



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΔΙΣΚΟΙ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ ΠΟΥ
ΠΡΟΚΑΛΟΥΝ ΑΝΕΜΟΥΣ

Σπυράκος Βασίλειος
Α.Μ.: 2018316

Επιβλέπων: Βλαχάκης Νεκτάριος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Ιούλιος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΔΙΣΚΟΙ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ ΠΟΥ
ΠΡΟΚΑΛΟΥΝ ΑΝΕΜΟΥΣ

Σπυράκος Βασίλειος
Α.Μ.: 2018316

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

Βλαχάκης Νεκτάριος (Αναπληρωτής καθηγητής)
Κοντόπουλος Ιωάννης (Διευθυντής Ερευνών ΚΕΑΕΜ της
Ακαδημίας Αθηνών)
Χατζηδημητρίου Δέσποινα (Καθηγήτρια)

Ιούλιος 2020

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας αναπληρωτή καθηγητή κ. Νεκτάριο Βλαχάκη, για τις χρήσιμες συμβουλές και παρατηρήσεις που μου προσέφερε κατά την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Περίληψη

Στην διπλωματική αυτή εργασία μελετάται η δυναμική στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου αστροφυσικού δίσκου προσαύξησης στα πλαίσια της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής (resistive MHD). Στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται στοιχεία από την φυσική των δίσκων και των πιδάκων από την βιβλιογραφία. Στην συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο μετασχηματίζεται το σετ των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μη-ιδεατής MHD (ύπαρξη διάχυσης μαγνητικού πεδίου και ιξώδους) σε ένα σετ συνήθων διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας την συμμετρία της αυτοομοιότητας. Οι εξισώσεις αδιαστατοποιούνται, σχολιάζεται η επιλογή της κατάλληλης εξίσωσης ενέργειας και προσδιορίζονται τα κρίσιμα σημεία αυτών. Έπειτα, στο κεφάλαιο τέσσερα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιήθηκε η ολοκλήρωση (αρχικές συνθήκες, τιμές παραμέτρων, ολοκληρωτής που επιλέχθηκε), καθώς και ο τρόπος που απεικονίζονται τα αποτελέσματα. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι λύσεις που προέκυψαν από την αριθμητική ολοκλήρωση για όλες τις φυσικές ποσότητες, για τέσσερα διαφορετικά είδη δίσκων (ανάλογα με τα επίπεδα της διάχυσης του πεδίου και του ιξώδους στο εσωτερικό τους). Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτές τις λύσεις για τις διάφορες φυσικές διεργασίες που συμβαίνουν στο εσωτερικό του δίσκου (τοπολογία του μαγνητικού πεδίου, εκροή ύλης, απαγωγή στροφορμής, υποκεπλευριανή περιστροφή) και γίνεται σύγκριση αυτών με λύσεις από την βιβλιογραφία.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	11
1.1	Εισαγωγή	11
1.2	Magnetized Accretion Ejection Structures	12
1.2.1	Μαγνητοϋδροδυναμική	13
1.2.2	Μοντελοποίηση ενός MAES	16
1.2.3	Κρίσιμα σημεία	21
2	Μαγνητισμένοι πίδακες και δίσκοι προσαύξησης	25
2.1	Μαγνητισμένοι πίδακες	25
2.1.1	Χρήσιμες εξισώσεις - ολοκληρώματα MHD	25
2.1.2	Εκροή, επιτάχυνση και εστίαση ενός πίδακα	31
2.2	Μαγνητισμένοι δίσκοι προσαύξησης	39
2.2.1	Τυρβώδεις, λεπτοί, Κεπλεριανοί δίσκοι	39
2.2.2	Τυρβώδεις, λεπτοί, μαγνητισμένοι δίσκοι	41
2.2.3	Πρόβλημα απώλειας στροφορμής	43
2.2.4	Πρόσπτωση υλικού	44
2.2.5	Εκροή υλικού	46
2.2.6	Σύνδεση παραμέτρων δίσκου - πίδακα	50
3	Αυτοόμοιες λύσεις	53
3.1	Εισαγωγή	53
3.2	Σύστημα διαφορικών εξισώσεων	55
3.2.1	Εξίσωση ορμής	55
3.2.2	Εξίσωση συνέχειας	59
3.2.3	Εξίσωση επαγωγής	60
3.2.4	Καταστατική εξίσωση	63
3.2.5	Εξίσωση ενέργειας	63
3.3	Αδιαστατοποίηση	69
3.4	Κρίσιμα σημεία	73
4	Αριθμητική ολοκλήρωση	79
4.1	Εισαγωγή	79
4.2	Αρχικές συνθήκες	79

4.3	Ολοκλήρωση	83
4.4	Απεικόνιση των αποτελεσμάτων	84
5	Αποτελέσματα	87
5.1	Εισαγωγή	87
5.2	Δίσκος με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$	88
5.3	Δίσκος με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$	99
5.4	Δίσκος με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$	108
5.5	Δίσκος με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$	116
6	Συμπεράσματα	125
6.1	Ανακεφαλαίωση	125
6.2	Λύση των F. Casse & J. Ferreira (2000a)	125
6.3	Τιμές παραμέτρων	129
6.4	Διάχυση και τοπολογία του μαγνητικού πεδίου	133
6.5	Μηχανισμός εκροής ύλης	136
6.6	Μηχανισμοί απαγωγής στροφορμής	138
6.7	Υποκεπλευριανή περιστροφή	139
6.8	Μελλοντικές μελέτες	141
	Βιβλιογραφία	143

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Η εστιασμένη εκροή ύλης υπό την μορφή πιδάκων (Jets) είναι ένα αρκετά συχνά παρατηρούμενο φαινόμενο στο σύμπαν, το οποίο συνδέεται με μια πληθώρα αστροφυσικών αντικειμένων όπως είναι οι πρωτοαστέρες (Young Stellar Objects), τα διπλά συστήματα με συμπαγή συνοδό (microquasars, X-ray binaries, κατακλυσμιαίοι μεταβλητοί), οι ενεργοί γαλαξιακοί πυρήνες (Active Galactic Nuclei) και οι εκλάμψεις ακτίνων γ (Gamma Ray Bursts). Σε όλα αυτά τα αντικείμενα, οι πίδακες που παρατηρούνται έχουν δύο κοινά χαρακτηριστικά: είναι εξαιρετικά καλά εστιασμένοι και υπερηχητικοί. Πώς μπορούν όμως τα παραπάνω φυσικά συστήματα να παράγουν τέτοιου είδους εκροές;

Η παρουσία των πιδάκων στα συστήματα αυτά συνδέεται άμεσα με την ύπαρξη ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξεσης (accretion disk) γύρω από το κεντρικό τους αντικείμενο. Η πλήρης μελέτη της δυναμικής ενός δίσκου προσαύξεσης είναι ένα δύσκολο πρόβλημα, καθώς το σετ διαφορικών εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής που τον περιγράφουν είναι πολύ περίπλοκο για να λυθεί αναλυτικά στην γενικότερη δυνατή περίπτωση. Παρόλα αυτά, η μελέτη των δίσκων είναι εφικτή κάτω από συγκεκριμένες προσεγγίσεις που αφορούν την γεωμετρία τους, το ιξώδες αλλά και την ύπαρξη ή όχι μαγνητικού πεδίου καθώς και την διάχυσή του.

Οι Shakura και Sunyaev στην εργασία τους το 1973 [12] έδωσαν ένα σημαντικό μοντέλο λεπτών, χαμηλής θερμοκρασίας, Κεπλεριανά περιστρεφόμενων δίσκων, στους οποίους ο συντελεστής ιξώδους ν στο εσωτερικό του δίσκου μπορεί να περιγραφεί ως: $\nu = \alpha c_s H$, όπου c_s η ταχύτητα του ήχου και H η κλίμακα ύψους του δίσκου. Η σταθερά αναλογίας α ονομάστηκε α -παράμετρος και οι δίσκοι στους οποίους χρησιμοποιείται αυτή η προσέγγιση α -δίσκοι. Στο μοντέλο αυτό, όλο το υλικό του δίσκου προσπίπτει στο κεντρικό αντικείμενο και η βαρυτική δυναμική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την πρόσπτωση ακτινοβολείται πλήρως από την επιφάνειά του. Όμως, παρ'όλη την επιτυχία του, το μοντέλο των Shakura και Sunyaev δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τους παρατηρούμενους πίδακες.

Ένα μοντέλο ικανό να εξηγήσει την επιτάχυνση του υλικού, αλλά και την εστίαση που παρατηρούμε στους πίδακες, θα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν του την επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου. Πράγματι, στην εργασία τους το 1982 οι Blandford και Payne [2] ήταν οι πρώτοι που έδειξαν ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ μιας εκροής πλάσματος με ένα μεγάλης κλίμακας μαγνητικό πεδίο το οποίο διαπερνά τον δίσκο, μπορούσε να εξηγήσει την παρατηρούμενη επιτάχυνση και εστίαση του υλικού του πίδακα. Προκύπτει όμως εδώ το ερώτημα, από πού προέρχεται αυτό το μαγνητικό πεδίο;

Υπάρχουν δύο πιθανές εξηγήσεις για την προέλευση του πεδίου αυτού: η πρώτη είναι ότι το πλάσμα του δίσκου καθώς προσπίπτει στο κεντρικό αντικείμενο «κουβαλά» μαζί του το μεσοαστρικό μαγνητικό πεδίο, οδηγώντας σε αύξηση της μαγνητικής ροής στις εσωτερικές περιοχές του δίσκου (advection), ενώ η δεύτερη είναι ότι προέρχεται από κάποια διαδικασία δυναμό στο εσωτερικό του δίσκου που εξαρτάται από την τύρβη και τις αστάθειες που εμφανίζονται εκεί. Λόγω της πολυπλοκότητας της διαδικασίας του δυναμό, η πλειοψηφία των μελετών υποθέτει εκ των προτέρων την ύπαρξη ενός διπολικού μαγνητικού πεδίου μεγάλης κλίμακας το οποίο διαπερνά τον δίσκο, και το οποίο είναι υπεύθυνο για την δημιουργία των πιδάκων.

Γνωρίζουμε σήμερα ότι η ύπαρξη ενός τέτοιου πεδίου, σε συνδυασμό με την διαφορική (υποκεπλεριανή) περιστροφή του δίσκου, μπορεί να εξηγήσει την απώλεια στροφορμής από αυτόν, να παρέχει έναν μηχανισμό επιτάχυνσης του πλάσματος κατά μήκος των δυναμικών γραμμών αλλά και να εστιάζει την εκροή.

1.2 Magnetized Accretion Ejection Structures

Από την εργασία των Blandford και Payne το 1982 [2] μέχρι σήμερα έχουν γίνει πολλές μελέτες που αφορούν τους μαγνητισμένους αστροφυσικούς πίδακες, αλλά στην πλειοψηφία αυτών ο δίσκος αντιμετωπίζεται συνήθως ως μία συνοριακή συνθήκη, κάνοντας την υπόθεση ότι αυτός είναι λεπτός και ακολουθεί το μοντέλο των Shakura και Sunyaev (1973) [12].

Στην πραγματικότητα όμως, αφού οι πίδακες απάγουν στροφορμή από τον δίσκο, θα πρέπει να επηρεάζουν έντονα την δυναμική του, κάτι που μας δείχνει ότι η πρόσπτωση (δίσκος) και η εκροή ύλης (πίδακες) είναι δύο διαδικασίες που εξαρτώνται και επηρεάζουν σημαντικά η μία την άλλη. Αυτό σημαίνει ότι για να μελετήσει κάποιος σωστά ολόκληρο το πρόβλημα της πρόσπτωσης-εκροής ύλης, θα πρέπει να τροποποιήσει το πρότυπο μοντέλο των λεπτών δίσκων που γνωρίζουμε, παίρνοντας υπόψιν του αυτοσυνεπώς το μαγνητικό πεδίο. Τα αντικείμενα αυτά, όταν η πρόσπτωση και η εκροή της ύλης μελετώνται αυτοσυνεπώς, ονομάζονται μαγνητισμένες δομές πρόσπτωσης-εκροής ύλης (Magnetized Accretion Ejection Structures - MAES, J. Ferreira & G. Pelletier, 1993 [5], [6]).

Η αντιμετώπιση των δύο αυτών προβλημάτων ως ένα γεννάει πολλές ερωτήσεις που αφορούν τους φυσικούς μηχανισμούς στο εσωτερικό του δίσκου, τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να έχουμε πρόσπτωση ή εκροή, αλλά και πώς αυτά

τα δύο συνδέονται μέσω των ιδιοτήτων του δίσκου και των πιδάκων. Μια χαρακτηριστική ποσότητα που περιγράφει ένα MAES ονομάζεται δείκτης εκροής ξ (ejection index) και συνδέει τις διαδικασίες της πρόσπτωσης και της εκροής. Ο δείκτης αυτός, μας δείχνει το πόσο αποδοτικός μπορεί να είναι τοπικά ο δίσκος στο να χάνει υλικό προς τους πίδακες. Σε έναν πρότυπο, λεπτό δίσκο προσαύξεσης το $\xi = 0$, κάτι που οδηγεί σε έναν σταθερό ρυθμό πρόσπτωσης μάζας προς το κεντρικό αντικείμενο, ενώ αντίθετα σε ένα MAES το $\xi \neq 0$, αφού μέρος του υλικού του δίσκου μεταφέρεται στους πίδακες.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε την δυναμική στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου δίσκου προσαύξεσης ο οποίος προκαλεί ανέμους. Στα παρακάτω παρουσιάζουμε τα βασικά εργαλεία και την θεωρία που χρειαζόμαστε για την αντιμετώπιση αυτών των αντικειμένων.

1.2.1 Μαγνητοϋδροδυναμική

Πλάσμα ονομάζουμε ένα αέριο (μερικώς ή ολικώς) ιονισμένο, το οποίο παρουσιάζει συλλογική συμπεριφορά μέσω των κρούσεων των σωματιδίων που το αποτελούν. Η θεωρία της μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) μπορεί να περιγράψει μέσω ενός σετ μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (υδροδυναμικές εξισώσεις και εξισώσεις Maxwell), την δυναμική εξέλιξη ενός τέτοιου ρευστού παρουσία ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις αυτές, σχηματίζοντας τον τρόπο με τον οποίο κάποιες από αυτές προκύπτουν.

Η εξαγωγή των εξισώσεων των ρευστών έχει την βάση της στην κινητική θεωρία των αερίων. Έστω $f_\alpha = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ η συνάρτηση κατανομής (πυκνότητα σωματιδίων στον 6-διάστατο φασικό χώρο των ταχυτήτων \vec{v} και των θέσεων \vec{r}) ενός πληθυσμού σωματιδίων α . Από την ολική χρονική παράγωγο της συνάρτησης κατανομής προκύπτει η κινητική εξίσωση του Boltzmann:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f_\alpha + \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \right) f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (1.1)$$

όπου στον τρίτο όρο της επιτάχυνσης, η παράγωγος είναι ως προς τις ταχύτητες και η δύναμη \vec{F} που ασκείται στα σωματίδια του πληθυσμού α μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητικής ή βαρυτικής φύσεως. Ο όρος του δεξιού μέλους περιγράφει την χρονική μεταβολή της συνάρτησης κατανομής λόγω κρούσεων (π.χ. σχεδιάσεις Coulomb), οι οποίες μπορούν να μεταβάλλουν τον αριθμό των σωματιδίων μέσα στον φασικό όγκο. Απουσία τέτοιων κρούσεων το δεξί μέλος ισούται με μηδέν, και τότε η παραπάνω σχέση ονομάζεται εξίσωση του Vlasov.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την εξίσωση του Boltzmann με διάφορες συναρτήσεις της ταχύτητας $\psi(\vec{v}) = m, m\vec{v}, mv^2, \dots$, ολοκληρώνοντάς την στον χώρο των ταχυτήτων και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μέσης τιμής:

$$\langle \psi(\vec{v}) \rangle = \frac{1}{n} \iiint_{\vec{v}} \psi(\vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}, \quad \mu\epsilon \quad n = \iiint_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v} \quad (1.2)$$

όπου n η αριθμητική χωρική πυκνότητα των σωματιδίων, μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις διατήρησης μάζας (συνέχειας), ορμής και ενέργειας για κάθε έναν πληθυσμό σωματιδίων α του πλάσματος.

Εάν τώρα θεωρήσουμε ότι το πλάσμα έχει και αρκετά μεγάλη θερμοκρασία (σχεδόν πλήρως ιονισμένο), τότε οι κρούσεις μεταξύ των σωματιδίων των διάφορων πληθυσμών θα είναι πολύ συχνές, κάτι που μας επιτρέπει να κάνουμε την προσέγγιση ενός ρευστού. Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι όλοι οι πληθυσμοί α θα έχουν την ίδια θερμοκρασία T , και ότι $|\vec{v}_\alpha - \vec{u}| \ll |\vec{u}|$. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι αγνοούμε οποιαδήποτε απόκλιση μεταξύ της ταχύτητας κάποιου πληθυσμού α σε σχέση με την ταχύτητα της μέσης ροής του πλάσματος \vec{u} .

Από όλα τα παραπάνω, μπορούμε τελικά να γράψουμε τις εξισώσεις που αφορούν την διατήρηση της μάζας και της ορμής του πλάσματος στην γενικότερη τους μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P - \rho \vec{\nabla}\Phi_G + \vec{\nabla}\mathbf{T} + nq\vec{E} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \quad (1.4)$$

όπου \vec{u} είναι η μέση ταχύτητα της ροής και ρ η πυκνότητα της. Όλες οι δυνάμεις στην εξίσωση ορμής είναι γραμμένες ανά όγκο. Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης 1.4 εκφράζει την κλίση της πίεσης, ο δεύτερος την δύναμη της βαρύτητας, ο τρίτος αναφέρεται σε δυνάμεις λόγω ιξώδους, ενώ ο τέταρτος και πέμπτος είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στο πλάσμα από το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

Για να κλείσει όμως το παραπάνω σετ εξισώσεων και να μπορούμε να βρούμε όλες τις άγνωστες μεταβλητές που εισάγονται σε αυτό, χρειαζόμαστε και μία εξίσωση για την ενέργεια. Η εξίσωση αυτή μπορεί να πάρει γενικά πολλές μορφές, προκύπτει από την Boltzmann με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, αλλά είναι πολύ δύσκολο να λυθεί. Για τον λόγο αυτό, στην θέση της μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία πολυτροπική εξίσωση η οποία συνδέει την πίεση με την πυκνότητα του πλάσματος:

$$P = K\rho^\gamma \quad (1.5)$$

όπου γ είναι ο πολυτροπικός δείκτης του αερίου και K μία σταθερά αναλογίας. Ο δείκτης αυτός μπορεί να παίρνει τιμές ανάμεσα στην μονάδα (ισόθερμη περίπτωση) και $\gamma = 5/3$ (αδιαβατική περίπτωση) για ένα μονοατομικό αέριο.

Η εξέλιξη τώρα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, περιγράφεται πλήρως από τις

εξισώσεις του Maxwell στο κενό:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_* \quad (1.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.9)$$

όπου ρ_* είναι εδώ η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου. Στην περίπτωση τώρα όπου δεν έχουμε σχετικιστική κίνηση της ροής, το ρεύμα μετατόπισης (δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της σχέσης 1.9) μπορεί να αγνοηθεί. Αυτό συμβαίνει γιατί: από την εξίσωση 1.7 μπορούμε να δούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $E \sim BL/(cT)$, όπου L και T είναι οι χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους και χρόνου, για το εκάστοτε πρόβλημα, αντίστοιχα. Συγκρίνοντας τώρα τον δεύτερο όρο (ρεύμα μετατόπισης) στο δεξί μέλος της εξίσωσης 1.9 με τον όρο στο αριστερό, θα έχουμε:

$$\frac{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\vec{\nabla} \times \vec{B}} \sim \frac{E/(cT)}{B/L} \sim \left(\frac{L}{cT}\right)^2 \sim \left(\frac{U}{c}\right)^2 \ll 1 \quad \text{για } U \ll c$$

Οπότε για μη-σχετικιστικές ροές μπορούμε να αγνοήσουμε το ρεύμα μετατόπισης και η εξίσωση 1.9 γράφεται πιο απλά:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (1.10)$$

Όσον αφορά την διατήρηση της ολικής ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αυτή δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.11)$$

όπου το W είναι η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου και ισούται με:

$$W = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}$$

ενώ το άνυσμα Poynting \vec{S} είναι η ροή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, το οποίο δίνεται από την έκφραση:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (1.12)$$

Ο όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης 1.11 εκφράζει τις αλληλεπιδράσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με το πλάσμα (πηγές-καταβόθρες ενέργειας).

Τέλος, για να κλείσει το παραπάνω σύστημα εξισώσεων για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, χρειαζόμαστε άλλη μία εξίσωση που να μας προσδιορίζει το ηλεκτρικό πεδίο

\vec{E} . Η εξίσωση αυτή είναι ο γενικευμένος νόμος του Ohm, ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση ορμής για τα ηλεκτρόνια του πλάσματος, και γράφεται:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{\sigma} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c e n_e} - \frac{\vec{\nabla} P_e}{e n_e} - \left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)^2 \frac{(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{m_{in} n_i f_{in} c^2} \quad (1.13)$$

όπου σ είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του πλάσματος, n_e, n_i η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων και των ιόντων αντίστοιχα, m_{in} η ανηγμένη μάζα ιόντων και ουδέτερων σωματιδίων και f_{in} η συχνότητα των κρούσεων μεταξύ των σωματιδίων αυτών. Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της σχέσης 1.13 ονομάζεται όρος Ohm, ο τρίτος όρος Hall, ενώ ο τέταρτος αντιπροσωπεύει μια πηγή ηλεκτρικού πεδίου λόγω κάποιας βαθμίδας στην πίεση των ηλεκτρονίων. Εάν τώρα θεωρήσουμε ότι στο πλάσμα, εκτός από πρωτόνια και ηλεκτρόνια, είχαμε και ουδέτερα σωματίδια πυκνότητας ρ_n (neutrals, τα οποία βρίσκονται στην περίπτωση των δίσκων γύρω από τους πρωτοαστέρες όπου η ύλη δεν είναι πλήρως ιονισμένη), τότε ο γενικευμένος νόμος του Ohm αποκτά και τον πέμπτο όρο, αυτόν της αμφιπολικής διάχυσης.

Στην περίπτωση της ιδεατής MHD όπου η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι άπειρη ($\sigma \rightarrow \infty$), όλοι αυτοί οι όροι μπορούν να αγνοηθούν και ο νόμος του Ohm γράφεται στην πιο απλή του μορφή:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \quad (1.14)$$

Επιπλέον, στην περίπτωση της ιδεατής MHD παρουσιάζεται και το φαινόμενο του «παγώματος» των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου με το πλάσμα (flux freezing). Αυτό σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πλαστικό υλικό, το οποίο κάμπτεται, παραμορφώνεται, συστρέφεται, κτλ, ακολουθώντας όμως πάντα τις κινήσεις του πλάσματος. Αποτέλεσμα αυτού του παγώματος είναι η διατήρηση της μαγνητικής ροής που περνά από μία επιφάνεια που κινείται μαζί με το πλάσμα μέσα στον χρόνο.

1.2.2 Μοντελοποίηση ενός MAES

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε τις προσεγγίσεις που πρέπει να κάνουμε, έτσι ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε ένα MAES μέσα στα πλαίσια της MHD.

Διάχυση του μαγνητικού πεδίου

Σκοπός μας είναι να περιγράψουμε την πρόσπτωση υλικού σε ένα κεντρικό αντικείμενο, από έναν δίσκο προσαύξησης ο οποίος διαπερνάται από ένα μεγάλης κλίμακας διπολικό μαγνητικό πεδίο. Στην περίπτωση της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής ($\sigma \rightarrow \infty$), η πρόσπτωση του υλικού προς το κεντρικό αντικείμενο καθίσταται αδύνατη, καθώς το πλάσμα δεν μπορεί να διασχίσει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές λόγω του «παγώματος» που περιγράψαμε παραπάνω.

Για να έχουμε λοιπόν πρόσπτωση του υλικού προς το κεντρικό αντικείμενο, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι μέσα στον δίσκο η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ δεν είναι

άπειρη, αλλά πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι στην περιοχή του εσωτερικού του δίσκου έχουμε μη-ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική (resistive MHD) και ο νόμος του Ohm γράφεται:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{\sigma} \quad (1.15)$$

Παίρνοντας τώρα τον στροβιλισμό της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 1.7 και 1.10 από τους νόμους του Maxwell, καθώς και τις κατάλληλες ανυσματικές ταυτότητες, καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση δυναμό:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (1.16)$$

όπου $\eta = c^2/4\pi\sigma$ ο συντελεστής διάχυσης. Η εξίσωση αυτή περιγράφει την χρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης αυτής περιγράφει την οριζόντια μεταφορά ύλης προς το κεντρικό αντικείμενο (advection), ενώ ο δεύτερος την διάχυση των μαγνητικών γραμμών του πεδίου, η οποία επιτρέπει στην ύλη να προσπίπτει προς το κεντρικό αντικείμενο.

Μπορούμε να εισάγουμε σε αυτό το σημείο μία χρήσιμη ποσότητα, τον μαγνητικό αριθμό Reynolds. Αυτός προκύπτει διαστατικά, συγκρίνοντας τους δύο δεξιά όρους της εξίσωσης δυναμό, οι οποίοι μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \sim \frac{UB}{L} \quad \text{και} \quad \eta \nabla^2 \vec{B} \sim \frac{\eta B}{L^2}$$

Παίρνοντας τον λόγο του πρώτου προς τον δεύτερο, καταλήγουμε στην σχέση που δίνει τον μαγνητικό αριθμό Reynolds:

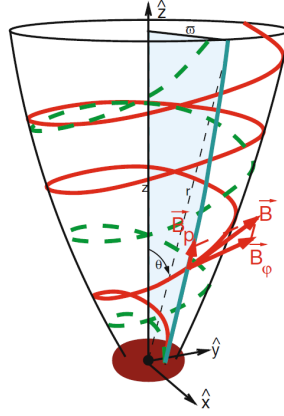
$$R_m = \frac{UL}{\eta} \quad (1.17)$$

Όταν $R_m \gg 1$ είμαστε στο όριο της ιδεατής MHD («παγωμένα» πλάσμα και δυναμικές γραμμές), ενώ για $R_m \ll 1$ είμαστε στην περιοχή της μη-ιδεατής (resistive MHD) και έχουμε διάχυση του πεδίου.

Αξισυμμετρία και στάσιμη κατάσταση

Μια βασική συμμετρία που παρουσιάζεται σε πολλά προβλήματα της φυσικής είναι η συμμετρία σε στροφές γύρω από έναν σταθερό άξονα. Στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (z, ϖ, ϕ) , εάν θεωρήσουμε τον άξονα z ως άξονα περιστροφής, μία τέτοια συμμετρία συνεπάγεται ότι όλες οι παραγώγοι των φυσικών μεγεθών ως προς ϕ μηδενίζονται: $\partial/\partial\phi = 0$ (αξισυμμετρία).

Επιπλέον, κάνοντας την θεώρηση ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος που χρειάζεται για να αλλάξει κάτι στους πίδακες είναι πολύ μεγαλύτερος από τους χαρακτηριστικούς χρόνους των φαινομένων που μπορούν να συμβούν στον δίσκο (π.χ. αστάθειες), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο πρόβλημα των MAES έχουμε στάσιμη κατάσταση, δηλαδή: $\partial/\partial t = 0$. Ο συνδυασμός αυτών των δύο προσεγγίσεων απλουστεύει αρκε-



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση μιας γραμμής ροής του πεδίου ταχυτήτων \vec{u} (διακεκομμένη γραμμή), και μιας δυναμικής γραμμής του μαγνητικού πεδίου (κόκκινη γραμμή). Οι προβολές \vec{u}_p και \vec{B}_p των δύο διανυσμάτων πάνω στο πολοειδές επίπεδο (γαλάζιο) ταυτίζονται, αλλά μόνο στην περίπτωση της ιδεατής MHD. Η εξίσωση της προβολής αυτής δίνεται από το $a(\varpi, z) = \text{constant}$. (σχήμα από [14])

τά το πρόβλημα, με τις άγνωστες ποσότητες να μπορούν να γραφούν πλέον μόνο σαν συναρτήσεις των συντεταγμένων (z, ϖ) . Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να οριστεί και το πολοειδές επίπεδο, όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.1 σκιασμένο με γαλάζιο χρώμα [14].

Εξαιτίας τώρα αυτών των δύο προσεγγίσεων, χρησιμοποιώντας τον νόμο Maxwell για την μη-ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων και την εξίσωση συνέχειας, μπορούμε να αναλύσουμε την ταχύτητα \vec{u} και το μαγνητικό πεδίο \vec{B} σε πολοειδείς και αζιμουθιακές συνιστώσες όπως φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_p + B_\phi \hat{\phi} \quad (1.18)$$

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \Rightarrow \rho \vec{u} = \rho \vec{u}_p + \rho u_\phi \hat{\phi} \quad (1.19)$$

Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε τις πολοειδείς συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας ως εξής:

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \times \left(\frac{a \hat{\phi}}{\varpi} \right) \quad \text{και} \quad \vec{u}_p = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\Psi \hat{\phi}}{4\pi \varpi} \right) \quad (1.20)$$

όπου με $a = a(\varpi, z)$ συμβολίζουμε την λεγόμενη συνάρτηση ροής για το μαγνητικό πεδίο και με Ψ την συνάρτηση ροής μάζας. Η συνάρτηση $a(\varpi, z)$ συνδέεται με την αζιμουθιακή συνιστώσα του ανυσματικού δυναμικού του \vec{B} , μέσω της σχέσης: $a = \varpi A_\phi$.

Για να μπορέσουμε να δούμε την φυσική σημασία της συνάρτησης $a(\varpi, z)$, θα υπολογίσουμε εδώ την μαγνητική ροή Φ που διέρχεται από μία επιφάνεια κάθετη

στο πολοειδές επίπεδο. Θα έχουμε:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\nabla} \times \left(\frac{a\hat{\phi}}{\varpi} \right) \cdot d\vec{S} = \int_C \left(\frac{a\hat{\phi}}{\varpi} \right) d\vec{l}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Stokes. Χρησιμοποιώντας τώρα το στοιχείο μήκους σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι εύκολο να δειχθεί ότι:

$$\Phi = 2\pi a(\varpi, z) \quad (1.21)$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση $a(\varpi, z) = \text{constant}$, περιγράφει επιφάνειες σταθερής κατακόρυφης μαγνητικής ροής Φ . Μία τέτοια επιφάνεια σταθερής μαγνητικής ροής φαίνεται στο σχήμα 1.1 με μαύρο χρώμα [14].

Συντελεστές μεταφοράς

Στην μελέτη ενός MAES μπορούμε να διακρίνουμε δύο κύριες περιοχές: τους πίδακες, όπου ο μαγνητικός αριθμός Reynolds είναι $R_m \gg 1$ και είμαστε στην περιοχή της ιδεατής MHD, και τον δίσκο όπου $R_m \sim 1$ οπότε έχουμε διάχυση του μαγνητικού πεδίου και φαινόμενα μεταφοράς.

Ο λόγος που υπάρχει αυτή η διαφορά μεταξύ των δύο περιοχών, είναι ότι μέσα στον δίσκο κυριαρχεί το βαρυτικό πεδίο, το οποίο έλκει το πλάσμα προς το κεντρικό αντικείμενο. Το πλάσμα με την σειρά του παρασέρνει τις δυναμικές μαγνητικές γραμμές, οι οποίες μπλέκονται με αυτόν τον τρόπο σαν ένα κουβάρι. Το «κουβάρισμα» αυτό των γραμμών μέσα στον δίσκο, ενεργοποιεί διαφόρων ειδών αστάθειες (π.χ. μαγνητοπεριστροφική αστάθεια, Balbus & Hawley 1991 [1]) και οδηγεί σε μία τυρβώδη κατάσταση στο εσωτερικό του.

Η τυρβώδης αυτή κατάσταση ενεργοποιεί και ενισχύει φαινόμενα μεταφοράς μέσα στον δίσκο, όπως είναι για παράδειγμα το ιξώδες (ν_v) και η διάχυση του μαγνητικού πεδίου (η). Ελλείψει μιας πλήρους θεωρίας για την τύρβη, στην μελέτη των MAES οι συντελεστές αυτοί μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας απλές εκφράσεις (όπως και στους α -δίσκους των Shakura και Sunyaev [12]), τις οποίες θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Επιπλέον, λόγω της ύπαρξης της τύρβης, οι συντελεστές αυτοί παύουν να είναι ισοτροπικοί στο εσωτερικό του δίσκου. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται δύο συντελεστές για την περιγραφή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου μέσα σε αυτόν: ο η που αναφέρεται στην διάχυση του πεδίου στο πολοειδές επίπεδο, και ο η' που σχετίζεται με την διάχυση στην αζιμουθιακή διεύθυνση $\hat{\phi}$.

Μη-σχετικιστική μαγνητοϋδροδυναμική

Στην μέχρι τώρα αντιμετώπιση του προβλήματος των MAES χρησιμοποιήσαμε εκφράσεις της μη-σχετικιστικής MHD, κάνοντας μάλιστα και προσεγγίσεις (π.χ. α -μελητέο ρεύμα μετατόπισης) για ταχύτητες $u \ll c$. Η μη-σχετικιστική προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί κυρίως στους δίσκους προσαύξησης και στους πίδακες γύρω από πρωτοαστέρες (YSOs), όπου εκεί η ύλη κινείται με μη-σχετικιστικές ταχύτητες.

Σετ μαγνητοϋδροδυναμικών εξισώσεων

Παραθέτουμε παρακάτω το σετ των διαφορικών εξισώσεων που πρέπει να λυθούν, έτσι ώστε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες μεταβλητές (ταχύτητα, πίεση, κτλ.) στο πρόβλημα των MAES. Οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι αυτές της διατήρησης μάζας και ορμής, οι οποίες με τις προσεγγίσεις που αναφέραμε παραπάνω (στάσιμη ροή, αξισυμμετρία, μη-σχετικιστική MHD) γράφονται ως:

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0 \quad (1.22)$$

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}\Phi_G + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \quad (1.23)$$

Με \mathbf{T} συμβολίζουμε και πάλι τον ταυστή της τύρβης, μέσα στον οποίο εμπεριέχονται οι δυνάμεις λόγω ιξώδους, και ο οποίος συνδέεται με τον συντελεστή ν_v .

Στην συνέχεια θα γράψουμε την αξιμουθιακή συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος \vec{J}_ϕ χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm, καθώς και την αξιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης δυναμό (επαγωγής). Πολλαπλασιάζοντας την σχέση για το νόμο του Ohm με $\hat{\phi}$ και χρησιμοποιώντας ότι το $E_\phi = 0$ (μη-σχετικιστική MHD), παίρνουμε για το ρεύμα στην αξιμουθιακή διεύθυνση:

$$\vec{J}_\phi = \frac{\sigma}{c}(\vec{u}_p \times \vec{B}_p) \quad (1.24)$$

Όσον αφορά την εξίσωση δυναμό 1.16, θεωρώντας στάσιμη κατάσταση και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ανυσματικές ταυτότητες, μετά από πράξεις καταλήγουμε στην αξιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης δυναμό (επαγωγής):

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\eta'}{\varpi^2} \vec{\nabla}(\varpi B_\phi) \right] = \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\varpi} (B_\phi \vec{u}_p - \vec{B}_p \Omega \varpi) \right] \quad (1.25)$$

όπου με η' συμβολίζεται ο συντελεστής διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην αξιμουθιακή κατεύθυνση.

Για να είναι πλήρες το σετ των εξισώσεων, χρειαζόμαστε επίσης και μία σχέση που να συνδέει την πίεση P του πλάσματος με την θερμοκρασία του T . Για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιείται η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$P = \rho \frac{k_B}{\mu m_p} T \quad (1.26)$$

όπου m_p η μάζα του πρωτονίου, k_B η σταθερά του Boltzmann και μ το μέσο μοριακό βάρος του αερίου.

Τέλος, χρειαζόμαστε μία εξίσωση για την ενέργεια η οποία μπορεί να γραφεί σε μία πολύ γενική μορφή ως:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Gamma - \Lambda \quad (1.27)$$

όπου S είναι η ειδική εντροπία, D/Dt η χρονική παράγωγος κατά Euler και Γ, Λ οι πηγές και καταβόθρες ενέργειας του συστήματος (όροι θέρμανσης και ψύξης του

πλάσματος). Στο πρόβλημα των MAES οι όροι αυτοί της θέρμανσης και της ψύξης, μπορούν να προέρχονται από πολλές διαφορετικές διαδικασίες. Για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε θέρμανση Joule λόγω της πεπερασμένης αγωγιμότητας του πλάσματος, θέρμανση λόγω αμφιπολικής διάχυσης στους δίσκους γύρω από πρωτοαστέρες, απώλειες ενέργειας λόγω ακτινοβολίας από τον δίσκο και μηχανισμούς θέρμανσης και ψύξης από τις τυρβώδεις κινήσεις του πλάσματος μέσα στον δίσκο (για τις οποίες δεν υπάρχει ολοκληρωμένη θεωρία).

Από όλα αυτά φαίνεται ότι η ταυτόχρονη επίλυση της εξίσωσης ενέργειας μαζί με τις υπόλοιπες εξισώσεις της MHD είναι κάτι πολύ δύσκολο να γίνει. Για τον λόγο αυτό, και στην μελέτη των MAES, χρησιμοποιείται αντί της εξίσωσης ενέργειας η πολυτροπική εξίσωση [3]:

$$P = K\rho^\gamma \quad (1.28)$$

όπου γ είναι ο πολυτροπικός δείκτης του αερίου.

Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων σε συνδυασμό με τις υποθέσεις που κάναμε, μπορούνε εν δυνάμει να περιγράψουν την δυναμική ενός MAES, δηλαδή την δυναμική ενός μαγνητισμένου δίσκου προσαύξεσης που διαπερνάται από ένα διπολικό μαγνητικό πεδίο, και των πιδάκων που εκρέουν από αυτόν.

1.2.3 Κρίσιμα σημεία

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος που χρειάζεται για να συμβεί κάτι στους πίδακες είναι πολύ μεγαλύτερος από τον χαρακτηριστικό χρόνο των φαινομένων που μπορούν να συμβούν στον δίσκο (π.χ. αστάθειες). Αυτό ήταν κάτι που μας επέτρεψε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της στάσιμης ροής. Στην πραγματικότητα όμως όλες οι ροές έχουν μία εξάρτηση από τον χρόνο, η οποία σχετίζεται μάλιστα με τον τρόπο που μεταφέρεται η πληροφορία σε αυτές, δηλαδή με τα κύματα που μπορούν και διαδίδονται μέσα τους.

Στην περίπτωση των πιδάκων και του δίσκου προσαύξεσης, η απαίτηση για μία στάσιμη ροή είναι ότι μόλις αυτή επιτευχθεί, καμία πληροφορία (δηλαδή κύμα) να μην μπορεί να διαδοθεί μέσα στον πίδακα από το άπειρο προς τα κάτω και να φτάσει στον δίσκο. Εάν συμβεί κάτι τέτοιο, αυτό θα αλλάξει τις συνθήκες που επικρατούν στον δίσκο, κάτι που θα επηρεάσει και την εκροή (τους πίδακες) καταστρέφοντας την στάσιμη κατάσταση. Για να μην μπορεί λοιπόν καμία πληροφορία να διαδοθεί προς τον δίσκο, θα πρέπει η εκρεόμενη ύλη του πίδακα να κινείται προς το άπειρο γρηγορότερα από κάθε κύμα που μπορεί να διαδοθεί μέσα σε αυτόν, αφήνοντας τον δίσκο αποκομμένο από το περιβάλλον του.

Πρακτικά, για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, θα πρέπει οι λύσεις που παίρνουμε για τα MAES να περνούν από τα λεγόμενα κρίσιμα σημεία. Για να καταλάβουμε καλύτερα το τί σημαίνει αυτό, θα φέρουμε ένα απλό παράδειγμα χρησιμοποιώντας το ισόθερμο μοντέλο ηλιακού ανέμου του Parker. Στο μοντέλο αυτό, η ακτινική ταχύτητα του ηλιακού ανέμου συναρτήσει της απόστασης r δίνεται από την διαφορική

εξίσωση:

$$\frac{du}{dr} = 2C_s^2 \frac{u^2}{r^2} \frac{(r - r_c)}{(u^2 - C_s^2)} \quad (1.29)$$

όπου $r_c = GM/(2C_s^2)$.

Εάν τώρα το $r = r_c$ και $u = u_c = C_s$, τότε έχουμε απροσδιοριστία στην επιτάχυνση και με τον κανόνα του l'Hospital παίρνουμε τελικά πεπερασμένη τιμή για αυτή. Το σημείο (r_c, u_c) ονομάζεται κρίσιμο σημείο και στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το σημείο πέρα από το οποίο η ροή γίνεται υπερηχητική. Για να είναι λοιπόν η λύση του ηλιακού ανέμου του Parker χρονοανεξάρτητη (στάσιμη), θα πρέπει αναγκαστικά να περνάει από αυτό το κρίσιμο υπερηχητικό σημείο. Με τον τρόπο αυτό, εάν συμβεί κάποια διαταραχή στον ηλιακό άνεμο, αυτή δεν θα μπορέσει να διαδοθεί προς τα πίσω και να επηρεάσει την εκροή εκεί. Μόνο η λύση που καταφέρνει να γίνει υπερηχητική είναι στάσιμη.

Κρίσιμα σημεία των MAES

Στο προηγούμενο παράδειγμα του ηλιακού ανέμου, τα μόνα κύματα που υπήρχαν και ήταν ικανά να μεταφέρουν πληροφορία ήταν τα ηχητικά. Αντίθετα, σε ένα μαγνητισμένο πλάσμα (όπως αυτό στα MAES), υπάρχουν διαφόρων ειδών κύματα που μπορούν να μεταφέρουν πληροφορία όπως είναι τα κύματα Alfvén, τα γρήγορα και τα αργά μαγνητοηχητικά κύματα.

Τα κύματα Alfvén είναι εγκάρσια και οφείλονται στην δύναμη επαναφοράς λόγω μαγνητικής τάσης (δύναμη που προσπαθεί να ισιώσει τις λυγισμένες μαγνητικές γραμμές), αποτελούν τον βασικό τρόπο μετάδοσης πληροφορίας σε ένα μαγνητισμένο ασυμπιεστο πλάσμα και διαδίδονται με την ταχύτητα Alfvén:

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (1.30)$$

η οποία εξαρτάται από την τιμή της πυκνότητας του πλάσματος ρ_0 και την τιμή της έντασης του αδιατάραχτου μαγνητικού πεδίου B_0 .

Εάν τώρα έχουμε ένα συμπιεστό και μαγνητισμένο πλάσμα, θα έχουμε την εμφάνιση των γρήγορων και των αργών μαγνητοηχητικών κυμάτων (fast και slow magnetosonic waves). Τα κύματα αυτά οφείλονται στις διαταραχές του μαγνητικού πεδίου, αλλά και στα πυκνώματα-αραιώματα που δημιουργούνται λόγω της συμπιεστότητας του μέσου, και διαδίδονται με ταχύτητα:

$$v_{FM,SM}^2 = \frac{1}{2} \left(v_A^2 + C_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + C_s^2)^2 - 4v_A^2 C_s^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (1.31)$$

όπου το «+» αντιστοιχεί στα γρήγορα (FM) και το «-» στα αργά (SM) μαγνητοηχητικά κύματα. Με θ συμβολίζεται η γωνία μεταξύ του αδιατάραχτου μαγνητικού πεδίου \vec{B}_0 και της διεύθυνσης διάδοσης των διαταραχών. Παρατηρούμε ότι οι ταχύτερες διάδοσης των κυμάτων αυτών προέκυψαν ως συνδυασμός των δύο άλλων

χαρακτηριστικών ταχυτήτων διάδοσης κυμάτων που είδαμε προηγουμένως (ταχύτητα ήχου και Alfvén).

Στην περιοχή λοιπόν της ιδεατής MHD σε ένα MAES (δηλαδή στην περιοχή των πιδάκων), τα τρία αυτά είδη κυμάτων μπορούν και διαδίδονται ελεύθερα μεταφέροντας πληροφορία. Σε αναλογία λοιπόν με τον ηλιακό άνεμο του Parker, για να έχουμε χρονοανεξάρτητη (στάσιμη) εκροή ύλης από ένα MAES, η λύση σε κάθε επιφάνεια σταθερής μαγνητικής ροής θα πρέπει να περνάει και από τα τρία αυτά κρίσιμα σημεία: αργό μαγνητοηχητικό, Alfvén και γρήγορο μαγνητοηχητικό. Με τον τρόπο αυτό, εάν συμβεί κάποια διαταραχή σε κάποιο σημείο του πίδακα, θα είναι αδύνατον για αυτή να διαδοθεί προς τον δίσκο και να επηρεάσει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνεται η εκροή.

Όσον αφορά τώρα το εσωτερικό του δίσκου προσαύξεσης, εκεί τα υψηλά επίπεδα τύρβης οδηγούν σε μεγάλες τιμές ξώδους και έντονη διάχυση του μαγνητικού πεδίου. Η έντονη διάχυση του πεδίου έχει ως αποτέλεσμα την γρήγορη απόσβεση των μαγνητοϋδροδυναμικών κυμάτων Alfvén και των αργών/γρήγορων μαγνητοηχητικών, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν εκεί τέτοιου είδους κρίσιμα σημεία. Στο εσωτερικό του δίσκου όπου βρισκόμαστε στην περιοχή της μη-ιδεατής MHD, έχουμε την εμφάνιση δύο κρίσιμων σημείων. Το ένα από αυτά είναι το ηχητικό, δηλαδή το σημείο όπου η ταχύτητα του πλάσματος γίνεται ίση με:

$$C_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (1.32)$$

ενώ το άλλο βρίσκεται στο midplane του δίσκου, όπου το $u_\theta = 0$ (βλέπε κεφάλαιο 3). Η θέση του ηχητικού κρίσιμου σημείου είναι ακόμα ένα ανοιχτό ζήτημα, καθώς αυτό μπορεί να βρίσκεται είτε μέσα στον δίσκο είτε λίγο έξω από την επιφάνειά αυτού.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα παραθέσουμε κάποια στοιχεία για την φυσική των δίσκων και των πιδάκων από την βιβλιογραφία, ενώ στα κεφάλαια 3 και 4 θα χωρήσουμε στην αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων της μη-ιδεατής MHD στο εσωτερικό του δίσκου. Τέλος, στα κεφάλαια 5 και 6 θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα καθώς και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ολοκλήρωση αυτή.

Κεφάλαιο 2

Μαγνητισμένοι πίδακες και δίσκοι προσαύξεσης

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε κάποια στοιχεία από την φυσική των αστροφυσικών πιδάκων (Jets) και των δίσκων προσαύξεσης (accretion disks), καθώς και τις εξισώσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή τους.

2.1 Μαγνητισμένοι πίδακες

2.1.1 Χρήσιμες εξισώσεις - ολοκληρώματα MHD

Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, οι πίδακες μπορούν να μελετηθούν στο όριο της ιδεατής MHD ($\eta = \eta' = 0$), όπου η ηλεκτρική αγωγιμότητα του πλάσματος θεωρείται άπειρη: $\sigma \rightarrow \infty$. Επίσης, λόγω της υπόθεσης της στάσιμης κατάστασης που έχουμε κάνει, ο νόμος της επαγωγής του Faraday μπορεί να γραφεί ως: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, το οποίο μας δίνει την δυνατότητα να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο ως κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης της αξισυμμετρίας το $E_\phi = 0$, κάτι το οποίο σε συνδυασμό με τον νόμο του Ohm στην ιδεατή περίπτωση 1.14, μας δίνει στην αζιμουθιακή διεύθυνση:

$$-\left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{\phi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}_p \times \vec{B}_p = 0 \quad (2.1)$$

Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι οι πολοειδείς συνιστώσες των διανυσμάτων της ταχύτητας του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου, είναι παράλληλες πάνω στο πολοειδές επίπεδο στην περίπτωση της ιδεατής MHD. Αυτό συνεπάγεται ότι θα υπάρχουν σταθερές αναλογίας Ψ_A και $\Omega(a)$, τέτοιες ώστε να ισχύουν

οι δύο παρακάτω σχέσεις (σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$\vec{u}_p = \frac{\Psi_A}{4\pi\rho} \vec{B}_p \quad (2.2)$$

$$u_\phi = \varpi\Omega(a) + \frac{\Psi_A}{4\pi\rho} B_\phi \quad (2.3)$$

Η σταθερά αναλογίας Ψ_A εκφράζει τον λόγο της ροής μάζας προς την μαγνητική ροή, είναι μία σταθερά της κίνησης και ονομάζεται πρώτο ολοκλήρωμα της MHD. Αντίστοιχα, η σταθερά $\Omega(a)$ εκφράζει τον ρυθμό περιστροφής μιας μαγνητικής επιφάνειας με $a = \text{constant}$, η οποία περιστρέφεται σαν στερεό σώμα και αντιστοιχεί στο δεύτερο ολοκλήρωμα της MHD (νόμος της ισοπεριστροφής).

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις, μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\vec{u} = \frac{\Psi_A}{4\pi\rho} \vec{B} + \varpi\Omega(a)\hat{\phi} \quad (2.4)$$

Από την τελευταία αυτή σχέση παρατηρούμε ότι το διάνυσμα της ολικής ταχύτητας δεν είναι γενικά παράλληλο με το διάνυσμα του ολικού μαγνητικού πεδίου. Αυτό συμβαίνει γιατί οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου περιστρέφονται γρηγορότερα απ' ό,τι το πλάσμα της εκροής. Εάν ο δίσκος περιστρέφεται για παράδειγμα αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (θετική φορά), τότε οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου «λυγίζουν», μένουν πίσω και διαγράφουν σπείρες με $B_\phi < 0$ και $B_z > 0$. Ταυτόχρονα όμως, οι γραμμές ροής του εκρεόμενου πλάσματος ακολουθούν την περιστροφή του δίσκου. Αυτά τα δύο έχουν ως αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, αλλά και οι γραμμές ροής της ταχύτητας του πλάσματος, να αποκτούν μία σπειροειδή μορφή, όπως αυτή φαίνεται και στο σχήμα 1.1 [14].

Παίρνοντας τώρα την $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής 1.23 και ολοκληρώνοντας την (αγνοώντας τον όρο ιξώδους-ιδεατή MHD στα Jets), παίρνουμε την εξίσωση διατήρησης της στροφορμής:

$$L(a) = \varpi u_\phi - \frac{\varpi B_\phi}{\Psi_A} \quad (2.5)$$

όπου $L(a)$ αντιστοιχεί στο τρίτο ολοκλήρωμα της MHD και παριστά την συνολική στροφορμή ανά μάζα του συστήματος πλάσματος-ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης αντιστοιχεί στην συνήθη μηχανική στροφορμή ανά μονάδα μάζας την οποία μεταφέρει το πλάσμα, ενώ ο δεύτερος όρος εκφράζει την αντίστοιχη στροφορμή που μεταφέρει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Υποθέτοντας τώρα μία πολύτροπική εξίσωση για το πλάσμα, όπως είναι η εξίσωση 1.28, και προβάλλοντας την εξίσωση ορμής 1.23 (χωρίς όρους ιξώδους) κατά μήκος της πολοειδούς διεύθυνσης (παράλληλα στο \vec{B}_p), προκύπτει το τέταρτο ολοκλήρωμα της MHD, αυτό της διατήρησης της ενέργειας:

$$E(a) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \Phi_G - \frac{\varpi B_\phi \Omega}{\Psi_A} \quad (2.6)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι το άθροισμα της κινητικής, θερμικής (ενθαλπία), δυναμικής βαρυτικής και ηλεκτρομαγνητικής ροής ενέργειας ανά μονάδα ροής μάζας, είναι σταθερό κατα μήκος μίας γραμμής ροής. Το $E(a)$ είναι γνωστό επίσης και ως το γενικευμένο ολοκλήρωμα Bernoulli.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί και στην γενικότερη δυνατή περίπτωση, όπου δεν έχουμε πλέον την γνωστή πολυτροπική σχέση $P = K\rho^\gamma$ ανάμεσα στην πίεση και την πυκνότητα, αλλά θεωρούμε ότι υπάρχει στο σύστημά μας ένας ρυθμός παροχής/απαγωγής θερμότητας ανα μονάδα όγκου Q [16]:

$$Q = \rho \vec{u} \cdot \left(\vec{\nabla} h - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} \right) \quad (2.7)$$

όπου με h συμβολίζεται η ενθαλπία. Το Q είναι γραμμένο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε στην περίπτωση που $Q = 0$, η ενθαλπία να παίρνει την συνηθισμένη της μορφή:

$$\vec{\nabla} h = \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} \quad \text{ή} \quad h = \int \frac{dP}{\rho} \quad (2.8)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις συνιστώσες της σχέσης 2.7 και της εξίσωσης ορμής 1.23 παράλληλα στο πολοειδές επίπεδο και ολοκληρώνοντας, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για την ενέργεια:

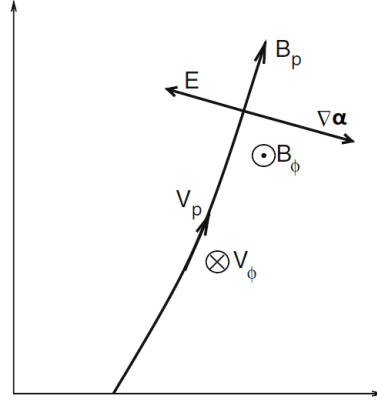
$$E(a) = \frac{1}{2}u^2 + h + \Phi_G - \frac{\varpi B_\phi \Omega}{\Psi_A} - \int_o \frac{Q}{\rho u_p} dl_p \quad (2.9)$$

όπου οι τέσσερις πρώτοι όροι είναι ίδιοι με πριν, και το dl_p είναι το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της γραμμής ροής στο πολοειδές επίπεδο. Συνήθως ο ρυθμός θέρμανσης/ψύξης Q είναι ένας άγνωστος του προβλήματος.

Τα παραπάνω ολοκληρώματα Ψ_A , $\Omega(a)$, $L(a)$ και $E(a)$ που προέκυψαν από τις εξισώσεις της ιδεατής MHD, μπορούν να υπολογιστούν από τις οριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος που θέλει κάποιος να μοντελοποιήσει. Απομένει τώρα να βρούμε ακόμα μία εξίσωση η οποία να μας προσδιορίζει το σχήμα της κάθε πολοειδούς μαγνητικής δυναμικής γραμμής, δηλαδή μία εξίσωση που να μας δίνει την συνάρτηση μαγνητικής ροής $a(\varpi, z)$.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει προβάλλοντας την εξίσωση ορμής 1.23 (πάλι χωρίς όρους ιξώδους) κάθετα σε μία από τις επιφάνειες σταθερής μαγνητικής ροής που ορίζει η $a(\varpi, z) = \text{constant}$, ή αλλιώς, προβάλλοντάς την παράλληλα στην διεύθυνση του ανύσματος $\vec{\nabla} a$ (σχήμα 2.1 [14]). Κάνοντας το αυτό, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, προκύπτει η σχέση [16]:

$$\begin{aligned} \Delta a - \Psi_A \Delta \Psi + \frac{1}{2(1 - \Psi_A^2/4\pi\rho)} \left[\frac{1}{\varpi^2} \frac{d(L\Psi_A)^2}{da} + 4\pi\rho\varpi^2 \frac{d\Omega^2}{da} - 8\pi\rho \frac{d(\Omega L)}{da} \right] + \\ + \frac{1}{2(1 - \Psi_A^2/4\pi\rho)^2} \left[\frac{1}{\varpi^2} \frac{(L\Psi_A)^2}{4\pi\rho} + \varpi^2\Omega^2 - 2\Omega L \right] + 4\pi\rho \frac{dE}{da} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.1: Αναπαράσταση μιας δυναμικής γραμμής του μαγνητικού πεδίου $a = \text{constant}$, η οποία στην περίπτωση της ιδεατής MHD ταυτίζεται με μια γραμμή ροής πάνω στο πολοειδές επίπεδο [14]. Στο σχήμα φαίνονται επίσης οι συνιστώσες των ανυσμάτων του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας. Το διάνυσμα ∇a είναι κάθετο στην επιφάνεια σταθερής μαγνητικής ροής που ορίζει η $a(\varpi, z) = \text{constant}$.

όπου:

$$\Delta a \equiv \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial a}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial a}{\partial \varpi} \right) \right] = -\frac{\hat{\phi}}{\varpi} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.11)$$

και για την συνάρτηση ροής Ψ του πεδίου ταχυτήτων ισχύει:

$$\Delta \Psi \equiv \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi r \varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\frac{1}{4\pi r \varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varpi} \right) \right] = -\frac{\hat{\phi}}{\varpi} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (2.12)$$

Η εξίσωση 2.10 είναι μία πολύπλοκη, εξαιρετικά μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, με μόνο άγνωστο την συνάρτηση μαγνητικής ροής $a(\varpi, z)$. Ονομάζεται εξίσωση Transfield, ή αλλιώς εξίσωση Grad-Shafranov, και εάν επιλυθεί μπορεί θεωρητικά να μας δώσει το σχήμα των δυναμικών γραμμών, δηλαδή το a . Το να βρεθούν όμως λύσεις για αυτή, με αναλυτικούς ή υπολογιστικούς τρόπους, είναι ένα πολύ δύσκολο ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο αποτελεί ακόμα αντικείμενο ερευνητικής προσπάθειας.

