



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
—ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837—

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη “Φυσική”
Τομέας: Πυρηνική Φυσική και Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Ανιονικό μοντέλο για την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου D_4

Αναστασίου Γρηγόρης
Α.Μ. 2018219

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων
Εμμανουήλ Φλωράτος, Ομότιμος Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020



HELLENIC REPUBLIC
**National and Kapodistrian
University of Athens**

— EST. 1837 —

Faculty of Physics
Department of Nuclear and Particle Physics

**Anyon model based on the symmetry group of
square D_4**

Anastasiou Grigoris
2018219

MASTER'S THESIS

Supervisor
Emmanuel Floratos, Emeritus Professor UOA

ATHENS, SEPTEMBER 2020

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου Εμμανουήλ Φλωράτο για την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια αυτών των μηνών. Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλο το φιλικό μου περιβάλλον και ιδιαίτερα στη Μαρία, τον Τάσο, το Δημήτρη και τον Παύλο για την υποστήρηξή τους. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη διαρκή της στήριξη στους ακαδημαϊκούς μου στόχους.

Περίληψη

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, έγινε μια εκτενής εισαγωγή στην τοπολογική κβαντική υπολογιστική. Η βασική μονάδα επεξεργασίας ενός κβαντικού υπολογιστή είναι το qubit και σε έναν τοπολογικό υπολογιστή αυτό υλοποιείται χρησιμοποιώντας σωματίδια δύο διαστάσεων, τα ανιόνια. Στο πρώτο μέρος της εργασίας κάναμε μια βασική εισαγωγή στη θεωρία ομάδων προκειμένου να δούμε πως κατασκευάζεται ένα ανιονικό μοντέλο. Μελετήθηκε εκτενώς η ομάδα D_4 του τετραγώνου και υπολογίστηκαν οι συνδυασμοί φορτίων και ροών για ανιόνια της ομάδας αυτής.

Στο δεύτερο μέρος, εξηγήσαμε εκτενέστερα ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ ανιονίων και σωματιδίων που εμφανίζονται στις τρεις διαστάσεις και πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες αυτές για την κατασκευή ενός κβαντικού υπολογιστή. Είδαμε πως κατασκευάζονται οι κβαντικές πύλες βάση της περιστροφής των ανιονίων και πως μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να προστατεύσουμε την πληροφορία από το decoherence. Στη συνέχεια είδαμε ποιες είναι οι πράξεις που γίνονται μεταξύ των ανιονίων και πως αυτές υλοποιούνται μέσω των πινάκων F και R . Τέλος, μελετήσαμε το πλέον απλό μοντέλο ανιονίων, τα ανιόνια Fibonacci που επιτρέπουν (θεωρητικά) την κατασκευή καθολικών κβαντικών πυλών (universal quantum gates). Για τα ανιόνια Fibonacci υπολογίστηκαν αναλυτικά οι πίνακες F και R βάση κάποιων συνθηκών γνωστών ως εξισώσεις πενταγώνου και εξαγώνου.

Λέξεις Κλειδιά: Τοπολογική Κβαντική Υπολογιστική, Ανιόνια, Ομάδα Βρόγχων, Κβαντική Διπλέτα, Κανόνες Σύντηξης

Abstract

In this thesis, we made a wide introduction to topological quantum computing. Quantum computers use qubits in order to function and topological quantum computers use anyons, 2D particles, to encode qubits. In the first part, we discussed the basics of group theory in order to construct an anyon model. For our anyon model, we used the group D_4 and calculated the different combinations of fluxons and chargeons for every anyon of this model.

In the second part, we talked about the differences between anyons and 3D particles and that we (in theory) could construct a quantum computer based on these properties. Quantum gates are very sensitive to decoherence, but gates based on the rotation of anyons can guarantee a much better protection of the information. Furthermore, we studied the operations which can occur between anyons and how they can be simulated with F and R matrices. In the end, we studied the simplest of all anyon models, the Fibonacci anyon model, which allows (in theory) universal quantum computing. We constructed the F and R matrices for the Fibonacci anyons using some conditions known as pentagon and hexagon equations.

Keywords: Topological Quantum Computing, Anyons, Braid Group, Quantum Double, Fusion Rules

Πρόλογος

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μεγάλη πρόοδος στον τομέα των κβαντικών υπολογιστών. Η τεχνολογία αυτή αποσκοπεί στο να λύσει προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν από έναν κλασσικό υπολογιστή σε πολυωνυμικό χρόνο. Η δυνατότητα αυτή των κβαντικών υπολογιστών προέρχεται από τη χρήση ορισμένων ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της κβαντομηχανικής, όπως η υπέρθεση καταστάσεων. Κατά την υπέρθεση καταστάσεων, το υπο μελέτη σύστημα, μπορεί να βρίσκεται σε παραπάνω από μία καταστάσεις μέχρι να γίνει μέτρηση στο σύστημα (για παράδειγμα, ένα απομονωμένο άτομο μπορεί να βρίσκεται σε δύο ή και παραπάνω ενεργειακές καταστάσεις ταυτόχρονα). Ωστόσο, η υπέρθεση καταστάσεων (coherence state) είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε εξωτερικές παρεμβολές από το περιβάλλον, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να διατηρηθεί για μεγάλους χρόνους. Λύση σε αυτό το πρόβλημα επιδιώκει να δώσει η τοπολογική κβαντική υπολογιστική.

Βασική ιδέα ενός τοπολογικού κβαντικού υπολογιστή είναι η κωδικοποίηση της πληροφορίας σε μια ιδιαίτερη κατηγορία σωματιδίων, τα ανιόνια.¹ Τα σωματίδια αυτά, που εμφανίζονται σε δισδιάστατα υλικά, επιδεικνύουν μια τελείως διαφορετική στατιστική από αυτή των σωματιδίων στις τρεις διαστάσεις. Οι ιδιότητές τους, όπως θα δούμε, μας επιτρέπουν να κωδικοποιήσουμε την πληροφορία μη τοπικά. Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να προστατέψουμε την πληροφορία από διαταραχές και να επιτύχουμε την υπέρθεση για μεγαλύτερους χρόνους.

¹ Από την αγγλική λέξη anyons. Η ορολογία αυτή χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Frank Wilczek για να δείξει ότι κατά την εναλλαγή δύο τέτοιων σωματιδίων, η από κοινού τους κυματοσυνάρτηση μπορεί, όπως θα δούμε, να πάρει μια οποιαδήποτε φάση ("any" phase).

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	6
2	Θεωρία Ομάδων	7
2.1	Η ομάδα του τετραγώνου	7
3	Ανιόνια ως qubits	17
3.1	Εισαγωγή στα ανιόνια	17
3.2	Συνθήκες ύπαρξης ανιονίων	21
3.3	Μοντέλο ανιονίων	22
3.4	Ανιόνια Fibonacci	28
4	Επίλογος	32

1 Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής, στην κβαντομηχανική, είμαστε εξοικειωμένοι με δύο βασικές κατηγορίες σωματιδίων, τα μποζόνια και τα φερμιόνια. Οι δύο αυτές κατηγορίες σωματιδίων διαχωρίζονται ως προς τη συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησής τους όταν πραγματοποιούνται εναλλαγές των σωματιδίων. Για παράδειγμα, εαν εναλλάξουμε δύο μποζόνια, η κυματοσυνάρτησή τους δεν αλλάζει πρόσημο (είναι δηλαδή συμμετρική), ενώ αν εναλλάξουμε δύο φερμιόνια, η από κοινού τους κυματοσυνάρτηση θα πάρει ένα πρόσημο -1 (οπότε είναι αντισυμμετρική). Αυτό φαίνεται πιο καθαρά και στις παρακάτω σχέσεις

$$|\phi_1\psi_1\rangle = |\psi_1\phi_1\rangle, \quad |\phi_2\psi_2\rangle = -|\psi_2\phi_2\rangle$$

όπου με ψ_1 και ϕ_1 αναφερόμαστε στις κυματοσυναρτήσεις των μποζονίων και με ψ_2 και ϕ_2 στις κυματοσυναρτήσεις των φερμιονίων. Τα σωματίδια αυτά είναι οι πλέον γενικές κατηγορίες σωματιδίων που μπορούμε να συναντήσουμε στις τρεις διαστάσεις. Ωστόσο, αν περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις, εμφανίζεται μια ακόμη κατηγορία σωματιδίων, τα ανιόνια. Σε αντίθεση με τα μποζόνια και τα φερμιόνια, όταν επιχειρίσουμε να εναλλάξουμε δύο ανιόνια με κυματοσυναρτήσεις ψ και ϕ , η από κοινού τους κυματοσυνάρτηση θα αποκτήσει μια φάση εν γένει διαφορετική από ± 1 , οπότε η εναλλαγή τους θα περιγράφεται από τη σχέση

$$|\phi\psi\rangle = R|\psi\phi\rangle$$

όπου το R μπορεί να είναι μια μιγαδική φάση ή πίνακας. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα των ανιονίων μας δίνει τη δυνατότητα να αποθηκεύσουμε την πληροφορία *μη τοπικά*. Λέγοντας μη τοπικά εννοούμε ότι η πληροφορία αποθηκεύεται στο σύστημα των ανιονίων και όχι σε ένα από αυτά μεμονομένα. Το συμπέρασμα αυτό είναι εκπληκτικό: αποθηκεύοντας την πληροφορία μη τοπικά, πλέον δεν είναι τόσο ευαίσθητη σε μικροδιαταραχές του συστήματος και, κατά συνέπεια, στο decoherence². Δηλαδή, χρησιμοποιώντας ανιόνια ως qubits μπορούμε να λύσουμε, ουσιαστικά, ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στην κατασκευή των κβαντικών υπολογιστών.

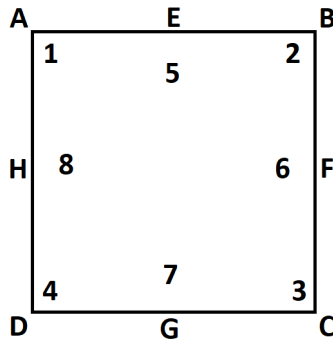
Τα τελευταία χρόνια γίνονται ολοένα και περισσότερες ανακαλύψεις στον τομέα των ανιονίων. Παρόλα αυτά, ακόμη δεν είμαστε σε θέση να τα εφαρμόσουμε σε έναν κβαντικό υπολογιστή. Ο λόγος, όπως θα δούμε, είναι ότι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλα τα είδη ανιονίων για την κατασκευή όλων των κβαντικών πυλών, καθώς τα περισσότερα ανιόνια μπορούν να παράγουν μόνο έναν περιορισμένο αριθμό πυλών, με συνέπεια να περιορίζονται κατά πολύ οι δυνατότητες του υπολογιστή. Στην εργασία που ακολουθεί, θα αναλύσουμε τα μαθηματικά που διέπουν τη συμπεριφορά των ανιονίων και θα εξάγουμε ένα ανιονικό μοντέλο με βάση την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου D_4 . Τέλος, θα ασχοληθούμε και με μία ακόμα ομάδα ανιονίων, τα ανιόνια Fibonacci (Fibonacci anyons), για τα οποία θα επιχειρίσουμε και να εξάγουμε τους πίνακες που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά τους. Τα τελευταία, αν και προς το παρόν δεν έχει επιβεβαιωθεί η ύπαρξή τους, θεωρούνται ως τα πλέον ιδανικά ανιόνια για την κατασκευή όλων των κβαντικών πυλών.

²Στα ελληνικά με τον όρο decoherence αναφερόμαστε στην αποσυμφωνία των κβαντικών καταστάσεων, όταν δηλαδή χάνεται η σταθερή διαφορά φάσης μεταξύ των καταστάσεων.

2 Θεωρία Ομάδων

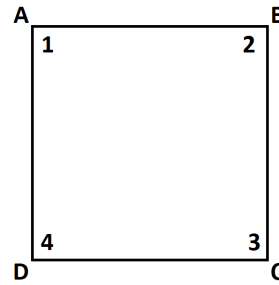
2.1 Η ομάδα του τετραγώνου

Για τη μαθηματική κατασκευή ενός μοντέλου ανιονίων απαιτείται η χρήση μιας ομάδας. Ο λόγος είναι ότι τα ανιόνια, όπως θα δούμε, διαθέτουν κάποια χαρακτηριστικά που μπορούμε να τα αντιστοιχίσουμε με τις κλάσεις και τις αναπαράστάσεις των κανονικοποιητών (normalizer groups) της ομάδας. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι η μαγνητική ροή και το φορτίο αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό θα κάνουμε μια εκτενή ανάλυση της ομάδας του τετραγώνου. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται αριθμημένες οι γωνίες και τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου. Η αριθμηση αυτή μας υποδεικνύει τους άξονες περιστροφής του τετραγώνου που είναι συνεπίπεδοι με το επίπεδό του. Εφόσον οι περιστροφές γύρω από αυτούς τους άξονες δεν αλλάζουν το σχήμα, θα τις ονομάσουμε **μετασχηματισμούς συμμετρίας**.

