ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φιλοσοφικές απόπειρες προσέγγισης του μαθηματικού απείρου: η φιλοσοφική αμηχανία

ΑΣΗΜΕΝΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

Α.Μ. Δ201708

Επιβλέπουσα

Δήμητρα Χριστοπούλου

Επίκουρη καθηγήτρια

Αθήνα

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ………………………………………………………… από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Δ. Χριστοπούλου (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
• Δ. Αναπολιτάνο	Ομοτ. Καθηγητή
• Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Δ. Χριστοπούλου (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
• Δ. Αναπολιτάνο	Ομοτ. Καθηγητή
• Ε. Ράπτη	Καθηγητή

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

- Την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα Δήμητρα Χριστοπούλου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, για τις πολύτιμες συμβουλές της και την άρτια καθοδήγησή της καθ’ όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας.
- Τον ομοτ. καθηγητή κ. Δ. Αναπολιτάνο που με τίμησε με τη συμμετοχή του στη συμβουλευτική και την εξεταστική τριμελή επιτροπή. Η συμβολή των βιβλίων του στην κατανόηση μίας προβληματικής που εκφράζεται για το άπειρο και τα απειροστά στη φιλοσοφία ήταν καθοριστική.
- Τον καθηγητή κ. Ε. Ράπτη που με τίμησε με τη συμμετοχή του στη συμβουλευτική τριμελή επιτροπή.
- Τον καθηγητή κ. Θ. Ζαχαριάδη που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην εξεταστική τριμελή επιτροπή.
- Όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις γνώσεις που μας μετέδωσαν, αλλά και την έμπνευση που μας μεταβίβασαν.
- Την κ. Ε. Κλή και την κ. Δ. Μπακογιάννη για την άψογη συνεργασία και την ευγένειά τους.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξη και την κατανόησή της σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Στον Γιάννη,

τη Βασιλική,

και τον Ζώη-Γεώργιο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το άπειρο είναι μια έννοια που άσκησε ιδιαίτερη γοητεία και έντονο προβληματισμό καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας της ανθρώπινης σκέψης. Η έννοια του απείρου είχε μια πορεία εξέλιξης με σημαντικούς σταθμούς. Στην παρούσα εργασία έχουν επιλεγεί συγκεκριμένες προσπάθειες φιλοσόφων να κατανοήσουν την έννοια του απείρου με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν.

Ο Αριστοτέλης διέκρινε τις δύο εκδοχές του απείρου: «δυνητικό άπειρο» και «ενεργεία άπειρο». Δέχθηκε μόνον το δυνάμει άπειρο και επηρέασε ως προς αυτή την εκδοχή απείρου τους μεταγενέστερους φιλοσόφους. Διάφοροι διανοητές του μεσαίωνα όπως ο Θωμάς Ακινάτης, ο Νικόλαος Κουζάνος, αποπειράθηκαν διάφορες προσεγγίσεις του απείρου είτε στη βάση της αριστοτελικής σκέψης είτε σε αντιπαράθεση με εκείνη, ενώ κατά τη νεότερη εποχή (17^{ος} -18^{ος} αι.) οι Ρασιοναλιστές και οι Εμπειριστές φιλόσοφοι επιχείρησαν την κατανόηση του απείρου στο πλαίσιο της νεότερης φιλοσοφικής σκέψης.

Ο Λογισμός που αναπτύχθηκε από τον Newton και τον Leibniz δέχθηκε την κριτική του Berkeley κυρίως σε ό,τι αφορά τα απειροστά και την χρήση τους που αναδείκνυε αντιφάσεις. Στη συνέχεια η εργασία στρέφεται προς τη μαθηματική διερεύνηση του απείρου η οποία τελικά στέφθηκε με επιτυχία χάρη στη μαθηματική αυστηρότητα και σαφήνεια.

Οι μαθηματικοί θεμελίωσαν αυστηρά τις έννοιες του σημείου, των πραγματικών αριθμών και της ολότητας της πραγματικής ευθείας και τελικά αποδέχτηκαν το άπειρο ως ενεργεία μαθηματικό αντικείμενο. πράγμα που φαίνεται ειδικότερα στο έργο του Cantor. Ο Cantor στα τέλη του 19^{ου} αι. ανέπτυξε τη μαθηματική θεωρία των διατακτικών αριθμών και τον απασχόλησε η γνωστή ως Υπόθεση του Συνεχούς. Τα συνολοθεωρητικά παράδοξα εμφανίστηκαν στις αρχές του 20^{ου} αι. αλλά αντιμετωπίστηκαν κατάλληλα κυρίως με την αξιωματικοποίηση Zermelo – Fraenkel θεωρίας συνόλων.

Στόχος: στην διπλωματική αυτή εργασία το ενδιαφέρον εστιάζεται στην κατάδειξη της αμηχανίας που χαρακτηρίζει διάφορες φιλοσοφικές απόπειρες προσέγγισης της έννοιας του απείρου και η οποία αντιμετωπίστηκε εν τέλει και επιτυχώς στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας. Η εργασία δεν έχει ιστορικό χαρακτήρα σχετικά με την έννοια του απείρου αλλά επιλέγει φιλοσοφικές θεωρήσεις του απείρου μέσα από τη σκέψη μιας σειράς φιλοσόφων για να καταλήξει στον προσδιορισμό του απείρου μέσα από την μαθηματική αυστηρότητα.

Επιπλέον, η εργασία αναφέρεται στην κατανόηση της αντιδιαστολής και διάστασης μεταξύ της ανθρώπινης «περατότητας» (το πεπερασμένο της ανθρώπινης φύσης) από τη μια πλευρά και του απείρου από την άλλη πλευρά, ως μιας έννοιας υπέρβασης για την οποία απαιτούνται συγκεκριμένα «νοητικά άλματα».

ABSTRACT

The concept of infinite plays a significant as well as a controversial role in the disciplines both of philosophy and mathematics. Many philosophical questions and disputes rised up from that concept. Mathematicians and philosophers were struggling to define the infinite throughout the history of human thought. This process had a lot of important milestones. This dissertation has selected some philosophical attempts to understand the infinite.

One of them is Aristotle's who distinguished the "potential" infinity from the "actual" infinity. This separation has affected philosophical thinking about the infinite in later centuries. Various Medieval intellectuals like St Thomas Aquinas and Nicholas of Cusa have attempted different approaches towards defining the infinite either in the line of aristotelian thought or contrast/against it. In 17th century the Rationalists and the Empiricists took part in certain debates concerning the philosophical nature of infinite in their effort to approach it. However, it appears that philosophical attempts to grasp the concept of infinite are characterized by a sense of bewilderment. Philosophers' embarrassment in front of the infinite is a focal point of this dissertation. Some philosophers construed the infinite in theological terms. The dissertation aims to describe various philosophical attempts to grasp the infinite and particularly it shows the "philosophical bewilderment" in front of the *actual* infinite.

The development of calculus that took place in the end of 17th century by Leibniz and Newton, followed by Berkeley's criticism have made an important mark in this investigation process. After the presentation of the basic efforts and difficulties philosophers had to deal with in order to approach the concept of infinite, my study turned the focus of interest to mathematicians, particularly to Cantor, who developed the mathematic theory of ordinal and cardinal numbers and to Dedekind and the foundation of the reals. Cantor faced successfully the problem of "actual" infinite by endorsing actual infinite sets and ordering them. The dissertation shows that the concept of infinite and especially the *actual* version of infinite was eventually described not by philosophers but only by mathematicians. Furthermore, the dissertation presents some aspects of the contrast or the divergence between the humans' finitude and the concept of infinite, as a sense of transgression which requires certain "mental saltations".

Κεφάλαιο 1ο

Αριστοτελικές και μεσαιωνικές φιλοσοφικές αντιλήψεις για το άπειρο

Διάφορες αρχαίες αντιλήψεις για το άπειρο

Ο Αριστοτέλης (384π.Χ.- 322 π. Χ.) είναι η λυδία λίθος για το άπειρο. Πολλά από όσα έχουν συζητηθεί στο πλαίσιο της φιλοσοφίας σχετικά με το άπειρο προέκυψαν από τον Αριστοτέλη. Ο ίδιος ξεκίνησε με τις απόψεις των προγενεστέρων του. Τόνισε ιδιαίτερα σε αυτά που είχαν πει ότι : ό, τι κι αν είναι το άπειρο είναι ipso facto, δηλαδή κάτι θεμελιώδες από το οποίο άλλα πράγματα προκύπτουν ή κάτι με το οποίο άλλα πράγματα θα εξηγηθούν. Διαφορετικά, θα ήταν παράγωγο και επομένως πεπερασμένο. Αυτός είναι ο λόγος που παρά τις βαθιές διαφορές στις απόψεις τους, οι προγενέστεροί του υποστήριζαν ότι το άπειρο δεν γεννιέται (δεν δημιουργείται), είναι άφθαρτο και αιώνιο. Αυτός είναι επίσης ο λόγος που απέφευγαν να του αποδώσουν ιδιαίτερες ή καθορισμένες ιδιότητες, γιατί με αυτόν τον τρόπο θα το περιόριζαν ενώ επιδίωκαν να το αφήσουν ανοιχτό για εξήγηση με πιο θεμελιώδεις όρους.

Αυτά ισχύουν και για τους στοχαστές που θεωρούσαν το άπειρο ως μία οντότητα καθεαυτή (όπως ο Αναξίμανδρος, για τον οποίο το άπειρο είχε μία πραγματική υπόσταση) και γι’ αυτούς που σκέφτονταν την απειρία με μια πιο μοντέρνα διάθεση ως μια ιδιότητα που άλλες οντότητες κατέχουν. Αυτό που αναδύεται από τη σκέψη του Αναξίμανδρου είναι μια έντονη συναίσθηση του πεπερασμένου χαρακτήρα του ανθρώπινου όντος και το πεπερασμένο των εφήμερων πραγμάτων, που χαρακτηρίζονται από τη γέννησή τους και τη φθορά τους. Ο Αναξαγόρας υποστήριξε ότι όλες οι διαφορετικές «ουσίες» στον κόσμο ήταν αρχικά συνδεδεμένες μεταξύ τους σε μία ενιαία αδιαφοροποίητη μάζα. Και γι’ αυτό αναφερόταν όχι ως «το άπειρον» αλλά ως κάτι που μετρούσε την απειρία ανάμεσα στις ιδιότητές του.

Ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος είχαν διαμορφώσει μια πολύ μοντέρνα ατομική άποψη, σύμφωνα με την οποία ο κόσμος αποτελείται από αδιαίρετα άτομα που περιβάλλονται από κενό. Παρόμοια, θεωρούσαν την απειρία ως μια από τις ιδιότητες αυτών των ατόμων (δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος για τον οποίο θα πρέπει να έχουν ένα φάσμα μορφών από κάτι άλλο). Εδώ, για πρώτη φορά, βλέπουμε την απειρία με βάση την αρχή της ποικιλομορφίας παρά ως ένα μεμονωμένο υποκείμενο. Ως ιδέα μιας μοναδικής αρχέγονης ουσίας, τέτοια που ο Αναξίμανδρος έδωσε στην ιδέα της ποικιλομορφίας αρχέγονων ουσιών, έτσι η έκφραση «αυτό είναι άπειρο» έδωσε τη θέση της στην έκφραση «αυτές είναι άπειρες». Το θέμα ήταν βέβαια, ότι τώρα ήταν «άπειρα πολλές από αυτές». Το άπειρο τώρα απάντησε στην ερώτηση «Πόσα πολλά;» Η ιδέα του άπειρου αριθμού (πλήθους), σε αντίθεση με το άπειρο μέγεθος, είχε τώρα αναδυθεί (Moore, 1990).

Ο Αριστοτέλης συμφώνησε με τα προηγούμενα σε ένα σημείο: οτιδήποτε είναι το άπειρο πρέπει να είναι βασικό-θεμελιώδες. Η πρώτη του μέριμνα, τότε, πριν αποφασίσει πόσα και τι ακριβώς ήταν έτοιμος να δεχθεί, ήταν να το κατανοήσει όσο μπορούσε. Και εδώ επηρεάστηκε από έναν βέβαιο εμπειρισμό που διέπει όλο του το φιλοσοφικό έργο. Δεν είναι ότι του ήταν ανυπόφορη η ιδέα για κάτι υπερβατικό. Αλλά απέρριπτε το είδος της διάκρισης φαινομενικού/πραγματικού που είχε βρει πρόσφορο έδαφος στους Ελεάτες και αργότερα στον Πλάτωνα. Και αυτό σημαίνει, ότι για τον Αριστοτέλη, αν το άπειρο πρόκειται να είναι βασικό στον σχηματισμό των πραγμάτων με τρόπο που προβλέπεται- τότε θα είχε νόημα γι’ αυτόν ουσιαστικά μόνο με χωρο-χρονικούς όρους. Για παράδειγμα, δεν συμμεριζόταν τη βασική ερμηνεία των απόψεων του Αναξίμανδρου σύμφωνα με την οποία το άπειρο ήταν άυλο. Σύμφωνα με τον φυσιοκράτη Αριστοτέλη, το μόνο βασικό ερώτημα που έπρεπε να τεθεί ήταν αν οτιδήποτε στη φύση (οτιδήποτε στον χώρο και το χρόνο) είναι άπειρο. Γι’ αυτό όρισε το άπειρο με έναν νέο τρόπο, που θα εναρμονιζόταν με μια τέτοια αναζήτηση. Το όρισε όχι ως αυτό που δεν έχει τέλος ή όριο, αλλά ως κάτι που δεν μπορεί να προσπελαθεί. Αλλά αυτό ήταν ασαφές, όπως μετέπειτα συνειδητοποίησε. Δεν προσφέρονταν όλες οι ερμηνείες για τη φυσιοκρατική του αντίληψη. Κάποιες φαίνεται ότι ήταν ακριβώς εναντίον του. Για παράδειγμα, κάτι μπορεί να ειπωθεί ότι δεν είναι προσπελάσιμο επειδή δεν έχει νόημα να πούμε ότι το διασχίζουμε. Με αυτή την έννοια, κάτι εντελώς πάνω από την εμπειρία μας μπορεί να θεωρηθεί ως μη προσπελάσιμο. Δεν ήταν αυτό που ο Αριστοτέλης είχε πρόθεση να υποστηρίξει. Ακόμα και αν πούμε ότι κάτι φυσικό δεν είναι προσπελάσιμο, μπορεί ακόμα να εννοούμε διαφορετικά πράγματα, όπως υπέδειξε ο Αριστοτέλης. Μπορεί να εννοούμε ότι δεν υπάρχει τίποτα που να μετράει καθώς ολοκληρώνει τη διαδρομή του (όπως ένα ομοιόμορφο κυκλικό ιπποδρόμιο) ή οτιδήποτε είναι απλά δύσκολο ή αδύνατον στην πράξη να διασχίσει κάποιος (όπως ένα επικίνδυνο ποτάμι) ή τέλος, αυτό που συνεχίζεται για πάντα, και με αυτή την έννοια δεν έχει πέρας (με άλλα λόγια, είναι μαθηματικώς άπειρο). Ο Αριστοτέλης σκόπευε να περιγράψει το τελευταίο.

Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό. Εδώ, αναμφισβήτητα, ήταν η πρώτη προσπάθεια σαφούς προσδιορισμού του μαθηματικού απείρου- το σημείο όπου πρώτα ξεκάθαρα καταχωρήθηκε στην ελληνική σκέψη. Δεν είναι ότι δεν υπήρχαν προγενέστεροι στοχαστές που δεν αναφέρθηκαν ή δεν υπαινίχθηκαν το μαθηματικό άπειρο. Ο Ζήνων είναι ένα προφανές παράδειγμα, όπως και ο Αναξαγόρας που είχε πει ότι, οσοδήποτε μικρό ήταν κάτι, υπήρχε κάτι άλλο μικρότερο, και οσοδήποτε μεγάλο ήταν κάτι, υπήρχε κάτι άλλο μεγαλύτερο (Barnes, 1987). Επειδή ο Αριστοτέλης ήταν φυσιοκράτης, ήταν όντως επίπονο γι’ αυτόν να φέρει στο προσκήνιο τη μαθηματική αντίληψη του απείρου. Απέρριψε προηγούμενες οντολογικές τάσεις ως θεμελιωδώς στρεβλές. Επίσης έκανε τη διάκριση ανάμεσα στο άπειρο με αθροιστική διαδικασία και στο άπειρο με διαιρετική διαδικασία (Φυσικά, ΙΙΙ,4,204 α). (Θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για διαδρομή, στην περίπτωση της διαίρεσης, όταν επιτυχείς υποδιαιρέσεις ενός διαστήματος πραγματοποιούνται). Αυτή η διάκριση αποδιδόταν στον Πλάτωνα (Φυσικά,ΙΙΙ, 6,206b27). Έχοντας έτσι διευκρινιστεί το πώς αντιλαμβανόταν το ερώτημα , ο Αριστοτέλης συνέχισε να ερευνά αν κάτι στη φύση ήταν άπειρο. Το βασικό Αριστοτελικό ερώτημα σύμφωνα με τον A.W. Moore (1990) ήταν: τι είναι το άπειρο και τι ακριβώς σημαίνει να αναρωτηθούμε αν υπάρχει ή όχι.

Η ελληνική λέξη «πέρας» σημαίνει όριο ή τέλος. Το άπειρον υποδηλώνει αυτό που δεν έχει πέρας, το χωρίς όριο, το χωρίς τέλος. Όμως το άπειρον ήταν λέξη μάλλον αρνητική, γιατί σήμαινε και το χωρίς τάξη, το πάρα πολύ πολύπλοκο, αυτό που δεν μπορούσε να προσδιοριστεί. Με τα λόγια του Αριστοτέλη: « το να είναι κάτι άπειρο είναι μειονέκτημα, δεν είναι πλεονέκτημα, το όριο απουσιάζει». Το άπειρο συστήθηκε για να απαντήσει σε αυτό που ήταν τότε (και παραμένει) μια βασική διανοητική πρόκληση: να εξακριβώσουμε την ταυτότητα του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένα όλα τα πράγματα. Η πρόταση του Αναξίμανδρου ήταν ότι η πρωταρχική ουσία από την οποία προέρχονταν όλα τα πράγματα ήταν «το άπειρον». Αυτό το συνέλαβε ως ουδέτερο, απεριόριστο, άφθαρτο, έσχατη πηγή όλων. Το αρχικό χάος από το οποίο δημιουργήθηκε ο κόσμος ήταν «το άπειρον». Οι αρχαίοι Έλληνες στοχαστές φαίνεται ότι αποστρέφονταν το μαθηματικό άπειρο. Φαίνεται από τον τρόπο που απηύθυνε το ερώτημά του ο Αριστοτέλης ότι το «αποστρεφόταν» επίσης. Ουσιαστικά, παρήγαγε μια ολόκληρη σειρά επιχειρημάτων για να υποστηρίξει μια αρνητική απάντηση (Rucker, 1982).

Πρώτα απέρριψε την άποψη του Αναξίμανδρου ότι το άπειρο έπρεπε να θεωρείται ως φυσική υπόσταση από μόνο του, δηλαδή υλικό από τα πιο βασικά. Αν ήταν έτσι, θα έπρεπε να είχε μέρη που με τη σειρά τους θα έπρεπε να είναι άπειρα (όπως ο αέρας έχει μέρη που είναι αέρας, και το νερό έχει μέρη που είναι νερό). Αλλά ο Αριστοτέλης το θεώρησε παράλογο. Η απειρία, σύμφωνα με τη δική του αντίληψη, θα έπρεπε να είναι μια ιδιότητα του όλου, και άρα στην πραγματικότητα, μια ιδιότητα. (Τα παράδοξα του απείρως μεγάλου προέκυψαν από αυτό ακριβώς το γεγονός. Ό,τι είναι άπειρο μπορεί να έχει μέρη που είναι άπειρα, και έτσι το μέρος φαίνεται τόσο μεγάλο όσο το όλο). Ο Αριστοτέλης απέρριψε επίσης την υπόθεση των ατομιστών, ότι η απειρία μπορεί να είναι μια ιδιότητα της ποικιλομορφίας. Για παράδειγμα ο Ζήνων απέρριψε ως ασαφή την ιδέα ενός άπειρου αριθμού. Ένας αριθμός, υποστήριξε, είναι αυτό που έρχεται ως αποτέλεσμα της μέτρησης, της αρίθμησης, και η αρίθμηση στο άπειρο θα συνεπαγόταν την προσπέλαση μιας άπειρης σειράς αριθμών. Έτσι δεν έκανε τον κόπο να θέσει το ερώτημα αν υπήρχαν άπειρα πολλά πράγματα ενός συγκεκριμένου είδους.

Ο Αριστοτέλης για το άπειρο

Σύμφωνα με τον Moore (1990) το μόνο αληθινό ερώτημα για τον Αριστοτέλη ήταν αν ένα μόνο πράγμα θα ήταν δυνατό να είναι άπειρο (για παράδειγμα ένα από τα τέσσερα αναγνωρισμένα στοιχεία της φύσης). Όμως αυτό δεν μπορούσε να το απορρίψει έτσι εύκολα. Στην ουσία, ήταν ένα ερώτημα για τη δυνατότητα ύπαρξης ενός άπειρου σώματος. Όμως ένα σώμα είναι κάτι που περιβάλλεται από μια επιφάνεια και άρα πεπερασμένο. Οι αιτίες απόρριψης αυτής της δυνατότητας είναι εμπειρικές. Απέκλεισε τη δυνατότητα ενός άπειρα διαιρετού σώματος βασιζόμενος σε εννοιολογικούς λόγους, επικαλούμενος παράδοξα του απείρως μικρού. Πίστευε ότι αυτά τα παράδοξα αποκάλυψαν ασυνέπεια στην ιδέα οποιασδήποτε φυσικής οντότητας διαιρεμένης σε άπειρα πολλά μέρη. Απέρριψε και την ιδέα ότι κάτι θεμελιώδες, ουδέτερο (με την έννοια κάτι πιο θεμελιώδες από τα τέσσερα στοιχεία) μπορεί να είναι άπειρο, λόγω του ότι η εμπειρία έδειξε απλά ότι δεν υπάρχει τέτοιο υλικό. Η εμπειρία έδειξε ότι είναι αδύνατο ένα πράγμα να διασπαστεί περαιτέρω από ότι σε αέρα, φωτιά, γη και νερό. (Αυτά τα επιχειρήματα, βέβαια, αργότερα έχασαν τα εμπειρικά θεμέλιά τους). Από την άλλη μεριά, υποστήριξε ότι το πολύ ένα από αυτά θα μπορούσε να είναι άπειρο, για να αφήσει χώρο μόνο για πεπερασμένα μέρη καθενός από τα άλλα. Ακόμη αν ένα από αυτά ήταν άπειρο, τότε τα άλλα θα είχαν καταστραφεί (όπως η φωτιά σβήνει με αρκετή ποσότητα νερού).

Επιπλέον, οτιδήποτε ήταν άπειρο θα έπρεπε να έχει μια φυσική «κατεύθυνση» (όπως η γη, για παράδειγμα, τείνει προς το κέντρο του σύμπαντος[1] και η φωτιά μακριά από αυτό). Σε κάθε περίπτωση, αν ένα άπειρο σώμα είχε κάποια «κατεύθυνση» , τότε θα έπρεπε να μπορούσε να κινηθεί. Ο Αριστοτέλης είχε μια πληθώρα επιχειρημάτων- κάποια εμπειρικά και κάποια εννοιολογικά- για να δείξει ότι αυτό ήταν αδύνατο. Βέβαια σήμερα όλα θα θεωρούνταν μη έγκυρα. Για παράδειγμα προσπάθησε να δείξει ότι ένα άπειρο σώμα θα μπορούσε να κινηθεί μόνο αν μπορούσε να υπάρξει κίνηση σε μια άπειρη απόσταση σε πεπερασμένο χρόνο. Το συμπέρασμά του γενικά ήταν ξεκάθαρο: τίποτα φυσικό δεν μπορεί να είναι άπειρο.

Σύμφωνα με τον Moore, ο Αριστοτέλης έπρεπε να αντιμετωπίσει τα επιχειρήματα υπέρ της ύπαρξης του απείρου. Ξεχώρισε τα πέντε που θεωρούσε πιο σημαντικά:

(ι) Ο χρόνος φαινόταν να είναι άπειρος, τόσο αθροιστικά, όσο και διαιρετικά.

(ιι) Η ύλη φαινόταν να είναι άπειρα διαιρετή.

(ιιι) Η συνεχής γέννηση και φθορά των νέων πραγμάτων φαινόταν αδύνατη χωρίς άπειρο ανεφοδιασμό ύλης

(ιυ) Φαινόταν πως οτιδήποτε ήταν περιορισμένο ή με όρια, ήταν πεπερασμένο από κάτι άλλο πέραν αυτού, επομένως δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν τελικά όρια.

[1] Ο Αριστοτέλης, όπως και πολλοί άλλοι σύγχρονοί του, ήταν γεωκεντριστής.

(υ) Φαινόταν να υπάρχει μια a priori αλήθεια κρυμμένη στα μαθηματικά, όχι μόνο ότι οι φυσικοί αριθμοί ήταν άπειροι, αλλά ότι ο χώρος είναι κι αυτός άπειρος.

Για τον Αριστοτέλη αυτό ήταν θέμα ιδιαίτερα κρίσιμο. Πίστευε πως αν ο χώρος ήταν άπειρος, τότε θα ήταν και κάποιο σώμα, για δύο λόγους: πρώτον, αν ο χώρος ήταν άπειρος αλλά το σώμα μόνο πεπερασμένο, δεν θα υπήρχε λόγος γιατί κάποιο συγκεκριμένο μέρος του χώρου θα έπρεπε να το στεγάσει, και όχι κάποιο άλλο. Δεύτερον, θα έπρεπε να είναι τουλάχιστον δυνατό για τον χώρο να είναι πλήρως κατειλημμένος. Ο Αριστοτέλης πίστευε ότι ο κόσμος ήταν χωρικά πεπερασμένος αθροιστικά και επομένως και ο χώρος ήταν το ίδιο. Όμως πίστευε επίσης ότι ο χρόνος ήταν άπειρος αθροιστικά. Διότι είχε την πεποίθηση ότι κάθε χρονική στιγμή θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα «τώρα», και ότι ήταν στη φύση του «τώρα» το να ξεχωρίσει κανείς το παρελθόν από το μέλλον (Φυσικά, VIII).

Διατύπωσε τη λύση του αντιπαραβάλλοντας τον χώρο και τον χρόνο σε αυτή τη διαφορά. Η πρότασή του ήταν βασικά η εξής: δεν υπήρχε αντίρρηση στο να είναι κάτι άπειρο με την προϋπόθεση ότι η απειρία δεν είναι όλη εκεί ταυτόχρονα- «όλη μαζί». Ο τρόπος που το έθεσε ήταν: Το άπειρο υπάρχει «δυνάμει» (δυνητικά- μπορεί να υπάρξει) αλλά όχι «ενεργεία» (στην πραγματικότητα -όλο μαζί ταυτόχρονα). Αυτό είναι το μεγαλύτερο κληροδότημά του στη μετέπειτα σκέψη του απείρου. Αυτή η διάκριση είχε έναν ρόλο κλειδί στην Αριστοτελική σκέψη και μεγάλη επιρροή σε μεταγενέστερους φιλοσόφους. Το «ενεργεία» άπειρο είναι αυτό του οποίου η απειρία υπάρχει, ή δίνεται, κάποια στιγμή μέσα στον χρόνο. Το «δυνάμει» άπειρο είναι αυτό του οποίου η απειρία υπάρχει ή δίνεται πέρα από τον χρόνο (ποτέ δεν είναι εξ' ολοκλήρου παρούσα). Απλωμένο πάνω στον χρόνο, υπάρχει με την έννοια που μια μέρα υπάρχει. Έτσι, ο Αριστοτέλης αποφάσισε να δεχτεί το *δυνάμει* άπειρο (Moore, 1990).

Πολλοί φιλόσοφοι προσπάθησαν να δουν αυτή την επίκληση στον χρόνο, ως μια προσπάθεια να αδράξουμε μέσω μιας μεταφοράς, κάτι βαθύτερο, περισσότερο αφηρημένο, και πιο σημαντικό: αλλά ο Αριστοτέλης το εξέλαβε κυριολεκτικά. Για εκείνον το άπειρο ήταν το απροσπέλαστο. Αλλά να το προσπελάσεις παίρνει χρόνο. Έτσι, το ερώτημα αν κάτι είναι προσπελάσιμο ή όχι είναι το ίδιο με το ερώτημα αν μπορεί ή όχι ποτέ να προσπελαστεί. Και το να πεις ότι δεν θα μπορούσε να προσπελαστεί – άρα ότι είναι απροσπέλαστο- σημαίνει για όλο τον χρόνο, δηλαδή για πάντα.

Φαινόταν αναγκαίο να δεχτούμε την ύπαρξη του απείρου δεδομένης της απειρίας των φυσικών αριθμών (Lear, 1982). Ο Αριστοτέλης ένιωθε ότι μπορούσε να δεχτεί κάτι τέτοιο. Τέτοια απειρία δε σήμαινε ότι υπήρχαν στην πραγματικότητα άπειρα πολλοί αριθμοί συγκεντρωμένοι σε μια ολότητα. Ούτε, βέβαια, σήμαινε ότι οποιοσδήποτε αριθμός ήταν ατομικά άπειρος. Μάλλον σήμαινε ότι δεν υπάρχει τέλος στη διαδικασία της αρίθμησης. Αυτή η αντίληψη ήταν και πάλι σύμφωνη με το δυνητικό άπειρο. Επίσης, ο Αριστοτέλης φαινόταν αναγκασμένος να δεχτεί ότι ο χώρος και ο χρόνος ήταν διαιρετικά άπειροι. Σκεφτόταν κατά πόσον η ύλη ήταν επ' άπειρον διαιρετή. Ένιωθε πως η άπειρη διαιρετότητα του χώρου και της ύλης μπορεί να γίνει κατανοητή από την άποψη της μη ύπαρξης τέλους στη διαδικασία της διαδοχικής διαίρεσης. Για την απειρία του χρόνου είχε πρόβλημα. Όμως είχε πάλι την απάντηση. Για τον Αριστοτέλη, ο χρόνος είναι το μέτρο της αλλαγής και δεν υπάρχει χωρίς το υποκείμενο που θα επιχειρήσει τη μέτρηση αυτής της αλλαγής. Πίστευε ότι δεν υπάρχει χρόνος χωρίς κίνηση και έτσι μετέτρεψε τα ερωτήματα χρονικής διαιρετότητας σε ερωτήματα χωρικής διαιρετότητας. Κατέγραψε το μέσο μιας χρονικής περιόδου, για παράδειγμα, όταν καταγράφουμε το μέσο μιας ευθείας που διασχίζεται, στη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου, από ένα αντικείμενο που κινείται με σταθερή ταχύτητα (Φυσικά, ΙΙΙ, 207b21-7, Aristotle,1984). Με εστίαση στην ιδέα μη τερματισμού της διαδικασίας της διαίρεσης αποκαλύπτεται πόσο στενά συνδεδεμένα ήταν το αθροιστικά άπειρο και το διαιρετικά άπειρο για τον Αριστοτέλη. Δεδομένης της πίστης του ότι ο κόσμος ήταν ένα πεπερασμένα μεγάλο μέρος, θεωρούσε ότι το μόνο διαθέσιμο εμπειρικό παράδειγμα του «δυνάμει» απείρου, εκτός του ίδιου του χρόνου θα ήταν, ακριβώς, μία χωρίς τέλος διαδικασίας διαίρεσης. Εξάλλου, αν μια τέτοια διαδικασία αποκάλυπτε ένα αντικείμενο να έχει μέρη (ας πούμε) το μισό του μεγέθους του, το ένα τέταρτο του μεγέθους του, ένα όγδοο κ.ο.κ.- υπάρχουν πάντα περισσότερα μέρη- αυτό θα ήταν μία απόδειξη ότι αυτό το αντικείμενο να είναι αθροιστικά άπειρο.

Παρόλα αυτά, υπήρχε μία αντίφαση λόγω της ασάφειας της έκφρασης «άπειρα διαιρετό». Αυτό που εκείνος δεν δεχόταν ως εφικτό, ήταν το να χωριστεί ένα σώμα με τη διαδικασία της διαίρεσης σε άπειρα πολλά μέρη (γιατί τότε θα είχε μια «ενεργεία» απειρία μερών). Αυτό που δεχόταν ήταν ότι μπορούσε να μην υπάρχει τέλος σε μια διαδικασία διαίρεσης ενός σώματος (το οποίο σήμαινε ότι είχε μία «δυνάμει» απειρία μερών). Το να είναι ένα σώμα άπειρα διαιρετό σήμαινε να είναι άπειρα διαιρετό με τη δεύτερη έννοια (Aristotle, 1984, Moore, 1990). Ας ερμηνεύσουμε το «είναι διαιρετό» με το «είναι, σε κάποια δυνατή κατάσταση, διαιρεμένο», δηλαδή «θα είναι κάποια στιγμή διαιρεμένο». Τότε το «αυτό το σώμα είναι άπειρα διαιρετό» μπορεί να νοηθεί είτε ως

(1) Για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχει μια δυνατή κατάσταση s, τέτοια ώστε αυτό το σώμα να έχει διαιρεθεί σε περισσότερα από n μέρη στην s, ή

(2) Υπάρχει μια δυνατή κατάσταση s, τέτοια ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n αυτό το σώμα να έχει διαιρεθεί σε περισσότερα από n μέρη στην s.

Το (1) σημαίνει ότι οσοδήποτε μεγάλο φυσικό αριθμό σκεφτείτε, ας πούμε ένα τρισεκατομμύριο, αυτό το σώμα μπορεί να διαιρεθεί σε ακόμα περισσότερα μέρη. Το (2) σημαίνει ότι αυτό το σώμα μπορεί να διαιρεθεί σε ένα αριθμό μερών που είναι μεγαλύτερος από κάθε φυσικό αριθμό που μπορούμε να σκεφτούμε- επ' άπειρον. Ο Αριστοτέλης θα μπορούσε να δεχτεί το (1), αλλά θα έβρισκε το (2) αδύνατο να κατανοηθεί.

Αναφέρεται από τον Αριστοτέλη το παράδοξο του δρομέα του Ζήνωνα. Ο Ζήνων (490-430 π. Χ.) διατύπωσε ορισμένα παράδοξα για να θέσει επ' αμφιβόλω την έννοια της κίνησης. Πίστευε ότι ο ανθρώπινος νους παρασύρεται από τα φαινόμενα σε σφάλματα. Η κίνηση και η μεταβολή είναι απατηλά φαινόμενα για τον Ζήνωνα. Σύμφωνα με το εν λόγω παράδοξο, υποστηρίζεται ότι για έναν δρομέα για να τρέξει μια διαδρομή, πρέπει να τρέξει πρώτα τη μισή απόσταση ως το τέλος της διαδρομής. υποστηρίζεται ότι για έναν δρομέα για να τρέξει μια διαδρομή, πρέπει να τρέξει πρώτα τη μισή απόσταση ως το τέλος της διαδρομής. Πριν καταφέρει να τρέξει τη δεύτερη μισή διαδρομή, πρέπει να τρέξει το επόμενο τέταρτο της διαδρομής (δηλαδή το τρίτο τέταρτο της διαδρομής). Πριν μπορέσει να τερματίσει θα πρέπει να τρέξει το επόμενο όγδοο της απόστασης (δηλαδή το έβδομο όγδοο) και ούτω καθεξής επ' άπειρον. Αφού ο δρομέας πρέπει να εκτελέσει έναν άπειρο αριθμό βημάτων (καλύπτοντας ολοένα μικρότερες αποστάσεις) πριν τερματίσει, και να κάνει έναν άπειρο αριθμό βημάτων είναι αδύνατον, δεν μπορεί ποτέ να τερματίσει. Για να μετακινηθεί ένα σώμα πρέπει να διασχίσει τον χώρο. Τα παράδοξα έχουν συζητηθεί από πολλούς φιλοσόφους και έχουν ερμηνευτεί με διάφορους τρόπους.

Σύμφωνα με την M. Friend (2007), ένας τρόπος για να αντιμετωπίσουμε αυτό το παράδοξο είναι να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια «ελάχιστη» διαδρομή, και έτσι ο χώρος γίνεται διακριτά κομμάτια. Αν ο χώρος έχει ελάχιστες μονάδες, οι οποίες δεν μπορούν να διαιρεθούν περαιτέρω, τότε μπορούμε να πούμε ότι ο χώρος είναι «διακριτός». Έτσι, ο δρομέας δεν έχει έναν άπειρο αριθμό βημάτων να εκτελέσει ώστε να τερματίσει, αλλά μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό ελάχιστων μονάδων απόστασης για να διανύσει. Όμως εάν ο χώρος δεν είναι διακριτός τότε αυτή η απάντηση δεν είναι η καλύτερη. Αν σκεφτούμε επίσης το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας που διατύπωσε ο Ζήνων, είναι σωστό ότι ο Αχιλλέας πρέπει να φτάσει τη χελώνα για να την ξεπεράσει σε έναν αγώνα δρόμου, όπου η χελώνα προηγείται. Όμως η χελώνα προχωράει επίσης, άρα είναι ένας κινούμενος στόχος. Κάθε φορά που ο Αχιλλέας φτάνει στο σημείο που βρίσκεται η χελώνα, η χελώνα έχει προχωρήσει στη διαδρομή και έτσι ο Αχιλλέας δεν την φτάνει ποτέ. Αν ο χώρος είναι διακριτός, τότε θα υπάρχει μια τελευταία μονάδα απόστασης να διασχίσει ο Αχιλλέας μέχρι τη χελώνα, ώστε μετά να την ξεπεράσει. Επειδή ο Αχιλλέας τρέχει πιο γρήγορα από τη χελώνα, μπορεί να εκτελέσει περισσότερα βήματα σε λιγότερο χρόνο. Έτσι, φαίνεται να ενισχύεται η υπόθεση ότι χώρος θα έπρεπε να είναι διακριτός, όπως και ο χρόνος. Επομένως και η ταχύτητα θα απαρτίζεται και αυτή από διακριτές μονάδες. Όμως, σε αυτή την περίπτωση, δεν θα είχαμε τη λύση του παραδόξου. Επιλέγοντας ένα κινούμενο σημείο αναφοράς (στην προκειμένη περίπτωση τη χελώνα) μπορούμε να μειώσουμε εννοιολογικά την ταχύτητα. Όμως η ταχύτητα δεν είναι μόνο σχετική (με ένα σημείο αναφοράς), αλλά επίσης μπορεί να μειώνεται πάντα στο μισό. Θεωρητικά, θα μπορούσαμε να καταλαμβάνουμε οποιοδήποτε κινούμενο σημείο αναφοράς επιθυμούμε και άρα να υποδιαιρούμε τον χώρο και τον χρόνο επ' άπειρον. Επομένως, ο χώρος και ο χρόνος φαίνεται να είναι άπειρα διαιρετός (αλλάζοντας το σημείο αναφοράς από στατικό σε κινούμενο) και, επομένως, μη διακριτός.

Στην προσπάθεια να αντιμετωπίσουμε αυτά τα παράδοξα συνολικά, υπάρχουν δύο αντικρουόμενες ιδέες: η έννοια του χώρου και του χρόνου να είναι πάντα διαιρετές (το ονομάζουμε αυτό «παντού πυκνές») και αυτής του χώρου και του χρόνου ως διακριτές έννοιες. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει το ερώτημα: τι εννοούμε πραγματικά με το «επί της ουσίας άπειρο»; και έτσι οδηγούμαστε στη διάκριση «δυνάμει» και «ενεργεία» απείρου. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παράδοξα του Ζήνωνος είναι ότι υπήρχε μια σύγχυση στην επικρατούσα αντίληψη της εποχής για το άπειρο. Ο Ζήνων επιθυμούσε το συμπέρασμα που προκύπτει να είναι ότι στην πραγματικότητα, η κίνηση και η αλλαγή είναι απατηλές. Στη σημερινή εποχή, οι περισσότεροι μαθηματικοί θεωρούν ότι ο απειροστικός λογισμός είναι η λύση στα παράδοξα. Για τους φιλοσόφους όμως, ο λογισμός δεν απαντά στο εννοιολογικό πρόβλημα, αλλά προφέρει ένα τεχνικό τρόπο για τη λήψη αποτελεσμάτων (πρβλ. Friend, 2007).

Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (1985), αυτά τα παράδοξα δεν φαίνονται σαν παράδοξα σε έναν αναγνώστη με στοιχειώδεις γνώσεις στις σύγχρονες επιστήμες. Σε μια σύγχρονη αξιωματική θεωρία (για παράδειγμα τη θεωρία συνόλων Zermelo-Fraenkel) το ερώτημα για τη φύση του απείρου μπορεί να απαντηθεί χωρίς δυσκολία. Το αρχικό αριστοτελικό ερώτημα, όμως, έχει φιλοσοφικό χαρακτήρα οντολογικής υφής, σχετίζεται με τη γενεαλογία του απείρου και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Για τον Αριστοτέλη, το ανθρώπινο ον αποκτά μια αντίληψη του απείρου από «κάποια σταδιακή εξοικείωση με το γεγονός ότι υπάρχουν αντικείμενα και διαδικασίες που δεν μπορούν να εξαντληθούν»- δηλαδή, χωρίς πέρας. Επίσης, κατά την αριστοτελική αντίληψη, τα σημεία κατά μήκος ενός πεπερασμένου ευθύγραμμου τμήματος είναι μόνο δυνατότητες για αντίστοιχες πράξεις διαίρεσής του, και ανάλογα, το ίδιο ισχύει για τα «τώρα» σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Με άλλα λόγια, ούτε οι θέσεις ούτε τα «τώρα» υπάρχουν πραγματικά, αλλά μόνο σαν δυνατότητες, από τις οποίες μόνο πεπερασμένα πολλές μπορεί ο δρομέας να πραγματώσει. Ο δρομέας δεν μπορεί να πραγματώσει ένα άπειρο πλήθος νοητικών πράξεων μεταξύ δύο δεδομένων νοητικών πράξεων (δηλαδή της αυτοσυνείδησης της παρουσίας του στο τέλος και στην αρχή). Ο δρομέας είναι πεπερασμένο ον και μπορεί να συνειδητοποιήσει πεπερασμένες το πλήθος τομές στη διαδρομή. Δηλαδή ενεργοποιεί πεπερασμένες το πλήθος από άπειρες δυνατότητες τομών στην διαδρομή. Το ευθύγραμμο τμήμα διανύεται σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα με τρόπο συνεχή. Το παράδοξο εμφανίζεται ως τέτοιο γιατί, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, «υποτίθεται λανθασμένα πως κατά τη διάρκεια της κίνησης ο δρομέας έχει συνείδηση όλων των εγκοπών της αντίστοιχης διαδρομής που διανύει».

Ως φιλοσοφικό πρόβλημα τα παράδοξα του Ζήνωνα μπορούν να αντιμετωπιστούν εάν θεωρηθούν τα σημεία από τα οποία περνά ο δρομέας (αντίστοιχα ο Αχιλλέας ή η χελώνα) ως *δυνάμει* εγκοπές. Τώρα ο Αριστοτέλης είχε να αντιμετωπίσει την υποχρέωση στους γεωμέτρες για το άπειρο του χρόνου αθροιστικά. Επεσήμανε- σωστά- ότι αυτό που υποτίθεται σε κάποιο κλάδο των μαθηματικών σχετικά με τον χώρο και αυτό που πραγματικά ισχύει για τον φυσικό χώρο δεν χρειάζεται να ταυτίζονται. Επίσης επεσήμανε ότι δεν υπάρχει σαφής αναφορά του άπειρου χώρου στη γεωμετρία, παρά μόνο στα σημεία και τις πεπερασμένες ευθείες.

Έδωσε μια περιεκτική περίληψη σε δύο αποσπάσματα: «Γενικά, το άπειρο υπάρχει μέσω ενός πράγματος που λαμβάνεται μετά από ένα άλλο, ότι λαμβάνεται είναι πάντα πεπερασμένο , αλλά διατίθεται για πάντα κι άλλο, κι άλλο» (Αριστοτέλης, Φυσικά ΙΙΙ, 6, 206α27-9) και « Κάτι είναι άπειρο, αν λαμβάνοντάς το ποσότητα ανά ποσότητα, μπορούμε πάντα να πάρουμε κάτι απέξω» (Φυσικά ΙΙΙ, 6, 207 α6-8, Aristotle, 1983). Όλα τα στοιχεία είναι μέσα σε αυτά τα δύο αποσπάσματα: η ιδέα της χρονικής επέκτασης, η μεταφορά της σύλληψης, το πεπερασμένο κάθε στοιχείου μέσα στο άπειρο και η σημασία της μη επανάληψης. Ο Αριστοτέλης ήθελε να δώσει έμφαση στο ότι, για παράδειγμα ένα ομοιόμορφο κυκλικό ιπποδρόμιο δεν μπορεί να θεωρηθεί πραγματικά άπειρο- αν και δίνει την ευκαιρία για μια ατέλειωτη διαδρομή, γιατί το να πηγαίνεις από το ίδιο έδαφος ξανά και ξανά δεν ήταν ένδειξη για κάτι πραγματικά άπειρο. Το πρόβλημα, βέβαια, ήταν ότι το ιπποδρόμιο ήταν εκεί «όλο μαζί, ταυτόχρονα». Μια συνέπεια αυτής της θεωρίας, που ο Αριστοτέλης έπρεπε να τονίσει, ήταν ότι η οντολογική έννοια του απείρου (η πλήρης, ακέραια, ενιαία) δεν ήταν ακριβώς δική του. «Το άπειρο αποδεικνύεται ότι είναι», είπε «το αντίθετο από αυτό που λεγόταν ότι είναι. Δεν είναι αυτό που δεν έχει κανένα μέρος έξω από αυτό που είναι άπειρο, αλλά αυτό που πάντα έχει κάποιο μέρος έξω από αυτό» (Φυσικά ΙΙΙ, 6,206b34-7a1, Αριστοτέλης, 1983, Moore, 1990). Αυτό που απεχθανόταν ο Αριστοτέλης ήταν το οντολογικό άπειρο και άρα το «ενεργεία» άπειρο- ένα είδος ασυνάρτητου συμβιβασμού μεταξύ του οντολογικού και του μαθηματικού απείρου, μέσω του οποίου η απειρία υποτίθεται να είναι ολοκληρωμένη και πλήρως παρούσα όλη μαζί- ταυτόχρονα. Απεναντίας, το με ορθό τρόπο αντιληπτό μαθηματικό άπειρο με άλλα λόγια, το «δυνάμει» άπειρο ήταν, για τον Αριστοτέλη, ένα και το αυτό (Aristotle, 1984, Moore, 1990). Η απέχθεια προς το «*ενεργεία*» άπειρο κληρονομήθηκε στη μεταγενέστερη φιλοσοφική σκέψη. Αντίθετα, το «*ενεργεία*» άπειρο αναδείχθηκε στο μεγαλείο του, μέσω των μαθηματικών πολλούς αιώνες αργότερα, και μάλιστα με τη δουλειά του μαθηματικού Cantor.

Υπήρχε όμως ακόμη μια εναπομείνασα δυσκολία για να ξεπεραστεί από τον Αριστοτέλη. Επιχείρησε να κατανοήσει το άπειρο με το ερώτημα αν είναι προσπελάσιμο, και επομένως με αυτό που δεν μπορεί, σε καμία χρονική στιγμή να έχει προσπελαστεί. Αυτό φαίνεται εντάξει αν εστιάζουμε στο μέλλον. Τι γίνεται, όμως, με το παρελθόν; Πίστευε ότι το παρελθόν είναι αθροιστικά άπειρο. Υπάρχει μια σχετική και περίεργη ασυμμετρία στη διαίσθησή μας. Πίστευε ότι ο χρόνος δεν είχε αρχίσει ποτέ, και ότι υπήρχε πάντα κίνηση[2] (η περιστροφή των ουρανών). Και είναι δύσκολο να δεις ήδη σε αυτόν- το παρελθόν τώρα (αυτή τη στιγμή) είναι παρελθόν- μία ενδεχόμενη παρουσία του «ενεργεία» απείρου.

[2] Οι ουράνιες σφαίρες στο αριστοτελικό σύμπαν κάνουν αιώνιες κυκλικές ομαλές κινήσεις.

Ο Αριστοτέλης αντιμετώπισε το άπειρο στο Βιβλίο Ι των Φυσικών. Όταν όρισε τις αρχές του φυσικού κόσμου, ήθελε να ξεκινήσει μελετώντας τις πιο βασικές έννοιες, και για αυτόν η πιο βασική έννοια είναι αυτή του αριθμού. Όταν θεωρούμε ένα πράγμα, αυτό πρέπει να είναι είτε ένα, είτε περισσότερα από ένα. Αν είναι ένα, πρέπει να είναι είτε ακίνητο, είτε σε κίνηση. Αν είναι περισσότερα από ένα, πρέπει να είναι είτε πεπερασμένα είτε άπειρα. Έτσι, ο αριθμός, η κίνηση και το άπειρο έπρεπε να αντιμετωπιστούν πριν από οτιδήποτε άλλο στον φυσικό κόσμο. Ενώ η συνέχεια υπήρξε ουσιαστικό μέρος της γεωμετρίας τουλάχιστον από τον Ευκλείδη, οι αριθμοί συχνά θεωρούνταν η αντίθεση της συνέχειας. Ο Αριστοτέλης και άλλοι αρχαίοι Έλληνες θεώρησαν τη γεωμετρία ως την επιστήμη του χώρου (και έτσι κατά συνέπεια συνεχή) και την αριθμητική ως την επιστήμη των αριθμών. Η έννοια του αριθμού, για τον Αριστοτέλη, άρχισε με το 1, και η συλλογή αριθμών περιελάμβανε μόνο πολλαπλάσια του 1. Καθώς ο Αριστοτέλης πίστευε στο «δυνάμει», αλλά όχι στο «ενεργεία» άπειρο, υπήρχαν τόσοι πολλοί αριθμοί όσοι επιθυμούμε, αλλά σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη στιγμή έχουμε μόνο πεπερασμένα πολλούς αριθμούς. Επίσης, οι αριθμοί δεν ήταν με καμία έννοια άπειρα διαιρετοί- μπορείς να διαιρείς αριθμούς μέχρι να επιστρέψεις στον μικρότερο αριθμό : τη μονάδα.

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι σαφώς μη συνεχές- καθένας είναι μοναδικά αναγνωρίσιμος, δεν υπάρχει ομαλή σύνδεση μεταξύ τους, και είναι διακριτοί επειδή διαχωρίζονται ο ένας από τον άλλον. Ο Αριστοτέλης ήθελε να κατανοήσει πλήρως τη συνέχεια ώστε να καταλάβει τον χώρο, τον χρόνο και την κίνηση, τα οποία είδε όλα ως συνεχείς οντότητες. Ήθελε επίσης να αναπτύξει μια θεωρία για τη συνέχεια η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να ξεπεράσει τα παράδοξα του Ζήνωνα. Τα παράδοξα συνδέονται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Άπειρο και συνεχές ήταν για τον Αριστοτέλη ουσιωδώς συναρτημένα. Μόνο που το συνεχές για τον Αριστοτέλη αφορούσε κυρίως την «πυκνότητα», μια ιδιότητα που είναι γνωστή στους μαθηματικούς.

Ο Αριστοτέλης για τη συνέχεια

Ο Αριστοτέλης εξομοίωσε ρητά τη συνέχεια με την άπειρη διαιρετότητα. Έτσι, για αυτόν, «το συνεχές είναι επ' άπειρον διαιρετό» και αντίστροφα «αυτό που είναι άπειρα διαιρετό είναι συνεχές» (Αριστοτέλης, Φυσικά, Ι, 185b10, ΙΙΙ, 200b18). Ο Αριστοτέλης είχε υπόψη ότι μεταξύ δυο οποιωνδήποτε τομών είναι δυνατό να υπάρξει μια ενδιάμεση. Κατανοούσε την «πυκνότητα» η οποία όμως (όπως σήμερα γνωρίζουμε) δεν επαρκεί για την περιγραφή του συνεχούς.[3]

[3]Η έννοια του συνεχούς προσδιορίστηκε από τους μαθηματικούς τον 19^{ο} αι. Τα σημεία της πραγματικής ευθείας αντιστοιχούν 1-1 με τους πραγματικούς αριθμούς. Η πραγματική ευθεία έχει την ιδιότητα της *πληρότητας και όχι απλώς της πυκνότητας*.

Η διαίσθησή μας σχετικά με τη συνέχεια, μας λέει ότι οντότητες που καταστρέφονται από πολλαπλές διαιρέσεις δεν μας φαίνονται συνεχείς. Αν διαιρέσουμε μια μονάδα χώρου, το αποτέλεσμα θα είναι ακόμα μία μονάδα χώρου. Αν διαιρέσουμε ένα τραπέζι, το αποτέλεσμα θα είναι καυσόξυλα. Τα τραπέζια δεν είναι, ως εκ τούτου, συνεχή. Ωστόσο, υπογραμμίζοντας την άπειρη διαιρετότητα, ο Αριστοτέλης δεν επικαλείται απλά την ιδέα ότι ο χώρος δεν καταστρέφεται από τη διαίρεση. Πήγε πέρα από την απλή διαίσθηση που εκφράστηκε παραπάνω: «Με τη συνέχεια εννοώ ότι αυτό το οποίο είναι διαιρετό, είναι διαιρετό σε διαιρετά που είναι πάντα διαιρετά» (Αριστοτέλης, Φυσικά, VI, 232b23). Με άλλα λόγια, πίστευε ότι δεν μπορεί να υπάρξει τέλος στη διαίρεση μιας συνεχούς οντότητας- κανένα ελάχιστο μέρος δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω διαίρεσης. Αυτό είναι ένα πρώιμο παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε «ανακλαστική ιδιότητα» της συνέχειας, δηλαδή τα μέρη του συνεχούς πρέπει να έχουν κάποια ποιοτική ομοιότητα με το συνεχές ως όλο. Εδώ, αυτή η ομοιότητα υπάρχει με τη μορφή συνεχούς διαιρετότητας.

Ο Αριστοτέλης κατανοούσε τη συνέχεια ως άπειρη διαιρεσιμότητα. Έτσι, η αμφιβολία του Αριστοτέλη αφορά τα σημεία: ένα σημείο δεν μπορεί να είναι μέρος του συνεχούς. Αυτό δε σημαίνει ότι η ευθεία γραμμή δεν περιέχει καθόλου σημεία, αλλά ότι διαδοχικές διαιρέσεις της ευθείας δεν παράγουν ποτέ σημεία ή οτιδήποτε άλλο μη διαιρετό[4]- η ευθεία δεν μπορεί ποτέ να αναλυθεί (να αποσυντεθεί) σε σημεία (Αριστοτέλης, Φυσικά, VI, 232a4).

Το επιχείρημά του για τη μη συνθετικότητα της γραμμής από σημεία βασίζεται σε μια τριμερή διάκριση: τα πράγματα «δίπλα» το ένα στο άλλο είναι είτε σε διαδοχή, είτε σε γειτονία, είτε σε συνέχεια. Αυτή δεν είναι μια αποκλειστική διάζευξη, καθώς γειτονικά πράγματα είναι επίσης σε διαδοχή, και συνεχόμενα πράγματα είναι γειτονικά- η διάκριση είναι μάλλον θέμα εγγύτητας.

Επίσης, με αυτόν τον ορισμό ο Αριστοτέλης εννοεί ότι αυτοί είναι οι μόνοι τρεις τρόποι με τους οποίους δύο πράγματα μπορεί να είναι το ένα «δίπλα» στο άλλο (Buckley, 2008, 20-21). Εν ολίγοις, η τριμερής αυτή διάκριση είναι η εξής: δύο πράγματα είναι σε διαδοχή αν το ένα αμέσως ακολουθεί το άλλο χωρίς κάποιο του ίδιου είδους ανάμεσά τους. Θα μπορούσε να υπάρχει κάτι διαφορετικού είδους ανάμεσά τους (όπως ο αέρας ανάμεσα σε δύο άτομα σε μια ουρά αναμονής αλλά δεν υπάρχει τρίτο άτομο μεταξύ τους).

[4]Το σημείο θεωρείται μη διαιρετό. Αυτή η άποψη είχε υποστηριχθεί από διάφορους φιλοσόφους που «σκανδαλίζονταν» από το status των σημείων. Σε μια περίοδο της ζωής του είχε και ο φιλόσοφος Peirce εκφράσει παρόμοιες απόψεις (βλ. Peirce and Leibniz on the continuity and the continuum των Αναπολιτάνου και Χριστοπούλου στο Metaphysica, 21 (1), 115-128.) Ο Peirce (19^{ος} αι.), ωστόσο, είχε ενημέρωση για τη θεμελίωση της *πραγματικής ευθείας* και για την 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ σημείων και πραγματικών αριθμών. Όμως, διατύπωνε δικές του αντιλήψεις σύμφωνα με τις διαισθήσεις του για να κατανοήσει το συνεχές που ήταν μαθηματικά λανθασμένες.

