ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ – ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική

Η εφαπτομένη τον 17ο αιώνα

Χριστίνα Μάνεση
Δ201722

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής:

Σταύρος Γ. Παπασταυρίδης Ομότιμος Καθηγητής

Αθήνα,
Οκτώβριος, 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .... από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Σταύρος Γ. Παπασταυρίδης	Ομότιμος Καθηγητής
▪ Γεώργιος Ψυχάρης	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Διονύσιος Λάππας	Αναπληρωτής Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Σταύρος Γ. Παπασταυρίδης	Ομότιμος Καθηγητής
▪ Διονύσιος Λάππας	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης	Καθηγητής

Ευχαριστώ θερμά:

Τους καθηγητές μου Σταύρο Παπασταυρίδη, Γιώργο Ψυχάρη καθώς και την κυρία Διονυσία Μπακογιάννη, για την πολύτιμη βοήθειά τους και την υποστήριξη τους καθόλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περίληψη

Δύο από τα βασικά μαθηματικά προβλήματα που οδήγησαν στην εφεύρεση του Λογισμού ήταν το πρόβλημα του προσδιορισμού του εμβαδού κάτω από καμπύλη και το πρόβλημα της εφαπτομένης. Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μία βιβλιογραφική ανασκόπηση στο πρόβλημα της εφαπτομένης που απασχόλησε τους μεγάλους μαθηματικούς του 17ου αιώνα. Η σειρά των κεφαλαίων στηρίζεται στον χρονολογικό χάρτη των διαφόρων μεθόδων κατασκευής της εφαπτομένης, με αφετηρία τις ρίζες του προβλήματος στην αρχαιότητα, εώς τα τέλη του 17ου αιώνα που προστίθεται το αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης και τελικά η εφεύρεση του Λογισμού. Οι Fermat και Descartes είναι οι πρώτοι που εφαρμόζουν τα εργαλεία της άλγεβρας στη γεωμετρία καμπυλών, αναπτύσσοντας ξεχωριστά ο καθένας, συστηματικές μεθόδους εύρεσης της εφαπτομένης, οι οποίες όμως ήταν αποτελεσματικές μόνο σε καμπυλες της μορφης y=f(x), οπου f είναι πολυωνυμο. Το ίδιο χρονικό διάστημα ο Roberval προσεγγίζει το πρόβλημα βασιζόμενος στη κινηματική μέθοδο, ενώ λίγο αργότερα ο Hudde αναπτύσσει πιο αποτελεσματικούς μεθόδους σε καμπύλες της μορφής y=f(x), οπου f είναι πολυώνυμο, και ο Sluse αναπτύσσει κανόνες για καμπύλες της μορφης y=f(x, y), οπου f(x,y) είναι πολυώνυμο δύο μεταβλητών. Η εισαγωγή των κανόνων αυτών, σύντομα ακολουθήθηκε από πανομοιότυπες μεθόδους απειροστού χαρακτήρα, με σημαντικό εκπρόσωπο τον Barrow, ο οποίος μαζί με τον Gregory σχεδόν την ίδια χρονική περίοδο, είναι οι πρώτοι που δημοσιεύουν απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού, χωρίς όμως να αντιληφθούν τη σημαντικότητά του. Την σκυτάλη παίρνουν οι Newton και Leibniz, οι οποίοι μας δίνουν τη δυνατότητα υπολογισμού μεγάλης πληθώρας εμβαδών, διαχείρισης διαφορικών εξισώσεων κ.α., και για το λόγο αυτό θεωρούνται οι εφευρέτες του Απειροστικού Λογισμού. Μέχρι το τέλος του 17ου αιώνα το πρόβλημα της εφαπτομένης ενσωματώθηκε εξ ολοκλήρου στους γενικούς κανόνες παραγώγισης που αναπτύχθηκαν, τις «Fluxional» μεθόδους του Newton και τις «Διαφορικές» μεθόδους του Leibniz.

Λέξεις κλειδιά: εφαπτομένη, εμβαδόν, αντίστροφο πρόβλημα εφαπτομένης, Θεμελιώδες Θεώρημα, Λογισμός.

Abstract

Two of the basic mathematical problems that led to the invention of Calculus were the problem of determining the area under a curve and the problem of the tangent. The present dissertation is a bibliographic review of the tangent problem that occupied the great mathematicians of the 17th century. The series of chapters is based on the chronological map of the various methods of tangent construction, starting from the roots of the problem in antiquity, until the end of the 17th century when the inverse tangent problem is added and finally the invention of Calculus. Fermat and Descartes were the first to apply the tools of algebra to the geometry of curves, developing separately, systematic methods for finding the tangent, but which were effective only in curves of the form $y = f(x)$, where f is a polynomial. At the same time Roberval approaches the problem based on the kinematic method, while a little later Hudde develops more efficient methods in curves of the form $y = f(x)$, where f is a polynomial, and Sluse develops rules for curves of the form $y = f(x, y)$, where $f(x, y)$ is a polynomial of two variables. The introduction of these rules was soon followed by identical methods of infinitesimal character, with Barrow as an important representative, who, together with Gregory at about the same time, were the first to publish a proof of the Fundamental Theorem of Calculus, although none of them realised its importance. The baton is taken by Newton and Leibniz, who give us the ability to calculate a large number of areas, manage differential equations, etc., and for this reason are considered the inventors of Infinitesimal Calculus. By the end of the 17th century the tangent problem was fully integrated into the general rules of derivatives, Newton's "Fluxional" methods and Leibniz's "Differential" methods.

Key words: tangent, area, inverse tangent problem, Fundumental Theorem, Calculus.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τον Katz, οι αλλαγές που σημειώθηκαν στην ευρωπαϊκή οικονομία τον 14ο αιώνα είχαν μεγάλη επιρροή στην εξέλιξη των μαθηματικών. Το γενικό πολιτιστικό κίνημα των επόμενων δύο αιώνων, γνωστό ως Αναγέννηση, είχε αντίκτυπο, αρχικά στη Βόρεια Ιταλία και βαθμιαία εξαπλώθηκε και στην υπόλοιπη Ευρώπη. Στις αρχές του 14ου αιώνα, μια εμπορική επανάσταση που προήλθε αρχικά για την αντιμετώπιση των Σταυροφοριών, απαίτησε την ανάπτυξη νέας τεχνολογίας στη ναυτιλία, με αποτέλεσμα την δημιουργία διεθνών εμπορικών εταιριών στις μεγάλες ιταλικές πόλεις. Η μεσαιωνική οικονομία, που βασιζόταν σε μεγάλο βαθμό στην ανταλλαγή προϊόντων, σταδιακά αντικαταστάθηκε από μία οικονομία με βάση τα χρήματα. Γεννήθηκε έτσι η ανάγκη για τη χρήση πιο εξελιγμένων μαθηματικών, άλλα όχι αυτά που διδάσκονταν στα πανεπιστήμια, αλλά μαθηματικά που θα διευκόλυναν τους υπολογισμούς και θα αντιμετώπιζαν την επίλυση προβλημάτων (Katz σ. 384).

Η εμπορική επανάσταση εξαπλώθηκε σύντομα και σε άλλες περιοχές της Ευρώπης. Τα βιβλία άρχιζαν να κοστίζουν φθηνότερα και να είναι πλέον σε αφθονία, όταν γύρω στα μέσα του 15ου αιώνα, εφευρέθηκε η εκτύπωση. Το τυπογραφείο μετέτρεψε την Ευρώπη σε αίθουσα ακροατηρίου (Cajori σ. 160). Μετά την εφεύρεση του τυπογραφείου το ενδιαφέρον στην άλγεβρα μεγάλωσε γρήγορα (Waters σ. 76). Την ίδια περίοδο τον 15ο και 16ο αιώνα σημειώθηκαν στην Ιταλία οι μεγάλες πλέον ανακαλύψεις στην άλγεβρα (Katz).

Επιστημονική Επανάσταση

Σύμφωνα με τον Witmer τρία από τα μεγαλύτερα αριστουργήματα της επιστήμης εμφανίστηκαν σε έντυπη μορφή σχεδόν ταυτόχρονα. Του Andreas Vesalius, *De Fabrica Humani Corporis(1543)*, του Nicolaus Copernicus, *De Revolutionibus Orbium Coelestium(1543)* και του Girolamo Gardano, *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis (1545).* (T. Richard Witmer, 1968 σ. vii). Παραδοσιακά, η εκκίνηση της «Επιστημονικής Επανάστασης» λέγεται ότι προήλθε το έτος 1543, με τη δημοσίευση του έργου του Copernicus (https://plato.stanford.edu/entries/copernicus/), ένα βιβλίο το οποίο παρουσίαζε την έννοια του «Ηλιοκεντρικού Συστήματος» και το οποίο αποτελούσε υπόδειγμα για προηγμένα προβλήματα αστρονομικής έρευνας, ιδίως για τις μαθηματικές τεχνικές που εφαρμόζονταν σε αυτές.

(https://www.britannica.com/science/Scientific-Revolution). Σύμφωνα με τον Heath ο Αρίσταρχος ο Σάμιος είναι ο πρώτος που διατύπωσε την υπόθεση του Copernicus η οποία εγκαταλείφθηκε και αναβίωσε πάλι από τον ίδιο τον Copernicus (Heath σ. 2) (The Greek Heliocentric Theory and Its Abandonment σ. 321), (Drapper σσ. 155-156).

Το έτος 1545 ο Ιταλός μαθηματικός Cardano δημοσίευσε το έργο του *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, στο οποίο συγκέντρωσε πολλές προηγούμενες αλγεβρικές καινοτομίες. Εισήγαγε τις νέες του μεθόδους για την αντιμετώπιση εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού (Applebaum, 2000), παρουσιάζοντας την επίλυσή τους μέσω ριζικών. Σύμφωνα με τον Witmer μία αξιοσημείωτη πτυχή στο έργο του Cardano ήταν η «σκιά» των φανταστικών αριθμών. Εμφανίζονταν ως απαραίτητες συνέπειες των τύπων, και εκείνος δεν τις απέφυγε ούτε τις αφήνει στην άκρη ως ασήμαντες, όπως συχνά έκαναν οι προηγούμενοι συγγραφείς (T. Richard Witmer, 1968 σ. viii). Τις αρνητικές ρίζες μίας εξίσωσης, τις ονόμαζε *fictitious* και τις θετικές *real*. Την περίπτωση όπου εμφανίζονταν φανταστικές ρίζες, την αποκαλούσε αδύνατη (Cajori σ. 169).

Τον 16ο αιώνα επίσης έχουμε μία σημαντική εξέλιξη για την μετέπειτα πορεία των μαθηματικών. Τα βασικά έργα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Πτολεμαίου που είχαν μεταφραστεί αρκετούς αιώνες νωρίτερα στα αραβικά, δεδομένου ότι οι μεταφραστές δεν ήταν ειδικευμένοι μαθηματικοί, είχε ως αποτέλεσμα οι εκδόσεις τους να μην είναι πάντα πλήρως κατανοητές (Katz σ. 407). Τότε ήταν που έγινε μια συντονισμένη προσπάθεια για τη μετάφραση των έργων των Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Πτολεμαίου καθώς και άλλων μαθηματικών έργων Ελλήνων, από μαθηματικούς όμως αυτή τη φορά (Katz σ. 407). Η πρώτη αγγλική μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη έγινε το 1570 από τον Sir Henry Billingsley, ο οποίος έκανε ένα συχνό λάθος για την εποχή εκείνη, να μπερδέψει στον τίτλο τον Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια με τον Ευκλείδη από τα Μέγαρα (Swetz & Katz, Mathematical Treasures - Billingsley Euclid). Δύο χρόνια αργότερα το 1572 ακολούθησε η δημοσίευση της λατινικής μετάφρασης των Στοιχείων του Ευκλείδη από τον Ιταλό μαθηματικό Federigo Commandino. Οι λατινικές μεταφράσεις του στα έργα του Απολλώνιου, Αρχιμήδη, Πάππου, Ήρωνα και Πτολεμαίου και τα πολύτιμα σχόλια που τις συνόδευαν μελετήθηκαν προσεκτικά και αναφέρονται από μαθηματικούς του 17ου αιώνα (Baron σ. 14).

Δημιουργήθηκε ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον στις καμπύλες ως αποτέλεσμα της λατινικής μετάφρασης των κλασικών έργων και του σημαντικού ρόλου που είχαν σε εφαρμοσμένα πεδία όπως η μηχανική, η αστρονομία, η οπτική και η στερεομετρία (https://www.britannica.com/science/Scientific-Revolution).

Αν και τα προβλήματα των ακραίων τιμών όπως και το πρόβλημα προσδιορισμού του εμβαδού κάτω από καμπύλες, καθώς και τα συνδεόμενα προβλήματα όγκου και εφαπτομένης είχαν επιλυθεί στο παρελθόν σε λίγες συγκεκριμένες περιπτώσεις, η κάθε περίπτωση απαιτούσε έναν ευρηματικό τρόπο και κανείς δεν είχε κατασκευάσει έναν αλγόριθμο που θα επέτρεπε εύκολα να λυθούν όλες οι νέες περιπτώσεις (καμπυλών) (Katz σ. 508).

Στην κλασική γεωμετρία, ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που πρωτοπόρησε σε αυτό το κομμάτι των μαθηματικών, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης καθόρισε με αυστηρό τρόπο διάφορα αποτελέσματα στα εμβαδά και όγκους και έχοντας παράγει κάποιες καμπύλες, όπως την Αρχιμήδεια σπείρα, συνήγαγε σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με τις εφαπτομένες (https://www.britannica.com/science/mathematics/The-calculus). Το μεγάλο επίτευγμα του Αρχιμήδη ήταν να δώσει έναν ακριβή τρόπο για την κατασκευή της εφαπτομένης (Coolidge σ. 451). Τα έργα του Αρχιμήδη αποτέλεσαν την κύρια πηγή και την έμπνευση μεγάλου μέρους της γεωμετρίας του 17ου αιώνα που έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού (Baron σ. 89).

17ος αιώνας

Στις αρχές του 17ου αιώνα υπήρξε μία αναζωπύρωση στην μελέτη των δύο αυτών βασικών προβλημάτων, του προσδιορισμού του εμβαδού και του όγκου καθώς και της εφαπτομένης γραμμής σε σημείο της καμπύλης. Σύμφωνα με τον Katz με την ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας, στο πρώτο μισό του 17ου αιώνα, ξαφνικά άνοιξε ο δρόμος για την κατασκευή όλων των ειδών καμπυλών και στερεών. Οποιαδήποτε αλγεβρική εξίσωση που περιέγραφε μια καμπύλη, και ένα νέο στερεό θα μπορούσε να σχηματιστεί, για παράδειγμα, περιστρέφοντας μια καμπύλη γύρω από οποιαδήποτε ευθεία στο επίπεδό της. Με άπειρα νέα παραδείγματα προς αντιμετώπιση, οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα αναζήτησαν και ανακάλυψαν νέους τρόπους εύρεσης ακραίων τιμών, κατασκευής εφαπτομένων και υπολογισμών εμβαδών και όγκων. Αυτοί οι μαθηματικοί δεν είχαν την έννοια της συνάρτησης, ενδιαφέρονταν για τις καμπύλες, που ορίζονται από κάποια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών. Στη διαδικασία εύρεσης των εφαπτομένων, συχνά θεωρούσαν άλλες γεωμετρικές πτυχές των καμπυλών (Katz, p. 508).

Η έντονη αυτή μαθηματική δραστηριότητα κατά το πρώτο μισό του 17ου αιώνα είχε στο μεγαλύτερο μέρος τη βάση της στη Γαλλία. Αυτό οφείλεται, τουλάχιστον εν μέρει, στο έντονο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό του Marin Mersenne ο οποίος αλληλογραφούσε, εκ μέρους ομάδας επιστημόνων στο Παρίσι, με μαθηματικούς και επιστήμονες σε όλη την Ευρώπη. Ο Galileo Galilei, ο Francesco Cavalieri και ο Evangelista Torricelli στην Ιταλία διατηρούσαν επαφή με τον Gilles Persone de Roberval στο Παρίσι, τον Pierre de Fermat στη Τουλούζη και τον René Descartes στην Ολλανδία. (Baron σ. 149), (Tannery P & Henry, C., Correspondence)

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου μόνο ένα μικρό ποσοστό του τεράστιου υλικού που είχε παραχθεί, έλαβε δημοσίευση. Το μεγαλύτερο μέρος κοινοποιήθηκε με λεκτικά μέσα, μέσω αλληλογραφίας και με την ένταξη στα έργα άλλων. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά προτεραιότητας στα έργα προς δημοσίευση, ήταν αναπόφευκτη (Baron, p.149)

Η εφαπτομένη τον 17ο αιώνα

Εκτός από απλές κατασκευές εφαπτόμενων γραμμών σε κωνικές τομές με την στατική ελληνική όψη της εφαπτόμενης γραμμής ως η γραμμή που αγγίζει τη καμπύλη σε ένα μόνο σημείο και το μεμονωμένο παράδειγμα της κατασκευής της εφαπτομένης στην Σπείρα του Αρχιμήδη, οι εφαπτόμενες γραμμές δεν μελετήθηκαν μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 17ου αιώνα. (C. H. Edwards σ. 122). Η εξέλιξη στο πρόβλημα της εφαπτομένης ήρθε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν άρχισε η συστηματική εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία. Σύμφωνα με τον Whiteside, ενώ η παραδοσιακή καταγραφή υπονοεί ότι το πρόβλημα της εφαπτομένης λύθηκε αναλυτικά από τον Fermat και τον Descartes το 1630, αυτή η συνεισφορά ήταν στη πραγματικότητα ένα μόνο μέρος μιας ευρύτερης ανάπτυξης που η προέκτασή της αντανακλάται στην αχανή βιβλιογραφία του 17ου αιώνα με την οποία σχετίζεται (Whiteside σσ.348). Οι μέθοδοι του Descartes και του Fermat δημοσιεύθηκαν λίγο πριν από την ανάπτυξη του Λογισμού, που αποτελεί την πιο δημοφιλή σύγχρονη μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος της εφαπτομένης. Τα επιχειρήματά τους βασίστηκαν στη γεωμετρία και ενώ οι εξηγήσεις τους χρησιμοποίησαν μερικές δυναμικές έννοιες, στην πράξη οι μέθοδοι τους θεωρούν ένα μη κινούμενο γεωμετρικό σύστημα. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Coolidge με αυτόν τον τρόπο και οι δύο έδωσαν κάποια προσοχή σε μια έννοια που μοιάζει με όριο (ως ένα σημείο πλησιάζει το άλλο), σε πρωτόλεια μορφή, αλλά ουσιαστικά αυτή είναι έννοια του 19ου αιώνα (Coolidge σσ. 451-452). Ως αποτέλεσμα οι μέθοδοι τους ήταν χρήσιμες σε περιορισμένο αριθμό καμπυλών και δεν είχαν τη καθολικότητα του λογισμού, όμως έθεσαν τις βάσεις για περεταίρω ανάπτυξη.

Κατά την διάρκεια της δεκαετίας του 1630-1640 μια προσέγγιση των εφαπτόμενων γραμμών που προέκυψαν από την διαισθητική έννοια της στιγμιαίας κίνησης αναπτύχθηκε από τον Torricelli και ιδιαίτερα από τον Roberval. Η ιδέα τους (όχι νέα) ήταν να θεωρήσουμε μια καμπύλη ως την πορεία ενός κινούμενου σημείου και την εφαπτομένη γραμμή, ως γραμμή στιγμιαίας κίνησης του κινούμενου σημείου. Αλλά η μέθοδος του εξαρτιόταν από τη γεωμετρική περιγραφή της καμπύλης και έτσι δεν δημιούργησε την ανάγκη για έναν απλό αλγεβρικό αλγόριθμο για τον προσδιορισμό των εφαπτομένων. (C. H. Edwards σ. 134)

Οι διαδικασίες για τον προσδιορισμό της εφαπτομένης, του Fermat και ιδιαίτερα του Descartes, οδηγούσαν συχνά σε περίπλοκες αλγεβρικές μεθόδους και δεν παρείχαν την ευκολία του υπολογισμού. Αλλά η μελέτη αυτών των μεθόδων, οδήγησε δύο άλλους μαθηματικούς, τον Johann Hudde και τον René-François Walter de Sluse, να ανακαλύψουν τη δεκαετία του 1950 απλούστερους κανόνες (J.Katz, σ. 512).

Η εισαγωγή των κανόνων των Hudde και Sluse τη δεκαετία του 1650, σύντομα ακολουθήθηκε από πανομοιότυπες μεθόδους και απειροστού χαρακτήρα. Αυτές οι νεότερες μέθοδοι οφείλονταν περισσότερο στις ιδέες του Fermat από ότι εκείνες του Descartes (C. H. Edwards σ. 132). Η εφαρμογή της έννοιας του χρόνου και της κίνησης στη μελέτη των καμπυλών οδήγησε τον Isaac Barrow και τον James Gregory στην απόδειξη της αντίστροφης σχέσης μεταξύ των εφαπτομένων και των προβλημάτων τετραγωνισμών χωρίων, δηλαδή, τη σχέση μεταξύ των πράξεων διαφόρισης και ολοκλήρωσης.

Ο Barrow όπως και ο Gregory αν και ήταν οι πρώτοι που δημοσίευσαν απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού, δεν αντιλήφθηκαν τη σημαντικότητα του (Kline σ. 356). Σύμφωνα με τον Edwards το Θεμελιώδες Θεώρημα ίσως είναι το πιο ξεκάθαρο παράδειγμα στην ιστορία των μαθηματικών μεταξύ ανακάλυψης και αναγνώριση της σημαντικότητας της ανακάλυψης (C. H. Edwards σ. 190). Αυτό το θεμελιώδες βήμα πάρθηκε από τον Isaac Newton και τον Gottfried Leibniz οι οποίοι θεωρούνται οι εφευρέτες του Λογισμού (C. H. Edwards σ. 189). Μέχρι τότε ελάχιστα ολοκληρώματα είχαν υπολογισθεί. Με τη χρήση του Θεμελιώδους Θεωρήματος, επιτεύχθηκε ένας τεράστιος όγκος υπολογισμών. Η ανακάλυψη του Λογισμού από τον Newton αν και προηγήθηκε του Leibniz, δεν δημοσιεύθηκε μέχρι το 1704, σε αντίθεση με του Leibniz που τον δημοσίευσε πρώτος το 1684 και έπειτα (Struik σ. 270).

Μέχρι το τέλος του 17ου αιώνα το πρόβλημα της εφαπτομένης ενσωματώθηκε εξ ολοκλήρου στους γενικούς κανόνες παραγώγισης που αναπτύχθηκαν, τις «Fluxional» μεθόδους του Newton και τις «Διαφορικές» μεθόδους του Leibniz, ενώ οι περαιτέρω προσεγγίσεις στη κατασκευή των εφαπτομένων που στηρίζονταν στην εξέταση μίας αντιπροσωπευτικής εξίσωσης, απορρίφθηκαν (Whiteside σ. 365)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΑΡΧΑΙΟΙ ΧΡΟΝΟΙ

1.1 Ευκλείδης

Από την αναφορά του Πρόκλου, ο Ευκλείδης φέρεται να διέπρεψε γύρω στο 300 π.Χ (Morrow, 1970). Ήταν Έλληνας μαθηματικός, συχνά αναφέρεται ως ο «Ιδρυτής της Γεωμετρίας» (Bruno & Baker, p. 125) ή ο «Πατέρας της Γεωμετρίας». Δραστηριοποιήθηκε στην Αλεξάνδρεια την εποχή της βασιλείας του Πτολεμαίου. Τα *Στοιχεία*, το κορυφαίο έργο του αποτελούμενο από 13 Βιβλία θεωρείται το απαύγασμα των μαθηματικών της Αρχαίας Ελλάδας. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Morrow, είναι ελάχιστα τα βιβλία που να έχουν παίξει μεγαλύτερο ρόλο, στη σκέψη και στην εκπαίδευση του δυτικού κόσμου, από ότι τα *Στοιχεία* (Morrow, 1970 σ. xxi). O Heath σχολιάζει ότι παρόλες τις ατέλειες του, δεδομένου της εποχής που εμφανίστηκε, είναι και θα παραμείνει αναμφισβήτητα το σπουδαιότερο βιβλίο των μαθηματικών όλων των εποχών. Προσθέτει επίσης ότι άλλο βιβλίο εκτός από τη Βίβλο δεν έχει κυκλοφορήσει περισσότερο, επεξεργαστεί ή μελετηθεί (Morrow, 1970 σ. xxi). Στα Στοιχεία, ο Ευκλείδης συνήγαγε τα θεωρήματα της λεγόμενης Ευκλείδειας Γεωμετρίας από ένα μικρό σύνολο αξιωμάτων. Ο Ευκλείδης εργάστηκε επίσης πάνω στην προοπτική, στις κωνικές τομές, στη σφαιρική γεωμετρία, στη θεωρία αριθμών και στη μαθηματική αυστηρότητα της απόδειξης.

1.1.1 Εφαπτομένη στον Κύκλο

Ο Ευκλείδης ασχολήθηκε με την εφαπτομένη σε κύκλο και κάνει αναφορές (εφαπτομένη *ephaptoménē*) στο Βιβλίο ΙΙΙ των *Στοιχείων*.

Δίνει τον ορισμό της εφαπτομένης **Ορισμός 2** στο Βιβλίο ΙΙΙ των *Στοιχείων* και αναφέρει ότι,

Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

"Εφαπτομένη γραμμή σε κύκλο, λέγεται η ευθεία που συναντά το κύκλο και προεκτεινόμενη δε τέμνει τον κύκλο"

Όπως αναφέρει στη συνέχεια ο Heath η φράση του Ευκλείδη εδώ δείχνει τη κλασική διαφοροποίηση μεταξύ της λέξης ***ἅπτεσθαι*** και ***ἐφάπτεσθαι***. Η πρώτη σημαίνει

συναντώ και η δεύτερη ***εφάπτομαι***. Η διαφοροποίηση ήταν γενικά διακριτή στους Έλληνες γεωμέτρες της εποχής του Ευκλείδη και έπειτα, με ορισμένες εξαιρέσεις όσον αφορά στη λέξη ***ἅπτεσθαι*** (Heath σ. 3)

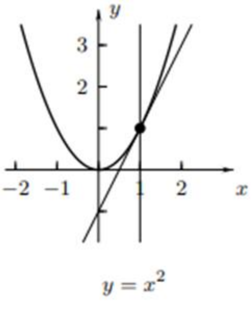
Σύμφωνα με τον Coolidge ο Ευκλείδης με τη Πρόταση 16 του Βιβλίου ΙΙΙ των *Στοιχείων*, επεκτείνει τον ορισμό της εφαπτομένης περαιτέρω.

"The straight line drawn at right angles to the diameter of a circle from its extremity will fall outside the circle, and into the space between the straight line and the circumference another straight line cannot be interposed…" (Heath σ. 37)

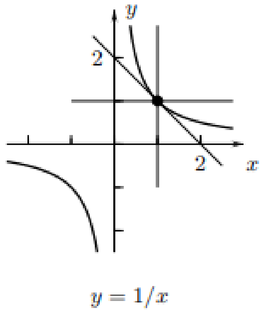
Ο Coolidge τονίζει τη μοναδικότητα της εφαπτομένης σε σημείο σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, δηλαδή ότι η εφαπτομένη συναντά τον κύκλο μία φορά μόνο και κείτεται ολόκληρη έξω από αυτόν, ενώ καμία άλλη ευθεία που διέρχεται από αυτό το σημείο επαφής δεν έχει αυτήν την ιδιότητα. (Coolidge σ. 450)

Όμως παρατηρούμε ο ορισμός της εφαπτομένης που έδωσε ο Ευκλείδης για τον κύκλο σε συνδυασμό με την επέκταση του μέσω της Πρότασης 16 που αναφέρεται πάλι στον κύκλο, υστερεί ως προς δύο σημεία εάν εφαρμοστεί στις κωνικές τομές, υπερβολή και παραβολή. Ως προς τη μοναδικότητα της εφαπτομένης και ως προς την απαγόρευση η εφαπτομένη προεκτεινόμενη να τέμνει ξανά την καμπύλη.

Για παράδειγμα στη περίπτωση της παραβολής και την υπερβολής, υπάρχουν δύο τέτοιες γραμμές σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, σε κάθε σημείο της παραβολής και τρεις σε κάθε σημείο της υπερβολής. Για την παραβολή $y = x^2$ (εικόνα 1.1), οι δύο γραμμές είναι η εφαπτομένη γραμμή και η γραμμή που είναι παράλληλη στον y άξονα. Για την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ (εικόνα 1.2) , οι τρεις γραμμές είναι η εφαπτόμενη γραμμή και οι γραμμές που είναι παράλληλες στον x και y άξονα αντίστοιχα.



(Εικόνα 1.1)



(Εικόνα 1.2)

Επίσης εάν σκεφτούμε οποιοδήποτε σημείο (εκτός του 0) της καμπύλης $y=x^3$, η εφαπτομένη υπάρχει σε αυτό το σημείο, αλλά εξαιτίας του γεγονότος ότι η συνάρτηση αλλάζει καμπυλότητα στο (0,0), η γραμμή θα κόβει τη καμπύλη, όπου σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη δε μπορεί να είναι εφαπτομένη.

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι ορισμός του Ευκλείδη για την εφαπτομένη καλύπτει συγκεκριμένες καμπύλες όπως τον κύκλο και την έλλειψη.

1.2 Απολλώνιος

Ο Απολλώνιος γεννήθηκε στη Πέργη, μία πόλη στα νότια της Μικράς Ασίας, πιθανόν το 262π.Χ. ή 25 χρόνια αργότερα από τον Αρχιμήδη (Heath σ. 126). Έγινε γνωστός στην αρχαιότητα πρώτα για το έργο του στην αστρονομία, αλλά αργότερα για το μαθηματικό του έργο τα *Κωνικά*, το μεγαλύτερο μέρος του οποίου είναι γνωστό σήμερα μόνο από τίτλους και περιλήψεις σε έργα μεταγενέστερων συγγραφέων. Είναι δύσκολο για μας σήμερα να κατανοήσουμε πώς ο Απολλώνιος μπόρεσε να ανακαλύψει και να αποδείξει τα εκατοντάδες όμορφα και δύσκολα θεωρήματά του χωρίς το σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Παρόλα αυτά, το έκανε, και δεν έχει καταγραφεί κάποιο μεταγενέστερο μαθηματικό έργο που να πλησιάζει τη πολυπλοκότητα των *Κωνικών.* (Katz σ. 114)

1.2.1 Εφαπτομένη στις Κωνικές Τομές

Για τον Απολλώνιο όπως και για τον Ευκλείδη, μία εφαπτόμενη γραμμή ήταν η γραμμή που αγγίζει τη καμπύλη αλλά δε τη κόβει. (Katz σ. 120) .

Η πρόταση που δίνει ο Απολλώνιος για την εφαπτομένη σε κάθε κωνική τομή είναι,

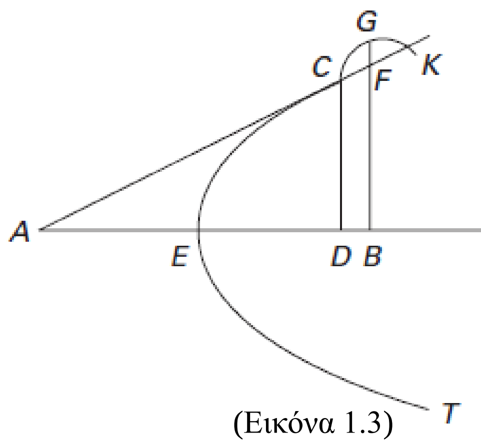
“**Proposition 11**: *If a straight line be drawn through the extremity of the diameter of any conic parallel to the ordinates to that diameter, the straight line will touch the conic, and no other straight line can fall between it and the conic.”* (Heath σ. 22)

Με σύγχρονη ματιά παρατηρούμε ότι η Πρόταση του Απολλώνιου επέκτεινε το έργο του Ευκλείδη προτείνοντας τη μοναδικότητα της εφαπτόμενης γραμμής, για όλες τις κωνικές τομές. Όπως και στη περίπτωση του Ευκλείδη, ο ορισμός του Απολλώνιου για τις εφαπτομένες σε καμπύλες υστερεί σε καμπύλες, πέρα των κωνικών, όπως για παράδειγμα στη $y=x^3$, όπου η εφαπτομένη σε ένα σημείο της καμπύλης θα τέμνει δύο φορές την καμπύλη.

1.2.1.1 Κατασκευή εφαπτομένων

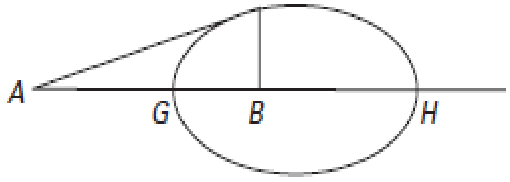
Για την κατασκευή των εφαπτόμενων γραμμών στην παραβολή, υπερβολή και έλλειψη ο Απολλώνιος δίνει τις επόμενες Προτάσεις. (Η κατασκευή της εφαπτομένης στο κύκλο απλά απαιτούσε τη κατασκευή της κάθετης στην ακτίνα.)

Πρόταση I-33 *Έστω C να είναι σημείο της παραβολής CET με CD κάθετη στη διάμετρο EB. Εάν προεκτείνουμε τη διάμετρο κατά τμήμα AE=ED, τότε η γραμμή AC θα είναι εφαπτόμενη στη παραβολή στο C.* (Katz σ. 120)

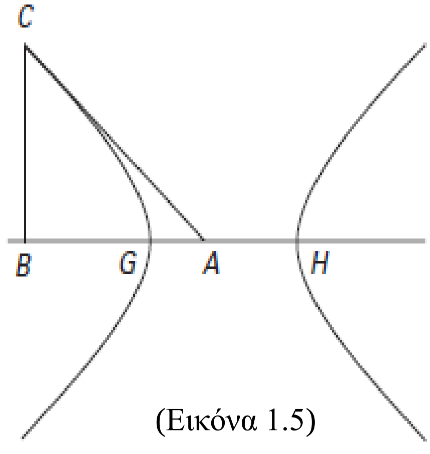


(Εικόνα 1.3)

Πρόταση I-34 *Έστω σημείο C της έλλειψης ή της υπερβολής, CB η κάθετη από αυτό το σημείο στη διάμετρο. Έστω G και H τα σημεία τομής της διαμέτρου με τις καμπύλες, και επιλέγουμε σημείο A της διαμέτρου ή εκτείνουμε τη διάμετρο έτσι ώστε AH:AG=BH:BG. Τότε η AC θα είναι εφαπτομένη στη καμπύλη στο C.* (Katz σ. 121)



(Εικόνα 1.4)



(Εικόνα 1.5)

1.3 Αρχιμήδης

Σύμφωνα με τον Heath ο Αρχιμήδης γεννήθηκε στις Συρακούσες το 287π.Χ (Heath σ. 16). Θεωρείται από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της αρχαιότητας και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Εργάστηκε στη φυσική και εφάρμοσε τεχνολογία συνδυάζοντας τη θεωρία με ένα τρόπο που δεν ταίριαζε στην αρχαιότητα. (Jahnke σ. 21). Σύμφωνα με τον Heath, ο Αρχιμήδης προέβλεψε τον σύγχρονο Λογισμό και την Ανάλυση εφαρμόζοντας έννοιες απειροστών και τη μέθοδο της εξάντλησης για να εξάγει και να αποδείξει με αυστηρό τρόπο ένα εύρος γεωμετρικών θεωρημάτων. Τα θεωρήματα αυτά συμπεριλάμβαναν το εμβαδόν του κύκλου, το εμβαδόν και τον όγκο της σφαίρας , την επιφάνεια της έλλειψης, την επιφάνεια κάτω από τη παραβολή ,τον όγκο του παραβολοειδούς και του υπερβολοειδούς εκ περιστροφής καθώς και την επιφάνεια της σπείρας. (Heath)

Το έργο του Αρχιμήδη στη γεωμετρία, αποτελείται κυρίως από τις αρχικές έρευνες σχετικά με το τετραγωνισμό των καμπυλοειδών μορφών του επιπέδου και το τετραγωνισμό και κυβισμό των κάμπυλων επιφανειών. (Heath σ. 19).