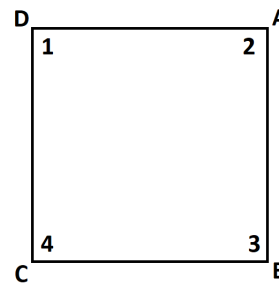


Σχήμα 1: Οι άξονες περιστροφής του τετραγώνου που το αφήνουν αναλλοίωτο

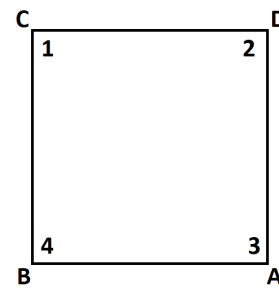
Σχήμα 2: Ταυτοτικό στοιχείο (E)



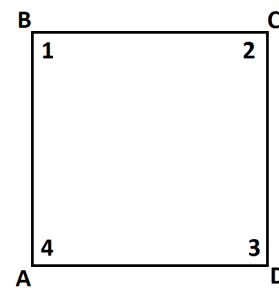
Σχήμα 3: Περιστροφή κατά 90° (C_4)



Σχήμα 4: Περιστροφή κατά 180° (C_4^2)

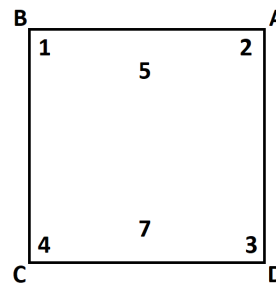


Σχήμα 5: Περιστροφή κατά 270° (C_4^3)

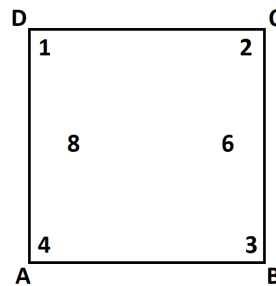


Ορίζουμε, καταρχήν, το ταυτοτικό στοιχείο E (βλ. Σχήμα 2). Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι το σχήμα παραμένει αναλλοίωτο ως προς περιστροφές γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο και που διέρχεται από το κέντρο του (αναφερόμαστε σε περιστροφές κατά την αρνητική φορά - clockwise). Συνεπώς, υπάρχουν τρεις περιστροφές γύρω από αυτόν τον άξονα: περιστροφή κατά 90° , 180° και 270° που συμβολίζονται αντίστοιχα C_4 , C_4^2 και C_4^3 . Για να είναι πιο σαφείς η περιστροφές, κάνουμε μετάθεση μόνο των γραμμάτων. Επιπλέον, υπάρχουν ακόμα τέσσερις άξονες περιστροφής που δεν παραβιάζουν τη συμμετρία του σχήματος, οι άξονες $5-7$, $6-8$, $1-3$ και $2-4$. Οι μετασχηματισμοί που συνδέονται με αυτούς τους άξονες ονομάζονται αντίστοιχα m_y , m_x , σ_x και σ_y . Συχνά θα αναφερόμαστε σε αυτούς ως ανακλάσεις.

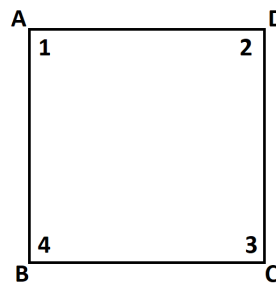
Σχήμα 6: Ανάκλαση κατά τον άξονα $5-7$ (m_y)

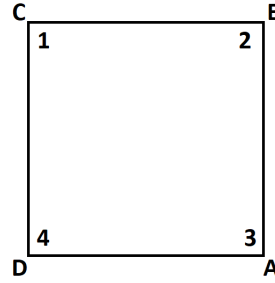


Σχήμα 7: Ανάκλαση κατά τον άξονα $6-8$ (m_x)



Σχήμα 8: Ανάκλαση κατά τον άξονα $1-3$ (σ_x)





Σχήμα 9: Ανάκλαση κατά τον άξονα 2–4
(σ_y)

Τα παραπάνω, λοιπόν, είναι τα στοιχεία της ομάδας συμμετρίας του τετραγώνου. Εννοείται ότι όταν μετά από έναν μετασχηματισμό ακολουθεί ο αντίστροφός του, το αποτέλεσμα είναι το ταυτοτικό στοιχείο, για παράδειγμα $C_4 C_4^{-1} = E$. Τώρα, αν συνδυάσουμε ανά δύο τα στοιχεία της ομάδας μπορούμε να φτιάξουμε τον **πολλαπλασιαστικό πίνακά** της. Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της πρώτης γραμμής με τα αντίστοιχα της πρώτης στήλης.

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_x	σ_y
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_x	σ_y
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_x	σ_y	m_y	m_x
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_y	σ_x
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_y	σ_x	m_x	m_y
m_x	m_x	σ_y	m_y	σ_x	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_x	m_x	σ_y	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_x	σ_x	m_x	σ_y	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_y	σ_y	m_y	σ_x	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε στοιχείο όταν συνδυαστεί με οποιοδήποτε άλλο θα προκύψει πάλι ένα από τα προϊγούμενα στοιχεία. Συνεπώς, αποδείξαμε με απλό τρόπο ότι το σύνολο των οχτώ μετασχηματισμών συμμετρίας του τετραγώνου αποτελούν ομάδα με πράξη εσωτερικής σύνθεσης τη σύνθεση των μετασχηματισμών. Η ομάδα των μετασχηματισμών του τετραγώνου συμβολίζεται με D_4 .

Σε γενικές γραμμές, μας βολεύει ιδιαίτερα να γράφουμε τον πολλαπλασιαστικό πίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε στη διαγώνιο του να εμφανίζεται παντού μόνο το ταυτοτικό στοιχείο. Με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε απευθείας ποια είναι τα αντίστροφα στοιχεία των στοιχείων της ομάδας (για παράδειγμα, τα C_4 και C_4^3 είναι αντίστροφα αφού το γινόμενο τους δίνει το E).

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_x	σ_y
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_x	σ_y
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_y	σ_x	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_y	σ_x
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_x	σ_y	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_y	m_y	σ_x	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_x	m_x	σ_y	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_x	σ_x	m_x	σ_y	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_y	σ_y	m_y	σ_x	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

Ας δούμε τώρα ποιες είναι οι υποομάδες του τετραγώνου. Καταρχήν, το ταυτοτικό στοιχείο αποτελεί από μόνο του μια ομάδα. Επιπλέον, τα C_4, C_4^2, C_4^3 και E αποτελούν μια άλλη υποομάδα, εφόσον ικανοποιούν τον κανόνα της κλειστότητας και τα C_4 και C_4^3 είναι μεταξύ τους αντίστροφα (το C_4^2 είναι το ίδιο το αντίστροφό του). Κατά παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε και τις υπόλοιπες υποομάδες της D_4 . Τελικά έχουμε τις εξής υποομάδες: $\{E\}, \{C_4, C_4^2, C_4^3, E\}, \{C_4^2, E\}, \{E, C_4^2, m_x, m_y\}, \{E, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\}, \{E, m_x\}, \{E, m_y\}, \{E, \sigma_x\}, \{E, \sigma_y\}$.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να βρούμε τις κλάσεις συζυγίας της D_4 . Ξεκινάμε, αρχικά, με ένα στοιχείο, για παράδειγμα το C_4 , και σχηματίζουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς $P^{-1}C_4P$ με $P \in D_4$. Αν, λόγω χάρη, πάρουμε το γινόμενο $P^{-1}C_4P$ με $P = C_4^3$ έχουμε $(C_4^3)^{-1}C_4C_4^3 = C_4C_4C_4^3 = C_4^2C_4^3 = C_4$, όπου τα ενδιάμεσα στοιχεία των πράξεων προκύπτουν απευθείας από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα. Συνολικά θα έχουμε οπότε:

$$\begin{array}{ll} P = E & E^{-1}C_4E = C_4 \\ P = C_4 & C_4^{-1}C_4C_4 = C_4 \\ P = C_4^2 & (C_4^2)^{-1}C_4C_4^2 = C_4 \\ P = C_4^3 & (C_4^3)^{-1}C_4C_4^3 = C_4 \\ P = m_x & m_x^{-1}C_4m_x = C_4^3 \\ P = m_y & m_y^{-1}C_4m_y = C_4^3 \\ P = \sigma_x & \sigma_x^{-1}C_4\sigma_x = C_4^3 \\ P = \sigma_y & \sigma_y^{-1}C_4\sigma_y = C_4^3 \end{array}$$

Τελικά, η πρώτη κλάση θα περιλαμβάνει τα στοιχεία $\{C_4, C_4^3\}$. Όμοια προκύπτουν οι υπόλοιπες κλάσεις $\{E\}, \{C_4^2\}, \{m_x, m_y\}, \{\sigma_x, \sigma_y\}$. Το ταυτοτικό στοιχείο ανήκει μόνο του σε μια κλάση επειδή για οποιοδήποτε $P \in D_4$ ισχύει $P^{-1}EP = EP^{-1}P = E$, εφόσον το E μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της ομάδας³. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι ανακλάσεις και οι περιστροφές ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις.

Πάμε να υπολογίσουμε, τώρα, τις ανάγωγες αναπαραστάσεις του τετραγώνου. Βλέπουμε, καταρχήν, ότι υπάρχουν πέντε κλάσεις, οπότε θα έχουμε και πέντε ανάγωγες αναπαραστάσεις. Ας βρούμε για αρχή τις διαστάσεις των αναπαραστάσεων. Με χρήση της σχέσης $\sum_{i=1}^n d_i^2 = g$ (όπου g η τάξη της ομάδας) έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^5 d_i^2 = 8 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 8$$

που ισχύει τελικά μόνο για

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1, d_5 = 2$$

,οπότε έχουμε τέσσερις μονοδιάστατες ανάγωγες αναπαραστάσεις και μία διδιάστατη. Κατασκευάζουμε πρώτα των πίνακα των χαρακτήρων, όπου θα υπολογίσουμε τους χαρακτήρες που αντιστοιχούν σε κάθε κλάση για κάθε αναπαράσταση. Χρησιμοποιώντας τη σχέση ορ-

³Παρεμπιπτόντως, για τον ίδιο λόγο, σε μια αβελιανή ομάδα G έχουμε τόσες κλάσεις όσες και τα στοιχεία της ομάδας, δηλαδή για οποιαδήποτε στοιχεία $P, S \in G$ ισχύει $P^{-1}SP = P^{-1}PS = ES = S$.