Δύο πράγματα είναι γειτονικά αν είναι σε διαδοχή και το εξωτερικό άκρο του ενός ακουμπά το εξωτερικό άκρο του άλλου (Δύο βιβλία το ένα δίπλα στο άλλο στο ράφι είναι γειτονικά αν τα εξώφυλλά τους είναι σε φυσική επαφή, και είναι διαδοχικά επειδή δεν υπάρχει τρίτο βιβλίο ανάμεσά τους). Τέλος, δύο πράγματα είναι συνεχή αν τα εξωτερικά άκρα τους, αντί να αγγίζονται είναι στην πραγματικότητα ένα- δηλαδή, τα συνεχή πράγματα μοιράζονται ένα εξωτερικό άκρο. (Όπως δύο χώρες που μοιράζονται τα ίδια σύνορα.)

Έχοντας αυτή τη διάκριση στο νου, και με βάση τον Buckley (2008, 20-21) ας δούμε το *επιχείρημα του Αριστοτέλη* για το συμπέρασμα ότι το συνεχές δεν μπορεί να αποτελείται αποκλειστικά από *αδιαίρετα* (Αριστοτέλης, Φυσικά, VI, 231a18-231b16): *Ας υποθέσουμε (για την εις άτοπον απαγωγή) ότι υπάρχει ένα συνεχές που αποτελείται αποκλειστικά από αδιαίρετα (όπως τα σημεία). Τότε έπεται ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία που το ένα είναι δίπλα στο άλλο- γιατί αν δεν υπήρχαν, τότε είτε θα υπήρχε κενό ανάμεσά τους και άρα το συνεχές θα είχε διακοπές, είτε θα υπήρχε κάτι που δεν θα ήταν σημείο ανάμεσά τους, κι έτσι το συνεχές δεν θα αποτελούνταν αποκλειστικά από σημεία. Αυτά δεν θα μπορούσαν να είναι απλά σε διαδοχή, καθώς αυτό θα επέτρεπε κενά που θα κατέστρεφαν τη συνέχεια. Τώρα, σύμφωνα με την προηγούμενη διάκριση, είτε θα ήταν γειτονικά, είτε συνεχή. Ωστόσο, η γειτονία απαιτεί οι γειτονικές οντότητες να έχουν εξωτερικά άκρα τα οποία ακουμπούν το ένα το άλλο. Τα σημεία, όμως, είναι αδιαίρετα και έτσι χωρίς μέρη, και άρα δεν είναι δυνατό να έχουν τέτοια άκρα.*

Έτσι, απομένει μόνο μία προοπτική, τα σημεία πρέπει να είναι το ένα δίπλα στο άλλο με συνεχή τρόπο, δηλαδή να αγγίζονται ώστε τα άκρα τους να είναι ένα. Όμως, όπως επισημάναμε, τα σημεία είναι αδιαίρετα και άρα δεν έχουν καθόλου μέρη, επομένως κανένα μέρος ενός σημείου δεν μπορεί να ακουμπά ένα μέρος ενός άλλου σημείου. Ο μόνος τρόπος με τον οποίο αυτά τα γειτονικά σημεία θα μπορούσαν να είναι το ένα δίπλα στο άλλο είναι να ακουμπά το ένα το άλλο με το να είναι στην ίδια ακριβώς θέση, δηλαδή να είναι «σε επαφή μεταξύ τους όπως το όλο με το όλο» (Αριστοτέλης, Φυσικά, VI, 231b2-3). *Όμως, αν ήταν έτσι, ολόκληρο το συνεχές θα ήταν η επέκταση ενός μοναδικού σημείου, το οποίο είναι αδύνατο, καθώς το συνεχές είναι άπειρα διαιρετό, και τα σημεία είναι αδιαίρετα. Καθώς έχουμε εξαντλήσει όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους δύο πράγματα μπορεί να είναι το ένα δίπλα στο άλλο, πρέπει να συμπεράνουμε ότι δύο σημεία σε μία ευθεία δεν μπορούν να είναι το ένα δίπλα στο άλλο με κανένα τρόπο. Επειδή η υπόθεσή μας ότι υπήρχε ένα συνεχές που αποτελείται αποκλειστικά από σημεία μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι δύο σημεία σε μία ευθεία δεν μπορούν να είναι το ένα δίπλα στο άλλο, πρέπει να συμπεράνουμε ότι το συνεχές δεν μπορεί να αποτελείται αποκλειστικά από σημεία* (Buckley, 2008).

Το πρώτο βήμα αυτού του επιχειρήματος (ο ισχυρισμός ότι αν ένα συνεχές αποτελείται από σημεία συνεπάγεται ότι δύο σημεία πρέπει να είναι το ένα δίπλα στο άλλο) αντιτίθεται στην ιδιότητα της πυκνότητας της γεωμετρικής ευθείας (όμοια και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών): μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, υπάρχει πάντα ένα άλλο σημείο. Αυτό το τρίτο σημείο δεν αποτελεί κενό στο συνεχές και δεν αποτελεί μια οντότητα που δεν είναι σημείο, επομένως, αυτή η τρίτη εναλλακτική δεν έχει αποκλειστεί από τον Αριστοτέλη. Δηλαδή, δύο σημεία δεν μπορούν να είναι το ένα δίπλα στο άλλο, αλλά αυτό που παρεμβαίνει ανάμεσά τους δεν είναι κάτι που διαταράσσει τη συνέχεια, γιατί είναι απλά περισσότερα σημεία.

Ο Αριστοτέλης χρησιμοποίησε το τριμερές επιχείρημα για να αποδείξει ότι ένα συνεχές δεν μπορεί να αναλυθεί σε αδιαίρετα. Είναι σαφές ότι ένα συνεχές είναι διαιρετό σε διαιρετά που είναι πάντα διαιρετά. Αν μία διαίρεση ενός συνεχούς παράγει, αντί για δύο μέρη που είναι τα ίδια συνεχή και απείρως διαιρετά, δύο μέρη που είναι αδιαίρετα, αυτά θα συνδέονταν συνεχώς, αλλά αυτό σημαίνει ότι θα μοιράζονταν «σύνορα». Όμως, όπως απέδειξε ο Αριστοτέλης στο τελευταίο επιχείρημα, αδιαίρετες οντότητες δεν έχουν σύνορα για να μοιραστούν, και έτσι μια τέτοια διαίρεση είναι αδύνατη (Buckley, 2008). Όπως προαναφέραμε, ο Αριστοτέλης δεν διέθετε βέβαια κάποια έννοια *πληρότητας* την οποία βρίσκουμε στο 19^{ο} αι. και έπειτα. Ο Αριστοτέλης βέβαια κατανοεί την πυκνότητα όμως το αν προσπαθεί να πει κάτι περισσότερο είναι ένα ερευνητικό θέμα.

Ας δούμε τώρα μια άλλη ερμηνεία για την αριστοτελική σκέψη σχετικά με τα σημεία (Αναπολιτάνος, 1985): τα σημεία της ευθείας μπορούν να νοηθούν από τον Αριστοτέλη μόνο ως *δυνάμει*. Μόνον μέσω εγκοπών που πραγματοποιεί ένας ανθρώπινος νους μπορούν να ενεργοποιηθούν δυνάμει σημεία και να γίνουν υπαρκτά. «Τα σημεία *δεν υπάρχουν πραγματικά* πριν από την πράξη ή τις πράξεις τομής ενός δεδομένου μήκους ΑΒ. Το μήκος ΑΒ δηλαδή, υπάρχει και είναι πρότερο των σημείων του, με την έννοια πως είναι ο *δυνητικός* υποδοχέας τους. Μια βασική του ιδιότητα είναι πως μπορεί να τμηθεί οπουδήποτε. Αυτό σημαίνει, πως απείρως πολλά δυνητικά σημεία αναμένουν υπομονετικά (!) τη συγκεκριμένη πράξη τομής, που θα μετασχηματίσει τον τρόπο ύπαρξής τους από δυνητικό σε πραγματικό. Αναμένουν υπομονετικά γνωρίζοντας (!) πως η αναμονή αυτή θα πρέπει να διαρκέσει μέχρι το τέλος του άπειρα ρέοντος χρόνου, αν θέλουν να δουν άπειρα ως προς το πλήθος αδέλφια τους να γεννώνται κάτω από αντίστοιχες πράξεις τομής του ΑΒ. Ένα σημείο, χαμένο κάπου μέσα σ’ αυτή την ολότητα που λέγεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, υπάρχει, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, με έναν τρόπο δεύτερης ποιότητας. Ο τρόπος αυτός δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια διαρκής, σταθερή και παραμένουσα δυνατότητα διαίρεσης του ΑΒ. Το συνεχές ορίζεται, λοιπόν, για τον Αριστοτέλη, από τη δυνατότητα ατέρμονης διαιρετότητάς του. Σε αυστηρή γλώσσα θα μπορούσαμε να πούμε πως χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα πως μεταξύ δύο οποιωνδήποτε τομών του *μπορούμε πάντα να προβούμε σε μια τρίτη*. Η ιδιότητα αυτή είναι τελείως ανάλογη με τη γνωστή ιδιότητα που χαρακτηρίζει κάθε γραμμικά διατεταγμένο και παντού πυκνό σύνολο σημείων, σύμφωνα με την οποία μεταξύ δύο σημείων του υπάρχει πάντα ένα τρίτο σημείο του (Αναπολιτάνος, 1985, σελ.68-69).

Η διαφοροποιημένη άποψη του Αρχιμήδη για τη συνέχεια

Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (281-212 π. Χ.) σημείωσε σημαντική μαθηματική πρόοδο απορρίπτοντας αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό της συνέχειας που δεχόταν ο Αριστοτέλης, και αντίθετα θεώρησε το συνεχές ως διαιρετό σε αδιαίρετες οντότητες. Η υπόθεση μιας οντότητας που περιέχει άπειρα πολλά αδιαίρετα αντικείμενα ήταν ένα κλειδί στην Αρχιμήδεια «μέθοδο εξάντλησης»[1], ένα εκπληκτικά ακριβές σύστημα που χρησιμοποίησε για να υπολογίσει φαινομενικά ανυπολόγιστα γεωμετρικά σχήματα και χαρακτηριστικά. Αυτή η μέθοδος είναι συγγενής από πολλές απόψεις με τον λογισμό του Newton και του Leibniz. Πράγματι επηρέασε πολύ τους μαθηματικούς του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα και έθεσε τη βάση για την ανάπτυξη του ίδιου του λογισμού.

Η μέθοδος της «εξάντλησης» εμπλέκει πρώτα την εγγραφή του σχήματος που πρόκειται να μετρηθεί με άπειρα πολλά σχήματα ενός συγκεκριμένου είδους. Για παράδειγμα, για τη μέτρηση ενός παραβολικού χωρίου, πρώτα ενέγραψε ένα τρίγωνο μέσα σε αυτό. Μετά θα ενέγραφε μικρότερα τρίγωνα, τα οποία θα έχουν για βάσεις τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Οι πλευρές αυτών των τριγώνων κατόπιν χρησιμοποιούνται ως βάσεις για τα καινούργια εγγεγραμμένα τρίγωνα, και με αυτόν τον τρόπο ο Αρχιμήδης λαμβάνει «μία ακολουθία πολυγώνων με ακόμα μεγαλύτερο αριθμό πλευρών… Μετά απέδειξε ότι το εμβαδόν του n-οστου τέτοιου πολυγώνου δίνεται από τη σειρά: $A\cdot(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}) = \frac{4}{3}\cdot A$ Όπου Α είναι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τριγώνου που έχει την ίδια κορυφή και βάση όπως το τμήμα», το τμήμα είναι το αρχικό παραβολικό χωρίο που ήταν για μέτρηση» (Boyer, 1959, p.52 στο Buckley, 2008) .

[1] ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ: Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.) επινόησε τη «μέθοδο της εξάντλησης». Η μέθοδος χρησιμοποιεί ουσιαστικά και κατ' αναλογίαν τα σημερινά «αθροίσματα Reimann» επιτυγχάνοντας (άνω και) κάτω φράγματα της ζητούμενης γεωμετρικής ποσότητας (π.χ. εμβαδού ή όγκου) με την κατασκευή μιας γνήσια αύξουσας ακολουθίας $β_n$ εμβαδών ή όγκων εγγεγραμμένων σχημάτων και μιας γνήσια φθίνουσας ακολουθίας $α_n$ εμβαδών ή όγκων αντίστοιχων περιγεγραμμένων γεωμετρικών μεγεθών, μεταξύ των οποίων βρίσκεται η ζητούμενη γεωμετρική ποσότητα Α, η οποία θέλουμε να δείξουμε ότι ισούται με μία γνωστή εκ των προτέρων ποσότητα Β. (Προϋπόθεση είναι η γνώση της τιμής της ποσότητας Β στην οποία οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί έφταναν διαισθητικά). Με την τιμή Β γνωστή, την χρήση της ιδιότητας Αρχιμήδους-Ευδόξου, και μία διπλή απαγωγή σε άτοπο καταλήγουμε στην ποσότητα Α.(Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1987). Ο Εύδοξος απέδειξε ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους (12^{ο} βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη) στηριζόμενος στη θεωρία των λόγων (5^{ο} βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη) και στην έννοια της έμμεσης απόδειξης, με τον εγκλεισμό του κύκλου ανάμεσα σε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα, οι επιφάνειες των οποίων διαφέρουν λιγότερο από οποιαδήποτε δεδομένη επιφάνεια. Η προσέγγιση και ο υπολογισμός εμβαδών με τη μέθοδο της εξάντλησης έχει άμεση εξάρτηση με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών (πληρότητα). Η μέθοδος της εξάντλησης εμπεριέχει τη σύγχρονη έννοια του ορίου γιατί τα εγγεγραμμένα πολύγωνα προσεγγίζουν τον κύκλο, δηλαδή η διαφορά τους μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε επιφάνεια (Van der Waerden, 1954). Ο Αρχιμήδης (στο έργο του Κύκλου Μέτρησις) προσεγγίζει τον αριθμό π με μια τέτοια διαδικασία ολοκλήρωσης- εύρεσης εμβαδού.

Έτσι, θεωρούμε το εμβαδόν μέσα στο παραβολικό χωρίο ως αποτελούμενο από άπειρα πολλά απείρως μικρά τρίγωνα, που δημιουργούν ένα πολύγωνο με άπειρα πολλές πλευρές. Όμοια, ο Αρχιμήδης θα περιέγραφε ένα τρίγωνο γύρω από το πολύγωνο και θα περιέγραφε απείρως μειούμενα τρίγωνα μεταξύ του μεγαλύτερου τριγώνου και των εξωτερικών τοίχων του παραβολικού τμήματος, σχηματίζοντας ένα άλλο πολύγωνο άπειρα πολλών πλευρών. Αυτή η εξίσωση στο απόσπασμα του Boyer παραπάνω θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί με τη θεωρία ορίων για να βρεθεί το μήκος της καμπύλης και το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου, αλλά ο Αρχιμήδης δεν είδε αυτή την ταυτόχρονη εγγραφή και περιγραφή των πολυγώνων με ολοένα μικρότερες πλευρές ως προσέγγιση ενός ορίου. Μάλλον, μετά την εγγραφή και την περιγραφή των δύο διαφορετικά άπειρων πολυγώνων, υποστήριξε με μία διπλή εις άτοπον απαγωγή ότι το παραπάνω παραβολικό χωρίο «δεν θα μπορούσε να είναι ούτε μικρότερο ούτε μεγαλύτερο από 4/3·Α» (Buckley, 2008).

Ο Αρχιμήδης δεν λειτουργούσε με την έννοια του ορίου, ούτε προσπάθησε να διατυπώσει τυχόν γενικευμένα μέσα εύρεσης εμβαδού τέτοιων σχημάτων, αλλά μάλλον περιορίστηκε στην εγγραφή και περιγραφή, χρησιμοποιώντας διαφορετικά εγγεγραμμένα σχήματα όπως κάθε σχήμα απαιτούσε. Έτσι, αν και είχε πολύ μεγάλη επιρροή στους μαθηματικούς που βοήθησαν να δημιουργηθεί ο λογισμός, αυτός ο ίδιος δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι ανακάλυψε τον λογισμό. Είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, να τονιστεί ότι ένα είδος απειροστών υπολογισμών χρησιμοποιούνταν ήδη από τον Αρχιμήδη. Στην πραγματικότητα, αν οι μεσαιωνικοί φιλόσοφοι και μαθηματικοί είχαν επηρεαστεί λιγότερο από τον Αριστοτέλη και περισσότερο από τον Αρχιμήδη, είναι πιθανό ότι ο λογισμός ή κάτι παρόμοιο μπορεί να είχε ανακαλυφθεί πολύ νωρίτερα, βασισμένος σε αυτές τις Αρχιμήδειες έννοιες.

Μεσαιωνική και Αναγεννησιακή σκέψη περί απείρου.

Δύο πράγματα κυριαρχούν στη μεσαιωνική και αναγεννησιακή φιλοσοφία γενικά, και στη φιλοσοφική σκέψη για το άπειρο ειδικότερα: η κληρονομιά των Ελλήνων και η θρησκεία. Η θρησκεία σε αυτό το πλαίσιο συγκεκριμένα σήμαινε Χριστιανισμός, αλλά όχι αποκλειστικά. Και η κληρονομιά των Ελλήνων ήταν μάλλον η κληρονομιά του Αριστοτέλη, αν και μετριάζεται από σκέλη του Πλατωνισμού. Αρχικά, ωστόσο, υπήρξε κάτι σαν αντίδραση κατά του Αριστοτέλη και μία επιστροφή στις ιδέες του Πλάτωνα, αν και μετριασμένη από όψεις του Αριστοτελισμού.

Ο Πλωτίνος (205-270 μ.Χ.) έπαιξε έναν σημαντικό ρόλο εδώ. Γεννήθηκε πιθανώς στην Αίγυπτο μάλλον στο τέλος της αρχαιότητας παρά στο μεσαίωνα και ήταν ένας εξελληνισμένος Αιγύπτιος. Υποστήριζε σθεναρά τις ιδέες του Πλάτωνα και ουσιαστικά εισήγαγε τον Νεοπλατωνισμό, που είχε βαθιά επίδραση στη χριστιανική σκέψη. Πρώτα απ' όλα ήθελε να επανεγκαταστήσει την πολύ βασική διάκριση αισθητών και νοητικών – αναπόσπαστο μέρος της θεωρίας του Πλάτωνα, και πριν από αυτόν του Παρμενίδη και των Ελεατών. Πίστευε σε ένα εντελώς υπερβατικό βασίλειο του «Είναι» που υπόκειται και υποστηρίζει- αν και είναι εντελώς ξεχωριστά από αυτά- όλα αυτά για τα οποία έχουμε άμεση εμπειρία. Αυτό ερχόταν σε αντίθεση με τη νατουραλιστική Αριστοτελική προσπάθεια προσέγγισης του μαθηματικού απείρου και την αποκήρυξη του οντολογικού *ενεργεία* απείρου. Ο Πλωτίνος αναφερόταν στη βαθύτερη πραγματικότητα κάποιες φορές ως «το Έν» (με μία Ελεατική διάθεση), κάποιες φορές ως «το Αγαθόν» (με μία πιο Πλατωνική διάθεση) και κάποιες φορές ως Θεό, αλλά επίσης και ως άπειρο, και το εξηγούσε έτσι ώστε να είναι σαφές ότι εννοούσε το οντολογικό άπειρο. Το ονόμαζε αυτάρκες, τέλειο και παντοδύναμο, μία πλήρη και αγνή ενότητα, εντελώς υπεράνω της πεπερασμένης εμπειρίας μας. Επίσης έλεγε ότι ήταν «υπερβολικά επαρκές, αυτόνομο, υπερέχει όλων και εντελώς χωρίς ανάγκη» (Πλωτίνος, VI, 9, 6). Επεσήμανε ότι όλες μας οι προσπάθειες να μιλήσουμε για αυτό ή να το ορίσουμε ήταν αναπόφευκτα ανεπαρκείς. Παρόλα αυτά προσπάθησε να το εκφράσει όσο μπορούσε με λέξεις, έτσι το ταύτισε με τον Θεό. Αν και δεσμευόταν σε αυτά στα οποία ο Αριστοτέλης εναντιώθηκε, είχε μία πλήρως Αριστοτελική αντίληψη του απείρου στην περίπτωση του αισθητού κόσμου. Έτσι, αρνήθηκε ότι υπήρχε άπειρος αριθμός, και ότι υπήρχε οποιαδήποτε επέκταση μεταξύ των αισθητών όντων. Αλλά αναγνώριζε τη δυνατότητα της μαθηματικής απειρίας του χρόνου, υποστηρίζοντας ότι, σε αντίθεση με το οντολογικό άπειρο (ή με τα δικά του λόγια «το άμεσο άπειρο») πρέπει να υπάρχει «αυτό το οποίο τείνει …στην απειρία, τείνοντας σε ένα διαρκές μέλλον» (Πλωτίνος, III, 7, 11, Moore, 1990).

Κάτι παρόμοιο υποστήριζε και ο Άγιος Αυγουστίνος (354-430 μ.Χ.), που γεννήθηκε στην Ταγάστη, στη βόρεια Αφρική (Αλγερία), έναν από τους πρώτους και μεγαλύτερους στοχαστές του μεσαίωνα. Ήταν βαθιά επηρεασμένος από το Νεοπλατωνισμό, και προσπαθούσε να συνδυάσει μεγάλο μέρος του με τον Χριστιανισμό. Αντιστάθηκε στην ισχυρή έμφαση της εμπειρίας- αντίθετα από τον Αριστοτέλη, και αυτό τον έκανε ικανό να αναγνωρίσει, μαζί με τον Πλωτίνο, ένα άπειρο πολύ περισσότερο από απλά δυνητικό. Το θέμα ήταν ότι δεν μπορούμε να έχουμε άμεση εμπειρία από αυτό (όπως απέδειξε ο Αριστοτέλης). Στη συνείδηση του Αυγουστίνου, ο Θεός ήταν πραγματικό και υπερβατικό άπειρο. Ήταν άπειρος με την έννοια ότι ήταν ικανός να γνωρίζει την ολότητα των φυσικών αριθμών για παράδειγμα - αν και έτσι το «έκανε πεπερασμένο», δηλαδή το περιόριζε με τη γνώση του με μία έννοια που εμείς δεν μπορούμε να εκφράσουμε (Augustine, 1945,XII, 18). Όπως και ο Πλωτίνος, θεωρούσε ότι ο χρόνος είναι άπειρος, χωρίς όμως να είναι ποτέ παρών όλος μαζί ταυτόχρονα, ούτε και ποτέ προϋπήρχε όλος μαζί ταυτόχρονα. Το μέλλον δεν υπάρχει στην πραγματικότητα- δεν έχει δοθεί ακόμα- στο παρόν. Η «αιωνιότητα» του Θεού, με αυτή την αντίληψη, στο μέτρο του ότι ήταν όλη παρούσα ταυτόχρονα, έπρεπε να είναι κάτι υπαρκτό μόνον υπερβατικά (Augustine, 1961, XI, 11-14). Αυτή ήταν μια άποψη που έγινε δεκτή από πολλούς μεταγενέστερα Νεοπλατωνικούς στοχαστές, όπως τον Βοήθιο.

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτής της περιόδου, πριν ακόμα γίνει ο Αριστοτέλης ένα είδος αυθεντίας για τη μεσαιωνική σκέψη, ήταν οι προσπάθειες που έγιναν για να ενσωματωθούν οι απόψεις του στο χριστιανισμό με βασικά δόγματα. Έτσι προέκυψαν δύο δυσκολίες:

(1) Ο Αριστοτέλης αρνήθηκε τη δυνατότητα του «ενεργεία» απείρου. Αλλά αυτό έπρεπε να συμβιβαστεί με την παντοδυναμία του Θεού. Δεν θα δημιουργούσε ο Θεός κάτι πραγματικά άπειρο αν ήθελε;

(2) Η Αριστοτελική θεωρία είχε ήδη παρουσιάσει μια δυσκολία σε σχέση με την κατανόηση του παρελθόντος. Ο Αριστοτέλης είχε μετριάσει αυτή τη δυσκολία με το να αρνηθεί ότι η διαδοχή του χρόνου περιείχε μια σταθερή συσσώρευση διαρκών πραγμάτων. Αλλά η πίστη στην αθανασία της ψυχής σήμαινε ότι ένας άπειρα παλιός κόσμος θα παρήγαγε ή τουλάχιστον θα μπορούσε να παράγει ένα «ενεργεία» άπειρο αριθμό ψυχών.

Όπως θα δούμε πιο κάτω, υπήρχαν και άλλα σημεία τριβής σχετικά με τις αντιλήψεις του Αριστοτέλη. Κάποιοι Νεοπλατωνιστές αρνήθηκαν ότι θα γινόταν έτσι, επικαλούμενοι τη μετεμψύχωση. Μεταγενέστεροι στοχαστές που αποδέχθηκαν την αλήθεια της Ιουδαϊκής, Χριστιανικής ή Ισλαμικής θρησκείας, ματαίωσαν τη δυσκολία (2) με το να αρνηθούν την Αριστοτελική πίστη σε έναν κόσμο με άπειρο παρελθόν. Αυτό ήταν που έκανε ο Αυγουστίνος (Augustine, 1945, XII, 20). Όπως και ο Αριστοτέλης, αλλά και πολλοί άλλοι αυτής της περιόδου, πίστευαν ότι ο χρόνος περιελάμβανε κίνηση: αν ο κόσμος ήταν πεπερασμένα παλιός τότε το ίδιο ήταν και ο χρόνος (Augustine, 1945, XI, 10-13, Moore, 1990).

Ο Ιωάννης ο Φιλόπονος (τέλος του 5^{ου} αι. μέχρι και μετά το 550μ.Χ.) γεννημένος στην Καισαρεία, ζούσε στην Αλεξάνδρεια και πίστευε ότι ο κόσμος είχε πεπερασμένο παρελθόν.

Το επιχείρημα του Φιλόπονου: Οσοδήποτε πολλοί άνθρωποι υπήρχαν πριν από τον Σωκράτη, έχουν υπάρξει περισσότεροι μέχρι τώρα. Όσο πολλούς μήνες υπήρξε ο κόσμος, υπήρξε πάνω από τριάντα φορές τόσες ημέρες. Έτσι, αν οι αριθμοί εδώ ήταν άπειροι, ένα άπειρο θα ήταν μεγαλύτερο από το άλλο. Αλλά αυτό είναι άτοπο. Άρα οι αριθμοί πρέπει να είναι πεπερασμένοι, επομένως ο κόσμος πρέπει να έχει πεπερασμένο παρελθόν.

Ο Avicenna (980-1037μ.Χ.) ένας ισλαμιστής Πέρσης φιλόσοφος προσπάθησε να αποδυναμώσει τη (2) υποστηρίζοντας ότι ένα «ενεργεία» άπειρο ψυχών δεν ήταν προβληματικό εφόσον δεν είχαν διαταχθεί με κανέναν τρόπο. (Τα παράδοξα των απείρως μεγάλων φαίνεται να οφείλονται σε μια φυσική διάταξη των συνόλων που εξετάζονται). Ο επίσης ισλαμιστής Πέρσης φιλόσοφος Abu Hamid Myhammad Ghazali (1059-1111μ.Χ.) απάντησε ότι οι ψυχές θα διατάσσονταν χρονικά, σύμφωνα με το πότε γεννήθηκαν. Η δική του λύση ήταν ίδια όπως του Αυγουστίνου και του Φιλόπονου: να δεχτεί τη θρησκευτική ορθοδοξία και απλά να αρνηθεί ότι ο κόσμος είχε άπειρο παρελθόν (Moore, 1990).

Ο θεολόγος Άγιος Θωμάς Ακινάτης (1224-1274 μ. Χ.) ήταν θεμελιωτής του Καθολικισμού. Η σκέψη του χαρακτηριζόταν από τον Αριστοτελισμό, όμως έπρεπε να τον συνδυάσει με τον Χριστιανισμό. Πίστευε σε ένα οντολογικό άπειρο, το οντολογικό άπειρο του Θεού, το οποίο δεχόταν ότι ήταν αυτοδύναμο και τέλειο. Δεν πίστευε ότι ο Θεός ήταν μαθηματικά άπειρος, αφού αυτό θα σήμαινε ότι θα είχε μέρη και γι' αυτό να μην είναι τέλειος (Aquinas, I, vii, 1). Επίσης, θεωρούσε ότι τίποτα στη δημιουργία δεν ήταν οντολογικά άπειρο εξ ορισμού: το να είναι κάτι δημιουργημένο, σημαίνει ακριβώς να μην είναι αυτάρκες, αυτόνομο. Πίστευε, ακόμη, ότι πουθενά στη δημιουργία δεν υπήρχε ένα «ενεργεία» μαθηματικό άπειρο, ούτε ως μέγεθος, ούτε ως πολλαπλότητα. Δεχόταν όμως το «δυνάμει» άπειρο, ουσιαστικά με Αριστοτελικά επιχειρήματα. Πίστευε ότι, επειδή θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε (για παράδειγμα) τι ήταν η greenness («πρασινότητα»: η ιδιότητα να είναι κάτι πράσινο), και θα μπορούσαμε γι' αυτό να αναγνωρίζουμε άπειρα πράγματα ως πράσινα, έχουμε ένα είδος άπειρης δύναμης, αλλά από την άλλη πλευρά δε σημαίνει ότι αυτό θα απειλούσε τις απόψεις του για το άπειρο στη δημιουργία. Αντιμετώπισε τις δύο παραπάνω δυσκολίες για να συμβιβάσει τον Χριστιανισμό με τον Αριστοτελισμό ως εξής: αντιμετώπισε την (1) απλά επισημαίνοντας ότι το να μη μπορείς να κάνεις το αδύνατο δεν ήταν ένα όριο στην παντοδυναμία του Θεού. Με άλλα λόγια, κάποιος θα μπορούσε όμοια να αρνηθεί ότι ένα παντοδύναμο ον θα μπορούσε να δημιουργήσει κάτι αδημιούργητο (Aquinas, I, vii) . Η αντίδρασή του στη (2) ήταν γοητευτική. Πίστευε στη βιβλική εκδοχή της δημιουργίας και ότι αυτή η αλήθεια μας αποκαλύφθηκε (δεν θα μπορούσαμε να την ανακαλύψουμε μόνοι μας). Έδειξε ότι ακόμη και αν ο κόσμος είχε υπάρξει για άπειρα πολλές ημέρες, καμία από αυτές δεν θα ήταν άπειρα μακριά (κάτι τέτοιο θα ήταν χωρίς νόημα). Και αντέκρουσε την απειλή της αθανασίας επικαλούμενος τη δυνατότητα της μετεμψύχωσης, που πρώτοι οι Νεοπλατωνιστές θεωρούσαν δεδομένη (Moore, 1990).

Τον 13^{ο} αι. τα αριστοτελικά συγγράμματα επικράτησαν μεταφρασμένα στα πανεπιστήμια της δυτικής Ευρώπης όπως πχ. στο Παρίσι, στην Οξφόρδη, στην Μπολόνια σε ό,τι αφορά τα προγράμματα σπουδών και την τότε επιστημονική γνώση. Οι θεολόγοι είχαν ενστάσεις ως προς ορισμένες πτυχές του έργου του Αριστοτέλη. Ο Αριστοτέλης θεωρούσε τον κόσμο αιώνιο και δεν αποδεχόταν ότι ξεκίνησε κάποτε η ύπαρξή του, ενώ οι θεολόγοι πίστευαν στην εκ του μηδενός δημιουργία του κόσμου από το Θεό. Ένα δεύτερο σημείο τριβής ήταν ότι ο Αριστοτέλης δεχόταν ένα αιτιοκρατικό σύμπαν όπου οι φυσικές διαδικασίες ήταν κανονικές και αναλλοίωτες και δεν είχαν θέση «έκτακτα» γεγονότα (θαύματα), ενώ οι θεολόγοι πίστευαν ότι τα θαύματα ήταν έκτακτες παρεμβάσεις του Θεού στον κόσμο που παραβίαζαν οποιαδήποτε αιτιοκρατική αλυσίδα. Η αθανασία της ψυχής ήταν αδιαπραγμάτευτη για τους θεολόγους κάτι που δεν ταίριαζε με την αριστοτελική φιλοσοφία περί ψυχής. Έτσι τα σημεία τριβής οδήγησαν σε μία κρίση στα ευρωπαϊκά πανεπιστήμια από την οποία προέκυψαν σημαντικές φιλοσοφικές διαμάχες. Η πνευματική αναταραχή προκάλεσε την παρέμβαση της επίσημης Παπικής εκκλησίας και σε απαγορεύσεις στη διδασκαλία διαφόρων αριστοτελικών απόψεων. Το 1277 καταδικάστηκε από τον Πάπα ένα μεγάλο μέρος των κοσμολογικών αντιλήψεων του

Αριστοτέλη, του Αβερόη και άλλων απόψεων που συζητούνταν εκείνη την εποχή, ειδικότερα 219 προτάσεων, μέσω της δράσης του επισκόπου Παρισιού Ετιέν Ταμπιέ. Εν τω μεταξύ είχαν αναλάβει διάφοροι σημαντικοί θεολόγοι-φιλόσοφοι ένα εγχείρημα εξομάλυνσης μεταξύ της αριστοτελικής φιλοσοφίας και της χριστιανικής θεολογίας, πχ. ο Μποναβεντούρα, ο Ακινάτης και ο Αλβέρτος. Συνήθως συνιστούσαν όπου υπάρχουν αντιθέσεις ανάμεσα στην αριστοτελική φυσική και κοσμολογία και στη θεολογία να προτιμάται η θεολογική διδασκαλία. Κάποιοι υποστήριξαν το δόγμα της «διπλής αλήθειας» σύμφωνα με το οποίο μία πρόταση μπορούσε να είναι αληθής στο πεδίο της φυσικής φιλοσοφίας και η αντίθετή της αληθής στο πεδίο της πίστης. Όμως η διπλή αλήθεια προκάλεσε νέες αντιπαραθέσεις (Grant, 40-45). Από τους σημαντικότερους παράγοντες της εξομάλυνσης ήταν ο Θωμάς Ακινάτης ο οποίος διακήρυξε ότι η επιστημονική οδός και η οδός της πίστης εξ αποκαλύψεως ήταν δύο εξίσου νόμιμοι αλλά διαφορετικοί και ανεξάρτητοι δρόμοι προς την ίδια αλήθεια και ότι όταν εμφανίζονται αντιθέσεις, αυτές είναι συχνά φαινομενικές και πρέπει να υπερβαίνονται.

Πολλοί θεωρούσαν ότι ήταν λάθος να σκεφτόμαστε μία άπειρα διαιρετή ποσότητα (μια ευθεία ή ένα στερεό, για παράδειγμα) σα να αποτελείται από άπειρα πολλά απειροστά μέρη. Ο Σκωτσέζος φιλόσοφος και θεολόγος John Duns Scotus (1266-1308 μ. Χ.) χρησιμοποιώντας δύο ομόκεντρους κύκλους, υποστήριξε τα εξής: Ας υποθέσουμε ότι οι γραμμές αποτελούνται από άπειρα πολλά απειροελάχιστα σημεία. Τότε οι δύο περιφέρειες κύκλων θα έπρεπε να αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό σημείων. Οι περιφέρειες όμως δεν είναι ίσες για να έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων. Επομένως, πρέπει να απορρίψουμε την αρχική μας υπόθεση. Ανεξάρτητα από αυτό το επιχείρημα, ο Duns Scotus αποδέχτηκε ότι τα απειροστά, όπως τα σημεία, μπορούν να υπάρχουν στην πραγματικότητα από μόνα τους.

Αντίθετα, ο Άγγλος φιλόσοφος William of Ockham (1285-1349 μ. Χ.) υποστήριζε ότι τα απειροστά ήταν «καθαρές επινοήσεις». Σύμφωνα με την άποψή του, το να μιλάμε για τα απειροστά ήταν απλά ένας «τρόπος του λέγειν»: το να πούμε ότι μία σφαίρα εφάπτεται σε ένα επίπεδο σε ένα μόνο σημείο, σήμαινε ότι (α) η σφαίρα εφάπτεται στο επίπεδο, και (β) δεν υπάρχει όριο στο πόσο μικρό είναι το μέρος της σφαίρας που αγγίζει το επίπεδο και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό το μέρος και κανένα άλλο από τα υπόλοιπα της σφαίρας δεν αγγίζει το επίπεδο. Αυτού του είδους η έμφαση στον προσεκτικό λόγο και στην ακριβή αναδιατύπωση των χαλαρών ιδιοτήτων, με στόχο την καταπολέμηση της σύγχυσης, ήταν ένα σημάδι της περιόδου. Αυτή ήταν μια σημαντική νέα διάκριση που σχηματίστηκε αυτή την περίοδο. Αν πούμε, «αυτό το σώμα μπορεί να κινηθεί με άπειρη ταχύτητα» (ή «απεριόριστα γρήγορα») μπορεί να εννοούμε ότι είναι ικανό να πετύχει άπειρη ταχύτητα ή ότι δεν υπάρχει όριο στις πεπερασμένες ταχύτητες που μπορεί να πετύχει. Ο William πίστευε ότι ο κόσμος εξαρτάται από τη θέληση του Θεού η οποία δεν επιδέχεται περιορισμούς. Άρα τίποτα δεν ήταν αιτιοκρατικά προκαθορισμένο ούτε υπήρχαν αναγκαίες σχέσεις αιτίου-αποτελέσματος, αλλά εάν ο Θεός ήθελε, μπορούσαν να γίνουν τα πράγματα διαφορετικά. Με αυτό το θεολογικό επιχείρημα ο

William στήριξε την έννοια της ενδεχομενικότητας της φυσικής τάξης σε αντίθεση με την αιτιοκρατία του Αριστοτέλη. Ο William υποστήριζε ότι ο Θεός ως ελεύθερος δρών μπορεί να κάνει οτιδήποτε δεν ενέχει αντίφαση. Μπορούσε να παραγάγει ύλη δίχως μορφή ή μορφή δίχως ύλη. Η ύπαρξη ενός πράγματος δεν μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα της ύπαρξης άλλου πράγματος επειδή μεταξύ των δύο πραγμάτων δεν μπορούν να υποτεθούν αναγκαίες συνδέσεις. Τα αντικείμενα του κόσμου είναι ενδεχομενικά και η γνώση τους πιθανή. Έτσι εάν ο Θεός ήθελε, μπορούσε να υπάρχει κενό, να υπάρχει χώρος έξω από το αριστοτελικό σφαιρικό κόσμο κ.ο.κ.

Ο Νικόλ Ορέμ έπαιξε έναν σημαντικό ρόλο μετά την κρίση που είχε δημιουργηθεί σχετικά με τις αντιλήψεις του Αριστοτέλη. Στο γαλλικό υπόμνημα στο «Περί Ουρανού» του Αριστοτέλη, έγραψε ότι ο ανθρώπινος νους τείνει να συλλαμβάνει τη χωρική ύπαρξη πέρα από τον πεπερασμένο κόσμο. Με άλλα λόγια, αμφισβήτησε την αριστοτελική σκέψη ότι ένας πεπερασμένος κόσμος καταλάμβανε πραγματικά όλον τον υπαρκτό χώρο (Grant, 121). Σύμφωνα με τον Ορέμ, ο εξωκοσμικός χώρος είναι ένα άπειρο και αδιαίρετο κενό που περιέχει τον κόσμο. Αν ο Θεός ήθελε να κινήσει τον πεπερασμένο σφαιρικό κόσμο μας σε ευθεία γραμμή τότε φυσικά μπορούσε να το κάνει μέσα στον άπειρο χώρο. Η απεραντοσύνη του Θεού προϋπέθετε ένα άπειρο κενό πέρα από τον κόσμο. Όμως, το ερώτημα ήταν εάν το άπειρο ήταν τρισδιάστατος χώρος ή μια οντότητα χωρίς διαστάσεις. Ο μεσαιωνικός συγγραφέας Γιοχάνες ντε Ρίπα το 1350 υποστήριξε ότι το άπειρο κενό είναι πραγματικά τρισδιάστατο και ξεχώρισε τη διάσταση του άπειρου χώρου από την εκτατή απεραντοσύνη του Θεού. Δεν είναι συνεκτατά άλλωστε τα δύο άπειρα γιατί το άπειρο του Θεού περικυκλώνει και υπερβαίνει το άπειρο κενό που θεωρείται μάλλον φανταστικό και χωρίς θετικά κατηγορήματα (Grant, 123).

Ο Peter of Spain (1220-1277 μ. Χ.) που γεννήθηκε στη Λισαβόνα και έγινε πάπας (ο Ιωάννης XXI), άνοιξε τον δρόμο για μία ενδιαφέρουσα διάκριση. Έχοντας διαπιστώσει μια ασάφεια στη γλώσσα, είπε ότι, όταν το «άπειρο» χρησιμοποιείται κατηγορηματικά (ταξινομητικά- κάνοντας κατηγορίες), είναι διαφορετικό από την περίπτωση που χρησιμοποιείται συν-κατηγορηματικά. Οι επεξηγήσεις του αργότερα βελτιώθηκαν από τον Γάλλο Jean Buridan (1295-1356 μ. Χ.) και τον Ιταλό Gregory of Rimini (1300-1358 μ. Χ.). Η διάκριση χονδρικά είναι η εξής: το να χρησιμοποιούμε το «άπειρο» κατηγορηματικά είναι να λέμε ότι υπάρχει κάτι το οποίο έχει μια ιδιότητα που υπερβαίνει οποιοδήποτε πεπερασμένο μέτρο. Το να χρησιμοποιούμε το «άπειρο» συν-κατηγορηματικά είναι να λέμε ότι, δεδομένου οποιουδήποτε πεπερασμένου μέτρου, υπάρχει κάτι το οποίο έχει μια ιδιότητα που το υπερβαίνει. Αργότερα, αυτή η διάκριση διαδόθηκε και αξιοποιήθηκε όλο και πιο πολύ. Επιπλέον, έφερε σαφώς τη διάκριση του «ενεργεία»/ «δυνάμει» αριστοτελικής προέλευσης για το άπειρο. Και αυτό γιατί, να χρησιμοποιούμε το «άπειρο» ώστε να αναφερθούμε σε ένα «ενεργεία» άπειρο είναι να πούμε ότι υπάρχει κάποιος χρόνος με τον οποίο ένα δοσμένο μέγεθος υπερβαίνει κάποιο πεπερασμένο μέτρο (το μέγεθος μπορεί να είναι ο αριθμός των διαιρέσεων σε ένα σώμα, για παράδειγμα), και το να χρησιμοποιούμε το άπειρο ώστε να αναφερθούμε σε ένα «δυνάμει» άπειρο είναι να πούμε ότι, δεδομένου ενός πεπερασμένου μέτρου, υπάρχει κάποιος χρόνος με τον οποίο ένα πεπερασμένο μέγεθος το ξεπερνάει. Για παράδειγμα, ας θεωρηθεί η ακόλουθη εφαρμογή της νέας διάκρισης σε ένα χρονικό πλαίσιο, που σημειώθηκε από τον Gregory of Rimini. Αν πούμε, «ένα άπειρος αριθμός ανθρώπων θα πεθάνει», και χρησιμοποιούμε το άπειρο κατηγορηματικά, τότε εννοούμε ότι θα έρθει κάποτε μία χρονική στιγμή όπου άπειρα το πλήθος άνθρωποι θα είναι νεκροί, και θα είναι τότε ένα «ενεργεία» άπειρο νεκρών ανθρώπων. Αν πούμε το ίδιο και χρησιμοποιούμε το άπειρο συν-κατηγορηματικά, τότε εννοούμε ότι δεν υπάρχει τέλος στον αριθμό των ανθρώπων που θα πεθάνουν, ο καθένας στο δικό του χρόνο, είναι ένα «δυνάμει» άπειρο νεκρών ανθρώπων.

Πολλοί φιλόσοφοι συνέχισαν να υποστηρίζουν ότι το «ενεργεία» μαθηματικό άπειρο ήταν ασαφές. Ο Άγγλος Walter Burley (1275-1343 μ. Χ.) αρνήθηκε, επίσης, τη συνέπεια του «ενεργεία» μαθηματικού απείρου. Πίστευε ότι ο Θεός θα μπορούσε να δημιουργήσει κάτι άπειρα μεγάλο, με την έννοια πως δεν υπήρχε πεπερασμένο όριο αυτού που ο Θεός θα μπορούσε να δημιουργήσει (δηλαδή μια εφαρμογή της κατηγορηματικής/ συν-κατηγορηματικής διάκρισης). Στην πραγματικότητα, τώρα που τα παράδοξα των άπειρα μεγάλων έγιναν πιο οικεία, η πιο σοβαρή αντίρρηση στο «ενεργεία» μαθηματικό άπειρο, τουλάχιστον αθροιστικά, φαινόταν να βρίσκεται μέσα σε αυτά. Ο Duns Scotus υποστήριξε ότι η αδυναμία μας να συλλάβουμε ένα «ενεργεία» μαθηματικό άπειρο απλώς αντικατοπτρίζει τα δικά μας πεπερασμένα όρια.

Κατά την άποψη του Gregory of Rimini, είχε νόημα να πούμε ότι μια άπειρη ποσότητα ήταν μικρότερη από κάποια άλλη, αλλά έπρεπε να είμαστε προσεκτικοί στο να προσδιορίσουμε ποιο ακριβώς νόημα θα δίναμε. Για παράδειγμα, τα παράδοξα των άπειρα μεγάλων συλλογών έδειξαν ότι στην περίπτωση του απείρου είναι δυνατό για ένα σύνολο να περιέχεται σε ένα άλλο και για τα στοιχεία τους να συνδέονται με μια 1-1 αντιστοιχία.

Το επιχείρημα του Gregory of Rimini ήταν το ακόλουθο: Αν ο Θεός μπορεί ατελείωτα να προσθέτει ένα κυβικό πόδι σε μία πέτρα- το οποίο μπορεί- τότε μπορεί να δημιουργήσει μια άπειρα μεγάλη πέτρα. Επίσης, ισχυρίστηκε ότι, με την έννοια ότι θα μπορούσε να υπάρχει μία κατάλληλη 1-1 αντιστοιχία, όλες οι άπειρες ποσότητες ήταν του ίδιου μεγέθους. Δεν είχε όμως απόδειξη αυτού.

Ο Jean Buridan (ανάμεσα σε άλλους) συνέχισε να αντιμετωπίζει σαν ύποπτο το «ενεργεία» μαθηματικό άπειρο. Απαντώντας στο επιχείρημα του Gregory of Rimini, υποστήριξε ότι ο Θεός θα μπορούσε να δημιουργήσει μια πέτρα αυθαίρετα πεπερασμένου μεγέθους σε μία ώρα, αλλά δεν θα μπορούσε να εκπληρώσει την άπειρη εργασία που καθορίστηκε.

Πολύ αργότερα, ο μεγάλος Ιταλός αστρονόμος, μαθηματικός και φυσικός Galileo Galilei (1564-1642) συμμετείχε στη διαμάχη, και διατύπωσε το δικό του παράδοξο: Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε (με μία 1-1 αντιστοιχία) τους φυσικούς αριθμούς με τους τετράγωνους αριθμούς: 0→0, 1→1, 2→4, 3→9,…, n→n^2,… Αυτό δείχνει πως υπάρχουν τόσοι από τους πρώτους όσοι και από τους δεύτερους. Όμως αφού δεν όλοι οι φυσικοί αριθμοί τετράγωνοι, είναι φανερό ότι οι φυσικοί είναι περισσότεροι από τους τετράγωνους. Αυτό που κάνει ιδιαίτερα εκπληκτικό το παράδοξο του Γαλιλαίου, είναι ότι όσο μεγαλώνουν τα αρχικά τμήματα της σειράς των φυσικών αριθμών η αναλογία των τετραγώνων μικραίνει. Δηλαδή, οι μισοί από τους 4 πρώτους φυσικούς αριθμούς είναι τετράγωνα, όμως μόνο το 1/10 από τους πρώτους 100 και μόνο 1/100 από τους πρώτους 1000000. Έτσι ο Γαλιλαίος επανερχόμενος στην κατεύθυνση του Duns Scotus, υποστήριξε ότι δεν μπορούμε να σταματήσουμε να σκεφτόμαστε για το άπειρο, αλλά υπερβαίνει την πεπερασμένη αντίληψή μας, και ο λόγος που παγιδευόμαστε σε αντίφαση είναι ότι προσπαθούμε να εφαρμόσουμε σε αυτό έννοιες που θα έπρεπε να εφαρμόσουμε μόνο στο «πέρας» (Galileo, pp. 21-40, Moore, 1990).

Ο Nicholas of Cusa (1401-1464) επέστρεψε στον Νεοπλατωνισμό, μάλλον περισσότερο στον Ελεατισμό, αναζωογονώντας μια οντολογική αντίληψη του απείρου. Περιέγραψε το άπειρο κάποιες φορές ως Θεό, κάποιες φορές ως Αλήθεια, και κάποιες φορές ως το Απόλυτο Ανώτατο όριο, ενώ την ίδια στιγμή επεσήμανε ότι όλες αυτές οι περιγραφές έχουν ένα στοιχείο διαστρέβλωσης. Αυτό που έχουμε να συνειδητοποιήσουμε είναι ότι δεν θα μπορούσαμε ποτέ να το κατανοήσουμε, ούτε να το συγκρίνουμε ή να το συσχετίσουμε με κάτι που θα μπορούσαμε να κατανοήσουμε. Η αληθινή σοφία έγκειται στο να αναγνωρίσουμε την ουσιώδη- βασική άγνοιά μας. Αυτό που έχουμε είναι, με τα λόγια του Rawson, «ακατέργαστο, μερικό και περιορισμένο». Θα μπορούσαμε να βελτιώνουμε συνεχώς αυτή την άποψη- γνώμη, «δόξα»- και να προσεγγίζουμε την κατανόηση της αλήθειας, χωρίς ποτέ στην πραγματικότητα να φτάσουμε ακριβώς στην αλήθεια. Εδώ ο Νικόλαος ο Κουζάνος σχεδίασε μια αναλογία με τη μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου- Αρχιμήδη. Η άποψή μας, είναι σαν το πολύγωνο, και η αλήθεια σαν τον κύκλο στον οποίο το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο: αυξάνοντας τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου, προσεγγίζουμε τον κύκλο, μειώνουμε το σφάλμα, όμως ποτέ δεν φτάνει τον κύκλο. Ο Νικόλαος, ήταν πεπεισμένος, ότι μέσω της πίστης, θα μπορούσαμε να έρθουμε σε μία άμεση και ανείπωτη γνώση του απείρου. Πίστευε ότι τα πεπερασμένα πράγματα ήταν μερικές (με μέρη) απεικονίσεις του απείρου και ο Θεός ήταν τόσο μέσα σε αυτές όσο και υπεράνω αυτών. Αυτό αντανακλούσε και η άποψή του για τον φυσικό κόσμο. Στο μέτρο που ήταν μόνο μερική απεικόνιση του απείρου, δεν ήταν ο ίδιος άπειρος. Ήταν πεπερασμένος από την άποψη του Θεού. Από τη δική μας οπτική γωνία, ήταν χωρίς εξωτερικά όρια και ανίκανος για επέκταση ή με την έκφραση του Νικόλαου «κατ' ιδίαν άπειρος». Αυτός ήταν ο τρόπος του Νικόλαου να μας συστήσει το μαθηματικό άπειρο στο βασίλειο των απεικονίσεων, το οποίο αποτελούσε ένα είδος εικόνας απλωμένο στον χώρο και στον χρόνο, του οντολογικού απείρου που υπόκειται (Nicholas of Cusa, I, II, Moore, 1990).

“A finite intellect…cannot by means of comparison reach the absolute truth of things … In consequence, our intellect, which is not the truth, never grasps the truth with such precision that it could not be comprehended with infinitely greater precision (Nicholas of Cusa).

Ο Nicholas of Cusa ήταν ο πρώτος φιλόσοφος του Μεσαίωνα που απέρριψε ρητά τη μεσαιωνική αντίληψη του πεπερασμένου κόσμου και σε αυτόν αποδίδεται η αξία του ισχυρισμού της απειρίας του σύμπαντος. Το σύμπαν του είναι μια έκφραση, μια «εξήγηση» του Θεού, αν και αναγκαία ατελής και ανεπαρκής. Οι οντολογικές και επιστημολογικές αντιλήψεις του, η ιδέα του της σύμπτωσης-ταύτισης των αντιθέτων στο απόλυτο που τα υπερβαίνει, όπως και η σχετικιστική έννοια της «μαθημένης άγνοιας» ως τη διανοητική πράξη που συλλαμβάνει την σχέση που υπερβαίνει τη λογική σκέψη, ακολουθούν και αναπτύσσουν το πρότυπο των παραδόξων που εμπλέκονται στην απειροποίηση συγκεκριμένων σχέσεων που ισχύουν για τα πεπερασμένα. Για παράδειγμα, τίποτα δεν είναι πιο αντίθετο στη γεωμετρία από την «ευθύτητα» και την «καμπυλότητα», και όμως στον άπειρα μεγάλο κύκλο η περιφέρεια συμπίπτει με την εφαπτόμενη, και στον άπειρα μικρό με τη διάμετρο. Και στις δύο περιπτώσεις, το κέντρο χάνει τη μοναδική και καθορισμένη του θέση, ταυτίζεται με την περιφέρεια, είναι παντού ή πουθενά. Όπως το «μεγάλο» και το «μικρό» που είναι ένα ζεύγος αντίθετων εννοιών που έχουν νόημα και ισχύ μόνο στην περιοχή της πεπερασμένης ποσότητας, της σχετικής ύπαρξης, αλλά στο απόλυτο άπειρο, στις άπειρες ποσότητες δεν υπάρχει σύγκριση, έτσι, υποστηρίζει με τόλμη ο Nicholas of Cusa, ταυτίζονται (Koyre΄, 1957).

Μάλιστα, επιδιώκει να αντιστρέψει ένα περίφημο επιχείρημα του Αριστοτέλη υπέρ του πεπερασμένου του κόσμου: «Ο κόσμος δεν έχει περιφέρεια, επειδή αν είχε ένα κέντρο και μια περιφέρεια, και έτσι ο ίδιος είχε μια αρχή και ένα τέλος, ο κόσμος θα ήταν περιορισμένος σε σχέση με κάτι άλλο, και έξω από τον κόσμο θα υπήρχε κάτι άλλο… (επομένως) είναι αδύνατον για τη λογική μας να έχουμε μια πλήρη κατανόηση του κόσμου, όπως υπονοεί η κατανόηση του Θεού που είναι το κέντρο και η περιφέρειά του» (Cusanus,1932, Koyre΄,1957). Απορρίπτει την ιεραρχική δομή του σύμπαντος και αρνείται την κεντρική θέση της γης που έχει στην παραδοσιακή κοσμολογία. Όμως, η βαθιά του μεταφυσική διαίσθηση καταστρέφεται από τις επιστημονικές αντιλήψεις της εποχής του (που δεν ήταν καθόλου προχωρημένες) όπως της απόδοσης στη σελήνη και στη γη ενός δικού τους φωτός. Ο κόσμος του Νικόλαου Κουζάνου δεν είναι ο κόσμος του Μεσαίωνα, αλλά δεν είναι ακόμα το άπειρο σύμπαν των συγχρόνων (Koyre΄, 1957).

Ο Ιταλός Giordano Bruno (1548- 1600) επηρεασμένος πολύ από τον Νικόλαο, πίστευε σε μία υπερβατική, αυτοδύναμη, άφθαρτη θεότητα που περιείχε αντιθέσεις μέσα της, και που εξέφραζε τον εαυτό της σε ένα χωρικό, χρονικό και υλικό άπειρο σύμπαν. Πίστευε ότι επεκτείνοντας κατάλληλα τους εαυτούς μας μπορούμε να κερδίσουμε ένα είδος γνωστικής ένωσης με αυτή τη θεότητα- το αληθινό άπειρο. Επίσης, υποστήριξε τη μαθηματική απειρία του χώρου, και ότι αυτό συνεπαγόταν τη μαθηματική απειρία αυτού που υπήρχε στο διάστημα. Ο θάνατος του Bruno –κάηκε στην πυρά στον πάσσαλο καταδικασμένος από την Ιερά εξέταση- θεωρείται το σημείο που σημαίνει το τέλος της Αναγέννησης. Ήταν δύο χιλιάδες χρόνια από την εποχή του Αριστοτέλη (Bruno, Moore, 1990).

Το έργο του Bruno είναι σημαντικό στην ιστορία της φιλοσοφίας της Αναγέννησης επειδή υπερβαίνει την περατότητα και εισάγει το άπειρο στην ενδότερη δύναμη του σύμπαντος. Η σύλληψή του είναι ότι η συνοχή και η απεραντοσύνη του σύμπαντος είναι σύμφυτες με την πνοή της ενδότερης δύναμής του στο χώρο της ιδιαιτερότητας των όντων του. Ο Bruno ασκεί κριτική στην Αριστοτελική άποψη ότι ο κόσμος είναι πεπερασμένος και πέρα από τα όριά του δεν υπάρχει κάποια συνέχισή του ή κάποιος άλλος κόσμος, αλλά το κενό. Καθώς το σύμπαν είναι χώρος και είναι στη φύση του χώρου να είναι άπειρος, είναι και στη φύση του σύμπαντος η απειρία (Δόικος, Bruno, 2015).