Συνοψίζοντας, από όλα τα παραπάνω μπορούμε να καταλάβουμε ότι ένας μαγνητισμένος αστροφυσικός πίδακας (Jet) μπορεί να περιγραφεί ως ένα σύνολο επιφανειών σταθερής μαγνητικής ροής $a = \text{constant}$, οι οποίες βρίσκονται η μία μέσα στην άλλη και εκτείνονται σε διαφορετικές ακτίνες ϖ_0 . Κάθε τέτοια μαγνητική επιφάνεια μπορεί να χαρακτηριστεί χρησιμοποιώντας τα τέσσερα ολοκληρώματα της MHD που περιγράψαμε παραπάνω: Ψ_A (ροή μάζας προς μαγνητική ροή), $\Omega(a)$ (ρυθμός περιστροφής μαγνητικής επιφάνειας), $L(a)$ (ολική στροφορμή ανα μάζα) και $E(a)$ (ολική ροή ενέργειας ανα μονάδα ροής μάζας).

Το πρόβλημα λοιπόν ενός μαγνητισμένου πίδακα, μπορεί να περιγραφεί πλήρως εάν προσδιοριστούν οι οκτώ άγνωστοι που εμφανίζονται σε αυτό (πάνω στην κάθε μαγνητική επιφάνεια): η πυκνότητα του πλάσματος ρ , η ταχύτητα του \vec{u} , το μαγνητικό πεδίο \vec{B} , η πίεση P και η θερμοκρασία του T . Για να προσδιοριστούν όλοι αυτοί, χρησιμοποιείται το σετ των οκτώ εξισώσεων της ιδεατής MHD, το οποίο όπως είδαμε μπορεί να απλοποιηθεί και να μας δώσει τα τέσσερα ολοκληρώματα Ψ_A , $\Omega(a)$, $L(a)$ και $E(a)$, τα οποία υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος. Έχοντας τιμές για αυτά και υπολογίζοντας από την εξίσωση Transfield 2.10 την συνάρτηση μαγνητικής ροής $a(\varpi, z)$, μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις άγνωστες φυσικές ποσότητες στο πρόβλημα ενός πίδακα. Τέλος, η λύση που θα προκύψει από την διαδικασία αυτή, θα πρέπει να περνάει (όπως περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) και από τα τρία κρίσιμα σημεία της ιδεατής MHD: το αργό μαγνητοχητικό, το Alfvén και το γρήγορο μαγνητοχητικό.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τρεις χρήσιμες παραμέτρους για τους πίδακες, τις οποίες θα συνδέσουμε αργότερα με την φυσική των δίσκων, τις οποίες εισήγαγαν για πρώτη φορά οι Blandford και Payne στην εργασία τους το 1982 [2]. Η πρώτη από αυτές προκύπτει χρησιμοποιώντας το τρίτο ολοκλήρωμα της MHD (διατήρηση στροφορμής), δηλαδή την εξίσωση 2.5. Εξισώνοντας την τιμή του $L(a)$ στην βάση της μαγνητικής γραμμής (ϖ_o) με την τιμή του στην απόσταση που βρίσκεται η επιφάνεια Alfvén (ϖ_A), παίρνουμε ότι:

$$\Omega(a)\varpi_A^2 = \Omega_o\varpi_o^2 - \frac{\varpi_o B_\phi}{\Psi_A} \Leftrightarrow \frac{\Omega(a)\varpi_A^2}{\Omega_o\varpi_o^2} = 1 - \frac{B_\phi}{\Omega_o\varpi_o\Psi_A} \quad (2.13)$$

όπου Ω_o είναι η Κεπλεριανή ταχύτητα περιστροφής. Θεωρώντας τώρα ότι η επιφάνεια σταθερής μαγνητικής ροής περιστρέφεται και αυτή σχεδόν Κεπλεριανά, δηλαδή ότι $\Omega(a) \simeq \Omega_o$ και ότι το $B_\phi \simeq B_\phi^+$ (με «+» συμβολίζεται η επιφάνεια του δίσκου), ορίζουμε την παράμετρο λ ως εξής:

$$\lambda = \frac{\Omega(a)\varpi_A^2}{\Omega_o\varpi_o^2} \simeq \frac{\varpi_A^2}{\varpi_o^2} \simeq 1 - \frac{B_\phi^+}{\Omega_o\varpi_o\Psi_A} \quad (2.14)$$

Η παράμετρος αυτή ονομάζεται παράμετρος μαγνητισμένου βραχίονα (magnetic lever arm) και μας δείχνει το κατά πόσο πολύ αποκλίνει η ταχύτητα περιστροφής του δίσκου από την Κεπλεριανή. Η απόκλιση αυτή οφείλεται στην ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου το οποίο «φρενάρει» την περιστροφή του δίσκου, κάνοντας τον να περιστρέφεται υποκεπλεριανά.

Η δεύτερη παράμετρος που θα εισάγουμε προκύπτει χρησιμοποιώντας το πρώτο ολοκλήρωμα της MHD, την ροή μάζας προς μαγνητική ροή Ψ_A . Από την σχέση 2.2 θα έχουμε ότι:

$$\Psi_A = \frac{4\pi r u_p}{B_p} = \frac{4\pi r_o u_o}{B_o} \quad (2.15)$$

όπου πάλι με τον δείκτη «ο» εννοούμε ότι το μέγεθος είναι υπολογισμένο στην βάση της δυναμικής γραμμής μέσα στον δίσκο (στο midplane). Ορίζουμε λοιπόν την

30 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΠΙΔΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΣΚΟΙ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ

αδιάστατη ροή μάζας κ ως εξής:

$$\kappa = \Psi_A \frac{\Omega_o \varpi_o}{B_o} \quad (2.16)$$

Επιπλέον, επειδή το $\Psi_A = \text{constant}$ κατά μήκος κάθε γραμμής ροής, θα ισχύει ότι:

$$u_p = \frac{\Psi_A}{4\pi\rho} B_p = \frac{\Psi_A}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{B_p}{\sqrt{4\pi\rho}} = \frac{\Psi_A}{\sqrt{4\pi\rho}} u_{pA} \Rightarrow \frac{u_p}{u_{pA}} = \frac{\Psi_A^2}{4\pi\rho} \quad (2.17)$$

οπότε στην επιφάνεια Alfvén όπου τα $u_p = u_{pA}$ και $\rho = \rho_A$, το Ψ_A θα είναι:

$$\Psi_A = \sqrt{4\pi\rho_A} \quad (2.18)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την διατήρηση μάζας στην κατακόρυφη διεύθυνση μεταξύ της επιφάνειας του δίσκου και του σημείου Alfvén, μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα ρ_A :

$$\rho_A u_A S_1 \simeq \rho^+ u_z^+ S_2 \Leftrightarrow \rho_A \simeq \frac{\rho^+ u_z^+}{u_A} \simeq \frac{\sqrt{4\pi\rho_A} \rho^+ u_z^+}{B_o} \Leftrightarrow \rho_A = 4\pi \left(\frac{\rho^+ u_z^+}{B_o} \right)^2 \quad (2.19)$$

όπου κάναμε την υπόθεση ότι η επιφάνεια S_1 στο σημείο Alfvén είναι περίπου ίση με την επιφάνεια S_2 του δίσκου από όπου εκρέει το υλικό. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 2.16, 2.18 και 2.19, παίρνουμε τελικά ότι:

$$\kappa \simeq 4\pi \rho^+ u_z^+ \frac{\Omega_o \varpi_o}{B_o^2} \quad (2.20)$$

Η παράμετρος αυτή εκφράζει την αδιάστατη ροή μάζας που εκρέει από τον δίσκο και πηγαίνει στον πίδακα.

Τέλος, η τρίτη παράμετρος που θα εισάγουμε είναι ο λόγος της περιστροφικής ταχύτητας του πλάσματος προς την πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητάς του, υπολογισμένα στο σημείο Alfvén:

$$\omega_A = \frac{\Omega(a) \varpi_A}{u_{pA}} \quad (2.21)$$

Η παράμετρος αυτή μπορεί να γραφεί συναρτήσει των δύο προηγούμενων με τον ακόλουθο τρόπο: από την σχέση 2.14 ισχύει ότι το $\varpi_A \simeq \lambda^{1/2} \varpi_o$, ενώ ισχύει γενικά και η σχέση $u_{pA} = \Psi_A B_{pA} / (4\pi\rho_A)$ (πρώτο ολοκλήρωμα MHD). Από αυτές τις δύο και κάνοντας πάλι την προσέγγιση ότι $\Omega(a) \simeq \Omega_o$, η 2.21 γράφεται:

$$\omega_A \simeq \lambda^{1/2} \frac{4\pi\rho_A \Omega_o \varpi_o}{\Psi_A B_{pA}} \quad (2.22)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και τις 2.19 και 2.20 παίρνουμε τελικά:

$$\omega_A \simeq \kappa \lambda^{1/2} \frac{B_o}{B_{pA}} \quad (2.23)$$

Η παράμετρος αυτή ω_A χαρακτηρίζει τον μαγνητικό περιστροφέα (αργός-γρήγορος). Οι παράμετροι αυτοί θα συνδεθούν στην συνέχεια με παραμέτρους που αφορούν τον δίσκο, όπως είναι για παράδειγμα ο ejection index ξ .

2.1.2 Εκροή, επιτάχυνση και εστίαση ενός πίδακα

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθεί η εκροή υλικού από έναν αστροφυσικό δίσκο προσύξησης, καθώς και για τον τρόπο με τον οποίο αυτή εστιάζεται στην συνέχεια δημιουργώντας τους πίδακες. Θα ξεκινήσουμε συζητώντας για τις πηγές ενέργειας της εκροής.

Στο εσωτερικό ενός δίσκου προσάυξησης η βαρύτητα κυριαρχεί έναντι του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (έχουμε πρόσπτωση υλικού), οπότε είναι λογικό να υποθέσει κανείς ότι εκεί η πυκνότητα ενέργειας του βαρυτικού πεδίου θα είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η περιστροφή του πλάσματος να παρασέρνει της μαγνητικές δυναμικές γραμμές, οι οποίες λυγίζουν και κουβαριάζονται, και να έχουμε έτσι μετατροπή της περιστροφικής μηχανικής ενέργειας του δίσκου σε ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.

Η μετατροπή αυτή δημιουργεί με την σειρά της μία ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας πάνω στο πολοειδές επίπεδο, η οποία τροφοδοτεί την εκροή, και εκφράζεται μέσω του ανύσματος Poynting \vec{S} το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.24)$$

Η παραπάνω ροή Poynting συνδέεται με τον τέταρτο όρο του ολοκληρώματος Bernoulli (ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας προς ροή μάζας), όπως αυτός φαίνεται στην σχέση 2.6. Πράγματι, εάν πολλαπλασιάσουμε τον όρο αυτό με την ροή μάζας στο πολοειδές επίπεδο ($\rho \vec{u}_p$) και χρησιμοποιήσουμε και το πρώτο ολοκλήρωμα της MHD (Ψ_A), μπορούμε να γράψουμε το άνυσμα Poynting ως:

$$\vec{S}_p = \frac{\varpi B_\phi \Omega}{4\pi} \vec{B}_p \quad (2.25)$$

Η παραπάνω ροή ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (ροή Poynting) μπορεί και τροφοδοτεί την εκροή, δίνοντας την απαραίτητη ενέργεια για την δημιουργία των πιδάκων. Εκτός όμως από αυτή μπορεί να έχουμε και άλλων ειδών πηγές ενέργειας, όπως είναι για παράδειγμα η ενθαλπία που δημιουργείται στο εσωτερικό του δίσκου (h) ή κάποια εξωτερική πηγή θερμότητας (Q). Στα παρακάτω θα μας απασχολήσουν κυρίως οι «ψυχροί» πίδακες, όπου η κύρια πηγή ενέργειας είναι αυτή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, οπότε οι δύο τελευταίες πηγές ενέργειας μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

Στην συνέχεια, θα εξάγουμε ένα γεωμετρικό κριτήριο το οποίο μπορεί και μας δείχνει πότε είναι δυνατή η εκροή ανέμου από τον δίσκο και πότε όχι. Ξεκινάμε γράφοντας την εξίσωση Bernoulli στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς:

$$E = \frac{u_p^2}{2} + \Phi_{eff} + h \quad (2.26)$$

όπου Φ_{eff} είναι το ενεργό δυναμικό (βαρυτικό και φυγοκεντρικό), το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$\Phi_{eff} = \Phi_G - \frac{1-g^2}{2} \Omega^2 \varpi^2 \quad (2.27)$$

32ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΠΙΔΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΣΚΟΙ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ

Η συνάρτηση g είναι πολύ μικρότερη της μονάδας κοντά στην επιφάνεια του δίσκου και αυξάνεται (τείνοντας στην μονάδα) στην κατακόρυφη διεύθυνση κατά μήκος του πίδακα [9].

Θα μελετήσουμε τώρα την κίνηση που κάνει ένα κομμάτι πλάσματος πάνω στο πολοειδές επίπεδο, ξεκινώντας από το σημείο $(\varpi_0, 0)$ (επιφάνεια του δίσκου, βάση της δυναμικής γραμμής) και φτάνοντας μέχρι το σημείο $(\varpi_0 + \delta\varpi_0, z)$, με $\delta\varpi_0 \ll 1$. Στην βάση της δυναμικής γραμμής το g είναι αμελητέο, το πλάσμα ξεκινάει με σχεδόν μηδενική πολοειδή ταχύτητα και το ολοκλήρωμα Bernoulli γράφεται:

$$E = \frac{GM}{\varpi_0} - \frac{1}{2}\Omega_0^2\varpi_0^2 + h_0 = -\frac{3}{2}\Omega_0^2\varpi_0^2 + h_0 \quad (2.28)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την έκφραση της Κεπλεριανής ταχύτητας περιστροφής. Τώρα, όσον αφορά το σημείο $(\varpi_0 + \delta\varpi_0, z)$, το ενεργό δυναμικό μπορεί να γραφεί εκεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\Phi_{eff}|_{(\varpi_0+\delta\varpi_0,z)} = -\frac{GM}{\varpi_0} \left[\frac{\varpi_0}{\sqrt{(\varpi_0 + \delta\varpi_0)^2 + z^2}} + \frac{1-g^2}{2} \left(\frac{\varpi_0 + \delta\varpi_0}{\varpi_0} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

Θεωρώντας τώρα πάλι ότι το g είναι αμελητέο (βρισκόμαστε ακόμα κοντά στην επιφάνεια του δίσκου) και χρησιμοποιώντας την έκφραση της Κεπλεριανής ταχύτητας και το ακόλουθο ανάπτυγμα (αφού το $\delta\varpi_0 \ll 1$):

$$(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots \quad (2.30)$$

μετά από πράξεις καταλήγουμε στην σχέση:

$$\Phi_{eff}|_{(\varpi_0+\delta\varpi_0,z)} \simeq -\Omega_0^2\varpi_0^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{3\delta\varpi_0^2 - z^2}{2\varpi_0^2} \right] \quad (2.31)$$

Οπότε η ενέργεια (ολοκλήρωμα Bernoulli) στο σημείο $(\varpi_0 + \delta\varpi_0, z)$ θα είναι ίση με:

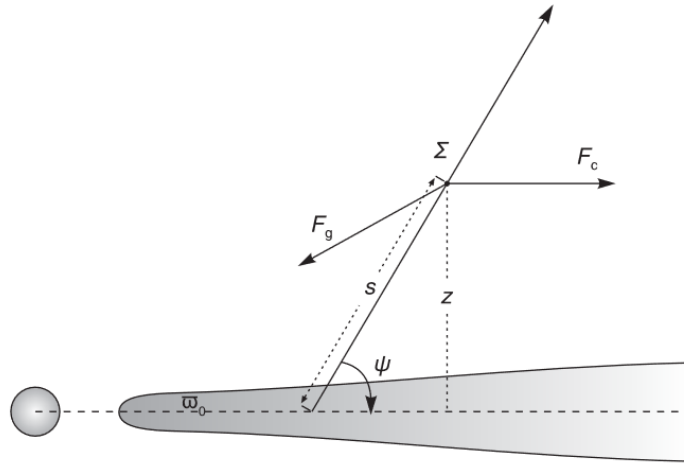
$$E \simeq \frac{u_p^2}{2} - \Omega_0^2\varpi_0^2 \frac{3}{2} + \frac{3\delta\varpi_0^2 - z^2}{2\varpi_0^2} + h \quad (2.32)$$

Εξισώνοντας τώρα τις σχέσεις 2.28 και 2.32 (διατήρηση της ενέργειας πάνω στην γραμμή ροής) και λύνοντας ως προς την πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητας παίρνουμε τελικά:

$$\frac{u_p^2}{2} \simeq h_0 - h + \frac{1}{2}\Omega_0^2(3\delta\varpi_0^2 - z^2) \quad (2.33)$$

Για να μπορούμε να έχουμε τώρα εκροή υλικού και δημιουργία ανέμου από τον δίσκο, θα πρέπει η παραπάνω έκφραση να είναι αναγκαστικά μεγαλύτερη του μηδενός. Από την απαίτηση αυτή προκύπτει τελικά ότι:

$$\frac{z}{\delta\varpi_0} = \tan \psi < \sqrt{3} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h_0 - h}{\Omega_0^2 \delta\varpi_0^2} \right)^{1/2} \quad (2.34)$$



Σχήμα 2.2: Γεωμετρία του προβλήματος της κίνησης ενός κομματιού πλάσματος πάνω στο πολοειδές επίπεδο, το οποίο επιταχύνεται από το σημείο $(\omega_0, 0)$ μέχρι το σημείο Σ $(\omega_0 + \delta\omega_0, z)$, ακολουθώντας την μαγνητική δυναμική γραμμή [16]. Με F_g και F_c συμβολίζονται η βαρυτική και η κεντρόφυγος δύναμη που ασκούνται στο πλάσμα αντίστοιχα. Με ψ συμβολίζεται η ελάχιστη απαιτούμενη γωνία της μαγνητικής γραμμής με τον οριζόντιο άξονα, έτσι ώστε να έχουμε εκροή ύλης.

όπου ψ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της μαγνητικής δυναμικής γραμμής και του οριζόντιου άξονα πάνω στο πολοειδές επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2 [16]. Για εκροές όπου η ενθαλπία h μπορεί να αγνοηθεί («ψυχρές» εκροές), η σχέση 2.34 μας δίνει την ακόλουθη συνθήκη:

$$\tan \psi < \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \psi < 60^\circ \quad (2.35)$$

Για να έχουμε λοιπόν επιτάχυνση και εκροή ύλης κατά μήκος μιας πολοειδούς γραμμής ροής, θα πρέπει η γωνία ψ (όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2) να είναι μικρότερη των 60° . Αυτό σημαίνει ότι οι πολοειδείς δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου θα πρέπει να είναι αρκετά κεκλιμένες ως προς τον κατακόρυφο άξονα z , έτσι ώστε η φυγόκεντρος δύναμη \vec{F}_c να εξουδετερώνει την βαρύτητα \vec{F}_g και το πλάσμα να διαφεύγει από τον δίσκο κινούμενο προς μεγαλύτερα ύψη z κατά μήκος των δυναμικών γραμμών. Εάν αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται, τότε δεν μπορούμε να έχουμε την δημιουργία ανέμου στην περίπτωση των «ψυχρών» εκροών.

Αντίθετα, στην περίπτωση των «θερμών» εκροών όπου η ενθαλπία h είναι αρκετά σημαντική, μπορούμε να δούμε από την γενικότερη σχέση 2.34 ότι η εκροή ύλης μπορεί να συμβεί, ακόμα και εάν οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν είναι αρκετά κεκλιμένες ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Μπορούμε τώρα να εξάγουμε και άλλη μία συνθήκη για το πότε μπορούμε να έχουμε εκροή ύλης από τον δίσκο, η οποία περιλαμβάνει την παράμετρο του μαγνητισμένου βραχίονα λ που εισάγαμε προηγουμένως.

Η ολική ενέργεια μιας «ψυχρής» εκροής δίνεται γενικά από το ολοκλήρωμα Bernoulli:

$$E(a) = \frac{1}{2}u^2 + \Phi_G - \frac{\varpi B_\phi \Omega}{\Psi_A} \quad (2.36)$$

όπου αγνοήσαμε τον όρο της ενθαλπίας. Θα υπολογίσουμε τώρα την τιμή της ενέργειας στην βάση της εκροής, δηλαδή στο σημείο $(\varpi_0, 0)$ του πολοειδούς επιπέδου. Θεωρώντας ότι εκεί το $u \simeq u_\phi = \Omega_0 \varpi_0$ (το πλάσμα περιστρέφεται Κεπλεριανά και δεν έχει αποκτήσει ακόμα πολοειδή συνιστώσα ταχύτητας) και ότι $\Phi_G = -GM/\varpi_0 = -\Omega_0^2 \varpi_0^2$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$E(a) = -\frac{1}{2}\Omega_0^2 \varpi_0^2 - \frac{\varpi_0 B_\phi \Omega_0}{\Psi_A} \quad (2.37)$$

Λύνοντας τώρα την σχέση 2.14 που ορίζει την παράμετρο λ ως προς B_ϕ και αντικαθιστώντας την στην παραπάνω, παίρνουμε τελικά:

$$E(a) = \frac{1}{2}\Omega_0^2 \varpi_0^2 (2\lambda - 3) \quad (2.38)$$

Παρατηρούμε από την σχέση 2.38 ότι η ενέργεια της εκροής εξαρτάται άμεσα από την παράμετρο του μαγνητισμένου βραχίονα λ , δηλαδή από το πόσο αποκλίνει η ταχύτητα του δίσκου από την Κεπλεριανή λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου. Βλέπουμε επίσης ότι για να δημιουργηθεί η εκροή, θα πρέπει η τιμή της ενέργειας να είναι θετική, κάτι το οποίο οδηγεί στην συνθήκη για εκροή υλικού:

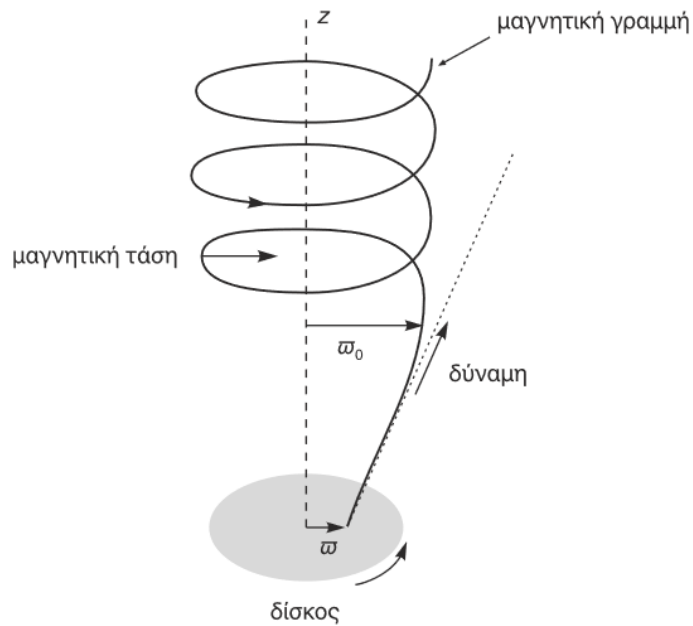
$$\lambda < 3/2 \quad (2.39)$$

Τέλος, εάν θεωρήσουμε ότι όλη η διαθέσιμη ενέργεια στην βάση της εκροής (κυρίως μαγνητική) μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε κινητική ενέργεια πολύ ψηλά στον πίδακα (όπου το μαγνητικό πεδίο είναι πολύ πιο ασθενές σε σχέση με την βάση), τότε από διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι η ασυμπτωτική ταχύτητα του πίδακα στο άπειρο θα είναι ίση με: $u_\infty = \sqrt{2E(a)}$.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι η εκροή υλικού (ανέμου) από την επιφάνεια ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξησης πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο: στο εσωτερικό του δίσκου η περιστροφική κινητική ενέργεια του υλικού είναι αρκετά μεγαλύτερη της μαγνητικής ενέργειας, ενώ αντίθετα στο πολοειδές επίπεδο το μαγνητικό πεδίο είναι αρκούντως ισχυρό έτσι ώστε να οδηγεί τα σωματίδια, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}\rho u_\phi^2 \gg \frac{B_p^2}{8\pi} \gg \frac{1}{2}\rho u_p^2 \quad (2.40)$$

Εάν τώρα ικανοποιείται το γεωμετρικό κριτήριο που αποδείξαμε παραπάνω, δηλαδή εάν η γωνία που σχηματίζουν οι γραμμές με τον οριζόντιο άξονα στο πολοειδές επίπεδο είναι $\psi < 60^\circ$, τότε η φυγόκεντρος δύναμη υπερνικά την βαρύτητα και το πλάσμα μπορεί να κινείται και να επιταχύνεται ακτινικά, κατά μήκος των πολοειδών μαγνητικών δυναμικών γραμμών μέχρι την απόσταση Alfvén.



Σχήμα 2.3: Τοπολογία μίας μαγνητικής δυναμικής γραμμής στο πρόβλημα της εκροής υλικού από έναν δίσκο προσαύξησης [16]. Διακρίνουμε δύο περιοχές: η πρώτη βρίσκεται κοντά στον δίσκο, όπου το πολοειδές μαγνητικό πεδίο είναι ισχυρό, και το πλάσμα το ακολουθεί και επιταχύνεται κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του. Η δεύτερη βρίσκεται μακριά από την επιφάνεια του δίσκου (πέρα από την απόσταση Alfvén), όπου η ένταση του πεδίου έχει μειωθεί, και πλέον αυτό ακολουθεί την περιστροφική κίνηση του πλάσματος δημιουργώντας μια ισχυρή αξιμουθιακή συνιστώσα. Η συνιστώσα αυτή εστιάζει το υλικό μέσω της δύναμης της μαγνητικής τάσης, δημιουργώντας τον κυλινδρικό πίδακα.

Σε αποστάσεις μεγαλύτερες από την Alfvén, η πολοειδής συνιστώσα της ταχύτητας του πλάσματος αυξάνεται σημαντικά, ενώ η ένταση του μαγνητικού πεδίου μειώνεται (λόγω διατήρησης μαγνητικής ροής), με αποτέλεσμα το πεδίο να μην μπορεί πλέον να οδηγεί το πλάσμα, αλλά να συμβαίνει το αντίθετο. Το μαγνητικό πεδίο μετά το σημείο Alfvén ακολουθεί παθητικά την περιστροφική κίνηση του πλάσματος, με αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές του να περιελίσσονται σπειροειδώς γύρω από τον άξονα z , δημιουργώντας έτσι μία ισχυρή αζιμουθιακή συνιστώσα B_ϕ .

Λόγω της εμφάνισης αυτής της αζιμουθιακής συνιστώσας του πεδίου, ασκείται στο πλάσμα δύναμη μαγνητικής τάσης προς το κέντρο καμπυλότητας των μαγνητικών γραμμών (προς τον άξονα z), η οποία οδηγεί στην εστίαση του υλικού και τελικά στην δημιουργία ενός κυλινδρικού πίδακα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2 [16].

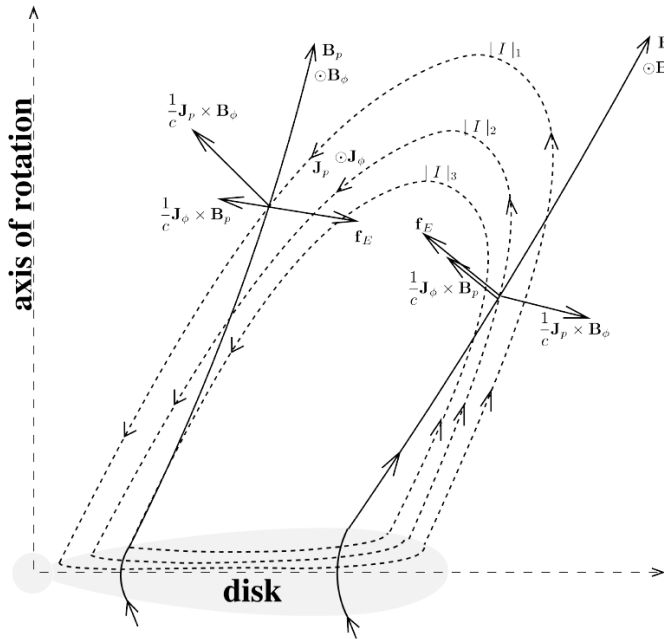
Το πρόβλημα της εκροής που αναλύσαμε παραπάνω θα μπορούσε να παρουσιαστεί χρησιμοποιώντας και ένα απλό μηχανικό ανάλογο: αντί για τις δυναμικές γραμμές του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου, μπορούμε να φανταστούμε στην θέση τους άκαμπτα σύρματα τα οποία περιστρέφονται γύρω από τον άξονα των z και στα οποία είναι περασμένα δαχτυλίδια που αντιστοιχούν σε φορτισμένα σωματίδια. Λόγω της περιστροφικής κίνησης των συρμάτων, η εμφάνιση φυγόκεντρο δύναμης (που υπερικχύει της βαρύτητας) κάνει τα δαχτυλίδια να επιταχύνονται κατά μήκος των συρμάτων και να κινούνται προς μεγαλύτερα ύψη z . Μετά όμως από ένα ύψος (που αντιστοιχεί στην απόσταση Alfvén), τα σύρματα αντικαθίστανται από ευλύγιστες κλωστές (έχει μειωθεί σημαντικά η ένταση του πεδίου), και τώρα σε αντίθεση με πριν οι κλωστές είναι αυτές που ακολουθούν την περιστροφική κίνηση των δαχτυλιδιών, με αποτέλεσμα να κουβαριάζονται (δημιουργία αζιμουθιακής συνιστώσας του πεδίου).

Σε όλα τα προηγούμενα θεωρήσαμε ότι ο μηχανισμός της επιτάχυνσης του πλάσματος κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών οφείλεται στην φυγόκεντρο δύναμη. Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται «μαγνητοπεριστροφικός» και είναι πολύ σημαντικός στην περίπτωση των μη-σχετικιστικών εκροών. Καθώς όμως το πλάσμα κινείται πάνω στις επιφάνειες σταθερής μαγνητικής ροής, στην γενικότερη περίπτωση, μπορεί να υπάρχουν και άλλες δυνάμεις οι οποίες να ασκούνται σε αυτό και να το επιταχύνουν, όπως είναι για παράδειγμα ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις, ή δυνάμεις λόγω πίεσης και θερμοκρασίας.

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα υπολογίζοντας τις μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται στην εκροή πάνω σε μία επιφάνεια μαγνητικής ροής. Η μαγνητική δύναμη μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\vec{f}_B = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} = \frac{1}{c} \vec{J}_p \times \vec{B}_p + \frac{1}{c} \vec{J}_p \times \vec{B}_\phi + \frac{1}{c} \vec{J}_\phi \times \vec{B}_p \quad (2.41)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους δεν έχει συνιστώσα πάνω στο πολοειδές επίπεδο (είναι εξ ολοκλήρου στην $\hat{\varphi}$ διεύθυνση), ενώ οι άλλοι δύο όροι έχουν συνιστώσες μόνο πάνω σε αυτό. Χρησιμοποιώντας τώρα τον νόμο του Ampère, μπορούμε



Σχήμα 2.4: Σχηματική απεικόνιση δύο μαγνητικών δυναμικών γραμμών ($a(\varpi, z) = \text{const.}$) πάνω στο πολοειδές επίπεδο (μαύρες γραμμές), καθώς και των δυνάμεων που ασκούνται στην εκροή από το μαγνητικό πεδίο [15]. Με διακεκομμένες γραμμές συμβολίζονται οι γραμμές του πολοειδούς ρεύματος \vec{J}_p (με εξίσωση $\varpi B_\phi = 2I/c = \text{const.}$), όπου η κάθε μία από αυτές περικλείει σταθερό ρεύμα $|I|$, με $|I_1| < |I_2| < |I_3|$.

να εκφράσουμε τα ρεύματα \vec{J}_p και \vec{J}_ϕ ως εξής:

$$\vec{J}_p = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B}_\phi \quad (2.42)$$

$$\vec{J}_\phi = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B}_p \quad (2.43)$$

οπότε οι εκφράσεις για τις μαγνητικές δυνάμεις στην αξιμουθιακή συνιστώσα και στο πολοειδές επίπεδο γράφονται:

$$\vec{f}_{B,\phi} = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_\phi) \times \vec{B}_\phi \quad (2.44)$$

$$\vec{f}_{B,p} = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_\phi) \times \vec{B}_\phi + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_p) \times \vec{B}_p \quad (2.45)$$

Από την σχέση 2.45, παρατηρούμε ότι για την επιτάχυνση του πλάσματος πάνω στο πολοειδές επίπεδο μέχρι την ακτίνα Alfvén σημαντικό ρόλο παίζει ο δεύτερος όρος (αφού εκεί $B_\phi \ll B_p$), ενώ για αποστάσεις μεγαλύτερες από την ακτίνα Alfvén κυριαρχεί ο πρώτος όρος (εκεί το $B_\phi \gg B_p$).

Στο σχήμα 2.4 [15] βλέπουμε την απεικόνιση δύο μαγνητικών δυναμικών γραμμών ($a(\varpi, z) = \text{const.}$) πάνω στο πολοειδές επίπεδο (μαύρες γραμμές), καθώς και τις

δυνάμεις που ασκούνται στην εκροή από το μαγνητικό πεδίο. Στο ίδιο σχήμα βλέπουμε επίσης και τις γραμμές του πολοειδούς ρεύματος \vec{J}_p , οι οποίες έχουν εξίσωση $\varpi B_\phi = \text{constant}$. Αυτό προκύπτει γράφοντας την εξίσωση 2.42 ως εξής:

$$\vec{J}_p = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B}_\phi = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\varpi B_\phi \frac{\hat{\phi}}{\varpi} \right) \quad (2.46)$$

και συγκρίνοντας την με την αντίστοιχη σχέση που είχαμε εξάγει για την πολοειδή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}_p = \vec{\nabla} \times (a\hat{\phi}/\varpi)$. Κάνοντας αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι γραμμές του πολοειδούς ρεύματος \vec{J}_p έχουν εξίσωση $\varpi B_\phi = \text{constant}$. Επιπλέον, κάθε τέτοια γραμμή περικλείει σταθερό συνολικό ρεύμα:

$$I = \iint_S \vec{J}_p \cdot d\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \iint_S \vec{\nabla} \times \left(\varpi B_\phi \frac{\hat{\phi}}{\varpi} \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.47)$$

το οποίο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes, ισούται με:

$$I = c \frac{\varpi B_\phi}{2} = \text{constant} \quad (2.48)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα παραπάνω, θα υπολογίσουμε την $\hat{\phi}$ συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης πάνω σε μία επιφάνεια σταθερής μαγνητικής ροής $a(\varpi, z) = \text{constant}$. Υπολογίζοντας τον στροβιλισμό και το εξωτερικό γινόμενο στην σχέση 2.44 και αντικαθιστώντας το B_ϕ από την 2.48 παίρνουμε ότι:

$$\vec{f}_{B,\phi} = \frac{B_\varpi}{2\pi c \varpi} \frac{\partial I}{\partial \varpi} + \frac{B_z}{2\pi c \varpi} \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{B_p}{2\pi c \varpi} \left(\frac{\vec{B}_p}{B_p} \right) \cdot \vec{\nabla} I \quad (2.49)$$

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε την μαγνητική δύναμη στο πολοειδές επίπεδο και στην συνέχεια θα την αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες: παράλληλα και κάθετα στην μαγνητική επιφάνεια. Από την σχέση 2.45 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{B,p} = & \left[-\frac{B_\phi}{4\pi \varpi} \frac{\partial(\varpi B_\phi)}{\partial \varpi} + \frac{B_z}{4\pi} \left(\frac{\partial B_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varpi} \right) \right] \hat{\varpi} \\ & + \left[-\frac{B_\phi}{4\pi} \frac{\partial B_\phi}{\partial z} - \frac{B_\varpi}{4\pi} \left(\frac{\partial B_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varpi} \right) \right] \hat{z} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Για να πάρουμε την προβολή αυτής της δύναμης παράλληλα στην εκροή, θα πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με το μοναδιαίο άνυσμα στην διεύθυνση του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου: \vec{B}_p/B_p . Κάνοντας αυτό και αντικαθιστώντας το B_ϕ από την σχέση 2.48 έχουμε τελικά:

$$\vec{f}_{B\parallel} = \vec{f}_{B,p} \cdot \frac{\vec{B}_p}{B_p} = -\frac{B_\phi}{2\pi c \varpi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B}_p}{B_p} I \right) \quad (2.51)$$

Όσον αφορά την προβολή της μαγνητικής δύναμης κάθετα στην μαγνητική επιφάνεια, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την σχέση 2.50 με το μοναδιαίο άνυσμα: $\vec{\nabla}a/|\vec{\nabla}a|$. Από αυτόν τον πολλαπλασιασμό έχουμε ότι:

$$\vec{f}_{B\perp} = \vec{f}_{B,p} \cdot \frac{\vec{\nabla}a}{|\vec{\nabla}a|} = -\frac{B_\phi}{2\pi c\omega} \frac{\vec{\nabla}a}{|\vec{\nabla}a|} \vec{\nabla}I + \frac{J_\phi}{c|\vec{\nabla}a|} \left(B_z \frac{\partial a}{\partial \varpi} - B_\varpi \frac{\partial a}{\partial z} \right) \quad (2.52)$$

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι οι διαδικασίες της εστίασης του πλάσματος ενός πίδακα (δύναμη κάθετη στην μαγνητική επιφάνεια, σχέση 2.52), αλλά και της επιτάχυνσης του (δυνάμεις στην αζιμουθιακή διεύθυνση και παράλληλα στην μαγνητική επιφάνεια, σχέσεις 2.49 και 2.51), εξαρτώνται σημαντικά από τα ρεύματα I και το συνολικό ηλεκτρικό κύκλωμα που δημιουργείται στο σύστημα δίσκου-πίδακων.

2.2 Μαγνητισμένοι δίσκοι προσαύξεσης

Στην ενότητα αυτή, ακολουθώντας τις εργασίες των J. Ferreira, F. Casse και G. Pelletier (Ferreira & Pelletier 1993 [5] [6], Ferreira & Pelletier 1995 [7], Ferreira 1997 [8], Casse & Ferreira 2000 [3] [4]), θα παρουσιάσουμε στοιχεία από την θεωρία των αστροφυσικών δίσκων προσαύξεσης από τους οποίους εκρέουν πίδακες. Θα μιλήσουμε για τυρβώδεις λεπτούς δίσκους, οι οποίοι περιστρέφονται υποκεπλευριανά και διαπερνώνται από μαγνητικό πεδίο. Θα σχολιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο προσπίπτει το υλικό προς το κεντρικό αντικείμενο (πρόβλημα απώλειας στροφορμής) καθώς και για τον μηχανισμό που είναι υπεύθυνος για την μετάβαση από την διαδικασία της πρόσπτωσης στην διαδικασία της εκροής. Τέλος θα δούμε την σύνδεση μεταξύ των παραμέτρων κ , λ και ω_A που είδαμε για τους πίδακες, με παραμέτρους των δίσκων.

2.2.1 Τυρβώδεις, λεπτοί, Κεπλευριανοί δίσκοι

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας από έναν «τυπικό» δίσκο προσαύξεσης (standard accretion disk - SAD), ο οποίος δεν διαπερνάται από μαγνητικό πεδίο, δεν έχουμε εκροή μάζας από αυτόν και η πρόσπτωση του υλικού προς το κεντρικό αντικείμενο γίνεται αποκλειστικά λόγω απώλειας στροφορμής από τον μηχανισμό του ιξώδους (για τον οποίο θα μιλήσουμε παραπάνω στην συνέχεια).

Η κατακόρυφη δομή ενός τέτοιου δίσκου μπορεί να προσδιοριστεί από την υδροστατική ισορροπία στην \hat{z} διεύθυνση (σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \frac{GMz}{\varpi^3} \quad (2.53)$$

όπου $-\rho(GM/r^3)\vec{r} \cdot \hat{z} \simeq -\rho(GMz/\varpi^3)$, είναι η προβολή της δύναμης βαρύτητας στον κατακόρυφο άξονα. Θεωρώντας τώρα ότι ο δίσκος είναι ισόθερμος, δηλαδή

40 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΠΙΔΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΣΚΟΙ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ

ισχύει ότι $P = C_s^2 \rho$ (όπου C_s η ταχύτητα του ήχου), η παραπάνω διαφορική εξίσωση ολοκληρώνεται και δίνει για την πυκνότητα:

$$\rho(\varpi, z) = \rho(\varpi, 0)e^{-(z/h)^2} \quad (2.54)$$

όπου με $h(\varpi)$ συμβολίζεται η κατακόρυφη κλίμακα ύψους του δίσκου (απόσταση πάνω από το επίπεδο $z = 0$ στην οποία τα διάφορα φυσικά μεγέθη έχουν αλλάξει σημαντικά), και η οποία ισούται με:

$$h(\varpi) = \frac{C_s \sqrt{2}}{\sqrt{GM/\varpi^3}} \quad (2.55)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε και την εξίσωση ορμής στην ακτινική διεύθυνση $\hat{\varpi}$:

$$u_\varpi \frac{du_\varpi}{d\varpi} - \frac{u_\phi^2}{\varpi} = -\frac{GM}{\varpi^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} \quad (2.56)$$

Αμελώντας τον πρώτο όρο στην παραπάνω σχέση, δηλαδή την δύναμη αδράνειας που οφείλεται στην ταχύτητα u_ϖ (η πρόσπτωση γίνεται με πολύ μικρή ακτινική ταχύτητα), αλλά και τον όρο της πίεσης, παίρνουμε για την ταχύτητα περιστροφής του δίσκου:

$$u_\phi \simeq \sqrt{\frac{GM}{\varpi}} = \varpi \Omega_K \quad (2.57)$$

δηλαδή το ρευστό περιστρέφεται Κεπλεριανά. Συνδυάζοντας τώρα την παραπάνω σχέση με την 2.55, προκύπτει ο παρακάτω αδιάστατος λόγος:

$$\varepsilon = \frac{h(\varpi)}{\varpi} = \frac{C_s \sqrt{2}}{u_\phi} \quad (2.58)$$

Για να είναι όμως αυτοσυνεπείς οι υπολογισμοί που πραγματοποιήσαμε παραπάνω, θα πρέπει αναγκαστικά ο λόγος αυτός να είναι $\varepsilon \ll 1$, ή διαφορετικά το $u_\phi \gg C_s$ (το οποίο δικαιολογεί το γιατί αγνοήσαμε τον όρο της πίεσης από την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής: ο όρος πίεσης είναι $\sim C_s^2/\varpi$, πολύ μικρότερος σε σχέση με τον όρο της κεντρομόλου και της βαρύτητας).

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για να είναι ο δίσκος λεπτός και να περιστρέφεται Κεπλεριανά, θα πρέπει το:

$$\varepsilon = \frac{h(\varpi)}{\varpi} \ll 1 \quad (2.59)$$

Η απαίτηση αυτή, οδηγεί και στην ακόλουθη ιεραρχία ταχυτήτων στο εσωτερικό ενός «τυπικού» δίσκου προσαύξεσης:

$$u_\varpi \ll C_s \ll u_\phi \quad (2.60)$$

όπου το u_ϕ αντιστοιχεί σε Κεπλεριανή ταχύτητα περιστροφής.

Τέλος, η εξίσωση συνέχειας μπορεί να μας δώσει τον ρυθμό πρόσπτωσης μάζας προς το κεντρικό αντικείμενο. Θεωρώντας ότι από έναν κύκλο ακτίνας ϖ σε χρόνο dt διέρχεται μάζα $2\pi\varpi|u_\varpi|dt\Sigma$ (όπου Σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου), ο ρυθμός πρόσπτωσης ύλης θα είναι:

$$\dot{M}_a = \frac{dM}{dt} = 2\pi\varpi|u_\varpi|\Sigma = \text{constant} \quad (2.61)$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός στην περίπτωση ενός «τυπικού» δίσκου, αφού δεν έχουμε εκροή μάζας από αυτόν.

2.2.2 Τυρβώδεις, λεπτοί, μαγνητισμένοι δίσκοι

Στην συνέχεια θα μιλήσουμε για μία πιο ρεαλιστική εκδοχή αστροφυσικών δίσκων προσαύξεσης, οι οποίοι είναι λεπτοί, διαπερνώνται από μαγνητικό πεδίο και μπορούν να χάνουν στροφορμή λόγω δύο διαφορετικών μηχανισμών: από το ιξώδες και από την εκροή μάζας λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου. Οι εκροές υλικού από τους δίσκους αυτούς είναι σε θέση να δημιουργήσουν πίδακες και για αυτόν τον λόγο μπορούμε να αναφερόμαστε σε αυτούς ως JED (Jet Emitting Disks). Θα δούμε εδώ κάποιες από τις διαφορές τις οποίες παρουσιάζουν αυτού του είδους οι δίσκοι (JED) από τους «τυπικούς» (SAD) δίσκους που είδαμε προηγουμένως.

Η πρώτη και βασική διαφορά που υπάρχει μεταξύ ενός SAD και ενός JED, είναι ότι στην περίπτωση του δεύτερου έχουμε εκροή υλικού από τον δίσκο. Αυτό σημαίνει ότι ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας μπορούμε να πάρουμε την σχέση (Ferreira & Pelletier 1995 [7]):

$$\dot{M}_a(\varpi_i) = \dot{M}_a(\varpi_e) - 2\dot{M}_j \quad (2.62)$$

όπου ϖ_i και ϖ_e είναι η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του δίσκου αντίστοιχα, ενώ το \dot{M}_j αντιστοιχεί στον ρυθμό που μεταφέρεται μάζα από την κάθε μία επιφάνεια του δίσκου προς τους πίδακες. Η σχέση 2.62 μας δείχνει ότι ο ρυθμός πρόσπτωσης μάζας τώρα δεν είναι πλέον σταθερός, αλλά διαφέρει σε κάθε ακτίνα ϖ του δίσκου, λόγω της εκροής υλικού. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός πρόσπτωσης μάζας σε μία τυχαία ακτίνα $\dot{M}_a(\varpi)$, μπορεί να γραφεί (θα δούμε τον τρόπο στο κεφάλαιο των αυτοόμοιων λύσεων), χρησιμοποιώντας μια καινούργια παράμετρο ξ (Ferreira & Pelletier 1995 [7]):

$$\xi = \frac{d \ln}{d \ln \varpi} \left(\frac{\dot{M}_a(\varpi)}{\dot{M}_a(\varpi_e)} \right) \quad (2.63)$$

Η παράμετρος αυτή ονομάζεται ejection index και είναι ένα μέτρο της ικανότητας του δίσκου να χάνει υλικό. Όσο μεγαλύτερο είναι το ξ , τόσο περισσότερο υλικό εκρέει από τον δίσκο και μεταφέρεται στους πίδακες. Χρησιμοποιώντας την σχέση 2.63, η 2.62 μπορεί να γραφεί διαφορετικά:

$$\frac{2\dot{M}_j}{\dot{M}_a(\varpi_e)} = 1 - \left(\frac{\varpi_i}{\varpi_e} \right)^\xi \simeq \xi \ln \left(\frac{\varpi_e}{\varpi_i} \right) \quad (2.64)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν το $\xi \ll 1$ (το οποίο ισχύει γενικά, όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο 6).

Η επόμενη σημαντική διαφορά μεταξύ ενός μαγνητισμένου JED και ενός «τυπικού» δίσκου προσαύξησης, είναι ότι λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου η περιστροφή του δίσκου παύει να είναι πλέον Κεπλεριανή, αλλά γίνεται υπόκεπλεριανή (περιστρέφεται με μικρότερη γωνιακή ταχύτητα από Ω_K). Αυτό μπορεί να φανεί εάν γράψουμε την εξίσωση ορμής για το εσωτερικό του δίσκου στην περίπτωση του JED:

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\rho\vec{\nabla}\Phi_G - \vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}}{4\pi} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \quad (2.65)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι σε αυτή έχουμε την εμφάνιση κάποιων επιπλέον όρων, οι οποίοι οφείλονται στο μαγνητικό πεδίο και στο ιξώδες, οι οποίοι επηρεάζουν την δυναμική του δίσκου.

Ο τρίτος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι η πίεση του μαγνητικού πεδίου, η οποία επηρεάζει σημαντικά την κατακόρυφη συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, ενώ ο τέταρτος όρος είναι η δύναμη της μαγνητικής τάσης. Η μαγνητική τάση σε έναν JED συνεισφέρει σημαντικά στην ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, προσπαθώντας να «ισιώσει» τις καμπυλωμένες γραμμές του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πολοειδές επίπεδο. Με τον τρόπο αυτό αντιστέκεται στην δύναμη της βαρύτητας και είναι αυτή (μαζί με την κλίση της πίεσης) που οδηγούν τελικά στην υποκεπλεριανή περιστροφή του δίσκου ($\Omega < \Omega_K$, θεωρώντας πάλι ότι το $u_w \ll 1$).

Όσον αφορά τώρα το εσωτερικό ενός μαγνητισμένου δίσκου προσαύξησης, περιμένουμε εκεί να υπάρχουν διαφόρων ειδών αστάθειες που οφείλονται στο μαγνητικό πεδίο, όπως είναι για παράδειγμα η μαγνητοπεριστροφική αστάθεια (Balbus & Hawley 1991 [1]), και γενικά μία έντονη τυρβώδης κατάσταση η οποία οδηγεί στην εμφάνιση φαινομένων μεταφοράς. Τέτοιου είδους φαινόμενα είναι το ιξώδες (τελευταίος όρος στην 2.65), που μπορεί να περιγραφεί από τον συντελεστή κινηματικού ιξώδους ν_v , αλλά και η διάχυση του μαγνητικού πεδίου, η οποία μπορεί να περιγραφεί από αντίστοιχους συντελεστές η_p και η_φ (στο πολοειδές επίπεδο και την αξιμουθιακή διεύθυνση αντίστοιχα).

Η ύπαρξη της διάχυσης του πεδίου στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου δίσκου, είναι απαραίτητη για την πρόσπτωση του υλικού στο κεντρικό αντικείμενο. Το πλάσμα θα πρέπει να μπορεί να διασχίζει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές, το οποίο σημαίνει ότι στην περιοχή αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σετ εξισώσεων της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής, αλλά αυτό της μη-ιδεατής. Ο λόγος που χρησιμοποιούνται δύο συντελεστές για την περιγραφή του φαινομένου της διάχυσης του πεδίου, είναι ότι το υλικό του δίσκου περιστρέφεται πολύ πιο γρήγορα από ότι προσπίπτει προς το κέντρο, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{1}{2}\rho u_p^2 \ll \frac{1}{2}\rho u_\phi^2 \quad (2.66)$$

με αποτέλεσμα να περιμένουμε εντονότερη διάχυση του πεδίου στην αξιμουθιακή κατεύθυνση, κάτι που οδηγεί στην ανισοτροπία μεταξύ των συντελεστών η_p και η_φ .

Τα φαινόμενα αυτά που εμφανίζονται σε έναν μαγνητισμένο δίσκο, μπορούν να μοντελοποιηθούν ορίζοντας τις ακόλουθες αδιάστατες παραμέτρους πάνω στο επίπεδο $z = 0$ (midplane) του δίσκου (Shakura & Sunyaev 1973 [12], Casse & Ferreira 2000a [3]):

$$\begin{aligned}\alpha_v &= \frac{\nu_v}{C_s h} \\ \alpha_m &= \frac{\eta_p}{v_A h} \\ \chi_m &= \frac{\eta_p}{\eta_\varphi} \\ \mathcal{P}_m &= \frac{\nu_v}{\eta_p}\end{aligned}\tag{2.67}$$

Η πρώτη παράμετρος α_v μοντελοποιεί το κινηματικό ιξώδες ν_v και ονομάζεται α -παράμετρος. Εισήχθη για πρώτη φορά από τους Shakura & Sunyaev στην εργασία τους το 1973 και οι δίσκοι στους οποίους χρησιμοποιείται η προσέγγιση αυτή ονομάζονται α -δίσκοι. Η δεύτερη παράμετρος α_m μας δείχνει το επίπεδο της τύρβης στο εσωτερικό του δίσκου λόγω ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου (MHD turbulence), ενώ η χ_m μετράει τον βαθμό της ανισοτροπίας της διάχυσης του πεδίου μεταξύ του πολοειδούς επιπέδου και της $\hat{\varphi}$ διεύθυνσης. Τέλος, η παράμετρος \mathcal{P}_m ονομάζεται μαγνητικός αριθμός Prandtl και συγκρίνει τα επίπεδα του ιξώδους και της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στον δίσκο.

2.2.3 Πρόβλημα απώλειας στροφορμής

Ένα αρκετά σημαντικό πρόβλημα το οποίο αφορά τους αστροφυσικούς δίσκους προσαύξεσης είναι αυτό της απώλειας στροφορμής. Για να μπορέσει το υλικό του δίσκου να κινηθεί ακτινικά προς το κεντρικό αντικείμενο και να μην περιστρέφεται απλώς γύρω από αυτό, θα πρέπει να υπάρχει κάποιος φυσικός μηχανισμός ο οποίος να απάγει στροφορμή από τον δίσκο. Σήμερα γνωρίζουμε δύο τέτοιους επικρατέστερους μηχανισμούς: της μαγνητοϋδροδυναμικές εκροές (πίδακες) και το ενεργό ιξώδες.

Οι μαγνητοϋδροδυναμικές εκροές (Jets) έχουν την δυνατότητα να απάγουν στροφορμή από τον δίσκο, η οποία μεταφέρεται από την ύλη αλλά και από το ίδιο το μαγνητικό πεδίο. Η κεντρική ιδέα δημιουργίας των πιδάκων είναι ότι μεγάλο μέρος της ενέργειας και της στροφορμής του πλάσματος (καθώς και του μαγνητικού πεδίου) που προσπίπτει προς το κεντρικό αντικείμενο, τροφοδοτεί τις εκροές δημιουργώντας τους πίδακες. Παρατηρήσεις δίσκων γύρω από πρωτοαστέρες έχουν δείξει ότι πράγματι οι εκροές που υπάρχουν σε αυτούς κουβαλούν στροφορμή ίδιας τάξης μεγέθους με αυτή που χάνεται από τον δίσκο. Για τον λόγο αυτό οι εστιασμένες εκροές θεωρούνται μέχρι σήμερα ότι είναι ένας από τους επικρατέστερους μηχανισμούς απαγωγής στροφορμής.

Ο δεύτερος επικρατέστερος μηχανισμός είναι αυτός του ενεργού ιξώδους. Όταν σε ένα ρευστό έχουμε περιοχές διαφορετικών ταχυτήτων, αναπτύσσονται δυνάμεις εσωτερικής τριβής (κρούσεις μεταξύ των μορίων), οι οποίες οδηγούν σε μεταφορά

ορμής από τα γρηγορότερα στα πιο αργά μέρη της ροής. Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται μοριακό ιξώδες αλλά δεν παίζει κάποιο σημαντικό ρόλο σε έναν δίσκο προσαύξεσης.

Υπάρχει όμως ένας μηχανισμός, με παρόμοια συμπεριφορά, ο οποίος ονομάζεται ενεργό ιξώδες και είναι αρκετά σημαντικός. Σε αυτόν, λόγω της τυρβώδης κίνησης του πλάσματος μέσα στον δίσκο έχουμε την δημιουργία δινών, οι οποίες παίζουν τώρα τον ίδιο ρόλο με τα μόρια στο μοριακό ιξώδες. Λόγω της ύπαρξης λοιπόν της τύρβης, έχουμε κατακρήμνιση ενέργειας από τους μεγαλύτερους (μεγάλες δίνες) στους μικρότερους (μικρότερες δίνες) σχηματισμούς και τελικά απαγωγή ενέργειας και στροφορμής από το σύστημα.

Στην περίπτωση τώρα ενός μαγνητισμένου δίσκου προσαύξεσης, ο μηχανισμός του ενεργού ιξώδους μπορεί να εφαρμοστεί, θεωρώντας ότι τώρα αυτό δεν οφείλεται σε δίνες ρευστού αλλά σε δίνες μαγνητικού πεδίου. Στις εργασίες τους οι Balbus και Hawley (1991) [1], έχουν δείξει ότι σε έναν δίσκο στην περιοχή του οποίου υπάρχει ένα σχετικά ασθενές μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται μία αστάθεια που ονομάζεται μαγνητοπεριστροφική (Magnetorotational instability-MRI). Η ύπαρξη της αστάθειας αυτής οδηγεί στην δημιουργία τυρβώδους κατάστασης, η οποία μπορεί και απάγει ενέργεια και στροφορμή από το σύστημα. Στην συνέχεια της εργασίας αυτής, όπου αναφερόμαστε στο ιξώδες, εννοούμε τον μηχανισμό του ενεργού ιξώδους.

Στην επόμενη παράγραφο θα ορίσουμε μία παράμετρο Λ , η οποία μπορεί να μας συγκρίνει τις ροπές που ασκούνται στο πλάσμα του δίσκου από το μαγνητικό πεδίο (απαγωγή στροφορμής μέσω πιδάκων) με τις ροπές λόγω τύρβης (απαγωγή στροφορμής μέσω ενεργού ιξώδους).