1.3.1 Εφαπτομένη στην Αρχιμήδεια Σπείρα

Η προσέγγιση στη μελέτη των εφαπτομένων γραμμών δόθηκε από τον Αρχιμήδη μέσω της Αρχιμήδειας Σπείρας. Στο έργο του *On Spirals* αποτελούμενο από 28 Προτάσεις, ο Αρχιμήδης περιγράφει τον ορισμό της Σπείρας:

"if a straight line one extremity of which remains fixed be made to revolve at a uniform rate in a plane until it returns to the position from which it started, and if, at the same time as the straight line is revolving, a point move at a uniform rate along the straight line, starting from the fixed extremity, the point will describe a spiral in the plane" (Heath σ. 64)

Λαμβάνοντας υπόψη τη μετάφραση του "uniform" ως «ισοταχώς» (Knorr σ. 49), που σημαίνει με την ίδια ταχύτητα, έχουμε τη παρακάτω μετάφραση στον ορισμό.

«Εάν μία ευθεία γραμμή της οποίας το ένα άκρο παραμένει σταθερό πρέπει να περιστραφεί ισοταχώς σε ένα επίπεδο έως ότου επιστρέψει στην θέση από την οποία ξεκίνησε και εάν ταυτόχρονα καθώς η ευθεία γραμμή περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται ισοταχώς κατά μήκος της ευθείας γραμμής ξεκινώντας από το σταθερό άκρο της, το σημείο θα περιγράψει μία σπείρα στο επίπεδο.» (Heath σ. 64)

Σύμφωνα με τον Mark Child, ο Barrow στις διαλέξεις του αναφέρεται στην Αρχιμήδεια σπείρα:

«Έστω ότι μία ευθεία γραμμή AB γυρνάει ομοιόμορφα με κέντρο ένα σημείο A και την ίδια στιγμή το σημείο M ξεκινώντας από το A μεταφέρεται στην AB με συνεχή και ομοιόμορφη κίνηση. Από αυτή τη σύνθετη κίνηση παράγεται μία συγκεκριμένη γραμμή η οποία ονομάζεται η σπείρα του Αρχιμήδη.» (Child σ. 70)

(Εικόνα 1.6: Εφαπτομένη στην Αρχιμήδεια Σπείρα)

Στη Πρόταση 20 προσδιορίζει την εφαπτομένη σε κάθε σημείο και στη Πρόταση 24, βρίσκει την επιφάνεια που περικλείεται από τη πρώτη στροφή. (Simmons, 1992 σ. 41)

Στις Προτάσεις του Αρχιμήδη 12, 14, 15 παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις ιδιότητες της Σπείρας που συνδέουν το μήκος του διανύσματος της ακτίνας με την γωνία περιστροφής της αρχικής γραμμής από την αρχική θέση και δίνεται από την σχέση σε πολικές συντεταγμένες $r = \alpha\theta$. (Heath σ. 69)

Στην Πρόταση 13 αποδεικνύει ότι:
«Αν μία ευθεία γραμμή εφάπτεται στη Σπείρα, εφάπτεται σε αυτή μία φορά μόνο». (Heath σ. 69)

1.3.1.1 Κατασκευή της εφαπτομένης

Ο τρόπος κατασκευής των εφαπτομένων στη σπείρα, με τον οποίο η σπείρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει προβλήματα τετραγωνισμού του κύκλου, είναι το κεντρικό ενδιαφέρον στο έργο Spiral Lines. (Knorr σ. 48)

Σύμφωνα με τον Coolidge το μεγάλο επίτευγμα του Αρχιμήδη ήταν να δώσει μια πραγματική κατασκευή για τις εφαπτομένες.

Αυτό το κάνει δίνοντας την κάθετη κάτω από την εφαπτομένη (subtangent) σε πολική μορφή, δηλαδή την απόσταση μεταξύ της αρχής της διανυσματικής ακτίνας και του σημείου τομής της εφαπτομένης με την κάθετη στην αρχή της διανυσματικής ακτίνας η οποία είναι:

$$\frac{r^2 d\theta}{dr}$$

Εδώ χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εξάντλησης και τη μέθοδο της $\nu\varepsilon\hat{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$. Το θεμελιώδες θεώρημά του είναι: (Coolidge σ. 450).

"Αν το P είναι ένα σημείο της νιοστής στροφής και ο κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα OP = r*, κόβει την εσωτερική ευθεία σε ένα σημείο K η κάθετη κάτω από την εφαπτομένη στο P θα είναι* $a = 2\pi(n-1)r + arcKP$*".* (Heath σ. 72)

O Heath χαρακτηρίζει την απόδειξη του Αρχιμήδη ως «μυστήρια». Ως επιχείρημα αναφέρει την άποψη του Πάππου, ότι η ιδιότητα της κάθετης κάτω από την εφαπτομένη μπορεί να προσδιοριστεί με ιδιότητες του επιπέδου, χωρίς να καταφύγει στη «στέρεα» $\nu\varepsilon\hat{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$. Ο ίδιος πιστεύει πως ο λόγος που ο Αρχιμήδης επέλεξε τη πιο δύσκολη μέθοδο, δεν μπορεί να είναι άλλος, από τη προτίμησή του στο τύπο απόδειξης *reduction ad absurdum(εις άτοπον απαγωγή)* που βασίζεται ουσιαστικά στο γνωστό του "*Lemma"* ή *"Axiom".* (Heath σ. 557)

O Heath καταλήγει ότι ο Αρχιμήδης αναζήτησε το αποτέλεσμα από έναν ισχυρισμό αντίστοιχο του Διαφορικού Λογισμού για το προσδιορισμό των εφαπτομένων. Πιθανότατα είχε θεωρήσει τη στιγμιαία κατεύθυνση της κίνησης του σημείου P που περιγράφει τη Σπείρα, χρησιμοποιώντας το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων με τη κίνηση του P να είναι η είναι σύνθεση δύο κινήσεων. (Heath σ. 557)

Οι Έλληνες χρησιμοποίησαν διάφορους τόπους εκτός από τις κωνικές τομές για να λύσουν προβλήματα που τους ενδιέφεραν, ιδίως προβλήματα «verging». (Coolidge σ. 244). O Heath αναφέρει, προβλήματα γνωστά ως $\nu\varepsilon\hat{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$, όπου μία ευθεία γραμμή συγκεκριμένου μήκους πρέπει να τοποθετηθεί μεταξύ δύο γραμμών ή καμπυλών σε τέτοια θέση ώστε εάν επεκταθεί να περάσει από συγκεκριμένο σημείο. Αυτή είναι η έννοια του "verging" (Heath σ. 65). Αλλά οι Αρχαίοι Έλληνες όπως συνεχίζει ο

Coolidge, δεν τα αντιμετώπισαν αναλυτικά, δεν είχαν τις εξισώσεις για να τα αντιμετωπίσουν, όπως μας λέει οι εξισώσεις τις περισσότερες φορές θα ήταν υπερβατικές και όχι αλγεβρικές. (Coolidge σ. 244)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – PIERRE DE FERMAT

Ο Fermat γεννήθηκε τη πρώτη δεκαετία του 17ου αιώνα στο Beaumont-de-Lomagne της Γαλλίας με καταγωγή από την Γασκώνη. Ο πατέρας του, Dominique Fermat, ήταν ένας πλούσιος έμπορος δερμάτων και υπηρέτησε τρείς μονοετείς θητείες ως ένας από τους τέσσερις πρόξενους του Beaumont-de-Lomagne (Katz σ. 474). Ο Fermat φοίτησε στο πανεπιστήμιο της Ορλεάνης από όπου έλαβε το πτυχίο του νομικού το 1631. Το 1630 αγόρασε θέση δικαστικού στη Τουλούζη, ένα από τα ανώτερα δικαστήρια της Γαλλίας, και ορκίστηκε από το Gr Chambre τον Μάιο του 1631 (Mahoney σσ. 15-16). Κατείχε αυτό το αξίωμα για το υπόλοιπο της ζωής του (Katz σ. 474). Θεωρείται ένας από τους πιο καινοτόμους μαθηματικούς του 17ου αιώνα και ο μεγαλύτερος ερασιτέχνης μαθηματικός όλων των εποχών (Burns σ. 101). Όπως προσθέτει ο Katz τα μαθηματικά ήταν η μεγάλη του αγάπη και τα θεωρούσε ως χόμπι (Katz σ. 474). Ο Cajori τον χαρακτηρίζει ως έναν μαθηματικό με εξαιρετικές ικανότητες (Cajori σ. 202). Η άποψη του Boyer είναι ότι αν και ο Fermat δημιούργησε αναλυτικές μεθόδους και διαδικασίες ισοδύναμες στη διαφόριση και την ολοκλήρωση αλλά φαίνεται να μην έχει συνειδητοποιήσει πλήρως τη σημαντικότητα της αλληλοσυσχέτισης των δύο τύπων. (Boyer, 1959 σ. 154). Ο Descartes τον αποκάλεσε "καυχησιάρη", ο Pascal του απέδωσε τον όρο «ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Ευρώπης», ο Mersenne αναφερόταν σε αυτόν ως "ο μορφωμένος σύμβουλος από την Toulouse," και ο Wallis τον θεωρούσε τον "καταραμένο Γάλλο" (Mahoney σ. 15).

Το πρωτοποριακό έργο του Fermat στην αναλυτική γεωμετρία *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* κυκλοφόρησε σε χειρόγραφη μορφή το 1636, αλλά στηρίζεται σε αποτελέσματα που είχε γράψει ο ίδιος το 1629. Από ότι λέει ο ίδιος σε γράμμα του στο Roberval, είχε βρει τη μέθοδο των ακραίων τιμών από το 1629 (Paul Tannery σ. 71). Δεν είχε γίνει όμως γνωστή ανάμεσα στους Γάλλους μαθηματικούς μέχρι τους τελευταίους μήνες του 1637, όταν ο Mersenne έλαβε από τον Carcavi, αντίγραφα των δυο μικρών πραγματειών *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* και *De tangentibus linearum curvarum* (Paul Tannery σσ. 133-136). Το δοκίμιο δεν είχε σημάδια της προέλευσής του τα οποία αποκάλυψε ο Fermat μόνο στη ροή μιας διαμάχης με τον Descartes το 1638 (Daniel Garber σ. 754). Η διαμάχη ξεκίνησε με το έργο *Dioptrique* του Descartes και κατέληξε στη συνέχεια σε διαμάχη για τη δική του μέθοδο εύρεσης της εφαπτομένης. Για να υπερασπίσει και να εξηγήσει τη μέθοδό του ο Fermat ασχολήθηκε με εφαρμογές και διευκρινήσεις σε διάφορα δοκίμια και γράμματα, που χρονολογούνται από το 1638-1643 (Stromholm σ. 49).

Τα δοκίμια του και τα γράμματα που κυκλοφορούσαν σε χειρόγραφα, ήταν μόνο γνωστά κατ' επιλογή. Σύμφωνα με τον Stromholm οι διάφορες έννοιες της μεθόδου του Fermat καθορίστηκαν από το συγκεκριμένο μέρος που είχε μελετηθεί από τα διάφορα άτομα. Επιπροσθέτως η επίδραση της ταχείας ανάπτυξης των μαθηματικών από το 1630 περίπου, οδήγησε κάθε επόμενη γενιά των μαθηματικών να ερμηνεύει τη μέθοδο μέσα από το δικό της εννοιολογικό πλαίσιο (Stromholm σ. 47).

2.1 Γενική Μέθοδος

Για τον Fermat ο τρόπος εύρεσης των εφαπτομένων ήταν μία ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής μεθόδου που θα εξυπηρετούσε επίσης στον προσδιορισμό των ακραίων τιμών και κέντρου βάρους (Paul Tannery σ. 71). Εξήγησε την επιμονή του στην ενοποίηση των μεθόδων των ακραίων τιμών και της εφαπτομένης, από το γεγονός ότι αντιμετώπισε αρχικά τη μέθοδο της εφαπτομένης σαν πρόβλημα ακραίων τιμών (Paul Tannery σσ. 156-158).

Ο Stromholm αναφέρει στο κείμενο του, ότι η μελέτη του Wieleitner to 1929 στο έργο του Fermat, έφερε επανάσταση σε ότι είχε επικρατήσει όλα αυτά τα χρονιά σύμφωνα με την γενική μέθοδο του Fermat. Ο ίδιος υποστηρίζει στη διατριβή του ότι υπήρχαν δύο ξεχωριστές και ξεκάθαρα διακριτές μέθοδοι ακραίων τιμών στο έργο του Fermat. Ο Stromholm είναι υποστηρικτής του διαχωρισμού των μεθόδων, διαφωνεί όμως με την μελέτη του Wieleitner ως προς την χρονική σειρά των δύο μεθόδων (Stromholm σ. 48).

Ο Stromholm διατυπώνει τις τρεις βασικές εφαρμογές της γενικής μεθόδου του Fermat. Τις ονομάζει Μέθοδος 1 και Μέθοδος 2 οι οποίες αναφέρονται στην εύρεση των ακραίων τιμών και Μέθοδος 3, η οποία αναφέρεται στη μέθοδο προσδιορισμού της εφαπτομένης.

2.1.1 Μέθοδος 1 – Adequality

Η μέθοδος αυτή κατέχει σημαντική θέση στην ιστορία του Λογισμού διότι για πρώτη φορά, εισάγεται η ιδέα μιας ελαφράς αλλαγής της μεταβλητής (Baron σ. 167). Κυρίως για τη δυναμική της συγκεκριμένου μεθόδου ο Fermat είχε ανακηρυχθεί ο εφευρέτης του Λογισμού από τον Lagrange, Laplace και Tannery (Who was the first inventor of the calculus?, 1919 σ. 16)

Σύμφωνα με τον Stromholm αν έπρεπε να αποδώσουμε την ονομασία «Μέθοδος του Fermat», σε κάποια μέθοδο, αυτή θα ήταν η συγκεκριμένη μέθοδος. Ο Fermat τη χρησιμοποιούσε για να βρει τις ακραίες τιμές αλγεβρικών εκφράσεων και την αναφέρει σε όλα τα γραπτά του εκτός από μία αξιοσημείωτη εξαίρεση (Stromholm σ. 49)

Σύμφωνα με τον Weil, ο Fermat εισάγει το τεχνικό όρο, adaequalitas, adaequare κτλ. που όπως λέει τη δανείστηκε από τον Διόφαντο («παρισότητα»). Όπως φαίνεται, ο Διόφαντος εννοούσε μία προσεγγιστική ισότητα, και αυτός είναι ο τρόπος που εξηγεί τη λέξη ο Fermat στα γραπτά του (Weil σ. 28).

Χαρακτηριστικά ο Stromholm περιγράφει την Μέθοδο 1 ως εξής.

Μέθοδος 1: Για να την εύρεση του μεγίστου της έκφρασης A(B-A), που αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές A και B-A, ο Fermat, αντικατέστησε την άγνωστη ποσότητα A με την ποσότητα A+E και στη συνέχεια με τη μέθοδο «adaequation» , 'εξίσωσε' την αρχική έκφραση με τη τελική.

$$BA - A^2 \sim BA + BE - A^2 - 2AE + E^2$$

Έδιωξε τους ίσους όρους και στη συνέχεια διαίρεσε με το E, κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το αποτέλεσμα να μην περιέχει όρους με το E και άλλους με δυνάμεις του E.

$$2A \sim B + E$$

Τέλος, κατήργησε τους όρους που εξακολουθούν να περιέχουν E, ενώ ταυτόχρονα μετέτρεψε την ψευδό-ισότητα σε πραγματική ισότητα που καθόριζε τη τιμή του A για την οποία η αρχική παράσταση λάμβανε τη μέγιστη τιμή,

$$A=B/2$$

(Stromholm σ. 50)

Όπως αναφέρει ο Edwards ο Fermat δυστυχώς ποτέ δεν εξήγησε τη λογική βάση αυτή της μεθόδου με σαφήνεια ώστε να αποτρέψει τις αντιδράσεις από ακαδημαϊκούς (C. H. Edwards σ. 123)

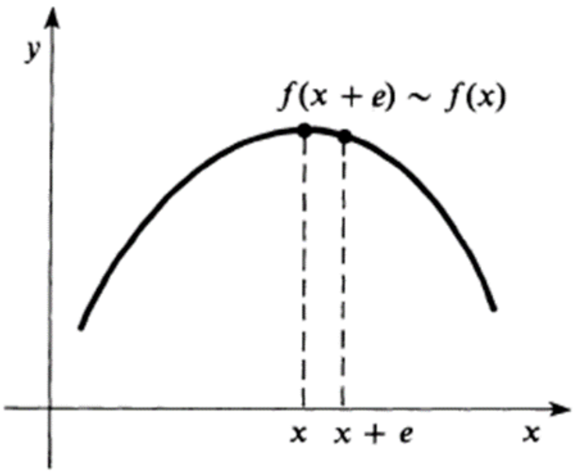
Στη συνέχεια ο Edwards ερμηνεύει την μέθοδο με σύγχρονο συμβολισμό:

Αν η f(x) είναι η μέγιστη τιμή ή η ελάχιστη μίας συνάρτησης f, τότε φαίνεται διαισθητικά ή οπτικά ότι η τιμή της f αλλάζει πολύ αργά κοντά στο x. Έτσι αν το e είναι αρκετά μικρό τότε το f(x) και το f(x+e) είναι σχεδόν ίσα,

$$f(x+e) \sim f(x)$$
$$f(x+e) - f(x) \sim 0$$

Αν το f(x) είναι πολυώνυμο, τότε το $f(x+e) - f(e)$ διαιρείται με το e και έτσι μπορούμε να κάνουμε τη διαίρεση παίρνοντας

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e} \sim 0$$



(Εικόνα 2.1)

Αλλά το όριο αυτού του πηλίκου καθώς το e τείνει στο μηδέν είναι ο σύγχρονος ορισμός της παραγώγου. Συνεπώς το σβήσιμο των υπολοίπων όρων που περιέχουν το e ισοδυναμεί με $f'(x) = 0$.

Όπως τονίζει ο Edwards ο Fermat δεν απαίτησε ρητά ότι το e είναι μία μικρή ποσότητα και δεν μίλησε καθόλου για το όριο καθώς το e τείνει στο 0 (C. H. Edwards σ. 123).

2.1.2 Μέθοδος 2 – Κριτήριο διπλής ρίζας

Περίπου 20 χρόνια πριν ο Kepler είχε πρώτος παρατηρήσει ότι η αύξηση μιας μεταβλητής, όπως για παράδειγμα η τεταγμένη μιας καμπύλης, είναι πάρα πολύ μικρή για τιμές πολύ κοντά στη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της. Αναπτύσσοντας αυτήν την ιδέα ο Fermat δημιούργησε τον κανόνα του για τα μέγιστα και ελάχιστα (Cajori σ. 202)

Σύμφωνα με τον Katz ο Fermat στα τέλη του 1620 ήταν ικανός να μετατρέψει την ιδέα του Kepler σε έναν αλγόριθμο, αλλά το ενδιαφέρον του πυροδοτήθηκε μελετώντας το έργο του Viète που συσχέτιζε τους συντελεστές με τις ρίζες του πολυωνύμου (Katz σ. 508)

Ο Stromholm αναφέρει ότι αυτή η μέθοδος βασίζεται στο κριτήριο της διπλής ρίζας, και χρησιμοποιήθηκε μόνο σε ένα έργο, το δοκίμιο *Methodus de maxima et minima,* το οποίο δεν έχει ημερομηνία. Όπως μας αναφέρει, για πρώτη φορά ο Fermat δεν μας αφήνει στο σκοτάδι για το πως ανακάλυψε τη μέθοδο αυτή (Stromholm σ. 54).

Τα ακριβή λόγια του Fermat είναι:

«While I was working on Vieta's method of syncrisis and anastrophe, and was carefully investigating its use in the discovery of the nature of constitutive equations, it occurred to me to derive from it a new method for the determination of maxima and minima that will easily resolve all difficulties pertaining to diorismon, which have caused so much trouble both ill ancient and modern geometry.» (Mahoney σ. 148)

Ο Stromholm υποστηρίζει ότι το πραγματικό θεμέλιο, ωστόσο, ήταν η παρατήρηση Πάππου ότι το μέγιστο και το ελάχιστο είναι μοναδικά:

"Maximae quippe et minimae sunt unicae et singulars" (Stromholm σ. 54)

Συνεχίζει λέγοντας ότι η μέθοδος "syncrisis" του Viète ήταν μία μέθοδος για να εκφράσει το συντελεστή B της εξίσωσης B^nA^p-A^{n+p}=Z ως προς τις ρίζες της εξίσωσης. Τότε αν τα A και E είναι δύο ρίζες, B^nA^p- B^nE^p= A^{n+p}-E^{n+p}, λύνοντας τον συντελεστή ως προς τις ρίζες έχουμε (Stromholm σ. 54):

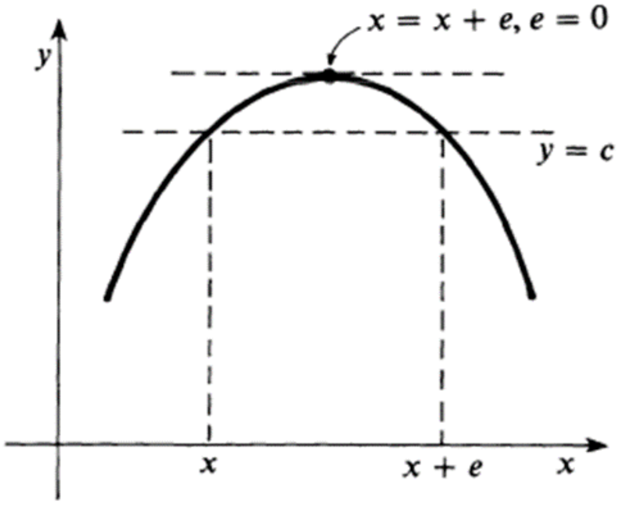
$$B^n = \frac{A^{n+P} - E^{n+P}}{A^P - E^P}$$

Το πρώτο παράδειγμα του Fermat στο *Methodus de maxima et minima* ήταν η παράσταση $BA\text{-}A^2$ που συχνά χρησιμοποιούσε.

Εφαρμόζοντας τη παραπάνω και μέσω της "syncrisis" παίρνουμε B=A+E, όπου σύμφωνα με τον Πάππο, η παράσταση γίνεται μέγιστη όταν A=E, δηλαδή όταν A=B/2

Γενικά αυτή η μέθοδος μπορεί να γραφεί: για την εξίσωση P(A)=Z, όπου P(A) είναι ένα πολυώνυμο, θα καθορίσουμε τη τιμή του A ώστε το Z να λάβει ακραία τιμή. Παίρνουμε το A και A + E να είναι δύο ρίζες της εξίσωσης P(A)=Z, που μας δίνει P(A)=P(A+E). Διαιρώντας με το E και θέτοντας στη συνέχεια όπου E το μηδέν, οδηγούμαστε στην επιλύσιμη εξίσωση Q (A)= 0. (Stromholm σ. 55)

Ο Edwards αναφέρεται στη μέθοδο αυτή σχολιάζοντας με δικό του συμβολισμό (x, x+e), ότι τουλάχιστον κατά μία περίπτωση αντιμετώπισε το x και x+e (εικόνα 2.2) με εντελώς αλγεβρικό τρόπο σαν διακριτές ρίζες της εξίσωσης f(x)=c.



(Εικόνα 2.2)

Γράφοντας $f(x+e) = f(x)$, διέγραψε τους ίσους όρους, διαίρεσε με το e και στη συνέχεια έδιωξε τους εναπομείναντες όρους που σχετίζονταν με το e, λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι οι δύο ρίζες είναι ίσες (άρα e=0) όταν $c = f(x)$ είναι η μέγιστη τιμή της f. (C. H. Edwards σσ. 123-124)

2.1.3 Μέθοδος 3 – Προσδιορισμός εφαπτομένων

Για την μέθοδο των εφαπτομένων δεν υπάρχει κείμενο αναλυτικό που να που να μας λέει ξεκάθαρα τη γένεση και τη βάση στην οποία στηρίχθηκε (Mahoney σ. 166). Ο Fermat τροποποιεί για πρώτη φορά τη μέθοδο το 1638 σε ένα γράμμα στον Mersenne, και διατυπώνει την ακόλουθη (Jensen σ. 73):

Γράμμα στον Mersenne 20 Απριλίου, 1637 (Paul Tannery σ. 137)

6. Outre le papier (²) envoyé à R(oberval) et P(ascal), pour suppléer à ce qu'il y a de trop concis, il faut que M. Descartes sache, qu'après avoir tiré la parallèle qui concourt avec la tangente et avec l'axe ou diamètre des lignes courbes, je lui donne premièrement le nom qu'elle doit avoir comme ayant un de ses points dans la tangente, ce qui se fait par la règle des proportions qui se tire des deux triangles semblables. Après avoir donné le nom, tant à notre parallèle qu'à tous les autres termes de la question, tout de même qu'en la parabole, je considère derechef cette parallèle, comme si le point qu'elle a dans la tangente étoit en effet en la ligne courbe, et suivant la propriété spécifique de la ligne courbe, je compare cette parallèle par *adégalité* avec l'autre parallèle tirée du point donné à l'axe ou diamètre de la ligne courbe.

Cette comparaison par *adégalité* produit deux termes inégaux qui enfin produisent l'égalité (selon ma méthode), qui nous donne la solution de la question.

(Εικόνα 2.3)

Μετάφραση (Mahoney σ. 187)**:**

«Πέρα από το γράμμα που στάλθηκε στον Roberval και τον Pascal και για να συμπληρώσει αυτό που είναι πολύ συνοπτικό εκεί, ο κύριος Descartes πρέπει να γνωρίζει ότι αφού έχει σχεδιάσει την παράλληλη που τέμνει την εφαπτομένη και τον άξονα ή τη διάμετρο των καμπυλών, το λέω πρώτα ότι πρέπει να έχει κατ' αρχήν ένα από τα σημεία του στην εφαπτομένη. Αυτό επιτυγχάνεται με τον κανόνα της αναλογίας που προκύπτει από τα δύο όμοια τρίγωνα. Αφού έδωσα ένα όνομα, τόσο στην παράλληλή όσο και σε όλους τους άλλους όρους του προβλήματος με τον ίδιο τρόπο όπως στην παραβολή, θεωρώ και πάλι αυτήν την παράλληλη σαν το σημείο που κινείται να είναι στην πραγματικότητα στην καμπύλη, και, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη ιδιότητα της καμπύλης, συγκρίνω αυτήν την παράλληλη με “adequation” που αντλείται από το δεδομένο σημείο ως προς την άλλη παράλληλη προς τον άξονα ή τη διάμετρο της καμπύλης γραμμής. Αυτή η σύγκριση με «adequalite” παράγει δύο άνισους όρους που στο τελικό προϊόν (σύμφωνα με τη μέθοδο μου), την ισότητα που μας δίνει τη λύση του προβλήματος.»

2.1.3.1 Εφαπτομένη στη παραβολή

XXXI.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS

EXPLIQUÉE ET ENVOYÉE PAR M. FERMAT A M. DESCARTES (1).

(A, fos 62 à 67.)

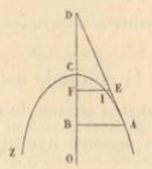
1. La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA (*fig.* 67), de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.

Les lignes AB et BC sont données; supposons que BA s'appelle B, et que BC s'appelle D. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle A. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit E.

Donc CF sera $D - E$, FE sera $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, et, de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Fig. 67.



Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée qui s'appuie à la courbe du point F : — plus grande, lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite, lorsque la courbe est convexe en dedans; car la règle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe. — Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI, suivant la propriété spécifique de la courbe.

2. Comme, en la parabole, par exemple, je fais

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré,

ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes,

comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré;

car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables DBA, DFE.

Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seulement les appliquées à la courbe qui ont la propriété que nous donnons par *adéquation* à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par *E*. J'efface tout ce qui reste mêlé avec *E* et égalise le surplus, de sorte que, par cette dernière équation, je connois la valeur de *A* et par conséquent la ligne BD et la tangente.

(Εικόνα 2.4) (Paul Tannery σσ. 155-156)

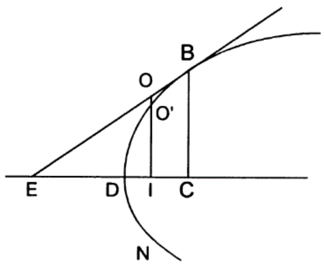
Σύμφωνα με τον Mahoney η απόδειξη είναι η εξής (εικόνα 2.5):

Στη παραπάνω μέθοδο (των maxima et minima) έχουμε απλοποιήσει τον προσδιορισμό της εφαπτομένης σε δοσμένο σημείο της καμπύλης. Ας υπάρξει, για παράδειγμα, η παραβολή BDN, η κορυφή D, η διάμετρος DC και ένα σημείο της B, στο οποίο η γραμμή BE εφαπτόμενη στην παραβολή και E σημείο τομής με τον άξονα.

Τότε για ένα δεδομένο σημείο O στην ευθεία γραμμή BE σχεδιάζουμε την τεταγμένη OI, από το σημείο B της παραβολής την τεταγμένη BC. ο λόγος του CD ως προς DI θα είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του τετραγώνου του BC ως προς το τετράγωνο του OI, διότι το O βρίσκεται εκτός της παραβολής. Αλλά λόγω των όμοιων τριγώνων, ο λόγος του τετραγώνου του BC ως προς το τετράγωνο του OI θα είναι ίσος με τον λόγο του τετραγώνου του CE ως προς το τετράγωνο του EI.

Αλλά από τη στιγμή που το σημείο B μας δίνεται τότε και η BC είναι γνωστή. Συνεπώς το σημείο C είναι γνωστό, όπως και το τμήμα CD. Άρα έστω το CD να είναι ίσο με ένα δοσμένο D, CE να είναι ίσο με A και CI με E.

Τότε ο λόγος του D προς D-E είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του A^2 ως προς A^2+E^2-2AE. Πολλαπλασιάζοντας τους μέσους και τους άκρους μεταξύ τους, DA^2+DE^2-2DAE θα είναι μεγαλύτερο από το DA^2-A^2E. Εφαρμόζοντας λοιπόν την προηγούμενη μέθοδο adequate, σβήνοντας τους ίσους όρους, το DE^2-2DAE θα είναι περίπου ίσο με το $-A^2E$ ή αλλιώς το DE^2+A^2E θα είναι περίπου ίσο με το 2DAE. Διαιρώντας όλους τους όρους με *το E, επομένως DE +A² θα είναι περίπου ίσο με το 2DA. Διώχνοντας το DE, το A² θα είναι ίσο με το 2DA και επομένως το A θα είναι ίσο με το 2D. Συνεπώς αποδείξαμε ότι το CE είναι διπλάσιο του CD, που στη πραγματικότητα ισχύει.* (Mahoney, σελ. 166).



(Εικόνα 2.5)

Συνοπτικά τα παραπάνω μπορούν να γραφούν:

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$$

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{EC^2}{EI^2}$$

$$\frac{CD}{DI} > \frac{EC^2}{EI^2}$$

Έστω CD=C, CE=A, CI=E και BC, C, CD γνωστά, έχουμε:

$$\frac{D}{D-E} > \frac{A^2}{(A-E)^2}$$

Οπότε, $$D(A-E)^2 > A^2D - A^2E$$

$$DA^2 + DE^2 - 2DAE > A^2D - A^2E$$

Σβήνοντας τους ίσους όρους, και εφαρμόζοντας την μέθοδο adequate:

$$DE^2 + A^2E \sim 2DAE$$

Διαιρώντας με το E:

$$DE + A^2 \sim 2DA$$

Διώχνοντας τους εναπομείναντες όρους με E, θα έχουμε την ισότητα:

$$2DA = A^2$$

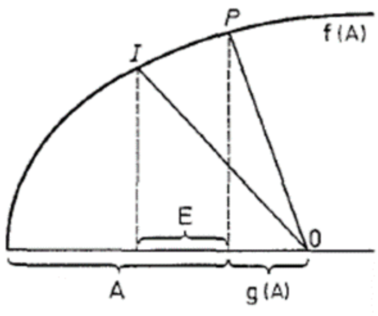
$$A = 2D$$

2.3.1.2 Μέθοδος της κάθετης στην εφαπτομένη (Method of normal)

O Fermat στην αλληλογραφία του προς τον Descartes που δόθηκε στον Mersenne (Paul Tannery σσ. 156-158), εξηγεί την επιμονή του στην ενότητα των μεθόδων των ακραίων τιμών και εφαπτομένων, από το γεγονός ότι αντιμετώπισε το πρόβλημα της εφαπτομένης σαν πρόβλημα ακραίων τιμών (Stromholm σ. 56).

Για τον Descartes, αν και μελέτησε τη βάση της μεθόδου του Fermat με διάφορους τρόπους, ήταν αδύνατο να εντοπίσει την ποσότητα που γινόταν μέγιστη στη διαδικασία, με αποτέλεσμα να μην τον ικανοποιεί ότι η λύση στηριζόταν στη πραγματικότητα σε πρόβλημα ακραίων τιμών (Baron σ. 170).

Σύμφωνα με τον Stromholm ο Descartes είχε ερμηνεύσει το παραπάνω ότι η εφαπτομένη θα είναι η μέγιστη γραμμή από σημείο του άξονα στη καμπύλη. Αλλά ο Fermat του απάντησε ότι η ακραία τιμή εντοπίζεται στη κάθετη στην εφαπτομένη ως η γραμμή ελάχιστου μήκους (Stromholm σ. 56).



(Εικόνα 2.5)

Συνεπώς δεδομένου σημείου P, αν κάποιος προσδιορίσει το O με τέτοιο τρόπο ώστε 0P ήταν η ελάχιστη γραμμή από το O στην καμπύλη, το OP θα ήταν η κάθετη στην εφαπτομένη στη καμπύλη στο P. Τότε όπως αναφέρει ο Stromholm το πρόβλημα λύθηκε γράφοντας:

$$g^2(A) + f^2(A) \sim (g(A) + E)^2 + f(A-E)^2$$

και χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη ρουτίνα.

Σύμφωνα με τον Stromholm ο FERMAT αναφέρει συγκεκριμένα για την μέθοδο των *normals*:

«Έτσι εφαρμόζω τη μέθοδο μου για να βρω τις εφαπτόμενες, αλλά έχω αναγνωρίσει ότι ήταν αποτυχημένη, διότι η γραμμή 0I που είναι στο τετράγωνο είναι συνήθως δύσκολο να βρεθεί με αυτήν την κλίση.» (Stromholm σ. 57)

Τέλος όπως αναφέρει ο Stromholm, ο Fermat κλείνει λέγοντας ότι αυτό ήταν που τον οδήγησε στην τυπική μέθοδο που ήταν απολύτως γενική και ευκολότερο στη χρήση.

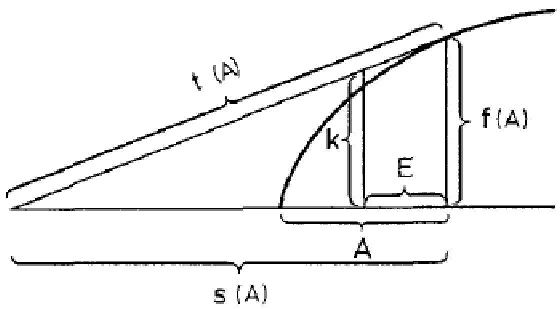
Συνεχίζει ο Stromholm τονίζοντας ότι δεν υπάρχει στο γραπτό έργο του FERMAT οποιαδήποτε δικαιολόγηση της γενικής μεθόδου των εφαπτομένων και ότι στην πραγματικότητα, μια τέτοια απόδειξη δεν θα ήταν καν πιθανή για τη φόρμα που του έδωσε. Αυτό θα μπορούσε να γίνει μόνο με τη χρήση της έγκυρης adeaquation:

$$\frac{f(A)}{s(A)} \sim \frac{f(A-E)}{s(A)-E}$$

Αλλά αυτό όπως μας λέει δε το έκανε ποτέ ο Fermat και το πλησιέστερο που παρατήρησε ήταν ότι, $\frac{t(A)}{f(A)}, t(A)$ όντας το μήκος της εφαπτομένης (εικόνα 2.6), ήταν ελάχιστο (Stromholm σ. 57)

2.3.1.3 Σύγχρονη διατύπωση της μεθόδου της εφαπτομένης

Ο Stromholm αλλάζοντας τον συμβολισμό του Fermat διατυπώνει με σύγχρονο τρόπο την απόδειξη της μεθόδου:



(Εικόνα 2.6)

Από τα όμοια τρίγωνα γράφουμε τη πρόταση

$$\frac{s(A)-E}{s(A)} = \frac{k}{f(A)}$$

Αντικαθιστώντας $k \sim f(A-E)$ λύνουμε ως προς s(A) (κάθετη υπό την εφαπτομένη)

$$s(A) \sim \frac{Ef(A)}{f(A) - f(A-E)}$$

Αν μεταφέρουμε το Ε στο παρονομαστή (υποθέτοντας ότι f(x) είναι πολυώνυμο άρα f(A)-f(A-E) διαιρείται με το Ε,

$$s(A) \sim \frac{f(A)}{\frac{f(A-E) - f(A)}{E}}$$

Και με τη συνήθη διαδικασία, καταστέλλοντας τους εναπομείναντες όρους του Ε, έχουμε, με σύγχρονο συμβολισμό

$$s(A) = \frac{f(A)}{f'(A)}$$

(Stromholm σ. 55)

Την ίδια απόδειξη αναφέρουν οι Edwards (σελ. 124-125) και Katz (σελ. 510).