Ο Θεός του Bruno δεν θα μπορούσε παρά να εξηγήσει και να εκφράσει τον εαυτό του σε ένα άπειρο, και άπειρα πλούσιο και άπειρα εκτεταμένο κόσμο. Η απώλεια της κεντρικής και μοναδικής θέσης από τη γη οδηγεί αναπόφευκτα και στην απώλεια, από τον άνθρωπο, της προνομιακής και μοναδικής του θέσης στο κοσμικό θείο δράμα της δημιουργίας. Ο Nicholas of Cusa δηλώνει ότι το αμετάβλητο δεν υπάρχει πουθενά σε ολόκληρο το σύμπαν, ο Bruno προχωράει ακόμα περισσότερο: γι' αυτόν η κίνηση και η αλλαγή είναι σημάδια τελειότητας και όχι έλλειψής της. Ένα αμετάβλητο σύμπαν θα ήταν ένα νεκρό σύμπαν, ένα ζωντανό θα πρέπει να έχει την ικανότητα να κινείται και να αλλάζει.Υπάρχουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά στη σκέψη του Bruno: (α) η χρήση μιας αρχής που έναν αιώνα αργότερα ο Leibniz –που σίγουρα επηρεάστηκε από αυτή- ονόμασε αρχή του επαρκούς λόγου, η οποία συμπληρώνει την αρχή της πληρότητας, και (β) η αποφασιστική αλλαγή από αισθητηριακή σε διανοητική γνώση στη σχέση της με τη διάνοια. Ο Bruno ισχυρίζεται ότι η αισθητηριακή αντίληψη δεν μπορεί να είναι η βάση της επιστημονικής και φιλοσοφικής γνώσης και ενώ για την αισθητηριακή αντίληψη η απειρία είναι απρόσιτη και μη φανερή, για τη διάνοια, αντίθετα, είναι η πρωταρχική και πιο σίγουρη έννοια (De l' inf. universo, Koyre΄, 1957).

Ακόμα και πριν οι μεσαιωνικοί στοχαστές έχουν πρόσβαση στα *Φυσικά* του Αριστοτέλη και την ανάλυση της κίνησης σε αυτά, ενδιαφερόντουσαν πολύ για τις ιδιαίτερα λογικές ιδιότητες των λέξεων «σταματώ» και «ξεκινώ», δηλαδή είδαν φιλοσοφικά προβλήματα ακριβώς εκεί όπου υπήρχαν αλλαγές της κίνησης σε μη κίνηση και το αντίστροφο. Οι μεσαιωνικοί φιλόσοφοι κληρονόμησαν την Αριστοτελική ανάλυση της συνέχειας σχεδόν πλήρως όταν απέκτησαν πρόσβαση στα *Φυσικά*. Έτσι, κληρονόμησαν τις ιδέες ότι ο χώρος, ο χρόνος και η κίνηση είναι όλα συνεχή και ότι το συνεχές είναι άπειρα διαιρετό. Όταν ο William του Ockham (1287-1347) αντιμετωπίζει το ερώτημα: «Κινούνται οι άγγελοι;» δεν πρέπει να το εκτιμά μόνο μέσω της Βίβλου, μέσω της οντολογικής φύσης των αγγέλων, και με το νόημα της ίδιας της κίνησης, πρέπει επίσης να παλέψει με τη συνέχεια της κίνησης, του χρόνου και του χώρου (Ockham, 1991).

Δεδομένων των υποθέσεων ότι (1) ο χρόνος είναι ένα συνεχές, (2) ένα συνεχές δεν μπορεί να αποτελείται από αδιαίρετα, και (3) οποιαδήποτε αδιαίρετα εμφανίζονται σε ένα συνεχές δεν μπορούν να είναι το ένα μετά το άλλο, φαίνεται να έχουμε φτάσει σε μία δυσκολία. Αυτή προσεγγίστηκε με διάφορους τρόπους από διάφορους φιλοσόφους. Αν και δεν ήταν φιλοσοφικά σύγχρονη η απόρριψη των βασικών Αριστοτελικών απόψεων, μία μικρή ομάδα την έκανε, και υποστήριξε ότι ο χρόνος και ο χώρος στην πραγματικότητα αποτελούνται από αδιαίρετα. O Walter Chatton (1290- 1343), για παράδειγμα, υποστήριξε ότι μία ευθεία δεν αποτελείται από σημεία, αλλά αποτελείται από πεπερασμένα πολλά σημεία. Άλλοι φιλόσοφοι, όπως ο Walter Burley (1275-1344) ανέλυσε την αλλαγή χρησιμοποιώντας κάτι παρόμοιο με τα όρια, έτσι υποστήριξε ότι μια κυλιόμενη μπάλα μπορεί να έχει μια πρώτη στιγμή κίνησης, αλλά όχι μια τελευταία στιγμή μη κίνησης. Είναι ενδιαφέρον να δούμε τις έννοιες της συνέχειας και των ορίων φιλοσοφικά συνδεδεμένες αιώνες πριν τα όρια τυπικά να εισαχθούν στα μαθηματικά. Ο Ockham, από την άλλη μεριά, τοποθετήθηκε έντονα ενάντια της ύπαρξης των αδιαιρέτων που οι σύγχρονοί του υποστήριξαν, αντλώντας όχι μόνο από τα επιχειρήματα του Αριστοτέλη ενάντια στα αδιαίρετα, αλλά και από τα μαθηματικά και γεωμετρικά επιχειρήματα που πρώτα προτάθηκαν από τον al-Ghazali (1058-1111) και δημοσιεύτηκαν στη Δύση από τον John Duns Scotus (1265-1308).

Ένα θέμα σχετικό με το σταμάτημα και το ξεκίνημα ενός κινητού είναι το ερώτημα του αν η κίνηση είναι δυνατή σε μία στιγμή ή όχι. Ο ίδιος ο Αριστοτέλης συζήτησε αυτό το ερώτημα και κατέληξε στην άρνηση, αλλά η μελέτη του ήταν αν η κίνηση μπορεί να συμβεί σε μία στιγμή. Ο Ockham όρισε την κίνηση του x ως να σημαίνει ότι το x είναι σε κάποια θέση τη χρονική στιγμή t, και σε μία διαφορετική θέση μία επόμενη χρονική στιγμή t_1. Το αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό στον ορισμό του Ockham είναι ότι είναι δυνατό να πούμε αν κάτι έχει κινηθεί μόνο μετά από ένα χρονικό διάστημα που έχει περάσει. Μία στιγμή δεν είναι χρονικό διάστημα, έτσι το να πούμε ότι κάτι είναι σε κίνηση σε μία χρονική στιγμή είναι, για αυτόν τον λόγο, χωρίς νόημα, ακόμη και αν αυτή η χρονική στιγμή συμβαίνει στη διάρκεια της χρονικής περιόδου ανάμεσα στο t και στο t_1 , δηλαδή στη διάρκεια του χρόνου στον οποίο το αντικείμενο ήταν σε κίνηση. Βέβαια, η ιδέα ότι ένα αντικείμενο δεν μπορεί να έχει κίνηση σε μία χρονική στιγμή δεν είναι μόνο αντίθετο διαισθητικά (τι κάνει ένα κινούμενο αντικείμενο μια τέτοια στιγμή; Σταματάει;) αλλά είναι επίσης ασυμβίβαστο με τις βασικές αρχές της σύγχρονης ανάλυσης, όπου δεν ισχυριζόμαστε μόνο ότι ένα αντικείμενο σε κίνηση είναι επίσης σε κίνηση σε μία στιγμή, αλλά μπορούμε και να υπολογίσουμε την ταχύτητα του αντικειμένου αυτή τη στιγμή. Ευτυχώς, δε συμφώνησαν όλοι οι μεσαιωνικοί φιλόσοφοι με τον Ockham. Ο Chatton, για παράδειγμα, παρουσίασε μια ανάλυση της κίνησης η οποία άφηνε ανοικτή την πιθανότητα της στιγμιαίας κίνησης. Φυσικά οι λόγιοι του μεσαίωνα δεν είχαν γνώση των τεχνικών της ανάλυσης και των ορίων που αναπτύχθηκαν αρκετούς αιώνες αργότερα.

Αυτή η περίοδος παρουσιάζει ενδιαφέρον από μόνη της, αλλά και επειδή αυτές οι συζητήσεις καθορίζουν τη σκηνή για τις πρώιμες σύγχρονες μαθηματικές εξελίξεις, από την Καρτεσιανή γεωμετρία στην εξέλιξη του λογισμού. Ένα συναρπαστικό χαρακτηριστικό του αιώνα που οδηγεί στην ανακάλυψη του λογισμού ήταν μία αλλαγή της στάσης απέναντι στον Αριστοτέλη. Ο Elie Wiesel (1928) είχε πει τη δική του θρησκευτική πεποίθηση: «Με τον Θεό ή ενάντια στον Θεό, αλλά ποτέ χωρίς τον Θεό». Οι μεσαιωνικοί μελετητές είχαν μια παρόμοια προσέγγιση για τον Αριστοτέλη, αναλύοντας τα έργα του, υποστηρίζοντάς τον, αλλά σχεδόν πάντα αναφέροντάς τον με κάποια μορφή ή τάση. Αυτό άλλαξε τον 16^{ο} αιώνα. Ενώ ο Αριστοτέλης υφίστατο ως αντικείμενο μελέτης αυτόν τον αιώνα, μια νέα εξελισσόμενη ομάδα τον απέρριψε, όπως και τον Αριστοτελισμό της μεσαιωνικής εποχής. Οι μαθηματικοί αυτής της εποχής απέρριψαν το επιχείρημα του Αριστοτέλη ότι τα μαθηματικά ήταν η επιστήμη της μέτρησης του διακριτού και ότι οι αριθμοί ξεκινούν με το 1(Buckley, 2008).

Αυτή η μερική απόρριψη του Αριστοτέλη από τους λογίους της Αναγέννησης κι έπειτα, άνοιξε τον δρόμο για την επανεκτίμηση του Αρχιμήδη. Οι μαθηματικοί αυτής της περιόδου που έκαναν σημαντική και αξιοσημείωτη δουλειά σχετικά με την επέκταση της Αρχιμήδειας μεθόδου της εξάντλησης ήταν ο Simon Steven (1548-1620), ο Luca Valeno (1552-1618) και ο Johannes Kepler (1571-1630). Σε κάθε περίπτωση, η θεωρία ορίων προσεγγίστηκε, αλλά δεν την ανακάλυψαν.

Η πνευματική αλλαγή: από την έννοια του αριστοτελικού κόσμου ως ένα πεπερασμένο και καλά διατεταγμένο όλο, στο οποίο η χωρική δομή ενσωματώνει μια ιεραρχία τελειότητας και αξίας, σε αυτό ενός άχρονου ή ακόμα άπειρου σύμπαντος, ενωμένο μόνο από την ταυτότητα των τελικών και βασικών συστατικών και νόμων, και την αντικατάσταση της αριστοτελικής αντίληψης του χώρου από αυτή της Ευκλείδειας γεωμετρίας- μιας ουσιαστικά άπειρης και ομοιογενούς επέκτασης – δεν εμφανίστηκε ξαφνικά. Οι ουράνιες σφαίρες που περικλείουν τον κόσμο και τον κρατούν μαζί δεν εξαφανίστηκαν με μιας. Η επιστήμη, η φιλοσοφία, ακόμα και η θεολογία έχουν όλες τους έντονο ενδιαφέρον για ερωτήματα σχετικά με τη φύση του σύμπαντος, τη δομή της ύλης, τα πρότυπα δράσης αλλά και για την φύση, τη δομή και την αξία της ανθρώπινης σκέψης και της ανθρώπινης επιστήμης. Σημαντικό ρόλο σε αυτές έπαιξαν όλοι οι προαναφερόμενοι λόγιοι, φιλόσοφοι και στοχαστές οι οποίοι συνέβαλαν στην ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης ο οποίος χρησιμοποιήθηκε και συνεχίστηκε με τον Descartes, τον Newton και τον Leibniz.

Κεφάλαιο 2ο

Φιλοσοφικές αντιλήψεις για το άπειρο στη νεώτερη περίοδο (17ος- 18ος αι.)

Οι ρασιοναλιστές φιλόσοφοι

Ένα βασικό φιλοσοφικό ρεύμα του 17ου αι. ήταν ο ρασιοναλισμός. Ο Descartes και ο Leibniz ήταν εκείνοι που άσκησαν τη μεγαλύτερη επιρροή μέσα από το έργο τους στη φιλοσοφία και στα μαθηματικά, και μετά ο Spinoza που στηρίχθηκε στην Ευκλείδεια αξιωματικοποίηση για να συντάξει το φιλοσοφικό του αριστούργημα *Ηθική*. Σε αυτό το ρεύμα υπήρξε μια αντίδραση με τη μορφή του εμπειρισμού. Οι ρασιοναλιστές υποστήριζαν ότι οι βαθιές ουσιαστικές αλήθειες για τη δομή του κόσμου- όχι μόνο οι μαθηματικές αλήθειες- θα μπορούσαν να ανακαλυφθούν μόνο με την άσκηση της καθαρής απόδειξης που προκύπτει από τη λογική σκέψη. Οι εμπειριστές επέμεναν ότι μόνο μέσα από την εμπειρία- με a posteriori μέσα- θα μπορούσαμε να φτάσουμε στη γνώση αυτών των αληθειών.

Πριν τον Leibniz

Οι ρασιοναλιστές ήταν εν γένει φιλικοί προς το *ενεργεία* μαθηματικό και οντολογικό άπειρο. Πίστευαν ότι αν και δεν θα μπορούσαμε να το συναντήσουμε στην εμπειρία ή να το συλλάβουμε μέσω της φαντασίας, έχουμε μια απόλυτα ξεκάθαρη και συγκεκριμένη αντίληψη του απείρου μέσα μας. Ο Καρτέσιος στήριξε ένα από τα επιχειρήματά του για την ύπαρξη του Θεού σε αυτό. Υποστήριξε ότι αφού μόνο ο Θεός ο ίδιος είναι αληθινά άπειρος, μόνο Αυτός θα μπορούσε να μας εμφυσήσει την ιδέα για το άπειρο. Ο πεπερασμένος χαρακτήρας του ανθρώπινου όντος και ως εκ τούτου οι περιορισμοί μας σημαίνουν ότι δεν μπορούμε να συλλάβουμε μια τέτοια απειρία και είναι μάταιο για εμάς να εικάζουμε για πράγματα που είναι κατά αναπόφευκτο τρόπο μη πεπερασμένα - να ερευνούμε για παράδειγμα αν ο άπειρος αριθμός είναι περιττός ή άρτιος ή τι προκύπτει αν διχοτομήσουμε ένα άπειρο μέγεθος. Αλλά το να μην είμαστε ικανοί να το συλλάβουμε, δεν απέκλειε το να μπορούμε να το αγγίξουμε με τη σκέψη μας. Ο Λόγος θα μπορούσε να μας φέρει σε επαφή με το άπειρο, ακόμα και αν η εμπειρία ή η φαντασία μας δεν θα μπορούσε.

Αργότερα, ο Blaise Pascal (1623-1662), συμπατριώτης του Descartes, εξέφρασε με εξαίσιο λυρισμό τον θαυμασμό, το δέος και τον φόβο που αισθανόμαστε μπροστά στο τεράστιο μέγεθος και ηλικία της φύσης, την οποία περιέγραψε ως «μία άπειρη σφαίρα της οποίας το κέντρο είναι παντού και η περιφέρεια πουθενά» (Pascal,1966). «Ο άνθρωπος είναι μόνο μία καλαμιά, η πιο αδύναμη στη φύση», έγραψε, «αλλά», πρόσθεσε, «είναι μια σκεπτόμενη καλαμιά». Μάλιστα, η βασική αρχή της ηθικής, υποστήριξε, είναι το να σκέφτεσαι σωστά. Και αυτό συγκεντρώνει με ωραίο τρόπο το πνεύμα του ρασιοναλισμού: παρά το ότι ο άνθρωπος στέκεται τρωτός και αβοήθητος στο μέσο της άπειρης φύσης, μπορεί, μέσω της λογικής και της σκέψης του, να πετύχει την ευγένεια και την αξιοπρέπεια που υπερβαίνει τον πεπερασμένο του χαρακτήρα, και με αυτόν τον τρόπο να «αγγίξει» το άπειρο (Moore,1990).

Ο Ολλανδός φιλόσοφος Benedictus de Spinoza (1632-1677) είχε έντονες επιρροές από τον Καρτέσιο, αλλά και από τις νεοπλατωνικές απόψεις στη μεσαιωνική σκέψη. Συμφωνούσε με τον Καρτέσιο, ότι ο Θεός είναι θετικά άπειρος, με έναν τρόπο που μπορούμε να κατανοήσουμε με τη διάνοιά μας και όχι με τη φαντασία μας, αλλά μια τέτοια απειρία θα μπορούσε να γίνει κατανοητή μόνο με βασικά οντολογικούς όρους. Προσπάθησε να αποδείξει, με έναν αυστηρό και αξιωματικό τρόπο, ότι ο Θεός είναι ένα απόλυτα αδιαίρετο και ενοποιημένο όλο, Του οποίου η ουσία υπάρχει και είναι όλα όσα υπάρχουν. Ο Θεός ήταν, για τον Σπινόζα, η απλή, αιώνια, μία, αληθινή ουσία. Η σκέψη του εδώ, θυμίζει αυτή του Παρμενίδη και του Πλωτίνου. Αλλά, σε αντίθεση με αυτούς, και πάλι αυστηρά ακολουθώντας βασικές ρασιοναλιστικές παραδοχές, υιοθέτησε έναν πανθεϊσμό σύμφωνα με τον οποίο, αυτή η θεμελιώδης πραγματικότητα ήταν τόσο έμφυτη όσο και υπερβατική. Σε αυτό το βαθμό, η σκέψη του θυμίζει περισσότερο αυτή του Νικόλαου του Κουζάνου. Αυτός ήταν επίσης ο λόγος που θεωρήθηκε αθεϊστής. Ένας τέτοιος αθεϊσμός ήταν αναπόφευκτος για τον Σπινόζα. Αφού η πραγματικότητα του Θεού ήταν κάθε είδους, ένα από τα γνωρίσματά Του θα πρέπει να είναι και η (φυσική) έκταση. Ο Θεός και η φύση ήταν ένα, για τον Σπινόζα. Έτσι, οδηγήθηκε σε μία σημαντική διάκριση. Υπήρχε η απόλυτη απειρία την οποία μόνο ο Θεός απολάμβανε, η απειρία αυτού το οποίο περιλαμβάνει την ολότητα της πραγματικότητας. Αλλά επίσης, υπήρχε μια πιο αδύναμη έννοια «απειρία στο δικό της είδος». Αυτή την είχε οτιδήποτε δεν ήταν περιορισμένο από κάτι άλλο του ίδιου είδους (αντίθετα από το απόλυτο άπειρο, το οποίο δεν περιοριζόταν από οτιδήποτε άλλο γενικά). Ο χώρος και ο χρόνος ήταν ο καθένας άπειρος με την πιο αδύναμη έννοια (Moore,1990). Σε αντίθεση με *το χώρο και το χρόνο*, ένα φυσικό σώμα, που περιβάλλεται από άλλα, δεν είναι ούτε καν *αυτό το είδος απείρου*. Αυτή η ιδέα συγχωνεύει δύο σπουδαίες ελληνικές παραδόσεις: περιλαμβάνει μια ριζοσπαστική διάκριση μεταξύ πραγματικότητας και φαινομενικότητας η οποία οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στους Ελεάτες και τον Πλάτωνα, και περιέχει και μια αντίληψη της απειρίας των φαινομένων.

Σε αντίθεση με τους προηγούμενους, ο Pierre Gassendi (1592-1655), ένας άλλος Γάλλος εμπειριστής, πίστευε ότι η ιδέα μας για το άπειρο είναι μια απλή άρνηση της ιδέας μας για το πεπερασμένο. Αναγνωρίζουμε την πιθανότητα της απεριόριστης αύξησης του πεπερασμένου, και φτάνουμε στην ιδέα του απείρου ως ένα είδος αρνητικής προέκτασης από αυτό. Αλλά ο Καρτέσιος (Moore,1990) απάντησε κατηγορηματικά ότι δεν ήταν έτσι. Αυτό στο οποίο καταλήγουμε με αυτόν τον τρόπο είναι μια ιδέα αυτού που ονομάζουμε «επ' αόριστον» που βασίζεται σε απλή έλλειψη ορατών ορίων. Η ιδέα μας για το άπειρο, για παράδειγμα η ιδέα μας για την απεραντοσύνη και την τελειότητα του Θεού, είναι κάτι μάλλον πραγματικό - «ενεργεία» παρά «δυνάμει» άπειρο, κάτι απόλυτα άχρονο, ένα είδος κράματος του οντολογικού και του μαθηματικού απείρου. Σε ένα πλήρως μη-Αριστοτελικό πνεύμα έγραψε στον Clerselier: «Δεν χρησιμοποιώ ποτέ τη λέξη *άπειρο* εννοώντας μόνο ότι είναι χωρίς τέλος, κάτι που είναι αρνητικό και στο οποίο έχω εφαρμόσει τη λέξη «επ' άπειρον», αλλά εννοώντας κάτι πραγματικό, κάτι το οποίο είναι ασύγκριτα μεγαλύτερο από οτιδήποτε έχει τέλος» (Descartes, The Philosophical Writings, trans. J. Gottingham.1984). Με άλλα λόγια ο Καρτέσιος υποστήριξε κάτι περισσότερο από το δυνάμει άπειρο.

Ο Καρτέσιος και οι προβληματισμοί για το άπειρο

Το καρτεσιανό φιλοσοφικό σύστημα έχει δύο φαινομενικά αντίθετες επιταγές: την επανεξέταση όλης της προηγούμενης φιλοσοφικής παράδοσης και την απαλλαγή από την φιλοσοφική σκέψη του μεσαίωνα. Η αμφιβολία κυριαρχεί σε όλο το έργο του ταυτόχρονα με μια συστηματική αναζήτηση της βεβαιότητας. Το βασικό φιλοσοφικό ερώτημα είναι αν υπάρχει βεβαιότητα που διακρίνει τη γνώση και η ύπαρξη του φορέα της. Έτσι, ο Descartes αναρωτιέται, αν υποθέταμε ότι ένας πανίσχυρος Δαίμονας (και όχι ο πανάγαθος Θεός) μας τροφοδοτεί με απατηλή γνώση, θα ήταν δυνατό να πιστεύουμε ότι υπάρχουμε χωρίς να υπάρχουμε; Τελικά απαντά πως δεν είναι αυτό δυνατό, αφού για να πιστέψουμε ότι υπάρχουμε χωρίς να υπάρχουμε, θα πρέπει να υπάρχουμε ως σκεπτόμενα όντα (το πολυπαρεξηγημένο “cogito ergo sum”). Χρησιμοποιεί τα διαγώνια επιχειρήματα, με στοιχεία αυτοαναφορικότητας, τα οποία στηρίζονται σε φαινομενικές κυκλικότητες και την ύπαρξη εσωτερικών αντιφάσεων σε αυτές, οι οποίες αίρονται με την θεσμοθέτηση γλωσσικών ιεραρχιών. Έχοντας βέβαιη τη γνώση της ύπαρξής μας, προχωρά σε απόδειξη της ύπαρξης του Θεού, θεωρώντας έμφυτη την έννοια του Θεού. Κατασκευάζει μια δισυπόστατη θεωρία γνώσης μέσω κριτηρίων εσωτερικής ευκρίνειας και σαφήνειας των ιδεών (που είναι το μόνο περιεχόμενο του νου μας). Πρώτον, την αποδοχή ως αληθών, γενικών ή αφηρημένων αξιωματικών προτάσεων- που αναπαριστούν γλωσσικά ιδιότητες αιωνίων και αμετάβλητων ουσιών. Και δεύτερον, την παραγωγή προτάσεων-θεωρημάτων με αυστηρά αποδεικτική διαδικασία από τις αρχικές και άμεσα αποδεκτές ως αξιώματα. Πρότυπό του είναι η μαθηματική γνώση, όπου ο ανθρώπινος νους έχει έμφυτες ιδέες- σύμφωνος με την πλατωνική αντίληψη. Στην περίπτωση αυτή, ο Καρτέσιος δεν υιοθετεί κάποια πλατωνική θεωρία ανάμνησης αλλά το ό,τι ανασύρονται από τα βάθη της συνείδησης διάφορες προϋπάρχουσες έμφυτες ιδέες πχ. μαθηματικές αλήθειες.

Θεμελιώνει την εγκυρότητα της γνώσης με δύο αδιάψευστους και επαρκείς τρόπους: πρώτον, με την νοητική άμεση εποπτεία των βασικών πρώτων ιδεών (που είναι απόλυτα ευκρινείς και σαφείς) και δεύτερον, με την συμπερασματική παραγωγή προτάσεων-αληθειών (από τις βασικές πρώτες). Στην περίπτωση των μαθηματικών, κάτι τέτοιο αντιστοιχεί α) σε αξιωματικές αρχές και β) στη διαδικασία παραγωγικής απόδειξης. Η δράση του νου, για τον Καρτέσιο, είναι συνεχής και αδιάλειπτη. Υπάρχει, όμως, και η πιθανότητα σφαλμάτων στην αποδεικτική παραγωγική διαδικασία. Αυτά τα σφάλματα, τα αποδίδει στην παρεμβολή της βούλησης, αφού αυτή έχει ευρύτερο πεδίο δράσης από τη διάνοια, και επεκτείνεται σε πράγματα που δεν είναι κατανοητά. Ο δημιουργημένος κόσμος που μας περιβάλλει και μας περιέχει, έχει για τον Καρτέσιο δύο πλευρές: την εκτατικότητα και τη νόηση. Η ύλη διαθέτει έκταση, η νόηση είναι η άλλη πλευρά της πραγματικότητας, ενώ η σύνδεση ύλης και νου αποτελεί ένα δύσκολο φιλοσοφικό πρόβλημα. Επιπλέον κάνει μια διάκριση, οντολογικής υφής, για την πραγματικότητα: από τη μια η μορφική πραγματικότητα- που είναι η πραγματικότητα του έξω από εμάς κόσμου, και από την άλλη η αντικειμενική πραγματικότητα- που είναι η πραγματικότητα της νοητής εξεικόνισης από εμάς του κόσμου αυτού (πρβλ. Αναπολιτάνος, 2019). Για τη συμφωνία της μορφικής και της αντικειμενικής πραγματικότητας εγγυάται ο Δημιουργός που προνόησε για αυτή την συμφωνία. Τέλος, κάνει ακόμα μία διάκριση των ιδιοτήτων των φυσικών αντικειμένων και των αντίστοιχων αισθητηριακών εξεικονίσεών τους. Έτσι, διακρίνει τις ιδιότητες σε πρωτεύουσες: που τις έχουν και τα φυσικά αντικείμενα και οι εικόνες τους που σχηματίζουμε μέσω των αισθήσεών μας (παράδειγμα, οι γεωμετρικές ιδιότητες), και σε δευτερεύουσες: που δεν ανήκουν στα φυσικά αντικείμενα, αλλά είναι ουσιώδες μέρος των εικόνων μας γι’ αυτά (παράδειγμα, τα χρώματα).

Όπως διαβάζουμε στο *The Problem of Infinity in Meditation III* του Peter B. Creech, 2015 : το πιο χαρακτηριστικό επιχείρημα του Καρτέσιου για την ύπαρξη του Θεού στους *Στοχασμούς III* είναι σαθρό, γιατί δεν είναι όλες οι υποθέσεις (προκείμενες) που χρησιμοποιεί αληθείς. Ο Descartes πιστεύει πως επειδή μπορούμε να συλλάβουμε την ιδέα ενός άπειρου Θεού ενώ εμείς οι ίδιοι δεν είμαστε άπειροι, τότε αυτή η αντίληψη πρέπει να έχει δημιουργηθεί από κάτι πέρα από εμάς- δηλαδή από την τυπική πραγματικότητα του Θεού. Όμως, αν δεν μπορούμε να συλλάβουμε σωστά την ίδια την έννοια του απείρου, τότε δεν υπάρχει διαθέσιμη στον πεπερασμένο μας κόσμο η αναγκαία (για το επιχείρημα του Καρτέσιου) επίσημη αιτία – που μας υπερβαίνει.

Ο Descartes ισχυρίζεται ότι σωστά αντιλαμβανόμαστε, μέσω της νόησης, ένα ον που είναι άπειρο. Αντιλαμβάνομαι από το όνομα του «Θεού» μια συγκεκριμένη ουσία που είναι άπειρη, ανεξάρτητη, άπειρα ευφυής, και άπειρα ισχυρή…(Creech, 2015, p.2). Η δυσκολία εδώ είναι να αντιληφθεί κανείς την έννοια του απείρου, διότι πρέπει να είναι «μεγαλύτερο» από όλα τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στον παρατηρούμενο πεπερασμένο μας κόσμο. Δεν είναι δύσκολο, για παράδειγμα, να σκεφτεί κανείς την έννοια του πιο ευφυούς ανθρώπου στον κόσμο, δηλαδή ενός «εξαιρετικά ευφυούς» ανθρώπου, όμως είναι πολύ πιο σύνθετη η έννοια του απείρως πιο ευφυούς όντος. Δηλαδή, η έννοια ενός υπέρτατου χαρακτηριστικού - ακόμα και από άποψη νοημοσύνης ή ισχύος – μπορεί να γίνει αντιληπτή από πεπερασμένα πράγματα, απλά παρατηρώντας ότι είναι ανώτερο από όλα τα άλλα που υπάρχουν.

Επομένως, ο Καρτέσιος πρέπει αναγκαία να αποδείξει ότι είμαστε ικανοί να συλλάβουμε σωστά το ενεργεία άπειρο. «Η γνώση του στοχαστή είναι ατελής καθώς έχει αμφιβολίες, και επιθυμεί περισσότερη γνώση. Αυτή η γνώση είναι ατελείωτα αυξανόμενη. Αφού μπορεί να αυξάνεται χωρίς τέλος ή όριο, μπορεί να ονομαστεί «άπειρη», αλλά αυτό είναι ένα δυνητικό ή ατελές άπειρο. Ο Descartes χρησιμοποίησε τον όρο «χωρίς όριο» για αυτό το ατελές είδος απειρίας. Η κρίσιμη κίνηση είναι τώρα στην κατανόηση ότι αν κάτι μπορεί να είναι χωρίς τέλος αυξανόμενο, αυτό είναι το ίδιο με την κατανόηση ότι η αύξησή του δεν θα είναι ποτέ ολοκληρωμένη. Αλλά το να καταλάβει κανείς ότι δεν θα είναι ποτέ ολοκληρωμένη, είναι το να κατανοήσει τι είναι αυτό ότι η διαδικασία της αύξησης δεν μπορεί ποτέ να προσεγγιστεί. Και αυτό το απροσέγγιστο τέλος είναι ένα ολοκληρωμένο, πραγματικό-ενεργεία άπειρο» (Creech, 2015, p.2).

«Με άλλα λόγια, η σύγχρονη μαθηματική ιδέα της πληθικότητας των φυσικών αριθμών λειτουργεί με έναν τρόπο παρόμοιο με την ιδέα του πλήρως άπειρου (του Θεού) στη φιλοσοφία του Καρτέσιου. Η περίπτωση των αριθμών είναι απλά αναλογική, αλλά ο Καρτέσιος πιστεύει ότι μπορούμε να κάνουμε αυτή τη διάκριση μη-αναλογικά στην περίπτωση της δικής μας γνώσης… Εφαρμόζοντας το σημείο για τους αριθμούς στη γνώση, παίρνουμε την ιδέα της ενεργεία άπειρης γνώσης…» (Creech, 2015, p.3).

Η σύγκριση όμως των απλών μαθηματικών με το ενεργεία άπειρο, δεν είναι αυτό που χρειάζεται ο Καρτέσιος για να έχει ένα ενεργεία άπειρο τυπικό αίτιο. Μπορούμε να κατανοήσουμε ότι μία σειρά αριθμών μπορεί πάντα να αυξηθεί, χωρίς τη βοήθεια μιας ενεργεία άπειρης τυπικής πραγματικότητας. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μια αφηρημένη έννοια που σίγουρα δεν είναι σαφώς και ξεκάθαρα αντιληπτή αλλά μάλλον (αδύναμα) τεκμηριωμένη και μελετημένη από τον ίδιο (και για την εποχή του). Γενικότερα, δεν την αντιλαμβανόμαστε αμέσως και δεν είναι ξεκάθαρο αν το κάνουμε ποτέ πλήρως. Ο Καρτέσιος όμως πρέπει να συνδέσει αυτή την έννοια (των αριθμών) με τον Θεό, και να επεκταθεί πέρα από τα μαθηματικά έτσι ώστε ο Θεός να είναι άπειρος με κάθε τρόπο. «Κρίνω ότι ο Θεός είναι το πραγματικό άπειρο, έτσι ώστε τίποτα δεν μπορεί να προστεθεί στην τελειότητά του» (Creech,2015, p.3). Η συλλογιστική του Descartes, πίσω από την ανάγκη για μια τυπική αιτία, βασίζεται στην αρχή του τυπικού λόγου, η οποία δηλώνει ότι όλα πρέπει να έχουν λόγο ή αιτία. Με άλλα λόγια, κάτι δεν μπορεί να προέλθει από το τίποτα. Άλλωστε, ο Καρτέσιος στήριξε ολόκληρο το έργο του, μετά την κατάρριψη όλων των αντιληπτικών του αποδείξεων, στο ισχυρό και αμείωτο *Cogito*: Σκέφτομαι- επομένως είμαι, δεν είμαι ένα τίποτα – άρα υπάρχω.

Στους Στοχασμούς ΙΙΙ, ο Καρτέσιος υποστηρίζει ότι μπορούμε να αντιληφθούμε ένα ον που είναι άπειρο, και ότι η αντίληψή του -η ιδέα που έχουμε γι' αυτό- μπορεί να έρχεται αναγκαστικά από κάτι τόσο *τυπικά* πραγματικό, τουλάχιστον όσο είναι *αντικειμενικά* πραγματικό. Δηλαδή, σύμφωνα με την αρχή της αιτιώδους συνάφειας που υποστήριζε, η αιτία κάποιου πράγματος πρέπει να περιέχει τόση πραγματικότητα και τελειότητα (αν όχι περισσότερη), όση η ισχύς του. Επομένως, αφού η αντίληψή μας για το άπειρο – και άρα η αντικειμενική του πραγματικότητα- είναι πραγματικά περιορισμένη, άρα δεν είναι αναγκαία μία πραγματικά άπειρη τυπική πραγματικότητα (Creech, 2015).

Ο Descartes χρησιμοποιεί τον όρο «επαρκή γνώση» για να αναφερθεί στον υψηλότερο βαθμό σαφήνειας: προκειμένου κάθε γνώση να είναι επαρκής, απολύτως όλες οι ιδιότητες, που υπάρχουν στο αντικείμενο που γνωρίζουμε, πρέπει να περιέχονται σε αυτή. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό μπορεί να διατυπωθεί και ο αντίστοιχος για την επαρκή γνώση μιας πρότασης: η επαρκής γνώση μιας πρότασης εμπεριέχει όλα όσα η πρόταση συνεπάγεται. Δηλαδή, ο Καρτέσιος χρειάζεται να συμπεριλάβει μόνο τις «δυνάμει» προτάσεις που η έννοια του απείρου συνεπάγεται και αυτές όχι όλες μαζί ταυτόχρονα. Όμως, παρατηρεί ότι: αν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο πολύ απλό, δηλαδή κάτι που φαίνεται ότι μπορούμε εύκολα να αποκτήσουμε γνώση γι’ αυτό– για παράδειγμα ένα τρίγωνο- και πάλι δεν μπορούμε να αποκτήσουμε «επαρκή γνώση» γι’ αυτό. Διότι, ακόμα και αν θεωρούσαμε ότι έχουμε κατανοήσει όλα τα χαρακτηριστικά που μπορούμε να συλλάβουμε σε αυτό, μετά από χίλια χρόνια ένας μαθηματικός μπορεί να ανίχνευε περισσότερες ιδιότητες, και έτσι δεν θα ήμασταν ποτέ σίγουροι ότι έχουμε αντιληφθεί όλα που θα μπορούσαμε να αντιληφθούμε για το συγκεκριμένο αντικείμενο (Creech, 2015, p.4).

Ο Καρτέσιος υποστηρίζει ότι επειδή δεν γνωρίζουμε κάθε αληθή πρόταση που αφορά σε κάτι τόσο σαφές και ξεκάθαρα ευδιάκριτο, όσο ένα τρίγωνο, δεν μπορούμε να έχουμε επαρκή γνώση ακόμα και για κάτι τέτοιο. Μια αναγκαία και αληθής πρόταση μπορεί να αναφερθεί σ’ αυτό εκ νέου, όσο συχνά θέλουμε, και αυτό μπορεί να συμβαίνει επ’ αόριστον. Οι προτάσεις που προστίθενται δυνητικά στην έννοια του τριγώνου δεν μπορεί να είναι αντιφατικές, ενώ αυτό δεν ισχύει για την έννοια ενός όντος που είναι άπειρο. Η διαφορά είναι στη φύση των δυνητικών προτάσεων που είναι διαθέσιμες για ένα τρίγωνο έναντι αυτών ενός άπειρου όντος. Ο Καρτέσιος δεν χρειάζεται όλες τις αληθείς προτάσεις για ένα τρίγωνο για να το αντιληφθεί επαρκώς, αλλά αν ήταν να αντιληφθεί αρκετές από αυτές ξεκάθαρα και ευκρινώς και ταυτόχρονα, θα τις επιβεβαίωνε απαραίτητα. Ωστόσο, δεν μπορούμε να συλλάβουμε κάτι που αψηφά τους νόμους της λογικής, δηλαδή το νόμο της μη αντίφασης. Δεν μπορούμε να δεχτούμε δύο αντικρουόμενες προτάσεις για τον Θεό ταυτόχρονα, έτσι δεν μπορούμε να έχουμε την αντίληψη μιας άπειρης αντικειμενικής πραγματικής πραγματικότητας, και άρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει μια άπειρη τυπική πραγματικότητα από την οποία προέρχεται (Creech, 2015).

Οι Nolan και Nelson, υποστηρίζουν ότι, το να αντιληφθούμε κάτι ξεκάθαρα και ευκρινώς είναι ουσιαστικά θέμα αντίληψης συγκεκριμένων λογικών σχέσεων. Ο στοχαστής ανακαλύπτει την ξεκάθαρη και διακριτή ιδέα του ενεργεία απείρου ενώ διερευνά τη διαδικασία της αύξησης και σύνθεσης ιδεών με την πεπερασμένη αντικειμενική πραγματικότητα. Όμως, ο Creech διαφωνεί, λέγοντας ότι ο στοχαστής θα πέσει αναγκαία σε αντικρουόμενες προτάσεις και τότε θα αναγκαστεί είτε να διαχωρίσει την έννοια του πραγματικού απείρου σε δύο διακριτά μέρη είτε θα αρνηθεί μία από τις προτάσεις. Και με τους δύο τρόπους, όμως, χάνεται το μοναδικό πραγματικό άπειρο. Επιπλέον, ο στοχαστής *μπορεί* να είναι η *αιτία* του αντιληπτού απείρου, ασκώντας το είδος της επαναλαμβανόμενης αύξησης που είναι διαθέσιμη στον πεπερασμένο μας κόσμο. Επειδή η αντίληψή μας ενός άπειρου όντος είναι ατελής και περιορισμένη συνεπάγεται, σύμφωνα με την αρχή της αιτιώδους πραγματικότητας του Descartes, ότι δεν είναι αναγκαία η ενεργεία άπειρη τυπική πραγματικότητα για την υποστήριξή της, και έτσι η απόδειξη για την ύπαρξη του Θεού καταρρέει.

Η Jill LeBlanc (1998, 279-282) υποστηρίζει ότι παρόλο που μπορούμε να γνωρίζουμε ότι ένα άπειρο ον θα μπορούσε να δημιουργήσει λογικές αντιφάσεις, εμείς δεν θα μπορούσαμε να τις παρακολουθήσουμε. Ισχυρίζεται ότι: αν η άπειρη δύναμη μπορεί να δημιουργήσει λογικές αντιφάσεις, τότε μπορούμε να δούμε γιατί το άπειρο είναι πέρα από την αντίληψή μας. Αφού ο Θεός είναι η άπειρη δύναμη, χωρίς όρια δύναμη, αυτό θα σημαίνει ότι είναι και χωρίς λογικά όρια, επομένως ο Θεός μπορεί να δημιουργήσει αυτές τις αδιανόητες καταστάσεις- δηλαδή, καταστάσεις που εμείς δεν μπορούμε να κατανοήσουμε. Άρα, το άπειρο είναι πέρα και πάνω από την αντίληψή μας ή αλλιώς η ιδέα του Θεού είναι δικό μας δημιούργημα, πράγμα που καταρρίπτει την απόδειξη της ύπαρξης του Θεού στον Τρίτο Στοχασμό του Καρτέσιου.

Με αυτόν τον τρόπο, θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε μια διχοτομία για τον Descartes, υποστηρίζει ο Creech: είτε ένα ον που είναι πραγματικά άπειρο εκ φύσεως περιέχει λογικές ασυνέπειες και άρα δεν μπορούμε να έχουμε σωστή αντίληψη γι’ αυτό, είτε μπορούμε να το συλλάβουμε σωστά μέσα στην πεπερασμένη αντικειμενική μας πραγματικότητα και επομένως δεν υπάρχει αναγκαιότητα ύπαρξης της αιτίας μιας τυπικής άπειρης πραγματικότητας. Με τον ένα ή τον άλλον τρόπο, δεν έχουμε λόγο να ισχυριστούμε ότι υπάρχει μια απαραίτητη τυπική αιτία. Από τη στιγμή που είδαμε ότι το άπειρο είναι πέρα και πάνω από την αντίληψή μας, δείξαμε ότι μία προκείμενη στο χαρακτηριστικό επιχείρημα του Καρτέσιου για την απόδειξη ύπαρξης του Θεού είναι ψευδής, απορρίπτοντας έτσι την ορθότητα του επιχειρήματος (αλλά όχι την εγκυρότητα). Δηλαδή, η προϋπόθεση ότι έχουμε μια αντίληψη για ένα ον που είναι πραγματικά άπειρο περιέχει καταστροφικές αντιφάσεις. Ο Καρτέσιος απλά δεν μπορεί να κάνει τον ισχυρισμό ότι η αντίληψή μας για το άπειρο είναι τόσο ισχυρή, όσο χρειάζεται για να έχει μια αιτία απ’ έξω, ή μεγαλύτερη από τη δική μας ύπαρξη.

Οι προβληματισμοί του Leibniz σχετικά με το άπειρο

Μαζί με τους άλλους ρασιοναλιστές, ο Leibniz υποστήριξε ότι η αληθής (πραγματική) απειρία μπορεί να συλληφθεί από το νου αλλά όχι από τη φαντασία. Η πραγματική απειρία ήταν το Απόλυτο, ο Θεός, ο Οποίος στην απολυτότητά του δεν σχηματίστηκε αθροιστικά από μέρη αλλά προηγήθηκε από κάθε σύνθεση. Ήταν, επίσης, έξω από τον χώρο και τον χρόνο, που αποτελούν τα χαρακτηριστικά του τρόπου με τον οποίο τα πράγματα φαίνονται σε εμάς. Αλλά ακόμη και στην περίπτωσή τους, ο Leibniz πίστευε ότι έχουμε μια ιδέα του απείρου έμφυτη μέσα μας, μια ιδέα που δεν φτάσαμε απλά με προέκταση της ιδέας μας για το πεπερασμένο. Αυτή η ιδέα είναι το μαθηματικό άπειρο (αθροιστικά και διαιρετικά).

Υπήρχαν κάποια Αριστοτελικά στοιχεία στον τρόπο που ο Leibniz έβλεπε το άπειρο, για παράδειγμα ο άπειρος χώρος αποκλείει έναν χωρικά πεπερασμένο κόσμο: ο χώρος ήταν ομοιογενής. Αλλού όμως, οι απόψεις του φαίνονταν αντίθετες από του Αριστοτέλη. Σε ένα γράμμα στον Foucher έγραφε: «Είμαι τόσο υπέρ του *ενεργεία* απείρου, που …υποστηρίζω πως η φύση το επηρεάζει παντού, προκειμένου να επισημανθεί καλύτερα η τελειότητα του δημιουργού της. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης είναι, δεν λέω διαιρετό, αλλά στην πραγματικότητα παντού υποδιαιρεμένο» (Leibniz, 1960, p. 416 στο Moore, 1990). Πάλι, σχολιάζοντας την πίστη του στη συνέχεια όλων των αλλαγών, έγραψε: «η ανυπολόγιστη ωραιότητα των πραγμάτων, η οποία πάντα και παντού εμπεριέχει ένα *ενεργεία* άπειρο» (Leibniz, 1981,p. 57 στο Moore, 1990).

Ένα βασικό αίτημα του ορθολογισμού είναι η σταθερότητα του γνωστικού πλαισίου, που μέρος του μας έχει δοθεί a priori και μέρος του μας αποκαλύπτεται. Στο φιλοσοφικό ερώτημα, για το ποιο είναι το οντολογικό status των γενικών αφηρημένων ιδεών, οι ρασιοναλιστές απαντούν πως τα αριστοτελικά «καθόλου» (τα universalia των μεσαιωνικών) υπάρχουν. Υποστηρίζουν ότι είναι οντολογικά πρότερα των μορφοποιημένων αντικειμένων, και ότι οι ιδιότητες υπάρχουν καθ’ εαυτές, και ότι η έδρα και η πηγή των καθόλου είναι ο Δημιουργός. Συγκεκριμένα ο Leibniz θεωρούσε ότι υπάρχει μια σειρά από αρχές που πηγάζουν από τον Δημιουργό και δεν έρχονται από την εμπειρία. Θεωρούσε, λοιπόν, κάποιες αλήθειες-αρχές που η γνώση τους μπορεί να αποκτηθεί άμεσα και όχι από την εμπειρία. Μια τέτοια αρχή, ήταν η αρχή της συνέχειας, σύμφωνα με την οποία, οτιδήποτε είναι χωροχρονικά εκτεταμένο είναι άπειρα διαιρέσιμο. Αυτό σημαίνει, ότι η φύση είναι συνεχής, δηλαδή χωρίς κενά ή εγκοπές, αφού ο Δημιουργός επέλεξε να δημιουργήσει τον καλύτερο δυνατό κόσμο, και ο καλύτερος δυνατός κόσμος δεν μπορεί να περιέχει κενά που δεν μπορούν να εξηγηθούν.

Για τον Leibniz, ο χρόνος (και ο χώρος) είναι ένα σύνολο χρονικών σχέσεων μεταξύ συμβάντων και δεν υπάρχει ανεξάρτητα από τα αντικείμενα που μεταβάλλονται και αλληλεπιδρούν (σχεσιοκρατική άποψη). Μπορούμε να μετέχουμε επιστημολογικά αυτού του κόσμου μόνο αναπαριστώντας τον. Η αναπαράσταση είναι μια διαδικασία εξεικόνισης, μια σχέση αυτού που εξεικονίζει και αυτού που εξεικονίζεται. Επειδή ο Δημιουργός είναι πανάγαθος δεν μπορεί να μας εξαπατά, και επομένως εγγυάται για το ότι η αναπαράσταση αποτελεί πηγή αλήθειας. Εδώ, ο Leibniz συμφωνεί με τον Καρτέσιο, ότι υπάρχουν στο νου του Δημιουργού οι ουσίες-πρότυπα και αυτές λαμβάνουν υπόσταση και ως υλικές πραγματικότητες και ως αισθητηριακά (ή νοητά) περιεχόμενα αντιληπτικών (ή νοητών) πράξεων. Τα μηνύματα από τα αισθητηριακά όργανα μεταφέρονταν στο καρτεσιανό «κωνάριο», έναν αδένα-κέντρο, όπου μεταμορφώνονταν κατάλληλα και έπαιρναν υπόσταση. Έτσι, κατά τον Descartes, είχαμε τη μορφική πραγματικότητα (που είναι τα υλικά αντικείμενα) και την αντικειμενική (που είναι οι νοητές απεικονίσεις των υλικών αντικειμένων). Αυτές οι δύο πραγματικότητες είναι δομικά ισόμορφες, γιατί είναι πραγματώσεις της ίδιας θεϊκής ιδέας. Δεν είχαν, όμως, τις ίδιες ιδιότητες, που τις διέκρινε σε πρωτεύουσες (σχήμα, γεωμετρικές ιδιότητες) και σε δευτερεύουσες (χρώματα, γεύσεις, οσμές). Ο Leibniz δεχόταν τη διάκριση μορφικής/αντικειμενικής πραγματικότητας και την πρότερη ύπαρξη των ιδεών-προτύπων στο νου του Δημιουργού (πράγμα που παραπέμπει στην πλατωνική οντολογία) (Αναπολιτάνος, 2016).

Το σύστημα του Leibniz ήταν προϊόν δύο αλληλοσυγκρουόμενων φιλοσοφικών αιτημάτων. Το πρώτο αίτημα, ήταν ότι οτιδήποτε σύνθετο θα έπρεπε να αποτελείται από απλά πράγματα. Επομένως, θεωρούσε ότι υπήρχαν θεμελιώδεις ουσίες που ήταν απλές, μη περαιτέρω αναλύσιμες, ή διαιρέσιμες και τις ονόμασε *μονάδες*. Το δεύτερο αίτημα, ήταν ότι η υλική πραγματικότητα θα έπρεπε να είναι επ' άπειρον διαιρέσιμη και κατ' επέκταση ο χρόνος και ο χώρος. Οι μονάδες δεν θα έπρεπε να είναι εκτεταμένες αφού δεν θα έπρεπε να είναι περαιτέρω διαιρέσιμες και άρα δεν θα έπρεπε να είναι υπαρκτές στον χώρο. Απέρριψε, επίσης, το να λαμβάνουν οι μονάδες τη θέση χωρικών σημείων, αφού ότι υπάρχει στον χώρο είναι τρισδιάστατο. Άρα, οι μονάδες δεν πρέπει να ανήκουν στον χώρο και να μη μεταβάλλονται στον χρόνο. Γιατί, ο χώρος και ο χρόνος πρέπει να είναι καλώς θεμελιωμένα φαινόμενα (bene fundata) πάνω στην συνολική αμοιβαία, προοπτική αναπαράσταση από κάθε μια τους, όλων των άλλων μονάδων, καθώς αυτές αλλάζουν αναπαραστάσεις. Επομένως, οι μονάδες δεν έχουν μέρη, δεν έχουν μορφή, δεν είναι χωρικά προσδιορίσιμες, δεν μεταβάλλονται στον χρόνο, δεν αλληλεπιδρούν και δεν επικοινωνούν με τις υπόλοιπες. Οι μονάδες μόνο αναπαριστούν όλες τις άλλες καθώς αναπαριστούν όλες τις άλλες. Είναι, δηλαδή, αναπαραστασιακοί μηχανισμοί, με συνείδηση όμως των προβαλλομένων και λειτουργούν συνεχώς και επ' άπειρον. Ο βαθμός συνειδητότητας των μονάδων ποικίλλει. Κάθε μονάδα βιώνει ως θεατής αυτές τις αναπαραστάσεις (όπως ο Δημιουργός τις προγραμμάτισε) και δεν διακρίνει μεμονωμένες μονάδες, αλλά σύνολα μονάδων καθώς συγκροτούν πολλαπλότητες. Κάθε μονάδα αναπαριστά έναν κόσμο προοπτικών, μεταβαλλόμενων αναπαραστασιακών συγκροτήσεων, ως κόσμο χωροχρονικά προσδιοριζόμενων και αλληλοεπιδρώντων οργανικών και ανόργανων ολοτήτων. Οι διαφορετικές προοπτικές αναπαραστάσεις «συμφωνούν», αφού κυριαρχεί μια προκαθορισμένη αρμονία, λόγω του ότι ο κόσμος, όπως είπαμε, είναι ο καλύτερος δυνατός (Αναπολιτάνος, 2016).

Για τον Leibniz, η επ' άπειρον διαιρεσιμότητα κάθε εκτατού είναι θεμελιώδες στοιχείο της χωροχρονικότητας. Για τους φιλοσόφους και μαθηματικούς της εποχής, η επ' άπειρον διαιρεσιμότητα ταυτιζόταν με το συνεχές. Η σύγχρονη αντίληψη για το συνεχές απαιτεί επίσης και την πληρότητα. Το συνεχές τώρα είναι το επ' άπειρον διαιρέσιμο αλλά και συγχρόνως συνεχιστικά πλήρες. Αυτό δεν ήταν γνωστό μέχρι τον 19^{ο} αιώνα. Ο Leibniz, λοιπόν, έπρεπε να συνδυάσει ένα πλουραλιστικά και θεμελιοκρατικά δομημένο σύστημα και ένα συνεχιστικό φαίνεσθαι. Δηλαδή, έθετε δύο βασικές προϋποθέσεις: από τη μια ο κόσμος αποτελείται από πολλά που περιέχουν τελικές ουσιώδεις μονάδες αμερείς και αδιαίρετες (δυνητικά και πραγματικά) και από την άλλη, κάθε χωρικά εκτεταμένο είναι άπειρα διαιρετό. Πώς, όμως, θα μπορούσε το συνεχές- και άρα άπειρα διαιρέσιμο να αποτελείται από αδιαίρετα και αμερή στοιχεία; Υπήρχε, λοιπόν, μία αντίθεση, μία εννοιολογική σύγκρουση του διακριτού με το συνεχές. Η απάντηση δόθηκε με ένα οντολογικό σχήμα τριών επιπέδων: το επίπεδο της πραγματικότητας των ουσιωδών μονάδων, το επίπεδο του φαίνεσθαι (του χωροχρονικού κόσμου μας) και το επίπεδο του ιδεώδους. Στο επίπεδο του ιδεώδους, αν προσθέσουμε ένα σημείο σε ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα, αυτό δεν θα αλλάξει μέγεθος. Ακόμα και άπειρα (αριθμήσιμα) διακριτά, μη εκτεταμένα σημεία αν προσθέσουμε δεν θα αλλάξει το μέγεθος του ευθυγράμμου τμήματος (δεδομένου ότι ένα σύνολο άπειρων τέτοιων σημείων δεν μπορεί να παράγει κάτι εκτεταμένο). Έτσι, ο Leibniz έδωσε την λύση στο σύστημά του, με τις μονάδες του να υπάρχουν εκτός χώρου και να μην καταλαμβάνουν χωρικά σημεία. Το «φαίνεσθαι» είναι το σύνολο των προοπτικών αναπαραστάσεων των εκτός χρόνου και χώρου μονάδων του, και μόνο εκεί εκτεταμένα αντικείμενα μπορούν να διαιρούνται επ' άπειρον. Η οντολογική βάση αυτών των διαιρέσεων στο φαίνεσθαι, είναι το πραγματικό επίπεδο όπου ανήκουν οι μονάδες και οι προοπτικού χαρακτήρα αναπαραστάσεις τους. Άρα, «στο πραγματικό (μεταφυσικό) επίπεδο, οι κατά Leibniz μονάδες είναι μεταφυσικά άτομα, άχωρα και άχρονα «σημεία» αναπαριστώντας το ένα το άλλο» (Αναπολιτάνος, 2019).

Για τον Leibniz, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν στην ύλη οι αρχές της αληθινής ενότητας, αφού όλα είναι μια επ' άπειρον συνένωση μερών. Μία πολλαπλότητα μπορεί να οφείλει την πραγματική της ύπαρξη μόνον σε αληθείς ενότητες που είναι άλλης προέλευσης, απολύτως διαφορετικές από μαθηματικά σημεία. Πώς το αδιάστατο και αμερές σημείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την οικοδόμηση του διαστατού και έχοντος μέρη; Προσπαθώντας να βγει από τον «λαβύρινθο του συνεχούς» διακρίνει τρία είδη σημείων: το μεταφυσικό, το μαθηματικό και το φυσικό σημείο. Τα μεταφυσικά σημεία είναι οι κατά Leibniz μονάδες, τα μόνα ακριβή και πραγματικά, τα οποία είναι υπεύθυνα για την ύπαρξη κάθε πολλαπλότητας άρα και οτιδήποτε που υπάρχει. Τα μαθηματικά σημεία είναι ακριβή, αλλά αποτελούν τρόπους ύπαρξης, είναι τα προοπτικά σημεία από τα οποία κάθε μονάδα αναπαριστά το σύμπαν. Επειδή ο Leibniz ταυτίζει το φυσικό χώρο των φαινομένων (φαίνεσθαι) με τη μαθηματική τους αναπαράσταση, το μαθηματικό σημείο είναι το χωρικό σημείο. Τα φυσικά σημεία είναι αδιαίρετα μόνο φαινομενικώς. Οι χωρικές σχέσεις, μόνον στο επίπεδο του φαίνεσθαι, είναι συζεύξεις ιδιοτήτων που έχουν τα πραγματικά υποκείμενα, άρα ανάγονται σε σχέσεις στο πραγματικό επίπεδο. Απορρίπτει, λοιπόν, το ότι οι μονάδες του είναι τοποθετημένες σε χωρικά σημεία, αφού τα χωρικά σημεία δεν έχουν διαστάσεις και επομένως δεν μπορούν αθροιστικά να δημιουργήσουν έκταση (αν και αυτό γίνεται στο επίπεδο των μαθηματικών αντικειμένων). Έτσι, για να συνδυάσει την ιδέα του κόσμου μας ως αποτελούμενο από αδιαίρετες ουσιώδεις μονάδες και την ιδέα του κόσμου μας με την άπειρη διαιρετότητα του χωρικά εκτεταμένου, τοποθετεί τις μονάδες του εκτός χώρου και θεωρεί ότι δεν μεταβάλλονται εντός χρόνου. Αυτό βέβαια, έχει ως συνέπεια ότι δεν θεωρεί τον χώρο πραγματικό και ότι αντιμετωπίζει το εκτεταμένο μόνο ως φαινόμενο (Αναπολιτάνος, 2019). Ο Leibniz θεωρούσε τον χώρο και τον χρόνο άπειρο, και αθροιστικά και διαιρετικά, άρα με μια έννοια ενεργεία άπειρο- το ίδιο και αυτό που υπάρχει στον χώρο και στον χρόνο.