2.2.4 Πρόσπτωση υλικού

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τους παράγοντες που επηρεάζουν την πρόσπτωση του υλικού στον δίσκο και χρησιμοποιώντας την αζιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης ορμής θα συγκρίνουμε τους δύο κύριους μηχανισμούς απαγωγής στροφορμής που αναφέραμε στα από πάνω. Θα εξετάσουμε αρχικά το κατά πόσο επηρεάζει το σχήμα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών μέσα στο δίσκο την διαδικασία της πρόσπτωσης. Ξεκινάμε γράφοντας την $\hat{\varphi}$ συνιστώσα του νόμου του Ohm (στην μη-ιδεατή περίπτωση):

$$J_{\varphi} = \frac{\sigma}{c}(u_z B_{\varpi} - u_{\varpi} B_z) \quad (2.68)$$

Λύνοντας αυτή ως προς την ακτινική ταχύτητα πρόσπτωσης u_{ϖ} , μπορούμε να υπολογίσουμε τον μαγνητικό αριθμό Reynolds στο midplane του δίσκου, ο οποίος προκύπτει:

$$R_m \equiv \frac{u_{\varpi} \varpi}{\eta_p} \Big|_{(\varpi,0)} = \frac{4\pi}{c} \frac{\varpi J_{\varphi}}{B_z} \Big|_{(\varpi,0)} \quad (2.69)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\eta_p = c^2/4\pi\sigma$ και θεωρήσαμε ότι στο midplane το υλικό προσπίπτει μόνο ακτινικά, δηλαδή $u_z = 0$, ενώ το μαγνητικό πεδίο διαπερνά κάθετα τον δίσκο, άρα $B_{\varpi 0} = 0$.

Ορίζουμε τώρα την χαρακτηριστική κλίμακα ύψους της συνάρτησης μαγνητικής ροής $l(\varpi)$ (ύψος πάνω από το midplane στο οποίο η $\alpha(\varpi, z)$ έχει αλλάξει σημαντικά), καθώς και τον εκθέτη β που σχετίζεται με την κατανομή της μαγνητικής ροής, από τις σχέσεις (Ferreira & Pelletier 1993 [5], [6], Ferreira & Pelletier 1995 [7]):

$$\frac{\alpha(\varpi, 0)}{l^2} = - \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right|_{(\varpi, 0)} \quad (2.70)$$

$$\beta = \frac{d \ln \alpha(\varpi, z)}{d \ln \varpi} \quad (2.71)$$

Όμως τα J_φ και B_z συνδέονται με την $\alpha(\varpi, z)$ μέσω του νόμου της επαγωγής και της σχέσης $\vec{B}_p = \vec{\nabla} \times (\alpha \hat{\varphi} / \varpi)$ αντίστοιχα, οπότε μετά από πράξεις ο ακτινικός μαγνητικός αριθμός Reynolds γράφεται στο midplane:

$$R_m = \frac{4\pi}{c} \left. \frac{\varpi J_\varphi}{B_z} \right|_{(\varpi, 0)} \sim \frac{\varpi^2}{l^2} \quad (2.72)$$

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι εάν το μαγνητικό πεδίο μέσα στον δίσκο είναι εντελώς κατακόρυφο, δηλαδή $l \sim \varpi$ (η τιμή της συνάρτησης μαγνητικής ροής δεν αλλάζει πολύ από το midplane μέχρι να βγούμε από τον δίσκο, ή αλλιώς το $B_p \simeq B_z$ παντού στο εσωτερικό του), τότε ο αριθμός Reynolds είναι $R_m \sim 1$ και στην εξίσωση επαγωγής έχουμε ισορροπία μεταξύ της οριζόντιας μεταφοράς υλικού (advection) και της διάχυσης του πεδίου (diffusion). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε πρόσπτωση υλικού, το οποίο να διασχίζει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές, αλλά δεν μπορούμε να έχουμε εμφάνιση εκροής.

Για να έχουμε εκροή, θα πρέπει οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές να «λυγίζουν» ελαφρά μέσα στον δίσκο και να μην είναι εντελώς κατακόρυφες, δηλαδή το $l \ll \varpi$. Με τον τρόπο αυτό, το υλικό θα μπορεί να διαφεύγει από τις επιφάνειες του δίσκου και να μεταφέρεται στους πίδακες, ικανοποιώντας και το κριτήριο για την γωνία ψ μεταξύ του B_p και του οριζόντιου άξονα που εξάγαμε στα προηγούμενα (σχέση 2.35). Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός Reynolds R_m θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος της μονάδας στο εσωτερικό του δίσκου, αλλά όχι πολύ μεγάλος αφού είμαστε στην περιοχή της μη-ιδεατής MHD (Ferreira 1997).

Αφού είδαμε λοιπόν πως επηρεάζει το σχήμα των δυναμικών γραμμών στο πολυειδές επίπεδο τις διαδικασίες της πρόσπτωσης και της εκροής, θα ορίσουμε τώρα μία νέα παράμετρο Λ , η οποία μας βοηθάει να συγκρίνουμε τους δύο κυρίαρχους μηχανισμούς απαγωγής στροφορμής που έχουμε σε έναν δίσκο προσαύξεσης (ενεργό ιξώδες και ροπές λόγω μαγνητικού πεδίου), ώστε να δούμε ποιός κυριαρχεί κάθε φορά. Ξεκινάμε γράφοντας την $\hat{\varphi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\rho \left(u_\varpi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varpi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_\varphi u_z}{\varpi} \right) = F_\varphi + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi} \quad (2.73)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το αριστερό μέλος αυτής με ϖ , μπορούμε να την γράψουμε διαφορετικά:

$$\rho \vec{u}_p \cdot \vec{\nabla}(\varpi u_\varphi) = \varpi F_\varphi + \varpi(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi} \quad (2.74)$$

όπου τώρα αναγνωρίζουμε στο δεξί μέλος τις ροπές που ασκούνται στο πλάσμα του δίσκου από το μαγνητικό πεδίο (πρώτος όρος) και από το ενεργό ιξώδες (δεύτερος όρος). Διαιρώντας αυτούς τους δύο όρους ορίζουμε την παράμετρο Λ στο midplane του δίσκου [9]:

$$\Lambda = \left| \frac{\text{Jet torque}}{\text{Turbulent torque}} \right|_{z=0} = \left| \frac{F_\varphi}{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi}} \right|_{z=0} \quad (2.75)$$

και η $\hat{\varphi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής γράφεται τελικά (στο midplane):

$$1 + \Lambda = \left. \frac{\rho \vec{u}_p \cdot \vec{\nabla}(\varpi u_\varphi)}{\varpi(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi}} \right|_{z=0} \quad (2.76)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας την σχέση 2.67 και το γεγονός ότι: $\varpi(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi} = \vec{\nabla}(\varpi T_v)$, με $T_v \sim \alpha_v P$ (Shakura & Sunyaev 1973, Ferreira 2006). Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι στο midplane το $u_p = u_{\varpi 0}$ και για λεπτούς δίσκους ισχύει και η σχέση 2.58. Συνδυάζοντας όλα αυτά, μπορούμε να γράψουμε τελικά για την $\hat{\varphi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής στο midplane [9]:

$$1 + \Lambda \simeq R_m \left(\frac{\eta_p}{\nu_v} \right) = \frac{R_m}{P_m} \quad (2.77)$$

Βλέπουμε ότι για $P_m \sim 1$ (ίδια επίπεδα ενεργού ιξώδους και διάχυσης), ένας «τυπικός» δίσκος προσαύξεσης στον οποίο ο κύριος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής είναι το ενεργό ιξώδες ($\Lambda \ll 1$), απαιτεί κατακόρυφες μαγνητικές δυναμικές γραμμές στο πολοειδές επίπεδο, ή αλλιώς $R_m \sim 1$ όπως είδαμε και από την σχέση 2.72. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε εκροή. Αντίθετα, ένας δίσκος στον οποίο έχουμε εκροή υλικού και ο κυρίαρχος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής είναι οι πίδακες ($\Lambda \gg 1$), χρειάζεται «λυγισμένες» δυναμικές γραμμές στο πολοειδές επίπεδο, ή αλλιώς $R_m \sim \Lambda$ μεγαλύτερο της μονάδας (Ferreira & Pelletier 1995 [7]).

2.2.5 Εκροή υλικού

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε για τον φυσικό μηχανισμό με τον οποίο γίνεται η αλλαγή από την διαδικασία της πρόσπτωσης στην διαδικασία της εκροής στο εσωτερικό ενός δίσκου προσαύξεσης. Μέχρι τώρα, συζητήσαμε μόνο για την διαδικασία της πρόσπτωσης, η οποία όπως είπαμε οφείλεται στην απαγωγή στροφορμής μέσω δύο μηχανισμών: του ενεργού ιξώδους και των ροπών $F_\varphi = (J_z B_\varpi - B_z J_\varpi)/c$ που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο πλάσμα του δίσκου. Επιπλέον, η ύπαρξη τυρβώδους κατάστασης στο εσωτερικό του δίσκου, είδαμε ότι οδηγεί στην διάχυση του

μαγνητικού πεδίου, κάτι το οποίο αφήνει το υλικό να κινηθεί ακτινικά προς το κεντρικό αντικείμενο, διασχίζοντας τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

Για να μιλήσουμε τώρα για την διαδικασία της εκροής, γράφουμε πρώτα τις δύο συνιστώσες της εξίσωσης ορμής πάνω στο πολοειδές επίπεδο:

$$\begin{aligned}\hat{\omega} : \quad (u_p \cdot \vec{\nabla})u_{\varpi} &\simeq \frac{u_{\varphi}^2}{\varpi} - \Omega_K^2 \varpi + \frac{F_{\varpi}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} \\ \hat{z} : \quad (u_p \cdot \vec{\nabla})u_z &\simeq -\Omega_K^2 z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right)\end{aligned}\quad (2.78)$$

όπου θεωρήσαμε ότι η μαγνητική τάση συνεισφέρει κυρίως μόνο στην ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής (τρίτος όρος δεξιού μέλους, F_{ϖ}/ρ), ενώ η πίεση του μαγνητικού πεδίου επηρεάζει σημαντικά μόνο την κατακόρυφη δομή του δίσκου (τρίτος όρος δεξιού μέλους στην \hat{z} συνιστώσα της εξίσωσης ορμής).

Από αυτές τις δύο βλέπουμε ότι για να έχουμε μια κατάσταση ψευδοϊσοροπίας στο εσωτερικό του δίσκου (τα αριστερά μέλη να είναι πολύ μικροί αριθμοί), θα πρέπει στην κατακόρυφη διεύθυνση η θερμική πίεση του πλάσματος να αντιστέκεται στην βαρύτητα και στην πίεση του μαγνητικού πεδίου, ενώ στην οριζόντια διεύθυνση η δύναμη της μαγνητικής τάσης F_{ϖ} να αντιστέκεται στην βαρύτητα, οδηγώντας έτσι στην υποκεπλευριανή περιστροφή του δίσκου. Αυτά έχουν ως αποτέλεσμα το πλάσμα στο εσωτερικό του δίσκου να προσπίπτει προς το κεντρικό αντικείμενο (τα $u_{\varpi}, u_z < 0$), συγκλίνοντας ταυτόχρονα προς το midplane. Πώς όμως μπορούμε να περάσουμε από αυτή την κίνηση πρόσπτωσης σε εκροή και πώς μπορεί να επιταχυνθεί το υλικό προς την περιοχή των πιδάκων;

Θα μιλήσουμε πρώτα για τον μηχανισμό της επιτάχυνσης του πλάσματος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την αλλαγή προσήμου της αζιμουθιακής συνιστώσας της δύναμης Lorentz στην επιφάνεια του δίσκου, η οποία γράφεται:

$$F_{\varphi} = \frac{1}{c}(J_z B_{\varpi} - B_z J_{\varpi}) \quad (2.79)$$

Η δύναμη αυτή είναι ουσιαστικά η ροπή που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο πλάσμα του δίσκου, μέσω της οποίας γίνεται η απαγωγή στροφορμής από αυτόν. Οπότε περιμένουμε ότι στο εσωτερικό του δίσκου η $F_{\varphi} < 0$. Στην επιφάνεια όμως αυτού, για να έχουμε επιτάχυνση του υλικού και εκροή μέσω του μαγνητοπεριστροφικού μηχανισμού, θα πρέπει η ροπή αυτή να αλλάζει πρόσημο δηλαδή να γίνεται $F_{\varphi} > 0$, όταν το $z \simeq h$ (Ferreira & Pelletier 1995 [7], Ferreira 1997 [8], Casse & Ferreira 2000a [3]).

Το εάν θα συμβεί ή όχι αυτή η αλλαγή προσήμου, εξαρτάται σημαντικά από την τιμή που παίρνει η ακτινική συνιστώσα του ρεύματος J_{ϖ} (όπως βλέπουμε από την σχέση 2.79) ή αλλιώς, από την κατακόρυφη μεταβολή της αζιμουθιακής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, αφού γνωρίζουμε ότι:

$$J_{\varpi} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial z} \quad (2.80)$$

Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε το J_{ϖ} λίγο διαφορετικά, χρησιμοποιώντας την αζιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης δυναμό, η οποία μετά από πράξεις μπορεί να γραφεί:

$$\frac{4\pi}{c}\eta_{\varphi}\frac{\partial J_{\varpi}}{\partial z} = \varpi\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}\Omega - \frac{\partial(u_z B_{\varphi})}{\partial z} - \frac{\partial(u_{\varpi} B_{\varphi})}{\partial \varpi} + \frac{\eta_{\varphi}}{\varpi}\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varpi} + \eta_{\varphi}\frac{\partial^2 B_{\varphi}}{\partial \varpi^2} - \eta_{\varphi}\frac{B_{\varphi}}{\varpi^2} \quad (2.81)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα αυτή κατακόρυφα στο εσωτερικό του δίσκου από $z = 0$ μέχρι ένα τυχαίο z λίγο έξω από την επιφάνεια του, και αγνοώντας τους τέσσερις τελευταίους όρους του δεξιού μέλους (η ακτινική ταχύτητα πρόσπτωσης u_{ϖ} και το αζιμουθιακό πεδίο B_{φ} είναι αμελητέα μέσα στον δίσκο), παίρνουμε ότι (Ferreira & Pelletier 1995 [7], Ferreira 1997 [8]):

$$\frac{4\pi}{c}\eta_{\varphi}J_{\varpi} \simeq \frac{4\pi}{c}\eta_{\varphi 0}J_{\varpi 0} + \varpi \int_0^z dz \vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}\Omega - u_z B_{\varphi} \quad (2.82)$$

όπου με τον δείκτη μηδέν συμβολίζεται η τιμή της κάθε ποσότητας στο midplane. Ο τελευταίος όρος της παραπάνω εξίσωσης περιγράφει την οριζόντια μεταφορά υλικού (advection) και είναι αμελητέος στο εσωτερικό του δίσκου όπου επικρατεί η διάχυση του πεδίου.

Από την παραπάνω σχέση, βλέπουμε ότι το κατακόρυφο προφίλ του J_{ϖ} εξαρτάται έντονα από το ακτινικό ρεύμα που διατρέχει το midplane (πρώτος όρος δεξιού μέλους) και το από το αντίθετο σε αυτό ρεύμα που οφείλεται στην διαφορική περιστροφή του δίσκου (δεύτερος όρος δεξιού μέλους, ο οποίος είναι αρνητικός αφού $\nabla\Omega < 0$). Για να μπορέσει λοιπόν η ροπή F_{φ} να γίνει θετική στην επιφάνεια του δίσκου και να έχουμε εκροή υλικού λόγω του μαγνητοπεριστροφικού μηχανισμού, θα πρέπει το ακτινικό ρεύμα J_{ϖ} να ελλατωθεί αρκετά μέσα σε μία κλίμακα ύψους, έτσι ώστε από την 2.79 να έχουμε $F_{\varphi} > 0$. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει ο όρος της διαφορικής περιστροφής στην σχέση 2.82 να εξισορροπήσει τον όρο του ακτινικού ρεύματος στο midplane, χωρίς όμως να γίνει πολύ μεγαλύτερός του (κατά απόλυτη τιμή), γιατί κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε αφύσικα μεγάλες τιμές του B_{φ} κοντά στον δίσκο.

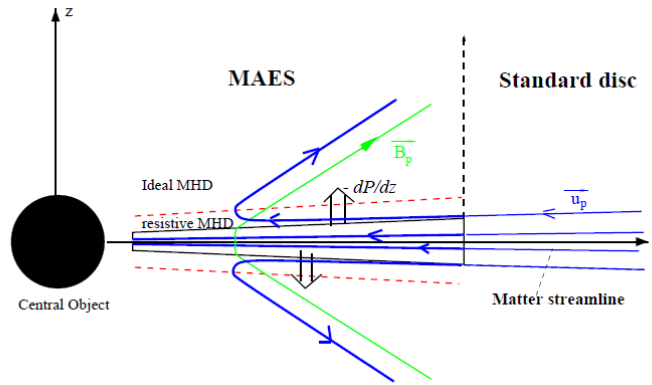
Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον λόγο μεταξύ του πρώτου και δεύτερου όρου του δεξιού μέλους της 2.82 στο midplane, μέσω της ακόλουθης παραμέτρου (Ferreira & Pelletier 1995 [7]):

$$\Gamma \simeq \left. \frac{B_{\varpi}\varpi\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}}{\frac{4\pi}{c}\eta_{\varphi}\frac{\partial J_{\varpi}}{\partial z}} \right|_{z=0} \quad (2.83)$$

Η παράμετρος αυτή είναι αρκετά σημαντική για την εκροή, καθώς μας καθορίζει το κατακόρυφο προφίλ του J_{ϖ} μέσα στον δίσκο. Από την απαίτηση τώρα ο όρος της διαφορικής περιστροφής να εξισορροπεί αυτόν του ρεύματος στο midplane, ή αλλιώς το $\Gamma = 1$, μετά από πράξεις και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.67 καταλήγουμε στην ακόλουθη συνθήκη για να έχουμε εκροή (Casse & Ferreira 2000a [3]):

$$\Lambda = \frac{3\chi_m}{\alpha_m^2 \varepsilon \mathcal{P}_m} \quad (2.84)$$

Για τυπικές τιμές των $\alpha_m \sim \chi_m \sim \mathcal{P}_m \sim 1$, βλέπουμε ότι το $\Lambda \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$ (αφού αναφερόμαστε σε λεπτούς δίσκους), κάτι που σημαίνει ότι για να έχουμε εκροή πρέπει η ροπή λόγω μαγνητικού πεδίου να υπερσχύει της ροπής λόγω ενεργού ιξώδους.



Σχήμα 2.5: Σχηματική απεικόνιση της διαδικασίας της εκροής της ύλης σε ένα MAES πάνω στο πολοειδές επίπεδο (σχήμα από [9]). Με μπλε χρώμα φαίνονται οι γραμμές ροής μάζας, ενώ με πράσινο οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές.

Μέχρι τώρα αναλύσαμε τις συνθήκες που πρέπει να επικρατούν μέσα στον δίσκο, έτσι ώστε η ροπή λόγω μαγνητικού πεδίου να αλλάζει πρόσημο στην επιφάνεια του και να μπαίνει σε λειτουργία ο μαγνητοπεριστροφικός μηχανισμός που δημιουργεί την εκροή. Όμως, κάνοντας το αυτό, υποθέσαμε ότι με κάποιο τρόπο το υλικό του δίσκου μπορεί να κινείται από τα κατώτερα στρώματά του προς την επιφάνεια, με θετική κατακόρυφη ταχύτητα, και στην συνέχεια να «φορτώνεται» στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές διαφεύγοντας τελικά από αυτόν. Θα δούμε τώρα με ποιόν τρόπο μπορεί να γίνει αυτή η κατακόρυφη κίνηση του υλικού μέσα στον δίσκο.

Στο εσωτερικό μη-μαγνητισμένων δίσκων προσαύξεσης, μπορεί να επιτευχθεί μία κατάσταση ψευδοϊσορροπίας, όταν η θερμική πίεση του πλάσματος αντιστέκεται στις βαρυτικές δυνάμεις από το κεντρικό αντικείμενο. Στους μαγνητισμένους τώρα δίσκους, η κατάσταση στο εσωτερικό τους επηρεάζεται και από την δύναμη Lorentz (μαγνητική πίεση και τάση), η οποία βοηθά στον περιορισμό του πλάσματος του δίσκου (magnetic pinching). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαγνητισμένοι δίσκοι να είναι πιο λεπτοί από τους απλούς υδροδυναμικούς και στο εσωτερικό τους η κατακόρυφη συνιστώσα της εξίσωσης ορμής να γράφεται (σε περίπτωση ισορροπίας) (Ferreira & Pelletier 1995 [7]):

$$\frac{\partial P}{\partial z} \simeq -\rho\Omega_K^2 z + \frac{1}{c}(J_\omega B_\varphi - J_\varphi B_\omega) \quad (2.85)$$

Από την παραπάνω βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε απόκλιση από την ισορροπία θα έχουμε εμφάνιση κατακόρυφων κινήσεων εντός του δίσκου, που είτε θα μεταφέρουν

ύλη προς τα κατώτερα στρώματα (νικάει το δεξί μέλος της εξίσωσης, δηλαδή η βαρύτητα και η δύναμη Lorentz), ή θα μεταφέρουν υλικό προς την επιφάνεια του δίσκου (νικάει το αριστερό μέλος της εξίσωσης, δηλαδή η θερμική πίεση). Άρα η μόνη δύναμη που μπορεί να μεταφέρει υλικό προς την επιφάνεια του δίσκου και να υπερνικήσει την βαρύτητα και τις δυνάμεις λόγω του μαγνητικού πεδίου, είναι αυτή της κλίση της θερμικής πίεσης.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε τα εξής: καθώς το υλικό του δίσκου προσπίπτει στο κεντρικό αντικείμενο, πλάσμα από τις εξωτερικές περιοχές του δίσκου φτάνει στα ανώτερα στρώματα των εσωτερικών περιοχών του, όπου η θερμική πίεση το «σπρώχνει» κατακόρυφα προς τα πάνω. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση υλικού προς την επιφάνεια του δίσκου. Στην περιοχή όμως αυτή, η αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης Lorentz αλλάζει πρόσημο (γίνεται από αρνητική θετική), με αποτέλεσμα το πλάσμα που έρχεται από τα κατώτερα στρώματα του δίσκου να «φορτώνεται» στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές και να αρχίζει να επιταχύνεται προς τα έξω μέσω του μαγνητοπεριστροφικού μηχανισμού. Η διαδικασία αυτή της εκροής μπορεί να αναπαρασταθεί σχηματικά πάνω στο πολοειδές επίπεδο, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.5 [9].

2.2.6 Σύνδεση παραμέτρων δίσκου - πίδακα

Στην παράγραφο αυτή θα συνδέσουμε τις παραμέτρους κ , λ και ω_A που είδαμε για τους πίδακες, με την παράμετρο ξ που συνδέεται με την εκροή υλικού από τον δίσκο.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 2.62 ως προς ω , χρησιμοποιώντας την σχέση 2.63 για την παράμετρο ξ και ολοκληρώνοντας, μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ της ροής μάζας στο midplane του δίσκου και της ροής μάζας στην επιφάνεια αυτού:

$$\xi \varepsilon \rho_0 u_0 \simeq \rho^+ u_z^+ \quad (2.86)$$

Θεωρώντας επιπλέον ότι το μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας που προσπίπτει στον δίσκο μεταφέρεται στην συνέχεια στους πίδακες, μπορούμε να γράψουμε ότι το: $\xi \sim 1/\varepsilon$.

Από την διατήρηση της στροφορμής, βρήκαμε την παράμετρο του μαγνητισμένου βραχίονα (magnetic lever arm) όπως αυτή φαίνεται στην σχέση 2.14. Αντικαθιστώντας σε αυτή το πρώτο ολοκλήρωμα της MHD από την 2.15 και χρησιμοποιώντας τον ηχητικό αριθμό Mach όπως ορίζεται στην εργασία των Casse & Ferreira, 2000a [3]:

$$m_s = \frac{2\mu q}{\Lambda} (1 + \Lambda) \quad (2.87)$$

όπου $q = -h \frac{dB_\varphi}{dz} / B_0$ (magnetic shear, συνδέεται με την ακτινική συνιστώσα του

ρεύματος) και $\mu = \frac{B_0^2}{4\pi P_0}$, παίρνουμε ότι:

$$\lambda = 1 + \frac{\Lambda}{2\xi(1+\Lambda)} \left| \frac{B_\varphi^+}{qB_0} \right| \quad (2.88)$$

Όσον αφορά την αδιάστατη ροή μάζας κ που εκρέει από τον δίσκο και μεταφέρεται στους πίδακες, χρησιμοποιώντας την σχέση 2.20 και την 2.86 αυτή γράφεται:

$$\kappa = \frac{2\xi q(1+\Lambda)}{\Lambda} \quad (2.89)$$

Συγκρίνοντας αυτή με την 2.88 γράφουμε τελικά:

$$\kappa = \frac{q}{(\lambda-1)} \left| \frac{B_\varphi^+}{qB_0} \right| \quad (2.90)$$

Από τις σχέσεις 2.88 και 2.90, βλέπουμε την σύνδεση μεταξύ των λ και κ των πιδάκων με την εκροή υλικού από τον δίσκο ξ .

Τέλος, θα υπολογίσουμε εδώ τον λόγο της ροής Poynting του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (σχέση 2.25), με την ροή κινητικής ενέργειας κατά μήκος μιας μαγνητικής επιφάνειας. Στην επιφάνεια του δίσκου ο λόγος αυτός γράφεται:

$$\sigma_+ = \left| \frac{\frac{\varpi B_\varphi \Omega \vec{B}_p}{4\pi}}{\rho \frac{u^2}{2} \vec{u}_p} \right| \quad (2.91)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το πρώτο ολοκλήρωμα της MHD, τον ορισμό του κ από την 2.16 και την σχέση 2.90, παίρνουμε ότι:

$$\sigma_+ \simeq 2(\lambda-1) \simeq \frac{1}{\xi} \frac{\Lambda}{1+\Lambda} \left| \frac{B_\varphi^+}{qB_0} \right| \Leftrightarrow \sigma_+ \sim \frac{1}{\xi} \quad (2.92)$$

Η τελευταία σχέση θα χρησιμοποιηθεί στο κεφάλαιο 6 για την εξαγωγή ενός άνω ορίου για τον ejection index ξ .

52 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΠΙΔΑΚΕΣ ΚΑΙ ΔΙΣΚΟΙ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΗΣ

Κεφάλαιο 3

Αυτοόμοιες λύσεις

3.1 Εισαγωγή

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε την δυναμική στο εσωτερικό ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξησης, θα πρέπει να επιλύσουμε στην περιοχή αυτή το πλήρες σετ των εξισώσεων της μη-ιδεατής MHD (resistive mhd). Κάτι τέτοιο όμως θα απαιτούσε δαπανηρές (υπολογιστικά) και χρονοβόρες αριθμητικές προσομοιώσεις, οι οποίες είναι δύσκολο να πραγματοποιηθούν.

Κάτω από τις υποθέσεις της στάσιμης κατάστασης ($\partial/\partial t = 0$) και της αξισυμμετρίας ($\partial/\partial \varphi = 0$) (τις οποίες είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια), το σύστημα αυτό μπορεί να απλοποιηθεί ως ένα βαθμό, αλλά δεν παύει να παραμένει ένα σύστημα εξαιρετικά μη-γραμμικών, μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ). Με την χρήση όμως μίας μεθόδου χωρισμού μεταβλητών (κάτω από κάποιες υποθέσεις συμμετρίας για τις λύσεις), το σύστημα αυτό των μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ), το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί σχετικά πιο εύκολα.

Την δυνατότητα αυτή της μετατροπής του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, το οποίο μάλιστα εξαρτάται από μία μόνο άγνωστη μεταβλητή (έστω χ), μας την προσφέρει η υπόθεση της συμμετρίας της αυτοομοιότητας [16]. Σύμφωνα με αυτή, λύνοντας το πρόβλημα πάνω σε μία δυναμική γραμμή ($a = \text{σταθερό}$), έχουμε την δυνατότητα να υπολογίσουμε όλες τις φυσικές ποσότητες κατά μήκος και των υπολοίπων δυναμικών γραμμών (ή ισοδύναμα των γραμμών ροής στην περίπτωση της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής).

Αξίζει να αναφερθεί εδώ, ότι η υπόθεση της συμμετρίας αυτοομοιότητας έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν σε πολλές μελέτες (κυρίως αστροφυσικών πιδάκων), στις οποίες έχουν προκύψει μάλιστα και οι δύο μεγάλες οικογένειες αυτοόμοιων λύσεων: τα ακτινικά ($\chi = \theta$) και τα μεσημβρινά ($\chi = r$) αυτοόμοια μοντέλα (Vlahakis, N. PhD thesis, 1998 [13]) (όπου r και θ σφαιρικές συντεταγμένες). Ένα κλασσικό πλέον παράδειγμα ακτινικά αυτοόμοιου μοντέλου για πίδακες, είναι αυτό των Blandford

και Payne (1982) [2].

Κάνοντας λοιπόν και εμείς εδώ την υπόθεση της συμμετρίας αυτοομοιότητας, όλες οι άγνωστες φυσικές ποσότητες $Q(r, \theta)$ του συστήματός μας μπορούν να γραφούν σαν το γινόμενο δύο συναρτήσεων: μίας συνάρτησης που εξαρτάται από την ακτινική απόσταση r και μίας που εξαρτάται από την γωνία θ (σε σφαιρικές συντεταγμένες), δηλαδή:

$$Q(r, \theta) = r^{\lambda_Q} f_Q(\theta) \quad (3.1)$$

Η γωνία θ των σφαιρικών συντεταγμένων είναι εδώ η αυτοόμοια μεταβλητή μας, ενώ οι συναρτήσεις $f_Q(\theta)$ είναι τώρα οι άγνωστοι του προβλήματός μας. Επειδή η δύναμη της βαρύτητας, η οποία είναι ένας νόμος δύναμης, παίζει κυρίαρχο ρόλο στην δυναμική του δίσκου, επιλέξαμε να γράψουμε αντίστοιχα τα ακτινικά κομμάτια των συναρτήσεων ως νόμους δύναμης. Όσον αφορά την τιμή του εκθέτη λ_Q που αντιστοιχεί στην κάθε φυσική ποσότητα, αυτή θα προσδιοριστεί παρακάτω χρησιμοποιώντας την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τις εκφράσεις για τις διάφορες φυσικές ποσότητες που φάχνουμε, μέσα στα πλαίσια της ακτινικής αυτοομοιότητας, δουλεύοντας σε σφαιρικές συντεταγμένες. Ξεκινάμε γράφοντας την συνάρτηση μαγνητικής ροής ως εξής:

$$a(r, \theta) = r^\beta f_a(\theta) \quad (3.2)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή, μπορούμε να βρούμε την έκφραση για τις δύο συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πολοειδές επίπεδο:

$$B_r(r, \theta) = \frac{r^{(\beta-2)}}{\sin \theta} f'_a(\theta) \quad \text{και} \quad B_\theta(r, \theta) = -\beta \frac{r^{(\beta-2)}}{\sin \theta} f_a(\theta) \quad (3.3)$$

όπου $\lambda_{B_r} = \lambda_{B_\theta} = \beta - 2$, ενώ με τον τόνο θα συμβολίζουμε από εδώ και πέρα την παράγωγο ως προς την αυτοόμοια μεταβλητή θ . Επιπλέον, η αζιμουθιακή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου γράφεται:

$$B_\varphi(r, \theta) = r^{\lambda_{B_\varphi}} f_1(\theta) \quad (3.4)$$

Όσον αφορά τώρα τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας, αυτές γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= r^{\lambda_{u_r}} f_2(\theta) \\ u_\theta(r, \theta) &= r^{\lambda_{u_\theta}} f_3(\theta) \\ u_\varphi(r, \theta) &= \Omega(r, \theta) r \sin \theta = r^{(\lambda_\Omega+1)} \omega(\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

ενώ για τις συναρτήσεις της πυκνότητας, της πίεσης και της θερμοκρασίας έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho(r, \theta) &= r^{\lambda_\rho} f_4(\theta) \\ P(r, \theta) &= r^{\lambda_P} f_5(\theta) \\ T(r, \theta) &= r^{\lambda_T} f_6(\theta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Τέλος, για το ηλεκτρικό δυναμικό που θα χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση επαγωγής γράφουμε:

$$\Phi(r, \theta) = r^{\lambda_\Phi} f_\Phi(\theta) \quad (3.7)$$

Εκτός όμως από τους παραπάνω αγνώστους του συστήματός μας, θα γράψουμε τώρα μέσα στα πλαίσια της ακτινικής αυτομοιότητας και τους συντελεστές μεταφοράς που αφορούν το κινηματικό ιξώδες ν_v , καθώς και την διάχυση του μαγνητικού πεδίου μέσα στον δίσκο στο πολοειδές επίπεδο η_p και στην αζιμουθιακή διεύθυνση η_φ . Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \nu_v(r, \theta) &= r^{\lambda_{\nu_v}} f_{\nu_v}(\theta) \\ \eta_p(r, \theta) &= r^{\lambda_{\eta_p}} m_p(\theta) \\ \eta_\varphi(r, \theta) &= r^{\lambda_{\eta_\varphi}} m_t(\theta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου η μορφή των συναρτήσεων $f_{\nu_v}(\theta)$, $m_p(\theta)$ και $m_t(\theta)$ μέσα στον δίσκο θα επιλεχθεί από εμάς αργότερα.

3.2 Σύστημα διαφορικών εξισώσεων

Έχοντας γράψει τώρα όλες τις φυσικές ποσότητες στην μορφή της εξίσωσης 3.1, είμαστε σε θέση να μετασχηματίσουμε το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μη-ιδεατής MHD, σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, με παραγώγους μόνο ως προς την μεταβλητή θ , αλλά και να προσδιορίσουμε τους εκθέτες στους νόμους δύναμης των διαφόρων φυσικών ποσοτήτων. Θα ξεκινήσουμε με την εξίσωση ορμής.

3.2.1 Εξίσωση ορμής

Η εξίσωση ορμής μπορεί να γραφεί στην στην περίπτωση της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής (για στάσιμη κατάσταση):

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}\Phi_G + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \quad (3.9)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι η κλίση της πίεσης, ο δεύτερος η βαρύτητα, ο τρίτος η δύναμη Lorentz και ο τέταρτος οι δυνάμεις λόγω ιξώδους. Πριν ασχοληθούμε με την κάθε μία συνιστώσα της εξίσωσης αυτής, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την μορφή που θα έχουν τα ρεύματα, καθώς και ο τελευταίος όρος λόγω ιξώδους.

Γνωρίζουμε ότι σε έναν αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης μπορούμε να έχουμε απαγωγή στροφορμής λόγω ύπαρξης πιδάκων (magnetic torques, το υλικό που φεύγει από τον δίσκο κουβαλά μαζί του ένα μέρος της στροφορμής) ή και απαγωγή στροφορμής λόγω ροπών που ασκούνται στον δίσκο από το ιξώδες (viscous torques).

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να ορίσουμε έναν αδιάστατο λόγο Λ , ο οποίος μας δείχνει ποιός από τους δύο μηχανισμούς υπερισχύει:

$$\Lambda = \left| \frac{\left(\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \hat{\phi}}{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\phi}} \right| \quad (3.10)$$

όπου ο αριθμητής εκφράζει τις ροπές λόγω μαγνητικού πεδίου, ενώ ο παρανομαστής της ροπές λόγω ιξώδους. Για $\Lambda < 1$ το ιξώδες είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής, ενώ για $\Lambda \geq 1$ η απαγωγή γίνεται κυρίως μέσω των ροπών από το μαγνητικό πεδίο (πίδακες).

Η απαγωγή στροφορμής λόγω ύπαρξης ιξώδους στον δίσκο, οφείλεται στην μεταφορά ορμής από την $\hat{\phi}$ στην $\hat{\omega}$ διεύθυνση, το οποίο εκφράζεται μέσω του στοιχείου $\sigma_{\omega\phi}$ του ταυυστή ιξώδους \mathbf{T} (σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\omega\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

όπου έχει γίνει η υπόθεση ότι τα υπόλοιπα στοιχεία του ταυυστή δεν συνεισφέρουν σημαντικά στο πρόβλημά μας, οπότε θεωρούνται αμελητέα (μηδενικά). Επειδή όμως εμείς δουλεύουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες, θα πρέπει να γράψουμε και τον \mathbf{T} σε σφαιρικές. Μετά τους κατάλληλους μετασχηματισμούς, αυτός παίρνει τελικά την μορφή (σε σφαιρικές):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\theta\sigma_{\omega\phi} \\ 0 & 0 & \cos\theta\sigma_{\omega\phi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Θα κάνουμε επίσης εδώ την υπόθεση ότι αφού ο δίσκος είναι αρκετά λεπτός (το $\theta \simeq \pi/2$ στο εσωτερικό του), το στοιχείο του ταυυστή \mathbf{T} σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα είναι περίπου ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο σε σφαιρικές, δηλαδή: $\sigma_{\omega\phi} \simeq \sigma_{r\phi}$, και επιπλέον θα ισχύουν: $\sin\theta \simeq 1$ και $\cos\theta \simeq 0$. Άρα τελικά το μόνο στοιχείο του \mathbf{T} που απομένει σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι το $\sigma_{r\phi}$, το οποίο γνωρίζουμε από την δυναμική των ρευστών ότι δίνεται από την σχέση [17]:

$$\sigma_{r\phi} = \eta_\nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) = \rho \nu_\nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \quad (3.13)$$

όπου η_ν το δυναμικό και ν_ν το κινηματικό ιξώδες, τα οποία συνδέονται μέσω της σχέσης: $\eta_\nu = \rho \nu_\nu$. Αντικαθιστώντας τώρα στην παραπάνω σχέση τις εκφράσεις για τα ρ , ν_ν και u_ϕ από τις 3.5, 3.6 και 3.8, παίρνουμε την έκφραση για το στοιχείο $\sigma_{r\phi}$:

$$\sigma_{r\phi} = \lambda_\Omega r^{(\lambda_\rho + \lambda_{\nu_\nu} + \lambda_\Omega)} \sin\theta f_4(\theta) f_{\nu_\nu}(\theta) \omega(\theta) \quad (3.14)$$

και χρησιμοποιώντας τυπολόγιο υπολογίζουμε τελικά την έκφραση της δύναμης λόγω ιξώδους στην εξίσωση ορμής:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \left(\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\phi}}{r} \right) \cdot \hat{\phi} \quad (3.15)$$

όπου το $\sigma_{r\varphi}$ δίνεται από την σχέση 3.14.

Στην συνέχεια θα γράψουμε τις συνιστώσες του ρεύματος \vec{J} , έτσι ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την δύναμη Lorentz στην εξίσωση ορμής. Αυτές βρίσκονται από τον νόμο του Ampère: $\vec{J} = (c/4\pi)\vec{\nabla} \times \vec{B}$, αφού αντικαταστήσουμε σε αυτόν τις εκφράσεις για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου από τις σχέσεις 3.3 και 3.4. Παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο:

$$\begin{aligned} J_r(r, \theta) &= \frac{c}{4\pi r} r^{\lambda_{B_\phi}} (f_1'(\theta) + \cot \theta f_1(\theta)) \\ J_\theta(r, \theta) &= -\frac{c}{4\pi r} r^{\lambda_{B_\phi}} (1 + \lambda_{B_\phi}) f_1(\theta) \\ J_\phi(r, \theta) &= -\frac{c}{4\pi r \sin \theta} r^{(\beta-2)} (\beta(\beta-1) f_a(\theta) - \cot \theta f_a'(\theta) + f_a''(\theta)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Τώρα, έχοντας υπολογίσει τα παραπάνω, μπορούμε πλέον να ασχοληθούμε ξεχωριστά με την κάθε συνιστώσα της εξίσωσης ορμής.

Συνιστώσα εξίσωσης ορμής στην \hat{r} διεύθυνση

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση 3.9 με το μοναδιαίο άνυσμα στην ακτινική διεύθυνση (\hat{r}), παίρνουμε την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{c} (J_\theta B_\phi - J_\phi B_\theta) \quad (3.17)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα αυτή την εξίσωση, θα εξάγουμε τις σχέσεις, αλλά και τις τιμές, μεταξύ των εκθετών στους νόμους δύναμης των διάφορων φυσικών ποσοτήτων. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις εκφράσεις για τις ταχύτητες, τα μαγνητικά πεδία, την πυκνότητα και την πίεση από τις 3.3, 3.4, 3.5 και 3.6, καθώς και τα ρεύματα από την 3.16, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & r^{(\lambda_\rho + 2\lambda_{u_r})} \lambda_{u_r} f_2^2 f_4 + r^{(\lambda_\rho + \lambda_{u_\theta} + \lambda_{u_r})} f_2' f_3 f_4 - r^{(\lambda_\rho + 2\lambda_{u_\theta})} f_3^2 f_4 - \\ & - r^{(\lambda_\rho + 2\lambda_\Omega + 2)} \omega^2 f_4 \sin^2 \theta + \lambda_P r^{\lambda_P} f_0 + r^{(\lambda_\rho - 1)} GM f_4 + \frac{r^{2\lambda_{B_\phi}}}{4\pi} (1 + \lambda_{B_\phi}) f_1^2 + \\ & + \frac{\beta^2(\beta-1)}{4\pi \sin^2 \theta} r^{2(\beta-2)} f_a^2 - \frac{\beta \cos \theta}{4\pi \sin^3 \theta} r^{2(\beta-2)} f_a f_a' + \frac{\beta}{4\pi \sin^2 \theta} r^{2(\beta-2)} f_a f_a'' = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Απαιτώντας τώρα όλοι οι εκθέτες των r να είναι ίσοι με την μονάδα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \lambda_\rho + 2\lambda_{u_r} &= 1, & \lambda_\rho + \lambda_{u_\theta} + \lambda_{u_r} &= 1 \\ \lambda_\rho + 2\lambda_{u_\theta} &= 1, & \lambda_\rho + 2\lambda_\Omega + 2 &= 1 \\ \lambda_P &= 1, & \lambda_\rho - 1 &= 1 \\ 2\lambda_{B_\phi} &= 1, & 2(\beta - 2) &= 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

οι οποίες, εάν συνδυαστούν, μας δίνουν τελικά:

$$\begin{aligned}\lambda_\Omega &= -\frac{3}{2}, & \lambda_P &= \lambda_\rho - 1, & \lambda_\rho &= 2\beta - 3 \\ \lambda_{u_r} &= \lambda_{u_\theta} = \lambda_{u_\varphi} &= -\frac{1}{2} \\ \lambda_{B_r} &= \lambda_{B_\theta} = \lambda_{B_\varphi} &= (\beta - 2)\end{aligned}\quad (3.20)$$

Τέλος, από την παραπάνω απαίτηση να ισχύουν οι σχέσεις αυτές για τους εκθέτες, και ότι το $r \neq 0$, παίρνουμε και την ακόλουθη διαφορική εξίσωση για την \hat{r} συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}f_2^2 f_4 + f_2' f_3 f_4 - f_3^2 f_4 - \omega^2 f_4 \sin^2 \theta + 2(\beta - 2)f_0 + GMf_4 + \frac{(\beta - 1)}{4\pi}f_1^2 + \\ + \frac{\beta^2(\beta - 1)}{4\pi \sin^2 \theta}f_a^2 - \frac{\beta \cos \theta}{4\pi \sin^3 \theta}f_a f_a' + \frac{\beta}{4\pi \sin^2 \theta}f_a f_a'' = 0\end{aligned}\quad (3.21)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι υποθέτωντας την συμμετρία αυτοομοιότητας για τις λύσεις μας, καταφέραμε να μετατρέψουμε μία μερική διαφορική εξίσωση σε συνήθη, με παραγώγους μόνο ως προς την αυτοομοία μεταβλητή θ (συμβολίζονται με τόνο).

Συνιστώσα εξίσωσης ορμής στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση

Θα ακολουθήσουμε τώρα την ίδια διαδικασία με πριν, αλλά για την $\hat{\theta}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, η οποία γράφεται:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{c} (J_r B_\varphi - J_\varphi B_r) \quad (3.22)$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή όλα τα φυσικά μεγέθη από τις σχέσεις 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 και 3.16, και χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις 3.20 που προέκυψαν προηγουμένως από την απαίτηση οι εκθέτες των r να είναι μονάδα (και το $r \neq 0$), παίρνουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση για την $\hat{\theta}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f_2 f_3 f_4 + f_3 f_4 f_3' - \omega^2 f_4 \cot \theta \sin^2 \theta + f_0' + \frac{f_1 f_1'}{4\pi} + \\ + \frac{\cos \theta}{4\pi \sin \theta} f_1^2 + \frac{\beta(\beta - 1)}{4\pi \sin^2 \theta} f_a f_a' - \frac{\cos \theta}{4\pi \sin^3 \theta} f_a'^2 + \frac{f_a' f_a''}{4\pi \sin^2 \theta} = 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

η οποία όπως βλέπουμε, έχει μετατραπεί πλέον και αυτή σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς θ .

Συνιστώσα εξίσωσης ορμής στην $\hat{\varphi}$ διεύθυνση

Η $\hat{\varphi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής γράφεται:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{u_\varphi u_\theta \cot \theta}{r} \right) = \frac{1}{c} (J_r B_\theta - J_\theta B_r) + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \quad (3.24)$$

Αντικαθιστώντας και σε αυτή όλες τις φυσικές ποσότητες από τις σχέσεις 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.8, 3.14 και 3.16, και χρησιμοποιώντας πάλι τις σχέσεις 3.20 για τους εκθέτες, παίρνουμε την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση για την $\hat{\psi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}f_2f_4\omega \sin \theta + 2f_3f_4\omega \cos \theta + f_3f_4\omega' \sin \theta + \frac{\beta}{4\pi \sin \theta}f_a f_1' + \\ & + \frac{\beta \cos \theta}{4\pi \sin^2 \theta}f_a f_1 - \frac{(\beta - 1)}{4\pi \sin \theta}f_a' f_1 + 3(\beta - 1)\omega f_4 f_{\nu_v} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

καθώς και την τιμή του εκθέτη για την ακτινική εξάρτηση του συντελεστή κινηματικού ιξώδους $\nu_v(r, \theta)$, η οποία βρίσκεται ίση με:

$$\lambda_{\nu_v} = \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

Η τιμή αυτή προέκυψε πάλι από την απαίτηση όλοι οι εκθέτες των r να είναι μονάδα.

Επιπλέον, θα διαλέξουμε εδώ την μορφή της συνάρτησης $f_{\nu_v}(\theta)$, η οποία θα πρέπει να είναι μέγιστη στο επίπεδο $z = 0$ (midplane) και να μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από αυτό, παίρνοντας τελικά μηδενική τιμή στην περιοχή έξω από τον δίσκο (όπου δεν υπάρχει πλέον ιξώδες). Για τον λόγο αυτό διαλέγουμε την $f_{\nu_v}(\theta)$ να έχει την μορφή:

$$f_{\nu_v}(\theta) = f_{\nu_v,0} \cdot \exp \left[- \left(\frac{z}{h(r)} \right)^4 \right] = f_{\nu_v,0} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\cos \theta}{\epsilon \sin \theta} \right)^4 \right] \quad (3.27)$$

όπου $f_{\nu_v,0}$ είναι η τιμή της συνάρτησης στο midplane του δίσκου ($\theta = \pi/2$).

3.2.2 Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση συνέχειας (όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο), μπορεί να ολοκληρωθεί και να δώσει τις συνιστώσες της ταχύτητας πάνω στο πολοειδές επίπεδο συναρτήσει της συνάρτησης ροής μάζας Ψ :

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \vec{u}_p = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{\theta} \quad (3.28)$$

Παίρνοντας τώρα την ακτινική συνιστώσα αυτής της σχέσης και αντικαθιστώντας σε αυτή τα u_r και ρ από τις 3.5 και 3.6, θα έχουμε ότι:

$$f_2(\theta) = r^{-\xi} \frac{1}{4\pi f_4(\theta) \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.29)$$

όπου $\xi = \lambda_\rho + \lambda_{u_r} + 2$. Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι ενώ στο αριστερό μέλος έχουμε μία συνάρτηση του θ , στο δεξί μέλος έχουμε συναρτήσεις του θ αλλά και του r . Οπότε ο μόνος τρόπος να ισχύει αυτή η σχέση, είναι η ροή μάζας να γραφτεί στην μορφή:

$$\Psi(r, \theta) = r^\xi f_\Psi(\theta) \quad (3.30)$$

έτσι ώστε να αναιρούνται οι ακτινικές εξαρτήσεις στην σχέση 3.10. Παρατηρούμε επίσης ότι η παράμετρος ξ συνδέεται με τον ρυθμό πρόσπτωσης μάζας στον δίσκο, αφού: $\dot{M}_a \sim \Psi \sim r^\xi$.

Για έναν τυπικό δίσκο προσαύξησης από τον οποίο δεν έχουμε εκροή υλικού, περιμένουμε το \dot{M}_a να είναι σταθερό και ανεξάρτητο της ακτινικής απόστασης r , κάτι το οποίο συμβαίνει όταν το $\xi = 0$. Αντίθετα, σε έναν δίσκο προσαύξησης στον οποίο έχουμε εκροή υλικού από την επιφάνειά του, το \dot{M}_a αλλάζει με την ακτινική απόσταση r , και το κατά πόσο αλλάζει εξαρτάται από τον εκθέτη ξ . Για τον λόγο αυτό, η παράμετρος ξ ονομάζεται ejection index και είναι ένα μέτρο της ικανότητας του δίσκου να χάνει υλικό. Όσο μεγαλύτερο το ξ , τόσο περισσότερο υλικό εκρέει από αυτόν και μεταφέρεται στους πίδακες.

Θα συνδέσουμε τώρα την παράμετρο αυτή με το β . Από την εξίσωση ορμής γνωρίζουμε ότι $\lambda_{u_r} = -1/2$ και $\lambda_\rho = 2\beta - 3$, οπότε μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\beta = \frac{3}{4} + \frac{\xi}{2} \quad (3.31)$$

Έχει ενδιαφέρον να σχολιάσουμε εδώ ότι οι λύσεις των Blandford και Payne στην εργασία τους το 1982 [2], αντιστοιχούν σε $\beta = 3/4$, δηλαδή σε ejection index $\xi = 0$.

Γυρνώντας τώρα πίσω στην εξίσωση συνέχειας, αυτή σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) = 0 \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα ρ , u_r και u_θ σε αυτή, από τις σχέσεις 3.5 και 3.6, σε συνδυασμό με τις σχέσεις 3.20, παίρνουμε την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$f_4 f_3' + f_3 f_4' + \left(2\beta - \frac{3}{2}\right) f_2 f_4 + \cot \theta f_3 f_4 = 0 \quad (3.33)$$

όπου και πάλι οι τόνοι συμβολίζουν τις παραγώγους ως προς θ .

3.2.3 Εξίσωση επαγωγής

Η επόμενη εξίσωση με την οποία θα ασχοληθούμε είναι αυτή της επαγωγής, η οποία στην περίπτωση της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής γράφεται:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times [\eta(\vec{\nabla} \times \vec{B})] = 0 \quad (3.34)$$

όπου με η συμβολίζουμε τον τανυστή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_p(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \eta_p(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_\varphi(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

με τα $\eta_p(r, \theta)$ και $\eta_\varphi(r, \theta)$ να δίνονται από τις σχέσεις 3.8. Παρατηρούμε ότι στο πρόβλημά μας το η δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται μέσα στον δισκό και θα πρέπει να μηδενίζεται έξω από αυτόν.

Η εξίσωση επαγωγής μπορεί να γραφεί λίγο διαφορετικά, ως ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου:

$$\vec{\nabla} \times [(\vec{u} \times \vec{B}) - \eta(\vec{\nabla} \times \vec{B})] = 0 \quad (3.36)$$

το οποίο (αφού ο στροβιλισμός του είναι μηδενικός), μπορεί να γραφεί με την σειρά του ως η κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού:

$$(\vec{u} \times \vec{B}) - \eta(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = c\vec{\nabla}\Phi(r, \theta) \quad (3.37)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός και $\Phi(r, \theta)$ το ηλεκτρικό δυναμικό. Ο λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε αυτή η μορφή του δυναμικού, είναι για να μπορούμε να εξάγουμε από την σχέση 3.37 τον νόμο του Ohm στην ιδεατή περίπτωση (άπειρη αγωγιμότητα, το $\eta = 0$), γνωρίζοντας ότι ισχύει και η σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$.

Ακολουθώντας τώρα την ίδια μεθοδολογία με πριν, θα αναλύσουμε την εξίσωση επαγωγής στις τρεις συνιστώσες της, και χρησιμοποιώντας την αυτοομοιότητα θα μετατρέψουμε και εδώ τις μερικές διαφορικές εξισώσεις σε συνήθειες.

Συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής στην \hat{r} διεύθυνση

Πολλαπλασιάζοντας την 3.37 με το μοναδιαίο άνωσμα \hat{r} , παίρνουμε την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής:

$$u_\theta B_\varphi - u_\varphi B_\theta = \frac{\eta_p}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta) + c \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (3.38)$$

Αντικαθιστώντας τώρα σε αυτή όλες τις φυσικές ποσότητες από τις σχέσεις 3.3, 3.4, 3.5, 3.7 και 3.8, και χρησιμοποιώντας τις τιμές των εκθετών των r από την σχέση 3.20, παίρνουμε την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση για την \hat{r} συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής:

$$f_1 f_3 + \beta f_a \omega - c \left(\beta - \frac{3}{2} \right) f_\Phi - m_p (f'_1 + \cot \theta f_1) = 0 \quad (3.39)$$

καθώς και την τιμή των εκθετών για τις ακτινικές εξαρτήσεις του ηλεκτρικού δυναμικού $\Phi(r, \theta)$ και της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στο πολοειδές επίπεδο $\eta_p(r, \theta)$:

$$\lambda_\Phi = \beta - \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{\eta_p} = \frac{1}{2} \quad (3.40)$$

Οι δύο αυτές τιμές για τους εκθέτες προέκυψαν πάλι από την σχέση 3.20, καθώς και την απαίτηση όλοι οι εκθέτες να είναι ίσοι με μονάδα.

Συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση

Η $\hat{\theta}$ συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής γράφεται:

$$u_\varphi B_r - u_r B_\varphi = -\frac{\eta_p}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) + \frac{c}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3.41)$$

Αντικαθιστώντας πάλι και σε αυτή όλα τα φυσικά μεγέθη από τις σχέσεις 3.3, 3.4, 3.5, 3.7 και 3.8, και χρησιμοποιώντας τις τιμές των εκθετών των r από την σχέση 3.20, παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για την θ συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής:

$$f_1 f_2 - \omega f'_a + c f'_\Phi - m_p (\beta - 1) f_1 = 0 \quad (3.42)$$

η οποία όπως βλέπουμε έχει μετατραπεί και αυτή σε μία σηνήθη διαφορική εξίσωση με παραγώγους ως προς θ .

Συνιστώσα εξίσωσης επαγωγής στην $\hat{\varphi}$ διεύθυνση

Τέλος, η $\hat{\varphi}$ συνιστώσα της εξίσωσης επαγωγής γράφεται:

$$u_r B_\theta - u_\theta B_r = \frac{\eta_t}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.43)$$

και χρησιμοποιώντας πάλι τις σχέσεις 3.3, 3.4, 3.5, 3.7 και 3.8, παίρνουμε την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\beta f_2 f_a + f_3 f'_a - m_t [\beta (\beta - 1) f_a - \cot \theta f'_a + f''_a] = 0 \quad (3.44)$$

καθώς και την τιμή του εκθέτη του r για την διάχυση του μαγνητικού πεδίου στην αζιμουθιακή διεύθυνση $\eta_t(r, \theta)$:

$$\lambda_{\eta_t} = \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

Η τιμή αυτή προέκυψε όπως σε όλα τα προηγούμενα χρησιμοποιώντας την σχέση 3.20 και την απαίτηση όλοι οι εκθέτες των r να είναι ίσοι με μονάδα.

Πριν συνεχίσουμε στις υπόλοιπες εξισώσεις που απομένουν, θα ορίσουμε εδώ την μορφή των συναρτήσεων $m_p(\theta)$ και $m_t(\theta)$ που υπεισέρχονται στα $\eta_p(r, \theta)$ και $\eta_\varphi(r, \theta)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} m_p(\theta) &= m_{p0} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{h(r)} \right)^2 \right] = m_{p0} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\theta)}{\epsilon \sin \theta} \right)^2 \right] \\ m_t(\theta) &= m_{t0} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{h(r)} \right)^2 \right] = m_{t0} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\theta)}{\epsilon \sin \theta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

όπου m_{p0} και m_{t0} είναι οι τιμές της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στο midplane του δίσκου ($\theta = \pi/2$). Ο λόγος που διαλέξαμε αυτή την μορφή (Γκαουσιανές), είναι ότι θέλουμε η διάχυση να είναι μέγιστη στο midplane του δίσκου, να ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε από αυτό και τέλος να γίνεται μηδενική έξω από τον δίσκο, όπου αρχίζει η περιοχή της ιδεατής MHD.

