



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

———— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 ————

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Κοσμολογικός Πληθωρισμός,
Φάσμα των Διακυμάνσεων
και Αρχέγονες Μελανές Οπές

Κυριακή Κεφαλά

A.M. 2018308

Επιβλέπων καθηγητής: Ν. Τετράδης

Τριμελής επιτροπή: Ν. Τετράδης, Β. Σπανός, Σ. Καζαντζίδης

Διπλωματική εργασία για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης, ΕΚΠΑ, Τμήμα Φυσικής.

Αθήνα, 2020

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι αρχέγονες μελανές οπές θεωρείται πως σχηματίστηκαν στο πρώιμο σύμπαν από τη βαρυτική κατάρρευση ανομοιογενειών στην ενεργειακή πυκνότητα. Ο κοσμολογικός πληθωρισμός είναι ένας μηχανισμός που μπορεί να παράγει τέτοιες ανομοιογένειες. Αναλύεται ο τρόπος δημιουργίας μελανών οπών στο πρώιμο σύμπαν, μετά το τέλος του κοσμολογικού πληθωρισμού, καθώς και η πιθανότητα να αποτελούν μέρος της σκοτεινής ύλης σήμερα. Το μοντέλο πληθωρισμού που μελετάται αριθμητικά περιγράφει ένα βαθμωτό πεδίο inflaton, το δυναμικό του οποίου χαρακτηρίζεται από ένα σημείο καμπής στο οποίο γίνεται σχεδόν σταθερό. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε ενίσχυση του φάσματος των βαθμωτών διακυμάνσεων, ώστε μετά το τέλος του πληθωρισμού να υπάρξουν οι κατάλληλες ανομοιογένειες στην πυκνότητα που θα οδηγήσουν στο σχηματισμό μελανών οπών σε κάποιο εύρος μαζών. Μελετώνται οι εξισώσεις του υποβάθρου για το μέσο πεδίο αλλά και οι εξισώσεις για τις διακυμάνσεις του, οι οποίες είναι κβαντικής φύσης. Επιλύεται αριθμητικά η εξίσωση Mukhanov-Sasaki για τις βαθμωτές διακυμάνσεις, από τις οποίες προκύπτει το φάσμα ισχύος. Η διαδικασία οδηγεί σε παραγωγή μελανών οπών με μάζες $M_{PBH} \approx 10^{-15} M_{\odot}$ σε ποσοστό της τάξης του 10% της σκοτεινής ύλης σήμερα.

ABSTRACT

Highly overdense regions of inhomogeneities in the primordial Universe can undergo direct gravitational collapse to form black holes. We discuss the production of primordial black holes in the context of single-field inflation and the possibility that they constitute the dark matter today. We analyze numerically a single-field string inflationary model, which leads to the production of primordial black holes of mass $M_{PBH} \approx 10^{-15} M_{\odot}$ and an abundance at the level of 10% of the dark matter today. The potential of the model has a near-inflection point, where the power spectrum is enhanced due to a period of ultra-slow-roll inflation. This feature triggers efficient black hole production within a certain range of masses. The background field is analysed by solving the Friedmann and Klein-Gordon equations. We also solve the Mukhanov-Sasaki equation for the curvature perturbations, which leads to the determination of the primordial power spectrum and the residual black-hole abundance.

Περιεχόμενα

1	Η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης	1
1.1	Σύγχρονο Κοσμολογικό Μοντέλο	2
1.2	Εξισώσεις Friedmann	3
1.3	Προβλήματα της Θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης	6
2	Κοσμολογικός Πληθωρισμός	8
2.1	Εξέλιξη της ακτίνας του Hubble	9
2.2	Η εξέλιξη των κλιμάκων	10
2.3	Λύση των προβλημάτων της θεωρίας	11
2.4	Το πεδίο inflaton	13
2.5	Η Προσέγγιση της Αργής Εξέλιξης	15
3	Κβαντικές διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού	18
3.1	Διαταραγμένη FRW μετρική	19
3.2	Μεταβλητές αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας	19
3.3	Βαθμωτές διαταραχές	24
3.4	Χωρικά επίπεδη βαθμίδα	27
3.5	Εξέλιξη των διαταραχών	29
3.6	Λύσεις της εξίσωσης Mukhanov - Sasaki	31
3.7	Φάσμα Ισχύος	32
4	Αρχέγονες Μελανές Οπές	35
4.1	Σχηματισμός των Αρχέγονων Μελανών Οπών	36
4.2	Ενίσχυση του φάσματος ισχύος	37
4.3	Η Ενεργειακή Πυκνότητα των Αρχέγονων Μελανών Οπών	38
5	Αριθμητικά αποτελέσματα	42
5.1	Το δυναμικό	43
5.2	Το υπόβαθρο	44
5.3	Φάσμα ισχύος	47
5.4	Αρχέγονες μελανές οπές	51

1 Η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης

Το 1925 παρατηρήθηκε από τον Hubble ότι οι γαλαξίες απομακρύνονται από τη Γη με ένα γραμμικό νόμο ανάμεσα στην απόσταση του γαλαξία από τη Γη r και την ταχύτητά του v , τον νόμο του Hubble

$$v = H_0 r$$

όπου H_0 η σταθερά Hubble. Ο παραπάνω νόμος λέει ότι οι μακρινοί γαλαξίες απομακρύνονται ταχύτερα από τη Γη σε σχέση με τους κοντινότερους. Όσο κανείς πηγαίνει πιο πολύ προς το παρελθόν, το σύμπαν ήταν πυκνότερο και θερμότερο, τελικά φτάνοντας σε ένα αρχικό υπέρπυκνο σημείο στο μακρινό παρελθόν. Αυτή η θεωρία είναι γνωστή ως η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης. Τα πρώτα τρία λεπτά, τα ελαφριά στοιχεία δημιουργήθηκαν με μια διαδικασία γνωστή ως Πυρηνοσύνθεση. Η θερμοκρασία μειώθηκε δραστικά και τα πρωτόνια με τα νετρόνια ενώθηκαν προς σχηματισμό του δευτέρου. Από το δευτέριο προέκυψε το ήλιο και μικρές ποσότητες λιθίου. Μερικές εκατοντάδες χιλιάδες έτη αργότερα, ακολούθησε η περίοδος της επανασύνδεσης στην οποία τα ηλεκτρόνια μαζί με τους πυρήνες δημιούργησαν τα ουδέτερα στοιχεία. Ως τότε τα ελεύθερα φωτόνια απορροφώνταν αμέσως από το σχεδόν ομογενές πλάσμα πριν την επανεκπομπή τους και συνεπώς δεν υπάρχουν παρατηρήσεις φωτονίων από εκείνη την κοσμική περίοδο. Μετά την επανασύνδεση όμως, τα φωτόνια ελευθερώθηκαν και παρατηρούνται σήμερα ως μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου. Ακολούθησε μια περίοδος γνωστή ως η κοσμική σκοτεινή περίοδος κατά την οποία το σύμπαν ήταν γεμάτο από ουδέτερο αέριο. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις σε αυτά τα μοριακά νέφη οδήγησαν στο σχηματισμό αστέρων και γαλαξιών. Με τη δημιουργία των πρώτων αστέρων, η ακτινοβολία από αυτά ξεκίνησε τον ιονισμό του ουδέτερου αερίου.

Η μεγαλύτερη απόδειξη για τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης είναι η ύπαρξη της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου. Η διαστολή του σύμπαντος προκαλεί ερυθρομετατόπιση στην ακτινοβολία υποβάθρου που λαμβάνεται σήμερα, γεγονός που σημαίνει ότι τα φωτόνια αυτά που παρατηρούνται σήμερα έχουν πολύ χαμηλότερη θερμοκρασία σε σχέση με αυτή που είχαν την εποχή κατά την οποία εκπέμφθηκαν. Η ακτινοβολία υποβάθρου αποτελεί την παλαιότερη ακτινοβολία που μπορούμε να παρατηρήσουμε και το φάσμα της είναι σχεδόν τέλειου μέλανος σώματος. Υπάρχουν μικρές ανισotropίες που είναι μεγάλης κοσμολογικής

σημασίας.

Η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης επίσης προσφέρει επιτυχημένες προβλέψεις για την αφθονία των διάφορων στοιχείων του σύμπαντος. Πριν από τη πυρηνοσύνθεση οι ατομικοί πυρήνες ήταν ασταθείς λόγω των πολύ ενεργειακών φωτονίων που τους διέλυαν. Γνωρίζοντας τον τρόπο με τον οποίο η θερμοκρασία στο σύμπαν μειωνόταν με το πέρασμα του χρόνου, υπολογίζεται η ποσότητα των πρωτονίων σε σχέση με αυτή των νετρονίων κατά την αρχή της διαδικασίας της πυρηνοσύνθεσης. Ο συνδυασμός των νετρονίων και των πρωτονίων οδηγεί στο σχηματισμό διαφορετικών ποσοτήτων από στοιχεία. Κατά τη διαδικασία αυτή έγινε παραγωγή των ελαφρύτερων στοιχείων ενώ η πλειονότητα των βαρύτερων παρήχθησαν μέσα στα αστέρια και εξαπλώθηκαν στο σύμπαν κατά το θάνατο των αστερών αυτών. Η αφθονία των διάφορων στοιχείων σήμερα που προβλέπει η θεωρία συμφωνεί αρκετά καλά με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

1.1 Σύγχρονο Κοσμολογικό Μοντέλο

Το επικρατόν κοσμολογικό μοντέλο είναι το Λ CDM. Αποτελεί το απλούστερο μοντέλο περιγραφής του σύμπαντος σύμφωνα με το οποίο η ενεργειακή πυκνότητα στο σύμπαν συνίσταται από ύλη, ακτινοβολία και σκοτεινή ενέργεια (κοσμολογική σταθερά)

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (1.1.1)$$

όπου ρ_m είναι η ενεργειακή πυκνότητα της ύλης, ρ_r της ακτινοβολίας και ρ_Λ της σκοτεινής ενέργειας.

Η ονομασία του μοντέλου αυτού οφείλεται στην ψυχρή, σκοτεινή ύλη (Cold Dark Matter) η οποία είναι η κυρίαρχη συνιστώσα της ύλης και στην κοσμολογική σταθερά Λ .

Η συνιστώσα της ακτινοβολίας αποτελείται κατά κύριο λόγο από φωτόνια και νετρίνα. Η συνιστώσα της ύλης αποτελείται από τη βαρυονική ύλη (πρωτόνια, νετρόνια και ηλεκτρόνια) αλλά και από τη σκοτεινή ύλη. Η τελευταία είναι παρατηρήσιμη μόνο μέσω των βαρυτικών της επιδράσεων στη 'συνηθισμένη' βαρυονική ύλη. Η ύπαρξή της είναι αναγκαία προκειμένου να εξηγήσει το ρυθμό με τον οποίο οι γαλαξίες σχηματίζονταν στο πρώιμο σύμπαν, αλλά και

τις γαλαξιακές καμπύλες περιστροφής, οι οποίες υποδεικνύουν την ύπαρξη μιας συνιστώσας ύλης που συνεισφέρει στη συνολική μάζα αλλά είναι άρατη γιατί δεν αλληλεπιδρά με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Επιπροσθέτως, η σκοτεινή ύλη πρέπει να είναι ψυχρή (Cold Dark Matter) διότι αν ήταν θερμή θα είχε διαταράξει το σχηματισμό των γαλαξιών.

Τέλος, η σκοτεινή ενέργεια είναι σύμφωνα με το Λ CDM η άγνωστη συνιστώσα της πυκνότητας που προκαλεί την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος σήμερα και έγινε κυρίαρχη από τότε που το σύμπαν είχε ηλικία 9.8 δισεκατομμύρια χρόνια.

1.2 Εξισώσεις Friedmann

Η μετρική Friedmann-Robertson-Walker (FRW) χρησιμοποιείται για να περιγράψει το διαστελλόμενο σύμπαν

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] = -\alpha^2(\tau) \left[d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.2.1)$$

όπου $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$ για μηδενική, θετική και αρνητική καμπυλότητα.

Ορίζουμε το σύμμορφο χρόνο τ μέσω της σχέσης

$$d\tau = \frac{dt}{\alpha(t)}.$$

Ο παράγοντας κλίμακας $\alpha(t)$ αντιπροσωπεύει τη διαστολή του σύμπαντος και έχει οριστεί να έχει την τιμή 1 τη σημερινή εποχή (και μικρότερες τιμές στο παρελθόν).

Οι εξισώσεις Friedmann είναι θεμελιώδεις σχέσεις της περιγραφής του σύμπαντος, με βάση το πρότυπο κοσμολογικό μοντέλο. Μπορεί κανείς να καταλήξει σε αυτές με τη χρήση των εξισώσεων του Einstein. Οι εξισώσεις του Einstein συσχετίζουν τον ταυστή Einstein $G_{\mu\nu}$ ο οποίος αποτελεί μέτρο της καμπυλότητας του χωροχρόνου στο σύμπαν, με τον ταυστή ενέργειας - ορμής $T_{\mu\nu}$ που αποτελεί μέτρο της ενεργειακής πυκνότητας στο σύμπαν. Ο ταυστής ενέργειας - ορμής για ένα ιδανικό κοσμικό ρευστό είναι της μορφής

$$T_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

με ρ και P την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση του κοσμικού ρευστού στο σύστημα αυτού και U^μ την τετραταχύτητά του σε σχέση με τον παρατηρητή.

Διαφορετικά, γράφοντας την (1.2.2) στη μορφή:

$$T^\mu_\nu = (\rho + P)U^\mu U_\nu + P\delta^\mu_\nu \quad (1.2.5)$$

εξάγεται το ίδιο αποτέλεσμα με την παρατήρηση ότι η σχετική τετραταχύτητα ανάμεσα στο ρευστό και τον παρατηρητή είναι $U^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{ds}$ και για έναν ομοκινούμενο παρατηρητή, αυτή είναι $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Ο ταυστής Einstein είναι

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.2.6)$$

με τον ταυστή Ricci να δίνεται από τη σχέση

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho}. \quad (1.2.7)$$

Το βαθμωτό Ricci είναι

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.2.8)$$

Για την παραπάνω μετρική και για επίπεδη γεωμετρία ($k = 0$) οι μη μηδενικές συνιστώσες του ταυστή Ricci υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}, \\ R_{ij} &= \left[\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 2\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 \right] g_{ij}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Επομένως είναι

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -3\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2, \\ G^i_j &= -\left[2\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 \right] \delta^i_j. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Οι εξισώσεις του Einstein δίνουν τελικά τις εξισώσεις Friedmann

$$G^0_0 = 8\pi GT^0_0 \Rightarrow \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \boxed{H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\rho} \quad (1.2.11)$$

$$G^i_i = 8\pi GT^i_i \Rightarrow \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{2}P \Rightarrow \boxed{\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(\rho + 3P)} \quad (1.2.12)$$

στην οποία έχει γίνει χρήση της (1.2.11).

με $H \equiv \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ τον παράγοντα Hubble και $M_{pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ την ανηγμένη μάζα Planck.

Η εξίσωση Friedmann (1.2.11) για $k \neq 0$ είναι

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\rho - \frac{k}{\alpha^2}. \quad (1.2.13)$$

Η εξίσωση (1.2.11) συχνά γράφεται με τη χρήση του παράγοντα πυκνότητας $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$, όπου ρ_c είναι η κρίσιμη πυκνότητα για την οποία το σύμπαν είναι επίπεδο, $k = 0$, και δίνεται από τη σχέση

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.2.14)$$

Η πυκνότητα ρ περιέχει όλες τις συνεισφορές στην ενεργειακή πυκνότητα:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_K \quad (1.2.15)$$

όπου η ρ_K αντιστοιχεί στην καμπυλότητα και για $k = 0$ είναι $\rho_K = 0$. Έτσι η εξίσωση Friedmann γίνεται

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K, \quad (1.2.16)$$

με $\Omega_k = 1 - \Omega_{tot}$. Οι τιμές που έχουν οι παράγοντες πυκνότητας από παρατηρήσεις του Planck δορυφόρου [1] είναι $\Omega_m \approx 0.31, \Omega_r \approx 9 \cdot 10^{-5}$ και $\Omega_\Lambda \approx 0.69$.

Από την εξίσωση διατήρησης του τανυστή ενέργειας - ορμής

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (1.2.17)$$

εξάγεται η εξίσωση συνέχειας για το κοσμικό ρευστό η οποία δίνει τη χρονική εξέλιξη της ενεργειακής πυκνότητας. Έχουμε

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0 \quad (1.2.18)$$

Για $\nu = 0$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = 0$$

η οποία τελικά καταλήγει στην εξίσωση συνέχειας

$$\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho + P) = 0}. \quad (1.2.19)$$

Η πίεση συνδέεται με την ενεργειακή πυκνότητα μέσω της καταστατικής εξίσωσης $w = p/\rho$. Η εξίσωση (1.2.19) χρησιμοποιείται για να συσχετιστεί η πυκνότητα με τον παράγοντα κλίμακας ως

$$\rho \propto \alpha^{-3(1+w)} \quad (1.2.20)$$

Κυριαρχία της ύλης Σε κοσμολογικές κλίμακες η ύλη θεωρείται πως είναι αμελητέας πίεσης, επομένως $w = 0$. Το σύμπαν ήταν για μεγάλη περίοδο της ιστορίας του κυριαρχούμενο από ύλη και κατά τη διάρκεια αυτής συνέβη ο σχηματισμός των παρατηρούμενων δομών στο σύμπαν. Η εξίσωση συνέχειας του ρευστού για αυτή την περίοδο γίνεται συνεπώς

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad (1.2.21)$$

Αυτή η έκφραση δείχνει ότι η ενεργειακή πυκνότητα της ύλης είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου του σύμπαντος.

Κυριαρχία της ακτινοβολίας Η πίεση της ακτινοβολίας συσχετίζεται με την πυκνότητα με τον παράγοντα $w = 1/3$. Η εξίσωση συνέχειας οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (1.2.22)$$

Το σύμπαν ήταν αρχικά κυριαρχούμενο από ακτινοβολία αλλά σύντομα η συνιστώσα της ύλης έγινε σημαντικότερη καθώς όπως φαίνεται από την (1.2.22) η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας μειώνεται πολύ γρηγορότερα λόγω της διαστολής, σε σχέση με αυτή της ύλης.

Κυριαρχία της κοσμολογικής σταθεράς Αυτή είναι γνωστή και ως χώρος de Sitter. Η κοσμολογική σταθερά δε μεταβάλλεται και έτσι είναι $\dot{\rho}_\Lambda = 0$ από όπου προκύπτει ότι $w = -1$. Έτσι, η εξίσωση Friedmann προβλέπει εκθετική διαστολή

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (1.2.23)$$

οπου ο παράγοντας Hubble στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι σταθερός. Το σύμπαν βρίσκεται σήμερα σε περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής και κυριαρχίας από τη σκοτεινή ενέργεια.

1.3 Προβλήματα της Θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης

Το πρώτο και βασικότερο πρόβλημα της θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης είναι η αδυναμία της να εξηγήσει τις αρχικές συνθήκες για το σύμπαν. Υπάρχουν επιπλέον διάφορες παρατηρήσεις που δεν εξηγούνται ικανοποιητικά από τη θεωρία.

Το πρόβλημα της επιπεδότητας Οι παρατηρήσεις δείχνουν πως το σύμπαν είναι χωρικά επίπεδο. Η εξίσωση Friedmann είναι η (1.2.13) η οποία γραμμένη με χρήση του παράγοντα πυκνότητας Ω γίνεται

$$(\Omega^{-1} - 1)\rho\alpha^2 = -3M_p^2 k = \text{const.} \quad (1.3.1)$$

Καθώς το σύμπαν διαστέλλεται, ο παράγοντας κλίμακας $\alpha(t)$ αυξάνει και η ενεργειακή πυκνότητα ρ μειώνεται με μεγαλύτερο ρυθμό από το ρυθμό αύξησης του $\alpha(t)$, είτε το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη είτε από ακτινοβολία. Αυτό συνεπάγεται πως συνολικά ο όρος $\rho\alpha^2$ φθίνει με την πάροδο του χρόνου. Προκειμένου λοιπόν να ισχύει πως η ποσότητα $(\Omega^{-1} - 1)\rho\alpha^2$ είναι σταθερή, πρέπει το $\Omega^{-1} - 1$ να είναι ίσο με μηδέν ή να αυξάνεται ραγδαία. Η απόκλιση της κανονικοποιημένης πυκνότητας Ω από τη μονάδα είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας του σύμπαντος. Οι παρατηρήσεις απαιτούν το σύμπαν να έχει μηδενική καμπυλότητα σήμερα, οπότε η αρχική τιμή του Ω πρέπει να ήταν αρκετά κοντά στην τιμή $\Omega = 1$. Οποιαδήποτε απόκλιση από αυτή την τιμή θα είχε προκαλέσει ραγδαία αύξηση της καμπυλότητας. Επομένως θα πρέπει η τιμή της πυκνότητας την περίοδο Planck κατά την οποία οι ενέργειες ήταν της κλίμακας Planck, να είναι ίση με την κρίσιμη τιμή της πυκνότητας, ρ_c . Η θεωρία δεν προσφέρει μια φυσική εξήγηση γιατί να ισχύει αυτό.