Οι απόψεις του Leibniz εδώ ήταν συνδεδεμένες με μία πίστη στην φαινομενικότητα του χώρου και του χρόνου. Συνέχισε να υποστηρίζει ότι ούτε τον χρόνο, ούτε τον χώρο, ούτε αυτό που υπάρχει στον χώρο και στον χρόνο μπορούμε να τα θεωρούμε ως πραγματικά, γιατί ανήκουν στα φαινόμενα. Δανειζόμενος τον όρο που μας σύστησαν οι μεσαιωνικοί, είπε ότι η φύση είναι άπειρη μόνο με μία συν-κατηγορηματική έννοια. Δηλαδή, δεδομένου οποιουδήποτε πεπερασμένου μέρους της φύσης, υπάρχει πάντα κι άλλο. Εξάλλου, δεν υπήρχαν γι' αυτόν άπειρες ποσότητες ή άπειροι αριθμοί. Για παράδειγμα, το παράδοξο των περιττών αριθμών (ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών): θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε κάθε περιττό αριθμό αντιστοιχεί ένας μοναδικός φυσικός αριθμός και αντίστροφα, αλλά τότε μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός (πλήθος) των φυσικών αριθμών είναι ίσος με τον αριθμό (πλήθος) των περιττών αριθμών. Την εποχή εκείνη, φάνταζε παράδοξο, αν και σήμερα γνωρίζουμε ότι ο πληθάριθμος είναι ίδιος.

Σχετικά με τα απειροστά, θεωρούσε ότι είναι χρήσιμες επινοήσεις. Πίστευε ότι η αναφορά σε αυτά θα μπορούσε να έχει νόημα μόνο σαν ένας καθαρά τεχνικός μηχανισμός μέσα στον λογισμό, σαν ένας βολικός «τρόπος του λέγειν». Η έννοια του απειροστού δεν είναι καθόλου σαφής στο έργο του Leibniz. Δεν ήταν καθόλου σίγουρος για το οντολογικό τους status. Σίγουρα υποστήριζε την άμεση σχέση τους με την αρχή της συνέχειας, και την χωρίς αμφιβολία επιτυχία τους στη μαθηματική πρακτική. Στηριζόμενος στη διαισθητική του αντίληψη για τα απειροστά, και στην αρχή της συνέχειας (με τη μορφή: «οι ιδιότητες των όντων είναι συνεχείς συναρτήσεις των βασικών χαρακτηριστικών τους»), πίστευε ότι η ακινησία είναι μια ειδική οριακή περίπτωση της κίνησης και η ισότητα μια οριακή περίπτωση της ανισότητας. Αυτό βέβαια, είναι πολύ κοντά στις σύγχρονες αντιλήψεις, όπως φαίνεται και στην Non-Standard Analysis του A. Robinson, όπου αναφέρεται ότι: «η πραγματική ευθεία μπορεί να επεκταθεί σε μια υπερευθεία τέτοια ώστε γύρω από κάθε πραγματικό αριθμό να υπάρχει μια άπειρη «φυσαλλίδα» απειροστών, που διατακτικά βρίσκονται πλησιέστερά του από κάθε άλλον πραγματικό αριθμό» (Robinson, 1974, Αναπολιτάνος, 1979).

Επειδή τα απειροστά αυτά δεν ικανοποιούν το αξίωμα του Αρχιμήδους – Ευδόξου[1] με την προσθήκη ενός απειροστού σε έναν πραγματικό αριθμό δεν οδηγούμαστε σε έναν άλλον, και έτσι η ισότητα μπορεί να θεωρηθεί σαν άπειρα μικρή ανισότητα.

Η αρχή της συνέχειας εκφράζεται στο έργο του Leibniz με διάφορους τρόπους, και ισχύει καθολικά, χαρακτηρίζοντας κάθε συνεχή διαδικασία. Υποστήριζε ότι ακόμα και το σύνολο των φυσικών όντων, οργανικών και ανόργανων σχηματίζει μια συνεχή αλυσίδα που είναι πλήρης – αφού υπάρχει στο νου του Θεού. Ήταν τόσο πεπεισμένος γι' αυτό, που δεχόταν την ύπαρξη ζώων που δεν είναι γνωστά σε εμάς γιατί δεν έχουν ακόμα ανακαλυφθεί. Με αυτή την έννοια, ήταν πολύ κοντά στην έννοια του μαθηματικού συνεχούς όπως ισχύει σήμερα, δηλαδή της πραγματικής ευθείας με τα δύο βασικά χαρακτηριστικά της: πυκνότητα, αλλά και πληρότητα. Το μαθηματικό συνεχές είναι ένα αναπαραστασιακό σχήμα, όπως το ιδεατό επίπεδο του τριμερούς οντολογικού συστήματος του Leibniz, που αναφέρθηκε πιο πάνω. Δηλαδή, το μαθηματικό συνεχές είναι μια λογική νοητή οντότητα που δεν εξαρτάται από τα επιμέρους φαινόμενα. Βέβαια δεν διέθετε τεχνικές για τον προσδιορισμό της πληρότητας και γι αυτό εξέφραζε διαισθήσεις. Επομένως, η πραγματική ευθεία προϋπάρχει των σημείων της, τα οποία είναι δυνατότητες τομής. Το όλο προϋπάρχει του μέρους, και η άπειρη διαιρετότητά του είναι δυνητική. Άρα, το χωροχρονικό συνεχές είναι μόνο δυνητικά διαιρετό επ' άπειρον (αν και τα εκτεταμένα αντικείμενα είναι πραγματικά άπειρα διαιρετά) και έχει χαρακτηριστικά ανάλογα του μαθηματικού συνεχούς.

Σύμφωνα επιπλέον με τον Αναπολιτάνο (1985) ο οποίος είναι ειδικός στον Leibniz, ο φυσικός κόσμος είναι «μια οργανωμένη, συνεπής και λογικά δομημένη σειρά από φαινόμενα (*bene fundata*). Τα φαινόμενα αυτά εδράζονται πάνω στην πραγματικότητα ενός άχρονα παρόντος κόσμου, αποτελούμενου από διακριτές οντότητες που τις ονομάζει *μονάδες*. Οι μονάδες αυτές δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, δεν αλληλοεπιδρούν και υπόκεινται σε μια εσωτερική διαδικασία εναλλαγής *αναπαραστάσεων.* Οι αναπαραστάσεις αυτές είναι απεικονίσεις του συστήματος όλων των άλλων μονάδων. Εσωτερικό στοιχείο αυτών των αναπαραστάσεων, εσωτερικό δηλαδή ταξινομικό τους χαρακτηριστικό, είναι ο *χωροχρόνος*».

Έτσι, ο κόσμος, για τον Leibniz, είναι διακριτός και αποτελείται από τελικά αμερείς οντότητες (τις μονάδες), όμως το χωροχρονικό μας σύμπαν είναι άπειρα διαιρετό: πράγμα βέβαια που μπορεί να φαίνεται αντιφατικό όμως δεν είναι, γιατί ο χωροχρόνος ανήκει στα φαινόμενα και οι μονάδες στο θεμελιώδες οντολογικό επίπεδο.

[1] Αρχή Αρχιμήδους-Ευδόξου: για κάθε ζευγάρι από πραγματικούς αριθμούς α, β με τον α θετικό υπάρχει φυσικός αριθμός ν με την ιδιότητα $ν\cdot α>β$. Επίσης, ο Buckley (2008) περιγράφει την αρχή: αν α και b είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα και $α<b$, τότε θα πρέπει να υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n\cdot α>b$. Στη δυϊκή απειροστική της μορφή: δεδομένου ενός τυχόντος $ε>0$, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $ε>1/n$ (Αναπολιτάνος, 2019).

Για τον Leibniz, το άπειρο είναι αποδεκτό και ως δυνητικό και ως πραγματικό. Βέβαια δεν μπορούσε να δεχτεί την ύπαρξη άπειρων αριθμών ή άπειρων ευθειών. Υποστήριζε, όμως, ότι ο χρόνος μπορεί «να συνεχισθεί επ' άπειρον» επομένως ότι υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής μιας άπειρης ευθείας. Ήταν σαφές γι' αυτόν, ότι δεν μπορεί να συνδεθεί το άπειρο με το πεπερασμένο, ούτε το πεπερασμένο με το απειροστικά μικρό, αν χρησιμοποιούμε διαδικασίες που επιτρέπονται μόνο στα πλαίσια μιας από αυτές τις περιοχές. «…ο Leibniz, συνεπής με τον εαυτό του, εμφανίζεται να αρνείται την *πραγματική* απειρία του μαθηματικού συνεχούς, γιατί το θεωρεί κατασκεύασμα του νου που, σαν τέτοιο, δεν μπορεί παρά να είναι πρότερο των σημείων του- όντας *μόνο δυνητικά* διαιρετό και όχι *πραγματικά* διαιρεμένο – ενώ από την άλλη μεριά, δέχεται την πραγματική απειρία χωροχρονικά εκτεταμένων φυσικών αντικειμένων. Τα κατασκευάσματα του νου δεν μπορούν να αποτελούνται από άπειρα πραγματικά μέρη γιατί ο πεπερασμένος ανθρώπινος νους δεν έχει τη δυνατότητα πραγματικής, αλλά μόνο δυνητικής αποδόμησής τους. Αντίθετα, τα χωροχρονικά εκτεταμένα φυσικά αντικείμενα, μη-εξαρτώμενα από τον ανθρώπινο νου, μπορούν να αποτελούνται από άπειρες το πλήθος μη εκτατές μονάδες, γιατί έτσι αποφάσισε ο Δημιουργός να πλάσει τον κόσμο» (Αναπολιτάνος, 1985).

Οι εμπειριστές

Ουσιαστικά ο εμπειρισμός ήταν μια αντίδραση στον ρασιοναλισμό, αν και οι απόψεις του Leibniz για το άπειρο παρουσιάστηκαν ως απευθείας απάντηση στον Locke, σε ένα σχόλιο στο μεγαλύτερο φιλοσοφικό έργο του τελευταίου. Οι εμπειριστές (κύριοι εκπρόσωποι των οποίων ήταν ο Άγγλος φιλόσοφος Locke, και ο Σκωτσέζος Hume) υποστήριζαν ότι δεν μπορούμε να έχουμε καμία ιδέα ή έννοια για οτιδήποτε το οποίο δεν αντιλαμβανόμαστε μέσω της εμπειρίας. Έτσι, το άπειρο γι' αυτούς ήταν μια πραγματική πρόκληση, ακόμα και το Αριστοτελικό «δυνάμει» άπειρο. Εδώ υπήρξε ο κίνδυνος ακόμα και της απόρριψης της έννοιας του απείρου ως κενή ή ασαφής. Πρώτα αντιμετώπισε αυτό το πρόβλημα ο Άγγλος φιλόσοφος Thomas Hobbes (1588-1679). Ως απάντηση στον Καρτέσιο, υποστήριξε ότι δεν μπορούμε να συλλάβουμε τίποτα που δεν έχουμε πρώτα αντιληφθεί μέσω της εμπειρίας (είτε όλο μαζί, είτε σε μέρη) και γι' αυτό δεν έχουμε πραγματική αντίληψη του απείρου. Σύμφωνα με την άποψη του Hobbes, όταν οι άνθρωποι περιγράφουν κάτι ως άπειρο κάνουν, στην καλύτερη περίπτωση, ένα έμμεσο σχόλιο για τις δικές τους αδυναμίες, για παράδειγμα για την αδυναμία τους να συλλάβουν ένα τέλος αυτού (Hobbes,1960). Βρήκε δυσκολία να αρνηθεί ότι ο κόσμος είναι άπειρος, γιατί κανείς δεν είχε αντιληφθεί, ή δεν μπορούσε να αντιληφθεί ένα όριο σε αυτόν. Έγραψε: «Όταν τίθεται το ερώτημα αν ο κόσμος είναι πεπερασμένος ή άπειρος, δεν υπάρχει τίποτα στο νου που να αντιστοιχεί στη λέξη "κόσμος"… οτιδήποτε φανταζόμαστε (κάνουμε εικόνα) είναι ipso facto (εκ του γεγονότος) πεπερασμένο» (Hobbes, 1839-45, στο Moore, 1990).

Ο John Locke (1632- 1704) υποστήριξε ότι: Η ιδέα μας για το άπειρο δεν ήταν κάτι παρόν στο νου μας όλο μαζί ταυτόχρονα, αλλά μας εμπλέκει διατρέχοντας ορισμένες διαδικασίες, τέτοιες όπως μετρώντας ή σκεφτόμενοι όλο και μεγαλύτερους όγκους του χώρου, και αναγνωρίζοντας ότι δεν τελειώνουν ποτέ κατ' ανάγκη. Όταν αντιμετωπίζουμε την ιδέα μας για το άπειρο ως κάτι ενεργεία, είναι που καταλήγουμε σε σύγχυση και σε παράδοξο. Είναι παράλογο και αντιφατικό να υποθέτουμε ότι το άπειρο είναι ικανό για αύξηση, ή συνεπώς ότι ένα άπειρο είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο. Οτιδήποτε πρέπει να παρασταθεί στο μυαλό μας "όλο μαζί ταυτόχρονα", γιατί πως αλλιώς θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι οι σχετικές διαδικασίες μπορούσαν να συνεχιστούν επ' αόριστον; Έτσι, ο Locke παραδεχόταν ότι υπήρχαν περισσότερα στον εννοιολογικό εξοπλισμό του νου μας από ιδέες, αντίγραφα, εικόνες από προηγούμενη άμεση εμπειρία. Φαίνεται πως ο εμπειρισμός του ήταν ακόμα κάπως μετριοπαθής και διατηρούσε κρίσιμα ρασιοναλιστικά στοιχεία. Δεχόταν μία διαδικασία επανάληψης, πχ. από τη μονάδα με ατέρμονη επανάληψη της πρόσθεσης της μονάδας οδηγούμαστε σε μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς που δεν τελειώνει ποτέ.

Ο Berkeley (1685-1753) και ο David Hume (1711-1776) επέστρεψαν στις πιο ριζοσπαστικές απόψεις του Hobbes. Κατά την άποψή τους, δεν υπήρχε τίποτα για συζήτηση για το απείρως μεγάλο. Ισχυρίστηκαν ότι υπήρχε ένα συγκεκριμένο όριο στο πόσο μικρό μπορεί να είναι κάτι, χωρικά ή χρονικά. Ο Berkeley ήταν ακόμη πιο συγκεκριμένος. Αρνήθηκε ότι υπάρχει τέτοιο πράγμα σαν το ένα δεκάκις χιλιοστό μιας ίντσας. Τα επιχειρήματα του Hume: Πρώτον, μια γραμμή ή μια χρονική περίοδος θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερη από μια άλλη, μόνο από μια «ατομική» άποψη του χώρου και του χρόνου- περιέχοντας δηλαδή περισσότερα σημεία ή χρονικές στιγμές. Δεύτερον, μια χρονική διαδοχή, η οποία απαιτεί ένα «πέρασμα» από μια στιγμή στην «επόμενη», θα μπορούσε να επιτραπεί μόνο από μια τέτοια ατομική άποψη του χώρου και του χρόνου. Και οι δύο υποστήριξαν ότι δεν θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε μια σαφή ιδέα για το ποια είναι η εναλλακτική, αφού η ίδια η εμπειρία απαρτίζεται από αδιαίρετα συστατικά, όπως τα άτομα- 'minima sensibilia' (ελάχιστα αισθητά). Για να το αποδείξει αυτό, ο Hume θεωρεί την παρουσία ενός σημείου από μελάνι καθώς απομακρυνόμαστε από αυτό, τη στιγμή πριν εξαφανιστεί. Σε σχέση με τα μαθηματικά, ο Berkeley, όπως θα δούμε, αντέδρασε ενάντια στον απειροστικό λογισμό. Επίσης, υποστήριξε ότι οι γεωμέτρες μιλούσαν για μια δοσμένη ευθεία γραμμή ότι είναι διαιρετή χωρίς όριο, αλλά αυτό το οποίο στ' αλήθεια έκαναν ήταν να την πάρουν ως αντιπρόσωπο γραμμών με αυθαίρετο μήκος, δηλαδή, μιλούσαν συν-κατηγορηματικά μάλλον παρά κατηγορηματικά. Ο Hume απλά θεώρησε τη γεωμετρία ως ανακριβή επιστήμη που βασιζόταν στην εμπειρία αλλά τη διαστρέβλωνε με διάφορους τρόπους. Αυτή η θρασύτητα ήταν χαρακτηριστική του Hume, γιατί ήταν απόλυτα δεσμευμένος στις αρχές του εμπειρισμού. Όμως, δεν μπορούμε απλά να εγκαταλείψουμε την ιδέα του απείρου με αυτόν τον τρόπο- όπως είχε συνειδητοποιήσει ο Αριστοτέλης δύο χιλιάδες χρόνια πριν. Σίγουρα ο εμπειρισμός ήταν ένα από τα σπουδαιότερα φιλοσοφικά ρεύματα, με βαθιά και διαρκή επιρροή: αλλά η επιμονή του στην προέλευση της γνώσης από την αισθητηριακή πρόσληψη δεδομένων δεν του έδινε την ευχέρεια να πραγματευτεί το άπειρο (Moore, 1990).

Ο Berkeley δεν αποδέχεται την έννοια του πραγματικού απείρου, γιατί αυτό θα σήμαινε αποδοχή μιας απειρίας ιδεών (μία για κάθε φυσικό αριθμό) όλων μαζί στον πεπερασμένο ανθρώπινο νου. Με τον ίδιο τρόπο, δεν αποδέχεται και την άπειρη διαιρεσιμότητα μεγεθών με πεπερασμένη έκταση. Έτσι, αντιλαμβανόταν τον χωροχρόνο ως διακριτό. Δηλαδή, «θεωρεί πως ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι συνεχιστικά, αλλά διακριτά δομημένοι και πως οι αντίστοιχες ελάχιστες (μη περαιτέρω δηλαδή διαιρετές) μονάδες μέτρησής τους συμπίπτουν με το χωρικά ή χρονικά αντιληπτικό ελάχιστο του ανθρώπινου νου. Αντιρρήσεις γύρω από τα συνεχώς μετακινούμενα όρια του αντιληπτικού ελάχιστου θα μπορούσαν εν μέρει να αντιμετωπιστούν με την, όχι εντελώς πειστική, απάντηση πως τα πραγματικά χωρικά και χρονικά αντιληπτικά ελάχιστα δεν έχουν ακόμη προσεγγισθεί» (Αναπολιτάνος, 1985).

Ο Kant και οι προβληματισμοί για το άπειρο

Ο Immanuel Kant (1724-1804) γεννήθηκε στο Καίνιξμπεργκ της Πρωσίας και έζησε εκεί όλη του τη ζωή. Προσπάθησε να συγκρίνει ανταγωνιστικά συστήματα σκέψης και να εξαλείψει τις χρόνιες διαμάχες μεταξύ τους. Έτσι, μπόρεσε να δείξει ότι κάποια από τα βασικά σημεία στις διαμάχες αυτές ήταν λανθασμένα, και να συμβιβάσει κάποιες από τις φαινομενικώς ασυμβίβαστες ιδέες τους. Στην προσπάθεια να στηρίξει έναν συμβιβασμό ανάμεσα στον ορθολογισμό και τον εμπειρισμό, ο Καντ ανέπτυξε ένα φιλοσοφικό σύστημα εκπληκτικού βάθους και ισχύος.

Ο Kant ήθελε να δεχτεί, μαζί με τους ρασιοναλιστές, ότι έχουμε μια ουσιαστική a priori γνώση. Όμως, σύμφωνα με τους εμπειριστές, δεν έβλεπε πως θα μπορούσαμε να γνωρίζουμε οτιδήποτε ουσιαστικό σχετικά με το τι είναι εκεί έξω, ανεξάρτητα από εμάς, χωρίς να το αφήσουμε να έρθει σε εμάς μέσω της εμπειρίας. Το έβλεπε ως εξής: όταν αυτό που είναι εκεί έξω έρχεται σε εμάς μέσω της εμπειρίας, με τέτοιο τρόπο που φτάνουμε στην απόκτηση εμπειρικής γνώσης, αυτό είναι μόνο επειδή έχουμε συγκεκριμένες επιστημικές δυνατότητες που μας κάνουν πολλαπλά δεκτικούς. Μέσω αυτών, εμείς οι ίδιοι συμβάλουμε στη μορφή των εμπειριών μας. Εφοδιάζουμε τους εαυτούς μας με ένα είδος πλαισίου μέσω του οποίου βλέπουμε τα πράγματα, με αποτέλεσμα οτιδήποτε έχουμε εμπειρία, την έχουμε με βάση αρκετά καθορισμένα δομικά χαρακτηριστικά. Έτσι, σύμφωνα με τον Kant, λειτουργούμε με συγκεκριμένες έννοιες οι οποίες δεν διαβιβάστηκαν σε εμάς απλά από την εμπειρία αλλά μάλλον ήταν μέρος του πλαισίου- της δομής που προϋπήρχε στον άνθρωπο.

Μια άλλη, σχετική πτυχή της άποψής του, ήταν ότι μπορούμε να γνωρίζουμε μόνο πως τα πράγματα φαίνονται σε εμάς, ποτέ όπως πραγματικά είναι τα ίδια. Δεν μπορούμε ποτέ να μπούμε «πίσω» από αυτό το πλαίσιο. Τα πράγματα «καθεαυτά» δεν είναι γνώσιμα. Ο Kant δέχτηκε το είδος της διάκρισης μεταξύ του «φαίνεσθαι» και του «είναι». Ακόμα και ο χρόνος και ο χώρος είναι μέρος του πλαισίου. Ούτε αυτά είναι χαρακτηριστικά των πραγμάτων «καθ' εαυτά» (Kant, 1933, Kant, 1956, A.W. Moore, 1990). Ο άνθρωπος διαθέτει a priori μορφές της εποπτείας (χώρου και χρόνου) τα οποία λειτουργούν ως προϋποθέσεις της εμπειρίας. Δομούν το αισθητηριακό υλικό και το μορφοποιούν χωρικά και χρονικά. Ο χωροχρόνος λειτουργεί ως κέλυφος για τη μορφοποίηση του αισθητηριακού υλικού.

Η σπουδαιότερη συμβολή του Kant προς μια κατανόηση του απείρου ήταν μια συγκεκριμένη αντίληψη ότι το οντολογικό άπειρο και το μαθηματικό άπειρο συνδέονταν. Πίστευε, ότι είμαστε (οντολογικά) πεπερασμένες υπάρξεις σε έναν άπειρο (οντολογικά) κόσμο. Είμαστε μέρος ενός κόσμου ο οποίος, στη δική του ανεξάρτητη ολότητα, είναι εκεί έξω, ανεξάρτητος από εμάς, μία απόλυτα ενοποιημένη ολότητα. Διαφέρουμε από το Θεό, ο οποίος, μέσα στην απειρία Του, δημιούργησε πραγματικά αυτό που γνώριζε. Ο Kant πίστευε ότι δεν θα μπορούσαμε ποτέ να συλλάβουμε αυτή την ολότητα. Ό,τι προσλαμβάνουμε είναι ελλιπές, μερικό, περιορισμένο, πεπερασμένο. Πίστευε, επίσης, ότι η δεκτικότητά μας πρέπει να είναι αυτοσυνειδητή, δηλαδή να αναγνωρίζουμε αυτό που προσλάβαμε ως πεπερασμένο και περιορισμένο και επομένως να μπορούμε να προσλάβουμε και αυτό που το περιορίζει. Έτσι, οτιδήποτε γνωρίζουμε, είναι τοποθετημένο σε κάποιο κατάλληλο πλαίσιο, και ως εκ τούτου να είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε περισσότερα. Αυτό όμως δημιουργεί μια άπειρη παλινδρόμηση: υπάρχει μια ατελείωτη σειρά συνθηκών, καθεμία περιορισμένη από άλλες περαιτέρω συνθήκες στη σειρά. Αλλά μια τέτοια απειρία ήταν, φυσικά, μαθηματική. «Στο επίπεδο της γνώσης και πιο συγκεκριμένα στο επίπεδο της αισθητηριακής αντίληψης, ο Kant δέχεται πως η ιδιαίτερη φύση του συστήματος των εικόνων μας καθορίζεται από εσωτερικούς παράγοντες και όρους… Αποτελούν με άλλα λόγια το χωροχρονικό πλαίσιο της ταξινόμησης των εικονιστικών επί μέρους στοιχείων της εμπειρίας, χωρίς το οποίο θα ήταν αδύνατη η αισθητηριακή αντίληψη και κατ' επέκταση η γνώση. … Είναι αρκετό -και όχι μεταφυσικά επικίνδυνο- να δεχθούμε πως η φύση της αισθητηριακής αντίληψης είναι τέτοια, ώστε ο απογυμνωμένος χωροχρόνος να είναι ο υποδοχέας, το κέλυφος, ο οργανωτής της εμπειρίας, το εργαλείο, που προϋπάρχει εσωτερικά στο γνώστη και που δομεί, με το μοναδικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να γνωρίζουμε, το υλικό των αντιδράσεών μας στις άγνωστης πολυπλοκότητας επιδράσεις που τα πράγματα «καθ' εαυτά» ασκούν πιθανώς πάνων μας» (Αναπολιτάνος, 1985).

Για τον Kant, το μαθηματικό άπειρο έπρεπε να γίνει κατανοητό όπως είχε γίνει κατανοητό από τον Αριστοτέλη – ως δυνάμει, ως μη προσπελάσιμο (ή αυτό που δεν μπορεί να ολοκληρωθεί). Αυτό που για πρώτη φορά καθιερώνεται είναι μια κατανοητή σύνδεση μεταξύ του οντολογικού και του μαθηματικού απείρου. Μπορούσαν τώρα να θεωρηθούν ως απλά δύο αντιλήψεις του ίδιου πράγματος. Ο Kant πίστευε ότι υπήρχαν κάποιες a priori έννοιες σε όρους με τους οποίους μπορούμε να σκεφτούμε και για την πραγματικότητα και για το «φαίνεσθαι». Η έννοια του απείρου ήταν μία απ’ αυτές. Ο Πλάτων υποστήριζε ιδέες που αναφέρονται στην πραγματικότητα παρά στον κόσμο των φαινομένων (τον μεταβλητό κόσμο του χώρου και του χρόνου). Όμως, για τον Kant αυτό σήμαινε κάτι πέρα από την εμβέλεια της γνώσης, ενώ για τον Πλάτωνα σήμαινε ότι αυτές οι ιδέες ήταν τα (μόνα) αληθινά αντικείμενα της γνώσης. Ο Kant εννοούσε μάλλον κάτι του οποίου το πρότυπο ήταν η επιστημονική κατανόηση. Το γεγονός ότι το οντολογικό άπειρο έπρεπε να μας παρουσιαστεί με μία μαθηματικά άπειρη μορφή σήμαινε ότι το πλαίσιο μέσω του οποίου βλέπουμε τα πράγματα πρέπει να είναι το ίδιο μαθηματικά άπειρο. Θα πρέπει, δηλαδή, να υπάρχει πάντα περιθώριο- χώρος για να συλλάβουμε τις συνθήκες από οτιδήποτε μπορούμε να προσλάβουμε με εμπειρικό τρόπο. Έτσι, ο Kant θεώρησε τον χώρο και τον χρόνο μαθηματικά άπειρους, αθροιστικά και διαιρετικά. Αυτό ήταν μια από τις ουσιαστικές αλήθειες που γνωρίζουμε a priori, γιατί είναι ένα χαρακτηριστικό του πλαισίου μέσω του οποίου βλέπουμε τα πράγματα. Με αυτόν τον τρόπο ο Kant διαφώνησε με τον Αριστοτέλη όσον αφορά τον χρόνο, γιατί θεώρησε την απειρία του χρόνου να είναι όλη μαζί παρούσα ταυτόχρονα. Όμως, συμφώνησε με τον Αριστοτέλη, όπως και με τους εμπειριστές στην άποψη πως οτιδήποτε μας δόθηκε στον χώρο ή στον χρόνο είναι πεπερασμένο (Kant, 1933, Moore,1990).

Ο Kant, όπως και ο Hobbes νωρίτερα, αρνήθηκε ότι υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως ο φυσικός κόσμος ως μία ολότητα- υπήρχαν μόνο μέρη του. Υποστήριξε πως οτιδήποτε φυσικό είναι τελικά απλό «φαίνεσθαι», αφού η ύπαρξή του εξαρτάται από την ικανότητά του να μας έχει δοθεί στην εμπειρία. Τα πράγματα καθεαυτά δεν μπορούμε να τα γνωρίσουμε. Περιοριζόμαστε στην εμπειρία των φαινομένων. Γνωρίζουμε όμως ότι το περιορισμένο έχει νόημα μόνο δεδομένου του μη-περιορισμένου, γιατί τελικά πρέπει να υπάρχει κάτι πλήρες και αυτάρκες- κάτι οντολογικά άπειρο εντός του οποίου να σκεφτόμαστε για το πεπερασμένο. Έτσι, δεχόμενοι ότι οτιδήποτε είναι περιορισμένο σε χρόνο και σε χώρο είναι και πραγματικό, είμαστε διατεθειμένοι να σκεφτούμε ότι επίσης πρέπει να υπάρχει κάτι χωρίς περιορισμούς στον χώρο και στον χρόνο, το οποίο θα μπορούσε να μας δοθεί με τον ίδιο τρόπο. Αλλά αυτό ήταν ουσιαστικά να θεωρήσουμε την ύπαρξη του φυσικού κόσμου ως ένα χωρίς περιορισμούς σύνολο- ένα άπειρο όλο. Έτσι, παίρνουμε μια ιδέα, την ιδέα του μη-περιορισμένου όλου, και αθέμιτα προσπαθούμε να την εφαρμόσουμε μέσα στην εμπειρία. Ο Kant γνώριζε ωστόσο ότι η ιδέα αυτή δεν είχε οντολογικό status αλλά μια θεμιτή πρακτική χρήση που αναφέρεται στη εμπειρία. Ήταν απλά ένα ιδεώδες, σαν μια καθοδηγητική αρχή που φωτίζει την έρευνα και την ρυθμίζει. Γιατί ήταν αλήθεια ότι, δεδομένου ενός μεγάλου μέρους της φυσικής πραγματικότητας, μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι υπάρχει πάντα το περισσότερο.

Αν υποθέσει κανείς ότι υπάρχει ένας φυσικός κόσμος ως όλο (επομένως ότι μπορεί να μας δοθεί στην εμπειρία ως όλο) τίθεται το ερώτημα αν ο φυσικός κόσμος είναι άπειρος. Είναι άπειρος ως προς τον χρόνο; Έχει άπειρο παρελθόν ή άπειρο μέλλον; Είναι άπειρα εκτατός στον χώρο; Είναι άπειρα διαιρετός; Σύμφωνα με την άποψη του Kant, ήταν επόμενο να προκύψει μια ανεξέλεγκτη διαμάχη, αφού υπήρχαν λόγοι και για το ότι δεν θα μπορούσε να είναι άπειρος και για το ότι δεν θα μπορούσε να είναι πεπερασμένος, όμως η διαμάχη αυτή είχε λάθος βάση. Θα έπρεπε να εγκαταλείψουμε την κοινή υπόθεση- σε κάθε μία από τις προσδιορισμένες πτυχές, «ο κόσμος ως ένα όλο». Τα ερωτήματα για την απειρία του κόσμου αθροιστικά αποτελούσαν αυτό που ονόμασε πρώτη αντινομία, και εκείνα για την απειρία του κόσμου διαιρετικά αποτέλεσαν τη δεύτερη αντινομία. Εδώ ο ρόλος του Kant ήταν αυτός του συμφιλιωτή, που θέτει τέλος στη δύο χιλιάδων ετών ανώφελη αντιπαράθεση (Moore, 1990).

1. Η πρώτη αντινομία

(α) Η απόδειξη ότι ο κόσμος δεν μπορεί να είναι άπειρα παλιός ή άπειρα μεγάλος.

(ι) Η απόδειξη ότι ο κόσμος δεν μπορεί να είναι άπειρα παλιός.

Έστω ότι ο κόσμος δεν έχει αρχή στο χρόνο. Τότε αποδεχόμαστε μία άπειρη σειρά διαδοχικών καταστάσεων του κόσμου και επομένως άπειρα διαδοχικά χρονικά διαστήματα που έχουν περάσει ως τώρα. Όμως, το άπειρο είναι αυτό που δεν μπορείς να ολοκληρώσεις (να γίνει πλήρες) ή δεν μπορείς να το προσπελάσεις. Αλλά η ιστορία του κόσμου, μέχρι μια οποιαδήποτε στιγμή, έχει, μέχρι τότε ολοκληρωθεί ή προσπελαστεί. Επομένως, ο κόσμος δεν είναι άπειρα παλιός (Moore,1990).

(ιι) Η απόδειξη ότι ο κόσμος δεν μπορεί να είναι άπειρα μεγάλος.

Ας υποθέσουμε ότι ο κόσμος είναι χωρικά άπειρος. Τότε θα αποδεχόμασταν ένα άπειρο όλο από μέρη που συνυπάρχουν, δηλαδή ένα άπειρο άθροισμα όλων των εκτατών μερών στο χώρο. Επομένως, θα μπορούσαμε να έχουμε την εμπειρία του- είτε όλο μαζί ταυτόχρονα ή μέσω της ολοκληρωμένης σύνθεσης των μερών του. Το πρώτο από αυτά θα ήταν αδύνατο λόγω του άπειρου μεγέθους του. Όμως, και το δεύτερο θα ήταν αδύνατο, γιατί θα διαρκούσε άπειρο χρόνο και έτσι θα απαιτούσε το να είναι ο κόσμος άπειρα παλιός. Επομένως, ο κόσμος δεν θα μπορούσε να είναι άπειρα μεγάλος.

Και τα δύο μέρη αυτής της απόδειξης βασίζονται στην αντίθεση που προκαλείται από την ιδέα του «ενεργεία» απείρου. Όπως φαίνεται, θεώρησε το μέρος της απόδειξης που αναφέρεται στον χρόνο πιο βασικό από το μέρος που αφορά τον χώρο. Στο δικό του σχόλιο στην απόδειξή του ο Kant, απέρριψε μια δημοφιλή (της εποχής του) εκδοχή του απείρου. Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή, ένα μέγεθος είναι άπειρο όταν το μέτρο του, ως πολλαπλότητα, είναι ανίκανο να αυξηθεί. Σύμφωνα με τον Kant, αυτό το έκανε πολύ εύκολο να αποκλείσει άπειρα μεγέθη, επειδή κάθε πολλαπλότητα μπορεί να αυξηθεί. Για παράδειγμα, οσεσδήποτε πολλές μέρες κι αν έχει υπάρξει ο κόσμος, θα έχει υπάρξει κι άλλη μία, αύριο (Moore,1990). Ήταν πρόθυμος να δεχτεί κάτι, που άλλοι προηγούμενοι στοχαστές απέρριψαν, δηλαδή ότι μια άπειρη πολλαπλότητα θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερη από κάποια άλλη. Αλλά αρνήθηκε να μιλήσει για άπειρο αριθμό, μία αριθμητική οντότητα που μπορείς να φτάσεις σε αυτή με μια πεπερασμένη διαδικασία αρίθμησης. Αυτό ήταν μέρος της δικής του αριστοτελικής αντίληψης του μαθηματικού απείρου, ως μη ικανό να ολοκληρωθεί ή να προσπελαθεί (Moore,1990).

(β) Η απόδειξη ότι ο κόσμος δεν μπορεί να είναι πεπερασμένα παλιός ή πεπερασμένα μεγάλος.

Έστω ότι ο κόσμος είναι χρονικά πεπερασμένος. Τότε ο χρόνος έναρξης του κόσμου θα έχει έναν προηγούμενο κενό χρόνο που δεν θα υπάρχει τίποτα. Αλλά σε έναν κενό χρόνο δεν είναι δυνατή η γένεση κανενός πράγματος. Επομένως ο κόσμος δεν μπορεί να έχει μία αρχή στο χρόνο. Ως προς το χώρο, αν υποθέσουμε ότι ο κόσμος είναι χωρικά πεπερασμένος, τότε «γύρω» από αυτόν θα ήταν ένας κενός χώρος. Τότε έξω από τον κόσμο δεν θα υπήρχε κανένα αντικείμενο στην εποπτεία μας, επομένως δεν θα είχε σχέση με το τίποτα, δηλαδή δεν θα υπήρχε καθόλου σχέση. Ο χώρος και ο χρόνος είναι οι ίδιοι άπειροι. Είναι επίσης ομοιογενείς. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για έναν πεπερασμένο κόσμο που καταλαμβάνει οποιαδήποτε καθορισμένη θέση στον χώρο και στον χρόνο: δεν υπάρχει σχέση στην οποία ένας πεπερασμένος κόσμος θα μπορούσε να σταθεί στον κενό παρελθόντα χρόνο ή στον κενό χώρο που θα μετρούσε σε οτιδήποτε. Ο κόσμος, επομένως, δεν είναι ούτε πεπερασμένα παλιός ούτε πεπερασμένα μεγάλος.

Αυτή η απόδειξη πηγάζει από μια μακρά παράδοση. Σε συμφωνία με αυτή την παράδοση, ο Kant, πάει πέρα από τη δική του αφαιρετική αρχή ότι οτιδήποτε δίνεται μέσα από την εμπειρία πρέπει να έχει μια συνθήκη η οποία επίσης μπορεί να δοθεί μέσα από την εμπειρία. Στο μέρος των αποδείξεων (α) και (β) που αφορούν τον χρόνο, ο Kant περιόρισε σαφώς την προσοχή του στο παρελθόν του κόσμου παρά στο μέλλον του. Αυτό ήταν, επειδή, κατά την άποψή του, οι χρονικές συνθήκες ενός πράγματος αναγκαστικά προηγούνται αυτού. Έτσι, ένας άπειρα παλιός κόσμος μας φαίνεται πιο προβληματικός από έναν κόσμο με άπειρο μέλλον. Ως αποτέλεσμα έχουμε αυτή την ασυμμετρία, η οποία μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι μοιραζόμαστε, μαζί με τον Αριστοτέλη και τον Kant, μια έννοια του απείρου ως μη ικανό να ολοκληρωθεί ή να προσπελαστεί (Moore,1990).

2. Η δεύτερη αντινομία

(α) Η απόδειξη ότι οτιδήποτε είναι σύνθετο δεν μπορεί να είναι διαιρετό χωρίς όριο.

Έστω ότι οτιδήποτε σύνθετο δεν συνίσταται από απλά (μη διαιρετά) συνθετικά μέρη. Τότε δεν υπάρχει τίποτα σύνθετο, ούτε απλό. Δηλαδή αίρεται κάθε σύνθεση και τότε οι ουσίες θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες της σύνθεσης, το οποίο όμως είναι σε αντίφαση με την υπόθεση (ότι είναι σύνθετο). Οτιδήποτε είναι σύνθετο έχει μέρη, και κάποια απ’ αυτά τα μέρη πρέπει να παραμείνουν από μια πλήρη διαίρεση ή αποσύνθεση αυτού. (Γιατί πρέπει να είναι περισσότερα σε αυτό παρά απλά και μόνο η σύνθεσή τους). Αλλά αν ήταν διαιρετό χωρίς όριο, τότε θα μπορούσε, τουλάχιστον στη σκέψη, να είναι διαιρεμένο χωρίς όριο, και σε αυτή την περίπτωση δεν θα παρέμεναν τέτοια μέρη. Επομένως, τίποτα σύνθετο δεν είναι διαιρετό χωρίς όριο.

(β) Η απόδειξη ότι οτιδήποτε είναι σύνθετο δεν μπορεί να έχει μέρη που είναι απλά ή μη διαιρετά (δεν μπορούν να διαιρούνται μόνο μέχρις ενός ορίου)

Έστω ότι το σύνθετο συνίσταται από απλά μέρη. Όμως κάθε σύνθεση ουσιών είναι δυνατή μέσα στο χώρο. Οτιδήποτε είναι σύνθετο είναι χωρικό. Και τα απλά μέρη κάθε σύνθετου είναι τόσα όσα και τα αντίστοιχα μέρη του χώρου, τα οποία είναι χώροι. Αλλά δεδομένου ότι ο χώρος είναι ο ίδιος διαιρετός χωρίς όριο, καθένα από αυτά τα μέρη πρέπει το ίδιο να έχει μέρη, γιατί πρέπει να έχει μέρη που αντιστοιχούν στα μέρη που αυτό καταλαμβάνει. Θα έπρεπε δηλαδή και το απλό να είναι σύνθετο. Αυτό συνεπάγεται ότι κανένα από τα μέρη- κανένα από τα μέρη από αυτά που το συνθέτουν- δεν μπορεί να είναι απλό ή μη διαιρετό, και έτσι καταλήγουμε σε αντίφαση. Επομένως, οτιδήποτε είναι σύνθετο δεν μπορεί να συνίσταται από απλά (μη διαιρετά) μέρη.

Αυτές οι αποδείξεις ήταν σχετικές με την αρχαία Ελεατική εχθρότητα προς το σύνθετο- «τα πολλά». Επανεμφανίστηκαν μεταγενέστερα στον στοχασμό για το άπειρο, για παράδειγμα στους μεσαιωνικούς. Στη σημερινή εποχή, ερωτήματα για την ηλικία και το μέγεθος του κόσμου δεν είναι μόνο προνόμιο των φιλοσόφων αλλά και των φυσικών. Ο Kant όμως βοήθησε στην κατανόησή μας σχετικά με τη διάκριση του «ενεργεία» και « δυνητικού» απείρου. Αρνήθηκε ότι οτιδήποτε ήταν σύνθετο είχε ένα «ενεργεία» άπειρο πλήθος μερών αλλά παραδέχτηκε ότι είχε ένα δυνητικό πλήθος μερών. Ήταν σα να έλεγε ότι ο φυσικός κόσμος ήταν δυνητικά, αλλά όχι «ενεργεία» άπειρος (Bennette,1971, Moore,1990).

Κάτι παρόμοιο προκύπτει από τη καντιανή πραγμάτευση του οντολογικού απείρου του Λόγου. Αντίθετα από την οντολογική απειρία του κόσμου, δεν ήταν κάτι έξω και ανεξάρτητο από εμάς. Είχαμε μια άμεση επίγνωση αυτού που στηριζόταν στην ηθική, την αίσθησή μας σχετικά με το τι είναι σωστό και στην ελευθερία μας να το πράξουμε ή όχι. Ήθελε να μας δώσει περιθώριο να αναγνωρίσουμε, πέρα από το άπειρο του χώρου και του χρόνου, το οντολογικό άπειρο της δικής μας λογικής και μάλιστα το οντολογικό άπειρο του Θεού. Η ύπαρξη του Θεού, για τον Kant, ήταν ένα αντικείμενο της πίστης που ήταν απόλυτα συνυφασμένο με τη δική μας ηθική αντίληψη. Συμφωνούσε γενικά με μία μάλλον ρασιοναλιστική θέση ότι έχουμε μια λογική ιδέα για μια τέτοια απειρία, την απειρία της δικής μας λογικής, αν και δεν μπορούμε να τη συναντήσουμε ποτέ στην εμπειρία. Πίστευε πως ο άνθρωπος μέσω της λογικής και της σκέψης του, θα μπορούσε να πετύχει μια ευγένεια και αξιοπρέπεια που υπερβαίνει τις δικές του πεπερασμένες διαστάσεις και επομένως αγγίζει το άπειρο. Ως πεπερασμένα όντα θα μπορούσαμε , όμως, να συλλάβουμε τις συνέπειες της απειρίας του Λόγου μόνο με όρους του κόσμου του χώρου και του χρόνου.

Ο Λογισμός

Υπάρχει ένα είδος μαθηματικών προβλημάτων που συναντώνται στην ιστορία των μαθηματικών και είναι μιας ζωτικής σημασία συνιστώσα μέσα στην ευρύτερη ιστορία του απείρου, και ξεκινούν ίσως από την εποχή του Ευδόξου και Αρχιμήδη με τη μέθοδό τους της εξάντλησης. Είναι προβλήματα που αφορούν καμπύλες (πώς να υπολογίσεις εμβαδά σχημάτων που ορίζονται από καμπύλες) και προβλήματα που μελετούν τη συνεχή μεταβολή μιας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη. Όλα αυτά τα προβλήματα συγκεντρώνονται στον κλάδο των μαθηματικών που ονομάζεται Λογισμός. Εδώ συνδέεται η Γεωμετρία με την Ανάλυση.

Όπως διαβάζουμε στον «Απειροστικό Λογισμό» του Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου, Ε. Γιαννακούλια (1987): Οι αρχές του Ολοκληρωτικού Λογισμού πρέπει να αναζητηθούν στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων της αρχαιότητας. Ακόμα και κατά τον 19^{ο} αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Cauchy ή ο Riemann αντιμετώπισαν σοβαρές δυσκολίες στην ολοκλήρωση επειδή ακριβώς τους έλειπε η ορθή θεμελίωση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών. Στην αρχαία Ελλάδα, το κίνητρο για την εξέλιξη των Μαθηματικών ήταν φιλοσοφικό και θεωρητικό, κι αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την αναζήτηση της εσωτερικής αρμονίας και της υψηλής αυστηρότητας. Κατά τον 17^{ο} αιώνα το κύριο κίνητρο ήταν η αναζήτηση και η απόκτηση γνώσης που θα χρησίμευε για τη θεμελίωση της επερχόμενης τεχνολογικής και επιστημονικής ανάπτυξης.

Ο Λογισμός αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από δύο άντρες: τον Άγγλο Sir Isaac Newton (1642- 1727) και τον G.W. Leibniz (1646- 1716). Αυτό δεν ήταν συμπτωματικό βέβαια, γιατί βασίστηκαν σε προηγούμενες αναζητήσεις και προβληματισμούς. Ο Newton έφτασε στις ανακαλύψεις του στα μέσα του 1660, περίπου δέκα χρόνια νωρίτερα από τον Leibniz, αλλά τα δημοσίευσε αργότερα. Στην πραγματικότητα κάποια σημαντικά συμπεράσματά του δημοσιεύτηκαν μετά τον θάνατό του. Υπήρχαν, μεταξύ των ακολούθων τους, έντονες και καυστικές συζητήσεις σχετικά με το ποιος έφτασε εκεί πρώτος και ποιος άξιζε τον μεγαλύτερο έπαινο. Υπήρχαν κάποιες διαφορές στην ορολογία. Οφείλουμε στον Leibniz τις ακριβείς εκφράσεις «διαφορικός λογισμός» και «ολοκληρωτικός λογισμός». Ο Νεύτωνας προσεγγίζει τη διαφόριση με φυσική διαίσθηση και όχι με χρήση της μαθηματικής έννοιας του ορίου, και περιέγραψε το σύστημά του ως τη μέθοδο των παραγώγων/ρυθμών μεταβολής (fluxions). Όρισε ως fluent μια ποσότητα που μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου και fluxion τον ρυθμό με τον οποίο το κάνει. Ο Leibniz δεν ήταν ενήμερος για την εργασία άλλων μαθηματικών στον Απειροστικό Λογισμό, ενδιαφερόταν γι’ αυτά τα θέματα λόγω της πεποίθησής του ότι όλες οι αλλαγές στη φύση είναι συνεχείς. Κάτι τέτοιο υποστήριζε η Αρχή της Συνέχειας. Ο Newton ενδιαφερόταν εξαιτίας του ότι όλα αυτά αφορούσαν τις επιστημονικές του ανακαλύψεις, ιδιαίτερα τις μηχανικές. Ο Leibniz είχε την πιο αναλυτική έκφραση, ο Newton την πιο γεωμετρική. Το σύστημα του Leibniz ήταν πιο κομψό και πιο πολύπλευρο. Χρησιμοποιούσε γραφικό συμβολισμό που ήταν πιο εύχρηστος και χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα. Αυτό σίγουρα ήταν αποτέλεσμα της φιλοσοφικής του φιλοδοξίας να ανακαλύψει “Characteristica Universalis” (καθολικά χαρακτηριστικά), έναν σαφή και ακριβή συμβολισμό για την έκφραση κάθε πιθανής σκέψης που θα καθιστούσε δυνατή την επίλυση όλων των ερωτήσεων με υπολογισμό.

Η βασική έρευνα του Νεύτωνα έγινε κατά το διάστημα 1664- 1666, ενώ του Leibniz κατά το διάστημα 1672- 1676. Οι πρώτες δημοσιεύσεις του Leibniz έγιναν το 1684- 1686 ενώ του Νεύτωνα το 1687 (Principia Mathematica) και το 1704 (Optics). Στον Νεύτωνα η έννοια του ορίου στην παράγωγο ή ακριβέστερα στη διαισθητική φυσική ερμηνεία της, την ταχύτητα δεν είναι εκπεφρασμένη, όμως ενυπάρχει. Αντίθετα στον Leibniz, η έννοια του ορίου δεν φαίνεται να βρίσκεται στη βάση της διαίσθησής του. Ο Leibniz οδηγείται στα απειροστά από την αναλογία που αυτά παρουσιάζουν προς τις διακριτές διαφορές. Έτσι για μεν τον Leibniz τα απειροστά dx, dy έχουν μια χρήση η οποία οδηγεί σε σωστά αποτελέσματα, χωρίς να είναι δυνατόν να εξηγηθούν αυστηρά, ενώ για τον Νεύτωνα μόνον ο λόγος αυτών $\frac{dx}{dy}$, η παράγωγος, έχει φυσική και γεωμετρική έννοια. Η έννοια της παραγώγου του Νεύτωνα, η fluxion, είναι πολύ κοντά στην έννοια που δεχόμαστε σήμερα στην σύγχρονη ανάπτυξη του Λογισμού. Ο Διαφορικός, και γενικότερα ο Απειροστικός Λογισμός, στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, εμφανίζεται ως ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, χωρίς όμως αυστηρή θεμελίωση (Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλου, Γιαννακούλια, 1987).

Ένα πράγμα που είχαν κοινό, ωστόσο, ήταν ότι και οι δύο χρησιμοποιούσαν το απεριόριστα μικρό- το απειροστό. Ο Leibniz γνώριζε καλά τα προβλήματα που προέκυπταν και γι’ αυτό παρότρυνε να μη μιλάμε για απειροστές ποσότητες κυριολεκτικά αλλά μόνο ως ένα «τρόπο του λέγειν». Ο Leibniz αναφερόταν στα απειροστά ως χρήσιμες επινοήσεις, δεν αναφερόταν επομένως κυριολεκτικά. Ήταν ίσως ο Νεύτων, με την κάπως δυσκίνητη και βαριά προσέγγισή του στον λογισμό, που ήρθε πιο κοντά σε μια κατανόηση του τι «πραγματικά» γινόταν, τι είχε νόημα για να μιλάμε. Και ο Leibniz και ο Νεύτων, και όλοι οι άλλοι που πρώτοι ανέλαβαν αυτές τις μεθόδους δούλεψαν όλοι με δεδομένες ορισμένες κοινά αποδεκτές αρχές της φύσης. Χρησιμοποιούσαν αυτές τις μεθόδους για να υπολογίσουν δυνάμεις, ταχύτητες, τιμές επιτάχυνσης, επιφάνειες, όγκους και τα όμοια.

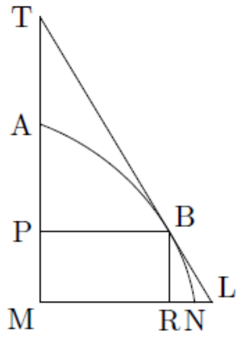
Η κριτική του Berkeley στον «λογισμό»

Ήταν ο Ιρλανδός φιλόσοφος George Berkeley (1685- 1753), ο αγγλικανικός επίσκοπος της Cloyne, ο οποίος θα γινόταν ο πιο διάσημος επικριτής του λογισμού. Θλιμμένος από το γεγονός ότι οι ίδιοι επιστήμονες που αποδέχτηκαν αυτές τις «ασαφείς μεθόδους», είχαν αντίρρηση για διάφορες αρχές του Χριστιανισμού για λόγους ασάφειας, έκανε μια θαρραλέα και δριμεία επίθεση εναντίον τους- θαρραλέα λόγω της δημοτικότητας και της επιτυχίας που αυτές οι μέθοδοι είχαν αρχίσει να απολαμβάνουν. Έγραψε μία πραγματεία με τίτλο «The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith “First cast out the beam out of thine own Eye ; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy Brother’s Eye”». Εκεί εξετάζεται αν ο σκοπός, οι αρχές και τα συμπεράσματα της σύγχρονης Ανάλυσης προκύπτουν σαφέστερα και μπορούν να γίνουν αντιληπτά με πιο ξεκάθαρο τρόπο από τα θρησκευτικά μυστήρια και τα σημεία της Πίστης. Ο Berkeley παρατήρησε, ότι ακόμα και αν ο λογισμός οδηγούσε σε σωστά συμπεράσματα, αυτό δεν τον δικαιώνει ως μια αληθινή επιστήμη, αφού η αλήθεια μπορεί να προκύψει όταν τα σφάλματα αλληλοαναιρεθούν μεταξύ τους. «Οι επιστήμονες επιτίθενται στη θρησκεία, θεωρώντας την παράλογη. Ας βελτιώσουν λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι σκέπτονται. Μια ποσότητα ή είναι μηδενική ή δεν είναι. Δεν υπάρχει τίποτα ενδιάμεσο» (Γιαννακούλιας, 2004).

Για παράδειγμα, μια καλά θεμελιωμένη αντίρρηση, από τον Berkeley, είναι η εξής: Ας υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $y=x^2$: (σύμφωνα με τον Leibniz, μια απειροστή μεταβολή της μεταβλητής x, δηλαδή dx, θα οδηγούσε σε μία απειροστή μεταβολή της μεταβλητής y: δηλαδή dy). Τότε θα είχαμε : $y+dy=(x+dx)^2$ και άρα $y+dy= x^2 +2xdx+(dx)^2$, (με απαλοιφή και από τα δύο μέλη των ίσων $y =x^2$) και άρα $dy=2xdx+(dx)^2$ κατόπιν θα έπρεπε να διαιρέσει με dx και να καταλήξει στο $\frac{dy}{dx} = 2x+dx$. Εδώ ο Leibniz θεωρούσε το 2x+ dx=2x, αφού το dx είναι μια απειροστή μεταβολή του x, και άρα το 2x+dx απείρως κοντά στο 2x, και έτσι έφτανε στο ορθό αποτέλεσμα: $\frac{dy}{dx}=2x$. Με αυτόν τον τρόπο, όμως, για να απαλείψουμε στο τέλος το dx σημαίνει πως το θεωρούμε ίσο με 0, πράγμα που δεν επιτρέπει τη διαίρεση με dx στο προηγούμενο βήμα. (Αν θεωρηθεί ίσο με το 0, τότε δεν δικαιοδοτούμαστε να διαιρέσουμε με αυτό. Εάν δεν θεωρηθεί ίσο με το 0 τότε δεν μπορεί να παραληφθεί). Αυτή είναι η διαδικασία που κατά τον Berkeley δεν είναι θεμιτή (Αναπολιτάνος, 1985).

Ένα άλλο παράδειγμα, που αναφέρεται από τον Berkeley (The Analyst) :

Ας υποθέσουμε ότι μια εφαπτομένη φέρεται σε μία παραβολή και ας εξετάσουμε τη διαδικασία όπως παρουσιάζεται στις απειροστικές διαφορές (infinitesimal Differences).