3.2.4 Καταστατική εξίσωση

Η καταστατική εξίσωση δεν είναι μία διαφορική εξίσωση, αλλά μία αλγεβρική εξίσωση. Μας χρειάζεται όμως για να είναι κλειστό το σύστημά μας (όσες εξισώσεις τόσοι άγνωστοι) και να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία γνωρίζοντας την πίεση και την πυκνότητα. Στο πρόβλημά μας θα χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων η οποία γράφεται:

$$P = \rho \left(\frac{k_B}{\mu m} \right) T \quad (3.47)$$

όπου εδώ μ είναι το μέσο μοριακό βάρος και m η μάζα του πρωτονίου. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις της πίεσης, πυκνότητας και θερμοκρασίας από την 3.6 σε αυτή, και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για τους εκθέτες των r από την 3.20, παίρνουμε ότι:

$$f_0 = \left(\frac{k_B}{\mu m} \right) f_4 f_6 \quad (3.48)$$

καθώς και την τιμή του εκθέτη για την ακτινική εξάρτηση της συνάρτησης θερμοκρασίας $T(r, \theta)$:

$$\lambda_T = -1 \quad (3.49)$$

Από την τελευταία αλγεβρική εξίσωση 3.48, μπορούμε γνωρίζοντας τα f_0 και f_4 που αντιστοιχούν στην πίεση και την πυκνότητα, να υπολογίσουμε την f_6 που αντιστοιχεί στην θερμοκρασία.

3.2.5 Εξίσωση ενέργειας

Η τελευταία εξίσωση που χρειαζόμαστε για να κλείσει το σύστημά μας, είναι αυτή της ενέργειας. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η εξίσωση αυτή προκύπτει από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο και μπορεί να γραφεί ως [16]:

$$Q = \frac{1}{\gamma - 1} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (3.50)$$

όπου Q είναι ο ρυθμός παροχής ή απώλειας ενέργειας του πλάσματος (λόγω διάφορων μηχανισμών θέρμανσης ή ψύξης αυτού) και γ είναι ο πολυτροπικός δείκτης. Στην περίπτωση που η κίνηση πάνω σε μία γραμμή ροής είναι αδιαβατική ($Q = 0$), δηλαδή δεν έχω για κάποιο λόγο θέρμανση ή ψύξη, τότε η παραπάνω εξίσωση ολοκληρώνεται και δίνει την γνωστή πολυτροπική σχέση (για ιδεατή mhd):

$$P = K(a)\rho^\gamma \quad (3.51)$$

όπου $K(a)$ είναι μία σταθερά πάνω σε συγκεκριμένη δυναμική γραμμή του μαγνητικού πεδίου $a = \text{constant}$ (η οποία στην περίπτωση ενός δίσκου προσαύξης όπου έχουμε διάχυση του μαγνητικού πεδίου, δεν ταυτίζεται με την γραμμή ροής). Τις περισσότερες φορές την θέση της εξίσωσης ενέργειας παίρνει η τελευταία σχέση 3.51,

με την υπόθεση πάντα ότι το $Q = 0$ (για παράδειγμα στην εργασία των Casse & Ferreira, 2000a [3]).

Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτό, είναι ότι η πλήρης εξίσωση ενέργειας είναι αρκετά δύσκολο να επιλυθεί ταυτόχρονα με τις υπόλοιπες διαφορικές εξισώσεις. Στην πραγματικότητα, το πλάσμα του δίσκου μπορεί να κερδίζει ενέργεια λόγω θέρμανσης Joule, ιξώδους, τυρβώδων κινήσεων του ή ακόμα και από την ύπαρξη κάποιας εξωτερικής πηγής ενέργειας. Αντίστοιχα, μπορεί να χάνει ενέργεια λόγω ύπαρξης τύρβης ή από εκπομπή ακτινοβολίας. Από αυτά καταλαβαίνουμε ότι το Q δεν μπορεί να είναι στην πραγματικότητα μηδενικό, αλλά θα είναι ίσο με τη διαφορά του ρυθμού της εισερχόμενης ενέργειας στο σύστημα με τον ρυθμό της εξερχόμενης από αυτό.

Στην εργασία τους το 2000 οι Casse και Ferreira (Casse & Ferreira, 2000b [4]), αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της θέρμανσης του δίσκου με τον ακόλουθο τρόπο: αρχικά αγνοούν την συνεισφορά της τύρβης στην θέρμανση-ψύξη του δίσκου (ελλείψη κιάλας μιας θεωρίας που να περιγράφει την τύρβη) και θεωρούν ότι η ολική ισχύς που προσφέρεται στον δίσκο από αυτή είναι μηδενική, δηλαδή:

$$P_{turb} = \int_V (\Gamma_{turb} - \Lambda_{turb}) dV = 0 \quad (3.52)$$

όπου Γ_{turb} και Λ_{turb} είναι οι όροι θέρμανσης και ψύξης του πλάσματος του δίσκου λόγω τυρβώδων κινήσεων στο εσωτερικό του (το ολοκλήρωμα είναι σε όλο τον όγκο του δίσκου). Αυτό σημαίνει ότι στο μοντέλο τους η τύρβη δεν συνεισφέρει ενεργειακά στον δίσκο, αλλά μπορεί μόνο να αναδιανείμει την ήδη υπάρχουσα ενέργεια στα διάφορα μέρη του.

Θεωρώντας επιπλέον ότι δεν υπάρχει κάποια εξωτερική πηγή θερμότητας στο περιβάλλον του δίσκου και ότι η κυρίαρχη συνεισφορά στην ενέργεια του πλάσματος είναι η βαρυτική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την πρόσπτωση, αναγνωρίζουν άλλες δύο πιθανές πηγές θέρμανσης: την θέρμανση Joule και την θέρμανση λόγω ιξώδους, οι οποίες δημιουργούν ένα «ρεζερβουάρ» ενέργειας στο εσωτερικό του δίσκου. Οι δύο αυτές πηγές θέρμανσης μπορούν να γραφούν ως:

$$\Gamma_{eff} = \frac{4\pi}{c^2} (\boldsymbol{\eta} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + \eta_\nu \left(\boldsymbol{\omega} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^2 \quad (3.53)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην θέρμανση Joule και ο δεύτερος στην θέρμανση λόγω ιξώδους.

Όσον αφορά την κλασική εικόνα ενός δίσκου προσαύξησης, ολόκληρη αυτή η ενέργεια αναμένεται να ακτινοβοληθεί από τις επιφάνειες του δίσκου. Αντίθετα, στην εικόνα ενός δίσκου από τον οποίο εκρέουν πίδακες, οι Casse και Ferreira θεωρούν ότι ένα κλάσμα από αυτή την ενέργεια δεν ακτινοβολείται, παραμένει στον δίσκο και τροφοδοτεί με επιπλέον ενέργεια τους πίδακες. Το ποσοστό της ενέργειας από θέρμανση (είτε Joule είτε λόγω ιξώδους) που παραμένει στον δίσκο, εξαρτάται από μία παράμετρο f , η οποία ορίζεται ως:

$$f = \frac{\int_V Q dV}{\int_V \Gamma_{eff} dV} \quad (3.54)$$

με το $f \in [0, 1]$, όπου το $f = 0$ αντιστοιχεί σε μία «ψυχρή» εκροή που οφείλεται αποκλειστικά στο μαγνητικό πεδίο και το $f = 1$ σε μία «θερμή» εκροή όπου ο πίδακας αντλεί θερμική ενέργεια από το «ρεζερβουάρ» του δίσκου (magneto-thermally driven jets).

Τέλος, κάνοντας αυτές τις υποθέσεις και μέσα στα πλαίσια της αυτοομοιότητας, οι Casse και Ferreira [4] προχωρούν στην επίλυση της εξίσωσης ενέργειας διαλέγοντας όμως εκείνοι την μορφή της συνάρτησης του ρυθμού θέρμανσης/ψύξης του υλικού του δίσκου, δηλαδή γράφουν (σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$Q = \varpi^{\lambda_Q} F_Q(x) \quad (3.55)$$

όπου $x = z/h(\varpi)$ (η αυτοόμοια μεταβλητή που χρησιμοποιούν), $\lambda_Q = \xi - 4$ και η μορφή της συνάρτησης $F_Q(x)$ επιλέγεται από αυτούς με το χέρι.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να γραφεί η εξίσωση ενέργειας λαμβάνοντας υπόψιν την θέρμανση Joule (Joule heating), καθώς και την θέρμανση λόγω ιξώδους (viscous heating). Το Q σε αυτή την περίπτωση γράφεται:

$$Q = \frac{4\pi}{c^2} (\boldsymbol{\eta} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + \eta_\nu \left(\varpi \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} \right)^2 = \frac{4\pi}{c^2} (\boldsymbol{\eta} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + \frac{\sigma_{\varpi\varphi}^2}{\eta_\nu} \quad (3.56)$$

όπου συσχετίσαμε τον όρο θέρμανσης λόγω ιξώδους με το στοιχείο $\sigma_{\varpi\varphi}$ του ταυ-στή \mathbf{T} , χρησιμοποιώντας τυπολόγιο. Επειδή όμως εμείς δουλεύουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες και όχι σε κυλινδρικές, κάνοντας πάλι εδώ την υπόθεση ότι ο δίσκος είναι λεπτός (το $\theta \simeq \pi/2$ στο εσωτερικό του), το $\sigma_{\varpi\varphi} \simeq \sigma_{r\varphi}$ και η εξίσωση ενέργειας μπορεί να γραφεί (από τις 3.50 και 3.56):

$$\frac{1}{\gamma - 1} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = \frac{4\pi}{c^2} (\boldsymbol{\eta} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + \frac{\sigma_{r\varphi}^2}{\eta_\nu} \quad (3.57)$$

Αυτή την μορφή της εξίσωσης ενέργειας θα χρησιμοποιήσουμε εμείς στην συνέχεια για το πρόβλημά μας.

Όπως κάναμε προηγουμένως για όλες τις υπόλοιπες εξισώσεις, θα μετατρέψουμε τώρα και αυτή την μερική διαφορική εξίσωση σε συνήθη χρησιμοποιώντας την αυτοομοιότητα. Αντικαθιστώντας όλες τις φυσικές ποσότητες στην 3.57 από τις σχέσεις 3.5, 3.6, 3.8, 3.14, 3.16 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.20, 3.26 και 3.40 για τους εκθέτες, παίρνουμε τελικά την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) f_3 f_0' - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{f_3 f_0}{f_4} f_4' - \frac{m_p}{4\pi} (f_1'^2 + 2f_1 f_1' \cot \theta) - \\ & - \frac{m_t}{4\pi} \left[\left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 f_a'^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} f_a''^2 - \frac{2\beta(\beta - 1) \cos \theta}{\sin^3 \theta} f_a f_a' - \frac{2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} f_a' f_a'' + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta(\beta - 1)}{\sin^2 \theta} f_a f_a'' \right] - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) (2\beta - 3) f_2 f_0 + \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) 2(\beta - 2) f_0 f_2 - \\ & - \frac{m_p}{4\pi} (f_1^2 \cot^2 \theta + f_1^2 (\beta - 1)^2) - \frac{m_t \beta^2 (\beta - 1)^2}{4\pi \sin^2 \theta} f_a^2 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta f_{\nu_0} \omega^2 f_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ολοκληρώνοντας αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε εδώ συγκεντρωτικά τις σχέσεις που προέκυψαν για τους εκθέτες του ακτινικού μέρους των φυσικών ποσοτήτων, καθώς και το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στο πρόβλημά μας. Έχουμε για τους εκθέτες:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{3}{4} + \frac{\xi}{2}, & \lambda_\rho &= \xi - \frac{3}{2}, & \lambda_P &= \lambda_\rho - 1 \\
\lambda_{B_r} &= \lambda_{B_\theta} = \lambda_{B_\varphi} & &= (\beta - 2) \\
\lambda_{u_r} &= \lambda_{u_\theta} = \lambda_{u_\varphi} & &= -\frac{1}{2} \\
\lambda_{\eta_p} &= \lambda_{\eta_t} = \lambda_{\nu_v} & &= \frac{1}{2} \\
\lambda_\Omega &= -\frac{3}{2}, & \lambda_\Phi &= \beta - \frac{3}{2}, & \lambda_T &= -1
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Για την εξίσωση ορμής:

$$\begin{aligned}
\hat{r}: \quad & -\frac{1}{2}f_2^2f_4 + f_2'f_3f_4 - f_3^2f_4 - \omega^2f_4\sin^2\theta + 2(\beta-2)f_0 + GMf_4 + \frac{(\beta-1)}{4\pi}f_1^2 + \\
& + \frac{\beta^2(\beta-1)}{4\pi\sin^2\theta}f_a^2 - \frac{\beta\cos\theta}{4\pi\sin^3\theta}f_af_a' + \frac{\beta}{4\pi\sin^2\theta}f_af_a'' = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}: \quad & \frac{1}{2}f_2f_3f_4 + f_3f_4f_3' - \omega^2f_4\cot\theta\sin^2\theta + f_0' + \frac{f_1f_1'}{4\pi} + \frac{\cos\theta}{4\pi\sin\theta}f_1^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{4\pi\sin^2\theta}f_af_a' - \\
& - \frac{\cos\theta}{4\pi\sin^3\theta}f_a'^2 + \frac{f_a'f_a''}{4\pi\sin^2\theta} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}: \quad & \frac{1}{2}f_2f_4\omega\sin\theta + 2f_3f_4\omega\cos\theta + f_3f_4\omega'\sin\theta + \frac{\beta}{4\pi\sin\theta}f_af_1' + \frac{\beta\cos\theta}{4\pi\sin^2\theta}f_af_1 - \\
& - \frac{(\beta-1)}{4\pi\sin\theta}f_a'f_1 + 3(\beta-1)\omega f_4f_{\nu_v}\sin\theta = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Για την εξίσωση συνέχειας:

$$f_4f_3' + f_3f_4' + \left(2\beta - \frac{3}{2}\right)f_2f_4 + \cot\theta f_3f_4 = 0 \tag{3.61}$$

Για την επαγωγή:

$$\begin{aligned}
\hat{r}: \quad & f_1f_3 + \beta f_a\omega - c\left(\beta - \frac{3}{2}\right)f_\Phi - m_p(f_1' + \cot\theta f_1) = 0 \\
\hat{\theta}: \quad & f_1f_2 - \omega f_a' + cf_\Phi' - m_p(\beta-1)f_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\hat{\varphi}: \quad \beta f_2f_a + f_3f_a' - m_t[\beta(\beta-1)f_a - \cot\theta f_a' + f_a''] = 0$$

Για την καταστατική εξίσωση:

$$f_0 = \left(\frac{k_B}{\mu m} \right) f_4 f_6 \quad (3.63)$$

και τέλος για την εξίσωση ενέργειας:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) f_3 f'_0 - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{f_3 f_0}{f_4} f'_4 - \frac{m_p}{4\pi} (f_1'^2 + 2f_1 f_1' \cot \theta) - \\ & - \frac{m_t}{4\pi} \left[\left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 f_a'^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} f_a''^2 - \frac{2\beta(\beta-1) \cos \theta}{\sin^3 \theta} f_a f'_a - \frac{2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} f'_a f_a'' + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta(\beta-1)}{\sin^2 \theta} f_a f_a'' \right] - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) (2\beta-3) f_2 f_0 + \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) 2(\beta-2) f_0 f_2 - \\ & - \frac{m_p}{4\pi} (f_1'^2 \cot^2 \theta + f_1^2 (\beta-1)^2) - \frac{m_t}{4\pi} \frac{\beta^2 (\beta-1)^2}{\sin^2 \theta} f_a^2 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta f_{\nu_e} \omega^2 f_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

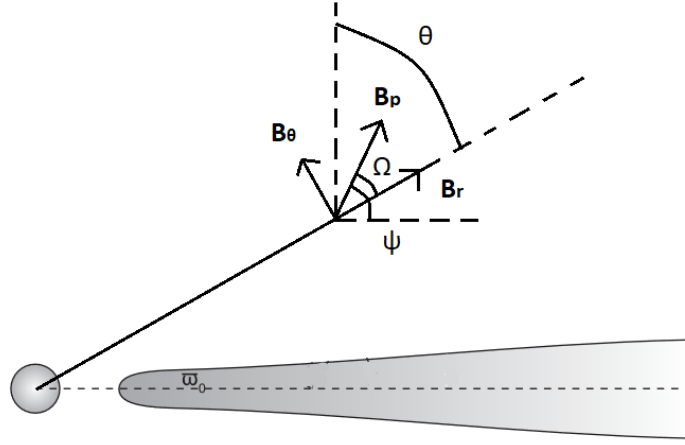
Έχουμε καταλήξει λοιπόν σε ένα κλειστό σύστημα 9 συνήθων διαφορικών εξισώσεων με 9 αγνώστους (τις συναρτήσεις $f_i(\theta)$), το οποίο μπορεί θεωρητικά να λυθεί και να μας δώσει όλες τις φυσικές ποσότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημά μας.

Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε εδώ και τις εκφράσεις που δίνουν τις τρεις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , έχοντας πλέον γνωστά τα \vec{J} , \vec{v} και \vec{B} από την επίλυση του παραπάνω συστήματος. Ο νόμος του Ohm στην περίπτωση της μη-ιδεατής MHD μας δίνει:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{4\pi\eta_p}{c^2} J_r - \frac{1}{c} (u_\theta B_\varphi - u_\varphi B_\theta) \\ E_\theta &= \frac{4\pi\eta_p}{c^2} J_\theta + \frac{1}{c} (u_r B_\varphi - u_\varphi B_r) \\ E_\varphi &= \frac{4\pi\eta_\varphi}{c^2} J_\varphi - \frac{1}{c} (u_r B_\theta - u_\theta B_r) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Παρ' όλα αυτά, το παραπάνω σύστημα παρουσιάζει κάποια προβλήματα ως προς την επίλυσή του, η οποία μπορεί να γίνει μόνο μέσω της χρήσης αριθμητικών μεθόδων στον υπολογιστή. Η εμφάνιση εξαιρετικά μη-γραμμικών όρων στην εξίσωση ενέργειας (παράγωγος του f_1 στο τετράγωνο), καθώς και το ότι πολλές από τις διαφορικές αυτές εξισώσεις είναι δευτεροτάξιες ως προς την συνάρτηση f_a (περιέχουν δεύτερες παραγωγούς αυτής), δυσκολεύουν την επίλυσή του. Ένας τρόπος να αποφύγουμε τις δεύτερες παραγωγούς της συνάρτησης f_a στις διαφορικές μας εξισώσεις, είναι να χρησιμοποιήσουμε την γωνία ψ που σχηματίζεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα και του διανύσματος του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου \vec{B}_p , όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Από την γεωμετρία του σχήματος αυτού βλέπουμε ότι $\psi - \Omega + \theta = \pi/2$, και άρα



Σχήμα 3.1: Γεωμετρία των γωνιών που χρησιμοποιούνται για την αποφυγή των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης f_a , όπου ψ είναι η γωνία μεταξύ του \vec{B}_p και του οριζόντιου άξονα ω , Ω είναι η γωνία μεταξύ του \vec{B}_p και του \vec{B}_r , ενώ θ είναι η γωνία των σφαιρικών συντεταγμένων.

μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \cos \left(\psi + \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{B_r}{B_p} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\psi + \theta) = \frac{B_r}{B_p} \\ \sin \Omega &= \sin \left(\psi + \theta - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{B_\theta}{B_p} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\psi + \theta) = \frac{B_\theta}{B_p} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Διαιρώντας αυτές κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.3 για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, παίρνουμε ότι:

$$f'_a(\theta) = -\beta f_a(\theta) \tan(\psi + \theta) \quad (3.67)$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την από πάνω σχέση ακόμα μία φορά, θα έχουμε:

$$f''_a(\theta) = \beta^2 f_a(\theta) \tan^2(\psi + \theta) - \frac{\beta f_a(\theta)}{\cos^2(\psi + \theta)} - \frac{\beta f_a(\theta)}{\cos^2(\psi + \theta)} \psi' \quad (3.68)$$

Οι δύο τελευταίες εκφράσεις μας δίνουν την δυνατότητα να απαλείψουμε την πρώτη, αλλά και την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f_a(\theta)$ από το σετ των εξισώσεών μας και να έχουμε έτσι παραγώγους μόνο πρώτης τάξης. Για να γίνει όμως αυτό, εισάγαμε μία καινούργια άγνωστη συνάρτηση, την $\Psi = \Psi(\theta)$, την οποία καλούμαστε τώρα να υπολογίσουμε μαζί με όλες τις υπόλοιπες άγνωστες συναρτήσεις των διάφορων φυσικών ποσοτήτων.

Στην συνέχεια, αφού ξεπεράσαμε το πρόβλημα της εμφάνισης παραγώγων δεύτερης τάξης, θα προετοιμάσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για να το αντιμετωπίσουμε αριθμητικά, ξεκινώντας με την αδιαστατοποίηση των φυσικών μεγεθών.

3.3 Αδιαστατοποίηση

Για να αδιαστατοποιήσουμε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής τρεις βασικές μονάδες μέτρησης: r_0 , u_0 και B_0 . Το r_0 αντιστοιχεί στην βάση της δυναμικής γραμμής πάνω στο επίπεδο $z = 0$ (midplane του δίσκου), ενώ τα B_0 και u_0 αντιστοιχούν στις τιμές που παίρνει το μαγνητικό πεδίο και η αζιμουθιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου στο σημείο αυτό.

Παρακάτω θα ορίσουμε τις αδιάστατες συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε όλες τις φυσικές ποσότητες, οι οποίες θα συμβολίζονται με " $\tilde{\cdot}$ ". Ξεκινάμε με την αδιάστατη απόσταση:

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_0} \quad (3.69)$$

Ομοίως, ορίζουμε την αδιάστατη συνάρτηση μαγνητικής ροής (η οποία έχει μονάδες μαγνητικού πεδίου επί επιφάνεια) ως:

$$\tilde{a}(\tilde{r}, \theta) = \frac{a(r, \theta)}{B_0 r_0^2} = \frac{r^\beta f_a(\theta)}{B_0 r_0^2} \quad (3.70)$$

όπου για την $a(r, \theta)$ χρησιμοποιήσαμε την σχέση 3.2. Αντικαθιστώντας τώρα το r από την εξίσωση 3.66 στην παραπάνω, παίρνουμε ότι:

$$\tilde{a} = \tilde{r}^\beta \tilde{f}_a(\theta) \quad (3.71)$$

καθώς και την σχέση που αδιαστατοποιεί την συνάρτηση $f_a(\theta)$:

$$f_a(\theta) = B_0 r_0^{(2-\beta)} \tilde{f}_a(\theta) \quad (3.72)$$

Όσον αφορά τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, αυτές αδιαστατοποιούνται χρησιμοποιώντας την τιμή αυτού στην βάση της δυναμικής γραμμής B_0 , και δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_r(\tilde{r}, \theta) &= \frac{B_r(r, \theta)}{B_0} = \tilde{r}^{(\beta-2)} \frac{\tilde{f}'_a(\theta)}{\sin \theta} \\ \tilde{B}_\theta(\tilde{r}, \theta) &= \frac{B_\theta(r, \theta)}{B_0} = -\beta \tilde{r}^{(\beta-2)} \frac{\tilde{f}_a(\theta)}{\sin \theta} \\ \tilde{B}_\varphi(\tilde{r}, \theta) &= \frac{B_\varphi(r, \theta)}{B_0} = \tilde{r}^{(\beta-2)} \tilde{f}_1(\theta) \end{aligned} \quad (3.73)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις 3.3 και 3.4 για τα $B_r(r, \theta)$, $B_\theta(r, \theta)$, $B_\varphi(r, \theta)$, καθώς και την σχέση 3.66. Επίσης προέκυψαν και οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} f'_a(\theta) &= B_0 r_0^{(2-\beta)} \tilde{f}'_a(\theta) \\ f_1(\theta) &= B_0 r_0^{(2-\beta)} \tilde{f}_1(\theta) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Με την ίδια λογική, θα αδιαστατοποιήσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας χρησιμοποιώντας την τιμή της αζιμουθιακής συνιστώσας αυτής στην βάση της δυναμικής γραμμής u_0 . Παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(\tilde{r}, \theta) &= \frac{u_r(r, \theta)}{u_0} = \tilde{r}^{\lambda_{u_r}} \tilde{f}_2(\theta) \\ \tilde{u}_\theta(\tilde{r}, \theta) &= \frac{u_\theta(r, \theta)}{u_0} = \tilde{r}^{\lambda_{u_\theta}} \tilde{f}_3(\theta) \\ \tilde{u}_\varphi(\tilde{r}, \theta) &= \frac{u_\varphi(r, \theta)}{u_0} = \tilde{r}^{\lambda_{u_\varphi}} \sin \theta \tilde{\omega}(\theta) \end{aligned} \quad (3.75)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις 3.5 για τα $u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, \theta)$, $u_\varphi(r, \theta)$, καθώς και την εξίσωση 3.66. Επίσης προέκυψαν και οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} f_2(\theta) &= r_0^{\frac{1}{2}} u_0 \tilde{f}_2(\theta) \\ f_3(\theta) &= r_0^{\frac{1}{2}} u_0 \tilde{f}_3(\theta) \\ \omega(\theta) &= r_0^{\frac{1}{2}} u_0 \tilde{\omega}(\theta) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Επιπλέον, η αδιαστατοποίηση της πίεσης γίνεται με βάση την τιμή της πίεσης του μαγνητικού πεδίου στην βάση της δυναμικής γραμμής, δηλαδή:

$$\tilde{P}(\tilde{r}, \theta) = \frac{P(r, \theta)}{B_0^2/8\pi} = \tilde{r}^{\lambda_P} \tilde{f}_0(\theta) \quad (3.77)$$

όπου πήραμε το $P(r, \theta)$ από την σχέση 3.6 και χρησιμοποιήσαμε πάλι την εξίσωση 3.66. Προέκυψε επίσης ότι:

$$f_0(\theta) = \left(\frac{B_0^2}{8\pi} \right) r_0^{2(2-\beta)} \tilde{f}_0(\theta) \quad (3.78)$$

Ομοίως, για την αδιαστατοποίηση της πυκνότητας, θα χρησιμοποιήσουμε τις μονάδες πίεσης του μαγνητικού πεδίου στην βάση της δυναμικής γραμμής, διαιρεμένες με την αζιμουθιακή ταχύτητα περιστροφής εκεί. Η επιλογή των μονάδων αυτών, προκύπτει από τον ορισμό της ταχύτητας του ήχου για πολυτροπικό ρευστό: $C_s^2 = \gamma P/\rho$. Έχουμε λοιπόν:

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, \theta) = \frac{\rho(r, \theta)}{\frac{B_0^2}{8\pi u_0^2}} = \tilde{r}^{\lambda_\rho} \tilde{f}_4(\theta) \quad (3.79)$$

Επιπλέον πήραμε ότι:

$$f_4(\theta) = \frac{B_0^2 r_0^{(3-2\beta)}}{8\pi u_0^2} \tilde{f}_4(\theta) \quad (3.80)$$

Ακόμα, σχετικά με την θερμοκρασία, αυτή μετριέται σε μονάδες T_0 (θερμοκρασία στην βάση της δυναμικής γραμμής), το οποίο χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων προκύπτει ότι είναι $T_0 = \mu m u_0^2 / k_B$, όπου μ είναι το μέσο μοριακό βάρος, m η μάζα του πρωτονίου και k_B η σταθερά του Boltzmann. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε:

$$\tilde{T}(\tilde{r}, \theta) = \frac{T(r, \theta)}{T_0} = \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \quad (3.81)$$

Επίσης, για την αδιαστατοποίηση του ηλεκτρικού δυναμικού $\Phi(r, \theta)$, χρησιμοποιούμε μονάδες $\Phi_0 = r_0 u_0 B_0 / c$. Η επιλογή των μονάδων αυτών, προκύπτει από την εξίσωση επαγωγής. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{r}, \theta) = \frac{\Phi(r, \theta)}{\Phi_0} = \tilde{r}^{\lambda_\Phi} \tilde{f}_\Phi(\theta) \quad (3.82)$$

και επίσης ότι:

$$f_\Phi(\theta) = \left(\frac{u_0 B_0}{c} \right) r_0^{(\frac{5}{2}-\beta)} \tilde{f}_\Phi(\theta) \quad (3.83)$$

Τέλος όσον αφορά τους συντελεστές των φαινομένων μεταφοράς (διάχυση του μαγνητικού πεδίου και ιξώδες), αυτοί μετριούνται σε μονάδες ταχύτητας επί μήκος, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_p(\tilde{r}, \theta) &= \frac{\eta_p(r, \theta)}{u_0 r_0} = \tilde{r}^{\lambda_{\eta_p}} \tilde{m}_p(\theta) \\ \tilde{\eta}_t(\tilde{r}, \theta) &= \frac{\eta_t(r, \theta)}{B_0} = \tilde{r}^{\lambda_{\eta_t}} \tilde{m}_t(\theta) \\ \tilde{\nu}_v(\tilde{r}, \theta) &= \frac{\nu_v(r, \theta)}{u_0 r_0} = \tilde{r}^{\lambda_{\nu_v}} \tilde{f}_{\nu_v}(\theta) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Πήραμε επίσης και τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} m_p(\theta) &= r_0^{\frac{1}{2}} u_0 \tilde{m}_p(\theta) \\ m_t(\theta) &= r_0^{\frac{1}{2}} u_0 \tilde{m}_t(\theta) \\ f_{\nu_v}(\theta) &= r_0^{\frac{1}{2}} u_0 \tilde{f}_{\nu_v}(\theta) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Στην συνέχεια, έχοντας πλέον αδιαστατοποιήσει όλες τις φυσικές ποσότητες του προβλήματός μας, μπορούμε να γράψουμε το σετ των διαφορικών εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.72, 3.74, 3.76, 3.78, 3.80, 3.83 και

3.85, παίρνουμε από τις 3.60, 3.61, 3.62, 3.64, 3.67 και 3.68, το ακόλουθο σετ προς ολοκλήρωση. Η εξίσωση ορμής γράφεται:

$$\begin{aligned} \hat{r} : \quad & \tilde{f}_3 \tilde{f}_4 \tilde{f}'_2 - \frac{2\beta^2 \tilde{f}_a^2}{\sin^2 \theta \cos^2(\Psi + \theta)} \psi' = \frac{1}{2} \tilde{f}_2^2 \tilde{f}_4 + \tilde{f}_3^2 \tilde{f}_4 + \tilde{\omega}^2 \tilde{f}_4 \sin^2 \theta - 2(\beta - 2) \tilde{f}_0 - \\ & - \lambda \tilde{f}_4 - 2(\beta - 1) \tilde{f}_1^2 - \frac{2\beta^2(\beta - 1)}{\sin^2 \theta} \tilde{f}_a^2 - \frac{2\beta^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \tilde{f}_a^2 \tan(\psi + \theta) - \\ & - \frac{2\beta^3 \tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi + \theta)}{\sin^2 \theta} + \frac{2\beta^2 \tilde{f}_a^2}{\sin^2 \theta \cos^2(\psi + \theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : \quad & \frac{2\beta^2 \tilde{f}_a^2 \tan(\psi + \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2(\psi + \theta)} \psi' + \tilde{f}_3 \tilde{f}_4 \tilde{f}'_3 + \tilde{f}'_0 + 2\tilde{f}_1 \tilde{f}'_1 = -\frac{1}{2} \tilde{f}_2 \tilde{f}_3 \tilde{f}_4 + \tilde{\omega}^2 \tilde{f}_4 \cos \theta \sin \theta - \\ & - 2\tilde{f}_1^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{2\beta^2(\beta - 1) \tilde{f}_a^2}{\sin^2 \theta} \tan(\psi + \theta) + \frac{2\beta^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi + \theta) + \\ & + \frac{2\beta^2 \tilde{f}_a^2 \tan(\psi + \theta)}{\sin^2 \theta} \left(\beta \tan(\psi + \theta) - \frac{1}{\cos^2(\psi + \theta)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \quad & \tilde{f}_3 \tilde{f}_4 \sin \theta \tilde{\omega}' + \frac{2\beta \tilde{f}_a}{\sin \theta} \tilde{f}'_1 = -\frac{1}{2} \tilde{f}_2 \tilde{f}_4 \tilde{\omega} \sin \theta - 2\tilde{f}_3 \tilde{f}_4 \tilde{\omega} \cos \theta - \frac{2\beta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \tilde{f}_a \tilde{f}_1 - \\ & - \frac{2\beta(\beta - 1)}{\sin \theta} \tilde{f}_a \tilde{f}_1 \tan(\psi + \theta) - 3(\beta - 1) \tilde{\omega} \tilde{f}_4 \tilde{f}'_1 \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

όπου εισάγαμε την καινούργια παράμετρο $\lambda = \frac{GM}{r_0 u_0^2} = \left(\frac{u_K}{u_0} \right)^2$, η οποία ελέγχει την περιστροφή του δίσκου. Όταν το $\lambda = 1$ έχουμε Κεπλεριανή περιστροφή, ενώ για $\lambda > 1$ η περιστροφή του δίσκου είναι υπο-Κεπλεριανή. Όσον αφορά τις υπόλοιπες εξισώσεις, η εξίσωση συνέχειας παίρνει την μορφή:

$$\tilde{f}_4 \tilde{f}'_3 + \tilde{f}_3 \tilde{f}'_4 = \left(\frac{3}{2} - 2\beta \right) \tilde{f}_2 \tilde{f}_4 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tilde{f}_3 \tilde{f}_4 \quad (3.87)$$

ενώ η επαγωγής:

$$\hat{r} : \quad \tilde{m}_p \tilde{f}'_1 = \tilde{f}_1 \tilde{f}_3 + \beta \tilde{f}_a \tilde{\omega} - \left(\beta - \frac{3}{2} \right) \tilde{f}_\Phi - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tilde{f}_1 \tilde{m}_p$$

$$\hat{\theta} : \quad \tilde{f}'_\Phi = \tilde{m}_p(\beta - 1) \tilde{f}_1 - \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 - \beta \tilde{\omega} \tilde{f}_a \tan(\psi + \theta)$$

(3.88)

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \quad & -\frac{\tilde{m}_t \beta \tilde{f}_a}{\cos^2(\psi + \theta)} \psi' = \beta \tilde{f}_2 \tilde{f}_a - \tilde{m}_t \beta(\beta - 1) \tilde{f}_a - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tan(\psi + \theta) \beta \tilde{f}_a \tilde{m}_t - \\ & - \beta^2 \tilde{m}_t \tilde{f}_a \tan^2(\psi + \theta) + \frac{\tilde{m}_t \beta \tilde{f}_a}{\cos^2(\psi + \theta)} - \beta \tilde{f}_3 \tilde{f}_a \tan(\psi + \theta) \end{aligned}$$

Η εξίσωση ενέργειας με όρους θέρμανσης (Joule και Viscous heating):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) \tilde{f}_3 \tilde{f}'_0 - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{\tilde{f}_3 \tilde{f}_0}{\tilde{f}_4} \tilde{f}'_4 - 2\tilde{m}_p \tilde{f}'_1{}^2 - 4\tilde{m}_p \tilde{f}_1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tilde{f}'_1 - \\
& - 2\tilde{m}_t \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 \beta^2 \tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi + \theta) - \frac{4\tilde{m}_t \beta^2 (\beta-1) \cos \theta}{\sin^3 \theta} \tilde{f}_a^2 \tan(\psi + \theta) - \\
& - \frac{2\tilde{m}_t}{\sin^2 \theta} \left[\beta^4 \tilde{f}_a^2 \tan^4(\psi + \theta) - \frac{2\beta^3 \tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi + \theta)}{\cos^2(\psi + \theta)} (1 + \psi') + (1 + \psi')^2 \frac{\beta^2 \tilde{f}_a^2}{\cos^4(\psi + \theta)} \right] - \\
& - \frac{4\tilde{m}_t \cos \theta}{\sin^3 \theta} \left[\beta^3 \tilde{f}_a^2 \tan^3(\psi + \theta) - \frac{\beta^2 \tilde{f}_a^2 \tan(\psi + \theta)}{\cos^2(\psi + \theta)} - \frac{\beta^2 \tilde{f}_a^2 \tan(\psi + \theta)}{\cos^2(\psi + \theta)} \psi' \right] - \\
& - \frac{4\tilde{m}_t \beta (\beta-1)}{\sin^2 \theta} \left[\beta^2 \tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi + \theta) - \frac{\beta^2 \tilde{f}_a^2}{\cos^2(\psi + \theta)} - \frac{\beta \tilde{f}_a^2}{\cos^2(\psi + \theta)} \psi' \right] = \\
& = \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) (2\beta-3) \tilde{f}_0 \tilde{f}_2 - \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) 2(\beta-2) \tilde{f}_0 \tilde{f}_2 + \\
& + 2\tilde{m}_p \tilde{f}'_1{}^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + (\beta-1)^2 \right) + \frac{2\tilde{m}_t \beta^2 (\beta-1)^2}{\sin^2 \theta} \tilde{f}_a^2 + \frac{9}{4} \sin^2 \theta \tilde{f}_v \tilde{f}_4 \tilde{\omega}^2
\end{aligned} \tag{3.89}$$

και τέλος, η διαφορική εξίσωση για την γωνία $\psi(\theta)$ που ορίσαμε προηγουμένως:

$$\tilde{f}'_a = -\beta \tilde{f}_a \tan(\psi + \theta) \tag{3.90}$$

Στην επόμενη παράγραφο, έχοντας πλέον αδιάστατες τις εξισώσεις που διέπουν το εσωτερικό του δίσκου, θα γράψουμε αυτές σε μία πιο φιλική για τον υπολογιστή μορφή και θα συζητήσουμε για τα κρίσιμα που εμφανίζονται σε αυτές.

3.4 Κρίσιμα σημεία

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με την βοήθεια του υπολογιστή, χρησιμοποιούμε γενικά αριθμητικές μεθόδους όπως είναι για παράδειγμα η μέθοδος Runge-Kutta. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου και κατ'αντιστοιχία του κατάλληλου ολοκληρωτή, γίνεται ανάλογα με το πόσο δύσκολα ή εύκολα είναι διαχειρίσιμες οι διαφορικές μας εξισώσεις (stiff or non-stiff equations).

Η απλούστερη μορφή στην οποία μπορούμε να φέρουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, και η οποία προτιμάται από τους αλγόριθμους αριθμητικής ολοκλήρωσης, είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{3.91}$$

όπου το $y(t)$ είναι ένα διάνυσμα που περιέχει όλες τις άγνωστες συναρτήσεις του εκάστοτε προβλήματος.

Όσον αφορά το δικό μας πρόβλημα, το να φέρουμε το σύστημά μας στην παραπάνω μορφή είναι αρκετά δύσκολο, καθώς όπως είπαμε και πριν εμφανίζονται σε αυτό όροι με παραγώγους των αγνώστων συναρτήσεων στο τετράγωνο, κάτι το οποίο δεν μας επιτρέπει να λύσουμε ως προς την παράγωγο της κάθε συνάρτησης ξεχωριστά. Παρ'όλα αυτά, αγνοώντας τους όρους θέρμανσης στην εξίσωση ενέργειας, μπορούμε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα και να φέρουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων στην μορφή:

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{P} \quad (3.92)$$

όπου το διάνυσμα στήλης \mathcal{F} περιέχει όλες τις παραγώγους των άγνωστων συναρτήσεων.

Μπορούμε λοιπόν να αφαιρέσουμε από το σετ των εξισώσεων την εξίσωση ενέργειας και να χρησιμοποιήσουμε στην θέση της την πολυτροπική εξίσωση (αδιάστατη):

$$\tilde{P} = \tilde{K}(\tilde{a})\tilde{\rho}^\gamma \quad (3.93)$$

όπου η $\tilde{K}(\tilde{a})$ είναι μία σταθερά κατά μήκος κάθε μαγνητικής δυναμικής γραμμής $\tilde{a} = \text{const.}$ (οι οποίες εδώ δεν ταυτίζονται με τις γραμμές ροής, καθώς είμαστε στην περιοχή της μη-ιδεατής mhd). Η υπόθεση αυτή απλουστεύει το σύστημα, μας αφήνει να μελετήσουμε την διάχυση μέσα στον δίσκο, αλλά δεν μπορούμε να μελετήσουμε αυτοσυνεπώς τα ενεργειακά χαρακτηριστικά του δίσκου (energetics).

Αντικαθιστώντας στην πολυτροπική εξίσωση τις εκφράσεις για την αδιάστατη πίεση και πυκνότητα από τις σχέσεις 3.77 και 3.79, προκύπτει ότι η μορφή της σταθεράς $\tilde{K}(\tilde{a})$ θα πρέπει να είναι:

$$\tilde{K}(\tilde{a}) = C \tilde{a}^N = C (\tilde{r}^\beta \tilde{f}_a)^N = \tilde{r}^{(\lambda_\rho - 1 - \gamma\lambda_\rho)} \frac{\tilde{f}_0(\theta)}{\tilde{f}_4^\gamma(\theta)} \quad (3.94)$$

με το C να είναι μία σταθερά αναλογίας που μπορεί να προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος και N ένας νόμος δύναμης, ο οποίος πρέπει να ισούται με:

$$N = \frac{\lambda_\rho - 1 - \gamma\lambda_\rho}{\beta} = \frac{2(\beta - 2) - \gamma(2\beta - 3)}{\beta} \quad (3.95)$$

Από αυτά, μπορούμε να εκφράσουμε τελικά την άγνωστη συνάρτηση που δίνει την πίεση, συναρτήσει των άγνωστων συναρτήσεων της πυκνότητας και της μαγνητικής ροής:

$$\tilde{f}_0(\theta) = C \tilde{f}_4^\gamma(\theta) \tilde{f}_a(\theta)^{\frac{2(\beta-2)-\gamma(2\beta-3)}{\beta}} \quad (3.96)$$

Με τον τρόπο αυτό απαλείψαμε έναν άγνωστο από το σύστημά μας και μπορούμε τώρα να το γράψουμε στην μορφή της σχέσης 3.92. Γράφοντας τον πίνακα στήλη \mathcal{F} που περιέχει τις παραγώγους των άγνωστων συναρτήσεων στην μορφή:

$$\mathcal{F} = \left[\tilde{f}'_a(\theta) \quad \psi'(\theta) \quad \tilde{f}'_1(\theta) \quad \tilde{f}'_2(\theta) \quad \tilde{f}'_3(\theta) \quad \tilde{\omega}'(\theta) \quad \tilde{f}'_4(\theta) \quad \tilde{f}'_\Phi(\theta) \right]^T \quad (3.97)$$

οι πίνακες \mathcal{P} και \mathcal{M} γράφονται (με την υπόθεση της πολυτροπικής σχέσης) ως εξής:

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{l} -C\tilde{f}_4\tilde{\gamma}\tilde{f}_a^{\frac{2(\beta-2)-\gamma(2\beta-3)}{\beta}} 2(\beta-2) - \frac{2\beta^3\tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi+\theta)}{\sin^2\theta} - \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2(\beta-1)}{\sin^2\theta} + \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2}{\sin^2\theta \cos^2(\psi+\theta)} - \\ - \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2 \cos(\theta) \tan(\psi+\theta)}{\sin^3\theta} - \tilde{f}_1^2 2(\beta-1) + \frac{1}{2}\tilde{f}_2^2\tilde{f}_4 + \tilde{f}_3^2\tilde{f}_4 - \lambda\tilde{f}_4 + \tilde{f}_4\tilde{\omega}^2 \sin^2\theta \\ C\tilde{f}_4\tilde{\gamma}\tilde{f}_a^{\frac{2(\beta-2)-\gamma(2\beta-3)}{\beta}} (2(\beta-2) - \gamma(2\beta-3)) \tan(\psi+\theta) + \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2(\beta-1) \tan(\psi+\theta)}{\sin^2\theta} + \\ + \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2 \left(\beta^2 \tan^2(\psi+\theta) - \frac{1}{\cos^2(\psi+\theta)} \right) \tan(\psi+\theta)}{\sin^2\theta} + \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2 \cos\theta \tan^2(\psi+\theta)}{\sin^3\theta} - \frac{2\tilde{f}_1^2 \cos\theta}{\sin\theta} - \\ - \frac{1}{2}\tilde{f}_2\tilde{f}_3\tilde{f}_4 + \tilde{f}_4\tilde{\omega}^2 \sin\theta \cos\theta \\ - \frac{2\beta\tilde{f}_1\tilde{f}_a(\beta-1) \tan(\psi+\theta)}{\sin\theta} - \frac{2\beta\tilde{f}_1\tilde{f}_a \cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{1}{2}\tilde{f}_2\tilde{f}_4\tilde{\omega} \sin\theta - 2\tilde{f}_3\tilde{f}_4\tilde{\omega} \cos\theta - \\ - 3(\beta-1)\tilde{f}_4\tilde{f}_\nu\tilde{\omega} \sin\theta \\ \tilde{f}_2\tilde{f}_4 \left(\frac{3}{2} - 2\beta \right) - \frac{\tilde{f}_3\tilde{f}_4 \cos\theta}{\sin\theta} \\ \beta\tilde{f}_a\tilde{\omega} + \tilde{f}_1\tilde{f}_3 - \frac{\tilde{f}_1\tilde{m}_p \cos\theta}{\sin\theta} - \tilde{f}_\phi \left(\beta - \frac{3}{2} \right) \\ - \beta\tilde{f}_a\tilde{\omega} \tan(\psi+\theta) - \tilde{f}_1\tilde{f}_2 + \tilde{f}_1\tilde{m}_p(\beta-1) \\ - \beta^2\tilde{f}_a\tilde{m}_t \tan^2(\psi+\theta) + \beta\tilde{f}_2\tilde{f}_a - \beta\tilde{f}_3\tilde{f}_a \tan(\psi+\theta) - \beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t(\beta-1) + \\ + \frac{\beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t}{\cos^2(\psi+\theta)} - \frac{\beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t \cos\theta \tan(\psi+\theta)}{\sin\theta} \\ - \beta\tilde{f}_a \tan(\psi+\theta) \end{array} \right] \quad (3.98)$$

και

$$\mathcal{M} = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & -\frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2}{\sin^2\theta \cos^2(\psi+\theta)} & 0 & \tilde{f}_3\tilde{f}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2 \tan(\psi+\theta)}{\sin^2\theta \cos^2(\psi+\theta)} & 2\tilde{f}_1 & 0 & \tilde{f}_3\tilde{f}_4 & 0 & \gamma C\tilde{f}_4^{(\gamma-1)}\tilde{f}_a^{\frac{2(\beta-2)-\gamma(2\beta-3)}{\beta}} \\ 0 & 0 & \frac{2\beta\tilde{f}_a}{\sin\theta} & 0 & 0 & \tilde{f}_3\tilde{f}_4 \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_4 & 0 & \tilde{f}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t}{\cos^2(\psi+\theta)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.99)$$

Γνωρίζοντας πλέον την μορφή των παραπάνω πινάκων, μπορούμε να φέρουμε τελικά το σύστημα στην μορφή:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{P} \quad (3.100)$$

όπου \mathcal{M}^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα \mathcal{M} , με την ιδιότητα:

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{I} \quad (3.101)$$

όπου \mathcal{I} είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Απαραίτητη συνθήκη όμως για την ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα \mathcal{M}^{-1} , είναι ο αρχικός πίνακας \mathcal{M} να έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός (non-singular matrix), δηλαδή να ισχύει γενικά:

$$\det \mathcal{M} \neq 0 \quad (3.102)$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα \mathcal{M} για το πρόβλημά μας, βρίσκουμε ότι αυτή ισούται με:

$$\det \mathcal{M} = - \frac{\tilde{f}_a^{-\left(\frac{4}{\beta}+2\gamma\right)} \beta \tilde{m}_p \tilde{m}_t \sin(\theta) \left(C \tilde{f}_3^2 \tilde{f}_4^{(2+\gamma)} \tilde{f}_a^{\left(3+\frac{3\gamma}{\beta}\right)} \gamma - \tilde{f}_3^4 \tilde{f}_4^3 \tilde{f}_a^{\left(1+\frac{4}{\beta}+2\gamma\right)} \right)}{\cos^2(\psi + \theta)} \quad (3.103)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η ορίζουσα αυτή δεν είναι γενικά διάφορη του μηδενός, καθώς υπάρχουν τιμές των αγνώστων συναρτήσεων του προβλήματός μας οι οποίες μπορούν να την μηδενίσουν για συγκεκριμένες τιμές της γωνίας θ . Τα σημεία αυτά στα οποία μπορεί να συμβεί ο μηδενισμός της ορίζουσας του πίνακα \mathcal{M} ονομάζονται κρίσιμα σημεία, και για να τα βρούμε θα πρέπει να θέσουμε:

$$\det \mathcal{M} = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}_3^2 (\gamma C \tilde{f}_4 \tilde{f}_a^{\frac{2(\beta-2)-\gamma(2\beta-3)}{\beta}} - \tilde{f}_3^2 \tilde{f}_4) = 0 \quad (3.104)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.75, 3.77, 3.79, 3.96 καθώς και την αδιάστατη ταχύτητα του ήχου $\tilde{C}_s^2 = \gamma \tilde{P} / \tilde{\rho}$, η παραπάνω έκφραση για τον μηδενισμό της ορίζουσας μπορεί να γραφεί διαφορετικά:

$$\tilde{u}_\theta^2 (\tilde{u}_\theta^2 - \tilde{C}_s^2) = 0 \quad (3.105)$$

Από την σχέση 3.105, βλέπουμε ότι στην περίπτωση της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής στο εσωτερικό ενός δίσκου προσαύξησης έχουμε την εμφάνιση δύο κρίσιμων σημείων: το πρώτο βρίσκεται στην γωνία $\theta = 0$ (midplane του δίσκου) στο οποίο η \tilde{u}_θ συνιστώσα της ταχύτητας του πλάσματος είναι ίση με το μηδέν, ενώ το δεύτερο βρίσκεται σε γωνία θ όπου η \tilde{u}_θ γίνεται ίση με την ταχύτητα του ήχου \tilde{C}_s .

Από όλα τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι στα δύο σημεία αυτά ο πίνακας \mathcal{M} δεν μπορεί να αντιστραφεί, αφού εκεί η $\det \mathcal{M} = 0$, και το σύστημά μας δεν μπορεί να γραφεί για όλα τα θ στην μορφή της σχέσης 3.100. Παρ'όλα, αυτά μπορούμε

να υπολογίσουμε την έκφραση του αντίστροφου πίνακα M^{-1} για κάθε άλλη τιμή της γωνίας θ , πέρα από τις δύο τιμές στις οποίες είναι τα κρίσιμα σημεία, και να προχωρήσουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματός μας με την βοήθεια του υπολογιστή. Η έκφραση για τον αντίστροφο πίνακα M^{-1} φαίνεται στην σχέση 3.106 της επόμενης σελίδας.

Στο ακόλουθο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την αριθμητική ολοκλήρωση του αδιάστατου σετ των εξισώσεών μας, και θα δούμε πώς τα δύο κρίσιμα σημεία που βρήκαμε παραπάνω επηρεάζουν σημαντικά την διαδικασία αυτή.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική ολοκλήρωση

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μετατρέψαμε το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής, σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων μιας μεταβλητής, χρησιμοποιώντας την συμμετρία της αυτοομοιότητας. Στην συνέχεια αδιαστατοποιήσαμε το σύστημα αυτό, και αφού υποθέσαμε ότι δεν έχουμε όρους θέρμανσης στην εξίσωση ενέργειας το φέραμε στην μορφή:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{P} \quad (4.1)$$

όπου ο πίνακας στήλη \mathcal{F} περιέχει τις παραγώγους των οκτώ αγνώστων συναρτήσεων του προβλήματός μας, ενώ οι εκφράσεις για τους πίνακες \mathcal{M}^{-1} και \mathcal{P} δίνονται στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Επιπλέον είδαμε την εμφάνιση δύο κρίσιμων σημείων, όπου $\tilde{u}_\theta = 0$ και $\tilde{u}_\theta = \tilde{C}_s$, στα οποία ο πίνακας \mathcal{M} δεν μπορεί να αντιστραφεί και η σχέση 4.1 δεν ισχύει. Η ύπαρξη αυτών των δύο κρίσιμων σημείων εισάγει έναν ακόμα βαθμό δυσκολίας στην ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων, καθώς στα σημεία αυτά έχουμε παρονομαστές οι οποίοι προσεγγίζουν πολύ κοντά στο μηδέν (πρακτικά μηδενίζονται), με αποτέλεσμα οι διάφοροι ολοκληρωτές να μην μπορούν να διαχειριστούν σωστά τις εξισώσεις κοντά σε αυτά τα σημεία.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε για τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η ολοκλήρωση και πώς αντιμετωπίζονται τα δύο κρίσιμα σημεία, ξεκινώντας από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματός μας.

4.2 Αρχικές συνθήκες

Στην παράγραφο αυτή θα αρχικοποιήσουμε όλες τις άγνωστες συναρτήσεις που υπεισέρχονται στους εξισώσεις μας, δίνοντάς τους αρχικές συνθήκες στο σημείο από το οποίο θα ξεκινήσει η ολοκλήρωση, δηλαδή στο $\theta = \pi/2$. Το σημείο αυτό είναι

ένα από τα δύο κρίσιμα σημεία που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και θα συζητήσουμε πώς θα αντιμετωπίσουμε την δυσκολία αυτή στην συνέχεια.

Ξεκινάμε θεωρώντας ότι το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο \tilde{B}_z , ή αλλιώς μόνο \tilde{B}_θ συνιστώσα στο midplane (διαπερνά τον δίσκο κάθετα, το $\tilde{B}_r = 0$), οπότε η αρχική συνθήκη για την γωνία $\psi(\theta)$ μεταξύ του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου και του οριζόντιου άξονα θα είναι:

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (4.2)$$

Διαλέγοντας τώρα την τιμή του \tilde{B}_θ να είναι ίση με -1 στο midplane (ή αλλιώς το $\tilde{B}_z = 1$) και χρησιμοποιώντας την σχέση που δίνει το \tilde{B}_θ από το προηγούμενο κεφάλαιο, θα έχουμε ότι:

$$\tilde{f}_a\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\beta} \quad (4.3)$$

όπου όπως έχουμε αναφέρει ξανά, το β είναι μία από τις ελεύθερες παράμετρος του προβλήματός μας. Επιπλέον, στο εσωτερικό του δίσκου δεν αναμένεται να υπάρχει ισχυρή \tilde{B}_φ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, και συγκεκριμένα στο midplane αυτή θα πρέπει να είναι μηδενική. Οπότε η συνάρτηση \tilde{f}_1 που σχετίζεται με το \tilde{B}_φ θα είναι αρχικά:

$$\tilde{f}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (4.4)$$

Όσον αφορά τις αρχικές τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας στο midplane, θα χρησιμοποιήσουμε την ιεραρχία των ταχυτήτων μέσα σε έναν τυπικό δίσκο προσαύξησης, η οποία όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 είναι:

$$\tilde{u}_\varpi \ll \tilde{C}_s \ll \tilde{u}_\phi \quad (4.5)$$

Επειδή όλες οι ταχύτητες έχουν κανονικοποιηθεί στα παραπάνω ως προς την ταχύτητα περιστροφής στην βάση της δυναμικής γραμμής, αυτό σημαίνει ότι η αρχική συνθήκη για την $\tilde{\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ που συνδέεται με την \tilde{u}_φ θα είναι:

$$\tilde{\omega}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (4.6)$$

και η τιμή της συνάρτησης $\tilde{f}_2(\theta)$ στο midplane (που αντιστοιχεί στην \tilde{u}_r), θα πρέπει να είναι σύμφωνα με την 4.5 μικρότερη της μονάδας. Μία τυπική τιμή που χρησιμοποιήθηκε στις ολοκληρώσεις που ακολουθούν ήταν:

$$\tilde{f}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.048 \quad (4.7)$$

όπου το «-» αντιστοιχεί στην κίνηση πρόσπτωσης. Η αρχική συνθήκη για την \tilde{u}_θ συνιστώσα της ταχύτητας θα συζητηθεί παρακάτω.

Όσον αφορά την πίεση \tilde{P} , θα της δώσουμε αρχική τιμή χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραμέτρου μ (λόγος μαγνητικής προς θερμική πίεση) ως εξής:

$$\mu = \frac{\tilde{B}_\theta^2}{\tilde{P}} = \frac{1}{\tilde{f}_0\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \tilde{f}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\mu} \quad (4.8)$$

Στην συνέχεια θα πάρουμε τις αρχικές συνθήκες για την \tilde{u}_θ συνιστώσα της ταχύτητας, για την πυκνότητα $\tilde{\rho}$ και για το ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\Phi}$. Όπως έχουμε πει, η ολοκλήρωση του σετ των συνήθων διαφορικών εξισώσεων στο εσωτερικό του δίσκου ξεκινάει από την γωνία $\theta = \pi/2$, ή διαφορετικά, από το midplane αυτού. Το πρόβλημα που εμφανίζεται εδώ, είναι ότι το σημείο $\theta = \pi/2$ είναι το ένα από τα δύο κρίσιμα σημεία που βρήκαμε προηγουμένως. Αυτό σημαίνει ότι η ολοκλήρωση ξεκινά με κάποιους από τους παρονομαστές των διαφορικών εξισώσεων να μηδενίζονται, κάτι το οποίο δεν μπορούν να διαχειριστούν οι διάφοροι ολοκληρωτές.