2.3.1.4 Μετατροπή της Μεθόδου

O Fermat τροποποιεί τη μέθοδο των εφαπτομένων κάνοντας σαφή το ρόλο της Adequality και αναφέρει:

“*Nous considérons en fait dans le plan d’une courbe quelconque deux droites données de position, donton peut appeler l’une diamètre, l’autre ordonnée. Nous supposons la tangente déjà trouvée en un point donné sur la courbe, et nous considérons par adégalité la propriété spécifique de la courbe, non plus sur la courbe même, mais sur la tangente à trouver. En éliminant selon notre théorie des maxima et minima, les termes qui doivent l’être, nous arrivons à une égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente avec le diamètre, par la suite la tangente elle- même*” (Fermat, 1891, vol. III: 141)

Μετάφραση*: «Θεωρούμε στο επίπεδο μιας αυθαίρετης καμπύλης δύο γραμμές δεδομένης θέσης, τις οποίες μπορεί κανείς να καλέσει τη μία διάμετρο και την άλλη την τεταγμένη. Υποθέτουμε ότι η εφαπτομένη έχει ήδη βρεθεί σε ένα δεδομένο σημείο της καμπύλης, και θεωρούμε με τη μέθοδο της adequality τη συγκεκριμένη ιδιότητα της καμπύλης, όχι μόνο στην ίδια την καμπύλη, αλλά και στην εφαπτομένη που είναι να βρεθεί. Αφού* *εξαλείψουμε, σύμφωνα με τη θεωρία μας για τα μέγιστα και τα ελάχιστα, τους απαιτούμενους όρους, φτάνουμε σε μια ισότητα που καθορίζει το σημείο τομής της εφαπτομένης με τη διάμετρο, και κατά συνέπεια την ίδια την εφαπτομένη». (Oxford Handbooks, σ. 425)*

Ο Descartes απαντάει για τη μέθοδο κατασκευής της εφαπτομένης του Fermat.

"*Au reste, je m'étonne extrêmement de ce qu'il veut tacher de persuader que la façon dont il trouve cette tangente est la même qu'il avait proposée au commencement, et qu'il apporte pour preuve de cela qu'il s'y sert de la même figure, comme s'il avait affaire à des personnes qui ne sachent pas seulement lire ; car il n'est besoin que de lire l'un et l'autre écrit, pour connaître qu'ils sont très différents"* (Descartes, 1897, vol. II: 323).

Μετάφραση*: «Επιπλέον, με εκπλήσσει εξαιρετικά αυτό που θέλει να δοκιμάσει να πείσει ότι ο τρόπος με τον οποίο βρίσκει αυτήν την εφαπτομένη είναι ο ίδιος που πρότεινε στην αρχή, και ότι παρέχει ως απόδειξη ότι χρησιμοποιεί το ίδιο διάγραμμα για αυτό, σαν να είχε να κάνει με ανθρώπους που μετά βίας ξέρουν να διαβάζουν, γιατί κάποιος χρειάζεται μόνο να ξέρει να διαβάσει το ένα και το άλλο γραπτό, για να καταλάβει ότι είναι πολύ διαφορετικά»*. (Oxford Handbooks, σ. 430)

Ο Stromholm σχολιάζει σχετικά με τη μετατροπή της μεθόδου της εφαπτομένης από τον Fermat, ότι πιθανότατα, στήριξε τη μέθοδό του αρχικά στη Μέθοδο 2, η οποία θέτει ως αρχή την εξίσωση P(A)=P(A+E). Το πρόβλημα διαίρεσης με το E και στη συνέχεια θέτοντας το E με O, καθώς και ο διπλός ρόλος του A, ως ρίζα και ως άγνωστο, οδήγησαν τον Fermat, κατά το χρονικό της διαμάχης με το Descartes να εξελίξει τη μέθοδο του ενσωματώνοντας τη Μέθοδο 1, που κάνει σαφή το ρόλο της Adequality.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – RENE DESCARTES

Ο René Descartes γεννήθηκε το 1596 στη La Haye κοντά στη Tours της Γαλλίας σε μία οικογένεια της παλιάς γαλλικής αριστοκρατίας (Katz σ. 478). Το 1613 μετακόμισε στο Παρίσι, όπου και γνώρισε τον Mersenne. Μετά από τη μικρή του παραμονή στο Παρίσι, το 1617 σε μία πολύ δημιουργική περίοδο για εκείνον, μετακόμισε στην Ολλανδία. Εκεί έζησε 20 χρόνια, και αφού υπηρέτησε για λίγο στον ολλανδικό στρατό του Μαυρίκιου της Οράγγης (Maurice of Nassau), πρίγκηπα της Οράγγης (Prince of Orange) και κυβερνήτη (Stadtholder) της Ολλανδικής Δημοκρατίας (Biography: René Descartes, 1898 σ. 192), αφιέρωσε όλο του τον χρόνο στην φιλοσοφία και τα μαθηματικά και στο να γράψει μία πραγματεία πάνω σε όλη την επιστήμη. Η πραγματεία αυτή δημοσιεύθηκε το 1637 με τίτλο *Discours de la Méthode Pour Bien Conduire Sa Raison Et Chercher La Vérité Dans Les Sciences*, και η οποία συνοδευόταν με τρία παραστήματα με τίτλους, *La Dioptrique*, Les *Météores*, *La Géométrie*. (Biography: René Descartes, 1898 σ. 194). Αποκαλείται ως ο μεγάλος Γάλλος φιλόσοφος, μαθηματικός και επιστήμονας του 17ου αιώνα (Nadler σ. 2) και θεωρείται ο θεμελιωτής της μοντέρνας φιλοσοφίας.

Η μέθοδός του Descartes για την κατασκευή των εφαπτομένων, βρίσκεται στο βιβλίο *La Géométrie* το οποίο δημοσιεύθηκε το 1637 ένα χρόνο αργότερα από του Fermat. (Kline σ. 345)

Σύμφωνα με τον Coolidge το έργο του Descartes παρέχει μια πολύ ευρύτερη βάση για μεταγενέστερη ανάπτυξη από τα γραπτά των Ελλήνων ή του Fermat. Χρησιμοποίησε μία πολύ πιο λειτουργική άλγεβρα και είχε ευρύτερο όραμα για τη σημαντικότητα του επιτεύγματος του. (Coolidge σ. 244) . Ο Descartes χρονικά από το γράμμα του τον Ιανουάριο το 1638, χρησιμοποίησε τον όρο «καθολικός κανόνας» για τη μέθοδό του, για να την διαχωρίσει από τη μέθοδο του Fermat, καθώς εκείνος μιλούσε για τον «άψογο γενικό κανόνα» ή «μοναδικό και γενικό κανόνα».

(The Oxford Handbook, σ. 414)

Ο Fermat από την άλλη ενώ αναγνώρισε τη σχέση μεταξύ όλων των ειδών εξισώσεων και καμπυλών αλλά δεν είχε τη περιέργεια να πάει πέρα από τις απλές δευτέρου βαθμού και τις κωνικές. Ο Descartes έδειξε ότι αν μία καμπύλη μπορεί να κατασκευαστεί μηχανικά, τότε μπορούμε να μεταφράσουμε αυτή τη διαδικασία σε αλγεβρική γλώσσα και έτσι να βρούμε μία εξίσωση για την καμπύλη. (Coolidge σ. 244)

Ο σκοπός του Descartes ήταν να παρουσιάσει μία μέθοδο κατασκευής όλων των προβλημάτων της γεωμετρίας. Στο ξεκίνημα του Βιβλίου, αναφέρει συγκεκριμένα:

"*Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons ce qui se nomme une équation*" (Descartes, 1987: 335).

Μετάφραση

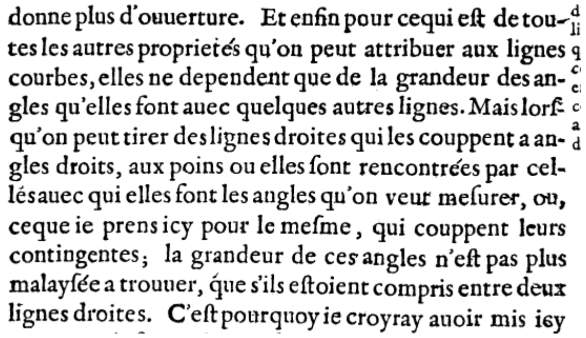
«*Επιθυμώντας λοιπόν να επιλύσεις οποιοδήποτε πρόβλημα, πρέπει πρώτα να το θεωρήσεις ως έχει ήδη γίνει και να δώσεις ονόματα σε όλες τις γραμμές που είναι απαραίτητες για την κατασκευή του, γνωστές και άγνωστες. Στη συνέχεια, χωρίς να ληφθεί υπόψη η διαφορά μεταξύ γνωστών και άγνωστων γραμμών, πρέπει κανείς να διασχίσει τη δυσκολία, σύμφωνα με τη σειρά που δείχνει πιο φυσικά με ποιον τρόπο οι γραμμές εξαρτώνται η μια από την άλλη, έως ότου κάποιος βρει ένα μέσο έκφρασης της ίδιας ποσότητας με δύο τρόπους, που ονομάζεται εξίσωση.*» (Oxford Handbooks, σ. 414)

Η μέθοδος αποτελείται επομένως από πέντε στάδια. Αρχικά, πρέπει να υποθέσουμε ότι το πρόβλημα λύθηκε, στη συνέχεια να δώσουμε ονόματα σε όλες τις γνωστές και άγνωστες γραμμές και να τις ονομάσουμε. Μετά από αυτό θα πρέπει να ερμηνεύσουμε το πρόβλημα με τη βοήθεια εξισώσεων, οδηγώντας σε μία ή περισσότερες εξισώσεις, και τελικά να το επιλύσουμε. Αυτή η μέθοδος φαίνεται να είναι καθολική, με την έννοια ότι επιτρέπει την επίλυση όλων των προβλημάτων της γεωμετρίας. (Oxford Handbooks, σσ. 414-413)

3.1 Μέθοδοι εφαπτομένων

Για τον Descartes το πρόβλημα της εύρεσης της εφαπτομένης στη καμπύλη ήταν σημαντικό (Kline σ. 345). Σύμφωνα με τον Edwards η εκτίμηση του Descartes στη

σημασία του προβλήματος της κατασκευής εφαπτομένων γραμμών εκφράστηκε στη δήλωσή του ότι δεν είναι μόνο «*το πιο χρήσιμο και γενικό πρόβλημα που γνωρίζω, αλλά ακόμη και αυτό που πάντα ήθελα να μάθω στη γεωμετρία*» (C. H. Edwards σ. 126).
Στη δήλωσή του στο δεύτερο βιβλίο του *La Geometrie* ο Descartes αναφέρει χαρακτηριστικά (σελ. 341):



donne plus d'ouuerture. Et enfin pour cequi eſt de tou-
tes les autres proprietés qu'on peut attribuer aux lignes
courbes, elles ne dependent que de la grandeur des an-
gles qu'elles font auec quelques autres lignes. Mais lorſ-
qu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a an-
gles droits, aux poins ou elles ſont rencontrées par cel-
lés auec qui elles font les angles qu'on veut meſurer, ou,
ceque ie prens icy pour le meſme, qui couppent leurs
contingentes; la grandeur de ces angles n'eſt pas plus
malayſée a trouuer, que s'ils eſtoient compris entre deux
lignes droites. C'eſt pourquoy ie croyray auoir mis icy

(Εικόνα 3.1)

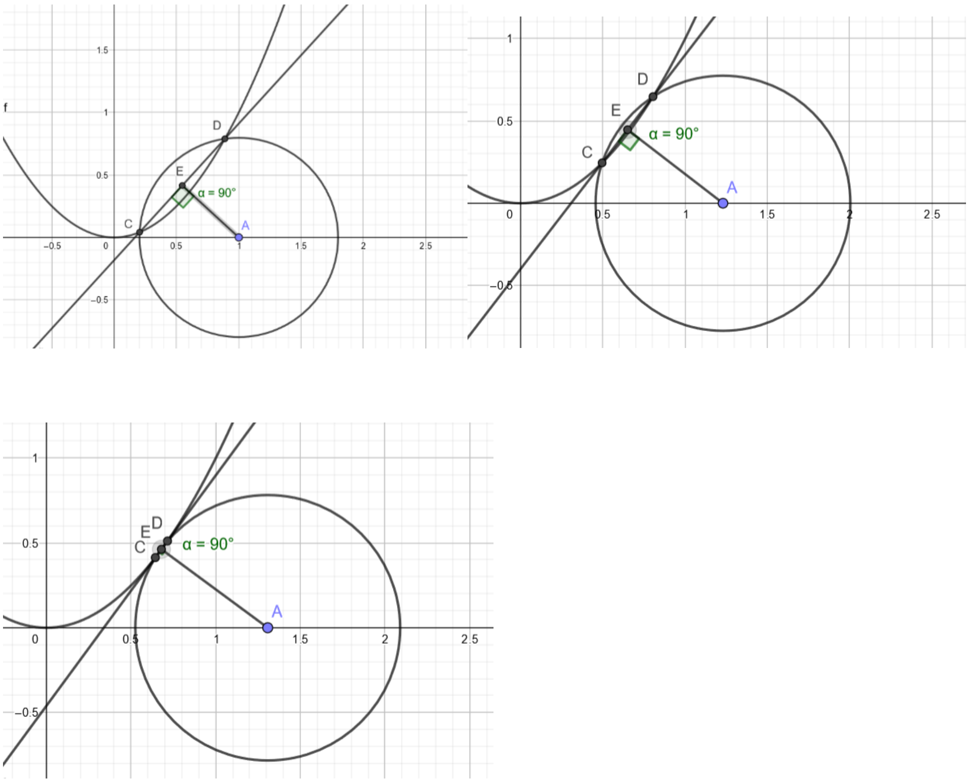
« *Όλες οι άλλες ιδιότητες των καμπυλών εξαρτώνται μόνο από τις γωνίες που αυτές οι καμπύλες σχηματίζουν με άλλες γραμμές. Αλλά η γωνία που σχηματίζεται από δύο τεμνόμενες καμπύλες μπορεί να μετρηθεί τόσο εύκολα σα τη γωνία μεταξύ δύο ευθείων γραμμών, υπό την προϋπόθεση ότι η μια ευθεία γραμμή μπορεί να σχεδιαστεί σχηματίζοντας ορθές γωνίες με μία από αυτές τις καμπύλες στο σημείο τομής της με την άλλη*» (David Eugene Smith σ. 95)

3.1.1 Μέθοδος 1 – Μέθοδος των "normals"

Η μέθοδός του Descartes ήταν καθαρά αλγεβρική, αναπτύσσοντας μία τεχνική για τον προσδιορισμό της κάθετης στην εφαπτομένη. Σε αντίθεση με τον Fermat απέφυγε τη χρήση απείρων μικρών ποσοτήτων. (Baron σ. 165)
Ο Descartes άντλησε την ιδέα του να σχεδιάζει μία κάθετη στην εφαπτομένη (normal), όταν συνειδητοποίησε ότι η ακτίνα ενός κύκλου είναι πάντα κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου. Έτσι η ακτίνα του κύκλου που είναι εφαπτόμενος σε μία καμπύλη σε ένα δοσμένο σημείο, θα είναι και κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης. Για να κατασκευάσει έναν κύκλο εφαπτόμενο στη καμπύλη απαιτούσε μία ιδέα παρόμοια με του Fermat, λέγοντας ότι τα δύο σημεία τομής του κύκλου με τη καμπύλη κοντά στο δοσμένο σημείο θα γίνουν ένα, εάν ο κύκλος εφάπτεται της καμπύλης. (Katz σ. 511)
Η μέθοδός του ήταν χρήσιμη μόνο σε καμπύλες της μορφής y=f(x) όπου f(x) ήταν ένα απλό πολυώνυμο. (Kline σ. 345)

3.1.1.1 Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου

Γενικά ένας κύκλος με κέντρο C(u,0) και ακτίνα r=CP θα τέμνει τη καμπύλη y=f(x) και σε ένα δεύτερο σημείο κοντά στο P. Αν όμως το σημείο P είναι το μόνο σημείο τομής μεταξύ του κύκλου και της καμπύλης, τότε ο κύκλος θα είναι εφαπτόμενος στη καμπύλη. Επομένως ο σκοπός είναι να βρούμε κύκλο με κέντρο C και ακτίνα CP που θα τέμνει τη καμπύλη μόνο στο P. (Suzuki σ. 340)



(Εικόνα 3.2)

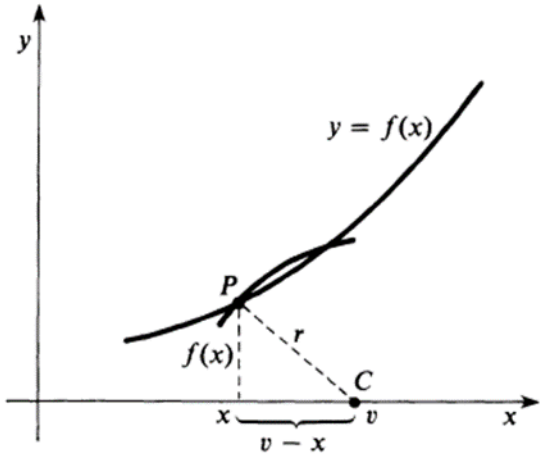
Για παράδειγμα, στα παραπάνω σχήματα (εικόνα 3.2) παρατηρούμε ότι ο κύκλος με κέντρου A(1,0) τέμνει τη καμπύλη σε δύο σημεία τα D , C. Καθώς το κέντρο του κύκλου κινείται προς τα δεξιά A(1.2,0) βλέπουμε ότι ο κύκλος πάλι τέμνει τη καμπύλη σε δύο διαφορετικά σημεία αλλά αυτά έχουν πλησιάσει αρκετά μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι καθώς ο κύκλος κινείται κι άλλο προς τα δεξιά, για παράδειγμα έστω το κέντρο να έχει μετακινηθεί στο σημείο C(1.3,0) , τα δύο σημεία C και D ταυτίζονται, ενώ ταυτόχρονα ο κύκλος εφάπτεται στη καμπύλη y=f(x).

Όπως αναφέρει και ο Edwards το κέντρο του κύκλου θα είναι η τομή του x-άξονα με την κανονική ευθεία που διέρχεται από το σημείο P της καμπύλης (C. H. Edwards σσ. 125-126).

3.1.1.2 Αλγεβρική ερμηνεία της μεθόδου

Αλγεβρικά τα σημεία τομής της καμπύλης και του κύκλου θα επαληθεύουν το σύστημα εξισώσεων της καμπύλης και του κύκλου. Εάν το σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις σημαίνει ότι ο κύκλος δεν εφάπτεται στην καμπύλη. Για να εφάπτεται ο κύκλος στη καμπύλη το σύστημα θα πρέπει να έχει δύο ίδιες λύσεις. Δηλαδή να έχει μία διπλή λύση, το P. (Suzuki σ. 340)

Η λύση του βασίζεται στη μέθοδο των Απροσδιόριστων Συντελεστών της οποίας ο Descartes είναι ο εφευρέτης (Cajori σ. 217).



(Εικόνα 3.3)

Σύμφωνα με τον Edwards, η εφαπτομένη γραμμή τότε θα είναι η κάθετη στην κανονική ευθεία στο σημείο P. Εάν η CP είναι κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης στο P, τότε το σημείο P θα είναι κοινό σημείο της καμπύλης y=f(x) με τον κύκλο $y^2 + (x-u)^2 = r^2$ κέντρου (u,0). Υποθέτοντας ότι $[f(x)]^2$ είναι ένα πολυώνυμο, σημαίνει ότι η εξίσωση

$$[f(x)]^2 + (u-x)^2 = r^2$$

(με u,r σταθερά) θα έχει τη τετμημένη x του P σαν διπλή ρίζα. Ένα πολυώνυμο που έχει μία διπλή ρίζα έστω x=e, θα είναι της μορφής

$$(x-e)^2 \sum c_i x^i$$

Όπως αναφέρει ο Edwards ο Descartes επέβαλλε τη συνθήκη η εξίσωση $[f(x)]^2 + (u-x)^2 = r^2$ έχει μία διπλή ρίζα γράφοντας

$[f(x)]^2 + (u-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \sum c_i x^i$

Στη συνέχεια εξισώνει τους συντελεστές του x στα δύο μέλη, λύνει ως προς u και αντικαθιστά όπου e=x. (C. H. Edwards σσ. 125-126)

Ο Descartes σταμάτησε τη μέθοδο στην εύρεση του σημείου P κέντρου του κύκλου, διότι ενδιαφερόταν μόνο να βρει τη κάθετη στην εφαπτομένη. (Katz σ. 512)

Η κλίση τότε της εφαπτομένης γραμμής στο P θα είναι τότε $\frac{(u-x)}{f(x)}$ (ο αρνητικός αντίστροφος της κλίσης $-\frac{f(x)}{u-x}$ της ευθείας CP) . (C. H. Edwards σ. 126).

Ο Descartes καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος ισχύει για όλες τις γεωμετρικές καμπύλες και αναφέρει χαρακτηριστικά:

"Je ne vois rien qui empêche qu'on étende ce problème en même façon à toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque calcul Géométrique ... Il est toujours aisé de les trouver [les normales]: bien que souvent on ait besoin d'un peu d'adresse, pour les rendre courtes et simples" (Descartes, 1987: 377– 8).

Μετάφραση*: «Δε βλέπω κανένα λόγο να εμποδίζει κάποιον να επεκτείνει αυτό το πρόβλημα με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις καμπύλες, οι οποίες εμπίπτουν σε κάποιο γεωμετρικό υπολογισμό..είναι πάντα εύκολο να βρεθεί η κάθετη στην εφαπτομένη, αν και συχνά χρειάζεται κάποια επιδεξιότητα για συντομία και απλότητα.»* (Oxford Handbooks, σ. 417)

3.1.1.3 Σύγχρονος συμβολισμός της μεθόδου

Με σύγχρονο συμβολισμό, η μέθοδος του Descartes μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Εάν η εξίσωση f(x)=0 έχει ένα ζεύγος ίσων ριζών, έστω x=α, τότε η εξίσωση f'(x)=0 έχει επίσης ρίζα την x=α.

Επομένως για y=f(x), έχουμε $y^2+(u-x)^2=s^2=(f(x))^2+(u-x)^2$

Παραγωγίζοντας ως προς x, (u, s θεωρούνται σταθερές), θα έχουμε,

0=2f(x)f'(x)-2(u-x), άρα, (u-x)=f(x)f'(x)=yf'(x) , (Baron σ. 166).

3.1.1.4 Εφαρμογές

3.1.1.3.1 $y = x^2$

Ο Katz όπως και ο Edwards διατυπώνουν ένα απλούστερο παράδειγμα σε σχέση με τα παραδείγματα που εφαρμόζει ο Descartes.

Η παραβολή y = x^2

Έστω το κέντρο του κύκλου το (u,0). Θέλουμε το σύστημα των εξισώσεων $f^2(x)+(u-x)^2-r^2=0$ και $y=x^2$ να έχει μία διπλή ρίζα στο σημείο της εφαπτομένης (e, e^2) τότε απαλείφοντας το y έχουμε:

$x^4 + (u - x)^2 – r^2 = (x – e)^2 (x^2+ ax + b)$,

$x^4 + x^2 – 2ux + (u^2 – r^2) = x^4 + (a - 2e)x^3 + (b - 2ae + e^2)x^2+ (ae^2 - 2be)x + be^2$.

Εξισώνοντας τους συντελεστές

a-2e=O

$b-2ae+ e^2= 1$

$ae^2 - 2be = -2u$

όπου λύνοντας ως προς u, $u = 2e^3 + e$ και αντικαθιστώντας e = x, η κάθετη υπό την εφαπτομένη είναι $u - x =2x^3$, και η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο (x, x^2) είναι $(u-x)/f(x)=x^2/ 2x^3=2x$

(C. H. Edwards σ. 127)

3.1.1.3.1 $y = x^3$

Έστω το κέντρο του κύκλου το (u,0). Θέλουμε το σύστημα των εξισώσεων $f^2(x)+(u-x)^2-r^2=0$ και $y=x^3$ να έχει μία διπλή ρίζα στο σημείο της εφαπτομένης (e, e^3) τότε απαλείφοντας το y έχουμε:

$x^6 +(x-u)^2-r^2=(x-e)^2(x^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)$

$x^6+x^2-2ux+u^2-r^2 = x^6+(B-2e)x^5+(e^2-2eB+C)x^4+(e^2B-2eC+D)x^3+(e^2C-2eD+E)x^2+(e^2D-2eE)x+e^2E$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές έχουμε:

$B-2e=0$ (2)

$e^2-2eB+C=0$ (3)

$e^2B-2eC+D=0$ (4)

$e^2C-2eD+E=1$ (5)

$e^2D - 2eE = -2u$ (6)

$e^2E = u^2 - r^2$ (7)

Η (2) δίνει $B=2e$, άρα η (3) γίνεται $e^2 - 2e(2e) +C =0$, οπότε $C= 3e^2$.

Αντικαθιστούμε B και C στη (4) έχουμε $e^2 (2e) -2e(3e^2) + D =0$, άρα $D=4e^3$

Οπότε με αντικατάσταση στη (5) παίρνουμε, $e^2(3e^2)-2e(4e^2) +E =1$, άρα $E=1+5e^3$,

Οπότε η (6) γίνεται $e^2(4e^3) - 2e(1 + 5e^4)=-2u$

Άρα $u= e + 3e^5$ και το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου θα είναι $(e + 3e^5, 0)$. Άρα η κάθετη στη καμπύλη θα έχει κλίση

$$\frac{-e^3}{3e^5} = -\frac{1}{3e^2} \qquad (\text{Suzuki σσ. } 341\text{-}342)$$

Τότε η κλίση της εφαπτομένης στη καμπύλη στο σημείο (e,e^3) θα είναι $3e^2$.

Από το παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι η δυσκολία του Descartes είναι ότι αν η $y=f(x)$ με $f(x)$ να είναι ένα πολυώνυμο νιοστού βαθμού, τότε η εύρεση της εφαπτομένης στη καμπύλη στο σημείο $x=e$ απαιτεί να βρούμε τους συντελεστές του $(x-e)^2$ πολλαπλασιασμένο με το πολυώνυμο βαθμού ν-2, το οποίο απαιτεί πολλές πράξεις.

3.1.2 Μέθοδος 2 – Προέκταση της μεθόδου του Fermat

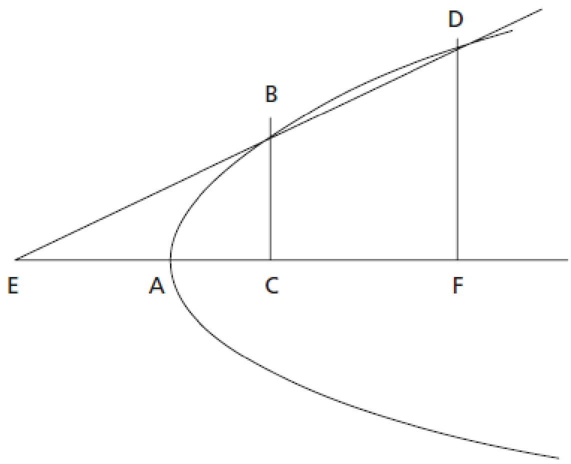
Το 1638, όταν ο Descartes άκουσε για πρώτη φορά τη μέθοδο του Fermat για μέγιστα και ελάχιστα, εξέφρασε την δυσαρέσκειά του με επιστολές προς τον Mersenne, Hardy και άλλους. Δεν του άρεσε ιδιαίτερα η ποσότητα e, με την οποία διαιρεί και στη συνέχεια ισούται με 0. (Coolidge σ. 454)

Ο Descartes σε γράμμα του στον Harry το 1638, περιγράφει τη δεύτερη μέθοδό του για τη κατασκευή εφαπτομένων, ως θεμελίωση της προέκτασης της μεθόδου του Fermat για την εύρεση των εφαπτομένων. (Descartes σ. 170)

Στο γράμμα του εφαρμόζει τη νέα του μέθοδο στην καμπύλη $y=x^3$. Σύμφωνα με τα λεγόμενά του η μέθοδος εύρεσης της εφαπτομένης στη καμπύλη στηρίζεται στο σύστημα εξισώσεων που έχουν μία διπλή ρίζα στο σημείο επαφής, όμως απλοποίησε τη διαδικασία, αντικαθιστώντας το κύκλο με μία ευθεία γραμμή και χρησιμοποίησε την ιδέα της κλίσης έμμεσα ως την αναλογία μεταξύ των πλευρών των όμοιων τριγώνων.

Χαρακτηριστικά ο Descartes αναφέρει τα παρακάτω (Oxford Handbooks, σ. 429):

Έστω σημείο E της διαμέτρου της καμπύλης από όπου περνάει ευθεία που τέμνει τη καμπύλη στα σημεία B και D. Θέτοντας BC=b, AC=c, EC=a, CF=e .



(Εικόνα 3.4)

Από την ομοιότητα των τριγώνων EBC και EDF έχουμε την αναλογία:

$$\frac{CE}{BC} = \frac{EF}{DF}$$

Από το οποίο έχουμε,

$$DF = \frac{ba+be}{a}$$

Οπότε για την καμπύλη $y=x^3$, λαμβάνουμε τη παραπάνω σχέση:

$$\frac{AC}{FA} = \frac{BC^3}{DF^3}$$

Από το οποίο προκύπτει,

$$cb^3 + eb^3 = \frac{cb^3 + a^3 + 3b^3ca^2e + 3b^3ace^2 + cb^3e^3}{a^3}$$

Πολλαπλασιάζοντας τους άκρους και μέσους της αναλογίας και απλοποιώντας το b^3, έχουμε:

$$a^3e = 3ca^2e + 3cae^2 + ce^3$$

Και διαιρώντας με το e:

$$\mathrm{a}^3 = 3\mathrm{ca}^2 + 3\mathrm{cae} + \mathrm{ce}^2$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο αγνώστους a, e, αλλά από τη σχέση του BC=b με του DF=$\frac{\mathrm{ba+be}}{\mathrm{a}}$ έχουμε την εξίσωση $\mathrm{ha} = \mathrm{ga} + \mathrm{ge}$

Αντικαθιστώντας στη προηγούμενη το a ή το e καταλήγουμε σε μία εξίσωση με έναν άγνωστο.

Ο Descartes σημειώνει ότι μέχρι στιγμής οι υπολογισμοί έχουν ακολουθήσει το κανονικό μονοπάτι της ανάλυσης και επισημαίνει ότι για να εφαρμοστούν όλα αυτά στη κατασκευή της εφαπτομένης,

«πρέπει κανείς να σκεφτεί μόνο ότι, όταν το EB είναι η εφαπτομένη, η γραμμή DF δεν είναι άλλη από την ίδια BC, και παρόλα αυτά πρέπει να αναζητηθεί με τον ίδιο υπολογισμό που μόλις έκανα»

Κατά συνέπεια, h = g και "οπότε έχουμε απλά a = a + e, δηλαδή e δεν ισούται με κάτι."

Επομένως, για να βρείτε το a, *αρκεί να αντικαταστήσετε το e με το μηδέν. Αυτή είναι η «παράλειψη των ομοιογενών πραγμάτων»,* η οποία επιτρέπει σε κάποιον να συμπεράνει ότι $a^3 = 3ca^2$ ή $a = 3c$. Ο Descartes τελειώνει το γράμμα γράφοντας:

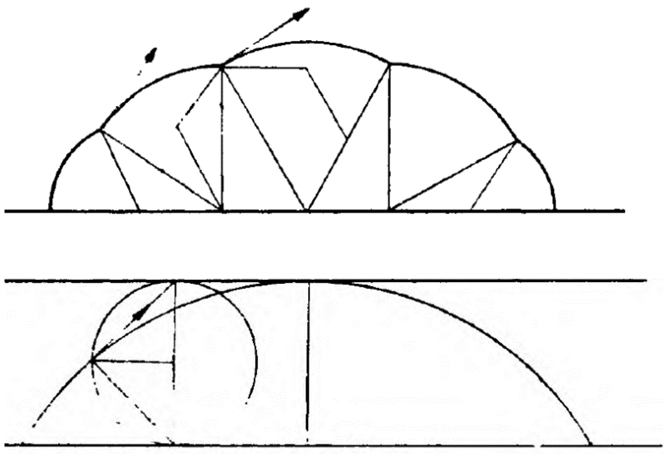
“Voilà donc le fondement de la règle, en laquelle il y a virtuellement deux équations, bien qu’il ne soit besoin d’y faire mention expresse que d’une, car l’autre sert seulement à faire effacer ces homogènes”

«Αυτή είναι λοιπόν η βάση του κανόνα, στην οποία υπάρχουν ουσιαστικά δύο εξισώσεις, αν και κάποιος πρέπει να κάνει συγκεκριμένη αναφορά σε μία, επειδή η άλλη χρησιμεύει αποκλειστικά για να εξαλείψει τα ομοιογενή πράγματα.» (Descartes σσ. 170-173)

(Oxford Handbooks, σ. 429)

3.1.3 Μέθοδος 3 – Κυκλοειδές

Ο Descartes, ωστόσο, είχε εφαρμόσει μια τρίτη μέθοδο για το κυκλοειδές. Για να προσδιορίσει την εφαπτομένη του κυκλοειδούς, ανέπτυξε την ιδέα ενός στιγμιαίου κέντρου περιστροφής. Εάν ένα πολύγωνο κυλά σε μια δεδομένη ευθεία γραμμή, η καμπύλη που περιγράφεται από κάθε κορυφή θα αποτελείται από μια διαδοχή από κυκλικά τόξα και η εφαπτομένη στην καμπύλη σε κάθε σημείο πάνω της θα είναι κάθετη προς την ακτίνα του τόξου. Εάν ένας κύκλος κυλά σε ευθεία γραμμή τότε ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πολύγωνο που αποτελείται από εκατομμύρια πλευρές και η εφαπτομένη σε κάθε σημείο θα είναι κάθετη προς τη γραμμή που ενώνει το σημείο αυτό με το σημείο επαφής της παραγόμενης γραμμής με τη βασική γραμμή. (Baron σ. 164)



Εικόνα 3.5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΠΙΟ ΠΟΛΥΠΛΟΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.1 Gilles Personne de Roberval - Σύνθεση στιγμιαίων κινήσεων

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1630-1640 μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση των εφαπτόμενων γραμμών που προέκυψαν από την διαισθητική έννοια της στιγμιαίας κίνησης αναπτύχθηκε από τον Gilles Personne de Roberval, ο οποίος ήταν καθηγητής στο Βασιλικό κολλέγιο της Γαλλίας από το 1634 μέχρι το θάνατό του το 1675. (C. H. Edwards σ. 134)

Ο Roberval ήρθε στο Παρίσι το 1628 και από εκείνο το χρόνο παρέμεινε σε σταθερή επικοινωνία με τον Mersenne και τον κύκλο επαφών του. Ο Roberval δεν δημοσιοποιούσε γενικά τις μεθόδους του. Αν και πολλά από τα αποτελέσματά του επικοινωνήθηκαν μέσω του Mersenne στον Fermat και άλλο υλικό δόθηκε στους μαθητές του μέσω σημειώσεων, δε δημοσιεύθηκε τίποτα μέχρι το 1693, όταν η Ακαδημία Επιστημών συνέλλεξε και δημοσίευσε έναν αριθμό από μικρές πραγματείες του. (Baron σ. 150)

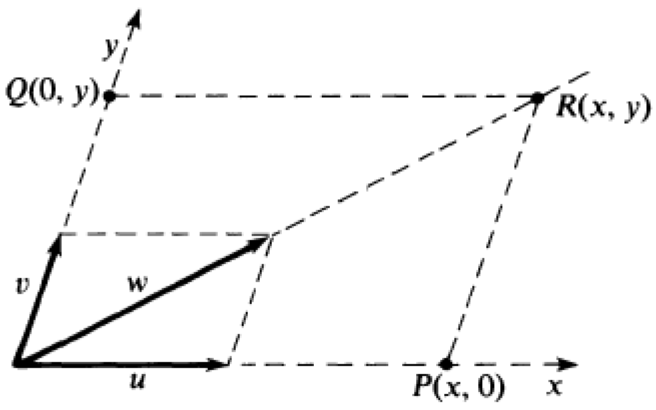
Σύμφωνα με τον Whiteside, ο Roberval ήταν γνωστός για τη μέθοδό του να σχεδιάζει εφαπτομένες. Ίσως η πιο σύνθετη αντιμετώπιση του προβλήματος της εφαπτομένης τον 17ο αιώνα γράφτηκε από τον Roberval κάπου στα μέσα του 17^{ου} αιώνα στη πραγματεία του *Sur la composition des mouvemens*, όπου στο *Axiome ou principe d'invetion* αναφέρει επιγραμματικά:

«la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là", which is applied in his "Règle générale " : " Par les proprietez spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous les mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous avez la touchante de la ligne courbe» (Observations sur la composition des mouvements, Memoires de I'Academie Royale des Sciences, Vol. VI, 1730, pp.24-25)

Μετάφραση: "*Η κατεύθυνση της κίνησης ενός σημείου που περιγράφει μια καμπύλη, είναι η εφαπτόμενη στη καμπύλη σε κάθε θέση αυτού του σημείου*", που εφαρμόζεται στον «Γενικό κανόνα» ("Règle générale"): "*Με τις συγκεκριμένες ιδιότητες της καμπύλης (που θα σας δοθεί) εξετάστε τις διάφορες κινήσεις που έχει το σημείο στη θέση όπου θέλετε να οδηγήσετε την εφαπτομένη: συνθέστε όλες τις κινήσεις σε μία, σχεδιάστε τη γραμμή κατεύθυνσης της σύνθετης κίνησης και θα έχετε την εφαπτομένη της καμπύλης*" (Whiteside σ. 353). Αυτή η ιδέα δεν προερχόταν από τον Roberval, αλλά από τους Έλληνες. Αναπτύχθηκε περεταίρω τον Μεσαίωνα και αξιοποιήθηκε από τον Galileo και αργότερα από τον Torricelli (Baron σ. 174).