Το πρόβλημα του ορίζοντα Η μεγαλύτερη ομοκινούμενη απόσταση από την οποία ένας παρατηρητής σε χρόνο t μπορεί να λάβει σήματα που ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός δίνεται από τη σχέση:

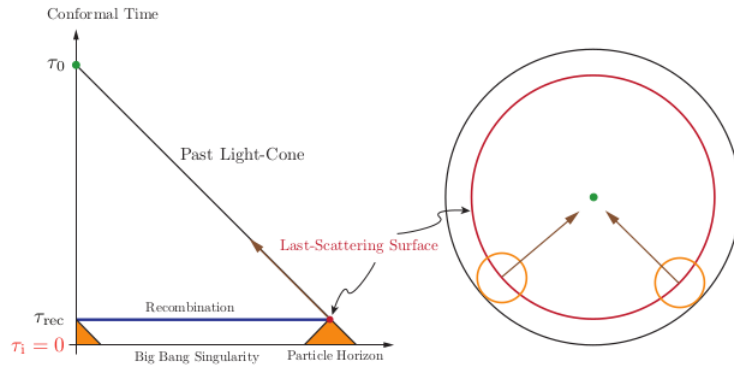
$$\chi_{ph}(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{\alpha(t')}. \quad (1.3.2)$$

Αυτή η απόσταση καθορίζει τον *σωματιδιακό ορίζοντα* ή *particle horizon*.

$$\chi_{ph} = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{\alpha(t')} = \int_{\alpha_i}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha\dot{\alpha}} = \int_{\ln\alpha_i}^{\ln\alpha} (\alpha H)^{-1} d\ln\alpha, \quad (1.3.3)$$

όπου $\alpha_i \equiv 0$ για την αρχική στιγμή (singularity) της Μεγάλης Έκρηξης.

Το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις στιγμές $t_i = 0$ και t_{rec} , η οποία είναι η στιγμή της επανασύνδεσης είναι πεπερασμένο. Από αυτό το γεγονός προκύπτει το πρόβλημα του ορίζοντα. Τα περισσότερα σημεία στη μικροκοσμική ακτινοβολία υποβάθρου (CMB) έχουν παρελθοντικούς κώνους φωτός οι οποίοι δεν τέμνονται μεταξύ τους και επομένως δεν ήταν



Σχήμα 1

Τα περισσότερα σημεία στο CMB έχουν παρελθοντικούς κώνους φωτός οι οποίοι δεν επικαλύπτονται και άρα δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ τους. Η στιγμή τ_0 αναφέρεται στη σημερινή εποχή, η τ_{rec} είναι η στιγμή της επανασύνδεσης και $\tau_i = 0$ η στιγμή του Big Bang. [10]

ποτέ σε αιτιακή σύνδεση. Για αυτό το λόγο περιμένουμε οι περιοχές που παρατηρούμε στην ακτινοβολία υποβάθρου που δε βρίσκονταν σε αιτιακή σύνδεση, να μην έχουν φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία. Παρ' όλα αυτά όμως, δεν υπάρχουν σημαντικές διακυμάνσεις στη θερμοκρασία του CMB, που σημαίνει πως όλα αυτά τα σημεία φαίνεται να έχουν σχεδόν ίδια θερμοκρασία.

Το πρόβλημα με τα σωματίδια που δεν παρατηρούνται Συχνά αναφέρεται ως το πρόβλημα των μαγνητικών μονοπόλων. Οι θεωρίες μεγάλης ενοποίησης προβλέπουν την ύπαρξη κάποιων σωματιδίων όπως τα μαγνητικά μονόπολα, τα οποία πρέπει να είχαν σχηματιστεί στο υπέρθερμο και πολύ ενεργητικό πρώιμο σύμπαν. Μάλιστα προβλέπεται ότι θα υπήρχαν σε μεγάλες ποσότητες μέχρι και σήμερα, σε αντίθεση με ο,τι δείχνουν οι παρατηρήσεις.

2 Κοσμολογικός Πληθωρισμός

Ο κοσμολογικός πληθωρισμός είναι μια σύντομη περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος που προηγείται της εποχής της ακτινοβολίας και αποτελεί μια κομψή λύση στα

παρατηρησιακά προβλήματα της θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης.

Από την εξίσωση Friedmann και την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (2.1)$$

για να είναι η επιτάχυνση της διαστολής θετική ($\ddot{a} > 0$) πρέπει να έχουμε $\rho + 3P < 0$. Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα ρ είναι θετική ποσότητα προκύπτει ότι

$$w < -\frac{1}{3}. \quad (2.2)$$

και έτσι απαιτείται το κοσμικό ρευστό να έχει αρνητική πίεση. Η κοσμολογική σταθερά η οποία είναι κυρίαρχη σήμερα, παρ' όλο που έχει καταστατική εξίσωση με $w = -1$, έχει πολύ μικρή τιμή για να ήταν κυρίαρχη στο πρώιμο σύμπαν. Με χρήση της εξίσωσης (1.2.12)

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(\rho + 3P) = -\frac{H^2}{2} \left(1 + \frac{3P}{\rho}\right) \quad (2.3)$$

ορίζεται η παράμετρος

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right). \quad (2.4)$$

Για $w < -\frac{1}{3}$ είναι $\epsilon_H < 1$. Ορίζουμε τον αριθμό N , $dN \equiv d \ln \alpha = H dt$, που αποτελεί μέτρο του αριθμού των e-foldings της διαστολής λόγω του πληθωρισμού. Σημειώνεται ότι ένα e-folding χαρακτηρίζει το διάστημα που χρειάστηκε ώστε το σύμπαν να διασταλλεί κατά έναν παράγοντα e . Η παράμετρος ϵ_H μπορεί να γραφτεί ως $\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1$. Αυτή η έκφραση δείχνει ότι η μεταβολή της παραμέτρου Hubble ανά e-folding είναι μικρή.

Οι μεγαλύτερες κλίμακες που παρατηρούνται στην ακτινοβολία υποβάθρου παράγονται 40-60 e-foldings πριν το τέλος του πληθωρισμού. Χρειάζεται επομένως ο πληθωρισμός να διαρκεί τουλάχιστον τόσο ώστε να ικανοποιεί αυτές τις παρατηρήσεις. Για να παραμένει μικρή η τιμή της παραμέτρου ϵ_H για μεγάλο αριθμό χρόνων Hubble, απαιτείται η εξέλιξη της παραμέτρου ϵ_H σε σχέση με την παράμετρο Hubble να είναι μικρή. Αυτή η συνθήκη γράφεται ως

$$\frac{\dot{\epsilon}_H}{H \epsilon_H} = \frac{d \ln \epsilon_H}{dN} < 1. \quad (2.5)$$

2.1 Εξέλιξη της ακτίνας του Hubble

Η ακτίνα Hubble H^{-1} καθορίζει την απόσταση την οποία μπορεί το φως να ταξιδέψει σε ένα χρόνο Hubble και άρα την κλίμακα μέσα στην οποία συμβαίνουν αιτιακές αλληλεπιδράσεις. Δύο σημεία τα οποία χωρίζονται από απόσταση μικρότερη από μια ακτίνα Hubble σε

οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορούν να αλληλεπιδρούν και να βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Η ομοκινούμενη ακτίνα Hubble δίνεται από $(\alpha H)^{-1} = \mathcal{H}^{-1}$. Οι κλίμακες με κυματαριθμό $k > \alpha H$ βρίσκονται μέσα από τον ορίζοντα και συνεπώς είναι σε αιτιακή σύνδεση, σε αντίθεση με τις μεγαλύτερες κλίμακες που αντιστοιχούν σε κυματαριθμό $k < \alpha H$.

Η ομοκινούμενη ακτίνα Hubble συρρικνώνεται κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού ενώ μεγαλώνει την περίοδο της ακτινοβολίας και της ύλης που διαδέχονται τον πληθωρισμό. Κατά τη διάρκεια της επιταχυνόμενης διαστολής είναι $\alpha(t) \propto e^{Ht}$ με σταθερό παράγοντα Hubble. Η ακτίνα Hubble συρρικνώνεται ως

$$(\alpha H)^{-1} \propto e^{-Ht}. \quad (2.1.1)$$

Την περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας η ακτίνα Hubble μεγαλώνει ως

$$(\alpha H)^{-1} \propto t^{1/2}. \quad (2.1.2)$$

Την εποχή της ύλης η ακτίνα Hubble επίσης μεγαλώνει

$$(\alpha H)^{-1} \propto t^{1/3}. \quad (2.1.3)$$

2.2 Η εξέλιξη των κλιμάκων

Εξετάζουμε τώρα τον τρόπο που εξελίσσονται οι ομοκινούμενες κλίμακες ή αλλιώς οι κυματαριθμοί

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Οι κλίμακες k^{-1} που είναι μεγαλύτερες από το μήκος Hubble ($k^{-1} > \mathcal{H}^{-1}$) ανήκουν στον υπερ-ορίζοντα (superhorizon) ενώ αυτές που είναι μικρότερες από τον ορίζοντα Hubble είναι του υπο-ορίζοντα (subhorizon). Μια κλίμακα εξέρχεται από τον ορίζοντα όταν είναι συγκρίσιμη μαζί του ($k = \mathcal{H}$). Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού όπου το \mathcal{H}^{-1} ελαττώνεται, οι κλίμακες του υπο-ορίζοντα εξέρχονται του ορίζοντα και παραμένουν στον υπερ-ορίζοντα μέχρι το τέλος του πληθωρισμού. Πρώτα εξέρχονται οι μεγαλύτερες κλίμακες και τελευταίες οι μικρότερες. Μετά το τέλος του πληθωρισμού ξεκινά ο ορίζοντας \mathcal{H}^{-1} να αυξάνεται πάλι και έτσι οι κλίμακες k^{-1} εισέρχονται ξανά στη σφαίρα Hubble, και ανήκουν ξανά στον υπο-ορίζοντα με την αντίστροφη σειρά με την οποία είχαν εξέλθει. Οι μεγαλύτερες κλίμακες που

παρατηρούνται σήμερα στο σύμπαν είναι αυτές που βρίσκονται στο σημερινό ορίζοντα. Η διαστολή του σύμπαντος βρίσκεται και πάλι σε μια φάση επιτάχυνσης οπότε οι μεγαλύτερες κλίμακες εξέρχονται και πάλι από τον ορίζοντα διότι το \mathcal{H}^{-1} μειώνεται.

2.3 Λύση των προβλημάτων της θεωρίας

Ο πληθωρισμός προσφέρει μια λύση στο πρόβλημα του ορίζοντα διότι στον πληθωρισμό η ακτίνα Hubble συρρικνώνεται

$$\frac{d}{dt}(\alpha H)^{-1} < 0. \quad (2.3.1)$$

Είδαμε ότι τότε η καταστατική εξίσωση είναι $w < -1/3$. Ο παράγοντας κλίμακας σαν συνάρτηση του σύμμορφου χρόνου δίνεται από τη σχέση $\alpha(\tau) \propto \tau^{2/(1+3w)}$.

- Για $w > -1/3$ έχουμε $\frac{1+3w}{2} > 0 \xrightarrow{\alpha_i=0} \tau_i \propto \alpha(\tau)^{(1+3w)/2} = 0$
- Για $w < -1/3$ έχουμε $\frac{1+3w}{2} < 0 \xrightarrow{\alpha_i=0} \tau_i \propto \alpha(\tau)^{(1+3w)/2} \rightarrow -\infty$

Ο ομοκινούμενος ορίζοντας συρρικνώνεται κατά τον πληθωρισμό προτού αρχίσει πάλι να μεγαλώνει στην εποχή της ακτινοβολίας και της ύλης, που σημαίνει ότι μια κλίμακα $R = k^{-1}$ που παρατηρείται να εισέρχεται του ορίζοντα σήμερα ήταν κάποια στιγμή στο μακρινό παρελθόν μέσα σε αυτόν. Όλα τα φωτόνια που παρατηρούνται στην μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου ήταν συνεπώς κάποτε σε αιτιακή σύνδεση και άρα μπορούσαν να βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Η λύση της μειούμενης ακτίνας αποτελεί λύση και στο πρόβλημα της επιπεδότητας.

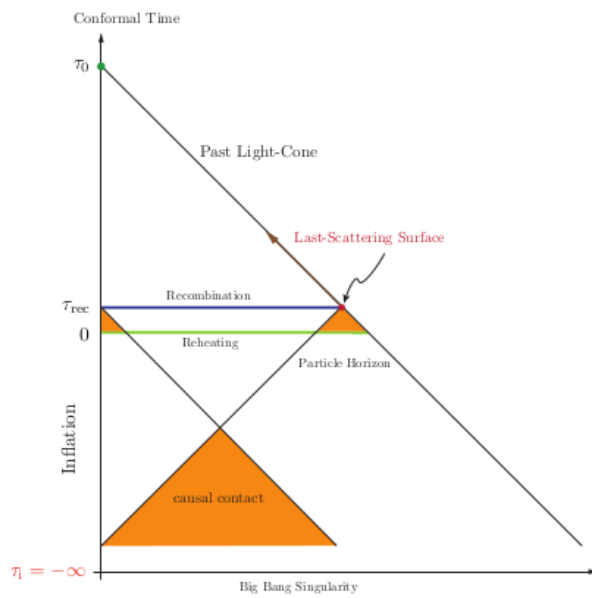
Η σχέση (1.2.13)

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} - \frac{k}{\alpha^2}$$

γράφεται αλλιώς

$$1 - \Omega(\alpha) = \frac{-k}{(\alpha H)^2}. \quad (2.3.2)$$

Από τη (2.3.2) φαίνεται πως ο παράγοντας καμπυλότητας $|1 - \Omega(\alpha)|$ εξαρτάται από τη χρονική εξέλιξη της ακτίνας Hubble $(\alpha H)^2$ και μάλιστα όταν αυτή είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου, η καμπυλότητα μεγαλώνει. Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, καθώς η συνάρτηση



Σχήμα 2

Στην κοσμολογία με αρχική φάση πληθωρισμού, η στιγμή $\tau = 0$ δεν αντιστοιχεί στην αρχική στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης αλλά σε ένα σημείο μετάβασης ανάμεσα στον πληθωρισμό και την κλασική Big Bang κοσμολογία. Υπάρχει αρκετός χρόνος πριν ώστε οι κώνοι φωτός να μπορούν να αλληλεπιδράσουν. [10]

$(\alpha H)^2$ είναι φθίνουσα, το σύμπαν τείνει προς μηδενική καμπυλότητα. Συμπερασματικά, ο πληθωρισμός παρέχει φυσικά μια εξήγηση για την παρατηρούμενη επιπεδότητα του σύμπαντος σήμερα.

Τέλος, σε ό,τι αφορά το πρόβλημα με τα σωματίδια που δεν παρατηρούνται σήμερα παρ' όλο που προβλέπονται θεωρητικά, ο κοσμολογικός πληθωρισμός μπορεί επίσης να αποτελέσει μια λύση. Τα σωματίδια αυτά θεωρητικά παράγονται σε πολύ υψηλές ενέργειες. Αν όμως υπήρξε φάση απότομης διαστολής που τελείωσε σε χαμηλότερες ενέργειες, αυτά τα σωματίδια δε θα είχαν χρόνο να συγκεντρωθούν σε μεγάλες ποσότητες και η αριθμητική τους πυκνότητα θα είχε μειωθεί δραματικά. Είναι επομένως λογικό να μην ανιχνεύονται σήμερα.

2.4 Το πεδίο inflaton

Προκειμένου να λάβει χώρα ο πληθωρισμός η κυρίαρχη συνιστώσα της ενεργειακής πυκνότητας πρέπει να έχει καταστατική εξίσωση με $w < -1/3$. Ο απλούστερος υποψήφιος είναι ένα απλό βαθμωτό πεδίο το οποίο ονομάζεται inflaton.

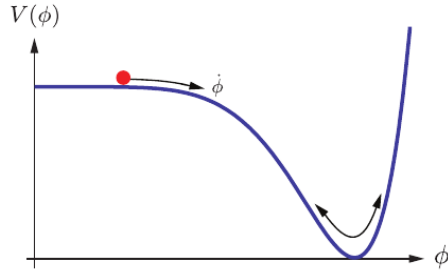
Θεωρούμε βαθμωτό πεδίο με την ελάχιστη σύζευξη με τη βαρύτητα (minimally coupled). Η δράση που περιγράφει ένα FRW σύμπαν αποτελείται από το βαρυτικό κομμάτι και από το κομμάτι που αφορά την ύλη: $S = S_g + S_m$. Η ύλη περιγράφεται από το πεδίο ϕ .

$$S_m = \int \left[-\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4\chi, \quad (2.4.1)$$

όπου $g \equiv \det[g_{\mu\nu}]$, $V(\phi)$ είναι το δυναμικό το οποίο αντιστοιχεί σε αυτό το πεδίο και η Λαγκρανζιανή είναι

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi). \quad (2.4.2)$$

Το δυναμικό έχει την ακόλουθη μορφή.



Σχήμα 3: Οι ταλαντώσεις του inflaton στο τέλος του πληθωρισμού έχουν ως αποτέλεσμα τη διαδικασία της επαναθέρμανσης όπου το πεδίο διασπάται προς το σχηματισμό των γνωστών μας σωματιδίων.[10]

Η εξίσωση κίνησης (Klein - Gordon) για το πεδίο ϕ βρίσκεται με την ελαχιστοποίηση της δράσης:

$$\boxed{\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + \alpha^2 V_{,\phi} = 0}, \quad (2.4.3)$$

όπου με $'$ συμβολίζεται η παραγωγή ως προς τον σύμμορφο χρόνο ή

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0} \quad (2.4.4)$$

όπου με $\dot{}$ συμβολίζεται η παραγωγή ως προς τον φυσικό χρόνο. Ο δεύτερος όρος παίζει το ρόλο της τριβής που επιβραδύνει την εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου ως αποτέλεσμα της διαστολής του σύμπαντος.

Ο ταυιστής ενέργειας ορμής προκύπτει από τη δράση:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.4.5)$$

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4\chi \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_m g_{\mu\nu})$$

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.4.6)$$

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \delta_\nu^\mu V(\phi). \quad (2.4.7)$$

Οι συνιστώσες του είναι:

- $T_0^0 = -\frac{1}{2}\alpha^{-2}(\phi')^2 - V(\phi) = -\rho$
- $T_i^0 = T_0^i = 0$
- $T_j^i = \delta_j^i \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) \right] = \delta_j^i p$

Η ενεργειακή πυκνότητα και η πίεση του inflaton είναι

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.4.8)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.4.9)$$

Η εξίσωση Friedmann είναι

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)$$

και η εξίσωση συνέχειας είναι

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3H\dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow 2M_{pl}^2\dot{H} + \dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2} \quad (2.4.10)$$

Από τις (2.4.8), (2.4.9) φαίνεται ότι για να έχει το inflaton αρνητική πίεση χρειάζεται να ισχύει $V(\phi) > \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Αν μάλιστα το δυναμικό κυριαρχεί της κινητικής ενέργειας

$$V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2,$$

η καταστατική εξίσωση θα είναι $w \approx -1$. Επιπλέον, για να διαρκεί ο πληθωρισμός αρκετά ώστε να λύνονται τα προβλήματα της θεωρίας, το πεδίο πρέπει να εξελίσσεται αρκετά αργά:

$$\left| \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right| \gg |\ddot{\phi}|.$$

2.5 Η Προσέγγιση της Αργής Εξέλιξης

Στην προσέγγιση της αργής εξέλιξης του inflaton απαιτούμε να ισχύει

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V \quad (2.5.1)$$

και

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|. \quad (2.5.2)$$

Η συνθήκη $\dot{\phi}^2 \ll V$ απλοποιεί την εξίσωση Friedmann ως εξής:

$$\boxed{H^2 \approx \frac{V}{3M_{pl}^2}}. \quad (2.5.3)$$

Η συνθήκη $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$ απλοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon σε

$$\boxed{3H\dot{\phi} \approx -V'}. \quad (2.5.4)$$

Οι (2.5.3) και (2.5.4) αποτελούν τις εξισώσεις της αργής εξέλιξης.

Στην προσέγγιση της αργής εξέλιξης όλα έχουν εξάρτηση από το πεδίο ϕ μέσω του $V(\phi)$ και των παραγώγων του. Δεν μπορούμε να ορίσουμε το $\dot{\phi}$ και το ϕ ξεχωριστά το ένα από το άλλο.

Από τις εξισώσεις (2.5.3) και (2.5.4) υπολογίζεται η έκφραση

$$H^{-1}\dot{\phi} = -M_{pl}^2 \frac{V'}{V}, \quad (2.5.5)$$

ενώ από την παραγώγισή τους προκύπτει:

$$\text{i) } 3H^2 = \frac{V}{M_{pl}^2} \Rightarrow 6H\dot{H} = \frac{V'\dot{\phi}}{M_{pl}^2},$$

το οποίο με χρήση της (2.5.5) τελικά δίνει $\dot{H} = -\frac{(V')^2}{6V}$.

$$\text{ii) } \dot{\phi} = -\frac{V'}{3H} \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{V''\dot{\phi}}{3H} + \frac{V'\dot{H}}{3H^2}$$

Με τη χρήση των (2.5.3), (2.5.4) και (2.5.5) καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{\phi} = \frac{M_{pl}^2}{3} \frac{V''V'}{V} - \frac{M_{pl}^2}{6} \frac{(V')^3}{V^2}.$$

Παράμετροι της Αργής Εξέλιξης Ορίζουμε τις παραμέτρους:

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \approx \frac{\dot{\phi}^2/2}{M_{pl}^2 H^2} \quad \eta_V \equiv M_{pl}^2 \frac{V''}{V} \quad \xi_V \equiv \frac{V'''}{V^2} \quad (2.5.6)$$

όπου με $'$ συμβολίζεται η παραγώγιση ως προς το ϕ .