Για τον λόγο αυτό δεν θα ξεκινήσουμε την ολοκλήρωση ακριβώς από το σημείο $\theta = \pi/2$ (midplane) αλλά λίγο πιο πάνω από αυτό, όπως κάνουν και οι Casse, Pelletier και Ferreira στις εργασίες τους (Ferreira & Pelletier 1993 [5], Ferreira & Pelletier 1995 [7], Ferreira 1997 [8] και Casse & Ferreira 2000, [3], [4]). Για να γίνει αυτό θα απαιτήσουμε να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι αριθμητές των κλασμάτων που έχουν την συνάρτηση $\tilde{f}_3(\theta)$ στον παρονομαστή, αφού στο midplane του δίσκου ισχύει ότι:

$$\tilde{f}_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (4.9)$$

ή αλλιώς $\tilde{u}_\theta(\pi/2) = 0$, έτσι ώστε να έχουμε εκεί απροσδιοριστία 0/0. Πρακτικά το $\tilde{f}_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$ δεν θα πάρει τιμή ακριβώς μηδέν, αλλά θα πάρει μία πάρα πολύ μικρή θετική τιμή, αφού όπως είπαμε η ολοκλήρωση δεν ξεκινά ακριβώς από το midplane. Συγκεκριμένα η τιμή που του δόθηκε στα παρακάτω είναι ίση με:

$$\tilde{f}_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10^{-14} \quad (4.10)$$

Οι παρονομαστές που μηδενίζονται στο πρώτο κρίσιμο σημείο βρίσκονται στις διαφορικές εξισώσεις των \tilde{f}'_2 και $\tilde{\omega}'$, ενώ οι αντίστοιχοι αριθμητές μας δίνουν τις σχέσεις (απαιτώντας να είναι ίσοι με μηδέν στο $\theta = \pi/2$):

$$\begin{aligned} & [-2\beta\tilde{f}_a \left(-\beta^2\tilde{f}_a\tilde{m}_t \tan^2(\psi + \theta) + \beta\tilde{f}_2\tilde{f}_a - \beta\tilde{f}_3\tilde{f}_a \tan(\psi + \theta) - \beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t(\beta - 1) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t}{\cos^2(\psi + \theta)} - \frac{\beta\tilde{f}_a\tilde{m}_t \cos(\theta) \tan(\psi + \theta)}{\sin(\theta)} \right) \\ & - C\tilde{f}_4^\gamma \tilde{f}_a^{\frac{2(\beta-2)-\gamma(2\beta-3)}{\beta}} (2\beta - 4)\tilde{m}_t \sin^2(\theta) - 2\beta^3\tilde{f}_a^2 \tan^2(\psi + \theta)\tilde{m}_t - 2\beta^2\tilde{f}_a^2(\beta - 1)\tilde{m}_t + \\ & + \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2\tilde{m}_t}{\cos^2(\psi + \theta)} - \frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2\tilde{m}_t \cos(\theta) \tan(\psi + \theta)}{\sin(\theta)} - \tilde{f}_1^2(2\beta - 2)\tilde{m}_t \sin^2(\theta) + \\ & \left. + \frac{1}{2}\tilde{f}_2^2\tilde{f}_4\tilde{m}_t \sin^2(\theta) + \tilde{f}_3^2\tilde{f}_4\tilde{m}_t \sin^2(\theta) - \tilde{f}_4\lambda\tilde{m}_t \sin^2(\theta) \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

και

$$\begin{aligned}
& \left[-2\beta\tilde{f}_a \left(\beta\tilde{f}_a\tilde{\omega} + \tilde{f}_1\tilde{f}_3 - \frac{\tilde{f}_1\tilde{m}_p \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \tilde{f}_\Phi \left(\beta - \frac{3}{2} \right) \right) - \right. \\
& -2\tilde{m}_p\beta\tilde{f}_1\tilde{f}_a(\beta-1)\tan(\psi+\theta) - \frac{2\beta\tilde{f}_1\tilde{f}_a \cos(\theta)\tilde{m}_p}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2}\tilde{f}_2\tilde{f}_4\tilde{\omega}\tilde{m}_p \sin^2(\theta) - \\
& \left. -2\tilde{f}_3\tilde{f}_4\tilde{\omega}\tilde{m}_p \cos(\theta) \sin(\theta) - \tilde{f}_4\tilde{f}_\nu\tilde{\omega}(3\beta-3)\tilde{m}_p \sin^2(\theta) \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την σχέση 4.2 στις 4.11 και 4.12, μπορούμε να πάρουμε από αυτές τις αρχικές τιμές για τις συναρτήσεις $\tilde{f}_\Phi(\theta)$ και $\tilde{f}_4(\theta)$, που συνδέονται με την πυκνότητα ρ και το ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\Phi}$, αντίστοιχα. Θα έχουμε ότι:

$$\tilde{f}_4 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left[\frac{2\beta^2\tilde{f}_a^2\tilde{f}_2 + 2(\beta-2)\tilde{f}_0\tilde{m}_t}{(\frac{\tilde{f}_2^2}{2} + \tilde{f}_3^2 - \lambda + \tilde{\omega}^2)\tilde{m}_t} \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} \tag{4.13}$$

και επίσης:

$$\tilde{f}_\Phi \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\left[\beta\tilde{f}_a\tilde{\omega} + \tilde{f}_1\tilde{f}_3 + \frac{\tilde{f}_2\tilde{f}_4\tilde{\omega}\tilde{m}_p}{4\beta\tilde{f}_a} + \frac{\tilde{f}_4\tilde{f}_\nu\tilde{\omega}\tilde{m}_p 3(\beta-1)}{2\beta\tilde{f}_a} \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}}{\left(\beta - \frac{3}{2} \right)} \tag{4.14}$$

Από αυτές τις δύο παρατηρούμε ότι για να πάρουμε αρχικές τιμές για τα \tilde{f}_4 και \tilde{f}_Φ , θα πρέπει να δώσουμε αρχικές τιμές για την διάχυση του πεδίου στην αξιμουθιακή διεύθυνση και στο πολοειδές επίπεδο, δηλαδή στα \tilde{m}_t και \tilde{m}_p , αλλά και στην τιμή του ιξώδους \tilde{f}_ν στο midplane.

Για να το κάνουμε αυτό, διαλέγουμε εμείς την τιμή της διάχυσης του πεδίου μέσα στον δίσκο στην αξιμουθιακή διεύθυνση, δηλαδή διαλέγουμε την τιμή του:

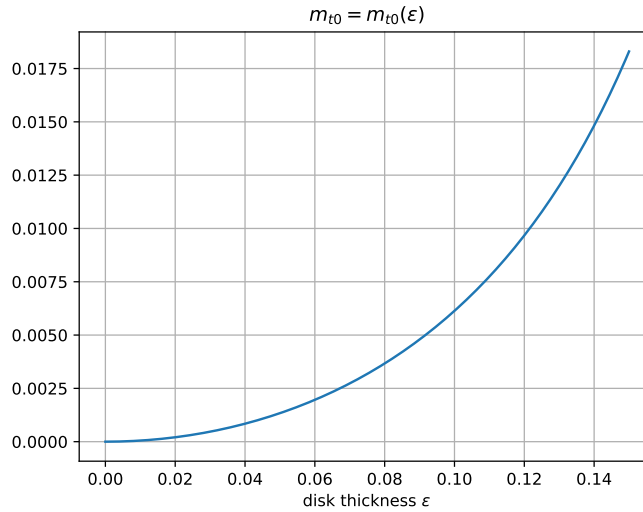
$$\tilde{m}_t \left(\frac{\pi}{2} \right) = \tilde{m}_{t0} \tag{4.15}$$

Η επιλογή της τιμής αυτής δεν γίνεται τυχαία, αλλά εξαρτάται από το πάχος του δίσκου. Αυτό μπορεί να δειχθεί γράφοντας την πολυτροπική σχέση:

$$\tilde{C}_s^2 = \gamma \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \Leftrightarrow \tilde{C}_s^2 = \frac{\gamma\tilde{f}_0 \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\tilde{f}_4 \left(\frac{\pi}{2} \right)} \tag{4.16}$$

και αντικαθιστώντας σε αυτή την ταχύτητα του ήχου από: $\tilde{C}_s \simeq \sqrt{\lambda\epsilon}$. Η τελευταία αποτελεί την προσέγγιση λεπτού δίσκου, με το λ να προκύπτει λόγω της αδιαστατοποίησης. Χρησιμοποιώντας τώρα και την εξίσωση 4.13 για το \tilde{f}_4 , παίρνουμε την σχέση που συνδέει την τιμή της διάχυσης \tilde{m}_t στο midplane με το πάχος του δίσκου ϵ :

$$\tilde{m}_{t0}(\epsilon) = \frac{2\lambda\epsilon^2\beta^2\tilde{f}_a^2\tilde{f}_2}{\gamma\tilde{f}_0 \left(\frac{\tilde{f}_2^2}{2} + \tilde{f}_3^2 - \lambda + \tilde{\omega}^2 \right) - 2\lambda\epsilon^2(\beta-2)\tilde{f}_0} \tag{4.17}$$



Διάγραμμα 4.1: Συσχέτιση των τιμών της διάχυσης στην αζιμουθιακή διεύθυνση \tilde{m}_{t0} στο επίπεδο $z = 0$ (midplane), με το πάχος του δίσκου ϵ , για ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων: $\mu = 0.8$, $\xi = 0.04$ και $\lambda = 1.1$.

όπου όλες οι ποσότητες του δεξιού μέλους έχουν προσδιοριστεί παραπάνω.

Επιπλέον, διαλέγοντας κάποιες ενδεικτικές τιμές για τις παραμέτρους: $\mu = 0.8$, $\xi = 0.04$ και $\lambda = 1.1$, μπορούμε να πάρουμε το γράφημα 4.1. Από αυτό βλέπουμε ότι η επιλογή της τιμής του \tilde{m}_{t0} , εξαρτάται από το πάχος του δίσκου ϵ , καθώς και από τις τιμές που παίρνουν οι ελεύθερες παράμετροι του προβλήματος. Στις ακόλουθες ολοκληρώσεις, θεωρήσαμε ότι ο δίσκος είναι λεπτός, με το ϵ να είναι ίσο με 0.1.

Προσδιορίζοντας λοιπόν το \tilde{m}_{t0} από την σχέση 4.17 και χρησιμοποιώντας την παράμετρο χ_m που μετράει την ανισοτροπία της διάχυσης του πεδίου μέσα στον δίσκο, αλλά και τον μαγνητικό αριθμό Prandtl \mathcal{P}_m (στα οποία δίνουμε εμείς τιμές), παίρνουμε τελικά αρχικές συνθήκες για την διάχυση στο πολοειδές επίπεδο και για το ιξώδες:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_p \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \tilde{m}_{p0} = \chi_m \tilde{m}_{t0} \\ \tilde{f}_{\nu} \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \tilde{f}_{\nu 0} = \mathcal{P}_m \tilde{m}_{p0} \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.3 Ολοκλήρωση

Έχοντας πλέον προσδιορίσει τις αρχικές συνθήκες για όλες τις άγνωστες συναρτήσεις του προβλήματος και δίνοντας τιμές στις ελεύθερες παραμέτρους, μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση του σετ των εξισώσεων για το εσωτερικό του δίσκου, το οποίο είναι της μορφής 4.1.

Παρόλο που το σύστημα αυτό είναι ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσε-

ων, παραμένει ένα δύσκολο πρόβλημα, καθώς αυτές είναι μη-γραμμικές και ανήκουν σε μία κατηγορία προβλημάτων που ονομάζονται *stiff equations* («δύσκαμπτες» εξισώσεις). Ο χαρακτηρισμός αυτός δίνεται σε εξισώσεις που περιέχουν όρους οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν σε απότομες μεταβολές των λύσεων και για τον λόγο αυτό χρειάζεται ένας ολοκληρωτής ο οποίος να μπορεί να χρησιμοποιεί μικρά βήματα ολοκλήρωσης.

Για την επίλυση του συστήματος στο πρόβλημά μας, χρησιμοποιήθηκε ο ολοκληρωτής LSODA της βιβλιοθήκης SciPy της γλώσσας προγραμματισμού Python, ο οποίος μπορεί να εντοπίζει εάν το πρόβλημα είναι *stiff* και να μεταβάλλει ανάλογα το βήμα της ολοκλήρωσης. Πριν από αυτόν δοκιμάστηκαν και άλλοι ολοκληρωτές της ίδιας βιβλιοθήκης (όπως είναι οι BDF και Radau), οι οποίοι όμως δεν μπορούσαν να διαχειριστούν σωστά το σύστημα.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, αφού δωθούν τιμές σε όλες τις ελεύθερες παραμέτρους και προσδιοριστούν οι αρχικές συνθήκες όλων των άγνωστων συναρτήσεων, η ολοκλήρωση ξεκινάει λίγο πιο πάνω από το επίπεδο $z = 0$ (midplane), αντιμετωπίζοντας με τον τρόπο αυτό το πρώτο κρίσιμο σημείο. Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται σε όλο το εσωτερικό του δίσκου έως την επιφάνειά του, μέχρι που ο ολοκληρωτής συναντά εκεί το δεύτερο κρίσιμο σημείο. Μία σημαντική ένδειξη ότι η ολοκλήρωση έφτασε μέχρι την επιφάνεια του δίσκου είναι η μεγάλη πτώση της πυκνότητας, κάτι όμως που θα συζητηθεί εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Η διάβαση του ηχητικού κρίσιμου σημείου δεν θα μελετηθεί στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, καθώς μας ενδιαφέρει η δυναμική μόνο στο εσωτερικό του δίσκου (το δεύτερο κρίσιμο σημείο βρίσκεται λίγο πιο έξω από την επιφάνεια αυτού).

4.4 Απεικόνιση των αποτελεσμάτων

Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, μέσα στα πλαίσια της αυτοομοιότητας όλες οι άγνωστες φυσικές ποσότητες του προβλήματός μας μπορούν να γραφούν στην μορφή (αδιάστατες, σε σφαιρικές συντεταγμένες):

$$\tilde{Q}(\tilde{r}, \theta) = \tilde{r}^{\lambda_Q} \tilde{f}_Q(\theta) \quad (4.19)$$

Η διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης μας επιστρέφει σαν αποτέλεσμα έναν πίνακα που περιέχει τις $\tilde{\theta}$ εξαρτήσεις όλων των άγνωστων φυσικών ποσοτήτων, δηλαδή μας επιστρέφει τις συναρτήσεις $\tilde{f}_Q(\theta)$ για κάθε μέγεθος $\tilde{Q}(\tilde{r}, \theta)$.

Επειδή όμως η απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε σφαιρικές συντεταγμένες δεν μας δίνει μια καλή εποπτεία για το τί συμβαίνει στο εσωτερικό του δίσκου, όλες οι φυσικές ποσότητες έχουν μετατραπεί από σφαιρικές σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπως φαίνεται στα γραφήματα του επόμενου κεφαλαίου. Επιπλέον όλες οι ποσότητες είναι σχεδιασμένες κατά μήκος μίας ορισμένης μαγνητικής δυναμικής γραμμής. Αυτό έχει γίνει χρησιμοποιώντας την σχέση που δίνει την αδιάστατη συνάρτηση μα-

γνητικής ροής και επιλύοντας αυτή ως προς την απόσταση \tilde{r} , δηλαδή:

$$\tilde{r} = \left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{f}_a} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.20)$$

Επιλέγοντας τώρα μία συγκεκριμένη τιμή για την συνάρτηση \tilde{a} , και αντικαθιστώντας το \tilde{r} από την 4.20 στην 4.19, όλες οι φυσικές ποσότητες \tilde{Q} μπορούν να εκφραστούν πλέον πάνω σε μία ορισμένη μαγνητική δυναμική γραμμή. Συγκεκριμένα, στα γραφήματα του επόμενου κεφαλαίου επιλέξαμε την τιμή $\tilde{a} = 1/\beta$, έτσι ώστε να σχεδιάσουμε όλες τις ποσότητες κατά μήκος της γραμμής που έχει την βάση της σε ακτινική απόσταση $\tilde{r} = 1$.

Επιπλέον, στο επόμενο κεφάλαιο σχεδιάζονται οι αδιάστατες συνιστώσες του ρεύματος \tilde{J} και της μαγνητικής δύναμης Lorentz, κανονικοποιημένα ως προς το ρεύμα και την δύναμη στην βάση της δυναμικής γραμμής: $J_0 = \frac{cB_0}{4\pi r_0}$ και $F_0 = \frac{B_0^2}{4\pi r_0}$, αντίστοιχα. Οι σχέσεις που δίνουν τις συνιστώσες τους (σε σφαιρικές και κυλινδρικές) είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_r &= \tilde{r}^{(\beta-3)} (\tilde{f}'_1 + \cot \theta \tilde{f}_1) \\ \tilde{J}_\theta &= \tilde{r}^{(\beta-3)} (1 - \beta) \tilde{f}_1 \\ \tilde{J}_\varphi &= \tilde{r}^{(\beta-3)} \left(-\frac{\beta(\beta-1)}{\sin \theta} \tilde{f}_a - \frac{\beta \cot \theta}{\sin \theta} \tilde{f}_a \tan(\psi + \theta) - \frac{\beta^2 \tilde{f}_a \tan^2(\psi + \theta)}{\sin \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta \tilde{f}_a}{\sin \theta \cos^2(\psi + \theta)} + \frac{\beta \tilde{f}_a}{\sin \theta \cos^2(\psi + \theta)} \psi' \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{L\omega} &= \tilde{J}_\varphi \tilde{B}_z - \tilde{B}_\varphi \tilde{J}_z \\ \tilde{F}_{L\varphi} &= -\tilde{J}_\omega \tilde{B}_z + \tilde{B}_\omega \tilde{J}_z \\ \tilde{F}_{Lz} &= \tilde{J}_\omega \tilde{B}_\varphi - \tilde{B}_\omega \tilde{J}_\varphi \end{aligned} \quad (4.22)$$

Επίσης σχεδιάζεται και η δύναμη στην $\hat{\varphi}$ διεύθυνση λόγω του ιξώδους μέσα στον δίσκο (ροπή λόγω ιξώδους), το μέτρο της οποίας δίνεται από την σχέση (βλέπε κεφάλαιο 3):

$$\tilde{F}_{visc} = \frac{3}{2} (\beta - 1) \tilde{r}^{2\beta-5} \sin \theta \tilde{f}_4 \tilde{f}_{\nu_4} \tilde{\omega} \quad (4.23)$$

η οποία έχει επίσης αδιαστατοποιηθεί χρησιμοποιώντας την τιμή της δύναμης Lorentz στην βάση της δυναμικής γραμμής F_0 .

Ακολουθώντας την μέθοδο ολοκλήρωσης που περιγράψαμε παραπάνω, μελετήθηκαν διάφορων ειδών δίσκοι προσάυξης ως προς την κατανομή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου και του ιξώδους στο εσωτερικό τους, τα αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια συζητήθηκε το σετ των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μη-ιδεατής μαγνητούδροδυναμικής που περιγράφει την δυναμική στο εσωτερικό ενός δίσκου προσαύξεσης. Το σετ αυτό απλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας την συμμετρία της αυτοομοιότητας και μετασχηματίστηκε από ένα σετ μερικών διαφορικών εξισώσεων, σε ένα σετ συνήθων διαφορικών ως προς μία μεταβλητή (γωνία θ). Στην συνέχεια αυτό αδιαστατοποιήθηκε και δώθηκαν οι εκφράσεις για τις αρχικές συνθήκες όλων των αγνώστων συναρτήσεων (8 στο σύνολο), συναρτήσεων των διαφόρων παραμέτρων του μοντέλου. Τέλος, συζητήθηκε ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιήθηκε η ολοκλήρωση και πώς αντιμετωπίστηκαν τα κρίσιμα σημεία. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας για τέσσερα διαφορετικά είδη δίσκων.

Το είδος του κάθε δίσκου εξαρτάται από τις τιμές που παίρνουν οι ελεύθερες παράμετροι του μοντέλου σε κάθε περίπτωση. Συνολικά, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, το μοντέλο δέχεται τις εξής παραμέτρους: την ανισοτροπία στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου χ_m , το επίπεδο του ιξώδους μέσα στον δίσκο (σε σχέση με την διάχυση) \mathcal{P}_m , τον λόγο μαγνητικής προς θερμική πίεση μ , τον ejection index ξ (ή αλλιώς β), την αδιάστατη μάζα του κεντρικού αντικειμένου που καθορίζει το πόσο υπο-Κεπλεριανός είναι ο δίσκος λ και τέλος, το πάχος του δίσκου ϵ .

Σε όλα τα παρακάτω, αφού επιλεγθούν τα επίπεδα διάχυσης και ιξώδους μέσα στον δίσκο από τις χ_m και \mathcal{P}_m , όλες οι φυσικές ποσότητες σχεδιάζονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες, πάνω σε ορισμένη δυναμική γραμμή και συναρτήσεων του ύψους z/ω_0 από το midplane. Επιπλέον, η κάθε φυσική ποσότητα απεικονίζεται για τέσσερις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων μ και ξ .

5.2 Δίσκος με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$

Η πρώτη περίπτωση που θα μελετήσουμε είναι αυτή ενός δίσκου με χαμηλά επίπεδα ιξώδους και με μεγάλη ανισοτροπία στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου. Αυτό αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων: $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι κατανομές του ιξώδους $\tilde{\nu}$ και της διάχυσης, τόσο στο πολοειδές επίπεδο $\tilde{\eta}_p$ όσο και στην αξιμουθιακή διεύθυνση $\tilde{\eta}_\varphi$, δίνονται στο διάγραμμα 5.1 (πάνω αριστερά) συναρτήσει του ύψους \tilde{z} πάνω από το midplane. Η επιλογή της μορφής των κατανομών αυτών είναι αυθαίρετη και ακολουθεί τις εργασίες των Casse & Ferreira 2000 [3], [4]. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, τα $\tilde{\eta}_p$ και $\tilde{\eta}_\varphi$ ακολουθούν ένα Gaussian προφίλ έτσι ώστε η διάχυση να μειώνεται σημαντικά μέσα σε μία κλίμακα ύψους του δίσκου, ενώ το προφίλ του ιξώδους έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να μειώνεται γρηγορότερα από αυτά της διάχυσης (οι πλήρεις εκφράσεις των προφίλ βρίσκονται στο κεφάλαιο 3). Την μορφή αυτή των προφίλ, θα χρησιμοποιήσουμε και στις επόμενες περιπτώσεις δίσκων των ακόλουθων παραγράφων.

Για την περίπτωση αυτού του δίσκου εκτελέσαμε την ολοκλήρωση για διάφορες τιμές μ και ξ , ξεκινώντας από μικρά μ (πολύ μεγάλες τιμές θερμικής πίεσης) και φτάνοντας μέχρι $\mu \simeq 1$. Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι στο διάστημα από $\mu = 0.1$ μέχρι $\mu = 0.5$, για ξ από 0.04 μέχρι 0.15 (αντιστοιχίζοντας τα μικρά μ σε μεγάλα ξ , το οποίο θα συζητηθεί παρακάτω), προκύπτουν μη φυσικά αποδεκτές λύσεις για εκροή. Οι λύσεις αυτές απορρίφθηκαν καθώς υπήρχαν περιπτώσεις όπου η εκροή άλλαζε ξανά σε πρόσπτωση στα ανώτερα στρώματα του δίσκου, η αξιμουθιακή ταχύτητα παρέμενε υποκεπλευριανή, η ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου γίνονταν από θετικές αρνητικές, ενώ για πολύ μικρές τιμές του μ είχαμε ακόμα και την δημιουργία θετικής αξιμουθιακής συνιστώσας μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του δίσκου. Επιπλέον για τιμές του μ μεγαλύτερες από 0.9, ο ολοκληρωτής που επιλέχθηκε δεν μπόρεσε να ανταπεξέλθει, με την διαδικασία της ολοκλήρωσης να σταματά πολύ νωρίς για αριθμητικούς λόγους (και όχι λόγω του ηχητικού κρίσιμου σημείου).

Φυσικά αποδεκτές λύσεις που περιγράφουν εκροή, προέκυψαν για αυτόν τον δίσκο μεταξύ των τιμών $\mu = 0.6$ και $\mu = 0.85$, με τα αντίστοιχα ξ να κυμαίνονται από 0.04 μέχρι 0.15. Στα γραφήματα που ακολουθούν σχεδιάζονται όλες οι φυσικές ποσότητες στο εσωτερικό του δίσκου, συναρτήσει του ύψους \tilde{z} , για τα ζεύγη τιμών (μ, ξ) τα οποία φαίνονται στον πίνακα 5.1.

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών από το λογαριθμικό προφίλ της πυκνότητας συναρτήσει του ύψους \tilde{z} στο εσωτερικό του δίσκου, όπως αυτό φαίνεται στο διάγραμμα 5.2 (πάνω αριστερά). Σε αυτό βλέπουμε ότι η πυκνότητα του πλάσματος μειώνεται σημαντικά με το ύψος μέσα στον δίσκο (αλλάζει κατά μία τάξη μεγέθους), κάτι το οποίο μας δείχνει ότι η ολοκλήρωση έφτασε πράγματι μέχρι τα ανώτερα στρώματα και την επιφάνεια του δίσκου. Επιπλέον, από το ίδιο διάγραμμα 5.2 μπορούμε να δούμε και την μεγάλη πτώση στην πίεση (κάτω αριστερά), υπολογισμένη από την πολυτροπική σχέση, αλλά και στην θερμοκρασία του πλάσματος (κάτω δεξιά), υπολογισμένη από την καταστατική εξίσωση.

Το ότι η ολοκλήρωση έφτασε μέχρι την επιφάνεια του δίσκου μπορούμε να το καταλάβουμε και από το διάγραμμα 5.1, στο οποίο εικονίζονται τα προφίλ της διάχυσης και του ιξώδους μέσα στον δίσκο (πάνω αριστερά), καθώς και η γωνία μεταξύ των διανύσματος του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου \vec{B}_p και της ταχύτητας στο πολοειδές επίπεδο \vec{u}_p (κάτω δεξιά). Από αυτά βλέπουμε ότι όλοι οι συντελεστές των φαινομένων μεταφοράς παίρνουν πολύ μικρές τιμές κοντά στην επιφάνεια του δίσκου και επίσης ότι τα \vec{B}_p και \vec{u}_p τείνουν να γίνουν παράλληλα (η γωνία μεταξύ τους προκύπτει γύρω στις 10°). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι κοντά στην επιφάνεια του δίσκου δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει η προσέγγιση της ιδεατής MHD, κάτι το οποίο φαίνεται καλύτερα σχεδιάζοντας και τον λογάριθμο του μαγνητικού αριθμού Reynolds στο πολοειδές επίπεδο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 5.1 (πάνω αριστερά). Παρατηρούμε ότι ο \mathcal{R}_m μειώνεται καθώς ανεβαίνουμε στα μεσαία - εξωτερικά στρώματα του δίσκου (η διάχυση εκεί είναι πιο έντονη), και έπειτα αρχίζει να αυξάνει πλησιάζοντας προς την επιφάνεια, παίρνοντας εκεί τιμές: $\mathcal{R}_m \sim 10.0$. Μία τέτοια τιμή του \mathcal{R}_m δεν δικαιολογεί την χρήση ιδεατής MHD στην επιφάνεια του δίσκου ή κοντά σε αυτή, αφού η ιδεατή MHD ισχύει στο όριο των $\mathcal{R}_m \gg 1.0$.

Στο διάγραμμα 5.3 απεικονίζονται οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες, καθώς και ο αριθμός Mach στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση (κάτω δεξιά). Από τα διαγράμματα αυτά μπορούμε να δούμε την εκροή του υλικού από τον δίσκο, αλλά και την θέση του κρίσιμου σημείου. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι για όλα τα ζεύγη (μ, ξ) , η ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας παίρνουν αρχικά αρνητικές τιμές (έχουμε πρόσπτωση του υλικού), ενώ στην συνέχεια, σε κάποιο ύψος μέσα στον δίσκο, οι συνιστώσες αυτές αλλάζουν πρόσημο και γίνονται ελαφρώς θετικές (έχουμε εκροή από την επιφάνεια και τα ανώτερα στρώματα αυτού). Το ύψος στο οποίο γίνεται αυτή η αλλαγή στα \tilde{u}_φ και \tilde{u}_z βλέπουμε ότι εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων μ και ξ . Για μικρότερες τιμές του μ (μεγάλη θερμική πίεση στο midplane), η αλλαγή από την διαδικασία της πρόσπτωσης στην διαδικασία της εκροής γίνεται σε χαμηλότερα ύψη, δηλαδή πιο βαθιά μέσα στον δίσκο. Όσον αφορά την αξιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας, βλέπουμε ότι αυτή ξεκινάει στο midplane με μία υποκεπλευριανή τιμή, και στην συνέχεια αυξάνεται όσο πηγαίνουμε στα ανώτερα στρώματα του δίσκου. Τέλος, όσον αφορά το διάγραμμα του αριθμού Mach, από αυτό βλέπουμε την θέση του κρίσιμου ηχητικού σημείου όπου η $\tilde{u}_\theta = \tilde{C}_s$ (ή αλλιώς $M_\theta = 1.0$), το οποίο βρίσκεται λίγο πιο πάνω από την επιφάνεια του δίσκου. Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι ο αριθμός Mach προσεγγίζει την μονάδα πολύ απότομα, και για αυτόν τον λόγο δεν μπορούμε να εμπιστευτούμε τα αποτελέσματά γύρω από αυτό το κρίσιμο σημείο. Αυτός είναι και ο λόγος που όλες οι φυσικές ποσότητες σχεδιάζονται μέχρι λίγο πριν το σημείο αυτό.

Γνωρίζοντας τώρα την πυκνότητα και τις τιμές της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας, σχεδιάζουμε επίσης την κατακόρυφη ροή μάζας $\tilde{\rho} \tilde{u}_z$, όπως αυτή φαίνεται στο διάγραμμα 5.2 (πάνω δεξιά). Από αυτό βλέπουμε ότι στα εσωτερικά στρώματα του δίσκου έχουμε μεγάλη κατακόρυφη ροή μάζας προς τα κάτω (πρόσπτωση), ενώ στα εξωτερικά στρώματα όπου έχει συμβεί η αλλαγή προσήμου των ταχυτήτων η ροή μάζας είναι θετική (εκροή). Παρατηρούμε επίσης ότι όσο μεγαλύτερη είναι η

θερμική πίεση στο midplane, δηλαδή όσο πιο μικρό είναι το μ , τόσο περισσότερη είναι και η μάζα που εκρέει από την επιφάνεια του δίσκου. Αυτό ήταν κάτι που το περιμέναμε, καθώς επιλέξαμε να αντιστοιχήσουμε τα μικρότερα μ με μεγαλύτερα ejection index ξ .

Όσον αφορά τις τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου που διαπερνά τον δίσκο, αυτές φαίνονται στο διάγραμμα 5.4 για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και ξ . Στην πάνω αριστερά και κάτω αριστερά εικόνα αυτού του διαγράμματος μπορούμε να δούμε την ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου αντίστοιχα, οι οποίες προκύπτουν να είναι θετικές σε όλο το εσωτερικό του δίσκου. Στην πάνω δεξιά εικόνα φαίνεται η αξιμουθιακή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, η οποία όπως βλέπουμε ξεκινάει με μηδενική τιμή και στην συνέχεια γίνεται αρνητική όσο ανεβαίνουμε ψηλότερα μέσα στον δίσκο. Αυτό είναι κάτι που αναμέναμε να προκύψει, καθώς ο δίσκος διαπερνάται κάθετα από το μαγνητικό πεδίο, αλλά μόνο κοντά στο midplane. Λόγω της περιστροφής του, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές λυγίζουν σε αντίθετη φορά από αυτή της περιστροφής, δημιουργώντας έτσι μία έντονη, αρνητική αξιμουθιακή συνιστώσα πεδίου στα πάνω στρώματα του δίσκου.

Επιπλέον, στο κάτω δεξιά γράφημα του διαγράμματος 5.4, μπορούμε να δούμε το σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής που διαπερνά τον δίσκο πάνω στο πολοειδές επίπεδο. Παρατηρούμε ότι όσο περισσότερη μάζα εκρέει από τον δίσκο (μεγάλο ξ και μικρό μ), το σχήμα της δυναμικής γραμμής αλλάζει: οι γραμμές που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερη ροή μάζας βρίσκονται κάτω από αυτές με λιγότερη. Επίσης, από το κάτω αριστερά γράφημα του διαγράμματος 5.1, μπορούμε να δούμε την γωνία ψ μεταξύ του πολοειδούς ανύσματος του μαγνητικού πεδίου και του οριζόντιου άξονα ω (κυλινδρικές συντεταγμένες), η οποία στην επιφάνεια του δίσκου έχει κλίση $\sim 75^\circ$. Η γωνία αυτή είναι μεγαλύτερη από αυτή του κριτηρίου για εκροή που δείξαμε στο κεφάλαιο 2, όπου εκεί για εκροή θα έπρεπε η $\psi < 60^\circ$. Παρ'όλα αυτά, βλέπουμε εδώ ότι εκροή μπορεί να υπάρξει και για μεγαλύτερες τιμές αυτής της γωνίας. Η διαφορά όμως των λύσεων που πήραμε εμείς με την απόδειξη του δεύτερου κεφαλαίου, είναι ότι η απόδειξη αφορούσε έναν ψυχρό δίσκο, ενώ στην περίπτωση μας το πλάσμα του δίσκου είναι θερμό (χρησιμοποιήσαμε την πολυτροπική σχέση). Παρ'όλα αυτά, για διαφορετικά είδη δίσκων (άλλες τιμές παραμέτρων, διαφορετικό πάχος ϵ , μικρότερη αρχική ταχύτητα στο midplane), η γωνία ψ μπορεί να γίνει μικρότερη από 60° . Ένα τέτοιο παράδειγμα θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Στην συνέχεια θα συζητήσουμε για τον μηχανισμό που μεταβάλλει την κίνηση του υλικού από πρόσπτωση σε εκροή, αλλά και για τους δύο μηχανισμούς απαγωγής στροφορμής από τον δίσκο. Για να το κάνουμε αυτό, σχεδιάζουμε τις τρεις συνιστώσες της μαγνητικής δύναμης Lorentz, καθώς και την δύναμη στην $\hat{\phi}$ διεύθυνση που ασκείται στο πλάσμα από το ιξώδες, όπως αυτές φαίνονται στα διάγραμμα 5.5.

Στην πάνω αριστερά εικόνα αυτού του διαγράμματος φαίνεται η ακτινική συνιστώσα της δύναμης Lorentz, στην οποία η κύρια συνεισφορά προέρχεται από την μαγνητική τάση, η οποία οδηγεί στην υποκεπλευριανή περιστροφή του δίσκου. Βλέπουμε ότι στα εσωτερικά στρώματα του δίσκου η δύναμη αυτή είναι θετική, δηλαδή

η μαγνητική τάση προσπαθεί να ισιώσει τις δυναμικές γραμμές «τραβώντας» τες προς τα δεξιά. Στην ίδια περιοχή που συμβαίνει αυτό, το \tilde{u}_φ είναι περίπου ίσο με μονάδα και έχουμε υποκεπλευριανή περιστροφή. Στην συνέχεια, όσο πηγαίνουμε προς μεγαλύτερα ύψη η τιμή της δύναμης αυτής μειώνεται, γίνεται αρνητική, και το υλικό αρχίζει να περιστρέφεται γρηγορότερα στην αξιμουθιακή διεύθυνση. Πράγματι, στα αντίστοιχα ύψη η \tilde{u}_φ συνιστώσα της ταχύτητας είναι μεγαλύτερη της μονάδας και αυξάνεται (διάγραμμα 5.3).

Όσον αφορά την πάνω δεξιά εικόνα του ίδιου διαγράμματος, εκεί απεικονίζεται η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Lorentz, στην οποία η κύρια συνεισφορά προέρχεται από την μαγνητική πίεση. Βλέπουμε ότι όσο ανεβαίνουμε από το midplane προς τα πάνω, η δύναμη αυτή είναι αρνητική και αυξάνει κατα μέτρο, οδηγώντας το υλικό προς τα κάτω ($\tilde{u}_z < 0$ - κίνηση πρόσπτωσης). Ανεβαίνοντας όμως ακόμα πιο ψηλά, παρατηρούμε την μείωση της δύναμης αυτής, τον μηδενισμό της, και τελικά την αλλαγή προσήμου που συμβαίνει σε αυτή. Η περιοχή γύρω από το ύψος $\tilde{z} \simeq 10.0$ όπου η κατακόρυφη δύναμη Lorentz είναι αρνητική, αλλά δεν είναι πλέον τόσο ισχυρή (σχεδόν μηδενική), είναι ακριβώς η περιοχή του δίσκου που παρατηρείται και η αλλαγή προσήμου στην κατακόρυφη και ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας (διάγραμμα 5.3). Η σημαντική μείωση της κατακόρυφης δύναμης Lorentz στην περιοχή αυτή, αφήνει περιθώριο στην κλίση της θερμικής πίεσης να σπρώξει το υλικό προς τα πάνω (είναι η μόνη δύναμη που μπορεί να το κάνει), μετατρέποντας έτσι την κίνηση πρόσπτωσης σε κίνηση εκροής.

Θα συζητήσουμε τώρα τους δύο επικρατέστερους μηχανισμούς που θεωρείται ότι απάγουν στροφορμή από τον δίσκο, δηλαδή τις ροπές λόγω μαγνητικού πεδίου και λόγω ιξώδους. Οι ροπές αυτές, ή αλλιώς οι $\hat{\varphi}$ συνιστώσες της δύναμης Lorentz και της δύναμης λόγω ιξώδους, φαίνονται στο κάτω αριστερά και κάτω δεξιά γραφήματα του διαγράμματος 5.5, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι και οι δύο δυνάμεις στην αξιμουθιακή διεύθυνση είναι αρνητικές (απάγουν στροφορμή - οδηγούν στην ακτινική πρόσπτωση υλικού), και στην συνέχεια μειώνονται κατά μέτρο μέχρι να μηδενιστούν. Η αξιμουθιακή δύναμη Lorentz μάλιστα αλλάζει και πρόσημο στην επιφάνεια του δίσκου, κάτι το οποίο το περιμέναμε θεωρητικά, αφού αυτή είναι που επιταχύνει αξιμουθιακά το πλάσμα στην βάση του δίσκου πριν αυτό περάσει στην περιοχή των πιδάκων (κάτι όμως το οποίο δεν μπορούμε να δούμε ή να ισχυριστούμε στην δική μας μελέτη, καθώς σταματάμε στην επιφάνεια του δίσκου). Επειδή η συγκεκριμένη περίπτωση δίσκου έχει χαμηλά επίπεδα ιξώδους, δηλαδή $\mathcal{P}_m = 0.2$, περιμένουμε η ροπή που ασκείται από αυτό στον δίσκο να είναι πολύ μικρότερη από αυτή που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο. Αυτό φαίνεται οπτικά από τα διαγράμματα των δύο δυνάμεων, αλλά μπορούμε να το ποσοτικοποιήσουμε και χρησιμοποιώντας την παράμετρο Λ που εισάγαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\Lambda = \left| \frac{\text{Jet torque}}{\text{Turbulent torque}} \right|_{z=0} = \left| \frac{\vec{F}_L \cdot \hat{\varphi}}{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\varphi}} \right|_{z=0} \quad (5.1)$$

Στην προκειμένη περίπτωση παίρνουμε τιμές για το Λ στο midplane του δίσκου, οι οποίες φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα (στον οποίο προσθέσαμε και τις τιμές του

πολοειδούς αριθμού Reynolds στο midplane):

$\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$			
μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}
0.609	0.15	73.97	51.83
0.698	0.10	55.49	45.05
0.760	0.06	45.70	41.24
0.817	0.04	40.39	38.30

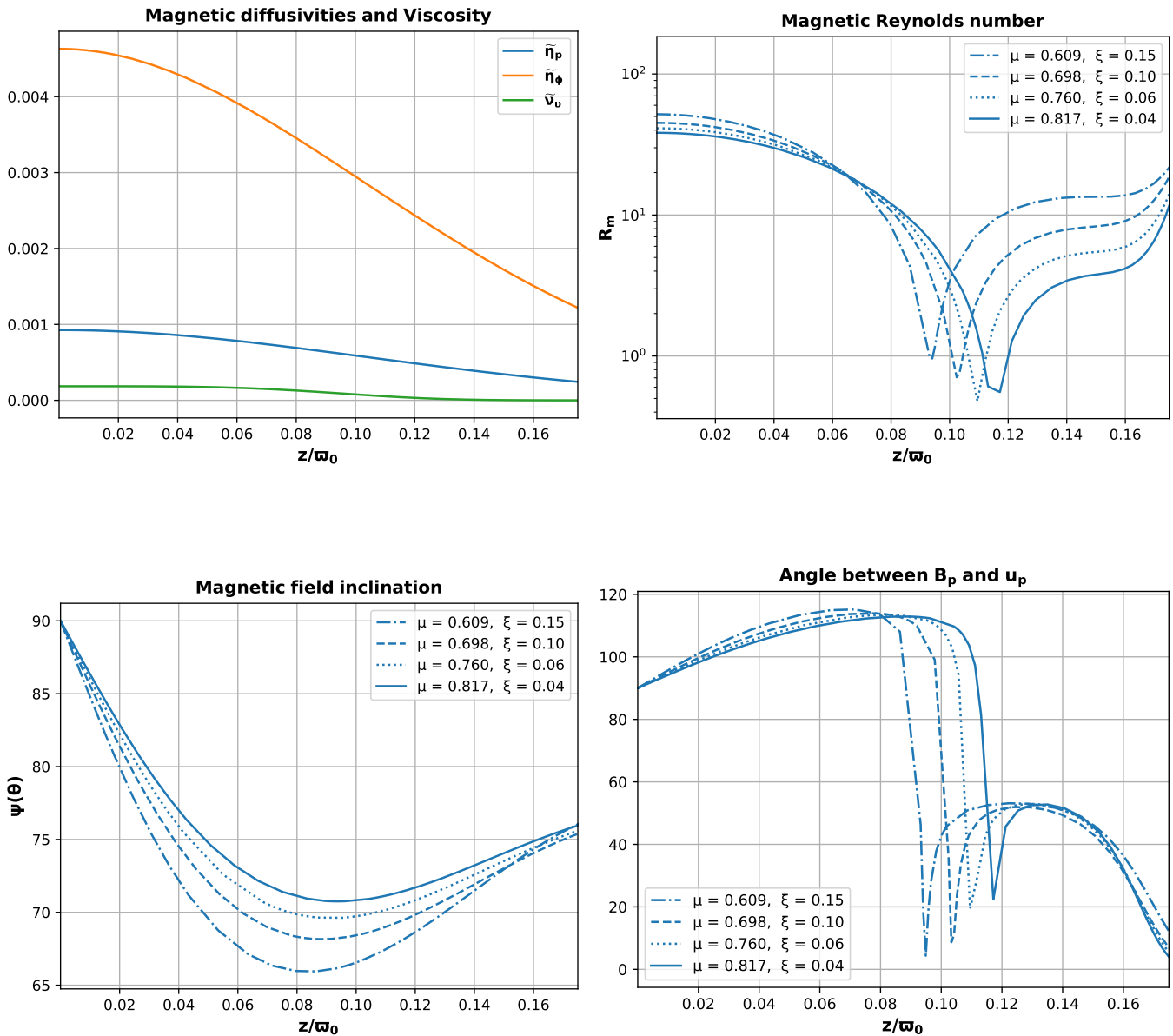
Πίνακας 5.1: Τιμές των παραμέτρων μ και ξ για τις οποίες πραγματοποιήθηκαν τα γραφήματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου Λ και του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds \mathcal{R}_{m0} στο midplane του δίσκου.

Από τις τιμές αυτές βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση το $\Lambda \gg 1.0$, άρα ο κύριος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής από αυτόν τον δίσκο είναι οι ροπές λόγω ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου.

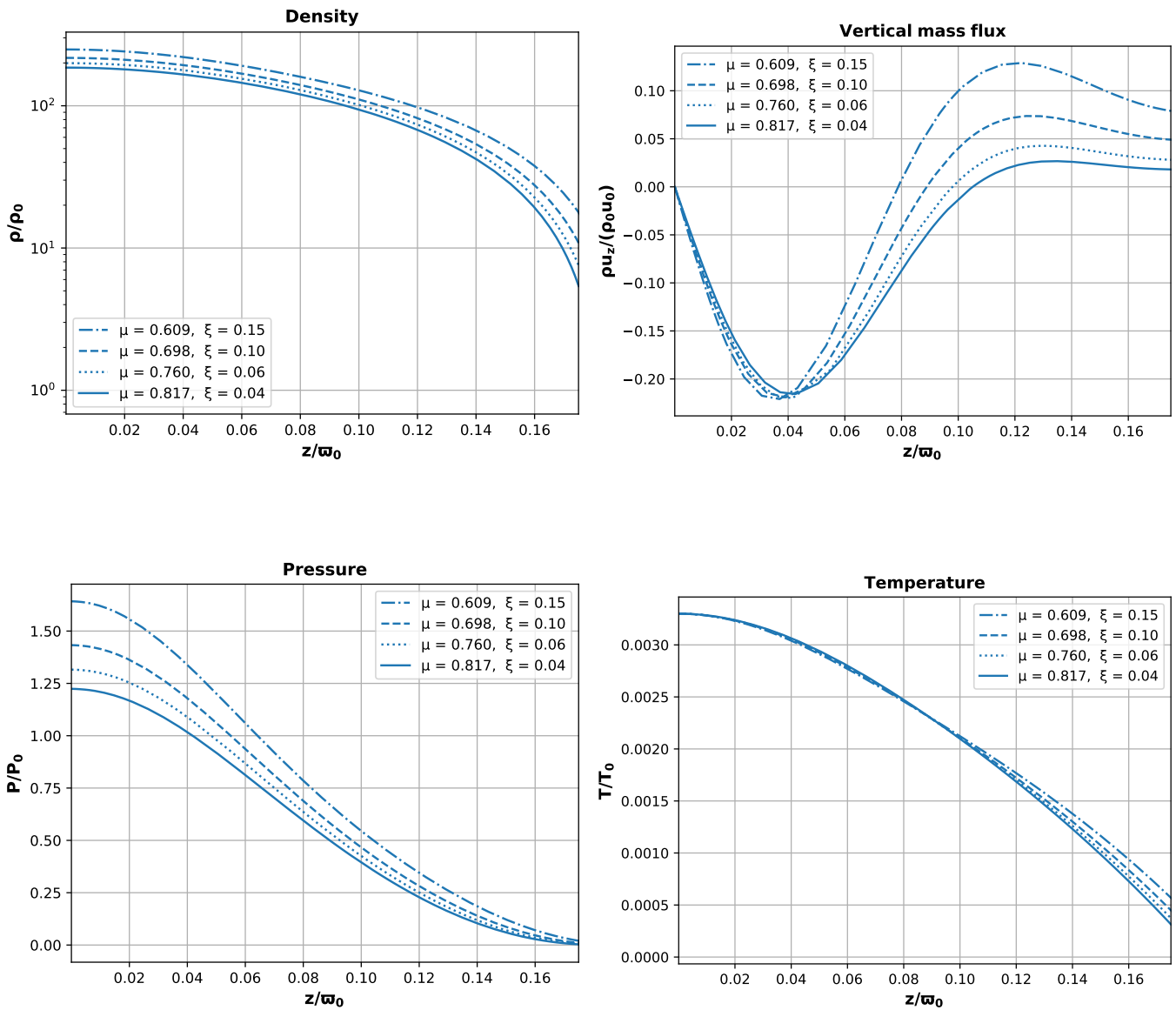
Τέλος, στο διάγραμμα 5.6, απεικονίζονται οι τρεις συνιστώσες του ρεύματος \tilde{J} στο εσωτερικό του δίσκου. Η κατανομή των ρευμάτων κατά ύψος μέσα σε αυτόν είναι σημαντική, καθώς τα ρεύματα και το μαγνητικό πεδίο είναι αυτά που επηρεάζουν άμεσα τον μηχανισμό πρόσπτωσης-εκροής της ύλης, αλλά και τον μηχανισμό απαγωγής στροφορμής από τον δίσκο. Αυτό γίνεται (όπως περιγράψαμε προηγουμένως) μέσω της κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης Lorentz για την πρόσπτωση-εκροή και μέσω της αξιμουθιακής για την απαγωγή στροφορμής. Οι συνιστώσες αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{L\varphi} &= -\tilde{J}_\varphi \tilde{B}_z + \tilde{B}_\varphi \tilde{J}_z \\ \tilde{F}_{Lz} &= \tilde{J}_\varphi \tilde{B}_\varphi - \tilde{B}_\varphi \tilde{J}_\varphi\end{aligned}\quad (5.2)$$

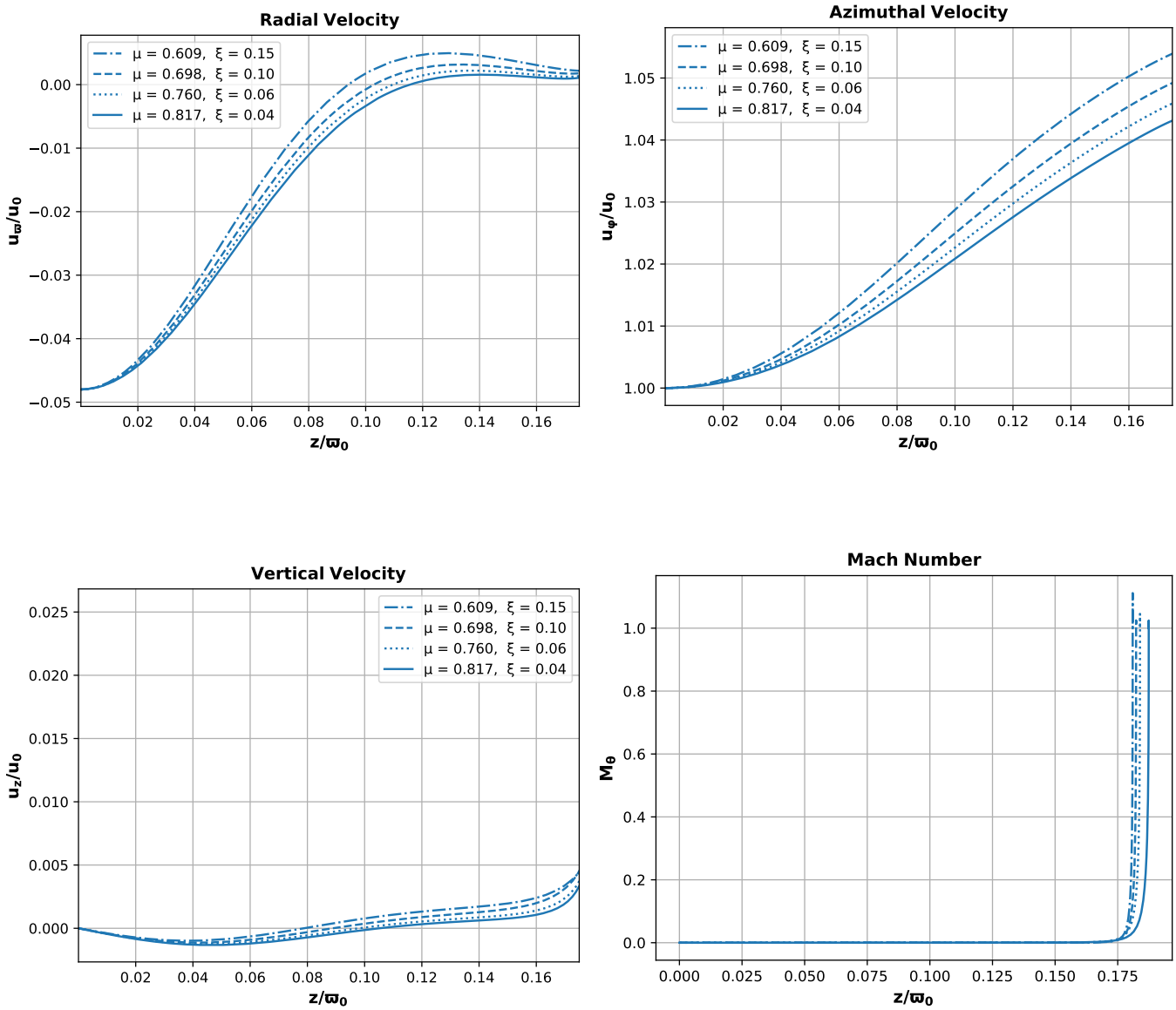
Από αυτές, φαίνεται καθαρά ότι το προφίλ των συνιστωσών του ρεύματος θα πρέπει να είναι κατάλληλο, έτσι ώστε η $\tilde{F}_{L\varphi}$ να αλλάζει πρόσημο και να γίνεται από αρνητική στο εσωτερικό του δίσκου (απαγωγή στροφορμής) θετική στην επιφάνειά του (επιτάχυνση του πλάσματος). Ταυτόχρονα, τα ρεύματα θα πρέπει να είναι τέτοια έτσι ώστε η \tilde{F}_{Lz} να είναι ελαφρώς αρνητική κοντά στην επιφάνεια του δίσκου, έτσι ώστε να μπορεί η θερμική πίεση να ωθήσει το υλικό κατακόρυφα προς τα πάνω και να έχουμε εκροή. Τα προφίλ των συνιστωσών του ρεύματος που προέκυψαν από την ολοκλήρωση, πράγματι ικανοποιούν τις απαιτήσεις αυτές.



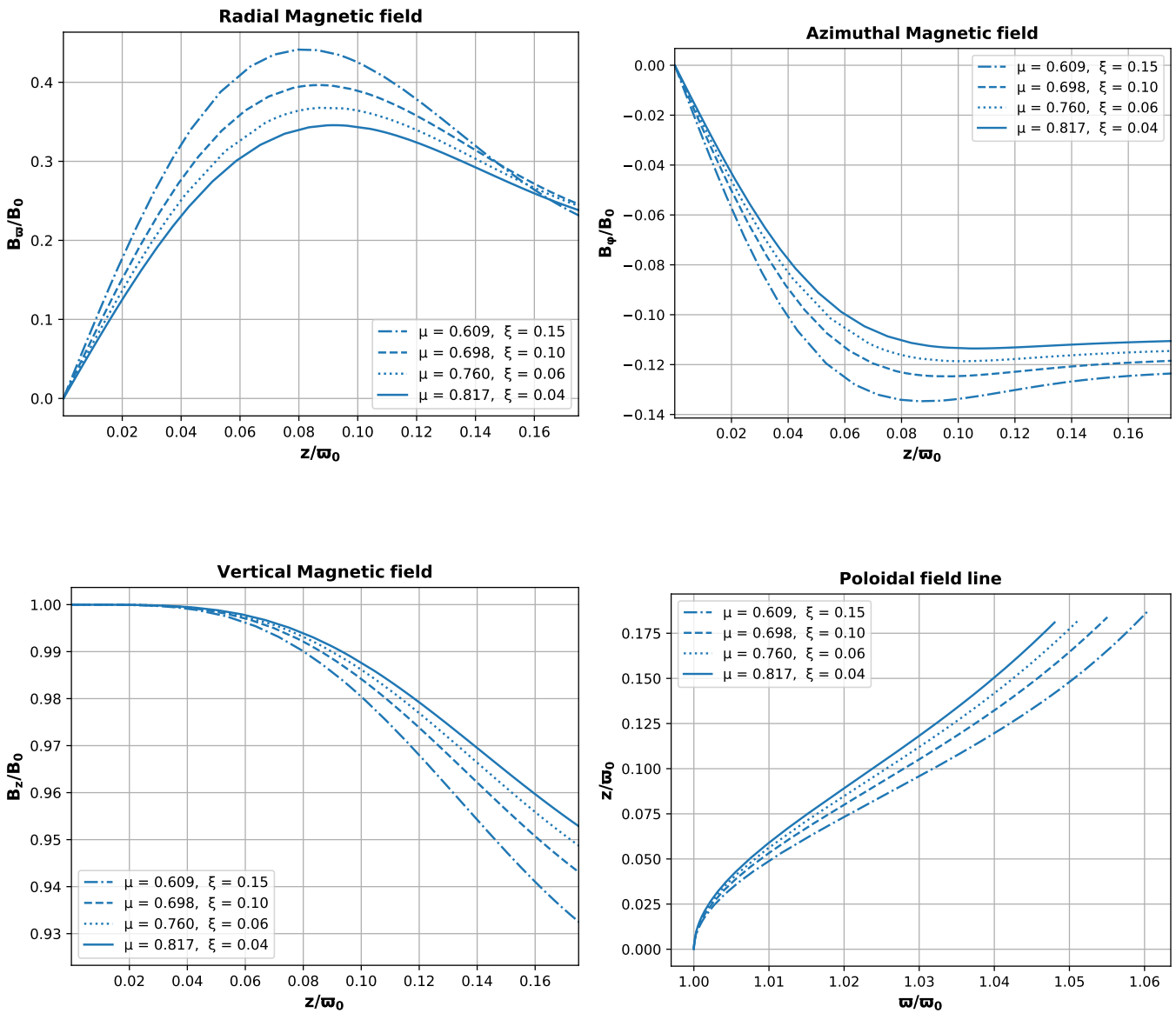
Διάγραμμα 5.1: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην αξιμουθιακή διεύθυνση ($\tilde{\eta}_\phi$) και στο πολοειδές επίπεδο ($\tilde{\eta}_p$), καθώς και κατανομή του ιξώδους ($\tilde{\nu}_v$) στο εσωτερικό του δίσκου. Πάνω δεξιά: μαγνητικός αριθμός Reynolds (λογαριθμική κλίμακα). Κάτω αριστερά: γωνία μεταξύ του διανύσματος του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου \vec{B}_p και του οριζόντιου άξονα ϖ . Κάτω δεξιά: γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



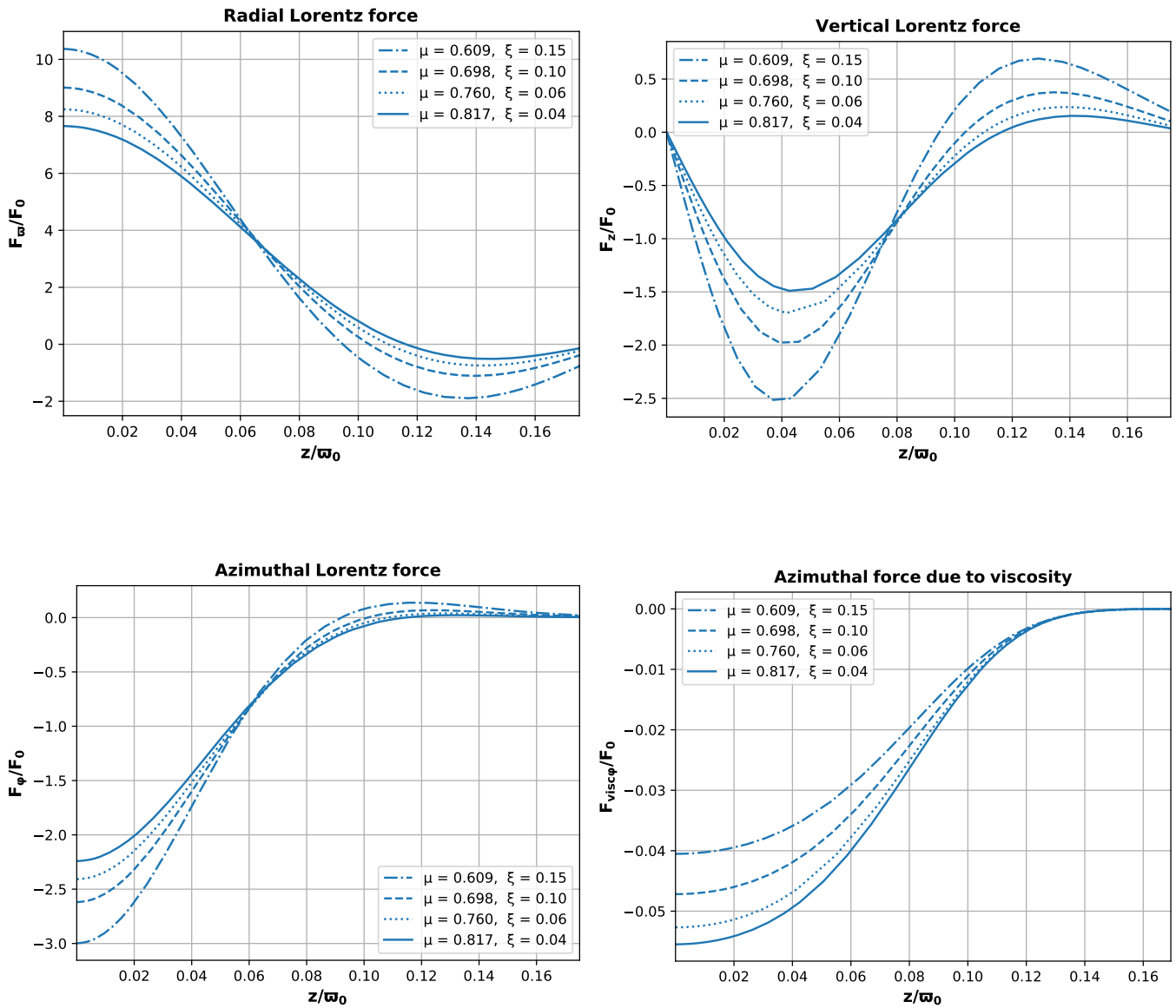
Διάγραμμα 5.2: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της πυκνότητας στο εσωτερικό του δίσκου (λογαριθμική κλίμακα). Πάνω δεξιά: κατακόρυφη ροή μάζας. Κάτω αριστερά: κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό του δίσκου. Κάτω δεξιά: κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου.