Η μεγαλύτερη δυσκολία που συνδεόταν με αυτή τη μέθοδο ήταν να αναλύσεις την συνισταμένη σε συνιστώσες έχοντας το σωστό μήκος και κατεύθυνση. Σύμφωνα με τον Cajori, ο Roberval δε τα κατάφερνε πάντα σε αυτό, παρόλα αυτά η νέα του ιδέα ήταν ένα μεγάλο βήμα στην εξέλιξη προκαταβολικά. Δεν συνέχισε τον αρχαίο ορισμό της εφαπτομένης ως η ευθεία γραμμή που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη. (Cajori σ. 201)

Ο Edwards μας περιγράφει αναλυτικά την ιδέα του Roberval. Θεωρούμε μια καμπύλη ως την πορεία ενός κινούμενου σημείου και την εφαπτομένη γραμμή ως γραμμή στιγμιαίας κίνησης του κινούμενου σημείου. Αν η κίνηση του σημείου που παράγει την καμπύλη είναι αποτέλεσμα ή συνδυασμός δύο επαρκώς απλών κινήσεων, τότε η στιγμιαία γραμμή κίνησης μπορεί να προσδιοριστεί με τη σύνθεση των συνισταμένων κινήσεων. Ο νόμος παραλληλογράμμου (εικόνα 4.1) για την πρόσθεση διανυσμάτων σταθερής ταχύτητας ήταν ήδη γνωστός. Δηλαδή εάν τα σημεία P, Q κινούνται κατά μήκος δύο τεμνόμενων ευθείων γραμμών με σταθερά διανύσματα ταχύτητας u και v αντίστοιχα και παίρνοντας αυτές τις δύο γραμμές ως x και y άξονες, τότε η κίνηση του σημείου R, του οποίου οι συντεταγμένες x και y δίνονται από τα P και Q, έχει διάνυσμα ταχύτητας w=u+v

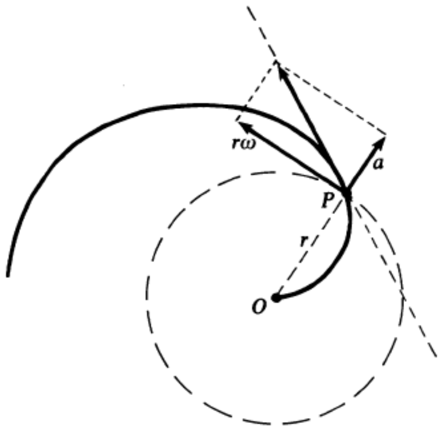


(Εικόνα 4.1)

Ο Roberval το προχώρησε ένα βήμα παραπέρα, εφαρμόζοντας το κανόνα του παραλληλογράμμου σε διανύσματα στιγμιαίας ταχύτητας. Δηλαδή αν η κίνηση ενός σημείου είναι η σύνθεση δύο απλούστερων κινήσεων, υπέθεσε ότι το διάνυσμα της στιγμιαίας του ταχύτητας είναι το άθροισμα μέσω του κανόνα του παραλληλογράμμου των δύο διανυσμάτων στιγμιαίας ταχύτητας που απαντούν σε δύο απλούστερες κινήσεις. (C. H. Edwards σ. 134)

4.1.2 Σπείρα

Ο Roberval στο έργο του *Traite des Invisibles*, που χρονολογείται από το 1634, αλλά δεν δημοσιεύθηκε μέχρι το 1693, γενικεύει μία μέθοδο που ο Αρχιμήδης είχε χρησιμοποιήσει για να βρει την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της Σπείρας του. Όπως ο Αρχιμήδης θεώρησε τη καμπύλη σαν τον τόπο ενός κινούμενου σημείου υπό την επίδραση δύο ταχυτήτων. (Kline σ. 344)

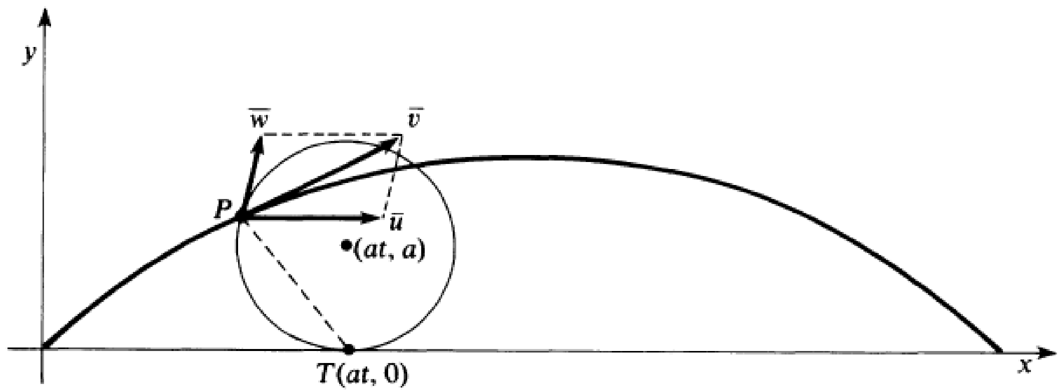


(Εικόνα 4.2)

Για παράδειγμα εάν θεωρήσουμε την Αρχιμήδεια Σπείρα δοσμένη με πολικές συντεταγμένες r=αt, θ=ωt. Η κίνηση του σημείου P(αt,ωt) κατά μήκος της σπείρας, μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα μιας ακτινικής κίνησης (μακριά από την προέλευση) και μίας γωνιακής κίνησης. Για να βρούμε την εφαπτομένη στην σπείρα στο σημείο P, κατασκευάζουμε ένα ακτινικό διάνυσμα μήκους α (η ακτινική ταχύτητα) και ένα διάνυσμα μήκους rω (η γωνιακή ταχύτητα) εφαπτόμενο στον κύκλο ακτίνας r στο P. Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που καθορίζεται από αυτά τα δύο διανύσματα είναι η διανυσματική ταχύτητα στο P και επομένως καθορίζει την εφαπτόμενη γραμμή στη σπείρα στο P. (C. H. Edwards σ. 135)

4.1.3 Κυκλοειδές

Σύμφωνα με τον Edwards, μια εξαιρετική επιτυχία στη προσέγγιση της στιγμιαίας κίνησης ήταν ο προσδιορισμός της εφαπτομένης σε κυκλοειδές. Έστω ένας κύκλος ακτίνας α που είναι αρχικά εφαπτόμενος στον άξονα x στο (0,0) και στη συνέχεια κυλάει κατά μήκος του άξονα x προς τα δεξιά με μοναδιαία γωνιακή ταχύτητα (μία ακτίνα / δευτερόλεπτο). Τότε το κυκλοειδές είναι η τροχιά του σημείου P στον κύκλο που ήταν αρχικά στο ξεκίνημα και οι ορθογώνιες συντεταγμένες είναι x = α(t - sint), y=α(1- cost)



(Εικόνα 4.3)

O Roberval είδε τη κίνηση του σημείου P κατά μήκους του κυκλοειδούς σαν τη σύνθεση (1) της ενιαίας μεταφοράς στα δεξιά με ταχύτητα a και (2) της περιστροφής με τη φορά του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα, με κέντρο (αt,α) τη χρονική στιγμή t. Τα αντίστοιχα διανύσματα στιγμιαίας ταχύτητας θα είναι:

$\bar{u} = (a, 0)$ (μεταφορά) (1)

$\bar{w} = (-acost, sint)$ (περιστροφή) (2)

Το άθροισμά τους με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου είναι το διάνυσμα ταχύτητας $\bar{v} = (a(1 - cost), asint)$

Το οποίο ορίζει την εφαπτομένη γραμμή του κυκλοειδούς στο P.

Σημείωση, ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο που επιτυγχάνεται εάν παραγωγίσουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσης:

$a(t - sint), a(1 - cost)$

Κλείνοντας ο Edwards μας αναφέρει ότι με σύγχρονη ματιά, αυτή η τελευταία παρατήρηση είναι που επιβεβαιώνει (σε αυτό το παράδειγμα τουλάχιστον) την εγκυρότητα της διαδικασίας σύνθεσης στιγμιαίων διανυσμάτων ταχύτητας με τη μέθοδο αθροίσματος του παραλληλογράμμου. (C. H. Edwards σσ. 135-136)

4.2 Οι αλγόριθμοι των Johann Hudde - René-François Walter de Sluse

Σύμφωνα με τον Katz η κινηματική μέθοδος για τον προσδιορισμό των εφαπτομένων του Roberval στα τέλη της δεκαετίας του 1630 εξαρτιόταν από τη γεωμετρική περιγραφή της καμπύλης και έτσι δεν δημιούργησε την ανάγκη για έναν απλό αλγεβρικό αλγόριθμο για τον προσδιορισμό των εφαπτομένων. Οι διαδικασίες του Fermat, και ιδιαίτερα του Descartes, οδηγούσαν συχνά σε περίπλοκες αλγεβρικές μεθόδους οι οποίες δεν παρείχαν την ευκολία του υπολογισμού. Αλλά η μελέτη αυτών των μεθόδων οδήγησε δύο άλλους μαθηματικούς, τον Johann Hudde (1628-1704) και τον René-François Walter de Sluse (1622-1685), να ανακαλύψουν τη δεκαετία του 1950 απλούστερους κανόνες. (Katz σ. 512)

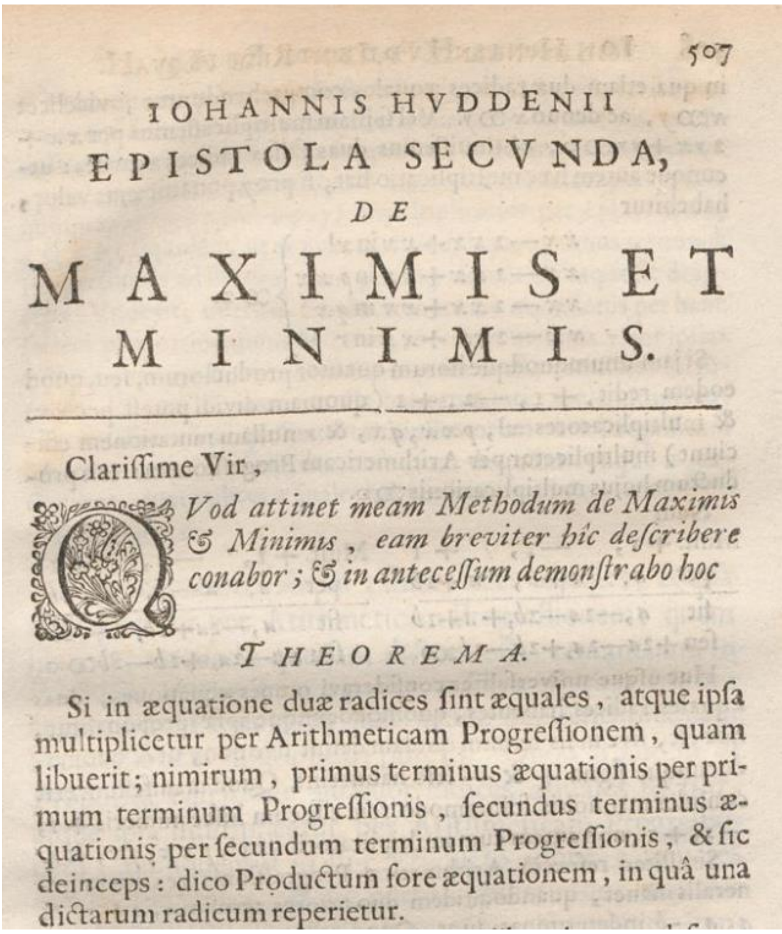
4.2.1 Johann Hudde

Το κλειδί για τις μεθόδους του Descartes ήταν να γνωρίζουμε πότε το σύστημα εξισώσεων που καθορίζει τη τομή των δύο καμπυλών (είτε μια γραμμή και καμπύλη, είτε ένας κύκλος και καμπύλη) έχει διπλή ρίζα, η οποία αντιστοιχεί στο σημείο επαφής. Ένας αποτελεσματικός κανόνας για την ανίχνευση διπλών ριζών πολυωνύμων θα ενίσχυε σε μεγάλο βαθμό τη χρησιμότητα της μεθόδου του Descartes. Μια τέτοια μέθοδος ανακαλύφθηκε από τον Ολλανδό μαθηματικό Jan Hudde (Suzuki σ. 343)

Ο Hudde ήταν ένας από τους σπουδαστές του Van Schooten, και δραστηριοποιήθηκε στην πολιτική ζωής της Ολλανδίας (Katz). Κατά τη σύντομη περίοδο της μαθηματικής του δραστηριότητας ο Hudde ασχολήθηκε κυρίως με την βελτίωση των αλγεβρικών μεθόδων (Baron σ. 217). Οι συνεισφορές του στα μαθηματικά έγιναν στα τέλη της δεκαετίας του 1650, όταν δύο από τις μελέτες του παρουσιάστηκαν στην έκδοση του

Van Schooten της Γεωμετρίας του Descartes το 1659. Στην επιστολή *De maximis et minimis* (για μέγιστα και ελάχιστα), ο Hudde περιέγραψε τον κανόνα του απλοποιώντας τους υπολογισμούς που είναι αναγκαίοι για τον προσδιορισμό της διπλής ρίζας σε μια πολυωνυμική εξίσωση και απαραίτητη στη μέθοδο του Descartes για την εξεύρεση των ευθειών που είναι κάθετες στην εφαπτομένη (normal). (Katz σ. 512). Ο Hudde επέκτεινε τη θεμελιώδη ιδέα του Descartes για τα μέγιστα και ελάχιστα, δηλαδή ότι κοντά στη μέγιστη τιμή μιας ποσότητας, η μεταβλητή που δίνει αυτή την ποσότητα έχει δύο διαφορετικές τιμές, αλλά στο μέγιστο αυτές οι δύο τιμές γίνονται μία διπλή ρίζα. Η προσέγγισή του ήταν ο πρόδρομος στο σύγχρονο ισοδύναμο του μηδενισμού της πρώτης παραγώγου, αλλά οι διαδικασίες του ήταν εντελώς αλγεβρικές και βασίζονταν σε μια έξυπνη χρήση αριθμητικών εξελίξεων. (Curtin σ. 1)

4.2.1.1 Ο κανόνας του Hudde


507

IOHANNIS HVDDENII
EPISTOLA SECVNDA,
DE
MAXIMIS ET
MINIMIS.

Clariſſime Vir,

Quod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc deſcribere conabor; & in anteceſſum demonſtrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices ſint æquales, atque ipſa multiplicetur per Arithmeticam Progreſſionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progreſſionis, ſecundus terminus æquationis per ſecundum terminum Progreſſionis, & ſic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

(Εικόνα 4.4)

«Όσον αφορά στην μέθοδο των μέγιστων και των ελάχιστων, θα προσπαθήσω να την περιγράψω εν συντομία και αρχικά θα το αποδείξω:

Θεώρημα: *Εάν μια εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες και αυτή η εξίσωση πολλαπλασιάζεται με μια αυθαίρετη αριθμητική πρόοδο, δηλαδή ο πρώτος όρος της εξίσωσης με τον πρώτο όρο της προόδου, ο δεύτερος όρος της εξίσωσης με τον δεύτερο όρο της προόδου και ούτω καθεξής διαδοχικά, λέω ότι έχει δημιουργηθεί μια εξίσωση στην οποία παραμένει μόνο μία από τις ρίζες που αναφέρονται.»*(εικόνα 4.4), (Curtin σ. 2)

Κανόνας του Hudde

Δίνεται το πολυώνυμο $F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$

Ένα δεύτερο πολυώνυμο $F^*(x)$ κατασκευάζεται ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τους κατά την αύξουσα σειρά τους όρους του F(x) με τους όρους της αριθμητικής προόδου $a, a+b, a+2b, \ldots\ldots, a+nb$. Το πολυώνυμο που προκύπτει είναι $F^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(a+ib)x^i$

Αν α=0 και b=1 τότε παίρνουμε $F^*(x) = \sum_{i=0}^{n} ia_i x^i = xF'(x)$, όπου

$F'(x) = \sum_{i=0}^{n} ia\, x^{i-1}$, η γνωστή μας παράγωγος του πολυωνύμου F(x).

Γενικά έχουμε $F^*(x) = aF(x) + bxF'(x)$

Ο κανόνας του Hudde περιγράφει ότι κάθε διπλή ρίζα της εξίσωσης F(x)=0 πρέπει να είναι ρίζα και της εξίσωσης $F^*(x)=0$.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Αν e είναι διπλή ρίζα της F(x), τότε μπορούμε να γράψουμε

$$F(x) = (x-e)^2 \sum c_i x^i = \sum c_i(x^{i+2} - 2ex^{i+1} + e^2x^i)$$

Αν $A_i = a + bi$, τότε

$$F^*(x) = \sum c_i\big(A_{i+2}x^{i+2} - 2eA_{i+1}x^{i+1} + e^2A_ix^i\big)$$

$$= \sum c_i[(A_i + 2b)x^2 - 2e(A_i + b)x + e^2A_i]x^i$$

$$= \sum c_i[A_i(x-e)^2 + 2bx(x-e)]x^i$$

Όπου είναι φανερό ότι το e είναι ρίζα της F*(x)

Συγκεκριμένα οποιαδήποτε διπλή ρίζα του πολυωνύμου F(x) θα πρέπει να είναι ρίζα της παραγώγου του, F'(x).

Στην πραγματικότητα, αυτή η εμφάνιση του F'(x), στο συνολικό αλγεβρικό πλαίσιο του κανόνα του Hudde, έφερε για πρώτη φορά στην επιφάνεια την υπολογιστική σημασία αυτού που σήμερα αποκαλούμε παράγωγο ενός πολυώνυμου. (C. H. Edwards σσ. 127-128)

4.2.1.2 Εύρεση εφαπτομένης

$\boldsymbol{y^2 = kx}$

Ξεκινάμε όπως και πριν, με τον καρτεσιανό κύκλο

$$kx + (u-x)^2 = r^2 \text{ ή } F(x) = kx + (u-x)^2 - r^2 = 0$$

Παίρνοντας $a = 0\ και\ b = 1$ έτσι ώστε $F^*(x) = xF'(x)$, ο κανόνας του Hudde δηλώνει ότι το x είναι διπλή ρίζα του F(x) μόνο όταν είναι ρίζα του:

$$F^*(x) = (1)kx + (0)u^2 - (1)2ux + 2(x^2) - (0)r^2 = 0$$

$$kx - 2ux + 2x^2 = 0$$

Από το οποίο λύνουμε ως προς τη κάθετη κάτω από τη κανονική(subnormal) $u - x = \frac{1}{2}k$. Έτσι η κλίση της εφαπτομένης γραμμής είναι

$$\frac{u-x}{\sqrt{kx}} = \frac{1}{2}\sqrt{k/x}$$

Η εφαρμογή του κανόνα του Hudde στη καρτεσιανή συνθήκη του κύκλου, ισοδυναμεί στη γλώσσα των παραγώγων με το ακόλουθο:

Έστω $F(x) = [f(x)]^2 + (u-x)^2 - r^2 = 0$. Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση F'(x)=0 ως προς x συναρτήσει του u. Με αυτό το τρόπο εάν θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο C(u,0) στον x άξονα, μπορούμε να βρούμε το x έτσι ώστε η απόσταση του C από το σημείο P(x,f(x)) της καμπύλης y=f(x) να λαμβάνει ακραία τιμή. (C. H. Edwards σσ. 128-129)

4.2.1.3 Προβλήματα Μεγίστου-Ελαχίστου

Ο κανόνας του Hudde μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα μεγίστου-ελαχίστου στηριζόμενος στην ιδέα του Fermat, η οποία αναφέρει ότι αν ένα πολυώνυμο f(x) παρουσιάζει ακραία τιμή M, τότε το πολυώνυμο g(x)=f(x)-M έχει μία διπλή ρίζα. Επομένως για να μεγιστοποιήσουμε το γινόμενο x^2(b-x), χρησιμοποιούμε τον κανόνα για p=0 και b=1 (a=0 και b=1 αντίστοιχα για τον συμβολισμό του Edwards στη παράγραφο 4.2.2) στο πολυώνυμο

$$-x^3 + bx^2 - M$$

Η νέα πολυωνυμική εξίσωση θα είναι $-3x^3 + 2bx^2 = 0$, της οποίας η μη μηδενική ρίζα $x = \frac{2b}{3}$ δίνει τη μέγιστη τιμή του γινομένου. (Katz σ. 513)

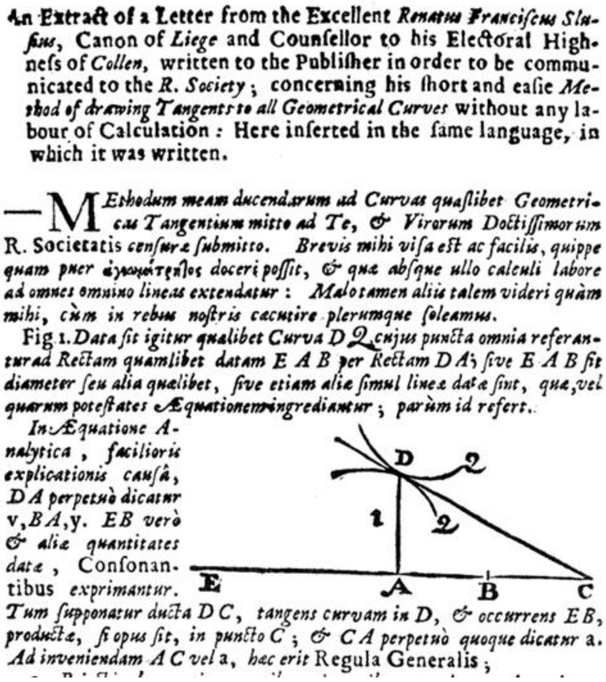
Η σημασία του κανόνα του Hudde ιστορικά δεν έγκειται στην ίδια την διαδικασία, αλλά στη δημοσίευση της γενικής ιδέας της τυποποίησης και απλούστευσης των μεθόδων εφαπτομένης έτσι ώστε τα αποτελέσματα να μπορούν να επιτευχθούν με την εφαρμογή μηχανικών πράξεων χωρίς την ανάγκη απόδειξης. Αν και οι κανόνες του εφαρμόζονταν σε περιορισμένο αριθμό ρητών αλγεβρικών συναρτήσεων, παρόλα αυτά ενέπνευσαν τους επόμενους για να ξεκινήσουν μία συστηματική αναζήτηση σε πιο γενικές μεθόδους με ευρύτερα πεδία εφαρμογής (Baron σ. 219)

4.2.2 René-François Walter de Sluse

Ο Hudde χρησιμοποίησε τον κανόνα του για να βρει τις εφαπτομένες σε καμπύλες που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής f(x)=0, όπου f πολυώνυμο, αλλά ο Sluse έδωσε έναν κανόνα σε καμπύλες που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής f(x,y)=0, όπου f ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών.

Ο Renatius Franciscus Slusius ή Walther de Sluze ήταν ένας μαθηματικός και κληρικός της εκκλησίας της Βαλλωνίας του Βελγίου, ο οποίος υπηρέτησε ως ιερέας της Λιέγης και ηγούμενος του Amay. Γεννήθηκε και πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στη Λιέγη, και όπως και ο Hudde, δεν είχε αρκετό χρόνο για τα μαθηματικά (Katz σ.

513). Δυστυχώς, ο Sluse δεν έκανε καμία προσπάθεια να δημοσιεύσει την μέθοδο του της εφαπτομένης μέχρι το 1673. Παρείχε μόνο μια σύντομη σημείωση που εισήχθη στο *Philosophical Transactions* for 1672/3 (Sluse, R. F. de, A method of drawing tangents to all geometrical curves, *Philosophical Transactions* 7 (1672), No. 5143; 8 (1673), No. 6039) (Baron σ. 215). Παρ 'όλα αυτά συνέχισε μια εκτεταμένη αλληλογραφία με μαθηματικούς από όλη την Ευρώπη. Ο κανόνας του για τον προσδιορισμό της κάθετης κάτω από την εφάπτομένη, t (και φυσικά την εφαπτομένη) σε μια καμπύλη που δίνεται από μια πολυωνυμική εξίσωση f (x, y) = 0 πιθανότατα ανακαλύφθηκε στη δεκαετία του 1650, αλλά εμφανίστηκε μόνο σε έντυπη μορφή σε επιστολή προς τον Henry Oldenburg (1615-1677) στην Αγγλία το 1673. (Katz σ. 513)



An Extract of a Letter from the Excellent *Renatus Franciscus Slusius*, Canon of *Liege* and Counsellor to his Electoral Highness of *Collen*, written to the Publisher in order to be communicated to the *R. Society*; concerning his short and easie *Method of drawing Tangents to all Geometrical Curves* without any labour of Calculation: Here inserted in the same language, in which it was written.

—M*ethodum meam ducendarum ad Curvas quaslibet Geometricas Tangentium mitto ad Te, & Virorum Doctissimorum* R. Societatis *censuræ submitto. Brevis mihi visa est ac facilis, quippe quam puer ἀγεωμέτρητος doceri possit, & quæ absque ullo calculi labore ad omnes omnino lineas extendatur: Malo tamen aliis talem videri quàm mihi, cùm in rebus nostris cæcutire plerumque soleamus.*

Fig 1. *Data sit igitur qualibet Curva D Q cujus puncta omnia referantur ad Rectam quamlibet datam E A B per Rectam D A; sive E A B sit diameter seu alia qualibet, sive etiam aliæ simul lineæ datæ sint, quæ, vel quarum potestates Æquationem ingrediantur; parùm id refert.*

In Æquatione Analytica, facilioris explicationis causâ, D A perpetuò dicatur v, *B A*, y. *EB verò & aliæ quantitates datæ*, Consonantibus *exprimantur. Tum supponatur ducta D C, tangens curvam in D, & occurrens E B, producta, si opus sit, in puncto C; & C A perpetuò quoque dicatur* a. *Ad inveniendam A C vel* a, *hæc erit* Regula Generalis;

(Εικόνα 4.5) (Slufius, 1672 σ. 5143)

4.2.2.1 Ο Κανόνας του Sluse

Ο Katz διατυπώνει τον αλγόριθμο ο οποίος ξεκινά ως εξής. Εξαλείφει αρχικά τους σταθερούς όρους. Μετά αφήνει όλους τους όρους με το x στα αριστερά και μεταφέρει όλους τους όρους με y προς τα δεξιά με την κατάλληλη αλλαγή πρόσημου.

Οποιοσδήποτε όρος που περιέχει τόσο το x όσο και το y θα εμφανιστεί και στα δύο μέρη της εξίσωσης. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζει κάθε όρο στα δεξιά με τον εκθέτη του y και κάθε όρο στα αριστερά με τον εκθέτη του x. Τέλος, αντικαθιστά μία δύναμη του x σε κάθε όρο στα αριστερά με t και λύνει την προκύπτουσα εξίσωση ως προς t.

4.2.2.2 Εύρεση εφαπτομένης

Έστω η εξίσωση $x^5 + bx^4 - 2q^2y^3 + x^2y^3 - b^2 = 0$, απαλείφοντας το σταθερό όρο και μεταφέροντας όλους τους όρους του y από δεξιά, προκύπτει:

$$x^5 + bx^4 + x^2y^3 = 2q^2y^3 - x^2y^3$$

Πολλαπλασιάζοντας με τις δυνάμεις του x από αριστερά και τις δυνάμεις του y από δεξιά προκύπτει: $5x^5 + 4bx^4 + 2x^2y^3 = 6q^2y^3 - 3x^2y^3$ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στο αριστερό μέλος μία δύναμη του x με t και λύνουμε ως προς t.

$$5x^4t + 4bx^3t + 2x^1ty^3 = 6q^2y^3 - 3x^2y^3$$

Η κάθετη υπό την εφαπτομένη τότε είναι

$$t = \frac{6q^2y^3 - 3x^2y^3}{5x^4 + 4bx^3 + 2xy^3}$$

Και η κλίση της εφαπτομένης

$$\frac{y}{t} = \frac{5x^4 + 4bx^3 + 2xy^3}{6q^2y^2 - 3x^2y^2}$$

Με σύγχρονους όρους είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι ο Sluse υπολόγισε

$$t = \frac{yf_y(x,y)}{f_x(x,y)}$$

Ή

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Ο Sluse παρόλα αυτά δε δίνει απόδειξη της μεθόδου του ή να υπαινίσσεται πώς την ανακάλυψε. Σύμφωνα με τον Katz, πιθανότατα την ανακάλυψε μετά από γενίκευση σε αρκετά παραδείγματα (Katz σσ. 513-514).

Ο Coolidge μας αναφέρει ότι μία πρώτη ιδέα θα ήταν να αποδοθεί η απόδειξη της μεθόδου του στον Newton, που είχε περίπου την ίδια τεχνική, αλλά κατά τη γνώμη του η ανακάλυψη της μεθόδου μάλλον ήταν ανεξάρτητη. Σύμφωνα με τον ίδιο πιο πιθανό είναι ότι σκέφτηκε το έργο του Fermat, και πρόσεξε απλώς τη σχέση εκθετών και συντελεστών στην απλή παραγώγιση, και από εκεί προχώρησε σε μερική παραγώγιση (Coolidge σ. 458).

Σε κάθε περίπτωση η σημασία των κανόνων των Hudde και Sluse είναι ότι παρείχαν γενικούς κανόνες με τους οποίους ο καθένας μπορούσε να κατασκευάσει εφαπτομένες σε καμπύλες που περιγράφονται από πολυωνυμικές εξισώσεις. Δεν ήταν πλέον αναγκαίο να αναπτυχθεί ιδιαίτερη τεχνική για κάθε καμπύλη συγκεκριμένα. Οποιοσδήποτε μπορούσε να καθορίσει την εφαπτομένη. (Katz σσ. 513-514)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΧΕΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΥ

Η εισαγωγή των κανόνων των Hudde και Sluse τη δεκαετία του 1650, σύντομα ακολουθήθηκε από πανομοιότυπες μεθόδους και απειροστού χαρακτήρα. Αυτές οι νεότερες μέθοδοι οφείλονταν περισσότερο στις ιδέες του Fermat από ότι εκείνες του Descartes, και ενέπλεκαν την έννοια της εφαπτόμενης γραμμής στο σημείο P μιας καμπύλης, ως την οριακή θέση του ευθύγραμμου τμήματος PQ καθώς το Q πλησιάζει το P κατά μήκος της καμπύλης. Μία τέτοια μέθοδος περιγράφηκε από τον Isaac Barrow στις "Γεωμετρικές διαλέξεις" που δημοσιεύθηκαν το 1670 (C. H. Edwards σ. 132).

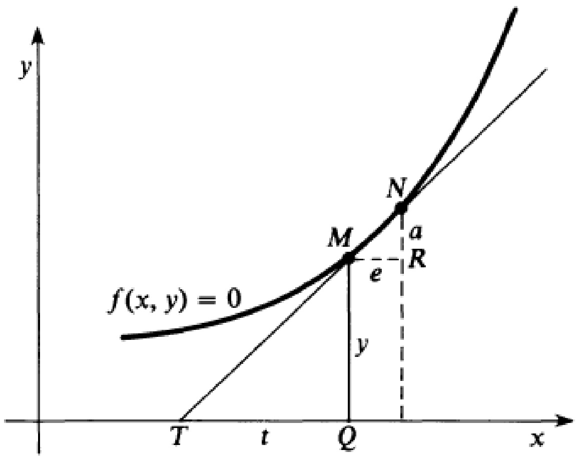
5.1 Isaac Barrow

Ο Isaac Barrow ήταν καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Cambridge, καλός γνώστης ελληνικής και αραβικής γλώσσας, ήταν ικανός να μεταφράσει αρκετά έργα του Ευκλείδη και να βελτιώσει άλλες μεταφράσεις του Ευκλείδη, Απολλώνιου, Αρχιμήδη και Θεοδόσιου. Το μεγάλο του έργο *Lectiones Geometricae* (1669), είναι ένα από τις μεγαλύτερες συνεισφορές στο Λογισμό. Το 1669 ο Barrow παραιτήθηκε της καθηγητικής του θέσης (Kline σ. 346).

Στο μεγαλύτερο μέρος των δημοσιευμένων διαλέξεων του, ο Barrow αντιμετωπίζει την εφαπτομένη και τα προβλήματα τετραγωνισμών χωρίων από μια πιο κλασική και γεωμετρική πλευρά παρά αναλυτική. Για παράδειγμα, υιοθετεί γενικά τον ελληνικό ορισμό της εφαπτόμενης γραμμής σε μια καμπύλη, ως η ευθεία που αγγίζει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο. (C. H. Edwards σ. 132).

Ο Barrow συμπεριέλαβε μία αλγεβρική μέθοδο υπολογισμού της εφαπτομένης στηριζόμενη στο διαφορικό τρίγωνο. (Katz σ. 538) και περιγράφει όπως αναφέρει ο Edwards τη δική του τροποποίηση στη μέθοδο που ο Fermat είχε επινοήσει (αλλά δεν δημοσιεύθηκε) για να κατασκευάσει εφαπτομένες γραμμές σε καμπύλες που ορίζονται από την $f(x, y) = 0$.

5.1.1 Χαρακτηριστικό τρίγωνο του Barrow – Κατασκευή Εφαπτομένης



Θεωρώντας ένα απειροστό τόξο MN της καμπύλης, παίρνει τις συντεταγμένες $M(x,y)$, $N(x+e,y+a)$ και εφαρμόζει $f(x+e,y+a)=f(x,y)=0$ εφόσον τα M και N είναι σημεία της καμπύλης. Στη συνέχεια διαγράφει όλους τους όρους που περιέχουν δύναμη του e ή του a ή γινόμενο αυτών. Τέλος αγνοώντας τη διάκριση μεταξύ «απειροστού τόξου» MN και ευθύγραμμου τμήματος $\overline{MN}$, παρατηρεί την ομοιότητα του τριγώνου TQM και του «χαρακτηριστικού τριγώνου» MNR και λύνει την $f(x+e,y+a)=f(x,y)=0$, (διαγράφοντας τις μεγαλύτερες δυνάμεις του $a \; και \; e$) ως προς τη κλίση $\frac{y}{t}=\frac{a}{e}$ της εφαπτομένης γραμμής στο M. Έτσι ο Barrow χρησιμοποιεί την έννοια του «χαρακτηριστικού τριγώνου» , ουσιαστικά την ιδέα της εφαπτομένης γραμμής ως η οριακή θέση της τέμνουσας καθώς το $a \; και \; e$ πλησιάζουν το 0, και παίρνει το όριο με σκοπιμότητα να παραμελήσει τα «απειροστά ανώτερης τάξης» (C. H. Edwards σσ. 132-133).

