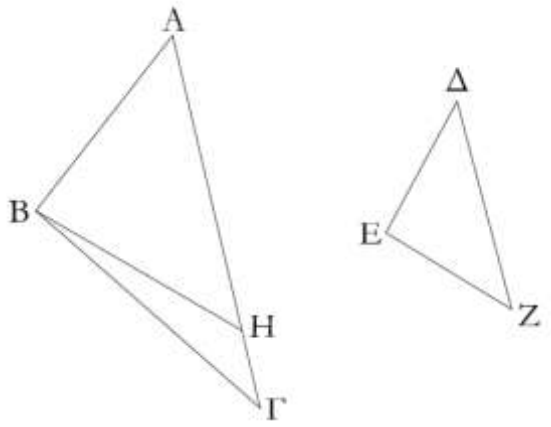


Απόδειξη: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ
[Πρόταση I.23] ΔΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν.
[Πρόταση I.32] Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα
[Πρόταση VI.4] ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ,
[Πρόταση V.11] οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ.
[Πρόταση V.9] ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ· καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΔΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι
[Πρόταση I.4] πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση·
[Πρόταση I.32] καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.7	Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ανάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.



Απόδειξη: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ
[Πρόταση I.23] πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ
[Πρόταση I.32] ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ
[Πρόταση VI.4] πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, [οὕτως] ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν
[Πρόταση V.11] ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ
[Πρόταση V.9, I.5] ΒΓ τῇ ΒΗ. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ
[Πρόταση I.13] ὑπὸ ΒΗΓ· ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς
[Πρόταση I.32] τῷ Δ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον

ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ· οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὔκ εἰσιν ἐλάττονες· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

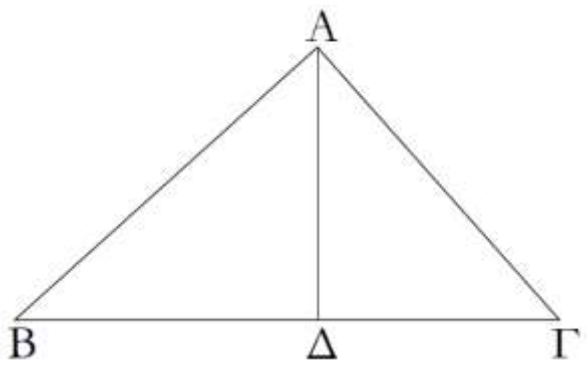
[Πρόταση I.5]

[Πρόταση I.17]

[Πρόταση I.32]

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.8	Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



Απόδειξη: Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ
[Πρόταση I.12] ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τργώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ
[Πρόταση I.32] ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν
[Πρόταση VI.4] δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα [ἐστὶ]
[Ορισμός VI.1] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

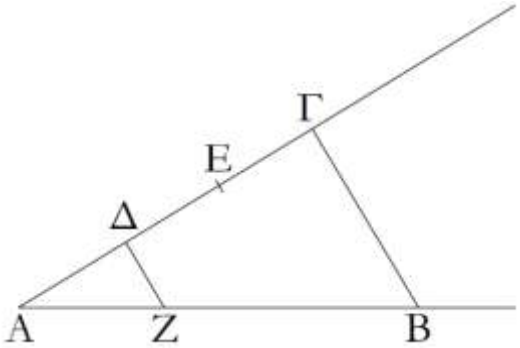
Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ
[Πρόταση I.32] ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἴσην τῇ πρὸς
[Πρόταση VI.4] τῷ Β, καὶ ἔτι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ

[Ορισμός VI.1] τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα	Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποιουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν].

Πρόταση VI.9	Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος[1] ἀφελεῖν.



Απόδειξη: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα ἡ ΑΓ γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον

[Πρόταση I.3] ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.

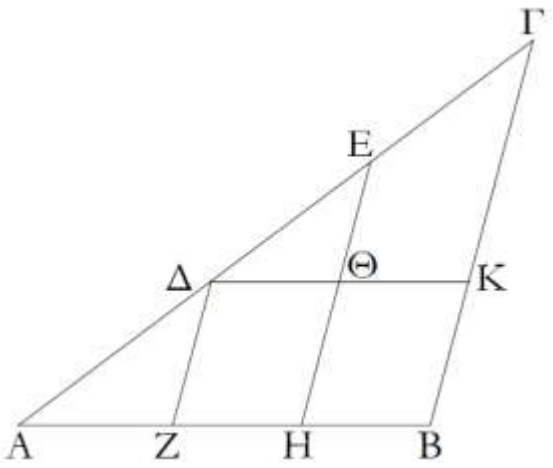
[Πρόταση I.31] Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ,

[Πρόταση VI.2] ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

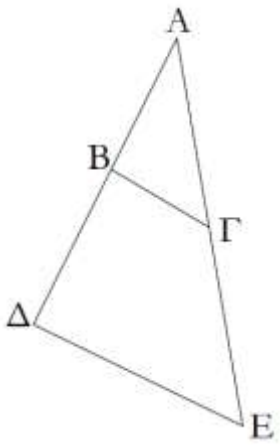
[1] Στον Όρο V.1 ορίζεται η έννοια «μέρος» ως εξής: «*Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον*». Εδώ η έκφραση «η ευθεία α είναι μέρος της β» χρησιμοποιείται με την έννοια ότι η ευθεία α είναι μικρότερη από τη β και όχι, όπως θα περίμενε κανείς, ότι η α καταμετρεί την β.

Πρόταση VI.10	Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.



Απόδειξη: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ,
[Πρόταση I.31] διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.
Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ
[Πρόταση I.34] ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ,
[Πρόταση VI.2] οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
[Πρόταση VI.2] ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.
Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.11	Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Απόδειξη: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

[Πρόταση I.3] ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ

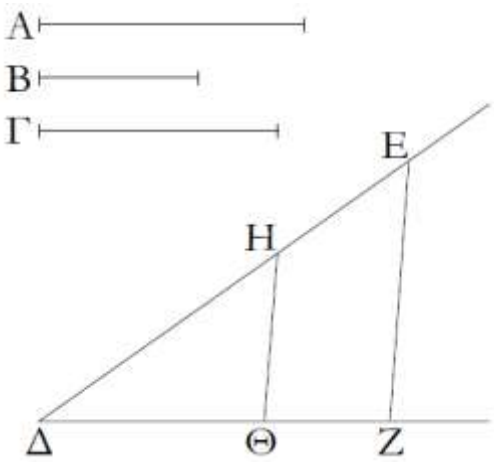
[Πρόταση I.31] ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ,

[Πρόταση VI.2] ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.12	Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

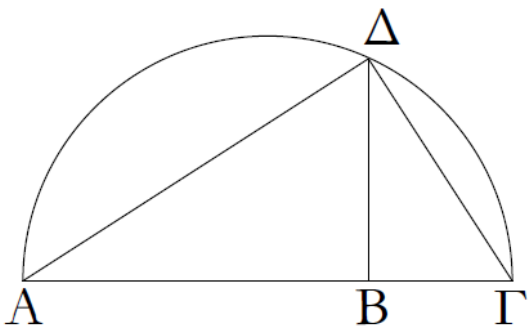


Απόδειξη: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση
[Πρόταση I.3] ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.
[Πρόταση I.31] Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ
[Πρόταση VI.2] τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.13	Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Απόδειξη: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

[Πρόταση I.10] Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ,

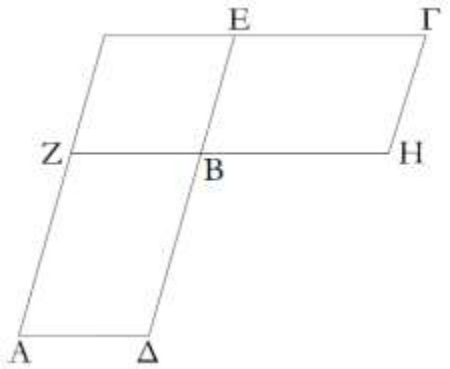
[Πρόταση I.11] καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

[Πρόταση III.31] Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ, ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ

[VI.8, Πόρισμα] μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.14	Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.



Απόδειξη: Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα
[Πρόταση I.14] εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

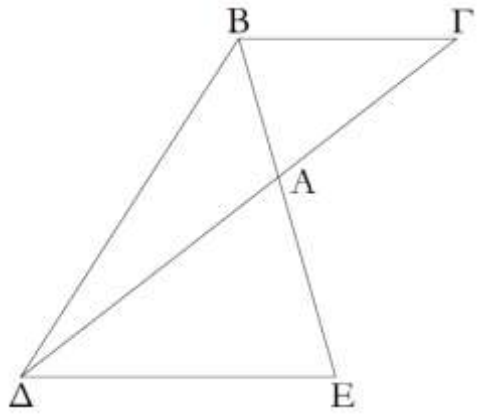
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ, ἔστιν
[Πρόταση V.7] ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ
[Πρόταση VI.1] πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΒ
[Προτ. VI.1, V.11] πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ
[Πρόταση VI.1] παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ
[Πρόταση VI.1] παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ
[Πρόταση V.11] πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ
[Πρόταση V.9] παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.15	Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.



Απόδειξη: Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ
[Πρόταση I.14] καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΒΑΔ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ
[Πρόταση V.7] τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως
[Πρόταση VI.1] ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.
[Πρόταση V.11] καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

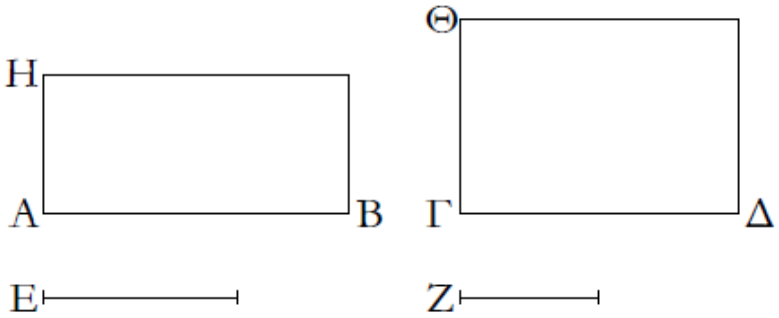
Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον
[Πρόταση VI.1] πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον,
[Πρόταση V.11] οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ [τρίγωνον]
[Πρόταση V.9] τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων

ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.16	Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.



Απόδειξη: Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

[Πρόταση Ι.11] Ἤχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς
[Πρόταση Ι.3] αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων
[Πρόταση VI.14] ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

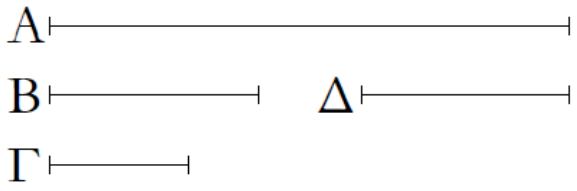
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί ἐστιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων

παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

[Πρόταση VI.14] ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.17	Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.



Απόδειξη: Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

[Πρόταση I.3] Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ

[Πρόταση VI.16] τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

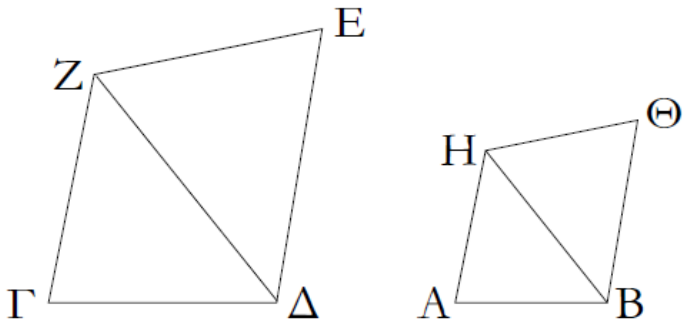
Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

[Πρόταση VI.16] ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.18	Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

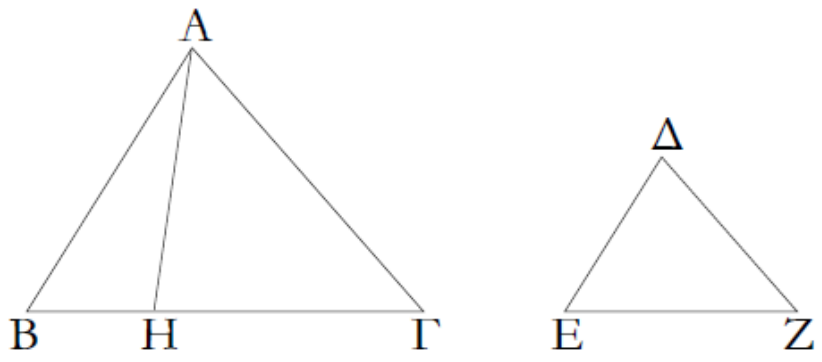


Απόδειξη: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ
[Προτ. I.23, I.32] ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ
[Πρόταση VI.4] πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ
[Πρόταση I.23] μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ. λοιπὴ
[Πρόταση I.32] ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν
[Πρόταση VI.4] ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ
[Πρόταση V.11] καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ· καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

[Ορισμός VI.1] Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.19	Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



Απόδειξη: Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε
[Ορισμός V.11] ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

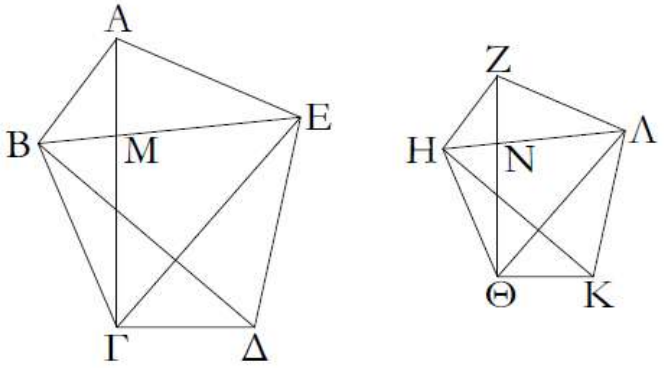
Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ
[Πρόταση VI.11] πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ
[Πρόταση V.16] ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ
[Πρόταση V.11] πρὸς ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων
[Πρόταση VI.15] ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν
[Ορισμός V.9] δευτέραν, ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ
[Πρόταση VI.1] τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα	Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον [ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.20	Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.



Απόδειξη: Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

[Ορισμός VI.1]
[Πρόταση VI.6]
[Πρόταση VI.4 & Ορισμός VI.1]
[Πρόταση V.22]
[Πρόταση VI.6]
[Πρόταση VI.4 & Ορισμός VI.1]

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ

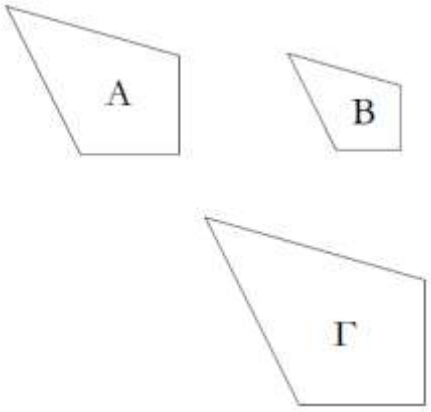
πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ
[Πρόταση VI.6] τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ
[Πρόταση I.32] ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς
[Πρόταση VI.4] ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ
[Πρόταση V.22] ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΜ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· πρὸς ἄλληλα γάρ
[Πρόταση VI.1] εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων,
[Πρόταση V.12] οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον
[Πρόταση V.16] πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως
[Πρόταση V.12] ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν
[Πρόταση VI.19] ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα	Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.21	Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.



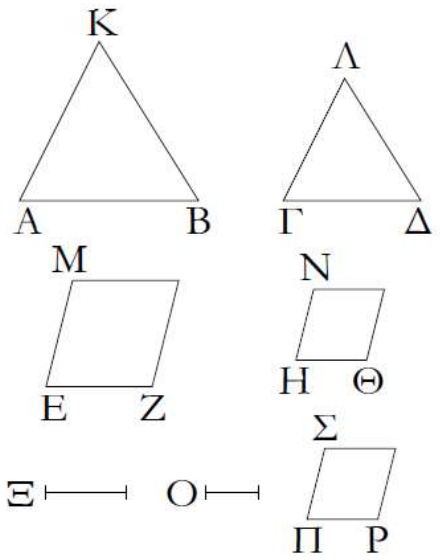
Απόδειξη: Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστιν ὅμοιον.

[Ορισμός VI.1] Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς

[Ορισμός VI.1] ἀνάλογον ἔχει. ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β

[Ορισμός VI.1] ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.22	Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.



Απόδειξη: Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη
[Πρόταση VI.11] ἀνάλογον ἡ Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν
[Πρόταση V.22] ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ,
[VI.19, Πόρισμα] οὕτως [καὶ] τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ
[Πρόταση V.11] πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

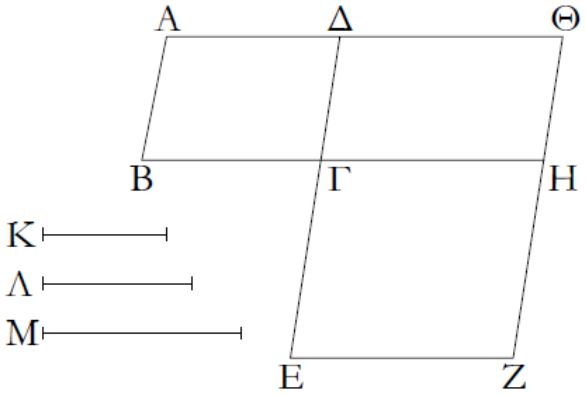
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς
[Πρόταση VI.12] τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ
[Πρόταση VI.18] τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ

[Πρόταση V.11] ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν
[Πρόταση V.9] αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.23	Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.



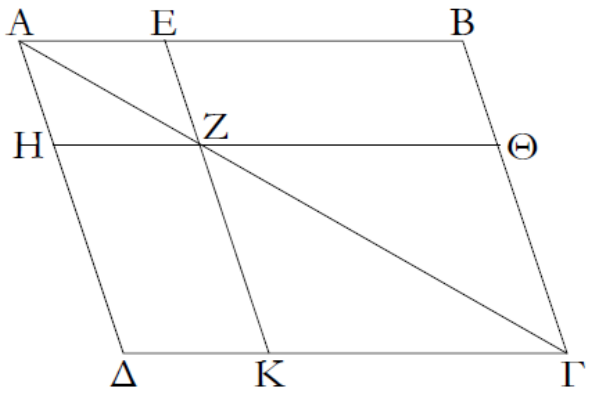
Απόδειξη: Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ
[Πρόταση I.14] καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ
[Πρόταση VI.12] Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ
[Πρόταση VI.1] παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ
[Πρόταση V.11] πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ
[Πρόταση VI.1] ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς
[Πρόταση V.11] τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ
[Πρόταση V.22] παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.24	Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



Απόδειξη: Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

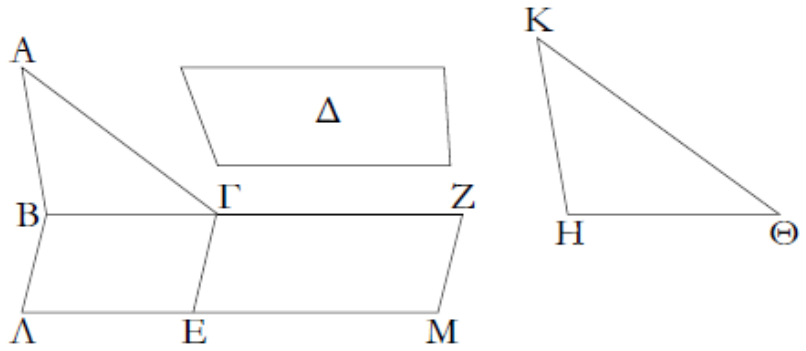
Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ,
[Πρόταση VI.2] ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως, ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς
[Πρόταση VI.2] ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ,
[Πρόταση V.18] οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ
[Πρόταση V.16] πρὸς ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση
[Πρόταση I.29] ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΑ· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ
[Πρόταση I.32] τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς
[Πρόταση VI.4] ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς
[Πρόταση V.22] τὴν ΖΕ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ
[Ορισμός VI.1] παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ

[παραλληλογράμμῳ] ὅμοιόν ἐστιν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

[Πρόταση VI.21]

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.25	Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.



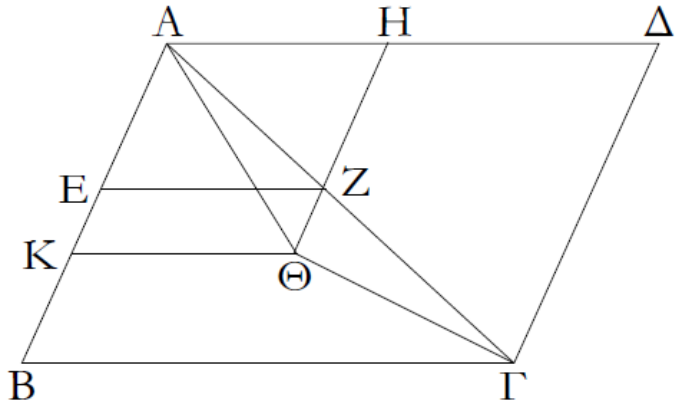
Απόδειξη: Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον
[Πρόταση I.44] παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον
[Πρόταση I.45] τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν
[Πρόταση I.14] ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ
[Πρόταση VI.13] ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον
[Πρόταση VI.18] τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως
[VI.19, Πόρισμα] ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΒΕ
[Πρόταση VI.1] παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ
[Πρόταση V.16] παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.26	Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.



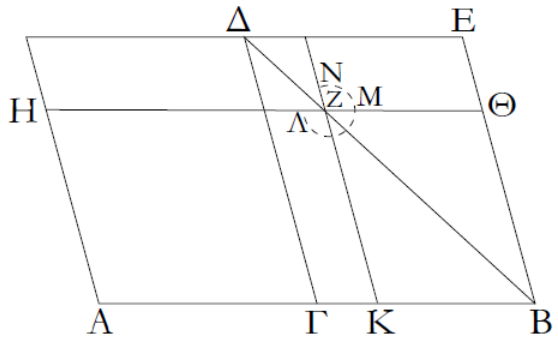
Απόδειξη: Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ. *[Πρόταση I.31]*

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὔκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΖ παραλληλογράμμῳ. *[Πρόταση VI.24]* *[Πρόταση V.11]* *[Πρόταση V.9]*

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.27	Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.



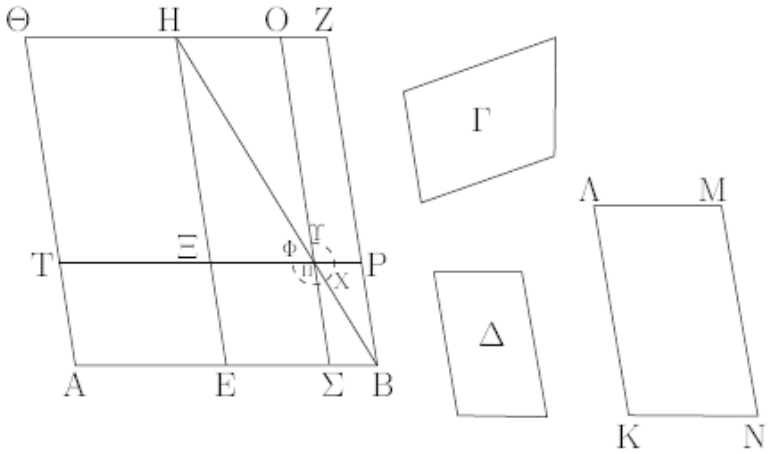
Απόδειξη: Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω
[Πρόταση I.10] παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔΒ μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΒ
[Πρόταση VI.26] παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

[Πρόταση I.43] Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ
[Πρόταση I.36 ή VI.1] ΚΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.28	Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν].



Απόδειξη: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ μὴ μεῖζον [ὂν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

[Πρόταση I.10] Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ
[Πρόταση VI.18] τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον.

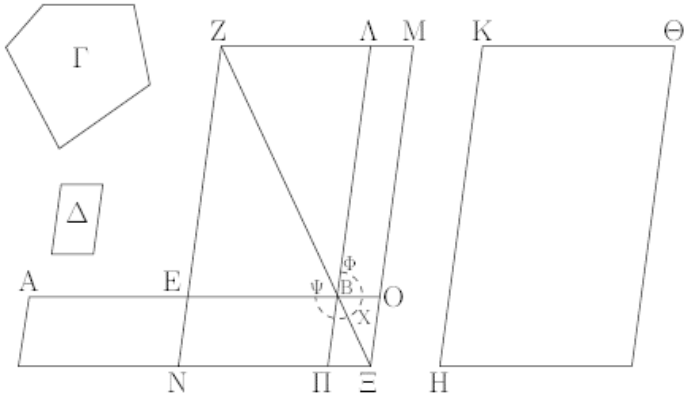
Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΗΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζον ἔστω τὸ ΘΕ
[Πρόταση VI.1] τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον
[Πρόταση VI.25] τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ [ἐστιν] ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ
[Πρόταση VI.21] ἄρα τῷ ΗΒ ἐστιν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω τῇ μὲν ΚΛ

[Πρόταση I.3] ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι [τὸ ΗΠ] τῷ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ
[Πρόταση VI.21] ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν]. καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν
[Πρόταση VI.26] αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστιν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΧΦ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ
[Πρόταση I.43] ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστιν
[Πρόταση I.36] ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΦΧΥ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλ' ὁ ΦΧΥ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλεῖπον εἴδει
[Πρόταση VI.24] παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ [ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.29	Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.



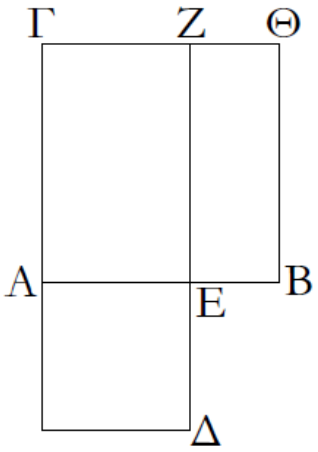
Απόδειξη: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

[Πρόταση I.10] Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ
[Πρόταση VI.18] ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον
[Πρόταση VI.25] τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ
[Πρόταση I.3] ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ
[Πρόταση VI.21] ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα
[Πρόταση VI.26] τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστίν. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ
[Πρόταση I.36] γνώμων τῷ Γ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ
[Πρόταση I.43] ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστίν· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ ὑπερβάλλον εἴδει
[Πρόταση VI.24] παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον τὸ ΟΠ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.30	Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



Απόδειξη: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

[Πρόταση I.46] Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῇ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

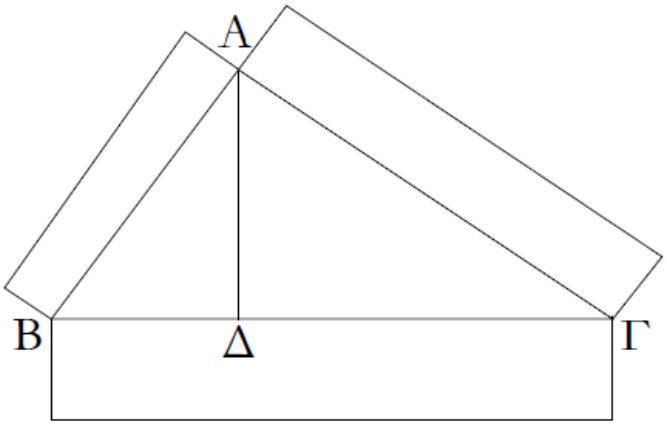
[Πρόταση VI.29] Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν

[Πρόταση VI.14] αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα

[Πρόταση V.14] καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρόταση VI.31	Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



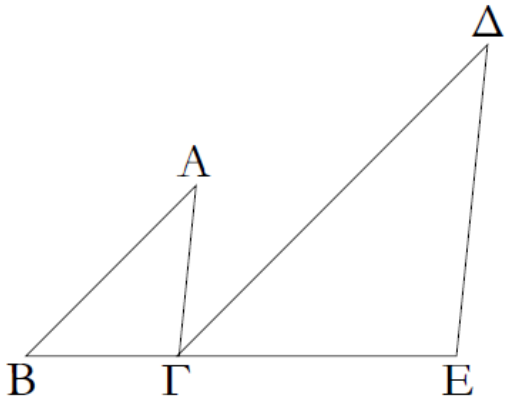
Απόδειξη: Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

[Πρόταση I.12] Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ πρὸς τῇ
[Πρόταση VI.8] καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ
[Ορισμός VI.1] πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
[VI.19, Πόρισμα] δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως
[Πρόταση V.24] ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος
[Πρόταση V.9] τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.32	Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

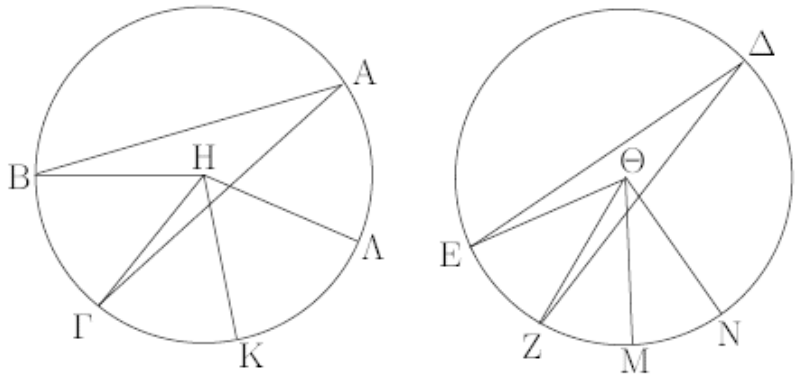


Απόδειξη: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΓ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα
[Πρόταση I.29] ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ,
[Πρόταση VI.6] ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ
[Πρόταση I.32] ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ
[Πρόταση I.14] τῇ ΓΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση VI.33	Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.



Απόδειξη: Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ
[Πρόταση III.27] ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΝΘΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ
[Πρόταση III.27] τῇ ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ
[Ορισμός V.5] ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ.

[Πρόταση V.15] ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν
[Πρόταση III.20] ὑπὸ ΕΔΖ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1.3] Οι Ορισμοί του Βιβλίου VI - Σύγχρονη διατύπωση & σχολιασμός

Ορισμός VI.1	Όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι, όσα έχουν (1) τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και (2) τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες.

Σχόλια του Heath για τον Ορισμό VI.1 ([H1], σ. 188)

Αυτός ο ορισμός παρατίθεται από τον Αριστοτέλη, *Αναλυτικά Ύστερα, ΙΙ 17, 99α, 13,* ο οποίος αναφέρει ότι η ομοιότητα στην περίπτωση των σχημάτων «συνίσταται, ίσως, στο να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες τους ίσες». Η χρήση της λέξης «ίσως», μπορεί να υποδηλώνει ότι, στην εποχή του Αριστοτέλη, ο ορισμός αυτός δεν είχε καθιερωθεί στα εγχειρίδια Γεωμετρίας (Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles*, p.9).

Επισημάνθηκε από τον Van Swinden ("Elements of Geometry", Jacobi's edition, 1834, pp. 114-5) ότι ο Ευκλείδης παραλείπει να παραθέσει ένα ουσιώδες κομμάτι του ορισμού, δηλαδή ότι «οι αντίστοιχες πλευρές πρέπει να είναι απέναντι από ίσες γωνίες», το οποίο είναι αναγκαίο ώστε οι αντίστοιχες πλευρές να ακολουθούν με την ίδια σειρά στα δύο σχήματα.

Την ίδια στιγμή ο ορισμός παραθέτει περισσότερα από ότι είναι απολύτως αναγκαία, καθώς είναι αλήθεια να πούμε ότι *δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν, αν οι πλευρές και οι γωνίες παρθούν με την ίδια σειρά, οι γωνίες είναι ίσες και οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, παραλείποντας*

(i) τρεις διαδοχικές γωνίες, ή

(ii) δύο διαδοχικές γωνίες και την κοινή τους πλευρά ή

(iii) δύο διαδοχικές πλευρές και την περιεχόμενη γωνία,

και μη κάνοντας καμία υπόθεση σχετικά με τις παραλειπόμενες πλευρές και γωνίες.

Ο Austin διαφώνησε με αυτόν τον ορισμό, λόγω του ότι δεν είναι προφανές ότι οι ιδιότητες (1) του να έχουν τις γωνίες τους αντίστοιχα ίσες και (2) του να έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, μπορεί να συνυπάρχουν σε δύο σχήματα. Αλλά, καθώς ένας ορισμός δεν ασχολείται με το να αποδείξει την ύπαρξη του οριζόμενου αντικειμένου, η διαφωνία απορρίπτεται. Θα ικανοποιηθούμε κατάλληλα ως προς την ύπαρξη όμοιων σχημάτων στην πορεία της παρουσίασης του Βιβλίου VI, όπου θα μάθουμε πώς να κατασκευάζουμε επί μιας δοθείσας ευθείας γραμμής ένα ευθύγραμμο σχήμα όμοιο προς ένα δοθέν (VI .18).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Ειδικά για τον ορισμό της ομοιότητας τριγώνων, είναι αρκετή η πρώτη συνθήκη του ορισμού, καθώς στην Πρόταση VI.4, όπως θα δούμε παρακάτω, αποδεικνύεται ότι στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες. Έτσι, *όμοια θα ονομάζουμε τα τρίγωνα εκείνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, δηλαδή είναι ισογώνια.* Αλλά, για τον ορισμό της ομοιότητας ευθυγράμμων σχημάτων με

περισσότερες από τρεις πλευρές και οι δύο συνθήκες του Ορισμού 1 είναι αναγκαίες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, την περίπτωση ενός τετραγώνου και ενός ορθογωνίου. Τα σχήματα αυτά έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, αλλά δεν έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες και συνεπώς δεν μπορούν να χαρακτηριστούν όμοια.

Για την ομοιότητα ευθυγράμμων σχημάτων έχει επίσης προταθεί ο εξής ορισμός: «*Όμοια ευθύγραμμα σχήματα με περισσότερες από τρεις πλευρές ονομάζονται εκείνα τα οποία μπορούν να διαιρεθούν σε ίσο αριθμό ομοίων τριγώνων*». Αν, μάλιστα, υιοθετηθεί αυτός ο ορισμός, τότε το πρώτο μέρος της Πρότασης VI.20 μπορεί να παραληφθεί εντελώς.

Είναι βέβαιο ότι για την ομοιότητα ευθυγράμμων σχημάτων πρέπει να καθοριστεί η σειρά των αντίστοιχων πλευρών και γωνιών. Αλλά και η παράθεση «των αντίστοιχων αναλόγων πλευρών απέναντι από τις ίσες γωνίες» δεν επιλύει το πρόβλημα της διάταξης των ίσων γωνιών και των αναλόγων πλευρών. Μόνο στα τρίγωνα υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ γωνιών και απέναντι πλευρών. Στα τετράπλευρα και στα πολύγωνα γενικότερα, απέναντι από μία γωνία τους δεν υπάρχει μία μόνο απέναντι πλευρά, αλλά μπορούν να θεωρηθούν ως απέναντι πλευρές όλες οι άλλες εκτός εκείνων που περιέχουν τη γωνία. Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε τον Ορισμό VI.1 των *Στοιχείων* ως εξής:

Ορισμός VI.1 (Σύγχρονη διατύπωση)

Δύο ευθύγραμμα χωρία Δ, Ε λέγονται **όμοια**, αν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία των πλευρών του Δ με τις πλευρές του Ε (ομόλογες πλευρές), η οποία προσδιορίζει και μια αντιστοιχία γωνιών (ομόλογες γωνίες), ώστε οι ομόλογες γωνίες να είναι ίσες (δηλαδή τα Δ, Ε είναι ισογώνια) και οι ομόλογες πλευρές ανάλογες (δηλαδή κάθε λόγος πλευρών του Δ είναι ίσος με το λόγο των ομόλογων πλευρών του Ε).

Ορισμός VI.2	Δύο σχήματα είναι αντιστρόφως ανάλογα όταν υπάρχουν σε καθένα από αυτά ηγούμενοι και επόμενοι λόγοι.

Σχόλια του Heath για τον Ορισμό VI.2 ([H1], σ. 189)

Το ελληνικό κείμενο δίνει εδώ έναν ορισμό των αντιστρόφως αναλόγων σχημάτων (αντιπεπονθότα σχήματα). «[Δύο] σχήματα είναι αντιστρόφως ανάλογα όταν υπάρχουν σε καθένα από αυτά τα σχήματα ηγούμενοι και επόμενοι λόγοι». Καμία κατανοητή σημασία δεν μπορεί να αποδοθεί στο «ηγούμενοι και επόμενοι λόγοι» εδώ. Η λογική θα απαιτούσε μάλλον «έναν ηγούμενο και έναν επόμενο από (δύο ίσους) λόγους σε κάθε σχήμα». Ως εκ τούτου ο Candalla και ο Peyrard το ερμηνεύουν «όροι λόγων», αντί για «λόγοι». Ο Camerer το ερμηνεύει «λόγων» χωρίς «όροι». Αλλά η ένσταση στον ορισμό βρίσκεται βαθύτερα. Δε χρησιμοποιείται ποτέ. Όταν φτάνουμε, στην VI.14, 15, XI 34, σε παραλληλόγραμμα, τρίγωνα κ.λπ., που έχουν την αναφερόμενη ιδιότητα, αυτά δεν αποκαλούνται «αντιστρόφως ανάλογα» ("reciprocal") παραλληλόγραμμα, αλλά παραλληλόγραμμα «οι πλευρές των

οποίων είναι αντιστρόφως ανάλογες». Έτσι, ο Simson έχει δίκιο στο σχολιασμό του ορισμού, ότι ίσως είναι παρεμβολή από τον Ήρωνα, ο οποίος τον γνώριζε.

Ορισμός VI.3	Μία ευθεία λέγεται ότι έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν ο λόγος ολόκληρης της ευθείας προς το μεγαλύτερο τμήμα της είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο τμήμα της.

Έτσι, θα λέμε ότι το σημείο M της ευθείας AB την τέμνει σε άκρο και μέσο λόγο, αν ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}.$$

Ορισμός VI.4	Ύψος κάθε σχήματος είναι η κάθετος που άγεται από την κορυφή προς τη βάση.

Σχόλια του Heath για τον Ορισμό VI.4 ([H1], σ. 189)

Ο ορισμός του «ύψους» δεν υπάρχει στον Campanus και ίσως θεωρείται σωστά «ύποπτος», δεδομένου ότι δεν ισχύει για παραλληλόγραμμα, παραλληλεπίπεδα, κυλίνδρους και πρίσματα, παρόλο που χρησιμοποιείται στα *Στοιχεία* με αναφορά σε αυτά τα τελευταία σχήματα. Ο Αριστοτέλης δε φαίνεται να γνωρίζει την έννοια «ύψος» με τη μαθηματική της σημασία. Χρησιμοποιεί τον όρο «κάθετος» του τριγώνου (Μετεωρολογικά, III 3, 373α II).

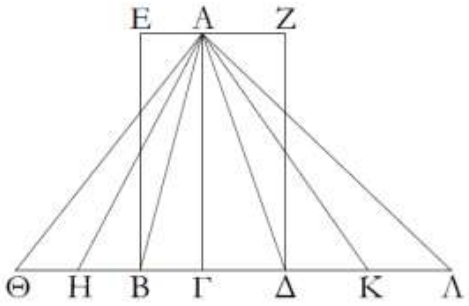
Ορισμός VI.5	Ένας λόγος λέγεται ότι αποτελείται από λόγους όταν οι πηλικότητες των λόγων αυτών πολλαπλασιαζόμενες μεταξύ τους σχηματίζουν κάποιο λόγο.

Σχόλια του Heath για τον Ορισμό VI.5 ([H1], σ. 189-190)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί (pp. 116, 132) δεν υπάρχει αμφιβολία ότι αυτός ο ορισμός του λόγου είναι παρεμβολή. (...) Στη μετάφραση του Campanus από τα Αραβικά παραλείπεται τελείως. (...) Επίσης, δεν υπάρχει αναφορά στον ορισμό αυτό στη θέση που εμφανίζεται ο συγκείμενος λόγος για πρώτη φορά (VI.23), ούτε πουθενά αλλού στον Ευκλείδη. Ούτε αναφέρεται ποτέ από τους άλλους μεγάλους Γεωμέτρες της αρχαιότητας, όπως τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο. Φαίνεται να αναφέρεται μόνο δύο φορές, όλες και όλες: (1) Στο απόσπασμα του Ευτόκιου, που αναφέρεται παραπάνω (p. 116) και (2) Από το Θέωνα στα σχόλιά του πάνω στη «Σύνταξη» του Πτολεμαίου. Επιπλέον το περιεχόμενο του ορισμού είναι από μόνο του «ύποπτο». Μιλάει για «πηλικότητες λόγων πολλαπλασιαζόμενων μαζί (δηλαδή, μεταξύ τους)», μια πράξη άγνωστη στη γεωμετρία. (...) Το γεγονός είναι ότι ο ορισμός αυτός είναι μη γεωμετρικός (ungeometrical) και άχρηστος, όπως έχει ήδη

παρατηρηθεί από τον Savile, κατά την άποψη του οποίου ήταν ένα από τα δύο ψεγάδια στο σώμα της γεωμετρίας (το άλλο ήταν φυσικά το 5ο Αίτημα).

Πρόταση VI.1	Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν κοινό ύψος, έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των βάσεών τους.



Απόδειξη: Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ και τα παραλληλόγραμμα ΕΓ, ΓΖ τα οποία έχουν κοινό ύψος ΑΓ.

Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΓΖ}}.$$

Προεκτείνουμε τη ΒΔ προς τα δύο μέρη της και παίρνουμε προς το μέρος της ΒΓ (οσαδήποτε) τμήματα ΒΗ, ΗΘ ίσα προς τη βάση ΒΓ και οσοδήποτε τμήματα ΔΚ, ΚΛ ίσα προς τη βάση ΓΔ. Φέρουμε τα ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ και ΑΛ.

Από την **Πρόταση Ι.38**, επειδή τα τμήματα ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ είναι ίσα μεταξύ τους, θα είναι ίσα και τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΗΒ, ΑΘΗ. Άρα, όσες φορές είναι πολλαπλάσιο η βάση ΘΓ της βάσης ΒΓ, τόσες φορές είναι πολλαπλάσιο και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Για τους ίδιους λόγους όσες φορές είναι πολλαπλάσιο η βάση ΛΓ της βάσης ΓΔ, τόσες φορές είναι πολλαπλάσιο και το τρίγωνο ΑΛΓ του τριγώνου ΑΓΔ.

Πάλι από την **Πρόταση Ι.38**, αν ΘΓ=ΓΛ θα είναι και ΑΘΓ=ΑΓΛ. Επιπλέον, από **άμεση γενίκευση της Πρότασης Ι.38**, αν ΘΓ>ΓΛ, τότε ΑΘΓ>ΑΓΛ, ενώ αν ΘΓ<ΓΛ, τότε ΑΘΓ<ΑΓΛ.

Αν δοθούν, λοιπόν, τέσσερα μεγέθη, δύο βάσεις ΒΓ, ΓΔ και δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ έχουμε πάρει ίσα πολλαπλάσια της μεν βάσης ΒΓ και του τριγώνου ΑΒΓ, τη βάση ΘΓ και το τρίγωνο ΑΘΓ, της δε βάσης ΓΔ και του τριγώνου ΑΔΓ, άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια, τη βάση ΛΓ και το τρίγωνο ΑΛΓ και έχουμε δείξει ότι αν υπερέχει η βάση ΘΓ της βάσης ΓΛ, υπερέχει και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΛΓ και αν η βάση ΘΓ είναι ίση με τη βάση ΓΛ, είναι και το τρίγωνο ΑΘΓ ίσο με το τρίγωνο ΑΛΓ και αν η βάση ΘΓ είναι μικρότερη από τη βάση ΓΛ, είναι και το τρίγωνο ΑΘΓ μικρότερο του τριγώνου ΑΛΓ.

Άρα, από τον **Ορισμό V.5**,

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}}$$

Όμως, από την **Πρόταση I.34**, ΕΓ=2ΑΒΓ και ΖΓ=2ΑΓΔ. Επιπλέον, από την **Πρόταση V.15**, τα μέρη ίσων πολλαπλασίων έχουν ίσο λόγο με τα πολλαπλάσιά τους, δηλαδή:

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{2ΑΒΓ}}{\text{2ΑΓΔ}}.$$

Άρα,

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΖΓ}}.$$

Τελικά, από την **Πρόταση V.11**προκύπτει η αναλογία:

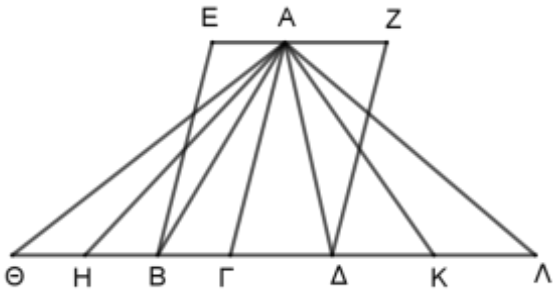
$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΖΓ}}.$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- **Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.1 ([H1], σ. 192-193)**

«ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος: Το ελληνικό κείμενο γράφει «ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ», με ένα σχήμα όπου η πλευρά ΑΓ, κοινή στα δύο τρίγωνα είναι κατακόρυφη στη βάση, οπότε είναι η ίδια «ύψος». Αλλά, ακόμα και αν τα δύο τρίγωνα τοποθετηθούν παρακείμενα έτσι, ώστε να έχουν κοινή την πλευρά ΑΓ, θα ήταν αρκετά αδικαιολόγητο να απαιτήσουμε να είναι αυτή κάθετη στη βάση. Ο Θέων σε αυτήν την περίπτωση, κάνοντας μια βελτίωση, τροποποίησε τη διατύπωση ως εξής: «που είναι κάτω από το ίδιο ύψος, (δηλαδή) την κατακόρυφο από το Α στο ΒΔ». Τόλμησα να αλλάξω τη διατύπωση ώστε να παραλείψω το «ΑΓ» και να σχεδιάσω ένα σχήμα με το συνήθη τρόπο.



Το σχήμα του Heath για την Πρόταση VI.1

…

Η απόδειξη θεωρεί -αυτό που είναι προφανές συμπέρασμα από την I.38- ότι, μεταξύ τριγώνων και παραλληλογράμμων με άνισες βάσεις και μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τη μεγαλύτερη βάση.

Φυσικά δεν είναι απαραίτητο τα δύο δεδομένα τρίγωνα να έχουν μία κοινή πλευρά, όπως το σχήμα· η απόδειξη είναι εξίσου εύκολη και αν δεν έχουν κοινή πλευρά. Η πρόταση είναι, επίσης, αληθής για τρίγωνα και παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν ίσα ύψη. Ο Simson διατυπώνει αυτό το γεγονός σε ένα πόρισμα, ως εξής: "*Από αυτό είναι ολοφάνερο ότι τα*

τρίγωνα και παραλληλόγραμμα που έχουν ίσα ύψη είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους".

Ας υποθέσουμε ότι τα σχήματα τοποθετούνται έτσι ώστε οι βάσεις τους να βρίσκονται στην ίδια ευθεία· και, αν φέρουμε κάθετους από τις κορυφές των τριγώνων προς τις βάσεις, η ευθεία γραμμή που ενώνει τις κορυφές είναι παράλληλη σε αυτή που βρίσκονται οι βάσεις, διότι οι κάθετες είναι ίσες και παράλληλες η μία στην άλλη [I.33]. Τότε, αν γίνει η ίδια κατασκευή όπως στην πρόταση, η απόδειξη θα είναι η ίδια. Ο στόχος της τοποθέτησης των βάσεων σε μία ευθεία γραμμή είναι να πάρουμε τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα εντός των ιδίων παραλλήλων. Βλ. την παρατήρηση του Πρόκλου στην I.38 (σελ. 405,17) ότι το να έχουν το ίδιο ύψος είναι το ίδιο με το να βρίσκονται εντός των ιδίων παραλλήλων.

Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ή τα ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία έχουν τη μία από τις κάθετες πλευρές με το ίδιο μήκος, μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε οι ίσες πλευρές να συμπίπτουν και οι άλλες να είναι σε ευθεία γραμμή. Αν τότε ονομάσουμε την κοινή πλευρά ως βάση, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή ορθογώνια τρίγωνα είναι το ένα προς το άλλο όπως τα ύψη τους, σύμφωνα με την VI.1. Τώρα, αντί για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε άλλο τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο αντίστοιχα με μια ίση βάση και μεταξύ των ιδίων παραλλήλων. Τότε, "τ*α τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις είναι το ένα προς το άλλο όπως τα ύψη τους"*».

…

- Η απόδειξη της αναλογίας

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}}$$

με τη βοήθεια του Ορισμού V.5 από τον Ευκλείδη μπορεί να περιγραφεί με σύγχρονο συμβολισμό ως εξής:

Όσες φορές είναι πολλαπλάσιο η βάση ΘΓ της βάσης ΒΓ, τόσες φορές είναι πολλαπλάσιο το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Συνεπώς, αν ΘΓ=νΒΓ, θα είναι ΑΘΓ=νΑΒΓ, όπου ν τυχαίος φυσικός αριθμός.

Επίσης, όσες φορές είναι πολλαπλάσιο η βάση ΛΓ της βάσης ΓΔ, τόσες φορές είναι πολλαπλάσιο το τρίγωνο ΑΛΓ του τριγώνου ΑΓΔ. Συνεπώς, αν ΛΓ=μΓΔ, τότε ΑΛΓ=μΑΓΔ, όπου μ τυχαίος φυσικός αριθμός.

Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Αν ΘΓ=ΛΓ, τότε ΑΘΓ=ΑΛΓ, δηλαδή αν νΒΓ= μΓΔ, τότε νΑΒΓ=μΑΓΔ, ή ισοδύναμα:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}}$$

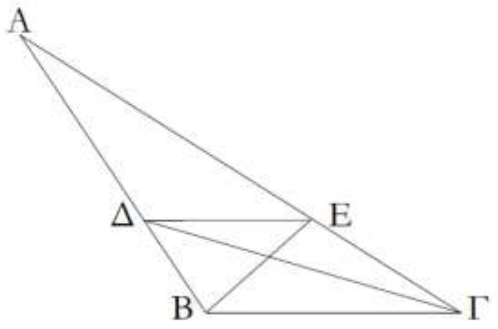
(ii) Αν ΘΓ>ΛΓ, τότε ΑΘΓ>ΑΛΓ, δηλαδή αν νΒΓ> μΓΔ, τότε νΑΒΓ>μΑΓΔ, ή ισοδύναμα:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}}$$

(iii) Αν ΘΓ<ΛΓ, τότε ΑΘΓ<ΑΛΓ, δηλαδή αν νΒΓ< μΓΔ, τότε νΑΒΓ<μΑΓΔ, ή ισοδύναμα:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} < \frac{\mu}{\nu} < \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}}$$

Πρόταση VI.2	Αν φέρουμε κάποια παράλληλη ευθεία προς μία πλευρά ενός τριγώνου, αυτή θα τέμνει τις άλλες δύο πλευρές του σε μέρη ανάλογα. Και αντίστροφα, αν οι πλευρές του τριγώνου τμηθούν σε μέρη ανάλογα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία τομής θα είναι παράλληλη προς την άλλη πλευρά του τριγώνου.



Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε τη ΔΕ παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}}=\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}.$$

Σχηματίζουμε τις ΒΕ και ΓΔ.

Τότε, από την **Πρόταση Ι.38**, τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ είναι ίσα, καθώς έχουν την ίδια βάση ΔΕ και βρίσκονται εντός των ιδίων παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ. Ας θεωρήσουμε τώρα το τρίγωνο ΑΔΕ. Από την **Πρόταση V.7**, τα ίσα μεγέθη προς το ίδιο μέγεθος έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι,

$$\frac{\text{ΒΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}}=\frac{\text{ΓΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}}.$$

Όμως, από την **Πρόταση VI.1**,

$$\frac{\text{ΒΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}}$$

αφού τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΔΕ έχουν κοινό ύψος (την κάθετη από το Ε στην ΑΒ), οπότε ο λόγος τους θα είναι ίσος με το λόγο των βάσεών τους. Ομοίως, θα ισχύει ότι:

$$\frac{\text{ΓΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}}=\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}$$

Συνεπώς, από την **Πρότασης V.11,** προκύπτει η αναλογία:

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}}=\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}.$$

Αντίστροφα: Έστω ότι οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ έχουν τμηθεί σε μέρη ανάλογα, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}}=\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}.$$

Σχηματίζουμε τη ΔΕ. Ισχυριζόμαστε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ. Πράγματι, με την ίδια κατασκευή, από την **Πρόταση VI.1**, προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{\text{ΒΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}} \quad \text{και} \quad \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΓΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}}$$

Έτσι, από την υπόθεσή μας και την **Πρόταση V.11**, θα ισχύει:

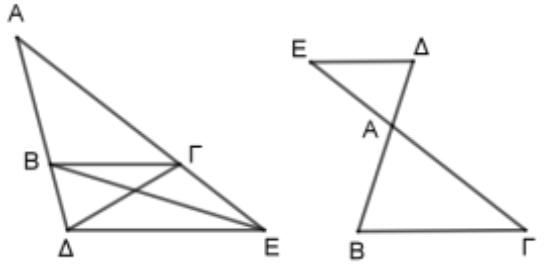
$$\frac{\text{ΒΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΓΔΕ}}{\text{ΑΔΕ}}.$$

Καθένα λοιπόν από τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ έχει τον ίδιο λόγο προς το τρίγωνο ΑΔΕ. Άρα, θα είναι ΒΔΕ = ΓΔΕ (**Πρόταση V.9**). Επιπλέον τα τρίγωνα αυτά έχουν την ίδια βάση ΔΕ. Όμως, ίσα τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων (**Πρόταση I.39**). Επομένως η ΔΕ θα είναι παράλληλη προς τη ΒΓ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

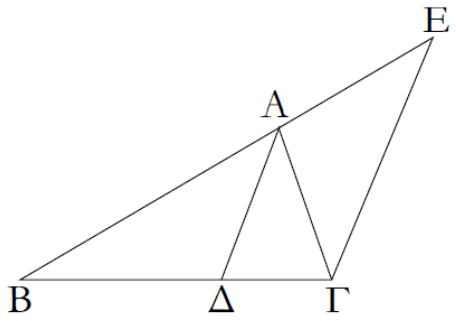
- Ο Ευκλείδης σε αυτήν την πρόταση εξετάζει μόνο την περίπτωση τα σημεία Δ και Ε να βρίσκονται στο εσωτερικό των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, αντίστοιχα. Ο Heath ([Η1], σ. 195) μάλιστα, αναφέρει πως, ο Ευκλείδης, προφανώς, δε σκέφτηκε ότι αξίζει να διακρίνει στην διατύπωση ή στο σχήμα τις περιπτώσεις στις οποίες η παράλληλη στη βάση τέμνει τις άλλες δύο πλευρές στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και προς τις δύο κατευθύνσεις.