Από τα παραπάνω υπολογίζουμε επιπλέον τις παρακάτω ισότητες:

- $(H^{-1}\dot{\phi})^2 = 2M_{pl}^2 \epsilon_V$

- $H^{-2} \ddot{\phi} = M_{pl}^4 \left(\frac{V''V'}{V^4} - \frac{(V')^3}{2V^3} \right) \Rightarrow \ddot{\phi} = H\dot{\phi}(\epsilon_V - \eta_V)$
- $(H^{-1}\dot{\phi})^2 = 2M_{pl}^2\epsilon_V \Rightarrow \dot{\epsilon}_V = \frac{H^{-1}\dot{\phi}}{M_{pl}^2}(H^{-1}\ddot{\phi} - H^{-2}\dot{H}\dot{\phi}) \Rightarrow$
 $H^{-1}\dot{\epsilon}_V = 4\epsilon_V^2 - 2\epsilon_V\eta_V$

Μια χρήσιμη παράμετρος είναι η $\eta_H = \epsilon_H - \frac{1}{2} \frac{d \ln \epsilon_H}{dN}$.

Για την προσέγγιση της αργής εξέλιξης απαιτούμε να είναι

$$\epsilon_V \ll 1$$

και από την απαίτηση να ισχύει

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$$

παίρνουμε:

$$|H\dot{\phi}(\epsilon_V - \eta_V)| \ll |3H\dot{\phi}| \Rightarrow$$

$$\epsilon_V - \eta_V \ll 3 \Rightarrow$$

$$\eta_H \ll 3. \quad (2.5.7)$$

Ισχύουν ακόμη οι σχέσεις

$$\epsilon_H \approx \epsilon_V \quad (2.5.8)$$

και

$$\eta_H \approx \eta_V - \epsilon_V, \quad (2.5.9)$$

όπου έχουμε ορίσει $\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$

Υποθέτοντας ότι το inflaton δεν είναι αρχικά πολύ κοντά στο ελάχιστο του δυναμικού του, ο πληθωρισμός εξελίσσεται όσο το πεδίο πηγαίνει αργά προς το ελάχιστο. Αν το δυναμικό είναι σχεδόν σταθερό για αρκετό χρόνο, μπορεί να επιτευχθεί το ποσό του πληθωρισμού που χρειάζεται. Η απλούστερη μορφή τέτοιου δυναμικού είναι $V \propto \phi^n$, αν και υπάρχουν πολλά διαφορετικά μοντέλα. Ο πληθωρισμός τελειώνει όταν $\epsilon_H = 1$. Το πεδίο inflaton συνεχίζει να εξελίσσεται προς το ελάχιστο του δυναμικού, όπου αρχίζει να ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας. Ακολουθεί η διαδικασία της αναθέρμανσης, η φυσική της οποίας εξαρτάται από το μοντέλο που εξετάζεται. Τότε το inflaton αποσυντίθεται προς το σχηματισμό των

σωματιδίων του καθιερωμένου προτύπου.

Ο αριθμός των e-foldings χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγίσεις γράφεται

$$N \equiv \int_{t_f}^{t_i} H(t) dt = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = - \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{3H^2}{V_\phi} = - \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{3H^2}{\sqrt{2\epsilon_V} V} M_{pl} d\phi = - \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V} M_{pl}} d\phi \Rightarrow$$

$$N = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V} M_{pl}} d\phi$$

με $\epsilon_V < 1$.

Η ενεργειακή πυκνότητα και η πίεση για το πεδίο γράφονται συναρτήσει των παραμέτρων ως εξής:

$$\rho = \frac{1}{2} \alpha^{-2} (\phi')^2 + V(\phi) = \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + V = \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon_V\right) V$$

$$p = \frac{1}{2} \alpha^{-2} (\phi')^2 - V(\phi) = \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - V = \left(-1 + \frac{1}{3} \epsilon_V\right) V$$

$$w \equiv \frac{p}{\rho} \approx -1 + \frac{2}{3} \epsilon_V \Rightarrow 1 + w \approx \frac{2}{3} \epsilon_V$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \approx -1 - \frac{2}{3} \epsilon_V + \frac{2}{3} \eta_V$$

3 Κβαντικές διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού

Ο πληθωρισμός παρέχει ένα μηχανισμό για τη δημιουργία κοσμολογικών διαταραχών. Αυτές είναι απαραίτητες ώστε το σύμπαν να μην είναι τελείως ομογενές αλλά να υπάρξουν οι κατάλληλες συνθήκες για το σχηματισμό των δομών του σύμπαντος. Το πεδίο ϕ (inflaton) χαρακτηρίζεται από χωρικές διακυμάνσεις κβαντικής φύσης, $\delta\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t, \mathbf{x}) - \phi(t)$. Αυτές οι χωρικές διακυμάνσεις σημαίνουν πως τα διάφορα σημεία του χώρου διαστέλλονται με διαφορετικό τρόπο, άρα υπάρχουν τοπικές διαφορές στο χρόνο στον οποίο ο πληθωρισμός τερματίζεται, $\delta t(\mathbf{x})$. Επιπροσθέτως, οι διαφορές στη διαστολή σε κάθε σημείο μεταφράζονται σε διαφορές στις τοπικές πυκνότητες ενέργειας μετά το τέλος του πληθωρισμού. Από τις κβαντικές λοιπόν διακυμάνσεις στο πεδίο inflaton $\delta\phi(t, \mathbf{x})$, προκύπτουν αργότερα τοπικές διαταραχές $\delta\rho(t, \mathbf{x})$ και εν τέλει οι διακυμάνσεις $\Delta T(\mathbf{x})$ στη θερμοκρασία της ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) σήμερα.

3.1 Διαταραγμένη FRW μετρική

Στη θεωρία διαταραχών της Γενικής Σχετικότητας θεωρούμε το διαταραγμένο χωρόχρονο ως μικρή διακύμανση σε έναν απλό, συμμετρικό χωρόχρονο, το υπόβαθρο.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \alpha^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (3.1.1)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι το υπόβαθρο και η διαταραχή $\delta g_{\mu\nu}$ καθώς και οι παράγωγοί της είναι μικρές. Ορίζουμε $h_{\nu}^{\mu} \equiv \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}$ και $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$.

Το διαταραγμένο κομμάτι της μετρικής μπορεί να γραφεί:

$$h_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

όπου $D = -\frac{1}{6}h_i^i$ και $\delta^{ij}E_{ij} \equiv E_i^i \equiv E_{ii} = 0$.

Το στοιχείο μήκους είναι:

$$ds^2 = \alpha(\tau)^2 \{ -(1 + 2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \} \quad (3.1.3)$$

3.2 Μεταβλητές αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας

Η επιλογή βαθμίδας έχει σημασία διότι μερικές φορές μπορεί να υπάρχει μετασχηματισμός τέτοιος που να αναιρεί τις διαταραχές ή να εμφανίζει διαταραχές που δεν είναι φυσικές. Θα υπολογίσουμε τις μεταβλητές που περιγράφουν τη διαταραχή της μετρικής, έτσι ώστε αυτές να είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμό βαθμίδας.

Ο συσχετισμός μεταξύ σημείων στο χωρόχρονο του υποβάθρου και του διαταραγμένου χωροχρόνου γίνεται μέσω του συστήματος συντεταγμένων x^α . Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες στο υπόβαθρο ως x^α και δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων στο διαταραγμένο χωρόχρονο (που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές βαθμίδες) ως \hat{x}^α και \tilde{x}^α . Οι συντεταγμένες \hat{x}^α και \tilde{x}^α συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού

$$\tilde{x}^\alpha = \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha,$$

με το ξ^α και τις παραγώγους $\xi_{,\beta}^\alpha$ να είναι πρώτης τάξης μικρά μεγέθη. Το σύστημα \hat{x}^α συσχετίζει το σημείο \bar{P} του υποβάθρου με το \hat{P} , ενώ το σύστημα \tilde{x}^α συσχετίζει το ίδιο

σημείο \bar{P} με το σημείο \tilde{P} . Η σχέση που τα συνδέει είναι:

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) = x^\alpha(\bar{P}). \quad (3.2.1)$$

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων συσχετίζει τις συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου σημείου στο διαταραγμένο χωρόχρονο

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\tilde{P}) + \xi^\alpha \quad \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha \quad (3.2.2)$$

Συνδυάζοντας τις (3.2.1) και (3.2.2) εξάγουμε τη σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες δύο διαφορετικών σημείων σε ένα ορισμένο σύστημα,

$$\hat{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) - \xi^\alpha \quad \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) - \xi^\alpha \quad (3.2.3)$$

Για ένα βαθμωτό $s = \bar{s} + \delta s$, οι διαταραχές σε διαφορετικές βαθμίδες ορίζονται ως

$$\delta \hat{s}(x^\alpha) \equiv s(\hat{P}) - \bar{s}(\bar{P}) \quad \delta \tilde{s}(x^\alpha) \equiv s(\tilde{P}) - \bar{s}(\bar{P}). \quad (3.2.4)$$

Συσχετίζουμε τώρα το $\delta \hat{s}$ με το $\delta \tilde{s}$:

$$s(\tilde{P}) = s(\hat{P}) - \frac{\partial s}{\partial \hat{x}^\alpha}(\hat{P})\xi^\alpha = s(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})\xi^\alpha, \quad (3.2.5)$$

όπου στη δεύτερη ισότητα κάναμε την προσέγγιση $\frac{\partial s}{\partial \hat{x}^\alpha}(\hat{P}) \approx \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})$ διότι ο πολλαπλασιασμός τους με το ξ^α είναι διόρθωση δεύτερης τάξης. Εφόσον το υπόβαθρο είναι ομογενές και χρονοεξαρτώμενο ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})\xi^\alpha = \frac{\partial \bar{s}}{d\tau}(\bar{P})\xi^0 = \bar{s}'\xi^0 \quad (3.2.6)$$

και εν τέλει παίρνουμε:

$$s(\tilde{P}) = s(\hat{P}) - \bar{s}'\xi^0. \quad (3.2.7)$$

Παραγωγίζοντας, το τελικό μας αποτέλεσμα για το μετασχηματισμό βαθμίδας του δs είναι

$$\boxed{\delta \tilde{s}(x^\alpha) = \delta \hat{s}(x^\alpha) - \bar{s}'\xi^0}. \quad (3.2.8)$$

Ανάλογα, οι διαταραχές στα διανυσματικά και τανυστικά πεδία στις δύο βαθμίδες ορίζονται ως εξής:

$$\delta \hat{w}^\alpha(x^\beta) \equiv w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) - \bar{w}^\alpha(\bar{P})$$

$$\delta\tilde{w}^\alpha(x^\beta) \equiv w^{\hat{\alpha}}(\tilde{P}) - \bar{w}^\alpha(\bar{P}) \quad (3.2.9)$$

και

$$\begin{aligned} \delta\hat{A}_\beta^\alpha(x^\gamma) &\equiv A_{\hat{\beta}}^\alpha(\hat{P}) - \bar{A}_\beta^\alpha(\bar{P}) \\ \delta\tilde{A}_\beta^\alpha(x^\gamma) &\equiv A_{\tilde{\beta}}^\alpha(\tilde{P}) - \bar{A}_\beta^\alpha(\bar{P}) \\ \delta\hat{B}_{\alpha\beta}(x^\gamma) &\equiv B_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{P}) - \bar{B}_{\alpha\beta}(\bar{P}) \\ \delta\tilde{B}_{\alpha\beta}(x^\gamma) &\equiv B_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(\tilde{P}) - \bar{B}_{\alpha\beta}(\bar{P}) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Για τον (0, 2) ταυνοστή έχουμε:

$$B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\tilde{P}) = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) + \frac{\partial B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{\partial \hat{x}^\alpha} [\hat{x}^\alpha(\tilde{P}) - \hat{x}^\alpha(\hat{P})] = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})\xi^\alpha \quad (3.2.11)$$

και

$$B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \xi_{,\mu}^\rho \bar{B}_{\rho\nu}(\bar{P}) - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{B}_{\mu\sigma}(\bar{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})\xi^\alpha, \quad (3.2.12)$$

και έτσι παίρνουμε τον τρόπο μετατροπής για τη διαταραχή $\delta B_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \delta\tilde{B}_{\mu\nu} &\equiv B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) - \bar{B}_{\mu\nu}(\bar{P}) = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \bar{B}_{\mu\nu}(\bar{P}) - \xi_{,\mu}^\rho \bar{B}_{\rho\nu}(\bar{P}) - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{B}_{\mu\sigma}(\bar{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})\xi^\alpha \Rightarrow \\ \delta\tilde{B}_{\mu\nu} &= \delta\hat{B}_{\mu\nu} - \xi_{,\mu}^\rho \bar{B}_{\rho\nu} - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{B}_{\mu\sigma} - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί:

$$\delta\tilde{w}^\alpha = \delta\hat{w}^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha \bar{w}^\beta - \bar{w}_{,\beta}^\alpha \xi^\beta \quad (3.2.14)$$

και

$$\delta\tilde{A}_\nu^\mu = \delta\hat{A}_\nu^\mu + \xi_{,\rho}^\mu \bar{A}_\nu^\rho - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{A}_\sigma^\mu - \bar{A}_{\nu,\alpha}^\mu \xi^\alpha \quad (3.2.15)$$

Το υπόβαθρο είναι ισότροπο και ομογενές οπότε τα τετραδιανύσματα και οι ταυνοστές είναι στη μορφή

$$\bar{w}^\alpha = (\bar{w}^0, \vec{0}) \quad \bar{A}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \bar{A}_0^0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\delta_j^i \bar{A}_k^k \end{pmatrix} \quad (3.2.16)$$

και εξαρτώνται μόνο από τον σύμμορφο χρόνο τ . Οι σχέσεις για το μετασχηματισμό των διαταραχών γίνονται σύμφωνα με τα παραπάνω ως εξής:

$$\delta\tilde{s} = \delta s - \bar{s}' \xi^0$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{w}^0 &= \delta w^0 + \xi_{,0}^0 \bar{w}^0 - \bar{w}_{,0}^0 \xi^0 \\
\delta\tilde{w}^i &= \delta w^i + \xi_{,0}^i \bar{w}^0 \\
\delta\tilde{A}_0^0 &= \delta A_0^0 - \bar{A}_{0,0}^0 \xi^0 \\
\delta\tilde{A}_i^0 &= \delta A_i^0 + \frac{1}{3} \xi_{,i}^0 \bar{A}_k^k - \xi_{,i}^0 \bar{A}_0^0 \\
\delta\tilde{A}_0^i &= \delta A_0^i + \xi_{,0}^i \bar{A}_0^0 - \frac{1}{3} \xi_{,0}^i \bar{A}_k^k \\
\delta\tilde{A}_j^i &= \delta A_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \bar{A}_{k,0}^k \xi^0.
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό βαθμίδας (3.2.13) στη διαταραχή της μετρικής έχουμε

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \xi_{,\mu}^\rho \bar{g}_{\rho\nu} - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{g}_{\mu\sigma} - \bar{g}_{\mu\nu,0} \xi^0 \tag{3.2.18}$$

Χρησιμοποιούμε ότι $\bar{g}_{\mu\nu,0} = 2\alpha' \alpha \eta_{\mu\nu}$ και βρίσκουμε ότι

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \alpha^2 \left[-\xi_{,\mu}^\rho \eta_{\rho\nu} - \xi_{,\nu}^\sigma \eta_{\mu\sigma} - 2\frac{\alpha'}{\alpha} \eta_{\mu\nu} \xi^0 \right] \tag{3.2.19}$$

Ισχύει ότι

$$\delta g_{\mu\nu} = \alpha^2 \begin{pmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix} \tag{3.2.20}$$

Θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό βαθμίδας (3.2.17) στα διάφορα στοιχεία της διαταραχής της μετρικής.

i)

$$\delta\tilde{g}_{00} \equiv -2\alpha^2 \tilde{A} = \delta g_{00} + \alpha^2 \left(-\xi_{,0}^\rho \eta_{\rho 0} - \xi_{,0}^\sigma \eta_{0\sigma} - 2\frac{\alpha'}{\alpha} \eta_{00} \xi^0 \right) = -2\alpha^2 A + \alpha^2 \left(2\xi_{,0}^0 + 2\frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0 \right).$$

Από το παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\boxed{\tilde{A} = A - \xi_{,0}^0 - \frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0}. \tag{3.2.21}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}_{0i} &\equiv -\alpha^2 \tilde{B}_i = -\alpha^2 B_i - \alpha^2 \xi_{,0}^\rho \eta_{\rho i} - \alpha^2 \xi_{,i}^\sigma \eta_{0\sigma} - 2\alpha' \alpha \eta_{0i} \xi^0 \Rightarrow \\
&-\alpha^2 \tilde{B}_i = -\alpha^2 B_i - \alpha^2 \xi_{,0}^i \eta_{ii} - \alpha^2 \xi_{,i}^0 \eta_{00} \Rightarrow \\
&-\alpha^2 \tilde{B}_i = -\alpha^2 B_i - \alpha^2 \xi_{,0}^i + \alpha^2 \xi_{,i}^0.
\end{aligned}$$

Από όπου συνεπάγεται η σχέση μετασχηματισμού

$$\boxed{\tilde{B}_i = B_i + \xi_{,0}^i - \xi_{,i}^0}. \tag{3.2.22}$$

iii)

$$\begin{aligned}\delta\tilde{g}_{ij} &\equiv -2\tilde{D}\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{ij} = \delta g_{ij} - \alpha^2 \xi_{,i}^\rho \eta_{\rho j} - \alpha^2 \xi_{,j}^\sigma \eta_{i\sigma} - 2\alpha' \alpha \eta_{ij} \xi^0 \Rightarrow \\ \alpha^2(-2\tilde{D}\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{ij}) &= \alpha^2(-D\delta_{ij} + 2E_{ij}) - \alpha^2 \xi_{,i}^j \eta_{jj} - \alpha^2 \xi_{,j}^i \eta_{ii} - 2\alpha' \alpha \delta_{ij} \xi^0 \Rightarrow \\ -\tilde{D}\delta_{ij} + \tilde{E}_{ij} &= -D\delta_{ij} + E_{ij} - \frac{1}{2}(\xi_{,j}^i + \xi_{,i}^j) - \frac{\alpha'}{\alpha} \delta_{ij} \xi^0\end{aligned}$$

Μπορούμε να τη χωρίσουμε σε δύο μέρη χρησιμοποιώντας ότι $\frac{1}{2}(\xi_{,j}^i + \xi_{,i}^j) = \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi_{,k}^k + \frac{1}{2}(\xi_{,j}^i + \xi_{,i}^j) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi_{,k}^k$, ως εξής:

$$\boxed{\tilde{D} = D + \frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0 + \frac{1}{3} \xi_{,k}^k} \quad (3.2.23)$$

$$\boxed{\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2}(\xi_{,j}^i + \xi_{,i}^j) + \frac{1}{3} \xi_{,k}^k} \quad (3.2.24)$$

Ένα διανυσματικό πεδίο μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη, ένα αστρόβιλο πεδίο και ένα με μηδενική απόκλιση, $B_i = B_{,i} + B_i^V$ ή $\vec{B} = \vec{B}^S + \vec{B}^V$ με $\vec{B}^S = -\nabla B$ και $\nabla \cdot \vec{B}^V = 0$.

Ένα τανυστικό πεδίο ανάλογα γράφεται ως άθροισμα από τρία μέρη: $E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T$.

Τα E_{ij}^S και E_{ij}^V εκφράζονται συναρτήσει ενός βαθμωτού πεδίου E και ενός διανυσματικού πεδίου E_i :

$$\begin{aligned}E_{ij}^S &= (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E = E_{,ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} E_{,kl} \\ E_{ij}^V &= -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}),\end{aligned}$$

όπου $\delta^{ij} E_{i,j} = \nabla \cdot \vec{E} = 0$ και $\delta^{ik} E_{ij,k}^T = 0$, $\delta^{ij} E_{ij}^T = 0$.

Συμπερασματικά, η διαταραχή της μετρικής χωρίζεται σε ένα βαθμωτό κομμάτι που αποτελείται από τα πεδία A , D , \vec{B}^S και E_{ij}^S , από ένα διανυσματικό κομμάτι το οποίο αποτελείται από τα \vec{B}^V και E_{ij}^V και από ένα τανυστικό, το E_{ij}^T . Τα βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά μέρη της διαταραχής δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους στη θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης και εξελίσσονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Οι βαθμωτές διαταραχές είναι οι σημαντικότερες. Σχετίζονται με τις διακυμάνσεις της πυκνότητας και της πίεσης και παρουσιάζουν βαρυτική αστάθεια. Οι υπέρπυκνες περιοχές τείνουν να αυξάνουν πυκνότητα. Είναι υπεύθυνες για το σχηματισμό των δομών του σύμπαντος από μικρές αρχικές διαταραχές. Οι διανυσματικές διαταραχές σχετίζονται με τις διαταραχές στην περιστροφική ταχύτητα του κοσμικού ρευστού. Τείνουν να εξασθενούν με τη διαστολή του σύμπαντος, επομένως δεν είναι σημαντικές για την κοσμολογία. Οι τανυστικές διαταραχές τέλος, παράγουν βαρυτικά κύματα τα οποία δυνητικά είναι ανιχνεύσιμα.