θογωνιότητας των χαρακτήρων

$$\sum_{\alpha=1}^N g_{\alpha} \chi_{\alpha}^{(1)} \chi_{\alpha}^{(2)*} = 0$$

(όπου N ο αριθμός των κλάσεων της ομάδας και g_{α} το πλήθος των στοιχείων κάθε κλάσης), καθώς και τις σχέσεις του πολλαπλασιαστικού πίνακα, τελικά ο πίνακας των χαρακτήρων παίρνει την παρακάτω μορφή

	$\{E\}$	$\{C_4, C_4^3\}$	$\{C_4^2\}$	$\{m_x, m_y\}$	$\{\sigma_x, \sigma_y\}$
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1	-1	1	-1	1
χ^3	1	-1	1	1	-1
χ^4	1	1	1	-1	-1
χ^5	2	0	-2	0	0

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας του τετραγώνου. Ξεκινάμε από το γεγονός ότι όσον αφορά τις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις, αυτές ταυτίζονται με τους αντίστοιχους χαρακτήρες τους. Για την πέμπτη αναπαράσταση ξεκινάμε με το ταυτοτικό στοιχείο το οποίο θα αναπαριστάται από τον ταυτοτικό 2×2 πίνακα. Τα στοιχεία C_4, C_4^2 και C_4^3 αναπαριστούν στροφές κατά $\frac{\pi}{2}, \pi$ και $\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. Βάζοντας ,λοιπόν, αυτές τις γωνίες στον πίνακα των στροφών θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_4^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

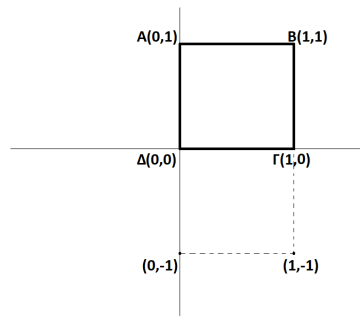
Για να βρούμε τις αναπαραστάσεις των υπόλοιπων στοιχείων θα υπολογίσουμε τη δράση των στοιχείων αυτών στα διανύσματα θέσης των γωνιών του τετραγώνου. Ας δούμε, για παράδειγμα, τη δράση του m_x στο τετράγωνο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αρχικά, η θέση του τετραγώνου είναι αυτή με το έντονο μαύρο χρώμα (για λόγους ευκολίας έχουμε τοποθετήσει το τετράγωνο στην αρχή των αξόνων, με μήκος πλευράς 1). Μετά τη δράση του m_x , το A θα μεταφερθεί στη θέση $(0, -1)$ και το B στη θέση $(1, -1)$, ενώ τα Δ και Γ παραμένουν στις θέσεις τους. Δεδομένου, λοιπόν, ότι ο πίνακας θα έχει μηδενικό ίχνος (βάση του πίνακα των χαρακτήρων) τότε αυτός θα έχει τη μορφή

$$m_x = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

και από τη δράση του στα A και B, θα έχουμε

$$A: \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0, x = 1$$

$$B: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0$$



Σχήμα 10: Με διακεκομμένη γραμμή φαίνεται η νέα θέση του τετραγώνου.

και τελικά το m_x θα έχει τη μορφή

$$m_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε και τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις και ο πίνακας των αναπαραστάσεων παίρνει την τελική του μορφή

	E	C_4	C_4^3	C_4^2	m_x	m_y	σ_x	σ_y
Γ^1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ^2	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
Γ^3	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
Γ^4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
Γ^5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Έχοντας βρεί τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας του τετραγώνου, λοιπόν, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις αποσυνθέσεις των γινομένων τους. Ας δούμε, για παράδειγμα, το γινόμενο των αναπαραστάσεων Γ^1 και Γ^1 . Θα έχουμε

$$\Gamma^1 \times \Gamma^1 = \sum_{k=1}^5 \alpha_k^{11} \Gamma^k$$

και οι συντελεστές α_k^{11} θα είναι

$$\alpha_1^{11} = \sum_{m=1}^5 \frac{g_m}{8} \chi_m^{(1)*}(A) \chi_m^{(1)}(A) \chi_m^{(1)}(A) \Rightarrow$$

$$\alpha_1^{11} = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

οπότε ο συντελεστής της αναπαράστασης Γ^1 στον τελικό γραμμικό συνδυασμό των ανάγωγων αναπαραστάσεων του γινομένου $\Gamma^1 \times \Gamma^1$ θα είναι 1. Συνεχίζουμε όμοια και για τους

υπόλοιπους συντελεστές και έχουμε

$$\alpha_2^{11} = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\alpha_3^{11} = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\alpha_4^{11} = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\alpha_5^{11} = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

οπότε τελικά έχουμε

$$\Gamma^1 \times \Gamma^1 = \Gamma^1$$

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για τα υπόλοιπα 24 γινόμενα $\Gamma^i \times \Gamma^j$, με $1 \leq i, j \leq 5$. Τελικά, ο πίνακας του γινομένου των αναπαράστασεων θα έχει την παρακάτω μορφή.

$\Gamma^i \times \Gamma^j$	Γ^1	Γ^2	Γ^3	Γ^4	Γ^5
Γ^1	Γ^1	Γ^2	Γ^3	Γ^4	Γ^5
Γ^2	Γ^2	Γ^1	Γ^4	Γ^3	Γ^5
Γ^3	Γ^3	Γ^4	Γ^1	Γ^2	Γ^5
Γ^4	Γ^4	Γ^3	Γ^2	Γ^1	Γ^5
Γ^5	Γ^5	Γ^5	Γ^5	Γ^5	$\Gamma^1 \oplus \Gamma^2 \oplus \Gamma^3 \oplus \Gamma^4$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τους κανονικοποιητές του τετραγώνου για κάθε μια κλάση του. Καταρχάς, για την κλάση του ταυτοτικού στοιχείου ο κανονικοποιητής θα είναι όλη η ομάδα D_4 , αφού μετατίθεται με όλα τα στοιχεία. Για να βρούμε τον κανονικοποιητή της κλάσης $\{C_4, C_4^3\}$ ξεκινάμε και βρίσκουμε για το ένα από τα δύο στοιχεία (ας πούμε το C_4) όλα τα στοιχεία P που ικανοποιούν τη σχέση $P^{-1}C_4P = C_4$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} P &= E \\ P &= C_4 \\ P &= C_4^2 \\ P &= C_4^3 \\ \cancel{P} &= m_x \\ \cancel{P} &= m_y \\ \cancel{P} &= \sigma_x \\ \cancel{P} &= \sigma_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{-1}C_4E &= C_4 \\ C_4^{-1}C_4C_4 &= C_4 \\ (C_4^2)^{-1}C_4C_4^2 &= C_4 \\ (C_4^3)^{-1}C_4C_4^3 &= C_4 \\ \cancel{m_x^{-1}C_4m_x} &= \cancel{C_4^3} \\ \cancel{m_y^{-1}C_4m_y} &= \cancel{C_4^3} \\ \cancel{\sigma_x^{-1}C_4\sigma_x} &= \cancel{C_4^3} \\ \cancel{\sigma_y^{-1}C_4\sigma_y} &= \cancel{C_4^3} \end{aligned}$$

όπου τελικά τα μόνα στοιχεία που ικανοποιούν τη ζητούμενη συνθήκη είναι τα $\{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}$, συνεπώς $N(C_4, C_4^3) = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για τις υπόλοιπες κλάσεις και έχουμε τελικά $N(E) = D_4$, $N(C_4, C_4^3) = \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}$, $N(C_4^2) =$

$D_4, N(m_x, m_y) = \{E, C_4^2, m_x, m_y\}, N(\sigma_x, \sigma_y) = \{E, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\}$. Επειδή, τώρα, κάθε κανονικοποιητής έχει τη δομή ομάδας, εμείς μπορούμε να βρούμε τις αναπαραστάσεις τους. Επιπλέον οι υποομάδες $N(E) = N(C_4^2) = D_4$, οπότε εμείς θα υπολογίσουμε τις αναπαραστάσεις μόνο για τις $N(C_4, C_4^3), N(m_x, m_y)$ και $N(\sigma_x, \sigma_y)$. Αρχικά, υπολογίζουμε τις κλάσεις των υποομάδων. Εύκολα βλέπουμε ότι οι υποομάδες είναι αβελιανές και έχουν από τέσσερις κλάσεις κάθε μία, άρα και τέσσερις αναπαραστάσεις που αναγκαστικά θα είναι μονοδιάστατες. Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε τους χαρακτήρες κάθε υποομάδας, εφόσον οι μονοδιάστατες αναπαραστάσεις ταυτίζονται με τους χαρακτήρες τους. Ως εκ τούτου, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που κάναμε και για τους χαρακτήρες της D_4 νωρίτερα, οπότε τελικά για τους τρεις κανονικοποιητές έχουμε τις παρακάτω αναπαραστάσεις

	$\{E\}$	$\{C_4\}$	$\{C_4^2\}$	$\{C_4^3\}$
C^1	1	1	1	1
C^2	1	-1	1	-1
C^3	1	-i	-1	i
C^4	1	i	-1	-i

	$\{E\}$	$\{C_4^2\}$	$\{m_x\}$	$\{m_y\}$
M^1	1	1	1	1
M^2	1	-1	1	-1
M^3	1	-1	-1	1
M^4	1	1	-1	-1

	$\{E\}$	$\{C_4^2\}$	$\{\sigma_x\}$	$\{\sigma_y\}$
Σ^1	1	1	1	1
Σ^2	1	-1	1	-1
Σ^3	1	-1	-1	1
Σ^4	1	1	-1	-1

Στο μοντέλο μας, λοιπόν, ένα ανιόνιο μπορεί να έχει δύο δείκτες που ο ένας συσχετίζεται με τη μαγνητική ροή και ο άλλος με το φορτίο. Σε μαθηματική μορφή, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το δείκτη της μαγνητικής ροής με μια κλάση συζυγίας x μιας δεδομένης ομάδας και το δείκτη του φορτίου με μια ανάγωγη αναπαράσταση $R^{(x)}$ του κανονικοποιητή $N(x)$. Εδώ, λοιπόν, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις κλάσεις με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις των κανονικών τους υποομάδων όπως φαίνεται παρακάτω. Στις κλάσεις $\{E\}$ και $\{C_4^2\}$ αντιστοιχούν οι πέντε αναπαραστάσεις της D_4 , στην κλάση $\{C_4, C_4^3\}$ οι τέσσερις αναπαραστάσεις της $N(C_4, C_4^3)$, στην κλάση $\{m_x, m_y\}$ οι τέσσερις αναπαραστάσεις της $N(m_x, m_y)$ και στην κλάση $\{\sigma_x, \sigma_y\}$ οι τέσσερις αναπαραστάσεις της $N(\sigma_x, \sigma_y)$.

Τύπος	Ροή	Φορτίο
<i>A</i>	{E}	Γ^1
<i>B</i>	{E}	Γ^2
<i>C</i>	{E}	Γ^3
<i>D</i>	{E}	Γ^4
<i>E</i>	{E}	Γ^5
<i>F</i>	$\{C_4, C_4^3\}$	C^1
<i>G</i>	$\{C_4, C_4^3\}$	C^2
<i>H</i>	$\{C_4, C_4^3\}$	C^3
<i>I</i>	$\{C_4, C_4^3\}$	C^4
<i>J</i>	$\{C_4^2\}$	Γ^1
<i>K</i>	$\{C_4^2\}$	Γ^2
<i>L</i>	$\{C_4^2\}$	Γ^3
<i>M</i>	$\{C_4^2\}$	Γ^4
<i>N</i>	$\{C_4^2\}$	Γ^5
<i>O</i>	$\{m_x, m_y\}$	M^1
<i>P</i>	$\{m_x, m_y\}$	M^2
<i>Q</i>	$\{m_x, m_y\}$	M^3
<i>R</i>	$\{m_x, m_y\}$	M^4
<i>S</i>	$\{\sigma_x, \sigma_y\}$	Σ^1
<i>T</i>	$\{\sigma_x, \sigma_y\}$	Σ^2
<i>U</i>	$\{\sigma_x, \sigma_y\}$	Σ^3
<i>V</i>	$\{\sigma_x, \sigma_y\}$	Σ^4

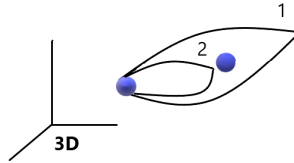
Τον παραπάνω πίνακα τον ονομάζουμε **κβαντική διπλέτα** (quantum double) και για την ομάδα του τετραγώνου συμβολίζεται ως $D(D_4)$. Όπως βλέπουμε, λοιπόν, υπάρχουν συνολικά 22 συνδυασμοί ροών και φορτίων για την ομάδα του τετραγώνου. Έχοντας, λοιπόν, αντιστοιχίσει τα φορτία σε αναπαραστάσεις των κανονικών υποομάδων, προκύπτει τελικά ότι οι κανόνες σύντηξης (για τους οποίους θα μιλήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια) είναι στην πραγματικότητα αποσύνθεση του γινομένου αυτών των αναπαραστάσεων⁴.

⁴Εν συντομία, αναφέρουμε εδώ ότι οι κανόνες σύντηξης μας δίνουν τα πιθανά αποτελέσματα από τη σύντηξη δύο ανιόντων. Αυτό σε μαθηματική μορφή συμβολίζεται με την αποσύνθεση γινομένου αναπαραστάσεων.