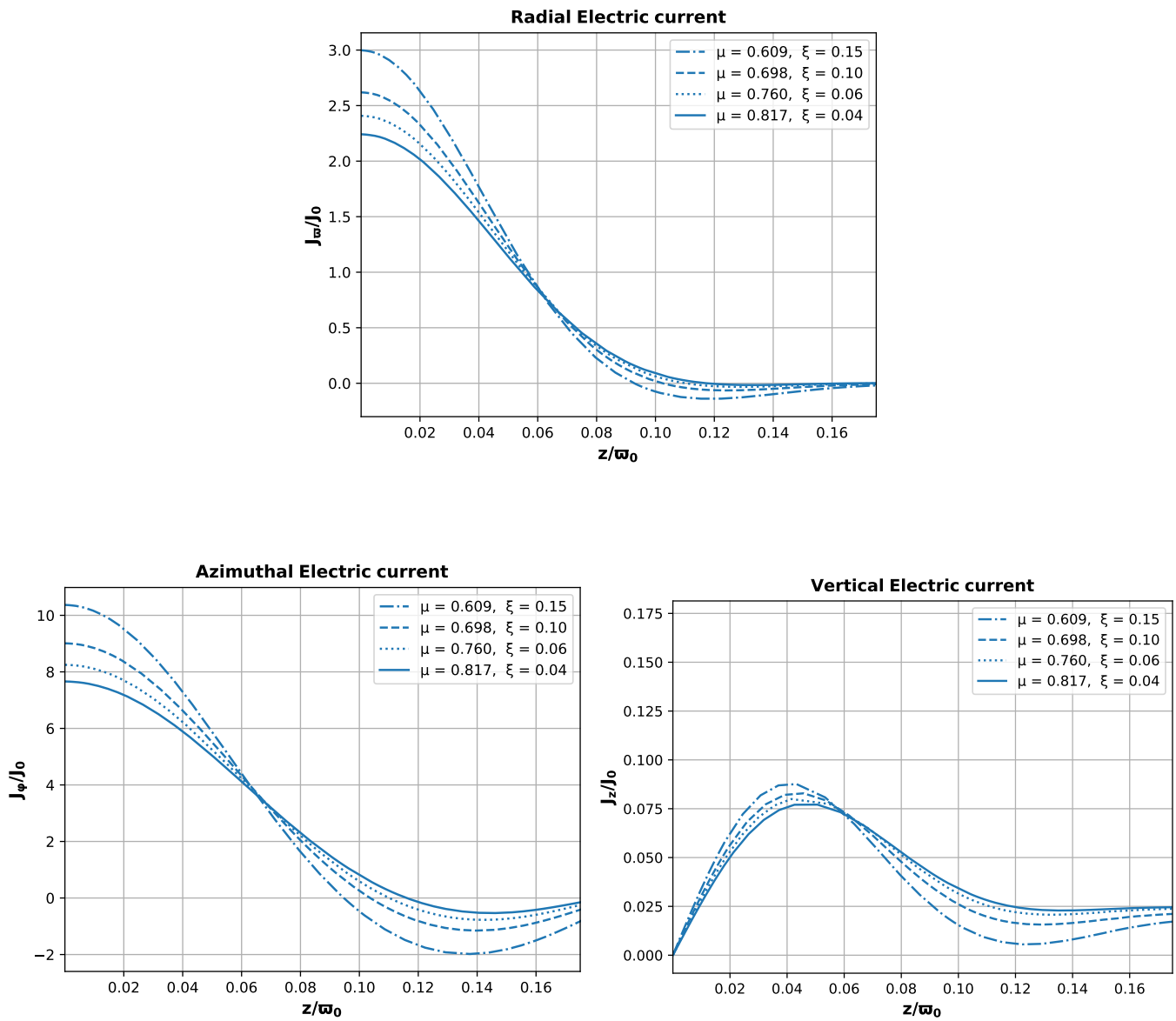
Διάγραμμα 5.3: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: αριθμός Mach M_θ , στην θ διεύθυνση.



Διάγραμμα 5.4: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



Διάγραμμα 5.5: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες της δύναμης Lorentz κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής και η δύναμη λόγω ιξώδους στην αζιμουθιακή κατεύθυνση, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα δύναμης Lorentz. Πάνω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης λόγω ιξώδους.



Διάγραμμα 5.6: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $P_m = 0.2$. Οι συνιστώσες του ρεύματος \vec{J} κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω: ακτινική συνιστώσα. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα.

5.3 Δίσκος με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός δίσκου ο οποίος χαρακτηρίζεται από χαμηλά επίπεδα ιξώδους, όπως και ο πρώτος που είδαμε, αλλά τώρα η ανισοτροπία στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου μεταξύ της διεύθυνσης $\hat{\varphi}$ και του πολοειδούς επιπέδου είναι πολύ λιγότερη σε σχέση με πριν. Αυτό αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων: $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι κατανομές του ιξώδους $\tilde{\nu}$ και της διάχυσης, τόσο στο πολοειδές επίπεδο $\tilde{\eta}_p$ όσο και στην αξιμουθιακή διεύθυνση $\tilde{\eta}_\varphi$, φαίνονται στο διάγραμμα 5.7 (πάνω αριστερά).

Και στην περίπτωση αυτού του δίσκου, εκτελέσαμε την ολοκλήρωση για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και ξ . Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι στο διάστημα από $\mu = 0.1$ μέχρι $\mu = 0.4$ και για ξ από 0.04 μέχρι 0.15, προκύπτουν μη φυσικά αποδεκτές λύσεις για εκροή, οι οποίες απορρίπτονται για τους λόγους που αναφέραμε στην προηγούμενη περίπτωση δίσκου (είχαμε αλλαγή της εκροής ξανά σε πρόσπτωση, το \tilde{u}_φ μειωνόταν, τα \tilde{B}_z και \tilde{B}_φ έπαιρναν αρνητικές τιμές). Φυσικά αποδεκτές λύσεις προέκυψαν τώρα για τιμές μ στο διάστημα από $\mu = 0.5$ μέχρι και $\mu \simeq 1.0$. Το διαστημα αυτό είναι μεγαλύτερο σε σχέση με του προηγούμενου δίσκου όπου η ανισοτροπία στην διάχυση ήταν μεγαλύτερη (εκεί το ελάχιστο μ έπαιρνε την τιμή 0.6). Επίσης η ολοκλήρωση πραγματοποιήθηκε και για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου χ_m (για παράδειγμα $\chi_m = 0.9$, ακόμα λιγότερη ανισοτροπία), αλλά τα αποτελέσματα παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά. Τα γραφήματα που παρουσιάζονται στην συνέχεια είναι για τιμές των μ και ξ , οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 5.2

Στο διάγραμμα 5.8 πάνω δεξιά, μπορούμε να δούμε το προφίλ του λογαρίθμου της πυκνότητας συναρτήσει του ύψους πάνω από το midplane. Βλέπουμε πάλι ότι αυτή μειώνεται κατά μία τάξη μεγέθους, κάτι που μας δείχνει ότι η ολοκλήρωση έχει πραγματοποιηθεί και εδώ μέχρι την επιφάνεια του δίσκου. Επίσης στο ίδιο διάγραμμα βλέπουμε και τα προφίλ της πίεσης και της θερμοκρασίας, τα οποία έχουν την αναμενόμενη συμπεριφορά. Το ότι η ολοκλήρωση έφτασε μέχρι την επιφάνεια του δίσκου φαίνεται πάλι και από το διάγραμμα 5.7, στο οποίο εικονίζονται τα προφίλ της διάχυσης και του ιξώδους μέσα στον δίσκο - τα οποία έχουν μειωθεί κατά πολύ - καθώς και η γωνία μεταξύ των διανύσματος \vec{B}_p και \vec{u}_p , η οποία γίνεται περίπου 8° . Αυτό σηματοδοτεί το γεγονός ότι πλησιάζουμε στην περιοχή της ιδεατής MHD, όμως βλέπουμε ότι κοντά στην επιφάνεια του δίσκου δεν μπορούμε να πάρουμε την προσέγγιση της άπειρης ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Πράγματι, από το ίδιο διάγραμμα (πάνω δεξιά) μπορούμε να δούμε το προφίλ του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds. Αυτός μειώνεται με το ύψος, φτάνει την ελάχιστη τιμή του στα εξωτερικά στρώματα του δίσκου και στην συνέχεια αυξάνεται, παίρνοντας στην επιφάνεια τιμές $\mathcal{R}_m \sim 3$, πολύ μικρότερες από το ιδεατό όριο των $\mathcal{R}_m \gg 1.0$.

Στην συνέχεια από το διάγραμμα 5.9 μπορούμε να δούμε τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας και τον αριθμό Mach στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση (κάτω δεξιά). Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δίσκου βλέπουμε πάλι την αλλαγή προσήμου της ακτινικής και κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας (από πρόσπτωση έχουμε αλλαγή

σε εκροή), ενώ η περιστροφή του δίσκου ξεκινά από υποκεπλευριανές ταχύτητες και στην συνέχεια αυξάνει. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δίσκου, όσο μικρότερη τιμή παίρνει το μ τόσο πιο χαμηλά γίνεται αυτή η αλλαγή των προσήμων. Επιπλέον, βλέπουμε ότι σε αυτόν τον δίσκο με την χαμηλή ανισοτροπία στην διάχυση του πεδίου, η αλλαγή από την διαδικασία της πρόσπτωσης σε εκροή γίνεται σε λίγο μεγαλύτερα \tilde{z} από ότι στην περίπτωση του δίσκου με μεγάλη ανισοτροπία (εκεί η αλλαγή συμβαίνει γύρω από $\tilde{z} \sim 0.09$, ενώ τώρα στο $\tilde{z} \sim 0.11$). Όσον αφορά τον αριθμό Mach, αυτός μας δείχνει και πάλι την θέση του ηχητικού κρίσιμου σημείου λίγο πάνω από την επιφάνεια του δίσκου που σηματοδοτεί και το τέλος της ολοκλήρωσης. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, δεν εμπιστευόμαστε τα αποτελέσματα γύρω από το σημείο αυτό. Σχεδιάζουμε επίσης και την κατακόρυφη ροή μάζας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 5.8 (πάνω δεξιά). Η μορφή αυτής είναι ίδια όπως και στον δίσκο με την μεγάλη ανισοτροπία, με τα ζεύγη των μικρότερων μ και μεγαλύτερων ξ να δίνουν μεγαλύτερες τιμές ροής όπως αναμενόταν.

Όσον αφορά τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου και το σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής πάνω στο πολοειδές επίπεδο, αυτά φαίνονται στο διάγραμμα 5.10. Η συμπεριφορά αυτών είναι ίδια με την περίπτωση του δίσκου με την μεγαλύτερη ανισοτροπία, με την μόνη διαφορά ότι το B_φ εδώ έχει ελαφρώς πιο αρνητικές τιμές. Στο διάγραμμα 5.7 κάτω αριστερά, φαίνεται και η γωνία μεταξύ της πολοειδούς συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου και του οριζόντιου άξονα ϖ . Και σε αυτή την περίπτωση, η γωνία αυτή είναι μεγαλύτερη από 60° , αλλά έχει μικρότερη τιμή σε σχέση με την περίπτωση δίσκου με μεγάλη ανισοτροπία (εκεί η γωνία ήταν γύρω στις 75° , ενώ τώρα προκύπτει $\psi \sim 70^\circ$).

Στο διάγραμμα 5.11 βλέπουμε τώρα τις συνιστώσες της δύναμης Lorentz και την αξιμουθιακή δύναμη που ασκείται στο πλάσμα του δίσκου λόγω του ιξώδους, για την περίπτωση αυτού του δίσκου με την χαμηλή ανισοτροπία στις διαχύσεις. Η εικόνα που παίρνουμε για αυτές τις δυνάμεις είναι ίδια με την περίπτωση του δίσκου με μεγάλη ανισοτροπία: η κατακόρυφη δύναμη Lorentz (κύρια συνεισφορά από μαγνητική πίεση) μειώνεται κατά μέτρο στα υψηλότερα στρώματα του δίσκου, δίνοντας την ευκαιρία στην κλίση της θερμοκίνησης να σπρώξει το πλάσμα προς τα πάνω, ενώ η ακτινική συνιστώσα (μαγνητική τάση) είναι αυτή που οδηγεί στην υποκεπλευριανή περιστροφή του δίσκου.

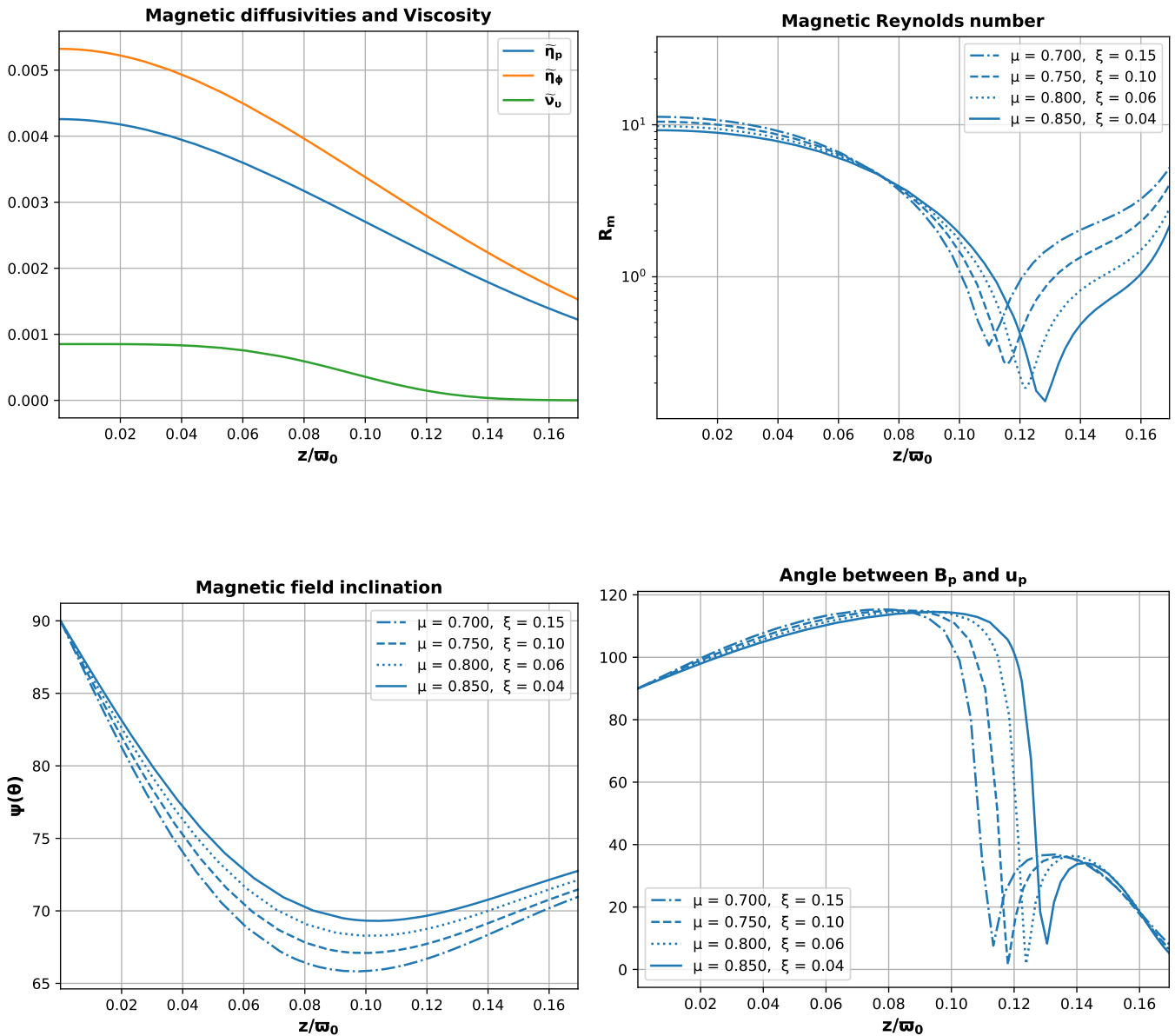
Όσον αφορά την απαγωγή στροφορμής, αυτή συμβαίνει πάλι λόγω ύπαρξης των ροπών από το μαγνητικό πεδίο και από το ιξώδες. Οι δυνάμεις που είναι υπεύθυνες για αυτό, φαίνονται στο διάγραμμα 5.11 κάτω αριστερά και κάτω δεξιά. Όπως και στην περίπτωση του προηγούμενου δίσκου, αυτές είναι αρνητικές στο εσωτερικό του (απάγουν στροφορμή), ενώ στην συνέχεια μηδενίζονται (η αξιμουθιακή λόγω ιξώδους) ή αλλάζουν πρόσημο και γίνονται ελεφρώς θετικές (ροπή λόγω μαγνητικού πεδίου). Η διαφορά που παρατηρούμε τώρα μεταξύ αυτού του δίσκου με την χαμηλή ανισοτροπία στην διάχυση του πεδίου και της προηγούμενης περίπτωσης με την μεγάλη, είναι ότι η δύναμη λόγω ιξώδους στην $\hat{\varphi}$ διεύθυνση είναι μεγαλύτερη κατά μέτρο, κάτι που σημαίνει ότι το ιξώδες παίζει λίγο πιο σημαντικό ρόλο αυτή την φορά. Αυτό φαίνεται και υπολογίζοντας την παράμετρο Λ (σχέση 5.4) στο midplane

του δίσκου, που μας δείχνει ποιος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής υπερισχύει. Οι τιμές αυτές φαίνονται στον πίνακα 5.2. Βλέπουμε τώρα ότι το Λ κυμαίνεται μεταξύ 10 και 16, κάτι το οποίο μας δείχνει ότι και αυτή την φορά ο μηχανισμός που υπερισχύει είναι αυτός των ροπών από το μαγνητικό πεδίο, με την συνεισφορά όμως του ιξώδους να είναι λίγο μεγαλύτερη σε σχέση με την συνεισφορά που είχε στον δίσκο με την μεγάλη ανισοτροπία.

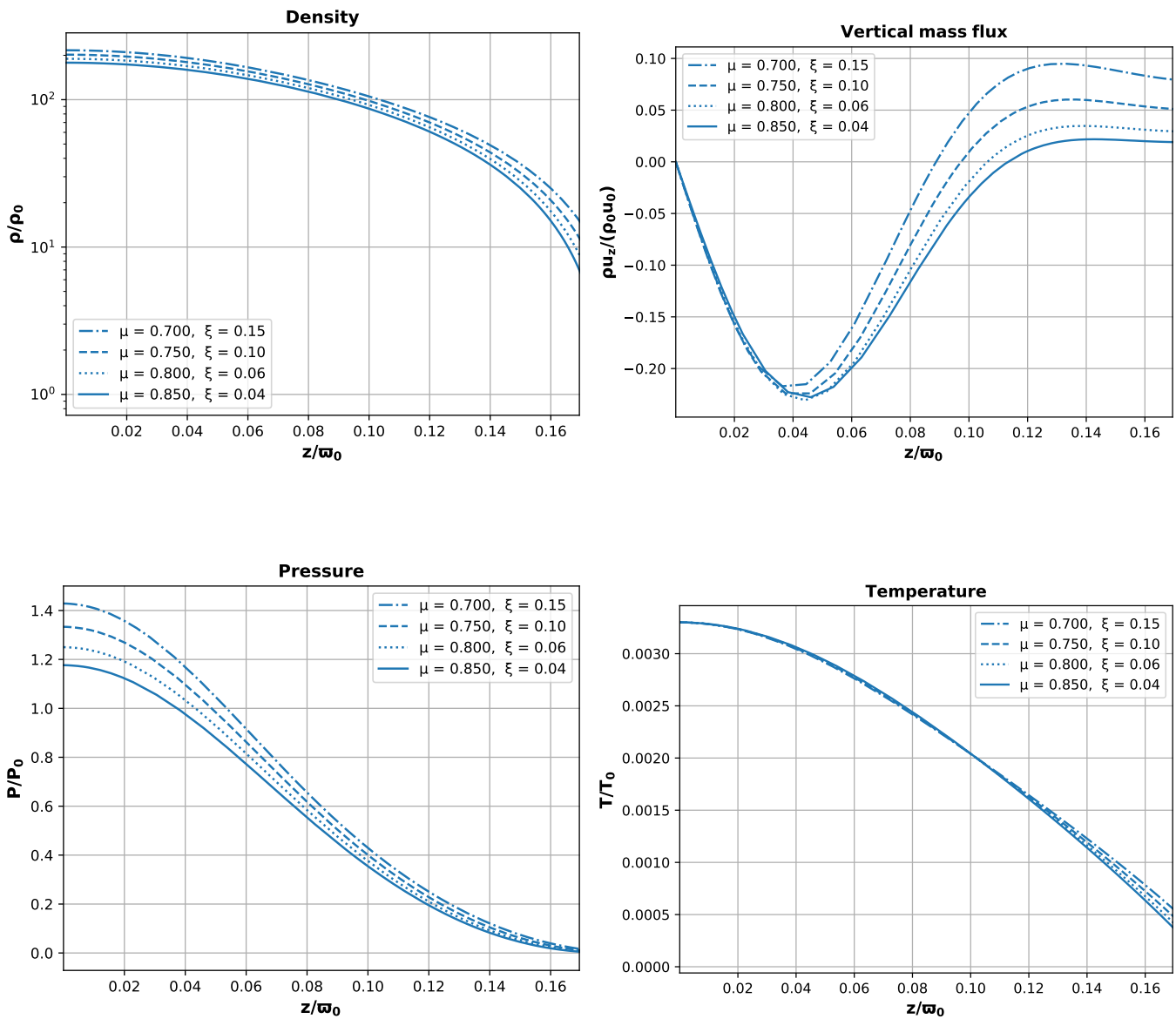
Τέλος, στο διάγραμμα 5.12 βλέπουμε τα προφίλ των συνιστωσών του ρεύματος \tilde{J} στο εσωτερικό του δίσκου. Όπως είπαμε και προηγουμένως, τα προφίλ αυτά είναι σημαντικά, καθώς επηρεάζουν άμεσα τις διάφορες φυσικές διαδικασίες μέσα στον δίσκο μέσω της δύναμης Lorentz (πρόσπτωση - εκροή, απαγωγή στροφορμής, υποκεπλευριανή περιστροφή). Η συμπεριφορά των προφίλ αυτών είναι ίδια και σε αυτή την περίπτωση, με αυτή των ρευμάτων για δίσκο με μεγάλη ανισοτροπία.

$\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$			
μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}
0.70	0.15	16.32	11.27
0.75	0.10	13.14	10.48
0.80	0.06	11.08	9.79
0.85	0.04	9.93	9.2

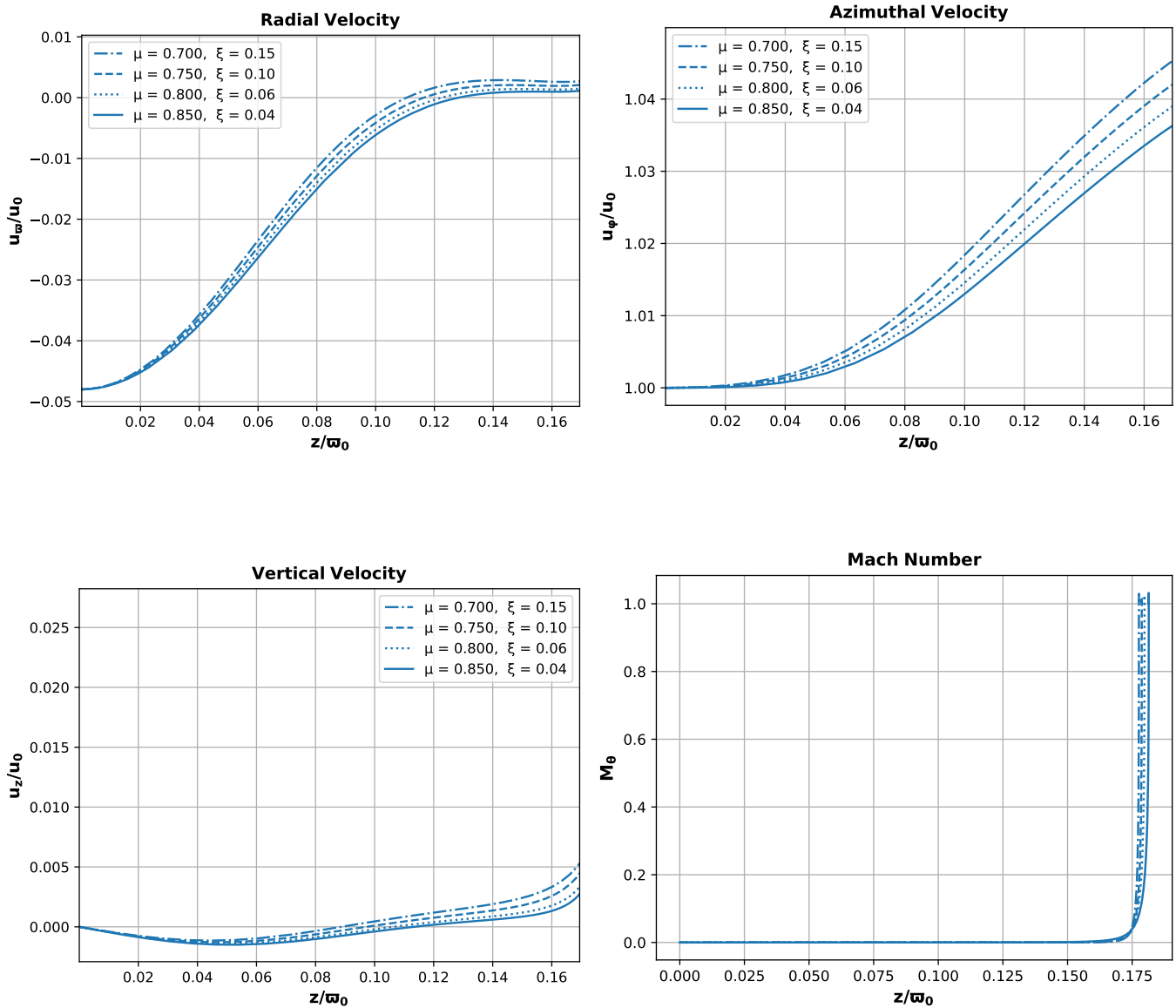
Πίνακας 5.2: Τιμές των παραμέτρων μ και ξ για τις οποίες πραγματοποιήθηκαν τα γραφήματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου Λ και του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds \mathcal{R}_{m0} στο midplane του δίσκου.



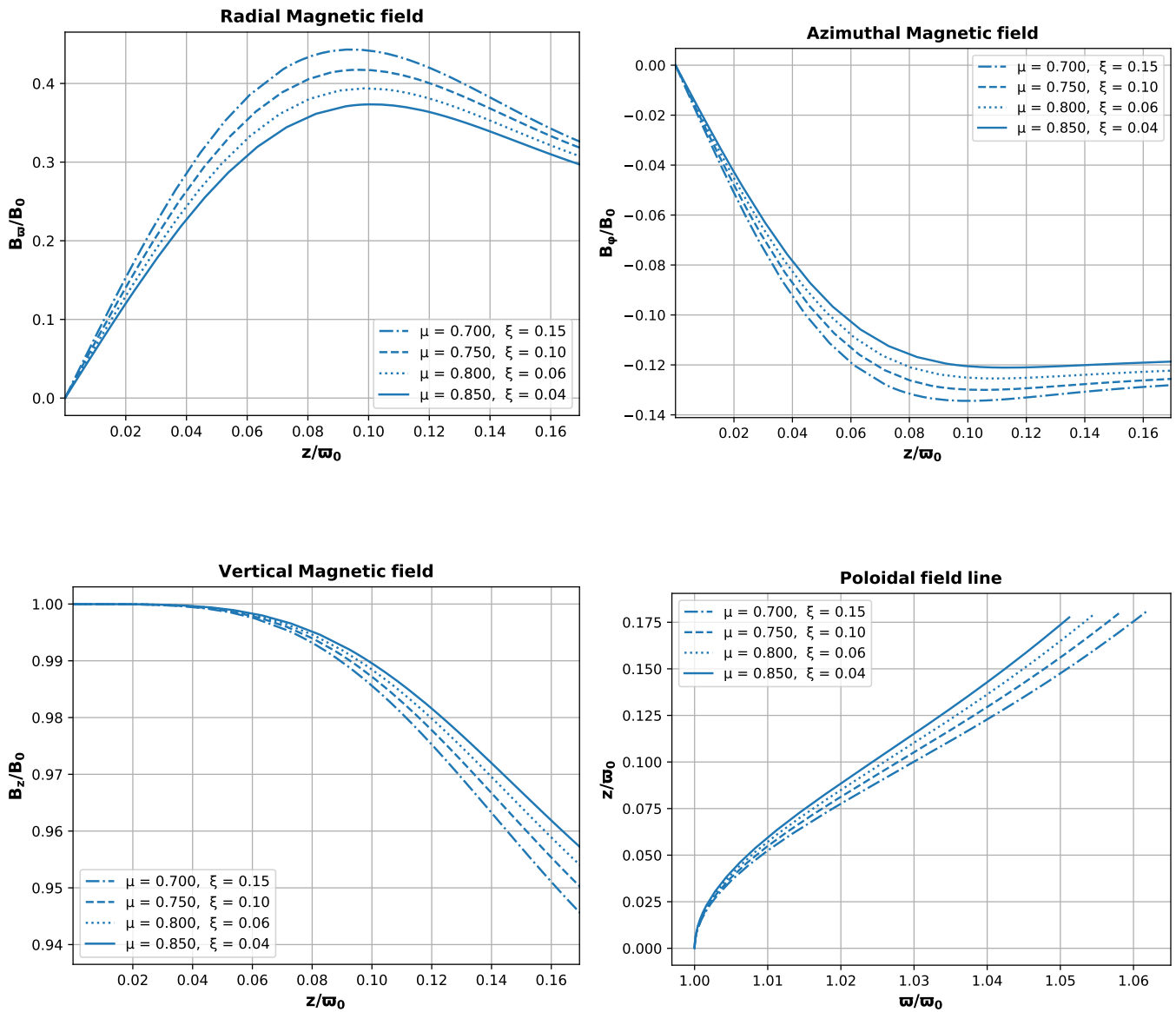
Διάγραμμα 5.7: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην αξιμουθιακή διεύθυνση ($\tilde{\eta}_\phi$) και στο πολοειδές επίπεδο ($\tilde{\eta}_p$), καθώς και κατανομή του ιξώδους ($\tilde{\nu}_v$) στο εσωτερικό του δίσκου. Πάνω δεξιά: μαγνητικός αριθμός Reynolds (λογαριθμική κλίμακα). Κάτω αριστερά: γωνία μεταξύ του διανύσματος του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου \vec{B}_p και του οριζόντιου άξονα ϖ . Κάτω δεξιά: γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



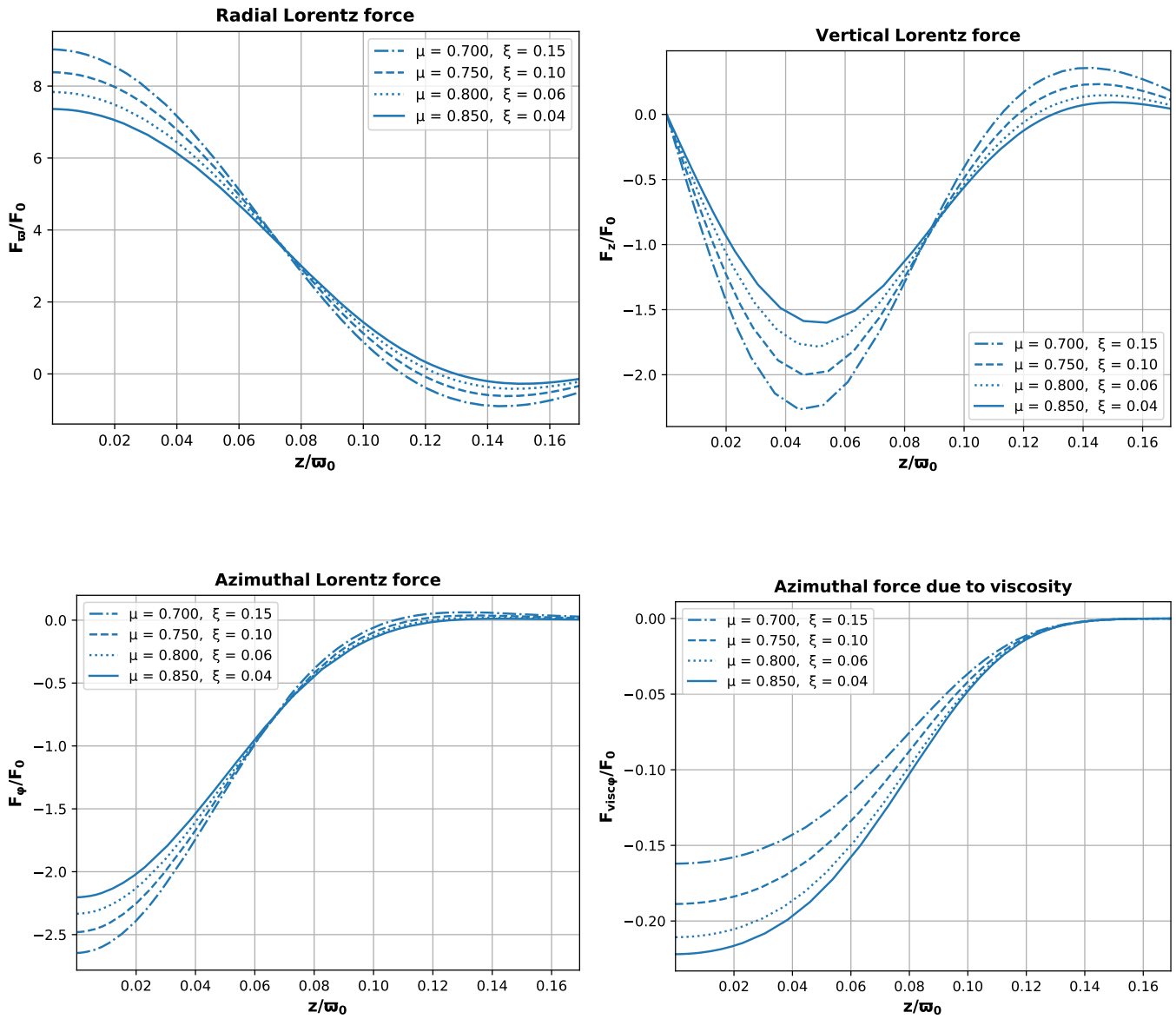
Διάγραμμα 5.8: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της πυκνότητας στο εσωτερικό του δίσκου (λογαριθμική κλίμακα). Πάνω δεξιά: κατακόρυφη ροή μάζας. Κάτω αριστερά: κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό του δίσκου. Κάτω δεξιά: κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου.



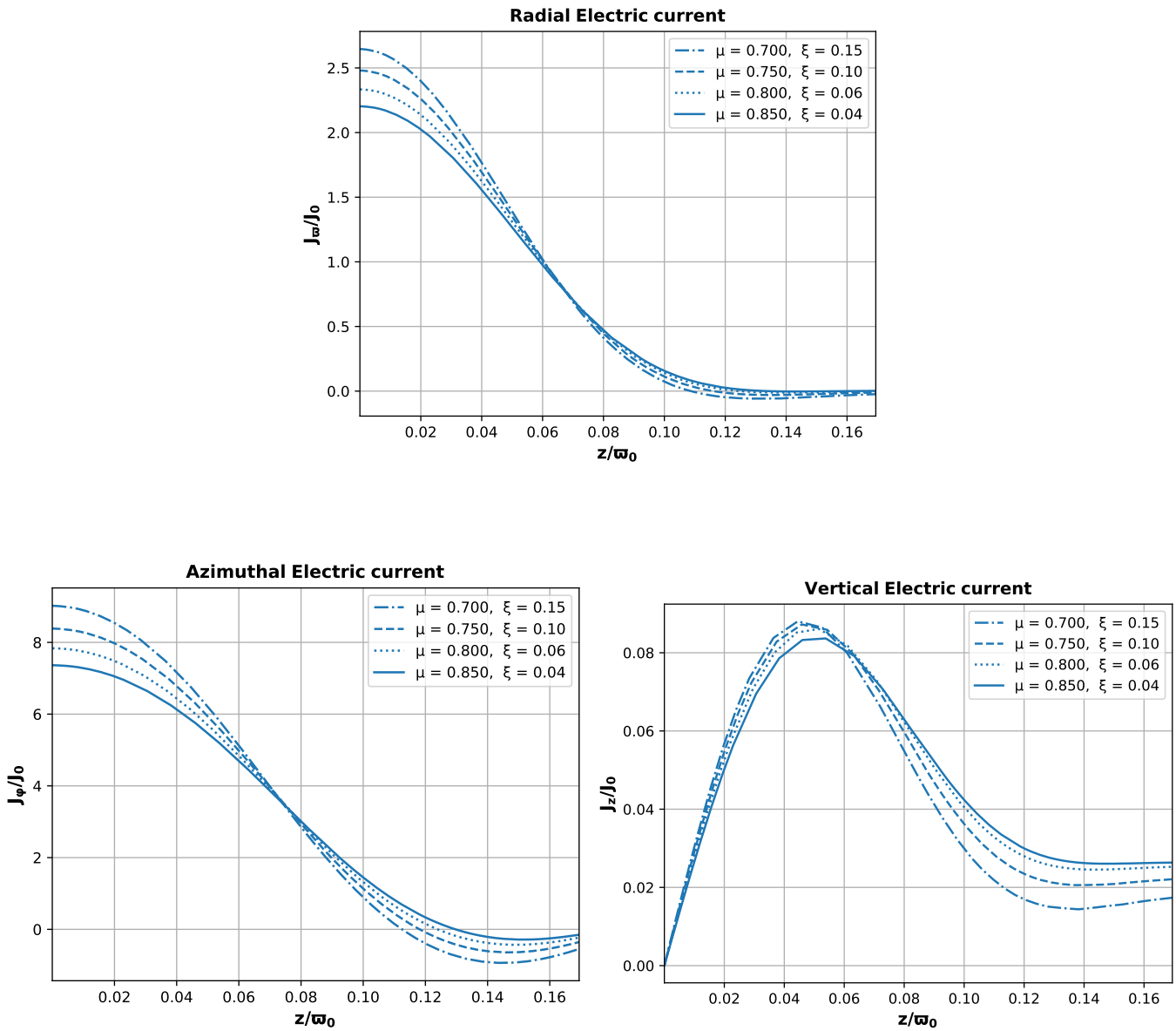
Διάγραμμα 5.9: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: αριθμός Mach M_θ , στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση.



Διάγραμμα 5.10: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



Διάγραμμα 5.11: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες της δύναμης Lorentz κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής και η δύναμη λόγω ιξώδους στην αζιμουθιακή κατεύθυνση, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα δύναμης Lorentz. Πάνω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης λόγω ιξώδους.



Διάγραμμα 5.12: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$. Οι συνιστώσες του ρεύματος \vec{J} κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω: ακτινική συνιστώσα. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα.

5.4 Δίσκος με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$

Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός δίσκου ο οποίος χαρακτηρίζεται από μεγάλη ανισοτροπία στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου μεταξύ της διεύθυνσης $\hat{\phi}$ και του πολοειδούς επιπέδου, όπως ήταν και η πρώτη περίπτωση, αλλά τώρα θα επιλέξουμε να έχουμε υψηλά επίπεδα ιξώδους. Αυτό αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων: $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι κατανομές του ιξώδους \tilde{v} , και της διάχυσης, τόσο στο πολοειδές επίπεδο \tilde{h}_p όσο και στην αξιμουθιακή διεύθυνση \tilde{h}_ϕ , φαίνονται στο διάγραμμα 5.13 (πάνω αριστερά).

Η ολοκλήρωση εκτελέστηκε για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και ξ , και το διάστημα στο οποίο βρέθηκαν φυσικά αποδεκτές λύσεις προέκυψε να είναι μεταξύ 0.5 και 0.9 για την παράμετρο μ και μεταξύ 0.04 και 0.15 για την παράμετρο ξ . Οι υπόλοιπες λύσεις απορρίφθηκαν για τους λόγους που αναφέραμε και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Τα γραφήματα που παρουσιάζονται στην συνέχεια είναι για τιμές των μ και ξ , οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 5.3.

Στο διάγραμμα 5.14, μπορούμε να δούμε τα προφίλ του λογαρίθμου της πυκνότητας, της πίεσης και της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου, συναρτήσει του ύψους πάνω από το midplane. Αυτά έχουν την αναμενόμενη συμπεριφορά που είδαμε και στις προηγούμενες περιπτώσεις, με την πυκνότητα να πέφτει σημαντικά (μία τάξη μεγέθους), το οποίο μας δείχνει ότι η ολοκλήρωση πραγματοποιήθηκε και εδώ μέχρι την επιφάνεια του δίσκου.

Αυτό φαίνεται πάλι και από το διάγραμμα 5.13, όπου βλέπουμε τα προφίλ της διάχυσης και του ιξώδους μέσα στον δίσκο - τα οποία έχουν μειωθεί κατά πολύ - καθώς και τη γωνία μεταξύ των \vec{B}_p και \vec{u}_p , η οποία είναι τώρα περίπου ίση με 10° . Οπότε πλησιάζουμε την περιοχή της ιδεατής MHD, αλλά στην επιφάνεια του δίσκου δεν είμαστε ακόμα σε αυτή, όπως φαίνεται και από το προφίλ του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds, ο οποίος μειώνεται σημαντικά μέσα στον δίσκο και παίρνει στην επιφάνεια τιμές $\mathcal{R}_m \sim 10.0$.

Στο διάγραμμα 5.15, μπορούμε να δούμε πάλι τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας και τον αριθμό Mach στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση. Από αυτά είναι εμφανής πάλι η μετάβαση από την διαδικασία της πρόσπτωσης σε αυτή της εκροής, με αυτό να συμβαίνει σε ύψος $\tilde{z} \sim 0.09$ όπως και στην πρώτη περίπτωση δίσκου, που όμως δεν ήταν τόσο σημαντικά τα επίπεδα του ιξώδους. Επιπλέον η θέση του κρίσιμου σημείου και το τέλος της ολοκλήρωσης, φαίνονται από το γράφημα του αριθμού Mach. Σχεδιάζουμε επίσης και την κατακόρυφη ροή μάζας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 5.14, η μορφή της οποίας είναι η ίδια με των προηγούμενων περιπτώσεων.

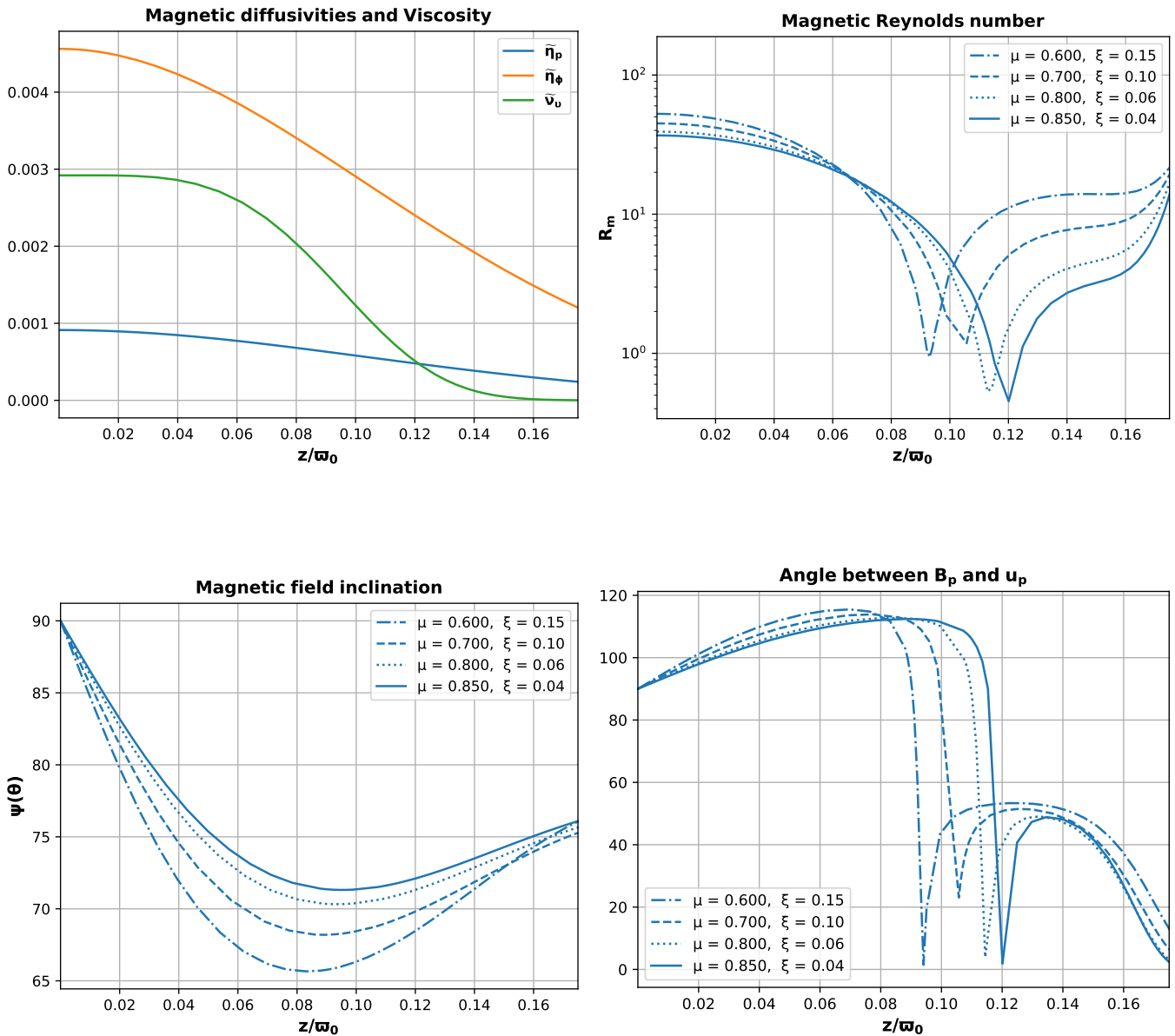
Όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο, οι συνιστώσες του και το σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής στο πολοειδές επίπεδο φαίνονται στο διάγραμμα 5.16. Η συμπεριφορά αυτών είναι η αναμενόμενη και όμοια με τον προηγούμενων περιπτώσεων. Επίσης, η γωνία μεταξύ διανύσματος \vec{B}_p και του οριζόντιου άξονα, φαίνεται στο διάγραμμα 5.13 (κάτω αριστερά). Σε αυτή την περίπτωση, η γωνία αυτή κοντά στην επιφάνεια του δίσκου προκύπτει $\psi \sim 75^\circ$, όπως και στην πρώτη περίπτωση δίσκου που το ιξώδες ήταν αμελητέο.

Στο διάγραμμα 5.17, βλέπουμε τις συνιστώσες της δύναμης Lorentz και την αξιμουθιακή δύναμη που ασκείται στο πλάσμα του δίσκου λόγω ιξώδους. Η συμπεριφορά της κατακόρυφης και ακτινικής δύναμης Lorentz (που επηρεάζουν τον μηχανισμό εκροής και την περιστροφή του δίσκου, αντίστοιχα), είναι η ίδια με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Αυτό που αλλάζει στην περίπτωση αυτού του δίσκου με το υψηλό επίπεδο ιξώδους, έχει να κάνει με την απαγωγή στροφορμής. Η αξιμουθιακή δύναμη Lorentz έχει όμοια συμπεριφορά και παίρνει τιμές παρόμοιες με αυτές των προηγούμενων περιπτώσεων, όμως τώρα η δύναμη στην $\hat{\phi}$ διεύθυνση από το ιξώδες παίρνει κατά μέτρο μεγαλύτερες τιμές και συνεισφέρει πιο σημαντικά στην απαγωγή στροφορμής. Αυτό φαίνεται και υπολογίζοντας πάλι την παράμετρο Λ , που μας δείχνει ποιος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής υπερισχύει. Οι τιμές αυτές φαίνονται στον πίνακα 5.3, όπου βλέπουμε ότι τα Λ κυμαίνονται μεταξύ 2.7 και 5.0. Αυτό μας δείχνει ότι αυτή την φορά οι δύο μηχανισμοί απαγωγής στροφορμής είναι συγκρίσιμοι μεταξύ τους, με την απαγωγή στροφορμής λόγω ροπών από το μαγνητικό πεδίο να είναι λίγο πιο αποτελεσματική.

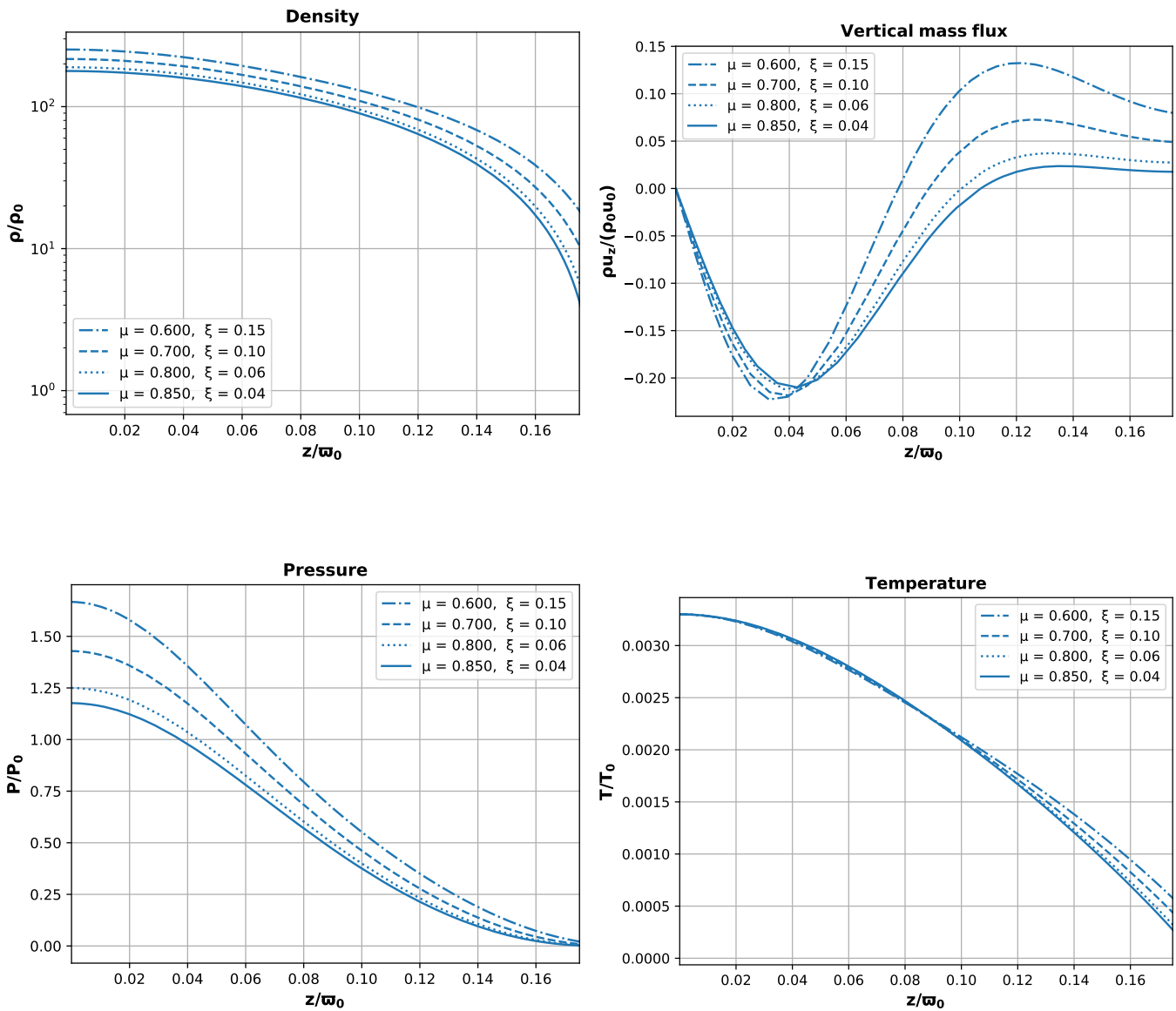
Τέλος, στο διάγραμμα 5.18, μπορούμε να δούμε τα προφίλ των συνιστωσών του ρεύματος στο εσωτερικό του δίσκου, των οποίων η συμπεριφορά είναι παρόμοια με των προηγούμενων δύο περιπτώσεων.