Όμως, πρέπει να επισημάνουμε ότι ο Ευκλείδης, χρησιμοποιώντας τη φράση «τις εύθεῖα» (=κάποια ευθεία), υπονοεί την ύπαρξη περισσοτέρων από μία περιπτώσεων. Είναι όμως άγνωστο γιατί δεν τις αναφέρει.

- Τα σχολικά βιβλία του Υ.ΠΑΙ.Θ. των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου (σελ. 206-207) και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου (σελ. 14-15) αναφέρουν την Πρόταση VI.2 ως «Θεώρημα του Θαλή». Ο Θαλής δε θα μπορούσε ποτέ να έχει διατυπώσει ένα τέτοιο θεώρημα, καθώς δεν είχε γνώση της θεωρίας λόγων μεγεθών. (Για τη συμβολή του Θαλή στη Γεωμετρία βλ. [ΝΦ1], σελ. 172-175).

Πρόταση VI.3	Αν γωνία τριγώνου διχοτομηθεί και η τέμνουσα τη γωνία τέμνει και τη βάση, τότε τα τμήματα της βάσης θα έχουν λόγο ίσο με το λόγο των άλλων πλευρών του τριγώνου. Και αντίστροφα, αν τα τμήματα της βάσης έχουν λόγο ίσο με το λόγο των άλλων πλευρών του τριγώνου, η ευθεία που άγεται από την κορυφή προς την τομή θα διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου.



Απόδειξη: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ότι η γωνία ∠ΒΑΓ διχοτομείται από την ευθεία ΑΔ. Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\frac{ΒΔ}{ΓΔ}=\frac{ΒΑ}{ΑΓ}.$$

Από το Γ φέρνουμε την ΓΕ παράλληλη προς τη ΑΔ, η οποία συναντά την ΒΑ στο Ε. Επειδή η ευθεία ΑΓ τέμνει τις παράλληλες ΑΔ και ΕΓ, από την **Πρόταση Ι.29**, θα είναι ∠ΑΓΕ = ∠ΓΑΔ. Αλλά, από την υπόθεση είναι ∠ΓΑΔ=∠ΒΑΔ . Άρα ∠ΑΓΕ = ∠ΒΑΔ. Πάλι από την **Πρόταση Ι.29**, επειδή η ευθεία ΒΕ τέμνει τις παράλληλες ΑΔ και ΕΓ θα είναι ∠ΒΑΔ=∠ΑΕΓ. Όμως, έχουμε δείξει ότι ∠ΑΓΕ = ∠ΒΑΔ, άρα θα είναι και ∠ΑΓΕ = ∠ΑΕΓ, οπότε ΑΕ= ΑΓ **(Πρόταση Ι.6)**.

Στο τρίγωνο ΒΓΕ, τώρα, επειδή η ΑΔ είναι παράλληλη προς την ΓΕ, εφαρμόζοντας την **Πρόταση VI.2** έχουμε:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΒΑ}{ΑΕ}$$

και επειδή ΑΕ=ΑΓ θα έχουμε τελικά:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΒΑ}{ΑΓ}.$$

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΒΑ}{ΑΓ}.$$

Φέρουμε την ΑΔ. Ισχυριζόμαστε ότι η γωνία ∠ΒΑΓ διχοτομείται από την ευθεία ΑΔ. Πράγματι, με την ίδια κατασκευή, επειδή:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΒΑ}{ΑΓ},$$

αλλά και επειδή, από την **Πρόταση VI.2,** ισχύει:

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΕ}},$$

καθώς η ΑΔ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΒΓΕ, από την **Πρόταση V.11** θα είναι:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΕ}}.$$

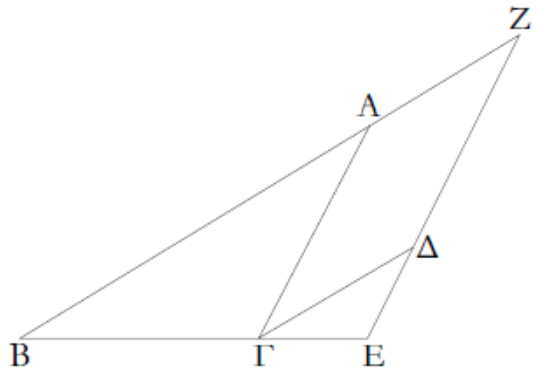
Έτσι, από την **Πρόταση V.9**, συνάγεται ότι ΑΓ=ΑΕ. Αλλά τότε, από την **Πρόταση I.5**, θα είναι ∠ΑΕΓ=∠ΑΓΕ και από την **Πρόταση I.29**, ∠ΑΕΓ=∠ΒΑΔ, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΕΓ που τέμνονται από τη ΒΕ και ακόμη ∠ΑΓΕ=∠ΓΑΔ, ως εντός εναλλάξ των ίδιων παραλλήλων με τέμνουσα την ΑΓ. Επομένως, από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι ∠ΒΑΔ=∠ΔΑΓ, δηλαδή ότι γωνία ∠ΒΑΓ διχοτομείται από την ευθεία ΑΔ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Ο Ευκλείδης στην Πρόταση αυτή κάνει, υπόρρητα, δύο φορές **ευθεία χρήση του Αιτήματος 5**. Αρχικά όταν υποθέτει ότι η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας ΒΑΓ θα συναντήσει τη βάση ΒΓ στο σημείο Δ και στη συνέχεια όταν υποθέτει ότι η ΓΕ θα συναντήσει την προέκταση της ΒΑ σε κάποιο σημείο Ε. Ο Heath ([H1], σ. 197) σχολιάζει σχετικά ως εξής: «Η απόδειξη προϋποθέτει ότι η ΓΕ θα συναντήσει την προέκταση της ΒΑ σε κάποιο σημείο Ε. Αυτό αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως αποδεικνύεται και στην VI.4, ότι η ΒΑ και ΕΔ θα συναντηθούν αν προεκταθούν. Οι γωνίες ΑΒΔ και ΒΔΑ στο σχήμα της VI.3 έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές και η γωνία ΒΔΑ είναι ίση με τη γωνία ΒΓΕ, αφού οι ΔΑ και ΓΕ είναι παράλληλες. Συνεπώς, οι γωνίες ΑΒΓ και ΒΓΕ έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές: και οι ΒΑ, ΓΕ πρέπει να συναντηθούν, σύμφωνα με το Αίτημα 5».
- Επίσης ο Heath ([H1], σ. 197) παρατηρεί ότι «η αντίστοιχη πρόταση σχετικά με τα τμήματα στα οποία διαιρείται εξωτερικά η ΒΓ από τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας στο σημείο Α, όταν η διχοτόμος αυτή συναντήσει την προέκταση της ΒΓ (δηλαδή όταν οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ δεν είναι ίσες), είναι σημαντική. Ο Simson δίνει μια ξεχωριστή πρόταση, Α, σημειώνοντας το γεγονός ότι ο Πάππος υποθέτει το συμπέρασμα χωρίς απόδειξη (Πάππος, VII, σελ. 730, 24). Η καλύτερη ιδέα, ωστόσο, όπως λέει ο De Morgan, είναι ο συνδυασμός των Προτάσεων VI.3 και Α σε μία μόνο πρόταση, η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *Αν μια γωνία τριγώνου διχοτομηθεί εσωτερικά ή εξωτερικά από μία ευθεία γραμμή που τέμνει την απέναντι πλευρά ή την προέκτασή της, τα τμήματα αυτής της πλευράς θα έχουν τον ίδιο λόγο με τις άλλες πλευρές του τριγώνου. Και αν η πλευρά ενός τριγώνου διαιρεθεί εσωτερικά ή εξωτερικά έτσι ώστε τα τμήματά της να έχουν τον ίδιο λόγο με τις άλλες πλευρές του τριγώνου, η ευθεία γραμμή από το σημείο τομής στο γωνιακό σημείο που είναι απέναντι στην πρώτη αναφερόμενη πλευρά, θα διχοτομεί την εσωτερική ή εξωτερική γωνία σε αυτό το γωνιακό σημείο.*

Πρόταση VI.4	Στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.



Απόδειξη: Έστω τα ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ, τα οποία έχουν:

$$\angle ΑΒΓ = \angle ΔΓΕ, \quad \angle ΒΑΓ = \angle ΓΔΕ, \quad \angle ΑΓΒ = \angle ΓΕΔ.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΔΓΕ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες κα οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

Υποθέτουμε ότι οι πλευρές ΒΓ και ΓΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε, επειδή, από την **Πρόταση Ι.17** έχουμε $\angle ΑΒΓ + \angle ΑΓΒ < 2$ ορθές και από υπόθεση έχουμε $\angle ΑΓΒ = \angle ΔΕΓ$, θα είναι και $\angle ΑΒΓ + \angle ΔΕΓ < 2$ ορθές. Άρα οι ευθείες ΒΑ και ΕΔ προεκτεινόμενες θα συναντηθούν, έστω στο σημείο Ζ (**Αίτημα 5**).

Επειδή, από υπόθεση, $\angle ΔΓΕ = \angle ΑΒΓ$ θα είναι ΒΖ//ΓΔ (**Πρόταση Ι.28**). Και επειδή, πάλι από υπόθεση, $\angle ΑΓΒ = \angle ΔΕΓ$ θα είναι ΑΓ//ΖΕ (**Πρόταση Ι.28**). Επομένως το ΖΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι: ΖΑ=ΔΓ και ΑΓ=ΖΔ (**Πρόταση Ι.34**). Στο τρίγωνο ΖΒΕ είναι ΑΓ//ΖΕ, οπότε, από την **Πρόταση VI.2**, θα ισχύει:

$$\frac{ΒΑ}{ΑΖ} = \frac{ΒΓ}{ΓΕ}.$$

Αλλά ΑΖ=ΓΔ, οπότε:

$$\frac{ΒΑ}{ΓΔ} = \frac{ΒΓ}{ΓΕ}$$

και τελικά, από την **Πρόταση V.16 (εναλλάξ)**,

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΔΓ}{ΓΕ}. \quad (1)$$

Επειδή ΓΔ//ΒΖ, από την **Πρόταση VI.2**, θα έχουμε πάλι:

$$\frac{ΒΓ}{ΓΕ} = \frac{ΖΔ}{ΔΕ}.$$

Αλλά ΖΔ=ΑΓ, άρα

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΕ}}$$

και έτσι, από την **Πρόταση V.16 (εναλλάξ),**

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΔ}}. \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας, τέλος, την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου)** στις (1), (2), έχουμε ότι:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΔΕ}}.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οι πλευρές των ισογωνίων τριγώνων ΑΒΓ και ΔΓΕ που περιέχουν όλα τα ζεύγη των ίσων γωνιών είναι ανάλογες. Επιπλέον, έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΕ}}$$

δηλαδή, οι πλευρές των ισογωνίων τριγώνων ΑΒΓ και ΔΓΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

ό.έ.δ.

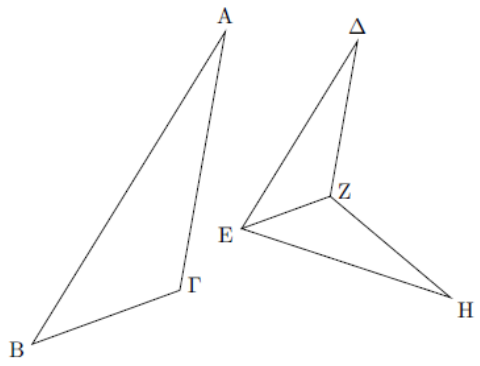
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Στην απόδειξη της Πρότασης VI.4 χρησιμοποιείται ξεκάθαρα από τον Ευκλείδη, για πρώτη φορά στο Βιβλίο VI, το Αίτημα 5, παρόλο που υπονοείται -και μάλιστα δύο φορές- στην προηγούμενη Πρόταση VI.3.
- Ο Ευκλείδης δέχτηκε έντονες κριτικές για την απόδειξη αυτής της πρότασης. Το κυριότερο επιχείρημα των επικριτών είναι η ειδική θέση στην οποία βρίσκονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ. Ο Heath ([H1], p. 202) αναφέρει τα εξής: «*Ο Todhunter παρατηρεί ότι "ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να τοποθετηθούν τα δύο τρίγωνα περιγράφεται ελλιπώς. Οι βάσεις τους πρέπει να είναι στην ίδια ευθεία και συνεχόμενες, οι κορυφές τους πρέπει να είναι στην ίδια πλευρά της βάσης και καθεμία από τις δύο γωνίες που έχει μία κοινή κορυφή πρέπει να είναι ίση με τη μεμονωμένη γωνία του άλλου τριγώνου". Όμως σίγουρα η περιγραφή του Ευκλείδη είναι επαρκής, εκτός από το ότι δεν λέει ότι οι Β και Δ πρέπει να βρίσκονται στην ίδια πλευρά του ΒΓΕ.*

  Η VI.4 μπορεί άμεσα να προκύψει από την VI.2 αν τοποθετήσουμε ένα τρίγωνο πάνω σε ένα άλλο τρεις φορές στη σειρά, έτσι ώστε κάθε γωνία να συμπίπτει διαδοχικά με την ίση της, τα τρίγωνα να είναι ομοίως τοποθετημένα (similarly situated), δηλαδή αν (Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ είναι οι ίσες γωνίες αντίστοιχα) εφαρμόζουμε τη γωνία ΔΕΖ στην γωνία ΑΒΓ, έτσι ώστε το Δ να βρίσκεται στην ΑΒ (ή στην προέκτασή της) και το Ζ στη ΒΓ (ή στην προέκτασή της). Ο De Morgan προτιμά αυτή τη μέθοδο. "Εγκαταλείψτε", λέει, "τον αλλόκοτο τρόπο κατασκευής με τον οποίο ο Ευκλείδης αποδεικνύει δύο περιπτώσεις ταυτόχρονα: κάντε μια γωνία να συμπίπτει με την ίση της και υποθέστε ότι η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται τρεις φορές, μια για κάθε γωνία».

- Ο Heath σωστά θεωρεί την περιγραφή του Ευκλείδη επαρκή, αφού αν οι ΒΓ και ΓΕ δεν είναι στην ίδια ευθεία, μπορούμε κάνοντας χρήση της Πρότασης Ι.2 και του Αιτήματος 2 να κατασκευάσουμε στην προέκταση της ΒΓ την ΓΕ΄ ίση με την ΓΕ.

Πρόταση VI.5	Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.



Απόδειξη: Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ τα οποία έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΖ}}\,,\qquad \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}}=\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΔ}}\,,\qquad \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΔΖ}}\,.$$

Ισχυριζόμαστε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές, δηλαδή:

$$\angle\text{ΑΒΓ}=\angle\text{ΔΕΖ},\quad \angle\text{ΒΓΑ}=\angle\text{ΕΖΔ},\quad \angle\text{ΒΑΓ}=\angle\text{ΕΔΖ}\ .$$

Στην πλευρά ΕΖ, από την **Πρόταση Ι.23**, μπορούμε να κατασκευάσουμε με κορυφή Ε τη γωνία ∠ΖΕΗ=∠ΑΒΓ και με κορυφή Ζ τη γωνία ∠ΕΖΗ=∠ΑΓΒ, οπότε, από την **Πρόταση Ι.32**, θα είναι και ∠Α=∠Η, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΕΖΗ. Συνεπώς, από **Πρόταση VI.4**, θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΗΕ}}{\text{ΕΖ}}$$

και αφού από την υπόθεση ισχύει ότι

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΖ}}$$

από **Πρόταση V.11** θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΖ}}=\frac{\text{ΗΕ}}{\text{ΕΖ}}$$

και επειδή καθεμία από τις ΔΕ και ΗΕ έχει τον ίδιο λόγο με την ΕΖ, από την **Πρόταση V.9** θα είναι ΔΕ=ΗΕ. Για τον ίδιο λόγο είναι και ΔΖ=ΗΖ. Αφού, λοιπόν, ΔΕ=ΕΗ και η ΕΖ είναι κοινή, οι δύο πλευρές ΔΕ, ΕΖ θα είναι ίσες με τις δύο πλευρές ΗΕ, ΕΖ. Όμως, και η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΖΗ, οπότε, από **Πρόταση Ι.8,** συμπεραίνουμε ότι ∠ΔΕΖ=∠ΗΕΖ και επιπλέον τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΕΖ είναι ίσα. Συνεπώς, από **Πρόταση Ι.4**,

θα έχουν ίσες μία προς μία και τις υπόλοιπες γωνίες, οι οποίες βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές. Θα ισχύει λοιπόν: ∠ΔΖΕ=∠ΗΖΕ και ∠ΕΔΖ=∠ΕΗΖ. Και επειδή ∠ΖΕΔ=∠ΗΕΖ , αλλά και ∠ΗΕΖ=∠ΑΒΓ, θα είναι και ∠ΑΒΓ=∠ΔΕΖ. Για τον ίδιο λόγο είναι ∠ΑΓΒ = ∠ΔΖΕ και ακόμα ∠Α=∠Δ. Έτσι, τελικά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια.

ό.έ.δ.

- **Σχόλια του Heath για την πρόταση VI.5 ([H1], σ. 204)**

«Η πρόταση αυτή αποτελεί το ακριβώς αντίστροφο, ενώ η πρόταση VI.6 εν μέρει το αντίστροφο, της πρότασης VI.4.

Ο Todhunter, κατά τον Walker, παρατηρεί ότι η διατύπωση θα έπρεπε να διευκρινίζει ότι οι πλευρές των τριγώνων που παίρνονται με τη σειρά είναι ανάλογες. Είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τέτοια που:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΖ}} \text{ και } \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΕΔ}} \left(\text{αντί } \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΔ}}\right).$$

Συνεπάγεται ότι

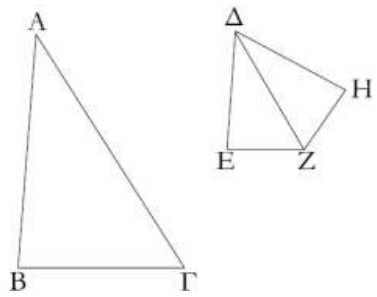
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΕΖ}}$$

(δι' ίσου στην τεταραγμένη αναλογία).

Σε αυτή την περίπτωση, οι πλευρές των τριγώνων είναι ανάλογες, αλλά όχι με την ίδια σειρά και τα τρίγωνα δεν είναι απαραίτητα ισογώνια το ένα προς το άλλο. Για ένα αριθμητικό παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε τις πλευρές ενός τριγώνου ως 3, 4 και 5 πόδια αντίστοιχα, και τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου 12, 15 και 20 πόδια αντίστοιχα.

Στην VI.5 υπάρχει η ίδια εμφανής αποφυγή της έμμεσης απόδειξη, η οποία σημειώθηκε και στην I.48.»

Πρόταση VI.6	Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου και τις πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες ανάλογες, τότε τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι των οποίων βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.



Απόδειξη: Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ∠ΒΑΓ=∠ΕΔΖ και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{ΒΑ}{ΑΓ} = \frac{ΕΔ}{ΔΖ}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν ∠ΑΒΓ=∠ΔΕΖ και ∠ΑΓΒ=∠ΔΖΕ . Στην πλευρά ΔΖ και στα σημεία Δ και Ζ αυτής, από την **Πρόταση Ι.23**, μπορούμε να κατασκευάσουμε γωνίες ∠ΖΔΗ και ∠ΔΖΗ, αντίστοιχα, ώστε: ∠ΖΔΗ = ∠ΒΑΓ = ∠ΕΔΖ και ∠ΔΖΗ = ∠ΑΓΒ .

Τότε, από την **Πρόταση Ι.32**, θα είναι: ∠Β = ∠Η. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΗΖ είναι επομένως ισογώνια και από την **Πρόταση VI.4** θα ισχύει:

$$\frac{ΒΑ}{ΑΓ} = \frac{ΗΔ}{ΔΖ}$$

Έχουμε, όμως, υποθέσει ότι:

$$\frac{ΒΑ}{ΑΓ} = \frac{ΕΔ}{ΔΖ}$$

Οπότε, από την **Πρόταση V.11,** προκύπτει:

$$\frac{ΕΔ}{ΔΖ} = \frac{ΗΔ}{ΔΖ}$$

Έτσι, από την **Πρόταση V.9**, έχουμε ΕΔ=ΗΔ. Επιπλέον η ΔΖ είναι κοινή πλευρά. Συνεπώς, οι δύο πλευρές ΕΔ, ΔΖ θα είναι ίσες με τις δύο πλευρές ΗΔ, ΔΖ και ακόμα ∠ΕΔΖ = ∠ΗΔΖ. Άρα, από την **Πρόταση Ι.4**, ΕΖ=ΖΗ, τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΗΔΖ είναι ίσα και θα έχουν ίσες τις υπόλοιπες γωνίες οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές, δηλαδή:

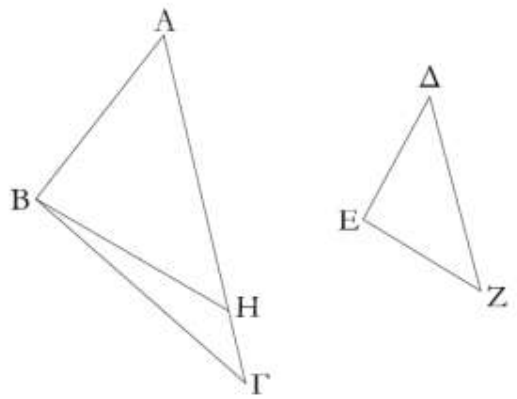
∠ΔΖΕ = ∠ΔΖΗ και ∠ΔΕΖ = ∠ΔΗΖ .

Όμως, ∠ΔΖΗ = ∠ΑΓΒ, οπότε ∠ΔΖΕ = ∠ΑΓΒ. Ακόμα, από υπόθεση, ∠ΒΑΓ=∠ΕΔΖ και συνεπώς, από **Πρόταση Ι.32**, θα είναι και ∠Β=∠Ε.

Έτσι, τελικά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια.

ό.έ.δ.

Πρόταση VI.7	Εάν δύο τρίγωνα έχουν: • μία γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου, • τις πλευρές που περιέχουν άλλες γωνίες ανάλογες και • καθεμία από τις υπόλοιπες γωνίες τους είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη της ορθής γωνίας, τότε τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται από τις ανάλογες πλευρές.



Απόδειξη: Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, τα οποία έχουν ∠ΒΑΓ=∠ΕΔΖ, τις πλευρές που περιέχουν τις άλλες γωνίες ∠ΑΒΓ και ∠ΔΕΖ ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$$

και ακόμα κάθε μία από τις υπόλοιπες γωνίες είναι μικρότερες της ορθής, δηλαδή:

∠Γ<1∟ και ∠Ζ<1∟.

Ισχυριζόμαστε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν: ∠ΑΒΓ =∠ΔΕΖ και ∠Γ=∠Ζ.

Ας υποθέσουμε ότι οι γωνίες ∠ΑΒΓ και ∠ΔΕΖ δεν είναι ίσες. Τότε, μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από την άλλη. Έστω ότι ∠ΑΒΓ >∠ΔΕΖ.

Από **Πρόταση Ι.23**, μπορούμε να κατασκευάσουμε γωνία ∠ΑΒΗ με μία πλευρά την ΑΒ και κορυφή το σημείο Β, τέτοια ώστε ∠ΑΒΗ = ∠ΔΕΖ.

Τότε, επειδή ∠Α=∠Δ και ∠ΑΒΗ = ∠ΔΕΖ, από την **Πρόταση 1.32**, θα είναι ίσες και οι υπόλοιπες γωνίες, δηλαδή ∠ΑΗΒ = ∠ΔΖΕ. Ετσι, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και από την **Πρόταση VI.4**, θα ισχύει

$$\frac{AB}{BH}=\frac{\Delta E}{EZ}.$$

Όμως, από υπόθεση είναι:

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}.$$

Άρα, από την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{AB}{BH}=\frac{AB}{B\Gamma}$$

και επομένως ΒΗ=ΒΓ (**Πρόταση V.9**), οπότε από την **Πρόταση I.5** θα είναι και $\angle\Gamma = \angle BH\Gamma$.

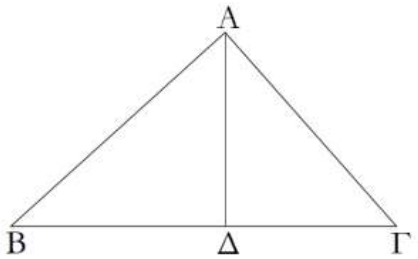
Από τη υπόθεση, όμως, έχουμε ότι $\angle\Gamma < 1\llcorner$, οπότε θα είναι και $\angle BH\Gamma < 1\llcorner$, με συνέπεια $\angle AHB > 1\llcorner$, ως εφεξής γωνία της $\angle BH\Gamma$ (**Πρόταση I.13**). Όμως, αποδείξαμε ότι $\angle AHB=\angle Z$, οπότε θα είναι και $\angle Z > 1\llcorner$. Άτοπο, γιατί έχουμε υποθέσει ότι $\angle Z<1\llcorner$. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι οι γωνίες $\angle AB\Gamma$ και $\angle\Delta EZ$ δεν είναι ίσες. Άρα θα είναι $\angle AB\Gamma=\angle\Delta EZ$ και συνεπώς, αφού από υπόθεση είναι και $\angle A=\angle\Delta$, από **Πρόταση I.32**, θα είναι και $\angle\Gamma=\angle Z$ και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ θα είναι ισογώνια.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\Gamma>1\llcorner$ και $\angle Z>1\llcorner$. Ισχυριζόμαστε, πάλι, ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια.

Με την ίδια κατασκευή, μπορούμε, ομοίως, να δείξουμε ότι ΒΓ=ΒΗ, οπότε από την **Πρόταση I.5** θα είναι και $\angle\Gamma=\angle BH\Gamma$. Αλλά $\angle\Gamma>1\llcorner$, άρα και $\angle BH\Gamma > 1\llcorner$. Έτσι, στο τρίγωνο ΒΗΓ, οι δύο γωνίες είναι μεγαλύτερες από δύο ορθές, το οποίο είναι αδύνατον (**Πρόταση I.17**). Άρα, πάλι, η υπόθεση ότι οι γωνίες $\angle AB\Gamma$ και $\angle\Delta EZ$ δεν είναι ίσες, μας οδήγησε σε άτοπο. Οπότε, $\angle AB\Gamma= \angle\Delta EZ$. Αλλά, έχουμε και $\angle A=\angle\Delta$, οπότε και $\angle\Gamma=\angle Z$ (**Πρόταση I.32**). Συνεπώς, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια.

ό.έ.δ.

Πρόταση VI.8	Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο από την κορυφή της ορθής γωνίας φέρουμε ευθεία κάθετη στη βάση του, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται με μία πλευρά αυτήν την κάθετη είναι όμοια και προς το όλο τρίγωνο και μεταξύ τους.



Απόδειξη: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (∠ΒΑΓ=1∟). Φέρουμε ΑΔ⊥ΒΓ. (**Πρόταση Ι.12**). Ισχυριζόμαστε ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοιο προς το όλο τρίγωνο ΑΒΓ, καθώς και όμοια μεταξύ τους.

Επειδή ∠ΒΑΓ =∠ΑΔΒ = 1∟και η γωνία Β είναι κοινή και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ, θα είναι και ∠ΑΓΒ=∠ΒΑΔ (**Πρόταση Ι.32**). Τότε, τα τρίγωνα αυτά θα είναι ισογώνια και από την **Πρόταση VI.4** θα έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες, ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{ΒΓ}{ΒΑ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ}$$

Άρα, από τον **Ορισμό VI.1**, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ είναι όμοια. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι όμοια. Άρα το καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοιο προς το όλο τρίγωνο ΑΒΓ.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι και μεταξύ τους όμοια.

Πράγματι, επειδή ∠ΒΔΑ =∠ΑΔΓ = 1∟ και επιπλέον εδείχθη ότι ∠ΒΑΔ =∠Γ, θα είναι και ∠Β =∠ΔΑΓ (**Πρόταση Ι.32**). Οπότε, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΔΓ, και από την **Πρόταση VI.4** θα έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες, ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΑ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{ΒΑ}{ΑΓ}.$$

Άρα, από τον **Ορισμό VI.1**, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια.

ό.έ.δ.

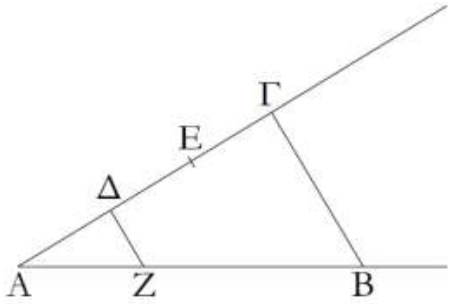
Πόρισμα	Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε κάθετη από την κορυφή της ορθής γωνίας προς τη βάση, αυτή είναι μέση ανάλογος των τμημάτων που ορίζει πάνω στη βάση.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.8 ([H1], σ. 211)

«Ο Simson παρατηρεί σχετικά με αυτή την πρόταση: "Φαίνεται ξεκάθαρα ότι κάποιος εκδότης έχει αλλάξει την απόδειξη που έδωσε ο Ευκλείδης για αυτή την πρόταση. Γιατί, αφού έχει αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι ισογώνια μεταξύ τους, ξεχωριστά δείχνει ότι οι πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες είναι ανάλογες, σαν αυτό να μην είχε γίνει στην απόδειξη της Πρότασης 4 αυτού του Βιβλίου: αυτό το παραπανίσιο μέρος δεν βρίσκεται στην μετάφραση από τα Αραβικά, και τώρα παραλείπεται."

Αυτό φαίνεται κάπως υπερβολικά επικριτικό, γιατί η «ξεχωριστή απόδειξη» του ότι οι πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες είναι ανάλογες δεν είναι στην πραγματικότητα τίποτα παραπάνω από μια πλήρης αναφορά της vi.4. Επιπλέον, για να συντομεύσει ακόμη περισσότερο την απόδειξή του, ο Simson λέει, αφού αποδεικνύει ότι κάθε ένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοιο προς το όλο τρίγωνο ΑΒΓ, "Και τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ που είναι και τα δύο ισογώνια και όμοια με το ΑΒΓ είναι ισογώνια και όμοια μεταξύ τους», υποθέτοντας έτσι μία ειδική περίπτωση της vi.21, η οποία μπορεί κάλλιστα να αποδειχθεί εδώ, όπως την αποδεικνύει ο Ευκλείδης, με κάπως περισσότερες λεπτομέρειες».

Πρόταση VI.9	Από δοθείσα ευθεία να αφαιρεθεί ένα δεδομένο μέρος της.



Απόδειξη: Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία. Πρέπει να αφαιρεθεί από αυτή ένα δεδομένο μέρος της, έστω το ένα τρίτο αυτής.

Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία ΑΓ, η οποία σχηματίζει τυχαία γωνία με την ευθεία ΑΒ. Πάνω στην ΑΓ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ και ας είναι ΔΕ, ΕΓ ίσα με το ΑΔ (**Πρόταση Ι.3**). Ενώνουμε τα σημεία Β, Γ και από το σημείο Δ φέρουμε τη ΔΖ παράλληλη προς τη ΒΓ (**Πρόταση Ι.31**).

Επειδή η ΖΔ σχεδιάστηκε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, από την **Πρόταση VI.2** θα έχουμε:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = \frac{BZ}{ZA}.$$

Αλλά ΓΔ=2ΔΑ, οπότε και ΒΖ=2ΖΑ. Άρα η ΒΑ =3ΑΖ.

Από τη δοθείσα, λοιπόν, ευθεία ΑΒ, αφαιρέθηκε το δεδομένο μέρος της ΑΖ, δηλαδή το ένα τρίτο αυτής.

ό.έ.π.

Σχόλια Heath για την Πρόταση VI.9 ([H1], σ. 212-213)

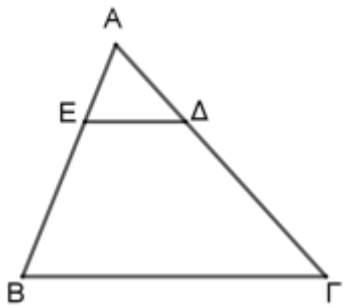
«**τυχούσα γωνία (any angle).** Η έκφραση εδώ και στις δύο ακόλουθες προτάσεις είναι "τυχούσα γωνία", που αντιστοιχεί ακριβώς στο "τυχόν σημείον", το οποίο έχω μεταφράσει ως "a point (taken) at random": αλλά το "an angle (taken) at random" δεν θα ήταν τόσο κατάλληλο όταν τίθεται ένα ζήτημα, όχι τού να πάρουμε οποιαδήποτε γωνία, αλλά να τραβήξουμε απλά μια ευθεία γραμμή ώστε να σχηματίσει οποιαδήποτε γωνία με άλλη ευθεία γραμμή.

Ο Simson παρατηρεί ότι "αυτό δείχνεται σε μια συγκεκριμένη περίπτωση, ήτοι στην περίπτωση που το τρίτο μέρος μιας ευθείας γραμμής ζητείται να αφαιρεθεί: κάτι που επ' ουδενί δεν είναι ο τρόπος του Ευκλείδη. Εξάλλου, ο συγγραφέας της απόδειξης, από τέσσερα μεγέθη που είναι ανάλογα, συμπεραίνει ότι το τρίτο εξ αυτών είναι το ίδιο πολλαπλάσιο του τέταρτου όπως το πρώτο του δεύτερου: Αυτό δεν αποδεικνύεται πουθενά στο 5ο Βιβλίο, όπως το έχουμε τώρα. Αλλά ο επιμελητής το υποθέτει από τη συγκεχυμένη έννοια που οι κοινοί έχουν για τις αναλογίες".

Η αλήθεια της υπόθεσης στην οποία αναφέρεται, αποδεικνύεται από το Simson στην πρότασή του Δ που δίνεται παραπάνω (σελ. 128). Έτσι δύναται να δώσει μια γενική και έγκυρη απόδειξη της παρούσας πρότασης.

"*Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία γραμμή. Ζητείται να αφαιρεθεί κάποιο μέρος από αυτήν.*"

Από το σημείο Α τράβηξε ευθεία γραμμή ΑΓ, η οποία σχηματίζει κάποια (any) γωνία με την ΑΒ. Στην ΑΓ πάρε κάποιο (any) σημείο Δ, και κάνε την ΑΓ το ίδιο πολλαπλάσιο της ΑΔ, όπως η ΑΒ είναι τού μέρους που ζητείται να αφαιρεθεί από αυτήν. Φέρε τη ΒΓ και σχεδίασε ΔΕ παράλληλη προς αυτή: τότε η ΑΕ είναι το μέρος που ζητείται να αφαιρεθεί.



Επειδή η ΕΔ είναι παράλληλη σε μια από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, ήτοι στη ΒΓ, από την **Πρόταση VI.2,** θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = \frac{BE}{EA}.$$

και, από την **Πρόταση V.18** (σύνθεση λόγου) θα είναι:

$$\frac{\Gamma A}{A\Delta} = \frac{BA}{AE}.$$

Αλλά η ΓΑ είναι ένα πολλαπλάσιο της ΑΔ, οπότε η ΒΑ είναι το ίδιο πολλαπλάσιο της ΑΕ (**Πρόταση Δ**). Επομένως, ό,τι μέρος της ΑΓ είναι η ΑΔ, η ΑΕ είναι το ίδιο μέρος της ΑΒ, οπότε από τη γραμμή ΑΒ αφαιρέθηκε το ζητούμενο μέρος».

Η χρήση της πρότασης Δ του Simson μπορεί να αποφευχθεί, όπως σημειώνεται από τον Camerer, κατά τον Baermann, με τον ακόλουθο τρόπο: Πρώτα αποδεικνύουμε, όπως παραπάνω, ότι:

$$\frac{\Gamma A}{A\Delta} = \frac{BA}{AE}.$$

Μετά συμπεραίνουμε, από την **Πρόταση V.16** (εναλλάξ), ότι ισχύει:

$$\frac{\Gamma A}{BA} = \frac{A\Delta}{AE}.$$

Αλλά, από την **Πρόταση V.15**, έχουμε ότι

$$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{n.A\Delta}{n.AE}$$

(όπου n ο αριθμός των φορών που η ΑΔ περιέχεται στην ΑΓ).

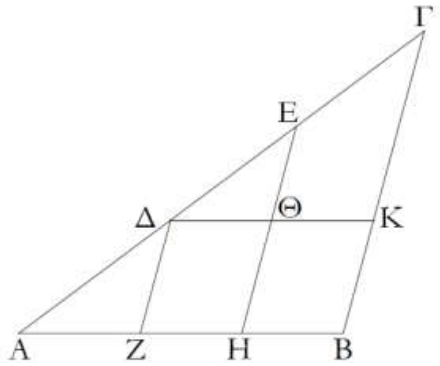
Οπότε, από την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{n.A\Delta}{n.AE}.$$

Σε αυτή την πρόταση ο πρώτος όρος είναι ίσος με τον τρίτο. Επομένως, από την **Πρόταση V.14**, ο δεύτερος είναι ίσος με τον τέταρτο. Έτσι, ΑΒ= n.ΑΕ.

Η Πρόταση 9 είναι φυσικά μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 10».

Πρόταση VI.10	Να τμηθεί δοθείσα άτμητη ευθεία με τον ίδιο τρόπο που έχει τμηθεί άλλη δοθείσα ευθεία.



Απόδειξη: Έστω ΑΒ η δοθείσα άτμητη ευθεία και ΑΓ η ευθεία που σχηματίζει τυχαία γωνία με την ΑΒ και η οποία έχει τμηθεί στα σημεία Δ και Ε. Σχηματίζουμε την ευθεία ΓΒ. Από τα σημεία Δ και Ε φέρουμε τις ΔΖ και ΕΗ παράλληλες στη ΒΓ. Επίσης, από το σημείο Δ φέρουμε τη ΔΚ παράλληλη ΑΒ, η οποία τέμνει την ΕΗ στο Θ. (**Πρόταση Ι.31**).

Έτσι, καθένα από τα τετράπλευρα ΖΘ και ΘΒ είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, από την **Πρόταση Ι.34**, ΔΘ=ΖΗ και ΘΚ=ΗΒ. Όμως, αφού η ευθεία ΘΕ είναι παράλληλη προς την ΚΓ, μία από τις πλευρές του τριγώνου ΔΚΓ, από **Πρόταση VI.2** έχουμε:

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta}.$$

Αλλά, ΚΘ=ΒΗ και ΘΔ=ΗΖ, και συνεπώς

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{BH}{HZ}.$$

Πάλι, επειδή η ευθεία ΖΔ είναι παράλληλη προς την ΗΕ, μία από τις πλευρές του τριγώνου ΑΗΕ, με εφαρμογή της **Πρότασης VI.2**, βρίσκουμε:

$$\frac{E\Delta}{\Delta A} = \frac{HZ}{ZA}$$

Όμως έχει αποδειχθεί ότι

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{BH}{HZ}.$$

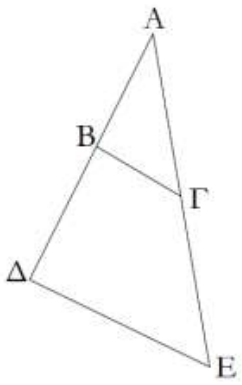
οπότε,

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{BH}{HZ} \text{ και } \frac{E\Delta}{\Delta A} = \frac{HZ}{ZA}.$$

Συνεπώς, η δοθείσα άτμητη ευθεία τμήθηκε με τον ίδιο τρόπο που έχει τμηθεί άλλη δοθείσα ευθεία.

ό.έ.π.

Πρόταση VI.11	Να βρεθεί τρίτη ανάλογος δύο δοθεισών ευθειών.



Απόδειξη: Έστω δύο δοθείσες ευθείες ΑΒ, ΑΓ οι οποίες σχηματίζουν τυχαία γωνία. Πρέπει να βρεθεί τρίτη ανάλογος των ευθειών αυτών. Προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ ως τα σημεία Δ, Ε, αντίστοιχα, και παίρνουμε τη ΒΔ ίση με την ΑΓ (**Πρόταση Ι.3**). Σχηματίζουμε τη ΒΓ και από το σημείο Δ, φέρουμε τη ΔΕ παράλληλη προς αυτήν (**Πρόταση Ι.31**).

Επειδή η ΒΓ χαράχθηκε παράλληλη προς την ΔΕ, μία από τις πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ, από την **Πρόταση VI.2** θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΕ}}.$$

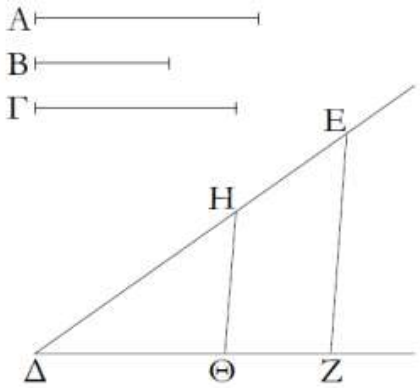
Αλλά ΒΔ=ΑΓ. Συνεπώς:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΕ}}.$$

Βρέθηκε, λοιπόν, η τρίτη ανάλογος ΓΕ των δύο δοθεισών ευθειών ΑΒ, ΑΓ.

ό.έ.π.

Πρόταση VI.12	Να βρεθεί τέταρτη ανάλογος τριών δοθεισών ευθειών.



Απόδειξη: Έστω Α, Β, Γ οι τρεις δοθείσες ευθείες. Πρέπει να βρεθεί τέταρτη ανάλογος των Α, Β, Γ.

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ΔΕ, ΔΖ που σχηματίζουν τυχαία γωνία ∠ΕΔΖ και τις ευθείες ΔΗ=Α, ΗΕ=Β και ΔΘ=Γ (**Πρόταση Ι.3**). Σχηματίζουμε την ΗΘ και από το σημείο Ε φέρουμε την ΕΖ παράλληλη προς την ΗΘ. (**Πρόταση Ι.31**).

Επειδή η ΗΘ είναι παράλληλη προς την ΕΖ, μία από τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ, από την **Πρόταση VI.2**, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta H}{HE}=\frac{\Delta\Theta}{\Theta Z}.$$

Αλλά ΔΗ=Α, ΗΕ=Β, ΔΘ=Γ, άρα:

$$\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Theta Z}.$$

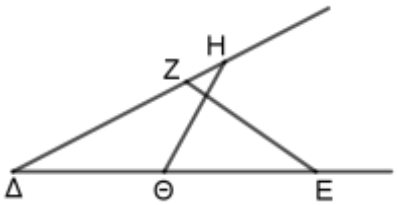
Βρέθηκε, λοιπόν, η τέταρτη ανάλογος ΘΖ των τριών δοθεισών ευθειών Α, Β, Γ.

ό.έ.π.

Σχόλια Heath για την Πρόταση VI.12 ([H1], σ. 215-216)

Έχουμε εδώ τη γεωμετρική αντιστοιχία της «μεθόδου των τριών».

Βέβαια είναι αδιάφορο αν, όπως στην απόδειξη του Ευκλείδη, η πρώτη και δεύτερη ευθεία γραμμή παίρνονται (are measured) σε μια από τις γραμμές που σχηματίζουν τη γωνία και η τρίτη στην άλλη, ή η πρώτη και η τρίτη παίρνονται σε μία και η δεύτερη σε άλλη.



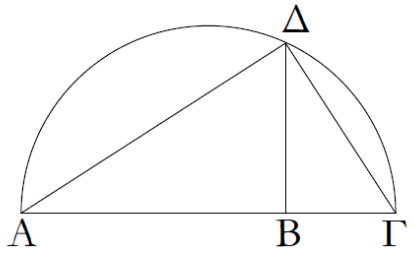
Αν έπρεπε η πρώτη και η ζητούμενη τέταρτη να παίρνονται σε μια από τις γραμμές και η δεύτερη και τρίτη στην άλλη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη κατασκευή: Παίρνουμε ΔΕ σε μια ευθεία γραμμή ίση με Α και σε τυχαία άλλη ευθεία γραμμή που σχηματίζει μία γωνία με την πρώτη στο σημείο Δ παίρνουμε ΔΖ ίση με

Β και ΔΗ ίση με Γ. Φέρουμε την ΕΖ, και από το Η σχεδιάζουμε ΗΘ αντιπαράλληλη (anti-parallel) στην ΕΖ, δηλαδή κάνουμε τη γωνία ΔΗΘ ίση με τη γωνία ΔΕΖ. Έστω ότι η ΗΘ συναντά τη ΔΕ (ή την προέκτασή της) στο Θ.

Η ΔΘ είναι, τότε, η τέταρτη ανάλογος, αφού τα τρίγωνα ΕΔΖ, ΗΔΘ είναι όμοια, και οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{\Delta E}{\Delta Z}=\frac{\Delta H}{\Delta \Theta} \text{ ή } \frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta \Theta}.$$

Πρόταση VI.13	Να βρεθεί μέση ανάλογος δύο δοθεισών ευθειών.



Απόδειξη: Έστω οι δοθείσες ευθείες ΑΒ, ΒΓ. Πρέπει να βρεθεί μέση ανάλογος των ευθειών αυτών.

Ας τις τοποθετήσουμε πάνω σε μία ευθεία και ας γράψουμε επί της ΑΓ ημικύκλιο διαμέτρου ΑΔΓ (**Πρόταση Ι.10**). Φέρουμε από το σημείο Β κάθετη προς την ΑΓ (**Πρόταση Ι.11**), η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Σχηματίζουμε τις ΑΔ και ΔΓ.

Επειδή η γωνία ∠ΑΔΓ βαίνει σε ημικύκλιο, είναι ορθή (**Πρόταση ΙΙΙ.31**). Και αφού, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΔΒ έχει σχεδιαστεί από την κορυφή της ορθής γωνίας κάθετη στην υποτείνουσα, αυτή θα είναι η μέση ανάλογος των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ που ορίζει πάνω στην υποτείνουσα, σύμφωνα με το **Πόρισμα της Πρότασης VI.8.**

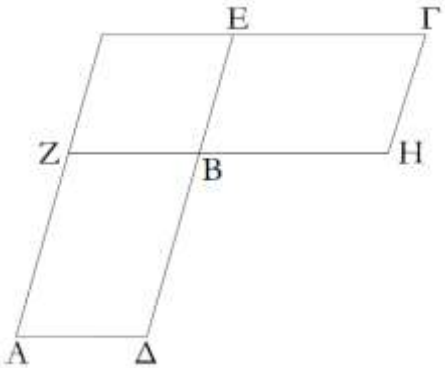
Βρέθηκε, λοιπόν, η μέση ανάλογος ΔΒ των δοθεισών ευθειών ΑΒ, ΒΓ.

ό.έ.π.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η πρόταση αυτή, η εκδοχή του Βιβλίου VI της ΙΙ.14, είναι αντίστοιχη της εξαγωγής από τετραγωνική ρίζα.

Πρόταση VI.14	Στα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και αντίστροφα, εκείνα από τα ισογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα.



Απόδειξη: Θεωρούμε τα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒ και ΒΓ που έχουν ίσες τις γωνίες τους στο σημείο Β. Έστω ότι οι ΔΒ και ΒΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε στην ίδια ευθεία θα βρίσκονται και οι ΖΒ, ΒΗ (**Πρόταση Ι.14**). Ισχυριζόμαστε ότι, οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒ και ΒΓ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{\Delta B}{BE} = \frac{HB}{BZ}.$$

Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΖΕ. Επειδή τα παραλληλόγραμμα ΑΒ και ΒΓ είναι ίσα και το ΖΕ είναι κάποιο άλλο (παραλληλόγραμμο) από την **Πρόταση V.7**, θα έχουμε:

$$\frac{AB}{ZE} = \frac{B\Gamma}{ZE}.$$

Όμως, από την **Πρόταση VI.1**, θα ισχύει:

$$\frac{AB}{ZE} = \frac{\Delta B}{BE} \text{ και } \frac{B\Gamma}{ZE} = \frac{HB}{BZ}.$$

Επομένως, από την **Πρόταση V.11,**

$$\frac{\Delta B}{BE} = \frac{HB}{BZ}.$$

Συνεπώς, στα παραλληλόγραμμα ΑΒ, ΒΓ οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$\frac{\Delta B}{BE} = \frac{HB}{BZ}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΒΓ.

Από την **Πρόταση VI.1** , θα ισχύει:

$$\frac{\Delta B}{BE} = \frac{AB}{ZE} \text{ και } \frac{HB}{BZ} = \frac{B\Gamma}{ZE}.$$

Τότε από την υπόθεση και τη **Πρόταση V.11** θα έχουμε :

$$\frac{AB}{ZE} = \frac{B\Gamma}{ZE}.$$

Συνεπώς, από την **Πρόταση V.9**, θα ισχύει:

$$AB = B\Gamma.$$

ό.έ.δ.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.14 ([H1], σ. 217-219)

«Ο De Morgan λέει για αυτήν την πρόταση: "Εξαιτίας του ασυνάρτητου τρόπου με τον οποίο ο Ευκλείδης χειρίζεται το συγκείμενο λόγο (compound ratio), αυτή η πρόταση είναι περιέργως σε λάθος θέση. Είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση της VI.23, η οποία έγκειται στο ότι ο συγκείμενος λόγος των πλευρών δίνει ένα λόγο ισότητας. Ο κατάλληλος ορισμός τεσσάρων μεγεθών που είναι αντιστρόφως ανάλογα είναι ότι ο συγκείμενος λόγος των λόγων τους είναι αυτός της ισότητας".

Είναι αληθές ότι η VI.14 είναι μια συγκεκριμένη περίπτωση της VI.23, αλλά αν μία εξ αυτών είναι σε λάθος θέση, πιθανότατα η τελευταία πρέπει να τοποθετηθεί πριν την VI.14, καθώς οι περισσότερες προτάσεις μεταξύ των VI.15 και VI.23 εξαρτώνται από τις VI.14 και 15. Αλλά είναι απολύτως σύμφωνο με τον τρόπο του Ευκλείδη να δώσουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση πρώτα και την επέκτασή της αργότερα, και μια τέτοια σειρά έχει συχνά μεγάλα πλεονεκτήματα, καθώς επιτρέπει τα δύσκολα μέρη ενός θέματος να αναλύονται πιο εύκολα και σταδιακά. Τώρα, αν εδώ ακολουθούσαμε τη θέση του De Morgan, θα έπρεπε, όπως πιστεύω εγώ, να διαπράξουμε το λάθος τού να εξηγήσουμε κάτι που είναι σχετικά εύκολο στην κατανόηση, δηλαδή, τους δύο λόγους εκ των οποίων ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου, με μια πιο περίπλοκη έννοια, αυτή του συγκείμενου λόγου. Με άλλα λόγια, είναι πιο εύκολο για έναν αρχάριο να συνειδητοποιήσει τη σχέση που υποδηλώνεται με τη διατύπωση ότι οι πλευρές ίσων και ισογωνίων παραλληλόγραμμων είναι «αντιστρόφως ανάλογες», από ότι να δημιουργήσει μια έννοια των παραλληλογράμμων, όπως ότι «ο συγκείμενος λόγος από εκ του λόγου των πλευρών τους». Για το λόγο αυτό θα ακολουθήσω τη σειρά του Ευκλείδη.

Το συμπέρασμα ότι εφόσον ΔΒ, ΒΕ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, ΖΒ, ΒΗ είναι επίσης σε ευθεία γραμμή αναφέρεται στην πρόταση Ι.14. Το συμπέρασμα γίνεται πιο σαφές με τα ακόλουθα βήματα:

Ισχύει ότι: $\angle \Delta BZ = \angle HBE$

Προσθέτουμε σε κάθε μία από τις ίσες γωνίες τη γωνία $\angle ZBE$.

Τότε, $\angle \Delta BZ + \angle ZBE = \angle HBE + \angle ZBE$ [Κοινή Έννοια 2]

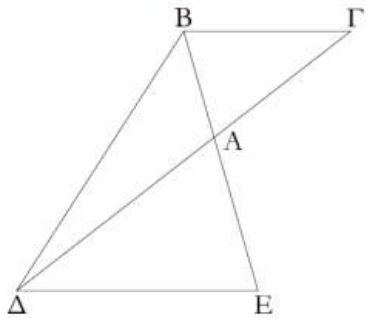
Αλλά, $\angle \Delta BZ + \angle ZBE = 2$ ορθές [Πρόταση Ι.13]

Άρα, $\angle HBE + \angle ZBE = 2$ ορθές [Κοινή Έννοια 1]

Έτσι, ΖΒ, ΒΗ είναι σε ευθεία γραμμή [Πρόταση Ι.14]

Το αποτέλεσμα είναι επίσης προφανές από την αντιστροφή της Πρότασης Ι.15 που δίδεται από τον Πρόκλο (βλέπε σχόλια για την Πρόταση Ι.15).»

Πρόταση VI.15	Στα ίσα τρίγωνα που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και αντίστροφα, εκείνα από τα τρίγωνα που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες αυτές γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα.