Έστω AB η καμπύλη, όπως φαίνεται στο σχήμα παραπάνω, και AP=x η τετμημένη και PB=y η τεταγμένη, και PM=dx η διαφορά των τετμημένων και RN=dy η διαφορά των τεταγμένων. Υποθέτοντας ότι η καμπύλη είναι πολύγωνο η ελάχιστη μεταβολή της καμπύλης BN θα είναι το ευθύγραμμο τμήμα BL που συμπίπτει με την εφαπτομένη, και το τρίγωνο BRN θα είναι όμοιο με το τρίγωνο TPB. Τότε θα έχουμε PT= $\frac{ydx}{dy}$. Εδώ, υποστηρίζει ο Berkeley, έχουμε ένα σφάλμα που προκύπτει από την υπόθεση (ότι η καμπύλη είναι πολύγωνο) και η τιμή του PT προκύπτει μεγαλύτερη από ότι πραγματικά είναι. Διότι στην πραγματικότητα δεν είναι το τρίγωνο RNB αλλά το τρίγωνο RLB που είναι όμοιο με το τρίγωνο PBT, και επομένως στην αναλογία που προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα, θα έπρεπε να είχαμε αντί για το RN το RL= RN+NL=dy+z και έτσι θα είχαμε την αληθινή τιμή PT= $\frac{ydx}{dy+z}$. Έτσι, είχαμε ένα σφάλμα ελάττωσης, επειδή κάναμε dy τον διαιρέτη, το οποίο σφάλμα είναι ίσο με z = NL (το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ της καμπύλης και της εφαπτομένης). Από τον τύπο της παραβολής yy=px, (όπου p η παράμετρος) και από τον κανόνα Διαφόρισης : 2ydy=pdx άρα dy= $\frac{pdx}{2y}$.

Αλλά αν πολλαπλασιάσουμε το y+dy με τον εαυτό του, και δεν απλοποιήσουμε το τετράγωνο της διαφοράς dy, τότε θα προέκυπτε, αντικαθιστώντας στην εξίσωση της παραβολής: dy= $\frac{pdx}{2y}$ - $\frac{dydy}{2y}$ στην πραγματικότητα. Υπήρχε ένα σφάλμα αύξησης στο να κάνουμε dy= $\frac{pdx}{2y}$ που προέκυψε από τον εσφαλμένο κανόνα Διαφόρισης, και η τιμή αυτού του σφάλματος είναι: $\frac{dydy}{2y}$ =z. Επομένως, τα δύο σφάλματα αφού είναι ίσα και αντίθετα αναιρούν το ένα το άλλο, το πρώτο σφάλμα ελάττωσης κατά z διορθώνεται με το δεύτερο σφάλμα αύξησης κατά z.

Έτσι, παρατηρεί ο Berkeley, αν γινόταν μόνο ένα λάθος, δεν θα προέκυπτε μία αληθής λύση του προβλήματος. Αλλά λόγω του διπλού λάθους προέκυψε, όχι όμως η Επιστήμη, αλλά η Αλήθεια. Διότι δεν αποκαλείται Επιστήμη, όταν προχωράς με κλειστά μάτια και φτάνεις στην Αλήθεια μη γνωρίζοντας πως ή με ποια μέσα. Για να αποδειχθεί ότι z= $\frac{dydy}{2y}$, ας είναι BR=dx=m και RN=dy=n. Από την 33η πρόταση του 1ου βιβλίου των Κωνικών του Απολλώνιου, και από τα όμοια τρίγωνα, καθώς το 2x πλησιάζει το y, έτσι και το m γίνεται n+z= $\frac{my}{2x}$. Όμοια από τη φύση της παραβολής:

yy+2yn+nn=xp+mp και 2yn+nn=mp και άρα $\frac{2yn+nn}{p}$ =m, και αφού yy=px θα έχουμε $\frac{yy}{p}$ =x και άρα n+z= $\frac{my}{2x}$ = $\frac{2yynp+ynnp}{2yyp}$, δηλαδή n+z = $\frac{2yn+nn}{2y}$ = $\frac{2yn}{2y}$ + $\frac{nn}{2y}$ = n+ $\frac{nn}{2y}$, άρα z= $\frac{nn}{2y}$, δηλαδή z= $\frac{dydy}{2y}$ όπως θέλαμε να δείξουμε. Όμως, αυτό το συμπέρασμα, κατά τον Berkeley, προκύπτει σωστό όχι επειδή το απορριφθέν τετράγωνο dy είναι απειροστά μικρό, αλλά επειδή αυτό το σφάλμα εξισορροπείται με ένα άλλο αντίθετο σφάλμα. Ισχυρίζεται, λοιπόν, ότι οτιδήποτε απορρίφθηκε, αν και τόσο μικρό είναι πραγματικό, και ένα πραγματικό λάθος στις υποθέσεις θα παράγει και ένα ανάλογο λάθος στα συμπεράσματα. Και αυτό, για τον Berkeley, είναι λάθος από λογικής πλευράς, γιατί ούτε τα θεωρήματα μπορεί να είναι με ακρίβεια αληθή, ούτε τα προβλήματα να θεωρηθούν με ακρίβεια λυμένα, όταν βασίζονται σε υποθέσεις ασαφείς, ανακριβείς και αδιευκρίνιστες. Γιατί, λέει αναφερόμενος στους μαθηματικούς που τα αποδέχονται όλα αυτά, τίποτα δεν είναι πιο σαφές από το ότι δεν μπορεί να συναχθεί ένα συμπέρασμα από δύο αντιφατικές υποθέσεις. Μπορεί κάποιος να κάνει μια οποιαδήποτε δυνατή υπόθεση, και μετά να απορρίψει μια υπόθεση από κάποια άλλη, αλλά μετά δεν μπορεί να διατηρεί τις συνέπειες ή μέρος των συνεπειών της υπόθεσης που έπαψε να ισχύει. Για παράδειγμα, στην αρχική σημείωση x+0, το 0 μπορεί να σημαίνει είτε μία αύξηση είτε τίποτα. Αλλά ποιο από αυτά σημαίνει πρέπει οπωσδήποτε να δηλώνεται, και να υποστηρίζεται με συνέπεια αυτή η σημασία του, και να μη γίνονται διαδικασίες με τη διττή σημασία, γιατί τότε αυτό θα ήταν ένα σόφισμα και όχι απόδειξη.

Έτσι, υποστηρίζει ο Berkeley (στο Analyst), αν και οι στιγμιαίες αυξήσεις, μόλις που υπάρχουν, ή που πάνε να εξαφανιστούν, fluxions και απειροστά κάθε βαθμού, είναι στην πραγματικότητα τόσο σκιώδεις οντότητες, τόσο δύσκολο να τις φανταστούμε ή να τις συλλάβουμε με σαφήνεια, ώστε δεν μπορούν να γίνουν δεκτές ως αρχές ή αντικείμενα καθαρής και ακριβούς επιστήμης. Αναφέρεται λοιπόν, σαφώς κατά της μοντέρνας (σύγχρονης) Ανάλυσης και των συγγραφέων της, λέγοντας ότι δεν είναι επιστημονική, γιατί τα συμπεράσματά της στο σύνολό τους δεν έχουν επιτευχθεί μόνο από αιτιολόγηση από ξεκάθαρες αρχές και τη Λογική, αλλά από τη μεταφυσική τους. Έτσι, στο τέλος θέτει ερωτήματα, όπως αν είναι πραγματικά ένα αποτέλεσμα της σκέψης, ότι οι ίδιοι άντρες θαυμάζουν τον σπουδαίο συγγραφέα για τις fluxions του, και ειρωνεύονται για τα θρησκευτικά του πιστεύω. Ή αν τα μυστήρια δεν επιτρέπονται με καλύτερα δικαιώματα στη θεία πίστη παρά στην επιστήμη ή αν οι μαθηματικοί που κραυγάζουν εναντίων των μυστηρίων (της θρησκείας), έχουν ποτέ εξετάσει αυτά που οι ίδιοι πιστεύουν, δηλαδή αν θα μπορούσαν άντρες που είναι μπερδεμένοι για τις δικές τους αρχές, να κρίνουν προσεκτικά, ειλικρινά και μετριοπαθώς άλλα θέματα. Αναρωτιέται, αν στη γεωμετρία είναι αρκετό να αποδώσουμε πεπερασμένο μέγεθος, χωρίς να θεωρήσουμε τους εαυτούς μας μέσα στο άπειρο, και μάλιστα αν δεν θα ήταν ορθότερο να επιχειρούμε μετρήσεις στα μεγάλα πολύγωνα έχοντας πεπερασμένες στο πλήθος πλευρές αντί για καμπύλες, από το να υποθέτουμε ότι οι καμπύλες είναι πολύγωνα με άπειρες πλευρές, μια υπόθεση ούτε αληθή, ούτε αντιληπτή. Και γίνεται πιο συγκεκριμένος, ρωτώντας αν υπάρχει ανάγκη θεώρησης των ποσοτήτων είτε ως άπειρα μικρών είτε ως άπειρα μεγάλων, ή αν οι έννοιες του απόλυτου χρόνου και του απόλυτου χώρου και της απόλυτης κίνησης δεν είναι πιο αφηρημένες οντολογικά, ή αν είναι δυνατόν για εμάς να τις μετρήσουμε, να τις υπολογίσουμε ή να τις γνωρίσουμε (Berkeley, 1734).

Η κριτική του Berkeley ήταν ως ένα βαθμό δικαιολογημένη. Ένας από τους σκοπούς της επίθεσής του ήταν το πρώτο εγχειρίδιο του λογισμού, που γράφτηκε από τον Γάλλο μαθηματικό G.F.A. de L' Hopital (1661- 1704). Αυτό έκανε μια τεράστια προσπάθεια να βοηθήσει να γίνει δημοφιλής ο λογισμός, αλλά ήταν σε απόλυτη σύγχυση που ήρθε με μια εντελώς άκριτη αποδοχή των απειροστών. Ένα άλλο εγχειρίδιο για τον λογισμό με ισχυρή επιρροή εκδόθηκε αργότερα από τον Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707- 1783). Αυτό το έργο ήταν ένα όμορφα οργανωμένο σύνολο που μπορούσε να γίνει κατανοητό με καθαρά όρους Ανάλυσης (μη γεωμετρικούς). Αλλά ακόμη χρησιμοποιούσε τα απειροστά μη ικανοποιητικά, και έτσι η δυσαρέσκεια παρέμεινε. Ο Hegel ανέλαβε την κριτική του λογισμού που ήταν παρόμοια με του Berkeley, και έκανε κατάλληλες υποδείξεις (πρβλ. Moore,1990). Όπως ήταν ήδη ξεκάθαρο, οι σπόροι μιας τέτοιας σύλληψης ήταν στο έργο του Ευδόξου και της μεθόδου της «εξάντλησης» που χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση πολλών γεωμετρικών προβλημάτων και από τον Αρχιμήδη. Αλλά τον 19^{ο} αι. ο λογισμός θεμελιώθηκε αυστηρά. Δύο μαθηματικοί έπαιξαν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο: ο Augustin Cauchy (1789- 1857) ένας Γάλλος του οποίου τις ιδέες επανέλαβε και ενέκρινε ο Bolzano και πάνω απ' όλους ο Karl Weierstrass (1815-1897).

Ο Cauchy και ο Weierstrass ισχυρίστηκαν ότι όταν σκεφτόμαστε ένα καμπύλο σχήμα δεν το βλέπουμε απλώς ως ένα «απειρο-γωνο» αλλά σαν το όριο μιας ακολουθίας πολυγώνων. Επίσης, κάποιες φορές θέλουμε να εξετάσουμε τι συμβαίνει καθώς οι τιμές γίνονται αυθαίρετα μεγάλες. Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι το όριο του 1/n, καθώς το n τείνει στο άπειρο, είναι 0, όπου το n παίρνει ως τιμές φυσικούς αριθμούς. Αυτό δεν σημαίνει πως εκτιμούμε την τιμή του 1/n όταν το n είναι άπειρο- αφού κανένας φυσικός αριθμός δεν είναι άπειρο. Λέμε ότι οσοδήποτε μικρό αριθμό ε θεωρήσουμε, υπάρχει πάντα μία τιμή του n που είναι επαρκώς μικρότερη από τον αντίστροφό του, και οι αντίστροφοι όλων των μεγαλύτερων τιμών να είναι μεταξύ του 0 και του ε (δηλαδή μικρότεροι του ε). Δεν υπάρχει αναφορά στο άπειρο εδώ. Αυτό είναι ένα τέλειο παράδειγμα του «τρόπος του λέγειν». Θα μπορούσε κανείς να φανταστεί τους μεσαιωνικούς να επεκτείνουν την έννοια του συν-κατηγορηματικού για να ενσωματώσουν τέτοιες χρήσεις της «απειρίας». Ο «τρόπος του λέγειν», δηλαδή να περιγράφεις το άπειρο με έμμεσες αναφορές χωρίς να το υποστασιοποιείς, είναι νομιναλιστικός.

Η ανάπτυξη των τεχνικών ε-δ του Weierstrass, εξάλειψε τη χρήση των απειροστών και τα προβλήματα που αυτά είχαν προκαλέσει. Αντικατέστησε ουσιαστικά την συζήτηση των απειροστών με τη συζήτηση σχετικά με το τι συμβαίνει σε άπειρες ακολουθίες πεπερασμένων ποσοτήτων όταν οδηγούμαστε ολοένα και πιο κοντά στο μηδέν. Η ακρίβεια των εννοιών αντικατέστησε τον διαισθητικό γεωμετρικό τρόπο σκέψης.

Σύμφωνα με τον Αναπολιτάνο (2019), με την εισαγωγή των ε-δ τεχνικών μπόρεσε να θεμελιωθεί αξιωματικά η ευθεία των πραγματικών αριθμών αποδεικνύοντας ότι *συσσώρευση* και *σύγκλιση* είναι έννοιες ισοδύναμες. Αποδείχθηκε με τη θεμελιώδη πρόταση: κάθε βασική (Cauchy) ακολουθία συγκλίνει. Έτσι, «κάθε συσσώρευση σημείων της πραγματικής ευθείας λαμβάνει χώρα όχι γύρω από κάποια μυστηριώδη οπή, αλλά γύρω από κάποιο σημείο της ευθείας, που αποτελεί το σημείο σύγκλισης των συσσωρευμένων ολόγυρά του σημείων της. Η προσέγγιση αυτή οδήγησε στην κυριαρχούσα πλέον σήμερα αντιμετώπιση των εννοιών του διαφορικού, της παραγώγου, του ολοκληρώματος, που αναγνωρίζονται ως κυρίαρχοι θεμέλιοι λίθοι της περιοχής του λεγόμενου «απειροστικού λογισμού», μέσω, όχι της έννοιας του απειροστού, αλλά της έννοιας του ορίου».

Στο *Cours d'Analysis* (1821), ο Cauchy σημείωσε ότι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούσαν να προσδιοριστούν ως όρια διακριτών ακολουθιών που οι όροι τους συγκεντρώνονται ολοένα και πιο πολύ σε εγγύτερες τιμές. Αργότερα ο Cantor το 1872, χρησιμοποίησε την προηγούμενη ιδέα για να ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς ως όρια Cauchy ακολουθιών ρητών αριθμών.

Μία εναλλακτική εκδοχή προσδιορισμού των πραγματικών αριθμών δημοσιεύτηκε από τον Richard Dedekind (1831- 1916) που πρώτος θεώρησε τους πραγματικούς αριθμούς ως «τομές». Πήγε πίσω στους φυσικούς αριθμούς και στις θεμελιώδεις πράξεις που θα μπορούσαν να εκτελεστούν σε αυτούς, και σκέφτηκε ότι, τα λογικά κενά στους ρητούς θα έπρεπε να γεμίσουν με τους άρρητους. Πίστευε ότι οι άρρητοι θα έπρεπε να «κατασκευαστούν» για να γεμίσουν αυτά τα κενά. Το γεωμετρικό συνεχές είχε να κάνει με την πυκνότητα των σημείων μιας ευθείας, δηλαδή μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων της ευθείας θα έπρεπε να υπάρχει πάντα ένα τρίτο. Αυτή η αντίληψη υπήρχε από την αρχαιότητα. Ωστόσο, μια επιβολή της διάταξης σε ένα σύνολο πραγμάτων είναι *συνεχής* όταν όχι *μόνο* μεταξύ δύο οποιωνδήποτε απ' αυτά (τα πράγματα) υπάρχει ένα τρίτο, αλλά επίσης εφόσον δεν υπάρχουν καθόλου «κενά». Το σύνολο των ρητών είναι πυκνό, χωρίς να είναι συνεχές, αφού δεν ισχύει γι' αυτούς η ιδιότητα της πληρότητας. Επειδή υπάρχουν σημεία στο γεωμετρικό συνεχές, όπως η τετραγωνική ρίζα του 2, που δεν αντιστοιχούν σε ρητό αριθμό. Αυτά τα «κενά» στους ρητούς δεν αντιστοιχούν σε κάτι μυστηριώδες. Αυτά τα «κενά» έπρεπε να καλυφθούν.

Αυτό που «έλλειπε» από το σύνολο των ρητών (αλλά είχαν οι πραγματικοί) ώστε να είναι συνεχές ήταν η ιδιότητα της *πληρότητας*: «Αν το Α είναι μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών τότε το Α έχει supremum (ελάχιστο άνω φράγμα)». Η ιδιότητα της πληρότητας έχει απόλυτα κεντρική θέση στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού και γενικότερα της Μαθηματικής Ανάλυσης, γιατί ουσιαστικά κάθε σημαντικό θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού είναι συνέπεια της. Μία συνέπειά της είναι και η αρχή του Ευδόξου- Αρχιμήδους: Το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο, δηλαδή για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon>0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $\nu\geq 1$ τέτοιος ώστε: $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Η βάση της μαθηματικής ανάλυσης είναι η προσέγγιση. Ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου ενέγραψε και περιέγραψε στον κύκλο κανονικά πολύγωνα. Γενίκευση αυτής της ιδέας είναι η σύγκλιση πραγματικών αριθμών σε ένα όριο, μέσα από αλλεπάλληλες διαδοχικές προσεγγίσεις. Άμεση συνέπεια της ιδιότητας της πληρότητας των πραγματικών αριθμών είναι και η πρόταση: «Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει» που είναι και ο πυρήνας του θεωρήματος Bolzano- Weierstrass, από το οποίο προκύπτει η θεμελιώδης πρόταση: «Κάθε βασική ακολουθία (Cauchy) συγκλίνει». Έτσι, έρχεται ο ε-δ ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης χωρίς χρήση απειροστών: «Έστω X ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, και μία πραγματική συνάρτηση $f: X \to R$, και $x_o \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_o αν για κάθε $ε>0$ υπάρχει $δ>0$ τέτοιο ώστε $|x-x_o|<δ$, τότε $|f(x)-f(x_o)|<ε$». Διαισθητικά ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o σημαίνει ότι η συνάρτηση f παίρνει τιμές f(x) πολύ κοντά στο $f(x_o)$ όταν το x είναι κοντά στο x_o. Αυτό θα μπορούσε να εκφραστεί και με την εισαγωγή της έννοιας του ορίου λέγοντας ότι «το όριο της συνάρτησης f καθώς το x τείνει στο x_o είναι το $f(x_o)$», σύμφωνα με τον ε-δ ορισμό του ορίου συνάρτησης: «Αν X είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, και x_o ένα σημείο συσσώρευσης του X και $f: X \to R$ μία πραγματική συνάρτηση, το όριο της συνάρτησης f καθώς το x τείνει στο x_o είναι το α αν για κάθε $ε>0$ υπάρχει $δ>0$ τέτοιο ώστε $x \in X$ και $0<|x-x_o|<δ$, τότε $|f(x) – α|<ε$» (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1987).

Θα δούμε τα εγχειρήματα των Dedekind και Cantor αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο. Θα αναφέρουμε όμως σχετικά με τα απειροστά κάτι συμπληρωματικό. Τα απειροστά επανήλθαν στη συζήτηση αρκετά αργότερα με την μη καθιερωμένη ανάλυση του A. Robinson.

Ο Γερμανός Abraham Robinson (1918- 1974) με τη μη καθιερωμένη ανάλυση (non-standard analysis) παρήγαγε μια τεχνική με την οποία τα απειροστά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν χωρίς τον κίνδυνο των αντιφάσεων που εμφάνιζαν τον 17^{ο} αι.. Τελικά έδωσε νόημα στην έννοια ενός απειροστού μεγαλύτερου από το 0 αλλά μικρότερο από οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό. Αλλά για να κάνει αυτή την έννοια ακριβή, χρησιμοποίησε λογικές μεθόδους και τεχνικές που πήγαν πολύ παραπέρα απ' ότι θα μπορούσε να είναι αναγνωρίσιμο στους μαθηματικούς του 17^{ου} αι. Η τεχνική του Robinson έγκειται στην επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών στο σύνολο των *υπερπραγματικών* αριθμών.

Ο Abraham Robinson το 1961 ανέπτυξε μια μη Αρχιμήδεια μέθοδο επέκτασης της ευθείας των πραγματικών αριθμών με προσθήκη απειροστών και απείρων στοιχείων και έτσι οικοδόμησε τη λεγόμενη non-standard Ανάλυση. Μη Αρχιμήδεια γιατί δεν θα ίσχυε το αξίωμα Ευδόξου- Αρχιμήδους, αφού θα υπάρχουν αριθμοί απειροστού μεγέθους γύρω από το 0, τέτοιοι ώστε για έναν θετικό πραγματικό αριθμό x και y έναν θετικό απειροστό αριθμό, δεν θα υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $x<ny$. Δύο ήταν τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της. Πρώτον, η ευθεία των πραγματικών αριθμών R επεκτείνεται σε μια *υπερευθεία* R^* με τέσσερα είδη αντικειμένων: α) τους standard πραγματικούς αριθμούς a που είναι τα σημεία της

πραγματικής ευθείας, β) τα απειροστά αντικείμενα x, όπου $x \neq 0$ και $|x|<a$ για κάθε a standard πραγματικό αριθμό, γ) τους μεικτούς αριθμούς : $a \pm x$, ώστε γύρω από έναν standard πραγματικό αριθμό a υπάρχει μια «φυσαλίδα» αριθμών $a \pm x$, δηλαδή δεν υπάρχει b standard πραγματικός αριθμός διατακτικά πιο κοντά στον a από τον $a+x$ ή τον $a - x$, δ) τους άπειρους αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει ότι δεν υπάρχει standard πραγματικός αριθμός a τέτοιος ώστε $|x|<a$. Δεύτερον ισχύει, σε αυτή την επέκταση της πραγματικής ευθείας, η *αρχή της μεταφοράς*: Για κάθε πρόταση φ της γλώσσας που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της R, η φ ικανοποιείται από την R αν και μόνον αν ικανοποιείται από την R^*. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, γιατί μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση φ ικανοποιείται στη δομή R, αν αποδείξουμε ότι ικανοποιείται στην επέκτασή της R^*, πιθανόν πιο εύκολα (Αναπολιτάνος, 2019).

Κεφάλαιο 3^{ο}

Αντιλήψεις για το άπειρο 19^{ου} – 20^{ου} αι.

Εισαγωγή

Ο Λογισμός, όπως είδαμε, γεννήθηκε τον 17^{ο} αι. με τους Leibniz και Newton να διεκδικούν την πατρότητα, αλλά δεν έγινε ευρύτερα αποδεκτός στον μαθηματικό κόσμο μέχρι τις αρχές του 19^{ου} αι. Η κύρια φιλοσοφική ένσταση στην αποδοχή του λογισμού είχε να κάνει με τα απείρως μικρά μέρη των εξισώσεων, δηλαδή τα απειροστά και την χρήση τους. Ο λογισμός ως μέσο υπολογισμού της κίνησης σε μία χρονική στιγμή απαιτούσε κάποια μέθοδο αναφοράς στην απόσταση δύο αριθμών που ήταν απείρως κοντά. Ο Leibniz ονόμασε αυτή την απόσταση απειροστό, αλλά ισχυρίστηκε ότι δεν ήταν αριθμός στην πραγματικότητα, αλλά ένας χρήσιμος «τρόπος του λέγειν». Ο Newton αναφέρθηκε σ' αυτήν την μικρή απόσταση κάποιες φορές ως "fluxion" – ο ρυθμός αλλαγής μεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο πέρασμα του χρόνου- και κάποιες φορές ως απειροστό. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο Berkeley το 1734 άσκησε κριτική στη χρήση των απειροστών στο έργο του *The Analyst* θέτοντας εύλογα ερωτήματα:

«...Και τι είναι τα Fluxions? Οι ταχύτητες των εφήμερων επαυξανομένων ποσοτήτων; Και τι είναι αυτές οι εξαφανιζόμενες επαυξήσεις; Δεν είναι ούτε πεπερασμένες ποσότητες ούτε ποσότητες απείρως μικρές ούτε οτιδήποτε. Μπορούμε να μην τις αποκαλούμε φαντάσματα εκλιπόντων ποσοτήτων;» (σ. 18)

Με άλλα λόγια ο λογισμός με τον τρόπο που αναπτύχθηκε από τον Newton και τον Leibniz μολονότι πρακτικά γόνιμος, στηριζόταν στην έννοια του απειροστού που ήταν ιδιαίτερα προβληματική τόσο για μαθηματικούς όσο και για φιλοσοφικούς λόγους.

Οι εξελίξεις του 19^{ου} αι. και ιδιαίτερα το έργο των Weierstrass και Cauchy αυστηροποίησαν τον λογισμό, αντικαθιστώντας τα απειροστά με μια συζήτηση περί απείρων ακολουθιών πεπερασμένων ποσοτήτων των οποίων οι όροι πλησιάζουν όλο και περισσότερο στο μηδέν. Οι έννοιες ήταν πλέον αριθμητικές και δεν είχαν ανάγκη της γεωμετρικής εποπτείας.

Η θεωρία ορίων, σε γενικές γραμμές, είναι το μαθηματικό σύστημα που χρησιμοποιεί μεταβλητές για να επιτρέψει μία ποσότητα να προσεγγίσει απείρως σε μία άλλη, αλλά ποτέ να μην τη φτάσει. Η εισαγωγή αυτής της θεωρίας βοήθησε τον λογισμό να προχωρήσει, όμως για έναν μεγάλο αριθμό μαθηματικών έθεσε διάφορα εμπόδια. Αν έπρεπε ο λογισμός να γίνει αλγεβρικά, χωρίς την αναγκαία προσφυγή στη γεωμετρία, οι ίδιοι οι αριθμοί θα έπρεπε να μπορούν να κάνουν τη συνεχή προσέγγιση που επέβαλλαν τα όρια, και έτσι θα έπρεπε πρώτα να καθιερωθεί το συνεχές των πραγματικών αριθμών. Τα ερωτήματα που αναδύθηκαν και τέθηκαν σε συζήτηση ήταν πολλά. Τι είναι ο πραγματικός αριθμός; Ποια είναι η φύση του συνεχούς; Είναι η έννοια της απειροστά μικρής ποσότητας λογικά συνεπής; Ποια είναι η σχέση του συνεχούς των πραγματικών αριθμών με άλλα γνωστά συνεχή, όπως το συνεχές της γεωμετρικής ευθείας; Υπάρχει στην πραγματικότητα το μαθηματικό συνεχές;

Για το μεγαλύτερο μέρος του 20^{ου} αι. είχε σε μεγάλο βαθμό υποτεθεί ότι αυτά τα ερωτήματα είχαν αντιμετωπιστεί, όσον αφορά τον λογισμό λόγω της δουλειάς των Weierstrass, Cauchy, Cantor, Dedekind. Φαινόταν ότι κέρδιζαν στην επιχειρηματολογία οι θεωρητικοί μαθηματικοί της θεωρίας ορίων σε βάρος εκείνων με τα απειροστά. Το 1960 τα πράγματα άλλαξαν ξανά καθώς ο Robinson εισήγαγε τη non-standard analysis, τον μαθηματικά συνεπή και ισχυρό λογισμό του ο οποίος ενσωμάτωνε τα απειροστά, τις υπερπεπερασμένες ποσότητες και τους πραγματικούς αριθμούς. Γι' αυτή την παρέμβαση αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε κάθε περίπτωση, οι περισσότεροι μαθηματικοί συντάχθηκαν με την κλασική ανάλυση η οποία είχε εξοβελίσει τα απειροστά.

Ο George Cantor (1845-1918) στο μεταίχμιο μεταξύ 19^{ου} και 20^{ου} αι. ήταν εκείνος που πέρασε, μέσω των υπερπεπερασμένων αριθμών, την έννοια του απείρου σε άλλα επίπεδα. Ο Cantor όχι μόνο υποστήριξε τη μαθηματική ύπαρξη του ενεργεία απείρου, αλλά και προχώρησε στο να καθιερώσει διαφορετικά μεγέθη απείρου, και να κάνει υπολογισμούς με αυτά. Η υπερπεπερασμένη θεωρία του, η θεωρία ότι τα άπειρα διαφορετικά μεγέθη απείρου μπορούν να καθοριστούν με ακρίβεια και μετά να διαταχθούν καλά, είναι πιθανόν η πιο αμφιλεγόμενη θεωρία που προώθησε, όμως και η πιο δημοφιλή θεωρία του. Η κλασική θεωρία συνόλων βασίζεται, επίσης, στην έννοια του ενεργεία απείρου.

Πριν από τον Cantor, ο Bernard Bolzano (1781-1848), ένας φιλόσοφος, θεολόγος και μαθηματικός, γεννημένος στην Πράγα, που έζησε ωστόσο στη νότια Βοημία, ήταν ο πρώτος στοχαστής που προήγαγε την ιδέα ότι η έννοια του απείρου είχε την πρώτη και κύρια εφαρμογή της στα σύνολα. Το να περιγράψουμε κάτι ως άπειρο σε ένα δεδομένο θέμα σήμαινε ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο είχε άπειρα στοιχεία. Ο Bolzano πίστευε ότι υπήρχαν άπειρα σύνολα, όπως το σύνολο των σημείων στον χώρο, το σύνολο των στιγμών στον χρόνο, το σύνολο των φυσικών αριθμών. Είχε διατυπώσει, μάλιστα, ένα επιχείρημα για το ότι το σύνολο των αληθών προτάσεων είναι άπειρο: Η πρόταση «ο Σωκράτης είναι Έλληνας» είναι αληθής. Ας την ονομάσουμε p_1. Αλλά τότε υπάρχει μία άλλη αληθής πρόταση p_2, η πρόταση «η p_1 είναι αληθής». Και ούτω καθεξής επ' άπειρον. Έτσι των σύνολο των αληθών προτάσεων είναι άπειρο. Το ερώτημα, όμως, ήταν αν μπορούσαν τέτοια σύνολα να αντιμετωπιστούν ως ολοκληρωμένες και καθορισμένες ολότητες. Δηλαδή, αν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα άπειρα σύνολα σα να επιτρέπεται η χρήση του ενεργεία μαθηματικού απείρου. Ο Bolzano πίστευε ότι θα μπορούσαμε. Γνώριζε, βέβαια, ότι το ενεργεία άπειρο προκαλούσε παράδοξα. Υποστήριξε, όμως, ότι αυτά θα μπορούσαν να επιλυθούν αποφεύγοντας την ιδέα ότι ένα σύνολο υπάρχει μόνο αν μπορούμε να θεωρήσουμε τα στοιχεία του όλα μαζί ταυτόχρονα (Moore, 1990).

Ο Richard Dedekind (1831-1916) έπαιξε επίσης ένα σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του ενεργεία απείρου, παρουσιάζοντας μία λύση σε ένα παρατεταμένο παράδοξο του απείρου. Διάφοροι παλαιότεροι μελετητές είχαν βρει εμπόδιο σε αυτό που ονόμασαν «το παράδοξο των άνισων απείρων»: το γεγονός ότι σε ορισμένα παραδείγματα, ένα μέρος ενός άπειρου συνόλου είναι το ίδιο σε μέγεθος όπως ολόκληρο το σύνολο. Για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των περιττών αριθμών, που ενώ το ένα είναι υποσύνολο του άλλου τα στοιχεία τους μπορούν να τεθούν σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία. Ο Dedekind όρισε αυτό ακριβώς να είναι ο ορισμός του άπειρου συνόλου: «Ένα σύνολο S ονομάζεται άπειρο όταν είναι *όμοιο* με ένα συγκεκριμένο μέρος του ίδιου του εαυτού του, στην αντίθετη περίπτωση το S ονομάζεται πεπερασμένο σύνολο» (Dedekind, 1963, Buckley, 2008). Εδώ η έννοια «όμοιο» σημαίνει να τίθενται τα στοιχεία των συνόλων σε 1-1 (και επί) αντιστοιχία.

Στην αλλαγή του αιώνα, οι μαθηματικοί συνειδητοποιούσαν ολοένα περισσότερο την ανάγκη για σαφήνεια και αυστηρότητα στη θεμελίωση του λογισμού. Υπήρχαν δύο σπουδαία επιτεύγματα στην προσπάθειά τους αυτή: η ευκλείδεια αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας και η καρτεσιανή αναγωγή αυτής της γεωμετρίας στην ανάλυση. Ο Dedekind έθεσε κάποιες βασικές αρχές της αριθμητικής, που αργότερα βελτίωσε ο Peano, ο οποίος τις παρουσίασε ως μια αξιωματική βάση σε Ευκλείδειο ύφος. Από αυτές τις αρχές ως αξιώματα παράγονταν τα θεωρήματα της αριθμητικής. Πολύ σημαντικό ρόλο σε αυτό έπαιξε ο Gottlob Frege (1848-1925), Γερμανός μαθηματικός και σπουδαίος ειδικός της λογικής και πρωτοπόρος της αναλυτικής φιλοσοφικής παράδοσης. Φιλοδοξία του ήταν η αναγωγή των μαθηματικών σε συγκεκριμένες θεμελιώδεις και αυταπόδεικτες αρχές της λογικής. Συνδύασε δικές του απόψεις με αυτές του Bolzano, του Dedekind και του Cantor για την υπεράσπιση της ιδέας ότι η μαθηματική μελέτη του απείρου ήταν ικανή, όσο και κάθε άλλος κλάδος των μαθηματικών. Έκανε ζωτική χρήση της κλάσης (μιας πρωταρχικής εκδοχής του συνόλου) επιδιώκοντας τη θεμελίωση της αριθμητικής στη λογική, αφού θεώρησε τις κλάσεις λογικές οντότητες. Προϋπέθεσε ότι για κάθε ιδιότητα P μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο όλων των αντικειμένων που έχουν αυτή την ιδιότητα P (αρχή της απεριόριστης συμπερίληψης). Διατύπωσε επιπλέον το επιχείρημα: Οτιδήποτε άλλο υπάρχει, θα πρέπει τουλάχιστον να υπάρχει το κενό σύνολο, το σύνολο χωρίς στοιχεία. Τότε θα υπήρχε και το σύνολο του οποίου το μόνο στοιχείο θα ήταν το κενό σύνολο. Τότε θα υπήρχε και το σύνολο του οποίου τα μόνα στοιχεία θα είναι αυτά τα δύο. Και ούτω καθεξής, επ' άπειρον. Έτσι υπάρχουν άπειρα το πλήθος πράγματα (Frege, 1980). Ωστόσο, προέκυψε ένα παράδοξο που κατέστρεψε ένα μεγάλο μέρος του έργου ζωής του Frege (Moore, 1990). Η προσπάθεια του Frege στην κατάδειξη του λογικισμού, δηλαδή της αναγωγής της αριθμητικής στη λογική απέτυχε, εξαιτίας του λογικού παραδόξου που προέκυψε στο τυπικό λογικό του σύστημα και το οποίο είναι γνωστό ως το παράδοξο του Russell. Το σύστημα δεν μπορούσε να συνιστά λογική με εφικτό τρόπο, εφόσον η λογική πρέπει τουλάχιστον να είναι συνεπής (Friend, 2007).

Το 1902, ο φιλόσοφος και μαθηματικός Bertrand Russell (1872-1970) διατύπωσε το εξής παράδοξο: Θεωρώντας το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους, ας το ονομάσουμε R, το ίδιο το R ανήκει στον εαυτό του; Κάθε σύνολο X ανήκει στο R αν και μόνο αν το X δεν ανήκει στο X. Άρα το R ανήκει στο R αν και μόνο το R δεν ανήκει στο R : μία προφανής αντίφαση. O Russell έγραψε την ανακάλυψή του στον Frege, ο οποίος ετοιμαζόταν να δημοσιεύσει τον δεύτερο τόμο των Grundgesetze der Arithmetik. O Frege παραδέχτηκε ως πολύ αξιόλογη την ανακάλυψη του Russell και παρά το ότι γνώριζε ότι ανέτρεπε τη θεμελίωση της αριθμητικής με τον δικό του τρόπο έγραψε γι' αυτό το παράδοξο στο δεύτερο τόμο της εργασίας του (Rucker, 2000). Η κρίση είχε για άλλη μια φορά να κάνει με το άπειρο (το σύνολο R στο παράδοξο του Russell θα έπρεπε να είναι άπειρο). O Russell σε συνεργασία με τον δάσκαλό του Alfred Whitehead (1861-1947), εξέδωσε ένα μνημειώδες έργο τριών τόμων Principia Mathematica, στο οποίο σκοπός ήταν να δείξουν ότι τα μαθηματικά θα μπορούσαν να αναχθούν στη λογική με δεδομένη μια ασφαλή αξιωματική θεμελίωση. Υποστήριξε ότι ένα σύνολο θα πρέπει να είναι διαφορετικού είδους από τα στοιχεία του, δηλαδή να αποφευχθούν οι αυτοαναφορές ώστε να μην προκύπτει αυτό το παράδοξο. Οι Russell και Whitehead ανέπτυξαν τη θεωρία τύπων για να αποφύγουν το γνωστό παράδοξο. Στο πρώτο επίπεδο υπήρχαν αντικείμενα που δεν είχαν μέλη. Στο δεύτερο επίπεδο σύνολα με στοιχεία που προέρχονταν από το προηγούμενο επίπεδο. Στο τρίτο επίπεδο σύνολα με στοιχεία που προέρχονταν από το προηγούμενο επίπεδο[1] κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο, απέφευγαν την περίπτωση του ερωτήματος για το αν ένα σύνολο ανήκει ή δεν ανήκει στον εαυτό του. Το ερώτημα αυτό δεν είχε πλέον νόημα άρα και το παράδοξο. Συνεπώς, απέφυγαν το παράδοξο του Russell. Ωστόσο, αναγκάστηκαν να θέσουν διάφορα αξιώματα όπως πχ. το αξίωμα της ύπαρξης απείρων συνόλων και να ενσωματώσουν στη θεωρία τους καθαρά μαθηματικές παραδοχές, παραβιάζοντας έτσι την υπόθεση του λογικισμού.

Από άλλους θεωρήθηκε υπεύθυνη η αρχή της συμπερίληψης για την εμφάνιση του παραδόξου. Η αρχή της συμπερίληψης έδινε τη δυνατότητα να σχηματιστεί ένα σύνολο συμπεριλαμβάνοντας όλα τα αντικείμενα τα οποία ικανοποιούσαν μια δεδομένη ιδιότητα. Η αρχή αυτή είχε χρησιμοποιηθεί από τον Frege και ήταν διαισθητική. Επέτρεπε τον σχηματισμό του συνόλου που έθεσε ο Russell στο παράδοξο. Έτσι έπρεπε η αρχή της συμπερίληψης να αποφευχθεί ή να τροποποιηθεί κατάλληλα έτσι ώστε να μην προκύπτει το παράδοξο. Πχ. η θεωρία συνόλων Zermelo-Fraenkel η οποία αξιωματικοποιήθηκε δεν επιτρέπει τον σχηματισμό συνόλων με βάση την συγκεκριμένη αρχή και έτσι αποφεύγει την εμφάνιση του συγκεκριμένου παραδόξου.

Μία άλλη λύση δόθηκε στις μέρες μας από τους νεολογικιστές Bob Hale και Crispin Wright οι οποίοι απέφυγαν την συγκεκριμένη αρχή της συμπερίληψης και

---

1 Σύμφωνα με μια άλλη εκδοχή, στο τρίτο επίπεδο υπήρχαν σύνολα με στοιχεία από τα δύο προηγούμενα επίπεδα.

γενικότερα τον τρόπο που ο Frege χρησιμοποίησε τις κλάσεις. Έτσι απέφυγαν και το παράδοξο του Russell. Οι νεολογικιστές χρησιμοποίησαν την αρχή του Hume, μία αρχή που ο ίδιος ο Frege είχε εισαγάγει στα *Grundlagen der Arithmetik* το 1884, ως πλαισιακό ορισμό του αριθμού, εμπνεόμενος την ιδέα από τον Hume:

«Για κάθε δύο έννοιες F, G, ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν υπάρχει μία 1-1 (και επί) αντιστοιχία μεταξύ των (πραγματώσεων των) εννοιών F και G»

Για παράδειγμα, αν διαθέτουμε τις έννοιες F: «πιάτο στο τραπέζι» και G: «καλεσμένος στο τραπέζι», ο αριθμός της έννοιας F ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν υπάρχει μία 1-1 (και επί) αντιστοιχία ανάμεσα στα πιάτα και στους καλεσμένους.

Η αρχή του Hume (ή όπως επίσης λέγεται «αρχή των αριθμών») είναι πλαισιακός ορισμός γιατί προσδιορίζει τους φυσικούς αριθμούς στην εκδοχή της πληθικότητας στη βάση πλαισίων δηλαδή ισοτήτων της μορφής «ο αριθμός της έννοιας F ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας G».

Περιγράφοντας το Συνεχές: Dedekind

Ο Julius Wilhelm Richard Dedekind γεννήθηκε στις 6 Οκτωβρίου 1831 στη Γερμανία. Σπούδασε μαθηματικά με τον Carl Friedrich Gauss στο Πανεπιστήμιο του Gottingen και θεωρία αριθμών, ολοκληρώματα και μερικές διαφορικές εξισώσεις με τον Lejeune Dirichlet (1805-1859). Επικοινωνούσε με τον Dirichlet σχεδόν καθημερινά, γράφοντας γι’ αυτήν την επικοινωνία ότι «για πρώτη φορά άρχιζε να μαθαίνει σωστά» (Dedekind, 1981). Επίσης, ήταν σχεδόν ο πρώτος λέκτορας της θεωρίας Galois. Όταν δίδασκε λογισμό στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης, προβληματίστηκε για τις αναγκαίες αναφορές στη γεωμετρία που ήταν καθιερωμένες στις μεθόδους διδασκαλίας. Ανησυχούσε μήπως η ίδια η Ανάλυση στηριζόταν σε μια τέτοια μη επιστημονική, μη αυστηρή βάση όπως η γεωμετρική διαίσθηση. Επιθυμούσε να ανακαλύψει μια καθαρά αριθμητική και τέλεια αυστηρή θεμελίωση για τις αρχές της απειροστικής ανάλυσης. Τελικά τα κατάφερε και δημοσίευσε τα αποτελέσματά του στην πραγματεία του (1872) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Αυτό που τον προβλημάτιζε κυρίως ήταν η υποτιθέμενη, αλλά όχι ακόμα αποδεδειγμένη συνέχεια των πραγματικών αριθμών και οι γεωμετρικές και απειροστικές αναφορές που χρησιμοποιούταν στην απόδειξη του θεωρήματος «κάθε μεταβλητό μέγεθος που προσεγγίζει μια οριακή τιμή τελικά αλλάζει λιγότερο από οποιοδήποτε θετικό μέγεθος» (Dedekind, 1963, Buckley, 2008).

Η μέθοδος του Dedekind να ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς είναι αξιοθαύμαστα αυτοδύναμη και άμεση. Τους συνδέει άμεσα με την αρχή της συνέχειας, και ορίζει ουσιαστικά τη συνέχεια των πραγματικών αριθμών μέσω αυτών των ίδιων. Ο Dedekind δημιούργησε τους πραγματικούς αριθμούς μέσω «τομών» στο σύνολο των ρητών αριθμών. Μία «τομή» είναι μία διαίρεση του συνόλου των ρητών αριθμών σε δύο κλάσεις Α και Β, τέτοιες ώστε κάθε αριθμός της Α να είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της κλάσης Β. (Αυτό μπορεί να γίνει, αφού οι ρητοί μπορούν ολικά να διαταχθούν: για κάθε δύο ρητούς a και b είναι είτε $a \leq b$ είτε $a \geq b$ και οι ρητοί είναι πυκνοί: μεταξύ οποιωνδήποτε δύο ρητών υπάρχει ένας τρίτος). Στην πραγματικότητα, κάθε ρητός αριθμός παράγει ακριβώς μια τέτοια «τομή»: για κάθε ρητό αριθμό n, κάθε άλλος ρητός είναι είτε μεγαλύτερος είτε μικρότερος από το n, έτσι, τοποθετώντας αυθαίρετα το n στη μικρότερη κλάση, μπορούμε να σχηματίσουμε τις

Α={x ρητός/$x \leq n$} και Β={ x ρητός/$x > n$} : όπου κάθε στοιχείο του Α θα είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του Β. Τότε λέμε ότι ο αριθμός n παράγει αυτή τη τομή. Τα ίδια αποτελέσματα θα είχαμε αν τοποθετούσαμε τον αριθμό n στην κλάση Β (απλώς τότε την τομή θα τη δημιουργούσε το ελάχιστο στοιχείο του Β και όχι το μέγιστο στοιχείο του Α). Όμως, επειδή υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ρητών, και καθώς πρέπει κάθε ρητός να ανήκει είτε στο Α είτε στο Β, δεν είναι δυνατόν να έχει συγχρόνως το Α μέγιστο στοιχείο και το Β ελάχιστο στην ίδια τομή. Ωστόσο, είναι δυνατόν ούτε το Α να έχει μέγιστο, ούτε το Β να έχει ελάχιστο στοιχείο και έτσι μία «τομή» στους ρητούς να μην παράγεται από κανένα ρητό αριθμό. Ο Dedekind, απέδειξε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος τομές αυτού του είδους, δηλαδή άπειρες το πλήθος διαιρέσεις των ρητών σε τομές (P,Q) όπου κάθε στοιχείο του P είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του Q και ακόμη το P δεν έχει μέγιστο στοιχείο και το Q δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Τότε λέμε ότι δημιουργείται ένας άρρητος αριθμός α που ορίζεται πλήρως από αυτή την τομή, δηλαδή ότι ο αριθμός α παράγει αυτή την τομή ή αντιστοιχεί σε αυτή. Για παράδειγμα, ο άρρητος $\sqrt{2}$ ορίζεται από την τομή Α={x ρητός / $x \leq 0$}U{x ρητός / $x > 0$ και $x^2 < 2$} και Β={ x ρητός / $x > 0$ και $x^2 > 2$}. Με αυτόν τον τρόπο καθορίζονται οι άρρητοι. Ουσιαστικά, όποτε παρουσιάζεται ένα κενό στους ρητούς το «γεμίζουμε» με έναν άρρητο, που είναι πλήρως καθορισμένος από μία τομή (Buckley, 2008).

Ο Dedekind υποστήριξε ότι αυτοί οι αριθμοί – οι άρρητοι όπως τους όρισε – έχουν κάποιες ιδιότητες που θέλουμε να έχουν και ότι μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς με αυτούς όπως ακριβώς χρειαζόμαστε. Απέδειξε ότι μπορούμε να κάνουμε με αυτούς τους αριθμούς τις στοιχειώδεις πράξεις της αριθμητικής (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, δυνάμεις, ρίζες και λογαρίθμους) και τελικά να έχουμε και τις αποδείξεις των θεωρημάτων. Υποστήριξε, επίσης, ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών - των ρητών, δηλαδή, μαζί με τους άρρητους που δημιουργούνται χρησιμοποιώντας τις τομές – σχηματίζουν ένα συνεχές σύνολο. Μάλιστα, παρουσίασε τον ορισμό του συνεχούς νωρίς στην πραγματεία του, λέγοντας ότι η ευθεία γραμμή είναι απείρως πιο πλούσια σε σημεία – ξεχωριστά, ατομικά- από το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή, υπάρχουν κενά στην ευθεία των ρητών αριθμών αν την συγκρίνει κάποιος με την γεωμετρική ευθεία γραμμή (Dedekind, 1963, Buckley, 2008). Έτσι, οι ρητοί αριθμοί δεν επιτρέπουν την πλήρη αριθμητική ανάλυση της ευθείας, αλλά χρειαζόμαστε ένα σύστημα αριθμών τόσο πλήρες και τόσο συνεχές τουλάχιστον όσο η ευθεία γραμμή. Μάλιστα, ο Dedekind βρίσκει την ουσία του συνεχούς στην ευθεία γραμμή, αφού αν κόψεις τη γεωμετρική ευθεία γραμμή, πρέπει απαραίτητα να την κόψεις σε ένα μόνο σημείο, καθώς είναι αδύνατο να την κόψεις ανάμεσα σε δύο σημεία ή δύο σημεία να ορίζουν την ίδια διαίρεση της ευθείας. Αυτή η άπειρη διαιρεσιμότητα είναι αυτό που διακρίνει τα συνεχή από τα μη συνεχή πράγματα, ή τουλάχιστον τα συνεχή από τα μη συνεχή γεωμετρικά αντικείμενα. Το συνεχές των πραγματικών αριθμών ισχύει στην ακόλουθη συνθήκη: αν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί ανήκουν σε δύο κλάσεις ώστε κάθε αριθμός της πρώτης κλάσης είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της δεύτερης κλάσης, τότε υπάρχει ένας και μόνο ένας αριθμός που παράγει αυτή τη διαίρεση σε δύο κλάσεις, αυτή τη διάσπαση των πραγματικών αριθμών σε δύο τμήματα. Αν επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε τομή παράγεται από έναν μόνο αριθμό, αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι συνεχές. Ο Dedekind το απέδειξε και επομένως οι τομές Dedekind αντιστοιχούν στην ουσία του συνεχούς. Προκύπτει, όμως, ένα φιλοσοφικό ερώτημα: εάν αυτός ο ορισμός των πραγματικών αριθμών συμφωνεί με τη διαίσθησή μας για το συνεχές. Ο Jules Henri Poincare πίστευε ότι η μαθηματική συνέχεια ήταν πολύ διαφορετική από τη «συνήθη αντίληψή» μας για τη συνέχεια. Πίστευε ότι με τον τρόπο που συνήθως αντιλαμβανόμαστε το συνεχές, τα στοιχεία του έχουν ένα είδος στενού δεσμού που τα κάνει όλα ένα όλο και τα σημεία δεν είναι πρότερα της ευθείας αλλά η ευθεία είναι πρότερη των σημείων. Για τον Dedekind, δεν υπήρχε στην έννοια του συνεχούς ένα τέτοιο είδος δεσμού. Απλά χαρακτηρίζει το συνεχές με όρους πληρότητας: υπάρχουν αρκετοί πραγματικοί αριθμοί ώστε οπουδήποτε επιθυμείς να τους χωρίσεις, θα τους χωρίσεις σε έναν αριθμό, δεν υπάρχουν κενά. Όμως αυτοί οι αριθμοί δεν έχουν κανενός είδους «δεσμό» μεταξύ τους, απλά υπάρχουν σε αυτή τη συλλογή, σε αυτή τη διάταξη, σε αυτή την πληρότητα, και αυτό είναι αρκετό για τον Dedekind να ονομάσει αυτό το σύνολο συνεχές. Η φιλοσοφική ερώτηση που απασχόλησε κάποιους διανοητές ήταν η ακόλουθη: αν, οι πραγματικοί αριθμοί είναι διακριτές οντότητες που συλλέγονται μαζί, με ποια έννοια ονομάζεται κάτι τέτοιο συνεχές;

Το έργο του Dedekind για τη φύση των αριθμών *Was sind und was sollen die Zahlen* (Η φύση και το νόημα των αριθμών) γράφτηκε είκοσι χρόνια μετά το *Stetigkeit und irrational Zahlen* (Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί) και μάλλον ως επεξεργασία των επιχειρημάτων του τελευταίου. Ο ορισμός της φύσης των αριθμών βασίζεται σε έναν ισχυρισμό, ότι εάν ένα σύνολο είναι διατεταγμένο με έναν συγκεκριμένο τρόπο, αν μπορούμε απλά να αγνοήσουμε όλα τα μοναδικά χαρακτηριστικά των συγκεκριμένων στοιχείων του, η γενική εικόνα που θα προκύψει θα είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, το οποίο έχει ελάχιστο στοιχείο. Ο Dedekind δεν εστιάζει σε κάποια μυστηριώδη ιδιότητα που έχει κάθε ξεχωριστός φυσικός αριθμός, αλλά αυτό που δίνει σε έναν φυσικό αριθμό τον χαρακτήρα του, είναι η ικανότητά του να είναι διακριτός από τους άλλους αριθμούς και η σχέση διάταξης που έχει μαζί τους. Η έννοια του «στοιχείου» είναι επίσης κατά το δυνατόν ελεύθερη περιεχομένου. Τα στοιχεία στα σύνολα του Dedekind είναι «οποιοδήποτε αντικείμενο της σκέψης μας» (Dedekind, 1963, p.44), και έτσι οργανωμένα κερδίζουν την αριθμητικότητά τους. Οτιδήποτε νοητικό, οτιδήποτε μπορούμε να σκεφτούμε είναι ένα πιθανό στοιχείο ενός συνόλου, εφόσον μπορεί να οργανωθεί σε ένα απλό σύστημα - με το να είναι διακριτό από τα άλλα στοιχεία και να έχει με αυτά μια δεδομένη σχέση διάταξης.

Η έννοια του «απλά άπειρου συστήματος» έχει να κάνει με τον «μετασχηματισμό» του Dedekind και την «αλυσίδα» του. Ένας *μετασχηματισμός* είναι ένας νόμος που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο ενός συστήματος σε ένα καθορισμένο πράγμα, το οποίο μπορεί ή δεν μπορεί να είναι το ίδιο στοιχείο στο ίδιο σύστημα (Dedekind, 1963, p. 50). Μία *αλυσίδα* είναι ένα σύστημα Κ τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα μετασχηματισμένο Κ΄ του Κ που είναι ένα μέρος του ίδιου του Κ. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τον μετασχηματισμό 2n, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο n στο σύστημα των φυσικών αριθμών σε ένα «καθορισμένο πράγμα», εδώ το 2n – ο αντίστοιχος άρτιος. Το αποτέλεσμα της συλλογής όλων αυτών των καθορισμένων πραγμάτων είναι το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών, που είναι μέρος του συνόλου των φυσικών αριθμών. Στη σύγχρονη συνολοθεωρία, μια αλυσίδα είναι ένα οποιοδήποτε τέτοιο σύνολο ώστε να υπάρχει μία συνάρτηση που αντιστοιχίζει το σύνολο σε ένα υποσύνολό του. Ο Dedekind όρισε ένα άπειρο σύστημα ως ένα σύστημα το οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί όμοια σε ένα κατάλληλο μέρος του εαυτού του (Dedekind, 1963, p.63). (Όμοιος μετασχηματισμός είναι ένας αμφίδρομος μετασχηματισμός, μία 1-1 και επί αντιστοίχιση). Το να μπορούν να αντιστοιχιστούν οι φυσικοί αριθμοί σε ένα υποσύνολό τους για αιώνες ήταν παράδοξο. Ο Bernard Bolzano (1741-1848) παρατήρησε ότι ενώ υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί αριθμοί μεταξύ του 0 και του 5, και άπειροι το πλήθος μεταξύ του 0 και του 12, τα δύο σύνολα μπορούν να τεθούν σε μία 1-1 αντιστοιχία, αν και το τελευταίο σύνολο φαίνεται να είναι μεγαλύτερο από το πρώτο. Ο Bolzano έλυσε το παράδοξο λέγοντας ότι η 1-1 αντιστοιχία καθιστά ισοπολλαπλότητα μόνο για πεπερασμένα σύνολα (Buckley, 2008).