$\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$			
μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}
0.60	0.15	4.97	52.61
0.70	0.10	3.73	44.92
0.80	0.06	2.99	39.18
0.85	0.04	2.70	36.81

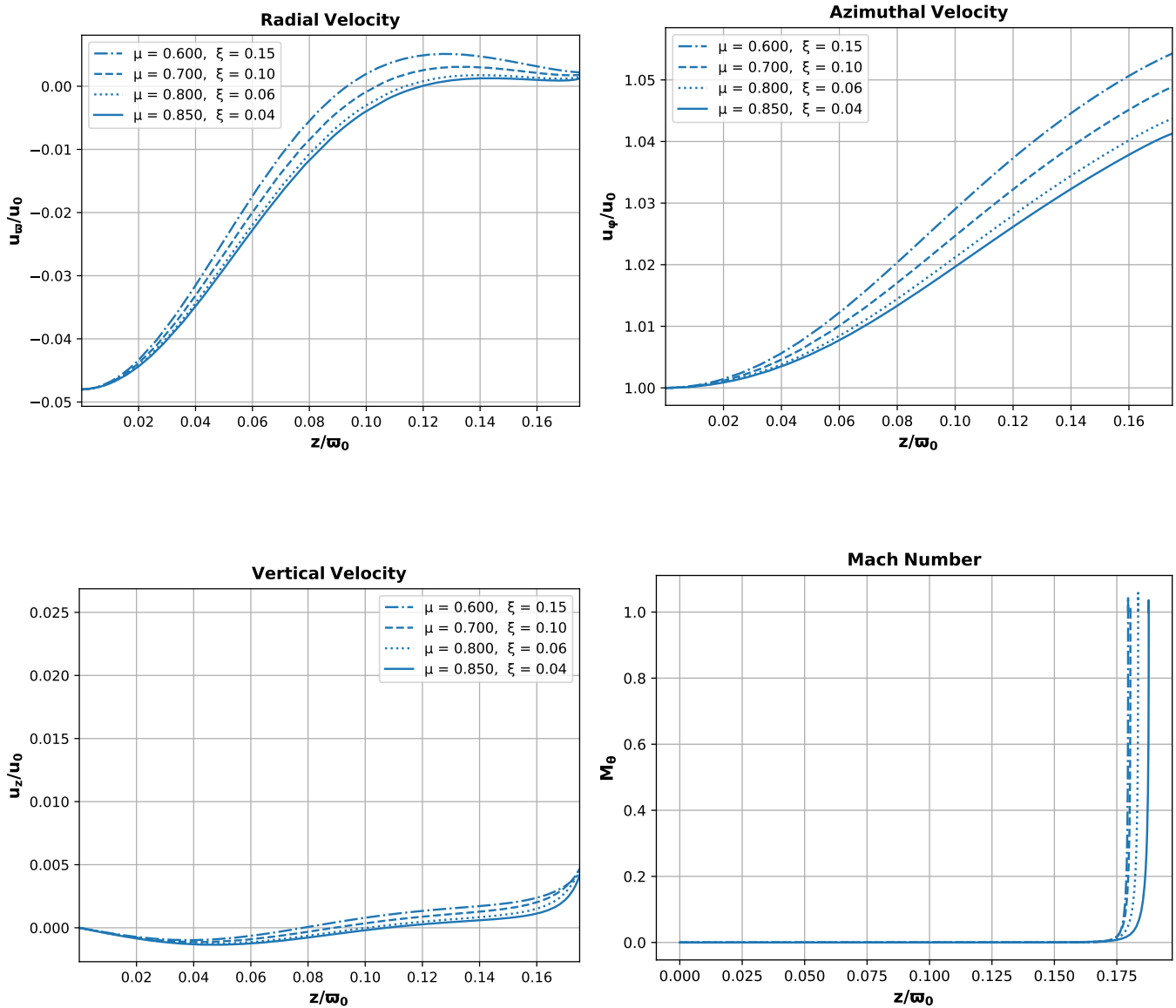
Πίνακας 5.3: Τιμές των παραμέτρων μ και ξ για τις οποίες πραγματοποιήθηκαν τα γραφήματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου Λ και του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds \mathcal{R}_{m0} στο midplane του δίσκου.



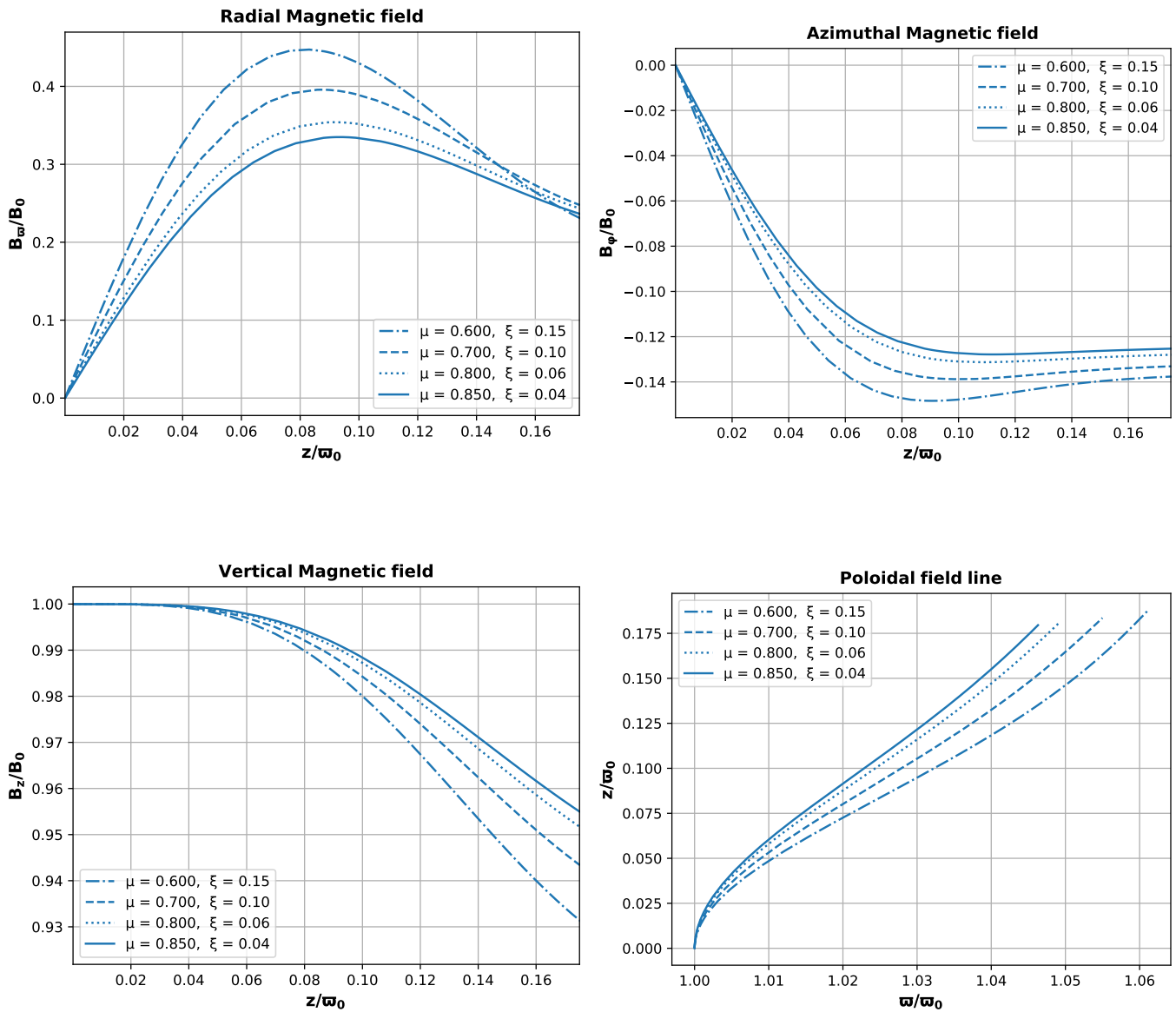
Διάγραμμα 5.13: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην αξιμουθιακή διεύθυνση ($\tilde{\eta}_\phi$) και στο πολοειδές επίπεδο ($\tilde{\eta}_p$), καθώς και κατανομή του ιξώδους ($\tilde{\nu}_v$) στο εσωτερικό του δίσκου. Πάνω δεξιά: μαγνητικός αριθμός Reynolds (λογαριθμική κλίμακα). Κάτω αριστερά: γωνία μεταξύ του διανύσματος του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου \vec{B}_p και του οριζώντιου άξονα ψ . Κάτω δεξιά: γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



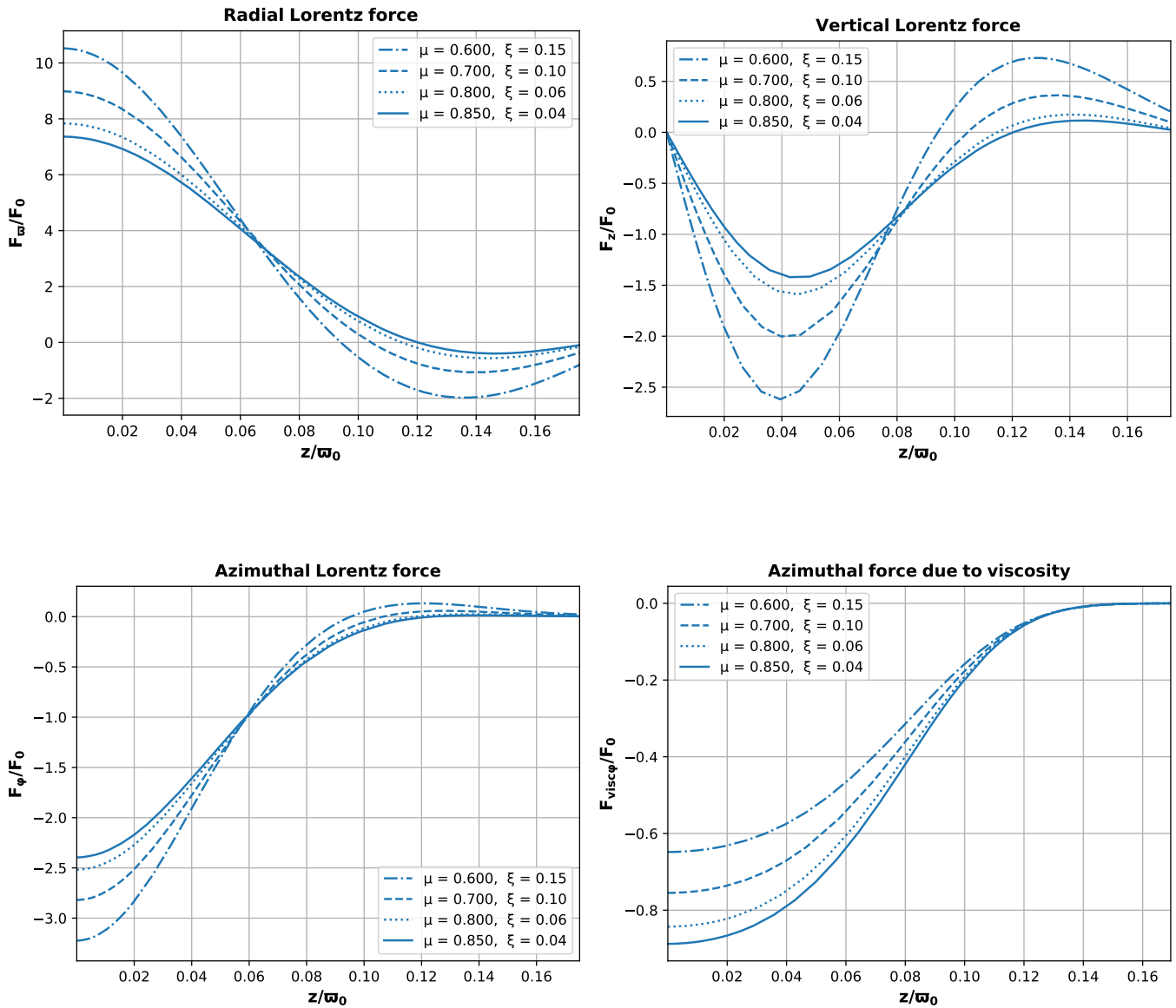
Διάγραμμα 5.14: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της πυκνότητας στο εσωτερικό του δίσκου (λογαριθμική κλίμακα). Πάνω δεξιά: κατακόρυφη ροή μάζας. Κάτω αριστερά: κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό του δίσκου. Κάτω δεξιά: κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου.



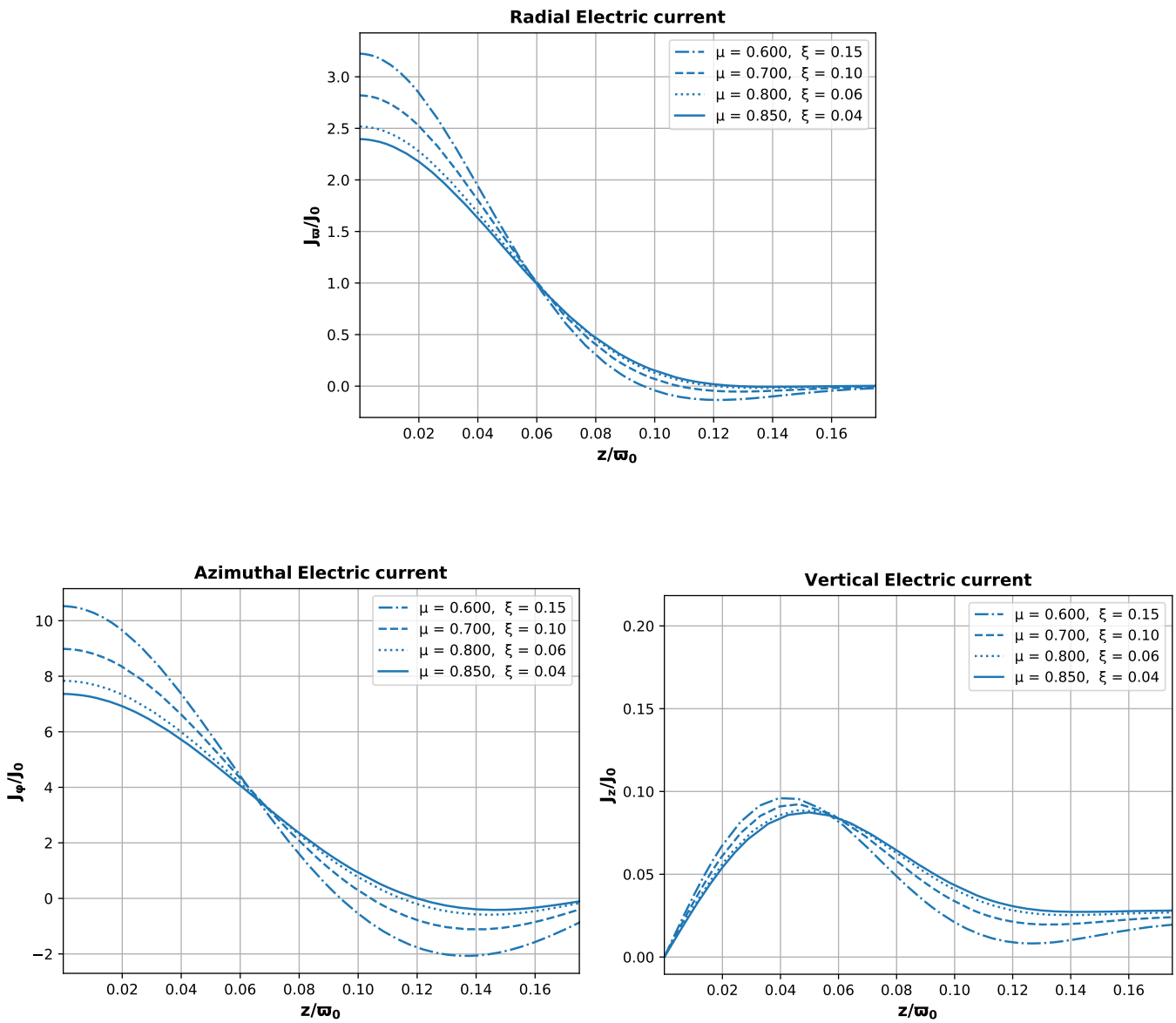
Διάγραμμα 5.15: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: αριθμός Mach M_θ , στην θ διεύθυνση.



Διάγραμμα 5.16: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



Διάγραμμα 5.17: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες της δύναμης Lorentz κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής και η δύναμη λόγω ιξώδους στην αζιμουθιακή κατεύθυνση, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα δύναμης Lorentz. Πάνω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης λόγω ιξώδους.



Διάγραμμα 5.18: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες του ρεύματος \vec{J} κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω: ακτινική συνιστώσα. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα.

5.5 Δίσκος με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, θα μελετήσουμε δίσκο με μικρή ανισοτροπία στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου μεταξύ της διεύθυνσης $\hat{\phi}$ και του πολοειδούς επιπέδου, όπως ήταν στη δεύτερη περίπτωση, αλλά τώρα θα επιλέξουμε να έχουμε υψηλά επίπεδα ιξώδους. Αυτό αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων: $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι κατανομές του ιξώδους $\tilde{\nu}_v$ και της διάχυσης, τόσο στο πολοειδές επίπεδο $\tilde{\eta}_p$ όσο και στην αξιμουθιακή διεύθυνση $\tilde{\eta}_\phi$, φαίνονται στο διάγραμμα 5.19 (πάνω αριστερά).

Η ολοκλήρωση εκτελέστηκε για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και ξ , και το διάστημα στο οποίο βρέθηκαν φυσικά αποδεκτές λύσεις προέκυψε να είναι μεταξύ 0.7 και 0.9 για την παράμετρο μ και μεταξύ 0.04 και 0.15 για την παράμετρο ξ . Για τιμές τις παραμέτρου μ από 0.5 έως 0.6 δεν μπορέσαμε να ολοκληρώσουμε μέχρι την επιφάνεια του δίσκου, καθώς για αυτές τις τιμές το κρίσιμο σημείο έχει μεταφερθεί στο εσωτερικό αυτού και δεν μπορούμε να δούμε τί συμβαίνει στα ανώτερα στρώματα. Οι υπόλοιπες λύσεις απορρίφθηκαν για τους λόγους που αναφέραμε και στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις. Τα γραφήματα που παρουσιάζονται στην συνέχεια είναι για τιμές των μ και ξ , οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 5.4.

Στο διάγραμμα 5.20, βλέπουμε τα προφίλ του λογαρίθμου της πυκνότητας, της πίεσης και της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου, συναρτήσεως του ύψους \tilde{z} πάνω από το midplane. Αυτά έχουν την αναμενόμενη συμπεριφορά, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, με την πυκνότητα να πέφτει σημαντικά (μία τάξη μεγέθους), το οποίο σημαίνει ότι η ολοκλήρωση πραγματοποιήθηκε και εδώ μέχρι την επιφάνεια του δίσκου.

Αυτό φαίνεται πάλι και από το διάγραμμα 5.19, όπου βλέπουμε τα προφίλ της διάχυσης και του ιξώδους μέσα στον δίσκο - τα οποία έχουν μειωθεί σημαντικά - καθώς και τη γωνία μεταξύ των \vec{B}_p και \vec{u}_p , η οποία είναι τώρα μικρότερη από $\sim 5^\circ$. Πλησιάζουμε δηλαδή την περιοχική της ιδεατής MHD, αλλά όχι κοντά στην επιφάνεια του δίσκου, όπως φαίνεται και στο γράφημα του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds, ο οποίος μειώνεται σημαντικά μέσα στον δίσκο και παίρνει στην επιφάνεια τιμές $\mathcal{R}_m \sim 3.0$.

Στο διάγραμμα 5.21, μπορούμε να δούμε πάλι τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας και τον αριθμό Mach στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση. Παρατηρούμε πάλι την μετάβαση από την διαδικασία της πρόσπτωσης σε αυτή της εκροής, με αυτό να συμβαίνει σε ύψος $\tilde{z} \sim 0.11$ όπως και στην δεύτερη περίπτωση δίσκου, που όμως δεν ήταν τόσο σημαντικά τα επίπεδα του ιξώδους. Για πληρότητα σχεδιάζεται και το γράφημα του αριθμού Mach, που δίνει την θέση του κρίσιμου σημείου. Όσον αφορά την κατακόρυφη ροή μάζας, αυτή φαίνεται στο διάγραμμα 5.20, και η μορφή της είναι η ίδια με των προηγούμενων περιπτώσεων.

Όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο, οι συνιστώσες του και το σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής στο πολοειδές επίπεδο φαίνονται στο διάγραμμα 5.22. Η συμπεριφορά αυτών είναι η αναμενόμενη και όμοια με τον προηγούμενων περιπτώσεων, εκτός από την αξιμουθιακή συνιστώσα του πεδίου η οποία αποκτά κατά μέτρο

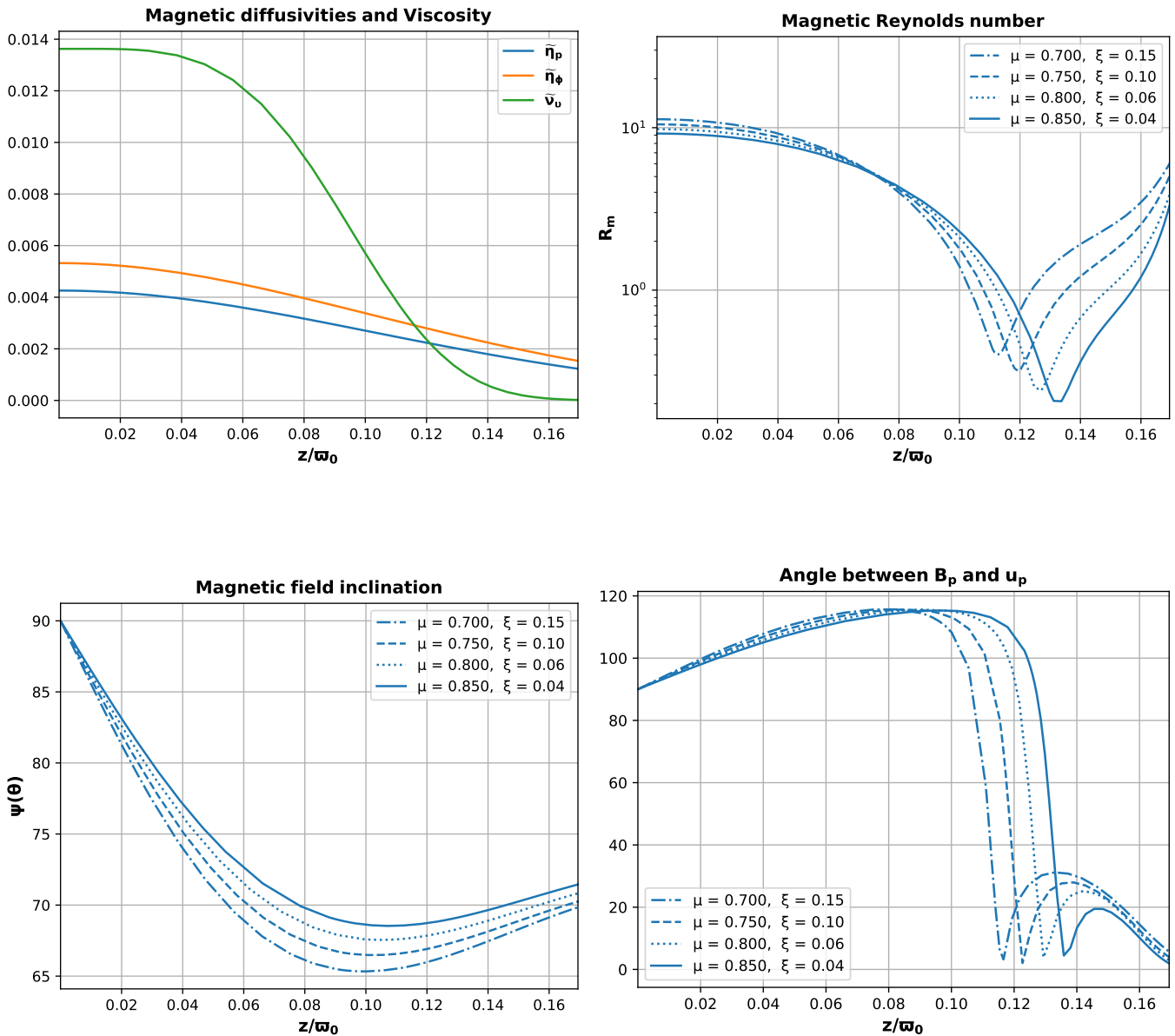
μεγαλύτερη τιμή. Επιπλέον, η γωνία μεταξύ \vec{B}_p και του οριζόντιου άξονα, φαίνεται στο διάγραμμα 5.19 (κάτω αριστερά). Στην περίπτωση αυτή, η γωνία ψ κοντά στην επιφάνεια του δίσκου προκύπτει $\psi \sim 70^\circ$, λίγο μικρότερη από τον δίσκο της δεύτερης περίπτωσης (μικρή ανισοτροπία και μικρό ιξώδες), όπου εκεί το ψ ήταν λίγο μεγαλύτερο των 70° .

Στο διάγραμμα 5.23, βλέπουμε για αυτή την περίπτωση τις συνιστώσες της δύναμης Lorentz και την αζιμουθιακή δύναμη που ασκείται στο πλάσμα του δίσκου λόγω ιξώδους. Η συμπεριφορά της κατακόρυφης και ακτινικής δύναμης Lorentz είναι η ίδια με όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις. Αυτό που αλλάζει στην περίπτωση αυτού του δίσκου, έχει να κάνει με τον μηχανισμό απαγωγής στροφορμής. Η αζιμουθιακή δύναμη Lorentz έχει και αυτή όμοια συμπεριφορά με τις προηγούμενες περιπτώσεις, όμως τώρα η δύναμη στην $\hat{\phi}$ διεύθυνση από το ιξώδες παίρνει πλέον συγκρίσιμες τιμές με την αζιμουθιακή Lorentz. Αυτό φαίνεται από τα γραφήματα, αλλά πιο καθαρά μπορεί να δειχθεί υπολογίζοντας την παράμετρο Λ που μας δείχνει ποιος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής υπερισχύει. Οι τιμές αυτές φαίνονται στον πίνακα 5.4, όπου βλέπουμε ότι τα Λ κυμαίνονται γύρω από την μονάδα. Αυτό μας δείχνει ότι οι δύο μηχανισμοί (ροπές λόγω μαγνητικού πεδίου και ενεργό ιξώδες), είναι σε αυτή την περίπτωση εξίσου αποτελεσματικοί στο να απάγουν στροφορμή από τον δίσκο.

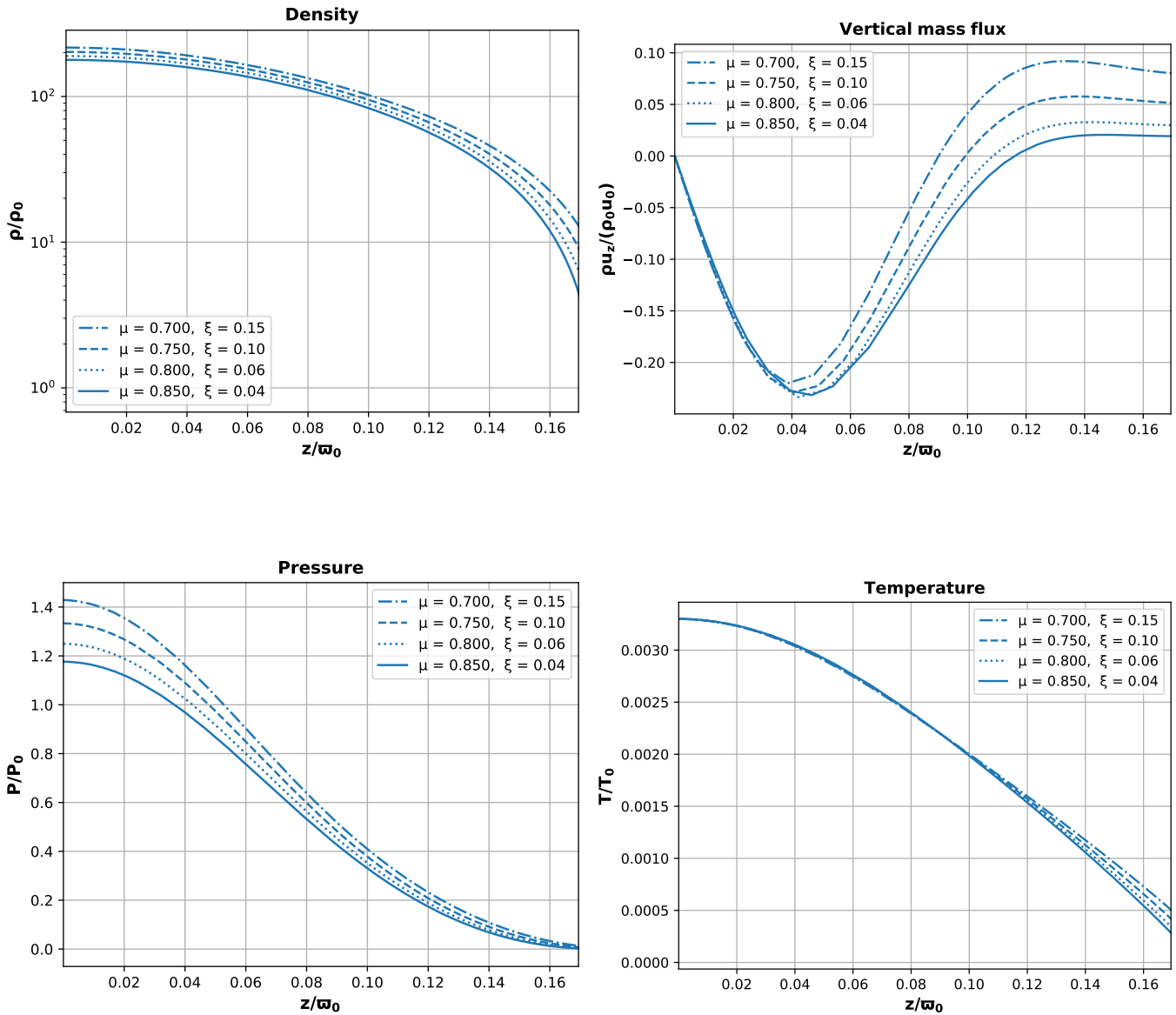
Τέλος, στο διάγραμμα 5.24, βλέπουμε τα προφίλ των συνιστωσών του ρεύματος στο εσωτερικό του δίσκου προσαύξεσης.

$\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$			
μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}
0.70	0.15	1.30	11.27
0.75	0.10	1.09	10.48
0.80	0.06	0.96	9.79
0.85	0.04	0.89	9.20

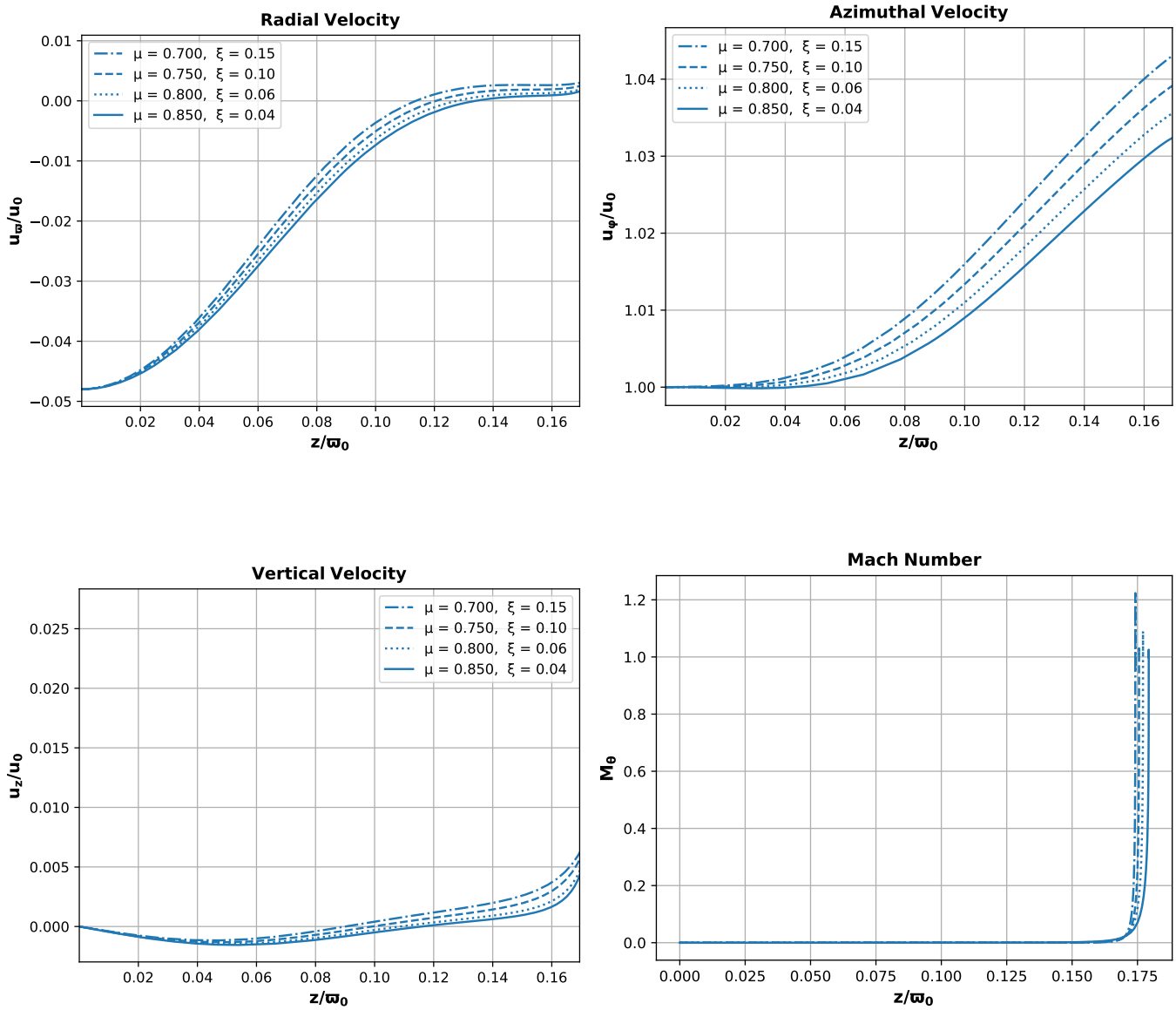
Πίνακας 5.4: Τιμές των παραμέτρων μ και ξ για τις οποίες πραγματοποιήθηκαν τα γραφήματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου Λ και του πολοειδούς μαγνητικού αριθμού Reynolds \mathcal{R}_{m0} στο midplane του δίσκου.



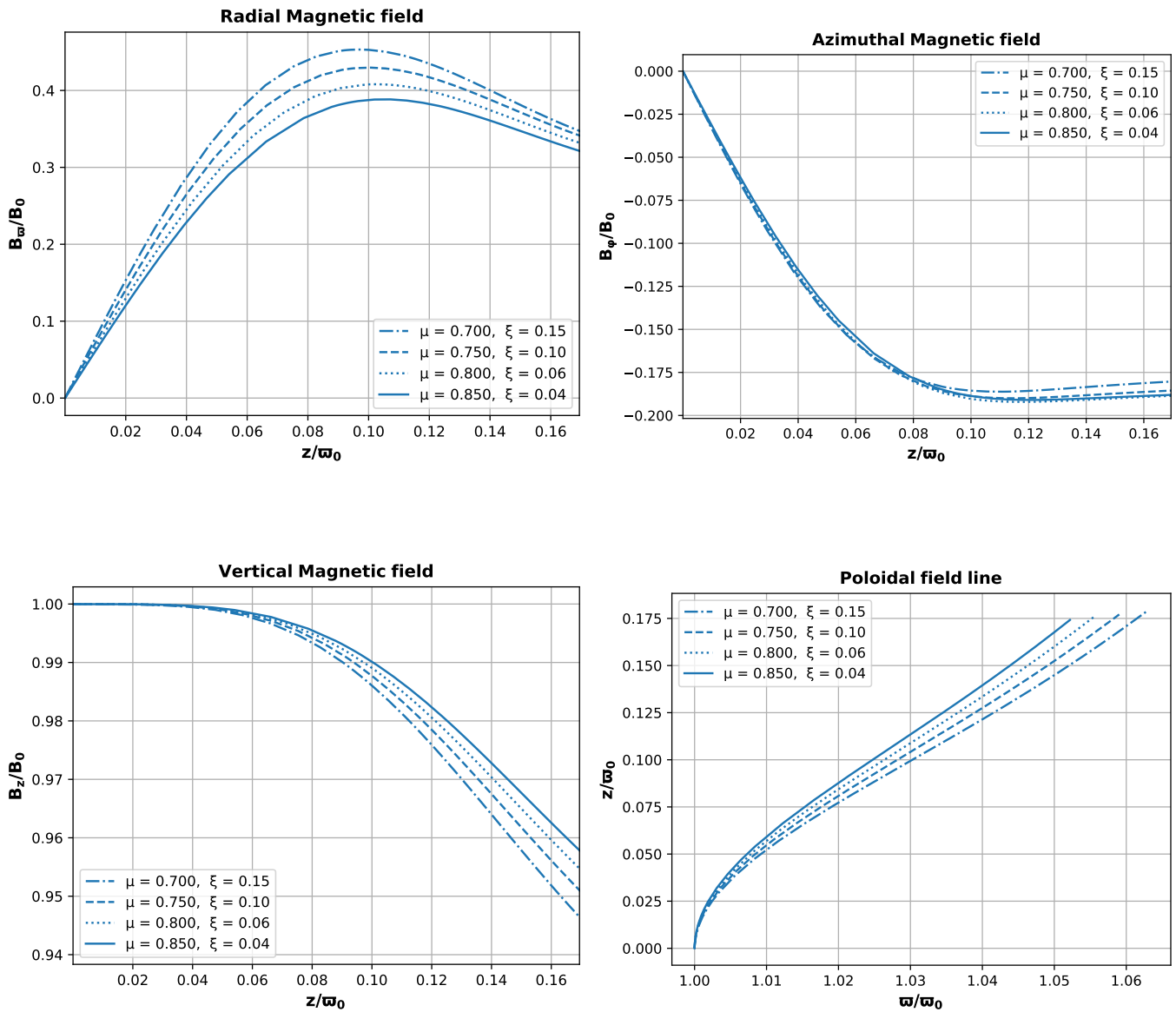
Διάγραμμα 5.19: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στην αξιμουθιακή διεύθυνση ($\tilde{\eta}_\varphi$) και στο πολοειδές επίπεδο ($\tilde{\eta}_p$), καθώς και κατανομή του ιξώδους ($\tilde{\nu}_v$) στο εσωτερικό του δίσκου. Πάνω δεξιά: μαγνητικός αριθμός Reynolds (λογαριθμική κλίμακα). Κάτω αριστερά: γωνία μεταξύ του διανύσματος του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου \vec{B}_p και του οριζώντιου άξονα ϖ . Κάτω δεξιά: γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



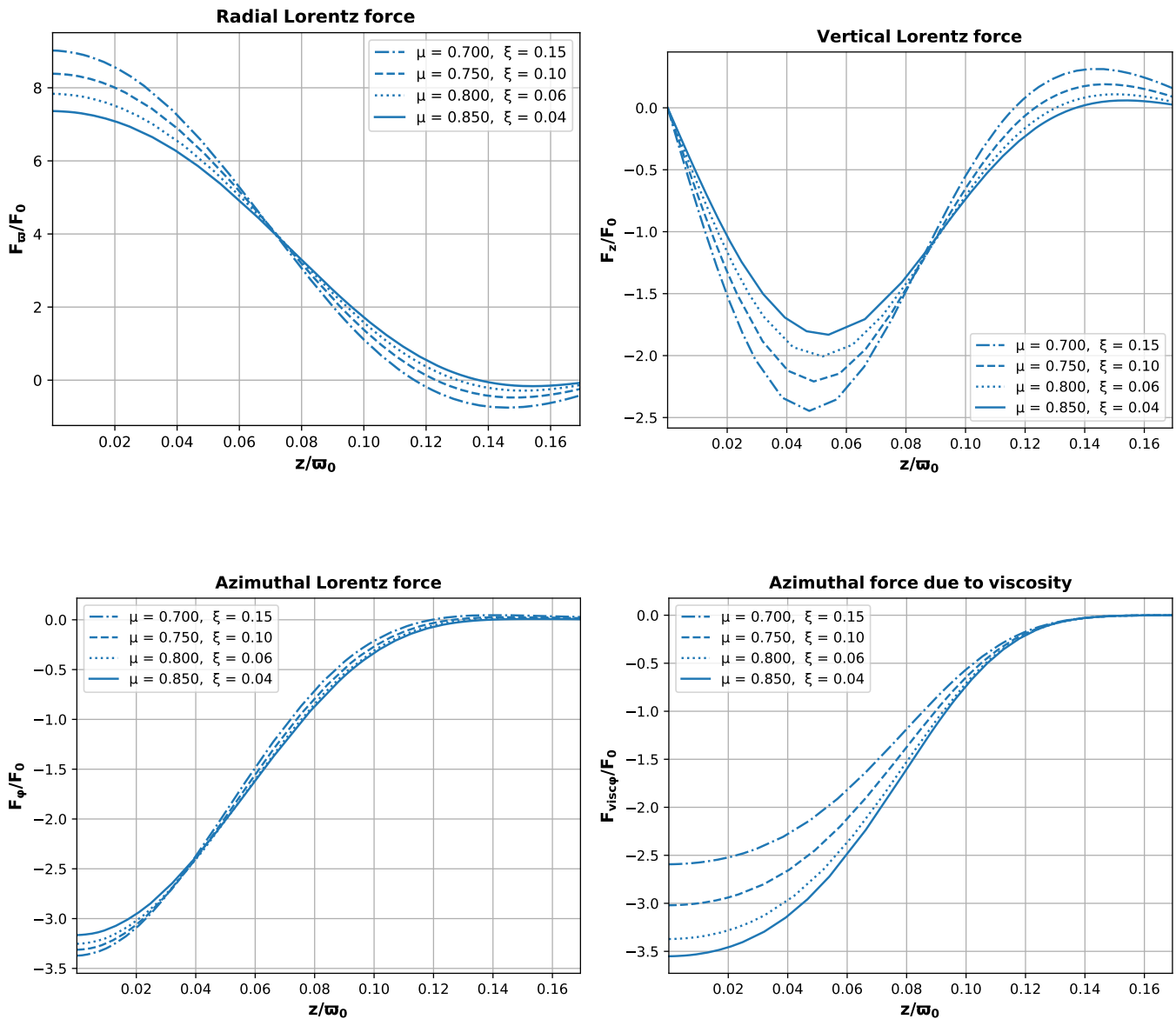
Διάγραμμα 5.20: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Όλες οι ποσότητες σχεδιάζονται κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: κατανομή της πυκνότητας στο εσωτερικό του δίσκου (λογαριθμική κλίμακα). Πάνω δεξιά: κατακόρυφη ροή μάζας. Κάτω αριστερά: κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό του δίσκου. Κάτω δεξιά: κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου.



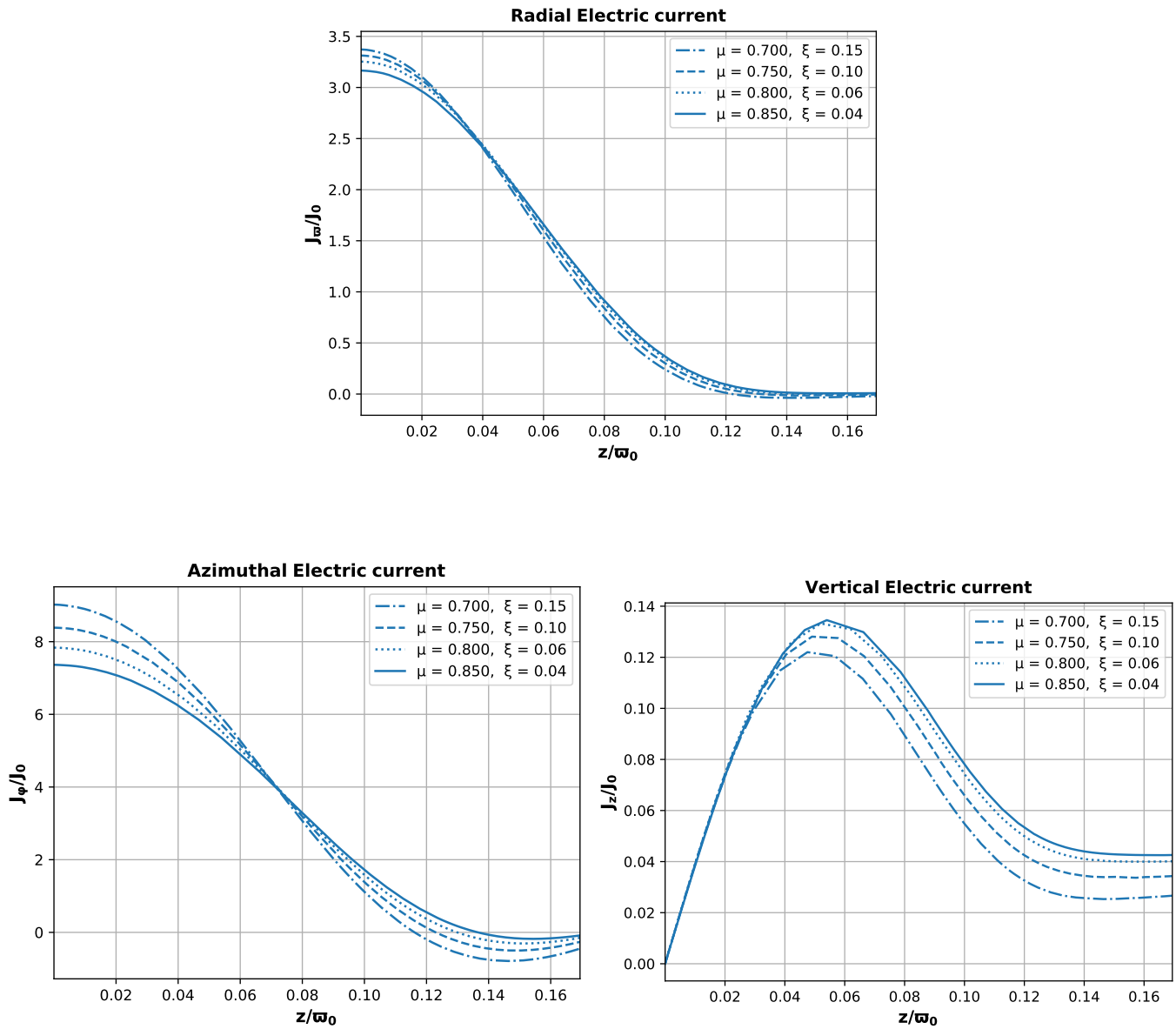
Διάγραμμα 5.21: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: αριθμός Mach M_θ , στην θ διεύθυνση.



Διάγραμμα 5.22: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/ω_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα. Πάνω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω αριστερά: κατακόρυφη συνιστώσα. Κάτω δεξιά: σχήμα της μαγνητικής δυναμικής γραμμής πάνω στο πολοειδές επίπεδο.



Διάγραμμα 5.23: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $P_m = 3.2$. Οι συνιστώσες της δύναμης Lorentz κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής και η δύναμη λόγω ιξώδους στην αζιμουθιακή κατεύθυνση, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω αριστερά: ακτινική συνιστώσα δύναμης Lorentz. Πάνω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης Lorentz. Κάτω δεξιά: αζιμουθιακή συνιστώσα δύναμης λόγω ιξώδους.



Διάγραμμα 5.24: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$. Οι συνιστώσες του ρεύματος \vec{J} κατά μήκος μιας μαγνητικής δυναμικής γραμμής, συναρτήσει του αδιάστατου ύψους z/w_0 πάνω από το midplane. Πάνω: ακτινική συνιστώσα. Κάτω αριστερά: αζιμουθιακή συνιστώσα. Κάτω δεξιά: κατακόρυφη συνιστώσα.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Ανακεφαλαίωση

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε τη δυναμική στο εσωτερικό ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξεσης μέσα στα πλαίσια της θεωρίας της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής (resistive MHD), χρησιμοποιώντας την συμμετρία της αυτοομοιότητας. Από την ολοκλήρωση του σετ των συνήθων διαφορικών εξισώσεων προέκυψαν τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, όπου παρουσιάστηκαν κάποιες περιπτώσεις δίσκων ανάλογα με τα επίπεδα του ιξώδους και της διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό τους. Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν για το εσωτερικό του δίσκου από τα αποτελέσματα αυτά και επιπλέον, θα παρουσιάσουμε μία λύση που προκύπτει ακολουθώντας την εργασία των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3].

6.2 Λύση των F. Casse & J. Ferreira (2000a)

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να αναπαράγουμε μία από τις λύσεις των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3], χρησιμοποιώντας τον δικό μας κώδικα. Για να το κάνουμε αυτό, θα πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε όλες τις δικές τους παραμέτρους στις αντίστοιχες δικές μας. Οι παράμετροι τις οποίες χρησιμοποιούν είναι οι εξής: α_m (επίπεδο τύρβης μέσα στον δίσκο λόγω του μαγνητικού πεδίου), χ_m (ανισοτροπία στην διάχυση του μαγνητικού πεδίου), \mathcal{P}_m (επίπεδα ιξώδους σε σχέση με αυτά της διάχυσης) και ϵ (πάχος του δίσκου). Οι παράμετροι χ_m και \mathcal{P}_m είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες δικές μας (καθώς αποτελούν λόγους).

Ξεκινάμε την αντιστοίχιση των παραμέτρων βρίσκοντας την σχέση που συνδέει τις παραμέτρους που ελέγχουν την υποκεπλευριανή περιστροφή του δίσκου. Στην δική μας περίπτωση, αυτή είναι η παράμετρος:

$$\lambda = \frac{GM}{\omega_0 u_0^2} = \left(\frac{u_K}{u_0} \right)^2 \quad (6.1)$$

όπου u_K είναι η Κεπλεριανή ταχύτητα περιστροφής και u_0 η ταχύτητα περιστροφής στην βάση της δυναμικής γραμμής ($u_0 < u_K$). Η αντίστοιχη παράμετρος των Ferreira & Casse είναι η (F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]):

$$\delta = \frac{\Omega_0}{\Omega_K} = \frac{u_0}{u_K} = \left(1 - \varepsilon_f^2 \left[\frac{ms^2}{2} + 2(2 - \beta) + \mu_f \mathcal{R}_{mf} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

όπου με τον κάτω δείκτη f αναφερόμαστε στις παραμέτρους των Ferreira & Casse που έχουν τον ίδιο συμβολισμό με τις δικές μας. Άρα από τις 6.1 και 6.2 βλέπουμε ότι:

$$\lambda = \frac{1}{\delta^2} \quad (6.3)$$

Επιπλέον, τα ms και \mathcal{R}_{mf} δίνονται από:

$$\begin{aligned} ms &= \alpha_m \left(\mathcal{P}_m \varepsilon_f + \frac{3\chi_m}{\alpha_m^2} \right) \mu_f^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{R}_{mf} &= \left(1 + \frac{3\chi_m}{\alpha_m^2 \mathcal{P}_m \varepsilon_f} \right) \mathcal{P}_m \end{aligned} \quad (6.4)$$

Η επόμενη παράμετρος είναι αυτή που μετρά τον λόγο της πίεσης του μαγνητικού πεδίου προς την θερμική πίεση, δηλαδή η μ_f . Η σύνδεση με την δική μας μ_v γίνεται ως εξής:

$$\mu_f = \frac{B_0^2}{4\pi P_0} = 2 \left(\frac{B_0^2}{8\pi P_0} \right) \Leftrightarrow \mu_v = \frac{\mu_f}{2} \quad (6.5)$$

Όσον αφορά τις ταχύτητες, στην εργασία των Ferreira & Casse αυτές είναι κανονικοποιημένες ως προς την ποσότητα $\Omega_K \varpi_0 \varepsilon_f$, δηλαδή:

$$\tilde{u}_{\varpi f} = \frac{u_{\varpi f}}{\Omega_K \varpi_0 \varepsilon_f} \quad (6.6)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις 6.2, 6.3 και την δική μας κανονικοποίηση ως προς u_0 , παίρνουμε ότι:

$$\tilde{u}_{\varpi v} = \varepsilon_f \sqrt{\lambda} \tilde{u}_{\varpi f} \quad (6.7)$$

Σχετικά με τις τιμές της διάχυσης, αυτές κανονικοποιούνται στους Ferreira & Casse ως προς την ποσότητα $\varpi_0 u_K$, ενώ σε εμάς ως προς $\varpi_0 u_0$. Από τον ορισμό του μαγνητικού αριθμού Reynolds μπορούμε να γράψουμε:

$$\tilde{\eta}_{pf} = \frac{\varpi_0 u_{\varpi f}}{\mathcal{R}_{mf}} \quad (6.8)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις 6.4, 6.6 και τους ορισμούς των χ_m και \mathcal{P}_m , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{pf} &= \frac{\varepsilon_f}{\left(1 + \frac{3\chi_m}{\alpha_m^2 \mathcal{P}_m \varepsilon_f} \right) \mathcal{P}_m} \tilde{u}_{\varpi f} \\ \tilde{\eta}_{\varphi f} &= \frac{\tilde{\eta}_{pf}}{\chi_m} \\ \tilde{\nu}_{vf} &= \mathcal{P}_m \tilde{\eta}_{pf} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Από την σχέση 6.9, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών διάχυσης και ιξώδους που δίνουν οι Ferreira και Casse στο midplane και στην συνέχεια να τις μετατρέψουμε στις δικές μας αντίστοιχες τιμές χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{pv} &= \sqrt{\lambda} \tilde{\eta}_{pf} \\ \tilde{\eta}_{\varphi v} &= \sqrt{\lambda} \tilde{\eta}_{\varphi f} \\ \tilde{\nu}_{vv} &= \sqrt{\lambda} \tilde{\nu}_{vf}\end{aligned}\quad (6.10)$$

Έχοντας τώρα συσχετίσει όλες τις παραμέτρους μεταξύ τους, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές που αυτές θα πρέπει να πάρουν στην περίπτωση της δικής μας ολοκλήρωσης. Θα προσπαθήσουμε να αναπαράγουμε την περίπτωση δίσκου από τους F. Casse & J. Ferreira 2000a [3], στην οποία η παράμετροι παίρνουν τιμές:

$$\alpha_m = 1.0, \chi_m = 0.259, \mathcal{P}_m = 3.2, \varepsilon_f = 0.1, \mu_f \simeq 0.473 \text{ και } \xi = 0.08 \quad (6.11)$$

Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι οι δικές μας παράμετροι θα πρέπει να είναι:

$$\chi_m = 0.259, \mathcal{P}_m = 3.2, \mu_v \simeq 0.236, \xi = 0.08, \lambda \simeq 1.09, \tilde{u}_{\varphi v} \simeq 0.14 \quad (6.12)$$

ενώ οι τιμές διάχυσης και ιξώδους:

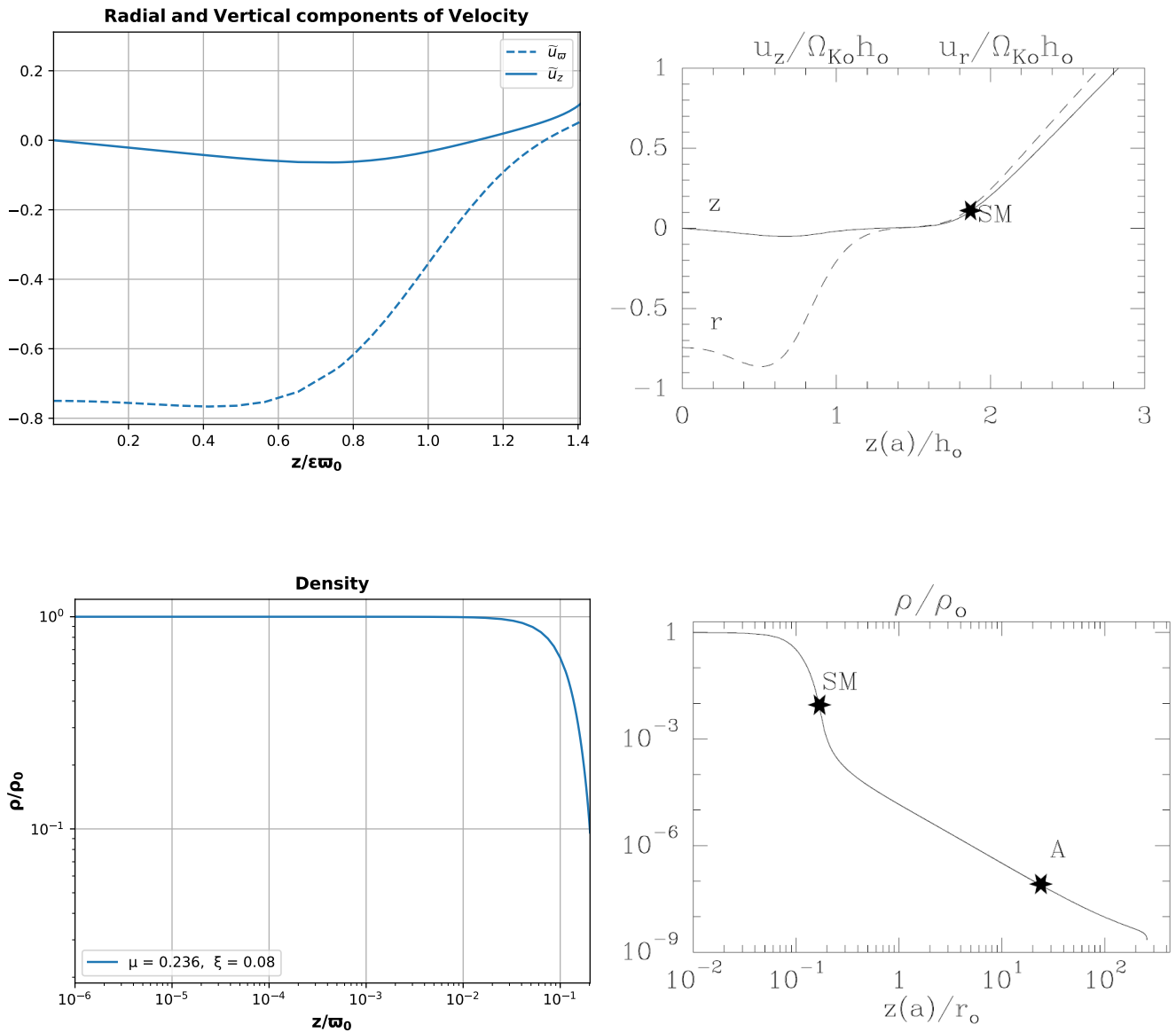
$$\tilde{\eta}_{pv} \simeq 0.0068, \tilde{\eta}_{\varphi v} \simeq 0.0264, \tilde{\nu}_{vv} \simeq 0.0219 \quad (6.13)$$

Τέλος, αντιστρέφοντας την σχέση 4.17 του τέταρτου κεφαλαίου και χρησιμοποιώντας την τιμή του $\tilde{\eta}_{\varphi v}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το πάχος του δίσκου για την δική μας περίπτωση, το οποίο προκύπτει ίσο με: $\varepsilon_v \simeq 0.153$.