Απόδειξη: Έστω τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου, δηλαδή ∠ΒΑΓ =∠ΔΑΕ. Ισχυριζόμαστε ότι οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{ΓΑ}{ΑΔ} = \frac{ΕΑ}{ΑΒ}.$$

Υποθέτουμε ότι οι πλευρές ΓΑ και ΑΔ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε στην ίδια ευθεία θα βρίσκονται και οι πλευρές ΕΑ και ΑΒ (**Πρόταση Ι.14**). Φέρουμε την ΒΔ.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα και το ΒΑΔ είναι ένα άλλο τρίγωνο, από την **Πρόταση V.7**, θα έχουμε:

$$\frac{ΓΑΒ}{ΒΑΔ} = \frac{ΕΑΔ}{ΒΑΔ}.$$

Όμως, από την **Πρόταση VI.1**,

$$\frac{ΓΑΒ}{ΒΑΔ} = \frac{ΓΑ}{ΑΔ} \text{ και } \frac{ΕΑΔ}{ΒΑΔ} = \frac{ΕΑ}{ΑΒ}.$$

Συνεπώς, από την **Πρόταση V.11**, θα είναι:

$$\frac{ΓΑ}{ΑΔ} = \frac{ΕΑ}{ΑΒ}$$

δηλαδή, οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Αντίστροφα, έστω ότι οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{ΓΑ}{ΑΔ} = \frac{ΕΑ}{ΑΒ}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΔΕ.

Φέρουμε πάλι την ΒΔ. Από την **Πρόταση VI. 1**, έχουμε:

$$\frac{ΓΑ}{ΑΔ} = \frac{ΑΒΓ}{ΒΑΔ} \quad \text{και} \quad \frac{ΕΑ}{ΑΒ} = \frac{ΕΑΔ}{ΒΑΔ}$$

Αλλά από την υπόθεση και την **Πρόταση V.11**, θα ισχύει:

$$\frac{ΑΒΓ}{ΒΑΔ} = \frac{ΕΑΔ}{ΒΑΔ}.$$

Επειδή, τώρα καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ προς το ΒΑΔ έχει τον ίδιο λόγο, από την **Πρόταση V.9**, συνάγεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα.

ό.έ.δ.

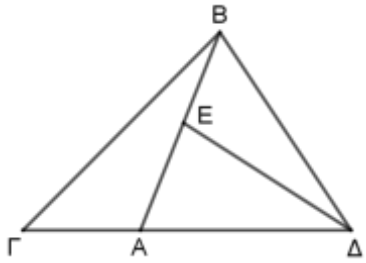
Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.15 ([H1], σ. 286)

Όπως υποδεικνύεται στη μερική αντιστροφή που δίδεται στην τελευταία σημείωση, αυτή η πρόταση είναι εξίσου αληθής, αν η γωνία που περιλαμβάνεται στις δύο πλευρές του ενός τριγώνου είναι παραπληρωματική (supplementary), αντί ίση, της γωνίας που περιλαμβάνεται στις δύο πλευρές του άλλου τριγώνου.

Έστω ΑΒΓ, ΑΔΕ δύο τρίγωνα ώστε οι γωνίες ΒΑΓ, ΔΑΕ να είναι παραπληρωματικές και επίσης

$$\frac{ΓΑ}{ΑΔ} = \frac{ΕΑ}{ΑΒ}.$$

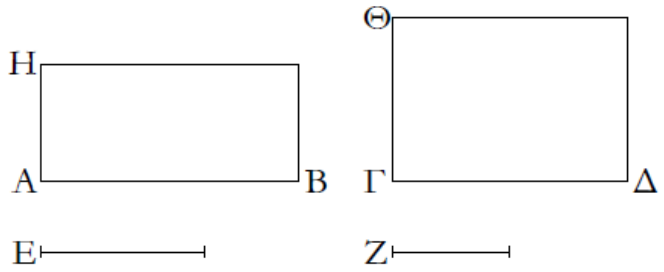
Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να τοποθετήσουμε τα τρίγωνα έτσι ώστε η ΓΑ να βρίσκεται στην ίδια ευθεία γραμμή με την ΑΔ και η ΑΒ να βρίσκεται πάνω στην ΑΕ (αφού η γωνία ΕΑΓ παραπληρωματική της γωνίας ΕΑΔ, είναι ίση με τη γωνία ΒΑΓ).



Αν φέρουμε τη ΒΔ, η απόδειξη που δίνει ο Ευκλείδης εφαρμόζεται και σε αυτή την περίπτωση.

Είναι αληθές ότι η VI.15 μπορεί να προκύψει άμεσα από την VI.14, καθώς ένα τρίγωνο είναι το μισό ενός παραλληλογράμμου με την ίδια βάση και ύψος. Αλλά, εφόσον ο σκοπός του Ευκλείδη ήταν να δώσει στο μαθητή μια κατανόηση των μεθόδων περισσότερο, παρά αποτελέσματα, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα στην εξαγωγή της μιας πρότασης από τη άλλη, αντί της χρήσης της ίδιας μεθόδου για την καθεμία.

Πρόταση VI.16	Αν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τους μέσους όρους. Και αντίστροφα, αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τους μέσους όρους, τότε οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες.



Απόδειξη: Έστω τέσσερις ευθείες ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ οι οποίες είναι ανάλογες, και ισχύει:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΔ, Ε.

Από τα σημεία Α και Γ των ευθειών ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, φέρουμε κάθετες προς αυτές (**Πρόταση Ι.11**) και παίρνουμε ΑΗ=Ζ και ΓΘ=Ε (**Πρόταση Ι.3**). Σχηματίζουμε, ακόμα, τα παραλληλόγραμμα ΒΗ και ΔΘ. Τότε,

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΑΗ}}.$$

Είναι, λοιπόν, οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΒΗ, ΔΘ που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες. Όμως, από την **Πρόταση VI.14**, τα ισογώνια παραλληλόγραμμα των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΗ είναι ίσο με το ΔΘ. Αλλά το ΒΗ είναι το ορθογώνιο ΑΒ, Ζ, αφού ΑΗ=Ζ, και το ΔΘ είναι το ορθογώνιο ΓΔ, Ε, αφού ΓΘ=Ε. Συνεπώς, το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΔ, Ε.

Αντίστροφα, έστω ότι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ευθείες ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ευθείες ΓΔ, Ε. Ισχυριζόμαστε ότι οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}}.$$

Στην ίδια κατασκευή, επειδή το ορθογώνιο ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΓΔ, Ε και το ΑΒ, Ζ είναι το ΒΗ, αφού ΑΗ=Ζ, και το ΓΔ, Ε είναι

το ΔΘ, αφού ΓΘ=Ε, συνάγεται ότι το ορθογώνιο ΒΗ είναι ίσο με το ΔΘ. Είναι επιπλέον και ισογώνια. Όμως, στα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, οπότε:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΑΗ}}$$

Αλλά ΓΘ=Ε και ΑΗ=Ζ, συνεπώς:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}}\ .$$

ό.έ.δ.

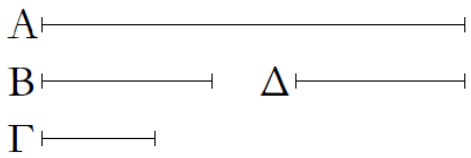
Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.16 ([H1], σ. 222)

«Αυτή η πρόταση είναι μια ειδική περίπτωση της πρότασης VI.14, που, όμως, από κάθε άποψη, αξίζει μία ξεχωριστή παράθεση. Μπορεί, επίσης, να διατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή:

Ορθογώνια που έχουν τις βάσεις τους αντιστρόφως ανάλογες προς τα ύψη τους είναι ίσα κατά το εμβαδόν· και τα ίσα ορθογώνια έχουν τις βάσεις τους αντιστρόφως ανάλογες προς τα ύψη τους.

Εφόσον, κάθε παραλληλόγραμμο είναι ίσο προς ένα ορθογώνιο με το ίδιο ύψος και την ίδια βάση και κάθε τρίγωνο με το ίδιο ύψος και την ίδια βάση είναι ίσο προς το μισό του παραλληλόγραμμου ή ορθογώνιου, έπεται ότι *ίσα παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα έχουν τις βάσεις τους αντιστρόφως ανάλογες προς τα ύψη τους και αντίστροφα»*.

Πρόταση VI.17	Αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μέσο όρο. Και αντίστροφα, αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μέσο όρο, τότε οι τρεις ευθείες θα είναι ανάλογες.



Απόδειξη: Έστω τρεις ανάλογες ευθείες, οι Α, Β, Γ, έτσι ώστε:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς Β.

Έστω ευθεία Δ ίση με τη Β (**Πρόταση Ι.3).** Τότε θα είναι:

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{\Gamma}.$$

Αλλά, από την **Πρόταση VI.16**, αν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τους μέσους όρους, οπότε το ορθογώνιο Α, Γ είναι ίσο με το ορθογώνιο Β, Δ. Αλλά το ορθογώνιο Β, Δ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς Β, αφού Δ=Β. Συνεπώς, το ορθογώνιο Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς Β.

Αντίστροφα, έστω ότι το ορθογώνιο Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς Β. Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}.$$

Στην ίδια κατασκευή, επειδή το ορθογώνιο Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς Β, ενώ το τετράγωνο πλευράς Β είναι ίσο με το ορθογώνιο Β, Δ, αφού Β=Δ, το ορθογώνιο Α, Γ θα είναι ίσο με το ορθογώνιο Β, Δ.

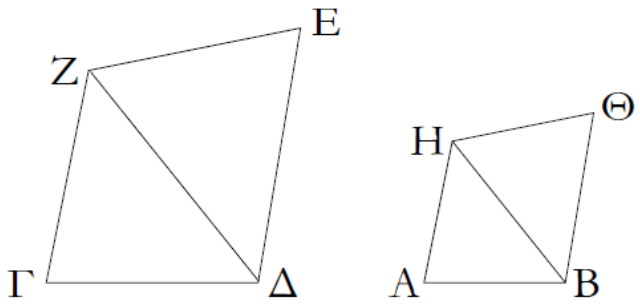
Αλλά, από την **Πρόταση VI.16** αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τους άκρους όρους είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τους μέσους όρους, τότε οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες. Συνεπώς $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{\Gamma}$. Όμως, είναι Β=Δ, οπότε $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$.

ό.έ.δ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η πρόταση VI.17 είναι, φυσικά, μια ειδική περίπτωση της πρότασης VI.16.

Πρόταση VI.18	Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο χωρίο με μία πλευρά δοθείσα ευθεία, το οποίο να είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς δοθέν ευθύγραμμο χωρίο.



Απόδειξη: Θεωρούμε δοθείσα ευθεία ΑΒ και δοθέν ευθύγραμμο χωρίο ΓΕ. Θα κατασκευάσουμε ευθύγραμμο χωρίο με πλευρά ΑΒ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το ΓΕ.

Φέρουμε τη ΔΖ και κατασκευάζουμε πάνω στην ΑΒ, στα σημεία της Α, Β, γωνίες ∠ΗΑΒ=∠Γ και ∠ΑΒΗ=∠ΓΔΖ, αντίστοιχα (**Πρόταση Ι.23**). Τότε, οι γωνίες που απομένουν θα είναι ίσες, δηλαδή ∠ΓΖΔ=∠ΑΗΒ (**Πρόταση Ι.32**) και έτσι το τρίγωνο ΖΓΔ θα είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΗΑΒ. Συνεπώς, από την **Πρόταση VI.4**, θα ισχύει:

$$\frac{ΖΔ}{ΗΒ}=\frac{ΖΓ}{ΗΑ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}.$$

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε, πάνω στην ευθεία ΒΗ, στα σημεία της Β, Η, γωνίες ∠ΒΗΘ=∠ΔΖΕ και ∠ΗΒΘ=∠ΖΔΕ, αντίστοιχα (**Πρόταση Ι.23**). Τότε, οι γωνίες που απομένουν θα είναι ίσες, δηλαδή ∠Θ=∠Ε (**Πρόταση Ι.32**) και έτσι το τρίγωνο ΖΔΕ θα είναι ισογώνια με το τρίγωνο ΗΘΒ. Συνεπώς, από την **Πρόταση VI.4,** θα ισχύει:

$$\frac{ΖΔ}{ΗΒ}=\frac{ΖΕ}{ΗΘ}=\frac{ΕΔ}{ΘΒ}.$$

Έχει όμως δειχθεί ότι:

$$\frac{ΖΔ}{ΗΒ}=\frac{ΖΓ}{ΗΑ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}.$$

Επομένως, από **Πρόταση V.11**, θα έχουμε ότι:

$$\frac{ΖΓ}{ΗΑ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}=\frac{ΖΕ}{ΗΘ}=\frac{ΕΔ}{ΘΒ}.$$

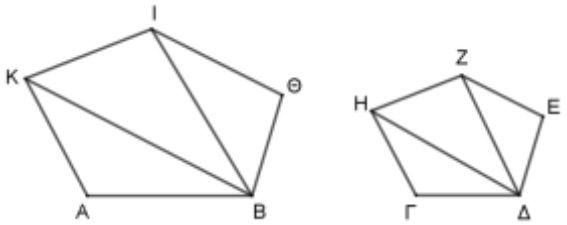
Επειδή τώρα ∠ΓΖΔ=∠ΑΗΒ και ∠ΔΖΕ=∠ΒΗΘ θα είναι και ∠ΓΖΕ=∠ΑΗΘ, ως άθροισμα ίσων γωνιών. Για τους ίδιους λόγους θα είναι ∠ΓΔΕ=∠ΑΒΘ. Είναι ακόμη ∠Γ=∠Α και ∠Ε=∠Θ. Έτσι, τα ευθύγραμμα χωρία ΑΘ και ΓΕ είναι ισογώνια και έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους ανάλογες. Συνεπώς, σύμφωνα με τον **Ορισμό VI.1**, είναι όμοια.

ό.έ.π.

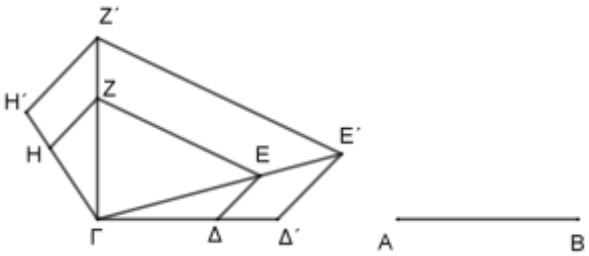
- **Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.18 ([H1], σ. 230-232)**

Ο Simson θεωρεί ότι η απόδειξη αυτής της πρότασης έχει αλλοιωθεί και στηρίζει την άποψή του (1) στο ότι αποδεικνύεται μόνο με αναφορά σε τετράπλευρα και δε δείχνει το πώς μπορεί αυτή να επεκταθεί σε σχήματα με πέντε ή περισσότερες πλευρές, (2) ότι ο Ευκλείδης συμπεραίνει, από το γεγονός ότι δύο τρίγωνα που είναι ισογώνια, ότι μία πλευρά του ενός είναι προς την αντίστοιχη πλευρά του άλλου, όπως μια άλλη πλευρά του πρώτου είναι προς την αντίστοιχη σε αυτή πλευρά του άλλου, δηλαδή, μεταφέρει, χωρίς να αναφέρει το γεγονός ότι το κάνει, τις αναλογίες που παίρνει από την VI.4, ενώ η απόδειξη της αμέσως επόμενης πρότασης δίνει, σε παρόμοια περίπτωση, το ενδιάμεσο βήμα της μεταφοράς. Θεωρώ ότι αυτό είναι υπερβολικά αυστηρό. Όσον αφορά στο (2), πρέπει να σημειωθεί ότι η μορφή της αναλογίας που μεταφέρεται συναντάται πρώτη φορά στην VI.4. Και η παράλειψη του ενδιάμεσου βήματος της *εναλλάξ* (*alternando*), είτε κατά λάθος είτε όχι, δεν είναι μεγάλης σημασίας. Από την άλλη πλευρά, η χρήση αυτής της μορφής της αναλογίας σίγουρα απλοποιεί την απόδειξη της πρότασης, αφού καθιστά μη απαραίτητα τα επακόλουθα *δι' ίσου* (*ex aequali*) βήματα της απόδειξης του Simson, όπου η θέση τους λαμβάνεται από το συμπέρασμα [V.11] ότι οι λόγοι που είναι ίδιοι με έναν τρίτο λόγο είναι και μεταξύ τους ίδιοι.

Ούτε και η πρώτη ένσταση είναι μεγάλης σημασίας. Αρκεί μόνο να πάρουμε ως δοθέν πολύγωνο ένα πολύγωνο με πέντε τουλάχιστον πλευρές, όπως το ΓΔΕΖΗ, να ενώσουμε τη μια άκρη του ΓΔ, ας πούμε τη Δ, με κάθε γωνιακό σημείο διαφορετικό από τα Γ και Ε, και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο κατασκευής, όπως του Ευκλείδη, για κάθε αριθμό διαδοχικών τριγώνων, όπως τα ΑΒΚ, ΚΒΙ κλπ, που μπορεί να δημιουργηθεί. Η κατασκευή του Ευκλείδη και η απόδειξη για ένα τετράπλευρο είναι επαρκείς για να δείξουν πώς χειριζόμαστε την περίπτωση ενός σχήματος με πέντε ή περισσότερες πλευρές.



Ο Κλάβιος (Clavius) έχει μια κατασκευή η οποία, δεδομένης της δυνατότητας μετακίνησης ενός σχήματος ολοκλήρου από μια θέση σε μια άλλη, είναι ευκολότερη. Με δοθέν το πολύγωνο ΓΔΕΖΗ, φέρουμε τις ΓΕ, ΓΖ. Τοποθετούμε την ΑΒ πάνω στη ΓΔ έτσι ώστε το Α να συμπίπτει στο Γ, και έστω Β πέφτει στο Δ΄, το οποίο μπορεί είτε να πέφτει στη ΓΔ, είτε στην προέκτασή της. Τώρα σχεδιάζουμε τη Δ΄Ε΄ παράλληλη στη ΔΕ, που συναντά τη ΓΕ, ή την προέκτασή της, στο Ε΄, την Ε΄Ζ΄ παράλληλη στην ΕΖ, που συναντά τη ΓΖ, ή την προέκτασή της, στο Ζ΄, και ούτω καθεξής.

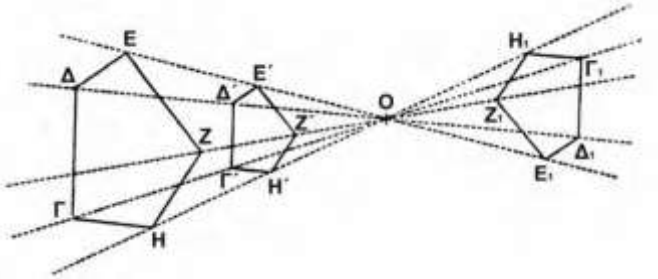


Έστω ότι η παράλληλη της προτελευταίας πλευράς, ΖΗ, συναντά τη ΓΗ, ή την προέκτασή της, στο Η΄.

Τότε ΓΔ΄Ε΄Ζ΄Η΄ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο με το ΓΔΕΖΗ και κατασκευάστηκε πάνω στη ΓΔ΄, μια ευθεία γραμμή ίση με την ΑΒ.

Η απόδειξη αυτού είναι προφανής.

Μια πιο γενική κατασκευή υποδεικνύεται στο παρατιθέμενο σχήμα. Αν ΓΔΕΖΗ είναι το δοθέν πολύγωνο, υποθέτουμε ότι τα γωνιακά σημεία του, είναι όλα ενωμένα με τυχόν σημείο Ο και οι συνδετικές ευθείες γραμμές προεκτείνονται και προς τις δύο κατευθύνσεις.



Στη συνέχεια, αν Γ΄Δ΄ ευθεία γραμμή ίση με την ΑΒ, τοποθετηθεί παράλληλα στη ΓΔ και Γ΄, Δ΄ βρίσκονται αντίστοιχα στην ΟΓ, ΟΔ (αυτό βέβαια μπορεί να γίνει με την εύρεση τετάρτων αναλόγων), αρκεί μόνο να χαράξουμε Δ΄Ε΄, Ε΄Ζ΄, κλπ., παράλληλες προς τις αντίστοιχες πλευρές του αρχικού πολυγώνου με τον τρόπο που αναφέρθηκε παραπάνω.

Ο De Morgan θα αναδιατάξει τις Προτάσεις 18 και 20 με τον ακόλουθο τρόπο. Θα συνδυάσει την Πρόταση 18 και το πρώτο μέρος της Πρότασης 20 σε μια, με την εξής διατύπωση:

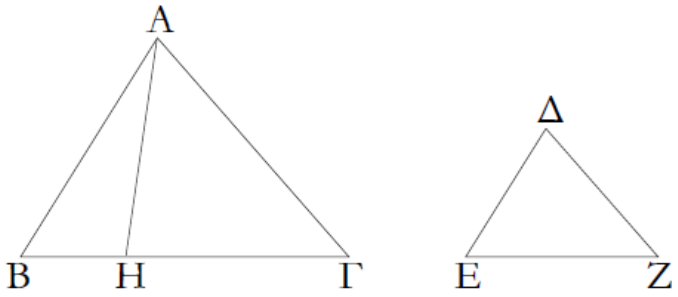
Ζεύγη ομοίων τριγώνων, όμοια συνδυασμένων (similarly put together), δίδουν όμοια σχήματα. Και κάθε ζεύγος όμοιων σχημάτων αποτελείται από ζευγάρια ομοίων τριγώνων όμοια συνδυασμένων (similarly put together).

Τότε θα γίνει το *πρόβλημα* της VI.18 μια εφαρμογή του πρώτου μέρους. Στη μορφή αυτό σίγουρα μοιάζει με βελτίωση, αλλά, υπό την προϋπόθεση ότι η σχέση των προτάσεων είναι κατανοητή, το θέμα της μορφής πιθανόν να μην είναι μεγάλης σημασίας.

- **Ορισμός των ομοίως κειμένων σχημάτων**

Τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα λέγεται ότι είναι **ομοίως κείμενα** (**similar situated),** όταν ομόλογες πλευρές τους είναι παράλληλες, όπως όταν τα σχήματα βρίσκονται στην ίδια ευθεία γραμμή ή σε παράλληλες γραμμές, αλλά όταν τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα βρίσκονται στις πλευρές ενός τριγώνου τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα λέγεται ότι είναι ομοίως κείμενα όταν οι ομόλογες πλευρές κάθε σχήματος έχουν την ίδια σχετική θέση μεταξύ τους, δηλαδή εάν οι βάσεις των ομοίων σχημάτων τοποθετήθηκαν παράλληλα μεταξύ τους, οι υπόλοιπες πλευρές των σχημάτων εάν ήταν ομοίως κείμενες θα ήταν επίσης παράλληλη η μία στην άλλη.

Πρόταση VI.19	Ο λόγος δύο ομοίων τριγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.



Απόδειξη: Έστω τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τα οποία έχουν:

$$\angle B = \angle E$$

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$$

ώστε οι ΒΓ, ΕΖ να είναι ομόλογες **(Ορισμός V.11).** Ισχυριζόμαστε ότι

$$\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \left(\frac{B\Gamma}{EZ}\right)^2.$$

Θεωρούμε την ευθεία ΒΗ που είναι η τρίτη ανάλογος των ΒΓ, ΕΖ (**Πρόταση VI.11**), έτσι ώστε:

$$\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{EZ}{BH}$$

Φέρουμε την ΑΗ.

Επειδή

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$$

από την **Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)** θα έχουμε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Αλλά τότε, αφού ισχύει

$$\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{EZ}{BH}$$

από την **Πρόταση V.11,** θα έχουμε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{EZ}{BH}.$$

Οι πλευρές λοιπόν των τριγώνων ΑΒΗ, ΔΕΖ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Όμως, από την **Πρόταση VI.15**, τα τρίγωνα που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΗ θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Τώρα επειδή

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΗ}}$$

και, αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, η πρώτη προς την τρίτη έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου που έχει προς τη δεύτερη (**Ορισμός V.9**), θα είναι:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΗ}} = \left(\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}}\right)^2.$$

Αλλά, από **Πρόταση VI.1**,

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΗ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΒΗ}}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΒΗ}} = \left(\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}}\right)^2$$

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΗ θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ, οπότε:

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \left(\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}}\right)^2.$$

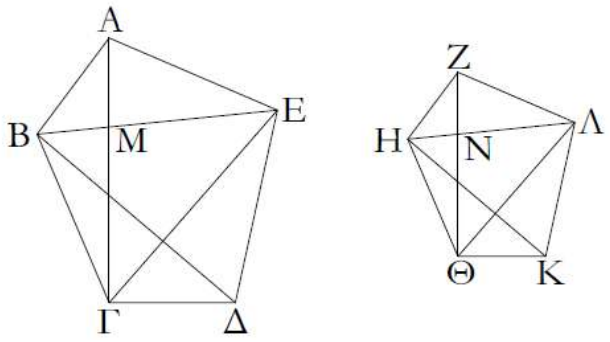
ό.έ.δ.

Πόρισμα	**Αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε ο λόγος της πρώτης προς την τρίτη ισούται με το λόγο του σχήματος επί της πρώτης προς το όμοιό του και ομοίως αναγραφόμενο επί της δεύτερης.**

- **Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.19 ([H1], σ. 233-235)**

  Έχοντας συνδυάσει την Πρόταση 18 και το πρώτου μέρος της Πρότασης 20, όπως πριν αναφέρθηκε, ο De Morgan προσθέτει στην Πρόταση 19 το δεύτερο μέρος της Πρότασης 20, που λέει ότι αν όμοια πολύγωνα διαιρεθούν στον ίδιο αριθμό όμοιων τριγώνων, τα τρίγωνα είναι *«ομόλογα προς τα όλα»* («homologous to the wholes») (με την έννοια ότι τα πολύγωνα έχουν τον ίδιο λόγο όπως τα αντίστοιχα τρίγωνα) και ότι τα πολύγωνα έχουν το ένα προς το άλλο το διπλασίονα λόγο των ομόλογων πλευρών. Αυτό πάλι, αν και δεν υπάρχει αμφιβολία ότι πρόκειται για βελτίωση της μορφής, θα απαιτούσε το σχεδιασμό ξανά του σχήματος της τροποποιημένης Πρότασης 18 και κάποιο βαθμό επανάληψης.

Πρόταση VI.20	Τα όμοια πολύγωνα διαιρούνται και σε όμοια τρίγωνα ίσα κατά το πλήθος και ομόλογα προς τα όλα και ο λόγος τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους.



Απόδειξη: Έστω τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ και υποθέτουμε ότι η ΑΒ είναι ομόλογη προς τη ΖΗ. Ισχυριζόμαστε ότι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ και σε όμοια τρίγωνα διαιρούνται ίσα κατά το πλήθος και ομόλογα προς τα όλα και, επίσης, ότι ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\text{ΑΒΓΔΕ}}{\text{ΖΗΘΚΛ}} = \left(\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΗ}}\right)^2$$

Φέρουμε τις ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Από τον **Ορισμό VI.1**, επειδή το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ είναι όμοιο με το πολύγωνο ΖΗΘΚΛ, θα έχουμε ∠ΒΑΕ=∠ΗΖΛ και ακόμα $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΛ}}$. Επειδή, λοιπόν, τα δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΖΗΛ έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, από την **Πρόταση VI.6** θα είναι ισογώνια, οπότε από την **Πρόταση VI.4** και τον **Ορισμό VI.1** θα είναι και όμοια. Συνεπώς, θα έχουν ∠ΑΒΕ=∠ΖΗΛ. Όμως είναι ∠ΑΒΓ=∠ΖΗΘ, λόγω της ομοιότητας των πολυγώνων, οπότε θα είναι και ∠ΕΒΓ=∠ΛΗΘ. Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΖΗΛ και την ομοιότητα των πολυγώνων ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΚΛ θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΛΗ}}{\text{ΗΖ}} \quad \text{και} \quad \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΗΘ}}$$

Έτσι, από την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου)**, καταλήγουμε ότι:

$$\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΛΗ}}{\text{ΗΘ}}$$

δηλαδή, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ∠ΕΒΓ και ∠ΛΗΘ είναι ανάλογες, οπότε, από την **Πρόταση VI.6**, τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΛΗΘ είναι ισογώνια και συνεπώς, από την **Πρόταση VI.4** και τον **Ορισμό VI.1**, θα είναι και όμοια. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΕΓΔ και ΛΘΚ είναι όμοια και άρα τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ διαιρέθηκαν και σε όμοια τρίγωνα και σε ίσα κατά το πλήθος.

Ισχυριζόμαστε, ότι τα τρίγωνα είναι και ομολόγα προς τα όλα, δηλαδή ότι είναι ανάλογα και τα ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ είναι ηγούμενα και τα ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ επόμενα αυτών, οπότε:

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \frac{\text{ΕΒΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \frac{\text{ΕΓΔ}}{\text{ΛΘΚ}}$$

και επίσης ότι ισχύει:

$$\frac{\text{ΑΒΓΔΕ}}{\text{ΖΗΘΚΛ}} = \left(\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΗ}}\right)^2.$$

Φέρνουμε τις ΑΓ, ΖΘ. Από την ομοιότητα των πολυγώνων έχουμε ότι $\angle\text{ΑΒΓ} = \angle\text{ΖΗΘ}$ και

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΖΗ}}{\text{ΗΘ}},$$

οπότε, από την **Πρόταση VI.6**, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΗΘ είναι ισογώνια. Άρα θα είναι $\angle\text{ΒΑΓ} = \angle\text{ΗΖΘ}$ και $\angle\text{ΒΓΑ} = \angle\text{ΗΘΖ}$ και επειδή $\angle\text{ΒΑΜ} = \angle\text{ΗΖΝ}$ και $\angle\text{ΑΒΜ} = \angle\text{ΖΗΝ}$ θα είναι και $\angle\text{ΑΜΒ} = \angle\text{ΖΝΗ}$ (**Πρόταση I.32**). Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΖΗΝ θα είναι ισογώνια.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι και τα τρίγωνα ΒΜΓ και ΗΝΘ είναι ισογώνια και συνεπώς, από την **Πρόταση VI.4,** θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΒ}} = \frac{\text{ΖΝ}}{\text{ΝΗ}} \quad \text{και} \quad \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΗΝ}}{\text{ΝΘ}}.$$

Ώστε, με εφαρμογή της **Πρότασης V.22 (δι' ίσου),** προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΖΝ}}{\text{ΝΘ}}.$$

Όμως, από την **Πρόταση VI.1**, θα ισχύει:

$$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΑΒΜ}}{\text{ΜΒΓ}} = \frac{\text{ΑΜΕ}}{\text{ΕΜΓ}}$$

γιατί τα τρίγωνα (που έχουν κοινό ύψος) έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των βάσεων.

Άρα, από **Πρόταση V.12**, θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΑΒΜ} + \text{ΑΜΕ}}{\text{ΜΒΓ} + \text{ΕΜΓ}} = \frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΕΒΓ}}.$$

Ομοίως έχουμε και την ισότητα:

$$\frac{\text{ΖΝ}}{\text{ΝΘ}} = \frac{\text{ΖΗΛ}}{\text{ΛΗΘ}}$$

και επειδή

$$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΖΝ}}{\text{ΝΘ}}$$

θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΒΕΓ}} = \frac{\text{ΖΗΛ}}{\text{ΛΗΘ}}$$

οπότε, από **Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)**, θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \frac{\text{ΒΕΓ}}{\text{ΛΗΘ}}.$$

Αν φέρουμε τις ΒΔ και ΗΚ, ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$\frac{\text{ΒΕΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \frac{\text{ΕΓΔ}}{\text{ΛΘΚ}}$$

οπότε από την **Πρόταση V.12**, έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \frac{\text{ΒΕΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \frac{\text{ΕΓΔ}}{\text{ΛΘΚ}} = \frac{\text{ΑΒΕ} + \text{ΒΕΓ} + \text{ΕΓΔ}}{\text{ΖΗΛ} + \text{ΛΗΘ} + \text{ΛΘΚ}} = \frac{\text{ΑΒΓΔΕ}}{\text{ΖΗΘΚΛ}}.$$

Όμως, επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΖΗΛ είναι όμοια, από την **Πρόταση VI.19**, θα ισχύει:

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \left(\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΗ}}\right)^2$$

και συνεπώς:

$$\frac{\text{ΑΒΓΔΕ}}{\text{ΖΗΘΚΛ}} = \left(\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΗ}}\right)^2.$$

ό.έ.δ.

Πόρισμα	Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι και τα όμοια τετράπλευρα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους. Το ίδιο έχει δειχθεί και για τα όμοια τρίγωνα. Άρα, γενικά, τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.20 ([H1], σ. 238-239)

«2. ***in the same ratio as the wholes*** [ΣτΜ: *ομόλογα προς τα όλα*]. Η ίδια λέξη *«ὁμόλογος»* χρησιμοποιείται, την οποία γενικά εγώ μεταφράζω ως *corresponding* [ΣτΜ: *αντίστοιχη*]. Αλλά εδώ χρησιμοποιείται ως δοτική, *ὁμόλογα τοῖς ὅλοις* (*homologous with the whole*), αντί να χρησιμοποιηθεί απόλυτα. Οπότε, η σημασία μπορεί να μην είναι τίποτα άλλο παρά *με τον αυτόν λόγο με* ή ανάλογα προς τα όλα. Και ο Ευκλείδης φαίνεται να αναγνωρίζει ότι κάνει μια ειδική χρήση της λέξης, καθώς εξηγεί παρακάτω (l.46) (ΣτΜ: σελ. 236, γραμμές 46-49): *τα τρίγωνα είναι και ομολόγα προς τα όλα, δηλαδή ότι είναι ανάλογα και τα ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ είναι ηγούμενα και τα ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ επόμενα αυτών.*

49. ***ἑπόμενα αὐτῶν, their consequents.*** Είναι λίγο περίεργο, αλλά μπορεί να προτίθεται να δείξει ποια τρίγωνα αντιστοιχούν σε ποια ως επόμενα στα ηγούμενα.

Μια εναλλακτική απόδειξη του δεύτερου μέρους αυτής της πρότασης που δίδεται μετά τα Πορίσματα, υποβαθμίζεται από τον August και τον Heiberg σε ένα Παράρτημα ως παρεμβολή. Είναι μικρότερη από την απόδειξη του κειμένου και είναι η μόνη που δόθηκε από πολλούς συγγραφείς, συμπεριλαμβανομένων των Κλάβιου, Billingsley, Barrow και Simson. Αυτή έχει ως εξής:

«θα αποδείξουμε τώρα επίσης ότι τα τρίγωνα είναι ομόλογα με ένα διαφορετικό και ευκολότερο τρόπο.

Πάλι, έστω τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ. Φέρουμε τις ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Πάλι, έστω τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ. Φέρουμε τις ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Ισχυριζόμαστε ότι:

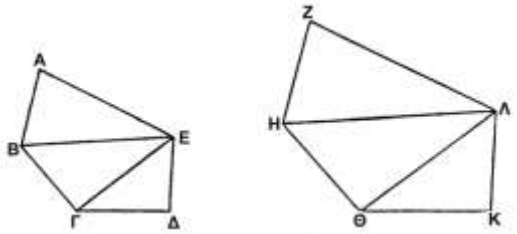
$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \frac{\text{ΕΒΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \frac{\text{ΓΔΕ}}{\text{ΘΚΛ}}.$$

Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΕ είναι όμοιο προς το τρίγωνο ΖΗΛ, θα ισχύει:

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \left(\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΗΛ}}\right)^2$$

Για τον ίδιο λόγο

$$\frac{\text{ΒΕΓ}}{\text{ΗΛΘ}} = \left(\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΗΛ}}\right)^2.$$



Οπότε,

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \frac{\text{ΒΕΓ}}{\text{ΗΛΘ}}.$$

Επίσης, εφόσον το τρίγωνο ΕΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΛΗΘ, θα ισχύει:

$$\frac{\text{ΕΒΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \left(\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΘΛ}}\right)^2.$$

Για τον ίδιο λόγο

$$\frac{\text{ΕΓΔ}}{\text{ΛΘΚ}} = \left(\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΘΛ}}\right)^2.$$

Επομένως,

$$\frac{\text{ΕΒΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \frac{\text{ΕΓΔ}}{\text{ΛΘΚ}}$$

Αλλά απεδείχθη ότι,

$$\frac{\text{ΕΒΓ}}{\text{ΛΗΘ}} = \frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}}$$

Επομένως,

$$\frac{\text{ΑΒΕ}}{\text{ΖΗΛ}} = \frac{\text{ΒΕΓ}}{\text{ΗΛΘ}} = \frac{\text{ΕΓΔ}}{\text{ΛΘΚ}}.$$

ό.έ.δ.

Τώρα, ο Ευκλείδης δεν μπορεί να μην πρόσεξε ότι το δεύτερο μέρος της πρότασής του αποδεικνύεται με αυτό τον τρόπο. Επομένως, φαίνεται ότι δίνοντας την άλλη και μακρύτερη μέθοδο, εσκεμμένα θέλησε να αποφύγει τη χρήση του συμπεράσματος της VI.19, προτιμώντας να αποδείξει τα δύο πρώτα μέρη του θεωρήματος, όπως μπορούν να αποδειχθούν, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε σχέση μεταξύ των εμβαδών όμοιων τριγώνων.

Το πρώτο μέρος του Πορίσματος, που δηλώνει ότι το θεώρημα είναι αληθές για τα τετράπλευρα, θα ήταν περιττό για το γεγονός ότι τεχνικά, σύμφωνα με το Βιβλίο Ι, Ορισμός 19, ο όρος «πολύγωνο» (ή σχήμα με πολλές πλευρές, «πολύπλευρο»), που χρησιμοποιείται στη διατύπωση της πρότασης, περιορίζεται σε ευθύγραμμα σχήματα περισσοτέρων από τέσσερις

πλευρές, έτσι ώστε ένα τετράπλευρο να αποκλείεται. Η αναφορά του τριγώνου επιπλέον συμπληρώνει το «όμοια ευθύγραμμα σχήματα».

Το δεύτερο πόρισμα, παρέμβαση του Θέονα, δίδεται στο κείμενο από τους εκδότες, αλλά εντός αγκύλων από τον Heiberg, και είναι το εξής[2]:

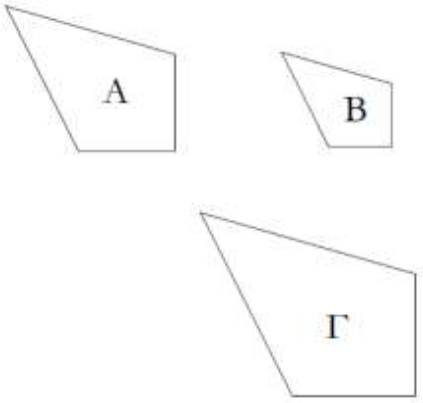
Και αν πάρουμε Ξ μία τρίτη ανάλογο των ΑΒ, ΖΗ, τότε ΒΑ έχει προς το Ξ διπλασίονα λόγο από αυτόν που το ΑΒ έχει προς το ΖΗ. Αλλά το πολύγωνο έχει επίσης προς το πολύγωνο, ή το τετράπλευρο προς το τετράπλευρο, διπλασίονα λόγο από αυτόν που η αντίστοιχη πλευρά έχει προς την αντίστοιχη πλευρά, δηλαδή ΑΒ προς ΖΗ. Και αυτό απεδείχθη και στην περίπτωση των τριγώνων επίσης. Οπότε, είναι γενικά φανερό, ότι αν τρεις ευθείες γραμμές είναι ανάλογες, όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη, έτσι και το σχήμα που αναγράφεται στην πρώτη θα είναι προς το όμοιο και όμοια αναγραφόμενον σχήμα στη δεύτερη».

---

[2] [***Πόρισμα β΄:***

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΒΑ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.]

Πρόταση VI.21	Τα σχήματα που είναι όμοια προς το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι και μεταξύ τους όμοια.



Απόδειξη: Έστω ότι καθένα από τα ευθύγραμμα σχήματα Α, Β είναι όμοιο προς το Γ. Ισχυριζόμαστε ότι το Α είναι, επίσης, όμοιο προς το Β.

Επειδή τα Α, Γ είναι όμοια, θα είναι και ισογώνια και θα έχουν τις πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (**Ορισμός VI.1**). Ομοίως, επειδή τα Β, Γ είναι όμοια, θα είναι και ισογώνια και θα έχουν τις πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (**Ορισμός VI.1**).

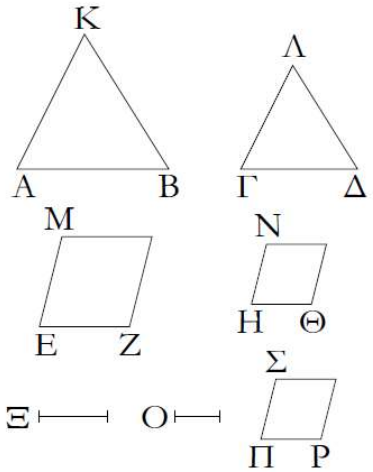
Άρα, καθένα από τα Α, Β θα είναι ισογώνιο προς το Γ και οι πλευρές τους, που περιέχουν τις ίσες γωνίες, θα είναι ανάλογες [έτσι ώστε και το Α είναι επίσης ισογώνιο προς το Β και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες]. Συνεπώς το Α είναι όμοιο προς το Β. (**Ορισμός VI.1**).

ό.έ.δ.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.21 ([H1], σ. 240)

«Θα παρατηρηθεί ότι το κείμενο παραπάνω παραλείπει ένα βήμα το οποίο οι εκδόσεις γενικά έχουν πριν το τελικό συμπέρασμα "*Συνεπώς το Α είναι όμοιο προς το Β*". Οι λέξεις που παραλείπονται είναι "έτσι ώστε το Α είναι επίσης ισογώνιο προς το Β και [με το Β] έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες». Ο Heiberg ακολουθεί τον Πάππο (P) αφήνοντάς τες έξω, εικάζοντας ότι μπορεί να είναι μια προσθήκη του Θέωνος».

Πρόταση VI.22	Αν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, τότε και τα όμοια και ομοίως αναγεγραμμένα επί αυτών ευθύγραμμα σχήματα θα είναι ανάλογα και αν τα όμοια και ομοίως αναγεγραμμένα επί αυτών ευθύγραμμα σχήματα είναι ανάλογα, τότε και οι ευθείες θα είναι ανάλογες.



Απόδειξη: Έστω ότι οι τέσσερις ευθείες ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ είναι ανάλογες, έτσι ώστε:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΗΘ}}.$$

Επί των ΑΒ, ΓΔ γράφουμε τα όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα σχήματα ΚΑΒ και ΛΓΔ, ενώ επί των ΕΖ και ΗΘ γράφουμε τα όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα σχήματα ΜΖ και ΝΘ. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$\frac{\text{ΚΑΒ}}{\text{ΛΓΔ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΝΘ}}.$$

Θεωρούμε ευθεία Ξ που είναι τρίτη ανάλογος των ΑΒ, ΓΔ και ευθεία Ο που είναι τρίτη ανάλογος των ΕΖ, ΗΘ (**Πρόταση VI.11**). Επειδή:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΗΘ}} \text{ και } \frac{\text{ΓΔ}}{\text{Ξ}} = \frac{\text{ΗΘ}}{\text{Ο}}$$

από την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου)** θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Ξ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{Ο}}.$$

Όμως, από **Πόρισμα Πρότασης VI.19,** έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Ξ}} = \frac{\text{ΚΑΒ}}{\text{ΛΓΔ}} \text{ και } \frac{\text{ΕΖ}}{\text{Ο}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΝΘ}}$$

Οπότε, από **Πρόταση V.11**, προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΚΑΒ}}{\text{ΛΓΔ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΝΘ}}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι είναι:

$$\frac{\text{ΚΑΒ}}{\text{ΛΓΔ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΝΘ}}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι τότε θα είναι και:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΗΘ}}.$$

Γιατί αν αυτή δεν ισχύει τότε, θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΠΡ}}.$$

Εφαρμόζοντας την **Πρόταση VI.18,** γράφουμε επί της ΠΡ ευθύγραμμο σχήμα ΣΡ, όμοιο και ομοίως κείμενο προς καθένα από τα ΜΖ και ΝΘ.

Επειδή λοιπόν ισχύει:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΠΡ}},$$

και έχουν αναγραφεί επί των ΑΒ, ΓΔ τα όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα σχήματα ΚΑΒ, ΛΓΔ και επί των ΕΖ, ΠΡ τα όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα σχήματα ΜΖ, ΣΡ, σύμφωνα με το πρώτο μέρος της Πρότασης, θα είναι:

$$\frac{\text{ΚΑΒ}}{\text{ΛΓΔ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΣΡ}}.$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\text{ΚΑΒ}}{\text{ΛΓΔ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΝΘ}}$$

οπότε, από την **Πρόταση V.11**, προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΣΡ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΝΘ}}.$$

Έτσι, επειδή το ΜΖ έχει τον ίδιο λόγο με καθένα από τα ΣΡ και ΝΘ, από την **Πρόταση V.9**, το ΝΘ θα είναι ίσο προς το ΣΡ. Είναι, όμως, και όμοιο και ομοίως κείμενο προς αυτό. Οπότε, θα είναι και η ΗΘ ίση με την ΠΡ[3] και επειδή

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΠΡ}}$$

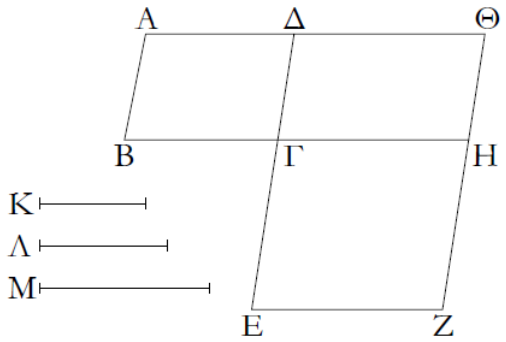
θα είναι τελικά

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΗΘ}}.$$

ό.έ.δ.

[3] Σύμφωνα με την Πρόταση VI.20, είναι $\frac{\text{ΝΘ}}{\text{ΣΡ}} = \frac{\text{ΗΘ}^2}{\text{ΠΡ}^2}$ και επειδή είναι ΝΘ=ΣΡ, έπεται ότι $\text{ΗΘ}^2 = \text{ΠΡ}^2$ και συνεπώς ΗΘ=ΠΡ.

Πρόταση VI.23	Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν το ένα προς το άλλο λόγο ίσο με το συγκείμενο λόγο εκ των λόγων των πλευρών τους.



Απόδειξη: Έστω τα ισογώνια παραλληλόγραμμα ΑΓ και ΓΖ, με ∠ΒΓΔ=∠ΕΓΗ. Ισχυριζόμαστε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΓ έχει προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ, λόγο ίσο με το συγκείμενο λόγο (εκ των λόγων) των πλευρών τους.

Ας τοποθετήσουμε τις πλευρές ΒΓ και ΓΗ πάνω στην ίδια ευθεία. Τότε και οι πλευρές ΔΓ και ΓΕ θα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία (**Πρόταση Ι.14).** Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΔΗ και θεωρούμε κάποια ευθεία Κ, τέτοια ώστε:[4]

$$\frac{ΒΓ}{ΓΗ} = \frac{Κ}{Λ} \text{ και } \frac{ΔΓ}{ΓΕ} = \frac{Λ}{Μ}$$

Αλλά, ο λόγος $\frac{Κ}{Μ}$ είναι ο συγκείμενος λόγος των $\frac{Κ}{Λ}$ και $\frac{Λ}{Μ}$. Έτσι, θα είναι ο λόγος $\frac{Κ}{Μ}$ ο συγκείμενος λόγος (εκ των λόγων) των πλευρών.

Από την **Πρόταση VI.1**,

$$\frac{ΒΓ}{ΓΗ} = \frac{ΑΓ}{ΓΘ}.$$

Αλλά

$$\frac{ΒΓ}{ΓΗ} = \frac{Κ}{Λ}$$

και άρα, από **Πρόταση V.11**,

$$\frac{Κ}{Λ} = \frac{ΑΓ}{ΓΘ}.$$

Πάλι, από **Πρόταση VI.1**,

$$\frac{ΔΓ}{ΓΕ} = \frac{ΓΘ}{ΓΖ}$$

Αλλά,

$$\frac{ΔΓ}{ΓΕ} = \frac{Λ}{Μ}$$

[4] Εδώ, προφανώς, ο Ευκλείδης εννοεί ότι από την Πρόταση VI.12, βρίσκουμε άλλες ευθείες Λ και Μ, τέτοιες ώστε: ΒΓ/ΓΗ= Κ/Λ και ΔΓ/ΓΕ=Λ/Μ.

και άρα, από την **Πρόταση V.11,**

$$\frac{\Lambda}{\text{M}} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\text{Z}}$$

και συνεπώς, από την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου)** θα είναι:

$$\frac{\text{K}}{\text{M}} = \frac{\text{A}\Gamma}{\Gamma\text{Z}}.$$

Όμως, ο λόγος $\frac{\text{K}}{\text{M}}$ είναι ο συγκείμενος λόγος εκ των λόγων των πλευρών. Άρα, και ο λόγος $\frac{\text{A}\Gamma}{\Gamma\text{Z}}$ θα είναι ο συγκείμενος λόγος εκ των λόγων των πλευρών.

ό.έ.δ.

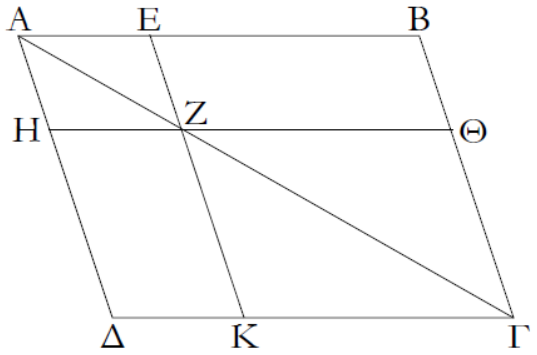
Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.23 ([H1], σ. 248-249)

Ο δεύτερος ορισμός των Δεδομένων λέει ότι: *Ένας λόγος λέγεται ότι είναι δοθείς αν μπορούμε να βρούμε (πορίσασθαι) [έναν άλλο λόγο που είναι] ο ίδιος με αυτόν.* Κατά συνέπεια, η VI.23 όχι μόνο αποδεικνύει ότι τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν μεταξύ τους λόγο που είναι ο συγκείμενος λόγος δύο άλλων, αλλά δείχνει ότι αυτός ο λόγος είναι «δοθείς» όταν οι λόγοι που τον συνθέτουν δίδονται, ή ότι μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν απλό λόγο μεταξύ ευθειών.

Ακριβώς όπως η VI.23 παρουσιάζει την απαραίτητη πράξη για τη σύνθεση δύο λόγων, η πρόταση 8 των Δεδομένων υποδεικνύει την πράξη με την οποία μπορούμε να διαιρέσουμε ένα λόγο με έναν άλλο. Η πρόταση αποδεικνύει ότι: *Αντικείμενα που έχουν ένα δοθέντα λόγο προς το ίδιο αντικείμενο, έχουν επίσης ένα δοθέντα λόγο μεταξύ τους.* Η μέθοδος του Ευκλείδη είναι φυσικά να συνθέσει ένα λόγο με τον αντίστροφο του άλλου, αλλά όταν αυτό γίνει μια φορά και το αποτέλεσμα της πρότασης 8 αποκτηθεί, χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα σε μετέπειτα προτάσεις σε αντικατάσταση της μεθόδου της σύνθεσης. Έτσι, χρησιμοποιεί τη διαίρεση των λόγων, αντί της σύνθεσης, στις προτάσεις των Δεδομένων που πραγματεύονται το ίδιο θέμα με την VI.23. Το αποτέλεσμα είναι να αναπαραστήσει το λόγο δύο ισογώνιων παραλληλόγραμμων ως ένα λόγο μεταξύ ευθειών γραμμών, μια εκ των οποίων είναι η μια πλευρά του ενός εκ των παραλληλογράμμων.

…

Πρόταση VI.24	Σε κάθε παραλληλόγραμμο τα παραλληλόγραμμα περί τη διάμετρο είναι όμοια και προς το όλο παραλληλόγραμμο και μεταξύ τους.



Απόδειξη: Έστω ΑΒΓΔ ένα παραλληλόγραμμο, ΑΓ η διάμετρος αυτού και ΕΗ, ΘΚ τα παραλληλόγραμμα περί τη διάμετρο ΑΓ. Ισχυριζόμαστε ότι καθένα από τα παραλληλόγραμμα ΕΗ και ΘΚ είναι όμοιο προς το όλο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και καθώς και μεταξύ τους.

Διότι, στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΖ είναι παράλληλη προς την πλευρά του τη ΒΓ, οπότε από την **Πρόταση VI.2**, θα είναι:

$$\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΖΑ}}.$$

Επίσης, στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΖΗ είναι παράλληλη προς την πλευρά του ΓΔ, οπότε, πάλι, από την **Πρόταση VI.2**, θα είναι:

$$\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΖΑ}} = \frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΗΑ}}.$$

Έτσι, θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΗΑ}}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα την **Πρόταση V.18 (σύνθεση λόγου)**, έχουμε:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΗΑ}}$$

και τελικά, από την **Πρόταση V.16 (εναλλάξ)**, προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΗΑ}},$$

δηλαδή οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΗ, που έχουν κοινή τη γωνία ∠ΒΑΔ είναι ανάλογες.

Επειδή, τώρα, η ΗΖ είναι παράλληλη προς τη ΔΓ, από την **Πρόταση I.29**, θα είναι

$$\angle \text{ΑΖΗ} = \angle \text{ΔΓΑ}$$

και αφού η ∠ΔΑΓ είναι κοινή γωνία των τριγώνων ΑΔΓ, ΑΗΖ, προκύπτει πως τα τρίγωνα αυτά είναι ισογώνια (**Πρόταση I.32**).

Ομοίως, και τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΑΖΕ είναι ισογώνια, οπότε και το όλο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ισογώνιο προς το παραλληλόγραμμο ΕΗ.