Έχοντας ορίσει τις αλυσίδες και τους μετασχηματισμούς, ο Dedekind ορίζει τα άπειρα συστήματα: *άπειρο σύστημα* είναι ένα σύστημα το οποίο έχει έναν μετασχηματισμό που αντιστοιχίζει το σύστημα σε μία αλυσίδα η οποία περιέχει η ίδια ολόκληρο το σύστημα εκτός από ένα στοιχείο του. Το στοιχείο αυτό που λείπει από την αλυσίδα είναι το πρώτο στοιχείο που εφαρμόστηκε ο μετασχηματισμός, το «στοιχείο βάση» της αλυσίδας. Για παράδειγμα, η διαδοχή είναι ένας όμοιος μετασχηματισμός που οδηγεί σε ένα απλά άπειρο σύστημα, και μάλιστα πολλά άλλα απλά άπειρα συστήματα είναι δυνατά με πολλούς διαφορετικούς μετασχηματισμούς-διαδοχές (Dedekind, 1963, p.67). Τα στοιχεία (που είναι οποιαδήποτε νοητά αντικείμενα, πλήρως καθορισμένα από οτιδήποτε μπορεί να επιβεβαιωθεί ή να σκεφτούμε σχετικά με αυτά) μπορούν να συγκεντρωθούν σε συστήματα. Δεν λαμβάνουμε υπόψη οποιαδήποτε άσχετα χαρακτηριστικά αυτών των νοητών αντικειμένων (όπως το χρώμα ή το μέγεθος για παράδειγμα) αλλά μόνο τη διακριτότητά τους και τις σχέσεις μεταξύ τους. Αυτά τα στοιχεία, σε αυτά τα συστήματα, είναι οι φυσικοί αριθμοί. Ο Dedekind αναφέρεται στην πράξη της απογύμνωσης των άσχετων ιδιοτήτων από τα στοιχεία ως «απελευθέρωση» των στοιχείων από κάθε άλλο περιεχόμενο (αφαίρεση). Πρόκειται για μία αντίληψη δομής και η στάση του εδώ χαρακτηρίζεται ως στρουκτουραλιστική. Τα απλά άπειρα συστήματα είναι «όμοια» το ένα με το άλλο (ισομορφικά) και οργανωμένα με τον ίδιο τρόπο. Οι σχέσεις μεταξύ αυτών των στοιχείων είναι πάντα οι ίδιες σε όλα τα διατεταγμένα άπειρα συστήματα, όπως και να ονομάσουμε τα διακριτά αυτά στοιχεία (Dedekind, 1963, p.68). Μετά την «αφαίρεση» οποιωνδήποτε ονομάτων έχουν τα στοιχεία μπορούμε να τα ονομάσουμε όπως εμείς θέλουμε – ας πούμε το βασικό στοιχείο 1. Με αυτόν τον τρόπο, τα αρχικά πολλά ισομορφικά συστήματα «καταρρέουν» σε ένα, το οποίο μπορούμε να ονομάσουμε το σύστημα των αριθμών. Το σημαντικό χαρακτηριστικό του μετασχηματισμού είναι ότι δίνει στο άπειρο σύστημα κάποια διάταξη, και έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αφαιρούμε από τον μετασχηματισμό όλες τις ιδιαιτερότητες εκτός του ότι θέτει τα στοιχεία του συστήματος σε μία διάταξη. Ο Dedekind δίνει ένα παράδειγμα ενός συστήματος οργανωμένο με αυτόν τον τρόπο πριν την αφαίρεση των ιδιαιτεροτήτων τους, και μάλιστα ως απόδειξη της ύπαρξης των άπειρων συστημάτων: (Dedekind, 1963, p.64) θεωρεί S το σύνολο όλων των πραγμάτων που είναι αντικείμενα της σκέψης του και τον μετασχηματισμό φ: «x είναι ένα αντικείμενο της σκέψης μου». Αν s είναι ένα στοιχείο του S (δηλαδή μία σκέψη του), τότε η σκέψη s΄ : «το s είναι αντικείμενο της σκέψης μου», είναι η ίδια ένα στοιχείο του S. Όμοια παράγεται η σκέψη s΄΄ : «το s΄ είναι ένα αντικείμενο της σκέψης μου» και ούτω καθεξής, δημιουργώντας μια απλά άπειρη αλυσίδα, η βάση της οποίας είναι η s, άρα το σύστημα S είναι άπειρο. Αφαιρώντας τώρα τις λεπτομέρειες, με τον συγκεκριμένο άνθρωπο και τις σκέψεις του, αποκτούμε ένα σύστημα οργανωτικά ισόμορφο με οποιοδήποτε άλλο σύστημα θα μπορούσαμε να οργανώσουμε με αυτόν τον τρόπο, και έτσι, σύμφωνα με τον Dedekind, τα γενικά χαρακτηριστικά που τέτοια συστήματα έχουν κοινά είναι οι φυσικοί αριθμοί. Μετά την παραγωγή των φυσικών αριθμών όλα τα άλλα έπονται λογικά, δηλαδή η αριθμητική, η άλγεβρα, ακόμα και η ανάλυση προκύπτει άμεσα «από τους νόμους της σκέψης» (Dedekind, 1963, p.31). Δηλαδή, μετά την αρίθμηση που προκύπτει από τη θεωρία της αλυσίδας, προχωράμε στις αριθμητικές πράξεις, και επομένως με την αντιστροφή του πολλαπλασιασμού στην επέκταση του συστήματος στους ρητούς αριθμούς. Αν θεωρήσουμε τους εκθέτες (π.χ. n^2) ως συνδυασμό των πράξεων του πολλαπλασιασμού και την αντίστροφη πράξη της εκθετικότητας (π.χ. $\sqrt{n}$) θα προέκυπταν κάποιοι από τους άρρητους αριθμούς, αλλά όχι όλοι (π.χ. όχι ο π). Στην ουσία, οι άρρητοι είναι «γεμίσματα» κενών, έτσι, όπως είδαμε, ο Dedekind τους όρισε με τη βοήθεια των τομών.

Κάθε αριθμός είναι ένα διακριτό – ξεχωριστό στοιχείο. Η αρχή της συνέχειας του Dedekind δεν θέτει ουσιαστικές συνδέσεις μεταξύ των στοιχείων, καθορίζει μόνο ότι σε μια συνεχή οντότητα μπορούμε να κάνουμε τομές μεταξύ των στοιχείων. Οι πραγματικοί αριθμοί του Dedekind είναι συνεχείς, γιατί το σύνολό τους είναι αρκετά «γεμάτο», είναι έτσι ώστε δεν μπορούν να βρεθούν κενά, αλλά είναι μια συλλογή διακριτών στοιχείων. Το 1917 ο Edward V. Huntington (1874-1952) ισχυρίζεται ότι οι πραγματικοί αριθμοί του Dedekind σχηματίζουν μια μη διακριτή σειρά (Huntington, 1917). Ο Huntington ονομάζει μια διακριτή σειρά εκείνη η οποία είναι (i) διαιρετή σε δύο μέρη K_1 και K_2, τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του K_1 προηγείται κάθε στοιχείου του K_2, και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x τέτοιο ώστε οποιοδήποτε στοιχείο που προηγείται του x ανήκει στο K_1 και κάθε στοιχείο που ακολουθεί το x ανήκει στο K_2, και (ii) κάθε στοιχείο της σειράς εκτός από το τελευταίο έχει έναν άμεσο διάδοχο και κάθε στοιχείο της σειράς εκτός από το πρώτο έχει έναν άμεσο προηγούμενο. Έτσι, οι ακέραιοι είναι ένα καλό παράδειγμα μιας διακριτής σειράς, αλλά οι πραγματικοί που δεν ικανοποιούν τη δεύτερη συνθήκη δεν είναι. Ιδιαίτερα, το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό μιας διακριτής σειράς για τον Huntington είναι ότι μπορεί κανείς να κάνει επαγωγή στη σειρά. Ωστόσο, ο ίδιος ο Huntington δεν αναφέρεται ποτέ στα στοιχεία μιας οποιαδήποτε σειράς ως διακριτά ή μη διακριτά, μόνο στις ίδιες τις σειρές ως διακριτές ή μη. Έτσι, ενώ δηλώνει με κάποια σαφήνεια ότι οι πραγματικοί αριθμοί σχηματίζουν μια συνεχή σειρά και άρα όχι μια διακριτή σειρά, πουθενά δεν δηλώνει ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι διακριτά στοιχεία. Ο John L. Bell υποστηρίζει ότι όλοι οι αριθμοί είναι διακριτοί και επίσης ότι η διακριτότητα θεωρείται ως αντίθετη της συνέχειας. Η δυσκολία με τους διακριτούς αριθμούς που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της συνέχειας της ευθείας, λέει ο Bell, προκύπτει τόσο νωρίς όσο ο Πυθαγόρας και η ανακάλυψή του των ασύμμετρων αριθμών «εδώ η επικράτεια των συνεχών γεωμετρικών μεγεθών αντιστέκεται στην προσπάθεια του Πυθαγόρα να το αναγάγει στη διακριτή μορφή του αριθμού» (Bell, p.2). Ο Bell διαχωρίζει τους μαθηματικούς στα τέλη του 19^{ου} αι. σε δύο κατηγορίες: σε αυτούς που πιστεύουν ότι το συνεχές δεν μπορεί να αναχθεί σε διακριτές οντότητες, όπως οι Paul du Bois-Reymond (1831-1889), Giuseppe Veronese (1854-1917), Hermann Weyl (1885-1955), L.E.J.Brouwer (1881-1966) και ο Charles Sanders Peirce[2] (1839-1914), και αυτούς που όχι μόνο πίστευαν στην αναγωγιμότητα του συνεχούς στο διακριτό, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις, πίστευαν ότι είχαν κατορθώσει ακριβώς μια τέτοια αναγωγή (Buckley, 2008).

Ο Dedekind επιθυμούσε να περιγράψει το συνεχές των πραγματικών αριθμών ώστε να ελευθερώσει τον λογισμό από αναγκαίες γεωμετρικές αναφορές. Σε αυτό είχε πετύχει, είχε ορίσει μια έννοια της συνέχειας η οποία είναι εντελώς αριθμητική: μια συνάρτηση μπορεί να φτάσει ένα όριο με συνέχεια, αριθμητικά και με συνέπεια. Καμία εφαπτομένη ή καμπύλη δεν ήταν απαραίτητη για αυτή την ανάλυση. Όμως, θα έπρεπε να μπορεί να εφαρμόσει τον λογισμό σε περιοχές έξω από την άλγεβρα και τη θεωρία αριθμών. Θα έπρεπε να μπορεί να εφαρμόσει αυτόν τον αριθμητικό λογισμό στον χώρο και στον χρόνο. Θεωρούσε την έννοια «αριθμός» εντελώς ανεξάρτητη των αντιλήψεων ή διαισθήσεων του χώρου και του χρόνου, αλλά άμεσο αποτέλεσμα των νόμων της σκέψης (Dedekind, 1963, p.31). Πίστευε ότι στην πραγματικότητα ο χώρος είναι συνεχής, και ότι η γεωμετρία μας δίνει ένα παράδειγμα αυτής της συνέχειας. Οι τομές σε κάθε περίπτωση μας διαβεβαιώνουν ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν έχουν κενά.

Ήταν σημαντικό ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών του Dedekind δημιουργεί έναν λογισμό που δεν χρειάζεται να βασιστεί στα απειροστά. Ο ίδιος δεν αναφέρεται απευθείας στα απειροστά. Ένα από τα χαρακτηριστικά των απειροστών είναι ότι προσθέτοντας ένα απειροστό σε μια πεπερασμένη ποσότητα έχουμε ως αποτέλεσμα την ίδια ποσότητα. Επομένως, όπως δείχνει ο Cantor, τα απειροστά παραβιάζουν την αρχή του Αρχιμήδη. Η αρχή του Αρχιμήδη δηλώνει ότι: αν α και β δύο θετικοί αριθμοί με α<β, τότε υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός n ώστε nα>β (Waismann, 2003).

[2]Για τις δυσκολίες του C. Pierce σχετικά με το συνεχές βλ. Anapolitanos και Christopoulou (2019)

Αν τα απειροστά θεωρηθούν αριθμοί, πρέπει να είναι μη-Αρχιμήδειοι αριθμοί, αφού αν θεωρήσουμε ένα απειροστό ως α, με α<β, τότε κανένας φυσικός αριθμός – οσοδήποτε μεγάλος - δεν μπορεί πολλαπλασιαζόμενος με τον α να δώσει αποτέλεσμα που ξεπερνά τον β. Επομένως τα απειροστά αποκλείονται σε οποιοδήποτε Αρχιμήδειο σύστημα, αλλά από το άλλο μέρος η έννοια του συνεχούς του Dedekind υποδηλώνει την αρχή του Αρχιμήδη. Μπορεί να αποδειχθεί ότι: Αν οποιαδήποτε τομή των πραγματικών καθορίζεται από έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό (η αρχή για το συνεχές του Dedekind), τότε για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς a και b, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε na≥b (Buckley, 2008). Έτσι, η ύπαρξη των απειροστών είναι ασυμβίβαστη με την έννοια του συνεχούς του Dedekind, καθώς η τελευταία υπονοεί την αρχή του Αρχιμήδη.

Επομένως, ένα συνεχές σύνολο για τον Dedekind δεν μπορεί να περιέχει κενά, και οι πραγματικοί αριθμοί, ορισμένοι ως τομές στους ρητούς, έχουν ακριβώς αυτή την αρχή της συνέχειας. Επίσης, το συνεχές του Dedekind, δεδομένης της θεωρίας του για τους αριθμούς, είναι συνθετικής φύσης και τα απειροστά δεν είναι συνεπή με την αρχή της έννοιας του συνεχούς του Dedekind, αν και ο ίδιος δεν αναφέρεται σε αυτά. Ο Cantor, στη συνέχεια, προσπάθησε να ξεπεράσει κάποια προβλήματα που είδε στη θεωρία του Dedekind. Είδε, όμοια, τους πραγματικούς αριθμούς να προκύπτουν από τους ρητούς αριθμούς και το σύνολό τους ως συνεχές, όμως προσπάθησε να ορίσει μαθηματικά μια ουσιαστική σύνδεση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ώστε η συνέχεια να μην είναι απλά μια συλλογή διακριτών στοιχείων.

Είναι αλήθεια ότι η κατασκευή του Dedekind των άρρητων αριθμών τον πίεσε να πάρει υπόψη του τα άπειρα σύνολα. Ήταν παρόμοια εργασία με τον Cantor που τον οδήγησε στην άποψη ότι τα άπειρα σύνολα είναι θεμιτά αντικείμενα της μαθηματικής μελέτης. Και σίγουρα, κάθε μαθηματική εκδοχή των πραγματικών αριθμών πρέπει να αναγνωρίσει τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο υπερβαίνουν το άπειρο των φυσικών αριθμών. Αυτό που φαινόταν ότι κάνει ο λογισμός, αφού κατάλληλα τελειοποιήθηκε, είναι ότι επέτρεψε στους μαθηματικούς να προχωρήσουν γρήγορα ακριβώς στην περιοχή όπου το «ενεργεία» άπειρο αναμένεται να είναι κρυμμένο, χωρίς να ανησυχούν για να το αντιμετωπίσουν. Μπορούν να υποστηρίζουν ισχυρισμούς για απειροστά ή για άπειρες προσθέσεις, και μπορούν ακόμα να χρησιμοποιούν το σύμβολο ∞, γνωρίζοντας ότι κάνουν μόνο γενικεύσεις γι’ αυτά που είναι στην πραγματικότητα πεπερασμένες ποσότητες. Δεν χρειάζεται ακόμα να αντιμετωπίσουν κατάματα το «ενεργεία» άπειρο. Δεν χρειαζόταν ίσως. Αλλά δεν συνεπάγεται ότι δεν μπορούν. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι δεν υπάρχει κάτι ασυμβίβαστο στην ιδέα να εκτελεστούν άπειρα το πλήθος έργα σε πεπερασμένο χρόνο (ακόμα και αν αυτό περιλαμβάνει να γράψει κανείς το πλήρες δεκαδικό ανάπτυγμα του π) και ότι η έννοια του ορίου βοηθάει στο να το ισχυριστούμε αυτό. Επίσης, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι είναι σωστό να θεωρήσουμε ότι η ευθεία αποτελείται από πραγματικά (ενεργεία) άπειρα σημεία, και ότι κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σημείο και αντίστροφα. Κυρίως ότι η αυτο-συνειδητή αντανάκλαση στις μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στον λογισμό μας αναγκάζει να αντιμετωπίσουμε το «ενεργεία» άπειρο κατάματα. Για παράδειγμα, ένα άπειρο άθροισμα είναι κατανοητό με όρους μιας συγκεκριμένης ακολουθίας από πεπερασμένα αθροίσματα – μιας άπειρης ακολουθίας. Το θέμα ήταν και είναι: η μελέτη αυτού που είναι πεπερασμένο είναι μερικές φορές δυνατή μόνο σε ένα άπειρο πλαίσιο (Moore,1990).

Περιγράφοντας το Συνεχές: Cantor

Ο Georg Ferdinard Ludwig Cantor γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη στη Ρωσία, το 1845. Πήγε στη Γερμανία στην ηλικία των 11 και σπούδασε μαθηματικά στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης και στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου παρακολουθώντας διαλέξεις από τον Karl Weierstrass (1815-1897) και τον Leopold Kronecker (1823-1891). Ανάμεσα στις πιο αμφιλεγόμενες πτυχές του έργου του και αυτές με τη μεγαλύτερη επιρροή ήταν η θεωρία συνόλων του και η θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών. Η θεωρία αριθμών του σε συνδυασμό με τη θεωρία του για τους πραγματικούς αριθμούς και τις έρευνές του στη μαθηματική συνέχεια και απειρία έπαιξαν μεγάλο ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας του για τους υπερπεπερασμένους αριθμούς.

Ο Cantor ανέπτυξε τη θεωρία του για τους πραγματικούς αριθμούς το 1872 στο άρθρο του "*Uber die Ausdehnumg eins Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reiben*" (Cantor, 1872). Ουσιαστικά ανέπτυξε τη θεωρία του των πραγματικών αριθμών ως ένα μαθηματικό εργαλείο για να αποδείξει το θεώρημα της μοναδικότητας της εκπροσώπησης της συνάρτησης από τριγωνομετρικές σειρές, πάνω στο οποίο δούλευε. Ο Joseph Fourier (1768-1830), ενώ μελετούσε την αγωγιμότητα της θερμότητας, απέδειξε ότι αυθαίρετα δοσμένες συναρτήσεις θα μπορούσαν να αναπτυχθούν σε τριγωνομετρικές σειρές με καθορισμένου είδους συντελεστές (Dauben, 1990, p. 6) – οι λεγόμενες «σειρές Fourier» που είναι ισχυρό μαθηματικό εργαλείο σε μια ποικιλία εξισώσεων και αποδείξεων. Ο Cantor δούλευε στο πρόβλημα εάν μία τυχαία συνάρτηση θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από ένα ακριβώς τριγωνομετρικό ανάπτυγμα. Προσπαθούσε το θεώρημα μοναδικότητας που είχε αποδείξει για πεπερασμένο πλήθος τιμών του x, να το επεκτείνει για άπειρο πλήθος τιμών του x στο διάστημα [0,2π]. Το εργαλείο που χρειαζόταν για να κάνει αυτό το άλμα από το πεπερασμένο στο (οριοθετημένο) άπειρο, ήταν μια ακριβής μαθηματική θεωρία των πραγματικών αριθμών. Οι ρητοί του Cantor περιλάμβαναν το 0, και ονόμαζε το σύνολό τους A. Η κατασκευή των άρρητων αριθμών ξεκινά με μια άπειρη σειρά ρητών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$. Η σειρά κατασκευάστηκε ώστε η διαφορά $(\alpha_{n+m} - \alpha_n)$ να γίνεται «άπειρα μικρότερη καθώς το n αυξάνει» (Cantor, 1872, p.337). Εδώ, το n είναι τυχαίος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $(\alpha_{n+m} - \alpha_n) < \varepsilon$, όπου ε είναι ένας θετικός ρητός και ο m ένας τυχαίος ακέραιος. Στα ακόλουθα, ο Cantor ονομάζει αυτό το είδος των σειρών «θεμελιώδη ακολουθία», η οποία ορίζεται από τον Dauben : Η άπειρη ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ονομάζεται «θεμελιώδης ακολουθία» αν υπάρχει ένας ακέραιος Ν τέτοιος ώστε για κάθε θετικό ρητό ε, $|\alpha_{n+m} - \alpha_n| < \varepsilon$, για κάθε m και για κάθε $n > N$ (Dauben, 1990, p.38). Αυτές οι ακολουθίες συνήθως αναφέρονται με το όνομα που τους έδωσε ο Bolzano «ακολουθίες Cauchy», αν και ο Cantor δεν το έκανε. Οι ακολουθίες αυτές είχαν χρησιμοποιηθεί για να ορίσουν σύνολα που είχαν όρια, χωρίς να προϋποθέτουν την ύπαρξη του ίδιου του ορίου. Αυτός είναι και ο λόγος που επέλεξε να τις χρησιμοποιήσει ο Cantor. Αφού όρισε αυτές τις θεμελιώδεις ακολουθίες, ο Cantor, συνέδεσε κάθε ακολουθία με «ένα καθορισμένο όριο» b (Cantor, 1872, p.338) και είναι αυτά τα όρια που θα καθιερωθούν τελικά ως άρρητοι αριθμοί. Η φράση «προσδιορισμένο όριο» είναι μόνο μια «σύμβαση» για να εκφράσει τη σύνδεση της ακολουθίας με αυτό το σύμβολο b, χωρίς να σημαίνει ότι η ακολουθία $\{\alpha_n\}$ έχει πραγματικά το όριο b, ή ότι προϋποτίθεται η ύπαρξη του ορίου b (Dauben, 1990, p.38). Ο Cantor μετά αποδεικνύει ότι αυτά τα b είναι γραμμικώς διατεταγμένα, αφού οι ακολουθίες είναι γραμμικώς διατεταγμένες (από τη σχέση ισοδυναμίας) (Buckley, 2008, p.66).

Στη συνέχεια, ο Cantor απέδειξε ότι τα στοιχεία του συνόλου B (το σύνολο όλων αυτών των b) μπορούν να ικανοποιούν τις στοιχειώδεις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, και υποστήριξε ότι μπορούμε να πάρουμε θεμελιώδεις ακολουθίες των στοιχείων του B και να τις χρησιμοποιήσουμε για να αναπτύξουμε ένα σύνολο C με τον ίδιο τρόπο, και κατόπιν ένα σύνολο D, και ούτω καθεξής. Ισχυρίζεται, όμως, ότι παρόλο που αυτή η διαδικασία θα μπορούσε να επαναλαμβάνεται επ' άπειρον, μεταβολή στο μέγεθος των συνόλων έχουμε μόνο από την κίνηση από το A στο B (Το B είναι σε μια 1-1 αντιστοιχία με όλα αυτά τα σύνολα εκτός από το A). Ο Cantor αναφερόταν σε αυτά τα στοιχεία ως αριθμητικά μεγέθη και όχι ως σύμβολα αλλά δεν αφηνόταν να τα θεωρεί αντικειμενικά ως αριθμούς. Έπρεπε να αποδείξει ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μέτρηση μεγεθών. Συνδέει τους πραγματικούς αριθμούς με τα σημεία σε μια γεωμετρική ευθεία με ένα αξίωμα- όχι θεώρημα, ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι σε μία 1-1 αντιστοιχία με τα σημεία μιας γεωμετρικής ευθείας- ένα αξίωμα που αναφέρεται σήμερα ως το αξίωμα Cantor-Dedekind. Ο Cantor θεωρεί αυτή την αναπόδεικτη σύνδεση ως την ουσία του συνεχούς των πραγματικών αριθμών. Είναι γενικά γνωστό, ότι ο Cantor απέδειξε ότι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να τεθούν σε μία 1-1 αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς, και είναι επομένως *αριθμήσιμοι* ή *απαριθμητοί*. Η «ισχύς» (πληθικότητα) των φυσικών είναι η ίδια με αυτή των ρητών αριθμών, και ο Cantor ονομάζει την ισχύ των φυσικών αριθμών τη μικρότερη δυνατή ισχύ ενός άπειρου συνόλου (Cantor, 1878). Μετά, ο Cantor απέδειξε ότι αν και οι αλγεβρικοί άρρητοι αριθμοί είναι επίσης αριθμήσιμοι, οι άρρητοι στο σύνολό τους δεν είναι, και επιπλέον το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο. Αυτό είναι και μια μερική αιτιολόγηση του γιατί οι πραγματικοί αριθμοί σχηματίζουν ένα συνεχές σύνολο και οι ρητοί όχι. Βέβαια, όπως έδειξε ο Dedekind, οι πραγματικοί αριθμοί έχουν ένα είδος πληρότητας: οπουδήποτε θελήσει κάποιος να διαιρέσει το σύνολο, θα μπορέσει να το κάνει σε έναν αριθμό. Η υπεραριθμησιμότητα των πραγματικών αριθμών είναι ένας επιπλέον διαισθητικός λόγος ότι το σύνολό τους είναι συνεχές, δεν είναι όμως επαρκής λόγος (Buckley, 2008).

Ο Cantor, στη διατριβή του *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehr*, εγκατέλειψε τις τριγωνομετρικές σειρές και δούλευε απευθείας με τις συνέπειες της θεωρίας συνόλων και διάφορων θεωρημάτων που μπορούσαν να αποδειχθούν για το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εδώ, ανέλυε τη σχέση μεταξύ διαφορετικών συνεχών συνόλων και τη σχέση μεταξύ συνεχών και μη συνεχών συνόλων. Το κύριο θέμα στη διατριβή αυτή είναι η απόδειξη του θεωρήματος: Έστω $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι n μεταβλητά μεγέθη, ανεξάρτητα μεταξύ τους, τέτοια ώστε κάθε μεταβλητή να μπορεί να πάρει τιμή ≥ 0 και ≤ 1. Έστω t μια άλλη μεταβλητή με τα ίδια όρια ($0 \leq t \leq 1$). Μπορούμε να κάνουμε αυτό το μέγεθος t να αντιστοιχεί στο σύνολο των n μεγεθών $x_1,x_2,\ldots,x_n$ έτσι ώστε σε κάθε καθορισμένη τιμή του t να αντιστοιχεί ένα σύνολο καθορισμένων τιμών $x_1,x_2,\ldots,x_n$ και αντίστροφα σε κάθε σύστημα καθορισμένων τιμών $x_1,x_2,\ldots,x_n$ να ανήκει μια συγκεκριμένη τιμή του t (Cantor, 1878, p.315). Ο Cantor καταλήγει στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος - αν και όχι με έναν μη αμφισβητήσιμο τρόπο. Ο Kronecker ασκεί έντονη κριτική ενάντια στα επιχειρήματά του Cantor (Dauben, 1990)- χρησιμοποιώντας τρία θεωρήματα που επιθυμούσε να καθιερώσει στα συνεχή σύνολα: (1) Μπορούμε πλήρως και μοναδικά να συνδέσουμε ένα συνεχές σύνολο n διαστάσεων σε ένα συνεχές σύνολο μιας διάστασης. (2) Τα στοιχεία ενός n-διάστατου συνεχούς συνόλου μπορούν να καθοριστούν μοναδικά από μια συνεχή και πραγματική συντεταγμένη t. (3) Τα στοιχεία ενός n-διάστατου συνεχούς συνόλου μπορούν επίσης να καθοριστούν μοναδικά από m συνεχείς συντεταγμένες $t_1,t_2,\ldots,t_m$. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο Cantor, όπως και ο Dedekind, πρώτα ανέπτυξε τους πραγματικούς αριθμούς και μόνο μετά αξιωματικοποίησε τη σχέση τους με τη γεωμετρία (Buckley, 2008).

Το σημαντικό είναι λοιπόν, ότι ο Cantor εξακολουθούσε να πιστεύει ακράδαντα ότι η σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των σημείων μιας γεωμετρικής ευθείας πρέπει να υποτεθεί και όχι να αποδειχθεί. Επίσης, ενδιαφέρον έχει ο ισχυρισμός του ότι τα συνεχή σύνολα πρέπει να είναι μη αριθμήσιμα, πρέπει να έχουν ισχύ ανώτερης τάξης από εκείνη των φυσικών αριθμών (Cantor, 1878, p.313). Ο Cantor καθορίζει τη μη-αριθμησιμότητα ως μία αναγκαία (αν και όχι ικανή) συνθήκη για τον συνεχή χαρακτήρα ενός συνόλου, αμέσως μετά την απόδειξη ότι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν αυτή την ιδιότητα. Σημαντικές συνέπειες έχει και ο ισχυρισμός του Cantor, σε αυτή τη διατριβή, ότι ένα συνεχές οποιασδήποτε διάστασης μπορεί να θεωρηθεί μαθηματικά ως συνεχές μίας διάστασης, δηλαδή μιας ευθείας γραμμής. Αυτή η διατριβή του Cantor (1878) τελειώνει με μία πρώιμη εκδοχή της «Υπόθεσης του Συνεχούς»: αν ομαδοποιήσουμε τα άπειρα σύνολα με βάση την ισχύ τους, θα έχουμε δύο ομάδες. Πρώτον, τα σύνολα που έχουν την ισχύ του συνόλου των θετικών ακεραίων και δεύτερον, τα σύνολα που έχουν την ίδια ισχύ/πληθάριθμο με αυτόν των πραγματικών αριθμών μεταξύ του 0 και του 1. Αργότερα θα αποδείξει ότι υπάρχουν άπειρα το πλήθος ξεχωριστά μεγέθη απείρου, αλλά θα ήταν σταθερός στην πίστη ότι δεν υπάρχουν μεγέθη απείρου μεγαλύτερα από αυτό των φυσικών αριθμών και μικρότερα από αυτό των πραγματικών αριθμών, και η έρευνά του για την οριστική απόδειξη της «Υπόθεσης του Συνεχούς» ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) θα συνέχιζε για το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του. (Τον 20ο αι. αποδείχθηκε από τον Kurt Gödel και τον Paul Cohen, ότι η Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε η ίδια ούτε η άρνησή της, με χρήση των καθιερωμένων αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, είναι δηλαδή λογικά ανεξάρτητη από τα υπόλοιπα αξιώματα. Χαρακτηρίζεται ως «μη αποκρίσιμη/μη αποφασίσιμη».)

Το 1883, ο Cantor γράφει ένα από τα πιο φιλοσοφικά του έργα, το *Grundlagen*. Στην εισαγωγή του γράφει ότι προορίζεται για φιλοσόφους που έχουν παρακολουθήσει μέχρι και τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στα μαθηματικά, αλλά και για μαθηματικούς που είναι εξοικειωμένοι με τα πιο σημαντικά παλαιότερα φιλοσοφικά έργα μέχρι και τα πιο σύγχρονα (Cantor, p.70). Εδώ, ο Cantor κάνει μια διάκριση μεταξύ δύο διαφορετικών μαθηματικών εννοιών του απείρου. Η πρώτη είναι αυτή του δυνάμει απείρου που περιέχεται μέσα στην έννοια του μεταβλητού μεγέθους, «είτε αυξάνοντας πέρα από όλα τα όρια είτε ελαττώνοντας σε μια αυθαίρετη μικρότητα, πάντα ωστόσο παραμένοντας πεπερασμένο/περιορισμένο» (Cantor, p.70). Σε αυτό το είδος απείρου αναφέρεται ως το *μη-γνήσιο άπειρο*. Η δεύτερη είναι αυτή του *γνήσιου απείρου*, πάνω στην οποία στήριξε εξάλλου την υπερπεπερασμένη θεωρία του και τα μαθηματικά των τελευταίων του χρόνων. Αυτό το γνήσιο άπειρο, η υπόθεση ενός σημείου στο άπειρο (που είχε χρησιμοποιηθεί στην αναλυτική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής) ή η σύγκριση δύο πραγματικά άπειρων μεγεθών είναι αυτό το άπειρο που κυρίως απασχολούσε τον Cantor, το *ενεργεία* άπειρο. Αυτή, όμως, η έννοια του απείρου ήταν για πολλούς της εποχής του φιλοσοφικά απαράδεκτη. Επιθυμούσε να υπερασπιστεί, με το *Grundlagen*, αυτή την έννοια του απείρου, και να αντικρούσει το επιχείρημα πολλών, όπως ο Descartes,ο Spinoza,και ο Leibniz, δηλαδή ότι: οι άνθρωποι, ως πεπερασμένα όντα, δεν μπορούν ποτέ να κατανοήσουν το άπειρο, αφού η απειρία περιλαμβάνει το απόλυτο, και έτσι, μόνο ένας άπειρος νους μπορεί να το συλλάβει. Η απάντηση του Cantor ήταν ότι: «όλα τα πράγματα, είτε πεπερασμένα είτε άπειρα, είναι ορισμένα και, με την εξαίρεση του Θεού, μπορούν να καθοριστούν από τη διάνοια» (Cantor, 1883, p.76). Υποστήριζε, δηλαδή, ότι υπάρχουν επίπεδα μεγεθών μεταξύ του πεπερασμένου και του απόλυτου απείρου, όλα τα μεγέθη του Cantor ανήκουν σε αυτά τα ενδιάμεσα επίπεδα και άρα είναι κατανοητά. Για εκείνον, μόνο η απόλυτη φύση του απείρου του Θεού είναι ακατανόητη από τα ανθρώπινα όντα. Σύμφωνα με τον Cantor, όπως το άπειρο είναι κατανοητό από την ανθρώπινη διάνοια το ίδιο είναι και το συνεχές. Μία κατανόηση της συνέχειας δεν βασίζεται σε προηγούμενη διαίσθηση μιας συνεχούς οντότητας, όπως ο χώρος ή ο χρόνος. Μάλλον το αντίθετο ισχύει, η αντίληψη του χώρου ή του χρόνου απαιτεί μια προηγούμενη κατανόηση του ίδιου του συνεχούς, και η κατανόηση του συνεχούς απαιτεί «σοβαρές και ακριβείς μαθηματικές έρευνες» (Cantor, 1883, p.76).

Και αυτές οι μαθηματικές έρευνες οδήγησαν τον Cantor να ορίσει τα συνεχή σύνολα με δύο ξεχωριστά αναγκαίες και από κοινού ικανές συνθήκες: ένα συνεχές σύνολο πρέπει να είναι *συνεκτικό* και *τέλειο*. Ένα σύνολο P είναι *συνεκτικό* όταν μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών t και t΄ τουλάχιστον ένα πεπερασμένο σύνολο από στοιχεία $\{t_v\}$ μπορούν να βρεθούν ώστε η απόσταση μεταξύ του t_v και του t_{v-1} είναι μικρότερη από ε, έναν τυχαία επιλεγμένο θετικό αριθμό (Buckley, 2008). Από την συνεκτικότητα έπεται η πυκνότητα παντού. Ένα σύνολο P είναι *τέλειο* όταν ισούται με καθένα από τα επαγόμενα σύνολα: $P^{(\gamma)}$. O Cantor χρησιμοποίησε την έννοια του επαγόμενου συνόλου στο έργο του το 1872, όπου για ένα σύνολο P το πρώτο επαγόμενο σύνολο P΄ ορίζεται ως το σύνολο των σημείων συσσώρευσης. Εδώ το γ μπορεί να είναι ένας πεπερασμένος ή ένας μη πεπερασμένος αριθμός. Έτσι, το σύνολο όλων των P επαγόμενων συνόλων, $P^{(\gamma)}$, περιλαμβάνει σύνολα οποιουδήποτε μεγέθους. Αν το P είναι άπειρο και τέλειο, τότε το P είναι μη αριθμήσιμο (Dauben, 1990, p.111). Το σύνολο των πραγματικών αριθμών R όπως ορίστηκε από τον Cantor το 1872 είναι ένα τέλειο σύνολο, το σύνολο των επαγόμενων συνόλων του R είναι πανομοιότυπο με το R. Με αυτές τις δύο συνθήκες ο Cantor πίστευε ότι καθιέρωσε μια «αμιγώς αριθμητική έννοια ενός συνεχούς-σημείων» (Cantor, 1883,p.85) και όχι μια έννοια του συνεχούς βασισμένη στη διαίσθηση ή την εμπειρία, και ότι αυτή η έννοια θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στην κατανόησή μας για ένα μη-μαθηματικό συνεχές, όπως ο χώρος και ο χρόνος. Για τον χρόνο, για παράδειγμα, θα έπρεπε να καθοριστούν πρώτα τα βασικά του στοιχεία- ίσως χρονικές στιγμές- και μετά να καθοριστεί αν το σύνολό τους είναι συνεκτικό και τέλειο (Buckley, 2008).

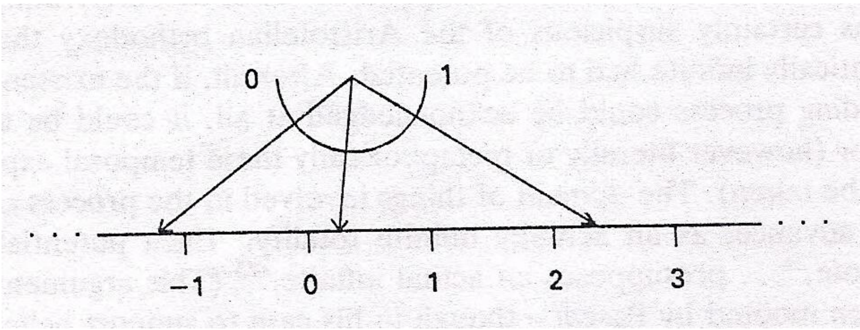
Είναι σημαντικό να πούμε ότι για τον Cantor το συνεχές αποτελείται από ξεχωριστά στοιχεία. Η θεωρία συνέχειας του Cantor έχει αρκετά κοινά στοιχεία με αυτή του Dedekind (το σύνολο των πραγματικών αριθμών του Dedekind μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι τέλειο), έχει όμως επιπλέον και την έννοια της συνεκτικότητας που έλλειπε από τη δεύτερη. Η επιπλέον ιδιότητα της συνεκτικότητας καθορίζει ένα είδος διασύνδεσης μεταξύ των στοιχείων των συνεχών συνόλων του Cantor, η συνέχειά του όμως, όπως και του Dedekind, είναι απαραίτητα συντεθειμένη από στοιχεία.

O Cantor ήταν ενάντια στην συμπερίληψη των απειροστών στα μαθηματικά συστήματα. Στο *Grundlagen*, το 1883 και σε ένα γράμμα στον Weierstrass το 1887, αποδεικνύει ότι τα απειροστά ήταν αντιφατικές οντότητες και επομένως δεν μπορούν να διατυπωθούν με συνέπεια. Ισχυρίστηκε ότι τα απειροστά που εμφανίστηκαν σε κάποια έργα ανάλυσης είναι παραδείγματα του μη γνήσιου απείρου. Δεν έγραψε ότι τα απειροστά δεν υπάρχουν, αλλά ότι αν θα μπορούσαμε να τα προσδιορίσουμε δεν θα είχαν καμία σχέση με τα πρωτότυπα μεγέθη, και άρα καμία σύνδεση με τα μεταβλητά μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση. Μια συνηθισμένη κριτική που δέχτηκαν τα απειροστά ήταν η μη χρησιμότητά τους. O Cantor, εδώ, έκανε έναν διαχωρισμό ανάμεσα στα θεωρητικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Για τα θεωρητικά μαθηματικά αυτό που είναι απαραίτητο, όταν μια καινούργια έννοια εισάγεται, είναι μόνο να είναι εσωτερικά χωρίς αντιφάσεις και να βρίσκεται σε καθορισμένες σχέσεις με προηγούμενα σχηματισμένες, ήδη υπάρχουσες και αποδεδειγμένες έννοιες. Ενώ, πίστευε ότι, οι μαθηματικοί που εργάζονται στα εφαρμοσμένα μαθηματικά θα πρέπει πράγματι να εξετάσουν τις οντολογικές επιπτώσεις της καινούργιας έννοιας. Το κριτήριο, δηλαδή, των θεωρητικών μαθηματικών δεν θα πρέπει να είναι η μη-χρησιμότητα, άλλωστε οι πιο δημιουργικές και σημαντικές μαθηματικές πρόοδοι επιτεύχθηκαν από εκείνους που δε νοιάστηκαν καθόλου για τη χρησιμότητα των δικών τους θεωριών. Πίστευε ότι πολλές μαθηματικές έννοιες δεν είχαν προφανή χρησιμότητα όταν εισήχθησαν, αλλά γρήγορα έγιναν απολύτως απαραίτητες στην επιστήμη, δηλαδή η μη-χρησιμότητα μπορούσε να καθοριστεί πέρα από τον χρόνο (Cantor, 1883, p.79).

Έτσι, προσπάθησε να αποδείξει ότι τα απειροστά ήταν εσωτερικά ασυνεπή για να τα αποκλείσει από τη μαθηματική πραγματικότητα. Σε ένα γράμμα στον Weierstrass, σχεδιάζει ένα επιχείρημα όπου δείχνει ότι τα απειροστά ουσιαστικά δεν υπάρχουν, δηλαδή αντιφάσκουν με την έννοια ενός αριθμητικού μεγέθους (Moore, 2002, p.306). Η γενική ιδέα είναι ότι τα απειροστά ή τα γραμμικά αριθμητικά μεγέθη που διαφέρουν από το 0, αλλά είναι μικρότερα από οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμητικό μέγεθος, δεν μπορούν να γίνουν πεπερασμένα από πολλαπλασιασμό με οποιονδήποτε πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό, δηλαδή δεν μπορούν να είναι στοιχεία πεπερασμένων μεγεθών. Αυτό έχει να κάνει με τη δεύτερη συνθήκη που έθεσε ο Cantor για την εισαγωγή νέων μαθηματικών αντικειμένων μέσα στο σύστημα- τον καθορισμό της σχέσης τους με ήδη υπάρχοντα αντικείμενα. Ωστόσο, ακόμα και αν η απόδειξή του ήταν πλήρης, θα είχε αποδείξει απλά ότι δεν μπορούν να είναι ένα ολοκληρωμένο μέρος ενός συστήματος μεγεθών, και όχι ότι είναι εγγενώς ασυνεπή νοητά αντικείμενα. Άλλωστε, οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί, που ο Cantor εισήγαγε, ήταν όμοια απομονωμένοι από τους πεπερασμένους αριθμούς, αφού κανένας πεπερασμένος πολλαπλασιασμός ενός πεπερασμένου αριθμού δεν θα είχε ως αποτέλεσμα έναν υπερπεπερασμένο. Ο Cantor, όμως, πίστευε ότι τα απειροστά είναι αυτό-αντιφατικά επειδή δεν μπορούν καθόλου να θεωρηθούν ως μεγέθη με συνέπεια. Όπως είδαμε, η συμπερίληψη της Αρχιμήδειας Αρχής συγκρούεται με την συμπερίληψη των απειροστών: αν η Αρχιμήδεια Αρχή έπεται από την έννοια του γραμμικού μεγέθους, τότε ένα απειροστό γραμμικό μέγεθος είναι πράγματι μια αντίφαση. Βέβαια, συνεπή μη-Αρχιμήδεια συστήματα έχουν αναπτυχθεί και πριν και μετά από αυτή την επιστολή του Cantor στον Weierstrass. Ο Veronese πρότεινε τις μη-Αρχιμήδειες Γεωμετρίες το 1890 και ο David Hilbert (1862-1943) απέδειξε τη συνέπεια μιας μη-Αρχιμήδειας γεωμετρίας και του αντίστοιχου αριθμητικού συστήματος στο δικό του έργο: *Grundlagen der Geometrie* το 1899. Στον 20^{o} αι. ο Abraham Robinson δημιούργησε έναν μη-Αρχιμήδειο λογισμό, την non-standard Ανάλυση, όπως είδαμε, ενσωματώνοντας και τα απειροστά και τα υπερπεπερασμένα μεγέθη στο ίδιο σύστημα με τις πεπερασμένες ποσότητες (Buckley, 2008).

Τα κύρια στοιχεία της θεωρίας του Cantor για τα άπειρα μεγέθη

Ένα από τα ουσιώδη ζητήματα της θεωρίας του Cantor ήταν ότι παρέμεινε στα κριτήρια «συσχέτισης» για συγκρίσεις μεγεθών. Θα λέμε ότι δύο σύνολα έχουν το ίδιο μέγεθος αν τα στοιχεία τους μπορούν να τεθούν σε μία 1-1 (και επί) αντιστοιχία. Επίσης, θα λέμε ότι ένα σύνολο A είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο σύνολο B αν τα στοιχεία του B μπορούν να τεθούν σε μία 1-1 αντιστοιχία με κάποια από τα στοιχεία του A, αλλά όχι με όλα. Έτσι, έχουμε το παράδοξο: το σύνολο των φυσικών αριθμών, το σύνολο των περιττών, το σύνολο των ρητών να είναι όλα του ίδιου μεγέθους άπειρα - αριθμήσιμα. Και υπάρχουν κι άλλα «παράδοξα» συμπεράσματα όπως ο Cantor έδειξε. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του 0 και του 1, και τους σκεφτούμε σαν τα σημεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο «λυγίζουμε» σε ένα ημικύκλιο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τόσοι, όσοι είναι και όλοι μαζί, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα αφού υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία.



Ο Cantor απέδειξε, ακόμη, ότι υπάρχουν τόσα σημεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, οσοδήποτε μικρό, όσα σε ένα τετράγωνο, οσοδήποτε μεγάλο, ή σε ένα τρισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα ή και σε ολόκληρο τον χώρο. Ο ίδιος προβληματίστηκε πολύ γι’ αυτό το αποτέλεσμα, έχοντας ξοδέψει τρία χρόνια προσπαθώντας να αποδείξει το αντίθετο, γράφει σε μια επιστολή στον Dedekind: «Το βλέπω, αλλά δεν το πιστεύω» (Dauben, 1979, p.55).

Άλλη μια απόδειξή του, που ήταν αντίθετη με αυτό που προσπαθούσε να δείξει, ήταν ότι υπήρχαν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1 από τους φυσικούς αριθμούς. Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor: (Η συνολική δομή της απόδειξης είναι μια απαγωγή εις άτοπον. Με επαγωγική υπόθεση: το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι του ίδιου μεγέθους με το σύνολο των φυσικών αριθμών, καταλήγουμε σε άτοπο, και άρα συμπεραίνουμε ότι η επαγωγική μας υπόθεση δεν ισχύει.) Κάθε πραγματικός αριθμός μεταξύ του 0 και του 1 μπορεί να εκφραστεί μέσω του άπειρου δεκαδικού αναπτύγματός του.

Θα μπορούσαμε να τους ταξινομήσουμε σε μια σειρά για να τους αντιστοιχίσουμε με τους φυσικούς αριθμούς, για παράδειγμα:

$1 \rightarrow 0,\alpha_1^1\ \alpha_2^1\ \alpha_3^1\ \alpha_4^1 \ldots$

$2 \rightarrow 0,\alpha_1^2\ \alpha_2^2\ \alpha_3^2\ \alpha_4^2 \ldots$

$3 \rightarrow 0,\alpha_1^3\ \alpha_2^3\ \alpha_3^3\ \alpha_4^3 \ldots$

… …

Ας σκεφτούμε τώρα έναν αριθμό που αποτελείται από τα στοιχεία της διαγωνίου και ας τον ονομάσουμε «διαγώνιο» αριθμό. Αφού έχουμε ταξινομήσει όλους τους πραγματικούς αριθμούς κάποια στιγμή θα είναι και αυτός στη λίστα. Αν τροποποιήσουμε, όμως, αυτόν τον αριθμό, προσθέτοντας σε κάθε ψηφίο το 1 (αν είναι 9 θα γίνει 1), τότε ο καινούργιος αριθμός δεν θα είναι πουθενά στη λίστα (αφού θα διαφέρει από τον πρώτο τουλάχιστον στο πρώτο ψηφίο, θα διαφέρει από τον δεύτερο τουλάχιστον στο δεύτερο ψηφίο κ.ο.κ.). Επομένως, δεν υπάρχει μια 1-1 (και επί) αντιστοιχία των φυσικών αριθμών με τους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του 0 και του 1. Επομένως, τα δύο άπειρα σύνολα δεν έχουν το ίδιο μέγεθος. Άρα, το σύνολο των φυσικών αριθμών N και το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών R δεν έχουν το ίδιο μέγεθος. Και αφού το σύνολο των φυσικών αριθμών N είναι υποσύνολο των πραγματικών R, το R θα είναι μεγαλύτερο σε μέγεθος από το N. Οι επιπτώσεις αυτής της απόδειξης είναι πολύ σημαντικές. Αποκαλούμε "άλεφ-0" συμβ. $\aleph_0$ τον πληθικό αριθμό του συνόλου των φυσικών αριθμών και "άλεφ-1" συμβ. $\aleph_1$ την επόμενη πληθικότητα. Στην καθιερωμένη Θεωρία Συνόλων, η πληθικότητα του δυναμοσυνόλου ενός απειροσυνόλου είναι η επόμενη πληθικότητα. (Δυναμοσύνολο ενός συνόλου είναι ένα σύνολο που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του συνόλου αυτού). Δεν γνωρίζουμε, όμως αν το συνεχές c (η πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών) είναι η επόμενη πληθικότητα του $\aleph_0$, δηλαδή αν θα είναι $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = c$. Αυτή είναι η περίφημη «Υπόθεση του Συνεχούς» (Continuum Hypothesis), που συμβολίζεται (CH). Έχει αποδειχθεί ότι είναι ανεξάρτητη από τη θεωρία Zermelo-Fraenkel με το αξίωμα της επιλογής δηλαδή την ZFC, κατά συνέπεια μπορούμε να έχουμε μια συνεπή θεωρία συνόλων όπου η υπόθεση του Συνεχούς ισχύει ή μια συνεπή θεωρία συνόλων όπου η άρνηση της υπόθεσης του Συνεχούς ισχύει. Η τυπική αναπαράσταση του συνεχούς είναι αποδεδειγμένα ανεξάρτητη από τη θεωρία των απείρων πληθαρίθμων και από τη θεωρία του πως μεταβαίνουμε από τον ένα στον άλλο (Friend, 2007).

Η ίδια ακριβώς τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι υπάρχουν περισσότερα σύνολα φυσικών αριθμών από τους ίδιους τους φυσικούς αριθμούς. Αποδεικνύεται, ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών N είναι μικρότερο από το δυναμοσύνολό του (το σύνολο, δηλαδή, των υποσυνόλων του). Έτσι, δεν υπάρχει όριο του πόσο μεγάλο μπορεί να είναι ένα άπειρο σύνολο. Το N είναι άπειρο, το δυναμοσύνολό του ακόμα μεγαλύτερο. Το δυναμοσύνολο του δυναμοσυνόλου του ακόμα μεγαλύτερο, και ούτω καθεξής επ' άπειρον. Ο Cantor απέδειξε πολλά από τα παραπάνω στην ηλικία των 28 με 34 και πολλοί δέχτηκαν το έργο του με ενθουσιασμό – όπως ο Frege, ο Dedekind και ο Russell. Σίγουρα όμως δεν δέχθηκε καθολική αποδοχή. Ο δάσκαλός του, ο γερμανός Leopold Kronecker (1823-1891) ήταν έντονα αντίθετος και εξέφρασε μια δια βίου εχθρότητα για το έργο του Cantor. Ο Kronecker είχε ένα είδος Πυθαγόρειας αντίληψης ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι τα μόνα «πραγματικά» μαθηματικά αντικείμενα και οτιδήποτε δεν έχει σχέση με αυτούς, όπως το έργο του Cantor, είναι «μαθηματικές ανοησίες». Είναι γνωστή η δήλωσή του: « Ο Θεός έφτιαξε τους φυσικούς, όλα τα υπόλοιπα είναι δουλειά του ανθρώπου» (Dauben, 1980). Ο Γάλλος μαθηματικός Henri Poincare (1854-1912) περιέγραψε το έργο του Cantor ως «διεστραμμένη παθολογική ασθένεια που μια μέρα θα θεραπευτεί» (Dauben, 1979, p.1). Ο Αμερικανός φιλόσοφος και μαθηματικός C. S. Peirce (1839-1914) ανακάλυψε ανεξάρτητα ότι δεν υπάρχει τρόπος αντιστοίχισης 1-1 των φυσικών με τους πραγματικούς, αλλά συμπέρανε ότι το σύνολο των πραγματικών δεν υπήρχε ως πλήρης, ολοκληρωμένη ολότητα (όπως ο ίδιος το είχε στο νου του). Το πολύ να υπήρχε σαν δυνητικό άπειρο, κατά την άποψή του, όπως το έβλεπαν και διάφοροι φιλόσοφοι (Peirce, 1976). Συνολικά, ο Cantor ήταν πολύ στεναχωρημένος για το πώς υποδέχθηκαν το έργο του. Δεν απέβαλε ποτέ την πεποίθηση ότι το έργο του ήταν άδικα παρανοημένο. Υπήρχε, ωστόσο, ένα ερώτημα που δεν μπορούσε να απαντήσει: Δεδομένου ότι το σύνολο των πραγματικών R είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των φυσικών αριθμών N, υπάρχουν καθόλου σύνολα που είναι ενδιάμεσα στο μέγεθος μεταξύ των μεγεθών των N και R, ή είναι ο πληθάριθμος του R το «επόμενο άπειρο μεγαλύτερο μέγεθος» από τον πληθάριθμο του N; Ποτέ δεν απάντησε τελικά αυτό το ερώτημα και αυτό συνέτεινε στη δια βίου κατάπτωση και απελπισία για το έργο του (Moore, 1990). Φυσικά έκανε λάθος να στεναχωρείται διότι το πρόβλημα αυτό όπως προαναφέραμε οδηγεί σε μη αποκρίσιμη πρόταση.

Ο Cantor δεν ενδιαφερόταν μόνο για το πόσο μεγάλα άπειρα σύνολα υπήρχαν. Ενδιαφερόταν, επίσης, για τρόπους επιβολής διάταξης σε αυτά. Το μέγεθος ενός συνόλου δεν έχει τίποτα να κάνει με οποιαδήποτε συγκεκριμένη διάταξη των στοιχείων του. Η θεωρία του των διατακτικών αριθμών ήταν η προσπάθειά του να συστηματοποιήσει αυτό το μέρος της έρευνάς του.

Το παράδοξο του ξενοδοχείου του Hilbert μπορεί να κάνει την εισαγωγή στην ιδέα των άπειρων πληθαρίθμων. Ας θεωρήσουμε ένα ξενοδοχείο με άπειρο αριθμό δωματίων. Έστω ότι όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα και καταφθάνει ένας πελάτης που ζητάει ένα δωμάτιο. Αν και όλα τα άπειρα δωμάτια είναι κατειλημμένα και δεν μπορεί να δοθεί στον καινούργιο πελάτη το τελευταίο δωμάτιο – γιατί αυτό θα σήμαινε ότι θα πρέπει να περπατήσει μια άπειρη απόσταση - ο ρεσεψιονίστας βρίσκει τη λύση. Αρκεί όλοι οι ένοικοι να μεταφερθούν στο επόμενο δωμάτιο στην αρίθμηση των δωματίων για να αποδεσμευτεί το πρώτο δωμάτιο. Στην περίπτωση που κατέφθανε ένας άπειρος αριθμός καινούργιων πελατών και πάλι θα μπορούσαν να έχουν δωμάτιο σε αυτό το άπειρο ξενοδοχείο. Θα μπορούσαν όλοι οι ένοικοι να μεταφερθούν στα δωμάτια με ζυγό αριθμό - που θα βρίσκονταν με τον διπλασιασμό των αριθμών των αρχικών δωματίων. Με αυτόν τον τρόπο θα αποδεσμευόταν άπειρα δωμάτια για τους καινούργιους πελάτες – αυτά με μονό αριθμό. Σε αυτό το ξενοδοχείο πάντα θα μπορούσαν να φιλοξενηθούν όλο και περισσότεροι πελάτες. Οι άπειροι πληθάριθμοι μπορούν να «απορροφούν» τους πεπερασμένους πληθάριθμους και κάποιους άπειρους χωρίς αλλαγή. Γιατί οι πληθικοί αριθμοί απαντούν μόνο στην ερώτηση «πόσα» στοιχεία έχει ένα σύνολο, χωρίς να έχει σημασία η διάταξη των στοιχείων αυτών (Friend, 2007). Ο Cantor, όμως, ενδιαφέρθηκε για το πώς θα μπορούσε να επιβληθεί διάταξη στα άπειρα σύνολα και έτσι κατέληξε στη θεωρία των διατακτικών αριθμών.

Ορισμός μιας καλής διάταξης: Μια διμελής σχέση R σε ένα σύνολο a είναι μια καλή διάταξη του a αν η R είναι γραμμική διάταξη [δηλαδή αν ισχύουν:

(i) για κάθε x, y ϵ a ισχύει μόνο μια από τις x=y, R(x,y), R(y,x)

(ii) R(x,y) Λ R(y,z) → R(x,z) για κάθε x, y, z ϵ a] και

κάθε υποσύνολο b του a περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο ως προς R (Αναπολιτάνος, 1985). Με άλλα λόγια, πρέπει ο ένας να είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον άλλο – να ξεχωρίζει το επόμενο στοιχείο- και επίσης, κάθε υποσύνολο να έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή να ξεχωρίζει το πρώτο στοιχείο σε κάθε υποσύνολο.