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Boyer, μπορούμε να παρατηρήσουμε στη μέθοδο του Barrow για την κατασκευή εφαπτομένων, μεγάλη ομοιότητα με τη διαδικασία που χρησιμοποιούμε στο Διαφορικό Λογισμό, με τα γράμματα α και e να είναι ισοδύναμα στα σύμβολα Δy και Δx. Αυτό όπως αναφέρει ήταν μία ανάπτυξη της μεθόδου του Fermat, στην οποία όμως μόνο μία απείρως μικρή ποσότητα χρησιμοποιείται, το e. Μας αναφέρει ότι οι πηγές του Barrow ήταν ο Descartes, Huygens, Galileo, ενώ ο Barrow δεν αναφέρεται πουθενά στο όνομα του Fermat. (Boyer, 1959 σ. 184)

5.1.1.1 Εφαρμογή - Φύλλο του Descartes

Ο Edwards εφαρμόζει τη μέθοδο του Barrow ως παράδειγμα στο *φύλλο του Descartes* προκειμένου να βρει τη κλίση της εφαπτομένης.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$(x+e)^3 + (y+a)^3 - 3(x+e)(y+a) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$3x^2e + 3xe^2 + e^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 - 3xa - 3ye - 3ae = 0$$

Διαγράφουμε τις υψηλότερες δυνάμεις των $a\ και\ e$ και παίρνουμε,

$$3x^2e + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0$$

Λύνοντας ως προς τη κλίση $m = \frac{a}{e} = \frac{y-x^2}{y^2-x}$

(C. H. Edwards σ. 133)

5.2 Η σχέση του μήκους καμπύλης και εφαπτομένων

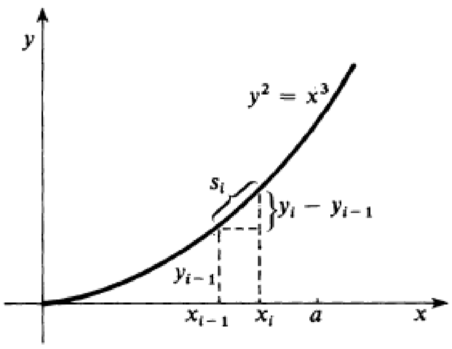
Μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1650, επικρατούσε η άποψη ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα το οποίο να έχει το ίδιο μήκος με το τμήμα μίας καμπύλης, το λεγόμενο *rectification* problem. Με την εφαρμογή των τεχνικών των απειροστών, το 1657 ο Άγγλος William Neil, δίνει λύση στο πρόβλημα για μία συγκεκριμένη περίπτωση καμπύλης την "semi-cubical parabola", $y^2=x^3$, όπου στην οποία υπονοείται ο συνδυασμός των εμβαδών και εφαπτομένων μέσω του χαρακτηριστικού τριγώνου. (C. H. Edwards σ. 118)

Για τον υπολογισμό του μήκους του τμήματος της καμπύλης για $0 \leq x \leq a$ χωρίζουμε αυτό το διάστημα σε n υποδιαστήματα, το i διάστημα να είναι $[x_{i-1}, x_i]$. Αν s_i είναι το μήκος του σχεδόν ευθύγραμμου, τμήματος της καμπύλης $y=x^{3/2}$ τότε ενώνοντας τα αντίστοιχα σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) και (x_i, y_i) έχουμε (εικόνα 5.1):

$$s_i \cong [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{1/2} \quad (1)$$

Άρα το μήκος της καμπύλης δίνεται από

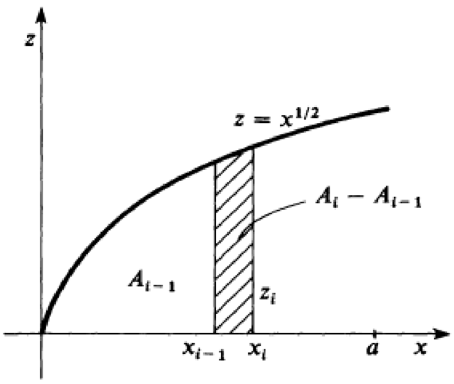
$$s \cong \sum_{i=1}^{n}[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{1/2} \qquad (2)$$



(Εικόνα 5.1)

Ο Neil για να υπολογίσει το παραπάνω άθροισμα εισήγαγε μία βοηθητική καμπύλη τη παραβολή $z=x^{1/2}$. Αν A_i δηλώνει τη περιοχή κάτω από την παραβολή στο διάστημα $[0, x_i]$, τότε γνωρίζουμε από το γενικό αποτέλεσμα του εμβαδού της περιοχής ότι $A_i=2x^{3/2}/3$.

Έτσι θα έχουμε $y_i - y_{i-1} = x_i^{\frac{3}{2}} - x_{i-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(A_i - A_{i-1}) \cong \frac{3}{2}z_i(x_i - x_{i-1})$ (3)



(Εικόνα 5.2)

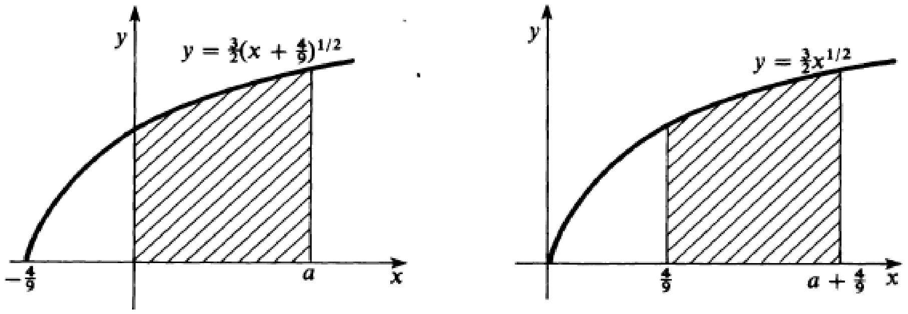
Προσεγγίζοντας το γραμμοσκιασμένο μέρος στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ (εικόνα 5.2), με ορθογώνιο ύψους $z_i=x_i^{1/2}$, αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη σχέση (2), έχουμε:

$$s \cong \sum_{i=1}^{n}\left[1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(x_i - x_{i-1}) \cong \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{9}{4}z_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$s \cong \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2}\left(x_i + \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}(x_i - x_{i-1}) \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα της σχέσης (4) είναι αυτό που δίνει την περιοχή του τμήματος της παραβολής $y=(3/2)(x+4/9)^{1/2}$ για τα x που ανήκουν στο διάστημα [4/9, α+4/9]. Από τον γενικό τύπο του Wallis για τον υπολογισμού του εμβαδού $\int_0^{\alpha} x^{\frac{p}{q}}dx = \frac{q}{p+q}a^{\frac{p+q}{q}}$ έχουμε,

$$s = \frac{3}{2}[\frac{2}{3}\left(a+\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}] = \frac{(9a+4)^{3/2}-8}{27}$$



(Εικόνα 5.3)

Γενικά προκειμένου να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης y=f(x) για x να ανήκει στο διάστημα [0,α], χρειαζόμαστε πρώτα μία βοηθητική καμπύλη z=g(x) για την οποία η περιοχή A_ι για το διάστημα $[0, x_i]$ είναι:

$$A = \int_o^{x_i} g(x)dx = f(x_i) = y_i$$

Και $$y_i - y_{i-1} = A_i - A_{i-1} \cong g(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Έτσι τα «χαρακτηριστικά τρίγωνα» δίνουν

$$s \cong \sum_{i=1}^{n}\left[1+\left(g(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(x_i - x_{i-1}),$$

$$s = \int_o^a \sqrt{1+(g(x))^2}dx$$

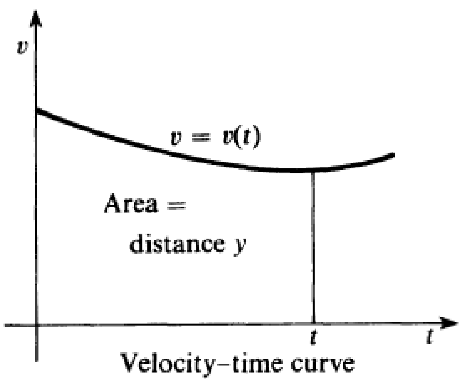
Αν σκεφτούμε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, βλέπουμε ότι η κατάλληλη επιλογή της καμπύλης είναι g(x)=f'(x). Επομένως ένας συνδυασμός του υπολογισμού εμβαδού και εφαπτομένων μέσω του χαρακτηριστικού τριγώνου υπονοείται στη κατασκευή του Neil για τη συγκεκριμένη περίπτωση $f(x)=x^{3/2}$. (C. H. Edwards σσ. 118-120)

5.3 Η σχέση του τετραγωνισμού χωρίων και εφαπτομένων

Η εφαρμογή της έννοιας του χρόνου και της κίνησης στη μελέτη των καμπυλών οδήγησε τόσο τον Torricelli όσο και τον Barrow σε μία τουλάχιστον διαισθητική κατανόηση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ των εφαπτομένων και των προβλημάτων τετραγωνισμών χωρίων, δηλαδή, τη σχέση μεταξύ των πράξεων διαφόρισης και ολοκλήρωσης (C. H. Edwards σ. 138).
Από τη μία, οι έρευνες στο μεσαίωνα και η μεταγενέστερη μελέτη του Γαλιλαίου υποδεικνύει ότι η κίνηση ενός σημείου κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής με μεταβλητή ταχύτητα μπορεί να αναπαρασταθεί από το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο. Έτσι, η συνολική απόσταση που θα διανυθεί από το σημείο θα είναι ίση με την περιοχή κάτω από την καμπύλη της ταχύτητας-χρόνου, διότι η απόσταση που διανύθηκε κατά τη διάρκεια απειροστού χρόνου θα είναι ίση με το γινόμενο αυτού του χρόνου επί την στιγμιαία ταχύτητα (C. H. Edwards σ. 138). Ο Torricelli είδε σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ότι το πρόβλημα της εφαπτομένης ήταν ουσιαστικά το αντίστροφο του προβλήματος του εμβαδού. Στη πραγματικότητα ενδιαφέρθηκε στη χρήση του Γαλιλαίου ότι η περιοχή κάτω από το γράφημα της ταχύτητας ως προς χρόνο, δίνει την απόσταση. Αλλά σύμφωνα με τον Kline ο Torricelli δεν είδε το σημαντικό σημείο (Kline σ. 356).

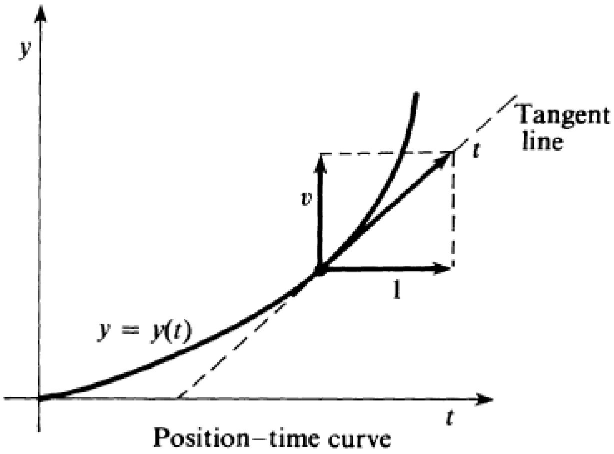
Ο Edwards σε αυτό το σημείο εξετάζει ένα παράδειγμα. Εάν το σημείο ξεκίνησε την κίνηση τη χρονική στιγμή t = 0 και κινήθηκε με ταχύτητα $u = t^n$ τη χρονική στιγμή t, τότε η απόσταση y που διανύθηκε θα ήταν ίση με την περιοχή κάτω από την καμπύλη $u = t^n$ (εικόνα 5.4) , έτσι

$$y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$



(Εικόνα 5.4)

Από την άλλη μεριά η ίδια κίνηση θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από το γράφημα απόστασης ως προς το χρόνο. Αν ένα σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = y(t)$ με οριζόντια ταχύτητα 1 και κατακόρυφη ταχύτητα u, το διάνυσμα της ταχύτητας αυτού του σημείου θα είναι η σύνθεση του οριζόντιου διανύσματος μήκους 1 και του κάθετου διανύσματος μήκους u. Συνεπώς, η κλίση της εφαπτομένης γραμμής στη θέση της καμπύλης $y = y(t)$, θα είναι η ταχύτητα u.



(Εικόνα 5.5)

Για παράδειγμα, αν η απόσταση που διανύθηκε σε χρόνο t δίνεται από την εξίσωση

$$y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Τότε η ταχύτητα πρέπει να είναι $u = t^n$, διότι το t^n είναι η κλίση της εφαπτομένης στη καμπύλη $y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. Επομένως οι εξισώσεις $u = t^n$ $και$ $y = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ συνεπάγεται η μία την άλλη. Λαμβάνοντας υπόψιν τα δύο αυτά γεγονότα:

1) Η περιοχή κάτω από τη καμπύλη $y = x^n$ $είναι$ $x^{n+1}/(n+1)$
2) Η εφαπτομένη γραμμή στη καμπύλη $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ έχει κλίση x^n

Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι η κλίση της εφαπτόμενης γραμμής στη περιοχή της καμπύλης $y = y(t)$ είναι ίση με την τεταγμένη της αρχικής καμπύλης $u = u(t)$. Αυτό είναι ένα ανάπτυγμα σε αρχικό στάδιο του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού - το ποσοστό μεταβολής της περιοχής κάτω από μια καμπύλη είναι ίσο με την τεταγμένη της. Αυτή η ιδέα αποτέλεσε το σημείο εκκίνησης για τον Newton προς την ανάπτυξη του Λογισμού του. (C. H. Edwards σσ. 138-139)

5.3.1 Barrow – Gregory Θεμελιώδες Θεώρημα

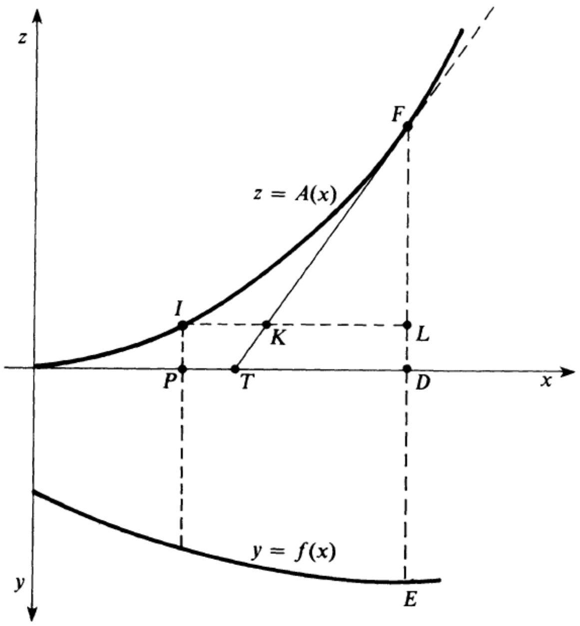
Σύμφωνα με τον Katz, ανάμεσα στους μαθηματικούς που σχετίστηκαν με το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα του εμβαδού ήταν ο Barrow και ο James Gregory (1638–1675). Και οι δύο αποφάσισαν να οργανώσουν και να παρουσιάσουν συστηματικά το υλικό που ήταν σχετικό με τις εφαπτομένες, εμβαδά, με βάση τις διορθώσεις που συγκέντρωσαν από τα ταξίδια τους στην Γαλλία, Ιταλία και Ολλανδία. Χωρίς να αποτελεί έκπληξη το έργο *Lectiones geometricae* (*Geometrical Lectures*) (1670) του Barrow και το έργο *Geometriae pars universalis* (*Universal Part of Geometry*) (1668) του Gregory περιείχαν σχεδόν το ίδιο υλικό παρουσιασμένο με όμοιους τρόπους. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Katz, στην πραγματικότητα, και τα δύο αυτά έργα ήταν πραγματείες των οποίων σήμερα το περιεχόμενο θα αναγνωριζόταν ως Λογισμός, αλλά ήταν παρουσιασμένο με το γεωμετρικό τρόπο που ο κάθε συγγραφέας είχε μάθει στη πανεπιστημιακή του μελέτη. Κανένας από τους δύο όμως δεν ήταν σε θέση να μεταφράσει το υλικό αυτό σε μια υπολογιστική μέθοδο που θα ήταν χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων (Katz σ. 534).

Ο Struik αναφέρει χαρακτηριστικά πως ο Barrow όπως και οι υπόλοιποι μαθηματικοί της εποχής είδαν τα γεωμετρικά θεωρήματα με την Ευκλείδεια έννοια, όπου βλέπουμε πράξεις και υπολογιστικές διαδικασίες. Ταυτόχρονα, μόνο και μόνο επειδή αυτοί οι μαθηματικοί εφάρμοσαν τις γεωμετρικές τους έννοιες σε μια προσπάθεια να ξεπεράσουν τον στατικό χαρακτήρα των κλασικών μαθηματικών, η γεωμετρική σκέψη τους έχει έναν πλούτο που μπορεί εύκολα να ξεφύγει από την παρατήρηση. Εάν επρόκειτο να ξαναγράψουμε τον Ευκλείδη με τη σημειογραφία της αναλυτικής γεωμετρίας, θα αποκτήσουμε γνώση με χαρακτήρα διαφορετικό από αυτόν του Ευκλείδη και, παρά όλα τα πλεονεκτήματα που θα έφεραν οι αλγεβρικοί υπολογισμοί, θα χάναμε όμως μερικές από τις πιο λεπτές ιδιότητες του Ευκλείδη. (Struik σ. 263)

5.3.1.1 Η απόδειξη του Barrow

Σύμφωνα με τον Whiteside οι ιστορικοί αποδίδουν στον Barrow τη πρώτη απόδειξη της αντίστροφης φύσης της παραγώγισης και του ολοκληρώματος στο γεωμετρικό μοντέλο στο οποίο η διαδικασία κατασκευής της κάθετης κάτω από την εφαπτομένη μίας καμπύλης εμφανίζεται ως η αντίστροφη διαδικασία ως προς την εύρεση της περιοχής κάτω από μία άλλη καμπύλη,(που οι τεταγμένες της συνδέονται από μία αναλυτική συνάρτηση που είναι η παράγωγος της που συνδέει τις τεταγμένες στην αρχή). (Whiteside σ. 366)

Ο Struik αναφέρει ότι παρόλο που ο Barrow ξεκίνησε τις δημοσιεύσεις των Γεωμετρικών Διαλέξεων με μια με αντιμετώπιση των καμπυλών που βασίστηκε σε έννοιες κίνησης, κατέληξε σε επίσημα αποτελέσματα που έχουν έναν αυστηρό γεωμετρικό και στατικό χαρακτήρα. Η δήλωσή του στη Διάλεξη X του θεμελιώδους θεωρήματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής.



(Εικόνα 5.6)

Δοθέντος ευθεία αύξουσας και θετικής συνάρτησης y=f(x), δίνεται η περιοχή μεταξύ της καμπύλης z=A(x), την καμπύλη y=f(x) και το τμήμα [0,x] κατά μήκος του χ- άξονα. Δοθέντος σημείου D(x_0) στον χ-άξονα, έστω T να είναι το σημείο στον x άξονα έτσι ώστε DT=DF/DE=A(χ_o)/f(x_o). Τότε ο Barrow επιβεβαιώνει ότι η γραμμή TF αγγίζει τη καμπύλη z=A(x) μόνο στο σημείο F(x_o, A(x_o)).

Η κλίση της TF είναι $\frac{DF}{DT} = \frac{A(x_o)}{\frac{A(x_o)}{f(x_o)}} = f(x_o)$.

Αν ο Barrow επιβεβαίωνε ότι η TF είναι εφαπτομένη στη καμπύλη z, με αναλυτικό τρόπο, προσδιορίζοντας τη κλίση A'(x_o) , αυτό το αποτέλεσμα θα ισοδυναμούσε με το συμπέρασμα ότι A'(x_o)=f(x_o), το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Όμως το μόνο που διαβεβαιώνει και αποδεικνύει είναι ότι η TF είναι εφαπτομένη στη z με την αρχαία ελληνική έννοια, ότι η εφαπτομένη αγγίζει τη καμπύλη σε ένα μόνο σημείο.

Για να το αποδείξει αυτό θεωρεί ένα σημείο I(x_1, A(x_1)) στη καμπύλη z με x_1<x_o και πηγαίνει να δείξει ότι το σημείο τομής K της γραμμής IL με την TF βρίσκεται στα δεξιά του I όπως στο σχήμα. Αυτό συμβαίνει εάν παρατηρήσουμε ότι,

LF / *LK* = *DF* / *DT* = *DE*, εξ ορισμού του σημείου T, άρα *LF* = *LK* X *DE*.

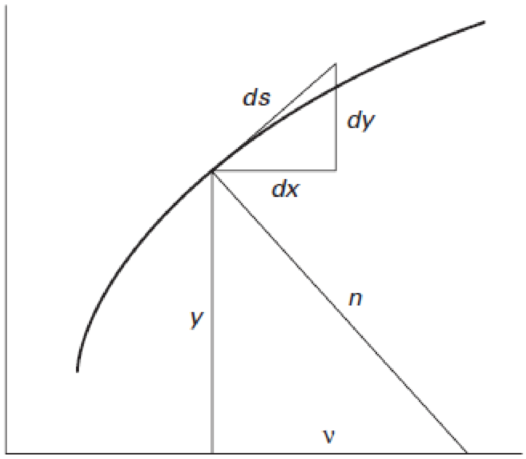
Αλλά *LF* = *DF*- *PI* = A(x_o)- A(x_1)< *DP* X *DE*

Διότι η f(x) είναι αύξουσα συνάρτηση. Άρα *LK* X *DE* <*DP* X *DE, οπότε LK* <*DP= LI όπως θέλαμε. Όμοια για* x_1>x_o. (C. H. Edwards σσ. 139-140)

5.3.1.2 Η απόδειξη του Gregory

Ο James Gregory, στο έργο του « *Geometriae pars universalis*» το 1668, απέδειξε ότι τα προβλήματα εφαπτομένης και εμβαδού είναι αντίστροφα προβλήματα αλλά το βιβλίο του έμεινε απαρατήρητο (Kline σ. 356)

Σύμφωνα με τον Katz η μελέτη του γενικού προβλήματος του μήκους τόξου του έργου του Van Heuraet, οδήγησε τον Gregory στη σύνδεση της ιδέας εμβαδού και εφαπτομένης. Ο Katz μας περιγράφει την διαδικασία που ακολούθησε ο Gregory. Έστω μία μονότονη αύξουσα καμπύλη y=y(x) και μαζί δύο άλλες καμπύλες, η κάθετη στην εφαπτομένη $\mathrm{n}(x) = y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$ και η $u(x) = \frac{cn}{y} = c\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$, όπου η σταθερά c μας δίνεται. Κατασκευάζοντας το διαφορικό τρίγωνο dx, dy, ds σε δοσμένο σημείο, ισχυρίστηκε από την ομοιότητα με το τρίγωνο που σχηματίζεται από τη τεταγμένη y, τη κάθετη ν κάτω από την εφαπτομένη και τη κάθετη στην εφαπτομένη n, ότι $\frac{y}{n}=\frac{dx}{ds}=\frac{c}{u}$ και επομένως ότι udx=cds και ndx=yds (εικόνα 5.7). Προσθέτοντας την πρώτη εξίσωση πάνω από την καμπύλη έδειξε όπως είχε κάνει και ο Heuraet ότι το μήκος του τόξου $\int ds$ μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με την περιοχή κάτω από την καμπύλη $\frac{1}{c}u(x)$. Το άθροισμα της δεύτερης εξίσωσης επέτρεψε στον Gregory να δείξει ότι η περιοχή κάτω από την n=n(x) είναι ίση ως ένα σταθερό πολλαπλάσιο, του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται περιστρέφοντας την αρχική καμπύλη γύρω από τον χ άξονα. Ο Gregory απέδειξε και τα δύο αποτελέσματα με έναν προσεκτικό Αρχιμήδειο επιχείρημα χαράσσοντας και περιγράφοντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα και με διπλή απαγωγή σε άτοπο.



(Εικόνα 5.7)

Έχοντας δείξει ότι το μήκος τόξου μπορεί να βρεθεί από τη περιοχή, ο Gregory έκανε μία θεμελιώδη πρόοδο, θέτοντας την αντίστροφη ερώτηση. Μπορεί κάποιος να βρει μία καμπύλη u(x) της οποίας το μήκος τόξου s έχει σταθερή αναλογία ως προς τη περιοχή κάτω από τη δοσμένη καμπύλη y(x); Με σύγχρονη ορολογία ο Gregory έθεσε το ερώτημα εάν μπορούμε να βρούμε το u τέτοιο ώστε:

$$C\int_0^x \sqrt{1+(\frac{du}{dx})^2}dx = \int_o^x ydx$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι $c^2\left(1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)=y^2$ ή $\frac{du}{dx}=\frac{1}{c}\sqrt{y^2-c^2}$.

Δηλαδή έπρεπε να καθορίσει μία καμπύλη της οποίας η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση σε μία δοσμένη συνάρτηση. Έστω $z=\sqrt{y^2-c^2}$, ο Gregory προσδιόρισε το u να είναι η περιοχή κάτω από την καμπύλη $\frac{z}{c}$ από το 0 στο x. Μετά χρειαζόταν να δείξει ότι η κλίση της εφαπτομένης σε αυτή τη καμπύλη δίνεται από το τύπο $\frac{z}{c}$. Αυτό που στη πραγματικότητα έδειξε, είναι ότι η γραμμή που ενώνει ένα σημείο K της καμπύλης u με το σημείο του άξονα σε απόσταση cu/z από τη τετμημένη x του σημείου K, είναι εφαπτομένη της καμπύλης στο K.

Το κρίσιμο σημείο στη πρόοδο του Gregory ήταν να δημιουργήσει μια νέα καμπύλη της οποίας η τεταγμένη σε οποιαδήποτε τιμή x ήταν ίση με την περιοχή κάτω την αρχική καμπύλη από ένα σταθερό σημείο έως το x. Μόλις δημιουργήθηκε αυτή η ιδέα, αποδείχθηκε ότι δεν ήταν δύσκολο να κατασκευαστεί η εφαπτομένη σε αυτή τη νέα καμπύλη και να δείξει ότι η κλίση της στο x ήταν πάντα ίση με την αρχική τεταγμένη εκεί. (Katz σ. 536)

Ο Adolf Prag αναφέρει χαρακτηριστικά για την απόδειξη του Gregory:

«*Έχουμε μία πρώτη απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Αλλά η εφαπτομένη και τα προβλήματα εμβαδού είναι ακόμα αυστηρά γεωμετρικά*» (Whiteside σ. 366)

5.3.2 Είναι ο Barrow ο εφευρέτης του Λογισμού;

Σύμφωνα με τον Edwards ενώ το αποτέλεσμα του Barrow, ερμηνεύεται ως μια πρώιμη δήλωση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού, στην πραγματικότητα διατυπώθηκε και δημιουργήθηκε σε ένα πνεύμα που μοιάζει περισσότερο με την κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία. (C. H. Edwards σσ. 139-140)

Δεδομένου ότι ο Barrow γνώριζε τις αλγεβρικές διαδικασίες για τον υπολογισμό εφαπτομένων και εμβαδών, όπως επίσης είχε αποδείξει το Θεμελιώδες Θεωρήμα, ένα ερώτημα που θέτει ο Katz είναι, αν θα μπορούσε να θεωρηθεί ένας από τους εφευρέτες του Λογισμού. Ο Katz αρνείται αυτό τον χαρακτηρισμό και τα επιχειρήματά περιγράφονται ως εξής. Αρχικά μας αναφέρει ότι ο Barrow παρουσίασε όλο του το έργο σε κλασική γεωμετρική μορφή. Δεν φαίνεται ότι γνώριζε τη θεμελιώδη φύση των δύο θεωρημάτων που παρουσιάζονται στο κείμενο του. Συνεχίζει λέγοντας ότι ο Barrow δεν ανέφερε ότι ήταν ιδιαίτερα σημαντικά και τα παρουσίασε ως δύο μεταξύ των πολλών γεωμετρικών αποτελεσμάτων που είχαν να κάνουν με εφαπτόμενες και εμβαδά, ενώ δεν τα χρησιμοποίησε ποτέ για τον υπολογισμό των εμβαδών. (Katz σ. 539).

Ο Boyer από τη πλευρά του υποστηρίζει ότι παρόλο που ο Barrow, διατύπωσε και απέδειξε ένα γεωμετρικό θεώρημα που ξεκάθαρα περιγράφει την αντίστροφη σχέση μεταξύ εφαπτομένης και εμβαδού, απέτυχε να αναγνωρίσει ότι το θεμελιώδες του θεώρημα παρείχε τη βάση για ένα νέο θέμα που χαρακτηριζόταν από μία ιδιαίτερη μεθοδολογία. (Boyer σ. 187)

Ο Child που είχε μελετήσει σε βάθος το έργο του Barrow, αναφέρει χαρακτηριστικά :

«ο Isaac Barrow ήταν ο πρώτος εφευρέτης του Απειροστικού Λογισμού. Ο Newton που επικοινωνούσε με τον Barrow πήρε την κεντρική ιδέα από εκείνον. Ο Leibniz επίσης κατά ένα βαθμό οφείλει αρκετά στο έργο του Barrow, παίρνοντας επιβεβαίωση στις δικές του πρωταρχικές ιδέες, και προτάσεις για περαιτέρω εξέλιξή τους, από το αντίγραφο του του βιβλίου του Barrow που αγόρασε το1673» (Who was the first inventor of the calculus? σ. 16)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ISAAC NEWTON

«Οι μεγάλες ανακαλύψεις στα μαθηματικά και τις επιστήμες είναι οι περισσότερες οικοδομήματα πολλών ανθρώπων που έχουν συνεισφέρει ο καθένας στη διάρκεια εκατοντάδων χρόνων. Τελικά ένας άνθρωπος αρκετά οξυδερκής να διακρίνει την αξία των ιδεών των προκατόχων του, από το σύνολο προτάσεων και δηλώσεων, ευφάνταστο αρκετά για να βάλει τα κομμάτια σε μία νέα θεώρηση, και αρκετά τολμηρό για να δημιουργήσει ένα μεγάλο σχέδιο, κάνει το αποφασιστικό και οριστικό βήμα. Στην περίπτωση του Λογισμού, αυτός ήταν ο Isaac Newton» (Kline σ. 357).

Ο Isaac Newton (1642-1727) γεννήθηκε σε ένα χωριό του Woolsthorpe της Αγγλίας. Σύμφωνα με τον Kline, η εκπαίδευση του έλαβε χώρα σε τοπικά σχολεία χαμηλών εκπαιδευτικών προτύπων, ενώ ως νέος δεν έδειξε καμία ιδιαίτερη κλίση εκτός από το ενδιαφέρον του σε μηχανικές κατασκευές. Δίνοντας εισαγωγικές εξετάσεις μπήκε στο κολλέγιο Trinity of Cambridge το 1661 (Kline σ. 373), στο οποίο καθηγητής του υπήρξε ο Barrow. Ο Newton άρχισε να δουλεύει σε αυτό που ονομάζουμε σήμερα Λογισμό το 1664 υπό την επίβλεψη του Barrow (Struik σ. 285). Σύμφωνα με τον Boyer ο Newton βαθιά επηρεασμένος από τον Barrow, τον βοήθησε στη δημοσίευση των Γεωμετρικών του Διαλέξεων. Για τον Newton ήταν οικεία η προσέγγιση του Barrow στις μεθόδους εύρεσης της εφαπτομένης, όπου ο Barrow θεωρούσε την εφαπτομένη σε καμπύλη, σαν την κατεύθυνση της κίνησης ενός σημείου που κινούμενο παράγει τη καμπύλη (Boyer, 1959 σ. 189). Μία από τις πρώτες πηγές του ήταν η λατινική έκδοση του F. van Schooten του «*La Geometrie*» του Descartes, που συνέβαλε επίσης στον Απειροστικό Λογισμό. Το πρώτο χειρόγραφο του Newton χρονολογείται από το 1665. Εκεί βλέπουμε να ξεπροβάλουν γράμματα όπως $\dot{x}$ αντί για το γνωστό μας $\frac{dx}{dt}$ (Struik σ. 284). Πρέπει να αναφέρουμε σύμφωνα με τον Edwards, ότι ο Newton στο πρώιμο έργο του χρησιμοποίησε γενικά άλλα γράμματα, p και q αντί για $\dot{x}$ και $\dot{y}$, για τις ταχύτητες (fluxions) των (fluents) x και y. Ο συμβολισμός με την τελεία υιοθετήθηκε συστηματικά από εκείνον στις αρχές του 1690 (Edwards, p.192).

Ο Robert Merton μας αναφέρει ότι αντίθετα με τον Barrow ο Newton βάσισε πολλές από τις μαθηματικές του αντιλήψεις στο έργο του John Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (1965). Πιο συγκεκριμένα περιγράφει, ότι σε ένα γράμμα στον Henry Oldenburg στις 24 Οκτωβρίου το 1676, ο Newton αναγνωρίζει την υποχρέωση του στο έργο του Wallis για τις ιδέες που τον οδήγησαν στη Μέθοδο των Άπειρων Σειρών, στον υπολογισμό εμβαδών κάτω από καμπύλες και στη γενίκευση του Διωνυμικού θεωρήματος (Merton, 1938). Συμπληρώνει ο Boyer ότι η αντίληψη του αριθμού για τον Newton μοιάζει περισσότερο στου Wallis παρά στου Barrow. Θεωρούσε τον αριθμό περισσότερο ως έναν αφηρημένο λόγο δύο ποσοτήτων και λιγότερο ως μία συλλογή μονάδων, ένας ορισμός που περιλαμβάνει και τους άρρητους αριθμούς (Boyer, 1959 σ. 190).

Το 1676 ο Newton διατηρούσε επαφές με τον Henry Oldenburg γραμματέα της Royal Society. Όπως ο Mersenne παλιότερα, οι επιστημονικές του επαφές συνέδεσαν πρακτικά όλους αυτούς που εργάζονταν στις συγκεκριμένες επιστήμες. Ο Newton του παρουσίασε κάποια από τα αποτελέσματά του, το Διωνυμικό ανάπτυγμα και τη θεωρία των Fluxions, τα οποία αποτελέσματα προορίζονταν τελικά για τον Leibniz (Struik σ. 285).

Αργότερα το 1669 έχοντας μελετήσει το έργο του Nicolas Mercator *Logarithmotechnia* (London, 1668) και του James Gregory το *Devera circuli et hyperbol ae quadratura* (Padua, 1667), συνέθεσε το χειρόγραφο το οποίο δημοσιεύτηκε αργότερα με τίτλο *De analysi per aequationes numero terminorum inftnitas* (W. Jones, London, 1711). Επεκτείνοντας τις μεθόδους του στα “Fluxions” έγραψε άλλο ένα κείμενο το 1671, με τίτλο *Methodus fluxionum et serierum infinitorum,* το οποίο δημοσιεύθηκε πρώτα σε αγγλική μετάφραση με τίτλο *The method of fluxions and infinite series* (John Colson, London 1736) . Το πρωτότυπο δημοσιεύθηκε από τον Samuel Horsley στο *Opera omnia* (London, 1779-1785), με τίτλο *Geometria analytica.* (Struik σ. 285)

6.1 Κινηματική μέθοδος των εφαπτομένων

Σύμφωνα με τον Edwards, ο Newton ξεκινώντας στα τέλη του 1665, είχε μελετήσει το πρόβλημα της εφαπτομένης με τη μέθοδο της σύνθεσης των συνισταμένων της ταχύτητας ενός κινούμενου σημείου σε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Αυτή η προσέγγιση αναπτύχθηκε και από τον Roberval, αλλά πιθανόν σύμφωνα με τον Edwards ήταν άγνωστη στον Newton. (C. H. Edwards σ. 161). Όπως αναφέρει ο Coolidge κάποιες από τις μεθόδους του Newton στο κεφάλαιο Problem IV του «*Methodus fluxionum et serierum infinitorum*», πράγματι φανερώνουν την επιρροή του Roberval. (Coolidge σ. 460)

Στο βιβλίο «Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century», ο Rigaud αναφέρει χαρακτηριστικά τα λεγόμενα του Newton:

“Αν θυμάσαι ο Mersennus και Torricellius αναφέρουν μία γενική μέθοδο για την εύρεση εφαπτομένων σε καμπύλες με σύνθεση κινήσεων, αλλά δεν μας το λένε. Έχω ανακαλύψει μία τέτοια μέθοδο.” (Rigaud, 1841 σ. 34)

Σύμφωνα με τον Whiteside, οι ορισμοί του Roberval σε περισσότερη ή λιγότερη ισοδύναμη μορφή υιοθετήθηκαν από τον Newton.