3 Ανιόνια ως qubits

3.1 Εισαγωγή στα ανιόνια

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μεγάλο ενδιαφέρον στον τομέα των κβαντικών υπολογιστών, με αποτέλεσμα να έχουμε πλέον ορισμένα πρωτότυπα αυτών των συσκευών. Τα πρωτότυπα αυτά δεν προορίζονται τόσο για καθαρά υπολογιστική χρήση, όσο για εξοικίωση του κοινού με τον προγραμματισμό τέτοιων συσκευών και για περαιτέρω έρευνα στην ανάπτυξή τους. Τα qubits που χρησιμοποιούνται στην πληροφορική τους σε αυτές τις συσκευές είναι άτομα, ιόντα, φωτόνια ή ακόμα και ηλεκτρόνια. Ωστόσο, η βασική δυσκολία στην ανάπτυξη της τεχνολογίας αυτής με χρήση των παραπάνω qubits είναι μία: το decoherence. Με τον όρο decoherence αναφερόμαστε στη διαδικασία κατά την οποία καταστρέφεται η κατάσταση της υπέρθεσης, επειδή το qubit (ιόν, φωτόνιο κ.ο.κ.) έρχεται σε επαφή με το περιβάλλον. Το χρονικό διάστημα που παίρνει σε ένα σύστημα να έρθει σε decoherence ονομάζεται **χρόνος αποσυμφωνίας** (decoherence time) και η διαδικασία αυτή διαρκεί συνήθως από μερικά 10^{-9} s έως κάποια s^5 . Γενικά το decoherence είναι αναπόφευκτο να συμβεί αργά ή γρήγορα στο σύστημα (πράγμα λογικό, αφού είναι αδύνατο να απομονώσουμε για πάντα ένα σύστημα από το περιβάλλον του) και γίνεται μεγάλη προσπάθεια ώστε να παραταθεί όσο γίνεται περισσότερο ο χρόνος αποσυμφωνίας του συστήματος. Λύση σε αυτό το πρόβλημα έρχεται να δώσει μια νέα κατηγορία σωματιδίων, τα ανιόνια.



Σχήμα 11: Στον τρισδιάστατο χώρο μπορούμε χωρίς πρόβλημα να κάνουμε τη διδαδρομή 1 να συμπέσει με τη 2, περνώντας την πάνω ή κάτω από το δεξί σωματίδιο.

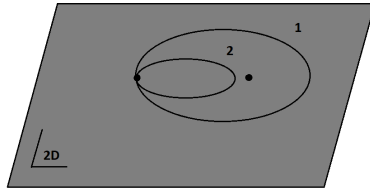
Στη φυσική είμαστε γενικά εξοικειωμένοι με δύο κατηγορίες σωματιδίων, τα μποζόνια και τα φερμιόνια. Ο τρόπος διαχωρισμού τους είναι ως προς τη συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησής τους σε μια ανταλλαγή θέσεων δύο μποζονίων, ή φερμιονίων αντίστοιχα. Όταν εναλλάσσονται δύο μποζόνια, η από κοινού τους κυματοσυνάρτηση πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα $+1$, ενώ όταν εναλλάσσονται δύο φερμιόνια, -1 . Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι όταν περιστρέψουμε δύο σωματίδια στον τρισδιάστατο χώρο και τα επαναφέρουμε στις αρχικές τους θέσεις, για τις κυματοσυναρτήσεις τους θα ισχύει

$$|\phi\psi\rangle = R^2 |\phi\psi\rangle$$

δηλαδή θα έχουμε $R = \pm 1$, όπου R ο τελεστής αντιστροφής. Ωστόσο, στο δισδιάστατο χώρο δεν είναι απαραίτητο το R^2 να ταυτίζεται με το μοναδιαίο τελεστή, με αποτέλεσμα

⁵Για να επιτευχθούν αυτές οι μεγάλες χρονικές κλίμακες, χρησιμοποιούνται, συνήθως, θερμοκρασίες της τάξης των 10^{-6} K.

το R να μπορεί να είναι μια μιγαδική φάση, ή ακόμα και μοναδιαίος πίνακας. Στην πρώτη περίπτωση, τα ανιόνια λέγονται **αβελιανά** ενώ στη δεύτερη **μη αβελιανά**. Η πολύ σημαντική αυτή διαφορά οφείλεται στις διαφορετικές τοπολογικές ιδιότητες μεταξύ δισδιάστατου και τρισδιάστατου χώρου. Στον τρισδιάστατο χώρο, μας δίνονται οι διαδρομές 1 και 2 του αριστερού σωματιδίου. Μπορούμε πάντα να συμπίεσουμε τη διαδρομή 1 να ταυτιστεί με τη 2 και τελικά να τις συμπίεσουμε μέχρι να γίνουν σημειακές, κάτι που, όμως, δε μπορεί να γίνει στις δύο διαστάσεις (σχ. 11 και 12).



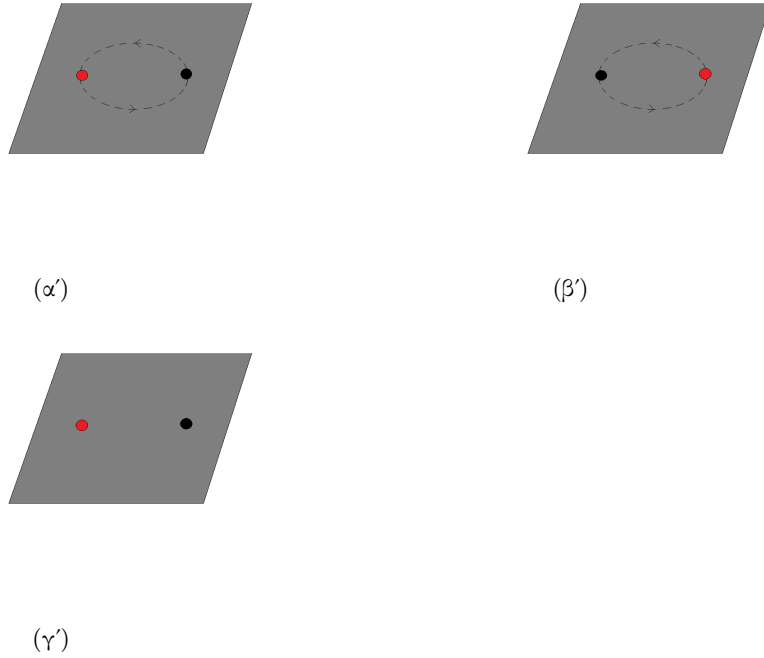
Σχήμα 12: Στον δισδιάστατο χώρο δε γίνεται να συμπέσουν οι διαδρομές 1 και 2, αφού δεν υφίσταται το πάνω και το κάτω.

Όσα αναφέραμε παραπάνω παίζουν σημαντικό ρόλο στο πως εξελίσσεται μια κατάσταση κατά την εναλλαγή των ανιόνων. Για να καταλάβουμε καλύτερα πως αναπαριστούμε αυτή την εξέλιξη, ας σκεφτούμε για λίγο πως μοιάζει η *κοσμική διαδρομή* που κάνει ένα ανιόνιο. Στο σχήμα 13 βλέπουμε τρία στιγμιότυπα από την περιστροφή δύο ανιόνων.

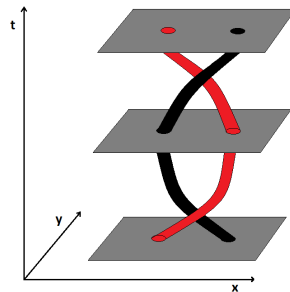
Στα δύο πρώτα στιγμιότυπα διακρίνεται με διακεκομμένη γραμμή η τροχιά που ακολουθούν κατά την περιστροφή τους τα σωματίδια πρώτου καταλήξουν στις αρχικές τους θέσεις. Αν τώρα υποθέσουμε πως η κοσμική διαδρομή κάθε ανιόνιου μοιάζει με «κλωστή», τότε τα τρία προϊδόμενα στιγμιότυπα μπορούν να συγχωνευτούν και να πάρουν τη μορφή του σχήματος 14.

Η χρονική εξέλιξη των σωματιδίων σε δύο διαστάσεις, λοιπόν, μοιάζει με κλωστές που περιπλέκονται. Στα μαθηματικά, η ομάδα που περιγράφει αυτή την εξέλιξη είναι η ομάδα των βρόγχων (braid group) και συμβολίζεται ως B_n , με n το σύνολο των κλωστών. Πράγματι, αποδυναμώνεται ότι κατά την εναλλαγή δύο ανιόνων, η μιγαδική φάση ή ο μοναδιαίος πίνακας που προσαρτίζεται στην από κοινού τους κυματοσυνάρτηση, δεν είναι παρά μια μονοδιάστατη αναπαράσταση ή, αντίστοιχα, αναπαράσταση με διάσταση μεγαλύτερης του 1 της ομάδας των βρόγχων ⁶. Ας δούμε, τώρα, ποιες είναι οι βασικές σχέσεις που διέπουν τους γεννήτορες αυτής της ομάδας. Θεωρούμε μια ομάδα με n κλωστές. Ορίζουμε σαν σ_{n-1} την αριστερόστροφη εναλλαγή των κλωστών στις θέσεις $n-1$ και n . Αντίστοιχα ορίζουμε σαν σ_{n-1}^{-1} τη δεξιόστροφη εναλλαγή των κλωστών. Παρόμοια ορίζονται και οι εναλλαγές για τις υπόλοιπες κλωστές. Οι τελεστές $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ είναι οι γεννήτορες της ομάδας. Σαν παράδειγμα, παίρνουμε τώρα την περίπτωση με $n = 4$. Δοκιμάζουμε αρχικά να εκτελέσουμε τις

⁶ Συγκριτικά, αξίζει να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση των μποζονίων και των φερμιονίων, η χρονική εξέλιξη ορίζεται από αναπαραστάσεις της ομάδας των μεταθέσεων (permutation group).



Σχήμα 13: Τρία στιγμιότυπα από την περιστροφή δύο ανιόντων.



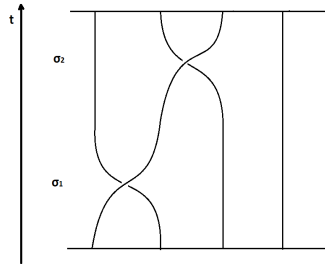
Σχήμα 14: Οι κοσμικές διαδρομές των ανιόντων κατά την περιστροφή τους.

εναλλαγές σ_1 και σ_2 . Παρατηρούμε ότι άλλο αποτέλεσμα έχουμε με τις εναλλαγές $\sigma_1\sigma_2$ και άλλο με τις $\sigma_2\sigma_1$, δηλαδή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τις δύο αυτές εναλλαγές (Σχήμα 15, (α') και (β')). Όμως οι εναλλαγές σ_1 και σ_3 δεν έχει καμία σημασία με ποια σειρά τις εκτελούμε, αφού παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα (Σχήμα 15, (γ')). Οδηγούμαστε, λοιπόν, στην πρώτη θεμελιώδη σχέση των γεννητόρων, σύμφωνα με την οποία ισχύει

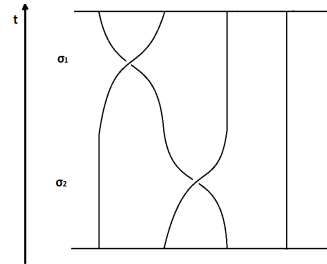
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i - j| \geq 2$$

δηλαδή η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει, αρκεί οι εναλλαγές να αναφέρονται σε διαφορετικά

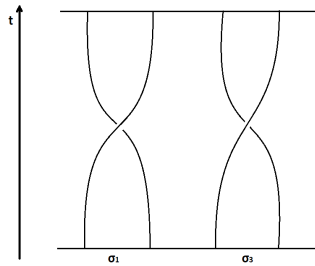
ζευγάρια κλωστών.



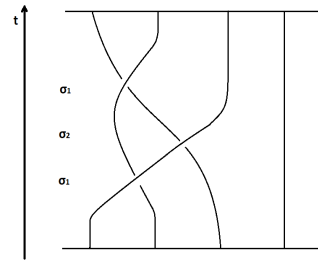
(α')



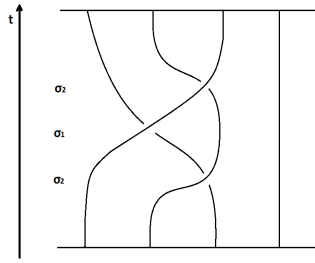
(β')



(γ')



(δ')



(ε')

Σχήμα 15: Στα σχήματα (α') και (β') βλέπουμε μια αναπαράσταση των εναλλαγών σ_1 και σ_2 με δύο διαφορετικές σειρές. Όπως βλέπουμε, οι τελεστές $\sigma_1\sigma_2$ και $\sigma_2\sigma_1$ έχουν διαφορετική δράση στο σύστημα. Αντίθετα, οι τελεστές $\sigma_1\sigma_3$ και $\sigma_3\sigma_1$ έχουν την ίδια δράση και περιγράφονται από το ίδιο σχήμα (γ'), αφού τα σ_1 και σ_3 πλέκουν δύο διαφορετικά ζευγάρια κλωστών. Όμοια, στα σχήματα (δ') και (ε') βλέπουμε πως η δράση των $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ και $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ στην ουσία ταυτίζεται.