3.3 Βαθμωτές διαταραχές

Εφόσον το βαθμωτό κομμάτι των διαταραχών της μετρικής είναι αυτό που συνδέεται με το σχηματισμό των δομών μεγάλης κλίμακας στο σύμπαν, θα επικεντρωθούμε στη μελέτη αυτών. Λαμβάνοντας υπόψη μόνο το βαθμωτό κομμάτι, θα προκύψει το στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = \alpha(\tau)^2 \{ -(1 + 2A)d\tau^2 + B_{,i}d\tau dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j \} \quad (3.3.1)$$

όπου έχουμε ορίσει τη διαταραχή της καμπυλότητας

$$\psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E. \quad (3.3.2)$$

Τα στοιχεία του $h_{\mu\nu}$ είναι:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2A & -B_{,i} \\ -B_{,i} & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

Ξεκινώντας από μια βαθμωτή διαταραχή στη μετρική και κάνοντας έναν τυχαίο μετασχηματισμό βαθμίδας $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$ μπορούμε να έχουμε και διανυσματική διαταραχή η οποία όμως θα οφείλεται αποκλειστικά στην επιλογή βαθμίδας. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε το χωρικό μέρος του πεδίου $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$ ως

$$\xi^i = \xi_{tr}^i - \delta^{ij}\xi_{,j}$$

δηλαδή να το χωρίσουμε σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα έχει μηδενική απόκλιση $\xi_{tr,i}^i = 0$ και το άλλο είναι αστρόβιλο, οπότε εκφράζεται ως κλίση μιας συνάρτησης ξ . Το ξ_{tr}^i είναι υπεύθυνο για τη διανυσματική διαταραχή, ενώ τα ξ^0 και ξ_j είναι αυτά που μεταβάλλουν τη βαθμωτή διαταραχή. Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για τις βαθμωτές διαταραχές, μπορούμε να μη λάβουμε υπόψη το ξ_{tr}^i . Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας τελικά ορίζονται από τις δύο σχέσεις:

$$\tilde{\tau} = \tau + \xi^0(\tau, \vec{x}) \quad (3.3.4)$$

$$\tilde{x}^i = x^i - \delta^{ij}\xi_{,j}(\tau, \vec{x}) \quad (3.3.5)$$

Οι σχέσεις (3.2.21), (3.2.22), (3.2.23) και (2.2.24) κρατώντας το βαθμωτό μέρος των συναρτήσεων και εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό που ορίζεται στις (3.3.4), (3.3.5) μετατρέπονται στις:

$$\tilde{A} = A - \xi^{0'} - \frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &= B + \xi' + \xi^0 \\
\tilde{D} &= D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0 \\
\tilde{E} &= E + \xi
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Και η διαταραχή της καμπυλότητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0. \tag{3.3.7}$$

Παίρνοντας συνδυασμούς των A, B, D, E κατασκευάζουμε ποσότητες οι οποίες είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Μια απλή επιλογή είναι τα *Bardeen potentials*:

$$\begin{aligned}
\Phi &\equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')' \\
\Psi &\equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E') = \psi - \mathcal{H}(B - E')
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας (2.3.6) αυτές οι ποσότητες παραμένουν αναλλοίωτες.

Θεωρώντας το βαθμωτό πεδίο inflaton για το υπόβαθρο, γράφουμε την εξίσωση Friedmann και την εξίσωση συνέχειας:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}\alpha^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}(\bar{\phi}')^2 + \alpha^2 V\right] \tag{3.3.9}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho} + 3\bar{p}) = -\frac{8\pi G}{3}\left[(\bar{\phi}')^2 - \alpha^2 V\right]. \tag{3.3.10}$$

Οι συνδυασμοί των παραπάνω μας δίνουν:

$$-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = 8\pi G\bar{p}\alpha^2 = 8\pi G\left[\frac{1}{2}(\bar{\phi}')^2 - \alpha^2 V\right] \tag{3.3.11}$$

$$-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 4\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})\alpha^2 = 4\pi G(\bar{\phi}')^2 \tag{3.3.12}$$

$$\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 = 4\pi G(\bar{\rho} - \bar{p})\alpha^2 = 8\pi G\alpha^2 V. \tag{3.3.13}$$

Η διαταραγμένη μετρική είναι

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \alpha^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 - 2A & -B_i \\ -B_i & (1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix} \\
g^{\mu\nu} &= \alpha^{-2} \begin{pmatrix} -1 + 2A & -B_i \\ -B_i & (1 + 2D)\delta_{ij} - 2E_{ij} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Από όπου υπολογίζουμε την τιμή της ορίζουσας της μετρικής $g \approx -\alpha^8[1+2A-6D+2(E_{11}+E_{22}+E_{33})] = -\alpha^8(1+2A-6D)$, χρησιμοποιώντας ότι το E_{ij} δεν έχει ίχνος. Έχοντας χωρίσει το πεδίο σε ένα υπόβαθρο και ένα διαταραχτικό κομμάτι ως $\phi(\vec{x}, \tau) = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\vec{x}, \tau)$, το δυναμικό γίνεται

$$V(\phi) = V(\bar{\phi} + \delta\phi) = V(\bar{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi. \quad (3.3.15)$$

Για αυτή τη διαταραγμένη μετρική παίρνουμε την εξίσωση για τις διαταραχές του πεδίου $\delta\phi$:¹

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + \alpha^2\frac{\partial^2 V}{\partial^2\phi}\delta\phi = -2\alpha^2\frac{\partial V}{\partial\phi}A + \phi'(A' + 3D' - B_{i,i}), \quad (3.3.16)$$

όπου $B_{i,i} = \nabla \cdot \vec{B} = -\nabla^2 B$, ώστε το διανυσματικό μέρος του \vec{B} δε συμβάλλει. Εισάγοντας και στην έκφραση για τον τανυστή ενέργειας - ορμής προκύπτουν η σχέση για το κομμάτι που αφορά το υπόβαθρο και αυτή για τη διαταραχή του:

$$\begin{aligned} \delta T_0^0 &= -\alpha^{-2}[\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi = -\delta\rho \\ \delta T_i^0 &= -\alpha^{-2}\phi'\partial_i(\delta\phi) \\ \delta T_0^i &= \alpha^{-2}[\phi'\partial_i(\delta\phi) - (\phi')^2 B_i] \\ \delta T_j^i &= \delta_j^i\{\alpha^{-2}[\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] - \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\} = \delta_j^i\delta p. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Προκειμένου να λύσουμε τις εξισώσεις διαταραχής για το πεδίο ϕ θα υπολογίσουμε τις εξισώσεις Einstein $\delta G_\nu^\mu = 8\pi G\delta T_\nu^\mu$ και θα τις χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε μια διαφορική εξίσωση για τη διαταραχή $\delta\phi$.

Οι εξισώσεις Einstein είναι οι ακόλουθες²

$$\frac{1}{2}\alpha^2\delta G_0^0 = 3\mathcal{H}(\mathcal{H}A + D') - \nabla^2(\psi - \mathcal{H}B) = -4\pi G\{[\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] + \alpha^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\} \quad (3.3.18)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\delta G_i^0 = (\psi' + \mathcal{H}A)_{,i} = 4\pi G\phi'\partial_i(\delta\phi) \quad (3.3.19)$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2\delta G_0^i = [\psi' + \mathcal{H}A + (-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)B]_{,i} = 4\pi G[\phi'\partial_i(\delta\phi) + (\phi')^2 B_{,i}] \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha^2\delta G_j^i &= [(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)A + \mathcal{H}A' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \frac{1}{2}\nabla^2\mathcal{D}\delta_j^i - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{,ij} = \\ & 4\pi G\delta_j^i\{[\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] - \alpha^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\}, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

¹βλ. Παράρτημα Α

²βλ. Παράρτημα από Cosmological Perturbation Theory, part 1 Hannu Kurki-Suonio

όπου $\mathcal{D} \equiv A - \psi + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E')' = \Phi - \Psi = 0$ διότι είναι $\delta T_j^i = 0$ για $i \neq j$, κι έτσι έχουμε $\delta G_j^i = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{,ij} = 0$.

Από τις (3.3.19),(3.3.20),(3.3.21) παίρνουμε:

$$\psi' + \mathcal{H}A = 4\pi G\phi' \delta\phi \quad (3.3.22)$$

$$\psi' + \mathcal{H}A + (-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)B = 4\pi G[\phi' \delta\phi + (\phi')^2 B] \quad (3.3.23)$$

$$(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)A + \mathcal{H}A' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' = 4\pi G\{[\phi' \delta\phi' - (\phi')^2 A] - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi\}. \quad (3.3.24)$$

Το πεδίο ϕ είναι βαθμωτό πεδίο και έτσι ο μετασχηματισμός βαθμίδας γίνεται σύμφωνα με τη σχέση $\tilde{\delta}\phi = \delta\phi - \bar{\phi}'\xi^0$.

3.4 Χωρικά επίπεδη βαθμίδα

Πηγαίνοντας σε χωρικά επίπεδη βαθμίδα, που συμβολίζεται με το δείκτη Q , έχουμε

$$\psi_Q = 0. \quad (3.4.1)$$

Η διαταραχή της καμπυλότητας ψ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\tilde{\psi} = \psi + \mathcal{H}\xi^0 \quad (3.4.2)$$

και συνεπώς για να μεταβούμε στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα ο μετασχηματισμός είναι:

$$\xi^0 = -\mathcal{H}^{-1}\psi. \quad (3.4.3)$$

Η διαταραχή του πεδίου σε αυτή τη βαθμίδα μερικές φορές συμβολίζεται με Q και ονομάζεται μεταβλητή Sasaki/ Mukhanov:

$$\boxed{Q \equiv \delta\phi^Q = \delta\phi + \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}}\psi}. \quad (3.4.5)$$

Στη χωρικά επίπεδη βαθμίδα η εξίσωση (3.3.16) γίνεται:

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' - \nabla^2 Q + \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \phi} Q = -2\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} A_Q + \phi' A'_Q - \phi' \nabla^2 (E'_Q - B_Q). \quad (3.4.6)$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Einstein για να απαλείψουμε τα A_Q, B_Q από την (3.4.6):

- $A_Q = \frac{4\pi G}{\mathcal{H}} \phi' Q$

- $\nabla^2(E'_Q - B_Q) = \mathcal{H}^{-1}\phi' \nabla^2\Phi$

Η τελευταία μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση της διαταραχής της πυκνότητας στην ομοκινούμενη βαθμίδα από

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\alpha^2\delta\rho^C, \quad (3.4.7)$$

όπου ορίζουμε την ομοκινούμενη βαθμίδα ως τη βαθμίδα όπου ισχύει $u^i = B^i = 0$ και $\delta\phi = 0$. Η διαταραχή της πυκνότητας σε αυτή τη βαθμίδα μετασχηματίζεται ως $\delta\rho^C = \delta\rho - \rho'\xi^0$ με $\xi^0 = \delta\phi/\phi'$.

Καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\nabla^2(E'_Q - B_Q) = \mathcal{H}^{-1}4\pi G\alpha^2\delta\rho^C. \quad (3.4.8)$$

Για τη διαταραχή της πυκνότητας στη ομοκινούμενη βαθμίδα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta\rho^C = \delta\rho - \rho'\xi^0 &= \alpha^{-2}[\phi'\delta\phi' - (\phi')^2A] + \frac{dV}{d\phi}\delta\phi - \left[\alpha^{-2}\frac{(\phi')^2}{2} + V\right]'\frac{\delta\phi}{\phi'} \\ &= \alpha^{-2}[\phi'(\delta\phi' - \phi'A) - (\phi'' - \mathcal{H}\phi')\delta\phi] \\ \Rightarrow \nabla^2\Phi &= 4\pi G[\phi'(\delta\phi' - \phi'A) - (\phi'' - \mathcal{H}\phi')\delta\phi], \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

όπου τα A , $\delta\phi$ είναι σε τυχαία βαθμίδα.

Συγκεκριμένα, στη χωρικά επίπεδη βαθμίδα είναι

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G[\phi'(Q' - \phi'A_Q) - (\phi'' - \mathcal{H}\phi')Q]. \quad (3.4.10)$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.4.2) που έχουμε υπολογίσει για το A_Q , καθώς και τη σχέση (3.3.12) για να καταλήξουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\alpha^2\delta\rho^C = 4\pi G\phi' \left(Q' + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}Q - \frac{\phi''}{\phi'}Q \right) \quad (3.4.11)$$

και επιπλέον για να μετατρέψουμε την (3.4.1) σε μια διαφορική εξίσωση μόνο για τις διαταραχές του πεδίου Q :

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' - \nabla^2Q + \left[\alpha^2\frac{\partial^2V}{\partial\phi^2} - \frac{8\pi G}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{\mathcal{H}}(\phi')^2 \right)' \right] Q = 0. \quad (3.4.12)$$

Η παραπάνω εξίσωση, για κάθε συνιστώσα Fourier γράφεται:

$$Q''_{\vec{k}} + 2\mathcal{H}Q'_{\vec{k}} + k^2Q_{\vec{k}} + \alpha^2V_{\phi\phi}Q_{\vec{k}} = \frac{8\pi G}{\alpha^2} \left[\frac{\alpha^2}{\mathcal{H}}(\phi')^2 \right] Q_{\vec{k}}. \quad (3.4.13)$$

Γνωρίζοντας τη λύση για το υπόβαθρο, μπορούμε να υπολογίσουμε την εξέλιξη των διαταραχών του πεδίου ξεκινώντας από αρχικές τιμές των $Q_{\vec{k}}$ και $Q_{\vec{k}}''$ για κάποιο χρόνο $\tau = \tau_{init}$.

Η ομοκινούμενη διαταραχή της καμπυλότητας ορίζεται ως

$$\mathcal{R} \equiv -\psi^C = -\psi - \mathcal{H}\xi^0 \Rightarrow, \quad (3.4.14)$$

$$\mathcal{R} = -\psi - \frac{\mathcal{H}}{\phi'}\delta\phi. \quad (3.4.15)$$

Η ποσότητα αυτή είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και γράφεται συναρτήσει της ποσότητας ψ η οποία δεν είναι ανεξάρτητη από την επιλογή βαθμίδας. Εξ ορισμού η \mathcal{R} αντιπροσωπεύει το βαρυτικό δυναμικό στην ομοκινούμενη βαθμίδα όπου $\delta\phi = 0$.

Στη χωρικά επίπεδη βαθμίδα είναι $\delta\phi \equiv Q$ και άρα

$$\mathcal{R} = -\frac{\mathcal{H}}{\phi'}Q. \quad (3.4.16)$$

3.5 Εξέλιξη των διαταραχών

Θα μελετήσουμε την εξέλιξη των διαταραχών κατά τον πληθωρισμό χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αργής εξέλιξης του πεδίου ξεκινώντας από τότε που οι διαταραχές είναι αρκετά μέσα από τον ορίζοντα και καταλήγοντας τότε που έχουν εξέλθει του ορίζοντα.

Η εξίσωση της διαταραχής του πεδίου (3.4.12) είναι γραμμένη ως προς το χρόνο t :

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}} + 3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}} + \left(\frac{k}{aH}\right)^2 Q_{\vec{k}} = \left[\frac{8\pi G}{\alpha^3 H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) - H^{-2}V'' \right] Q_{\vec{k}}. \quad (3.5.1)$$

Το δεύτερο μέλος είναι

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{\alpha^3 H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) - H^{-2}V'' &= \frac{3\dot{\alpha}\dot{\phi}^2}{\alpha M_{pl}^2 H^3} + \frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{M_{pl}^2 H^3} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{M_{pl}^2 H^4} - \frac{V''}{H^2} = \\ &= 6\epsilon_V + 4\epsilon_V(\epsilon_V - \eta_V) + \frac{\epsilon_V(\dot{\phi}H^{-1})^2}{M_{pl}^2} - \frac{V\eta_V}{H^2 M_{pl}^2} = \\ &= 6\epsilon_V + 4\epsilon_V^2 - 4\epsilon_V\eta_V + 2\epsilon_V^2 - 3\eta_V = 6\epsilon_V + 6\epsilon_V^2 - 4\epsilon_V\eta_V - 3\eta_V \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

όπου έγινε χρήση των εξισώσεων αργής εξέλιξης.

Συνεπώς με την προσέγγιση της αργής εξέλιξης του πεδίου, η (3.5.1) είναι

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}} + 3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}} + \left(\frac{k}{aH}\right)^2 Q_{\vec{k}} = [6\epsilon - 3\eta_V + 6\epsilon_V^2 - 4\epsilon_V\eta_V]Q_{\vec{k}}. \quad (3.5.3)$$

Στη χωρικά επίπεδη βαθμίδα οι διαταραχές της μετρικής επηρεάζουν τη διαταραχή του πεδίου σε πρώτη τάξη των παραμέτρων της αργής εξέλιξης. Αν υπολογίζαμε τη μηδενική τάξη, η διαταραχή της μετρικής θα ήταν αμελητέα σε αυτή τη βαθμίδα.

Γράφοντας την εξίσωση κρατώντας όρους πρώτης τάξεις ως προς τις παραμέτρους, καταλήγουμε στην

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}} + 3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}} + \left(\frac{k}{aH}\right)^2 Q_{\vec{k}} = [6\epsilon_V - 3\eta_V]Q_{\vec{k}}, \quad (3.5.4)$$

ή, γραμμένη σε σύμμορφο χρόνο

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' + k^2Q = \mathcal{H}^2(6\epsilon_V - 3\eta_V)Q. \quad (3.5.5)$$

Τέλος θέτοντας

$$\boxed{u \equiv \alpha Q}, \quad (3.5.6)$$

η εξίσωση γίνεται

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha}\right)u = \mathcal{H}^2(6\epsilon_V - 3\eta_V)u. \quad (3.5.7)$$

Η μεταβλητή u συνδέεται με τη διαταραχή της καμπυλότητας \mathcal{R} μέσω της σχέσης

$$\boxed{u = -z\mathcal{R}} \quad (3.5.8)$$

με $z \equiv \frac{\alpha\dot{\phi}}{H}$, από την (3.4.16).

Η εξίσωση (3.5.7) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)u_k = 0 \quad (3.5.9)$$

και ονομάζεται *Mukhanov - Sasaki*. Σε πρώτη τάξη των παραμέτρων αργής εξέλιξης, είναι $\frac{z''}{z} = \frac{\alpha''}{\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon_V, \eta_V)$.

Με τη χρήση της

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha H = \dot{\alpha}$$

βρίσκουμε

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \mathcal{H}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right), \quad \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2}.$$

Επίσης είναι

$$\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 1 - \epsilon_V \quad (3.5.10)$$

οπότε τελικά

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \mathcal{H}^2(2 - \epsilon_V). \quad (3.5.11)$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση Mukhanov - Sasaki και καταλήγουμε

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}^2(5\epsilon_V - 3\eta_V + 2). \quad (3.5.12)$$

Στη ίδια εξίσωση καταλήγουμε ξεκινώντας από τον ορισμό της μεταβλητής $z \equiv \frac{\alpha\dot{\phi}}{H}$ και χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους αργής εξέλιξης σε πρώτη τάξη³.

Στη συνέχεια, μπορούμε να γράψουμε τη Mukhanov - Sasaki ως προς τη διαταραχή της καμπυλότητας \mathcal{R} . Με αντικατάσταση του ορισμού $u = -z\mathcal{R}$ στην εξίσωση παίρνουμε

$$z\mathcal{R}'' + 2z'\mathcal{R}' + z''\mathcal{R} + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)z\mathcal{R} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{R}_k'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}_k' + k^2\mathcal{R}_k = 0} \quad (3.5.13)$$

η οποία είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με εξωτερική δύναμη και

$$\frac{z'}{z} = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V). \quad (3.5.14)$$

Τέλος, για την εξέλιξη της μεταβλητής $z(\alpha)$ βρίσκουμε

$$\frac{z'}{z} = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V) \Rightarrow \frac{dz}{z} = \alpha H(1 + 2\epsilon_V - \eta_V)d\tau = (1 + 2\epsilon_V - \eta_V)d\ln \alpha \Rightarrow$$

$$z(\alpha) = z_0 e^{\int (1 + 2\epsilon_V - \eta_V)d\ln \alpha}. \quad (3.5.15)$$

3.6 Λύσεις της εξίσωσης Mukhanov - Sasaki

Χρησιμοποιώντας την (3.5.12), η εξίσωση (3.5.9) μετασχηματίζεται σε

$$u'' + [k^2 - \mathcal{H}^2(2 + 5\epsilon_V - 3\eta_V)]u = 0. \quad (3.6.1)$$

³βλ. Παράρτημα Β

Οι λύσεις της βρίσκονται με τη βοήθεια των συναρτήσεων Hankel⁴:

$$Q_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \alpha^{-1} H_\nu(-k\tau) \quad (3.6.2)$$

Για πρώιμους χρόνους, $\mathbf{x} = -\mathbf{k}\tau \rightarrow \infty$ η λύση είναι

$$u_{\vec{k}} = \alpha Q_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} \quad (3.6.3)$$

και για μεταγενέστερες χρονικές στιγμές, $\mathbf{x} = -\mathbf{k}\tau \rightarrow \mathbf{0}$ είναι

$$u_{\vec{k}} = \alpha Q_{\vec{k}} = \sqrt{-\tau} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (-k\tau)^{-\nu} \quad (3.6.4)$$

Όπου $\nu \equiv \frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V$ και από (3.5.10), ολοκληρώνοντας δύο φορές προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\alpha} &= -\frac{1}{(1-\epsilon_V)} \frac{d\tau}{\tau} \Rightarrow \ln\alpha = -\frac{1}{(1-\epsilon_V)} \ln|\tau| + \text{const} \Rightarrow \\ \alpha &\propto (-\tau)^{-\frac{1}{(1-\epsilon_V)}}, \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

με αρνητικό χρόνο τ , και τελικά

$$\alpha^{-1} \propto (-\tau)^{1/(1-\epsilon_V)} \approx (-\tau)^{1+\epsilon_V} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{-\alpha\tau} \propto (-\tau)^{\epsilon_V}}. \quad (3.6.7)$$

Άρα σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές η ασυμπτωτική λύση είναι

$$Q_{\vec{k}} \propto (-\tau)^{3/2+\epsilon_V-\nu} = (-\tau)^{\eta_V-2\epsilon_V}. \quad (3.6.8)$$

Η διακύμανση του πεδίου $Q_{\vec{k}}$ δηλαδή σε μηδενική τάξη γίνεται σταθερή.