Για παράδειγμα η καθιερωμένη διάταξη των ακεραίων <…, -2, -1, 0, 1, 2,…> δεν είναι καλή διάταξη επειδή δεν ξεχωρίζει έναν από αυτούς ως τον πρώτο – το ελάχιστο στοιχείο. Η καθιερωμένη διάταξη στους ρητούς <0,…, ¼,…,1/2,…,1,…,1 ½,…,2,…> δεν είναι καλή διάταξη γιατί αν και ξεχωρίζει κάποιον από αυτούς ως τον πρώτο, δεν ξεχωρίζει κάποιον ρητό ως τον αμέσως επόμενο του 0. Αν θεωρήσουμε την μη καθιερωμένη διάταξη των ακεραίων <0,1,2,…,…,-3,-2,-1> , δηλαδή οι αρνητικοί ακέραιοι να διαδέχονται τους θετικούς ακεραίους, δεν είναι καλή διάταξη γιατί δεν ξεχωρίζει κάποιον ακέραιο αριθμό να είναι ο πρώτος που διαδέχεται όλους τους φυσικούς αριθμούς. Η καθιερωμένη διάταξη των φυσικών αριθμών N={0,1,2,3,…} είναι μια καλή διάταξη, γιατί ικανοποιεί και τις δύο προϋποθέσεις. Το ίδιο, όμως , είναι και η μη τυπική διάταξη του N <1,2,3,…,0> όπου το 0 είναι μετά από όλους τους άλλους φυσικούς αριθμούς. Και η μη τυπική διάταξη του N <0,2,4,…,1,3,5,…> που ξεχωρίζει όλους τους άρτιους φυσικούς αριθμούς, με την καθιερωμένη τους διάταξη, πριν από τους περιττούς φυσικούς αριθμούς, στη καθιερωμένη τους διάταξη. Τώρα, μια καλή διάταξη του συνόλου X και μια καλή διάταξη του συνόλου Y μπορεί να έχουν την ίδια μορφή. Δηλαδή, οι δύο καλές διατάξεις μπορεί να φαίνονται ίδιες όταν «απομακρυνόμαστε» από αυτές σε τέτοιο βαθμό που δεν μπορούμε πια να ξεκαθαρίσουμε τι είναι τα πράγματα που διατάσσονται. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε την καλή διάταξη του N <1,2,3,…,0> και μια καλή διάταξη μόνο στους περιττούς φυσικούς αριθμούς που έχει την ίδια μορφή : <3,5,7,…,1>, δηλαδή μια άπειρη διαδοχή στοιχείων που ακολουθείται από ένα μόνο στοιχείο. Μια ελαφρώς μεγαλύτερη (σε μήκος) καλή διάταξη, με μια λίγο διαφορετική μορφή θα ήταν η <1,2,4,5,…,0,3>, όπου είναι όπως η πρώτη μη τυπική διάταξη του N αλλά με το 3 στο τέλος. Διαισθητικά, η μορφή μιας καλής διάταξης είναι θέμα του πόσο μεγάλη είναι. Οι διατακτικοί αριθμοί (ordinals) χρησιμοποιούνται για να μετρήσουμε το μήκος, ή τη μορφή μιας καλής διάταξης, με αυτή τη διαισθητική έννοια (Moore,1990).

Με άλλα λόγια, μπορούμε να συμβολίσουμε τη διάταξη των πραγμάτων με την προϋπόθεση ότι διαθέτουμε ένα μέτρο σύγκρισης. «Πιο απλά, υπό την προϋπόθεση ότι διαθέτουμε μία σχέση διάταξης, μπορούμε να διατάσσουμε τα πράγματα» (Friend, 2007). Οι διατακτικοί αριθμοί μπορούν να μας βοηθήσουν να «μετρήσουμε» το μήκος μιας διάταξης, γιατί έχουν και οι ίδιοι μια καλή διάταξη. Εξασφαλίζοντας την ύπαρξη ενός διατακτικού αριθμού - που λειτουργεί ως το μέτρο οποιουδήποτε δυνατού μήκους ή μορφής – τότε μπορούμε να έχουμε άπειρους διατακτικούς αριθμούς, έτσι ώστε:

(i) ένας διατακτικός αριθμός είναι ο πρώτος,

(ii) για κάθε διατακτικό αριθμό, υπάρχει ένας άλλος διατακτικός ο οποίος είναι ο αμέσως επόμενος,

(iii) για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών (πεπερασμένο ή άπειρο), υπάρχει ένας άλλος διατακτικός αριθμός ο οποίος είναι ο πρώτος που τους διαδέχεται όλους.

Κάθε διατακτικός αριθμός δρα ως ένα μέτρο της μορφής της καλής διάταξης των προηγούμενών του. Οι πρώτοι διατακτικοί αριθμοί είναι ίδιοι με τους φυσικούς αριθμούς. Ο πρώτος άπειρος διατακτικός αριθμός, που διαδέχεται τους φυσικούς αριθμούς, είναι ο ω. Είναι αυστηρά μεγαλύτερος από οποιονδήποτε πεπερασμένο διατακτικό αριθμό. Δεν έχει όμως έναν άμεσο προκάτοχο, και γι’ αυτό τον ονομάζουμε «διατακτικό όριο» (Friend, 2007). Δεδομένης της συνθήκης (ii), πρέπει να έχει έναν αμέσως επόμενο, ο οποίος ονομάζεται ω+1. Δηλαδή, το ω είναι ένα μέτρο της τυπικής καλής διάταξης του N <0,1,2,3…> και ο ω+1 δρα ως ένα μέτρο της πρώτης μη τυπικής καλής διάταξης που αναφέρθηκε παραπάνω <1,2,3,…,0>. Ο αμέσως επόμενος του ω+1 είναι ο ω+2, ο οποίος είναι το μέτρο του μήκους της μη καθιερωμένης καλής διάταξης του N <1,2,4,5,…,0,3>. Ο αμέσως επόμενος είναι ο ω+3, μετά ο ω+4, και ούτω καθεξής. Ο πρώτος διατακτικός αριθμός που θα διαδεχθεί όλους αυτούς είναι ο ω+ω ή ωx2, έπειτα ο ωx3 κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να λάβουμε και τις δυνάμεις του ω, δηλαδή για παράδειγμα ω^2=ωxω. Έτσι προκύπτει η σειρά ω^2, ω^2+1, ω^2+2,… (Moore, 1990).

Ουσιαστικά, για να δούμε αναλυτικά τι συμβαίνει, οι διατακτικοί αριθμοί προκύπτουν από δύο βασικές διεργασίες: πρώτον στην προσθήκη μιας μονάδας σε κάθε προηγούμενο ήδη κατασκευασμένο διατακτικό αριθμό και δεύτερον στην παραγωγή οριακών διατακτικών αριθμών. Κατά την πρώτη διεργασία έχουμε ως πρώτο διατακτικό αριθμό το 0 (που αντιστοιχεί στο κενό σύνολο Ø) και προσθέτοντας μια μονάδα προκύπτει ο διατακτικός αριθμός 1, και προσθέτοντας στο 1 μια μονάδα προκύπτει ο διατακτικός αριθμός 2, και ούτω καθεξής. Η αντίστοιχη συνολοθεωρητική διαδικασία φαίνεται παρακάτω:

0 Ø

1 Ø U {Ø}={Ø}

2 Ø U {Ø} U {{Ø}} ={ Ø, {Ø}}

. .

. .

. .

n+1 n U {n}

. .

. .

. .

Κατά την δεύτερη βασική διεργασία, ο διατακτικός αριθμός ω ή $\aleph_0$ ορίζεται σαν το σύνολο των φυσικών αριθμών {0,1,2,3,…,n,…} και ο επόμενος διατακτικός αριθμός ω+1 σαν το σύνολο ω U {ω}. Ο διατακτικός αριθμός ω+ω είναι το σύνολο {0,1,2,3,…,n,…} U {ω, ω+1, ω+2,…,ω+n,…} και με όμοιο τρόπο παίρνουμε τους ω+ω+ω, ω+ω+ω+ω, …, ω+ω+ω+…=ω^2, και συνεχίζοντας παράγονται οι ω^3, ω^4 και οριακά ο ω^ω (Αναπολιτάνος, 1985). Το διατακτικό όριο της σειράς ω, ω^ω,ω^{ω^ω},… το ονομάζουμε με ένα νέο γράμμα, το ε. Μπορούμε να συνεχίσουμε, με αυτόν τον τρόπο, και να συνδυάσουμε το ε με τους πεπερασμένους διατακτικούς αριθμούς, με το ω και το ίδιο το ε μέσω πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και ύψωσης σε δυνάμεις. Έτσι, διαθέτουμε έναν άπειρο αριθμό των άπειρων διατακτικών. Η σειρά όλων αυτών των επεκτάσεων είναι ως εξής: 1, 2, 3, …, ω, ω+1, ω+2, …, 2ω, 2ω+1, 2ω+2, …, 3ω, 3ω+1, 3ω+2, …, ω^2, ω^2+1, ω^2+2, …, ω^3, ω^3+1, ω^3+2, …, ω^ω, ω^ω+1, ω^ω+2, …, ε, ε+1, ε+3, … (Friend, 2007).

Όλοι αυτοί οι διατακτικοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι, δηλαδή όσοι και οι φυσικοί αριθμοί. Δηλαδή, είναι ισοπληθικοί με τον πρώτο άπειρο διατακτικό και πληθικό αριθμό ω. Οι πληθικοί αριθμοί, επομένως, αποτελούν καθαρή υποκλάση της κλάσης των διατακτικών αριθμών και μπορούν να ορισθούν σαν εκείνοι ακριβώς οι διατακτικοί αριθμοί που δεν μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία με κανένα μικρότερό τους. Επομένως, η βασική διαφορά ανάμεσα στους πληθικούς και στους διατακτικούς αριθμούς, είναι ότι η έννοια της πληθικότητας στηρίζεται στην αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση, ενώ η διατακτικότητα στη γραμμική διατακτική τακτοποίηση. Έτσι, ενώ στα πεπερασμένα σύνολα οι δύο έννοιες ταυτίζονται, στα άπειρα σύνολα η μία είναι η έννοια της ισχύος που είναι ανεξάρτητη της διάταξης, και η άλλη η έννοια της αρίθμησης που εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διάταξη του συνόλου (Αναπολιτάνος, 1985).

Κεφάλαιο 4ο

Δυσκολίες σχετικά με την αποδοχή και κατανόηση του απείρου

Τα παράδοξα των αρχών του 20^{ου} αι.

Την εισαγωγή της έννοιας του συνόλου από τον Cantor και των υπερπεπερασμένων αριθμών του ακολούθησε, στην αρχή του 20^{ου} αι., η εμφάνιση παραδόξων. Τα παράδοξα είναι θεμιτές παραγωγικές διαδικασίες που οδηγούν σε αντιφάσεις. Για την αντιμετώπισή τους προκλήθηκαν ισχυρές φιλοσοφικές διαμάχες, με αποτέλεσμα μία κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών. Η κρίση αυτή ήταν σίγουρα έντονη, αλλά και εξαιρετικά γόνιμη. Το αποτέλεσμα ήταν η εμφάνιση τριών βασικών «σχολών» δηλαδή ρευμάτων στην φιλοσοφία των μαθηματικών. Είναι ο λογικισμός (G. Frege, B. Russell), ο φορμαλισμός (D. Hilbert) και ο ιντουισιονισμός (Brower). Τα παράδοξα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες: τα λογικά ή συνολοθεωρητικά και τα ερμηνευτικά. Τα λογικά ή συνολοθεωρητικά παράδοξα αναφέρονταν στη θεωρία συνόλων, ενώ τα ερμηνευτικά ήταν διατυπωμένα στο πλαίσιο των φυσικών γλωσσών, των οποίων τα εκφραστικά όρια δεν ήταν – και δεν είναι – καθορισμένα αυστηρά (Αναπολιτάνος, 1985).

Λογικά ή συνολοθεωρητικά παράδοξα

1) Burali – Forti, 1897

Οι διατακτικοί αριθμοί είναι καλώς ορισμένα μαθηματικά αντικείμενα, όπως είναι οι φυσικοί αριθμοί και οι πραγματικοί αριθμοί. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελούν μια τέλεια καθορισμένη ολότητα. Έστω Ω το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών, το οποίο θα πρέπει να είναι ένα άπειρο σύνολο, όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών ή των πραγματικών αριθμών. Αν το Ω πραγματικά υπάρχει, τότε αφού είναι ένα σύνολο διατακτικών αριθμών, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη (iii): για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών (πεπερασμένο ή άπειρο), υπάρχει ένας άλλος διατακτικός αριθμός ο οποίος είναι ο πρώτος που τους διαδέχεται όλους. Όμως, τότε θα υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός που δεν θα ανήκει στο σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών Ω: άτοπο (Moore, 1990).

Με άλλα λόγια, δεδομένου ενός διατακτικού αριθμού α υπάρχει πάντα ένας μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός β, για παράδειγμα ο α+1. Όμως, η ένωση όλων των διατακτικών αριθμών είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός, ας τον ονομάσουμε γ. Δεδομένου, ότι υπάρχει πάντα ένας μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός, θα υπάρχει και ένας μεγαλύτερος του γ, έστω δ. Επομένως, ο γ είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός και δεν είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός: αντίφαση (Αναπολιτάνος, 1985).

2) Cantor, 1899

Ο ίδιος ο Cantor, όμως, έφτασε επίσης σε ένα παρόμοιο παράδοξο: Έστω ένα σύνολο α και το δυναμοσύνολό του P(α). Είχε αποδείξει, με τη διαγώνια αποδεικτική του μέθοδο, ότι η πληθικότητα του α είναι μικρότερη της πληθικότητας του δυναμοσυνόλου του, δηλαδή: $|\alpha| < |P(\alpha)|$. Αν θεωρήσουμε Α το σύνολο όλων των συνόλων, τότε η πληθικότητα του Α: $|A|$ θα είναι η μεγαλύτερη δυνατή. Όμως, από το θεώρημα Cantor: $|A| < |P(A)|$. Επομένως, η $|P(A)|$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή. Δηλαδή, η $|A|$ είναι και δεν είναι η μεγαλύτερη δυνατή: άτοπο.

3) Russell, 1902

Όπως είδαμε, και ο Russell διατύπωσε ένα παράδοξο, το οποίο ανέτρεψε το έργο θεμελίωσης του Frege. Ας θεωρήσουμε το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους, έστω Α. Τότε, αν το Α ανήκει στο Α, τότε το Α δεν ανήκει στο Α (αφού αυτή είναι η ιδιότητα των στοιχείων του Α). Αν το Α δεν ανήκει στο Α, τότε το Α ανήκει στο Α (από τον ορισμό του Α): αντίφαση.

Από τα Ερμηνευτικά παράδοξα, θα αναφέρουμε το παράδοξο του ψεύτη

Το *παράδοξο του ψεύτη*: είναι γνωστό και ως παράδοξο του Επιμενίδη (6ος αι. π.Χ.) αλλά απασχόλησε ξανά τους διανοητές στις αρχές του αιώνα μας. Λέγεται ότι ο Επιμενίδης το διατύπωσε στη μορφή: «Κάθε Κρητικός είναι ψεύτης». Αν αυτό που είπε ο Επιμενίδης είναι αλήθεια τότε, αφού είναι Κρητικός λέει ψέματα και επομένως αυτό που είπε δεν είναι αλήθεια. Αν αυτό που είπε είναι ψέμα, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας Κρητικός που λέει αλήθεια. Αν αυτός ο Κρητικός είναι ο Επιμενίδης, τότε αυτό που είπε δεν είναι ψέμα. Επειδή στην διατύπωση αυτή του Επιμενίδη υπάρχει ο καθολικός ποσοδείκτης «κάθε», η ανάλυση του παραδόξου δεν είναι ικανοποιητική, γιατί η άρνηση της πρότασης «Κάθε Κρητικός είναι ψεύτης», είναι η πρόταση «υπάρχει Κρητικός που δεν είναι ψεύτης». Η διατύπωση «Αυτή τη στιγμή λέω ψέματα» είναι καθαρότερη. Αν αυτός που τη διατύπωσε είπε ψέματα, τότε αυτό που είπε δεν είναι αλήθεια και άρα αυτό που είπε δεν είναι ψέμα. Αν αυτό που είπε δεν ήταν ψέμα, τότε αυτό που είπε ήταν αλήθεια και άρα αυτό που είπε ήταν ψέμα (Αναπολιτάνος, 1985).

Αντιμετώπιση των παραδόξων

Το παράδοξο του ψεύτη εξαφανίζεται μόλις γίνει αντιληπτό ότι προκύπτει λόγω αναμείξεως (ή ταυτίσεως) δύο διαφορετικών επιπέδων: *μεταγλωσσικού* και *γλωσσικού* επιπέδου τα οποία δεν έπρεπε να αναμειγνύονται. Η *διάκριση γλώσσας-μεταγλώσσας* δεν είναι τεχνητή, ουσιαστικά επιβάλλεται από τα ερωτήματα σχετικά με την φύση και το είδος της ίδιας της δραστηριότητας του νου. Χωρίς αυτήν την διάκριση δεν θα ήταν δυνατόν να μελετήσουμε τη γλώσσα, δεν θα υπήρχε η φιλοσοφία της γλώσσας, η φιλοσοφία της επιστήμης, η γλωσσολογία και η σύγχρονη λογική. Στη μεταθεωρία τα αντικείμενα μελέτης είναι οι ίδιες οι θεωρίες, εκεί ανήκουν τα ερωτήματα και οι απαντήσεις σχετικά με το τι είναι μια θεωρία (σε οποιονδήποτε τομέα της επιστήμης, για παράδειγμα μαθηματικά, οικονομία, βιολογία). Χωρίς τη διάκριση γλώσσα-μεταγλώσσα δεν θα είχαμε καμία μεταθεωρητική δραστηριότητα. *Γλώσσα* είναι, ουσιαστικά, ο χώρος όπου αναπτύσσονται οι θεωρίες και *μεταγλώσσα* «ο χώρος όπου οι θεωρίες εξετάζονται ως προς τα δομικά τους χαρακτηριστικά, την φύση, την προέλευση, τις σχέσεις και τον ρόλο τους». Όμοια υπάρχει διάκριση ανάμεσα στη μητρική γλώσσα και σε μια δεύτερη γλώσσα που είναι το αντικείμενο της εκμάθησης. Μεταγλώσσα, σε αυτήν την περίπτωση, είναι η γλώσσα-πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διαδικασία της εκμάθησης, εκεί όπου μελετάται η γλώσσα-αντικείμενο.

Στην σύγχρονη εποχή έγιναν πολλές προσπάθειες για την δημιουργία *τυπικών* γλωσσών με σκοπό την μελέτη διάφορων επιστημονικών περιοχών (όπως τα μαθηματικά), και την καλύτερη και σαφέστερη διατύπωσή τους. Έτσι, είχαμε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη της λογικής, της μαθηματικής λογικής, της γλωσσολογίας, της πληροφορικής και της φιλοσοφίας της γλώσσας. Μια τυπική γλώσσα έχει ως πρότυπο στοιχεία των φυσικών γλωσσών - έχει αλφάβητο, κανόνες συντακτικούς και σημασιολογικούς – και έχει στόχο να μην δημιουργεί συγχύσεις ή στρεβλώσεις. Σε αυτή την περίπτωση, μεταγλώσσα είναι η φυσική γλώσσα και η τυπική γλώσσα είναι η γλώσσα-αντικείμενο- την οποία περιγράφουμε και μελετάμε. Όμως, με αυτόν τον τρόπο έχουμε μια αυτοαναφορικότητα, όπως όταν διδασκόμαστε το συντακτικό της μητρικής μας γλώσσας στο πλαίσιο της ίδιας. Σε αυτή την «φαινομενική αυτοαναφορικότητα» στις φυσικές γλώσσες οφείλονται πολλά παράδοξα, όπως το παράδοξο του ψεύτη, που αίρεται όταν κατανοήσουμε ότι όταν η φυσική γλώσσα μιλά για την ίδια δεν γίνεται κυκλικά, αλλά σε διαφορετικά επίπεδα, αφού είναι η ίδια μια ιεραρχία γλωσσών. Τα παράδοξα προκύπτουν όταν υπάρχει σύγχυση μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων της γλώσσας και της μεταγλώσσας (Αναπολιτάνος, 2016).

Το κοινό χαρακτηριστικό των συνολοθεωρητικών παραδόξων είναι η χρήση μιας συγκεκριμένης συλλογιστικής μεθόδου: της «διαγώνιας μεθόδου». Σκοπός είναι η κατασκευή ενός αντικειμένου (μέσω μιας διαδικασίας ολικής ταξινόμησης κάποιας συγκεκριμένης κλάσης αντικειμένων) το οποίο ανήκει στην προηγούμενη κλάση και δεν συναντάται πουθενά στα πλαίσια αυτής της ταξινόμησης. Για την εξοστράκιση των λογικών παραδόξων απαιτήθηκαν σοβαρές περικοπές στην ελευθερία της τρέχουσας μαθηματικής πρακτικής και αυστηροί περιορισμοί στη χρήση κάποιων εννοιών. Ήταν αναγκαίο τα θεμέλια της μαθηματικής πρακτικής να γίνουν σαφή και ακριβή. Για κάποιους μαθηματικούς της εποχής η δημιουργία μιας καθαρής γλώσσας για το σύνολο των μαθηματικών ήταν απαραίτητη. Για κάποιους άλλους ήταν αναγκαία μια ριζική αναθεώρηση της μαθηματικής πρακτικής ως όλο. Δύο μέθοδοι προτάθηκαν για τη λύση των συνολοθεωρητικών παραδόξων. Η πρώτη είχε να κάνει με τη διαγώνια μέθοδο και ήταν να απαγορευτούν οι αυτοαναφορές με τη δημιουργία ιεραρχιών αντικειμένων και προτάσεων. Ο Russell υποστήριξε αυτή την άποψη, πολλοί όμως έβρισκαν επικίνδυνες αυτές τις περικοπές. Η δεύτερη άποψη υποστήριξε τον περιορισμό της ελεύθερης χρήσης ιδιοτήτων για την περιγραφή των συνόλων και όχι την απαγόρευση των αυτοαναφορών. Αυτή τελικά η άποψη ενσωματώθηκε στο φορμαλισμό της ZF. Έτσι, καθορίστηκε πως η χρήση μιας ιδιότητας για τη δημιουργία ενός νέου συνόλου θα πρέπει να αναφέρεται σε κάποια από τα στοιχεία ενός ήδη υπάρχοντος συνόλου. (Ουσιαστικά, με αυτόν τον τρόπο, οδηγηθήκαμε στο ZF_4). Τώρα, η έννοια «το σύνολο όλων των συνόλων» δεν είχε πια νόημα, γιατί θα έπρεπε να υπάρχει ήδη ένα σύνολο αναφοράς της ιδιότητας που περιγράφεται. Ούτε η κατασκευή ενός διατακτικού αριθμού ως ένωση όλων των στοιχείων του συνόλου των διατακτικών αριθμών ήταν εφικτή, αφού δεν υπήρχε σύνολο όλων των συνόλων. Τα ερμηνευτικά παράδοξα, τα οποία ήταν παράδοξα διατυπωμένα στα πλαίσια των φυσικών γλωσσών, προέκυψαν ακριβώς επειδή τα εκφραστικά όρια αυτών των γλωσσών δεν ήταν αυστηρά καθορισμένα και οφείλονταν στη σύγχυση των διαφορετικών ιεραρχικών επιπέδων μιας φυσικής γλώσσας. Επομένως, η λύση που προτάθηκε για την άρση τους ήταν η πλήρης ανάλυση και ο ακριβής καθορισμός των ορίων των διαφορετικών ιεραρχικών επιπέδων της συγκεκριμένης φυσικής γλώσσας και πιθανώς με απαγόρευση των αυτοαναφορών. Μια εναλλακτική λύση θα ήταν ένα πρόγραμμα συνολοθεωρητικοποίησης των φυσικών γλωσσών, το οποίο, όμως, είναι εξαιρετικά δύσκολο τεχνικά αλλά και χωρίς ιδιαίτερο νόημα (Αναπολιτάνος, 1985).

Ο Cantor δεν προβληματιζόταν από το παράδοξο Burali-Forti. Το θεώρησε ως επιβεβαίωση για κάτι που πίστευε ήδη, δηλαδή ότι κάποιες ολότητες ήταν ανυπολόγιστα, άμετρα μεγάλες, άπειρες σε τέτοιο μέγεθος που δεν μπορούσαν να είναι προσδιορισμένα μεγέθη, όπως είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, για παράδειγμα. Είναι πολύ μεγάλες για να θεωρηθούν αληθινά – γνήσια- σύνολα. Το σύνολο των διατακτικών είναι ένα παράδειγμα μιας τέτοιας ολότητας. Δεν υπήρχε τέτοιο σύνολο όπως το Ω, και αυτό αρκούσε για τον εξοβελισμό του παραδόξου Burali-Forti. Ούτε υπήρχε τέτοιο σύνολο όπως το R, το σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχονται στον εαυτό τους, και έτσι εξοβελιζόταν και το παράδοξο του Russell. Ο Cantor τις περιέγραψε ως «ασυνεπείς ολότητες». Είπε ότι ήταν «πολλά πολύ μεγάλα για να θεωρηθούν ως ένα». Επίσης, τις περιέγραψε ως «Απόλυτο άπειρο» (Cantor, 1969, p. 114). Ήταν σαν τα σύνολα όπως το N (των φυσικών αριθμών) στην μαθηματική τους μελέτη από τον Cantor, να έχουν κάποια χαρακτηριστικά πεπερασμένου, ενώ το αληθινό άπειρο συνέχιζε να αντιστέκεται στην μαθηματική έρευνα. Ο ίδιος ο Cantor χρησιμοποίησε τέτοιες εκφράσεις, όπως «το αληθινό άπειρο» όταν μιλούσε για ασυνεπείς ολότητες. Είπε: «Το Απόλυτο μπορεί μόνο να αναγνωριστεί και να είναι αποδεκτό, ποτέ γνωστό, ούτε καν κατά προσέγγιση» (Hallett, 1984, p.13). Ήταν ένα ερώτημα γιατί το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor δεν δείχνει ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μια τέτοια ολότητα, παρά ότι είναι ένα άπειρο σύνολο με κάποιον τρόπο μεγαλύτερο από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Αλλά αν το R είναι μια τέτοια ολότητα, πως μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι το N δεν είναι; Ο Cantor δεν ήθελε να επιστρέψει σε μια τέτοια σκεπτικιστική άποψη του μαθηματικού απείρου. Ένιωθε ότι μπορούσε να αναγνωρίσει την ύπαρξη του N και του R ως σύνολα επειδή δεν υπήρχε αντίφαση σ' αυτό. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο Cantor ήταν βαθιά θρησκευόμενος. Πίστευε ότι είχε ένα θεόσταλτο χάρισμα για να πραγματοποιήσει μια μαθηματική μελέτη για το άπειρο. Το Απόλυτο άπειρο που αποκάλυψε στο επίσημο έργο του, το θεωρούσε ως ένα ζωτικό μέρος της αντίληψής του για τον Θεό (Moore, 1990).

Η αξιωματικοποίηση της θεωρίας των συνόλων ήταν ο οριστικός τρόπος απαλλαγής από τα παράδοξα.

Αυτό που σίγουρα έδειξαν τα παράδοξα ήταν ότι δεν είναι αποδεκτή μια μη κριτική αποδοχή της έννοιας του συνόλου στη βάση της αρχής της συμπερίληψης. Μία ιδιότητα δεν αρκεί για να σχηματιστεί ένα σύνολο. Επιπλέον, η ιδέα στη θεωρία του Cantor είναι ότι τα στοιχεία του συνόλου πρέπει να υπάρχουν πρώτα από το σύνολο, πρέπει να είναι σαφώς καθορισμένα πριν οριστεί το σύνολο. Έτσι, κανένα σύνολο δεν μπορεί να είναι στοιχείο του εαυτού του. Επομένως, το σύνολο όλων των συνόλων στο παράδοξο του Russell δεν υπάρχει. Όπως, το Ω, αποτελεί μια Καντοριανή ασυνεπή ολότητα, την οποία ποτέ δεν γίνεται να «φτάσει» κανείς. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται τα παράδοξα. Αυτή η εκδοχή έχει μια διαισθητική επίκληση. Θα πρέπει να μη χρησιμοποιείται η διαίσθηση αλλά οι μαθηματικοί να σκέφτονται για τα σύνολα αξιωματικά, αποκαλύπτοντας άλλη μια φορά το δέλεαρ του Ευκλείδειου παραδείγματος. Δηλαδή, να επικυρώνουν τα θεωρήματά τους με αποδείξεις βασισμένες σε θεμελιώδεις αρχές που εξυπηρετούν ως αξιώματα. Το ίδιο συνέβη και με τη θεωρία συνόλων. Υπάρχουν εννέα τέτοιες αρχές (αξιώματα) στη θεωρία συνόλων. Τις περισσότερες τις δημιούργησε ο Γερμανός μαθηματικός Ernst Zermelo (1871-1953) και αργότερα άλλοι μαθηματικοί τις συμπλήρωσαν, ιδιαίτερα ο Fraenkel και γι' αυτό το σύστημα που προέκυψε αναφέρεται ως Zermelo-Fraenkel θεωρία συνόλων ή μόνο ZF. Κάποιες από τις αρχές είναι πολύ απλές, για παράδειγμα αυτή που δύο διαφορετικά σύνολα δεν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία (με άλλα λόγια ένα σύνολο ορίζεται από τα στοιχεία του). Ένα άλλο αξίωμα είναι το αξίωμα ότι κάθε σύνολο έχει έναν πληθάριθμο (ισχύ). Μια άλλη αρχή εγγυάται την ύπαρξη άπειρων συνόλων. Ο Νορβηγός Thoralf Skolem (1887-1963) και ο Kurt Gödel έπαιξαν σημαντικό ρόλο στον πλήρη και ακριβή προσδιορισμό του τι ακριβώς είναι τα σύνολα. Η ZF θεωρία συνόλων ήταν σε κάποια σημεία ανεπαρκής, όπως και κάθε άλλο πιθανό αξιωματικό σύστημα τέτοιου είδους θα ήταν επίσης.

Αυτό που ήταν επιθυμητό για την θεωρία συνόλων ZF ήταν να μπορούσε, στηριζόμενη σε κάποια αξιώματα, από την μια πλευρά, να αποδείξει όλες τις αληθείς προτάσεις και από την άλλη να μην καταλήγει σε αντιφάσεις. Το βασικό πρότυπο για την αξιωματικοποίηση της συνολοθεωρίας ήταν η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων ZF είναι τα εξής: (βλ. και Αναπολιτάνος, 1985)

(ZF_1) Αξίωμα έκτασης. (Axiom of extensionality): Όταν δύο σύνολα έχουν τα ίδια στοιχεία είναι ίσα.

(ZF_2) Αξίωμα ένωσης. (Union axiom or sym-set axiom): Σε κάθε σύνολο a αντιστοιχεί ένα σύνολο b, του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία των στοιχείων του a. Το σύνολο αυτό b είναι μοναδικό (από το ZF_1) και το συμβολίζουμε U_a, και λέγεται ένωση των στοιχείων του a.

(ZF_3) Αξίωμα δυναμοσυνόλου. (Power-set axiom): Για κάθε σύνολο a, υπάρχει ένα σύνολο b, του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα υποσύνολα του a. Από το (ZF_1) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο b είναι μοναδικό, το ονομάζουμε δυναμοσύνολο του a και το συμβολίζουμε P(a).

(ZF_4) Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης. (Axiom scheme of replacement (or substitution)): Δεδομένου ενός συνόλου a, υπάρχει ένα σύνολο b, που είναι μοναδικό (από το ZF_1) και ορίζεται σαν το σύνολο των εικόνων του a με τη βοήθεια της $\varphi(u,v,x_0,\ldots,x_n)$ και μιας συγκεκριμένης αποτίμησης $a_0,\ldots,a_n$ των $x_0,\ldots,x_n$ που παίζουν τον ρόλο παραμέτρων. Δηλαδή, δεδομένου ενός συνόλου a και ενός συναρτησιακού μετασχηματισμού f, που περιγράφεται από την $\varphi(u,v,x_0,\ldots,x_n)$, υπάρχει ένα σύνολο b που αποτελείται ακριβώς από τις τιμές της συνάρτησης f, όταν αυτή δρα πάνω στα στοιχεία του a.

(ZF_5) Αξίωμα ύπαρξης απείρου. (Axiom of infinity): Υπάρχει ένα σύνολο a που περιέχει το κενό σύνολο σαν στοιχείο του και που περιέχει κάθε σύνολο z, που παράγεται από κάποιο στοιχείο του a, ας πούμε το y, με την πράξη $z=y \cup \{y\}$. Το σύνολο $y \cup \{y\}$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του y και από το y. Η απειρία του συνόλου a είναι συνέπεια του γεγονότος ότι αυτό περιέχει ένα αρχικό σύνολο σαν στοιχείο του, συγκεκριμένα το Ø, και όλα τα σύνολα που προκύπτουν απ' αυτό με βάση την πράξη που προαναφέρθηκε. Δηλαδή τα σύνολα Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}},…

(ZF_6) Αξίωμα θεμελίωσης. (Axiom of foundation): Κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα στοιχείο b, που είναι ξένο προς το a, δηλαδή που δεν περιέχει στοιχεία κοινά με το a. Αυτό το αξίωμα της θεμελίωσης συνεπάγεται ότι για κάθε σύνολο a, το a δεν ανήκει στο a.

Τέλος, το αξίωμα της επιλογής (Axiom of Choice)(AC): Αν a είναι ένα σύνολο μη κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων, υπάρχει ένα σύνολο b τέτοιο ώστε να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο u από κάθε στοιχείο x του a.

Το αξίωμα της επιλογής (AC) δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα της ZF, αλλά ούτε και η άρνησή του. Με την προσθήκη του αξιώματος της επιλογής (AC) στην θεωρία ZF (με αξιώματά της τα ZF_1-ZF_6) έχουμε μια γνήσια επέκταση της ZF που συμβολίζεται με ZFC. Το αξίωμα ύπαρξης απείρου (ZF_5) είναι αμφιλεγόμενο, από φιλοσοφικής άποψης, αφού έτσι δεχόμαστε την ύπαρξη του απείρου ως αντικειμενικό στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας (της ZF). Όμως, με αυτόν τον τρόπο επιτρέπονται «τα ελεύθερα πετάγματα του νου σε περιοχές μεταφυσικά αμφίβολες», χωρίς όμως τον κίνδυνο να οδηγηθούμε σε αποδείξεις αντιφατικών προτάσεων. Το αξίωμα της επιλογής (AC) δεν θα ήταν αμφιλεγόμενο αν μιλούσαμε μόνο για πεπερασμένα σύνολα (Αναπολιτάνος, 1985).

Διάφορες αντιδράσεις και ο Hilbert για το άπειρο

Τα παράδοξα, λοιπόν, που προέκυψαν από τη συνολοθεωρία του Cantor ταλάνισαν την μαθηματική κοινότητα και είχαν γίνει πολλές συζητήσεις, αντιπαραθέσεις και πολύ μεγάλες προσπάθειες για την άρση αυτών των αντινομιών που προήρθαν από ενορατικές προεκτάσεις προτάσεων και ιδεών από τον χώρο του πεπερασμένου στον χώρο του απείρου.

Είναι γνωστό ότι ο ιντουϊσιονισμός του L. E. J. Brower που αναπτύχθηκε στις αρχές του $20^{ου}$ αι. δεχόταν μόνο κατασκευάσιμες μαθηματικές οντότητες. Επίσης, θεωρούσε ότι αληθείς είναι μόνο οι προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν με κατασκευαστικές λογαριθμικές διαδικασίες. Με καντιανές καταβολές, θεωρούσε ότι τα μαθηματικά με νόημα στηρίζονταν μόνον σε κατασκευές στο πλαίσιο της εποπτείας. Οι ιντουϊσιονιστές απέρριψαν την *αρχή του αποκλειόμενου μέσου ή τρίτου* ($P \vee \neg P$) επειδή πίστευαν ότι δεν εξασφαλίζεται η ισχύς της σε άπειρα πεδία, επομένως έπρεπε να εγκαταλείψουν όλες τις αποδείξεις με εις άτοπον απαγωγή αφού εκείνες χρησιμοποιούσαν την αρχή του αποκλειομένου μέσου. Για να αποδεχθούν την ύπαρξη ενός αριθμού ή γενικότερα ενός μαθηματικού αντικειμένου έπρεπε να το κατασκευάσουν με πεπερασμένους κατασκευαστικούς αλγορίθμους. Οι ιντουϊσιονιστές δεν αποδέχθηκαν την υπερπεπερασμένη θεωρία συνόλων του Cantor. Από την άλλη πλευρά ανέπτυξαν μία εναλλακτική θεωρία ανάλυσης που στηριζόταν σε κατασκευασιοκρατικές αντιλήψεις και την ιντουϊσιονιστική λογική. Σήμερα τα ιντουϊσιονιστικά μαθηματικά που περιλαμβάνουν την ιντουϊσιονιστική θεωρία απειροστικού λογισμού είναι ένας εναλλακτικός κλάδος των μαθηματικών. Όμως δεν υπερίσχυσαν ουδέποτε έναντι των κλασικών μαθηματικών και της κλασικής θεωρίας του απειροστικού λογισμού.

Διαφορετική στάση στις αρχές του $20^{ου}$ αι. κράτησε ο φορμαλισμός του D. Hilbert. Ο David Hilbert (1862-1943) έδωσε μια διάλεξη στο μεγάλο διεθνές συνέδριο στη Σορβόννη, το 1900, στο οποίο απαρίθμησε 23 προβλήματα με σκοπό την επίλυσή τους από την μαθηματική κοινότητα. Η κεντρική ιδέα ήταν: τι είναι σημαντικό για τα μαθηματικά. Ήθελε να εξασφαλίσει τα θεμέλια των Μαθηματικών κατά των αντιφάσεων, δίνοντας πεπερασμένες και αυστηρές διαδικασίες για την εργασία στα Μαθηματικά. Ήταν καταγοητευμένος από την ανάπτυξη της θεωρίας των υπερπεπερασμένων αριθμών του Cantor. Πίστευε ότι δεν έπρεπε οι μαθηματικοί να στερηθούν τον «παράδεισο» που συνέλαβε ο Cantor για το άπειρο. Όμως έπρεπε το άπειρο να διασαφηνιστεί με αυστηρότητα. Οι φορμαλιστικές του τάσεις είχαν παρακινηθεί από την εμφάνιση των παραδόξων. Αλλά παρέμενε ρεαλιστής, επειδή πίστευε ότι όλα τα κλασικά μαθηματικά ήταν καλά. Ήθελε να το αποδείξει μέσω της παραγωγής ιδεατών μαθηματικών από τα ασφαλή, χωρίς παράδοξα, πεπερασμένα μαθηματικά. Η προσπάθειά του αυτή είναι γνωστή ως το *πρόγραμμα του Hilbert* (Friend, 2007).

Στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* ο Hilbert εφαρμόζει την αφηρημένη αξιωματική μέθοδο: η γεωμετρία παρουσιάζεται ως παραγωγικό σύστημα θεμελιωμένο σε μερικούς αρχικούς όρους και σε μερικές αρχικές προτάσεις (αξιώματα). Στη δεύτερη έκδοση των Θεμελίων της Γεωμετρίας αντιμετωπίζει το πρόβλημα της πληρότητας και της συνέπειας του γεωμετρικού συστήματος και το ανάγει στην ύπαρξη μοντέλων στους πραγματικούς αριθμούς. Έπρεπε, όμως, πρώτα να αποδείξει ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών είναι το ίδιο πλήρες και συνεπές. Ο Hilbert επιθυμούσε να μη θυσιαστούν τα κλασικά μαθηματικά και πρότεινε τη «θεωρία της απόδειξης» ή το πεδίο που σήμερα αποκαλούμε «μεταμαθηματικά», όπου οι μαθηματικές αποδείξεις έπρεπε να τυποποιηθούν πλήρως και να μελετηθούν με τη βοήθεια της αφηρημένης αξιωματικής μεθόδου. Πίστευε ότι έτσι θα μπορέσουμε να αποδείξουμε τη λογική συνέπεια του λογισμού και να εξετάσουμε την πληρότητα και την αποκρισιμότητά του. Έπρεπε, όμως, η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί να είναι λιγότερο αμφισβητήσιμη από το ίδιο το σύστημα. Γι’ αυτό πρότεινε τη χρήση μόνο περατοκρατικών μεθόδων στα μεταμαθηματικά, δηλαδή, μεθόδων που δεν προϋποθέτουν τίποτα περισσότερο από τις «αισθητηριακά αντιληπτές ιδιότητες των συγκεκριμένων συνδυασμών από σημεία». Επρόκειτο για μεθόδους που δεν προϋπέθεταν το *ενεργεία* άπειρο. Οι συνθήκες που ισχύουν στις περατοκρατικές μεθόδους διασαφηνίστηκαν από τον Jacques Herbrand: Πρέπει να ασχολούμαστε με πεπερασμένο αριθμό αντικειμένων και μονοσήμαντα ορισμένων συναρτήσεων. Δεν πρέπει να ασχολούμαστε με το σύνολο όλων των αντικειμένων μιας άπειρης ολότητας. Δεν πρέπει να είμαστε βέβαιοι για την ύπαρξη ενός αντικειμένου, αν δεν υποδείξουμε τον τρόπο κατασκευής του. Τα γενικά θεωρήματα θεωρούνται σχήματα που επιφέρουν επιμέρους επιχειρήματα. Η απόδειξη των θεωρημάτων μη πληρότητας του Gödel (1931) ματαίωσε το φορμαλιστικό πρόγραμμα του Hilbert, με την έννοια ότι η απόδειξη της συνέπειας ενός συστήματος συνήθως απαιτεί τη χρήση μεθόδων που είναι ισχυρότερες από εκείνες του ίδιου του συστήματος (Χριστοδουλίδης, 1993).

Η δομική μεθοδολογία που εγκαινίασε ο Hilbert είχε να αντιμετωπίσει δύο προβλήματα. Το πρώτο ήταν *το πρόβλημα των πλήρων περιεχομένου μεταμαθηματικών*. Για τη μελέτη των ιδιοτήτων τυπικών συστημάτων ή αξιωματικών θεωριών χρειαζόμαστε μια πλήρη περιεχομένου μαθηματική θεωρία συντακτικών αλληλουχιών και πράξεων. Από μαθηματική άποψη αυτή η θεωρία είναι συγκρίσιμη με την αριθμητική. Το δεύτερο πρόβλημα ήταν της *ύπαρξης μοντέλου*. Για την εξερεύνηση των παραγωγικών συνεπειών από τις αξιωματικές θεωρίες, τα Μαθηματικά χρειάζονται τα δικά τους θεμελιακά αξιώματα ώστε να παρέχουν μοντέλα στις αξιωματικές θεωρίες, για να περιγράφουν με αυτά αφηρημένες δομές. Εδώ, σύμφωνα με τον Linnebo (2017) ο Hilbert πρότεινε την στρατηγική του *διαίρει και βασίλευε.* Έκανε – όπως προαναφέρθηκε- τη διάκριση των Μαθηματικών σε *περατοκρατικά* και *απειροκρατικά* μαθηματικά. Τα περατοκρατικά μαθηματικά ήταν πλήρης περιεχομένου θεωρία πεπερασμένων και συγκεκριμένων συντακτικών τύπων. Του άρεσαν τα αριθμητικά με τη μορφή αλληλουχίας *συμβόλων-γραμμών*. Για παράδειγμα, το I, II, III,… ήταν το 1, 2, 3,... όπου κάθε αριθμητικό σημείο μπορεί να αναγνωρισθεί εποπτικά λόγω του ότι κάθε σημείο ακολουθείται πάντα από ακόμα ένα άλλο I. Πίστευε ότι τα περατοκρατικά μαθηματικά και τα θεμελιακά τους αξιώματα μπορούν να εξηγηθούν με χρήση των Ιδεών του Kant και τον φορμαλισμό των όρων. Τα απειροκρατικά μαθηματικά περιγράφουν άπειρες δομές από τα σύγχρονα μαθηματικά. Πίστευε ότι μπορεί να θεωρηθεί μια αμιγώς τυπική θεωρία. Για το πρώτο πρόβλημα χρειαζόμαστε πλήρη περιεχομένου μεταμαθηματικά, και αυτό μπορεί να γίνει από τα περατοκρατικά μαθηματικά που έχουν περιεχόμενο. Το δεύτερο πρόβλημα, όμως, είχε μεγαλύτερη δυσκολία για τα απειροκρατικά μαθηματικά. Πρότεινε ως εναλλακτική: το σημασιολογικό πρόβλημα της ύπαρξης μοντέλου να μετασχηματιστεί σε ένα καθαρά συντακτικό πρόβλημα σχετικά με την τυπική συνέπεια των θεωριών που περιγράφουν τα συναφή μοντέλα. Για παράδειγμα, το ερώτημα: κατά πόσο η θεωρία μας για τους πραγματικούς αριθμούς διαθέτει πραγματώσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί στο ερώτημα: κατά πόσο η θεωρία είναι τυπικά συνεπής. Έτσι, αν προκύψει μια πεπερασμένη παραγωγή κάποιου παράλογου αποτελέσματος, αυτό θα ανήκε στην περιοχή των περατοκρατικών μαθηματικών.

Ο Hilbert δεν δεχόταν ότι οι προτάσεις σχετικά με το άπειρο μπορούν να κατανοηθούν ως πλήρεις περιεχομένου. «Από τα πανάρχαια χρόνια, το άπειρο αναστάτωνε τα συναισθήματα των ανθρώπων περισσότερο από κάθε άλλο ερώτημα. Σχεδόν καμία ιδέα δεν διήγειρε τον νου τόσο παραγωγικά. Ωστόσο, καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται αποσαφήνιση περισσότερο από αυτή.» (Hilbert, 1926, σελ.185). Δεν δέχεται, όμως, ότι η έννοια του απείρου πραγματώνεται- είτε εντός, είτε εκτός των Μαθηματικών. Παραδέχεται ότι ο φυσικός κόσμος είναι άνευ συνόρων, αλλά υπάρχουν χώροι άνευ συνόρων που είναι πεπερασμένοι, όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας. Αυτό, για εκείνον, είναι συμβατό με τη γενική θεωρία της σχετικότητας όπου το σύμπαν μας είναι ένας τέτοιος χώρος. Η άπειρη διαιρετότητα της ύλης έρχεται σε αντίθεση με την κβαντική φυσική. Για τον Hilbert, το αντικείμενο των μαθηματικών είναι «τα απτά σύμβολα των οποίων η δομή είναι άμεσα σαφής και αναγνωρίσιμη». Το μέρος των μαθηματικών που σχετίζεται με το περιεχόμενό τους έχει να κάνει με ημι-απτά συντακτικά αντικείμενα και είναι τα περατοκρατικά μαθηματικά. Εδώ, χρησιμοποιεί την περιγραφή του Kant: μπορούμε να αντιληφθούμε ημι-απτά αντικείμενα, όχι μέσω της εμπειρίας, και έτσι η προκύπτουσα μαθηματική γνώση δεν είναι a posteriori αλλά a priori.

Ο Hilbert αντλεί έμπνευση από τα απειροστά και υποστηρίζει ότι το άπειρο υπό την έννοια μιας άπειρης ολότητας είναι μια «αυταπάτη». Κατανοεί τους φυσικούς αριθμούς ως δυνάμει άπειρους- όχι πραγματικά άπειρους- κι έτσι καταλήγει στην απόρριψη των ποσοδεικτών που καλύπτουν όλο το εύρος των φυσικών αριθμών. Μια υπαρκτική γενίκευση που έχει άνω όριο, μπορεί να ερμηνευθεί ως πεπερασμένη διάζευξη των πραγματώσεών της. Άρα, το άπειρο γινόμενο είτε δεν ορίζεται, είτε δεν έχει νόημα. Εδώ, μπορεί να διατυπωθεί μια ένσταση: η αριθμητική πρέπει να κάνει χρήση ποσοδεικτών επί όλων των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, η μεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση α+β= β+α για οποιουσδήποτε α και β φυσικούς αριθμούς μπορεί να κατανοηθεί σαν να δηλώνει ότι για δύο οποιαδήποτε αριθμητικά αντικείμενα που μπορούν να παραχθούν η σχετική πραγμάτωση είναι αληθής και κάθε μία από αυτές τις πραγματώσεις είναι περατοκρατικά αποδεκτή. Μπορεί, δηλαδή, να κατανοηθεί ως μια σχηματική γενικότητα επί οποιωνδήποτε αριθμητικών αντικειμένων. Ο Hilbert, όμως, συμπεραίνει ότι μια σχηματική γενικότητα «είναι από την περατοκρατική σκοπιά μας ανίκανη άρνησης» (Hilbert, 1926). Υποστηρίζει, λοιπόν, ότι ενώ κάθε φυσικός αριθμός υπάρχει, δεν υπάρχει πλήρης ολότητα φυσικών αριθμών επί των οποίων να ορίζεται η κλασική χρήση ποσοδεικτών, και αυτό γιατί κάθε φυσικός αριθμός υπάρχει μόνο *δυνάμει*. Ενώ μπορούμε πάντα να παράγουμε έναν διάδοχο, δεν είναι δυνατόν να συμπληρώσουμε την άπειρη διαδικασία.

Σε αυτή την περίπτωση, όμως, περιορίζεται σημαντικά η εμβέλεια των Μαθηματικών που είναι πλήρη περιεχομένου. Ο Hilbert επιμένει ότι «κανένας δεν θα μας οδηγήσει έξω από τον παράδεισο που δημιούργησε για μας ο Cantor» (Hilbert, 1926, σελ. 191). Σαν διέξοδο σε αυτό έχουμε τον «ρεαλισμό επί τω έργω»: τα μη περατοκρατικά Μαθηματικά δεν είναι ανάγκη να είναι πλήρη περιεχομένου. Ο Hilbert θέλει να υπερασπιστεί τις μεθόδους που σχετίζονται με μια πλατωνική στάση (όπως η διαμόρφωση συλλογισμών σχετικά με ολοκληρωμένες άπειρες συλλογές και απεριόριστη χρήση της κλασικής λογικής). Αυτό το πετυχαίνει μέσω της *μεθόδου των ιδανικών στοιχείων*, γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσει μόνο τα περατοκρατικά και πλήρη περιεχομένου μέρη των Μαθηματικών. Ο ίδιος συγκρίνει τη μέθοδο αυτή με τις «ιδέες του Kant» (Hilbert, 1926, σελ.201). Είναι σαν τους μιγαδικούς αριθμούς (που εισήχθησαν τον 16^{o} αι.). Αυτοί οι αριθμοί δεν υπάρχουν πραγματικά, είναι μια μορφή χρήσιμης μυθοπλασίας. Μια νέα θεωρία για να είναι χρήσιμη, αρκεί να είναι με ακρίβεια προσδιορισμένη και όχι κατ' ανάγκη αληθής. Στην αρχή του $16^{ου}$ αι. η αξιωματική υπόθεση των γεωμετρών για την ύπαρξη «σημείων στο άπειρο» ως φανταστικά σημεία της τομής παράλληλων ευθειών οδήγησε στη θεωρία της προβολικής γεωμετρίας. Ο σκοπός του Hilbert ήταν να αντιμετωπίσει το άπειρο με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, τυποποιώντας τη γλώσσα και τη θεωρία των μη περατοκρατικών Μαθηματικών και αντιμετωπίζοντάς την ως μια *ιδανική υπερδομή,* να μελετηθεί χωρίς αναφορά στο νόημά της με χρήση των πλήρων περιεχομένου περατοκρατικών Μαθηματικών. Για να είναι νόμιμη η επέκταση μιας περιοχής με προσθήκη ιδανικών στοιχείων θα πρέπει να ικανοποιεί μόνο μία συνθήκη: την απόδειξη της συνέπειας. Δεν πρέπει να υπάρχουν αντιφάσεις.

Ο Kurt Gödel, όμως, απέδειξε με το πρώτο θεώρημα της μη πληρότητας ότι οποιοδήποτε συνεπές σύστημα που μπορεί να διεξαχθεί συμπεριλαμβάνοντας την αριθμητική δεν είναι πλήρες. Επομένως, κανένα μεμονωμένο τυπικό σύστημα δεν μπορεί να αποδείξει όλες τις αλήθειες των Μαθηματικών. Με το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας (ότι: οποιοδήποτε συνεπές σύστημα που περιλαμβάνει την αριθμητική δεν μπορεί να αποδείξει τη δική του συνέπεια) το όραμα του Hilbert φαίνεται αδύνατο. Αφού τα περατοκρατικά Μαθηματικά δεν μπορούν να αποδείξουν τη δική τους συνέπεια δεν θα μπορούν και ενός ισχυρότερου συστήματος. Παρ' όλα αυτά, το πρόγραμμα του Hilbert εγκαινίασε τη θεωρία αποδείξεων ως κλάδο της λογικής. Ενώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ασθενή θεωρία για την απόδειξη της συνέπειας μιας ισχυρότερης, παραμένει η δυνατότητα να αποδειχθεί η συνέπεια μιας θεωρίας αν υποτεθεί η συνέπεια μιας άλλης (σχετική συνέπεια) (Linnebo, 2017).

Γενικότερες δυσκολίες για την σύλληψη του απείρου από την ανθρώπινη διάνοια

Μέσα απ' όλα αυτά, ανακύπτει ένα δύσκολο ερώτημα: Μπορεί το ανθρώπινο ον να συλλάβει την έννοια του απείρου;

«Τα ελεύθερα πετάγματα του νου σε περιοχές, όπου το πραγματικό άπειρο θα ήταν οικείο αντικείμενο σπουδής, είναι απαγορευμένα, επειδή ο ανθρώπινος νους δεν μπορεί να το δαμάσει, όντας ο ίδιος πεπερασμένος και ως προς τον τρόπο που γνωρίζει και ως προς τον τρόπο που λειτουργεί. Αποδοχή της ύπαρξης του πραγματικού απείρου προϋποθέτει ένα νοητικό άλμα που δεν αποκλείεται, αλλά και δεν νομιμοποιείται από τα μεθοδολογικά εργαλεία που μέχρι εκείνη τη στιγμή διαθέτει το νοητικό μας οπλοστάσιο… Το φιλοσοφικό ερώτημα που σχετίζεται λοιπόν με την ύπαρξη του πραγματικού απείρου, δεν μπορεί να λυθεί στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας. Από την άλλη μεριά, η υπεροπτική απόρριψη του ερωτήματος από τον εθισμένο να βαδίζει μόνο στα στενά μονοπάτια του μαθηματικού του παραδείσου, προδίδει επικίνδυνη πνευματική δυσκαμψία» (Αναπολιτάνος, 1985, σελ. 188).

Από την εποχή του Ζήνωνα, οι στοχαστές συνειδητοποίησαν ότι ο επιπόλαιος συλλογισμός για το άπειρο μπορεί να οδηγήσει σε παράδοξα και να νικήσει τον ανθρώπινο νου. Κάποιοι υποστηρίζουν ότι τα παράδοξα είναι έμφυτα στη χρήση της έννοιας του απείρου και άρα το άπειρο είναι πέρα από την αντίληψη του ανθρώπινου νου. Ένας άλλος λόγος για το ότι ο άνθρωπος δεν μπορεί να κατανοήσει το άπειρο είναι ότι θα πρέπει να περιέχει έναν άπειρο αριθμό υπο-εννοιών, οι οποίες υπερβαίνουν τον πεπερασμένο μας νου. Άλλος λόγος για τη μη δυνατότητα σύλληψης του απείρου από την ανθρώπινη νόηση είναι ότι για να κατέχει κανείς την έννοια θα πρέπει να έχει μια ακριβή νοητή εικόνα του απείρου. Κατά τον Thomas Hobbes, που πίστευε ότι όλες οι σκέψεις βασίζονται στη φαντασία, κανείς δεν μπορεί να έχει την εικόνα άπειρου πλήθους κόκκων άμμου ταυτόχρονα. Ωστόσο, οι πιο σύγχρονοι φιλόσοφοι της ψυχολογίας υποστηρίζουν ότι δεν είναι απαραίτητες οι νοητικές εικόνες για τη σύλληψη μιας έννοιας από τον ανθρώπινο νου. Μπορούμε να κατανοήσουμε το άπειρο ως το μη πεπερασμένο. Επίσης, η συνέπεια της συνολοθεωρίας ως μίας από τις μαθηματικές θεωρίες υποδηλώνει ότι το άπειρο με την τεχνική έννοια του ενεργεία απείρου έχει τοποθετηθεί ορθά μέσα στην διάνοιά μας.

Ο Leibniz ήταν ένας από τους λίγους σε προηγούμενους αιώνες που πίστευε σε πραγματικά άπειρα σύνολα, αλλά δεν πίστευε σε άπειρους αριθμούς. Ο Cantor πίστευε, και σχετικά με την ανακάλυψή του των υπερπεπερασμένων αριθμών και των ιδιοτήτων τους υποστήριξε ότι το έργο του ήταν θέλημα του Θεού και ότι αυτά τα μαθηματικά αντικείμενα ήταν στο νου του Θεού. Υποστήριξε ότι ο Θεός έδωσε την έννοια του απείρου στους ανθρώπους ώστε να μπορούν να συλλογιστούν για την τελειότητά Του.

Η σύνδεση μεταξύ του απείρου και του Θεού υπάρχει σχεδόν σε όλες τις θρησκείες του κόσμου. Όταν οι μεταφυσικοί μιλούν για το άπειρο χρησιμοποιούν και τις τρεις έννοιες: δυνητικό άπειρο, πραγματικό άπειρο και υπερβατικό άπειρο. Αλλά όταν μιλούν για τον Θεό που είναι άπειρος, συνήθως ενδιαφέρονται να υπονοήσουν ότι ο Θεός είναι πέρα από την ανθρώπινη αντίληψη ή ότι δεν υπάρχει όριο σε ιδιότητες του Θεού, όπως η καλοσύνη Του, η γνώση Του και η δύναμή Του. Ο Πλάτων δεν έβλεπε τον Δημιουργό ως άπειρο επειδή τον θεωρούσε τέλειο και πίστευε ότι οτιδήποτε τέλειο πρέπει να έχει όρια. Γι’ αυτόν το άπειρο ήταν χωρίς όρια, χωρίς τέλος, αόριστο και ακατάληπτο χάος. Ο Πλωτίνος, αργότερα, είπε ότι οποιαδήποτε ιδέα έρχεται από την πεπερασμένη εμπειρία μας δεν είναι εφαρμόσιμη στον Θεό. Ο Αυγουστίνος, που συγχώνευσε την Πλατωνική φιλοσοφία με την Χριστιανική θρησκεία, μίλησε για τον Θεό «του οποίου η αντίληψη είναι άπειρη». Έγραψε ότι ο λόγος που ο Θεός μπορεί να κατανοήσει το άπειρο είναι ότι «…κάθε άπειρο γίνεται, με έναν τρόπο που δεν μπορούμε να εκφράσουμε, πεπερασμένο για τον Θεό…» (City of God, Book XII, ch.18). Ο Θωμάς ο Ακινάτης υποστήριξε ότι ο Θεός δημιούργησε τα πάντα και τίποτα που δημιουργήθηκε από Αυτόν δεν είναι άπειρο. Ο Descartes πίστευε ότι ο Θεός είναι ενεργεία άπειρο και επεσήμανε ότι η έννοια του πραγματικού απείρου είναι τόσο μεγαλειώδης που κανένας άνθρωπος δεν θα μπορούσε να τη δημιουργήσει ή να την εξαγάγει από άλλες έννοιες, έτσι οποιαδήποτε ιδέα του απείρου έχουν οι άνθρωποι την έχουν από τον Θεό απευθείας.