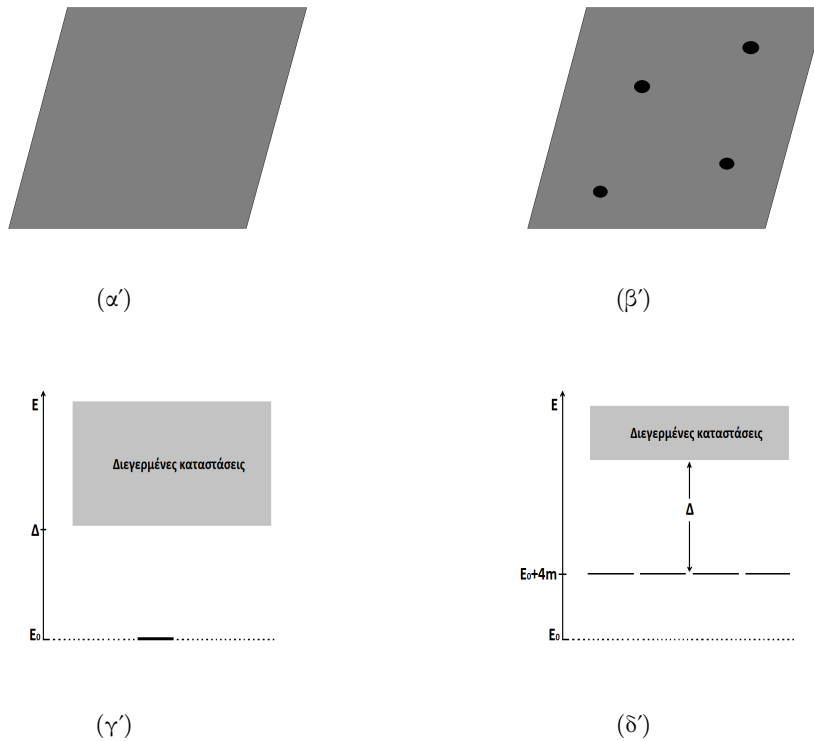
Η δεύτερη σχέση, γνωστή και ως σχέση Yang-Baxter, μας λέει ότι για δύο διαδοχικές εναλλαγές σ_j και σ_{j+1} ισχύει η σχέση

$$\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n - 2$$

την οποία μπορούμε να την επιβεβαιώσουμε χρησιμοποιώντας ξανά τις εναλλαγές σ_1 και σ_2 . Πράγματι, κάνοντας τους μετασχηματισμούς $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ και $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, όπου οι κλωστές που ξεκίνησαν από τις θέσεις 1 και 3 αλλάζουν θέση καθώς περιστρέφονται αριστερόστροφα γύρω από τη δεύτερη κλωστή (Σχήμα 15, (δ') και (ε')).

3.2 Συνθήκες ύπαρξης ανιόντων

Όπως θα δούμε παρακάτω, με χρήση των προϊδόμενων εναλλαγών μπορούμε να προσομοιώσουμε τις χβαντικές πύλες των ανιόντων οι οποίες επιδεικνύουν αξιοσημείωτη αντίσταση στο decoherence.



Σχήμα 16: Στην εικόνα (α') θεωρούμε ένα σύστημα σε μια επιφάνεια χωρίς παρουσία ανιόντων. Η θεμελιώδης στάθμη του συστήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα (γ'), είναι μοναδική και απέχει από τις διεγερμένες κατά ένα ενεργειακό χάσμα Δ .

Ας δούμε τώρα που μπορούν να εντοπισθούν ανιόνια και υπό ποιες συνθήκες. Γενικά, όλα τα υλικά που μπορούν να εμφανίσουν ανιόνια είναι μονωτές. Χαρακτηριστικό των μο-

νωτών είναι ότι η θεμελιώδης τους στάθμη απέχει από τις διεγερμένες κατά ένα ενεργειακό χάσμα Δ . Για ένα τοπολογικό σύστημα που βρίσκεται σε μια επιφάνεια χωρίς όρια, όπως μια σφαίρα, η θεμελιώδης στάθμη είναι μοναδική. Αν στο σύστημά μας εμφανιστούν αβελιανά ανιόνια, η θεμελιώδης στάθμη παραμένει μοναδική. Όταν, όμως, εμφανιστούν μη αβελιανά ανιόνια στο σύστημα, η θεμελιώδης στάθμη εκφυλίζεται, με βαθμό εκφυλισμού που εξαρτάται από το είδος των ανιόνιων (σχ. 16). Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα σύστημα μη αβελιανών ανιόνιων και ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε μια εναλλαγή δύο εξ αυτών. Για να γίνει ένας χβαντικός μετασχηματισμός που θα παραμένει σε κατάσταση υπέρθεσης, θέλουμε το σύστημά μας να παραμένει στη θεμελιώδη στάθμη, όπου θα απέχει από τις διεγερμένες κατά το ενεργειακό χάσμα Δ και είναι πιο δύσκολο να προσλάβει εξωτερική ενέργεια. Πράγματι, καθώς εναλλάσσουμε τις θέσεις των ανιόνιων, το σύστημά μας αλλάζει κατάσταση αλλά παραμένει στη θεμελιώδη στάθμη (σχ. 17). Υποθέτουμε, τώρα, ότι λόγω εξωτερικών θορύβων η εναλλαγή των ανιόνιων μπορεί να ακολουθήσει σχετικά διαφορετική τροχιά από την αρχική. Σημαίνει αυτό ότι έχει πραγματοποιηθεί διαφορετική διεργασία; Η απάντηση είναι όχι, καθώς για το σύστημα των ανιόνιων, το μόνο που έχει σημασία είναι το ποιά σωματίδια εναλλάχθηκαν. Το συμπέρασμα αυτό είναι εντυπωσιακό. Εφόσον η διεργασία δεν αλλάζει λόγω (μικρών) εξωτερικών θορύβων ή (μερικής) αδυναμίας ελέγχου του συστήματος, η χβαντική πύλη που δημιουργείται από τις εναλλαγές των ανιόνιων προστατεύεται ισχυρά από το decoherence. Σημαντικό είναι, όμως, η διαδικασία της εναλλαγής να γίνεται *αδιαβατικά*, δηλαδή αργά σε σχέση με το χάσμα Δ .

Από τα παραπάνω γίνεται αμέσως κατανοητή η χρησιμότητα των μη αβελιανών ανιόνιων. Χάρη στο ενεργειακό χάσμα των μονωτών και στην αποθήκευση της πληροφορίας μη τοπικά, τα σωματίδια αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ιδανικά qubits. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το είδος των διεργασιών που πραγματοποιούνται μεταξύ αυτών των σωματιδίων.

3.3 Μοντέλο ανιόνιων

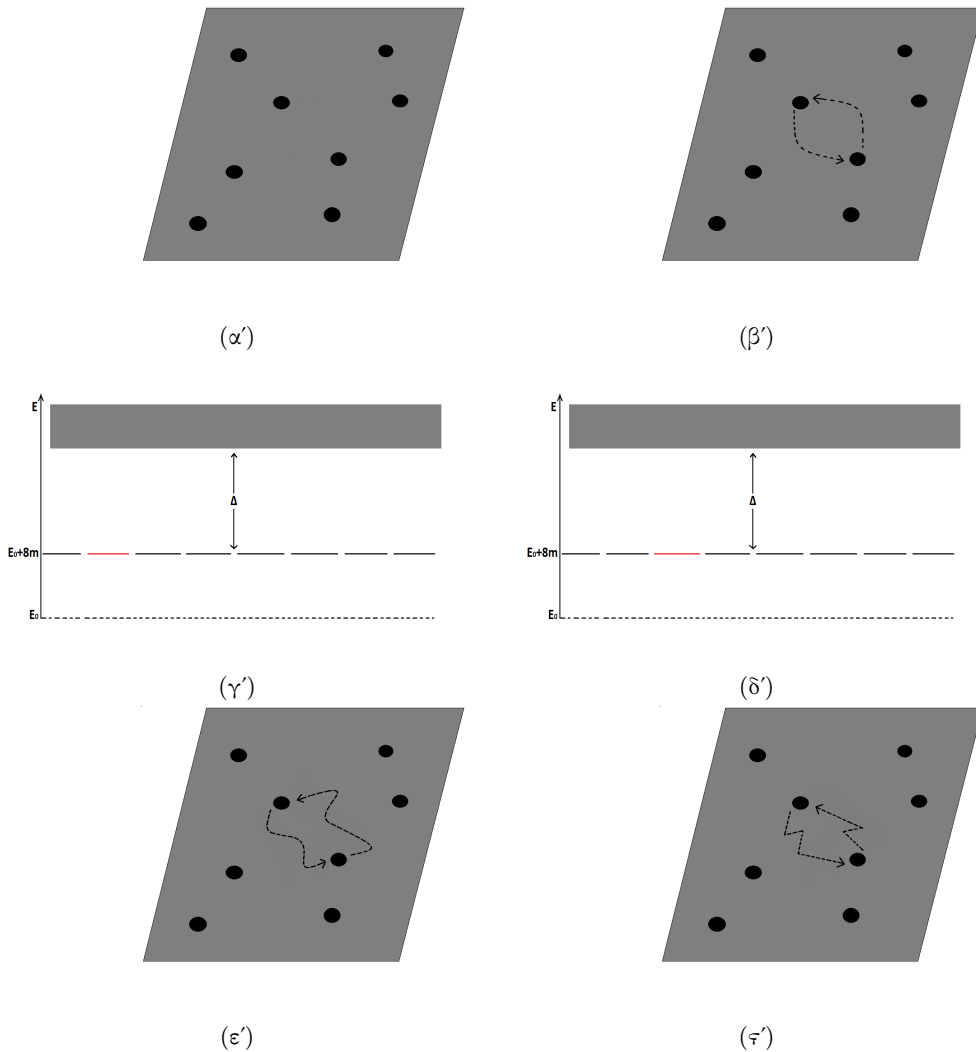
Γενικά, τα στάδια ενός χβαντικού υπολογισμού είναι η αρχικοποίηση των qubits, ο χβαντικός μετασχηματισμός (η επίδραση, δηλαδή, των χβαντικών πυλών στα qubits) και τέλος η μέτρησή τους. Ας δούμε πως μπορούμε να πραγματοποιήσουμε αυτά τα στάδια χρησιμοποιώντας ανιόνια. Σε ένα μοντέλο ανιόνιων μπορούμε να τελέσουμε τις εξής τρεις «πράξεις»:

- Τα ανιόνια δημιουργούνται και καταστρέφονται σε ζεύγη.
- Τα ανιόνια εναλλάσσονται αδιαβατικά.
- Τα ανιόνια μπορούν να ενωθούν για να δημιουργήσουν άλλους τύπους ανιόνιων.

Για να ορίσουμε ένα μοντέλο ανιόνιων χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε πόσα διαφορετικά ανιόνια θα υπάρχουν. Θα θεωρήσουμε ότι σε κάθε διαφορετικό ανιόνιο αντιστοιχεί και ένα διαφορετικό φορτίο. Επιπλέον, για να είναι πλήρες το μοντέλο μας πρέπει να συνυπολογίσουμε και το μηδενικό φορτίο -την κατάσταση του κενού. Οπότε το σύνολο των φορτίων θα είναι

$$M = \{1, a, b, c, \dots\}$$

όπου με 1 συμβολίζουμε το μηδενικό φορτίο. Τα φορτία αυτά θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιους νόμους διατήρησης που στην περίπτωση των ανιόνιων λέγονται **κανόνες σύντη-**



Σχήμα 17: Αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε μια από τις εκφυλισμένες θεμελιώδεις ενεργειακές στάθμες (εικόνες (α') και (γ')). Η εναλλαγή δύο ανιόντων (εικόνες (β') και (δ')) μεταβαίνει το σύστημα σε μια άλλη θεμελιώδη στάθμη. Με κόκκινο χρώμα φαίνεται η στάθμη που είναι κάθε φορά κατειλημμένη. Επιπλέον, στις δύο τελευταίες εικόνες βλέπουμε τα ανίοντα να ακολουθούν διαφορετική πορεία καθώς εναλλάσσονται. Ωστόσο, για την πραγματοποίηση της κβαντικής πύλης, οι δύο αυτές τροχιές είναι ισοδύναμες εφόσον οι αρχικές και τελικές θέσεις είναι σταθερές και εφόσον οι εναλλαγές γίνονται κατά την ίδια φορά.