3.7 Φάσμα Ισχύος

Θα μεταβούμε στην κβαντική περιγραφή του inflaton έτσι ώστε να εξετάσουμε πώς προκύπτουν οι διακυμάνσεις του. Για να το κάνουμε αυτό, προάγουμε το πεδίο ϕ σε τελεστή:

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}(\tau) = w_{\vec{k}}(\tau) \hat{\alpha}_{\vec{k}} + w_{\vec{k}}^*(\tau) \hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.7.1)$$

όπου οι τελεστές $\hat{\alpha}_{\vec{k}}$ και $\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger$ είναι οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα, με τη βοήθεια των οποίων δημιουργούμε διεγέρσεις στο κβαντικό πεδίο. Ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{\alpha}_{\vec{k}}, \hat{\alpha}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad [\hat{\alpha}_{\vec{k}}, \hat{\alpha}_{\vec{k}'}] = [\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{\alpha}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (3.7.2)$$

⁴βλ. Παράρτημα Γ

Ο μετασχηματισμός Fourier για τον τελεστή του πεδίου είναι

$$\hat{\phi}(\tau, \vec{x}) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\phi}_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.7.3)$$

Η αναμενόμενη τιμή του πεδίου στο κενό είναι $\langle 0|\hat{\phi}|0 \rangle = 0$, όμως οι διακυμάνσεις του στο κενό είναι μη μηδενικές:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\phi}_k\hat{\phi}_k^\dagger|0 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} (w_{\vec{k}}(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}} + w_{\vec{k}}^*(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger)(w_{\vec{k}'}^*(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}'}^\dagger + w_{\vec{k}'}(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}'}) = \\ &= \int d\ln k \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k(\tau)|^2 \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Ορίζουμε το φάσμα των διακυμάνσεων του πεδίου ως την ποσότητα

$$P_Q = \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k|^2. \quad (3.7.5)$$

Για κλίμακες εκτός του ορίζοντα $k \ll \mathcal{H}$, η λύση σχεδόν σταθεροποιείται

$$w_k(t) = 2^{\nu-2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{1}{\alpha} \sqrt{-\tau} (-k\tau)^{-\nu} \propto (-\tau)^{\eta_V-2\epsilon_V}. \quad (3.7.6)$$

Δηλαδή οι διαταραχές 'παγώνουν' και πλέον μπορούν να αντιμετωπιστούν ως κλασικές.

Το φάσμα ισχύος των διαταραχών τότε είναι

$$\begin{aligned} P(\tau, k) &= \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{2^{2\nu-3}}{2} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 \alpha^{-2} (-\tau) (-k\tau)^{-2\nu} = \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 (-\alpha\tau)^{-2} (-k\tau)^{3-2\nu} = \\ &= \frac{2^{6\epsilon_V-2\eta_V}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 (-\alpha\tau)^{-2} (-k\tau)^{2\eta_V-6\epsilon_V}. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Σύμφωνα με την (3.7.7) η εξάρτηση από την κλίμακα k είναι

$$P_Q \propto k^{2\eta_V-6\epsilon_V} \equiv k^{n_s} \Rightarrow n_s = 2\eta_V - 6\epsilon_V. \quad (3.7.8)$$

Επίσης υπάρχει μια εξάρτηση από το χρόνο σε πρώτη τάξη των παραμέτρων αργής εξέλιξης, $\propto (-\tau)^{2\eta_V-6\epsilon_V}$.

Η ομοιοκίνητη διαταραχή της καμπυλότητας παραμένει σταθερή σε κλίμακες του υπερ ορίζοντα. Δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\phi}} Q, \quad (3.7.9)$$

ή αλλιώς

$$\mathcal{R} = -z^{-1}u \quad (3.7.8)$$

με

$$z = \frac{\alpha\dot{\phi}'}{\mathcal{H}} = \frac{\alpha\dot{\phi}}{H} \quad (3.7.9)$$

από το οποίο προκύπτει το φάσμα ισχύος για τις διαταραχές καμπυλότητας

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 P_Q(\tau, k). \quad (3.7.10)$$

ή

$$\boxed{P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left|\frac{u_k}{z}\right|^2} \quad (3.7.11)$$

Για τον υπερ ορίζοντα, $k \ll \mathcal{H}$:

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right]^2 \left(\frac{H}{-\alpha\tau\dot{\phi}}\right)^2 (-k\tau)^{3-2\nu} \quad (3.7.12)$$

Η εξάρτηση από την κλίμακα είναι $k^{3-2\nu}$ και η εξάρτηση από το χρόνο είναι πολύ μικρές

$$\left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}}\right)^2 (-\tau)^{1-2\nu}. \quad (3.7.13)$$

Μάλιστα είναι σταθερή ποσότητα στο χρόνο σε πρώτη τάξη των ϵ_V και η_V : Από την

$$\frac{z'}{z} = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V)$$

παίρνουμε

$$\frac{d \ln z}{d\tau} = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V).$$

Όμως ισχύει $\ln z = -\ln\left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}}\right)$ και έτσι έχουμε

$$d \ln \left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}}\right) = -d \ln \alpha(1 + 2\epsilon_V - \eta_V) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}}\right) \propto \alpha^{-(1+2\epsilon_V-\eta_V)}$$

Και τελικά:

$$\boxed{P_{\mathcal{R}} \propto \left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}}\right)^2 (-\tau)^{1-2\nu} \propto \tau^{-1+2\nu} (-\tau)^{1-2\nu} = const} \quad (3.7.15)$$

όπου έγινε χρήση της $\alpha \propto (-\tau)^{-\frac{1}{(1-\epsilon_V)}}$.

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε την (3.7.12) ως εξής

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = 2^{2\nu-3} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 (1 - \epsilon_V)^{2\nu-1} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \left(\frac{k}{\alpha H} \right)^{3-2\nu}, \quad (3.7.13)$$

χρησιμοποιώντας ότι $-\alpha\tau = (1 - \epsilon_V)^{-1}H^{-1}$. Για $k \approx \mathcal{H}$ και πολύ μικρές τιμές των ϵ_V, η, η (3.7.13) δίνει την προσεγγιστική τιμή για το φάσμα

$$P_{\mathcal{R}} \approx \frac{H^4}{4\pi^2 \dot{\phi}^2} = \frac{H^2}{8\pi^2 M_{pl}^2 \epsilon_H}. \quad (3.7.14)$$

4 Αρχέγονες Μελανές Οπές

Ο Hawking πρότεινε ότι οι υπέρπυκνες περιοχές ανομοιογενειών στο πρώιμο Σύμπαν μπορούν άμεσα να υποστούν βαρυτική κατάρρευση και να σχηματίσουν μελανές οπές. Αυτές οι ανομοιογένειες προέρχονται από διαταραχές που παράγονται κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και γρήγορα βγαίνουν από τον ορίζοντα Hubble. Στη συνέχεια όταν τελειώνει ο πληθωρισμός, ο ορίζοντας αρχίζει να μεγαλώνει και οι διαταραχές εισέρχονται ξανά σε αυτόν. Οι διαταραχές μεγάλου πλάτους που εισέρχονται στον ορίζοντα την εποχή της ακτινοβολίας καταρρέουν βαρυτικά και παράγουν μαύρες τρύπες οι οποίες θα μπορούσαν να συνεισφέρουν στη σκοτεινή ύλη σήμερα. Η θεωρία αυτή για τη σκοτεινή ύλη είναι ελκυστική διότι δεν απαιτεί επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου. Προκειμένου όμως να αποτελούν οι αρχέγονες μελανές οπές σημαντικό ποσοστό της σκοτεινής ύλης, πρέπει το φάσμα ισχύος των διαταραχών σε μικρές κλίμακες να ενισχυθεί κατά μερικές τάξεις μεγέθους σε σχέση με την τιμή του σε κλίμακες που παρατηρούνται στην ακτινοβολία υποβάθρου (CMB). Οι παρατηρήσεις υποδεικνύουν μια μικρή τιμή του πλάτους των διαταραχών $A_s \sim 10^{-9}$ για την κλίμακα αναφοράς $k_* = 0.05 Mpc^{-1}$ ενώ επιβάλλεται η ύπαρξη κάποιου μηχανισμού ενίσχυσης της τιμής του φάσματος ισχύος έως περίπου $A_s \sim 10^{-2}$ σε κάποια μικρότερη κλίμακα έτσι ώστε κατά την είσοδο της εν λόγω κλίμακας στον ορίζοντα, να είναι αρκετά μεγάλη η διαταραχή στην ενεργειακή πυκνότητα και να μπορεί να καταρρεύσει προς το σχηματισμό μελανής οπής.

Σε αντίθεση με τις αστροφυσικές διαδικασίες παραγωγής μελανών οπών με τις οποίες γίνεται να δημιουργηθούν μελανές οπές με συγκεκριμένη ελάχιστη μάζα ($\alpha 3M_{\odot}$), την εποχή της ακτινοβολίας ή της ύλης μπορούν να σχηματιστούν υπερμαζικές αλλά και μικρές μελανές

οπές από βαρυτική κατάρρευση. Οι παρατηρησιακές πληροφορίες για αυτές δίνουν σημαντικά στοιχεία για το χτίσιμο μοντέλων πληθωρισμού. Οι αρχέγονες μελανές οπές μάζας $M_{PBH} < M_c = \left(\frac{3\hbar c^4 \alpha_0}{G^2} t_0 \right)^{1/3} \approx 10^{15} g$, όπου $\alpha_0 = 1$, $t_0 = 13.8 \text{ Gyr}$, έχουν ήδη εξατμιστεί λόγω της ακτινοβολίας Hawking.

4.1 Σχηματισμός των Αρχέγονων Μελανών Οπών

Θα γίνει μια απλή περιγραφή του τρόπου με τον οποίο δημιουργούνται οι αρχέγονες μελανές οπές.

Στο πρώιμο σύμπαν μετά τον πληθωρισμό η μετρική είναι

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha_b(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4.1.1)$$

και η εξίσωση Friedmann είναι

$$H_b^2 = \left(\frac{\dot{\alpha}_b(t)}{\alpha_b(t)} \right)^2 = \frac{\bar{\rho}(t)}{3M_{pl}^2} \quad (4.1.2)$$

όπου $\bar{\rho}(t)$ είναι η ενεργειακή πυκνότητα του υποβάθρου και α_b είναι ο παράγοντας κλίμακας για το υπόβαθρο. Σε αυτό το υπόβαθρο θα θεωρήσουμε μια περιοχή με μεγαλύτερη πυκνότητα ρ η οποία είναι σπάνια στο χώρο και μπορεί να προσεγγιστεί με μια σφαιρική περιοχή θετικής καμπυλότητας. Είναι η βαρυτική κατάρρευση αυτής που θα οδηγήσει στην παραγωγή μαύρης τρύπας. Η υπέρπυκνη σφαίρα περιγράφεται από τη μετρική

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.1.3)$$

με $K = 1$ και $r = \sin\chi$. Η εξίσωση Friedmann για τη σφαίρα είναι

$$\left(\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \right)^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} - \frac{1}{\alpha^2}. \quad (4.1.4)$$

Η διαταραχή της πυκνότητας είναι

$$\delta = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}. \quad (4.1.5)$$

Από τις $\rho_b = 3M_{pl}^2 H_b^2$ και $\rho = 3M_{pl}^2 H^2 + \frac{3M_{pl}^2}{\alpha^2}$ βρίσκουμε

$$\delta = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} = \frac{H^2 + 1/\alpha^2 - H_b^2}{H_b^2} \Rightarrow$$

$$\Omega \left(\frac{H}{H_b} \right)^2 = 1 + \delta \quad (4.1.6)$$

που δίνει τη σχέση της παραμέτρου πυκνότητας $\Omega = \frac{\rho}{3M_{pl}^2 H^2} = 1 + \frac{1}{\alpha^2 H^2}$ με τη διαταραχή της πυκνότητας δ . Η ακτίνα της υπέρπυκνης σφαίρας είναι $R_\alpha = \alpha \sin \chi$ και ο ορίζοντας Hubble είναι $R_H = H^{-1}$. Η στιγμή που η διαταραχή εισέρχεται στον ορίζοντα, ορίζεται από την ισότητα ανάμεσα στην ακτίνα της σφαιρικής υπέρπυκνης περιοχής R_α με την ακτίνα του ορίζοντα του επίπεδου Friedmann υπόβαθρου. Δηλαδή ισχύει $R_\alpha = H_b^{-1}$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις, η παράμετρος πυκνότητας γράφεται

$$\Omega - 1 = \left(\frac{R_H}{R_\alpha} \right)^2 \sin^2 \chi$$

ή

$$\begin{aligned} \Omega - 1 &= \left(\frac{H_b}{H} \right)^2 \sin^2 \chi \Rightarrow \\ 1 + \delta - \left(\frac{H}{H_b} \right)^2 &= \sin^2 \chi \Rightarrow \delta = \left(\frac{H}{H_b} \right)^2 - \cos^2 \chi. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Ονομάζουμε δ_H τη διαταραχή της πυκνότητας τη στιγμή που αυτή εισέρχεται στον ορίζοντα μετά τον πληθωρισμό. Υπάρχει μια κρίσιμη τιμή δ_c , πάνω από την οποία γίνεται η βαρυτική κατάρρευση της σφαίρας. Για να την υπολογίσουμε χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η μέγιστη ακτίνα της υπέρπυκνης σφαίρας (για την οποία $\cos \chi = 0$) πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το μήκος Jeans R_J ώστε να μπορέσει να γίνει η βαρυτική κατάρρευση και μικρότερη από την ακτίνα του ορίζοντα:

$$\begin{aligned} R_J \leq R_{\alpha, max} \leq R_H &\Rightarrow \\ \sqrt{w} R_H \leq R_{\alpha, max} \leq R_H &\Rightarrow \\ w \leq \delta_H \leq 1 & \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

αν θεωρηθεί ότι $R_J \approx \sqrt{w} R_H$ για καταστατική εξίσωση $p = w\rho$. Για την εποχή της ακτινοβολίας είναι $w = 1/3$ και έτσι μια προσεγγιστική τιμή για την κρίσιμη διακύμανση της πυκνότητας είναι $\delta_c \approx 1/3$.

4.2 Ενίσχυση του φάσματος ισχύος

Ένας τρόπος ενίσχυσης του φάσματος ισχύος των διαταραχών της καμπυλότητας για ορισμένες κλίμακες όταν βγαίνουν από τον ορίζοντα, είναι η απόκλιση από την προσέγγιση της

αργής εξέλιξης. Χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό $V(\phi)$ με κάποιο σημείο καμψής στο οποίο γίνεται σχεδόν επίπεδο, προκαλείται σημαντική επιβράδυνση της εξέλιξης του πεδίου ϕ και έτσι μεταβαίνουμε σε μια φάση πολύ αργής εξέλιξης.

Η λύση για την εξίσωση των διαταραχών της καμπυλότητας $\mathcal{R}_k'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}_k' + k^2\mathcal{R}_k = 0$, μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathcal{R}_k(\tau) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \int \frac{d\tau}{z^2} \quad (4.2.1)$$

όπου $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ είναι ολοκληρωτικές σταθερές. Η ποσότητα $\frac{z'}{z}$ όταν ισχύει η προσέγγιση της αργής εξέλιξης είναι θετική, διότι είναι $z'/z = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V) = \mathcal{H}(1 + \epsilon_V - \eta_H) > 0$ με ϵ_V και $|\eta_H|$ της τάξης του 1. Αν όμως μεταβούμε σε περίοδο πολύ αργής εξέλιξης, όπου το δυναμικό σχεδόν σταθεροποιείται, η τιμή για το η_H μπορεί να γίνει $|\eta_H| > 3$ και τότε είναι $z'/z = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V) < 0$ και έτσι ο όρος της τριβής στη διαφορική εξίσωση γίνεται όρος που ενισχύει το πλάτος της ταλάντωσης. Τότε η $z(\alpha)$ είναι φθίνουσα και έτσι από την (4.2.1) φαίνεται ότι ενισχύει την τιμή της \mathcal{R}_k .

4.3 Η Ενεργειακή Πυκνότητα των Αρχέγονων Μελανών Οπών

Στην απλούστερη περίπτωση η μάζα των μελανών οπών είναι ανάλογη της μάζας του ορίζοντα Hubble τη στιγμή του σχηματισμού της, δηλαδή όταν $k = \alpha_f H_f$:

$$M(k) = \gamma \frac{4\pi}{3} \rho R_H^3 = \gamma \frac{4\pi}{3} \rho H_f^{-3}$$

όπου ρ ενεργειακή πυκνότητα και γ μια σταθερά. Με χρήση της εξίσωσης Friedmann αυτή η σχέση γράφεται

$$M(k) = \gamma \frac{1}{2H_f G}.$$

Την εποχή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας και ύλης, η εξίσωση Friedmann είναι $H_{eq}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{eq}$. Από εδώ παίρνουμε

$$\rho_f = \rho_{eq} \frac{H_f^2}{H_{eq}^2}$$

και

$$M(k) = M_{eq}^H \gamma \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_{eq}} \frac{H_{eq}^2}{H_f^2}},$$

όπου M_{eq}^H είναι η μάζα του ορίζοντα την εποχή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας - ύλης. Από τη διατήρηση της εντροπίας είναι $g_s(T)T^3\alpha^3 = const.$ Ακόμη, η ενεργειακή πυκνότητα την εποχή της ακτινοβολίας είναι $\rho_r \propto g_*(T)T^4$. Έτσι γίνεται

$$\begin{aligned} M(k) &= M_{eq}^H \gamma \left(\frac{g_*(T_f)T_f^4}{g_*(T_{eq})T_{eq}^4} \right)^{1/2} \left(\frac{k_{eq}}{\alpha_{eq}} \right)^2 \left(\frac{\alpha_f}{k_f} \right)^2 \\ &= M_{eq}^H \gamma \left(\frac{g_*(T_f)}{g_*(T_{eq})} \right)^{1/2} \frac{T_f^2}{T_{eq}^2} \frac{\alpha_f^2}{\alpha_{eq}^2} \left(\frac{k_{eq}}{k} \right)^2 \\ &= M_{eq}^H \gamma \left(\frac{g_*(T_f)}{g_*(T_{eq})} \right)^{1/2} \left(\frac{g_s(T_{eq})}{g_s(T_f)} \right)^{2/3} \left(\frac{k_{eq}}{k} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Αν υποθέσουμε $g_*(T) = g_s(T)$ και χρησιμοποιήσουμε $M_{eq}^H \approx 5.6 \cdot 10^{50}g$, $g_*(T_{eq}) = 3.38$ και $k_{eq} = 0.07\Omega h^2 Mpc^{-1}$ με $h = 0.673$ [18] προκύπτει

$$\begin{aligned} M(k) &\approx 5.6 \cdot 10^{50} g \gamma \left(\frac{g_*(T_f)}{3.38} \right)^{-1/6} \left(\frac{0.01}{k} \right)^2 \Rightarrow \\ M(k) &\approx 10^{18} g \left(\frac{\gamma}{0.2} \right) \left(\frac{g_*(T_f)}{106.75} \right)^{-1/6} \left(\frac{k}{7 \cdot 10^{13}} \right)^{-2} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Ο τρόπος σχηματισμού των αρχέγονων μελανών σπών βασίζεται στο μοντέλο Press-Schechter. Το πηλίκο της ενεργειακής πυκνότητας ρ_{PBH} μελανής οπής μάζας M προς την ολική, τη στιγμή της παραγωγής της είναι

$$\beta_f(M) \equiv \left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho_{tot}} \right)_f. \quad (4.3.3)$$

Δίνεται από την πιθανότητα η υπέρπυκνη περιοχή $\delta = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}$ να ξεπερνά την κρίσιμη τιμή δ_c . Η πιθανότητα θεωρείται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με διακύμανση $\sigma(M(k))$:

$$\beta_f(M(k)) = \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M(k))} e^{-\delta^2/2\sigma^2(M(k))} \quad (4.3.4)$$

Η τιμή του $\beta(M(k))$ καθορίζεται μοναδικά από τη διασπορά $\sigma^2(M(k))$. Την εποχή της ακτινοβολίας η διασπορά είναι [2]

$$\sigma^2(M(k)) = \frac{16}{81} \int_0^{\infty} d\ln k P_{\mathcal{R}}(k) (kR)^4 W^2(kR) \quad (4.3.4)$$

όπου $R = k^{-1}$ και $P_{\mathcal{R}}$ είναι το φάσμα ισχύος των διαταραχών της καμπυλότητας. Η συνάρτηση $W(kR) \equiv e^{-k^2 R^2/2}$ είναι μια συνάρτηση εξομάλυνσης.