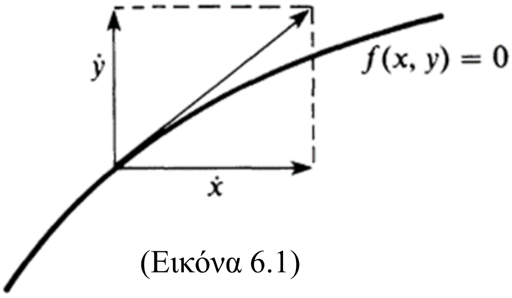
Συγκεκριμένα όπως αναφέρει οι ορισμοί 9, 10 στο χειρόγραφο του Newton *Geometria Curvilinea* διατυπώνονται αξιωματικά:

(9) «*Ο τόπος ενός κινούμενου σημείου είναι…καμπύλη που το σημείο περιγράφει από τη κίνησή του*»

(10) *«Ο προσδιορισμός της κίνησης ενός σημείου είναι η θέση της γραμμής που αγγίζει τη καμπύλη στο κινούμενο σημείο»* (Whiteside σ. 353)

Αυτή η μέθοδος εύρεσης εφαπτομένων σε καμπύλες με ανάλυση του διανύσματος της ταχύτητας ονομάζεται συχνά *κινηματική μέθοδος*. Το πρώτο χειρόγραφο του Newton στην κινηματική μέθοδο περιλάμβανε τρία παραδείγματα καμπυλών που παραδοσιακά είχαν περιγραφεί με τη σύνθεση των κινήσεων: η Σπείρα του Αρχιμήδη, το κυκλοειδές και quadratix. Ο Newton συζήτησε επίσης την έλλειψη, μια λεγόμενη γεωμετρική καμπύλη (The Crooked Made Straight: Roberval and Newton on Tangents σ. 206)

Ο Edwards αναφέρει πως ο Newton θεώρησε τη καμπύλη f(x,y)=0 ως τον γεωμετρικό τόπο της τομής δύο κινούμενων ευθείων γραμμών, μία κάθετη και μία οριζόντια. Οι συντεταγμένες x και y τότε του κινούμενου σημείου είναι συναρτήσεις του χρόνου προσδιορίζοντας τις τοποθεσίες των κάθετων και οριζόντιων γραμμών αντίστοιχα. Η κίνηση είναι τότε η σύνθεση της οριζόντιας κίνησης με **μήκος διανύσματος ταχύτητας** που το ονομάζει $\dot{x}$ και μίας κάθετης κίνησης με **μήκος διανύσματος ταχύτητας** αντίστοιχα $\dot{y}$ (εικόνα 6.1). Εφαρμόζοντας τότε τον νόμο του παραλληλογράμμου για το άθροισμα των διανυσμάτων της ταχύτητας, το εφαπτόμενο διάνυσμα της ταχύτητας θα είναι το άθροισμα του οριζόντιου και κάθετου διανύσματος (εικόνα 6.1).

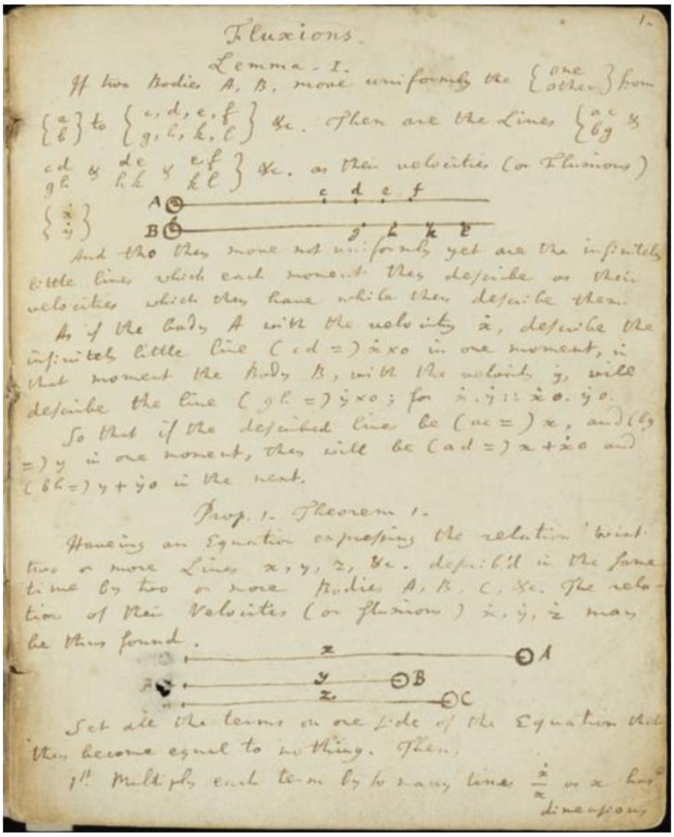


(Εικόνα 6.1)

Η κλίση τότε της εφαπτομένης γραμμής στη καμπύλη θα είναι: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

O Edwards συνεχίζει λέγοντας ότι σε αυτή τη βάση ο Newton θεωρεί το γεωμετρικό μοντέλο δύο ή περισσοτέρων σημείων A και B, τα οποία διανύουν αποστάσεις x και y κατά μήκος διαφορετικών ευθείων γραμμών, σε ίσες χρονικές περιόδους, έτσι ώστε f(x,y)=0 για κάθε χρονική στιγμή και με ταχύτητες $\dot{x}$ και $\dot{y}$ αντίστοιχα, τη δεδομένη χρονική στιγμή. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι αυτή η διερεύνηση εφαπτομένων μέσω των συνισταμένων κινήσεων παρείχαν τόσο το κίνητρο για τη νέα μέθοδο των «Fluxions», όσο και το κλειδί για τις γεωμετρικές εφαρμογές του. (C. H. Edwards σ. 161)

6.2 Ταχύτητες των Ροών (Fluxions και Fluents)


Fluxions.
Lemma. I.
If two Bodies A, B, move uniformly the one from the other from a to c, d, e, f &c. Then are the Lines ac & cd & de & ef &c. as their velocities (or Fluxions)
b to g, h, k, l. bg & gh & hk & kl
And tho they move not uniformly yet are the infinitely little lines which each moment they describe as their velocities which they have while they describe them.
As if the body A with the velocity $\dot{x}$, describe the infinitely little line (cd =) $\dot{x} \times o$ in one moment, in that moment the body B, with the velocity $\dot{y}$, will describe the line (gh =) $\dot{y} \times o$; for $\dot{x} . \dot{y} :: \dot{x}o . \dot{y}o$.
So that if the described line be (ac =) x, and (bg =) y in one moment, they will be (ad =) $x + \dot{x}o$ and (bh =) $y + \dot{y}o$ in the next.
Prop. 1. Theorem 1.
Haveing an Equation expressing the relation twixt two or more Lines x, y, z, &c. describ'd in the same time by two or more Bodies A, B, C, &c. The relation of their Velocities (or fluxions) $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ may be thus found.
Set all the terms on one side of the Equation that they become equal to nothing. Then,
1st Multiply each term by so many times $\frac{\dot{x}}{x}$ as x hath dimensions

Όπως αναφέρει ο Edwards τον Οκτώβρη του 1666 ο Newton συγκέντρωσε και οργάνωσε τα αποτελέσματα της έρευνας του λογισμού των δύο προηγούμενων ετών σε ένα χειρόγραφο που αργότερα αναφέρεται με τον τίτλο «*The October 1666 Tract on Fluxions*» και αποτέλεσε το πρώτο επίσημο έγγραφο του λογισμού (C. H. Edwards σ. 191).

(Εικόνα 6.2, (Newton))

Ο Newton εισήγαγε την έννοια των «Fluxions» το 1665 και τη περιγράφει λεπτομερώς στη μαθηματική του πραγματεία «*Method of Fluxions*»*, ένα βιβλίο το οποίο ολοκληρώθηκε το 1671 και δημοσιεύθηκε το 1736* (Newton, 1736).

Ο Katz αναφέρει ότι για τον Newton η ιδέα του Λογισμού είχε να κάνει με τη κίνηση. Κάθε μεταβλητή σε μία εξίσωση θεωρούταν τουλάχιστον έμμεσα σαν την απόσταση συναρτήσει του χρόνου. Ονομάζει το «Fluxion» $\dot{x}$ μίας ποσότητας x η οποία εξαρτάται από το χρόνο και η οποία ονομάζεται «Fluent», να είναι η ταχύτητα με την οποία το x αυξάνεται μέσω της παραγόμενης του κίνησης (Katz σ. 550). Ο Edwards με τη σειρά του προσθέτει ότι ο Newton δεν επιχειρεί να προσδιορίσει ταχύτητες των σημείων A και B, δηλαδή τα «Fluxions» $\dot{x}$ και $\dot{y}$ των x και y, με τις οποίες ταχύτητες τα δύο σημεία ρέουν, αλλά θεωρεί διαισθητικά εμφανές από πλευράς φυσικής, την έννοια της ταχύτητας ενός σημείου που κινείται κατά μήκος μίας ευθείας. Στη συνέχεια ο Edwards περιγράφει με σύγχρονο συμβολισμό τα fluxions $\dot{x}$ και $\dot{y}$ να είναι απλά οι παράγωγοι $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ και $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ και ο λόγος τους να είναι η παράγωγος του y ως προς x, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$. (C. H. Edwards σ. 192)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο εξής θα αντιστοιχίζουμε τον όρο «Fluent» στη λέξη «Ροή» και τον όρο «Fluxion» στη «ταχύτητα» της Ροής.

Ο Newton σε γράμμα του προς τον Leibniz εστιάζει σε δύο κεντρικά προβλήματα, των οποίων η επίλυση θα έλυνε όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι προκάτοχοί του γύρω από τις καμπύλες. Τα προβλήματα αυτά ήταν σύμφωνα με τον Katz:

«1. Given the length of the space continuously [that is, at every time], to find the speed of motion at any time proposed.

2. Given the speed of motion continuously, to find the length of the space described at any time proposed. » (Katz σ. 550)

Δε θα επιχειρήσω σε ακριβή μετάφραση των παραπάνω, αλλά σύμφωνα με τον ορισμό των Fluxions, θα μπορούσαμε να αντιληφθούμε τα λεγόμενα του ως: Εάν δίνεται εξίσωση η οποία εμπλέκει τις Ροές, να βρεθούν οι ταχύτητες των Ροών και αντίστροφα.

Από τη πλευρά του ο Scriba στο άρθρο του *The Inverse Methods of Tangents*, αναφέρει ότι ο Newton στο δεύτερο γράμμα του προς τον Leibniz, υποστήριξε ότι έχει μία διπλή μέθοδο, η οποία αποτελούνταν από:

1) Την εξαγωγή της ροής [x, y], από μία εξίσωση που εμπλέκει τις ταχύτητές τους $[\dot{x}, \dot{y}]$, την ίδια χρονική στιγμή.

2) Την υπόθεση μίας σειράς της οποίας οι συντελεστές είναι να καθοριστούν από τις συνθήκες του προβλήματος. (Scriba σ. 125)

6.2.1 Μέθοδος εύρεσης των Ταχυτήτων των Ροών

Για τον Newton οι σειρές ήταν θεμελιώδης σημασίας και τις χρησιμοποιούσε σε κάθε αλγεβρική ή υπερβατική σχέση που δεν εκφραζόταν ως ένα πεπερασμένο πολυώνυμο μιας μεταβλητής (Katz σ. 550). Η χρήση των σειρών αποτέλεσαν σημαντικό στοιχείο στην παρουσίαση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου των ταχυτήτων των Ροών. (Boyer, 1959 σ. 190).

Για την επίλυση του πρώτου κεντρικού προβλήματος ο Newton χρησιμοποίησε έναν ευθύ αλγόριθμο για τον υπολογισμό της σχέσης των ταχυτήτων $\dot{x}$ και $\dot{y}$ των δύο Ροών x και y που σχετίζονται μεταξύ τους βάσει της εξίσωσης της μορφής f(x,y)=0 (Katz σ. 550)

Σύμφωνα με τον Katz ο Newton αναφέρει χαρακτηριστικά τον τρόπο:

"Arrange the equation by which the given relation is expressed according to the dimensions of some fluent quantity, say, x, and multiply its terms by any arithmetical progression and then by $\dot{x}$/x. Carry out this operation separately for each one of the fluent quantities and then put the sum of all the products equal to nothing, and you have the desired equation." (Katz σ. 550)

«Διασκεύασε την εξίσωση με την οποία εκφράζεται η δοσμένη σχέση σύμφωνα με τη κατεύθυνση κάποιας Ροής έστω x, και πολλαπλασίασε τους όρους με μία αριθμητική πρόοδο και στη συνέχεια με $\dot{x}$/x. Εκτέλεσε αυτή τη πράξη ξεχωριστά για κάθε μία από τις Ροές και μετά βάλε το άθροισμα όλων να ισούται με το μηδέν. Τότε έχεις την επιθυμητή εξίσωση»

Ο Katz μας περιγράφει το παράδειγμα που παρουσίασε ο Newton και ήταν η εξίσωση:

$$\mathrm{x}^3 - \mathrm{ax}^2 + \mathrm{axy} - \mathrm{y}^3 = 0$$

Θεωρώντας ότι είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς x, πολλαπλασίασε όλους τους όρους με τους όρους της αριθμητικής προόδου 3,2,1,0 ώστε να λάβει $3x^2\dot{x} + 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$. Στη συνέχεια θεωρώντας την εξίσωση σαν ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς y, και χρησιμοποιώντας τον ίδιο κανόνα έλαβε $ax\dot{y} - 3y^2\dot{y}$. Θέτοντας το άθροισμα αυτών των δύο ίσο με το μηδέν, πήρε την εξίσωση $3x^2\dot{x} + 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y}$ =0. Με όρους αναλογίας αυτό το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$$

(Katz σ. 551)

Οι παρατηρήσεις που θέτει ο Katz σχετικά με τον αλγόριθμο του Newton είναι τρεις:

1) Ο Newton δεν υπολογίζει παράγωγους, γιατί γενικά δεν ξεκινάει με μια συνάρτηση. Υπολογίζει τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την καμπύλη που καθορίζεται από τη δεδομένη εξίσωση. Με άλλα λόγια, δίνοντας την εξίσωση $f(x, y) = 0$ με x και y , δύο συναρτήσεις του t, ο Newton παρήγαγε αυτό που γράφεται με σύγχρονο συμβολισμό:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

2) Ο Newton χρησιμοποίησε την ιδέα του Hudde να πολλαπλασιάσει με μια αυθαίρετη αριθμητική πρόοδο. Στην πράξη, ωστόσο, χρησιμοποίησε γενικά την πρόοδο ξεκινώντας με την μεγαλύτερη δύναμη του Ροής.

3) Εάν x και y θεωρούνται συναρτήσεις του t, ο σύγχρονος κανόνας για τις παραγώγους χτίστηκε πάνω στον αλγόριθμο του Newton. Κάθε όρος που περιέχει τα x και y πολλαπλασιάζεται δύο φορές και οι δύο όροι προστίθενται. (Katz σ. 551)

Από τη πλευρά του ο Edwards διατυπώνει το πρώτο κεντρικό πρόβλημα του Newton με σύγχρονο συμβολισμό ως εξής:

Αν η εξίσωση $f(x,y) = \sum a_{ij}x^i y^j = 0$ τότε η λύση θα είναι:

$$\sum \left(\frac{i\dot{x}}{x} + \frac{j\dot{y}}{y}\right) a_{ij}x^i y^j = 0, \text{ (σχέση 1)}$$

η οποία όπως αναφέρει σε σύγχρονο συμβολισμό είναι ισοδύναμη με την:

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Επομένως,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Το σκεπτικό του Newton σύμφωνα με τον Edwards για την απόδειξη της σχέσης (1) είναι, ότι κατά τη διάρκεια ενός "άπειρου μικρού" χρονικού διαστήματος ο, η κατάσταση είναι η ίδια με εκείνη κατά τη διάρκεια ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος για την περίπτωση της ομοιόμορφης κίνησης. Δηλαδή η μη ομοιόμορφη κίνηση είναι ουσιαστικά ομοιόμορφη σε ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα. (C. H. Edwards σ. 193).

Ο Katz προσθέτει ότι ο Newton δικαιολόγησε τον κανόνα του μέσω απειροστών. Πρώτα προσδιόρισε τον όρο «moment» να είναι η ποσότητα κατά την οποία αυξάνεται μία ρέουσα ποσότητα σε ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα. Επομένως η αύξηση του x σε ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα ο, είναι το γινόμενο της ταχύτητας του x με το ο, δηλαδή $\dot{x}o$, όπου μετά από αυτό το μεσοδιάστημα το x θα γίνει $x + \dot{x}o$ και ομοίως το y θα γίνει $y + \dot{y}o$.

Ο Newton πάνω σε αυτό αναφέρει χαρακτηριστικά:

“*Συνεπώς , μία εξίσωση που εκφράζει μία σχέση ρευσών ποσοτήτων χωρίς διακύμανση για κάθε χρονική στιγμή, θα εκφράζει τη σχέση μεταξύ $x + \dot{x}o$ και $y + \dot{y}o$ ισοδύναμα όπως τη σχέση μεταξύ του x και y. Και έτσι το $x + \dot{x}o$ και $y + \dot{y}o$ μπορούν να αντικαταστήσουν τις ποσότητες x και y στην δεδομένη εξίσωση*» (Katz σ. 551)

Ο Edwards αναφέρει ότι ο Newton περιγράφει τη διαδικασία μέσω παραδείγματος, αντικαθιστώντας στην εξίσωση f(x,y)=0, $x + \dot{x}o$ όπου x και $y + \dot{y}o$ όπου y.

$$\sum a_{ij}(x + \dot{x}o)^i(y + \dot{y}o)^j = 0$$

Τότε βάσει του Διωνυμικού αναπτύγματος θα έχουμε:

$$\sum a_{ij}x^i\, y^j + \sum a_{ij}x^i\big(jy^{j-1}\dot{y}o + τους\ όρους\ o^2\big) \\ + \sum a_{ij}y^i\big(ix^{i-1}\dot{x}o + τους\ όρους\ o^2\big) \\ + \sum a_{ij}\big(ix^{i-1}\dot{x}o + \cdots\big)\big(jy^{j-1}\dot{y}o + \cdots\big) = 0$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια το δεδομένο ότι $\sum a_{ij}x^i\, y^j = 0$ και διώχνοντας όλους τους όρους που περιέχουν o^2 το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι:

$$\sum a_{ij}(ix^{i-1}y^j\dot{x}o + jx^i y^{j-1}\dot{y}o) = 0$$

Τότε διαιρώντας με το ο έχουμε την ζητούμενη σχέση (1). (C. H. Edwards σ. 194)

6.2.2 Εφαρμογή των Ταχυτήτων των Ροών για το πρόβλημα των ακραίων τιμών

Ο Newton βρήκε το μέγιστο και ελάχιστο μίας ποσότητας, θέτοντας την ταχύτητα της Ροής της ίση με το μηδέν. Σύμφωνα με τον Katz ο Newton αναφέρει χαρακτηριστικά:

«*Όταν μία ποσότητα είναι μέγιστη ή ελάχιστη, εκείνη τη χρονική στιγμή η ροή της ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται. Αν αυξάνεται σημαίνει ότι δεν είναι λιγότερη από μέγιστη διότι κάποια στιγμή θα αυξηθεί περισσότερο από ότι είναι τώρα και το αντίστροφο θα ισχύει εάν μειώνεται*»

Έπειτα χρησιμοποίησε την εξίσωση $\mathrm{x}^3 - \mathrm{ax}^2 + \mathrm{axy} - \mathrm{y}^3 = 0$ ως παράδειγμα για να καθορίσει τη μέγιστη τιμή του x. Θέτοντας $\dot{x} = 0$ στην εξίσωση $3\mathrm{x}^2\dot{\mathrm{x}} + 2\mathrm{a}\mathrm{x}\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{a}\mathrm{y}\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{a}\mathrm{x}\dot{\mathrm{y}} - 3\mathrm{y}^2\dot{\mathrm{y}} = 0$, βρήκε ότι $-3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0$ ή $3y^2 = ax$

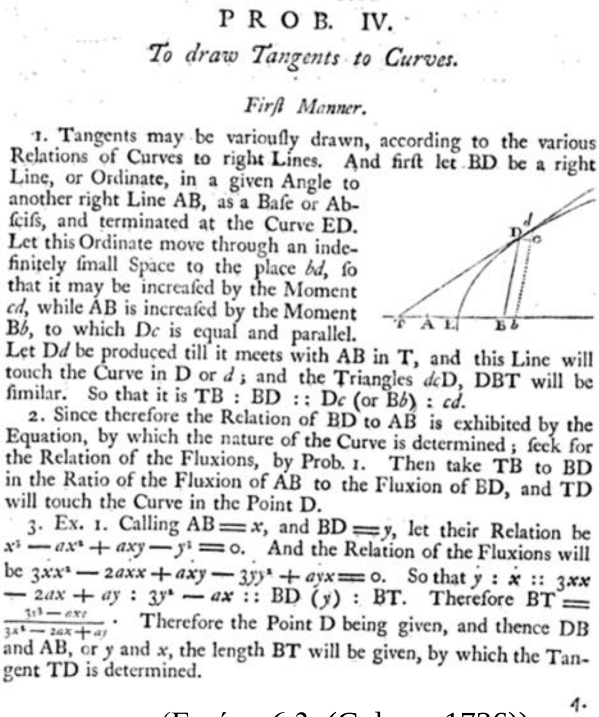
Λύνοντας τις δύο εξισώσεις τώρα μπορεί κάποιος να βρει την ζητούμενη τιμή του x.

Όμοια για να βρούμε τη μέγιστη τιμή του y, θέτουμε όπου $\dot{y} = 0$ και χρησιμοποιούμε τώρα την εξίσωση $3x^2 - 2ax + ay = 0$.

Σύμφωνα με τον Katz η ανάλυση αυτής τη μεθόδου ήταν σύντομη και δεν έδωσε κριτήρια για το είδος του ακροτάτου αλλά πιθανότατα όπως αναφέρει ο προσδιορισμός μπορούσε να γίνει στο πλαίσιο του προβλήματος. (Katz σ. 552)

6.2.3 Εφαρμογή των ταχυτήτων των Ροών για τη κατασκευή εφαπτομένης

Σύμφωνα με τον Coolidge η μέθοδος του Newton στο σχεδιασμό εφαπτομένων ήταν η ίδια με του Sluse. Πιθανόν την ανακάλυψε το 1664 ή 1665, την περίοδο που σκεφτόταν για πρώτη φορά μεθόδους απειροστικού λογισμού, όμως δεν δημοσίευσε τίποτα μέχρι το 1669 και μόνο σε γράμμα. Μία ολοκληρωμένη συζήτηση δίνοντας εννιά παραδείγματα εμφανίζονται στο κεφάλαιο με τίτλο «Πρόβλημα IV» του *The Method of Fluxions and Infinite Series, translated from the Author's original, not yet made public, by John Colson, London, 1736*, (εικόνα 6.3) (Coolidge σ. 191).



PROB. IV.

To draw Tangents to Curves.

Firſt Manner.

1. Tangents may be variouſly drawn, according to the various Relations of Curves to right Lines. And firſt let BD be a right Line, or Ordinate, in a given Angle to another right Line AB, as a Baſe or Abſciſs, and terminated at the Curve ED. Let this Ordinate move through an indefinitely ſmall Space to the place *bd*, ſo that it may be increaſed by the Moment *cd*, while AB is increaſed by the Moment B*b*, to which D*c* is equal and parallel. Let D*d* be produced till it meets with AB in T, and this Line will touch the Curve in D or *d*; and the Triangles *dc*D, DBT will be ſimilar. So that it is TB : BD :: D*c* (or B*b*) : *cd*.

2. Since therefore the Relation of BD to AB is exhibited by the Equation, by which the nature of the Curve is determined; ſeek for the Relation of the Fluxions, by Prob. 1. Then take TB to BD in the Ratio of the Fluxion of AB to the Fluxion of BD, and TD will touch the Curve in the Point D.

3. Ex. 1. Calling AB $= x$, and BD $= y$, let their Relation be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. And the Relation of the Fluxions will be $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. So that $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax ::$ BD (y) : BT. Therefore BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Therefore the Point D being given, and thence DB and AB, or y and x, the length BT will be given, by which the Tangent TD is determined.

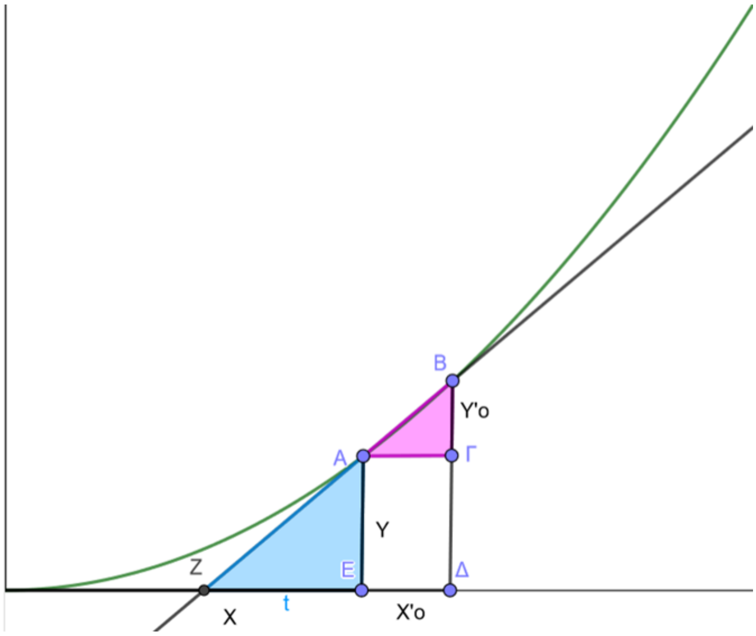
4.

(Εικόνα 6.3, (Colson, 1736))

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Coolidge ξεκινάει σαν τον Sluse (εικόνα 6.3 , (Newton, 1736 σ. 46)), δηλαδή να πάρουμε δύο κοντινά σημεία της καμπύλης και να τα ενώσουμε με μία ευθεία γραμμή, την οποία θα την αντιμετωπίσουμε σαν να είναι η εφαπτομένη, τότε θα έχουμε δύο όμοια τρίγωνα. Το ένα τρίγωνο έχεις ως πλευρές την εφαπτομένη, την κάθετη κάτω από την εφαπτομένη και την τεταγμένη, ενώ το άλλο τρίγωνο αποτελείται από το κομμάτι της καμπύλης και τις δύο άλλες πλευρές του, αυτό που ονομάζει **moments** (Coolidge σ. 460). Ο Newton προσδιόρισε τον όρο **moment** μίας Ροής, να είναι το ποσό κατά το οποίο αυτή αυξάνει σε μία απείρως μικρή χρονική περίοδο (Katz σ. 551), που στη γλώσσα του Leibniz είναι οι διαφορές dx (Coolidge σ. 460)

Ο Katz περιγράφει ότι ο Newton χρησιμοποίησε το διαφορικό τρίγωνο του Barrow.

Δηλαδή έστω μία τυχαία καμπύλη f(x,y)=0, με ΑΒ ένα απειροστό τόξο της καμπύλης. Επειδή η αύξηση του x σε ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα o, είναι το γινόμενο της ταχύτητας του x με το o, δηλαδή $\dot{x}o$, μετά από αυτό το χρονικό διάστημα το x θα γίνει $x + \dot{x}o$ και ομοίως το y θα γίνει $y + \dot{y}o$. Οπότε τα δύο σημεία θα είναι $A(x, y)$ και $B(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ και το σχήμα ΑΒΓ θα αποτελεί το χαρακτηριστικό τρίγωνο (εικόνα 6.4)



(Εικόνα 6.4)

Τότε ο λόγος $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ των πλευρών αυτού του χαρακτηριστικού τριγώνου ΑΒΓ θα είναι η κλίση της εφαπτομένης γραμμής, **η οποία θεωρείται ως η κατεύθυνση της στιγμιαίας κίνησης του σωματιδίου περιγράφοντας την καμπύλη**. Αυτός ο λόγος, από την ομοιότητα των τριγώνων, είναι με τη σειρά του ίσος με τον λόγο της τεταγμένης y προς την κάθετη κάτω από την εφαπτομένη t. Δεδομένου ότι για να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη έπρεπε να βρούμε πρώτα την κάθετη κάτω από την εφαπτομένη, ο Newton απλά σημείωσε ότι $t = y\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. Χάριν απλοποίησης αυτού του υπολογισμού αλλά και άλλων, ο Newton κάποιες φορές θέτει $\dot{x} = 1$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θεωρήσουμε ότι το x ρέει ομοιόμορφα. (Katz σ. 552)

6.2.4 Εύρεση της Ροής από την Ταχύτητα της

Στο έργο *Treatise on Methods*, Πρόβλημα II, ζητείται να βρεθεί η απόσταση, δεδομένης της ταχύτητας. Το παραπάνω σύμφωνα με τον Katz σημαίνει να βρεθεί η Ροή, με δεδομένο την ταχύτητας της. Η πρώτη μέθοδος του Newton ήταν να αντιστρέψει τη διαδικασία εύρεσης της ταχύτητας της Ροής.

PROB. II.

An Equation being propoſed, including the Fluxions of Quantities, to find the Relations of thoſe Quantities to one another.

A PARTICULAR SOLUTION.

1. As this Problem is the Converſe of the foregoing, it muſt be ſolved by proceeding in a contrary manner. That is, the Terms multiply'd by $\dot{x}$ being diſpoſed according to the Dimenſions of x; they muſt be divided by $\frac{\dot{x}}{x}$, and then by the number of their Dimenſions, or perhaps by ſome other Arithmetical Progreſſion. Then the ſame work muſt be repeated with the Terms multiply'd by $\dot{v}$, $\dot{y}$, or $\dot{z}$, and the Sum reſulting muſt be made equal to nothing, rejecting the Terms that are redundant.

2. EXAMPLE. Let the Equation propoſed be $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. The Operation will be after this manner:

Divide	$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	Divide	$-3\dot{y}y^2 \ * + a\dot{y}x$
by $\frac{\dot{x}}{x}$. Quot.	$3x^3 - 2ax^2 + ayx$	by $\frac{\dot{y}}{y}$. Quot.	$-3y^3 \ * + axy$
Divide by	3 . 2 . 1.	Divide by	3 . 2 . 1.
Quote	$x^3 - ax^2 + ayx$	Quote	$-y^3 \ * + axy$

Therefore the Sum $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, will be the required Relation of the Quantities x and y. Where it is to be obſerved, that tho' the Term axy occurs twice, yet I do not put it twice in the Sum $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, but I reject the redundant Term. And ſo whenever any Term recurs twice, (or oftener when there are ſeveral flowing Quantities concern'd,) it muſt be wrote only once in the Sum of the Terms.

(Εικόνα 6.5, (Newton, 1736 σσ. 25-26))

Σύμφωνα με τον Katz ο Newton αντιλήφθηκε ότι αυτή η διαδικασία δεν δουλεύει πάντα. Πρότεινε στη πραγματικότητα να γίνεται πάντα έλεγχος στο αποτέλεσμα. Αλλά αν το πρόβλημα δεν μπορούσε να λυθεί με αυτή την απλή αντιπαραγώγιση, θα μπορούσε από ότι μας πληροφορεί, να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των δυναμοσειρών.

Εφόσον η εξίσωση της Ροής που καθοριζόταν από την εξίσωση της ταχύτητας $\dot{y} = x^n \dot{x}$ ή $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^n$ είναι $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, πρότεινε ότι όταν το $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ εξαρτάται μόνο από το x, θα πρέπει να εκφράσει το λόγο με μία δυναμοσειρά και να εφαρμόσει αυτόν τον κανόνα σε κάθε όρο.

Για παράδειγμα η εξίσωση $\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + x^2\dot{x}^2$ μπορεί να γραφτεί $\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + x^2$

Αυτή η δευτέρου βαθμού εξίσωση ως προς $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ μπορεί να λυθεί και να δώσει:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$$

Εφαρμόζοντας το Διωνυμικό Θεώρημα έχουμε τις σειρές:

$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + \cdots$ και $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -x^2 + x^4 - 2x^6 + 5x^8 + \cdots$

Όπου τότε η λύση στο αρχικό πρόβλημα μπορεί να βρεθεί:

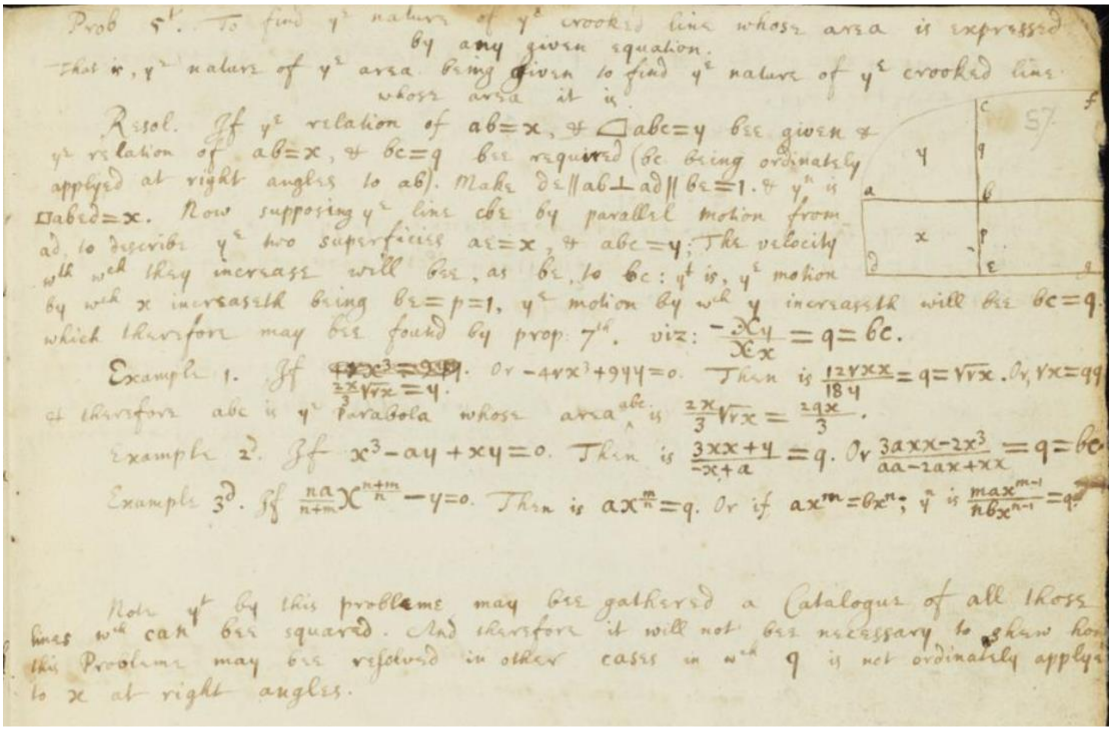
$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \cdots$ και $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7 + \cdots$

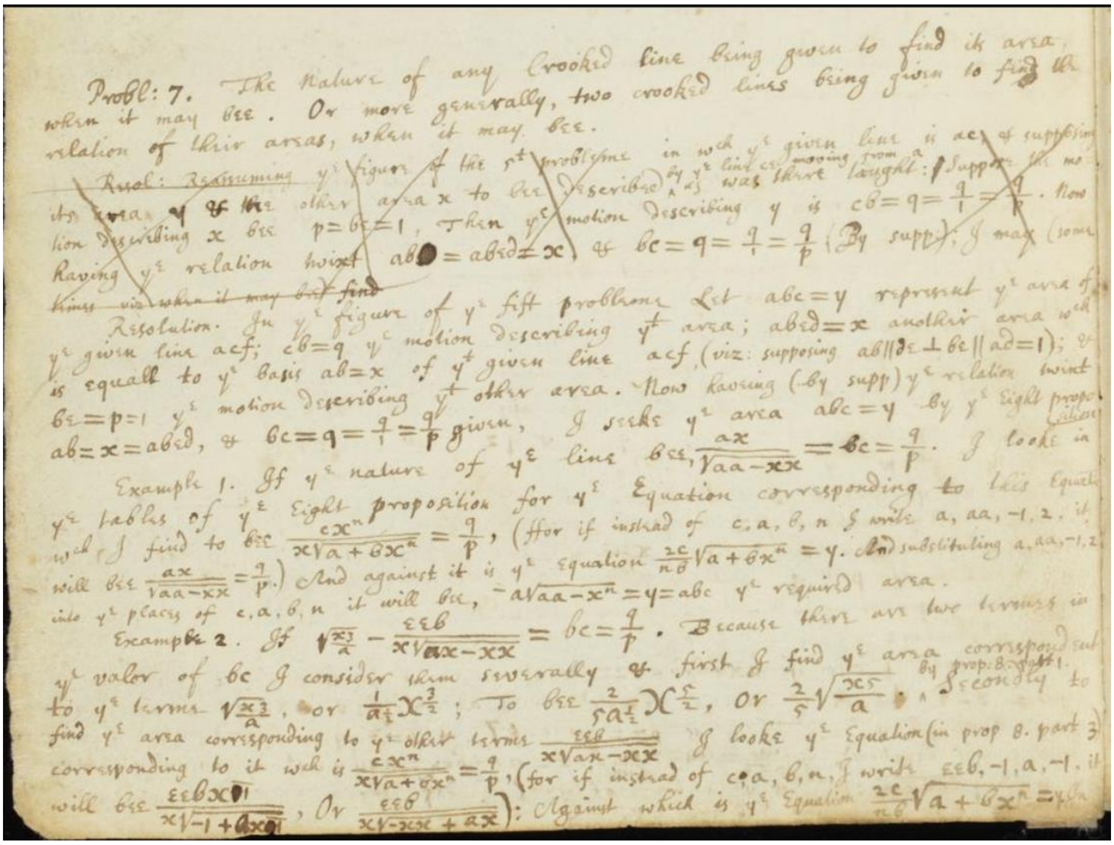
Η μέθοδος της λύσης είναι πιο πολύπλοκη εάν $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ δίνεται από μία εξίσωση με x και y αλλά και έτσι η βασική ιδέα του Newton ήταν να εκφράσει τη δοσμένη εξίσωση με όρους δυναμοσειράς. Η διαδικασία του Newton για την εύρεση της Ροής, εφόσον είχε τη δυναμοσειρά, ήταν να χρησιμοποιήσει την γνωστή διαδικασία, δηλαδή να προσθέσει μία μονάδα στον εκθέτη και να διαιρέσει τον όρο με τον νέο εκθέτη. Αλλά ο Newton συνειδητοποίησε πολύ νωρίς στην έρευνά του ότι το πρόβλημα εύρεσης της Ροής ήταν ισοδύναμο με το πρόβλημα να βρεθεί η περιοχή κάτω από την καμπύλη της εξίσωσης. Σύμφωνα με τον Katz μέσα σε αυτό το πλαίσιο ανακάλυψε και χρησιμοποίησε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού (Katz σ. 554).