Ξης (fusion rules). Σε μαθηματική μορφή οι κανόνες αυτοί γράφονται ως

$$a \times b = \sum_{c \in M} N_{ab}^c c$$

όπου οι παράγοντες N_{ab}^c είναι ακέραιοι που περιγράφουν τα πιθανά φορτία που μπορεί να έχει το συσσωμάτωμα των a και b . Εδώ πρέπει να τονίσουμε πως ο όρος «σύντηξη» δεν θα πρέπει να ληφθεί κυριολεκτικά, καθώς δεν λαμβάνουν χώρα αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ανιόντων. Κυρίως αναφερόμαστε στο σύστημα των ανιόντων που συμμετέχουν στη σύντηξη. Σε έναν τοπολογικό κβαντικό υπολογιστή, όπως θα δούμε, η πράξη της σύντηξης ισοδυναμεί με μέτρηση στο σύστημα. Κατά τη σύντηξη, υπάρχει κάποια πιθανότητα να εμφανιστεί κάποιο από τα ανιόνια του μοντέλου μας. Για να βρούμε αυτή την πιθανότητα, πρέπει να μιλήσουμε για την έννοια της *κβαντικής διάστασης* (quantum dimension). Σαν κβαντική διάσταση ορίζουμε τη διάσταση του χώρου Hilbert που αντιστοιχεί σε κάθε ανιόνιο. Βάση των κανόνων σύντηξης, η κβαντική διάσταση των ανιόντων υπολογίζεται από τη σχέση

$$d_a d_b = \sum_c N_{ab}^c d_c$$

όπου d_a, d_b και d_c είναι οι κβαντικές διαστάσεις των ανιόντων a, b και c , αντίστοιχα. Η κβαντική διάσταση των αβελιανών ανιόντων και του κενού είναι πάντα $d_i = 1$, ενώ τα μη αβελιανά ανιόνια έχουν πάντα $d_i > 1$. Επιπλέον, ορίζουμε την ολική κβαντική διάσταση $D = \sqrt{\sum_i d_i^2}$. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η κβαντική διάσταση δεν είναι απαραίτητα ακέραιος αριθμός, όπως θα δούμε παρακάτω (στην επόμενη ενότητα θα υπολογίσουμε την κβαντική διάσταση και την πιθανότητα εμφάνισης κάθε ανιονίου για την περίπτωση των ανιόντων Fibonacci). Όσον αφορά τους παράγοντες N_{ab}^c , αυτοί μπορούν να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός ακέραιος, αλλά για τα περισσότερα φυσικά μοντέλα ισχύει $N_{ab}^c = 0, 1$. Για $N_{ab}^c = 0$ συνεπάγεται ότι το c δεν μπορεί να προκύψει από τα a και b και για $N_{ab}^c = 1$ το c προκύπτει με ένα και μοναδικό τρόπο. Στην περίπτωση που $N_{ab}^c \geq 2$, το c προκύπτει με παραπάνω από έναν τρόπους. Επιπλέον, αν για κάθε $a, b \in M$ υπάρχει μόνο ένας ακέραιος μη μηδενικός N_{ab}^c , τότε το αποτέλεσμα της σύντηξης είναι μοναδικό και τα ανιόνια είναι αβελιανά. Αν όμως για κάποια ανιόνια a και b υπάρχουν περισσότεροι από ένας παράγοντες $N_{ab}^c \neq 0$, τότε τα ανιόνια είναι μη αβελιανά. Για τα μη αβελιανά ανιόνια, λοιπόν, μπορούμε να ορίσουμε το χώρο που γεννιέται από όλα τα διανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικά κανάλια σύντηξης δύο συγγεκριμένων ανιόντων. Για παράδειγμα, αν δύο ανιόνια a και b μπορούν να δώσουν παραπάνω από ένα $c \in M$, τότε μπορούμε να ορίσουμε ορθοκανονικά διανύσματα $|ab; c\rangle$ για τα οποία ισχύουν

$$\langle ab; c | ab; d \rangle = \delta_{cd}$$

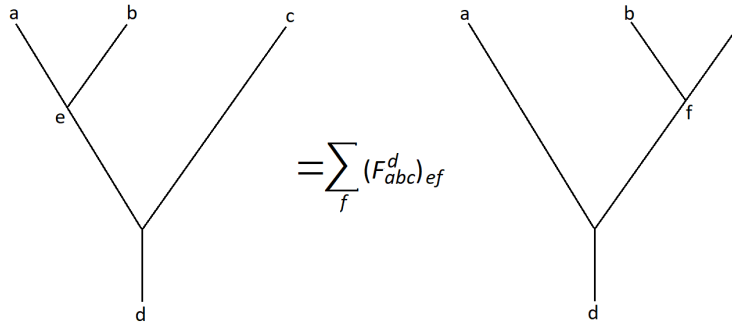
Ονομάζουμε το χώρο που δημιουργείται από τα διανύσματα της σύντηξης των a και b , ως *χώρο σύντηξης* (fusion space). Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τα διαφορετικά κανάλια σύντηξης των μη αβελιανών ανιόντων, έχουμε τη δυνατότητα να κωδικοποιήσουμε την πληροφορία μη τοπικά, δηλαδή στο σύστημα των ανιόντων, και με αυτό τον τρόπο η πληροφορία προστατεύεται από μικρές διαταραχές. Ωστόσο, δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας το χώρο σύντηξης δύο ανιόντων για να κωδικοποιήσουμε ένα qubit, καθώς δύο διανύσματα $|ab; c\rangle$ και $|ab; d\rangle$ αντιστοιχούν σε διαφορετικά φορτία και δεν γίνεται να υπάρξει υπέρθεση καταστάσεων διαφορετικών φορτίων. Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παραπάνω από δύο ανιόνια, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Έχοντας θεωρήσει, τώρα, ως βάση του χώρου τα διανύσματα των διαφορετικών καναλιών σύντηξης, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να κάνουμε μεταβάσεις σε άλλες βάσεις. Αυτό ισοδυναμεί με το να μεταβαίνουμε σε διανύσματα σύντηξης διαφορετικών ανιόντων. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε τους *πίνακες σύντηξης* F (fusion matrices). Για να κατανοήσουμε τη δράση των F πινάκων, θεωρούμε ένα σύστημα τριών ανιόντων a, b και c

των οποίων η ολική σύντηξη μας δίνει ένα d ανιόνιο. Η σύντηξη των σωματιδίων μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: είτε να συντηχθούν πρώτα τα a και b και να δώσουν ένα ενδιάμεσο ανιόνιο e , είτε να συντηχθούν τα b και c για να δώσουν ένα ανιόνιο f . Οι αντίστοιχες καταστάσεις των δύο παραπάνω συνθέσεων είναι οι $|(ab)c; ec; d\rangle$ και $|a(bc); af; d\rangle$ και συνδέονται μέσω της σχέσης

$$|(ab)c; ec; d\rangle = \sum_f (F_{abc}^d)_{ef} |a(bc); af; d\rangle \quad (2)$$

όπου με $(F_{abc}^d)_{ef}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία του πίνακα F_{abc}^d και με f συμβολίζουμε όλες τις καταστάσεις (δηλαδή όλα τα διαφορετικά ανιόνια που προκύπτουν από τη σύντηξη) πάνω στις οποίες γίνεται η άθροιση. Γενικά, όπως φαίνεται και από την παραπάνω σχέση, μια κατάσταση σε μια βάση θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων μιας άλλης βάσης. Μπορούμε να δούμε και σχηματικά τη δράση του πίνακα F στο σχήμα 18 (η χρονική εξέλιξη στα διαγράμματα που ακολουθούν γίνεται από πάνω προς τα κάτω).



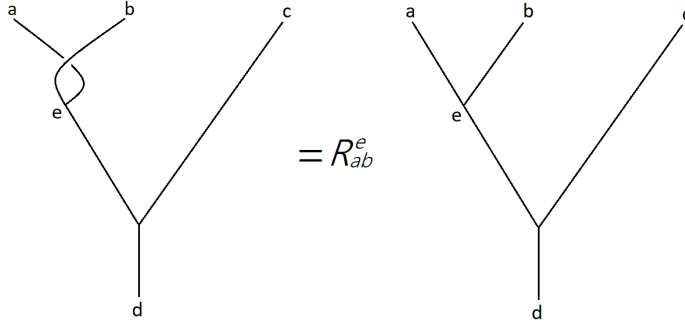
Σχήμα 18: Η δράση του πίνακα F στα διαγράμματα σύντηξης.

Νωρίτερα αναφέραμε ότι για την κατασκευή των κβαντικών πυλών χρειάζεται να εφαρμόσουμε εναλλαγές στο σύστημα των ανιόνιων. Τώρα θα δούμε πως ακριβώς ορίζονται οι εναλλαγές αυτές. Καταρχάς, όταν μετακινούμε ανιόνια κατά μήκος διαδρομής που δεν εμπεριέχει άλλα ανιόνια, δεν πραγματοποιείται καμία εξέλιξη στο σύστημα, οπότε για να υπάρξει εξέλιξη πρέπει η διαδρομή που θα επιλέξουμε να περιέχει διαδρομές άλλων ανιόνιων - οι γνωστές εναλλαγές. Στην περίπτωση των αβελιανών ανιόνιων, η εναλλαγή έχει σαν αποτέλεσμα την προσάρτηση μιας φάσης στην κυματοσυνάρτησή τους. Η φάση αυτή εξαρτάται από το είδος των ανιόνιων που εναλλάσσονται και από τη φορά της εναλλαγής (αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα) και είναι της μορφής $R_{ab} = e^{i\theta_{ab}}$, με $\theta_{ab} \in [0, 2\pi]$. Κατά την εναλλαγή δύο μη αβελιανών ανιόνιων, όμως, η φάση δεν εξαρτάται μόνο από το είδος των ανιόνιων, αλλά και από το κανάλι σύντηξης, οπότε έχουμε $R_{ab}^c = e^{i\theta_{ab}^c}$. Ως εκ τούτου, σε ένα σύστημα μη αβελιανών ανιόνιων, η πράξη της εναλλαγής προσδίδει διαφορετικές φάσεις σε διαφορετικά κανάλια σύντηξης. Για παράδειγμα, ας πάρουμε την προϊγούμενη περίπτωση με τη σύντηξη των a, b και c . Θεωρούμε τις καταστάσεις χωρίς εναλλαγή και με (αριστερόστροφη) εναλλαγή αντίστοιχα ως $|(ab)c; ec; d\rangle$ και $|(ba)c; ec; d\rangle$. Τότε οι καταστάσεις αυτές συνδέονται

μέσω της σχέσης

$$|(ba)c; ec; d\rangle = \sum_f R_{ab}^f \delta_{e,f} |(ab)c; ec; d\rangle \quad (3)$$

Όπως βλέπουμε, οι δύο καταστάσεις συνδέονται μέσω ενός μοναδιαίου διαγώνιου πίνακα R , με διαγώνιες τιμές R_{ab}^f . Για δεξιόστροφη εναλλαγή εφαρμόζουμε τον πίνακα R^\dagger . Μπορούμε να δούμε και σχηματικά τη δράση του πίνακα R στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 19: Η δράση του τελεστή R στα διαγράμματα σύντηξης.