Όταν μια διαταραχή κλίμακας k^{-1} εισέρχεται ξανά στον ορίζοντα, ένα ποσοστό της συνολικής ενέργειας $\gamma\beta(M(k))\rho$ χρησιμοποιείται για το σχηματισμό μελανών οπών. Η ενεργειακή πυκνότητά τους κατόπιν μειώνεται ως $\rho_{PBH} \propto \alpha^{-3}$. Επίσης, η συνολική πυκνότητα την εποχή της ακτινοβολίας μέχρι τη στιγμή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας - ύλης είναι $\rho \propto \alpha^{-4}$. Έτσι, έχουμε $\beta \propto \frac{\alpha^{-3}}{\alpha^{-4}} = \alpha$ και επομένως η συνεισφορά των αρχέγονων μελανών οπών στην ενεργειακή πυκνότητα αυξάνεται ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας μέχρι τη στιγμή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας - ύλης. Το πηλίκο της πυκνότητας που αντιστοιχεί σε μελανές οπές προς την ολική πυκνότητα της ύλης σήμερα σε σχέση με την εποχή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας - ύλης είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho_m}\right)_0 &= \left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho_m}\right)_{eq} \Rightarrow \\ \left(\frac{\Omega_{PBH}}{\Omega_{CDM}}\right)_0 &= \frac{\Omega_m}{\Omega_{CDM}} \left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho_m}\right)_{eq}, \end{aligned}$$

όπου ο δείκτης 0 αναφέρεται στη σημερινή εποχή και eq στην εποχή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας - ύλης. Ω_m , Ω_{CDM} είναι οι παράγοντες πυκνότητας της ύλης και της σκοτεινής ύλης αντίστοιχα, σήμερα. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ότι $\beta = \left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho}\right)_f \propto \alpha \propto \frac{1}{T}$, άρα έχουμε

$$\left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho_m}\right)_{eq} = \frac{T_f}{T_{eq}} \left(\frac{\rho_{PBH}}{\rho_m}\right)_f \quad (4.3.5)$$

και τελικά βρίσκουμε ότι το ποσοστό της ύλης που αντιστοιχεί σε αρχέγονες μελανές οπές μάζας $M(k)$ σήμερα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{PBH}(M(k))}{\Omega_{CDM}} &= \left(\frac{T_f}{T_{eq}} \frac{\Omega_m}{\Omega_{DM}}\right) \gamma\beta(M(k)), \\ &\approx \left(\frac{\beta(M(k))}{8 \cdot 10^{-16}}\right) \left(\frac{\gamma}{0.2}\right)^{3/2} \left(\frac{g_*(T_f)}{106.75}\right)^{-1/4} \left(\frac{M(k)}{10^{18}g}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

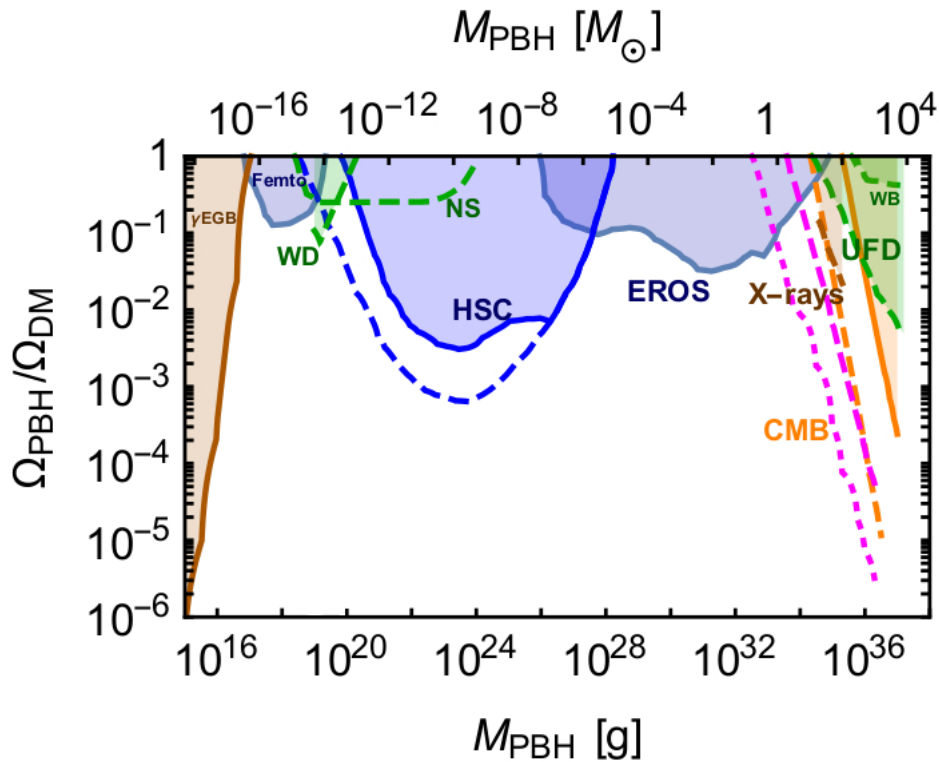
T_f είναι η θερμοκρασία του πλάσματος τη στιγμή της δημιουργίας της μελανής οπής μάζας $M(k)$ και T_{eq} είναι η θερμοκρασία την εποχή της ισοδυναμίας ακτινοβολίας - ύλης. Εδώ χρησιμοποιήθηκε ότι $\Omega_{CDM}h^2 \approx 0.12$ [14]. Ολοκληρώνοντας σε όλες τις μάζες προκύπτει το πηλίκο της ολικής πυκνότητας των αρχέγονων μελανών οπών προς αυτής της σκοτεινής

ύλης σήμερα:

$$\frac{\Omega_{PBH}^{tot}}{\Omega_{CDM}} = \int d \ln(M(k)) \frac{\Omega_{PBH}(M(k))}{\Omega_{CDM}}. \quad (4.3.8)$$

Συνεπώς το ποσοστό στο οποίο βρίσκονται οι αρχέγονες μελανές οπές σήμερα έχουν πολύ μεγάλη εξάρτηση από την κρίσιμη τιμή για την βαρυτική κατάρρευση, δ_c καθώς και από τη διακύμανση σ^2 .

Υπάρχουν πολλές παρατηρησιακές μέθοδοι με τις οποίες εκτιμώνται οι μάζες M_{PBH} των αρχέγονων μελανών οπών, αν αποτελούν μέρος της σκοτεινής ύλης.



Οι χρωματισμένες περιοχές είναι περιοχές μαζών που αποκλείονται από τις παρατηρήσεις. Οι μέθοδοι στο συγκεκριμένο διάγραμμα είναι (α) μετρήσεις ακτινών γάμμα (γEGB), (β) βαρυτικοί φακοί σε εκρήξεις ακτινών γάμμα (Femto), (γ) εκρήξεις λευκών νάνων (WD), (δ) σύλληψη μελανών οπών από αστέρες νετρονίων (NS), (ε) βαρυτικοί φακοί από μετρήσεις Subaru, EROS/MACHO, (στ) αλληλεπίδραση των MACHOS με σμήνη αστεριών σε νάνους γαλαξίες (UFD), (ζ) ανισοτροπίες στην ακτινοβολία υποβάθρου (CMB), παρατηρήσεις σε ραδιοκύματα και ακτίνες χ , (η) εκτεταμένα συστήματα νεφών (Wide Binaries).

Σχήμα 4

5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Η αριθμητική ανάλυση έγινε με κώδικα Mathematica. Το δυναμικό που μελετήθηκε για αυτή την εργασία είναι το [7]

$$V_{inf} = \frac{W_0^2}{\mathcal{V}^3} \left[\frac{C_{up}}{\mathcal{V}^{1/3}} + \frac{A_W}{e^{\frac{\phi}{\sqrt{3}}} - B_W} - \frac{C_W}{e^{\frac{\phi}{\sqrt{3}}}} + \frac{e^{\frac{2\phi}{\sqrt{3}}}}{\mathcal{V}} \left(D_W - \frac{G_W}{R_W \frac{e^{\phi\sqrt{3}}}{\mathcal{V}} + 1} \right) \right]$$

όπου το απλό, βαθμωτό πεδίο inflaton είναι το ϕ . Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

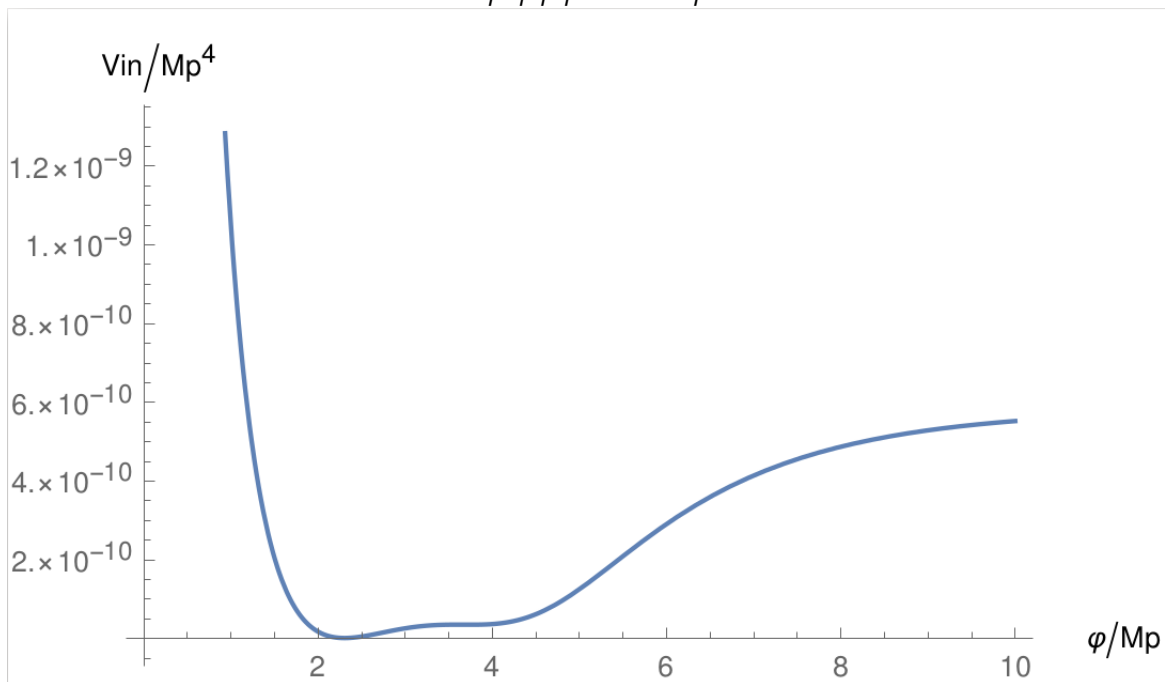
Παράμετροι του δυναμικού

A_W	B_W	C_W	D_W	G_W	R_W	V	W_0	C_{up}
0.02	1	0.04	0	$3.076278 \cdot 10^{-2}$	0.7071067	1000	12.35	0.0382

Σε αυτή την παράγραφο υπολογίζουμε την εξέλιξη του πεδίου inflaton για το παραπάνω δυναμικό, λύνουμε αριθμητικά την εξίσωση Mukhanov - Sasaki και υπολογίζουμε το φάσμα ισχύος των διαταραχών της καμπυλότητας για τις κλίμακες που εξέρχονται του ορίζοντα. Τέλος, γίνεται υπολογισμός του πηλίκου της πυκνότητας των αρχέγονων μελανών οπών προς την πυκνότητα της σκοτεινής ύλης σήμερα.

5.1 Το δυναμικό

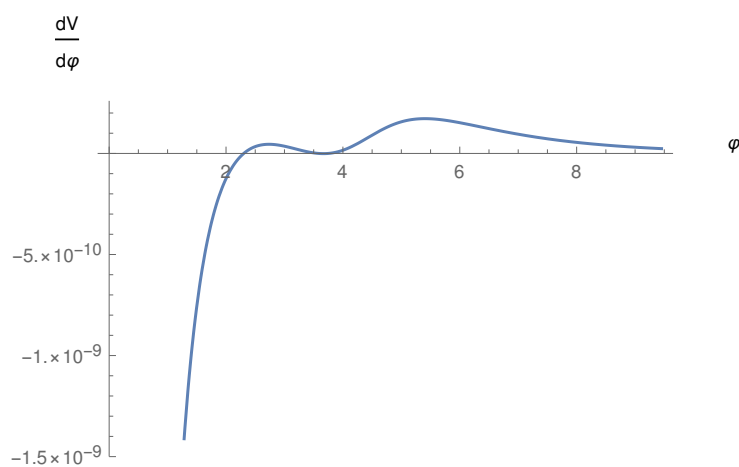
Η μορφή του δυναμικού



Σχήμα 5

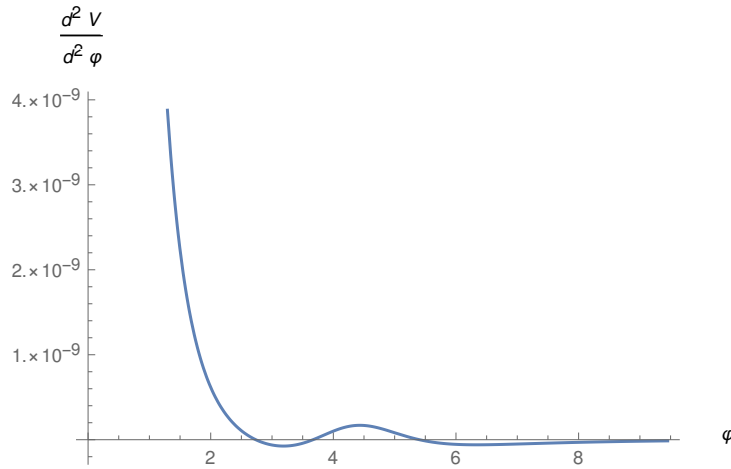
Για τις τιμές του πεδίου $3 \lesssim \phi \lesssim 4.2$ το δυναμικό είναι σχεδόν σταθερό. Αυτή είναι η περιοχή στην οποία έχουμε πολύ αργή εξέλιξη του πεδίου. Η παράγωγος του δυναμικού βλέπουμε στο επόμενο διάγραμμα ότι εκεί σχεδόν μηδενίζεται.

Η πρώτη παράγωγος του δυναμικού



Σχήμα 6

Η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού



Σχήμα 7

5.2 Το υπόβαθρο

Η εξίσωση κίνησης για το πεδίο είναι η εξίσωση Klein Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (5.2.1)$$

Η εξίσωση Friedmann είναι:

$$3M_{pl}^2 H^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \Rightarrow \quad (5.2.2)$$

$$6M_{pl}^2 H \dot{H} = \dot{\phi}(\ddot{\phi} + V') \xrightarrow{5.2.1}$$

$$\dot{\phi} = 2M_{pl}^2 H' \quad (5.2.3)$$

όπου με ' συμβολίζονται οι παράγωγοι ως προς το ϕ . Από τις (5.2.2), (5.2.3) παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση για την παράμετρο Hubble

$$2M_{pl}^4 (H'(\phi))^2 - 3M_{pl}^2 H^2(\phi) + V(\phi) = 0, \quad (5.2.4)$$

ή

$$V = 3M_{pl}^2 H^2 - \frac{H^2}{2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 \quad (5.2.5)$$

όπου

$$\dot{\phi} = H \frac{d\phi}{dN}$$

Από το συνδυασμό της σχέσης $\sqrt{2\epsilon_V} = M_{pl}V'/V$ και της (5.2.5) προκύπτει:

$$V' = \sqrt{2\epsilon_V}H^2 \left[3M_{pl} - \frac{1}{2M_{pl}} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 \right]. \quad (5.2.6)$$

Επίσης βρίσκουμε

$$\ddot{\phi} = H' H \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 + H^2 \frac{d^2\phi}{d^2N}. \quad (5.2.7)$$

Εισάγουμε τις (5.2.3), (5.2.6) και (5.2.7) στην (5.2.1) και βρίσκουμε την εξίσωση που δίνει την εξέλιξη του πεδίου ως προς τον αριθμό των e-foldings.

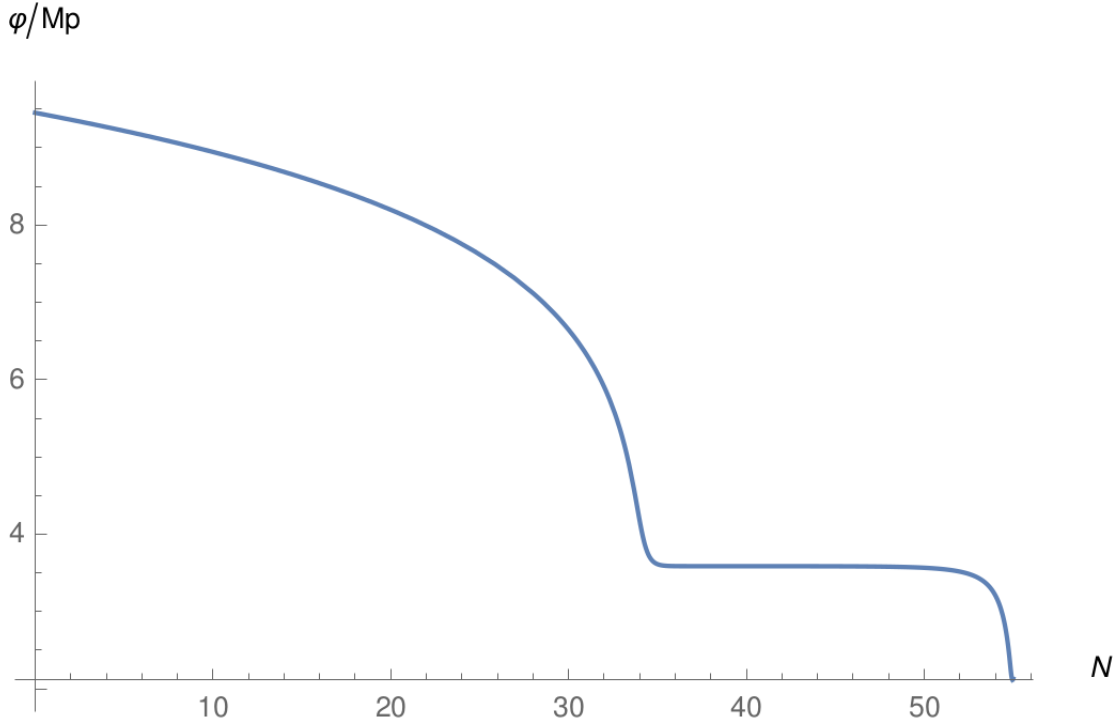
$$\frac{d^2\phi}{d^2N} + 3 \left(\frac{d\phi}{dN} \right) - \frac{1}{M_{pl}^2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^3 + \sqrt{2\epsilon_V} \left[3M_{pl} - \frac{1}{2M_{pl}} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 \right] = 0$$

ή

$$\frac{d^2\phi}{d^2N} + 3 \left(\frac{d\phi}{dN} \right) - \frac{1}{M_{pl}^2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^3 + \frac{V'}{V} \left[3M_{pl}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.2.8)$$

Η ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (5.2.8) μας δίνει την εξέλιξη του inflaton:

Το πεδίο inflaton



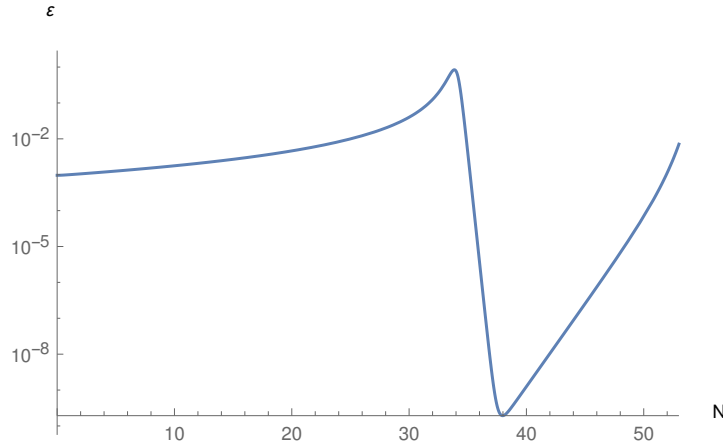
Σχήμα 8

Η διάρκεια του πληθωρισμού είναι από $N_e = 0$ ως $N_e = 55$ και το τέλος του καθορίζεται από τη συνθήκη $\epsilon_H = 1$. Οι αρχικές συνθήκες για αυτή την ολοκλήρωση είναι

1. $\phi_0 = 9.45$.