Άρα, σύμφωνα με την **Πρόταση VI.4** θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}}=\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΗΖ}}, \qquad \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΓΑ}}=\frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΑ}}, \qquad \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}}=\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΕ}}, \qquad \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΑ}}=\frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΕΑ}}$$

Εξάλλου, από τις δύο παραπάνω ενδιάμεσες ισότητες, με εφαρμογή της **Πρότασης V.22 (δι' ίσου)** προκύπτει ότι και:

$$\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΓΒ}}=\frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΕ}}.$$

Έτσι, οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΗ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, οπότε από τον **Ορισμό VI.1**, αυτά είναι όμοια. Για τους ίδιους λόγους και τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΚΘ είναι όμοια. Συνεπώς, από την **Πρόταση VI.21**, και τα παραλληλόγραμμα ΕΗ και ΚΘ θα είναι όμοια μεταξύ τους.

ό.έ.δ.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.24 ([H1], σ. 252-253)

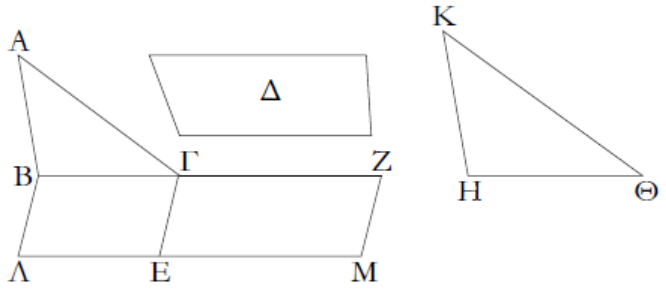
Ο Simson είχε την άποψη ότι αυτή την απόδειξη την επινόησε κάποιος μη ικανός επιμελητής, από δύο άλλες αποδείξεις, η πρώτη εκ των οποίων αποδείκνυε με παράλληλους (VI.2) ότι οι πλευρές περί την κοινή γωνία στα παραλληλόγραμμα είναι ανάλογες, ενώ η δεύτερη χρησιμοποιούσε την ομοιότητα των τριγώνων (VI.4). Είναι φυσικά αληθές ότι, όταν έχουμε αποδείξει από την VI.2 το γεγονός ότι οι πλευρές περί την κοινή γωνία είναι ανάλογες, μπορούμε να συνάγουμε την αναλογία των άλλων πλευρών άμεσα από την I.34 σε συνδυασμό με την V.7. Αλλά δεν μου φαίνεται αφύσικο ότι ο Ευκλείδης έπρεπε (1) να αποφεύγει σκόπιμα να κάνει οποιαδήποτε χρήση της I.34 και (2) να καθορίσει εκ των προτέρων ότι θα αποδείξει την αναλογία των πλευρών σε ορισμένη σειρά, ξεκινώντας με τις πλευρές ΕΑ, ΑΗ και ΒΑ, ΑΔ περί την κοινή γωνία και μετά να πάρει τις υπόλοιπες πλευρές με τη σειρά που υποδεικνύεται από τη σειρά των γραμμάτων Α, Η, Ζ, Ε. Δεδομένου ότι ο Ευκλείδης ξεκίνησε την απόδειξη με μια τόσο καθορισμένη πρόθεση στο μυαλό του, η πορεία που ακολουθήθηκε δεν παρουσιάζει δυσκολία, ούτε η απόδειξη είναι ανοργάνωτη ή αδικαιολόγητα εκτεταμένη. Και η αυθεντικότητά της μου φαίνεται ότι υποστηρίζεται από το γεγονός ότι η απόδειξη, αφού ξεμπέρδεψε με τις πρώτες δύο πλευρές περί την κοινή γωνία, ακολουθεί κατά γράμμα τη σειρά και τη μέθοδο της VI.18. Επιπλέον, θα μπορούσε άνετα να προσαρμοστεί στην πιο γενική περίπτωση δύο πολυγώνων που έχουν μια κοινή γωνία και τις άλλες ομόλογες πλευρές αντίστοιχα παράλληλες.

Τα παραλληλόγραμμα στην πρόταση είναι βέβαια όμοια τοποθετημένα καθώς και όμοια. Και εκείνα «περί την διάμετρο» μπορεί να είναι περί την προέκταση της διαμέτρου καθώς επίσης και περί τη ίδια τη διάμετρο.

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης έπεται ότι τα παραλληλόγραμμα που έχουν μια γωνία ίση προς μια γωνία και τις πλευρές περί αυτές τις γωνίες ανάλογες, είναι όμοια.

Η Πρόταση 26 είναι το αντίστροφο της Πρότασης 24 και δεν φαίνεται να υπάρχει λόγος διαχωρισμού τους, όπως συμβαίνει στο κείμενο με την παρεμβολή της VI.25. Ο Campanus έχει την VI.24 και 26 όπως την VI.22 και 23 αντίστοιχα, τη VI.23 όπως τη VI.24 και τη VI.25 όπως την έχουμε εμείς.

Πρόταση VI.25	Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο σχήμα, όμοιο προς δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και ίσο προς άλλο δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.



Απόδειξη: Έστω ΑΒΓ και Δ τα δοθέντα ευθύγραμμα σχήματα. Πρέπει να κατασκευσθεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο προς το ΑΒΓ και ίσο προς το Δ.

Με πλευρά ΒΓ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΒΕ ίσο προς το τρίγωνο ΑΒΓ (**Πρόταση Ι.44**) και στη συνέχεια με πλευρά ΓΕ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΓΜ ίσο προς το δοθέν πολύγωνο Δ, με ∠ΖΓΕ =∠ΓΒΛ (**Πρόταση Ι.45**). Τότε, το ΒΓ είναι επ' ευθείας ως προς το ΓΖ και το ΛΕ είναι επ' ευθείας ως προς το ΕΜ (**Πρόταση Ι.14**). Έστω τώρα ΗΘ, η μέση ανάλογος των ΒΓ, ΓΖ (**Πρόταση VI.13**). Με πλευρά ΗΘ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΚΗΘ, όμοιο και ομοίως κείμενο προς το τρίγωνο ΑΒΓ (**Πρόταση VI.18).**

Τότε, σύμφωνα με το **Πόρισμα της Πρότασης VI.19**, αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε ο λόγος της πρώτης προς την τρίτη ισούται με το λόγο του σχήματος επί της πρώτης προς το όμοιό του και ομοίως αναγραφόμενο επί της δεύτερης. Συνεπώς, επειδή,

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΗΘ}} = \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΓΖ}}$$

θα ισχύει:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΖ}} = \frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΚΗΘ}}.$$

Επίσης, από την **Πρόταση VI.1**, έχουμε:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΖ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΖ}}.$$

Επομένως, θα είναι:

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΚΗΘ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΖ}}$$

και από την **Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)** θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{ΚΗΘ}}{\text{ΕΖ}}$$

Αλλά, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο προς παραλληλόγραμμο ΒΕ, άρα και το τρίγωνο ΚΗΘ θα είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΕΖ. Αλλά το ΕΖ είναι ίσο με το Δ. Άρα και το ΚΗΘ θα είναι ίσο με το Δ. Όμως, το ΚΗΘ είναι και

όμοιο με το ΑΒΓ.

Έτσι, κατασκευάστηκε το ευθύγραμμο χωρίο ΚΗΘ, όμοιο προς το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο ΑΒΓ και ίσο προς ένα άλλο δοθέν ευθύγραμμο χωρίο Δ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- **Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.25 ([H1], σ. 254-255)**

  Αυτό είναι το πολύ σημαντικό πρόβλημα που η επίλυσή του αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Συγκρίνετε το εδάφιο από τον Πλούταρχο (*Συμποσιακά VII.* 2, 4), που παρατίθεται στο σχόλιο στο Ι.44 παραπάνω, Τόμος Ι, σελ. 343-4.

  Καλούμαστε να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο σχήμα που θα έχει τη *μορφή* (form) ενός και το *μέγεθος* (size) ενός άλλου ευθύγραμμου σχήματος. Η αντίστοιχη πρόταση στα *Δεδομένα*, Πρότ. 55, βεβαιώνει ότι «αν μια περιοχή (χωρίον) δίδεται σε *μορφή* (είδει) και σε *μέγεθος*, οι πλευρές της επίσης θα δίδονται σε μέγεθος».

  Ο Simson διακρίνει σημάδια αλλοίωσης στο κείμενο και αυτής της πρότασης. Κατά πρώτον, η απόδειξη μιλά για το *τρίγωνο* ΑΒΓ, όμως, σύμφωνα με τη διατύπωση, το σχήμα για το οποίο λαμβάνεται ΑΒΓ μπορεί να είναι *οποιοδήποτε* ευθύγραμμο σχήμα, *ευθύγραμμον* (rectilinear figure) θα ήταν πιο σωστό ή *είδος* (figure). Το λάθος, ωστόσο, της χρήσης του *«τρίγωνον»* δεν είναι μεγάλης σημασίας, καθώς αναμφισβήτητα οφείλεται σε λάθος κατά το οποίο το σχήμα σχεδιάστηκε σαν ένα τρίγωνο στο διάγραμμα.

  Η άλλη παρατήρηση είναι πιο σημαντική. Αφού ο Ευκλείδης απέδειξε ότι

  $$(\text{σχ. ΑΒΓ}) : (\text{σχ. ΚΗΘ}) = (\text{ΒΕ}) : (\text{ΕΖ}),$$

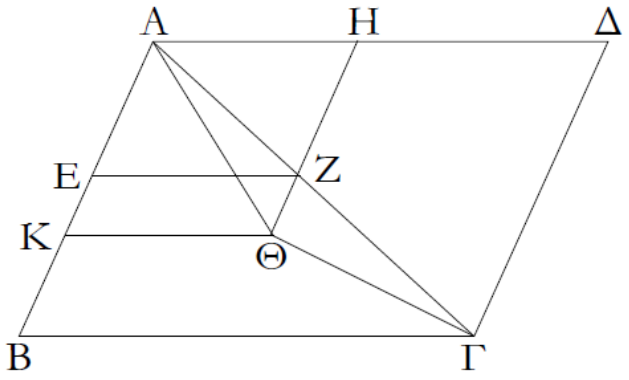
  μπορούσε να συμπεράνει *άμεσα* από την V.14 ότι, εφόσον το ΑΒΓ είναι ίσο με το ΒΕ, θα είναι και το ΚΗΘ ίσο με το ΕΖ. Γιατί η V.14 περιλαμβάνει την απόδειξη του γεγονότος ότι, αν το Α είναι προς το Β όπως το Γ προς το Δ και το Α είναι ίσο με το Γ, τότε το Β είναι ίσο με το Δ, ή ότι από τέσσερα ανάλογα μεγέθη, αν το πρώτο είναι ίσο με το τρίτο, το δεύτερο είναι ίσο με το τέταρτο. Αντί να προχωρήσει με αυτό τον τρόπο, ο Ευκλείδης πρώτα μεταφέρει την πρόταση από την V.16 σε

  $$(\text{σχ. ΑΒΓ}) : (\text{ΒΕ}) = (\text{σχ. ΚΗΘ}) : (\text{ΕΖ}),$$

  και μετά συμπεραίνει, λες και η εξαγωγή συμπεράσματος ήταν ευκολότερη με αυτή τη μορφή, ότι εφόσον το *πρώτο* είναι ίσο με το *δεύτερο*, το *τρίτο* είναι ίσο με το *τέταρτο*. Ωστόσο, δεν υπάρχει πρόταση γι' αυτό στον Ευκλείδη. Το ίδιο μη αναγκαίο βήμα μετάθεσης εντοπίζεται στο ελληνικό κείμενο στις XI. 23 και XII. 2, 5, 11, 12 και 18. Στην αναπαραγωγή των αποδείξεων, μπορούμε απλά να παραλείψουμε τα βήματα και να αναφερθούμε στη V.14.

- Δεν υπάρχει κάποιος επαρκής λόγος για τον οποίο η Πρόταση VI.25 τοποθετήθηκε μεταξύ των Προτάσεων VI.24 και VI.26.

Πρόταση VI.26	Αν από ένα παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί ένα παραλληλόγραμμο, όμοιο και ομοίως κείμενο προς το όλο και έχοντας μία κοινή γωνία με αυτό, τούτο είναι περί την ίδια διάμετρο με το όλο.



Απόδειξη: Θεωρούμε ότι από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ αφαιρείται το παραλληλόγραμμο ΑΖ, όμοιο κα ομοίως κείμενο προς το όλο και έχοντας τη γωνία ΔΑΒ κοινή με αυτό. Ισχυριζόμαστε ότι το ΑΒΓΔ είναι περί την ίδια διάμετρο με το ΑΖ.

Εάν όχι, τότε έστω ΑΘΓ η διάμετρος [του ΑΒΓΔ][5]. Προεκτείνουμε την ΗΖ ώστε να περάσει από το Θ και από το Θ φέρουμε τη ΘΚ παράλληλη προς τις ΑΔ, ΒΓ (**Πρόταση Ι.31**).

Επειδή λοιπόν το ΑΒΓΔ είναι περί την ίδια διάμετρο με το ΚΗ, από την **Πρόταση VI.24**, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{HA}{AK}.$$

Από την ομοιότητα, τώρα, των ΑΒΓΔ και ΕΗ προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{HA}{AE}.$$

Συνεπώς, από **Πρόταση V.11**,

$$\frac{HA}{AK} = \frac{HA}{AE}$$

και τελικά, από **Πρόταση V.9**, επειδή η ΗΘ έχει τον ίδιο λόγο με κάθε μία από τις ΑΚ και ΑΕ, θα είναι ΑΚ=ΑΕ, δηλαδή η μικρότερη είναι ίση με τη μεγαλύτερη. Άτοπο! Άρα δεν ισχύει ότι δεν έχουν κοινή διάμετρο τα ΑΒΓΔ, ΑΖ. Επομένως, τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΖ έχουν κοινή διάμετρο.

ό.έ.δ.

[5] Το αρχαίο κείμενο υπονοεί ότι η ΑΘΓ είναι η κοινή διάμετρος των ΑΒΓΔ και ΑΖ. Εμείς, ακολουθώντας τα σχετικά σχόλια του Heath (βλ. παρακάτω), υποθέτουμε ότι η ΑΘΓ είναι η διάμετρος του ΑΒΓΔ.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.26 ([H1], σ.256)

«Εάν όχι, τότε έστω ΑΘΓ η διάμετρος.» Αυτό που νοείται εδώ είναι «Αν η ΑΖΓ δεν είναι η διάμετρος του παραλληλόγραμμου ΑΓ, έστω ότι η ΑΘΓ είναι η διάμετρός του». Το ελληνικό κείμενο γράφει *«ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ ΑΘΓ»*, αλλά είναι προφανές ότι *«αυτών»* είναι λάθος, καθώς δεν μπορούμε να *υποθέτουμε* ότι μια ευθεία γραμμή είναι η διάμετρος και των δύο παραλληλόγραμμων, το οποίο είναι ακριβώς αυτό που πρέπει να αποδείξουμε. Οι F και V παραλείπουν το *«αυτών»* και ο Heiberg προτιμά αυτή τη διόρθωση με αντικατάσταση με το *«αυτού»*, κατά τον Peyrard. Εγώ εισήγαγα *«του ΑΒΓΔ»* για να καταστήσω το νόημα πιο σαφές.

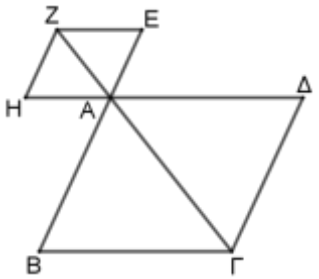
Αν η ευθεία ΑΘΓ δεν περνάει από το Ζ, πρέπει να συναντά είτε την ΗΖ, είτε την προέκτασή της σε κάποιο σημείο Θ. Το κείμενο γράφει «προεκτεινόμενη η ΗΖ περνά από το Θ» (καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ) και αντιστοιχεί με την υπόθεση ότι το Θ βρίσκεται πάνω στην προέκταση της ΗΖ. Οι λέξεις παραλείφθηκαν από το Θέονα, προφανώς επειδή στο σχήμα του MSS τα γράμματα Ε, Ζ και Κ, Θ άλλαξαν μεταξύ τους σειρά. Έτσι, ο Heiberg, κατά τον Αύγουστο, προτίμησε να διατηρήσει τις λέξεις και να διορθώσει το σχήμα, καθώς και το σημείο στο κείμενο όπου ΑΕ, ΑΚ άλλαξαν για να συμφωνούν με το σχήμα του MS.

Είναι φυσικά δυνατό να αποδειχθεί η πρόταση άμεσα, όπως γίνεται από τον Dr Lachlan. Έστω ΑΖ, ΑΓ οι διαγώνιοι και έστω ότι δεν κάνουμε καμία υπόθεση για το πού πέφτουν. Τότε, επειδή ΕΖ είναι παράλληλη προς ΑΗ και άρα προς ΒΓ, οι γωνίες ΑΕΖ, ΑΒΓ είναι ίσες,

Και εφόσον τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια, από τον Ορισμό VI.1, προκύπτει ότι:

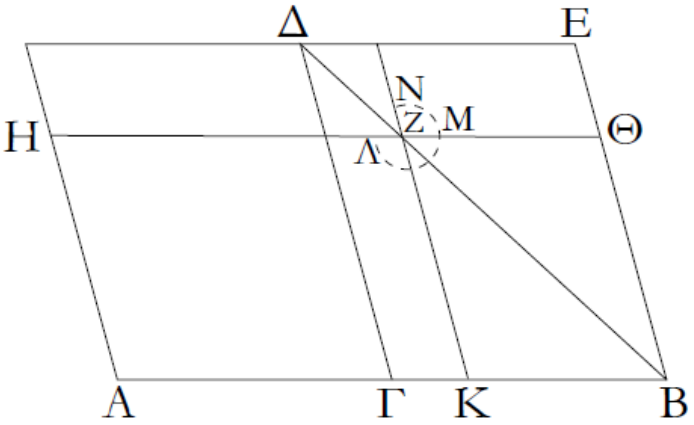
$$\frac{\text{AE}}{\text{EZ}} = \frac{\text{AB}}{\text{BΓ}}$$

Συνεπώς, από την Πρόταση VI.6, τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΓ είναι όμοια και άρα η γωνία ΖΑΕ είναι ίση με τη γωνία ΓΑΒ. Επομένως, η ΑΖ πέφτει στην ΑΓ.



Η πρόταση είναι εξίσου αληθής αν το παραλληλόγραμμο που είναι όμοιο και όμοια κείμενο στο δοθέν παραλληλόγραμμο δεν «παίρνεται μακριά» από αυτό, αλλά τοποθετείται κατά τρόπο που είναι εξ ολοκλήρου έξω από το άλλο, ενώ δύο πλευρές σχηματίζουν μια γωνία κάθετα απέναντι από μία γωνία του άλλου. Σε αυτή την περίπτωση οι διάμετροι δεν είναι «οι ίδιες», με τις ακριβείς λέξεις της διατύπωσης, αλλά βρίσκονται στην ίδια ευθεία γραμμή. Αυτή η επέκταση της πρότασης είναι, όπως θα δούμε, αναγκαία για να πάρουμε, σύμφωνα με τη μέθοδο που υιοθέτησε ο Ευκλείδης στη λύση του προβλήματος στην VI.28, τη δεύτερη λύση αυτού του προβλήματος.

Πρόταση VI.27	Από όλα τα παραλληλόγραμμα που παραβάλλονται στην ίδια ευθεία από τα οποία λείπουν παραλληλόγραμμα όμοια και ομοίως κείμενα προς το παραλληλόγραμμο που αναγράφεται στη μισή ευθεία, το μεγαλύτερο είναι το παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στη μισή ευθεία, το οποίο είναι όμοιο προς το ελλείπον.



Απόδειξη: Θεωρούμε ευθεία ΑΒ. Από την **Πρόταση Ι.10** η ΑΒ διχοτομείται έστω στο Γ. Παραβάλλουμε στην ΑΒ το παραλληλόγραμμο ΑΔ, από το οποίο λείπει το παραλληλόγραμμο ΔΒ, το οποίο έχει αναγραφεί στο μισό της ΑΒ, δηλαδή στο ΓΒ. Ισχυριζόμαστε πως απ' όλα τα παραλληλόγραμμα που παραβάλλονται στην ΑΒ και από τα οποία λείπουν παραλληλόγραμμα όμοια και ομοίως κείμενα προς το ΔΒ, το μεγαλύτερο είναι το ΑΔ. Διότι, ας παραβάλλουμε στην ευθεία ΑΒ το παραλληλόγραμμο ΑΖ, από το οποίο λείπει παραλληλόγραμμο ΖΒ, που είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς το ΔΒ. Ισχυριζόμαστε πως το ΑΔ είναι μεγαλύτερο από το ΑΖ.

Επειδή το παραλληλόγραμμο ΔΒ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΖΒ, θα είναι περί την ίδια διάμετρο (**Πρόταση VI.26**). Χαράσσουμε τη διάμετρο ΔΒ και ολοκληρώνουμε το σχήμα[6].

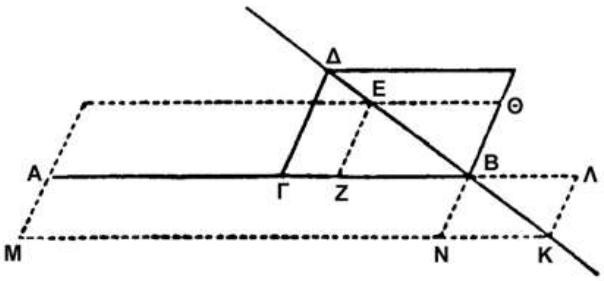
Επειδή, λοιπόν, το ΓΖ είναι ίσο με το ΖΕ (**Πρόταση Ι.43**) και το ΖΒ είναι κοινό, όλο το ΓΘ είναι ίσο με όλο το ΚΕ. Αλλά το ΓΘ είναι ίσο με το ΓΗ, αφού η ΑΓ είναι ίση με τη ΓΒ (**Πρόταση Ι.36 ή VI.1**). Οπότε, και το ΗΓ είναι ίσο με το ΕΚ. Αν προστεθεί σε αυτά το κοινό ΓΖ, τότε ολόκληρο το παραλληλόγραμμο ΑΖ είναι ίσο με το γνώμονα ΛΜΝ. Ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΒ, δηλαδή το ΑΔ, είναι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου ΑΖ.

ό.έ.δ.

[6] Προεκτείνουμε, δηλαδή, την ΗΖ μέχρι να συνατήσει την ΕΒ στο Θ και την ΚΖ μέχρι να συνατήσει τη ΔΕ.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.27 ([H1], σ. 258-260)

Έχουμε ήδη δει (σχόλιο στην Ι.44) τη σημασία, στην Ελληνική γεωμετρία, της θεωρίας της «παραβολής χωρίων καθ' υπερβολή και κατ' έλλειψη» ("the application of areas, their exceeding and their falling-sort"). Στην Ι.44 το θέμα ήταν «η παραβολή σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή (ακριβώς, χωρίς «υπερβολή» (excess) ή «έλλειψη» (defect)) ενός παραλληλόγραμμου ίσου με ένα ευθύγραμμο χωρίο, με μια δοθείσα γωνία». Εδώ, στις VI.27-29, το θέμα είναι η παραβολή παραλληλογράμμων σε μια ευθεία γραμμή, αλλά «κατ' έλλειψη (ή καθ' υπερβολή) *παραλληλόγραμμων όμοιων και ομοίως κειμένων προς ένα δοθέν παραλληλόγραμμο*». Εκτός από το μέγεθος (size), είναι εύκολη η κατασκευή οποιουδήποτε αριθμού παραλληλογράμμων «κατ' έλλειψη» ή «καθ' υπερβολή» με τον τρόπο που περιγράφηκε. Δοθείσας της ευθείας γραμμής ΑΒ στην οποία πρέπει να παραβληθεί το παραλληλόγραμμο, κατασκευάζουμε με βάση ΓΒ, όπου Γ στην ΑΒ, ή στην προέκταση της προς το Α, τυχόν (any) παραλληλόγραμμο «ομοίως κείμενο» και είτε ίσο είτε όμοιο προς το δοθέν παραλληλόγραμμο (ο Ευκλείδης παίρνει το όμοιο και ομοίως κείμενο παραλληλόγραμμο στη μισή γραμμή), φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ, παίρνουμε σε αυτή (ή στην προέκτασή της αν είναι απαραίτητο) τυχαία σημεία όπως τα Ε, Κ, φέρνουμε ΕΖ ή ΚΛ παράλληλη στη ΓΔ για να συναντήσει την ΑΒ ή την προέκτασή της και συμπληρώνουμε τα παραλληλόγραμμα ΑΘ, ΜΛ.



Αν το σημείο Ε το πάρουμε στη ΒΔ ή στην προέκτασή της προς το Δ, πρέπει να το πάρουμε έτσι ώστε η ΕΖ να συναντά την ΑΒ μεταξύ του Α και Β. Αλλιώς το παραλληλόγραμμο ΑΕ δε θα παραβληθεί στο ΑΒ, όπως ζητείται.

Τα παραλληλόγραμμα ΒΔ, ΒΕ, όντας περί την αυτήν διάμετρο, είναι όμοια [VI.24] και το ΒΕ είναι η έλλειψη (defect) του παραλληλόγραμμου ΑΕ σχετικά προς την ΑΒ. Το ΑΕ είναι τότε ένα παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στην ΑΒ, αλλά κατ' έλλειψη ενός παραλληλογράμμου όμοιου και ομοίως κειμένου προς το ΒΔ.

Αν το Κ βρίσκεται στην προέκταση της ΔΒ, το παραλληλόγραμμο ΒΚ είναι όμοιο προς το ΒΔ, αλλά είναι η υπερβολή (excess) του παραλληλόγραμμου ΑΚ σχετικά προς τη βάση ΑΒ. Το ΑΚ είναι ένα παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στην ΑΒ, αλλά καθ' υπερβολή ενός παραλληλόγραμμο όμοιου και ομοίως κειμένου προς το ΒΔ.

Έτσι, φαίνεται ότι το ΒΔ που δημιουργείται και με τους δύο τρόπους είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (locus of points), όπως το Ε ή το Κ, που καθορίζει, με την κατεύθυνση της ΓΔ, τη θέση του Α και την κατεύθυνση ΑΒ, παραλληλόγραμμα που παραβάλλονται στην ΑΒ κατ' έλλειψη ή καθ' υπερβολή παραλληλογράμμων όμοιων και ομοίως κείμενων προς το δοθέν παραλληλόγραμμο.

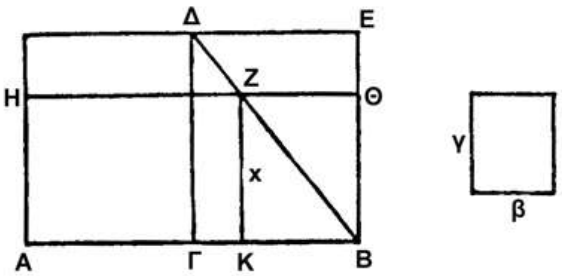
Η σημασία των προτάσεων VI.27-29 από ιστορικής άποψης δεν μπορεί να υπερεκτιμηθεί. Δίνουν το γεωμετρικό ισοδύναμο της αλγεβρικής λύσης της γενικής μορφής δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όταν αυτή η εξίσωση έχει πραγματική και θετική ρίζα. Επίσης, μας επιτρέπουν να βρούμε μια πραγματική αρνητική ρίζα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, αφού μια τέτοια εξίσωση

μπορεί, με αλλαγή του προσήμου του x, να μετατραπεί σε άλλη με μία πραγματική θετική ρίζα, οπότε η γεωμετρική μέθοδος εφαρμόζεται και πάλι. Θα μας επιτρέψουν, επίσης, όπως θα δούμε, να αναπαραστήσουμε και τις δύο ρίζες, όταν και οι δύο είναι πραγματικές και θετικές, και επομένως αναπαραστήσουμε και τις δύο ρίζες όταν και οι δύο είναι πραγματικές, αλλά είτε θετικές είτε αρνητικές.

Η μέθοδος αυτών των προτάσεων χρησιμοποιούταν σταθερά από τους Έλληνες γεωμέτρες στη λύση προβλημάτων και αποτελεί τη βάση του Βιβλίου Χ των Στοιχείων και της πραγματείας του Απολλώνιου για τις κωνικές τομές. Η παρατήρηση του Simson πάνω στο θέμα είναι πλήρως δικαιολογημένη. Λέει συγκεκριμένα για τις VI.28, 29: «Τα δύο αυτά προβλήματα, στο πρώτο εκ των οποίων η Πρόταση VI.27 είναι αναγκαία, είναι τα πιο γενικά και χρήσιμα σε όλα τα Στοιχεία, και είναι αυτά που χρησιμοποιούν πιο συχνά οι αρχαίοι γεωμέτρες στην επίλυση άλλων προβλημάτων. Συνεπώς ανεπίγνωστα παραλείπονται από τους Tacquet και Dechales στις εκδόσεις τους για τα *Στοιχεία,* οι οποίοι διατείνονται ότι σπάνια χρησιμοποιούνται».

Είναι περίεργο ότι, με αυτή την παρατήρηση πριν από αυτόν, ακόμα και ο Todhunter είχε γράψει τα ακόλουθα: «Έχουμε παραλείψει από το 6ο Βιβλίο τις Προτάσεις 27, 28, 29 και την πρώτη λύση που δίνει ο Ευκλείδης για την Πρόταση 30, καθώς μοιάζουν τώρα να μη ζητούνται ποτέ, και έχουν καταδικαστεί ως άχρηστες από διάφορους σύγχρονους σχολιαστές. Βλέπε Austin, Walker και Lardner».

Η Πρόταση VI.27 περιέχει το *«διορισμό»,* τη συνθήκη για μια πραγματική λύση, του προβλήματος που περιέχεται στην πρόταση που ακολουθεί. Το μεγαλύτερο όλων των παραλληλόγραμμων που έχουν τη δοθείσα ιδιότητα το οποίο μπορεί να παραβληθεί σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή είναι αυτό που αναγράφεται στο ήμισυ της γραμμής *(«το από της ημισείας αναγραφόμενον»*). Αυτό αντιστοιχεί στην συνθήκη ότι μία εξίσωση της μορφής $\alpha x - px^2 = A$ μπορεί να έχει μία πραγματική ρίζα. Η ορθότητα του αποτελέσματος μπορεί να γίνει φανερή με το να πάρουμε την περίπτωση στην οποία τα παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνια, το οποίο μας επιτρέπει να παραλείψουμε από τον υπολογισμό το ημίτονο της γωνίας των παραλληλόγραμμων, χωρία καμία πραγματική απώλεια της γενικότητας. Υποθέτουμε ότι οι πλευρές του ορθογώνιου προς τις οποίες η έλλειψη (defect) πρέπει να είναι όμοια έχουν λόγο β/γ, όπου το β αντιστοιχεί προς την πλευρά της έλλειψης (την ΚΒ) που βρίσκεται κατά μήκος της ΑΒ. Υποθέτουμε ότι ΑΚΖΗ είναι κάποιο παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στην ΑΒ και έχει τη δοθείσα ιδιότητα, ότι $AB = \alpha$ και ότι $ZK = x$.



Τότε $KB = \frac{\beta}{\gamma}x$ και συνεπώς $AK = \alpha - \frac{\beta}{\gamma}x$.

Έτσι, $\left(\alpha - \frac{\beta}{\gamma}x\right)x = M$, όπου Μ το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΚΖΗ.

όπου Μ είναι η περιοχή του ορθογωνίου ΑΚΖΗ [Πρόταση VI.25].

Οπότε, δεδομένης της εξίσωσης

$$\alpha x - \frac{\beta}{\gamma} x^2 = M$$

όπου το M είναι απροσδιόριστο, η VI.27 μας λέει ότι αν το x πρέπει να έχει πραγματική τιμή, το M δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το ορθογώνιο ΓΕ.

Τώρα $ΓΒ = \frac{α}{2}$, άρα $ΓΔ = \frac{γ}{β} \cdot \frac{α}{2}$.

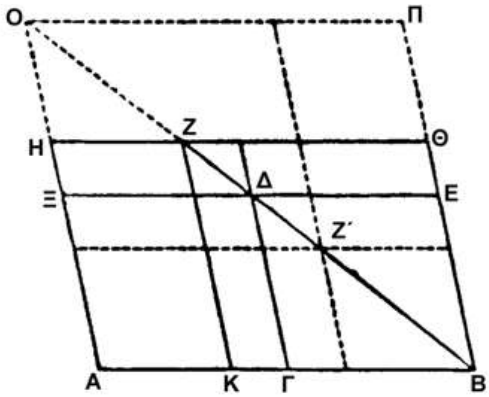
Κατά συνέπεια

$$M \leq \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4},$$

το οποίο είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα που αποκτάμε με την αλγεβρική μέθοδο.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου η έλλειψη (defect) του παραλληλόγραμμου πρέπει να είναι ένα τετράγωνο, η συνθήκη δηλώνει το γεγονότος ότι, αν μια ευθεία γραμμή διαιρεθεί σε δύο μέρη, το ορθογώνιο που περιέχεται από τα μέρη δεν μπορεί να υπερβαίνει το τετράγωνο της μισής γραμμής [βλέπε Πρόταση II.5].

Τώρα υποθέτουμε ότι, αντί να πάρουμε Ζ στη ΒΔ όπως στο σχήμα της πρότασης, παίρνουμε Ζ στην προέκταση της ΒΔ προς την πλευρά του Δ, αλλά έτσι ώστε η ΔΖ να είναι μικρότερη από τη ΒΔ. Συμπληρώστε το σχήμα, όπως φαίνεται, με τον τρόπο κατασκευής της πρότασης. Τότε το παραλληλόγραμμο ΖΚΒΘ είναι όμοιο με το δοθέν παραλληλόγραμμο προς το οποίο η έλλειψη πρέπει να είναι όμοια. Έτσι, το παραλληλόγραμμο ΗΑΚΖ είναι επίσης ένα παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στην ΑΒ και ικανοποιεί τη δοθείσα συνθήκη.



Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ΗΑΚΖ είναι μικρότερο του ΓΕ ή ΑΔ. Έστω ότι η προέκταση της ΕΔ και συναντά την ΑΗ στο Ξ. Εφόσον ΒΖ διαγώνιος του παραλληλόγραμμου ΚΘ, τα παραπληρώματα (complements) ΚΔ, ΔΘ είναι ίσα. Αλλά, ΔΘ=ΔΗ και ΔΗ>ΞΖ. Οπότε, ΚΔ>ΞΖ. Προσθέτουμε το ΞΚ στο καθένα από αυτά και παίρνουμε ΑΔ ή ΓΕ>ΑΖ.

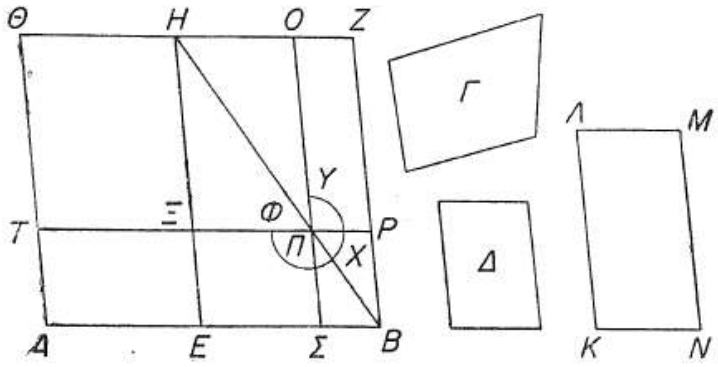
Αυτή η άλλη «περίπτωση» της πρότασης βρίσκεται σε όλα τα χειρόγραφα, αλλά ο Heiberg την αναφέρει στο Παράρτημα (Appendix) θεωρώντας ξεκάθαρα ότι είναι παρεμβολή. Οι λόγοι γι' αυτό είναι ότι δεν είναι ο τρόπος του Ευκλείδη να δίνει ξεχωριστή απόδειξη για κάθε «περίπτωση». Είναι μάλλον συνήθειά του να δίνει μια μόνο περίπτωση και να αφήνει το μαθητή να βρίσκει τις υπόλοιπες (βλ. I.7). Οι εσωτερικές μαρτυρίες είναι μάλλον κατά της αυθεντικότητας της ξεχωριστής απόδειξης. Τίθεται μετά το συμπέρασμα (conclusion) της πρότασης αντί πριν και, αν ο Ευκλείδης είχε την πρόθεση να συζητήσει δύο περιπτώσεις, θα τις είχε διαχωρίσει από την αρχή της πρότασης, όπως άλλωστε ήταν η σταθερή τακτική του. Επίσης, η δεύτερη «περίπτωση» είναι η λιγότερη αξιόλογη διότι μπορεί εύκολα να αναχθεί στην πρώτη. Πράγματι, υποθέτουμε ότι παίρνουμε Ζ΄ στην ΒΔ έτσι ώστε ΖΔ = Ζ΄Δ. Προεκτείνουμε τη ΒΖ που συναντά την προέκταση της ΑΗ στο Ο. Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΟΠ και φέρνουμε από το Ζ΄ ευθείες γραμμές παράλληλες που συναντούν τις απέναντι πλευρές.

Τότε το παραπλήρωμα Ζ΄Π είναι ίσο με το παραπλήρωμα ΑΖ΄.

Και είναι προφανές ότι τα ΑΖ, Ζ΄Π είναι ίσα και όμοια. Έτσι, η λύση του προβλήματος που αντιπροσωπεύεται από το ΑΖ ή το Ζ΄Π δίνει ένα παραλληλόγραμμο του ιδίου μεγέθους με το ΑΖ΄, το οποίο ήταν το αποτέλεσμα της πρώτης «περίπτωσης».

Είναι άξιο αναφοράς ότι η πραγματική διαφορά μεταξύ του παραλληλόγραμμου ΑΖ και του παραλληλογράμμου με το μέγιστο εμβαδό ΑΔ, εμφανίζεται στο σχήμα. Η διαφορά είναι το μικρό παραλληλόγραμμο ΔΖ.

Πρόταση VI.28	Σε δοθείσα ευθεία να παραβληθεί παραλληλόγραμμο ίσο προς δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και ελλείπον κατά ένα παραλληλόγραμμο σχήμα όμοιο προς δοθέν. Πρέπει δε το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα (προς το οποίο πρέπει να παραβληθεί ίσο) να μην είναι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου που αναγράφεται πάνω στη μισή ευθεία γραμμή και το οποίο είναι όμοιο προς το έλλειμμα.



Απόδειξη: Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία, Γ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα προς το οποίο πρέπει να είναι ίσο το παραλληλόγραμμο που θα παραβληθεί στην ΑΒ και το οποίο να μην είναι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου που αναγράφεται πάνω στη μισή ευθεία γραμμή και είναι όμοιο προς το έλλειμμα και Δ το παραλληλόγραμμο προς το οποίο το έλλειμμα πρέπει να είναι όμοιο. Πρέπει, δηλαδή, να παραβληθεί στην ευθεία ΑΒ παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρεθεί παραλληλόγραμμο όμοιο προς το Δ, εκείνο που απομένει να είναι ίσο προς το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ.

Διχοτομούμε την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε **(Πρόταση Ι.10)** και κατασκευάζουμε επί της ΕΒ παραλληλόγραμμο ΕΒΖΗ, όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ (**Πρόταση VI.18**). Συμπληρώνουμε με το παραλληλόγραμμο ΑΗ.

Αν το ΑΗ=Γ, κατασκευάστηκε το ζητούμενο. Πράγματι, στη δοθείσα ευθεία γραμμή ΑΒ έχει παραβληθεί το παραλληλόγραμμο ΑΗ, ίσο προς το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ και ελλείπον κατά ένα παραλληλόγραμμο σχήμα ΗΒ, όμοιο προς το Δ. Αν όχι, τότε το ΘΕ >Γ. Αλλά ΘΕ=ΗΒ (**Πρόταση VI.1**). Άρα και ΗΒ>Γ. Τώρα, από την **Πρόταση VI.25**, μπορούμε να κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ, το οποίο να είναι όμοιο και ομοίως κείμενο του Δ, και ακόμα ΚΛΜΝ=ΗΒ-Γ. Αλλά το Δ είναι όμοιο προς το ΗΒ. Άρα, από **Πρόταση VI.21**, το ΚΜ είναι, επίσης, όμοιο προς το ΗΒ και έστω ότι η ΚΛ είναι ομόλογη της ΗΕ και η ΛΜ της ΗΖ. Επειδή

ΗΒ=Γ+ΚΜ

θα είναι ΗΒ>ΚΜ, οπότε ΗΕ>ΚΛ και ΗΖ>ΛΜ.[7]

Επί της ΕΗ παίρνουμε ΗΞ=ΚΛ και επί της ΗΖ παίρνουμε ΗΟ=ΛΜ (**Πρόταση Ι.3**), οπότε δημιουργείται το παραλληλόγραμμο ΞΗΟΠ. Όμως, το ΗΠ είναι ίσο και όμοιο με το ΚΜ (αλλά το ΚΜ είναι όμοιο με το ΗΒ), οπότε και το ΗΠ είναι όμοιο με το ΗΒ (**Πρόταση VI.21**). Τότε, από την **Πρόταση VI.26**, το ΗΠ είναι περί την ίδια διάμετρο με το ΗΒ. Έστω ΗΠΒ η διάμετρος αυτή. Συμπληρώνουμε το σχήμα.[8]

Επειδή, λοιπόν, ΒΗ=Γ+ΚΜ και ΗΠ=ΚΜ, ο γνώμονας ΥΧΦ θα είναι ίσος με το Γ. Αλλά, ΟΡ=ΞΣ (**Πρόταση Ι.43**), οπότε αν προσθέσουμε σε καθένα από αυτά το ΠΒ, τότε ΟΒ=ΞΒ. Αλλά, από **Πρόταση Ι.36**, ΞΒ=ΤΕ, αφού ΑΕ=ΕΒ. Άρα, ΟΒ=ΤΕ. Προσθέτοντας το ΞΣ και στα δύο, παίρνουμε ότι όλο το παραλληλόγραμμο ΤΣ είναι ίσο με το γνώμονα ΦΧΨ. Αλλά έχει δειχθεί ότι ο γνώμονας ΦΧΨ είναι ίσος με το Γ. Οπότε, ΤΣ=Γ.

Άρα, στη δοθείσα ευθεία ΑΒ παραβλήθηκε παραλληλόγραμμο ΣΤ ίσο προς το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ και ελλείπον κατά ένα παραλληλόγραμμο σχήμα ΠΒ όμοιο προς Δ [επειδή το ΠΒ είναι όμοιο προς το ΗΠ] (**Πρόταση VI.24**).

ό.έ.π.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.28 ([H1], σ. 262-265)

Το δεύτερο μέρος της διατύπωσης αυτής της πρότασης, η οποία δηλώνει το «διορισμό» εμφανίζεται να έχει ενισχυθεί σημαντικά, χωρίς ωστόσο να έχει βελτιωθεί από το Θέωνα. Η εκδοχή του θα μπορούσε να αποδοθεί ως εξής: «Αλλά το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, αυτό δηλαδή προς το οποίο το παραβληθέν παραλληλόγραμμο πρέπει να είναι ίσο (ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν), πρέπει να μην είναι μεγαλύτερο από αυτό που παραβάλλεται προς το μισό (*παραβαλλομένου* αντί *ἀναγραφομένου*), τα ελλείμματα όντας όμοια, (δηλαδή) από (του παραβαλλόμενου παραλληλόγραμμου) προς το μισό και από αυτό (του ζητούμενου παραλληλόγραμμου), το οποίο πρέπει να έχει όμοιο έλλειμμα» (*ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν*). Η πρώτη διεύρυνση «αυτό προς το οποίο το παραβληθέν παραλληλόγραμμο πρέπει να είναι ίσο» είναι αρκετά περιττή, εφόσον «το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα» δεν θα μπορούσε να σημαίνει κάτι άλλο. Η παραπάνω απόπειρα μετάφρασης θα δείξει πόσο δύσκολο είναι να βγει νόημα από τις λέξεις στο τέλος: Μιλούν για δύο ελλείμματα προφανώς και ενώ το ένα μπορεί να είναι κάλλιστα το «έλλειμμα του μισού», το άλλο δύσκολα μπορεί να είναι το δοθέν παραλληλόγραμμο «προς το οποίο το έλλειμμα (του ζητούμενου παραλληλόγραμμου) πρέπει να είναι όμοιο». Σαφώς η ανάγνωση που δίδεται παραπάνω (από τον Πάππο) είναι μακράν καλύτερη.

---

[7] Ο Ευκλείδης εδώ υποθέτει ότι αν δύο όμοια παραλληλόγραμμα έχουν άνισα εμβαδά, τότε το μεγαλύτερο έχει τις ομόλογες πλευρές μεγαλύτερες από αυτές του μικρότερου.

[8] Δηλαδή, από το Π φέρουμε τις ΡΤ//ΑΒ, ΟΣ//ΒΖ.

Σε αυτή την πρόταση και την επόμενη, εμφανίζεται η σιωπηρή υπόθεση (την οποίο έχει ήδη υπαινιχθεί στο σχόλιο στην VI.22) ότι *αν, από δύο όμοια παραλληλόγραμμα το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο, οποιαδήποτε πλευρά του μεγαλύτερου είναι μεγαλύτερη από την ομόλογη πλευρά του μικρότερου.*

Όπως ήδη παρατηρήθηκε, η VI.28 είναι το γεωμετρικό ισοδύναμο της λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x - \frac{\beta}{\gamma} x^2 = \Gamma$$

που υπόκειται στον απαραίτητο περιορισμό της παραδοχής μιας πραγματικής λύσης, δηλαδή ότι

$$\Gamma < \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4}.$$

Η αντίστοιχη πρόταση στα Δεδομένα είναι η Πρόταση 58. *Αν ένα δοθέν (χωρίο) παραβληθεί (ήτοι με τη μορφή παραλληλόγραμμου) σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή και είναι ελλείπον κατά ένα σχήμα (δηλαδή ένα παραλληλόγραμμο) δοθέν κατά το είδος, τα πλάτη του ελλείμματος είναι δοθέντα.*

Για να παρουσιάσουμε την ακριβή αντιστοιχία μεταξύ της γεωμετρικής μεθόδου του Ευκλείδη και της συνηθισμένης αλγεβρικής μεθόδου για την επίλυση της εξίσωσης, όπως πριν (με σκοπό να αποφύγουμε να εισάγουμε μια σταθερά που εξαρτάται από το ημίτονο της γωνίας των παραλληλόγραμμων), θα υποθέσουμε ότι τα παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνια. Για να λύσουμε την εξίσωση αλγεβρικά, αλλάζουμε τα πρόσημα και γράφουμε:

$$\frac{\beta}{\gamma} x^2 - \alpha x = -\Gamma$$

Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε το τετράγωνο προσθέτοντας $\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4}$

Έτσι

$$\frac{\beta}{\gamma} x^2 - \alpha x + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma$$

και με εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας, έχουμε

$$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot x - \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma}$$

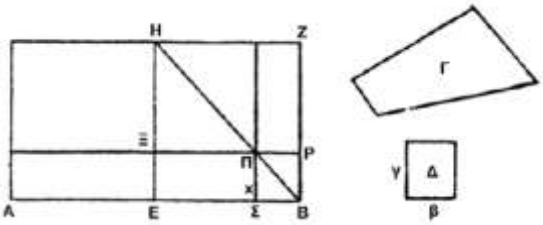
και τελικά

$$x = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma\right)}.$$

Τώρα ας παρατηρήσουμε τη μέθοδο του Ευκλείδη:

Πρώτα σχεδιάζει ΗΕΒΖ στην ΕΒ (το μισό του ΑΒ) όμοιο με το δοθέν παραλληλόγραμμο Δ.

Κατόπιν τοποθετεί σε μια γωνία ΖΗΕ του ΗΕΒΖ ένα όμοιο και ομοίως κείμενο παραλληλόγραμμο ΗΠ, ίσο με τη διαφορά μεταξύ του παραλληλόγραμμο ΗΒ και του χωρίου Γ.



Με το δικό μας συμβολισμό,

$$\frac{\text{ΗΞ}}{\text{ΞΠ}} = \frac{\gamma}{\beta},$$

οπότε

$$\text{ΞΠ} = \text{ΗΞ} \cdot \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ομοίως, $\frac{\alpha}{2} = \text{ΕΒ} = \text{ΗΕ} \cdot \frac{\beta}{\gamma}$, και έτσι $\text{ΗΕ} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{2}$.

Επομένως το παραλληλόγραμμο

$$\text{ΗΠ} = \text{ΗΞ}^2 \cdot \frac{\beta}{\gamma}$$

Και το παραλληλόγραμμο $\text{ΗΒ} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4}$

Έτσι, παίρνοντας το παραλληλόγραμμο ΗΠ ίσο προς (ΗΒ-Γ), ο Ευκλείδης στην πραγματικότητα βρίσκει το ΗΞ από την εξίσωση

$$\text{ΗΞ}^2 \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma$$

Η τιμή που βρίσκει είναι:

$$\text{ΗΞ} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma\right)}$$

και βρίσκει ΠΣ (ή x) αφαιρώντας το ΗΞ από το ΗΕ, οπότε:

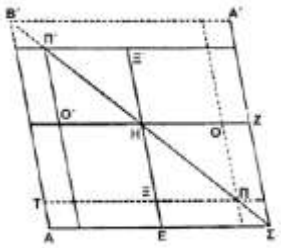
$$x = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma\right)}.$$

Θα παρατηρηθεί ότι ο Ευκλείδης δίνει μόνο μια λύση, αυτή που αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο πριν το ριζικό. Αλλά ο λόγος πρέπει να είναι ο ίδιος με αυτόν για τον οποίο δίνει μόνο την μια «περίπτωση» στην VI.27. Δεν είναι δυνατόν να μην μπόρεσε να δει πώς να προσθέσει το ΗΞ με το ΗΕ ώστε να βρει άλλη λύση. Όπως φαίνεται κάτω από την τελευταία πρόταση, η άλλη λύση μπορεί να επιτευχθεί στο (1) με την τοποθέτηση του παραλληλόγραμμου ΗΞΠΟ στη γωνία που είναι κάθετα απέναντι στην ΖΗΕ, έτσι ώστε ΗΠ΄ βρίσκεται στην προέκταση της ΒΗ.

Το παραλληλόγραμμο ΑΠ΄ δίνει τότε τη δεύτερη λύση. Η πλευρά αυτού του παραλληλόγραμμου που βρίσκεται κατά μήκος της ΑΒ είναι ίση προς την ΣΒ. Η άλλη πλευρά είναι αυτή που καλέσαμε x και σε αυτή την περίπτωση:

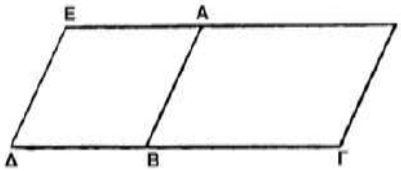
$$x = \text{ΕΗ} + \text{ΗΞ} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha^2}{4} - \Gamma\right)}.$$

Ένα παραλληλόγραμμο όμοιο και ίσο προς το ΑΠ΄ μπορεί, επίσης, να δημιουργηθεί προεκτείνοντας τη ΒΗ έως ότου συναντήσει την προέκταση της ΑΤ και συμπληρώνοντας το παραλληλόγραμμο Β΄ΑΒΑ΄, οπότε φαίνεται ότι το παραπλήρωμα ΠΑ΄ είναι ίσο με το παραπλήρωμα ΑΠ, εκτός από το ότι είναι ίσο, όμοιο και ομοίως κείμενο προς την ΑΠ΄.



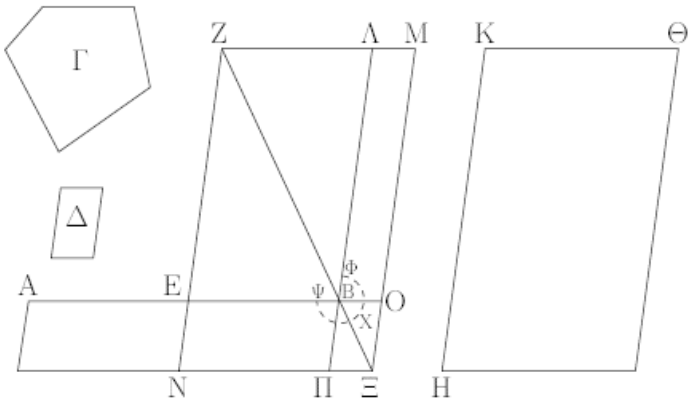
Μια συγκεκριμένη περίπτωση αυτής της πρότασης, όπως υποδεικνύεται στην Πρόταση 85 των Δεδομένων, είναι αυτή στην οποία οι πλευρές του ελλείμματος είναι ίσες, έτσι ώστε το έλλειμμα να είναι ένας ρόμβος με μια δοθείσα γωνία. Η Πρόταση 85 αποδεικνύει ότι *αν δύο ευθείες γραμμές περιέχουν ένα δοθέν χωρίο σε μια δοθείσα γωνία και το άθροισμα των ευθειών γραμμών είναι δεδομένο, κάθε μια θα είναι επίσης δοθείσα.*

Αν ΑΒ, ΒΓ είναι οι δοθείσες ευθείες γραμμές «που περιέχουν ένα δοθέν χωρίο ΑΓ σε μια δοθείσα γωνία ΑΒΓ», η πλευρά ΓΒ προεκτείνεται στο Δ έτσι ώστε το ΒΔ να είναι ίσο με το ΑΒ και τα παραλληλόγραμμα συμπληρώνονται. Τότε, εξ υποθέσεως, η ΓΔ είναι δοθέντος μήκους, και το ΑΓ είναι ένα παραλληλόγραμμο που παραβάλλεται στην ΓΔ και υπολείπεται κατά ένα ρόμβο (ΑΔ) με μια δοθείσα γωνία ΕΔΒ. Η περίπτωση είναι έτσι μια συγκεκριμένη περίπτωση της Πρότασης 58 των Δεδομένων που αναφέρεται παραπάνω (σελ. 263) ως αντίστοιχη της VI.28.