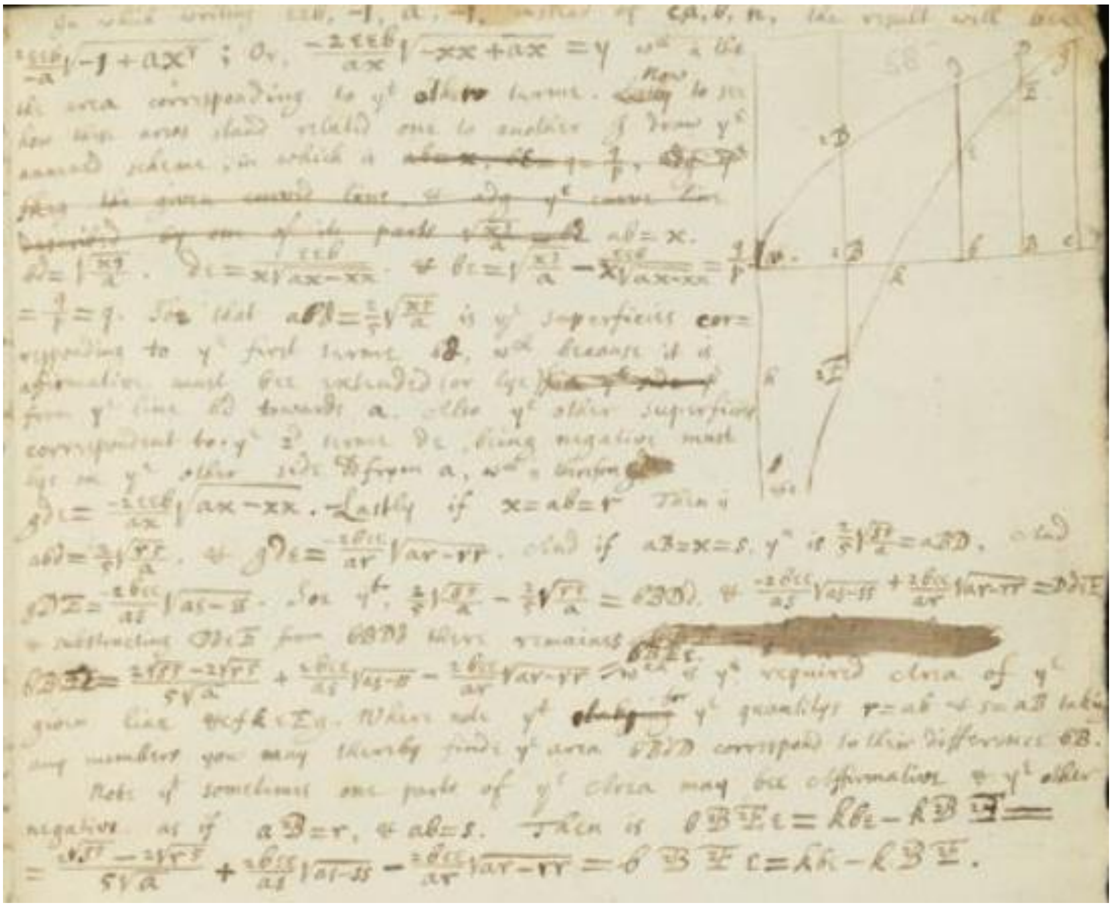
Ο Katz χαρακτηριστικά αναφέρει ότι ο Newton υποδεικνύει τα δύο κεντρικά προβλήματα των οποίων η επίλυσή τους θα έλυνε όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι προκάτοχοί σχετικά με τις καμπύλες. (Katz σ. 550)

6.3 Ο Newton και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού

Ο Newton έχοντας υπολογίσει $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$ από την πολυωνυμική εξίσωση f(x,y)=0, θέτει το αντίστροφο ερώτημα: Να βρούμε το y συναρτήσει του x, από την δοσμένη εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ του x και του λόγου $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ των ταχυτήτων. Στη περίπτωση αυτή η εξίσωση αυτή θα είναι της απλής μορφής $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \varphi(x)$. Αυτό ονομάζουμε σήμερα ως το πρόβλημα της αντιπαραγώγισης, ενώ η γενική περίπτωση $g\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0$ είναι μία διαφορική εξίσωση. Στην πέμπτη και έβδομη λίστα των επεξηγηματικών προβλημάτων του **October 1666 tract** ο Newton συζητά τον υπολογισμό των εμβαδών μέσω της αντιπαραγώγισης. (C. H. Edwards σ. 195)


Prob 5t. To find ye nature of ye crooked line whose area is expressed by any given equation.
That is, ye nature of ye area being given to find ye nature of ye crooked line whose area it is.
Resol. If ye relation of ab=x, & □abc=y bee given & ye relation of ab=x, & bc=q bee required (bc being ordinately applyed at right angles to ab). Make de∥ab⊥ad∥be=1. & yn is □abed=x. Now supposing ye line cbe by parallel motion from ad to describe ye two superficies ae=x, & abc=y; The velocity wth wch they increase will bee, as be, to bc: yt is, ye motion by wch x increaseth being be=p=1, ye motion by wch y increaseth will bee bc=q. which therefore may bee found by prop 7th. viz: $\frac{-\mathfrak{X}y}{\mathfrak{X}x} = q = bc$.
Example 1. If $\frac{2x}{3}\sqrt{rx} = y$. Or $-4rx^3+9yy=0$. Then is $\frac{12rxx}{18y} = q = \sqrt{rx}$. Or, $rx=qq$ & therefore abc is ye Parabola whose area abc is $\frac{2x}{3}\sqrt{rx} = \frac{2qx}{3}$.
Example 2d. If $x^3-ay+xy=0$. Then is $\frac{3xx+y}{-x+a} = q$. Or $\frac{3axx-2x^3}{aa-2ax+xx} = q = bc$.
Example 3d. If $\frac{na}{n+m}x^{\frac{n+m}{n}} - y = 0$. Then is $ax^{\frac{m}{n}} = q$. Or if $ax^m = bx^n$; ye is $\frac{max^{m-1}}{nbx^{n-1}} = q$.
Note yt by this probleme may bee gathered a Catalogue of all those lines wch can bee squared. And therefore it will not bee necessary to shew how this Probleme may bee resolved in other cases in wch q is not ordinately applyed to x at right angles.

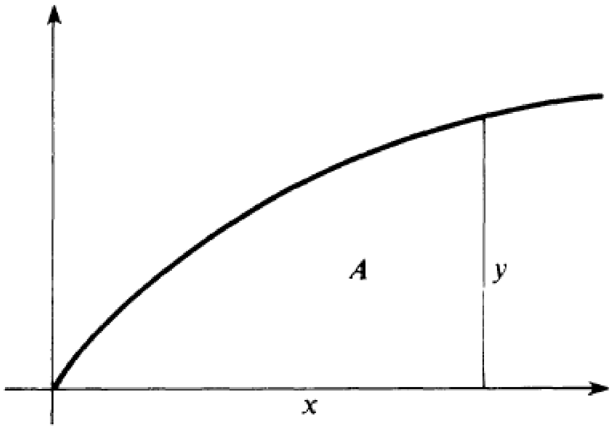




(Εικόνα 6.6, (Newton))

Αυτή είναι η πρώτη ιστορική εμφάνιση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού στη ξεκάθαρη μορφή.

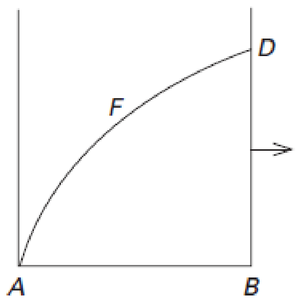
$$\frac{dA}{dx} = y$$



(Εικόνα 6.7)

όπου A υποδηλώνει την περιοχή κάτω από την καμπύλη y = f (x) (εικόνα 6.7), παρέχοντας τη βάση για μια αλγοριθμική προσέγγιση στον υπολογισμό των περιοχών. (C. H. Edwards σ. 195). Λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι προηγούμενες τεχνικές απειροστών είχαν βασιστεί στην αρχή, του προσδιορισμού του εμβαδού ως ένα άθροισμα άπειρων ή αδιαίρετων στοιχείων της περιοχής, ο Newton εισήγαγε εδώ πρώτη φορά τη τεχνική προσδιορισμού του ρυθμού μεταβολής της επιθυμητής περιοχής ως προς χ και στη συνέχεια, τον υπολογισμό του εμβαδού με αντιπαραγώγιση. (C. H. Edwards σ. 195)

Σύμφωνα με τον Katz για τον Newton αυτό το θεώρημα ήταν οπτικά αυταπόδεικτο.



(Εικόνα 6.8)

Σκέφτηκε ότι η καμπύλη *AFD* (εικόνα 6.8*)* καθώς παράγεται από την κίνηση των x και y, θα είχε ως αποτέλεσμα η περιοχή AFDB να παράγεται από την κίνηση της τεταγμένης BD. Ήταν φανερό ότι η ταχύτητα της περιοχής ήταν στη πραγματικότητα η τεταγμένη πολλαπλασιασμένη με την ταχύτητα του BD. Δηλαδή εάν z αναπαριστά τη περιοχή κάτω από την καμπύλη τότε $\dot{z} = y\dot{x}$ και ή $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$. (Katz σ. 555)

6.3.1 Newton ο «πρώτος» εφευρέτης του Λογισμού

Ο Edwards αποδίδει στον Newton την ανακάλυψη του Λογισμού. Αναφέρει χαρακτηριστικά ότι αν και τα δύο προβλήματα του εμβαδού και εφαπτομένης είχαν αντιμετωπιστεί καθ' όλη την διάρκεια του 17ου αιώνα με συγκεκριμένες τεχνικές, αυτό που τελικά γέννησε τον Λογισμό ήταν η εισαγωγή και η αξιοποίηση γενικών τεχνικών με την βοήθεια των οποίων αυτοί οι υπολογισμοί θα μπορούσαν να συστηματοποιηθούν (C. H. Edwards σ. 195).

Συνεχίζει αναφέροντας ότι ο συνδυασμός της κινηματικής προσέγγισης της εφαπτομένης και των ταχυτήτων, κατέστησε σαφή για πρώτη φορά την ακριβή φύση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ προβλημάτων εφαπτομένης και προβλημάτων εμβαδών, όπως επίσης ότι και οι δύο τύποι προβλημάτων είναι πτυχές ενός μόνο μαθηματικού θέματος, που χαρακτηρίζεται από διακριτούς και γενικά εφαρμόσιμους κανόνες. (C. H. Edwards σ. 195)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Δύο από τις μεγαλύτερες ιδιοφυίες όλων των εποχών, Isaac Newton και Gottfried Leibniz, έδρασαν και οι δύο το τελευταίο μισό του 17ου αιώνα. Ανεξάρτητα ο καθένας ανέπτυξαν γενικές έννοιες, για τον Newton οι Ροές και οι ταχύτητες τους, για τον Leibniz η παραγώγιση και η ολοκλήρωση—σχετίστηκαν με τα δύο βασικά προβλήματα του Λογισμού, τις ακραίες τιμές και τα προβλήματα εμβαδών. Ανέπτυξαν συμβολισμούς και τεχνικές που βοήθησαν την εύκολη χρήση αυτών των εννοιών και κατανόησαν και εφάρμοσαν την αντίστροφη σχέση των δύο εννοιών τους (Katz σ. 544).Ο Katz αποκαλεί τον Leibniz τον δεύτερο εφευρέτη του Λογισμού (Katz σ. 556).

Αν και σπούδασε νομικά, το 1666 έγραψε τη διατριβή *De Arte Combinatoria* (On the Art of Combinations), ένα έργο πάνω σε καθολικούς μεθόδους Λογισμού, που του απένειμε τον τίτλο του διδακτορικού στο πανεπιστήμιο Altdorf και τον τίτλο του καθηγητή. Κατά τη διάρκεια των χρόνων 1670 και 1671 ο Leibniz έγραψε τα πρώτα άρθρα του στη μηχανική και μέχρι το 1671 είχε παράγει την υπολογιστική του μηχανή. Εξασφάλισε μία θέση ως αντιπρόσωπος του Elector of Mainz και τον Μάρτη του 1672 πήγε στο Παρίσι για πολιτικούς σκοπούς. Αυτή η επίσκεψη τον έφερε σε επαφή με μαθηματικούς και επιστήμονες ιδιαίτερα τον Huygens, όπου εκεί ξύπνησε το ενδιαφέρον του στα μαθηματικά. Αν και είχε κάνει μικρή μελέτη στο θέμα και είχε γράψει το άρθρο το 1666 , υποστήριζε ότι δεν ήξερε σχεδόν μαθηματικά μέχρι το 1672. Το 1673 πήγε στο Λονδίνο και γνώρισε και άλλους επιστήμονες και μαθηματικούς, συμπεριλαμβανομένου τον Henry Oldenburg, γραμματέας εκείνη την περίοδο στο Royal Society of London. Ενώ εργαζόταν για τη διαβίωση του ως διπλωμάτης, ασχολήθηκε περισσότερο με τα μαθηματικά και διάβασε έργα του Descartes και του Pascal (Kline σ. 370). Ο Leibniz δημοσίευσε άρθρα για τον λογισμό από το 1684 και έπειτα. Όμως αρκετά από τα αποτελέσματα του, όπως επίσης και η ανάπτυξη των ιδεών του, περιέχονται σε πολλές σελίδες σημειώσεων από το 1673, αλλά ποτέ δεν δημοσιεύτηκαν από εκείνον. Οι σημειώσεις αυτές πηδάνε από το ένα θέμα στο άλλο και περιέχουν αλλαγμένους συμβολισμούς καθώς το σκεπτικό του Leibniz εξελισσόταν. Κάποιες είναι απλές ιδέες που έλαβαν χώρα ενώ διάβασε άρθρα του Gregory of St. Vincent, Fermat, Pascal, Descartes και Barrow ή προσπαθούσε να συλλάβει τις σκέψεις του με το δικό του τρόπο προσέγγισης στο Λογισμό. Το 1714

Leibniz έγραψε το έργο *Historia et Origo Calculi Differentialis*, στο οποίο έργο δίνει εξηγήσεις για την ανάπτυξη του τρόπου σκέψης του. (Kline σ. 371)

Μέχρι το 1673 γνώριζε την σημαντικότητα του ευθύ και αντίστροφου προβλήματος της κατασκευής των εφαπτομένων σε καμπύλη. Ήταν επίσης αρκετά βέβαιος ότι η αντίστροφος μέθοδος ήταν ισοδύναμη με την εύρεση εμβαδών και όγκων εφαρμόζοντας αθροίσματα. Η συστηματική ανάπτυξη των ιδεών του άρχισε με σημειώσεις το 1675. (Kline σ. 371)

Όπως αναφέρει ο Struik τα χειρόγραφα στα οποία ο Leibniz έγραψε τις ανακαλύψεις του κατά τη διαμονή του στο Παρίσι, δημοσιεύθηκαν από τον Gerhardt και μεταφράστηκαν στα αγγλικά από τον J. M. Child στο βιβλίο *The early mathematical manuscripts of Leibniz* (Open Court, Chicago, London, 1920), με κριτικές και ιστορικές σημειώσεις (Struik σ. 271). Το πρώτο δημοσιευμένο άρθρο του Leibniz σχετικά με τον Διαφορικό του Λογισμό ήταν ένα επτασέλιδο στην επιστημονική εφημερίδα *Acta Eruditorum* το 1684, όπου αναφέρονται οι έννοιες των διαφορικών dx και dy. Αυτό το έγγραφο ακολουθήθηκε το 1686 από ένα δεύτερο, στο οποίο ανεπίσημα εισάγει το σύμβολο ολοκλήρωσης ∫ και υποστηρίζει ότι ∫ και d είναι μεταξύ τους αντίστροφα. (Simmons, 1992 σσ. 155-156)

7.1 Μέθοδος εφαπτομένων

Στο χειρόγραφο του Αυγούστου το 1673, με τίτλο «*Methodus nova investigandi Tangentes linearum curvarum ex datis applicatisy vel contra Applicatis ex datis productis, reductis, tangentibus, perpendicularibus, secantibus*», ο Leibniz ξεκινά κατευθείαν με μία απόπειρα να βρει μία μέθοδο που είναι εφαρμόσιμη σε όλες τις καμπύλες για τον προσδιορισμό της εφαπτομένης. (Child σ. 59)

Ο Leibniz σύμφωνα με τον Struik αναφορικά με την κατασκευή της εφαπτομένης , τονίζει.

«*Πρέπει να έχουμε μόνο στο μυαλό μας ότι για να βρούμε μία εφαπτομένη σημαίνει να σχεδιάσουμε μία ευθεία γραμμή που ενώνει δύο σημεία της καμπύλης σε μία απείρως μικρή απόσταση ή να θεωρήσουμε τις συνεχόμενες πλευρές ενός πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών, που στη περίπτωσή αυτή παίρνει τη θέση της καμπύλης.*» *Αυτή η* *απείρως μικρή απόσταση μπορεί πάντα να εκφραστεί από ένα γνωστό διαφορικό όπως dv, ή από μία σχέση με αυτό, δηλαδή κάποια γνωστή εφαπτομένη.*» (Struik σ. 276)

Όπως αναφέρει ο Child κατασκευάζει αυτό που ονομάζει «Χαρακτηριστικό Τρίγωνο» , του οποίου οι πλευρές είναι: τα απείρως μικρά τόξα της καμπύλης, και οι διαφορές μεταξύ των τεταγμένων και των τετμημένων . Αυτό είναι όμοιο με το τρίγωνο του οποίου οι πλευρές είναι η εφαπτομένη, η κάθετη κάτω από την εφαπτομένη και η τεταγμένη του σημείου επαφής. Με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποίησε ο Descartes , ο Leibniz αναζητά την εφαπτομένη μέσω της κάθετης κάτω από την εφαπτομένη. Δηλώνει τις απείρως μικρές διαφορές των τετμημένων b και επαληθεύει για τη παραβολή, ότι η μέθοδος δουλεύει , όταν οι όροι της εξίσωσης που περιέχουν τις απείρως μικρές ποσότητες, καταργηθούν. Η παράλειψη αυτών των όρων όμως , δε φαίνεται στο Leibniz μία μέθοδος που μπορεί να στηριχθεί. Συγκεκριμένα αναφέρει:

«*Δεν είναι ασφαλές να απορρίψουμε πολλαπλάσια των άπειρων μικρών μερών b, και άλλων πραγμάτων, διότι μπορεί μέσω του αντισταθμίσματος αυτών με των άλλων, η εξίσωση να μετατραπεί σε μία εντελώς διαφορετική συνθήκη.*»

Έτσι αναζητά την εύρεση της κάθετης κάτω από την εφαπτομένη με άλλον τρόπο και καταλήγει ότι η λύση του προβλήματος περιορίζεται στο άθροισμα της σειράς, της οποίας οι όροι είναι οι διαφορές των διαδοχικών τετμημένων. (Child σσ. 59-60)

7.1.2 Το Χαρακτηριστικό ή Διαφορικό Τρίγωνο

Σύμφωνα με τον Katz η ιδέα του διαφορικού τριγώνου του Leibniz ήταν μία εκδοχή του τριγώνου που είχε δει από τα γραπτά του Pascal ή πιθανόν του Barrow. (Katz σ. 568)

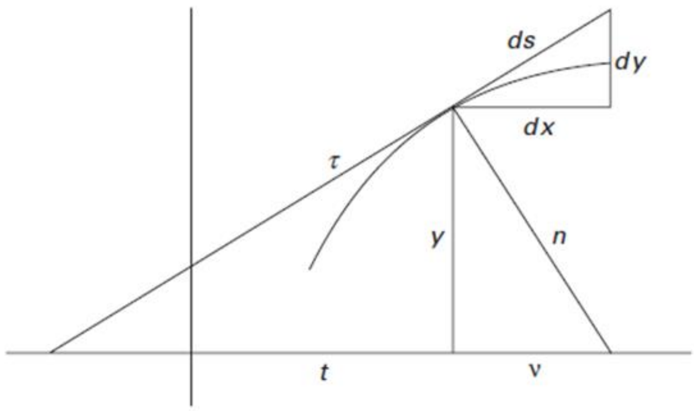
Για την περιγραφή των παρακάτω λαμβάνουμε υπόψη τον μετέπειτα συμβολισμό των διαφορών που εισήγαγε ο Leibniz δύο χρόνια αργότερα, το 1675 (C. H. Edwards σ. 242)

Το διαφορικό τρίγωνο (εικόνα 7.1) δηλαδή το κάθετο τρίγωνο του οποίου η υποτείνουσα ds συνδέει δύο γειτονικές κορυφές του πολυγώνου με άπειρες πλευρές που αντιπροσωπεύει την καμπύλη, είναι όμοιο με το τρίγωνο που έχει ως πλευρές την τεταγμένη y, την εφαπτομένη τ, και την κάθετη κάτω από την εφαπτομένη t, επομένως θα έχουμε την αναλογία πλευρών που προκύπτει από την παραπάνω ομοιότητα.

$$\frac{ds}{\tau} = \frac{dx}{t} = \frac{dy}{y}$$

Αλλάζοντας τους μέσους από ιδιότητα των αναλογιών, οι λόγοι που προκύπτουν εμπλέκονται στην ιδέα της εφαπτομένης. Ο Leibniz γενικά όριζε τη μία από αυτές τις τρεις διαφορές, σταθερά. Αυτό το πετύχαινε, διαλέγοντας να αναπαραστήσει την καμπύλη σαν ένα πολύγωνο με άπειρες και ίσες πλευρές. (ds σταθερά ή $dds = 0$)

Οι προβολές των πλευρών στον x άξονα να είναι ίσες (dx σταθερά ή $ddx = 0$), ή οι προβολές των πλευρών στον y άξονα ίσες (dy *σταθερά ή* $ddy = 0$). Υπό μία έννοια η μεταβλητή που έχει επιλεχθεί να έχει σταθερή διαφορά μπορεί να θεωρηθεί ως η ανεξάρτητη μεταβλητή. Σε κάθε περίπτωση μέσω των χειρισμών των διαφορών του διαφορικού τριγώνου, ο Leibniz βρήκε τις κεντρικές τεχνικές για την εκδοχή του Λογισμού του. (Katz σ. 568)



(Εικόνα 7.1)

7.1.3 Σύνδεση εφαπτομένης και εμβαδού

Ο Pascal είχε χρησιμοποιήσει το διαφορικό τρίγωνο σε ένα κύκλο ακτίνας r για να δείξει στη γλώσσα του Leibniz ότι *y ds = r dx*. Ο Leibniz συνειδητοποίησε ότι αυτός ο κανόνας μπορεί να γενικευθεί σε κάθε καμπύλη εάν η ακτίνα r αντικατασταθεί από τη κάθετη στην εφαπτομένη n , διότι το τρίγωνο με πλευρές την τεταγμένη y, την κανονική n και την κάθετη ν κάτω από την κανονική n, ήταν όμοιο με το διαφορικό τρίγωνο. Ο

Leibniz παρατήρησε όπως ομοίως και ο Pascal, ότι το τα dx, dy είναι ανάλογα στα y, v αντίστοιχα ή $ydy = vdx$.

$$\text{Άρα } \int ydy = \int vdx$$

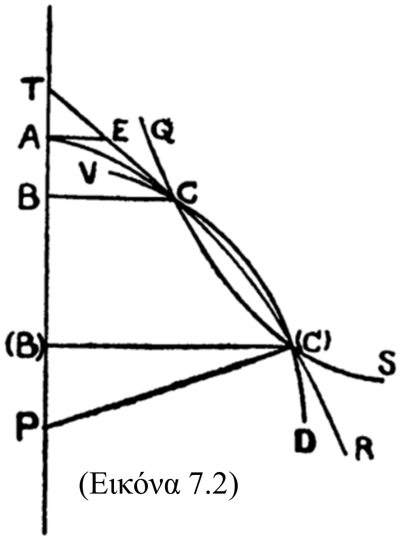
Επειδή αντιλήφθηκε ότι το $\int ydy$ αντιπροσώπευε ένα τρίγωνο του οποίου το εμβαδόν είναι $\frac{1}{2}b^2$, όπου b ήταν η τελική τιμή της τεταγμένης y, πήρε το αποτέλεσμα ότι $\int vdx = \frac{1}{2}b^2$. Οπότε για να βρούμε το εμβαδόν κάτω από μία καμπύλη με τεταγμένη z, ήταν αρκετό η εύρεση μιας καμπύλης y που η κάθετη v κάτω από την κανονική θα ήταν ίση με z. Αλλά εφόσον $v = y\frac{dy}{dx}$ αυτό ήταν ισοδύναμο με την επίλυση της εξίσωσης $y\frac{dy}{dx} = z$. Με άλλα λόγια το πρόβλημα εμβαδού περιορίστηκε σε αυτό που αποκαλούσε ο Leibniz αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης. (Katz σσ. 568-569)

Αν και αυτοί οι συγκεκριμένοι κανόνες δεν οδήγησαν τον Leibniz σε κάποιο άγνωστο προηγούμενο αποτέλεσμα, μία γενίκευση αυτής της μεθόδου όμως τον οδήγησε στο θεώρημα του «Transmutation Theorem» και στον αριθμητικό τετραγωνισμό του κύκλου, μία έκφραση του π/4 σε σειρά.

7.1.4 Εύρεση εφαπτομένης – Γενίκευση των κανόνων Descardes και Sluse

Σε χειρόγραφο Του 22 Νοεμβρίου 1675, με τον τίτλο "*Methodi tangentium directae compendium calculi, dum jam inventis aliarum curvarum tangentibus utimur. Quaedam et de inversa method*", περιγράφει ευθέως την μέθοδο της εφαπτομένης καθώς και κάποιες παρατηρήσεις για το αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης (Child σ. 113), τις οποίες θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Στο χειρόγραφο αυτό η ιδέα του Leibniz για τη εύρεση της εφαπτομένης γραμμής σε καμπύλη σχετίζεται με την γενίκευση των μεθόδων εύρεσης της εφαπτομένης των Descartes και Sluse.



(Εικόνα 7.2)

Έστω ACCR και QCCS να είναι δύο καμπύλες που τέμνονται σε ένα, δύο ή περισσότερα σημεία C. Έστω AB να είναι ο άξονας και x=AB η τετμημένη, ενώ y=BC η τεταγμένη του σημείου C. Τότε θα έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους. Εάν οι εξισώσεις έχουν ίσες ρίζες ή ίδιες τιμές τότε αυτές οι δύο γραμμές θα εφάπτονται. Αντί για τη γραμμή QCCS, ο Descartes επέλεξε το τόξο του κύκλου VCCD, του οποίου το κέντρο είναι P, έτσι ώστε το PC είναι η ελάχιστη γραμμή που μπορεί να σχεδιαστεί από το σημείο P. Το ίδιο αποτέλεσμα θα προκύψει και πιο απλά, εάν αντί για το τόξο του κύκλου , πάρουμε την εφαπτομένη γραμμή TC στο C , που είναι η μέγιστη ευθεία από όλες εκείνες που μπορούν να σχεδιαστούν από ένα δοσμένο σημείο T στη καμπύλη. (Child σ. 111)

Με άλλα λόγια σύμφωνα με τον Scriba, ο Leibniz θεώρησε δύο καμπύλες με εξισώσεις έστω f(x,y)=0 και g(x,y)=0 οι οποίες τέμνονται σε ένα, δύο ή περισσότερα σημεία. Εάν το σύστημα εξισώσεων των παραπάνω καμπυλών είχε πολλαπλή ρίζα έστω την x=α, τότε οι καμπύλες θα ακουμπάνε η μία την άλλη στο σημείο P(α,β). Τότε εάν η καμπύλη g(x,y)=0 έχει επιλεγεί έτσι ώστε να είναι γνωστή η εφαπτομένη της από προηγούμενη έρευνα, αυτή η εφαπτομένη γραμμή στο σημείο P(α,β) θα είναι η ίδια με την εφαπτομένη της f(x,y)=0 που ζητείται. O Descartes, για *g(x, y)=0,* χρησιμοποίησε τον κύκλο ενώ ο Sluse μία ευθεία γραμμή. O Leibniz αναγνώρισε ότι ούτε ο κύκλος του Descartes στη θέση της g(x,y) ούτε η ευθεία του Sluse, ήταν υποχρεωτικές και αναφέρει χαρακτηριστικά: (Scriba σ. 117)

«*Ως εκ τούτου, συνεχίζω να λέω ότι όχι μόνο μια ευθεία γραμμή ή ένας κύκλος, αλλά και κάθε καμπύλη που επιλέξατε τυχαία, αρκεί να είναι γνωστή η μέθοδος σχεδίασης εφαπτομένων στην υποτιθέμενη καμπύλη. Έτσι, με τη βοήθεια αυτού, οι εξισώσεις των εφαπτομένων στη δεδομένη καμπύλη μπορούν να βρεθούν. Η χρήση αυτής της μεθόδου* *θα αποφέρει κομψά γεωμετρικά αποτελέσματα που είναι αξιοσημείωτα για τον τρόπο με τον οποίο ο μακρύς υπολογισμός αποφεύγεται ή συντομεύεται, καθώς και οι αποδείξεις και οι κατασκευές. Με αυτόν τον τρόπο προχωράμε από τις εύκολες καμπύλες σε πιο δύσκολες περιπτώσεις. . . . Συνεπώς πιστεύω ακράδαντα ότι θα αντλήσουμε έναν κομψό λογισμό για έναν νέο κανόνα των εφαπτομένων.* (Child σ. 112)

7.2 Ο Λογισμός του Leibniz

7.2.1 Οι τελεστές $d, \int, dd$

Ο Leibniz που στήριξε τον Λογισμό του στην αντίστροφή σχέση των αθροισμάτων και διαφορών μίας ακολουθίας αριθμών (Katz), από το 1673 έψαχνε για μία μέθοδο να χειριστεί τα προβλήματα απειροστών.

Έψαχνε τον φορμαλισμό, έναν Λογισμό ικανό να εκφράσει τις μεταβολές των συναρτησιακών σχέσεων που εμφανίζονται σε ερωτήματα αυτού του τύπου. Τον Οκτώβρη του 1675 έκανε το αποφασιστικό βήμα, την εισαγωγή των συμβόλων *dx* (πρώτα ως $\frac{x}{d}$) και $\int f(x)dx$ στην μελέτη των απειροστών προβλημάτων και τη καθιέρωση των βασικών κανόνων για τα νέα σύμβολα. (Scriba σ. 114)

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Cajori τα λόγια του Leibniz,

«*Παρατηρεί κάποιος ένα πλεονέκτημα που παίζουν τα σύμβολα στην ανακάλυψη, το οποίο είναι μεγαλύτερο όταν εκφράζουν την ακριβή φύση ενός πράγματος εν συντομία, και όπως ακριβώς το φαντάζεται κάποιος. Τότε πράγματι η εργασία της σκέψης μειώνεται θαυμάσια.*» (Cajori, 1929 p. 184)

Ο Katz αναφέρει ότι το σύμβολο $\int$ ήταν απλά μία προέκταση του γράμματος S, το πρώτο γράμμα από τη λατινική λέξη *summa*, ενώ το d από την λατινική λέξη *differentia*. Συνεχίζει λέγοντας ότι για τον Leibniz τόσο το dy όσο και το $\int y$ ήταν μεταβλητές. Δηλαδή το d και το $\int$ ήταν τελεστές που όριζαν μία απείρως μικρή μεταβλητή και μία απείρως μεγάλη μεταβλητή, αντίστοιχα στην πεπερασμένη μεταβλητή y. Αλλά το dy πάντα θεωρούνταν ως μια ακριβής διαφορά μεταξύ δύο γειτονικών τιμών της μεταβλητής y, ενώ το $\int y$ ένα ακριβές άθροισμα όλων των τιμών της μεταβλητής y από μία συγκεκριμένη τιμή σε μία άλλη. Εφόσον το dy είναι μεταβλητή μπορεί επίσης να γραφεί ddy ως παράγωγος δεύτερης τάξης ή και μεγαλύτερης. (Katz σ. 567) .

7.2.2 Γεωμετρική ερμηνεία των Διαφορών

Σύμφωνα με τον Katz, ο Leibniz θεώρησε την καμπύλη σαν ένα πολύγωνο με άπειρες πλευρές όπου σε κάθε σημείο τομής κατασκευάζεται μία τεταγμένη (Katz σ. 567).

Εφόσον οι διαφορές και τα αθροίσματα είναι αντίστροφες διαδικασίες, τότε το άθροισμα των διαφορών της σειράς, θα είναι ο όρος της σειράς και η διαφορά των αθροισμάτων της σειράς θα είναι ο όρος της σειράς (Child σ. 142). Δηλαδή εάν οι απειροστές διαφορές των τεταγμένων ονομάζεται ως dy και αν το άθροισμα των άπειρων τεταγμένων ονομάζεται ως $\int y$ ο τότε θα έχουμε $\int dy = y$ και $d \int y = y$. (Katz σ. 567)

Γεωμετρικά το πρώτο σημαίνει ότι το άθροισμα των διαφορών (απειροστές διαφορές) σε ένα τμήμα, είναι το ίδιο το τμήμα. (Ο Leibniz υποθέτει εδώ ότι η αρχική τεταγμένη είναι μηδέν). Ο δεύτερος κανόνας δεν έχει προφανή γεωμετρική ερμηνεία διότι το άθροισμα απείρων πεπερασμένων όρων μπορεί επίσης να είναι άπειρο. Για το λόγο αυτό ο Leibniz αντικατέστησε την πεπερασμένη τεταγμένη y με την απειροστή περιοχή ydx, όπου dx ήταν το απειροστό μέρος του x άξονα που καθοριζόταν από τα σημεία τομής των άπειρων πλευρών του πολυγώνου. Επομένως $\int ydx$ θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως η περιοχή κάτω από τη καμπύλη και ο κανόνας $d \int ydx = ydx$ απλά σήμαινε ότι ο διαφορές μεταξύ των όρων της ακολουθίας της περιοχής $\int ydx$ είναι οι ίδιοι οι όροι ydx. (Katz σ. 567)

7.2.3 Λογισμός των Διαφορών

Ο Leibniz έδωσε κάποιους βασικούς κανόνες παραγώγισης .