Συχνά, ωστόσο, θέλουμε να κάνουμε σύντηξη σε ανιόνια που δεν ήταν αρχικά στο ίδιο κανάλι σύντηξης. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε σύντηξη στα a και c . Για να το πετύχουμε, εφαρμόζουμε αρχικά τον πίνακα F για να πάμε στη βάση που κάνουν αρχικά σύντηξη τα b και c , στη συνέχεια τα εναλλάσσουμε χρησιμοποιώντας τον πίνακα R και τελικά επιστρέφουμε στην αρχική βάση σύντηξης εφαρμόζοντας τον πίνακα F^{-1} . Πιο αναλυτικά, η δράση των πινάκων μπορεί να φανεί και ως εξής:

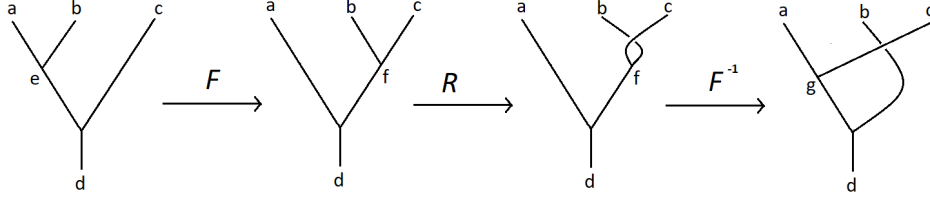
$$|a(bc); af; d\rangle = F_{abc}^d |(ab)c; ec; d\rangle \Rightarrow$$

$$|a(cb); af; d\rangle = RF_{abc}^d |(ab)c; ec; d\rangle \Rightarrow$$

$$|(ac)b; gb; d\rangle = (F_{abc}^d)^{-1} RF_{abc}^d |(ab)c; ec; d\rangle$$

Τον πίνακα που μας πάει από τη σύντηξη των a και b στη σύντηξη των a και c θα τον ονομάσουμε πίνακα B και θα έχει τη μορφή $B = F^{-1}RF$. Η παραπάνω περίπτωση για τα a και c γενικεύεται εύκολα για οποιαδήποτε άλλα ανιόνια, οπότε γίνεται κατανοητό ότι η εξέλιξη ενός συστήματος (άρα και κάθε κβαντική πύλη που εφαρμόζεται) μπορεί να οριστεί πλήρως από τους πίνακες F και R .

Ωστόσο, οι πίνακες αυτοί δεν μπορούν να έχουν μια οποιαδήποτε μορφή. Για να είναι συμβατοί με ένα μοντέλο ανιονίων πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες. Οι συνθήκες



Σχήμα 20: Αναπαράσταση της δράσης του πίνακα $B = F^{-1}RF$.

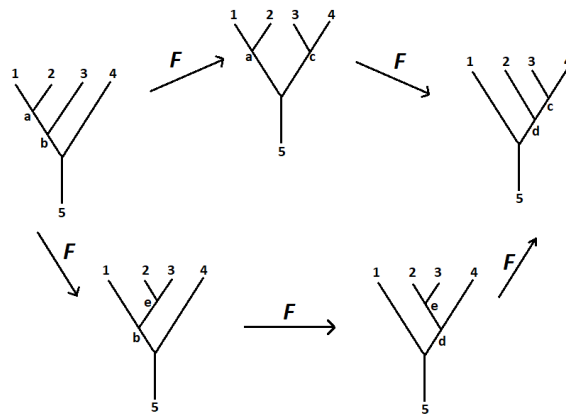
αυτές είναι γνωστές ως **εξίσωση πενταγώνου** και **εξίσωση εξαγώνου** (pentagon and hexagon equations) και το όνομά τους οφείλεται στα σχήματα που κάνουν τα διαγράμματα σύντηξης των ανιόντων. Θεωρούμε αρχικά τέσσερα ανιόνια 1, 2, 3 και 4 με προϊόν ολικής σύντηξης το ανιόνιο 5. Στα διαγράμματα του σχήματος 21 φαίνονται οι πιθανοί τρόποι σύντηξης χωρίς καμία εναλλαγή, οι οποίοι είναι πέντε. Ξεκινώντας από το αριστερό διάγραμμα, προχωράμε προς τα δεξιά εφαρμόζοντας κάθε φορά ένα στοιχείο του πίνακα F . Συγκεκριμένα, δοκιμάζοντας αρχικά την πάνω «διαδρομή» (όπου μεσολαβεί μόνο ένα διάγραμμα μεταξύ του αρχικού και τελικού διαγράμματος), οι πράξεις που τελούνται είναι οι $(F_{a34}^5)_b^c$ και $(F_{12c}^5)_a^d$. Αν δοκιμάσουμε την κάτω διαδρομή, οι πράξεις που κάνουμε είναι οι $(F_{123}^b)_a^e$, $(F_{1e4}^5)_b^d$ και $(F_{234}^d)_e^c$. Επειδή, τώρα, τα διαγράμματα από τα οποία ξεκινάμε και καταλήγουμε οι δύο αυτές διαδρομές ταυτίζονται, πρέπει αναγκαστικά να ταυτίζονται και οι πράξεις κατά μήκος των διαδρομών, οπότε προκύπτει η εξίσωση πενταγώνου

$$(F_{12c}^5)_a^d (F_{a34}^5)_b^c = \sum_e (F_{234}^d)_e^c (F_{1e4}^5)_b^d (F_{123}^b)_a^e \quad (4)$$

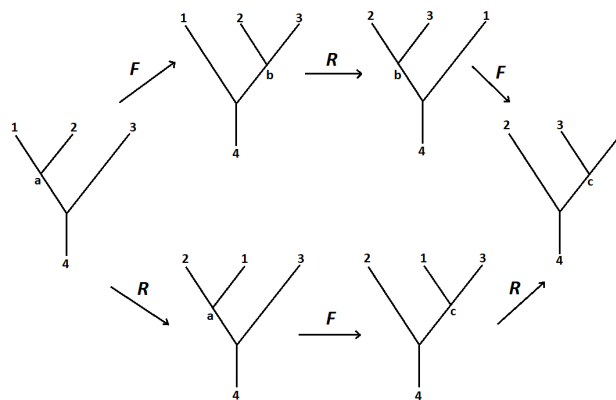
όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλα τα πιθανά προϊόντα σύντηξης e . Από την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα F . Στη συνέχεια, για να βρούμε τον πίνακα R , θα υπολογίσουμε τα πιθανά διαγράμματα σύντηξης τριών ανιόντων. Εδώ δεν θα χρησιμοποιήσουμε μόνο πράξεις σύντηξης, αλλά και εναλλαγής. Ξεκινάμε και πάλι από το αριστερό διάγραμμα. Διατρέχοντας την πάνω διαδρομή, οι πράξεις που κάνουμε είναι διαδοχικά οι $(F_{123}^4)_a^b$, R_{1b}^4 και $(F_{231}^4)_b^c$. Αντίστοιχα για την κάτω διαδρομή, έχουμε R_{12}^a , $(F_{213}^4)_a^c$ και R_{13}^c . Εξισώνοντας τις πράξεις για τις δύο διαδρομές και γνωρίζοντας πλέον τα στοιχεία του πίνακα F , παίρνουμε τελικά την εξίσωση εξαγώνου

$$R_{13}^c (F_{213}^4)_a^c R_{12}^a = \sum_b (F_{231}^4)_b^c R_{1b}^4 (F_{123}^4)_a^b \quad (5)$$

όπου και πάλι η άθροιση γίνεται πάνω στα ενδιάμεσα προϊόντα σύντηξης b . Τα διαγράμματα εξαγώνου φαίνονται στο σχήμα 22.



Σχήμα 21: Διαγράμματα πενταγώνου.



Σχήμα 22: Διαγράμματα εξαγώνου.

Στο μοντέλο των ανιονίων είναι σημαντικό, επίσης, να ορίσουμε τα είδη των ανιονίων. Οι κατηγορίες που θα συναντήσουμε, εμφανίζονται σε κάποια υλικά που λέγονται *μη αβελιανοί υπεραγωγοί* και είναι δύο: αυτά που περιέχουν μόνο *μαγνητική ροή* και ονομάζονται **fluxons** και αυτά που έχουν μόνο *φορτίο* και ονομάζονται **chargeons**⁷. Κατά την περιστροφή, λοιπόν, ενός chargeon γύρω από ένα fluxon μπορούμε να ερμηνεύσουμε την προσάρτηση φάσης στην κοινή τους κυματοσυνάρτηση σαν εμφάνιση τους φαινομένου Aharonov-Bohm, τη φάση, δηλαδή, που εμφανίζεται σε ένα φορτίο όταν διατρέχει μια κλειστή διαδρομή γύρω από ένα σωληνωειδές με μαγνητική ροή στο εσωτερικό του.

⁷Οι ονομασίες fluxons και chargeons προέρχονται από τις λέξεις flux και charge αντίστοιχα. Εννοείται πως οι τιμές της μαγνητικής ροής και του φορτίου κάθε ανιονίου είναι κβαντισμένες.

3.4 Ανιόνια Fibonacci

Θα μελετήσουμε τώρα μια συγκεκριμένη κατηγορία μη αβελιανών ανιονίων, τα ανιόνια Fibonacci. Αν και μέχρι τώρα η ύπαρξή τους δεν έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά, συνεχίζεται η έρευνα για τον εντοπισμό τους, καθώς τα ανιόνια αυτά αποδυναμώνεται ότι μπορούν να παράγουν οποιαδήποτε κβαντική πύλη. Όσον αφορά τους κανόνες σύντηξής τους, τα ανιόνια Fibonacci είναι τα πλέον απλά μη αβελιανά ανιόνια. Τα μόνα φορτία στο μοντέλο των ανιονίων αυτών είναι το μηδενικό φορτίο 1 και το ανιόνιο τ και ο κανόνας που ικανοποιούν είναι ο

$$\tau \times \tau = 1 + \tau \quad (6)$$

από όπου βλέπουμε ότι το ανιόνιο τ είναι το ίδιο το αντισωματίδιό του και επιπλέον η σύντηξη δύο τ μπορεί να συμπεριφέρεται και ως μεμονωμένο ανιόνιο τ . Από τη σύντηξη περισσότερων ανιονίων προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$\tau \times \tau \times \tau = \tau \times (\tau \times \tau) = \tau \times (1 + \tau) = \tau + 1 + \tau = 1 + 2 \cdot \tau$$

και όμοια

$$\tau \times \tau \times \tau \times \tau = 2 \cdot 1 + 3 \cdot \tau$$

$$\tau \times \tau \times \tau \times \tau \times \tau = 3 \cdot 1 + 5 \cdot \tau$$

⋮

$$\tau^n = N_{n-1} \cdot 1 + N_n \cdot \tau \quad (7)$$

όπου οι αριθμοί N_{n-1} και N_n είναι αριθμοί Fibonacci, από όπου προκύπτει και η ονομασία των ανιονίων. Τα ανιόνια αυτά δεν προκύπτουν από κάποια ομάδα και κατά συνέπεια ο κανόνας σύντηξής τους δεν είναι αποτέλεσμα γινομένου αναπαραστάσεων κάποιων κανονικών υποομάδων. Όσον αφορά την κβαντική τους διάσταση, από τον κανόνα σύντηξής τους προκύπτει ότι $d_1^2 = d_0 + d_1$, όπου d_1 είναι η κβαντική διάσταση του τ και d_0 η κβαντική διάσταση του κενού, η οποία ισούται με 1. Έτσι προκύπτει ότι $d_1 = \phi$, όπου ϕ η χρυσή τομή. Τελικά η πιθανότητα εμφάνισης του κενού κατά τη σύντηξη είναι $p_0 = \frac{1}{\phi^2}$, ενώ του ανιονίου τ είναι $p_1 = \frac{\phi}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}$.