Ο άνθρωπος είναι οντολογικά πεπερασμένος. Είναι μέσα σε έναν κόσμο που δεν είναι φτιαγμένος από αυτόν και με κανέναν τρόπο ο κόσμος αυτός δεν εξαρτάται από τον άνθρωπο. Υπάρχει μια πραγματικότητα έξω από τον άνθρωπο. Είναι χωρο-χρονικά πεπερασμένος, είναι ένα συγκεκριμένο κομμάτι ύλης που τώρα υπάρχει αλλά κάποια μέρα δεν θα υπάρχει. Τα χωρο-χρονικά όρια ενός ανθρώπου, ίσως, είναι δύσκολο να προσδιοριστούν αλλά το σίγουρο είναι ότι υπάρχει κάτι πέρα από αυτόν και έχει επίγνωση αυτής της διάκρισης. Ο Kant υποστήριξε ότι αυτό που δίνεται σε ένα ανθρώπινο ον να αντιληφθεί πρέπει να είναι επίσης πεπερασμένο. Δεν μπορεί να συλλάβει ολόκληρο το οντολογικό άπειρο, και αυτό γιατί το δικό του «πεπερασμένο» θέτει όρια στο πόσα μπορεί να συλλάβει. Αν πρόκειται να συλλάβει αυτό που είναι πλήρες, απόλυτο, αυτό-επεξηγηματικό και ανεξάρτητο όλων των άλλων, και αν πρόκειται να το γνωρίζει ως τέτοιο, τότε θα πρέπει το ίδιο το ανθρώπινο ον να γίνει άπειρο. Σύμφωνα με τον Kant, όχι μόνο ό,τι μπορεί να συλλάβει ένας άνθρωπος είναι πεπερασμένο, αλλά πρέπει και να μπορεί να το αναγνωρίσει ως τέτοιο, δηλαδή να το αντιληφθεί στο δικό του πλαίσιο, με τις δικές του συνθήκες ύπαρξης. Με αυτή την έννοια, θα πρέπει να υπάρχουν περαιτέρω ικανότητες σύλληψης. Με άλλα λόγια, αυτό που συλλαμβάνει θα πρέπει να το συλλάβει ως ένα μαθηματικά άπειρο πλαίσιο δυνατοτήτων, δηλαδή, οτιδήποτε συλλαμβάνει, πρέπει να μπορεί να συλλάβει και ακόμα περισσότερο. Αλλά το μαθηματικό άπειρο δεν έχει άμεση εφαρμογή στην εμπειρική πραγματικότητα (Moore, 1990).

Οτιδήποτε αντιλαμβάνεται ένας άνθρωπος, το αντιλαμβάνεται μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, που μπορεί να είναι διαφορετικό από αυτό που αντιλαμβάνεται μια άλλη χρονική στιγμή. Επομένως, κάθε πεπερασμένο πράγμα που γίνεται αντιληπτό έχει γραμμένες μέσα στη μορφή του άπειρες δυνατότητες περαιτέρω σύλληψης. Μαζί με τον Kant, μπορούμε να δούμε τον ίδιο τον χρόνο ως μέρος του άπειρου πλαισίου των δυνατοτήτων μέσα από τις οποίες ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται τα πράγματα. Κάθε σύλληψη έχει δυνατότητες προηγούμενης και μεταγενέστερης σύλληψης. Έτσι, ο χρόνος αντανακλά την κατασκευή της άπειρης δυνατότητας . Από την εποχή του Αριστοτέλη, αλλά και πριν, είχε αναγνωριστεί μια στενή σχέση μεταξύ του χρόνου και του απείρου. Στην διαισθητική κατανόηση του χρόνου ως χωρίς τέλος, αυτή η σχέση είναι πιο στενή ακόμα και βοηθά να ενισχυθεί η πραγματική αντίληψη του μαθηματικού απείρου: κάθε χρονική στιγμή, αναγκαία, ακολουθείται από άλλες, αλλά δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως η ολότητα του χρόνου ως άπειρη.

Έχουμε την έννοια του οντολογικού απείρου- το οποίο δεν έχει καμία εφαρμογή στην εμπειρική πραγματικότητα - και την έννοια του μαθηματικού απείρου – με το οποίο μπορούμε να δούμε τις χωρίς τέλος δυνατότητες που τα πράγματα διαθέτουν. Σύμφωνα με τον Kant, είναι μια μοναδική έννοια, η έννοια του απείρου, με δύο διαφορετικές οπτικές: την πρώτη του πως τα πράγματα είναι μέσα τους και τη δεύτερη του πως τα αντιλαμβανόμαστε. Η ιδέα μας για το άπειρο είναι μια Καντιανή Ιδέα της λογικής (πράγμα που δέχτηκε και ο Hilbert). Είναι μια έννοια που δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα, αλλά έχει μια θεμιτή χρήση. Αποτελεί ρυθμιστική ιδέα. Το να προχωρήσουμε «σα να υπήρχε μια άπειρη πραγματικότητα εκεί έξω» οδηγεί, τελικά, σε αύξηση της γνώσης και της κατανόησης (Kant, 1933). Η αυτο-συνειδητή επίγνωση του κόσμου αποτελείται από μια ποικιλία στοιχείων που έπρεπε να κρατηθούν σε μια ενότητα. Αυτό, μαζί με μία παρότρυνση για την έκφραση μιας ενόρασης που έρχεται σε αντίθεση με το δικό μας πεπερασμένο, μας προκαλεί να πούμε ότι το άπειρο υπάρχει.

Το παράδοξο είναι ότι το ανθρώπινο ον εμφανίζεται να αντιλαμβάνεται το άπειρο ως αυτό το οποίο δεν μπορεί να συλληφθεί. Η λύση είναι η άρνηση της δυνατότητας αντίληψης του απείρου με οποιονδήποτε τρόπο. Δεν υπάρχει τίποτα εκεί έξω που ο άνθρωπος να μπορεί να αντιληφθεί. Είναι απλά ότι η αυτο-συνειδητή ενδοσκόπηση τον οδηγεί σε μια ενόραση, την οποία ωθείται να εκφράσει, εφαρμόζοντας την Ιδέα του απείρου απευθείας στην πραγματικότητα. Δεν πρέπει, όμως, να γίνεται αυτό. Η ενόραση είναι στην πραγματικότητα μη εκφράσιμη – είναι πολύ δυνατή για να περιγραφεί ή να μεταφερθεί με λέξεις (Moore, 1990).

Το 1925 ο Hilbert αναφερόταν σε μία ένταση που υποχρεωτικά υφίσταται ανάμεσα στη χρήση των απείρων μαθηματικών και της έλλειψης ενός διαισθητικού εδάφους για την έννοια του απείρου: το μαθηματικό άπειρο δεν βρίσκεται στην φυσική πραγματικότητα αλλά η μαθηματική ανάλυση είναι σε απόλυτη συμφωνία με το άπειρο.

Ο Δ. Αναπολιτάνος (2020) σημειώνει ότι «Το άπειρο δεν κατακτάται με εσωτερική διάνυση αλλά με εννοιολογική υπέρβαση και αποδοχή της ύπαρξής του ως ενός αντικειμένου πέραν του βασιλείου των πεπερασμένων οντοτήτων». Ο δρόμος προς την αξιωματικοποίηση της συνολοθεωρίας των μαθηματικών έπρεπε να περάσει πρώτα από την εννοιολογική διαμάχη των όρων «δυνητικός» και «πραγματικός». Για το πρώτο παράδοξο του Ζήνωνα: της διχοτομίας (όπου ο δρομέας για να διανύσει μία απόσταση θα πρέπει να διανύσει πρώτα τη μισή, στη συνέχεια το μισό του υπόλοιπου μέρους, μετά το μισό του υπόλοιπου και ούτω καθεξής, επ' άπειρον) το άπειρον κατακτάται με «νοητικό άλμα». Ο δρομέας δεν είναι απαραίτητο να περάσει από τα άπειρα σε πλήθος σημεία, που με αυτόν τον τρόπο διαιρείται η απόσταση που έχει να διανύσει, αλλά να περάσει πάνω απ' αυτά. Το παράδοξο, σε αυτή την περίπτωση, έχει να κάνει με τον τρόπο που η κίνηση προσλαμβάνεται αισθητηριακά και το πώς αναλύεται νοητικά. Δεν είναι δυνατόν να υπάρξει «μια ελέγξιμα αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στον κόσμο, όπως πιθανώς *είναι* και στον κόσμο όπως *απεικονίζεται*». Δεν υπάρχουν στη φύση άπειρες συλλογές αντικειμένων ή διαδικασιών τις οποίες το ανθρώπινο ον να μπορεί να τις συλλάβει ως *ένα.* Οι αισθήσεις μας είναι με τέτοιον τρόπο δομημένες που μπορούμε να αντιληφθούμε μόνο με περατοκρατικό τρόπο τον κόσμο που μας περιβάλλει. Και αυτός ο κόσμος, με τον πεπερασμένο τρόπο που το έλλογο ον τον αντιλαμβάνεται- χωρίς να σημαίνει ότι είναι στην πραγματικότητα έτσι- αντιμάχεται την απειρία. « Ο άνθρωπος, ως έλλογο ον, δύναται (και μόνο έτσι τον θεάται) να αντιληφθεί τον κόσμο με τρόπο πεπερασμένο, είτε αυτός υπάρχει εκεί έξω, είτε αυτός υπάρχει μόνο ως εικόνα, αποτελώντας το σύνολο των πεπερασμένων αποτιμήσεών του» (Αναπολιτάνος, 2020).

Τεχνητή νοημοσύνη

Το 1930, ο Kurt Gödel απέδειξε το πρώτο θεώρημα της μη πληρότητας. Κάθε αξιωματικοποιημένο σύστημα μαθηματικών θα καταλήξει τελικά σε κάποια προβλήματα που δεν μπορεί να αποδείξει με κανέναν τρόπο. Υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν αποδεικνύονται αυτές αλλά ούτε οι αρνήσεις τους από τα αξιώματα της θεωρίας (μη αποκρίσιμες/μη αποφασίσιμες). «Τα μαθηματικά είναι ανοιχτά-ατελεύτητα» (Rucker, 1982). Απέδειξε, δηλαδή, αυστηρά ότι η επιστήμη δεν έχει όλες τις απαντήσεις. Οι Russell και Whitehead στο έργο τους Principia Mathematica («Μαθηματικές αρχές») απέδειξαν ότι όλες οι γνωστές μας μαθηματικές έννοιες και αλήθειες μπορούν να προκύψουν λογικά από ορισμένες πολύ απλές και βασικές αρχές. Ο Hilbert, βασιζόμενος στον ορισμό των Russell και Whitehead για το πότε μια πρόταση έπεται λογικά από κάποιες άλλες, προσπάθησε να στηρίξει ολόκληρη τη μαθηματική δραστηριότητα στην επιλογή των ορθών αξιωμάτων και τη μελέτη των λογικών συνεπειών τους. Οι θετικιστές ήλπιζαν να επεκτείνουν την προσέγγιση αυτή σε όλες τις επιστήμες και σε ολόκληρη την ανθρώπινη σκέψη.

Ο Rucker (1982) κάνει μία υπόθεση: ότι, κάποια στιγμή, ο άνθρωπος καταφέρνει να επινοήσει ένα πλήρες αξιωματικό σύστημα για τα Μαθηματικά, τότε θα είχαμε ένα σύστημα που θα μπορούσε να αποδείξει κάθε αληθή μαθηματική πρόταση και καμία ψευδής μαθηματική πρόταση δεν μπορεί να προκύψει από αυτό. Το επόμενο βήμα θα ήταν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές να επικρατήσουν ερευνητικά, έναντι της διαίσθησης και της επινοητικότητας των μαθηματικών. Θα μπορούσε τότε να κατασκευαστεί μία μηχανή, από συνδεδεμένους υπολογιστές, προγραμματισμένη με τα βασικά αξιώματα του πλήρους αξιωματικού συστήματος, η οποία θα μπορούσε να παράγει εξαντλητικά όλες τις λογικές συνέπειες αυτών των αξιωμάτων. Σε επόμενη στιγμή στο μέλλον, με αντίστοιχο τρόπο, θα κατασκευαζόταν μία αντίστοιχη «μηχανή», εφοδιασμένη με αξιώματα για τους φυσικούς νόμους (αφού η γενική σχετικότητα και η κβαντομηχανική θα είχαν ενοποιηθεί) και η οποία θα μπορούσε να παράγει όλες τις συνέπειές τους. Σε λίγα χρόνια θα είχαν διατυπωθεί πλήρεις θεωρίες για όλες τις επιστήμες- Βιολογία, Ψυχολογία, Κοινωνιολογία- και θα καταλήγαμε σε μια «μηχανή» με όλες αυτές τις θεωρίες για ολόκληρη την ανθρώπινη γνώση. Αυτή η «μηχανή» θα μπορούσε να δώσει την καλύτερη δυνατή απάντηση σε οποιοδήποτε επιστημονικό ερώτημα. Αργότερα, κάποιος θα κατόρθωνε να αναπτύξει μια πλήρη θεωρία για την αισθητική και προστέθηκε μία «μηχανή» που θα μπορούσε να παράγει καλλιτεχνικά αριστουργήματα. Τότε δεν θα έμενε στον άνθρωπο να κάνει τίποτα. Οτιδήποτε ήθελε κάποιος να κάνει, να ερευνήσει, να μάθει, να πει, υποτίθεται ότι θα το έκανε καλύτερα αυτή η παντογνώστρια «μηχανή». Ευτυχώς, καταλήγει ο Rucker, αυτό το εφιαλτικό σενάριο δεν πρόκειται ποτέ να συμβεί, επειδή ο Gödel απέδειξε ότι δεν μπορεί να υπάρξει «μηχανή» απόδειξης κάθε μαθηματικής αλήθειας. Οι μηχανές δεν θα έχουν ποτέ όλες τις αλήθειες. Πάντα θα μπορεί ένα δημιουργικό άτομο να επινοήσει κάτι καλύτερο. «Αν προσπαθήσετε να συλλάβετε το σύμπαν σε ένα πεπερασμένο σύνολο αξιωμάτων, το σύμπαν θα αντιδράσει. Η πραγματικότητα, σε ένα βαθύτερο επίπεδο, είναι ουσιαστικά άπειρη. Καμιά πεπερασμένα προγραμματισμένη μηχανή δεν θα μπορέσει ποτέ να εξαντλήσει τον πλούτο του νοητού και υλικού κόσμου που κατοικούμε» (Rucker, 1982).

Για τον Gödel τα σύνολα και οι έννοιες υπάρχουν ανεξάρτητα από τη δραστηριότητα των ανθρώπων, και τα ερωτήματα για τα άπειρα σύνολα δεν είναι λιγότερο σημαντικά από τα ερωτήματα της Φυσικής. Απέδειξε ότι το σύνολο των αληθών μαθηματικών προτάσεων δεν είναι πεπερασμένα περιγράψιμο, αλλά είναι άπειρο. Είχε, λοιπόν, μια πλατωνική άποψη, ότι τα αφηρημένα αντικείμενα που μελετούμε δεν τα δημιουργούμε- αλλά τα ανακαλύπτουμε. Πίστευε, ότι οι φυσικοί αριθμοί, τα άπειρα σύνολα και τα υπόλοιπα μαθηματικά αντικείμενα είναι μη υλικές οντότητες που υπάρχουν πραγματικά, και οι μαθηματικοί καταλήγουν σε αυτά με αυτό που αποκαλούσε «μαθηματική ενόραση» - μια διεργασία εξίσου αξιόπιστη με τη συνηθισμένη αισθητηριακή αντίληψη (Rucker, 1980). Παρατηρεί, ακόμη, ότι ο ανθρώπινος νους δεν μπορεί να τυποποιήσει όλες τις ενοράσεις του. Αν θα μπορούσε να υπάρξει μια μηχανή που ισοδυναμεί με την ανθρώπινη μαθηματική ενόραση θα ήταν μόνο μέσω της *εξέλιξης*. Εμείς δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια μηχανή, και αν υπήρχε δεν θα μπορούσαμε να καταλάβουμε το πρόγραμμά της (Ο John von Neumann (1966) είχε αναπτύξει τη βασική θεωρία των αυτομάτων που αναπαράγονται). Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ρομπότ που θα κατασκεύαζαν εργοστάσια που παράγουν άλλα ρομπότ. Με μία εντολή στο βασικό τους πρόγραμμα που θα απέκλειε την ακριβή αντιγραφή θα μπορούσαμε να έχουμε μεταλλάξεις και άρα εξέλιξη. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσε να υπάρξει μια μηχανή που αποδεικνύει θεωρήματα και θα έχει ικανότητες όπως και η ανθρώπινη μαθηματική ενόραση.

Σύμφωνα με τον Rucker, λοιπόν, θα μπορούσε να υπάρξουν ρομπότ με συμπεριφορά όπως η ανθρώπινη. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν αυτά τα σκεπτόμενα, πολύ εξελιγμένα ρομπότ θα είχαν συνείδηση. Υποστηρίζει ότι το σύνολο της ανθρώπινης συνείδησης είναι το απλό αίσθημα της ύπαρξης, που εκφράζεται από την πρωταρχική έκφραση: *Είμαι*. Υπάρχω σημαίνει έχω συνείδηση. «Παραδοσιακά, όσοι υποστήριζαν την ισοδυναμία των ανθρώπων και των (πιθανών) μηχανών ήταν θετικιστές, υλιστές υποστηρικτές της μηχανιστικής αντίληψης. Η βασική τους θέση ήταν: οι άνθρωποι δεν υπερτερούν των μηχανών» (Rucker, 1982). Υπάρχουν τρεις θέσεις σχετικά με τα ερωτήματα για τις ανθρώπινες και ρομποτικές ψυχές: (α) Ο μηχανικισμός: οι μηχανές- τα ρομπότ είναι όπως και οι άνθρωποι, (β) ο ανθρωπισμός: οι άνθρωποι μόνο έχουν ψυχή και (γ) ο μυστικισμός: καθετί που υπάρχει, άνθρωποι και μηχανές μετέχουν στο Απόλυτο.

Η τεχνολογική πρόοδος οδηγεί στην επινόηση εφαρμογών που αυτοματοποιούν δραστηριότητες που πριν τις έκαναν οι άνθρωποι. Βέβαια, οι άνθρωποι είναι ακόμα σημαντικοί και απαραίτητοι για τη λειτουργία πολλών τεχνολογικών εφαρμογών, γιατί ουσιαστικά τις χρησιμοποιούν, τις κατευθύνουν, τις διαχειρίζονται. Ωστόσο, ο άνθρωπος που τις λειτουργεί πρέπει να εκπαιδευτεί και να είναι σίγουρος για τις απαιτούμενες ικανότητες για τη χρήση των εφαρμογών. Από την άλλη μεριά, οι καταναλωτές συχνά δεν θεωρούν κάποιες συσκευές ως τεχνολογία, επειδή είναι ήδη εξοικειωμένοι με αυτές. Η διαίσθηση οδηγεί στην αποδοτικότητα, όταν η χρήση της τεχνολογίας δεν απαιτεί εκμάθηση. Και αυτό συμβαίνει γιατί στις μέρες μας η ανάπτυξη της τεχνολογίας αφορά όλο και περισσότερο τον αυτοματισμό. Η διαισθητική χρήση είναι μεταξύ του στοιχειώδους διαισθητικού σταδίου και του πλήρη αυτοματισμού. Η επίτευξη του πλήρους αυτοματισμού θα έδινε τη δυνατότητα στους ανθρώπους να αφιερώσουν την ενέργειά τους σε κάτι άλλο, εκτός από τα συχνά κουραστικά και χρονοβόρα ή κουραστικά καθήκοντά τους. Για παράδειγμα το πλυντήριο μπορεί να θεωρηθεί «μηχανή βιβλίο» από την άποψη ότι έδωσε στις γυναίκες χρόνο για μελέτη και εκπαίδευση (Rosling, 2010). Αυτή η άποψη συνδέεται με μια δήλωση του A. Whitehead πριν από έναν αιώνα: «Ο πολιτισμός προοδεύει με την επέκταση ενός αριθμού σημαντικών πράξεων οι οποίες μπορούν να εκτελεστούν χωρίς να τις σκεφτόμαστε» (Whitehead, 1911, p.61). Επομένως, ο αυτοματισμός οδηγεί τον άνθρωπο στην προσωπική ολοκλήρωση, αφού ο επιπλέον ελεύθερος χρόνος που εξοικονομείται του δίνει τη δυνατότητα να απολαύσει κάτι διασκεδαστικό ή περισσότερη άνεση στην καθημερινή του ζωή. Όταν η διαισθητική χρήση γίνεται αυτοματοποιημένη, ενστικτώδης ή ακόμα και «γενετική», οι άνθρωποι καταλήγουμε να χρησιμοποιούμε την τεχνολογία όπως χρησιμοποιούμε τα εσωτερικά μας όργανα- δηλαδή αδιαφορώντας για την ύπαρξή τους. Οι περισσότερες προβλέψεις της ανάπτυξης της τεχνητής νοημοσύνης είναι για τον πλήρη αυτοματισμό της εργασίας τελικά. Το ενδιαφέρον ανθρώπινο-τεχνολογικό ερώτημα που προκύπτει είναι αν ο άνθρωπος θα πρέπει να πανικοβάλλεται ή να χαίρεται γι' αυτό. Επομένως, η μελέτη του αυτοματισμού, της ρομποτικής, της τεχνητής νοημοσύνης και γενικά της τεχνολογίας θα πρέπει να συνδυάζεται με την αξία της εργασίας – αν όχι με το νόημα της ζωής (Jouhki, 2019).

Η Friend (2007) αναφέρει, ότι υπάρχει μια τρέχουσα αναβίωση του φορμαλισμού από την επιστήμη των υπολογιστών. Για τον φορμαλιστή, δεν υπάρχουν εξωτερικές προϋποθέσεις στα μαθηματικά. Δεν στηρίζεται στην ενόραση ή στην εφαρμοσιμότητα, θεωρεί ότι οι αληθοτιμές των μαθηματικών προτάσεων εξαρτώνται από το παιχνίδι μέσα στο οποίο μορφοποιούνται. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές απλά και μόνο εκτελούν διεργασίες με βάση ένα σύνολο κανόνων, δεν έχουν επίγνωση του τι κάνουν. Έτσι, τα μαθηματικά είναι μία δραστηριότητα χωρίς νόημα, χωρίς εμπειρική ή συναισθηματική έννοια. Μερικοί μαθηματικοί, μερικοί κοινωνιολόγοι και οικονομολόγοι θεωρούν τα ανθρώπινα όντα «κατ' ουσίαν» αλγορίθμους, δηλαδή ότι είναι ουσιαστικά μηχανές. Μερικοί επιστήμονες των υπολογιστών θεωρούν όλες οι νοητικές μας διεργασίες μπορούν να περιγραφούν από τα μαθηματικά. Με άλλα λόγια, ο φορμαλιστής βλέπει την ανθρώπινη νοητική δραστηριότητα κυρίως ως μηχανική, και έτσι προσεγγίζει τον ψυχολογιστή. Στον ψυχολογισμό γίνεται η αναγωγή των μαθηματικών στην εγκεφαλική δραστηριότητα. «Τα μαθηματικά πρέπει να εξηγούνται με όρους νευροψυχολογίας». Ο ψυχολογιστής δεν θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι αιώνιες αλήθειες και ανεξάρτητες από εμάς, αλλά ότι εξαρτώνται από την εγκεφαλική μας διαμόρφωση. Στον ψυχολογισμό η μηχανή μιμείται τον άνθρωπο, ενώ στον φορμαλισμό, αντίθετα, το ανθρώπινο ον μιμείται την μηχανή. Έτσι, για τον ψυχολογιστή, οι υπολογιστές δημιουργήθηκαν από τον άνθρωπο για να επεκτείνει τις ικανότητές του. Θεωρεί ότι στο μέλλον η νευροεπιστήμη θα καταφέρει την αναγωγή των μαθηματικών στην εγκεφαλική δραστηριότητα και ότι είναι απλά «θέμα χρόνου η εύρεση των μηχανισμών και η ικανότητα τροποποίησής τους μέσω εγχείρησης ή χημικών διεργασιών». Αυτή η αναγωγή, βέβαια, δεν ενδιαφέρει τον ερευνητή των μαθηματικών, ίσως μόνο τον δάσκαλο, τον νευρολόγο ή τον γνωσιακό επιστήμονα (Friend, 2007).

Εν τέλει όμως, στη συζήτηση σχετικά με τον ανθρώπινο νου και τον υπολογιστικό τρόπο σκέψης (βλ. Penrose, 1989) φαίνεται να επικρατεί η άποψη ότι η ανθρώπινη σκέψη δεν εξαντλείται σε όρους υπολογισιμότητας. Είναι κάτι περισσότερο από τους αλγορίθμους ακόμα και αν μπορούσε να υποτεθεί ότι θα μπορούσαν να υπάρξουν μηχανές που να υπολογίζουν τα πάντα.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ - ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Μια από τις πιο σημαντικές αλλά και αμφιλεγόμενες έννοιες στην ιστορία της φιλοσοφίας και των μαθηματικών είναι η έννοια του απείρου. Είναι μια έννοια που άσκησε ιδιαίτερη γοητεία αλλά και ταλάνισε την ανθρώπινη νόηση για χιλιάδες χρόνια. Το άπειρο ήταν από την αρχαιότητα συνδεδεμένο με το αδύνατο, το απροσπέλαστο, το ασύλληπτο λόγω των αντιφάσεων που παρουσιάζονταν στις προσπάθειες προσέγγισής του. Η αντίθεση της έννοιας του απείρου με την πεπερασμένη φύση του ανθρώπινου όντος είναι η αιτία που το άπειρο άσκησε- αλλά και ασκεί - τόσο μεγάλη έλξη σε μαθηματικούς και φιλοσόφους σε όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Άλλωστε μαθηματικά και φιλοσοφία είναι άρρηκτα συνδεδεμένα μεταξύ τους από την αρχαιότητα. Φιλόσοφοι, μαθηματικοί, αλλά και θεολόγοι –γιατί είχε/έχει και μια θεολογική πτυχή- προσπάθησαν να το τιθασεύσουν, να το κατανοήσουν και να το προσδιορίσουν.

Η ανάγκη για την προσπέλαση του απείρου στην αρχαία φιλοσοφία συνδέεται με την ανάγκη της περιγραφής της «Ολότητας», δηλαδή την ανάγκη της ανακάλυψης του μοναδικού αρχικού λόγου, της «αρχής» που μπορεί να εξηγήσει την ύπαρξη και τα χαρακτηριστικά κάθε όντος. Αυτός ο στόχος έχει σχέση με μία επιδίωξη της σύγχρονης επιστήμης, για παράδειγμα, να εντοπίσει στοιχεία που είναι θεμελιώδη και να ενώσει τελικά όλους τους φυσικούς νόμους σε μία μεγάλη θεωρία («τη θεωρία των πάντων»). Μέσα σε αυτό το εννοιολογικό πλαίσιο, η ιδέα του απείρου μπορεί να έχει διάφορες –αλληλένδετες- σημασίες. Πρώτα, το άπειρο με την έννοια του χαρακτήρα του συνόλου της ύπαρξης, της «Ολότητας». Το άπειρο ως υπαρκτή ολότητα είναι το «ενεργεία άπειρο» το οποίο προκάλεσε την απέχθεια διαφόρων φιλοσόφων. Ο Αριστοτέλης πρότεινε το «δυνάμει άπειρο» ως ανεξάντλητη διαδικασία εκπλήρωσης δυνατοτήτων. Επηρέασε σε σημαντικό βαθμό μεταγενέστερες φιλοσοφικές προσπάθειες προσέγγισης του απείρου.

Για τον Παρμενίδη (γεν. 515 π. Χ. Ελέα Κ. Ιταλία) το «Ον» είναι αιώνιο (με την έννοια του όντος χωρίς παρελθόν και μέλλον, αφού δεν μπορεί να προέρθει από το μη-είναι) και αμετάβλητο. Η επιστημολογική ανάγκη να ξεφύγουμε από το παράδοξο των αυθαίρετων «οντολογικών κενών» - είτε αυτά εννοούνται ως κενά στην «αρμονία της εμπειρίας», είτε ως χαρακτηριστικά του κόσμου στο να είναι κατανοητός από μία αρχή – συνδέει τα ζητήματα της ύπαρξης και της σύλληψης του απείρου. Διότι, ανεξήγητα κενά στην αρμονία της εμπειρίας μπορούν να επιμείνουν για πάντα αν οποιοδήποτε χαρακτηριστικό της εμπειρίας μπορεί να ερμηνευτεί από ένα άλλο πεπερασμένο χαρακτηριστικό της εμπειρίας. Μια τέτοια «άπειρη προς τα πίσω εξήγηση», η οποία προσθέτει ένα πεπερασμένο στοιχείο πάνω σε ένα άλλο είναι μια «κακή» έννοια του απείρου, όπως θα υποδείξει ο Hegel. Και αυτό γιατί είναι σε ισχύ μια σύγκρουση με τη μεταφυσική αναγκαιότητα να έχουμε μία πλήρως ολοκληρωμένη Ολότητα. Επιπλέον, αν πούμε ότι το να συνεχίσουμε να προσθέτουμε ένα πεπερασμένο στοιχείο πάνω σε ένα άλλο επ' άπειρον είναι σε αντίφαση με τη συνθήκη ύπαρξης μίας πεπερασμένης πραγματικότητας, αυτό επίσης σημαίνει ότι μια τέτοια «πράξη» δεν μπορεί πρακτικά να «πραγματοποιηθεί». Τέλος, η ιδέα του απείρου ως η άπειρη διαιρετότητα ενός συγκεκριμένου μεγέθους ή χρόνου. Η έννοια της ύπαρξης του απείρου και της αντίληψής- κατανόησής του είναι αλληλένδετες. Για να «υπάρχει» κάτι πρέπει κατ' αρχήν να αποδειχθεί ότι οι συνθήκες της πραγματικής ή διανοητικής του κατανόησης είναι δυνατές.

Το αίσθημα αμηχανίας και ματαιότητας που προκαλούσε το άπειρο στη φιλοσοφική σκέψη την οδήγησε συχνά στον εξοβελισμό του απείρου, ή τουλάχιστον του «ενεργεία απείρου». Για τους αρχαίους Έλληνες σήμαινε εκτός από το απεριόριστο, το ασαφές- όπως το χάος που υπήρχε πριν τη δημιουργία του κόσμου. Για τους Πυθαγόρειους τα πάντα ήταν μετρήσιμοι αριθμοί και μάλιστα «λόγοι» και θεωρούσαν το άπειρο ατελές σε σχέση με το πεπερασμένο. Τους πρώτους σπόρους για προβληματισμό σχετικά με το συνεχές τους έθεσε ο Ζήνων με τα γνωστά του παράδοξα (της Διχοτομίας και του Αχιλλέα), όπου επισημαίνει τις αντιφατικές συνέπειες της παραδοχής της επ' άπειρον διαίρεσης του χώρου και του χρόνου. Εδώ αποκαλύπτεται η διαφορά μεταξύ του διακριτού και του συνεχούς και ο κίνδυνος της μη συνετής χρήσης του απείρου.

Ο Αριστοτέλης δεν απέρριπτε εντελώς το άπειρο. Το έβλεπε στο ατελεύτητο του χρόνου, στην άπειρη διαιρετότητα των μαθηματικών μεγεθών, στην αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς, στο απεριόριστο της ανθρώπινης σκέψης. Θεωρούσε ότι και η αποδοχή και η απόρριψη του απείρου οδηγούσε σε αντιφάσεις. Όπως προαναφέραμε, ήταν εκείνος που δημιούργησε τη διάκριση «δυνάμει»/«ενεργεία» απείρου ώστε να είναι σε θέση να δώσει μια εξήγηση στα παράδοξα που ακολουθούν την εξερεύνηση του απείρου. Υιοθέτησε το «δυνάμει» άπειρο, υπέθεσε την ύπαρξη ενός πεπερασμένου σύμπαντος ή μάλλον κόσμου όπως το έθεσε ο A. Κοϋρέ, ο οποίος ήταν ιεραρχημένος και ποιοτικά διαφοροποιημένος. Επίσης δέχθηκε την ύπαρξη μιας αδιάστατης οντότητας που είναι η πηγή κάθε κίνησης και η οποία είναι πέρα από την εμπειρία. Επιπλέον υποστήριζε ότι οι (φυσικοί) αριθμοί είναι δυνάμει άπειροι, αφού μπορούμε να συνεχίσουμε όσο επιθυμούμε να βρίσκουμε μεγαλύτερους φυσικούς αριθμούς, δεν είναι όμως ενεργεία άπειρη ολότητα, ως σύνολο (όπως το βλέπουμε σήμερα) αφού δεν υπάρχει ως μία πλήρως ολοκληρωμένη οντότητα. Για τον Αριστοτέλη η επ' άπειρον διαίρεση ενός νοητού μεγέθους είναι μια δυνάμει διαδικασία χωρίς τέλος. Το άπειρο για εκείνον είναι ατελές, ανολοκλήρωτο και ασύλληπτο.

Το άπειρο βρέθηκε στο μεσαίωνα ως αντικείμενο της θεολογικής σκέψης και έγινε ιδιότητα του Θεού. Στη συνέχεια, όμως, είχαμε μια αναβίωση των ιδεών του Πλάτωνα και του φιλοσοφικού συστήματος του Αριστοτέλη όπως και τη διδασκαλία του αριστοτελικού επιστημονικού έργου στα μεσαιωνικά ευρωπαϊκά πανεπιστήμια. Τότε χρειάστηκε να υπάρξει ένας συμβιβασμός του χριστιανικού δόγματος με τη διδασκαλία των αρχαίων φιλοσόφων. Ο Πλωτίνος εισήγαγε ουσιαστικά τον Νεοπλατωνισμό και θεωρούσε τουλάχιστον το Εν ή τον Θεό άπειρο. Ο Αυγουστίνος, προσπαθώντας να συμφιλιώσει τον Νεοπλατωνισμό με τον Χριστιανισμό, θεωρούσε τον Θεό πραγματικό, υπερβατικό άπειρο. Υποστήριξε ότι αυτό που φαίνεται άπειρο στους ανθρώπους για τον Θεό είναι πεπερασμένο, αφού Εκείνος έχει τη δυνατότητα άπειρων σκέψεων. Ο Θωμάς Ακινάτης πίστευε στο οντολογικό άπειρο του Θεού ως αυτοδύναμο και τέλειο, όχι όμως ως μαθηματικά άπειρο, δεν πίστευε ότι υπήρχε κάπου στον κόσμο ένα πραγματικό άπειρο, ούτε ως μέγεθος, ούτε ως πολλαπλότητα. Ο Duns Scotus δεχόταν ότι τα απειροστά, όπως τα σημεία, μπορούν να υπάρχουν στην πραγματικότητα από μόνα τους. Αντίθετα, ο William του Ockham θεωρούσε τα απειροστά «καθαρές επινοήσεις», έναν τρόπο γλωσσικής έκφρασης χωρίς ύπαρξη.

Οι στοχαστές του Μεσαίωνα δεν πίστευαν ότι μπορεί να υπάρξει μια ολοκληρωμένα άπειρη οντότητα στον δημιουργηθέντα κόσμο. Τα πρώτα δείγματα της νεότερης αντίληψης για το ολοκληρωμένο άπειρο στα Μαθηματικά δόθηκαν στην περίπτωση του Γαλιλαίου, ο οποίος προσπαθούσε να συγκρίνει άπειρες ποσότητες, με 1-1 αντιστοιχίες και βρέθηκε σε δύσκολη θέση διαγιγνώσκοντας μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ φυσικών αριθμών και άρτιων αριθμών. Όπως ο Αριστοτέλης έτσι και οι φιλόσοφοι της νεώτερης περιόδου ($17^{ος}$-$18^{ος}$ αι.) δεν πίστευαν στο πραγματικό (ενεργεία) άπειρο αλλά μόνο σε δυνητικά (δυνάμει) άπειρα. Όμως, ακόμα και αν για τα άπειρα σύνολα δεν ισχύει ό,τι για τα πεπερασμένα, αυτό δεν σημαίνει ότι το άπειρο είναι μια αντιφατική έννοια. Ο Nicholas Κουζάνος επέστρεψε στον πλατωνισμό, ήταν πεπεισμένος θεολογικά όμως, ότι μέσω της πίστης, θα μπορούσαμε να έρθουμε σε μία άμεση και ανείπωτη γνώση του απείρου.

Ο Descartes, προσπαθώντας να απαλλαγεί από τη μεσαιωνική φιλοσοφική σκέψη και να επανεξετάσει όλη την προηγούμενη φιλοσοφική παράδοση, παρατήρησε ότι αφού μόνο ο Θεός είναι άπειρος, θα μπορούσε να μας εμφυσήσει την ιδέα του απείρου το οποίο θα μπορούσαμε να «αγγίξουμε» όχι με την εμπειρία αλλά με την σκέψη μας – τον Λόγο. Διακρίνει την πραγματικότητα στην μορφική (την πραγματικότητα του κόσμου έξω από εμάς) και την αντικειμενική (τη νοητή εξεικόνιση από εμάς του κόσμου). Ο Descartes πιστεύει πως επειδή μπορούμε να συλλάβουμε την ιδέα ενός άπειρου Θεού ενώ εμείς οι ίδιοι δεν είμαστε άπειροι, τότε αυτή η αντίληψη πρέπει να έχει δημιουργηθεί από κάτι πέρα από εμάς- δηλαδή από την επίσημη (τυπική) πραγματικότητα του Θεού. Ο Leibniz θεωρούσε ότι η φύση είναι συνεχής, δηλαδή χωρίς κενά ή εγκοπές, αφού ο Δημιουργός επέλεξε να δημιουργήσει τον καλύτερο δυνατό κόσμο, και ο καλύτερος δυνατός κόσμος δεν μπορεί να περιέχει κενά που δεν μπορούν να εξηγηθούν. Για τον Leibniz όμως, ο κόσμος είναι διακριτός σε οντολογική βάση επειδή αποτελείται θεμελιωδώς από τελικά αμερείς οντότητες (τις μονάδες). Από την άλλη πλευρά, το χωροχρονικό μας σύμπαν είναι άπειρα διαιρετό, γιατί ο χωροχρόνος ανήκει στο επίπεδο των φαινομένων. Οι εμπειριστές Locke και Hume, υποστήριζαν ότι δεν μπορούμε να έχουμε καμία ιδέα ή έννοια για οτιδήποτε το οποίο δεν αντιλαμβανόμαστε μέσω της εμπειρίας. Ο Berkeley δεν αποδέχεται την έννοια του πραγματικού απείρου, γιατί αυτό θα σήμαινε αποδοχή μιας απειρίας ιδεών όλων μαζί στον πεπερασμένο ανθρώπινο νου. Με τον ίδιο τρόπο, δεν αποδέχεται και την άπειρη διαιρεσιμότητα μεγεθών με πεπερασμένη έκταση. Έτσι, αντιλαμβανόταν τον χωροχρόνο ως διακριτό.

Ο Kant ήθελε να δεχτεί, μαζί με τους ρασιοναλιστές (Descartes και Leibniz) ότι έχουμε μια ουσιαστική a priori γνώση. Θεώρησε τη συνέχεια ή την ασυνέχεια της ύλης και την επ' άπειρον ή μη διαιρετότητά της σα μια λογική αντινομία χωρίς διέξοδο στην «Κριτική του Καθαρού Λόγου». Πίστευε πως ο άνθρωπος μέσω της λογικής και της σκέψης του, θα μπορούσε να υπερβεί τις δικές του πεπερασμένες διαστάσεις και να προσεγγίσει το άπειρο. Ως πεπερασμένα όντα θα μπορούσαμε, όμως, να συλλάβουμε τις συνέπειες της απειρίας του Λόγου μόνο με όρους του κόσμου του χώρου και του χρόνου. Με άλλα λόγια το άπειρο είναι μια «ρυθμιστική ιδέα».

Στο πεδίο των μαθηματικών, τον 17^{ο} αι. έχουμε την ανάπτυξη του Λογισμού από τους Leibniz και Newton (παράλληλα αλλά ανεξάρτητα) ως ένα σύνολο μαθηματικών τεχνικών για τον χειρισμό των απειροστών (στην προσπάθειά τους να υπολογίζουν δυνάμεις, ταχύτητες, τιμές επιτάχυνσης, επιφάνειες, όγκους). Τα απειροστά είναι απείρως μικρές, αλλά μη μηδενικές οντότητες και συνδέονται στενά με την έννοια της αναζήτησης του συνεχούς. Ο Λογισμός, λόγω της μη αυστηρής θεμελίωσής του, δέχτηκε κριτική από τον ιδεαλιστή φιλόσοφο Berkeley ο οποίος κατηγόρησε τον Λογισμό ότι απαιτεί ένα ανάλογο άλμα πίστης με τον Χριστιανισμό αφού χρησιμοποιεί απειροστά. Χαρακτήρισε τα απειροστά ως «φαντάσματα πεθαμένων ποσοτήτων». Ο εξοβελισμός των απειροστών κατά τον 17^{ο} αι. οφειλόταν στην ασάφεια και την αντιφατικότητά τους, η αποτελεσματικότητά τους όμως ήταν γεγονός. Αργότερα, με την εισαγωγή των ακολουθιών Cauchy, και τις ε-δ τεχνικές θεμελιώθηκε αξιωματικά η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Έτσι οι αμηχανίες των φιλοσόφων αντιμετωπίστηκαν επιτυχώς από τη μαθηματική δραστηριότητα. Οι μαθηματικοί ήταν αυτοί που θεμελίωσαν τις έννοιες του σημείου, των πραγματικών αριθμών και της ολότητας της πραγματικής ευθείας. Αργότερα, ωστόσο, ο Abraham Robinson, (το 1961) με τη μη καθιερωμένη ανάλυση (non-standard analysis), παρήγαγε μια τεχνική με την οποία τα απειροστά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και πάλι χωρίς τον κίνδυνο των αντιφάσεων που εμφανίζονταν τον 17^{ο} αι.

Ο Dedekind επιθυμούσε να περιγράψει το συνεχές των πραγματικών αριθμών ώστε να ελευθερώσει τον λογισμό από αναγκαίες γεωμετρικές αναφορές και εποπτείες. Όρισε τους πραγματικούς αριθμούς με το να τους συνδέσει άμεσα με την αρχή της συνέχειας. Ο Dedekind δημιούργησε τους πραγματικούς αριθμούς μέσω «τομών» στο σύνολο των ρητών αριθμών. Είναι ενδιαφέρον ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών του Dedekind δημιουργεί έναν λογισμό που δεν χρειάζεται να βασιστεί στα απειροστά.

Ο Cantor επίσης αποκάλεσε τα απειροστά, τον 19^{ο} αι., «βακίλους χολέρας» που μολύνουν τα μαθηματικά και προσπάθησε να αποδείξει ότι τα απειροστά ήταν εσωτερικά ασυνεπή ούτως ώστε να τα αποκλείσει από τη μαθηματική πραγματικότητα. Ήθελε να καλύψει τα κενά στο έργο του Dedekind και να ορίσει μαθηματικά μια ουσιαστική σύνδεση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ώστε η συνέχεια να μην είναι απλά μια συλλογή διακριτών στοιχείων. Η συστηματική μελέτη των συνόλων άρχισε μόνο στο τέλος του 19^{ου} αι. με το έργο του Cantor, που δημιούργησε μια αυστηρή θεωρία του ολοκληρωμένου απείρου, με άλλα λόγια του «ενεργεία» απείρου, με την οποία μπορούμε να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Έτσι, φτάνει στους διατακτικούς και τους πληθαρίθμους. Επιπλέον, διατυπώνεται η μη αποκρίσιμη πρόταση «Υπόθεση του Συνεχούς» η οποία δεν αποδεικνύεται αλλά ούτε η άρνησή της επίσης. Στην αρχή του $20^{ου}$ αι. ωστόσο έχουμε εμφάνιση παραδόξων (Burali-Forti, Russell, Cantor) που αναφέρονταν στη συνολοθεωρία. Τα παράδοξα αποφεύχθηκαν, τελικά μόνον με την αξιωματικοποίηση της θεωρίας συνόλων από τον Zermelo και με τις προσθήκες του Fraenkel – γνωστή ως ZF θεωρία συνόλων. Έπρεπε δηλαδή να αποκλειστούν κάποιες διαισθητικές ιδέες που προϋπήρχαν στον Cantor ως προς τον σχηματισμό συνόλων με βάση δεδομένες ιδιότητες.

Ο David Hilbert ήθελε να εξασφαλίσει τα θεμέλια των Μαθηματικών κατά των αντιφάσεων, δίνοντας πεπερασμένες και αυστηρές διαδικασίες για την εργασία στα Μαθηματικά. Πίστευε ότι «το άπειρο ανήλθε στο θρόνο του και απήλαυσε τον απόλυτο θρίαμβό του» χάρη στις εργασίες των Dedekind και Cantor (Hilbert, 1926). Όμως, το άπειρο για εκείνον έπρεπε να χρησιμοποιηθεί με μεγάλη προσοχή με άλλα λόγια έπρεπε να τιθασευθεί επειδή δεν ήταν μέρος της φύσης. Με το πρόγραμμά του πρότεινε περατοκρατικές μεθόδους απόδειξης στα μεταμαθηματικά και ιδιαίτερα αποδείξεις συνέπειας. Το 1931 ο Kurt Gödel απέδειξε- με το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας- ότι σε κάθε τυπικό σύστημα που περιέχει την αριθμητική των φυσικών αριθμών υπάρχουν και μη αποκρίσιμες προτάσεις και έτσι διαφαίνεται το χάσμα ανάμεσα στην αλήθεια και την αποδειξιμότητα. Επιπλέον έδειξε με το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας ότι η συνέπεια μίας μαθηματικής θεωρίας δεν αποδεικνύεται με τα μέσα του εσωτερικού αυτής της θεωρίας. Το πρόγραμμα του Hilbert βρέθηκε σε δυσμενή θέση.

Τελικά, οι μαθηματικοί δέχτηκαν το άπειρο ως μαθηματικό αντικείμενο και ως «ενεργεία» ολότητα. Είναι, όμως, τελικά δυνατόν να συλλάβει η ανθρώπινη νόηση την έννοια του απείρου; Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, κάθε ον πρέπει να έχει ένα σκοπό, ένα «τέλος» που φανερώνει το νόημα και τη σημασία του. Πίστευε, όμως, πως οτιδήποτε άπειρο υπερβαίνει την ανθρώπινη νόηση. Ο Kant υποστήριξε, ότι θα πρέπει να δώσουμε νόημα στη λογική μας με όρους μαθηματικού απείρου, με την έννοια ότι η ζωή μας μπορεί να θεωρηθεί ως μια άπειρη εξέλιξη. Η σύγκρουση άπειρου και πεπερασμένου είναι ένα δίλημμα βαθιά ριζωμένο στην ανθρώπινη φύση. Ο άνθρωπος, όντας πεπερασμένος χωροχρονικά και με περιορισμένες δυνατότητες, έρχεται σε επαφή με τη φύση, βλέπει τον ουρανό, αντιμετωπίζει διαδικασίες που επαναλαμβάνονται ξανά και ξανά σε μια αέναη διαδοχή, και έτσι ανακύπτουν τα αιώνια ερωτήματα. Το άπειρο όμως έχει πραγματωθεί στο Σύμπαν μας; Είναι δυνατές οι άπειρες διαδικασίες; Ή απλά το άπειρο είναι μια νοητική σύλληψη της άρνησης του πεπερασμένου; Αυτό, όμως, το οποίο μπορεί να αντιληφθεί εμπειρικά ο άνθρωπος είναι σύμφωνο με τις πεπερασμένες ικανότητες του ανθρώπινου όντος. Επομένως, η ανθρώπινη νόηση αντιλαμβάνεται τον κόσμο με τρόπο πεπερασμένο – χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ο κόσμος εκεί έξω είναι κατασκευασμένος με τον ίδιο τρόπο.

Οι επαναλαμβανόμενες αλληλουχίες, που αντιμετωπίζει ο άνθρωπος, ενίσχυσαν την αντίληψη ότι μια ακολουθία συμβάντων μπορεί να είναι ατέρμονη- ακόμη και αν δεν υπάρχουν απτά στοιχεία που να το αποδεικνύουν. Η ιδέα ότι ο χρόνος κάποτε τελειώνει είναι εξίσου αδιανόητη με την ιδέα ότι συνεχίζεται επ' άπειρον. Συνειδητοποιώντας το πεπερασμένο της ανθρώπινης υπόστασης και την απεραντοσύνη του κόσμου που μας περιβάλλει, αναλογιζόμαστε: που μας οδηγεί η ανάπτυξη της τεχνολογίας; Μπορεί μια μηχανή να καταφέρει μια άπειρη διαδικασία; Από τη μια πλευρά, η εξέλιξη της τεχνολογίας, η τεχνητή νοημοσύνη μας δίνει εφόδια για την αντίληψη της πραγματικότητας και του κόσμου γύρω από εμάς, από την άλλη, αισθανόμαστε με βεβαιότητα –και άλλωστε έχει υποστηριχθεί- ότι η συνείδησή μας είναι κάτι περισσότερο από τη μηχανική λειτουργία ενός υπολογιστικού προγράμματος. Η μελέτη του αυτοματισμού, της ρομποτικής, της τεχνητής νοημοσύνης και γενικά της τεχνολογίας θα πρέπει να συνδυάζεται με την αξία της εργασίας – αν όχι με το νόημα της ζωής.

Μπορεί κάποτε οι άνθρωποι να απαξιούσαν το άπειρο λόγω των αντιφάσεων που επέφερε στην διερεύνησή του, σήμερα είναι σαφές ότι μπορεί να είναι αρωγός στην αναζήτηση της αλήθειας ως ρυθμιστικός παράγοντας και ρυθμιστική ιδέα για την γνώση. Ο προβληματισμός-στοχασμός για το άπειρο δεν εξαντλείται, αλλά μπορεί να είναι γόνιμος για περαιτέρω εξέλιξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barrow, J.D. (2007). *Άπειρο, τα μαθηματικά της αθανασίας,* Αθήνα, εκδ. Τραυλός.

Berkeley G.(1734), The Analyst, Wilikins D. (2002), Dublin, Printed by and for S. Fuller.

Bradley Dowden "The Infinite", Internet Encyclopedia of Philosophy
California State University Sacramento, U.S.A.

Brittan Gordon (2006) "Kant's Philosophy of Mathematics", in: Graham Bird (ed) *A Companion to Kant*, Blackwell Publ. pp. 222-235

Bruno G. (2015), *Περί του Απείρου, του Σύμπαντος και των Κόσμων*, Θεσσαλονίκη, εκδ. Ρώμη (μτφρ. Ι. Στανιμεράκη, επιμ. Π. Δόικος)

Buckley B.L. (2008), *The Continuity Debate*, Boston, Massachusetts, publ. Docent Press

Cantor G. (1878), *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Journal fur die rein und angewandte Mathematik, 94:242-258

Cantor G. (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematischphilosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. B. G. Teubner, Leipzig

Creech P. (2015), "The Problem of Infinity in Meditation III", Pepperdine University, Seaver College http://digitalcommons.pepperdine.edu/globaltides/vol9/iss1/1

Christopoulou, D. (2019) "Sets and Necessity", *Politeia* 1 (3), pp. 99-110

Contingham, J. *Φιλοσοφία της Επιστήμης, Α΄ Οι Ρασιοναλιστές*, Αθήνα, εκδ. Πολύτροπον, 2003 (μτφρ. Σ. Τσούρτη, επιμ. Α. Χρύσης)

Copleston, F. (1993) *A History of Philosophy*, vol. II Medieval Philosophy, N. York, London, publ. Doubleday

Crombie, A. C. *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλιλαίο*, τ. Β΄, Αθήνα, ΜΙΕΤ 1992 (μτφρ. Μ. Ιατρίδου, Δ. Κούρτοβικ, επιμ. Π. Χριστοδουλίδης)

Dauben J. W. (1990), *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, Princeton

Friend M. (2020), *Γνωρίζοντας τη φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, εκδ. Επίκεντρο (μτφρ. Β. Πέτρου, επιμ. Δ. Χριστοπούλου)

Grant, E. *Οι φυσικές επιστήμες τον Μεσαίωνα*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδ. Κρήτης, 2004 (μτφρ. Ζ. Σαρίκας, επιμ. Β. Κάλφας)

Hardy G. H. (2012), *Η απολογία ενός μαθηματικού,* Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (μτφρ. – επιμ. Δ. Καραγιαννάκης, Μ. Λάμπρου)

Hilbert D. (1995), *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, Αθήνα, εκδ. Τροχαλία (μτφρ. Σ. Παπαδόπουλος)

Jouhki J. (2019), " Humans and their technologies play the infinite game", Human Technology, Volume 15(1), February 2019, pp. 1–5

Koyre΄, A. (1957), *From the Closed world to the infinite universe*, Baltimore, publ. J.H. Furst Company

Linnebo Ø. (2017), "Hilbert's program", από το βιβλίο Linnebo Ø. *Philosophy of Mathematics,* New Jersey, publ. Princeton University Press

Moore, A.W. (1990), *The infinite*, London, publ. Routledge

Penrose, R. (1989) *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics*, Oxford University Press

Rucker R. (2012), *Το άπειρο και ο νους*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (μτφρ. – επιμ. Κ. Χατζηκυριάκου)

Shapiro S. (2005), *Σκέψεις για τα Μαθηματικά*, Πάτρα, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (μτφρ. Δ. Σπανός -Κ. Δρόσος, επιμ. Κ. Δρόσος).

Van der Waerden, B.L. (2003), *Η αφύπνιση της επιστήμης*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (μτφρ.-επιμ. Γ. Χριστιανίδης)

Vilenkin N. (1997), *Αναζητώντας το άπειρο*, Αθήνα, εκδ. Κάτοπτρο (μτφρ. – επιμ. Αρ. Μουζακίτης, Γ. Μπούκης)

Windelband, W. – Heimsoeth, H. *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας* τ. Β΄ Αθήνα, ΜΙΕΤ, 1986 (μτφρ. Ν. Μ. Σκουτερόπουλος)

Windelband, W. – Heimsoeth, H. *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας* τ. Γ΄ Αθήνα, ΜΙΕΤ, 1991 (μτφρ. Ν. Μ. Σκουτερόπουλος)

Woolhouse, R. S. *Φιλοσοφία της Επιστήμης Β΄Οι εμπειριστές*, Αθήνα, εκδ. Πολύτροπον, 2003 (μτφρ. Σ. Τσούρτη, επιμ. Α. Χρύσης)

Αναπολιτάνος Δ. (1985), *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Αθήνα, εκδ. Νεφέλη.

Αναπολιτάνος Δ. (2016), *Λαβύρινθοι, γνωσιολογικά ρήγματα, φιλοσοφικά σπαράγματα και παραμυθίες*, Αθήνα, εκδ. Εκδοτική Αθηνών.

Αναπολιτάνος Δ. (2020), «Το πεπερασμένο, το άπειρο και η εμπειρική πραγματικότητα», Books' Journal.

Αναπολιτάνος Δ. (2019), *Φιλοσοφικές εξεικονίσεις, αφηγήσεις και σχήματα*, Αθήνα, εκδ. Εκκρεμές.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1999), *Απειροστικός Λογισμός Ι,* Αθήνα, εκδόσεις Συμμετρία.

Ρουσόπουλος Γ. (1991), *Επιστημολογία των Μαθηματικών*, Αθήνα, εκδ. Gutenberg.

Χριστιανίδης, Γ. (2003), *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών,* Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Χριστοδουλίδης Π. (1993), *Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών,* Αθήνα, εκδ. Γ.Α. Πνευματικού.

Χριστοπούλου, Δ. (2020) «Οι φιλοσοφικές προϋποθέσεις των θεμελιωδών συνολο-θεωρητικών αντιλήψεων» στο Αναπολιτάνος (επιμ.) *Αξιώματα, Παράδοξα, Υποθέσεις, Εικασίες*, Αθήνα, εκδ. Νεφέλη, pp. 11-3