1) Εάν α είναι μία σταθερά, τότε *da* = 0,
2) *d(v ± y) = dv ± dy,*
3) *d(vw) = v dw + w dv*
4) *d(v/y) = (±v dy ∓ y dv)/y*2. Τα πρόσημα στον κανόνα του πηλίκου σύμφωνα με τον Leibniz στηρίζονται στο αν η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική ή αρνητική.
5) Οι τύποι $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}dx$ για δυνάμεις και ρίζες αντίστοιχα, υποδηλώνουν ότι ο πρώτος τύπος περιέχει τον δεύτερο, εάν αυτός γραφεί σε ρητή δύναμη.
6) Επίσης ο κανόνας της αλυσίδας, είναι σχεδόν φανερός χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Leibniz, χαρακτηριστικό παράδειγμα που αναφέρει ο Katz είναι:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο του $z = \sqrt{g^2 + y^2}$, όπου g είναι σταθερά. Ο Leibniz έθεσε $r = g^2 + y^2$ και παρατήρησε ότι $dr = 2ydy$ και $dz = d\sqrt{r} = \frac{dr}{2\sqrt{r}}$. Αντικαθιστώντας τη πρώτη εξίσωση στη δεύτερη κατέληξε, $dz = \frac{2ydy}{2z} = \frac{ydy}{z}$ *(Katz σ. 570).*

7.2.4 Εφαρμογή σε μέγιστα και ελάχιστα

Ο νέος λογισμός του Leibniz βρήκε εφαρμογή επίσης στο προσδιορισμό των μεγίστων και ελαχίστων. Σημείωσε ότι το dv θα είναι θετικό καθώς το v αυξάνεται και αρνητικό καθώς το v μειώνεται, καθώς ο λόγος $\frac{dv}{dx}$, όπου dx είναι πάντα θετικό, θα είναι η κλίση της εφαπτομένης. Ακολουθεί ότι $dv = 0$ όταν δεν αυξάνεται, ή δεν μειώνεται. Σε αυτή τη θέση η τεταγμένη θα είναι μέγιστη αν η καμπύλη στρέφει τα κοίλα κάτω ή ελάχιστη εάν στρέφει τα κοίλα άνω. Η εφαπτόμενη τότε θα είναι οριζόντια (Katz σ. 571). Ο Struik αναφέρει σύμφωνα με τις σημειώσεις του Leibniz ότι το θέμα της καμπυλότητας εξαρτάται από τη δεύτερη διαφορά ddv. «Όταν με την αύξηση των τεταγμένων v οι διαφορές dv επίσης αυξάνουν, δηλαδή όταν το dv είναι θετικό, η διαφορά των διαφορών ddv είναι επίσης θετική και όταν το dv είναι αρνητικό το ddv

είναι αρνητικό, τότε η καμπύλη είναι κοίλη, ενώ στην άλλη περίπτωση κυρτή. Όπου η διαφορά είναι μέγιστη ή ελάχιστη ή στο σημείο που οι διαφορές από αυξανόμενες, μειώνονται ή το αντίθετο, υπάρχει το σημείο καμπής» (Struik σ. 275), το οποίο συμβαίνει όταν ddv=0.

7.2.5 Αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης

Ένα πλήθος γνωστών αποτελεσμάτων επανελέγχθηκαν με τη βοήθεια του νέου Λογισμού και η ισχύ του εξετάστηκε εφαρμόζοντάς τον σε περαιτέρω προβλήματα. Ανάμεσα σε αυτά τα προβλήματα, ήταν το γνωστό *Αντίστροφο Πρόβλημα της Εφαπτομένης*. (Scriba σ. 114)

Σύμφωνα με τον Child στο τέλος του χειρόγραφου *Methodus nova investigandi Tangentes linearum curvarum ex datis applicatisy vel contra Applicatis ex datis productis, reductis, tangentibus, perpendicularibus, secantibus,* ο Leibniz ξεκινά να μιλά για το αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης και αναφέρει χαρακτηριστικά:

«*Σημαντικό θέμα έρευνας, όπου αυτό είναι δυνατό, ιχνηλατώντας τα βήματά μας, να ξεκινήσουμε από τις εφαπτομένες και άλλες συναρτήσεις και από εκεί να βρούμε τις τεταγμένες.*» (Child σ. 60). Σύμφωνα με τον Scriba λέγοντας άλλες συναρτήσεις εννοεί τη κανονική, τη κάθετη κάτω από τη κανονική, τη κάθετη κάτω από την εφαπτομένη κτλ. (Scriba σ. 114)

Ο Leibniz αναφέρει χαρακτηριστικά: «*Το θέμα θα εξακριβωθεί με ακρίβεια ερευνώντας τους πίνακες εξισώσεων. Με αυτό το τρόπο μπορεί να ανακαλύψουμε πόσους τρόπους έχει να παραχθεί μία εξίσωση από άλλες, και από αυτές ποια πρέπει να επιλεχθεί για τη κάθε περίπτωση.*» . Συνεχίζει καταλήγοντας στο παρακάτω συμπέρασμα. «*Τα δύο ερωτήματα, το πρώτο η εύρεση της περιγραφής της καμπύλης από τα στοιχεία της και το δεύτερο η εύρεση της καμπύλης από τις δοσμένες διαφορές, περιορίζονται στο ίδιο πράγμα. Από το γεγονός αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι σχεδόν το σύνολο της θεωρίας της αντίστροφης μεθόδου της εφαπτομένης περιορίζεται στο προσδιορισμό του εμβαδού.*» (Child σ. 60)

Αυτό φανερώνει ότι ήταν η ιδέα του Leibniz να κατασκευάσει μία σειρά από πίνακες των συναρτήσεων με τις παραγώγους τους, καθώς θα λέγαμε σήμερα με σύγχρονη ορολογία. Θα έλεγε ποιες συναρτήσεις εμφανίζονται ως οι παράγωγοι των γνωστών καμπυλών, όπως κύκλο, έλλειψη, υπερβολή, παραβολή, κυκλοειδές κτλ. Και την ταυτόχρονα θα εξυπηρετούσε ως πίνακας για τον προσδιορισμό εμβαδών, του μήκους τόξου της καμπύλης και προβλήματα της αντίστροφης μεθόδου της εφαπτομένης (Scriba σ. 114)

Με παρόμοιο τρόπο με την μέθοδο εύρεσης της εφαπτομένης ο Leibniz ήλπιζε να λύσει το αντίστροφο πρόβλημα, αναφέροντας χαρακτηριστικά.

«*Τώρα αυτή η γενική και ευρεία δύναμη να υποθέτουμε οποιαδήποτε καμπύλη, καθιστά πιθανό, είμαι σχεδόν σίγουρος, να μετατρέψουμε οποιοδήποτε πρόβλημα στην αντίστροφη μέθοδο της εφαπτομένης ή την εύρεση του εμβαδού...Δηλαδή δοσμένης της ιδιότητας των εφαπτομένων οποιασδήποτε καμπύλης, εξετάζουμε τις σχέσεις που έχουν αυτές οι εφαπτομένες με άλλες καμπύλες που θεωρούνται δεδομένες, και έτσι είναι γνωστές οι συντεταγμένες ή οι εφαπτομένες σε αυτές. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για τον προσδιορισμό του εμβαδού μιας περιοχής, ως διαφορά συναρτήσεων*» . (Scriba σσ. 117-118)

7.3 Leibniz και το Θεμελιώδες Θεώρημα

7.3.1 Μήκος τόξου

Στο αναθεωρημένο χειρόγραφο του 1677 σύμφωνα με τον Edwards ο ρόλος του απειροστού χαρακτηριστικού τριγώνου είναι φανερός στο νέο Λογισμό. Μία καμπύλη είναι τώρα ένα πολύγωνο με άπειρες στο πλήθος γωνίες και απειροστές πλευρές. Το μήκος τόξου ds είναι η πλευρά αυτού του πολυγώνου, μία απειροστή ευθεία γραμμή που ενώνει δύο γειτονικές κορυφές, έτσι ώστε:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2 dx}$$

Όπου τα *dx* και τα *dy* είναι οι διαφορές των x και y συντεταγμένων των δύο γειτονικών κορυφών. Επομένως για την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$ το μήκος τόξου θα δίνεται από

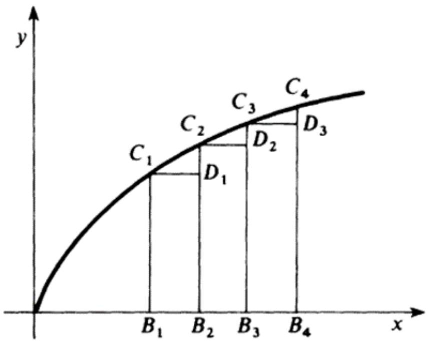
$$s = \int ds = \int \sqrt{1+x^2}dx$$

Έτσι το μήκος της καμπύλης της παραβολής βασίζεται στην περιοχή που βρίσκεται κάτω από την υπερβολή $y = \sqrt{1+x^2}$. (C. H. Edwards σσ. 256-257)

7.3.2 Εμβαδόν

Σε αυτό το εγχειρίδιο το $\int ydx$ δηλώνει φανερά το άθροισμα των απειροστών ορθογωνίων με ύψος y και πλάτος dx. (C. H. Edwards σ. 257)

(Εικόνα 7.3)



Χαρακτηριστικά ο Leibniz αναφέρει (εικόνα 7.3):

"Αναπαριστώ την περιοχή μίας «φιγούρας» με το άθροισμα όλων των τετραγώνων με διαστάσεις τις τεταγμένες και τις διαφορές των τετμημένων, δηλαδή $B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 + \cdots$. Για τα τρίγωνα $C_1D_1C_2, C_2D_2C_3, \ldots$.. εφόσον είναι απείρως μικρά σε σχέση με τα παραπάνω ορθογώνια, μπορούν άφοβα να παραληφθούν χωρίς ρίσκο. Επομένως αναπαριστώ στον λογισμό μου το εμβαδό της «φιγούρας» με το $\int ydx$, ή των ορθογωνίων με πλευρές y και dx που αντιστοιχούν σε αυτά. (Child σ. 138)

7.3.3 Θεμελιώδες Θεώρημα

Στη συνέχεια ο Leibniz παρουσιάζει το γνωστό «Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού»

«*But we, now mounting to greater heights, obtain the area of a figure by finding the figure of its summatrix or quadratrix*» (Child σ. 138)

Σύμφωνα με τον Edwards, δίνεται καμπύλη με τεταγμένη z της οποίας ζητείται η επιφάνεια, υποθέτουμε ότι είναι πιθανό να βρούμε μία καμπύλη με τατεγμένη y τέτοια ώστε,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$$

Όπου α είναι μία σταθερά. Τότε $zdx = ady$ άρα η περιοχή κάτω από την καμπύλη θα είναι $\int zdx = a \int dy = ay$, υποθέτοντας ότι η καμπύλη περνάει από την αρχή. Έτσι το πρόβλημα του εμβαδού ανάγεται στον Λογισμό του Leibniz στο αντίστροφο πρόβλημα της εφαπτομένης. Δηλαδή για να βρούμε την περιοχή κάτω από την καμπύλη με τεταγμένη z, αρκεί να βρούμε μια καμπύλη της οποίας η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\frac{dy}{dx} = z$$

Αφαιρώντας την περιοχή από [0,α] από αυτήν από [0, b] και θέτοντας α=1 , έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{b} z\, dx = y(b) - y(a). \qquad \text{(C. H. Edwards σ. 257)}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

8.1 Γενικά Συμπεράσματα

Με τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, έγινε μία προσπάθεια να παρουσιαστεί περιληπτικά, το πρόβλημα της εφαπτομένης κατά τον 17ο αιώνα με μία μικρή αναφορά στις ρίζες του στην αρχαιότητα. Διαπιστώνουμε ότι η μαθηματική ανακάλυψη είναι μία «σκυταλοδρομία» και όχι ένας «αγώνας δρόμου». Όπως χαρακτηριστικά είχε εκφράσει μεταφορικά ο Newton στο γράμμα του στον Robert Hook:

«*Αν είδα πιο μακριά είναι, γιατί στάθηκα στους ώμους γιγάντων*» (Newton, 1675)

Στη παρούσα μελέτη, γίνεται ξεκάθαρο ότι η τελική ανακάλυψη του Λογισμού απαιτούσε την κατανόηση της σχέσης μεταξύ της κατασκευής της εφαπτομένης και του προσδιορισμού του εμβαδού (Struik σ. 270). Όμως ένας τεράστιος όγκος γνώσης πάνω σε αυτά τα προβλήματα είχε συσσωρευτεί ήδη, πριν ο Newton και ο Leibniz κάνουν την ενεργή εμφάνισή τους. Εύλογα μπορεί να αναρωτηθεί κανείς, τί ήταν αυτό που απέμεινε να ανακαλυφθεί ώστε να οδηγηθούμε στην εφεύρεση του Λογισμού. Η απάντηση που δίνει ο Kline είναι η μεγαλύτερη γενικότητα της μεθόδου και η αναγνώριση της γενικότητας αυτού που είχε ήδη αποδειχθεί σε συγκεκριμένα προβλήματα. Σύμφωνα με τον Kline το έργο του Λογισμού κατά τη διάρκεια των πρώτων δύο τρίτων του αιώνα χάθηκε στις λεπτομέρειες. Επίσης, στις προσπάθειές τους να επιτύχουν αυστηρότητα μέσω της γεωμετρίας, πολλοί απέτυχαν να χρησιμοποιήσουν ή να διερευνήσουν τις επιπτώσεις της νέας άλγεβρας και της αναλυτικής γεωμετρίας, και εξαντλήθηκαν σε ανεπιτυχείς λεπτούς συλλογισμούς. Ο Gregory δήλωσε στον πρόλογο του έργου του *Geometricae* ότι η πραγματική διαίρεση των μαθηματικών δεν ήταν στη γεωμετρία και την αριθμητική αλλά στο καθολικό και στο συγκεκριμένο, όπου το πρώτο προωθήθηκε από δύο σημαντικά μυαλά τον Newton και τον Leibniz (Kline σ. 356).

Περαιτέρω έρευνα:

1) Ο Αρχιμήδης είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε την ιδέα της σύνθεσης κινήσεων για την κατασκευή της εφαπτομένης στην Αρχιμήδεια Σπείρα. Απέδειξε (με μεθόδους που παραπέμπουν στο σύγχρονο ορισμό της

παραγώγου) ότι η διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου P πάνω στην Σπείρα είναι η διεύθυνση της εφαπτομένης της Σπείρας στο P. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο κινηματικός ορισμός της Σπείρας που έδωσε ο Αρχιμήδης καθιστά εύκολη τη φυσική έννοια της εφαπτομένης ως ταχύτητα. Η ιδέα αυτή όπως είδαμε αναπτύχθηκε τον 17ο από τον Roberval και στην συνέχεια από τον Newton. Για τον Newton αυτή η διερεύνηση εφαπτομένων μέσω των συνισταμένων κινήσεων παρείχαν τόσο το κίνητρο για τη νέα μέθοδο των «Fluxions», όσο και το κλειδί για τις γεωμετρικές εφαρμογές του ο οποίος ανάπτυξε την μέθοδο των «Fluxions». Προτείνεται περεταίρω μελέτη στο έργο του Αρχιμήδη και την επιρροή που άσκησε στους μεταγενέστερους μαθηματικούς του 17ου αιώνα, ιδιαίτερα τους Roberval και Newton.

2) Όπως αναφέρεται στο Κεφάλαιο 2, για την μέθοδο των εφαπτομένων του Fermat δεν υπάρχει κείμενο αναλυτικό που να μας λέει ξεκάθαρα τη γένεση της μεθόδου και τη βάση στην οποία στηρίχθηκε. Ο ίδιος αναφέρει ότι η μέθοδος των εφαπτομένων ήταν ένα προϊόν μίας πιο γενικής μεθόδου. Ο Stromholm αναφέρεται στη Γενική Μέθοδο του Fermat, την οποία την διαχωρίζει σε τρεις εφαρμογές την Μέθοδο 1 και Μέθοδο 2 για την εύρεση των ακραίων τιμών και Μέθοδο 3 για την εύρεση της εφαπτομένης. Προτείνεται περεταίρω έρευνα στην χρονολογική σειρά των Μεθόδων 1 και 2 καθώς και ποια από τις δύο μεθόδους αποτέλεσε τη βάση για την μέθοδο κατασκευής των εφαπτομένων.

8.2 Διδακτική προσέγγιση

Μέσω της παρούσας εργασίας έγινε μία προσπάθεια να παρουσιαστεί η ιστορία του προβλήματος της εφαπτομένης κατά τον 17ο αιώνα. Παρουσιάστηκε η γένεση σημαντικών μαθηματικών εννοιών, οι ταχύτητες των Ροών του Newton και οι Διαφορές του Leibniz, όπως επίσης το μοτίβο και η πολυπλοκότητα της συλλογιστικής που ακολούθησαν όλοι οι προαναφερόμενοι μαθηματικοί του 17ου αιώνα και των αρχαίων χρόνων, στη προσπάθεια τους να επιλύσουν το πρόβλημα της εφαπτομένης. Η χρονολογική σειρά που ακολουθήθηκε, είχε σκοπό να αναδείξει την συνεχή ροή της εξέλιξης στο πρόβλημα της εφαπτομένης και να αναδείξει την ιστορία της γένεσης του Λογισμού.

Η ενσωμάτωση της ιστορίας της γένεσης μίας συγκεκριμένης έννοιας στη διδακτική πράξη, βοηθά τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι οι μαθηματικές αλήθειες ανακαλύπτονται συνήθως μέσω σκληρής και επίμονης δουλειάς. Τους βοηθά να κατανοήσουν ότι τα λάθη, οι αμφιβολίες, η διαισθητική συλλογιστική, οι συζητήσεις και οι εναλλακτικές προσεγγίσεις δεν είναι μόνο νόμιμες, αλλά αναπόσπαστο μέρος της δημιουργίας των μαθηματικών. (C. Tzanakis, 2000)

Επιπλέον η ενσωμάτωση της Ιστορίας στην διδακτική μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη μιας σειράς δραστηριοτήτων, αξιοποιώντας «στιγμές» γένεσης της ιστορίας των μαθηματικών. (Integrating the History of Mathematics in Mathematical Praxis - An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems σ. 505)

Η παρούσα εργασία θα μπορούσε να δώσει το έναυσμα για έρευνα σε προτάσεις διδασκαλίας, που θα αξιοποιούσαν μεθοδολογίες, τεχνικές και συλλογισμούς που περιγράφονται, ως εισαγωγή στην έννοια της σχέσης εφαπτομένης και παραγώγου, των ακραίων τιμών και του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού.

8.3 Διδακτική πρόταση – Η μέθοδος των Normals του Descartes

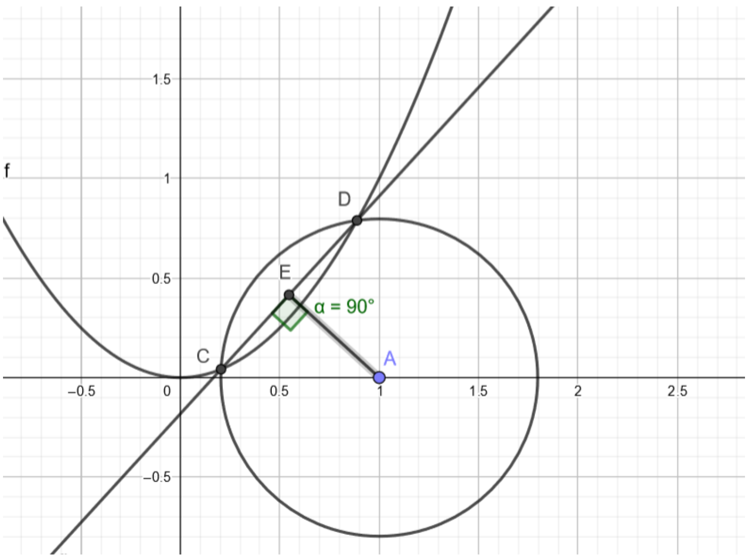
Ένας από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να παρασχεθούν ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την προηγούμενη εμπειρία και γνώση τους αλλά και τη φαντασία τους, για να ανακαλύψουν νέες ιδέες. Το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας προσφέρει σημαντικές ευκαιρίες για ανακάλυψη. Επιτρέπει στους μαθητές να εξετάσουν καταστάσεις και να καλύψουν την ανάγκη τους για τη βεβαιότητα η οποία ικανοποιείται πλήρως από τη διερεύνηση σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας.

Δεδομένου ότι η γεωμετρία αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη νέων μεθόδων κατασκευής των εφαπτομένων τον 17ο αιώνα, μπορούμε να αξιοποιήσουμε συγκεκριμένους μεθόδους και συλλογισμούς των σπουδαίων μαθηματικών εκείνης της περιόδου.

Το παρακάτω φύλλο εργασίας χρησιμοποιεί την ιδέα που στηρίχθηκε ο Descartes, ότι η ακτίνα του κύκλου θα είναι πάντα κάθετη στην εφαπτομένη, και ότι η εξίσωση που προκύπτει απαλείφοντας το y, θα έχει τη τετμημένη x του E σαν διπλή ρίζα.

Φύλλο Εργασίας

1. Σε περιβάλλον GeoGebra κατασκευάστε την καμπύλη $y=x^2$. Στην συνέχεια έναν τεμνόμενο κύκλο στη καμπύλη με κέντρο ένα τυχαίο σημείο Α στον άξονα των χ.
2. Ονομάστε C και D τα σημεία τομής του κύκλου με την παραβολή. Ενώστε την ευθεία CD (ευθεία ε) και στη συνέχεια σχεδιάστε το απόστημα AE στην χορδή CD.

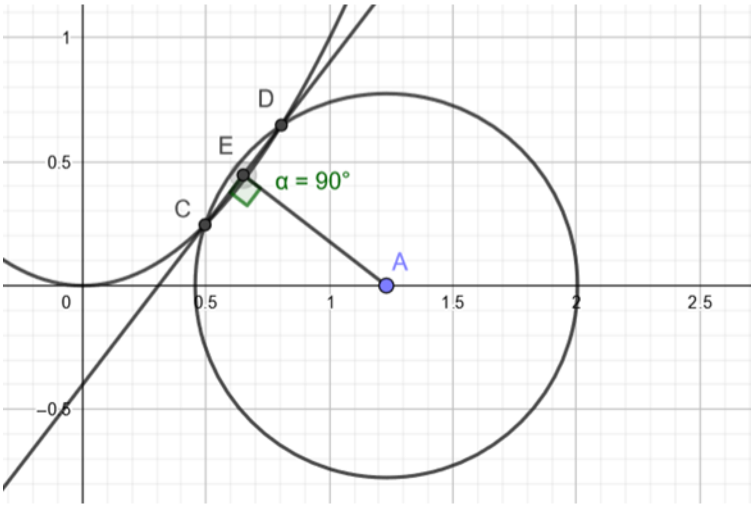


3. Σύρετε το κέντρο του κύκλου και προς τις δύο κατευθύνσεις κατά μήκος του άξονα των χ. Τί παρατηρείτε;

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   Σκοπός είναι μέσω της διερεύνησης με την διαδικασία του “dragging tool”, οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι καθώς το κέντρο του κύκλου μετακινείται κατά μήκος του άξονα των χ, προς τα δεξιά, τα δύο σημεία τομής C και D πλησιάζουν μεταξύ τους

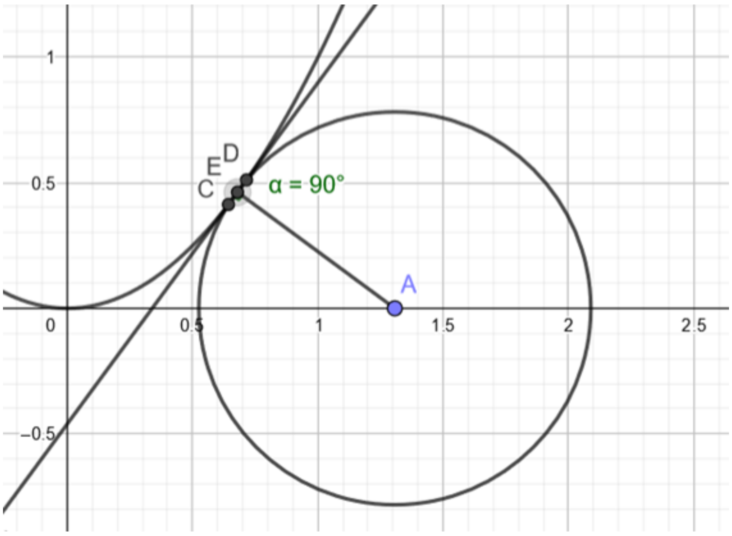


4. Σύρετε το κέντρο του κύκλου ώστε η καμπύλη και ο κύκλος να εφάπτονται. Τι παρατηρείτε, για τα σημεία C, D, και E.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Αναμένουμε από τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι τα σημεία C, D, και E ταυτίζονται.



5. Που ανήκουν πλέον τα σημεία $C \equiv D \equiv E$;

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Αναμένουμε από τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι τα τρία σημεία που πλέον ταυτίζονται, ανήκουν ταυτόχρονα στην περιφέρεια του κύκλου, στη παραβολή και στην ευθεία ε.

6. Τί παρατηρείτε για την ευθεία ε; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

   …………………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………………

   Σκοπός της ερώτησης είναι να παρατηρήσουν ότι η ευθεία ε, αποτελεί πλέον την κοινή εφαπτομένη του κύκλου και της παραβολής. Η αιτιολόγηση που θα θέλαμε, είναι ότι το τμήμα ΕΑ θα είναι πλέον ακτίνα του κύκλου και για το λόγο ότι είναι κάθετο στην ευθεία ε στο Ε, η ευθεία ε θα αποτελεί την εφαπτομένη του κύκλου στο Ε. Ταυτόχρονα επειδή ο κύκλος με την παραβολή εφάπτονται εξωτερικά στο Ε, η ευθεία ε θα είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο Ε, λόγω μοναδικότητας της εφαπτομένης.

7. Γράψτε το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, την στιγμή που ο κύκλος και η παραβολή εφάπτονται (Την ακτίνα του κύκλου μπορείτε να τη βρείτε με μέτρηση στο Geogebra, καθώς και το κέντρο του κύκλου.). Ποια μέθοδο θα ακολουθούσατε για την επίλυση του συστήματος. Ποια εξίσωση προς επίλυση προκύπτει;

   …………………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………………

   Η απάντηση που αναμένουμε είναι η αντικατάσταση της $y=x^2$ στην εξίσωση του κύκλου, με αποτέλεσμα να προκύψει μία εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού ως προς x.

8. Χωρίς να προβείτε σε επίλυση της παραπάνω εξίσωσης, ποια πιστεύετε ότι είναι η σωστή απάντηση.

   Α. Η εξίσωση έχει μία λύση

   Β. Η εξίσωση έχει 4 λύσεις

   Δ. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

   Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να δούμε κατά πόσο οι μαθητές κατανοήσαν, την γεωμετρική ερμηνεία της διπλής ρίζας.

Το παραπάνω φύλλο εργασίας, έχει ως σκοπό να αναδείξει την ιδέα πάνω στην οποία στηρίχθηκε ο Descartes για την κατασκευή της εφαπτομένης σε καμπύλη, περιορίζοντας το πρόβλημα στην εύρεση του κέντρου του κύκλου που θα είναι εφαπτόμενος στην καμπύλη. Επιπλέον αποσκοπεί να ρίξει φως στην γεωμετρική ερμηνεία της διπλής ρίζας, της οποίας η έννοια «διπλή» αντιμετωπίζεται κυρίως αλγεβρικά, για παράδειγμα $x^2=0 \Leftrightarrow x\cdot x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή x=0, ή $x = -\frac{b}{2a}$ στη περίπτωση του τριωνύμου $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, όταν Δ=0. Θα μπορούσε να δοθεί σε μαθητές Β' Λυκείου, στα πλαίσια του μαθήματος Μαθηματικά Προσανατολισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Applebaum, Wilbur** (2000). *Encyclopedia of Scientific Revolution from Copernicus to Newton.* s.l. : Garland Publishing, Inc., New York & London, 2000.
2. **Baron, Margaret E.** (1969). *The origins of the infinitesimal calculus.* s.l. : Oxford: Pergamon Press.
3. **Finkel, B. F. (**1898) *Biography: René Descartes***.** s.l. : The Americann Mathematical Monthly ,Τόμ. V.
4. **Boyer, Carl B. (**1959)**.** *The History of Calculus and its Conceptual Development.* s.l. : Dover Publications,.
5. **Burns, William E.** *The Scientific Revolution: An Encyclopedia.* s.l. : ABC-CLIO, Inc.
6. **C. H. Edwards, Jr.** *The Historical Development Of The Calculus, Springer-Verlag New York, Inc., 1979.*
7. **C. Tzanakis, A. Arcavi** (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. *History in mathematics education: An ICMI study,* σσ. 201-240.
8. **Cajori, Florian** (1929). *A History of Mathematical Notations*. Vol. 2, Cosimo Inc., 2017.
9. **Cajori, Florian** (1919). *Who was the first inventor of the calculus?***.** s.l. : American Mathematical Monthly 26.
10. **Cajori, Florian** (1893). *A History of mathematics*. American Mathematical Soc., 1999.
11. **Child, J. M.** (1920) . *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz.* s.l. : Dover Publications.
12. **Child, James Mark.** *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow.* s.l. : The Open Court Publishing Company.
13. **Colson, John** (1736). *A Brief Account by Mr. John Eames, F. R. S. of a Work Entitled, The Method of Fluxions and Infinite Series, with Its Application to the Geometry of Curve Lines, by the Inventor Sir Isaac Newton, Kt.* [μεταφρ.] John Colfon. s.l. : The Royal Society,σσ. 320-328. Τόμ. 39.
14. **Coolidge, J. L.** (1951). *The story of tangents.* s.l. : The American Mathematical Monthly, σσ. 449-462.
15. **Coolidge, Julian L.** (1936). *The Origin Of Analytic Geometry.* s.l. : Orisis Volume, Τόμ. Volume 1.

16. **Curtin, Daniel J.** Jan Hudde's Second Letter: On Maxima and Minima, Translated into English, with a Brief Introduction. [Ηλεκτρονικό] https://www.maa.org/book/export/html/451228.

17. **Daniel Garber, Michael Ayers** (1998). *The Cambridge History of Seventeenth Century Philosophy.* s.l. : University of Cambridge, 1998. Τόμ. I.

18. **David Eugene Smith, Marcia L. Latham** (1954). *The Geometry of Rene Descartes.* s.l. : Dover Publications.

19. **Descartes, Rene** (1638) Lettre a Hardy, Juin 1638. *Oeuvres de Descartes.* s.l. : Charles Adams, Paul Tannery, 1897, Τόμ. Correspondance II, Mars 1638 - Decembre 1639.

20. **Descartes, Rene** *Oeuvres de Descartes: Lettres, 1638.* Paris, 1824 : Victor Cousin. Τόμ. 7.

21. **Drapper, John William** (2009). *History of the conflict between religion and science.* s.l. : Cambridge Library Collection.

22. **Farmaki Vasiliki, Klaudato Nikos, Pascho Theodoros** (2004).*Integrating the History of Mathematics in Mathematical Praxis - An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems.*Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. σσ. 505-512

23. **Frank J. Swetz, Victor J. Katz.** *Mathematical Treasures - Billingsley Euclid,* Convergence (January 2011). https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-billingsley-euclid

24. **Heath, Thomas L.** (1921). *A History of Greek Mathematics.* s.l. : Oxford: Clarendon Press. Τόμ. Volume II, From Aristarchus to Diophantus.

25. **Heath, Thomas L.** (1986). *APOLLONIUS OF PERGA TREATISE ON CONIC SECTIONS.* s.l. : Cambridge, University press.

26. **Heath, Thomas L.** *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* s.l. : Cambridge: At the University press. Τόμ. Volume 2, Books III-IX.

27. **Heath, Tomas L.** (1897) *Works of Archimedes.* s.l. : Cambridge University Press.

28. **Jahnke, Hans Niels** (1999). *A History of Analysis.* s.l. : American Mathematical Society.

29. **Jensen, Claus.** *Pierre Fermat's Method of Determining Tangents of Curves and its Its Application to Conchoid and the Quadratrix.*

30. **Karine Chemla, Renaud Chorlay, David Rabouin** (2016). *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences.* s.l. : Oxford University Press.

31. **Katz, J.** *A History Of Mathematics. An Introduction.* University of the Distrinct of Columbia, Third Edition, Pearson Education, Inc., 2009.

32. **Kline, Morris** (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* s.l. : Oxford University Press, Τόμ. Volume 1.

33. **Knorr, Wilbur R.** (1978) *Archimedes and the spirals: The heuristic background.* s.l. : Historia Mathematica, Τόμ. Volume 5, Issue 1. 43-75.

34. **Mahoney, Michael Sean** (1973). *The Mathematical career of Piere de Fermat, 1601-1665.* s.l. : Princeton University Press, 1994.

35. **Merton, Robert K.** (1938). *Science, Technology and Society in Seventeenth Century, England.* s.l. : The University of Chicago Press, σσ. 360-362. Τόμ. Orisis, 1938.

36. **Morrow, Glenn R**. (1970). *Proclus a commentary on the first Book of Euclid's Elements.* s.l. : Princeton University Press.

37. **Nadler, Steven.** (1958). *The Philosopher, the Priest, and the Painter. A Portrait of Descartes.* s.l. : Princeton University Press, 2013.

38. **Newton, Isaac** (1675)**.** *Isaac Newton letter to Robert Hooke.* s.l. : Historical Society of Pennsylvania , 1675.

39. **Newton, Sir Isaac.** (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-lines.* [μεταφρ.] John Colson. 2017. s.l. : Henry Woodfall, John Nourse, 1736.

40. **Newton, Sir Isaac.** University Of Cambridge Digital Library. [Ηλεκτρονικό] https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03960/3.

41. **Oystein Ore** (1968). Ars Magna or The Rules of Algebra, Girolamo Cardano. [μεταφρ.] Richard, Witmer. s.l. : Dover Publications, Inc. New York, 1968.

42. **Paul Tannery, Charles Henry** (1894). *Oeuvres de Fermat, Correspondence.* s.l. : Paul Tannery,Charles Henry, Τόμ. II.

43. **Rigaud, S. R.** (1841). *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century.* s.l. : Oxford University Press.

44. **Scriba, Christoph J.** The Inverse Method of Tangents: A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). s.l. : J. E. Hoffman. Τόμ. Vol. 2, No. 2 (13.1.1964), σσ. 113-137 .

45. **Simmons, George F.** (1992). *Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics.* s.l. : McGraw-Hill.

46. **Slufius, RonatusFranciseus** (1672). A Method of drawing tangents to all Geometrical Curves. s.l. : The Royal Society, Τόμ. 7, σσ. 5143-5147.

47. **Stromholm, Per**. (1968). *Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A Recostruction.*Communicated by C.B Boyer.

48. **Struik, D.J.** (1986) . *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* s.l. : Princeton University Press.

49. **Stahl, William Harris.** *The Greek Heliocentric Theory and Its Abandonment.* The Johns Hopkins University Press .

50. **Suzuki, Jeff** (2005). (The Lost Calculus (1637-1670): Tangency and Optimization without Limits. *Mathematics Magazine.* Vol. 78, No. 5, σσ. pp. 339-353

51. **Waters, W.G**. (1898) *Jerome Cardan, a Biographical Study* . s.l. : Lawrence and Bullen, London.

52. **Weil, André** (1984). *Number Theory an approach through history from Hammurapi to Legendre.* s.l. : Birkhauser Boston, Inc..

53. **Whiteside, T.** (1961). *Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century,* Vol. 1, No3, pp.179-388.

54. **Wolfson, Paul R.** (2018). *The Crooked Made Straight: Roberval and Newton on Tangents.. s.l. : The American Mathematical Monthly, 108:3, 206-216.*