Μια συγκεκριμένη περίπτωση της τελευταίας, στην οποία, ειδικότερα, το έλλειμμα είναι ένα τετράγωνο, αντιστοιχεί στην εξίσωση $\alpha x - x^2 = \beta^2$ είναι σημαντική. Αυτό είναι το πρόβλημα *της παραβολής σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή ενός ορθογωνίου ίσο προς ένα δοθέν χωρίο κατ' έλλειψη ενός τετραγώνου.* Και μπορεί να λυθεί χωρίς τη βοήθεια του Βιβλίου VI, όπως φαίνεται παραπάνω στη II.5 (τόμος 1, σελ. 383-4).

Πρόταση VI.29	Σε δοθείσα ευθεία να παραβληθεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο να υπερβάλλει κατά παραλληλόγραμμο σχήμα όμοιο προς δοθέν.



Απόδειξη: Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία, Γ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα προς το οποίο πρέπει να είναι ίσο το παραλληλόγραμμο που θα παραβληθεί πάνω στην ΑΒ και Δ αυτό προς το οποίο πρέπει να είναι όμοιο προς το υπερβάλλον (παραλληλόγραμμο). Πρέπει, δηλαδή, να παραβληθεί πάνω στη δοθείσα ευθεία ΑΒ, παραλληλόγραμμο ίσο με το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ, υπερβάλλον κατά ένα παραλληλόγραμμο σχήμα όμοιο με το Δ.

Διχοτομούμε την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε **(Πρόταση Ι.10)** και κατασκευάζουμε επί της ΕΒ παραλληλόγραμμο ΒΖ, όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ (**Πρόταση VI.18**). Κατασκευάζουμε, επίσης, το παραλληλόγραμμο ΗΘ, όμοιο και ομοίως κείμενο με το Δ και ίσο με το άθροισμα των ΒΖ και Γ (**Πρόταση VI.25**). Ας είναι ΚΘ η ομόλογη της ΖΛ και ΚΗ η ομόλογη της ΖΕ. Επειδή ΗΘ>ΖΒ, θα είναι ΚΘ>ΖΛ και ΚΗ>ΖΕ.[9] Προεκτείνουμε τις ΖΛ και ΖΕ και ας είναι ΖΛΜ=ΚΘ, ΖΕΝ=ΚΗ (**Πρόταση Ι.3**). Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΜΝ, το οποίο είναι ίσο και όμοιο με το ΗΘ. Αλλά το ΗΘ είναι όμοιο με το ΕΛ, οπότε και το ΜΝ είναι όμοιο με το ΕΛ (**Πρόταση VI.21**). Θα είναι, συνεπώς, το ΕΛ και το ΜΝ περί την ίδια διάμετρο (**Πρόταση VI. 26**). Χαράσσουμε τη διάμετρο ΖΞ και συμπληρώνουμε το σχήμα.

Επειδή ΗΘ=ΕΛ+Γ και ΗΘ=ΜΝ θα είναι και ΜΝ=ΕΛ+Γ. Αφαιρώντας το ΕΛ και από καθένα από αυτά προκύπτει ότι ο γνώμονας ΨΧΦ είναι ίσος με το Γ. Αλλά ΑΕ=ΕΒ, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΝ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΝΒ (**Πρόταση Ι.36**), δηλαδή με το παραλληλόγραμμο

[9] Ο Ευκλείδης και εδώ υποθέτει ότι αν δύο όμοια παραλληλόγραμμα έχουν άνισα εμβαδά, τότε το μεγαλύτερο έχει τις ομόλογες πλευρές μεγαλύτερες από αυτές του μικρότερου.

ΛΟ (**Πρόταση Ι.43**). Προσθέτοντας και στα δύο το ΕΞ, έχουμε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΞ είναι ίσο με το γνώμονα ΦΧΨ. Αλλά ο γνώμονας ΦΧΨ είναι ίσος με το σχήμα Γ. Άρα και το παραλληλόγραμμο ΑΞ είναι ίσο με το σχήμα Γ.

Άρα, στη δοθείσα ευθεία ΑΒ παραβλήθηκε παραλληλόγραμμο ΑΞ ίσο προς το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ και υπερβάλλον κατά ένα παραλληλόγραμμο σχήμα ΠΟ όμοιο προς το Δ, αφού και το ΕΛ είναι όμοιο προς το ΟΠ (**Πρόταση VI.24**).

ό.έ.π.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.29 ([H1], σ. 266-267)

Η αντίστοιχη πρόταση στα *Δεδομένα* είναι (Πρόταση 59): *Αν ένα δοθέν (χωρίο) παραβληθεί (ήτοι υπό τη μορφή ενός παραλληλόγραμμου) προς μια δοθείσα ευθεία γραμμή που υπερέχει από ένα δοθέν σχήμα κατά το είδος* (in species)*, τα πλάτη* (the bredths) *της υπερβολής (excess) είναι δοθέντα.*

Το πρόβλημα της VI.29 αντιστοιχεί φυσικά στη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$ax + \frac{b}{c}x^2 = S.$$

Η αλγεβρική λύση αυτής της εξίσωσης δίνει:

$$x = -\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{4} + S\right)}$$

Η ακριβής αντιστοίχιση της μεθόδου του Ευκλείδη προς την αλγεβρική λύση μπορεί να γίνει κατανοητή, όπως στην περίπτωση της VI.28, υποθέτοντας ότι τα παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνια. Σε αυτή την περίπτωση, η κατασκευή του Ευκλείδη στην ΕΒ του παραλληλόγραμμου ΕΛ όμοιου προς το Δ είναι ισοδύναμη με το να βρούμε ότι:

$$\text{ΖΕ} = \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{2} \text{ και } \text{ΕΛ} = \frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{4}.$$

Ο διορισμός (determination) του όμοιου παραλληλόγραμμου ΜΝ ίσου προς το άθροισμα του ΕΛ και S αντιστοιχεί με την απόδειξη ότι:

$$\text{ΖΝ}^2\cdot\frac{b}{c} = \frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{4} + S,$$

ή

$$\text{ΖΝ} = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{4} + S\right)}$$

απ' όπου το x βρίσκεται ως:

$$x = \text{ΖΝ} - \text{ΖΕ} = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{4} + S\right)} - \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{2}$$

Ο Ευκλείδης παίρνει, σε αυτή την περίπτωση, τη λύση που αντιστοιχεί στο *θετικό* πρόσημο πριν το ριζικό διότι, από αυτή την άποψη, αυτή θα ήταν η *μόνη* λύση.

Δεν είναι αναγκαίος ο *διορισμός*, διότι μια πραγματική γεωμετρική λύση είναι πάντα πιθανή όποιο και αν είναι το μέγεθος του S.

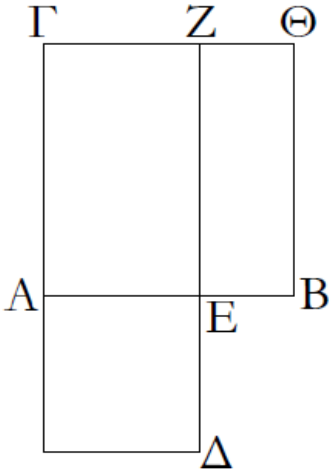
Ξανά στα *Δεδομένα* υπάρχει μια πρόταση που δείχνει τη συγκεκριμένη περίπτωση στην οποία η *υπερβολή* (excess) είναι ένας *ρόμβος* με δοθείσα γωνία. Η Πρόταση 84 αποδεικνύει ότι, *αν δύο ευθείες γραμμές περιέχουν μια δοθείσα περιοχή με μια δοθείσα γωνία, και η μια από τις ευθείες γραμμές είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά μια δοθείσα ευθεία γραμμή, κάθε μια από τις ευθείες γραμμές είναι επίσης δοθείσα*. Η απόδειξη (the proof) περιορίζει την πρόταση σε μια συγκεκριμένη περίπτωση των Δεδομένων, την Πρόταση 59, που αναφέρεται παραπάνω ως αντίστοιχη της VI.29.

Ξανά, υπάρχει μια σημαντική ειδική περίπτωση η οποία μπορεί να λυθεί μέσω του Βιβλίου II μόνο, όπως φαίνεται κάτω από την II.6 παραπάνω (Τόμος I, σελ.386-8), η περίπτωση δηλαδή στην οποία η υπερβολή είναι ένα *τετράγωνο*, και αντιστοιχεί τη λύση της εξίσωσης

$$\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2 = b^2.$$

Αυτό είναι το πρόβλημα *της παραβολής σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή ενός ορθογώνιου ίσου προς ένα δοθέν χωρίο που υπερέχει κατά ένα τετράγωνο.*

Πρόταση VI.30	Να τμηθεί δοθείσα πεπερασμένη ευθεία σε άκρο και μέσο λόγο.



Απόδειξη: Έστω ΑΒ η δοθείσα πεπερασμένη ευθεία, η οποία απαιτείται να τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο.

Πάνω στην ΑΒ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓ (**Πρόταση Ι.46**) και στη συνέχεια πάνω στην ΑΓ παραλληλόγραμμο ΓΔ, ίσο προς το ΒΓ, που υπερβάλλει κατά το σχήμα ΑΔ, το οποίο είναι όμοιο με το τετράγωνο ΒΓ (**Πρόταση VI.29**).

Το ΒΓ είναι τετράγωνο. Συνεπώς και το ΑΔ είναι τετράγωνο. Αφού, λοιπόν, το ΒΓ είναι ίσο με το ΓΔ, αφαιρούμε το κοινό ΓΕ και τότε το υπόλοιπο ΒΖ είναι ίσο με το υπόλοιπο ΑΔ. Είναι όμως και ισογώνιο με αυτό. Άρα, οι πλευρές των ΒΖ και ΑΔ που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες (**Πρόταση VI.14**). Έτσι, θα ισχύει:

$$\frac{ΖΕ}{ΕΔ} = \frac{ΑΕ}{ΕΒ}.$$

Αλλά, ΖΕ=ΑΒ και ΕΔ=ΑΕ. Οπότε,

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ} = \frac{ΑΕ}{ΕΒ}.$$

Επειδή, όμως, ΑΒ>ΑΕ θα είναι και ΑΕ>ΕΒ (**Πρόταση V.14**).

Συνεπώς, η ευθεία ΑΒ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο στο Ε, με μεγαλύτερο τμήμα αυτής το ΑΕ.

ό.έ.δ.

Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.30 ([H1], σ. 268)

Θα παρατηρηθεί ότι η κατασκευή στο κείμενο είναι μια άμεση εφαρμογή της προηγούμενης Πρότασης 29 στην ειδική περίπτωση όπου η *υπερβολή* (excess) του παραλληλόγραμμου που εφαρμόζεται είναι *τετράγωνο*. Αυτό το γεγονός σε συνδυασμό με τη θέση της VI.30 είναι μια επαρκής ένδειξη ότι η κατασκευή είναι του Ευκλείδη.

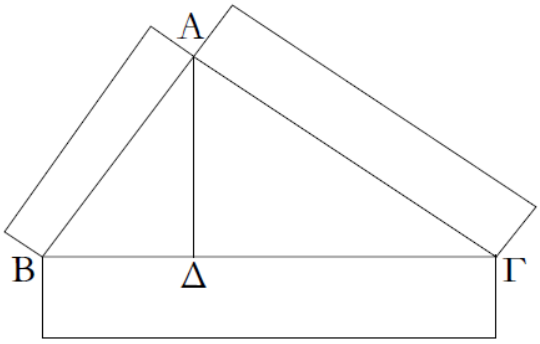
Σε ένα σημείο ο Θέων φαίνεται να έχει ενισχύσει την επιχειρηματολογία. Το κείμενο παραπάνω λέει «Αλλά ΖΕ ισούται με ΑΒ», ενώ το MSS. B, F, V και p έχει «Αλλά ΖΕ ισούται με ΑΓ, δηλαδή με ΑΒ».

Το MSS. δίνει μετά το *«όπερ έδει ποιήσαι»* μια εναλλακτική κατασκευή την οποία ο Heiberg τοποθετεί στο Παράρτημα. Τα βιβλία με τα κείμενα δίνουν την κατασκευή μόνο και αφήνουν έξω τα άλλα. Θα θυμάστε ότι η εναλλακτική απόδειξη δεν κάνει τίποτα παραπάνω από το να αναφέρεται στην ισοδύναμη κατασκευή στην ΙΙ.11.

«Έστω ΑΒ τέμνεται στο Γ έτσι ώστε το ορθογώνιο ΑΒ, ΒΓ ισούται με το τετράγωνο της ΓΑ [ΙΙ.11]. Επειδή, λοιπόν, το ορθογώνιο ΑΒ, ΒΓ ισούται με το τετράγωνο της ΓΑ, άρα, όπως είναι η ΒΑ προς ΑΓ έτσι είναι η ΑΓ προς τη ΓΒ [VI.17]. Συνεπώς, η ΑΒ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο στο Γ».

Είναι απίθανο αυτή η εναλλακτική κατασκευή να προστέθηκε στην άλλη από τον ίδιο τον Ευκλείδη. Είναι, ωστόσο, ακριβώς το είδος της παρεμβολής που θα αναμενόταν από ένα σχολιαστή. Αν ο Ευκλείδης είχε προτιμήσει την εναλλακτική κατασκευή, θα ήταν πιο πιθανό να έχει δώσει μόνο αυτή.

Πρόταση VI.31	Στα ορθογώνια τρίγωνα το σχήμα πάνω στην υποτείνουσα είναι ίσο με τα όμοια και ομοίως αναγραφόμενα σχήματα πάνω στις κάθετες πλευρές τους.



Απόδειξη: Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ορθή τη γωνία ΒΑΓ. Ισχυριζόμαστε πως το σχήμα πάνω στην πλευρά ΒΓ είναι ίσο με τα όμοια και ομοίως αναγραφόμενα σχήματα πάνω στις πλευρές ΒΑ και ΑΓ.

Φέρουμε την κάθετη ΑΔ (**Πρόταση Ι.12**).

Τότε, αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ευθεία ΑΔ είναι κάθετη από την κορυφή Α της ορθής γωνίας στη βάση ΒΓ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια με το τρίγωνο ΑΒΓ καθώς και μεταξύ τους (**Πρόταση VI.8**). Επειδή το ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΔ, από τον **Ορισμό VI.1**, θα ισχύει:

$$\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΔ}}\ .$$

Και αφού τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε ο λόγος της πρώτης προς την τρίτη ισούται με το λόγο του σχήματος επί της πρώτης προς το όμοιό του και ομοίως αναγραφόμενο επί της δεύτερης. (**Πρόταση VI.19, Πόρισμα**). Οπότε,

$$\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{σχ. στην ΓΒ}}{\text{σχ. στην ΒΑ}}\ .$$

Για τους ίδιους λόγους,

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{σχ. στην ΒΓ}}{\text{σχ. στην ΓΑ}}\ .$$

Συνεπώς, από **Πρόταση V.24**, θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ+ΔΓ}} = \frac{\text{σχ. στην ΒΓ}}{\text{σχ. στην ΒΑ+σχ. στην ΑΓ}}\ .$$

Αλλά ΒΓ=ΒΔ+ΔΓ. Άρα, το σχήμα επί της ΒΓ είναι, επίσης, ίσο προς το άθροισμα των όμοιων και ομοίως αναγραφόμενων σχημάτων επί της ΒΑ και της ΑΓ (**Πρόταση V.9**).

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η Πρόταση VI.31 αποτελεί μία γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος (Πρόταση I.47), για όμοια ευθύγραμμα σχήματα που αναγράφονται στις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Η απόδειξη, ωστόσο, που δίνεται εδώ είναι εντελώς ανεξάρτητη της απόδειξης που δόθηκε για την Πρόταση I.47.

- **Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.31 ([H1], σ. 269-270)**

  Όπως είδαμε (σχόλιο στην I.47), αυτή η γενίκευση της I.47 αποδίδεται από τον Πρόκλο στον Ευκλείδη προσωπικά. Υπάρχει ένα συμπέρασμα στην απόδειξη που απαιτεί εξέταση. Ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι

$$\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{σχ. στην ΓΒ}}{\text{σχ. στην ΒΑ}}$$

  και ότι

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{σχ. στην ΒΓ}}{\text{σχ. στην ΓΑ}}.$$

  Και κατόπιν συμπεραίνει αμέσως ότι

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ+ΔΓ}} = \frac{\text{σχ. στην ΒΓ}}{\text{σχ. στην ΒΑ+σχ. στην ΑΓ}}.$$

  Προφανώς στην V.24 πρέπει να στηρίζεται η δικαιολόγηση αυτού του συμπεράσματος. Αλλά δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμο, γιατί αυτό που αποδεικνύει είναι ότι, αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\zeta}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha+\varepsilon}{\beta} = \frac{\gamma+\zeta}{\delta}$.

  Οπότε, θα μπορούσαμε να αντιστρέψουμε τις δύο πρώτες προτάσεις που δίδονται παραπάνω (από την Πρόταση Β του Simson η οποία, όπως είδαμε, είναι μια άμεση συνέπεια του ορισμού της αναλογίας) και οπότε συμπεραίνουμε από την V.24 ότι:

$$\frac{\text{ΒΔ+ΔΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{σχ. στην ΒΑ+σχ. στην ΑΓ}}{\text{σχ. στην ΒΓ}}.$$

  Αλλά ΒΔ+ΔΓ=ΒΓ, οπότε (από την Πρόταση Α του Simson, η οποία επίσης είναι μια άμεση συνέπεια του ορισμού της αναλογίας), το άθροισμα των σχημάτων ΒΑ, ΑΓ ισούται με το σχήμα στη ΒΓ.

  Το MSS ξανά δίνει μια εναλλακτική απόδειξη την οποία ο Heiberg τοποθετεί στο Παράρτημα. Πρώτα δείχνει ότι τα όμοια σχήματα στις τρεις πλευρές έχουν τους ίδιους λόγους το ένα προς το άλλο όπως και τα τετράγωνα στις πλευρές αντίστοιχα. Οπότε, με τη χρήση της I.47 και το ίδιο επιχείρημα που βασίζεται στην V.24 όπως επεξηγήθηκε παραπάνω, προκύπτει το αποτέλεσμα. Αν θεωρηθεί σημαντικό να έχουμε μια απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί τις Προτάσεις Β και Α του Simson ή οποιαδήποτε άλλη πρόταση εκτός από αυτή που δίδεται από τον Ευκλείδη, δεν βρίσκω άλλη μέθοδο εκτός από την ακόλουθη:

  Η V.22 του Ευκλείδη αποδεικνύει ότι, αν α, β, γ τρία μεγέθη και δ, ε, ζ τρία άλλα, τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε *δι' ίσου* $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$.

Αν τώρα, επιπλέον, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, ώστε, επίσης, $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ ο λόγος $\frac{\alpha}{\gamma}$ είναι ο διπλασίων λόγος του $\frac{\alpha}{\beta}$ και ο λόγος $\frac{\delta}{\zeta}$ είναι ο διπλασίων λόγος του $\frac{\delta}{\varepsilon}$, οπότε οι λόγοι που είναι διπλασίονες ίσων λόγων είναι ίσοι.

Τώρα

$$\frac{\text{σχ. στην ΑΓ}}{\text{σχ. στην ΑΒ}} = \left(\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΔΑ}}\right)^2 = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΒΔ}}$$

Οπότε

$$\frac{\text{σχ. στην ΑΓ}+\text{σχ. στην ΑΒ}}{\text{σχ. στην ΑΒ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ}}$$

[V.18]

Αλλά

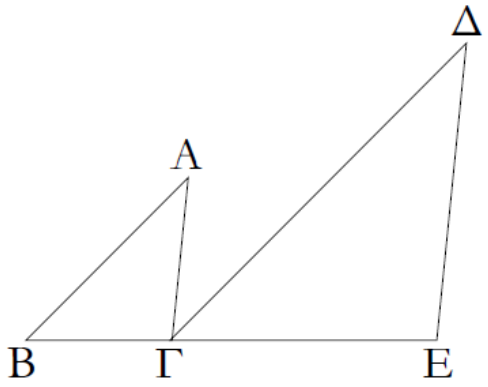
$$\frac{\text{σχ. στην ΒΓ}}{\text{σχ. στην ΑΒ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ}}$$

(όπως στην απόδειξη του Ευκλείδη)

Συνεπώς, το άθροισμα των σχημάτων στις ΑΓ, ΑΒ έχει προς το σχήμα στην ΑΒ τον ίδιο λόγο όπως το σχήμα στην ΒΓ έχει προς το σχήμα στην ΑΒ, οπότε το άθροισμα των σχημάτων στις ΑΓ, ΑΒ είναι ίσο προς το σχήμα στην ΒΓ.

[V.9]

Πρόταση VI.32	Αν δύο τρίγωνα, στα οποία δύο πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο πλευρές του άλλου, τοποθετηθούν μαζί έτσι ώστε να έχουν μια κοινή κορυφή και τις ομόλογες πλευρές τους παράλληλες, τότε οι υπόλοιπες πλευρές των τριγώνων θα βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.



Απόδειξη: Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ, τα οποία έχουν τις πλευρές ΒΑ, ΑΓ ανάλογες προς τις πλευρές ΔΓ, ΔΕ, έτσι ώστε:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΔΕ}}$$

και ακόμη την ΑΒ παράλληλη προς την ΔΓ και την ΑΓ προς την ΔΕ. Ισχυριζόμαστε ότι η ΒΓ είναι σε ευθεία γραμμή με την ΓΕ.

Διότι, επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΔΓ και τέμνονται από την ΑΓ, οι εναλλάξ γωνίες είναι ίσες (**Πρόταση Ι.29**), δηλαδή:

$$\angle\text{ΒΑΓ}=\angle\text{ΑΓΔ}$$

Για τους ίδιους λόγους θα είναι και

$$\angle\text{ΓΔΕ}=\angle\text{ΑΓΔ}$$

Συνεπώς,

$$\angle\text{ΒΑΓ}=\angle\text{ΓΔΕ}$$

Όμως, τα ΑΒΓ, ΔΓΕ είναι δύο τρίγωνα που έχουν μία γωνία του ενός, τη γωνία Α, ίση με μία γωνία του άλλου, τη γωνία Δ, και τις πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΔΕ}}$$

Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΓΕ (**Πρόταση VI.6**), οπότε:

$$\angle\text{ΑΒΓ}=\angle\text{ΔΓΕ}$$

Αλλά, έχει αποδειχθεί ότι:

$$\angle\text{ΑΓΔ}=\angle\text{ΒΑΓ}$$

Άρα,

$$\angle\text{ΑΓΕ}=\angle\text{ΑΒΓ}+\angle\text{ΒΑΓ}.$$

Αν, τώρα, σε κάθε μία από τις ίσες αυτές γωνίες προσθέσουμε τη γωνία

ΑΓΒ, θα έχουμε:

$$\angle \text{ΑΓΕ} + \angle \text{ΑΓΒ} = \angle \text{ΑΒΓ} + \angle \text{ΒΑΓ} + \angle \text{ΑΓΒ}.$$

Αλλά, από **Πρόταση Ι.32**,

$$\angle \text{ΑΒΓ} + \angle \text{ΒΑΓ} + \angle \text{ΑΓΒ} = 2 \text{ ορθές}$$

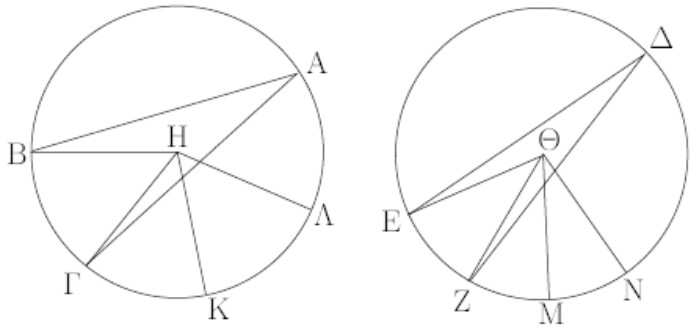
άρα και

$$\angle \text{ΑΓΕ} + \angle \text{ΑΓΒ} = 2 \text{ ορθές}.$$

Όμως, επειδή στην ευθεία γραμμή ΑΓ και στο σημείο Γ αυτής, οι ευθείες ΒΓ, ΓΕ, οι οποίες δε βρίσκονται προς το ίδιο μέρος (ως προς την ΑΓ), σχηματίζουν τις εφεξείς γωνίες ΑΓΕ και ΑΓΒ ίσες (με άθροισμα ίσο) με 2 ορθές, από την **Πρόταση Ι.14,** συμπεραίνουμε ότι η ΒΓ είναι σε ευθεία γραμμή με την ΓΕ.

ό.έ.δ.

Πρόταση VI.33	Σε ίσους κύκλους γωνίες έχουν το ίδιο λόγο με τα αντίστοιχα τόξα στα οποία βαίνουν, είτε είναι επίκεντρες, είτε εγγεγραμμένες.



Απόδειξη: Έστω οι ίσοι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ με κέντρα Η, Θ, οι επίκεντρες γωνίες ΒΗΓ, ΕΘΖ και οι εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΓ, ΕΔΖ, αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\frac{\text{τόξο ΒΓ}}{\text{τόξο ΕΖ}} = \frac{\angle\text{ΒΗΓ}}{\angle\text{ΕΘΖ}} = \frac{\angle\text{ΒΑΓ}}{\angle\text{ΕΔΖ}}.$$

Θεωρούμε οσαδήποτε διαδοχικά τόξα ΓΚ, ΚΛ ίσα προς το τόξο ΒΓ και επίσης, οσαδήποτε διαδοχικά τόξα ΖΜ και ΜΝ ίσα προς το τόξο ΕΖ. Φέρουμε τις ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Επειδή τα τόξα ΒΓ, ΓΚ και ΚΛ είναι ίσα μεταξύ τους, θα είναι ίσες μεταξύ τους και οι γωνίες ΒΗΓ, ΓΗΚ και ΚΗΛ (**Πρόταση ΙΙΙ.27**), οπότε, όποιο πολλαπλάσιο είναι το τόξο ΒΛ του τόξου ΒΓ, το ίδιο πολλαπλάσιο θα είναι η γωνία ΒΗΛ της γωνίας ΒΗΓ. Για τον ίδιο λόγο, όποιο πολλαπλάσιο είναι το τόξο ΝΕ του τόξου ΕΖ, το ίδιο πολλαπλάσιο θα είναι η γωνία ΝΘΕ της γωνίας ΕΘΖ. Επομένως, αν το τόξο ΒΛ είναι ίσο με το τόξο ΕΝ, η γωνία ΒΗΛ θα είναι, επίσης, ίση με τη γωνία ΕΘΝ (**Πρόταση ΙΙΙ.27**), αν το τόξο ΒΛ είναι μεγαλύτερο από το τόξο ΕΝ, η γωνία ΒΗΛ θα είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ΕΘΝ και αν το τόξο ΒΛ είναι μικρότερο από το τόξο ΕΝ, η γωνία ΒΗΛ θα είναι μικρότερη από τη γωνία ΕΘΝ. Έχουμε, λοιπόν, τέσσερα μεγέθη, δύο τόξα ΒΓ και ΕΖ και δύο γωνίες ΒΗΓ και ΕΘΖ και για το τόξο ΒΓ και τη γωνία ΒΗΓ πήραμε ίσες φορές πολλαπλάσιο το τόξο ΒΛ και τη γωνία ΒΗΛ, ενώ για το τόξο ΕΖ και τη γωνία ΕΘΖ πήραμε ίσες φορές πολλαπλάσιο το τόξο ΕΝ και τη γωνία ΕΘΝ. Αποδείξαμε ότι,

$$\text{αν τόξο ΒΛ} > \text{τόξο ΕΝ, τότε } \angle\text{ΒΗΛ} > \angle E\Theta N$$
$$\text{αν τόξο ΒΛ} = \text{τόξο ΕΝ, τότε } \angle\text{ΒΗΛ} = \angle\text{ΕΘΝ}$$
$$\text{αν τόξο ΒΛ} < \text{τόξο } EN\text{, τότε } \angle\text{ΒΗΛ} < \angle E\Theta N$$

Επομένως, από **Ορισμό V.5**,

$$\frac{\text{τόξο ΒΓ}}{\text{τόξο ΕΖ}} = \frac{\angle\text{ΒΗΓ}}{\angle\text{ ΕΘΖ}}$$

Όμως, από **Πρόταση V.15**,

$$\frac{\angle \text{ΒΗΓ}}{\angle \text{ΕΘΖ}} = \frac{\angle \text{ΒΑΓ}}{\angle \text{ΕΔΖ}}$$

γιατί κάθε μία από τις γωνίες ΒΗΓ και ΕΘΖ είναι διπλάσια της γωνίας ΒΑΓ και ΕΔΖ, αντίστοιχα (**Πρόταση III .20**). Άρα ισχύει,

$$\frac{\text{τόξο ΒΓ}}{\text{τόξο ΕΖ}} = \frac{\angle \text{ΒΗΓ}}{\angle \text{ΕΘΖ}} = \frac{\angle \text{ΒΑΓ}}{\angle \text{ΕΔΖ}}.$$

ό.έ.δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στο Βιβλίο VI των *Στοιχείων* του Ευκλείδη

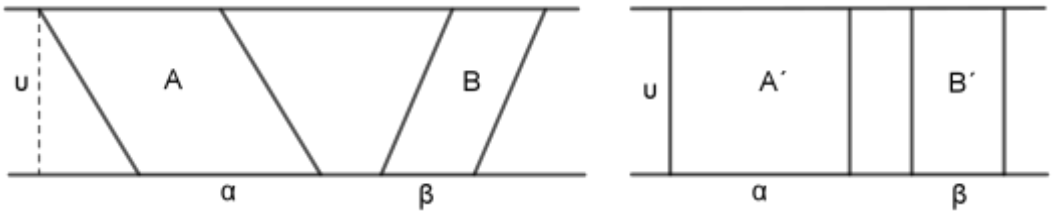
Ενότητα 2.1: Από ισογωνιότητα ή παραλληλία σε αναλογία ή ομοιότητα και αντίστροφα

[2.1α] Η βασική Πρόταση VI.1 και οι στοιχειώδεις Προτάσεις VI.2α, 3α, 4, 8-12, 18, 24, 21

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί την Ενότητα [1α] της εργασίας [ΝΦ2]
των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 28-32.

Ξεκινάμε την παρουσίαση με την Πρόταση VI.1, την πιο βασική, ίσως, πρόταση του Βιβλίου VI. Όλες σχεδόν οι Προτάσεις του Βιβλίου αυτού που ακολουθούν, είτε άμεσα είτε έμμεσα, τη χρησιμοποιούν. Θα την παρουσιάσουμε εδώ όχι όπως δίνεται στα *Στοιχεία*, αλλά με τη μορφή που αναφέρει ο Αριστοτέλης στα *Τοπικά* (158b24-159a2). Η πρόταση αυτή λέει ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των βάσεών τους.

Πρόταση VI.1	Αν α, β ευθείες και Α, Β παραλληλόγραμμα με βάσεις α και β, αντίστοιχα, που βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, τότε ισχύει η αναλογία: $$\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$$



Απόδειξη: Θεωρούμε τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα Α΄, Β΄ με βάσεις α και β, αντίστοιχα, μεταξύ των ιδίων παραλλήλων. Από **Πρόταση Ι. 36** θα ισχύει: Α=Α΄ και Β=Β΄. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{A'}{B'}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Αν υ είναι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων, θα ισχύει Α΄=αυ και Β΄=βυ. Συνεπώς, αρκεί τελικά να δείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha\upsilon}{\beta\upsilon}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Εφαρμόζουμε τον **Ορισμό V.5** της αναλογίας.

Έστω, λοιπόν, μ, ν φυσικοί αριθμοί. Θα δείξουμε ότι:

(i) Αν $\mu\beta = \nu\alpha$, τότε $\mu\beta\upsilon = \nu\alpha\upsilon$

(ii) Αν $\mu\beta < \nu\alpha$, *τότε* $\mu\beta\upsilon < \nu\alpha\upsilon$

(iii) Αν $\mu\beta > \nu\alpha$, *τότε* $\mu\beta\upsilon > \nu\alpha\upsilon$

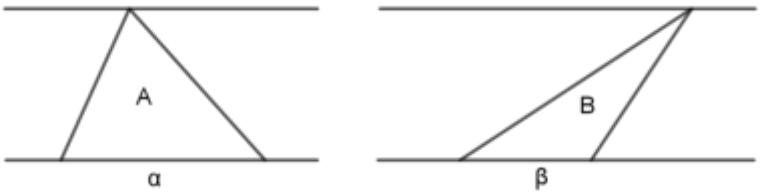
Απόδειξη της (i):

Αν μβ=να, τότε, από την **Πρόταση I.36,** προκύπτει άμεσα ότι μβυ=ναυ.

Για την απόδειξη των (ii) και (iii) αρκεί να θεωρήσουμε αυτό που είναι **προφανές συμπέρασμα της Πρότασης I.36** ότι, δηλαδή, «*μεταξύ παραλληλογράμμων με άνισες βάσεις, που βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τη μεγαλύτερη βάση*» ([H1], σ. 193).

ό.έ.δ.

Πόρισμα:	**Αν α, β ευθείες και Α, Β τρίγωνα με βάσεις α και β, αντίστοιχα, που βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, τότε ισχύει η αναλογία:** $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$.



Απόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε, ότι κάθε παραλληλόγραμμο είναι το διπλάσιο ενός τριγώνου με την ίδια βάση (**Πρόταση I.34**), οπότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την **Πρόταση VI.1** και την **Πρόταση V.15.**

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η βασική Πρόταση VI.1 **δε χρησιμοποιεί** την αρχή του Ευδόξου.
- Η απόδειξη που δόθηκε είναι σχεδόν τετριμμένη, γιατί υπάρχει ο κατάλληλος ορισμός της αναλογίας. Έτσι, ήδη από την Πρόταση VI.1 αναδεικνύεται η σπουδαιότητα του ορισμού V.5, αφού η ισότητα του λόγου των εμβαδών με το λόγο μηκών (βάσεων), χωρίς τον ορισμό αυτό δε θα είχε νόημα. Παραθέτουμε εδώ το σχετικό χωρίο από τα *Τοπικά*, στο οποίο ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί ως παράδειγμα μία μορφή της Πρότασης VI.1, για να τεκμηριώσει την αναγκαιότητα ύπαρξης του κατάλληλου ορισμού για την απόδειξη κάποιων ισχυρισμών:

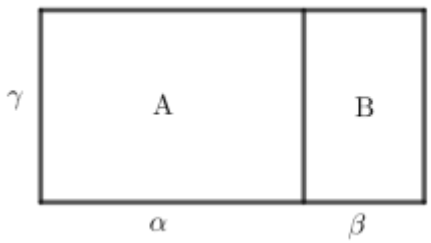
  «Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν, οἷον πότερον ἓν ἑνὶ ἐναντίον ἢ πλείω· ὁρισθέντων δὲ τῶν ἐναντίων κατὰ τρόπον ῥᾴδιον συμβιβάσαι πότερον ἐνδέχεται πλείω τῷ αὐτῷ εἶναι ἐναντία ἢ οὔ. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁρισμοῦ δεομένων. ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ

ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος. ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τιθεμένων μὲν τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος, ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπιχειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ τὰ ἀνὰ μέσον εἶναι)· ἂν δὲ μὴ τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ' ὅλως ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ τούτοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λόγους ἔχει.»

[Αριστοτέλης, Τοπικά, 158b24-159a2]

Και σε ελεύθερη απόδοση:

«Πολλοί ισχυρισμοί, αν δε δοθεί ο κατάλληλος ορισμός δεν είναι εύκολο να αποδειχθούν, όπως για παράδειγμα αν ένα πράγμα έχει ένα μοναδικό ή περισσότερα από ένα αντίθετα. Αν όμως τα αντίθετα οριστούν όπως πρέπει, τότε είναι εύκολο να συμπεράνει κανείς, αν είναι δυνατόν το ίδιο πράγμα να έχει περισσότερα αντίθετα ή όχι. Έτσι και οτι,δήποτε άλλο έχει ανάγκη ορισμού. Φαίνεται ότι και στα μαθηματικά, επίσης, μερικά πράγματα λόγω ελλείψεως ορισμού δεν μπορούν να αποδειχθούν εύκολα με γεωμετρικό τρόπο, όπως για παράδειγμα ότι η ευθεία που είναι παράλληλη προς μια πλευρά παραλληλογράμμου, διαιρεί κατά τρόπο ανάλογο την πλευρά του παραλληλογράμμου και την επιφάνειά του. Ενώ αν δοθεί ο ορισμός γίνεται αμέσως φανερό, διότι οι επιφάνειες με τις γραμμές έχουν την ίδια ανθυφαίρεση. Και αυτός είναι ο ορισμός της αναλογίας. Έτσι, οι πρώτες στοιχειώδεις αρχές, από τη στιγμή που έχουν δοθεί οι ορισμοί, για παράδειγμα τι είναι γραμμή, τι είναι κύκλος είναι πολύ εύκολο να αποδειχθούν. (Πλην όμως τα επιχειρήματα που μπορεί κανείς να επικαλεστεί για κάθε μια από αυτές δεν είναι πολλά, επειδή δεν υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα). Από την άλλη, αν οι ορισμοί των αρχών δεν έχουν δοθεί, η απόδειξη είναι δύσκολη και μπορεί μάλιστα απολύτως αδύνατη. Τα ίδια ισχύουν [όπως για τις μαθηματικές έννοιες] και για τους διαλεκτικούς ορισμούς.»



Ο γεωμετρικός ισχυρισμός στον οποίο αναφέρεται ο Αριστοτέλης είναι ο εξής:

Έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και το χωρίζουμε σε δύο μέρη α, β. Με βάσεις α, β και κοινό ύψος γ, σχηματίζουμε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με αντίστοιχα εμβαδά Α και Β. Τότε, ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ίσος με το λόγο των εμβαδών $\frac{A}{B}$, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}.$$

Αυτό που λέει, λοιπόν, ο Αριστοτέλης είναι ότι ο ισχυρισμός αυτός χρειάζεται έναν κατάλληλο ορισμό της αναλογίας μεγεθών για να αποδειχθεί. Και αυτός είναι ο ορισμός της αναλογίας του Θεαίτητου:

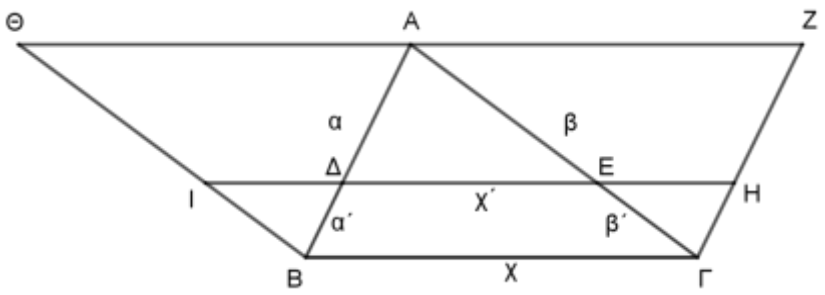
Αν α,β μεγέθη και γ,δ δύο άλλα μεγέθη, τότε θα λέμε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, *αν η ανθυφαίρεση των α,β είναι ίση με την ανθυφαίρεση των γ,δ, δηλαδή:*

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}\ , \alpha\nu\ A\nu\theta(\alpha, \beta) = A\nu\theta(\gamma, \delta).$$

- Η αντίστοιχη πρόταση του Ευκλείδη διατυπώνεται ως εξής: ***Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.*** (*Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα, που έχουν κοινό ύψος, έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των βάσεων*). Εδώ, λαμβάνοντας υπόψη το σχόλιο του Πρόκλου (σελ. 405, 17) ότι το να έχουν τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα το ίδιο ύψος είναι σα να βρίσκονται εντός των ίδιων παραλλήλων, τοποθετήσαμε τα παραλληλόγραμμα, έτσι ώστε οι βάσεις τους να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε η ευθεία στην οποία ανήκουν οι πλευρές των παραλληλογράμμων οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις βάσεις, είναι παράλληλη σε αυτή που ανήκουν οι βάσεις, διότι τα ύψη των παραλληλογράμμων είναι ίσα και παράλληλα (Πρόταση Ι.33).
- Στην απόδειξη θεωρήσαμε αυτό που είναι προφανές συμπέρασμα της Πρότασης Ι.38 ότι, δηλαδή, «*μεταξύ τριγώνων και παραλληλογράμμων με άνισες βάσεις και μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τη μεγαλύτερη βάση*» ([Η1], σ. 193).

Δύο απλές αλλά πολύ σημαντικές συνέπειες της Πρότασης VI.1 είναι η ευθεία κατεύθυνση της Πρότασης VI.2, η οποία συμβολίζεται με VI.2α και η Πρόταση VI.4. Απλές συνέπειες αυτών είναι οι Προτάσεις VI.8-12, VI.18 και VI. 24. Στις προτάσεις αυτές, ουσιαστικά, από μια υπόθεση ισογωνιότητας ή παραλληλίας αποδεικνύεται κάποιο συμπέρασμα αναλογίας ή ομοιότητας.

Πρόταση VI.2α	Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε στο εσωτερικό των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Θέτουμε ΑΒ=α, ΒΔ=α΄, ΑΓ=β, ΓΕ=β΄, ΒΓ=x και ΔΕ=x΄. Αν x, x΄ είναι παράλληλες, τότε ισχύει η αναλογία: $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$.



Απόδειξη: Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΖ και ΑΓΒΘ και ας είναι Ι, Η τα σημεία τομής της ΔΕ με τις ΒΘ, ΓΖ, αντίστοιχα.

Από την **Πρόταση VI.1,** έχουμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\text{ΑΒΓΖ}}{\text{ΔΒΓΗ}} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\text{ΑΓΒΘ}}{\text{ΕΓΒΙ}}.$$

Όμως, ΑΒΓΖ=ΑΓΒΘ, γιατί έχουν την ίδια βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΘΖ και ΒΓ (**Πρόταση Ι.35**).

Ομοίως, ΔΒΓΗ=ΕΓΒΙ, γιατί έχουν την ίδια βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ

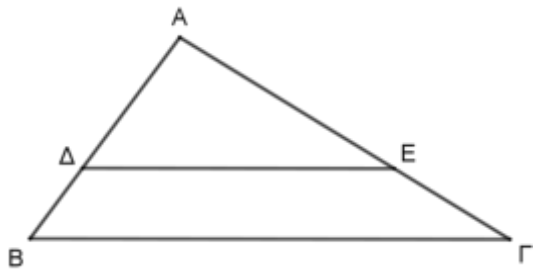
των παραλλήλων ΙΗ και ΒΓ (**Πρόταση Ι.35**).

Συνεπώς, από την **Πρόταση V.11**, προκύπτει η αναλογία:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}.$$

ό.έ.δ.

Πόρισμα	Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε στο εσωτερικό των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Αν οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, τότε ισχύουν οι αναλογίες: $$(\mathrm{i})\ \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}},\ (\mathrm{ii})\ \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}$$



Απόδειξη: (i) Από την **Πρόταση VI.2α** ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΕΓ}}.$$

Επειδή ΑΒ>ΔΒ και ΑΓ>ΕΓ, από την **Πρόταση V.17 (Διαίρεση λόγου)**, έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΒ}-\text{ΔΒ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΓ}-\text{ΕΓ}}{\text{ΕΓ}}$$

και συνεπώς

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$$

(ii) Από την (i) έχουμε:

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$$

και από την **Πρόταση VA (Ανάπαλιν)**

$$\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΕ}}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα την **Πρόταση V.18 (Σύνθεση λόγου)** παίρνουμε:

$$\frac{\text{ΑΔ}+\text{ΔΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΕ}+\text{ΕΓ}}{\text{ΑΕ}}$$

ή

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}$$

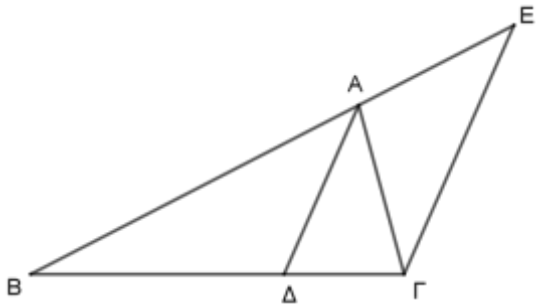
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Στην απόδειξη της Πρότασης VI.2α και του Πορίσματος έγινε χρήση δύο στοιχειωδών προτάσεων του Βιβλίου V: της Πρότασης V.11 (Μεταβατικότητα της αναλογίας) και V.17 (Διαίρεση λόγου), αντίστοιχα, και συνεπώς **δε χρησιμοποιήθηκε** η Αρχή του Ευδόξου. Ο Ευκλείδης στην απόδειξή του χρησιμοποιεί την Πρόταση V.7, που, επίσης, είναι στοιχειώδης.
- Η ακριβής διατύπωση της ευθείας κατεύθυνσης της Πρότασης VI.2 του Ευκλείδη αντιστοιχεί στο προηγούμενο πόρισμα (περ. (i)) και είναι η εξής: ***Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς.*** *(Η παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου τέμνει τις άλλες δύο πλευρές του σε μέρη ανάλογα).*

Η Πρόταση VI.3α που ακολουθεί είναι μια ενδιαφέρουσα πρόταση, δεν χρησιμοποιείται όμως από τον Ευκλείδη. Η απόδειξη που θα δώσουμε εδώ δε διαφέρει ουσιαστικά από αυτή των *Στοιχείων*.

Πρόταση VI.3α	Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο της βάσης ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας ∠ΒΑΓ, τότε θα ισχύει η αναλογία: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$



Απόδειξη: Από την κορυφή Γ φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ, η οποία συναντά την προέκταση της ΑΒ στο Ε (**Ευθεία χρήση 5ου αιτήματος**). Παρατηρούμε ότι ∠ΒΑΔ =∠ΑΕΓ και ∠ΔΑΓ =∠ΑΓΕ (επειδή ΑΔ, ΓΕ παράλληλες) (**Πρόταση Ι.29**). Αλλά ∠ΒΑΔ =∠ΔΑΓ (επειδή ΑΔ διχοτόμος της ∠ΒΑΓ), άρα ∠ΑΕΓ =∠ΑΓΕ (**Κοινή Έννοια 1**) και κατά συνέπεια ΑΓ=ΑΕ (**Πρόταση Ι.6**), οπότε το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές . Στο τρίγωνο ΒΓΕ εφαρμόζουμε την **Πρόταση VI.2α (Πόρισμα)**, και έχουμε:

$$\frac{BA}{AE}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$$

ή

$$\frac{BA}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}.$$

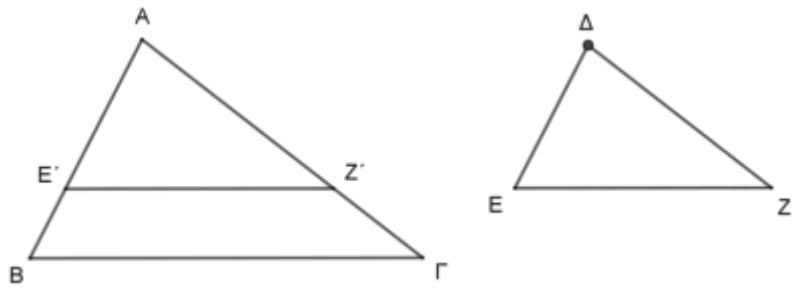
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.3α γίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης VI.2α, **χωρίς τη χρήση της Αρχής του Ευδόξου.**

Η επόμενη Πρόταση VI.4, η οποία δίνεται εδώ σε κάπως διαφορετική μορφή από αυτήν των *Στοιχείων*, αποτελεί ουσιαστικά ένα κριτήριο ομοιότητας.

Πρόταση VI.4	Αν δύο τρίγωνα είναι ισογώνια, τότε είναι όμοια.



Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την αναλογία των ομόλογων πλευρών, αφού η ισότητα των ομόλογων γωνιών είναι δεδομένη.

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ της γωνίας Α θεωρούμε, αντίστοιχα, τα σημεία Ε΄, Ζ΄, ώστε ΑΕ΄=ΔΕ και ΑΖ΄=ΔΖ. Φέρνουμε την Ε΄Ζ΄. Τότε, από την **Πρόταση Ι.4** τα τρίγωνα ΑΕ΄Ζ΄ και ΔΕΖ είναι ίσα, άρα ∠Ε΄ =∠Ε και ∠Ζ΄ =∠Ζ. Αλλά, ∠Β=∠Ε και ∠Γ=∠Ζ, άρα ∠Ε΄ =∠Β και ∠Ζ΄ =∠Γ.

Συνεπώς, από την **Πρόταση Ι.28**, οι Ε΄Ζ΄ και ΒΓ θα είναι παράλληλες, οπότε από την **Πρόταση VI.2α (Πόρισμα (ii))**

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΕ}'}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΖ}'}$$

ή

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}}.$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}}.$$

Τότε, από την **Πρόταση V.11** και με διπλή εφαρμογή της **Πρότασης VI.2α**, προκύπτει το ζητούμενο:

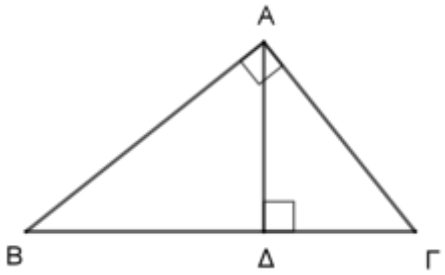
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}}.$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.4 γίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης VI.2α, **χωρίς χρήση της Αρχής του Ευδόξου.**
- Η ακριβής διατύπωση της Πρότασης VI.4, όπως δίδεται στα Στοιχεία, είναι η εξής: «*Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι*». (*Στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες*). Για την απόδειξή της ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την **Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)** και την **Πρόταση V.22 (Δι' ίσου)** και άρα βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου. Όμως, όπως και ο de Morgan είχε παρατηρήσει (πρβλ. [H1], σ. 202), η Πρόταση VI.4 αποδεικνύεται άμεσα από την VI.2α και συνεπώς δεν είναι απαραίτητη η χρήση της αρχής του Ευδόξου.

Πρόταση VI.8	Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (∠ΒΑΓ=1∟) και ΑΔ η κάθετος από το Α προς την ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια ανά δύο.



Απόδειξη: Επειδή ∠ΒΑΓ=∠ΑΔΒ=1∟ (**Αίτημα 4**) και η γωνία Β είναι κοινή στα τρίγωνα ορθογώνια ΑΒΓ και ΑΒΔ θα είναι και ∠ΑΓΒ=∠ΒΑΔ (**Πρόταση I.32**). Οπότε, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισογώνια και από την **Πρόταση VI.4** θα είναι και όμοια.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

Θα δείξουμε τώρα ότι και τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια μεταξύ τους. Πράγματι, επειδή ∠ΒΔΑ =∠ΑΔΓ = 1∟ και έχει δειχθεί ότι ∠ΑΓΒ=∠ΒΑΔ, θα είναι και ∠ΑΒΓ =∠ΔΑΓ (**Πρόταση I.32**). Οπότε, το τρίγωνο ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ισογώνια και από την **Πρόταση VI.4** θα είναι και όμοια.

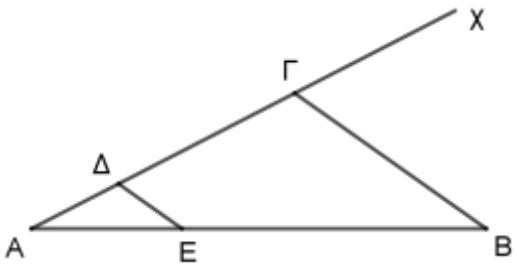
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Στην απόδειξη της Πρότασης VI.8 **δε γίνεται χρήση της Αρχής του Ευδόξου**.
- Για την απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η **Πρόταση VI.4**, σύμφωνα με την οποία αν δύο τρίγωνα είναι ισογώνια τότε είναι όμοια και δεν έγινε χρήση του Ορισμού VI.1. Ο Ευκλείδης, αντίθετα, στα *Στοιχεία*, αφού έχει αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι ισογώνια ανά δύο συνάγει, από την Πρόταση VI.4, ότι οι πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες είναι ανάλογες και χρησιμοποιώντας τον Ορισμό VI.1, συμπεραίνει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια. Όμως, επειδή αυτό περιλαμβάνεται στη διατύπωση της Πρότασης VI.4 -όπως και ο Simson παρατηρεί (πρβλ. [Η1], σ. 211)- η αναφορά στην αναλογία των ομόλογων πλευρών δεν είναι απαραίτητη και μπορεί να παραληφθεί.

Πόρισμα	Η κάθετη προς την υποτείνουσα που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι η μέση ανάλογος των δύο τμημάτων που ορίζονται στην υποτείνουσα.

Πρόταση VI.9	Αν ΑΒ είναι μια ευθεία και ν φυσικός αριθμός, να κατασκευασθεί σημείο Ε επί της ΑΒ, ώστε ΑΒ=νΑΕ.



Απόδειξη: Θεωρούμε ευθεία Ax που σχηματίζει τυχαία γωνία με την ΑΒ και επιλέγουμε τυχόν σημείο Δ επί της Ax. Έστω Γ το σημείο της Ax για το οποίο ισχύει ΑΓ=νΑΔ. Σχηματίζουμε την ευθεία ΒΓ και φέρουμε τη ΔΕ παράλληλη προς την ΒΓ, όπου Ε σημείο επί της ΑΒ.