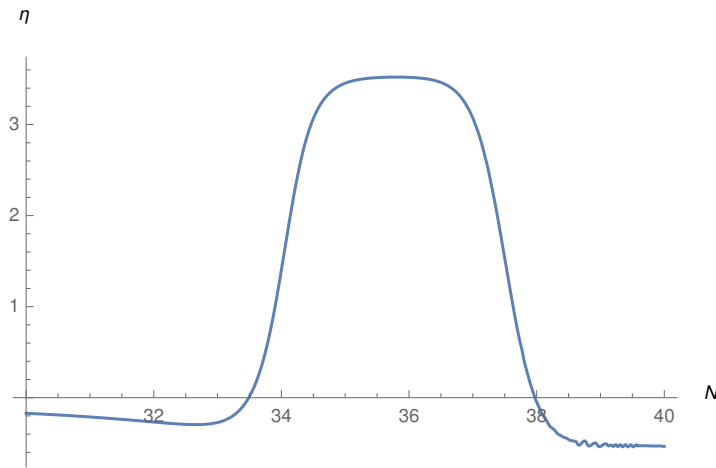
2. $\dot{\phi}_0 \approx -\sqrt{2\epsilon_0} = -0.0439$ όπου $\epsilon_V = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2$ με $M_{pl} \equiv 1$.

$$H \text{ παράμετρος } \epsilon_H = \frac{1}{2M_{pl}^2} \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2.$$



Σχήμα 9

H παράμετρος η_H .



Σχήμα 10

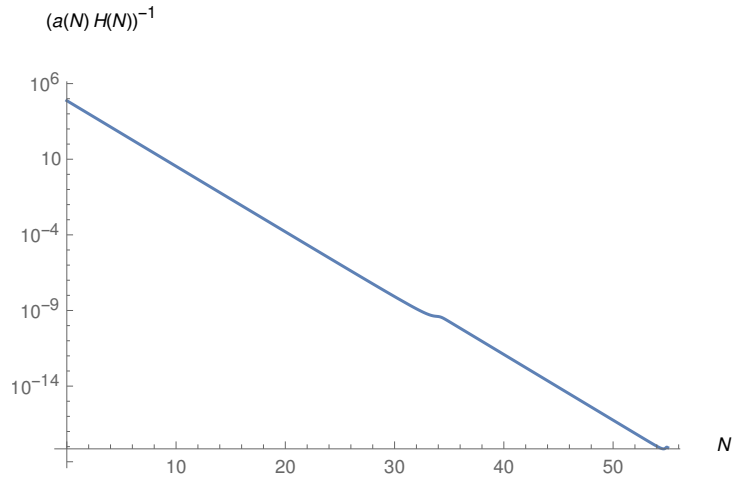
Υπάρχει μια περιοχή ($35 \lesssim N \lesssim 37$) στην οποία η προσέγγιση της αργής εξέλιξης δεν ισχύει.

Η εξέλιξη του ορίζοντα Hubble .

Από την εξίσωση Friedmann παίρνουμε

$$H^2 = \frac{V}{(3 - \epsilon_V)M_{pl}^2}.$$

Ο ορίζοντας $(\alpha H)^{-1}$.



Σχήμα 11

5.3 Φάσμα ισχύος

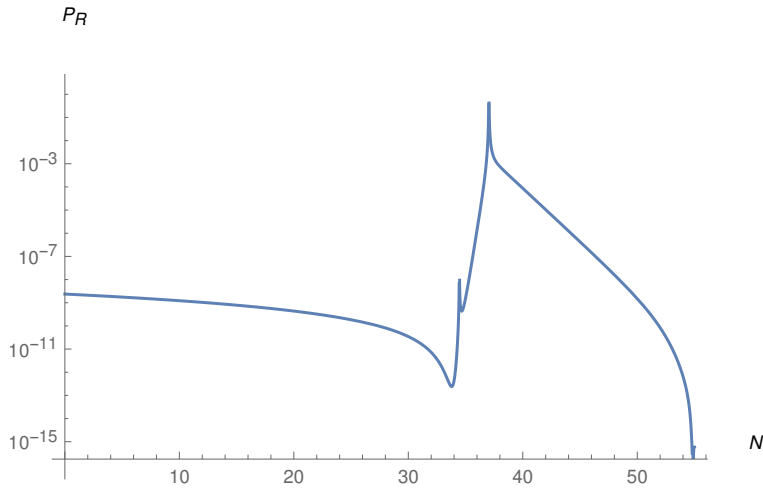
Το φάσμα ισχύος σύμφωνα με τη σχέση (3.7.14) είναι

$$P_{\mathcal{R}} \approx \frac{1}{8\pi^2 M_{pl}^2} \frac{H^2}{\epsilon_H}. \quad (5.3.1)$$

Από $3M_{pl}^2 H^2 \approx V$ και $\epsilon_H \approx \epsilon_V$ της προσέγγισης αργής εξέλιξης προκύπτει

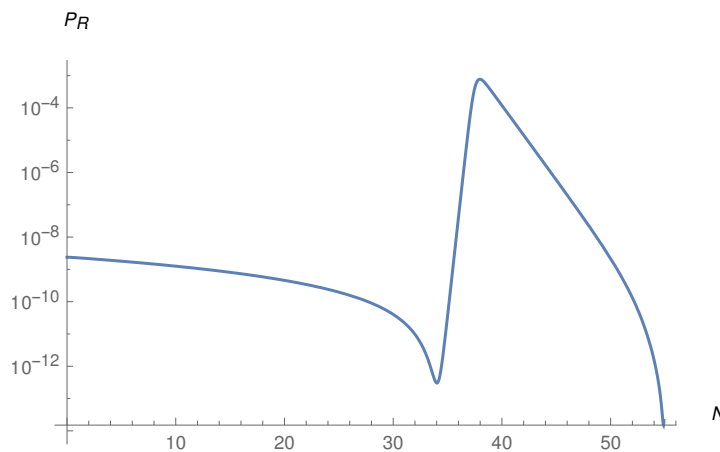
$$P_{\mathcal{R}} \approx \frac{V}{24\pi^2 \epsilon_V M_{pl}^4}. \quad (5.3.2)$$

Το φάσμα των διαταραχών σύμφωνα με την προσεγγιστική σχέση (5.3.2).



Σχήμα 12

Το φάσμα των διαταραχών σύμφωνα με την προσεγγιστική σχέση (5.3.1).



Σχήμα 13

Για έναν ακριβέστερο υπολογισμό του φάσματος, επιλύουμε την εξίσωση των διακυμάνσεων του πεδίου, Mukhanov - Sasaki.

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u_k}{dN_e^2} + (1 - \epsilon_H) \frac{du_k}{dN_e} + \left[\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} + (1 + \epsilon_H - \eta_H)(\eta_H - 2) - \frac{d(\epsilon_H - \eta_H)}{dN_e} \right] u_k = 0$$

Για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης, χωρίζουμε το u_k σε πραγματικό και σε φανταστικό μέρος.

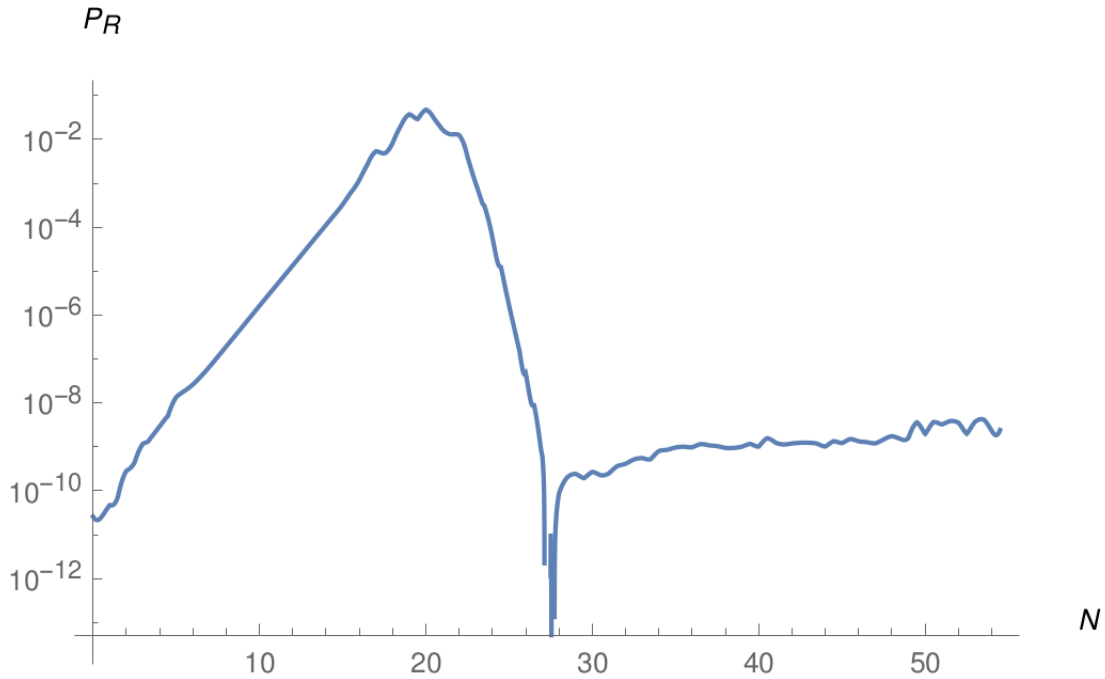
Ολοκληρώνουμε την εξίσωση για διαφορετικά k . Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\text{Re}(u_k) = \frac{1}{\sqrt{2k}}, \quad \text{Im}(u_k) = 0, \quad \text{Re}\left(\frac{du_k}{dN_e}\right) = 0, \quad \text{Im}\left(\frac{du_k}{dN_e}\right) = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2k_i}}.$$

όπου η κλίμακα k_i είναι τέτοια ώστε $k_i \ll k$. Στο όριο $k \gg \mathcal{H}$ είναι $u_k \rightarrow \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}$.

Πιο αναλυτικά, επιλέξαμε 110 τιμές για τον αριθμό N_e οι οποίες αντιστοιχούν σε 110 διαφορετικές κλίμακες k οι οποίες εξήλθαν από τον ορίζοντα σε αυτά τα N_e . Στη συνέχεια έγινε ολοκλήρωση για κάθε ένα από αυτά τα k για 5 με 10 e-foldings πριν από την έξοδό τους, έως το τέλος του πληθωρισμού. Το φάσμα των διαταραχών της καμπυλότητας υπολογίστηκε από τις ασυμπτωτικές τιμές των u_k . Δίνεται από τη σχέση

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2.$$

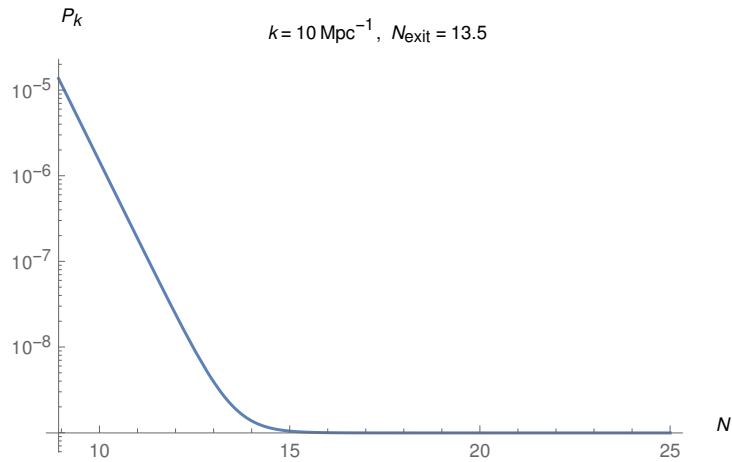


Σχήμα 14

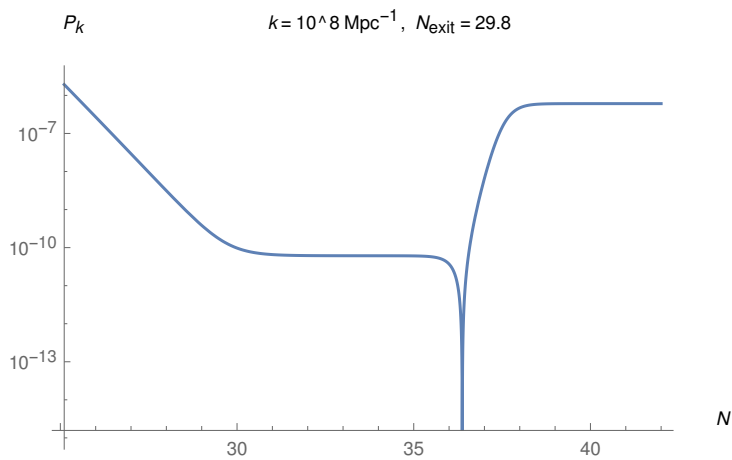
Εδώ έχουμε αντιστρέψει τον οριζόντιο άξονα έτσι ώστε το $N = 0$ να αντιστοιχεί στο τέλος του πληθωρισμού και $N = 55$ στην αρχή. Το φάσμα για μικρές τιμές k έχει πλάτος $A_s \approx 10^{-9}$ ενώ αυτό ενισχύεται για μεγάλα k ($\approx 4 \cdot 10^{13} \text{ Mpc}^{-1}$) ως $A_s \approx 0.04$.

Στη συνέχεια βλέπουμε την εξέλιξη του φάσματος ισχύος για δύο κλίμακες. Αυτή που αντιστοιχεί σε $k = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ βγαίνει από τον ορίζοντα 41.5 e-foldings πριν το τέλος του

πληθωρισμού και αυτή που αντιστοιχεί σε $k = 10^8 \text{Mpc}^{-1}$ εξέρχεται μόλις 25.2 e-foldings πριν το τέλος του πληθωρισμού.



Σχήμα 15



Σχήμα 16

Η μεγάλη κλίμακα ($k = 10$) που βγήκε πολύ νωρίς από τον ορίζοντα διατηρεί μια σταθερή τιμή του φάσματος στον υπερ ορίζοντα, ενώ η μικρή ($k = 10^8$) παρουσιάζει ενίσχυση της τιμής του φάσματος μετά την έξοδο από τον ορίζοντα, την περίοδο που το δυναμικό είναι σταθερό.

5.4 Αρχέγονες μελανές οπές

Μελανές οπές σχηματίζονται όταν μεγάλες διαταραχές στην πυκνότητα εισέρχονται στον ορίζοντα μετά το τέλος του πληθωρισμού. Το πηλίκο της πυκνότητας μελανών οπών μαζας M προς την ολική, κατά το σχηματισμό τους είναι

$$\beta_f(M(k)) = \frac{\rho_{PBH}}{\rho} = \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M(k))} e^{-\delta^2/2\sigma^2(M(k))}$$

όπου έχουμε πάρει την κρίσιμη τιμή της πυκνότητας να είναι $\delta_c = 0.5$.

Αρχικά υπολογίσαμε τη διασπορά

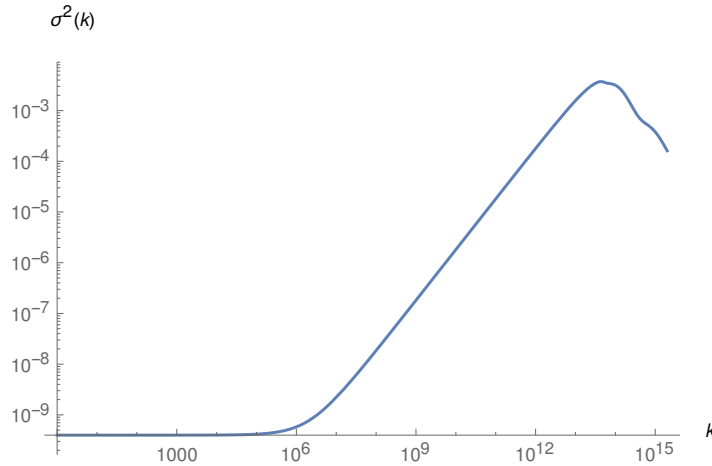
$$\sigma^2(M(k)) = \frac{16}{81} \int_0^{\infty} d \ln k P_{\mathcal{R}}(k) (kR)^4 W^2(kR)$$

όπου $R = k^{-1}$: Εδώ η ολοκλήρωση γίνεται ως προς k . Η σχέση μεταξύ του αριθμού των e-foldings και της κλίμακας k βρίσκεται από τη συνθήκη που ισχύει τη στιγμή που η κλίμακα εξέρχεται του ορίζοντα, $k = aH$. Θεωρώντας σταθερό τον παράγοντα Hubble κατά τον πληθωρισμό, προκύπτει

$$k = k_* e^{N-N_*}$$

όπου για κλίμακα αναφοράς παίρνουμε $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ (κλίμακα CMB). Θέτουμε με $N = 0$ τη στιγμή που η k_* βγήκε από τον ορίζοντα.

Η διασπορά γίνεται μέγιστη ($\sigma^2 = 0.0036$) στην κλίμακα $k \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ Mpc}^{-1}$.

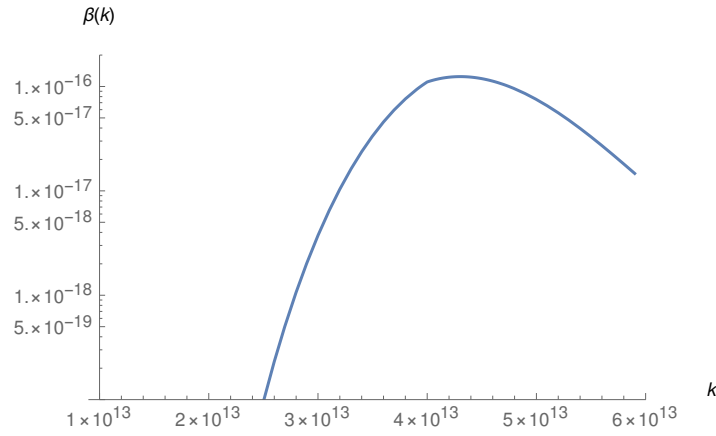


Σχήμα 17

Η ποσότητα β υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ότι $\sigma(M) \ll \delta_c$, και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι

$$\beta(M(k)) \approx \frac{\sigma(M(k))}{\sqrt{2\pi}\delta_c} e^{-\delta_c^2/2\sigma^2}.$$

$$\beta_f(M(k))$$

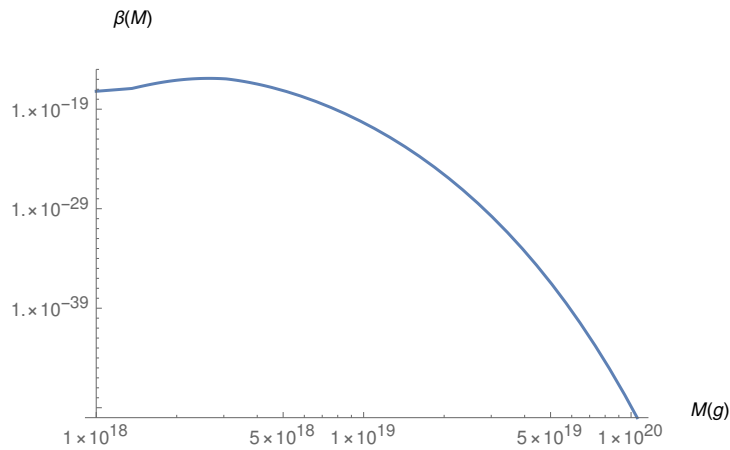


Σχήμα 18

Με τη χρήση της (4.3.2),

$$M(k) \approx 10^{18} g \left(\frac{\gamma}{0.2} \right) \left(\frac{g_*(T_f)}{106.75} \right)^{-1/6} \left(\frac{k}{7 \cdot 10^{13}} \right)^{-2}$$

βρίσκουμε την ποσότητα β και ως συνάρτηση της μάζας:



Σχήμα 19

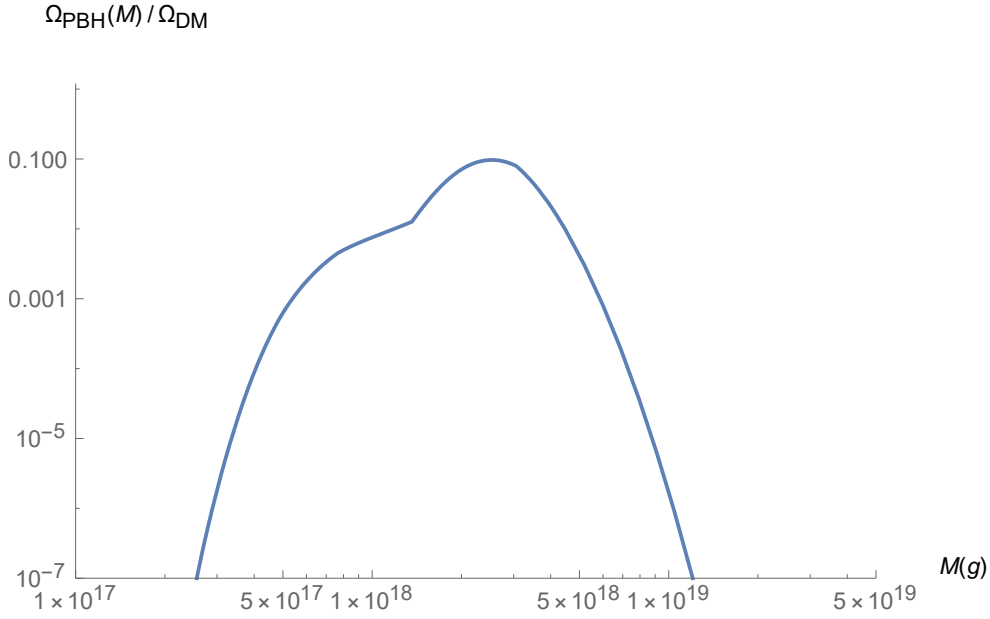
Για μάζες $M_{PBH} \approx 2.6 \cdot 10^{18} g = 1.3 \cdot 10^{-15} M_{\odot}$ έχουμε τη μέγιστη τιμή του β , $\beta_{max} = 1.2 \cdot 10^{-16}$. Τέλος, το ποσοστό των αρχέγονων μελανών οπών σε σχέση με τη σκοτεινή ύλη

σήμερα βρίσκεται με τη σχέση (4.3.7)

$$\frac{\Omega_{PBH}(M(k))}{\Omega_{CDM}} = \left(\frac{\beta(M(k))}{8 \cdot 10^{-16}} \right) \left(\frac{\gamma}{0.2} \right)^{3/2} \left(\frac{g_*(T_f)}{106.75} \right)^{-1/4} \left(\frac{M(k)}{10^{18}g} \right)^{-1/2}$$

για $\gamma = 0.2$, $g_*(T_f) = 106.75$.