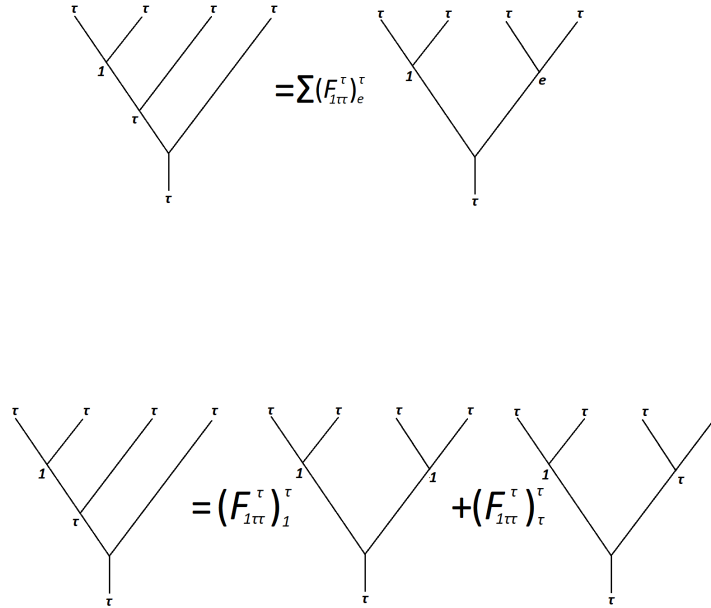
Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να κωδικοποιήσουμε ένα qubit στο χώρο αυτών των ανιονίων. Από τις σχέσεις (20) προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τρία τ ανιόνια που κατά τη σύντηξή τους δίνουν ένα τ ανιόνιο με δύο διαφορετικούς τρόπους (ή ισοδύναμα, μπορούμε να έχουμε τέσσερα ανιόνια που κατά τη σύντηξή τους καταλήγουν στο μηδενικό φορτίο με δύο τρόπους). Σαν βάση αυτού του χώρου θεωρούμε τα διανύσματα $|(\tau\tau)\tau; 1\tau; \tau\rangle$ και $|(\tau\tau)\tau; \tau\tau; \tau\rangle$. Όσο τα ανιόνια αυτά είναι αρκετά μακριά το ένα από το άλλο (δηλαδή όχι επαρκώς κοντά ώστε να θεωρήσουμε σύντηξη) η πληροφορία αποθηκεύεται στο σύστημα τους τοπικά, δηλαδή δεν βρίσκεται σε κάποιο ανιόνιο μεμονωμένα και έτσι έχει περισσότερη αντίσταση σε μικρές διαταραχές. Όταν θελήσουμε να κάνουμε μέτρηση στο σύστημα, κάνουμε σύντηξη σε ζευγάρια ανιονίων. Το αποτέλεσμα της σύντηξης δύο ανιονίων τ είναι

είτε το κενό είτε ένα ακόμα ανιόνιο τ . Εφόσον η διαφορά στην ενέργεια των δύο αποτελεσμάτων είναι πρακτικά μετρήσιμη, η σύντηξη τελικά αντιστοιχεί σε μέτρηση.

Θα υπολογίσουμε τώρα τους πίνακες F και R για το μοντέλο των ανιονίων. Γενικά για ένα μοντέλο ανιονίων με δεδομένους κανόνες σύντηξης είναι αρκετά δύσκολο (ακόμα και με τη χρήση υπολογιστή) να βρεθεί ο πίνακας σύντηξης. Για παράδειγμα, ακόμα και για την περίπτωση των ανιονίων Fibonacci, έχουμε συνολικά $2^5 = 32$ διαγράμματα σύντηξης για τέσσερα ανιόνια με ένα τελικό προϊόν. Ωστόσο, η μόνη περίπτωση που ο πίνακας F είναι μη τετριμμένος είναι όταν και τα τέσσερα αρχικά ανιόνια μαζί με το τελικό προϊόν είναι όλα τ (παραδείγματος χάριν, όταν οποιοδήποτε ένα από τα πέντε σωματίδια είναι το κενό, τότε ο πίνακας παίρνει τη μορφή $F = 1$). Ως εκ τούτου, πηγαίνουμε στη σχέση (19) και αντικαθιστούμε $1 = 2 = 3 = 4 = 5 = \tau$ (τους δείκτες a, b, c, d και e τους αφήνουμε ως έχουν, καθώς είναι τα ενδιάμεσα προϊόντα σύντηξης), οπότε έχουμε

$$(F_{\tau\tau c}^\tau)^d (F_{a\tau\tau}^\tau)_b = \sum_e (F_{\tau\tau\tau}^d)_e (F_{\tau e\tau}^\tau)_b (F_{\tau\tau\tau}^b)_a^e \quad (8)$$

Τώρα, τα ενδιάμεσα προϊόντα σύντηξης μπορούν να είναι 1 ή τ . Παρατηρούμε ότι όλοι οι πίνακες που έχουν ως ενδιάμεσο προϊόν το 1 έχουν τη μορφή $F_{1\tau\tau}^\tau = F_{\tau 1\tau}^\tau = F_{\tau\tau 1}^\tau = F_{\tau\tau\tau}^1 = 1$. Για να καταλάβουμε γιατί συμβαίνει αυτό, ας πάρουμε σαν παράδειγμα τον πίνακα $F_{1\tau\tau}^\tau$ α-



Σχήμα 23: Εύρεση του πίνακα $F_{1\tau\tau}^\tau$.

πό το σχήμα 23. Στο πάνω τμήμα του σχήματος βλέπουμε τη σχέση που συνδέει τα δύο διαγράμματα. Αναλύοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε ένα άθροισμα από διαγράμματα με

διαφορετικά ενδιάμεσα προϊόντα (κάτω τμήμα του σχήματος 23). Όμως, το πρώτο από τα αθροιζόμενα διαγράμματα δεν γίνεται να δώσει το αριστερό διάγραμμα βάση των κανόνων σύντηξης. Προκύπτει έτσι ότι $(F_{1\tau\tau}^\tau)_1^\tau = 0$. Τελικά, για τον πίνακα $F_{1\tau\tau}^\tau$ έχουμε $F_{1\tau\tau}^\tau = \sum_e (F_{1\tau\tau}^\tau)_e^\tau = (F_{1\tau\tau}^\tau)_1^\tau + (F_{1\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau = 1$. Όμοια προκύπτουν και οι υπόλοιποι πίνακες με ενδιάμεσο προϊόν 1.

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε τη σχέση (23) μόνο για τον πίνακα $F_{\tau\tau\tau}^\tau$. Αντικαθιστώντας $b = c = 1$ και $a = d = e = \tau$, η σχέση που προκύπτει τελικά είναι η

$$(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_1^1 = (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_1^1 (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau \Rightarrow$$

$$(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_1^1 = (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau \quad (9)$$

Ο πίνακας F τώρα θα έχει τη μορφή

$$F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_1^1 & (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau \\ (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau & (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau \end{pmatrix} \quad (10)$$

και ως μοναδιαίος θα έχει επιπλέον τη μορφή

$$U = \begin{pmatrix} x & y \\ -e^{i\phi} y^* & e^{i\phi} x^* \end{pmatrix} \quad (11)$$

Για ευκολία στις πράξεις, κάνουμε την αντιστοιχία $(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_1^1 = x$, $(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau = y$, $(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau = -e^{i\phi} y^*$ και $(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_\tau^\tau = e^{i\phi} x^*$ και με χρήση της (24) προκύπτει $x = -e^{i\phi} |y|^2$. Γνωρίζουμε επιπλέον, ότι για έναν μοναδιαίο πίνακα ισχύει ότι $|x|^2 + |y|^2 = 1$, οπότε αντικαθιστώντας το x προκύπτει $|y|^4 + |y|^2 = 1$, της οποίας η μοναδική θετική λύση είναι η $|y|^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \phi^{-1}$, με ϕ τη χρυσή τομή. Προκύπτει οπότε ότι $|y| = \phi^{-\frac{1}{2}}$ και $|x| = \phi^{-1}$, οπότε ο πίνακας F παίρνει τη μορφή

$$F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \phi^{-1} & e^{i\theta} \phi^{-\frac{1}{2}} \\ -e^{i\phi} e^{-i\theta} \phi^{-\frac{1}{2}} & -\phi^{-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

, όπου με $e^{i\theta} \phi^{-\frac{1}{2}}$ έχουμε συμβολίσει το y . Τέλος, για να απλοποιήσουμε τη σχέση θέτουμε $\theta = 0$ και $\phi = \pi$, οπότε ο πίνακας F παίρνει τη μορφή

$$F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} \phi^{-1} & \phi^{-\frac{1}{2}} \\ \phi^{-\frac{1}{2}} & -\phi^{-1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Τοποθετούμε, τώρα, τον πίνακα F μέσα στην εξίσωση εξαγώνου (σχέση (20) και προκύπτει η σχέση

$$R_{\tau\tau}^c (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_a^c R_{\tau\tau}^a = \sum_b (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_b^c R_{\tau b}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_a^b \quad (14)$$

Πάλι για να απλοποιήσουμε τις πράξεις παρατηρούμε ότι κατά την εναλλαγή ενός ανιόνιου γύρω από το μηδενικό φορτίο έχουμε για τον πίνακα R την απλή μορφή $R_{\tau 1}^\tau = R_{1\tau}^\tau = 1$, οπότε η εξίσωση εξαγώνου παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} (R_{\tau\tau}^1)^2 \phi^{-1} & R_{\tau\tau}^1 R_{\tau\tau}^\tau \phi^{-\frac{1}{2}} \\ R_{\tau\tau}^1 R_{\tau\tau}^\tau \phi^{-\frac{1}{2}} & -(R_{\tau\tau}^\tau)^2 \phi^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\tau\tau}^\tau \phi^{-1} + \phi^{-2} & (1 - R_{\tau\tau}^\tau) \phi^{-\frac{3}{2}} \\ (1 - R_{\tau\tau}^\tau) \phi^{-\frac{3}{2}} & R_{\tau\tau}^\tau \phi^{-2} + \phi^{-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

από όπου προκύπτει $R_{\tau\tau}^1 = e^{\frac{4\pi i}{5}}$ και $R_{\tau\tau}^\tau = e^{-\frac{3\pi i}{5}}$ και τελικά ο πίνακας R παίρνει τη μορφή

$$R_{\tau\tau} = \begin{pmatrix} e^{\frac{4\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2\pi i}{5}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

4 Επίλογος

Υπολογίσαμε, λοιπόν, τους πίνακες F και R για τα ανιόνια Fibonacci με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να κατασκευάσουμε τις κβαντικές πύλες για αυτό το μοντέλο. Παρατηρούμε ότι η εξαγωγή των πινάκων από τις εξισώσεις πενταγώνου και εξαγώνου για τη συγκεκριμένη ομάδα ανιόνιων έγινε αρκετά απλή χάρη σε ορισμένες απλοποιήσεις που χρησιμοποιήσαμε. Ωστόσο, για πιο πολύπλοκα μοντέλα, όπως για το μοντέλο με βάση την ομάδα του τετραγώνου, η εύρεση των πινάκων είναι αρκετά πιο πολύπλοκη υπόθεση και οι πίνακες (πιθανότατα) δεν υποστηρίζουν καθολικές κβαντικές πύλες.

Αναφορές

- [1] J.F.Cornwell, "Group Theory in Physics Vol. I,II,III", (1984)
- [2] A.O.Barut ,R.Raczka, "Theory of Groups Representations and Applications", (1977)
- [3] Wu-Ki Tung, "Group Theory in Physics", (1985)
- [4] S. Sternberg, "Group theory and Physics", (1994), (2006)
- [5] Δ. Σουρλάς, "Θεωρία ομάδων και τελεστών", (2008)
- [6] Δ. Σουρλάς, "Γραμμική Άλγευρα και Αναλυτική Γεωμετρία", (2012)
- [7] L.Lang. Addison Wisley, "Linear Algebra", (1970)
- [8] Dieundonne, Hermann, "Linear Algebra and Geometry", (1969)
- [9] R.P. Feynman, "Simulating physics with computers", (1982)
- [10] M.A.Nielsen, I.L.Chuang, "Quantum computation and quantum information", (2000)
- [11] S.Gasiorowicz, "Quantum Physics",(1996)
- [12] N. Zetilli, "Quantum Mechanics: Concepts and Applications",(2001)
- [13] Tuckerman, Mark , "Statistical Mechanics",(2010)
- [14] J.J.Sakurai , "Modern Quantum Mechanics",(1994)
- [15] M. Kirdar, "Two Dimensional Representations of the Braid Group B3 and its Bureau Representation Squared"
- [16] V.T.Lahtinen, J.K.Pachos, "A short introduction to topological quantum computation", (2017)
- [17] J.Preskill , "Lecture notes for physics 219: Quantum Computation", (2004)
- [18] F.Wilczek , "Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles", (1982)
- [19] J.K.Pachos, "Introduction to topological quantum computation", (2012)
- [20] S. Trebst, M. Troyer, Z. Wang, A.W.W.Ludwig, "A short introduction to Fibonacci anyon models", (2009)
- [21] C. Nayak et al. "Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation", (2008)
- [22] 9] M. Freedman, A. Kitaev, M. Larsen and Z. Wang. "Topological Qunatum Computation", (2002)
- [23] C.Charalambous, "Fibonacci anyons and topological quantum computers", (2013)
- [24] A.Kittaev, Ann. Phys **303**,2, (2003)

-
- [25] A.Kitaev, Ann. Phys **321**,2, (2006)
- [26] Y.Aharonov, D.Bohm, Phys. Rev. **115**,485, (1959)
- [27] M. Peshkin, A. Tonomura, "The Aharonov-Bohm Effect", Lecture Notes in Physics, 340 (1989)