Από την **Πρόταση Ι.29**, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι ισογώνια, οπότε εφαρμόζοντας την **Πρόταση VI.4** ή την **Πρόταση VI.2α** (**Πόρισμα (ii)**) παίρνουμε:

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΕ}}$$

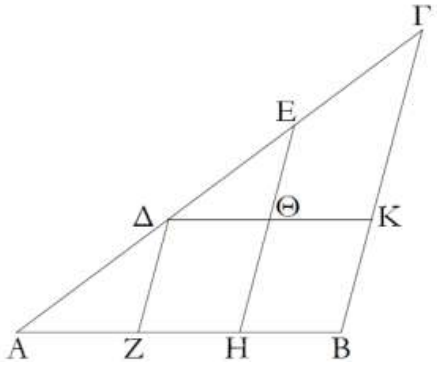
Αλλά ΑΓ=νΑΔ. Συνεπώς και ΑΒ=νΑΕ **(Πρόταση Δ του Simson).**

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.9 γίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης VI.4 ή της VI.2α, **χωρίς χρήση της Αρχής του Ευδόξου.**
- Η **Πρόταση Δ του Simson** ([Η1], σ. 128), την οποία χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη, διατυπώνεται ως εξής: ***Αν τέσσερα μεγέθη βρίσκονται σε αναλογία και αν το πρώτο είναι ένα πολλαπλάσιο ή μέρος του δεύτερου, το τρίτο είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ή το ίδιο μέρος του τέταρτου.***
  Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται μόνο η στοιχειώδης Πρόταση V.4

Πρόταση VI.10	Να τμηθεί δοθείσα άτμητη ευθεία με τον ίδιο τρόπο που έχει τμηθεί άλλη δοθείσα ευθεία.



Απόδειξη: (Όπως στα *Στοιχεία*)

Έστω ΑΒ η δοθείσα άτμητη ευθεία και ΑΓ η ευθεία που σχηματίζει τυχαία γωνία με την ΑΒ και η οποία έχει τμηθεί στα σημεία Δ και Ε. Σχηματίζουμε την ευθεία ΓΒ. Από τα σημεία Δ και Ε φέρουμε τις ΔΖ και ΕΗ παράλληλες στη ΒΓ. Επίσης, από το σημείο Δ φέρουμε τη ΔΚ παράλληλη ΑΒ, η οποία τέμνει την ΕΗ στο Θ. (Πρόταση Ι.31).

Έτσι, καθένα από τα τετράπλευρα ΖΘ και ΘΒ είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, από την Πρόταση Ι.34, ΔΘ=ΖΗ και ΘΚ=ΗΒ. Όμως, αφού η ευθεία ΘΕ είναι παράλληλη προς την ΚΓ, μία από τις πλευρές του τριγώνου ΔΚΓ, από Πρόταση VI.2 έχουμε:

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta}.$$

Αλλά, ΚΘ=ΒΗ και ΘΔ=ΗΖ, και συνεπώς

$$\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{BH}{HZ}.$$

Πάλι, επειδή η ευθεία ΖΔ είναι παράλληλη προς την ΗΕ, μία από τις πλευρές του τριγώνου ΑΗΕ, με εφαρμογή της Πρότασης VI.2, βρίσκουμε:

$$\frac{E\Delta}{\Delta A} = \frac{HZ}{ZA}$$

Όμως έχει αποδειχθεί ότι

$$\frac{ΓΕ}{ΕΔ} = \frac{ΒΗ}{ΗΖ}.$$

οπότε,

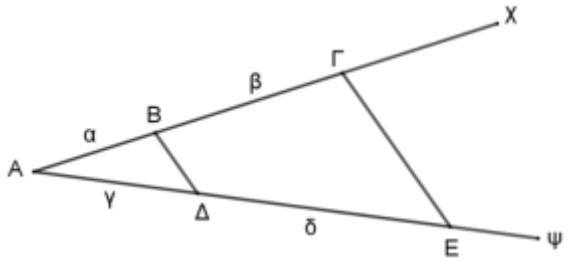
$$\frac{ΓΕ}{ΕΔ} = \frac{ΒΗ}{ΗΖ} \text{ και } \frac{ΕΔ}{ΔΑ} = \frac{ΗΖ}{ΖΑ}.$$

Συνεπώς, η δοθείσα άτμητη ευθεία τμήθηκε με τον ίδιο τρόπο που έχει τμηθεί άλλη δοθείσα ευθεία.

ό.έ.π.

Κατασκευή τετάρτης αναλόγου

Πρόταση VI.12	Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων α, β, γ να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα δ, ώστε: $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$.



Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε τυχαία οξεία γωνία ∠χΑψ. Πάνω στην πλευρά της Αχ θεωρούμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ=α, ΒΓ=β και πάνω στην Αψ το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ=γ. Σχηματίζουμε την ΒΔ (**Αίτημα 1**) και από το Γ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΔ, η οποία συναντά την Αψ στο Ε (**Πρόταση Ι.31**). Θέτουμε ΔΕ=δ. Τότε, από την **Πρόταση VI.2α** (**Πόρισμα (i)**), ισχύει ότι

$$\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}.$$

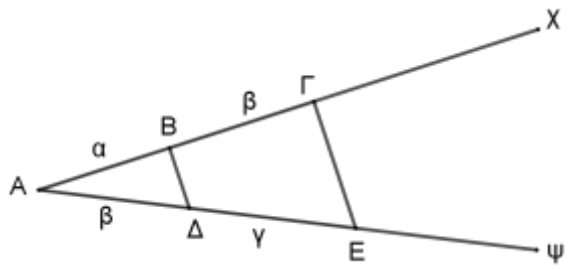
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.12 γίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης VI.2α (Πόρισμα (i)), **χωρίς χρήση της Αρχής του Ευδόξου.**
- Η κατασκευή της τέταρτης αναλόγου είναι εξαιρετικά χρήσιμη πρόταση. Μεταξύ άλλων έχει και μια πολύ ενδιαφέρουσα συνέπεια: Με αυτήν την κατασκευή μπορούμε να ορίσουμε «γενικό» πολλαπλασιασμό δύο οποιονδήποτε λόγων. Ενώ, δηλαδή, στην αριθμητική μπορούμε να ορίσουμε μόνο τον «ομώνυμο» πολλαπλασιασμό, στη γεωμετρία μπορούμε να ορίσουμε πολλαπλασιασμό δύο λόγων ευθειών (και γενικότερα ομοειδών μεγεθών).

Κατασκευή τρίτης αναλόγου

Πρόταση VI.11	Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων α, β να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα γ, ώστε: $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}.$$



Απόδειξη: Όπως στην προηγούμενη Πρόταση, ας θεωρήσουμε τυχαία οξεία γωνία ∠χΑψ. Πάνω στην πλευρά της Αχ θεωρούμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ=α, ΒΓ=β και πάνω στην Αψ το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ=β. Σχηματίζουμε την ΒΔ (**Αίτημα 1**) και από το Γ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΔ, η οποία συναντά την Αψ στο Ε (**Πρόταση Ι.31**). Θέτουμε ΔΕ=γ. Τότε, από την **Πρόταση VI2α** (**Πόρισμα (i)**), ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}.$$

ό.έ.δ.

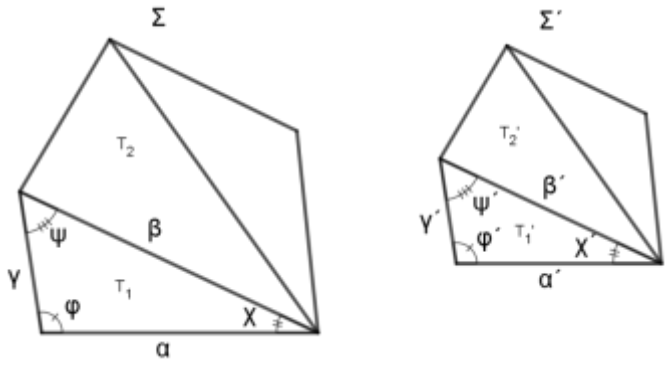
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η Πρόταση VI. 11 είναι κατ' ουσίαν μια ειδική περίπτωση της VI.12 για β=γ και **δε χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου**.

Είδαμε ότι, γενικά, δύο ευθύγραμμα χωρία λέγονται όμοια αν έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες (δηλαδή είναι ισογώνια) και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. (Για τον ορισμό της ομοιότητας δύο ευθυγράμμων χωρίων σε σύγχρονη διατύπωση βλέπε τα σχόλια που ακολουθούν τον Ορισμό VI. 1, στην Ενότητα 1.3). Ειδικά για να είναι δύο τρίγωνα όμοια αρκεί να είναι ισογώνια, λόγω της πρότασης VI.4.

Ένας άλλος τρόπος για να διαπιστώσουμε την ομοιότητα δύο ευθυγράμμων χωρίων είναι να τα αναλύσουμε σε τρίγωνα. Τότε, λέμε ότι τα ευθύγραμμα χωρία είναι όμοια, αν καθένα από τα τρίγωνα τού ενός είναι όμοιο (δηλαδή ισογώνιο) με κάποιο τρίγωνο του άλλου. Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε την ομοιότητα δύο ευθυγράμμων χωρίων μόνο με γωνίες. Αυτό είναι το νόημα της πρότασης VI.18 που ακολουθεί.

Πρόταση VI.18	Δοθέντος ευθυγράμμου χωρίου Σ επί ευθείας α[10] και δοθείσης ευθείας α΄, να κατασκευασθεί επί της α΄ ευθύγραμμο χωρίο Σ΄ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Σ.



Απόδειξη: Επιλέγουμε ένα τρίγωνο T_1 στο Σ μία πλευρά του οποίου είναι η α και οι υπόλοιπες δύο, έστω, οι β, γ. Έστω φ, χ οι προσκείμενες γωνίες στην πλευρά α του τριγώνου T_1 και ψ η τρίτη γωνία του. Από την **Πρόταση Ι.23** μπορούμε να κατασκευάσουμε γωνίες φ΄, χ΄ στα δύο άκρα της α΄, ίσες προς τις φ, χ, αντίστοιχα. Συμπληρώνουμε με την κατασκευή του τριγώνου T_1΄, το οποίο έχει βάση α΄ και γωνίες φ΄, χ΄. Έστω β΄, γ΄ οι υπόλοιπες δύο πλευρές του T_1΄. Από την **Πρόταση Ι.32**, η τρίτη γωνία, έστω ψ΄,του T_1΄, είναι ίση με την γωνία ψ του T_1. Συνεπώς, τα τρίγωνα T_1 και T_1΄είναι ισογώνια και από την **Πρόταση VI.4** θα είναι και όμοια.

Επαναλαμβάνουμε τώρα την ίδια κατασκευή για την πλευρά β και ένα τρίγωνο T_2 του Σ με μία των πλευρών του την β. Έτσι, από την **Πρόταση VI.4**, προκύπτει τρίγωνο T_2΄ όμοιο προς το T_2.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο χωρίο Σ΄ επί της ευθείας α΄, όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Σ.

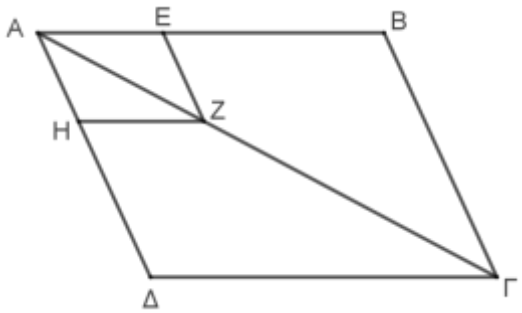
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.18 γίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης VI.4, **χωρίς χρήση της Αρχής του Ευδόξου.**
- Στην προηγούμενη απόδειξη παρατηρούμε ότι για την ομοιότητα των ευθυγράμμων χωρίων αρκεί η ισότητα των γωνιών, αφού αυτά αναλύονται σε τρίγωνα.
- Η Πρόταση VI.18 είναι γενίκευση της Πρότασης Ι.46.

[10] Αυτό σημαίνει ότι η α είναι ευθεία του χωρίου Σ.

Πρόταση VI.24	Κάθε παραλληλόγραμμο περί τη διάμετρο παραλληλογράμμου είναι όμοιο προς το όλο παραλληλόγραμμο.



Απόδειξη: Έστω ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ας θεωρήσουμε ένα άλλο παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ περί τη διάμετρο ΑΓ αυτού (με Ζ σημείο επί της διαμέτρου). Θα αποδείξουμε ότι τα δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

Τα ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ είναι σαφώς ισογώνια. Πράγματι, οι ΔΓ, ΗΖ είναι παράλληλες, οπότε από **Πρόταση Ι.28** θα είναι:

$$\angle A\Delta\Gamma = \angle AHZ.$$

Ακόμα, οι ΒΓ, ΕΖ είναι παράλληλες, οπότε από **Πρόταση Ι.28**, θα είναι:

$$\angle AB\Gamma = \angle AEZ.$$

Επίσης,

$$\angle \Delta AB = \angle HAE$$

(ως κοινή γωνία των δύο παραλληλογράμμων).

Όμως, από **Πρόταση Ι.34** $\angle \Delta AB = \angle \Delta\Gamma B$ και $\angle HAE = \angle HZE$ και συνεπώς, από **Πρόταση V.11**,

$$\angle \Delta\Gamma B = \angle HZE.$$

Απομένει να δείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΗΖ είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ, οπότε, από **Πρόταση VI.2α (Πόρισμα(ii))** έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{AH} = \frac{A\Gamma}{AZ}.$$

Ομοίως, στο τρίγωνο ΑΓΒ, η ΖΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΓΒ, οπότε, από την **Πρόταση VI.2α (Πόρισμα(ii))** έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{AZ} = \frac{AB}{AE}.$$

Συνεπώς, από **Πρόταση V.11**, θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{A\Delta}{AH} = \frac{AB}{AE}.$$

Τέλος, επειδή οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες (**Πρόταση Ι.34**) θα ισχύει και η αναλογία:

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΗΖ}}.$$

Έτσι, το όλο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το περί την διάμετρο αυτού παραλληλόγραμμο ΑΕΖΗ έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και συνεπώς, σύμφωνα με τον **Ορισμό VI.1**, είναι όμοια.

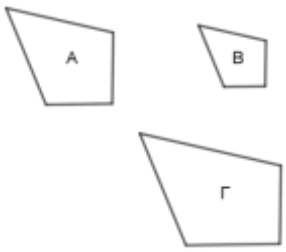
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η απόδειξη που παρουσιάσαμε εδώ βασίστηκε στην παρατήρηση των Simson και Heath (πρβλ. [H1], σ. 252-253), ότι η Πρόταση VI.24 αποδεικνύεται άμεσα από την VI.2α και συνεπώς **δεν είναι απαραίτητη η χρήση της Αρχής του Ευδόξου**. Αντίθετα, η απόδειξη των Στοιχείων χρησιμοποιεί τις μη στοιχειώδεις προτάσεις V.16 (Εναλλάξ) και V.22 (Δι' ίσου) και άρα βασίζεται στην Αρχή του Ευδόξου.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή παραθέτοντας την Πρόταση VI.21, η οποία εκφράζει τη μεταβατική ιδιότητα της έννοιας «ομοιότητα» και η οποία, με τη σύγχρονη ορολογία, μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση VI. 21	Δύο ευθύγραμμα σχήματα που είναι όμοια προς το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι και μεταξύ τους όμοια.



Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα σχήματα Α, Β είναι όμοια προς το ευθύγραμμο σχήμα Γ. Θα δείξουμε ότι τα Α, Β είναι και μεταξύ τους όμοια.
Πράγματι, από τον **Ορισμό VI.1**, επειδή $A \approx \Gamma$ το Α θα είναι και ισογώνιο με το Γ και οι πλευρές τους, που περιέχουν τις ίσες γωνίες, θα είναι ανάλογες. Ομοίως, επειδή $B \approx \Gamma$ και το Β θα είναι ισογώνιο με το Γ και οι πλευρές τους, που περιέχουν τις ίσες γωνίες, θα είναι ανάλογες.
Επομένως και το Α θα είναι ισογώνιο με το Β και οι πλευρές τους, που περιέχουν τις ίσες γωνίες, θα είναι ανάλογες. Έτσι, πάλι από τον **Ορισμό VI.1**, θα είναι $A \approx B$.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

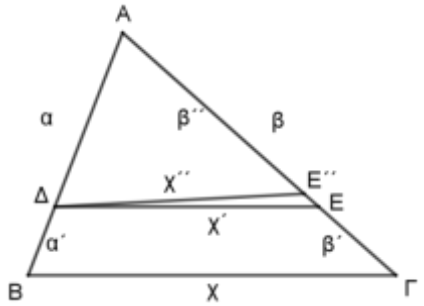
- Η απόδειξη της Πρότασης VI.21 που δώσαμε εδώ δε διαφέρει από την απόδειξη των *Στοιχείων*, γίνεται με τη βοήθεια του Ορισμού VI.1, και **δε χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου.**

[2.1β] Οι μη στοιχειώδεις αντίστροφες Προτάσεις VI.2β, 3β, 5, 26 και οι Προτάσεις VI.6-7

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί την Ενότητα [1β] της εργασίας [ΝΦ2]
των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 32-35.

Οι Προτάσεις VI.2β, 3β, 5, 26 είναι αντίστροφες των VI.2α, 3α, 4, 24, αντίστοιχα. Σε αυτές τις αντίστροφες προτάσεις, καθώς και στις Προτάσεις VI.6-7, αποδεικνύεται κάποια ισογωνιότητα ή παραλληλία από μια υπόθεση ομοιότητας ή αναλογίας. Για την απόδειξη αυτής της συνεπαγωγής -αντίστροφης της αρχικής συνεπαγωγής από ισογωνιότητα ή παραλληλία προς αναλογία ή ομοιότητα- είναι αναγκαία σε κάθε περίπτωση η Πρόταση V.9, και άρα, μέσω αυτής η Αρχή του Ευδόξου.
Ξεκινάμε την παρουσίαση της Ενότητας με την Πρόταση VI.2β, η οποία λέει ότι μια ευθεία που τέμνει δύο πλευρές τριγώνου σε μέρη ανάλογα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.

Πρόταση VI.2β	**Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε στο εσωτερικό των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Θέτουμε ΑΒ=α, ΒΔ=α΄, ΑΓ=β, ΓΕ=β΄, ΒΓ=x και ΔΕ=x΄. Αν ισχύει η αναλογία:** $$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$$ **τότε οι x, x΄ είναι παράλληλες.**



Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι x, x΄ δεν είναι παράλληλες. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη ευθεία προς τη x , έστω x΄΄, η οποία συναντά την ΑΓ στο Ε΄΄. Θέτουμε ΓΕ΄΄=β΄΄. Τότε, αφού η x΄΄ είναι παράλληλη προς την x, από την **Πρόταση VI.2α**, θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta''}.$$

Τότε, από την υπόθεση

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$$

και την **Πρόταση V.11** θα έχουμε:

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\beta}{\beta''}.$$

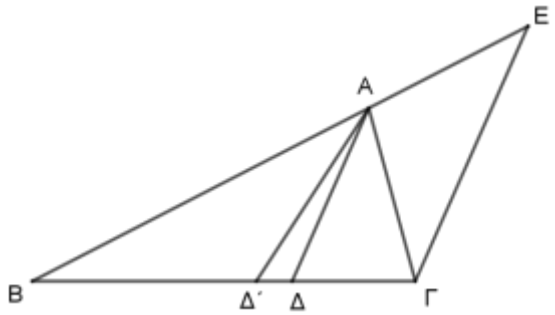
Συνεπώς, από την **Πρόταση V.A (Ανάπαλιν)** και την **Πρόταση V.9** θα ισχύει: $\beta'=\beta''$. Έτσι, τα σημεία Ε και Ε΄΄ ταυτίζονται και η x είναι παράλληλη προς τη x΄, αφού, από την **Πρόταση I.31 και το 5ο αίτημα**, από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μοναδική παράλληλη).

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.2β **χρησιμοποιείται η Αρχή του Ευδόξου**, μέσω της πρότασης V.9.

Πρόταση VI.3β	Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ ώστε να ισχύει, $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ τότε η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας ∠ΒΑΓ.



Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η ΑΔ δεν είναι διχοτόμος της ∠ΒΑΓ και έστω ΑΔ΄ η διχοτόμος της. Από την **Πρόταση VI.3α** έχουμε ότι:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta'}{\Delta'\Gamma}.$$

Όμως, από την υπόθεση:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}.$$

Άρα, από την **Πρόταση V.11,**

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta'}{\Delta'\Gamma}.$$

Υποθέτουμε ότι $\Delta' \neq \Delta$ και ότι το Δ΄ βρίσκεται αριστερά του Δ. Τότε $B\Delta > B\Delta'$ και από την **Πρόταση V.14** $\Delta\Gamma > \Delta'\Gamma$. Άτοπο, γιατί $\Delta\Gamma < \Delta'\Gamma$. Οπότε, $\Delta \equiv \Delta'$ και άρα η ΑΔ ταυτίζεται με τη διχοτόμο ΑΔ΄.

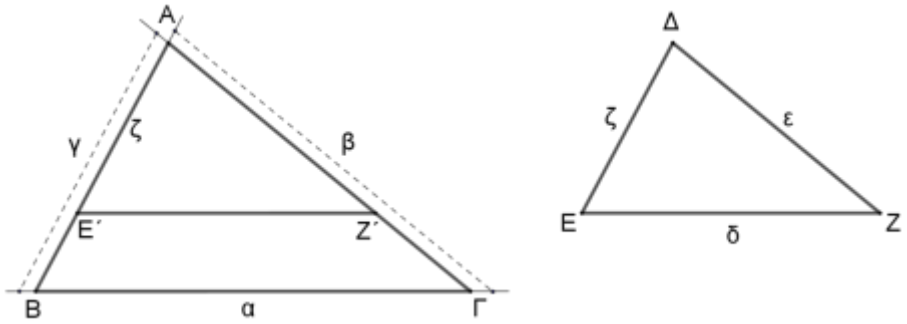
Ομοίως, αν το Δ΄ βρίσκεται δεξιά του Δ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.3β **χρησιμοποιήθηκε η Αρχή του Ευδόξου, μέσω της μη στοιχειώδους Πρότασης V.14.**

Πρόταση VI.5	Αν δύο τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.



Απόδειξη: Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Θέτουμε ΑΒ=γ, ΑΓ=β, ΒΓ=α, ΔΕ=ζ, ΔΖ=ε και ΕΖ=δ. Αν ισχύει

$$\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\varepsilon}{\beta}=\frac{\zeta}{\gamma}\ (1)$$

θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές, δηλαδή: ∠Α=∠Δ, ∠Β=∠Ε, ∠Γ=∠Ζ.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι ΔΕ<ΑΒ. Επομένως, θα υπάρχει σημείο Ε΄ στην ΑΒ με ΑΕ΄=ΔΕ=ζ. Από το Ε΄ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ΄. Τότε, από **Πρόταση Ι.29,** θα έχουμε

$$\angle B=\angle E',\quad \angle \Gamma=\angle Z'\ (2)$$

οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕ΄Ζ΄ είναι ισογώνια, αφού έχουν και τη γωνία Α κοινή. Συνεπώς, από την **Πρόταση VI.4**, τα τρίγωνα αυτά θα είναι όμοια και κατά συνέπεια θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\zeta}{\gamma}=\frac{AZ'}{\beta}=\frac{E'Z}{\alpha}\ (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) και την **Πρόταση V.11**, συνάγεται ότι:

$$\frac{AZ'}{\beta}=\frac{\varepsilon}{\beta}\ \text{και}\ \frac{E'Z'}{\alpha}=\frac{\delta}{\alpha}$$

και εφαρμόζοντας την **Πρόταση V.9,** έχουμε: ΑΖ΄=ε και Ε΄Ζ΄=δ. Συνεπώς, από την **Πρόταση Ι.7-8** τα τρίγωνα ΑΕ΄Ζ΄ και ΔΕΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν ίσα τα υπόλοιπα στοιχεία τους, δηλαδή:

$$\angle A=\angle \Delta, \angle E'=\angle E,\ \angle Z'=\angle Z\ (4).$$

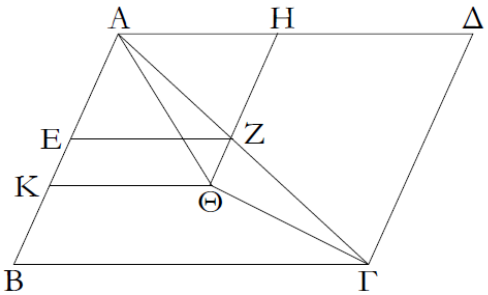
Από τις σχέσεις (2) και (4) τώρα, συνάγεται άμεσα το ζητούμενο, δηλαδή ότι: ∠Α=∠Δ, ∠Β=∠Ε, ∠Γ=∠Ζ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.5 **χρησιμοποιήθηκε η Αρχή του Ευδόξου**, μέσω της μη στοιχειώδους Πρότασης V.9.
- Η Πρόταση V.5 είναι αντίστροφη της V.4 και αποτελεί και αυτή ένα ακόμη χρήσιμο κριτήριο ομοιότητας.

Πρόταση VI.26	**Αν από ένα παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί ένα παραλληλόγραμμο, όμοιο και ομοίως κείμενο προς το όλο και έχοντας μία κοινή γωνία με αυτό, τούτο είναι περί την ίδια διάμετρο με το όλο.**



Απόδειξη: Θεωρούμε ότι από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ αφαιρείται το παραλληλόγραμμο ΑΖ, όμοιο κα ομοίως κείμενο προς το όλο και έχοντας τη γωνία ΔΑΒ κοινή με αυτό. Ισχυριζόμαστε ότι το ΑΒΓΔ έχει κοινή διάμετρο με το ΑΖ.

Εάν όχι, τότε έστω η ΑΘΓ η διάμετρος ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΗΖ ώστε να περάσει από το Θ και από το Θ φέρουμε τη ΘΚ παράλληλη προς τις ΑΔ, ΒΓ (**Πρόταση Ι.31**).

Επειδή λοιπόν το ΑΒΓΔ είναι περί την ίδια διάμετρο με το ΚΗ, από την **Πρόταση VI.24**, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{HA}{AK}.$$

Από την ομοιότητα, τώρα, των ΑΒΓΔ και ΕΗ προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{HA}{AE}.$$

Συνεπώς, από **Πρόταση V.11**,

$$\frac{HA}{AK} = \frac{HA}{AE}$$

και τελικά, από **Πρόταση V.9**, επειδή η ΗΘ έχει τον ίδιο λόγο με κάθε μία

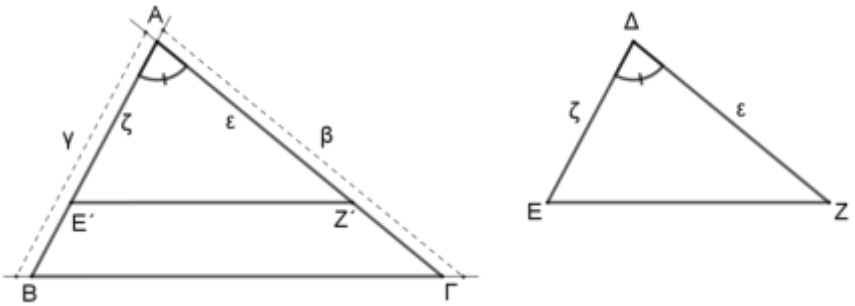
από τις ΑΚ και ΑΕ, θα είναι ΑΚ=ΑΕ, δηλαδή η μικρότερη είναι ίση με τη μεγαλύτερη. Άτοπο! Άρα δεν ισχύει ότι δεν έχουν κοινή διάμετρο τα ΑΒΓΔ, ΑΖ. Επομένως, τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΖ έχουν κοινή διάμετρο.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Λαμβάνοντας υπόψη την παρατήρηση του Heath ([H1], σ. 256), ότι δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ευθεία γραμμή είναι διάμετρος και των δύο παραλληλογράμμων, πράγμα το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε, υποθέσαμε εδώ ότι η ΑΘΓ είναι διάμετρος μόνο του ΑΒΓΔ και όχι του ΑΖ, όπως υποθέτει η απόδειξη των *Στοιχείων*.

Πρόταση VI. 6	Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου και τις πλευρές στις οποίες περιέχονται οι ίσες γωνίες ανάλογες, τότε τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές.



Απόδειξη: Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ∠Α=∠Δ. Θέτουμε ΑΒ=γ, ΑΓ=β, ΔΕ=ζ, ΔΖ=ε. Αν ισχύει:

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\zeta}{\varepsilon}$$

θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές, δηλαδή: ∠Α=∠Δ, ∠Β = Ε και ∠Γ=Ζ.

Έστω Ε΄ σημείο της ΑΒ ώστε ΑΕ΄=ζ και έστω Ζ΄ σημείο της ΑΓ ώστε ΑΖ΄=ε. Φέρουμε την ευθεία Ε΄Ζ΄. Τότε, από την **Πρόταση Ι.4** τα τρίγωνα ΑΕ΄Ζ΄ και ΔΕΖ είναι ίσα και θα έχουν ίσα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους, οπότε ∠Ε΄=∠Ε, ∠Ζ΄=∠Ζ.

Από την **Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)** έχουμε:

$$\frac{AB}{AE'}=\frac{\gamma}{\zeta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{A\Gamma}{AZ'}.$$

και συνεπώς, από την **Πρόταση VI.2β** οι ΒΓ και Ε΄Ζ΄ είναι παράλληλες.

Τότε, όμως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕ΄Ζ΄ είναι ισογώνια, αφού, λόγω της **Πρότασης Ι.29**, ∠Β = ∠Ε΄ και ∠Γ=∠Ζ΄ και έχουν κοινή τη γωνία Α.

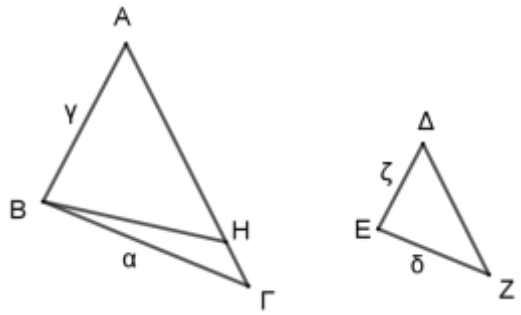
Επομένως, και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ θα είναι ισογώνια, αφού ∠Α=∠Δ, ∠Β = ∠Ε΄ = Ε και ∠Γ=∠Ζ΄=Ζ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.6 **χρησιμοποιήθηκε η Αρχή του Ευδόξου, μέσω της μη στοιχειώδους Πρότασης V.16 (Εναλλάξ).**
- Οι προτάσεις VI.6 και VI.2β είναι ουσιαστικά ίδιες. Η μόνη διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι στην VI.6 έχουμε δύο τρίγωνα αντί για ένα και στο ότι η αναλογία των πλευρών δίνεται στην εναλλάξ μορφή της.

Πρόταση VI.7	Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ. Θέτουμε ΒΓ=α, ΑΒ=γ, ΕΖ=δ, ΔΕ=ζ. Αν ισχύουν τα εξής: ∠Α=∠Δ , $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}$ οι γωνίες Γ, Ζ είναι και οι δύο οξείες, ή και οι δύο αμβλείες, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισογώνια.



Απόδειξη: Ισχυριζόμαστε ότι ∠Β = ∠Ε.

Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι ίσες. Τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από την άλλη. Έστω ότι ∠Β>∠Ε

Από την **Πρόταση Ι.23**, μπορούμε να κατασκευάσουμε γωνία ∠ΑΒΗ με κορυφή Β και μία πλευρά ΑΒ, τέτοια ώστε ∠ΑΒΗ = ∠Ε.

Τότε, από την **Πρόταση 1.32**, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΖ είναι ισογώνια, οπότε ∠ΒΗΑ = ∠Ζ και από την **Πρόταση VI.4**, θα ισχύει:

$$\frac{\alpha'}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}.$$

Όμως, από υπόθεση είναι:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}.$$

Άρα, από την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{\alpha'}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

και επομένως, α΄=α (**Πρόταση V.9**) και ∠Γ = ∠ΒΗΓ (**Πρόταση Ι.5**).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν η γωνία ∠Γ είναι οξεία, τότε και η ∠ΒΗΓ είναι οξεία, οπότε η γωνία ∠ΒΗΑ θα είναι αμβλεία (**Πρόταση Ι.13**) και συνεπώς η γωνία ∠Ζ είναι αμβλεία.
- Αν η γωνία∠Γ είναι αμβλεία, τότε και η ∠ΒΗΓ είναι αμβλεία, οπότε η γωνία ∠ΒΗΑ θα είναι οξεία (**Πρόταση Ι.13**) και συνεπώς η γωνία ∠Ζ

είναι οξεία.

Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις καταλήξαμε σε άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι οι γωνίες Β και Ε δεν είναι ίσες. Άρα θα είναι ∠Β=∠Ε και συνεπώς, αφού από υπόθεση είναι και ∠Α=∠Δ, από **Πρόταση Ι.32**, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ θα είναι ισογώνια.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.7 **χρησιμοποιήθηκε η Αρχή του Ευδόξου, μέσω της μη στοιχειώδους Πρότασης V.9.**
- Η απόδειξη της Πρότασης VI.7 που δώσαμε εδώ δε διαφέρει ουσιαστικά από την απόδειξη των Στοιχείων.
- Στο συμπέρασμα της πρότασης στα *Στοιχεία* αναφέρεται ότι τα τρίγωνα είναι ισογώνια και έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται από τις ανάλογες πλευρές.

Ενότητα 2.2: Από ισότητα εμβαδών σε αναλογία και αντίστροφα

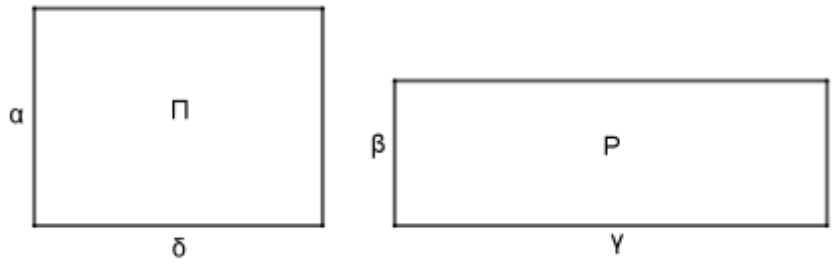
Στην ενότητα VI.13-17 η πιο βασική Πρόταση είναι η VI.14. Οι Προτάσεις VI.14-17 αποτελούνται από τις ευθείες Προτάσεις VI.14α-VI.17α (οι οποίες δε χρησιμοποιούν την Αρχή του Ευδόξου και είναι στοιχειώδεις) και τις αντίστροφες Προτάσεις VI.14β-VI.17β (οι οποίες χρησιμοποιούν την Πρόταση V.9 και άρα την Αρχή του Ευδόξου και δεν είναι στοιχειώδεις). Τις παραθέτουμε σε δύο ξεχωριστές υποενότητες:

[2.2α] Οι στοιχειώδεις Προτάσεις VI.13 & VI.14α-17α

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί την Ενότητα [2α] της εργασίας [ΝΦ2]
των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 36-38.

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση με την Πρόταση VI.16α, για την απόδειξη της οποίας θα χρησιμοποιηθεί μόνο ο Ορισμός V.5, και η οποία μας λέει ουσιαστικά ότι *τα ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν τις βάσεις τους αντιστρόφως ανάλογες προς τα ύψη τους.* Θα συνεχίσουμε με την VI.17α, ειδική περίπτωση της VI.16α και την VI.13, άμεση συνέπεια της VI.16α.

Πρόταση VI. 16α	1. Αν α,β,γ,δ ευθύγραμμα τμήματα και αδ =βγ, τότε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. 2. Αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π με δύο πλευρές α,δ είναι ίσο με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ με πλευρές β,γ, τότε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.



Απόδειξη: 1. Θα χρησιμοποιήσουμε τον **Ορισμό V.5** της αναλογίας.

Έστω μ,ν φυσικοί αριθμοί. Θα δείξουμε ότι:

(i) $\mu\beta = \nu\alpha$ αν και μόνο αν $\mu\delta = \nu\gamma$

(ii) $\mu\beta < \nu\alpha$ αν και μόνο αν $\mu\delta < \nu\gamma$

(iii) $\mu\beta > \nu\alpha$ αν και μόνο αν $\mu\delta > \nu\gamma$

Αποδεικνύουμε την (i).

Αν μβ=να, τότε μβγ=ναγ, από **Πρόταση Ι.36**. Αλλά, από υπόθεση βγ = αδ, άρα μαδ=ναγ. Τότε, από την **Πρόρταση Ι.36**, μδ=νγ.

Για την απόδειξη της (ii) και (iii) αρκεί να θεωρήσουμε αυτό που είναι **προφανές συμπέρασμα της Πρότασης Ι.36** ότι, δηλαδή, «μεταξύ παραλληλογράμμων με άνισες βάσεις, που βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τη μεγαλύτερη βάση» ([Η1], σ. 193).

2. Άμεση από την 1.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η Πρόταση VI.16α **δε χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου**.
- Η απόδειξη της Πρότασης VI.16α που δίνεται στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί την VI.14 και όχι τον Ορισμό V.5.

Πρόταση VI. 17α	Αν α,β,γ τρία ευθύγραμμα τμήματα, τέτοια ώστε $\alpha\gamma=\beta^2$, τότε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$.

Απόδειξη: Ειδική Περίπτωση της **Πρότασης VI.16α.**

Κατασκευή μέσης αναλόγου

Πρόταση VI. 13	Δοθεισών δύο ευθειών α, β να κατασκευαστεί η μέση ανάλογος γ, δηλαδή ευθεία γ ώστε $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$.

Απόδειξη: Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π με πλευρές α,β. Από την **Πρόταση ΙΙ.14**, μπορούμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο πλευράς γ ίσο προς τον δοθέν ορθογώνιο Π, δηλαδή μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθεία γ, ώστε $\gamma^2=\alpha\beta$.

Τότε, όμως, από την **Πρόταση VI.16α**, θα ισχύει

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}.$$

ό.έ.δ.

Σχόλια Σ. Νεγρεπόντη – Β. Φαρμάκη στην Πρόταση VI.13 ([ΝΦ1], σελ. 251-253):

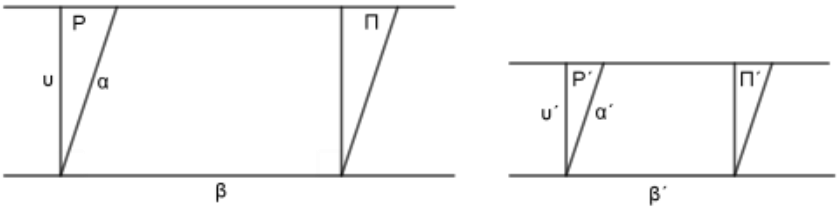
Η απόδειξη της VI.13 στα *Στοιχεία* δίδει και μια δεύτερη απόδειξη της Πρότασης II.14, η οποία αναφέρεται στην κατασκευή τετραγώνου ίσου με δοθέν ευθύγραμμο χωρίο. Όμως ήδη στην Πυθαγόρεια Πρόταση I.45 έχει κατασκευασθεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο χωρίο, οπότε στην Πρόταση II.14 κατασκευάζεται τετράγωνο ίσο με δοθέν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι στην Πρόταση II.14 κατασκευάζεται ο γεωμετρικός μέσος δύο ευθειών. Δηλαδή, δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και β να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα γ ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και β να είναι ίσο με τετράγωνο πλευράς γ, δηλαδή $γ^2=αβ$.

Ο Mueller και άλλοι θεωρούν χρονικά πρότερη την απόδειξη στην VI.13. Όμως, αν επιχειρήσουμε να αποδείξουμε την Πρόταση II.14, δηλαδή την κατασκευή του γεωμετρικού μέσου δύο ευθειών, κατασκευάζοντας πρώτα τη μέση ανάλογο των ευθειών με την Πρόταση VI.13 και ακολούθως επικαλούμενοι την Πρόταση VI.14, τότε καταλήγουμε σε απόδειξη της Πρότασης II.14 με χρήση της Πρότασης V.9 και άρα της Αρχής του Ευδόξου, στην οποία βασίζεται η Πρόταση V.9. Μια τέτοια απόδειξη δεν μπορεί να είναι ικανοποιητική, διότι καταλήγει η τετραγωνοποίηση κάθε ευθυγράμμου χωρίου να απαιτεί θεωρία λόγων και μάλιστα με χρήση της Αρχής του Ευδόξου, ενώ η Πρόταση II.14 δε χρησιμοποιεί τίποτε από αυτά.

Συνεχίζουμε με την Πρόταση VI.14α. Λέει ότι *στα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες*. Η Πρόταση αυτή είναι πιο γενική από τη VI.16α, την οποία χρησιμοποιούμε για την απόδειξή της. Για την απόδειξη της VI.14α θα χρειαστούμε επίσης και το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα για την Πρόταση VI.14α

Πρόταση VI. A	Αν Π, Π΄ ισογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές α, β και α΄, β΄, αντίστοιχα, και Ρ, Ρ΄ είναι τα αντίστοιχα ορθογώνια παραλληλόγραμμα μεταξύ των αυτών παραλλήλων, με πλευρές β, υ και β΄, υ΄, αντίστοιχα, τότε: Π=Ρ=βυ και Π΄=Ρ΄=β΄υ΄ Ισχύει η αναλογία $\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{\alpha}{\alpha'}$.



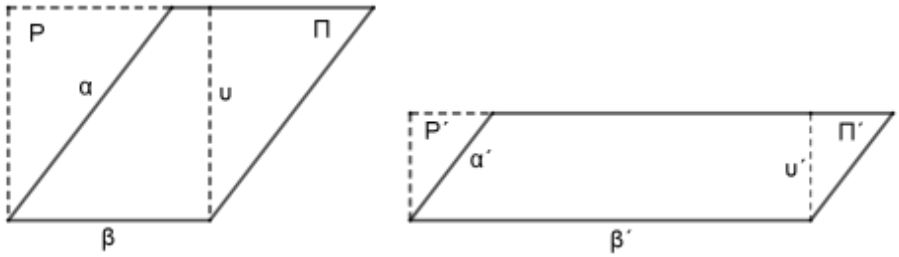
Απόδειξη:

1. Είναι ήδη γνωστό από την **Πρόταση Ι.35**.
2. Τα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές υ, α και υ΄, α΄ είναι ισογώνια (λόγω της ισογωνιότητας των παραλληλογράμμων Π, Π΄), οπότε από **Πρόταση VI.4**, όμοια και συνεπώς θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

ό.έ.δ.

Πρόταση VI. 14α	Αν Π και Π΄ είναι ισογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές α, β και α΄, β΄, αντίστοιχα, και Π=Π΄, τότε ισχύει η αναλογία: $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta'}{\beta}$.



Απόδειξη: Θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μεταξύ των παραλλήλων του Π, με την ίδια βάση β και ύψος υ.

Ομοίως, θέτουμε Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μεταξύ των παραλλήλων του Π, με την ίδια βάση β και ύψος υ.

Ομοίως, θέτουμε Ρ΄ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μεταξύ των παραλλήλων του Π΄, με την ίδια βάση β΄ και ύψος υ΄.

Τότε, από την Πρόταση VI.Α, έχουμε Π=Ρ=βυ, Π΄=Ρ΄=β΄υ΄ και

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}.$$

Εφόσον, όμως, Π=Π΄ θα είναι βυ=β΄υ΄. Άρα, από Πρόταση VI.16α θα έχουμε:

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{\beta'}{\beta}.$$

Τελικά, από Πρόταση V. 11 (μεταβατικότητα της αναλογίας) θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta'}{\beta}.$$

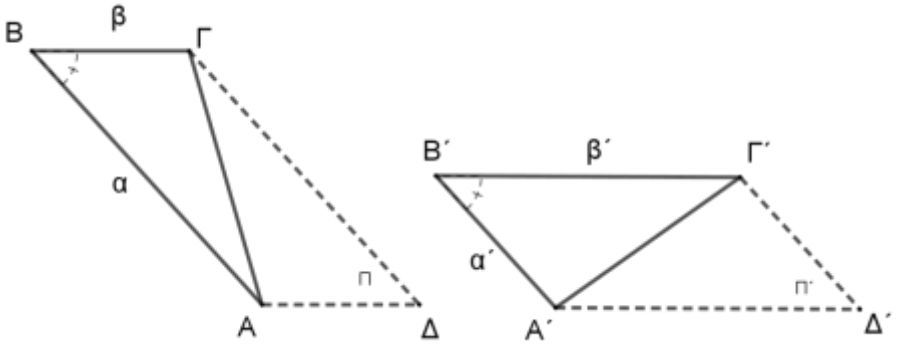
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.14α **δε χρησιμοποιήθηκε η Αρχή του Ευδόξου.**
- Δεν θεωρούμε ορθή την συναγωγή της VI.14α από την VI.23, όπως είχε προτείνει ο de Morgan, διότι η VI.14α έχει απόδειξη η οποία δεν χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου και έτσι είναι σαφώς πιο στοιχειώδης από την VI.23. (Βλ. σχόλια του Heath στην Πρόταση VI.14).

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση αυτής της ενότητας με την Πρόταση VI.15α, άμεση συνέπεια της VI.14α, η οποία μας λέει ότι *στα ίσα τρίγωνα που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.*

Πρόταση VI. 15α	**Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ με ΑΒ=α, ΒΓ=β, Α΄Β΄=α΄, Β΄Γ΄=β΄ και ∠ΑΒΓ=∠Α΄Β΄Γ΄. Αν ΑΒΓ=Α΄Β΄Γ΄ τότε ισχύει η αναλογία:** $$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\beta}.$$



Απόδειξη: Σχηματίζω τα παραλληλόγραμμα Π=ΑΒΓΔ με πλευρές α, β και Π΄=Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με πλευρές α΄, β΄ .

Τότε, από την **Πρόταση Ι.34** αυτά είναι ίσα και ισογώνια. Άρα, από **Πρόταση V.14α**,

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

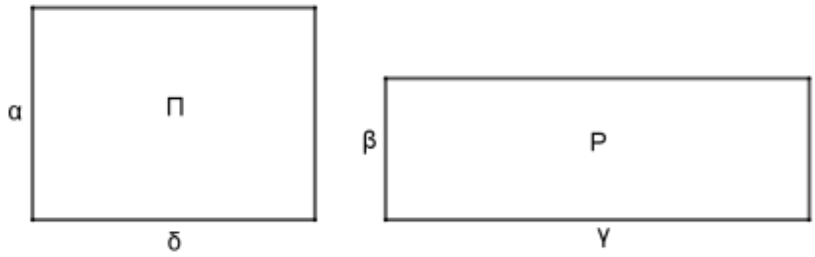
ό.έ.δ.

[2.2β] Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.14β-17β

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί την Ενότητα [2β] της εργασίας [ΝΦ2] των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 39-40.

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση με την Πρόταση VI.16β, για την απόδειξη της οποίας θα χρησιμοποιηθούν οι Προτάσεις VI.1 και V.9, και η οποία μας λέει ουσιαστικά ότι, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν τις βάσεις τους αντιστρόφως ανάλογες προς τα ύψη τους είναι ίσα, και θα συνεχίσουμε με την VI.17β, ειδική περίπτωση της VI.16β και την VI.14β άμεση συνέπειά της.

Πρόταση VI. 16β	➢ Αν ισχύει η αναλογία $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},$$ τότε αδ=βγ. ➢ Αν οι πλευρές α,δ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π και οι πλευρές β, γ του ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ ικανοποιούν την αναλογία $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},$$ τότε αδ=βγ.



Απόδειξη: **1.** Από την **Πρόταση VI.1**, έχουμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$$

(Τα ορθογώνια με βάσεις α, β και κοινό ύψος δ, έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των βάσεων).

Για τον ίδιο λόγο, θα ισχύει ότι:

$$\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma\beta}{\delta\beta}$$

Όμως, από την υπόθεση και από **Πρόταση V.11**, θα είναι:

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}=\frac{\gamma\beta}{\delta\beta}$$

και τελικά, από **Πρόταση V.9,** αδ=βγ.

2. Άμεση από την (i).

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

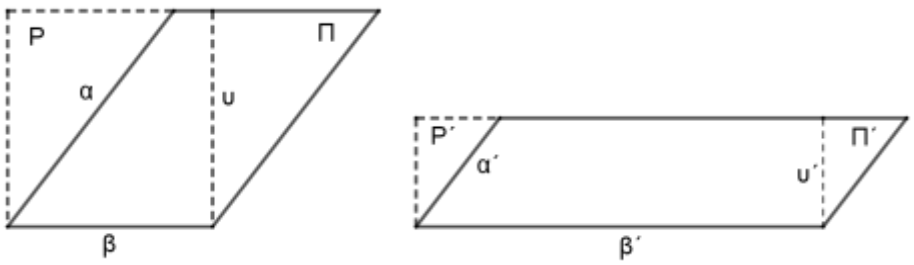
- Για την απόδειξη της Πρότασης VI.16β **είναι απαραίτητη η χρήση της Αρχής του Ευδόξου**, μέσω της Πρότασης V.9.

Πρόταση VI. 17β	Αν ισχύει η αναλογία $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$$ τότε αγ=β^2.

Απόδειξη: Ειδική περίπτωση της **Πρότασης VI.16β.**

Συνεχίζουμε με την Πρόταση VI.14β. Λέει ότι *στα ισογώνια παραλληλόγραμμα αν οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες τους είναι αντιστρόφως ανάλογες*, τότε αυτά είναι ίσα. Η Πρόταση αυτή είναι πιο γενική από τη VI.16β, την οποία χρησιμοποιούμε για την απόδειξή της.

Πρόταση VI.14β	Αν Π και Π΄ είναι ισογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές α,β και α΄,β΄, αντίστοιχα, και ισχύει η αναλογία $$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta'}{\beta}$$ τότε Π=Π΄.



Απόδειξη: Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ μεταξύ των παραλλήλων του Π με την ίδια βάση β και ύψος υ και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ΄ μεταξύ των παραλλήλων του Π΄ με την ίδια βάση β΄ και ύψος υ΄.
Τότε από την **Πρόταση VI.A** έπεται ότι Π=Ρ=υβ, Π΄=Ρ΄= υ΄β΄ και

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Όμως, από την υπόθεση και την **Πρόταση V.11** προκύπτει ότι:

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{\beta'}{\beta}.$$

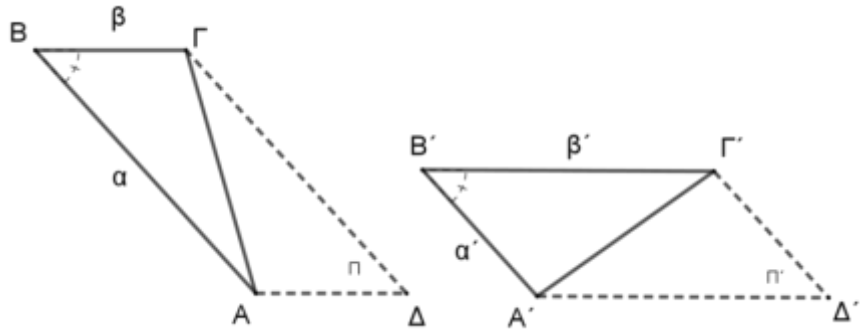
Τελικά, από την **Πρόταση VI.16β** έπεται ότι:

Π=υβ=υ΄β΄=Π΄.

ό.έ.δ.

Θα ολοκληρώνουμε την παρουσίαση αυτής της ενότητας με την Πρόταση VI.15β, άμεση συνέπεια της VI.14β, η οποία μας λέει ότι *τα τρίγωνα, που έχουν μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα.*

Πρόταση VI. 15β	Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ με ΑΒ=α, ΒΓ=β, Α΄Β΄=α΄, Β΄Γ΄=β΄. Αν ∠ΑΒΓ=∠Α΄Β΄Γ΄ και ισχύει η αναλογία: $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta'}{\beta}$ τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄είναι ίσα.



Απόδειξη: Σχηματίζω τα παραλληλόγραμμα Π=ΑΒΓΔ με πλευρές α, β και Π΄=Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με πλευρές α΄, β΄.

Τότε, από την υπόθεση ότι ∠ΑΒΓ=∠Α΄Β΄Γ΄ και την **Πρόταση Ι.34** αυτά είναι ισογώνια και επειδή ισχύει η αναλογία

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta'}{\beta}.$$

συμπεραίνουμε, από την **Πρόταση V.14β** ότι Π=Π΄. Αλλά τότε, πάλι από την **Πρόταση Ι.34,** τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ θα είναι ίσα.

ό.έ.δ.

Ενότητα 2.3: Συγκείμενος Λόγος - Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.19-20 & VI.22-23

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί την Ενότητα [3] της εργασίας [ΝΦ2]
των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 42-44.

Στην ενότητα αυτή βασική Πρόταση είναι η VI.23, η οποία διατυπώνεται ως εξής: *Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν λόγο ίσο με το συγκείμενο λόγο εκ των λόγων των πλευρών τους.* Η Πρόταση VI.23 χρησιμοποιεί την Πρόταση V.22 (δι' ίσου), κάτι το αναμενόμενο, εφόσον χρησιμοποιείται ο «συγκείμενος» λόγος. Η Πρόταση VI.19 προκύπτει άμεσα από την VI.23 και οι Προτάσεις VI.20[11] & VI.22 προκύπτουν φυσιολογικά από την VI.19.
Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό του «συγκείμενου λόγου» και συνεχίζουμε με την Πρόταση VI.B. Χρησιμοποιώντας την πρόταση αυτή θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη της Πρότασης VI.23.

Ορισμός (Συγκείμενος λόγος)	Έστω $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ δύο λόγοι ευθειών. Από την Πρόταση VI.12 υπάρχει μοναδική ευθεία ζ, ώστε $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\beta}{\zeta}$. Ορίζουμε τον συγκείμενο λόγο $\frac{\alpha}{\beta}*\frac{\gamma}{\delta}$ ως εξής: $$\frac{\alpha}{\beta}*\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}*\frac{\beta}{\zeta}=\frac{\alpha}{\zeta}.$$ Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε ο συγκείμενος λόγος $\frac{\alpha}{\beta}*\frac{\gamma}{\delta}$ λέγεται διπλασίων λόγος του $\frac{\alpha}{\beta}$ και συμβολίζεται: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$.