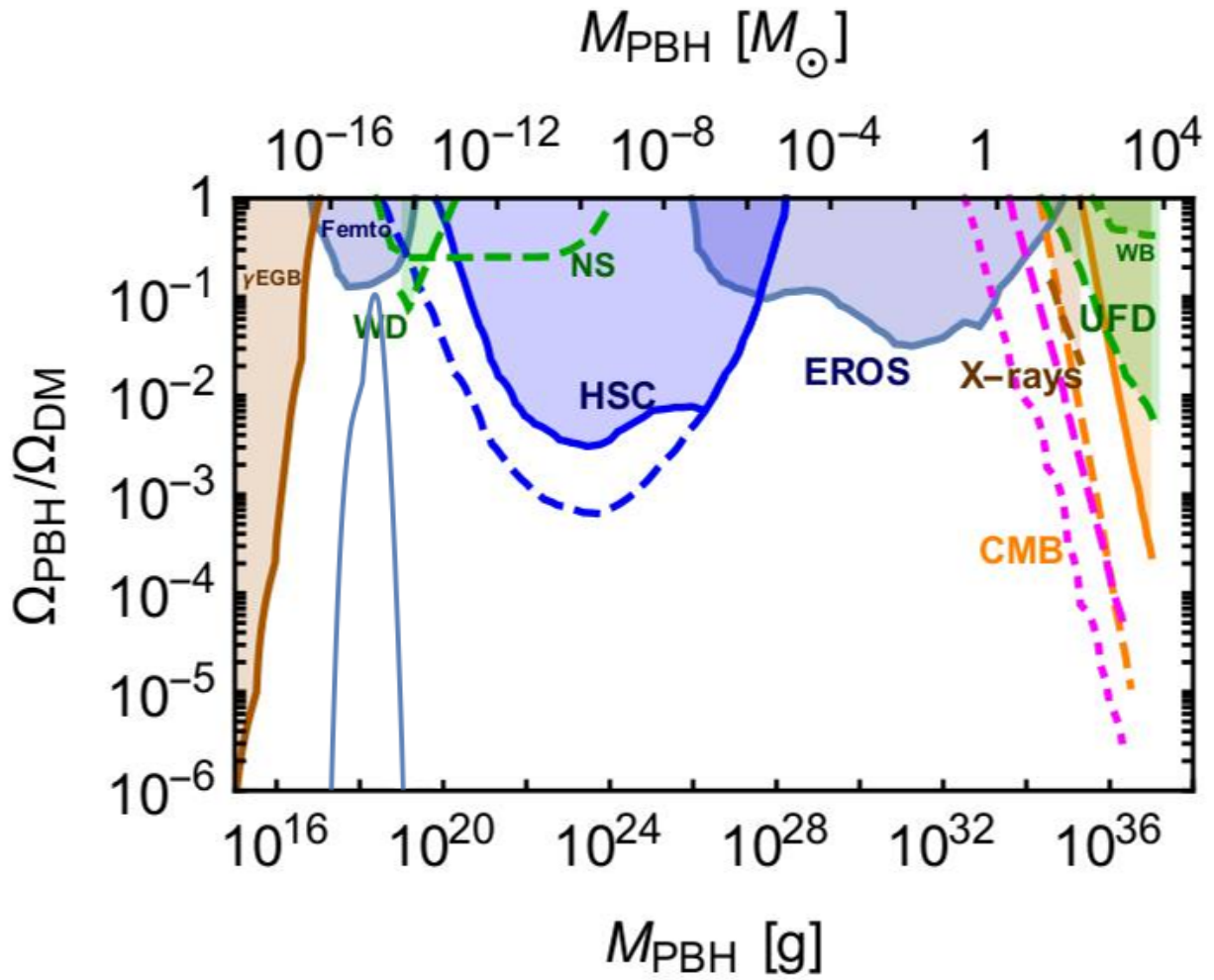
$$\frac{\Omega_{PBH}}{\Omega_{CDM}} = 0.1 \text{ για μάζες } M_{PBH} \approx 2.6 \cdot 10^{18} g = 1.3 \cdot 10^{-15} M_{\odot}.$$



Σχήμα 20

Για μάζες $1.35 \cdot 10^{18} g \lesssim M_{PBH} \lesssim 4.3 \cdot 10^{18} g$, το ποσοστό της σκοτεινής ύλης που μπορεί να οφείλεται σε αρχέγονες μελανές οπές έχει ένα εύρος 1 – 10%. Το αποτέλεσμα αυτό έχει ευαίσθητη εξάρτηση τόσο από τις παραμέτρους που επιλέχθηκαν για το δυναμικό, όσο και από την κρίσιμη τιμή της διαταραχής της πυκνότητας που χρησιμοποιήσαμε στον κώδικα. Λόγω της εκθετικής εξάρτησης της ποσότητας β_f από το δ_c , μια μικρή αλλαγή σε αυτό θα οδηγούσε σε πολύ διαφορετική ενεργειακή πυκνότητα.

Εδώ βλέπουμε το αποτέλεσμα από την αριθμητική μας ανάλυση (μπλε γραμμή) καθώς και τους περιορισμούς στη μάζα που έχουν εξαχθεί με διάφορες παρατηρησιακές μεθόδους [2].



Σχήμα 21

6 Επίλογος

Σε αυτή την εργασία μελετήσαμε την πιθανότητα οι αρχέγονες μελανές σπές να αποτελούν μέρος της σκοτεινής ύλης σήμερα και εξετάσαμε ένα σενάριο πληθωρισμού το οποίο δίνει ένα φάσμα κοσμολογικών διαταραχών που συμφωνεί με τις παρατηρήσεις.

Αρχικά, έγινε μια εισαγωγή για το καθιερωμένο μοντέλο της κοσμολογίας. Ακολούθησε περιγραφή του κοσμολογικού πληθωρισμού και των συνθηκών κάτω από τις οποίες συμβαίνει.

Επικεντρωθήκαμε σε ένα μοντέλο πληθωρισμού με απλό, βαθμωτό πεδίο και είδαμε τον τρόπο εξέλιξης των διακυμάνσεων ενός τέτοιου πεδίου. Η εξέλιξη αυτή δίνεται από την εξίσωση Mukhanov - Sasaki. Μεταβαίνοντας στην κβαντική περιγραφή του πεδίου, προκύπτουν οι διακυμάνσεις του από τις οποίες παίρνουμε το φάσμα ισχύος. Τα παρατηρήσιμα μεγέθη εδώ είναι ο δείκτης n_s που δείχνει την εξάρτηση του φάσματος από την κλίμακα, το $\frac{dn_s}{d \ln k}$ και το πλάτος A_s του φάσματος. Το πλάτος του φάσματος στις μεγάλες κλίμακες (CMB κλίμακες) σύμφωνα με τις παρατηρήσεις είναι $\mathcal{O}(10^{-9})$.

Κατόπιν έγινε περιγραφή του τρόπου δημιουργίας των αρχέγονων μελανών οπών μέσω της βαρυτικής κατάρρευσης των διαταραχών καμπυλότητας, οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή και ξαναπαίρνουν στον ορίζοντα Hubble την εποχή της ακτινοβολίας, μετά το τέλος του πληθωρισμού.

Το δυναμικό του κοσμολογικού πληθωρισμού το οποίο μελετήσαμε αριθμητικά οδηγεί σε ενίσχυση του πλάτους A_s του φάσματος ισχύος έως και $\mathcal{O}(10^{-2})$ σε μικρές κλίμακες, τις οποίες ονομάζουμε PBH κλίμακες. Αυτό ευνοεί το σχηματισμό μελανών οπών από κατάρρευση διαταραχών καμπυλότητας που αντιστοιχούν σε αυτές τις κλίμακες, κατά την είσοδό τους στον ορίζοντα την εποχή της ακτινοβολίας. Για μάζες μελανών οπών της τάξης των $10^{-15} M_\odot$, βρήκαμε ότι το ποσοστό της πυκνότητας αυτών σήμερα ως προς την πυκνότητα της σκοτεινής ύλης μπορεί να φτάσει έως και 10%.

Παράρτημα A

Διαταραγμένη μετρική:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \alpha^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 - 2A & -B_i \\ -B_i & (1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \alpha^{-2} \begin{pmatrix} -1 + 2A & -B_i \\ -B_i & (1 + 2D)\delta_{ij} - 2E_{ij} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Η εξίσωση του πεδίου είναι

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V_{,\phi} = 0, \quad (2)$$

όπου

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi). \quad (3)$$

Η εξίσωση για το υπόβαθρο είναι

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi + \alpha^2 V_{,\phi} = 0 \quad (4)$$

και η ορίζουσα της μετρικής είναι

$$g = -\alpha^8 (1 + 2A - 3D) \quad (5)$$

σε πρώτη τάξη διαταραχών. Από εδώ παίρνουμε

$$\sqrt{-g} = \alpha^4 (1 + 2A - 6D)^{1/2} \approx \alpha^4 (1 + A - 3D). \quad (6)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \frac{1}{\alpha^4 (1 + A - 3D)} [\partial_0 (\alpha^4 (1 + A - 3D) \partial^0 \phi) + \partial_i (\alpha^4 (1 + A - 3D) \partial^i \phi)] \quad (7)$$

1. $\partial_0 (\alpha^4 (1 + A - 3D) \partial^0 \phi) = \partial_0 [\alpha^4 (1 + A - 3D) \alpha^{-2} (-1 + 2A) \partial_0 \phi + \alpha^4 (1 + A - 3D) \alpha^{-2} (-B_i) \partial_i \phi]$, όπου ο δεύτερος όρος είναι αμελητέος διότι $\partial_i \phi = \partial_i \delta \phi$ είναι δεύτερης τάξης όρος και έτσι καταλήγουμε στην $\partial_0 (\alpha^4 (-1 - A + 3D) \partial_0 \phi) = \partial_0 (\alpha^4 (1 + A - 3D) \partial^0 \phi)$.

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας $\phi = \bar{\phi} + \delta \phi$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \partial_0 (\alpha^4 (-1 - A + 3D) \partial_0 \phi) &= 2\alpha \alpha' (-1 + A + 3D) (\bar{\phi} + \delta \phi)' + \alpha^2 (A' + 3D') (\bar{\phi} + \delta \phi)' + \\ &\alpha^2 (-1 + A + 3D) (\bar{\phi} + \delta \phi)'' = 2\alpha \alpha' (-1 + A + 3D) \bar{\phi}' - 2\alpha \alpha' \delta \phi' + \alpha^2 (A' + 3D') \bar{\phi}' + \\ &\alpha^2 (-1 + A + 3D) \bar{\phi}'' - \alpha^2 \delta \phi''. \end{aligned}$$

2. $\partial_i (\alpha^4 (1 + A - 3D) \partial^i \phi) = \partial_i [\alpha^4 (1 + A - 3D) \alpha^{-2} (-B_i) \partial_0 \phi + \alpha^4 (1 + A - 3D) ((1 + 2D) \delta_{ij} - 2E_{ij}) \alpha^{-2} \partial_j \phi] = \partial_i [-\alpha^2 B_i \bar{\phi}' + \alpha^2 \partial_i \delta \phi] = -\alpha^2 B_{i,i} \bar{\phi}' + \alpha^2 \partial_i^2 \delta \phi$.

Έτσι η (7) γίνεται

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} [2\alpha \alpha' (-1 + A + 3D) \bar{\phi}' - 2\alpha \alpha' \delta \phi' + \alpha^2 (A' + 3D') \bar{\phi}' + \alpha^2 (-1 + A + 3D) \bar{\phi}'' \\ &\quad - \alpha^2 \delta \phi'' - \alpha^2 B_{i,i} \bar{\phi}' + \alpha^2 \partial_i^2 \delta \phi] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \frac{1}{\alpha^2} [(-1 + 2A) (\bar{\phi}'' + 2\mathcal{H} \bar{\phi}') - \delta \phi'' - 2\mathcal{H} \delta \phi' + (A' + 3D' - B_{i,i}) \bar{\phi}' + \partial_i^2 \delta \phi].$$

Για το δυναμικό έχουμε

$$V(\phi) = V(\bar{\phi} + \delta\phi) \Rightarrow$$

$$V_{,\phi} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi.$$

Η εξίσωση πεδίου (2) σύμφωνα με τα παραπάνω είναι:

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi = -2A\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} + (A' + 3D' - B_{i,i})\bar{\phi}' \quad (8)$$

Παράρτημα Β

Η εξίσωση Mukhanov - Sasaki είναι

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u_k = 0$$

Υπολογισμός του z''/z :

Έχει οριστεί $z \equiv \dot{\phi}\alpha/H$. Γράφουμε

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2. \quad (9)$$

Άρα

$$\frac{z''}{z} = \left(\frac{z'}{z}\right)' + \left(\frac{z'}{z}\right)^2.$$

$$z' = \dot{z}\alpha = \frac{\alpha\dot{\alpha}\dot{\phi}}{H} + \frac{\alpha^2\ddot{\phi}}{H} - \frac{\alpha^2\dot{\phi}\dot{H}}{H^2} \Rightarrow$$

$$\frac{z'}{z} = \dot{\alpha} + \frac{\alpha\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - \frac{\alpha\dot{H}}{H}.$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις για τις παραμέτρους αργής εξέλιξης:

$$\ddot{\phi} \approx H\dot{\phi}(\epsilon - \eta)$$

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \epsilon_V \quad (10)$$

και βρίσκουμε

$$\frac{z'}{z} = \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V). \quad (11)$$

Επομένως είναι

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}'(1 + 2\epsilon_V - \eta_V) + \mathcal{H}(1 + 2\epsilon_V - \eta_V)' + \mathcal{H}^2(1 + 2\epsilon_V - \eta_V)^2 \xrightarrow{\mathcal{H}'/\mathcal{H}^2=1+\dot{H}/H^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(1 - \epsilon_V)(1 + 2\epsilon_V - \eta_V) + \mathcal{H}(2\epsilon'_V - \eta'_V) + \mathcal{H}^2(1 + 4\epsilon_V - 2\eta_V) \Rightarrow \\ \frac{z''}{z} \approx \mathcal{H}^2(2 + 5\epsilon_V - 3\eta_V) \end{aligned} \quad (12)$$

σε πρώτη τάξη.

Παράρτημα Γ

Μετασχηματίζοντας την εξίσωση Mukhanov - Sasaki με τον ακόλουθο τρόπο,

$$u'' + \left[k^2 - \frac{1}{\tau^2}(\nu^2 - \frac{1}{4}) \right] u = 0, \quad (13)$$

είναι στη μορφή της εξίσωσης Bessel. Έχουμε θέσει

$$\nu^2 = \frac{9}{4} + 9\epsilon_V - 3\eta_V \Rightarrow \nu = \frac{3}{2} \sqrt{1 + 4\epsilon_V - \frac{4}{3}\eta_V} \approx \frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V. \quad (14)$$

Στη συνέχεια συστήνουμε μια νέα συνάρτηση s τέτοια ώστε

$$u \equiv (-\tau)^{1/2} s. \quad (15)$$

Με αυτούς τους μετασχηματισμούς η εξίσωση γράφεται:

$$\tau^2 s'' + \tau s' + [k^2 \tau^2 - \nu^2] s = 0 \quad (16)$$

Hankel και Bessel εξισώσεις Οι Hankel εξισώσεις

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu(x) + iN_\nu(x), H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

όπου οι συναρτήσεις J_ν και N_ν είναι οι συναρτήσεις Bessel και Neumann, είναι λύσεις της εξίσωσης Bessel

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} Z(x) + x \frac{d}{dx} Z(x) + [x^2 - \nu^2] Z(x) = 0. \quad (17)$$

Για πραγματικά x , οι J_ν και N_ν είναι πραγματικές και έτσι $H_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(1)}(x)^*$. Η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά είναι

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i[x - (\nu+1/2)\pi/2]}$$

για $x \rightarrow \infty$, και

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim -i \frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/2} 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{-\nu}$$

για $x \rightarrow 0$.

Οι λύσεις της

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} Z(x) + x \frac{d}{dx} Z(x) + [k^2 x^2 - \nu^2] Z(x) = 0$$

είναι $H_\nu^{(1)}(kx)$ και $H_\nu^{(2)}(kx)$ ενώ για αρνητικά x είναι $H_\nu^{(1)}(-kx)$ και $H_\nu^{(2)}(-kx)$.

Επομένως η εξίσωση (16) είναι εξίσωση Bessel με λύσεις

$$s(\tau) \equiv (-\tau)^{-1/2} u(\tau) \equiv (-\tau)^{-1/2} \alpha Q_{\vec{k}}(\tau) = C_{1\vec{k}} H_\nu^{(1)}(-k\tau) + C_{2\vec{k}} H_\nu^{(2)}(-k\tau),$$

ή

$$Q_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} \alpha^{-1} \sqrt{-\tau} H_\nu(-k\tau). \quad (18)$$

Οι προγενέστερες στιγμές αντιστοιχούν σε $x = -k\tau \rightarrow \infty$ και οι μεταγενέστερες σε $x = -k\tau \rightarrow 0$.

Αναφορές

- [1] Ade, Peter AR and Aghanim, N and Arnaud, M and Ashdown, Mark and Aumont, J and Baccigalupi, C and Banday, AJ and Barreiro, RB and Bartlett, JG and Bartolo, N and others. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [2] Ballesteros, Guillermo and Taoso, Marco. Primordial black hole dark matter from single field inflation. *Physical Review D*, 97(2):023501, 2018.
- [3] Biagetti, Matteo and Franciolini, Gabriele and Kehagias, Alex and Riotto, Antonio. Primordial black holes from inflation and quantum diffusion. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(07):032, 2018.
- [4] Byrnes, Christian T and Cole, Philippa S and Patil, Subodh P. Steepest growth of the power spectrum and primordial black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(06):028, 2019.
- [5] Byrnes, Christian T and Hindmarsh, Mark and Young, Sam and Hawkins, Michael RS. Primordial black holes with an accurate QCD equation of state. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(08):041, 2018.
- [6] Carr, BJ and Kohri, Kazunori and Sendouda, Yuuiti and Yokoyama, Junichi. New cosmological constraints on primordial black holes. *Physical Review D*, 81(10):104019, 2010.
- [7] Cicoli, Michele and Diaz, Victor A and Pedro, Francisco G. Primordial black holes from string inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(06):034, 2018.
- [8] Cole, Philippa S and Byrnes, Christian T. Extreme scenarios: the tightest possible constraints on the power spectrum due to primordial black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(02):019, 2018.
- [9] D. Baumann. Cosmology. *Lecture Notes, Cambridge*.
- [10] D. Baumann. The Physics of Inflation. *Lecture Notes, Cambridge*.

- [11] García-Bellido, J and Morales, E Ruiz. Primordial black holes from single field models of inflation, *Phys. Dark Univ*, 18:47, 2017.
- [12] Hannu Kurki-Suonio. Cosmological Perturbation Theory, part 1 and 2. *Lecture Notes*.
- [13] Harada, Tomohiro and Yoo, Chul-Moon and Kohri, Kazunori. Threshold of primordial black hole formation. *Physical Review D*, 88(8):084051, 2013.
- [14] Inomata, Keisuke and Kawasaki, Masahiro and Mukaida, Kyohei and Tada, Yuichiro and Yanagida, Tsutomu T. Inflationary primordial black holes as all dark matter. *Physical Review D*, 96(4):043504, 2017.
- [15] Leach, Samuel M and Liddle, Andrew R. Inflationary perturbations near horizon crossing. *Physical Review D*, 63(4):043508, 2001.
- [16] Liddle, Andrew R. An introduction to cosmological inflation. *High energy physics and cosmology*, 1998.
- [17] Motohashi, Hayato and Hu, Wayne. Primordial black holes and slow-roll violation. *Physical Review D*, 96(6):063503, 2017.
- [18] Özsoy, Ogan and Parameswaran, Susha and Tasinato, Gianmassimo and Zavala, Ivonne. Mechanisms for primordial black hole production in string theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(07):005, 2018.
- [19] Sara Zucchini. Primordial Black Holes in String Inflation. *Thesis, University of Bologna*, 2017/2018.
- [20] Sasaki, Misao and Suyama, Teruaki and Tanaka, Takahiro and Yokoyama, Shuichiro. Primordial black holes-perspectives in gravitational wave astronomy. *Classical and Quantum Gravity*, 35(6):063001, 2018.
- [21] Stegmann, Jakob and Capelo, Pedro R and Bortolas, Elisa and Mayer, Lucio. Improved constraints from ultra-faint dwarf galaxies on primordial black holes as dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(4):5247–5260, 2020.

- [22] Young, Sam and Byrnes, Christian T and Sasaki, Misao. Calculating the mass fraction of primordial black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(07):045, 2014.