Εκτελώντας τώρα την ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές των δικών μας παραμέτρων, πήραμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στα διαγράμματα που ακολουθούν. Η συμπεριφορά όλων των φυσικών ποσοτήτων ήταν η αναμενόμενη, παρόμοια με αυτή των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου.

Συγκεκριμένα, για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε εάν η ολοκλήρωση έδωσε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά των Casse και Ferreira, σχεδιάζουμε στο διάγραμμα 6.1 την πυκνότητα, την ακτινική και την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας που προέκυψαν από την ολοκλήρωση, μαζί με τα αντίστοιχα διαγράμματα από την εργασία των Casse και Ferreira. Στα διαγράμματα αυτά, οι ταχύτητες που προέκυψαν από την ολοκλήρωση έχουν μετασχηματιστεί πίσω σε τιμές των Ferreira και Casse (χρησιμοποιώντας την σχέση 6.7), ενώ ο οριζόντιος άξονας έχει κανονικοποιηθεί ως προς $\varepsilon_v \omega_0$ (για να αντιστοιχεί σε αυτόν του Ferreira). Επιπλέον η πυκνότητα έχει κανονικοποιηθεί ως προς την τιμή της στο midplane και το διάγραμμά της είναι λογαριθμικό.

Από τα διαγράμματα αυτά, παρατηρούμε ότι οι λύσεις που έδωσε η δική μας ολοκλήρωση είναι αρκετά κοντά σε αυτές για την περίπτωση δίσκου με $\chi_m = 0.259$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$ στην εργασία των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Τα προφίλ της κατακόρυφης και ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας έχουν την ίδια συμπεριφορά,



Διάγραμμα 6.1: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.259$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, ακολουθώντας μία από τις λύσεις των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Πάνω αριστερά: Ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, όπως αυτές προέκυψαν από την ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τιμές των Casse & Ferreira. Πάνω δεξιά: Ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, όπως αυτές παρουσιάζονται στους F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Κάτω αριστερά: Η πυκνότητα στο εσωτερικό του δίσκου, όπως προέκυψε από την ολοκλήρωση (λογαριθμικοί άξονες). Κάτω δεξιά: Το προφίλ της πυκνότητας όπως αυτή παρουσιάζεται στους F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Η επιφάνεια του δίσκου βρίσκεται σε ύψος $z/\omega_0 \sim 10^{-1}$.

αφού και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε την κίνηση πρόσπτωσης να αλλάζει σε κίνηση εκροής. Επίσης, από τα διαγράμματα της πυκνότητας βλέπουμε ότι και αυτά τα προφίλ είναι παρόμοια, με την πυκνότητα να μειώνεται απότομα στην επιφάνεια του δίσκου (σε ύψος $\sim 10^{-1}$ της λογαριθμικής κλίμακας).

Παρ'όλα αυτά, υπάρχουν κάποιες διαφορές μεταξύ των διαγραμμάτων, όπως είναι για παράδειγμα το ελάχιστο της ακτινικής ταχύτητας, το οποίο παίρνει μεγαλύτερη τιμή στους Ferreira και Casse σε σχέση με το δικό μας. Επιπλέον, η αντιστροφή των προσήμων στις ταχύτητες δεν γίνεται ακριβώς στο ίδιο ύψος πάνω από το midplane και στις δύο περιπτώσεις, αλλά πραγματοποιείται με μια μικρή διαφορά. Οι αποκλίσεις αυτές μεταξύ των δύο λύσεων μπορούν να αποδοθούν σε αριθμητικά σφάλματα, τα οποία πιθανόν προέκυψαν στην διαδικασία της δικής μας ολοκλήρωσης. Επίσης οι Ferreira και Casse στην εργασία τους συνεχίζουν την ολοκλήρωση και έξω από τον δίσκο, στην περιοχή των πιδάκων, χρησιμοποιώντας το σετ εξισώσεων της ιδεατής MHD και για αρχικές συνθήκες παίρνουν τα τελευταία αποτελέσματα που έδωσε η ολοκλήρωση στην επιφάνεια του δίσκου.

6.3 Τιμές παραμέτρων

Στην ενότητα αυτή θα συγκεντρώσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν για τις τιμές των παραμέτρων, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου. Συγκεντρώνουμε στον ακόλουθο πίνακα 6.1 τα χαρακτηριστικά (χ_m , \mathcal{P}_m) και τις τιμές των παραμέτρων που δόθηκαν (μ , ξ) ή που υπολογιστήκαν (Λ , \mathcal{R}_{m0}) για τους τέσσερις δίσκους που μελετήθηκαν. Όλες οι ολοκληρώσεις έγιναν για πάχος δίσκου $\varepsilon = 0.1$ και αρχική ταχύτητα στην ακτινική διεύθυνση $\tilde{u}_{\varpi 0} = -0.048$.

Δίσκος 1: $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$				Δίσκος 2: $\chi_m = 0.2$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$			
μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}	μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}
0.609	0.15	73.97	51.83	0.600	0.15	04.97	52.61
0.698	0.10	55.49	45.05	0.700	0.10	03.73	44.92
0.760	0.06	45.70	41.24	0.800	0.06	02.99	39.18
0.817	0.04	40.39	38.30	0.850	0.04	02.70	36.81

Δίσκος 3: $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 0.2$				Δίσκος 4: $\chi_m = 0.8$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$			
μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}	μ	ξ	Λ	\mathcal{R}_{m0}
0.700	0.15	16.32	11.27	0.700	0.15	01.30	11.27
0.750	0.10	13.14	10.48	0.750	0.10	01.09	10.48
0.800	0.06	11.08	09.79	0.800	0.06	00.96	09.79
0.850	0.04	09.93	09.20	0.850	0.04	00.89	09.20

Πίνακας 6.1: Χαρακτηριστικά και παράμετροι των δίσκων, τα αποτελέσματα των οποίων παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι δίσκοι αυτοί αντιστοιχούν σε πάχος $\varepsilon = 0.1$.

Θα συγκρίνουμε τώρα τις τιμές των παραμέτρων μεταξύ αυτών των τεσσάρων δίσκων. Η πρώτη περίπτωση που αντιστοιχεί στον Δίσκο 1, είναι ένας δίσκος με μεγάλη ανισοτροπία στη διάχυση του μαγνητικού πεδίου μεταξύ του πολοειδούς επιπέδου και της αξιμουθιακής συνιστώσας ($\chi_m = 0.2$) αλλά χαμηλά επίπεδα ιξώδους ($P_m = 0.2$). Για αυτόν βρήκαμε ότι φυσικά αποδεκτές λύσεις προέκυψαν για τιμές τις παραμέτρου μ μέσα στο διάστημα: $(0.6, 0.85)$, με τις τιμές των ξ να κυμαίνονται από 0.04 μέχρι 0.15 (αντιστοιχίζοντας τα μικρότερα μ σε μεγαλύτερα ξ). Επιπλέον, για μικρότερες τιμές των μ βρήκαμε ότι η διαδικασία της εκροής ξεκινά από χαμηλότερα ύψη μέσα στον δίσκο. Αυτό είναι κάτι λογικό, αφού βασικό ρόλο στην διαδικασία αυτή παίζει η θερμική πίεση του πλάσματος, η οποία είναι μεγαλύτερη για μικρότερα μ . Όσον αφορά τις τιμές του ejection index, για μεγαλύτερα ξ είχαμε μεγαλύτερη εκροή μάζας, όπως ακριβώς περιμέναμε. Επιπλέον είδαμε ότι όση μεγαλύτερη ήταν η εκροή μάζας από τον δίσκο (μικρό μ και μεγάλο ξ), το σχήμα των δυναμικών γραμμών πάνω στο πολοειδές επίπεδο άλλαζε, με τις γραμμές που αντιστοιχούσαν σε μεγαλύτερη εκροή μάζας να βρίσκονται κάτω από αυτές με τη λιγότερη. Τέλος, υπολογίστηκαν για αυτόν οι τιμές της παραμέτρου Λ και του μαγνητικού αριθμού Reynolds \mathcal{R}_{m0} στο midplane. Από αυτές φαίνεται ότι η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε έναν δίσκο όπου ο κύριος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής είναι η ύπαρξη ροπών από το μαγνητικό πεδίο, αφού τα $\Lambda \gg 1.0$, ενώ το ιξώδες δεν παίζει σημαντικό ρόλο. Τέλος, οι αριθμοί Reynolds στο midplane μας δείχνουν ότι είμαστε πράγματι στην περιοχή της μη-ιδεατής MHD, με την διάχυση να είναι εντονότερη στα ανώτερα στρώματα του δίσκου (οι αριθμοί Reynolds όπως είδαμε μειώνονται με το ύψος μέσα στον δίσκο, και αρχίζουν να αυξάνονται πάλι κοντά στην επιφάνειά του).

Όσον αφορά τον Δίσκο 2, αυτός είναι ίδιος με τον Δίσκο 1, με την μόνη διαφορά ότι έχει τώρα αρκετά μεγαλύτερα επίπεδα ιξώδους στο εσωτερικό του ($P_m = 3.2$), ενώ η ανισοτροπία στην διάχυση του πεδίου (δηλαδή τα επίπεδα της διάχυσης) παραμένει ίδια ($\chi_m = 0.2$). Για τον Δίσκο 2, οι φυσικά αποδεκτές λύσεις προέκυψαν για τιμές των μ που κυμαίνονται μέσα στο διάστημα: $(0.5, 0.9)$, με τα αντίστοιχα ξ να παίρνουν τιμές από 0.04 μέχρι 0.15 (πάλι τα μικρότερα μ αντιστοιχούν στα μεγαλύτερα ξ). Το διάστημα αυτό είναι μεγαλύτερο από του Δίσκου 1 όπου τα επίπεδα ιξώδους ήταν μικρότερα, ενώ η συμπεριφορά όλων των φυσικών ποσοτήτων είναι εδώ αντίστοιχη με αυτή της προηγούμενης περίπτωσης. Παρατηρούμε τώρα ότι τιμές της παραμέτρου Λ που υπολογίστηκαν για τον Δίσκο 2 στο midplane, είναι αρκετά μικρότερες από τις αντίστοιχες του Δίσκου 1. Αυτό σημαίνει ότι εδώ ο μηχανισμός απαγωγής στροφορμής μέσω του ιξώδους είναι αρκετά πιο σημαντικός, με τον μηχανισμό απαγωγής στροφορμής λόγω ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου να υπερισχύει κατά λίγο. Τέλος, οι αριθμοί Reynolds που υπολογίστηκαν στο midplane του Δίσκου 2 είναι παρόμοιοι με αυτούς του Δίσκου 1, καθώς τα επίπεδα διάχυσης μέσα και στους δύο δίσκους είναι παρόμοια.

Για την περίπτωση του Δίσκου 3, αυτός μοιάζει με τον Δίσκο 1, δηλαδή έχει χαμηλά επίπεδα ιξώδους ($P_m = 0.2$), αλλά η διαφορά τους είναι ότι ο Δίσκος 3 έχει μικρότερη ανισοτροπία στη διάχυση του μαγνητικού πεδίου μεταξύ του πολοει-

δούς επιπέδου και της αξιμουθιακής συνιστώσας ($\chi_m = 0.8$). Οι φυσικά αποδεκτές λύσεις για αυτόν προέκυψαν για μ που ανήκουν στο διάστημα (0.5, 0.95), με αντίστοιχα ξ να κυμαίνονται πάλι από 0.04 μέχρι 0.15, με τις φυσικές ποσότητες να συμπεριφέρονται όπως ήταν αναμενόμενο. Οι τιμές του Λ σε αυτή την περίπτωση του Δίσκου 3 παίρνουν τιμές γύρω από το 10, που σημαίνει ότι και εδώ (όπως και στον Δίσκο 1) ο κύριος μηχανισμός απαγωγής στροφορμής είναι οι ροπές από το μαγνητικό πεδίο. Όσον αφορά την διάχυση του πεδίου στο εσωτερικό του Δίσκου 3, αυτή είναι πιο έντονη απ'ότι ήταν στον Δίσκο 1, κάτι το οποίο φαίνεται και από τους υπολογισμένους μαγνητικούς αριθμούς Reynolds στο midplane. Οι αριθμοί αυτοί παίρνουν μικρότερες τιμές σε αυτή την περίπτωση, το οποίο σημαίνει ότι έχουμε έντονη διάχυση στο εσωτερικό αυτού του δίσκου.

Τέλος, όσον αφορά τον Δίσκο 4, αυτός είναι ίδιος με τον Δίσκο 3, με την διαφορά ότι αυτός έχει αρκετά μεγαλύτερα επίπεδα ιξώδους στο εσωτερικό του ($P_m = 3.2$), ενώ η ανισοτροπία στην διάχυση του πεδίου παραμένει ίδια ($\chi_m = 0.8$). Για τον Δίσκο 4, οι φυσικά αποδεκτές λύσεις προέκυψαν για τιμές των μ που κυμαίνονται μέσα στο διάστημα: (0.7, 0.9), με τα αντίστοιχα ξ να παίρνουν τιμές από 0.04 μέχρι 0.15 (πάλι τα μικρότερα μ αντιστοιχούν στα μεγαλύτερα ξ). Το διάστημα αυτό είναι μικρότερο από του Δίσκου 3 όπου τα επίπεδα ιξώδους ήταν μικρότερα. Η συμπεριφορά όλων των φυσικών ποσοτήτων και εδώ παραμένει αντίστοιχη με αυτή όλων των προηγούμενων περιπτώσεων. Παρατηρούμε επίσης τις τιμές της παραμέτρου Λ που υπολογίστηκαν για τον Δίσκο 4 στο midplane, οι οποίες είναι αρκετά μικρότερες από τις αντίστοιχες του Δίσκου 3 και μάλιστα, είναι πολύ κοντά στην μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι εδώ ο μηχανισμός απαγωγής στροφορμής μέσω του ιξώδους είναι πολύ σημαντικός, εξίσου σημαντικός με τον μηχανισμό απαγωγής στροφορμής λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου. Τέλος, οι μαγνητικοί αριθμοί Reynolds στο midplane του Δίσκου 4 είναι ίδιοι με αυτούς του Δίσκου 3, καθώς τα επίπεδα διάχυσης μέσα και στους δύο δίσκους είναι τα ίδια.

Από όλα τα παραπάνω, βλέπουμε ότι φυσικά αποδεκτές λύσεις για τα διάφορα είδη δίσκων προέκυψαν για τιμές μ κοντά στην μονάδα (από $\mu \sim 0.6$ και πάνω). Αυτό προέκυψε για δεδομένες τιμές των άλλων παραμέτρων όπως είναι για παράδειγμα το πάχος του δίσκου ε , το οποίο σε όλα τα παραπάνω είχε τιμή 0.1. Είδαμε όμως ότι όταν το αλλάξαμε αυτό για να αναπαράγουμε μία λύση των Ferreira και Casse, δηλαδή βάλουμε $\varepsilon \simeq 0.15$, είχαμε φυσικά αποδεκτή λύση και για μ αρκετά μικρότερο της μονάδας και συγκεκριμένα για $\mu \simeq 0.236$. Βλέπουμε λοιπόν ότι το μ εξαρτάται άμεσα από τις τιμές που παίρνουν οι υπόλοιπες παράμετροι.

Όσον αφορά την τιμή της παραμέτρου ξ , είδαμε ότι σε όλα τα προηγούμενα αυτή επιλέχθηκε να είναι μικρή και μάλιστα της τάξης 10^{-1} με 10^{-2} . Ο λόγος για τον οποίο έγινε αυτό και δεν επιλέχθηκαν μεγαλύτερες τιμές για αυτή την παράμετρο, έχει να κάνει με την σύνδεση που υπάρχει μεταξύ ενός δίσκου προσαύξεσης και του πίδακα που δυναμικά εκρέει από αυτόν.

Θα εξάγουμε εδώ θεωρητικά την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ejection index, δηλαδή το ξ_{max} . Η μέγιστη τιμή του ejection index ξ_{max} έχει να κάνει με την δυνατότητα του πίδακα να επιταχύνει την ύλη, έτσι ώστε να μπορέσει αυτή

να περάσει από όλα τα κρίσιμα σημεία της ιδεατής MHD. Η δυνατότητα αυτή, συνδέεται άμεσα με τον λόγο της ροής Poynting προς την ροή κινητικής ενέργειας κοντά στην επιφάνεια του δίσκου (ή αλλιώς στην βάση του πίδακα), η οποία όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο (σχέση 2.92) μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma^+ \simeq 2(\lambda - 1) \simeq \frac{1}{\xi} \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} \left(\frac{B_\varphi^+}{qB_0} \right) \simeq \xi^{-1} \quad (6.14)$$

ή αλλιώς

$$\lambda \simeq 1 + \frac{1}{2\xi} \quad (6.15)$$

όπου εδώ το λ είναι η παράμετρος του μαγνητικού βραχίονα (magnetic lever arm), η οποία ελέγχει την υποκεπλευριανή περιστροφή. Θα θεωρήσουμε τώρα δύο ακραίες περιπτώσεις.

Η πρώτη, είναι αυτή ενός πίδακα ο οποίος μεταφέρει λίγο υλικό και έχει αρκετή ενέργεια στην βάση, έτσι ώστε να μπορεί να το επιταχύνει εύκολα μέχρι το σημείο Alfvén. Επειδή καθώς απομακρυνόμαστε από την βάση του πίδακα η ροή Poynting μειώνεται, ενώ η κινητική ενέργεια αυξάνεται, θα ισχύει σε αυτή την περίπτωση ότι: $\sigma_A < \sigma^+$, όπου το σ_A δίνεται (από τον ορισμό των σ και του περιστροφέα ω_A):

$$\sigma_A = 2(\lambda - 1) \left(\frac{\varpi_A \Omega_A}{u_A} \right)^2 = 2(\lambda - 1) \omega_A^2 \Leftrightarrow \sigma_A \simeq 2\omega_A^2 \quad (6.16)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις 6.14, 6.15 και 6.16, η ανισότητα μας δίνει:

$$\sigma_A < \sigma^+ \Leftrightarrow \omega_A^2 < \frac{1}{2\xi} \quad (6.17)$$

Η δεύτερη ακραία περίπτωση είναι αυτή ενός πίδακα ο οποίος κουβαλά μια μεγάλη ποσότητα υλικού και ο οποίος έχει λίγη ενέργεια, αρκετή όμως έτσι ώστε να φτάσει το υλικό τουλάχιστον μέχρι και το σημείο Alfvén. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός Mach για το σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει τουλάχιστον μονάδα, δηλαδή:

$$M_A^2 = \frac{u^2}{u_A^2} > 1 \quad (6.18)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση Bernoulli (όπως την γράψαμε στο κεφάλαιο 2):

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \Omega_0^2 \varpi_0^2 (\lambda - 3) \quad (6.19)$$

τους ορισμούς των παραμέτρων του περιστροφέα και του μαγνητικού βραχίονα:

$$\begin{aligned} \omega_A^2 &= \frac{\varpi_A^2 \Omega_A^2}{u_A^2} \\ \lambda &= \frac{\varpi_A^2 \Omega_A}{\varpi_0^2 \Omega_0} \end{aligned} \quad (6.20)$$

καθώς και την σχέση 6.15, η ανισότητα για τον αριθμό Mach δίνει:

$$\omega_A^2 > \frac{\lambda}{\lambda - 3} = \frac{1 + 2\xi}{1 - 4\xi} \quad (6.21)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες 6.17 και 6.21 για τις δύο αυτές ακραίες περιπτώσεις πίδακων, παίρνουμε την ανισότητα που μας δίνει την μέγιστη τιμή της παραμέτρου ξ :

$$\frac{1 + 2\xi}{1 - 4\xi} < \omega_A^2 < \frac{1}{2\xi} \quad \text{ή αλλιώς} \quad 4\xi^2 + 6\xi - 1 < 0 \quad (6.22)$$

Επιλύοντας αυτή, βρίσκουμε τελικά ότι για να έχουμε εκροή από τον δίσκο η οποία δυναμικά θα μπορέσει να γίνει πίδακας, ο οποίος θα περνά από το κρίσιμο σημείο Alfvén, η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράμετρος ξ είναι ίση με: $\xi_{max} \simeq 0.15$.

6.4 Διάχυση και τοπολογία του μαγνητικού πεδίου

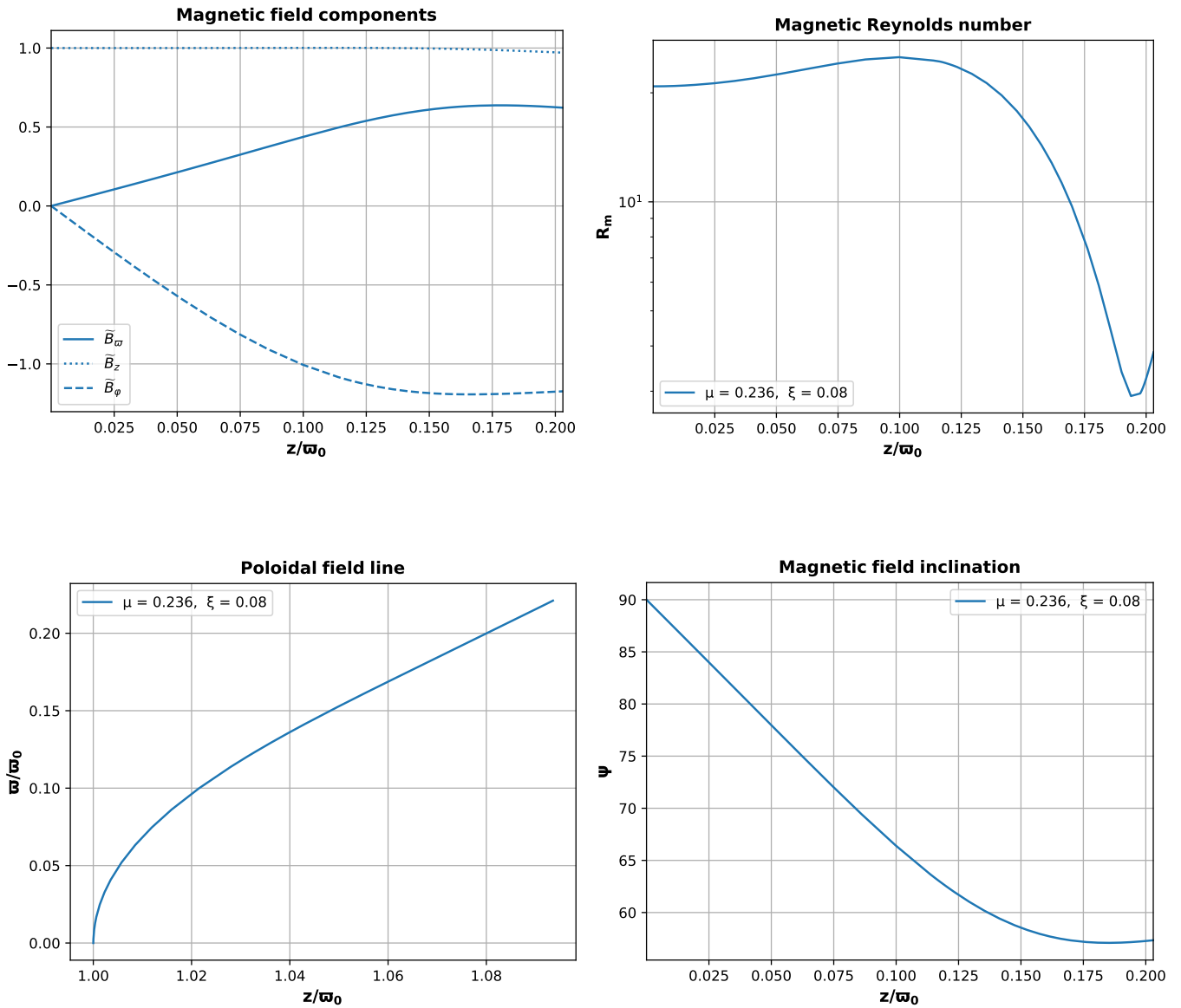
Για να μπορέσει κάποιος να περιγράψει την δυναμική στο εσωτερικό ενός αστροφυσικού δίσκου προσαύξησης, θα πρέπει να δουλέψει χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της μη-ιδεατής μαγνητούδροδυναμικής (resistive MHD). Αυτό γίνεται γιατί το πλάσμα του δίσκου θα πρέπει να μπορεί να διασχίζει τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές, έτσι ώστε να είναι δυνατή η πρόσπτωση του υλικού προς το κεντρικό αντικείμενο. Για τον λόγο αυτό, στο πρόβλημά μας η διάχυση του μαγνητικού πεδίου μοντελοποιήθηκε χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή (στην αζιμουθιακή διεύθυνση και στο πολοειδές επίπεδο), έτσι ώστε αυτή να μειώνεται σημαντικά μέσα σε μία κλίμακα ύψους του δίσκου.

Το ότι το εσωτερικό του δίσκου είναι μία περιοχή όπου η διάχυση του μαγνητικού πεδίου είναι εξαιρετικά σημαντική, φαίνεται και από το διάγραμμα 6.2 (πάνω δεξιά), όπου βλέπουμε το κατακόρυφο προφίλ του μαγνητικού αριθμού Reynolds στο πολοειδές επίπεδο όπως αυτό προέκυψε από την ολοκλήρωση (χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες παραμέτρους του Ferreira). Η συμπεριφορά των προφίλ του αριθμού Reynolds από το προηγούμενο κεφάλαιο, είναι παρόμοια με αυτού που παρουσιάζουμε εδώ. Από το διάγραμμα αυτό βλέπουμε ότι καθώς ανεβαίνουμε ψηλότερα μέσα στον δίσκο, ο αριθμός Reynolds μειώνεται, παίρνοντας κοντά στην επιφάνεια του δίσκου την τιμή $\mathcal{R}_m \simeq 3$. Αυτό μας δείχνει ότι η διάχυση του μαγνητικού πεδίου είναι εντονότερη στα εξωτερικά στρώματα του δίσκου, σε σχέση με την διάχυση κοντά στο midplane (κάτι το οποίο είδαμε και στα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου). Επίσης, μια τέτοια τιμή του \mathcal{R}_m δεν δικαιολογεί την χρήση ιδεατής MHD στην επιφάνεια του δίσκου ή κοντά σε αυτή, αφού η ιδεατή MHD ισχύει στο όριο των $\mathcal{R}_m \gg 1.0$.

Όσον αφορά τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου που διαπερνά τον δίσκο, ένα παράδειγμα αυτών φαίνεται στο διάγραμμα 6.2 (πάνω αριστερά), για τιμές των

παραμέτρων που αντιστοιχούν στην λύση των Casse και Ferreira που παρουσιάσαμε πιο πάνω. Η συμπεριφορά αυτών είναι παρόμοια με την συμπεριφορά των λύσεων του προηγούμενου κεφαλαίου. Η ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου προκύπτουν να είναι θετικές σε όλο το εσωτερικό του δίσκου, ενώ η αξιμουθιακή συνιστώσα ξεκινάει με μηδενική τιμή και στην συνέχεια γίνεται αρνητική όσο ανεβαίνουμε ψηλότερα μέσα σε αυτόν. Αυτό ήταν κάτι που το περιμέναμε, καθώς ο δίσκος διαπερνάται κάθετα από το μαγνητικό πεδίο μόνο κοντά στο midplane. Λόγω της περιστροφής του, οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές λυγίζουν σε αντίθετη φορά από αυτή της περιστροφής, δημιουργώντας έτσι μία έντονη, αρνητική αξιμουθιακή συνιστώσα πεδίου στα εξωτερικά στρώματα του δίσκου. Επιπλέον, οι θετικές τιμές των ακτινικών και κατακόρυφων συνιστωσών του πεδίου οδηγούν σε σχήματα δυναμικών γραμμών, όπως αυτά του προηγούμενου κεφαλαίου και αυτό του διαγράμματος 6.2 (κάτω αριστερά). Στην συγκεκριμένη περίπτωση, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες παραμέτρους των Casse και Ferreira, βλέπουμε ότι ικανοποιείται και το κριτήριο των 60° για την γωνία ψ , το οποίο στα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου δεν ικανοποιούταν. Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές τιμές παραμέτρων, αρχικής ταχύτητας αλλά και στην αλλαγή του πάχους του δίσκου (εδώ είναι πιο παχύς).

Όσον αφορά την επίδραση της διάχυσης και του ιξώδους στην διαμόρφωση της τοπολογίας του μαγνητικού πεδίου, από τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου και το παράδειγμα που παραθέτουμε εδώ (χρησιμοποιώντας τις τιμές παραμέτρων των Casse και Ferreira) συμπεραίνουμε ότι: όσο μικροτερη ήταν η ανισοτροπία στην διάχυση του πεδίου (χ_m κοντά στην μονάδα, εντονότερη διάχυση), η ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα αυτού απέκτησαν μεγαλύτερες τιμές κοντά στην επιφάνεια του δίσκου, απ'ότι στην περίπτωση της μεγάλης ανισοτροπίας (μικρότερα επίπεδα διάχυσης). Όσον αφορά την αξιμουθιακή συνιστώσα, αυτή δεν φάνηκε να επηρεάστηκε τόσο από την διάχυση, αλλά περισσότερο από τα επίπεδα του ιξώδους. Για μεγαλύτερες τιμές του \mathcal{P}_m , η αξιμουθιακή συνιστώσα έγινε πιο έντονα αρνητική στο εσωτερικό του δίσκου. Τέλος, η γωνία ψ την οποία σχηματίζει η δυναμική γραμμή στο πολοειδές επίπεδο με τον οριζόντιο άξονα στην επιφάνεια του δίσκου, προέκυψε μικρότερη για μεγαλύτερες τιμές της διάχυσης και του ιξώδους.



Διάγραμμα 6.2: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.259$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, ακολουθώντας μία από τις λύσεις των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Πάνω αριστερά: Συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Πάνω δεξιά: Μαγνητικός αριθμός Reynolds στο πολοειδές επίπεδο. Κάτω αριστερά: Σχήμα μαγνητικής δυναμικής γραμμής στο πολοειδές επίπεδο. Κάτω δεξιά: Γωνία ψ μεταξύ του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου και του οριζόντιου άξονα.

6.5 Μηχανισμός εκροής ύλης

Στην παράγραφο αυτή θα σχολιάσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν σχε-
τικά με τον μηχανισμό που οδηγεί στην εκροή του υλικού από τον δίσκο και την
δημιουργία ανέμου. Σημαντικό ρόλο στην διαδικασία αυτή παίζουν οι κατακόρυφες
κατανομές των ρευμάτων στο εσωτερικό του δίσκου, με ένα παράδειγμα αυτών να
φαίνεται στο διάγραμμα 6.3 (το οποίο αντιστοιχεί σε τιμές παραμέτρων των Casse
και Ferreira). Οι κατανομές των ρευμάτων είναι σημαντικές, καθώς αυτά (μαζί με
το μαγνητικό πεδίο) είναι που καθορίζουν τις τιμές της δύναμης Lorentz.

Από την θεωρία του δεύτερου κεφαλαίου περιμέναμε η ακτινική συνιστώσα του
ρεύματος να μειώνεται (J. Ferreira & G. Pelletier 1993 [5], [6], J. Ferreira & G. Pelletier
1995 [7], J. Ferreira 1997 [8], F. Casse & J. Ferreira, 2000 [3], [4]), πλησιάζοντας το
μηδέν στην επιφάνεια του δίσκου. Αυτό πράγματι βλέπουμε ότι προέκυψε και από
την διαδικασία της ολοκλήρωσης (διάγραμμα 6.3). Η μείωση αυτή του ακτινικού
ρεύματος, αλλά και του αζιμουθιακού, μπορεί να οδηγήσει στην μείωση της τιμής
της κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης Lorentz F_{Lz} στα ανώτερα στρώματα του
δίσκου, όπως φαίνεται από την σχέση:

$$F_{Lz} = \frac{1}{c}(J_{\varpi}B_{\varphi} - B_{\varpi}J_{\varphi}) \quad (6.23)$$

κάτι το οποίο φαίνεται και στο διάγραμμα 6.3 για την \tilde{F}_{Lz} (κάτω αριστερά).

Θεωρώντας τώρα ότι η δύναμη της μαγνητικής τάσης δεν συνεισφέρει σημαντικά
στην κατακόρυφη συνιστώσα της εξίσωσης ορμής στα εξωτερικά στρώματα του
δίσκου, αυτή μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά:

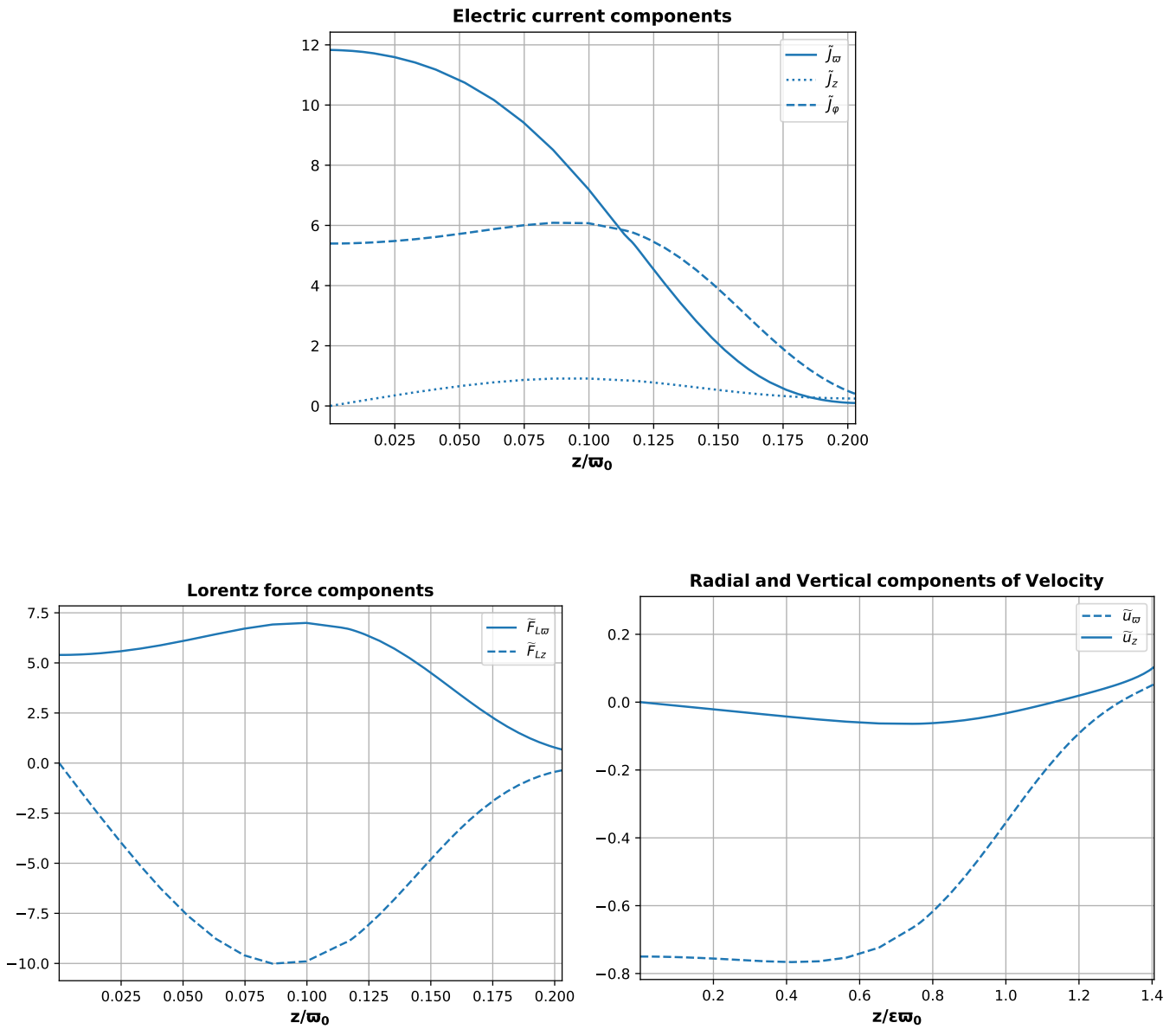
$$(u_p \cdot \vec{\nabla})u_z \simeq -\Omega_K^2 z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) \quad (6.24)$$

από όπου βλέπουμε ότι η μόνη δύναμη που μπορεί να «αντισταθεί» στην βαρύτητα
(πρώτος όρος δεξιού μέλους) και στην πίεση του μαγνητικού πεδίου ή αλλιώς στην
κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Lorentz (τρίτος όρος), είναι η θερμική πίεση
του πλάσματος (δεύτερος όρος).

Πράγματι, με την ελάττωση της τιμής του ακτινικού και αζιμουθιακού ρεύματος
κοντά στην επιφάνεια του δίσκου, η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Lorentz
παίρνει εκεί πολύ μικρές τιμές (όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 6.3), δίνοντας
την δυνατότητα στην θερμική πίεση του πλάσματος να «σπρώξει» το υλικό προς τα
πάνω και να έχουμε την αλλαγή από κίνηση πρόσπτωσης σε κίνηση εκροής. Η αλλαγή
αυτή αποτυπώνεται στην ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, όπως
φαίνονται στο διάγραμμα 6.3 (κάτω δεξιά), όπου βλέπουμε την αλλαγή προσήμου
που συμβαίνει σε αυτές στα εξωτερικά στρώματα του δίσκου.

Επιπλέον, η τοπολογία του μαγνητικού πεδίου καθώς και τα προφίλ των ρευ-
μάτων που προέκυψαν, οδηγούν στην αλλαγή προσήμου της αζιμουθιακής δύναμης
Lorentz:

$$F_{L\varphi} = -\frac{1}{c}(J_{\varpi}B_z - B_{\varpi}J_z) \quad (6.25)$$



Διάγραμμα 6.3: Διαγράμματα για δίσκο με $\chi_m = 0.259$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, ακολουθώντας μία από τις λύσεις των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Πάνω: Συνιστώσες του ρεύματος. Κάτω αριστερά: Ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης Lorentz. Κάτω δεξιά: Ακτινική και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, όπως αυτές προέκυψαν από την ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τιμές των Casse & Ferreira. Ο οριζόντιος άξονας είναι διαιρεμένος με ϵ .

η οποία είναι έντονα αρνητική στο εσωτερικό του δίσκου (απαγωγή στροφορμής) και γίνεται ελαφρώς θετική κοντά στην επιφάνειά του (αρχίζει η επιτάχυνση του πλάσματος). Η δύναμη αυτή φαίνεται στο διάγραμμα 6.4. Από την θεωρία αναμένεται ότι η δύναμη αυτή είναι που επιταχύνει το πλάσμα από την επιφάνεια του δίσκου στην περιοχή των πιδάκων, κάτι όμως το οποίο δεν μπορούμε να δούμε εμείς στην ανάλυσή μας καθώς η ολοκλήρωση έγινε μέχρι την επιφάνεια του δίσκου. Η δύναμη αυτή συμβάλλει επίσης σημαντικά στην απαγωγή στροφορμής από τον δίσκο, κάτι το οποίο θα συζητήσουμε στην συνέχεια.

6.6 Μηχανισμοί απαγωγής στροφορμής

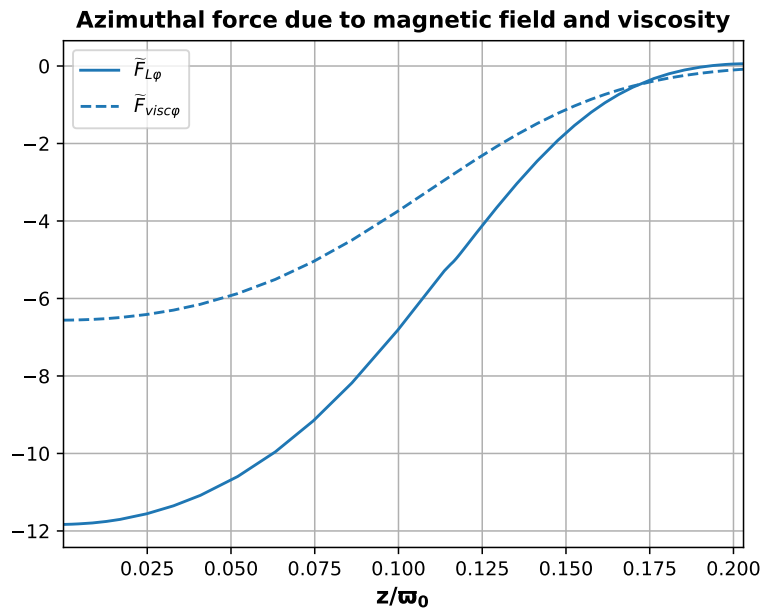
Δύο θεωρούνται οι επικρατέστεροι μηχανισμοί που μπορούν να απάγουν στροφορμή από έναν αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης: οι ροπές που ασκούνται στο πλάσμα του δίσκου λόγω ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου ή οι ροπές λόγω του ενεργού ιξώδους. Τα δύο αυτά είδη δυνάμεων φαίνονται στο διάγραμμα 6.4, για τιμές παραμέτρων που αντιστοιχούν στην λύση των Casse και Ferreira που παρουσιάσαμε παραπάνω. Από το διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι και οι δύο δυνάμεις στην αξιμουθιακή διεύθυνση είναι έντονα αρνητικές στο εσωτερικό του δίσκου, δηλαδή απάγουν στροφορμή από αυτόν οδηγώντας στην ακτινική πρόσπτωση υλικού, ενώ στην συνέχεια μειώνονται κατά μέτρο μέχρι να φτάσουμε στην επιφάνεια του δίσκου. Εκεί η ροπή λόγω ιξώδους μηδενίζεται, ενώ η ροπή λόγω του μαγνητικού πεδίου αλλάζει πρόσημο και γίνεται ελαφρώς θετική. Αυτό το περιμέναμε θεωρητικά, αφού η αξιμουθιακή δύναμη Lorentz είναι αυτή που επιταχύνει το πλάσμα στην βάση του δίσκου στην $\hat{\phi}$ διεύθυνση πριν αυτό περάσει στην περιοχή των πιδάκων. Βέβαια, όπως είπαμε και πριν, αυτό δεν μπορούμε να το δούμε ή να το ισχυριστούμε στην δική μας μελέτη, καθώς σταματάμε την ολοκλήρωση στην επιφάνεια του δίσκου.

Η παράμετρος η οποία μας δείχνει ποιός από τους δύο μηχανισμούς απαγωγής στροφορμής επικρατεί κάθε φορά σε έναν δίσκο, ορίστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια ως εξής:

$$\Lambda = \left| \frac{\text{Jet torque}}{\text{Turbulent torque}} \right|_{z=0} \quad (6.26)$$

όπου για $\Lambda \gg 1.0$ επικρατεί ο μηχανισμός απαγωγής μέσω του μαγνητικού πεδίου, ενώ για $\Lambda \sim 1$ συνεισφέρει σημαντικά και το ενεργό ιξώδες.

Στην περίπτωση του διαγράμματος 6.4, η παράμετρος αυτή υπολογίστηκε να είναι $\Lambda \simeq 1.8$, δηλαδή έχουμε έναν δίσκο όπου το ενεργό ιξώδες συνεισφέρει σημαντικά στον μηχανισμό αυτό. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε διάφορες περιπτώσεις δίσκων, με τις τιμές των Λ για αυτούς να φαίνονται στον πίνακα 6.1. Από αυτόν βλέπουμε ότι για μικρότερες τιμές του \mathcal{P}_m (μικρότερα επίπεδα ιξώδους), οι τιμές του Λ που προέκυψαν είναι αρκετά μεγαλύτερες τις μονάδας, δηλαδή υπερισχύει η απαγωγή στροφορμής από τις ροπές λόγω του μαγνητικού πεδίου. Αντίθετα, για μεγαλύτερα \mathcal{P}_m (υψηλότερα επίπεδα ιξώδους), οι τιμές του Λ υπολογίζονται γύρω



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα για δίσκο με $\chi_m = 0.259$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, ακολουθώντας μία από τις λύσεις των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Σε αυτό βλέπουμε τις αξιμουθιακές συνιστώσες της δύναμης Lorentz και της δύναμης λόγω ιξώδους που ασκούνται στο πλάσμα του δίσκου.

στην μονάδα και άρα το ενεργό ιξώδες συμμετέχει περισσότερο στην ολική απαγωγή στροφορμής από τον δίσκο.

6.7 Υποκεπλεριανή περιστροφή

Μιλήσαμε στα παραπάνω για το πώς η κατακόρυφη και η αξιμουθιακή συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης Lorentz συνδέονται με την εκροή του υλικού από τον δίσκο, αλλά και με την απαγωγή στροφορμής από αυτόν, αντίστοιχα. Εδώ θα μιλήσουμε για την ακτινική συνιστώσα της δύναμης Lorentz και το πώς αυτή οδηγεί στην υποκεπλεριανή περιστροφή του δίσκου. Η συνιστώσα αυτή φαίνεται στο διάγραμμα 6.3 κάτω αριστερά, όπως αυτή προέκυψε από την ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους της λύσης των Casse και Ferreira που παρουσιάσαμε παραπάνω.

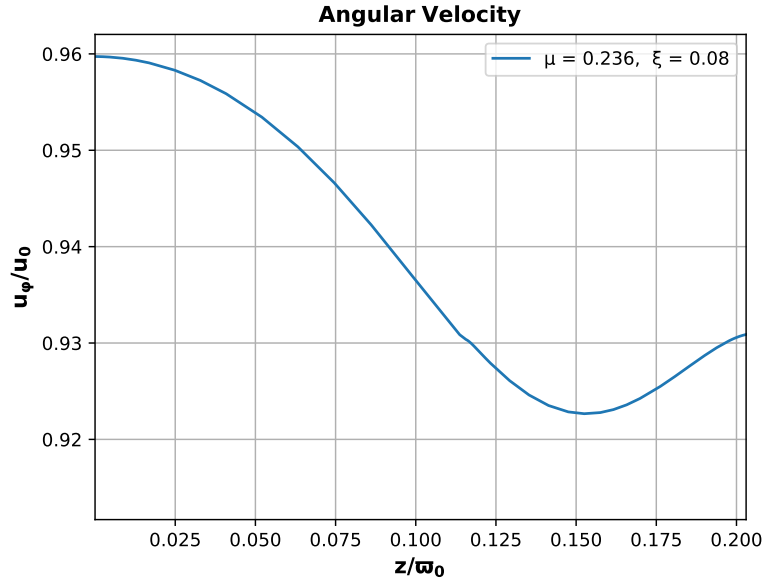
Από το διάγραμμα αυτό βλέπουμε ότι η ακτινική δύναμη Lorentz παίρνει θετικές τιμές στο εσωτερικό του δίσκου, κάτι το οποίο το περιμέναμε, καθώς η κύρια συνεισφορά σε αυτή προέρχεται από την δύναμη της μαγνητικής τάσης. Η δύναμη αυτή προσπαθεί να «ισιώσει» τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές μέσα στον δίσκο, ασκώντας μία ακτινική δύναμη προς τα έξω στο πλάσμα αυτού. Αποτέλεσμα της ύπαρξης αυτής της δύναμης είναι η υποκεπλεριανή περιστροφή του δίσκου, κάτι το

οποίο φαίνεται και γράφοντας την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης ορμής:

$$(u_p \cdot \vec{\nabla})u_\varpi \simeq \frac{u_\varphi^2}{\varpi} - \Omega_K^2 \varpi + \frac{F_{L\varpi}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} \quad (6.27)$$

όπου θεωρήθηκε ότι η πίεση λόγω μαγνητικού πεδίου δεν συνεισφέρει σημαντικά σε αυτή.

Εάν ο δίσκος ήταν υδροδυναμικός ($F_{L\varpi} = 0$), τότε αγνοώντας την θερμική πίεση και θεωρώντας ότι το $u_\varpi \ll 1.0$, από την σχέση 6.27 θα προέκυπτε ότι αυτός θα περιστρέφονταν ακριβώς Κεπλεριανά. Η ύπαρξη όμως του μαγνητικού πεδίου αλλάζει αυτό το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 6.5. Σε αυτό βλέπουμε την λύση που προέκυψε από την ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους των Casse και Ferreira, για την αξιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας (η οποία έχει εδώ κανονικοποιηθεί ως προς την Κεπλεριανή ταχύτητα περιστροφής). Από αυτό βλέπουμε ότι όσο ανεβαίνουμε ψηλότερα στο εσωτερικό του δίσκου, η ταχύτητα περιστροφής γίνεται όλο και περισσότερο υποκεπλεριανή. Αυτό συμβαίνει μέχρι να φτάσουμε στα εξωτερικά στρώματα αυτού όπου η u_φ αρχίζει πλέον να αυξάνεται, καθώς η ακτινική συνιστώσα της δύναμης Lorentz πλησιάζει το μηδέν (διάγραμμα 6.3, κάτω αριστερά). Η συμπεριφορά αυτή είναι παρόμοια με τις λύσεις των J. Ferreira & G. Pelletier (1995) [7].



Σχήμα 6.5: Διάγραμμα για δίσκο με $\chi_m = 0.259$ και $\mathcal{P}_m = 3.2$, ακολουθώντας μία από τις λύσεις των F. Casse & J. Ferreira, 2000a [3]. Σε αυτό βλέπουμε την αξιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας, η οποία παίρνει υπο-κεπλεριανές τιμές (η κανονικοποίηση έχει γίνει εδώ ως προς $u_0 = u_K$).

6.8 Μελλοντικές μελέτες

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε η δυναμική στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου, μη-σχετικιστικού, αστροφυσικού δίσκου προσαύξησης. Η μελέτη έγινε στα πλαίσια της θεωρίας της μη-ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής, συμπεριλαμβάνοντας στις εξισώσεις την διάχυση του μαγνητικού πεδίου (στην εξίσωση δυναμό) και το ενεργό ιξώδες (στην φ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ακολουθούν την συμπεριφορά των λύσεων που έδωσαν οι Ferreira & Pelletier 1993 [5], [6], Ferreira & Pelletier 1995 [7], Ferreira 1997 [8] και Casse & Ferreira 2000 [3], [4] για το εσωτερικό του δίσκου, ενώ στις εργασίες αυτές μελετάται αυτοσυνεπώς και το πρόβλημα της σύνδεσης μεταξύ του δίσκου και του πίδακα που εκρρέει από αυτόν. Αυτό γίνεται ολοκληρώνοντας το σετ των εξισώσεων της μη-ιδεατής MHD μέσα στον δίσκο και μετά, χρησιμοποιώντας για αρχικές συνθήκες τα αποτελέσματα από την επιφάνεια αυτού, ολοκληρώνοντας στην περιοχή των πιδάκων χρησιμοποιώντας το σετ της ιδεατής MHD.

Ένα πρόβλημα το οποίο προέκυψε κατά την ανάλυσή μας ήταν αυτό της επιλογής της εξίσωσης ενέργειας. Η ύπαρξη της διάχυσης και τους ενεργούς ιξώδους μέσα στον δίσκο, οδηγούν αναπόφευκτα σε θέρμανση του πλάσματος μέσω των μηχανισμών του Joule και Viscous heating. Οι όροι αυτοί συμπεριλήφθηκαν αρχικά για πληρότητα στην εξίσωση ενέργειας των κεφαλαίων 3 και 4, αλλά στην συνέχεια λόγω αριθμητικών προβλημάτων (π.χ. εμφάνιση παραγώγων των άγνωστων συναρτήσεων στο τετράγωνο), το πρόβλημά μας απλοποιήθηκε, χρησιμοποιώντας αντί για την πλήρη εξίσωση ενέργειας την πολυτροπική εξίσωση. Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουν την εξίσωση ενέργειας οι Casse & Ferreira 2000a [3], ενώ οι Ferreira & Pelletier 1995 [7] και Casse & Ferreira 2000b [4] δίνουν την θέρμανση του δίσκου «με το χέρι», προσδιορίζοντας από πριν το προφίλ της θερμοκρασίας στο εσωτερικό αυτού, ή την μορφή της συνάρτησης που θερμαίνει τον δίσκο (δεξί μέλος της εξίσωσης ενέργειας), αντίστοιχα.

Κάνοντας την προσέγγιση της πολυτροπικής εξίσωσης το πρόβλημα απλοποιείται, μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά, μας αφήνει να μελετήσουμε την διάχυση του μαγνητικού πεδίου μέσα στον δίσκο, αλλά δεν μας αφήνει να μελετήσουμε αυτοσυνεπώς το συνολικό πρόβλημα, συμπεριλαμβάνοντας τα ενεργειακά χαρακτηριστικά του δίσκου (energetics). Η επίλυση του πλήρους προβλήματος, συμπεριλαμβάνοντας στην εξίσωση ενέργειας τους όρους Joule και Viscous heating, είναι κάτι το οποίο χρήζει μελλοντικής μελέτης, καθώς η ύπαρξη των όρων αυτών θα μπορούσε δυνητικά να επηρεάσει την μορφή των λύσεων που προκύπτουν.

Ένα άλλο ζήτημα το οποίο χρήζει μελλοντικής μελέτης είναι οι τιμές του ejection index ξ . Παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι ο δείκτης αυτός μπορεί να πάρει τιμές $\xi \sim 0.4$, πολύ μεγαλύτερες από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία ή στις εργασίες των Ferreira & Pelletier 1993 [5], [6], Ferreira & Pelletier 1995 [7], Ferreira 1997 [8] και Casse & Ferreira 2000a [3]. Οι μεγαλύτερες τιμές αυτές μας δείχνουν ότι το υλικό που φτάνει τελικά να προσπέσει στο κεντρικό αντικείμενο είναι πολύ λιγότερο από ότι περιμέναμε μέχρι τώρα. Ο άνεμος που εκρρέει από τον

δίσκο φαίνεται να κουβαλά το μεγαλύτερο μέρος του υλικού μαζί του.

Μελλοντικά μοντέλα θα πρέπει να είναι σε θέση να αναπαράγουν λύσεις δίσκου-πίδακα με τιμές των ξ που να αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις. Μία κατεύθυνση προς αυτό είναι παίρνοντας υπόψιν την θέρμανση του πλάσματος του δίσκου στην εξίσωση ενέργειας. Στην εργασία τους οι Casse & Ferreira 2000b [4], δίνοντας την θέρμανση του δίσκου με το «χέρι» βρίσκουν λύσεις για $\xi > 0.15$ (τροποποιώντας την απόδειξη που παρουσιάσαμε παραπάνω), αλλά οι τιμές αυτές παραμένουν αρκετά μικρότερες από τις παρατηρούμενες. Η διερεύνηση των τιμών του δείκτη αυτού παραμένει ακόμα ένα ανοιχτό ζήτημα.

Βιβλιογραφία

- [1] Balbus, S. A., & Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I-Linear analysis. II-Nonlinear evolution. *The Astrophysical Journal*, 376, 214-233.
- [2] Blandford, R. D., & Payne, D. G. (1982). Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 199(4), 883-903.
- [3] Casse, F., & Ferreira, J. (1999). Magnetized accretion-ejection structures IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs. arXiv preprint astro-ph/9911471.
- [4] Casse, F., & Ferreira, J. (2000). Magnetized Accretion-Ejection Structures V. Effects of entropy generation inside the disc. arXiv preprint astro-ph/0008244.
- [5] Ferreira, J., & Pelletier, G. (1993). Magnetized accretion-ejection structures. 1. General statements. *Astronomy and Astrophysics*, 276, 625.
- [6] Ferreira, J., & Pelletier, G. (1993). Magnetized accretion-ejection structures. II. Magnetic channeling around compact objects. *Astronomy and Astrophysics*, 276, 637.
- [7] Ferreira, J., & Pelletier, G. (1995). Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows. *Astronomy and Astrophysics*, 295, 807.
- [8] Ferreira, J. (1996). Magnetically-driven jets from Keplerian accretion discs. arXiv preprint astro-ph/9607057.

- [9] Ferreira, J. (2002). Theory of magnetized accretion discs driving jets. *EAS Publications Series*, 3, 229-277.
- [10] Ferreira, J., & Casse, F. (2004). Stationary accretion disks launching super-fast-magnetosonic magnetohydrodynamic jets. *The Astrophysical Journal Letters*, 601(2), L139.
- [11] Ferreira, J. (2007). MHD disc winds. In *Jets from Young Stars* (pp. 181-207). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [12] Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24, 337-355.
- [13] Vlahakis, N. (1998). Analytical Modeling of Cosmic Winds and Jets. PhDT.
- [14] Vlahakis, N. (2010). Output from MHD models. In *Jets from Young Stars IV* (pp. 51-108). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [15] Απόστολος Μαστιχιάδης, Νεκτάριος Βλαχάκης (2015), *Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών*, <https://repository.kallipos.gr/handle/11419/3100>
- [16] Κανάρης Χ. Τσίγκανος (2017), *Αστροφυσική Πλάσματος*, εκδόσεις Unibooks
- [17] Νεκτάριος Βλαχάκης (2019), *Δυναμική των ρευστών*, εκδόσεις Παπαζήση