Πρόταση VI.B	Ισχύουν οι αναλογίες: $$\text{(i)}\ \frac{\alpha}{\beta}*\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\quad \text{(ii)}\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

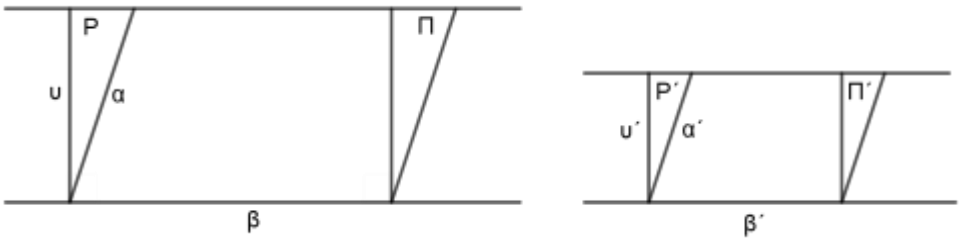
Απόδειξη: (i) Από **Πρόταση VI.12** υπάρχει ζ ώστε $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\beta}{\zeta}$ και από **Πρόταση VI.16β** ισχύει: γζ=βδ. Τότε, από τον **Ορισμό** του συγκείμενου λόγου και την **Πρόταση VI.1**, θα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}*\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\zeta}=\frac{\alpha\gamma}{\zeta\gamma}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

(ii) Ειδική περίπτωση της (i). ***ό.έ.δ.***

[11] Η VI.20 αποτελεί γενίκευση της VI.19 για όμοια ευθύγραμμα χωρία. Δε χρησιμοποιείται στην απόδειξη κάποιας άλλης πρότασης γι' αυτό και δε θα δώσουμε, εδώ, την απόδειξή της.

Πρόταση VI. 23	Αν Π και Π΄ είναι ισογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές α, β και α΄, β΄, αντίστοιχα, τότε: $$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha}{\alpha'} * \frac{\beta}{\beta'}$$



Απόδειξη: **α΄ απόδειξη:**

Αν Ρ, Ρ΄ είναι τα αντίστοιχα ορθογώνια παραλληλόγραμμα μεταξύ των αυτών παραλλήλων, με πλευρές β, υ και β΄, υ΄, αντίστοιχα, τότε από **Πρόταση Ι.35** θα ισχύουν οι σχέσεις: Π=Ρ=υβ και Π΄=Ρ΄=υ΄β΄.

Άρα,

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{P}{P'} = \frac{\upsilon\beta}{\upsilon'\beta'}.$$

Όμως, από την **Πρόταση VI.A**, έχουμε:

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Επίσης, από την **Πρόταση VI.12** υπάρχει ευθεία ζ τέτοια ώστε:

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\zeta}.$$

και από **Προτάσεις VI.1** και **V.11,**

$$\frac{\upsilon\beta}{\upsilon'\beta} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \quad \text{και} \quad \frac{\upsilon'\beta}{\upsilon'\beta'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\zeta}.$$

Έτσι από την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου)** θα έχουμε

$$\frac{\upsilon\beta}{\upsilon'\beta'} = \frac{\alpha}{\zeta}$$

και συνεπώς, από τον ορισμό του συγκείμενου λόγου:

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\upsilon\beta}{\upsilon'\beta'} = \frac{\alpha}{\zeta} = \frac{\alpha}{\alpha'} * \frac{\alpha'}{\zeta} = \frac{\alpha}{\alpha'} * \frac{\beta}{\beta'}$$

ό.έ.δ.

β΄ απόδειξη:

Αν Ρ, Ρ΄ είναι τα αντίστοιχα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όπως προηγουμένως, με χρήση των **Προτάσεων VI.A** και **VI.B.** προκύπτει:

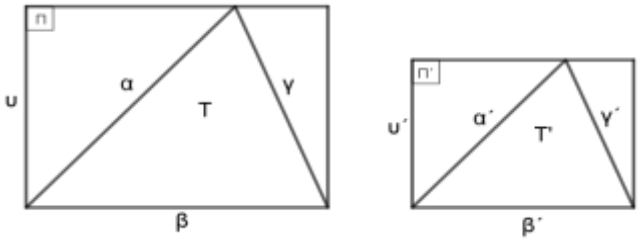
$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'} * \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} * \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\upsilon\beta}{\upsilon'\beta'} = \frac{P}{P'} = \frac{\Pi}{\Pi'}$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η α΄ απόδειξη της Πρότασης VI.23 χρησιμοποιεί την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου),** όπως και ο Heath ρητά σημειώνει, ενώ η β΄ απόδειξη χρησιμοποιεί την **Πρόταση V.16β** (μέσω της **Πρότασης VI.B**). Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, **είναι απαραίτητη** η Αρχή του Ευδόξου.

Πρόταση VI. 19	Θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα Τ και Τ΄ με πλευρές α,β,γ και α΄, β΄, γ΄, αντίστοιχα. Αν ισχύει: $$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'},$$ τότε: $$\frac{T}{T'} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2.$$



Απόδειξη: Θέτουμε το τρίγωνο Τ με βάση β μεταξύ δύο παραλλήλων και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π με βάση β και ύψος υ, μεταξύ των ιδίων παραλλήλων. Ομοίως, θέτουμε το τρίγωνο Τ΄ με βάση β΄ μεταξύ δύο παραλλήλων και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π΄ με βάση β΄ και ύψος υ΄, μεταξύ των ιδίων παραλλήλων.

Τότε, από την **Πρόταση VI.23**, και την **Πρόταση I.35,** θα έχουμε:

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha}{\alpha'} * \frac{\beta}{\beta'}.$$

Αλλά, από **Πρόταση I.41**, έχουμε ότι Π=2Τ, Π΄=2Τ και από **υπόθεση**

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας την **Πρόταση V.15,** θα έχουμε:

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2.$$

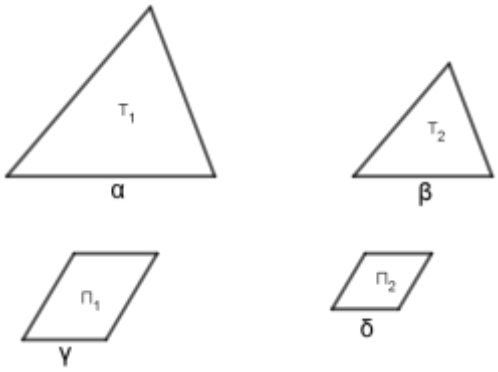
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η Πρόταση VI.19 χρησιμοποιεί την Πρόταση VI.23 και άρα **βασίζεται στην Αρχή του Ευδόξου.**

Πόρισμα	Αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε ο λόγος της πρώτης προς την τρίτη ισούται με το λόγο των ομοίων και ομοίως κείμενων ευθυγράμμων σχημάτων που κατασκευάζονται με πλευρές την πρώτη και τη δεύτερη ευθεία.

Πρόταση VI. 22α	Έστω α, β, γ και δ τέσσερις ευθείες τέτοιες ώστε να ισχύει η αναλογία: $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$ Με πλευρές α και β γράφουμε δύο όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα χωρία Τ1 και Τ2, αντίστοιχα, ενώ με πλευρές γ και δ γράφουμε δύο όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα χωρία Π1 και Π2, αντίστοιχα. Τότε ισχύει η αναλογία: $$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\Pi_1}{\Pi_2}.$$



Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα T_1 και T_2 είναι τρίγωνα, ενώ τα Π_1 και Π_2 είναι τετράπλευρα.

Θεωρούμε ευθεία ξ που είναι η τρίτη ανάλογος των α, β και ευθεία ο που είναι η τρίτη ανάλογος των γ, δ. Τότε, από **Πρόταση VI.11**, θα έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\xi} \text{ και } \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\delta}{o}.$$

και, λόγω της υπόθεσης, και της **Πρότασης V.11** θα είναι:

$$\frac{\beta}{\xi}=\frac{\delta}{o}$$

Ακόμα, από την **Πρόταση V.22 (δι' ίσου)** θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\xi}=\frac{\gamma}{o}.$$

Όμως, από το Πόρισμα της **Πρότασης VI.19**, έχουμε:

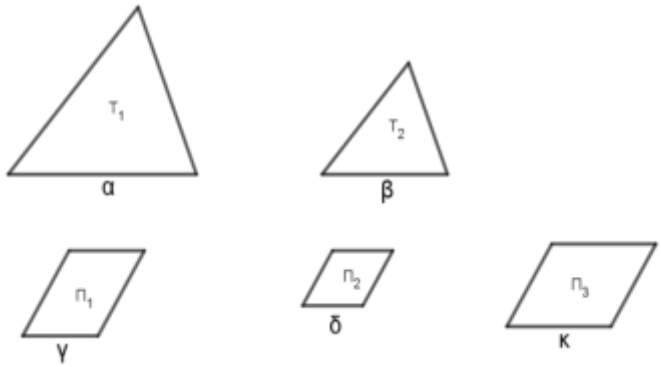
$$\frac{\alpha}{\xi}=\frac{T_1}{T_2} \text{ και } \frac{\gamma}{o}=\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$$

και συνεπώς από **Πρόταση V.11** προκύπτει η αναλογία:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\Pi_1}{\Pi_2}.$$

ό.έ.δ.

Πρόταση VI. 22β	Έστω α, β, γ και δ τέσσερις ευθείες. Με πλευρές α,β γράφουμε δύο όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα χωρία T_1 και T_2, αντίστοιχα, ενώ με πλευρές γ και δ γράφουμε δύο όμοια και ομοίως κείμενα ευθύγραμμα χωρία Π1 και Π2, αντίστοιχα, ώστε να ισχύει: $$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\Pi_1}{\Pi_2}.$$ Τότε, οι ευθείες α, β, γ και δ είναι ανάλογες, δηλαδή ισχύει: $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$



Απόδειξη: Όπως προηγουμένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα T_1 και T_2 είναι τρίγωνα, ενώ τα Π_1 και Π_2 είναι τετράπλευρα.

Έστω ότι δεν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Τότε, από την **Πρόταση VI.12**, θα υπάρχει ευθεία $\kappa \neq \delta$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\kappa}.$$

Εφαρμόζοντας την **Πρόταση VI.18**, γράφουμε τετράπλευρο Π_3 επί της πλευράς κ, όμοιο και ομοίως κείμενο προς τα τετράπλευρα Π_1 και Π_2. Τότε, από την **Πρόταση VI.21**, επειδή $\Pi_1 \approx \Pi_3$ και $\Pi_2 \approx \Pi_3$ θα είναι και $\Pi_1 \approx \Pi_2$. Όμως

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\kappa},$$

οπότε από **Πρόταση VI.22α**, θα είναι

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\Pi_1}{\Pi_3},$$

με $\Pi_1 \approx \Pi_3$ και ομοίως κείμενο. Όμως από την υπόθεση έχουμε και:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$$

με $\Pi_1 \approx \Pi_2$ και ομοίως κείμενο, οπότε από την **Πρόταση V.11 (μεταβατικότητα της αναλογίας)** προκύπτει ότι:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_3}.$$

Συνεπώς, από την **Πρόταση V.9**, θα είναι $\Pi_2 = \Pi_3$ και $\Pi_2 \approx \Pi_3$. Έτσι, τελικά θα είναι κ=δ και θα ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Ο διαχωρισμός της Πρότασης VI.22 σε VI.22α και VI.22β γίνεται για τεχνικούς λόγους, καθώς και οι δύο αυτές υποπροτάσεις **χρησιμοποιούν την Αρχή του Ευδόξου**.
- Η Πρόταση VI.22, όπως και οι VI.20, δε χρησιμοποιείται στην απόδειξη κάποιας άλλης πρότασης.

Ενότητα 2.4: Γενική παραβολή χωρίων

Το τελευταίο μέρος του βιβλίου VI, που περιλαμβάνει τις προτάσεις VI.25, 27, 28, 29 & 31, ασχολείται με την γενική μορφή της παραβολής χωρίων. Θα χωρίσουμε την ενότητα αυτή σε δύο υποενότητες: Η πρώτη περιλαμβάνει δύο μορφές της Πρότασης VI.25 (μία όπως στα *Στοιχεία* και μία γενική μορφή σε ισοδύναμη διατύπωση και την απόδειξή της από τον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη) καθώς και μία απόδειξη της Πρότασης VI.29 όπως στα *Στοιχεία.* Η δεύτερη περιλαμβάνει ουσιωδώς απλούστερες αποδείξεις από τον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη των Προτάσεων VI. 27, 28, 29 & 31.

[2.4α] Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.25 και VI.29

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί το δεύτερο μέρος της Ενότητας [3] και το πρώτο μέρος της Ενότητας [4] της εργασίας [ΝΦ2] των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 45-49.

Πρόταση VI.25	Δοθέντων ευθυγράμμου χωρίου Σ και ευθυγράμμου χωρίου Δ, να κατασκευασθεί ευθύγραμμο χωρίο Τ , όμοιο προς το Σ και ίσο με το Δ.

Απόδειξη: (Όπως στα *Στοιχεία*) Θέτουμε α τη μια πλευρά του ευθυγράμμου χωρίου Σ. Από την **Πρόταση I.44-I.45** κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π, με μία πλευρά την α, ώστε Π=Σ. Έστω γ η δεύτερη πλευρά του Π. Πάλι από την **Πρόταση I.44-1.45**, κατασκευάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Ρ, με μία πλευρά τη γ, ώστε Ρ=Δ. Έστω β η δεύτερη πλευρά του Ρ. Τότε, από την **Πρόταση VI.1,** θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\Pi}{P} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Από την **Πρόταση VI.13**, τώρα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη μέση ανάλογο μ των ευθειών α,β, ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\mu}{\beta}.$$

Από την **Πρόταση VI.18**, κατασκευάζεται επί της μ ευθύγραμμο χωρίο Τ, όμοιο προς το Σ. Από το **Πόρισμα της Πρότασης VI.19**, ο λόγος ομοιότητος των δύο ευθυγράμμων χωρίων είναι:

$$\frac{\Sigma}{T} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Συνεπώς, από την **Πρόταση V.11** έχουμε:

$$\frac{\Sigma}{T} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Pi}{P}$$

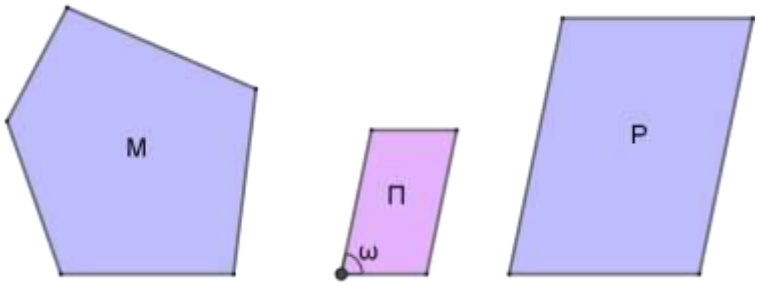
και εφόσον Σ=Π, έπεται από την **Πρόταση V.14,** ότι Τ=Ρ, άρα Τ=Δ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.25 **χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου**, μέσω των μη στοιχειωδών Προτάσεων VI.19 και V.14.
- Στην προηγούμενη απόδειξη ακολουθήσαμε -σε γενικές γραμμές- τα βήματα της απόδειξης των Στοιχείων. Λαμβάνοντας υπόψη τα σχόλια των Heath και Simson (βλ. Σχόλια του Heath για την Πρόταση VI.25, σελ. 254-255), αντί για τρίγωνο ΑΒΓ θεωρήσαμε ευθύγραμμο χωρίο Σ και αντί της μη στοιχειώδους Πρότασης V.16 (Εναλλάξ), χρησιμοποιήσαμε τη μη στοιχειώδη Πρόταση V.14.

Πρόταση VI. 25 (Γενική μορφή σε ισοδύναμη διατύπωση)	Δοθέντων ευθύγραμμου χωρίου Μ και παραλληλογράμμου Π (με λόγο πλευρών $\frac{\kappa}{\lambda}$ και μεταξύ τους γωνία ω), να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο Ρ ώστε Ρ=Μ και Ρ όμοιο προς Π (δηλ. με λόγο πλευρών $\frac{\kappa}{\lambda}$ και μεταξύ τους γωνία ω).



Απόδειξη: **Βήμα 1:** Κατασκευή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου Π*.
Θεωρούμε την πλευρά κ βάση του Π, και το Π μεταξύ δύο παραλλήλων.
Έστω Π* το μοναδικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο βρίσκεται μεταξύ των αυτών παραλλήλων όπως το Π και με την αυτή βάση κ.
Θέτουμε λ* για την κάθετη πλευρά του Π*.
Από την Πρόταση Ι.35, κλ*=Π*=Π.
Η γωνία της πλευράς λ του Π της πλευράς λ* του Π* είναι $\boldsymbol{\omega} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ (αν ω αμβλεία) ή $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\omega}$ (αν ω οξεία).

Βήμα 2: *Κατασκευή του Ρ* και απόδειξη ότι Ρ*=Μ και Ρ* όμοιο με Π*.*
[Κατασκευή Ν] Από Προτάσεις Ι.44-45, VI.1, VI.12, κατασκευάζεται ευθύγραμμο χωρίο Ν ώστε Ν:Μ=κ:λ*.
[[Έστω ρ προταθείσα ευθεία. Από Ι.44-45 υπάρχει μ ώστε μρ=Μ. Από VI.12, υπάρχει ν ώστε ν:μ=κ:λ*. Θέτουμε Ν=νρ. Από VI.1, Ν:Μ=νρ:μρ=ν:μ=κ:λ*]]
[Κατασκευή γ] Από Προτάσεις Ι.44-45 και ΙΙ.14, κατασκευάζεται ευθεία γ

ώστε γ2=Ν.
[Κατασκευή δ*] Από Πρόταση VI.12 κατασκευάζουμε ευθεία δ* ώστε γ:δ*=κ:λ*.
[Κατασκευή του Ρ*] Θέτουμε Ρ* για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με βάση γ και δεύτερη πλευρά/ύψος δ*. Σαφώς Ρ* είναι όμοιο προς Π* και Ρ*=γδ*
Από Πρόταση VI.1, γ2:γδ*=γ:δ*.
Άρα γ2:γδ*=γ:δ*=κ:λ*=Ν:Μ= γ2:Μ.
Από Πρόταση V.10, Μ=γδ*.
Άρα Μ=Ρ*.

Βήμα 3: Κατασκευή του ζητούμενου παραλληλογράμμου Ρ.
Θέτουμε Ρ για το μοναδικό παραλληλόγραμμο με βάση γ και μεταξύ των αυτών παραλλήλων όπως το Ρ, ώστε η δεύτερη πλευρά του Ρ, η δ, να σχηματίζει με την γ γωνία ω.
Από την Πρόταση Ι.35, Ρ=γδ*=Μ.
Ισχυρισμός. Το Ρ είναι όμοιο προς το Π.
[[Το Ρ είναι σαφώς ισογώνιο προς το Π.
Από την Πρόταση VI.2α, λ*:λ=δ*:δ.
Όπως έχουμε αποδείξει κ:λ*=γ:δ*.
Από τη Πρόταση V.22 (δι' ίσου), κ:λ=γ:δ.
Άρα το Ρ είναι όμοιο προς το Π]]

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η Πρόταση ΙΙ.14 είναι ειδική περίπτωση της VI.25 για $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{1}{1}$ και ω ορθή γωνία.
- Στα Στοιχεία η Πρόταση VI.25 χρησιμοποιείται στην απόδειξη των VI.28 & 29. Η χρήση της VI.25 για την απόδειξη των VI.28 & 29 στα Στοιχεία αποτελεί μια ανωμαλία, διότι η μεν VI.25 είναι στην ουσία μια συνέπεια της ΙΙ.14, ενώ η παραβολή χωρίων είναι προτάσεις αντίστροφες προς την ΙΙ.14. Επομένως οι αποδείξεις του καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη, πέραν της δραστικής απλοποίησης, ομαλοποιούν αυτή την ανωμαλία των Στοιχείων.
- Επίσης είναι παραπλανητικό η Πρόταση VI.25 να θεωρείται γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος (όπως υποστηρίζουν μερικοί συγγραφείς, π.χ. BenoArtmann). Η VI.25 γενικεύει μόνο την Πρόταση: Κάθε ευθύγραμμο χωρίο τετραγωνίζεται και αυτή είναι η μόνη σχέση της με το Πυθαγόρειο θεώρημα (Ι.45 & ΙΙ.14).

Δίνουμε στη συνέχεια τη γενικευμένη Πρόταση ΙΙ.6, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της Πρότασης VI.29.

Γενικευμένη Πρόταση ΙΙ.6	Έστω ευθείες $\alpha, \chi, \beta, \psi$, και λόγος μεγεθών $\frac{\kappa}{\lambda}$, ώστε: $$\frac{\alpha/2}{\beta} = \frac{\chi}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$ Τότε $$\frac{\alpha/2 + \chi}{\beta + \psi} = \frac{\kappa}{\lambda}$$ και $$\left(\frac{\alpha}{2} + \chi\right) \cdot (\beta + \psi) - \frac{\alpha}{2} \cdot \beta = \psi(\alpha + \chi).$$

Απόδειξη: Από την υπόθεση και την **Πρόταση V.18 (σύνθεση λόγου)**, έχουμε:

$$\frac{\alpha/2 + \chi}{\beta + \psi} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Από την **Πρόταση VI.1**, ισχύουν οι παρακάτω αναλογίες:

$$\frac{(\alpha/2 + \chi)^2}{(\alpha/2 + \chi)(\beta + \psi)} = \frac{\kappa}{\lambda},$$

$$\frac{(\alpha/2)^2}{\alpha/2 \cdot \beta} = \frac{\kappa}{\lambda},$$

$$\frac{\chi(\alpha + \chi)}{\psi(\alpha + \chi)} = \frac{\kappa}{\lambda},$$

Από την **Πρόταση V.17 (διαίρεση λόγου)**,

$$\frac{(\alpha/2 + \chi)^2 - (\alpha/2)^2}{(\alpha/2 + \chi)(\beta + \psi) - \alpha/2 \cdot \beta} = \frac{\kappa}{\lambda},$$

Άρα, από την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{(\alpha/2 + \chi)^2 - (\alpha/2)^2}{(\alpha/2 + \chi)(\beta + \psi) - \alpha/2 \cdot \beta} = \frac{\chi(\alpha + \chi)}{\psi(\alpha + \chi)}.$$

Το ζητούμενο έπεται από την **Πρόταση ΙΙ.6** και την **Πρόταση V.9**:

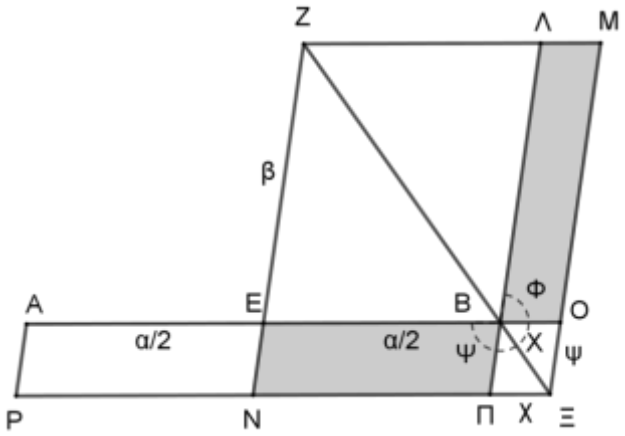
$$\left(\frac{\alpha}{2} + \chi\right) \cdot (\beta + \psi) - \frac{\alpha}{2} \cdot \beta = \psi(\alpha + \chi).$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η γενικευμένη Πρόταση ΙΙ.6 δε διατυπώνεται ρητά στα Στοιχεία, αλλά ενυπάρχει στην απόδειξη της Πρότασης VI.29. Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{1}{1}$, η γενικευμένη Πρόταση ΙΙ.6 ανάγεται ακριβώς στην Πρόταση ΙΙ.6.
- Για την απόδειξη της Γενικευμένης Πρότασης ΙΙ.6 **χρησιμοποιείται η Πρόταση V.9 και άρα η Αρχή του Ευδόξου.**

Πρόταση VI.29	Δοθέντων ευθείας α, ευθυγράμμου χωρίου Μ και λόγου μεγεθών κ/λ, να κατασκευασθούν ευθείες χ,ψ, ώστε χ/ψ=κ/λ και Μ=ψ(α+χ).



Απόδειξη : **Βήμα 1:** Κατασκευή μικρού παραλληλογράμμου ΕΒΛΖ.

Έστω ΑΒ=α η δοθείσα ευθεία. Από την **Πρόταση Ι.10** διχοτομούμε την ΑΒ και παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΑΕ=ΕΒ=α/2. Από την **Πρόταση VI.12** (εύρεση τετάρτης αναλόγου) κατασκευάζουμε ευθεία β ώστε:

$$\frac{ΕΒ}{β} = \frac{α/2}{β} = \frac{κ}{λ}.$$

Με χρήση της **Πρότασης VI.18** μπορούμε να κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ με πλευρές ΕΒ=$^{α}/_{2}$ και ΕΖ=β.

Βήμα 2: Κατασκευή μεγάλου παραλληλογράμμου ΝΞΜΖ, ώστε ο προκύπτων γνώμων ΦΧΨ να είναι ίσος κατά το εμβαδόν με το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο Μ.

Σύμφωνα με την **Πρόταση VI.25** κατασκευάζουμε ευθείες γ,δ, ώστε

$$\frac{γ}{δ} = \frac{κ}{λ}$$

και το παραλληλόγραμμο ΝΞΜΖ με πλευρές ΝΞ=γ και ΝΖ=δ, να είναι ίσο κατά το εμβαδόν με το άθροισμα του μικρού παραλληλογράμμου ΕΒΛΖ και του δοθέντος ευθυγράμμου χωρίου Μ. Άρα ο γνώμων ΦΧΨ είναι ίσος κατά το εμβαδόν με το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο Μ.

Βήμα 3: Κατασκευή ευθείας χ.

Προφανώς γ=ΝΞ>ΝΠ=$^{α}/_{2}$ και δ=ΖΝ>ΖΕ=β.

Θέτουμε χ=γ - $^{α}/_{2}$=ΠΞ=ΒΟ, ψ=δ-β=ΝΕ=ΠΒ=ΞΟ.

Βήμα 4: Με εφαρμογή της Γενικευμένης Πρότασης ΙΙ.6 προκύπτει άμεσα το ζητούμενο, δηλαδή ότι:

Μ=ψ(α+χ)και χ/ψ=κ/λ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

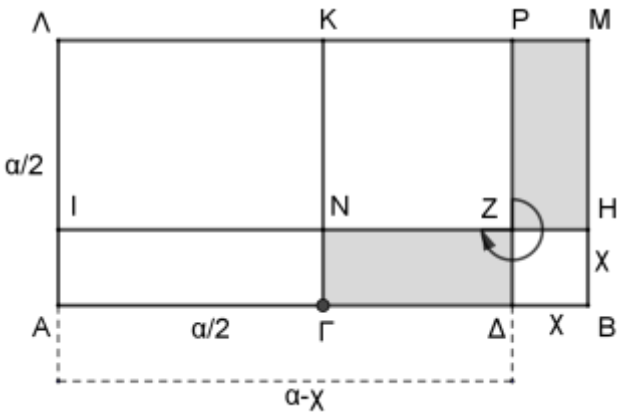
- Η απόδειξη της **Πρότασης VI.29** στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί τις **Προτάσεις VI.25** και **VI.26** (και όχι την **Πρόταση V.9**).

[2.4β] Απλούστερες αποδείξεις από τον Σ. Νεγρεπόντη των Προτάσεων VI. 27, 28, 29 & 31

Η παρούσα ενότητα ακολουθεί το δεύτερο μέρος της Ενότητας [4] της εργασίας [ΝΦ2] των Σ. Νεγρεπόντη & Β. Φαρμάκη, σελίδες 50-52.

Διορισμός στην Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη

Πρόταση VI.27 (Πυθαγόρεια μορφή)	Αν α, χ είναι δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα, τέτοια ώστε το χ να είναι μικρότερο του α, τότε το ορθογώνιο με πλευρές χ και α-χ είναι μικρότερο από το τετράγωνο με πλευρά $\alpha/2$. Δηλαδή, $$\text{αν } \chi < \alpha \text{ , τότε } \chi(\alpha - \chi) \leq \frac{\alpha^2}{4}$$



Απόδειξη: Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α. Από την **Πρόταση Ι.10** το ΑΒ διχοτομείται και έστω Γ το μέσον του. Τότε ΑΓ=ΓΒ=α/2. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΓΚΛ με βάση το ΑΓ και τετράγωνο ΓΒΜΚ με βάση το ΓΒ (**Πρόταση Ι.46**).

Ένα των χ, α-χ είναι μικρότερο του $\alpha/2$. Ας υποθέσουμε ότι $\chi < \alpha/2$. Έστω σημείο Δ επί της ΓΒ ώστε ΔΒ=χ και ΑΔ=α-χ. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΔΒΗΖ με βάση το ΔΒ (**Πρόταση Ι.46**). Προεκτείνουμε επ' ευθείας το ΗΖ προς το Ζ και έστω Ι το σημείο τομής της προέκτασής του με το ΑΛ και Ν το σημείο τομής της ΗΙ με το ΓΚ. Επίσης, προεκτείνουμε επ' ευθείας το ΔΖ προς το Ζ και έστω Ρ το σημείο τομής της προέκτασής του με το ΜΛ. Το ορθογώνιο ΓΔΖΝ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΖΗΜΡ (**Πρόταση Ι.43**). Προσθέτοντας και στα δύο ίσα ορθογώνια το τετράγωνο ΔΒΗΖ, προκύπτει ότι τα ορθογώνια ΓΒΗΝ και ΔΒΜΡ είναι ίσα.

Όμως το ορθογώνιο ΑΓΝΙ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΓΒΗΝ, καθώς οι πλευρές του είναι ίσες, άρα το ορθογώνιο ΑΓΝΙ είναι ίσο με το ΔΒΜΡ.

Προσθέτοντας στα δύο ίσα ορθογώνια το ορθογώνιο ΓΔΖΝ, προκύπτει ότι το ορθογώνιο ΑΔΖΙ είναι ίσο με το γνώμονα ΓΒΜΡΖΝ.
Άρα, το ορθογώνιο ΑΔΖΙ με πλευρές χ και α-χ είναι μικρότερο του τετραγώνου ΓΒΜΚ με πλευρά $\alpha/2$, δηλαδή ισχύει:

$$\chi(\alpha-\chi)<\frac{\alpha^2}{4}$$

Στην περίπτωση που το χ είναι μεγαλύτερο του $\alpha/2$, τότε $\alpha-\chi<\alpha/2$ και άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, το συμπέρασμα ισχύει.
Στην περίπτωση που το χ είναι ίσο με το $\alpha/2$, ισχύει προφανώς η ισότητα

$$\chi(\alpha-\chi)=\frac{\alpha^2}{4}.$$

ό.έ.δ.

Πόρισμα	**Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων α και μ, αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα χ μικρότερο του α, ώστε το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με χ και α-χ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς ίσης με το μ, δηλαδή** $\chi(\alpha-\chi)=\mu^2$ **τότε το μ είναι μικρότερο ή ίσο του** $\alpha/2$.

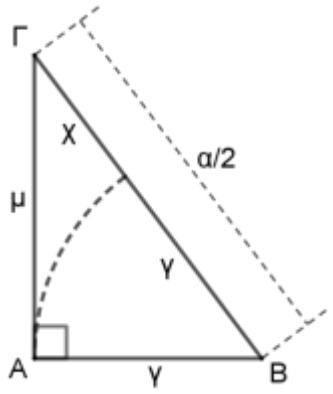
Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα χ<α, ώστε το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με χ και α-χ είναι ίσο με το τετράγωνο πλευράς ίσης με το μ, δηλαδή $\chi(\alpha-\chi)=\mu^2$.
Από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με χ και α-χ είναι μικρότερο ή ίσο του τετραγώνου με πλευρά ίση με $\alpha/2$, δηλαδή $\chi(\alpha-\chi)\leq\frac{\alpha^2}{4}$. Άρα το μ θα είναι μικρότερο ή ίσο του $\alpha/2$.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Ο Διορισμός στην Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη είναι η Πυθαγόρεια μορφή της Πρότασης VI.27 για ορθογώνια και χωρίς λόγους.

Πρόταση II 8/9γ	Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων α και μ, ώστε το $\alpha/2 \geq \mu$, να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα χ, ώστε $\alpha/2 > \chi$, και $\chi(\alpha - \chi) = \mu^2$.



Απόδειξη: Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = $\alpha/2$ και μια κάθετη πλευρά ΑΓ = μ. Αν ΑΒ = γ η άλλη κάθετη πλευρά του, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, θα ισχύει:

$$\mu^2 + \gamma^2 = (\alpha/2)^2$$

Βέβαια $\alpha/2 > \gamma$. Θέτουμε $\chi = \alpha/2 - \gamma$ και άρα $\alpha/2 > \chi$. Θα αποδείξουμε ότι η χ ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη. Πράγματι, από την Πρόταση ΙΙ.5, εφόσον α/2>χ,

$$\chi(\alpha - \chi) = (\alpha/2)^2 - (\alpha/2 - \chi)^2.$$

Άρα τελικά

$$\chi(\alpha - \chi) = \mu^2.$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η προηγούμενη Πρόταση είναι η Πυθαγόρεια μορφή της Πρότασης VI.28 για ορθογώνια και χωρίς λόγους.
- Η υπόθεση ότι το $\alpha/2$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μ, για τα δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα α και μ, στην Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη είναι αναγκαία, όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο πόρισμα.
- Η Πυθαγόρεια παραβολή τετράγωνων χωρίων κατ΄έλλεψη μπορεί να διατυπωθεί με πιο απλό και φυσικό τρόπο, ως εξής: *Δοθέντων ευθειών α και μ, ώστε το $\alpha/2$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μ να κατασκευασθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα χ και ψ, ώστε χ+ψ=α και χ.ψ=μ².*

Διορισμός στην γενική παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη

Πρόταση VI.27	Έστω α, χ, ψ, ω δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα και κ/λ δοθείς λόγος, έτσι ώστε χ<α και ισχύει η αναλογία: $$\frac{\alpha/2}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\chi}{\omega}$$ Θέτουμε Π το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές ψ και $\alpha/2$ και Ρ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές ω και α-χ. Τότε το Π είναι μεγαλύτερο (κατά το εμβαδό) από Ρ.

Απόδειξη: Θεωρούμε το τετράγωνο Π_1 με πλευρά $\alpha/2$ και Ρ1 το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές χ και α-χ. Τότε, από το διορισμό στην Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ΄ έλλειψιν, θα είναι $\Pi_1 > P_1$.

Ακόμα, από την υπόθεση και την **Πρόταση V.11** και την **Πρόταση VI.1**, θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\alpha/2 \cdot \alpha/2}{\psi \cdot \alpha/2} = \frac{\alpha/2}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\chi}{\omega} = \frac{\chi \cdot (\alpha - \chi)}{\omega \cdot (\alpha - \chi)} = \frac{P_1}{P}$$

Τελικά από την **Πρόταση V.14,** έπεται το ζητούμενο:

Π>Ρ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η απόδειξη της VI.27 στα Στοιχεία χρησιμοποιεί την Πρόταση VI.26.

Πρόταση VI.28	Δοθέντων ευθείας α, ευθυγράμμου χωρίου Μ, ώστε $M < \frac{\alpha^2}{4}$, και λόγου ευθειών κ/λ να κατασκευασθούν ευθείες χ, ψ, τέτοιες ώστε να ισχύουν: $$\frac{\chi}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda} \text{ και } M = \psi(\alpha - \chi).$$

Απόδειξη: **Βήμα 1:** Κατασκευή χωρίου Ν.

Από **Πρόταση Ι.44** και **Ι.45** κάθε ευθύγραμμο χωρίο είναι ίσο, κατά το εμβαδόν, με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που η μία πλευρά του είναι δοθείσα. Έστω, λοιπόν, ρ δοθείσα ευθεία. Τότε υπάρχει ευθεία m ώστε M=mρ. Όμως, από **Πρόταση VI.12** (Κατασκευή τέταρτης αναλόγου) υπάρχει ευθεία n, ώστε

$$\frac{n}{m} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Θέτουμε N=nρ. Από **Πρόταση VI.1** ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{N}{M} = \frac{n\rho}{m\rho} = \frac{n}{m} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Βήμα 2: Κατασκευή ευθείας μ, ώστε $N = \mu^2$.

Από **Πρόταση Ι.44-45** και **Πρόταση ΙΙ.14**, κάθε ευθύγραμμο χωρίο τετραγωνίζεται. Συνεπώς, για το χωρίο Ν, που κατασκευάστηκε στο Βήμα 1, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθεία μ, τέτοια ώστε $N = \mu^2$.

Βήμα 3: Κατασκευή ευθείας χ.

Για τη δοθείσα ευθεία α και την ευθεία μ, όπου $\mu < \frac{\alpha}{2}$, που κατασκευάστηκε στο Βήμα 2, από την **Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων κατ' έλλειψη,** μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθεία $\chi < \frac{\alpha}{2}$, ώστε $N = \mu^2 = \chi(\alpha - \chi)$.

Βήμα 4: Κατασκευή ευθείας ψ.

Από την **Πρόταση VI.12**, για την ευθεία χ, που κατασκευάστηκε στο Βήμα 3, και τις δοθείσες ευθείες κ, λ κατασκευάζεται ευθεία ψ ώστε:

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Τότε, από την **Πρόταση V.11**, ισχύει η αναλογία:

$$\frac{N}{M} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\chi}{\psi}.$$

Αλλά, από την **Πρόταση VI.1,** έχουμε:

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{\chi(\alpha - \chi)}{\psi(\alpha - \chi)} = \frac{N}{\psi(\alpha - \chi)}.$$

και από την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{N}{M} = \frac{N}{\psi(\alpha - \chi)}$$

Τελικά, από την **Πρόταση V.9**, προκύπτει το ζητούμενο:

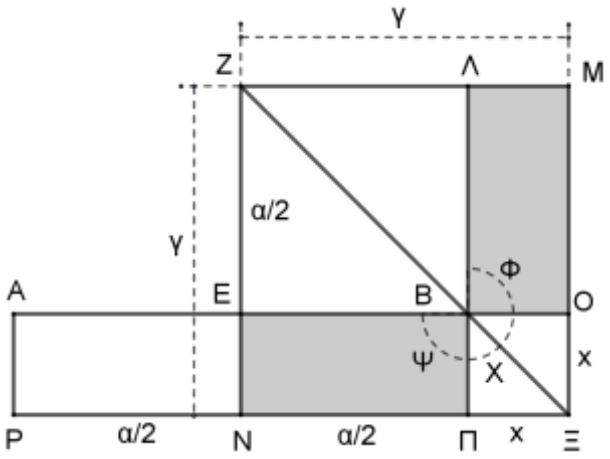
$$M = \psi(\alpha - \chi).$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η απόδειξη της VI.28 στα Στοιχεία χρησιμοποιεί τις Προτάσεις VI.25 και VI.26.

Πρόταση II.8/9β	Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων α και μ να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα χ ώστε: $$\chi(\alpha+\chi)=\mu^2.$$



Απόδειξη: Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α και τετράγωνο με πλευρά μ. Ζητείται να κατασκευασθεί τμήμα χ, ώστε αν προσθέσουμε στο ΑΒ (επί της ευθείας ΑΒ) το ευθύγραμμο τμήμα ΒΟ ίσο με το χ, τότε το ορθογώνιο με πλευρές ΑΟ, ίση προς α+χ, και ΟΞ, ίσο προς χ, να είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με το τετράγωνο πλευράς μ.

Θα αναπαραστήσουμε το δοθέν τετράγωνο χωρίο πλευράς μ ως Γνώμονα τετραγώνων και μετά θα εφαρμόσουμε την Πρόταση ΙΙ.6.

Βήμα 1: Κατασκευή μικρού τετραγώνου ΕΒΛΖ.

Έστω Ε το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ=α (**Πρόταση Ι.10**) Κατασκευάζουμε το μικρό τετράγωνο ΕΒΛΖ με βάση το ΕΒ=α/2 (**Πρόταση Ι.46**).

Βήμα 2: Κατασκευή μεγάλου τετραγώνου ΝΞΜΖ ώστε ο προκύπτων γνώμων ΦΧΥ να είναι ίσος (κατά το εμβαδόν) με τετράγωνο πλευράς μ. Έστω γ η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ΕΒ=$\alpha/2$ και μ, αντίστοιχα. Προφανώς $\gamma > \alpha/2$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα (**Πρόταση 2.8/9α**), κάθε τετράγωνο πλευράς γ είναι ίσο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων με πλευρές α/2 και μ αντίστοιχα, δηλαδή: $\gamma^2=(\alpha/2)^2+\mu^2$.

Προεκτείνουμε επ' ευθείας το ευθύγραμμο τμήμα ΖΕ προς το Ε στο σημείο Ν, ώστε ΖΝ=γ, και επίσης προεκτείνουμε επ' ευθείας το ΖΛ προς το Λ στο σημείο Μ, ώστε ΖΜ=γ, και συμπληρώνουμε το τετράγωνο ΖΜΞΝ πλευράς ίσης με γ.

Εφόσον το τετράγωνο ΕΒΛΖ έχει πλευρά ίση με $^{\alpha}/_{2}$, ο γνώμων ΦΧΥ που σχηματίζεται είναι ίσος κατά το εμβαδόν με τετράγωνο πλευράς μ.

Βήμα 3: Κατασκευή ευθείας χ.

Προφανώς, $ZN = \gamma > {}^{\alpha}/_{2} = ZE$. Θέτουμε:

$\chi = ZN - ZE = NE = \gamma - {}^{\alpha}/_{2}$ (**Πρόταση Ι.3**).

Τότε ΝΕ=ΟΞ=ΠΞ=ΒΟ (**Πρόταση Ι.34**)

Βήμα 4: Εφαρμογή της Πρότασης ΙΙ.6.

Από την **Πρόταση ΙΙ.6** το τετράγωνο με πλευρά $EO = {}^{\alpha}/_{2} + \chi$ είναι ίσο κατά το εμβαδόν με το άθροισμα του ορθογωνίου με πλευρές ΒΟ=χ, ΑΟ=α+χ και του τετραγώνου με πλευρά $EB = {}^{\alpha}/_{2}$. Άρα, το μεγάλο τετράγωνο ΝΞΜΖ με πλευρά ΖΝ=ΖΕ+ΕΝ=ΕΒ+ΒΟ=ΕΟ είναι ίσο κατά το εμβαδόν με το άθροισμα του μικρού τετραγώνου ΕΒΛΖ με πλευρά $EB = {}^{\alpha}/_{2}$ και του ορθογωνίου με πλευρές ΒΟ=χ και ΑΟ=α+χ. Επομένως, ο γνώμων ΦΧΥ είναι ίσο κατά το εμβαδόν με το ορθογώνιο με πλευρές ΒΟ=χ και ΑΟ=α+χ.

Από το Δεύτερο βήμα, ο γνώμων ΦΧΥ είναι ίσος κατά το εμβαδόν με το τετράγωνο πλευράς μ.

Άρα, για $\chi = \gamma - {}^{\alpha}/_{2}$, το ορθογώνιο με πλευρές ΑΟ=α+χ και ΟΞ=ΒΟ=χ είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με το τετράγωνο πλευράς ίσης με μ, δηλαδή,

$$\chi(\alpha + \chi) = \mu^2.$$

ό.έ.δ.

Πυθαγόρεια Παραβολή ευθύγραμμων χωρίων καθ' υπερβολή

Πόρισμα	Δοθέντων ευθείας α και ευθύγραμμου χωρίου Μ να κατασκευασθεί ευθεία χ ώστε Μ=χ(α+χ).

Απόδειξη: Από Πρόταση ΙΙ.14 και Πρόταση Ι.44-45, κάθε ευθύγραμμο χωρίο τετραγωνίζεται, και άρα εφαρμόζεται η Πυθαγόρεια Παραβολή τετράγωνων χωρίων καθ' υπερβολή.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης ΙΙ.8/9β, που περιγράψαμε παραπάνω, έγινε κατά μίμηση της απόδειξης της Πρότασης VI.29.

Πρόταση VI.30	Έστω ΑΒ=α δοθείσα ευθεία. Να τμηθεί η ΑΒ με ένα σημείο Ε ώστε αν ΑΕ=χ, τότε: $$\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha-\chi}.$$

Απόδειξη: Από την **Πρόταση ΙΙ 8/9β** για τη δοθείσα ευθεία α και την ευθεία μ=α μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθεία χ τέτοια ώστε :

$$\chi(\alpha+\chi)=\alpha^2 \text{ ή ισοδύναμα } \alpha(\alpha-\chi)=\chi^2.$$

Από **Πρόταση VI.14α**, επειδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α-χ και το τετράγωνο με πλευρά χ είναι ισογώνια, θα έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha-\chi}.$$

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.30 στα Στοιχεία χρησιμοποιεί την VI.29, η οποία με τη σειρά της χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου (μέσω της Πρότασης VI.25). Όμως, η VI.30 ταυτίζεται με τη στοιχειώδη Πρόταση ΙΙ.11, και άρα **ασφαλώς δεν χρειάζεται την Αρχή του Ευδόξου.** Πράγματι, με την απόδειξη που δίνεται εδώ, εφαρμόζεται η Πυθαγόρεια παραβολή τετράγωνων χωρίων καθ' υπερβολή (Πρόταση ΙΙ 8/9β), στην ειδική περίπτωση που μ=α και η Πρόταση VI.14α, καμία από τις οποίες δε χρησιμοποιεί την Αρχή του Ευδόξου.

Πρόταση VI.29	Δοθέντων ευθείας α, ευθυγράμμου χωρίου Μ και λόγου ευθειών κ/λ να κατασκευασθούν ευθείες χ, ψ, τέτοιες ώστε να ισχύουν: $$\frac{\chi}{\psi}=\frac{\kappa}{\lambda} \text{ και } M=\psi(\alpha+\chi).$$

Απόδειξη: **Βήμα 1:** Κατασκευή χωρίου Ν.

Από **Πρόταση Ι.44 και Ι.45** κάθε ευθύγραμμο χωρίο είναι ίσο, κατά το εμβαδόν, με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που η μία πλευρά του είναι δοθείσα. Έστω, λοιπόν, ρ δοθείσα ευθεία. Τότε υπάρχει ευθεία m ώστε M=mρ. Όμως, από **Πρόταση VI.12** (Κατασκευή τέταρτης αναλόγου) υπάρχει ευθεία n, ώστε

$$\frac{n}{m}=\frac{\kappa}{\lambda}.$$

Θέτουμε N=nρ. Από **Πρόταση VI.1** ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{N}{M}=\frac{n\rho}{m\rho}=\frac{n}{m}=\frac{\kappa}{\lambda}.$$

Βήμα 2: Κατασκευή ευθείας χ.

Από Πυθαγόρεια Παραβολή ευθύγραμμων χωρίων καθ' υπερβολήν, για τη δοθείσα ευθεία α και το χωρίο Ν, που κατασκευάστηκε στο Βήμα 1, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθεία χ ώστε N=χ(α+χ).

Βήμα 3: Κατασκευή ευθείας ψ.

Από την **Πρόταση VI.12**, για την ευθεία χ, που κατασκευάστηκε στο Βήμα 2, και τις δοθείσες ευθείες κ, λ κατασκευάζεται ευθεία ψ ώστε:

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{\kappa}{\lambda}.$$

Τότε, από την **Πρόταση V.11**, ισχύει η αναλογία:

$$\frac{N}{M}=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\chi}{\psi}.$$

Αλλά, από την **Πρόταση VI.1**, έχουμε:

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{\chi(\alpha+\chi)}{\psi(\alpha+\chi)}=\frac{N}{\psi(\alpha+\chi)}.$$

και από την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{N}{M}=\frac{N}{\psi(\alpha+\chi)}$$

Τελικά, από την **Πρόταση V.9**, προκύπτει το ζητούμενο:

$$M=\psi(\alpha+\chi).$$

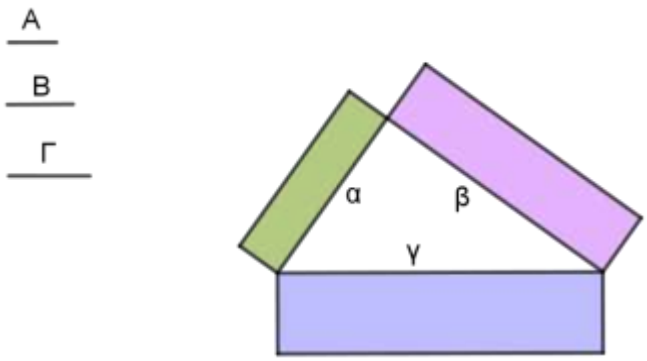
ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

- Η απόδειξη της Πρότασης VI.29 των Στοιχείων που περιγράψαμε παραπάνω, χρησιμοποιεί την Πυθαγόρεια Παραβολή ευθύγραμμων χωρίων καθ' υπερβολήν.

Γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα

Πρόταση VI.31	**Δοθέντων ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές α, β και υποτείνουσα γ, λόγου κ/λ και ευθειών Α, Β, Γ, ώστε:** $$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{\Gamma}{\gamma}=\frac{\kappa}{\lambda},$$ **τότε αΑ+βΒ=γΓ.**



Απόδειξη: Από την υπόθεση, την **Πρόταση VI.1** και την **Πρόταση V.11** ισχύει:

$$\frac{A\alpha}{\alpha^2}=\frac{B\beta}{\beta^2}=\frac{\Gamma\gamma}{\gamma^2}=\frac{\kappa}{\lambda},$$

Από την **Πρόταση V.18** (σύνθεση λόγου) και την **Πρόταση V.11**,

$$\frac{A\alpha+B\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\Gamma\gamma}{\gamma^2},$$

Τέλος, από την **Πρόταση V.9** και το Πυθαγόρειο θεώρημα ($\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$), προκύπτει αΑ+βΒ=γΓ.

ό.έ.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η **Πρόταση I.47** (Πυθαγόρειο Θεώρημα) είναι ειδική περίπτωση της **Πρότασης VI.31** για $\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{1}{1}$.
- Η απόδειξη της **Πρότασης VI.31** στα *Στοιχεία* χρησιμοποιεί την **VI.19** και μέσω αυτής την **V.22**.

Συμπερασματικά για **τον ρόλο της αρχής του Ευδόξου στο Βιβλίο VI των Στοιχείων** παρατηρούμε τα εξής:

Η αρχή του Ευδόξου (Όρος V.4):

- **Δεν παίζει κανένα ρόλο:**
  - Στη βασική Πρόταση **VI.1.**
  - Στις Προτάσεις **VI.2α, 3α, 4, 8-12, 18, 24**, που είναι στοιχειώδεις συνέπειες της Πρότασης VI.1, και οι οποίες αποδεικνύουν κάποια μορφής ομοιότητα από μια υπόθεση ισογωνιότητας ή παραλληλίας.
  - Στην Πρόταση **VI.21**, που εκφράζει τη μεταβατική ιδιότητα της ομοιότητας.
  - Στις Προτάσεις **VI.14α-17α**, οι οποίες αποδεικνύουν κάποια αναλογία από μια υπόθεση ισότητας εμβαδών.
  - Στην Πρόταση **VI.13** (κατασκευή μέσης αναλόγου).
  - Στην Πρόταση **VI.30** (κατασκευή άκρου και μέσου λόγου).

- **Χρησιμοποιείται:**
  - Στις Προτάσεις **VI.2β, 3β, 5, 26 & VI.6-7**, που αποδεικνύουν ισογωνιότητα ή παραλληλία από κάποια μορφής ομοιότητα.
  - Στις Προτάσεις **VI.14β-17β**, **πάντοτε μέσω της Πρότασης V.9.**
  - Στις Προτάσεις **VI.19, 20, 22, 23**, που αναφέρονται στο συγκείμενο λόγο, **μέσω της Πρότασης V.22 (δι' ίσου).**
  - Στις Προτάσεις **VI.25, 27, 28, 29 & 31**, που αναφέρονται στη παραβολή χωρίων.

Σχηματική Λογική Δομή του Βιβλίου VI των *Στοιχείων*

Ορισμοί	Προτάσεις Βιβλίων I, II	Προτάσεις Βιβλίου V				Προτάσεις Βιβλίου VI						VI
Ενότητα 2.1: Από ισογωνιότητα ή παραλληλία σε αναλογία ή ομοιότητα και αντίστροφα												
Ενότητα 2.1α: Η βασική Πρόταση VI.1 και οι στοιχειώδεις Προτάσεις VI.2α, 3α, 4, 8-12, 18, 24, 21												
Ορ. V.5												1
											1	2α
											2α	3α
											2α	4
											4	8
											4	9
											2α	10
											2α	12
											2α	11
											4	18
											2α	24
Ορ. VI.1												21
Ενότητα 2.1β: Οι μη στοιχειώδεις αντίστροφες Προτάσεις VI.2β, 3β, 5, 26 και οι Προτάσεις VI.6-7												
					9						2α	2β
					14						3α	3β
					9						4	5
					16						2β	6
					9						4	7
Ενότητα 2.2: Από ισότητα εμβαδών σε αναλογία και αντίστροφα												
Ενότητα 2.2α: Οι στοιχειώδεις Προτάσεις VI.13 & VI.14α-17α												
Ορ. V.5												16α
											16α	17α
											16α	13
											4	A
										A	16α	14α
											14α	15α
Ενότητα 2.2β: Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.14β-17β												
					9						1	16β
					[9]					16β		17β
					[9]					A	16β	14β
					[9]					14β		15β
Ενότητα 2.3: Συγκείμενος λόγος - Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.19-20 & VI.22-23												
									1	12	16β	B
					22				1	12	A	23 (A)
										B	A	23 (B)
											23	19
					22		11	12	18	19	21	22
Ενότητα 2.4: Γενική Παραβολή χωρίων												
Ενότητα 2.4α: Οι μη στοιχειώδεις Προτάσεις VI.25 και VI.29												
				10				1	13	18	19	25
	Γεν. II.6			[9]					12	18	25	29
Ενότητα 2.4β: Απλούστερες αποδείξεις από τον Σ. Νεγρεπόντη των Προτάσεων VI.27, 28, 29, 31												
	II.14				22			1	2α	12		25
	VI.27 (Πυθ)				14			1				27
	VI.28 (Πυθ)			9				1		12		28
	VI.29 (Πυθ)			9				1		12		29
	I.47			9				1			18	31
Η παραβολή χωρίων στα *Στοιχεία*												
				16	[22]			1	13	18	19	25
			[9]								26	27
			[9]	[16]	[22]		1	18	21	25	26	28
			[9]	[16]	[22]		18	21	24	25	26	29
			9					1	8	19	24	31

Επεξήγηση του πίνακα:

Στο τελευταίο κελί του πίνακα εμφανίζονται οι Προτάσεις του Βιβλίου VI με τη σειρά που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2, ενώ στις αμέσως προηγούμενες στήλες εμφανίζονται οι Προτάσεις των Βιβλίων VI, V, II & 1, καθώς και των ορισμών V.5 και VI.1, που χρησιμοποιούνται για την απόδειξή τους. Ο χρωματισμός στα κελιά σημαίνει ότι οι αντίστοιχες προτάσεις χρησιμοποιούν την αρχή του Ευδόξου, ενώ όταν μία πρόταση εμφανίζεται μέσα σε αγκύλες, όπως π.χ. [9], σημαίνει ότι η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται έμμεσα, μέσω κάποιας άλλης πρότασης. Στις τελευταίες γραμμές του πίνακα, δίνεται η σχηματική λογική δομή για την παραβολή χωρίων στα *Στοιχεία*.

Παράρτημα Α΄ - Βιβλίο Ι των *Στοιχείων*

Ορισμοί

Ορισμός Ι.19
Σχήματα εὐθύγραμμα ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Ευθύγραμμα σχήματα είναι αυτά που περιέχονται από ευθείες γραμμές, τρίπλευρα αυτά που περιέχονται από τρεις, τετράπλευρα αυτά που περιέχονται από τέσσερις και πολύπλευρα αυτά που περιέχονται από περισσότερες από τέσσερις ευθείες γραμμές.

Αιτήματα

Αίτημα 1
Ἤιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.

Αίτημα 2
Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
Κάθε πεπερασμένη ευθεία δύναται να προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως (και προς τα δύο άκρα της).

Αίτημα 3
Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
Με κάθε κέντρο και κάθε διάστημα (εννοεί ακτίνα) μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο.

Αίτημα 4
Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
Όλες οι ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.

Αίτημα 5
Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.
Αν ευθεία η οποία τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, όταν οι δύο ευθείες προεκταθούν επ’ άπειρον, θα συναντηθούν προς το μέρος του επιπέδου που σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες.

Κοινές έννοιες

Κοινή έννοια 1

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Αντικείμενα[12] που είναι ίσα με το ίδιο αντικείμενο είναι και μεταξύ τους ίσα.

Αν α=β και α΄=β, τότε α=α΄ (Μεταβατική ιδιότητα της ισότητας)

Κοινή έννοια 2

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Αν σε ίσα προστεθούν ίσα, τα αθροίσματα είναι μεταξύ τους ίσα.

Αν α=β και α΄=β΄, τότε α+α΄=β+β΄.

Κοινή έννοια 3

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπόλοιπα είναι μεταξύ τους ίσα.

Αν α=β και α΄=β΄, τότε α-α΄=β-β΄, όπου α>α΄ και β>β΄.

Κοινή έννοια 4

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Αντικείμενα που συμπίπτουν μεταξύ τους είναι ίσα.

Κοινή έννοια 5

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

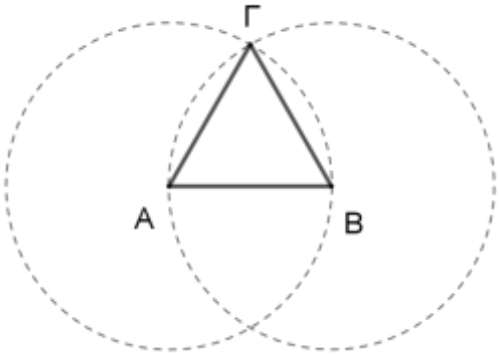
Το όλον είναι μεγαλύτερο από ένα μέρος του.

[12] Ο Ευκλείδης ποτέ δεν ξεκαθαρίζει ποια είναι τα αντικείμενα για τα οποία μιλά στις κοινές έννοιες. Από τη χρήση, όμως, των κοινών εννοιών στις προτάσεις των *Στοιχείων* συμπεραίνουμε ότι αυτά είναι τα ευθύγραμμα τμήματα (ευθείες), οι επιφάνειες και οι γωνίες. Επίσης, δεν εξηγεί πότε δύο ευθείες ή δύο ευθύγραμμα σχήματα ή δύο γωνίες είναι ίσες. Δεν ορίζει, δηλαδή, την ισότητα. Πάλι, από τη χρήση της ισότητας στις προτάσεις, συνάγεται ότι ίσες ευθείες είναι αυτές που έχουν ίσα μήκη, ίσες επιφάνειες αυτές που έχουν ίσα εμβαδά και ίσες γωνίες αυτές που έχουν ίσα μέτρα.

Προτάσεις

Πρόταση Ι.1

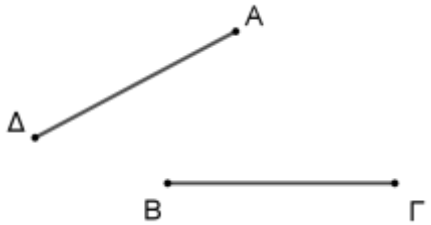
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Έστω δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με βάση το ΑΒ.

Πρόταση Ι.2

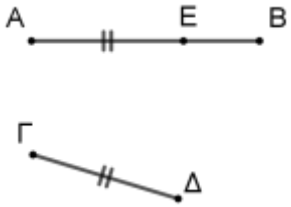
Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



Έστω δοθέν σημείο Α και δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Να κατασκευασθεί σημείο Δ, ώστε ΑΔ=ΒΓ.

Πρόταση Ι.3

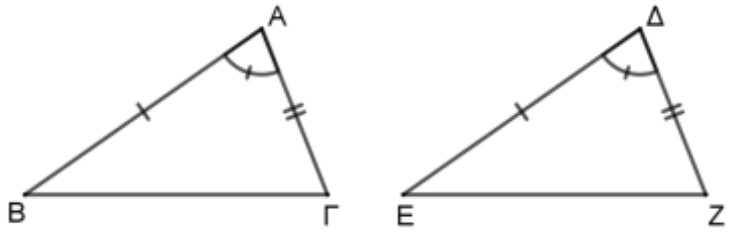
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ με ΑΒ>ΓΔ, να κατασκευασθεί σημείο Ε επί της ΑΒ ώστε ΑΕ=ΑΒ-ΓΔ.

Πρόταση Ι.4

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τα οποία έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους ίσες μία προς μία. Τότε, τα δύο τρίγωνα θα είναι ίσα (κατά το εμβαδόν), θα έχουν ίσες τις βάσεις τους και οι υπόλοιπες δύο γωνίες τους θα είναι, επίσης, ίσες μία προς μία.

Δηλαδή, αν

(i) ΑΒ=ΔΕ

(ii) ΑΓ=ΔΖ

(iii) ∠ΒΑΓ =∠ΕΔΖ

τότε,

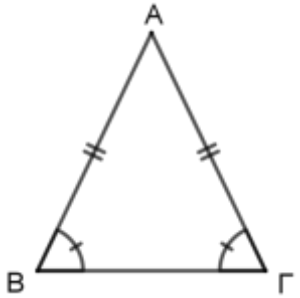
(i) τρίγ. ΑΒΓ=τριγ. ΔΕΖ,

(ii) ΒΓ=ΕΖ,

(iii) ∠ΑΒΓ =∠ΔΕΖ και ∠ΑΓΒ =∠ΔΖΕ

Πρόταση Ι.5

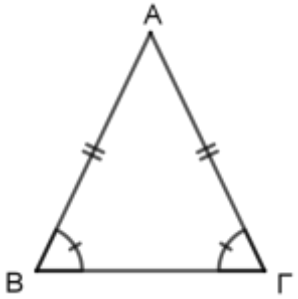
Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν…



Οι παρά τη βάσει γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, δηλαδή αν ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ=ΑΓ, τότε ∠ΑΒΓ =∠ΑΓΒ.

Πρόταση Ι.6 (Αντίστροφη της Ι.5)

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίαις ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



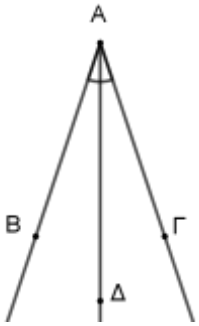
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ∠ΑΒΓ =∠ΑΓΒ. Τότε ΑΒ=ΑΓ.

Πρόταση Ι.7-Ι.8[13]

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ (με την ίδια βάση ΒΓ). Υποθέτουμε ότι ΑΒ = Α΄Β και ΑΓ= Α΄Γ. Τότε τα σημεία Α και Α΄ ταυτίζονται.

Πρόταση Ι.9

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

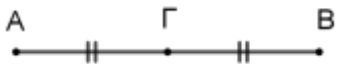


Να κατασκευασθεί η διχοτόμος ΑΔ δοθείσας ευθύγραμμης γωνίας ΒΑΓ.

[13] Οι διατυπώσεις του Ευκλείδη για τις προτάσεις Ι.7 και Ι.8 είναι πιο πολύπλοκες. Κατά κάποιον τρόπο, οι προτάσεις αυτές λένε ότι, αν δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε συμπίπτουν σε όλα τα σημεία τους.

Πρόταση Ι.10

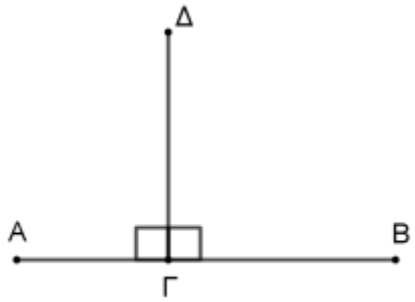
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



Έστω δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να τμηθεί το ΑΒ με ένα σημείο Γ, ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ να είναι ίσα.

Πρόταση Ι.11

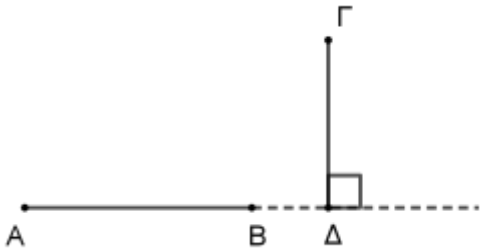
Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ ένα σημείο του. Να κατασκευασθεί η κάθετος στο Γ επί του ΑΒ, δηλαδή, να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ ώστε οι γωνίες ΔΓΑ, ΔΓΒ να είναι ορθές.

Πρόταση Ι.12

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον[14] ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

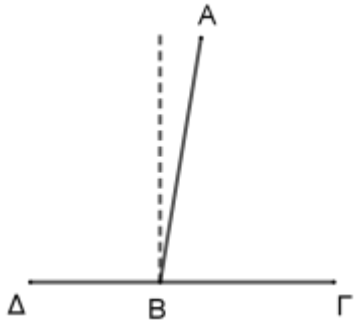


Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Γ εκτός της άπειρης ευθείας ΑΒ (δηλαδή, όσο και αν προεκτείνουμε την ΑΒ δε θα συναντήσει το Γ). Να κατασκευασθεί η κάθετος ΓΔ από το Γ στην ΑΒ ή (αν χρειαστεί) στην προεκταθείσα ΑΒ.

[14] Ο Ευκλείδης, εδώ, δεν εννοεί ότι η ευθεία ΑΒ είναι άπειρη, αλλά ότι μπορεί να προεκταθεί όσο θέλουμε, ώστε η κάθετη από το σημείο Γ να τη συναντήσει.

Πρόταση Ι.13

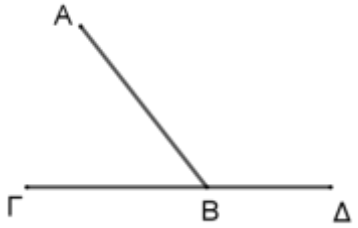
Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ’ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.



Αν μία ευθεία η ΑΒ σταθείσα επί την ευθεία ΓΔ (στο σημείο Β της ΓΔ) σχηματίσει τις γωνίες ΓΒΑ, ΑΒΔ, τότε, είτε καθεμία των γωνιών ΓΒΑ, ΑΒΔ είναι ορθή, είτε έχουν άθροισμα δύο ορθές.

Πρόταση Ι.14

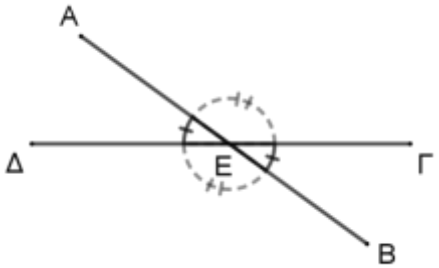
Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ’ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Εάν προς ένα ευθύγραμμο τμήμα το ΑΒ και προς ένα σημείο αυτού το Β δύο ευθύγραμμα τμήματα τα ΒΓ, ΒΔ, μη κείμενα στο ίδιο μέρος (ως προς το ΑΒ), σχηματίσουν τις εφεξείς γωνίες ΑΒΓ, ΑΒΔ με άθροισμα ίσο με δύο ορθές, τότε το ΒΔ είναι επ’ ευθείας ως προς το ΒΓ.

Πρόταση Ι.15

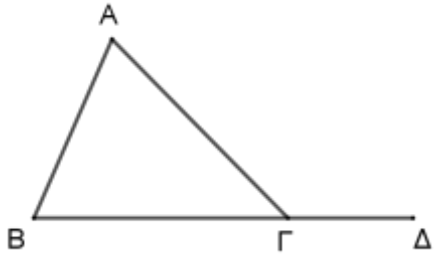
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.



Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα τα οποία τέμνονται μεταξύ τους στο σημείο Ε. Τότε, οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, δηλαδή ∠ΑΕΓ=∠ΔΕΒ και ∠ΑΕΔ=∠ΓΕΒ.

Πρόταση Ι.16

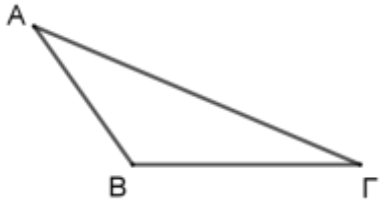
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.



Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο, και έστω μία πλευρά αυτού η ΒΓ έχει προεκταθεί στο Δ. Τότε η εξωτερική γωνία ΑΓΔ είναι μεγαλύτερη κάθε μιας των εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Πρόταση Ι.17

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

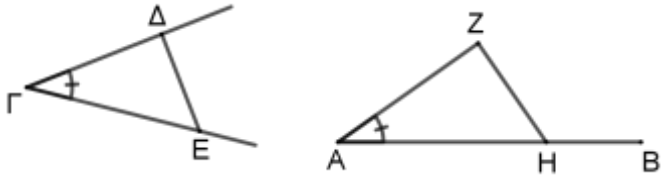


Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Οποιεσδήποτε δύο γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι (έχουν άθροισμα) μικρότερες (μικρότερο) από δύο ορθές.

Οι Προτάσεις Ι.18-22 έως και Ι.24-25 είναι ενδιαφέρουσες συνέπειες της Πρότασης Ι.16, τις οποίες όμως δε χρησιμοποιούμε και γι' αυτό τις παραλείπουμε.

Πρόταση Ι.23

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία, Α ένα σημείο επί αυτής και ΔΓΕ η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Πρέπει επί της δοθείσας ευθείας ΑΒ και στο δοθέν σημείο Α αυτής, να κατασκευασθεί ευθύγραμμη γωνία ίση προς τη γωνία ΔΓΕ.

Πρόταση Ι.26

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά τους ίση και δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα.
Αυτή η διατύπωση κρύβει δύο περιπτώσεις:

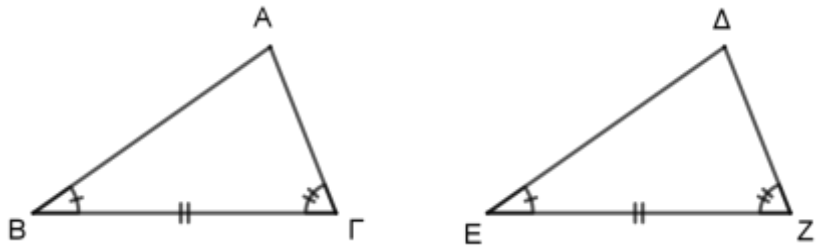
Περίπτωση 1:

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν:

(i) ΒΓ=ΕΖ

(ii) ∠Β=∠Ε

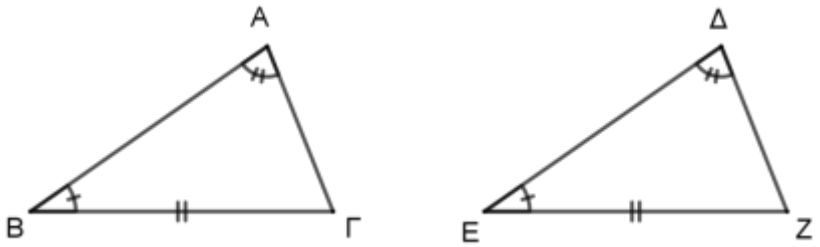
(iii) ∠Γ=∠Ζ



δηλαδή, μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες, αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.
Τότε, ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ και ∠Α=∠Δ.

Περίπτωση 2:

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν:



(i) ΒΓ=ΕΖ

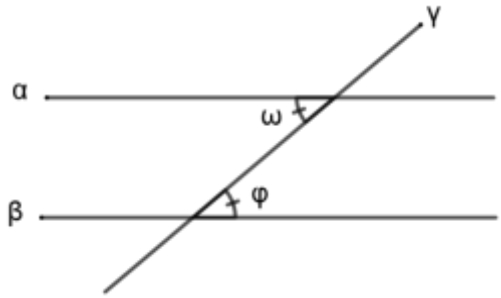
(ii) ∠Β=∠Ε

(iii) ∠Α=∠Δ

Τότε, ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ και ∠Γ=∠Ζ.

Πρόταση Ι.27

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



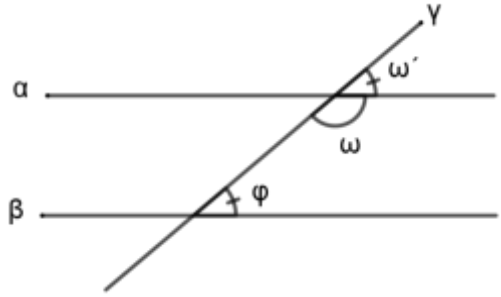
Έστω α,β δύο ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία γ, έτσι ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται να είναι ίσες, δηλαδή $\angle\omega = \angle\varphi$. Τότε οι ευθείες α και β είναι παράλληλες.

Πρόταση Ι.28

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα

- τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ
- τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας,

παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Έστω α,β δύο ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία γ, έτσι ώστε:

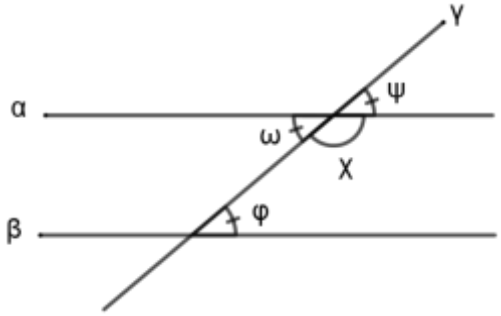
- η εκτός γωνία $\angle\omega'$ είναι ίση με την εντός και επί τα αυτά μέρη γωνία $\angle\varphi$
- οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες $\angle\omega$ και $\angle\varphi$ έχουν άθροισμα δύο ορθές

τότε, οι ευθείες α και β είναι παράλληλες.

Πρόταση Ι.29

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα

- τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ
- τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ
- τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

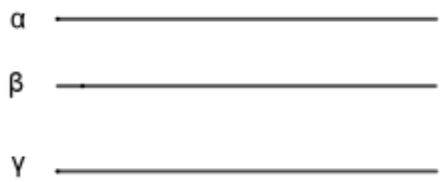


Έστω α,β δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία γ. Τότε,

- οι εναλλάξ γωνίες ∠ω και ∠φ είναι ίσες μεταξύ τους,
- η εκτὸς γωνία ∠ψ είναι ίση με την εντός και επί τα αυτά μέρη γωνία ∠φ,
- οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ∠χ και ∠φ έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές.

Πρόταση Ι.30[15]

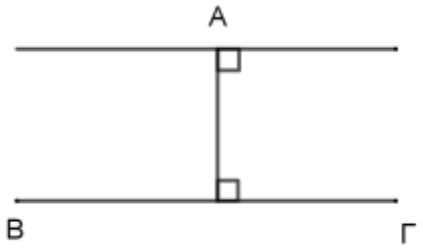
Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Αν κάθε μία των ευθειών α, β είναι παράλληλη προς την ευθεία γ, τότε και η α είναι παράλληλη προς την β.

Πρόταση Ι.31

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳπαράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

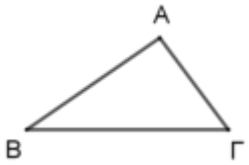


Από ένα δοθέν σημείο Α να κατασκευασθεί ευθεία παράλληλη προς δοθείσα ευθεία ΒΓ.

[15] Σύμφωνα με την πρόταση αυτή η σχέση παραλληλίας είναι μεταβατική. Αν θεωρήσουμε ότι μια ευθεία είναι παράλληλη προς τον εαυτό της, τότε είναι και σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση 1.32

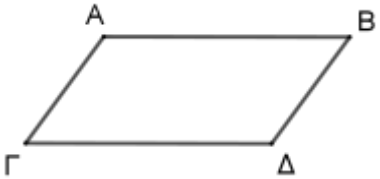
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Το άθροισμα των γωνιών ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ κάθε τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα δύο ορθών γωνιών.

Πρόταση Ι.33

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαικαὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα και παράλληλα, τότε και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα.

Πρόταση 1.34

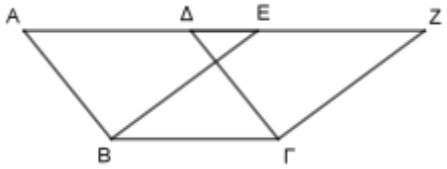
Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΓΔΒ. Τότε,

- ΑΒ = ΓΔ, ΑΓ = ΒΔ,
- ∠ΒΑΓ=∠ΒΔΓ, ∠ΑΓΔ=∠ΑΒΔ
- τριγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΒΓΔ (κατά το εμβαδόν).

Πρόταση Ι.35

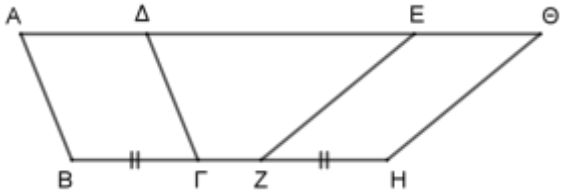
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ μεταξύ δύο παραλλήλων ΑΖ, ΒΓ και με την αυτή βάση ΒΓ είναι ίσα (κατά το εμβαδόν).

Πρόταση Ι.36

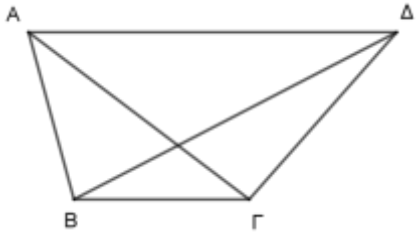
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ μεταξύ των παραλλήλων ΑΘ, ΒΗ και επί ίσων βάσεων ΒΓ, ΖΗ είναι ίσα (κατά το εμβαδόν).

Πρόταση Ι.37

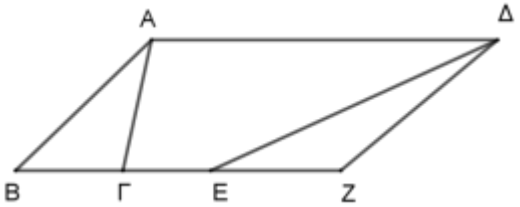
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ μεταξύ δύο παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ και με την αυτή βάση ΒΓ είναι ίσα (κατά το εμβαδόν).

Πρόταση Ι.38

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ μεταξύ δύο παραλλήλων ΒΖ, ΑΔ και επί ίσων βάσεων ΒΓ, ΖΗ είναι ίσα (κατά το εμβαδόν).

Πρόταση Ι.39 (Αντίστροφη της Ι.37)

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ίσα τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων.

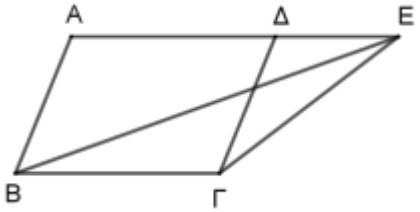
Πρόταση Ι.40 (Αντίστροφη της Ι.38)

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ίσα τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων.

Πρόταση Ι.41

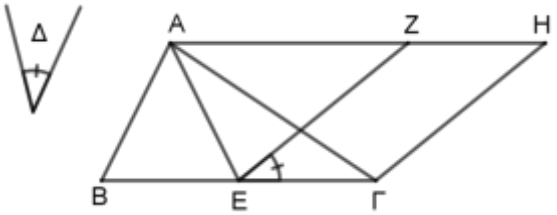
Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι διπλάσιο (κατά το εμβαδόν) ενός τριγώνου ΕΒΓ αν βρίσκονται μεταξύ δύο παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ και έχουν την ίδια βάση ΒΓ.

Πρόταση Ι.42

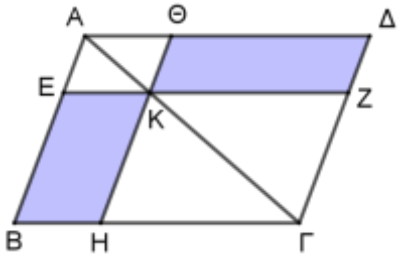
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Δοθέντων τριγώνου ΑΒΓ και ευθύγραμμης γωνίας Δ, να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ίσο (κατά το εμβαδόν) με το τρίγωνο ΑΒΓ και με γωνία μεταξύ δύο τεμνομένων πλευρών ίση με την Δ.

Πρόταση Ι.43

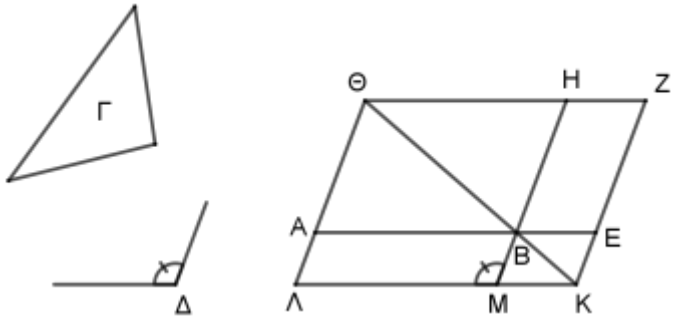
Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διάμετρο ΑΓ και σημείο Κ επί της διαμέτρου. Τα προκύπτοντα «παραπληρώματα» ΒΕΚΗ και ΔΖΚΘ είναι ίσα (κατά το εμβαδόν).

Πρόταση Ι.44

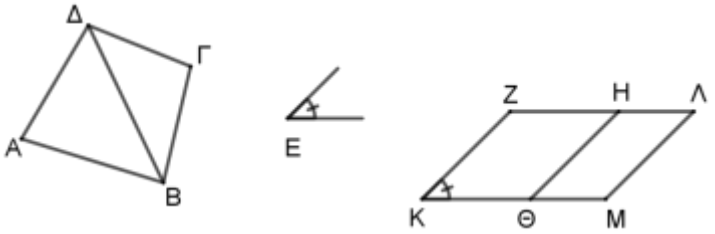
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Δοθέντων τριγώνου Γ, ευθείας ΑΒ και ευθύγραμμης γωνίας Δ, να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ΑΒΜΛ ίσο με το Γ, με γωνία μεταξύ δύο τεμνομένων πλευρών ίση με την Δ.

Πρόταση Ι.45

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθα ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



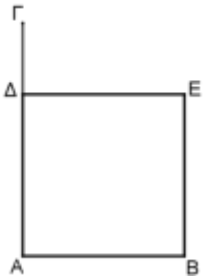
Έστω δοθέν ευθύγραμμο χωρίο ΑΒΓΔ και δοθείσα γωνία Ε. Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ίσο (κατά το εμβαδόν) με το ευθύγραμμο χωρίο ΑΒΓΔ και με γωνία μεταξύ δύο τεμνομένων πλευρών του ίση με την Ε.

Πρόταση (Ι.44 - Ι.45)

Δοθέντων ευθύγραμμου χωρίου Ε και ευθείας α να κατασκευασθεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π ίσο (κατά το εμβαδόν) με το χωρίο Ε και με μια πλευρά ίση με την ευθεία α.

Πρόταση Ι.46

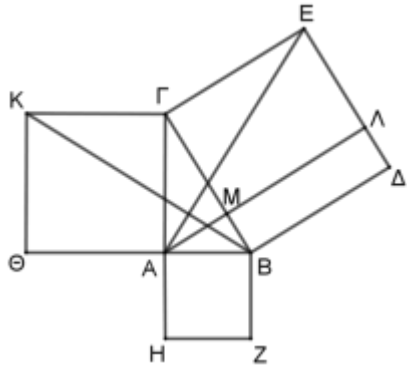
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.



Έστω δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευασθεί τετράγωνο με βάση το ΑΒ.

Πρόταση Ι.47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



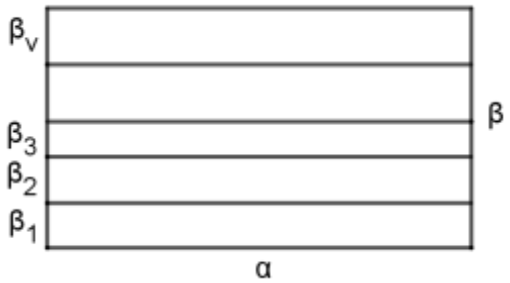
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την ΒΑΓ γωνία. Το τετράγωνο πλευράς ΒΓ είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με τα δύο τετράγωνα που έχουν πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Παράρτημα Β΄ - Βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων*

Προτάσεις

Πρόταση ΙΙ.1

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.



Αν α,β δύο ευθείες και η μία από αυτές, έστω η β, τμηθεί σε ν ευθύγραμμα τμήματα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ *(δηλαδή* $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu$*), τότε*

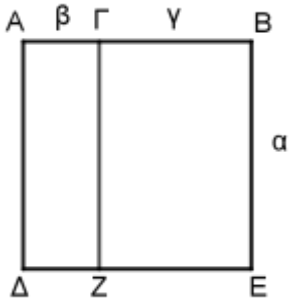
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta_1 + \alpha \cdot \beta_2 + \cdots + \alpha \cdot \beta_\nu,$$

για οποιοδήποτε πλήθος ν.

Στην Πρόταση ΙΙ.1 αποδεικνύεται το γεωμετρικό ανάλογο της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Πρόταση ΙΙ.2

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.



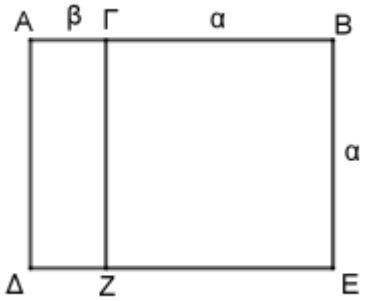
Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α και σημείο Γ αυτού ώστε ΑΓ=β και ΓΒ=γ. Τότε το τετράγωνο με πλευρά ΑΒ είναι ίσο με το άθροισμα των δύο ορθογωνίων με πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΑΒ, ΓΒ αντίστοιχα.

Στην Πρόταση ΙΙ.2 αποδεικνύεται το γεωμετρικό ανάλογο της αλγεβρικής ισότητας

$$\alpha^2 = \alpha.\beta + \alpha.\gamma, \text{αν } \alpha = \beta + \gamma.$$

Πρόταση ΙΙ.3

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.



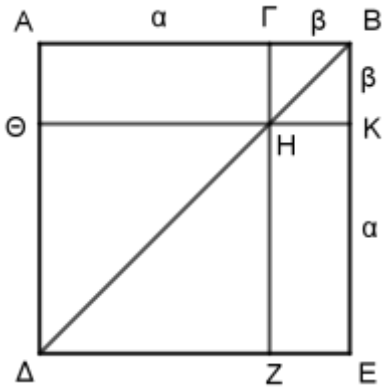
Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ σημείο αυτού, τέτοιο ώστε ΑΓ=β και ΓΒ=α. Το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα του ορθογωνίου με πλευρές ΑΓ, ΓΒ και του τετραγώνου με πλευρά ΓΒ.

Στην Πρόταση ΙΙ.3 αποδεικνύεται το γεωμετρικό ανάλογο της αλγεβρικής ισότητας

$$\alpha(\beta + \alpha) = \alpha.\beta + \alpha^2.$$

Πρόταση ΙΙ.4

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



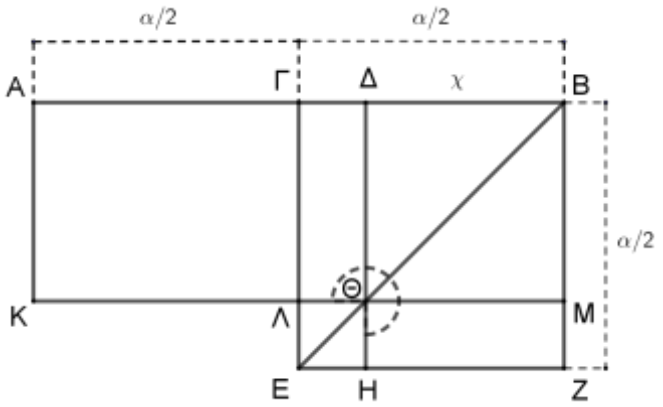
Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ σημείο αυτού. Το τετράγωνο με πλευρά ΑΒ=α+β είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με το άθροισμα του τετραγώνου με πλευρά ΑΓ=α, του τετραγώνου με πλευρά ΓΒ=β, και το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές ΑΓ=α, ΓΒ=β.

Στην Πρόταση ΙΙ.4 αποδεικνύεται το γεωμετρικό ανάλογο της αλγεβρικής ισότητας

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta.$$

Πρόταση ΙΙ.5

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

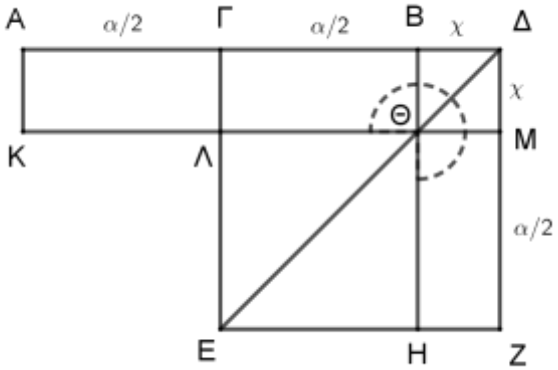


Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α και έστω Γ το μέσον του και Δ ένα σημείο του διαφορετικό του Γ. Τότε το τετράγωνο πλευράς $\Gamma B = \alpha/2$ *είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με το άθροισμα του ορθογώνιου πλευρών* $A\Delta = \alpha - \chi$, $\Delta B = \chi$ *και του τετραγώνου πλευράς* $\Gamma\Delta = \alpha/2 - \chi$ *, δηλαδή:*

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = (\alpha - \chi)\chi + \left(\frac{\alpha}{2} - \chi\right)^2.$$

Πρόταση ΙΙ.6

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

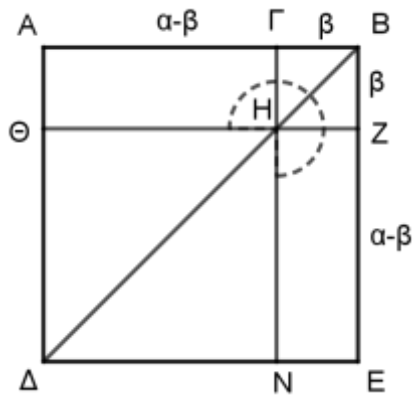


Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α και έστω Γ το μέσον του (ώστε ΑΓ=ΓΒ=α/2). Προσθέτουμε στο ΑΒ=α ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ=χ (επί της ευθείας ΑΒ). Τότε το τετράγωνο με πλευρά $\Gamma\Delta = {}^{\alpha}/_{2} + \chi$ *είναι ίσο με το άθροισμα του ορθογωνίου με πλευρές ΑΔ=α+χ, ΔΒ=χ και του τετραγώνου με πλευρά* $\Gamma B = {}^{\alpha}/_{2}$ *, δηλαδή:*

$$\left(\frac{\alpha}{2} + \chi\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \chi(\alpha + \chi).$$

Πρόταση ΙΙ.7

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



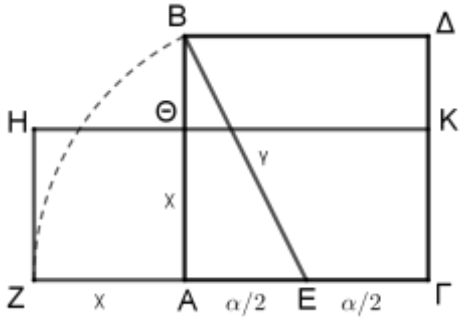
Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ σημείο αυτού. Το άθροισμα των δύο τετραγώνων με πλευρές ΑΒ=α και ΒΓ= β, αντίστοιχα, με α>β, είναι ίσο με το άθροισμα του διπλασίου ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ, ΒΓ και του τετραγώνου με πλευρά ΑΓ=α-β, δηλαδή:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2.$$

Οι Πρόταση ΙΙ.8, ΙΙ.9 και ΙΙ.10 δε χρησιμοποιούνται στην απόδειξη των Προτάσεων του Βιβλίου VI των *Στοιχείων* γι' αυτό και παραλείπονται.

Πρόταση ΙΙ.11 (Κατασκευή άκρου και μέσου λόγου – Χρυσή τομή)

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

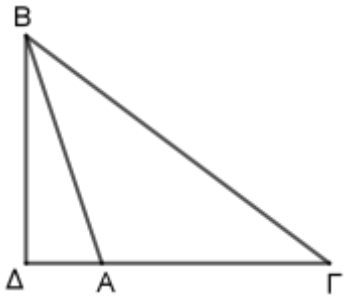


Έστω δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α. Να τμηθεί το ΑΒ με ένα σημείο Θ, ώστε το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με ΑΒ=α και ΘΒ=α-χ είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με τετράγωνο πλευράς ίσης με ΑΘ=χ.

Δηλαδή, να τμηθεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α με ένα σημείο Θ ώστε, θέτοντας ΑΘ=χ να ισχύει $\alpha^2 = \chi(\alpha + \chi)$ *ή ισοδύναμα* $\alpha(\alpha - \chi) = \chi^2$.

Πρόταση ΙΙ.12

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

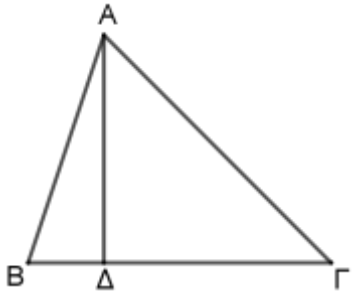


Έστω αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο έχει την γωνία ΒΑΓ αμβλεία, και έστω από το σημείο Β κάθετος ΒΔ επί της προέκτασης της ΑΓ. Τότε το τετράγωνο με πλευρά ΒΓ είναι μεγαλύτερο (κατά το εμβαδόν) από το άθροισμα των δύο τετραγώνων με πλευρές ΒΑ, ΓΑ αντίστοιχα, κατά δύο φορές το ορθογώνιο με πλευρές ΓΑ, ΑΔ, δηλαδή:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta$$

Πρόταση ΙΙ.13

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

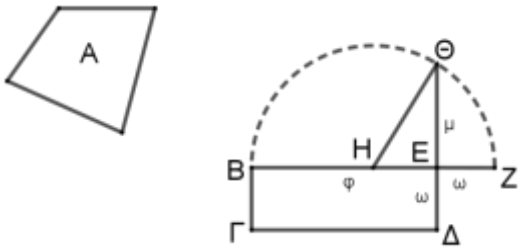


Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο έχει την γωνία ΑΒΓ οξεία, και έστω από το σημείο Α κάθετος ΑΔ επί της ΒΓ. Τότε το τετράγωνο με πλευρά ΑΓ είναι μικρότερο (κατά το εμβαδόν) από τα δύο τετράγωνα με πλευρές ΒΑ, ΒΓ αντίστοιχα, κατά δύο φορές το ορθογώνιο με πλευρές ΒΓ, ΒΔ, δηλαδή:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot B\Delta$$

Οι Προτάσεις ΙΙ.12,13 αποτελούν, ένα ικανοποιητικό αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Πρόταση ΙΙ.14 (Κατασκευή γεωμετρικού μέσου)
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.



Δοθέντος ευθύγραμμου χωρίου Α, να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα μ, ώστε το τετράγωνο πλευράς μ να είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με το ευθύγραμμο χωρίο Α.

Με την Πρόταση ΙΙ.14 καθίσταται δυνατή η **τετραγωνοποίηση των ευθυγράμμων χωρίων**.

Στην πρόταση αυτή ουσιαστικά αποδεικνύεται ότι δοθέντων δύο ευθύγραμμων τμημάτων φ, ω, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές ίσες με τα φ και ω αντίστοιχα να είναι ίσο (κατά το εμβαδόν) με τετράγωνο πλευράς ίσης με το μ, δηλαδή $\mu^2=\varphi\cdot\omega$. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι στην Πρόταση ΙΙ.14 κατασκευάζεται **ο γεωμετρικός μέσος** των φ, ω.

Παράρτημα Γ′ - Βιβλίο V των *Στοιχείων*

Ορισμοί

Όρος V.4 (Αρχή του Ευδόξου)
Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Αν α, β είναι δύο ομογενή μεγέθη (π.χ. δύο γραμμές, δύο επίπεδα, δύο όγκοι), τότε υπάρχει φυσικός αριθμός ν ώστε νβ>α.

Όρος V.5 (Ισότητα λόγων μεγεθών)
Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Αν α, β είναι ομογενή μεγέθη και γ, δ, επίσης, ομογενή μεγέθη, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

αν και μόνο αν, για οποιουσδήποτε δύο φυσικούς αριθμούς μ,ν ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $\mu\beta < \nu\alpha$, τότε $\mu\delta < \nu\gamma$, δηλαδή, αν $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta}$, τότε $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\gamma}{\delta}$

(ii) Αν $\mu\beta = \nu\alpha$, τότε $\mu\delta = \nu\gamma$, δηλαδή, αν $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$, τότε $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\gamma}{\delta}$

(iii) Αν $\mu\beta > \nu\alpha$, τότε $\mu\delta > \nu\gamma$, δηλαδή, αν $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\alpha}{\beta}$, τότε $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\gamma}{\delta}$

Τα μεγέθη α, β λέγονται **ανάλογα** προς τα γ,δ.

Όρος V.7 (Ανισότητα λόγων μεγεθών)
Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}, \text{αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί } \mu, \nu \text{ ώστε: } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\mu}{\nu} > \frac{\gamma}{\delta}$$

Όρος V.9 (Διπλασίων λόγος)
Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

Αν τρία μεγέθη είναι ανάλογα, το πρώτο προς το τρίτο λέγεται ότι έχει λόγο το τετράγωνο του λόγου που έχει το πρώτο προς το δεύτερο, δηλαδή:

Αν α,β,γ είναι ομογενή μεγέθη και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, τότε: $\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η θεωρία του Ευδόξου είναι ιδιαίτερα γενική. Ο μόνος περιορισμός που υπάρχει εμφανίζεται στον όρο 4 του Βιβλίου V και είναι η **Αρχή (Συνθήκη) του Ευδόξου** (ή Αρχιμήδους-Ευδόξου ή Αρχιμήδους, όπως συνήθως, ανακριβώς, λέγεται). Στον όρο αυτό δίνεται ο ορισμός του λόγου δύο μεγεθών ως εξής: *Δύο μεγέθη είναι συγκρίσιμα και σχηματίζουν λόγο όταν πολλαπλάσιο του ενός ξεπερνά το άλλο.*

  Η Αρχή του Ευδόξου ισχύει συμμετρικά για τα μεγέθη β και α, δηλαδή, υπάρχει φυσικός αριθμός μ, ώστε μα>β και μας εξασφαλίζει ότι κάποιο πολλαπλάσιο του ενός μεγέθους θα υπερβεί το άλλο. Με αυτή την παρατήρηση η Αρχή του Ευδόξου μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: ***Για κάθε δύο ομογενή μεγέθη α,β υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε*** $\frac{1}{\mu} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\nu}{1}$.

  Ο Εύδοξος, θέτοντας αυτήν την Αρχή, θέλει να αποκλείσει την περίπτωση όσο μεγάλο και να πάρουμε το ν, το νβ να είναι μικρότερο του α. Με άλλα λόγια, **δε θεωρεί ποτέ μεγέθη που το** ένα να είναι απείρως μικρότερο του άλλου. Ενδεχομένως να υπάρχουν τέτοια, αλλά δε χρησιμοποιούνται.

- Στον περίφημο Ορισμό V.5 της ισότητας λόγων μεγεθών (αναλογίας) βασίζεται ουσιαστικά η θεωρία του Ευδόξου και είναι αυτός που ενέπνευσε τον Dedekind στην προσπάθεια της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών. Ο ορισμός αυτός της αναλογίας λέει, ουσιαστικά, ότι οι λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ίσοι, αν ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ έχει την ίδια σχέση διάταξης που έχει ο λόγος $\frac{\gamma}{\delta}$ με όλους τους ρητούς. Δηλαδή, αν ο $\frac{\alpha}{\beta}$ συγκριθεί με οποιονδήποτε ρητό αριθμό, πρέπει να έχει την ίδια σχέση διάταξης που έχει μ' αυτόν τον ρητό και ο $\frac{\gamma}{\delta}$.

- Ο Όρος V.7 λέει ότι δύο λόγοι είναι άνισοι, αν βρω έναν ρητό που να παρεμβάλλεται μεταξύ των λόγων αυτών.

Προτάσεις

Πρόταση V.1

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Αν μ φυσικός αριθμός και α,β ομογενή μεγέθη, τότε ισχύει ότι:

$$\mu(\alpha + \beta) = \mu\alpha + \mu\beta.$$

Πρόταση V.2

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Αν μ, ν φυσικοί αριθμοί και α μέγεθος, τότε ισχύει ότι:

$$(\mu + \nu)\alpha = \mu\alpha + \nu\alpha.$$

Πρόταση V.3

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Αν μ, ν φυσικοί αριθμοί και α μέγεθος, τότε ισχύει ότι:

$$(\mu\nu)\alpha = \mu(\nu\alpha).$$

Πρόταση V.4

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ *και μ, ν φυσικοί αριθμοί, τότε ισχύει:*

$$\frac{\mu\alpha}{\nu\beta} = \frac{\mu\gamma}{\nu\delta}.$$

Πρόταση V.5

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Αν μ φυσικός αριθμός και α, β ομογενή μεγέθη με α>β, τότε ισχύει:

$$\mu(\alpha - \beta) = \mu\alpha - \mu\beta.$$

Πρόταση V.6
Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Αν μ, ν φυσικοί αριθμοί με μ>ν και α μέγεθος, τότε ισχύει ότι:

$$(\mu - \nu)\alpha = \mu\alpha - \nu\alpha.$$

Πρόταση V.7
Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

[Τα ίσα μεγέθη προς το ίδιο μέγεθος έχουν τον ίδιο λόγο.]
Αν $\alpha = \beta$ *και γ οτιδήποτε, τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Πρόταση V.8 (Από ανισότητα μεγεθών σε ανισότητα λόγων)
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Αν α, β, γ ομογενή μεγέθη και α>β, τότε ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}.$$

Πρόταση V.9 (Αντιθετοαντίστροφη της V.8)
Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

Αν α, β, γ ομογενή μεγέθη και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$*, τότε α=β .*

Πρόταση V.10 (Αντίστροφη της V.8)
Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Αν α, β, γ ομογενή μεγέθη και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$*, τότε* $\alpha > \beta$*.*

Πρόταση V.11 (Μεταβατικότητα της αναλογίας)
Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ *και* $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$*, τότε ισχύει:* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$*.*

Πρόταση V.12
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Αν $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \cdots$ *, τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}{\alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots}.$$

Πρόταση V.13 (Μεταβατικότητα της ανισότητας)
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ *και* $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$*, τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Πρόταση V.14
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Έστω α, β, γ, δ ομογενή μεγέθη και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ *. Ισχύουν τα εξής:*

- *Αν α>γ, τότε β>δ*
- *Αν α=γ, τότε β=δ*
- *Αν α<γ, τότε β<δ*

Πρόταση V.15 (Ειδική περίπτωση της V.4 για μ=ν)
Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

[Τα μέρη ίσων πολλαπλασίων έχουν ίσο λόγο με τα πολλαπλάσιά τους.]
Αν α, β ομογενή μεγέθη και μ φυσικός αριθμός, τότε ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu\alpha}{\mu\beta}.$$

Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Αν α, β, γ, δ ομογενή μεγέθη και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ *, τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Πρόταση V.17(Διαίρεση λόγου)

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Αν $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$, *τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Διαφορετικά:

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha>\beta$ *και* $\gamma>\delta$, *τότε ισχύει*:

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

Πρόταση V.18 (Σύνθεση λόγου)

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, *τότε ισχύει*:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}.$$

Πρόταση V.19

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ *και* $\alpha>\gamma$, $\beta>\delta$, *τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}.$$

Πρόταση V.20

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Έστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$ *και* $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$. *Τότε:*

- *Αν* $\alpha>\gamma$, *θα είναι και* $\delta>\zeta$
- *Αν* $\alpha=\gamma$, *θα είναι και* $\delta=\zeta$
- *Αν* $\alpha<\gamma$, *θα είναι και* $\delta<\zeta$.

Πρόταση V.21

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Έστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ *και* $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\delta}{\varepsilon}$. *Τότε:*

- *Αν α>γ, θα είναι και δ>ζ*
- *Αν α=γ, θα είναι και δ=ζ*
- *Αν α<γ, θα είναι και δ<ζ.*

Πρόταση V.22 (Δι' ίσου)

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Αν α, β, γ τρία μεγέθη και δ, ε,ζ τρία άλλα, τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$ *και* $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$*, τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}.$$

Πρόταση V.23 (Τεταραγμένη αναλογία)

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ *και* $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\delta}{\varepsilon}$ *τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}.$$

Πρόταση V.24

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ *και* $\frac{\varepsilon}{\beta}=\frac{\zeta}{\delta}$ *, τότε ισχύει:*

$$\frac{\alpha+\varepsilon}{\beta}=\frac{\gamma+\zeta}{\delta}.$$

Πρόταση V.25

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και α>β, γ>δ τότε α+δ> β+γ.

Πρόταση V.A (Ανάπαλιν)

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Οι 25 προτάσεις του Βιβλίου V χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:
  Στην **πρώτη κατηγορία** ανήκουν οι **τετριμμένες** Προτάσεις **V.1, 2, 3, 5** και **6** οι οποίες αφορούν σε πολλαπλάσια μεγεθών και δε χρησιμοποιούν λόγους.
  Στη **δεύτερη κατηγορία** ανήκουν οι **στοιχειώδεις** Προτάσεις **V.4, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, και 18**, με την έννοια ότι βασίζονται στους ορισμούς V.5 και V.7 και όχι στην Αρχή του Ευδόξου (Ορισμός V.4). Όλες οι στοιχειώδεις προτάσεις έχουν τετριμμένες αποδείξεις.
  Στην **τρίτη κατηγορία** ανήκουν οι **μη στοιχειώδεις** Προτάσεις **V.8 , 9, 14, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24** και **25** με την έννοια ότι χρησιμοποιούν την Αρχή του Ευδόξου. Από αυτές η μόνη Πρόταση που χρησιμοποιεί άμεσα την Αρχή του Ευδόξου είναι η Πρόταση V.8 και είναι η πιο βασική Πρόταση του Βιβλίου V, ενώ όλες οι άλλες τη χρησιμοποιούν έμμεσα, μέσω της V.8. Συγκεκριμένα, η V.8 χρησιμοποιείται για την απόδειξη των Προτάσεων V.14, V.20 και V.21. Επίσης, από την Πρόταση V.8 έπεται η V.9 (είναι η αντιθετοαντιστροφή της).
- Η Πρόταση V.16 (Εναλλάξ) έχει νόημα μόνο αν και τα τέσσερα μεγέθη είναι ομογενή.
- Η Πρόταση V.A για τον ανάπαλιν λόγο δεν περιλαμβάνεται στα Στοιχεία και χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη, ως εντελώς προφανής.

Βιβλιογραφία

1. **[H1] Heath T. L., 1908.** *The thirteen books of Euclid's Elements*. Volume II (Books III-IX) Cambridge: at the University Press.
2. **[H2] Heath T. L., 1921.** *A History of Greek Mathematics.* Volume 1, From Thales to Euclid. Oxford at the Clarendon Press.
3. **[F] Fitzpatrick R., 2008,** *Euclid's Elements of Geometry*.
4. **[ΝΦ1] Νεγρεπόντης Σ. & Φαρμάκη Β., 2019**, *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, Τόμος Ι, Εκδ. Εκκρεμές.
5. **[ΝΦ2] Νεγρεπόντης Σ. & Φαρμάκη Β**. *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Βιβλίο V Στοιχείων & Βιβλίο VI Στοιχείων*, Χειρόγραφο σε Προκαταρτική Μορφή [6.1.2018], σελίδες 53.
6. **[Ν]** Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος *«Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά-Στοιχεία Ευκλείδη».* Ακαδ. έτος 2017-18. Διδάσκων Σ. Νεγρεπόντης.
7. **[Σ] Σταμάτη Ε**., 1953. Ευκλείδου Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών. Στοιχείων Βιβλία V. VI. VII. VIII. *IX.,* Ο.Ε.Σ.Β.
8. **[Δ] Δοργιάκη Ι., 2016.** Διπλωματική Εργασία με θέμα *«Ο ρόλος της Αρχής του Ευδόξου στα βιβλία V και VI των Στοιχείων του Ευκλείδη. Προκαταρκτική Μελέτη*». Επιβλέπων Σ. Νεγρεπόντης.